

UNIVERZITET U BEOGRADU  
ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET

Žaklina J. Mančić

**JAKA FORMULACIJA METODE  
KONAČNIH ELEMENATA ZA  
KVAZISTATIČKU ANALIZU VODOVA**

Doktorska disertacija

Beograd, 2014.

UNIVERSITY OF BELGRADE  
SCHOOL OF ELECTRICAL ENGINEERING

Žaklina J. Mančić

**THE STRONG FORMULATION OF THE  
FINITE ELEMENT METHOD FOR QUASI-  
STATIC ANALYSIS OF TRANSMISSION  
LINES**

Doctoral dissertation

Belgrade, 2014.

Mentor:

dr Antonije Đorđević, redovni profesor  
Univerzitet u Beogradu – Elektrotehnički fakultet

Članovi komisije:

dr Antonije Đorđević, redovni profesor  
Univerzitet u Beogradu–Elektrotehnički fakultet

dr Vladimir Petrović, vanredni profesor  
Univerzitet u Beogradu – Elektrotehnički fakultet

dr Bratislav Milovanović, redovni profesor  
Univerzitet u Nišu – Elektronski fakultet

dr Milan Ilić, vanredni profesor  
Univerzitet u Beogradu – Elektrotehnički fakultet

dr Branko Kolundžija, redovni profesor  
Univerzitet u Beogradu – Elektrotehnički fakultet

Datum odbrane:

## **Jaka formulacija metode konačnih elemenata za kvazistatičku analizu vodova**

**Rezime**—Pojava brzih računskih mašina dovela je poslednjih decenija do pojave niza numeričkih metoda za proračun, odnosno modelovanje elektromagnetskog (EM) polja. Istraživanje novih numeričkih metoda je konstantno aktuelno jer postoji neprestana potreba za poboljšanjem efikasnosti, tačnosti i brzine računanja. Jedna od često i multidisciplinarno primenjivanih metoda je metoda konačnih elemenata (FEM). U skoro čitavoj raspoloživoj literaturi prikazana je tzv. slaba FEM formulacija. Ona se zasniva na funkcijama bazisa koje su izvan domena operatora koji opisuje analizirani problem, a koji je tipično diferencijalni operator drugog reda. Osim toga, najveći broj prikazanih metoda se zasniva na aproksimaciji niskog, odnosno prvog reda. Jaka FEM formulacija je malo zastupljena u literaturi i njoj je posvećen mali broj radova. Prvi radovi iz ove oblasti su pokazali da jaka formulacija može imati određene prednosti u odnosu na slabu. Ove prednosti se ogledaju u koncepcionoj jednostavnosti i jednostavnijem i prirodnijem definisanju graničnih uslova. Kako je razvoj jake FEM formulacije u začetku, prirodno je bilo da se ona prvo razvije za dvodimenzionalne statičke i kvazistatičke probleme. Tipičan primer ovakvih problema su oklopljeni vodovi.

Osnovni cilj istraživanja ove doktorske disertacije je teorijsko i praktično zasnivanje jake FEM formulacije (Galerkinova varijanta FEM-a) za zatvorene dvodimenzionalne elektromagnetske probleme, tj. probleme kod kojih su granični uslovi zadati eksplicitno. Osim toga, pojedinačni ciljevi bili su kreiranje softvera na osnovu zasnovane numeričke metode, proučavanje karakteristika nove formulacije i primena nove formulacije na proračun vodova sa TEM talasom. Najpre je dat pregled u literaturi poznatih čvorno zasnovanih funkcija bazisa. Zatim su, polazeći od u literaturi poznatih jednodimenzionalnih funkcija bazisa formirane jake dvodimenzionalne funkcije bazisa. One zadovoljavaju granične uslove prve i druge vrste na granicama pravougaonih konačnih elemenata na koje je izdijeljen računski domen. Funkcije bazisa su definisane tako da čine hijerarhijski skup, pri čemu je posvećena pažnja koncepcionoj jednostavnosti. Uočen je najniži red aproksimacije, odnosno minimalan

red jakih funkcija bazisa. Proučene su funkcije bazisa za homogene, nehomogene, izotropne, anizotropne i biizotropne sredine.

Zatim je jaka FEM formulacija primenjena u kvazistatičkoj analizi oklopljenih vodova, što je ilustrovano na većem broju jednostavnijih primera za koje u literaturi postoje ili analitička rešenja, ili rešenja visoke tačnosti. Dobijeni rezultati su upoređeni sa rezultatima dobijenim drugim numeričkim metodama, kao i sa rezultatima dobijenim slabom FEM formulacijom. Upoređivanjem rezultata dobijenih jakom FEM formulacijom sa rezultatima iz literature, uočeno je da postoji odlično slaganje. Pri tome se zadovoljavajuća tačnost postiže za nizak red funkcija bazisa, obično minimalan, a konvergencija rezultata je stabilna. Kako prikazane funkcije bazisa nisu čvorno zasnovane, povećanje stepena aproksimacije (reda funkcija bazisa) ne unosi dodatne čvorove. To znači da se dodatno ne komplikuje mreža konačnih elemenata, što predstavlja veliku prednost nad čvorno zasnovanim funkcijama bazisa. Upoređivanjem rezultata dobijenih jakom formulacijom sa rezultatima dobijenim slabom formulacijom pokazalo se da jake funkcije bazisa, za istu tačnost rešenja, zahtevaju daleko manji broj nepoznatih.

Dalje je izvršen pregled i kritička analiza formulacija FEM-a za otvorene probleme. Zatim je predložena nova, hibridna FEM-MoM metoda za otvorene statičke probleme zasnovana na specijalnim funkcijama bazisa na granici računskog domena i primeni *Green*-ovog identiteta. Specijalne funkcije bazisa su iz skupa jakih funkcija bazisa. Predložena metoda ne zahteva, barem ne eksplicitno, uvođenje novih nepoznatih.

Na kraju su analizirani mogući dalji pravci istraživanja.

**Ključne reči:** FEM, jaka formulacija, funkcije bazisa, Galerkinova metoda, kvazistatička analiza, FEM-MOM hibridizacija.

**Naučna oblast:** Tehničke nauke – elektrotehnika

Uža naučna oblast: elektromagnetika

UDK broj: 621.3

# The Strong Formulation of the Finite Element Method for Quasi-Static Analysis of Transmission Lines

**Summary**— The advent of powerful computing machines has in recent decades led to the emergence of numerous numerical methods for electromagnetic (EM) field computation and modeling. The research of new numerical methods perpetually constitutes a mainstream activity, since there is a continuous need for improvement of efficiency, accuracy and computation speed. One of frequently and multi-disciplinary used methods is the finite element method (FEM). In almost all available literature, the so called weak FEM formulation is described. It utilizes basis functions that are outside the domain of the operator describing the analyzed problem, which is typically a second-order differential operator. Moreover, the largest number of existing methods is based on the low order, i.e., first-order or second-order, approximations. Strong FEM formulation is underrepresented in the literature, and it is pursued in a small number of papers. The first papers in this field showed that the strong formulation may have certain advantages over the weak formulation, manifested in conceptual simplicity and easier and more natural definition of boundary conditions. Because the development of strong formulations is in its beginning, a natural choice was to start with a two-dimensional static and quasi-static problems. Typical examples of these problems are shielded transmission lines.

The main aim of this PhD thesis is theoretical and practical establishment of the strong FEM formulation (Galerkin version of FEM) for closed two-dimensional electromagnetic problems, i.e., problems for which the boundary conditions are given explicitly. Additional objectives were to create the software based on the established numerical methods, study the features of the new formulation, and apply the new formulation in analyses of TEM-wave transmission lines.

Firstly, an overview of the literature of the known node-based basis functions is given. Then, starting from the known literature on one-dimensional basis functions, two-dimensional basis functions are created. They satisfy the boundary conditions of the first and second kind on rectangular finite element borders into which the computational domain is segmented. The basis functions are defined as a hierarchical

set, whereby attention is given to their conceptual simplicity. The lowest order, i.e., the minimal order for the strong formulation, approximation is observed. Basis functions for homogeneous, inhomogeneous, isotropic, anisotropic, and biisotropic media are studied.

Afterwards, the strong FEM formulation is applied to the quasistatic analysis of shielded cables, which is illustrated by a number of simple examples for which analytical solutions or solutions of high accuracy exist in the literature. The obtained results are compared with numerical results obtained by other methods, as well as with the results obtained by the weak FEM formulation. Good agreement of the results obtained by the strong FEM formulation and the results from the literature is observed. At the same time, satisfactory accuracy is achieved using low-order basis functions, usually minimal, and good convergence is obtained. As the proposed basis functions are not node-based, increasing the degree of approximation (increasing the order of basis functions) does not introduce additional nodes. Hence, no additional complexity is introduced in the finite element mesh, which is a big advantage over the node-based basis functions. Comparing the results obtained by the strong FEM formulation with the results obtained by the weak FEM formulation, it is proved that strong basis functions require far fewer unknowns for the same accuracy. Subsequently, an overview and critical analysis are given of the FEM formulation for open problems. Then, a new hybrid FEM-MoM method for open static problems is proposed, based on special basis functions on the border of both computational domains and application of Green's identity. These special basis functions belong to a set of strong basis functions. The proposed method does not require introduction of new unknowns, at least not explicitly.

In the end, possible directions for future research are analyzed.

**Keywords:** FEM, strong formulation, basis functions, Galerkin method, quasi-static analysis, FEM-MOM hybridization.

**Academic Expertise:** Technical Sciences - Electrical Engineering

Scientific Area: Electromagnetics

UDK number: 621.3

# SADRŽAJ

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1. Uvod</b> .....   | <b>1</b>  |
| <b>2. Maxwell-ove jednačine, elektromagnetske osobine sredina, statička i kvazistatička analiza vodova</b> .....                                     | <b>7</b>  |
| 2.1. <i>Poisson</i> -ova i <i>Laplace</i> -ova jednačina .....   | 11        |
| 2.2. Statička i kvazistatička analiza vodova .....   | 12        |
| 2.2.1 Vodovi bez gubitaka sa homogenim dielektrikom .....  | 13        |
| 2.2.2 Vodovi bez gubitaka sa deo-po-deo homogenim i nehomogenim dielektrikom .....   | 18        |
| 2.3 Zaključak .....  | 19        |
| <b>3. Metoda konačnih elemenata (FEM)</b> .....  | <b>21</b> |
| 3.1. Diskretizacija domena .....   | 21        |
| 3.1.1. Osnovni konačni elementi u lokalnim koordinatnim sistemima .....  | 23        |
| 3.1.2. Pravougaoni konačni element u globalnom i lokalnom koordinatnom sistemu .....   | 29        |
| 3.1.3. Vektorski konačni elementi .....  | 30        |
| 3.1.3.1 Dvodimenzionalni pravougaoni vektorski konačni elementi .....  | 30        |
| 3.2. Klasične metode za rešavanje konturnog problema .....   | 33        |
| 3.2.1. Konturni problemi .....   | 33        |
| 3.2.2 Varijaciona metoda .....   | 36        |
| 3.2.3 Metoda težinskih ostataka .....  | 38        |
| 3.2.4 Jaka i slaba forma konturnog problema, jaka i slaba formulacija .....  | 40        |
| 3.3. Pregled značajnih FEM referenci vezanih za statički i kvazistatički proračun, varijacionu i Galerkinovu metodu i jaku i slabu formulaciju ..... | 44        |
| 3.4. Galerkinova FEM metodologija u elektromagnetici .....   | 49        |
| 3.4.1. Unošenje graničnih uslova .....   | 52        |



|   |           |
|---|-----------|
| 3.5. Galerkinova FEM metodologija za elektrostatički problem i računanje karakteristika konačnih elemenata..... | 53        |
| 3.5.1 Formiranje jednačina za mrežu konačnih elemenata i unošenje graničnih uslova.....                         | 55        |
| 3.6. Elektrostatička analiza dvodimenzionalnih problema.....  | 56        |
| 3.6.1. Matrica sistema.....   | 57        |
| 3.6.2. Računanje podužne kapacitivnosti .....   | 58        |
| 3.6.2.1. Računanje podužne kapacitivnosti preko podužnog naelektrisanja .....                                   | 59        |
| 3.6.2.2. Računanje podužne kapacitivnosti preko podužne energije.....   | 60        |
| 3.7 Zaključak .....   | 62        |
| <b>4. Funkcije bazisa .....</b>   | <b>64</b> |
| 4.1. Čvorno zasnovane funkcije bazisa .....   | 65        |
| 4.1.1. Polinomske funkcije .....  | 65        |
| 4.1.2 Izoparametarska formulacija .....   | 72        |
| 4.1.3 Singularne funkcije i singularni konačni elementi .....   | 73        |
| 4.2 Funkcije bazisa koje nisu čvorno zasnovane.....   | 75        |
| 4.3 Hijerarhijske funkcije bazisa za slabu FEM formulaciju .....  | 78        |
| 4.4 Hijerarhijske funkcije bazisa za jaku FEM formulaciju.....  | 82        |
| 4.4.1 Osnovne jake funkcije bazisa .....  | 82        |
| 4.4.2. Finalne jake funkcije bazisa .....   | 87        |
| 4.4.3 Dvodimenzione jake funkcije bazisa za anizotropne sredine.....  | 88        |
| 4.4.4 Jake 2D funkcije bazisa za kontinualno nehomogen dielektrik .....   | 93        |
| 4.5 Zaključak .....   | 95        |
| <b>5. Numerički primeri kvazistatičke analize vodova pomoću slabe FEM formulacije .....</b>                     | <b>98</b> |
| 5.1. Poređenje tri metode za kvazistatički proračun.....  | 98        |

|  |            |
|--|------------|
| 5.2. Analiza konvergencije i tačnosti slabe FEM formulacije na benchmark primeru koaksijalnog voda kvadratnog preseka .....                      | 100        |
| 5.2.1. Primena simetrije .....   | 106        |
| 5.3. Zaključak .....   | 111        |
| <b>6. Primena jake FEM formulacije za kvazistatičku analizu vodova .....</b>   | <b>112</b> |
| 6.1. Diskretizacija domena, lokalno i globalno numerisanje, unošenje graničnih uslova za kvazi TEM proračun vodova jakim funkcijama bazisa ..... | 112        |
| 6.2 Vodovi sa izotropnim dielektrikom .....  | 117        |
| 6.2.1. Kvadratni koaksijalni vod sa izotropnim dielektrikom .....  | 117        |
| 6.3 Vodovi sa nehomogenim dielektrikom .....   | 118        |
| 6.3.1. Oklopljeni mikrostrip na dielektričnom supstratu .....  | 119        |
| 6.3.2. Oklopljeni trakasti vod sa izdignutom podlogom .....  | 121        |
| 6.4 Vodovi sa homogenim anizotropnim dielektrikom .....  | 124        |
| 6.4.1 Oklopljen simetrični trakasti vod .....  | 125        |
| 6.4.2. Oklopljen nesimetričan trakasti vod sa promenljivom pozicijom unutrašnje provodne trake .....   | 133        |
| 6.4.3 Oklopljeni simetričan trakasti vod sa anizotropnim supstratom promenljivih dimenzija oklopa .....  | 139        |
| 6.5 Primena jake FEM formulacije na analizu vodova sa deo-po-deo homogenim anizotropnim dielektrikom .....                                       | 141        |
| 6.5.1 Mikrostrip u troslojnoj anizotropnoj dielektričnoj sredini .....   | 141        |
| 6.5.2. Uticaj položaja provodne trake u odnosu na razdvojnu površinu dielektrika .....   | 144        |
| 6.5.3 Kvadratni koaksijalni vod sa anizotropnim dielektričnim podmetačem promenljive visine .....  | 150        |
| 6.6. Oklopljeni mikrostrip na biizotropnom supstratu .....   | 151        |

|   |            |
|---|------------|
| 6.6.1 Oklopljeni mikrostrip na <i>Tellegen</i> -ovom supstratu .....        | 153        |
| 6.7. Zaključak .....  | 154        |
| <b>7. Poređenje jake i slabe FEM formulacije .....</b>                      | <b>156</b> |
| 7.1. Poređenje jake i slabe FEM formulacije za izotropne dielektrike.....   | 156        |
| 7.2 Poređenje jake i slabe FEM formulacije za anizotropne dielektrike ..... | 159        |
| 7.3. Zaključak .....  | 160        |
| <b>8. FEM metodologija za neograničene domene .....</b>                     | <b>161</b> |
| 8.1. Pregled modifikacija FEM-a za neograničene domene.....                 | 161        |
| 8.2. Osnove predložene metode.....  | 167        |
| 8.2.1. Primena <i>Green</i> -ovog identiteta.....                           | 167        |
| 8.2.2. Specijalne funkcije bazisa .....                                     | 169        |
| 8.2.3. Granični uslovi i postupak hibridizacije.....                        | 169        |
| 8.4. Zaključak .....  | 175        |
| <b>9. Mogući pravci daljeg istraživanja.....</b>                            | <b>177</b> |
| <b>10. Literatura .....</b>   | <b>179</b> |
| <b>Prilozi.....</b>   | <b>201</b> |
| PRILOG 1. Granične vrednosti prostornih izvoda na diskontinuitetima .....   | 201        |
| PRILOG 2. <i>Wronsky</i> -eva determinanta .....                            | 202        |
| PRILOG 3. Definicija linearne nezavisnosti .....                            | 202        |
| PRILOG 4. Dokaz da su slabe funkcije bazisa linearno nezavisne.....         | 203        |
| PRILOG 5. Dokaz da su jake funkcije bazisa linearno nezavisne .....         | 204        |
| <b>Biografija.....</b>  | <b>206</b> |
| <b>Biography .....</b>  | <b>207</b> |

## 1. Uvod

### 1. Uvod

Makroskopsko elektromagnetsko polje (EM) se opisuje *Maxwell*-ovom (J. C. Maxwell, 1864) teorijom elektromagnetike koja se zasniva na četiri jednačine u integralnom ili diferencijalnom obliku i konstitutivnim vezama između vektora koji opisuju polje [1-5].

Tehnike, odnosno metode, kojima se proračunava EM polje mogu biti analitičke i numeričke. Analitičke metode daju tačno rešenje problema, ali nikad ili skoro nikad nisu primenljive na komplikovanije sisteme. One se okvirno mogu podeliti na metodu razdvajanja promenljivih, metodu razvoja u redove, metodu konformnog preslikavanja, metodu integralnih jednačina (na primer *Laplace*-ova (P.-S. de Laplace) i *Fourier*-ova (J. Fourier) transformacija) i perturbacione metode [6].

Numeričke metode daju približna rešenja i mogu se primeniti na komplikovane sisteme. Spadaju u savremene metode i doživljavaju ekspanziju sa pojavom brzih i lako dostupnih računara. Kako se *Maxwell*-ove jednačine mogu formulisati u integralnom i diferencijalnom obliku, numeričke metode se, prema tome, mogu klasifikovati na one kod kojih se rešavaju integralne jednačine i one kod kojih se rešavaju diferencijalne jednačine. Još jedna globalna podela je na metode u frekvencijskom i metode u vremenskom domenu.

Integralne metode koje se često sreću u literaturi su metoda momenata [7] (Method of Moments, MoM), metoda simulacije naelektrisanja [8-10] (Charge Simulation Method, CSM), metoda simulacije površinskih naelektrisanja [11,12] (Surface Charge Simulation Method, SCSM), metoda integralnih jednačina graničnih uslova [13,14] (Boundary Integral Equation Method, BIEM), tehnika konačnih integrala [15-17] (Finite Integration Technique, FIT).

Najpoznatije metode zasnovane na rešavanju diferencijalnih jednačina su: metoda konačnih elemenata [18-45] (Finite Element Method, FEM), metoda konačnih razlika [46,47] (Finite Difference Method, FDM) i metoda konačnih razlika u vremenskom domenu [48] (Finite Difference Time Domain Method, FDTD). U ostale metode mogu se svrstati: metoda vodova [49,50] (Transmission Line Method, TLM), metoda graničnih uslova [51,52] (Boundary Elements Method, BEM), metoda konačnih razlika

## 1. Uvod

za električni skalar potencijal [53] (Scalar Potential Finite Difference, SPFD) i 3D metoda impedansi [54] (Three Dimensional Impedance Method (IM)). Veliki broj komercijalnih softverskih paketa je zasnovan na metodi momenata (MoM) i metodi konačnih elemenata (FEM).

U novijoj literaturi sreće se i niz hibridnih varijanti različitih metoda, kao posledica težnje numeričke elektromagnetike za dobijanjem što tačnijeg rešenja složenih modela, što jednostavnije i što većom brzinom.

Metoda momenata, kao, uz FEM, široko korišćena metoda u numeričkoj elektromagnetici i korišćena i u ovom radu za dobijanje rezultata za poređenje, numerički je vrlo efikasna u smislu vremena, računarskih resursa i tačnosti analize, naročito za neograničene domene. Kako ova metoda radi sa popunjenom matricom sistema, vreme potrebno za rešavanje glomaznih sistema rapidno raste sa povećanjem dimenzija matrice, odnosno za komplikovanije strukture, pa se javljaju različite modifikacije metode u cilju prevazilaženja problema, kao i nove metode kao što je, na primer, dijakoptička analiza [55], zasnovana na teoremi ekvivalencije. Za linearne i deo-po-deo homogene sredine MoM je veoma upotrebljiv, dok je za anizotropne sredine primena ove metode znatno komplikovanija. Kod FEM-a su izbegnute teškoće sa singularitetima *Green*-ovih (G. Green) funkcija koje postoje kod MoM-a. Kod MoM-a se vrši samo diskretizacija na granicama, dok se kod FEM-a vrši diskretizacija celog domena. Ipak, FEM je prilagodljiv i moćan za probleme koji uključuju kompleksnu geometriju i nehomogene sredine. Takođe je lako primenljiv na izotropne, anizotropne, linearne i nelinearne sredine. Prema svojoj koncepciji, FEM je pogodan za zatvorene domene, pa se kao poseban problem javlja potreba da se metoda primeni na neograničenu oblast, i otuda pojava različitih hibridizacionih tehnika, o čemu će u osmom poglavlju posebno biti reči, dok je MoM, kao integralna metoda, upravo pogodna za otvorene domene. Poslednja decenija je obeležena pojavom bezmrežnih (meshless) metoda koje su još uvek u razvoju, te stoga, pored prednosti, imaju i nedostatke, a nastale su iz potrebe da se FEM metoda oslobodi procedure formiranja mreže konačnih elemenata, što je za složene domene komplikovan posao.

Primena FEM-a najpre je počela u oblasti proračuna inženjerskih građevinskih konstrukcija, u radovima A. Hrennikoff-a 1941. i R. Courant-a 1943, u avioindustriji se

## 1. Uvod

primenjuje od 1950. godine, a naziv metode potiče od *R. Clough*-a, 1960. [19-20]. Prva knjiga o metodi konačnih elemenata [56] objavljena je 1967. Na probleme EM polja FEM se primenjuje tek od 1968. godine (*S. Ahmed, P. Daly, P. Silvester*, itd). Zanimljivo je da je broj publikovanih FEM radova prema podacima iz 1975. godine [22] bio manji od 1500, dok trenutni (juni 2013) upit „finite element method“ nad digitalnom IEEE bibliotekom kao rezultat daje preko 49.000 publikacija na konferencijama i preko 28.000 radova u časopisima. Opsežna lista raspoloživih softverskih paketa može se naći u [57,58], a na edukacioni softver upućuju radovi [59-64].

Ideja o fizičkoj diskretizaciji kontinuum, na kojoj se zasniva FEM, je veoma stara [22]. Još pre 2000 godina na ovom principu su rešavani neki zadaci geometrije. Kao primer se može navesti Arhimedov (Αρχιμήδης) problem određivanja broja  $\pi$ , odnosno granica između kojih se nalazi njegova numerička vrednost, tako što se kontura kruga aproksimira opisanim, odnosno upisanim poligonom sa konačnim brojem strana, pri čemu se sa povećavanjem broja strana, odnosno smanjivanjem njihovih dužina, smanjuje i razlika između granica u kojima se nalazi broj  $\pi$ , a time povećava i tačnost njegove numeričke vrednosti. Na sličan način u starom Egiptu je računata zapremina piramide i površina sfere, a u Kini dat dokaz Pitagorine (Ὁ Πυθαγόρας) teoreme. Praktično su još tada otvorena fundamentalna pitanja tačnosti rešenja, gornje i donje granice aproksimacije, monotonosti i brzine konvergencije itd. koja su i danas aktuelna kod FEM-a. FEM spada u metode diskretne analize i, za razliku od ostalih numeričkih modela koji se zasnivaju na matematičkoj diskretizaciji jednačina, ona se zasniva na fizičkoj diskretizaciji posmatranog domena. Prednost metode je njena mogućnost da se uzmu u obzir problemi sa kompleksnim granicama. Dalji značaj je u postojanju konvergencije i jedinstvenosti FEM rešenja. U osnovi metode konačnih elemenata se domen koji se analizira pomoću zamišljenih linija ili površina deli na poddomene konačnih a ne diferencijalno malih dimenzija (ukoliko se, strogo posmatrano, izuzmu neke modifikacije FEM-a kod analize neograničenog domena gde se pojavljuju tzv. beskonačni elementi). Zbog toga su osnovne jednačine pomoću kojih se opisuje stanje u pojedinačnim poddomenima (stanje je zapravo nepoznata veličina koju treba izračunati), umesto diferencijalnih ili integralnih, algebarske, pa se u konačnom ishodu,

## 1. Uvod

za čitav domen, dobija sistem običnih algebarskih jednačina. Poddomeni se nazivaju *konačnim elementima* a njihov skup za ceo domen je sistem ili *mreža* konačnih elemenata. Konačni elementi su međusobno (u geometrijskom smislu) povezani u čvorovima (kod 1D problema), po zajedničkim graničnim ivicama (2D) ili zajedničkim površinama (3D). Postojanje mreže je bitno svojstvo FEM-a i predstavlja povezanost čvorova na unapred određeni način. Stanje u svakom konačnom elementu (odnosno nepoznata promenljiva polja, koja kod EM problema može, na primer, biti potencijal, vektor ili skalar) se opisuje korišćenjem odgovarajućih aproksimacionih funkcija. U literaturi se za aproksimacione funkcije sreće i naziv funkcije oblika, funkcije bazisa i interpolacione funkcije (ako su polinomske). Te funkcije se najčešće definišu na osnovu vrednosti u *čvorovima* konačnog elementa (čvorno zasnovane). Čvorovi su najčešće smešteni na konturi elementa uključujući i temena, dok se kod nekih modifikacija mogu da nađu i u unutrašnjosti konačnog elementa. Daleko ređe se sreću funkcije bazisa koje nisu čvorno zasnovane. Kada se sistem algebarskih jednačina reši, dobijaju se nepoznati koeficijenti koji množe funkcije bazisa, na osnovu čega se za svaki od konačnih elemenata može odrediti stanje (nepoznata veličina). Ta nepoznata veličina može biti električni skalar-potencijal, kao što će ovde biti prikazano u 2D kvazistatičkoj analizi vodova. Po određivanju nepoznatih koeficijenata se mogu izračunati nepoznata podužna naelektrisanja na provodnicima, što kod višeprovodničkog voda omogućuje da se odrede podužni koeficijenti elektrostatičke indukcije. Za dvoprovodnički vod je uobičajeno da se iz podužne kapacitivnosti, izračunate za sistem sa i bez dielektrika, računaju efektivna permitivnost i karakteristična impedansa.

U velikom broju knjiga, radova i članaka o ovoj metodi (uključujući tu i primene u oblastima kao što je mehanika, teorija elastičnosti i dinamika fluida) [18-45] prikazana je uglavnom takozvana slaba (*weak*) FEM formulacija, koja se zasniva na funkcijama bazisa koje su izvan domena operatora koji opisuje analiziranu pojavu, a koji je tipično diferencijalni operator drugog reda. Osim toga, najveći broj prikazanih metoda se zasniva na aproksimaciji niskog (prvog) reda. Takozvana jaka (*strong*) FEM formulacija se u literaturi retko sreće. Broj radova koji je njoj posvećen je mali, a oblast toliko nova, da se tek formira odgovarajuća terminologija. Zato je logično da jaka FEM formulacija predstavlja izazov za istraživače, te otuda i ideja i povod za ovaj rad.

## 1. Uvod

Pionirski radovi iz ove oblasti [65, 66, 67-74] (Popović, Petrović, Kolundžija, Mančić), pokazali su da jaka formulacija može, u odnosu na slabu, imati određene prednosti, naročito u koncepcionoj jednostavnosti, inherentnoj primeni aproksimacije višeg reda (minimalno trećeg), kao i jednostavnijem i prirodnijem definisanju graničnih uslova. Kako je razvoj jake FEM formulacije tek u začetku, prirodno je da se ona prvo razvije za dvodimenzionalne statičke i kvazistatičke EM probleme, te otuda u ovom radu i njena primena na analizu istih.

Osnovni naučni doprinos ove doktorske disertacije je jaka formulacija metode konačnih elemenata (*strong* FEM) primenjena na dvodimenzionalne elektrostatičke i kvazistatičke EM probleme, konkretno na kvazistatičku analizu vodova sa TEM talasom. Vodovi, kao osnovne komponente u mikrotalasnoj tehnici, zaslužuju posebnu pažnju. Kod njih parametri određeni elektrostatičkom (kvazistatičkom) analizom u potpunosti karakterišu prostiranje EM talasa duž strukture. Kako u literaturi postoji veliki broj radova pogodan za poređenje rezultata, od kojih neke analizirane geometrije imaju i egzaktno ili rešenje poznate visoke tačnosti (*benchmark*), to je iskorišćeno za proučavanje jake FEM formulacije, analizu tačnosti, konvergencije dobijenih rezultata i reda aproksimacije. Najpre su, polazeći od jednodimenzionalnih funkcija bazisa prikazanih u literaturi [65], formirane specijalne jake dvodimenzionalne funkcije bazisa. Posebno su definisane funkcije bazisa koje čine hijerarhijski skup i obezbeđuju zadovoljenje graničnih uslova između pravougaonih elemenata na koje je izdvojena prostorna oblast analize (računski domen, *computational domain*). Pravougaoni elementi su u ovom slučaju odabrani zbog specifičnosti geometrije na koju je analiza primenjivana i radi jednostavnosti. Uočen je osnovni, najniži red aproksimacije i odgovarajući minimalan skup jakih funkcija bazisa. Takođe su definisane funkcije bazisa za homogene, deo-po-deo homogene, nehomogene, izotropne, anizotropne i biizotropne sredine. Sa tako formiranim funkcijama bazisa izvršeni su odgovarajući kvazistatički proračuni vodova, pri čemu je kreiran odgovarajući softver. Za programiranje je korišćen Compaq Visual Fortran [75] a linije polja su crtane korišćenjem programskog paketa Mathematica 7 [76]. Kako se i u ovom slučaju kao matrica sistema javlja retko posednuta matrica (*sparse matrix*), za njeno pakovanje u vektor i dalji rad sa ovako zapakovanom matricom korišćen je potprogram *linbcg.for* iz



## 1. Uvod

paketa Fortran rutina [77]. Na kraju je predložen hibridni FEM-MoM postupak za analizu otvorenih domena [78]. Najvažniji rezultati su publikovani u međunarodnim časopisima sa SCI liste [71,74].

U drugom poglavlju je izvršena rekapitulacija pojmova koji su korišćeni u ovoj doktorskoj disertaciji sa osvrtom na TEM i kvazi TEM režim na vodu sa savršenim dielektrikom i idealnim provodnicima. U trećem poglavlju je opisana FEM metoda sa akcentom na Galerkinovu formulaciju, koja je korišćena u proračunima. U četvrtom poglavlju je dat pregled funkcija bazisa koje se u osnovi mogu podeliti na čvorno zasnovane i one koje nisu čvorno zasnovane. Čvorno zasnovane funkcije bazisa su one koje su u literaturi poznate i veoma mnogo korišćene. Poseban akcenat je stavljen na funkcije bazisa koje nisu čvorno zasnovane, od kojih neke do sada nisu bile korišćene u FEM-u, jer je u radu upravo korišćen takav tip funkcija, i istovremeno izvršena komparacija sa čvorno zasnovanim funkcijama. U petom poglavlju je, u prvom delu, na konkretnom primeru dato poređenje tri numeričke metode za kvazistatički proračun: metode momenata, MoM [7], metode ekvivalentne elektrode, EEM [79] i metode konačnih elemenata, FEM (slaba formulacija) [80]. U drugom delu ovog poglavlja je na *benchmark* primeru kvadratnog koaksijalnog voda ilustrovana slaba FEM formulacija sa funkcijama bazisa iz [65], u pogledu brzine konvergencije, potrebnog broja nepoznatih, stabilnosti rezultata i potrebnog reda funkcija bazisa [81]. U šestom poglavlju, koje je najobimnije, na većem broju primera [67-74] jednostavnih geometrija za koje su rezultati za poređenje ili dostupni u raspoloživoj literaturi, ili su proračunati i primenom komercijalnih programskih paketa koji rade korišćenjem drugih numeričkih metoda, istraživane su osobine jake formulacije koja je primenjivana na vodove sa izotropnim, anizotropnim, deo-po-deo homogenim dielektrikom, kao i biizotropnim i *Tellegen*-ovim supstratom. U sedmom poglavlju je izvršeno poređenje jake i slabe FEM formulacije i izvedeni odgovarajući zaključci [67]. U osmom poglavlju je dat pregled postojećih modifikacija FEM-a za otvorene domene i predložena nova hibridna FEM-MoM metoda za proračun otvorenih domena [78]. Takođe su date smernice za dalja istraživanja. Na kraju su dati literatura i prilozi.

2. Maksvelove j-ne, elektromagnetske osobine sredina, statička i kvazistatička analiza vodova

## 2. *Maxwell*-ove jednačine, elektromagnetske osobine sredina, statička i kvazistatička analiza vodova

Makroskopsko elektromagnetsko (EM) polje opisuju:

- vektor jačine električnog polja,  $\mathbf{E}$
- vektor električne indukcije,  $\mathbf{D}$ ,
- vektor polarizacije,  $\mathbf{P}$ ,
- vektor jačine magnetskog polja,  $\mathbf{H}$ ,
- vektor magnetske indukcije,  $\mathbf{B}$ ,
- vektor magnetizacije,  $\mathbf{M}$ , i
- vektor gustine struje,  $\mathbf{J}$ .

Potpuni sistem jednačina za analizu vremenski promenljivih polja je

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \text{ Faradejev zakon – prva } \textit{Maxwell}\text{-ova jednačina,} \quad (2.1)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \text{ dopunjeni uopšteni Amperov zakon – druga } \textit{Maxwell}\text{-ova jednačina,} \quad (2.2)$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho, \text{ uopšteni Gausov zakon – treća } \textit{Maxwell}\text{-ova jednačina} \quad (2.3)$$

$\text{div } \mathbf{B} = 0$ , zakon konzervacije magnetskog fluksa –

$$\text{četvrta } \textit{Maxwell}\text{-ova jednačina i} \quad (2.4)$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{E}) \\ \mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}) \\ \mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H}) \end{array} \right\}, \text{ konstitutivne relacije.}$$

Kod linearnih i izotropnih sredina postoje jednostavne veze:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \text{ i } \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (2.5)$$

## 2. Maxwell-ove j-ne, elektromagnetske osobine sredina, statička i kvazistatička analiza vodova

gde je  $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$  i  $\mu = \mu_r \mu_0$ . Veličine  $\epsilon_r$  i  $\mu_r$  su relativna permitivnost i relativna permeabilnost, respektivno, a  $\epsilon_0 \approx 8.85 \times 10^{-12}$  F/m permitivnost vakuuma i  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  H/m permeabilnost vakuuma.

Kod sredina anizotropnih u električnom smislu veza između vektora  $\mathbf{D}$  i  $\mathbf{E}$  se može, zapisati u tenzorskom obliku

$$\mathbf{D} = \overset{=}{\epsilon} \mathbf{E}, \quad (2.6)$$

gde je

$$\overset{=}{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

tenzor permitivnosti. Anizotropni materijali su uglavnom kristalne strukture. Kristali se generalno definišu simetričnim tenzorom permitivnosti (smatra se da je materijal bez gubitaka). Posle određene transformacije koordinata tenzor permitivnosti  $\overset{=}{\epsilon}$  se može svesti na dijagonalnu formu

$$\overset{=}{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{bmatrix} = \text{diag}[\epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \epsilon_z].$$

Ove tri koordinatne ose su označene kao glavne ose kristala. Kubni kristali su izotropni. Ako su dva od tri parametra tenzora dielektrične permitivnosti međusobno jednaka, kristali su uniaksijalni, a ako su sva tri međusobno različita, kristali su biaksijalni [82].

Kod bianizotropnih materijala koje uvodi *Landau* (Л. Д. Ландау), postoje unakrsne veze između električnog i magnetskog polja, pa su konstitutivne relacije

$$\mathbf{D} = \overset{=}{\epsilon} \mathbf{E} + \overset{=}{\xi} \mathbf{H} \quad \text{i} \quad \mathbf{B} = \overset{=}{\mu} \mathbf{H} + \overset{=}{\zeta} \mathbf{E}, \quad (2.7)$$

gde su  $\overset{=}{\epsilon}$ ,  $\overset{=}{\xi}$ ,  $\overset{=}{\mu}$  i  $\overset{=}{\zeta}$  u opštem slučaju tenzori.

## 2. Maxwell-ove j-ne, elektromagnetske osobine sredina, statička i kvazistatička analiza vodova

Biizotropni (magnetoelektrični) materijali, analizirani u ovom radu, su podskup bianizotropnih i kod njih je

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} + \xi\mathbf{H} \text{ i } \mathbf{B} = \mu\mathbf{H} + \zeta\mathbf{E}, \quad (2.8)$$

gde su  $\varepsilon$ ,  $\xi$ ,  $\mu$  i  $\zeta$  konstante.

Ukoliko je  $\xi = \zeta$ , konstitutivne veze odgovaraju *Tellegen*-ovom biizotropnom supstratu, za koji je  $\xi^2/\varepsilon\mu \neq 1$  ali blisko jedinici [83].

U homogenoj sredini  $\varepsilon$ ,  $\mu$  i  $\sigma$  ne zavise od koordinata. U protivnom je sredina nehomogena. Sredina je linearna ako  $\varepsilon$ ,  $\mu$  i  $\sigma$  ne zavise od jačine električnog i magnetskog. polja. U primerima koji su analizirani u radu, posmatrani su savršeni dielektrici ( $\sigma = 0$ ). Takođe se smatra da su provodnici savršeni ( $\sigma/\omega\varepsilon \rightarrow \infty$ )<sup>1</sup>.

Kod statičkih problema EM polje ne zavisi od vremena, tj.  $\frac{d}{dt} = 0$ . Tako je za elektrostatičko polje

$$\text{rot}\mathbf{E} = 0 \text{ i}$$

$$\text{div}\mathbf{D} = \rho.$$

Za magnetostatičko polje stalnih (permanentnih) magneta je

$$\text{rot}\mathbf{H} = 0 \text{ i}$$

$$\text{div}\mathbf{B} = 0.$$

Kod stacionarnih problema EM polje ne zavisi od vremena, ali postoje u vremenu konstantne struje, pa sistem *Maxwell*-ovih jednačina postaje

$$\text{rot}\mathbf{E} = 0,$$

---

<sup>1</sup> Metoda se može generalizovati na sredine u kojima provodnici nisu savršeni, tj. na sredine sa gubicima.

## 2. Maxwell-ove j-ne, elektromagnetske osobine sredina, statička i kvazistatička analiza vodova

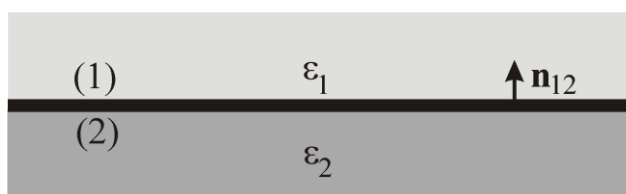
$$\operatorname{div}\mathbf{D} = \rho,$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} \text{ i}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0.$$

Uslov kvazistacionarnosti je da najveća dimenzija domena bude znatno manja od talasne dužine pri radnoj učestanosti (kvazistatička polja su zapravo vremenski promenljiva polja, uključujući i prelazno i stacionarno stanje, vrtložne struje i skin efekat).

*Maxwell*-ove jednačine u diferencijalnom obliku ne važe na mestima gde se elektromagnetske osobine sredine skokovito menjaju (sl. 2.1), pa se, da bi se obezbedio fizički kontinuitet u rešenju za polje, *Maxwell*-ovim jednačinama pridodaju granični uslovi.



Sl. 2.1. Razdvojna površina između dva dielektrika

Kako će u daljem toku rada biti reči o kvazistatičkom električnom polju, biće navedeni samo granični uslovi za elektrostatičko polje, a to su:

-granični uslov za normalne komponente vektora električne indukcije

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_s \text{ ili } (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \cdot \mathbf{n}_{12} = \rho_s,$$

koji se izvodi iz III *Maxwell*-ove jednačine, a prema kome se normalna komponenta elektrostatičke indukcije skokovito menja na razdvojnoj površini dve sredine ako na njoj postoje slobodna površinska naelektrisanja, i

-iz II *Maxwell*-ove jednačine granični uslov za tangencijalne komponente vektora električnog polja, prema kome na razdvojnoj površini dve dielektrične sredine tangencijalna komponenta električnog polja ostaje nepromenljiva,

$$E_{1t} - E_{2t} = 0 \text{ ili } (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \times \mathbf{n}_{12} = 0.$$

## 2. Maxwell-ove j-ne, elektromagnetske osobine sredina, statička i kvazistatička analiza vodova

Ako je jedna od sredina (npr. sredina 1) savršen provodnik u kome nema polja (vektori  $\mathbf{E}_1$  i  $\mathbf{D}_1$  su nula), granični uslovi postaju

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}_2 = 0 \text{ i } \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_2 = \rho_s .$$

### 2.1. Poisson-ova i Laplace-ova jednačina

Za elektrostatičko polje koje potiče od zapreminskih naelektrisanja gustine  $\rho$  koja se nalaze u linearnoj, homogenoj sredini permitivnosti  $\epsilon$ , polazeći od

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \text{ i } \mathbf{E} = -\operatorname{grad} V,$$

dobija se

$$\operatorname{div}(\epsilon \operatorname{grad} V) = -\rho,$$

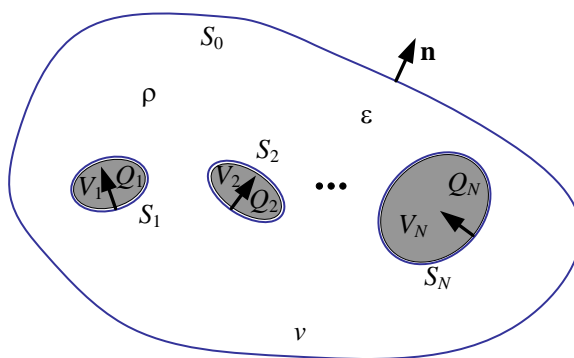
što se, s obzirom na osobine sredine, može pisati kao

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} V) = \Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon}.$$

Ovaj izraz predstavlja *Poisson-ovu* jednačinu za potencijal elektrostatičkog polja. Ukoliko je  $\rho = 0$ , imamo *Laplace-ovu* jednačinu,

$$\Delta V = 0,$$

koja važi u svim tačkama homogenog domena, osim na granicama diskontinuiteta.



Sl. 2.2. Domen  $v$ .

## 2. Maxwell-ove j-ne, elektromagnetske osobine sredina, statička i kvazistatička analiza vodova

Posmatrajmo sada zatvoreni domen  $v$  sa sl. 2.2, ograničen površinom  $S$  koja se sastoji od površina  $S_0, S_1, \dots, S_N$ . Pokazuje se da su rešenja *Poisson*-ove, odnosno *Laplace*-ove jednačine jedinstvena, ili se razlikuju za konstantu, što znači da su rešenja za  $\mathbf{E}$  ista, pod određenim uslovima koji se označavaju kao uslovi prve i druge vrste (teorema o jedinstvenosti rešenja *Poisson*-ove i *Laplace*-ove jednačine [3,4]). Potencijal je jedinstven ako zadovoljava

-uslov prve vrste, zadato  $V$  na  $S$ , tj. zadat potencijal provodnika, što se još označava kao *Dirichlet*-ov uslov,

i/ili

-uslov druge vrste, zadato  $\partial V/\partial n$  na  $S$ , što predstavlja *Neumann*-ov uslov.

Ako je na  $S$  zadato i  $V$ , i  $\partial V/\partial n$ , uslov se naziva *Cauchy*-jev, koji je preodređen, pa u opštem slučaju rešenja nema. Rešenje je jedinstveno i ako na nekim delovima površine potencijal zadovoljava uslov prve, a na ostatku uslov druge vrste. U formiranju metode konačnih elemenata moraju biti zadati ovi uslovi na svim delovima površine posmatranog domena.

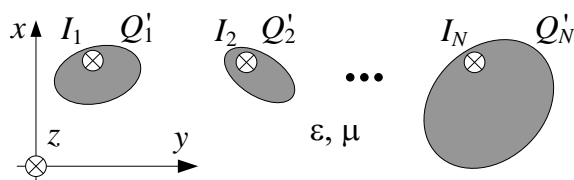
### 2.2. Statička i kvazistatička analiza vodova

Vodovi su sistemi za vođenje talasa koji se sastoje od najmanje dva provodnika. Dominantan tip talasa na vodovima je TEM tip (ako je dielektrik homogen) ili kvazi-TEM (ako je dielektrik nehomogen). Kvazi-TEM talasi su, strogo gledano, hibridni talasi jer imaju longitudinalne komponente električnog i magnetskog polja (duž pravca prostiranja talasa). Ali, ako učestanost nije suviše visoka, longitudinalne komponente se mogu zanemariti u odnosu na transverzne, pa je talas približno TEM tipa (uobičajeni izraz je kvazi-TEM). Svaki tip voda ima gornju učestanost do koje je tehnički upotrebljiv i do te učestanosti se na vodu prostire samo TEM ili kvazi-TEM talas. Raspodela električnog polja TEM talasa u jednom poprečnom preseku voda se poklapa sa elektrostatičkom raspodelom, pa se analiza vodova jednim delom zasniva na analizi elektrostatičkog polja iz koje se izvode primarni parametri voda.

2. Maxwell-ove j-ne, elektromagnetske osobine sredina, statička i kvazistatička analiza vodova

### 2.2.1 Vodovi bez gubitaka sa homogenim dielektrikom

Neka je dielektrik idealan, homogen i neka su provodnici bez gubitaka a poprečni presek isti duž celog voda (uniforman vod), kao na sl. 2.3.



Sl. 2.3. Poprečni presek voda sa  $N$  provodnika.

*Maxwell*-ove jednačine u kompleksnom obliku za EM polje u dielektriku ovakvog sistema su

$$\text{rot}\mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H},$$

$$\text{rot}\mathbf{H} = j\omega\varepsilon\mathbf{E},$$

$$\text{div}\mathbf{E} = 0 \text{ i}$$

$$\text{div}\mathbf{H} = 0,$$

gde je  $\mathbf{E}$  vektor jačine električnog,  $\mathbf{H}$  vektor jačine magnetskog polja, a  $\omega$  ugaona učestanost [4].

Analiza vodova se zasniva na rešavanju *Maxwell*-ovih jednačina za sisteme cilindrične geometrije jer se oblik poprečnog preseka ne menja duž  $z$ -ose sistema, koja je postavljena duž izvodnice voda. Tada *Descartes*-ove (R. Descartes) koordinate  $x$  i  $y$  određuju položaj tačke u poprečnom preseku voda. Iz *Maxwell*-ovih jednačina se izvodi talasna (*Helmholtz*-ova) jednačina za električno

$$\Delta\mathbf{E} = -k^2\mathbf{E},$$

i talasna jednačina za magnetsko polje

$$\Delta\mathbf{H} = -k^2\mathbf{H},$$

gde je  $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$ .



## 2. Maxwell-ove j-ne, elektromagnetske osobine sredina, statička i kvazistatička analiza vodova

*Maxwell*-ove jednačine se dopunjuju graničnim uslovima za površine savršenih provodnika:

$$\begin{aligned}\mathbf{n} \times \mathbf{E} &= 0, \\ \mathbf{n} \times \mathbf{H} &= \mathbf{J}_s,\end{aligned}\tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho_s}{\varepsilon} \text{ i} \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{H} &= 0,\end{aligned}\tag{2.10}$$

gde je  $\mathbf{n}$  normala na površinu provodnika usmerena od provodnika ka dielektriku,  $\mathbf{J}_s$  vektor gustine površinskih struja provodnika, a  $\rho_s$  gustina površinskog naelektrisanja provodnika. Rotor i divergencija se mogu simbolički predstaviti kao vektorsko, odnosno skalarno množenje nabra operatorom ( $\nabla$ ), koji je pogodno rastaviti na komponentu u pravcu prostiranja talasa (duž  $z$ -ose) i transverzalnu komponentu:

$$\nabla = \nabla_t + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{i}_z,$$

gde je u *Descartes*-ovom sistemu  $\nabla_t = \mathbf{i}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{i}_y \frac{\partial}{\partial y}$ .

Tako je za talas koji se prostire duž  $+z$ -ose

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{E}(x, y, 0)e^{-\gamma z} \text{ i}$$

$$\mathbf{H}(x, y, z) = \mathbf{H}(x, y, 0)e^{-\gamma z},$$

gde je  $\gamma = \alpha + j\beta$ , koeficijent prostiranja [1/m]. Takođe se vektori  $\mathbf{E}$  i  $\mathbf{H}$  mogu rastaviti na longitudinalne i transverzalne komponente:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_t + E_z \mathbf{i}_z$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_t + H_z \mathbf{i}_z.$$

Posle smene u početni set *Maxwell*-ovih jednačina i rastavljanja na transverzalni i longitudinalni „deo“, dobija se iz prve *Maxwell*-ove jednačine:

2. Maxwell-ove j-ne, elektromagnetske osobine sredina, statička i kvazistatička analiza vodova

$$\nabla_t \times (E_z \mathbf{i}_z) - \gamma \mathbf{i}_z \times \mathbf{E}_t = -j\omega\mu \mathbf{H}_t \quad (2.11)$$

$$\nabla_t \times \mathbf{E}_t = -j\omega\mu H_z \mathbf{i}_z.$$

Slično je i za ostale *Maxwell*-ove jednačine:

$$\nabla_t \times (H_z \mathbf{i}_z) - \gamma \mathbf{i}_z \times \mathbf{H}_t = j\omega\varepsilon \mathbf{E}_t \quad (2.12)$$

$$\nabla_t \times \mathbf{H}_t = j\omega\varepsilon E_z \mathbf{i}_z$$

$$\nabla_t \cdot \mathbf{E}_t - \gamma E_z = 0 \quad (2.13)$$

$$\nabla_t \cdot \mathbf{H}_t - \gamma H_z = 0. \quad (2.14)$$

Iz navedenog skupa jednačina se, posle nekoliko jednostavnijih koraka [84, 85], dobijaju dve jednačine:

$$(\gamma^2 + k^2) \mathbf{E}_t = -\gamma \nabla_t E_z + j\omega\mu \mathbf{i}_z \times \nabla_t H_z$$

$$(\gamma^2 + k^2) \mathbf{H}_t = -\gamma \nabla_t H_z + j\omega\varepsilon \mathbf{i}_z \times \nabla_t E_z.$$

Ako se u talasne jednačine uvedu polja rastavljena na poprečnu i aksijalnu komponentu i imajući u vidu da je  $\Delta = \nabla^2 = \Delta_t + \gamma^2$ , dobija se:

$$\Delta_t E_z + (\gamma^2 + k^2) E_z = 0 \text{ i}$$

$$\Delta_t H_z + (\gamma^2 + k^2) H_z = 0.$$

U uniformnim sistemima za vođenje talasa moguća su dva tipa talasa. Pri tome se smatra da je dielektrik homogen. Kod TEM talasa je  $\gamma^2 + k^2 = 0$ , pa je  $\gamma = j\omega\sqrt{\varepsilon\mu}$ . Ovaj talas nema komponente polja u pravcu prostiranja, već samo transverzalne komponente.

Talaska impedansa vođenog TEM talasa je

$$Z_{\text{TEM}} = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}.$$

## 2. Maxwell-ove j-ne, elektromagnetske osobine sredina, statička i kvazistatička analiza vodova

(za  $\gamma^2 + k^2 \neq 0$  radi se o TE, TM i hibridnim talasima).

Raspodela električnog polja po poprečnom preseku sistema sada je određena jednačinama:

$$\nabla_t \times \mathbf{E}_t = 0 \text{ i}$$

$$\nabla_t \cdot \mathbf{E}_t = 0$$

uz granični uslov:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}_t = 0,$$

koje su formalno identične jednačinama u elektrostatici za dvodimenzionalni sistem (sistem kod koga se polje ne menja u funkciji  $z$  koordinate). To znači da se raspodela električnog polja TEM talasa u poprečnom preseku voda poklapa sa odgovarajućom elektrostatickom raspodelom. Razlika je u tome što se kod sistema za vođenje talasa električno polje menja duž  $z$ -ose zbog faktora  $e^{-\gamma z}$ , a menja se i u vremenu kao prostoperiodična funkcija, dok je u elektrostatickom slučaju polje nezavisno od  $z$  i vremena.

Zbog toga što podužna gustina energije sistema ne može biti beskonačno velika, mora da bude ispunjen uslov

$$Q'_e = \sum_{j=1}^N Q'_j = 0, \quad (2.15)$$

što znači da vod mora da ima bar dva provodnika.

Na osnovu graničnih uslova (2.9) i (2.10) i jednačina (2.11) ili (2.12) sledi da kod vodova sa TEM talasom postoji veza

$$\rho_s = \sqrt{\epsilon\mu} J_{sz}, \quad (2.16)$$

gde je  $\rho_s$  gustina površinskog naelektrisanja, a  $J_{sz}$  gustina površinske struje (vektor  $\mathbf{J}_s$  ima samo  $z$ -komponentu). Ako se desna i leva strana izraza (2.16) integrale po obimu  $j$ -tog provodnika, dobija se

2. Maxwell-ove j-ne, elektromagnetske osobine sredina, statička i kvazistatička analiza vodova

$$Q'_j = \sqrt{\epsilon\mu} I_j, \quad (2.17)$$

odakle, zbog (2.11), proističe uslov da je algebarski zbir struja u svim provodnicima voda jednak nuli,

$$\sum_{j=1}^N I_j = 0.$$

Kako se električno polje TEM talasa može pisati u obliku

$$E(x, y, z) = E_t(x, y, 0)e^{-j\beta z} = -\text{grad}_t V(x, y)e^{-j\beta z},$$

gde je  $V(x, y)$  skalarna funkcija koja zavisi samo od transverzalnih koordinata i koja je po obliku ista kao potencijal u elektrostatičkom slučaju. Odatle sledi da se može odrediti napon između dva provodnika voda kao

$$U_{12} = V_1 - V_2 = \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l},$$

pri čemu putanja integracije ne sme ležati izvan jedne transverzalne ravni, jer integral ne zavisi od oblika putanje dok god se putanja nalazi u transverzalnoj ravni.

Iz druge *Maxwell*-ove jednačine za jedan od provodnika voda je:

$$\oint_{C_1} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I.$$

Ako na vodu postoji samo progresivni talas, onda je, s obzirom na (2.17):

$$I = \frac{Q'}{\sqrt{\epsilon\mu}},$$

a po analogiji sa elektrostatičkim poljem za vod sa dva provodnika važi relacija

$$Q' = C'U_{12},$$

gde je  $C'$  podužna kapacitivnost voda.

Karakteristična impedansa voda se definiše kao količnik napona i struje progresivnog talasa na vodu:

2. Maxwell-ove j-ne, elektromagnetske osobine sredina, statička i kvazistatička analiza vodova

$$Z_c = \frac{U_{12}}{I}.$$

Kod vodova bez gubitaka  $Z_c$  je čisto realna veličina, a za dvoprovodnički vod bez gubitaka sa homogenim dielektrikom, parametara  $\varepsilon$  i  $\mu$ , je

$$Z_c = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{C'} = \frac{1}{cC'}, \quad (2.18)$$

gde je  $c$  brzina prostiranja talasa.

Kod vodova sa nehomogenim dielektrikom (tipično kod štampanih vodova) se uvodi efektivna relativna permitivnost kao

$$\varepsilon_{re} = C'/C'_0, \quad (2.19)$$

gde je  $C'$  podužna kapacitivnost voda, a  $C'_0$  podužna kapacitivnost voda kod koga je dielektrik uklonjen (pa je svuda vakuum). Karakteristična impedansa i efektivna relativna permitivnost su osnovni parametri voda koji se određuju pri kvazistatičkom proračunu [86, 87]. Brzina prostiranja na vodu računa se pomoću izraza

$$c = c_0 / \sqrt{\varepsilon_{re}},$$

gde je  $c_0 = 299792458$  m/s brzina svetlosti.

Talasna dužina na vodu je

$$\lambda_g = \lambda_0 / \sqrt{\varepsilon_{re}},$$

gde je  $\lambda_0$  talasna dužina TEM talasa u vakuumu pri radnoj učestanosti  $f$  voda ( $\lambda_0 = c_0/f$ ).

### **2.2.2 Vodovi bez gubitaka sa deo-po-deo homogenim i nehomogenim dielektrikom**

Ako dielektrik nije homogen ili je deo-po-deo homogen, talas na vodu je u opštem slučaju kvazi-TEM tipa. Za ovakav vod se može izvršiti samo približna analiza jer se kod hibridnih talasa, strogo posmatrano, napon i struja provodnika ne mogu

## 2. Maxwell-ove j-ne, elektromagnetske osobine sredina, statička i kvazistatička analiza vodova

jednoznačno definisati. Ipak, za većinu praktičnih problema ova analiza je dovoljno tačna. Kvazi-TEM aproksimacija prostiranja elektromagnetskih talasa duž vodova sa nehomogenim ili deo-po-deo homogenim dielektrikom zasniva se na pretpostavci da električno i magnetsko polje imaju praktično samo transverzalne komponente, odnosno da su im longitudinalne komponente zanemarljivo male. Analitički i eksperimentalno je dokazano da je ovakva aproksimacija opravdana ako učestanost nije suviše visoka kod svih planarnih vodova izuzev proreznog voda i proreznog voda u talasovodu. Granična učestanost zavisi od permitivnosti i debljine supstrata [84].

Kod kvazi-TEM talasa se (približno) napon i struja mogu definisati kao kod TEM talasa. Pretpostavlja se da je i u ovom slučaju raspodela električnog polja ista kao u elektrostatici. Standardna elektrostaticka analiza se dopunjuje dodatnim jednačinama koje se postavljaju prema graničnim uslovima za normalne komponente vektora električne indukcije  $\mathbf{D}$  na svim graničnim površinama (konturama) dielektrika, odnosno

$$\varepsilon_1 \mathbf{E}_1 \mathbf{n} - \varepsilon_2 \mathbf{E}_2 \mathbf{n} = 0,$$

prema sl. 2.1, jer na razdvojnoj površini (konturi) između dielektrika nema slobodnih naelektrisanja.

### 2.3 Zaključak

U ovom poglavlju data je, radi jednostavnosti praćenja rada, rekapitulacija pojmova korišćenih u disertaciji. U poglavljima koja slede biće prikazani rezultati proračuna dvoprovodničkih vodova (drugi provodnik je oklop - košuljica). Ovakvi vodovi su odabrani pre svega zbog jednostavnosti preprocesinga kao i zbog obilja rezultata iz literature za poređenje, što ne umanjuje opštost postupka i donetih zaključaka. Kvazistatička analiza višeprovodničkih vodova sprovodi se analogno, ako se uoči da višeprovodnički vod koji ima  $N+1$  provodnik može da se smatra kao  $N$  spregnutih dvoprovodničkih vodova koji imaju zajednički referentni provodnik. Kada je jedan od „takvih“ vodova pobuđen, odnosno na njemu postoji talas, onda i na „vrućem“ provodniku tog voda, kao i na referentnom provodniku postoji naelektrisanje koje u svim ostalim provodnicima (nepobuđenim) indukuje naelektrisanja. Osim toga, vremenski promenljiva struja u pobuđenom vodu i povratna struja u referentnom

## 2. Maxwell-ove j-ne, elektromagnetske osobine sredina, statička i kvazistatička analiza vodova

provodniku, indukuje elektromotorne sile u ostalim provodnicima. Očigledno, između vodova postoji električna i magnetska sprega. Električna sprega se opisuje koeficijentima elektrostatičke indukcije, a magnetska sprega induktivnostima, a u proračunu višeprovodničkog voda figurišu matrične veličine [4].

Naredno poglavlje će biti posvećeno metodi konačnih elemenata, njenim koracima i modifikacijama, a biće opširnije prikazana metodologija iskorišćena u ovoj disertaciji.

### 3. Metoda konačnih elemenata (FEM)

## 3. Metoda konačnih elemenata (FEM)

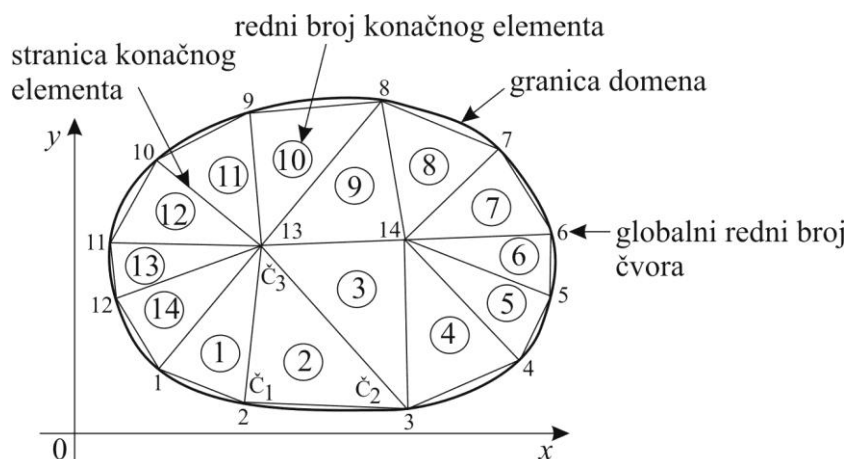
Metoda konačnih elemenata (FEM) spada u numeričke metode za približno rešavanje *konturnog problema* (boundary-value problem) u matematičkoj fizici (diferencijalna jednačina čiji red nije niži od dva, uz zadate granične uslove). Metoda se sastoji od šest najvažnijih koraka: diskretizacija kontinuuma (domena), izbor interpolacione funkcije (funkcije bazisa), sračunavanje karakteristika elemenata, formiranje jednačina za mrežu konačnih elemenata, rešavanje sistema jednačina i naknadni proračun potrebnih veličina. Kako je u ovom radu posebna pažnja posvećena funkcijama bazisa, o njima će biti reči u narednom poglavlju. Kao poseban korak se može smatrati  $h$  i  $p$ -rafinacija FEM-a. Ideja o  $hp$ -FEM-u potiče od I. Babuške i koautora [88] koji je otkrio da u FEM-u rezultati konvergiraju po eksponencijalnom zakonu kada se finoća mreže popravlja odgovarajućom kombinacijom  $h$ -rafinacije (podele na manje konačne elemente) i  $p$ -rafinacije (povećanje stepena polinoma funkcija bazisa). Kombinovana  $hp$ -rafinacija uključuje porast broja elemenata i stepena polinoma funkcije bazisa, a pod  $r$ -rafinacijom se podrazumeva promena položaja temena elemenata unutar mreže radi popravljivanja tačnosti [89]. U [90] i [91] je data lista starijih referenci koje se odnose na problem  $h$  i  $p$  rafinacije. Ovom problematikom se autori kasnije bave i u [92-98].

### 3.1. Diskretizacija domena

Diskretizacija domena je početni korak FEM-a. Od nje zavisi angažovanje memorijskih resursa, tj. vreme izvršavanja programa. Domen se deli na poddomene – konačne elemente koji se međusobno ne preklapaju. Veličina, broj konačnih elemenata i njihov oblik zavise od geometrije problema i biraju se tako da se region modeluje što preciznije. Kod 1D problema konačni element je duž. Kod 2D problema osnovni element je trougaoni element, ali je često pogodno da konačni elementi budu pravougaonici. Kod 3D problema konačni elementi su standardno tetraedri i/ili heksaedri. Skup konačnih elemenata na koje je podeljen domen čini mrežu. Na sl. 3.1. su prikazane mreže sa trougaonim, a na sl. 3.2. sa pravougaonim konačnim elementima.



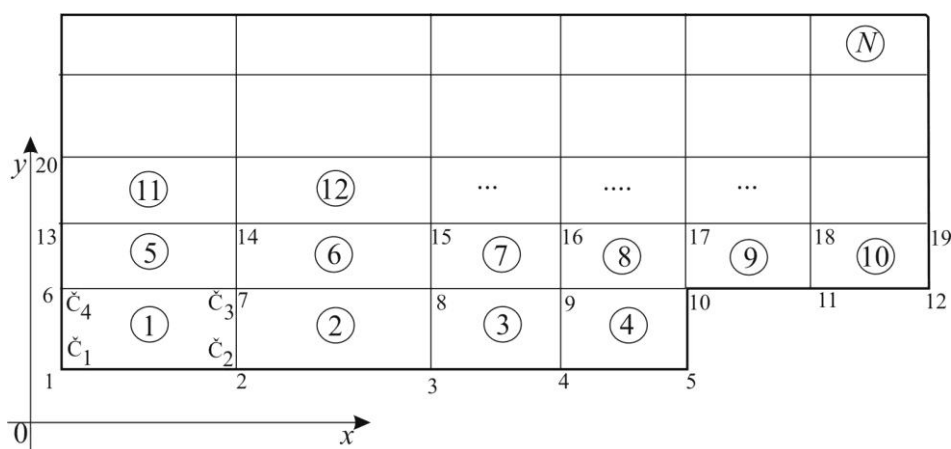
### 3. Metoda konačnih elemenata (FEM)



Sl. 3.1. Domen podeljen na trougaone konačne elemente prvog reda.

Na sl. 3.1 je prikazan 2D domen u globalnom  $(x, y)$  koordinatnom sistemu, sa mrežom trougaonih konačnih elemenata, sa 14 globalnih čvorova i 14 konačnih elemenata, gde su  $\check{C}_1$ ,  $\check{C}_2$  i  $\check{C}_3$  lokalni redni brojevi čvorova. Tako, za konačni element br. 2, je  $\check{C}_1 = 2$ ,  $\check{C}_2 = 3$  i  $\check{C}_3 = 13$ . Lokalno numerisanje čvorova ukazuje na njihovu poziciju unutar konačnog elementa, dok globalno numerisanje ukazuje na njihovu poziciju u odnosu na globalni sistem.

Kod FEM-a je potrebno označavanje i preračunavanje i lokalnih i globalnih parametara. Ta procedura je označena kao preproceing i potpuno izdvojena od ostalih koraka. Na sledećoj slici je predstavljena jednostavna, pravougaona geometrija kojoj prirodno odgovaraju pravougaoni konačni elementi, kojih ima  $N$ . U ovom radu su, za sve prikazane rezultate, korišćeni pravougaoni konačni elementi.



Sl. 3.2. Pravougaoni konačni elementi u globalnom koordinatnom sistemu.

### 3. Metoda konačnih elemenata (FEM)

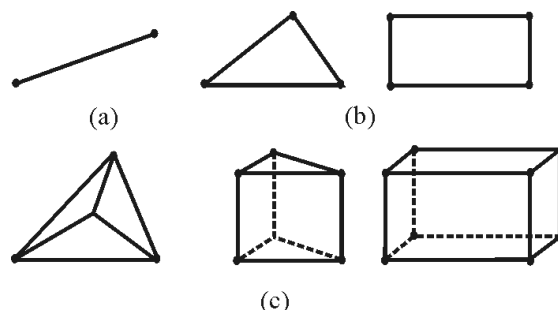
Ako je domen sa krivolinijskim granicama, koriste se krivolinijski elementi sa čvorovima koji mogu biti, na primer, i na sredini svake ivice, i to su tzv. izoparametarski elementi. Što je manja veličina takvog elementa, očekuje se veća tačnost. U FEM teoriji sa funkcijama bazisa polinomskog tipa greška usled diskretizacije je približno data formulom  $e = ch^{-2n}$ , gde je  $h$  maksimalna dimenzija proizvoljnog elementa domena,  $n$  je red polinomske aproksimacije, dok je  $c$  konstanta proporcionalnosti. Porast broja elemenata povećava broj čvorova, u opštem slučaju broj nepoznatih raste, a time raste i potrebno vreme izračunavanja. Podela domena može biti uniformna i neuniformna. Uniformna se sreće kod jednostavnih problema. Kod neuniformne podele finija mreža konačnih elemenata se primenjuje tamo gde se očekuju naglije promene nepoznate funkcije (npr. raspodele potencijala). Odnos između stranica je odnos između najduže i najkraće stranice elementa. To je faktor koji takođe utiče na tačnost FEM izračunavanja. U literaturi se preporučuje da ovaj odnos bude  $a_{\min}/a_{\max} \leq 3$  [89]. U slučajevima kod kojih je prisutna simetrija, dovoljno je posmatrati npr. samo polovinu, četvrtinu ili čak osminu domena, uz primenu odgovarajućih graničnih uslova. Broj nepoznatih, koji je kod čvorno zasnovane FEM metode jednak broju čvorova, značajan je faktor koji je ograničen kompjuterskom memorijom.

#### 3.1.1. Osnovni konačni elementi u lokalnim koordinatnim sistemima

Podela na poddomene (konačne elemente) ima presudnu ulogu kad je veličina konačne matrice sistema u pitanju, od čije veličine zavisi veličina potrebnih memorijskih resursa, a time i vreme potrebno da se proračun obavi. Konačni elementi oblikom prate geometriju koja se proračunava. Otuda i osnovna podela konačnih elemenata na jedno, dvo i trodimenzionalne. Ukoliko je geometrija relativno jednostavna, ravnih strana ili površina, dovoljno je uzeti pravolinijske, odnosno ravne konačne elemente. Sistem jednačina prema metodi konačnih elemenata se formira za vrednosti nepoznate funkcije  $f$  ili njenog prvog izvoda u čvorovima za čvorno zasnovane funkcije bazisa. Na sl. 3.3. su prikazani osnovni pravolinijski konačni elementi. Oni imaju čvorove samo na krajevima, odnosno samo u temenima. To su elementi najnižeg, prvog, reda. Kod dvodimenzionalnih problema, ukoliko je

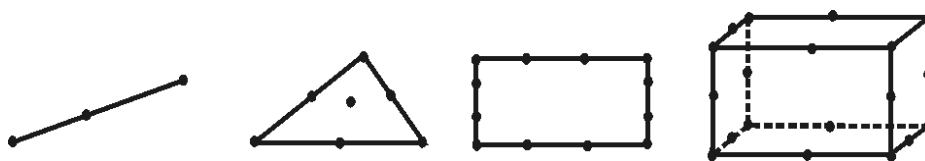
### 3. Metoda konačnih elemenata (FEM)

posmatrani domen trakast, pogodno je uzeti konačne elemente pravougaonog oblika, a ukoliko je nepravilne geometrije, najjednostavniji izbor je trougaoni konačni element. Sličan zaključak važi i za prostorne konačne elemente.



Sl. 3.3. Osnovni pravolinijski konačni elementi, (a) jednodimenzionalni, (b) dvodimenzionalni i (c) trodimenzionalni.

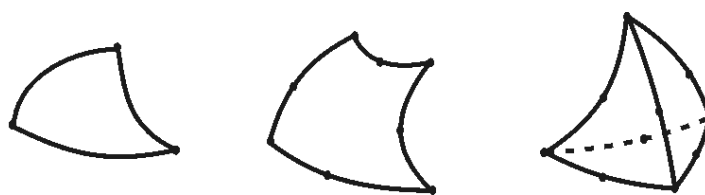
Pravolinijski (ravni) čvorno zasnovani elementi višeg reda sa sl. 3.4. imaju čvorove i duž ivica ili unutar domena koji obuhvataju, a uvode se u cilju  $p$ -rafinacije. Čvorovi mogu biti spoljašnji ako se nalaze po ivici konačnog elementa, pa su zajednički za najmanje dva elementa, ili unutrašnji, koji se uvode radi dodatnog poboljšanja kvaliteta aproksimacije. Nepoznati koeficijenti u unutrašnjim čvorovima nemaju karakter osnovnih nepoznatih, već se iz jednačina u kojima se pojavljuju eliminišu pre formiranja osnovnog sistema jednačina, što predstavlja postupak *kondenzacije*. Parametri u spoljašnjim čvorovima koji predstavljaju osnovne nepoznate u konačnom sistemu jednačina, često se zovu i spoljašnji stepeni slobode, a parametri u unutrašnjim čvorovima su unutrašnji stepeni slobode.



Sl. 3.4. Ravni konačni elementi višeg reda.

Ukoliko je geometrija koja se proračunava krivolinijska, potreban je veliki broj pravolinijskih konačnih elemenata da bi se dobila dobra aproksimacija, što dovodi do prevelikog sistema jednačina. Zato se primenjuju krivolinijski konačni elementi kao na sl. 3.5.

### 3. Metoda konačnih elemenata (FEM)

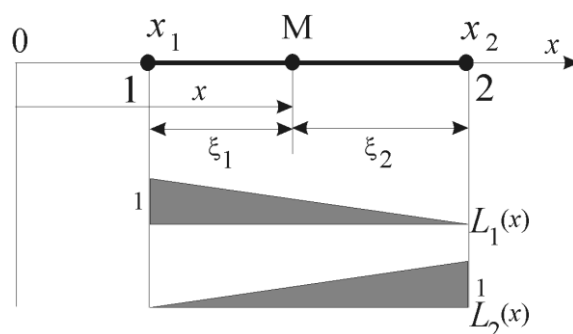


Sl. 3.5. Krivolinijski konačni elementi

Primena krivolinijskih konačnih elemenata uspešno smanjuje broj nepoznatih u globalnom sistemu jednačina. Osnovna ideja na kojoj se zasniva uvođenje krivolinijskih elemenata je preslikavanje krivolinijskog elementa u globalnom koordinatnom sistemu na pravolinijski element u lokalnom koordinatnom sistemu, i obrnuto, pri čemu se podrazumeva da postoji veza između lokalnih i globalnih koordinata pomoću koje se definiše uzajamno jednoznačno preslikavanje tačaka iz lokalnog u globalni koordinatni sistem, i obrnuto. Krivolinijski sistemi takođe mogu biti nižeg i višeg reda.

Zbog jednostavnog izražavanja funkcije bazisa u lokalnom koordinatnom sistemu i jednostavnosti izračunavanja elemenata matrice sistema, zato što se integrali koji se javljaju na konačnim elementima svode najčešće na rešive u analitičkom obliku, pogodno je, pored globalnog koordinatnog sistema, uvesti i lokalni (prirodni) koordinatni sistem. U lokalnom koordinatnom sistemu brojne vrednosti koordinata se menjaju linearno najčešće između 0 i 1 ili između  $-1$  i  $1$ . Na taj način položaj proizvoljne tačke može da se izrazi u funkciji koordinata čvorova.

Lokalne koordinate mogu da se uvedu za jednodimenzionalne, dvodimenzionalne i trodimenzionalne elemente različitog oblika.



Sl. 3.6. Prirodne koordinate za linijski element.

### 3. Metoda konačnih elemenata (FEM)

Za pravolinijski jednodimenzionalni element prvog reda, sa čvorovima na krajevima elementa sa sl. 3.6 i dužine  $x_2 - x_1$  u globalnom koordinatnom sistemu  $(0, x)$ , položaj tačke M određen je koordinatom  $x$ . Položaj tačke M može da se odredi i lokalnim koordinatama  $\xi_1 = x - x_1$  i  $\xi_2 = x_2 - x$  u lokalnim sistemima koordinata koji su vezani za čvorove 1 i 2, pri čemu se  $\xi_1$  poklapa sa smerom  $x$ -ose a  $\xi_2$  ima suprotan smer. Ako se koordinate  $\xi_1$  i  $\xi_2$  podele dužinom elementa, dobijaju se normalizovane koordinate, koje predstavljaju prirodne koordinate za pravolinijski konačni element prvog reda (sa čvorovima na krajevima), koje su bezdimenzione. To su zapravo *Lagrange*-ovi polinomi prvog stepena:

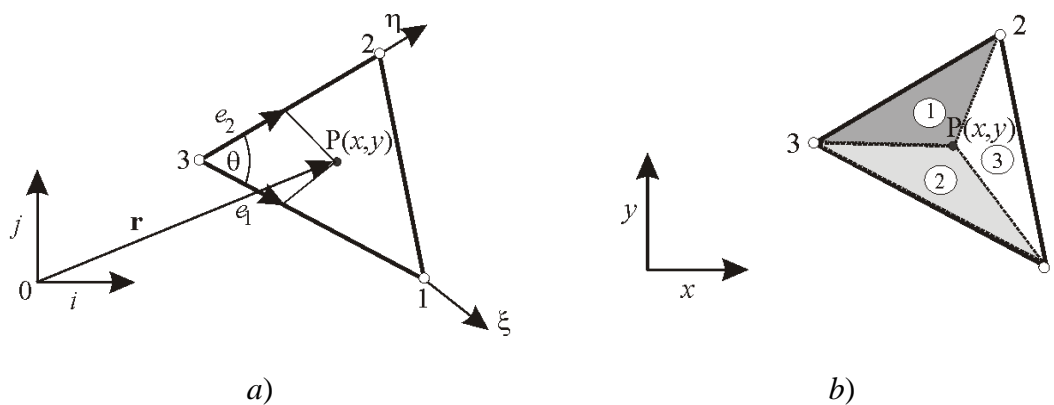
$$L_1(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \quad L_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Kako u globalnom sistemu koordinata postoji samo jedna koordinata, između koordinata  $L_1(x)$  i  $L_2(x)$  postoji zavisnost:

$$L_1(x) + L_2(x) = 1.$$

Položaj tačke M pomoću prirodnih koordinata je:

$$x = L_1(x)x_1 + L_2(x)x_2.$$



Sl. 3.7. a) Trougaoni konačni element u sistemu prirodnih koordinata.

b) Površine trouglova  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ .

### 3. Metoda konačnih elemenata (FEM)

Za trougaoni element sa sl. 3.7a), gde je  $(x, y)$  globalni koordinatni sistem sa ortovima  $\mathbf{i}$  i  $\mathbf{j}$ , a  $(u, v)$  lokalni, kosougli sistem, vezan za trougaoni element u čvoru 3, prirodne koordinate su date izrazima [22]:

$$L_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, i = 1, 2, 3,$$

gde je

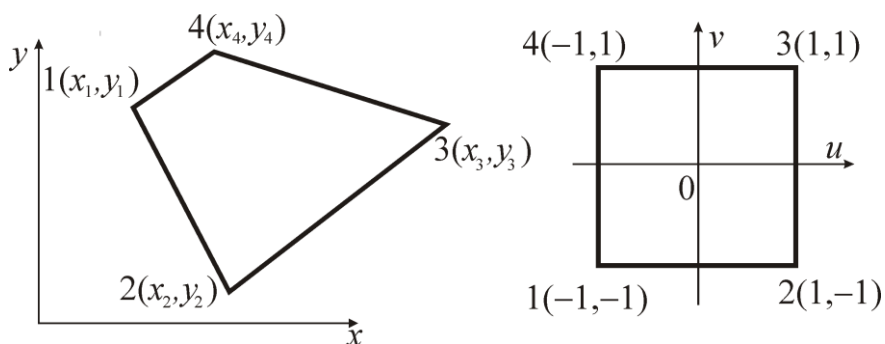
$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}$$

površina trougla sa temenima u čvorovima 1, 2 i 3 sa sl. 3.7a) i

$$\Delta_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}, \Delta_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x & y \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}, \Delta_3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x & y \end{bmatrix}$$

površine trouglova označenih sa 1, 2 i 3 na sl.3.7.b).

Prirodne koordinate  $L_i$  predstavljaju odnos površine trougla naspram  $i$ -tog čvora, sl.3.7.b) i površine celog trougaonog konačnog elementa. One su površinske, njihova promena na elementu je linearna i kreće se između 0 i 1. Zbog toga se prirodne koordinate  $L_i$  mogu uzeti kao interpolacione funkcije za linearnu interepolaciju u trouglu.



Sl. 3.8. Četvorougaoni element u globalnom i lokalnom sistemu koordinata.

### 3. Metoda konačnih elemenata (FEM)

Kod četvorougaoog elementa ravnih strana sa sl. 3.8. logičan izbor je sistem lokalnih koordinata  $(u, v)$  koje se kreću u granicama od  $-1$  do  $1$ . U sistemu lokalnih koordinata  $(u, v)$  definiše se kvadratni element jediničnih polustranica na koji se, iz sistema globalnih koordinata  $(x, y)$  preslikava četvorougaooni element proizvoljne veličine i oblika.

Izrazi za vezu između globalnih i prirodnih koordinata za četvorougao su:

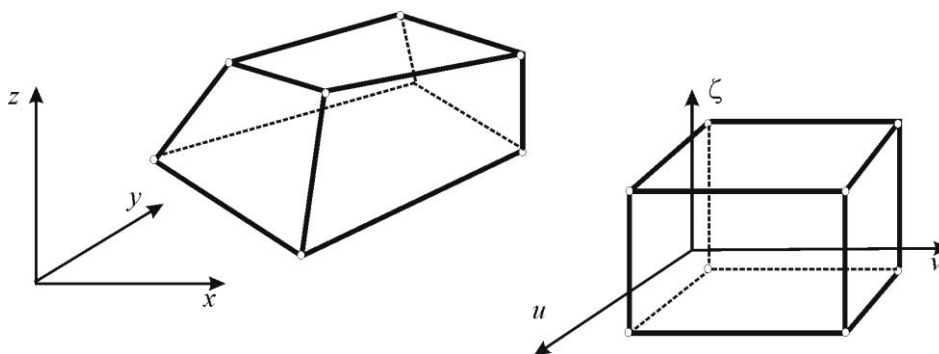
$$x(u, v) = \sum_{i=1}^4 L_i x_i, \quad y(u, v) = \sum_{i=1}^4 L_i y_i, \quad \text{gde su:}$$

$$L_1 = \frac{1}{4}(1-u)(1-v), \quad L_2 = \frac{1}{4}(1+u)(1-v), \quad L_3 = \frac{1}{4}(1+u)(1+v), \quad L_4 = \frac{1}{4}(1-u)(1+v),$$

funkcije transformacije, odnosno:

$$L_i = \frac{1}{4}(1+uu_i)(1+vv_i), \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

gde su  $(u_i, v_i)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  koordinate čvorova u lokalnom koordinatnom sistemu.



Sl. 3.9. Heksaedar ravnih strana.

Za prostorni element oblika heksaedra (sl. 3.9) važi

$$x(u, v, \zeta) = \sum_{i=1}^8 L_i x_i, \quad y(u, v, \zeta) = \sum_{i=1}^8 L_i y_i, \quad z(u, v, \zeta) = \sum_{i=1}^8 L_i z_i,$$

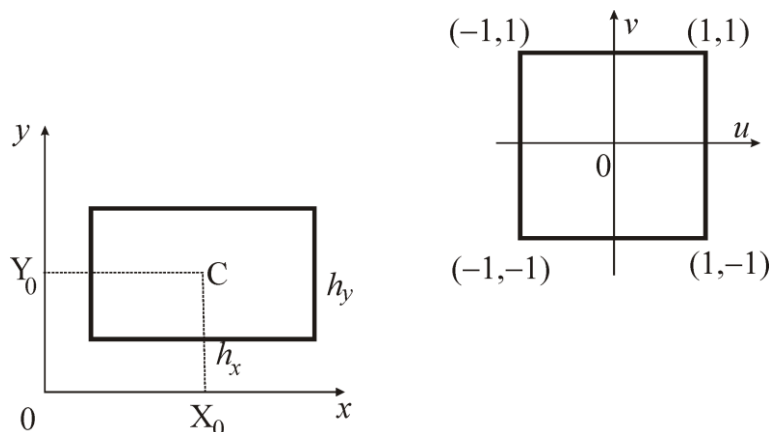
$$L_i = \frac{1}{8}(1+uu_i)(1+vv_i)(1+\zeta\zeta_i), \quad i = 1, 2, \dots, 8,$$

gde su  $(u_i, v_i, \zeta_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 8$  koordinate čvorova heksaedra u lokalnom koordinatnom sistemu.

### 3. Metoda konačnih elemenata (FEM)

#### 3.1.2. Pravougaoni konačni element u globalnom i lokalnom koordinatnom sistemu

U svim izračunavanjima u ovom radu je korišćen lokalni koordinatni sistem čije se koordinate kreću između  $-1$  i  $1$ , i pravougaoni konačni elementi (sl. 3.10):



Sl. 3.10. Pravougaoni konačni element i globalni i lokalni koordinatni sistem.

Posmatra se pravougaoni konačni element sa sl. 3.10, dimenzija  $h_x \times h_y$  u globalnom koordinatnom sistemu. Polazeći od veza između globalnih i lokalnih koordinata:

$$x = X_0 + \frac{h_x}{2}u, \quad y = Y_0 + \frac{h_y}{2}v, \quad -1 \leq u \leq 1, \quad -1 \leq v \leq 1,$$

gde je  $(X_0, Y_0)$  pozicija centralne tačke konačnog elementa u globalnom koordinatnom sistemu, može se odrediti izraz za element površine  $dS$  iz globalnog koordinatnog sistema preko lokalnih koordinata kao:

$$dS = dx dy = \frac{h_x}{2} \frac{h_y}{2} du dv.$$

Površinski gradijent, koji figuriše u diferencijalnim jednačinama, izražen preko lokalnih koordinata, je

$$\text{grad}_S f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{i}_y = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i}_x + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \mathbf{i}_y = \frac{2}{h_x} \frac{\partial f}{\partial u} \mathbf{i}_x + \frac{2}{h_y} \frac{\partial f}{\partial v} \mathbf{i}_y,$$



### 3. Metoda konačnih elemenata (FEM)

gde su  $\mathbf{i}_x$  i  $\mathbf{i}_y$  jedinični vektori (ortovi) u pravcu  $x$ , odnosno  $y$  ose.

Skalarni proizvod površinskih gradijenata dve funkcije ( $f$  i  $w$ ) u lokalnom koordinatnom sistemu je dat izrazom:

$$\text{grad}_s f(x, y) \cdot \text{grad}_s w(x, y) = \left( \frac{2}{h_x} \right)^2 \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial w}{\partial u} + \left( \frac{2}{h_y} \right)^2 \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial w}{\partial v}.$$

Ovo su veličine koje su potrebne u formiranju matrice sistema.

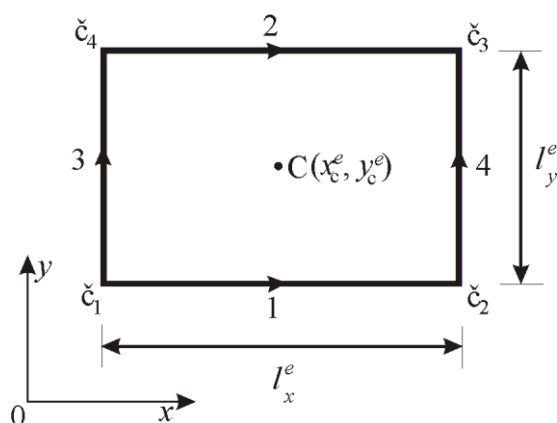
#### 3.1.3. Vektorski konačni elementi

Vektorski ili ivični konačni elementi se zasnivaju na funkcijama bazisa koje omogućuju zadovoljavanje graničnih uslova na ivicama elemenata [24, 29]. Ovakva koncepcija elemenata doživljava veliku primenu počev od sredine osamdesetih godina prošlog veka. Vektorski elementi koriste rotorski usklađene (curl-conforming) i divergencijski usklađene (div-conforming) funkcije bazisa. Ovakve funkcije bazisa nisu čvorno, već ivično zasnovane. Rotorski usklađene funkcije bazisa zadovoljavaju neprekidnost tangencijalne komponente polja. Koriste se u FEM-u za izjednačavanje  $\mathbf{E}_t$ , odnosno  $\mathbf{H}_t$  (tangencijalnih komponenta polja) na granicama između susednih elemenata. Divergencijski usklađene (div-conforming) funkcije bazisa automatski zadovoljavaju neprekidnost normalne komponente polja. One se koriste u MoM-u gde se izjednačavaju normalne komponente površinskih (u SIE) ili zapreminskih (u VIE) struja na susednim elementima.

##### 3.1.3.1 Dvodimenzionalni pravougaoni vektorski konačni elementi

Vektorski elementi će biti ilustrovani na primeru geometrijski najjednostavnijih, pravougaonih elemenata, sa sl. 3.11, dužina ivica  $l_x$  i  $l_y$ , čije su koordinate centra  $C(x_c, y_c)$ :

### 3. Metoda konačnih elemenata (FEM)



Sl. 3.11. Pravougaoni konačni element  $e$  dimenzija  $l_x^e \times l_y^e$  sa središtem u tački  $C(x_c^e, y_c^e)$ .

Ako se svakoj ivici elementa dodeli konstantna tangencijalna komponenta polja, polje u okviru elementa se može izraziti preko:

$$E_x^e = \frac{1}{l_y^e} \left( y_c^e + \frac{l_y^e}{2} - y \right) E_{x1}^e + \frac{1}{l_y^e} \left( y - y_c^e + \frac{l_y^e}{2} \right) E_{x2}^e$$

$$E_y^e = \frac{1}{l_x^e} \left( x_c^e + \frac{l_x^e}{2} - x \right) E_{y1}^e + \frac{1}{l_x^e} \left( x - x_c^e + \frac{l_x^e}{2} \right) E_{y2}^e$$

gde  $E_{x1}^e$  predstavlja  $x$ -komponentu polja,  $E_{x1}$ , duž ivice  $\check{c}_1 - \check{c}_2$  a  $E_{x2}^e$  predstavlja  $x$ -komponentu polja duž ivice  $\check{c}_4 - \check{c}_3$ . Slično je za  $E_{y1}^e$  i  $E_{y2}^e$ , samo što ove komponente odgovaraju ivicama  $\check{c}_1 - \check{c}_4$  i  $\check{c}_2 - \check{c}_3$ , respektivno. Na sl. 3.11 je ivica  $\check{c}_1 - \check{c}_2$  označena brojem 1, ivica  $\check{c}_4 - \check{c}_3$  brojem 2, itd. Sada se može pisati

$$\mathbf{E}^e = \sum_{j=1}^4 \mathbf{N}_i^e E_i^e,$$

gde su  $E_i^e$  tangencijalne komponente polja duž  $i$ -te ivice, a  $\mathbf{N}_i^e$  su vektorske interpolacione ili bazisne funkcije date sa:

$$\mathbf{N}_1^e = \frac{1}{l_y^e} \left( y_c^e + \frac{l_y^e}{2} - y \right) \hat{x}, \quad \mathbf{N}_2^e = \frac{1}{l_y^e} \left( y - y_c^e + \frac{l_y^e}{2} \right) \hat{x},$$

### 3. Metoda konačnih elemenata (FEM)

$$\mathbf{N}_3^e = \frac{1}{l_x^e} \left( x_c^e + \frac{l_x^e}{2} - x \right) \hat{y}, \quad \mathbf{N}_4^e = \frac{1}{l_x^e} \left( x - x_c^e + \frac{l_x^e}{2} \right) \hat{y}.$$

Značajno svojstvo ovih funkcija je da  $\mathbf{N}_i^e$  predstavlja tangencijalnu komponentu isključivo duž  $i$ -te ivice elementa, dok duž ostalih ivica ne postoji. Time je obezbeđena neprekidnost tangencijalne komponente polja duž svih ivica elementa. Još jedna jedinstvena karakteristika ovih funkcija je da svaka zadovoljava uslov da divergencija bude nula, tj.  $\nabla \mathbf{N}_i = 0$ , unutar elementa. Zbog toga su one pogodne za opisivanje vektorskih polja u bezizvornim domenima. Dalje, lako može da im se izračuna rotor prema:

$$\nabla \times \mathbf{N}_1^e = \frac{1}{l_y^e} \hat{z}, \quad \nabla \times \mathbf{N}_2^e = -\frac{1}{l_y^e} \hat{z}, \quad \nabla \times \mathbf{N}_3^e = -\frac{1}{l_x^e} \hat{z}, \quad \nabla \times \mathbf{N}_4^e = \frac{1}{l_x^e} \hat{z},$$

koji je konstanta vrednost različita od nule. Uzimajući vektorski proizvod  $\hat{z}$  sa ovim funkcijama, dobija se drugi skup vektorskih funkcija bazisa  $\hat{z} \times \mathbf{N}_i^e$ , koji obezbeđuje neprekidnost normalne komponente polja. Nasuprot  $\mathbf{N}_i^e$ , funkcije  $\hat{z} \times \mathbf{N}_i^e$  imaju svojstvo da im je rotor jednak nuli, a divergencija različita od nule, i pogodne su za predstavljanje površinskih gustina struja. U elektromagnetici su one poznate kao rogljaste („roof-top“) funkcije bazisa i u upotrebi su kod MoM rešavanja integralnih jednačina.

Pravougaoni vektorski elementi su pogodni za trakaste geometrije. Za nepravilne geometrije pogodniji su trougaoni vektorski elementi. Njih je pogodnije vezati za cilindrični koordinatni sistem [29], a vektorske funkcije bazisa imaju tangencijalnu komponentu samo duž određene ivice trougla. Nasuprot ove prednosti u odnosu na pravougaone elemente, trougaoni vektorski elementi u matricu sistema unose za oko trećinu više nepoznatih. Četvorougaoni elementi, koji su zapravo zakrivljeni pravougaonici, mogu da daju minimalan broj ivica (nepoznatih), a da pri tome podjednako dobro modeluju geometriju kao trougaoni elementi. Generalno, vektorske funkcije bazisa višeg reda su interpolacione funkcije u tačkama smeštenim duž ivica konačnih elemenata, a mogu biti i u temenima, kao što je opisano gore, kao i u središtu elemenata, čime se izbegavaju singulariteti u temenima, ukoliko postoje [24]. U [99] je

### 3. Metoda konačnih elemenata (FEM)

opisan prostorni ivični element Solid 117 koji je implementiran kod softverskog paketa ANSYS/Emag ([www.ansys.com](http://www.ansys.com)) za proračun EM polja kod prostornih problema na nižim učestanostima. Radi se o heksaedru ravnih strana sa 20 interpolacionih čvorova u temenima i na sredini svake ivice. U [100] je prikazan vektorski krivolinijski heksaedar koji je u opštem slučaju višeg reda i u čijem opisu fugirišu vektori položaja interpolacionih čvorova i *Lagrange*-ovi polinomi. Za ovakav element prvog reda potrebno je 8 interpolacionih tačaka koje se poklapaju sa temenima elementa, a za element drugog reda 27 interpolacionih tačaka smeštenih u temenima, sredinama ivica i u centrima strana. Vektorski konačni elementi predstavljaju značajan pomak u koncepciji FEM-a, pri čemu su krivolinijski od posebnog značaja zbog opštosti geometrije koju mogu da modeluju.

#### 3.2. Klasične metode za rešavanje konturnog problema

U ovom odeljku će biti razmotrene dve klasične metode za rešavanje konturnog problema (boundary-value problem), polazeći od kojih se na dva načina može formulirati metoda konačnih elemenata. Najpre će biti definisan konturni problem, a zatim dat pregled dve klasične metode za njegovo rešavanje. To su varijaciona metoda (ili Ritz-cova, W. Ritz, 1909) i metoda težinskog ostatka (ili Galerkinova, Б. Г. Галёркин, 1915). Obe metode daju osnovu za formulisanje moderne metode konačnih elemenata.

##### 3.2.1. Konturni problemi

Koturni problemi nastaju kod matematičkog modelovanja fizičkih sistema i njihovog rešavanja i već dugo su glavna tema matematičke fizike. Konturni problem se definiše preko glavne diferencijalne jednačine za domen  $\Omega$ ,

$$Lf = g, \tag{3.1}$$

zajedno sa graničnim uslovima na granici  $\Gamma$  koja obuhvata domen. U (3.1)  $L$  je linearni diferencijalni operator,  $g$  poznata funkcija pobude, a  $f$  nepoznata funkcija (odziv na pobudu). Smatra se da je problem određen, odnosno da ima jedinstveno rešenje (postoji samo jedno  $f$  za zadato  $g$ ). U analizi se za poznato  $L$  i  $g$  određuje  $f$ , a u sintezi za poznato  $f$  i  $g$  određuje  $L$ . Problem je praktično rešen kad je sveden na

### 3. Metoda konačnih elemenata (FEM)

pogodnu linearnu algebarsku jednačinu koja se potom rešava standardnim metodama. Za gore zadati problem treba odrediti operator  $L$ , njegov domen (funkcije  $f$  na koje se primenjuje) i njegov opseg (funkcije  $g$  koje rezultuju iz operacije). U opštem slučaju potreban je unutrašnji proizvod, odnosno preslikavanje koje paru funkcija  $f$  i  $g$  pridružuje skalar  $\langle f, g \rangle$ , koji je definisan tako da budu zadovoljeni uslovi:

$$\text{a) } \langle f, f \rangle \geq 0; \langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0 ,$$

$$\text{b) } \langle \alpha f + \beta g, h \rangle = \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle ,$$

$$\text{c) } \langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle^* ,$$

gde su  $\alpha$  i  $\beta$  skalari, a  $*$  je oznaka za konjugovano kompleksno. Koristi se i adjungovan operator  $L^a$  i njegov domen definisan kao

$$\langle Lf, g \rangle = \langle g, L^a f \rangle$$

za sve  $f$  u domenu od  $L$ . Operator je samoadjungovan (self-adjoint) ako je  $L^a = L$  i domen od  $L^a$  je domen od  $L$ . Osobine rešenja zavise od osobina operatora. Operator je realan ako je  $Lf$  realno uvek kad je  $f$  realno. Operator je pozitivno definitan ako je

$$\langle f^*, Lf \rangle > 0$$

za sve  $f \neq 0$  u tom domenu. Ako se u gornjoj jednačini stavi  $\geq$  umesto  $>$ , onda je operator pozitivno semidefinitan.

Ako rešenje za (3.1) postoji i ako je ono jedinstveno za svako  $g$ , tada postoji jedinstven operator  $L^{-1}$ , takav da je

$$f = L^{-1}g .$$

Ako je poznato  $g$ , onda je gornja funkcija rešenje originalnog problema.  $L$  i  $L^{-1}$  su međusobno inverzni operatori. Operatorska jednačina (3.1) u opštem slučaju ne može egzaktno da se reši, pa se svodi na sistem linearnih algebarskih jednačina po nepoznatim koeficijentima, koji je aproksimacija tačnog rešenja i ima jedinstveno rešenje. Zato se najpre određuje približno rešenje  $\bar{f}$ , za koje je

### 3. Metoda konačnih elemenata (FEM)

$$Lf \approx g,$$

a funkcija  $\bar{f}$  se traži u obliku:

$$\bar{f} = \sum_i a_i f_i = [f_i]^T [a_i]. \quad (3.2)$$

Ovde su  $a_i$  nepoznati koeficijenti ili parametri aproksimacije (ili stepeni slobode), a  $f_i$  su funkcije oblika, bazisa ili aproksimacione funkcije, dok su  $[f_i]$  i  $[a_i]$  kolona matrice. Za tačno rešenje problema (3.1) suma (3.2) je beskonačna, a za približno rešenje konačna i u posmatranom slučaju ima  $N$  članova. Ako se (3.2) zameni u (3.1), dobija se

$$\sum_{i=1}^N a_i Lf_i = g.$$

Na ovu jednačinu se dalje primenjuje unutrašnji proizvod, tako da sledeće jednačine budu (egzaktno) zadovoljene:

$$\sum_i a_i \langle w_j, Lf_i \rangle = \langle w_j, g \rangle, \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, N,$$

gde su  $w_j$  težinske (test) funkcije u domenu operatora  $L$ . Usvojimo da su test funkcije regularne (nisu Dirac-ove  $\delta$  funkcije). Na ovaj način je dobijen sistem jednačina u matričnom obliku

$$[K_{ij}][a_j] = [g_i], \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, N \quad (3.3)$$

gde je

$$[K_{ij}] = \begin{bmatrix} \langle w_1, Lf_1 \rangle & \langle w_1, Lf_2 \rangle & \dots & \langle w_1, Lf_N \rangle \\ \langle w_2, Lf_1 \rangle & \langle w_2, Lf_2 \rangle & \dots & \langle w_2, Lf_N \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle w_N, Lf_1 \rangle & \langle w_N, Lf_2 \rangle & \dots & \langle w_N, Lf_N \rangle \end{bmatrix}, [a_j] = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_N \end{bmatrix}, g_i = \begin{bmatrix} \langle w_1, g \rangle \\ \langle w_2, g \rangle \\ \dots \\ \langle w_N, g \rangle \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Ako je  $[K_{ij}]$  nesingularna (regularna) matrica, onda postoji njoj inverzna matrica, a rešenje problema je oblika

### 3. Metoda konačnih elemenata (FEM)

$$[a_j] = [K_{ij}]^{-1} [g_i], \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, N,$$

pa je, konačno,

$$[\bar{f}] = [f_j]^T [a_j] = [f_j]^T [K_{ij}]^{-1} [g_i], \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, N. \quad (3.5)$$

U elektromagnetici se, u najjednostavnijem slučaju, kod elektrostatičkih problema, startuje od diferencijalne jednačine za potencijal  $V$ ,

$$-\nabla(\epsilon \nabla V) = \rho,$$

koja je drugog reda po  $V$ . Kod kompleksnijih problema polazna jednačina je skalarna talasna jednačina, dok se kod najkompleksnijih polazi od vektorske talasne jednačine.

Što se graničnih uslova tiče, startuje se od *Dirichlet*-ovih (esencijalni) i *Neumann*-ovih (prirodni, derivativni) u najjednostavnijem slučaju, do komplikovanih impedansnih i radijacionih ili još komplikovanih uslova višeg reda. Analitičko (tačno) rešenje u opštem slučaju ne može da se odredi, sem nekoliko izuzetaka, kao što je npr. elektrostatički potencijal između paralelnih beskonačnih ravni. Kako analitičko rešenje u većini slučajeva ne može da se odredi, razvijene su različite aproksimacione metode.

#### 3.2.2 Varijaciona metoda

Kod varijacione metode je konturni problem formulisan preko varijacionog izraza, označenog kao funkcional, čiji minimum odgovara rešenju diferencijalne jednačine za posmatrani domen, a za zadate granične uslove. Približno rešenje se dobija minimizacijom funkcionala u odnosu na njegovu promenljivu. Za primenu metode prvo se definiše unutrašnji proizvod dveju funkcija kao integral:

$$\langle f, \psi \rangle = \int_{\Omega} f \psi^* d\Omega,$$

gde je  $*$  oznaka za konjugovano kompleksno. Ako je operator  $L$  u (3.1) samoadjungovan i pozitivno definitan, tada rešenje (3.1) može da se dobije minimizacijom funkcionala [26,27]:

$$F(\bar{f}) = \frac{1}{2} \langle L\bar{f}, \bar{f} \rangle - \frac{1}{2} \langle \bar{f}, g \rangle - \frac{1}{2} \langle g, \bar{f} \rangle \quad (3.6)$$

### 3. Metoda konačnih elemenata (FEM)

u odnosu na  $\bar{f}$ , gde je  $\bar{f}$  probna (test) funkcija. Ako se ona predstavi kao konačna suma

$$\bar{f} = \sum_{i=1}^N a_i f_i = [a_i]^T [f_i] = [f_i]^T [a_i], \quad (3.7)$$

imamo Rejli-Ricovu (Raylei-Ritz) varijacionu metodu. Funkcional je sada:

$$F = \frac{1}{2} [a_i]^T \int_{\Omega} [f_i] L [f_i]^T d\Omega [a_i] - [a_i]^T \int_{\Omega} [f_i] g d\Omega, \quad (3.8)$$

a njegova minimizacija se svodi na anuliranje parcijalnih izvoda po koeficijentima  $a_i$ ,  $\partial F / \partial a_i = 0$ , što dovodi do sistema linearnih algebarskih jednačina čijim se rešavanjem dobijaju nepoznati koeficijenti  $a_i$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial a_i} &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} f_i L [f_i]^T d\Omega [a_i] + \frac{1}{2} [a_i]^T \int_{\Omega} [f_i] L f_i d\Omega - \int_{\Omega} f_i g d\Omega \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N a_j \int_{\Omega} (f_i L f_j + f_j L f_i) d\Omega - \int_{\Omega} f_i g d\Omega \\ &= 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N, \end{aligned} \quad (3.9)$$

što se može napisati kao matrična relacija

$$[S_{ij}] [a_j] = [b_i], \quad (3.10)$$

gde su elementi matrice  $[S_{ij}]$  dati sa

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (f_i L f_j + f_j L f_i) d\Omega, \quad (3.11)$$

a elementi u  $[b_i]$  sa

$$b_i = \int_{\Omega} f_i g d\Omega. \quad (3.12)$$

Matrica  $[S_{ij}]$  je simetrična imajući u vidu osobinu samoadjungovanosti operatora  $L$ , a može se pisati kao

$$S_{ij} = \int_{\Omega} f_i L f_j d\Omega, \quad (3.13)$$



### 3. Metoda konačnih elemenata (FEM)

tako da je približno rešenje iz (3.1) dobijeno rešavanjem matricne jednačine (3.10). Može se desiti da varijacioni princip kod nekih problema kod kojih operator nije samoadjungovan ne postoji. Drugo, kod komplikovanih geometrija je teško naći funkcije bazisa koje zadovoljavaju globalne granične uslove za ceo domen. U opštem slučaju, minimizacija funkcionala po odgovarajućoj nepoznatoj treba da postoji i da zadovolji *Euler*-ovu jednačinu [6] da bi se formulisala varijaciona metoda, što je njen osnovni nedostatak.

Kod elektrostatičkih problema elektrostatički skalar-potencijal ima raspodelu koja odgovara minimalnoj vrednosti energije elektrostatičkog polja, pa FEM daje rešenje minimizacijom energije sistema. Minimizacija energije, matematički posmatrano, ostvaruje se izjednačavanjem izvoda funkcije po potencijalu željene tačke sa nulom. Na primer, funkcional koji odgovara *Laplace*-ovoj jednačini  $\Delta V = 0$ , dat je izrazom:

$$F(V) = \frac{1}{2} \int_v (\text{grad} V)^2 dv$$

gde je  $V$  nepoznati potencijal, a  $v$  zapremina domena [6]. Minimum energije se dobija kada je

$$\frac{\partial F(V)}{\partial V} = 0.$$

Posle diskretizacije domena na konačne elemente, primenom gornjeg izraza na nepoznati potencijal svakog konačnog elementa dobija se sistem jednačina koji treba rešavati uz odgovarajuće zadate granične uslove koji se unose pre konačnog rešavanja sistema.

#### 3.2.3 Metoda težinskih ostataka

Metodom težinskih ostataka rešenje se dobija preko težinskog ostatka diferencijalne jednačine. Neka je  $\bar{f}$  približno rešenje jednačine (3.1). Zamena  $\bar{f}$  umesto  $f$  u (3.1) dovodi do nenultog ostatka:

$$r = L\bar{f} - g \neq 0 \tag{3.14}$$

### 3. Metoda konačnih elemenata (FEM)

Metoda težinskih ostataka nameće uslov

$$R_i = \int_{\Omega} w_i r d\Omega = 0, \quad (3.15)$$

gde  $R_i$  označava integral težinskog ostatka a  $w_i$  su težinske funkcije. Ako se težinske funkcije odaberu tako da budu iste one koje su izabrane za razvoj približnog rešenja u red, odnosno funkcije bazisa, imamo *Galerkinovu metodu*. U praksi se pokazalo da takav izbor najčešće dovodi do vrlo tačnog rešenja [27]. Za ilustraciju metode pretpostavimo da je približno rešenje predstavljeno u obliku (3.7). Težinske funkcije se biraju tako da bude

$$w_i = f_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N, \quad (3.16)$$

tako da (3.15) postaje

$$R_i = \int_{\Omega} \left( w_i L[f_i]^T [a_i] - f_i g \right) d\Omega = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N, \quad (3.17)$$

gde je  $[a_i]$  vektor-kolona nepoznatih koeficijenata koje treba odrediti. Ovo dovodi do matričnog sistema kao u (3.10), iako u ovom slučaju matrica  $[S_{ij}]$  ne mora da bude simetrična osim ako operator  $L$  nije sopstveno-pridružen, u kom slučaju Galerkinova metoda rezultuje istim sistemom jednačina kao *Ritz-ova*.

Kao težinske funkcije se mogu upotrebiti i druge funkcije, što dovodi do različitih formulacija. Tako npr. kod metode podešavanja u tačkama (*point collocation method*) kao težinska funkcija se bira *Dirac-ova*  $\delta$ -funkcija (P. A. M. Dirac). Kod metode podešavanja u poddomenima (Subdomain Collocation Method) težinske funkcije su jednake jedinici na odgovarajućem poddomenu i nula na ostatku domena. Kod metode najmanjih kvadrata težinska funkcija je  $w_m = \frac{\partial r}{\partial a_m}$ , gde je  $r$  težinski ostatak [6]. Metoda

težinskih ostataka startuje direktno od diferencijalne jednačine, a varijaciona metoda od varijacione formulacije. Stoga primenljivost varijacione metode zavisi direktno od dostupnosti varijacione formulacije, odnosno kod varijacione metode treba da se za jednačine nađe funkcional. To varijacionu metodu čini koncepciono složenijom u

### 3. Metoda konačnih elemenata (FEM)

odnosu na Galerkinovu, te je otuda u ovom radu usvojena Galerkinova formulacija metode konačnih elemenata.

#### 3.2.4 Jaka i slaba forma konturnog problema, jaka i slaba formulacija

Neka je za domen  $\Omega$ , ograničen sa  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , zadata diferencijalna jednačina zajedno sa graničnim uslovima

$$-\nabla \cdot (\varepsilon \nabla f) + \beta f = g, \quad (3.18)$$

$$f = V_0, \text{ na } \Gamma_1, \quad (3.19)$$

$$\varepsilon \mathbf{n} \cdot \nabla f = D_{n0}, \text{ na } \Gamma_2. \quad (3.20)$$

U (3.18) je  $f$  nepoznata funkcija (u posmatranom slučaju funkcija potencijala  $V$ ),  $\varepsilon$  i  $\beta$  su poznati parametri sredine, a  $g$  su izvori, tj. u matematičkom smislu funkcija pobude. Ako je domen prostorni, ograničavaju ga površine, a ako je površinski (2D), ograničavaju ga konture. Diferencijalna jednačina (3.18) se može pisati i u obliku  $\text{div} \mathbf{D} + \beta f = g$ , gde je vektor električne indukcije  $\mathbf{D} = -\varepsilon \text{grad} f$ . Izraz (3.18) se može u *Descartes*-ovom koordinatnom sistemu zapisati kao

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( \varepsilon \frac{\partial f}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \varepsilon \frac{\partial f}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \varepsilon \frac{\partial f}{\partial z} \right) + \beta f = g,$$

odnosno, u kompaktnijem obliku,

$$Lf = g,$$

$$\text{gde je operator } L = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \varepsilon \frac{\partial}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \varepsilon \frac{\partial}{\partial z} \right) + \beta, (x, y, z) \in \Omega.$$

Izraz (3.19) predstavlja *Dirichlet*-ov (uslov prve vrste), a izraz (3.20) *Neumann*-ov granični uslov (uslov druge vrste). Ako na površini (odnosno konturi, kod 2D problema) koja razdvaja oblasti 1 i 2 parametri sredine imaju skokovite promene, potrebno je da budu zadovoljeni uslovi prve i druge vrste, odnosno uslovi neprekidnosti kako funkcije, tako i njenog prvog izvoda,

$$f_1 = f_2 \text{ i } \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{n},$$

### 3. Metoda konačnih elemenata (FEM)

gde je  $\mathbf{n}$  normala na površinu (konturu kod 2D), usmerena bilo u sredinu 1, bilo u sredinu 2. U literaturi se problem definisan sistemom (3.18) – (3.20), koji sadrži diferencijalnu jednačinu uz granične uslove, označava kao *jaka (klasična) forma/oblik* (strong form) opisivanja konturnog problema. U posmatranom slučaju, kod jake forme konturnog problema, originalni operator sadrži drugi izvod.

Rešenje posmatranog sistema datog jednačinama (3.18) – (3.20) usvaja se u obliku aproksimacione funkcije, obično polinomske. Aproksimacione funkcije (funkcije bazisa) mogu biti različitog stepena neprekidnosti;  $C^0$  označava neprekidnost funkcije,  $C^1$  - neprekidnost i funkcije i njenih prvih izvoda, uopšte je  $C^m$  neprekidnost - neprekidnost i funkcije i njenih izvoda do  $m$ -tog reda. U opštem slučaju, kada se problem opisuje sistemom parcijalnih diferencijalnih jednačina, *jaka formulacija* zahteva neprekidnost i funkcije i njenih izvoda sve do reda uključenih parcijalnih izvoda [24]. Dakle, jaka formulacija podrazumeva takav izbor aproksimacione funkcije u smislu njene diferencijabilnosti, da egzaktno budu zadovoljeni svi prethodno navedeni uslovi neprekidnosti. Jaka forma implicira jaku formulaciju. U posmatranom slučaju jaka formulacija zahteva  $C^1$  neprekidnost aproksimacione funkcije. Drugim rečima, potrebno je da usvojena aproksimaciona funkcija bude u domenu originalnog operatora  $L$ , što znači da dejstvo (originalnog) operatora ne rezultuje singularnostima kao što su beskonačne vrednosti na granicama između elemenata. Naime, kod jake formulacije treba da budu egzaktno zadovoljena oba granična uslova (3.19, 3.20) na granicama elemenata. U ovde razmatranom slučaju nepoznate funkcije potencijala, ova dva zahteva neprekidnosti rezultuju u neprekidnosti kako potencijala  $V$ , tako i normalne komponente vektora  $\mathbf{D}$  ( $D_n$ ) kroz granice domena (konačnih elemenata). Podrazumeva se da ovo važi i na granici čitavog domena  $\Omega$  [66], tako da se, kad se aproksimaciona funkcija, koja je rešenje diferencijalne jednačine, ubaci u originalnu jednačinu, ne dobijaju beskonačne vrednosti, odnosno *Dirac*-ovi impulsi. Jake aproksimacione funkcije (funkcije bazisa) se mogu smatrati uopštenim  $C^1$  funkcijama (neprekidnost prvog izvoda funkcije unutar računskog domena). *Generalizovane*  $C^1$  funkcije bazisa su one čiji prvi izvodi pomnoženi poznatim funkcijama (funkcija  $\varepsilon$  u jednačini (3.18))

### 3. Metoda konačnih elemenata (FEM)

imaju  $C^0$  neprekidnost unutar računskog domena i one su u upotrebi kod definisanja jake formulacije u nehomogenim sredinama [71], o čemu će kasnije biti reči.

U cilju lakšeg rešavanja problema uobičajeno je da se uslovi jake forme jednačina oslabe, čime se dobija širi skup približnih rešenja. Kada se uvede proizvoljna probna (test) funkcija  $w$  i potraži integral proizvoda te funkcije i težinskog ostatka za jednačinu (3.18),

$$\int_{\Omega} w(-\nabla \cdot (\varepsilon \nabla f) + \beta f - g) d\Omega = 0, \quad (3.21a)$$

jednačina (3.21a) predstavlja *slabu formu/oblik* (weak form). Pogodno je pokazati da u ovako dobijenoj jednačini ni formalno ne figuriše drugi izvod. Neka je, na primer, 3D domen podeljen na tetraedre, tako da svaki konačni element ima četiri čvora. Opštosti radi, u slučaju anizotropne sredine se (3.18) može pisati u obliku [27]

$$g = -\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} f) + \beta f = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \varepsilon_x \frac{\partial f}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \varepsilon_y \frac{\partial f}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \varepsilon_z \frac{\partial f}{\partial z} \right) + \beta f,$$

gde je  $\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$  tenzor dielektrične permitivnosti.

Težinski ostatak je sada oblika

$$r = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \varepsilon_x \frac{\partial f}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \varepsilon_y \frac{\partial f}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \varepsilon_z \frac{\partial f}{\partial z} \right) + \beta f - g.$$

Za tetraedar kao konačan element,  $e$ , zapremine  $v^e$ , integral težinskog ostatka za čvor  $i$  je:

$$R_i^e = \int_{v^e} w_i^e r dv = \int_{v^e} w_i^e \left( -\frac{\partial}{\partial x} \left( \varepsilon_x \frac{\partial f^e}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \varepsilon_y \frac{\partial f^e}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \varepsilon_z \frac{\partial f^e}{\partial z} \right) + \beta f^e - g \right) dv,$$

$$i = 1, 2, 3, 4.$$

Imajući u vidu diferencijalnu relaciju [3]

$$w \operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} f) = \operatorname{div}(w \varepsilon \operatorname{grad} f) + \varepsilon \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} w,$$

### 3. Metoda konačnih elemenata (FEM)

kao i teoremu Gaus-Ostrogradskog:

$$\int_{v^e} \operatorname{div}(w\mathbf{D})dv = \oint_{S^e} w\mathbf{D} \cdot \mathbf{n}dS,$$

pri čemu je  $\mathbf{D} = -\varepsilon \operatorname{grad} f$ , integral težinskog ostatka konačno postaje

$$R_i^e = \int_{v^e} \left( \varepsilon_x \frac{\partial w_i^e}{\partial x} \frac{\partial f^e}{\partial x} + \varepsilon_y \frac{\partial w_i^e}{\partial y} \frac{\partial f^e}{\partial y} + \varepsilon_z \frac{\partial w_i^e}{\partial z} \frac{\partial f^e}{\partial z} \right) dv - \int_{v^e} w_i^e f^e dv - \oint_{S^e} w_i^e \mathbf{Dn}^e dS, \quad (3.21b)$$

gde je  $S^e$  površina koja ograničava zapreminu  $v^e$ , a  $\mathbf{n}$  je jedinični vektor spoljašnje normale na  $S^e$ . Sada je potrebno da se nepoznata funkcija potencijala na  $e$ -tom konačnom elementu,  $V^e = f^e$ , prikaže u obliku sume

$$f^e = \sum_{j=1}^4 f_j^e,$$

gde su  $f_j^e$  funkcije bazisa. Kod Galerkinove formulacije je još i  $w_i^e = f_i^e$ . Ovim je pokazano da u ovako modifikovanoj jednačini (3.21b) figurišu samo prvi izvodi, za razliku od jednačine (3.18). Praktično se sada, kod slabe forme jednačina, umesto originalnog operatora  $L$  iz (3.18) kod koga se zahteva  $C^1$  neprekidnost aproksimacione funkcije, upotrebljava prošireni operator koji zahteva samo neprekidnost aproksimacione funkcije unutar računskog domena, odnosno na granicama između elemenata, tj.  $C^0$  neprekidnost. Ako rešenje nije u domenu originalnog operatora, ali jeste u domenu operatora unutrašnjeg proizvoda, tj. proširenog operatora u jednačini (3.21b), koeficijenti u (3.4) su konačni, pa je sistem linearnih algebarskih jednačina regularan i radi se o *slaboj formulaciji* (pri čemu se podrazumeva da usvojene aproksimacione funkcije imaju za jedan stepen nižu neprekidnost u odnosu na zahteve jake forme istog problema). Prošireni operator tada „proširuje“ i oblast rešenja u smislu da „dozvoljava“ da rešenja budu i tipa Dirac-ove i/ili *Heaviside*-ove funkcije. Kod slabe formulacije uslovi za neprekidnost normalne komponente vektora  $\mathbf{D}$  na granicama između konačnih elemenata nisu zadovoljeni egzaktno. Otuda prisustvo veštačkih površinskih naelektrisanja na granicama između elemenata, koja u stvarnosti ne postoje.

### 3. Metoda konačnih elemenata (FEM)

U velikom broju knjiga i članaka u koje je autorka imala uvid, najpre se definiše jaka forma problema (*strong form*), odnosno jednačine tipa (3.18-3.20). Zatim se, u cilju lakšeg rešavanja odmah prelazi na slabu formu (*weak form*) koja se dobija pošto se primeni unutrašnji proizvod sa test funkcijama na jednačinu (3.18), a zatim parcijalna integracija. Tako dobijena jednačina, (3.21b), zahteva za jedan stepen nižu neprekidnost funkcija bazisa. Pri tome se ne napominje kako funkcije bazisa zadovoljavaju granične uslove na obodu domena i ne navodi eksplicitno koji stepen neprekidnosti treba da bude zadovoljen, već se prećutno podrazumeva da slaba forma implicira samo slabu formulaciju. Tačno je da slaba forma jednačina zahteva bar slabu formulaciju, tj.  $C^0$  neprekidnost. Međutim, i slaba i jaka formulacija se mogu primeniti kako kod jake tako i kod slabe forme jednačina (sistema jednačina). Jaka formulacija kod jake forme jednačina daje „jako rešenje“, koje, ako može da se direktno odredi, egzaktno zadovoljava oba granična uslova. Jasno je da slaba formulacija kod jake forme nije dovoljna i da bi prouzrokovala singularitete na granicama elemenata. Jaka formulacija kod slabe forme jednačina daje rešenje koje takođe egzaktno zadovoljava oba granična uslova. Dakle, ako se aproksimacione funkcije (funkcije bazisa), formiraju tako da pomoću njih mogu da se egzaktno zadovolje oba granična uslova (imaju  $C^1$  neprekidnost), formulacija je jaka, iako je na originalnu diferencijalnu jednačinu primenjen unutrašnji proizvod, tj. formalno je oslabljena, pa imamo slabu formu jednačina (*weak form*). Jaka formulacija omogućuje prirodno i jednostavno unošenje i zadovoljavanje graničnih uslova prve i druge vrste, što predstavlja njenu osnovnu prednost [65-67, 71-74]. Iz ovog razloga će posebno poglavlje biti posvećeno funkcijama bazisa, a poseban odeljak tog poglavlja jakim funkcijama bazisa.

#### **3.3. Pregled značajnih FEM referenci vezanih za statički i kvazistatički proračun, varijacionu i Galerkinovu metodu i jaku i slabu formulaciju**

S obzirom na to da je FEM multidisciplinarno primenjivan dugi niz godina, nije moguće dati iscrpan pregled svih značajnih radova u ovoj oblasti, već se treba usmeriti na užu klasu prema njihovom značaju za ovaj rad. Od interesa je pregled prema tipu predloženih konačnih elemenata (od interesa kao jedna od smernica za dalji rad), tipu

### 3. Metoda konačnih elemenata (FEM)

analiziranih problema (kvazistatička, kompletna talasna analiza), tipu domena (zatvoreni, otvoreni), primenjenoj metodologiji na kojoj je zasnovan FEM (varijacioni, Galerkinov) i tipu forme i formulacije (jaka, slaba). Pregled referenci koje se tiču otvorenih problema je dat u poslednjem poglavlju.

Da bi se precizno modelovali zakrivljeni delovi strukture, kao osnovni geometrijski elementi u jednoj grupi radova koriste se zakrivljene žice, površine i zapremine višeg reda. Kod MoM-a se koristi zakrivljeni parametarski četvorougao, a kod 3D FEM-a generalizovan heksaedar. U [92] je analizirana tačnost velikog krivolinijskog parametarskog heksaedra Lagranžovog tipa višeg (proizvoljnog) reda i ispitan uticaj geometrije heksaedra na tačnost rešenja. Pokazuje se da veliki konačni elementi, čije su dimenzije reda veličine talasne dužine  $\lambda$  u posmatranoj sredini mogu značajno redukovati broj nepoznatih za zadati problem i dalje povećati tačnost i efikasnost FEM-a.

U [101] je predstavljen generalizovan heksaedar višeg reda koji je upotrebljen za modelovanje nehomogenog supstrata pri čemu je omogućena kontinualna promena parametara sredine u samom elementu.

Postoji veliki broj komercijalnih softverskih paketa, kao i softverskih paketa koji se mogu u celini ili delimično preuzeti sa interneta [57,58]. Među njima su za elektrostatičke proračune značajni ESTAT [102], FEMM [103], Quickfield [104], Hiphi [105], FINEL [106], ELMER [107] itd. Na osnovu uvida u tehnički opis ovih paketa, zaključuje se da rade sa čvrno zasnovanim funkcijama bazisa i uglavnom vrše minimizaciju energetske funkcionala. Od velikog broja radova koji se bave kvazistatičkom analizom biće izdvojeno nekoliko, gde su sa rezultatima nekih od njih poređeni rezultati ovog rada.

U [108] je primenom FEM-a prikazana 2D kvazi-TEM analiza nekoliko tipova oklopljenih vodova, usamljenih ili spregnutih traka. Za dobijanje raspodele potencijala u poprečnom preseku voda korišćeni su elementi prvog ili višeg reda, kao i singularni elementi. Korišćen je varijacioni postupak za formiranje FEM jednačina, čijim se rešavanjem dobija podužna kapacitivnost, na osnovu koje se računa karakteristična impedansa i efektivna permitivnost. Sa nekim rezultatima ovog rada Petrović i Mančić



### 3. Metoda konačnih elemenata (FEM)

su poredili rezultate dobijene slabom i jakom FEM formulacijom sa funkcijama bazisa predloženim u ovoj tezi i dobili dobro slaganje rezultata [74].

U [109] je data kompletna talasna FEM analiza vodova. U [110] je data 2D kvazistatička analiza voda pravougaonog poprečnog preseka upotrebom komercijalnog programskog paketa COMSOL sa sajta [www.comsol.com](http://www.comsol.com), koji, prema uvidu u dokumentaciju, radi sem kvazistatičke, i kompletnu talasnu analizu. Paket predstavlja otvorenu platformu za dopisivanje koda, a radi sa *Lagrange*-ovim i *Hermite*-ovim čvorno zasnovanim funkcijama bazisa. U [111] je izvršena 2D kvazistatička analiza oklopljene invertovane mikrostrip linije upotrebom gotovih programskih FEM paketa sa sajta <http://www.freefem.org>, gde se nalaze programski paketi zasnovani na minimizaciji funkcionala. U [112] je FEM sa linearnim trougaonim elementima i sa adaptivnom mrežom primenjen na kvazi TEM analizu oklopljenog voda na podlozi sa gubicima, gde su najpre određene podužne kapacitivnosti sa i bez dielektrika, a zatim primenom *Perlows*-ove jednačine približno određeni gubici u provodnicima i dielektriku. U [113] je COMSOL primenjen u kvazistatičkoj analizi oklopljenog mikrostrip voda sa i bez dielektrika, a korišćena je adaptivna FEM mreža trougaonih elemenata. U [114] i [115] je vršena minimizacija funkcionala energije i korišćeni vektorski konačni elementi. Upotrebljeni su *Lagrange*-ovi interpolacioni polinomi drugog reda i šestočvorni trougaoni konačni elementi. U [66] je izvršena „provera“ bilansa snage za jaku i slabu FEM formulaciju EM problema i ovom radu će, zbog njegove važnosti, biti posvećena pažnja u posebnom odeljku ovog poglavlja iako se ne radi o kvazistatičkoj analizi.

U [116] su razmatrani elementi višeg reda. Prezentovan je zakrivljeni parametarski četvorougao sa aproksimacijom za površinske struje i njegova primena u MoM-u. kao i generalizovani heksaedar i njegova primena u FEM-u sa komponentama električnog polja koje su aproksimirane preko konačnih suma. Modelovan je sferični rezonator pomoću poddomenske aproksimacije malim tetraedrima i celodomenske aproksimacije heksaedrima višeg reda. Ispostavilo se da celodomenska aproksimacija daje istu tačnost kao poddomenska sa 17 puta manjim brojem nepoznatih i ima bržu konvergenciju od poddomenske. U [80] je na benchmark primeru kvadratnog koaksijalnog voda izvršeno poređenje MoM, EEM i FEM (Galerkinova varijanta, slaba

### 3. Metoda konačnih elemenata (FEM)

formulacija). U [81] je analizirano kako red slabe funkcije bazisa utiče na konvergenciju permitivnosti i karakteristične impedanse kvadratnog koaksijalnog voda. Jaka FEM formulacija predstavljena je u radovima [67-74]. Kad je u pitanju jaka formulacija, u dostupnoj literaturi je malo radova koji su vezani za kvazistatičku analizu. U [117] je slaba FEM formulacija primenjena na kvadratni koaksijalni vod sa promenljivom visinom anizotropnog dielektričnog čepa. U [71] je jaka FEM formulacija primenjena na oklopljen trakasti vod sa homogenim anizotropnim supstratom, a rezultati su upoređeni sa rezultatima dobijenim metodom potpune talasne analize na nižim učestanostima [118].

Formiranje mreže je preduslov za sprovođenje FEM procedure i može biti veoma složen korak koji unosi veliku grešku u postupak izračunavanja. Bezmrežne metode (meshless, meshfree) [119], se koriste za formiranje sistema algebarskih jednačina za ceo domen bez upotrebe prethodno definisane mreže koja povezuje čvorove kao kod FEM-a. Ove metode doživljavaju ekspanziju počev od sedamdesetih godina prošlog veka, a dele se na bezmrežne metode sa slabom (weak) formom, mešovite (strong-weak) bezmrežne metode ili MWS, i bezmrežne metode sa jakom (strong) formom jednačina. Jedino bezmrežne metode koje koriste jaku formu jednačina zaista nemaju mrežu, dok bezmrežne sa slabom i mešovitom formom koriste takozvane domene „podrške“ u okolini čvorova i po tim domenima se vrši integracija. Potreba za bezmrežnim metodama sa jakom formom je proizašla ne samo zbog potrebe da se izbegne mreža, već i zbog činjenice da tzv. slaba rešenja (slaba formulacija se praktično podrazumeva kod komercijalnih FEM paketa), ne mogu da obezbede neprekidnost prvog izvoda, što onemogućava tačno određivanje traženih veličina koje imaju derivativnu prirodu. Jaka forma bezmrežnih metoda nema numeričku integraciju jer diferencijalnu jednačinu domena zajedno sa graničnim uslovima direktno diskretizuje u tačkama polja za dobijanje sistema jednačina. Njene prednosti su jednostavan algoritam, efikasnost i realno odsustvo mreže ali ima i ozbiljne nedostatke jer je takva bezmrežna metoda često nestabilna a može da bude netačna naročito kad je u pitanju uvođenje derivativnog (*Neumann*-ovog) graničnog uslova. Za uvođenje *Neumann*-ovog uslova se primenjuju različite strategije, kao što je upotreba fiktivnih čvorova koji realno ne

### 3. Metoda konačnih elemenata (FEM)

postoje, upotreba bezmrežnih funkcija *Hermite*-ovog tipa (koje imaju  $C^1$  neprekidnost) i upotreba regularne mreže na granici gde postoji *Neumann*-ov granični uslov [119].

Kod slabe forme glavna parcijalna diferencijalna jednačina zajedno sa graničnim uslovima se transformiše na skup sistema „slabih“ integralnih jednačina primenom različitih tehnika. Slaba forma se zatim koristi za dobijanje sistema algebarskih jednačina kroz proces numeričke integracije korišćenjem skupova ćelija u pozadini koje se mogu globalno ili lokalno konstruisati u domenu analiziranog problema. Postoje *globalne* i *lokalne* slabe bezmrežne metode.

Mešovite bezmrežne (MWS) metode su konstruisane tako da kombinuju prednosti jake i slabe forme i izbegnu njihove nedostatke. MWS metoda ima za cilj da ukloni mrežu koja postoji u pozadini tamo gde je to moguće, da bi se izbegla numerička integracija, što je nedostatak slabih metoda, a da se dobiju još uvek stabilna i tačna rešenja čak i kada diferencijalna jednačina ima i derivativne (*Neumann*-ove) granične uslove. Jaka forma bezmrežnih metoda je najbolja za probleme sa *Dirichlet*-ovim graničnim uslovima, a slaba forma je optimalna za probleme sa *Neumann*-ovim graničnim uslovima. Mešovita (MWS) forma je njihova kombinacija i pogodna je za probleme gde postoje i *Dirichlet*-ovi i *Neumann*-ovi granični uslovi. MWS metoda uzima najmanji broj domena podrške za integraciju i njena tačnost je skoro idealna kad su u pitanju bezmrežne metode jer obezbeđuje stabilna i tačna rešenja. Glavna strategija lokalnih (MLWS) metoda je da se slaba forma primeni za uspostavljanje diskretnog sistema jednačina samo za one čvorove na delu konture gde postoje prirodni (*Neumann*-ovi) granični uslovi. Za ostale čvorove domena ili na granici gde postoji *Dirichlet*-ov uslov, primenjuje se jaka forma, pa za te čvorove nema numeričke integracije. U [120] je upotrebljena lokalna mešovita, MLWS, i lokalna slaba (Petrov-Galerkinova, MLPG), bezmrežna metoda u rešavanju dvodimenzionalnih hiperboličkih jednačina telegrafičara. Rezultati su međusobno upoređeni u pogledu potrebnog vremena računanja i greške. Pokazalo se da MLWS metoda u poređenju sa MLPG ima dobru efikasnost i prihvatljivu tačnost. U [121] je izvršeno poređenje jake DAM (difuzna aproksimaciona metoda) i slabe (MLPG) forme bezmrežnih metoda za 2D difuzionu jednačinu. Rezultati dobijeni pomoću obe metode su upoređeni sa rezultatima dobijenim pomoću FEM-a i FD-a (metoda konačnih razlika) i pokazuju sličnu tačnost i istu brzinu

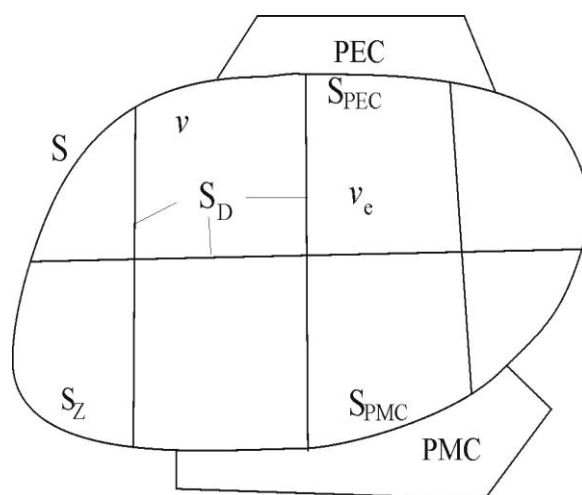
### 3. Metoda konačnih elemenata (FEM)

konvergencije. U [122] je prikazana 3D procedura koja spaja BEM sa bezmrežnom metodom stroge forme a primenjena je u analizi mehaničkih problema kao što je jedinična kocka pod uniformnim pritiskom i torzija cilindričnog štapa. U [123] je slaba (MLPG) forma bezmrežnih metoda izložena kao procedura za 2D elektrostatičke probleme.

Zaključuje se da je kod FEM-a prisustvo mreže veliki problem kada je u pitanju modelovanje složenih konfiguracija. Zbog toga s jedne strane postepeno evoluira u bezmrežne metode zbog potrebe da se rešavaju veoma kompleksni problemi. Međutim, kod bezmrežnih metoda još uvek nisu globalno rešeni mnogi nedostaci. Sa druge strane funkcije bazisa koje nisu čvrno zasnovane mogle bi da budu jedan od pravaca razvoja, jer ne unose dodatne čvorove, pa samim tim ne usložnjavaju mrežu.

#### 3.4. Galerkinova FEM metodologija u elektromagnetici

U [66] je na originalan način prikazana Galerkinova FEM metodologija za elektromagnetsko polje u nehomogenoj sredini i dato razjašnjenje nekih njenih bitnih elemenata koji se ne mogu naći u drugoj literaturi, te je od izuzetnog značaja za ovu disertaciju, iako se ne radi o elektrostatičkom pristupu u razmatranju problema. Polazeći od rezultata iz dela te reference, koji će biti prikazani u ovom delu poglavlja, u odeljku 3.5 biće izvedena Galerkinova FEM metodologija za elektrostatički problem.



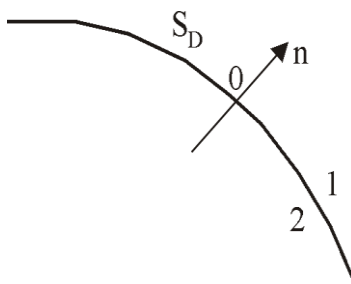
Sl. 3.12. Domen  $v$  podeljen na elemente.

U [66] se posmatra zapreminski domen  $v$ , u kome se traži rešenje, kontinualno i/ili diskontinualno nehomogen (sl. 3.12). Unutar domena postoje zapreminske i

### 3. Metoda konačnih elemenata (FEM)

površinske pobudne struje ugaone učestanosti  $\omega$  i kompleksnih struja  $\mathbf{J}_i$  i  $\mathbf{J}_{si}$ . Domen  $v$  je podeljen na poddomene (konačne elemente), tako da su diskontinuiteti parametara sredine i površine sa pobudnim površinskim strujama obavezno granice između elemenata. Neka je  $v_e$  domen  $e$ -tog elementa ( $e=1,2,3,\dots,N$ ), a površine između granica elemenata  $S_D$ . Da bi rešenje bilo jedinstveno, potrebno je da zadovoljava *Maxwell*-ove jednačine unutar elemenata, granične uslove za tangencijalne komponente električnog i magnetskog polja između elemenata, kao i da zadovoljava odgovarajuće granične uslove na površini  $S$  domena  $v$ . Ovi granični uslovi mogu biti

- 1) zadato  $\mathbf{E}_t$ ,
- 2) zadato  $\mathbf{H}_t$  ili
- 3) zadata njihova linearna kombinacija na  $S$ .



Sl. 3.13. Površina diskontinuiteta.

Na razdvojnoj površini  $S_D$  se uvodi osa  $n$  i vektor normale  $\mathbf{n}$ , kao na sl. 3.13. Neka je sredina kontinualno nehomogena, parametara  $\epsilon_e = \epsilon - j\sigma/\omega$  i  $\mu$ . Polazeći od  $\text{rot}\mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}$  i  $\text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J}_i + \mathbf{J}_{si}\delta(n) + j\omega\epsilon_e\mathbf{E}$ , gde je  $\delta(n)$ -delta funkcija koordinate  $n$ , dobija se talasna jednačina za vektor  $\mathbf{E}$  u nehomogenoj sredini:

$$\text{rot}\left(\frac{1}{\mu}\text{rot}\mathbf{E}\right) - \omega^2\epsilon_e\mathbf{E} = -j\omega(\mathbf{J}_i + \mathbf{J}_{si}\delta(n)), \quad (3.22)$$

gde je uslov  $\text{div}\mathbf{E} = 0$  automatski zadovoljen, a granični uslov na  $S_D$  za vektor  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0$ , mora biti zadovoljen unapred i automatski. Jednačina (3.22) je unija

### 3. Metoda konačnih elemenata (FEM)

dve jednačine: jedna je sama jednačina u regularnoj oblasti  $v_{\text{reg}} = \bigcup_{e=1}^N v_e$ , a druga je granični uslov za vektor  $\mathbf{H}$  na površini između elemenata,  $S_D$ ,

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_{si},$$

pomnožen sa  $-j\omega\delta(n)$ , što znači da su zadovoljavanjem jednačine (3.22) automatski zadovoljene *Maxwell*-ove jednačine unutar elemenata i granični uslov za  $\mathbf{H}$  između elemenata. Od graničnih uslova na spoljašnjoj površini  $S$  se definišu

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0 \text{ na } S_{\text{PEC}},$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H} = 0 \text{ na } S_{\text{PMC}} \text{ i} \quad (3.23)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H} = Y \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \text{ na } S_Z.$$

Kada se dobije rešenje za  $\mathbf{E}$ , vektor  $\mathbf{H}$  se direktno dobija iz druge *Maxwell*-ove jednačine

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{j\omega\mu} \text{rot}\mathbf{E}. \quad (3.24)$$

Numeričkim rešavanjem sistema jednačina (3.22) i (3.24) dobijaju se približna rešenja  $\mathbf{E}_a$  i  $\mathbf{H}_a$  za koja jednačina (3.22) važi približno, a (3.24) egzaktno.

$$\mathbf{H}_a = -\frac{1}{j\omega\mu} \text{rot}\mathbf{E}_a. \quad (3.25)$$

FEM metodologija zahteva da funkcije bazisa unapred egzaktno zadovolje kontinualnost tangencijalne komponente električnog polja između elemenata. Granični uslov za vektor  $\mathbf{H}$  se unapred zadovoljava samo kod jake formulacije. Kod slabe formulacije se zadovoljava samo približno, kroz Galerkinovu metodu. Ako se sa  $w$  označi vektorska funkcija bazisa  $f_j$ , potraži unutrašnji proizvod jednačine (3.22), i iskoristi identitet o proširenoj divergenciji, PRILOG 1, dobija se

$$\int_v \mathbf{H}_a \text{rot} w^* dv + \int_s w^* (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_a) dS - j\omega \int_v \epsilon_e w^* \mathbf{E}_a dv = \int_v w^* \mathbf{J}_i dv + \int_{S_D} w^* \mathbf{J}_{si} dS, \quad (3.26)$$

### 3. Metoda konačnih elemenata (FEM)

gde je  $\mathbf{H}_a$  dato jednačinom (3.25). Kako je  $w$  kontinualno u domenu  $v$ , u gornjoj jednačini su sve podintegralne funkcije regularne, pa se integracija može vršiti i po regularnoj oblasti  $v_{reg}$ , što znači da se integrali u (3.26) mogu dobiti sabiranjem integrala po pojedinim elementima postupkom “sklapanja” (assembly). Jednačina (3.26) je jednaka zbiru dve jednačine koje se dobijaju primenom unutrašnjeg proizvoda na talasnu jednačinu u regularnoj oblasti i na granični uslov za  $\mathbf{H}$  na granicama između elemenata.

$$\int_{v_{reg}} \mathbf{H}_a \text{rot} w^* dv + \oint_S w^* (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_a) dS - \oint_{S_D} w^* (\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_{1a} - \mathbf{H}_{2a})) dS - j\omega \int_{v_{reg}} \epsilon_e w^* \mathbf{E}_a dv = \int_v w^* \mathbf{J}_i dv, \quad (3.27)$$

$$\oint_{S_D} w^* (\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_{1a} - \mathbf{H}_{2a})) dS = \int_{S_D} w^* \mathbf{J}_{si} dS. \quad (3.28)$$

Dobijene jednačine važe i za jaku, i za slabu formulaciju.

#### 3.4.1. Unošenje graničnih uslova

Granični uslovi na površini  $S$  se mogu uneti u proceduru na dva načina: konstrukcijom funkcija bazisa koje automatski zadovoljavaju granične uslove na čitavoj površini  $S$ , i unošenjem graničnih uslova u proceduru testiranja Galerkinovom metodom.

Prednost prvog načina je egzaktno zadovoljenje graničnih uslova (što rezultuje manjim brojem nepoznatih) i nenarušavanje sistema jednačina po Galerkinovoj metodi. Nedostatak ovog načina je što je konstrukcija funkcija bazisa koje automatski zadovoljavaju sve granične uslove obično vrlo komplikovana, a u nekim slučajevima i nemoguća. Ovaj način se praktično može primeniti samo kod jake formulacije.

Prednost drugog načina je jednostavnost implementacije, a osnovni nedostatak je da narušava originalni sistem jednačina po Galerkinovoj metodi. On se može primeniti i kod jake, i kod slabe formulacije. Osnovna metodologija ovog načina je da se drugi i treći tip graničnih uslova iz (3.23) formalno pomnože funkcijama  $\delta(n)$  i testiraju istim

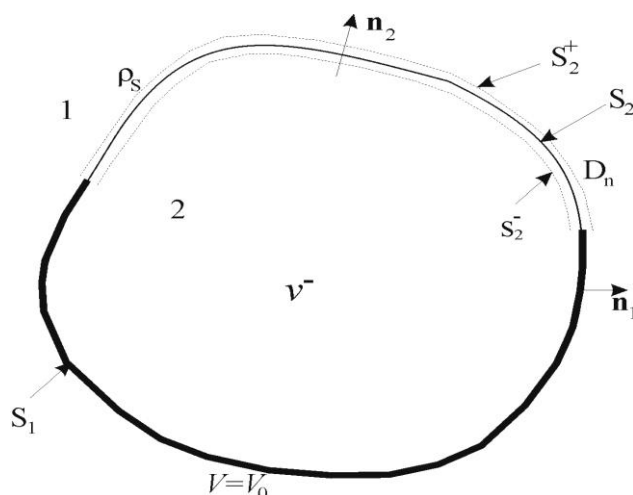
### 3. Metoda konačnih elemenata (FEM)

skupom test funkcija kao osnovna jednačina. Imajući u vidu da su na  $S_{PEC}$  sve funkcije bazisa automatski jednake nuli, drugi integral jednačine (3.26) postaje

$$\oint_S w^* (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_a) dS = \int_{S_z} Y w^* (\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times E_a)) dS . \quad (3.29)$$

Alternativna metodologija ovog načina primenljiva je samo na jaku formulaciju. Kako su kod jake formulacije  $\mathbf{E}_t$  i  $\mathbf{H}_t$  na površini  $S$  jednaki odgovarajućim koeficijentima  $a_k$ , treći, granični uslov može se uneti u sistem unošenjem linearnih veza između takvih koeficijenata [65]. To zahteva da se iz kompleta test funkcija izostavi određen broj funkcija, što narušava kompletnost Galerkinove metode.

### 3.5. Galerkinova FEM metodologija za elektrostatički problem i računanje karakteristika konačnih elemenata



Sl. 3.14. Domen  $v$ .

Za zatvoren 3D domen sa sl. 3.14., ograničen površinom  $S$ , pri čemu je  $S = S_1 \cup S_2$ , gde na  $S_1$  postoje *Dirichlet*-ovi, a na  $S_2$  *Neumann*-ovi uslovi, polazeći od jednačina elektrostatičke i graničnih uslova:

$$\text{div} \mathbf{D} = \rho \quad (3.30)$$

$$V = V_0 \text{ na } S_1, \quad (3.31)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_s, \text{ odnosno } D_{1n} - D_{2n} = \rho_s \text{ na } S_2, \quad (3.32)$$



### 3. Metoda konačnih elemenata (FEM)

kao i izraza za proširenje divergencije na granici (PRILOG 1)

$$\operatorname{div} \mathbf{d} = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_2) \delta(\mathbf{n}),$$

dolazi se do jednačine:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} - \rho + \delta(\mathbf{n}_2)(D_{1n} - D_{2n} - \rho_s) + \delta(\mathbf{n}_1)(V - V_0)C = 0, \quad (3.33)$$

gde je  $C$  konstanta.

Kako je proširena divergencija:

$$\operatorname{div}_{\text{ext}} \mathbf{D} = \operatorname{div} \mathbf{D} + \delta(\mathbf{n}_2)(D_{1n} - D_{2n}),$$

dobija se konačno

$$\operatorname{div}_{\text{ext}} \mathbf{D} - \rho - \delta(\mathbf{n}_2)\rho_s + \delta(\mathbf{n}_1)(V - V_0)C = 0. \quad (3.34)$$

Posle množenja težinskom funkcijom dobija se

$$w \operatorname{div}_{\text{ext}} \mathbf{D} - \rho w - \delta(\mathbf{n}_2)\rho_s w + C(V - V_0)\delta(\mathbf{n}_1)w = 0. \quad (3.35)$$

Imajući u vidu da je

$$w \operatorname{div}_{\text{ext}} \mathbf{D} = \operatorname{div}_{\text{ext}}(w \mathbf{D}) - \mathbf{D} \cdot \operatorname{grad} w,$$

potražimo unutrašnji proizvod

$$\int_{v^-} \operatorname{div}_{\text{ext}}(w \mathbf{D}) dv - \int_{v^-} \mathbf{D} \cdot \operatorname{grad} w dv - \int_{v^-} \rho w dv - \int_{S_2} \rho_s w dS + \int_{S_1} C(V - V_0)w dS = 0. \quad (3.36)$$

Posle primene teoreme Gaus-Ostrogradskog:

$$\int_{v^-} \operatorname{div}_{\text{ext}}(w \mathbf{D}) dv = \oint_{S^-} w \mathbf{D} d\mathbf{S},$$

dobija se:

$$\oint_{S^-} w \mathbf{D} d\mathbf{S} - \int_{v^-} \mathbf{D} \cdot \operatorname{grad} w dv - \int_{v^-} \rho w dv - \int_{S_2} \rho_s w dS + \int_{S_1} C(V - V_0)w dS = 0. \quad (3.37)$$

Posle smene za  $\rho_s = D_{2n} - D_{2n_0}$  na  $S_2$ , dobija se:

$$\oint_{S^-} w \mathbf{D} d\mathbf{S} - \int_{v^-} \mathbf{D} \cdot \operatorname{grad} w dv - \int_{v^-} \rho w dv - \int_{S_2} (D_{2n} - D_{2n_0})w dS + \int_{S_1} C(V - V_0)w dS = 0. \quad (3.38)$$

### 3. Metoda konačnih elemenata (FEM)

Kako je  $S^- = S_1 + S_2$  i

$$\oint_{S^-} w \mathbf{D} d\mathbf{S} = \int_{S_1} w \mathbf{D}_1 d\mathbf{S} + \int_{S_2} w \mathbf{D}_2 d\mathbf{S},$$

dobija se:

$$-\int_{S_1} w D_{1n} dS + \int_{v_{reg}} \epsilon \text{grad } V \cdot \text{grad } w dv - \int_{v^-} \rho w dv + \int_{S_1} C(V - V_0) w dS - \int_{S_2} w D_{2n0} dS = 0. \quad (3.39)$$

Kako je  $\rho = 0$ , jer nema zapreminskog naelektrisanja unutar regularnog domena,

$$\int_{v^-} \rho w dv = 0,$$

konačno je

$$-\int_{S_1} w \epsilon \frac{\partial V}{\partial n} dS + \int_{v_{reg}} \epsilon \text{grad } V \cdot \text{grad } w dv + C \int_{S_1} V w dS = C \int_{S_1} V_0 w dS + \int_{S_2} w D_{2n0} dS. \quad (3.40)$$

#### 3.5.1 Formiranje jednačina za mrežu konačnih elemenata i unošenje graničnih uslova

Kada se elektrostatički potencijal u gornjoj jednačini aproksimira redom funkcija bazisa:

$$V \approx \sum_{j=1}^N a_j f_j,$$

imajući u vidu da je kod Galerkinove formulacije  $w_i = f_i$ , dobija se sistem jednačina:

$$\sum_{j=1}^N a_j \left( -\int_{S_1} w_j \epsilon \frac{\partial f_j}{\partial n} dS + \int_{v_{reg}} \epsilon \text{grad } f_j \cdot \text{grad } w_i dv + C \int_{S_1} f_j w_i dS \right) = \quad (3.41)$$

$$C \int_{S_1} V_0 w_i dS + \int_{S_2} w_i D_{2n0} dS, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Ovaj sistem jednačina je za 3D elektrostatičke probleme. Takođe važi i za jaku i za slabu formulaciju.

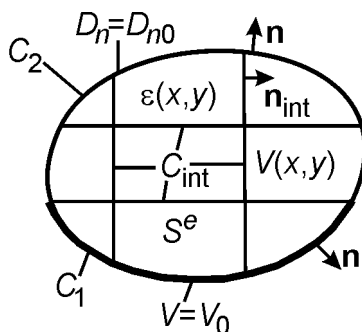
### 3. Metoda konačnih elemenata (FEM)

#### 3.6. Elektrostatička analiza dvodimenzionalnih problema

Kod 2D elektrostatičkih problema (sl. 3.15) figurišu  $\text{div}_S$  i  $\text{grad}_S$  (divergencija i gradijent po površini). Takođe se u sistemu jednačina (3.41) javlja integracija i po konturi, i po površini, umesto integracije po površini i zapremini:

$$\sum_{j=1}^N a_j \left( - \int_{C_1} w_i \varepsilon \frac{\partial f_j}{\partial n} dl + \int_{S_{\text{reg}}} \varepsilon \text{grad} f_j \cdot \text{grad} w_i dS + C \int_{C_1} f_j w_i dl \right) = \quad (3.42)$$

$$C \int_{C_1} V_0 w_i dl + \int_{C_2} w_i D_{2n0} dl, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$



Sl. 3.15. 2D domen podeljen na poddomene (konačne elemente).

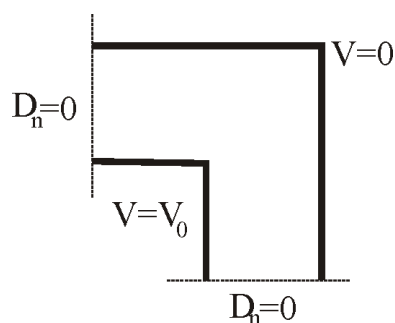
Kada se koriste funkcije bazisa koje automatski (egzaktno) zadovoljavaju *Dirichlet*-ov uslov (zadat potencijal), onda u gornju jednačinu treba staviti  $C=0$ . Za konačne elemente koji se graniče sa provodnikom ograničimo skup funkcija bazisa tako što dozvolimo one funkcije bazisa koje su identički jednake nuli na stranicama koje su uz provodnik. Na taj skup dodajemo funkcije bazisa koje daju konstantan potencijal na granicama uz provodnik. U slučaju čvorno zasnovanih funkcija bazisa to su čvorne funkcije za čvorove koji su na provodniku. U slučaju nečvorno zasnovanih funkcija bazisa o kojima će biti reči u sledećem poglavlju, osim funkcija bazisa nad jednim konačnim elementom (singleti), postoje funkcije bazisa koje su definisane nad dva elementa sa zajedničkom ivicom (dubleti), kao i one koje su definisane nad četiri elementa sa zajedničkim čvorom (kvadrupleti). Tada konstantan potencijal na granicama uz provodnik daju, sem singleta, i delovi kvadrupleta i dubleta uz provodnik. U tim čvorovima se fiksira vrednost potencijala, pa su koeficijenti uz te funkcije unapred poznati i u sistemu jednačina se svi članovi tog tipa stavljaju na desnu stranu kao poznati.

### 3. Metoda konačnih elemenata (FEM)

Dakle, kada se *Dirichlet*-ov granični uslov automatski zadovoljava, sistem jednačina je konačno:

$$\sum_{j=1}^N a_j \left( - \int_{C_1} w_i \varepsilon \frac{\partial f_j}{\partial n} dl + \int_{S_{reg}} \varepsilon \text{grad} f_j \cdot \text{grad} w_i dS \right) = \int_{C_2} w_i D_{2n0} dl, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (3.43)$$

Na delu granice na kome se definiše *Neumann*-ov granični uslov (zadato  $D_n$ ), praktično se ništa ne menja. Taj granični uslov kod zatvorenih problema postoji samo tamo gde se posmatrane geometrije „seku“ na dva ili više simetričnih delova. Na primer, kod simetričnog kvadratnog koaksijalnog voda, tamo gde postoji „presek“, mora da se zada  $D_n$ , koje je jednako 0, jer u tom preseku postoji samo tangencijalna komponenta električnog polja (sl. 3.16.).



Sl. 3.16. Četvrtina kvadratnog koaksijalnog voda – *Neumann*-ov i *Dirichlet*-ov granični uslov.

#### 3.6.1. Matrica sistema

U matričnom obliku se sistem jednačina za ceo domen može pisati kao

$$[K_{ij}]_{N \times N} [a_j]_{N \times 1} = [g_i]_{N \times 1}, \quad (3.44)$$

pri čemu je  $[K_{ij}]_{N \times N}$  retko posednuta matrica (sparse matrix) koja ima veliki broj nula [124], a nenulti elementi su u većini problema grupisani oko glavne dijagonale. Poseban problem kod ovih matrica je još i to da je, u zavisnosti od varijante metode konačnih elemenata i analizirane geometrije, matrica jako velika (veliko  $N$ ), tako da, ako bi se memorisala na klasičan način, bio bi potreban neprihvatljivo veliki memorijski prostor. U radu su korišćene gotove fortranske rutine [77]. Suština pakovanja ovakvih matrica je

### 3. Metoda konačnih elemenata (FEM)

pamćenje samo nenulih elemenata i to u obliku nizova, gde niz sadrži vrednost elementa i njegov indeks. U velikom broju slučajeva matrica sistema je simetrična, što je povoljno, jer je dovoljno memorisati samo polovinu.

U matrici sistema  $[K_{ij}]_{N \times N}$  elementi su

$$k_{ij} = I_1 + I_2 = - \int_{C_1} w_i \varepsilon \frac{\partial f_j}{\partial n} dl + \int_{S_{reg}} \varepsilon \text{grad} f_j \text{grad} w_i dS, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (3.45)$$

Prvi integral u matrici sistema jednačina je:

$$I_1 = - \int_{C_1} w \varepsilon \frac{\partial f}{\partial n} dl. \quad (3.46)$$

Ako se deo konture poklapa sa  $x$ -osom,

$$I_{1x} = - \int_{x_1}^{x_2} w \varepsilon \frac{\partial f}{\partial y} dx, \quad (3.47)$$

što je u lokalnom koordinatnom sistemu (odjeljak 3.1.2)

$$I_{1u} = - \int_{-1}^1 w \varepsilon \frac{\partial f}{\partial v} \frac{h_y}{h_x} du. \quad (3.48)$$

Ako se deo konture poklapa sa  $y$ -osom, analogno prethodnom je

$$I_{1y} = - \int_{y_1}^{y_2} w \varepsilon \frac{\partial f}{\partial x} dy = - \int_{-1}^1 w \varepsilon \frac{\partial f}{\partial v} \frac{h_x}{h_y} du. \quad (3.49)$$

Drugi integral u matrici sistema jednačina u lokalnom koordinatnom sistemu je:

$$I_2 = \int_S \varepsilon (\text{grad}_S f) (\text{grad}_S w) dS = \iint_{u,v} \varepsilon \left( \left( \frac{2}{h_x} \right)^2 \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial w}{\partial u} + \left( \frac{2}{h_y} \right)^2 \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial w}{\partial v} \right) \frac{h_x}{2} \frac{h_y}{2} du dv. \quad (3.50)$$

#### 3.6.2. Računanje podužne kapacitivnosti

Podužna kapacitivnost  $C'$  se može računati preko podužnog naelektrisanja na zidovima provodnika ili preko podužne energije voda.

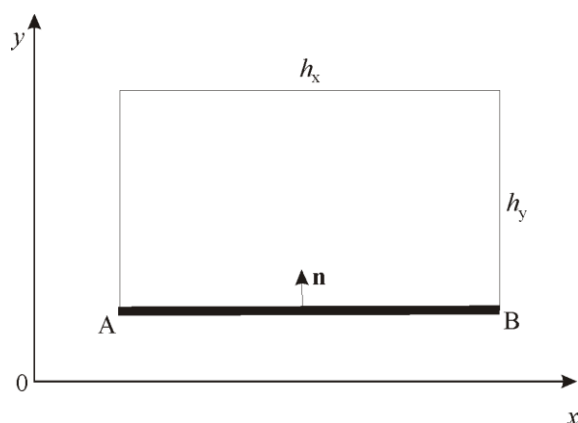
### 3. Metoda konačnih elemenata (FEM)

#### 3.6.2.1. Računanje podužne kapacitivnosti preko podužnog naelektrisanja

Ako se podužna kapacitivnost računa preko podužnog naelektrisanja, polazi se od izraza za gustinu podužnog naelektrisanja koja je jednaka normalnoj komponenti vektora  $\mathbf{D}$  na konturi provodnika u sistemu sa homogenim dielektrikom:

$$\rho_s = D_n = \varepsilon E_n = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial n}.$$

Neka podužno naelektrisanje postoji na delu konture AB koji pripada konačnom elementu dimenzija  $h_x \times h_y$ , kao na sl. 3.17:



Sl. 3.17. Deo konture konačnog elementa na kome postoji podužno naelektrisanje.

$$Q'_{AB} = \int_A^B \rho_s dl = \int_A^B -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial y} dx. \quad (3.51)$$

U lokalnim koordinatama je

$$Q'_{AB} = \int_A^B -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial y} dx = -\frac{h_x}{h_y} \varepsilon \int_{-1}^1 \frac{\partial V}{\partial v} du.$$

Ako se potencijal prikaže u obliku sume u lokalnim koordinatama kao

$$V = \sum_{j=1}^n a_j f_j(u, v),$$

onda je podužno naelektrisanje duž segmenta AB

### 3. Metoda konačnih elemenata (FEM)

$$Q'_{AB} = - \int_A^B \varepsilon \sum_{j=1}^N \left( a_j \frac{\partial f_j}{\partial y} \right) dx, \quad (3.52)$$

gde je  $N$  red funkcija bazisa na konačnom elementu koji pripada konturi AB. U lokalnim koordinatama je

$$Q'_{AB} = - \frac{h_x}{h_y} \varepsilon \int_{-1}^1 \sum_{j=1}^N a_j \frac{\partial f_j(u, v)}{\partial v} du.$$

Kad se sračuna ukupno podužno naelektrisanje, podužna kapacitivnost se računa prema izrazu

$$C' = \frac{Q'}{U} = \frac{\sum_i Q'_i}{U}, \quad (3.53)$$

gde se  $Q'_i$  računa na isti način kao  $Q'_{AB}$ , odnosno  $Q'_i$  predstavlja podužno naelektrisanje duž segmenata  $i$ -tog konačnog elementa koji naležu na konturu provodnika čiji je potencijal poznat i zadat.

Računanje podužne kapacitivnosti preko naelektrisanja za slučaj anizotropnog dielektrika se sprovodi na isti način, s tim što u izrazu (3.52) u konkretnom primeru sa sl. 3.16. umesto  $\varepsilon$  figuriše  $\varepsilon_y$ .

#### 3.6.2.2. Računanje podužne kapacitivnosti preko podužne energije

Podužna kapacitivnost se može izračunati i preko podužne energije sistema. Zapreminska gustina energije je data izrazom

$$w = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}. \quad (3.54)$$

Podužna energija sistema je data izrazom

$$W = \int_s w dS = \frac{1}{2} C' U^2, \quad (3.55)$$

odakle je podužna kapacitivnost

$$C' = \frac{2W}{U^2}. \quad (3.56)$$

### 3. Metoda konačnih elemenata (FEM)

Ako se električno polje u poprečnom preseku voda izrazi kao negativan gradijent potencijala,

$$\mathbf{E} = -\text{grad}_S V = -\frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{i}_x - \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{i}_y, \quad (3.57)$$

i kako je za linearan izotropan dielektrik:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E},$$

skalarni proizvod vektora  $\mathbf{D}$  i  $\mathbf{E}$  u poprečnom preseku voda je:

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} = \varepsilon (\text{grad}_S V)^2, \quad (3.58)$$

odnosno u lokalnim koordinatama

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} = \varepsilon \left( \left( \frac{\partial V}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right) = \varepsilon \left( \frac{4}{h_x^2} \left( \frac{\partial V}{\partial u} \right)^2 + \frac{4}{h_y^2} \left( \frac{\partial V}{\partial v} \right)^2 \right). \quad (3.59)$$

Podužna energija voda je

$$W = \sum_{j=1}^M \int_{S_j} w_j dS, \quad (3.60)$$

gde je  $M$  broj konačnih elemenata u poprečnom preseku voda. Na  $j$ -tom konačnom elementu je gustina energije

$$w_j = \frac{1}{2} \varepsilon (\text{grad} \varphi_j)^2 = \frac{1}{2} \varepsilon \left( \left( \frac{\partial V_j}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_j}{\partial y} \right)^2 \right) = \frac{1}{2} \varepsilon \left( \left( \sum_{i=1}^{N_j} a_i \frac{\partial f_i}{\partial x} \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^{N_j} a_i \frac{\partial f_i}{\partial y} \right)^2 \right), \quad (3.61)$$

gde je  $N_j$  red funkcija bazisa, a  $\varepsilon$  permitivnost dielektrika na  $j$ -tom konačnom elementu.

Gustina energije na  $j$ -tom konačnom elementu u lokalnim koordinatama je

$$w_j = \frac{1}{2} \varepsilon \left( \frac{4}{h_x^2} \left( \frac{\partial V}{\partial u} \right)^2 + \frac{4}{h_y^2} \left( \frac{\partial V}{\partial v} \right)^2 \right) = \frac{1}{2} \varepsilon \left( \frac{4}{h_x^2} \left( \sum_{i=1}^{N_j} a_i \frac{\partial f_i}{\partial u} \right)^2 + \frac{4}{h_y^2} \left( \sum_{i=1}^{N_j} a_i \frac{\partial f_i}{\partial v} \right)^2 \right).$$

Izrazi se modifikuju za slučaj anizotropnog dielektrika, jer u tom slučaju skalarni proizvod (3.59) postaje:



### 3. Metoda konačnih elemenata (FEM)

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} = \varepsilon_x E_x^2 + \varepsilon_y E_y^2,$$

tako da izraz (3.61) postaje

$$w_j = \frac{1}{2} \left( \varepsilon_x \left( \frac{\partial V_j}{\partial x} \right)^2 + \varepsilon_y \left( \frac{\partial V_j}{\partial y} \right)^2 \right) = \frac{1}{2} \left( \varepsilon_x \left( \sum_{i=1}^{N_j} a_i \frac{\partial f_i}{\partial x} \right)^2 + \varepsilon_y \left( \sum_{i=1}^{N_j} a_i \frac{\partial f_i}{\partial y} \right)^2 \right), \quad (3.62)$$

a u lokalnim koordinatama

$$w_j = \frac{1}{2} \left( \varepsilon_x \frac{4}{h_x^2} \left( \frac{\partial V}{\partial u} \right)^2 + \varepsilon_y \frac{4}{h_y^2} \left( \frac{\partial V}{\partial v} \right)^2 \right) = \frac{1}{2} \left( \varepsilon_x \frac{4}{h_x^2} \left( \sum_{i=1}^{N_j} a_i \frac{\partial f_i}{\partial u} \right)^2 + \varepsilon_y \frac{4}{h_y^2} \left( \sum_{i=1}^{N_j} a_i \frac{\partial f_i}{\partial v} \right)^2 \right).$$

Kada se na neki od ova dva gore navedena načina izračuna podužna kapacitivnost voda, karakteristična impedansa i efektivna permitivnost se računaju prema izrazima (2.18) i (2.19) iz drugog poglavlja. Koristeći istu proceduru mogu se proračunavati parametri višezičnih vodova.

### 3.7 Zaključak

U ovom poglavlju dat je detaljniji opis FEM-a, počev od formulacije konturnog problema, varijacione i metode težinskih ostataka, kao dva pravca za formiranje FEM metodologije. Dalje je dat osvrt na jaku i slabu FEM formulaciju, pri čemu je u literaturi široko zastupljena slaba FEM formulacija. Dalje je dat pregled osnovnih konačnih elemenata. Zatim je, oslonivši se na originalan prikaz FEM metodologije iz [66], dat detaljan, postupan prikaz formiranja FEM metodologije za zatvorene 2D i 3D elektrostatičke probleme. Uz pregled referenci koje se tiču ove disertacije, ukazano je na pravce daljeg razvoja kojima se kreće FEM. U okviru kratkog prikaza osnovnih koraka FEM-a, ukazano je na glavne teškoće koje i dalje, uprkos postojanju moćnih računskih mašina, prate metodu. S obzirom na sve komplikovanije zahteve koji se postavljaju pred numeričke metode, neophodno je poboljšanje metoda u cilju, ako ne otklanjanja, onda bar umanjeanja glavnih nedostataka. Kao jedan od mogućih pravaca, uz bezmrežne metode koje su evoluirale iz FEM-a sa razlogom da se izbegne formiranje mreže, predlaže se upotreba nečvorno zasnovanih funkcija bazisa koje zahtevaju prisustvo mreže, ali je ne komplikuju dodatno sa porastom reda funkcija bazisa čime se popravljaju tačnost, jer ne unose dodatne čvorove. Stoga je sledeće poglavlje posvećeno funkcijama

### 3. Metoda konačnih elemenata (FEM)

bazisa, pri čemu je, uz pregled čvorno zasnovanih, posebna pažnja posvećena nečvorno zasnovanim funkcijama bazisa za jaku formulaciju, koje omogućavaju jednostavno zadovoljavanje graničnih uslova kako prve, tako i druge vrste ( $C^0$  i  $C^1$  neprekidnost).

#### 4. Funkcije bazisa

### 4. Funkcije bazisa

Poseban zadatak kod metode konačnih elemenata je izbor funkcija bazisa. U prethodnom poglavlju je naglašeno da je potrebno da se nepoznata funkcija razvije u red po funkcijama bazisa da bi se operatorska jednačina (3.1) svela na sistem linearnih algebarskih jednačina po nepoznatim koeficijentima (3.3), koji može da se reši primenom neke od standardnih tehnika.

Da bi rešenje posmatranog problema pomoću FEM-a bilo jedinstveno potrebno je da skup funkcija bazisa bude linearno nezavisan. Taj uslov je potreban ali ne i dovoljan. Zato je za sistem funkcija bazisa potrebno još i da bude Čebiševljev, odnosno da za njega *Wronsky*-eva determinanta bude različita od nule, PRILOG 2. Osim što moraju biti linearno nezavisne, PRILOG 3, funkcije bazisa moraju da formiraju kompletan skup na  $n_d$ -dimenzionom konačnom prostoru na kome je definisana aproksimacija [22, 24], o čemu će kasnije biti više reči. Nepoznati koeficijenti  $a_i$  mogu imati fizički smisao ili mogu biti definisani kao skup vrednosti funkcije  $f$  i/ili njenih izvoda u datim tačkama domena (čvorovima). Tada se koeficijenti  $a_i$  zovu čvorni parametri ili čvorne promenljive aproksimacije. U tom slučaju, pošto se aproksimacija formira na osnovu vrednosti funkcije u tačkama, funkcije  $f_i$  su interpolacione funkcije. Otuda podela funkcija bazisa na čvorno zasnovane funkcije bazisa (node-based) i funkcije koje nisu čvorno zasnovane.

Osim ove podele, funkcije bazisa mogu biti *hijerarhijske* (ako je skup funkcija bazisa reda  $n$  podskup skupa funkcija bazisa reda  $n+1$  za svako  $n$ ) i *nehijerarhijske*. Za razliku od funkcija bazisa kod npr. MoM-a, koje treba da budu samo linearno nezavisne, PRILOG 3-5, funkcije bazisa kod FEM-a moraju obavezno zadovoljiti i uslov *neprekidnosti* (kontinuitet, kompatibilnost, konformnost) između elemenata [22, 24]. Da bi sistem linearnih jednačina (3.3) bio regularan, odnosno da bi njegovi koeficijenti, koji su dati unutrašnjim proizvodom sa test funkcijama (3.4), bili konačni, dovoljna je  $C^{n-2}$  neprekidnost, gde je  $n$  najviši red izvoda u originalnoj diferencijalnoj jednačini, što je u slučaju diferencijalne jednačine drugog reda koja se najčešće javlja kod elektrostatičkih problema  $C^0$  neprekidnost. Za originalnu diferencijalnu jednačinu potrebna je  $C^{n-1}$  neprekidnost, a za približnu jednačinu, koja se dobija kada se primeni

## 4. Funkcije bazisa

unutrašnji proizvod, odnosno sistem linearnih algebarskih jednačina (3.3), potrebna neprekidnost je za red niža.

U literaturi se uglavnom sreće  $C^0$  neprekidnost funkcija bazisa (slaba formulacija problema) a znatno ređe  $C^1$  neprekidnost (jaka formulacija problema). Kod definisanja jake i slabe formulacije polazi se od originalne diferencijalne jednačine i sistema linearnih algebarskih jednačina (3.3) gde su koeficijenti dati unutrašnjim proizvodima (3.4), odnosno integralima. Ako je približno rešenje problema,  $\bar{f}$ , u domenu originalnog operatora diferencijalne jednačine,  $L$ , formulacija problema je jaka. Ako rešenje nije u domenu originalnog operatora, ali još uvek jeste u domenu operatora unutrašnjeg proizvoda (koeficijenti u (3.4) su konačni, pa je sistem linearnih algebarskih jednačina regularan) radi se o slaboj formulaciji problema. Drugi uslov koji moraju zadovoljiti funkcije bazisa je *kompletnost*, što predstavlja zahtev da u limesu, kada veličina konačnog elementa teži nuli, za odabran skup funkcija bazisa, aproksimativno rešenje barem teorijski, (kada ne bi bilo numeričkih grešaka) teži tačnom rešenju. Taj uslov se može zadovoljiti ako se u svojstvu funkcija bazisa koriste potpuni polinomi  $m$ -tog stepena, gde je  $m$  red izvoda koji se pojavljuje u integralu aproksimacije problema. Ako se usvoji potpuni polinom višeg stepena treba očekivati bolju aproksimaciju.

### 4.1. Čvorno zasnovane funkcije bazisa

U literaturi se pretežno sreću čvorno zasnovane funkcije bazisa. To su najčešće polinomske funkcije. Vrednost ovakve funkcije na konačnom elementu je određena kao interpolacija njenih vrednosti u čvorovima pa otuda naziv interpolacione ili aproksimativne.

#### 4.1.1. Polinomske funkcije

Polinomi se često koriste kao funkcije bazisa. Ovakve funkcije bazisa obezbeđuju dobru aproksimaciju regularne funkcije, lako obezbeđuju kontinualnost između elemenata i jednostavne su za diferenciranje i integraciju. U literaturi se najčešće sreću *Lagrange*-ovi polinomi, *Hermite*-ovi polinomi i *Serendipity* funkcije.

U jednodimenzionoj analizi polinom  $P_n(x)$  ima opšti oblik

#### 4. Funkcije bazisa

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad (4.1)$$

gde je  $n$  stepen polinoma, a  $a_i$  su koeficijenti polinoma koji se još zovu generalisane koordinate ili generalisani parametri. Polinom prvog stepena je oblika:

$$n = 1, P_1(x, y) = a_1 + a_2 x$$

a polinom drugog stepena:

$$n = 2, P_2(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2.$$

Polinom  $n$ -tog stepena  $P_n(x, y)$  koji zavisi od dva argumenta (2D polinom) ima opšti oblik:

$$P_n(x, y) = \sum_{i=1}^m a_i x^j y^k$$

gde je ukupan broj članova polinoma

$$m = \frac{1}{2}(n+1)(n+2). \quad (4.2)$$

Polinom je potpun ili kompletan ako sadrži sve koeficijente od 1 do  $m$ . Tako je kod 2D slučajeva za  $n = 1$  i  $n = 2$ :

$$n = 1, m = 3, P_1(x, y) = a_1 + a_2 x + a_3 y$$

$$n = 2, m = 6, P_2(x, y) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy + a_5 x^2 + a_6 y^2.$$

Ako se za jednodimenzioni linijski element prvog reda (poznate samo vrednosti funkcije u čvorovima na krajevima) sa sl. 3.6 iz prethodnog poglavlja, u svojstvu aproksimacione funkcije usvoji linearna funkcija

$$f(x) = a + bx, \quad (4.3)$$

gde su  $a$  i  $b$  nepoznati koeficijenti koji se određuju na osnovu poznate vrednosti funkcije u čvorovima, iz sistema:

$$f_1 = a + bx_1$$

#### 4. Funkcije bazisa

$$f_2 = a + bx_2,$$

dobija se

$$a = \frac{f_1x_2 - f_2x_1}{x_2 - x_1}, b = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}.$$

Kada se  $a$  i  $b$  zamene u jednačinu (4.3) dobija se aproksimaciona funkcija

$$f(x) = \sum_{j=1}^2 N_j(x)f_j, \quad (4.4)$$

gde su funkcije bazisa:

$$N_1(x) = L_1(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, N_2(x) = L_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \quad (4.5)$$

a  $L_1(x)$  i  $L_2(x)$  *Lagrange*-ovi interpolacioni polinomi prvog stepena.

Za jednodimenzioni pravolinijski element drugog reda (sa tri čvora), polazi se od aproksimacione funkcije oblika

$$f = a + bx + cx^2,$$

pa je aproksimaciona funkcija oblika

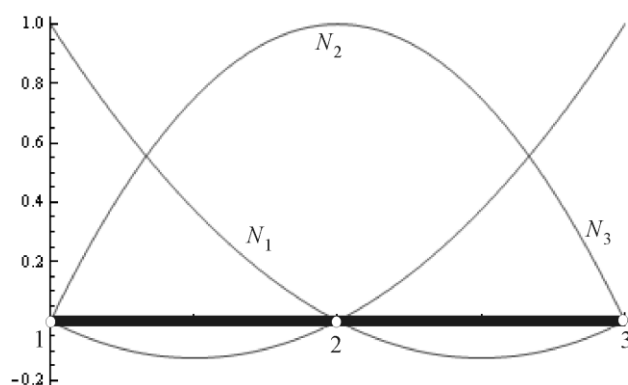
$$f(x) = \sum_{j=1}^3 N_j(x)f_j, \quad (4.6)$$

a *Lagrange*-ove funkcije bazisa:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}, \\ N_2 &= \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}, \\ N_3 &= \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

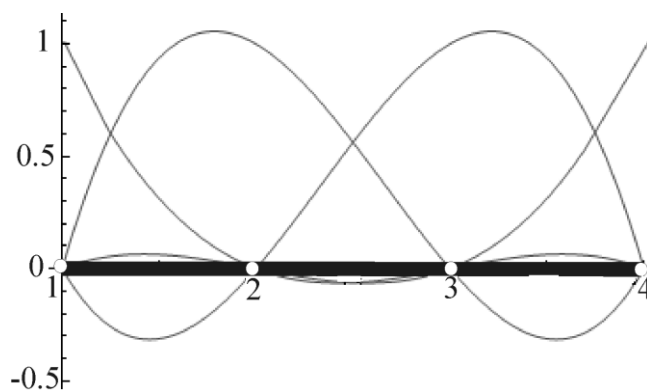
predstavljene na sl. 4.1.

#### 4. Funkcije bazisa



Sl. 4.1 *Lagrange*-ove funkcije bazisa za jednodimenzioni element drugog reda (sa unutrašnjim čvorom 2).

Za pravolinijski element trećeg reda (kubni element) funkcije bazisa zahtevaju prisustvo dva unutrašnja čvora kao na sl. 4.2.



Sl. 4.2 *Lagrange*-ove funkcije bazisa za jednodimenzioni element trećeg reda.

Slično, za pravougaoni konačni element prvog reda, funkcije bazisa su

$$N_1(x, y) = L_1(x)L_1(y)$$

$$N_2(x, y) = L_2(x)L_1(y)$$

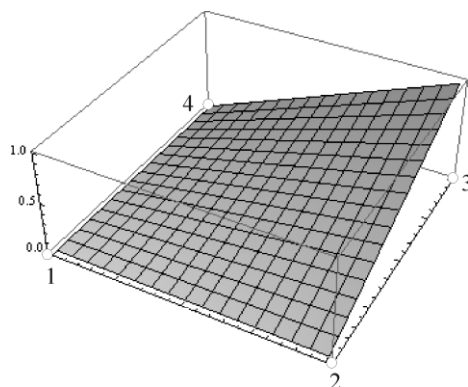
$$N_3(x, y) = L_1(x)L_2(y)$$

$$N_4(x, y) = L_2(x)L_2(y)$$

gde su  $L_i(x), L_i(y), i=1,2$ , *Lagrange*-ovi polinomi prvog stepena određeni izrazom (4.5).

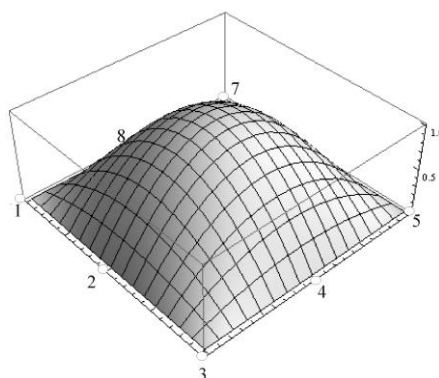
#### 4. Funkcije bazisa

Za osnovni pravougaoni konačni element (bilinearni) postoje samo čvorovi u temenima i *Lagrange*-ove funkcije bazisa su kao na sl. 4.3.



Sl. 4.3 *Lagrange*-ova funkcija bazisa za čvor 3 pravougaonog konačnog elementa prvog reda

Pravougaoni konačni element drugog reda sa *Lagrange*-ovom funkcijom bazisa pored čvorova u sredinama stranica zahteva i čvor u sredini konačnog elementa.



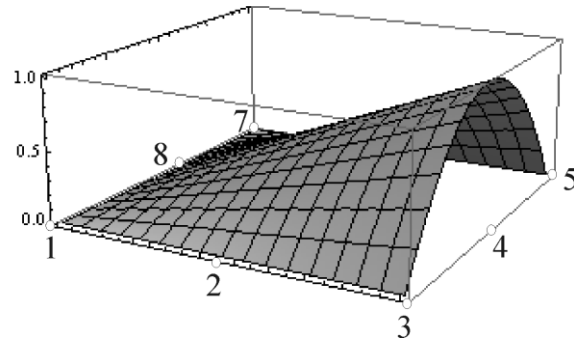
Sl. 4.4 *Lagrange*-ova funkcija bazisa za čvor 9 pravougaonog konačnog elementa drugog reda (u sredini konačnog elementa).

Prednosti i nedostaci krivolinijskih heksaedara sa *Lagrange*-ovim funkcijama bazisa analizirani su u [125].

Za pravougaoni *Serendipity* konačni element drugog reda, funkcija bazisa nema čvor u sredini elementa, već samo čvorove u temenima i u sredinama stranica, kao na sl. 4.5.



#### 4. Funkcije bazisa



Sl. 4.5 *Serendipity* funkcija bazisa za čvor 4 pravougaonog konačnog elementa drugog reda.

Primena *Lagrange*-ovih polinoma višeg stepena dovodi do uvođenja većeg broja unutrašnjih čvorova što je analitički komplikovano a ovi polinomi ne obezbeđuju geometrijsku izotropiju. Uvođenjem *Serendipity* funkcija se eliminišu unutrašnji čvorovi. *Serendipity* funkcije su nekompletni polinomi, slični *Lagrange*-ovima, takođe sa osobinom da samo u jednom čvoru imaju vrednost 1 dok su u ostalima 0. *Lagrange*-ovi polinomi i *Serendipity* funkcije obezbeđuju samo neprekidnost funkcije ( $C^0$  neprekidnost) na granicama između elemenata.

*Hermite*-ovi interpolacioni polinomi obezbeđuju i neprekidnost izvoda, odnosno  $C^1$  neprekidnost. *Hermite*-ov polinom  $n$ -tog reda,  $H^n(x)$  je polinom stepena  $2n+1$ . Za linijski element dužine  $l$  sa čvorovima na krajevima *Hermite*-ovi polinomi prvog reda su:

$$H_{01}^1 = 1 - 3\xi^2 + 3\xi^4$$

$$H_{11}^1 = l\xi(\xi - 1)^2$$

$$H_{02}^1 = 3\xi^2 - 2\xi^3$$

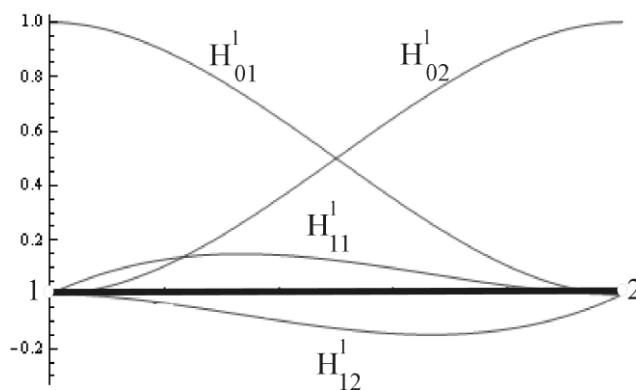
$$H_{12}^1 = l\xi^2(\xi - 1), \quad \xi = \frac{x}{l},$$

a vrednost funkcije u proizvoljnoj tački elementa može da se prikaže kao:

$$\bar{f} = H_{01}^1 f_1 + H_{11}^1 f_2 + H_{02}^1 f_3 + H_{12}^1 f_4.$$

#### 4. Funkcije bazisa

Nepoznate veličine u čvorovima su vrednosti funkcije  $f_1$  i  $f_2$  i vrednosti prvog izvoda u čvorovima su  $f'_{1,x}$  i  $f'_{2,x}$ .



Sl. 4.6. *Hermite*-ovi polinomi prvog reda duž linijskog elementa.

Neprekidnost funkcije u čvoru obezbeđena je pomoću  $H_{01}^1$  i  $H_{02}^1$  a neprekidnost prvog izvoda pomoću  $H_{11}^1$  i  $H_{12}^1$  tako da bi *Hermite*-ovi polinomi mogli da se koriste za konstruisanje čvorno zasnovane jake FEM formulacije.

U opštem slučaju pogodno je da broj generalisanih koordinata posmatranog sistema bude jednak broju spoljašnjih stepeni slobode. Ako se u svojstvu funkcija bazisa koriste čvorno zasnovane funkcije koje su potpuni polinomi, broj generalisanih koordinata postaje veći od broja stepeni slobode. To takođe dovodi do pojave „unutrašnjih“ čvorova koje treba eliminisati pre formiranja konačnog sistema jednačina što predstavlja dodatni korak u FEM proceduri. U nekim slučajevima se koriste nekompletni polinomi, t.j. polinomi kod kojih su izostavljeni pojedini članovi. Nekompletni (nepotpuni) polinomi u opštem slučaju nemaju osobinu izotropije, pa se mora voditi računa koji se članovi izostavljaju. U opštem slučaju, polinomi koji nemaju svojstvo izotropije ne mogu dati dovoljno dobru aproksimaciju na elementu.

Povećanje stepena polinoma, da bi se dobilo na kvalitetu aproksimacije, povezano je sa porastom broja čvorova, kako spoljašnjih tako i unutrašnjih. Ovo povećanje naročito je naglo kod 3D problema. To dovodi do naglog porasta broja ulaznih podataka, obima izlaznih rezultata, porasta broja jednačina, tj. porasta matrice sistema ili povećanja širine „trake“ u matrici sistema koji treba rešiti. Osim toga, *Lagrange*-ovi polinomi dati su komplikovanim analitičkim izrazima, i svi su istog

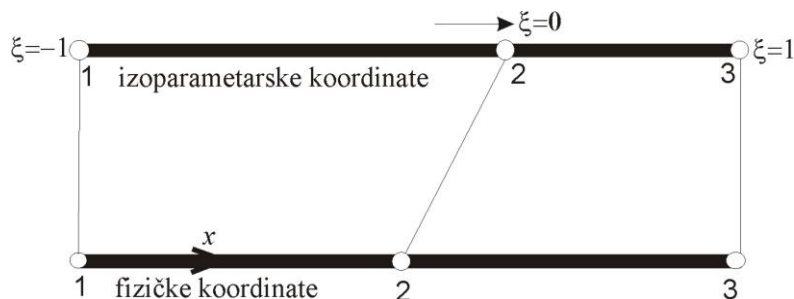
#### 4. Funkcije bazisa

stepena, tako da se promenom reda jednog elementa menjaju sve njegove funkcije bazisa. Sve ovo predstavlja nedostatke čvorno zasnovanih funkcija bazisa.

##### 4.1.2 Izoparametarska formulacija

Ako se za aproksimaciju geometrije elementa usvoje isti čvorovi i iste čvorno zasnovane funkcije bazisa (interpolacione funkcije) kao i za aproksimaciju polja osnovnih nepoznatih u sistemu, konačni elementi su *izoparametarski*. Ako se za opisivanje geometrije elementa usvoji veći broj čvorova nego za interpolacionu funkciju, elementi su *superparametarski*, a ako je broj čvorova interpolacione funkcije veći od broja čvorova za aproksimaciju geometrije elementa, elementi su *subparametarski*. Kako se kao čvorno zasnovane funkcije bazisa u literaturi najčešće koriste polinomi, kod izoparametarske formulacije geometrija elementa i polja osnovnih nepoznatih (funkcija, izvod funkcije) se aproksimiraju polinomima istog reda.

Posmatrajmo jednodimenzioni element drugog reda (sa tri čvora), gde je sa  $\xi$  označena izoparametarska (bezdimeziona) koordinata, a sa  $x$  fizička koordinata elementa, sl. 4.7.



Sl. 4.7 Jednodimenzioni element drugog reda, fizičke i izoparametarske koordinate.

Polazeći od sistema jednačina:

$$N_1 + N_2 + N_3 = 1$$

$$N_1\xi_1 + N_2\xi_2 + N_3\xi_3 = \xi$$

$$N_1x_1 + N_2x_2 + N_3x_3 = x$$

gde su  $N_1$ ,  $N_2$  i  $N_3$  *Lagrange*-ove funkcije bazisa date sa (4.7) dobija se veza između izoparametarske i fizičke koordinate:

#### 4. Funkcije bazisa

$$\xi = \frac{2x - L}{L}, \quad (4.8)$$

gde je  $L$  fizička dužina konačnog elementa.

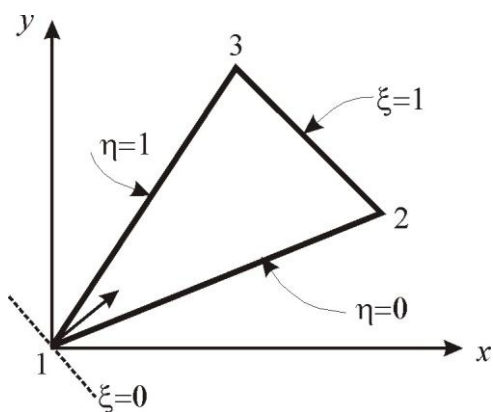
Vrednost funkcije bazisa u proizvoljnoj tački elementa  $\xi$ ,

$$f = -\frac{\xi}{2}(1-\xi)f_1 + (1-\xi^2)f_2 + \frac{\xi}{2}(1+\xi)f_3 \quad (4.9)$$

dobija se zamenom izraza (4.8) u izraz za *Lagrange*-ovu interpolacionu funkciju (4.6). Ovde je ona izražena u funkciji bezdimenzionih izoparametarskih koordinata  $\xi$ . Slična procedura se primenjuje na složenije geometrije sa više čvorova.

#### 4.1.3 Singularne funkcije i singularni konačni elementi

Kod elektrostatičkih problema često se sreću singularne tačke polja. Prisustvo singulariteta usporava konvergenciju rešenja. Zato je svrsishodno uvođenje singularnih funkcija koje se lako mogu ubaciti u standardne FEM programe [126]. To su funkcije zasnovane na polinomskoj prezentaciji i izoparametarskoj formulaciji.



Sl. 4.8. Trougaoni element sa singularitetom u temenu 1.

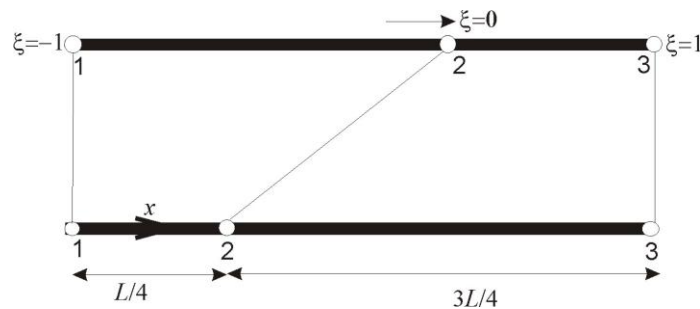
Kada se radi o polinomskoj prezentaciji, u literaturi se nailazi na bilinearni pravougaonik kao pogodan konačan element za modelovanje singulariteta u tački. Ako se on podeli na dva trougla sa zajedničkom stranicom, u tački sažimanja postoji singularitet tipa  $1/r$  gde je  $r$  radijus koordinata sa početkom u singularnoj tački. Neka se na sl. 4.8 singularitet nalazi u tački 1. U [108] je iskorišćen ovakav singularan

#### 4. Funkcije bazisa

konačni element i jednostavna funkcija polinomskog tipa koja može obezbediti singularitet oblika  $r^{-p}$  u tački 1 sa sl. 4.8:

$$f = (1 - \xi^p)f_1 + \xi^p(1 - \eta)f_2 + \xi^p\eta f_3, \quad \frac{1}{2} < p < 1 \quad (4.10)$$

Ovaj izraz predstavlja funkciju raspodele električnog skalar-potencijala, a  $f_1, f_2, f_3$  su vrednosti potencijala u čvorovima. Sa rezultatima iz [108] upoređeni su neki rezultati iz ovog rada u poglavlju 7. Singularni elementi znatno popravljaju konvergenciju pri čemu se ne povećava broj nepoznatih, odnosno ne poveća matrica sistema. U [126,127] se takođe razmatraju dvodimenzionalni singularni vektorski elementi. Površinske vektorske funkcije bazisa definisane na krivolinijskim izoparametarskim površinama, koje uključuju ivične efekte (singularitete na krajevima elemenata) i automatski zadovoljavaju jednačinu kontinuiteta duž ivica predložene su u [128]. Dalje će biti razmotreno kako prilagoditi izoparametarsku formulaciju za predstavljanje singulariteta. Osnovni koncept prilagođenja izoparametarske formulacije za predstavljanje singulariteta će biti objašnjen na primeru jednodimenzionog elementa sa 3 čvora sa sl. 4.9. za koji je funkcija bazisa data sa (4.10). Biće razmotren slučaj za  $x_2 = L/4$ .



Sl. 4.9. Izoparametarski singularni element

Tako je, za  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = L/4$  i  $x_3 = L$ , sl. 4.9,

$$x = (1 - \xi^2)\frac{L}{4} + \frac{1}{2}\xi(1 + \xi)L = \frac{L}{4}(1 + \xi)^2. \quad (4.11)$$

Kako je  $\frac{dx}{d\xi} = \frac{L}{2}(1 + \xi)$ , u  $\xi = -1$  je  $dx/d\xi = 0$ , tako da je transformacija singularna u tački 1. Različiti stepeni singulariteta se mogu dobiti u zavisnosti od stepena polinoma kojim se modeluju funkcija bazisa i koordinate [23].

## 4. Funkcije bazisa

### 4.2 Funkcije bazisa koje nisu čvorno zasnovane

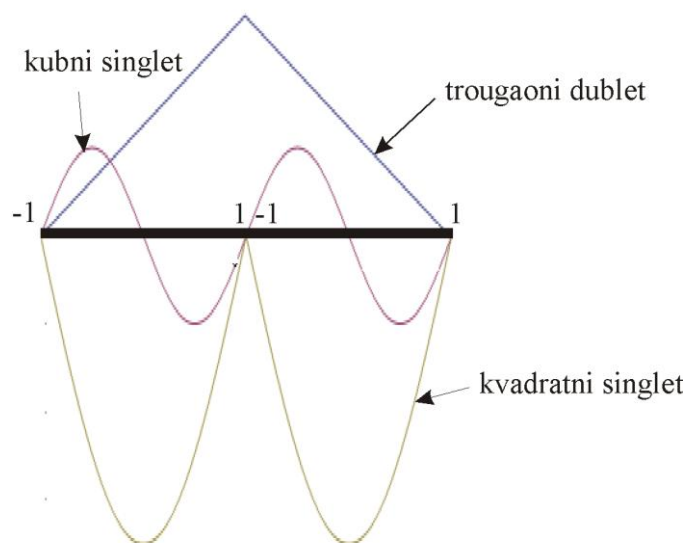
Poslednjih nekoliko decenija postoji neprekidan interes za razvoj metoda za analizu tankih žičanih struktura. Jedan od razloga su tanke žičane antene koje su široko u praktičnoj upotrebi a drugi – što metode upotrebljive za analizu tankih žičanih struktura obično služe kao osnova za analizu površinskih i zapreminskih struktura. Za ovakvu analizu se primenjuje MoM, i dva tipa funkcija bazisa – poddomenske (ako se žica izdela na segmente) i celodomenske. Ove funkcije nisu čvorno zasnovane. Uvodi se pojam singleta – funkcije bazisa definisane na jednom segmentu analizirane strukture i pojam dubleta kao funkcije bazisa na dva susedna segmenta strukture. U [129] se definišu singlet žica, u [130] singlet ploča, a u [131] singlet i dublet žica i ploča. Ako se žica izdela na duge podsegmente i funkcije bazisa definišu duž svakog podsegmenta, onda su takve funkcije skoro celodomenskog tipa. Polinomske funkcije bazisa koje modeluju raspodelu struje duž žice, usvajaju se u obliku [132]:

$$I(u) = \sum_{i=0}^n a_i u^i, \quad -1 \leq u \leq 1,$$

gde je  $n$  stepen polinomske aproksimacije,  $a_i, i = 0, \dots, n$ , su nepoznati koeficijenti, koji treba da se odrede,  $u$  je lokalna koordinata duž ose žice, pri čemu je  $u = -1$  na početku i  $u = 1$  na kraju žice. Ove 1D funkcije se sastoje od trougaonih dubleta, kvadratnih singleta i kubnih singleta, i sve su nula na početku i kraju žice, sl. 4.10.

Dubletima su funkcije bazisa koje su definisane duž dve međusobno povezane žice. Takvi trougaoni dubletima predstavljaju specijalan slučaj celodomenske aproksimacije dobijen za  $n = 1$ . Pokazuje se da celodomenska aproksimacija za istu tačnost ima prednosti nad poddomenskom, što se ogleda u tri do pet puta manjem broju nepoznatih i oko sto puta kraćem vremenu računanja u odnosu na poddomensku aproksimaciju. Ovde je reč o jednodimenzionalnim dubletima i singletima.

#### 4. Funkcije bazisa



Sl. 4.10 Kubni singlet, kvadratni singlet i trougaoni dublet na dva susedna elementa žičane strukture

U [133] se razmatraju 2D kompozitne metalne i dielektrične strukture koje se mogu analizirati primenom SIE (površinskih integralnih jednačina) koje se rešavaju metodom momenata (MoM). MoM se primenjuje na geometrijsko modelovanje i modelovanje struja. Geometrijsko modelovanje površina se vrši preko ravnih i prostornih četvorouglova i trouglova. Ravan četvorougao se ne može definisati sa četiri proizvoljne tačke u prostoru pa takvi elementi nisu pogodni za modelovanje zakrivljenih površina. Ravni četvorouglovi su pogodni za poligonalne ravni dok su trouglovi pogodni za modelovanje zakrivljenih površina. Za modelovanje zakrivljenih površina su pogodni i prostorni četvorouglovi. Bilinearna površina je oslonjena o četvorougao. Bilinearne površine modeluju zakrivljene površine.

Struje se mogu aproksimirati pomoću poddomenskih funkcija bazisa u obliku dubleta – definisanih na dva susedna elementa tako da je automatski zadovoljena jednačina kontinuiteta na spoju dva elementa i komponenta struje normalna na ostale ivice je jednaka nuli. U slučaju trougaonih dubleta jednačina kontinuiteta je egzaktno zadovoljena u svim tačkama duž spoja.

Kod generalizovanih četvorouglova jednačina kontinuiteta nije zadovoljena egzaktno (lokalno) već samo približno (globalno) što kao rezultat daje prisustvo fiktivnog (nepostojećeg) linijskog naelektrisanja duž spoja elemenata nad kojima je dublet. Samo

#### 4. Funkcije bazisa

u slučaju pravougaonih dubleta jednačina kontinuiteta je zadovoljena egzaktno, odnosno lokalno. Fleksibilnost funkcija bazisa se može znatno popraviti ako se umesto ravnih četvorouglova koriste bilinearne površine i ako se celodomska aproksimacija koristi umesto poddomenske. Za najniži stepen aproksimacije celodomske funkcije bazisa degenerišu samo u dublete koji egzaktno zadovoljavaju jednačinu kontinuiteta na spoju. Takva formulacija dubleta se označava kao egzaktna.

U [133] su predstavljeni dubleti i rogljaste („roof-top“) funkcije bazisa, odnosno „trougaoni“ dubleti, koji egzaktno zadovoljavaju jednačinu kontinuiteta na spoju dva elementa, naročito pogodni za modelovanje poddomena i istražene su osnovne osobine takvih dubleta. Kod egzaktne formulacije je komponenta struje normalna na spoj konstantna a jednačina kontinuiteta zadovoljena u svakoj tački spoja. Ustanovljeno je da egzaktna formulacija dubleta daje visoku tačnost i brzu konvergenciju u odnosu na približnu formulaciju.

U [134] se predlaže optimalan izbor funkcija bazisa koje nisu čvrno zasnovane za MoM/SIE, MoM/VIE, FEM i hibridne metode koje u velikoj meri zavise od optimalnog izbora funkcija bazisa. Funkcije bazisa koje se upotrebljavaju kod ovih metoda se generalizuju na nekoliko načina. Drugo, može se postaviti skup željenih osobina funkcija bazisa za svaku od metoda. Na kraju se upoređuju različite klase funkcija bazisa polazeći od željenih osobina i vrši odabir optimalnog skupa funkcija bazisa. Najpre se daje generalizovana podela funkcija bazisa na površinske i zapreminske. Površinske funkcije bazisa se definišu na krivolinijskoj izoparametarskoj površini datoj parametarskom jednačinom  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(p, s)$ , gde su  $p$  i  $s$  lokalne parametarske koordinate,  $0 \leq p \leq 1, 0 \leq s \leq 1$ . U posebnim slučajevima te površine degenerišu u krivolinijski trougao, bilinearni četvorougao i bilinearan trougao. Zapreminske funkcije bazisa se mogu definisati preko krivolinijskih izoparametarskih heksaedara, datih parametarskim jednačinama  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(p, s, t)$ , gde su  $0 \leq p \leq 1, 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1$ , lokalne parametarske koordinate. U posebnim slučajevima degenerišu u krivolinijski heksaedar, trilinearni heksaedar i trilinearni tetraedar. Upotreba bazisnih funkcija višeg reda omogućuje veću fleksibilnost i uspešniju analizu. U [134] se daje najniži red funkcija bazisa koji može obezbediti neprekidnost normalne odnosno tangencijalne komponente vektora površine odnosno zapremine na spoju dva elementa, odnosno na graničnoj



#### 4. Funkcije bazisa

površini dva domena. Takođe se procenjuje najniži red funkcija bazisa, upoređuje potreban broj nepoznatih i potreban broj računskih operacija. Zaključuje se da FEM zahteva manji broj nepoznatih od MoM /VIE (VIE-zapreminske integralne jednačine) za zatvorene probleme kao i da efikasnost rešavanja zavisi ne samo od broja nepoznatih već i ukupnog broja operacija. U slučaju pune matrice se broj operacija procenjuje na  $K_p = \frac{1}{3}N^3$  a u slučaju rastresite na  $K_r = NL^2$ , gde je  $N$  broj nepoznatih a  $L$  širina poluopsega rastresite matrice a osnovna operacija sadrži jedno sumiranje i jedno množenje. U [135] se predlažu B-splajn funkcije koje nisu čvorno zasnovane ali nisu celodomske, zajedno sa hijerarhijskim polinomima višeg reda pogodnim za rotorski uskladjenu funkciju bazisa i prikazano je poređenje tačnosti FEM tehnike zasnovane na krivolinijskim heksaedrima sa B-splajn funkcijama u odnosu na heksaedre sa *Lagrange*-ovom interpolacijom. Nastavak istraživanja iz [129-135] predstavlja disertacija [136].

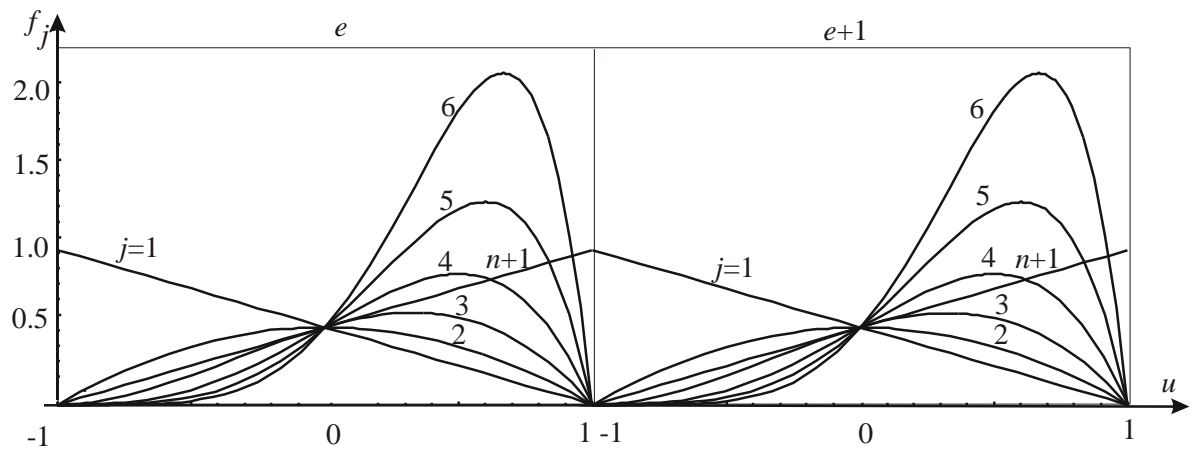
#### 4.3 Hijerarhijske funkcije bazisa za slabu FEM formulaciju

Hijerarhijske funkcije bazisa koje nisu čvorno zasnovane za slabu FEM formulaciju predložene su u [65] i date izrazom:

$$f_j(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1-u)(1+u)^{j-1}, & j = 1, \dots, n \\ \frac{1}{2}(1+u), & j = n+1, \end{cases} \quad (4.12)$$

gde je  $u$  lokalna (prirodna) koordinata duž  $e$ -tog elementa sa sl. 4.10 i minimalna vrednost  $n$  je  $n_{\min} = 1$ . Na sl. 4.11 je prikazan skup jednodimenzionalnih funkcija bazisa reda  $n$ . Kod ovih funkcija kontinualnost funkcije je obezbeđena preko funkcija  $f_{n+1}^e$  i  $f_1^{e+1}$  što daje trougaonu („roof-top“) funkciju bazisa na dva susedna elementa (dublet). Ostale bazisne funkcije su definisane samo na po jednom elementu, služe da tačnije aproksimiraju raspodelu polja na tom elementu i to su singleti. Minimalan stepen funkcije (minimalan stepen polinomske aproksimacije) za slabu formulaciju kod 1D problema je  $n_{\min} = 1$ .

#### 4. Funkcije bazisa



Sl. 4.11. 1D funkcije bazisa za slabu formulaciju.

Jedino funkcije  $f_{n+1}^e$  i  $f_1^{e+1}$  sa sl. 4.11 se mogu smatrati čvorno zasnovanim jer su vrednosti njihovih koeficijenata jednake vrednostima funkcije na granici (u čvoru) između elemenata. Ostale 1D funkcije bazisa nisu čvorno zasnovane i hijerarhijskog su tipa.

Kao polinomi različitog stepena (izuzev polinoma za  $j=1$  i  $j=n+1$  koji su istog, prvog, stepena) ove funkcije bazisa su linearno nezavisne, PRILOG 3, a prema definiciji linearne nezavisnosti jasno je da su i dva navedena polinoma prvog stepena linearno nezavisna. Ovakve funkcije bazisa su primenjene i u [137] u analizi refleksije ravnog talasa o savršen provodnik presvučen slojem nehomogenog i nesavršenog dielektrika. Rešavana je jednodimenzionalna talasna jednačina u nehomogenoj sredini i ustanovljeno da je, radi postizanja veće tačnosti, potrebno koristiti elemente višeg reda.

Kod dvodimenzionalnih (2D), problema funkcije bazisa su sve moguće kombinacije proizvoda 1D funkcija bazisa. Tako se dobija aproksimacija koja je potpuni polinom datog stepena ( $n_k + 1$  po  $u$  i  $n_j + 1$  po  $v$ ):

$$f_{j,k}(u,v) = \begin{cases} \frac{1}{4}(1-u)(1+u)^{j-1}(1-v)(1+v)^{k-1}, & j=1,\dots,n_j, k=1,\dots,n_k \\ \frac{1}{4}(1-u)(1+u)^{j-1}(1+v), & j=1,\dots,n_j, k=n_k+1 \\ \frac{1}{4}(1+u)(1-v)(1+v)^{k-1}, & j=n_j+1, k=1,\dots,n_k \\ \frac{1}{4}(1+u)(1+v), & j=n_j+1, k=n_k+1 \end{cases} \quad (4.13)$$

#### 4. Funkcije bazisa

Element je najnižeg reda za  $n_j = 1$ ,  $n_k = 1$ . Tada ima oblik

$$f_{1,1}(u, v) = \frac{1}{4}(1-u)(1-v) = \frac{1}{4}(1-u-v+uv)$$

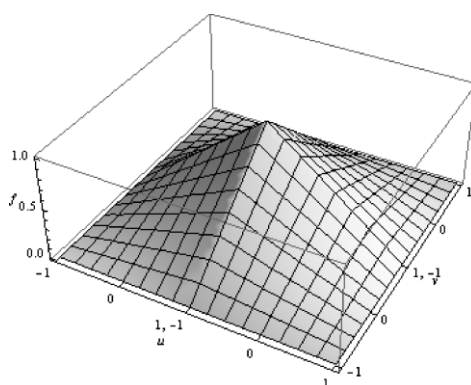
$$f_{1,2}(u, v) = \frac{1}{4}(1-u)(1+v) = \frac{1}{4}(1-u+v-uv)$$

$$f_{2,1}(u, v) = \frac{1}{4}(1+u)(1-v) = 0.25(1+u-v-uv)$$

$$f_{2,2}(u, v) = \frac{1}{4}(1+u)(1+v) = \frac{1}{4}(1+u+v+uv)$$

Dvodimenzione funkcije bazisa čine singleti, dubleti i kvadrupleti (singleti obuhvataju jedan, dubleti dva a kvadrupleti četiri susedna elementa).

Kvadruplet je prikazan na sl. 4.12 i definisan je funkcijama  $f_{n+1,1}$ ,  $f_{1,1}$ ,  $f_{n+1,n+1}$  i  $f_{1,n+1}$  i predstavlja tzv. 2D „roof-top“ funkciju.



Sl. 4.12 Kvadruplet za slabu formulaciju.

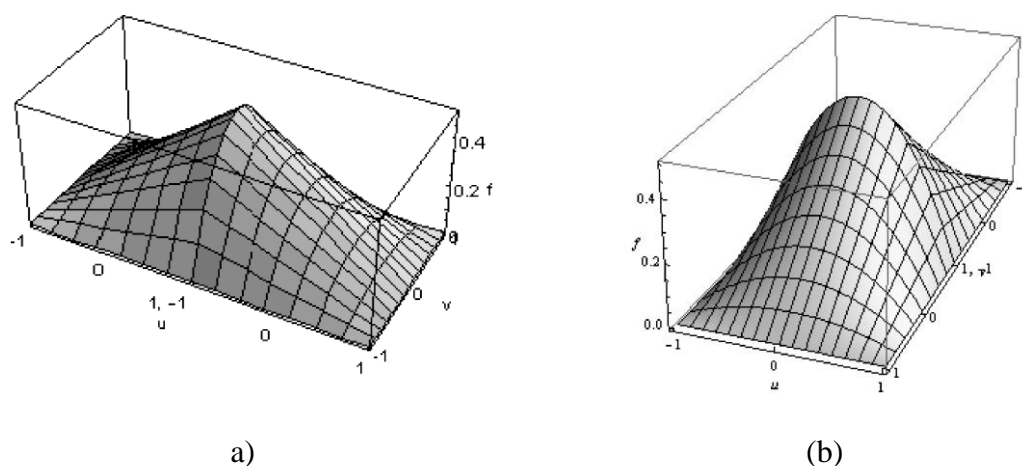
Kvadruplet na spoljašnjim ivicama grupe od četiri susedna elementa ima vrednost nula, a na unutrašnjim različitu od nule tako da obezbeđuje neprekidnost funkcije između elemenata,  $C^0$ . U čvoru koji je zajednički za sva četiri elementa ima vrednost različitu od nule.

Dubleti i kvadrupleti obezbeđuju neprekidnost funkcije na granicama između elemenata i obezbeđuju osnovnu aproksimaciju a singleti popravljaju tačnost u smislu

#### 4. Funkcije bazisa

da dodatno aproksimiraju funkciju na jednom elementu. Tipičan izgled dubleta duž  $x$  i  $y$  pravca za slabu formulaciju prikazan je na sl. 4.13.

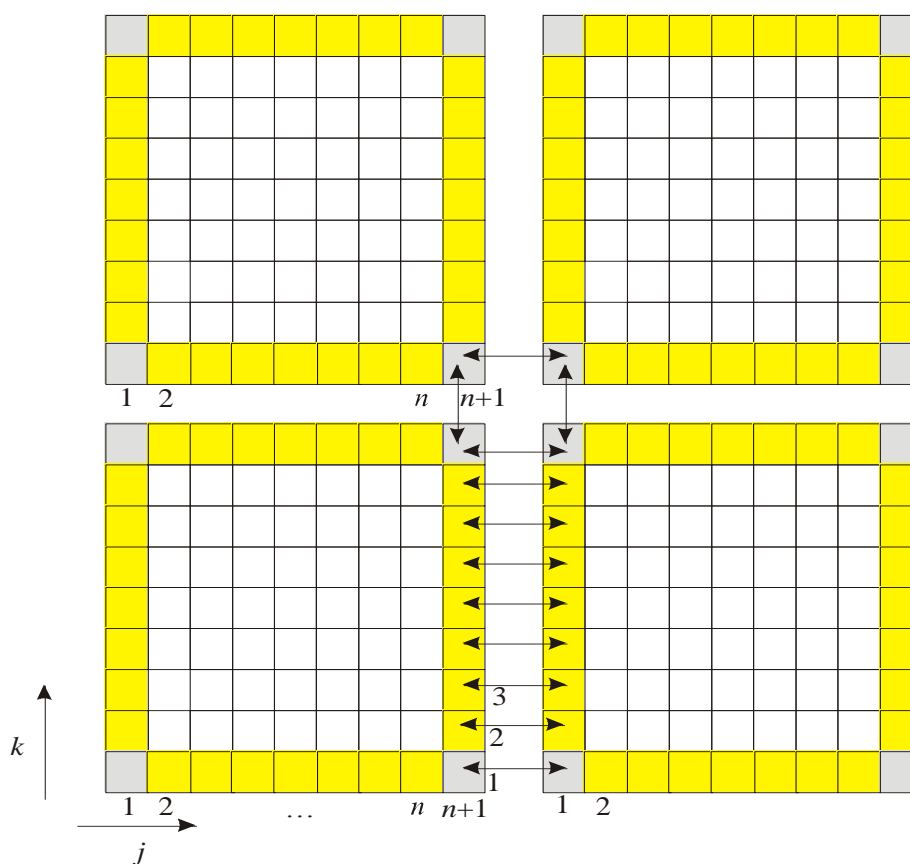
Dubleti na svim spoljašnjim ivicama grupe od dva susedna elementa imaju vrednost nula kao i u svim čvorovima i zadovoljen uslov neprekidnosti funkcije na granici između ta dva elementa.



Sl. 4.13. (a) Dublet  $x$ -tipa i (b) dublet  $y$ -tipa za slabu formulaciju.

Za aproksimaciju najnižeg reda dovoljno je uzeti samo kvadruplete i tada je to čvorno zasnovana aproksimacija prvog reda. Šema za formiranje dubleta i kvadrupleta predstavljena je na sl. 4.14. Sivom bojom su označeni kvadrupleti a žutom dubleti.

## 4. Funkcije bazisa



Sl. 4.14. Šema za formiranje dubleta i kvadrupleta za slabe funkcije bazisa na četiri susedna elementa.

## 4.4 Hijerarhijske funkcije bazisa za jaku FEM formulaciju

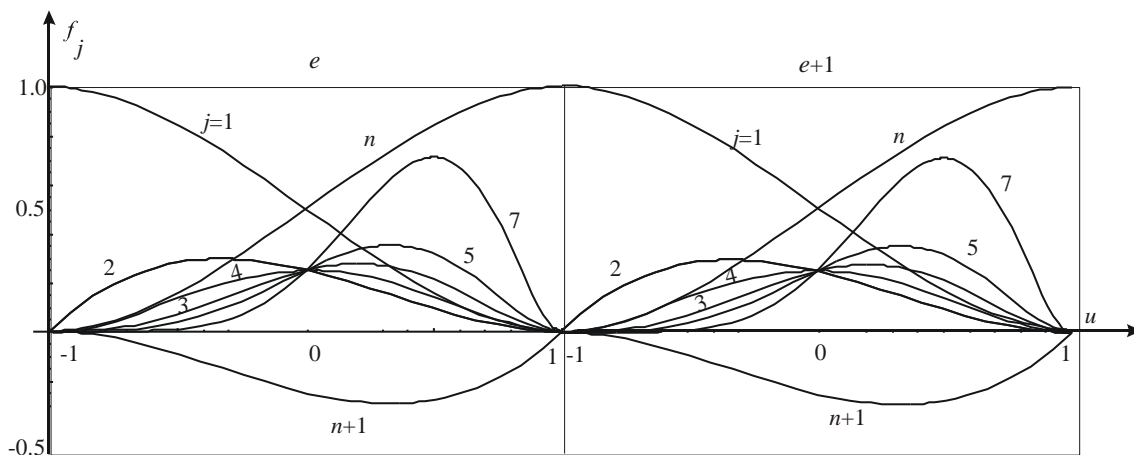
### 4.4.1 Osnovne jake funkcije bazisa

Kod 1D funkcija bazisa za jaku formulaciju obezbeđena je kako neprekidnost funkcije,  $C^0$ , tako i neprekidnost njenog prvog izvoda,  $C^1$ , na granici između elemenata. Ove funkcije date su izrazima [65]:

#### 4. Funkcije bazisa

$$f_j(u) = \begin{cases} \frac{1}{4}(u-1)^2(u+2), & j=1 \\ \frac{1}{4}(u-1)^2(u+1), & j=2 \\ \frac{1}{4}(u-1)^2(u+1)^{j-1}, & j=3, \dots, n-1 \\ \frac{1}{4}(u+1)^2(2-u), & j=n \\ \frac{1}{4}(u+1)^2(u-1), & j=n+1 \end{cases} \quad (4.14)$$

Gornji izraz je za osnovne funkcije bazisa  $n$ -tog reda, koje ne uzimaju u obzir materijalne osobine sredine niti dimenzije konačnog elementa (ili se može smatrati da je konačni element jediničnih dimenzija). Ima ih  $n+1$  duž linijskog elementa. Ove funkcije prikazane su na sl. 4.15.



Sl. 4.15. 1D funkcije bazisa za jaku formulaciju.

Kod 1D jake formulacije, neprekidnost funkcije je obezbeđena funkcijama  $f_n^e$  i  $f_1^{e+1}$  a neprekidnost prvog izvoda funkcijama  $f_{n+1}^e$  i  $f_2^{e+1}$ , tako da je minimalan red jake funkcije bazisa  $n_{\min} = 3$ .

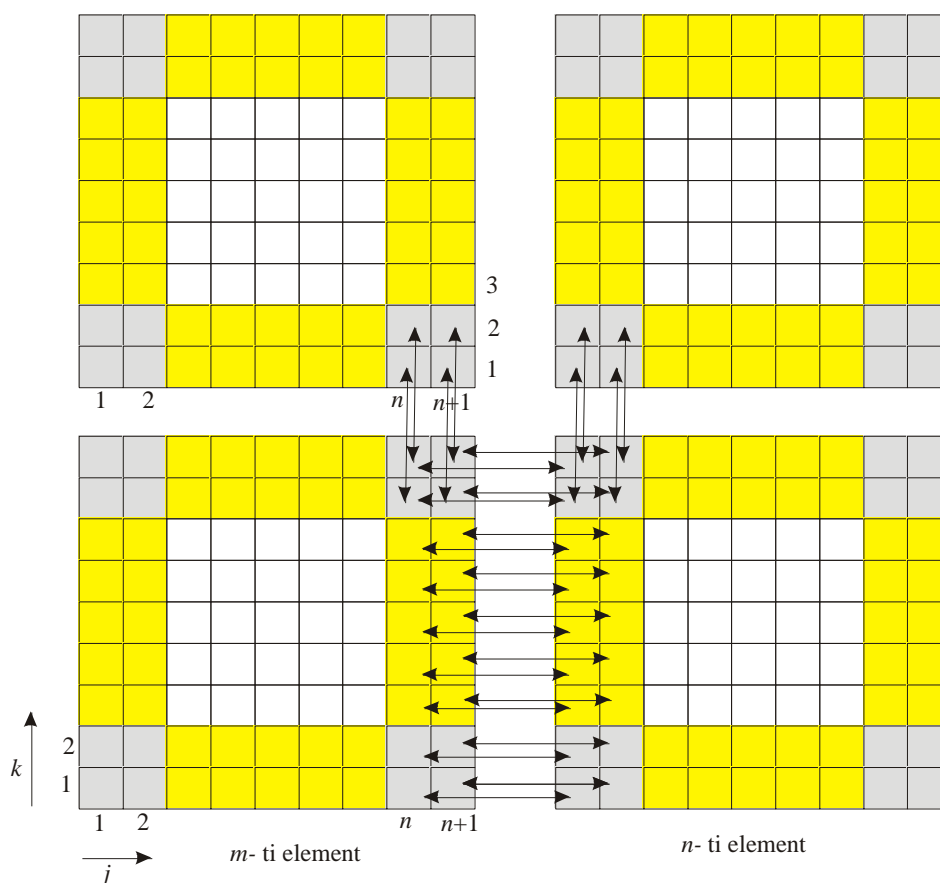
Kombinacijom (međusobnim množenjem) 1D funkcija bazisa za jaku formulaciju dobijaju se 2D osnovne funkcije bazisa za jaku formulaciju, prema šemi sa sl. 4.16, odnosno prema formuli:

$$f_{j,k}(u,v) = f_j(u)f_k(v), \quad j=1,2,\dots,n_j, \quad k=1,2,\dots,n_k.$$

#### 4. Funkcije bazisa

Kod jake 2D formulacije obezbeđena je neprekidnost funkcije i prvog izvoda na granici, funkcije su  $C^1$  klase, a funkcije bazisa su sve kombinacije proizvoda 1D funkcija tako da daju potpuni polinom. Bazisne funkcije u ovom slučaju (izuzev prve dve, za  $j=1, j=2$  i poslednje dve, za  $j=n, j=n+1$ ) su polinomi različitog stepena pa su kao takvi linearno nezavisni. Četiri izuzeta polinoma su trećeg stepena i lako se pokazuje da su linearno nezavisni, odnosno da nijedan od njih nije linearna kombinacija ostalih, PRILOG 5.

Kod jake formulacije za 2D probleme minimalan red funkcije bazisa je  $n_j = n_k = 3$ . Žutom bojom na sl. 4.16 su označeni dubleti a sivom kvadrupleti.



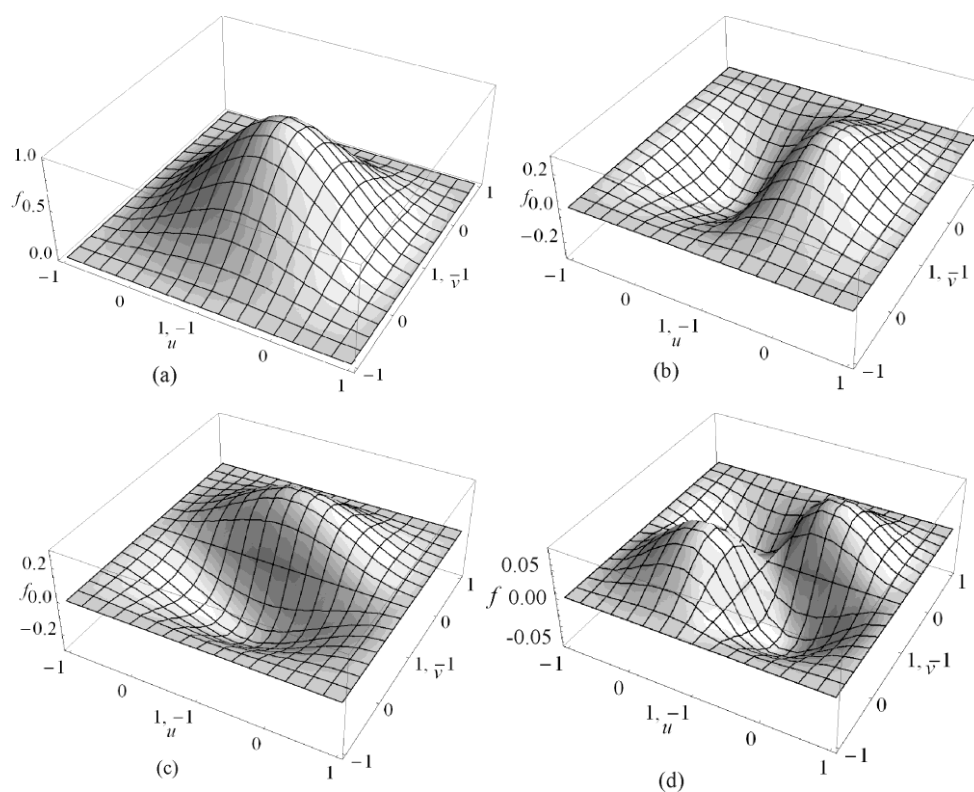
Sl. 4.16. Šema za formiranje dubleta i kvadrupleta za jake funkcije bazisa na 4 susedna elementa.

Na sl. 4.17 su prikazani kvadrupleti osnovnih funkcija bazisa. Prvi kvadruplet (a), predstavlja samu funkciju čvora, drugi (b), i treći (c), omogućavaju neprekidnost prvog

#### 4. Funkcije bazisa

izvoda u odnosu na  $u$  i  $v$ . Kod poslednjeg kvadrupleta je  $i$  funkcija i njen prvi izvod u zajedničkom čvoru (sedlasta tačka) jednak nuli.

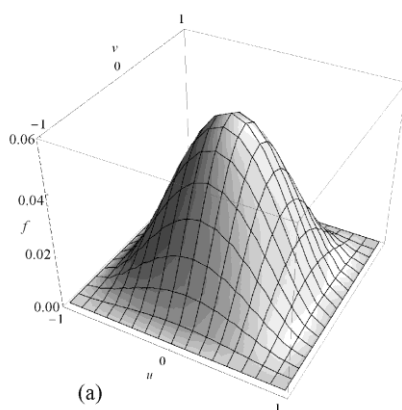
Na sl. 4.18(a) je prikazan primer singleta za jaku funkciju bazisa, na sl. 4.18(b) je dublet koji obezbeđuje neprekidnost funkcije duž  $x$ -ose a na sl. 4.18(c) je dublet koji obezbeđuje i neprekidnost prvog izvoda duž  $x$ -ose. Dubleti duž  $y$ -ose izgledaju potpuno analogno  $x$ -dubletima.



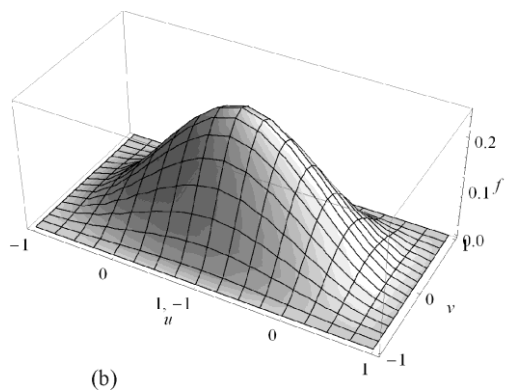
Sl. 4.17. Kvadrupleti za jaku FEM formulaciju: (a) Q1, (b) Q2- $x$ , (c) Q2- $y$  i  
(d) Q3.



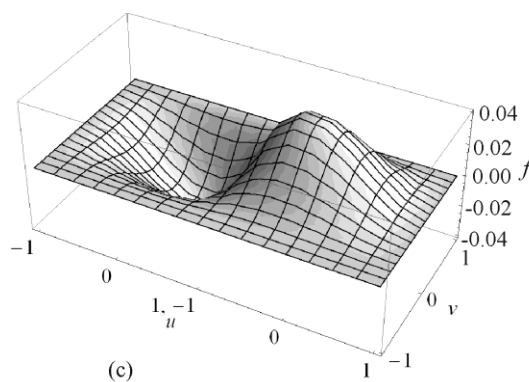
#### 4. Funkcije bazisa



Sl. 4.18(a). Primer singleta za jaku funkciju bazisa.



Sl. 4.18(b). Dublet koji obezbeđuje neprekidnost funkcije za jake funkcije bazisa duž u-ose.



Sl. 4.18(c). Dublet koji obezbeđuje i neprekidnost prvog izvoda za jake funkcije bazisa duž u-ose.

Funkcije singleta ne učestvuju u formiranju graničnih uslova.

## 4. Funkcije bazisa

### 4.4.2. Finalne jake funkcije bazisa

U opštem slučaju, diferencijalna jednačina za električni skalar-potencijal  $V(x, y)$  za nehomogene sredine je

$$\tilde{\mathbf{N}} \times (\varepsilon \tilde{\mathbf{N}} V) = -\rho \quad (4.15)$$

ukoliko postoje slobodna naelektrisanja,  $\rho$ , dok je  $\varepsilon$  permitivnost. Potrebna je neprekidnost izraza  $\varepsilon \frac{\partial V}{\partial n}$  na granici između sredina sa različitim osobinama.

Posmatrajmo slučaj kada na razdvojnoj površini nema slobodnih naelektrisanja ( $\rho = 0$ ). Neka sredina nije kontinualno nehomogena. Potrebno je modifikovanje osnovnih funkcija bazisa za jaku formulaciju, tako da bude zadovoljen granični uslov:

$$\varepsilon_1 \frac{\partial V}{\partial n} \Big|_1 = \varepsilon_2 \frac{\partial V}{\partial n} \Big|_2 \quad (4.16)$$

gde se indeks 1 odnosi na sredinu 1 a indeks 2 na sredinu 2 (drugo poglavlje, sl. 2.1). Izraz (4.16) je u stvari granični uslov za  $D_n$  u odsustvu površinskih naelektrisanja.

Pre nego što se formiraju finalne jake funkcije bazisa koje uključuju osobine sredine, formiraju se osnovne funkcije bazisa koje uključuju dimenzije konačnih elemenata [67],

$$f_k(u) = \frac{1}{4} \begin{cases} (u-1)^2(u+2), & k=1 \\ (u-1)^2(u+1)\frac{L^e}{2}, & k=2 \\ (u-1)^2(u+1)^{k-1}, & k=3, \dots, n-1 \\ (u+1)^2(2-u), & k=n \\ (u+1)^2(u-1)\frac{L^e}{2}, & k=n+1 \end{cases} \quad (4.17)$$

gde je  $n$  red funkcije bazisa nad elementom ( $n_x$  i  $n_y$  za 2D funkcije,  $n_{\min} = 3$ ),  $u$  je normalizovana koordinata duž elementa,  $-1 \leq u \leq 1$ , a  $L^e$  je dužina elementa duž  $x$  i  $y$

#### 4. Funkcije bazisa

pravca ( $L_x^e$  i  $L_y^e$  za 2D funkcije). Finalne 1D funkcije bazisa za linearan dielektrik relativne permitivnosti  $\varepsilon_r$  nad  $e$ -tim elementom imaju oblik

$$f_k(u) = \frac{1}{4} \begin{cases} (u-1)^2(u+2), & k=1 \\ (u-1)^2(u+1)\frac{L^e}{2\varepsilon_r}, & k=2 \\ (u-1)^2(u+1)^{k-1}, & k=3, \dots, n-1 \\ (u+1)^2(2-u), & k=n \\ (u+1)^2(u-1)\frac{L^e}{2\varepsilon_r}, & k=n+1 \end{cases} \quad (4.18)$$

#### 4.4.3 Dvodimenzione jake funkcije bazisa za anizotropne sredine

Veza između vektora  $\mathbf{E}$  i  $\mathbf{D}$  kod anizotropnih sredina je  $\mathbf{D} = \bar{\varepsilon}\mathbf{E}$ , gde je, kod 2D problema  $\bar{\varepsilon} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} \varepsilon_{rxx} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{ryy} \end{bmatrix}$ . Diferencijalna jednačina za električni skalar-potencijal koja se rešava je oblika:

$$\tilde{\mathbf{N}} \times (\bar{\varepsilon} \tilde{\mathbf{N}} V) = -\rho.$$

U odsustvu slobodnih naelektrisanja je  $\rho = 0$ .

Funkcije (4.17) su osnovne jake funkcije bazisa. Kao što se vidi na sl. 4.15, sve one, izuzev vrednosti  $f_k(u)$  za  $k=1, n$  su jednake nuli na obodu elementa kao i njihovi prvi izvodi,  $\left. \frac{df_k}{dx} \right|_{u=\pm 1}$ , gde je  $d/dx = (2/L^e)(d/du)$ , izuzev za  $k=2, n+1$ . Od izuzete četiri funkcije, uvek je po jedna iz para jednaka jedinici na obodu elementa. Par funkcija  $(f_1, f_n)$  obezbeđuje  $C^0$  neprekidnost a par  $(f_2, f_{n+1})$  obezbeđuje  $C^1$  neprekidnost. Ti parovi funkcija su 1D dubleti. Ostale funkcije su 1D singleti. Kombinujući 1D jake funkcije dubleta u jednom pravcu ( $x$  ili  $y$ ), sa 1D jakim funkcijama singleta u drugom pravcu, konstruišu se 2D jake funkcije dubleta. Dubleti se prostiru na dva susedna elementa u  $x$  ili  $y$ -pravcu. Dubleti koji obezbeđuju  $C^0$  ivičnu

#### 4. Funkcije bazisa

neprekidnost ne sadrže parametre sredine. Na sl. 4.18(b) su označeni sa D1– $x$  a postoje i analogno izgledaju D1– $y$ , u  $y$ -pravcu. Dubleti koji obezbeđuju generalizovanu  $C^1$  ivičnu neprekidnost moraju da uključuju parametre sredine.

Sada treba da se konstruišu dvodimenzione jake funkcije bazisa za anizotropne sredine kao

$$f_j(u, v) = f_{k,l}(u, v) = f_k(u) f_l(v) F_{k,l}^e, \quad (4.19)$$

gde je  $F_{k,l}^e$  konstantan faktor definisan unutar  $e$ -tog elementa, tako da bude obezbeđena neprekidnost  $D_n$  kroz granice između elemenata (i u isto vreme zadržana neprekidnost potencijala  $V$  kroz granice). Taj faktor je potreban samo ako su  $k$  i/ili  $l$  jednaki 2 ili  $n+1$ . Kombinovanjem dve 1D jake singletne funkcije dobija se 2D jaka singletna funkcija kao na sl. 4.18(a). Singleti ne učestvuju u formiranju uslova neprekidnosti. Kombinujući 1D jake funkcije dubleta u jednom pravcu ( $x$  ili  $y$ ), sa 1D jakim funkcijama singleta u drugom pravcu, konstruišu se 2D jake funkcije dubleta. Dubleti se prostiru na dva susedna elementa u  $x$  ili  $y$  pravcu. Dubleti koji obezbeđuju  $C^0$  ivičnu neprekidnost ne sadrže parametre sredine. Neka budu označeni sa D1– $x$  i D1– $y$ , zavisno od njihove orijentacije. Na sl. 4.18(b) je D1– $x$  dublet.

Na  $e$ -tom konačnom elementu, na granici između elemenata, sa jediničnom normalom orijentisanom u  $+x$ -pravcu,

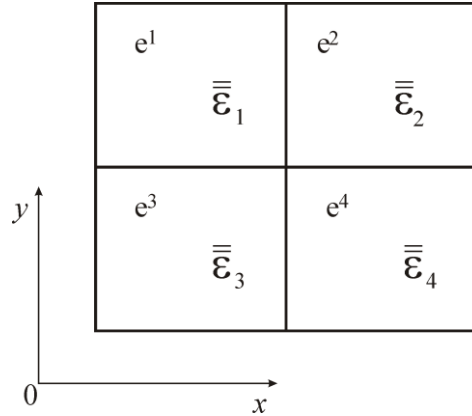
$$D_n = D_x = -\varepsilon_0 \varepsilon_{\text{rxx}}^e \frac{\partial V}{\partial x} \quad (4.20)$$

gde  $\varepsilon_{\text{rxx}}^e$  odgovara  $e$ -tom elementu u kome se određuje  $D_n$ . Jednostavan izbor tog faktora za bazisne funkcije koje formiraju D2– $x$  dublet je  $F_{k,l}^e = 1/\varepsilon_{\text{rxx}}^e$  ( $k = 2, n_x + 1$ ,  $l = 3, \dots, n_y - 1$ ).

Slično, za D2– $y$  dublet,  $F_{k,l}^e = 1/\varepsilon_{\text{ryy}}^e$  ( $k = 3, \dots, n_x - 1$ ,  $l = 2, n_y + 1$ ). Ovo takođe direktno važi za homogeni dielektrik za koji je najjednostavniji izbor  $F_{k,l}^e = 1$  u svim elementima i taj faktor iščezava za 2D jake dublete. Kombinovanjem dva 1D jaka

#### 4. Funkcije bazisa

dupleta konstruiše se 2D jaki kvadruplet. Postoje četiri takve kombinacije (sl. 4.16, 4.17). Kvadrupleti se prostiru kroz susedne elemente kao na sl. 4.19:



Sl. 4.19. Međusobno susedni konačni elementi nad kojima je moguće postojanje funkcije kvadrupleta.

Prvi kvadruplet, označen sa Q1 na sl. 4.17(a), obezbeđuje  $C^0$  neprekidnost u čvoru i ne uključuje osobine sredine. Drugi kvadruplet sa sl. 4.17(b) obezbeđuje generalizovanu  $C^1$  neprekidnost u čvorovima u  $x$ -pravcu, a treći, sa sl. 4.17(c) takođe  $C^1$  neprekidnost u  $y$ -pravcu. Označimo ih sa Q2- $x$  i Q2- $y$ . Ova dva kvadrupleta su slična kao dubleti D2- $x$  i D2- $y$ , samo su definisani na četiri elementa.

Za kvadruplet Q2- $x$  (na elementima 1-4 na sl. 4.19), iz  $C^0$  neprekidnosti duž njegove  $x$ -ose ( $u$ -ose), proizilazi  $F_{k,l}^1 = F_{k,l}^3$  i  $F_{k,l}^2 = F_{k,l}^4$ . Generalizovana  $C^1$  neprekidnost duž iste ose je time automatski zadovoljena i iz generalizovane  $C^1$  neprekidnosti sledi  $\epsilon_{\text{rx}}^1 F_{k,l}^1 = \epsilon_{\text{rx}}^2 F_{k,l}^2$  i  $\epsilon_{\text{rx}}^3 F_{k,l}^3 = \epsilon_{\text{rx}}^4 F_{k,l}^4$ . Odatle sledi da  $\epsilon_{\text{rx}}^1 / \epsilon_{\text{rx}}^2 = \epsilon_{\text{rx}}^3 / \epsilon_{\text{rx}}^4$ . To je uslov za uključenje Q2- $x$  kvadrupleta u skup 2D jakih funkcija bazisa. Pod ovim uslovima, jednostavan izbor za  $F_{k,l}^e$  je  $F_{k,l}^1 = F_{k,l}^3 = 1 / \epsilon_{\text{rx}}^1$ ,  $F_{k,l}^2 = F_{k,l}^4 = 1 / \epsilon_{\text{rx}}^2$ , što direktno važi za homogene dielektrike. Slično, za Q2- $y$  kvadruplet važi  $F_{k,l}^1 = F_{k,l}^2$  i  $F_{k,l}^3 = F_{k,l}^4$ , dok iz generalizovane  $C^1$  neprekidnosti sledi  $\epsilon_{\text{ry}}^1 F_{k,l}^1 = \epsilon_{\text{ry}}^3 F_{k,l}^3$  i  $\epsilon_{\text{ry}}^4 F_{k,l}^4 = \epsilon_{\text{ry}}^2 F_{k,l}^2$ , iz čega sledi da treba da bude

#### 4. Funkcije bazisa

$\varepsilon_{ryy}^1 / \varepsilon_{ryy}^2 = \varepsilon_{ryy}^3 / \varepsilon_{ryy}^4$ . Za homogeni dielektrik, kao i do sada, najjednostavniji izbor je  $F_{k,l}^e = 1$  u svim elementima.

Za Q3 kvadruplet,  $C^0$  neprekidnost duž obe ose je automatski zadovoljena.

Primena generalizovane  $C^1$  neprekidnosti ovde daje uslov:

$$\varepsilon_{rxx}^1 F_{k,l}^1 = \varepsilon_{rxx}^2 F_{k,l}^2, \varepsilon_{ryy}^1 F_{k,l}^1 = \varepsilon_{ryy}^3 F_{k,l}^3, \varepsilon_{ryy}^2 F_{k,l}^2 = \varepsilon_{ryy}^4 F_{k,l}^4, \varepsilon_{rxx}^3 F_{k,l}^3 = \varepsilon_{rxx}^4 F_{k,l}^4,$$

što se može pisati i kao

$$\frac{\varepsilon_{rxx}^1 \varepsilon_{ryy}^2}{\varepsilon_{rxx}^2 \varepsilon_{ryy}^1} = \frac{\varepsilon_{rxx}^3 \varepsilon_{ryy}^4}{\varepsilon_{rxx}^4 \varepsilon_{ryy}^3}.$$

Ovi uslovi, koji moraju da postoje između permitivnosti, generalno nisu zadovoljeni praktično nikada, pa se te funkcije bazisa moraju izostaviti.

Za homogeni dielektrik najjednostavniji izbor je opet  $F_{k,l}^e = 1$ . Tako, za homogenu anizotropnu sredinu, primenjuje se potpuni skup jakih FEM funkcija.

Za diskontinuitetno (deo-po-deo) homogeni anizotropni dielektrik, potpuni skup funkcija bazisa se može primeniti pod izvesnim uslovima za elemente tenzora permitivnosti. Neka je dielektrik deo-po-deo homogen u pravcu y-ose, odnosno u gornjoj sredini na sl. 4.19, dielektrik tenzora permitivnosti  $\overline{\varepsilon}_1$  (sloj 1) a u donjoj sredini dielektrik tenzora permitivnosti  $\overline{\varepsilon}_2$  (sloj 2). Tada za Q2-y kvadruplet iz generalizovane  $C^0$  neprekidnosti sledi  $F_{k,l}^1 = F_{k,l}^2$  i  $F_{k,l}^3 = F_{k,l}^4$  a iz generalizovane  $C^1$  neprekidnosti sledi  $\varepsilon_{ryy}^1 F_{k,l}^1 = \varepsilon_{ryy}^2 F_{k,l}^3$  i  $\varepsilon_{ryy}^1 F_{k,l}^2 = \varepsilon_{ryy}^2 F_{k,l}^4$ , gde je  $F_{k,l}^1$  konstantan faktor u sloju 1 a  $F_{k,l}^2$  u sloju 2, pa je logičan izbor  $F_{k,l}^1 = F_{k,l}^2 = 1/\varepsilon_{ryy}^1$  i  $F_{k,l}^3 = F_{k,l}^4 = 1/\varepsilon_{ryy}^2$ . Za Q2-x kvadruplet iz generalizovane  $C^0$  neprekidnosti sledi  $F_{k,l}^1 = F_{k,l}^3$  i  $F_{k,l}^2 = F_{k,l}^4$  iz generalizovane  $C^1$  neprekidnosti sledi da je  $\varepsilon_{rxx}^1 F_{k,l}^1 = \varepsilon_{rxx}^2 F_{k,l}^2$  i  $\varepsilon_{rxx}^2 F_{k,l}^3 = \varepsilon_{rxx}^1 F_{k,l}^4$ , dakle ovde je već obezbeđena  $C^0$  i  $C^1$  neprekidnost. Za kvadruplet Q3 sledi  $\varepsilon_{rxx}^1 F_{k,l}^1 = \varepsilon_{rxx}^2 F_{k,l}^2$  i  $\varepsilon_{rxx}^2 F_{k,l}^3 = \varepsilon_{rxx}^1 F_{k,l}^4$ , odakle je  $F_{k,l}^1 = F_{k,l}^2 = 1/\varepsilon_{rxx}^1$  i

#### 4. Funkcije bazisa

$F_{k,l}^3 = F_{k,l}^4 = 1/\varepsilon_{\text{rxx}}^2$ . Ako bi na mestu elemenata  $e^3$  i  $e^4$  bio provodnik, onda bi trebalo izostaviti iz skupa Q2- $x$  jer on daje tangencijalnu komponentu vektora  $\mathbf{E}$  na površini provodnika a ona je nula.

Ako je dielektrik deo-po-deo homogen u pravcu  $x$ -ose, odnosno na elementima  $e^1$  i  $e^3$  je dielektrik permitivnosti  $\varepsilon_{\text{ryy}}^1$  a na elementima  $e^2$  i  $e^4$  je  $\varepsilon_{\text{ryy}}^2$ , analogno gornjem razmatranju, dobija se  $F_{k,l}^1 = F_{k,l}^3 = 1/\varepsilon_{\text{ryy}}^1$  i  $F_{k,l}^2 = F_{k,l}^4 = 1/\varepsilon_{\text{ryy}}^2$  za kvadruplete Q3 i Q2- $y$ , dok je za Q2- $x$  već obezbeđena i  $C^0$  i  $C^1$  neprekidnost.

Neka je na elementu  $e^3$  i  $e^4$  dielektrik sa  $\varepsilon_{\text{rxx}}^3 = \varepsilon_{\text{rxx}}^4 = \varepsilon_{\text{rxx}}^1$  i  $\varepsilon_{\text{ryy}}^3 = \varepsilon_{\text{ryy}}^4 = \varepsilon_{\text{ryy}}$ . Neka je na elementu  $e^1$  dielektrik  $\varepsilon_{\text{r}}^1 = \text{diag}[\varepsilon_{\text{rxx}}^2, \varepsilon_{\text{ryy}}]$ , a na elementu  $e^2$  dielektrik sa  $\varepsilon_{\text{r}}^2 = \text{diag}[\varepsilon_{\text{rxx}}^3, \varepsilon_{\text{ryy}}]$ . Za Q3 se može izabrati  $F_{k,l}^3 = F_{k,l}^4 = 1/\varepsilon_{\text{rxx}}^1$ ,  $F_{k,l}^1 = 1/\varepsilon_{\text{rxx}}^2$ ,  $F_{k,l}^2 = 1/\varepsilon_{\text{rxx}}^3$ , pa je za Q3 ispunjena i  $C^0$  (jer je funkcija na obodu elemenata uvek jednaka nuli) i  $C^1$  neprekidnost. Za Q2- $x$  i Q2- $y$  se ne može istovremeno obezbediti i  $C^0$  i  $C^1$  neprekidnost pa se oni moraju izbaciti, što se lako dokazuje. Na primer, za Q2- $x$  kvadruplet, da bi bila očuvana  $C^1$  neprekidnost na elementima  $e^3$  i  $e^4$ , potrebno je da  $F_{k,l}^3 = F_{k,l}^4 = 1/\varepsilon_{\text{rxx}}^1$ . Da bi bila očuvana  $C^1$  neprekidnost na  $e^1$  i  $e^2$ , potrebno je da bude  $F_{k,l}^1 = 1/\varepsilon_{\text{rxx}}^1$  i  $F_{k,l}^2 = 1/\varepsilon_{\text{rxx}}^3$ . Da bi bila očuvana  $C^0$  neprekidnost na  $e^2$  i  $e^4$  potrebno je da bude  $F_{k,l}^2 = F_{k,l}^4$ , što nije ispunjeno, jer  $\varepsilon_{\text{rxx}}^1 \neq \varepsilon_{\text{rxx}}^3$ . Dakle, ne može se istovremeno obezbediti  $C^0$  i  $C^1$  neprekidnost. Slično se dokazuje da se ne može obezbediti istovremeno  $C^0$  i  $C^1$  neprekidnost i za Q2- $y$  kvadruplet. U ovom slučaju se ne može koristiti kompletan skup jakih funkcija bazisa. Analogno se mogu analizirati i ostali slični slučajevi i ne mogu se istovremeno obezbediti obe vrste neprekidnosti, pa se moraju izbaciti Q2- $x$  i Q2- $y$ , sem u posebnom slučaju kad su dielektrične permitivnosti međusobno proporcionalne, što se praktično i ne sreće u praksi.

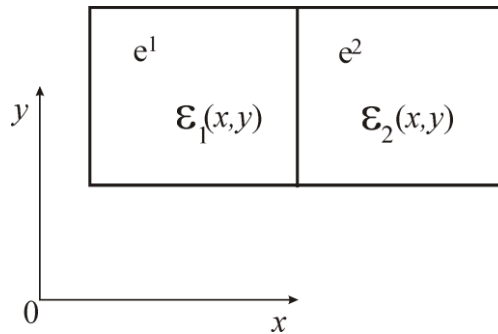
Jake funkcije bazisa ne mogu da modeluju singularitet koji se javlja na konveksnoj ivici bilo provodnika bilo dielektrika. Pošto nije moguće očuvanje  $C^0$  i  $C^1$  neprekidnosti a u skupu funkcija bazisa ostaje samo Q3, koji ima sedlastu tačku u kojoj

#### 4. Funkcije bazisa

je gradijent funkcije ( odnosno potencijala  $V$ ) jednak nuli, što znači da tamo gde polje ima beskonačnu vrednost, jaka formulacija daje da polje ima vrednost nula što je nedostatak jake formulacije. Tu bi bilo potrebno skup funkcija bazisa dopuniti funkcijama koje modeluju singularitet, odnosno ivični efekat. Ovo predstavlja zadatak daljeg istraživanja.

#### 4.4.4 Jake 2D funkcije bazisa za kontinualno nehomogen dielektrik

Za nehomogene sredine se rešava diferencijalna jednačina tipa (4.15) i javlja potreba da se kreiraju funkcije bazisa za jaku FEM formulaciju. Ukoliko se posmatra dielektrik koji je homogen, t.j.  $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 = \text{const.}$ , ispunjeni su granični uslovi za funkcije tipa (4.18) za 2D probleme. Potrebno je da se za kontinualno nehomogeni dielektrik formiraju funkcije bazisa, pa otuda pitanje da li u slučaju kontinualno nehomogenog izotropnog dielektrika, gde se dielektrična konstanta menja kao  $\epsilon = \epsilon(x, y)$ , može da bude zadovoljen granični uslov za normalne komponente vektora  $\mathbf{D}$  sa obe strane granice između elemenata, sl. 4.20.



Sl. 4.20 Susedni konačni elementi sa kontinualno nehomogenim dielektrikom.

Ako su elementi kontinualno nehomogeni i ako se bazisne funkcije modifikuju deljenjem permitivnošću, granični uslov postaje

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} \frac{f_1}{\epsilon_1(x, y)} \right|_1 = \left. \frac{\partial}{\partial x} \frac{f_2}{\epsilon_2(x, y)} \right|_2, \quad (4.21)$$

U opštem slučaju ovaj izvod je oblika

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{f_1}{\epsilon_1(x, y)} = \frac{\frac{\partial f_1}{\partial x} \epsilon_1(x, y) - f_1 \frac{\partial \epsilon_1(x, y)}{\partial x}}{\epsilon_1(x, y)^2},$$



#### 4. Funkcije bazisa

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{f_2}{\varepsilon_2(x, y)} = \frac{\frac{\partial f_2}{\partial x} \varepsilon_2(x, y) - f_2 \frac{\partial \varepsilon_2(x, y)}{\partial x}}{\varepsilon_2(x, y)^2} \quad (4.22)$$

Neka je permitivnost svuda označena sa  $\varepsilon_1(x, y) = \varepsilon_2(x, y) = \varepsilon(x, y)$ , pri čemu, u opštem slučaju, postoji mogućnost da funkcija kojom je zadata permitivnost između elemenata ne zadovoljava ni  $C^0$  ni  $C^1$  neprekidnost, što znači da se može skokovito menjati i da joj se prvi izvod takođe skokovito menja. U specijalnom slučaju, kada u celom domenu funkcija permitivnosti ima  $C^1$  neprekidnost, može se formulirati jedna formulacija tako što se sve funkcije bazisa koje formiraju granični uslov za  $D_n$ , pomnože sa  $f_\varepsilon = 1/\varepsilon(x, y)$ . Da bi mogli da se u skupu bazisa zadrže dubleti ili kvadrupleti, potrebno je da funkcije bazisa koje treba da se množe izrazima, odnosno funkcijama, ne dovode do toga da se u izrazima za izvod po normalni dobijaju novi članovi koji zavise od  $\varepsilon(x, y)$ , jer će onda imati nepredvidive vrednosti, pa se ne može održati  $C^1$  neprekidnost. Osim toga mora da bude očuvana i  $C^0$  neprekidnost, slično kao kod deo-po-deo homogenog dielektrika.

Posmatrajmo prvo dublet sa Sl. 4.18(c). Označimo sa  $x_0$  koordinatu na granici dva njegova elementa. Funkcija bazisa koja obezbeđuje  $C^1$  neprekidnost u elementu levo od  $x_0$  množi se sa  $f_\varepsilon = 1/\varepsilon(x_{0-}, y)$  a u elementu desno od  $x_0$  sa  $f_\varepsilon = 1/\varepsilon(x_{0+}, y)$ . Funkcije  $f_\varepsilon$  ne zavise od  $x$  pa je uspostavljena  $C^1$  neprekidnost. Analogno važi za ovakav dublet u  $y$  pravcu. Ovi tipovi dubleta ostaju u kompletnu funkcija.

Kvadruplet Q3 ima već obezbeđenu  $C^0$  neprekidnost na granicama između elemenata jer su funkcije bazisa tu jednake 0. Kod njega treba voditi računa da se ne pojave novi članovi kod izvoda  $\partial/\partial n$  da ne bi bila narušena  $C^1$  neprekidnost (jednačina 4.22). Ako se, na primer, posmatra deo kvadrupleta nad elementom  $e^3$  sa sl. 4.19, on na svojoj desnoj i kao i na gornjoj ivici ima izvod  $\partial/\partial n$  različit od nule. Da bi se obezbedila  $C^1$  neprekidnost treba da se funkcija bazisa koja čini taj deo kvadrupleta množi funkcijom koja duž desne ivice ima vrednost  $f_\varepsilon = 1/\varepsilon(x_{0-}, y)$ . Kako je funkcija bazisa duž ove ivice jednaka nuli, kada se računa  $\partial/\partial n$  proizvoda te funkcije bazisa i  $f_\varepsilon$ , onda će se

#### 4. Funkcije bazisa

pojavit će član koji je proizvod funkcije bazisa i  $\partial f_\varepsilon / \partial n$ , koji će biti 0 jer je funkcija bazisa jednaka nuli bez obzira na vrednost  $\partial f_\varepsilon / \partial n$  koja ne mora biti 0. Isto tako uz gornju ivicu elementa  $e^3$  i jedini uslov za  $f_\varepsilon$  je da uz tu ivicu bude  $f_\varepsilon = 1/\varepsilon(x, y_{0-})$ , a izvod  $\partial f_\varepsilon / \partial n$  ne mora biti 0 jer je i tu funkcija bazisa jednaka 0. Odavde sledi da funkcija  $f_\varepsilon$  može biti  $f_\varepsilon = 1/\varepsilon(x, y)$ . Isti zaključak se može sprovesti za ostale elemente ovog kvadrupleta, što znači da se Q3 ne izbacuje iz kompleta.

Posmatrajmo sada kvadruplet Q2-x. Na granici između elemenata  $e^3$  i  $e^1$  može se desiti da se permitivnost skokovito menja, što narušava  $C^0$  neprekidnost. Može se desiti da se dielektrična permitivnost ne menja skokovito ali da ima skokovitu promenu izvoda duž normale čime je narušena  $C^1$  neprekidnost. Dakle ovaj kvadruplet kao i Q2-y se odbacuju.

Ako se permitivnost menja samo duž  $x$ - koordinate onda ostaje Q2-x u kompletu, jer nema zavisnosti od  $y$ , pa se leva polovina funkcija bazisa od kvadrupleta nad elementima  $e^3$  i  $e^1$  množi sa  $f_\varepsilon = 1/\varepsilon(x_{0-})$  a desna polovina, nad  $e^2$  i  $e^4$ , sa  $f_\varepsilon = 1/\varepsilon(x_{0+})$ . Posmatrajmo sada kvadruplet Q3. Na granici koja razdvaja elemente  $e^3$  i  $e^4$  od  $e^1$  i  $e^2$  sa sl. 4.19 postoji  $D_n$ . Sa dve strane te granice, pod pretpostavkom da je  $\varepsilon = \varepsilon(x)$ , permitivnosti su jednake pa i gornji i donji deo kvadrupleta treba množiti istim izrazom a to je obezbeđeno sa gornje dve funkcije  $f_\varepsilon$ . Znači da Q3 ostaje u ovom specijalnom slučaju, pa se iz skupa funkcija bazisa ne izbacuje ni jedna funkcija.

#### 4.5 Zaključak

Uvidom u obimnu literaturu o FEM-u, od čega je literatura na srpskom jeziku veoma skromna, zaključuje se da je izbor funkcija bazisa od presudnog značaja za tačnost, stabilnost rešenja, brzinu konvergencije, veličinu mreže a time i matrice sistema odnosno brzine računanja kod čvorno zasnovanih funkcija bazisa koje su ilustrovane u prvom delu ovog poglavlja. Većina radova o FEM-u se odnosi na čvorno zasnovane funkcije bazisa. Takođe sa njima rade i programski paketi za elektrostatiku koje je autorka imala na uvid. Činjenica je da broj čvorova, odnosno veličina mreže,

#### 4. Funkcije bazisa

predstavljaju glavnu teškoću kod ove metode. Poboljšanje aproksimacije izborom višeg reda čvorno zasnovane funkcije bazisa unosi dodatne čvorove, od kojih neki postaju unutrašnji kad je u pitanju polinomska aproksimacija, što zahteva postupak kondenzacije. Ako polinom nije kompletan, odnosno ako su iz njega izostavljeni neki članovi onda on nema svojstvo geometrijske izotropije (nije invarijantan u odnosu na transformaciju iz jednog sistema *Descartes*-ovih koordinata u drugi što znači da se mora voditi računa koji se članovi mogu izostaviti) a bez svojstva izotropije ne može se očekivati dobra aproksimacija funkcija na konačnom elementu. Zato se smatra opravdanim uvođenje funkcija bazisa koje nisu čvorno zasnovane. Funkcije bazisa koje nisu čvorno zasnovane ne produkuju komplikovanu mrežu niti unose dodatne čvorove sa porastom reda aproksimacije. Polinomi koji čine funkcije bazisa koje nisu čvorno zasnovane su potpuni i vrlo jednostavni. Dalje, jake funkcije bazisa, koje nisu čvorno zasnovane i imaju  $C^1$  neprekidnost pa omogućuju prirodno i jednostavno implementiranje graničnih uslova prve i druge vrste, prema iskustvu autora, već su našle svoje mesto u ovom veoma rasprostranjenom, veoma upotrebljivom i veoma upotrebljavanom postupku za rešavanje ne samo EM polja. Češće se u literaturi sreće slaba FEM formulacija, koja zadovoljava  $C^0$  neprekidnost i koja ima dobru konvergenciju rezultata što je i pokazano u šestom poglavlju sa funkcijama bazisa koje se mogu takođe smatrati nečvorno zasnovanim. U radu je poseban akcenat stavljen na hijerarhijske, nečvorno zasnovane funkcije bazisa jake formulacije koje zadovoljavaju  $C^0$  i  $C^1$  neprekidnost. Analizirana je mogućnost primene 2D kompleta ovih funkcija na probleme homogenih, deo-po-deo homogenih i nehomogenih dielektričnih sredina, kao i izotropnih i anizotropnih. Pokazano je da u opštem slučaju kontinualno nehomogenog dielektrika može biti zadržan ceo skup funkcija bazisa u slučaju da je održana  $C^0$  i  $C^1$  neprekidnost. U daljem toku rada primenjene su na elektrostatičku analizu osnovnih struktura za vođenje talasa koje imaju tačno rešenje za karakteristične parametre, a rezultati poređeni sa rezultatima dobijenim slabom formulacijom kao i drugim numeričkim i analitičkim metodama. Ispostavilo se da se zadovoljavajuća tačnost postiže za nizak red funkcija bazisa, što rezultuje u ne prevelikom broju nepoznatih, što ipak zavisi od geometrije problema, kao i da je konvergencija tako dobijenih rezultata stabilna. U posebnom, sedmom poglavlju su upoređene jake i slabe funkcije bazisa koje

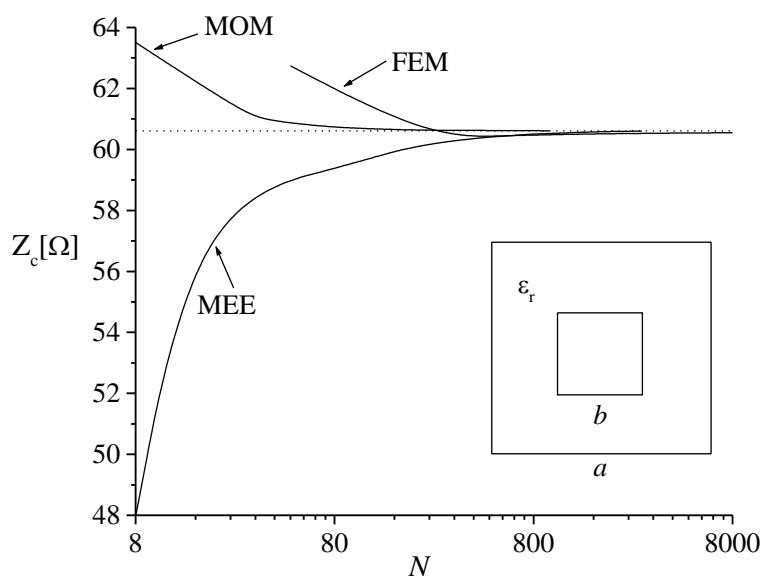
#### 4. Funkcije bazisa

nisu čvorno zasnovane. Pokazalo se da jake funkcije bazisa za istu tačnost rešenja zahtevaju skoro četiri puta manji broj nepoznatih. Rezultati dobijeni primenom jakih funkcija bazisa su upoređeni i sa rezultatima dobijenim drugim metodama i izvedeni odgovarajući zaključci. Takođe je pokazano da jake funkcije bazisa pokazuju dobru stabilnost rezultata i da je potreban, za jednostavnije geometrije, nizak, čak najniži red funkcija bazisa da bi se dobilo rešenje zadovoljavajuće tačnosti.

## 5. Numerički primeri kvazistatičke analize vodova pomoću slabe FEM formulacije

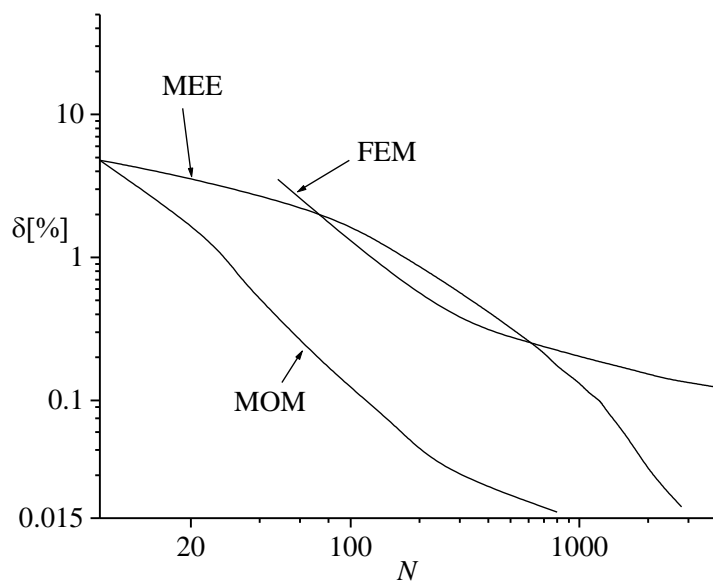
### 5.1. Poređenje tri metode za kvazistatički proračun

U ovom odeljku su na referentnom (*benchmark*) primeru kvadratnog koaksijalnog voda ispunjenog vazduhom, dimenzija  $a/b=3$ , upoređene tri numeričke metode, slaba formulacija metode konačnih elemenata (FEM, za red funkcija bazisa  $n_x = n_y = 3$ ), metoda momenata (MoM) i metoda ekvivalentne elektrode (EEM) [79], u pogledu tačnosti, potrebnog broja nepoznatih, odnosno memorijskog prostora, i brzine konvergencije [80]. Na sl. 5.1. prikazana je karakteristična impedansa u funkciji broja nepoznatih, na sl. 5.2. relativna greška za karakterističnu impedansu u funkciji broja nepoznatih, na sl. 5.3. karakteristična impedansa u funkciji potrebnog memorijskog prostora, na sl. 5.4. relativna greška za karakterističnu impedansu u funkciji potrebnog memorijskog prostora. Za računanje karakterističnih parametara MoM metodom korišćen je programski paket Linpar [138] bez autosegmentacije, a za računanje metodom ekvivalentne elektrode je napravljen fortranski program.

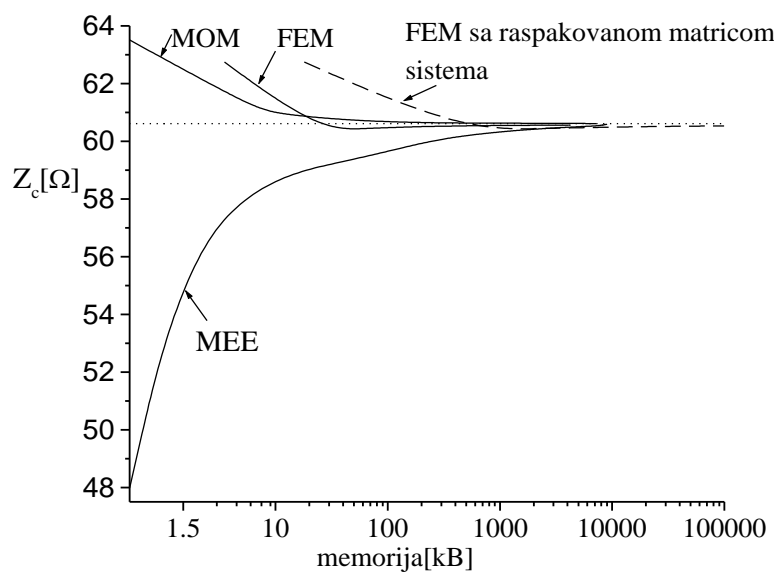


Sl. 5.1. Karakteristična impedansa  $Z_c$ , u funkciji broja nepoznatih.

## 5. Numerički primeri kvazistatičke analize vodova pomoću slabe FEM formulacije

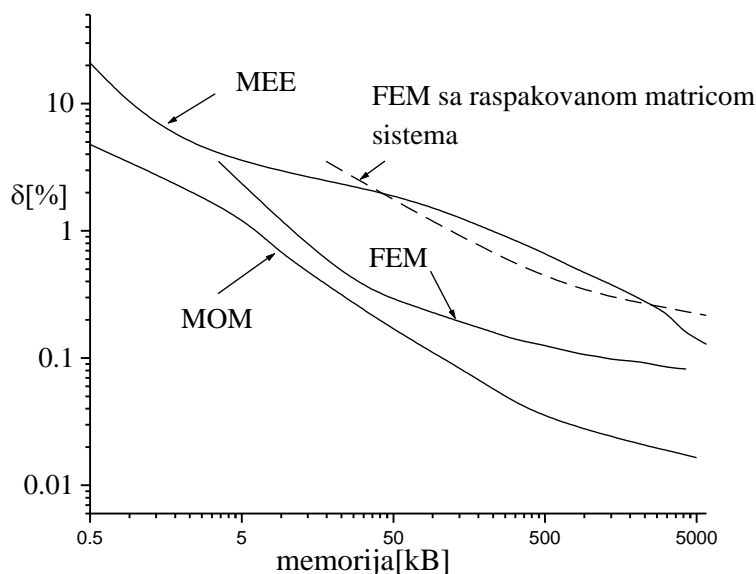


Sl. 5.2. Relativna greška za karakterističnu impedansu u funkciji broja nepoznatih.



Sl. 5.3. Karakteristična impedansa u funkciji potrebne memorije [kB].

## 5. Numerički primeri kvazistatičke analize vodova pomoću slabe FEM formulacije



Sl. 5.4. Relativna greška za karakterističnu impedansu u funkciji memorije [kB].

Sa grafika se zaključuje da sve tri metode imaju stabilnu konvergenciju, pri čemu MoM ima najbržu, FEM sa zapakovanom matricom ima brzinu konvergencije blisku MoM-u, dok najsporiju konvergenciju ima EEM ali je ona koncepciono najjednostavnija. Pogodno je da FEM metoda zbog rastresite matrice sistema radi sa zapakovanom matricom, tj. vektorom koji sadrži samo elemente originalne matrice različite od nule, pri čemu je potrebno da se čuva i informacija o poziciji elementa u matrici. Kako se ovde radi o slaboj FEM formulaciji poznatoj u literaturi, u narednim poglavljima rada su proučavane osobine jake FEM formulacije da bi se ustanovile eventualne prednosti ili nedostaci te formulacije naročito u odnosu na slabu FEM formulaciju.

### 5.2. Analiza konvergencije i tačnosti slabe FEM formulacije na benchmark primeru koaksijalnog voda kvadratnog preseka

U ovom odeljku je na *benchmark* primeru koaksijalnog voda kvadratnog poprečnog preseka ispunjenog vazduhom izvršena analiza konvergencije i tačnosti FEM metode zasnovane na hijerarhijskim funkcijama bazisa višeg reda i slaboj FEM/Galerkinovoj formulaciji za pravougaonu 2D mrežu u funkciji reda funkcije bazisa i gustine mreže. Ovaj pristup se razlikuje od klasičnog FEM pristupa sa čvorno

## 5. Numerički primeri kvazistatičke analize vodova pomoću slabe FEM formulacije

zasnovanim interpolacionim funkcijama bazisa nižeg reda. Kod primenjenog pristupa neprekidnost funkcije ( $C^0$  neprekidnost za elektrostatički potencijal  $V(x, y)$ ) je obezbeđena pomoću kvadrupleta – specijalnih funkcija bazisa definisanih na četiri susedna elementa i dubleta – specijalnih funkcija bazisa definisanih na dva susedna elementa mreže, kao što je prikazano u četvrtom poglavlju, odeljak 4.2, sl. 4.12. i sl. 4.13., respektivno. Kod slabe formulacije kvadrupleti su linearne funkcije obe koordinate i obezbeđuju neprekidnost u čvorovima elemenata pa se mogu smatrati čvorno zasnovanim. Oni imaju vrednost 0 na spoljašnjim ivicama grupe od četiri elementa a na unutrašnjim čvorovima vrednost različitu od 0. Dubleti su linearne funkcije duž jedne koordinate a kvadratne funkcije duž druge koordinate, čime je obezbeđena neprekidnost duž zajedničke stranice. Ostale funkcije bazisa definisane su samo na po jednom elementu i jednake su nuli na ivicama elementa. One su proizvoljnog (višeg) reda i obezbeđuju porast tačnosti rešenja unutar elemenata. Te funkcije bazisa su direktno generisane iz 1D funkcija bazisa definisanih u [65]. Aproksimacija najnižeg reda sastoji se samo iz kvadrupleta, što u stvari predstavlja čvorno zasnovanu aproksimaciju prvog reda.

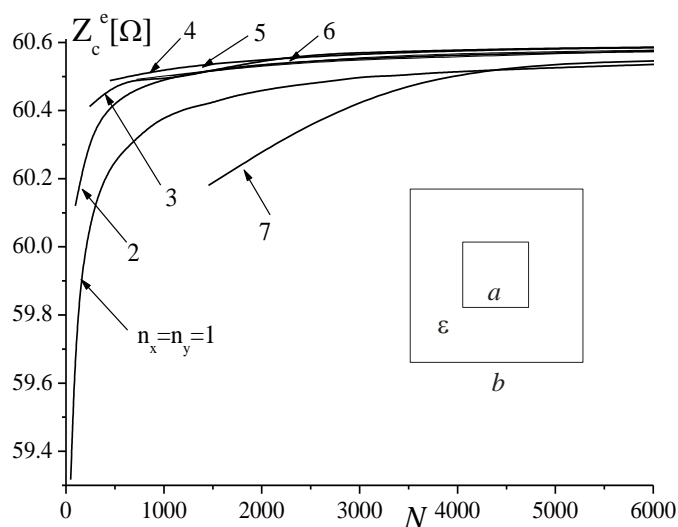
Za slučaj voda kvadratnog poprečnog preseka, odnosa stranica spoljašnjeg i unutrašnjeg provodnika  $a/b = 3$  za koji postoji egzaktno rešenje za karakterističnu impedansu, koje iznosi  $Z_c = 60.610964118877299... \Omega$ , [139, 140], formirana je uniformna kvadratna mreža na poprečnom preseku voda, pri čemu je sa  $n_M$  označen ukupan broj elemenata mreže. U obzir nije uzeta simetrija, niti primenjena autosegmentacija. Kako se svaka dvodimenzionalna funkcija bazisa formira kao proizvod jednodimenzionalnih funkcija bazisa [65], red funkcija bazisa duž  $x$  i  $y$  pravca mreže označen je sa  $n_x$  i  $n_y$ . Povećavana je gustina mreže a red funkcija bazisa povećavan od 1 do 7.

Ispitano je kako promena gustine FEM mreže, promena reda funkcije bazisa i uzimanje simetrije u obzir pri proračunu utiču na konvergenciju, tačnost i stabilnost konvergencije rezultata. Na sl. 5.5. prikazana je karakteristična impedansa  $Z_c$ , računata preko energije a na sl. 5.6. preko naelektrisanja na unutrašnjem provodniku, pri čemu je red funkcija bazisa parametar a povećava se gustina mreže, odnosno broj nepoznatih



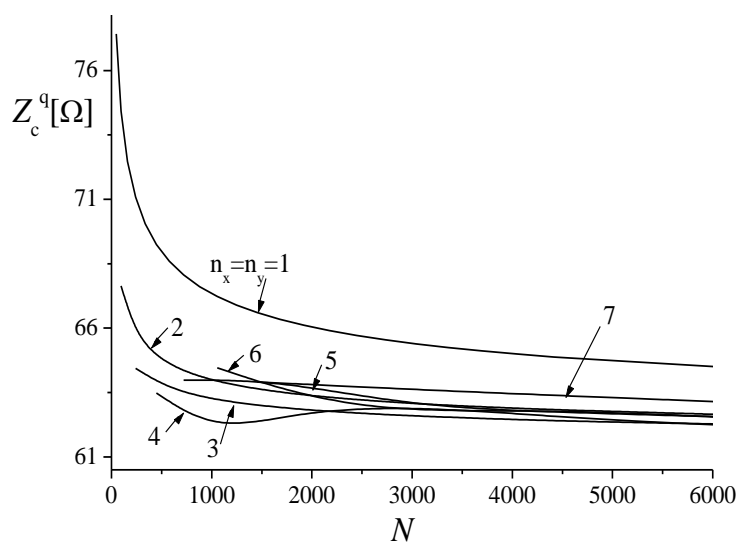
## 5. Numerički primeri kvazistatičke analize vodova pomoću slabe FEM formulacije

nenultih elemenata u matrici sistema,  $N$ . Na sl. 5.7. prikazana je relativna greška za karakterističnu impedansu računata preko energije u funkciji broja nepoznatih, pri čemu je parametar red funkcija bazisa. Na sl. 5.8. je prikazana relativna greška za karakterističnu impedansu izračunatu preko naelektrisanja u funkciji broja nepoznatih, gde je parametar red funkcija bazisa. Sl. 5.9. prikazuje relativnu grešku za karakterističnu impedansu računatu preko energije u funkciji broja nepoznatih, gde je parametar broj elemenata mreže,  $n_M$ . Sl. 5.10. prikazuje relativnu grešku za karakterističnu impedansu računatu preko naelektrisanja u funkciji broja nepoznatih, gde je parametar broj elemenata mreže,  $n_M$ . Na sl. 5.11. je prikazana relativna greška za karakterističnu impedansu računatu preko energije u funkciji broja elemenata mreže, gde je parametar red funkcija bazisa. Na sl. 5.12. je prikazana relativna greška za karakterističnu impedansu računatu preko naelektrisanja u funkciji broja elemenata mreže  $n_M$ , gde je parametar red funkcija bazisa.

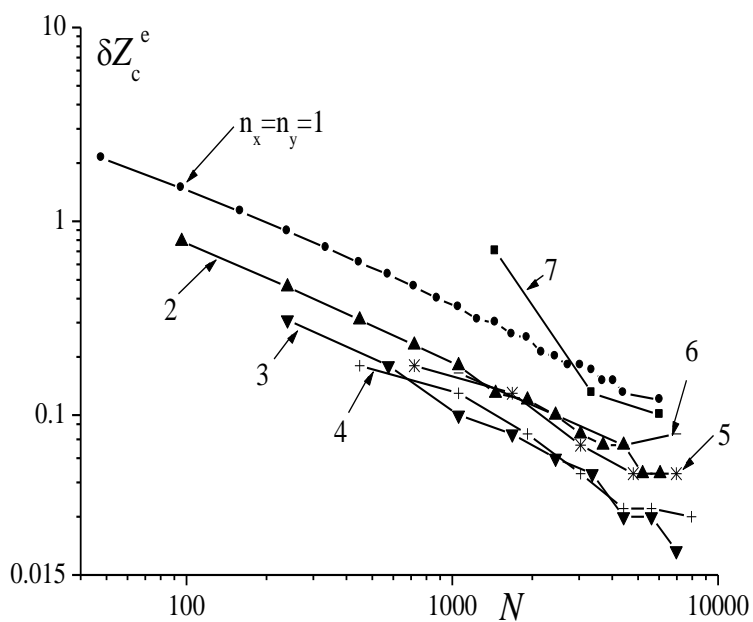


Sl. 5.5. Karakteristična impedansa računata preko energije u funkciji broja nepoznatih  $N$ . Parametar je red f-ja bazisa.

5. Numerički primeri kvazistatičke analize vodova pomoću slabe FEM formulacije

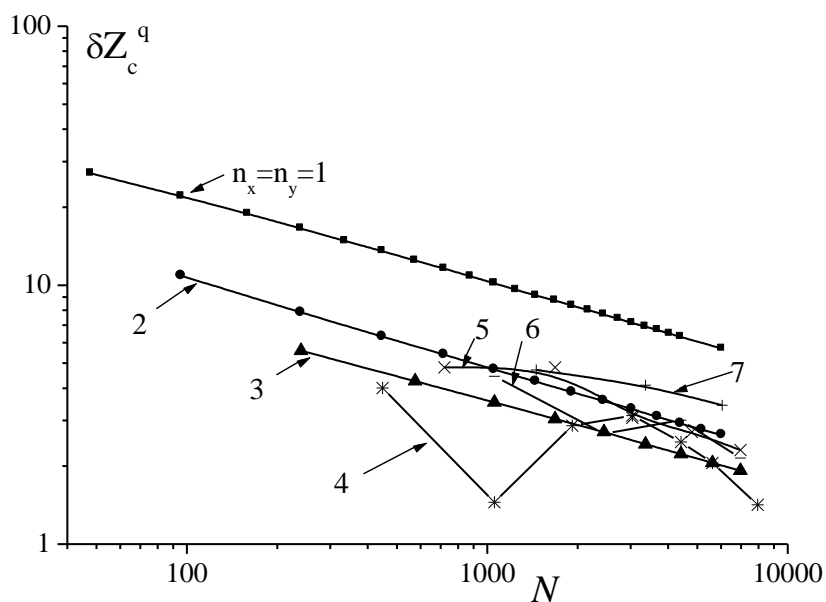


Sl. 5.6. Karakteristična impedansa računata preko naelektrisanja u funkciji broja nepoznatih. Parametar je red f-ja bazisa.

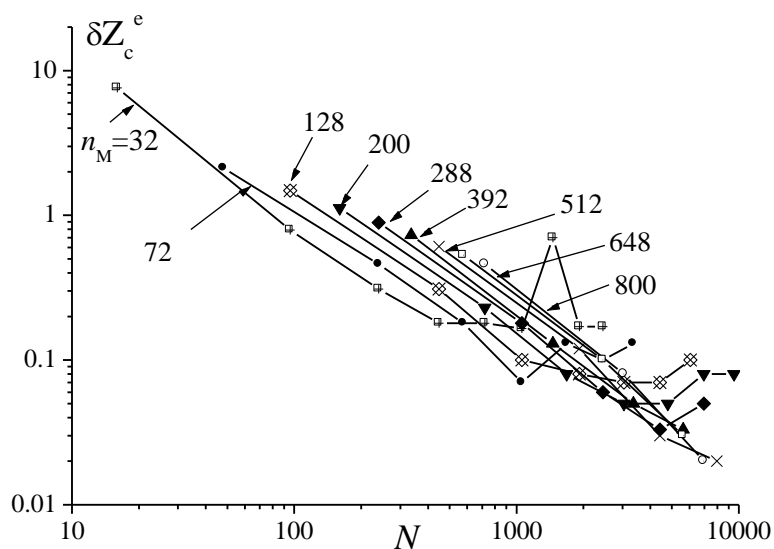


Sl. 5.7. Relativna greška za karakterističnu impedansu računatu preko energije u funkciji broja nepoznatih. Parametar je red f-ja bazisa.

5. Numerički primeri kvazistatičke analize vodova pomoću slabe FEM formulacije

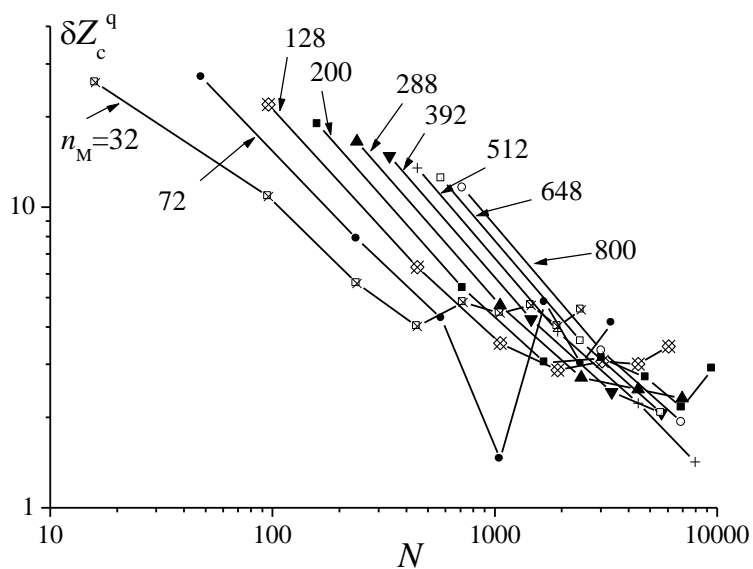


Sl. 5.8. Relativna greška za karakterističnu impedansu računatu preko naelektrisanja u funkciji broja nepoznatih. Parametar je red f-ja bazisa.

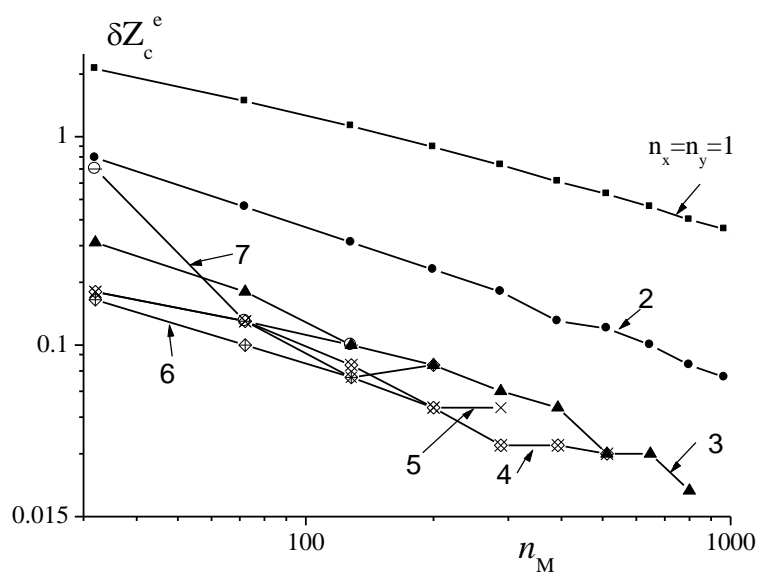


Sl. 5.9. Relativna greška za karakterističnu impedansu računatu preko energije u funkciji broja nepoznatih. Parametar je broj elemenata mreže,  $n_M$ .

5. Numerički primeri kvazistatičke analize vodova pomoću slabe FEM formulacije

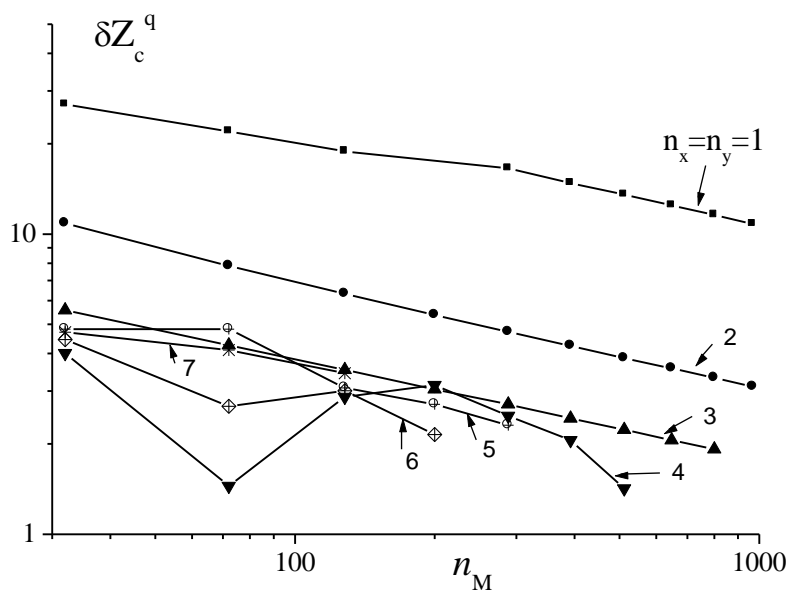


Sl. 5.10. Relativna greška za karakterističnu impedansu računatu preko naelektrisanja u funkciji broja nepoznatih. Parametar je broj elemenata mreže,  $n_M$ .



Sl. 5.11. Relativna greška za karakterističnu impedansu računatu preko energije u funkciji broja elemenata mreže. Parametar je red f-ja bazisa.

## 5. Numerički primeri kvazistatičke analize vodova pomoću slabe FEM formulacije



Sl. 5.12. Relativna greška za karakterističnu impedansu računatu preko naelektrisanja u funkciji broja elemenata mreže  $n_M$ . Parametar je red f-ja bazisa.

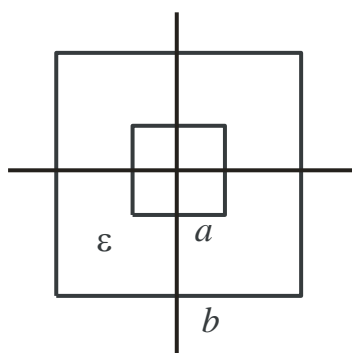
### 5.2.1. Primena simetrije

U slučajevima kada postoji simetrija a primenjena je pravougaona mreža, kao što je to u posmatranom primeru kvadratnog voda, dovoljno je proračun vršiti samo za mrežu na jednoj četvrtini poprečnog preseka voda, kao na sl. 5.13. U tom slučaju na stranicama voda treba obezbediti granični uslov za potencijal a na presecima granični uslov za neprekidnost normalne komponente vektora električne indukcije.<sup>2</sup>

---

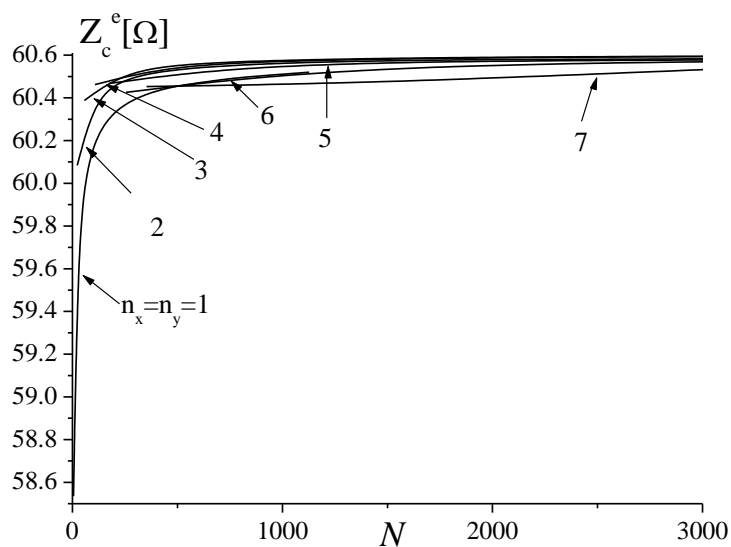
<sup>2</sup> U slučaju kvadratnog voda može da se uzme i samo osmina geometrije ali tada postoji kosa granica koja se ovde ne poklapa sa ivicama elemenata, što bi iskomplikovalo praktičnu primenu tog stepena simetrije.

## 5. Numerički primeri kvazistatičke analize vodova pomoću slabe FEM formulacije



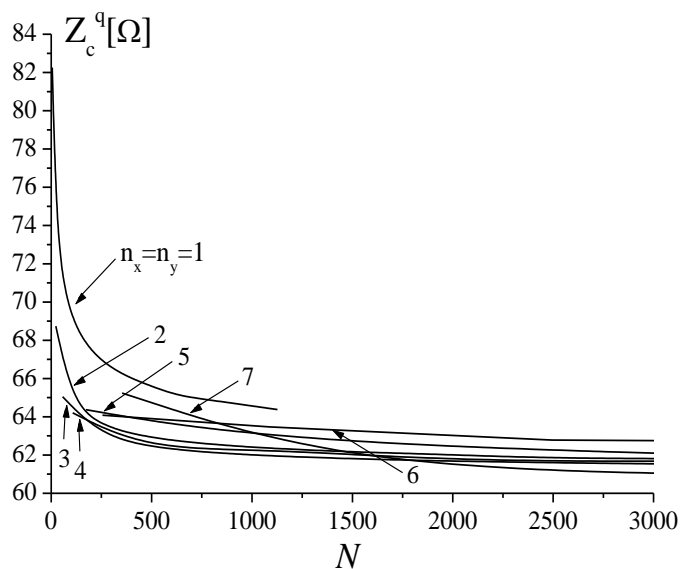
Sl. 5.13. U slučaju simetrije i pravougaone mreže dovoljno je posmatrati samo četvrtinu poprečnog preseka pravougaonog voda.

Rezultati za karakterističnu impedansu računatu preko energije i preko naelektrisanja prikazani su na sl. 5.14. i sl. 5.15. Vidi se da je potreban oko četiri puta manji broj nepoznatih za postizanje iste tačnosti (u odnosu na analizu bez simetrije), što je i očekivan rezultat.

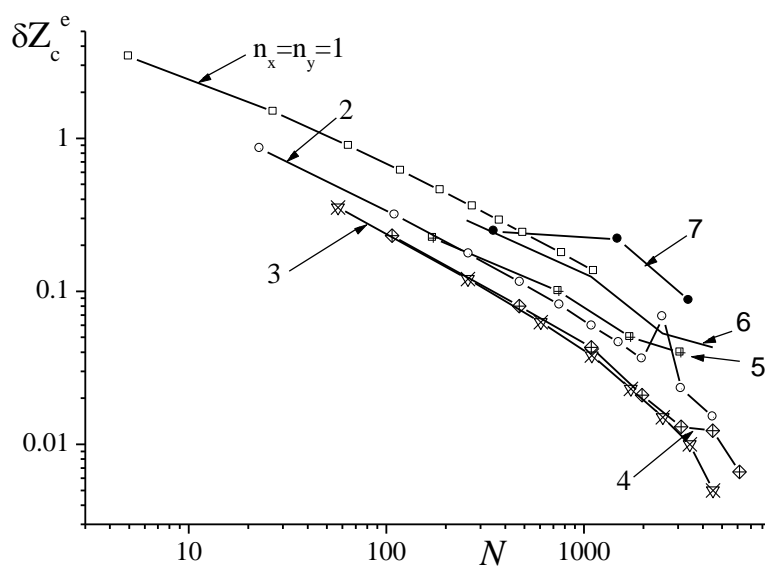


Sl. 5.14. Karakteristična impedansa računata preko energije u funkciji broja nepoznatih  $N$ . Parametar je red  $f$ -ja bazisa. Primenjena je simetrija.

## 5. Numerički primeri kvazistatičke analize vodova pomoću slabe FEM formulacije

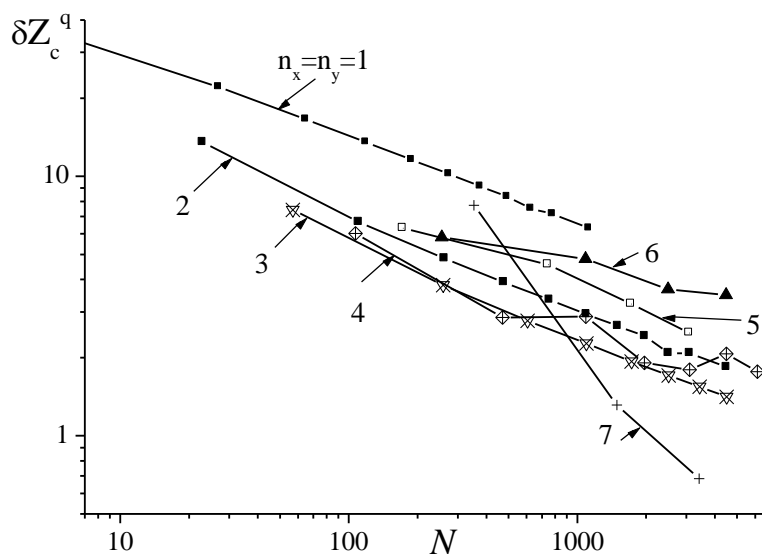


Sl. 5.15. Karakteristična impedansa računata preko naelektrisanja u funkciji broja nepoznatih. Parametar je red f-ja bazisa. Primenjena je simetrija.

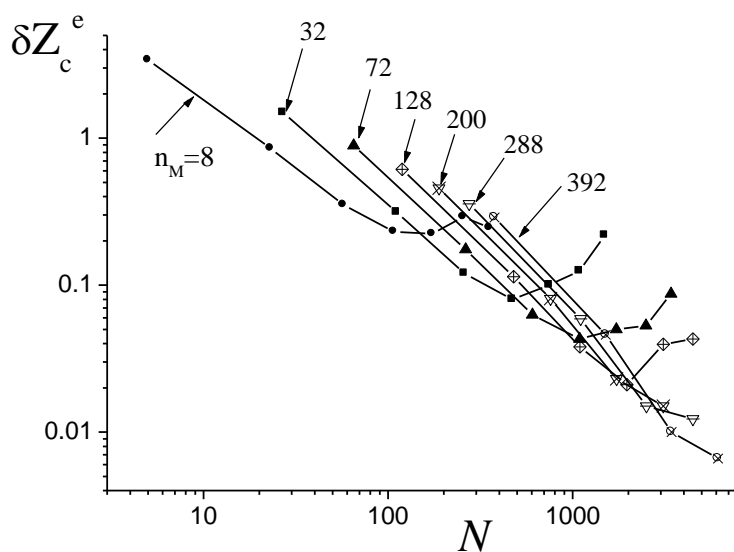


Sl. 5.16. Relativna greška za karakterističnu impedansu računatu preko energije u funkciji broja nepoznatih. Parametar je red f-ja bazisa. Primenjena je simetrija.

5. Numerički primeri kvazistatičke analize vodova pomoću slabe FEM formulacije



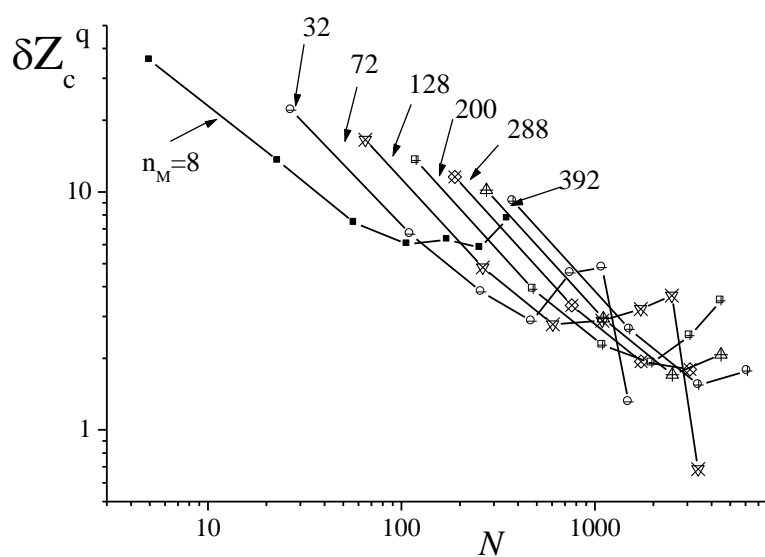
Sl. 5.17. Relativna greška za karakterističnu impedansu računatu preko naelektrisanja u funkciji broja nepoznatih. Parametar je red f-ja bazisa. Primenjena je simetrija.



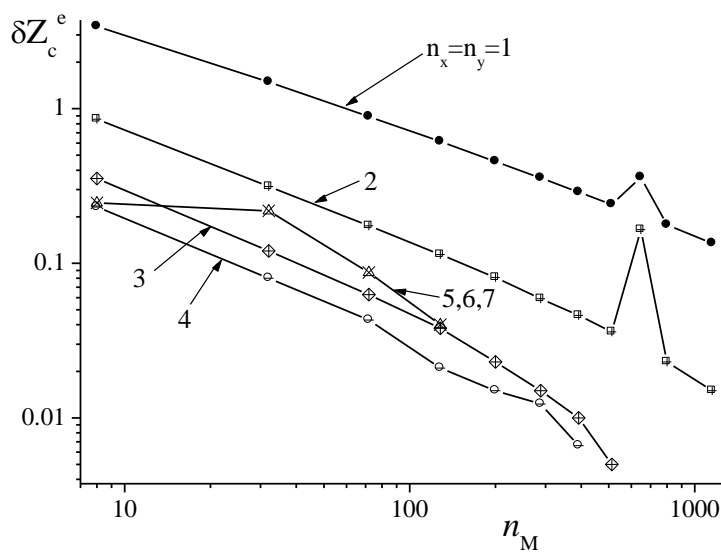
Sl. 5.18. Relativna greška za karakterističnu impedansu računatu preko energije u funkciji broja nepoznatih. Parametar je broj elemenata mreže,  $n_M$ . Primenjena je simetrija.



5. Numerički primeri kvazistatičke analize vodova pomoću slabe FEM formulacije

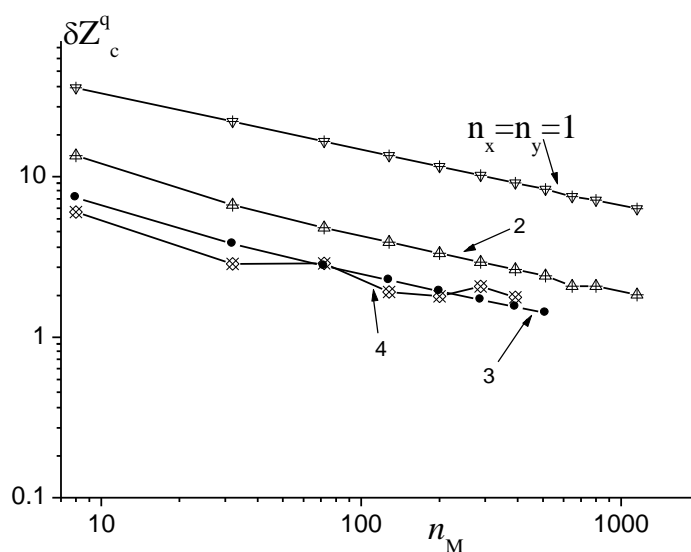


Sl. 5.19. Relativna greška za karakterističnu impedansu računatu preko naelektrisanja u funkciji broja nepoznatih. Parametar je broj elemenata mreže,  $n_M$ . Primenjena je simetrija.



Sl. 5.20. Relativna greška za karakterističnu impedansu računatu preko naelektrisanja u funkciji broja nepoznatih. Parametar je broj elemenata mreže,  $n_M$ . Primenjena je simetrija.

## 5. Numerički primeri kvazistatičke analize vodova pomoću slabe FEM formulacije



Sl. 5.21. Relativna greška za karakterističnu impedansu računatu preko naelektrisanja u funkciji broja nepoznatih. Parametar je broj elemenata mreže,  $n_M$ . Primenjena je simetrija. (Rezultati za f-je bazisa reda 5, 6 i 7 se praktično poklapaju sa rezultatima za red 4.)

### 5.3. Zaključak

Na osnovu prikazanih rezultata uočava se da u slučaju slabe formulacije postoji dobra konvergencija rezultata i da njihova tačnost raste sa povećanjem reda funkcija bazisa, a za istu gustinu mreže. Za najniži red funkcija bazisa uočava se najveća stabilnost rezultata sa porastom gustine mreže, odnosno uniformno opadanje relativne greške sa porastom gustine mreže. Sa porastom gustine mreže ne dolazi do nestabilnosti rezultata za red funkcija bazisa niži od 4, dok za viši red funkcija bazisa i veće gustine mreže greška počinje da raste, a javlja se i nestabilnost rezultata. Zaključuje se da u pogledu potrebnog broja nepoznatih kao i gustine mreže da bi se postigla zadovoljavajuća tačnost optimalan red funkcija bazisa je  $n_x = n_y = 3$ . Relativna greška rezultata skoro da uniformno opada sa porastom broja elemenata mreže (u posmatranim granicama) sve dok je red funkcija bazisa manji ili jednak 3.

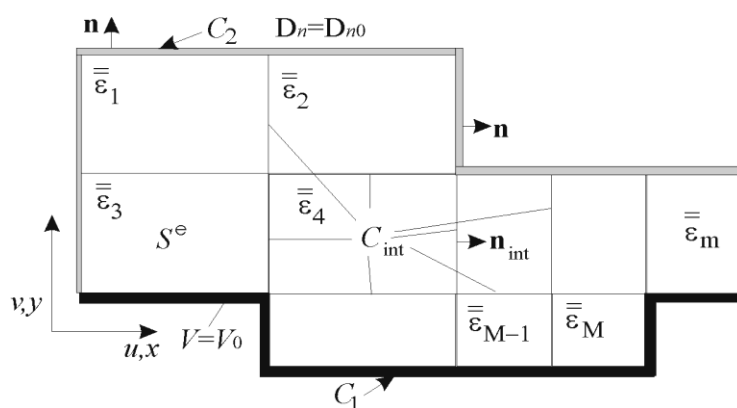
## **6. Primena jake FEM formulacije za kvazistatičku analizu vodova**

U mikrotalasnim kolima se kao elementi kola vrlo često koriste vodovi i talasovodi [141, 142]. U novijim uređajima malih snaga najčešće se koriste vodovi načinjeni u tehnici štampanih kola. U ovom poglavlju posmatrani su sistemi bez gubitaka jer se jedino u takvim sistemima, strogo uzevši, može prostirati TEM talas. Ukoliko je dielektrik nehomogen na vodu se ne mogu prostirati TEM talasi, ali za niže učestanosti je longitudinalna komponenta EM polja mnogo manja od poprečne komponente, tako da ova analiza još uvek važi, odnosno talas je kvazi-TEM tipa. Na primerima koji slede primenom jake FEM formulacije izvršen je proračun karakteristične impedanse i efektivne permitivnosti nekoliko tipičnih, veoma rasprostranjenih struktura – kvadratnog koaksijalnog voda, trakastog voda, trakastog voda sa izdignutom podlogom, kao i oklopljenog mikrostripa sa izotropnim, anizotropnim i biizotropnim supstratom. Rezultati su upoređeni kako sa rezultatima dobijenim drugim kvazistatičkim metodama, tako i sa rezultatima dobijenim programom za potpunu talasnu analizu, CST [118], pri nižim učestanostima. U svim slučajevima je uočeno dobro slaganje ili čak poklapanje rezultata.

### **6.1. Diskretizacija domena, lokalno i globalno numerisanje, unošenje graničnih uslova za kvazi TEM proračun vodova jakim funkcijama bazisa**

Razmatra se zatvoren 2D domen, uniforman u odnosu na  $z$ -osu, ispunjen linearnim, u opštem slučaju anizotropnim dielektrikom, bez slobodnih naelektrisanja, u kome je nepoznata raspodela električnog skalar-potencijala  $V(x, y)$ , sl. 6.1.

## 6. Primena jake FEM formulacije za kvazistatičku analizu vodova



Sl. 6.1. Dvodimenzionalni domen sa graničnim uslovima prve i druge vrste, podeljen na konačne elemente

Posmatrani domen je takvog oblika da mu fizički odgovara podela na pravougaone konačne elemente. Za svaki od konačnih elemenata najpre je potrebno, u globalnom koordinatnom sistemu, napraviti listu čvorova, sa vrednostima za  $x$  i  $y$  koordinate, kao u donjoj tabeli:

Tabela 6.1 Lista koordinata čvorova u globalnom koordinatnom sistemu

| $i_{\check{c}}$ | $x[\text{m}]$ | $y[\text{m}]$ |
|-----------------|---------------|---------------|
| 1               | 0.2           | 0.3           |
| 2               | 0.4           | 0.3           |
| 3               | ...           | ...           |
| ...             |               |               |

gde je  $i_{\check{c}}$  globalni redni broj čvora. Dalje je potrebno iz liste globalnih rednih brojeva čvorova pronaći one čvorove koji pripadaju konačnom elementu  $e^m$ , kao u donjoj tabeli.

Tabela 6.2. Lista lokalnih čvorova konačnih elemenata izražena preko liste globalnih čvorova

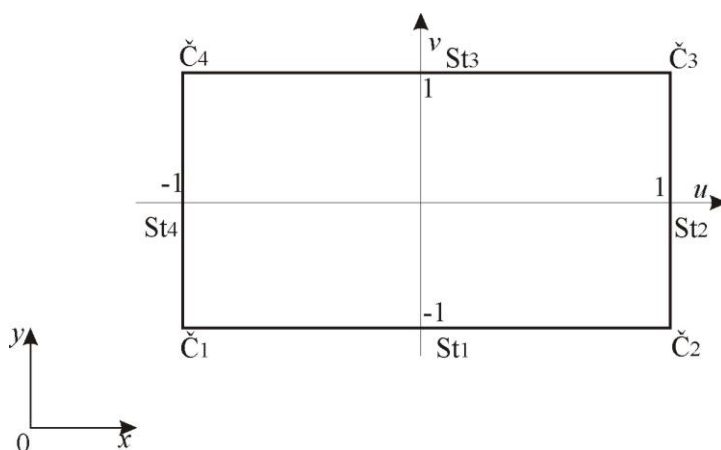
| $e^m$ | $\check{c}_1$ | $\check{c}_2$ | $\check{c}_3$ | $\check{c}_4$ |
|-------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 1     | 2             | 3             | 17            | 18            |
| 2     | 3             | 4             | 18            | 19            |
| ...   | ...           | ...           | ...           | ...           |

## 6. Primena jake FEM formulacije za kvazistatičku analizu vodova

Ovoj tabeli se može dodati još jedna kolona koja sadrži listu permitivnosti po elementima ukoliko se radi o nehomogenom dielektriku unutar voda. Sa  $\check{C}_1$ ,  $\check{C}_2$ ,  $\check{C}_3$  i  $\check{C}_4$  su označeni čvorovi, kao na sl. 6.2. Ovim je napravljena lista konačnih elemenata za konkretnu geometriju. Nepoznata funkcija potencijala konačnog elementa  $e^m$  može se predstaviti kao suma jakih funkcija bazisa na tom elementu

$$V(x, y)e^m = \sum_{l=1}^{N_m} a_l f_l(x, y),$$

gde je  $a_l$  -nepoznati koeficijent koji se određuje, a  $f_l(x, y)$   $l$ -ta funkcija bazisa na  $m$ -tom konačnom elementu,  $e^m$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$ ,  $l = 1, 2, \dots, N_m$ .



Sl. 6.2. Oznake za lokalne čvorove i stranice konačnog elementa

Broj jakih funkcija bazisa na  $m$ -tom konačnom elementu je  $N_m$  i on zavisi od reda aproksimacije koji je za jaku formulaciju najmanje jednak 3, o čemu je bilo reči u četvrtom poglavlju.  $M$  je broj konačnih elemenata mreže. Kad je u pitanju lokalni indeks funkcije bazisa,  $l$ , on sadrži informaciju o indeksu 1D funkcija bazisa duž  $x$  i duž  $y$  pravca,  $p$  i  $k$ , pri čemu  $1 < p < n_x + 1$  i  $1 < k < n_y + 1$ , jer je 2D funkcija bazisa proizvod 1D funkcija bazisa na elementu. Dakle,

$$f_l(x, y) = f_p(x) f_k(y),$$

na konačnom elementu  $e^m$  gde su  $f_p(x)$  i  $f_k(y)$  jednodimenzione funkcije bazisa reda  $p$  duž  $x$ -pravca i reda  $k$  duž  $y$ -pravca.

## 6. Primena jake FEM formulacije za kvazistatičku analizu vodova

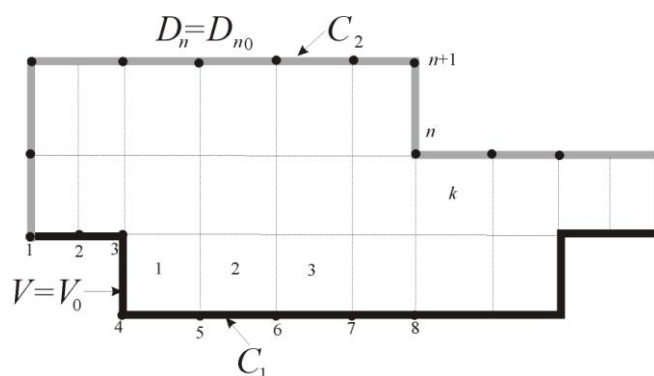
S obzirom na prirodu funkcija bazisa za jaku formulaciju, kao što je u prethodnom poglavlju navedeno, neke od njih čine dublete na dva susedna elementa mreže, a neke funkcije bazisa iz ovog skupa čine kvadruplete na četiri elementa mreže koja imaju zajedničko teme dok preostale čine singlete. Pogodno je da se, imajući ovo u vidu, funkcijama bazisa dodeli lokalni,  $l$ , ali i globalni indeks,  $j$ , gde se lokalni indeks odnosi na pripadnost elementu mreže pri čemu postojanje globalnog indeksa smanjuje veličinu matrice sistema, jer očigledno četiri funkcije bazisa na četiri susedna elementa koje čine kvadruplet imaju isti globalni indeks, odnosno isti koeficijent koji im pripada u globalnoj matrici sistema. Ovo se može ilustrovati sledećom tabelom:

Tabela 6.3. Lokalni i globalni indeksi kvadrupleta, dubleta i singleta.

| $j$ | $e^m$ | $l$ | $e^m$ | $j$ | $e^m$ | $l$ | $e^m$ | $j$ |
|-----|-------|-----|-------|-----|-------|-----|-------|-----|
| 1   | 1     | 6   | 2     | 5   | 0     | 0   | 0     | 0   |
| 2   | 2     | 1   | 7     | 4   | 9     | 6   | 12    | 9   |
| 3   | 3     | 4   | 0     | 0   | 0     | 0   | 0     | 0   |
| ... |       |     |       |     |       |     |       |     |
| $N$ |       |     |       |     |       |     |       |     |

Iz Tabele 6.3. se vidi da globalni indeks  $j = 1$  odgovara dubletu, globalni indeks  $j = 2$  kvadrupletu, a  $j = 3$  singletu. Ako je ukupan broj globalnih funkcija bazisa  $N$  a ukupan broj lokalnih  $L$ , očigledno je  $N \ll L$ . Ovo je značajna prednost jer je sistem jednačina za slučaj jake formulacije (kada se koriste jake funkcije bazisa) daleko manji u odnosu na sistem gde se primenjuju standardne, npr. polinomske funkcije bazisa kod čvorno zasnovanog FEM-a, a za istu ili približno istu tačnost rezultata u svim dalje prikazanim primerima. Ipak, i dalje ostaje rastresita matrica sistema i taj se problem rešava memorisanjem samo elemenata koji nisu nula [77]. Neka su, dalje, granični uslovi prve vrste (poznato  $V$ ), zadati na konturi  $C_1$  a granični uslovi druge vrste (poznato  $\partial V / \partial n$ ), zadati na konturi  $C_2$  (sl. 6.1).

## 6. Primena jake FEM formulacije za kvazistatičku analizu vodova



Sl. 6.3. Ilustracija unošenja *Dirichlet*-ovih i *Neumann*-ovih graničnih uslova i globalnog numerisanja čvorova i elemenata mreže.

Unošenje graničnih uslova u sistem, odnosno u program za kvazistatički proračun vodova, vrši se preko liste spoljašnjih stranica elemenata koji su prikazani na sl. 6.3, kao u sledećoj tabeli:

Tabela 6.4 Unošenje graničnih uslova

| Spoljašnji čvorovi |               | Tip graničnog uslova | $V_0$ $D_{n0}$ |
|--------------------|---------------|----------------------|----------------|
| $\check{C}_1$      | $\check{C}_2$ |                      |                |
| 1                  | 2             | 1                    | 1              |
| 2                  | 3             | 1                    | 1              |
| 3                  | 4             | 1                    | 1              |
| ...                | ...           | ...                  | ...            |
| n                  | n+1           | 2                    | 0              |
| n+1                | n+2           | 2                    | 0              |
| ...                | ...           | ...                  | ...            |

Spoljašnji čvorovi su oni koji pripadaju konturi koja ograničava posmatrani domen. *Dirichlet*-ovi granični uslovi se označavaju i kao granični uslovi prve vrste a *Neumann*-ovi kao granični uslovi druge vrste, pa je otuda pod stavkom „tip graničnog uslova“ oznaka 1 i 2, respektivno. Ako je tip graničnog uslova 1, onda se unosi vrednost potencijala čvora,  $V_0$ . Ako je tip graničnog uslova 2, unosi se vrednost  $D_{n0}$ .

Sledeći korak je formiranje liste graničnih uslova „po konačnim elementima“ iz liste elemenata i liste graničnih uslova kao u sledećoj tabeli:

## 6. Primena jake FEM formulacije za kvazistatičku analizu vodova

Tabela 6.5 Formiranje liste graničnih uslova „po konačnim elementima“  $e^m$ .

| $e^m$ | St1 | St2 | St3 | St4 | $V_0, D_{n0}$ |      |          |       |
|-------|-----|-----|-----|-----|---------------|------|----------|-------|
|       |     |     |     |     | 1             | 2    | 3        | 4     |
| 1     | 1   | 0   | 0   | 1   | $V_0$         | /    | /        | $V_0$ |
| 2     | 1   | 0   | 2   | 0   | $V_0$         | /    | $D_{n0}$ | /     |
| ...   | ... | ... | ... | ... | ...           | .../ | ...      | ...   |
| $k$   | 0   | 0   | 1   | 0   | /             | /    | $V_0$    | /     |
| ...   | ... | ... | ... | ... | ...           | ...  | ...      | ...   |

Dalje se rešava sistem jednačina za električni skalar potencijal  $V(x, y)$ , kao iz odeljka 3.6, jednačina (3.43). Ova jednačina je za dvodimenzionalni sistem sa homogenim dielektrikom permitivnosti  $\epsilon$ .

### 6.2 Vodovi sa izotropnim dielektrikom

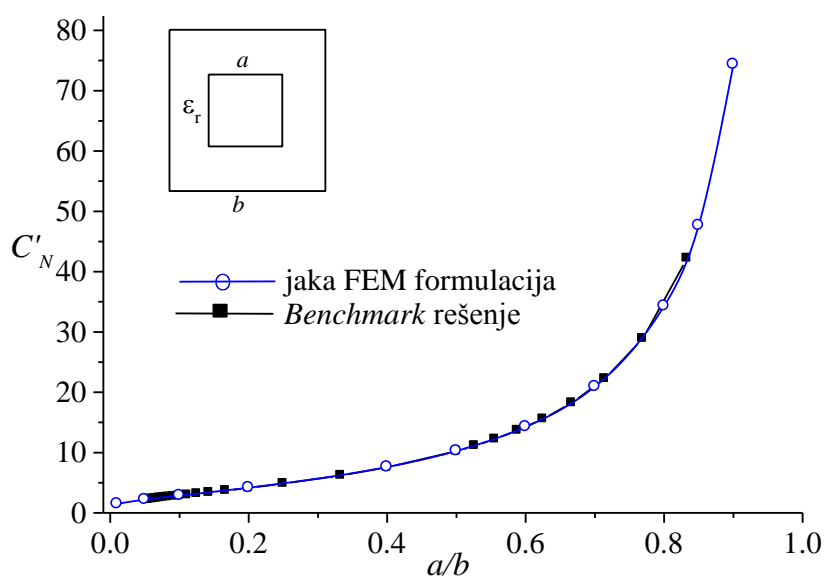
Rešavanje oklopljenih vodova sa izotropnim dielektrikom svodi se na rešavanje *Laplace*-ove jednačine iz odeljka 2.2 uz zadate granične uslove na konturama provodnika.

#### 6.2.1. Kvadratni koaksijalni vod sa izotropnim dielektrikom

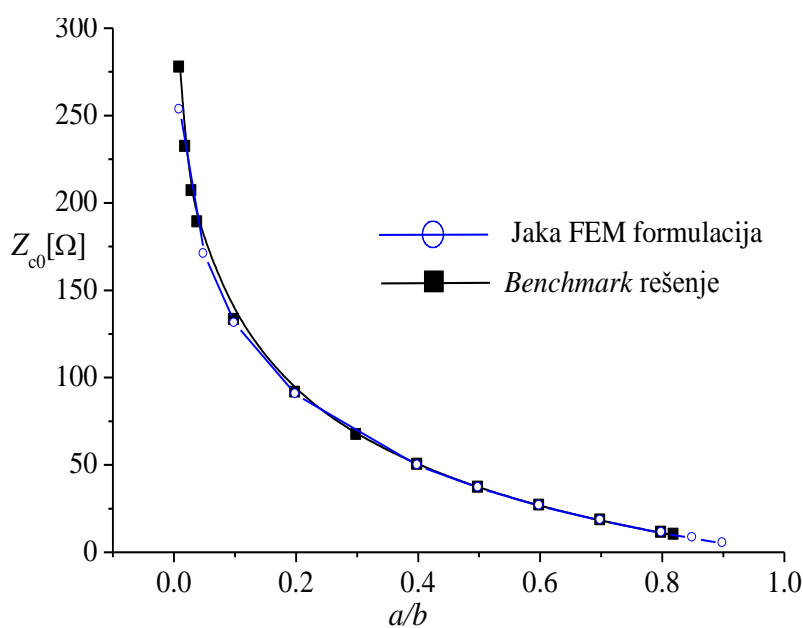
U [139] je predloženo benchmark rešenje za kvadratni koaksijalni vod sa izotropnim dielektrikom. Na graficima je izvršeno poređenje normalizovane kapacitivnosti,  $C_{\text{K}} = C_{\text{K}} / (\epsilon_0 \epsilon_r)$ , i karakteristične impedanse,  $Z_c$ , predloženog *benchmark*-a sa rezultatima dobijenim jakom FEM formulacijom sa  $N=512$  nepoznatih, i najnižim redom jakih funkcija bazisa ( $n_x = n_y = 3$ ). Uočava se praktično poklapanje dobijenih rezultata.



## 6. Primena jake FEM formulacije za kvazistatičku analizu vodova



Sl. 6.4. Normalizovana podužna kapacitivnost vazdušnog kvadratnog voda u funkciji odnosa  $a/b$ .



Sl. 6.5. Karakteristična impedansa vazdušnog kvadratnog voda u funkciji odnosa  $a/b$ .

### 6.3 Vodovi sa nehomogenim dielektrikom

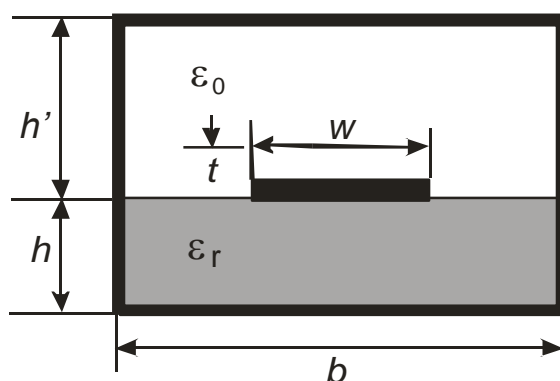
U odeljku 2.3.2. je pokazano da se transverzalni elektromagnetski talas (TEM talas) može prostirati samo u vodovima sa homogenim dielektrikom. U mikrotalasnim

## 6. Primena jake FEM formulacije za kvazistatičku analizu vodova

kolima se uglavnom sreću nehomogeni, tipično deo-po-deo homogeni dielektrici (najčešće sastavljeni od homogenih dielektričnih slojeva, ostvarenih u jednoslojnoj ili višeslojnoj štampanoj tehnici). U takvim vodovima mogu da se prostiru samo hibridni talasi. Pri dovoljno niskim učestanostima longitudinalne komponente hibridnog talasa su mnogo manje od transverzalnih, pa je takav talas kvazi-TEM talas, njegova kritična učestanost je jednaka nuli, kao kod pravih TEM talasa i sa dovoljnom tačnošću se može primeniti kvazistatička analiza. Ona se svodi na određivanje 2D elektrostatičkog polja u transverzalnoj ravni.

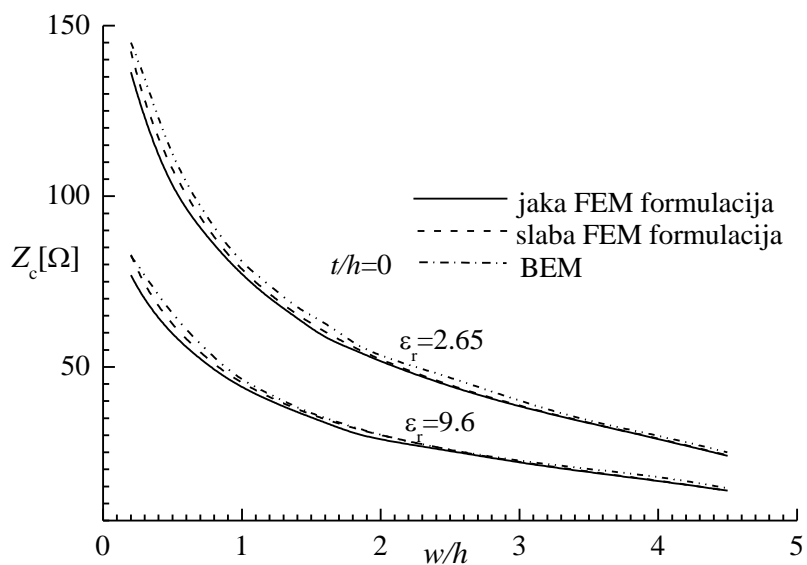
### 6.3.1. Oklopljeni mikrostrip na dielektričnom supstratu

U [74] su prikazani rezultati poređenja dobijenih karakterističnih impedansi za strukture sa sl. 6.6. i sl. 6.10. sa rezultatima iz literature. Slike 6.7.-6.9. prikazuju poređenja jake FEM formulacije sa slabom, kao i sa rezultatima dobijenim BEM metodom iz [143].

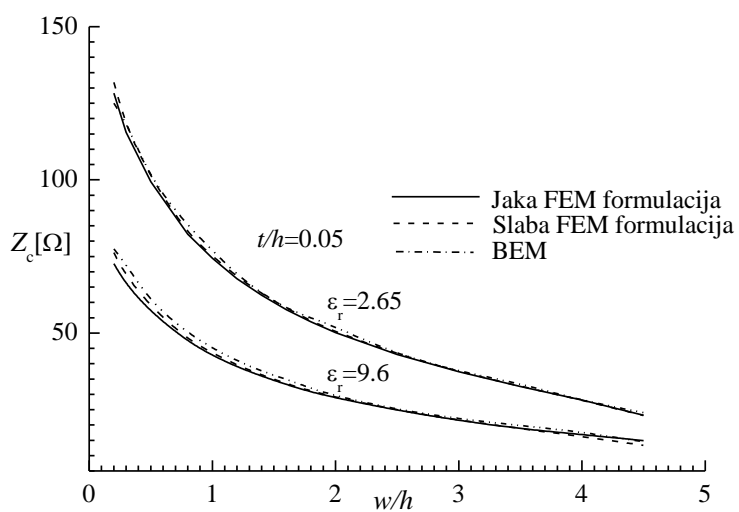


Sl. 6.6. Oklopljeni mikrostrip.

6. Primena jake FEM formulacije za kvazistatičku analizu vodova

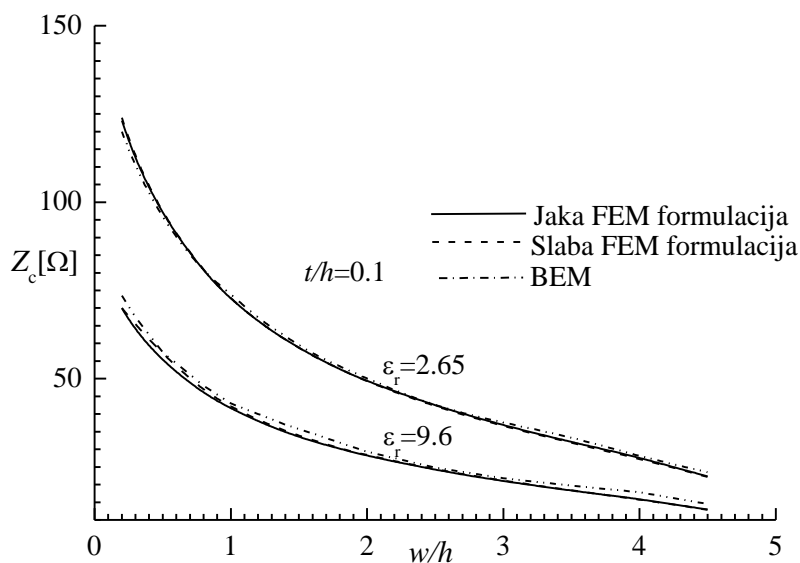


Sl. 6.7. Karakteristična impedansa  $Z_c$  u funkciji relativne širine provodne trake ( $h'/h=1.5$ ,  $b=5h$ ) za  $t/h=0$ .



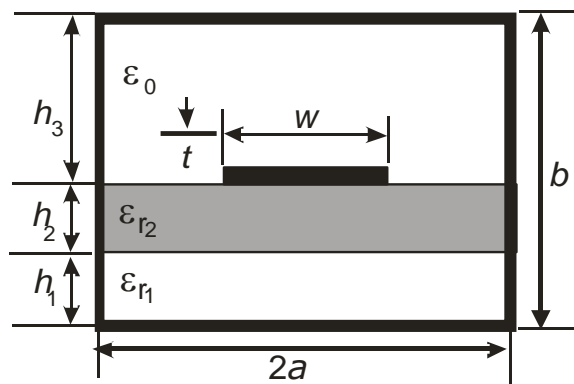
Sl. 6.8. Karakteristična impedansa  $Z_c$  u funkciji relativne širine provodne trake ( $h'/h=1.5$ ,  $b=5h$ ) za  $t/h=0.05$ .

## 6. Primena jake FEM formulacije za kvazistatičku analizu vodova



Sl. 6.9. Karakteristična impedansa  $Z_c$  u funkciji relativne širine provodne trake ( $h'/h = 1.5$ ,  $b = 5h$ ) za  $t/h = 0.1$ .

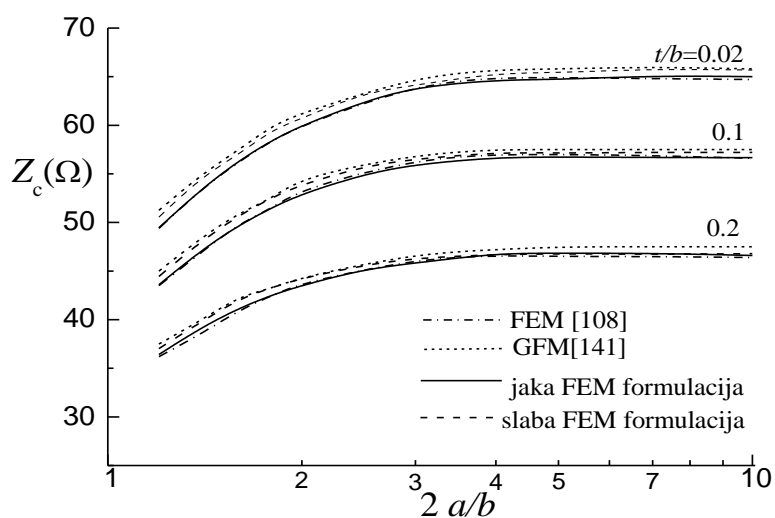
### 6.3.2. Oklopljeni trakasti vod sa izdignutom podlogom



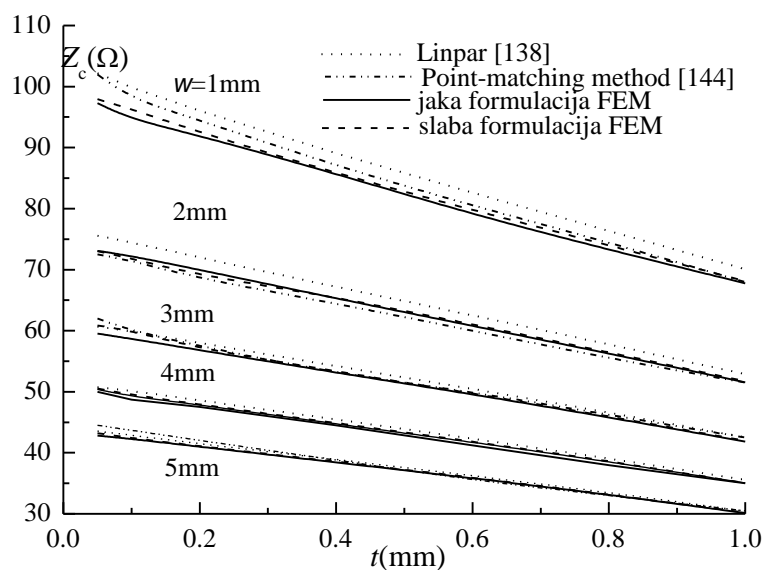
Sl. 6.10. Oklopljeni mikrostrip sa višeslojnim izotropnim dielektrikom i konačnom debljinom provodne trake.

Na sl. 6.11. prikazani su rezultati za karakterističnu impedansu oklopljenog mikrostripa sa sl. 6.10. upoređeni sa rezultatima dobijenim kvazi TEM analizom primenom FEM-a iz [108] i GFM iz [141] za  $h_1 = h_3 = 0.4b$ ,  $h_2 = 0.2b$ ,  $w = 0.5b$ ,  $\epsilon_1 = \epsilon_3 = \epsilon_0$  i  $\epsilon_2 = 9.35\epsilon_0$ . Uočava se da su rezultati dobijeni jakom i slabom formulacijom između vrednosti dobijenih primenom FEM-a iz [108] i GFM-a iz [141].

## 6. Primena jake FEM formulacije za kvazistatičku analizu vodova



Sl. 6.11. Karakteristična impedansa u funkciji relativne širine oklopa za različite debljine provodne trake.



Sl. 6.12. Karakteristična impedansa oklopljenog trakastog voda u funkciji debljine provodne trake.

Na sl. 6.12. je za oklopljenu konfiguraciju sa sl. 6.10., gde je dielektrična podloga dvoslojna,  $\epsilon_1 = \epsilon_3 = \epsilon_0$ ,  $\epsilon_2 = 4\epsilon_0$ ,  $2a = 10\text{mm}$ ,  $b = 4\text{mm}$ ,  $h_3 = 2\text{mm}$ ,  $h_2 = 1\text{mm}$  i

## 6. Primena jake FEM formulacije za kvazistatičku analizu vodova

$h_1 = 1$  mm, prikazana zavisnost  $Z_c$  od debljine provodne trake  $t$ (mm) pri čemu je širina trake,  $w$ , parametar. Poređeni su rezultati dobijeni pomoću komercijalnog programskog paketa Linpar [138], Point-matching metode [144], jake i slabe FEM formulacije. Kod oba poslednja proračuna red funkcija bazisa za jaku i slabu formulaciju je  $n_x = n_y = 3$  a mreža od 800 elemenata, što je kod jake formulacije rezultovalo u  $N=1152$  nepoznatih a kod slabe u  $N=2448$  nepoznatih. Sa grafika na sl. 6.11. i 6.12 se uočava da je međusobno slaganje rezultata bolje što je veća širina i debljina provodne trake. Ipak, rezultati dobijeni jakom i slabom formulacijom ne odstupaju ni u najgorem slučaju (tanke i uzane provodne trake) više od 5% od rezultata iz gore navedenih referenci.

U Tabeli 6.6 su prikazane vrednosti karakteristične impedanse za oklopljenu konfiguraciju sa sl. 6.10, gde je  $2a = b = 1$  mm, provodna traka je u centru strukture,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_0$ ,  $h_1 = 0$ ,  $h_2 + h_3 = 1$  mm,  $h_2 = h_3 - t$ .

Tabela 6.6. Vrednosti karakteristične impedanse za geometriju sa sl. 6.10.

| $t$ (mm) | $2w$ (mm) | $Z_c(\Omega)$<br>[145] | $Z_c(\Omega)$<br>[143] | $Z_c(\Omega)$<br>[144] | $Z_c(\Omega)$<br>slaba | $Z_c(\Omega)$<br>jaka |
|----------|-----------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|-----------------------|
| 0.1      | 0.2       | 108.53                 | 108.96                 | 108.07                 | 108.86                 | 108.28                |
| 0.1      | 0.4       | 80.32                  | 80.92                  | 79.18                  | 79.81                  | 79.43                 |
| 0.2      | 0.2       | 91.20                  | 92.44                  | 91.04                  | 91.00                  | 90.61                 |
| 0.2      | 0.4       | 67.20                  | 67.62                  | 66.84                  | 67.30                  | 67.05                 |
| 0.2      | 0.6       | 50.02                  | 50.54                  | 49.42                  | 49.76                  | 49.61                 |

Za vrednost  $t = 0.2$ mm,  $2w = 0.2$ mm u [147,148] je dato tačno rešenje i ono iznosi  $Z_c = 91.18218... \Omega$ , što takođe pokazuje dobro slaganje sa dobijenim rezultatima.

Poređenjem rezultata za karakterističnu impedansu prikazanih na prethodnim graficima i u tabeli, uočava se da je karakteristična impedansa dobijena jakom formulacijom za isti red funkcije bazisa nešto niža od one dobijene slabom formulacijom. Ipak, jaka formulacija za isti broj elemenata FEM mreže i isti red funkcije bazisa daje mnogo manje nepoznatih, a da pri tome, kod jednostavnih konfiguracija koje su analizirane, bitno ne smanjuje tačnost dobijenih rezultata.

## 6. Primena jake FEM formulacije za kvazistatičku analizu vodova

### 6.4 Vodovi sa homogenim anizotropnim dielektrikom

U ovom slučaju se za zatvorene 2D domene rešava diferencijalna jednačina oblika:

$$\operatorname{div}_S (\bar{\varepsilon} \operatorname{grad}_S V) = 0,$$

gde je  $\operatorname{div}_S$  divergencija po površini,  $\operatorname{grad}_S$  gradijent po površini, a  $\bar{\varepsilon}$  tenzor permitivnosti, koji je u 2D slučaju,  $2 \times 2$  dijagonalni tenzor,  $\bar{\varepsilon} = \operatorname{diag}[\varepsilon_{xx} \ \varepsilon_{yy}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix}$ . Dalje se, standardno, domen deli na  $M$  poddomena (konačnih elemenata). Zatim se prema proceduri iz odeljka 3.6 računa podužna kapacitivnost voda, a preko nje i efektivna relativna permitivnost,  $\varepsilon_{re}$  i karakteristična impedansa  $Z_c$ , prema izrazima (2.18) i (2.19) odeljka 2.2.1. Ako je dielektrik anizotropan, s obzirom na veze

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}_S V \text{ i } \mathbf{D} = \bar{\varepsilon} \mathbf{E} \quad (6.1)$$

procedura računanja podužne kapacitivnosti iz odeljka 3.6.2 preko podužnog naelektrisanja ili preko podužne energije se koriguje u smislu da se pri izračunavanjima vodi računa da je duž pravca  $x$  (odnosno  $u$  u lokalnom koordinatnom sistemu) permitivnost koja se javlja u izrazima  $\varepsilon_{xx}$ , a duž pravca  $y$  (odnosno  $v$  u lokalnom koordinatnom sistemu), permitivnost je  $\varepsilon_{yy}$ .

Dalje će na primerima nekoliko jednostavnih geometrija [68, 69], [71, 72], biti analiziran efekat anizotropije i izvršeno verifikovanje rezultata dobijenih jakom FEM formulacijom na osnovu poređenja sa rezultatima dobijenim metodom potpune talasne analize [118] i rezultatima dobijenim metodom ekvivalentne elektrode [79]. Linije električnog polja u poprečnim presecima analiziranih geometrija (sl. 6.18., sl. 6.31., sl. 6.36.) dobijene su korišćenjem programskog paketa Mathematica 7 [76]. U svim analiziranim primerima FEM mreža je neuniformna i sastoji se od  $M = 512$  pravougaonih elemenata trećeg reda u oba pravca ( $n_x = n_y = 3$ ), bez uzimanja u obzir simetrije. U svim analiziranim primerima anizotropni dielektrici su safir, sa tenzorom

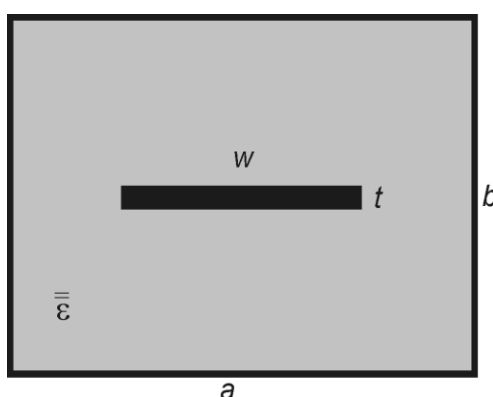
## 6. Primena jake FEM formulacije za kvazistatičku analizu vodova

relativne permitivnosti  $\epsilon_{r\text{Safir}} = \begin{pmatrix} 9.4 & 0 \\ 0 & 11.6 \end{pmatrix}$  ( $\epsilon_{r_{xx}} = 9.4$ ,  $\epsilon_{r_{yy}} = 11.6$ ), i bornitrid, sa

tenzorom relativne permitivnosti  $\epsilon_{r\text{BN}} = \begin{pmatrix} 5.12 & 0 \\ 0 & 3.4 \end{pmatrix}$ . U poslednjem primeru proračun je

vršen i za epsilam, čiji je tenzor relativne permitivnosti  $\epsilon_{r\text{Epsilam}} = \begin{pmatrix} 43 & 0 \\ 0 & 11.6 \end{pmatrix}$ .

### 6.4.1 Oklopljen simetrični trakasti vod



Sl. 6.13. Oklopljen simetrični trakasti vod sa anizotropnim dielektrikom.

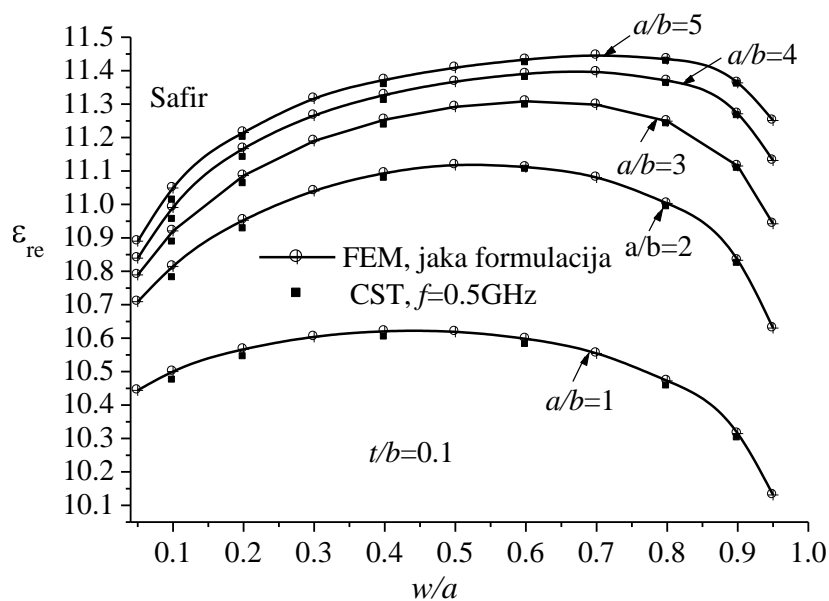
Jaka FEM formulacija je u [71] primenjena za kvazistatičku analizu simetričnog oklopljenog trakastog voda sa dve vrste anizotropnih supstrata: safirom i bornitridom (BN). Metoda je primenjena za analizu efekta blizine ivice provodne trake i bočnih zidova koji postaje izraženiji za široke trake. Slike 6.14 - 6.17 prikazuju zavisnost efektivne relativne permitivnosti,  $\epsilon_{re}$ , i karakteristične impedanse,  $Z_c$ , za safir i bornitrid, respektivno, od relativne širine provodne trake ( $w/a$ ), za nekoliko različitih vrednosti relativne širine oklopa,  $a/b$ . Rezultati dobijeni jakom FEM formulacijom su upoređeni sa rezultatima dobijenim primenom komercijalnog softvera CST Studio Suite [118], koji vrši potpunu talasnu analizu, za niske učestanosti (0,5 GHz). Uočava se odlično slaganje rezultata. Takođe se uočava uniformno opadanje  $Z_c(w/a)$ , kao i da  $\epsilon_{re}(w/a)$  ima za svako razmatrano  $a/b$  karakterističnu maksimalnu vrednost, što se može objasniti kao posledica efekta anizotropije. Naime, kada širina inicijalno uske trake raste, prostor u kome je  $E_y$  komponenta polja dominantna se povećava, što za



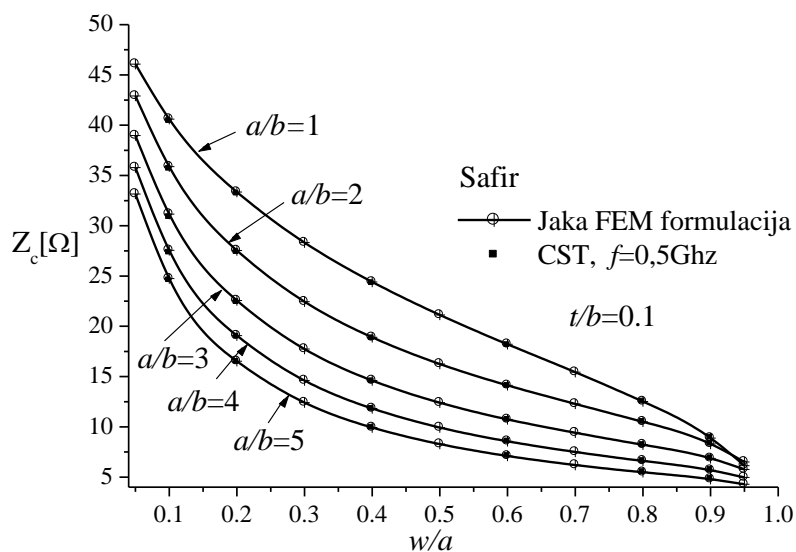
## 6. Primena jake FEM formulacije za kvazistatičku analizu vodova

posledicu ima da vrednost  $\varepsilon_{re}$  postaje bliža vrednosti  $\varepsilon_{ryy}$ . Za safir  $\varepsilon_{re}$  raste jer je  $\varepsilon_{ryy} > \varepsilon_{rxx}$ . Za bornitrid  $\varepsilon_{re}$  opada sa porastom širine trake jer je  $\varepsilon_{ryy} < \varepsilon_{rxx}$ . Sa daljim povećavanjem širine trake, efekat blizine krajeva trake i bočnih zidova oklopa, iako je  $E_y$  komponenta polja dominantna, postaje značajan (sl. 6.18) i uzrokuje da  $\varepsilon_{re}$  postaje bliže vrednosti  $\varepsilon_{rxx}$ . Tako, za  $\varepsilon_{ryy} > \varepsilon_{rxx}$  (slučaj kod safira),  $\varepsilon_{re}(w/a)$  ima maksimum, a za  $\varepsilon_{ryy} < \varepsilon_{rxx}$  (kod bornitrida) ima minimum. Na sl. 6.19-6.22 je prikazana zavisnost  $\varepsilon_{re}$  i  $Z_c$  od  $a/b$ , a parametar je relativna širina trake,  $w/a$ . Na ovim slikama su prikazani samo rezultati dobijeni jakom FEM formulacijom (ne i potpunom talasnom analizom). Ovi se grafici mogu upotrebiti kao krive za projektovanje za zadate dimenzije oklopa kada je širina trake  $t = b/10$ . Sl. 6.23 prikazuje promene  $\varepsilon_{re}$  u funkciji relativnog rastojanja između trake i bočnog zida,  $s/b$ , ( $s = (a-w)/2$ , gde se  $a$  menja, a  $b$ ,  $w$  i  $t$  ostaju konstantni) za dva različita anizotropna dielektrika i tri različite vrednosti relativne debljine trake,  $t/b$ . I ovaj grafik ilustruje efekat blizine, gde  $\varepsilon_{re}$  postaje blisko  $\varepsilon_{rxx}$  kada se  $s$  smanjuje. Zapaža se da su promene  $\varepsilon_{re}$  veće za deblje trake. Ovo se može objasniti time što je prostor (između trake i bočne strane oklopa) u kome je  $E_x$  komponenta polja dominantna, veći za deblje trake. Ovo je ilustrovano upoređivanjem sl. 6.18.(c) sa sl. 6.18.(b). Sl. 6.24. prikazuje promenu  $Z_c$  sa  $s/b$  za safir, bornitrid i vazduh u svojstvu dielektrika, za iste debljine trake kao na sl. 6.11.

## 6. Primena jake FEM formulacije za kvazistatičku analizu vodova

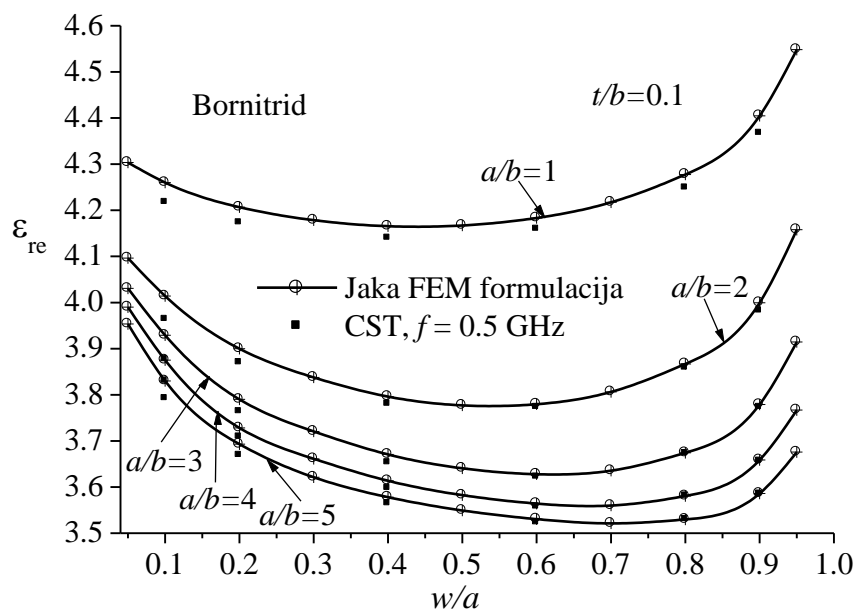


Sl. 6.14. Zavisnost relativne efektivne permitivnosti  $\epsilon_{re}$  za oklopljeni trakasti vod sa safirom kao dielektrikom, od relativne širine provodne trake, za pet različitih vrednosti  $a/b$ .

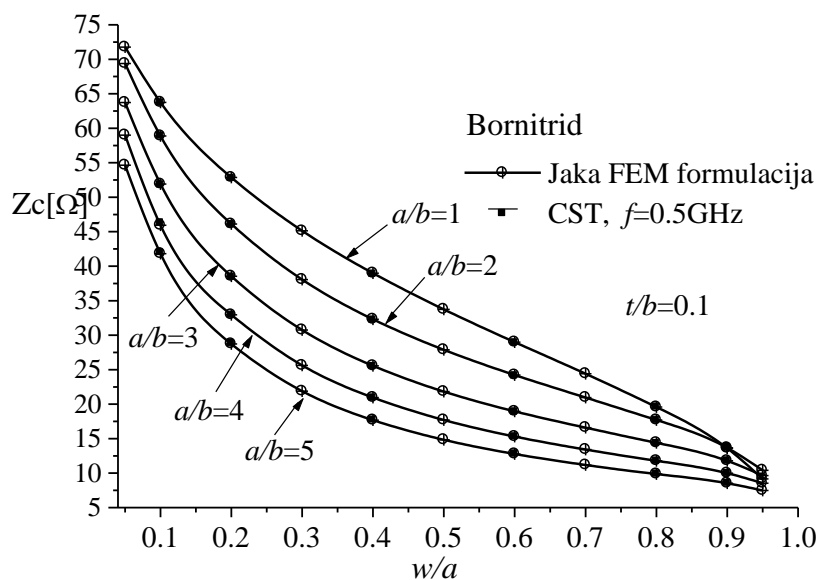


Sl. 6.15. Zavisnost karakteristične impedanse  $Z_c$  za oklopljeni trakasti vod sa safirom, od relativne širine provodne trake, za pet različitih vrednosti  $a/b$ .

## 6. Primena jake FEM formulacije za kvazistatičku analizu vodova

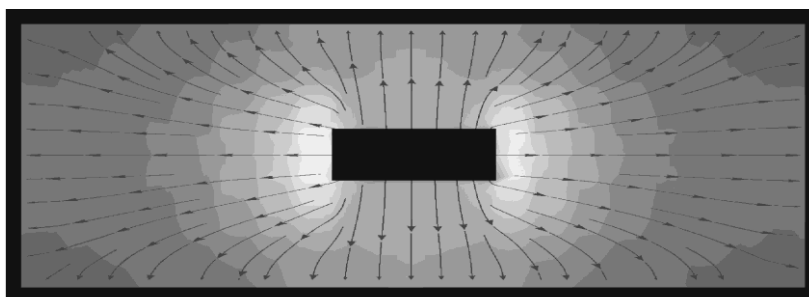


Sl. 6.16. Zavisnost relativne efektivne permitivnosti  $\epsilon_{re}$  oklopljenog trakastog voda sa bornitridom od relativne širine provodne trake, za pet različitih vrednosti  $a/b$ .

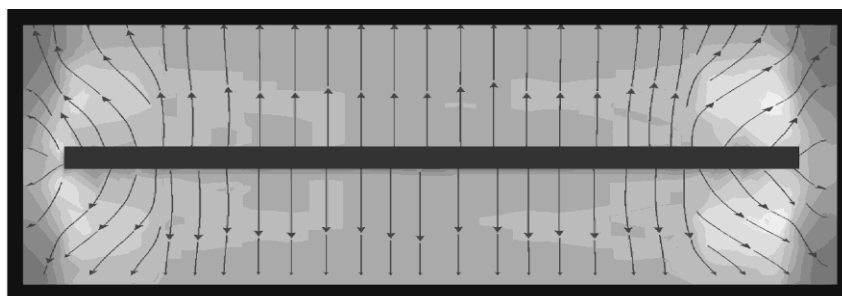


Sl. 6.17. Zavisnost karakteristične impedanse  $Z_c$  oklopljenog trakastog voda sa bornitridom od relativne širine trake za pet različitih vrednosti  $a/b$ .

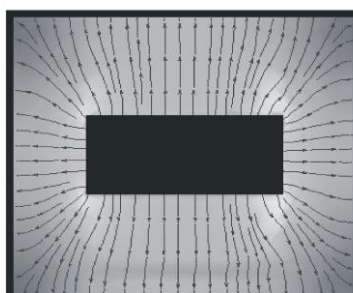
## 6. Primena jake FEM formulacije za kvazistatičku analizu vodova



(a)



(b)



(c)

Sl. 6.18. Linije električnog polja za oklopljeni trakasti vod ispunjen safirom

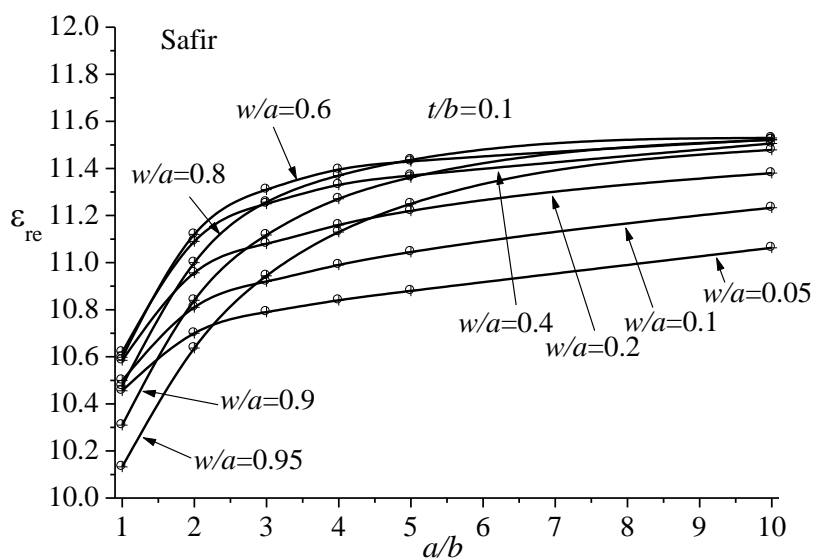
za:

(a) uzanu traku ( $a/b = 3$ ,  $w/a = 0.2$ ,  $t/b = 0.2$ ),

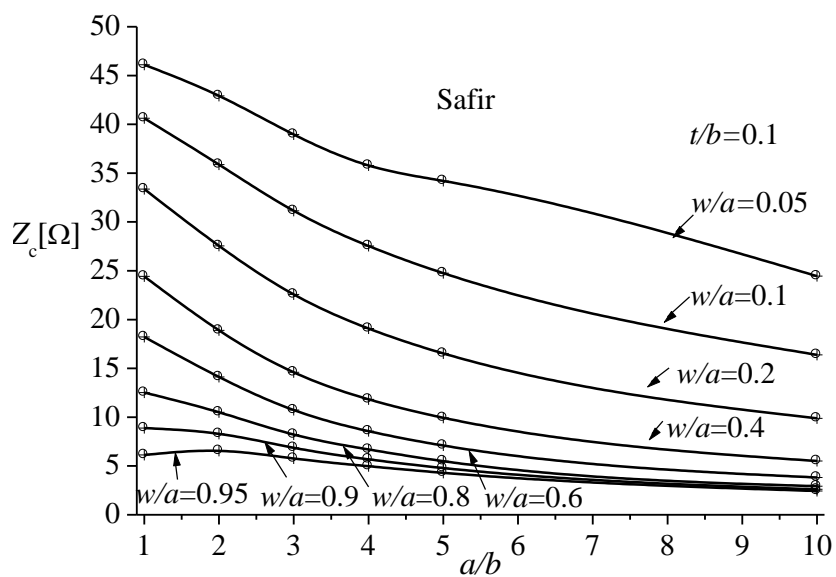
(b) veoma široku traku ( $a/b = 3$ ,  $w/a = 0.9$ ,  $t/b = 0.1$ ) i

(c) veoma debelu traku ( $a/b = 1.4$ ,  $w/a = 0.57$ ,  $t/b = 0.3$ ).

## 6. Primena jake FEM formulacije za kvazistatičku analizu vodova

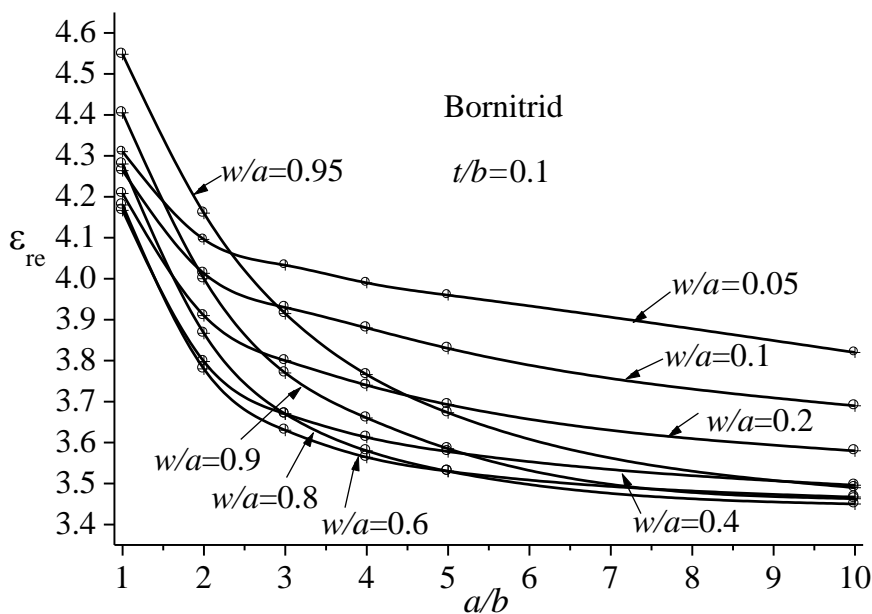


Sl. 6.19. Promena relativne efektivne permitivnosti  $\epsilon_{re}$  za oklopljeni trakasti vod sa safirom u funkciji količnika  $a/b$ , za različite relativne širine provodne trake,  $w/a$ .

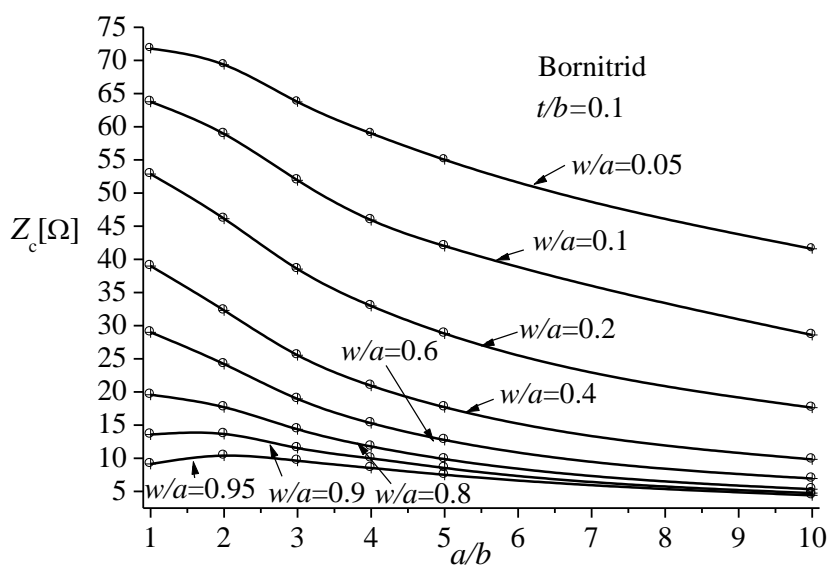


Sl. 6.20. Zavisnost karakteristične impedanse  $Z_c$  oklopljenog trakastog voda sa safirom od količnika  $a/b$ , za različite relativne širine trake,  $w/a$ .

## 6. Primena jake FEM formulacije za kvazistatičku analizu vodova

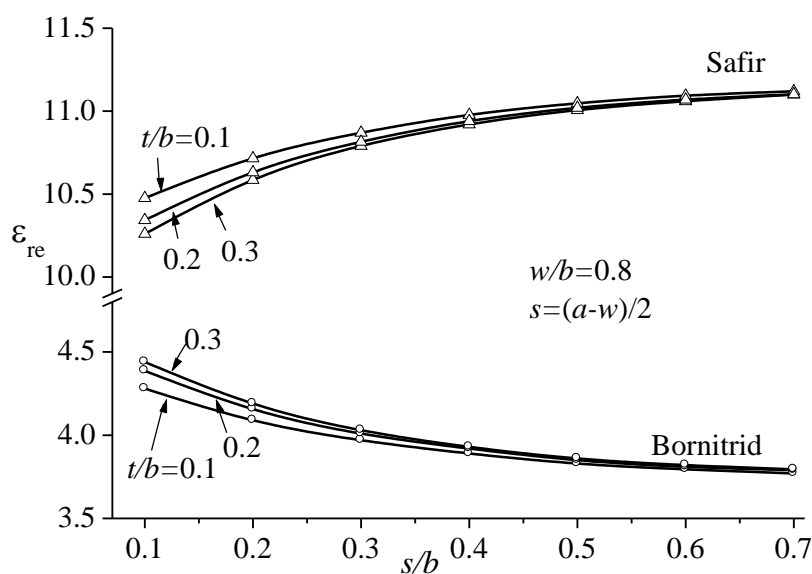


Sl. 6.21. Zavisnost relativne efektivne permitivnosti  $\epsilon_{re}$  oklopljenog trakastog voda sa bornitridom od količnika  $a/b$ , za različite relativne širine trake,  $w/a$ .

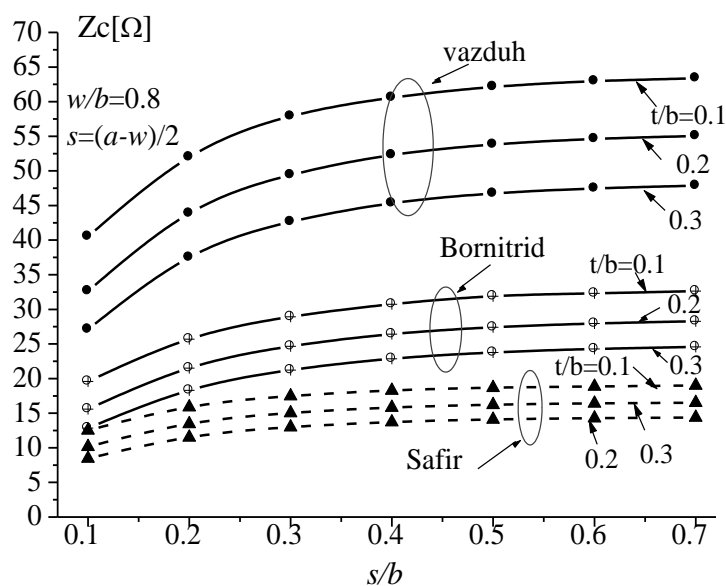


Sl. 6.22. Zavisnost karakteristične impedanse  $Z_c$  oklopljenog trakastog voda sa bornitridom od količnika  $a/b$ , za različite relativne širine traka  $w/a$ .

## 6. Primena jake FEM formulacije za kvazistatičku analizu vodova



Sl. 6.23. Zavisnost relativne efektivne permitivnosti  $\epsilon_{re}$  za oklopljeni trakasti vod od relativnog horizontalnog rastojanja od bočne strane oklopa,  $s/b$ , za tri različite relativne debljine trake,  $t/b$  i dva dielektrika.

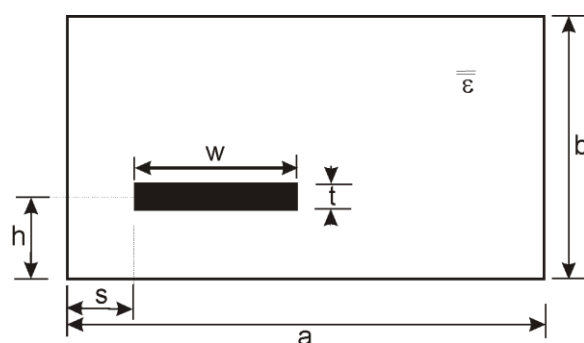


Sl. 6.24. Zavisnost karakteristične impedanse  $Z_c$  za oklopljen trakasti vod od relativnog horizontalnog rastojanja od bočnog zida oklopa,  $s/b$ , za tri različite vrednosti relativne debljine trake  $t/b$ , dva dielektrika i za isti trakasti vod ispunjen vazduhom.

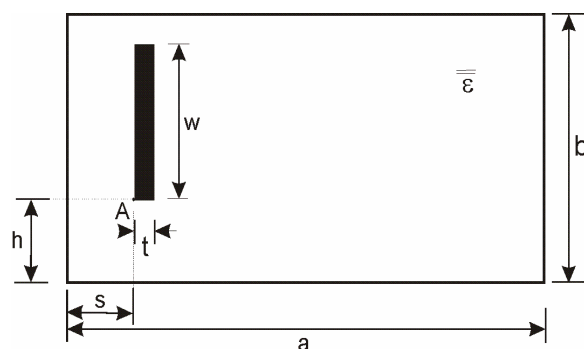
## 6. Primena jake FEM formulacije za kvazistatičku analizu vodova

### 6.4.2. Oklopljen nesimetričan trakasti vod sa promenljivom pozicijom unutrašnje provodne trake

Analizirane su geometrije sa sl. 6.25. i sl. 6.26. koje su formalno iste, osim što se razlikuju po orijentaciji provodne trake (horizontalna, odnosno vertikalna). Dielektrici su safir i bornitrid. Analizirana je geometrija čije su relativne dimenzije:  $a/b=3$ ,  $w/b=1$ ,  $t/b=0.1$ , dok su  $h/b$  i  $s/b$  promenljive [69].



Sl. 6.25. Trakasti vod sa provodnom trakom paralelnom široj strani oklopa.



Sl. 6.26. Trakasti vod sa provodnom trakom paralelnom užoj strani oklopa.

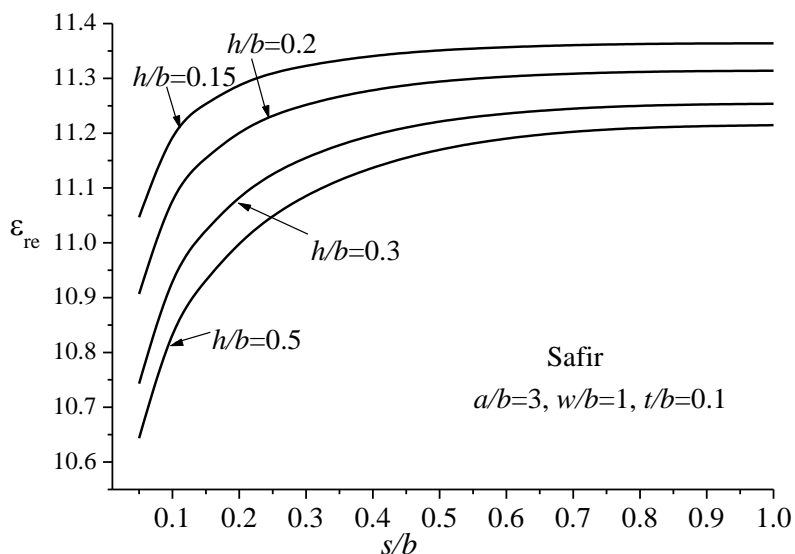
Na sl. 6.27. i sl. 6.28. su prikazane relativna efektivna permitivnost,  $\epsilon_{re}$ , i karakteristična impedansa,  $Z_c$ , za safir a na sl. 6.29. i sl. 6.30., isti parametri za bornitrid. Na sl. 6.31. su prikazane linije električnog polja u poprečnom preseku voda za safir,  $h/b=0.45$ ,  $s/b=0.5$ . Sa sva četiri dijagrama se vidi da se  $\epsilon_{re}$  i  $Z_c$  brzo menjaju kada je traka bliže oklopu, dok se promena dešava daleko sporije kada je traka relativno daleko od oklopa. Slike 6.27.-6.31. odnose se na geometriju sa sl. 6.25.

Sl. 6.27 i sl. 6.29 pokazuju da kada se provodna traka približava zidu oklopa,  $\epsilon_{re}$  postaje bliža vrednosti  $\epsilon_{rx}$ . Ovo se može objasniti ivičnim efektom gde je  $x$ -

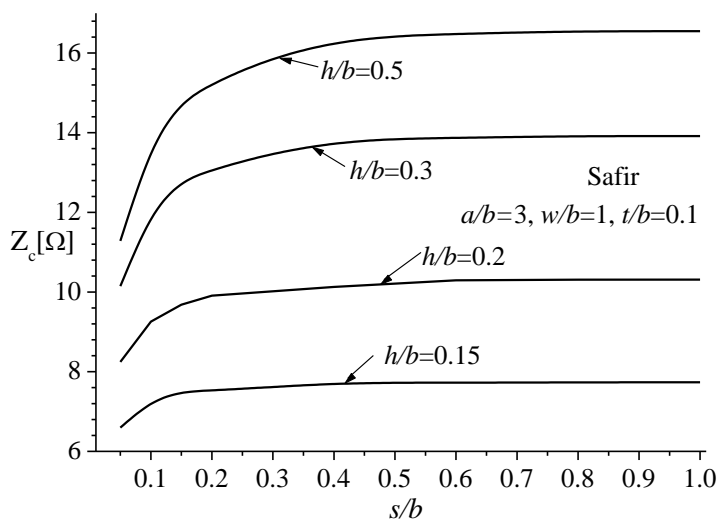


## 6. Primena jake FEM formulacije za kvazistatičku analizu vodova

komponenta polja dominantna. Kada se traka udaljava od zida i približava centralnom položaju strukture,  $y$ -komponenta polja se povećava (u odnosu na  $x$ -komponentu) i  $\epsilon_{re}$  teži vrednosti bliskoj  $\epsilon_{ryy}$ . Kada je traka bliže horizontalnom zidu oklopa,  $\epsilon_{re}$  teži vrednosti  $\epsilon_{ryy}$ , utoliko više ukoliko se više povećava  $y$ -komponenta polja. Ovo vizuelno ilustruje sl. 6.31 koja prikazuje linije električnog polja u poprečnom preseku voda.

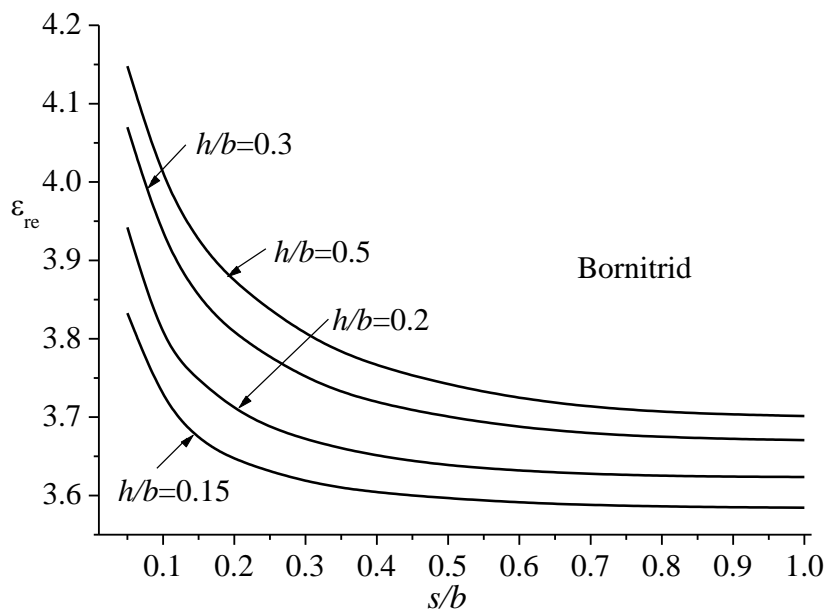


Sl. 6.27. Efektivna relativna permitivnost oklopljenog trakastog voda ispunjenog safirom, u funkciji  $s/b$ .

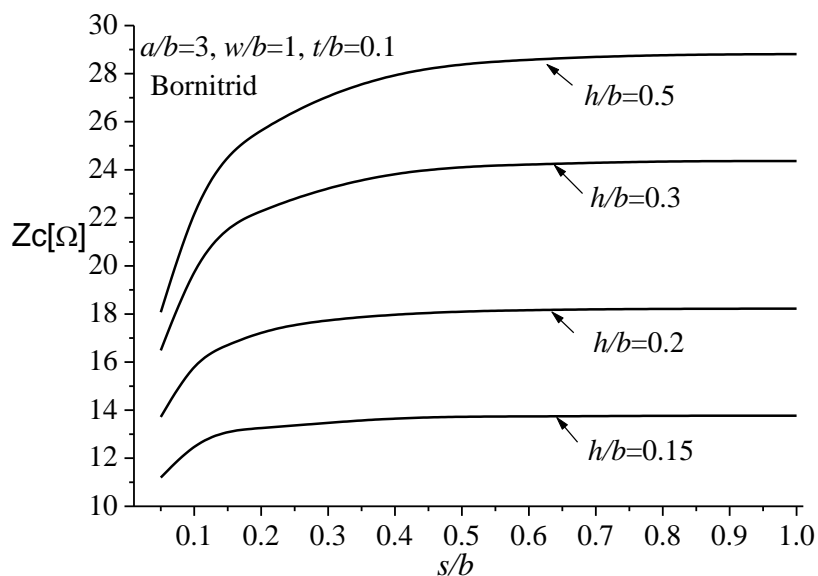


Sl. 6.28. Karakteristična impedansa oklopljenog trakastog voda ispunjenog safirom, u funkciji  $s/b$ .

6. Primena jake FEM formulacije za kvazistatičku analizu vodova



Sl. 6.29. Efektivna relativna permitivnost oklopljenog trakastog voda sa bornitridom, u funkciji  $s/b$ .

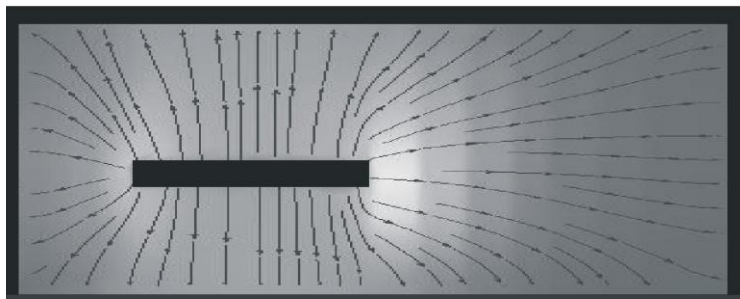


Sl. 6.30. Karakteristična impedansa oklopljenog trakastog voda ispunjenog bornitridom, u funkciji  $s/b$ .

Karakteristična impedansa raste u svim posmatranim slučajevima sa pomeranjem provodne trake od oklopa ka centru strukture. Ovo je posledica smanjenja

## 6. Primena jake FEM formulacije za kvazistatičku analizu vodova

podužne kapacitivnosti strukture i nije direktno povezano sa anizotropnim svojstvima supstrata.



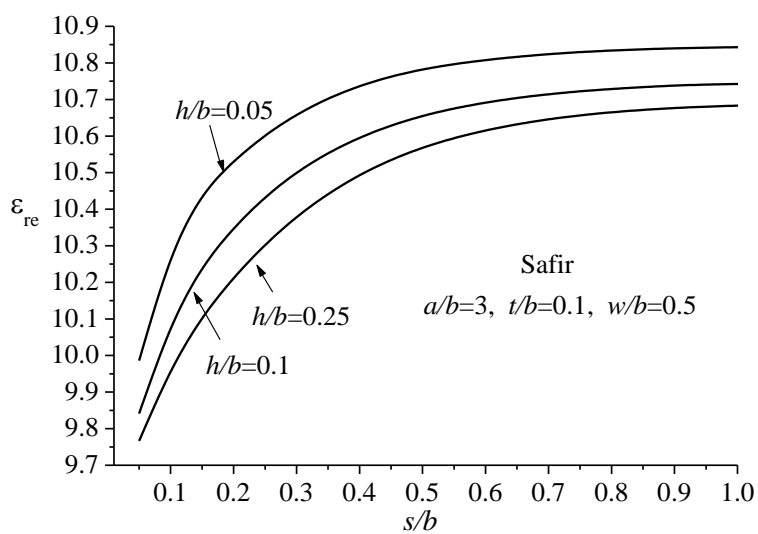
Sl. 6.31. Linije električnog polja za safir ( $a/b=3$ ,  $w/b=1$ ,  $t/b=0.1$ ,  
 $h/b=0.45$ ,  $s/b=0.5$ ).

Za trakasti vod čiji je poprečni presek prikazan na sl. 6.26. provodna traka je paralelna užoj strani pravougaonog oklopa. Relativne dimenzije voda su  $a/b=3$ ,  $w/b=0.5$ ,  $t/b=0.1$ , dok su  $h/b$  i  $s/b$  promenljive.

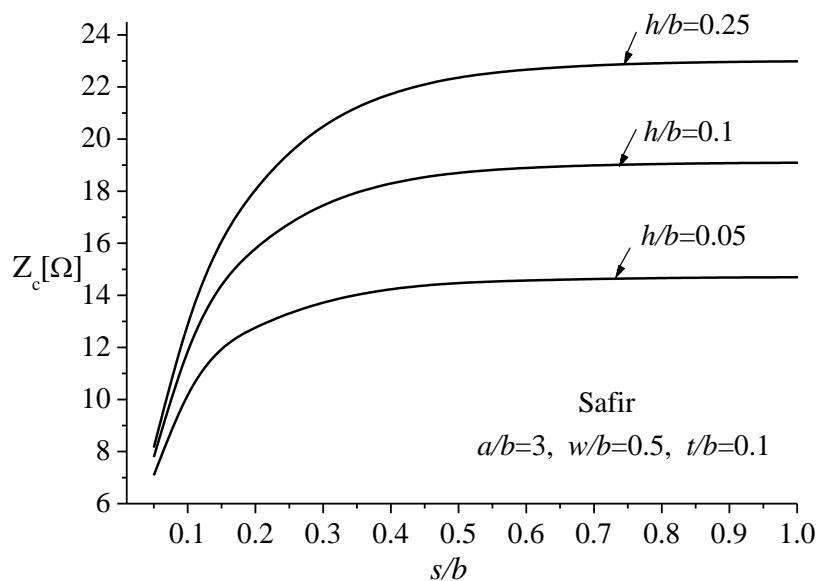
Na sl. 6.32. i sl. 6.33. su prikazane efektivna relativna permitivnost,  $\epsilon_{re}$ , i karakteristična impedansa,  $Z_c$ , za safir a na sl. 6.34. i sl. 6.35. isti parametri za bornitrid. Na sl. 6.36. prikazane su linije električnog polja za safir, za  $h/b=0.45$  i  $s/b=0.5$ . Slike 6.32.-6.36. odnose se na primer sa sl. 6.26.

Zaključuje se da se relativna efektivna permitivnost približava vrednosti  $\epsilon_{rx}$  kada se provodna traka približava bočnoj strani oklopa, odnosno da teži vrednosti  $\epsilon_{ry}$  kada se traka približava donjoj odnosno gornjoj strani oklopa. Ovakvo ponašanje se objašnjava ivičnim efektom. Karakteristična impedansa raste sa pomeranjem provodne trake od oklopa ka centru strukture usled generalnog smanjenja podužne kapacitivnosti i to nije direktno povezano sa anizotropijom supstrata.

6. Primena jake FEM formulacije za kvazistatičku analizu vodova

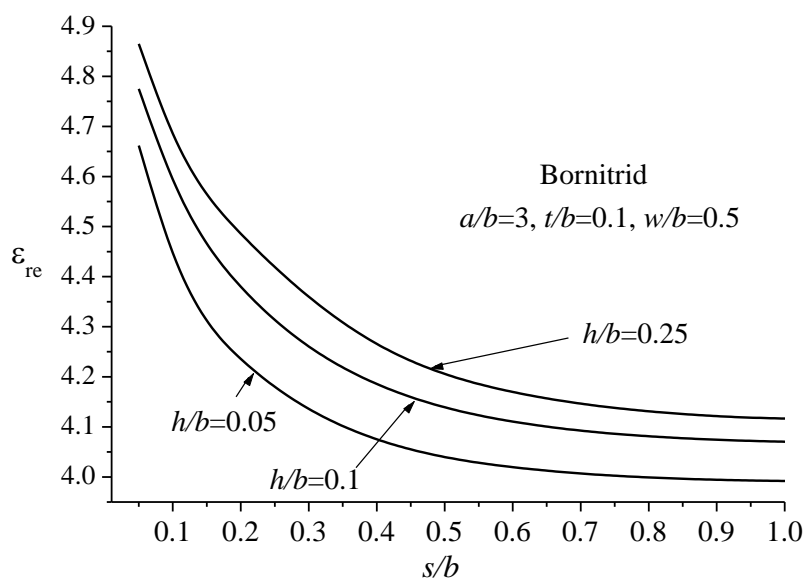


Sl. 6.32. Efektivna relativna permitivnost oklopljenog trakastog voda sa safirom, u funkciji  $s/b$ .

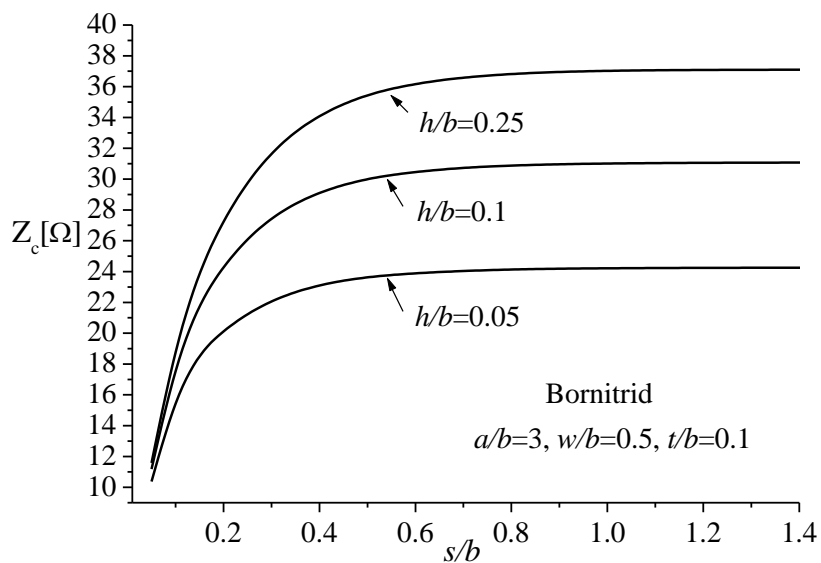


Sl. 6.33. Karakteristična impedansa oklopljenog trakastog voda sa safirom, u funkciji  $s/b$ .

6. Primena jake FEM formulacije za kvazistatičku analizu vodova

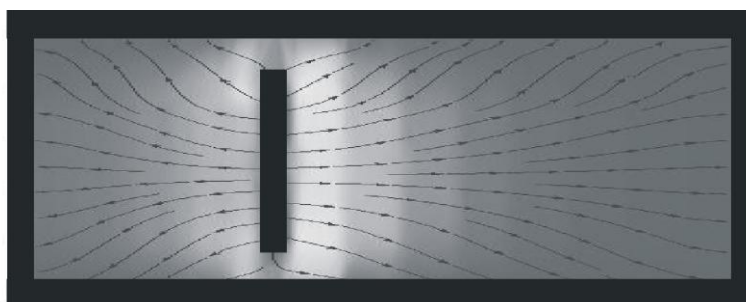


Sl. 6.34. Efektivna relativna permitivnost oklopljenog trakastog voda sa bornitridom u funkciji  $s/b$ .



Sl. 6.35. Karakteristična impedansa oklopljenog trakastog voda sa bornitridom u funkciji  $s/b$ .

## 6. Primena jake FEM formulacije za kvazistatičku analizu vodova

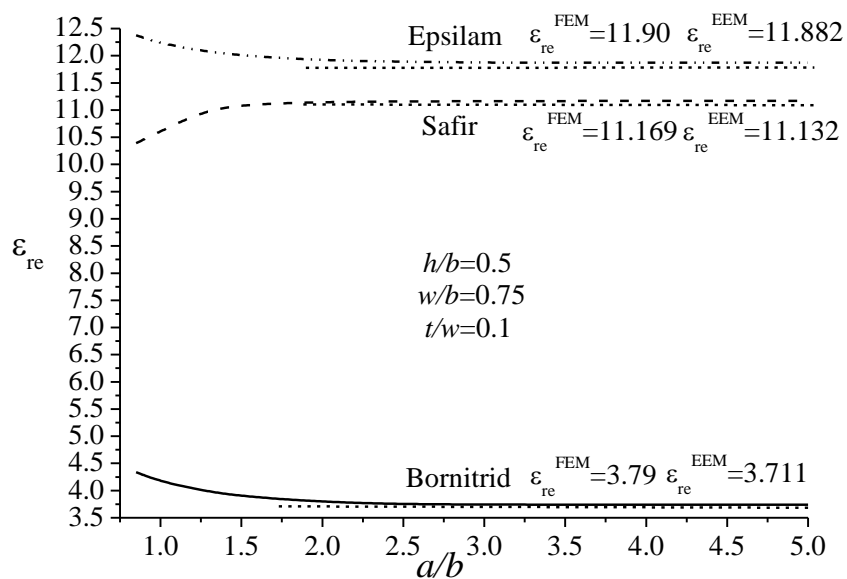


Sl. 6.36. Linije električnog polja za vod ispunjen safirom kada je provodna traka paralelna užoj strani oklopa ( $h/b=0.1$ ,  $s/b=1$ ,  $a/b=3$ ,  $t/b=0.1$  i  $w/b=0.8$ ).

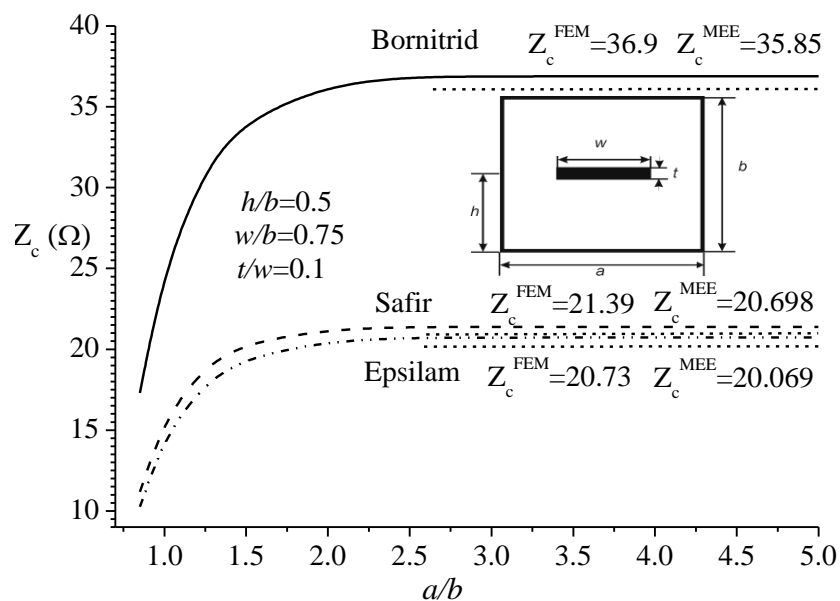
### 6.4.3 Oklopljeni simetričan trakasti vod sa anizotropnim supstratom promjenljivih dimenzija oklopa

Proračunat je simetričan oklopljeni trakasti vod čije se bočne ivice oklopa udaljavaju od provodne trake, tj. kod koga se relativna širina oklopa, ( $a/b$ ), menja u opsegu od 0,85 do 5. Na sl. 6.37. i sl. 6.38. prikazani su rezultati za kvazistatičke parametre  $\epsilon_{re}$  i  $Z_c$  za tri oklopljena trakasta voda sa safirom, bornitridom i epsilamom. Mreža se, kao i ranije, sastoji od  $N=512$  elemenata najnižeg reda ( $n_x=n_y=3$ ) što rezultuje u 1472 nepoznatih. Slaba FEM formulacija istog reda sa istom gustinom FEM mreže daje 4416 nepoznatih. Rezultati su upoređeni sa rezultatima iz [147], u kome je prikazan kvazistatički proračun provodne trake postavljene simetrično između dve provodne ravni primenom metode ekvivalentne elektrode (EEM). Na taj način je jaka FEM formulacija upoređena sa EEM [79]. Sa grafika se zaključuje da za  $a/b=5$  postoji poklapanje rezultata sa onima dobijenim u [146]. Treba napomenuti da je uz pomoć FEM-a analizirana zatvorena konfiguracija a uz pomoć EEM otvorena. Sa grafika se vidi da rezultati dobijeni jakom FEM formulacijom za  $a/b>3$  praktično konvergiraju konstantnoj vrednosti koja se poklapa sa vrednošću dobijenom metodom ekvivalentne elektrode. Sa sl. 6.37. se vidi da za bornitrid i epsilam  $\epsilon_{re}$  konvergira ka nižoj, dok za safir ka višoj vrednosti. Ovo je usled toga što je za bornitrid i epsilam  $\epsilon_{rxx} > \epsilon_{ryy}$  a  $\epsilon_{rxx} < \epsilon_{ryy}$  za safir.

## 6. Primena jake FEM formulacije za kvazistatičku analizu vodova



Sl. 6.37. Efektivna relativna permitivnost oklopljenog simetričnog trakastog voda u funkciji relativne širine oklopa, za tri različita anizotropna supstrata.

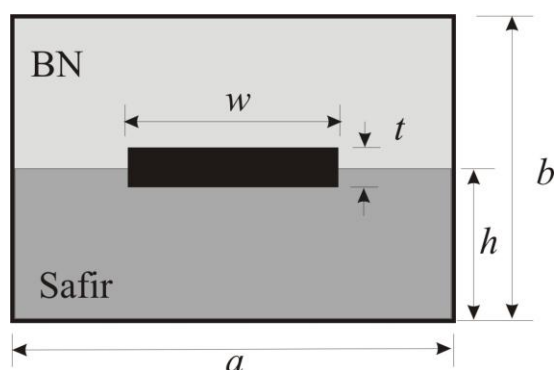


Sl. 6.38. Karakteristična impedansa oklopljenog simetričnog trakastog voda u funkciji relativne širine oklopa, za tri anizotropna supstrata.

## 6. Primena jake FEM formulacije za kvazistatičku analizu vodova

### 6.5 Primena jake FEM formulacije na analizu vodova sa deo-po-deo homogenim anizotropnim dielektrikom

Na primeru geometrije sa sl. 6.39., koja predstavlja oklopljen trakasti vod ispunjen safirom i bornitridom, tako da je  $h/b = 1/2$ , za  $a/b = 1$  i različito  $w/a$  rezultati su upoređeni sa rezultatima koje je dao komercijalni softver CST na 0,05 GHz, što je prikazano u Tabeli 6.7.



Sl. 6.39. Simetričan oklopljen trakasti vod sa safirom i bornitridom.

Tabela 6.7 Rezultati poređenja  $\epsilon_{re}^{FEM}$  i  $\epsilon_{re}^{CST}$

| $w/a$                 | 0.1      | 0.2     | 0.4     | 0.6      | 0.8      | 0.9      | 0.95      |
|-----------------------|----------|---------|---------|----------|----------|----------|-----------|
| $\epsilon_{re}^{FEM}$ | 7.387111 | 7.39260 | 7.39676 | 7.393559 | 7.380266 | 7.363462 | 7.3446626 |
| $\epsilon_{re}^{CST}$ | 7.373257 | 7.3657  | 7.37317 | 7.369803 | 7.351645 | 7.346161 | 7.316008  |
| $\delta(\%)$          | 0.18791  | 0.36517 | 0.31999 | 0.32235  | 0.38931  | 0.33551  | 0.39167   |

|                     |         |         |         |        |        |         |      |
|---------------------|---------|---------|---------|--------|--------|---------|------|
| $Z_c[\Omega]^{FEM}$ | 48.43   | 39.88   | 29.27   | 21.81  | 14.91  | 10.51   | 7.20 |
| $Z_c[\Omega]^{CST}$ | 48.21   | 39.67   | 29.10   | 21.70  | 14.86  | 10.54   | 7.31 |
| $\delta(\%)$        | 0.45633 | 0.52936 | 0.58419 | 0.5069 | 0.4465 | 0.28463 | 1.50 |

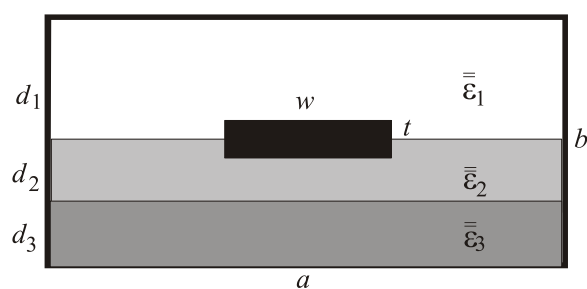
Uočava se da jaka FEM formulacija čak i najnižeg reda funkcije bazisa i ovde daje vrlo dobre rezultate, primenljive na niskim učestanostima.

#### 6.5.1 Mikrostrip u troslojnoj anizotropnoj dielektričnoj sredini

U ovom odeljku su proračunati kvazistatički parametri mikrostripa u troslojnom anizotropnom dielektriku sa sl. 6.40. pri čemu se redosled ali ne i debljina dielektričnih slojeva menja [72].

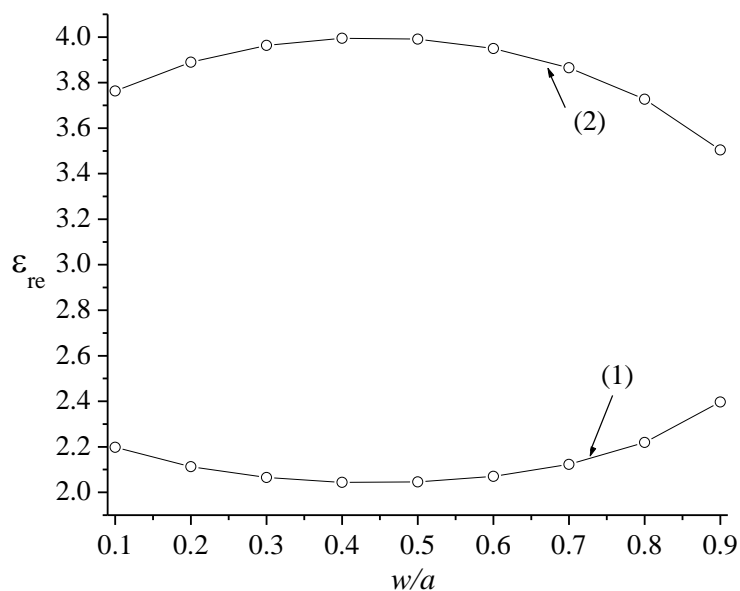


## 6. Primena jake FEM formulacije za kvazistatičku analizu vodova



Sl. 6.40. Mikrostrip u troslojnoj anizotropnoj dielektričnoj sredini

Sl. 6.41. i sl. 6.42. prikazuju kvazistatičke parametre za mikrostrip sa troslojnim anizotropnim dielektrikom kada je provodna traka do polovine u sredini 1, sl. 6.40. Redosled dielektričnih slojeva se menja. U slučaju (1) je sredina 1 i sredina 3 vazduh a sredina 2 je BN. U slučaju (2) je sredina 1 vazduh, sredina 2 je BN a sredina 3 je safir.

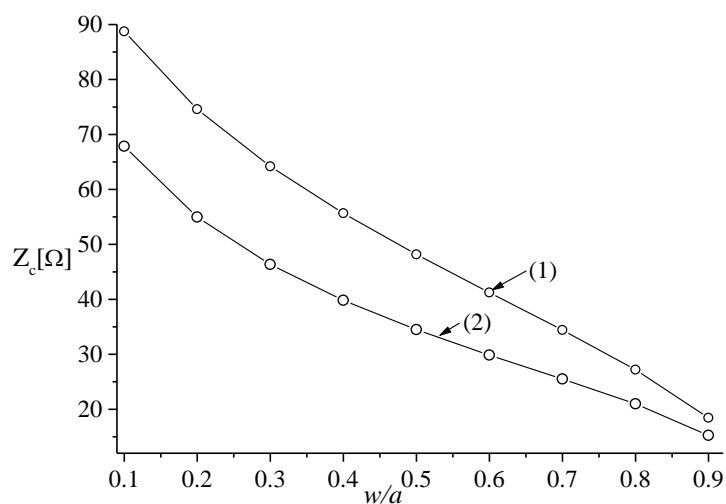


Sl. 6.41. Efektivna permitivnost za

$$(1) \epsilon_{r1} = \epsilon_{r3} = 1, \epsilon_{r2} = \text{diag}[5.12 \quad 3.4] \text{ i}$$

$$(2) \epsilon_{r1} = 1, \epsilon_{r2} = \text{diag}[5.12 \quad 3.4], \epsilon_{r3} = \text{diag}[9.4 \quad 11.6]$$

## 6. Primena jake FEM formulacije za kvazistatičku analizu vodova

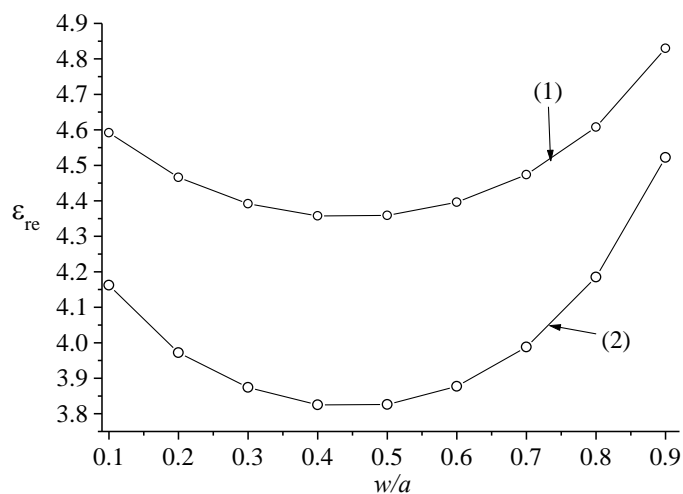


Sl. 6.42. Karakteristična impedansa za

$$(1) \ \varepsilon_{r1} = \varepsilon_{r3} = 1, \bar{\varepsilon}_{r2} = \text{diag}[5.12 \ 3.4] \text{ i}$$

$$(2) \ \varepsilon_{r1} = 1, \bar{\varepsilon}_{r2} = \text{diag}[5.12 \ 3.4], \bar{\varepsilon}_{r3} = \text{diag}[9.4 \ 11.6]$$

Sl. 6.43. i sl. 6.44. prikazuju karakteristične parametre kada je u slučaju (1) sredina 1 vazduh, sredina 2 safir a sredina 3 BN, dok je u slučaju (2) sredina 1 i sredina 3 vazduh, a sredina 2 safir.

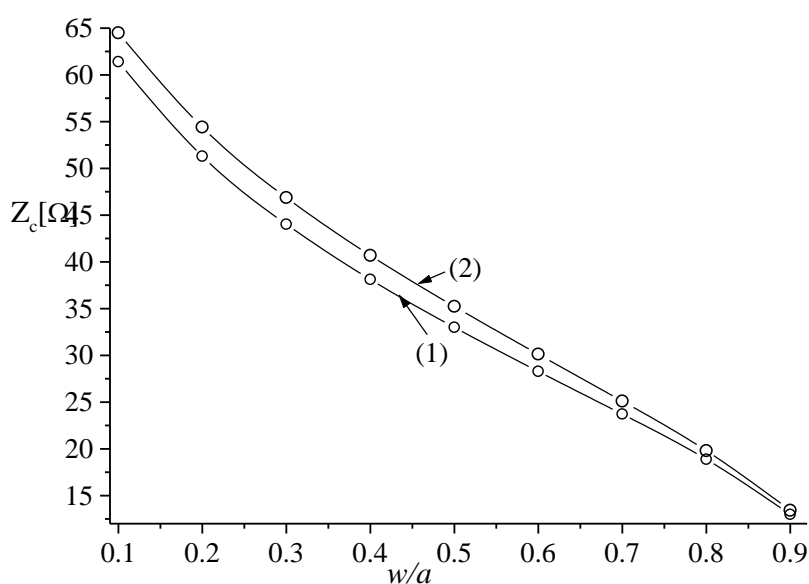


Sl. 6.43. Efektivna relativna permitivnost za

$$(1) \ \varepsilon_{r1} = 1, \bar{\varepsilon}_{r2} = \text{diag}[9.4 \ 11.6], \bar{\varepsilon}_{r3} = \text{diag}[5.12 \ 3.4] \text{ i}$$

$$(2) \ \varepsilon_{r1} = \varepsilon_{r3} = 1, \bar{\varepsilon}_{r2} = \text{diag}[9.4 \ 11.6].$$

## 6. Primena jake FEM formulacije za kvazistatičku analizu vodova



Sl. 6.44. Karakteristična impedansa za

$$(1) \varepsilon_{r1} = 1, \varepsilon_{r2} = \text{diag}[9.4 \quad 11.6], \varepsilon_{r3} = \text{diag}[5.12 \quad 3.4] \text{ i}$$

$$(2) \varepsilon_{r1} = \varepsilon_{r3} = 1, \varepsilon_{r2} = \text{diag}[9.4 \quad 11.6].$$

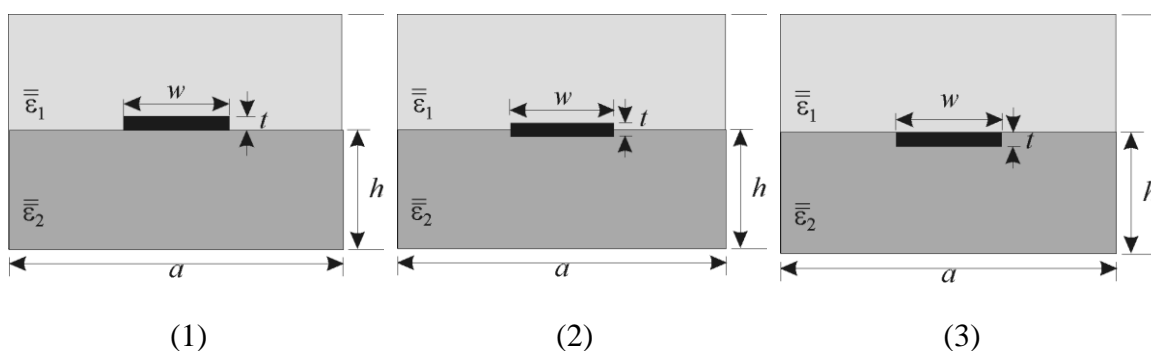
U ovom odeljku je analiziran i trakasti vod sa izdignutom podlogom, tj. slučaj kada je  $\varepsilon_{r1} = \varepsilon_{r3} = 1$ . Ovaj deo rada zapravo predstavlja demonstraciju mogućnosti programskog paketa da analizira višeslojni anizotropni dielektrik.

### 6.5.2. Uticaj položaja provodne trake u odnosu na razdvojnu površinu dielektrika

Debljina provodne trake je parametar koji ima znatan uticaj na karakteristične parametre vodova i u literaturi se često sreću radovi koji se bave ovom problematikom [143,144].

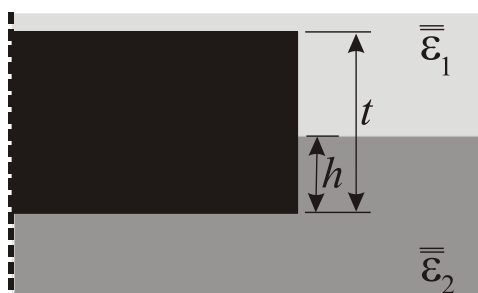
Najpre je na primeru trakastog voda sa dvoslojnim dielektrikom sa sl. 6.45. analiziran uticaj položaja provodne trake u odnosu na razdvojnu površinu dva dielektrika na kvazistatičke parametre [72]. Izabrana su tri karakteristična slučaja: (1) kada je traka u sredini sa  $\varepsilon_1$  i donjom površinom naleže na razdvojnu površinu, (2) kada je traka do polovine u jednoj i drugoj sredini i (3) kada je traka u sredini  $\varepsilon_2$  i gornjom površinom naleže na razdvojnu površinu.

## 6. Primena jake FEM formulacije za kvazistatičku analizu vodova



Sl. 6.45. Oklopljen simetrični trakasti vod sa dvoslojnim supstratom i tri različite pozicije provodne trake u odnosu na razdvojnu površinu.

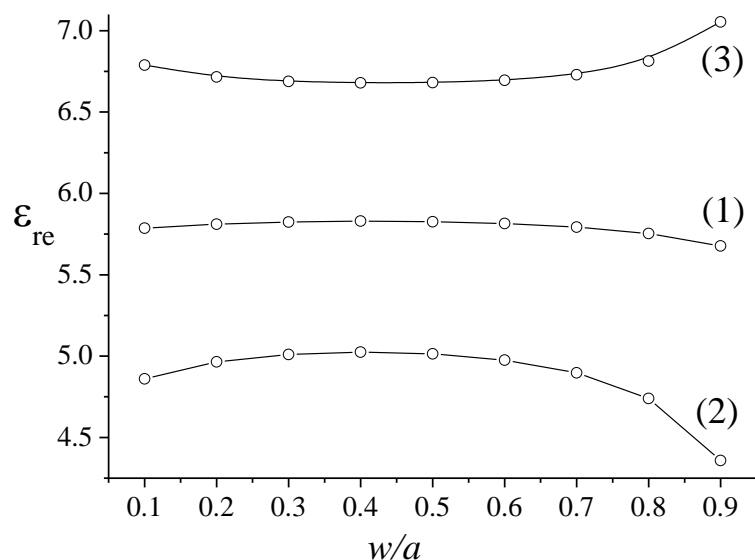
U slučaju sa sl. 6.46. je posmatrano kako se kvazistatički parametri menjaju kada se traka kontinuirano pomera od položaja (1) kada donjom površinom naleže na razdvojnu površinu do položaja (3) kada gornjom površinom naleže na razdvojnu površinu.



Sl. 6.46. Položaj provodne trake na razdvojnoj površini dva dielektrika.

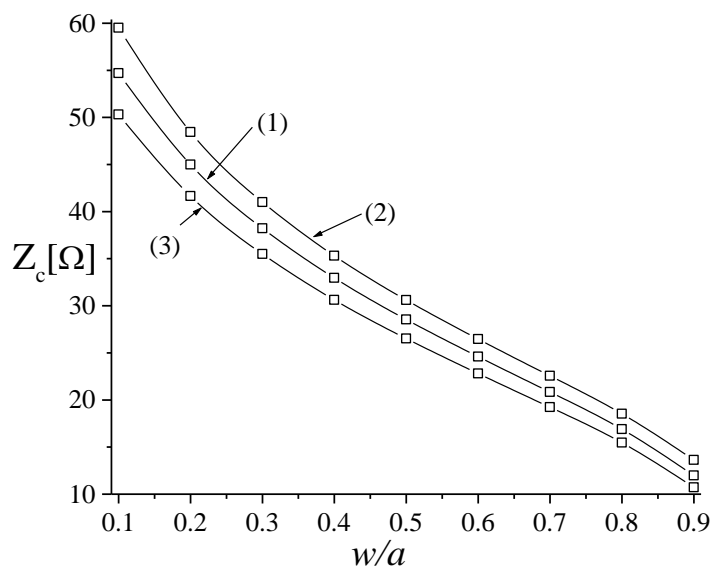
U prvom slučaju je proračunat trakasti vod sa provodnom trakom konačne debljine na anizotropnom dielektriku safiru, čija je relativna permitivnost  $\bar{\epsilon}_r = \text{diag}[9.4 \ 11.6]$ . Na sl. 6.47. i sl. 6.48. su prikazane relativna efektivna permitivnost i karakteristična impedansa za sva tri slučaja u funkciji odnosa  $w/a$ . Zapaža se da je položaj provodne trake znatno uticajan i da je efektivna relativna permitivnost u slučaju (3) najveća i samim tim karakteristična impedansa najmanja. Sa sl. 6.47. se uočava da se kriva povija naviše ili naniže u zavisnosti od toga da li je provodna traka većim delom u safiru ili vazduhu što se može objasniti kao posledica efekta anizotropije.

## 6. Primena jake FEM formulacije za kvazistatičku analizu vodova



Sl. 6.47. Efektivna relativna permitivnost za  $\epsilon_{r1} = 1$  i

$$\bar{\epsilon}_{r2} = \text{diag}[9.4 \quad 11.6].$$



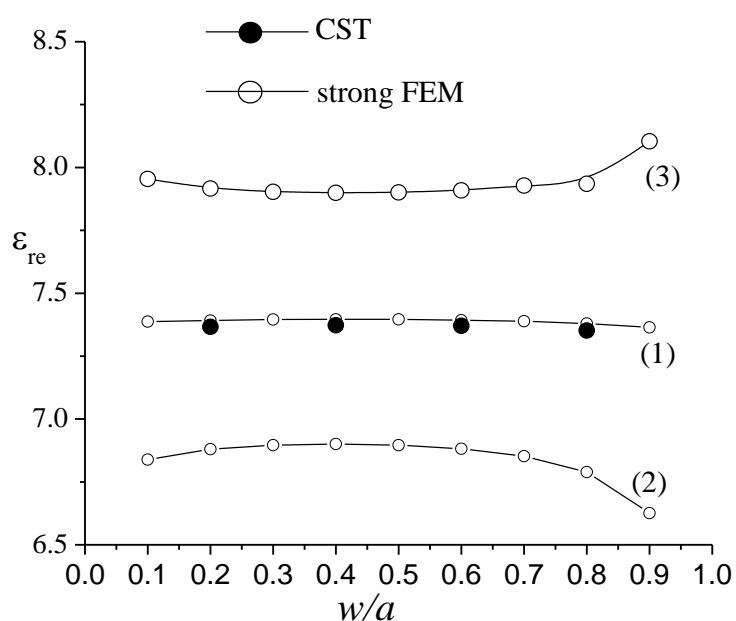
Sl. 6.48. Karakteristična impedansa za  $\epsilon_{r1} = 1$  i  $\bar{\epsilon}_{r2} = \text{diag}[9.4 \quad 11.6]$ .

U drugom slučaju provodna traka je na razdvojnoj površini safir-BN. Na sl. 6.49 je prikazana efektivna relativna permitivnost, a na sl. 6.50 karakteristična impedansa u funkciji  $w/a$  za sva tri slučaja sa sl. 6.45. Neki rezultati sa sl. 6.49 su upoređeni sa rezultatima dobijenim programom CST koji vrši kompletnu talasnu analizu vodova. Uočava se odlično slaganje. I ovde se uočava slična zakonitost kao u prethodno

## 6. Primena jake FEM formulacije za kvazistatičku analizu vodova

razmatranom slučaju. U trećem slučaju, sl. 6.51 i sl. 6.52, provodna traka konačne debljine je na razdvojnoj površini vazduh-izotropan dielektrik relativne permitivnosti  $\epsilon_r = 4$ . I ovde postoji slična zakonitost.

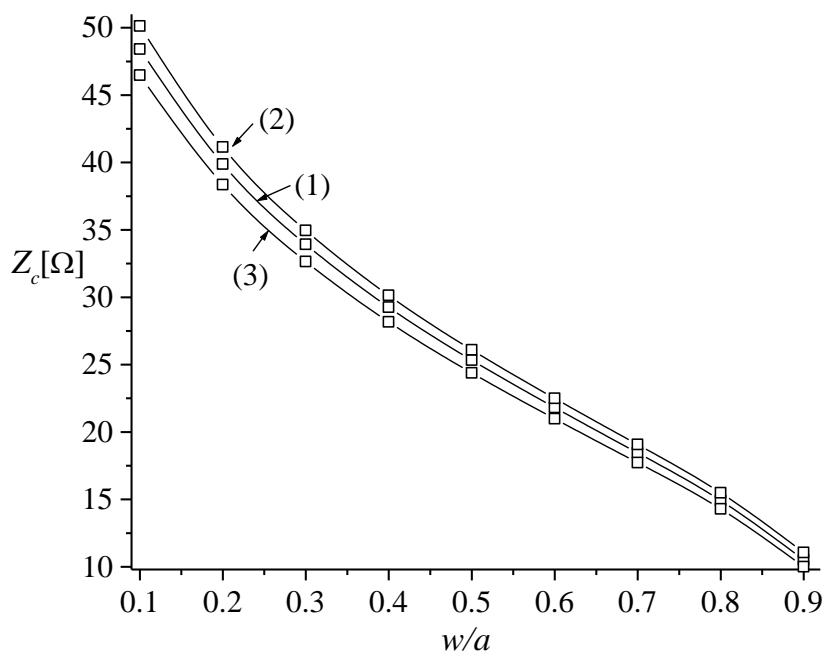
Kada se visina  $h$  do koje je provodna traka u donjem dielektriku kontinualno menja, sl. 6.46, onda se kvazistatički parametri (relativna efektivna permitivnost i karakteristična impedansa) menjaju po linearnom zakonu, kao što pokazuju sl. 6.53 i sl. 6.54. I ovde su razmatrani slučajevi oklopljenog simetričnog trakastog voda sa dvoslojnim supstratom, odnosno oklopljenog mikrotrakastog voda (kada je jedna od sredina vazduh a druga homogeni izotropni odnosno anizotropni dielektrik).



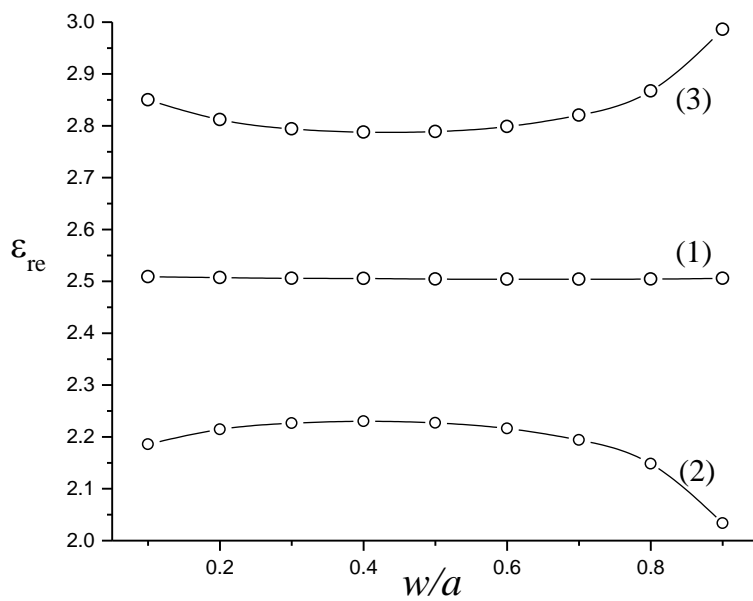
Sl. 6.49. Efektivna relativna permitivnost za  $\bar{\epsilon}_{r1} = \text{diag}[5.12 \quad 3.4]$  i

$$\bar{\epsilon}_{r2} = \text{diag}[9.4 \quad 11.6].$$

6. Primena jake FEM formulacije za kvazistatičku analizu vodova

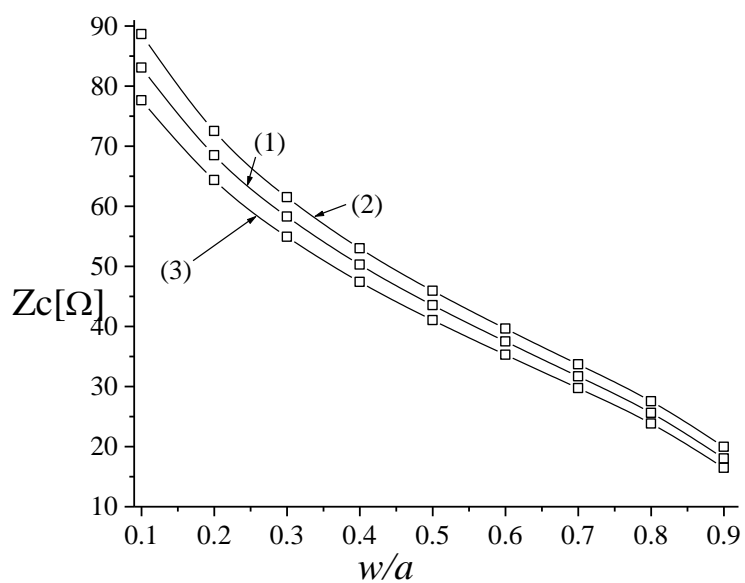


Sl. 6.50. Karakteristična impedansa za  $\bar{\epsilon}_{r1} = \text{diag}[5.12 \quad 3.4]$  i  $\bar{\epsilon}_{r2} = \text{diag}[9.4 \quad 11.6]$ .

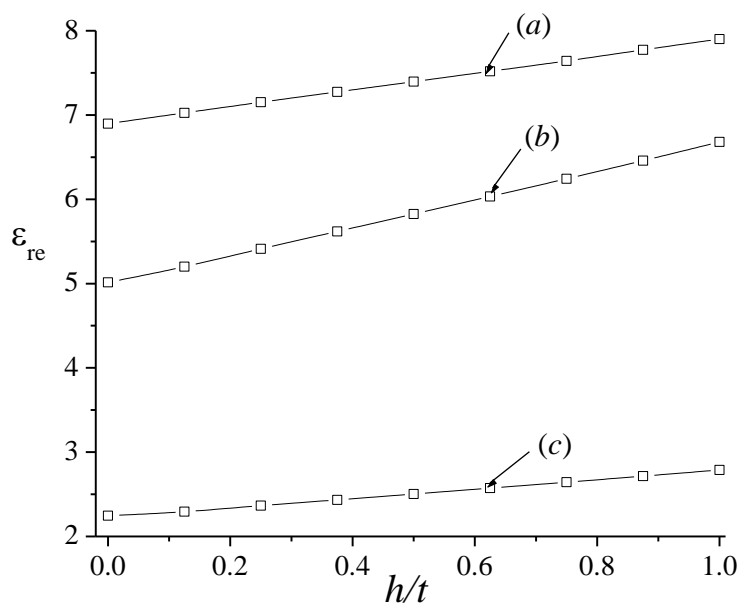


Sl. 6.51. Efektivna relativna permitivnost za  $\epsilon_{r1} = 1$  i  $\epsilon_{r2} = 4$ .

## 6. Primena jake FEM formulacije za kvazistatičku analizu vodova



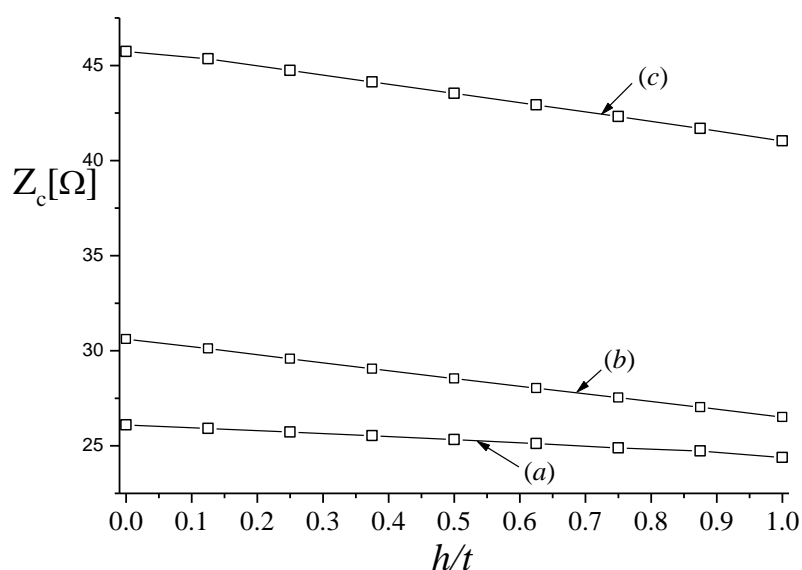
Sl. 6.52. Karakteristična impedansa za  $\epsilon_{r1} = 1$  i  $\epsilon_{r2} = 4$ .



Sl. 6.53. Efektivna relativna permitivnost u funkciji  $h/t$  za slučaj (a) dvoslojnog anizotropnog dielektrika (Sa- Bn), (b) vazduh-Sa, (c) vazduh – homogen dielektrik,  $\epsilon_r = 4$ .



## 6. Primena jake FEM formulacije za kvazistatičku analizu vodova



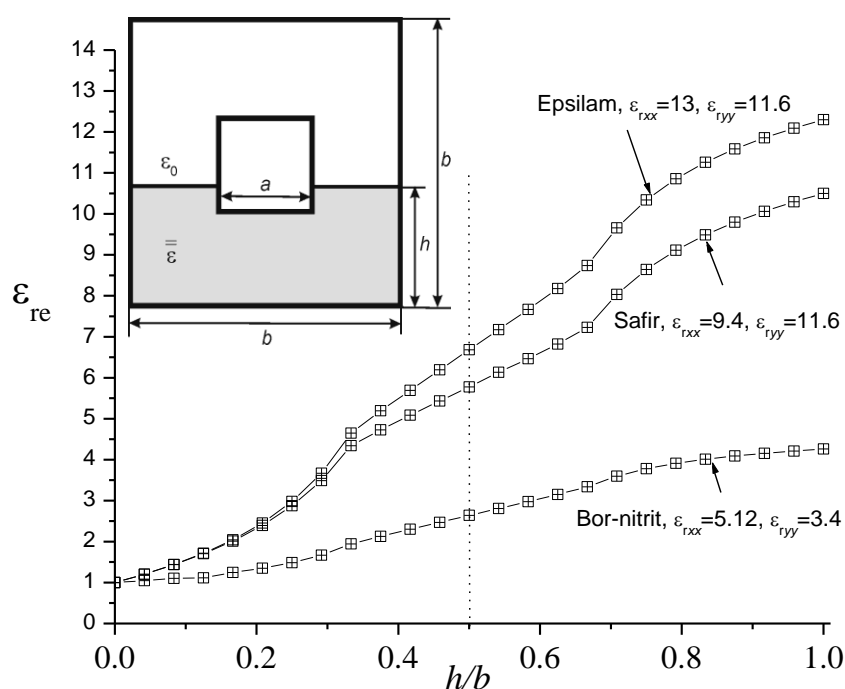
Sl. 6.54 Karakteristična impedansa u funkciji  $h/t$  za slučaj (a) dvoslojnog anizotropnog dielektrika ( Sa- Bn), (b) vazduh-Sa, (c) vazduh – homogen dielektrik,  $\epsilon_r = 4$ .

Zapaža se da se, za slučaj dvoslojnog dielektrika na kome se nalazi provodna traka kvazistatički parametri bitno međusobno razlikuju kada se promeni redosled dielektričnih slojeva podloge na kojoj leži traka.

### 6.5.3 Kvadratni koaksijalni vod sa anizotropnim dielektričnim podmetačem promenljive visine

Relativna visina dielektričnog podmetača,  $h/b$ , iznad koga je vazdušni dielektrik, menja se od nule (kada je efektivna relativna permitivnost jednaka 1) do jedinice, kada je vod sasvim ispunjen dielektrikom. Tada je, za izotropan materijal efektivna permitivnost jednaka permitivnosti dielektrika, dok su za slučaj anizotropnog materijala vrednosti efektivne relativne permitivnosti praktično jednake aritmetičkoj sredini  $(\epsilon_{rxx} + \epsilon_{ryy})/2$ , koja za Epsilam iznosi  $\epsilon_{re} = 12.3$ , za BN  $\epsilon_{re} = 4.26$  i za Safir  $\epsilon_{re} = 10.5$ . Odstupanje između proračunatih vrednosti i aritmetičkih sredina je manje od 0.5%.

## 6. Primena jake FEM formulacije za kvazistatičku analizu vodova



Sl. 6.55. Relativna efektivna dielektrična konstanta,  $\epsilon_{re}$ , u funkciji količnika visine dielektričnog podmetača i dužine spoljašnje stranice kvadratnog koaksijalnog voda,  $h/b$ .

Ako je vod do polovine ispunjen izotropnim dielektrikom a iznad njega je vazdušni dielektrik, lako se pokazuje da je relativna efektivna permitivnost  $\epsilon_{re} = (1 + \epsilon_r) / 2$ . Za anizotropne materijale je relativna efektivna permitivnost brojno bliska izrazu:  $\epsilon_{re} = (1 + (\epsilon_{rxx} + \epsilon_{ryy}) / 2) / 2$ . Ovakav vod je proračunat i slabom FEM formulacijom [117] i dobijene vrednosti se praktično poklapaju sa vrednostima prikazanim na slici 6.55., za skoro dvostruko manji broj nepoznatih nego kod slabe formulacije (bez uzimanja u obzir simetrije).

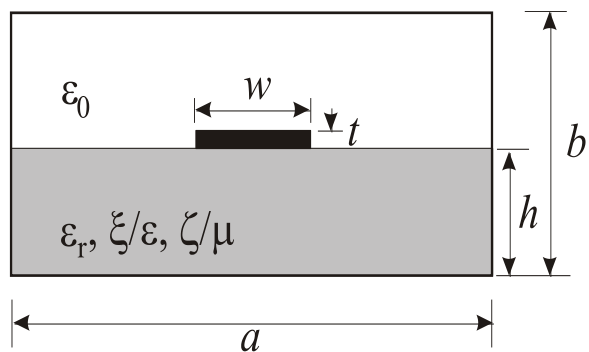
### 6.6. Oklopljeni mikrostrip na biizotropnom supstratu

Biizotropni materijal karakterišu konstitutivne veze (2.8) iz odeljka 2. U [149] je pokazano da se pri kvazistatičkom proračunu ovakav materijal može tretirati kao dielektrik ekvivalentne permitivnosti:

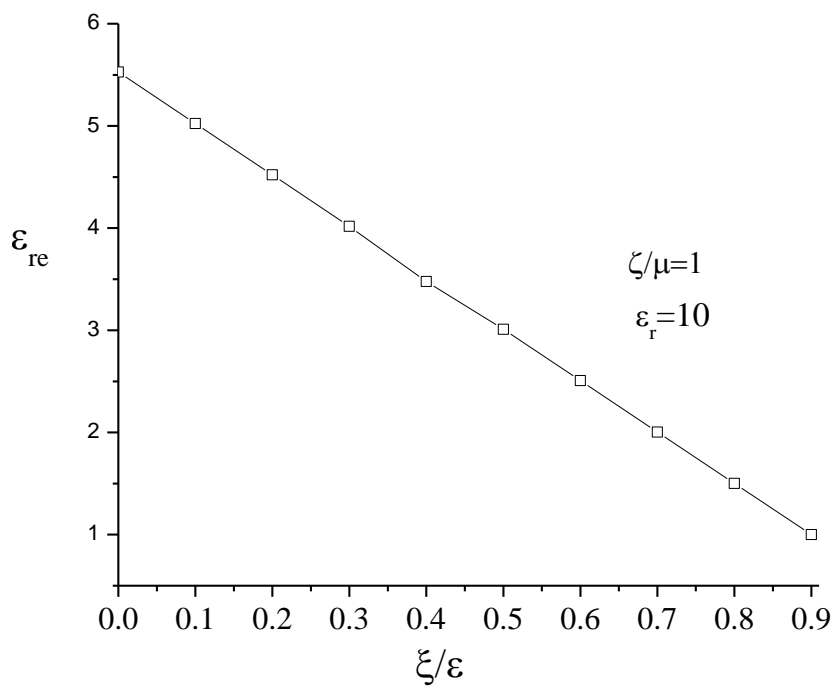
$$\epsilon_e = \epsilon \left( 1 - \frac{\xi \zeta}{\epsilon \mu} \right).$$

## 6. Primena jake FEM formulacije za kvazistatičku analizu vodova

Za oklopljenu strukturu na biizotropnom supstratu, sl. 6.56, dimenzija  $a/b=3$ ,  $t/b=0.1$ ,  $h/b=0.5$   $w/b=1$ , karakteristični parametri su prikazani na sl. 6.57 i sl. 6.58.



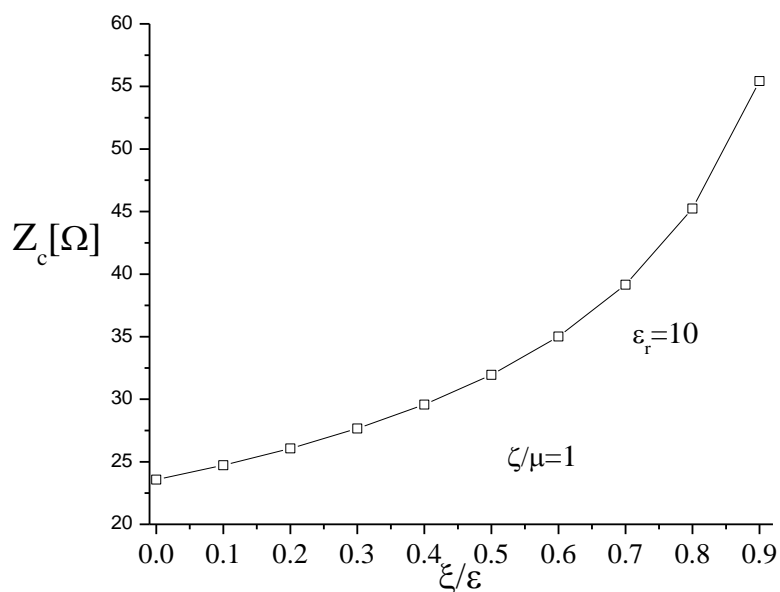
Sl. 6.56. Oklopljeni mikrostrip na biizotropnom supstratu



Sl. 6.57. Efektivna relativna permitivnost u funkciji parametra  $\xi/\varepsilon$  za

$$\zeta/\mu=1.$$

## 6. Primena jake FEM formulacije za kvazistatičku analizu vodova



Sl. 6.58. Karakteristična impedansa u funkciji parametra  $\xi/\varepsilon$  za  $\zeta/\mu=1$ .

### 6.6.1 Oklopljeni mikrostrip na *Tellegen*-ovom supstratu

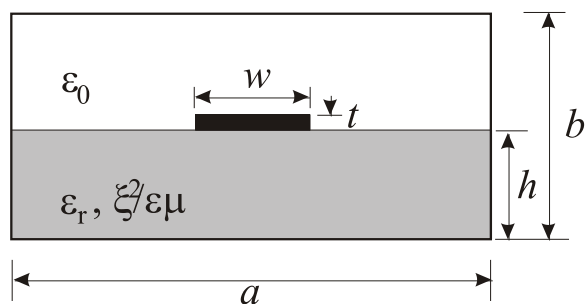
Za  $\xi = \zeta$ , sl. 6.59, konstitutivne veze (2.8) postaju:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + \xi \mathbf{H}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + \xi \mathbf{E}$$

i takav dielektrik je *Tellegen*-ovog tipa, pa ekvivalentna permitivnost postaje

$$\varepsilon_e = \varepsilon \left( 1 - \frac{\xi^2}{\varepsilon \mu} \right).$$

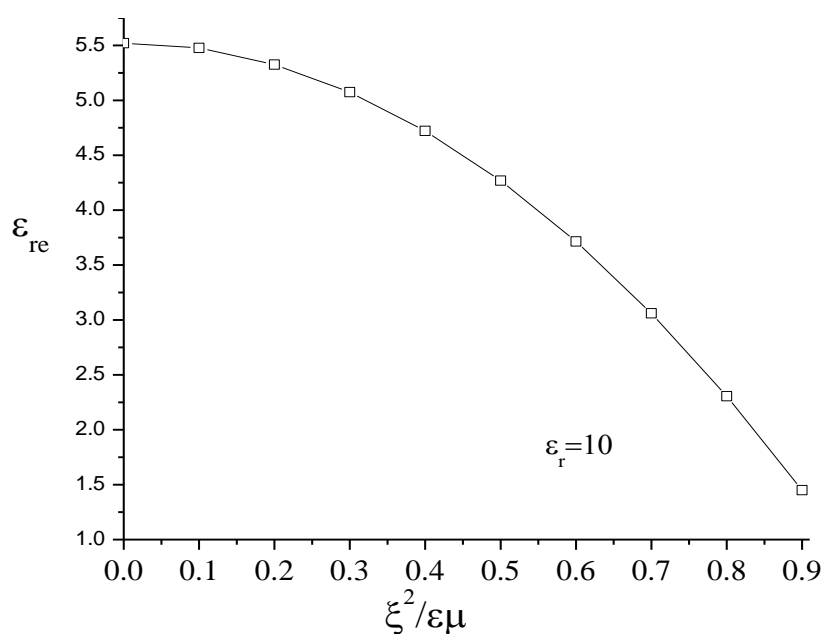


Sl. 6.59 Mikrostrip na *Tellegen*-ovom supstratu

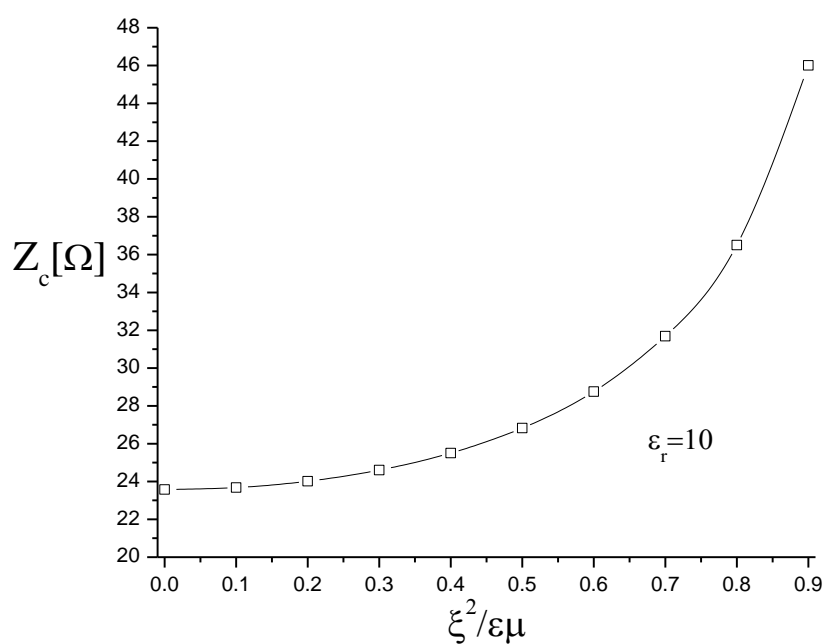
Karakteristični parametri su prikazani na sl. 6.60 i sl. 6.61, za  $a/b=3$ ,  $t/b=0.1$ ,

$h/b=0.5$  i  $w/b=1$ .

## 6. Primena jake FEM formulacije za kvazistatičku analizu vodova



Sl. 6.60. Efektivna permitivnost u funkciji parametra  $\xi^2/\epsilon\mu$ .



Sl. 6.61. Karakteristična impedansa u funkciji parametra  $\xi^2/\epsilon\mu$ .

### 6.7. Zaključak

U ovom poglavlju je jaka FEM formulacija primenjena na kvazistatičku analizu jednostavnih struktura za vođenje TEM talasa za koje postoje ili analitički ili rezultati visoke tačnosti. Najpre je u odeljku 6.1. ukratko opisan postupak preprocesinga, koji je

## 6. Primena jake FEM formulacije za kvazistatičku analizu vodova

specifičan u odnosu na uobičajeni zbog osobenosti jakih funkcija bazisa da neke od njih formiraju dublete, odnosno kvadruplete. Zatim su u odeljcima 6.2.-6.6. dati rezultati proračuna relativno jednostavnih struktura za koje u literaturi postoje dovoljno tačni rezultati za poređenje. Jednostavne strukture su birane kako zbog postojanja rezultata za poređenje tako i zbog jednostavnosti preprocesinga, što nije predmet istraživanja ovog rada. U svrhu ilustrovanja mogućnosti jakih funkcija bazisa birane su strukture sa izotropnim, anizotropnim i biizotropnim dielektricima, kao i homogene i deo-po-deo nehomogene. Pri tome su dobijeni rezultati poređeni sa postojećim iz literature ili su korišćeni softverski paketi za proračun istih geometrija i u svakom primeru prikazano i poređenje sa rezultatima dobijenim bilo nekim od drugih metoda, bilo analitičkim, ukoliko postoje. Uočeno je dobro slaganje svuda, uz napomenu da je svaki od odeljaka 6.2. - 6.6. publikovan naučni rad.

## 7. Poređenje jake i slabe FEM formulacije

U svrhu sagledavanja osobenosti jake FEM formulacije na primeru kvadratnog koaksijalnog voda za koji je, ukoliko je ispunjen vazduhom, poznato benchmark rešenje [139], izvršeno je poređenje jake i slabe FEM formulacije prema brzini konvergencije rezultata, zavisnosti od broja nepoznatih i broja konačnih elemenata, kao i redu funkcije bazisa [67]. Takođe je izvršeno poređenje jake i slabe formulacije na primeru voda iste geometrije ispunjenog anizotropnim dielektrikom.

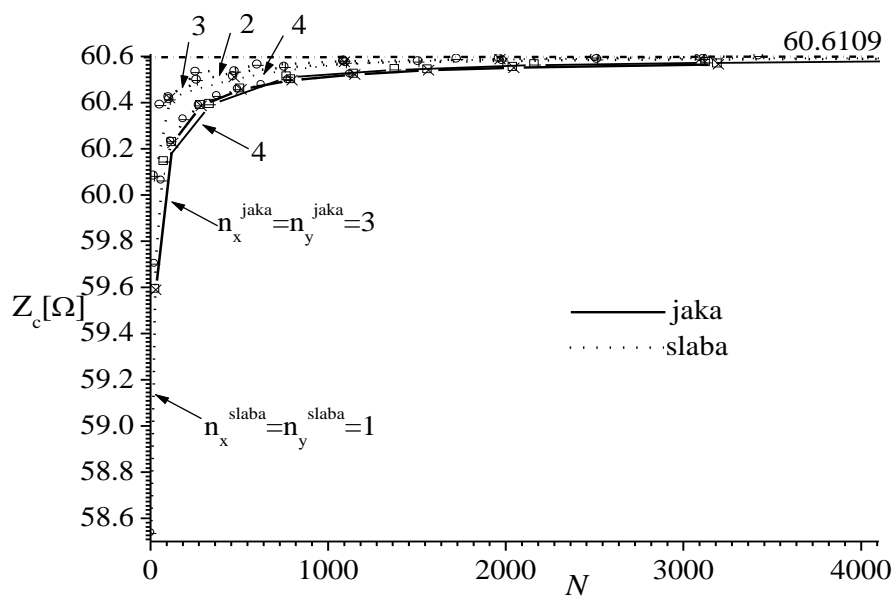
### 7.1. Poređenje jake i slabe FEM formulacije za izotropne dielektrike

U ovom odeljku poređenje jake i slabe FEM formulacije ilustrovano je na benchmark primeru – koaksijalnom vodu kvadratnog poprečnog preseka, odnosa stranica  $a/b=3$ , za koji je  $Z_c = 60.610964118877299... \Omega$  (za vod ispunjen vazduhom) i koji se može proračunati sa velikom tačnošću. Uzeta je u obzir simetrija i mreža formirana samo za četvrtinu strukture.

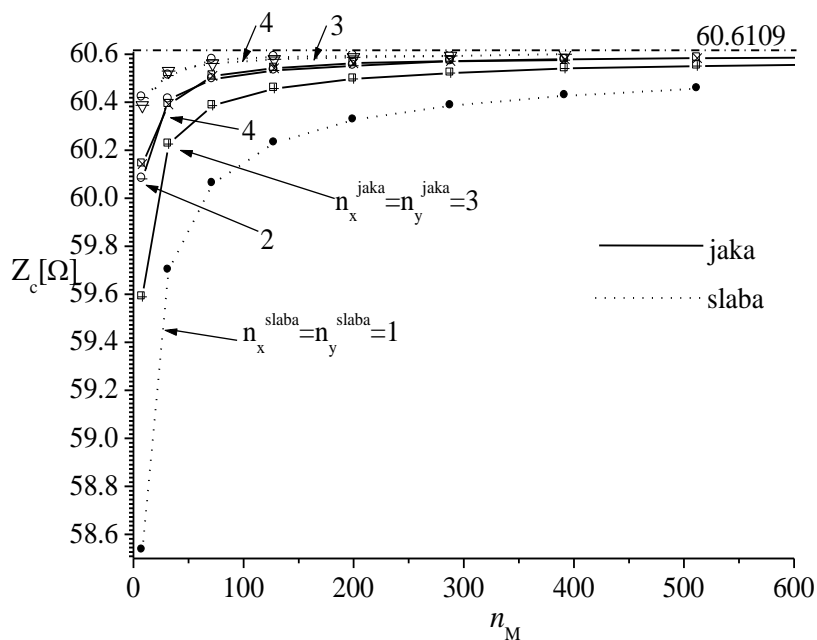
Na sl. 7.1. je prikazana zavisnost karakteristične impedanse  $Z_c$  izračunate metodom konačnih elemenata od ukupnog broja nepoznatih  $N$ , za red funkcije bazisa  $n_x^{jaka} = n_y^{jaka} = 3$  i 4, gde se broj konačnih elemenata povećava od 32 do 1800 za  $n_x^{jaka} = n_y^{jaka} = 3$  i od 32 do 800 za  $n_x^{jaka} = n_y^{jaka} = 4$ . Ovo je upoređeno sa rezultatima za slabu formulaciju sa redom funkcije bazisa  $n_x^{slaba} = n_y^{slaba} = 1, 2, 3$  i 4. Za obe formulacije, za konstantan red funkcije bazisa, ukupan broj nepoznatih raste sa porastom ukupnog broja konačnih elemenata. Kada se povećava red funkcije bazisa, za isti broj elemenata, povećava se broj nepoznatih. Jasno, dovoljan je manji broj elemenata za viši stepen funkcije bazisa. Kod jake formulacije se, kao što je ranije navedeno, polazi od reda funkcije bazisa  $n_x^{jaka} = n_y^{jaka} = 3$ , za koji postoje samo kvadrupleti i njihovi delovi. Slaba formulacija startuje od  $n_x^{slaba} = n_y^{slaba} = 1$ , gde postoje samo osnovni kvadrupleti koji obezbeđuju neprekidnost funkcije,  $C^0$  neprekidnost. Na sl. 7.2. je prikazana zavisnost  $Z_c$  od broja elemenata,  $n_M$ , gde se, jasno, broj nepoznatih povećava sa porastom broja elemenata. Na sl. 7.3. i sl. 7.4. je prikazana zavisnost relativne greške za  $Z_c$  od  $N$  i  $n_M$ ,

## 7. Poređenje jake i slabe FEM formulacije

respektivno. Sl. 7.5. prikazuje zavisnost ukupnog broja nepoznatih,  $N$ , od ukupnog broja elemenata,  $n_M$ , za obe formulacije (jaku i slabu). Karakteristična impedansa je računata preko energetske formule.



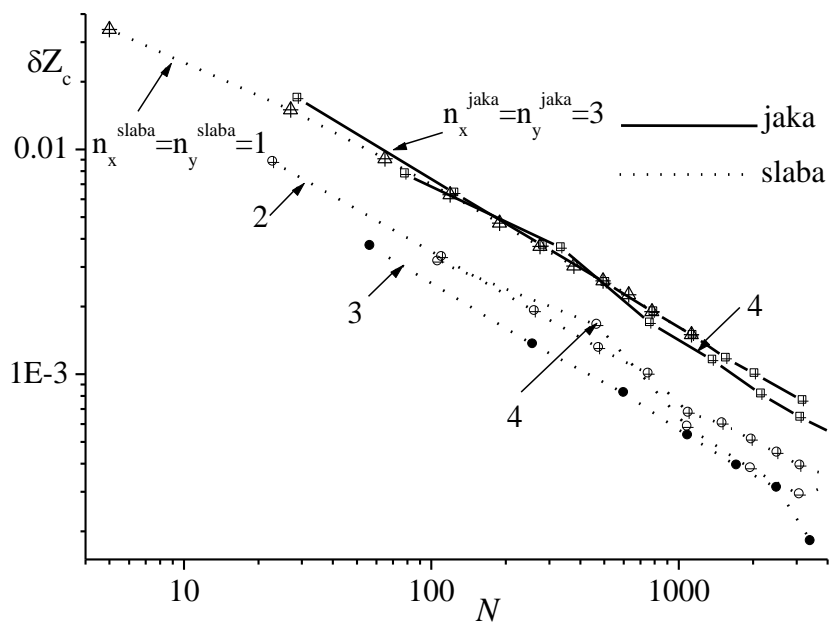
Sl. 7.1. Zavisnost  $Z_c$  od  $N$  za kvadratni koaksijalni benchmark vod, za jaku i slabu formulaciju.



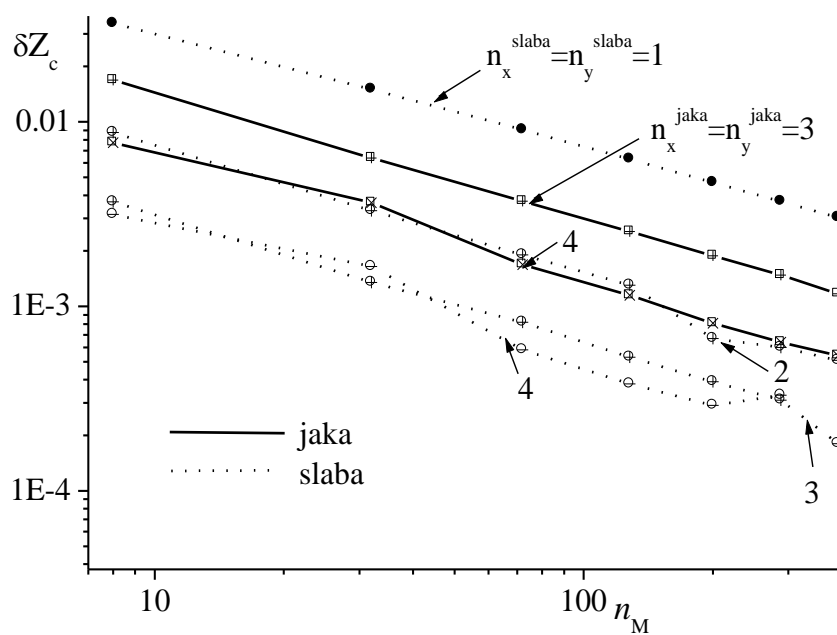
Sl. 7.2. Zavisnost  $Z_c$  od ukupnog broja elemenata mreže,  $n_M$ , za kvadratni koaksijalni benchmark vod, za jaku i slabu FEM formulaciju.



## 7. Poređenje jake i slabe FEM formulacije



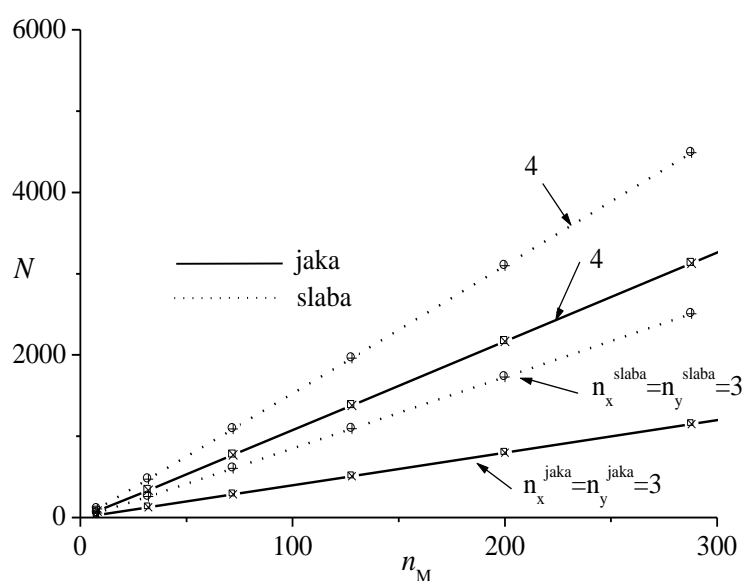
Sl. 7.3. Relativna greška za  $Z_c$  u funkciji ukupnog broja nepoznatih,  $N$ .



Sl. 7.4. Relativna greška za  $Z_c$  u funkciji ukupnog broja elemenata mreže,

$n_M$ .

## 7. Poređenje jake i slabe FEM formulacije



Sl. 7.5. Ukupan broj nepoznatih,  $N$ , u funkciji od ukupnog broja elemenata mreže,  $n_M$ , za jaku i slabu FEM formulaciju.

### 7.2 Poređenje jake i slabe FEM formulacije za anizotropne dielektrike

U svrhu poređenja proračunat je i primer kvadratnog koaksijalnog voda, odnosa stranica  $a/b = 3$ , homogeno ispunjenog sa tri različita anizotropna dielektrika, safirom, bornitridom i epsilamom. Formirana je mreža konačnih elemenata bez simetrije. Za  $n_M = 512$  elemenata mreže i red funkcija bazisa  $n_x = n_y = 3$ , za jaku formulaciju dobija se  $N=1472$  nepoznatih, a za slabu  $N=4416$ . Rezultati poređenja dati su u Tabeli 7.1. Uočava se dobro međusobno slaganje rezultata i skoro četiri puta veći broj nepoznatih za isti red funkcije bazisa kod slabe FEM formulacije.

Tabela 7.1. Poređenje jake i slabe FEM formulacije na primeru kvadratnog koaksijalnog voda.

|                            | Safir | Bornitrid | Epsilam |
|----------------------------|-------|-----------|---------|
| $\varepsilon_{re}$ (jaka)  | 10,50 | 4,26      | 12,33   |
| $\varepsilon_{re}$ (slaba) | 10,49 | 4,24      | 12,30   |
| $Z_c$ (jaka)               | 18,66 | 29,29     | 17,25   |
| $Z_c$ (slaba)              | 18,70 | 29,40     | 17,27   |

## 7. Poređenje jake i slabe FEM formulacije

### 7.3. Zaključak

U ovom poglavlju na primeru kvadratnog koaksijalnog voda odnosa stranica  $a/b = 3$ , ispunjenog vazduhom (za koji postoji *benchmark* rešenje) i anizotropnim materijalima safirom, bornitridom i epsilamom, respektivno, upoređene su jaka i slaba formulacija metode konačnih elemenata prema broju nepoznatih i broju konačnih elemenata (pri čemu je red funkcije bazisa parametar) potrebnim da se ostvari zadovoljavajuća tačnost. Prikazana je i relativna greška rezultata u funkciji broja nepoznatih i broja konačnih elemenata. Takođe je za nekoliko anizotropnih materijala izvršeno tabelarno poređenje rezultata za karakterističnu impedansu dobijenih jakom i slabom formulacijom.

Sa grafika iz odeljka 7.1. zapaža se visoka tačnost, stabilnost i uniformnost konvergencije rezultata kako kod slabe tako i kod jake formulacije. Ipak, jaka formulacija rezultuje u daleko manjem broju nepoznatih za isti broj elemenata mreže i isti red aproksimacije. Od prikazanih formulacija, najbržu konvergenciju sa porastom broja nepoznatih ima slaba formulacija reda 3.

Prema rezultatima iz odeljka 7.2 zapaža se međusobno dobro slaganje rezultata slabe i jake FEM formulacije, pri čemu je za isti red funkcije bazisa broj nepoznatih kod jake formulacije takođe daleko niži nego kod slabe. Iako, prema rezultatima iz odeljka 7.1. najbržu konvergenciju rezultata ipak ima slaba formulacija, razlika u brzini konvergencije nije drastično velika da bi diskreditovala jaku formulaciju.

## 8. FEM metodologija za neograničene domene

S obzirom da se FEM zasniva na rešavanju diferencijalnih jednačina, on po svojoj prirodi tretira ograničen prostorni domen (računski domen, prostornu oblast u kojoj se prostire EM polje). U mnogim praktičnim proračunima EM polja javljaju se domeni koji su neograničeni, odnosno prostiru se do beskonačnosti. Zato su neophodne izmene ove metode kako bi se u obzir uzela otvorena granica računskog domena, na kojoj nisu eksplicitno zadati granični uslovi. Lokalni granični uslovi na otvorenoj granici mogu biti samo približni [150]. Egzaktni granični uslovi mogu biti samo integralni [151]. Pregled najvažnijih modifikacija može se naći npr. u [152-156].

### 8.1. Pregled modifikacija FEM-a za neograničene domene

U ovom odeljku biće dat pregled najčešćih modifikacija metode konačnih elemenata za otvorene domene. Svaka od modifikacija ima prednosti i nedostatke. Modifikacije za otvoreni domen se formalno dele na one koje tretiraju spoljašnji domen u celini (globalne), i one koje spoljašnji domen dele na konačan broj subregiona (ili elemenata), tzv. elementalne. Najčešće modifikacije FEM-a su: odsecanje spoljašnje granice, iterativno rešenje, ballooning, uvođenje beskonačnih elemenata, infinitezimalnih ljuski, transformacija prostora (konvertovanje fizički neograničenog domena u konačni domen konformnim preslikavanjem ili drugim geometrijskim preslikavanjima), pristup preko fleksibilne granice, granična relaksacija (boundary relaxation), pristup uz upotrebu baze podataka (database approach), apsorpcioni granični uslovi, asimptotski granični uslovi, *MEI* pristup (measured equation of invariance) koji je novijeg datuma i predstavlja metodu invarijantnosti koeficijenata uz potencijal čvorova na granici u odnosu na pobudu uz zavisnost od geometrije i konačno, hibridni pristup. Metode kod kojih se beskonačni prostor ograničava bilo unapred, bilo iterativnim ponavljanjem postupka rešavanja su približni. Egzaktni su oni kod kojih se tretira ceo domen i na egzaktna način zadovoljavaju granični uslovi.

*Odsecanje spoljašnje granice* spada u globalne metode i zasniva se na pretpostavci da se neograničen domen tretira kao ograničen pri čemu se spoljna granica uzima tako da dovoljno blizu nje potencijal ili izvod potencijala duž normale postane blizak nuli. Pravilo za lociranje spoljašnje granice je da njena udaljenost do centra

## 8. FEM metodologija za neograničene domene

objekta od interesa bude najmanje pet puta veća od rastojanja između centra i od njega najudaljenije spoljašnje površine [89]. U [157] se tehnika odsecanja poboljšava primenom tzv. SDI (Strategic Dual Image) metode.

*Iterativnim rešenjem* se takođe popravlja tačnost postupka odsecanja spoljne granice. U [158] je upotrebljen iterativni prilaz za pomeranje spoljnje granice do zadovoljenja određenog kriterijuma za maksimalnu jačinu polja na granici. Ovaj kriterijum se u literaturi sreće kod rešavanja talasnih problema.

*Ballooning* tehnika spada u globalne metode i uvodi je *Silvester* u [159]. Kod ovog prilaza se spoljašnji domen predstavlja prstenastim regionom koji okružuje unutrašnji konačni (računski) domen. Prstenasti region je definisan pomoću mreže od „super“ konačnih elemenata. Superelement ima identične čvorove na unutrašnjoj i spoljašnjoj granici sa unutrašnjim čvorovima iz unutrašnjeg domena. Ovi čvorovi leže na radijalnim linijama koje polaze iz centralne tačke posmatranog sistema. Rekurzija se realizuje dodavanjem novog prstena sa spoljašnjim čvorovima prethodnom prstenu a zatim se eliminišu čvorovi dva prstena koji se preklapaju. Radijus spoljašnjeg prstena (spoljne granice) raste kao geometrijska progresija i sistem brzo konvergira sa greškom za spoljašnje rešenje koja brzo teži nuli. Ova tehnika je primenljiva samo na *Laplace*-ove operatore i konveksne geometrije. Zadovoljavajuće rešenje se dobije posle nekoliko iteracija ali je nedostatak u tome što je potrebno postojanje centralne tačke i teško je primeniti uslove simetrije.

*Beskonačne elemente* uvodi *Ungless* [160]. Metoda spada u elementalne. Ovde postoje dva pristupa. Jedan je preko opadajućih interpolacionih funkcija, koje mogu biti tipa  $1/r$  (*Ungless*) ili eksponencijalne,  $e^{-r}$  (*Bettes*, [161]). Izbor opadajuće interpolacione funkcije zavisi od tipa problema jer je zakonitost po kojoj opada polje različita za različite probleme. Opadajuće interpolacione funkcije obezbeđuju da se rešenje anulira sa rastojanjem sa zadovoljavajućom tačnošću. Drugi pristup je „mapirani“ FEM, kod koga se regularni FEM domen transformiše u neograničeni domen. Transformacija se ostvaruje preko singularnih mapirajućih funkcija. Tehnika beskonačnih elemenata se sreće i u [162,163].

## 8. FEM metodologija za neograničene domene

*Tehniku infinitezimalne ljuske* uvodi Hurwitz [164], za Laplasijan probleme u kontekstu varijacione formulacije FEM-a. Ovde su spoljašnji i unutrašnji region razdvojeni prstenastim regionom, tankom ljuskom. Postupak zahteva formiranje funkcionala energije i za unutrašnji region i za graničnu oblast. Osim toga, potrebno je rešavanje sistema nelinearnih diferencijalnih jednačina. Metoda infinitezimalnih ljuski primenjuju Crowley u [165] i Chari u [166], koji ovaj postupak upoređuje sa hibridnom FEM-BEM metodom. Kod ovog pristupa trakasta priroda matrice sistema je delimično narušena prisustvom graničnih čvorova spoljašnje oblasti što je slično pojavi kod hibridnih pristupa. Matrica diferencijalnih jednačina se može rešiti samo iterativnim metodama zbog nelinearnosti. Metoda zahteva obimne izmene postojećih kodova konačnih elemenata, što je njen nedostatak.

*Prostorna transformacija* vrši konvertovanje fizički neograničenog domena u konačan domen konformnim preslikavanjem [167,168] ili drugim geometrijskim preslikavanjima. Konformno preslikavanje spada među starije tehnike. U [169] je primenjeno za proračun aksijalno simetričnih otvorenih problema. U [170] je primenjeno kod proračuna talasovoda. *Konformno preslikavanje* je primenljivo samo kod 2D problema skalarnih polja. *Kelvinova transformacija* je primenljiva na 3D otvorene Laplasijan probleme. U [171] je primenjena za rešavanje elektrostatičkih i magnetostatičkih problema. Kelvinova transformacija je poznata i kao HHFEM (hybrid harmonic FEM) [89]. Inverzna transformacija Kelvinovoj je u [172] primenjena na rešavanje elektrostatičkih problema zajedno sa transformacijom karakteristika materijala za varijacionu formulaciju FEM-a. Ovakav postupak je primenjen u [173] za rešavanje statičkih problema EM polja. Prostorna transformacija je lakša za implementiranje kod FEM-a jer zadržava rastresitost matrice, ali je geometrijska oblast diskretizacije veća nego kod drugih tehnika za otvorene probleme.

*Tehnika granične relaksacije (boundary relaxation)* se prvi put koristi u [174] za rešavanje vodova upotrebom metode konačnih razlika. Kod ovog pristupa se *Dirichlet*-ov granični uslov na spoljnoj granici inicijalno postavlja na proizvoljnu vrednost. Naelektrisanja na spoljnoj granici se naknadno računaju preko izračunatih potencijala. Potencijal na spoljnoj granici se zatim određuje preko odgovarajućih *Green*-ovih funkcija. Novi potencijali se zatim opet koriste za određivanje vrednosti polja. Iteracija

## 8. FEM metodologija za neograničene domene

se nastavlja dok se ne postigne zadata tačnost. Sličan prilaz, nazvan *charge iteration* (iteracija naelektrisanja) sa upotrebom FEM-a koriste Aiello, Alfonzetti i Coco i Aiello [175,176]. I kod ovog pristupa se u osnovi nalazi iterativna procedura.

Kod prilaza preko *baze podataka* [177] se „rasklapanje“ na submatrice i eliminisanje spoljašnjeg regiona vrši unapred. Rezultati se čuvaju u bazi podataka za dalji proračun problema koji se razlikuju po obimu i osobinama materijala. Tehnika omogućava da se reši veliki broj problema uz pomoć personalnih računara ali je još uvek težak zadatak predstavljanje različitih problema u bazi. Naglasak je na generisanju globalne baze podataka za različite granične uslove i uslove simetrije i kondenzovano čuvanje podataka.

*Tehnika apsorbujućih graničnih uslova* se primenjuje kod prostiranja i refleksije talasa i pogodna je za proračun problema na visokim učestanostima [178]. U [179] se tehnika apsorbujućih graničnih uslova prvog reda primenjuje u problematici antena, dok se FEM zasniva na korišćenju velikog zapreminskog krivolinijskog Lagranžovog elementa sa hijerarhijskim polinomskim vektorskim funkcijama.

*Tehnika asimptotskih graničnih uslova* je, za razliku od prethodne, primenljiva za statičke i kvazistatičke probleme EM polja i relativno je nova i manje obimna kod FEM proračuna statičkih i kvazistatičkih polja [180-185]. Ova tehnika je npr. implementirana u softverski paket COMSOL Multiphysics. Izvođenje asimptotskih graničnih uslova se zasniva na opštem rešenju *Laplace*-ove jednačine pod odgovarajućim graničnim uslovima imajući u vidu uslove da potencijal teži nuli u beskonačnosti. Izraz za asimptotske granične uslove  $n$ -tog reda u zatvorenom obliku u polarnim, eliptičkim i sfernim koordinatama daju *Gratkowski, Stawicki i Ziolkowski* u [185]. Kako asimptotski granični uslov zadržava rastresitost matrice koeficijenata kod FEM-a, ovau metodu neki autori smatraju najboljim izborom za neograničene domene. Tačnost rešenja takođe zavisi od načina diskretizacije a spoljašnja granica ne mora biti daleko od posmatranog domena.

*MEI tehnika* [186-188] je novijeg datuma. Ona zadržava rastresitost i simetriju koeficijenata matrice. Glavna prednost MEI je da omogućava odsecanje prostorne mreže u neposrednoj blizini tela zadržavajući tačnost (jedan ili dva sloja konačnih elemenata). Potencijal čvora na granici, u odnosu na potencijal njemu susednih čvorova

## 8. FEM metodologija za neograničene domene

povezan je preko koeficijenta koji su nezavisni od pobude a zavisni od geometrije i položaja. Suma proizvoda koeficijenta i potencijala čvorova susednih posmatranom čvoru koji se nalazi na granici i proizvoda koeficijenta koji odgovara graničnom čvoru i potencijala graničnog čvora je jednaka nuli i ove jednačine su tzv. merne jednačine invarijantnosti (MEI). Potencijali čvorova na granici se dobijaju kao integrali proizvoda *Green-ove* funkcije i *metrona*, tj. podužnog naelektrisanja na konturama provodnika u elektrostatičkom slučaju. Zatim se potencijal graničnog čvora vraća u MEI jednačinu, i za skup metrona dobija sistem linearnih MEI jednačina koje se rešavaju i koje u sebi sadrže i potencijale unutrašnjih čvorova koji se računaju FEM tehnikom.

*Hibridni postupak* obuhvata niz visokoeфикаsnih metoda koje kombinuju FEM sa drugim, za rešavanje otvorenih problema efikasnijim, metodama.

Hibridnim pristupom se mogu rešavati otvoreni statički, kvazistatički i problemi na visokim učestanostima. U suštini hibridnog postupka je sprega dva domena uz uslove na granici što prouzrokuje i glavni nedostatak - narušenu rastresitost matrice sistema, pa je kod većine modifikacija hibridnog postupka matrica koeficijenta gusta i nesimetrična. Drugi nedostatak je prisustvo singulariteta. Kod svih hibridnih tehnika uobičajeno je da se neograničeni domen podeli na spoljašnji i unutrašnji (računski) domen, pri čemu se u unutrašnjem domenu rešava *Poisson-ova* jednačina a u spoljašnjem *Laplace-ova* uz uslove na granici. Uslovi na granici koja razdvaja oblasti su uobičajeni uslov neprekidnosti potencijala i neprekidnost normalne komponente vektora **D** za elektrostatičke probleme. U unutrašnjem domenu se primenjuje FEM a u spoljašnjem druga tehnika. Hibridni postupci se dele na: hibridni FEM-analitički, hibridni postupak gde je FEM kombinovan sa *Green-ovim* funkcijama i hibridni FE-BIEM (metoda konačnih elemenata kombinovana sa graničnim integralnim jednačinama).

Kod *hibridnog FEM-analitičkog prilaza* od opštih rešenja *Laplace-ove* jednačine za potencijal spoljašnjosti kod statičkih problema na raspolaganju su harmonijske funkcije  $n$ -tog reda oblika sume zbira sinusnih i kosinusnih funkcija pomnoženog sa  $(a/r)^n$ , gde je  $a$  poluprečnik granične, odnosno razdvojne površine. Sprega unutrašnjeg i spoljašnjeg regiona se obezbeđuje preko graničnih uslova na razdvojnoj površini. U [189] je analitičko rešenje izraženo preko harmonijskog razvoja u *Legendre-ove* polinome (A-



## 8. FEM metodologija za neograničene domene

M. Legendre) za 3D probleme. Ovde takode spada i *višestruki multipolni razvoj* (MMP) primenjen u [190] kao *generalizovana multipolna tehnika* (GMT).

Kod *hibridnog* postupka gde je FEM kombinovan sa *Green*-ovim funkcijama spoljašnji neograničen domen se predstavlja preko *Green*-ovih funkcija u slobodnom prostoru koje potiču od ekvivalentnih opterećenja na granici spoljašnjeg i unutrašnjeg domena. *Green*-ove funkcije uobičajeno sadrže izraz oblika  $(1/R)$ , gde je  $R$  rastojanje od opterećenja do tačke u kojoj se računa potencijal, što ukazuje na mogućnost pojave singulariteta. Jedan od načina da se prevaziđe prisustvo singulariteta je lociranje ekvivalentnih izvora dalje od tačke posmatranja. U [191,192] je granična površina između spoljašnjeg i unutrašnjeg regiona izvan površine provodnika, što minimizuje efekat pozicije izvora. Sprega metoda se postiže podešavanjem u tačkama. Polje u spoljašnjoj oblasti se sastoji od komponente polja od ekvivalentnih izvora i komponente dobijene rešavanjem *Laplace*-ove jednačine.

*Hibridni FEM-BIEM* je veoma zastupljen u literaturi [193-204, 78]. Ovde se uočavaju dva pristupa: preko raspodele izvora u jednom sloju ili preko formulacije pomoću *Green*-ovog identiteta, gde se drugi *Green*-ov identitet koristi za izvođenje granične integralne jednačine. Diskretizacija graničnih integralnih jednačina se sprovodi postupkom podešavanja u tačkama (point matching) ili upotrebom varijacionog prilaza gde se promenljive polja na granici predstavljaju preko interpolacionih funkcija. Kako je za rešavanje graničnih integralnih jednačina pogodna metoda momenata, MoM, ovi hibridne metode se često nazivaju FEM-MoM. Tako se pogodnost FEM-a za rešavanje u opštem slučaju nehomogenih, ograničenih domena, udružuje sa pogodnostima BIE metodologije za homogene otvorene domene. Hibridnim FEM-MoM metodama se poslednjih decenija posvećuje velika pažnja. U [200-203] je predstavljena Galerkinova hibridna FEM-MoM tehnika uz upotrebu velikog generalizovanog heksaedra reda veličine talasne dužine za FEM i krivolinijskog parametarskog četvorougla kod MoM-a. Polja i struje se modeluju preko usklađenih (za operatore rotor i divergenciju, respektivno) hijerarhijskih polinomskih funkcija bazisa višeg (proizvoljnog) reda. Električno polje u „unutrašnjem“ domenu koji se modeluje FEM-om, se predstavlja preko konačne sume sa nepoznatim koeficijentima sa rotorski usklađenim funkcijama bazisa. Intenzitet ukupnog električnog i magnetskog polja u spoljašnjem domenu se

## 8. FEM metodologija za neograničene domene

predstavlja u funkciji površinskih električnih i magnetskih struja koje postoje na spoljašnjoj granici i koje se predstavljaju preko konačnih suma sa nepoznatim koeficijentima, pri čemu su funkcije bazisa divergencijski usklađene. Veza između polja u unutrašnjosti i spoljašnjosti se uspostavlja preko graničnih uslova za tangencijalne komponente električnog i magnetskog polja. U [204] je predstavljena dijakoptička varijanta hibridizacije, gde se polazi od dijakoptičkog principa da se EM sistem može razložiti na podsisteme koji se efikasnije rešavaju, a zatim se njihova rešenja kombinuju da bi se dobilo rešenje originalnog sistema sa zadovoljavajućom tačnošću. Na dijakoptičkim granicama se uvode novi nepoznati koeficijenti pomoću kojih se modeluju ekvivalentne površinske električne i magnetske struje. Ti koeficijenti moraju biti isti (ali različitog znaka) unutar i izvan podsistema u odnosu na granicu. Svaki dijakoptički podsistem je predstavljen matricom koja sadrži linearne veze između koeficijenata na dijakoptičkoj granici i deo originalnog EM sistema unutar dijakoptičkog podsistema. Kombinovanjem takvih matrica za sve podsisteme datog sistema dobija se rešenje originalnog problema.

Prilikom FEM-MoM hibridizacije uobičajeni postupak je da se, nezavisno od funkcija bazisa u računskom domenu, uvedu posebne površinske funkcije bazisa koje aproksimiraju ekvivalentne površinske izvore. Ovo zahteva uvođenje novih nepoznatih.

### 8.2. Osnove predložene metode

U ovom poglavlju će biti predložena metoda hibridizacije koja ne zahteva uvođenje novih nepoznatih [78]. Metoda se zasniva na primeni *Green*-ovog identiteta i specijalnih funkcija bazisa na granici računskog domena. Specijalne funkcije bazisa se biraju iz skupa jakih funkcija bazisa o kojima je detaljno bilo reči u poglavlju 4.4.

#### 8.2.1. Primena *Green*-ovog identiteta

Neka je domen ograničen površinom  $S$  i neka su  $f$  i  $g$  dve neprekidne funkcije koje imaju neprekidne prve i druge izvode u svim tačkama domena  $v$  i površine  $S$ , koja ga obuhvata. Tada važi *Green*-ov identitet [5]

$$\int_v (f\Delta g - g\Delta f) dv = \oint_S \left( f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) dS.$$

## 8. FEM metodologija za neograničene domene

Pretpostavimo da se svi izvori i nehomogenosti elektrostatičkog polja nalaze u domenu  $v$  (sl. 8.1) a sredina izvan domena je homogena, permitivnosti  $\epsilon$ . Treba odrediti potencijal u tački  $M$  izvan domena  $v$ . Izvan domena potencijal zadovoljava *Laplace*-ovu jednačinu

$$\Delta V(\mathbf{r}') = 0$$

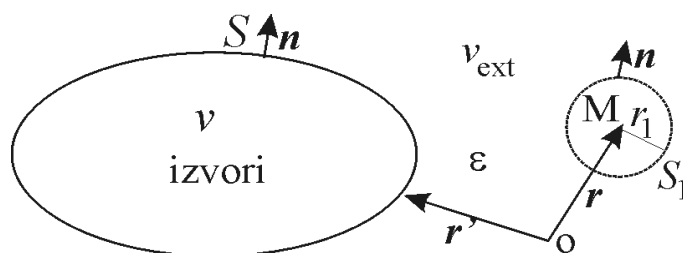
za koju je *Green*-ova funkcija

$$g = \frac{1}{4\pi R}, \quad R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|,$$

što znači da funkcija  $g$  zadovoljava jednačinu

$$\Delta g = -\delta(R),$$

gde je  $\delta(\cdot)$  prostorna delta-funkcija.



Sl. 8.1 Domen sa izvorima ograničen površinom  $S$  i tačka  $M$  u kojoj treba odrediti potencijal.

*Green*-ov identitet se primenjuje na funkcije  $V(\mathbf{r}')$  i  $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ ,  $\mathbf{r} = \mathbf{const}$ , u oblasti izvan domena  $v$  (izvodi nadalje su po „prim“ koordinatama). Funkcija  $g$  je singularna u tački  $M$  pa u njoj ne ispunjava uslove *Green*-ovog identiteta, te se okolina tačke  $M$  oblika sfere poluprečnika  $r_1$  isključuje iz ove oblasti. Dobijeni domen je označen sa  $v_{ext}$  (normale  $\mathbf{n}$  su sada unutrašnje).

Leva strana *Green*-ovog identiteta postaje jednaka nuli [5], pa je:

$$\oint_S \left( -V \frac{\partial g}{\partial n'} + g \frac{\partial V}{\partial n'} \right) dS + \oint_{S_1} \left( -V \frac{\partial g}{\partial n'} + g \frac{\partial V}{\partial n'} \right) dS = 0.$$

Na  $S_1$  je

## 8. FEM metodologija za neograničene domene

$$\frac{\partial V}{\partial n'} = \frac{\partial V}{\partial R}, \quad \frac{\partial g}{\partial n'} = \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dR} \left( \frac{1}{R} \right) = -\frac{1}{4\pi R^2}$$

Ako se sa  $\bar{V}$  i  $\frac{\partial \bar{V}}{\partial R}$  označe srednje vrednosti ovih veličina na površini  $S_1$ , integral po  $S_1$  teži  $V(\mathbf{r})$ , tj. vrednosti potencijala u tački M, pa je konačno potencijal tačke M

$$V_{vanS} = \oint_S \left( V \frac{\partial g}{\partial n'} - g \frac{\partial V}{\partial n'} \right) dS, \quad (8.1)$$

gde se  $n\phi$  odnosi na spoljašnju normalu u odnosu na domen  $v$ . Kada tačka polja teži površini  $S$  i imajući u vidu da je elektrostatički potencijal neprekidna funkcija, formula (8.1) predstavlja jednačinu koja povezuje  $V_{naS}$  i  $(\nabla V / \nabla n\phi)_{naS}$ . Da li jednačina (8.1) predstavlja dovoljan uslov da rešenje za potencijal ili električno polje u domenu  $v$  bude jedinstveno neće biti razmatrano u ovom radu. To pitanje ostaje za dalje istraživanje.

### 8.2.2. Specijalne funkcije bazisa

Pretpostavimo da je u graničnoj oblasti računskog domena (domen  $v$  na sl. 8.1) nepoznati potencijal aproksimiran takvim funkcijama bazisa koje na graničnoj površini  $S$  ili

1. imaju vrednost nula i vrednost izvoda u smeru normale nula, ili
2. imaju konačnu vrednost, ali vrednost izvoda u smeru normale nula (označimo ih sa  $F_j$ ), ili
3. imaju vrednost nula, ali vrednost izvoda u smeru normale različitu od nule (označimo ih sa  $H_j$ ).

Neka je broj funkcija  $F$  i funkcija  $H$  međusobno jednak ( $N_{ext}$ ). Integralna jednačina (8.1) se sada može rešavati (bilo po  $V$  bilo po  $\partial V / \partial n'$ ) metodom težinskih ostataka (*weighted residuals*), tj. metodom momenata, što dovodi do linearne matrične veze između koeficijenata razvoja funkcija  $F$  i  $H$ .

### 8.2.3. Granični uslovi i postupak hibridizacije

Kod rešavanja statičkih EM problema u ograničenom domenu pojavljuje se *Poisson*-ova diferencijalna jednačina koja se u odsustvu izvora svodi na *Laplace*-ovu

## 8. FEM metodologija za neograničene domene

diferencijalnu jednačinu. Jedinstvenost rešenja ove jednačine obezbeđuju bilo *Dirichlet*-ovi granični uslovi (poznata vrednost funkcije na površini  $S$ ) bilo *Neumann*-ovi granični uslovi (poznat izvod u smeru normale na  $S$ ). Kada se problem rešava FEM-om, *Dirichlet*-ovi granični uslovi nameću uslove za koeficijente onih funkcija bazisa koje su različite od nule na  $S$  ( $F$ -funkcije), a *Neumann*-ovi uslovi nameću uslove za koeficijente onih funkcija bazisa koje na  $S$  imaju izvod u smeru normale različit od nule ( $H$ -funkcije). Ovi uslovi predstavljaju dodatne jednačine za koeficijente razvoja uz ove funkcije bazisa, a koje se mogu rešavati na različite načine. Ovo se, međutim, najčešće svodi na to da su odgovarajući koeficijenti uz ove funkcije bazisa zadati, pa se time broj nepoznatih i jednačina u stvari smanjuje.

Ako je granični uslov na površini  $S$  integralnog tipa, dat jednačinom (8.1), nameće se veza između koeficijenata funkcija  $F$  i  $H$ . Kod standardnih (slabih) funkcija bazisa funkcije  $F$  i  $H$  ne čine dva odvojena skupa funkcija bazisa već su, u opštem slučaju, funkcije  $F$  istovremeno i funkcije  $H$ , tj. skup funkcija  $F$  je istovremeno i skup funkcija  $H$ . Može se pokazati da u tom slučaju međusobna veza njihovih koeficijenata daje singularan sistem jednačina koji nema rešenje. Ako se, međutim, funkcije bazisa izaberu kao što je opisano u odeljku 8.2.2. (jake funkcije bazisa), međusobna veza njihovih koeficijenata daje u opštem slučaju regularan sistem jednačina. Naime, na površini  $S$  je

$$V_{na S} \gg \sum_{j=1}^{N_{ext}} \alpha_j F_j, \quad (\nabla V / \nabla n)_{na S} \gg \sum_{j=1}^{N_{ext}} \beta_j (\nabla H_j / \nabla n). \quad (8.2)$$

Unoseći (8.2) u (8.1) i označavajući izvode po  $n$  oznakom prim, dobijamo jednačinu

$$\sum_{j=1}^{N_{ext}} \alpha_j F_j \approx \oint_S \left( g' \sum_{j=1}^{N_{ext}} \alpha_j F_j - g \sum_{j=1}^{N_{ext}} \beta_j H_j \right) dS, \quad (8.3)$$

koju, uvodeći test funkcije  $W_i$  i odgovarajući unutrašnji proizvod na  $S$ , diskretizujemo u linearnu matricnu vezu koeficijenata  $\alpha$  i  $\beta$ ,

$$([P]^{-1}[Q])[\beta] = [\alpha]. \quad (8.4)$$

Matrice  $[P]$  i  $[Q]$  su dimenzija  $N_{ext}' \times N_{ext}$ , a njihovi elementi su dati izrazima

## 8. FEM metodologija za neograničene domene

$$P_{ij} = - \int_S W_i(\mathbf{r}) \left( F_j(\mathbf{r}) - \int_S g'(\mathbf{r}, \mathbf{r}') F_j(\mathbf{r}') dS' \right) dS,$$

$$Q_{ij} = \int_S W_i(\mathbf{r}) \int_S g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') H_j(\mathbf{r}') dS' dS, \quad (8.5)$$

gde se površina  $S'$  poklapa sa površinom  $S$ ,  $\mathbf{r}$  je koordinata tačke na površini  $S$ , a  $\mathbf{r}'$  je koordinata tačke na površini  $S'$ . Linearnu vezu između koeficijenta  $\alpha$  i  $\beta$  možemo izraziti i kao  $([Q]^{-1}[P])[\alpha] = [\beta]$ .

Ukoliko za test funkcije  $W_i$  izaberemo funkcije  $H'$ , odnosno  $F_j$ , dobijamo Galerkinovu metodu. Unoseći matričnu vezu koeficijenata  $\alpha$  i  $\beta$  u sistem jednačina po FEM-u (u kome figurišu nepoznate uz sve ostale funkcije bazisa koje nisu ni  $F$  a ni  $H$ -funkcije) dobijamo konačan sistem jednačina koji se rešava. Ovo nadalje predstavlja standardni FEM postupak.

Prikazani postupak je donekle sličan dijakoptičkom postupku [55]. Za razliku od dijakoptičkog postupka, međutim, u prikazanom postupku se ne uvode (barem ne eksplicitno) ekvivalentni izvori, niti nove promenljive.

Potpuno analogno se navedeni postupak može predstaviti za 2D probleme. Treba naglasiti da se i ovde radi o jakoj formulaciji, tj. o skupu jakih funkcija bazisa gde su funkcije  $F$  jake funkcije bazisa koje nisu nula na graničnoj konturi a funkcije  $H$  imaju nenulti prvi izvod na graničnoj konturi. Zaključuje se da su  $F$  i  $H$  delovi odgovarajućih dubleta i kvadrupleta jakih funkcija bazisa i da nisu singleti.

Kod 2D problema računski domen (FEM oblast) je površina  $S$  koja predstavlja npr. poprečni presek elektrostatičkog sistema, ograničena konturom  $C$ . Kontura  $C$  se sastoji od sledećih delova:

$C_1$  - konture na kojima su zadati granični uslovi 1. vrste,

$C_2$  - konture na kojima su zadati granični uslovi 2. vrste i

$C_E$  - „hibridne“ konture - na kojoj se zadaje integralni granični uslov.

Kod otvorenih problema uvek imamo konturu  $C_E$  i najmanje još jednu -  $C_1$  ili  $C_2$ .

## 8. FEM metodologija za neograničene domene

U opštem slučaju nepoznati potencijal konačnih elemenata koji naležu na konturu  $C_E$  može se aproksimirati funkcijama bazisa

$$V \approx f = \sum_{j=1}^{N_E} a_j f_j = \sum_{j=1}^{N_{\text{ext}}} \alpha_j F_j + \sum_{j=1}^{N_{\text{ext}}} \beta_j H_j + \sum_{j=1}^{N_{\text{int}}} \gamma_j f_{\text{int},j}, \quad (8.6)$$

U jednačini (8.6) je

$$N_E = N_{\text{int}} + N_{\text{ext}} + N_{\text{ext}},$$

gde je  $N_{\text{int}}$  ukupan broj „unutrašnjih“ funkcija bazisa,  $N_{\text{ext}}$  je ukupan broj „spoljašnjih“ funkcija bazisa i broj nepoznatih, označen sa  $N_{\text{nep1}}$

$$N_{\text{nep1}} = N_{\text{int}} + N_{\text{ext}}$$

a skup test funkcija je

$$N_{\text{test}} = N_{\text{nep1}}.$$

U zavisnosti od toga koje se funkcije koriste kao test funkcije kod primene Galerkinove metode, postoje dve varijante:

-*Dirichlet*-ov oblik jednačina, gde su test funkcije  $H_j$  (varijanta 1.):

$$\{f_{\text{int},j}, H_j\}, N_{\text{test}} = N_{\text{int}} + N_{\text{ext}} = N_{\text{nep1}},$$

-*Neumann*-ov oblik jednačina, gde su test funkcije  $F_j$  (varijanta 2.):

$$\{f_{\text{int},j}, F_j\}, N_{\text{test}} = N_{\text{int}} + N_{\text{ext}} = N_{\text{nep1}}.$$

U obe varijante ukupan broj test funkcija je isti, označen sa  $N_{\text{test}}$ .

Ako se primenom *Green*-ovog identiteta potraži izraz za potencijal (u tačkama neposredno izvan konture  $C_E$ , t.j. na  $C_E^+$ ), analogno jednačini (8.1) dobija se

$$V(r) = \oint_{C_E} \left( V \frac{\partial g}{\partial n'} - g \frac{\partial V}{\partial n'} \right) dl,$$

gde se integrali po konturi neposredno „ispod“  $C_E$ , odnosno po  $C_E^-$ , gde je  $g$  *Green*-ova funkcija:

## 8. FEM metodologija za neograničene domene

$$g = -\frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|.$$

Sada je jednačina (8.3) oblika

$$\sum_{j=1}^{N_{\text{ext}}} \alpha_j F_j \approx \oint_S \left( g' \sum_{j=1}^{N_{\text{ext}}} \alpha_j F_j - g \sum_{j=1}^{N_{\text{ext}}} \beta_j H'_j \right) dl'$$

Posle primene Galerkinovog postupka, odnosno množenja leve i desne strane test funkcijama, i integraljenja, dobija se

$$\oint_{C_E} \sum_{j=1}^{N_{\text{ext}}} \alpha_j F_j W_i \approx \oint_{C_E} \oint_{C_E} \left( g' \sum_{j=1}^{N_{\text{ext}}} \alpha_j F_j W_i - g \sum_{j=1}^{N_{\text{ext}}} \beta_j H'_j W_i \right) dl' dl, \quad i = 1, \dots, N_{\text{ext}}$$

Odakle je:

$$\sum_{j=1}^{N_{\text{ext}}} \beta_j \oint_{C_E} \oint_{C_E} g H'_j W_i dl' dl = \sum_{j=1}^{N_{\text{ext}}} \alpha_j \left( \oint_{C_E} \oint_{C_E} g' F_j W_i dl' dl - \oint_{C_E} F_j W_i dl \right), \quad i = 1, \dots, N_{\text{ext}},$$

što u matičnom obliku daje

$$[Q][\beta] = ([R] - [C])[\alpha],$$

odakle je

$$[\alpha] = ([R] - [C])^{-1} [Q][\beta] = ([P]^{-1} [Q])[\beta] = [A][\beta] \quad (8.7)$$

ili

$$[\beta] = [\Omega][\alpha], \quad [\Omega] = [Q]^{-1} ([R] - [C]).$$

Za varijantu 1. potrebno je koeficijente  $[\alpha]$  izraziti preko  $[\beta]$  kao u jednačini (8.7), gde je

$$[A_{i,j}], \quad i, j = 1, \dots, N_{\text{ext}}, \quad [A] = [\Omega]^{-1},$$

$$Q_{ij} = \oint_{C_E} \oint_{C_E} g H'_j W_i dl' dl, \quad R_{ij} = \oint_{C_E} \oint_{C_E} g' F_j W_i dl' dl, \quad C_{ij} = \oint_{C_E} F_j W_i dl, \quad i, j = 1, \dots, N_{\text{ext}}.$$

FEM sistem jednačina (3.44) iz trećeg poglavlja je



## 8. FEM metodologija za neograničene domene

$$[K_{ij}][a_j] = [g_i], \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (8.8)$$

gde je

$$K_{ij} = \int_S \varepsilon \text{grad} f_i \text{grad} f_j dS, \quad g_i = \int_{C_2} f_i D_{n0} dl,$$

pri čemu za potencijal važi izraz (8.6), što se smenjuje u gornju jednačinu.

Prema varijanti 1. najpre se formiraju matrice  $[K] = [K_{ij}]_{N_{nep1} \times N}$  i  $[g] = [g_i]_{N_{nep1} \times 1}$  prema formulama (8.8), gde je  $i = 1, \dots, N_{nep1}$ ,  $j = 1, \dots, N$ ,  $N_{nep1} = N_{int} + N_{ext}$ ,  $N = N_{int} + 2N_{ext}$ . Zatim se kolona-matrica  $[a] = [a_j]_{N \times 1}$  napiše kao sastavljena od tri kolona matrice,

$$[a] = \begin{bmatrix} [\gamma] \\ [\beta] \\ [\alpha] \end{bmatrix}$$

čije su dužine, respektivno,  $N_{int}$ ,  $N_{ext}$ ,  $N_{ext}$ , a matrica  $[K]$  takođe, i u skladu sa novom predstavom matrice  $[a]$ , sastavljena od tri matrice,

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_1] & [K_2] & [K_3] \end{bmatrix}, \quad (8.9)$$

čije su dimenzije, respektivno,  $N_{nep1} \times N_{int}$ ,  $N_{nep1} \times N_{ext}$ ,  $N_{nep1} \times N_{ext}$ . Kada se to uvrsti u (8.8) dobija se, razbijeno na blokove,

$$[K_1][\gamma] + [K_2][\beta] + [K_3][\alpha] = [g]. \quad (8.10)$$

Kada se uvede  $[\alpha] = [A][\beta]$  i  $[\beta]$  izdvoji kao zajednički faktor,

$$[K_1][\gamma] + ([K_2] + [K_3][A])[\beta] = [g] \quad (8.11)$$

i na kraju vrati u kompaktni oblik,

$$\begin{bmatrix} [K_1] & [K_4] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\gamma] \\ [\beta] \end{bmatrix} = [g], \quad [K_4] = [K_2] + [K_3][A]. \quad (8.12)$$

## 8. FEM metodologija za neograničene domene

Sistem jednačina po  $\begin{bmatrix} [\gamma] \\ [\beta] \end{bmatrix}$  je dimenzija  $N_{nep1} \times N_{nep1}$ . Dalje u tom sistemu treba eliminisati one koeficijente u vektoru  $[\gamma]$  koji odgovaraju potencijalima provodnika na unutrašnjoj konturi  $C_1$ , slično kao kod zatvorenih problema. U tu svrhu se matrica  $[K_1]$  može razbiti na dva dela—deo  $[K_1^1]$  koji množi nepoznate elemente kolona matrice  $[\gamma]$  i deo  $[K_1^2]$  koji množi poznate elemente kolona matrice  $[\gamma]$ , što se formalno može pisati kao

$$[K_1] = \begin{bmatrix} [K_1^1] \\ [K_1^2] \end{bmatrix},$$

gde poznate delove treba prebaciti na desnu stranu sistema jednačina koji se dalje rešava nekom od poznatih tehnika.

U varijanti 2. kod koje su test funkcije  $F$ , dobija se sledeći sistem

$$[\beta] = [\Omega][\alpha], \quad [\Omega] = [Q]^{-1}([R] - [C]), \quad [a] = \begin{bmatrix} [\gamma] \\ [\alpha] \\ [\beta] \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} [K_1] & [K_4] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\gamma] \\ [\alpha] \end{bmatrix} = [g], \quad [K_4] = [K_2] + [K_3][\Omega]$$

$$[K_1] = \begin{bmatrix} K_1^1 \\ K_1^2 \end{bmatrix},$$

Konačan broj nepoznatih  $N_{nep} = N_{nep1} - N_p$ , gde je  $N_p$  broj poznatih f-ja bazisa od onih koeficijenata iz  $[\gamma]$  koji formiraju granične uslove uz površine tela unutar  $S$ , uz napomenu da je u obe varijante  $[g] = 0$ .

### 8.4. Zaključak

U ovom poglavlju je najpre dat kratak pregled u literaturi najčešćih metoda za rešavanje neograničenih domena koji se zasnivaju na FEM-u. Jedan egzaktan način

## 8. FEM metodologija za neograničene domene

tretiranja otvorenih problema je da se FEM hibridizuje nekom metodom pogodnom za neograničene domene. Otuda u literaturi i obilje radova vezanih za hibridizaciju.

Dalje je predložena nova metoda hibridizacije za otvorene statičke probleme zasnovana na specijalnim funkcijama bazisa na granici računskog domena i primeni *Green*-ovog identiteta primenom specijalnih, jakih funkcija bazisa. Metoda se može generalizovati i na dinamičke probleme. Osobenost metode je što se na razdvojnoj površini formalno ne uvode nove funkcije, već se specijalne funkcije biraju iz skupa postojećih jakih otvoreno za dalje istraživanje funkcija bazisa. Ova ideja je još uvek u postupku razvoja. Treba naglasiti da ovde neće biti razmatrano pitanje da li je jednačina (8.1) dovoljan uslov da rešenje za potencijal ili električno polje u domenu  $v$  bude jedinstveno, odnosno pitanje dovoljnosti primenjenih integralnih graničnih uslova ostaje otvoreno za dalje istraživanje.

## 9. Mogući pravci daljeg istraživanja

U ovoj disertaciji je jaka FEM formulacija primenjena na dvodimenzionalne elektrostatičke i kvazistatičke elektromagnetske probleme, posebno na kvazistatičku analizu vodova sa TEM talasima. Najpre su proučeni zatvoreni problemi, kod kojih su granični uslovi dati eksplicitno. Na primerima oklopljenih vodova, na koje je FEM primenljiv bez ikakvih modifikacija, zasnovana je i razvijena nova formulacija. Analizirani su sistemi sa homogenim i nehomogenim, izotropnim i anizotropnim dielektrikom. Za sve ove slučajeve ispitane su specifičnosti primene jake formulacije FEM-a. Poseban akcenat je stavljen na formiranje jakih dvodimenzionalnih funkcija bazisa koje su formirane polazeći od, u literaturi poznatih, jednodimenzionalnih funkcija bazisa. Pokazano je da je takav skup funkcija bazisa primenljiv na sisteme sa izotropnim i anizotropnim, homogenim i deo-po-deo homogenim dielektrikom. Pokazano je i da su jake funkcije bazisa linearno nezavisne. Uočeno je da je osnovni red aproksimacije jednak 3 i da je za jednostavne slučajeve prikazane u disertaciji on sasvim dovoljan za postizanje zadovoljavajuće tačnosti. Potpuni skup funkcija bazisa sadrži singlete, dublete i četiri vrste kvadrupleta, od kojih dve vrste kvadrupleta omogućuju da se na jednostavan način može zadovoljiti granični uslov kontinuiteta prvog izvoda funkcije na granici. Uočeno je da ovako definisana jaka formulacija rapidno smanjuje broj nepoznatih u odnosu na slabu formulaciju a za istu ili približno istu tačnost rezultata. Sem prednosti jaka formulacija ima i nedostatke. Osnovni nedostatak je nemogućnost da se ovakvim skupom modeluju singularne tačke polja. Stoga je jedan od glavnih zadataka daljeg istraživanja modelovanje singularnih tačaka polja pomoću modifikovanog skupa jakih funkcija bazisa.

Kako predmet disertacije nije bilo istraživanje uticaja oblika i vrste konačnog elementa, izabrani su, jednostavnosti radi, pravougaoni konačni elementi koji, osim toga, odgovaraju geometriji analiziranih primera. Zbog toga jedan od daljih pravaca istraživanja može da bude primena jake formulacije na 2D i 3D krivolinijske konačne elemente.

Proučena je mogućnost da se jaka formulacija primeni na otvorene probleme, tj. na probleme čiji je računski domen teorijski beskonačan. Predložen je konceptiono jednostavan postupak hibridizacije sa MoM metodom, pri čemu se eksplicitno ne uvode

## 9. Mogući pravci daljeg istraživanja

nove nepoznate, odnosno ekvivalentni izvori na granici domena, ali ostaje kao predmet daljeg razmatranja pitanje dovoljnosti primenjenih integralnih graničnih uslova. Nastavak ovde prikazanih teorijskih rezultata može biti implementacija dobijenih programskih rutina na rešavanje konkretnih problema i njihova provera u praksi, provera efikasnosti metode u smislu potrebnog vremena računanja, procena greške, poređenje sa drugim hibridnim metodama, pronalaženje njenih prednosti i nedostataka. Osim implementacije prikazane metode u opštu FEM metodu za 2D i 3D statičke probleme, bilo bi od interesa ispitati da li se prikazana metoda može primeniti i na neke druge metode rešavanja diferencijalnih jednačina kao što je npr. metoda konačnih razlika.

## 10. Literatura

1. J.C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Oxford, 1873.
2. J. Surutka, *Elektromagnetika*, Građevinska knjiga, Beograd, 1964.
3. B. D. Popović, *Elektromagnetika*, Građevinska Knjiga, Beograd, 1990.
4. A.R. Đorđević, *Elektromagnetika*, Akademska misao, Beograd, 2008.
5. J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1st Edition, New York, 1941.
6. M. N.O. Sadiku, *Numerical Techniques in Electromagnetics with Matlab*, CRC Press, Taylor & Francis Group, London, New York, 2009.
7. R. F. Harrington, *Field computation by moment method*, Macmillan, New York, 1968.
8. J. Faiz, M. Ojaghi: „Instructive Review of Computation of Electric Fields using Different Numerical Techniques“. Int. J. Engng Ed. Vol. 18, No. 3, pp. 344±356, Printed in Great Britain, 2002 TEMPUS Publications. (<http://www.ijee.ie/articles/Vol18-3/Ijee1284.pdf>)
9. B. Vahidi, A. Mohammadzadeh Fakhr da Vood: „Application of Charge Simulation Method to Electric Field Calculation in the Power Cables“, Iranian Journal of Science & Technology, Transaction B, Engineering, Vol. 30, No. B6, PP 789-794. ([http://www.sid.ir/En/VEWSSID/J\\_pdf/8542006B612.pdf](http://www.sid.ir/En/VEWSSID/J_pdf/8542006B612.pdf))
10. G. S Punekar, N K Kishore, H S Y Shastry: „Effect of Non Uniformity Factors and Assignment Factors on Errors in Charge Simulation Method with Point Charge Model“, World Academy of Science, Engineering and Technology 22, 2008. (<http://www.waset.org/journals/waset/v22/v22-135.pdf>)
11. P.-B. Zhou, *Surface Charge Simulation Method, Numerical Analysis of Electromagnetic Fields*, Chapter 8, Electric Energy Systems and Engineering Series, 1993, pp 251-286. ([http://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-3-642-50319-1\\_8#page-1](http://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-3-642-50319-1_8#page-1))

## 10. Literatura

12. T. Takuma, T. Kawamoto: „Recent developments in electric field calculation”, IEEE Trans. on Magnetics, vol. 33, no. 2, pp. 1155–1159, Mar. 1997.
13. *Boundary integral Equation Method*, Chapter 2,  
(<http://scholar.lib.vt.edu/theses/available/etd-110499-180010/unrestricted/chapter2.pdf>)
14. M. H. Dunn, J. Tweed, F. Farassat: „The Application of a Boundary Integral Equation Method to the Prediction of Ducted Fan Engine Noise”,  
(<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.29.6330&rep=rep1&type=pdf>)
15. T. Weiland: „RF&Microwave Simulators – From Component to System Design” ([http://www.cst-korea.co.kr/Application/FIT\\_History.pdf](http://www.cst-korea.co.kr/Application/FIT_History.pdf))
16. M. Clemens, T. Weiland: „Discrete Electromagnetizm With the Finite Integration Technique”, Progress In Electromagnetics Research, PIER 32, 65–87, 2001 (<http://www.jpier.org/PIER/pier32/03.00080103.clemens.pdf>)
17. R. Marklein: „The Finite Integration Technique as a General Tool to Compute Acoustic, Electromagnetic, Elastodynamic, and Coupled Wave Fields”, University of Kassel, Department of Electrical Engineering/Computer Science, Electromagnetic Field Theory, Wilhelmhöher Allee 71, D-34121 Kassel, Germany,  
(<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.122.1104&rep=rep1&type=pdf>)
18. K. K. Gupta, J. L. Meek: „A Brief History of the Beginning of the Finite Element Method“, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 39, pp. 3761-3774, 1996.
19. R. W. Clough: „Early history of the Finite Element Method from the view point of a pioneer”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Special Issue: Special Issue on The Fifth World Congress on Computational Mechanics, Volume 60, Issue 1, pages 283–287, 7 May 2004.

## 10. Literatura

20. M. J. Gander: „Euler, Lagrange, Ritz, Galerkin, Courant, Clough: On the Road to the Finite Element Method“, University of Geneva, Nancy, December 2010. (<http://www.iecn.u-nancy.fr/~sokolows/colloque/talk.pdf>)
21. E. Suli, *Lecture Notes on Finite Element Methods for Partial Differential Equations*, Mathematical Institute University of Oxford, 2012. (<http://people.maths.ox.ac.uk/suli/fem.pdf>)
22. M. Sekulović, *Metod konačnih elemenata*, IRO "Građevinska knjiga" Beograd 1984.
23. K.-J. Bathe, E.L. Wilson, *Numerical methods in Finite Element Analysis*, Prentice-Hall, inc. Englewood, Cliffs, New Jersey, 1976
24. M. S. Palma, T. K. Sarkar, E. G. Castillo, T. Roy, A. Đorđević, *Iterative and Self-Adaptive Finite-Elements in Electromagnetic Modeling*, Artech House, 1998.
25. M. V. K. Chari, P. P. Silvester, *Finite elements in Electrical and Magnetic Field Problems*, John Wiley and Sons, 1984.
26. R. H. Gallagher, *Finite Element Analysis Fundamentals*, Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.
27. P. P. Silvester, R. L. Ferrari, *Finite Elements for electrical engineers*. Cambridge university Press, Cambridge 1983.
28. P. P. Silvester, *Finite Elements for Electrical Engineers*, 3rd Ed., Cambridge University Press, 1996.
29. J. Jin, *The finite element method in electromagnetics*, J. Wiley, New York, 1993.
30. NPTEL, e-learning courses from the IITs and IICs, Introduction to Finite Element Method (Video) (<http://www.nptel.iitm.ac.in/video.php?subjectId=112106135>)



## 10. Literatura

31. Introduction to Finite Element Methods (ASEN 5007) Fall 2013, Department of Aerospace Engineering Sciences University of Colorado at Boulder (<http://www.colorado.edu/engineering/cas/courses.d/IFEM.d/>)
32. M. Vable, *Introduction to Finite Element Method*, Michigan Technologic University (<http://www.me.mtu.edu/~mavable/MEEM4405/MEEM4405.html>)
33. Middle East Technical University Department of Mechanical Engineering ME 413 Introduction to Finite Element Analysis Fall 2013 (Dr. Sert) (<http://www.me.metu.edu.tr/courses/me413/section2/notes.html>)
34. Index of/konferenzen/Jass04/courses/2/Papers (<http://wwwmayr.informatik.tu-muenchen.de/konferenzen/Jass04/courses/2/Papers/>)
35. J. Tinsley Oden, *Finite element method*, The University of Texas at Austin, USA, ([http://www.scholarpedia.org/article/Finite\\_element\\_method](http://www.scholarpedia.org/article/Finite_element_method))
36. T. G. Zielinski, *Introduction to Finite Element Method Introductory Course on Multiphysics Modelling*, Institute of Fundamental Technological Research, Warsaw, Poland, ([http://www.ippt.gov.pl/~tzielins/doc/ICMM\\_TGZielinski\\_IntroFEM.slides.pdf](http://www.ippt.gov.pl/~tzielins/doc/ICMM_TGZielinski_IntroFEM.slides.pdf))
37. D. Kuzmin, *Galerkin finite element method*, Institute of Applied Mathematics III, University Erlangen-Nuremberg Cauerstr. 11, D-91058, Erlangen, Germany, (<http://www.mathematik.uni-ortmund.de/~kuzmin/cfdintro/lecture7.pdf>)
38. N. Sukumar, *Short Introduction to Finite Elements in One Dimension*, Department of Civil and Environmental Engineering University of California Davis, CA 95616 September 9, 2007, (<http://www.imechanica.org/files/femintro.pdf>)
39. J. Howell, *Finite Element Methods*, Fall 2009, ([http://www.andrew.cmu.edu/user/calmost/pdfs/21-762\\_lec.pdf](http://www.andrew.cmu.edu/user/calmost/pdfs/21-762_lec.pdf))
40. <https://engineering.purdue.edu/ME608/webpage/fem.pdf>
41. J. Squire, *Basic Finite Element Method*, University of Maryland Baltimore County, (<http://www.csee.umbc.edu/~squire/download/galerkin.pdf>)

## 10. Literatura

42. J. E. Flaherty, *One Dimensional Finite Element Methods*, Rensselaer Polytechnic Institute (<http://www.cs.rpi.edu/~flaherje/pdf/fea2.pdf>)
43. Boundary-Value Problems Ordinary Differential Equations: Finite Element Methods (<http://authors.library.caltech.edu/25061/5/NumMethChE84-Ch3-BVPforODE-FEM.pdf>)
44. Extended finite element method ([http://en.wikipedia.org/wiki/Extended\\_finite\\_element\\_method](http://en.wikipedia.org/wiki/Extended_finite_element_method))
45. Z. Li, *Theoretical foundations of FEM*, Department of Mathematics, North Carolina State University Raleigh, NC 27695, USA, (<http://www4.ncsu.edu/~zhilin/TEACHING/MA587/chap7.pdf>)
46. R. J. LeVeque, *Finite Difference Methods for Differential Equations*, DRAFT VERSION for use in the course, University of Washington, Version of September, 2005, ([http://disciplinas.stoa.usp.br/pluginfile.php/41896/mod\\_resource/content/1/LeVeque%20Finite%20Diff.pdf](http://disciplinas.stoa.usp.br/pluginfile.php/41896/mod_resource/content/1/LeVeque%20Finite%20Diff.pdf))
47. D. Kuzmin, *Finite difference method*, (<http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~kuzmin/cfdintro/lecture4.pdf>)
48. S. Gedney, *Computational Electromagnetics: The Finite-Difference Time-Domain*, Department of Electrical Engineering, University of Kentucky, EE624, Fall 2010 ([http://www.engr.uky.edu/~gedney/courses/ee624/notes/EE624\\_Notes1.pdf](http://www.engr.uky.edu/~gedney/courses/ee624/notes/EE624_Notes1.pdf))
49. Transmission-line matrix method, ([http://en.wikipedia.org/wiki/Transmission-line\\_matrix\\_method](http://en.wikipedia.org/wiki/Transmission-line_matrix_method))
50. D. P. Johns, *The Transmission Line Matrix Method*, MO-AM-5 Introduction to EMI Modeling Techniques, IEEE EMC Symposium, July 2010, VP Engineering & Support, CST of America, ([http://www.umc.edu.dz/vf/images/emc/PDFs/Papers/Workshops/023\\_150.pdf](http://www.umc.edu.dz/vf/images/emc/PDFs/Papers/Workshops/023_150.pdf))
51. G. Beer, I. Smith, C. Duenser, *The Boundary Element Method with Programming, for Engineers and Scientists*, Springer Wien New York, (<http://home.kku.ac.th/wattou/research/resources/e-book/bem01.pdf>)

## 10. Literatura

52. Y. Liu, *An Introduction to the Boundary Element Method, BEM, and its Applications in Engineering*,  
([http://urbana.mie.uc.edu/yliu/Research/BEM\\_Introduction.pdf](http://urbana.mie.uc.edu/yliu/Research/BEM_Introduction.pdf))
53. T. W. Dawson, J. D. Moerlose, and M. A. Stuchly: „Hybrid finite-difference method for high-resolution modeling of low-frequency electric induction in humans”, *J. Computational Phys.*, vol. 136, pp. 640–653, 1997.
54. N. Orcutt, O. P. Gandhi: „A 3-D impedance method to calculate power deposition in biological bodies subjected to time varying magnetic fields“, *Biomedical Engineering, IEEE Transactions on* (Volume:35 , Issue: 8), Aug. 1988, Page(s): 577 – 583, ISSN: 0018-9294.
55. D. Olćan, *Dijakoptička analiza elektromagnetskih sistema*, doktorska teza, ETF Beograd, 2008.
56. O. Zienkiewicz, R. L Taylor, *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics*, Mc Graw Hill, 1967.
57. List of finite element software packages ([http://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_finite\\_element\\_software\\_packages](http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_finite_element_software_packages))
58. The Finite Element Method, Most important Software (<http://femlibrary.com/software.html>)
59. N. M. Abe, J. R. Cardoso, D. R. F. Clabunde: „LMAG-2D: A software Package To Teach FEA Concepts“, *IEEE transactions on magnetics*, 33(2), 1997, pp. 1986-1989.
60. R. D. Pillsbury: „NMLMAP- A two-dimensional finite element program for transient or static, linear or nonlinear magnetic field program”, *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 18, No.2, pp. 406-410, March 1982.
61. C. Greenough, C. R. T Emson: „A Flexible Finite Element system suitable for electromagnetic research”, *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 21, No.6, pp. 2531-2534, November 1985.
62. F. Mingwu, M. Yixin, Y. Weili: „DE2D Interactive software package for 2D magnetostatic electrostatic and eddy current field computations”, *IEEE*

## 10. Literatura

- Transactions on Magnetics vol.mag-21, No.6, pp. 2539 – 2542, November 1985.
63. M. V. K. Chari, G. Bedrosian, J. D'Angelo, A. Konrad: „Finite Element Applications in Electrical Engineering”, IEEE Transactions on magnetics, vol. 29, No. 2, pp. 1306 - 1314, March 1993.
64. K. Preis, O. Biro, T. Ebner, I. Ticar: „An Electromagnetic Field Analysis Tool in Education”, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 38, No.2, pp. 1317 – 1320, March 2002.
65. V. V. Petrovic, B. D. Popovic: „Optimal FEM solutions of onedimensional EM problems“, Int. J. Numer. Modell Electron Networks Devices Field, 14 (2001), 49-68.
66. B. M. Kolundzija, V. Petrović: „Power Conservation in Method of Moments and Finite-Element Method for Radiation Problems“, IEEE Trans. On Antennas and Propagation, Vol. 53, No. 8, pp. 2728-2737 Aug. 2005.
67. Ž. J. Mančić, V. V. Petrović: „Strong FEM solution for the square coaxial line”, Proc. TELSIS 2009, pp. 343-346, Niš, 7.-9.10. 2009.
68. V. V. Petrović, Ž. J. Mančić: „Strong FEM Formulation for Quasi-Static Analysis of Shielded Planar Transmission Lines in Anisotropic Media“, ECCSC2010, Beograd.
69. Ž. J. Mančić, V. V. Petrović: „Strong FEM Calculation of the Influence of the Conductor's Position on Quasi-Static Parameters of the Shielded Stripline With Anisotropic Dielectric“, Proc. of the ICEST 2011 conference, pp. 191-194, Niš, 2011. (ISBN 978-86-6125031-6).
70. Ž. J. Mančić, V.V. Petrović: „Quasi-Static Analysis of the Square Coaxial Cable with Tellegen Bi-isotropic Material”, Proc. of TELSIS 2011 conference, pp. 533-535, Niš, 2011. (IEEE Catalog number CFP11488-PRT, ISBN 978-1-4577-2016-1, 978-86-6125-045-3, COBISS.SR-ID 186476300)
71. Ž. J. Mančić, V. V. Petrović: „Strong FEM Formulation for Quasi-Static Analysis of Shielded striplines in Anisotropic Homogeneous Dielectric”,

## 10. Literatura

- Microwave and Optical Technology Letters (MOTL), Vol. 54, No. 4, pp. 1001-1006, April 2012. (DOI 10.1002/mop.26676, IF=0,656 (2010.god), M23)
72. Ž. J. Mančić, V. V. Petrović: „Strong FEM Analysis of the Multilayered Anisotropic Striplines”, Icist 2013, Kopaonik, 03.-06.03.2013.
73. Ž. J. Mančić, V. V. Petrović: „Quasi-Static Analysis of the Shielded Microstrip Line with Bi-isotropic Substrate by the Strong FEM Formulation”, Proceeding of papers, 11th International Conference on Telecommunications in Modern Satellite, Cable and Broadcasting Services, TELSIKS 2013, ISBN 978-1-4799-0900-1, IEE Catalog Number CFP13488-CDR, pp. 513-516.
74. Ž. J. Mančić, V.V. Petrović: „Strong and Weak FEM Formulations of Higher Order for Quasi-Static Analysis of Shielded Planar Transmission Lines”, Microwave and Optical Technology Letters (MOTL), Vol. 53, No. 5, pp. 1114-1119, May 2011. (DOI 10.1002/mop.25917, online ISSN 1098-2760, IF=0,656 (2010.god), M23)
75. Compaq Visual Fortran Version 6.6, ([http://www.xlsoft.com/jp/products/intel/cvf/docs/vf-html\\_e/vf\\_frame.htm](http://www.xlsoft.com/jp/products/intel/cvf/docs/vf-html_e/vf_frame.htm))
76. Mathematica 7, Wolfram Research Inc., Champaign, 2009.
77. W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, *Numerical Recipes in Fortran 77, The Art of Scientific Computing, Second Edition, Volume 1*, ([http://astronu.jinr.ru/wiki/upload/8/8c/Numerical RecipesinF77.pdf](http://astronu.jinr.ru/wiki/upload/8/8c/Numerical_RecipesinF77.pdf)), chapter 2.7.
78. V. V. Petrović, Ž. J. Mančić: „Konceptiono jednostavan metod FEM-MOM hibridizacije za otvorene statičke probleme“, Elektronski zbornik radova 56. konferencije za ETRAN, Zlatibor, 11-14. juni, 2012, AP1.2-1-2, ISBN 978-86-80509-67-9.
79. D. M. Veličković: „Equivalent Electrodes Method“, Scientific Review, 1996, Belgrade, Number 21 - 22, pp. 207 – 248.

## 10. Literatura

80. Ž. J. Mančić, S. R. Aleksić, V.V. Petrović: „Comparison of FEM, MoM and EEM in solving a benchmark 2D electrostatic problem”, Proc. 8th International Conference On Applied Electromagnetics – PES 2007, September 3-5, 2007, Niš (ISBN 978-86-85195-47-0), 2007.
81. Ž. J. Mančić, V.V. Petrović: „Analiza konvergencije i tačnosti metoda konačnih elemenata za proračun vodova sa TEM talasom“, Zbornik konferencije YU INFO 2009, na CD-u, Kopaonik, 8.-11. 3. 2009.
82. N. N. Rao, *Elements of Engineering Electromagnetics*, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1977.
83. J. Au Kong, *Electromagnetic Wave Theory*, A Wiley – Interscience Publication John Wiley & Sons, Inc. New York, 1990.
84. V. V. Petrović, D. V. Tošić, A. R. Đorđević, *Mikrotalasna pasivna kola*, Univerzitet u Beogradu, ETF, 2010.
85. A. R. Đorđević, D. V. Tošić, *Mikrotalasna tehnika*, Univerzitet u Beogradu, ETF, 2010.
86. T. Edwards, *Foundations for Microstrip Circuit Design*, John Wiley and Sons, 1991.
87. B. C. Wadell, *Transmission line design handbook*, Artech house, Northwood, MA02062.
88. I. Babuska, B. Q. Guo: „The h, p and h-p version of the finite element method: basis theory and applications“, *Advances in Engineering Software*, Vol. 15, Issue 3-4, 1992.
89. K. Brandinsky. „The Finite Element Method in Electromagnetic- From Fundamentals to Recent Advances“, *International PhD-Seminar Computation of Electromagnetic Fields*, 23-28. september 2004, Budva, Montenegro, pp.23-35.
90. I. Babuska, B. A. Szabo, N. Katz: „The p-Version of the Finite Element Method“, *SIAM J. Numer. Anal.*, 18(3), 515–545. (<http://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/0718033>)

## 10. Literatura

91. HP-FEM, (<http://en.wikipedia.org/wiki/Hp-FEM>)
92. A. Ž. Ilić, M. M. Ilić, and B. M. Notaroš: „Influence of the Accuracy of Geometrical Modeling with Large Curvilinear Elements on FEM Solutions to EM Problems“, Proceedings of 14th Telecommunications forum TELFOR 2006, November 21-23, 2006, Belgrade, Serbia, pp.422-424.
93. S. Zaglmayr, High Order Finite Element Methods for Electromagnetic Field Computation, Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades Doktorin der Technischen Wissenschaften, Johannes Kepler Universitat, Linz, Juli, 2006. (<http://www.hpfem.jku.at/publications/szthesis.pdf>)
94. R. A. Walters, E. J. Barragy: „Comparison of h and p finite element approximations of the shallow water equations“, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 24, pp. 61-79, 1997.
95. S. Mc Fee, D. Ma: „Practical h-p Adaptive Finite -Element Analysis Strategies for Irregular Triangles and Tetraedra“, IEEE Transaction on Magnetics, Vol. 40, No. 2, march 2004.
96. S. Postoyalko, J. F. Lee: „Adaptive Finite Element Electrostatic solver“, IEE Trans. on Magnetics, Vol 37, No5, September 2001.
97. W. Daigang, J. Kexun: „P-version Adaptive Computation of FEM“, IEEE Transaction On Magnetics, Vol.30, No.5, September 1994.
98. D. Ma, S. Mc Fee: „Irregular Triangles for Finite Element Analysis in Electromagnetics“, IEEE Transactions on Magnetics, Vol.35, No.3, May 1999.
99. A. Noreika, P. Tarvydas: "Electromagnetic Field Modeling Using Edge Finite Elements", 2008 International Biennial Baltic Electronics Conference (BEC2008) Tallinn, Estonia, October 6-8, 2008.
100. M. M. Ilić, B. M. Notaroš: „Higher Order Hierarchical Curved Heksahedral Vector Finite Elements for Electromagnetic Modeling“, IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, Vol. 51, No. 3, March 2003.
101. M. M. Ilić, A. Ž. Ilić, and B. M. Notaroš: „Continuously Inhomogeneous Higher Order Finite Elements for 3-D Electromagnetic Analysis“, IEEE

## 10. Literatura

- Transactions on Antennas and Propagation, vol. 57, no. 9, September 2009, pp. 2798-2803.
102. EStat 8.0, Finite-element Electrostatics, PO Box 13595, Albuquerque, NM 87192 U.S.A. (<http://www.fieldp.com/>)
103. Finite Element Method Magnetics (FEMM), (<http://www.femm.info/wiki/Download>)
104. QuickField™ simulation software for electromagnetic, heat transfer and stress analysis (<http://www.quickfield.com/>)
105. Field precision LLC, HiPhi: 3D finite-element electrostatic fields, (<http://www.fieldp.com/hiphi.html>)
106. FINEL v6, © JC Appleby, Newcastle University, 2008, (<http://www.staff.ncl.ac.uk/john.appleby/software.htm>)
107. ELMER, Open Source Finite Element Software for Multiphysical Problems, (<http://www.csc.fi/english/pages/elmer>)
108. Z. Pantic, R. Mittra: „Quasi-TEM analysis of microwave transmission lines by the finite-element method“, IEEE Trans MTT 34 (1986), 1096–1103.
109. Z. Pantic-Tanner, R. Mittra: „Full-wave analysis of isolated and coupled microwave transmission lines using the finite-element method“, Archiv fur Elektronik und Ubertragungstechnik, vol 42, No. 6, pp. 370-374, 1988.
110. S. M. Musa, M. N. O. Sadiku: „Modeling and Simulation of Shielded Microstrip Lines“, the Technology Interface/Fall 2007, ([http://technologyinterface.nmsu.edu/Fall07/70\\_Musa-Microstrip/index.pdf](http://technologyinterface.nmsu.edu/Fall07/70_Musa-Microstrip/index.pdf))
111. Y. Bekri, N. Benabdallah, N. Benahmed, F. T. Bendimerad, K. Aliane: „Analysis and Design of Shielded Suspended and Inverted Microstrip Lines for Microwave Applications“, The Computing Science and Technology International Journal, Vol. 2, No. 1, March, 2012, ISSN (Print) 2162-0660, ISSN (Online) 2162-0687, published online, March, 2012.



## 10. Literatura

112. M. S. Alam, M. Qazi: „Estimation of Loss in Microwave Transmission Lines by Quasi-TEM Finite Element Analysis”, Proceedings of the Int. Conf. on Computer and Communication Engineering, ICCCE'06 Vol. II, 9-11 May 2006, Kuala Lumpur, Malaysia.
113. P. Kakria, A. Marwaha, M. Singh Manna: „Optimized Design of Shielded Microstrip Lines Using Adaptive Finite Element Method“, Excerpt from the Proceedings of the 2011, COMSOL Conference, Bangalore.
114. G. W. Slade, K. J. Webb: „Computation of Characteristic Impedance for Multiple Microstrip Transmission Lines Using a Vector Finite Element Method“, IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques, Vol.40, No.1, January 1992.
115. M. S. Alam, K. Hirayama, Y. Hayashi, and M. Koshiba: „Analysis of shielded microstrip lines with arbitrary metallization cross section using a vector finite element method”, IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, Vol. 42, No. 11, pp. 2112-2117, Nov. 1994.
116. M. Đorđević, B. Notaroš: „Modelovanje elementima višeg reda u numeričkoj elektromagnetici“, 16. Telekomunikacioni forum Telfor 2008, Beograd, 25-27 novembar, str. 476- 479, Srbija.
117. Ž. J. Mančić, V. V. Petrović: „Analiza kvadratnog koaksijalnog voda sa anizotropnim dielektrikom metodom konačnih elemenata“, Telfor Journal, Vol. 3, No. 2, 2011.
118. CST Studio Suite, version 2010, CST—Computer Simulation Technology AG, Darmstadt, 2010.
119. J. Awrejcewicz, *Numerical Analysis - Theory and Application*, ISBN 978-953-307-389-7, Hard cover, 626 pages, Publisher: InTech, Chapters published September 09, 2011 under CC BY-NC-SA 3.0 license DOI: 10.5772/1829 (<http://www.intechopen.com/books/numerical-analysis-theory-and-application/meshfree-methods>)

## 10. Literatura

120. M. Dehghan, A. Ghesmati: „Combination of meshless local weak and strong (MLWS) forms to solve the two dimensional hyperbolic telegraph equation”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 34 (2010) 324-336.
121. R. Trobec, G. Kosec, M. Šterk, B. Šarler: „Comparison of local weak and strong form meshless methods for 2-D diffusion equation”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 36 (2012) 310-321.
122. M. Shwartz, N. T. Niane, R. Kouitat Njiwa: „A simple solution method to 3D integral nonlocal elasticity: Isotropic-BEM coupled with strong form local radial point interpolation”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 36 (2012) 606-612.
123. A. R. Fonseca, B. C. Correa, E. J. Silva, R. C. Mesquita: „Improving the Mixed Formulation for Meshless Local Petrov-Galerkin Method”, *IEEE Trans. on Magnetics*, Vol. 46, No. 8, pp. 2907-2910, August 2010.
124. G. Milovanović, *Numerička analiza*. Naučna knjiga Beograd, 1985.
125. M. M. Ilić, A. Ž. Ilić, and B. M. Notaroš: „Large Lagrange-Type Finite Elements in Electromagnetics – Benefits and Limitations”, *Proceedings of 50th ETRAN Conference*, June 6-9, 2006, Belgrade, Serbia, pp.II.262-265.
126. D. Tracey, T. S. Cook: „Analysis of Power Type Singularities Using Finite Elements“, *Int. J. Num. Meth. In Engrg.*, 11, No.8., pp. 1225-1235.
127. Z. P. Tanner, J. S. Savage, D. Tanner, A. F. Peterson: „Two-Dimensional Singular Vector Elements for Finite-Element Analysis”, *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 46, No.2, pp. 178-184, February 1998.
128. B. M. Kolundzija: „ On the Inclusion on Edge Effects into Surface Vector Basis functions“, *Antennas and Propagation Society International Symposium*, 1998. IEEE Volume: 1 Digital Object Identifier: 10.1109/APS.1998.699133 Publication Year: 1998 , Page(s): 282 - 285 vol.1.
129. B. M. Kolundzija, B. D. Popovic: „Entire domain Galerkin method for analysis of generalised wire antennas and scatterers, *Microwaves, Antennas*

## 10. Literatura

- and Propagation”, IEE Proceedings-H (Volume: 139, Issue: 1) Page(s): 17 – 24, ISSN: 0950-107X, INSPEC Accession Number: 4099500, Date of Current Version: 06 August 2002, Issue Date: Feb 1992.
130. B. M. Kolundžija, B. D. Popovic: „Entire-domain Galerkin method for analysis of metallic antennas and scatterers“, *Microwaves, Antennas and Propagation*, IEE Proceedings-H (Volume: 140, Issue:1) Date of Publication: Feb. 1993., Page(s): 1 - 10 ISSN : 0950-107X INSPEC, Accession Number: 4375226, Date of Current Version: 06 August 2002, Issue Date: Feb. 1993.
131. B. M. Kolundžija: „General Entire-Domain Galerkin Method for Electromagnetic Modeling of Composite Wire to Plate Structures Proc. of 20th EuMW, Budapest, Hungary Pt. 1, 1990, pp. 853-858.
132. B. M. Kolundžija: „Comparison of a Class of Subdomain and Entire Domain Basis Functions Automatically Satisfying KCL, *IEEE Trans. On Antennas and Prop.* Vol. 44, No. 10, pp. 1362-1366, October 1996.
133. B. M. Kolundžija: „On the Locally Continuous Formulation of Surface Doublets”, *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, Vol.46, No. 12, pp. 1879-1883, Dec. 1998.
134. B. M. Kolundžija, T. K. Sarkar: „On the Choice of Optimal Basis Functions for MOM/SIE, MoM/VIE, FEM and Hybrid Methods”, *Antennas and Propagation Society International Symposium*, 1998. IEEE (Volume:1 ), 21-26 June 1998, pp. 278 – 281, Atlanta, GA, USA.
135. M. D. Davidović, B. M. Notaroš, and M. M. Ilić: „B-Spline Entire-Domain Higher Order Finite Elements for 3-D Electromagnetic Modeling”, *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, vol.22, no.10, October 2012, pp. 497-499.
136. A. A. Lysko, *On Multiple Domain Basis Functions and Their Application to Wire Radiators*, Thesis for the degree of Philosophiae Doctor, Norwegian University of Science and Technology Faculty of Information Technology, Mathematics and Electrical Engineering Department of Electronics and Telecommunications, Trondheim, May 2010.

## 10. Literatura

137. M. M. Ilić, B. D. Popović, and V. V. Petrović: „Analysis of Efficiency of the Finite Element Method Using Higher Order Elements in Calculating the Reflection Coefficients“, ETRAN XLIII conference, Zlatibor, Yugoslavia, 1999.
138. A. R. Đorđević, M. B. Bazdar, T.K. Sarkar, and R.F. Harrington, *Linpar for windows, matrix parameters for multiconductor transmission lines*, Software and User's Manual, Artech House, 1996.  
(<http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:321825/FULLTEXT01.pdf>)
139. Ž. J. Mančić, V.V. Petrović: „Jedno referentno (benchmark) rešenje za dvodimenzionalne elektrostatičke probleme“, Zbornik konferencije YU INFO 2009, na CD-u, Kopaonik, 8.-11. 3. 2009.
140. Ž. J. Mančić, V. V. Petrović: „Accurate algorithm for calculating characteristic impedance of a square coaxial line“, Proc. ICEST 2009, pp. 3-6, Veliko Tarnovo, Bulgaria, 25.-27. 6. 2009.
141. E. Yamashita, K. Atsuki: „Analysis of thick-strip transmission lines“, IEEE Trans MTT 19 (1971), 120–122.
142. F. J. Schmuckle and R. Pregla: „The method of lines for the analysis of planar waveguides with finite metallization thickness“, IEEE Transactions and Microwave Theory and Techniques, Vol. MTT-39, pp.107-111,1991.
143. T. N. Chang, C. H. Tan: „Analysis of a shielded microstrip line with finite metallization thickness by the boundary element method“, IEEE Trans on MTT, 38 (1990), 1130–1132.
144. N. H. Zhu, W. Qiu, E.Y.B. Pun, and P.S. Chung: „Quasi-static analysis of shielded microstrip transmission lines with thick electrodes“, IEEE Trans MTT 45 (1997), 288–291.
145. S. A. Ivanov and G.L. Đankov: „Determination of the characteristic impedance by a step current density approximation“, IEEE Trans MTT 32 (1984), 450–452.

## 10. Literatura

146. N. B. Raicevic and S. S. Ilic: „Equivalent Electrodes Method Application on Anisotropic Striplines Calculations“, in Proc. PhD Seminar, Banjaluka, 2006.
147. F. Bowman, Introduction to elliptic functions, English Universities Press, London, Chapter 10, 1953.
148. S. W. Conning: „The characteristic impedance of square coaxial line“, IEEE Trans MTT 12 (1964), 468–468.
149. D. Velickovic, B. Milovanovic, Z. Mancic: „New approach for equalising phase velocities in coupled microstrip lines“, Electronic letters, Vol. 33, Issue 17, pp. 1444 -1445, 1997. (ISSN:0013-5194, INSPEC Accession Number: 5692988, DOI 10.1049/el:19970965, Date of Current Version: 06 avgust 2002, IF=1.072 (2002. god), M21.
150. A. Chatterjee, J. L. Volakis: „Conformal absorbing boundary conditions for 3-D problems: derivation and applications“, IEEE Trans. on AP, Vol.43, No.8, pp. 860-866, 1995.
151. L. Ting, M. J. Miksis: „Exact boundary conditions for scattering problems“, J.Acoust. Soc. Am., Vol.80, No.6, pp.1825-1827, 1986.
152. Q. Chen, A. Konrad: „A Review of Finite Element Open Boundary Techniques for Static and Quasi-Static Electromagnetic Field Problems“, IEE Transactions on Magnetics Vol. 33, No. 1, jan. 1997.
153. P. Bettess: „Finite Element Modeling of Exterior Electromagnetic Problems, IEEE Transactions on Magnetics“, Vol. 24, No. 1, January 1988., pp. 238-243.
154. C. R. I. Emson: „Methods for the solution of open-boundary electromagnetic-field problems“, IEE Proceedings, Vol. 135, Pt. A, No. 3, pp. 151-158, March 1988.
155. I. Gomez-Revuelto, L. E. Garcia-Castillo, L.F.Demkowicz: „A comparison between PML, infinite elements and an iterative BEM as mesh truncation methods for HP self-adaptive procedures in electromagnetics“, Progress in Electromagnetics Research, Vol.126, pp.499-519, 2012.

## 10. Literatura

156. M. V. K. Chari, G. Bedrosian, J. D'Angelo, A. Konrad: „Finite Element Applications in Electrical Engineering“, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 29, No. 2, March 1993.
157. Y. Saito, T. Takahashi, S. Hayano: „Finite element solution of open boundary magnetic fields problem“, IEEE Trans. Magn. Vol.23, pp. 3569-3571, Sept. 1987.
158. M. Ikeuchi, H. Sawami, H. Niki: „Analysis of open-type dielectric waveguides by the finite-element iterative method“, IEEE Trans. Microwave Theory Tech. , vol. 29, pp. 234-239, Mar. 1981.
159. P. P. Silvester, D. A. Lowther, C. J. Carpenter, E. A. Wyatt: „Exterior finite elements for two-dimensional field problems with open boundaries“, Proc. IEE, Vol. 124, pp. 1267-1270, Dec. 1977.
160. R. L. Ungless: „A infinite finite element“, M. Sc. Thesis, Univ. British Columbia, Canada, 1973.
161. P. Bettess: „Infinite elements“, Int. J. Num. Methods Eng. ,Vol. 11, No. 1, pp. 53-64, 1977.
162. G. Beer: „ 'Infinite domain' elements in Finite Element Analysis of Underground Excavations“, International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol. 7, pp. 1-7, 1983.
163. F. Medina, R. L. Taylor: „Finite element Techniques for problems of unbounded domains“, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 19, pp. 1209-1226, 1983.
164. H. Hurwitz, Jr: „Infinitesimal scaling-a new procedure for modeling exterior field problems“, IEE Trans magn., Vol. 20, pp. 1918-1923, Sept. 1984.
165. C. Crowley, H. Hurwitz, Jr., M. V. K. Chari, J. D. Angelo, J. F. Berkery: „Power line insulation analysis and design using finite elements and infinitesimal scalling“, IEEE Trans. Magn. Vol. 21, Nov. 1985.

## 10. Literatura

166. M. V. K. Chari, J. D. Angelo, C. Crowley, J. Roeth, H. Hurwitz: „Solution of open boundary problems by differential and integral methods”, IEEE Trans. Magn. Vol. 22, pp. 1037-1039, Sept. 1986.
167. C. T. M. Choi: „Adaptive Finite Element Analysis of Unbounded Electromagnetic Problems, IEEE Transactions on magnetics“, Vol.36, No.4, July 2000.
168. J. F. Imhoff, G. Meunier, J. S. Sabonnadiere: „Finite element Modeling of open boundary problems“, IEEE Transactions on magnetics, Vol. 26, Mart 1990.
169. S. H. Wong, R. Ciric: „Method of conformal transformation for the finite-element solution of axisymmetric exterior-field problems“, COMPEL, Vol. 4, No. 2, pp.123-135, 1985.
170. R. B. Wu, C. H. Chen: „A variational analysis of dielectric waveguides by the conformal mapping technique“, IEEE Trans. MTT, Vol.33, p.1636, 1965.
171. D. A. Lowter, E. M. Freeman, B. Forghani: „A sparse matrix open boundary method for finite element analysis“, IEEE Trans. Magn. Vol.25, pp.2810-2812, July 1989.
172. I. R. Ciric, S. H. Wong: „Inversion transformation for the finite element solution of three-dimensional exterior field problems“, COMPEL, Vol. 5, No. 2, pp. 109-119, 1986.
173. E. M. Freeman, D. A. Lowter: „A novel mapping technique for open finite element solutions to Poisson's equation“, IEEE Trans. Magn. Vol.24, pp. 2934-2936, Nov. 1988.
174. A. Cermak, P. Silvester: „Solution of 2-dimensional field problems by boundary relaxation“, proc. IEE, Vol.115, No. 9, pp. 1341-1348, Sept. 1968.
175. G. Aiello, S. Alfonzetti, S. Coco, N. Salerno: „Axisymmetric Unbounded Electrical Field Computation by Charge Iteration”, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 29, No. 2, pp. 2043-2046, March 1992.

## 10. Literatura

176. G. Aiello, S. Alfonzetti, C. Coco: „Charge iteration a procedure for the finite element computation of unbounded electrical fields“, *International Journal for numerical methods in engineering*, Vol. 37, pp. 4147-4166, 1994.
177. S. Y. Sun, G. S. Zhang, W. Chen: „A Data Base method for 3D open Boundary Field Computation“, *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 26, No. 2, March, 1990. pp. 807-811.
178. J.-She Wang, R. Mittra: „Finite Element Analysis of MMIC Structures and Electronic Packages Using Absorbing Boundary Conditions“, *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 42, No. 3, March 1994.
179. M. M. Ilić, S. V. Savić, and B. M. Notaroš: „First Order Absorbing Boundary Condition in Large-Domain Finite Element Analysis of Electromagnetic Scatterers“, *10th International Conference on Telecommunications in Modern Satellite, Cable and Broadcasting Services – TELSISKS 2011 - Proceedings*, October 5–8, 2011, Niš, Serbia, pp.424-427. DOI:10.1109/TELSISKS.2011.6143235.
180. A. Khebir, A. Kouki, R. Mittra: „An Efficient Finite Element Approach for The Analysis of 3D Transmission line Discontinuities using an asymptotic boundary condition“, *IEEE MTT-S Digest*, 1990.
181. A. Khebir, A. Kouki, R. Mittra: „Asymptotic Boundary Conditions for FE Analysis of 3D Transmission Line Discontinuities“, *IEEE MTT-S Digest*, 1990.
182. A. Khebir, A. Kouki, R. Mittra: „Higher Order Asymptotic Boundary Condition for the Femodeling of 2D Transmission Line Structures“, *IEEE MTT*, Vol. 38, No. 10, Oct. 1990.
183. A. Khebir, A. Kouki, R. Mittra: „Finite Element modeling of 2D Transmission Line Structures using a new Asymptotic Boundary Condition“, *IEEE MTT-S Digest*, 1990.



## 10. Literatura

184. Q. Chen, A. Konrad, S. Baronijan: „Asymptotic Boundary Conditions for Axisymmetric Finite Element Electrostatic Analysis, IEEE Transaction on Magnetics“, Vol. 30, No.6, pp. 4335-4337, November 1994.
185. S. Gratkowski, K. Stawicki, M. Ziolkowski: „Asymptotic Boundary Conditions for Finite Element Analysis of 2D and 3D Electrical Field Problems“, Compumag 2013, 30 June - 4 July, Budapest, Hungary.
186. J. H. Henderson, S. Rao: „Electrostatic Solution for Three-Dimensional Arbitrarily Shaped Conducting Bodies Using Finite Element and Measured Equation of Invariance“, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol.46, No.11, November 1998.
187. G. K. Gothard, S. Rao, T. K. Sarkar, M. S. Palma: „Finite Element Solution of Open Region Electrostatic Problems Incorporating the Measured Equation of Invariance“, IEEE Microwave and guided wave letters, Vol. 5, No. 8, August 1995.
188. C. Xiang, C. Li: „A Finite Element Algorithm of Plotting Electric Force Line in Two-Dimensional Electrostatic Field Computation“, IEEE Trans. on Magnetics, Vol. 28, No. 2, March 1992.
189. T. Nakata, N. Takahashi, K. Fujiwara, M. Sakaguchi: „3-D open boundary magnetic field analysis using infinite element based on hybrid finite element method“, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 26, pp. 368-370, Mar. 1990.
190. J. Sroka, H. Baggenstos, R. Ballisti: „On the coupling of the generalized multipole technique with the finite element method“, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 26, pp. 658-661, Mar. 1990.
191. Q. Chen, A. Konrad, P. P. Biringer: „An integrodifferential finite element-Green's function, method for the solution of unbounded eddy current problems“, IEEE Trans. Magn. Vol. 29, pp. 1874-1877, Mar. 1993.
192. Q. Chen, A. Konrad, P. P. Biringer: „A finite element-Green's function method for the solution of unbounded three dimensional eddy current problems“, IEEE Trans. Magn. Vol. 30, pp. 3048-3051, Sept. 1994.

## 10. Literatura

193. T. Roy, T. K., Sarkar, A. Đorđević, M.S. Palma: „A Hybrid Method for Terminating the Finite Element Mesh (electrostatic case)”, *Microwave and Optical Technology Letters*, Vol. 8., No. 6, April 20, 1996, pp.282-287.
194. D. Mayergoyz, M. V. K.Chari, A. Konrad: „Boundary Galerkin’s method for three-dimensional finite element electromagnetic field computation“, *IEEE Trans. Magn.* Vol. 19, pp. 2333-2336, Nov. 1983.
195. B. H. Mc Donald, A. Wexler: „Finite element solution of unbounded field problems“, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 20, pp. 841-847, Dec. 1972.
196. P. Silvester, M. S. Hsieh: „Finite-element solution of 2-dimensional exterior field problems“, *Proc. IEE*, Vol. 118, No. 12, pp. 1743-1747, 1971.
197. Z. J. Csendes: „A note on the finite-element solution of exterior-field problems“, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol.24, pp. 468-473, July 1976.
198. Z. Ren, F. Bouillault, A. Razek, J.C. Verite: „Comparison of different boundary integral formulations when coupled with finite elements in three dimensions“, *Proc. IEE*, Pt. A, Vol. 135, No.8, pp. 501-507, 1988.
199. X. Yuan: „Three-dimensional electromagnetic scattering from inhomogeneous objects by the hybrid moment and finite element method“, *IEEE Trans. on MTT*, Vol. 38, No. 8, pp.1053-1058, 1990.
200. M. M. Ilic, M. Đorđević, A. Z. Ilic, B. M. Notaros: „Higher Order Hybrid FEM-MoM Technique for Analysis of Antennas and Scatterers“, *IEEE Trans. on AP*, Vol. 57, No. 5, pp.1452-1460, 2009.
201. M. M. Ilic, S. V. Savić, A. Ž. Ilić, B. M. Notaroš: „Hybrid Higher Order FEM-MoM Analysis of Continuously Inhomogeneous Electromagnetic Scatterers“, *Telfor Journal*, Vol. 3, No. 2, pp. 121-125, 2011.
202. M. M. Ilić and B. M. Notaroš: „Higher Order FEM-MoM Domain Decomposition for 3-D Electromagnetic Analysis“, *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, vol. 8, 2009, pp. 970-973.

## 10. Literatura

203. M. M. Ilić, A. Ž. Ilić, and B. M. Notaroš: „Comparison of higher order FEM and MoM/SIE approaches in analyses of closed- and open-region electromagnetic problems“, *Facta Universitatis Series: Electronics and Energetics*, vol. 21, no. 2, August 2008, pp. 209-220.
204. D. I. Olćan, M. M. Ilić B. M. Notaroš, B. M. Kolundzija, and A. R. Đorđević: „Diakoptic Higher-Order FEM-MoM Approach“, 2010 IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium (APSURSI), July 11-17, 2010, Toronto, Ontario, Canada, pp.1-4.

## Prilozi

### PRILOG 1. Granične vrednosti prostornih izvoda na diskontinuitetima

Neka su date vektorske funkcije  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{h}$  i  $\mathbf{p}$ , prekidne na površini  $S_D$  sa sl. 3.13. Zanimarivanjem priraštaja vektora  $\mathbf{p}$  u tangencijalnom pravcu u odnosu na skokoviti priraštaj u normalnom pravcu, direktno se dobija

$$\operatorname{div} \mathbf{p} = \frac{\partial}{\partial n} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}) = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \delta(n) \quad (1.1)$$

Na sličan način je

$$\operatorname{roth} = \frac{\partial}{\partial n} (\mathbf{n} \times \mathbf{h}) = \mathbf{n} \times (\mathbf{h}_1 - \mathbf{h}_2) \delta(n) \quad (1.2)$$

Zapreminski integrali ovih izvoda po oblasti  $\varepsilon$ -okoline površine  $S_D$  (oblast  $v_{\text{sing}}$ ) su

$$\int_{v_{\text{sing}}} \operatorname{div} \mathbf{p} dv = \int_{-\varepsilon S_D}^{\varepsilon} \int \operatorname{div} \mathbf{p} dn dS = \int_{S_D} (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) dS = - \int_{S_{D2}} \mathbf{p} dS \quad (1.3)$$

$$\int_{v_{\text{sing}}} \operatorname{roth} dv = \int_{-\varepsilon S_D}^{\varepsilon} \int \operatorname{roth} dn dS = \int_{S_D} dS \times (\mathbf{h}_1 - \mathbf{h}_2) = \int_{S_{D2}} \mathbf{h} \times dS \quad (1.4)$$

gde  $S_{D2}$  predstavlja obe strane površine  $S_D$ .

Korišćenjem ovih relacija direktno se dobija da vektorski identitet

$$\operatorname{div} (\mathbf{e} \times \mathbf{h}) = \mathbf{h} \cdot \operatorname{rote} - \mathbf{e} \cdot \operatorname{roth} \quad (1.5)$$

važi i za prekidne funkcije  $\mathbf{e}$  i  $\mathbf{h}$ , ukoliko se pojam funkcija proširi i na  $\delta$  funkcije.

Takođe se postavlja pitanje da li za prekidne funkcije  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{h}$  i  $\mathbf{p} = \mathbf{e} \times \mathbf{h}$  važi sledeći identitet (generalizacija parcijalne integracije na vektorske funkcije),

$$\int_{v_{\text{sing}}} \operatorname{div} \mathbf{p} dv = \int_v (\mathbf{h} \cdot \operatorname{rote} - \mathbf{e} \cdot \operatorname{roth}) dv = \oint_S \mathbf{p} \cdot d\mathbf{S}, \quad (1.6)$$

## Prilozi

gde je  $S$  površina koja obuhvata domen  $v$ . Već je navedeno da prvi deo ove jednakosti važi. Domen  $v$  se može podeliti na dva dela,  $v_{\text{reg}}$ , u kome su funkcije kontinualne i  $v_{\text{sing}}$  koji je  $\varepsilon$ -okolina površina diskontinuiteta i u kome su funkcije prekidne. Prvi integral u gornjoj jednačini se može transformisati na sledeći način:

$$\int_v \text{div} \mathbf{p} dv = \int_{v_{\text{reg}}} \text{div} \mathbf{p} dv + \int_{v_{\text{sing}}} \text{div} \mathbf{p} dv = \left( \oint_S \mathbf{p} \cdot d\mathbf{S} + \oint_{S_{D2}} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{S} \right) - \int_{S_{D2}} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \mathbf{p} \cdot d\mathbf{S}.$$

Ovim je dokazana i druga jednakost u (1.6). Prema tome (1.6) važi i za prekidne funkcije [107].

### PRILOG 2. Wronsky-eva determinanta

Pretpostavimo da su date proizvoljne funkcije  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , i neka su one definisane i diferencijabilne barem  $n-1$  puta. Tada se determinanta definisana sa:

$$W(y_1, \dots, y_n; x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & \dots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

naziva Wronsky-eva determinanta  $n$ -tog reda [124].

### PRILOG 3. Definicija linearne nezavisnosti

Funkcije  $f_1, f_2, \dots, f_n, f_{n+1}$  su linearno nezavisne ako i samo ako važi sledeće tvrđenje: ako je

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 + c_4 f_4 + c_5 f_5 + c_6 f_6 + \dots + \dots + c_n f_n + c_{n+1} f_{n+1} = 0$$

onda je i

$$c_1 = 0, c_2 = 0, \dots, c_n = 0, c_{n+1} = 0,$$

inače su funkcije linearno zavisne [124].

**PRILOG 4. Dokaz da su slabe funkcije bazisa linearno nezavisne**

Posmatrajmo skup 1D funkcija bazisa za slabu formulaciju

$$f_j(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1-\xi)(1+\xi)^{j-1}, & j = 1, \dots, n \\ \frac{1}{2}(1+\xi), & j = n+1 \end{cases}$$

Neka je  $n = 5$ . Tada je skup funkcija bazisa:

$$f_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\xi$$

$$f_2 = \frac{1}{2} - \xi^2$$

$$f_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\xi - \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}\xi^3$$

$$f_4 = \frac{1}{2} + \xi - \xi^3 - \frac{1}{2}\xi^4$$

$$f_5 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\xi + \xi^2 - \xi^3 - \frac{3}{2}\xi^4 - \frac{1}{2}\xi^5$$

$$f_6 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\xi$$

Iz uslova linearne nezavisnosti proizilazi sistem jednačina:

$$\frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_2 + \frac{1}{2}c_3 + \frac{1}{2}c_4 + \frac{1}{2}c_5 + \frac{1}{2}c_6 = 0$$

$$-\frac{1}{2}c_1 + 0c_2 + \frac{1}{2}c_3 + \frac{1}{2}c_4 + \frac{3}{2}c_5 + \frac{1}{2}c_6 = 0$$

$$0c_1 - c_2 - \frac{1}{2}c_3 - c_4 - c_5 + 0c_6 = 0$$

$$0c_1 + 0c_2 + 0c_3 - \frac{1}{2}c_4 - \frac{3}{2}c_5 + 0c_6 = 0$$

$$0c_1 + 0c_2 + 0c_3 + 0c_4 - \frac{1}{2}c_5 + 0c_6 = 0.$$

Iz poslednje jednačine je  $c_5 = 0$  a iz preposlednje  $c_4 = c_5 = 0$ . Iz treće je:

$$-\frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_6 = 0, \Rightarrow c_1 = c_6,$$

a iz prve

Prilozi

$c_1 + c_6 = 0$  . Dalje je

$$2c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = c_6 = 0.$$

Ovim je pokazano da je  $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = c_6 = 0$ , čime je dokazano da su funkcije linearno nezavisne.

Lako se dokazuje i da su  $f_1$  i  $f_{n+1}$  linearno nezavisne. Imamo sistem od dve jednačine

$$\frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_2 = 0 \text{ i}$$

$$- \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_2 = 0.$$

Iz druge jednačine je  $c_1 = c_2$ , pa kad se zameni u prvu dobija se  $2c_1 = 0$ , odakle je  $c_1 = c_2 = 0$ .

U opštem slučaju, kada imamo  $n+1$  funkciju bazisa, determinanta sistema tipa (2) nije jednaka 0 (ni jedna vrsta odnosno kolona nije jednaka ili proporcionalna nekoj drugoj) tako da sistem ima samo trivijalna rešenja, odnosno funkcije su linearno nezavisne.

### **PRILOG 5. Dokaz da su jake funkcije bazisa linearno nezavisne**

Posmatrajmo 1D funkcije  $f_1, f_2, f_n, f_{n+1}$  iz potpunog skupa jakih funkcija bazisa (2.35). Ove funkcije su polinomi trećeg stepena. Sistem jednačina za uslov linearne nezavisnosti za njih je

$$\begin{aligned} 2c_1 - 3c_2 + 0c_3 + c_4 &= 0 \\ c_1 - c_2 - c_3 + c_4 &= 0 \\ 2c_1 + 3c_2 + 0c_3 - c_4 &= 0 \\ -c_1 - c_2 + c_3 + c_4 &= 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Sabiranjem prve i treće jednačine sistema (4.1) dobija se  $c_1 = 0$ , sabiranjem druge i četvrte  $c_2 = c_4$ . Kada se ovaj uslov zameni u prvu jednačinu, dobija se  $c_2 = 0$ , tako da posle smene izračunatih koeficijenata, iz treće jednačine sleduje da je i  $c_3 = 0$ .

## Prilozi

Analogno se dokazuje linearna nezavisnost za skup funkcija bazisa koje su polinomi višeg stepena, odnosno za  $n > 3$ , tj za skup koji čine funkcije  $f_3, f_4, \dots, f_n, f_{n+1}$ .



## **Biografija**

Mr Žaklina J. Mančić rođena je u Aleksincu, 21.09.1963. godine. Osmogodišnju školu završila je u Žitkovcu (Srbija) a srednje usmereno obrazovanje (laboratorijski tehničar za fiziku) u Aleksincu (Srbija). U toku školovanja je više puta nagrađivana i nosilac je diploma „Vuk Karadžić“. Elektronski fakultet, smer Telekomunikacije, završila je u Nišu 1987. godine. Magistrirala je 1996. godine na Elektronskom fakultetu u Nišu. Po diplomiranju radila je dve godine u IRI EI Niš, a zatim na Elektronskom fakultetu u Nišu kao asistent pripravnik a potom kao asistent na Katedri za Teorijsku elektrotehniku, na predmetima Osnovi elektrotehnike, Teorija električnih kola i Elektromagnetika. Trenutno radi u Računskom centru Elektronskog fakulteta u Nišu kao viši stručni saradnik.

Majka je jednog deteta.

## **Biography**

Žaklina J. Mančić was born on 21.09.1963 in Aleksinac, Republic of Serbia. She finished elementary school in Žitkovac (Serbia) and secondary vocational education (laboratory technician in Physics) in Aleksinac (Serbia). During her education Žaklina has received numerous awards and she is the holder of a diploma "Vuk Karadžić". Žaklina graduated from the Faculty of Electronic Engineering, University of Nis, Department of Telecommunications, in Niš in 1987. Master's degree Žaklina received in 1996 from the Faculty of Electronic Engineering. After graduation, she worked for two years at IRI EI Niš, and at the Faculty of Electronic Engineering as a teaching assistant and then as an assistant professor in the Department of Theoretical Electrical Engineering, at subjects the Fundamentals of Electrical Engineering, Circuit Theory and Electromagnetics. Currently she works in the Computer center, Faculty of Electronics in Niš, as a senior associate.

Žaklina is the mother of one child.

Прилог 1.

## Изјава о ауторству

Потписани-а Мариша Маричић

број индекса \_\_\_\_\_

### Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Јака формулација метаје конјунх елемената  
у квазиоптималној фамилији вајба

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 19. 12. 2013

Маричић Мариша

Прилог 2.

## Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Маријана Мачић

Број индекса \_\_\_\_\_

Студијски програм \_\_\_\_\_

Наслов рада Улога формуације методе квантних  
елемената за квантитативну анализу везива

Ментор др Антонија Ђорђевић, редовни професор, редовни  
члан САНУ

Потписани/а Маријана Мачић

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 19.12.2017.

Маријана Мачић

Прилог 3.

## Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Јасна формулација метода коначних елемената  
за квантитативну анализу бујба

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 19.12.2013.

Марија Шалица