

Наставно научно већу  
Математичког факултета  
Универзитета у Београду

Одлуком Наставно научног већа Математичког факултета, Универзитета у Београду, донетој на седници одржаној 20. јуна 2014. године, именовани смо у комисију за преглед и оцену рукописа *Геометрија четвородимензионих нилпотетних Лијевих група*, који је предат као докторска дисертација Тијане Шукиловић.

## ИЗВЕШТАЈ

### Биографија кандидата

---

Тијана Шукиловић је рођена 2.12.1983. године. Математички факултет, Универзитета у Београду (у даљем тексту: Математички факултет), смер Нумеричка математика и оптимизација завршила је 2007. године са просечном оценом 9.27. Школске 2007/8. године уписала се на докторске студије Математичког факултета, смер Геометрија. Положила је све испите предвиђене планом и програмом са просечном оценом 10.00.

Тијана Шукиловић је од 2007. до 2010. године радила као сарадник у настави на Математичком факултету. Од 2010. године на Математичком факултету ради као асистент за ужу научну област Геометрија. Тијана је држала вежбе из предмета Геометрија 1, Геометрија 2, Геометрија 4, Нацртна геометрија, Геометрија (на смеру Информатика), Програмски пакети у математици, Математика 1 (на Факултету за физичку хемију), Биостатистика и Биоматематика (Биолошки факултет). Коаутор је уџбеника *Геометрија за информатичаре* који је на рецензији.

Осим наведеног академског радног искуства, Тијана је хонорарно радила као истраживач на пројектима обраде података и статистичке анализе за фирму *Strategic Marketing Research*. Ангажована је као консултант од стране UNICEF-а.

Области научног истраживања Тијане Шукиловић су Диференцијална геометрија, Дискретна диференцијална геометрија, Операциона истраживања и Методика наставе геометрије. Тијана је објавила 4 рада (од тога 2 на СЦИ листи, од којих један самосталан) из наведених области у међународним часописима.

- Т. Šukilović, *Curvature based shape detection*, Computational geometry, 2015, vol. 48, No. 3, 180-188;
- N. Bokan, Т. Šukilović, S. Vukmirović, *Lorentz geometry of 4-dimensional nilpotent Lie groups*, Geometriae Dedicata, DOI 10.1007/s10711-014-9980-4 (18 pages);

- N. Bokan, T. Šukilović, S. Vukmirović, *On Modelling of Competencies in a Descriptive Geometry Course*, Pollack Periodica, 2012, vol 7, 173-183;
- Savić, T. Šukilović, V. Filipović, *Solving the Two-dimensional Packing Problem with  $m$ -M Calculus*, Yugoslav Journal of Operations Research, 2011, vol. 21, No. 1, 93-102.

Тијана Шукиловић је од 2008. године учесник пројекта *Геометрија, образовање и визуелизација са применама*, Министарства просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије. Учествовала је на 5 међународних конференција, од тога 3 са саопштењем.

## Проблем и садржај рукописа

---

Рукопис кандидата Тијане Шукиловић (у даљем тексту: кандидат) под називом *Геометрија четвородимензионих нилпотентних Лијевих група* (у даљем тексту : рукопис) садржи увод, пет поглавља, закључак, списак литературе и прилоге. Цео рукопис има 78 страна, а списак литературе садржи 65 библиографских јединица. Прилози садрже 4 табеле са резултатима истраживања и речник страних појмова и имена коришћених у рукопису.

Укратко, рукопис се бави класификацијом и геометријом лево-инваријантних метрика произвољне сигнатуре на четвородимензионим нилпотентним Лијевим групама. За сваку од добијених метрика из класификације се рачунају кривинске инваријанте, група холономије и декомпозибилност метрике, група изометрија и одређује да ли постоје пројективно еквивалентне метрике.

У уводном поглављу приказани су познати резултати у овој области и дата мотивација за истраживање. Први који је систематично истраживао геометрију лево-инваријантних метрика на некој класи Лијевих група био је Милнор (1976). Лево-инваријантне метрике на четвородимензионим нилпотентним Лијевим групама је класификовао Лаурет (1997), али се није бавио њиховом геометријом. Актуелна су истраживања група изометрија (Кордеро, Паркер, де Барко, Овандо...) и пројективне еквивалентности метрика (Матвејев, Киосак, Хал, Микеш...). Овај рукопис је покушај да се резултати Лаурета уопште на произвољну сигнатуру и изучи геометрија добијених метрика, са акцентом на одређивање група изометрија, холономија и испитивање пројективне еквивалентности.

У првом поглављу *Геометрија Лијевих група и алгебри* уводи се терминологија и нотација и представљају познате чињенице које се користе у даљем истраживању. Уводе се основни појмови везани за Лијеве групе и алгебре и појам нилпотентне групе. Важан је резултат Мањина (1986) да до на изоморфизам постоје само две четвородимензионе Лијеве алгебре које означавамо са  $h_3 \oplus R$  и  $g_4$ . Прва од њих,  $h_3 \oplus R$ , је директна сума Хајзебергове алгебре и једнодимензионе алгебре. Одговарајуће просто повезане Лијеве групе означавамо редом са  $G_4$  и  $H_3 \times R$ . Представљен је и важан резултат Рахманија (1992) да на Хајзенберговој групи  $H_3$ , у Лоренцовој сигнатури, постоји три нееквивалентне лево-инваријантне метрике, од којих је једна равна. Како у Римановој сигнатури на истој групи постоји само једна метрика, која уз то није равна, тај резултат наговештава значајне разлике између Римановог и псеудо-Римановог случаја. У овом поглављу се уводе и основне кривинске инваријанте: Риманов тензор кривине, Ричијева и скаларна кривина и Вејлов пројективни тензор. Посебна пажња је посвећена групи, односно алгебри холономије и појму Килингових векторских поља.

У другом поглављу *Класификација лево-инваријантних метрика* класификовани су скаларни производи на алгебрама  $h_3 \oplus R$  и  $g_4$  до на аутоморфизам алгебре. Овај проблем је еквивалентан

одређивању класа симетричних матрица дате сигнатуре, формата  $4 \times 4$ , у односу на дејство  $S \rightarrow A^T S A$ , где је  $A$  аутоморфизам алгебре. Иако овај проблем делује алгебарски, кандидат га је у рукопису решио користећи геометријски приступ. Класификација скаларних производа Риманове сигнатуре  $(4,0)$  је од раније познат резултат (Теореме 2.1 и 2.2). Класификација скаларних производа Лоренцове сигнатуре  $(3,1)$  (Теорема 2.3 за алгебру  $g_4$  и Теорема 2.2 за алгебру  $h_3 \oplus R$ ) и неутралне сигнатуре  $(2,2)$  (Теорема 2.5 за алгебру  $g_4$  и Теорема 2.6 за алгебру  $h_3 \oplus R$ ) су оригинални допринос кандидата. Класификација у Лоренцовој сигнатури је објављена у раду [1], а у неутралној сигнатури се налази у раду [2].

Уз помоћ левих транслација скаларни производ на Лијевој алгебри постаје лево-инваријантна метрика на Лијевој групи. На основу наведених теорема, доказане су Теореме 2.7 и 2.8 које описују све лево-инваријантне метрике, свих сигнатура, на Лијевим групама  $G_4$  и  $H_3 \times R$ . На групи  $G_4$  има 7 класа метрика од којих једна зависи од три реална параметра, а остале од дискретних параметара, док су на групи  $H_3 \times R$  свих 5 класа метрика зависе од дискретних параметара.

Интересантно је да су све метрике у Римановој сигнатури геодезијски комплетне, као и метрике произвољне сигнатуре на групи  $H_3 \times R$ , док на групи  $G_4$  постоје метрике Лоренцове и неутралне сигнатуре које нису геодезијски комплетне.

У трећем поглављу *Геометријска својства* за метрике из класификације се проучавају кривинске особине, одређује алгебра холономије и карактеришу неутралне Вокерове метрике. Тензор кривине дат је табелама А1-А4 у Прилогу. У Римановом случају не постоје равне метрике, а скаларна кривина је негативна константа. У случају Лоренцове и неутралне сигнатуре постоје равне лево-инваријантне метрике, а скаларна кривина може да буде и позитивна, негативна или нула константа.

Затим се у рукопису одређује алгебра холономије, тј. њена репрезентација у одговарајућој Лијевој алгебри, за сваку од метрика из класификације. Ако алгебра холономије има као инваријантне само дегенерисане потпросторе, тада је, на основу теорема де Рама и Вуа, Лијева група са одговарајућом лево-инваријантном метриком недекомпозабилна. У супротном, Лијева група са одговарајућом метриком је декомпозабилна, тј. она је директан производ две псеудо-Риманове многострукости. Након дуге и детаљне анализе, у рукопису су добијене Табеле 3.1 и 3.2 које описују алгебре холономија метрика на групама  $G_4$  и  $H_3 \times R$ , редом. Осим тога, показује се да су све Риманове лево-инваријантне метрике на  $G_4$  недекомпозабилне, а све Риманове метрике на  $H_3 \times R$  декомпозабилне. Са друге стране, на обе групе постоје како декомпозабилне, тако и недекомпозабилне метрике Лоренцове и неутралне сигнатуре.

Проучавањем репрезентације алгебре холономије описане су оне Лоренцове метрике на  $G_4$  и  $H_3 \times R$  које су пп-таласи, а који имају велики значај у општој теорији релативности и теорији струна. Такође су описане неутралне метрике које су Вокерове, тј. допуштају паралелну дводимензиону нул дистрибуцију. За Вокерове метрике из класификације "нормална форма" и база нул дистрибуције је дата Табелом 3.4, а Лемом 3.8 су карактерисане оне Вокерове метрике које допуштају нилпотетну групу изометрија. Доказ ове леме садржи компликовано решавање парцијалних диференцијаних једначина ради одређивања алгебре Килингових векторских поља. Сви резултати трећег поглавља су оригинални и садржани у радовима [1], [2] или [3].

Четврто поглавље *Групе изометрија* се бави одређивањем групе изометрија метрика из класификације и проучавањем структуре групе изометрија. Овде се потврђује да је структура групе изометрија много компликованија у псеудо-Римановом него у Римановом случају, посебно у случају

када Лијева група има дегенерисан центар. Групе изометрија су описане Лемама 4.2 и 4.3, Последицом 4.2 и Теоремом 4.2. Важну улогу у разумевању групе изометрија представља раније поменути алгебра Килингових векторских поља. Ово поглавље садржи много оригиналних и актуелних резултата који се налазе у раду [3].

Пето поглавље *Пројективна еквивалентност метрика* бави се испитивањем да ли метрике из класификације имају пројективно еквивалентну метрику.

Подсетимо да су две метрике пројективно еквивалентне ако имају исти скуп непараметризованих геодезијских линија. Ако пројективно еквивалентне метрике имају исте Леви-Чивита повезаности, тада се оне називају афино еквивалентне. При томе, пројективно еквивалентне метрике могу имати различите сигнатуре. Проучавање пројективно еквивалентних метрика је веома значајно у општој теорији релативности.

У рукопису је кандидат користио услов изражен преко Вејловог пројективног тензора да би установила да ли за сваку до метрика из класификације постоје метрике-кандидати, које су датој метрици евентуално пројективно еквивалентне. Када одреди кандидате решавањем одговарајућих парцијалних диференцијалних једначина кандидат утврђује да ли су метрике-кандидати заиста пројективно еквивалентни датој метрици из класификације. Резултати рачуна су представљени Табелама 5.1 и 5.2, а закључак дат у Теореми 5.3:

Ако је  $g$  лево-инваријантна метрика на четвородимензионој нилпотетној Лијевој групи и  $g'$  њој пројективно еквивалентна метрика. Тада је, или  $g' = \lambda g$ , где је  $\lambda$  константа (кажемо да је метрика  $g$  геодезијски ригидна), или је  $g'$  афино еквивалентна са  $g$  и такође лево-инваријантна.

Резултати овог поглавља су оригинални и налазе се у радовима [1] и [2].

## Методe које се користе у истраживању

---

Класификација лево-инваријантних метрика на Лијевој групи се своди на класификацију скаларних производа на одговарајућој Лијевој алгебри, што је проблем који се решава методама *Линеарне алгебре*. Изучавање тензора кривине се изводи методама *Тензорског рачуна* и *Рачуна диференцијалним формама*. За одређивање холономије и испитивање декомпозибилности метрике користи се *Теорија репрезентација*. Изучавање Вокерових метрика и одређивање група изометрија, тј. Килингових поља своди се на методе решавања *Парцијалних диференцијалних једначина*. Пројективно еквивалентне метрике се осим решавањем парцијалних диференцијалних једначина одређују и употребом суптилних геометријских инваријанти као што је Вејлов пројективни тензор.

## Референце генерисане у току писања рукописа

---

[1] N. Bokan, T. Šukilović, S. Vukmirović, *Lorentz geometry of 4-dimensional nilpotent Lie groups*, Geometriae Dedicata, DOI 10.1007/s10711-014-9980-4;

[2] T. Šukilović, *Geometric properties of neutral signature metrics on 4-dimensional nilpotent Lie groups*, на рецензији;

[3] T. Šukilović, *Isometry groups of 4-dimensional nilpotent Lie groups*, прихваћен за штампу у Journal of Mathematical Sciences.

## Закључак

---

Резултати приказани у рукопису *Геометрија четвородимензионих нилпотетних Лијевих група* представљају актуелна истраживања из области диференцијалне геометрије Лијевих група. Кандидат Тијана Шукиловић је у овом рукопису успешно изучавала разнородне геометријске проблеме користећи различите математичке методе. Класификовала је лево-инваријантне метрике на четвородимензионим нилпотетним Лијевим групама, а затим за добијене метрике одредила кривинске инваријанте, групу холономија, групу изометрија и пројективно еквивалентне метрике.

Сматрамо да је рукопис написан јасно и прегледно и да представља значајан допринос изучавању геометрије Лијевих група. Део резултата је штампан у часопису на СЦИ листи, а део резултата је припремљен за штампу и налази се на рецензији. Кандидат је своје резултате представио на домаћим и међународним семинарима и конференцијама.

**На основу свега наведеног и с обзиром да су испуњени сви формални услови предлажемо Наставно научно већу Математичког факултета, Универзитета у Београду, да рукопис *Геометрија четвородимензионих нилпотетних Лијевих група* кандидата Тијане Шукиловић прихвати као докторску дисертацију и одреди комисију за његову јавну одбрану.**

У Београду, 7. јануара 2015.

Комисија за преглед и оцену:

---

др Срђан Вукмировић, (ментор) доцент  
Универзитет у Београду, Математички факултет

---

др. Божидар Јовановић, научни саветник  
Математички институт САНУ

---

проф. др. Мирјана Ђорић, редовни професор  
Универзитет у Београду, Математички факултет

---

др Мирослава Антић, доцент  
Универзитет у Београду, Математички факултет