

NASTAVNO-NAUČNOM VEĆU  
MATEMATIČKOG FAKULTETA  
U BEOGRADU

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ  
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ  
бр. 213/5-14  
16. 04. 2015 год.  
Београд, Савински трг 12  
Тел. 20 27 801, Факс: 20 20 151

## Izveštaj

o pregledu i oceni rukopisa

„Automatsko rešavanje konstruktivnih problema u geometriji“  
kandidata Vesne Marinković (rođene Pavlović)  
kao doktorske teze

### 1 Oblast rukopisa

Rukopis „Automatsko rešavanje konstruktivnih problema u geometriji“ Vesne Marinković pripada oblasti automatskog rezonovanja i, uže, oblasti automatskog rezonovanja u geometriji. Ova oblast (kao i ovaj rukopis) predstavlja spoj oblasti veštačke inteligencije, algoritmike, matematičke logike i geometrije.

Automatsko rezonovanje je važna i široko rasprostranjena oblast računarstva. Njen deo je disciplina automatskog rezonovanja u geometriji koja okuplja zajednicu od oko sto istraživača, uglavnom iz Španije, Francuske, Nemačke, SAD, Austrije, Velike Britanije, Kine i Portugalije. Neki od najznačajnijih rezultata u ovoj oblasti su metode Vua, Buhbergera i Čoua.

Rukopis se bavi automatskim rešavanjem jedne klase klasičnih matematičkih problema — konstruktivnih problema u geometriji. Automatsko rešavanje ovog problema izuzetno je teško zbog kombinatorne eksplozije koje se javlja u njemu, ali i zbog procesa dokazivanja ispravnosti rešenja. Postoji ogromna literatura koja se bavi konstruktivnim problemima u geometriji a tek neki od izvora usmereni su i na nekakvo sistematizovanje konstruktivnih problema i njihovih rešenja. Neke vrste konstruktivnih problema važne su u više industrijskih oblasti, a konstrukcije lenjirom i šestarom danas pre svega u obrazovnom kontekstu. Tokom poslednjih dvadesetak godina razvijeno je nekoliko sistema za automatsko rešavanje ovih problema (u Kini, Francuskoj i SAD).

Osnovni cilj ovog rada je razvoj računarski podržane metodologije za generisanje proverivo ispravnih rešenja konstruktivnih problema u geometriji, korišćenjem razvijenog automatskog rešavača konstruktivnih problema i razvijenog automatskog dokazivača teorema za koherentnu logiku, a podržanih algebarskim i interaktivnim dokazivačima teorema.

### 2 Struktura rukopisa i kratak prikaz

Rukopis ima 226 strana i 109 bibliografskih jedinica. Sačinjen je od sledećih šest glava:

1. Uvod
2. Pregled osnovnih pojmova
  - 2.1 Zasnivanja geometrije
  - 2.1 Konstrukcije lenjirom i šestarom
  - 2.1 Automatsko i interaktivno dokazivanje teorema
  - 2.1 Koherentna logika i automatsko dokazivanje teorema u geometriji
3. Dokazivač ArgoCLP i proširenja

- 3.1 Opis dokazivača ArgoCLP
- 3.2 Primeri dokaza
- 3.3 Modul za pojednostavljivanje dokaza
- 3.4 Evaluacija i primeri pojednostavljenih dokaza
- 3.5 Pregled drugih pristupa i sistema
- 4. Automatsko rešavanje konstruktivnih problema
  - 4.1 Pregled sistema ArgoTriCS
  - 4.2 Reprzentacija znanja
  - 4.3 Pregled algoritma
  - 4.4 Implementacija
  - 4.5 Propratni rezultati
  - 4.6 Evaluacija i primeri
  - 4.7 Poredjenje sa drugim sistemima
  - 4.8 Formalizacija
- 5. Zaključci i dalji rad
- 6. Dodatak
  - (a) Hilbertov aksiomatski sistem
  - (b) Spisak lema i konstrukcijskih primitiva
  - (c) Primeri rešenih zadataka

U nastavku je ukratko opisan sadržaj svih glava.

- 1 **Uvod.** Dat je kratak opis konstruktivnih geometrijskih problema, kao i kratak osvrt na ključne izazove u njihovom rešavanju.
- 2 **Pregled osnovnih pojmova.** U ovoj glavi dat je kratak pregled različitih sistema za zasnivanje geometrije (uključujući, na primer, Hilbertov sistem), kao i opis problema konstrukcije lenjirom i šestarom. Dat je pregled pristupa za računarski podržano dokazivanje matematičkih teorema: automatsko i interaktivno dokazivanje teorema. Dat je opis *koherentne logike*, (poluodlučivog) fragmenta logike prvog reda koji je pogodan za automatsko generisanje čitljivih matematičkih dokaza.
- 3 **Dokazivač ArgoCLP i proširenja.** U ovoj glavi opisan je novi sistem ArgoCLP za automatsko dokazivanje teorema u koherentnoj logici, kao i njegova implemetacija. Pokazana je efikasnost sistema u automatskom dokazivanju geometrijskih teorema u različitim aksiomatskim sistemima. Dokazivač ArgoCLP u stanju je da automatski generiše dokaze teorema u čitljivom obliku (na prirodnom jeziku) a i u mašinski proverivom obliku (za interaktivni dokazivač teorema Isabelle). Poseban deo sistema ArgoCLP čini modul za normalizaciju generisanih dokaza u smislu nekoliko kriterijuma koji obezbeđuju kraće i čitljivije dokaze.
- 4 **Automatsko rešavanje konstruktivnih problema.** U ovoj glavi dat je opis sistema ArgoTriCS za automatsko rešavanje konstruktivnih problema lenjirom i šestarom, zasnovan na pogodnoj reprezentaciji znanja i novom algoritmu pretrage. Sistem je implementiran i u stanju da reši na stotine konstruktivnih problema — daleko više od drugih sličnih sistema, a i uz dokaze ispravnosti (za razliku od drugih sistema).

Za dokazivanje ispravnosti automatski generisanih konstrukcija, sistem ArgoTriCS koristi dokazivač ArgoCLP, automatske dokazivače teorema OpenGeoProver i GCLC, kao i interaktivni dokazivač teorema Isabelle. Dokazi ispravnosti su u velikoj meri čitljivi, a demonstrirano je da mogu biti i mašinski proverivi.

Neki od propratnih rezultata koji se dobijaju primenom sistema ArgoTriCS su i nove geometrijske teoreme dobijene tokom procesa rešavanja.

**5 Zaključci i dalji rad.** Dat je pregled rezultata postignutih u tezi i opisani su mogući pravci daljeg rada.

**Dodatak.** U dodatku je naveden Hilbertov aksiomatski sistem, spisak lema i konstrukcijskih primitiva potrebnih za rešavanje problema iz Vernikovog i Konelijeveg korpusa, kao i primeri rešenih zadataka.

### 3 Analiza rukopisa i originalnih doprinosa

Rukopis teze sadrži odličan pregled oblasti čijim se problemima bavi, kako pregled osnovnih pojmova i tehnika, tako i pregled najnovijih rezultata. Ovo pokazuje zrelost kandidata i njegovu sposobnost da savlada i sistematizuje znanje iz jedne istraživačke oblasti.

Rukopis donosi nekoliko značajnih originalnih naučnih rezultata.

Razvijen je automatski dokazivač teorema ArgoCLP za koherentnu logiku (u saradnji sa Sanom Stojanović) i uspešno primenjen na više teorema različitih teorija. Dokazivač je u stanju da automatski generiše dokaze teorema u prirodno-jezičkom i u mašinski proverivom obliku.

Razvijen je i implementiran u okviru dokazivača ArgoCLP, modul za normalizaciju dokaza u koherentnoj logici, u smislu nekoliko kriterijuma koji obezbeđuju kraće i čitljivije dokaze.

Izvršena je sistematizacija geometrijskog znanja potrebnog za rešavanje velike klase konstruktivnih problema.

Razvijen je i implementiran (kao sistem ArgoTriCS) novi metod za automatsko rešavanje konstruktivnih problema.

Razvijen je sistem za dokazivanje ispravnosti automatski generisanih rešenja, podržan algebarskim dokazivačima teorema i mašinski proverivim dokazima.

Jedan od posebno zanimljivih finalnih proizvoda razvijenog sistema je automatski generisana zbirka rešenih konstruktivnih zadataka koja ima više od 4700 strana i sadrži više od 1000 zadataka koje čine Vernikov i Konelijev korpus. Zbirka sadrži postavke zadataka i informaciju o tome da li je zadatak rešiv, da li je simetričan nekom od prethodnih zadataka, da li pripada klasi redundantnih zadataka, da li pripada klasi zadataka zavisnih od položaja. Za skoro svaki rešiv zadatak dat je opis tražene konstrukcije (na prirodnom i na GCLC jeziku), prateća ilustracija, informacija o dokazu ispravnosti, kao i spisak uslova pod kojim je konstrukcija ispravna.

Rezultati koje donosi rukopis predstavljaju značajan pomak u odnosu na druge slične sisteme: u broju problema koje sistem uspešno rešava, a još više po tome što je razvijena metodologija za računarski podržano proveravanje ispravnosti automatski generisanih konstrukcija.

Deo rezultata ove teze je do sada objavljen u sledećim radovima (u časopisima sa SCI liste u kategorijama ili vodećim konferencijama u oblasti):

- V. Marinković: Proof simplification in the framework of coherent logic. *Computing and Informatics*, u štampi, 2015.
- V. Marinković, P. Janičić: Towards understanding triangle construction problems. In J. Jeuring et al., editor, *Intelligent Computer Mathematics - CICM 2012*, volume 7362 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer, 2012.
- V. Marinković, P. Janičić, and P. Schreck: Solving geometric construction problems supported by theorem proving. *Proceedings of Automated Deduction in Geometry*, 2014.

- S. Stojanović, V. Pavlović, and P. Janičić: A coherent logic based geometry theorem prover capable of producing formal and readable proofs. In Automated Deduction in Geometry, volume 6877 of LNAI, pages 201220. Springer, 2011.
- V. Marinković, P. Janičić, and P. Schreck: Computer Theorem Proving for Verifiable Solving of Geometric Construction Problems. In F. Botana and P. Quaresma, editors, LNAI, Springer, u stampi, 2015. (unapredjena verzija rada prikazanog na konferenciji ADG 2014).

Kao članovi komisije pratili smo pisanje ovog rukopisa i, tokom rada i nakon čitanja ranijih verzija dali smo autorki niz, uglavnom sitnih, primedbi, zahteva i sugestija, koje je ona usvojila i obradila u finalnoj verziji teksta.

## 4 Zaključak

Značaj teze ogleda se kako u razvoju novih metoda za automatsko dokazivanje teorema u geometriji i automatsko rešavanje konstruktivnih problema, novom pojmu normalizovanih dokaza i sistematizaciji relevantnog geometrijskog znanja, tako i u implemetiranju sistema za rešavanje geometrijskih problema koji može služiti kao deo matematičkog softvera sa potencijalno ogromnim brojem korisnika.

U svom polju, ova teza doseže znatno dalje nego prethodni slični sistemi i predstavlja značajan doprinos. Najznačajniji pomak u odnosu na relevantne radove je u sistematizaciji relevantnog geometrijskog znanja, u broju problema koje sistem uspešno rešava, i možda najvažnije u tome što je razvijena metodologija za računarski podržano proveravanje ispravnosti automatski generisanih konstrukcija.

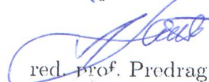
Svojim radom na rukopisu „Automatsko rešavanje konstruktivnih problema u geometriji“ i implementaciji pratećih sistema ArgoCLP i ArgoTriCS, kandidatkinja Vesna Marinković dokazala je visok stepen istraživačke zrelosti koja na najbolji način kombinuje teorijski i praktičan rad. Pokazala je da može da osvoji i sistematizuje znanja iz jedne oblasti, da kritički sudi o njima i da ih produbljuje i proširuje. Autorka je u okviru teze došla do niza veoma značajnih originalnih rezultata, koji mogu naći svoje mesto kako u daljim fundamentalnim istraživanjima, tako i u praktičnim primenama, pre svega u matematičkom softveru.

Delovi teze do sada su objavljeni (ili prihvaćeni za objavljivanje) u četiri rada u časopisima sa SCI liste ili na vodećim međunarodnim konferencijama. Na osnovu svega navedenog, kako su ispunjeni i svi formalni uslovi, predlažemo da se rukopis

„Automatsko rešavanje konstruktivnih problema u geometriji“  
Vesne Marinković

*prihvati* kao doktorska disertacija iz računarstva i da se zakaže njegova javna odbrana.

Komisija:

  
red. prof. Predrag Janičić, mentor

  
van. prof. Zoran Lučić

  
doc. Filip Marić

  
prof. Pascal Schreck (Université de Strasbourg)

Beograd, 17. april 2015.