

UNIVERZITET U BEOGRADU  
ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET

Mr Nenad D. Krajnović, dipl. inž.

Procena raspoloživosti složenih  
komunikacionih mreža metodom linearne  
segmentne aproksimacije

Doktorska disertacija

Beograd, 2015.

UNIVERSITY OF BELGRADE  
FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING

Nenad D. Krajnović

Availability Assessment of Complex  
Communication Networks by Method of Linear  
Segment Approximation

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2015.

Mentor: Prof. dr Aleksandar Nešković, vanredni profesor, Univerzitet u Beogradu - Elektrotehnički fakultet

Član komisije: Prof. dr Zoran Jovanović, redovni profesor, Univerzitet u Beogradu - Elektrotehnički fakultet

Član komisije: Prof. dr Budimir Đurađ, *reader, University of Westminster, London, UK*

Član komisije: Prof. dr Irini Reljin, redovni profesor, Univerzitet u Beogradu - Elektrotehnički fakultet

Član komisije: Prof. dr Nataša Nešković, vanredni profesor, Univerzitet u Beogradu - Elektrotehnički fakultet

Datum odbrane:

## *Zahvalnica*

Autor želi i ovim putem da se zahvali svojoj porodici za beskrajno strpljenje koje su pokazali tokom izrade ove doktorske disertacije.

Autor želi da se zahvali i mentoru na veoma korisnim sugestijama tokom izrade ove doktorske disertacije.

Mr Nenad Krajnović, dipl inž.

## Naslov doktorske disertacije:

# Procena raspoloživosti složenih komunikacionih mreža metodom linearne segmentne aproksimacije

## Rezime:

Razvoj modernog društva se u velikoj meri zasniva na kvalitetnim telekomunikacionim mrežama. U tom smislu, od velike je važnosti da telekomunikacione mreže imaju visoku raspoloživost čime se postiže i visoka raspoloživost servisa koje koriste krajnji korisnici. Danas se okosnice mreža najčešće realizuju sa velikim brojem čvorova (više desetina) zbog čega je problem direktno izračunati raspoloživost takve mreže, jer vremena izvršavanja algoritama za tačno računanje raspoloživosti eksponencijalno rastu sa porastom broja čvorova i linkova. Zbog toga je od velike praktične važnosti korišćenje aproksimativnih algoritama koji tokom procesa projektovanja takvih mreža omogućavaju definisanje početnih uslova za dizajniranje topologije mreže. Cilj ove doktorske disertacije je uvođenje novog metoda za aproksimativno računanje maksimalne *all-terminal* raspoloživosti složenih telekomunikacionih mreža.

U cilju dobijanja vrednosti maksimalne *all-terminal* raspoloživosti, razvijena je metoda sinteze mreže. Kod metode sinteze mreže početna topologija je lanac. Kod određivanja maksimalne raspoloživosti mreže, u prvom koraku sinteze se formira prsten da bi se dalje dodavao po jedan link u mrežnoj topologiji tako da se svaki put dobije maksimalni priraštaj *all-terminal* raspoloživosti mreže. Dodavanjem jednog po jednog linka, gde svi linkovi imaju istu raspoloživost, vrši se sinteza mreže koja u svakom koraku ima maksimalnu raspoloživost za dati broj čvorova, linkova i datu raspoloživost linkova.

Analizom dobijenih rezultata za maksimalnu *all-terminal* raspoloživost mreže definisane su funkcije aproksimacije maksimalne *all-terminal* raspoloživosti mreže za zadati broj čvorova, linkova i raspoloživost linkova. Na osnovu dobijenih aproksimativnih izraza može se izračunati granica raspoloživosti mreže u zavisnosti od topologije za zadate parametre. S druge strane, korišćenjem funkcija aproksimacija može se definisati donja granica za broj linkova da bi se mogla dobiti željena

raspoloživost izborom odgovarajuće topologije mreže. Pokazano je da je za maksimalnu raspoloživost mreže potrebno da svi čvorovi imaju istu konektivnost ili konektivnost koja se razlikuje najviše za jedan. Polazeći od ovog pravila, i znajući prethodno određene granice za broj linkova u mreži, u procesu projektovanja može se u nekoliko iteracija doći do topologije mreže koja obezbeđuje zadatu *all-terminal* raspoloživost.

Vreme izvršavanja funkcija aproksimacije definisanih u okviru ove doktorske disertacije ne zavisi od veličine mreže. To omogućava veliki broj izračunavanja čime se omogućava analiza velikog broja kombinacija ulaznih parametara. Pokazano je da funkcije aproksimacije definisane u okviru disertacije imaju veću tačnost od funkcija koje su do sada publikovane u stručnoj literaturi. Izračunate aproksimativne vrednosti su upoređene i sa tačnim vrednostima raspoloživosti i pokazano je da je relativna greška aproksimacije značajno manja od 1% za mreže sa linkovima čija je raspoloživost veća od 0,75.

Ključne reči: maksimalna raspoloživost, telekomunikacione mreže, aproksimacija

Naučna oblast: Elektrotehnika

Uža naučna oblast: Telekomunikacije

UDK broj: 621.3

Title:

*Availability Assessment of Complex Communication Networks by Method of  
Linear Segment Approximation*

Abstract:

*The development of modern society is largely based on high-quality telecommunications networks. In this regard, it is of great importance to telecommunication networks have high availability which achieves high availability of services used by end users. Today, the backbone networks are usually implemented with a large number of nodes (several dozen) why there is a problem to directly calculate the availability of such networks, since the execution time of algorithms for exact calculation of availability increase exponentially with the number of nodes and links. Therefore, it is of great practical importance of the use of approximation algorithms during the design of such networks to help in the definition of initial conditions for the design of the network topology. The aim of this PhD thesis is the introduction of a new method for approximate calculation of the maximum availability of complex telecommunications networks.*

*In order to obtain the maximum values of the availability, it was developed a method of network synthesis. Starting network topology for this new method is a chain. In determining the maximum network availability, the first step of the synthesis is to form the ring and then continue adding one-by-one links in the network topology so that it delivers a maximum increase of all-terminal availability. By adding one link at a time, where all links have the same availability, perform the synthesis of the network in which each step has a maximum availability for a given number of nodes, links, and the availability of links.*

*The approximation functions of the maximum network availability for a given number of nodes, links and the availability of links are obtained by the analysis of the results of network synthesis method for the networks with maximum availability. Limits of the availability of the network (which depends of the network topology) can be calculated based on the approximation functions. In addition, based on the approximation functions can be defined the boundaries in which they need to move a number of links to be able to get the desired availability of appropriate choice of the network topology. It*

*has been shown that for maximum availability of the network, all nodes should have the same connectivity, or differs by one at most. Starting from this rule and knowing predetermined limit on the number of links in the network, the network design process can be done in a few iterations to get to the network topology that ensures the requested availability.*

*Running time, of approximation functions defined within this dissertation, does not depend on network size. This allows a large number of calculations which allows analysis of a large number of combinations of input parameters. It is shown that approximation functions, defined within the thesis, are more accurate than the functions that have been published in the literature. Calculated approximate values are compared with the exact values of availability and it is shown that the relative error of approximation is significantly less than 1% for the networks whose links have the availability greater than 0,75.*

*Keywords: maximum availability, telecommunication networks, approximation*

*Scientific Field: Electrical Engineering*

*Major: Telecommunications*

*UDK number: 621.3*



## Sadržaj

1	Uvod .....	1
2	Raspoloživost složenih mreža .....	5
2.1	Metrike za ocenu raspoloživosti .....	7
2.2	Algoritmi i modeli koji se koriste za egzaktno izračunavanje raspoloživosti ...	9
2.2.1	Algoritmi za izračunavanje raspoloživosti .....	9
2.2.1.1	Raspoloživost u slučaju redne veze blokova.....	11
2.2.1.2	Raspoloživost u slučaju paralelne veze blokova.....	11
2.2.1.3	Određivanje raspoloživosti metodom rastavljanja .....	13
2.2.1.4	<i>All-terminal Graph-reduction</i> algoritam sa idealnim čvorovima ....	16
2.2.1.5	<i>All-terminal</i> raspoloživost mreže sa neidealnim čvorovima.....	18
2.2.1.6	Dvo-terminalni <i>Graph-reduction</i> algoritam sa idealnim čvorovima	19
2.3	Raspoloživost linkova.....	20
2.4	Softver za računanje raspoloživosti mreža .....	27
3	Pregled radova iz oblasti raspoloživosti mreža .....	28
3.1	Rani radovi iz oblasti računanja raspoloživosti mreža .....	28
3.2	Metode za tačno izračunavanje raspoloživosti složenih mreža .....	29
3.3	Aproksimativni algoritmi za izračunavanje raspoloživosti mreža.....	33
3.4	Računanje aproksimativnih vrednosti raspoloživosti mreža primenom simulacionih metoda.....	43
3.5	Posmatranje raspoloživost mrežne topologije preko posrednih parametara....	49
3.6	Zaključak .....	56
4	Funkcija aproksimacije maksimalne raspoloživosti.....	61
4.1	Metoda sinteze mreže .....	62
4.2	Prelomne tačke kod određivanja maksimalnih raspoloživosti.....	69
4.3	Linearna segmentna aproksimacija između prelomnih tačaka .....	72
4.4	Aproksimacija raspoloživosti u prelomnim tačkama za parno N .....	77
4.4.1	Određivanje parametara funkcije $f(N,A,L)$ .....	80
4.4.2	Aproksimativne funkcije parametara $k_1$ i $k_2$ .....	83
4.5	Aproksimacija raspoloživosti u prelomnim tačkama za neparno N .....	89
4.6	Funkcija aproksimacije za $L/N \leq 2$ i $A \geq 0,9$ .....	91
4.7	Analiza tačnosti funkcije aproksimacije .....	93
4.8	Sinteza telekomunikacionih mreža sa različitim raspoloživostima linkova ..	108
4.8.1	Različite raspoloživosti linkova.....	111
4.8.2	Cene i različite raspoloživosti linkova.....	116
5	Praktična upotreba dobijenih rezultata .....	123
5.1	Primer upotrebe kod projektovanja telekomunikacione mreže Elektroprivrede Srbije.....	124
6	Zaključak .....	130
7	Literatura .....	133
8	Prilog 1 – Numerički rezultati korišćeni u radu predstavljeni grafički .....	143
9	Prilog 2 – Numerički rezultati korišćeni u radu predstavljeni tabelarno .....	151
10	Prilog 3 – Funkcije aproksimacije maksimalne raspoloživosti mreže .....	172
11	Prilog 4 – Izjava o autorstvu.....	174
12	Prilog 5 – Izjava o istovetnosti štampane i elektronske verzije doktorskog rada.	175
13	Prilog 6 – Izjava o korišćenju.....	176

# 1 Uvod

Razvoj modernog društva se u velikoj meri zasniva na kvalitetnim komunikacijama. U tom smislu, od velike je važnosti da telekomunikacione mreže imaju visoku raspoloživost čime se može postići i visoka raspoloživost servisa koje koriste krajnji korisnici. U prošlosti su se okosnice telekomunikacionih mreža najčešće realizovale sa nekoliko čvorova za koje je bilo moguće precizno izračunati raspoloživost. Međutim, danas se okosnice mreža realizuju sa više desetina, pa čak do reda stotine čvorova. U ovakvim složenim slučajevima nije jednostavno direktno izračunati raspoloživost mreže s obzirom na činjenicu da, kada se primenjuju algoritmi za tačno proračunavanje raspoloživosti, vreme izračunavanja raste eksponencijalno sa brojem čvorova u mreži. Iz tog razloga, u praksi se koriste aproksimativne metode za procenu raspoloživosti. Ako se definiše aproksimativna metoda koja bi obezbedila brzu i dovoljno preciznu procenu raspoloživosti složenih mreža, omogućilo bi se da se u toku procesa projektovanja mreža izabere optimalno rešenje sa stanovišta broja potrebnih linkova, pa samim tim i troškova realizacije. Cilj doktorske disertacije je uvođenje novog metoda za aproksimaciju raspoloživosti složenih telekomunikacionih mreža.

Problem izračunavanje raspoloživosti složenih mreža nije nov i do sada je objavljeno dosta radova koji se bave rešavanjem ovog problema. Pristup rešavanju problema je bio dvojak. Jedan pravac rešavanja se svodio na korišćenje simulacionih metoda koje su, u zavisnosti od trajanja simulacije (koje nije bilo malo), davale tačniji ili manje tačan rezultat. Drugi pristup se bazirao na dobijanju analitičkih izraza ne preterano velike tačnosti čije je vreme izvršavanja zavisilo, u najboljem slučaju, linearno od broja čvorova i linkova u mreži (kod metoda za tačno izračunavanje ta zavisnosti je eksponencijalna). Po pravilu, tačnost i brzina predloženih rešenja je davana za mreže sa 12 do 20 čvorova i 30-tak linkova. Navedeno stanje u ovoj oblasti ostavlja prostora za dalji istraživački rad u cilju dobijanja aproksimativnih funkcija koji direktno (vreme izvršavanja ne zavisi od veličine mreže već samo od broja čvorova i linkova i raspoloživosti linkova) daju aproksimativnu vrednosti raspoloživosti mreže zadovoljavajuće tačnosti. Ovde se pod zadovoljavajućom tačnošću podrazumeva tačnost koja je barem za jedan red veličine veća od tražene raspoloživosti mreže.

Predmet istraživanja je analiza zakonitosti u pogledu promene *all-terminal* raspoloživosti okosnice mreže u zavisnosti od mrežne topologije i stepena povezanosti čvorova u mreži, raspoloživosti komunikacionih linkova i broja mrežnih čvorova, a u cilju dobijanja aproksimativnih funkcija za izračunavanje raspoloživosti mreže. Izabrana je *all-terminal* raspoloživost mreže za posmatranje jer ona najviše odgovara potrebnoj raspoloživosti okosnice mreže gde je svaki čvor podjednako važan za funkcionisanje celokupne mreže. Analizom rezultata proračuna raspoloživosti različitih manje složenih mrežnih topologija definisane su opšte zakonitosti promene raspoloživosti. Na osnovu definisanih opštih zakonitosti promene raspoloživosti kreiran je model za procenu raspoloživosti složenijih mrežnih topologija. Posmatrana je maksimalna moguća *all-terminal* raspoloživost\* mreže za dati broj čvorova i linkova i poznatu raspoloživost linkova, uz ograničenje da svi linkovi imaju istu raspoloživost, a u zavisnosti od topologije mreže. Analizirani su i slučajevi kada se koriste i stvarne raspoloživosti linkova, koje se minimalno razlikuju u zavisnosti od dužine linkova, kao i uticaj optimizacije cene realizacije na moguću topologiju mreže.

Analiza rezultata proračuna maksimalne raspoloživosti mreže pokazala je približno linearnu promenu, po segmentima (na grafiku zavisnosti raspoloživosti od broja linkova gde se raspoloživost linkova uzima kao parametar), u zavisnosti od broja linkova u mreži. Ovakva zavisnost je uočena za sve testirane vrednosti raspoloživosti linkova i broja čvorova u mreži. Zbog toga je model za aproksimaciju maksimalne raspoloživosti mreže baziran na linearnoj aproksimaciji raspoloživosti po segmentima krive koja predstavlja promenu maksimalno moguće raspoloživosti u zavisnosti od broja linkova.

Sve analize, u cilju dobijanja funkcija aproksimacije, su rađene uz pretpostavku da se u mreži nalaze idealni čvorovi i da svi linkovi imaju istu raspoloživost. Pod idealnim čvorom se podrazumeva čvor u mreži koji nikada ne može da prestane sa radom, tj. da prestane da prosleđuje saobraćaj i čija je raspoloživost jednaka 1. Ovakva pretpostavka je uobičajena kada je cilj analize posmatrati uticaj topologije mreže na njenu raspoloživost. Uvođenje pretpostavke o istoj raspoloživosti svih linkova je takođe uobičajeno kod posmatranja uticaja topogije mreže na njenu raspoloživosti. Komunikacioni linkovi se sastoje od medijuma za prenos informacija i terminalnih uređaja. U današnje vreme, okosnice komunikacionih mreža se, po pravilu, grade

---

\* U daljem tekstu, ako drugačije nije naglašeno, posmatra se *all-terminal* raspoloživost.

korišćenjem optičkih kablova. Tehnologija proizvodnje optičkih kablova je napredovala do nivoa da se može reći da se karakteristike optičkih kablova ne degradiraju značajnije sa protokom vremena. To nas dovodi do toga da veliki uticaj na raspoloživost komunikacionog linka ima terminalna oprema. U tom slučaju, za potrebe aproksimativnog posmatranja problema, može se usvojiti pretpostavka da svi linkovi imaju istu raspoloživost.

Na osnovu dobijenih rezultata i analiza, definisane su funkcije aproksimacije maksimalne raspoloživosti mreže u zavisnosti od broja čvorova, broja linkova i raspoloživosti linkova. Forma funkcija aproksimacija je takva da vreme potrebno za njihovo izvršavanje ne zavisi od broja čvorova i linkova u mreži što predstavlja napredak u odnosu na do sada poznate funkcije aproksimacije raspoloživosti mreža.

Rezultati prethodnih analiza iskorišćeni su za definisanje opštih smernica za projektovanje složenih komunikacionih mreža sa više desetina, odnosno više stotina čvorova u mreži, a u cilju dobijanja mreža visoke raspoloživosti.

Na početku rada dat je pregled, kao i komparativna analiza postojećih metoda za aproksimativni proračun raspoloživosti složenih telekomunikacionih mreža. Tom prilikom se težište stavlja na tačnost postojećih metoda, kao i na njihovu složenost. Potom je dat opis razvijenog softvera koji je korišćen za tačno izračunavanje raspoloživosti mreže metodom rastavljanja. Pomoću razvijenog softvera izvršena je analiza maksimalnih mogućih vrednosti raspoloživosti različitih mrežnih topologija (do veličina mreže za koju je moguće izračunati tačnu raspoloživost u razumnom intervalu vremena). Daljim razvojem softvera omogućena je inkrementalna analiza promene raspoloživosti. Osnovna ideja je da se krene od jednostavne mrežne topologije i da se ona dalje širi izborom linka za proširenja na osnovu nekog kriterijuma. Prvi kriterijum koji je korišćen u analizi bio je da dodavanje novog linka do najvećeg porasta raspoloživost cele mreže. U drugoj analizi je kao kriterijum korišćena funkcija koja je uzimala u obzir i cenu realizacije linka, sa ciljem da se dobije što veća raspoloživost mreže uz što nižu cenu realizacije. Analizom dobijenih rezultata predložen je nov metod procene maksimalne raspoloživosti mrežne topologije koji je nazvan metoda segmentne linearne aproksimacije i daje aproksimativne vrednosti raspoloživosti u zavisnosti od broja čvorova i linkova i raspoloživosti linkova u mreži. Pored toga, praćenjem i analizom načina proširenja mrežne topologije, dobijeni su opšti zaključci o načinu projektovanja složenih mreža.

Primenom dobijenih aproksimativnih funkcija za maksimalnu raspoloživost mreže sa zadatim brojem čvorova, linkova i raspoloživosti linkova, mogu se izračunati granične vrednosti u okvirima kojih će se nalaziti raspoloživost bilo koje mrežne topologije zadatih parametara. Određivanje navedenih graničnih vrednosti olakšava definisanje inicijalne mrežne topologije kod projektovanja mreža.

Izvedeni zaključci primenjeni su i provereni u praksi za potrebe izgradnje nacionalne telekomunikacione mreže Elektroprivrede Srbije – magistralna ravan što je dato u poglavlju 5 Doktorske disertacije.

Ciljevi istraživanja su:

- 1) definisanje pravila i procedura za projektovanje složenih telekomunikacionih mreža visoke raspoloživosti,
- 2) razvoj aproksimativnog modela za procenu maksimalne raspoloživosti složenih telekomunikacionih mreža.

Osnovni doprinosi Doktorske disertacije su:

- Razvoj aproksimativne funkcije na bazi linearne segmentne aproksimacije za izračunavanje **maksimalno** mogućih vrednosti raspoloživosti mreže sa zadatim parametrima broja čvorova, broja linkova i raspoloživosti linkova.
- Definisanje pravila projektovanja topologije mreže sa više desetina čvorova koja obezbeđuju da projektovana mreža ima visoku raspoloživost.

## 2 Raspoloživost složenih mreža

Pojam „raspoloživost“ koristi se za popravljive mreže (mreže kod kojih može doći do kvara koji se može otkloniti posle nekog vremena) i definiše se kao verovatnoća da u trenutku  $t$  mreža radi, tj. da je moguće uspostaviti komunikaciju između čvorova u mreži. U zavisnosti od toga između kojih čvorova u mreži se uspostavlja komunikacija, razlikuje se dvo-terminalna,  $k$ -terminalna i *all-terminal* raspoloživost. Za razliku od raspoloživosti, pouzdanost (najčešće se obeležava sa  $R(t)$  od engleske reči *reliability*) se definiše kao verovatnoća da između 0 i  $t$  nema kvara mreže. Oznaka koja se najčešće koristi za raspoloživost je  $A(t)$  (od engleske reči *availability*) i ona predstavlja verovatnoću unije događaja [6]:

$$A(t) = P(\text{nema otkaza u } [0, t] \& 1 \text{ otkaz i 1 popravka u } [0, t] \& 2 \text{ otkaza i 2 popravke u } [0, t] + \dots) \quad (2.1)$$

S obzirom na činjenicu da su slučajevi u prethodnom izrazu međusobno isključivi, jednačina (2.1) postaje suma verovatnoća:

$$A(t) = P(\text{nema otkaza u } [0, t]) + P(1 \text{ otkaz i 1 popravka u } [0, t]) + P(2 \text{ otkaza i 2 popravke u } [0, t]) + \dots \quad (2.2)$$

Ako se posmatraju jednačine (2.1) i (2.2), može se konstatovati sledeće:

- prvi izraz u jednačini (2.2) predstavlja pouzdanost,  $R(t)$ ;
- u trenutku  $t = 0$  važi da je  $A(t) = R(t) = 1$ ;
- Za  $t > 0$ , uvek važi da je  $A(t) > R(t)$  (direktno sledi iz jednačine (2.2));
- Pouzdanost  $R(t) \rightarrow 0$  kada  $t \rightarrow \infty$ ;
- Za razliku od pouzdanosti, raspoloživost  $A(t) \rightarrow A_{ss}$  kada  $t \rightarrow \infty$  i dokle god postoji mogućnost popravke sistema nakon kvara, važi da je  $A_{ss} > 0$  (pokazano u [1]).

Ako su intenzitet otkaza -  $\lambda$ , i intenzitet popravke -  $\mu$ , konstantne veličine, srednje vreme između dva kvara (MTBF – *Mean Time Between Failure*) se može odrediti na sledeći način:

$$\text{MTBF} = \frac{1}{\lambda} \quad (2.3)$$

Na isti način se uvodi i srednje vreme popravke (MTTR – *Mean Time To Repair*) kao:

$$\text{MTTR} = \frac{1}{\mu} \quad (2.4)$$

Pod prethodno definisanim uslovima, asimptotska vrednost raspoloživosti  $A_{ss}$  definiše se kao [6]:

$$A_{ss} = \frac{\mu}{\mu + \lambda} = \frac{\text{MTBF}}{\text{MTBF} + \text{MTTR}} \quad (2.5)$$

gde je  $\mu$  intenzitet popravki, a  $\lambda$  intenzitet otkaza.

Alternativna definicija za MTTR i MTBF data u [2] dovodi do izraza koji je ekvivalentan izrazu (2.5). Ako se uvede  $U(t)$  kao vreme koje je mreža bila operativna i  $D(t)$  kao vreme kada mreža nije radila, tada se asimptotska vrednost raspoloživosti može definisati kao:

$$A(t) = \frac{U(t)}{U(t) + D(t)} \quad (2.6)$$

Izraz (2.6) je daleko najpogodniji za korišćenje kod mreža i sistema\*, koji su u funkciji, da se odredi njihova raspoloživost. U slučaju projektovanja mreža, potrebni su alati pomoću kojih će se proceniti raspoloživost mreže koja još nije izgrađena, već postoji samo na papiru. U navedenom slučaju definicija data u izrazu (2.6) ne pomaže,

---

\* S obzirom da se raspoloživost mreža i sistema izračunava na isti način, u okviru Doktorske disertacije ova dva termina će se koristiti kao sinonimi.

jer nije moguće odrediti  $U(t)$  i  $D(t)$ , već su potrebne neke druge metode i algoritmi za izračunavanje raspoloživosti. Jedna od tih definicija je data i izrazom (2.5), jer procenjene vrednosti MTBF i MTTR mogu biti poznate i pre nego što će mreža biti izgrađena.

## 2.1 Metrike za ocenu raspoloživosti

Tokom projektovanja novih mreža i sistema potrebno je u nekom trenutku odrediti raspoloživost predloženog rešenja. U tu svrhu su razvijeni brojni metodi za procenu raspoloživosti mreža i sistema. Da bi se lakše definisao pojam raspoloživosti, mreža će biti predstavljena jednim grafom  $G$ . Čvorovi grafa predstavljaju čvorove mreže dok veze u grafu predstavljaju linkove mreže.

U zavisnosti od toga šta se želi posmatrati, raspoloživost se može definisati na nekoliko načina:

- **dvo-terminalna raspoloživost (2TA):** Verovatnoća da postoji putanja koja povezuje definisani startni ( $s$  - *source*) i ciljni čvor ( $t$  - *termination*) pri čemu nije od interesa da li postoji mogućnost komunikacije sa ostalim čvorovima. Ako se sa  $A_{st}$  obeleži dvo-terminalna raspoloživost za čvorove  $s$  i  $t$ , tada se  $A_{st}$  definiše kao verovatnoća  $P$  da su čvorovi  $s$  i  $t$  povezani:

$$A_{st} = P(\text{da su čvorovi } s \text{ i } t \text{ povezani}) \quad (2.7)$$

- **$k$ -terminalna raspoloživost (kTA):** Verovatnoća da postoje putanje između definisanih  $k$  čvorova. Drugim rečima, u grafu  $G$ , koji opisuje mrežu, postoje veze koje povezuju najmanje  $k$  definisanih čvorova. Ako se sa  $A_k$  obeleži  $k$ -terminalna raspoloživost tada je:

$$A_k = P(\text{da je izabranih } k \text{ čvorova povezano}) \quad (2.8)$$

- ***all-terminal availability* (ATA):** Verovatnoća da su svi čvorovi povezani, tj. verovatnoća da postoji skup veza u grafu  $G$  koje povezuju sve čvorove.



Izbor tipa raspoloživosti koja se posmatra zavisi u velikoj meri od potreba koje projektovana mreža treba da zadovolji. Čak je za različite delove mreže moguće posmatrati različite tipove raspoloživosti. Dvo-terminalna raspoloživost se, po pravilu, koristi kada je bitno da se obezbedi komunikacija između dve određene tačke. Na primer, ako korisnik od telekomunikacionog operatora iznajmi komunikacioni kanal da poveže svoje dve lokacije, tada se posmatra dvo-terminalna raspoloživost jer korisnika ne zanima ostatak mreže. U navedenoj situaciji, čvorovi u mreži na koje korisnik nije direktno povezan imaju samo funkciju da proslede saobraćaj ka odredištu i zbog toga se često nazivaju *relay* čvorovi.

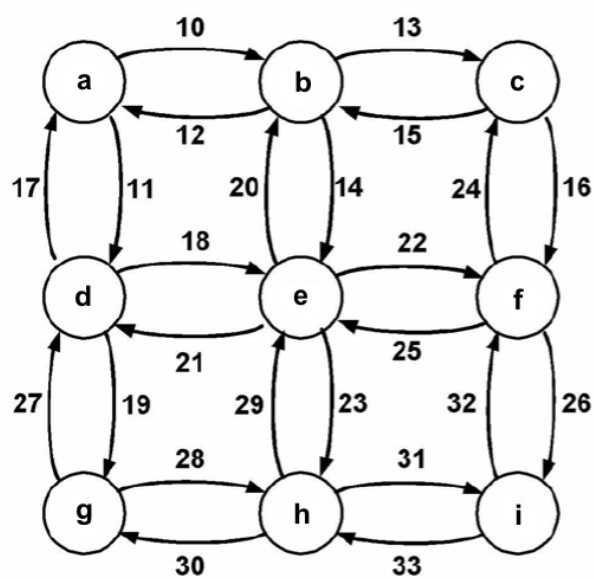
$K$ -terminalna raspoloživost se posmatra kada postoji  $k < n$  čvorova ( $n$  je ukupan broj čvorova u mreži) za koje mreža teži da obezbedi međusobnu povezanost. Jedan primer kada se posmatra  $k$ -terminalna raspoloživost predstavljaju vojne mobilne bežične mreže. Kod ovog tipa mreža ima veći broj čvorova nego što je neophodno da bi se obezbedila povezanost za  $k$  određenih čvorova. U tom smislu, dodatni čvorovi (koji ne pripadaju grupi od  $k$  unapred definisanih čvorova) mogu u toku vremena iz nekog razloga da ispadnu iz upotrebe. Pošto nisu od primarne važnosti, mogu se posmatrati kao obični *relay* čvorovi čija je primarna funkcija međusobno povezivanje ostalih čvorova (iz grupe definisanih  $k$  čvorova) u mreži [3].

Kod određivanja *all-terminal* raspoloživosti postavljaju se najstrožiji zahtevi po pitanju povezanosti čvorova, jer se kod ovog tipa raspoloživosti traži da svaki čvor ima vezu sa ostatkom mreže. Po pravilu, *all-terminal* raspoloživost se određuje u slučaju projektovanja okosnice mreže gde je osnovni cilj da svi čvorovi mreže rade i budu povezani sa ostatkom mreže.

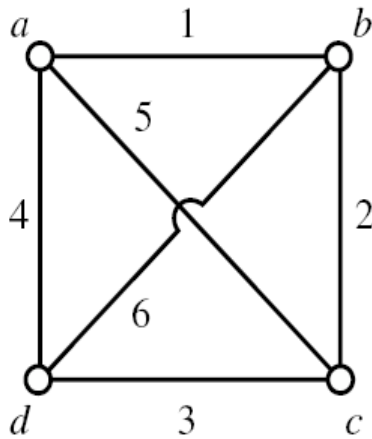
## 2.2 Algoritmi i modeli koji se koriste za egzaktno izračunavanje raspoloživosti

### 2.2.1 Algoritmi za izračunavanje raspoloživosti

Da bi mogao da se definiše algoritam za računanje raspoloživosti, neophodno je mrežu na neki način modelovati. Kao što je već rečeno u prethodnom poglavlju, za tu namenu se koriste grafovi. U nekim slučajevima linkovi u mrežama su jednosmerni (npr., neki tipovi satelitskih linkova) i tada se u grafovima koriste usmereni linkovi (Slika 2.1). Sa druge strane, češći je slučaj da su linkovi dvosmerni i tada se koriste neusmereni grafovi (Slika 2.2).



Slika 2.1 - Mrežna topologija predstavljena usmerenim grafom [4]



Slika 2.2 - Mrežna topologija predstavljena neusmerenim grafom [1]

Za računanje raspoloživosti definisano je više algoritma. Algoritmi se mogu generalno podeliti u dve grupe:

- Egzaktni algoritmi – npr., *State-space*, *graph-reduction*.
- Aproksimativni algoritmi – npr., *equivalent link*, *cut-set*, *tie-set*.

Više o ovim algoritmima dato je u [1], [2], [4] i [6], kao i u poglavlju 3 ove doktorske disertacije. Za potrebe ovog rada, u sledećim poglavljima će biti predstavljen *all-terminal Graph-reduction* algoritam (više informacija se može naći u [1], [2]). Ovaj algoritam je najčešće korišćen algoritam kada je potrebno da se tačno izračuna raspoloživost neke mreže. Radi se o rekurzivnom algoritmu koji ima eksponencijalno vreme izvršavanja u zavisnosti od broja elemenata u mreži.

Za potrebe ovog rada od interesa je da se posmatraju vremenski nezavisni dvostacionarni sistemi (dvostacionarni sistemi su sistemi koji se mogu naći u dva stanja: radno i neradno stanje). Pošto se ovi sistemi mogu opisati blokovima poznate raspoloživosti koji su međusobno povezani, u nastavku teksta biće prikazano kako se na osnovu takvog modela vrši računanje raspoloživosti celog sistema. Detaljniji opis načina izračunavanja raspoloživosti dat je u [6].

### 2.2.1.1 Raspoloživost u slučaju redne veze blokova

Ako se posmatra sistem od  $n$  blokova i ako je za ispravan rad sistema potrebno da svih  $n$  blokova ispravno radi, takav sistem se predstavlja rednom vezom tih blokova, što je predstavljeno na slici 2.3.



Slika 2.3 – Redna veza elemenata

Ako se sa  $x_i$  obeleži događaj da  $i$ -ti blok ispravno funkcioniše, tada će  $P(x_i)$  biti verovatnoća da  $i$ -ti blok ispravno radi. U tom slučaju se verovatnoća da redna veza blokova ispravno radi  $P_s$  može predstaviti sa:

$$P_s = P(x_1 \cap x_2 \cap x_3 \cap \dots \cap x_n) \quad (2.9)$$

Pod pretpostavkom da ispravno funkcionisanje pojedinačnih blokova predstavlja međusobno nezavisne događaje, izraz (2.9) postaje:

$$P_s = P(x_1) \cdot P(x_2) \cdot P(x_3) \cdot \dots \cdot P(x_n) = \prod_{i=1}^n P(x_i) \quad (2.10)$$

### 2.2.1.2 Raspoloživost u slučaju paralelne veze blokova

Ako se sistem sastoji od  $n$  blokova i ako je za ispravan rad sistema potrebno da bar jedan blok ispravno radi, takav sistem se predstavlja paralelnom vezom tih blokova, što je predstavljeno na slici 2.4.

Verovatnoća uspešnog funkcionisanja sistema  $P_s$  jednaka je verovatnoći unije događaja  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ :

$$P_s = P(x_1 \cup x_2 \cup x_3 \cup \dots \cup x_n) \quad (2.11)$$

Pošto je računanje verovatnoće unije događaja komplikovano, posmatra se ista verovatnoća izražena kroz presek događaja (čija se verovatnoća može jednostavnije izračunati). U slučaju paralelne veze blokova, sistem neće raditi samo ako svi blokovi ne rade. Pošto je sa  $x_i$  obeležen događaj da  $i$ -ti blok radi, to će sa  $\bar{x}_i$  biti obeležen događaj da  $i$ -ti blok ne radi. To znači da verovatnoća da sistem ne radi  $\bar{P}_s$  može da se predstavi sa:

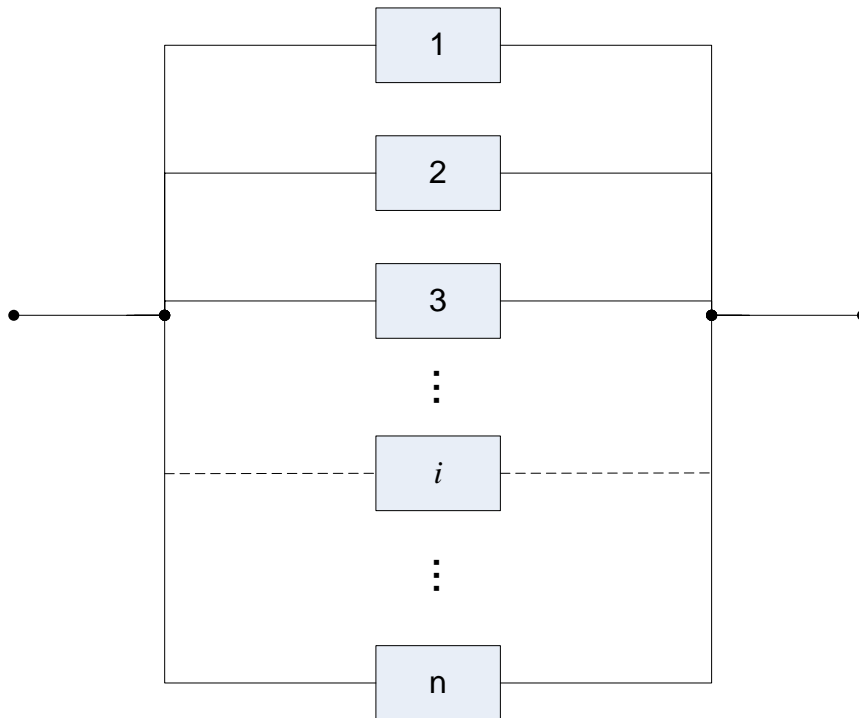
$$\bar{P}_s = P(\bar{x}_1 \cap \bar{x}_2 \cap \bar{x}_3 \cap \dots \cap \bar{x}_n) \quad (2.12)$$

Ako je poznata verovatnoća da sistem ne radi  $\bar{P}_s$ , tada se verovatnoća da sistem radi  $P_s$  dobija kao:

$$P_s = 1 - \bar{P}_s = 1 - P(\bar{x}_1 \cap \bar{x}_2 \cap \bar{x}_3 \cap \dots \cap \bar{x}_n) \quad (2.13)$$

Pod pretpostavkom da ispravno funkcionisanje pojedinačnih blokova predstavlja međusobno nezavisne događaje, izraz (2.13) postaje:

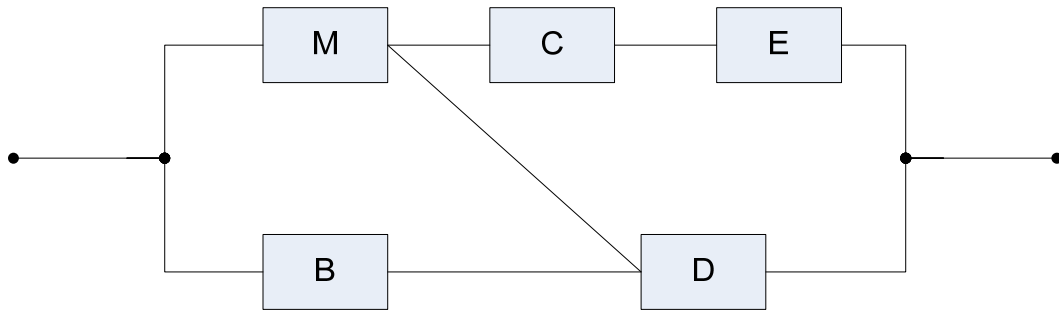
$$P_s = 1 - P(\bar{x}_1) \cdot P(\bar{x}_2) \cdot P(\bar{x}_3) \cdot \dots \cdot P(\bar{x}_n) = 1 - \prod_{i=1}^n P(\bar{x}_i) \quad (2.14)$$



Slika 2.4 – Paralelna veza blokova

### 2.2.1.3 Određivanje raspoloživosti metodom rastavljanja

U slučaju kombinovane redne i paralelne veze, sistem se prvo razloži na prostije delove gde se primenjuju prethodno opisane metode, a na osnovu dobijenih parcijalnih raspoloživosti određuje se raspoloživost celog sistema. Međutim, u nekim situacijama nije moguće primeniti navedenu metodu za izračunavanje raspoloživosti sistema i tada se primenjuje tzv. “metoda rastavljanja” (*Graph reduction algorithm*). Navedeni metod će biti objašnjen na primeru mreže koji je ilustrovan na slici 2.5.



Slika 2.5 – Složena konfiguracija mreže [6]

U primeru sa slike 2.5 nije moguće primeniti razlaganje na prostije delove koji se sastoje isključivo od redne i paralelne veze elemenata. Umesto toga, u ovom slučaju primenjuje se metoda uslovne verovatnoće [6] koja glasi:

$$P_s = \sum_{i=1}^n P(S/Z_i) \cdot P(Z_i) \quad (2.15)$$

gde  $P_s$  označava verovatnoću da sistem ispravno radi,  $S$  označava događaj da sistem ispravno radi, a  $Z_i$  su međusobno isključivi događaji, pri čemu je:

$$\sum_{i=1}^n P(Z_i) = 1 \quad (2.16)$$

Ako se u izrazu (2.15) uzme da je  $n=2$  tada se dobija:

$$P_s = P(S/Z_1) \cdot P(Z_1) + P(S/Z_2) \cdot P(Z_2) \quad (2.17)$$

gde su  $Z_1$  i  $Z_2$  međusobno isključivi događaji.

Da bi jednačina (2.17) mogla da se primeni u slučaju izračunavanja raspoloživosti za sistem sa slike 2.5, potrebno je prethodno definisati događaje  $Z_1$  i  $Z_2$ . Ako se sa  $Z_1$  obeleži događaj da je neki blok  $x$  ispravan, tada će, da bi se zadovoljio uslov o međusobnoj isključivosti, događaj  $Z_2$  biti da je taj blok  $x$  neispravan. U tom slučaju izraz (2.17) postaje:

$$P_s = P(S/x) \cdot P(x) + P(S/\bar{x}) \cdot P(\bar{x}) \quad (2.18)$$

Na isti način se može odrediti i verovatnoća da sistem ne radi:

$$\bar{P}_s = P(\bar{S}/x) \cdot P(x) + P(\bar{S}/\bar{x}) \cdot P(\bar{x}) \quad (2.19)$$

Posmatrajući sistem prikazan na slici 2.5, može se zaključiti da je najlakše primeniti teorem o uslovnoj verovatnoći u formi datoj u izrazu (2.19) tako što će se posmatrati ispravan rad bloka M. Pod datom pretpostavkom, dobija se sledeći izraz:

$$\bar{P}_s = P(\bar{S}/M) \cdot P(M) + P(\bar{S}/\bar{M}) \cdot P(\bar{M}) \quad (2.20)$$

Analizom sistema prikazanog na slici 2.5 dobijaju se izrazi za uslovne verovatnoće:

$$P(\bar{S}/M) = P(\bar{D}) \cdot [1 - P(C) \cdot P(E)] \quad (2.21)$$

$$P(\bar{S}/\bar{M}) = 1 - P(B) \cdot P(D) \quad (2.22)$$

Ako se izrazi (2.21) i (2.22) zamene u izraz (2.20), dobija se verovatnoća da sistem ne radi:

$$P_{\bar{s}} = P(\bar{D}) \cdot [1 - P(C) \cdot P(E)] \cdot P(M) + [1 - P(B) \cdot P(D)] \cdot P(\bar{M}) \quad (2.23)$$

Verovatnoća da sistem radi, tj. raspoloživost sistema, dobija se kada se izraz (2.23) oduzme od jedinice.

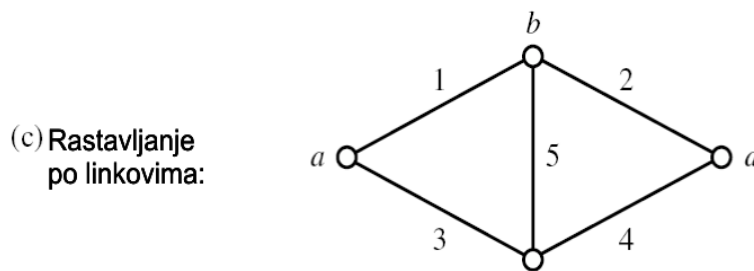
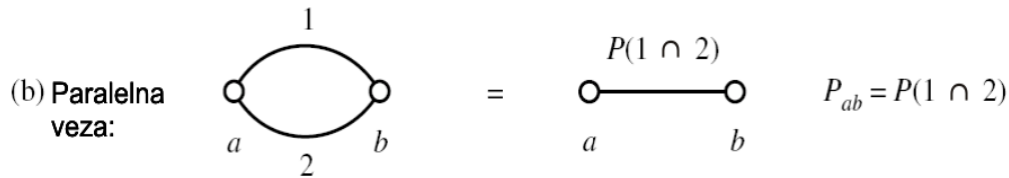
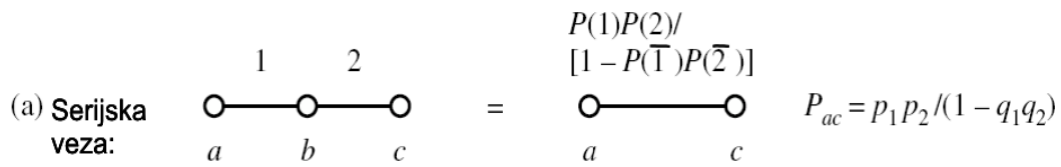
Prethodno opisanom metodom rastavljanja, složen sistem, kao što je primer dat na slici 2.5, može da se rastavi na dva jednostavnija sistema tako što će se analizirati otkaz jednog od elemenata sistema. Metoda rastavljanja je korišćena kasnije u



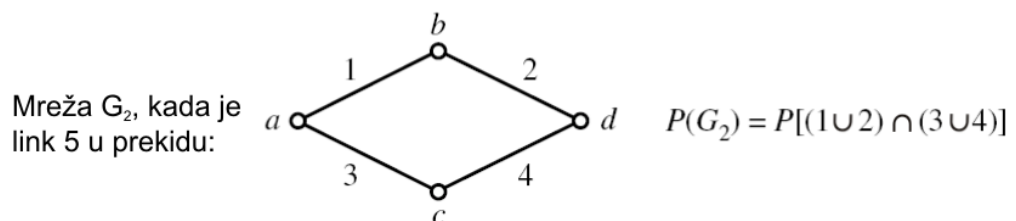
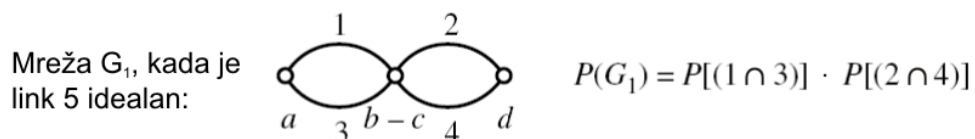
Doktorskoj disertaciji za rešavanje složenih mrežnih topologija. Više detalja o praktičnoj implementaciji ove metode dato je u radu [23].

#### **2.2.1.4 All-terminal Graph-reduction algoritam sa idealnim čvorovima**

Za potreba izračunavanja *all-terminal* raspoloživosti grafa, koriste se prethodno opisane metode. Postupak transformacije grafa se svodi na transformacije svih mogućih rednih i paralelnih veza. Kada više nema rednih i paralelnih veza elemenata za transformaciju, primenjuje se metoda rastavljanja za uprošćavanje grafa. Na dalje se ceo ovaj postupak obavlja rekurzivno sve dok se graf ne svede na jednu ekvivalentnu granu. Raspoloživost svake mrežne topologije može se izračunati koristeći tri transformacije prikazane na slici 2.6. Kod transformacije paralelne veze i rastavljanja po linkovima, broj čvorova se ne menja. Jedino se kod transformacije serijske veze dva linka broj čvorova smanjuje za jedan (ako se serijska veza sastoji od više serijski vezanih linkova, postupak se rekurzivno ponavlja). Postavlja se pitanje na koji način se uticaj ovog čvora pojavljuje u mreži dobijenoj posle transformacije. Kada se posmatra transformacija serijske veze date na slici 2.6, vidi se da se u imeniocu izraza za rezultujuću verovatnoću pojavljuje dodatni član  $[1 - P(\bar{1})P(\bar{2})]$ , koji predstavlja verovatnoću da je čvor, koji se izbacuje transformacijom, povezan na mrežu. Pošto se posmatra *all-terminal* raspoloživost za mrežu sa idealnim čvorovima, jasno je da će čvor koji se izbacuje uvek biti operativan (idealni čvor) te se može izbaciti iz transformisane mreže. Uticaj na raspoloživost mreže čvora koji se izbacuje se izražava kroz dodatni član koji se pojavljuje u izrazu za rezultujuću verovatnoću. Ostale transformacije su iste kao u dvo-terminalnom slučaju, što je pokazano u [1], [7] i [8]. Takođe, za slučaj proračuna *all-terminal* raspoloživosti, kada se proces transformacije završi, mora se rezultatna verovatnoća pomnožiti sa verovatnoćom da su svi čvorovi koji su izbačeni prilikom transformisanja i dalje povezani na mrežu, što je pokazano u [1] i [8].



Rastavljanje po linku 5:  $R_{ad} = [P(5)P(G_1) + P(\bar{5})P(G_2)]$



Slika 2.6 - Transformacije koje koristi *all-terminal Graph-reduction Algoritam* [1]\*

\* Na slici 2.6 sa  $P(1)=p_1$  je obeležena verovatnoća da link 1 radi i ona iznosi  $p_1$ . Sa  $P(\bar{1})=q_1=1-p_1$  je obeležena verovatnoća da link 1 ne radi i ona iznosi  $q_1$ .

### 2.2.1.5 *All-terminal* raspoloživost mreže sa neidealnim čvorovima

U poglavlju 2.2.1.3 opisan je algoritam za računanje raspoloživosti mreže na bazi metode rastavljanja. Primenom tog algoritma, u poglavlju 2.2.1.4 opisan je način izračunavanja *all-terminal* raspoloživosti za mrežu sa idealnim čvorovima. U praksi, na žalost, čvorovi nisu idealni tako da se postavlja pitanje kako računati raspoloživost kod realnih mreža. Za rešavanje ovog problema polazi se takođe od metode rastavljanja. Ako se pođe od izraza (2.18) za uslovnu verovatnoću i primeni metoda rastavljanja na  $i$ -ti čvor u mreži, dobija se:

$$P_S = P(S / x_i) \cdot P(x_i) + P(S / \bar{x}_i) \cdot P(\bar{x}_i) \quad (2.24)$$

Pošto se posmatra *all-terminal* raspoloživost koja podrazumeva da su svi čvorovi u mreži operativni, tada je verovatnoća da mreža radi kada jedan čvor ne radi jednaka nuli, tj:

$$P(S / \bar{x}_i) = 0 \quad (2.25)$$

Primenom izraza (2.25) u (2.24) dobija se raspoloživost sistema kada se primeni metoda rastavljanja po čvoru  $x_i$ :

$$P_S = P(S / x_i) \cdot P(x_i) \quad (2.26)$$

Ako se uradi rastavljanje po svim čvorovima mreže, dolazi se do izraza za *all-terminal* raspoloživost mreže sa neidealnim čvorovima:

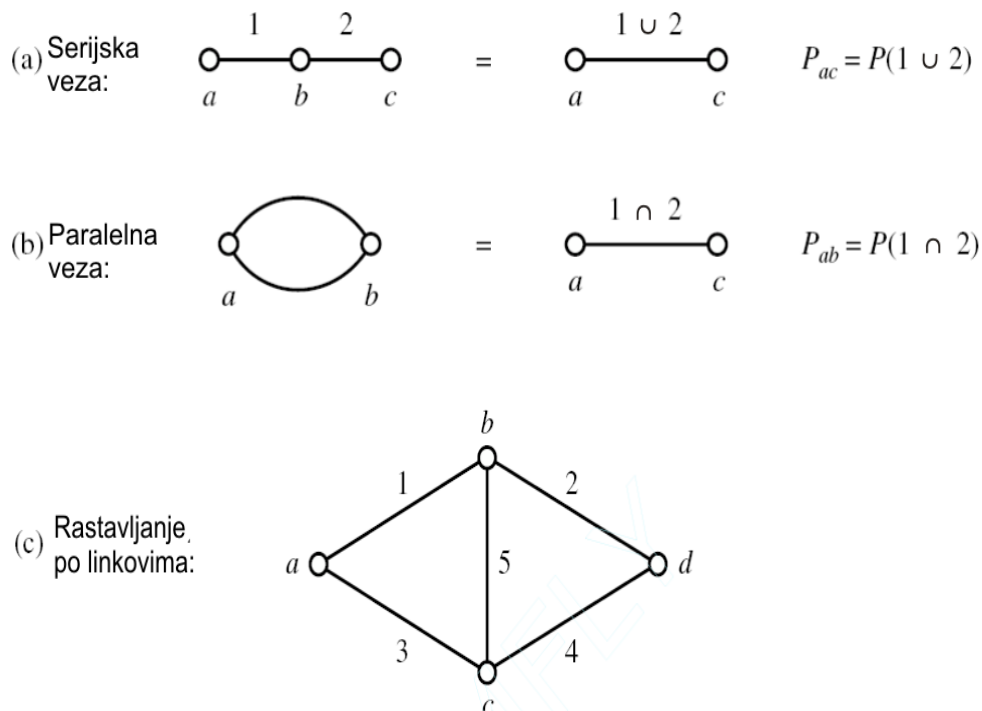
$$P_S = P(S / x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \prod_{i=1}^n P(x_i) \quad (2.27)$$

gde je  $P(S / x_1, x_2, \dots, x_n)$  verovatnoća da mreža radi kada su svi čvorovi operativni što predstavlja verovatnoću da mreža radi kada su svi čvorovi idealni. Na osnovu ovoga se

određuje *all-terminal* raspoloživost za mrežu sa neidealnim čvorovima. Pošto se proizvod raspoloživosti čvorova mreže jednostavno izračunava, problem *all-terminal* raspoloživosti mreže sa neidealnim čvorovima se svodi na određivanje *all-terminal* raspoloživosti mreže sa idealnim čvorovima.

### 2.2.1.6 Dvo-terminalni *Graph-reduction* algoritam sa idealnim čvorovima

Za računanje dvo-terminalne (*two-terminal*) raspoloživosti (raspoloživosti mreže između dva čvora koji se obeležavaju sa  $s$  i  $t$ ) koristi se algoritam koji je sličan algoritmu za računanje *all-terminal* raspoloživosti. Jedina razlika je u načinu računanja raspoloživosti ekvivalentne mreže kod transformacije redne veze. Prilikom računanja raspoloživosti redne veze ne mora se voditi računa o izbačenom čvoru, kao kod računanja *all-terminal* raspoloživosti, jer je od interesa povezivanje samo čvorova  $s$  i  $t$ , a ne i ostalih čvorova u mreži. Na slici 2.7 su ukratko prikazane osnove i ovog algoritama koji će se kasnije upotrebiti za računanje dvo-terminalne raspoloživosti.



$$\text{Rastavljanje po linku 5: } R_{ad} = [P(5)Pr(G_1) + P(\bar{5})Pr(G_2)]$$

Slika 2.7 - Transformacije koje koristi dvo-terminalni *Graph-reduction* Algoritam [1]\*

\* Na slici 2.7 sa  $P(5)$  obeležena je verovatnoća događaja da link 5 radi. Sa  $P(\bar{5})$  obeležena je verovatnoća da link 5 ne radi. Sa  $P_r(G_1)$  i  $P_r(G_2)$  su obeležene raspoloživosti mreža koje se dobijaju metodom rastavljanja kada je link 5 idealna veza, odnosno, kada je link 5 u prekidu, respektivno.

### **2.3 *Raspoloživost linkova***

Osnovni elementi svake mreže su čvorovi i linkovi. U zavisnosti od tipa mreže, u čvorovima se nalaze različiti uređaji (multiplekseri, ruteri,...), dok karakteristike linkova (sa stanovišta proračuna raspoloživosti) ne zavise od vrste opreme koja se nalazi u čvorištima mreže. Zbog toga, raspoloživost linkova može da se posmatra nezavisno od toga koja tehnologija se koristi u čvorištima mreže, tj. razmatranje raspoloživosti linka se vezuje za tip i tehnologiju linka, a ne za tehnologiju mrežnih uređaja.

Kada se govori o raspoloživosti složenih mreža, prvenstveno njihovih topologija, u cilju pojednostavljenja problema, mreža se posmatra kao skup idealnih čvorova i linkova. Pod pojmom linka ovde su podrazumeva medijum za prenos podataka (optički kabl, bakarni kabl,...) zajedno sa terminalnom opremom. Kada se link definiše na ovaj način, tada se može reći da svi linkovi imaju jednaku raspoloživost jer značajan udeo u raspoloživosti linka ima terminalna oprema koja je, po pravilu, jednaka za isti medijum za prenos podataka.

U stvarnosti to nije u potpunosti tačno pošto raspoloživost zavisi i od dužine linka, tj. raspoloživost opada sa dužinom linka. Ovakav zaključak je i logičan jer što je veća dužina linka, veća je i verovatnoća da na dužoj trasi dođe do kvara, bez obzira šta je njegov uzrok. Pored dužine linka, veliki uticaj na raspoloživost linka ima i način realizacije linka u smislu da li se radi o podzemnom kablju, podvodnom kablju, samonosivom kablju na običnom banderama, OPGW kablju na dalekovodu i slično. Postavlja se pitanje opravdanosti pretpostavke da svi linkovi u mreži imaju istu raspoloživost. Kada je cilj dobiti početnu topologiju kod dizajna mreža, tada se može posmatrati i najgori slučaj, a to bi bio slučaj da se za raspoloživost svih linkova uzme raspoloživost linka koji ima najmanju raspoloživost. Raspoloživost tako posmatrane mreže bi, kada bi se tačno računala, sigurno bila veća od raspoloživosti koja se dobija korišćenjem prethodno navedene aproksimacije, što u praksi ne predstavlja problem.

Da bi se takva aproksimacija mogla prihvatiti, svakako je potrebno odrediti koliko se menja raspoloživost linka u zavisnosti od rastojanja. Pitanje raspoloživosti linkova će se posmatrati na primeru optičkih kablova koji se najčešće koriste za realizaciju okosnica telekomunikacionih mreža.

S obzirom da na raspoloživost optičkih kablova, pa samim tim i optičkih linkova, u najvećoj meri utiče učestanost fizičkog prekida na kablovima, analize

raspoloživosti se u najvećoj meri baziraju na statističkim podacima dobijenim sa instaliranih sistema. Veličina koja se najčešće koristi za definisanje raspoloživosti optičkih kablova je K koji predstavlja broj prekida kabla na 1000 km trase po jednoj godini. U radu [9] prezentirani su rezultati merenja za K koji su dati u tabeli T-2.1.

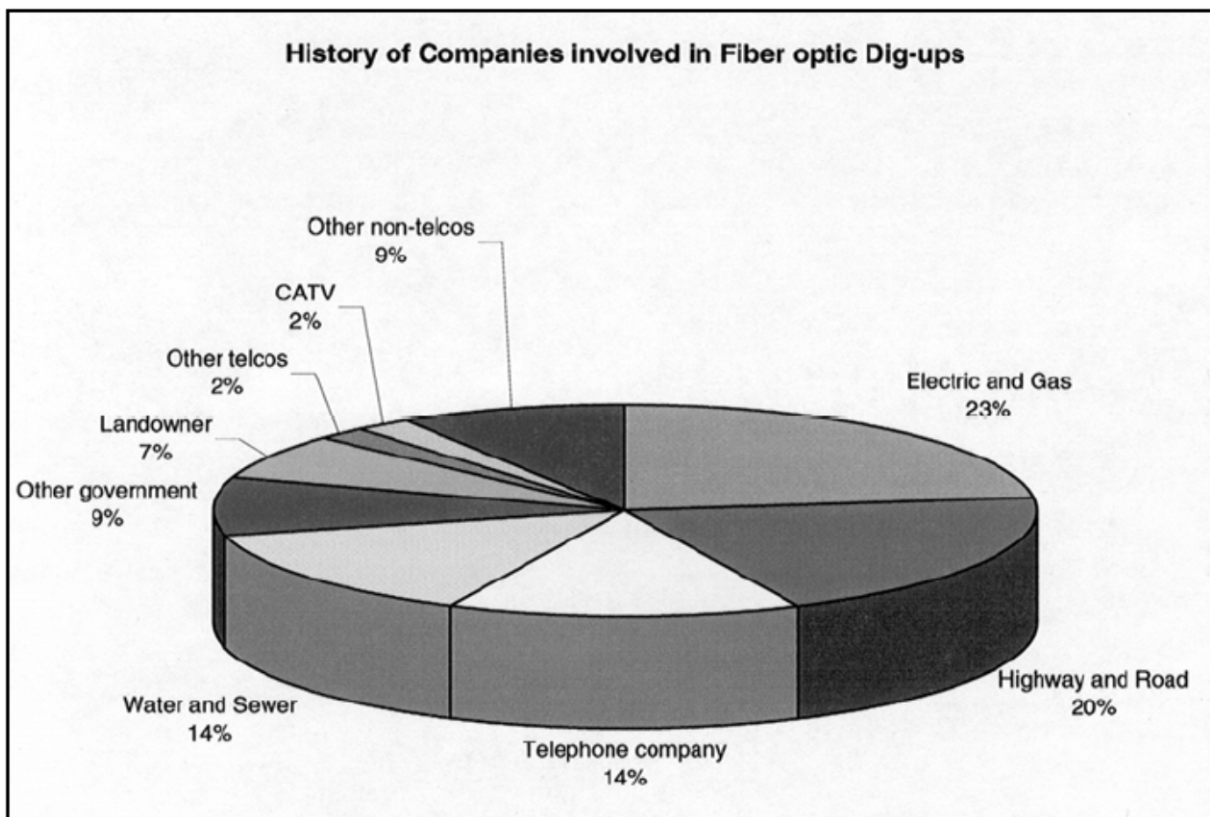
Tabela T-2.1 – Statistički određen srednji broj otkaza optičkih kablova u toku jedne god. [9]

Tip optičkog kabla	Broj otkaza – K	Izvor
Podzemni kabl	2,130	Bellcore
OPGW	0,085	Alcoa Fujikura Ltd.
ADSS	0,081	Alcoa Fujikura Ltd.

Iz tabele T-2.1 se vidi da postoji značajna razlika u broju otkaza K za podzemne kablove i kablove koji se montiraju na stubove (OPGW – *Optical Ground Wire* i ADSS – *All-Dielectric Self-Supporting*). Razlozi koji dovode do prekida optičkih kablova direktno postavljenih u zemlju dati su u tabeli T-2.2. Iz podataka u tabeli T-2.2 vidi se da je glavni razlog za otkaz podzemnog optičkog kabla kopanje na trasi kabla (u 80% slučajeva). S obzirom da je većina podzemnih kablova postavljena uz putnu infrastrukturu gde relativno često ima građevinskih radova, ovakav rezultat se mogao i očekivati. Rezultati dati u radu [9] su dobijeni za optičke kablove koji su posmatrani u vremenskom periodu eksploatacije od 12 godina, pa se mogu smatrati validnim pokazateljima raspoloživosti optičkih kablova. Na slici 2.8 dati su podaci o uzročniku prekida podzemnih optičkih kablova.

Tabela T-2.2 - Pregled statistike uzroka prekida podzemnih optičkih kablova [9]

Razlog za prekid podzemnog optičkog kabla	Broj slučajeva	Procentualno u odnosu na ukupan broj [%]
Kopanje	172	80
Glodari	11	5
Greška radnika na održavanju	5	2
Poplava	4	2
Udar groma	4	2
Sve ostalo	20	9
Ukupno:	216	100



Slika 2.8 – Uzročnici prekida podzemnih optičkih kablova zbog kopanja [9]

U slučaju OPGW kablova, ima više mogućih uzroka prekida kabla. U tabeli T-2.3 dat je pregled uzroka prekida OPGW kablova [9].

Tabela T-2.3 – Pregled statistike uzroka prekida OPGW kablova [9]

Razlog za prekid OPGW kabla	Broj slučajeva	Procentualno u odnosu na ukupan broj [%]
Udari groma	11	25
Greške u instalaciji	8	19
Vatromet	7	17
Jak vetar	6	14
Sve ostalo	10	24
Ukupno:	42	100

Kod ADSS kablova situacija je veoma slična situaciji sa OPGW kablovima. U tabeli T-2.4 dat je pregled uzroka prekida ADSS kablova [9].

Tabela T-2.4 – Pregled statistike uzroka prekida ADSS kablova [9]

Razlog za prekid ADSS kabla	Broj slučajeva	Procentualno u odnosu na ukupan broj [%]
Udari groma	11	38
Pucanj iz vatrenog oružja	8	28
Jak vetar	5	17
Sve ostalo	5	17
Ukupno:	29	100

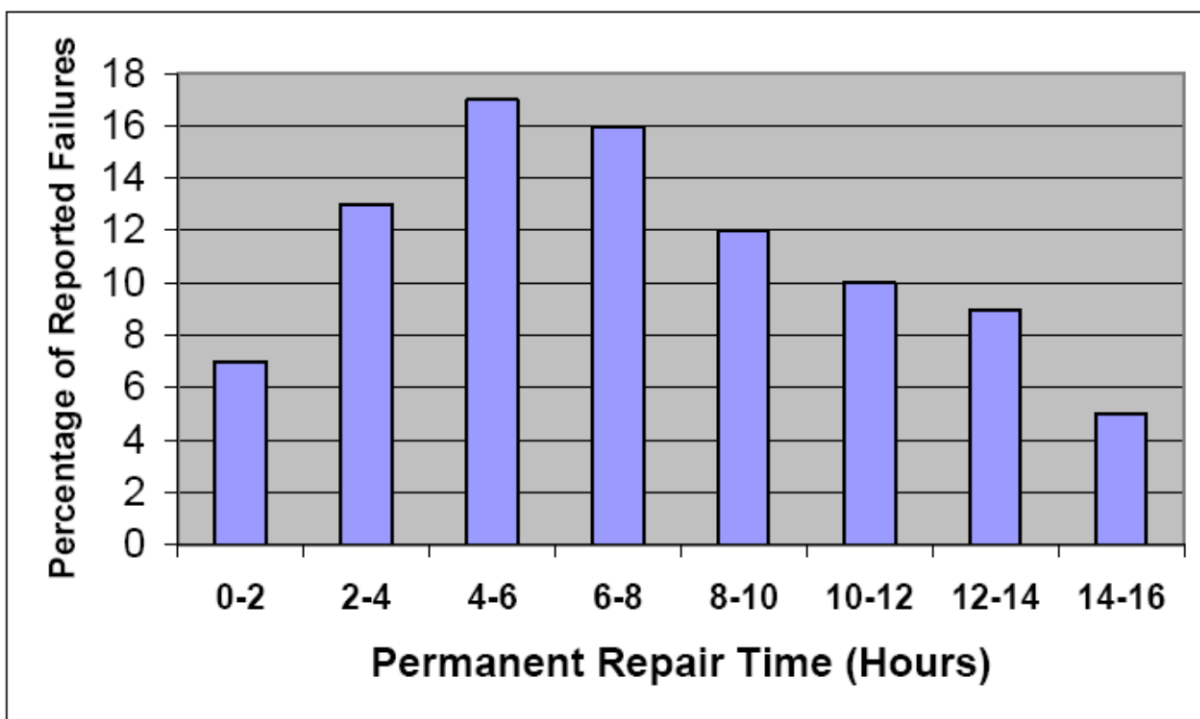
Na osnovu prethodno datih podataka može se odrediti MTBF parametar za svaki od tipova optičkih kablova. Da bi se odredila raspoloživost linka, potreban je i podatak o srednjem vremenu popravke – MTTR. U radu [9] vršena su dva tipa merenja vremena popravke i osposobljavanja servisa:

- Vreme kompletne popravke (*Time to permanent restoration*)
- Vreme oporavka servisa (*Time to restoration of service*)



U radu [9] se pod vremenom kompletne popravke podrazumeva vreme potrebno da ekipa za popravku stigne do lokacije, odredi mesto prekida, izvrši potrebne popravke koje obuhvataju i sastavljanje prekinutog optičkog kabla i ponovno postavljanje kabla na stalno mesto. Na slici 2.9 dat je histogram vremena kompletne popravke dobijen na osnovu 233 popravke kablova [9]. Na osnovu ovih podataka je dobijeno da je srednje vreme kompletne popravke 13,8 časova dok je vrednost medijane za ovaj parametar 8 časova.

Pod pojmom “vreme oporavka servisa” u radu [9] uzima se vreme da se instalira privremeni kabl i da se poveže sa postojećim kablom. Imajući u vidu ova dva vremena, po pravilu, vreme oporavka servisa je značajno kraće od vremena kompletne popravke. Na slici 2.10 dat je histogram vremena oporavka servisa za podzemne optičke kablove [9].



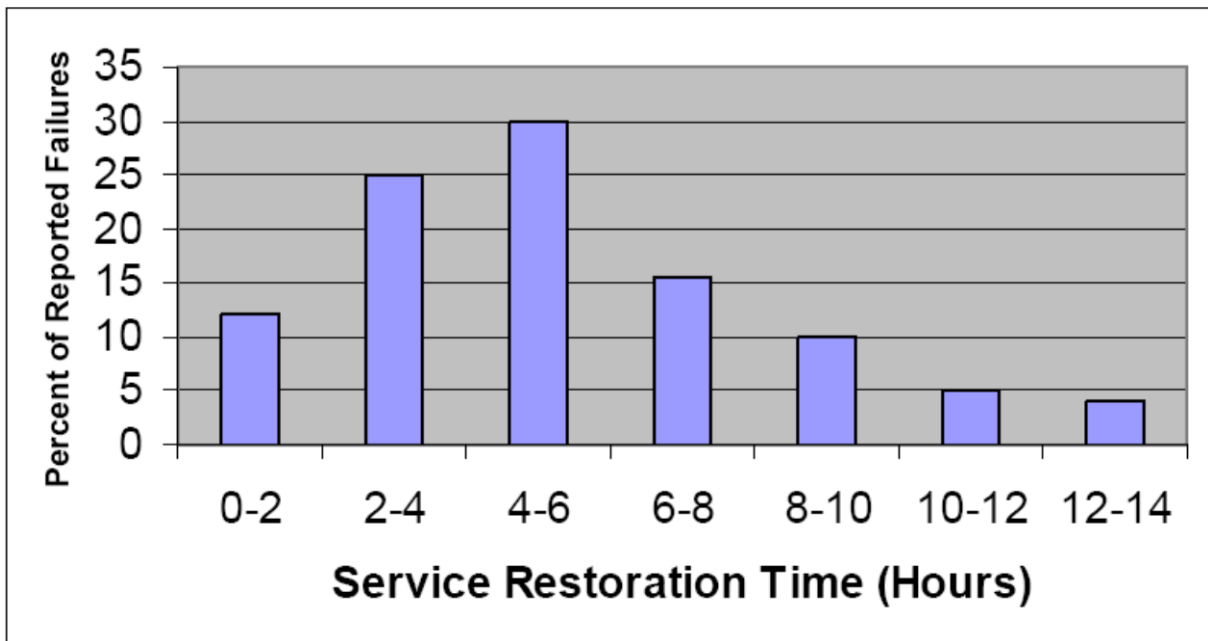
Slika 2.9 – Histogram vremena kompletne popravke optičkog kabla [9]

Da bi se odredila raspoloživost linka, polazi se od izraza (2.5). Na osnovu prethodno iznetih podataka usvojeno je da je  $MTTR=13,8$  časova. Što se tiče vrednosti  $MTBF$ , ona zavisi od parametra  $K$  i dužine linka i data je sledećim izrazom:

$$MTBF = \frac{365 * 24}{K * \frac{L}{1000}} = \frac{8760 * 1000}{K * L} \quad (2.28)$$

gde je:  $L$  – dužina linka data u kilometrima,

$K$  – broj otkaza za korišćeni tip kabla, dat u tabeli T-2.1.



Slika 2.10 – Histogram vremena oporavka servisa (izvor [9])

Polazeći od izraza (2.23) za MTBF, vrednosti MTTR=13,8 časova i formule (2.5) za izračunavanje raspoloživosti, dobija se izraz (2.29) za određivanje raspoloživosti linka za koji je poznata dužina i tip kabla (OPGW, ADSS ili podzemni optički kabl).

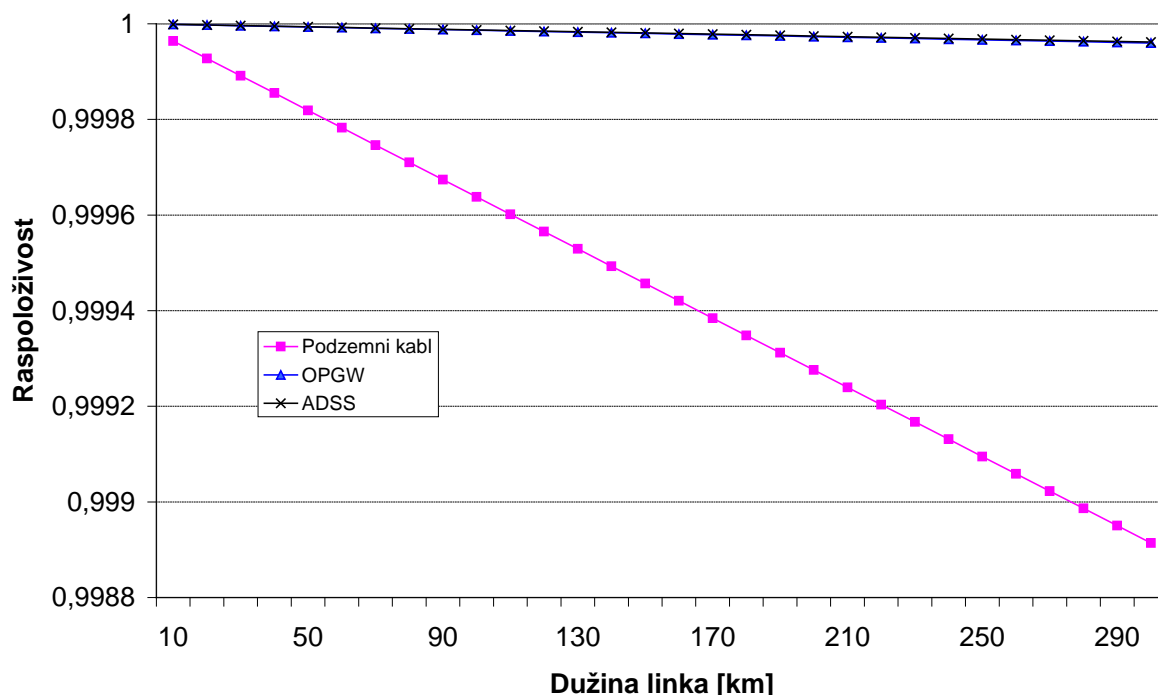
$$A = \frac{1}{1 + \frac{13.8 * K * L}{365 * 24 * 1000}} = \frac{1}{1 + \frac{13.8 * K * L}{8760000}} \quad (2.29)$$

gde je:

$K$  – broj otkaza za tip kabla, dat je u tabeli T-2.1,

$L$  – dužina optičkog kabla izražena u km.

Polazeći od izraza (2.29) dobijen je grafik promene raspoloživosti linka u zavisnosti od dužine za tri različita tipa optičkih linkova i predstavljen je na slici 2.11.



Slika 2.11 – Promena raspoloživosti linka u zavisnosti od rastojanja za različite tipove optičkih linkova

Na osnovu podataka predstavljenih na grafiku na slici 2.11 može se konstatovati da je aproksimacija raspoloživosti optičkog linka konstantnom vrednošću za OPGW i ADSS tipove optičkih kablova opravdana. U slučaju podzemnih optičkih kablova, zbog relativno velikog faktora  $K$ , ovakva aproksimacija je nepovoljnija, posebno za velike dužine linkova (preko 50 km). Pošto u praksi optički linkovi najčešće imaju dužinu više desetina kilometara, aproksimacija raspoloživosti konstantnom vrednošću čak i u ovom slučaju se može prihvatiti, iako je takva aproksimacija manje tačna nego kod OPGW i ADSS tipova optičkih kablova.

## **2.4 Softver za računanje raspoloživosti mreža**

Za potrebe ovog rada implementiran je algoritam za proračun raspoloživosti mreža po metodi rastavljanja [23] koja je opisana u poglavlju 2.2.1.3. Pored osnovnog softverskog modula koji računa raspoloživost proizvoljne mrežne topologije sa idealnim čvorovima, razvijen je i softverski modul koji određuje maksimalnu raspoloživost mreže primenom metode sinteze koja će biti kasnije opisana u poglavlju 4.1. Softverski modul za izračunavanje maksimalne raspoloživosti koristi modul za računanje raspoloživosti mreže. Oba softverska modula su implementirana da obezbede računanje sa tačnošću od 30 cifara. Ovo je jako bitno s obzirom da se proračuni vrše sa brojevima koji su veoma bliski što može da dovede do numerički nestabilnog problema u situacijama kada je tačnost računanja mala (tipično 8 do 10 cifara).

Osnovni softverski modul koji izračunava raspoloživost zadate mrežne topologije razvijen je u JAVA programskom jeziku, a prema metodi opisanoj u poglavlju 2.2.1.3. Takvo rešenje je omogućilo da se osnovni programski modul za računanje raspoloživosti mrežne topologije može pokretati na proizvoljnoj platformi (Windows, Linux). Za potrebe ostalih analiza koje su rađene razvijeni su dodatni softveski paketi u programskom jeziku C++ koji su spremali ulazne podatke i pokretali osnovni paket za računanje raspoloživosti mreže.

Razvijeni su moduli koji vrše sintezu mreže po kriterijumu maksimalne raspoloživosti (opisana u poglavlju 4.1).

Obrade dobijenih rezultata su vršene u programskim paketima Excel i Matlab.

### 3 Pregled radova iz oblasti raspoloživosti mreža

#### 3.1 Rani radovi iz oblasti računanja raspoloživosti mreža

Pitanje raspoloživosti telekomunikacionih mreža nije novijeg datuma. Već sa pojavom prvih telekomunikacionih mreža postavljalo pitanje kolika je raspoloživost same mreže i servisa koji se koriste. Još je *Demercado* u svom radu [10] postavio pitanje raspoloživosti mrežne topologije i cene realizacije mreže. Iz teorije je poznato da tzv. *full-meshed* topologije imaju maksimalne raspoloživosti (naravno, uz osnovnu pretpostavku da se ne uvode paralelni linkovi između istih čvorišta). Međutim, cena realizacije takvih mrežnih topologija je najčešće toliko visoka da ne opravdava navedena ulaganja. Zbog toga se pristupilo razvoju algoritama i metoda optimizacije koji bi obezbedili da se prilikom dizajniranja mreža odredi takva topologija mreže koja će obezbediti minimalno potrebnu raspoloživost mreže uz ulaganja koja se mogu opravdati.

U početnim radovima na ovu temu, polazilo se od prostog multipliciranja elemenata, tj. postavljanja više elemenata u paralelni rad. Takav slučaj je prezentirao *Jensen* [11] koji je razmatrao multipliciranje elemenata u mreži sa 7 elemenata. Tadašnji računari (1969. godina) nisu dozvolili izradu proračuna za složenije mreže. Već tada je sagledano da je problem eksponencijalne prirode i da se značajno usložnjava sa povećanjem broja čvorova i broja linkova. Razvoj i unapređenje računara je omogućio povećanje mreža čija se raspoloživost posmatra i izračunava. Međutim, već su ti prvi radovi [12], [13] potvrdili *Jensen*-ove rezultate. Teorijska razmatranja problema predstavljena u radovima [14], [15] i [16] su pokazala da, osim za neke specifične slučajeve, eksponencijalna složenost problema se ne može izbeći.

### 3.2 Metode za tačno izračunavanje raspoloživosti složenih mreža

Zbog svega prethodno navedenog, autori su se okrenuli pronalaženju alternativnih metoda za određivanje raspoloživosti mreža. *Hagstrom* [17] je predložio razbijanje problema na više manjih, tj. metodu dekompozicije kojim bi se umesto jedne velike mreže posmatralo više manjih mreža (podmreža) nastalih dekompozicijom osnovne mreže, uz uslov da svaka podmreža ima ukupno dva linka ka ostatku mreže. Za svaku novodobijenu mrežu računanje raspoloživosti i dalje ima eksponencijalnu složenost, ali zbog njihove manje veličine u odnosu na izvornu mrežu, rezultat se dobija za značajno kraće vreme. Predloženi metod je primenljiv kod računanja dvo-terminalne i *all-terminal* raspoloživosti. Po izvršenoj dekompoziciji mreže na veliki broj manjih podmreža, za svaku podmrežu se računa ekvivalentna raspoloživosti i taj deo mreže se zamenjuje linkom koji ima izračunatu ekvivalentnu raspoloživosti. Po završenom izračunavanju raspoloživosti delova mreža, inicira se proces ponovnog formiranja mreže pri čemu se sada umesto delova mreže pojavljuje samo po jedan link koji ima određenu raspoloživosti. Novoformirana mreža ima značajno manji broj čvorova i linkova, ali je zadržala istu dvo-terminalnu raspoloživost. Ponovo se pokreće proces dekompozicije novoformirane mreže i računanja raspoloživosti delova mreže koji se zamenjuju linkovima ekvivalentne raspoloživosti. Ceo proces se izvršava rekurzivno dok se dobije samo jedan link čija raspoloživost odgovara raspoloživosti izvorne mreže. *Hagstrom* je metod predložio za izračunavanje dvo-terminalne raspoloživosti. Proširenje metode na izračunavanje *all-terminal* raspoloživosti je urađeno na bazi *Rosenthal*-ovog metoda dekompozicije mreže datog u radu [18]. U osnovi *Hagstrom*-ov predlog koristi metode za tačno računanje raspoloživosti mreže uz smanjenje vremena izračunavanja zbog deljenja mreže na manje podmreže. Iako je predloženi način ubrzavanja računanja raspoloživosti mreže, složenost korišćenih algoritama je i dalje eksponencijalna što nije rešilo problem računanja raspoloživosti velikih mreža.

*M. Resende* [19] je u svom radu prezentovao način izračunavanja K-terminalne raspoloživosti mreže koji se zasniva na algoritmu poznatom kao *polygon-to-chain* redukcija. Sam algoritam za izračunavanje K-terminalne raspoloživosti je inicijalno predložen od strane *Satyanarayana* i *Wood*-a [20] i [21]. Ako se sa  $G$  obeleži skup svih čvorova i linkova u mreži i sa  $G_k$  skup čvorova i linkova u kome je jasno definisano  $K$  čvorova za koje se želi da odrediti K-terminalna raspoloživost, tada se može reći da

$R(G_k)$  predstavlja K-terminalnu raspoloživost. Ukoliko se mreža  $G_k$  može jednostavnim transformacijama, opisanim u poglavlju 2 ove disertacije, svesti na jedan link ekvivalentne raspoloživosti, tada je problem relativno jednostavan. Međutim, ukoliko to nije moguće zbog same topologije mreže, tada se identifikuju poligoni i transformišu u lanac čvorova prema šemama datim na slici 3.1.

Polygon	Chain	New Edge Reliabilities	where
		$p_r = \delta/(\alpha+\delta)$ $p_s = \delta/(\beta+\delta)$ $\Omega = [(\alpha+\delta)(\beta+\delta)]/\delta$	$\alpha = q_a p_b q_c$ $\beta = p_a q_b q_c$ $\delta = p_a p_b p_c [1+(q_a/p_a)+(q_b/p_b)+(q_c/p_c)]$
		$p_r = \delta/(\alpha+\delta)$ $p_s = \delta/(\beta+\delta)$ $\Omega = [(\alpha+\delta)(\beta+\delta)]/\delta$	$\alpha = q_a p_b q_c$ $\beta = p_a q_b q_c$ $\delta = p_a p_b p_c [1+(q_a/p_a)+(q_b/p_b)+(q_c/p_c)]$
		$p_r = \delta/(\alpha+\delta)$ $p_s = \delta/(\beta+\delta)$ $\Omega = [(\alpha+\delta)(\beta+\delta)]/\delta$	$\alpha = p_a q_b q_c p_d + q_a p_b p_c q_d + q_a p_b q_c p_d$ $\beta = p_a q_b p_c q_d$ $\delta = p_a p_b p_c p_d [1+(q_a/p_a)+(q_b/p_b)+(q_c/p_c)+(q_d/p_d)]$
		$p_r = \gamma/(\alpha+\gamma)$ $p_s = \gamma/(\beta+\gamma)$ $p_t = \gamma/(\delta+\gamma)$ $\Omega = [(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)(\delta+\gamma)]/\gamma^2$	$\alpha = q_a p_b q_c p_d$ $\beta = p_a q_b q_c p_d + q_a p_b p_c q_d$ $\delta = p_a q_b p_c q_d$ $\gamma = p_a p_b p_c p_d [1+(q_a/p_a)+(q_b/p_b)+(q_c/p_c)+(q_d/p_d)]$
	$ K  > 2$ 	$p_r = \gamma/(\alpha+\gamma)$ $p_s = \gamma/(\beta+\gamma)$ $p_t = \gamma/(\delta+\gamma)$ $\Omega = [(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)(\delta+\gamma)]/\gamma^2$	$\alpha = q_a p_b q_c p_d$ $\beta = p_a q_b q_c p_d + q_a p_b p_c q_d$ $\delta = p_a q_b p_c q_d$ $\gamma = p_a p_b p_c p_d [1+(q_a/p_a)+(q_b/p_b)+(q_c/p_c)+(q_d/p_d)]$
	$ K  = 2$ 	$p_r = (p_b + p_a q_b p_c p_d)/(p_b + p_a q_b p_c)$ $p_s = \gamma/(\beta+\gamma)$ $p_t = \gamma/(\delta+\gamma)$ $\Omega = p_b + p_a q_b p_c$	$\alpha = q_a p_b q_c p_d$ $\beta = p_a q_b q_c p_d + q_a p_b p_c q_d$ $\delta = p_a q_b p_c q_d$ $\gamma = p_a p_b p_c p_d [1+(q_a/p_a)+(q_b/p_b)+(q_c/p_c)+(q_d/p_d)]$
		$p_r = \gamma/(\alpha+\gamma)$ $p_s = \gamma/(\beta+\gamma)$ $p_t = \gamma/(\delta+\gamma)$ $\Omega = [(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)(\delta+\gamma)]/\gamma^2$	$\alpha = q_a p_b p_c q_d p_e$ $\beta = p_a q_b p_c p_d q_e + p_a q_b p_c q_d p_e + q_a p_b p_c p_d q_e + p_a p_b q_c q_d p_e$ $\delta = p_a p_b q_c p_d q_e$ $\gamma = p_a p_b p_c p_d p_e [1+(q_a/p_a)+(q_b/p_b)+(q_c/p_c)+(q_d/p_d)+(q_e/p_e)]$
		$p_r = \gamma/(\alpha+\gamma)$ $p_s = \gamma/(\beta+\gamma)$ $p_t = \gamma/(\delta+\gamma)$ $\Omega = [(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)(\delta+\gamma)]/\gamma^2$	$\alpha = q_a p_b p_c q_d p_e p_f$ $\beta = p_a q_b p_c q_d e_p p_f + p_a q_b p_c p_d q_e p_f + p_a q_b p_c p_d p_e q_f + p_a p_b q_c q_d p_e p_f + q_a p_b p_c p_d q_e p_f + q_a p_b p_c p_d p_e q_f$ $\delta = p_a p_b q_c p_d p_e q_f$ $\gamma = p_a p_b p_c p_d p_e p_f [1+(q_a/p_a)+(q_b/p_b)+(q_c/p_c)+(q_d/p_d)+(q_e/p_e)+(q_f/p_f)]$

Slika 3.1 – Redukcije *polygon-to-chain* [19]\*

\* Čvorovi predstavljeni crnom bojom su čvorovi iz grupe K čvorova za koje se računa K-terminalna raspoloživost. Prva kolona u tabeli predstavlja deo mreže pre transformacije. Druga kolona u tabeli predstavlja deo mreže posle transformacije. U trećoj koloni su dati izrazi na osnovu kojih se izračunava ekvivalentna raspoloživost linkova uvedenih u grafika u koloni 2. Zbog jednostavnosti pisanja izraza, u koloni tri su navedene promenljive koje se izračunavaju na osnovu izraza datih u koloni četiri.



Prilikom transformacija predstavljenih na slici 3.1, nova topologija koja se formira ima linkove čija raspoloživost se određuje na osnovu izraza datih na slici 3.1. Korišćenjem transformacija iz poglavlja 2, kao i transformacija predstavljenih na slici 3.1, moguće je kompleksnu mrežu svesti na dva čvora i jedan link između njih gde je raspoloživost tog jednog linka ekvivalentna raspoloživosti celokupne mreže. U samom radu [19] prezentirana je implementacija ovog algoritma. Izračunavanje raspoloživosti se svodi na pronalaženje odgovarajućih topologija u mreži i primenu odgovarajućih transformacija. Jedino ograničenje koje postoji za primenu ovog algoritma je da mreža ne sme da bude „razdvojiva“ (*nonseparable*), tj. da ne sme da postoji jedan link čijim prekidanjem bi se mreže razdvojila na dva nezavisna dela.

Iako je prethodno opisani algoritam uveo izvesna ubrzanja u proces izračunavanja K-terminalne raspoloživosti, i dalje je vreme potrebno za izračunavanje raspoloživosti velikih mreža relativno veliko. Autori *Page* i *Perry* su u svom radu [23] prezentirali način korišćenja metode rastavljanja za efikasno izračunavanje raspoloživosti mreže. Autori čak tvrde da je direktna primena osnovnog algoritma iz metode rastavljanja efikasnija od mnogih kompleksnijih metoda koje se bave optimizacijom problematike izračunavanja raspoloživosti. Iako kritikuju primenu modifikacija, *Page* i *Perry* ipak priznaju da metoda redukcije *polygon-to-chain* koja je opisana u [19] za neke slučajeve ubrzava proces izračunavanja raspoloživosti. U doba kada je nastao rad [23] većina algoritama za izračunavanje raspoloživosti su bili implementirani na velikim *mainframe* računarima koji nisu uvek i svima bili dostupni. *Page* i *Perry* su prezentirali implementaciju metode rastavljanja na Pascal programskom jeziku za Macintosh računar što je omogućilo praktično svima da koriste ovu metodu za izračunavanje raspoloživosti. I ovi autori su se ogradili da sa porastom broj čvorova i linkova, potrebno vreme za izračunavanje raspoloživosti počinje značajno da se produžava.

Prednosti redukcije *polygon-to-chain* [19] su opravdale dalji rad na ovom algoritmu. Tako je *L. Rende* u [24] otklonila ograničenje u primeni ovog algoritma u slučajevima „razdvojivih“ mreža. Modifikacija osnovnog algoritma iz [19] za „razdvojive“ mreže se sastoji u tome da u slučaju identifikovanja linka koji bi razdvojio mrežu na dve nezavisne mreže, prvo se primenjuje metoda rastavljanja za taj link (koji razdvaja mrežu na dva dela), a zatim se na svaki deo mreže primenjuje *polygon-to-chain* redukcija i izračunavanje raspoloživosti. Navedeno poboljšanje algoritma iz [19] samo

je proširilo oblast važenja, ali nije ubrzalo sam proces izračunavanja raspoloživosti mreže.

### 3.3 *Aproksimativni algoritmi za izračunavanje raspoloživosti mreža*

S obzirom da su algoritmi za računanje raspoloživosti i dalje imali eksponencijalnu složenost (vreme izračunavanja raste eksponencijalno sa porastom broja čvorova i linkova), *Belovich* i *Konangi* su predložili aproksimativni algoritam [25] koji, umesto da računa tačnu vrednost za raspoloživost mreže, računa gornju i donju granicu za tačnu vrednost dvo-terminalne raspoloživosti mreže. Prednost njihovog algoritma se ogleda u tome što ima linearnu složenost, tj. vreme izvršavanja raste linearno sa povećanjem mreže. Navedeni pristup, iako ne daje tačne vrednosti za dvo-terminalnu raspoloživost, omogućio je određivanje donje i gornje granice za raspoloživost za mnogo veće mreže nego što je to do tada bilo moguće. Polazna pretpostavka je da su svi čvorovi u mreži idealni, da samo linkovi u mreži mogu da otkazu i da su događaji koji predstavljaju otkaze linkova međusobno nezavisni događaji. Algoritam polazi od čvora koji je uzet za početni u dvo-terminalnoj raspoloživosti koga naziva *root* čvor. Dvo-terminalna raspoloživost mreže se predstavlja kao verovatnoća unije događaja da za svaki čvor, iz grupe od  $n$  čvorova, postoji putanja do *root* čvora mreže. Autori su pošli od izraza (3.1) koji su usvojili kao polazni izraz za izračunavanje dvo-terminalne raspoloživosti.

$$R(V) = P\{S_1 l_1 \cup S_2 l_2 \cup \dots \cup S_n l_n\} \quad (3.1)$$

gde su:  $R(V)$  – dvo-terminalna raspoloživost mreže za čvor  $V$  i *root* čvor,  
 $S_i$  - događaj da je čvor  $i$  povezan sa *root* čvorom preko barem jednog linka,  
 $l_i$  – događaj da je link  $i$  operativan.

Uvođenjem  $R_{old}(V)$  izrazom datim u (3.2), i zamenom u izraz (3.1) dobija se izraz (3.3).

$$R_{old}(V) = S_1 l_1 \cup S_2 l_2 \cup \dots \cup S_{n-1} l_{n-1} \quad (3.2)$$

$$R(V) = P\{R_{old}(V)\} + P\{S_n I_n\} - P\{S_n I_n | R_{old}(V)\} P\{R_{old}(V)\} \quad (3.3)$$

Izraz (3.3) i dalje ne omogućava brzo i jednostavno računanje dvo-terminalne raspoloživosti. Pokazujući da za uslovne verovatnoće važi izraz (3.4), i zamenom u izraz (3.3) dobijen je izraz (3.5) pomoću kog se izračunava gornja granica dvo-terminalne raspoloživosti.

$$P\{S_n I_n | R_{old}(V)\} \geq P\{S_n I_n\} \quad (3.4)$$

$$R_{upper}(V) = P\{R_{old}(V)\} + P\{S_n I_n\} - P\{S_n I_n\} P\{R_{old}(V)\} \quad (3.5)$$

Na sličan način, posmatrajući zamenu za uslovnu verovatnoću, dobijena je donja granica dvo-terminalne verovatnoće koja je predstavljena izrazom (3.6).

$$R_{lower}(V) = P\{R_{old}(V)\} + P\{S_n I_n\} - P_{\max}\{S_n I_n | R_{old}(V)\} P\{R_{old}(V)\} \quad (3.6)$$

Navedeni algoritam za izračunavanje gornje i donje vrednosti za dvo-terminalnu raspoloživost ima linearno vreme izračunavanja, tj. vreme izračunavanja raste linearno sa porastom broja čvorova u mreži. S obzirom da autora nisu imali mogućnost da odrede tačnu vrednost dvo-terminalnih raspoloživosti za veći broj čvorova i linkova, oni su za tačnu vrednost uzeli aritmetičku sredinu gornje i donje vrednosti. Relativna greška aproksimacije dobijena ovom metodom, prihvatajući definiciju tačne vrednosti autora, za mrežu sa 9 čvorova i 13 linkova, kreće se od 1,2% (za raspoloživost linka  $p=0,9$ ) do 13% (za raspoloživost linka  $p=0,5$ ), dok se kvadratna greška kreće od  $1,3 \cdot 10^{-4}$  (za  $p=0,9$ ) do  $1,1 \cdot 10^{-3}$  (za  $p=0,5$ ). Ovakvi rezultati, iako na prvi pogled nisu preterano tačni, omogućili su kakvu-takvu procenu dvo-terminalne raspoloživosti mreže veličine do 10 čvorova. Za veće mreže autori nisu mogli da daju bilo kakvu procenu.

Autori *Feo* i *Johnson* [26] su takođe posmatrali dvo-terminalnu raspoloživost *full-meshed* mreže. I oni su pošli od pretpostavke da su čvorovi u mreži idealni i da samo linkovi mogu da otkazu. Uvedena je i pretpostavka da su otkazi linkova međusobno nezavisni događaji. Svoj pristup rešavanju problema izračunavanja aproksimativne vrednosti dvo-terminalne raspoloživosti su bazirali na primeni metode

rastavljanja u slučaju *full-meshed* topologije mreže. Njihov algoritam se zasniva na zameni dve serijske i dve paralelne veze jednom serijskom ili paralelnom vezom pri čemu se podrazumeva da su čvorovi mreže idealni. U sledećem koraku se radi rastavljanje po posebnim uslovima, tj. biraju se linkovi koji izlaze iz izvornog čvora i idu do nekog čvora od koga postoji direktan link do odredišnog čvora dvo-terminalne raspoloživosti. Osnovna ideja predloženog algoritma je da se za novodobijene mreže (posle primene metode rastavljanja) ne računa raspoloživost već da se ona aproksimativno odredi nekom metodom. Prilikom izbora aproksimativne metode, od interesa je da li izabrana aproksimativna metoda daje rezultate koji su veći od tačne vrednosti raspoloživosti ili su manji. Zamenom tako dobijenih aproksimativnih metoda u osnovni izraz za raspoloživost mreže kod primene metode rastavljanja dobijaju se gornja i donja granica za raspoloživost mreže. *Feo* i *Johnson* su gornju i donju granicu za raspoloživost mreže na bazi metode rastavljanja, definisali izrazima (3.7) i (3.8), respektivno.

$$U_k(G) = p_e U_k(G_e) + q_e U_k(G_{-e}) \quad (3.7)$$

gde je:

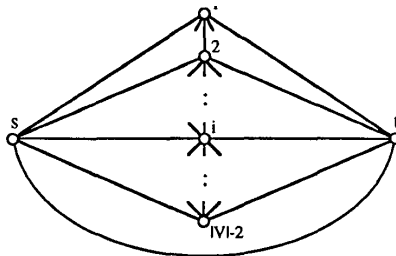
- $U_k(G)$  - gornja granica za raspoloživost mreže  $G$ ,
- $p_e$  - raspoloživost linka  $e$ ,
- $q_e$  - neraspoločivost linka  $e$ ,
- $G_e$  - mreža  $G$  kada link  $e$  radi,
- $G_{-e}$  - mreža  $G$  kada link  $e$  ne radi - u prekidu,
- $U_k(G_e)$  - gornja granica raspoloživosti mreže  $G_e$ ,
- $U_k(G_{-e})$  - gornja granica raspoloživosti mreže  $G_{-e}$ .

$$L_k(G) = p_e L_k(G_e) + q_e L_k(G_{-e}) \quad (3.8)$$

gde je:

- $L_k(G)$  – donja granica za raspoloživost mreže  $G$ ,
- $p_e$  – raspoloživost linka  $e$ ,
- $q_e$  – neraspoločivost linka  $e$ ,
- $G_e$  – mreža  $G$  kada link  $e$  radi,
- $G_{-e}$  – mreža  $G$  kada link  $e$  ne radi – u prekidu.
- $L_k(G_e)$  – gornja granica raspoloživosti mreže  $G_e$ ,
- $L_k(G_{-e})$  – gornja granica raspoloživosti mreže  $G_{-e}$ .

Problem se ovakvim pristupom svodi na određivanje gornjih ( $U_k(G_e)$ ,  $U_k(G_{-e})$ ) i donjih ( $L_k(G_e)$ ,  $L_k(G_{-e})$ ) vrednosti raspoloživosti mreža koje se dobijaju primenom metode rastavljanja za slučaj dvo-terminalne raspoloživosti *full-meshed* mreže. Na slici 3.2 predstavljen je izgled *full-meshed* mreže za koju se određuje dvo-terminalna raspoloživost, tj. izdvojeni su početni ( $s$ ) i krajnji ( $t$ ) čvor.



Slika 3.2 – Dvo-terminalna predstava mreže [26]

*Feo* i *Johnson* su metodu rastavljanja prvo primenili na link koji direktno spaja izvorište ( $s$  čvor na slici 3.2) i odredište ( $t$  čvor na slici 3.2). Sledeći korak je da se odredi link koji nije susjedni ni čvoru  $s$  ni čvoru  $t$ , a ima najveću raspoloživost i da se primeni metoda rastavljanja na taj link. Tom prilikom se za gornju vrednost uslovne raspoloživosti uzima 1 manje verovatnoća događaja da svi susjedni linkovi za čvorove  $s$  i  $t$  otkazu. Za donju vrednost uslovne verovatnoće se uzima 1 manje proizvod verovatnoća da barem jedan od susjednih linkova ne radi. U zavisnosti od toga koje vrednosti se uzimaju za raspoloživosti linkova, kao i od broja čvorova, algoritam opisan

u [26] daje dobre ili loše rezultate. Srednja greška aproksimacije je data u tabeli T-3.1. Iz tabele se vidi da greška varira u velikom rasponu vrednosti.

Iako, na prvi pogled, metoda ima veoma malu grešku, treba imati u vidu da se ona može primeniti na veoma mali skup mreža. Prvo, metoda posmatra samo *full-meshed* mreže i za njih računa aproksimativnu vrednost dvo-terminalne raspoloživosti. *Full-meshed* topologija mreža se koristi samo kod okosnica, ali za veoma mali broj čvorova (4 do 5 čvorova). Za iole veće okosnice mreža, izgradnja *full-meshed* topologije bi bila preskupa. Druga ozbiljna mana metode je da se koristi za računanje dvo-terminalne raspoloživosti koja nije od interesa u slučaju okosnice mreže. Kod okosnice mreže izračunava se *all-terminal* raspoloživost na koju nije primenljiva metoda opisana u radu [26]. Treće ograničenje za upotrebljivost predložene metode je da ona ima veliku tačnost u slučaju da linkovi u mreži imaju veliku raspoloživost (između 0,99 i 1,00). U ostalim slučajevima greška aproksimacije je velika što metodu čini skoro neupotrebljivom u konkretnim slučajevima izgradnje komunikacionih mreža.

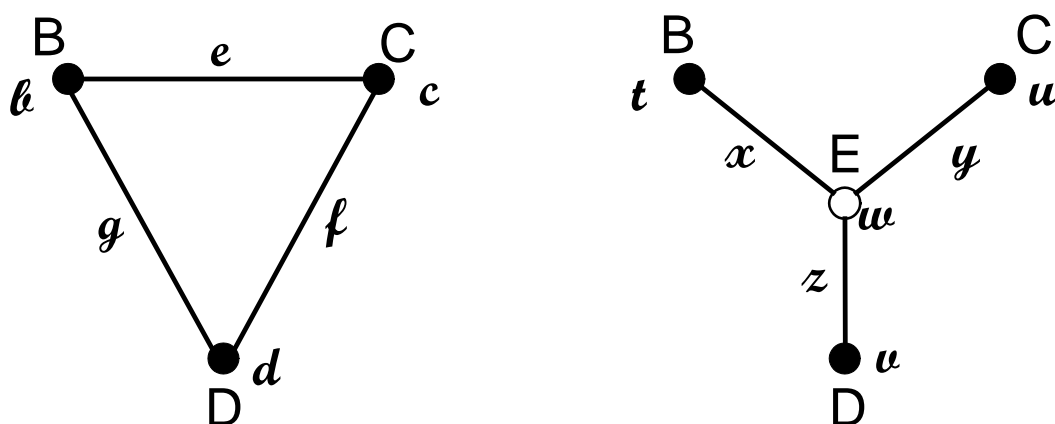
Tabela T-3.1 – Srednja greška aproksimacije [26]

Granice intervala iz koga se uniformno uzimaju raspoloživosti linkova		Broj čvorova u mreži				
		8	16	32	64	128
A	b					
0,99	1,00	$6,3 \cdot 10^{-15}$	$5,5 \cdot 10^{-30}$	$5,0 \cdot 10^{-63}$	$< 1 \cdot 10^{-99}$	$< 1 \cdot 10^{-99}$
0,00	1,00	$9,7 \cdot 10^{-2}$	$1,0 \cdot 10^{-2}$	$9,5 \cdot 10^{-5}$	$9,3 \cdot 10^{-9}$	$9,2 \cdot 10^{-17}$
0,00	0,01	$2,2 \cdot 10^{-3}$	$2,9 \cdot 10^{-2}$	$2,8 \cdot 10^{-1}$	1,0	1,0

*Theologou* i *Carlier* su u [27] takođe pošli od metode rastavljanja i transformacije mreže kao veoma efikasne metode za izračunavanja raspoloživosti mreža. Za razliku od prethodnih radova, oni su pretpostavili da čvorovi nisu idealni. U tom slučaju prethodno opisane metode uglavnom ne važe. Kada u mreži postoje ne idealni čvorovi, oni se mogu rastavljati na isti način na koji se vrši rastavljanje ne idealnih linkova. Međutim, takav pristup povećava složenost izračunavanja raspoloživosti. Njihov predlog je da se rastavljanje vrši istovremeno za jedan link i čvorove koje on spaja uz uslov da barem jedan od ta dva čvora mora da bude idealan.

Ovakvo ograničenje u definisanju početnih uslova za primenu metode dovodi do toga da je on primenljiv u apstraktnim slučajevima. Ako mreža ima idealne i ne idealne čvorove, postavlja se pitanje koji je to kriterijum koji bi se koristio za definisanje koji je čvor idealan, a koji je ne idealan. Dalje, raspored idealnih i ne idealnih čvorova u mreži bi u značajnoj meri uticao na mogućnost primene predložene metode. Autori se u radu nisu bavili greškom aproksimacije već primarno dokazivanjem da njihov algoritam nije sporiji od ostalih poznatih algoritama koji se bave aproksimativnim izračunavanjem raspoloživosti u mrežama sa idealnim čvorovima, iz čega se može zaključiti da je tačnost njihovog algoritma sličnog reda veličine kao i ostalih algoritama [82], [83], [84], [85], [86], [87], [88], [89], [90].

*A.M.Shooman* i *A.Kershenbaum* su se u svom radu [28] bavili K-terminalnom raspoloživošću mreža kod koje čvorovi nisu bili idealni već i oni, kao i linkovi, imali neku verovatnoću otkaza, tj. raspoloživost nije bila jednaka jedan. Kod određivanja *all-terminal* raspoloživosti, autori su koristili metode transformacije grafa mreže koje ne menjaju raspoloživost mreže, tj. koristili su tačne metode. Cilj transformacija mreže je da se dobiju dva čvora povezana jednim linkom čija je raspoloživost jednaka raspoloživosti polazne mreže. U radu su autori opisali sve varijante transformacija grafova sa neidealnim i idealnim čvorovima koji omogućavaju tačno računanje raspoloživosti mreže. Na kraju su uveli i heuristiku u svoj algoritam sa ciljem da unaprede performanse algoritma. Prva heuristika se odnosi na izbor najboljeg linka za primenu metode rastavljanja, a druga heuristika se odnosi na donošenje odluke kada treba vršiti delta-Y transformaciju. Delta-Y transformacija predstavlja transformaciju dela mreže prema pravilu koje je dato na slici 3.3. U radu [28] dato je na koji način se izračunavaju vrednosti za novodobijene koeficijente  $t$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  i  $w$ .



Slika 3.3 – Delta-Y transformacija mreže

Analiza njihovog algoritma je pokazala da on ima eksponencijalnu složenost što je i očekivani rezultat. Rezultate izvršavanja svog algoritma su uporedili sa algoritmom koji su *Satyanarayana* i *Wood* objavili u [22]. U radu [8], *A.M.Shooman* i *A.Kershenbaum* su već pokazali da je njihov algoritam za računanje *all-terminal* raspoloživosti za *full-meshed* mrežu brži od algoritma datog u [22], a u okviru ovog rada su pokazali da je i ova nova verzija algoritma koja se koristi za slučaj ne savršenih čvorova takođe jednostavnija. Autori su uporedili tačnost svog algoritma za nekoliko jednostavnijih primera (mreža sa 6 čvorova i 8 linkova i mreža sa 21 čvorom i 26 linkova) i dobijena je relativna greška od  $1,7 \cdot 10^{-2}$  do toga da su dobijali i tačne vrednosti. S obzirom da vreme izvršavanja algoritma eksponencijalno raste sa porastom mreže, upotrebljivost ovog algoritma za velike i složene mreže (više od 30 čvorova i više od 40 linkova) nije preterano velika.

Za razliku od prethodnih radova u kojima su se autori primarno bavili pitanjem izračunavanja raspoloživosti definisanih mrežnih topologija, *Rong-Hong Jan* se u radu [29] bavio načinom dizajniranja mreže koja treba da ima maksimalnu raspoloživost ako se zna broj čvorova, broj linkova i raspoloživost linkova. Ovaj pristup je od velikog značaja za process projektovanja mreža kada se na početku ne zna topologija buduće mreže. Ako se mreža sa  $n$  čvorova i  $e$  linkova obeleži sa  $G_{n,e}$ , *Jan* je u svom radu pronašao optimalnu mrežnu topologiju za klasu mreža gde je  $e=n-1$ ,  $e=n$  i  $e=n+1$ , tj. za mreže  $G_{n,n-1}$ ,  $G_{n,n}$  i  $G_{n,n+1}$ , respektivno. Za broj linkova koji je veći ili jednak  $n+2$  izvedena je aproksimativna formula koja se bazira na stepenu povezanosti svakog čvora.



Polazna pretpostavka za rešavanje ovog problema je da su svi čvorovi idealni, a da svi linkovi imaju istu raspoloživost  $p$ . Takođe važi da su svi otkazi linkova međusobno nezavisni događaji. *Jan* je pokazao da važe izrazi (3.9) i (3.10).

$$R(G_{n,n-1}^*) = p^{n-1} \quad (3.9)$$

$$R(G_{n,n}^*) = p^n + np^{n-1}(1-p) \quad (3.10)$$

gde je:  $R(G_{n,n-1}^*)$  - maksimalna *all-terminal* raspoloživost koju može da ima mreža sa  $n$  čvorova i  $n-1$  linkova,  
 $R(G_{n,n}^*)$  - maksimalna *all-terminal* raspoloživost koju može da ima mreža sa  $n$  čvorova i  $n$  linkova,  
 $p$  – raspoloživost linka u mreži,  
 $n$  – broj čvorova u mreži.

Dalje, *Jan* je pokazao da mreža koja ima prstenastu topologiju i koja ima još samo jedan link između proizvoljna dva čvora ima *all-terminal* raspoloživost definisanu sa (3.11).

$$Max\{R(C_n^+)\} = \left\{ \begin{array}{l} p^n + np^{n-1}(1-p) + \left(\frac{n}{2}\right)^2 p^{n-1}(1-p)^2, \quad n \text{ je paran broj} \\ p^n + np^{n-1}(1-p) + \left(\frac{n^2-1}{4}\right) p^{n-1}(1-p)^2, \quad n \text{ je neparan broj} \end{array} \right\} \quad (3.11)$$

gde je:  $R(C_n^+)$  - raspoloživost mreže u obliku prstena koja ima samo jedan dodatni link između neka dva čvora u prstenu.

*Jan* je zatim pokazao da mreža koja ima  $n$  čvorova i  $n+1$  link i sastoji se od dva prstena pri čemu prstenovi nemaju zajednički link, već samo zajedničke čvorove, ima raspoloživost za koju važi izraz (3.12).

$$R(\hat{G}_{n,n+1}) < Max\{R(C_n^+)\} \quad (3.12)$$

gde je:  $R(\hat{G}_{n,n+1})$  - *All-terminal* raspoloživosti mreže koja ima  $n$  čvorova i  $n+1$  link i sastoji se od dva prstena koji nemaju zajednički link.

Sledeće što je *Jan* dokazao je da za mrežu sa  $n$  čvorova,  $n+1$  linkova (uz uslov da je  $n+1$  umnožak broja 3), pri čemu je raspoloživost linka  $p$ , a mreža se sastoji od dva prstena koji imaju jedan zajednički link, važi da je maksimalna *all-terminal* raspoloživost data sa (3.13).

$$R(G_{n,n+1}^*) = p^{n+1} + (n+1)p^n(1-p) + \frac{(n+1)^2}{3} p^{n-1}(1-p)^2 \quad (3.13)$$

Da bi se dobio izraz za maksimalnu raspoloživost mreže sa brojem linkova koji je veći od  $n+1$ , *Jan* je krenuo od stepena povezanosti čvora  $i$  koji se obeležava sa  $d_i$  i predstavlja broj linkova koji su vezani za čvor  $i$ . Polazeći od te definicije, važi izraz (3.14).

$$\sum_{i=1}^n d_i = 2\ell \quad (3.14)$$

gde je:  $\ell$  – ukupan broj linkova u mreži.

Za mrežu  $G$  čiji čvorovi imaju stepene povezanosti definisane sa  $d_1, d_2, \dots, d_n$ , i za čije linkove važi da je raspoloživost jednaka  $p$ , kao i da je  $q=1-p$ , *Jan* je pokazao da za *all-terminal* raspoloživost važi izraz (3.15).

$$R(G) \leq 1 - \left\{ \sum_{i=1}^n q^{d_i} \prod_{k=1}^{m_i} (1 - q^{d_k-1}) \prod_{k=m_i+1}^{i-1} (1 - q^{d_k}) \right\} \quad (3.15)$$

gde je:  $m_i = \min(d_i, i-1)$ ,  $i=1, 2, 3, \dots, n$ .

Ako se, u cilju jednostavnijeg pisanja, za deo izraza (3.15) uvede zamena data u (3.16), ako važi (3.14) i ako  $d_1, d_2, \dots, d_j, d_{j+1}, \dots, d_n = \alpha, \dots, \alpha, \alpha+1, \dots, \alpha+1$ , *Jan* je pokazao da izraz

(3.16) predstavlja maksimalnu vrednost za sve moguće varijante stepena povezanosti čvorova u mreži.

$$H(d_1, d_2, \dots, d_n) = 1 - \left\{ \sum_{i=1}^n q^{d_i} \prod_{k=1}^{m_i} (1 - q^{d_k - 1}) \prod_{k=m_i+1}^{i-1} (1 - q^{d_k}) \right\} \quad (3.16)$$

Posledica ovoga je da, ako se želi maksimalna vrednost za  $H(d_1, d_2, \dots, d_n)$  definisan sa (3.16), tada stepeni povezanosti u mreži ne smeju da se razlikuju za više od 1. Ovaj zaključak *Jan*-a je dokazan i kroz rezultate ove doktorske disertacije. Primenom izraza (3.16), za  $H(d_1, d_2, \dots, d_n)$ , za izračunavanje gornje granične vrednosti za *all-terminal* raspoloživost, dobijaju se rezultati koji za ukupan broj linkova koji je blizak broju čvorova imaju relativnu grešku nekoliko procenata (*Jan* je u [29] pokazao da je relativna greška jednaka 7,23% za broj čvorova 12, raspoloživost linka 0,9 i ukupan broj linkova 14), ali se ubrzano smanjuje sa porastom broja linkova. Aproksimativni izraz (3.16) za broj čvorova 12, raspoloživost linka 0,9 i ukupan broj linkova jednak 24 daje relativnu grešku koja je manja od 0,005%. Rezultati koji se dobijaju primenom metode date u [29] daju rezultate koji su veoma bliski tačnim vrednostima kada je rezultat veoma blizak jedinici i kada je raspoloživost linka veća od 0,9. Predloženi algoritam se odnosi na izračunavanje maksimalne *all-terminal* raspoloživosti mreže. U odnosu na *Jan*-ove rezultate, metoda predložena u okviru ove doktorske disertacije daje rezultate za minimalnu i maksimalnu *all-terminal* raspoloživost.

Bez obzira na dobre rezultate date u [29], rad na definisanju boljih i bržih aproksimativnih metoda je nastavljen tako da je *Torrieri* u [30] predložio novi metod za izračunavanje dvo-terminalne raspoloživosti u mreži sa neidealnim čvorovima i usmerenim linkovima, koji se kombinuje sa modifikovanim *Dotson* algoritmom [31]. Predloženi algoritam daje rezultate za jako velike mreže, kada *Theologou-Carlier* algoritam [27], [32] ne može da završi sa izračunavanjem u prihvatljivo dugom vremenu. Algoritam predložen od strane *Torrieri*-a [30] određuje gornju i donju graničnu vrednost za raspoloživost tako da se kao tačna uzima srednja vrednost ove dve vrednosti, a greška izračunavanja se određuje kao razlika između srednje i gornje granične vrednosti. *Torrieri* je svoju metodu proverio na dva primera. Prvi primer je mreža koja se sastoji od 25 čvorova i 40 linkova i koja ima pravilnu četvrtasto rešetkastu strukturu. Za ovu mrežu je metoda dala rezultat izračunavanja dvo-terminalne raspoloživosti sa greškom ne većom od 0,005 za 41 sekundu. Drugi primer je mreža sa

34 čvora i 128 linkova i nepravilnom strukturom gde se tražilo izračunavanje dvo-terminalne raspoloživosti između čvorova 20 i 25. Rezultat je dobijen sa greškom ne većom od 0,005 za 16 sekundi. Ova dva primera ilustruju relativno malu tačnost metode za izračunavanje dvo-terminalne raspoloživosti.

### ***3.4 Računanje aproksimativnih vrednosti raspoloživosti mreža primenom simulacionih metoda***

*Candela* i *El Khadiri* [33] su pristupili rešavanju problema izračunavanja dvo-terminalne raspoloživosti kroz simulaciju. Njihov pristup se zasniva na tome da se raspoloživost mreže predstavi kao funkcija raspoloživosti manjih mreža. Proces simulacije kreće od početne topologije i rekurzivno se primenjuje. Simulacija se zaustavlja kada između izvorišne i odredišne tačke više ne bude linkova, tj. dolazi do prekida komunikacije bez obzira na stanje linkova u mreži. Numerički primer (20 čvorova i 30 linkova) dat na kraju rada [33] pokazao je da predložena metoda daje iste rezultate kao i Monte Carlo metoda za vrednosti raspoloživosti linkova između 0,5 i 0,9. Za linkove visoke raspoloživosti (preko 0,95) metoda daje značajno bolje rezultate nego standardni Monte Carlo simulacioni metod, dok su rezultati za mrežu čiji linkovi imaju raspoloživost 0,5 veoma loši, tj. greška je na drugoj decimali. Pošto metoda služi za računanje samo dvo-terminalne raspoloživosti, nije primenljiva na izračunavanje raspoloživosti okosnice mreže.

Korišćenje genetskog algoritma kroz kombinatornu aproksimaciju sa ciljem dobijanja dizajna mreže visoke raspoloživosti dato je u [34], [35] i [36]. *Kumar* i saradnici su razvili genetski algoritam [37], [38] koji se bazira na veličini, rastojanju i raspoloživosti mreže imajući u vidu zahteve za dizajniranjem i proširenjem kompjuterskih mreža. *Dengiz*, *Altıparmak* i *Smith* [39] su takođe rešavali problem dizajna i optimizacije velikih mreža koristeći genetski algoritam. Njihov rad se zasniva na korišćenju *all-terminal* raspoloživosti kao mere raspoloživosti mreže sa ciljem dobijanja efikasne optimizacione metode. Prethodno navedeni radovi su analizirali primenu genetskog algoritma na mrežama sa manje od 10 čvorova, dok su *Dengiz*, *Altıparmak* i *Smith* testirali svoje rešenje na mreži sa do 300 linkova. Suština metode je da posredstvom genetskog algoritma vrši pretraživanje mrežnih topologija u cilju

pronalaženja one koja odgovara uslovima optimizacije. Za samo izračunavanje gornje granične vrednosti *all-terminal* raspoloživosti korišćena je *Jan*-ova metoda [29]. Analiza je pokazala da je predložen algoritam, po pitanju tačnosti, u granicama grešaka sa ostalim algoritmima na bazi simulacije, ali omogućava optimizaciju mreža po određenim parametrima (npr. cena realizacije) za znatno veće mreže nego do tada poznati algoritmi. Isti autori su dalje razradili predloženi genetski algoritam [40] sa ciljem optimizacije cene izgradnje mreže kada su poznate cene realizacije čvorova i linkova. U osnovi, predloženi genetski algoritam se može koristiti kod optimizacije, ali ne rešava osnovni problem koji je postavljen u ovoj doktorskoj disertaciji, a to je izračunavanje *all-terminal* raspoloživosti kod složenih mreža.

*Lucet* i *Manouvrier* su pokazali [41] da se u pojedinim specifičnim topologijama može izračunati raspoloživost mreže u veoma kratkom vremenskom periodu. Preduslov za brzo izračunavanje raspoloživosti mreže metodom dekompozicije je da skup čvorova koji je zajednički za dva podskupa mreže (*pathwidth* – broj čvorova koje treba ukinuti da bi se mreža raspala na dve odvojene mreže) bude što manji. Primer kojim su pokazali efikasnost metode dekompozicije je mreža sa 140 čvorova i *pathwidth* parametrom 6 za koju je raspoloživost izračunata za 6 sekundi. Ovaj rezultat deluje veoma dobro, ali treba imati u vidu da je to rezultat za specifičnu konfiguraciju mreže i da nema opštu primenljivost.

*Konak* i *Smith* [42] su, umesto pronalaženja metode za tačno računanje raspoloživosti mreže za datu topologiju mreže, izabrali pristup da se nađu metode za određivanje gornje i donje granične vrednosti (uzimajući definicije iz [43], [44] i [45] za gornju i donju graničnu vrednost). *Konak* i *Smith* su krenuli od metoda datog u [29] i unapredili ga tako da se može primeniti i kod mreža sa linkovima različitih raspoloživosti. *Konak* i *Smith* su dobili izraz (3.17) za izračunavanje gornje granične vrednosti za *all-terminal* raspoloživost mreže sa linkovima različite raspoloživosti.

$$R(G) \leq 1 - \left[ \sum_{i=1}^m \left( \left( \prod_{k \in E_i} (1 - p_{ki}) \right) * \prod_{j=1}^{i-1} \left( 1 - \frac{\prod_{k \in E_j} (1 - p_{kj})}{(1 - p_{ki})} \right) \right) \right] \quad (3.17)$$

gde je:  $E_i$  – skup linkova koji su povezani na čvor  $i$ ,  
 $m$  – broj čvorova u mreži,  
 $p_{ki}$  – raspoloživost linka  $k$  koji je povezan na čvor  $i$ ,

$p_{kj}$  – raspoloživost linka  $k$  koji je povezan na čvor  $j$ ,

$R(G)$  – *all-terminal* raspoloživost mreže.

Izraz za izračunavanje gornje granične vrednosti za *all-terminal* raspoloživost dat sa (3.17) za broj čvorova u mreži između 6 i 20, raspoloživošću linkova 0,9 i 0,95 (svi linkovi u mreži imaju istu raspoloživost) ima apsolutnu grešku između  $4 \cdot 10^{-3}$  i  $6 \cdot 10^{-2}$ , a relativnu grešku između 0,4% i 7,4% pri čemu sa porastom broja čvorova u mreži raste i greška. Isti izraz ako se primeni u mreži sa različitom raspoloživošću linkova gde broj čvorova u mreži se kreće od 5 do 20, ima apsolutnu grešku od  $4 \cdot 10^{-3}$  do  $1 \cdot 10^{-1}$  i relativnu grešku od 0,5% do 12%.

*J. Xiong* i *W. Gong* u svom radu [46] su krenuli od toga da se raspoloživost mreže može predstaviti racionalnom funkcijom. Posmatrali su *all-terminal* raspoloživost za specifičan slučaj gde je  $p$  (verovatnoća otkaza linka) veoma blisko nuli i jednaka je za sve linkove u mreži. Uzimajući u obzir navedenu pretpostavku, došli su do izraza (3.18) za *all-terminal* raspoloživost mreže u kome je  $n$  broj čvorova u mreži.

$$\log(R(p)) \approx (n-1) \log(p) \quad (3.18)$$

Primenom izraza (3.18) i zamenom u *Werner*-ov algoritam dat u [47], *Xiong* i *Gong* su dobili algoritam na bazi simulacije za određivanje  $k$ -terminalne raspoloživosti mreže. Njihov krajnji zaključak je da predložena aproksimativna metoda daje rezultate koji su blisku simulacionim metodama. Predložena metoda je primenljiva samo u slučajevima kada je raspoloživost linka veoma velika i bliska jedinici što značajno ograničava primenljivost metode u realnom slučaju.

*Yong Chen et al.* [48] su krenuli od NPR/T (*node-pair reliability Torrieri*) koja je data u [30]. Autori tvrde da u NPR/T metodi postoji greška za neke specifične slučajeve. Zbog toga su predložili modifikovani kombinovani metod koji daje aproksimativnu vrednost za raspoloživost mreže. Predložena modifikacija je popravila NPR/T metod za specijalne slučajeve za koje je izvorni metod davao netačne rezultate. Iako je na ovaj način opseg primene metode nešto proširen, i dalje je ostao problem relativno male tačnosti što metodu ograničava po pitanje primene u praksi.

*S.Soh* i *S.Rai* [49] su uveli novu meru za raspoloživost i nazvali su je *capacity related reliability* (CRR) [50]. CRR predstavlja verovatnoću da mreža ima na raspolaganju minimalni protok  $W_{min}$  između izvorišnog i odredišnog čvora. Novi metod

su nazvali *subset cut technique* (SCT). Posmatrali su presek kroz mrežu koji čine linkovi čijim uklanjanjem se mreža deli na dve razdvojene mreže pri čemu je izvorni čvor mreže u jednoj novodobijenoj mreži, a odredišni čvor je u drugoj novodobijenoj mreži. Za svaki minimalni presek kroz mrežu  $C_i$  (presek je minimalan ako ni jedan njegov podskup nije presek za sebe) i zahtevani minimalni protok  $W_{min}$  metod SCT prebrojava sve neredundantne podskupove preseka mreže (SC) koji zadovoljavaju uslov za protok linkova i minimalni zahtevani protok. Znajući verovatnoću otkaza svakog linka i neredundantnih SC-ova, korišćenjem izraza za međusobno isključive događaje određuje se *capacity related unreliability* (CRU), tj.  $CRR=1-CRU$ . Autori su pokazali da je kompleksnost algoritma polinomijalna u odnosu na broj podskupova.

Autori S. Kuo, F. Yeh i H. Lin [51] su pošli od BDD baziranih (*reduced ordered Binary Decision Diagrams*) [52], [53] i [54] algoritama, koji omogućavaju efikasno računanje raspoloživosti mreža sa idealnim čvorovima. Njihova modifikacija su dva nova algoritma, EE (*entangled expansion*) i CAE (*composition after expansion*) koji predstavljaju proširenje BDD (*Binary Decision Diagrams*) algoritma. EE i CAE algoritmi omogućavaju određivanje k-terminalne raspoloživosti mreže sa neusmerenim i usmerenim linkovima. Pored toga, CAE algoritam omogućava određivanje tzv. "osnovne varijable", tj. elementa koji najviše utiče na ukupnu raspoloživost mreže. Određivanje osnovne varijable je važno kod projektovanja mreža, jer omogućava postavljanje komponenti visoke raspoloživosti na mestima u mreži koja su najvažnija, u smislu raspoloživosti mreže, a možda malo lošijih i samim tim jeftinijih komponenti na mestima čiji uticaj na raspoloživost nije tako izražen. U samom radu autori su se fokusirali da pokažu da je njihov algoritam brži od postojećih algoritama, a nisu se bavili analizom tačnosti. Pokazali su da primenom njihovog algoritma, kada se uvede u proračun i nesavršenost čvorova mreže, usporenje proračuna je do 3% (u odnosu na proračun kada su čvorovi mreže savršeni) za *full-meshed* mreže. S obzirom da algoritam na bazi rastavljanja mreže uvodi usporenje od preko 300% predloženi algoritam se može smatrati istinskim poboljšanjem efikasnosti. Predloženi algoritam, s druge strane, nije povećao tačnost računanja raspoloživosti već je ona ostala na nivou izvornog BDD algoritma. Svi proračuni i testiranja su vršeni samo za raspoloživost linkova 0,9 što je jedno od ograničenja izvršene verifikacije metode.

A. Konak je u [55] upoređivao rezultate dobijene simulacijom i dobijene egzaktnom metodom rastavljanja mreže. U radu su nabrojano više različitih metoda koje se koriste za određivanje *all-terminal* raspoloživosti mreže, kako egzaktnih metoda,

tako i metoda na bazi simulacija. Da bi uporedio ova dva pristupa, *Konak* je prvo posmatrao rezultate dobijene *Crude Monte Carlo* (CMC) metodom za 30 nasumično generisanih mreža sa 10 čvorova i brojem linkova između 13 i 30, pri čemu svi linkovi imaju istu raspoloživost, a metode su testirane za raspoloživosti linkova 0,9, 0,95 i 0,99. Zatim je prvo korišćena redukcija mreže, pa potom je ponovljena CMC metoda za određivanje raspoloživosti redukovane mreže. Na kraju je upoređivano kako se menja varijansa rezultata dobijenih simulacijom u odnosu na tačne rezultate. U [55] je pokazano da što je veća raspoloživost mreže to je veće smanjenje varijanse. Zatim je *Konak* isti princip primenio i na *Sequential Construction* (SC) metodu gde je prvo urađena redukcija mreže, a zatim je primenjena simulaciona metoda SC. Prvo je za svaku mrežu (prethodno navedenih 30 različitih mreža) direktno primenjena SC metoda za određivanje raspoloživosti. Zatim je postupak ponovljen gde je prvo primenjena redukcija mreže pa zatim je primenjena SC metoda. Pokazano je da predložena metoda sa primenom redukcije u kombinaciji sa SC metodom daje dobre rezultate za izuzetno slabo povezane mreže (mali broj linkova) i za izuzetno gusto povezane mreže (veliki broj linkova). Opšti zaključak koji je *Konak* izveo je da pre bilo kakve simulacije treba izvršiti redukciju mreže u meri u kojoj je to moguće, jer se time primenom simulacionih metoda na redukovanu mrežu dobijaju tačniji rezultati. U samom radu se autor nije bavio apsolutnom tačnošću predloženih metoda već samo relativnom promenom tačnosti u odnosu na izvorne metode koje su modifikovane.

Za rešavanje problema izračunavanja *all-terminal* raspoloživosti mreže, *Sharafat* i *Ma'rouzi* su predložili u [56] novi algoritam pod nazivom *Recursive Truncation Algorithm* (RTA). Predloženi algoritam daje aproksimativnu vrednost *all-terminal* raspoloživosti mreže sa unapred zadatom tačnošću. Da bi ubrzali određivanje *all-terminal* raspoloživosti, autori su krenuli od neraspoločivosti mreže i određivanja minimalnog preseka mreže. Neraspoločivost mreže se određuje kao verovatnoća događaja da otkazu svi minimalni preseki mreže. Ovakav pristup ima eksponencijalno vreme izračunavanja u zavisnosti od porasta broja elemenata u mreži. *Sharafat* i *Ma'rouzi* su predložili RTA algoritam u kome se ne izračunavaju neraspoločivosti za sve elemente skupa minimalnih preseka, već samo za skup onih koji imaju najmanju verovatnoću otkaza tako da ukupna greška bude manja od zadate. Na kraju su autori uporedili rezultate dobijene RTA algoritmom sa ostalim poznatim algoritmima i to za mreže sa 5 do 10 čvorova i od 7 do 14 linkova i za raspoloživosti linkova 0,9 i 0,95, pri čemu su svi linkovi u mreži imali istu raspoloživost. Dobijene vrednosti su pokazale da



se greška aproksimacije kreće u granicama od  $10^{-5}$  do  $10^{-3}$ , vrlo je bliska zadatoj tačnosti izračunavanja i, po pravilu, raste sa porastom broj čvorova i linkova u mreži.

*J.M. Won* i *F. Karray* su u [57] predložili način za ubrzanje postojećih algoritama za izračunavanje *all-terminal* raspoloživosti mreže. Ubrzanje postojećih algoritama, koji se zasnivaju na metodu rastavljanja, sastoji se u tome da se posmatraju mreže koje se dobijaju rastavljanjem, pri čemu se smatra da su čvorovi u mreži idealni, a linkovi imaju različite raspoloživosti. Autori su krenuli od pretpostavke da se složena mreža  $G$  može rastaviti na  $L$  podmreža koje su obeležili sa  $G_1, G_2, G_3, \dots, G_L$  uz pretpostavku da se *all-terminal* raspoloživost za svaku od podmreža može lako izračunati. Uvedeno je i  $P_l$  za  $l \in \{1, \dots, L\}$  koje predstavlja verovatnoću postojanja  $G_l$ . Autori su pokazali da, uz prethodno uvedene definicije pojmova, važi jednakost (3.19).

$$R(G) = \sum_{l=1}^L P_l R(G_l), \quad \sum_{l=1}^L P_l = 1 \quad (3.19)$$

gde je:  $R(G)$  – *all-terminal* raspoloživost cele mreže,  
 $R(G_l)$  – *all-terminal* raspoloživost podmreže  $G_l$ .

Na osnovu izraza (3.19), *J.M. Won* i *F. Karray* su uveli nejednakost datu sa (3.20).

$$\sum_{l=1}^k P_l R(G_l) \leq R(G) \leq 1 - \sum_{l=1}^k P_l (1 - R(G_l)), \quad \text{za } k \in \{1, \dots, L\} \quad (3.20)$$

Primenom izraza (3.20) mogu se na kumulativni način računati donja i gornja granična vrednost za *all-terminal* raspoloživost mreže. U okviru [57], autori su uporedili vremena izvršavanja posmatranih algoritama bez i sa njihovom modifikacijom pri čemu su posmatrali *full-meshed* mreže različite veličine u kojima je raspoloživost linka bila 0,95 i 0,99. Dobijeni rezultati su pokazali značajna ubrzanja za neke testirane mreže, tj. kratko vreme izvršavanja modifikovanog algoritma, osim za određeni broj slučajeva kada su posle 1 sata izvršavanja prekidali dalji rad (za mrežu koja ima rešetkastu strukturu sa  $10 \times 10$  čvorova). I za druge mreže koje imaju rešetkastu strukturu i koje su testirane, izvršavanje je trajalo više od 1 sata, ali su ipak dobijeni rezultati. Iako su autori pokazali da njihov algoritam u nekim slučajevima manjih mreža (10 do 15

čvorova u mreži), za veće mreže je vreme izvršavanja predloženog algoritma i dalje duže od jednog sata.

### ***3.5 Posmatranje raspoloživost mrežne topologije preko posrednih parametara***

Pored prethodno nabrojanih algoritama i metoda, gde je cilj bio odrediti što tačniju vrednost raspoloživosti mreže, u velikom broju radova autori su se bavili relativnim odnosom raspoloživosti mrežnih topologija i procenom uticaja pojedinih parametara na ukupnu raspoloživost bez pokušaja da se tačno odredi sama raspoloživost. Ovakav pristup je zadovoljavajući u slučaju dizajna mreže gde je mogućnost izbora parametara mreže relativno skromna i gde se je bitno proceniti samo relativni uticaj određenih elemenata. Primer takvog pristupa su *I. Soi* i *K.K. Aggarwal* koji su u [58] uveli indekse  $P_0$  i  $P_1$  koji direktno zavise od karakteristika mreže, poput broja linkova i čvorova, konektivnosti (definisane kao minimalni broj linkova ili čvorova u mreži koje treba ukloniti da bi se mreža podelila na dve međusobno nepovezane mreže), kohezije (definisane kao minimalni broj čvorova i linkova koje je potrebno ukloniti iz mreže da bi se iz mreže izdvoji podgraf od  $m$  čvorova), dijametra (definisano kao maksimalna dužina svih najkraćih putanja između bilo koja dva čvora u mreži), *girth* (definisano kao minimalna dužina putanje, izražena kao broj linkova, koja polazi iz jednog čvora i vraća se u taj isti čvor) i slično, i koji predstavljaju meru raspoloživosti mreže, tj. direktno su proporcionalni raspoloživosti mreže. Cilj koji treba postići prilikom dizajna mreže je da prilikom svake promene nekog od parametara mreže dođe do povećanje vrednosti indeksa  $P_0$  i  $P_1$  jer to direktno znači i povećanje raspoloživosti novodobijene mreže. Treba imati na umu da ovi indeksi ne predstavljaju vrednosti raspoloživosti mreže, već samo predstavljaju numeričku vrednost promene ukupne raspoloživosti mreže. U svom radu [58], *Soi* i *Aggarwal* su indekse  $P_0$  i  $P_1$  definisali izrazom (3.21).

$$P_{\alpha} = \frac{t + \delta + \alpha d}{K + X^e(m) + X^n(m)} + \frac{2e}{n}, \quad \alpha = 0 \text{ ili } 1 \quad (3.21)$$

gde je:

- $e$  – broj linkova u mreži,
- $n$  – broj čvorova u mreži,
- $d$  – konektivnost mreže,
- $t$  – *girth* mreže,
- $K$  – diametar mreže,
- $X^e(m)$  – *articulation level* linka (definisan kao maksimalna vrednost  $m$  za svaki par čvorova u mreži, gde je  $m$  minimalni skup linkova koji ako se uklone podeliće mrežu na dva dela koji ne komuniciraju pri čemu su izabrani čvorovi u delovima mreže koji ne komuniciraju),
- $X^n(m)$  – *articulation level* čvora (definisan kao maksimalna vrednost  $m$  za svaki par čvorova u mreži, gde je  $m$  minimalni skup čvorova koji ako se uklone podeliće mrežu na dva dela koji ne komuniciraju pri čemu su izabrani čvorovi u delovima mreže koji ne komuniciraju),
- $\delta$  - kohezija.

Drugi pristup problemu projektovanja je dat u [59], gde su *B. Hamersma* i *M.S. Chodos* dali opšti pregled problema s kojima se susreću projektanti i na šta treba obratiti pažnju da bi se dobila mreža visoke raspoloživosti. Ceo problem je analiziran kroz primer dizajna privatne komutirane mreže.

*A. Shooman* je u [60] dao pregled algoritama za tačno računanje *all-terminal* i *K-terminalne* raspoloživosti mreže sa idealnim čvorovima i linkovima sa istom raspoloživošću, pri čemu su dati algoritmi koji su dovoljno brzi, tj. da njihovo izračunavanje traje prihvatljivo dugo. Pored toga, predložena su proširenja poznatih algoritama koja omogućavaju računanje raspoloživosti mreže i sa nesavršenim čvorovima uz ograničenje da vreme izvršavanja eksponencijalno zavisi od veličine mreže.

Poput *B. Hamersma* i *M.S. Chodos*-a, koji su uveli svoje indekse kao meru raspoloživosti mreže [59], *J. P. Sauvé* i *F.E.S. Coelho* su u [61] definisali novu meru raspoloživosti mreže koja se zasniva na kašnjenju, protoku i pouzdanosti mreže i koja je primarno namenjena posmatranju mreže sa poslovne strane (uticaj mreže na poslovanje vlasnika mreže). Nova mera pokušava da kvantifikuje na koji način mreža nudi servis krajnjem korisniku. Uz definiciju nove mere raspoloživosti mreže, autori su predložili

algoritam za njeno računanje koji ima polinomijalnu složenost čime se omogućava lakše računanje prilikom dizajna mreže.

Najveći broj prethodno nabrojanih metoda i algoritama se bavio raspoloživošću mreža u situaciji jednog otkaza. *M. Clouqueur* i *W.D. Grover* su u [62] se bavili problemom dva međusobno nezavisna istovremena otkaza u *mesh* mreži i mogućnošću da se mreža samooporavi prerutiranjem saobraćaja na ostale raspoložive linkove. Autori su pokazali da kod *mesh* tipova mreža uvek postoji mogućnost oporavka dela saobraćaja prerutiranjem, za razliku od mreža koje imaju 1+1 zaštitu kod kojih dva otkaza mogu u potpunosti da dovedu do prekida saobraćaja pogođenih tim otkazima. Rezultati prezentovani u [62] su pokazali da postojanje 25% rezervnog kapaciteta u *mesh* tipu mreža može prerutiranjem saobraćaja u slučaju dvostrukog otkaza da oporavi do 95% saobraćaja koji je ugrožen otkazima.

Težnja za smanjenjem troškova izgradnje mreže je u slučaju optičkih sistema prenosa baziranih na 1+1 zaštiti uvela u razmatranje i raspoloživost mreže. *M.Mezhoudi*, *C.-H.K.Chu*, *Chen Jing* i *Chen Yu Lon* su u [63] predložili novi način projektovanja mreže gde se u obzir uzima i raspoloživost servisa s kraja na kraj (*end-to-end*) sa ciljem da se ne obezbeđuje puna zaštita kompletnog saobraćaja (1+1). Predloženim novim pristupom se u mrežama koristi *meshed* struktura uz deljene resurse za zaštitu saobraćaja. Na osnovu raspoloživosti servisa se određuju kritični delovi mreže i samo se oni udvajaju čime se smanjuju troškovi izgradnje mreže uz zadržavanje potrebne raspoloživosti.

*G. Semaan* se u [64] bavio pitanjem potrebne raspoloživosti i direktnog troška za vlasnika mreže. Veliki broj korisnika u stvari ne zna kolika mu raspoloživost servisa ili mreže treba. Većina korisnika zahteva pet devetki, jer su čuli da tako i drugi traže, a da u stvari nisu svesni šta to stvarno predstavlja (5 minuta otkaza na nivou godine dana) i koliko to košta. Praksa pokazuje da veliki broj korisnika zahteva veću raspoloživost nego što im je potrebna čime nepotrebno ulažu veća sredstva u izgradnju mreže, a koja bi mogla da se korisnije upotrebe na drugim projektima. Druga, i opasnija, situacija je da korisnik zahteva manju raspoloživost od stvarno potrebne čime se stvaraju ozbiljni problemi u funkcionisanju mreže i servisa i veliki gubici. *Semaan* je u [64] probao da razjasni pitanja raspoloživosti mreže i servisa i vezu sa troškovima izgradnje i funkcionisanja. Cilj rada je bio da se pokaže potreba za pravilnom procenom potrebne raspoloživosti u cilju dobijanja optimalnog rešenja za mrežu.

Prethodno prezentovane metode i algoritmi za izračunavanje dvo-terminalne raspoloživosti su podrazumevale da se linkovi mogu naći u dva stanja, stanje ispravnog rada i stanje da ne rade. *Chin-Chia Jane* i *Yih-Wenn Laih* su u [65] uveli *multi-state* linkove koji mogu da imaju više od dva stanja pri čemu se sva stanja svrstavaju u dva tipa, prihvatljiva i neprihvatljiva. Osnovno merilo da li je stanje linka prihvatljivo ili nije jeste da li oni mogu da prenesu ponuđeni saobraćaj. Za ovako definisane elemente mreže, *C.C. Jane* i *Y.W. Laih* su predložili algoritam za određivanje dvo-terminalne raspoloživosti. Autori su pokazali da je predloženi algoritam direktan i efikasniji od drugih algoritama koji se bave ovim problemom.

*M. Hayashi* i *T. Abe* su problemu raspoloživosti u telekomunikacionim mrežama pristupili nešto drugačije. Umesto da se bave raspoloživošću mrežne topologije, oni su u svom radu [66] uveli model raspoloživosti mreže koji se bazira na putanji saobraćaja. S obzirom da putanja saobraćaja zavisi od više faktora, kao što su protokoli rutiranja, kako se logički linkovi povezuju sa fizičkim linkovima i slično, prema autorima, nije dovoljno baviti se samo fizičkom topologijom mreže. Zbog prethodno navedenih faktora neće se svi linkovi koristiti za prenos podataka te stoga autori smatraju da je njihov model bolji od postojećih. Da bi se predloženi model mogao koristiti neophodno je poznavati matricu saobraćaja u mreži i karakteristike saobraćaja i putanje kroz mrežu. S obzirom na ovako definisane početne podatke, primenljivost ovog modela je ograničena na slučajeve gde je unapred poznat saobraćaj i neke njegove osnovne karakteristike. Po definisanju saobraćaja, primena modela podrazumeva da se odrede granične vrednosti za korišćenje određenih putanja u mreži i putanje saobraćaja kroz mrežu. Definisanjem putanja saobraćaja redukuje se izgled mreže na samo one putanje kuda prolazi saobraćaj od interesa. Na kraju se na redukovanu mrežu primenjuje određivanje raspoloživosti vodeći računa o raspoloživosti linkova. Autori su u svom radu pokazali da je njihov algoritam prihvatljivo brz i da se može koristiti kod dizajna velikih telekomunikacionih mreža.

Da se pitanje dizajna mreža ne pojavljuje samo kod telekomunikacionih mreža, pokazali su *G. Zhang*, *J. Lu* i *Q. Xiang* u radu [67] gde su primenili genetski algoritam za projektovanje mreže puteva sa ciljem minimizovanja ukupne cene transporta tim putevima. Predloženi algoritam je testiran na modelu puta gde su dobijeni određeni zaključci uz ograničenje da je važno dobiti i javno mišljenje po pitanju predloženih modifikacija putne mreže.

*F. Altıparmak, B. Dengiz i A.E. Smith* su u [68] predložili novi način za korišćenje neuralnih mreža u cilju dobijana procene raspoloživosti mreže. Za razliku od prethodnih radova iz oblasti primene neuralnih mreža za procenu raspoloživosti telekomunikacionih mreža gde se kao ulazni vektor koristi skup svih mogućih linkova u mreži, autori su u [68] predložili upotrebu opšte neuralne mreže gde se kao ulazni vektor koristi kompaktan skup ulaznih podataka. Za treniranje neuralne mreže korišćeni su slučajno generisani skupovi podataka gde se raspoloživosti linkova kreću u granicama od 0,8 do 0,99. Za testiranje dobijene trenirane neuralne mreže generisane su mreže sa brojem čvorova između 10 i 20. U cilju provere tačnosti dobijenih rezultata, primenom metode Monte Carlo izračunate su raspoloživosti testiranih mreža i te vrednosti su uzete za tačne vrednosti. Dobijeni rezultati su potvrdili upotrebljivost predloženog metoda uz ograničenje da je prethodno potrebno generisati dovoljan broj sličnih mreža pomoću kojih treba izvršiti treniranje neuralne mreže pa zatim tako treniranu mrežu primeniti na konkretan primer. U okviru rada su autori primenili predloženi algoritam i na izračunavanje raspoloživosti za već poznate akademske mreže gde je dobijena relativna greška veća od 3%, a u jednom slučaju je dobijena raspoloživost veća od 1. Predloženi metod na bazi primene neuralnih mreža može da primenljiv ako je prethodno bilo moguće na adekvatan način izvršiti treniranje neuralne mreže. Čak i kada je izvršeno adekvatno treniranje neuralne mreže, to nije garancija da će dobijeni rezultati imati veliku tačnost.

*S.V. Amari, M.J. Zuo i G. Dill* su u [69] predložili model za opisivanje opšteg *multi-state k-out-of-n* sistema i metod za tačno računanje njegove raspoloživosti. Kod *multi state* sistema, kaže se da je sistem u stanju  $j$  (gde je  $j$  stanje između 1 i  $M$ , u koliko maksimalno različitih stanja elementi mogu da budu) ako je barem  $k$  elemenata sistema u stanju  $j$  ili većem. U ovom slučaju se pod pojmom sistema posmatra skup elemenata bez analize njihove međusobne povezanosti. Predloženi metod se bazira na primeni uslovnih verovatnoća i primenljiv je na za sve slučajeve *multi-state k-out-of-n* sistema. Autori su pokazali da primenom predloženog metoda na sistem od 500 elemenata i 200 stanja rezultati se dobijaju za manje od sekunde. S obzirom da se telekomunikacione mreže ne mogu posmatrati na ovaj način, dobri rezultati izloženi u ovom radu nisu primenljivi na izračunavanje raspoloživosti telekomunikacionih mreža.

*R. Mishra i S.K. Chaturvedi* su u [70] predložili novi metod, baziran na minimalnom podskupu čvorova, za analizu tipično korišćenih mera raspoloživosti mreža poput dvo-terminalne i *k-terminal* raspoloživosti mreže. Predloženi metod je

uveo poboljšanje po pitanju izbora podskupa čvorova u mreži uz dobijanje istih rezultata, čime se donekle ubrzava samo izračunavanje raspoloživosti.

A. Kumar, K.K. Mishra i A.K. Misra su u [71] predložili primenu genetskog algoritma za optimizaciju dizajna telekomunikacionih mreža. Specifičnost predloženog načina primene genetskog algoritma je u tome što su predložili poseban način inicijalizacije genetskog algoritma, kodovanja samog algoritma i lokalnog pretraživanja. Autori su na primeru mreže sa 5 čvorova pokazali primenljivost svog algoritma. Dalja istraživanja se kreću u pravcu omogućavanja primenljivosti predloženog rešenja na većim mrežama.

Yi Ding, M.J. Zuo, A. Lisnianski i Wei Li su se u [72] bavili *multi-state weighted k-out-of-n* sistemima i načinama određivanja njihove raspoloživosti pomoću *fuzzy* logike. Dva egzaktna metoda za izračunavanje raspoloživosti ovih sistema su rekurzivna metoda i *universal generating functions* metoda. Problem ovih metoda je velika složenost u situaciji kada sistem ima veći broj elemenata i stanja. Autori su primenom *fuzzy* logike razvili *fuzzy* rekurzivnu metodu i *fuzzy universal generation functions* metodu za procenu raspoloživosti ovih sistema. U okviru rada autori su uporedili svoje rezultate sa rezultatima koji se dobijaju primenom klasičnih metoda i pokazali da se sa značajno manjim resursima za izračunavanje dobijaju rezultati prihvatljive tačnosti.

Hosam M. F. AboElFotoh i Loulwa S. Al-Sumait su se u [73] bavili pitanjem optimizacije mrežne topologije sa ciljem smanjivanja troškova realizacije uz zadržavanje zadate *all-terminal* raspoloživosti mreže. Prezentirano rešenje se bazira na korišćenju neuralne mreže uz konstruisanje takve energetske funkcije čija minimizacija dovodi neuralnu mrežu u stabilno stanje, gde to stabilno stanje odgovara rešenju problema dizajna telekomunikacione mreže. Autori su svoj metod testirali na tri primera od kojih su prva dva primera već poznata u literaturu, a treći primer se sastojao od nove mreže sa 50 čvorova i 1225 linkova. Treba imati u vidu da se autori nisu bavili izračunavanjem tačne vrednosti za raspoloživost mreže. Umesto toga, koristili su procenu gornje vrednosti raspoloživosti mreže koju su izračunavali korišćenjem metode opisane u [29]. Za mrežnu topologiju za koju bi njihova metoda dala optimalnu topologiju, koristili su Monte Carlo simulaciju da dobiju što procenu raspoloživosti tako složene mreže. Za treći primer je bilo potrebno pola sata CPU vremena na računaru sa Pentium procesorom da bi se dobilo više rešenja problema za koje je bilo potrebno naknadno nekom metodom izračunati raspoloživost i proveriti da li stvarno ispunjen zadati uslov po pitanju tražene *all-terminal* raspoloživosti. Prema autorima, optimizacija

dizajna na bazi neuralnih mreža daje bolje rezultate u odnosu na ostale heurističke metode. Iako predložena metoda daje neke rezultate relativno brzo, potrebno je dodatno vreme i primena nekih drugih metoda da se izračuna kolika je raspoloživost dobijenih rešenja i da li ona zadovoljavaju postavljeni uslov.

A. Pakstas se u okviru svog tutoriala [74] bavio pitanjem dizajna mreža sa stanovišta potrebne raspoloživosti. Prezentirani su pristupi u dizajnu telekomunikacionih mreža koji obezbeđuju potrebnu raspoloživost mreže. Analiziran je i uticaj komunikacionih protokola na raspoloživost mreža (sa stanovišta vremena samooporavka mreže posle kvara).

M. Tornatore, G. Maier i A. Pattavina su u [75] prezentirali heurističku metodu za optimizaciju broja vlakana u optičkim kablovima kod optičke transportne mreže na bazi korišćenja *shared path-protection* mehanizama za zaštitu saobraćaja. Predloženi metod je testiran na dva realna slučaja mreža sa zemaljskim i podvodnim optičkim kablovima. Dobijeni rezultati su pokazali da se primenom *shared path-protection* mehanizama za zaštitu saobraćaja u OTN mrežama mogu ostvariti značajne uštede po pitanju potrebnog broja optičkih vlakana uz zadržavanje potrebne raspoloživosti mreže što je najčešće pet devetki.

Tao Yu, Shanzhi Chen, Ming Ai, Xin Li, Yuhong Li i Zhen Qin su se u [76] fokusirali na raspoloživost IP mreža. Umesto posmatranja raspoloživosti topologije mreže, autori su predložili novi način određivanja raspoloživosti IP mreža kroz metodu koja uzima u obzir i dinamiku rutiranja saobraćaja, karakteristike saobraćaja i zagušenja u mreži. S obzirom da predloženi novi elementi koje treba uzeti u obzir kod određivanja raspoloživosti servisa (jer je servis to što korisnik vidi i koristi) značajno utiču na raspoloživost, autori smatraju da se na ovaj način dobija bolja vrednost za raspoloživost. Rezultati simulacije su pokazali značajnu degradaciju kvaliteta servisa i raspoloživosti mreže u odnosu na posmatranje samo topologije mreže, čime autori opravdavaju svoj pristup kao kompletniji i koji daje bolje rezultate za jednog operatora mreže. Za određivanje raspoloživosti na način na koji su je oni definisali, korišćene su aproksimativni izrazi za koje autori kažu da ima grešku izračunavanja reda  $10^{-2}$  što je mala tačnost. A s obzirom da su i novo uvedene definicije raspoloživosti takve da mnogo toga zanemaruju i pojednostavljaju, ostaje otvoreno pitanje da li dobijeni rezultati uopšte mogu da se posmatraju kao merodavni.

P.S. Barreto i P.H.P. de Carvalho su se u [77] bavili pitanjem mreže sa multimedijalnim saobraćajem kao tipom saobraćaja koji ima specifične zahteve po



pitanju QoS parametara. Autori su multimedijalni saobraćaj modelirali kao kombinaciju frakcionog Braunovog kretanja (*fractional Brownian motion*) i Markovljevih procesa. Na navedeni model primenjena je evolucionarna optimizaciona metoda koja ima za cilj da optimizuje veličinu elemenata u mreži uz održavanje QoS parametara, zadržavanje mrežne stabilnosti i smanjenje troškova realizacije. Rezultati simulacije prezentirani u [77] pokazuju da predložena metodologija može imati praktičnu upotrebu kod dimenzionisanja mrežnih elemenata.

*Zhengguo Xu, Yindong Ji i Donghua Zhou* su u [78] predložili metod za predikciju raspoloživosti sistema u realnom vremenu u zavisnosti od predikcije grešaka u dinamičkom sistemu. Samu predikciju grešaka autori su realizovali korišćenjem Monte Carlo metode. Predložena metoda je verifikovana kroz simulaciju sistema vodenog rezervoara.

*J. Desai i S. Sen* su u [79] predložili optimizacioni metod za dizajniranje mreža sa zadatim parametrima. U metodu koji su predložili, parametri koji se zadaju su potrebni protoci u mreži i ograničenja po pitanju kapaciteta linkova. Svi navedeni ulazni parametri se zadaju uz dodavanje dodatnih resursa koji su neophodni da bi se obezbedila redundansa u mreži u cilju zaštite od otkaza linkova. Autori su definisali model koji polazi od teorije date u [91] da bi kroz modifikacije koje su predložili došli do rešenja optimizacije cene realizacije mreže. Simulacija koju su autori sproveli na fiktivnom modelu je potvrdila njihov pristup u rešavanju problema. Problem navedenog pristupa je u tome što su autori smatrali da dodavanje resursa nekom linku (npr. povećanje protoka) dovodi do promene raspoloživosti linka koja se ogleda u množenju postojeće raspoloživosti linka eksponencijalnom funkcijom čiji argument je iznos promene resursa linka. Na kraju, autori u potpunosti zanemaruju raspoloživost mreže i fokusiraju se na cenu realizacije i uticaj promene parametara mreže na cenu realizacije. Iako su autori na svom fiktivnom modelu pokazali ispravnost svog pristupa, metoda nije verifikovana na realnom modelu mreže niti je na kraju izvršena provera raspoloživosti mreže koja se dobija posle optimizacije.

### **3.6 Zaključak**

Pojavom kompleksnijih telekomunikacionih mreža postavilo se pitanje kolika je raspoloživost jedne tako složene mreže. Relativno brzo se došlo do algoritama koji

omogućavaju tačno računanje raspoloživosti mreže. Na žalost, vreme izračunavanja je eksponencijalno raslo sa povećanjem broja čvorova i linkova u mreži. Zbog toga su takve metode ostale direktno primenljive samo na relativno malim mrežama (veličina mreže na koju se metode za tačno izračunavanje raspoloživosti mogu direktno primeniti rasla je kako se povećavala brzina obrade podataka na računarima, ali se i danas radi o mrežama sa desetak čvorova). Istraživači su se okrenuli definisanju aproksimativnih metoda koje bi mogle da daju rezultate približne tačnosti u nekom razumnom vremenu.

U okviru ove doktorske disertacije fokus je na izračunavanju maksimalne *all-terminal* raspoloživosti mreže koja se može dobiti za zadati broj čvorova i linkova i zadatu raspoloživost linkova u mreži. Izabrana je *all-terminal* raspoloživost jer je to mera koja se koristi kod određivanja raspoloživosti okosnice telekomunikacionih mreža.

Problemom izračunavanja *all-terminal* raspoloživosti za zadatu mrežu, bavili su se *A.M.Shooman* i *A.Kershenbaum* u radu [28] gde su opisali metode transformacije mreže uz očuvanje raspoloživosti (raspoloživost mreže dobijene posle transformacije je ista kao raspoloživost mreže pre transformacije), a u cilju jednostavnijeg izračunavanja tačne raspoloživosti. Pored metoda za transformaciju mreže, autori su predložili i određena unapređenja na bazi heuristike za koja su na jednostavnijim primerima (mreža sa 6 čvorova i 8 linkova i mreža sa 21 čvorom i 26 linkova) pokazali da se dobijaju rezultati gde je relativna greška  $1,7 \cdot 10^{-2}$ . Dobijena relativna greška je prevelika za slučajeve kod kojih se posmatra mreža velike raspoloživosti, poput raspoloživosti „pet devetki“ (raspoloživost mreže od „pet devetki“ je usvojena kao raspoloživost koja je potrebna na okosnicama telekomunikacionih mreža). Autori nisu sigurni u primenljivost svoje metode na većim mrežama, jer vreme izvršavanja njihovog algoritma raste eksponencijalno sa povećanjem složenosti mreže (kao što je slučaj kod osnovnih algoritama za tačno izračunavanje raspoloživosti mreže). Predloženi metod se bavi izračunavanjem *all-terminal* raspoloživosti zadate mreže, pri čemu se ne ulazi u analizu pitanja da li se drugačijim rasporedom linkova u mreži može postići veća *all-terminal* raspoloživost mreže.

Svakako veliki napredak na polju aproksimativnog izračunavanja raspoloživosti mreže napravio je *Rong-Hong Jan* svojim radom [29] u kome je predložio aproksimativnu metodu za izračunavanje gornje granične vrednosti za maksimalnu vrednost *all-terminal* raspoloživost mreže. Ograničenja predloženog metoda se ogledaju u tome da metoda daje dobre rezultate (na primer, relativna greška je manja od 0,005% za broj čvorova 12, broj linkova 24 i raspoloživost linka 0,9) za slučaj kada su

raspoloživosti linkova relativno velike (veće od 0,9) i kada je *all-terminal* raspoloživost mreže veoma bliska jedinici. U ostalim slučajevima ova metoda ima veću grešku aproksimacije od metode predložene u okviru Doktorske disertacije. Vreme izvršavanja metode koju je predložio *R. H. Jan* minimalno raste sa povećanjem veličine mreže. Vreme izvršavanja metode predložene u okviru Doktorske disertacije ne zavisi od veličine mreže čime je omogućeno računanje raspoloživosti i za mreže sa stotinjak čvorova i linkova. Ni metoda *R. H. Jan*-a, kao ni prethodne metode ne daju bilo kakvu vrednost za minimalnu moguću raspoloživost sa datim parametrima mreže. S druge strane, u okviru Doktorske disertacije je predložena metoda koja omogućava izračunavanje minimalne *all-terminal* raspoloživosti mreže sa datim parametrima čime se dobijaju granice (minimalna i maksimalna) u okviru kojih može da se kreće *all-terminal* raspoloživost u zavisnosti od topologije mreže sa zadatim parametrima (broj čvorova, broj linkova i raspoloživost linkova).

*Konak* i *Smith* [42] su, polazeći od metoda date u [29] razvili svoje proširenje koje je omogućilo aproksimativno računanje raspoloživosti za mreže sa linkovima različite raspoloživosti. Na prvi pogled, dobijena je opštija metoda, ali su rezultati pokazali da je tačnost tako dobijenih rezultata, u pojedinim slučajevima, lošija od tačnosti za slučaj primene polazne metode [29]. Primenom metode definisane od strane *Konak*-a i *Smith*-a [42] za broj čvorova u mreži između 6 i 20, raspoloživošću linkova 0,9 i 0,95 (svi linkovi u mreži imaju istu raspoloživost, tj. slučaj koji je ekvivalentan sa uslovima datim u [29]) ima apsolutnu grešku između  $4 \cdot 10^{-3}$  i  $6 \cdot 10^{-2}$ , a relativnu grešku između 0,4% i 7,4% (što je lošije od izvorne metode [29]), pri čemu sa porastom broja čvorova u mreži raste i greška. Ako se metoda *Konak*-a i *Smith*-a [42] primeni u mreži sa različitom raspoloživošću linkova gde broj čvorova u mreži se kreće od 5 do 20, ima apsolutnu grešku od  $4 \cdot 10^{-3}$  do  $1 \cdot 10^{-1}$  i relativnu grešku od 0,5% do 12%. Rezultati dobijeni za metodu *Konak*-a i *Smith*-a [42] pokazuju mogućnost primene ove metode za relativno male mreže (do 10 čvorova). U slučaju iole većih mreža (više od 16 čvorova) greška počinje značajno da raste čime metoda postaje ograničeno upotrebljiva. Metoda predložena u ovoj doktorskoj disertaciji izračunava *all-terminal* raspoloživosti za *full-meshed* mreže iz [42] praktično trenutno uz dobijanje rezultata velike tačnosti (greška je na desetoj decimali ili manja), dok su rezultati dati u [42] pokazali da je korišćenjem metoda *Konak*-a i *Smith*-a bilo potrebno neko vreme za dobijanje rezultata čija tačnost je značajno manja od tačnosti metode predložene u ovoj Doktorskoj disertaciji.

*J.M. Won* i *F. Karray* su u [57] predstavili modifikovane verzije postojećih algoritama za izračunavanje aproksimativne vrednosti *all-terminal* raspoloživosti. Autori su testirali svoje algoritme na *full-meshed* mrežama (za raspoloživosti linkova 0,95 i 0,99) i na nekim specifičnim mrežnim topologijama. Dobijeni rezultati su pokazali da je za pojedine mrežne topologije (10 do 15 čvorova u mreži) vreme izvršavanja kratko, ali su zato za neke testirane mreže prekinuli izvršavanje algoritma posle jednog sata, jer algoritam nije dao nikakve rezultate. Na osnovu izloženog se zaključuje da modifikacije koje su *J.M. Won* i *F. Karray* predložili u svom radu [57] daju ubrzanja u računanju samo za pojedine slučajeve, ali na osnovu prezentiranih rezultata nije moguće definisati tipove mrežnih topologija za koje je moguće primeniti njihove algoritme. Za ostale slučajeve je vreme izvršavanja bilo značajno duže od osnovnih algoritama koji su modifikovani ili rezultati uopšte nisu ni dobijeni.

Metoda predložena u ovoj doktorskoj disertaciji omogućava određivanje aproksimativne vrednosti *all-terminal* raspoloživosti nezavisno od veličine mreže, tj. vreme izvršavanja ne zavisi od veličine mreže, a primenljiva je kod svih mrežnih topologija. Time je metoda omogućila dobijanje vrednosti za raspoloživosti mreže koje su veće po dimenzijama od svih primera koji su korišćeni u do sada objavljenim radovima. Tačnost metode predložene u Doktorskoj disertaciji raste sa povećanjem raspoloživosti mreže i uvek je barem dva reda veličine veća od raspoloživosti koja se traži (na primer, ako se izračunava raspoloživost mreže koja je 0,99999, dobijeni aproksimativni rezultat ima apsolutnu grešku  $10^{-7}$ ). Uredni pregled publikovanih rezultata i rezultata iz ove Doktorske disertacije dat je u tabeli T-3.2 gde se jasno vidi da predloženi algoritam za izračunavanje *all-terminal* raspoloživost ima veću tačnost od do sada publikovanih algoritama koji se bave ovim problemom. Rezultati publikovano od strane drugih autora ([29] i [42]) su se odnosili na relativno male mreže sa jako malim brojem linkova. Sa porastom broja linkova u mreži raste i tačnost algoritma predloženog u Doktorskoj disertaciji. Treći doprinos Doktorske disertacije je da je predložen aproksimativni metod za izračunavanje minimalno moguće raspoloživosti za mrežu sa datim parametrima. To je minimalna vrednost raspoloživosti koja će se dobiti za mrežu, bez obzira na to kakva je njena topologija, uz poštovanje pravila da ne postoje linkovi koji su paralelni (spajaju dva ista para čvorova). U do sada objavljenim radovima, autori nisu razmatrali ovaj slučaj.

Tabela T-3.2 – Uporedni pregled dobijenih rezultata u radovima [29], [42] i u ovoj doktorskoj disertaciji

N	A	L	Raspoloživost mreže računata metodom:				Relativna greška aproksimativne metode		
			tačna vrednost	R.H.Jan [29]	Konak, Smith [42]	disertacija	R.H.Jan [29]	Konak, Smith [42]	disertacija
5	0,8	7	0,9175	0,9357	0,9333	0,8790	-1,98%	-1,72%	4,19%
5	0,9	6	0,9579	0,9714	0,9696	0,9539	-1,41%	-1,22%	0,42%
7	0,9	8	0,9141	0,9555	0,9513	0,9349	-4,53%	-4,07%	-2,27%
7	0,9	9	0,9598	0,9634	0,959	0,9575	-0,38%	0,08%	0,24%
7	0,95	7	0,9556	0,9839	0,9835	0,9817	-2,96%	-2,92%	-2,73%
8	0,9	10	0,947	0,9554	0,9503	0,9469	-0,89%	-0,35%	0,02%
8	0,9	11	0,9697	0,9699	0,9667	0,9687	-0,02%	0,31%	0,10%
8	0,95	9	0,9707	0,9839	0,9832	0,9846	-1,36%	-1,29%	-1,44%
9	0,9	11	0,9272	0,9476	0,9416	0,9360	-2,20%	-1,55%	-0,95%
9	0,9	12	0,9574	0,9685	0,9651	0,9574	-1,16%	-0,80%	0,00%
9	0,95	10	0,962	0,9837	0,9829	0,9825	-2,26%	-2,17%	-2,13%
10	0,9	12	0,9077	0,9463	0,9401	0,9247	-4,25%	-3,57%	-1,87%
10	0,9	14	0,9672	0,9685	0,9656	0,9672	-0,13%	0,17%	-0,0009%
10	0,95	11	0,9533	0,9815	0,9805	0,9803	-2,96%	-2,85%	-2,83%

## 4 Funkcija aproksimacije maksimalne raspoloživosti

Prilikom projektovanja okosnice složene telekomunikacione mreže jedan od problema je definisati topologiju mreže tako da ona ima traženu raspoloživost. U situacijama kada je definisan broj i pozicija linkova koji postoje u mreži, razvijene su aproksimativne metode za izbor optimalne topologije da bi se dobila raspoloživost najpribližnija traženoj uz minimizaciju troškova eksploatacije. Razlog zašto se koriste aproksimativne metode, a ne tačno izračunavanje raspoloživosti mreže (iako su poznati algoritmi za tačno izračunavanje) leži u tome što vreme potrebno za izračunavanje tačne vrednosti raspoloživosti raste eksponencijalno sa brojem čvorova u mreži. To posebno dolazi do izražaja kada se primenom metode sinteze mreže određuje maksimalna raspoloživost mreže u zavisnosti od broja linkova. Kao ilustracija ovog problema, posmatra se mreža sa 20 čvorova i 20 linkova (20 čvorova povezano u prsten) i proces sinteze mreže (objašnjen je kasnije u ovom poglavlju) u cilju dobijanja maksimalnih raspoloživosti. Da bi se došlo do topologije sa  $L=47$  linkova (određeno je 27 dodatnih linkova) izračunavanje je trajalo 81 dan na Core2Duo procesoru na 3GHz. Ako se ima u vidu da *full-meshed* topologija za 20 čvorova ima 190 linkova, jasno je da nije moguće u realnom vremenu tačnim izračunavanjem doći do podataka o maksimalnoj raspoloživosti već je potrebno koristiti aproksimativne metode. U praksi, to znači da bez većih problema može da se izračuna raspoloživost za mrežu sa desetak čvorova, ali već preko tog broja vreme potrebno za izračunavanje postaje preveliko.

Prilikom projektovanja neke telekomunikacione mreže relativno često pojavljuju se situacije u kojima su poznata samo čvorišta mreže uz mogućnost da se uspostavljaju linkovi između bilo koja dva čvorišta. Postavlja se pitanje na koji način doći do optimalne topologije mreže sa stanovišta *all-terminal* raspoloživosti i cene realizacije. Jedan od pristupa bi bio projektovanje svih mogućih linkova u mreži u cilju dobijanja cene njihove realizacije, a zatim pokretanja aproksimativnog algoritma za optimizaciju mreže. Takav pristup, iako bi dao rezultat na kraju, vremenski je veoma zahtevan, a cena projektovanja bi bila nepotrebno visoka. U tom smislu, od velike pomoći bi bio podatak o minimalno potrebnom broju linkova da bi se dobila tražena raspoloživost mreže. Takav podatak bi omogućio da se lakše dođe do početnog (minimalno potrebnog) broja linkova u mreži koji kasnije može da se optimizuje drugim metodama.

## 4.1 Metoda sinteze mreže

Kada se govori o okosnici mreže, po pravilu, se očekuje da svi čvorovi okosnice mreže budu stalno u funkciji. U tom smislu, kada se govori o raspoloživosti okosnice mreže u praksi je usvojeno da se posmatra *all-terminal* raspoloživost. Ako u daljem tekstu drugačije ne bude naglašeno, kada se govori o raspoloživosti misli se na *all-terminal* raspoloživost. Jedno od prvih pitanja na koje je potrebno dati odgovor jeste na koji način može da se odredi gornja granica raspoloživosti mreže za zadati broj čvorova i linkova. U cilju dobijanja zavisnosti maksimalne (gornje granice) raspoloživosti od broja linkova u mreži za zadati broj čvorova ovde je predložena “metoda sinteze mreže”. U okviru ove metode polazi se od početne topologije mreže koja može proizvoljno da se zada. Prvi korak u metodi sinteze mreže je dodavanje jednog novog linka između neka dva čvora mreže. Za novodobijenu topologiju se izračuna *all-terminal* raspoloživost. Prilikom računanja raspoloživosti mreže koristi se metoda rastavljanja koja daje tačnu vrednost za raspoloživost neke mrežne topologije (opisana u poglavlju 2.2.1.3). Postupak se ponavlja za sve moguće slučajeve dodavanja jednog linka (između bilo koja dva čvora u mreži). Upoređenjem dobijenih rezultata određuje se ona topologija mreže sa dodatim jednim linkom koja ima najveću raspoloživost. Navedena topologija je sada početna za rekurzivni proces dodavanja novog linka. Na navedeni način se vrši sinteza mreže tako da se uvek traži najveći priraštaj raspoloživosti mreže. Ceo postupak se iterativno ponavlja sve dok se ne dođe do *full-meshed* topologije mreže. U principu, postupak može da se nastavi i posle dobijanja *full-meshed* topologije, ali to bi značilo da se tada sigurno pojavljuju linkovi u paraleli između istih čvorišta u mreži što se u praksi izuzetno retko koristi. S druge strane, ako za zadate čvorove mreže mora da se dostigne tražena raspoloživost, metod sinteze mreže će sigurno dati rešenje.

Proces sinteze mreže je procesorski veoma zahtevan jer, za svaki korak proširenja mreže, potrebno je izračunati raspoloživosti velikog broja različitih topologija. Ovaj problem posebno dolazi do izražaja kada su mreže sa velikim brojem čvorova i linkova. Jedini način ubrzavanja ovog procesa je da se ne računaju raspoloživosti za sve moguće topologije koje se dobijaju dodavanjem jednog novog linka. Analiza dobijenih rezultata je pokazala da se maksimalne raspoloživosti mreže

dobijaju kada se konektivnost čvorova u mreži razlikuje najviše za jedan. Na osnovu tog rezultata, u procesu sinteze mreže se uvodi dodatni kriterijum za novi link, koji glasi da dodavanjem novog linka u topologiju mreže, ni jedan od dva čvora ne sme da ima konektivnost koja se razlikuje za više od 1 od konektivnosti svih ostalih čvorova u mreži. Ovim dodatnim kriterijumom se eliminiše značajan broj linkova iz procesa sinteze mreže čime se sam proces ubrzava. Procenat ubrzanja, tj. smanjenja broja linkova za koje se izračunava raspoloživost mreže, zavisi od iteracije u sintezi mreže. U poslednjoj iteraciji sinteze mreže kada se topologija mreže menja tako da čvorovi mreže prelaze sa konektivnosti  $N-2$  na konektivnost  $N-1$ , nema nikakvog dobitka. Međutim, u prvoj iteraciji sinteze mreže kada čvorovi prelaze sa konektivnosti 2 na konektivnost 3, dobitak ide i preko 90%. Srednji dobitak prilikom sinteze mreže od topologije prstena do *full meshed* topologije za  $N=6$  je 28%, za  $N=8$  je 37% i za  $N=10$  je 42%. Što je broj čvorova mreže veći, to je i veći dobitak. Posebno je značajno to što kod velikih mreža izračunavanje raspoloživosti mreže traje mnogo duže nego kod malih mreža tako da izbacivanje makar jednog koraka u procesu sinteze mreže predstavlja značajan dobitak.

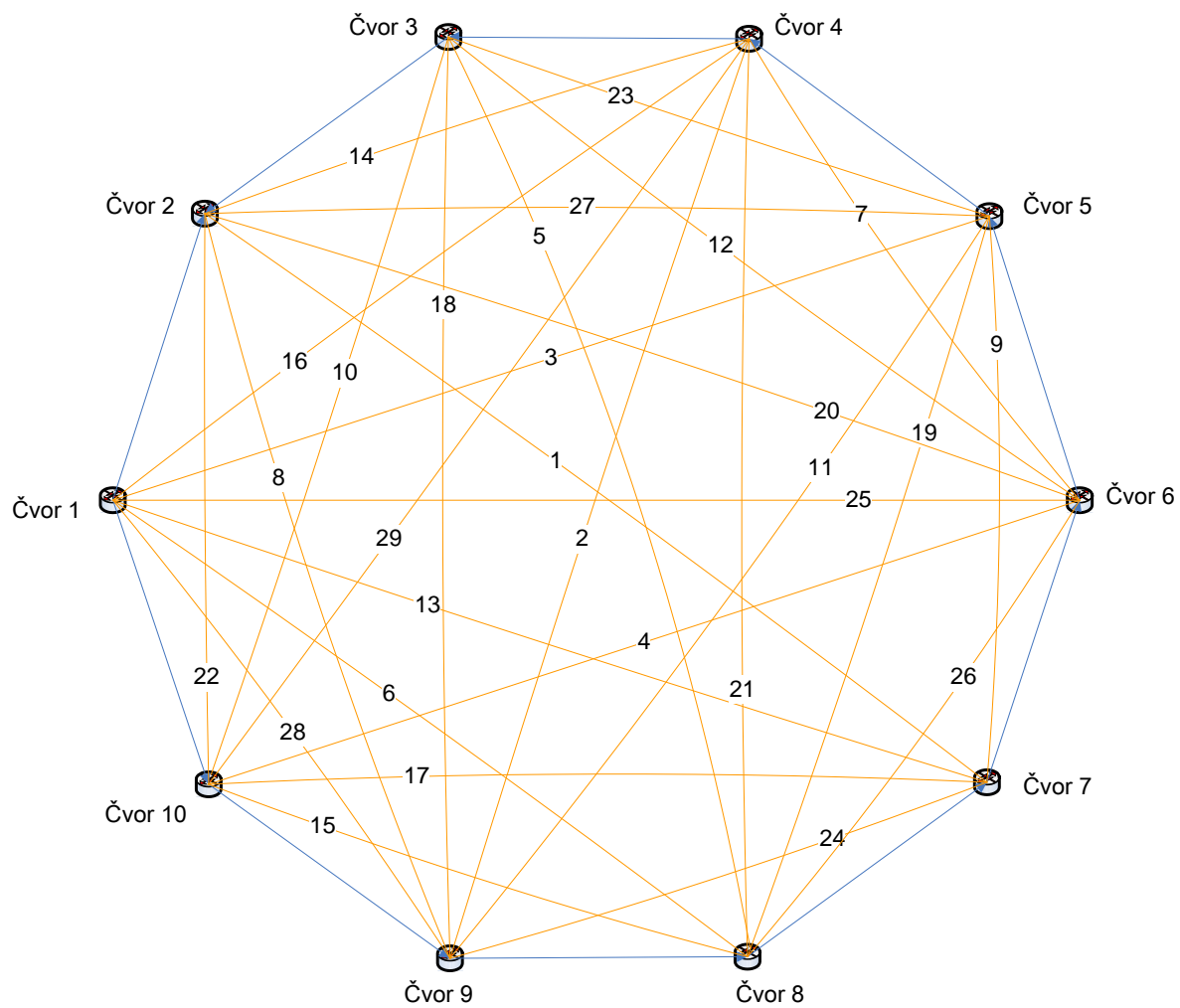
Prvi problem koji treba rešiti jeste na koji način treba izabrati polaznu topologiju mreže, a da se to može primeniti nezavisno od zadatog broja čvorova. Osnovni uslov koju polazna topologija treba da ispuni jeste da obezbedi minimalnu povezanost svih čvorova u mreži. Polazeći od tog zahteva, mogu se definisati različite varijante grafa stabla. Jedna od mogućnosti je da se krene od zvezdaste topologije s tim što takvo rešenje nije dovoljno opšte, pošto je čvorište zvezde različito od ostalih čvorova. Na osnovu analize potencijalnih polaznih topologija, može se zaključiti da linijska topologija (čvorovi povezani u niz) obezbeđuje najbolju raspoloživost, a što je i u skladu sa rezultatima datim u [29]. Usvojeno je da je linijska topologija polazna topologija kod metode sinteze mreže. Kada se metoda sinteze mreže koristi za određivanje maksimalne raspoloživosti, prvo proširenje mreže je uvek formiranje prstena, tj. spajanje prvog i poslednjeg čvora u nizu. Pošto prsten predstavlja topologiju kod koje su svi čvorovi ravnopravni, a cela mreža tada ima konektivnost 2, usvojeno je da se u svim sledećim proračunima za određivanje maksimalne raspoloživosti, topologija prstena koristi kao početna topologija u mreži.

Na slici 4.1 grafički je prikazan metod sinteze mreže za slučaj broja čvorova  $N=10$  i raspoloživosti linka  $A=0,925$  (navedene vrednosti za  $N$  i  $A$  su izabrane samo iz razloga što se u tom slučaju lepo vidi proces sinteze mreže). Numeracija na linkovima označava iteraciju u kojoj je dodat pojedini link. Analizom slike 4.1 može se zaključiti

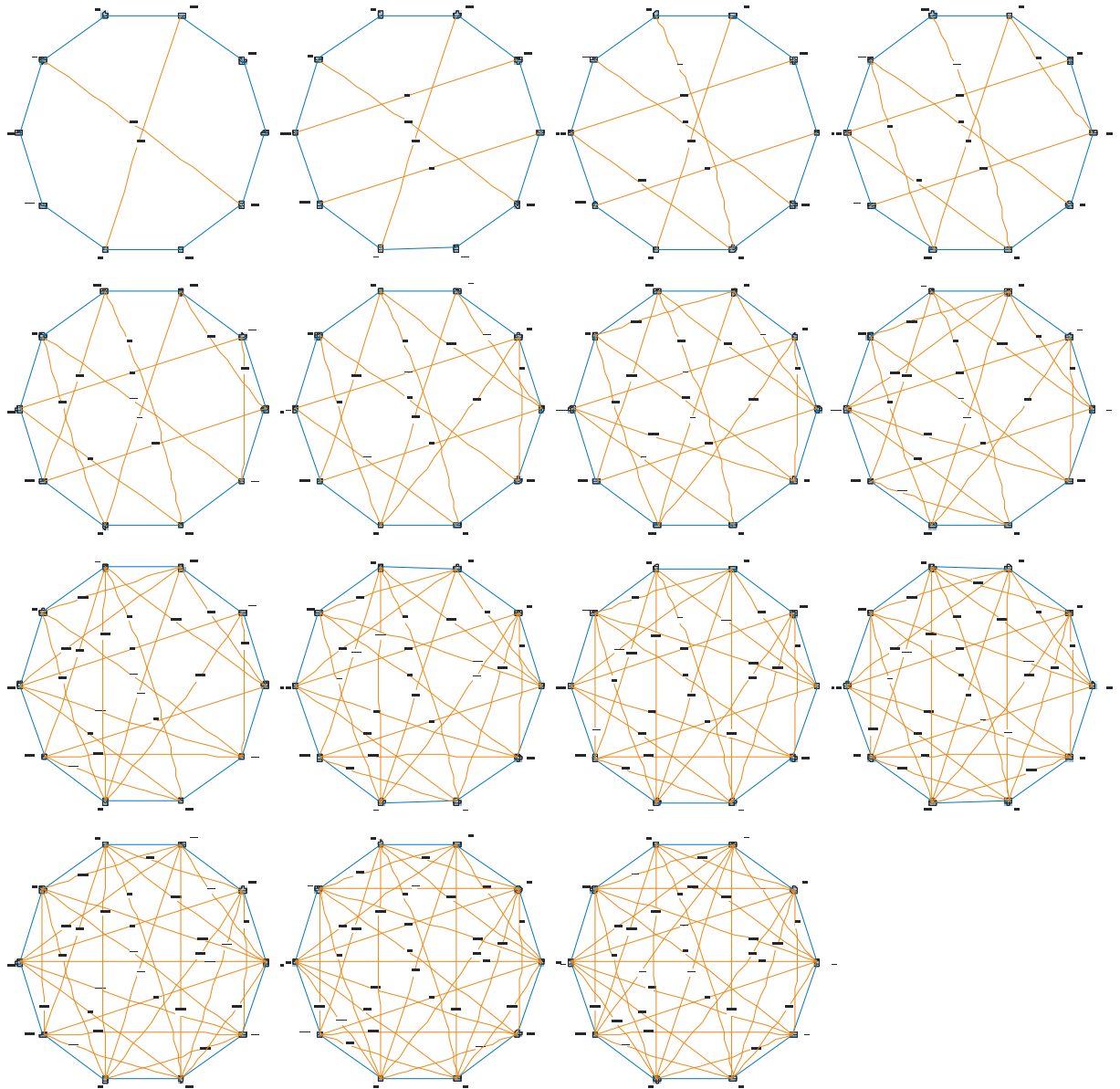


da topologiju mreže karakteriše simetrija u povezanosti i ravnomeran rast. Na slici 4.2 rast mreže je prikazan po fazama, gde u svakom koraku je proširenje mreže sa dva nova linka. U tabeli T-4.1 dati su rezultati proračuna raspoloživosti mreže sa slike 4.1 za svaki korak proširenja mreže. Na slici 4.3 su rezultati iz tabele T-4.1 predstavljeni grafički. Na slici 4.3 se vidi da sa porastom broja linkova u mreži raste i raspoloživost mreže, što se i moglo očekivati. Međutim, raspoloživost se ne menja kontinualno već se jasno mogu identifikovati prelomne tačke. Imajući u vidu na koji način je dobijena mreža sa slike 4.1, raspoloživosti date u tabeli T-4.1 predstavljaju maksimalnu vrednost raspoloživosti za dati broj linkova. **U daljem tekstu, ako to ne bude drugačije naglašeno, sve raspoloživosti predstavljaju maksimalne vrednosti *all-terminal* raspoloživosti mreže sa datim brojem čvorova i datim brojem linkova.**

Da bi se bolje istražila pojava efekta prelomnih tačaka u promeni maksimalne raspoloživosti mreže, proces sinteze mreže je ponovljen za mreže sa brojem čvorova od 5 do 12. Pošto maksimalna raspoloživost zavisi od broja čvorova  $N$ , raspoloživosti jednog linka  $A$  (opravdanost uvođenja aproksimacije raspoloživosti linka jednom konstantnom vrednošću objašnjena je u poglavlju 2.3) i broja linkova  $L$ , dobijeni rezultati mogu se grafički predstaviti na više načina. Rezultati analize za  $N=5$  i više različitih vrednosti  $A$  i  $L$  prikazani su na slici 4.4. Na isti način su na slici 4.5 dati rezultati za  $N=6$ . Rezultati za  $N$  od 7 do 12 su predstavljeni na graficima od 8.3 do 8.8 datim u Prilogu 1.



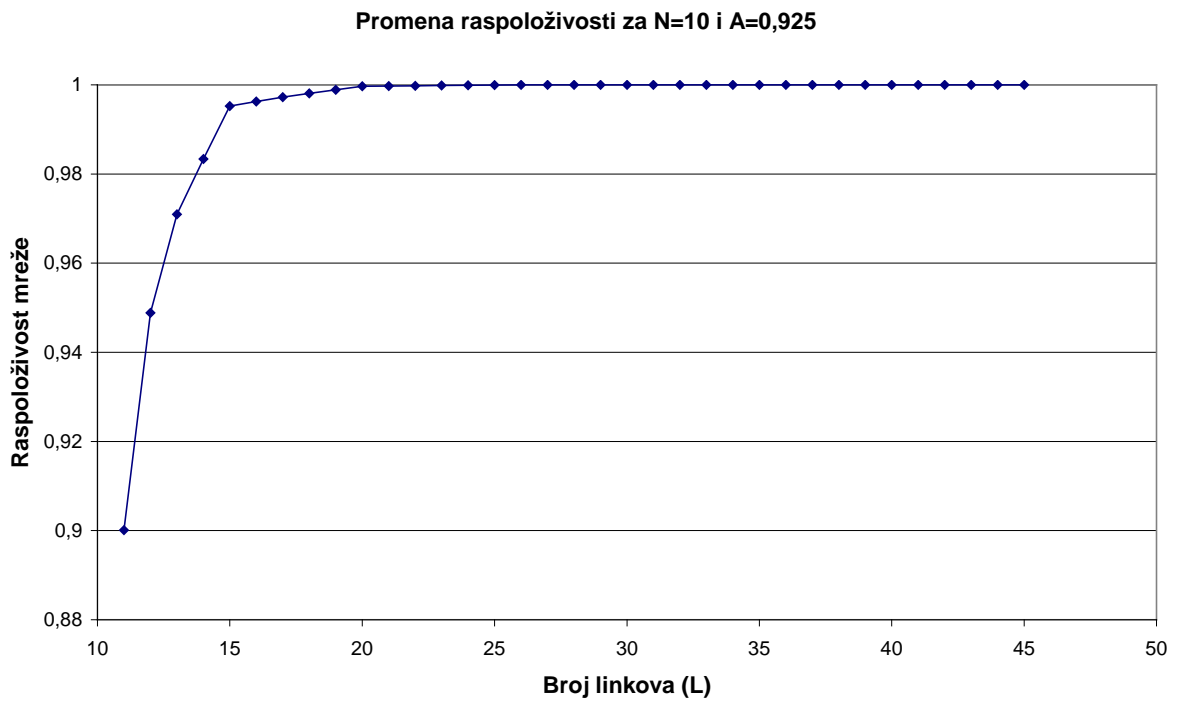
Slika 4.1 – Prikaz metode sinteze mreže na primeru sa  $N=10$  i  $A=0,925$



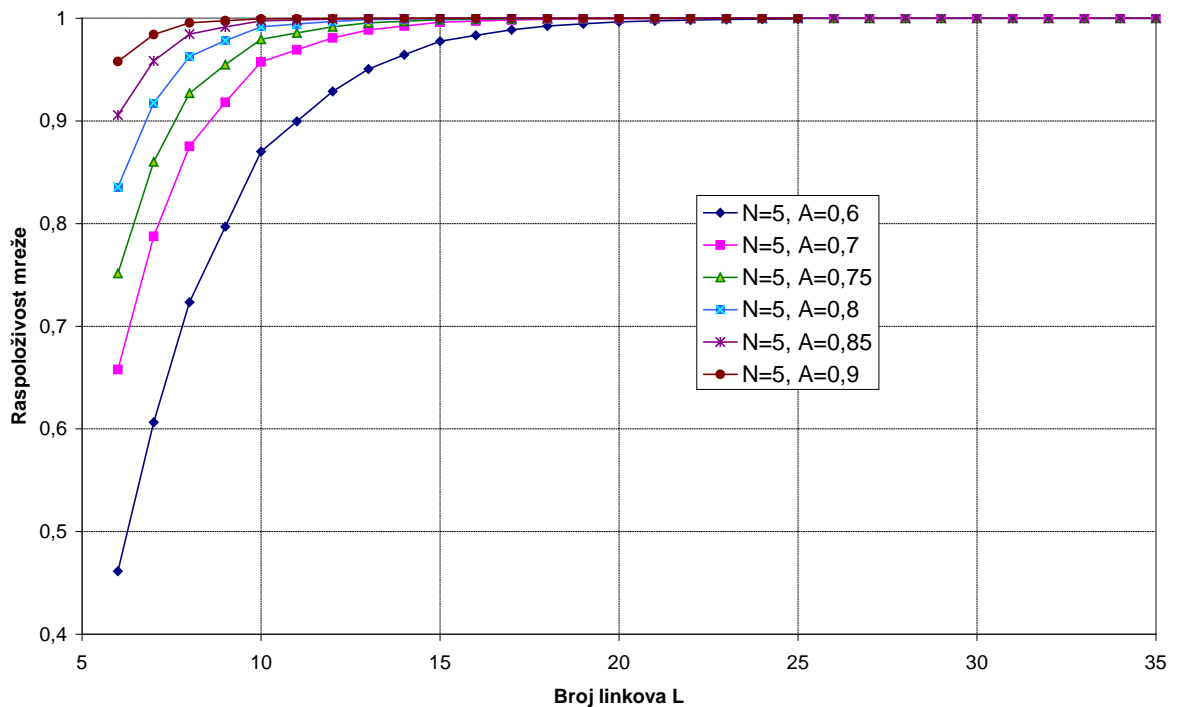
Slika 4.2 – Prikaz metode sinteze mreže na primeru sa  $N=10$  i  $A=0,925$

Tabela T-4.1 – Promena raspoloživosti sa porastom broja linkova u mreži ( $N=10$  i  $A=0,925$ )

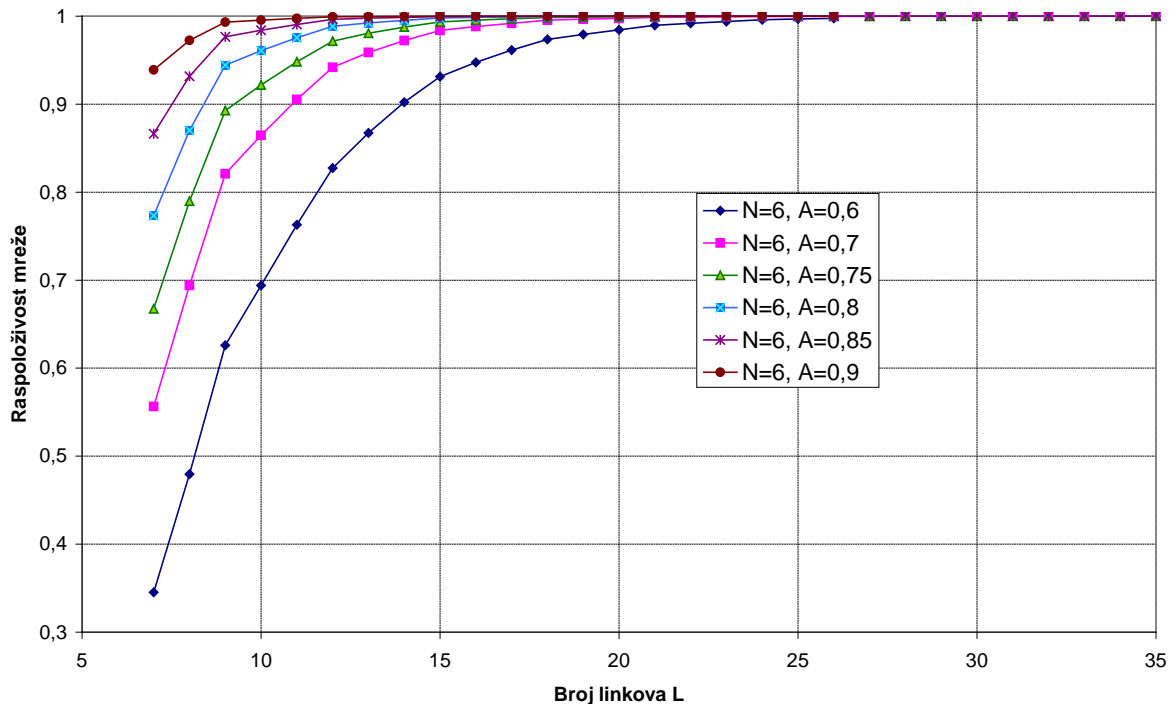
br. Linkova ( $L$ )	Raspoloživost
11	0,900122772
12	0,948854892
13	0,97094818
14	0,983356657
15	0,995223323
16	0,996275959
17	0,997225943
18	0,998093977
19	0,998888397
20	0,999679999
21	0,999740168
22	0,999799741
23	0,999859009
24	0,999917628
25	0,999976247
26	0,999980646
27	0,999985043
28	0,999989438
29	0,999993829
30	0,99999822
31	0,999998549
32	0,999998879
33	0,999999208
34	0,999999537
35	0,999999867
36	0,999999891
37	0,999999916
38	0,999999941
39	0,999999965
40	0,99999999
41	0,999999992
42	0,999999994
43	0,999999996
44	0,999999997
45	0,999999999



Slika 4.3 – Grafik promene raspoloživosti mreže za  $N=10$  i  $A=0,925$



Slika 4.4 – Grafik promene raspoloživosti za  $N=5$  u zavisnosti od broja linkova  $L$  gde je raspoloživost linka  $A$  data kao parametar



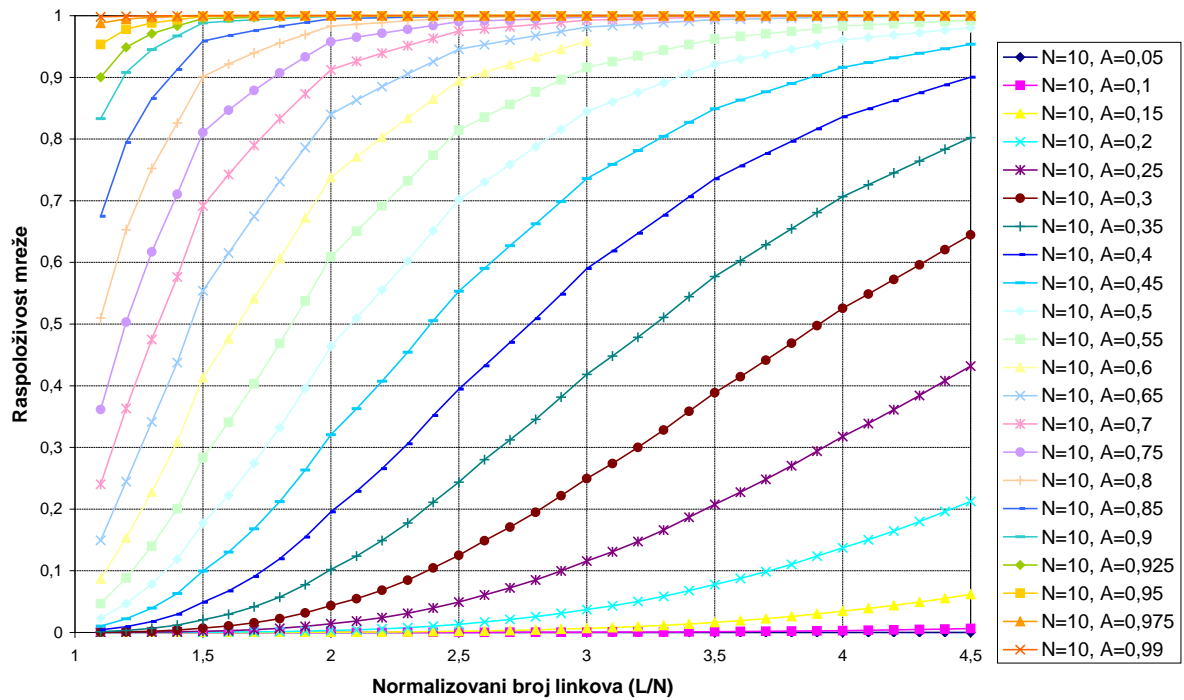
Slika 4.5 – Grafik promene raspoloživosti za  $N=6$  u zavisnosti od broja linkova  $L$  gde je raspoloživost linka  $A$  data kao parametar

#### 4.2 Prelomne tačke kod određivanja maksimalnih raspoloživosti

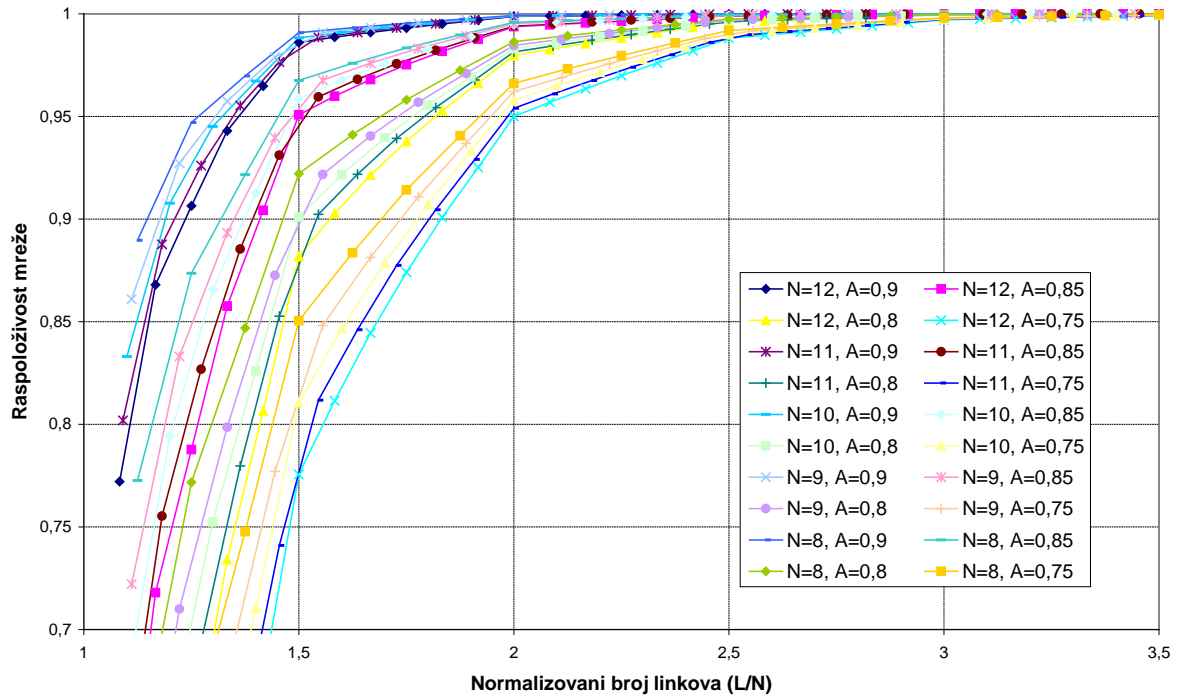
Analizom dobijenih grafika (predstavljani na slikama 8.1 do 8.8, u Prilogu 1) uočava se da postoje prelomne tačke. Sa grafika se takođe zaključuje da pozicije prelomnih tačaka direktno zavise od broja čvorova  $N$  i broja linkova  $L$ . Da bi se rezultati dobijeni za različite kombinacije  $N$ ,  $L$  i  $A$  mogli upoređivati, pogodno je posmatrati promenu raspoloživosti u zavisnosti od normalizovanog broja linkova, gde se normalizacija broja linkova vrši brojem čvorova. Na ovaj način, za definisani broj čvorova  $N$  dobijaju se funkcije promene raspoloživosti u zavisnosti od  $L/N$  gde se  $A$  pojavljuje kao parametar. Na slici 4.6 data je promena raspoloživosti za  $N=10$  u zavisnosti od normalizovanog broja linkova.

Na graficima prikazanim na slici 4.6 može se uočiti da se pozicije prelomnih tačaka nalaze u tačkama u kojima su vrednosti normalizovanog broj linkova  $L/N$  jednake 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 4.5, 5.... Da bi se proverilo da li ista zakonitost postoji i za raspoloživosti sa drugim brojem čvorova, na slici 4.7 date su raspoloživosti u funkciji

normalizovanog broja linkova za  $N \in \{8, 9, 10, 11, 12\}$  i  $A \in \{0.75, 0.8, 0.85, 0.9\}$ . Na slici 4.7 jasno se vidi da se ista pravilnost po pitanju promene raspoloživosti uočava za različite vrednosti broja čvorova  $N$  i raspoloživosti linkova  $A$ , tj. da se ova karakteristika može smatrati zajedničkom za grafike promene raspoloživosti. U slučaju da je broj čvorova  $N$  neparan broj, normalizovani broj linkova  $L/N$  ne može da ima vrednosti 1.5, 2.5, 3.5,... Za neparno  $N$  uočava se pojava prelomnih tačaka na mestima gde je  $L/N$  ceo broj, što je istovetno kao u situaciji kada je  $N$  paran broj. Međutim, za neparno  $N$ , mogu se definisati virtuelne prelomne tačke za koje važi da  $L/N$  uzima vrednosti 1.5, 2.5, 3.5,... s tim da takve virtuelne prelomne tačke nemaju fizički smisao. O virtuelnim prelomnim tačkama biće više reči u poglavlju 4.5.



Slika 4.6 - Promena raspoloživosti mreže u zavisnosti od normalizovanog broja linkova za  $N=10$



Slika 4.7 – Promena raspoloživosti mreže u zavisnosti od normalizovanog broja linkova za  $N \in \{8, 9, 10, 11, 12\}$  i  $A \in \{0.75, 0.8, 0.85, 0.9\}$

Kada se analizira topologija mreže čiji broj linkova odgovara prelomnoj tački, uočava se da svi čvorovi u mreži imaju istu konektivnost (u slučaju kada je  $N$  paran broj). Dodavanjem sledećeg linka pojavljuju se dva čvora koji imaju konektivnost za jedan veću od konektivnosti svih ostalih čvorova. U slučaju kada je broj čvorova  $N$  neparan, ne postoje prelomne tačke na pozicijama gde  $L/N$  nije ceo broj, ali i tu važi ista logika, tj. pre te pozicije na grafiku samo jedan čvor u mreži ima konektivnost koja je za 1 manja od konektivnosti svih ostalih čvorova u mreži. Proširenjem topologije za jedan link dobija se topologija gde samo jedan čvor ima za 1 veću konektivnost od svih ostalih čvorova u mreži. Ukoliko se promena raspoloživosti mreže usled dodavanja linkova posmatra u odnosu na konektivnost čvorova, jasno se vidi da deo grafika promene raspoloživosti mreže između prelomnih tačaka odgovara promeni topologije mreže kada se konektivnost čvorova mreže menja sa vrednosti  $k$  na  $k+1$ , nezavisno od toga da li je broj čvorova  $N$  paran ili neparan. Što je  $k$  veće, to je strmina grafika promene raspoloživosti manja.



### 4.3 Linearna segmentna aproksimacija između prelomnih tačaka

Interesantno je primetiti na slikama 4.6 i 4.7 da se raspoloživost između prelomnih tačaka menja približno po linearnom zakonu. Da bi se proverila opravdanost ovakve pretpostavke, u nastavku izlaganja biće procenjena relativna greška odstupanja za slučaj kada se raspoloživost između prelomnih tačaka aproksimira linearnom funkcijom. Pri tome, pretpostavlja se poznavanje tačne vrednosti raspoloživosti u prelomnim tačkama. Neka su tačne vrednosti raspoloživosti u prelomnim tačkama jednog segmenta definisane sa  $(x_1, y_1)$  i  $(x_2, y_2)$ , gde je sa  $x_i$  predstavljen normalizovan broj linkova, a sa  $y_i$  raspoloživost mreže i  $i = \{1, 2\}$ . Uvodeći linearnu aproksimaciju između ove dve prelomne tačke, aproksimativna vrednost raspoloživosti se računa po formuli:

$$R_a(x) = a * x + b \quad (4.1)$$

gde je  $x=L/N$ , a  $a$  i  $b$  parametri koje treba odrediti. Ako se formula (4.1) primeni u prelomnim tačkama, dobija se sistem dve jednačine sa dve nepoznate:

$$\begin{aligned} y_1 &= a * x_1 + b \\ y_2 &= a * x_2 + b \end{aligned} \quad (4.2)$$

Rešavanjem sistema jednačina (4.2) dobijaju se sledeće vrednosti za parametre  $a$  i  $b$ :

$$\begin{aligned} a &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ b &= y_1 - x_1 * \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Pošto u ovom slučaju za prelomne tačke važi da je  $x_1 = \lfloor 2 * L / N \rfloor / 2$  i  $x_2 = x_1 + 0,5$  zamenom izraza za  $x_2$  u formule (4.3) dobija se:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_1 + 0.5 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{0.5} = 2 * (y_2 - y_1) \quad (4.4)$$

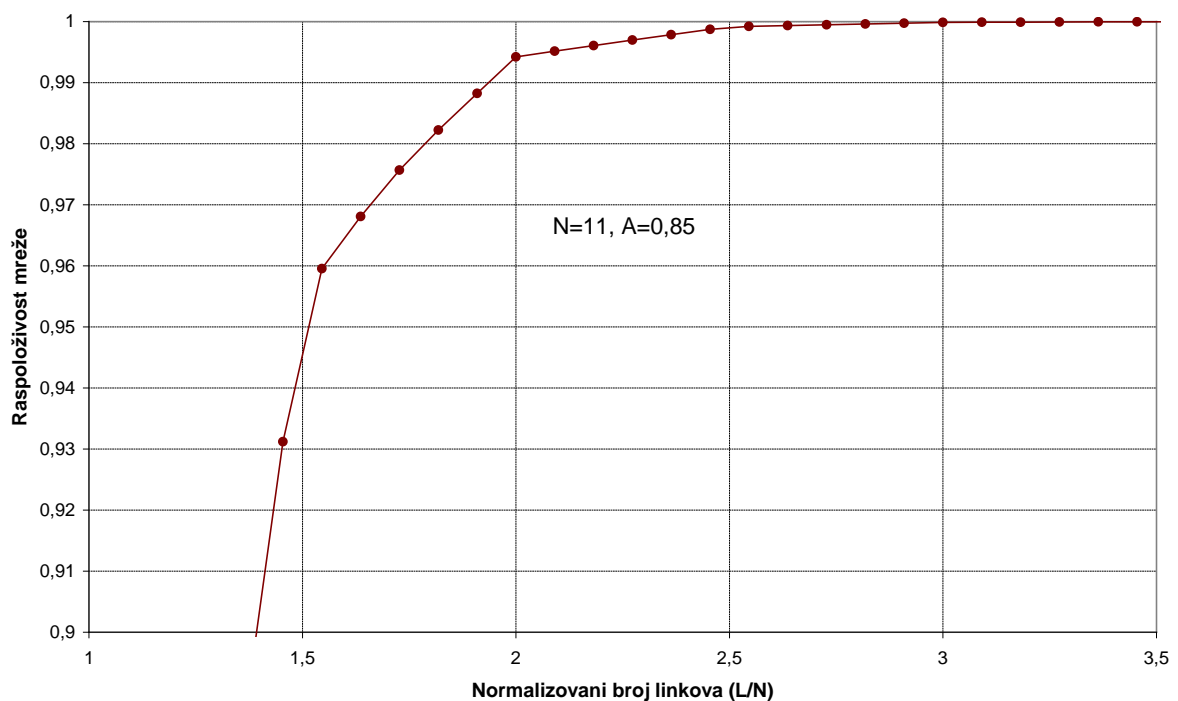
$$b = y_1 - 2 * x_1 * (y_2 - y_1)$$

Kada se dobijene vrednosti parametara  $a$  i  $b$  zamene u formulu (4.1) dobija se izraz na osnovu koga se može odrediti aproksimativna vrednost raspoloživosti između prelomnih tačaka:

$$R_d(x) = 2 * x * (y_2 - y_1) + y_1 - 2 * x_1 * (y_2 - y_1) \quad (4.5)$$

gde je  $x=L/N$ .

Posebno treba primetiti da se u slučaju kada je  $N$  neparan broj gubi prelomna tačka kada vrednost  $L/N$  nije ceo broj, tj.  $L/N \in \{1.5, 2.5, 3.5, \dots\}$ . To se vidi i na slici 4.7. Da bi se ovaj efekat bolje uočio, izdvojen je grafik za  $N=9$ ,  $A=0.85$  (proizvoljno izabrani parametri uz uslov da je  $N$  neparan broj) i predstavljen na slici 4.8.



Slika 4.8 – Promena raspoloživosti za  $N=9$  i  $A=0.85$  u odnosu na normalizovani broj linkova

Na slici 4.8 se jasno vidi da ne postoje tačke na grafiku za  $L/N=1,5$  i  $L/N=2,5$ . Međutim, na grafiku se takođe vidi da se linearna aproksimacija i ovde može koristiti s tim da se umesto vrednosti raspoloživosti u nedostajućoj prelomnoj tački koristi prva susedna vrednost (manja ili veća u zavisnosti da li se aproksimira gornji ili donji segment). O rešavanju probleme nedostajuće prelomne tačke za neparno  $N$  i uvođenju virtuelne prelomne tačke biće više reči u poglavlju 4.5.

U tabeli T-4.2, za  $N=8$ , uporedo su date vrednosti raspoloživosti izračunate tačnom metodom i aproksimativne vrednosti raspoloživosti između prelomnih tačaka određene korišćenjem (4.5). Prilikom računanja aproksimativnih vrednosti, za vrednosti raspoloživosti u prelomnim tačkama korišćene su tačne vrednosti raspoloživosti. Dodatno, u tabeli su date apsolutna i relativna greška aproksimacije. Navedni postupak je ponovljen za  $N=10$  i  $N=12$ , a rezultati su prikazani u Prilogu 2 u tabelama T-9.2 i T-9.3, respektivno.

Tabela T-4.1 – Uporedni pregled tačnih i aproksimativnih vrednosti za maksimalnu raspoloživost između prelomnih tačaka za  $N=8$

$N$	$A$	$L$	$x=L/N$	$R$ tačno	$R$ aproksimativno	apsolutna greška aproksimacije	relativna greška aproksimacije
8	0,75	12	1,5	0,850438356	<del>0,850438356</del>		
		13	1,625	0,883548617	0,879338801	0,004209816	0,47646683%
		14	1,75	0,914214715	0,908239246	0,005975469	0,65361771%
		15	1,875	0,940579087	0,937139691	0,003439396	0,36566788%
		16	2	0,966040136	<del>0,966040136</del>		
		17	2,125	0,973185493	0,97247864	0,000706853	0,07263292%
		18	2,25	0,979661061	0,978917145	0,000743916	0,07593608%
		19	2,375	0,985869824	0,98535565	0,000514174	0,05215438%
		20	2,5	0,991794154	<del>0,991794154</del>		
		21	2,625	0,993486024	0,99335062	0,000135405	0,01362924%
		22	2,75	0,995040699	0,994907085	0,000133614	0,01342804%
		23	2,875	0,996540312	0,99646355	$7,67616 \cdot 10^{-5}$	0,00770281%
		24	3	0,998020015	<del>0,998020015</del>		
		25	3,125	0,99840173	0,99839231	$9,42043 \cdot 10^{-6}$	0,00094355%
		26	3,25	0,998773857	0,998764605	$9,25278 \cdot 10^{-6}$	0,00092641%
27	3,375	0,999142427	0,999136899	$5,52798 \cdot 10^{-6}$	0,00055327%		

$N$	$A$	$L$	$x=L/N$	$R$ tačno	$R$ aproksimativno	apsolutna greška aproksimacije	relativna greška aproksimacije
		28	3,5	0,999509194	<del>0,999509194</del>		
		29	3,625	0,999602316	0,999601313	$1,00338 \cdot 10^{-6}$	0,00010038%
		30	3,75	0,999694398	0,999693432	$9,6566 \cdot 10^{-7}$	0,00009660%
		31	3,875	0,999786068	0,999785551	$5,17179 \cdot 10^{-7}$	0,00005173%
		32	4	0,99987767	<del>0,99987767</del>		
		33	4,125	0,999900652	0,999900616	$3,58006 \cdot 10^{-8}$	0,00000358%
		34	4,25	0,999923628	0,999923562	$6,61985 \cdot 10^{-8}$	0,00000662%
		35	4,375	0,999946543	0,999946508	$3,53824 \cdot 10^{-8}$	0,00000354%
		36	4,5	0,999969453	<del>0,999969453</del>		
8	0,8	12	1,5	0,922075791	<del>0,922075791</del>		
		13	1,625	0,941027335	0,938139076	0,002888258	0,30692606%
		14	1,75	0,958121304	0,954202361	0,003918943	0,40902367%
		15	1,875	0,972543805	0,970265647	0,002278158	0,23424734%
		16	2	0,986328932	<del>0,986328932</del>		
		17	2,125	0,989332316	0,989096261	0,000236055	0,02386001%
		18	2,25	0,992101917	0,991863591	0,000238326	0,02402233%
		19	2,375	0,994788011	0,994630921	0,000157089	0,01579123%
		20	2,5	0,997398251	<del>0,997398251</del>		
		21	2,625	0,997930092	0,997920289	$9,8023 \cdot 10^{-6}$	0,00098226%
		22	2,75	0,998454847	0,998442327	$1,25193 \cdot 10^{-5}$	0,00125387%
		23	2,875	0,998971875	0,998964365	$7,50916 \cdot 10^{-6}$	0,00075169%
		24	3	0,999486403	<del>0,999486403</del>		
		25	3,125	0,999589474	0,999589185	$2,88746 \cdot 10^{-7}$	0,00002889%
		26	3,25	0,999692335	0,999691966	$3,68257 \cdot 10^{-7}$	0,00003684%
		27	3,375	0,999795015	0,999794748	$2,66566 \cdot 10^{-7}$	0,00002666%
28	3,5	0,99989753	<del>0,99989753</del>				
8	0,85	12	1,5	0,967503656	<del>0,967503656</del>		
		13	1,625	0,975902816	0,97457023	0,001332586	0,13654901%
		14	1,75	0,983394681	0,981636804	0,001757877	0,17875600%
		15	1,875	0,989723139	0,988703378	0,001019761	0,10303496%
		16	2	0,995769953	<del>0,995769953</del>		
		17	2,125	0,996727984	0,996674434	$5,35501 \cdot 10^{-5}$	0,00537259%
		18	2,25	0,997634092	0,997578916	$5,51766 \cdot 10^{-5}$	0,00553074%
		19	2,375	0,998518852	0,998483397	$3,54555 \cdot 10^{-5}$	0,00355081%
		20	2,5	0,999387878	<del>0,999387878</del>		
		21	2,625	0,999519263	0,999518102	$1,16064 \cdot 10^{-6}$	0,00011612%

$N$	$A$	$L$	$x=L/N$	$R$ tačno	$R$ aproksimativno	apsolutna greška aproksimacije	relativna greška aproksimacije
		22	2,75	0,999649828	0,999648326	$1,50202 \cdot 10^{-6}$	0,00015025%
		23	2,875	0,999779449	0,99977855	$8,99417 \cdot 10^{-7}$	0,00008996%
		24	3	0,999908774	<del>0,999908774</del>		
		25	3,125	0,999928182	0,999928163	$1,95154 \cdot 10^{-8}$	0,00000195%
		26	3,25	0,999947577	0,999947551	$2,53297 \cdot 10^{-8}$	0,00000253%
		27	3,375	0,999966959	0,99996694	$1,8607 \cdot 10^{-8}$	0,00000186%
		28	3,5	0,999986329	<del>0,999986329</del>		
		29	3,625	0,999989234	0,999989234	$3,98958 \cdot 10^{-10}$	0,00000004%
		30	3,75	0,999992139	0,999992139	$5,30519 \cdot 10^{-10}$	0,00000005%
		31	3,875	0,999995044	0,999995044	$3,96885 \cdot 10^{-10}$	0,00000004%
		32	4	0,999997949	<del>0,999997949</del>		
		33	4,125	0,999998385	0,999998385	$9,73652 \cdot 10^{-11}$	0,00000001%
		34	4,25	0,999998821	0,999998821	$1,88357 \cdot 10^{-10}$	0,00000002%
		35	4,375	0,999999257	0,999999257	$9,71837 \cdot 10^{-11}$	0,00000001%
		36	4,5	0,999999692	<del>0,999999692</del>		
		8	0,9	12	1,5	0,990744199	<del>0,990744199</del>
13	1,625			0,993198818	0,992853722	0,000345097	0,03474599%
14	1,75			0,995411802	0,994963245	0,000448558	0,04506254%
15	1,875			0,997331897	0,997072768	0,000259129	0,02598223%
16	2			0,999182291	<del>0,999182291</del>		
17	2,125			0,999372385	0,999366669	$5,71599 \cdot 10^{-6}$	0,00057196%
18	2,25			0,999557052	0,999551048	$6,0043 \cdot 10^{-6}$	0,00060070%
19	2,375			0,999739214	0,999735426	$3,78742 \cdot 10^{-6}$	0,00037884%
20	2,5			0,999919805	<del>0,999919805</del>		
21	2,625			0,999937905	0,999937853	$5,18761 \cdot 10^{-8}$	0,00000519%
22	2,75			0,99995597	0,999955902	$6,84114 \cdot 10^{-8}$	0,00000684%
23	2,875			0,999973991	0,99997395	$4,10744 \cdot 10^{-8}$	0,00000411%
24	3			0,999991998	<del>0,999991998</del>		
25	3,125			0,999993799	0,999993799	$4,06809 \cdot 10^{-10}$	0,00000004%
26	3,25			0,9999956	0,999995599	$5,35775 \cdot 10^{-10}$	0,00000005%
27	3,375			0,9999974	0,999997399	$3,98143 \cdot 10^{-10}$	0,00000004%
28	3,5	0,9999992	<del>0,9999992</del>				

Pregledom podataka u tabelama T-9.1, T-9.2 i T-9.3, vidi se da je greška aproksimacije dosta mala (za malo  $N$  i  $A$  relativna greška je reda nekoliko procenata, a

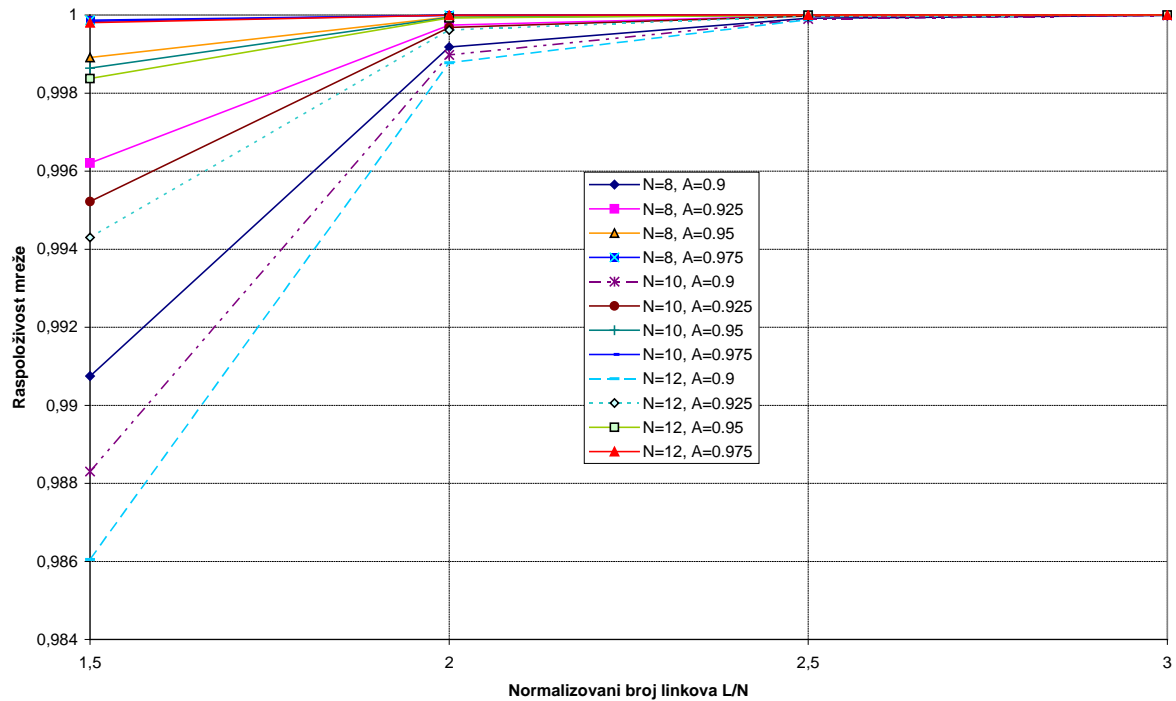
sa porastom  $N$  i  $A$ , tj.  $A \geq 0.75$  i  $L/N \geq 2$ , pada ispod jednog procenta uz trend daljeg smanjivanja kako  $N$  i  $A$  rastu), tj. da se linearna aproksimacija može koristiti za tačke između prelomnih tačaka u slučaju kada je  $N$  paran broj.

U slučaju kada je  $N$  neparan broj koristi se prethodno uvedena pretpostavka da se umesto nedostajuće prelomne tačke koristi prva susedna vrednost (manja ili veća u zavisnosti da li se aproksimira gornji ili donji segment). Pod navedenom pretpostavkom, a primenom formule (4.5), izračunate su aproksimativne vrednosti za  $N=9$  i  $N=11$  (uzete su dve vrednosti za  $N$  da bi se proverila tačnost aproksimacije linearnom funkcijom) i upoređene sa tačnim vrednostima što je predstavljeno u tabelama T-9.4 i T-9.5, respektivno (Prilog 2).

Rezultati dati u tabelama T-9.4 i T-9.5 potvrđuju polaznu pretpostavku da se, i u slučaju neparnog broja čvorova, raspoloživosti između prelomnih tačaka mogu aproksimirati linearnom funkcijom sa zadovoljavajućom tačnošću, pri čemu se za zadovoljavajuću tačnost uzima ona vrednost gde je relativna greška ispod 1%.

#### ***4.4 Aproksimacija raspoloživosti u prelomnim tačkama za parno $N$***

Uvođenje linearne aproksimacije između prelomnih tačaka, pojednostavljuje problem aproksimacije funkcije raspoloživosti. Naime, umesto da se pokuša sa nalaženjem analitičkog izraza za funkciju koja bi aproksimirala kompletnu funkciju raspoloživosti, problem se svodi na pronalaženje aproksimativne funkcije za vrednosti raspoloživosti isključivo u prelomnim tačkama. Za početak posmatraju se samo slučajevi kada je  $N$  paran broj, jer tada postoje sve prelomne tačke koje su od interesa. Slučaj gde je  $N$  neparan broj biće razmatran kasnije. Imajući u vidu izgled grafika na slici 4.7, navedeno pojednostavljenje u značajnoj meri povećava mogućnost pronalaženja kvalitetne analitičke funkcije aproksimacije. U cilju analize zavisnosti raspoloživosti u prelomnim tačkama, na slici 4.9 date su samo prelomne tačke za više kombinacija broja čvorova  $N$  ( $N$  je paran broj) i raspoloživosti linkova  $A$  (tačke sa istim parametrima  $N$  i  $A$  su spojene pravim linijama zbog lakše identifikacije).



Slika 4.9 – Promena raspoloživosti u prelomnim tačkama

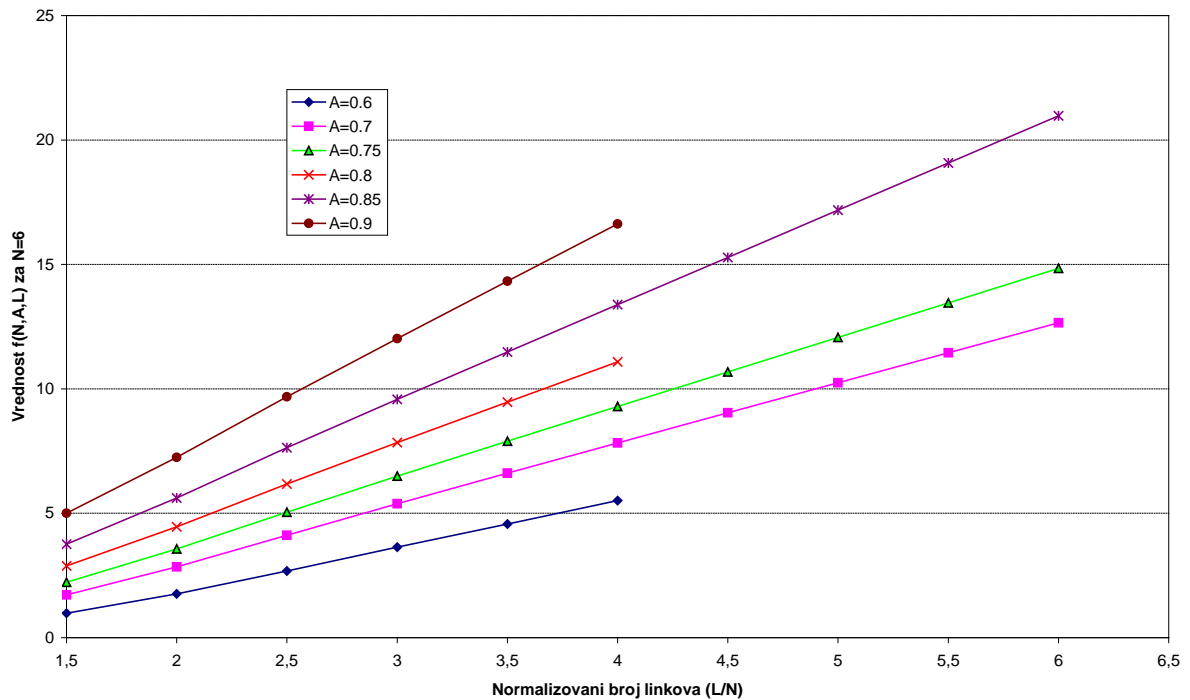
U cilju dobijanja funkcije aproksimacije za vrednosti raspoloživosti u prelomnim tačkama, posmatrana je familija krivih data na slici 4.9. Osnovne karakteristike koje mora da zadovolji funkcija aproksimacije jeste da mora da bude rastuća i da konvergira ka jedinici kako raste broj linkova. Polazeći od tih osnovnih karakteristika, dobijeni rezultati su upoređivani sa velikim brojem poznatih funkcija koje zadovoljavaju početne uslove. Posle detaljne analize poznatih analitičkih oblika funkcija i analize dobijenih podataka, uvedena je pretpostavka da se raspoloživost u prelomnim tačkama može aproksimirati eksponencijalnom funkcijom oblika:

$$R(N, A, L) = 1 - e^{-f(N, A, L)} \quad (4.1)$$

Da bi se raspoloživost u prelomnim tačkama mogla aproksimirati funkcijom datom u jednačini (4.6), potrebno je odrediti funkciju  $f(N, A, L)$ . Za početak, s obzirom da su izračunate vrednosti raspoloživosti  $R$  za  $N \in \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ , na osnovu njih se mogu odrediti vrednosti koje treba da ima funkcija  $f(N, A, L)$  u ovim poznatim (prelomnim) tačkama. Polazeći od izraza (4.6) vrednosti funkcije  $f(N, A, L)$  dobijaju se po formuli:

$$f(N,A,L)=-\ln(1-R) \quad (4.2)$$

Na osnovu formule (4.7) izračunate su vrednosti funkcije  $f(N,A,L)$  i grafički predstavljene na slikama 8.9 do 8.15, u Prilogu 1, za  $N \in \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ , respektivno. Ovde je, radi ilustracije, na slici 4.10 predstavljen grafik funkcije  $f(N,A,L)$  za  $N=6$ .



Slika 4.10 – Vrednosti funkcije  $f(N,A,L)$  za  $N=6$

Uporedna analiza grafika na slikama 8.9 do 8.15 iz Priloga 1 pokazuje izrazito linearnu zavisnost funkcije  $f(N,A,L)$  od normalizovanog broja linkova  $L/N$ . Ovakvi rezultati daju osnova za pretpostavku da se funkcija  $R$  može predstaviti u analitičkoj formi (na osnovu izraza (4.6)) kojom bi se aproksimirala maksimalna raspoloživost u prelomnim tačkama.



#### 4.4.1 Određivanje parametara funkcije $f(N,A,L)$

U cilju određivanja parametara linearne funkcije  $f(N,A,L)$  koristi se metoda najmanjih kvadrata (metoda najmanjih kvadrata je uobičajena metoda za određivanje funkcionalne zavisnosti kada su dati eksperimentalni rezultati [80]). Praktično, problem koji treba rešiti podrazumeva da postoji  $M$  parova  $(x,y)$  koji predstavljaju vrednosti koje treba aproksimirati funkcijom  $f(x,k_1,k_2)$ , gde su  $k_1$  i  $k_2$  parametri funkcije. Neka  $D_i$  predstavlja  $i$ -to odstupanje (grešku aproksimacije) između tačne vrednosti  $y_i$  i vrednosti koja se dobija korišćenjem funkcije aproksimacije  $f(x_i, k_1, k_2)$ :

$$D_i = y_i - f(x_i, k_1, k_2), \quad i = \{1, 2, \dots, M\} \quad (4.3)$$

Prema metodi najmanjih kvadrata, cilj je da zbir svih kvadrata grešaka aproksimacije  $D_i$ , bude minimalan. Pošto svaka razlika  $D_i$  zavisi samo od parametara  $k_1$  i  $k_2$ , uvodi se nova funkcija  $F(k_1, k_2)$  koja je definisana na sledeći način:

$$F(k_1, k_2) = [y_1 - f(x_1, k_1, k_2)]^2 + [y_2 - f(x_2, k_1, k_2)]^2 + \dots + [y_M - f(x_M, k_1, k_2)]^2 \quad (4.4)$$

Formula (4.4) se kraće može zapisati kao:

$$F(k_1, k_2) = \sum_{i=1}^M [y_i - f(x_i, k_1, k_2)]^2 \quad (4.5)$$

Kao što je već navedeno, cilj je da se odrede parametri  $k_1$  i  $k_2$  tako da funkcija  $F(k_1, k_2)$  ima minimalnu vrednost. U slučaju funkcije dve promenljive, vrednosti parametara  $k_1$  i  $k_2$  za koje funkcija  $F$  ima lokalni minimum određuju se iz uslova da su parcijalni izvodi po  $k_1$  i  $k_2$  jednaki nula:

$$\frac{\partial F}{\partial k_1} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial F}{\partial k_2} = 0 \quad (4.6)$$

Zamenom izraza (4.10) u izraz (4.11) dobija se sledeći sistem od dve jednačine sa dve nepoznate:

$$\frac{\partial(\sum_{i=1}^M [y_i - f(x_i, k_1, k_2)]^2)}{\partial k_1} = 0$$

$$\frac{\partial(\sum_{i=1}^M [y_i - f(x_i, k_1, k_2)]^2)}{\partial k_2} = 0$$
(4.7)

Rešavanjem parcijalnog izvoda dobija se:

$$\sum_{i=1}^M 2 \cdot [y_i - f(x_i, k_1, k_2)] \cdot \left(-\frac{\partial f(x_i, k_1, k_2)}{\partial k_1}\right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^M 2 \cdot [y_i - f(x_i, k_1, k_2)] \cdot \left(-\frac{\partial f(x_i, k_1, k_2)}{\partial k_2}\right) = 0$$
(4.8)

Ako se leva i desna strana jednačine podele sa 2 dobija se konačan oblik sistema jednačina:

$$\sum_{i=1}^M [y_i - f(x_i, k_1, k_2)] \cdot \left(-\frac{\partial f(x_i, k_1, k_2)}{\partial k_1}\right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^M [y_i - f(x_i, k_1, k_2)] \cdot \left(-\frac{\partial f(x_i, k_1, k_2)}{\partial k_2}\right) = 0$$
(4.9)

Pošto u razmatranom slučaju treba odrediti parametre za linearnu funkciju, to će funkcija  $f(x, k_1, k_2)$  biti definisana na sledeći način:

$$f(x, k_1, k_2) = k_1 x + k_2$$
(4.10)

Parcijalni izvodi po  $k_1$  i  $k_2$  funkcije  $f(x, k_1, k_2)$  date sa (4.15) su:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x_i, k_1, k_2)}{\partial k_1} &= x_i \\ \frac{\partial f(x_i, k_1, k_2)}{\partial k_2} &= 1\end{aligned}\tag{4.11}$$

Zamenom izraza (4.15) i (4.16) u izraze (4.14) dobija se:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^M [y_i - k_1 x_i - k_2] x_i &= 0 \\ \sum_{i=1}^M [y_i - k_1 x_i - k_2] &= 0\end{aligned}\tag{4.12}$$

Razvijanjem izraza (4.17) dobija se sledeći sistem dve jednačine sa dve nepoznate:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^N x_i^2\right) \cdot k_1 + \left(\sum_{i=1}^N x_i\right) \cdot k_2 &= \sum_{i=1}^N x_i y_i \\ \left(\sum_{i=1}^N x_i\right) \cdot k_1 + N \cdot k_2 &= \sum_{i=1}^N y_i\end{aligned}\tag{4.13}$$

gde su  $k_1$  i  $k_2$  nepoznate, a sve ostale sume su poznate vrednosti. Rešavanjem sistema jednačina (4.18) dobijaju se sledeći izrazi za  $k_1$  i  $k_2$ :

$$\begin{aligned}k_1 &= \frac{N \cdot \sum_{i=1}^N x_i y_i - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N y_i}{N \cdot \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i\right)^2} \\ k_2 &= \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2 \sum_{i=1}^N y_i - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N x_i y_i}{N \cdot \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i\right)^2}\end{aligned}\tag{4.14}$$

#### 4.4.2 Aproksimativne funkcije parametara $k_1$ i $k_2$

Ako se metoda najmanjih kvadrata (izrazi (4.19)) primeni na rezultate predstavljene na graficima 8.9 do 8.15 u Prilogu 1, dobija se skup vrednosti parametara linearne aproksimacije za funkciju  $f(N,A,L)$ . U tabeli T-4.3 date su dobijene vrednosti za parametar  $k_1$ , dok su u tabeli T-4.4 date dobijene vrednost za parametar  $k_2$ .

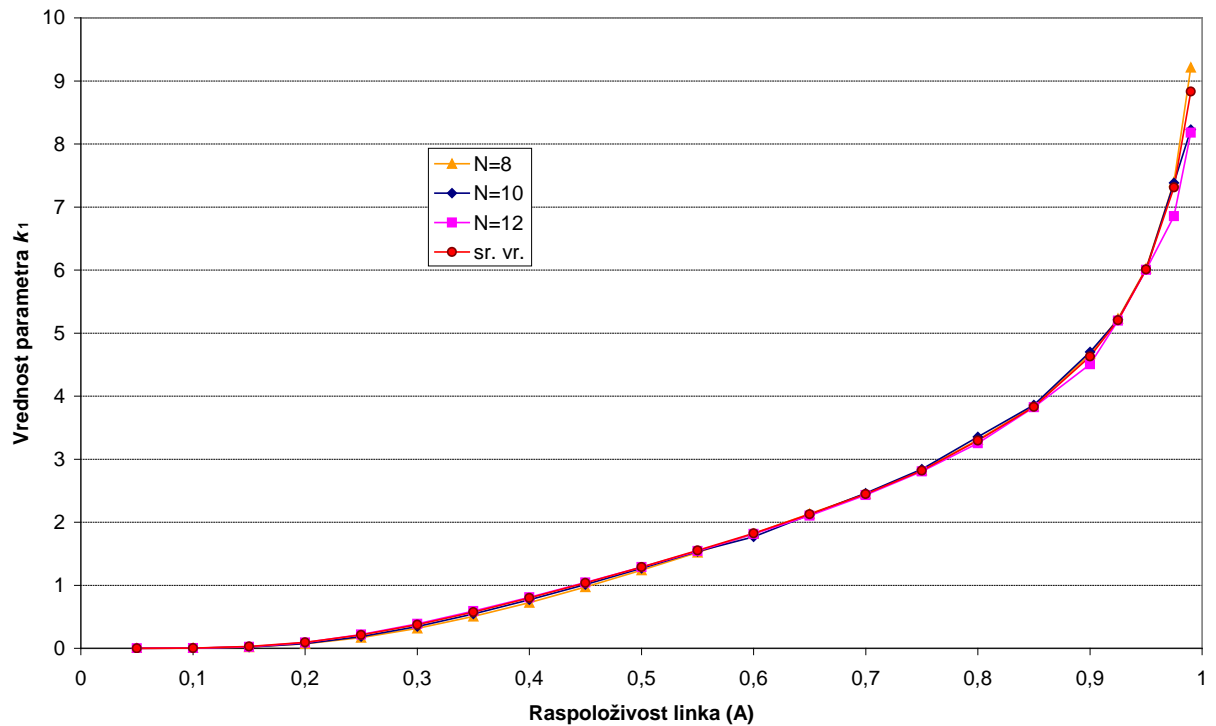
Tabela T-4.3 – Vrednosti parametra  $k_1$  linearne funkcije  $f(N,A,L)$

$k_1$	N						
A	6	7	8	9	10	11	12
0,05	0,000816476	0,000314764	4,18856*10 <sup>-5</sup>	3,13348*10 <sup>-5</sup>	1,38595*10 <sup>-5</sup>	2,98186*10 <sup>-6</sup>	6,67912*10 <sup>-6</sup>
0,1	0,014032936	0,009182198	0,002579859	0,00285118	0,001889656	0,000807416	0,001847519
0,15	0,059126185	0,048884188	0,020394914	0,025443138	0,019662506	0,012044215	0,02279228
0,2	0,144798401	0,134728587	0,072513898	0,09265291	0,076524254	0,059533996	0,09109516
0,25	0,269492917	0,266783382	0,170830906	0,215309098	0,186379752	0,1519862	0,217669699
0,3	0,427651437	0,437000999	0,316626286	0,387948337	0,345856127	0,325883863	0,388794618
0,35	0,615078067	0,635644982	0,504342582	0,597655606	0,544129489	0,535425522	0,590208799
0,4	0,823386012	0,854243387	0,725776255	0,825343868	0,769355734	0,777985588	0,810323794
0,45	1,050187071	1,086678627	0,972821143	1,068889283	1,012550558	1,032710431	1,042936694
0,5	1,29335475	1,329614099	1,239081542	1,319814197	1,269459906	1,293308564	1,287732942
0,55	1,552657577	1,582730013	1,52084384	1,577420838	1,536496284	1,561575009	1,542840041
0,6	1,830142519	1,866929934	1,817707852	1,841905391	1,769448042	1,830453499	1,813279806
0,65	2,130741585	2,13465279	2,133133392	2,132807866	2,118956222	2,125882405	2,105939222
0,7	2,441997705	2,435967221	2,451867103	2,447731706	2,459686584	2,469849431	2,431161261
0,75	2,810238577	2,798836354	2,825544064	2,810075727	2,840622395	2,835767881	2,804609717
0,8	3,294943136	3,285344667	3,30988663	3,2871398	3,355145703	3,270798635	3,252799275
0,85	3,828992704	3,808264639	3,840632494	3,817636761	3,858755952	3,829116848	3,82434616
0,9	4,668643023	4,628640179	4,667812761	4,628344494	4,702564679	4,614159737	4,504997214
0,925	5,236579888	5,187573991	5,229725506	5,187451583	5,20883008	5,185859549	5,197384693
0,95	6,038704839	5,994754349	6,025389217	5,994677088	6,010701186	5,993949102	6,00198196
0,975	7,414874108	7,378189052	7,395087259	7,378332783	7,382871976	7,378254124	6,853610207
0,99	9,092769465	9,032543515	9,212100977	9,158196794	8,226942502	8,911928777	6,180404259

Tabela T-4.4 – Vrednosti parametra  $k_2$  linearne funkcije  $f(N,A,L)$ 

$k_2$	$N$						
	6	7	8	9	10	11	12
0,05	-0,0015214	-0,000675	$-7,8116 \cdot 10^{-5}$	$-7,0452 \cdot 10^{-5}$	$-3,04518 \cdot 10^{-5}$	$-6,809 \cdot 10^{-6}$	$-1,687 \cdot 10^{-5}$
0,1	-0,0252685	-0,019152	-0,00471042	-0,00629904	-0,004069563	-0,0018228	-0,0045608
0,15	-0,1023079	-0,098474	-0,0363774	-0,054911812	-0,041216801	-0,0267539	-0,0544214
0,2	-0,2397727	-0,260455	-0,12572367	-0,194005609	-0,155044878	-0,1289706	-0,2090238
0,25	-0,4256209	-0,492135	-0,28656561	-0,43454325	-0,363386347	-0,3018068	-0,4770895
0,3	-0,6420987	-0,765004	-0,51154244	-0,749758754	-0,645553903	-0,658679	-0,8089339
0,35	-0,8827157	-1,049845	-0,78098095	-1,098422951	-0,967030213	-1,0337649	-1,1588407
0,4	-1,1148626	-1,322526	-1,0713972	-1,420331578	-1,293452821	-1,4202522	-1,4918405
0,45	-1,3346311	-1,56534	-1,36051957	-1,715460093	-1,599175617	-1,7671524	-1,7888183
0,5	-1,5332017	-1,766853	-1,6298026	-1,955468416	-1,864640772	-2,0540291	-2,0432482
0,55	-1,7042866	-1,921325	-1,86548238	-2,134033729	-2,085692684	-2,2710922	-2,2477471
0,6	-1,8439397	-2,069877	-2,05869485	-2,244925831	-2,156593109	-2,4037855	-2,4041436
0,65	-1,9503184	-2,089443	-2,20494457	-2,325866831	-2,383980825	-2,4998807	-2,5168733
0,7	-1,9684675	-2,072579	-2,25707985	-2,347650532	-2,487970305	-2,5933476	-2,5902234
0,75	-1,9812287	-2,06229	-2,28595966	-2,337161126	-2,53921775	-2,5933366	-2,6273826
0,8	-2,0755321	-2,14844	-2,36350223	-2,40507533	-2,68277742	-2,556568	-2,6344218
0,85	-1,9617892	-2,007051	-2,25261978	-2,28340001	-2,521331375	-2,5035942	-2,6168
0,9	-2,0207848	-2,016565	-2,27013009	-2,266990703	-2,566315901	-2,4309393	-2,2550754
0,925	-1,9937087	-1,971771	-2,22855236	-2,222615338	-2,406976438	-2,4174484	-2,5583105
0,95	-1,9623958	-1,957985	-2,18189045	-2,209010487	-2,373412359	-2,4070116	-2,5320108
0,975	-1,9272208	-1,948061	-2,13160072	-2,19967922	-2,327514082	-2,3999193	-1,1123768
0,99	-1,5848295	-1,531284	-2,08998659	-2,075776592	-0,014114736	-1,701774	5,05131098

Kao što se vidi iz tabela T-4.3 i T-4.4, parametri  $k_1$  i  $k_2$  zavise od vrednosti raspoloživosti linka  $A$  i broja čvorova  $N$ . Da bi se dobila funkcija  $f(N,A,L)$  u analitičkom obliku, potrebno je naći aproksimativne funkcije za parametre  $k_1$  i  $k_2$ . Inicijalno, vrednosti date u tabelama T-4.3 i T-4.4 predstavljene su grafički u cilju lakše analize i određivanja analitičkog oblika. Pošto se u ovom poglavlju analiziraju samo vrednosti za parno  $N$ , za parametre  $k_1$  i  $k_2$  na graficima će biti nacrtane vrednosti samo za  $N=\{8,10,12\}$ . Na slici 4.11 grafički je predstavljena promena vrednosti parametra  $k_1$  u zavisnosti od raspoloživosti  $A$ , gde se broj čvorova  $N$  pojavljuje kao parametar funkcije.



Slika 4.11 – Promena vrednosti parametra  $k_1$  u zavisnosti od vrednosti raspoloživosti linka (A)

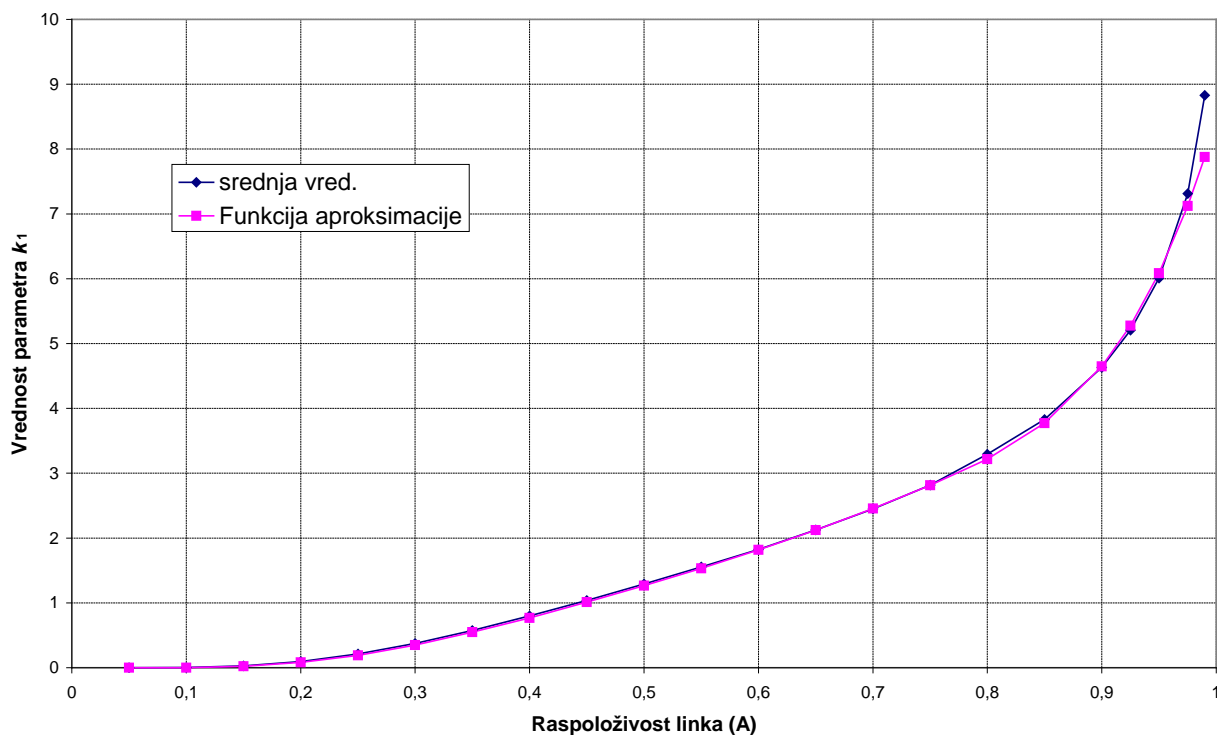
Na slici 4.11 se vidi da se vrednost parametra  $k_1$  praktično menja samo u zavisnosti od raspoloživosti linka A, a da su promene u zavisnost od vrednosti  $N$  skoro zanemarljive. U cilju određivanja aproksimativne funkcije u analitičkom obliku, umesto tačnih vrednosti za parametar  $k_1$  posmatraće se srednja vrednost dobijena usrednjavanjem svih dobijenih vrednosti za parametar  $k_1$ . Navedena srednja vrednost je takođe nacrtana na grafiku na slici 4.11 i obeležena sa "sr.vr.". Jasnoće radi, srednja vrednost za parametar  $k_1$  data je na slici 4.12. Analiza grafika datog na slici 4.12 pokazala je da se grafik može podeliti na tri segmenta u cilju adekvatne aproksimacije. Prvi segment odgovara vrednostima  $0 \leq A < 0,4$ , drugi segment vrednostima  $0,4 \leq A \leq 0,75$ , a treći segment vrednostima  $A > 0,75$ .

Analizom ponašanja vrednosti parametra  $k_1$  unutar prvog segmenta zaključeno je da se zadovoljavajuća aproksimacija može dobiti polinomom 4. stepena:

$$k_1 = -63,313 \cdot A^4 + 57,337 \cdot A^3 - 9,2201 \cdot A^2 + 0,5079 \cdot A - 0,0087 \quad (4.15)$$

U drugom segmentu, gde je  $0,4 \leq A \leq 0,75$ , parametar  $k_I$  se može dovoljno dobro aproksimirati polinomom 3. stepena:

$$k_1 = 5,6213 \cdot A^3 - 5,863 \cdot A^2 + 6,8472 \cdot A - 1,3939 \quad (4.16)$$



Slika 4.12 – Srednja vrednost parametra  $k_I$  i funkcija aproksimacije srednje vrednosti parametra  $k_I$

U trećem segmentu, gde je  $A > 0,75$ , analiza je pokazala da se parametar  $k_I$  može aproksimirati polinomom 6. stepena:

$$k_1 = 238,2 \cdot A^6 - 618,9 \cdot A^5 + 622,65 \cdot A^4 - 307,81 \cdot A^3 + 83,59 \cdot A^2 - 9,6164 \cdot A + 0,3326 \quad (4.17)$$

Na slici 4.12 može se videti da funkcija aproksimacije data izrazima (4.20), (4.21) i (4.22) dosta dobro aproksimira srednju vrednost parametra  $k_I$ . Greška aproksimacije će se posmatrati kasnije, na nivou cele funkcije aproksimacije za  $f(N,A,L)$ .

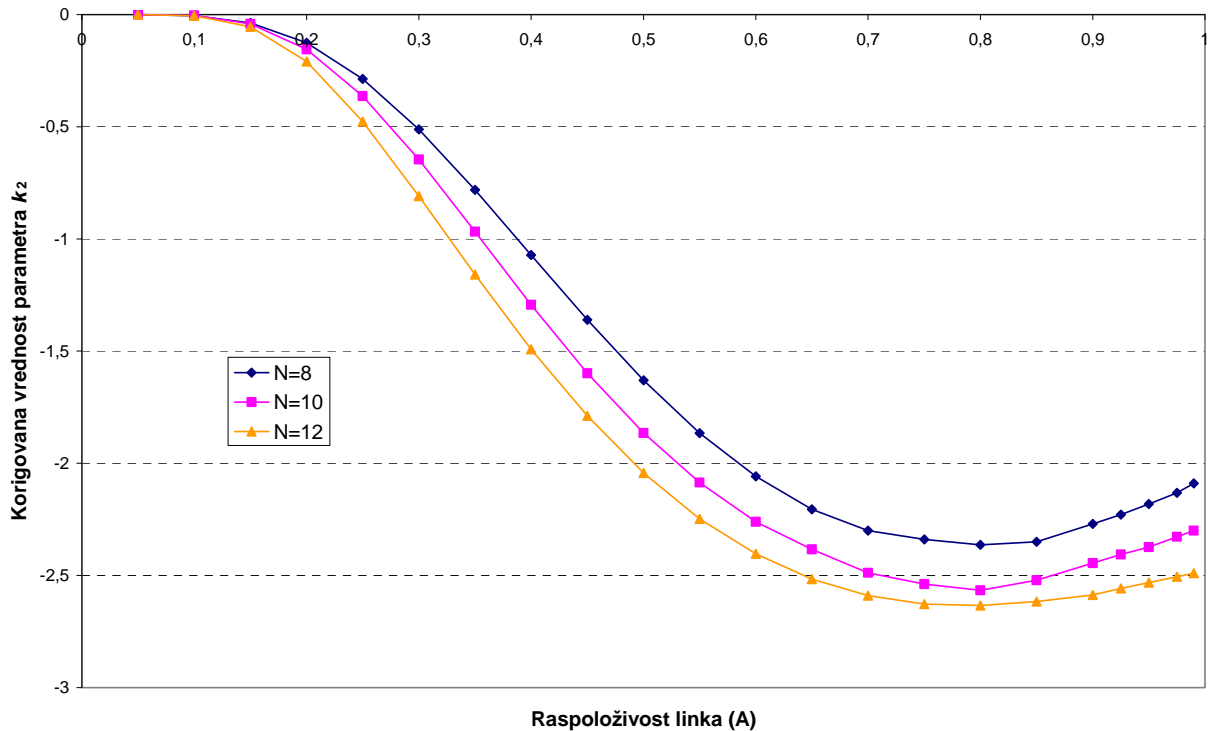
Ista vrsta analize sprovedena je i za vrednosti parametra  $k_2$ . Na slici 4.13 grafički je predstavljena promena vrednosti parametra  $k_2$  u zavisnosti od raspoloživosti  $A$  gde se broj čvorova  $N$  pojavljuje kao parametar funkcije. Posle detaljne analize rezultata predstavljenih na slici 4.13 zaključeno je da se funkcija aproksimacije može realizovati iz dva dela: jednom funkcijom aproksimiraju se vrednosti parametra  $k_2$  za vrednosti  $A < 0,75$ , a drugom funkcijom vrednosti parametra  $k_2$  za vrednosti  $A \geq 0,75$ . Konačno, analizom grafika datog na slici 4.13 dobijena je sledeća funkcija aproksimacije parametra  $k_2$  za vrednosti raspoloživosti linka  $A < 0,75$ :

$$k_2 = -\left[ (0,0892 \cdot \ln(N) + 0,9971) \cdot \tanh(3,3 \cdot A) \right]^{5,5} \frac{0,097 \cdot N + 1,641452}{\left[ (0,0892 \cdot \ln(N) + 0,9971) \cdot \tanh(3,3 \cdot 0,8) \right]^{5,5}} \quad (4.18)$$

Za vrednosti raspoloživosti linka  $A \geq 0,75$  dobija se sledeća funkcija aproksimacije parametra  $k_2$ :

$$k_2 = (0,52 \cdot A^2 - 0,896 \cdot A + 0,287) \cdot N + 6,2867 \cdot A^2 - 9,5463 \cdot A + 1,9721 \quad (4.19)$$





Slika 4.13 – Grafik vrednosti parametra  $k_2$  u zavisnosti od vrednosti raspoloživosti linka A

Na osnovu parametara  $k_1$  (vrednosti definisane funkcijama (4.20), (4.21) i (4.22)) i  $k_2$  (vrednosti definisane funkcijama (4.23) i (4.24)), moguće je definisati konačni oblik funkcije aproksimacije raspoloživosti  $R(N,A,L)$  u prelomnim tačkama:

$$R(N, A, L) = 1 - e^{-(k_1 \cdot \frac{L}{N} + k_2)} \quad (4.20)$$

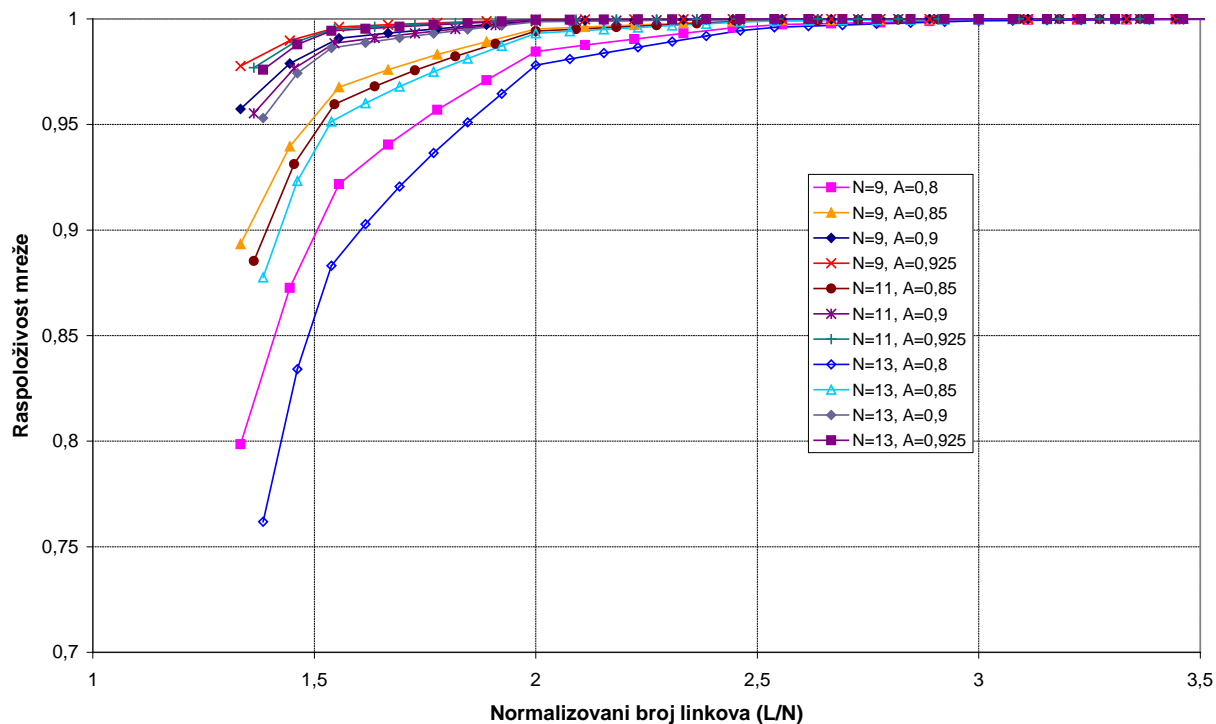
Treba napomenuti da prethodno navedena funkcija aproksimacije važi za slučajeve kada je  $L/N \geq 1,5$ . Za manji broj linkova od ovog graničnog slučaja funkcija aproksimacije ne važi. S obzirom da vrednost  $L/N=1,5$  odgovara mreži sa relativno malim brojem linkova za koju je moguće direktno izračunati raspoloživost, ovo ograničenje ne predstavlja ozbiljnu prepreku za primenu funkcije aproksimacije koja daje rezultate za složenije mreže sa većim brojem linkova.

Definisanjem funkcije aproksimacije (4.25) rešen je problem izračunavanja raspoloživosti u prelomnim tačkama za paran broj  $N$ , što je bio potreban preduslov da bi

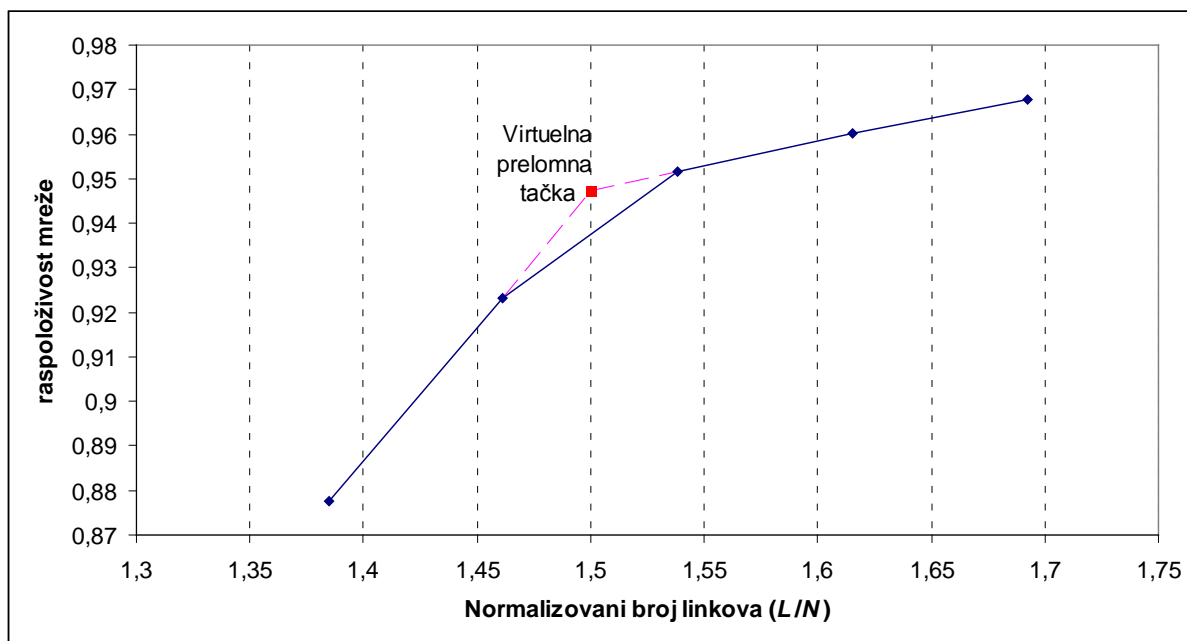
bilo moguće primeniti linearnu segmentnu aproksimaciju za računanje raspoloživosti u svim tačkama.

#### ***4.5 Aproksimacija raspoloživosti u prelomnim tačkama za neparno $N$***

Problem koji je ostao da se reši jeste pitanje prelomnih tačaka kada je  $N$  neparan broj. U slučaju kada je  $N$  neparan broj gube se prelomne tačke kod kojih je  $L/N = \{1,5; 2,5; 3,5; \dots\}$  što se vidi na slici 4.14. Nažalost, bez vrednosti raspoloživosti u prelomnim tačkama praktično je nemoguće primeniti metod linearne segmentne aproksimacije. U cilju prevazilaženja ovog problema, pretpostavljajući zadati broj čvorova  $N$ , uvedene su virtuelne vrednosti broja linkova  $L_v$  koje se dobijaju iz jednačine  $L_{vi} = N * K_i$ , gde je  $K_i = \{1,5; 2,5; 3,5; \dots\}$ . Novouvedene vrednosti  $L_{vi}$  se koriste za formiranje nedostajuće prelomne tačke koja se koristi kod linearne segmentne aproksimacije. Vrednost raspoloživosti za  $L_{vi}$  se računa aproksimativnom formulom (4.25), na isti način kao i za ostale prelomne tačke. Primer uvođenja virtuelne prelomne tačke prikazan je na slici 4.15. Samim tim se i aproksimativna funkcija koja se koristi za izračunavanje raspoloživosti za parno  $N$  može primeniti i za izračunavanje raspoloživosti kada je  $N$  neparno uz korišćenje novouvedene vrednosti  $L_{vi}$ .



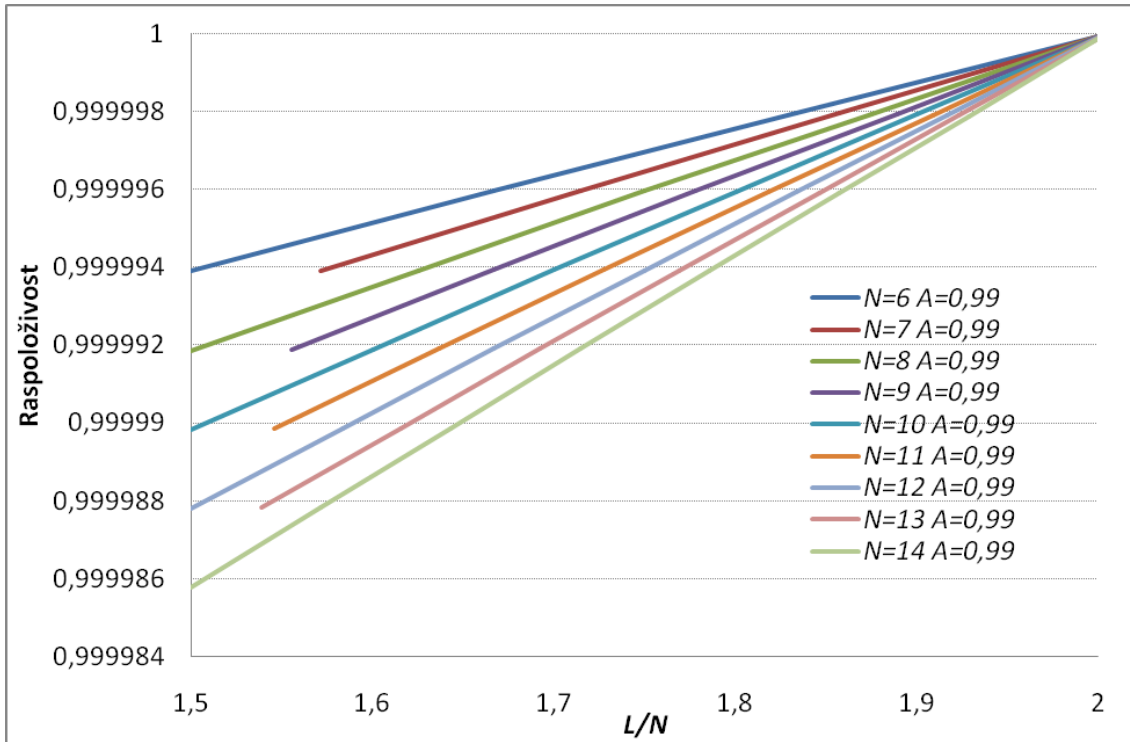
Slika 4.14 – Grafik raspoloživosti u zavisnosti od normalizovanog broja linkova za neparno N



Slika 4.15 – Primer uvođenja virtuelne prelomne tačke za N neparno

#### 4.6 Funkcija aproksimacije za $L/N \leq 2$ i $A \geq 0,9$

Opseg visokih raspoloživost linkova je od posebnog značaja jer relativno često je raspoloživost linka veća ili jednaka 0,9. S druge strane, kada se posmatraju mreže sa velikim brojem čvorova (preko 40) vrlo često broj linkova ne prelazi dvostruku vrednost broja čvorova. Zbog svega prethodno navedenog, ovde je posebno izdvojen samo ovaj podskup. U cilju ilustracije, na slici 4.16 prikazane su vrednosti raspoloživosti za  $A=0,99$  i  $N$



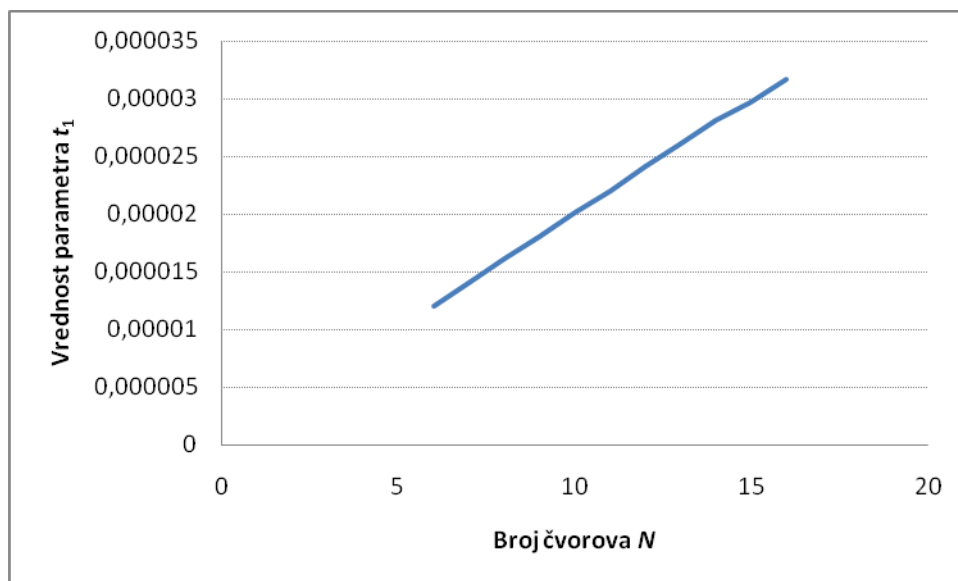
Slika 4.16 - Raspoloživosti mreže za  $A=0,99$  i  $L/N \leq 2$

Sa slike 4.16 se vidi da se raspoloživost menja linearno u zavisnosti od parametra  $L/N$ . Polazeći od ove pretpostavke, dobija se skup koeficijenata linearne zavisnosti raspoloživosti od  $L/N$ . Pretpostavićemo da se raspoloživost  $R$  može iskazati izražom (4.26).

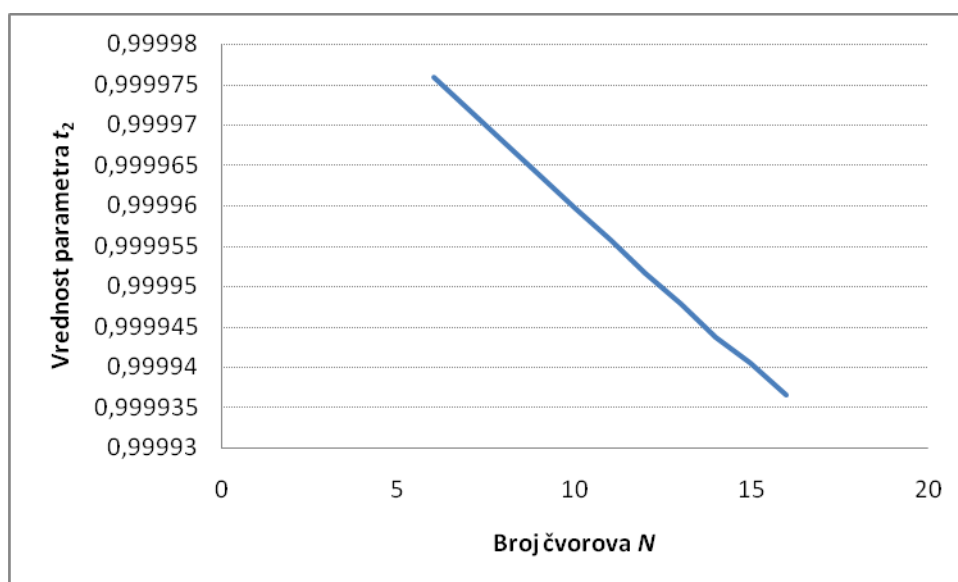
$$R\left(\frac{L}{N}\right) = t_1 * \frac{L}{N} + t_2 \quad (4.26)$$

Vrednosti parametara  $t_1$  i  $t_2$  u zavisnosti od  $N$  za  $A=0,99$  prikazane su na slikama 4.17 i 4.18, respektivno. Na slikama 4.17 i 4.18 se vidi da se zavisnost parametara  $t_1$  i  $t_2$  može aproksimirati linearnom funkcijom datom izrazima (4.27). Linearna zavisnost raspoloživost se dobija i kada se posmatraju vrednosti za ostale vrednosti  $0,9 \leq A < 1$ .

$$\begin{aligned} t_1 &= t_{11} * N + t_{12} \\ t_2 &= t_{21} * N + t_{22} \end{aligned} \quad (4.27)$$



Slika 4.17 - Zavisnost parametra  $t_1$  od  $N$  za  $A=0,99$



Slika 4.18 - Zavisnost parametra  $t_2$  od  $N$  za  $A=0,99$

Vrednosti parametara  $t_{11}$ ,  $t_{12}$ ,  $t_{21}$  i  $t_{22}$  u zavisnosti od vrednosti raspoloživosti linka  $A$  predstavljene su u tabeli T-4.5.

Tabela T-4.5 - Vrednosti parametara  $t_{11}$ ,  $t_{12}$ ,  $t_{21}$  i  $t_{22}$  u zavisnosti od vrednosti raspoloživosti linka  $A$

$A$	$t_{11}$	$t_{12}$	$t_{21}$	$t_{22}$
0,9	0,001637372	0,002966815	-0,003378484	0,994186728
0,925	0,000747258	0,000551924	-0,001526989	0,998919814
0,95	0,000233917	5,01481E-05	-0,000474171	0,999901696
0,975	3,0383E-05	8,20238E-07	-6,11581E-05	0,999998375
0,99	1,97929E-06	3,72022E-09	-3,96858E-06	0,999999992

Analiza parametara  $t_{11}$ ,  $t_{12}$ ,  $t_{21}$  i  $t_{22}$  u zavisnosti od vrednosti raspoloživosti linka  $A$  pokazala je da se parametri  $t_{11}$  i  $t_{21}$  mogu aproksimirati polinomom trećeg stepena, parametar  $t_{12}$  polinomom četvrtog stepena a parametar  $t_{22}$  polinomom petog stepena. Aproksimativni izrazi za parametre  $t_{11}$ ,  $t_{12}$ ,  $t_{21}$  i  $t_{22}$  u zavisnosti od vrednosti raspoloživosti linka  $A$  dati su izrazima (4.28).

$$\begin{aligned}
 t_{11} &= -1,921092616 * A^3 + 5,763865575 * A^2 - 5,764453244 * A + 1,921680285 \\
 t_{12} &= 16,64831593 * A^4 - 66,09424602 * A^3 + 98,39623848 * A^2 - 65,10300229 * A \\
 &\quad + 16,1526939 \\
 t_{21} &= 3,877448318 * A^3 - 11,63326534 * A^2 + 11,63418563 * A - 3,878368611 \\
 t_{22} &= 927,8571285 * A^5 - 4592,893443 * A^4 + 9093,89181 * A^3 - 9002,8809 * A^2 \\
 &\quad + 4456,3745 * A - 881,3490955
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

Zamenom izraza (4.27) u izraz (4.26) dobija se izraz (4.29) gde su parametri  $t_{11}$ ,  $t_{12}$ ,  $t_{21}$  i  $t_{22}$  dati izrazima (4.28).

$$R(N, A, \frac{L}{N}) = (t_{11} * N + t_{12}) * \frac{L}{N} + t_{21} * N + t_{22} \tag{4.29}$$

Izraz (4.29) važi za  $0,9 \leq A < 1$  i  $L/N \leq 2$ .

U cilju veće preglednosti, u Prilogu 3 (poglavlje 10) dati su na jednom mestu svi aproksimativni izrazi za određivanje maksimalne vrednosti raspoloživosti mreže.

#### **4.7 Analiza tačnosti funkcije aproksimacije**

U cilju provere validnosti aproksimativnih formula, za poznate vrednosti raspoloživosti biće izračunate i aproksimativne vrednosti. Na osnovu poznatih tačnih vrednosti i aproksimativnih vrednosti, izračunava se relativna greška aproksimacije.

Da bi se proverilo u kojoj meri je dobijena aproksimativna funkcija dobra, tj. da bi se odredila greška aproksimacije, upoređeni su rezultati dobijeni aproksimativnom funkcijom (izraz 4.25 u kombinaciji sa metodom linearne segmentne aproksimacije) i rezultati dobijeni metodom sinteze mreže, tj korišćenjem algoritma za tačno računanje raspoloživosti. Detaljni uporedni rezultati za  $N = \{8, 9, 10, 11, 12\}$  dati su u tabelama T-9.6 do T-9.10, respektivno (Prilog 2). U tabeli T-4.9 date su vrednosti za  $N=12$  u cilju ilustracije tačnosti aproksimacije.

Tabela T-4.9 – Uporedno dati tačni rezultati i rezultati aproksimacije za  $N=12$

$N$	$A$	$L/N$	$L$	$R$ - tačno	$R$ - aproksimirano	Relativna greška aproksimacije
12	0,75	1,5	18	0,775606616	0,768046047	0,97479421%
		1,58333	19	0,811459049	0,79724331	1,75187390%
		1,66667	20	0,844481027	0,826440573	2,13627711%
		1,75	21	0,874034296	0,855637835	2,10477566%
		1,83333	22	0,900857101	0,884835098	1,77852886%
		1,91667	23	0,92523815	0,914032361	1,21112483%
		2	24	0,949961223	0,943229623	0,70861838%
		2,08333	25	0,956883041	0,950375609	0,68006556%
		2,16667	26	0,963451801	0,957521594	0,61551665%
		2,25	27	0,969880836	0,96466758	0,53751514%
		2,33333	28	0,976029759	0,971813566	0,43197391%
		2,41667	29	0,98202721	0,978959551	0,31238022%
		2,5	30	0,988036184	0,986105537	0,19540253%
		2,58333	31	0,989575127	0,987854506	0,17387476%
		2,66667	32	0,991098403	0,989603475	0,15083548%
		2,75	33	0,99260271	0,991352444	0,12595835%
		2,83333	34	0,994096252	0,993101413	0,10007474%
		2,91667	35	0,995576489	0,994850382	0,07293329%
		3	36	0,997053563	0,996599351	0,04555537%
		3,08333	37	0,997424244	0,997027409	0,03978599%
		3,16667	38	0,9977942	0,997455466	0,03394827%
3,25	39	0,99816348	0,997883524	0,02804708%		
3,33333	40	0,99853223	0,998311581	0,02209726%		
3,41667	41	0,998899243	0,998739639	0,01597796%		
3,5	42	0,999266378	0,999167696	0,00987541%		
12	0,8	1,5	18	0,881825918	0,867420286	1,63361399%
		1,58333	19	0,90271312	0,885094206	1,95177338%
		1,66667	20	0,921414669	0,902768125	2,02368647%
		1,75	21	0,937918928	0,920442045	1,86336821%
		1,83333	22	0,95277868	0,938115965	1,53894243%
		1,91667	23	0,966229918	0,955789885	1,08049159%
		2	24	0,979759443	0,973463804	0,64256985%
		2,08333	25	0,982678097	0,977001288	0,57768751%
		2,16667	26	0,985488353	0,980538772	0,50224651%

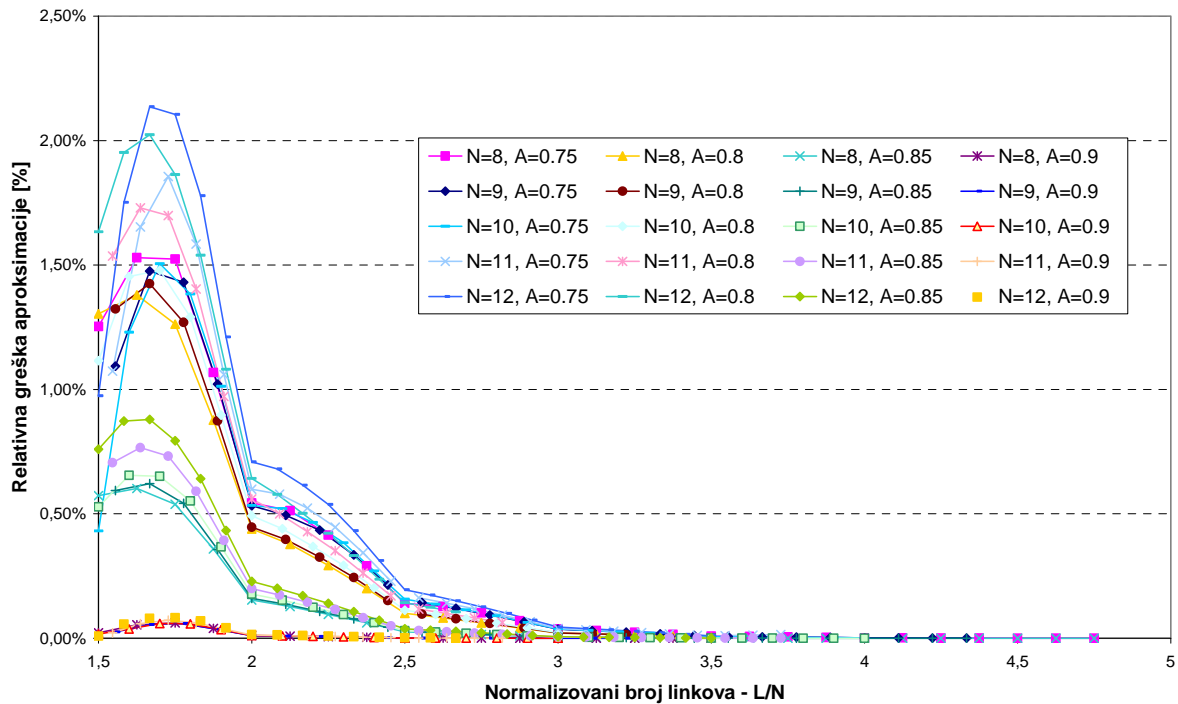
<i>N</i>	<i>A</i>	<i>L/N</i>	<i>L</i>	<i>R</i> - tačno	<i>R</i> - aproksimirano	Relativna greška aproksimacije
		2,25	27	0,988246929	0,984076256	0,42202742%
		2,33333	28	0,990903157	0,98761374	0,33196159%
		2,41667	29	0,993505953	0,991151223	0,23701217%
		2,5	30	0,996110667	0,994688707	0,14275117%
		2,58333	31	0,99663771	0,995396744	0,12451525%
		2,66667	32	0,99716206	0,996104781	0,10602874%
		2,75	33		0,996812819	
		2,83333	34		0,997520856	
		2,91667	35		0,998228893	
		3	36		0,99893693	
12	0,85	1,5	18	0,950723224	0,943498963	0,75986998%
		1,58333	19	0,959866509	0,951488629	0,87281714%
		1,66667	20	0,967993553	0,959478295	0,87968124%
		1,75	21	0,97521176	0,967467961	0,79406335%
		1,83333	22	0,981756855	0,975457627	0,64162818%
		1,91667	23	0,987726907	0,983447292	0,43327909%
		2	24	0,993708358	0,991436958	0,22857815%
		2,08333	25	0,994645455	0,992647836	0,20083731%
		2,16667	26	0,995561662	0,993858714	0,17105400%
		2,25	27	0,996465963	0,995069591	0,14013244%
		2,33333	28	0,997346434	0,996280469	0,10688015%
		2,41667	29	0,998214639	0,997491346	0,07245866%
		2,5	30	0,99908306	0,998702224	0,03811852%
		2,58333	31	0,999213915	0,998885739	0,03284338%
		2,66667	32	0,999344503	0,999069254	0,02754287%
		2,75	33	0,999474603	0,99925277	0,02219499%
		2,83333	34	0,999604428	0,999436285	0,01682097%
		2,91667	35	0,999733857	0,9996198	0,01140880%
		3	36	0,999863168	0,999803315	0,00598611%
		3,08333	37	0,999882574	0,999831128	0,00514520%
3,16667	38	0,999901973	0,99985894	0,00430369%		
3,25	39	0,999921366	0,999886753	0,00346159%		
3,33333	40	0,999940754	0,999914566	0,00261893%		
3,41667	41	0,999960123	0,999942379	0,00177453%		
3,5	42	0,999979493	0,999970191	0,00093020%		
12	0,9	1,5	18	0,986049253	0,985963684	0,00867801%
		1,58333	19	0,988635065	0,988074076	0,05674377%



$N$	$A$	$L/N$	$L$	$R$ - tačno	$R$ - aproksimirano	Relativna greška aproksimacije
		1,66667	20	0,990978485	0,990184469	0,08012442%
		1,75	21	0,993116837	0,992294861	0,08276728%
		1,83333	22	0,995096877	0,994405254	0,06950309%
		1,91667	23	0,99693734	0,996515646	0,04229889%
		2	24	0,998778572	0,998626039	0,01527201%
		2,08333	25	0,998966319	0,998832617	0,01338404%
		2,16667	26	0,99915217	0,999039195	0,01130708%
		2,25	27	0,999336719	0,999245774	0,00910057%
		2,33333	28	0,999518627	0,999452352	0,00663076%
		2,41667	29	0,999699184	0,99965893	0,00402659%
		2,5	30	0,999879751	0,999865508	0,00142441%
		2,58333	31	0,999897829	0,999885729	0,00121013%
		2,66667	32	0,999915898	0,999905951	0,00099483%
		2,75	33		0,999926172	
		2,83333	34		0,999946393	
		2,91667	35		0,999966614	
		3	36		0,999986835	

Podaci koji se odnose na relativnu grešku aproksimacije, a koji su dati u tabelama T-9.6 do T-9.10 (Prilog 2) prikazani su i grafički na slici 4.16. Na slici 4.16 se vidi je relativna greška aproksimacije mala i da sa porastom normalizovanog broja linkova relativna greška aproksimacije značajno opada, čime se potvrđuje činjenica da dobijena funkcija aproksimacije daje zadovoljavajuće rezultate u opsegu vrednosti  $N$  za koje su bile poznate tačne vrednosti prilikom generisanja funkcije aproksimacije. Posmatrajući grafik na slici 4.16, vidi se da relativna greška aproksimacije pada ispod vrednosti od 1% već za  $L/N \geq 2$  pri čemu tačnost aproksimacije u velikoj meri zavisi i od broja čvorova  $N$  i raspoloživosti linka  $A$ . Na primer, za  $L/N \geq 2$ ,  $N=12$  i  $A=0,9$  relativna greška je manja od 0,01%. S obzirom da je osnovni cilj aproksimacije bio da se dobije aproksimativna funkcija za mreže sa velikim brojem čvorova, smanjenje relativne greške sa porastom broja čvorova u mreži potvrđuje kvalitet aproksimativne funkcije. Zavisnost relativne greške od raspoloživosti linka  $A$  je takva da relativna greška opada sa porastom raspoloživosti linka i već za vrednosti  $A \geq 0,9$  pada na jako male vrednosti. Imajući u vidu da većina linkova u praksi ima raspoloživosti koje su relativno visoke

(reda 0,9 i više), ova osobina aproksimativne funkcije samo povećava njemu praktičnu primenljivost.

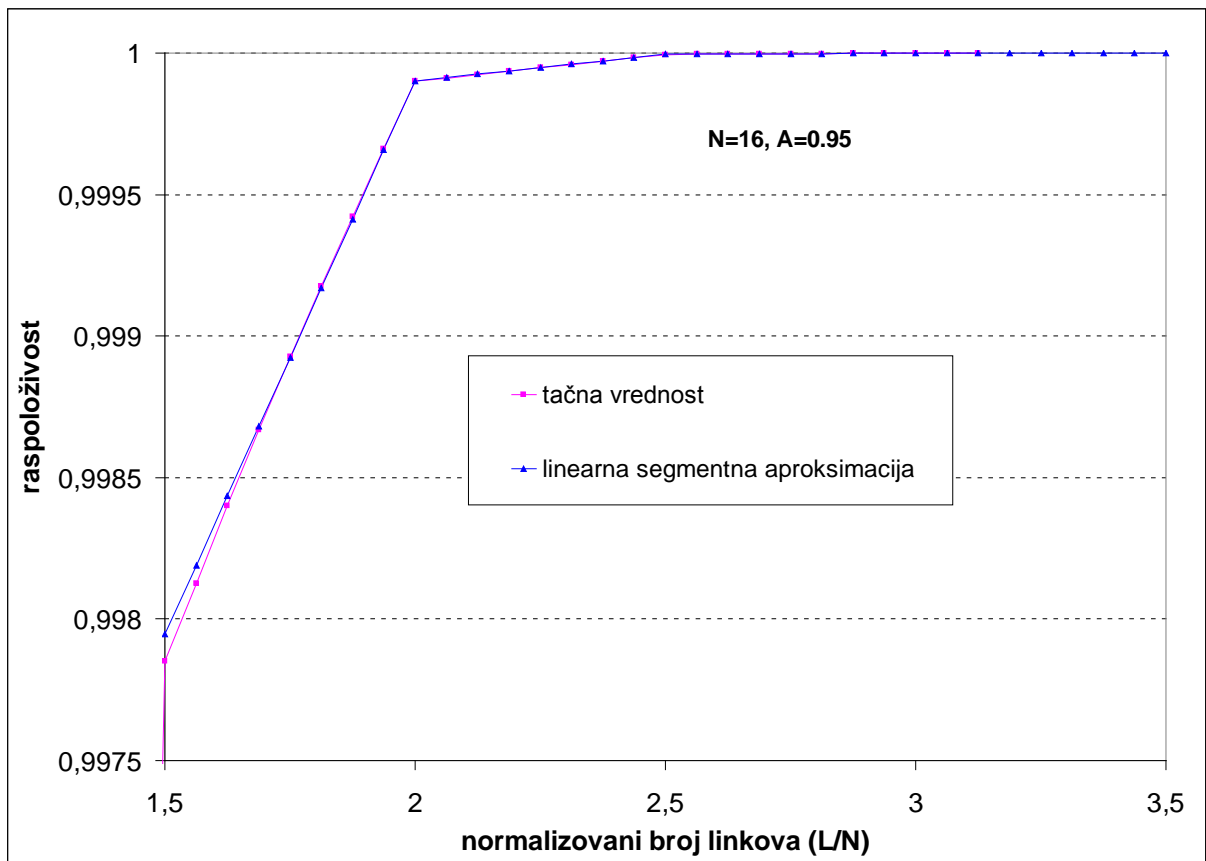


Slika 4.16 – Grafik promene relativne greške aproksimacije u zavisnosti od normalizovanog broja linkova

Sledeći korak u verifikaciji dobijene funkcije aproksimacije je da se rezultati funkcije aproksimacije uporede sa rezultatima dobijenim za vrednost broja čvorova  $N$  koja je izvan opsega koji je korišćen za dobijanje funkcije aproksimacije. U tom smislu, metodom sinteze mreže izračunate su tačne raspoloživosti za mrežu kod koje je  $N=16$  i  $A=0,95$ . U tabeli T-4.10 dati su uporedni rezultati tačnog načina izračunavanja i rezultati dobijeni aproksimativnom funkcijom (izraz 4.25) u kombinaciji sa metodom linearne segmentne aproksimacije za navedeni primer. Rezultati dati u tabeli T-4.10 su predstavljeni i grafički na slici 4.17. Dodatno, u tabeli T-4.11 dati su uporedni rezultati tačnog načina računanja i rezultati dobijeni aproksimativnom funkcijom za  $N=20$  i  $A=0,95$ . Rezultati dati u tabeli T-4.11 su predstavljeni i grafički na slici 4.18.

Tabela T-4.10 - Poređenje tačnih i aproksimiranih raspoloživosti za  $N=16$  i  $A=0,95$

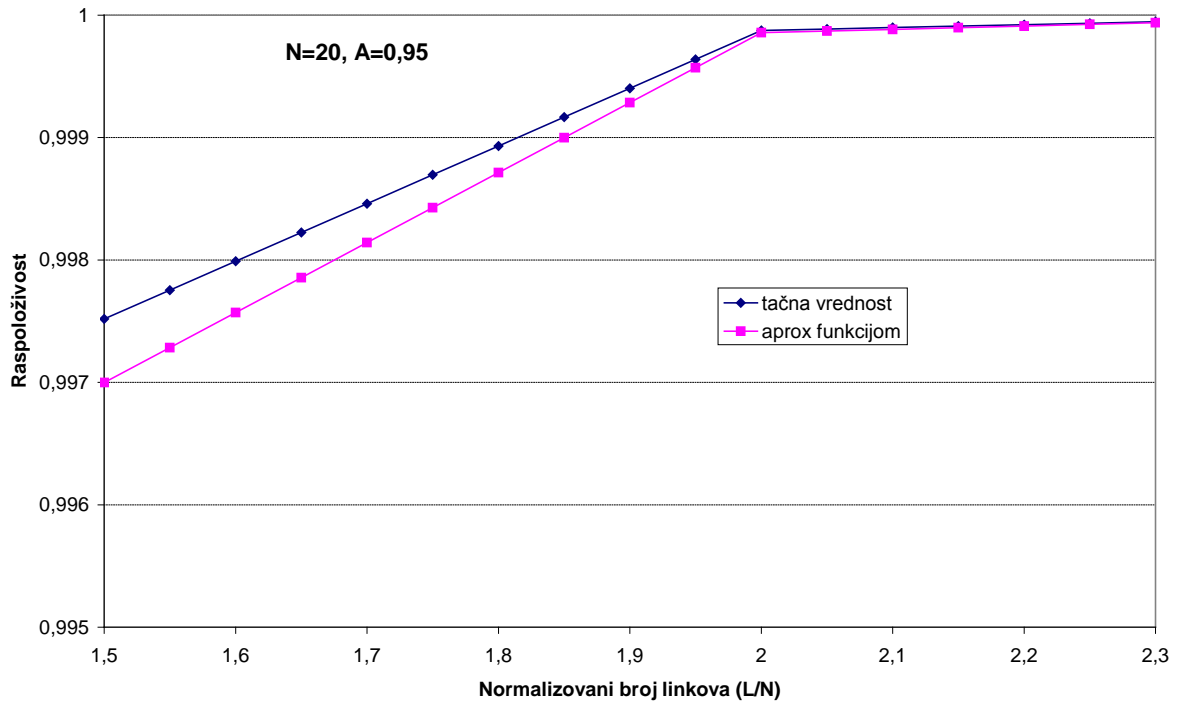
N	A	L/N	L	R - tačno	R- aproksimirano	Relativna greška aproksimacije
16	0,95	1,5	24	0,997850581	0,99794675	0,0096374%
		1,5625	25	0,998126961	0,99819117	0,0064327%
		1,625	26	0,998400693	0,99843559	0,0034950%
		1,6875	27	0,9986676	0,99868001	0,0012423%
		1,75	28	0,998927981	0,99892443	0,0003559%
		1,8125	29	0,999177261	0,99916885	0,0008422%
		1,875	30	0,999421433	0,99941327	0,0008171%
		1,9375	31	0,999660475	0,99965769	0,0002791%
		2	32	0,99989955	0,99990211	0,0002556%
		2,0625	33	0,999911532	0,99991376	0,0002227%
		2,125	34	0,999923515	0,99992541	0,0001898%
		2,1875	35	0,999935484	0,99993707	0,0001582%
		2,25	36	0,999947427	0,99994872	0,0001292%
		2,3125	37	0,999959346	0,99996037	0,0001027%
		2,375	38	0,999971238	0,99997203	0,0000788%
		2,4375	39	0,999983118	0,99998368	0,0000561%
		2,5	40	0,999994999	0,99999533	0,0000334%
		2,5625	41	0,999995593	0,99999589	0,0000296%
		2,625	42	0,999996187	0,99999644	0,0000257%
		2,6875	43	0,999996781	0,999997	0,0000219%
		2,75	44	0,999997375	0,99999756	0,0000180%
		2,8125	45	0,999997969	0,99999811	0,0000142%
		2,875	46	0,999998562	0,99999867	0,0000104%
		2,9375	47	0,999999156	0,99999922	0,0000066%
		3	48	0,99999975	0,99999978	0,0000027%
		3,0625	49	0,99999978	0,9999998	0,0000024%
3,125	50	0,999999809	0,99999983	0,0000021%		



Slika 4.17 – Uporedno dati tačni i rezultati aproksimacije za  $N=16$  i  $A=0,95$

Tabela T-4.11 - Usporedno dati tačni rezultati i rezultati aproksimacije za  $N=20$  i  $A=0,95$

N	A	L/N	L	R - tačno	R - aproksimirano	relativna greška aproksimacije
20	0,95	1,5	30	0,9975189	0,996998761	0,0521%
		1,55	31	0,9977542	0,997284576	0,0471%
		1,6	32	0,9979896	0,997570391	0,0420%
		1,65	33	0,998225	0,997856205	0,0369%
		1,7	34	0,9984605	0,99814202	0,0319%
		1,75	35	0,998696	0,998427834	0,0268%
		1,8	36	0,9989316	0,998713649	0,0218%
		1,85	37	0,9991672	0,998999464	0,0168%
		1,9	38	0,9994029	0,999285278	0,0118%
		1,95	39	0,9996384	0,999571093	0,0067%
		2	40	0,9998751	0,999856908	0,0018%
		2,05	41	0,9998869	0,999870535	0,0016%
		2,1	42	0,9998988	0,999884162	0,0015%
		2,15	43	0,9999107	0,999897789	0,0013%
		2,2	44	0,9999225	0,999911416	0,0011%
		2,25	45	0,9999344	0,999925043	0,0009%
		2,3	46	0,9999463	0,99993867	0,0008%
		2,35	47	0,9999581	0,999952297	0,0006%
2,4	48	0,99997	0,999965924	0,0004%		
2,45	49	0,9999819	0,999979551	0,0002%		
2,5	50	0,9999938	0,999993178	0,0001%		



Slika 4.18 - Poređenje tačnih i aproksimiranih raspoloživosti za  $N=20$  i  $A=0,95$

Ako se pažljivo pogledaju rezultati dati na slici 4.18, vidi se da je rezultat aproksimacije pesimistički, tj. da je raspoloživost koja se dobija aproksimativnim putem nešto manja od raspoloživosti koja je dobijena tačnim metodom računanja. Iako grafik na slici 4.18 na prvi pogled pokazuje velika odstupanja, rezultati dati u tabeli T-4.11 pokazuju da je relativna greška manja od 0,05% što se slaže sa rezultatima dobijenim za vrednosti  $N \leq 12$ .

Da bi se dobila opšta slika o kvalitetu aproksimacije, u tabeli T-4.12 date su srednje kvadratne greške aproksimacije za sve aproksimativne vrednosti raspoloživosti za koje postoje tačne vrednosti maksimalne raspoloživosti i gde je  $A \geq 0,75$ . Srednja vrednost podataka predstavljenih u tabeli T-4.12 je  $2,98 \cdot 10^{-5}$ . U tabeli T-4.13 dat je kvadratni koren srednje kvadratne greške aproksimacije za sve aproksimativne vrednosti raspoloživosti za koje postoje tačne vrednosti maksimalne raspoloživosti i gde je  $A \geq 0,75$ . Srednja vrednost podataka predstavljenih u tabeli T-4.13 je  $2,7 \cdot 10^{-3}$ . U tabeli T-4.14 date su srednje relativne greške aproksimacije za sve aproksimativne vrednosti raspoloživosti za koje postoje tačne vrednosti maksimalne raspoloživosti i gde je  $A \geq 0,75$ . Srednja vrednost podataka predstavljenih u tabeli T-4.14 je 0,13%. U tabeli T-4.15 date su srednje apsolutne relativne greške aproksimacije za sve aproksimativne

vrednosti raspoloživosti za koje postoje tačne vrednosti maksimalne raspoloživosti i gde je  $A \geq 0,75$ . Srednja vrednost podataka predstavljenih u tabeli T-4.15 je 0,13%.

Rezultati dati u tabelama T-4.12 - T-4.15 pokazuju da greška aproksimacije pada sa porastom verovatnoće linka i da je greška tipično manja za jedan do dva reda veličine od zahtevane tačnosti aproksimacije.

Postavlja se pitanje provere primenljivosti aproksimativne funkcije raspoloživosti mreže. U cilju određivanja greške aproksimacije potrebno je poznavati tačne vrednosti raspoloživosti mreže za velike vrednosti broja čvorova  $N$  ( $N > 20$ ) i tu se dolazi do problema izračunavanja te raspoloživosti. Da može lako da se izračuna ova raspoloživost, ne bi ni bilo potrebe da se određuju aproksimativne funkcije. Umesto tačnih rezultata za raspoloživost mreže, posmatraće se vrednosti koje se dobijaju poznatim metodama za aproksimativno određivanje raspoloživosti mreže koje imaju relativno visoku tačnost. Jedna od takvih metoda je i metoda *R.H. Jana* opisana u [29]. Prvi korak u poređenju rezultata metode *R.H. Jana* i metode linearne segmentne aproksimacije je da se uporede relativne greške za  $N=12$  za različite vrednosti raspoloživosti linkova i za različite veličine mreža. Na slici 4.19 date su relativne greške aproksimacije metode linearne segmentne aproksimacije. Na slici 4.20 date su relativne greške aproksimacije metode *R.H. Jana*.

T-4.12 - Srednje kvadratne greške aproksimacije maksimalne raspoloživosti za  $A \geq 0,75$

A	N								
	8	9	10	11	12	13	14	16	20
0,75	$2,70 \cdot 10^{-5}$	$3,0 \cdot 10^{-5}$	$2,5 \cdot 10^{-5}$	$3,5 \cdot 10^{-5}$	$3,1 \cdot 10^{-5}$	$3,6 \cdot 10^{-5}$	$1,1 \cdot 10^{-4}$		
0,8	$2,76 \cdot 10^{-5}$	$2,6 \cdot 10^{-5}$	$3,0 \cdot 10^{-5}$	$3,8 \cdot 10^{-5}$	$3,3 \cdot 10^{-5}$	$5,0 \cdot 10^{-5}$	$1,1 \cdot 10^{-4}$	$3,9 \cdot 10^{-4}$	$7,4 \cdot 10^{-4}$
0,85	$4,46 \cdot 10^{-6}$	$4,9 \cdot 10^{-6}$	$6,0 \cdot 10^{-6}$	$7,6 \cdot 10^{-6}$	$6,76 \cdot 10^{-6}$	$1,4 \cdot 10^{-5}$	$2,2 \cdot 10^{-5}$		
0,9	$4,28 \cdot 10^{-8}$	$3,9 \cdot 10^{-8}$	$3,8 \cdot 10^{-8}$	$5,2 \cdot 10^{-8}$	$4,8 \cdot 10^{-8}$	$1,4 \cdot 10^{-7}$	$2,6 \cdot 10^{-7}$	$1,4 \cdot 10^{-6}$	$4,2 \cdot 10^{-6}$
0,925	$5,42 \cdot 10^{-9}$	$5,2 \cdot 10^{-9}$	$1,3 \cdot 10^{-8}$	$9,0 \cdot 10^{-9}$	$9,6 \cdot 10^{-9}$	$6,0 \cdot 10^{-9}$	$6,5 \cdot 10^{-9}$		
0,95	$1,02 \cdot 10^{-9}$	$1,0 \cdot 10^{-9}$	$2,1 \cdot 10^{-9}$	$1,9 \cdot 10^{-9}$	$1,9 \cdot 10^{-9}$	$1,8 \cdot 10^{-9}$	$2,0 \cdot 10^{-9}$	$5,5 \cdot 10^{-10}$	
0,975	$3,01 \cdot 10^{-10}$	$2,3 \cdot 10^{-10}$	$2,9 \cdot 10^{-10}$	$3,3 \cdot 10^{-10}$	$3,1 \cdot 10^{-10}$	$5,2 \cdot 10^{-10}$	$8,0 \cdot 10^{-10}$		
0,99	$2,14 \cdot 10^{-10}$	$1,8 \cdot 10^{-10}$	$2,4 \cdot 10^{-10}$	$2,7 \cdot 10^{-10}$	$2,5 \cdot 10^{-10}$	$3,8 \cdot 10^{-10}$	$5,6 \cdot 10^{-10}$		

T-4.13 - Kvadratni koren srednje kvadratne greške aproksimacije maksimalne raspoloživosti za  $A \geq 0,75$

A	N								
	8	9	10	11	12	13	14	16	20
0,75	$5,2 \cdot 10^{-3}$	$5,5 \cdot 10^{-3}$	$5,0 \cdot 10^{-3}$	$5,9 \cdot 10^{-3}$	$5,5 \cdot 10^{-3}$	$6,0 \cdot 10^{-3}$	$1,1 \cdot 10^{-2}$		
0,8	$5,3 \cdot 10^{-3}$	$5,1 \cdot 10^{-3}$	$5,5 \cdot 10^{-3}$	$6,2 \cdot 10^{-3}$	$5,8 \cdot 10^{-3}$	$7,1 \cdot 10^{-3}$	$1,1 \cdot 10^{-2}$	$2,0 \cdot 10^{-2}$	$2,7 \cdot 10^{-2}$
0,85	$2,1 \cdot 10^{-3}$	$2,2 \cdot 10^{-3}$	$2,5 \cdot 10^{-3}$	$2,8 \cdot 10^{-3}$	$2,6 \cdot 10^{-3}$	$3,8 \cdot 10^{-3}$	$4,7 \cdot 10^{-3}$		
0,9	$2,1 \cdot 10^{-4}$	$2,0 \cdot 10^{-4}$	$2,0 \cdot 10^{-4}$	$2,3 \cdot 10^{-4}$	$2,2 \cdot 10^{-4}$	$3,8 \cdot 10^{-4}$	$5,1 \cdot 10^{-4}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$2,0 \cdot 10^{-3}$
0,925	$7,4 \cdot 10^{-5}$	$7,2 \cdot 10^{-5}$	$1,2 \cdot 10^{-4}$	$9,5 \cdot 10^{-5}$	$9,8 \cdot 10^{-5}$	$7,8 \cdot 10^{-5}$	$8,1 \cdot 10^{-5}$		
0,95	$3,2 \cdot 10^{-5}$	$3,2 \cdot 10^{-5}$	$4,6 \cdot 10^{-5}$	$4,4 \cdot 10^{-5}$	$4,3 \cdot 10^{-5}$	$4,3 \cdot 10^{-5}$	$4,5 \cdot 10^{-5}$	$2,4 \cdot 10^{-5}$	
0,975	$1,7 \cdot 10^{-5}$	$1,5 \cdot 10^{-5}$	$1,7 \cdot 10^{-5}$	$1,8 \cdot 10^{-5}$	$1,8 \cdot 10^{-5}$	$2,3 \cdot 10^{-5}$	$2,8 \cdot 10^{-5}$		
0,99	$1,5 \cdot 10^{-5}$	$1,3 \cdot 10^{-5}$	$1,6 \cdot 10^{-5}$	$1,6 \cdot 10^{-5}$	$1,6 \cdot 10^{-5}$	$2,0 \cdot 10^{-5}$	$2,4 \cdot 10^{-5}$		

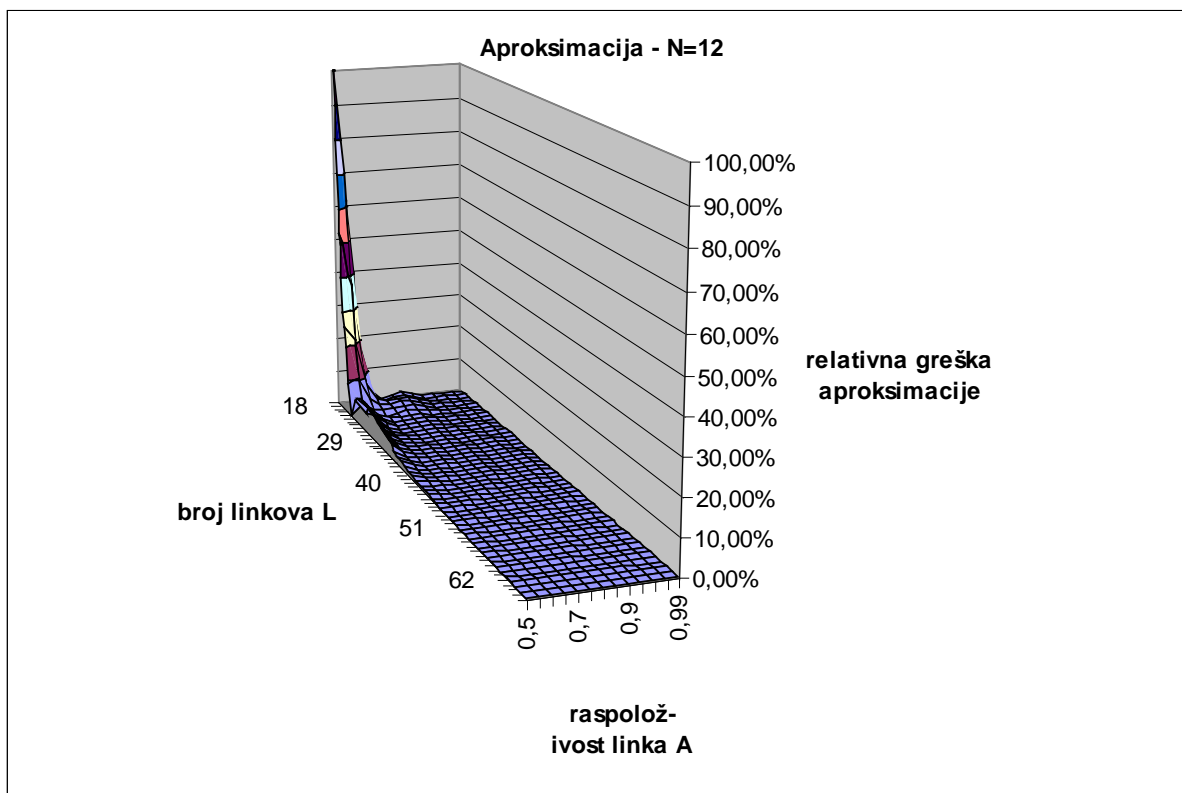


T-4.14 - Srednje relativne greške aproksimacije maksimalne raspoloživosti za  $A \geq 0,75$ 

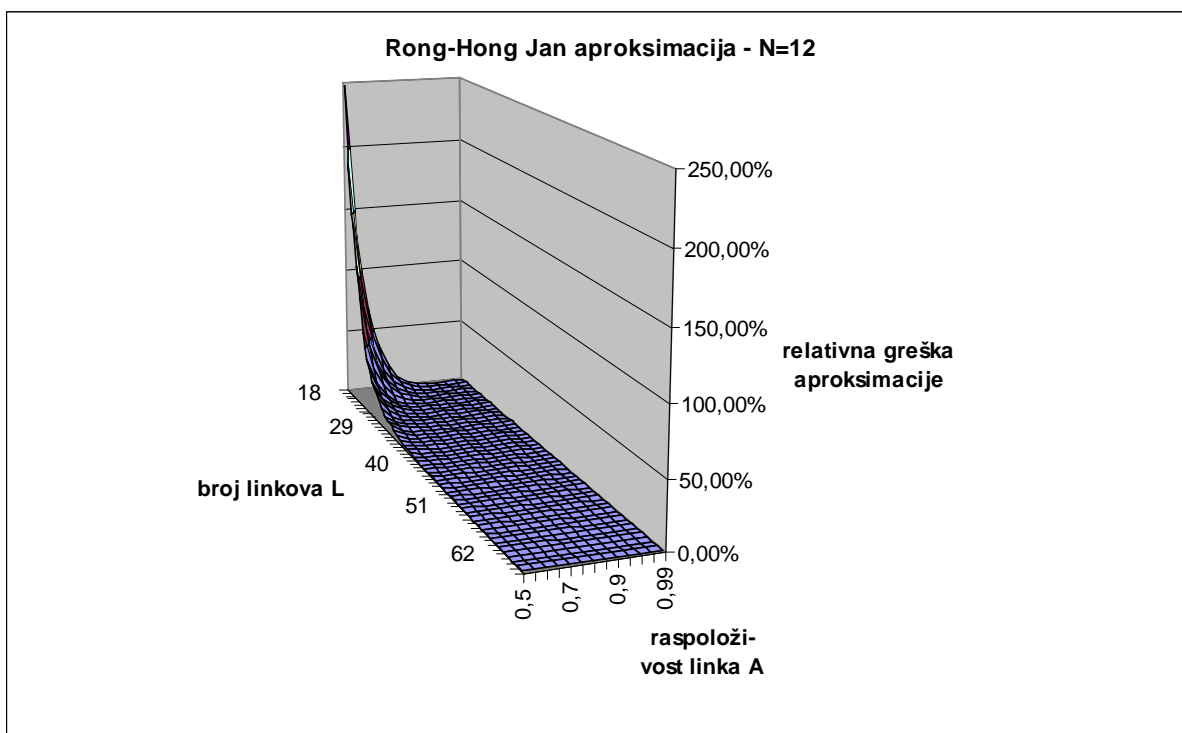
A	N								
	8	9	10	11	12	13	14	16	20
0,75	0,3086154%	0,3271237%	0,3252271%	0,3813281%	0,2917928%	0,2741160%	0,6517388%		
0,8	0,3089799%	0,2933484%	0,3276609%	0,3619022%	0,2761171%	0,0006641%	0,0013714%	1,44%	1,27%
0,85	0,1046718%	0,1180148%	0,1339710%	0,1456954%	0,1117914%	0,0000000%	0,0033928%		
0,9	0,0100802%	0,0091543%	0,0081766%	0,0108215%	0,0082776%	0,0006536%	0,0004915%	0,07%	0,08%
0,925	-0,0021811%	-0,0022974%	-0,0035431%	-0,0031595%	-0,0025309%	0,0024152%	0,0000058%		
0,95	-0,0011960%	-0,0012350%	-0,0016146%	-0,0016697%	-0,0013243%	0,0000445%	-0,0000009%	-0,00074%	
0,975	0,0007317%	0,0006345%	0,0006574%	0,0007398%	0,0005895%	-0,0000079%	-0,0000001%		
0,99	0,0005982%	0,0005342%	0,0005793%	0,0006428%	0,0005127%	-0,0000010%	0,000000004%		

T-4.15 - Srednja apsolutna relativna greška aproksimacije maksimalne raspoloživosti za  $A \geq 0,75$ 

A	N								
	8	9	10	11	12	13	14	16	20
0,75	0,3086154%	0,3357343%	0,3252271%	0,3821972%	0,2917928%	0,2741160%	0,6517388%		
0,8	0,3089799%	0,2893940%	0,3276609%	0,3619022%	0,2761171%	0,0006641%	0,0013714%	1,44%	1,27%
0,85	0,1046718%	0,1154210%	0,1339710%	0,1456954%	0,1117914%	0,0000000%	0,0033928%		
0,9	0,0100802%	0,0091720%	0,0094644%	0,0108215%	0,0082776%	0,0006536%	0,0004915%	0,07%	0,08%
0,925	0,0022328%	0,0023181%	0,0035431%	0,0031595%	0,0025309%	0,0024152%	0,0000058%		
0,95	0,0011960%	0,0012046%	0,0016146%	0,0016697%	0,0013243%	0,0000445%	0,0000009%	0,00091%	
0,975	0,0007317%	0,0006092%	0,0006574%	0,0007398%	0,0005895%	0,0000079%	0,0000001%		
0,99	0,0005982%	0,0005119%	0,0005793%	0,0006428%	0,0005127%	0,0000010%	0,000000004%		



Slika 4.19 – Relativne greške aproksimacije raspoloživosti po metodi linearne segmentne aproksimacije



Slika 4.20 - Relativne greške aproksimacije raspoloživosti po metodi *R.H. Jana* [29]

Upoređenjem grafika na slikama 4.19 i 4.20 vidi se da je za manje vrednosti raspoloživosti linka ( $A < 0,9$ ) i manji ukupan broj linkova u mreži metoda linearne segmentne aproksimacije tačnija (skoro dva i po puta), dok se za veće vrednosti raspoloživosti linkova dobijaju dobri rezultati po obe metode. U cilju kompletnijeg upoređenja rezultata koji se dobijaju primenom metode *R.H. Jana* i metode predložene u okviru ove Doktorske disertacije, za sve ulazne parametre koji se koriste u tabelama T-4.12 do T-4.15 izračunate su greške i po metodi *R.H. Jana*. Primenom metode *R.H. Jana* dobijena je ukupna srednja kvadratna greška  $4,53 \cdot 10^{-5}$  (metoda iz ove Doktorske disertacije ima srednju kvadratnu grešku  $2,98 \cdot 10^{-5}$ ) i srednja relativna apsolutna greška 0,17% dok metoda iz ove Doktorske disertacije ima srednju relativnu apsolutnu grešku 0,13%. Ovi rezultati pokazuju da je metoda iz ove Doktorske disertacije tačnija od metode *R.H. Jana*.

U cilju provere tačnosti metode predložene u okviru ove Doktorske disertacije, pored prethodne analize, upoređene su vrednosti raspoloživosti date u radovima [29] i [42] sa tačnim vrednostima i vrednostima koje se dobijaju primenom metode iz ove Doktorske disertacije. Uporedni pregled ovih rezultata predstavljan je u tabeli T-4.16.

Tabela T-4.16 – Uporedni pregled vrednosti raspoloživosti mreže i relativne greške za metode iz radova [29] i [42] i metode iz ove Doktorske disertacije

redni broj	$N$	$L$	$A$	Tačna vrednost za raspoloživost mreže	Vrednost po metodi RH Jan [29]	Relativna greška za RH Jan [29] metodu	Vrednost po metodi Konak, Smith [42]	Relativna greška za Konak, Smith [42] metodu	Vrednosti po metodi iz Doktorske disertacije	Relativna greška za metodu iz Doktorske disertacije
1.	6	7	0,9	0,938879	0,963438302	-2,61580%	0,9608	-2,33479%	0,944370366	-0,58487%
2.	6	8	0,9	0,972537	0,977786705	-0,53979%	0,9766	-0,41777%	0,968291713	0,43652%
3.	6	6	0,95	0,967200	0,986133787	-1,95759%	0,9858	-1,92308%	0,983328268	-1,66752%
4.	7	8	0,9	0,914079	0,955513919	-4,53302%	0,952	-4,14860%	0,934860364	-2,27353%
5.	7	7	0,95	0,955600	0,983900015	-2,96149%	0,9834	-2,90917%	0,981668616	-2,72798%
6.	7	8	0,95	0,977672	0,988159898	-1,07272%	0,9876	-1,01545%	0,98665644	-0,91894%
7.	8	9	0,9	0,889632	0,94766878	-6,52366%	0,9433	-6,03258%	0,925019827	-3,97778%
8.	8	10	0,9	0,947028	0,961998487	-1,58080%	0,9582	-1,17971%	0,946854281	0,01833%
9.	8	9	0,95	0,970689	0,98592106	-1,56922%	0,9853	-1,50524%	0,984642558	-1,43751%
10.	9	11	0,9	0,927226	0,954088503	-2,89704%	0,9494	-2,39139%	0,936017768	-0,94814%

redni broj	$N$	$L$	$A$	Tačna vrednost za raspoloživost mreže	Vrednost po metodi RH Jan [29]	Relativna greška za RH Jan [29] metodu	Vrednost po metodi Konak, Smith [42]	Relativna greška za Konak, Smith [42] metodu	Vrednosti po metodi iz Doktorske disertacije	Relativna greška za metodu iz Doktorske disertacije
11.	9	12	0,9	0,957359	0,96853692	-1,16757%	0,9651	-0,80857%	0,957428796	-0,00728%
12.	9	10	0,95	0,961960	0,98368782	-2,25874%	0,9829	-2,17685%	0,982527461	-2,13812%
13.	10	12	0,9	0,907726	0,946257617	-4,24483%	0,9401	-3,56647%	0,924691806	-1,86902%
14.	10	13	0,9	0,945074	0,960561551	-1,63882%	0,9656	-2,17194%	0,945950067	-0,09275%
15.	11	14	0,9	0,926090	0,952665936	-2,86970%	0,9476	-2,32268%	0,933977076	-0,85166%
16.	14	19	0,9	0,940771	0,95769629	-1,79903%	0,9518	-1,17228%	0,937937495	0,30124%
17.	16	20	0,95	0,975990	0,980825487	-0,49543%	0,9793	-0,33913%	0,977440788	-0,14863%
18.	20	24	0,95	0,903200	0,971976734	-7,61478%	0,9699	-7,38485%	0,961030493	-6,40284%

Na osnovu podataka koji su dati u tabeli T-4.16, vidi se da metoda iz ove Doktorske disertacije ima manju relativnu grešku nego metode date u [29] i [42]. Potrebno je naglasiti da su vrednosti iz tabele T-4.16 za metodu predloženu u ovoj Doktorskoj disertaciji računane za broj linkova za koji je  $L/N < 2$ , tj. u opsegu u kome metoda nije optimizovana, a ipak su dobijene greške aproksimacije manje od grešaka metoda datih u [29] i [42]. Na osnovu uporednih analiza, može se zaključiti da metoda predložena u okviru ove Doktorske disertacije ima manju relativnu grešku, za oblast primene, od do sada publikovanih metoda za aproksimativno računanje raspoloživosti mreže.

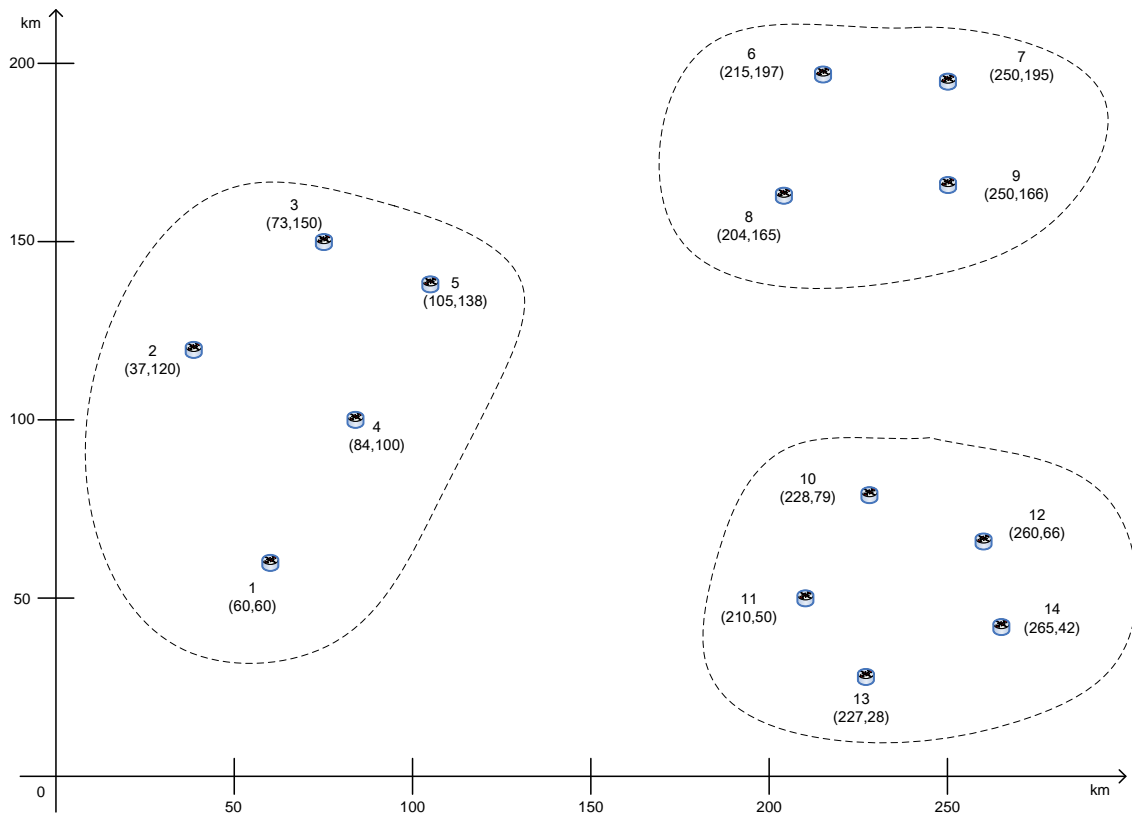
S obzirom da, u do sada publikovanim radovima, nisu date tačne vrednosti za mreže sa velikim brojem čvorova ( $N > 20$ ), nije moguće direktno pokazati primenljivost predložene metode u slučajevima velikih mreža.

Druga bitna osobina aproksimativne metode je da njeno odstupanje od tačne vrednosti opada sa porastom normalizovanog broja linkova što znači da se može očekivati da je aproksimativna metoda sve tačnija kako raste raspoloživost mreže. S obzirom da se, po pravilu, traže mreže koje imaju veoma visoku raspoloživost, manja greška aproksimacije za velike vrednosti raspoloživosti linkova povećava upotrebljivost aproksimativne metode u svakodnevnom radu.

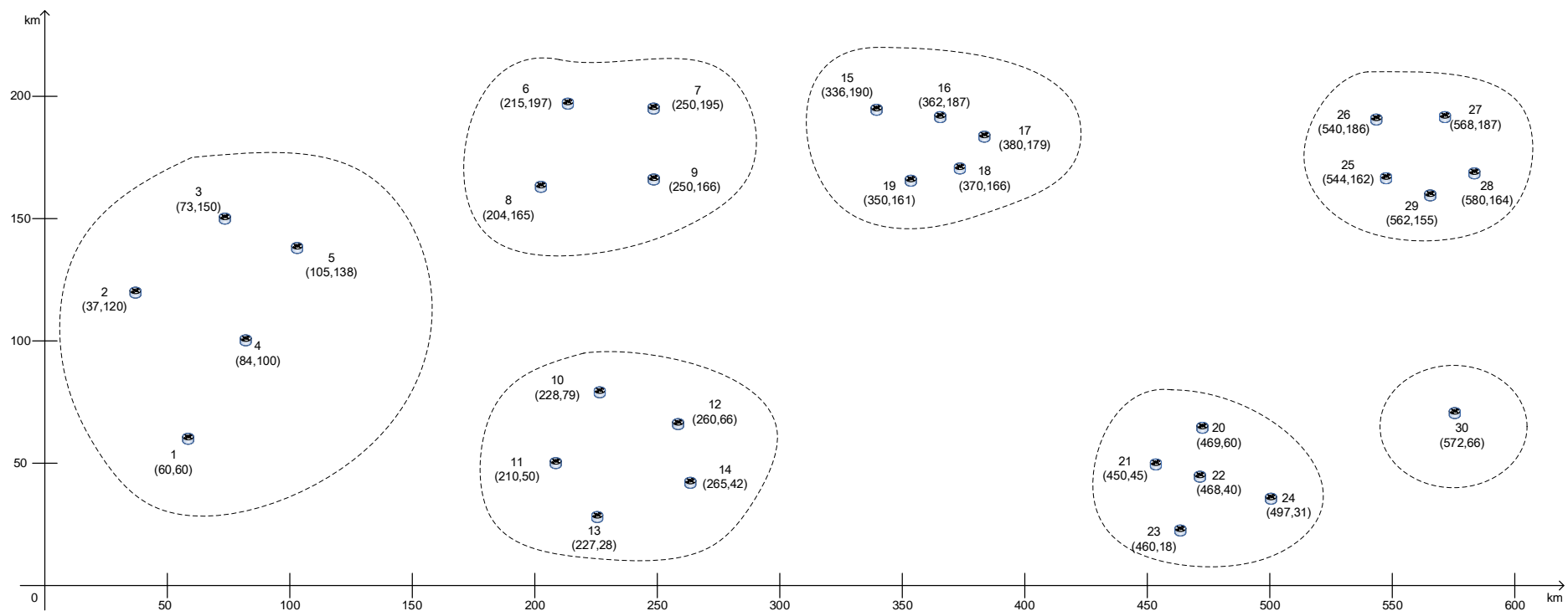
#### ***4.8 Sinteza telekomunikacionih mreža sa različitim raspoloživostima linkova***

U dosadašnjim razmatranjima posmatrani su idealizovani linkovi, u smislu da svi imaju istu raspoloživost. Ovakav pristup je bio neophodan da bi bilo moguće dobiti funkcije aproksimacije raspoloživosti koje su opisane u prethodnim poglavljima. U ovom poglavlju biće razmatrana promena raspoloživosti mreže sa realnim linkovima. U okviru ovog rada usvojena je pretpostavka da raspoloživost jednog linka zavisi od njegove dužine, što je razumna pretpostavka jer dominantni deo cene linka čini cena radova na njegovoj realizaciji i cena samog kabla (oba navedena parametra zavise od dužine linka. S obzirom da kod ovakvog pristupa nije moguće definisati opšti slučaj, biće razmatrana dva primera dve tipične topologije mreža. Prva topologija (slika 4.21) predstavlja mrežu sa 14 čvorova gde su čvorovi grupisani u 3 grupe u prostoru. Ovakva topologija je ekvivalent telekomunikacione mreže koja pokriva tri grada u kojima postoji više čvorišta mreže. Druga topologija koja je razmatrana (slika 4.22) predstavlja mrežu sa 30 čvorova gde su čvorovi grupisani u 7 grupa (ekvivalent 7 gradova) sa nešto većim rastojanjima nego u prvo slučaju. Za izračunavanje realne raspoloživosti linkova korišćena je formula (2.29). U oba slučaja su posmatrane mreže koje se zasnivaju na korišćenju podzemnih optičkih kablova i u skladu sa tom pretpostavkom su korišćeni odgovarajući koeficijenti u formuli (2.29).

Za potrebe razmatranja mreža datih na slikama 4.21 i 4.22 razvijen je poseban softverski modul za sintezu mreže koji u procesu sinteze koristi realne raspoloživosti linkova, bazirane na formuli (2.29), i cenu realizacije linka, gde je uzeto da je cena direktno proporcionalna dužini linka, što odgovara realnim slučajevima. Rezultati dobijeni procesom sinteze mreže sa realnim raspoloživostima linkova dati su u poglavlju 4.8.1, a rezultati sinteze mreže, gde je pored realnih raspoloživosti linkova uzeta u obzir i cena linka, predstavljeni su u poglavlju 4.8.2.



Slika 4.21 - Raspored čvorišta u prostoru za prvi primer mreže



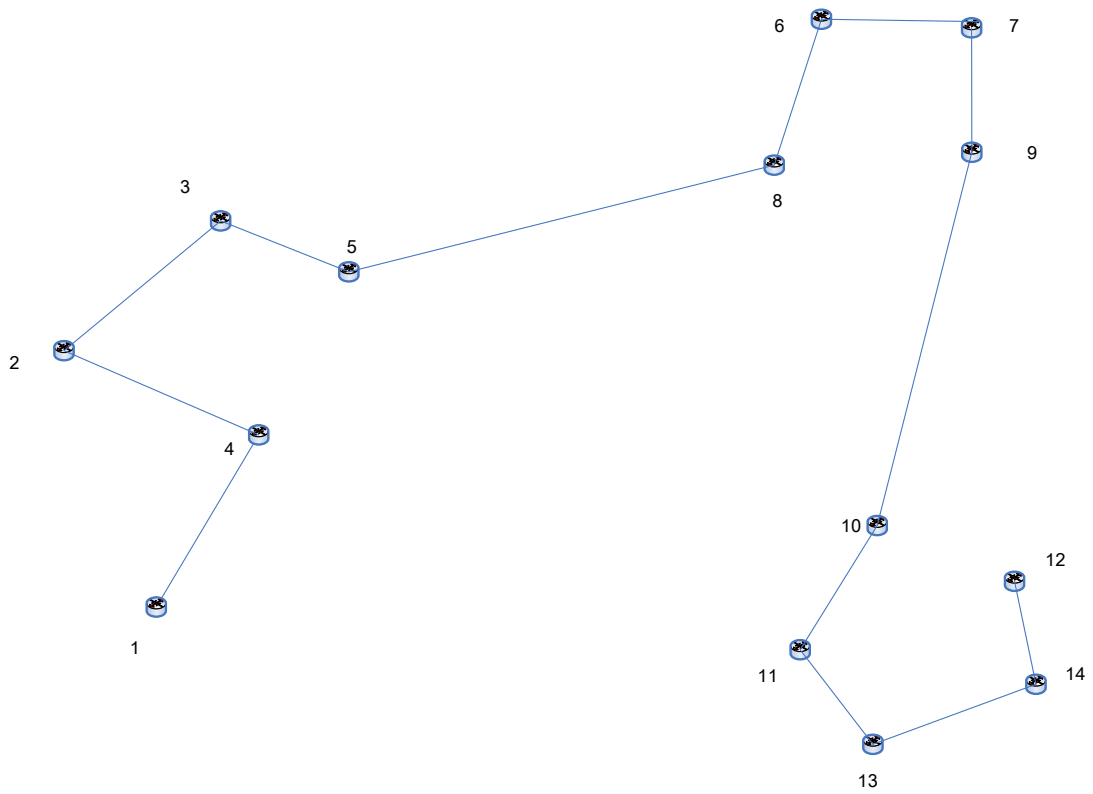
Slika 4.22 - Raspored čvorišta u prostoru za drugi primer mreže

### 4.8.1 Različite raspoloživosti linkova

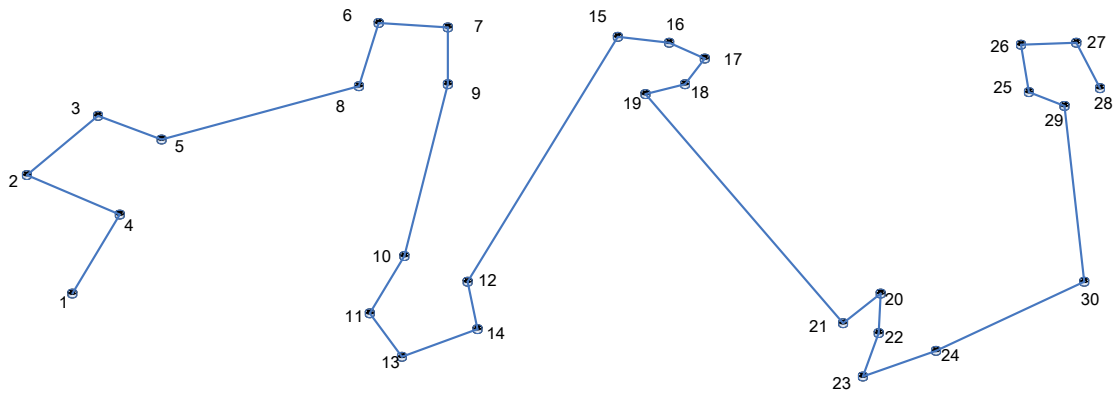
Prvi korak u razmatranju mreža sa realnim raspoloživostima linkova je da se primeni metoda sinteze mreže u cilju određivanja maksimalne raspoloživosti. Rezultati rasta mreža sa realnim raspoloživostima linkova za  $N=14$  i  $N=30$  predstavljeni su na slikama 4.23 i 4.24, respektivno. Na slikama 4.23 i 4.24 plavom bojom su prikazani linkovi koji predstavljaju inicijalnu topologiju od koje se pokreće proces sinteze mreže. Narandžasti linkovi predstavljaju korake u sintezi mreže.

Jedan od problema koji treba rešiti je generisanje inicijalne topologije od koje se pokreće proces sinteze mreže. Zahtev koji se postavlja pred inicijalnu topologiju jeste da ima minimalni broj linkova i da svaki čvor ima barem jedan link ka ostatku mreže. Ako se uzmu u obzir zaključci analiza koje su predstavljene u ovoj Doktorskoj disertaciji, inicijalna topologija treba da ima topologiju lanca. S obzirom da se kasnije analizira i cena realizacije linka, drugi kriterijum koji je korišćen kod generisanja inicijalne topologije mreže, jeste da izabrana topologija ima minimalnu cenu realizacije što se svodi na kriterijum najmanje ukupne dužine svih linkova koji čine topologiju mreže. Imajući u vidu da je raspoloživost linka obrnuto proporcionalna dužini linka, prethodno definisani kriterijum praktično daje inicijalnu topologiju koja ima najveću raspoloživost, jer se radi o rednoj vezi čvorova mreže a ukupna dužina svih linkova je najmanja. Korišćenjem kriterijuma najmanje dužine umesto izračunavanja raspoloživosti za svaku od mogućih topologija, značajno se ubrzava proces određivanja početne topologije mreže. Primenom prethodno navedenih kriterijuma dobijene su početne topologije mreža sa  $N=14$  i  $N=30$  čvorova koje su date na slikama 4.23 i 4.24, respektivno.

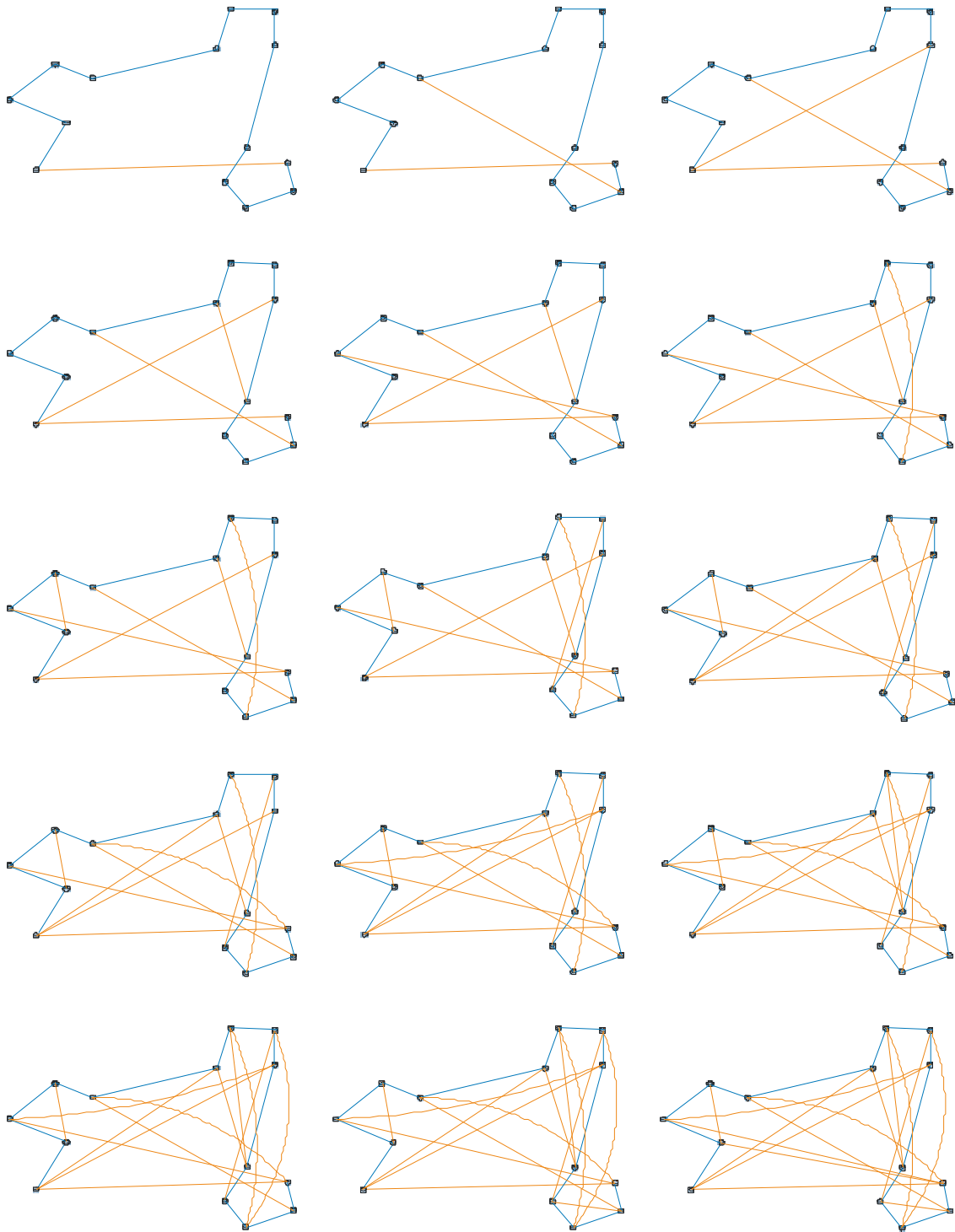




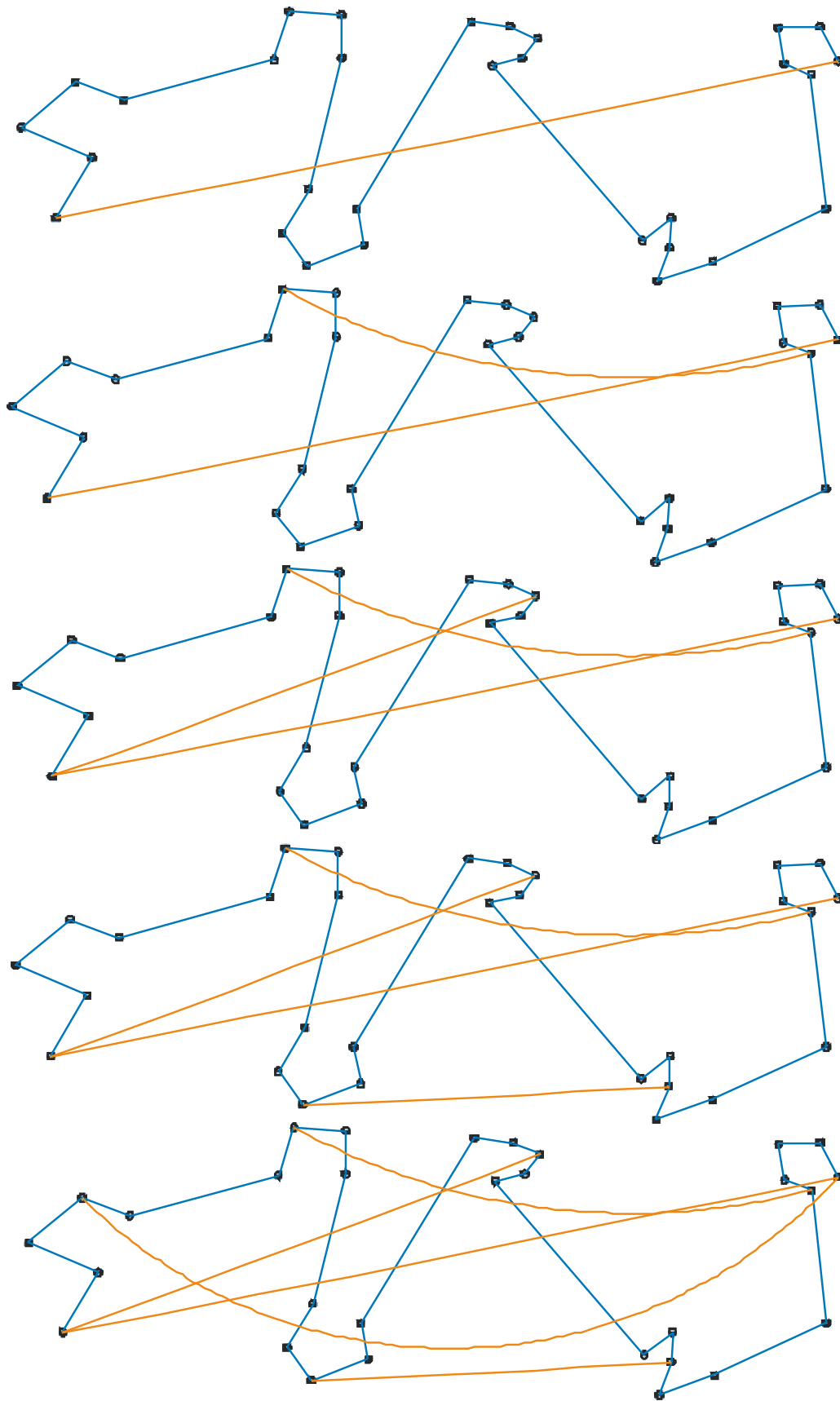
Slika 4.23 - Inicijalna topologija mreže sa 14 čvorova



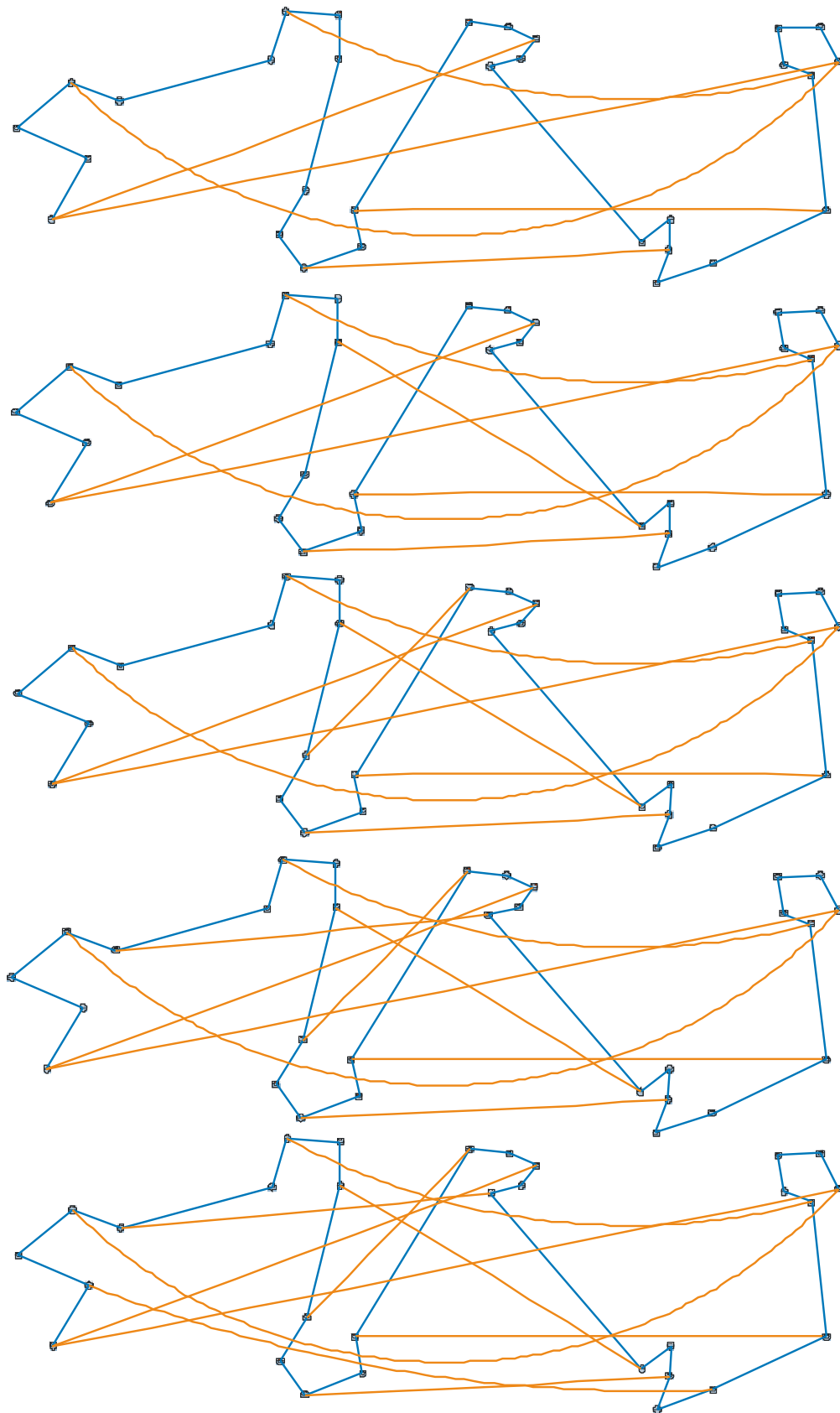
Slika 4.24 - Inicijalna topologija mreže sa 30 čvorova



Slika 4.25 - Rezultat primene sinteze mreže sa  $N=14$  čvorova u zavisnosti od raspoloživosti linkova



Slika 4.26a - Rezultat primene sinteze mreže sa  $N=30$  čvorova u zavisnosti od raspoloživosti linkova



Slika 4.26b - Rezultat primene sinteze mreže sa  $N=30$  čvorova u zavisnosti od raspoloživosti linkova

Analiza rezultata dobijenih primenom metode sinteze mreže, a koji su predstavljeni na slikama 4.25 i 4.26, pokazala je da kod rasta mreža dominiraju dugački linkovi (povezuju udaljene čvorove u mreži), koji relativno brzo obezbeđuju visoku raspoloživost celokupne mreže (vidi se na graficima 4.29 i 4.30), I ovde se pokazao važećim princip o ravnomernom povećanju konektivnosti čvorova u mreži sa porastom mreže, što je uočeno i kod mreža gde su svi linkovi imali istu raspoloživost.

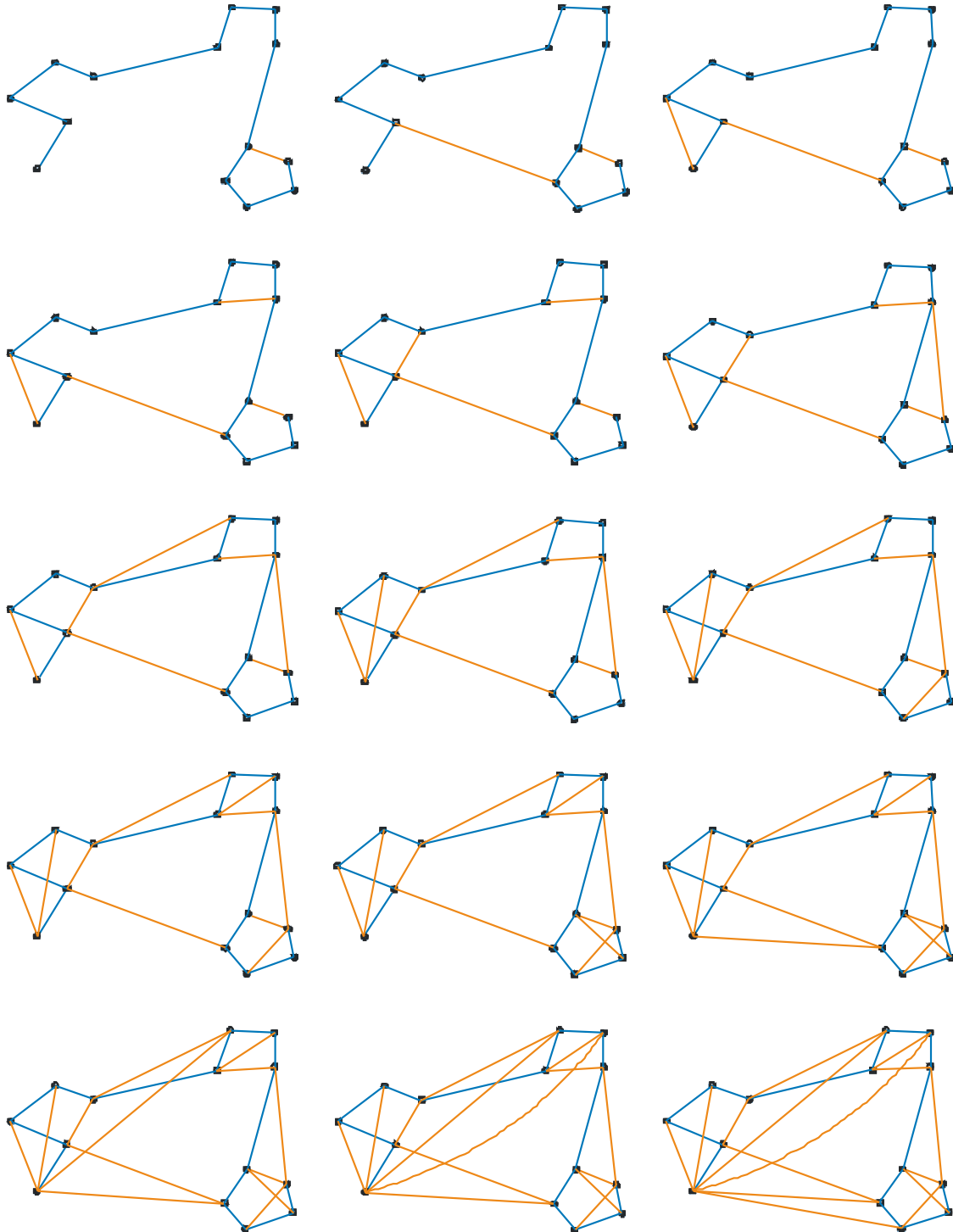
#### 4.8.2 Cene i različite raspoloživosti linkova

U sledećem razmatranju su posmatrane iste dve mreže, ali je prilikom primene metode sinteze uzeta u obzir i cena realizacije svakog od linkova. Cena realizacije linka u praksi zavisi od dosta parametara, kao što su struktura terena (npr. ravničarki, planinski), dužine, cene zakupa prostora (postojeće kablovske kanalizacije) i slično. S obzirom da su to parametri koji su različiti za svaki link, ne može se dati tačna formula na osnovu koje se izračunava cena realizacije linka, mada se u praksi budžetske cene, po pravilu, daju na osnovu dužine linka. Pošto se u razmatranjima posmatraju generički linkovi, uzeto je da je cena direktno proporcionalna dužini linka. Time su asptrahovane specifičnosti svakog linka i omogućeno je izvesti zaključke za opšti slučaj. U slučaju analize konkretne realne mreže, za svaki od linkova je moguće definisati posebnu cenu, u zavisnosti od realnih uslova na terenu i na osnovu toga sprovesti analizu. Kod primene metode sinteze kriterijumska funkcija za izbor najboljeg linka prilikom svakog od koraka sinteze mreže definisana je izrazom (4.30) koji je preuzet iz [92]. Naime, prilikom rasta mreže kod metode sinteze, u svakom koraku se bira onaj link za koji kriterijumska funkcija  $F$ , definisana sa 4.30, ima najveću vrednost.

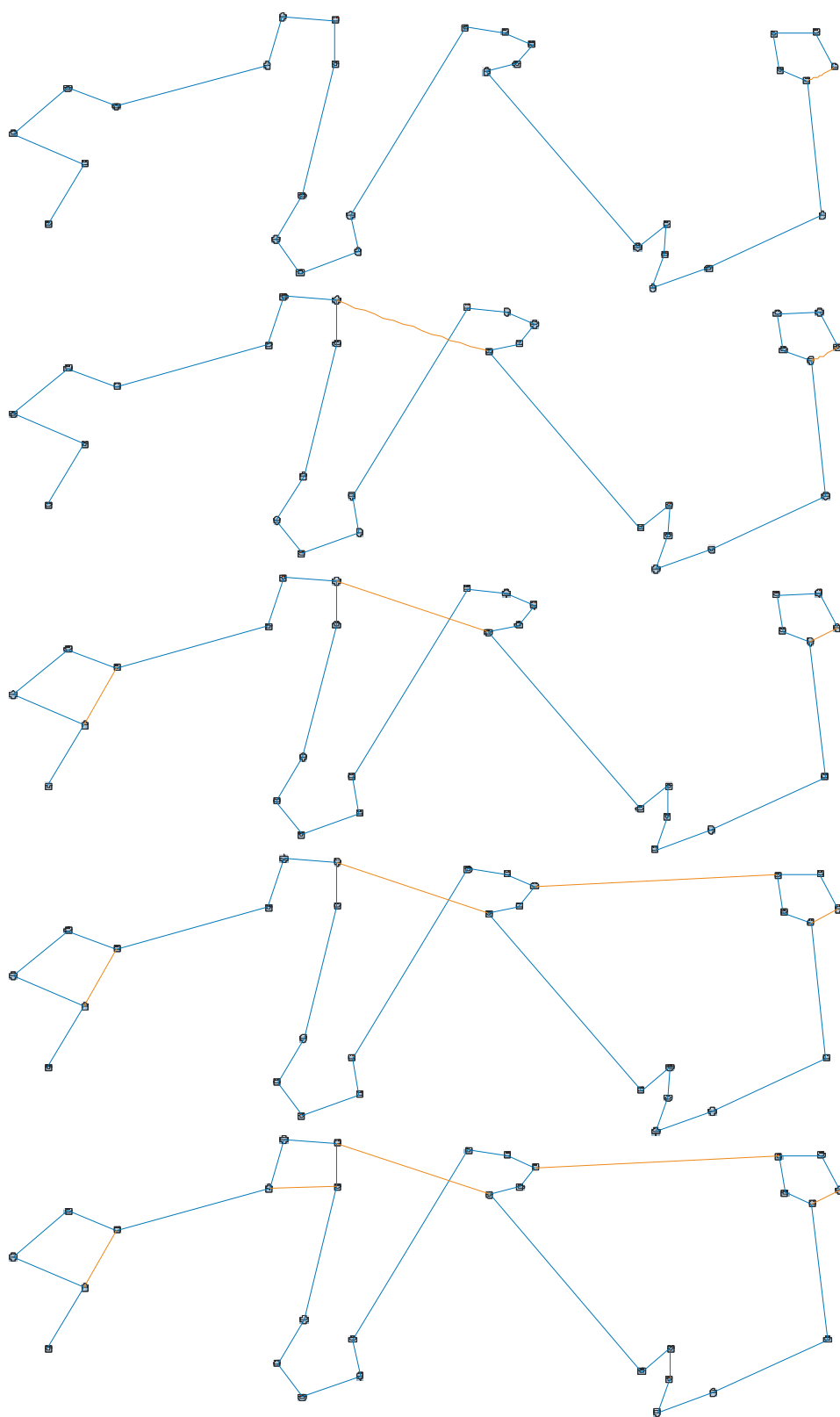
$$F = \frac{\frac{\Delta R}{R_p}}{\frac{\Delta C}{C_p}} \quad (4.30)$$

gde je:  $\Delta R_i$  - promena raspoloživosti mreže usled dodavanja  $i$ -tog linka,  
 $R_p$  - raspoloživost mreže pre dodavanja  $i$ -tog linka,  
 $\Delta C_i$  - cena dodavanja  $i$ -tog linka,  
 $C_p$  - cena realizacije cele mreže pre dodavanja  $i$ -tog linka.

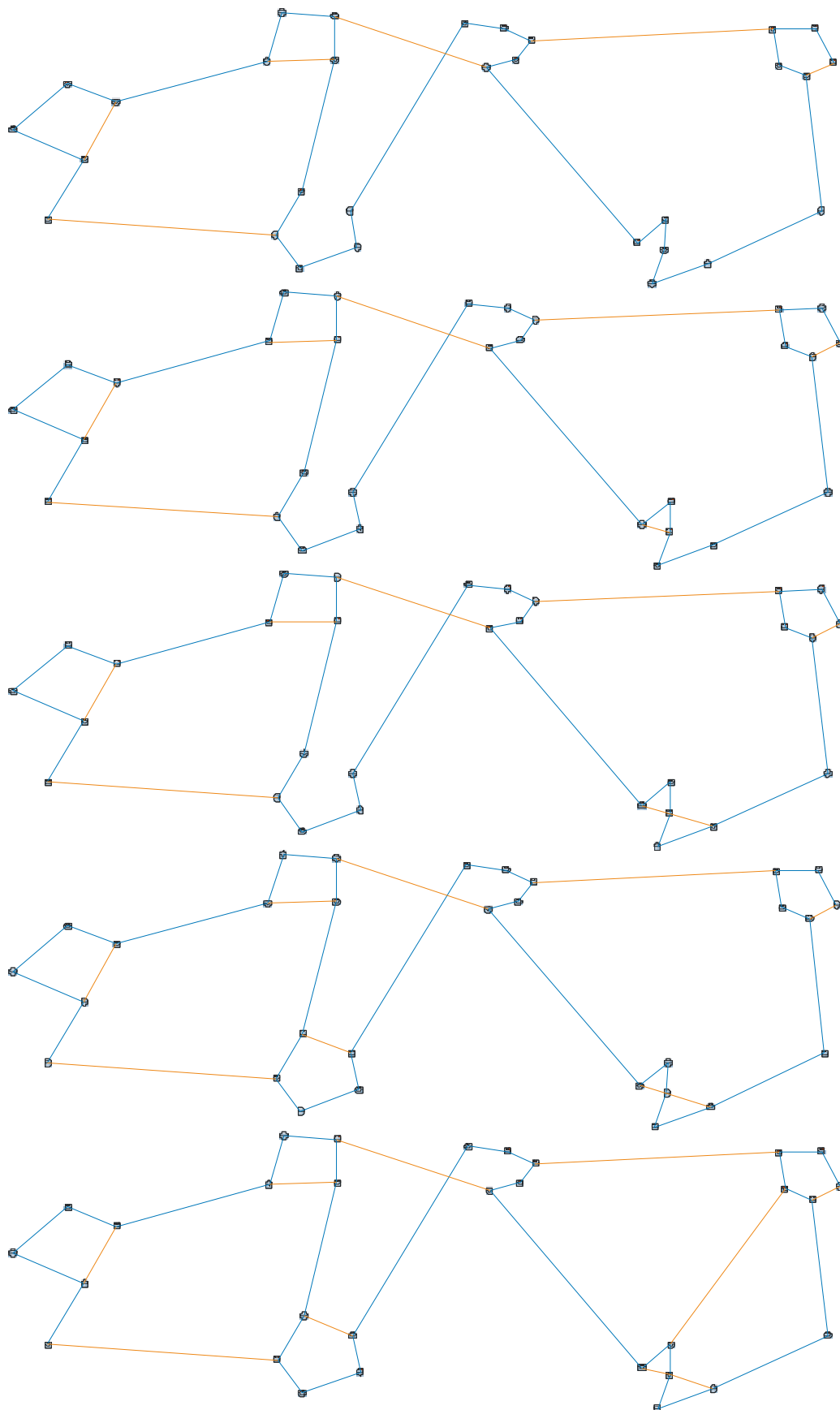
Primenom kriterijumske funkcije, date sa (4.30), u okviru metode sinteze, dobijeni su grafici na slikama 4.27 i 4.28 koji predstavljaju proces rasta mreže sa  $N=14$  i  $N=30$  čvorova. Na graficima datim na slikama 4.29 i 4.30 date su promene raspoloživosti u zavisnosti od broja linkova za  $N=14$  i  $N=30$ , respektivno.



Slika 4.27 - Rezultat primene sinteze mreže sa  $N=14$  čvorova u zavisnosti od raspoloživosti i cene linkova

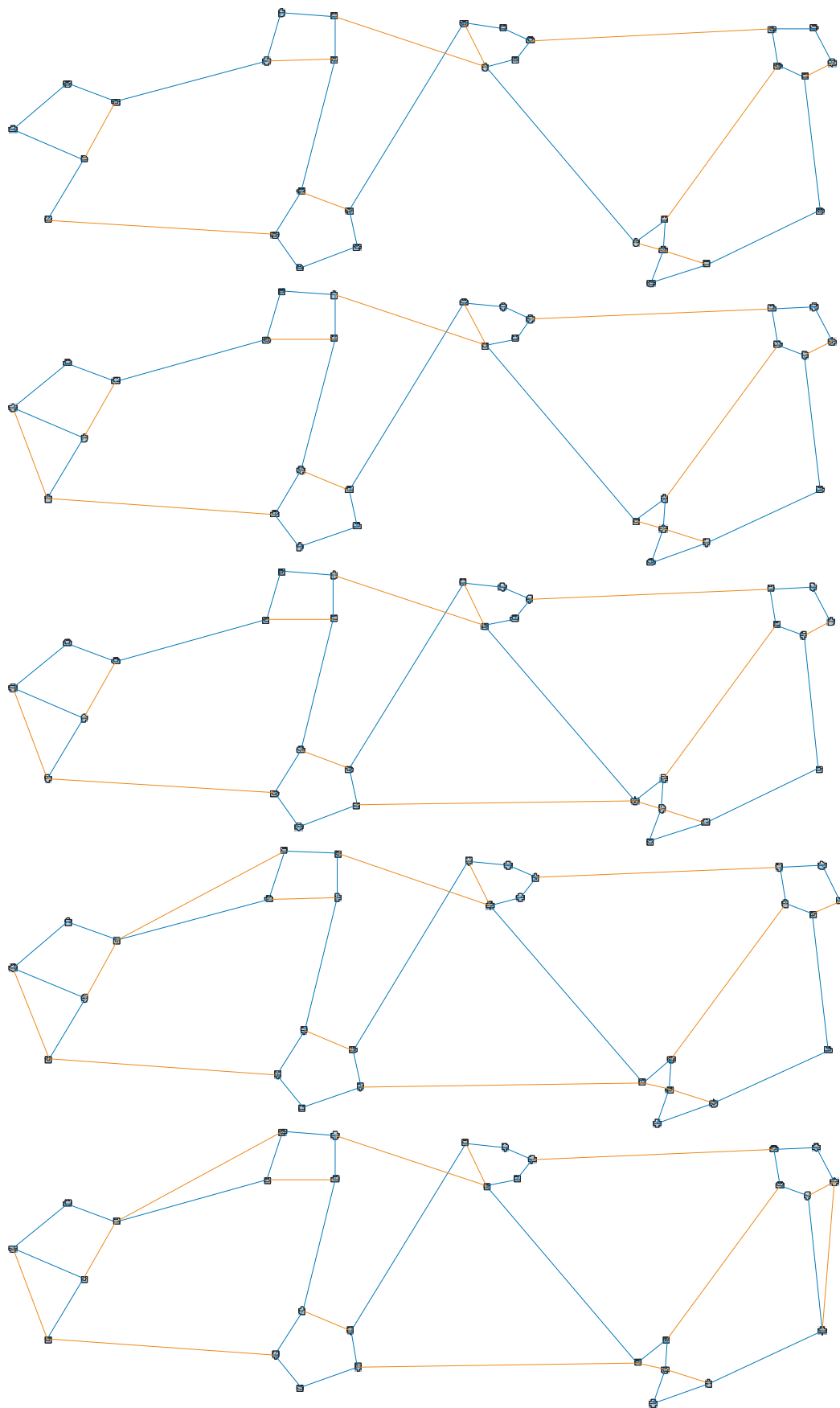


Slika 4.28a - Rezultat primene sinteze mreže sa  $N=30$  čvorova u zavisnosti od raspoloživosti i cene linkova

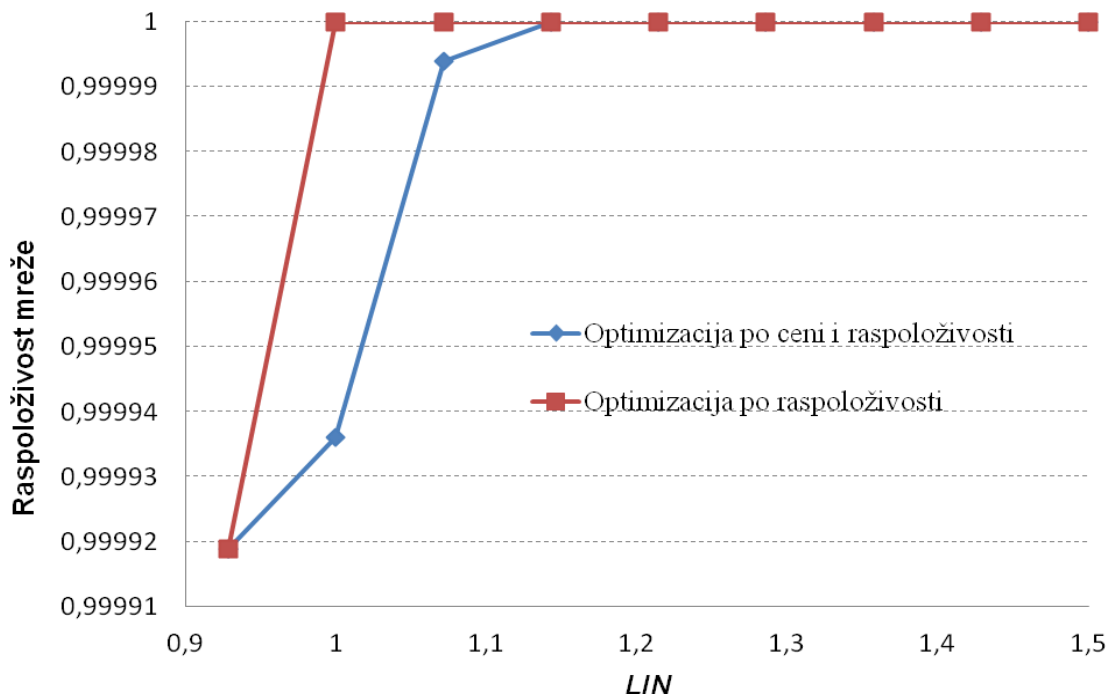


Slika 4.28b - Rezultat primene sinteze mreže sa  $N=30$  čvorova u zavisnosti od raspoloživosti i cene linkova

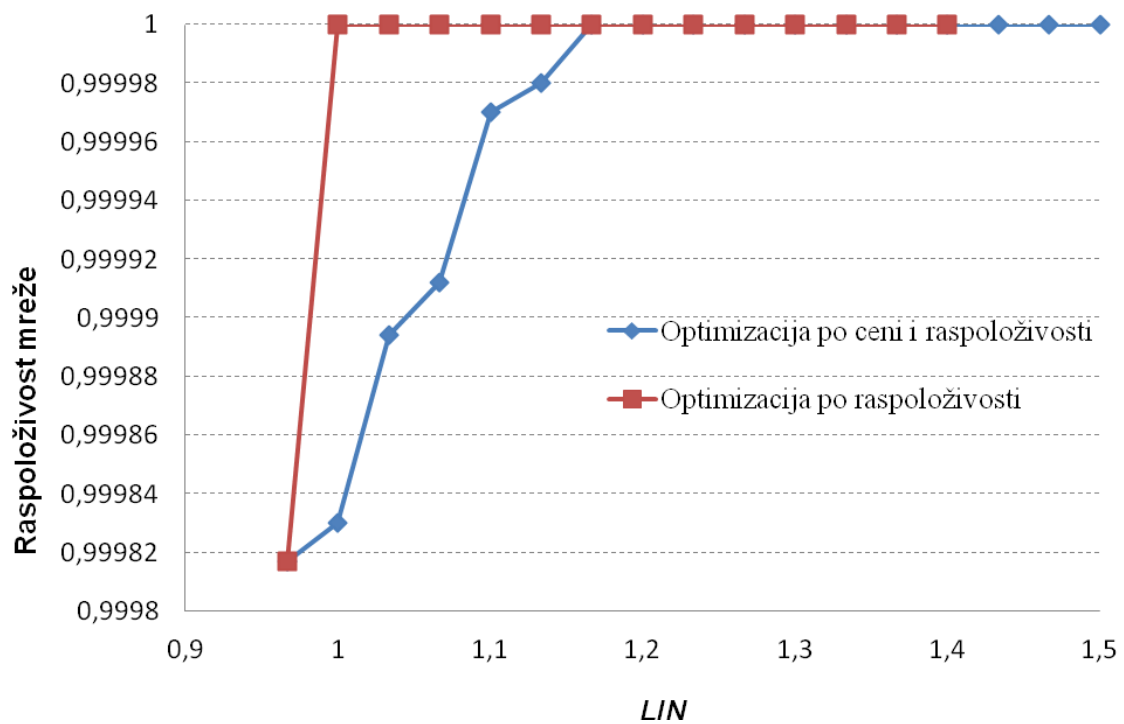




Slika 4.28c - Rezultat primene sinteze mreže sa  $N=30$  čvorova u zavisnosti od raspoloživosti i cene linkova



Slika 4.29 - Promena raspoloživosti u zavisnosti od broja i cene linkova za  $N=14$  kod primene metode sinteze mreže



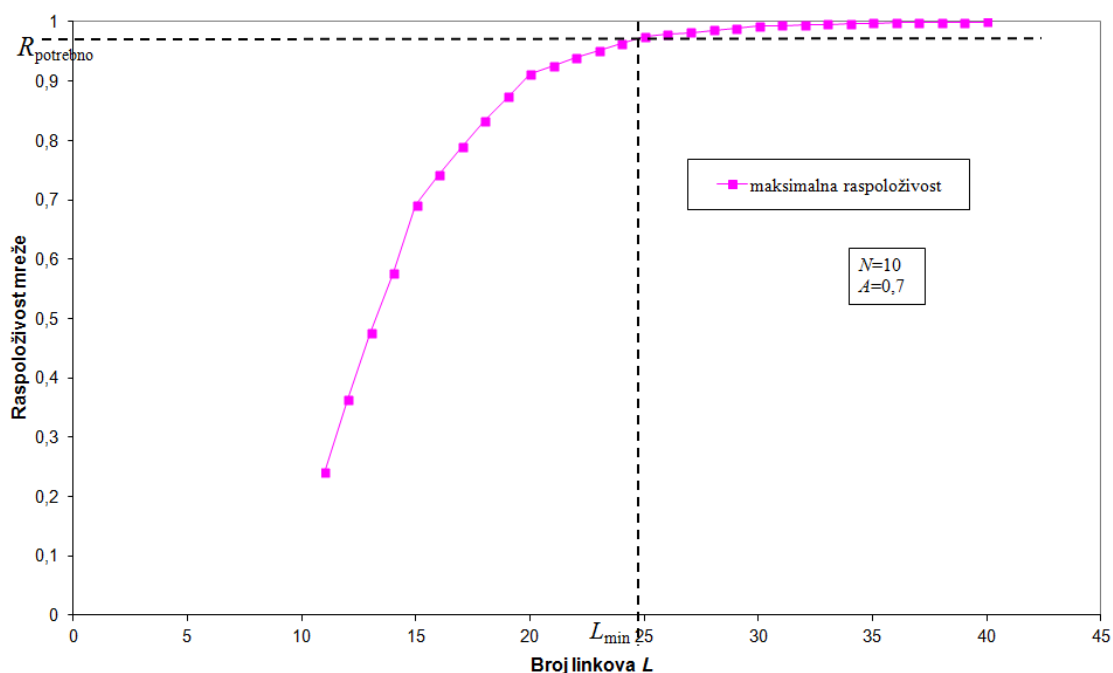
Slika 4.30 - Promena raspoloživosti u zavisnosti od broja i cene linkova za  $N=30$  kod primene metode sinteze mreže

Analiza dobijenih rezultata, koji su predstavljeni na slikama 4.27 do 4.30, pokazala je da uvođenjem kriterijuma cene linka u proces sinteze mreže dovodi do povećanja broja linkova koje je potrebno realizovati da bi se dostigla zahtevana raspoloživost mreže. Ovaj efekat je izraženiji što su rastojanja u mreži veća, jer time faktor cene dobija više na značaju. Kada se pokrene proces sinteze mreže i pri tome se posmatra samo raspoloživost cele mreže kao parametar od interesa, u topologiji mreže dominiraju dugački linkovi koji relativno brzo postižu visoku raspoloživost cele mreže. Uključivanjem faktora cene realizacije linka u proces sinteze mreže, dolazi do promene u procesu rasta mreže, jer se mreža širi primarno realizacijom kraćih linkova koji formiraju dobro povezane delove mreže koji se onda međusobno povezuju dugačkim linkovima. Ovako ponašanje procesa rasta mreže u velikoj meri odgovara načinu izgradnje realnih mreža. U praksi se, po pravilu, prvo kvalitetno povezuju bliske lokacije da bi se potom realizovalo nekoliko dugačkih linkova koji povezuju udaljene grupacije čvorišta mreže. Prilikom sinteze mreže gde se u okviru kriterijumske funkcije posmatraju raspoloživost i cena realizacije pojedinačnih linkova, kada se pojavljuju dugački linkovi, to nisu linkovi koji povezuju najudaljenije tačke (kao kod sinteze mreže samo na bazi raspoloživosti linkova) već se u pitanju nešto kraći linkovi, što se lepo vidi na graficima na slici 4.28.

Rezultati dobijeni analizom dva primera realnih mreža pokazali su da su zaključci proistekli iz detaljne analize mreža sa linkovima jednakih raspoloživosti u velikoj meri primenljivi kod realnih mreža. Da bi se postigla visoka raspoloživost mreža i kod realnih mreža potrebno je da čvorovi u mreži imaju što ujednačeniju konektivnost. Izbor linkova kod realnih mreža u velikoj meri zavisi od toga da li se posmatra cena realizacije linkova. Ukoliko cena nije od primarne važnosti, izborom linkova koji povezuju najudaljenije čvorove u mreži, relativno brzo se dostiže tražena visoka raspoloživost. Kada se u razmatranje dizajna mreže uključi i cena realizacije linkova, tada se formiraju grupe bliskih čvorova koji su dobro povezani (minimalno svaki čvor ima konektivnost 2) posle čega se međusobno povezuju bliske grupe čvorova tako da u celoj mreži ne postoji jedna tačka otkaza, što se vidi na topologiji mreže datoj na slici 4.28.

## 5 Praktična upotreba dobijenih rezultata

Prethodno opisani rezultati omogućavaju da se prilikom projektovanja mreže, za zadati broj čvorova u mreži  $N$ , mogu nacrtati kriva zavisnosti maksimalne raspoloživosti u zavisnosti od broja linkova  $L$  i njihove raspoloživosti  $A$ . Primera radi, na slici 5.1 predstavljen je grafik za maksimalnu raspoloživost mreže, za  $N=10$  i  $A=0,7$ .



Slika 5.1 – Određivanje  $L_{\min}$  za zahtevanu raspoloživost mreže  $R_{\text{potrebno}}$

Na osnovu grafika na slici 5.1, ako je zadata potrebna raspoloživost mreže,  $R_{\text{potrebno}}$ , može da se odredi minimalno potreban broj linkova u mreži  $L_{\min}$ , sa kojim se može postići zadato  $R_{\text{potrebno}}$ . Na osnovu zakonitosti u formiranju topologija mreže za maksimalnu raspoloživost, koja je prezentirana u prethodnim poglavljima, može se dobiti topologija za ovaj krajnji slučaj. Usaglašavanjem ove topologije sa realnom situacijom (izvodljivost pojedinih linkova, cena realizacije linkova i slično) može se doći do topologije mreže koja zadovoljava zadate uslove uz minimalno potrebno povećanje broja linkova.

Drugi pristup istim podacima bi bio da je poznat broj linkova u mreži. Primenom funkcije aproksimacije, može da se odredi koja se maksimalna raspoloživost mreže može dobiti sa datim ulaznim parametrima. U zavisnosti od toga u kojoj meri je topologija mreže usaglašena sa pravilima projektovanja mreže visoke raspoloživosti, stvarna raspoloživost će biti bliža ili dalja od maksimalne vrednosti.

Primer na slici 5.1 pokazuje na koji način se mogu koristiti rezultati prezentirati u okviru ove doktorske disertacije. Poznajući aproksimativne izraze za maksimalnu raspoloživost mreže, grafici poput grafika datog na slici 6.1 se mogu generisati za proizvoljne vrednosti  $N$  i  $A$  za koje važe aproksimativni izrazi. Sa tako generisanih grafika se mogu dobiti  $R_{\text{potrebno}}$  i  $L_{\text{min}}$  u konkretnom slučaju.

### ***5.1 Primer upotrebe kod projektovanja telekomunikacione mreže Elektroprivrede Srbije***

Dobijeni rezultati su aktivno korišćeni prilikom izrade telekomunikacione (TK) mreže Elektroprivrede Srbije (EPS). Osnovni zahtevi kod mreže EPS-a su bili da se realizuje okosnica mreže koja treba da poveže veliki broj lokacija (44 lokacije) i da pri tome mreža ima veliku raspoloživost u svom radu (kao ciljane raspoloživost okosnice mreže postavljena je vrednost 0,99999 - tzv. "pet devetki"). U kasnijoj fazi izrade projekta, potrebno je bilo povezati dodatne lokacije (ukupno sa okosnicom dobijena je proširena mreža sa 56 lokacija) za koje je tehno-ekonomska analiza pokazala da je dovoljno da dodatne lokacije imaju samo jedan link ka okosnici mreže.

U prošlosti, prilikom projektovanja telekomunikacionih mreža bila je uobičajena praksa da se formira mala okosnica mreže sa nekoliko čvorova (4-5 čvorišta) koja ima *full-meshed* povezanost, a da se zatim ostale lokacije povezuju na tu okosnicu sa jednim ili dva linka. Imajući u vidu rezultate prezentirane u ovoj doktorskoj disertaciji, prilikom dizajna TK mreže EPS-a se odustalo od te uobičajene prakse, već je projektovana okosnica mreže u kojoj su svi čvorovi bili ravnopravni i za sve čvorove je cilj bio postići što ravnomerniju povezanost sa ostatkom mreže. Prilikom inicijalnog dizajna mreže prvo pitanje koje je bilo postavljeno jeste koliko linkova treba da ima mreža da bi raspoloživost bila na potrebnom nivou. Imajući u vidu zaključak doktorske

disertacije da je za visoku raspoloživost mreže potrebno da svi čvorovi imaju što veću konektivnost i da ta konektivnost bude ista ili minimalno različita kod svih čvorova, postavljen je zahtev da minimalna konektivnost čvorova u mreži bude 2, a gde je to moguće da bude 3.

Za raspoloživost linkova je uzeta raspoloživost najdužeg OPGW kabla u mreži (dužina je 155km) čija je raspoloživost 0,999979245 jer je to najlošija raspoloživost linka u mreži. Svi ostali linkovi u mreži imaju veću raspoloživost. Posmatrajući okosnicu mreže koja ima 44 čvora, poštujući zahtev da čvorovi imaju minimalnu konektivnost 2 i imajući u vidu rezultate tehno-ekonomske analize o mogućnosti opremanja dalekovoda OPGW kablovima, dobijena je fizička topologija mreže EPS-a koja je predstavljena na slici 5.2. Topologija na slici 5.2 obuhvata proširenu mrežu uz koju su nacrtani i međunarodni linkovi ka susednim elektroprivredama. Prilikom proračuna raspoloživosti mreže, međunarodni linkovi nisu uzeti u obzir.

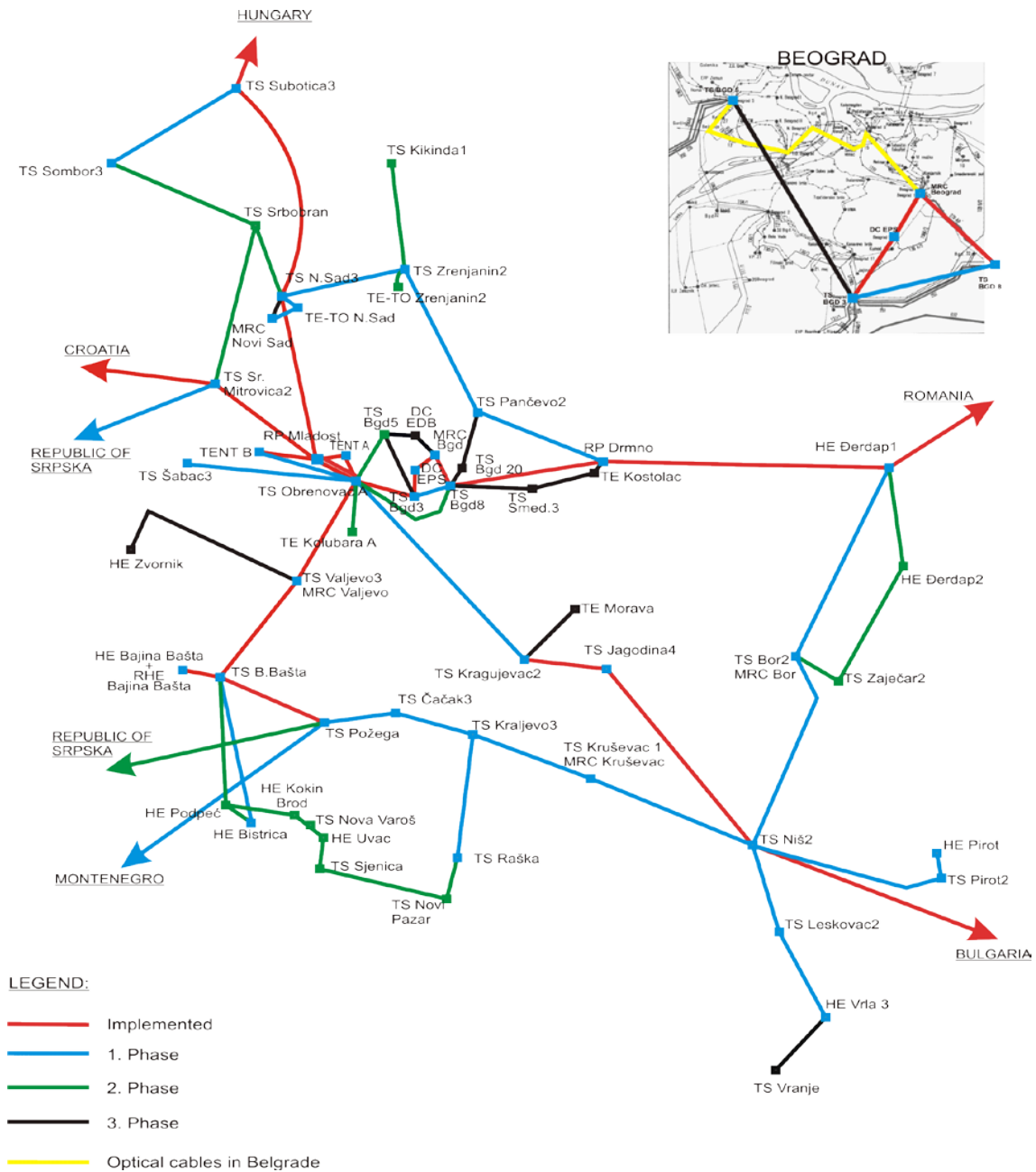
U cilju provere raspoloživosti okosnice projektovane mrežne topologije, posmatran je samo deo mreže sa slike 5.2 koji obuhvata one čvorove koji imaju minimalnu konektivnost 2 i koji se sastoji od 44 čvora i 59 linkova. Primenom funkcije aproksimacije za maksimalnu raspoloživost (4.29), dobija se da ona iznosi 0,99999999999332.

U trenutku pisanja doktorske disertacije, zbog napretka računarske tehnike, bilo je moguće izračunati stvarnu raspoloživost topologije mreže u prihvatljivo dugom vremenu (podrazumevano je da su čvorovi mreže idealni) za okosnicu i za kompletnu mrežu. Kada se posmatra okosnica mreža sa 44 čvora i 59 linkova, dobijena je *all-terminal* raspoloživost 0,999999977 što predstavlja dobar rezultat i u potpunosti zadovoljava postavljene zahteve.

Identična analiza urađena je i za proširenu mrežu koja je obuhvatila i čvorove sa konektivnošću 1 i koja ima ukupno 56 čvorova i 71 link. Polazeći od pretpostavke da svi linkovi imaju istu raspoloživost i da ona iznosi 0,999979245 i primenom izraza za maksimalnu raspoloživost za slučaj kada je  $A > 0,9$  (izraz 4.29) dobija se da maksimalna raspoloživost koja može da se dobije iznosi 0,99999999999976. S obzirom da pristupni čvorovi u proširenoj mreži imaju konektivnost 1, stvarna raspoloživost je značajno manja od maksimalno moguće.

Izračunavanjem stvarne raspoloživosti kompletne mreže, koja obuhvata 56 čvorova, ali gde svi čvorovi nemaju konektivnost 2, dobijeno je da je *all-terminal* raspoloživost 0,99975. Relativno mala raspoloživost kompletne mreže (traženo je „pet

devetki“) je posledica značajnog broja čvorova sa konektivnošću 1, što je oborilo ukupnu raspoloživost mreže i približilo je minimalnoj vrednosti.



Slika 5.2 – Fizička topologija telekomunikacione mreže EPS-a

U jednoj od sledećih faza u projektovanju TK mreže EPS-a, urađen je i projekat telefonske mreže EPS-a. Tehničko rešenje telefonske mreže se zasnivalo na korišćenju

fizičke infrastrukture predstavljene na slici 5.2. Poštujući princip o ravnomernoj konektivnosti čvorova, koji je ranije objašnjen, pristupilo se izradi inicijalne topologije mreže. Predložena topologija telefonske mreže predstavljena je na slici 5.3.

Telefonski servis je veoma značajan u upravljačkom sistemu EPS-a. Servis Operativne telefonije mora da obezbedi komunikaciju između dispečera, kako u normalnim uslovima, tako i kritičnim uslovima kao što su havarije. S obzirom da rad elektroenergetske mreže direktno utiče na kompletno funkcionisanje države, raspoloživost servisa operativne telefonije je morala da bude na nivou "pet devetki". Polazeći od tih zahteva i principa definisanja topologije za mreže visoke raspoloživosti (ravnomerna konektivnost čvorova) koji su definisani u ovoj doktorskoj disertaciji, nastala je topologija mreže predstavljena na slici 5.3.

Dobijena je topologija mreže sa 95 čvorova i 170 linkova. Za dati broj čvorova i linkova nije moguće u realnom vremenu izračunati raspoloživost već je neophodno uraditi procenu. Za raspoloživost linkova korišćena je ista vrednost koja je korišćena i kod fizičke topologije mreže pošto se radi o realizaciji servisa koji je nadgradnja postojeće fizičke mreže koja je već analizirana. Primenom izraza za minimalnu vrednost raspoloživosti dobija se vrednost 0,99832. S obzirom da je topologija mreže takva da nema izrazito asimetrično povezivanje (što je tipično za minimalnu raspoloživost), može da se očekuje da je raspoloživost mreže značajno veća od ove minimalne vrednosti.

Što se tiče maksimalne vrednosti, u ovom slučaju je  $L/N= 1,789$  i  $A>0,9$  tako da se primenom izraza (4.29) dobija maksimalno moguća vrednost raspoloživosti 0,999999999615. U okviru ove doktorske disertacije navedeno je da je preduslov za dostizanje maksimalnih vrednosti raspoloživosti da čvorovi imaju ravnomernu konektivnost što je u slučaju mreže sa slike 5.3 ispoštovano prilikom procesa projektovanja i realizacije. Imajući to u vidu, a znajući vrednost maksimalno moguću raspoloživosti mreže, može se opravdano zaključiti da mreža predstavljena na slici 5.3 ima raspoloživost koja je veća od 0,99999 ("pet devetki") što je i bio cilj koji je trebalo postići. Zbog veličine mreže date na slici 5.3, nije bilo moguće u prihvatljivo dugom vremenskom periodu izračunati tačnu raspoloživost mreže.





Telefonska mreža EPS-a je realizovana u potpunosti prema tehničkom rešenju predstavljenom na slici 5.3. Rezultati testiranja iz svakodnevnog rada su u potpunosti potvrdili visoku raspoloživost telefonskog servisa EPS-a. Rezultati rada na projektovanju telefonske mreže EPS-a publikovani su i u radu [81].

## 6 Zaključak

Razvoj modernog društva se u velikoj meri zasniva na kvalitetnim telekomunikacionim mrežama. Pored toga, značaj telekomunikacionih servisa za funkcionisanje modernog društva je takav da telekomunikacione mreže moraju da imaju visoku raspoloživost. Danas se okosnice mreža najčešće realizuju sa velikim brojem čvorova (više desetina) zbog čega je problem direktno izračunati *all-terminal* raspoloživost takve mreže, jer vremena izvršavanja algoritama za tačno računanje *all-terminal* raspoloživosti eksponencijalno rastu sa porastom broja čvorova i linkova. Zbog toga je od velike praktične važnosti korišćenje aproksimativnih metoda koji tokom procesa projektovanja takvih mreža omogućavaju dobijanje parametara za definisanje početnih uslova za dizajniranje topologije mreže. Cilj ove Doktorske disertacije je uvođenje novog metoda za aproksimativno računanje maksimalne *all-terminal* raspoloživosti složenih telekomunikacionih mreža u zavisnosti od mrežne topologije kada su poznati broj čvorova, broj linkova i raspoloživost pojedinačnog linka.

U cilju dobijanja tačnih vrednosti maksimalne *all-terminal* raspoloživosti mreže za zadati broj čvorova, linkova i raspoloživost linkova, razvijena je metoda sinteze mreže. Kod metode sinteze mreže za početnu topologiju mreže izabrana je topologija lanca. Izbor ovakve početne topologije je zbog toga što ovakva topologija obezbeđuje ravnopravnost između čvorova. Kod određivanja maksimalne *all-terminal* raspoloživosti mreže, primenom metode sinteze mreže, dodaje se jedan po jedan link u mrežnoj topologiji tako da se svaki put dobije maksimalni priraštaj *all-terminal* raspoloživosti mreže. Zbog ovakvog načina rada, primena metode sinteze je veoma zahtevna po pitanju resursa jer se, za dobijanje krajnjih rezultata, izvršava veoma veliki broj izračunavanja *all-terminal* raspoloživosti velikog broja različitih topologija mreže. Dodavanjem jednog po jednog linka, gde svi linkovi imaju istu raspoloživost, vrši se sinteza mreže koja u svakom koraku ima maksimalnu *all-terminal* raspoloživost za dati broj čvorova, linkova i datu raspoloživost linkova. Na osnovu dobijenih rezultata dobijeni su grafici promene *all-terminal* raspoloživosti mreže u zavisnosti od broja linkova i od raspoloživosti linkova.

Dobijeni rezultati za vrednosti maksimalne *all-terminal* raspoloživosti mreže u zavisnosti od broja linkova, broja čvorova i raspoloživosti linkova detaljno su analizirani sa ciljem definisanja funkcija aproksimacije koje treba da daju vrednosti raspoloživosti za mreže sa brojem čvorova većim od 20. Na osnovu dobijenih aproksimativnih izraza mogu se

izračunati granice raspoloživosti mreže u zavisnosti od topologije za zadate parametre. S druge strane, korišćenjem funkcija aproksimacija mogu se definisati granice u kojima treba da se kreće broj linkova da bi se mogla dobiti željena *all-terminal* raspoloživost izborom odgovarajuće topologije mreže.

U okviru doktorske disertacije je pokazano da je za dobijanje maksimalne *all-terminal* raspoloživosti mreže potrebno da svi čvorovi imaju istu konektivnost ili konektivnost koja se razlikuje najviše za jedan. Polazeći od ovog pravila, i znajući prethodno određene granice za broj linkova u mreži, u procesu projektovanja može se u nekoliko iteracija doći do topologije mreže koja obezbeđuje zadatu raspoloživost.

Vreme izvršavanja funkcija aproksimacije definisanih u okviru ove doktorske disertacije ne zavisi od veličine mreže. To omogućava veliki broj izračunavanja čime se omogućava analiza velikog broja kombinacija ulaznih parametara. Pokazano je da funkcije aproksimacije definisane u okviru disertacije imaju veću tačnost od funkcija koje su do sada publikovane u stručnoj literaturi. Izračunate aproksimativne vrednosti su upoređene i sa tačnim vrednostima *all-terminal* raspoloživosti i pokazano je da je relativna greška aproksimacije značajno manja od 1% za mreže sa linkovima čija je raspoloživost veća od 0,75. Zbog nemogućnosti izračunavanja u prihvatljivo dugom vremenu, tačne vrednosti *all-terminal* raspoloživosti mreže sa velikim brojem čvorova (broj čvorova veći od 50) i linkova, nije bilo moguće proveriti gornju granicu vrednosti broja čvorova i broja linkova za koje važe definisane funkcije aproksimacije.

Rad na dobijanju funkcije aproksimacije za maksimalnu raspoloživost mrežne topologije je pokazao da je moguće dobiti analitički izraz funkcije aproksimacije koja daje rezultate zadovoljavajuće tačnosti. Upoređenje sa tačnim vrednostima je pokazalo postojanje izvesnih odstupanja. U tom smislu, smernice za dalji rad bi svakako obuhvatile rad na dobijanju još boljih parametara za funkciju aproksimacije. Za poboljšanje funkcije aproksimacije je poželjno dobiti još tačnih rezultata za  $N$  veće od 20 (najveća vrednost broja čvorova za koje su određene tačne raspoloživosti koje su korišćenje u procesu generisanja funkcije aproksimacije). Na osnovu pravilnosti koja je uočena kod metode sinteze mreže, moguće je direktno generisati topologije mreže u prelomnim tačkama bez potrebe da se radi proverama za sve moguće topologije. Time se ceo proces izračunavanja kod metode sinteze za prelomne tačke svodi na izračunavanje raspoloživosti samo jedne topologije. Navedeni način rada bi omogućio dobijanje tačnih podataka za mreže sa više od 20 čvorova što bi omogućilo korekciju aproksimativne funkcije u cilju dobijanja još veće tačnosti.

Drugi vid poboljšanja je u optimizaciji algoritma sinteze mreže, tj. algoritma za računanje raspoloživosti mreže. Prilikom sinteze mreže uvek se kreće od jedne topologije pa se onda računaju raspoloživosti za topologije kod kojih je dodat samo jedan link. Ako bi se prilikom računanja raspoloživosti nove topologije kao prvi korak koristila metoda rastavljanja po tom novom linku, jedna od dve novodobijene topologije je upravo polazna topologija čija raspoloživost je poznata. Navedenom modifikacijom bi se vreme proračuna raspoloživosti jedne nove topologije praktično prepolovilo.

Povećanjem broja linkova u mreži raste i verovatnoća da u jednom trenutku dođe do otkaza više linkova. Posebno interesantan i važan problem predstavlja analiza višestrukih otkaza linkova, što svakako predstavlja temu za buduća istraživanja.

Težište kod izrade funkcija aproksimacije bilo je na mrežnim topologijama sa velikim brojem linkova (broj linkova minimalno 1,5 puta veći od broja čvorova). Primena u praksi je pokazala da kod veoma velikih mreža (broj čvorova veći od 90 do 100) broj linkova često nije veći od 1,5 puta broj čvorova. Imajući to u vidu, jedan od smerova daljeg rada je razvijanje aproksimativnih funkcija za mreže sa malim brojem linkova. Analiza dobijenih rezultata je pokazala da je zakonitost promene raspoloživosti mreže sa malim brojem linkova značajno drugačija od zakonitosti kod većeg broja linkova. To zahteva kompletno novu analizu dobijenih rezultata koji zadovoljavaju kriterijum da je  $L/N < 1,5$  u cilju dobijanja funkcija aproksimacije koje pokrivaju ovakve ulazne parametre.

## 7 Literatura

- [1] Martin L. Shooman: **Reliability of Computer Systems and Networks: Fault Tolerance, Analysis, and Design**, A Wiley-Interscience Publication, JOHN WILEY & SONS, INC., 2001, ISBN-10: 0471293423, ISBN-13: 978-0471293422
- [2] Aaron Kershenbaum: **Telecommunications Network Design Algorithms**, McGraw-Hill, New York, 1993, ISBN-10: 0070342288, ISBN-13: 978-0070342286
- [3] Jason L. Cook: **Reliability of mobile ad-hoc wireless networks**, PhD thesis at Stevens Institute of Technology, 2008.,  
<http://sse.stevens.edu/fileadmin/sse/academics/dissertations/JasonCook.pdf>
- [4] L. E. Miller, J. J. Kelleher, and L. Wong: **Assessment of Network Reliability Calculation Methods**, J. S. Lee Associates, Inc. report JC-2097-FF under contract DAAL02-92-C-0045, January 1993,  
<http://www.antd.nist.gov/wctg/netanal/EvalNetRel.pdf>
- [5] Milan Čabarkapa: **Analiza mrežne topologije sa maksimalnom raspoloživošću uz minimalne troškove realizacije**, master rad na Elektrotehničkom fakultetu u Beogradu, 2010.
- [6] Rifat M. Ramović: **Pouzdanost sistema: elektronskih, telekomunikacionih i informacionih**, Katedra za Mikroelektroniku i tehničku fiziku, Beograd, 2005. godine
- [7] Shooman, A. M.: **Exact Graph-Reduction Algorithms for Network Reliability Analysis**, Ph.D. thesis, Polytechnic University, 1992.
- [8] Shooman, A. M., and A. Kershenbaum: **Exact Graph-Reduction Algorithms for Network Reliability Analysis**, Proceedings IEEE/ GLOBECOM Conference, December 1991. IEEE, New York, NY.
- [9] Alcoa Fujikura Ltd.: **Reliability of Fiber Optic Cable Systems: Buried Fiber Optic Cable, Optical Groundwire Cable, All-dielectric, Self Supporting Cable**,  
<http://www.southern-telecom.com/AFL%20Reliability.pdf>, May 2001
- [10] J. Demercado: **Minimum cost-reliable computer communication networks**, Proceeding AFIPS '72 (Fall, part I), December 1972, Digital Object Identifier: 10.1145/1479992.1480069

- [11] P. Jensen: **The Design of Multiple-Line Redundant Networks**, IEEE Transactions on reliability, Vol. R-18, No. 2, May 1969, pages 39-44, ISSN: 0018-9529, Digital Object Identifier: 10.1109/TR.1969.5216975
- [12] Michael O. Ball: **Computing network reliability**, Operations Research, vol 27, 1979 July, pp 823-838.
- [13] John A. Buzacott: **A recursive algorithm for finding reliability measures related to the connection of nodes in a graph**, Networks, vol 10, 1980, pp 311-327; Digital Object Identifier: 10.1002/net.3230100404
- [14] Michael O. Ball: **Complexity of network reliability computations**, Networks, vol 10, 1980, pp 153-165; Digital Object Identifier: 10.1002/net.3230100206
- [15] J.S. Provan, M.O. Ball: **The complexity of counting cuts and of computing the probability that a graph is connected**, technical report ms/s81-002, College of Business and Management, University of Maryland at College Park 20742, 1981.
- [16] Leslie G. Valiant: **The complexity of enumeration and reliability problems**, SIAM J. Computing, vol 8, 1979 Aug, pp 410-421; Digital Object Identifier: 10.1137/0208032
- [17] J. Hagstrom: **Using the Decomposition-Tree of a Network in Reliability Computation**, IEEE Transactions on reliability, Vol. R-32, No. 1, April 1983, pages 71-78, ISSN: 0018-9529, Digital Object Identifier: 10.1109/TR.1983.5221478
- [18] Arnon Rosenthal: **Computing Reliability of Complex Systems**, SIAM Journal of Applied Mathematics, Vol. 32, 1977, pp. 384-393
- [19] M. Resende: **A Program for Reliability Evaluation of Undirected Networks via Polygon-to-Chain Reductions**, IEEE Transactions on reliability, Vol. R-35, No. 1, April 1986, pages 24-29, ISSN: 0018-9529, Digital Object Identifier: 10.1109/TR.1986.4335334
- [20] A. Satyanarayana, R. K. Wood: **Polygon-to-chain reductions and network reliability**, Report Operation Research Center 82-4, 1982.
- [21] R. K. Wood: **Polygon-to-chain reductions and extensions for reliability evaluation of undirected networks**, PhD thesis, Dept. of Industrial Engineering and Operations Research, University of California, Berkeley, 1982.
- [22] A. Satyanarayana and R. Kevin Wood: **A linear-time algorithm for computing k-terminal reliability in series-parallel networks**. SIAM Journal of Computing, Vol 14, No4, November 1985, pages 818-832, Digital Object Identifier: 10.1137/0214057
- [23] L. Page, J.E. Perry: **A Practical Implementation of the Factoring Theorem for Network Reliability**, IEEE Transactions on reliability, Vol. 37, No. 3, August 1988,

pages 259-267, ISSN: 0018-9529, INSPEC Accession Number: 3252089, Digital Object Identifier: 10.1109/24.3752

- [24] L.I.P. Resende: **Implementation of a Factoring Algorithm for Reliability Evaluation of Undirected Networks**, IEEE Transactions on reliability, Vol. 37, No. 5, December 1988, pages 462-468, ISSN: 0018-9529, INSPEC Accession Number: 3343597, Digital Object Identifier: 10.1109/24.9862
- [25] Belovich S.G., Konangi V.K.: **An Algorithm for the Computation of Computer Network Reliability in Linear-Time**, *Conference on Computers and Communications, 1990. Conference Proceedings., Ninth Annual International Phoenix*, 21-23 March 1990, page 655, ISBN: 0-8186-2030-7
- [26] T.A. Feo, R. Johnson: **Partial Factoring: An Efficient Algorithm for Approximating 2-Terminal Reliability on Complete Graphs**, IEEE Transactions on reliability, Vol. 39, No. 3, August 1990, pages 290-295, ISSN: 0018-9529, INSPEC Accession Number: 3758175, Digital Object Identifier: 10.1109/24.103005
- [27] O. Theologou, J.G. Carlier: **Factoring and Reductions for Networks with Imperfect Vertices**, IEEE Transactions on reliability, Vol. 40, No. 2, Jun 1991, pages 210-217, ISSN: 0018-9529, INSPEC Accession Number: 4004034, Digital Object Identifier: 10.1109/24.87131
- [28] A.M. Shooman, A. Kershenbaum: **Methods for Communication-Network Reliability Analysis: Probabilistic Graph Reduction**, Proceedings Annual Reliability and Maintainability Symposium, January 1992, pages 441-448, Print ISBN: 0-7803-0521-3, INSPEC Accession Number: 4286060, Digital Object Identifier: 10.1109/ARMS.1992.187862
- [29] Rong-Hong Jan: **Design of Reliable Networks**, IEEE International Conference on Discovering a New World of Communications 1992, Vol. 1, pages 191-196, ISBN: 0-7803-0599-X, INSPEC Accession Number: 4487559, Digital Object Identifier: 10.1109/ICC.1992.268264
- [30] D. Torrieri: **Calculation of Node-Pair Reliability in Large Networks with Unreliable Nodes**, IEEE Transactions on reliability, Vol. 43, No. 4, September 1994, pages 375-377, 382, ISSN: 0018-9529, INSPEC Accession Number: 4797425, Digital Object Identifier: 10.1109/24.326428
- [31] K.K. Aggarwal: **A fast algorithm for the performance index of a telecommunication network**, IEEE Transactions on reliability, Vol. 37, No. 1, April 1988, pages 65-69,



ISSN: 0018-9529, INSPEC Accession Number: 3171712, Digital Object Identifier: 10.1109/24.3715

- [32] W.H. Debany Jr, P.K. Varshney, C.R.P. Hartmann: **Network Reliability Evaluation Using Probability Expressions**, IEEE Transactions on reliability, Vol. 35, No. 2, June 1986, pages 161-166, ISSN: 0018-9529, Digital Object Identifier: 10.1109/TR.1986.4335392
- [33] H. Cancela, M. El Khadiri: **A simulation algorithm for source-terminal communication network reliability**, Proceedings of the 29th Annual Simulation Symposium, April 1996, pages 155-161, Print ISBN: 0-8186-7432-6, INSPEC Accession Number: 5281027, Digital Object Identifier: 10.1109/SIMSYM.1996.492163
- [34] D.W. Coit, A.E. Smith: **Reliability optimization of series-parallel systems using a genetic algorithm**, IEEE Transactions on reliability, Vol. 45, No. 2, Jun 1996, pages 254-260, 266, ISSN: 0018-9529, INSPEC Accession Number: 5338037, Digital Object Identifier : 10.1109/24.510811
- [35] K. Ida, M. Gen, T. Yokota: **System reliability optimization with several failure modes by genetic algorithm**, Proc. 161h International Conference of Computers and Industrial Engineering, 1994, pp 349-352
- [36] L. Painton, J. Campbell: **Genetic algorithms in optimization of system reliability**, IEEE Transactions on reliability, Vol. 44, No. 2, Jun 1995, pages 172-178, ISSN: 0018-9529, INSPEC Accession Number: 4988735, Digital Object Identifier : 10.1109/24.387368
- [37] A. Kumar, R.M. Pathak, Y .P. Gupta, H.R. Parsaei: **A genetic algorithm for distributed system topology design**, Computers and Industrial Engineering, vol. 28, 1995, pp 659-670
- [38] A. Kumar, R.M. Pathak, Y.P. Gupta: **Genetic-algorithm-based reliability optimization for computer network expansion**, IEEE Transactions on reliability, Vol. 44, No. 1, March 1995, pages 63-72, ISSN: 0018-9529, INSPEC Accession Number: 4925466, Digital Object Identifier: 10.1109/24.376523
- [39] B. Dengiz, F. Altiparmak, A.E. Smith: **Efficient Optimization of All-Terminal Reliable Networks, Using an Evolutionary Approach**, IEEE Transactions on reliability, Vol. 46, No. 1, March 1997, pages 18-26, ISSN: 0018-9529, INSPEC Accession Number: 5561845, Digital Object Identifier : 10.1109/24.589921
- [40] B. Dengiz, F. Altiparmak, A.E. Smith: **Local Search Genetic Algorithm for Optimal Design of Reliable Networks**, IEEE Transactions on evolutionary computation, Vol. 1,

- No. 3, September 1997, pages 179-188, ISSN: 1089-778X, INSPEC Accession Number: 5858811, Digital Object Identifier: 10.1109/4235.661548
- [41] C. Lucet, J.F. Manouvrier: **Exact Methods to compute Network Reliability**, Proc. of 1st International Conf. on Mathematical Methods in Reliability, 1997, <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.27.7190>
- [42] A. Konak, A.E. Smith: **A General Upper Bound for All-Terminal Network Reliability and Its Uses**, *Industrial Engineering Research Conference*, Banff, Canada, 1998.
- [43] G. Katona: **A theorem on finite sets**, Theory of Graphs, Academia Kiado, Budapest, 1968, pp. 187-207
- [44] J. B. Kruskal: **The number of simplices in a complex**, Mathematical Optimization Techniques, University of California Press, Berkeley, CA, 1963, pp. 251-278
- [45] T. B. Brecht, C. J. Colbourn: **Lower bounds on two-terminal network reliability**, Discrete Applied Mathematics, vol. 21, 1988, pp. 185-198
- [46] Jintao Xiong, Weibo Gong: **A Novel Algorithm on Network Reliability Analysis**, 10th International Conference on Telecommunications, February 2003, Vol. 2, pages 1407-1411, Print ISBN: 0-7803-7661-7, INSPEC Accession Number: 7786151
- [47] H. Werner: **A Reliable Method for Rational Interpolation**, Padé Approximation and its Applications, L. Wuytack (Ed.), Springer-Verlag, pp. 257-277, 1979
- [48] Yong Chen, Ai-Qun Hu, Kun-Wah Yip, Xiao Hu, Zi-Guo Zhong: **A Modified Combined Method for Computing Terminal-pair Reliability in Networks with Unreliable Nodes**, Proceedings of the Second International Conference on Machine Learning and Cybernetics, November 2003, Vol. 4, pages 2426-2429, Print ISBN: 0-7803-8131-9, INSPEC Accession Number: 7985309, Digital Object Identifier: 10.1109/ICMLC.2003.1259917
- [49] S. Soh, S. Rai: **An Efficient Cutset Approach for Evaluating Communication-Network Reliability With Heterogeneous Link-Capacities**, IEEE Transactions on reliability, Vol. 54, No. 1, March 2005, pages 133-144, Digital Object Identifier: 10.1109/TR.2004.842530
- [50] S. Rai, S. Soh: **A computer approach for reliability evaluation of telecommunication networks with heterogeneous link-capacities**, IEEE Transactions on reliability, Vol. 40, No. 4, October 1991, pages 441-451, ISSN: 0018-9529, INSPEC Accession Number: 4063011, Digital Object Identifier: 10.1109/24.93766

- [51] Sy-Yen Kuo, Fu-Min Yeh, Hung-Yau Lin: **Efficient and Exact Reliability Evaluation for Networks With Imperfect Vertices**, IEEE Transactions on reliability, Vol. 56, No. 2, June 2007, pages 288-300, ISSN: 0018-9529, INSPEC Accession Number: 9501637, Digital Object Identifier: 10.1109/TR.2007.896770
- [52] F.-M. Yeh, S.-Y. Kuo: **OBDD-based network reliability calculation**, Electronics Letters, vol. 33, no. 9, Apr. 1997, pp. 759–760, ISSN: 0013-5194, INSPEC Accession Number: 5586872, Digital Object Identifier: 10.1049/el:19970549
- [53] S. Y. Kuo, S. K. Lu, F. M. Yeh: **Determining terminal-pair network reliability based on edge expansion diagrams using OBDD**, IEEE Transactions on Reliability, vol. 48, no. 3, Sep. 1999, pp. 234–246, ISSN: 0018-9529, INSPEC Accession Number: 6406320, Digital Object Identifier: 10.1109/24.799845
- [54] F. M. Yeh, S. K. Lu, S. Y. Kuo: **OBDD-based evaluation of K-terminal network reliability**, IEEE Transacton of Reliability, vol. 51, no. 4, Dec. 2002, pp. 443–451, ISSN: 0018-9529, INSPEC Accession Number: 7458937, Digital Object Identifier: 10.1109/TR.2002.804736
- [55] A. Konak: **Combining Network Reductions and Simulation to Estimate Network Reliability**, Proceedings of the 2007 Winter Simulation Conference, December 2007, pages: 2301–2305, ISBN: 978-1-4244-1306-5, INSPEC Accession Number: 9847994, Digital Object Identifier: 10.1109/WSC.2007.4419868
- [56] Sharafat A.R., Ma'rouzi O.R.: **All-Terminal Network Reliability Using Recursive Truncation Algorithm**, IEEE Transactions on Reliability, Vol. 58, No. 2, June 2009, page 338-347, ISSN: 0018-9529, INSPEC Accession Number: 10712951, Digital Object Identifier: 10.1109/TR.2009.2020120
- [57] Jin-Myung Won, F. Karray: **Cumulative Update of All-Terminal Reliability for Faster Feasibility Decision**, IEEE Transactions on reliability, Vol. 59, No. 3, September 2010, pages 551-562, ISSN: 0018-9529, INSPEC Accession Number: 11489131, Digital Object Identifier: 10.1109/TR.2010.2055924
- [58] I. Soi, K.K. Aggarwal: **Reliability Indices for Topological Design of Computer Communication Networks**, IEEE Transactions on reliability, Vol. R-30, No. 5, December 1991, pages 438-443, ISSN: 0018-9529, Digital Object Identifier: 10.1109/TR.1981.5221158
- [59] B. Hamersma, M.S. Chodos: **Availability and Maintenance Considerations in Telecommunications Network Design and the Use of Simulation Tools**, Proceedengs 3<sup>rd</sup> AFRICON Connference, September 1992, pages 267-270, Print ISBN: 0-7803-0835-

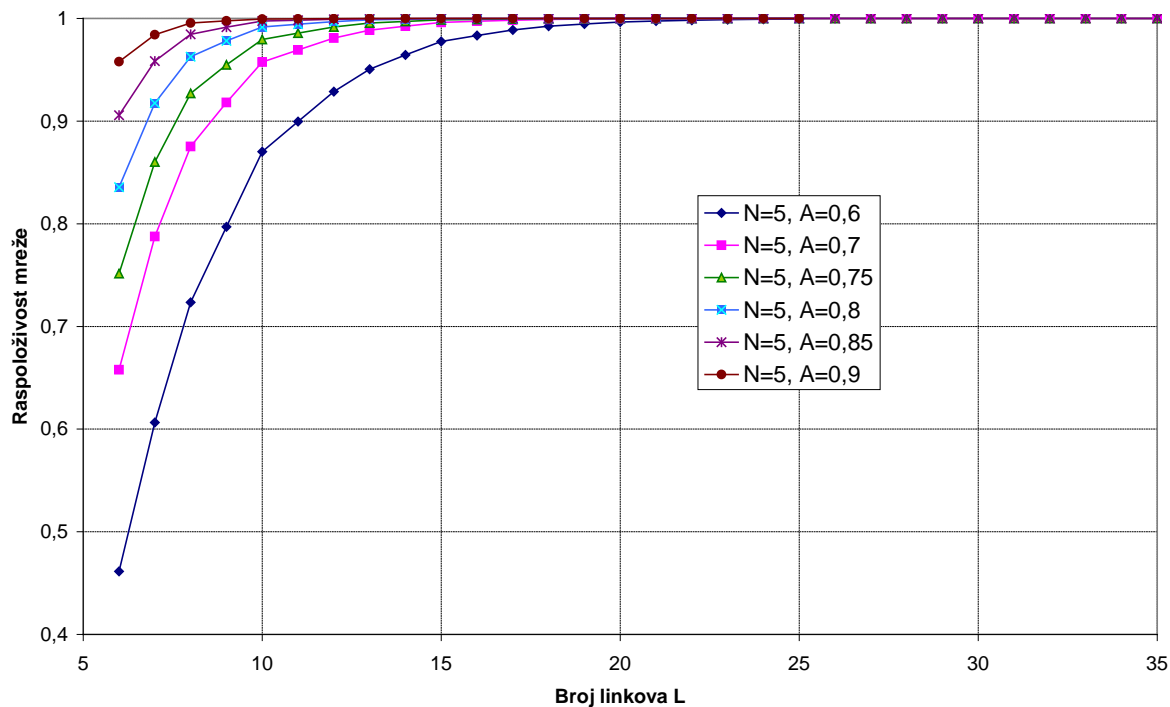
- 2, INSPEC Accession Number: 4961811, Digital Object Identifier: 10.1109/AFRCON.1992.624470
- [60] A. Shooman: **Algorithms for Network Reliability and Connection Availability Analysis**, Electro/95 International Professional Program Proceedings, June 1995, pages 309-333, ISBN: 0-7803-2633-4, INSPEC Accession Number: 5039587, Digital Object Identifier: 10.1109/ELECTR.1995.471030
- [61] J.P. Sauve, F.E.S. Coelho: **Availability Consideration in Network Design**, Symposium on Dependable Computing, December 2001, pages 119-126, Print ISBN: 0-7695-1414-6, INSPEC Accession Number: 7190710, Digital Object Identifier: 10.1109/PRDC.2001.992688
- [62] M. Clouqueur, W.D. Grover: **Availability Analysis of Span-Restorable Mesh Networks**, IEEE Journal on Selected Areas in Communications, Vol. 20, No. 4, May 2002, pages 810-821. ISSN: 0733-8716, INSPEC Accession Number: 7291614, Digital Object Identifier: 10.1109/JSAC.2002.1003046
- [63] M. Mezhoudi, C.-H.K. Chu, Chen Jing; Chen Yu Lon: **Integrating network quality, performance and cost control through reliability analysis in optical network design**, 11th International Telecommunications Network Strategy and Planning Symposium - NETWORKS 2004, June 2004, pages 397-403, Print ISBN: 3-8007-2840-0, INSPEC Accession Number: 8228859, Digital Object Identifier: 10.1109/NETWKS.2004.1341879
- [64] G. Semaan: **Designing Networks with the Optimal Availability**, Optical Fiber communication/National Fiber Optic Engineers Conference, February 2008, pages 1-6, Print ISBN: 978-1-55752-856-8, INSPEC Accession Number: 10054031, Digital Object Identifier: 10.1109/OFC.2008.4528163
- [65] Chin-Chia Jane, Yih-Wenn Lai: **A Practical Algorithm for Computing Multi-State Two-Terminal Reliability**, IEEE Transactions on reliability, Vol. 57, No. 2, June 2008, pages 295-302, ISSN: 0018-9529, INSPEC Accession Number: 10050599, Digital Object Identifier: 10.1109/TR.2008.920792
- [66] M. Hayashi, T. Abe: **Evaluating Reliability of Telecommunications Networks Using Traffic Path Information**, IEEE Transactions on reliability, Vol. 57, No. 2, June 2008, pages 283-294, ISSN: 0018-9529, INSPEC Accession Number: 10050596, Digital Object Identifier: 10.1109/TR.2008.920870
- [67] Guoqiang Zhang, Jian Lu, Qiaojun Xiang: **Application of Genetic Algorithm to Network Design Problem**, International Conference on Intelligent Computation

- Technology and Automation (ICICTA), October 2008, pages 26-29, Print ISBN: 978-0-7695-3357-5, INSPEC Accession Number: 10385543, Digital Object Identifier : 10.1109/ICICTA.2008.252
- [68] F. Altiparmak, B. Dengiz, A.E. Smith: **A General Neural Network Model for Estimating Telecommunications Network Reliability**, IEEE Transactions on reliability, Vol. 58, No. 1, March 2009, pages 2-9, ISSN: 0018-9529, INSPEC Accession Number: 10503029, Digital Object Identifier: 10.1109/TR.2008.2011854
- [69] S.V. Amari, M.J. Zuo, G. Dill: **A Fast and Robust Reliability Evaluation Algorithm for Generalized Multi-State k-out-of-n Systems**, IEEE Transactions on reliability, Vol. 58, No. 1, March 2009, pages 88-97, ISSN: 0018-9529, INSPEC Accession Number: 10503037, Digital Object Identifier: 10.1109/TR.2008.2011684
- [70] R. Mishra, S.K. Chaturvedi: **A Cutsets-Based Unified Framework to Evaluate Network Reliability Measures**, IEEE Transactions on reliability, Vol.58, No. 4, December 2009, pages 658-666, ISSN: 0018-9529, INSPEC Accession Number: 11000743, Digital Object Identifier: 10.1109/TR.2009.2028090
- [71] A. Kumar, K.K. Mishra, A.K. Misra: **Optimizing the reliability of Communication Network Using specially designed Genetic Algorithm**, World Congress on Nature & Biologically Inspired Computing, December 2009, pages 499-502, Print ISBN: 978-1-4244-5053-4, INSPEC Accession Number: 11119135, Digital Object Identifier: 10.1109/NABIC.2009.5393371
- [72] Yi Ding, M.J. Zuo, A. Lisnianski, Wei Li: **A Framework for Reliability Approximation of Multi-State Weighted k-out-of-n Systems**, IEEE Transactions on reliability, Vol. 59, No. 2, June 2010, pages 297-308, ISSN: 0018-9529, INSPEC Accession Number: 11357758, Digital Object Identifier : 10.1109/TR.2010.2048659
- [73] Hosam M. F. AboElFotouh, Loulwa S. Al-Sumait: **A Neural Approach to Topological Optimization of Communication Networks, With Reliability Constraints**, IEEE Transactions on reliability, Vol. 50, No. 4, December 2001, pages 397-408, ISSN: 0018-9529, INSPEC Accession Number: 7180131, Digital Object Identifier: 10.1109/24.983401
- [74] A. Pakstas: **Reliability Issues in Network Planning**, Proceedings of the 8th International Conference on Telecommunications - ConTEL 2005, Vol. 2, June 2005, pages 693, E-ISBN: 953-184-084-9, Print ISBN: 953-184-081-4, INSPEC Accession Number: 8598723, Digital Object Identifier: 10.1109/CONTEL.2005.185996

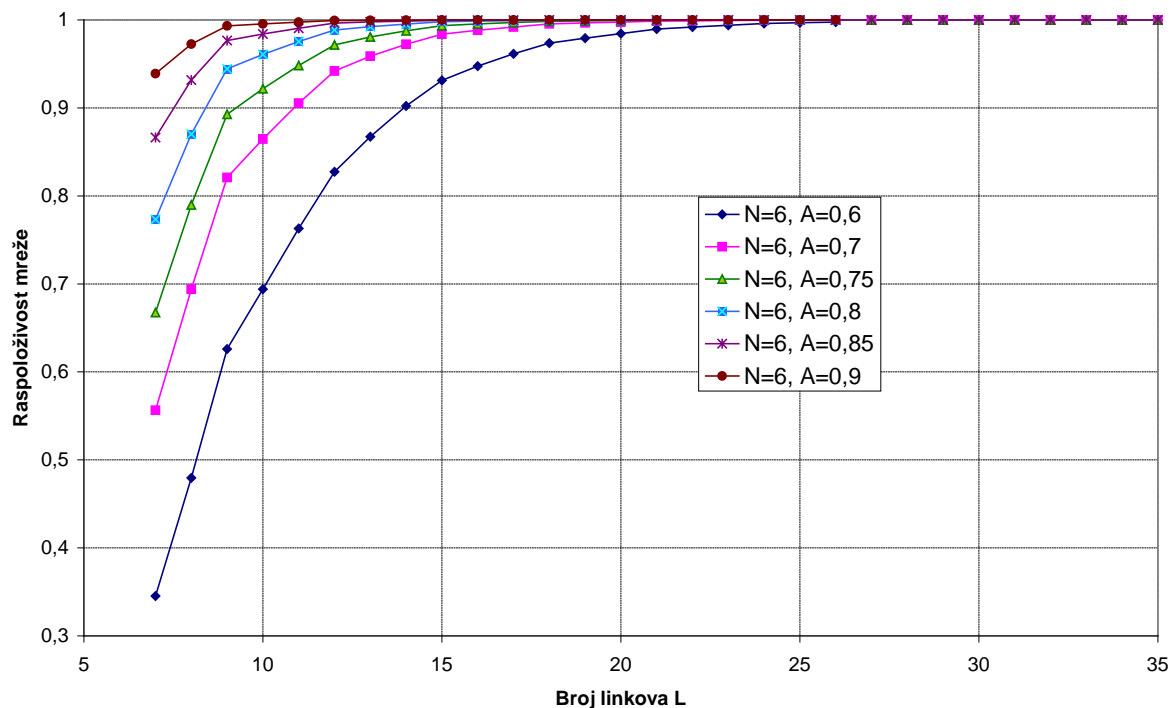
- [75] M. Tornatore, G. Maier, A. Pattavina: **Availability Design of Optical Transport Networks**, IEEE Journal on Selected Areas in Communications, Vol. 23, No. 8, August 2005, pages 1520-1532, ISSN: 0733-8716, Digital Object Identifier: 10.1109/JSAC.2005.851774
- [76] Tao Yu, Shanzhi Chen, Ming Ai, Xin Li, Yuhong Li, Zhen Qin: **A Framework for Reliability Computation of the IP Network**, Eighth ACIS International Conference on Software Engineering, Artificial Intelligence, Networking, and Parallel/Distributed Computing, August 2007, Vol. 2, pages 323-327, Print ISBN: 978-0-7695-2909-7, INSPEC Accession Number: 9873075, Digital Object Identifier: 10.1109/SNPD.2007.145
- [77] P.S. Barreto, P.H.P. de Carvalho: **Network Planning Optimization for Multimedia Networks**, Seventh IEEE International Symposium on Network Computing and Applications, July 2008, pages 60-67, Print ISBN: 978-0-7695-3192-2, INSPEC Accession Number: 10114942, Digital Object Identifier : 10.1109/NCA.2008.30
- [78] Zhengguo Xu, Yindong Ji, Donghua Zhou: **A New Real-Time Reliability Prediction Method for Dynamic Systems Based on On-Line Fault Prediction**, IEEE Transactions on reliability, Vol. 58, No. 3, September 2009, pages 523-538, ISSN: 0018-9529, INSPEC Accession Number: 10847428, Digital Object Identifier: 10.1109/TR.2009.2026785
- [79] Jitamitra Desai, Suvrajeet Sen: **A global optimization algorithm for reliable network design**, European Journal of Operational Research, Vol. 200, Issue 1, January 2010. pages 1-8, ISSN: 0377-2217
- [80] Dobrilo Đ. Tošić: **Uvod u numeričku analizu**, Naučna knjiga, Beograd, 1987.
- [81] N.Krajnović: **The Design of a Highly Available Enterprise IP Telephony Network for the Power Utility of Serbia Company**, IEEE Communications Magazine, April 2009, pages 118-122, ISSN: 0163-6804, DOI: 10.1109/MCOM.2009.4907417
- [82] L. Fratta, U. G. Montanari: **A recursive method based on case analysis for computing network terminal reliability**, IEEE Transactions on Communications, Vol. 26, Issue 8, August 1978, pages 1166-1177, DOI: 10.1109/TCOM.1978.1094215
- [83] W. P. Dotson, J. O. Gobien: **A new analysis technique for probabilistic graphs**, IEEE Transactions on Circuits & Systems, Vol. 26, Issue 10, October 1979, pages 855-865, DOI: 10.1109/TCS.1979.1084573

- [84] A. Satyanarayana, A. Prabhakar: **New topological formula and rapid algorithm for reliability analysis of complex networks**, IEEE Transactions on Reliability, Vol. 27, Issue 2, June 1978, pages 82-100, DOI: 10.1109/TR.1978.5220266
- [85] W. J. Rueger: **Reliability analysis of networks with capacity constraints and failures at branches and nodes**, IEEE Transactions on Reliability, Vol. 35, Issue 5, December 1986, pages 523-528, DOI: 10.1109/TR.1986.4335537
- [86] D. R. Shier, D. E. Whited: **Algebraic methods applied to network reliability problems**, SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods, Vol. 8, Issue 2, April 1987, pages 251-262, DOI: 10.1137/0608022
- [87] P. M. Lin, B. J. Leon, T. C. Huang: **A new algorithm for symbolic system reliability analysis**, IEEE Transactions on Reliability, Vol. 25, Issue 1, April 1976, pages 2-15, DOI: 10.1109/TR.1976.5214942
- [88] J. A. Buzacott: **A recursive algorithm for finding reliability measures related to the connection of nodes in a graph**, Networks, vol 10, Issue 4, winter 1980, pages 311-327, DOI: 10.1002/net.3230100404
- [89] J. S. Provan, M. Ball: **Computing network reliability in time polynomial in the number of cuts**, Operations Research, Vol 32, No. 3, May-June 1984, pages 516-526, <http://www.jstor.org/stable/170470>
- [90] M. Page Bailey, V. G. Kulkarni: **A recursive algorithm for computing exact reliability measures**, IEEE Transactions on Reliability, Vol 35, Issue 1, April 1986, pages 36-40, DOI: 10.1109/TR.1986.4335338
- [91] J. Jia, J. S. Dyer: **A Standard Measure of Risk and Risk-Value Models**, Management Science, Vol. 42, Issue 12, December 1996, pages 1691-1705, ISSN: 00251909, E-ISSN: 15265501
- [92] K.B.Misra: **A Simple Approach for Constrained Redundancy Optimization Problem**, IEEE Transaction on Reliability, Vol R-21, No 1, February 1972, ISSN: 0018-9529, DOI: 10.1109/TR.1972.5216168

## 8 Prilog 1 – Numerički rezultati korišćeni u radu predstavljeni grafički

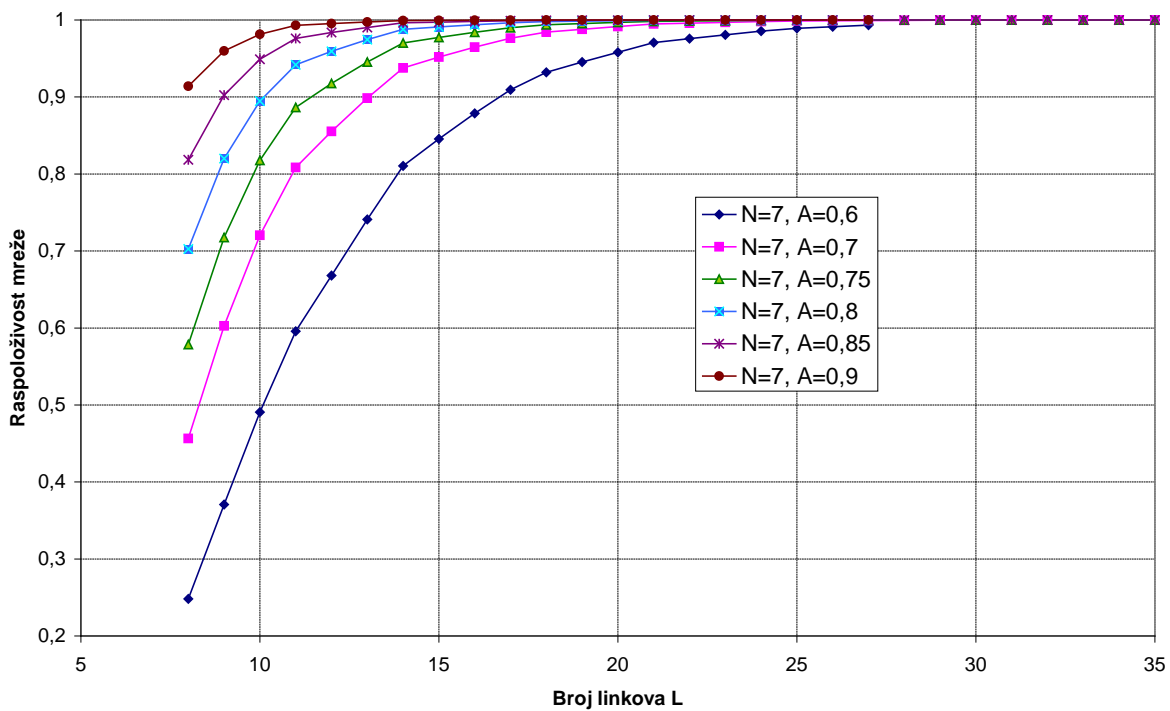


Slika 8.1 – Grafik promene maksimalne raspoloživosti za N=5 u zavisnosti od broja linkova L gde je raspoloživost linka A data kao parametar

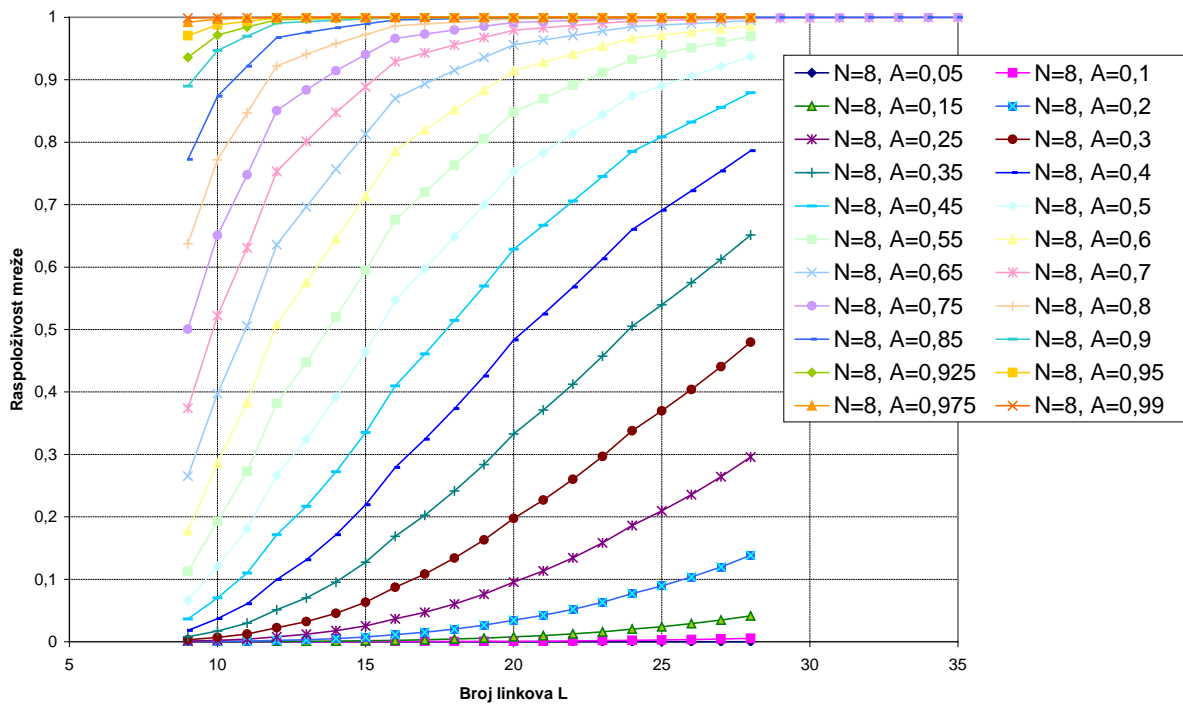


Slika 8.2 – Grafik promene maksimalne raspoloživosti za N=6 u zavisnosti od broja linkova L gde je raspoloživost linka A data kao parametar

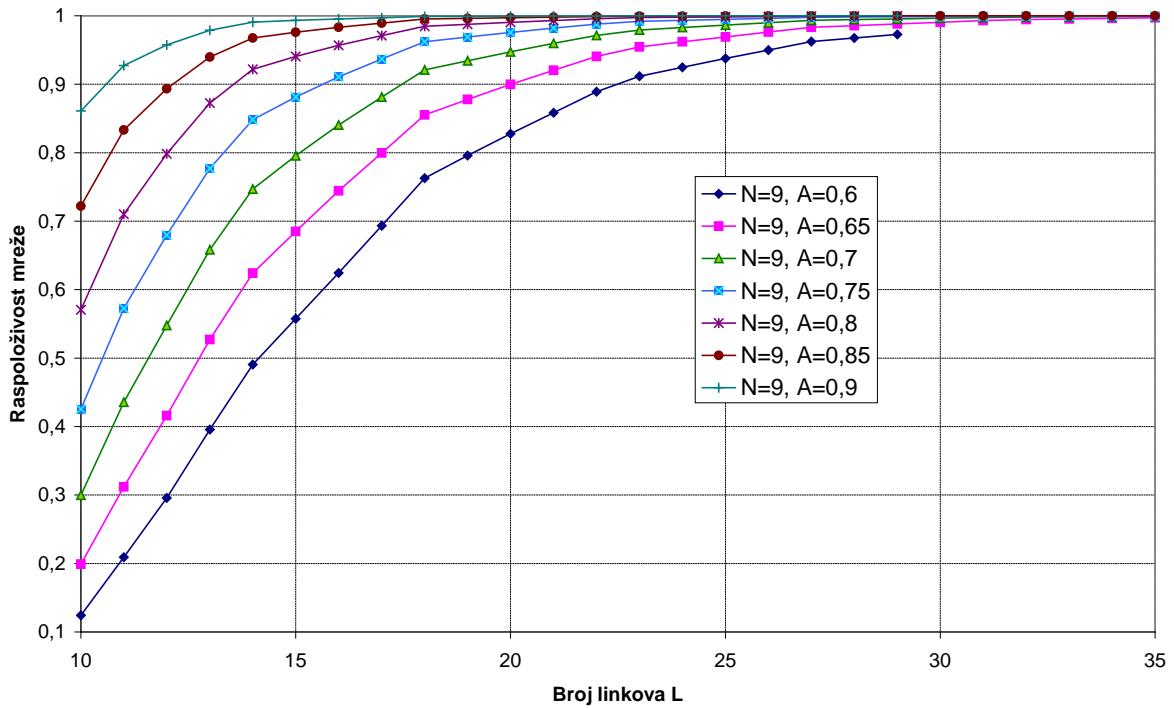




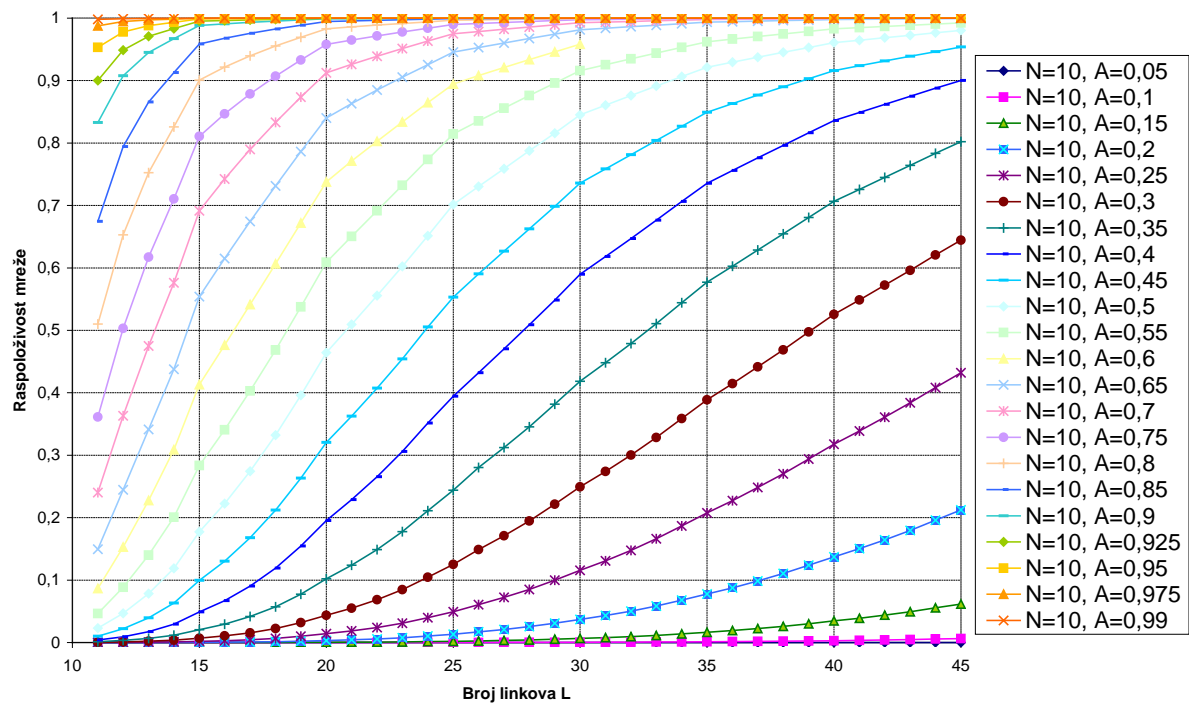
Slika 8.3 – Grafik promene maksimalne raspoloživosti za  $N=7$  u zavisnosti od broja linkova  $L$  gde je raspoloživost linka  $A$  data kao parametar



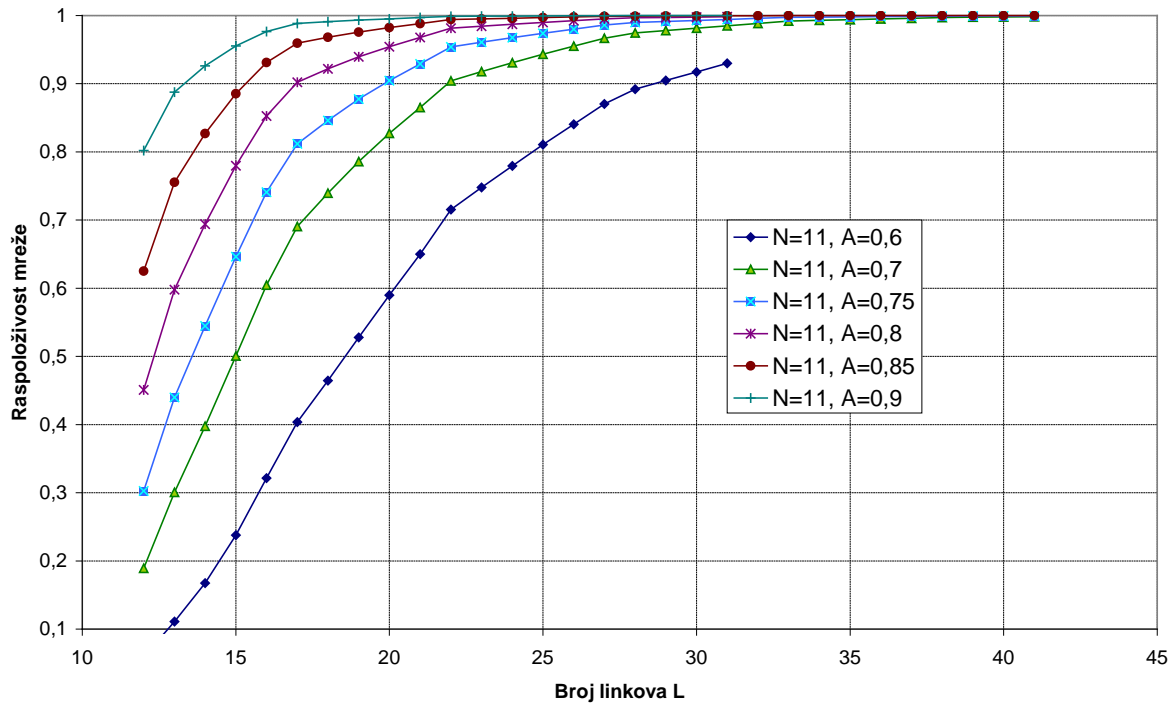
Slika 8.4 – Grafik promene maksimalne raspoloživosti za  $N=8$  u zavisnosti od broja linkova  $L$  gde je raspoloživost linka  $A$  data kao parametar



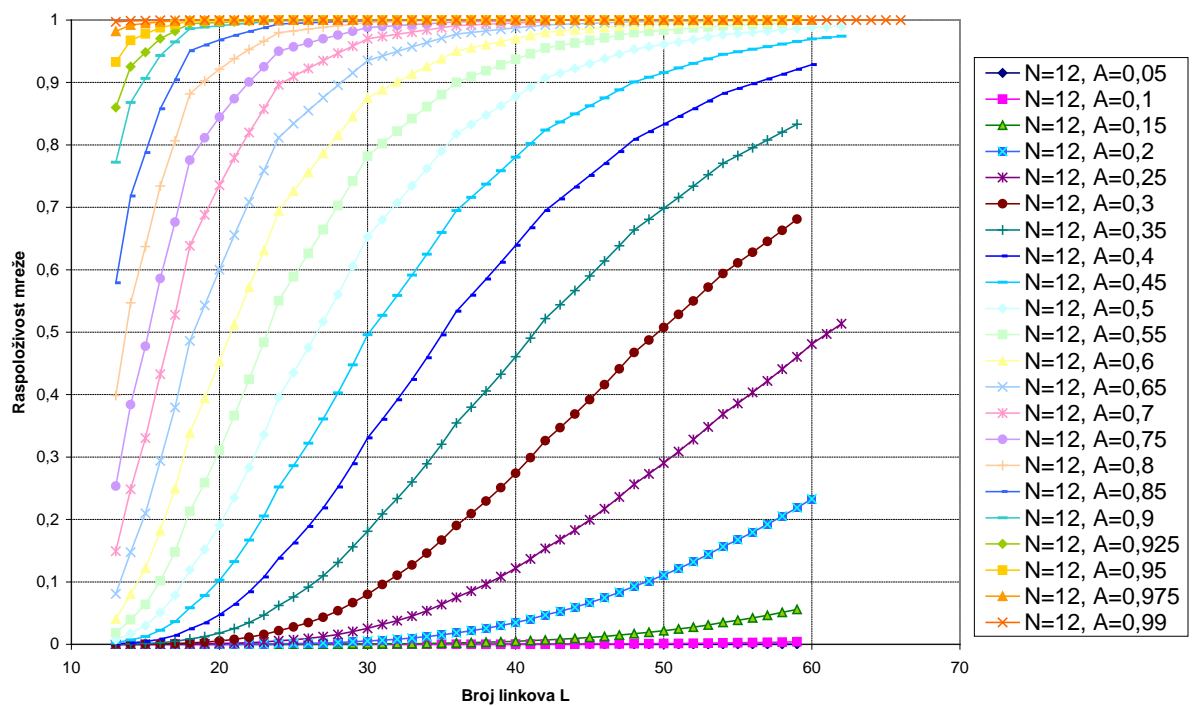
Slika 8.5 – Grafik promene maksimalne raspoloživosti za N=9 u zavisnosti od broja linkova L gde je raspoloživost linka A data kao parametar



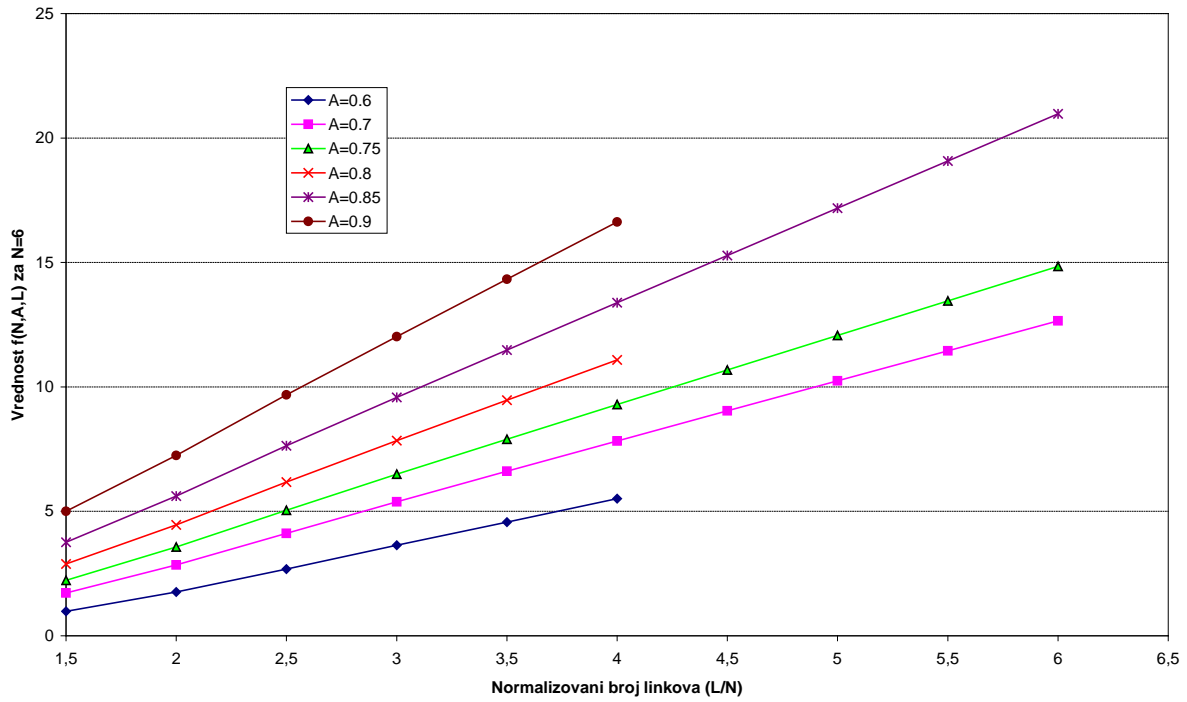
Slika 8.6 – Grafik promene maksimalne raspoloživosti za N=10 u zavisnosti od broja linkova L gde je raspoloživost linka A data kao parametar



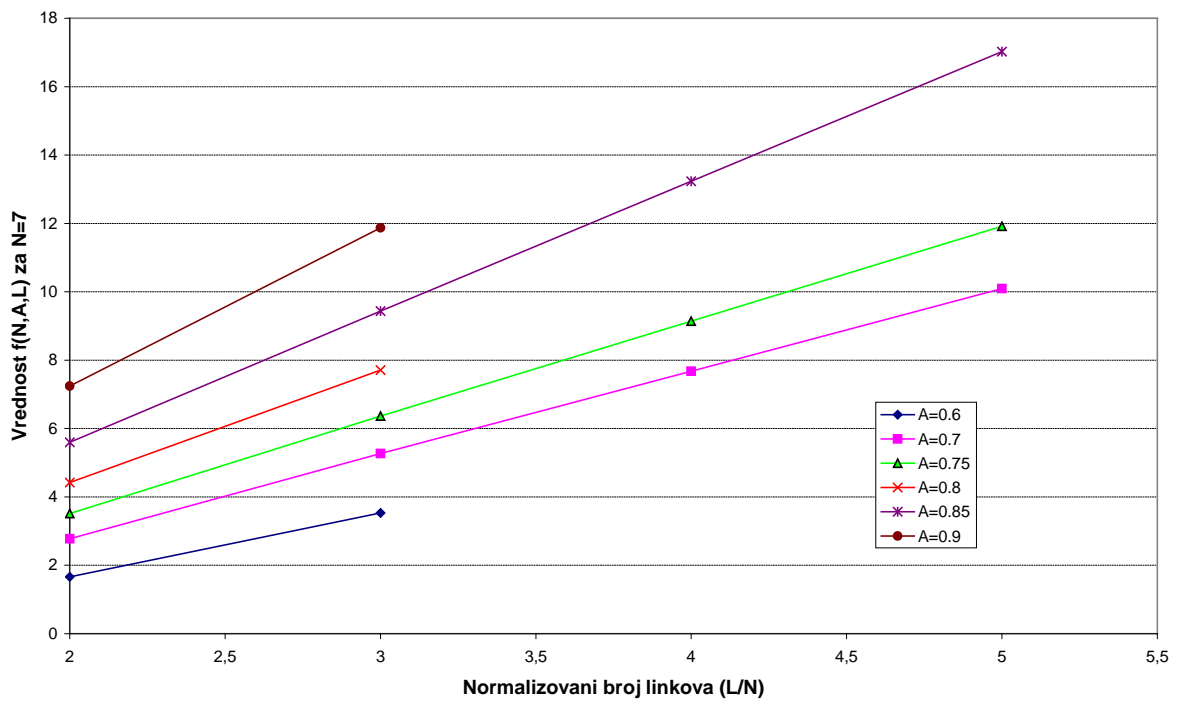
Slika 8.7 – Grafik promene maksimalne raspoloživosti za  $N=11$  u zavisnosti od broja linkova  $L$  gde je raspoloživost linka  $A$  data kao parametar



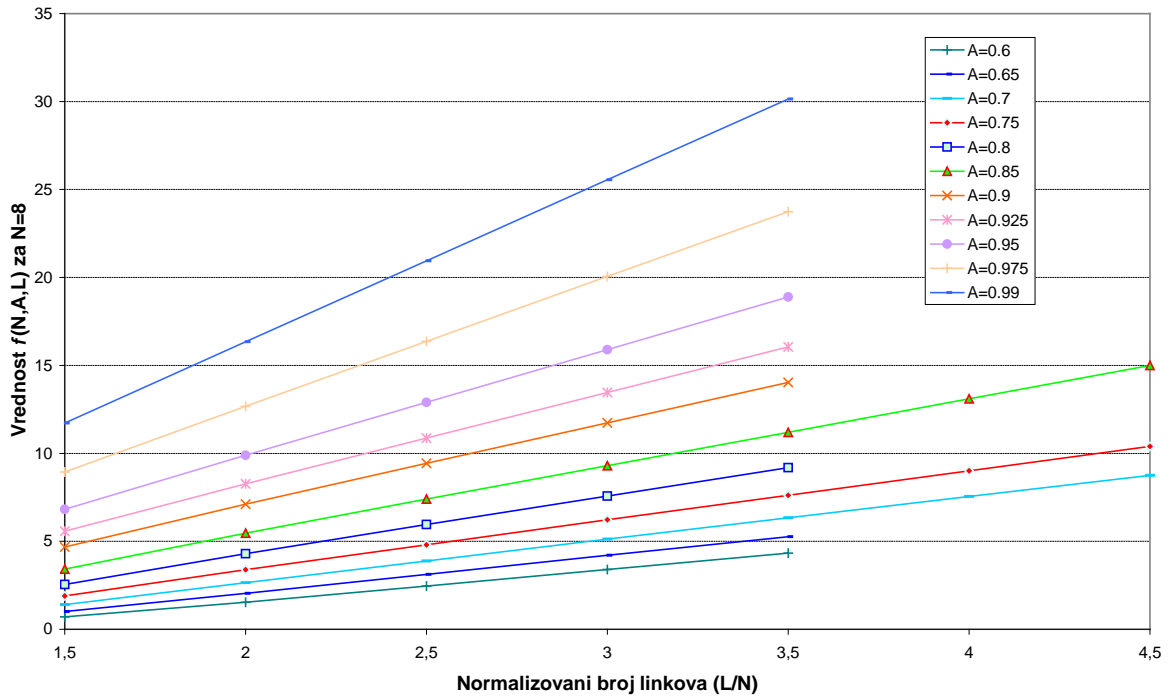
Slika 9.8 – Grafik promene maksimalne raspoloživosti za  $N=12$  u zavisnosti od broja linkova  $L$  gde je raspoloživost linka  $A$  data kao parametar



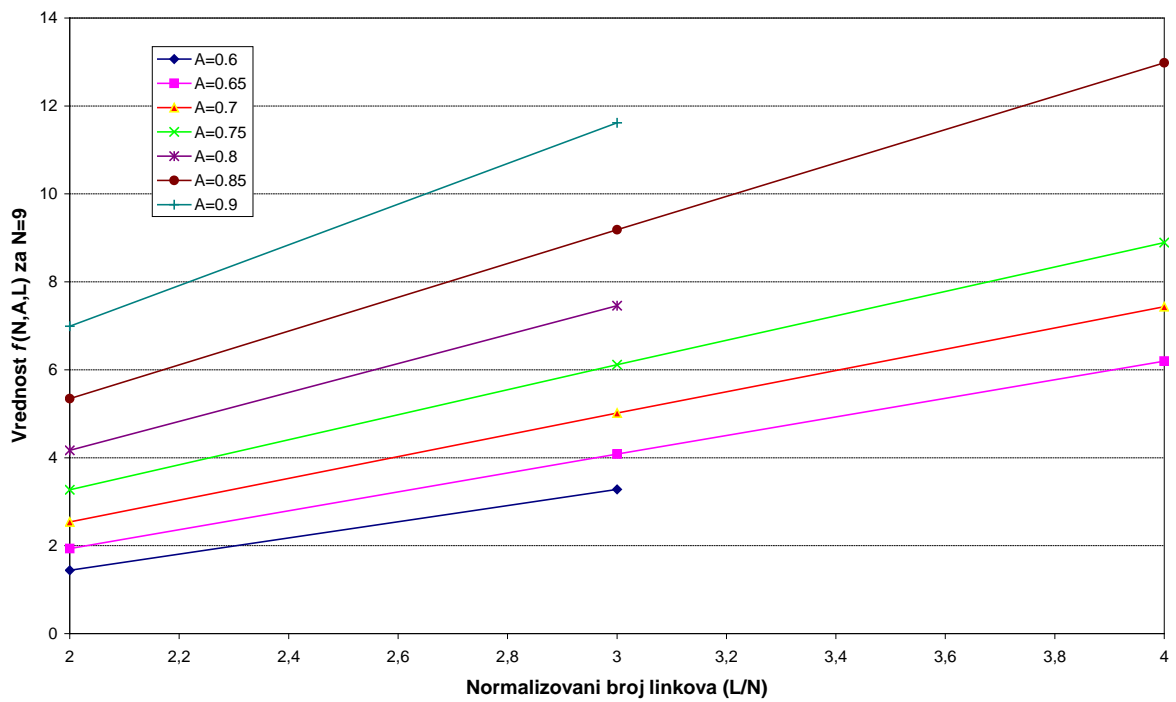
Slika 8.9 – Vrednosti funkcije  $f(N,A,L)$  za  $N=6$



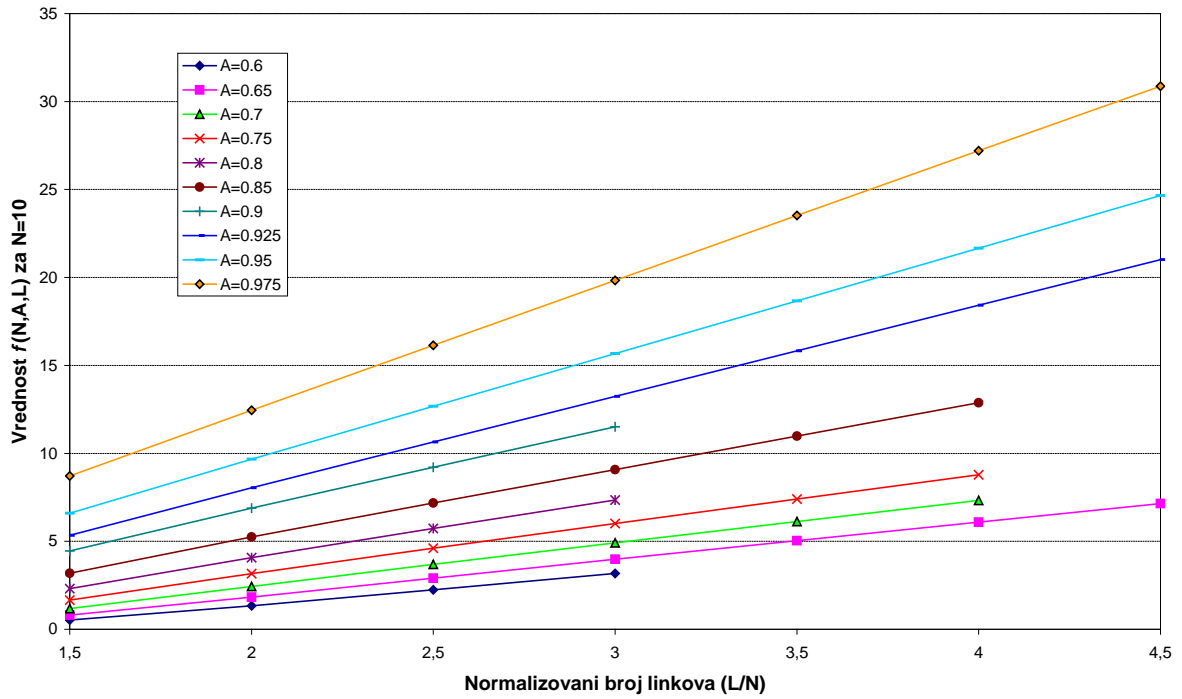
Slika 8.10 – Vrednosti funkcije  $f(N,A,L)$  za  $N=7$



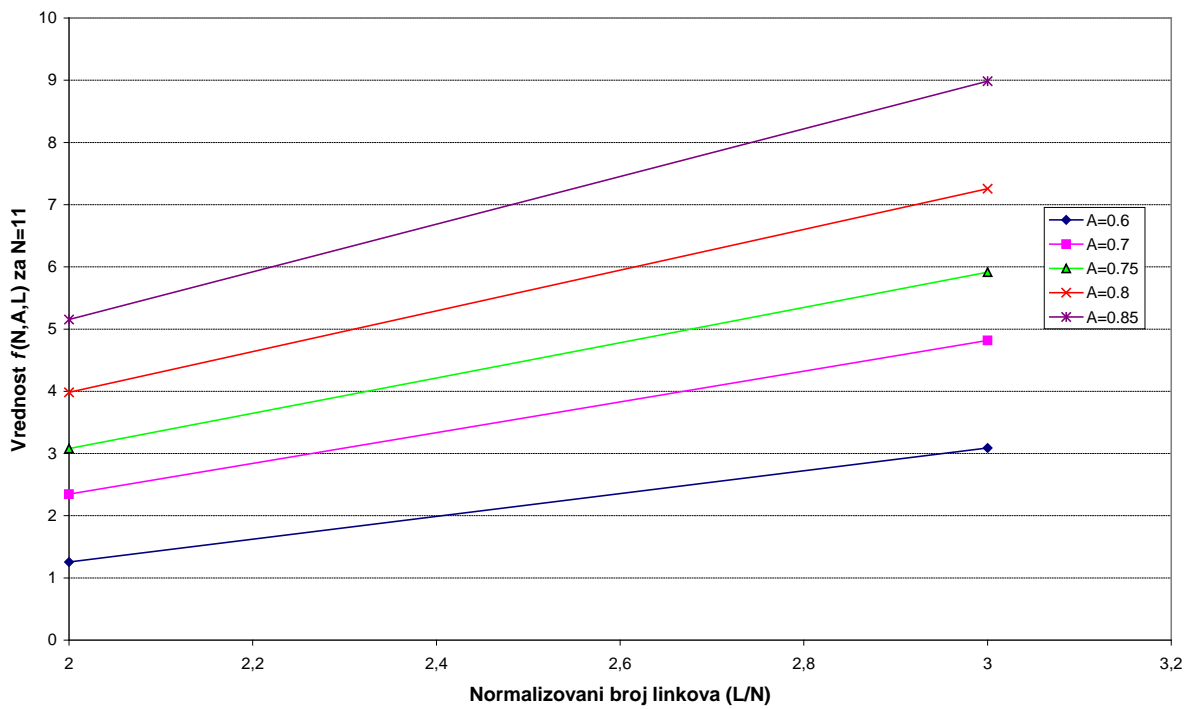
Slika 8.11 – Vrednosti funkcije  $f(N,A,L)$  za  $N=8$



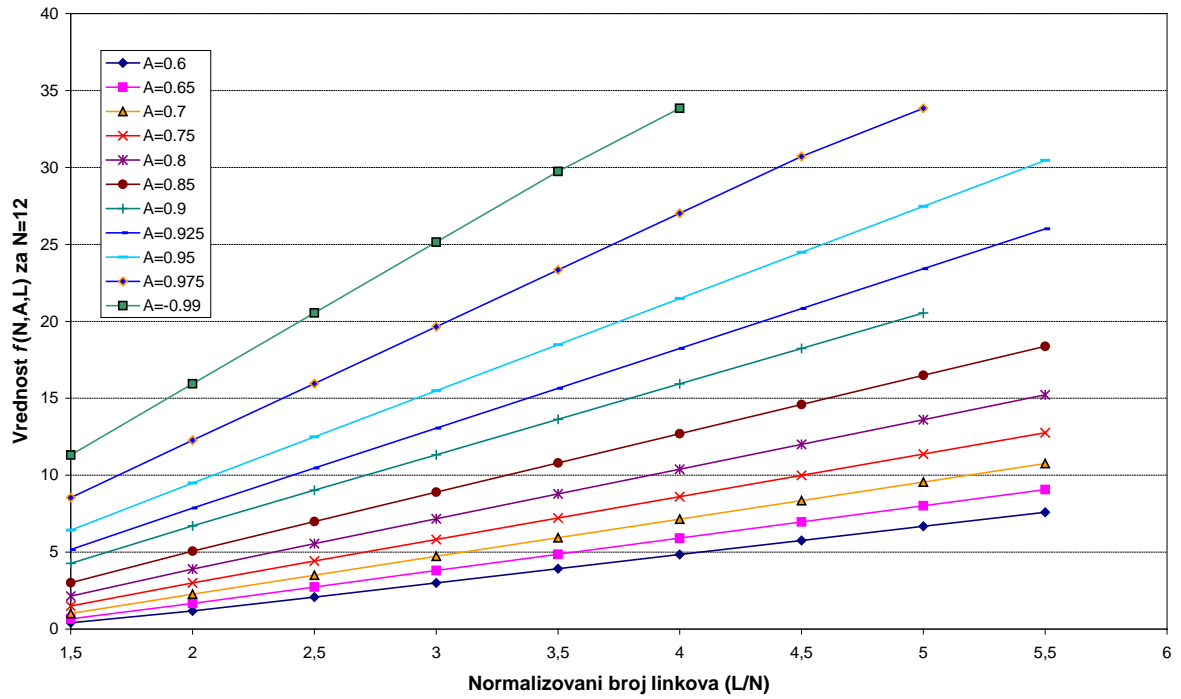
Slika 8.12 – Vrednosti funkcije  $f(N,A,L)$  za  $N=9$



Slika 8.13 – Vrednosti funkcije  $f(N,A,L)$  za  $N=10$



Slika 8.14 – Vrednosti funkcije  $f(N,A,L)$  za  $N=11$



Slika 8.15 – Vrednosti funkcije  $f(N,A,L)$  za  $N=12$

## 9 Prilog 2 – Numerički rezultati korišćeni u radu predstavljeni tabelarno

Tabela T-9.1 – Uporedni pregled tačnih i aproksimativnih vrednosti za maksimalnu raspoloživost između prelomnih tačaka za  $N=8$

$N$	$A$	$L$	$x=L/N$	$R$ tačno	$R$ aproksimativno	apsolutna greška aproksimacije	relativna greška aproksimacije
8	0,75	12	1,5	0,850438356	<del>0,850438356</del>		
		13	1,625	0,883548617	0,879338801	0,004209816	0,47646683%
		14	1,75	0,914214715	0,908239246	0,005975469	0,65361771%
		15	1,875	0,940579087	0,937139691	0,003439396	0,36566788%
		16	2	0,966040136	<del>0,966040136</del>		
		17	2,125	0,973185493	0,97247864	0,000706853	0,07263292%
		18	2,25	0,979661061	0,978917145	0,000743916	0,07593608%
		19	2,375	0,985869824	0,98535565	0,000514174	0,05215438%
		20	2,5	0,991794154	<del>0,991794154</del>		
		21	2,625	0,993486024	0,99335062	0,000135405	0,01362924%
		22	2,75	0,995040699	0,994907085	0,000133614	0,01342804%
		23	2,875	0,996540312	0,99646355	$7,67616 \cdot 10^{-5}$	0,00770281%
		24	3	0,998020015	<del>0,998020015</del>		
		25	3,125	0,99840173	0,99839231	$9,42043 \cdot 10^{-6}$	0,00094355%
		26	3,25	0,998773857	0,998764605	$9,25278 \cdot 10^{-6}$	0,00092641%
		27	3,375	0,999142427	0,999136899	$5,52798 \cdot 10^{-6}$	0,00055327%
		28	3,5	0,999509194	<del>0,999509194</del>		
		29	3,625	0,999602316	0,999601313	$1,00338 \cdot 10^{-6}$	0,00010038%
		30	3,75	0,999694398	0,999693432	$9,6566 \cdot 10^{-7}$	0,00009660%
		31	3,875	0,999786068	0,999785551	$5,17179 \cdot 10^{-7}$	0,00005173%
32	4	0,99987767	<del>0,99987767</del>				
33	4,125	0,999900652	0,999900616	$3,58006 \cdot 10^{-8}$	0,00000358%		
34	4,25	0,999923628	0,999923562	$6,61985 \cdot 10^{-8}$	0,00000662%		
35	4,375	0,999946543	0,999946508	$3,53824 \cdot 10^{-8}$	0,00000354%		
36	4,5	0,999969453	<del>0,999969453</del>				
8	0,8	12	1,5	0,922075791	<del>0,922075791</del>		
		13	1,625	0,941027335	0,938139076	0,002888258	0,30692606%
		14	1,75	0,958121304	0,954202361	0,003918943	0,40902367%
		15	1,875	0,972543805	0,970265647	0,002278158	0,23424734%
		16	2	0,986328932	<del>0,986328932</del>		
		17	2,125	0,989332316	0,989096261	0,000236055	0,02386001%
		18	2,25	0,992101917	0,991863591	0,000238326	0,02402233%
		19	2,375	0,994788011	0,994630921	0,000157089	0,01579123%
		20	2,5	0,997398251	<del>0,997398251</del>		
		21	2,625	0,997930092	0,997920289	$9,8023 \cdot 10^{-6}$	0,00098226%
		22	2,75	0,998454847	0,998442327	$1,25193 \cdot 10^{-5}$	0,00125387%
		23	2,875	0,998971875	0,998964365	$7,50916 \cdot 10^{-6}$	0,00075169%
		24	3	0,999486403	<del>0,999486403</del>		
		25	3,125	0,999589474	0,999589185	$2,88746 \cdot 10^{-7}$	0,00002889%
26	3,25	0,999692335	0,999691966	$3,68257 \cdot 10^{-7}$	0,00003684%		
27	3,375	0,999795015	0,999794748	$2,66566 \cdot 10^{-7}$	0,00002666%		



$N$	$A$	$L$	$x=L/N$	$R$ tačno	$R$ aproksimativno	apsolutna greška aproksimacije	relativna greška aproksimacije		
8	0,85	28	3,5	0,99989753	<del>0,99989753</del>				
		12	1,5	0,967503656	<del>0,967503656</del>				
		13	1,625	0,975902816	0,97457023	0,001332586	0,13654901%		
		14	1,75	0,983394681	0,981636804	0,001757877	0,17875600%		
		15	1,875	0,989723139	0,988703378	0,001019761	0,10303496%		
		16	2	0,995769953	<del>0,995769953</del>				
		17	2,125	0,996727984	0,996674434	$5,35501 \cdot 10^{-5}$	0,00537259%		
		18	2,25	0,997634092	0,997578916	$5,51766 \cdot 10^{-5}$	0,00553074%		
		19	2,375	0,998518852	0,998483397	$3,54555 \cdot 10^{-5}$	0,00355081%		
		20	2,5	0,999387878	<del>0,999387878</del>				
		21	2,625	0,999519263	0,999518102	$1,16064 \cdot 10^{-6}$	0,00011612%		
		22	2,75	0,999649828	0,999648326	$1,50202 \cdot 10^{-6}$	0,00015025%		
		23	2,875	0,999779449	0,99977855	$8,99417 \cdot 10^{-7}$	0,00008996%		
		24	3	0,999908774	<del>0,999908774</del>				
		25	3,125	0,999928182	0,999928163	$1,95154 \cdot 10^{-8}$	0,00000195%		
		26	3,25	0,999947577	0,999947551	$2,53297 \cdot 10^{-8}$	0,00000253%		
		27	3,375	0,999966959	0,99996694	$1,8607 \cdot 10^{-8}$	0,00000186%		
		28	3,5	0,999986329	<del>0,999986329</del>				
		29	3,625	0,999989234	0,999989234	$3,98958 \cdot 10^{-10}$	0,00000004%		
		30	3,75	0,999992139	0,999992139	$5,30519 \cdot 10^{-10}$	0,00000005%		
		31	3,875	0,999995044	0,999995044	$3,96885 \cdot 10^{-10}$	0,00000004%		
		32	4	0,999997949	<del>0,999997949</del>				
		33	4,125	0,999998385	0,999998385	$9,73652 \cdot 10^{-11}$	0,00000001%		
		34	4,25	0,999998821	0,999998821	$1,88357 \cdot 10^{-10}$	0,00000002%		
		35	4,375	0,999999257	0,999999257	$9,71837 \cdot 10^{-11}$	0,00000001%		
		36	4,5	0,999999692	<del>0,999999692</del>				
		8	0,9	12	1,5	0,990744199	<del>0,990744199</del>		
				13	1,625	0,993198818	0,992853722	0,000345097	0,03474599%
				14	1,75	0,995411802	0,994963245	0,000448558	0,04506254%
				15	1,875	0,997331897	0,997072768	0,000259129	0,02598223%
				16	2	0,999182291	<del>0,999182291</del>		
				17	2,125	0,999372385	0,999366669	$5,71599 \cdot 10^{-6}$	0,00057196%
				18	2,25	0,999557052	0,999551048	$6,0043 \cdot 10^{-6}$	0,00060070%
				19	2,375	0,999739214	0,999735426	$3,78742 \cdot 10^{-6}$	0,00037884%
				20	2,5	0,999919805	<del>0,999919805</del>		
				21	2,625	0,999937905	0,999937853	$5,18761 \cdot 10^{-8}$	0,00000519%
22	2,75			0,99995597	0,999955902	$6,84114 \cdot 10^{-8}$	0,00000684%		
23	2,875			0,999973991	0,99997395	$4,10744 \cdot 10^{-8}$	0,00000411%		
24	3			0,999991998	<del>0,999991998</del>				
25	3,125			0,999993799	0,999993799	$4,06809 \cdot 10^{-10}$	0,00000004%		
26	3,25			0,9999956	0,999995599	$5,35775 \cdot 10^{-10}$	0,00000005%		
27	3,375			0,9999974	0,999997399	$3,98143 \cdot 10^{-10}$	0,00000004%		
28	3,5	0,9999992	<del>0,9999992</del>						

Tabela T-9.2 – Uporedni pregled tačnih i aproksimativnih vrednosti za maksimalnu raspoloživost između prelomnih tačaka za  $N=10$

$N$	$A$	$L$	$x=L/N$	$R$ tačno	$R$ aproksimativno	apsolutna greška aproksimacije	relativna greška aproksimacije
10	0,75	15	1,5	0,810716635	<del>0,810716635</del>		
		16	1,6	0,846755818	0,840159141	0,006596676	0,77905299%
		17	1,7	0,878681932	0,869601647	0,009080285	1,03339840%
		18	1,8	0,907129698	0,899044154	0,008085544	0,89133275%
		19	1,9	0,933144853	0,92848666	0,004658193	0,49919288%
		20	2	0,957929167	<del>0,957929167</del>		
		21	2,1	0,964974657	0,964345052	0,000629606	0,06524582%
		22	2,2	0,971596744	0,970760937	0,000835807	0,08602411%
		23	2,3	0,977950179	0,977176822	0,000773357	0,07907943%
		24	2,4	0,983986271	0,983592707	0,000393564	0,03999691%
		25	2,5	0,990008592	<del>0,990008592</del>		
		26	2,6	0,991553471	0,991515555	$3,79163 \cdot 10^{-5}$	0,00382393%
		27	2,7	0,993076069	0,993022518	$5,35508 \cdot 10^{-5}$	0,00539242%
		28	2,8	0,994582437	0,994529481	$5,29558 \cdot 10^{-5}$	0,00532443%
		29	2,9	0,996065073	0,996036444	$2,86287 \cdot 10^{-5}$	0,00287417%
		30	3	0,997543408	<del>0,997543408</del>		
		31	3,1	0,997914563	0,997912446	$2,11682 \cdot 10^{-6}$	0,00021212%
		32	3,2	0,998284746	0,998281485	$3,26165 \cdot 10^{-6}$	0,00032672%
		33	3,3	0,998653673	0,998650523	$3,14975 \cdot 10^{-6}$	0,00031540%
		34	3,4	0,999021403	0,999019562	$1,84176 \cdot 10^{-6}$	0,00018436%
35	3,5	0,9993886	<del>0,9993886</del>				
36	3,6	0,999480475	0,999480348	$1,26884 \cdot 10^{-7}$	0,00001270%		
37	3,7	0,999572293	0,999572095	$1,97501 \cdot 10^{-7}$	0,00001976%		
38	3,8	0,999664038	0,999663843	$1,94985 \cdot 10^{-7}$	0,00001951%		
39	3,9	0,999755713	0,99975559	$1,22334 \cdot 10^{-7}$	0,00001224%		
40	4	0,999847338	<del>0,999847338</del>				
10	0,8	15	1,5	0,90085221	<del>0,90085221</del>		
		16	1,6	0,921665622	0,917278166	0,004387456	0,47603555%
		17	1,7	0,939634047	0,933704121	0,005929926	0,63108885%
		18	1,8	0,9555413	0,950130077	0,005411223	0,56629927%
		19	1,9	0,969368099	0,966556032	0,002812066	0,29009273%
		20	2	0,982981988	<del>0,982981988</del>		
		21	2,1	0,985979046	0,985735877	0,000243169	0,02466266%
		22	2,2	0,988781437	0,988489766	0,000291672	0,02949808%
		23	2,3	0,991532739	0,991243655	0,000289084	0,02915531%
		24	2,4	0,99414569	0,993997544	0,000148147	0,01490191%
		25	2,5	0,996751432	<del>0,996751432</del>		
		26	2,6	0,997283004	0,99727276	$1,02442 \cdot 10^{-5}$	0,00102721%
		27	2,7	0,997807493	0,997794088	$1,34049 \cdot 10^{-5}$	0,00134343%
		28	2,8	0,998328043	0,998315416	$1,26267 \cdot 10^{-5}$	0,00126478%
		29	2,9	0,99884364	0,998836744	$6,89572 \cdot 10^{-6}$	0,00069037%
30	3	0,999358072	<del>0,999358072</del>				
10	0,85	15	1,5	0,958699028	<del>0,958699028</del>		
		16	1,6	0,967845979	0,965907221	0,001938757	0,20031673%
		17	1,7	0,975724146	0,973115415	0,002608731	0,26736355%
		18	1,8	0,982662804	0,980323609	0,002339194	0,23804650%
		19	1,9	0,988733863	0,987531803	0,001202059	0,12157562%

$N$	$A$	$L$	$x=L/N$	$R$ tačno	$R$ aproksimativno	apsolutna greška aproksimacije	relativna greška aproksimacije
		20	2	0,994739997	<del>0,994739997</del>		
		21	2,1	0,995685863	0,995639134	$4,67285 \cdot 10^{-5}$	0,00469309%
		22	2,2	0,996600578	0,996538271	$6,2307 \cdot 10^{-5}$	0,00625195%
		23	2,3	0,997498126	0,997437409	$6,07177 \cdot 10^{-5}$	0,00608700%
		24	2,4	0,998367082	0,998336546	$3,05363 \cdot 10^{-5}$	0,00305862%
		25	2,5	0,999235683	<del>0,999235683</del>		
		26	2,6	0,999366607	0,99936574	$8,66951 \cdot 10^{-7}$	0,00008675%
		27	2,7	0,999497093	0,999495798	$1,29556 \cdot 10^{-6}$	0,00012962%
		28	2,8	0,99962721	0,999625855	$1,35461 \cdot 10^{-6}$	0,00013551%
		29	2,9	0,999756654	0,999755913	$7,41379 \cdot 10^{-7}$	0,00007416%
		30	3	0,99988597	<del>0,99988597</del>		
		31	3,1	0,999905377	0,999905358	$1,90045 \cdot 10^{-8}$	0,00000190%
		32	3,2	0,999924777	0,999924747	$3,08602 \cdot 10^{-8}$	0,00000309%
		33	3,3	0,999944165	0,999944135	$3,04702 \cdot 10^{-8}$	0,00000305%
		34	3,4	0,999963541	0,999963523	$1,81117 \cdot 10^{-8}$	0,00000181%
		35	3,5	0,999982911	<del>0,999982911</del>		
		36	3,6	0,999985817	0,999985816	$4,64455 \cdot 10^{-10}$	0,00000005%
		37	3,7	0,999988722	0,999988721	$7,29082 \cdot 10^{-10}$	0,00000007%
		38	3,8	0,999991627	0,999991627	$7,27313 \cdot 10^{-10}$	0,00000007%
		39	3,9	0,999994532	0,999994532	$4,61337 \cdot 10^{-10}$	0,00000005%
40	4	0,999997437	<del>0,999997437</del>				
10	0,9	15	1,5	0,988301144	<del>0,988301144</del>		
		16	1,6	0,990913133	0,990437058	0,000476075	0,04804407%
		17	1,7	0,993216968	0,992572972	0,000643996	0,06483938%
		18	1,8	0,995283382	0,994708886	0,000574496	0,05772185%
		19	1,9	0,997137659	0,9968448	0,000292859	0,02936993%
		20	2	0,998980714	<del>0,998980714</del>		
		21	2,1	0,999169337	0,999164529	$4,80833 \cdot 10^{-6}$	0,00048123%
		22	2,2	0,999354809	0,999348343	$6,4656 \cdot 10^{-6}$	0,00064698%
		23	2,3	0,999538631	0,999532158	$6,47291 \cdot 10^{-6}$	0,00064759%
		24	2,4	0,999719216	0,999715973	$3,24272 \cdot 10^{-6}$	0,00032436%
		25	2,5	0,999899788	<del>0,999899788</del>		
		26	2,6	0,999917868	0,99991783	$3,84745 \cdot 10^{-8}$	0,00000385%
		27	2,7	0,999935931	0,999935872	$5,90802 \cdot 10^{-8}$	0,00000591%
		28	2,8	0,999953977	0,999953914	$6,34633 \cdot 10^{-8}$	0,00000635%
		29	2,9	0,999971991	0,999971956	$3,49467 \cdot 10^{-8}$	0,00000349%
30	3	0,999989998	<del>0,999989998</del>				

Tabela T-9.3 – Uporedni pregled tačnih i aproksimativnih vrednosti za maksimalnu raspoloživost između prelomnih tačaka za  $N=12$

$N$	$A$	$L$	$x=L/N$	$R$ tačno	$R$ aproksimativno	apsolutna greška aproksimacije	relativna greška aproksimacije
12	0,75	18	1,5	0,775606616	<del>0,775606616</del>		
		19	1,583333	0,811459049	0,804665717	0,006793332	0,83717501%
		20	1,666667	0,844481027	0,833724818	0,010756209	1,27370646%
		21	1,75	0,874034296	0,862783919	0,011250377	1,28717798%
		22	1,833333	0,900857101	0,891843021	0,009014081	1,00061163%
		23	1,916667	0,92523815	0,920902122	0,004336028	0,46863910%
		24	2	0,949961223	<del>0,949961223</del>		
		25	2,083333	0,956883041	0,95630705	0,000575991	0,06019449%
		26	2,166667	0,963451801	0,962652877	0,000798924	0,08292307%
		27	2,25	0,969880836	0,968998704	0,000882133	0,09095268%
		28	2,333333	0,976029759	0,975344531	0,000685229	0,07020573%
		29	2,416667	0,98202721	0,981690358	0,000336852	0,03430173%
		30	2,5	0,988036184	<del>0,988036184</del>		
		31	2,583333	0,989575127	0,989539081	$3,60464 \cdot 10^{-5}$	0,00364262%
		32	2,666667	0,991098403	0,991041977	$5,64258 \cdot 10^{-5}$	0,00569326%
		33	2,75	0,99260271	0,992544874	$5,78364 \cdot 10^{-5}$	0,00582674%
		34	2,833333	0,994096252	0,99404777	$4,84824 \cdot 10^{-5}$	0,00487703%
		35	2,916667	0,995576489	0,995550666	$2,58225 \cdot 10^{-5}$	0,00259373%
		36	3	0,997053563	<del>0,997053563</del>		
		37	3,083333	0,997424244	0,997422365	$1,87872 \cdot 10^{-6}$	0,00018836%
		38	3,166667	0,9977942	0,997791168	$3,0324 \cdot 10^{-6}$	0,00030391%
		39	3,25	0,99816348	0,99815997	$3,5092 \cdot 10^{-6}$	0,00035157%
		40	3,333333	0,99853223	0,998528773	$3,45673 \cdot 10^{-6}$	0,00034618%
		41	3,416667	0,998899243	0,998897575	$1,66709 \cdot 10^{-6}$	0,00016689%
42	3,5	0,999266378	<del>0,999266378</del>				
12	0,8	18	1,5	0,881825918	<del>0,881825918</del>		
		19	1,583333	0,90271312	0,898148172	0,004564948	0,50569203%
		20	1,666667	0,921414669	0,914470426	0,006944243	0,75365018%
		21	1,75	0,937918928	0,93079268	0,007126248	0,75979360%
		22	1,833333	0,95277868	0,947114935	0,005663746	0,59444505%
		23	1,916667	0,966229918	0,963437189	0,002792729	0,28903357%
		24	2	0,979759443	<del>0,979759443</del>		
		25	2,083333	0,982678097	0,982484647	0,00019345	0,01968597%
		26	2,166667	0,985488353	0,985209851	0,000278502	0,02826028%
		27	2,25	0,988246929	0,987935055	0,000311874	0,03155829%
		28	2,333333	0,990903157	0,990660259	0,000242899	0,02451285%
		29	2,416667	0,993505953	0,993385463	0,000120491	0,01212781%
30	2,5	0,996110667	<del>0,996110667</del>				
12	0,85	18	1,5	0,950723224	<del>0,950723224</del>		
		19	1,583333	0,959866509	0,957887413	0,001979096	0,20618448%
		20	1,666667	0,967993553	0,965051602	0,002941951	0,30392255%
		21	1,75	0,97521176	0,972215791	0,002995969	0,30721213%
		22	1,833333	0,981756855	0,97937998	0,002376875	0,24210425%
		23	1,916667	0,987726907	0,986544169	0,001182737	0,11974334%
		24	2	0,993708358	<del>0,993708358</del>		
		25	2,083333	0,994645455	0,994604142	$4,1313 \cdot 10^{-5}$	0,00415354%
26	2,166667	0,995561662	0,995499926	$6,1736 \cdot 10^{-5}$	0,00620113%		

$N$	$A$	$L$	$x=L/N$	$R$ tačno	$R$ aproksimativno	apsolutna greška aproksimacije	relativna greška aproksimacije
		27	2,25	0,996465963	0,996395709	$7,02542 \cdot 10^{-5}$	0,00705033%
		28	2,333333	0,997346434	0,997291493	$5,49415 \cdot 10^{-5}$	0,00550877%
		29	2,416667	0,998214639	0,998187276	$2,73633 \cdot 10^{-5}$	0,00274122%
		30	2,5	0,99908306	<del>0,99908306</del>		
		31	2,583333	0,999213915	0,999213078	$8,37131 \cdot 10^{-7}$	0,00008378%
		32	2,666667	0,999344503	0,999343096	$1,4068 \cdot 10^{-6}$	0,00014077%
		33	2,75	0,999474603	0,999473114	$1,48898 \cdot 10^{-6}$	0,00014898%
		34	2,833333	0,999604428	0,999603132	$1,29603 \cdot 10^{-6}$	0,00012965%
		35	2,916667	0,999733857	0,99973315	$7,07592 \cdot 10^{-7}$	0,00007078%
		36	3	0,999863168	<del>0,999863168</del>		
		37	3,083333	0,999882574	0,999882555	$1,82267 \cdot 10^{-8}$	0,00000182%
		38	3,166667	0,999901973	0,999901943	$3,01166 \cdot 10^{-8}$	0,00000301%
		39	3,25	0,999921366	0,99992133	$3,57797 \cdot 10^{-8}$	0,00000358%
		40	3,333333	0,999940754	0,999940718	$3,56077 \cdot 10^{-8}$	0,00000356%
		41	3,416667	0,999960123	0,999960106	$1,76212 \cdot 10^{-8}$	0,00000176%
42	3,5	0,999979493	<del>0,999979493</del>				
12	0,9	18	1,5	0,986049253	<del>0,986049253</del>		
		19	1,583333	0,988635065	0,988170806	0,000464259	0,04695956%
		20	1,666667	0,990978485	0,99029236	0,000686125	0,06923713%
		21	1,75	0,993116837	0,992413913	0,000702924	0,07077962%
		22	1,833333	0,995096877	0,994535466	0,000561411	0,05641771%
		23	1,916667	0,99693734	0,996657019	0,000280321	0,02811818%
		24	2	0,998778572	<del>0,998778572</del>		
		25	2,083333	0,998966319	0,998962102	$4,21703 \cdot 10^{-6}$	0,00042214%
		26	2,166667	0,99915217	0,999145632	$6,53847 \cdot 10^{-6}$	0,00065440%
		27	2,25	0,999336719	0,999329162	$7,55735 \cdot 10^{-6}$	0,00075624%
		28	2,333333	0,999518627	0,999512691	$5,93625 \cdot 10^{-6}$	0,00059391%
		29	2,416667	0,999699184	0,999696221	$2,96286 \cdot 10^{-6}$	0,00029638%
30	2,5	0,999879751	<del>0,999879751</del>				

Tabela T-9.4 - Uporedni pregled tačnih i aproksimativnih vrednosti za maksimalnu raspoloživost između prelomnih tačaka za  $N=9$

$N$	$A$	$L$	$x=L/N$	$R$ tačno	$R$ aproksimativno	apsolutna greška aproksimacije	relativna greška aproksimacije
9	0,75	14	1,555556	0,848173432	<del>0,848173432</del>		
		15	1,666667	0,881316282	0,873487747	0,007828535	0,88827761%
		16	1,777778	0,91084177	0,898802061	0,012039709	1,32182224%
		17	1,888889	0,936961471	0,924116376	0,012845095	1,37093095%
		18	2	0,962087848	<del>0,962087848</del>		
		19	2,111111	0,968965541	0,967840346	0,001125195	0,11612334%
		20	2,222222	0,975642188	0,973592844	0,002049344	0,21005073%
		21	2,333333	0,981924632	0,979345342	0,00257929	0,26267699%
		22	2,444444	0,987974089	<del>0,987974089</del>		
		23	2,555556	0,991776199	<del>0,991776199</del>		
		24	2,666667	0,993315365	0,993112263	0,000203101	0,02044681%
		25	2,777778	0,994819603	0,994448328	0,000371275	0,03732087%
		26	2,888889	0,996309521	0,995784393	0,000525128	0,05270736%
		27	3	0,99778849	<del>0,99778849</del>		
		28	3,111111	0,998159817	0,998116844	$4,29728 \cdot 10^{-5}$	0,00430521%
		29	3,222222	0,998529886	0,998445199	$8,46864 \cdot 10^{-5}$	0,00848111%
		30	3,333333	0,998898585	0,998773554	0,000125031	0,01251688%
		31	3,444444	0,999266086	<del>0,999266086</del>		
32	3,555556	0,999495669	<del>0,999495669</del>				
33	3,666667	0,999587512	0,99957721	$1,03025 \cdot 10^{-5}$	0,00103068%		
34	3,777778	0,99967928	0,999658751	$2,05295 \cdot 10^{-5}$	0,00205360%		
35	3,888889	0,999770976	0,999740292	$3,06845 \cdot 10^{-5}$	0,00306915%		
36	4	0,999862603	<del>0,999862603</del>				
9	0,8	14	1,555556	0,921742931	<del>0,921742931</del>		
		15	1,666667	0,940526971	0,935696822	0,004830149	0,51355772%
		16	1,777778	0,956926015	0,949650713	0,007275302	0,76027846%
		17	1,888889	0,970955783	0,963604603	0,00735118	0,75710761%
		18	2	0,984535439	<del>0,984535439</del>		
		19	2,111111	0,98759573	0,987032689	0,000563041	0,05701133%
		20	2,222222	0,99043236	0,989529939	0,000902421	0,09111384%
		21	2,333333	0,993160583	0,992027189	0,001133394	0,11411989%
		22	2,444444	0,995773064	<del>0,995773064</del>		
		23	2,555556	0,997344087	<del>0,997344087</del>		
		24	2,666667	0,99787122	0,997805897	$6,53223 \cdot 10^{-5}$	0,00654617%
		25	2,777778	0,998391106	0,998267708	0,000123398	0,01235965%
		26	2,888889	0,998907807	0,998729519	0,000178288	0,01784826%
		27	3	0,999422235	<del>0,999422235</del>		
9	0,85	14	1,555556	0,967674509	<del>0,967674509</del>		
		15	1,666667	0,975914347	0,973796913	0,002117434	0,21696920%
		16	1,777778	0,983102977	0,979919317	0,003183659	0,32383784%
		17	1,888889	0,989234936	0,986041721	0,003193215	0,32279644%
		18	2	0,995225327	<del>0,995225327</del>		
		19	2,111111	0,996194251	0,996036901	0,00015735	0,01579516%
		20	2,222222	0,997113006	0,996848474	0,000264532	0,02652978%
		21	2,333333	0,998008163	0,997660048	0,000348115	0,03488099%
		22	2,444444	0,998877408	<del>0,998877408</del>		
23	2,555556	0,999377584	<del>0,999377584</del>				

$N$	$A$	$L$	$x=L/N$	$R$ tačno	$R$ aproksimativno	apsolutna greška aproksimacije	relativna greška aproksimacije
		24	2,666667	0,99950845	0,999493092	$1,53576 \cdot 10^{-5}$	0,00153652%
		25	2,777778	0,999638454	0,999608601	$2,98536 \cdot 10^{-5}$	0,00298644%
		26	2,888889	0,999768052	0,999724109	$4,39433 \cdot 10^{-5}$	0,00439535%
		27	3	0,999897372			
		28	3,111111	0,999916779	0,999914608	$2,17148 \cdot 10^{-6}$	0,00021717%
		29	3,222222	0,999936177	0,999931844	$4,33272 \cdot 10^{-6}$	0,00043330%
		30	3,333333	0,999955562	0,99994908	$6,48138 \cdot 10^{-6}$	0,00064817%
		31	3,444444	0,999974935			
		32	3,555556	0,999986073			
		33	3,666667	0,999988978	0,999988655	$3,23196 \cdot 10^{-7}$	0,00003232%
		34	3,777778	0,999991884	0,999991237	$6,46123 \cdot 10^{-7}$	0,00006461%
		35	3,888889	0,999994789	0,99999382	$9,68785 \cdot 10^{-7}$	0,00009688%
		36	4	0,999997693			
9	0,9	14	1,555556	0,990842537			
		15	1,666667	0,993237312	0,99267279	0,000564522	0,05683657%
		16	1,777778	0,995373083	0,994503043	0,000870041	0,08740849%
		17	1,888889	0,997236743	0,996333296	0,000903447	0,09059504%
		18	2	0,999078676			
		19	2,111111	0,999269744	0,999243305	$2,64388 \cdot 10^{-5}$	0,00264582%
		20	2,222222	0,999455529	0,999407934	$4,75952 \cdot 10^{-5}$	0,00476212%
		21	2,333333	0,999638909	0,999572563	$6,63457 \cdot 10^{-5}$	0,00663697%
		22	2,444444	0,999819507			
		23	2,555556	0,999918851			
		24	2,666667	0,99993693	0,999934884	$2,04648 \cdot 10^{-6}$	0,00020466%
		25	2,777778	0,99995497	0,999950916	$4,05407 \cdot 10^{-6}$	0,00040542%
		26	2,888889	0,999972991	0,999966949	$6,04186 \cdot 10^{-6}$	0,00060420%
27	3	0,999990998					

Tabela T-9.5 - Uporedni pregled tačnih i aproksimativnih vrednosti za maksimalnu raspoloživost između prelomnih tačaka za  $N=11$

$N$	$A$	$L$	$x=L/N$	$R$ tačno	$R$ aproksimativno	apsolutna greška aproksimacije	relativna greška aproksimacije
11	0,75	17	1,545455	0,811775263	<del>0,811775263</del>		
		18	1,636364	0,846082718	0,837626652	0,008456066	0,99943726%
		19	1,727273	0,877414071	0,863478041	0,013936029	1,58830703%
		20	1,818182	0,904496089	0,889329431	0,015166658	1,67680746%
		21	1,909091	0,92905264	0,91518082	0,01387182	1,49311458%
		22	2	0,953957904	<del>0,953957904</del>		
		23	2,090909	0,960915296	0,959791445	0,001123851	0,11695626%
		24	2,181818	0,967519704	0,965624987	0,001894717	0,19583244%
		25	2,272727	0,973914807	0,971458528	0,002456279	0,25220675%
		26	2,363636	0,980041147	0,977292069	0,002749077	0,28050630%
		27	2,454545	0,986042382	<del>0,986042382</del>		
		28	2,545455	0,989815238	<del>0,989815238</del>		
		29	2,636364	0,991338668	0,99117584	0,000162828	0,01642507%
		30	2,727273	0,99285533	0,992536442	0,000318887	0,03211821%
		31	2,818182	0,994345764	0,993897045	0,000448719	0,04512704%
		32	2,909091	0,995821287	0,995257647	0,000563639	0,05660045%
		33	3	0,997298551	<del>0,997298551</del>		
		34	3,090909	0,997669438	0,997634068	$3,537 \cdot 10^{-5}$	0,00354526%
35	3,181818	0,998039499	0,997969584	$6,99149 \cdot 10^{-5}$	0,00700523%		
36	3,272727	0,998408548	0,998305101	0,000103448	0,01036126%		
37	3,363636	0,998776789	0,998640617	0,000136172	0,01363391%		
38	3,454545	0,999143892	<del>0,999143892</del>				
11	0,8	17	1,545455	0,902282606	<del>0,902282606</del>		
		18	1,636364	0,921865458	0,91666906	0,005196398	0,56368296%
		19	1,727273	0,939373532	0,931055513	0,008318018	0,88548572%
		20	1,818182	0,954315587	0,945441967	0,00887362	0,92984128%
		21	1,909091	0,967828235	0,95982842	0,007999815	0,82657385%
		22	2	0,9814081	<del>0,9814081</del>		
		23	2,090909	0,984335159	0,983902744	0,000432416	0,04392971%
		24	2,181818	0,987144934	0,986397388	0,000747546	0,07572813%
		25	2,272727	0,989911545	0,988892031	0,001019514	0,10299038%
		26	2,363636	0,992520913	0,991386675	0,001134238	0,11427846%
27	2,454545	0,995128641	<del>0,995128641</del>				
11	0,85	17	1,545455	0,959536667	<del>0,959536667</del>		
		18	1,636364	0,968074396	0,96584408	0,002230316	0,23038680%
		19	1,727273	0,975695067	0,972151493	0,003543574	0,36318456%
		20	1,818182	0,98225293	0,978458906	0,003794024	0,38625732%
		21	1,909091	0,988237329	0,984766319	0,00347101	0,35123241%
		22	2	0,994227439	<del>0,994227439</del>		
		23	2,090909	0,995165711	0,995045169	0,000120541	0,01211270%
		24	2,181818	0,996081818	0,995862899	0,000218919	0,02197800%
		25	2,272727	0,996987311	0,99668063	0,000306682	0,03076086%
		26	2,363636	0,997856243	0,99749836	0,000357884	0,03586524%
		27	2,454545	0,998724955	<del>0,998724955</del>		
		28	2,545455	0,999224865	<del>0,999224865</del>		
29	2,636364	0,999355702	0,999342993	$1,2709 \cdot 10^{-5}$	0,00127172%		



$N$	$A$	$L$	$x=L/N$	$R$ tačno	$R$ aproksimativno	apsolutna greška aproksimacije	relativna greška aproksimacije
		30	2,727273	0,999485977	0,999461121	$2,48563 \cdot 10^{-5}$	0,00248691%
		31	2,818182	0,999615821	0,999579249	$3,65723 \cdot 10^{-5}$	0,00365864%
		32	2,909091	0,999745257	0,999697377	$4,78796 \cdot 10^{-5}$	0,00478918%
		33	3	0,999874569			
		34	3,090909	0,999893975	0,999892196	$1,77943 \cdot 10^{-6}$	0,00017796%
		35	3,181818	0,999913375	0,999909823	$3,55229 \cdot 10^{-6}$	0,00035526%
		36	3,272727	0,999932766	0,99992745	$5,31583 \cdot 10^{-6}$	0,00053162%
		37	3,363636	0,999952147	0,999945077	$7,07052 \cdot 10^{-6}$	0,00070709%
		38	3,454545	0,999971517			
		11	0,9	17	1,545455	0,988540059	
18	1,636364			0,990986324	0,990420055	0,000566268	0,05714191%
19	1,727273			0,993216719	0,992300052	0,000916667	0,09229271%
20	1,818182			0,995196157	0,994180049	0,001016108	0,10210129%
21	1,909091			0,997038183	0,996060045	0,000978137	0,09810431%
22	2			0,998880041			
23	2,090909			0,999067848	0,999047211	$2,06364 \cdot 10^{-5}$	0,00206556%
24	2,181818			0,999253692	0,999214382	$3,93101 \cdot 10^{-5}$	0,00393395%
25	2,272727			0,999438318	0,999381552	$5,67657 \cdot 10^{-5}$	0,00567976%
26	2,363636			0,999618903	0,999548723	$7,01798 \cdot 10^{-5}$	0,00702065%
27	2,454545			0,999799479			

Tabela T-9.6 – Uporedno dati tačni rezultati i rezultati aproksimacije za  $N=8$ 

$N$	$A$	$L/N$	$L$	$R$ – tačno	$R$ -aproksimirano	Apsolutna relativna greška aproksimacije
8	0,75	1,5	12	0,850438356	0,839781442	1,25310843%
		1,625	13	0,883548617	0,870032769	1,52972320%
		1,75	14	0,914214715	0,900284097	1,52377974%
		1,875	15	0,940579087	0,930535424	1,06781688%
		2	16	0,966040136	0,960786752	0,54380598%
		2,125	17	0,973185493	0,968190718	0,51323981%
		2,25	18	0,979661061	0,975594685	0,41507998%
		2,375	19	0,985869824	0,982998651	0,29123249%
		2,5	20	0,991794154	0,990402617	0,14030505%
		2,625	21	0,993486024	0,992214727	0,12796331%
		2,75	22	0,995040699	0,994026836	0,10189162%
		2,875	23	0,996540312	0,995838946	0,07038009%
		3	24	0,998020015	0,997651055	0,03696920%
		3,125	25	0,99840173	0,998094566	0,03076558%
		3,25	26	0,998773857	0,998538077	0,02360695%
		3,375	27	0,999142427	0,998981588	0,01609770%
		3,5	28	0,999509194	0,999425099	0,00841359%
		3,625	29	0,999602316	0,999533648	0,00686957%
		3,75	30	0,999694398	0,999642197	0,00522171%
		3,875	31	0,999786068	0,999750745	0,00353307%
4	32	0,99987767	0,999859294	0,00183787%		
4,125	33	0,999900652	0,999885861	0,00147924%		
4,25	34	0,999923628	0,999912428	0,00112008%		
4,375	35	0,999946543	0,999938995	0,00075482%		
4,5	36	0,999969453	0,999965562	0,00038911%		
4,625	37	0,999975186	0,999972065	0,00031216%		
4,75	38	0,999980919	0,999978567	0,00023516%		
4,875	39		0,999985069			
5	40		0,999991571			
8	0,8	1,5	12	0,922075791	0,910056286	1,30352687%
		1,625	13	0,941027335	0,928041594	1,37995365%
		1,75	14	0,958121304	0,946026901	1,26230394%
		1,875	15	0,972543805	0,964012209	0,87724534%
		2	16	0,986328932	0,981997517	0,43914502%
		2,125	17	0,989332316	0,985597326	0,37752634%
		2,25	18	0,992101917	0,989197135	0,29279069%
		2,375	19	0,994788011	0,992796944	0,20014980%
		2,5	20	0,997398251	0,996396753	0,10041102%
		2,625	21	0,997930092	0,997117265	0,08145124%
		2,75	22	0,998454847	0,997837777	0,06180248%
		2,875	23	0,998971875	0,998558289	0,04140117%
		3	24	0,999486403	0,9992788	0,02077099%
		3,125	25	0,999589474	0,999423013	0,01665294%
3,25	26	0,999692335	0,999567225	0,01251482%		
3,375	27	0,999795015	0,999711437	0,00835942%		
3,5	28	0,99989753	0,99985565	0,00418839%		
8	0,85	1,5	12	0,967503656	0,961959211	0,57306712%
		1,625	13	0,975902816	0,970028085	0,60197903%
		1,75	14	0,983394681	0,97809696	0,53871768%

<i>N</i>	<i>A</i>	<i>L/N</i>	<i>L</i>	<i>R</i> – tačno	<i>R</i> -aproximirano	Apsolutna relativna greška aproksimacije		
		1,875	15	0,989723139	0,986165835	0,35942418%		
		2	16	0,995769953	0,99423471	0,15417644%		
		2,125	17	0,996727984	0,995457592	0,12745624%		
		2,25	18	0,997634092	0,996680474	0,09558793%		
		2,375	19	0,998518852	0,997903356	0,06164090%		
		2,5	20	0,999387878	0,999126239	0,02618000%		
		2,625	21	0,999519263	0,999311573	0,02077897%		
		2,75	22	0,999649828	0,999496908	0,01529741%		
		2,875	23	0,999779449	0,999682242	0,00972287%		
		3	24	0,999908774	0,999867577	0,00412010%		
		3,125	25	0,999928182	0,999895665	0,00325193%		
		3,25	26	0,999947577	0,999923754	0,00238243%		
		3,375	27	0,999966959	0,999951842	0,00151170%		
		3,5	28	0,999986329	0,999979931	0,00063982%		
		3,625	29	0,999989234	0,999984187	0,00050468%		
		3,75	30	0,999992139	0,999988444	0,00036950%		
		3,875	31	0,999995044	0,999992701	0,00023430%		
		4	32	0,999997949	0,999996958	0,00009908%		
		4,125	33	0,999998385	0,999997604	0,00007815%		
		4,25	34	0,999998821	0,999998249	0,00005723%		
		4,375	35	0,999999257	0,999998894	0,00003628%		
		4,5	36	0,999999692	0,999999539	0,00001534%		
		4,625	37	0,999999758	0,999999637	0,00001210%		
		4,75	38	0,999999823	0,999999735	0,00000886%		
		4,875	39		0,999999832			
		5	40		0,99999993			
		8	0,9	1,5	12	0,990744199	0,990523188	0,02230755%
				1,625	13	0,993198818	0,992660479	0,05420260%
				1,75	14	0,995411802	0,99479777	0,06168631%
				1,875	15	0,997331897	0,99693506	0,03978979%
				2	16	0,999182291	0,999072351	0,01100293%
				2,125	17	0,999372385	0,999281562	0,00908798%
				2,25	18	0,999557052	0,999490774	0,00663078%
				2,375	19	0,999739214	0,999699985	0,00392392%
				2,5	20	0,999919805	0,999909196	0,00106099%
				2,625	21	0,999937905	0,999929675	0,00082308%
				2,75	22	0,99995597	0,999950154	0,00058164%
				2,875	23	0,999973991	0,999970633	0,00033583%
				3	24	0,999991998	0,999991112	0,00008865%
				3,125	25	0,999993799	0,999993116	0,00006828%
3,25	26			0,9999956	0,999995121	0,00004788%		
3,375	27			0,9999974	0,999997125	0,00002745%		
3,5	28	0,9999992	0,99999913	0,00000700%				

Tabela T-9.7 - Uporedno dati tačni rezultati i rezultati aproksimacije za  $N=9$   
(u tabeli su ofarbana polja sa virtuelnim tačkama koje se koriste samo za potrebe funkcije  
aproksimacije a u stvarnosti ne postoje)

$N$	$A$	$L/N$	$L$	$R$ - tačno	$R$ - aproksimirano	Relativna greška aproksimacije
9	0,75	1,5	13,5		0,824254158	
		1,555556	14	0,848173432	0,839002193	1,09311266%
		1,666667	15	0,881316282	0,868498263	1,47588310%
		1,777778	16	0,91084177	0,897994333	1,43068138%
		1,888889	17	0,936961471	0,927490403	1,02114997%
		2	18	0,962087848	0,956986473	0,53306660%
		2,111111	19	0,968965541	0,964205591	0,49366548%
		2,222222	20	0,975642188	0,971424709	0,43415392%
		2,333333	21	0,981924632	0,978643827	0,33523992%
		2,444444	22	0,987974089	0,985862946	0,21414169%
		2,5	22,5		0,989472505	
		2,555556	23	0,991776199	0,990355939	0,14340905%
		2,666667	24	0,993315365	0,992122807	0,12020263%
		2,777778	25	0,994819603	0,993889675	0,09356453%
		2,888889	26	0,996309521	0,995656543	0,06558263%
		3	27	0,99778849	0,997423412	0,03660211%
		3,111111	28	0,998159817	0,99785585	0,03046206%
		3,222222	29	0,998529886	0,998288288	0,02420118%
		3,333333	30	0,998898585	0,998720726	0,01780864%
		3,444444	31	0,999266086	0,999153165	0,01130174%
		3,5	31,5		0,999369384	
		3,555556	32	0,999495669	0,999422303	0,00734081%
		3,666667	33	0,999587512	0,999528142	0,00593985%
		3,777778	34	0,99967928	0,99963398	0,00453163%
		3,888889	35	0,999770976	0,999739819	0,00311651%
		4	36	0,999862603	0,999845658	0,00169478%
		4,111111	37	0,99988551	0,999871562	0,00139498%
		4,222222	38	0,999908412	0,999897465	0,00109477%
		4,333333	39	0,99993131	0,999923369	0,00079415%
		4,444444	40		0,999949273	
		4,5	40,5		0,999962225	
9	0,8	1,5	13,5		0,900894585	
		1,555556	14	0,921742931	0,909702273	1,32358228%
		1,666667	15	0,940526971	0,927317649	1,42446566%
		1,777778	16	0,956926015	0,944933025	1,26918937%
		1,888889	17	0,970955783	0,962548402	0,87345029%
		2	18	0,984535439	0,980163778	0,44601337%
		2,111111	19	0,98759573	0,983689544	0,39709548%
		2,222222	20	0,99043236	0,98721531	0,32587115%
		2,333333	21	0,993160583	0,990741076	0,24421179%
		2,444444	22	0,995773064	0,994266842	0,15149065%
		2,5	22,5		0,996029725	
		2,555556	23	0,997344087	0,996382571	0,09650062%
		2,666667	24	0,99787122	0,997088263	0,07852431%
		2,777778	25	0,998391106	0,997793955	0,05984713%
		2,888889	26	0,998907807	0,998499647	0,04087734%
		3	27	0,999422235	0,999205339	0,02170694%

N	A	L/N	L	R - tačno	R- aproksimirano	Relativna greška aproksimacije
		3,111111	28	0,999525293	0,999346585	0,01788252%
		3,222222	29	0,999628193	0,999487831	0,01404344%
		3,333333	30		0,999629077	
		3,444444	31		0,999770323	
		3,5	31,5		0,999840946	
9	0,85	1,5	13,5		0,958004646	
		1,555556	14	0,967674509	0,961963616	0,59367038%
		1,666667	15	0,975914347	0,969881556	0,62201319%
		1,777778	16	0,983102977	0,977799495	0,54238948%
		1,888889	17	0,989234936	0,985717434	0,35684687%
		2	18	0,995225327	0,993635374	0,16001375%
		2,111111	19	0,996194251	0,994835381	0,13659247%
		2,222222	20	0,997113006	0,996035388	0,10819074%
		2,333333	21	0,998008163	0,997235395	0,07749100%
		2,444444	22	0,998877408	0,998435402	0,04426984%
		2,5	22,5		0,999035406	
		2,555556	23	0,999377584	0,99912634	0,02514636%
		2,666667	24	0,99950845	0,999308208	0,02003809%
		2,777778	25	0,999638454	0,999490075	0,01484548%
		2,888889	26	0,999768052	0,999671943	0,00961411%
		3	27	0,999897372	0,999853811	0,00435676%
		3,111111	28	0,999916779	0,999881374	0,00354101%
		3,222222	29	0,999936177	0,999908937	0,00272428%
		3,333333	30	0,999955562	0,9999365	0,00190634%
		3,444444	31	0,999974935	0,999964063	0,00108724%
		3,5	31,5		0,999977844	
		3,555556	32	0,999986073	0,999979933	0,00061399%
		3,666667	33	0,999988978	0,99998411	0,00048681%
		3,777778	34	0,999991884	0,999988288	0,00035961%
		3,888889	35	0,999994789	0,999992465	0,00023237%
		4	36	0,999997693	0,999996642	0,00010512%
		4,111111	37	0,999998129	0,999997275	0,00008538%
		4,222222	38	0,999998565	0,999997908	0,00006564%
		4,333333	39	0,999999	0,999998541	0,00004590%
		4,444444	40		0,999999175	
		4,5	40,5		0,999999491	
		1,5	13,5		0,989545338	
9	0,9	1,555556	14	0,990842537	0,99059326	0,02516437%
		1,666667	15	0,993237312	0,992689103	0,05522458%
		1,777778	16	0,995373083	0,994784947	0,05912200%
		1,888889	17	0,997236743	0,99688079	0,03570667%
		2	18	0,999078676	0,998976633	0,01021468%
		2,111111	19	0,999269744	0,999181787	0,00880282%
		2,222222	20	0,999455529	0,999386941	0,00686299%
		2,333333	21	0,999638909	0,999592095	0,00468325%
		2,444444	22	0,999819507	0,99979725	0,00222620%
		2,5	22,5		0,999899827	
		2,555556	23	0,999918851	0,999909867	0,00089843%
		2,666667	24	0,99993693	0,999929949	0,00069813%
		2,777778	25	0,99995497	0,999950031	0,00049396%

<i>N</i>	<i>A</i>	<i>L/N</i>	<i>L</i>	<i>R</i> - tačno	<i>R</i> - aproximirano	Relativna greška aproximacije
		2,888889	26	0,999972991	0,999970113	0,00028781%
		3	27	0,999990998	0,999990194	0,00008034%
		3,111111	28	0,999992799	0,99999216	0,00006386%
		3,222222	29	0,999994599	0,999994126	0,00004735%
		3,333333	30		0,999996092	
		3,444444	31		0,999998057	
		3,5	31,5		0,99999904	

Tabela T-9.8 - Uporedno dati tačni rezultati i rezultati aproksimacije za  $N=10$ 

$N$	$A$	$L/N$	$L$	$R$ - tačno	$R$ - aproksimirano	Relativna greška aproksimacije
10	0,75	1,5	15	0,810716635	0,807222076	0,43104561%
		1,6	16	0,846755818	0,83634124	1,22993867%
		1,7	17	0,878681932	0,865460404	1,50470012%
		1,8	18	0,907129698	0,894579568	1,38349891%
		1,9	19	0,933144853	0,923698733	1,01228876%
		2	20	0,957929167	0,952817897	0,53357495%
		2,1	21	0,964974657	0,959944768	0,52124578%
		2,2	22	0,971596744	0,967071639	0,46573905%
		2,3	23	0,977950179	0,97419851	0,38362582%
		2,4	24	0,983986271	0,981325381	0,27041943%
		2,5	25	0,990008592	0,988452252	0,15720469%
		2,6	26	0,991553471	0,990196543	0,13684875%
		2,7	27	0,993076069	0,991940834	0,11431504%
		2,8	28	0,994582437	0,993685125	0,09022004%
		2,9	29	0,996065073	0,995429415	0,06381689%
		3	30	0,997543408	0,997173706	0,03706118%
		3,1	31	0,997914563	0,997600619	0,03146002%
		3,2	32	0,998284746	0,998027531	0,02576569%
		3,3	33	0,998653673	0,998454444	0,01994976%
		3,4	34	0,999021403	0,998881356	0,01401842%
3,5	35	0,9993886	0,999308269	0,00803803%		
3,6	36	0,999480475	0,999412755	0,00677546%		
3,7	37	0,999572293	0,999517241	0,00550750%		
3,8	38	0,999664038	0,999621727	0,00423245%		
3,9	39	0,999755713	0,999726214	0,00295062%		
4	40	0,999847338	0,9998307	0,00166405%		
10	0,8	1,5	15	0,90085221	0,890799671	1,11589223%
		1,6	16	0,921665622	0,908268387	1,45358952%
		1,7	17	0,939634047	0,925737103	1,47897405%
		1,8	18	0,9555413	0,94320582	1,29094164%
		1,9	19	0,969368099	0,960674536	0,89682781%
		2	20	0,982981988	0,978143253	0,49225066%
		2,1	21	0,985979046	0,981639664	0,44010886%
		2,2	22	0,988781437	0,985136076	0,36867207%
		2,3	23	0,991532739	0,988632488	0,29250180%
		2,4	24	0,99414569	0,9921289	0,20286668%
		2,5	25	0,996751432	0,995625312	0,11297910%
		2,6	26	0,997283004	0,996325128	0,09604860%
		2,7	27	0,997807493	0,997024945	0,07842679%
		2,8	28	0,998328043	0,997724761	0,06042919%
		2,9	29	0,99884364	0,998424578	0,04195471%
3	30	0,999358072	0,999124394	0,02338277%		
10	0,85	1,5	15	0,958699028	0,953638982	0,52780340%
		1,6	16	0,967845979	0,961505932	0,65506776%
		1,7	17	0,975724146	0,969372882	0,65092821%
		1,8	18	0,982662804	0,977239833	0,55186488%
		1,9	19	0,988733863	0,985106783	0,36684082%
		2	20	0,994739997	0,992973734	0,17756033%
2,1	21	0,995685863	0,994166013	0,15264350%		

<i>N</i>	<i>A</i>	<i>L/N</i>	<i>L</i>	<i>R</i> - tačno	<i>R</i> - aproximirano	Relativna greška aproximacije
		2,2	22	0,996600578	0,995358292	0,12465235%
		2,3	23	0,997498126	0,996550572	0,09499311%
		2,4	24	0,998367082	0,997742851	0,06252517%
		2,5	25	0,999235683	0,998935131	0,03007821%
		2,6	26	0,999366607	0,999115827	0,02509390%
		2,7	27	0,999497093	0,999296524	0,02006706%
		2,8	28	0,99962721	0,99947722	0,01500457%
		2,9	29	0,999756654	0,999657917	0,00987615%
		3	30	0,99988597	0,999838613	0,00473625%
		3,1	31	0,999905377	0,999865999	0,00393824%
		3,2	32	0,999924777	0,999893384	0,00313955%
		3,3	33	0,999944165	0,99992077	0,00233966%
		3,4	34	0,999963541	0,999948155	0,00153860%
		3,5	35	0,999982911	0,999975541	0,00073701%
		3,6	36	0,999985817	0,999979691	0,00061253%
		3,7	37	0,999988722	0,999983842	0,00048803%
		3,8	38	0,999991627	0,999987992	0,00036351%
		3,9	39	0,999994532	0,999992143	0,00023896%
		4	40	0,999997437	0,999996293	0,00011439%
		10	0,9	1,5	15	0,988301144
1,6	16			0,990913133	0,99054748	0,03690059%
1,7	17			0,993216968	0,99262837	0,05926176%
1,8	18			0,995283382	0,99470926	0,05768431%
1,9	19			0,997137659	0,996790149	0,03485068%
2	20			0,998980714	0,998871039	0,01097869%
2,1	21			0,999169337	0,999074729	0,00946864%
2,2	22			0,999354809	0,999278419	0,00764388%
2,3	23			0,999538631	0,99948211	0,00565473%
2,4	24			0,999719216	0,9996858	0,00334249%
2,5	25			0,999899788	0,99988949	0,00102982%
2,6	26			0,999917868	0,999909429	0,00084399%
2,7	27			0,999935931	0,999929367	0,00065638%
2,8	28			0,999953977	0,999949306	0,00046715%
2,9	29			0,999971991	0,999969244	0,00027464%
3	30			0,999989998	0,999989183	0,00008150%



Tabela T-9.9 - Uporedno dati tačni rezultati i rezultati aproksimacije za  $N=11$   
(u tabeli su ofarbana polja sa virtuelnim tačkama koje se koriste samo za potrebe funkcije  
aproksimacije a u stvarnosti ne postoje)

N	A	L/N	L	R - tačno	R - aproksimirano	Relativna greška aproksimacije		
11	0,75	1,5	16,5		0,788539362			
		1,545455	17	0,811775263	0,803058086	1,07384109%		
		1,636364	18	0,846082718	0,832095535	1,65316965%		
		1,727273	19	0,877414071	0,861132984	1,85557618%		
		1,818182	20	0,904496089	0,890170433	1,58382724%		
		1,909091	21	0,92905264	0,919207882	1,05965561%		
		2	22	0,953957904	0,948245331	0,59882863%		
		2,090909	23	0,960915296	0,955352202	0,57893694%		
		2,181818	24	0,967519704	0,962459074	0,52305193%		
		2,272727	25	0,973914807	0,969565945	0,44653413%		
		2,363636	26	0,980041147	0,976672816	0,34369273%		
		2,454545	27	0,986042382	0,983779688	0,22947226%		
		2,5	27,5		0,987333124			
		2,545455	28	0,989815238	0,988202821	0,16290071%		
		2,636364	29	0,991338668	0,989942217	0,14086514%		
		2,727273	30	0,99285533	0,991681613	0,11821626%		
		2,818182	31	0,994345764	0,993421009	0,09300129%		
		2,909091	32	0,995821287	0,995160405	0,06636547%		
		3	33	0,997298551	0,996899801	0,03998300%		
		3,090909	34	0,997669438	0,997325516	0,03447252%		
		3,181818	35	0,998039499	0,99775123	0,02888350%		
		3,272727	36	0,998408548	0,998176945	0,02319727%		
		3,363636	37	0,998776789	0,998602659	0,01743433%		
		3,454545	38	0,999143892	0,999028374	0,01156169%		
		3,5	38,5		0,999241231			
		3,545455	39	0,999373432	0,999273655	0,00998398%		
		3,636364	40	0,99946528	0,999338502	0,01268463%		
		3,727273	41	0,999557073	0,999403349	0,01537926%		
		3,818182	42		0,999468196			
		3,909091	43		0,999533043			
		4,5	49,5		0,999954548			
		11	0,8	1,5	16,5		0,879676484	
				1,545455	17	0,902282606	0,888425615	1,53577070%
1,636364	18			0,921865458	0,905923875	1,72927440%		
1,727273	19			0,939373532	0,923422135	1,69808877%		
1,818182	20			0,954315587	0,940920395	1,40364377%		
1,909091	21			0,967828235	0,958418656	0,97223649%		
2	22			0,9814081	0,975916916	0,55952094%		
2,090909	23			0,984335159	0,979419241	0,49941506%		
2,181818	24			0,987144934	0,982921566	0,42783662%		
2,272727	25			0,989911545	0,986423891	0,35231971%		
2,363636	26			0,992520913	0,989926217	0,26142484%		
2,454545	27			0,995128641	0,993428542	0,17084215%		
2,5	27,5				0,995179704			
2,545455	28			0,99669727	0,995530204	0,11709328%		
2,636364	29			0,997224119	0,996231204	0,09956781%		
2,727273	30	0,997746061	0,996932204	0,08156949%				

		2,818182	31	0,998264496	0,997633204	0,06323895%
		2,909091	32		0,998334204	
		3	33		0,999035205	
		1,5	16,5		0,94881948	
		1,545455	17	0,959536667	0,952767101	0,70550359%
		1,636364	18	0,968074396	0,960662343	0,76564904%
		1,727273	19	0,975695067	0,968557585	0,73152789%
		1,818182	20	0,98225293	0,976452828	0,59048972%
		1,909091	21	0,988237329	0,98434807	0,39355522%
		2	22	0,994227439	0,992243312	0,19956474%
		2,090909	23	0,995165711	0,993439879	0,17342155%
		2,181818	24	0,996081818	0,994636446	0,14510577%
		2,272727	25	0,996987311	0,995833013	0,11577862%
		2,363636	26	0,997856243	0,997029581	0,08284387%
		2,454545	27	0,998724955	0,998226148	0,04994441%
		2,5	27,5		0,998824431	
		2,545455	28	0,999224865	0,998915105	0,03100005%
		2,636364	29	0,999355702	0,999096451	0,02594181%
11	0,85	2,727273	30	0,999485977	0,999277797	0,02082871%
		2,818182	31	0,999615821	0,999459143	0,01567380%
		2,909091	32	0,999745257	0,99964049	0,01047935%
		3	33	0,999874569	0,999821836	0,00527397%
		3,090909	34	0,999893975	0,99984932	0,00446601%
		3,181818	35	0,999913375	0,999876804	0,00365742%
		3,272727	36	0,999932766	0,999904288	0,00284793%
		3,363636	37	0,999952147	0,999931772	0,00203759%
		3,454545	38	0,999971517	0,999959256	0,00122610%
		3,5	38,5		0,999972998	
		3,545455	39	0,999982655	0,999975081	0,00075740%
		3,636364	40	0,99998556	0,999979246	0,00063143%
		3,727273	41	0,999988466	0,999983412	0,00050543%
		3,818182	42		0,999987577	
		3,909091	43		0,999991742	
		4	44		0,999995908	
		1,5	16,5		0,987276534	
		1,545455	17	0,988540059	0,98831999	0,02226197%
		1,636364	18	0,990986324	0,990406902	0,05846921%
		1,727273	19	0,993216719	0,992493814	0,07278422%
		1,818182	20	0,995196157	0,994580725	0,06184022%
		1,909091	21	0,997038183	0,996667637	0,03716466%
		2	22	0,998880041	0,998754549	0,01256325%
		2,090909	23	0,999067848	0,998958829	0,01091207%
		2,181818	24	0,999253692	0,999163108	0,00906512%
		2,272727	25	0,999438318	0,999367388	0,00709698%
		2,363636	26	0,999618903	0,999571668	0,00472528%
		2,454545	27	0,999799479	0,999775948	0,00235359%
		2,5	27,5		0,999878088	
		2,545455	28	0,999898812	0,999888086	0,00107274%
		2,636364	29	0,99991689	0,999908082	0,00088091%
		2,727273	30	0,999934944	0,999928078	0,00068663%
		2,818182	31	0,999952977	0,999948074	0,00049031%
		2,909091	32		0,99996807	

Tabela T-9.10 - Usporedno dati tačni rezultati i rezultati aproksimacije za  $N=12$ 

$N$	$A$	$L/N$	$L$	$R$ - tačno	$R$ - aproksimirano	Relativna greška aproksimacije
12	0,75	1,5	18	0,775606616	0,768046047	0,97479421%
		1,58333	19	0,811459049	0,79724331	1,75187390%
		1,66667	20	0,844481027	0,826440573	2,13627711%
		1,75	21	0,874034296	0,855637835	2,10477566%
		1,83333	22	0,900857101	0,884835098	1,77852886%
		1,91667	23	0,92523815	0,914032361	1,21112483%
		2	24	0,949961223	0,943229623	0,70861838%
		2,08333	25	0,956883041	0,950375609	0,68006556%
		2,16667	26	0,963451801	0,957521594	0,61551665%
		2,25	27	0,969880836	0,96466758	0,53751514%
		2,33333	28	0,976029759	0,971813566	0,43197391%
		2,41667	29	0,98202721	0,978959551	0,31238022%
		2,5	30	0,988036184	0,986105537	0,19540253%
		2,58333	31	0,989575127	0,987854506	0,17387476%
		2,66667	32	0,991098403	0,989603475	0,15083548%
		2,75	33	0,99260271	0,991352444	0,12595835%
		2,83333	34	0,994096252	0,993101413	0,10007474%
		2,91667	35	0,995576489	0,994850382	0,07293329%
		3	36	0,997053563	0,996599351	0,04555537%
		3,08333	37	0,997424244	0,997027409	0,03978599%
		3,16667	38	0,9977942	0,997455466	0,03394827%
		3,25	39	0,99816348	0,997883524	0,02804708%
3,33333	40	0,99853223	0,998311581	0,02209726%		
3,41667	41	0,998899243	0,998739639	0,01597796%		
3,5	42	0,999266378	0,999167696	0,00987541%		
12	0,8	1,5	18	0,881825918	0,867420286	1,63361399%
		1,58333	19	0,90271312	0,885094206	1,95177338%
		1,66667	20	0,921414669	0,902768125	2,02368647%
		1,75	21	0,937918928	0,920442045	1,86336821%
		1,83333	22	0,95277868	0,938115965	1,53894243%
		1,91667	23	0,966229918	0,955789885	1,08049159%
		2	24	0,979759443	0,973463804	0,64256985%
		2,08333	25	0,982678097	0,977001288	0,57768751%
		2,16667	26	0,985488353	0,980538772	0,50224651%
		2,25	27	0,988246929	0,984076256	0,42202742%
		2,33333	28	0,990903157	0,98761374	0,33196159%
		2,41667	29	0,993505953	0,991151223	0,23701217%
		2,5	30	0,996110667	0,994688707	0,14275117%
		2,58333	31	0,99663771	0,995396744	0,12451525%
		2,66667	32	0,99716206	0,996104781	0,10602874%
		2,75	33		0,996812819	
		2,83333	34		0,997520856	
		2,91667	35		0,998228893	
3	36		0,99893693			
12	0,85	1,5	18	0,950723224	0,943498963	0,75986998%
		1,58333	19	0,959866509	0,951488629	0,87281714%
		1,66667	20	0,967993553	0,959478295	0,87968124%
		1,75	21	0,97521176	0,967467961	0,79406335%
		1,83333	22	0,981756855	0,975457627	0,64162818%

N	A	L/N	L	R - tačno	R - aproksimirano	Relativna greška aproksimacije
12	0,9	1,91667	23	0,987726907	0,983447292	0,43327909%
		2	24	0,993708358	0,991436958	0,22857815%
		2,08333	25	0,994645455	0,992647836	0,20083731%
		2,16667	26	0,995561662	0,993858714	0,17105400%
		2,25	27	0,996465963	0,995069591	0,14013244%
		2,33333	28	0,997346434	0,996280469	0,10688015%
		2,41667	29	0,998214639	0,997491346	0,07245866%
		2,5	30	0,99908306	0,998702224	0,03811852%
		2,58333	31	0,999213915	0,998885739	0,03284338%
		2,66667	32	0,999344503	0,999069254	0,02754287%
		2,75	33	0,999474603	0,99925277	0,02219499%
		2,83333	34	0,999604428	0,999436285	0,01682097%
		2,91667	35	0,999733857	0,9996198	0,01140880%
		3	36	0,999863168	0,999803315	0,00598611%
		3,08333	37	0,999882574	0,999831128	0,00514520%
		3,16667	38	0,999901973	0,99985894	0,00430369%
		3,25	39	0,999921366	0,999886753	0,00346159%
		3,33333	40	0,999940754	0,999914566	0,00261893%
		3,41667	41	0,999960123	0,999942379	0,00177453%
		3,5	42	0,999979493	0,999970191	0,00093020%
			1,5	18	0,986049253	0,985963684
		1,58333	19	0,988635065	0,988074076	0,05674377%
		1,66667	20	0,990978485	0,990184469	0,08012442%
		1,75	21	0,993116837	0,992294861	0,08276728%
		1,83333	22	0,995096877	0,994405254	0,06950309%
		1,91667	23	0,99693734	0,996515646	0,04229889%
		2	24	0,998778572	0,998626039	0,01527201%
		2,08333	25	0,998966319	0,998832617	0,01338404%
		2,16667	26	0,99915217	0,999039195	0,01130708%
		2,25	27	0,999336719	0,999245774	0,00910057%
		2,33333	28	0,999518627	0,999452352	0,00663076%
		2,41667	29	0,999699184	0,99965893	0,00402659%
		2,5	30	0,999879751	0,999865508	0,00142441%
		2,58333	31	0,999897829	0,999885729	0,00121013%
		2,66667	32	0,999915898	0,999905951	0,00099483%
		2,75	33		0,999926172	
		2,83333	34		0,999946393	
		2,91667	35		0,999966614	
		3	36		0,999986835	

## 10 Prilog 3 – Funkcije aproksimacije maksimalne raspoloživosti mreže

Raspoloživost u prelomnim tačkama data je izrazom (10.1) i važi za  $L/N > 2$  i za  $L/N \geq 1,5$  gde je  $A < 0,9$ . Za  $L/N \leq 2$  gde je  $A \geq 0,9$  raspoloživost je data izrazom (10.9) i (10.10).

$$R_{\max}(N, A, L) = 1 - e^{-(k_1 \frac{L}{N} + k_2)} \quad (10.1)$$

Za  $0 \leq A < 0,4$  parametar  $k_1$  dat je izrazom (10.2).

$$k_1 = -63,313 \cdot A^4 + 57,337 \cdot A^3 - 9,2201 \cdot A^2 + 0,5079 \cdot A - 0,0087 \quad (10.2)$$

Za  $0,4 \leq A \leq 0,75$  parametar  $k_1$  dat je izrazom (10.3).

$$k_1 = 5,6213 \cdot A^3 - 5,863 \cdot A^2 + 6,8472 \cdot A - 1,3939 \quad (10.3)$$

Za  $A > 0,75$  parametar  $k_1$  dat je izrazom (10.4).

$$k_1 = 238,2 \cdot A^6 - 618,9 \cdot A^5 + 622,65 \cdot A^4 - 307,81 \cdot A^3 + 83,59 \cdot A^2 - 9,6164 \cdot A + 0,3326 \quad (10.4)$$

Za  $A < 0,75$  parametar  $k_2$  dat je izrazom (10.5).

$$k_2 = -\left[ (0,0892 \cdot \ln(N) + 0,9971) \cdot \tanh(3,3 \cdot A) \right]^{5,5} \frac{0,097 \cdot N + 1,641452}{\left[ (0,0892 \cdot \ln(N) + 0,9971) \cdot \tanh(3,3 \cdot 0,8) \right]^{5,5}} \quad (10.5)$$

Za  $A \geq 0,75$  parametar  $k_2$  dat je izrazom (10.6).

$$k_2 = (0,52 \cdot A^2 - 0,896 \cdot A + 0,287) \cdot N + 6,2867 \cdot A^2 - 9,5463 \cdot A + 1,9721 \quad (10.6)$$

Između prelomnih tačaka se koristi linearna segmentna aproksimacija. Ako se posmatra jedan segment između dve susedne prelomne tačke i sa  $x_1$  obeleži vrednost  $L/N$  za donju prelomnu

tačku (prelomna tačka koja ima manju vrednost raspoloživosti),  $y_1$  i  $y_2$  obeležje raspoloživosti u donjoj i gornjoj prelomnoj tački, tada raspoloživost između te dve prelomne tačke dobija primenom izraza (10.7).

$$R_{\max}(L, N) = a * \frac{L}{N} + b \quad (10.7)$$

gde su  $a$  i  $b$  dati izrazima (10.8).

$$\begin{aligned} a &= 2 * (y_2 - y_1) \\ b &= y_1 - 2 * x_1 * (y_2 - y_1) \end{aligned} \quad (10.8)$$

Za vrednosti  $L/N < 2$  i  $A \geq 0,9$  definisana je posebna aproksimativna funkcija koja je data izrazom (10.9). Parametri  $t_{11}$ ,  $t_{12}$ ,  $t_{21}$  i  $t_{22}$  su funkcije od  $A$  i date su izrazima (10.10).

$$R(N, A, \frac{L}{N}) = (t_{11} * N + t_{12}) * \frac{L}{N} + t_{21} * N + t_{22} \quad (10.9)$$

$$\begin{aligned} t_{11} &= -1,921092616 * A^3 + 5,763865575 * A^2 - 5,764453244 * A + 1,921680285 \\ t_{12} &= 16,64831593 * A^4 - 66,09424602 * A^3 + 98,39623848 * A^2 - 65,10300229 * A \\ &\quad + 16,1526939 \\ t_{21} &= 3,877448318 * A^3 - 11,63326534 * A^2 + 11,63418563 * A - 3,878368611 \\ t_{22} &= 927,8571285 * A^5 - 4592,893443 * A^4 + 9093,89181 * A^3 - 9002,8809 * A^2 \\ &\quad + 4456,3745 * A - 881,3490955 \end{aligned} \quad (10.10)$$

## 11 Prilog 4 – Izjava o autorstvu

### Izjava o autorstvu

Potpisani mr Nenad Krajnović, dipl. inž.

Broj upisa \_\_\_\_\_

### Izjavljujem

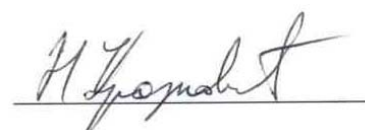
da je doktorska disertacija pod naslovom

### **Procena raspoloživosti složenih komunikacionih mreža metodom linearne segmentne aproksimacije**

- rezultat sopstvenog istraživačkog rada,
- da predložena disertacija u celini ni u delovima nije bila predložena za dobijanje bilo koje diplome prema studijskim programima drugih visokoškolskih ustanova,
- da su rezultati korektno navedeni i
- da nisam kršio autorska prava i koristio intelektualnu svojinu drugih lica.

U Beogradu, 01.06.2015.

Potpis doktoranda



## **12 Prilog 5 – Izjava o istovetnosti štampane i elektronske verzije doktorskog rada**

### **Izjava o istovetnosti štampane i elektronske verzije doktorskog rada**

Ime i prezime autora: mr Nenad Krajnović, dipl. inž.

Broj upisa: \_\_\_\_\_

Studijski program: \_\_\_\_\_

Naslov rada: **Procena raspoloživosti složenih komunikacionih mreža metodom linearne segmentne aproksimacije**

Mentor: dr Aleksandar Nešković, vanredni profesor

Potpisani mr Nenad Krajnović, dipl. inž.

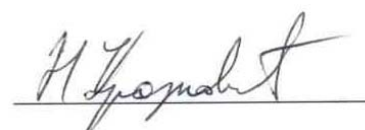
izjavljujem da je štampana verzija mog doktorskog rada istovetna elektronskoj verziji koju sam predao za objavljivanje na portalu **Digitalnog repozitorijuma Univerziteta u Beogradu**.

Dozvoljavam da se objave moji lični podaci vezani za dobijanje akademskog zvanja doktora nauka, kao što su ime i prezime, godina i mesto rođenja i datum odbrane rada.

Ovi lični podaci mogu se objaviti na mrežnim stranicama digitalne biblioteke, u elektronskom katalogu i u publikacijama Univerziteta u Beogradu.

U Beogradu, 01.06.2015.

Potpis doktoranda





## 13 Prilog 6 – Izjava o korišćenju

### Izjava o korišćenju

Ovlašćujem Univerzitetsku biblioteku „Svetozar Marković“ da u Digitalnom repozitorijumu Univerziteta u Beogradu unese moju doktorsku disertaciju pod naslovom:

**Procena raspoloživosti složenih komunikacionih mreža metodom linearne segmentne aproksimacije**

koja je moje autorsko delo.

Disertaciju sa svim priložima predao sam u elektronskom formatu pogodnom za trajno arhiviranje.

Moju doktorsku disertaciju pohranjenu u Digitalni repozitorijum Univerziteta u Beogradu mogu da koriste svi koji poštuju odredbe sadržane u odabranom tipu licence Kreativne zajednice (*Creative Commons*) za koju sam se odlučio.

1. Autorstvo
2. Autorstvo – nekomercijalno
- ③ 3. Autorstvo – nekomercijalno – bez prerade
4. Autorstvo – nekomercijalno – deliti pod istim uslovima
5. Autorstvo – bez prerade
6. Autorstvo – deliti pod istim uslovima

U Beogradu, 01.06.2015.

Potpis doktoranda

