УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Милан Ж. Јовановић

ОЦЕЊИВАЊЕ ПАРАМЕТРА ПОУЗДАНОСТИ ДВОКОМПОНЕНТНОГ СИСТЕМА

— Докторска дисертација —

Београд, 2015.

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MATHEMATICS

Milan Ž. Jovanović

ESTIMATION OF THE RELIABILITY PARAMETER OF A TWO-COMPONENT SYSTEM

— Doctoral Dissertation —

Belgrade, 2015.

Ментор:

др Павле Младеновић, редовни професор,
Математички факултет, Универзитет у Београду

Чланови комисије:

др Слободанка Јанковић, редовни професор,
Математички факултет, Универзитет у Београду

др Љиљана Петровић, редовни професор,
Економски факултет, Универзитет у Београду

Датум одбране:

Пријатна ми је дужност захвалити се људима који су ми помогли при изради ове дисертације.

Захваљујем се својој другарици и колегиници др Весни Ћојбашић Рајић, ванредном професору Економског факултета у Београду, која ме је упутила на област из које је написана ова дисертација и са којом сам објавио први рад из те области.

Велику захвалност дугујем својим колегама Бојани Милошевић и Марку Обрадовићу за безбројне сате и дане проведене у заједничком раду на проблемима из ове и других области вероватноће и статистике.

Такође се захваљујем свом ментору др Павлу Младеновићу, редовном професору Математичког факултета у Београду, као и члановима комисије за одбрану докторске дисертације др Слободанки Јанковић, редовном професору Математичког факултета у Београду, и др Љиљани Петровић, редовном професору Економског факултета у Београду, на корисним сугестијама које су унапредиле текст ове дисертације.

Посебну захвалност желим да изразим свом пријатељу Александру Павловићу, дипломираном инжењеру саобраћаја, на непоколебљивој вери да ће до ове дисертације доћи.

Наравно, захваљујем се и својој породици, родитељима, супрузи и ћеркама Ивани и Ани, чија су ме љубав и безрезервна подршка увек пратиле свих ових година.

Београд, септембар 2015. Милан Јовановић

Наслов докторске дисертације: *Оцењивање параметра поузданости двокомпонентног система*

Резиме: Први радови из тзв. *stress-strength* проблематике појавили су се половином двадесетог века, а ова област која припада теорији поузданости је веома жива и данас, чему у прилог говори и то да се сваке године објави по десетак радова на ову тему. У дисертацији су представљени методи за оцењивање параметра поузданости код система са независним стресом и снагом. Такође су уведена два нова модела и изведене су разне оцене параметра поузданости сваког од модела. Дисертација је подељена у четири главе.

У првој глави се уводе основни појмови и дају примери из реалног живота који показују велику могућност практичне примене резултата из ове области. Сортирано по расподелама стреса и снаге хронолошки се даје преглед свих истраживања, познатих аутору, из ове области. Наводе се специјалне функције и њихове главне особине које се касније користе у израчунавањима. Изводе се или наводе изрази за параметар поузданости за разне расподеле стреса и снаге.

Друга глава је посвећена разним методима који се користе како за тачкасто, тако и за интервално оцењивање параметра поузданости система. За сваки од метода изведене су или наведене оцене параметра поузданости за разне расподеле стреса и снаге.

У трећој глави се уводи нови модел код кога стрес има геометријску, а снага Пуасонову расподелу. То је један од првих, ако не и први пут у литератури да расподеле стреса и снаге нису из исте фамилије расподела. За тај модел параметар поузданости се оцењује разним методима и на основу симулација се доноси закључак о томе које би оцене требало користити у пракси.

У четвртој глави се уводи још један модел код кога стрес и снага имају расподеле које не само да нису из исте фамилије расподела, него не припадају ни истом типу расподеле. Стрес има геометријску, а снага експоненцијалну расподелу. Параметар поузданости тог модела такође се оцењује разним методима и опет се на основу симулација доноси закључак о томе које би оцене требало користити у пракси.

Кључне речи: стрес-снага, поузданост, геометријска расподела, Пуасонова расподела, експоненцијална расподела, оцена максималне веродостојности, јединствена непристрасна оцена са униформно минималном дисперзијом, Бајесова оцена, интервали поверења, *bootstrap*

Научна област: Математика

Ужа научна област: Вероватноћа и статистика

УДК број: 519.248(043.3)

АМС класификација: 62F10, 62F12, 62F15, 62F40, 62N05

Doctoral Dissertation Title: *Estimation of the Reliability Parameter of a Two-Component System*

Abstract: Early papers dealing with so-called stress-strength problems were published in the middle of the 20th century. This topic, which belongs to the reliability theory, is still very active nowadays, which can be seen through the number of published papers dealing with it - around ten each year. In this dissertation, some methods for estimation of the reliability parameter for a system with independent stress and strength are presented. Also, two new models are introduced and some estimators of the reliability parameter for each of them are derived. The dissertation is divided into four chapters.

In the first chapter, some basic terms are introduced and some examples from real life, illustrating big possibilities for application of the results from this scientific field, are described. Sorted based on the stress and strength distributions, a chronological overview of all research activities dealing with these topics, to the author's best knowledge, is presented. Some special functions, which are later used for calculations, along with their main properties are shown. The expressions for the reliability parameter for some stress and strength distributions are either derived or listed.

The second chapter is devoted to different methods used for point estimation, as well as for interval estimation of the reliability parameter of a system. For each methods estimators of the reliability parameter for some stress and strength distributions are either derived or listed.

In the third chapter, a new model is introduced. In this model, the stress has geometric, while the strength has Poisson distribution. This is one of the first, if not the first, appearances in the literature, where the stress and strength distributions do not belong to the same family of distributions. For this model, the reliability parameter is estimated using different methods and decision on optimal estimators for usage in practice is based on the simulations.

In the fourth chapter, another model is introduced, with the stress and strength distributions which are not only from different families of distributions, but also do not belong to the same type of distributions. The stress has geometric, while the strength has exponential distribution. The reliability parameter for this model is also estimated using different methods, and the decision on optimal estimators for usage in practice is once again based on the simulations.

Keywords: stress-strength, reliability, geometric distribution, Poisson distribution, exponential distribution, maximum likelihood estimator, uniformly minimum variance unbiased estimator, Bayes estimator, confidence intervals, bootstrap

Scietific Area: Mathematics

Scietific Sub-area: Probability and Statistics

UDC Number: 519.248(043.3)

AMS Classification: 62F10, 62F12, 62F15, 62F40, 62N05

Садржај

Глава 1

УВОД

1.1 Основни појмови и мотивација

Систем који је нападнут стресом X, а брани се снагом Y, зове се *двокомпонентни систем.* Систем ће опстати ако је снага већа од стреса. Вероватноћа да се то деси обележава се са R и зове се *параметар поузданости* система. У математичком моделу претпостављаће се да су X и Y независне случајне величине, а за параметар поузданости важиће да је $R = P\{X < Y\}$. Понекад се R дефинише и као $P\{X \leq Y\}$. Основни задатак биће оцењивање параметра R за разне расподеле X и Y. У статистичкој литератури проблеми везани за оцењивање параметра поузданости зову се *stress-strength* проблемима.

Цела проблематика мотивисана је разним примерима из реалних ситуација, тако да су и примене ових модела веома разноврсне, и то у индустрији, грађевинарству, војној и саобраћајној индустрији, трговини, медицини, фармацији, психологији, итд. Ево неколико примера.

Пример 1 (Lloyd и Lipow, 1962) *Нека је X максималан притисак у комори мотора ракете који се добија паљењем чврстог горива, а Y издржљивост коморе мотора ракете. Тада је R вероватноћа успешног паљења мотора ракете.*

Пример 2 (Johnson, 1988) *Рецептор у људском уву прима звук ако је* *јачи од неког прага Y. Ако неки извор емитује звук јачине X, онда је R вероватноћа да човек не чује звук који се емитује.*

Пример 3 (McCool, 1991) *Нека је X пречник завртња, а Y пречник навртке. Тада је R вероватноћа да завртањ одговара навртци.*

Пример 4 (Genç, 2013) *Нека је X максималан притисак изазван поплавом, а Y притисак који може да издржи главни носећи стуб моста. Тада је R вероватноћа да се мост не сруши.*

Пример 5 *Нека је Y број производа који се произведе за неки временски период, а X број производа који се за исти временски период прода. Тада је R вероватноћа да на тржишту не буде несташице тог производа.*

Иако се следећи пример не може назвати *stress-strength* проблемом у правом смислу тих речи, његов математички модел је исти као код тих проблема и заправо показује ширину употребљивости целе теорије.

Пример 6 (Johnson, 1988) *Нека је X време трајања живота након употебе првог лека, а Y време трајања живота након употебе другог лека за лечење исте болести. Тада је R вероватноћа да је други лек бољи.*

1.2 Преглед истраживања

Истраживања у овој области су почела са пионирским радом који је написао *Birnbaum* (1956). Први радови су били посвећени случајевима када X и Y имају нормалне расподеле, а каснији су се односили на разне друге расподеле.

Оцењивањем параметра R када X и Y имају независне нормалне расподеле први су се бавили *Owen* и остали (1964). Они су рачунали горње интервале поверења у случају када су X и Y са непознатим али једнаким дисперзијама, а обими узорака на основу којих се оцењује су једнаки. За исти тај случај *Govindarajulu* (1967) је рачунао двостране интервале поверења. *Church* и *Harris* (1970) су се бавили апроксимативним интервалима поверења у случају када је расподела за X позната. Тај рад је највероватније први у чијем се наслову помиње израз *stress-strength*. Бајесову оцену и апроксимативне интервале поверења базиране на њој, у случају када су непозната очекивања и непознате али једнаке дисперзије, извели су *Enis* и *Geisser* (1971). *Downton* (1973) је израчунао јединствену непристрасну оцену са униформно минималном дисперзијом (ЈНУМД оцену). Како је та оцена дата преко интеграла, њену апроксимацију извели су *Woodward* и *Kelley* (1977). *Reiser* и *Guttman* (1986, 1987) су предложили два нова апроксимативна и један Бајесов метод за израчунавање интервала поверења, као и једну врсту Бајесове оцене, а све у случају непознатих очекивања и непознатих и не обавезно једнаких дисперзија. У том случају, нови апроксимативни метод за израчунавање интервала поверења добијен на основу p вредности неког теста извели су *Weerahandi* и *Johnson* (1992). Под претпоставком да X и Y имају једнаке, у једном случају познате, у другом случају непознате, коефицијенте варијације *Gupta* и остали (1999) су извели оцене методом максималне веродостојности (МВ оцене). Такође су извели асимптотске интервале поверења. *Guo* и *Krishnamoorthy* (2004) су пронашли нови метод за конструкцију апроксимативних интервала поверења, док је *Barbiero* (2011) извео *bootstrap* и неколико асимптотских интервала поверења.

Израз за R када су X и Y независне случајне величине које имају експоненцијалне расподеле извели су већ помињани *Enis* и *Geisser* (1971). Они су израчунали МВ оцену за R, Бајесову оцену, као и егзактне и Бајесове интервале поверења. ЈНУМД оцену је извео *Tong* (1974, 1975). Упоређивањем МВ и ЈНУМД оцене, у случају када је расподела за X, тј. њен параметар скалирања познат, бавили су се *Kelley* и остали (1976). *Bartoszewicz* (1977) је одредио непристрасне и ЈНУМД оцене за цензурисане узорке типа I и II. Даљим упоређивањем МВ и ЈНУМД оцене, у случају када је расподела за X, тј. њен параметар скалирања познат, као и у случају када је и тај параметар непознат, бавили су се *Sathe* и *Shah* (1981). *Chao* (1982) је предложио апроксимативне методе за оперативније упоређивање тих оцена. За податке дате у облику рекордних вредности *Baklizi* (2008a) је извео МВ оцену и интервале поверења базиране на њој. За прогресивно цензурисане узорке типа II *Saraçoglu* и остали (2012) су извели МВ, ЈНУМД и Бајесову оцену за R, као и одговарајуће интервале поверења.

ЈНУМД и Бајесову оцену за R када X и Y имају независне двопараметарске експоненцијалне расподеле, како за комплетне, тако и за цензурисане узорке типа II, извео је *Beg* (1980a). За случај када су познати скалирајући параметри *Ivshin* (1996) је одредио МВ и ЈНУМД оцену. *Baklizi* (2003) је извео разне асимптотске, апроксимативне и *bootstrap* интервале поверења у случају једнаких локацијских параметара. За познате параметре скалирања *Pal* и остали (2005) су израчунали ЈНУМД оцене за R и R^k. *Krishnamoorthy* и остали (2007) су извели још неке апроксимативне интервале поверења. За податке дате у облику рекордних вредности *Baklizi* (2008a) је у случајевима једнаких локацијских, односно једнаких скалирајућих параметара извео МВ оцене за R и интервале поверења базиране на њима.

Basu (1981) је извео израз и МВ оцену за R када су X и Y независне и имају гама расподеле, а параметри облика су познати и природни бројеви. У том случају одређивањем ЈНУМД оцене и упоређивањем са МВ оценом бавили су се *Ismail* и остали (1986) и *Constantine* и остали (1986). Ови други су извели и разне облике израза за R и МВ оцене, као и интервале поверења за R. *Constantine* и остали (1990) су извели десет типова интервала поверења и упоређивали су их. За случај када су параметри облика познати и позитивни реални бројеви *Huang* и остали (2012) су извели ЈНУМД оцену и упоређивали је са МВ оценом. У случају када X има гама, а Y експоненцијалну расподелу, са свим непознатим параметрима, и независне су, *Jovanović* и *Rajić* (2014) су одредили МВ оцену за R и асимптотске интервале поверења базиране на њој.

Одређивањем и упоређивањем МВ, ЈНУМД и Бајесове оцене за R на основу цензурисаних узорака типа II када су X и Y независне случајне величине које имају двопараметарске Паретове расподеле бавили су се *Beg* и *Singh* (1979). *Nadarajah* и *Kotz* (2003) су извели изразе за R у случајевима када се као расподеле за X и Y појављују разне расподеле Паретовог типа. *Odat* (2010) је у случају када су X и Y једнопараметарске Паретове расподеле извео МВ оцену и на основу ње асимптотске и још неке апроксимативне интервале поверења. Оцењивањем параметра R када X и Y имају Ломаксове, тј. двопараметарске Паретове расподеле типа II бавили су се *Rezaei* и остали (2010). У случају једнаких скалирајућих параметара они су се бавили МВ оценом и њеном асимптотском расподелом, и на основу ње су извели асимптотске интервале поверења. Такође су одредили и два типа *bootstrap* интервала поверења. У случају када су параметри скалирања и познати, одредили су МВ, ЈНУМД и Бајесову оцену, као и интервале поверења базиране на МВ оцени. Дискутовали су и о случају када су сви параметри различити и непознати.

Случајевима када су X и Y независне случајне величине које имају расподеле Буровог типа бавили су се разни аутори. За Бурове расподеле типа XII са једним једнаким параметрима облика *Awad* и *Gharraf* (1986) су израчунали МВ и Бајесову оцену. Они су, када су ти параметри облика познати, одредили и ЈНУМД оцену и упоређивали су све добијене оцене. За Бурове расподеле типа X *Ahmad* и остали (1997) су извели МВ, Бајесову и такозвану емпиријску Бајесову оцену. *Surles* и *Padgett* (1998) су за расподеле истог тог типа одредили ЈНУМД оцену. Бавили су се и нумеричким апроксимацијама Бајесове оцене, а за скалиране Бурове расподеле типа X, тј. уопштене Релејеве расподеле, одредили су МВ оцену за R. За те расподеле *Surles* и *Padgett* (2001) су изучавали асимптотска својства МВ оцене, док су *Raqab* и *Kundu* (2005) за случај једнаких параметара скалирања одредили асимптотску расподелу МВ оцене и на основу тога конструисали асимптотске интервале поверења, као и два типа *bootstrap* интервала поверења, док су за случај када су ти параметри још и познати одредили расподелу МВ оцене, Бајесову и апроксимативну Бајесову оцену, као и разне типове интервала поверења базиране на тим оценама. За Бурове расподеле типа III са једнаким и познатим једним параметрима облика *Mokhlis* (2005) је извео МВ, ЈНУМД и Бајесову оцену, као и разне типове интервала поверења базиране на њима. За Бурове расподеле типа XII са једним једнаким параметрима облика *Lio* и *Tsai* (2012) су за једну посебну врсту прогресивно цензурисаних узорака одредили МВ оцену за R, као и асимптотске и два типа *bootstrap* интервала поверења.

Одређивањем МВ оцене за R, као и асимптотских интервала поверења базираних на тој оцени, на основу цензурисаних узорака типа II када су X и Y независне случајне величине које имају двопараметарске Вејбулове расподеле са једнаким параметрима облика бавио се *McCool* (1991). *Kundu* и *Gupta* (2006) су за такве расподеле рачунали МВ оцену за R. Поред итеративног метода, они су предложили и апроксимативни метод, као и асимптотске и два типа *bootstrap* интервала поверења. Такође су одредили и Бајесову оцену, као и одговарајуће интервале поверења. *Kundu* и *Raqab* (2009) су за тропараметарске Вејбулове расподеле са једнаким параметрима облика и локације предложили модификовану МВ оцену и апроксимативну МВ оцену, а све из разлога непостојања МВ оцене. Одредили су и асимптотску расподелу модификоване МВ оцене. *Krishnamoorthy* и *Lin* (2010) су за двопараметарске Вејбулове расподеле разматрали и упоређивали разне типове интервала поверења, како у општем случају, тако и у случају једнаких параметара облика. За прогресивно цензурисане узорке типа II МВ оцену која се добија итеративним методом и апроксимативну МВ оцену за R у случају двопараметарских Вејбулових расподела са једнаким параметрима облика одредили су *Asgharzadeh* и остали (2011). Они су одредили асимптотске и два типа *bootstrap* интервала поверења, као и Бајесову оцену и интервале поверења базиране на њој. За такве расподеле код којих су параметри облика још и познати *Amiri* и остали (2013) су одредили МВ, ЈНУМД и Бајесову оцену, као и два типа интервала поверења базираних на МВ оцени. У случају када су параметри облика различити и познати *Obradović* и остали (2014) су извели ЈНУМД оцену.

Осим ових стандардних расподела бројни аутори бавили су се случајевима када су X и Y независне случајне величине које имају неке друге расподеле или расподеле које су уопштења стандардних расподела. За расподеле које припадају експоненцијалној фамилији расподела са једним непознатим параметром одређивањем ЈНУМД оцене за R бавио се

Tong (1977). Његове резултате за експоненцијалну фамилију расподела са два непозната параметра уопштио је *Beg* (1980б). За униформне расподеле са непознатим десним крајевима *Ivshin* (1996) је извео МВ и ЈНУМД оцену. *AL-Hussaini* и остали (1997) су се бавили МВ оценом и апроксимативним интервалима поверења за расподеле које су коначне мешавине логнормалних расподела. У случајевима бета расподела и расподела повезаних са бета расподелом, уопштења експоненцијалне и гама расподеле, расподела екстремних вредности (Гумбелова, Фрешеова, Вејбулова), уопштења Паретове расподеле, Лапласових расподела и расподела повезаних са Лапласовом расподелом *Nadarajah* (2002, 2003а, 2003б, 2004) је извео изразе за R. *Kundu* и *Gupta* (2005) су за уопштене експоненцијалне расподеле са једнаким скалирајућим параметрима одредили МВ оцену, њену асимптотску расподелу, интервале поверења базиране на њој, као и два типа *bootstrap* интервала поверења. Уз услов да су ти параметри још и познати, они су одредили МВ, ЈНУМД и Бајесову оцену. За Левијеве и p-димензионалне Релејеве расподеле *Ali* и *Woo* (2005а, 2005б) су извели изразе и МВ оцене за R. За Гомперцове расподеле са једнаким и познатим скалирајућим параметрима *Saraçoglu* и *Kaya* (2007) су одредили МВ оцену, као и егзактне и асимптотске интервале поверења. За исти тај случај *Saraçoglu* и остали (2009) су одредили ЈНУМД и Бајесову оцену. Такође су се бавили упоређивањем МВ и тих оцена. За узорке из уопштених експоненцијалних расподела дате у облику доњих рекордних вредности *Baklizi* (2008б) је извео МВ и Бајесову оцену за R, као и неколико типова апроксимативних и *bootstrap* интервала поверења. *Raqab* и остали (2008) су за тропараметарске уопштене експоненцијалне расподеле са једнаким локацијским и скалирајућим параметрима разматрали модификовану МВ и Бајесову оцену, као и неке апроксимативне интервале поверења. За експоненцијализоване Гумбелове расподеле са једнаким скалирајућим параметрима *Kakade* и остали (2008) су разматрали МВ оцену, њену асимптотску расподелу и интервале поверења базиране на њој, као и *bootstrap* интервале поверења. У случају када су ти параметри и познати, они су одредили МВ оцену, као и егзактне и асимптотске интервале поверења. Случајевима када су X и Y из различитих фамилија расподела, прецизније када X има униформну или експоненцијалну, а Y Левијеву расподелу, бавили су се *Ali* и остали (2010). У оба случаја они су одређивали МВ и ЈНУМД оцене, као и егзактне и асимптотске интервале поверења. За расподеле које су Маршал-Олкинова проширења исте Ломаксове расподеле *Gupta* и остали (2010) су одређивали МВ оцену и асимптотске интервале поверења базиране на њој. За пондерисане експоненцијалне расподеле *Makhdoom* (2012) се бавио МВ оценом у случају једнаких скалирајућих параметара, као и Бајесовом оценом. *Ali* и остали (2012) су за уопштене гама расподеле са једнаким локацијским и скалирајућим параметрима, као и једним параметрима облика одредили модификовану МВ оцену, као и Бајесову оцену и неке интервале поверења. За Топ-Леонеове расподеле *Genç* (2013) је одредио МВ и ЈНУМД оцену, како за комплетне, тако и за лево цензурисане узорке. Такође је одредио егзактне и апроксимативне интервале поверења. За Линдлијеве расподеле *Al-Mutairi* и остали (2013) су извели МВ и ЈНУМД оцену, асимптотске и неколико врста *bootstrap* интервала поверења, као и Бајесову оцену и интервале поверења базиране на њој. Оцењивањем параметра R за Кумарасвамијеве расподеле бавили су се *Nadar* и остали (2014). За једне једнаке параметре облика они су одређивали МВ и Бајесову оцену, као и асимптотске интервале поверења. У случају када су ти параметри још и познати, они су одредили МВ, ЈНУМД, Бајесову и емпиријску Бајесову оцену, као и егзактне интервале поверења. У случају различитих и непознатих свих параметара они су се бавили МВ оценом и асимптотским интервалима поверења. За уопштене логистичке расподеле *Babayi* и остали (2014) су се у општем и у случају једнаких скалирајућих параметара бавили одређивањем МВ оцене, њене асимптотске расподеле и интервала поверења базираних на њој, док су у случају да су ти параметри још и познати одредили МВ, ЈНУМД и Бајесову оцену, као и интервале поверења базиране на МВ и Бајесовој оцени. За тропараметарске уопштене Релејеве расподеле са једнаким скалирајућим и локацијским параметрима *Kundu* и *Raqab* (2015) су извели модификовану МВ оцену, њену асимптотску расподелу и асимптотски интервал поверења за R. Такође су се бавили

Бајесовом оценом. За узорке из двопараметарских уопштених експоненцијалних расподела дате у облику доњих рекордних вредности *Asgharzadeh* и остали (2015) су у случају једнаких скалирајућих параметара изводили МВ и Бајесову оцену за R, два типа *bootstrap* интервала поверења, као и интервале поверења базиране на Бајесовој оцени. У случају једнаких параметара облика они су се бавили МВ и Бајесовом оценом, као и интервалима поверења базираним на Бајесовој оцени.

Велика већина истраживања се односила на случајеве када X и Y имају апсолутно непрекидне расподеле. Како се у применама појављују и ситуације где X и Y имају дискретне расподеле, нпр. видети пример 5, неколико аутора се посветило и овим случајевима. *Ahmad* и остали (1995) су одредили и упоређивали МВ и Бајесову оцену у случају када независне случајне величине X и Y имају геометријске раподеле. За случај када су X и Y независне и имају негативне биномне расподеле *Sathe* и *Dixit* (2001) су извели МВ и ЈНУМД оцену. *Barbiero* (2013) се бавио апроксимативним интервалима поверења конструисаним на основу МВ и ЈНУМД оцена у случају када су X и Y независне и имају Пуасонове расподеле. *Obradović* и остали (2014) су за независне X и Y које имају логаритамске расподеле одредили ЈНУМД оцену.

У скоро свим истраживањима случајне величине X и Y су биле из исте фамилије расподела, тј. имале су исте расподеле, али са различитим параметрима. У каснијим главама детаљно ће бити изложени резултати два истраживања у којима су X и Y из различитих фамилија расподела. У првом, *Obradović* и остали (2015) су оцењивали параметар R у случају када X има геометријску, а Y Пуасонову расподелу, док је у другом, *Jovanović* (2015) разматрао случај у коме X и Y не само да нису из исте фамилије расподела, него је X дискретног, а Y апсолутно непрекидног типа, прецизније, X има геометријску, а Y експоненцијалну расподелу.

Сва до сада наведена истраживања су се односила на случајеве независних X и Y. Иако у даљим главама неће бити помињани случајеви у којима су X и Y зависне случајне величине, не мали број аутора се бавио и тиме. Оцењивањем параметра R када (X, Y) има дводимензионалну нормалну расподелу бавили су се *Owen* и остали (1964), *Govindarajulu* (1967), *Mukherjee* и *Sharan* (1985), *Roy* (1993), *Nandi* и *Aich* (1994), *Gupta* и *Subramanian* (1998) и *Barbiero* (2012). Случај када (X, Y) има дводимензионалну експоненцијалну расподелу истраживали су *Basu* (1981), *Awad* и остали (1981) и *Nadarajah* и *Kotz* (2006), а случај када (X, Y) има дводимензионалну Паретову расподелу *Hanagal* (1997) и *Jeevanand* (1997). *Nadarajah* (2005а, 2005б) се бавио случајевима када (X, Y) има разне дводимензионалне бета, односно гама расподеле, а *Gupta* и остали (2013) случајем када (X, Y) има дводимензионалну логнормалну расподелу.

Неки аутори су се бавили оцењивањем параметра поузданости код вишекомпонентних система, тј. система са више стресова или одбрана. Поузданост вишекомпонентних система чије компоненте имају експоненцијалне расподеле оцењивали су *Bhattacharyya* и *Johnson* (1974), *Rinco* (1983) и *Gupta* и *Gupta* (1988), док су *Chandra* и *Owen* (1975) проучавали случајеве у којима све компоненте имају нормалне расподеле или стрес има нормалну или униформну, а вишеструке одбране имају експоненцијалне расподеле.

Најобухватнији и најдетаљнији преглед свих истраживања на тему *stress-strength* проблематике, до времена кад се појавила, дат је у књизи чији су аутори *Kotz* и остали (2003).

1.3 Специјалне функције

У овом поглављу је дат преглед специјалних функција које ће бити коришћене при каснијим израчунавањима, као и неке њихове особине.

1.3.1 Гама функција

Гама функција се дефинише као

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt, \quad s > 0.$$

Следе неке особине гама функције.

1. $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$.
2. За сваки природан број n је
$$\Gamma(n) = (n-1)!.$$
3. Гама функција је бесконачно диференцијабилна и важи да је
$$\Gamma^{(n)}(s) = \int\limits_0^\infty t^{s-1}e^{-t}(\ln t)^n dt, \quad n \in \mathbb{N}.$$
4. За $0 < s < 1$ важи да је
$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}.$$
5. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

1.3.2 Некомплетна гама функција

Горња некомплетна гама функција се дефинише као
$$\Gamma(s,x) = \int\limits_x^\infty t^{s-1}e^{-t}dt, \quad s > 0, x \geq 0,$$
док се доња некомплетна гама функција дефинише као
$$\gamma(s,x) = \int\limits_0^x t^{s-1}e^{-t}dt, \quad s > 0, x > 0.$$

Следе неке особине некомплетних гама функција.

1. $\Gamma(s,0) = \Gamma(s)$.
2. $\lim\limits_{x\to\infty} \gamma(s,x) = \Gamma(s)$.

3. $\gamma(s,x) + \Gamma(s,x) = \Gamma(s)$.

4. За $s > 1$ важи да је

$$\Gamma(s,x) = (s-1)\Gamma(s-1,x) + x^{s-1}e^{-x}.$$

5. За $s > 1$ важи да је

$$\gamma(s,x) = (s-1)\gamma(s-1,x) - x^{s-1}e^{-x}.$$

6. $\gamma(s,x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{s+k}}{k!(s+k)}$.

7. За сваки природан број n је

$$\Gamma(n,x) = (n-1)!e^{-x}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}. \tag{1.1}$$

1.3.3 Дигама функција

Дигама функција је извод логаритма гама функције, тј.

$$\psi(x) = \frac{d}{dx}\ln\Gamma(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}, \quad x > 0. \tag{1.2}$$

Многе особине дигама функције повезане су са Ојлеровом константом γ која се дефинише као

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\Big),$$

а може се приказати и као

$$\gamma = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{k} - \ln\Big(1+\frac{1}{k}\Big)\right].$$

Важи да је $\gamma \approx 0.5772156649$.

Следе неке особине дигама функције.

1. $\psi(1) = -\gamma$.

2. $\psi(x+1) = \psi(x) + \frac{1}{x}$.

3. $\psi(x) = -\gamma + \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{x+k}\right)$.

4. За сваки природан број n који је већи од 1 важи да је

$$\psi(n) = -\gamma + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

5. За сваки природан број n важи да је

$$\psi(n) = -\gamma - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \binom{n-1}{k}. \tag{1.3}$$

1.3.4 Бета функција

Бета функција се дефинише као

$$B(x,y) = \int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, \quad x > 0, y > 0.$$

Следе неке особине бета функције.

1. $B(x,y) = B(y,x)$.

2. $B(x+1,y) = \frac{x}{x+y}B(x,y)$.

3. $B(x,y+1) = \frac{y}{x+y}B(x,y)$.

4. Важи и друга интегрална репрезентација

$$B(x,y) = \int\limits_0^{\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}dt.$$

5. $B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

6. За све природне бројеве m и n је

$$B(m,n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}.$$

7. За $0 < x < 1$ важи да је

$$B(x, 1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

1.3.5 Хипергеометријска функција

Хипергеометријска функција се дефинише као

$${}_2F_1(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < 1,$$

c није негативан цео број или 0, а

$$(q)_n = \begin{cases} 1, & \text{за} \quad n = 0, \\ q(q+1)\cdots(q+n-1), & \text{за} \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Ако су a или b негативни цели бројеви или нуле, тј. ако је m природан број или 0, важи да је

$${}_2F_1(-m,b;c;z) = \sum_{n=0}^{m} (-1)^n \binom{m}{n} \frac{(b)_n}{(c)_n} z^n,$$

$${}_2F_1(a,-m;c;z) = \sum_{n=0}^{m} (-1)^n \binom{m}{n} \frac{(a)_n}{(c)_n} z^n.$$

1.3.6 Експоненцијални интеграл

Експоненцијални интеграл се дефинише као

$$Ei(x) = -\int_{-x}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt, \quad x \neq 0.$$

Важи да је

$$Ei(x) = \gamma + \ln|x| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k \cdot k!}. \tag{1.4}$$

1.3.7 Стирлингови бројеви прве врсте

Обележимо са $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, број пермутација од n елемената које имају k циклова, с тим што се додатно дефинише да је $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$. На пример, ако се пермутују бројеви 1, 2 и 3, укупно има шест пермутација, од којих су две са једним циклом, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, три са два цикла, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, а једна са три цикла, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Због тога је $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 2$, $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 3$, а $\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 1$.

Следе неке особине тих бројева.

1. За $n > 0$ важи да је
$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ n \end{bmatrix} = 0.$$

2. За $k > n$ важи да је
$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = 0.$$

3. За $n > 0$ важи да је
$$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!.$$

4. $\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1.$

5. $\sum_{k=0}^{n} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = n!.$

6. Бројеви $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]$, $n > 0$, се појављују као коефицијенти једног полинома, тј. важи да је

$$x(x+1)\cdots(x+n-1) = \sum_{k=0}^{n} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] x^k.$$

   Како је $x(x+1)(x+2) = x^3 + 3x^2 + 2x$, потврђен је рачун из горњег примера.

7. За $k > 0$ важи да је

$$\left[\begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right] = n \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] + \left[\begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right].$$

Стирлингови бројеви прве врсте се дефинишу као

$$s(n,k) = (-1)^{n-k} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right], \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Следе неке особине Стирлингових бројева прве врсте.

1. $|s(n,k)| = \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right].$

2. Стирлингови бројеви прве врсте $s(n,k)$, $n > 0$, се појављују као коефицијенти једног полинома, тј. важи да је

$$x(x-1)\cdots(x-n+1) = \sum_{k=0}^{n} s(n,k) x^k.$$

3. За $k > 0$ важи да је

$$s(n+1,k) = -ns(n,k) + s(n,k-1).$$

1.4 Параметар поузданости

Надаље ће се подразумевати да су у свим *stress-strength* моделима стрес X и снага Y независне случајне величине.

За разне расподеле X и Y биће израчунати или наведени изрази за параметар поузданости R.

Нормалне расподеле

Случајна величина има нормалну $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, расподелу ако је њена густина расподеле

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ако X има нормалну $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ расподелу, а Y нормалну $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ расподелу, тада $X - Y$ има нормалну $\mathcal{N}(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ расподелу, па важи да је

$$R = P\{X < Y\} = P\{X - Y < 0\} = \Phi\left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\right), \tag{1.5}$$

где је $\Phi(x)$ функција расподеле нормалне $\mathcal{N}(0, 1)$ расподеле. Једну варијанту извођења овог израза први су урадили *Owen* и остали (1964).

Експоненцијалне расподеле

Случајна величина има експоненцијалну $\mathcal{E}(\alpha)$, $\alpha > 0$, расподелу ако је њена густина расподеле

$$f(x; \alpha) = \alpha e^{-\alpha x}, \quad x \geq 0.$$

Ако X има експоненцијалну $\mathcal{E}(\alpha)$ расподелу, а Y експоненцијалну $\mathcal{E}(\beta)$ расподелу, тада важи да је

$$R = P\{X < Y\} \;\; = \;\; \int_0^\infty dx \int_x^\infty \alpha e^{-\alpha x} \beta e^{-\beta y} dy$$

$$= \alpha\beta \int_0^\infty e^{-\alpha x} dx \int_x^\infty e^{-\beta y} dy.$$

Коришћењем смене $-\beta y = t$ добија се да је

$$\begin{aligned} R &= \alpha \int_0^\infty e^{-\alpha x} dx \int_{-\infty}^{-\beta x} e^t dt \\ &= \alpha \int_0^\infty e^{-(\alpha+\beta)x} dx. \end{aligned}$$

Применом нове смене $-(\alpha+\beta)x = s$, коначно се добија

$$R = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \int_{-\infty}^{0} e^s ds = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

Овај израз извели су *Enis* и *Geisser* (1971).

Двопараметарске експоненцијалне расподеле

Случајна величина има двопараметарску експоненцијалну $\mathcal{E}(\alpha,\mu)$, $\alpha > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$, расподелу ако је њена густина расподеле

$$f(x;\alpha,\mu) = \alpha e^{-\alpha(x-\mu)}, \quad x \geq \mu.$$

Ако X има двопараметарску експоненцијалну $\mathcal{E}(\alpha_1,\mu_1)$ расподелу, а Y двопараметарску експоненцијалну $\mathcal{E}(\alpha_2,\mu_2)$ расподелу, тада важи да је (*Kotz* и остали, 2003)

$$R = \begin{cases} 1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2} e^{-\alpha_1(\mu_2-\mu_1)}, & \text{за} \quad \mu_1 \leq \mu_2, \\ \frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2} e^{-\alpha_2(\mu_1-\mu_2)}, & \text{за} \quad \mu_1 > \mu_2. \end{cases}$$

Гама расподеле

Случајна величина има гама $\Gamma(a,\beta)$, $a > 0$, $\beta > 0$, расподелу ако је њена густина расподеле

$$f(x;a,\beta) = \frac{x^{a-1}e^{-\frac{x}{\beta}}}{\Gamma(a)\beta^a}, \quad x \geq 0.$$

Ако X има гама $\Gamma(a_1,\beta_1)$ расподелу, Y гама $\Gamma(a_2,\beta_2)$ расподелу и ако су a_1 и a_2 природни бројеви, тада важи да је (*Basu*, 1981)

$$R = \sum_{k=0}^{a_2-1} \frac{\Gamma(a_1+k)}{\Gamma(a_1)\Gamma(k+1)} \frac{\beta_1^k \beta_2^{a_1}}{(\beta_1+\beta_2)^{a_1+k}}. \tag{1.6}$$

Паретове расподеле

Случајна величина има (двопараметарску) Паретову $\mathcal{P}ar(a,\mu)$, $a>0$, $\mu>0$, расподелу ако је њена густина расподеле

$$f(x;a,\mu) = \frac{a\mu^a}{x^{a+1}}, \quad x \geq \mu.$$

Ако X има Паретову $\mathcal{P}ar(a_1,\mu_1)$ расподелу, а Y Паретову $\mathcal{P}ar(a_2,\mu_2)$ расподелу, тада важи да је (*Beg* и *Singh*, 1979)

$$R = \begin{cases} 1 - \frac{a_2}{a_1+a_2}\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^{a_1}, & \text{за} \quad \mu_1 < \mu_2, \\ \frac{a_1}{a_1+a_2}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{a_2}, & \text{за} \quad \mu_1 \geq \mu_2. \end{cases}$$

Бурове расподеле типа III

Случајна величина има Бурову $\mathcal{B}ur3(a,b)$, $a>0$, $b>0$, расподелу типа III ако је њена густина расподеле

$$f(x;a,b) = \frac{abx^{ab-1}}{(1+x^a)^{b+1}}, \quad x > 0.$$

Ако X има Бурову $\mathcal{B}ur3(a,b_1)$ расподелу, а Y Бурову $\mathcal{B}ur3(a,b_2)$ расподелу, тада важи да је (*Mokhlis*, 2005)

$$R = \frac{b_2}{b_1+b_2}.$$

Бурове расподеле типа X

Случајна величина има Бурову $\mathcal{B}ur10(a)$, $a > 0$, расподелу типа X, ако је њена густина расподеле

$$f(x;a) = 2axe^{-x^2}\big(1 - e^{-x^2}\big)^{a-1}, \quad x > 0.$$

Ако X има Бурову $\mathcal{B}ur10(a)$ расподелу, а Y Бурову $\mathcal{B}ur10(b)$ расподелу, тада важи да је (*Ahmad* и остали, 1997)

$$R = \frac{b}{a+b}.$$

Случајна величина има скалирану Бурову $\mathcal{B}ur10(a,\sigma)$, $a > 0$, $\sigma > 0$, расподелу типа X, ако је њена густина расподеле

$$f(x;a,\sigma) = \frac{2ax}{\sigma^2}e^{-(\frac{x}{\sigma})^2}\big(1 - e^{-(\frac{x}{\sigma})^2}\big)^{a-1}, \quad x > 0.$$

Ако X има скалирану Бурову $\mathcal{B}ur10(a_1,\sigma_1)$ расподелу, Y скалирану Бурову $\mathcal{B}ur10(a_2,\sigma_2)$ расподелу и ако је a_1 природан број, тада важи да је (*Surles* и *Padgett*, 2001)

$$R = a_2\Gamma(a_2)\sum_{j=0}^{a_1}\binom{a_1}{j}(-1)^j\frac{\Gamma((\frac{\sigma_2}{\sigma_1})^2 j + 1)}{\Gamma((\frac{\sigma_2}{\sigma_1})^2 j + 1 + a_2)}.$$

У случају да су параметри скалирања једнаки, тј. $\sigma_1 = \sigma_2$, добија се да је (*Surles* и *Padgett*, 1998)

$$R = \frac{a_2}{a_1 + a_2}.$$

Бурове расподеле типа XII

Случајна величина има Бурову $\mathcal{B}ur12(a,b)$, $a > 0$, $b > 0$, расподелу типа XII, ако је њена густина расподеле

$$f(x;a,b) = abx^{a-1}(1 + x^a)^{-(b+1)}, \quad x > 0.$$

Ако X има Бурову $\mathcal{B}ur12(a, b_1)$ расподелу, а Y Бурову $\mathcal{B}ur12(a, b_2)$ расподелу, тада важи да је (*Awad* и *Gharraf*, 1986)

$$R = \frac{b_1}{b_1 + b_2}.$$

Вејбулове расподеле

Случајна величина има (двопараметарску) Вејбулову $\mathcal{W}(a, \beta)$, $a > 0$, $\beta > 0$, расподелу, ако је њена густина расподеле

$$f(x; a, \beta) = \frac{ax^{a-1}}{\beta^a} e^{-(\frac{x}{\beta})^a}, \quad x > 0.$$

Ако X има Вејбулову $\mathcal{W}(a_1, \beta_1)$ расподелу, а Y Вејбулову $\mathcal{W}(a_2, \beta_2)$ расподелу, тада важи да је (*Kotz* и остали, 2003)

$$R = \begin{cases} 1 - \sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \Big(\frac{\beta_2}{\beta_1}\Big)^{ja_1} \Gamma\Big(\frac{a_1}{a_2} j + 1\Big), & \text{за} \quad a_1 < a_2, \\ \sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \Big(\frac{\beta_1}{\beta_2}\Big)^{ja_2} \Gamma\Big(\frac{a_2}{a_1} j + 1\Big), & \text{за} \quad a_1 > a_2. \end{cases}$$

У случају да су параметри облика једнаки, тј. $a_1 = a_2 = a$, важи да је (*Johnson*, 1988)

$$R = \frac{\beta_2^a}{\beta_1^a + \beta_2^a}.$$

Униформне расподеле

Случајна величина има униформну $\mathcal{U}[0, \theta]$, $\theta > 0$, расподелу, ако је њена густина расподеле

$$f(x; \theta) = \frac{1}{\theta}, \quad 0 \leq x \leq \theta.$$

Ако X има униформну $\mathcal{U}[0, \theta]$ расподелу, а Y униформну $\mathcal{U}[0, \mu]$ расподелу, тада важи да је (*Ivshin*, 1996)

$$R = \begin{cases} 1 - \frac{\theta}{2\mu}, & \text{за} \quad \theta \leq \mu, \\ \frac{\mu}{2\theta}, & \text{за} \quad \theta > \mu. \end{cases}$$

Гомперцове расподеле

Случајна величина има Гомперцову $\mathcal{G}om(\alpha, \mu)$, $\alpha > 0$, $\mu > 0$, расподелу, ако је њена густина расподеле

$$f(x; \alpha, \mu) = \mu e^{\alpha x} e^{-\frac{\mu}{\alpha}(e^{\alpha x}-1)}, \quad x > 0.$$

Ако X има Гомперцову $\mathcal{G}om(\alpha_1, \mu_1)$ расподелу, а Y Гомперцову $\mathcal{G}om(\alpha_2, \mu_2)$ расподелу, тада важи да је (*Saraçoglu* и *Kaya*, 2007)

$$R = 1 - e^{(\frac{\mu_1}{\alpha_1}+\frac{\mu_2}{\alpha_2})} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{\mu_1}{\alpha_1}\right)^k \left(\frac{\alpha_2}{\mu_2}\right)^{k\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \left[\Gamma\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}k+1\right) - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \left(\frac{\mu_2}{\alpha_2}\right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}k+i+1}}{\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}k+i+1\right)i!}\right].$$

У случају да су параметри скалирања једнаки, тј. $\alpha_1 = \alpha_2$, важи да је

$$R = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}.$$

Топ-Леонеове расподеле

Случајна величина има Топ-Леонеову $\mathcal{TL}(a)$, $0 < a < 1$, расподелу, ако је њена густина расподеле

$$f(x; a) = 2a(1-x)x^{a-1}(2-x)^{a-1}, \quad 0 < x < 1.$$

Ако X има Топ-Леонеову $\mathcal{TL}(a)$ расподелу, а Y Топ-Леонеову $\mathcal{TL}(b)$ расподелу, тада важи да је (*Genç*, 2013)

$$R = \frac{b}{a+b}.$$

Линдлијеве расподеле

Случајна величина има Линдлијеву $\mathcal{L}in(\alpha)$, $\alpha > 0$, расподелу, ако је њена густина расподеле

$$f(x; \alpha) = \frac{\alpha^2}{1+\alpha}(1+x)e^{-\alpha x}, \quad x > 0.$$

Ако X има Линдлијеву $\mathcal{L}in(\alpha)$ расподелу, а Y Линдлијеву $\mathcal{L}in(\beta)$ расподелу, тада важи да је (*Al-Mutairi* и остали, 2013)

$$R = 1 - \frac{\beta^2[\beta(\beta+1) + \alpha(\beta+1)(\beta+3) + \alpha^2(2\alpha+3) + \alpha^3]}{(\alpha+1)(\beta+1)(\alpha+\beta)^3}.$$

Кумарасвамијеве расподеле

Случајна величина има Кумарасвамијеву $\mathcal{K}um(a,b)$, $a > 0$, $b > 0$, расподелу, ако је њена густина расподеле

$$f(x;a,b) = abx^{a-1}(1-x^a)^{b-1}, \quad 0 < x < 1.$$

Ако X има Кумарасвамијеву $\mathcal{K}um(a_1,b_1)$ расподелу, а Y Кумарасвамијеву $\mathcal{K}um(a_2,b_2)$ расподелу, тада важи да је (*Nadar* и остали, 2014)

$$R = 1 - \Gamma(b_2+1)\sum_{k=0}^{\infty}\binom{b_1}{k}\frac{(-1)^k\Gamma(1+k\frac{a_1}{a_2})}{\Gamma(1+b_2+k\frac{a_1}{a_2})}.$$

У случају да су први параметри облика једнаки, тј. $a_1 = a_2$, важи да је

$$R = \frac{b_1}{b_1+b_2}.$$

Геометријске расподеле

Случајна величина има геометријску $\mathcal{G}(p)$, $0 < p < 1$, расподелу, ако је њен закон расподеле

$$P\{X = x; p\} = (1-p)^{x-1}p, \quad x \in \mathbb{N}.$$

Ако X има геометријску $\mathcal{G}(p_1)$ расподелу, а Y геометријску $\mathcal{G}(p_2)$ расподелу, тада важи да је

$$R = P\{X < Y\} \;=\; \sum_{x=1}^{\infty} P\{X = x, Y > x\} = \sum_{x=1}^{\infty} P\{X = x\}P\{Y > x\}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{x=1}^{\infty}\left[(1-p_1)^{x-1}p_1\sum_{y=x+1}^{\infty}(1-p_2)^{y-1}p_2\right]\\
&= p_1p_2\sum_{x=1}^{\infty}\left[(1-p_1)^{x-1}(1-p_2)^{x}\sum_{y=1}^{\infty}(1-p_2)^{y-1}\right]\\
&= p_1p_2\sum_{x=1}^{\infty}(1-p_1)^{x-1}(1-p_2)^{x}\frac{1}{1-(1-p_2)}\\
&= p_1(1-p_2)\sum_{x=1}^{\infty}[(1-p_1)(1-p_2)]^{x-1}\\
&= p_1(1-p_2)\frac{1}{1-(1-p_1)(1-p_2)}\\
&= \frac{p_1(1-p_2)}{p_1+p_2-p_1p_2}. \qquad (1.7)
\end{aligned}$$

Израз за R за геометријске расподеле дефинисане на мало другачији начин извели су *Ahmad* и остали (1995).

Негативне биномне расподеле

Случајна величина има негативну биномну $\mathcal{NB}(m,p)$, $m \in \mathbb{N}$, $0 < p < 1$, расподелу, ако је њен закон расподеле

$$P\{X = x; m,p\} = \binom{m+x-1}{m-1}p^x(1-p)^m, \quad x \in \mathbb{N}\cup\{0\}. \qquad (1.8)$$

Ако X има негативну биномну $\mathcal{NB}(m_1,p_1)$ расподелу, а Y негативну биномну $\mathcal{NB}(m_2,p_2)$ расподелу, тада важи да је (*Sathe* и *Dixit*, 2001)

$$R = P\{X \le Y\} = (1-p_1)^{m_1}\sum_{x=0}^{m_2-1}\left[\binom{m_1+x-1}{m_1-1}\frac{(p_1(1-p_2))^x}{(1-p_1p_2)^{m_1+x}} \cdot \sum_{y=0}^{m_2-1-x}\binom{m_2-1}{y}(1-p_2)^y p_2^{m_2-1-y}\right].$$

Пуасонове расподеле

Случајна величина има Пуасонову $\mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$, расподелу, ако је њен закон расподеле

$$P\{X = x; \lambda\} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Ако X има Пуасонову $\mathcal{P}(\lambda)$ расподелу, а Y Пуасонову $\mathcal{P}(\mu)$ расподелу, тада важи да је (*Barbiero*, 2013)

$$R = \sum_{x=0}^{\infty} \Big[\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}\Big(1 - \sum_{y=0}^{x} \frac{e^{-\mu}\mu^y}{y!}\Big)\Big].$$

Глава 2

МЕТОДИ ОЦЕЊИВАЊА ПАРАМЕТРА ПОУЗДАНОСТИ

2.1 Метод максималне веродостојности

Метод максималне веродостојности је због једноставности коришћења и добрих својстава оцене добијене помоћу њега несумњиво најпопуларнији метод за оцењивање параметра поузданости.

Нека је $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ прост случајан узорак (надаље узорак) из популације чије је обележје X апсолутно непрекидног типа и има густину расподеле $f(x;\theta)$, где је θ непознати параметар. Уколико је X дискретог типа, све ће се аналогно разматрати, само ће се уместо густине расподеле користити закон расподеле $P\{X = x; \theta\}$. Дефинишимо функцију веродостојности као

$$L(\theta; x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta).$$

Дефиниција 2.1 *МВ оцена параметра θ је она статистика $\widetilde{\theta} = \widetilde{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ за коју се достиже максимум функције веродостојности, тј. за коју важи*

$$L(\widetilde{\theta}; X_1, X_2, \ldots, X_n) = \max_{\theta} L(\theta; X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

Краће ћемо функцију веродостојности обележавати са $L(\theta)$, а подразумеваћемо да зависи и од узорка.

Веома је корисна следећа теорема о особини инваријантности МВ оцене (*Hogg* и остали, 2005, теорема 6.1.2).

Теорема 2.1 *Ако је $\widetilde{\theta}$ МВ оцена непознатог параметра θ, онда за било коју функцију $\varphi(\theta)$ важи да је $\varphi(\widetilde{\theta})$ МВ оцена функције $\varphi(\theta)$.*

На основу дефиниције 2.1 и теореме 2.1 долази се до поступка за одређивање МВ оцене параметра поузданости R. Нека случајни вектор (X, Y) има расподелу $f(x, y; \theta)$, где θ може бити и вишедимензионални параметар, а чије су компоненте сви параметри који се појављују у расподелама случајних величина X и Y. Нека су $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ и $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$ узорци стреса који има расподелу X и снаге која има расподелу Y. Како су по претпоставци X и Y независне случајне величине то је $f(x, y; \theta) = f_X(x; \theta) f_Y(y; \theta)$, обими узорака не морају бити једнаки, а функција веродостојности је

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i; \theta) \prod_{j=1}^{m} f_Y(y_j; \theta).$$

На основу функције веродостојности одређује се МВ оцена $\widetilde{\theta}$ непознатог параметра θ. Како је $R = P\{X < Y\} = R(\theta)$, на основу теореме 2.1 следи да је $\widetilde{R} = R(\widetilde{\theta})$, тј. да је $R(\widetilde{\theta})$ МВ оцена праметра поузданости R.

За разне расподеле X и Y биће изведене или наведене МВ оцене параметра поузданости R. При томе, за неки узорак $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, са $\overline{X}$ обележаваће се узорачка средина, са $\overline{S}_X^2$ узорачка дисперзија, са T_X збир свих елемената узорка, са $X_{(1)}$ минимална, а са $X_{(n)}$ максимална статистика ранга, тј. важиће да је

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

$$\begin{aligned}
\overline{S}_X^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}^2, \\
T_X &= \sum_{i=1}^{n} X_i, \\
X_{(1)} &= \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}, \\
X_{(n)} &= \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}.
\end{aligned}$$

Нормалне расподеле

Ако X има нормалну $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ расподелу, а Y нормалну $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ расподелу, тада за функцију веродостојности важи да је

$$\begin{aligned}
L(\mu_1, \sigma_1^2, \mu_2, \sigma_2^2) &= \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i; \mu_1, \sigma_1^2) \prod_{j=1}^{m} f_Y(y_j; \mu_2, \sigma_2^2) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x_i-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}} \prod_{j=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(y_j-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}} \\
&= \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi\sigma_1^2}\right)^n} e^{-\frac{1}{2}\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}} \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi\sigma_2^2}\right)^m} e^{-\frac{1}{2}\frac{\sum_{j=1}^{m}(y_j-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}}.
\end{aligned}$$

Како за логаритам функције веродостојности важи да је

$$\begin{aligned}
\ln L(\mu_1, \sigma_1^2, \mu_2, \sigma_2^2) &= -\frac{n+m}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln\sigma_1^2 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} \\
&\quad -\frac{m}{2}\ln\sigma_2^2 - \frac{\sum_{j=1}^{m}(y_j-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2},
\end{aligned}$$

из система једначина веродостојности

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln L(\mu_1, \sigma_1^2, \mu_2, \sigma_2^2)}{\partial \mu_1} &= 0, \qquad \frac{\partial \ln L(\mu_1, \sigma_1^2, \mu_2, \sigma_2^2)}{\partial \sigma_1^2} = 0, \\
\frac{\partial \ln L(\mu_1, \sigma_1^2, \mu_2, \sigma_2^2)}{\partial \mu_2} &= 0, \qquad \frac{\partial \ln L(\mu_1, \sigma_1^2, \mu_2, \sigma_2^2)}{\partial \sigma_2^2} = 0,
\end{aligned}$$

добија се да је

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_1)=0, \qquad -\frac{n}{2\sigma_1^2}+\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu_1)^2}{2\sigma_1^4}=0,$$
$$\sum_{j=1}^{m}(y_j-\mu_2)=0, \qquad -\frac{m}{2\sigma_2^2}+\frac{\sum\limits_{j=1}^{m}(y_j-\mu_2)^2}{2\sigma_2^4}=0.$$

Одатле следи да је

$$\widetilde{\mu_1}=\overline{X}, \qquad \widetilde{\sigma_1^2}=\overline{S}_X^2,$$
$$\widetilde{\mu_2}=\overline{Y}, \qquad \widetilde{\sigma_2^2}=\overline{S}_Y^2.$$

Коришћењем израза (1.5) на основу теореме 2.1 добија се да је (*Kotz* и остали, 2003)

$$\widetilde{R}=\Phi\left(\frac{\overline{Y}-\overline{X}}{\sqrt{\overline{S}_X^2+\overline{S}_Y^2}}\right).$$

Експоненцијалне расподеле

Ако X има експоненцијалну $\mathcal{E}(\alpha)$ расподелу, а Y експоненцијалну $\mathcal{E}(\beta)$ расподелу, тада важи да је (*Enis* и *Geisser*, 1971)

$$\widetilde{R}=\frac{\overline{Y}}{\overline{X}+\overline{Y}}. \tag{2.1}$$

Двопараметарске експоненцијалне расподеле

Ако X има двопараметарску експоненцијалну $\mathcal{E}(\alpha_1,\mu_1)$ расподелу, а Y двопараметарску експоненцијалну $\mathcal{E}(\alpha_2,\mu_2)$ расподелу, тада важи да је (*Kotz* и остали, 2003)

$$\widetilde{R}=\begin{cases} 1-\frac{\overline{X}-X_{(1)}}{\overline{X}+\overline{Y}-X_{(1)}-Y_{(1)}}e^{-\frac{Y_{(1)}-X_{(1)}}{\overline{X}-X_{(1)}}}, & \text{за} \quad X_{(1)}\le Y_{(1)},\\ \frac{\overline{Y}-Y_{(1)}}{\overline{X}+\overline{Y}-X_{(1)}-Y_{(1)}}e^{-\frac{X_{(1)}-Y_{(1)}}{\overline{Y}-Y_{(1)}}}, & \text{за} \quad X_{(1)}>Y_{(1)}. \end{cases}$$

Гама расподеле

Ако X има гама $\Gamma(a_1, \beta_1)$ расподелу, а Y гама $\Gamma(a_2, \beta_2)$ расподелу и ако су параметри облика a_1 и a_2 познати и природни бројеви, тада важи да је (*Basu*, 1981)

$$\widetilde{R} = \sum_{k=0}^{a_2-1} \frac{\Gamma(a_1+k)}{\Gamma(a_1)\Gamma(k+1)} \frac{\widetilde{\beta_1}^k \widetilde{\beta_2}^{a_1}}{(\widetilde{\beta_1}+\widetilde{\beta_2})^{a_1+k}},$$

где је $\widetilde{\beta_1} = \frac{\overline{X}}{a_1}$, а $\widetilde{\beta_2} = \frac{\overline{Y}}{a_2}$.

Специјалним случајем када X има гама, а Y експоненцијалну расподелу, али са свим непознатим параметрима, бавили су се *Jovanović* и *Rajić* (2014).

Нека X има гама $\Gamma(a, \beta_1)$ расподелу, а Y гама $\Gamma(1, \beta_2)$, тј. експоненцијалну $\mathcal{E}(\frac{1}{\beta_2})$, расподелу. Из израза (1.6) добија се да је

$$R = \Big(\frac{\beta_2}{\beta_1+\beta_2}\Big)^a. \tag{2.2}$$

Функција веродостојности је

$$\begin{aligned} L(a,\beta_1,\beta_2) &= \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i; a, \beta_1) \prod_{j=1}^{m} f_Y(y_j; \beta_2) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i^{a-1} e^{-\frac{x_i}{\beta_1}}}{\Gamma(a)\beta_1^a} \prod_{j=1}^{m} \frac{1}{\beta_2} e^{-\frac{y_j}{\beta_2}} \\ &= \frac{1}{(\beta_1^a \Gamma(a))^n \beta_2^m} \Big(\prod_{i=1}^{n} x_i\Big)^{\alpha-1} e^{-(\frac{1}{\beta_1}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{\beta_2}\sum\limits_{j=1}^{m} y_j)}. \end{aligned}$$

За логаритам функције веродостојности важи да је

$$\begin{aligned} \ln L(a,\beta_1,\beta_2) &= -n(a\ln\beta_1 + \ln\Gamma(a)) - m\ln\beta_2 + (a-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i \\ &\quad -\Big(\frac{1}{\beta_1}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{\beta_2}\sum_{j=1}^{m} y_j\Big). \end{aligned}$$

Даље је

$$\frac{\partial \ln L(a,\beta_1,\beta_2)}{\partial a} = -n\Big(\ln\beta_1 + \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}\Big) + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(a,\beta_1,\beta_2)}{\partial \beta_1} &= -\frac{na}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_1^2}\sum_{i=1}^{n} x_i, \\ \frac{\partial \ln L(a,\beta_1,\beta_2)}{\partial \beta_2} &= -\frac{m}{\beta_2} + \frac{1}{\beta_2^2}\sum_{j=1}^{m} y_j. \end{aligned}$$

Изједначавањем ових израза са нулама и решавањем тих једначина веродостојности, добија се да је

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln x_i - \ln\beta_1, \tag{2.3}$$

$$\beta_1 = \frac{1}{na}\sum_{i=1}^{n} x_i, \tag{2.4}$$

$$\beta_2 = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} y_j.$$

Следи да је

$$\widetilde{\beta_2} = \overline{Y}, \tag{2.5}$$

а из једнакости (2.3) и (2.4) добија се да је

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln x_i - \ln\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\Big) + \ln a.$$

Ово је диференцијална једначина са раздвојеним променљивама, па се њеним решавањем добија да је

$$\frac{d\Gamma(a)}{\Gamma(a)} = \Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln x_i - \ln\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\Big) + \ln a\Big)da,$$

$$\begin{aligned}\int \frac{d\Gamma(a)}{\Gamma(a)} &= \int \Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i - \ln\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\Big) + \ln a\Big)da,\\ \ln\Gamma(a) &= \Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i - \ln\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)\Big)a + a\ln a - a + C, \quad (2.6)\end{aligned}$$

где је C нека произвољна константа. Решавањем последње једначине неком од нумеричких метода добија се $\widetilde{a}$. Када је добијено $\widetilde{a}$, из (2.4) следи да је

$$\widetilde{\beta_1} = \frac{\overline{X}}{\widetilde{a}}. \quad (2.7)$$

Коришћењем израза (2.2), на основу теореме 2.1 добија се да је

$$\widetilde{R} = \left(\frac{\widetilde{\beta_2}}{\widetilde{\beta_1} + \widetilde{\beta_2}}\right)^{\widetilde{a}}. \quad (2.8)$$

Паретове расподеле

Ако X има Паретову $\mathcal{P}ar(a_1,\mu_1)$ расподелу, а Y Паретову $\mathcal{P}ar(a_2,\mu_2)$ расподелу, тада важи да је (*Beg* и *Singh*, 1979)

$$\widetilde{R} = \begin{cases} 1 - \frac{\widetilde{a_2}}{\widetilde{a_1}+\widetilde{a_2}}\big(\frac{\widetilde{\mu_1}}{\widetilde{\mu_2}}\big)^{\widetilde{a_1}}, & \text{за} \quad \widetilde{\mu_1} < \widetilde{\mu_2},\\ \frac{\widetilde{a_1}}{\widetilde{a_1}+\widetilde{a_2}}\big(\frac{\widetilde{\mu_2}}{\widetilde{\mu_1}}\big)^{\widetilde{a_2}}, & \text{за} \quad \widetilde{\mu_1} \geq \widetilde{\mu_2},\end{cases}$$

где је $\widetilde{a_1} = \big(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i - \ln X_{(1)}\big)^{-1}$, $\widetilde{\mu_1} = X_{(1)}$, $\widetilde{a_2} = \big(\frac{1}{m}\sum\limits_{j=1}^{m}\ln Y_j - \ln Y_{(1)}\big)^{-1}$, а $\widetilde{\mu_2} = Y_{(1)}$.

Бурове расподеле типа III

Ако X има Бурову $\mathcal{B}ur3(a,b_1)$ расподелу, а Y Бурову $\mathcal{B}ur3(a,b_2)$ расподелу и ако је параметар облика a познат, тада важи да је (*Mokhlis*, 2005)

$$\widetilde{R} = \frac{m\sum\limits_{i=1}^{n}\ln(1+X_i^{-a})}{m\sum\limits_{i=1}^{n}\ln(1+X_i^{-a}) + n\sum\limits_{j=1}^{m}\ln(1+Y_j^{-a})}.$$

Бурове расподеле типа X

Ако X има Бурову $\mathcal{B}ur10(a)$ расподелу, а Y Бурову $\mathcal{B}ur10(b)$ расподелу, тада важи да је (*Ahmad* и остали, 1997)

$$\widetilde{R} = \frac{m\sum\limits_{i=1}^{n}\ln(1-e^{-X_i^2})}{m\sum\limits_{i=1}^{n}\ln(1-e^{-X_i^2})+n\sum\limits_{j=1}^{m}\ln(1-e^{-Y_j^2})}.$$

Ако X има скалирану Бурову $\mathcal{B}ur10(a_1,\sigma)$ расподелу, а Y скалирану Бурову $\mathcal{B}ur10(a_2,\sigma)$ расподелу, тада важи да је (*Surles* и *Padgett*, 1998)

$$\widetilde{R} = \frac{m\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\left(1-e^{-\frac{X_i^2}{\widetilde{\sigma}^2}}\right)}{m\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\left(1-e^{-\frac{X_i^2}{\widetilde{\sigma}^2}}\right)+n\sum\limits_{j=1}^{m}\ln\left(1-e^{-\frac{Y_j^2}{\widetilde{\sigma}^2}}\right)},$$

где је $\widetilde{\sigma}$ решење по σ једначине

$$\begin{aligned}(n+m)\sigma^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2+\sum_{j=1}^{m}Y_j^2\right) + \left(\frac{-n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\left(1-e^{-\frac{X_i^2}{\sigma^2}}\right)}-1\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i^2}{e^{\frac{X_i^2}{\sigma^2}}-1}\\ +\left(\frac{-m}{\sum\limits_{j=1}^{m}\ln\left(1-e^{-\frac{Y_j^2}{\sigma^2}}\right)}-1\right)\sum_{j=1}^{m}\frac{Y_j^2}{e^{\frac{Y_j^2}{\sigma^2}}-1}=0.\end{aligned}$$

Бурове расподеле типа XII

Ако X има Бурову $\mathcal{B}ur12(a,b_1)$ расподелу, а Y Бурову $\mathcal{B}ur12(a,b_2)$ расподелу, тада важи да је (*Kotz* и остали, 2003)

$$\widetilde{R} = \frac{n\sum\limits_{j=1}^{m}\ln\left(1+Y_j^{\widetilde{a}}\right)}{m\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\left(1+X_i^{\widetilde{a}}\right)+n\sum\limits_{j=1}^{m}\ln\left(1+Y_j^{\widetilde{a}}\right)},$$

где је $\widetilde{a}$ решење по a једначине

$$\frac{n+m}{a}+\sum_{i=1}^{n}\ln X_i+\sum_{j=1}^{m}\ln Y_j \quad - \quad \left(\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln(1+X_i^a)}+1\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i^a\ln X_i}{1+X_i^a}$$
$$- \quad \left(\frac{m}{\sum\limits_{j=1}^{m}\ln(1+Y_j^a)}+1\right)\sum_{j=1}^{m}\frac{Y_j^a\ln Y_j}{1+Y_j^a}=0.$$

Вејбулове расподеле

Ако X има Вејбулову $\mathcal{W}(a,\beta_1)$ расподелу, а Y Вејбулову $\mathcal{W}(a,\beta_2)$ расподелу, тада важи да је (*Kundu* и *Gupta*, 2006)

$$\widetilde{R}=\frac{n\sum\limits_{j=1}^{m}Y_j^{\widetilde{a}}}{m\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^{\widetilde{a}}+n\sum\limits_{j=1}^{m}Y_j^{\widetilde{a}}},$$

где је $\widetilde{a}$ решење по a једначине

$$\frac{n+m}{a}+\sum_{i=1}^{n}\ln X_i+\sum_{j=1}^{m}\ln Y_j-\frac{n\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i^a\ln X_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^a}-\frac{m\sum\limits_{j=1}^{m}(Y_j^a\ln Y_j)}{\sum\limits_{j=1}^{m}Y_j^a}=0.$$

Униформне расподеле

Ако X има униформну $\mathcal{U}[0,\theta]$ расподелу, а Y униформну $\mathcal{U}[0,\mu]$ расподелу, тада важи да је (*Ivshin*, 1996)

$$\widetilde{R}=\begin{cases} 1-\frac{X_{(n)}}{2Y_{(m)}}, & \text{за} \quad X_{(n)}\leq Y_{(m)},\\ \frac{Y_{(m)}}{2X_{(n)}}, & \text{за} \quad X_{(n)}>Y_{(m)}.\end{cases}$$

Гомперцове расподеле

Ако X има Гомперцову $\mathcal{G}om(\alpha,\mu_1)$ расподелу, а Y Гомперцову $\mathcal{G}om(\alpha,\mu_2)$ расподелу и ако је скалирајући параметар α познат, тада важи да је (*Saraçoglu* и *Kaya*, 2007)

$$\widetilde{R} = \frac{n\sum\limits_{j=1}^{m}(e^{\alpha Y_j}-1)}{m\sum\limits_{i=1}^{n}(e^{\alpha X_i}-1)+n\sum\limits_{j=1}^{m}(e^{\alpha Y_j}-1)}. \tag{2.9}$$

Топ-Леонеове расподеле

Ако X има Топ-Леонеову $\mathcal{TL}(a)$ расподелу, а Y Топ-Леонеову $\mathcal{TL}(b)$ расподелу, тада важи да је (*Genç*, 2013)

$$\widetilde{R} = \frac{m\sum\limits_{i=1}^{n}\ln(X_i(2-X_i))}{m\sum\limits_{i=1}^{n}\ln(X_i(2-X_i))+n\sum\limits_{j=1}^{m}\ln(Y_j(2-Y_j))}. \tag{2.10}$$

Линдлијеве расподеле

Ако X има Линдлијеву $\mathcal{L}in(\alpha)$ расподелу, а Y Линдлијеву $\mathcal{L}in(\beta)$ расподелу, тада важи да је (*Al-Mutairi* и остали, 2013)

$$\widetilde{R} = 1 - \frac{\widetilde{\beta}^2\left[\widetilde{\beta}(\widetilde{\beta}+1)+\widetilde{\alpha}(\widetilde{\beta}+1)(\widetilde{\beta}+3)+\widetilde{\alpha}^2(2\widetilde{\alpha}+3)+\widetilde{\alpha}^3\right]}{(\widetilde{\alpha}+1)(\widetilde{\beta}+1)(\widetilde{\alpha}+\widetilde{\beta})^3}, \tag{2.11}$$

где је

$$\widetilde{\alpha} = \frac{-(\overline{X}-1)+\sqrt{(\overline{X}-1)^2+8\overline{X}}}{2\overline{X}}, \widetilde{\beta} = \frac{-(\overline{Y}-1)+\sqrt{(\overline{Y}-1)^2+8\overline{Y}}}{2\overline{Y}}. \tag{2.12}$$

Кумарасвамијеве расподеле

Ако X има Кумарасвамијеву $\mathcal{K}um(a_1, b_1)$ расподелу, а Y Кумарасвамијеву $\mathcal{K}um(a_2, b_2)$ расподелу, тада важи да је (*Nadar* и остали, 2014)

$$\widetilde{R} = 1 - \Gamma(\widetilde{b}_2+1)\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\widetilde{b}_1}{k}\frac{(-1)^k\Gamma(1+k\frac{\widetilde{a}_1}{\widetilde{a}_2})}{\Gamma(1+\widetilde{b}_2+k\frac{\widetilde{a}_1}{\widetilde{a}_2})},$$

где су $\widetilde{a_1}$ и $\widetilde{a_2}$ решења по a_1, односно a_2, редом једначина

$$
\begin{aligned}
\frac{n}{a_1}+\sum_{i=1}^{n}\ln X_i+\left(\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln(1-X_i^{a_1})}+1\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i^{a_1}\ln X_i}{1-X_i^{a_1}} &= 0,\\
\frac{m}{a_2}+\sum_{j=1}^{m}\ln Y_j+\left(\frac{m}{\sum\limits_{j=1}^{m}\ln(1-Y_j^{a_2})}+1\right)\sum_{j=1}^{m}\frac{Y_j^{a_2}\ln Y_j}{1-Y_j^{a_2}} &= 0,
\end{aligned}
$$

а $\widetilde{b_1}=-n\big(\sum\limits_{i=1}^{n}\ln(1-X_i^{\widetilde{a_1}})\big)^{-1}$, $\widetilde{b_2}=-m\big(\sum\limits_{j=1}^{m}\ln(1-Y_j^{\widetilde{a_2}})\big)^{-1}$.

У случају да су први параметри облика једнаки, тј. ако X има Кумарасвамијеву $\mathcal{K}um(a,b_1)$ расподелу, а Y Кумарасвамијеву $\mathcal{K}um(a,b_2)$ расподелу, тада важи да је

$$
\widetilde{R}=\frac{n\sum\limits_{j=1}^{m}\ln(1-Y_j^{\widetilde{a}})}{m\sum\limits_{i=1}^{n}\ln(1-X_i^{\widetilde{a}})+n\sum\limits_{j=1}^{m}\ln(1-Y_j^{\widetilde{a}})},
$$

где је $\widetilde{a}$ решење по a једначине

$$
\begin{aligned}
\frac{n+m}{a}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\ln X_i}{1-X_i^a}+\sum_{j=1}^{m}\frac{\ln Y_j}{1-Y_j^a} &+ \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln(1-X_i^a)}\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i^a\ln X_i}{1-X_i^a}\\
&+ \frac{m}{\sum\limits_{j=1}^{m}\ln(1-Y_j^a)}\sum_{j=1}^{m}\frac{Y_j^a\ln Y_j}{1-Y_j^a}=0.
\end{aligned}
$$

Геометријске расподеле

Ако X има геометријску $\mathcal{G}(p_1)$ расподелу, а Y геометријску $\mathcal{G}(p_2)$ расподелу, тада за функцију веродостојности важи да је

$$
L(p_1,p_2) = \prod_{i=1}^{n}P\{X=x_i;p_1\}\prod_{j=1}^{m}P\{Y=y_j;p_2\}
$$

$$\begin{aligned} &= \prod_{i=1}^{n}\big((1-p_1)^{x_i-1}p_1\big)\prod_{j=1}^{m}\big((1-p_2)^{y_j-1}p_2\big) \\ &= p_1^n p_2^m (1-p_1)^{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i - n}(1-p_2)^{\sum\limits_{j=1}^{m} y_j - m}. \end{aligned}$$

Како за логаритам функције веродостојности важи да је

$$\begin{aligned} \ln L(p_1,p_2) &= n\ln p_1 + m\ln p_2 + \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\Big)\ln(1-p_1) \\ &\quad + \Big(\sum_{j=1}^{m} y_j - m\Big)\ln(1-p_2), \end{aligned}$$

из система једначина веродостојности

$$\frac{\partial \ln L(p_1,p_2)}{\partial p_1} = 0, \qquad \frac{\partial \ln L(p_1,p_2)}{\partial p_2} = 0,$$

добија се да је

$$\frac{n}{p_1} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i - n}{1-p_1}, \qquad \frac{m}{p_2} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{m} y_j - m}{1-p_2}.$$

Одатле следи да је $\widetilde{p_1} = \frac{1}{\overline{X}}$, а $\widetilde{p_2} = \frac{1}{\overline{Y}}$.

Коришћењем израза (1.7) на основу теореме 2.1 добија се да је

$$\widetilde{R} = \frac{\overline{Y} - 1}{\overline{X} + \overline{Y} - 1}.$$

МВ оцену за R за геометријске расподеле дефинисане на мало другачији начин извели су *Ahmad* и остали (1995).

Негативне биномне расподеле

Ако X има негативну биномну $\mathcal{NB}(m_1, p_1)$ расподелу, а Y негативну биномну $\mathcal{NB}(m_2, p_2)$ расподелу, где су параметри m_1 и m_2 познати и ако је $R = P\{X \le Y\}$, тада важи да је (*Sathe* и *Dixit*, 2001)

$$\widetilde{R} = (1-\widetilde{p_1})^{m_1} \sum_{x=0}^{m_2-1} \Bigg[\binom{m_1+x-1}{m_1-1} \frac{(\widetilde{p_1}(1-\widetilde{p_2}))^x}{(1-\widetilde{p_1}\widetilde{p_2})^{m_1+x}} \cdot \sum_{y=0}^{m_2-1-x} \binom{m_2-1}{y} (1-\widetilde{p_2})^y \widetilde{p_2}^{m_2-1-y} \Bigg],$$

где је $\widetilde{p_1} = \frac{\overline{X}}{m_1+\overline{X}}$, а $\widetilde{p_2} = \frac{\overline{Y}}{m_2+\overline{Y}}$.

Пуасонове расподеле

Ако X има Пуасонову $\mathcal{P}(\lambda)$ расподелу, а Y Пуасонову $\mathcal{P}(\mu)$ расподелу, тада важи да је (*Kotz* и остали, 2003)

$$\widetilde{R} = \sum_{x=0}^{\infty} \left[\frac{e^{-\overline{X}}\overline{X}^x}{x!} \left(1 - \sum_{y=0}^{x} \frac{e^{-\overline{Y}}\overline{Y}^y}{y!} \right) \right].$$

2.2 Јединствена непристрасна оцена са униформно минималном дисперзијом

Непристрасност оцене је веома пожељна особина, нарочито када је обим узорка мали те се не може рачунати на асимптотску непристрасност. Ако је критеријум упоређивања оцена средње квадратно одступање, онда се у случају непристрасних оцена то своди на упоређивање дисперзија, па важи да је најбоља непристрасна оцена она која има најмању дисперзију.

Дефиниција 2.2 *Оцена U је најбоља непристрасна оцена функције $g(\theta)$, где је θ непознати параметар неке расподеле, ако је $E_\theta U = g(\theta)$ за свако допустиво θ, а за било коју другу оцену V функције $g(\theta)$, за коју је $E_\theta V = g(\theta)$, важи да је $D_\theta U \leq D_\theta V$ за свако допустиво θ.*

Таква оцена не постоји увек. Али, ако постоји, јединствена је. Тачније, важи следећа теорема (*Casella* и *Berger*, 2002, теорема 7.3.19):

Теорема 2.2 *Ако је U најбоља непристрасна оцена функције $g(\theta)$, онда је она јединствена, прецизније, ако постоје две најбоље непристрасне оцене, тада за свако допустиво θ важи да је $P_\theta\{U = V\} = 1$.*

Због тога се најбоља непристрасна оцена зове и јединствена непристрасна оцена са униформно минималном дисперзијом.

Основну улогу у одређивању ЈНУМД оцена имају комплетне довољне статистике, а оне се често могу одредити помоћу следеће дефиниције и теореме.

Нека је Θ, где је $\Theta = \{\theta | \gamma < \theta < \delta\}$, интервал на реалној оси са познатим константама γ и δ које могу бити и $\pm\infty$, и нека је

$$f(x;\theta) = e^{p(\theta)K(x)+S(x)+q(\theta)}, \quad x \in D, \theta \in \Theta. \tag{2.13}$$

Дефиниција 2.3 (Hogg и остали, 2005, дефиниција 7.5.1) *За густину расподеле (закон расподеле $P\{X = x;\theta\}$ у дискретном случају) облика* (2.13) *каже се да је регуларан случај експоненцијалне фамилије расподела ако*

1. *домен D не зависи од θ,*
2. *$p(\theta)$, $\theta \in \Theta$, је непрекидна функција која није идентички једнака нули,*
3. *(а)* (апсолутно непрекидан случај) *$K'(x)$ која није идентички једнака нули и $S(x)$ су непрекидне функције за $x \in D$,*
   (б) (дискретан случај) *функција $K(x)$, $x \in D$, није идентички једнака нули.*

Теорема 2.3 (Hogg и остали, 2005, теорема 7.5.2) *Ако је $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ узорак из расподеле облика* (2.13) *која зависи од непознатог параметра θ, а која је регуларан случај експоненцијалне фамилије расподела, онда је $\sum\limits_{i=1}^{n} K(X_i)$ комплетна довољна статистика за θ.*

У случају вишедимензионалног параметра $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$, уз аналогне услове условима из једнодимензионалног случаја, следи (Hogg и остали, 2005) да је за густину расподеле (закон расподеле)

$$f(x;\theta) = e^{\sum\limits_{j=1}^{k} p_j(\theta)K_j(x)+S(x)+q(\theta)}, \quad x \in D, \theta \in \Theta,$$

где је $\Theta \subset \mathbb{R}^k$, статистика $\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} K_1(X_i), \sum\limits_{i=1}^{n} K_2(X_i), \dots, \sum\limits_{i=1}^{n} K_k(X_i) \Big)$ комплетна довољна за θ.

За одређивање ЈНУМД оцене параметра поузданости R користи се теорема која је комбинација познатих теорема *Rao-Blackwell*-а и *Lehmann-Scheffé*-а.

Нека су $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ и $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$ узорци стреса који има расподелу X и снаге која има расподелу Y и нека је θ вишедимензионални непознати параметар чије су компоненте сви параметри који се појављују у расподелама независних случајних величина X и Y.

Теорема 2.4 *Ако је $V(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ непристрасна оцена неке функције $R = R(\theta)$ и T комплетна довољна статистика за θ, онда је $\widehat{R}$, где је $\widehat{R} = E(V(\mathbf{X}, \mathbf{Y})|T)$, ЈНУМД оцена за R.*

У неким случајевима је ипак погодније извести ЈНУМД оцену параметра поузданости R коришћењем следећих теорема (*Kotz* и остали, 2003, теореме 2.4 и 2.5).

Теорема 2.5 *Нека је k произвољан број мањи од $\min\{n, m\}$, θ_0 произвољна допустива вредност параметра θ, а T_X и T_Y комплетне довољне статистике за параметре који се појављују у расподелама за X и Y редом. Означимо са $g_{T_X}(t_X; \theta_0)$, $g_{\theta_0}(t_X|X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_k = x_k)$, $g_{T_Y}(t_Y; \theta_0)$ и $g_{\theta_0}(t_Y|Y_1 = y_1, Y_2 = y_2, \dots, Y_k = y_k)$ густину расподеле за T_X, условну густину расподеле за T_X при услову $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_k = x_k$, густину расподеле за T_Y и условну густину расподеле за T_Y при услову $Y_1 = y_1, Y_2 = y_2, \dots, Y_k = y_k$, за $\theta = \theta_0$. Тада за ЈНУМД оцену заједничке густине расподеле $f(x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots, y_k; \theta)$ важи да је*

$$\widehat{f}(x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots, y_k) = \widehat{f}_X(x_1, x_2, \dots, x_k)\widehat{f}_Y(y_1, y_2, \dots, y_k),$$

где је

$$\widehat{f}_X(x_1, x_2, \dots, x_k) = \frac{g_{\theta_0}(t_X|X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_k = x_k)}{g_{T_X}(t_X; \theta_0)} \prod_{i=1}^{k} f_X(x_i; \theta_0),$$

$$\widehat{f}_Y(y_1, y_2, \ldots, y_k) = \frac{g_{\theta_0}(t_Y|Y_1 = y_1, Y_2 = y_2, \ldots, Y_k = y_k)}{g_{T_Y}(t_Y; \theta_0)} \prod_{j=1}^{k} f_Y(y_j; \theta_0).$$

Теорема 2.6 *ЈНУМД оцене за R и R^2 су*

$$\begin{aligned} \widehat{R} &= \int\int I(x < y)\widehat{f}(x, y)dxdy, \\ \widehat{R^2} &= \int\int\int\int I(x_1 < y_1)I(x_2 < y_2)\widehat{f}(x_1, x_2, y_1, y_2)dx_1dx_2dy_1dy_2, \end{aligned}$$

где се $\widehat{f}(x, y)$ и $\widehat{f}(x_1, x_2, y_1, y_2)$ добијају коришћењем теореме 2.5 *за $k = 1$ и $k = 2$.*

Средње квадратна грешка ЈНУМД оцене $\widehat{R}$ за R се због њене непристрасности своди на дисперзију $D(\widehat{R})$. ЈНУМД оцена те дисперзије, а самим тим и ЈНУМД оцена средње квадратне грешке ЈНУМД оцене за R, одређује се помоћу следеће теореме (*Kotz* и остали, 2003, теорема 2.6).

Теорема 2.7 *За ЈНУМД оцену $\widehat{D}(\widehat{R})$ за $D(\widehat{R})$ важи да је*

$$\widehat{D}(\widehat{R}) = \left(\widehat{R}\right)^2 - \widehat{R^2},$$

где су $\widehat{R}$ и $\widehat{R^2}$ ЈНУМД оцене за R и R^2.

Извођење ЈНУМД оцене параметра поузданости R коришћењем сваког од наведених начина биће представљено у случајевима када X и Y имају логаритамске, односно Вејбулове расподеле. Ти оригинални резултати објављени су у раду *Obradović* и остали (2014).

Логаритамске расподеле

Случајна величина има логаритамску $\mathcal{L}og(p)$, $0 < p < 1$, расподелу, ако је њен закон расподеле

$$P\{X = x; p\} = \frac{-1}{\ln(1-p)} \frac{p^x}{x}, \quad x \in \mathbb{N}.$$

Ова расподела има велике примене у екологији и биологији (видети на пример *Fisher* и остали (1943)).

Случајна величина има Стирлингову расподелу прве врсте $\mathcal{SDFK}(n,p)$, $n \in \mathbb{N}$, $0 < p < 1$, ако је њен закон расподеле

$$P\{X = x; n, p\} = \frac{n!|s(x,n)|p^x}{x!(-\ln(1-p))^n}, \quad x \in \mathbb{N}, x \geq n,$$

где је $s(x,n)$ Стирлингов број прве врсте (видети потпоглавље 1.3.7).

Ове две горе наведене расподеле повезује следећа лема (*Johnson* и остали, 2005, стр. 321).

Лема 2.1 *Ако свака од n независних случајних величина има логаритамску $\mathcal{L}og(p)$ расподелу, онда њихов збир има Стирлингову $\mathcal{SDFK}(n,p)$ расподелу прве врсте.*

Нека X има логаритамску $\mathcal{L}og(p)$ расподелу, Y логаритамску $\mathcal{L}og(q)$ расподелу и независне су. На основу узорака $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ и $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$ треба одредити ЈНУМД оцену параметра поузданости R, где је $R = P\{X < Y\}$.

Како је

$$P\{X = x; p\} = e^{x \ln p - \ln x - \ln(-\ln(1-p))}, \quad x \in \mathbb{N},$$

и задовољени су сви услови из дефиниције 2.3 следи да логаритамска расподела јесте регуларан случај експоненцијалне фамилије расподела. На основу теореме 2.3 следи да су $T_X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ и $T_Y = \sum_{j=1}^{m} Y_j$ комплетне довољне статистике за непознате параметре p и q. Користећи лему 2.1 добија се да T_X има Стирлингову $\mathcal{SDFK}(n,p)$ расподелу прве врсте, а T_Y Стирлингову $\mathcal{SDFK}(m,q)$ расподелу прве врсте, тј.

$$\begin{aligned} P\{T_X = x; n, p\} &= \frac{n!|s(x,n)|p^x}{x!(-\ln(1-p))^n}, \quad x \in \mathbb{N}, x \geq n, \\ P\{T_Y = y; m, q\} &= \frac{m!|s(y,m)|q^y}{y!(-\ln(1-q))^m}, \quad y \in \mathbb{N}, y \geq m. \end{aligned}$$

Једна непристрасна оцена за R је $I\{X_1 < Y_1\}$. Користећи независност узорака $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ и лему 2.1 добија се да је

$$
\begin{aligned}
&E(I\{X_1 < Y_1\}|T_X = t_X, T_Y = t_Y)\\
&= P\{X_1 < Y_1|T_X = t_X, T_Y = t_Y\} = \frac{P\{X_1 < Y_1, T_X = t_X, T_Y = t_Y\}}{P\{T_X = t_X, T_Y = t_Y\}}\\
&= \frac{\sum\limits_{x=1}^{M}\sum\limits_{y=x+1}^{t_Y-m+1} P\{X_1 = x, Y_1 = y, \sum\limits_{i=2}^{n} X_i = t_X - x, \sum\limits_{j=2}^{m} Y_j = t_Y - y\}}{P\{T_X = t_X, T_Y = t_Y\}}\\
&= \frac{\sum\limits_{x=1}^{M}\sum\limits_{y=x+1}^{t_Y-m+1} P\{X_1 = x\}P\{Y_1 = y\}P\{\sum\limits_{i=2}^{n} X_i = t_X - x\}P\{\sum\limits_{j=2}^{m} Y_j = t_Y - y\}}{P\{T_X = t_X\}P\{T_Y = t_Y\}}\\
&= \frac{\sum\limits_{x=1}^{M}\sum\limits_{y=x+1}^{t_Y-m+1} \frac{-1}{\ln(1-p)}\frac{p^x}{x}\frac{-1}{\ln(1-q)}\frac{q^y}{y}\frac{(n-1)!|s(t_X-x,n-1)|p^{t_X-x}}{(t_X-x)!(-\ln(1-p))^{n-1}}\frac{(m-1)!|s(t_Y-y,m-1)|q^{t_Y-y}}{(t_Y-y)!(-\ln(1-q))^{m-1}}}{\frac{n!|s(t_X,n)|p^{t_X}}{t_X!(-\ln(1-p))^n}\frac{m!|s(t_Y,m)|q^{t_Y}}{t_Y!(-\ln(1-q))^m}}\\
&= \sum_{x=1}^{M}\sum_{y=x+1}^{t_Y-m+1} \frac{t_X!t_Y!|s(t_X-x,n-1)||s(t_Y-y,m-1)|}{nm(t_X-x)!(t_Y-y)!xy|s(t_X,n)||s(t_Y,m)|},
\end{aligned}
$$

где је $M = \min\{t_X - n + 1, t_Y - m\}$. На основу теореме 2.4 следи да је ЈНУМД оцена параметра поузданости R

$$
\widehat{R} = \sum_{x=1}^{\min\{T_X-n+1,T_Y-m\}}\sum_{y=x+1}^{T_Y-m+1} \frac{T_X!T_Y!|s(T_X-x,n-1)||s(T_Y-y,m-1)|}{nm(T_X-x)!(T_Y-y)!xy|s(T_X,n)||s(T_Y,m)|}.
$$

Вејбулове расподеле

Нека X има Вејбулову $\mathcal{W}(a_1,\beta_1)$ расподелу, Y Вејбулову $\mathcal{W}(a_2,\beta_2)$ расподелу, где су параметри облика a_1 и a_2 познати, и независне су. На основу узорака $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ и $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$ треба одредити ЈНУМД оцену параметра поузданости R.

Како је

$$
f(x; a, \beta) = \frac{ax^{a-1}}{\beta^a}e^{-(\frac{x}{\beta})^a} = e^{-\frac{1}{\beta^a}x^a + (a-1)\ln x + \ln a - a\ln\beta}, \quad x > 0,
$$

и задовољени су сви услови из дефиниције 2.3 следи да Вејбулова расподела јесте регуларан случај експоненцијалне фамилије расподела. На основу теореме 2.3 следи да су $D_X = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i^{a_1}$ и $D_Y = \sum\limits_{j=1}^{m} Y_j^{a_2}$ комплетне довољне статистике за непознате параметре β_1 и β_2. Како X_i има Вејбулову $\mathcal{W}(a_1, \beta_1)$ расподелу, то $X_i^{a_1}$ има експоненцијалну $\mathcal{E}\big(\frac{1}{\beta_1^{a_1}}\big)$ расподелу. Користећи особину да збир независних случајних величина, које имају исту експоненцијалну расподелу, има гама расподелу добија се да D_X има гама $\Gamma(n, \beta_1^{a_1})$ расподелу. Аналогно се добија да D_Y има гама $\Gamma(m, \beta_2^{a_2})$ расподелу.

Како је $D_X - X_1^{a_1} = \sum\limits_{i=2}^{n} X_i^{a_1}$, на основу горе наведене особине следи да $D_X - X_1^{a_1}$ има $\Gamma(n-1, \beta_1^{a_1})$ расподелу. Користећи ово и трансформацију случајног вектора $\big(X_1, \sum\limits_{i=2}^{n} X_i^{a_1}\big)$ у случајни вектор (X_1, D_X), чији је јакобијан једнак 1, добија се да је, за $\beta_1 = 1$,

$$g(d_X|X_1 = x_1) = \frac{(d_X - x_1^{a_1})^{n-2}}{\Gamma(n-1)} e^{-(d_X - x_1^{a_1})} I\{d_X \geq x_1^{a_1}\}.$$

Користећи теорему 2.5 за $k = 1$ и $\beta_1 = 1$ добија се да је

$$\begin{aligned}
\widehat{f}_X(x) &= \frac{(d_X - x^{a_1})^{n-2}}{\Gamma(n-1)} e^{-(d_X - x^{a_1})} I\{d_X \geq x^{a_1}\} \frac{a_1 x^{a_1-1} e^{-x^{a_1}}}{\frac{d_X^{n-1} e^{-d_X}}{\Gamma(n)}} \\
&= a_1(n-1) x^{a_1-1} \frac{(d_X - x^{a_1})^{n-2}}{d_X^{n-1}} I\{d_X \geq x^{a_1}\}, \quad x > 0.
\end{aligned}$$

Аналогно се добија да је

$$\widehat{f}_Y(y) = a_2(m-1) y^{a_2-1} \frac{(d_Y - y^{a_2})^{m-2}}{d_Y^{m-1}} I\{d_Y \geq y^{a_2}\}, \quad y > 0,$$

па је

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(x,y) &= a_1 a_2 (n-1)(m-1) x^{a_1-1} y^{a_2-1} \frac{(d_X - x^{a_1})^{n-2}}{d_X^{n-1}} \frac{(d_Y - y^{a_2})^{m-2}}{d_Y^{m-1}} \\
&\cdot \quad I\{d_X \geq x^{a_1}\} I\{d_Y \geq y^{a_2}\}, \quad x > 0, y > 0.
\end{aligned}$$

Важи да је

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty\int_0^\infty I\{x<y\}\widehat{f}(x,y)dxdy\\
&= \int_0^M \frac{a_1(n-1)(m-1)x^{a_1-1}(d_X-x^{a_1})^{n-2}}{d_X^{n-1}d_Y^{m-1}}dx\int_x^{d_Y^{\frac{1}{a_2}}} a_2y^{a_2-1}(d_Y-y^{a_2})^{m-2}dy,
\end{aligned}
$$

где је $M=\min\left\{d_X^{\frac{1}{a_1}},d_Y^{\frac{1}{a_2}}\right\}$. Применом смене $t=d_Y-y^{a_2}$, а затим биномне формуле два пута, даље се добија да је тај интеграл једнак са

$$
\begin{aligned}
&\int_0^M \frac{a_1(n-1)(m-1)x^{a_1-1}(d_X-x^{a_1})^{n-2}}{d_X^{n-1}d_Y^{m-1}}dx\int_0^{d_Y-x^{a_2}} t^{m-2}dt\\
&= \int_0^M \frac{a_1(n-1)x^{a_1-1}}{d_X^{n-1}d_Y^{m-1}}(d_X-x^{a_1})^{n-2}(d_Y-x^{a_2})^{m-1}dx\\
&= \int_0^M \frac{a_1(n-1)x^{a_1-1}}{d_X^{n-1}d_Y^{m-1}}\sum_{r=0}^{n-2}\binom{n-2}{r}d_X^{n-2-r}(-x^{a_1})^r\sum_{s=0}^{m-1}\binom{m-1}{s}d_y^{m-1-s}(-x^{a_2})^s dx\\
&= \sum_{r=0}^{n-2}\sum_{s=0}^{m-1}\frac{(-1)^{r+s}a_1(n-1)}{d_X^{r+1}d_Y^s}\binom{n-2}{r}\binom{m-1}{s}\int_0^M x^{a_1(r+1)+a_2s-1}dx\\
&= \sum_{r=0}^{n-2}\sum_{s=0}^{m-1}\frac{(-1)^{r+s}a_1(n-1)}{(a_1(r+1)+a_2s)d_X^{r+1}d_Y^s}\binom{n-2}{r}\binom{m-1}{s}M^{a_1(r+1)+a_2s}.
\end{aligned}
$$

На основу теореме 2.6 следи да је ЈНУМД оцена параметра поузданости R

$$
\widehat{R}=\begin{cases}
\sum\limits_{r=0}^{n-2}\sum\limits_{s=0}^{m-1}\frac{(-1)^{r+s}a_1(n-1)}{a_1(r+1)+a_2s}\binom{n-2}{r}\binom{m-1}{s}\frac{D_X^{\frac{a_2s}{a_1}}}{D_Y^s}, & \text{за}\quad D_X^{\frac{1}{a_1}}\le D_Y^{\frac{1}{a_2}},\\
\sum\limits_{r=0}^{n-2}\sum\limits_{s=0}^{m-1}\frac{(-1)^{r+s}a_1(n-1)}{a_1(r+1)+a_2s}\binom{n-2}{r}\binom{m-1}{s}\frac{D_Y^{\frac{a_1(r+1)}{a_2}}}{D_X^{r+1}}, & \text{за}\quad D_X^{\frac{1}{a_1}}> D_Y^{\frac{1}{a_2}}.
\end{cases}
$$

За разне друге расподеле X и Y биће наведене ЈНУМД оцене параметра поузданости R.

Нормалне расподеле

Ако X има нормалну $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ расподелу, а Y нормалну $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ расподелу, тада важи да је (*Downton*, 1973)

$$\widehat{R} = \left[B\Big(\frac{1}{2}, \frac{n-2}{2}\Big)B\Big(\frac{1}{2}, \frac{m-2}{2}\Big)\right]^{-1} \iint\limits_{\Omega} (1-u^2)^{\frac{n-4}{2}}(1-v^2)^{\frac{m-4}{2}}dudv,$$

где је $\Omega = \big\{(u,v)|(u,v) \in [-1,1]^2, -u\overline{S}_X\sqrt{n-1} + v\overline{S}_Y\sqrt{m-1} + \overline{Y} - \overline{X} > 0\big\}$.

Експоненцијалне расподеле

Ако X има експоненцијалну $\mathcal{E}(\alpha)$ расподелу, а Y експоненцијалну $\mathcal{E}(\beta)$ расподелу, тада важи да је (*Tong*, 1974, 1975)

$$\widehat{R} = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{m-1}(-1)^k \frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n+k)\Gamma(m-k)}\Big(\frac{T_X}{T_Y}\Big)^k, & \text{за} \quad T_X < T_Y, \\ 1 - \sum\limits_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n-k)\Gamma(m+k)}\Big(\frac{T_Y}{T_X}\Big)^k, & \text{за} \quad T_X \geq T_Y. \end{cases}$$

Двопараметарске експоненцијалне расподеле

Ако X има двопараметарску експоненцијалну $\mathcal{E}(\alpha_1, \mu_1)$ расподелу, а Y двопараметарску експоненцијалну $\mathcal{E}(\alpha_2, \mu_2)$ расподелу, тада важи да је (*Kotz* и остали, 2003)

$$\widehat{R} = \begin{cases} 0, & \text{за } X_{(1)} \geq U_Y, \\ 1 - H_1\big(n, m, X_{(1)}, \overline{X} - X_{(1)}, Y_{(1)}, \overline{Y} - Y_{(1)}\big), & \text{за } X_{(1)} < Y_{(1)} < U_X < U_Y, \\ 1 - H_2\big(n, m, X_{(1)}, \overline{X} - X_{(1)}, Y_{(1)}, \overline{Y} - Y_{(1)}\big), & \text{за } X_{(1)} < Y_{(1)} < U_Y < U_X, \\ H_1\big(m, n, Y_{(1)}, \overline{Y} - Y_{(1)}, X_{(1)}, \overline{X} - X_{(1)}\big), & \text{за } Y_{(1)} < X_{(1)} < U_Y < U_X, \\ H_2\big(m, n, Y_{(1)}, \overline{Y} - Y_{(1)}, X_{(1)}, \overline{X} - X_{(1)}\big), & \text{за } Y_{(1)} < X_{(1)} < U_X < U_Y, \\ 1, & \text{за } Y_{(1)} \geq U_X, \end{cases} \tag{2.14}$$

где је

$$\begin{aligned}
H_1(q,w,a,b,c,d) &= \frac{q-1}{q}\Big(1-\frac{c-a}{qb}\Big)^{q-2} - \frac{(q-1)(q-2)(w-1)}{qw(qb)^{q-2}(wd)^{w-2}} \\
&\cdot \sum_{k=0}^{w-2}\frac{\binom{w-2}{k}}{q-2+k}(a+qb-c)^{q+k-2}(c+wd-a-qb)^{w-k-2}, \\
H_2(q,w,a,b,c,d) &= \frac{q-1}{q}\Big(1-\frac{c-a}{qb}\Big)^{q-2} - \frac{(q-1)(q-2)(w-1)d}{q^2b(qb)^{q-3}} \\
&\cdot \sum_{k=0}^{q-3}\frac{\binom{q-3}{k}}{w-1+k}(a+qb-c-wd)^{q-k-3}(wd)^{k}, \\
U_X &= T_X-(n-1)X_{(1)}, \\
U_Y &= T_Y-(m-1)Y_{(1)}.
\end{aligned}$$

У случају да су скалирајући параметри α_1 и α_2 познати важи да је (*Ivshin*, 1996)

$$\widehat{R} = \begin{cases} 1-\frac{(n-1)(\alpha_1+m\alpha_2)}{nm(\alpha_1+\alpha_2)}e^{-\alpha_1(Y_{(1)}-X_{(1)})}, & \text{за} \quad X_{(1)} \le Y_{(1)}, \\ \frac{(m-1)(n\alpha_1+\alpha_2)}{nm(\alpha_1+\alpha_2)}e^{-\alpha_2(X_{(1)}-Y_{(1)})}, & \text{за} \quad X_{(1)} > Y_{(1)}. \end{cases}$$

Гама расподеле

Ако X има гама $\Gamma(a_1,\beta_1)$ расподелу, а Y гама $\Gamma(a_2,\beta_2)$ расподелу и ако су параметри облика a_1 и a_2 познати и природни бројеви, тада важи да је (*Constantine* и остали, 1986)

$$\widehat{R} = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{(n-1)a_1-1}\frac{B(a_1+a_2+k,(m-1)a_2)\binom{(n-1)a_1-1}{k}}{B(a_2,(m-1)a_2)B(a_1,(n-1)a_1)}\frac{(-1)^k}{a_1+k}\left(\frac{T_Y}{T_X}\right)^{a_1+k}, & \text{за} \quad T_X < T_Y, \\ 1-\sum\limits_{k=0}^{(m-1)a_2-1}\frac{B(a_1+a_2+k,(n-1)a_1)\binom{(m-1)a_2-1}{k}}{B(a_1,(n-1)a_1)B(a_2,(m-1)a_2)}\frac{(-1)^k}{a_2+k}\left(\frac{T_X}{T_Y}\right)^{a_2+k}, & \text{за} \quad T_X \ge T_Y. \end{cases}$$

Паретове расподеле

Ако X има Паретову $\mathcal{P}ar(a_1,\mu_1)$ расподелу, а Y Паретову $\mathcal{P}ar(a_2,\mu_2)$ расподелу, тада важи да је (*Beg* и *Singh*, 1979) израз за $\widehat{R}$ исти као у једнакости (2.14), само уместо $X_{(1)}$, $\overline{X}$, $Y_{(1)}$, $\overline{Y}$, U_X и U_Y треба редом ставити $\ln X_{(1)}$, $\overline{\ln X}$, $\ln Y_{(1)}$, $\overline{\ln Y}$, $U_{\ln X}$ и $U_{\ln Y}$, где је

$$\begin{aligned}\overline{\ln X} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i,\\ \overline{\ln Y} &= \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\ln Y_j,\\ U_{\ln X} &= \sum_{i=1}^{n}\ln X_i-(n-1)\ln X_{(1)},\\ U_{\ln Y} &= \sum_{j=1}^{m}\ln Y_j-(m-1)\ln Y_{(1)}.\end{aligned}$$

Бурове расподеле типа III

Ако X има Бурову $\mathcal{B}ur3(a,b_1)$ расподелу, а Y Бурову $\mathcal{B}ur3(a,b_2)$ расподелу, где је параметар облика a познат, и ако су обими узорака на основу којих се оцењује једнаки, тј. $n=m$, тада важи да је (*Mokhlis*, 2005)

$$\widehat{R}=\begin{cases}1-\sum\limits_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{(\Gamma(n))^2}{\Gamma(n-k)\Gamma(n+k)}\left(\frac{V_X}{V_Y}\right)^k, & \text{за}\quad V_X\leq V_Y,\\ \sum\limits_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{(\Gamma(n))^2}{\Gamma(n-k)\Gamma(n+k)}\left(\frac{V_Y}{V_X}\right)^k, & \text{за}\quad V_X>V_Y,\end{cases}$$

где је

$$V_X=\sum_{i=1}^{n}\ln(1+X_i^{-a}),\quad V_Y=\sum_{j=1}^{n}\ln(1+Y_j^{-a}). \tag{2.15}$$

Бурове расподеле типа X

Ако X има Бурову $\mathcal{B}ur10(a)$ расподелу, а Y Бурову $\mathcal{B}ur10(b)$ расподелу, тада важи да је (*Surles* и *Padgett*, 1998)

$$\widehat{R}=\begin{cases}1-\sum\limits_{k=0}^{m-1}(-1)^k\frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n+k)\Gamma(m-k)}\left(\frac{W_X}{W_Y}\right)^k, & \text{за}\quad W_X\leq W_Y,\\ \sum\limits_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n-k)\Gamma(m+k)}\left(\frac{W_Y}{W_X}\right)^k, & \text{за}\quad W_X>W_Y,\end{cases}$$

где је

$$W_X=-\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1-e^{-X_i^2}\right),\quad W_Y=-\sum_{j=1}^{m}\ln\left(1-e^{-Y_j^2}\right). \tag{2.16}$$

Бурове расподеле типа XII

Ако X има Бурову $\mathcal{B}ur12(a, b_1)$ расподелу, а Y Бурову $\mathcal{B}ur12(a, b_2)$ расподелу и ако је параметар облика a познат, тада важи да је (*Awad* и *Gharraf*, 1986)

$$\widehat{R} = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{m-1}(-1)^k \frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n+k)\Gamma(m-k)}\left(\frac{S_X}{S_Y}\right)^k, & \text{за} \quad S_X \leq S_Y, \\ 1 - \sum\limits_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n-k)\Gamma(m+k)}\left(\frac{S_Y}{S_X}\right)^k, & \text{за} \quad S_X > S_Y, \end{cases}$$

где је $S_X = \sum\limits_{i=1}^{n} \ln(1 + X_i^a)$, а $S_Y = \sum\limits_{j=1}^{m} \ln(1 + Y_j^a)$.

Униформне расподеле

Ако X има униформну $\mathcal{U}[0, \theta]$ расподелу, а Y униформну $\mathcal{U}[0, \mu]$ расподелу, тада важи да је (*Ivshin*, 1996)

$$\widehat{R} = \begin{cases} 1 - \frac{(n+1)(m-1)X_{(n)}}{2nmY_{(m)}}, & \text{за} \quad X_{(n)} \leq Y_{(m)}, \\ \frac{(n-1)(m+1)Y_{(m)}}{2nmX_{(n)}}, & \text{за} \quad X_{(n)} > Y_{(m)}. \end{cases}$$

Гомперцове расподеле

Ако X има Гомперцову $\mathcal{G}om(\alpha, \mu_1)$ расподелу, а Y Гомперцову $\mathcal{G}om(\alpha, \mu_2)$ расподелу и ако је скалирајући параметар α познат, тада важи да је (*Saraçoglu* и остали, 2009)

$$\widehat{R} = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{m-1}(-1)^k \frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n+k)\Gamma(m-k)}\left(\frac{Q_X}{Q_Y}\right)^k, & \text{за} \quad Q_X \leq Q_Y, \\ 1 - \sum\limits_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n-k)\Gamma(m+k)}\left(\frac{Q_Y}{Q_X}\right)^k, & \text{за} \quad Q_X > Q_Y, \end{cases}$$

где је

$$Q_X = \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n}(e^{\alpha X_i} - 1), \quad Q_Y = \frac{1}{\alpha}\sum_{j=1}^{m}(e^{\alpha Y_j} - 1). \tag{2.17}$$

Топ-Леонеове расподеле

Ако X има Топ-Леонеову $\mathcal{TL}(a)$ расподелу, а Y Топ-Леонеову $\mathcal{TL}(b)$ расподелу, тада важи да је (*Genç*, 2013)

$$\widehat{R} = \begin{cases} 1 -_2 F_1(1, 1-m; n; \frac{L_X}{L_Y}), & \text{за} \quad L_X < L_Y, \\ {}_2F_1(1, 1-n; m; \frac{L_Y}{L_X}), & \text{за} \quad L_X \geq L_Y, \end{cases}$$

где је

$$L_X = -\sum_{i=1}^{n} \ln(2X_i - X_i^2), \quad L_Y = -\sum_{j=1}^{m} \ln(2Y_j - Y_j^2). \tag{2.18}$$

Линдлијеве расподеле

Ако X има Линдлијеву $\mathcal{L}in(\alpha)$ расподелу, а Y Линдлијеву $\mathcal{L}in(\beta)$ расподелу, тада важи да је (*Al-Mutairi* и остали, 2013)

$$\widehat{R} = \begin{cases} \frac{\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m-1} C_{k,n}C_{s,m}I_1(T_Y,T_X,2m-3-s,2n-3-k)}{A_n(T_X)A_m(T_Y)}, & \text{за} \quad T_X < T_Y, \\ \frac{\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m-1} C_{k,n}C_{s,m}I_2(T_Y,T_X,2m-3-s,2n-3-k)}{A_n(T_X)A_m(T_Y)}, & \text{за} \quad T_X \geq T_Y, \end{cases}$$

где је $A_l(u) = \sum_{i=0}^{l} \binom{l}{i} \frac{u^{2l-i-1}}{\Gamma(2l-i)}$, $C_{j,l} = \frac{1}{\Gamma(2l-2-j)} \binom{l-1}{j}$, а

$$\begin{aligned} I_1(u,v,j,l) &= \sum_{i=0}^{j+1} \Bigg[\binom{j+1}{i} (u-v)^{j-i+1} v^{l+i+1} \\ &\cdot \frac{(l+i+3)[(l+i+2)(j+u+2)+(2j+u+3)v]+2(j+1)v^2}{(j+1)(j+2)(l+i+1)(l+i+2)(l+i+3)} \Bigg], \\ I_2(u,v,j,l) &= \sum_{i=0}^{l} \Bigg[\binom{l}{i} (v-u)^{l-i} u^{j+i+2} \\ &\cdot \frac{(j+2)(j+i+3)(j+i+4) + (j+i+4+u)(3j+i+6)u}{(j+1)(j+2)(j+i+2)(j+i+3)(j+i+4)} \Bigg]. \end{aligned}$$

Кумарасвамијеве расподеле

Ако X има Кумарасвамијеву $\mathcal{K}um(1,b_1)$ расподелу, а Y Кумарасвамијеву $\mathcal{K}um(1,b_2)$ расподелу, тада важи да је (*Nadar* и остали, 2014)

$$\widehat{R} = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{m-1}(-1)^k \frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n+k)\Gamma(m-k)}\left(\frac{K_X}{K_Y}\right)^k, & \text{за} \quad K_X \leq K_Y, \\ 1-\sum\limits_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n-k)\Gamma(m+k)}\left(\frac{K_Y}{K_X}\right)^k, & \text{за} \quad K_X > K_Y, \end{cases}$$

где је

$$K_X = -\sum_{i=1}^{n}\ln(1-X_i), \quad K_Y = -\sum_{j=1}^{m}\ln(1-Y_j). \tag{2.19}$$

Негативне биномне расподеле

Ако X има негативну биномну $\mathcal{NB}(m_1,p_1)$ расподелу, а Y негативну биномну $\mathcal{NB}(m_2,p_2)$ расподелу, где су параметри m_1 и m_2 познати, и ако је $R = P\{X \leq Y\}$, тада важи да је (*Sathe* и *Dixit*, 2001)

$$\widehat{R} = \sum_{x=0}^{\min\{T_X,T_Y\}} \sum_{y=x}^{T_Y} \frac{\binom{m_1+x-1}{x}\binom{T_X-x+m_1(n-1)-1}{T_X-x}\binom{m_2+y-1}{y}\binom{T_Y-y+m_2(m-1)-1}{T_Y-y}}{\binom{m_1n+T_X-1}{T_X}\binom{m_2m+T_Y-1}{T_Y}}.$$

Пуасонове расподеле

Ако X има Пуасонову $\mathcal{P}(\lambda)$ расподелу, а Y Пуасонову $\mathcal{P}(\mu)$ расподелу, тада важи да је (*Kotz* и остали, 2003)

$$\widehat{R} = \sum_{x=0}^{\min\{T_X,T_Y-1\}} \left[\binom{T_X}{x}\frac{(n-1)^{T_X-x}}{n^{T_X}}\left(1-\sum_{y=0}^{x}\binom{T_Y}{y}\frac{(m-1)^{T_Y-y}}{m^{T_Y}}\right)\right].$$

2.3 Бајесова оцена

За разлику од претходних метода, код Бајесовог оцењивања непознатог параметра θ који фигурише у густини расподеле $f(x;\theta)$ (закон расподеле код дискретних обележја) апослутно непрекидног обележја X укључују се унапред познате информације и знања о параметру θ, те се θ третира као случајна величина са неком *априорном* расподелом $h(\theta)$. На основу узорка $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ израчунава се условна расподела за θ при услову $\mathbf{X} = \mathbf{x}$, *апостериорна* расподела $h(\theta|\mathbf{x})$. За њу важи да је

$$h(\theta|\mathbf{x}) = \frac{g(\theta, \mathbf{x})}{k(\mathbf{x})} = \frac{L(\theta; \mathbf{x})h(\theta)}{\int L(\theta; \mathbf{x})h(\theta)d\theta}, \tag{2.20}$$

где је $g(\theta, \mathbf{x})$ заједничка расподела случајног вектора $(\theta, \mathbf{X})$, а $L(\theta; \mathbf{x})$ функција веродостојности (уколико је априорна расподела дискретног типа, онда у једнакости (2.20) уместо интеграла треба да стоји сума). Из једнакости (2.20) је јасно да се апостериорна расподела не мења уколико се априорна расподела помножи неком константом. Због тога се често априорна расподела користи без нормирајуће константе. То се обележава са $h(\theta) \propto \ldots$ и каже се да је априорна расподела $h(\theta)$ пропорционална том изразу без константе.

Потребно је, такође, унапред дефинисати функцију губитака $G(\theta, U)$ која мери одступање оцене $U = U(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ од θ. Најчешће се за функцију губитака узима квадратно одступање $G(\theta, U) = (U - \theta)^2$ или апсолутно одступање $G(\theta, U) = |U - \theta|$.

Дефиниција 2.4 *Бајесова оцена параметра θ је она статистика $\check{\theta} = \check{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ за коју се достиже минимум апостериорне функције ризика, тј. за коју важи*

$$\int G(\theta, \check{\theta}(\mathbf{x}))h(\theta|\mathbf{x})d\theta = \min_U \int G(\theta, U(\mathbf{x}))h(\theta|\mathbf{x})d\theta. \tag{2.21}$$

Ако је априорна расподела дискретног, а не апсолутно непрекидног типа, у једнакости (2.21) уместо интеграла треба да стоје суме.

Ако је функција губитака $G(\theta, U) = (U - \theta)^2$, Бајесова оцена је једнака условном математичком очекивању $E(\theta|\mathbf{X})$, а ако је функција губитака $G(\theta, U) = |U - \theta|$, Бајесова оцена је једнака медијани апостериорне расподеле $h(\theta|\mathbf{X})$.

На основу свега овога долази се до поступка за одређивање Бајесове оцене параметра поузданости R. Нека су $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ и $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$ узорци стреса који има расподелу X и снаге која има расподелу Y и нека је θ вишедимензионални непознати параметар чије су компоненте сви параметри који се појављују у расподелама независних случајних величина X и Y. За априорну расподелу $h(\theta)$ апостериорна расподела је

$$h(\theta|\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{L(\theta; \mathbf{x}) L(\theta; \mathbf{y}) h(\theta)}{\int L(\theta; \mathbf{x}) L(\theta; \mathbf{y}) h(\theta) d\theta}. \tag{2.22}$$

Коришћењем трансформације случајног вектора θ у R добија се апостериорна расподела $h(r|\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Зависно од избора функције губитака G израчунава се Бајесова оцена $\check{R}$.

Сем избора функције губитака битан је и избор априорне расподеле. Код оцењивања параметра поузданости најчешће се за априорну расподелу бира *конјугована* расподела, јер је рачун по правилу нешто једноставнији.

Дефиниција 2.5 *Нека је $\mathcal{F}$ фамилија расподела $f(x, y; \theta)$. За фамилију априорних расподела $\mathcal{P}$ каже се да је конјугована фамилији $\mathcal{F}$ ако апостериорна расподела припада фамилији $\mathcal{P}$ за сваку расподелу $f \in \mathcal{F}$ и сваку априорну расподелу из $\mathcal{P}$.*

Користе се такође и неинформативне априорне расподеле, нарочито Џефрисова. Џефрисова априорна расподела је пропорционална корену детерминанте Фишерове информационе матрице $I(\theta)$,

$$h(\theta) \propto \sqrt{det(I(\theta))}, \tag{2.23}$$

где ако је $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$, онда је, при неким (довољно општим) условима регуларности (*Hogg* и остали, 2005, апендикс А), $I(\theta)$ матрица чији елемент (i, j), $1 \le i \le k$, $1 \le j \le k$, је

$$I_{ij}(\theta) = -E\left(\frac{\partial^2 \ln f(X, Y; \theta)}{\partial\theta_i \partial\theta_j}\right). \tag{2.24}$$

Неинформативне априорне расподеле се користе када никакво предзнање о параметрима расподеле није доступно и оне врло често нису расподеле у правом смислу.

За разне расподеле X и Y биће изведене или наведене Бајесове оцене параметра поузданости R.

Нормалне расподеле

Ако X има нормалну $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma^2)$ расподелу, а Y нормалну $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma^2)$ расподелу, тада за Цефрисову априорну расподелу $h(\mu_1, \mu_2, \sigma) \propto \sigma^{-1}$ и функцију губитака која мери квадратно одступање важи да је (*Kotz* и остали, 2003)

$$\check{R} = P\left\{ t_{n+m-2} < \frac{\overline{Y} - \overline{X}}{S\sqrt{2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \right\},$$

где је t_{n+m-2} случајна величина која има Студентову расподелу са $n + m - 2$ степена слободе, а $S^2 = \frac{n\overline{S}_X^2 + m\overline{S}_Y^2}{n+m-2}$.

Експоненцијалне расподеле

Нека X има експоненцијалну $\mathcal{E}(\alpha)$ расподелу, а Y експоненцијалну $\mathcal{E}(\beta)$ расподелу. Како је фамилија гама расподела конјугована фамилији експоненцијалних расподела, то се за априорне расподеле непознатих параметара α и β узимају гама расподеле, тј. претпоставља се да α има гама $\Gamma(a, \gamma)$ расподелу, а β гама $\Gamma(b, \lambda)$ расподелу, где су a, γ, b и λ познати параметри. Како је природно претпоставити да су расподеле за α и β независне, то следи да за заједничку априорну расподелу важи да је

$$h(\alpha, \beta) \propto \alpha^{a-1} e^{-\frac{\alpha}{\gamma}} \beta^{b-1} e^{-\frac{\beta}{\lambda}}.$$

Користећи овај израз добија се да за апостериорну расподелу важи да је

$$\begin{aligned} h(\alpha, \beta | \mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{L(\alpha; \mathbf{x}) L(\beta; \mathbf{y}) h(\alpha, \beta)}{\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty L(\alpha; \mathbf{x}) L(\beta; \mathbf{y}) h(\alpha, \beta) d\alpha d\beta} \\ &= \frac{\alpha^n e^{-\alpha \sum\limits_{i=1}^n x_i} \beta^m e^{-\beta \sum\limits_{j=1}^m y_j} \alpha^{a-1} e^{-\frac{\alpha}{\gamma}} \beta^{b-1} e^{-\frac{\beta}{\lambda}}}{\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \alpha^n e^{-\alpha \sum\limits_{i=1}^n x_i} \beta^m e^{-\beta \sum\limits_{j=1}^m y_j} \alpha^{a-1} e^{-\frac{\alpha}{\gamma}} \beta^{b-1} e^{-\frac{\beta}{\lambda}} d\alpha d\beta} \end{aligned}$$

$$= \frac{\alpha^{a^*-1}e^{-\alpha\gamma^*}\beta^{b^*-1}e^{-\beta\lambda^*}}{\int\limits_0^\infty \alpha^{a^*-1}e^{-\alpha\gamma^*}d\alpha \int\limits_0^\infty \beta^{b^*-1}e^{-\beta\lambda^*}d\beta},$$

где је $a^* = n+a$, $\gamma^* = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{\gamma}$, $b^* = m+b$, а $\lambda^* = \sum\limits_{j=1}^{m} y_j + \frac{1}{\lambda}$. Коришћењем смена $\alpha\gamma^* = t$ и $\beta\lambda^* = s$, даље се добија да је

$$\begin{aligned} h(\alpha,\beta|\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \frac{\alpha^{a^*-1}e^{-\alpha\gamma^*}\beta^{b^*-1}e^{-\beta\lambda^*}}{\frac{1}{(\gamma^*)^{a^*}}\int\limits_0^\infty t^{a^*-1}e^{-t}dt\frac{1}{(\lambda^*)^{b^*}}\int\limits_0^\infty s^{b^*-1}e^{-s}ds} \\ &= \frac{(\gamma^*)^{a^*}(\lambda^*)^{b^*}}{\Gamma(a^*)\Gamma(b^*)}\alpha^{a^*-1}e^{-\alpha\gamma^*}\beta^{b^*-1}e^{-\beta\lambda^*}. \end{aligned}$$

За одређивање апостериорне расподеле за R користи се трансформација случајног вектора (α,β) у случајни вектор (R,W), где је $R = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$, а $W = \alpha+\beta$. Одавде је $\alpha = WR$, а $\beta = W(1-R)$, па за Јакобијан трансформације важи да је

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial\alpha}{\partial R} & \frac{\partial\alpha}{\partial W} \\ \frac{\partial\beta}{\partial R} & \frac{\partial\beta}{\partial W} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} W & R \\ -W & 1-R \end{vmatrix} = W.$$

Следи да за заједничку апостериорну расподелу за R и W важи да је

$$\begin{aligned} h(r,w|\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \frac{(\gamma^*)^{a^*}(\lambda^*)^{b^*}}{\Gamma(a^*)\Gamma(b^*)}(wr)^{a^*-1}e^{-wr\gamma^*}(w(1-r))^{b^*-1}e^{-w(1-r)\lambda^*}|w| \\ &= \frac{(\gamma^*)^{a^*}(\lambda^*)^{b^*}}{\Gamma(a^*)\Gamma(b^*)}r^{a^*-1}(1-r)^{b^*-1}w^{a^*+b^*-1}e^{-w\lambda^*(1-cr)}, \end{aligned}$$

$0 < r < 1$, $w > 0$, где је $c = \frac{\lambda^*-\gamma^*}{\lambda^*}$ и $c < 1$.

Апостериорна расподела за R добија се интеграцијом заједничке апостериорне расподеле за R и W по w. Важи да је

$$\begin{aligned} h_R(r|\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \int\limits_0^\infty \frac{(\gamma^*)^{a^*}(\lambda^*)^{b^*}}{\Gamma(a^*)\Gamma(b^*)}r^{a^*-1}(1-r)^{b^*-1}w^{a^*+b^*-1}e^{-w\lambda^*(1-cr)}dw \\ &= \frac{(\gamma^*)^{a^*}(\lambda^*)^{b^*}}{\Gamma(a^*)\Gamma(b^*)}r^{a^*-1}(1-r)^{b^*-1}\int\limits_0^\infty w^{a^*+b^*-1}e^{-w\lambda^*(1-cr)}dw. \end{aligned}$$

Коришћењем смене $w\lambda^*(1-cr)=t$ добија се да је

$$\begin{aligned} h_R(r|\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \frac{(\gamma^*)^{a^*}(\lambda^*)^{b^*}}{\Gamma(a^*)\Gamma(b^*)} r^{a^*-1}(1-r)^{b^*-1}\int\limits_0^\infty \frac{t^{a^*+b^*-1}e^{-t}}{(\lambda^*(1-cr))^{a^*+b^*}}dt \\ &= \frac{1}{B(a^*,b^*)}\left(\frac{\gamma^*}{\lambda^*}\right)^{a^*}\frac{r^{a^*-1}(1-r)^{b^*-1}}{(1-cr)^{a^*+b^*}}, \quad 0<r<1. \end{aligned} \tag{2.25}$$

На основу једнакости (2.25) апостериорна средња вредност је

$$\begin{aligned} E(R|\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \int\limits_0^1 r h_R(r|\mathbf{x},\mathbf{y})dr \\ &= \frac{1}{B(a^*,b^*)}\left(\frac{\gamma^*}{\lambda^*}\right)^{a^*}\int\limits_0^1 r^{a^*}(1-r)^{b^*-1}(1-cr)^{-(a^*+b^*)}dr. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Помоћу једнакости (*Gradshteyn* и *Ryzhik*, 1980, једнакост 3.197.3)

$$\int\limits_0^1 x^{\lambda-1}(1-x)^{\mu-1}(1-\beta x)^{-\nu}dx = B(\lambda,\mu)\ {}_2F_1(\nu,\lambda;\lambda+\mu;\beta),$$

за $\lambda>0$, $\mu>0$, $|\beta|<1$, и особина 1, 2 и 3 из потпоглавља 1.3.4 о бета функцији добија се да из једнакости (2.26) за $|c|<1$ следи да је

$$\begin{aligned} E(R|\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \frac{1}{B(a^*,b^*)}\left(\frac{\gamma^*}{\lambda^*}\right)^{a^*} B(a^*+1,b^*)\ {}_2F_1(a^*+b^*,a^*+1;a^*+b^*+1;c) \\ &= \frac{a^*}{a^*+b^*}\left(\frac{\gamma^*}{\lambda^*}\right)^{a^*} {}_2F_1(a^*+b^*,a^*+1;a^*+b^*+1;c). \end{aligned}$$

За $c\le -1$ је $|\frac{c}{c-1}|<1$, па се коришћењем смене $1-r=t$ у једнакости (2.26) аналогно претходном случају добија да важи

$$\begin{aligned} E(R|\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \frac{1}{B(a^*,b^*)}\left(\frac{\gamma^*}{\lambda^*}\right)^{a^*}\int\limits_0^1 (1-t)^{a^*}t^{b^*-1}(1-c(1-t))^{-(a^*+b^*)}dt \\ &= \frac{(1-c)^{-(a^*+b^*)}}{B(a^*,b^*)}\left(\frac{\gamma^*}{\lambda^*}\right)^{a^*}\int\limits_0^1 t^{b^*-1}(1-t)^{a^*}\left(1-\frac{c}{c-1}t\right)^{-(a^*+b^*)}dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{B(a^*, b^*)}\Big(\frac{\lambda^*}{\gamma^*}\Big)^{b^*} B(b^*, a^*+1)\ {}_2F_1\Big(a^*\!+b^*, b^*; a^*\!+b^*\!+1; \frac{c}{c-1}\Big) \\
&= \frac{a^*}{a^*+b^*}\Big(\frac{\lambda^*}{\gamma^*}\Big)^{b^*} {}_2F_1\Big(a^*+b^*, b^*; a^*+b^*+1; \frac{c}{c-1}\Big).
\end{aligned}$$

За функцију губитака која мери квадратно одступање Бајесова оцена параметра поузданости R једнака је условном математичком очекивању $E(R|\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, па важи да је (*Enis* и *Geisser*, 1971)

$$\check{R} = \begin{cases} \frac{a^*}{a^*+b^*}\big(\frac{\gamma^*}{\lambda^*}\big)^{a^*} {}_2F_1(a^*+b^*, a^*+1; a^*+b^*+1; c), & \text{за} \quad |c| < 1, \\ \frac{a^*}{a^*+b^*}\big(\frac{\lambda^*}{\gamma^*}\big)^{b^*} {}_2F_1\big(a^*+b^*, b^*; a^*+b^*+1; \frac{c}{c-1}\big), & \text{за} \quad c \leq -1. \end{cases} \tag{2.27}$$

За Џефрисову априорну расподелу $h(\alpha, \beta) \propto \alpha^{-1}\beta^{-1}$ и функцију губитака која мери квадратно одступање важи да је (*Kotz* и остали, 2003) израз за $\check{R}$ исти као у једнакости (2.27), само што је $a^* = n$, $\gamma^* = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, $b^* = m$, а $\lambda^* = \sum\limits_{j=1}^{m} Y_j$.

Паретове расподеле

Ако X има Паретову $\mathcal{P}ar(a_1, \mu_1)$ расподелу, а Y Паретову $\mathcal{P}ar(a_2, \mu_2)$ расподелу, где су локацијски параметри μ_1 и μ_2 познати, и ако a_1 има априорну гама $\Gamma(\alpha_1, \frac{1}{\beta_1})$ расподелу, a_2 априорну гама $\Gamma(\alpha_2, \frac{1}{\beta_2})$ расподелу, а функција губитака мери квадратно одступање, тада важи (*Beg* и *Singh*, 1979) да је за $\mu_1 < \mu_2$

$$\check{R} = \begin{cases} 1 - \frac{\gamma_2'}{\gamma_1'+\gamma_2'}\Big(\frac{u_1+\frac{1}{\beta_1}}{u_2+\frac{1}{\beta_2}}\Big)^{\gamma_1'}(1-\theta)^{\gamma_1'+\gamma_2'}\ {}_2F_1(\gamma_1'+\gamma_2', \gamma_2'+1; \gamma_1'+\gamma_2'+1; \theta), \\ \hfill \text{за} \quad |\theta| < 1, \\ 1 - \frac{\gamma_2'}{\gamma_1'+\gamma_2'}\Big(\frac{u_1+\frac{1}{\beta_1}}{u_2+\frac{1}{\beta_2}}\Big)^{\gamma_1'}\ {}_2F_1\big(\gamma_1'+\gamma_2', \gamma_1'; \gamma_1'+\gamma_2'+1; \frac{\theta}{\theta-1}\big), \quad \text{за} \quad \theta \leq -1, \end{cases}$$

где је $\theta = 1 - \frac{u_2+\frac{1}{\beta_2}}{u_1+\frac{1}{\beta_1}+\xi}$, док је за $\mu_1 \geq \mu_2$

$$\check{R} = \begin{cases} \frac{\gamma_1'}{\gamma_1'+\gamma_2'}\Big(\frac{u_2+\frac{1}{\beta_2}}{u_1+\frac{1}{\beta_1}}\Big)^{\gamma_2'}(1-\phi)^{\gamma_1'+\gamma_2'}\ {}_2F_1(\gamma_1'+\gamma_2', \gamma_1'+1; \gamma_1'+\gamma_2'+1; \phi), \\ \hfill \text{за} \quad |\phi| < 1, \\ \frac{\gamma_1'}{\gamma_1'+\gamma_2'}\Big(\frac{u_2+\frac{1}{\beta_2}}{u_1+\frac{1}{\beta_1}}\Big)^{\gamma_2'}\ {}_2F_1\big(\gamma_1'+\gamma_2', \gamma_2'; \gamma_1'+\gamma_2'+1; \frac{\phi}{\phi-1}\big), \quad \text{за} \quad \phi \leq -1, \end{cases}$$

где је $\phi = 1 - \frac{u_1 + \frac{1}{\beta_1}}{u_2 + \frac{1}{\beta_2} - \xi}$. У претходним изразима је $\gamma_1' = n + \mu_1$, $\gamma_2' = m + \mu_2$, $u_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} \ln \frac{X_i}{\mu_1}$, $u_2 = \sum\limits_{j=1}^{m} \ln \frac{Y_j}{\mu_2}$, а $\xi = \ln \frac{\mu_2}{\mu_1}$.

Бурове расподеле типа III

Нека X има Бурову $\mathcal{B}ur3(a, b_1)$ расподелу, а Y Бурову $\mathcal{B}ur3(a, b_2)$ расподелу, где је параметар облика a познат, и обими узорака су једнаки, тј. $n = m$.

Ако b_1 има априорну гама $\Gamma(\alpha_1, \frac{1}{\beta_1})$ расподелу, b_2 априорну гама $\Gamma(\alpha_2, \frac{1}{\beta_2})$ расподелу, а функција губитака мери квадратно одступање, тада важи да је (*Mokhlis*, 2005)

$$\check{R} = \begin{cases} \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\delta_1} \frac{\delta_2}{\delta_1 + \delta_2} \, {}_2F_1\left(\delta_1 + \delta_2, \delta_1; \delta_1 + \delta_2 + 1; 1 - \frac{v_1}{v_2}\right), & \text{за} \quad v_1 \leq v_2, \\ \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{\delta_2} \frac{\delta_2}{\delta_1 + \delta_2} \, {}_2F_1\left(\delta_1 + \delta_2, \delta_2 + 1; \delta_1 + \delta_2 + 1; 1 - \frac{v_2}{v_1}\right), & \text{за} \quad v_1 > v_2, \end{cases}$$

где је $\delta_1 = n + \alpha_1$, $v_1 = \beta_1 + V_X$, $\delta_2 = n + \alpha_2$, $v_2 = \beta_2 + V_Y$, а V_X и V_Y су статистике дефинисане једнакостима (2.15).

За Џефрисову априорну расподелу $h(b_1, b_2) \propto b_1^{-1} b_2^{-1}$ и функцију губитака која такође мери квадратно одступање важи да је (*Mokhlis*, 2005)

$$\check{R} = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{V_X}{V_Y}\right)^{n} \, {}_2F_1\left(2n, n; 2n + 1; 1 - \frac{V_X}{V_Y}\right), & \text{за} \quad V_X \leq V_Y, \\ \frac{1}{2}\left(\frac{V_Y}{V_X}\right)^{n} \, {}_2F_1\left(2n, n + 1; 2n + 1; 1 - \frac{V_Y}{V_X}\right), & \text{за} \quad V_X > V_Y. \end{cases}$$

Бурове расподеле типа X

Ако X има Бурову $\mathcal{B}ur10(a)$ расподелу, а Y Бурову $\mathcal{B}ur10(b)$ расподелу, и ако a и b имају Џефрисову априорну расподелу $h(a, b) \propto a^{-1} b^{-1}$, а функција губитака мери квадратно одступање, тада важи да је (*Kotz* и остали, 2003) израз за $\check{R}$ исти као у једнакости (2.27), само што је $a^* = n$, $\gamma^* = nW_X$, $b^* = m$, $\lambda^* = mW_Y$, а W_X и W_Y су статистике дефинисане једнакостима (2.16).

Вејбулове расподеле

Ако X има Вејбулову $\mathcal{W}(a, \beta_1)$ расподелу, а Y Вејбулову$\mathcal{W}(a, \beta_2)$

расподелу, где је параметар облика a познат, и ако β_1^{-a} има априорну гама $\Gamma(\alpha_1, \lambda_1)$ расподелу, β_2^{-a} априорну гама $\Gamma(\alpha_2, \lambda_2)$ расподелу, а функција губитака мери квадратно одступање, тада важи да је (*Amiri* и остали, 2013)

$$\check{R} = \begin{cases} \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\delta_1} \frac{\delta_1}{\delta_1+\delta_2}\ {}_2F_1\big(\delta_1+\delta_2, \delta_1+1; \delta_1+\delta_2+1; 1-\frac{v_1}{v_2}\big), & \text{за} \quad v_1 \le v_2, \\ \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{\delta_2} \frac{\delta_1}{\delta_1+\delta_2}\ {}_2F_1\big(\delta_1+\delta_2, \delta_2; \delta_1+\delta_2+1; 1-\frac{v_2}{v_1}\big), & \text{за} \quad v_1 > v_2, \end{cases}$$

где је $\delta_1 = n + \alpha_1$, $v_1 = \lambda_1 + \sum\limits_{i=1}^{n} X_i^a$, $\delta_2 = m + \alpha_2$, а $v_2 = \lambda_2 + \sum\limits_{j=1}^{m} Y_j^a$.

Гомперцове расподеле

Ако X има Гомперцову $\mathcal{G}om(\alpha, \mu_1)$ расподелу, а Y Гомперцову $\mathcal{G}om(\alpha, \mu_2)$ расподелу, где је скалирајући параметар α познат, и ако μ_1 има априорну гама $\Gamma(\lambda_1, \frac{1}{\beta_1})$ расподелу, μ_2 априорну гама $\Gamma(\lambda_2, \frac{1}{\beta_2})$ расподелу, а функција губитака мери квадратно одступање, тада важи да је (*Saraçoglu* и остали, 2009)

$$\check{R} = \begin{cases} \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\delta_1} \frac{\delta_1}{\delta_1+\delta_2}\ {}_2F_1\big(\delta_1+\delta_2, \delta_1+1; \delta_1+\delta_2+1; 1-\frac{v_1}{v_2}\big), & \text{за} \quad v_1 \le v_2, \\ \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{\delta_2} \frac{\delta_1}{\delta_1+\delta_2}\ {}_2F_1\big(\delta_1+\delta_2, \delta_2; \delta_1+\delta_2+1; 1-\frac{v_2}{v_1}\big), & \text{за} \quad v_1 > v_2, \end{cases}$$

где је $\delta_1 = n + \lambda_1$, $v_1 = \beta_1 + Q_X$, $\delta_2 = m + \lambda_2$, $v_2 = \beta_2 + Q_Y$, а Q_X и Q_Y су статистике дефинисане једнакостима (2.17).

Кумарасвамијеве расподеле

Нека X има Кумарасвамијеву $\mathcal{K}um(a, b_1)$ расподелу, а Y Кумарасвамијеву $\mathcal{K}um(a, b_2)$ расподелу, где је параметар облика a познат.

Ако b_1 има априорну гама $\Gamma(\alpha_1, \frac{1}{\beta_1})$ расподелу, b_2 априорну гама $\Gamma(\alpha_2, \frac{1}{\beta_2})$ расподелу, а функција губитака мери квадратно одступање, тада важи да је (*Nadar* и остали, 2014)

$$\check{R} = \begin{cases} \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\delta_1} \frac{\delta_1}{\delta_1+\delta_2}\ {}_2F_1\big(\delta_1+\delta_2, \delta_1+1; \delta_1+\delta_2+1; 1-\frac{v_1}{v_2}\big), & \text{за} \quad v_1 \le v_2, \\ \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{\delta_2} \frac{\delta_1}{\delta_1+\delta_2}\ {}_2F_1\big(\delta_1+\delta_2, \delta_2; \delta_1+\delta_2+1; 1-\frac{v_2}{v_1}\big), & \text{за} \quad v_1 > v_2, \end{cases}$$

где је $\delta_1 = n + \alpha_1$, $\upsilon_1 = \beta_1 + K_X$, $\delta_2 = m + \alpha_2$, $\upsilon_2 = \beta_2 + K_Y$, а K_X и K_Y су статистике дефинисане једнакостима (2.19).

За Џефрисову априорну расподелу $h(b_1, b_2) \propto b_1^{-1} b_2^{-1}$ и функцију губитака која такође мери квадратно одступање важи да је (*Nadar* и остали, 2014)

$$\check{R} = \begin{cases} \left(\frac{K_X}{K_Y}\right)^n \frac{n}{n+m} \, {}_2F_1\big(n+m, n+1; n+m+1; 1-\frac{K_X}{K_Y}\big), & \text{за} \quad K_X \leq K_Y, \\ \left(\frac{K_Y}{K_X}\right)^m \frac{n}{n+m} \, {}_2F_1\big(n+m, m; n+m+1; 1-\frac{K_Y}{K_X}\big), & \text{за} \quad K_X > K_Y. \end{cases}$$

2.4 Интервали поверења

За оцењивање непознатог параметра θ на основу узорка $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ из популације чије обележје X има расподелу која зависи од θ осим метода тачкастог оцењивања чији резултати су статистике које представљају оцене параметра θ, може се користити и интервално оцењивање чији резултат је случајни интервал коме параметар θ припада са унапред задатом вероватноћом γ.

Дефиниција 2.6 *Нека је $\gamma \in (0,1)$, а $U = U(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ и $V = V(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ су такве статистике да за сваку допустиву вредност параметра θ важи да је $P\{U \leq V\} = 1$ и $P\{U < \theta < V\} \geq \gamma$. Тада се интервал (U, V) назива интервал поверења за непознати параметар θ са нивоом поверења γ.*

Нека су $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ и $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$ узорци стреса који има расподелу X и снаге која има расподелу Y. Постоје разни методи за одређивање интервала поверења за параметар поузданости R на основу тих узорака. Најчешће се у литератури помињу егзактни, асимптотски, *bootstrap-p* и Бајесов интервал поверења за R.

2.4.1 Егзактни интервал поверења

За одређивање егзактног интервала поверења за параметар поузданости R потребно је одредити централну случајну величину за R. То је случајна величина $T = T(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, R)$ чија расподела не зависи од R, а $T(\mathbf{x}, \mathbf{y}, R)$ је непрекидна и строго монотона функција аргумента R. Затим се за унапред задати ниво поверења γ одреде константе a и b такве да је

$$P\{a < T < b\} = \gamma. \tag{2.28}$$

Решавањем по R једначина $T(\mathbf{x}, \mathbf{y}, R) = a$ и $T(\mathbf{x}, \mathbf{y}, R) = b$ добијају се редом решења $T_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и $T_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Тако су одређене статистике $T_1(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ и $T_2(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ за које из (2.28) следи да је

$$P\{T_1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) < R < T_2(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\} = \gamma.$$

Према томе, $100\gamma\%$ егзактни интервал поверења $I_R^{(EGZ)}$ за параметар поузданости R је $(T_1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), T_2(\mathbf{X}, \mathbf{Y}))$.

За разне расподеле X и Y биће изведени или наведени $100\gamma\%$ егзактни интервали поверења за параметар поузданости R.

Нормалне расподеле

Нека X има нормалну $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ расподелу, а Y нормалну $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ расподелу, где су дисперзије σ_1^2 и σ_2^2 познате. Како $\overline{X}$ има нормалну $\mathcal{N}\big(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n}\big)$ расподелу, а $\overline{Y}$ нормалну $\mathcal{N}\big(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{m}\big)$ расподелу, и X и Y су независне случајне величине, то $\overline{Y} - \overline{X}$ има нормалну $\mathcal{N}\big(\mu_2 - \mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}\big)$ расподелу. Одатле следи да $\frac{\overline{Y} - \overline{X} - (\mu_2 - \mu_1)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}}$ има нормалну $\mathcal{N}(0,1)$ расподелу. Ако се означи да је $M = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}$, онда важи да $\frac{\overline{Y} - \overline{X} - (\mu_2 - \mu_1)}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\sqrt{M}$ има нормалну $\mathcal{N}(0,1)$ расподелу.

Одатле следи да је

$$P\bigg\{z_{\frac{1-\gamma}{2}} < \frac{\overline{Y} - \overline{X} - (\mu_2 - \mu_1)}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\sqrt{M} < z_{\frac{1+\gamma}{2}}\bigg\} = \gamma,$$

где је $0 < \gamma < 1$, $\Phi(z_\alpha) = \alpha$, а $\Phi(x)$ функција расподеле нормалне $\mathcal{N}(0,1)$ расподеле. Даље је

$$P\bigg\{\frac{\overline{Y} - \overline{X}}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} - \frac{z_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{M}} < \frac{\mu_2 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} < \frac{\overline{Y} - \overline{X}}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} - \frac{z_{\frac{1-\gamma}{2}}}{\sqrt{M}}\bigg\} = \gamma.$$

Како је Φ монотона функција, добија се да је

$$P\left\{\Phi\left(\frac{\overline{Y}-\overline{X}}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}-\frac{z_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{M}}\right)<\Phi\left(\frac{\mu_2-\mu_1}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\right)<\Phi\left(\frac{\overline{Y}-\overline{X}}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}-\frac{z_{\frac{1-\gamma}{2}}}{\sqrt{M}}\right)\right\}=\gamma.$$

На основу једнакости (1.5) коначно следи да је $100\gamma\%$ егзактни интервал поверења за параметар поузданости R (*Kotz* и остали, 2003)

$$I_R^{(EGZ)}=\left(\Phi\Big(\frac{\overline{Y}-\overline{X}}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}-\frac{z_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{M}}\Big),\Phi\Big(\frac{\overline{Y}-\overline{X}}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}-\frac{z_{\frac{1-\gamma}{2}}}{\sqrt{M}}\Big)\right).$$

Експоненцијалне расподеле

Ако X има експоненцијалну $\mathcal{E}(\alpha)$ расподелу, а Y експоненцијалну $\mathcal{E}(\beta)$ расподелу, тада важи да је (*Enis* и *Geisser*, 1971)

$$I_R^{(EGZ)}=\left(\frac{m\widetilde{R}a}{n(1-\widetilde{R})(1-a)+m\widetilde{R}a},\frac{m\widetilde{R}b}{n(1-\widetilde{R})(1-b)+m\widetilde{R}b}\right),$$

где је $\widetilde{R}$ дефинисано једнакошћу (2.1), а a и b су квантили бета $\mathcal{B}(n,m)$ расподеле, такви да за случајну величину Z која има ту расподелу важи да је $P\{a<Z<b\}=\gamma$.

Бурове расподеле типа III

Ако X има Бурову $\mathcal{B}ur3(a,b_1)$ расподелу, а Y Бурову $\mathcal{B}ur3(a,b_2)$ расподелу, где је параметар облика a познат, и ако су обими узорака на основу којих се оцењује једнаки, тј. $n=m$, тада важи да је (*Mokhlis*, 2005)

$$I_R^{(EGZ)}=\left(\frac{F_{2n,2n}^{(\frac{1-\gamma}{2})}}{F_{2n,2n}^{(\frac{1-\gamma}{2})}+\frac{V_Y}{V_X}},\frac{F_{2n,2n}^{(\frac{1+\gamma}{2})}}{F_{2n,2n}^{(\frac{1+\gamma}{2})}+\frac{V_Y}{V_X}}\right),$$

где је $F_{n,m}^{(\alpha)}$ α-квантил Фишерове $F_{n,m}$ расподеле, а V_X и V_Y су статистике дефинисане једнакостима (2.15).

Бурове расподеле типа X

Ако X има Бурову $\mathcal{B}ur10(a)$ расподелу, а Y Бурову $\mathcal{B}ur10(b)$ расподелу, тада важи да је (*Kotz* и остали, 2003)

$$I_R^{(EGZ)} = \left(\left(\frac{nW_Y}{mW_X}F_{2n,2m}^{(\frac{1+\gamma}{2})}+1\right)^{-1}, \left(\frac{nW_Y}{mW_X}F_{2n,2m}^{(\frac{1-\gamma}{2})}+1\right)^{-1}\right),$$

где су W_X и W_Y статистике дефинисане једнакостима (2.16).

Гомперцове расподеле

Ако X има Гомперцову $\mathcal{G}om(\alpha, \mu_1)$ расподелу, а Y Гомперцову $\mathcal{G}om(\alpha, \mu_2)$ расподелу и ако је скалирајући параметар α познат, тада важи да је (*Saraçoglu* и *Kaya*, 2007)

$$I_R^{(EGZ)} = \left(\frac{F_{2n,2m}^{(\frac{1-\gamma}{2})}}{F_{2n,2m}^{(\frac{1-\gamma}{2})}+\frac{mQ_X}{nQ_Y}}, \frac{F_{2n,2m}^{(\frac{1+\gamma}{2})}}{F_{2n,2m}^{(\frac{1+\gamma}{2})}+\frac{mQ_X}{nQ_Y}}\right),$$

где су Q_X и Q_Y статистике дефинисане једнакостима (2.17).

Топ-Леонеове расподеле

Ако X има Топ-Леонеову $\mathcal{TL}(a)$ расподелу, а Y Топ-Леонеову $\mathcal{TL}(b)$ расподелу, тада важи да је (*Genç*, 2013)

$$I_R^{(EGZ)} = \left(\left(\frac{nL_Y}{mL_X}F_{2n,2m}^{(\frac{1+\gamma}{2})}+1\right)^{-1}, \left(\frac{nL_Y}{mL_X}F_{2n,2m}^{(\frac{1-\gamma}{2})}+1\right)^{-1}\right),$$

где су L_X и L_Y статистике дефинисане једнакостима (2.18).

Кумарасвамијеве расподеле

Ако X има Кумарасвамијеву $\mathcal{K}um(1, b_1)$ расподелу, а Y Кумарасвамијеву $\mathcal{K}um(1, b_2)$ расподелу, тада важи да је (*Nadar* и остали, 2014)

$$I_R^{(EGZ)} = \left(\left(\frac{mK_X}{nK_Y}F_{2m,2n}^{(\frac{1-\gamma}{2})}+1\right)^{-1}, \left(\frac{mK_X}{nK_Y}F_{2m,2n}^{(\frac{1+\gamma}{2})}+1\right)^{-1}\right),$$

где су K_X и K_Y статистике дефинисане једнакостима (2.19).

2.4.2 Асимптотски интервал поверења

Асимптотски интервали поверења се користе у случајевима када се не могу одредити егзактни интервали поверења. Најчешће се одређују асимптотски интервали поверења који се конструишу коришћењем асимптотске нормалности МВ оцене. Од велике користи ће бити следеће две теореме које се могу примењивати при условима регуларности (услови $R_0 - R_9$, *Hogg* и остали, 2005, глава 6 и апендикс А).

Теорема 2.8 *Нека је* $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ *узорак из расподеле чија је густина (закон расподеле)* $f(x;\theta)$, *где је* θ k*-димензионални непознати параметар, тј.* $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$. *Тада важи*

$$\sqrt{n}(\widetilde{\theta} - \theta) \xrightarrow{R} \mathcal{N}_k(\mathbf{0}, I^{-1}(\theta))$$

кад $n \to \infty$, *где је* $\widetilde{\theta}$ *МВ оцена за* θ, *а* $I(\theta)$ *Фишерова информациона матрица чији елемент* (i,j), $1 \le i \le k$, $1 \le j \le k$, *је*

$$I_{ij}(\theta) = -E\left(\frac{\partial^2 \ln f(X;\theta)}{\partial\theta_i \partial\theta_j}\right). \tag{2.29}$$

Теорема 2.9 *Нека је* $\widetilde{\theta}$ *МВ оцена за* θ, *где је* $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$, *и нека за функцију* $\eta = g(\theta)$ *важи да су парцијални изводи* $\frac{\partial g}{\partial \theta_i}$, $1 \le i \le k$, *непрекидне функције које нису једнаке нули у околини* θ. *Тада је* $\widetilde{\eta}$ *МВ оцена за* η, *где је* $\widetilde{\eta} = g(\widetilde{\theta})$, *и важи*

$$\sqrt{n}(\widetilde{\eta} - \eta) \xrightarrow{R} \mathcal{N}(0, BI^{-1}(\theta)B^T)$$

кад $n \to \infty$, *где је* $B = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial \theta_1} & \frac{\partial g}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial g}{\partial \theta_k} \end{bmatrix}$.

За одређивање асимптотског интервала поверења за параметар поузданости R прво се на основу теореме 2.8 одреди асимптотска расподела МВ оцена параметара који се појављују у расподели стреса X, односно снаге Y. Затим се, коришћењем независности X и Y, одређује заједничка асимптотска расподела МВ оцена свих параметара. На основу теореме 2.9 коначно се одређује асимптотска расподела МВ оцене параметра поузданости R и добија се да важи

$$\sqrt{n}(\widetilde{R}-R) \xrightarrow{R} \mathcal{N}(0,\sigma_R^2)$$

кад $n\to\infty$. Оцењујући σ_R^2 МВ оценом $\widetilde{\sigma}_R^2$, добија се да је

$$P\Big\{-z_{\frac{1+\gamma}{2}} < \frac{\widetilde{R}-R}{\widetilde{\sigma}_R}\sqrt{n} < z_{\frac{1+\gamma}{2}}\Big\} \approx \gamma,$$

где је z_α α-квантил нормалне $\mathcal{N}(0,1)$ расподеле. Следи да је

$$P\Big\{\widetilde{R}-z_{\frac{1+\gamma}{2}}\frac{\widetilde{\sigma}_R}{\sqrt{n}} < R < \widetilde{R}+z_{\frac{1+\gamma}{2}}\frac{\widetilde{\sigma}_R}{\sqrt{n}}\Big\} \approx \gamma.$$

Према томе, $100\gamma\%$ асимптотски интервал поверења за параметар поузданости R је

$$I_R^{(ASIM)} = \bigg(\widetilde{R}-z_{\frac{1+\gamma}{2}}\frac{\widetilde{\sigma}_R}{\sqrt{n}}, \widetilde{R}+z_{\frac{1+\gamma}{2}}\frac{\widetilde{\sigma}_R}{\sqrt{n}}\bigg).$$

За разне расподеле X и Y биће изведени или наведени $100\gamma\%$ асимптотски интервали поверења за параметар поузданости R.

Двопараметарске експоненцијалне расподеле

Ако X има двопараметарску експоненцијалну $\mathcal{E}(\alpha_1,\mu)$ расподелу, а Y двопараметарску експоненцијалну $\mathcal{E}(\alpha_2,\mu)$ расподелу, тада важи да је (*Baklizi*, 2003)

$$I_R^{(ASIM)} = \bigg(\widetilde{R}-z_{\frac{1+\gamma}{2}}\widetilde{R}(1-\widetilde{R})\sqrt{\frac{n+m}{nm}}, \widetilde{R}+z_{\frac{1+\gamma}{2}}\widetilde{R}(1-\widetilde{R})\sqrt{\frac{n+m}{nm}}\bigg),$$

где је

$$\widetilde{R} = \frac{n\sum\limits_{j=1}^{m}\big(Y_j-\min\{X_{(1)},Y_{(1)}\}\big)}{m\sum\limits_{i=1}^{n}\big(X_i-\min\{X_{(1)},Y_{(1)}\}\big)+n\sum\limits_{j=1}^{m}\big(Y_j-\min\{X_{(1)},Y_{(1)}\}\big)}.$$

Гама расподеле

Нека X има гама $\Gamma(a, \beta_1)$ расподелу, а Y гама $\Gamma(1, \beta_2)$, тј. експоненцијалну $\mathcal{E}(\frac{1}{\beta_2})$, расподелу. Коришћењем следећих теорема, на основу узорака $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ и $(Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$, изводи се $100\gamma\%$ асимптотски интервал поверења за параметар поузданости R.

Теорема 2.10 *Ако* $\frac{n}{m} \to s$ *кад* $n \to \infty$, $m \to \infty$, *где је* s *позитиван реалан број, онда важи*

$$(\sqrt{n}(\widetilde{a} - a), \sqrt{n}(\widetilde{\beta}_1 - \beta_1), \sqrt{n}(\widetilde{\beta}_2 - \beta_2)) \xrightarrow{R} \mathcal{N}_3(\mathbf{0}, W)$$

кад $n \to \infty$, *где су* $\widetilde{a}$, $\widetilde{\beta}_1$ *и* $\widetilde{\beta}_2$ *МВ оцене непознатих параметара* a, β_1 *и* β_2, *а*

$$W = \begin{bmatrix} \frac{a}{a\psi'(a)-1} & -\frac{\beta_1}{a\psi'(a)-1} & 0 \\ -\frac{\beta_1}{a\psi'(a)-1} & \frac{\beta_1^2\psi'(a)}{a\psi'(a)-1} & 0 \\ 0 & 0 & s\beta_2^2 \end{bmatrix}. \tag{2.30}$$

Доказ: Како је

$$f_X(x; a, \beta_1) = \frac{x^{a-1}e^{-\frac{x}{\beta_1}}}{\Gamma(a)\beta_1^a},$$

то је

$$\ln f_X(x; a, \beta_1) = (a-1)\ln x - \frac{x}{\beta_1} - \ln\Gamma(a) - a\ln\beta_1.$$

Следи да је

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln f_X(x; a, \beta_1)}{\partial a} &= \ln x - \psi(a) - \ln\beta_1, \\ \frac{\partial \ln f_X(x; a, \beta_1)}{\partial \beta_1} &= \frac{x}{\beta_1^2} - \frac{a}{\beta_1}, \end{aligned}$$

где је $\psi(x)$ дигама функција. Даље је

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln f_X(x; a, \beta_1)}{\partial a^2} &= -\psi'(a), \\ \frac{\partial^2 \ln f_X(x; a, \beta_1)}{\partial a \partial \beta_1} &= -\frac{1}{\beta_1}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \ln f_X(x;a,\beta_1)}{\partial \beta_1^2} \;=\; -\frac{2x}{\beta_1^3}+\frac{a}{\beta_1^2}.$$

Одавде следи да је

$$\begin{aligned}
E\left(\frac{\partial^2 \ln f_X(X;a,\beta_1)}{\partial a^2}\right) &= -\psi'(a),\\
E\left(\frac{\partial^2 \ln f_X(X;a,\beta_1)}{\partial a \partial \beta_1}\right) &= -\frac{1}{\beta_1},\\
E\left(\frac{\partial^2 \ln f_X(X;a,\beta_1)}{\partial \beta_1^2}\right) &= -\frac{2EX}{\beta_1^3}+\frac{a}{\beta_1^2}=-\frac{2a\beta_1}{\beta_1^3}+\frac{a}{\beta_1^2}=-\frac{a}{\beta_1^2},
\end{aligned}$$

па се на основу једнакости (2.29) добија да за Фишерову информациону матрицу важи да је

$$I(a,\beta_1)=\begin{bmatrix}\psi'(a) & \frac{1}{\beta_1}\\ \frac{1}{\beta_1} & \frac{a}{\beta_1^2}\end{bmatrix}.$$

Како је

$$I^{-1}(a,\beta_1)=\begin{bmatrix}\frac{a}{a\psi'(a)-1} & -\frac{\beta_1}{a\psi'(a)-1}\\ -\frac{\beta_1}{a\psi'(a)-1} & \frac{\beta_1^2\psi'(a)}{a\psi'(a)-1}\end{bmatrix},$$

на основу теореме 2.8 важи да

$$(\sqrt{n}(\widetilde{a}-a),\sqrt{n}(\widetilde{\beta}_1-\beta_1)) \xrightarrow{R} \mathcal{N}_2\left(\mathbf{0},\begin{bmatrix}\frac{a}{a\psi'(a)-1} & -\frac{\beta_1}{a\psi'(a)-1}\\ -\frac{\beta_1}{a\psi'(a)-1} & \frac{\beta_1^2\psi'(a)}{a\psi'(a)-1}\end{bmatrix}\right) \qquad (2.31)$$

кад $n\to\infty$.

Аналогно се одређује асимптотска расподела МВ оцене параметра β_2. Како је

$$f_Y(y;\beta_2)=\frac{1}{\beta_2}e^{-\frac{y}{\beta_2}},$$

то је

$$\ln f_Y(y;\beta_2)=-\ln\beta_2-\frac{y}{\beta_2}.$$

Следи да је

$$\frac{\partial \ln f_Y(y;\beta_2)}{\partial\beta_2}=-\frac{1}{\beta_2}+\frac{y}{\beta_2^2},$$

$$\frac{\partial^2 \ln f_Y(y;\beta_2)}{\partial\beta_2^2} = \frac{1}{\beta_2^2} - \frac{2y}{\beta_2^3}.$$

Одавде се добија да је

$$E\left(\frac{\partial^2 \ln f_Y(Y;\beta_2)}{\partial\beta_2^2}\right) = \frac{1}{\beta_2^2} - \frac{2EY}{\beta_2^3} = \frac{1}{\beta_2^2} - \frac{2\beta_2}{\beta_2^3} = -\frac{1}{\beta_2^2},$$

па на основу теореме 2.8 важи да

$$\sqrt{m}(\widetilde{\beta}_2 - \beta_2) \xrightarrow{R} \mathcal{N}(0,\beta_2^2)$$

кад $m \to \infty$. Како је

$$\sqrt{n}(\widetilde{\beta}_2 - \beta_2) = \sqrt{\frac{n}{m}}\sqrt{m}(\widetilde{\beta}_2 - \beta_2)$$

и $\frac{n}{m} \to s$ кад $n \to \infty$, $m \to \infty$, то

$$\sqrt{n}(\widetilde{\beta}_2 - \beta_2) \xrightarrow{R} \mathcal{N}(0,s\beta_2^2) \tag{2.32}$$

кад $n \to \infty$.

Коначно, користећи независност X и Y, из (2.31) и (2.32) следи тврђење теореме. ■

Теорема 2.11 *Ако $\frac{n}{m} \to s$ кад $n \to \infty$, $m \to \infty$, где је s позитиван реалан број, онда важи*

$$\sqrt{n}(\widetilde{R} - R) \xrightarrow{R} \mathcal{N}(0,V)$$

кад $n \to \infty$, где је $\widetilde{R}$ МВ оцена параметра поузданости R, а

$$V = \frac{aR^2}{a\psi'(a)-1}\Bigg(\ln^2\frac{\beta_2}{\beta_1+\beta_2} + \frac{2\beta_1}{\beta_1+\beta_2}\ln\frac{\beta_2}{\beta_1+\beta_2} + \frac{a\beta_1^2}{(\beta_1+\beta_2)^2}\big(as\psi'(a)+\psi'(a)-s\big)\Bigg).$$

Доказ: На основу једнакости (2.2) је $R = \left(\frac{\beta_2}{\beta_1+\beta_2}\right)^a$. Следи да је

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R}{\partial a} &= \Big(\frac{\beta_2}{\beta_1+\beta_2}\Big)^a \ln\frac{\beta_2}{\beta_1+\beta_2} = R\ln\frac{\beta_2}{\beta_1+\beta_2},\\
\frac{\partial R}{\partial \beta_1} &= -a\Big(\frac{\beta_2}{\beta_1+\beta_2}\Big)^{a-1}\frac{\beta_2}{(\beta_1+\beta_2)^2} = R\frac{-a}{\beta_1+\beta_2},\\
\frac{\partial R}{\partial \beta_2} &= a\Big(\frac{\beta_2}{\beta_1+\beta_2}\Big)^{a-1}\frac{\beta_1}{(\beta_1+\beta_2)^2} = R\frac{a\beta_1}{\beta_2(\beta_1+\beta_2)}.
\end{aligned}$$

Нека је

$$B = \begin{bmatrix}\frac{\partial R}{\partial a} & \frac{\partial R}{\partial \beta_1} & \frac{\partial R}{\partial \beta_2}\end{bmatrix} = R\begin{bmatrix}\ln\frac{\beta_2}{\beta_1+\beta_2} & \frac{-a}{\beta_1+\beta_2} & \frac{a\beta_1}{\beta_2(\beta_1+\beta_2)}\end{bmatrix}.$$

На основу теорема 2.9 и 2.10 следи да

$$\sqrt{n}(\widetilde{R}-R) \xrightarrow{R} \mathcal{N}(0, BWB^T)$$

кад $n \to \infty$, где је матрица W дефинисана једнакошћу (2.30). Множењем матрица B, W и B^T добија се тражени израз за V. ■

Из ових теорема следи да за $100\gamma\%$ асимптотски интервал поверења за параметар поузданости R важи да је

$$I_R^{(ASIM)} = \left(\widetilde{R} - z_{\frac{1+\gamma}{2}}\frac{\sqrt{\widetilde{V}}}{\sqrt{n}}, \widetilde{R} + z_{\frac{1+\gamma}{2}}\frac{\sqrt{\widetilde{V}}}{\sqrt{n}}\right),$$

где је

$$\begin{aligned}
\widetilde{V} = \frac{\widetilde{a}\widetilde{R}^2}{\widetilde{a}\psi'(\widetilde{a})-1}\Bigg(\ln^2\frac{\widetilde{\beta}_2}{\widetilde{\beta}_1+\widetilde{\beta}_2} &+ \frac{2\widetilde{\beta}_1}{\widetilde{\beta}_1+\widetilde{\beta}_2}\ln\frac{\widetilde{\beta}_2}{\widetilde{\beta}_1+\widetilde{\beta}_2}\\
&+ \frac{\widetilde{a}\widetilde{\beta}_1^2}{(\widetilde{\beta}_1+\widetilde{\beta}_2)^2}\big(\widetilde{a}s\psi'(\widetilde{a})+\psi'(\widetilde{a})-s\big)\Bigg).
\end{aligned}$$

МВ оцене $\widetilde{a}$, $\widetilde{\beta}_1$, $\widetilde{\beta}_2$ и $\widetilde{R}$ су дефинисане једнакостима (2.6), (2.7), (2.5) и (2.8).

Овај интервал поверења, али за случај када је $n = m$, извели су *Jovanović* и *Rajić* (2014).

Бурове расподеле типа III

Ако X има Бурову $\mathcal{B}ur3(a, b_1)$ расподелу, а Y Бурову $\mathcal{B}ur3(a, b_2)$ расподелу, где је параметар облика a познат, и ако су обими узорака на основу којих се оцењује једнаки, тј. $n = m$, тада важи да је (*Mokhlis*, 2005)

$$I_R^{(ASIM)} = \left(\widetilde{R} - z_{\frac{1+\gamma}{2}}\widetilde{R}(1-\widetilde{R})\sqrt{\frac{2}{n}}, \widetilde{R} + z_{\frac{1+\gamma}{2}}\widetilde{R}(1-\widetilde{R})\sqrt{\frac{2}{n}}\right),$$

где је $\widetilde{R} = \frac{V_X}{V_X+V_Y}$, а V_X и V_Y су статистике дефинисане једнакостима (2.15).

Гомперцове расподеле

Ако X има Гомперцову $\mathcal{G}om(\alpha, \mu_1)$ расподелу, а Y Гомперцову $\mathcal{G}om(\alpha, \mu_2)$ расподелу и ако је скалирајући параметар α познат, тада важи да је (*Saraçoglu* и *Kaya*, 2007)

$$I_R^{(ASIM)} = \left(\widetilde{R} - z_{\frac{1+\gamma}{2}}\widetilde{R}(1-\widetilde{R})\sqrt{\frac{n+m}{nm}}, \widetilde{R} + z_{\frac{1+\gamma}{2}}\widetilde{R}(1-\widetilde{R})\sqrt{\frac{n+m}{nm}}\right),$$

где је $\widetilde{R}$ дефинисана једнакошћу (2.9).

Топ-Леонеове расподеле

Ако X има Топ-Леонеову $\mathcal{TL}(a)$ расподелу, а Y Топ-Леонеову $\mathcal{TL}(b)$ расподелу, тада важи да је (*Genç*, 2013)

$$I_R^{(ASIM)} = \left(\widetilde{R} - z_{\frac{1+\gamma}{2}}\widetilde{R}(1-\widetilde{R})\sqrt{\frac{n+m}{nm}}, \widetilde{R} + z_{\frac{1+\gamma}{2}}\widetilde{R}(1-\widetilde{R})\sqrt{\frac{n+m}{nm}}\right),$$

где је $\widetilde{R}$ дефинисана једнакошћу (2.10).

Линдлијеве расподеле

Ако X има Линдлијеву $\mathcal{L}in(\alpha)$ расподелу, а Y Линдлијеву $\mathcal{L}in(\beta)$

расподелу, тада важи да је (*Al-Mutairi* и остали, 2013)

$$I_R^{(ASIM)} = \left(\widetilde{R} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\widetilde{d}_X^2}{n\widetilde{\sigma}_X^2} + \frac{\widetilde{d}_Y^2}{m\widetilde{\sigma}_Y^2}}, \widetilde{R} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\widetilde{d}_X^2}{n\widetilde{\sigma}_X^2} + \frac{\widetilde{d}_Y^2}{m\widetilde{\sigma}_Y^2}} \right),$$

где је

$$\begin{aligned}
\widetilde{\sigma}_X^2 &= \frac{\widetilde{\alpha}^2 + 4\widetilde{\alpha} + 2}{\widetilde{\alpha}^2(\widetilde{\alpha}+1)^2}, \qquad \widetilde{\sigma}_Y^2 = \frac{\widetilde{\beta}^2 + 4\widetilde{\beta} + 2}{\widetilde{\beta}^2(\widetilde{\beta}+1)^2}, \\
\widetilde{d}_X &= \frac{\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}^2[6 + \widetilde{\beta}^2(\widetilde{\alpha}+2) + 2\widetilde{\beta}(\widetilde{\alpha}+1)(\widetilde{\alpha}+3) + \widetilde{\alpha}(\widetilde{\alpha}^2 + 6\widetilde{\alpha} + 12)]}{(\widetilde{\alpha}+1)^2(\widetilde{\beta}+1)(\widetilde{\alpha}+\widetilde{\beta})^4}, \\
\widetilde{d}_Y &= -\frac{\widetilde{\alpha}^2\widetilde{\beta}[\widetilde{\beta}^3 + 2\widetilde{\beta}^2(\widetilde{\alpha}+3) + \widetilde{\beta}(\widetilde{\alpha}+2)(\widetilde{\alpha}+6) + 2(\widetilde{\alpha}^2 + 3\widetilde{\alpha} + 3)]}{(\widetilde{\alpha}+1)(\widetilde{\beta}+1)^2(\widetilde{\alpha}+\widetilde{\beta})^4},
\end{aligned}$$

а $\widetilde{R}$, $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ су дефинисане једнакостима (2.11) и (2.12).

2.4.3 *Bootstrap* интервал поверења

Bootstrap методи су последњих година веома популарни у математичкој статистици. Деле се на непараметарске и параметарске. Нека је $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ узорак из популације чије обележје X има расподелу $f(x;\theta)$, где је θ непознати параметар који може бити и вишедимензионалан. Ако се нови узорци обима n на основу којих се доносе статистички закључци извлаче из тог узорка, онда су то непараметарски *bootstrap* методи, а ако се на основу тог узорка оцени параметар θ, на пример МВ оценом $\widetilde{\theta}$, па се нови узорци обима n извлаче из популације чије обележје има расподелу $f(x;\widetilde{\theta})$, онда су то параметарски *bootstrap* методи. Више о *bootstrap* методима може се наћи у књизи чији су аутори *Efron* и *Tibshirani* (1993).

Bootstrap интервала поверења има више врста и они се могу користити у ситуацијама када се не могу одредити егзактни интервали поверења, а обими узорака су мали. За интервално оцењивање параметра поузданости R најчешће се користи параметарски *bootstrap-p* интервал поверења.

Алгоритам за његово одређивање је следећи:

1. На основу реализованих почетних узорака $(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $(y_1, y_2, ..., y_m)$ оценити (обично МВ оценама) непознате параметре који се појављују у расподелама за X и Y.

2. Користећи те оцене извући параметарске *bootstrap* узорке $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ и $(y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*)$ и на основу та два узорка израчунати $\widetilde{R}^*$, одговарајућу оцену за R.

3. Поновити N пута корак 2, где се обично у пракси узима $N = 500$ или $N = 1000$. Добијене одговарајуће вредности $\widetilde{R}_i^*$, $1 \leq i \leq N$, поређати у неопадајући низ.

4. За $100\gamma\%$ *bootstrap-p* интервал поверења за параметар поузданости R узима се
$$I_R^{(BOOTp)} = \left(\widetilde{R^*}^{(\frac{1-\gamma}{2})}, \widetilde{R^*}^{(\frac{1+\gamma}{2})}\right),$$
где је $\widetilde{R^*}^{(\alpha)}$ α-квантил тог низа, тј. вредност која је на месту $N\alpha$ по реду у том низу. Ако $N\alpha$ није природан број, уз претпоставку да је $\alpha \leq 0.5$, уместо $N\alpha$ узима се највећи природан број мањи или једнак од $(N+1)\alpha$.

2.4.4 Бајесов интервал поверења

Овај тип интервала поверења се концептуално разликује од претходних типова. Код Бајесовог приступа непознати параметар се третира не као константа, него као случајна величина, те за реализовани узорак тај параметар има неку апостериорну расподелу и припада интервалу поверења са фиксираним границама са неком вероватноћом γ.

За одређивање Бајесовог интервала поверења за параметар поузданости R обично се прво одреди апостериорна расподела $h(R|\mathbf{x}, \mathbf{y})$ (поступак за то је објашњен у поглављу 2.3). Затим се одреде њени квантили. Често се због компликованог рачуна апостериорна расподела за R и њени квантили одређују симулацијама.

Коначно, $100\gamma\%$ Бајесов интервал поверења за параметар поузданости R је

$$I_R^{(BAJES)} = \left(h^{(\frac{1-\gamma}{2})}, h^{(\frac{1+\gamma}{2})}\right),$$

где је $h^{(\alpha)}$ α-квантил апостериорне расподеле $h(R|\mathbf{x},\mathbf{y})$.

Глава 3

МОДЕЛ СА ГЕОМЕТРИЈСКОМ И ПУАСОНОВОМ КОМПОНЕНТОМ

3.1 Мотивација и параметар поузданости

За разлику од свих претходно поменутих *stress-strength* модела у овом стрес и снага имају расподеле које припадају различитим фамилијама расподела. Као мотивација за његово увођење може послужити следећи пример.

Пример 7 *Послодавац интервјуише кандидате за неко радно место. Нека је X број кандидата потребних за налажење одговарајуће особе, а Y број особа које се за одређени временски период пријаве на конкурс за то радно место. Тада је R вероватноћа да послодавац пронађе одговарајућег кандидата.*

Како у овом примеру X има геометријску расподелу, а Y Пуасонову расподелу, то из овог и сличних примера следи потреба за увођењем оваквог модела за моделирање неких реалних ситуација и потреба за оцењивањем његовог параметра поузданости. Овај модел су увели и њиме су се бавили *Obradović* и остали (2015).

Нека X има геометријску $\mathcal{G}(p)$ расподелу, а Y Пуасонову $\mathcal{P}(\lambda)$ расподелу, и случајне величине X и Y су независне. Њихови закони расподела су

$$P\{X = x; p\} = (1-p)^{x-1}p, \quad x \in \mathbb{N},$$

где је $0 < p < 1$, и

$$P\{Y = y; \lambda\} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!}, \quad y \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

где је $\lambda > 0$. Параметар поузданости у овом моделу биће дефинисан као $R = P\{X \leq Y\}$. Према томе,

$$\begin{aligned}
R &= P\{X \leq Y\} = \sum_{y=1}^{\infty}\sum_{x=1}^{y} P\{X = x, Y = y\} \\
&= \sum_{y=1}^{\infty}\sum_{x=1}^{y} P\{X = x\}P\{Y = y\} = \sum_{y=1}^{\infty}\sum_{x=1}^{y}(1-p)^{x-1}p\frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!} \\
&= \sum_{y=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!}p\sum_{x=1}^{y}(1-p)^{x-1} = \sum_{y=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!}p\frac{(1-(1-p)^y)}{1-(1-p)} \\
&= \sum_{y=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!} - \sum_{y=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!}(1-p)^y = 1 - e^{-\lambda} - \sum_{y=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}(\lambda(1-p))^y}{y!} \\
&= 1 - e^{-\lambda} - e^{-\lambda p}\sum_{y=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda(1-p)}(\lambda(1-p))^y}{y!} = 1 - e^{-\lambda} - e^{-\lambda p}\big(1 - e^{-\lambda(1-p)}\big) \\
&= 1 - e^{-\lambda p}. \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

Нека су $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ и $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$ узорци стреса који има геометријску $\mathcal{G}(p)$ расподелу и снаге која има Пуасонову $\mathcal{P}(\lambda)$ расподелу, где су p и λ непознати параметри. У следећим поглављима ће на основу тих узорака разним методима бити оцењиван параметар поузданости R.

3.2 МВ оцена

За функцију веродостојности важи да је

$$\begin{aligned} L(p,\lambda) &= \prod_{i=1}^{n} P\{X = x_i; p\} \prod_{j=1}^{m} P\{Y = y_j; \lambda\} \\ &= \prod_{i=1}^{n} (1-p)^{x_i - 1} p \prod_{j=1}^{m} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{y_j}}{y_j!} \\ &= (1-p)^{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i - n} p^n \frac{e^{-m\lambda}\lambda^{\sum\limits_{j=1}^{m} y_j}}{\prod\limits_{j=1}^{m} y_j!}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Како за логаритам функције веродостојности важи да је

$$\ln L(p,\lambda) = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\Big)\ln(1-p) + n\ln p - m\lambda + \sum_{j=1}^{m} y_j \ln\lambda - \ln\prod_{j=1}^{m} y_j!,$$

то се из система једначина веродостојности

$$\frac{\partial \ln L(p,\lambda)}{\partial p} = 0, \qquad \frac{\partial \ln L(p,\lambda)}{\partial \lambda} = 0,$$

добија да је

$$-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i - n}{1-p} + \frac{n}{p} = 0, \qquad -m + \frac{\sum\limits_{j=1}^{m} y_j}{\lambda} = 0,$$

односно

$$p = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}, \qquad \lambda = \frac{\sum\limits_{j=1}^{m} y_j}{m}.$$

Следи да је

$$\widetilde{p} = \frac{1}{\overline{X}}, \qquad \widetilde{\lambda} = \overline{Y}. \tag{3.3}$$

Коришћењем израза (3.1) на основу теореме 2.1 добија се да за МВ оцену параметра поузданости R важи да је

$$\widetilde{R} = 1 - e^{-\frac{\overline{Y}}{\overline{X}}}. \tag{3.4}$$

3.3 ЈНУМД оцена

У овом поглављу биће одређена ЈНУМД оцена параметра поузданости R, као и ЈНУМД оцена њене средње квадратне грешке, тј. ЈНУМД оцена дисперзије од $\widehat{R}$, у ознаци $\widehat{D}(\widehat{R})$.

Како је

$$P\{X = x; p\} = (1-p)^{x-1}p = e^{x\ln(1-p)+\ln\frac{p}{1-p}}, \quad x \in \mathbb{N},$$

то се на основу дефиниције 2.3 може закључити да је расподела за X регуларан случај експоненцијалне фамилије расподела. Из теореме 2.3 следи да је T_X, где је $T_X = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, комплетна довољна статистика за p. Како је

$$P\{Y = y; \lambda\} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!} = e^{y\ln\lambda - \ln y! - \lambda}, \quad y \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

аналогно претходном се закључује да је расподела за Y регуларан случај експоненцијалне фамилије расподела, а T_Y, где је $T_Y = \sum\limits_{j=1}^{m} Y_j$, је комплетна довољна статистика за λ.

Збир l независних исто расподељених случајних величина које имају геометријску $\mathcal{G}(p)$ расподелу, има негативну биномну расподелу са параметрима l и p (дефиниција негативне биномне расподеле овде је мало другачија него у једнакости (1.8)), а збир f независних исто расподељених случајних величина које имају Пуасонову $\mathcal{P}(\lambda)$ расподелу, има Пуасонову $\mathcal{P}(f\lambda)$ расподелу, тј.

$$P\Big\{\sum_{i=1}^{l} X_i = k; p\Big\} \;=\; \binom{k-1}{l-1}p^l(1-p)^{k-l}, \quad k \in \mathbb{N}, k \geq l,$$

$$P\Big\{\sum_{j=1}^{f} Y_j = d; \lambda\Big\} \quad = \quad \frac{e^{-f\lambda}(f\lambda)^d}{d!}, \quad d \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

То значи да статистика T_X има негативну биномну расподелу са параметрима n и p, а статистика T_Y има Пуасонову $\mathcal{P}(m\lambda)$ расподелу.

Непристрасна оцена за R је $I\{X_1 \leq Y_1\}$. Важи да је

$$\begin{aligned}
& E(I\{X_1 \leq Y_1\}|T_X = t_X, T_Y = t_Y) = P\{X_1 \leq Y_1 | T_X = t_X, T_Y = t_Y\} \\
= \; & \frac{P\{X_1 \leq Y_1, \sum_{i=1}^{n} X_i = t_X, \sum_{j=1}^{m} Y_j = t_Y\}}{P\{T_X = t_X, T_Y = t_Y\}} \\
= \; & \frac{\sum_{y=1}^{t_Y}\sum_{x=1}^{M} P\{X_1 = x, Y_1 = y, \sum_{i=2}^{n} X_i = t_X - x, \sum_{j=2}^{m} Y_j = t_Y - y\}}{P\{T_X = t_X, T_Y = t_Y\}} \\
= \; & \frac{\sum_{y=1}^{t_Y}\sum_{x=1}^{M} P\{X_1 = x\}P\{Y_1 = y\}P\{\sum_{j=2}^{n} X_j = t_X - x\}P\{\sum_{j=2}^{m} Y_j = t_Y - y\}}{P\{T_X = t_X\}P\{T_Y = t_Y\}} \\
= \; & \frac{\sum_{y=1}^{t_Y}\sum_{x=1}^{M} (1-p)^{x-1} p \frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!} \binom{t_X - x - 1}{n-2} p^{n-1} (1-p)^{t_X - x - n + 1} \frac{e^{-(m-1)\lambda}((m-1)\lambda)^{t_Y - y}}{(t_Y - y)!}}{\binom{t_X - 1}{n-1} p^n (1-p)^{t_X - n} \frac{e^{-m\lambda}(m\lambda)^{t_Y}}{t_Y!}} \\
= \; & \frac{\sum_{y=1}^{t_Y} \binom{t_Y}{y} (m-1)^{t_Y - y} \sum_{x=1}^{M} \binom{t_X - x - 1}{n-2}}{\binom{t_X - 1}{n-1} m^{t_Y}},
\end{aligned}$$

где је $M = \min\{t_X - n + 1, y\}$. Користећи идентитет

$$\sum_{s=0}^{n} \binom{s}{c} = \binom{n+1}{c+1},$$

даље се добија да је

$$E(I\{X_1 \leq Y_1\}|T_X = t_X, T_Y = t_Y) \quad = \quad \frac{\sum_{y=1}^{t_Y} \binom{t_Y}{y} (m-1)^{t_Y - y} \sum_{s=t_X - M - 1}^{t_X - 2} \binom{s}{n-2}}{\binom{t_X - 1}{n-1} m^{t_Y}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\sum\limits_{y=1}^{t_Y}\binom{t_Y}{y}(m-1)^{t_Y-y}\Big(\sum\limits_{s=0}^{t_X-2}\binom{s}{n-2}-\sum\limits_{s=0}^{t_X-M-2}\binom{s}{n-2}\Big)}{\binom{t_X-1}{n-1}m^{t_Y}}\\
&= \frac{\sum\limits_{y=1}^{t_Y}\binom{t_Y}{y}(m-1)^{t_Y-y}\Big(\binom{t_X-1}{n-1}-\binom{t_X-M-1}{n-1}\Big)}{\binom{t_X-1}{n-1}m^{t_Y}}\\
&= \sum_{y=1}^{t_Y}\binom{t_Y}{y}\Big(1-\frac{1}{m}\Big)^{t_Y-y}\Big(\frac{1}{m}\Big)^{y}-\sum_{y=1}^{t_Y}\frac{\binom{t_Y}{y}\binom{t_X-M-1}{n-1}}{\binom{t_X-1}{n-1}}\Big(1-\frac{1}{m}\Big)^{t_Y-y}\Big(\frac{1}{m}\Big)^{y}\\
&= 1-\Big(1-\frac{1}{m}\Big)^{t_Y}-\sum_{y=1}^{t_Y}\frac{\binom{t_Y}{y}\binom{t_X-M-1}{n-1}}{\binom{t_X-1}{n-1}}\Big(1-\frac{1}{m}\Big)^{t_Y-y}\Big(\frac{1}{m}\Big)^{y}.
\end{aligned}
$$

На основу теореме 2.4 следи да за ЈНУМД оцену параметра поузданости R важи да је

$$
\widehat{R}=1-\left(1-\frac{1}{m}\right)^{T_Y}-\sum_{y=1}^{T_Y}\frac{\binom{T_Y}{y}\binom{T_X-M-1}{n-1}}{\binom{T_X-1}{n-1}}\left(1-\frac{1}{m}\right)^{T_Y-y}\left(\frac{1}{m}\right)^{y}, \tag{3.5}
$$

где је $M=\min\{T_X-n+1,y\}$. Ова формула важи за $T_Y>0$. Ако је $T_Y=0$, онда је $\widehat{R}=0$.

Да би се одредила ЈНУМД оцена средње квадратне грешке ЈНУМД оцене за R, тј. ЈНУМД оцена дисперзије од $\widehat{R}$, треба израчунати ЈНУМД оцену за R^2. Непристрасна оцена за R^2 је $I\{X_1\le Y_1,X_2\le Y_2\}$. Важи да је

$$
\begin{aligned}
&E(I\{X_1\le Y_1,X_2\le Y_2\}|T_X=t_X,T_Y=t_Y)\\
&= P\{X_1\le Y_1,X_2\le Y_2|T_X=t_X,T_Y=t_Y\}\\
&= \frac{P\{X_1\le Y_1,X_2\le Y_2,\sum\limits_{i=1}^{n}X_i=t_X,\sum\limits_{j=1}^{m}Y_j=t_Y\}}{P\{T_X=t_X,T_Y=t_Y\}}\\
&= \frac{1}{P\{T_X=t_X,T_Y=t_Y\}}\sum_{y_1=1}^{t_Y-1}\sum_{y_2=1}^{t_Y-y_1}\sum_{x_1=1}^{M_1}\sum_{x_2=1}^{M_2}P\Big\{X_1=x_1,X_2=x_2,Y_1=y_1,\\
&\quad Y_2=y_2,\sum_{i=3}^{n}X_i=t_X-x_1-x_2,\sum_{j=3}^{m}Y_j=t_Y-y_1-y_2\Big\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{P\{T_X=t_X\}P\{T_Y=t_Y\}}\sum_{y_1=1}^{t_Y-1}\sum_{y_2=1}^{t_Y-y_1}\sum_{x_1=1}^{M_1}\sum_{x_2=1}^{M_2}\Big(P\{X_1=x_1\}P\{X_2=x_2\}\\
&\cdot\ P\{Y_1{=}y_1\}P\{Y_2{=}y_2\}P\Big\{\sum_{i=3}^{n}X_i{=}t_X{-}x_1{-}x_2\Big\}P\Big\{\sum_{j=3}^{m}Y_j{=}t_Y{-}y_1{-}y_2\Big\}\Big)\\
&= \frac{1}{\binom{t_X-1}{n-1}p^n(1-p)^{t_X-n}\frac{e^{-m\lambda}(m\lambda)^{t_Y}}{t_Y!}}\sum_{y_1=1}^{t_Y-1}\sum_{y_2=1}^{t_Y-y_1}\sum_{x_1=1}^{M_1}\sum_{x_2=1}^{M_2}\Big(p(1-p)^{x_1-1}\\
&\cdot\ p(1-p)^{x_2-1}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{y_1}}{y_1!}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{y_2}}{y_2!}\binom{t_X-x_1-x_2-1}{n-3}p^{n-2}(1-p)^{t_x-x_1-x_2-n+2}\\
&\cdot\ \frac{e^{-(m-2)\lambda}((m-2)\lambda)^{t_Y-y_1-y_2}}{(t_Y-y_1-y_2)!}\Big)\\
&= \frac{\sum\limits_{y_1=1}^{t_Y-1}\sum\limits_{y_2=1}^{t_Y-y_1}\binom{t_Y}{y_1+y_2}\binom{y_1+y_2}{y_1}(m-2)^{t_Y-y_1-y_2}\sum\limits_{x_1=1}^{M_1}\sum\limits_{x_2=1}^{M_2}\binom{t_X-x_1-x_2-1}{n-3}}{\binom{t_X-1}{n-1}m^{t_Y}}, \qquad (3.6)
\end{aligned}
$$

где је $M_1=\min\{y_1,t_X-n+1\}$, а $M_2=\min\{y_2,t_X-n+2-x_1\}$. Користећи сличну технику као код одређивања $\widehat{R}$, добија се да је

$$
\begin{aligned}
&\sum_{x_1=1}^{M_1}\sum_{x_2=1}^{M_2}\binom{t_X-x_1-x_2-1}{n-3}=\sum_{x_1=1}^{M_1}\sum_{s=t_X-x_1-M_2-1}^{t_X-x_1-2}\binom{s}{n-3}\\
&= \sum_{x_1=1}^{M_1}\Big(\sum_{s=0}^{t_X-x_1-2}\binom{s}{n-3}-\sum_{s=0}^{t_X-x_1-M_2-2}\binom{s}{n-3}\Big)\\
&= \sum_{x_1=1}^{M_1}\Big(\binom{t_X-x_1-1}{n-2}-\binom{t_X-x_1-M_2-1}{n-2}\Big)\\
&= \sum_{s=t_X-M_1-1}^{t_X-2}\binom{s}{n-2}-\sum_{x_1=1}^{M_1}\binom{t_X-x_1-M_2-1}{n-2}\\
&= \sum_{s=0}^{t_X-2}\binom{s}{n-2}-\sum_{s=0}^{t_X-M_1-2}\binom{s}{n-2}-\sum_{x_1=1}^{M_1}\binom{t_X-x_1-M_2-1}{n-2}\\
&= \binom{t_X-1}{n-1}-\binom{t_X-M_1-1}{n-1}-\sum_{x_1=1}^{M_1}\binom{t_X-x_1-M_2-1}{n-2}.
\end{aligned}
$$

Након замене, на основу претходне једнакости, одговарајућих израза у изразу (3.6), применом теореме 2.4 добија се да за ЈНУМД оцену за R^2 важи да је

$$\begin{aligned}\widehat{R^2} &= \frac{1}{\binom{T_X-1}{n-1}m^{T_Y}}\sum_{y_1=1}^{T_Y-1}\sum_{y_2=1}^{T_Y-y_1}\left[\binom{T_Y}{y_1+y_2}\binom{y_1+y_2}{y_1}(m-2)^{T_Y-y_1-y_2}\right.\\ &\cdot \left.\left(\binom{T_X-1}{n-1}-\binom{T_X-M_1-1}{n-1}-\sum_{x_1=1}^{M_1}\binom{T_X-x_1-M_2-1}{n-2}\right)\right], \quad (3.7)\end{aligned}$$

где је $M_1 = \min\{y_1, T_X - n + 1\}$, а $M_2 = \min\{y_2, T_X - n + 2 - x_1\}$. Ова формула важи за $T_Y > 1$. Ако је $T_Y \leq 1$, онда је $\widehat{R^2} = 0$.

Коначно, на основу теореме 2.7 добија се да за ЈНУМД оцену средње квадратне грешке ЈНУМД оцене за R, тј. ЈНУМД оцену дисперзије од $\widehat{R}$, важи да је

$$\widehat{D}(\widehat{R}) = (\widehat{R})^2 - \widehat{R^2}, \quad (3.8)$$

где су $\widehat{R}$ и $\widehat{R^2}$ оцене дефинисане једнакостима (3.5) и (3.7).

3.4 Бајесова оцена

У овом поглављу ће бити одређена Бајесова оцена параметра поузданости R у односу на функцију губитака која мери квадратно одступање. Како је фамилија бета расподела конјугована фамилији геометријских расподела, а фамилија гама расподела фамилији Пуасонових расподела, то се претпоставља да непознати параметар p има априорну бета $\mathcal{B}(a, b)$, $a, b \in \mathbb{N}$, расподелу, а непознати параметар λ априорну гама $\Gamma(\alpha, \beta)$, $\alpha \in \mathbb{N}$, $\beta > 0$, расподелу, где су a, b, α и β познати параметри. Како је природно претпоставити да су расподеле за p и λ независне, то следи да за заједничку априорну расподелу важи да је

$$h(p, \lambda) \propto p^{a-1}(1-p)^{b-1}\lambda^{\alpha-1}e^{-\frac{\lambda}{\beta}}, \quad p \in (0,1), \lambda > 0. \quad (3.9)$$

На основу формуле (2.22), коришћењем једнакости (3.2) и (3.9) добија се да за апостериорну расподелу важи да је

$$
\begin{aligned}
h(p,\lambda|\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \frac{(1-p)^{t_X-n}p^n e^{-m\lambda}\frac{\lambda^{t_Y}}{\prod\limits_{j=1}^{m} y_j!}p^{a-1}(1-p)^{b-1}\lambda^{\alpha-1}e^{-\frac{\lambda}{\beta}}}{\int\limits_0^1\int\limits_0^\infty (1-p)^{t_X-n}p^n e^{-m\lambda}\frac{\lambda^{t_Y}}{\prod\limits_{j=1}^{m} y_j!}p^{a-1}(1-p)^{b-1}\lambda^{\alpha-1}e^{-\frac{\lambda}{\beta}}d\lambda\, dp} \\
&= \frac{p^{n+a-1}(1-p)^{t_X-n+b-1}\lambda^{t_Y+\alpha-1}e^{-\lambda(m+\frac{1}{\beta})}}{\int\limits_0^1\int\limits_0^\infty p^{n+a-1}(1-p)^{t_X-n+b-1}\lambda^{t_Y+\alpha-1}e^{-\lambda(m+\frac{1}{\beta})}d\lambda\, dp},
\end{aligned}
$$

где $p\in(0,1)$, а $\lambda>0$. Увођењем, поједностављења ради, ознака A, B, C и D, где је $A=n+a-1$, $B=t_X-n+b-1$, $C=t_Y+\alpha-1$, а $D=m+\frac{1}{\beta}$, коначно се добија да је

$$
h(p,\lambda|\mathbf{x},\mathbf{y}) = Kp^A(1-p)^B\lambda^C e^{-\lambda D},
$$

где је

$$
\begin{aligned}
K &= \left(\int\limits_0^1 p^A(1-p)^B dp\int\limits_0^\infty \lambda^C e^{-\lambda D}d\lambda\right)^{-1} \\
&= \left(B(A+1,B+1)\frac{1}{D^{C+1}}\int\limits_0^\infty s^C e^{-s}ds\right)^{-1} \\
&= \frac{\Gamma(A+B+2)D^{C+1}}{\Gamma(A+1)\Gamma(B+1)\Gamma(C+1)} = \frac{(A+B+1)!D^{C+1}}{A!B!C!}. \qquad (3.10)
\end{aligned}
$$

За одређивање апостериорне расподеле за R користи се трансформација случајног вектора (p,λ) у случајни вектор (R,λ). Како је $R=1-e^{-\lambda p}$, то је $p=-\frac{\ln(1-R)}{\lambda}$, па за Јакобијан трансформације важи да је

$$
J = \begin{vmatrix} \frac{\partial p}{\partial R} & \frac{\partial p}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial R} & \frac{\partial \lambda}{\partial \lambda} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\lambda}\frac{1}{1-R} & \frac{\ln(1-R)}{\lambda^2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\lambda}\frac{1}{1-R}.
$$

Следи да за заједничку апостериорну расподелу за R и λ важи да је

$$
h_{R,\lambda}(r,\lambda|\mathbf{x},\mathbf{y}) = h\big(p(r,\lambda),\lambda(r,\lambda)|\mathbf{x},\mathbf{y}\big)|J|
$$

$$
\begin{aligned}
&= K\left(-\frac{\ln(1-r)}{\lambda}\right)^A \left(1+\frac{\ln(1-r)}{\lambda}\right)^B \lambda^C e^{-\lambda D}\frac{1}{\lambda}\frac{1}{1-r}\\
&= K\left(-\ln(1-r)\right)^A \left(1+\frac{\ln(1-r)}{\lambda}\right)^B \lambda^{C-A-1}\frac{e^{-\lambda D}}{1-r},
\end{aligned}
$$

где $r \in (0,1)$, а $\lambda > -\ln(1-r)$. Апостериорна расподела за R добија се интеграцијом заједничке апостериорне расподеле за R и λ по λ. Важи да је

$$
\begin{aligned}
h_R(r|\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \int_{-\ln(1-r)}^{\infty} K(-\ln(1-r))^A \left(1+\frac{\ln(1-r)}{\lambda}\right)^B \lambda^{C-A-1}\frac{e^{-\lambda D}}{1-r}d\lambda\\
&= K\frac{(-\ln(1-r))^A}{1-r}\int_{-\ln(1-r)}^{\infty}\sum_{j=0}^{B}\binom{B}{j}\left(\frac{\ln(1-r)}{\lambda}\right)^j \lambda^{C-A-1}e^{-\lambda D}d\lambda\\
&= K\sum_{j=0}^{B}\binom{B}{j}(-1)^j\frac{(-\ln(1-r))^{A+j}}{1-r}\int_{-\ln(1-r)}^{\infty}\lambda^{C-A-j-1}e^{-\lambda D}d\lambda\\
&= K\sum_{j=0}^{B}\binom{B}{j}(-1)^j\frac{(-\ln(1-r))^{A+j}}{(1-r)D^{C-A-j}}\int_{-D\ln(1-r)}^{\infty}t^{C-A-j-1}e^{-t}dt, \quad (3.11)
\end{aligned}
$$

где $r \in (0,1)$.

Коришћењем једнакости (3.11) добија се да за апостериорно математичко очекивање за R важи да је

$$
\begin{aligned}
E(R|\mathbf{x},\mathbf{y}) &= 1 - E(1-R|\mathbf{x},\mathbf{y}) = 1 - \int_0^1 (1-r)h_R(r|\mathbf{x},\mathbf{y})dr\\
&= 1 - \int_0^1 (1-r)K\sum_{j=0}^{B}\binom{B}{j}(-1)^j\frac{(-\ln(1-r))^{A+j}}{(1-r)D^{C-A-j}}\int_{-D\ln(1-r)}^{\infty}t^{C-A-j-1}e^{-t}dtdr\\
&= 1 - K\sum_{j=0}^{B}\binom{B}{j}\frac{(-1)^j}{D^{C-A-j}}\int_0^1(-\ln(1-r))^{A+j}\int_{-D\ln(1-r)}^{\infty}t^{C-A-j-1}e^{-t}dtdr
\end{aligned}
$$

$$= \quad 1 - K \sum_{j=0}^{B} \binom{B}{j} \frac{(-1)^j}{D^{C-A-j}} \int_0^\infty s^{A+j} e^{-s} \int_{Ds}^\infty t^{C-A-j-1} e^{-t} dt ds. \tag{3.12}$$

За даље извођење потребно је израчунати интеграл $L_q(z) = \int_z^\infty t^{q-1} e^{-t} dt$, $z > 0$, $q \in \mathbb{Z}$. У зависности од вредности q постоје три могућности:

1. За $q > 0$ важи да је
$$L_q(z) = \Gamma(q, z),$$
где је $\Gamma(s, x)$ некомплетна гама функција. На основу једнакости (1.1) следи да је
$$L_q(z) = (q-1)! e^{-z} \sum_{i=0}^{q-1} \frac{z^i}{i!}. \tag{3.13}$$

2. За $q = 0$ важи да је
$$L_q(z) = -\mathrm{Ei}(-z),$$
где је $\mathrm{Ei}(x)$ експоненцијални интеграл. На основу једнакости (1.4) следи да је
$$L_q(z) = -\gamma - \ln z + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{z^i}{i \cdot i!}, \tag{3.14}$$
где је γ Ојлерова константа.

3. За $q < 0$ коришћењем парцијалне интеграције $|q|$ пута добија се да важи
$$L_q(z) = e^{-z} \sum_{i=1}^{-q} (-1)^{i+1} \frac{z^{i+q-1}}{(-q)!} (-q-i)! + \frac{(-1)^{-q}}{(-q)!} L_0(z). \tag{3.15}$$

Сабирци у изразу (3.12) се могу изразити као

$$\binom{B}{j} \frac{(-1)^j}{D^{C-A-j}} \int_0^\infty s^{A+j} e^{-s} L_{C-A-j}(Ds) ds,$$

и у зависности од вредности j постоје три типа тих сабирака:

1. За $j < C - A$ коришћењем једнакости (3.13) добија се да важи

$$\begin{aligned}
W_1(j) &= \binom{B}{j}\frac{(-1)^j}{D^{C-A-j}}\int_0^\infty s^{A+j}e^{-s}(C-A-j-1)!e^{-Ds}\sum_{i=0}^{C-A-j-1}\frac{(Ds)^i}{i!}ds \\
&= (-1)^j\binom{B}{j}\frac{(C-A-j-1)!}{D^{C-A-j}}\sum_{i=0}^{C-A-j-1}\frac{D^i}{i!}\int_0^\infty s^{A+j+i}e^{-(D+1)s}ds \\
&= (-1)^j\binom{B}{j}\frac{(C-A-j-1)!}{D^{C-A-j}}\sum_{i=0}^{C-A-j-1}\frac{D^i}{i!}\int_0^\infty \frac{t^{A+j+i}e^{-t}}{(D+1)^{A+j+i+1}}dt \\
&= (-1)^j\binom{B}{j}\frac{(C-A-j-1)!}{D^{C-A-j}}\sum_{i=0}^{C-A-j-1}\frac{D^i}{i!}\frac{\Gamma(A+j+i+1)}{(D+1)^{A+j+i+1}} \\
&= (-1)^j\binom{B}{j}\frac{(C-A-j-1)!}{D^{C-A-j}}\sum_{i=0}^{C-A-j-1}\frac{D^i}{i!}\frac{(A+j+i)!}{(D+1)^{A+j+i+1}} \\
&= (-1)^j\binom{B}{j}\frac{(C-1)!}{\binom{C-1}{A+j}}\sum_{i=0}^{C-A-j-1}\frac{\binom{A+j+i}{i}}{D^{C-A-j-i}(D+1)^{A+j+i+1}}.
\end{aligned}$$

2. За $j = C - A$ коришћењем једнакости (3.14), једнакости (*Gradshteyn* и *Ryzhik*, 1980, једнакост 4.352.4)

$$\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-x}\ln x dx = \Gamma'(\mu), \quad \mu > 0, \tag{3.16}$$

као и особина (1.2) и (1.3) дигама функције $\psi(x)$ добија се да важи

$$\begin{aligned}
W_2(j) &= \binom{B}{C-A}(-1)^{C-A}\int_0^\infty s^C e^{-s}\left(-\gamma - \ln(Ds) + \sum_{i=1}^\infty (-1)^{i+1}\frac{(Ds)^i}{i\cdot i!}\right)ds \\
&= (-1)^{C-A-1}\binom{B}{C-A}\left[(\gamma+\ln D)\int_0^\infty s^C e^{-s}ds + \int_0^\infty \ln s\; s^C e^{-s}ds\right. \\
&+ \left.\sum_{i=1}^\infty (-1)^i\frac{D^i}{i\cdot i!}\int_0^\infty s^{C+i}e^{-s}ds\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^{C-A-1}\binom{B}{C-A}\Big[(\gamma+\ln D)C! + \psi(C+1)C!\\
&+ \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i\frac{D^i}{i\cdot i!}(C+i)!\Big]\\
&= (-1)^{C-A-1}\binom{B}{C-A}\Big[(\gamma+\ln D)C! + \Big(-\gamma-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i}\binom{C}{i}\Big)C!\\
&+ \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i\frac{D^i}{i\cdot i!}(C+i)!\Big]\\
&= (-1)^{C-A-1}\binom{B}{C-A}C!\Big[\ln D + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i}\Big(D^i\binom{C+i}{i}-\binom{C}{i}\Big)\Big].
\end{aligned}
$$

3. За $j > C-A$ коришћењем једнакости (3.15) и (3.16), као и особина (1.2) и (1.3) добија се да важи

$$
\begin{aligned}
W_3(j) &= \binom{B}{j}\frac{(-1)^j}{D^{C-A-j}}\int_0^{\infty} s^{A+j}e^{-s}\Big[e^{-Ds}\sum_{i=1}^{A-C+j}(-1)^{i+1}\frac{(Ds)^{C-A-j+i-1}}{(A-C+j)!}\\
&\cdot\ (A-C+j-i)! + \frac{(-1)^{A-C+j}}{(A-C+j)!}\Big(-\gamma-\ln(Ds)+\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}\\
&\cdot\ \frac{(Ds)^i}{i\cdot i!}\Big)\Big]ds\\
&= \binom{B}{j}\sum_{i=1}^{A-C+j}\frac{(-1)^{i+j+1}D^{i-1}(A-C+j-i)!}{(A-C+j)!}\int_0^{\infty}s^{C+i-1}e^{-(D+1)s}ds\\
&+ \binom{B}{j}\frac{(-1)^{A-C+1}}{(A-C+j)!}\frac{1}{D^{C-A-j}}\Big[(\gamma+\ln D)\int_0^{\infty}s^{A+j}e^{-s}ds\\
&+ \int_0^{\infty}\ln s\ s^{A+j}e^{-s}ds + \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i\frac{D^i}{i\cdot i!}\int_0^{\infty}s^{A+j+i}e^{-s}ds\Big]\\
&= \binom{B}{j}\sum_{i=1}^{A-C+j}\frac{(-1)^{i+j+1}D^{i-1}(A-C+j-i)!}{(A-C+j)!}\frac{(C+i-1)!}{(D+1)^{C+i}}\\
&+ \binom{B}{j}\frac{(-1)^{A-C+1}}{(A-C+j)!}\frac{1}{D^{C-A-j}}\Big[(\gamma+\ln D)(A+j)! + \psi(A+j+1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\cdot\quad & (A+j)! + \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i \frac{D^i}{i\cdot i!}(A+j+i)!\Big] \\
= \quad & \binom{B}{j}(C-1)! \sum_{i=1}^{A-C+j}(-1)^{i+j+1}\frac{D^{i-1}\binom{C+i-1}{i}}{(D+1)^{C+i}\binom{A-C+j}{i}} + \frac{(-1)^{A-C+1}}{D^{C-A-j}} \\
\cdot\quad & \binom{B}{j}\binom{A+j}{C}C!\Big[\ln D + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i}\Big(D^i\binom{A+j+i}{i} - \binom{A+j}{i}\Big)\Big].
\end{aligned}
$$

Ако је $C - A < 0$, у изразу (3.12) се појављује само трећи тип ових сабирака, па је

$$
E(R|\mathbf{x},\mathbf{y}) = 1 - K\sum_{j=0}^{B} W_3(j). \tag{3.17}
$$

Ако је $C - A = 0$, појављују се други и трећи тип сабирака, па је

$$
E(R|\mathbf{x},\mathbf{y}) = 1 - K\Big[W_2(j) + \sum_{j=1}^{B} W_3(j)\Big]. \tag{3.18}
$$

Ако је $0 < C - A < B$, у изразу (3.12) се појављују сва три типа ових сабирака, па је

$$
E(R|\mathbf{x},\mathbf{y}) = 1 - K\Big[\sum_{j=0}^{C-A-1} W_1(j) + W_2(j) + \sum_{j=C-A+1}^{B} W_3(j)\Big]. \tag{3.19}
$$

Ако је $C - A = B$, појављују се први и други тип сабирака, па је

$$
E(R|\mathbf{x},\mathbf{y}) = 1 - K\Big[\sum_{j=0}^{C-A-1} W_1(j) + W_2(j)\Big]. \tag{3.20}
$$

Коначно, ако је $C - A > B$, појављује се само први тип сабирака, па је

$$
E(R|\mathbf{x},\mathbf{y}) = 1 - K\sum_{j=0}^{B} W_1(j). \tag{3.21}
$$

Из свега овога следи да се први тип сабирака појављује у изразу (3.12) ако је $C - A > 0$, други ако је $0 \le C - A \le B$, а трећи ако је $C - A < B$.

За функцију губитака која мери квадратно одступање Бајесова оцена параметра поузданости R једнака је условном математичком очекивању $E(R|\mathbf{X},\mathbf{Y})$, па се изражавајући израз (3.12) преко поменутих типова сабирака и комбинујући случајеве (3.17)–(3.21) коначно добија да важи

$$\check{R} = 1-K\Big[I_{\{C-A>0\}}\sum_{j=0}^{\min\{C-A-1,B\}} W_1(j) + I_{\{0\leq C-A\leq B\}}W_2(j) + I_{\{C-A<B\}}\sum_{j=\max\{0,C-A+1\}}^{B} W_3(j)\Big],$$

где је $A = n+a-1$, $B = T_X - n + b - 1$, $C = T_Y + \alpha - 1$, $D = m + \frac{1}{\beta}$, а K дефинисано једнакошћу (3.10).

Могуће је уопштити ову оцену за реалне вредности параметара a, b, α и β, али би то било много компликованије и непрактично за презентовање.

3.5 Интервали поверења

3.5.1 Асимптотски интервал поверења

Следеће две теореме одређују заједничку асимптотску расподелу МВ оцена $\widetilde{p}$ и $\widetilde{\lambda}$ непознатих параметара p и λ и асимптотску расподелу МВ оцене $\widetilde{R}$ параметра поузданости R.

Теорема 3.1 *Нека* $\frac{n}{m} \to s$ *кад* $n \to \infty$, $m \to \infty$, *где је* s *позитиван реалан број. Тада важи*

$$(\sqrt{n}(\widetilde{p}-p), \sqrt{n}(\widetilde{\lambda}-\lambda)) \xrightarrow{R} \mathcal{N}_2(\mathbf{0}, J)$$

кад $n \to \infty$, *где су* $\widetilde{p}$ *и* $\widetilde{\lambda}$ *МВ оцене непознатих параметара* p *и* λ *дефинисане једнакостима* (3.3), *а*

$$J = \begin{bmatrix} p^2(1-p) & 0 \\ 0 & s\lambda \end{bmatrix}. \tag{3.22}$$

Доказ: Како је

$$P\{X = x; p\} = (1-p)^{x-1}p,$$

то је

$$\ln P\{X=x;p\} = (x-1)\ln(1-p) + \ln p.$$

Следи да је

$$\frac{\partial \ln P\{X=x;p\}}{\partial p} = -\frac{x-1}{1-p} + \frac{1}{p},$$

$$\frac{\partial^2 \ln P\{X=x;p\}}{\partial p^2} = -\frac{x-1}{(1-p)^2} - \frac{1}{p^2}.$$

Одавде се добија да је

$$\begin{aligned} E\biggl(\frac{\partial^2 \ln P\{X=X;p\}}{\partial p^2}\biggr) &= -\frac{EX-1}{(1-p)^2} - \frac{1}{p^2} = -\frac{\frac{1}{p}-1}{(1-p)^2} - \frac{1}{p^2} \\ &= -\frac{1}{p^2(1-p)}, \end{aligned} \tag{3.23}$$

па на основу теореме 2.8 важи да

$$\sqrt{n}(\widetilde{p}-p) \xrightarrow{R} \mathcal{N}(0, p^2(1-p)) \tag{3.24}$$

кад $n \to \infty$.

Аналогно се одређује асимптотска расподела МВ оцене параметра λ. Како је

$$P\{Y=y;\lambda\} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!},$$

то је

$$\ln P\{Y=y;\lambda\} = -\lambda + y\ln\lambda - \ln y!.$$

Следи да је

$$\frac{\partial \ln P\{Y=y;\lambda\}}{\partial \lambda} = -1 + \frac{y}{\lambda},$$

$$\frac{\partial^2 \ln P\{Y=y;\lambda\}}{\partial \lambda^2} = -\frac{y}{\lambda^2}.$$

Одавде се добија да је

$$E\biggl(\frac{\partial^2 \ln P\{Y=Y;\lambda\}}{\partial \lambda^2}\biggr) = -\frac{EY}{\lambda^2} = -\frac{\lambda}{\lambda^2} = -\frac{1}{\lambda}, \tag{3.25}$$

па на основу теореме 2.8 важи да

$$\sqrt{m}(\widetilde{\lambda} - \lambda) \xrightarrow{R} \mathcal{N}(0, \lambda)$$

кад $m \to \infty$. Како је

$$\sqrt{n}(\widetilde{\lambda} - \lambda) = \sqrt{\frac{n}{m}} \sqrt{m}(\widetilde{\lambda} - \lambda)$$

и $\frac{n}{m} \to s$ кад $n \to \infty$, $m \to \infty$, то

$$\sqrt{n}(\widetilde{\lambda} - \lambda) \xrightarrow{R} \mathcal{N}(0, s\lambda) \tag{3.26}$$

кад $n \to \infty$.

Коначно, користећи независност X и Y, а самим тим и независност $\widetilde{p}$ и $\widetilde{\lambda}$, из израза (3.24) и (3.26) следи тврђење теореме. ■

Теорема 3.2 *Нека $\frac{n}{m} \to s$ кад $n \to \infty$, $m \to \infty$, где је s позитиван реалан број. Тада важи*

$$\sqrt{n}(\widetilde{R} - R) \xrightarrow{R} \mathcal{N}(0, \lambda p^2 e^{-2\lambda p}(\lambda(1-p) + s)) \tag{3.27}$$

кад $n \to \infty$, где је $\widetilde{R}$ МВ оцена параметра поузданости R дефинисана једнакошћу (3.4).

Доказ: Како је $R = 1 - e^{-\lambda p}$, то је

$$\frac{\partial R}{\partial p} = \lambda e^{-\lambda p}, \quad \frac{\partial R}{\partial \lambda} = p e^{-\lambda p}.$$

Ови парцијални изводи су непрекидни и нису једнаки нули. Нека је

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial R}{\partial p} & \frac{\partial R}{\partial \lambda} \end{bmatrix} = e^{-\lambda p} \begin{bmatrix} \lambda & p \end{bmatrix}.$$

На основу теорема 2.9 и 3.1 следи да

$$\sqrt{n}(\widetilde{R} - R) \xrightarrow{R} \mathcal{N}(0, BJB^T)$$

кад $n \to \infty$, где је матрица J дефинисана једнакошћу (3.22). Како је

$$\begin{aligned} BJB^T &= e^{-\lambda p} \begin{bmatrix} \lambda & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p^2(1-p) & 0 \\ 0 & s\lambda \end{bmatrix} e^{-\lambda p} \begin{bmatrix} \lambda \\ p \end{bmatrix} \\ &= e^{-2\lambda p} \begin{bmatrix} \lambda & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda p^2(1-p) \\ s\lambda p \end{bmatrix} \\ &= e^{-2\lambda p}(\lambda^2 p^2(1-p) + s\lambda p^2) \\ &= \lambda p^2 e^{-2\lambda p}(\lambda(1-p) + s), \end{aligned}$$

то следи тврђење теореме. ■

Како је $\widetilde{R}$ асимптотски непристрасна оцена за R, то се за велико n за оцену средње квадратне грешке те оцене може узети МВ оцена диперзије од $\widetilde{R}$. Ако се у изразу (3.27) означи да је $\sigma_R^2 = \lambda p^2 e^{-2\lambda p}(\lambda(1-p)+s)$, онда за дисперзију од $\widetilde{R}$ важи да се асимптотски понаша као $\frac{\sigma_R^2}{n}$, па се за велико n може узети да за МВ оцену дисперзије од $\widetilde{R}$ важи да је

$$\widetilde{D}(\widetilde{R}) \approx \frac{\widetilde{\sigma}_R^2}{n}, \tag{3.28}$$

где је

$$\widetilde{\sigma}_R^2 = \widetilde{\lambda}\widetilde{p}^2 e^{-2\widetilde{\lambda}\widetilde{p}}(\widetilde{\lambda}(1-\widetilde{p}) + s), \tag{3.29}$$

а $\widetilde{p}$ и $\widetilde{\lambda}$ су оцене дефинисане једнакостима (3.3).

На основу теореме 3.2 може се одредити асимптотски интервал поверења за R. Из израза (3.27) следи да је

$$P\Big\{ -z_{\frac{1+\gamma}{2}} < \frac{\widetilde{R} - R}{\widetilde{\sigma}_R}\sqrt{n} < z_{\frac{1+\gamma}{2}} \Big\} \approx \gamma,$$

где је z_α α-квантил нормалне $\mathcal{N}(0,1)$ расподеле. Одавде се добија да је

$$P\Big\{ \widetilde{R} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\widetilde{\sigma}_R}{\sqrt{n}} < R < \widetilde{R} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\widetilde{\sigma}_R}{\sqrt{n}} \Big\} \approx \gamma.$$

Према томе, $100\gamma\%$ асимптотски интервал поверења за параметар поузданости R је

$$I_R^{(ASIM)} = \left(\widetilde{R} - z_{\frac{1+\gamma}{2}}\frac{\widetilde{\sigma}_R}{\sqrt{n}}, \widetilde{R} + z_{\frac{1+\gamma}{2}}\frac{\widetilde{\sigma}_R}{\sqrt{n}}\right), \tag{3.30}$$

где су $\widetilde{R}$ и $\widetilde{\sigma}_R$ МВ оцене дефинисане једнакостима (3.4) и (3.29).

3.5.2 *Bootstrap-p* интервал поверења

Дат је алгоритам за одређивање параметарског *bootstrap-p* интервала поверења за параметар поузданости R.

1. На основу реализованих почетних узорака $(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $(y_1, y_2, ..., y_m)$ оценити МВ оценама $\widetilde{p}$ и $\widetilde{\lambda}$ непознате параметре p и λ користећи једнакости (3.3).

2. Извући узорке $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ из геометријске $\mathcal{G}(\widetilde{p})$ расподеле и $(y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*)$ из Пуасонове $\mathcal{P}(\widetilde{\lambda})$ расподеле и на основу та два узорка користећи једнакост (3.4) израчунати $\widetilde{R}^*$, МВ оцену за R.

3. Поновити N пута корак 2. Добијене одговарајуће вредности $\widetilde{R}_i^*$, $1 \leq i \leq N$, поређати у неопадајући низ.

4. За $100\gamma\%$ *bootstrap-p* интервал поверења за параметар поузданости R узима се
$$I_R^{(BOOTp)} = \left(\widetilde{R^*}^{(\frac{1-\gamma}{2})}, \widetilde{R^*}^{(\frac{1+\gamma}{2})}\right),$$
где је $\widetilde{R^*}^{(\alpha)}$ α-квантил тог низа, тј. вредност која је на месту $N\alpha$ по реду у том низу. Ако $N\alpha$ није природан број, уз претпоставку да је $\alpha \leq 0.5$, уместо $N\alpha$ узима се највећи природан број мањи или једнак од $(N+1)\alpha$.

3.6 Симулације и закључак

У овом поглављу ће бити дат опис и резултати симулација рађених помоћу програмског језика R. Симулације се изводе за разне обиме узорака n и m и разне вредности параметара p и λ.

За фиксиране вредности n, m, p и λ врши се следећа процедура. Бира се узорак $\mathbf{x}$ обима n из геометријске $\mathcal{G}(p)$ расподеле и узорак $\mathbf{y}$ обима m из Пуасонове $\mathcal{P}(\lambda)$ расподеле. На основу тих узорака рачунају се МВ оцена параметра поузданости R и оцена њене стандардне грешке (корен оцене средње квадратне грешке) користећи једнакости (3.4) и (3.28), као и ЈНУМД оцена параметра поузданости R и оцена њене стандардне грешке користећи једнакости (3.5) и (3.8).

Како параметри априорне расподеле нису познати и требало би их додатно оцењивати, Бајесова оцена се рачуна коришћењем неинформативне Џефрисове априорне расподеле. На основу израза (2.23) и једнакости (2.24), (3.23) и (3.25), добија се да за Џефрисове априорне расподеле важи да је $h_p(p) \propto p^{-1}(1-p)^{-\frac{1}{2}}$ и $h_\lambda(\lambda) \propto \lambda^{-\frac{1}{2}}$. Коришћењем израза (2.20) добија се да за апостериорне расподеле важи да је

$$\begin{aligned}
h_p(p|\mathbf{x}) &= \frac{p^{-1}(1-p)^{-\frac{1}{2}}(1-p)^{t_x-n}p^n}{\int\limits_0^1 p^{-1}(1-p)^{-\frac{1}{2}}(1-p)^{t_x-n}p^n dp} = \frac{p^{n-1}(1-p)^{t_x-n-\frac{1}{2}}}{\int\limits_0^1 p^{n-1}(1-p)^{t_x-n-\frac{1}{2}}dp} \\
&= \frac{p^{n-1}(1-p)^{t_x-n-\frac{1}{2}}}{B(n, t_x-n+\frac{1}{2})}, \quad 0<p<1, \\
h_\lambda(\lambda|\mathbf{y}) &= \frac{\lambda^{-\frac{1}{2}}\frac{\frac{e^{-m\lambda}\lambda^{t_y}}{m}}{\prod\limits_{j=1}^{m} y_j!}}{\int\limits_0^\infty \lambda^{-\frac{1}{2}}\frac{\frac{e^{-m\lambda}\lambda^{t_y}}{m}}{\prod\limits_{j=1}^{m} y_j!}d\lambda} = \frac{\lambda^{t_y-\frac{1}{2}}e^{-m\lambda}}{\int\limits_0^\infty \lambda^{t_y-\frac{1}{2}}e^{-m\lambda}d\lambda} = \frac{m^{t_y+\frac{1}{2}}\lambda^{t_y-\frac{1}{2}}e^{-m\lambda}}{\int\limits_0^\infty s^{t_y-\frac{1}{2}}e^{-s}ds} \\
&= \frac{m^{t_y+\frac{1}{2}}\lambda^{t_y-\frac{1}{2}}e^{-m\lambda}}{\Gamma(t_y+\frac{1}{2})}, \quad \lambda>0.
\end{aligned}$$

На основу тога, из бета $\mathcal{B}(n, t_x-n+\frac{1}{2})$ расподеле бира се апостериорна вредност за p, а из гама $\Gamma(t_y+\frac{1}{2}, \frac{1}{m})$ расподеле бира се апостериорна вредност за λ. Коришћењем једнакости (3.1) израчунава се вредност за R. Бајесова оцена параметра поузданости R се рачуна као аритметичка средина свих вредности R које се добијају понављањем бирања апостериорних вредности p и λ и израчунавањем вредности R, у овом случају, 5000 пута. Оцена стандардне грешке Бајесове оцене се добија као стандардно одступање израчунатих вредности за R.

Асимптотски интервал поверења за параметар поузданости R одређује се на основу једнакости (3.30), а *bootstrap-p* интервал поверења коришћењем алгоритма из потпоглавља 3.5.2 (у овим симулацијама коришћено $N = 1000$). Границе Бајесовог интервала поверења се рачунају као одговарајући квантили низа израчунатих вредности за R које се помињу код рачунања Бајесове оцене параметра поузданости R.

За разне вредности n, m, p и λ ова процедура је поновљена по 5000 пута, а резултати симулација су дати у табелама 3.1 и 3.2.

У табели 3.1 дате су аритметичке средине тачкастих оцена параметра поузданости R и аритметичке средине оцена њихових стандардних грешака. За скоро све случајеве за $(n, m) \in \{(10, 10), (10, 20), (20, 10)\}$ и већину случајева за $(n, m) \in \{(20, 20), (100, 100)\}$ ЈНУМД оцена је најближа правој вредности R, што се и очекује због непристрасности те оцене. Најмање вредности стандардних грешака тачкастих оцена најчешће су за Бајесову оцену, али није ретко да то буде и за ЈНУМД оцену. Кад нису најмање, вредности стандардних грешака ЈНУМД оцена су највеће. За велике вредности обима узорака, $(n, m) = (100, 100)$, оцене стандардних грешака скоро да се и не разликују, а за мале и велике вредности R, $R \leq 0.1813$ или $R \geq 0.8347$, без обзира на величине узорака, ЈНУМД оцена је и најближа правој вредности R и има најмању стандардну грешку од све три оцене.

У табели 3.2 дате су аритметичке средине доњих и горњих граница 95% интервала поверења, као и проценти прекривања ових интервала, тј. проценти интервала који садрже праву вредност R. Из табеле се види да увек највећи проценат прекривања имају Бајесови интервали поверења, а најмањи асимптотски интервали поверења. Чак и за велике вредности обима узорака, $(n, m) = (100, 100)$, проценат прекривања Бајесових интервала поверења је највећи, а асимптотских најмањи, мада разлике у процентима у тим случајевима скоро да и нема.

На основу свега овога може се закључити да је за тачкасто оцењивање параметра поузданости R код овог модела најбоље користити ЈНУМД оцену, а за интервално оцењивање Бајесов интервал поверења.

Табела 3.1: Тачкасте оцене за R и њихове стандардне грешке

					МВ		ЈНУМД		Бајесова	
n	m	p	λ	R	$\widetilde{R}$	$sg(\widetilde{R})$	$\widehat{R}$	$sg(\widehat{R})$	$\check{R}$	$sg(\check{R})$
		0.2	0.5	0.0952	0.1001	0.0488	0.0941	0.0465	0.1068	0.0505
		0.5	0.5	0.2212	0.2233	0.0945	0.2204	0.0967	0.2312	0.0928
		0.9	0.5	0.3624	0.3532	0.1244	0.3641	0.1325	0.3567	0.1182
		0.2	1	0.1813	0.1913	0.0709	0.1812	0.0700	0.1943	0.0705
		0.5	1	0.3935	0.3958	0.1132	0.3929	0.1185	0.3920	0.1089
		0.9	1	0.5934	0.5799	0.1177	0.5943	0.1224	0.5664	0.1139
		0.2	1.5	0.2592	0.2713	0.0856	0.2586	0.0865	0.2707	0.0838
10	10	0.5	1.5	0.5276	0.5314	0.1158	0.5302	0.1225	0.5195	0.1120
		0.9	1.5	0.7408	0.7268	0.0959	0.7415	0.0970	0.7069	0.0970
		0.2	2	0.3297	0.3422	0.0959	0.3282	0.0985	0.3384	0.0932
		0.5	2	0.6321	0.6307	0.1105	0.6314	0.1168	0.6140	0.1086
		0.9	2	0.8347	0.8202	0.0740	0.8333	0.0724	0.7994	0.0787
		0.2	3	0.4512	0.4643	0.1078	0.4500	0.1135	0.4547	0.1045
		0.5	3	0.7769	0.7718	0.0920	0.7760	0.0950	0.7504	0.0947
		0.9	3	0.9328	0.9233	0.0401	0.9322	0.0362	0.9068	0.0482
		0.2	0.5	0.0952	0.1004	0.0396	0.0939	0.0380	0.1030	0.0402
		0.5	0.5	0.2212	0.2280	0.0747	0.2224	0.0760	0.2287	0.0733
		0.9	0.5	0.3624	0.3561	0.0923	0.3605	0.0956	0.3513	0.0897
		0.2	1	0.1813	0.1915	0.0604	0.1803	0.0600	0.1913	0.0597
		0.5	1	0.3935	0.3998	0.0931	0.3929	0.0972	0.3921	0.0907
		0.9	1	0.5934	0.5857	0.0876	0.5921	0.0900	0.5697	0.0880
		0.2	1.5	0.2592	0.2745	0.0759	0.2605	0.0772	0.2715	0.0743
10	20	0.5	1.5	0.5276	0.5353	0.0981	0.5295	0.1036	0.5217	0.0965
		0.9	1.5	0.7408	0.7356	0.0714	0.7423	0.0722	0.7161	0.0753
		0.2	2	0.3297	0.3438	0.0865	0.3283	0.0893	0.3382	0.0842
		0.5	2	0.6321	0.6357	0.0957	0.6317	0.1010	0.6184	0.0957
		0.9	2	0.8347	0.8283	0.0552	0.8347	0.0545	0.8094	0.0615
		0.2	3	0.4512	0.4666	0.0999	0.4504	0.1052	0.4560	0.0973
		0.5	3	0.7769	0.7768	0.0816	0.7770	0.0842	0.7562	0.0856
		0.9	3	0.9328	0.9283	0.0301	0.9329	0.0280	0.9141	0.0381
		0.2	0.5	0.0952	0.0983	0.0444	0.0958	0.0435	0.1057	0.0459
		0.5	0.5	0.2212	0.2213	0.0890	0.2222	0.0915	0.2324	0.0880
		0.9	0.5	0.3624	0.3509	0.1228	0.3625	0.1306	0.3609	0.1172
		0.2	1	0.1813	0.1861	0.0615	0.1819	0.0611	0.1908	0.0615
		0.5	1	0.3935	0.3900	0.1043	0.3922	0.1079	0.3920	0.1007
		0.9	1	0.5934	0.5790	0.1156	0.5943	0.1197	0.5739	0.1107
		0.2	1.5	0.2592	0.2642	0.0726	0.2590	0.0729	0.2666	0.0717
20	10	0.5	1.5	0.5276	0.5240	0.1044	0.5277	0.1083	0.5197	0.1010
		0.9	1.5	0.7408	0.7274	0.0932	0.7426	0.0938	0.7162	0.0918
		0.2	2	0.3297	0.3341	0.0798	0.3284	0.0809	0.3344	0.0784
		0.5	2	0.6321	0.6268	0.0980	0.6316	0.1014	0.6185	0.0956
		0.9	2	0.8347	0.8199	0.0715	0.8333	0.0698	0.8073	0.0727
		0.2	3	0.4512	0.4570	0.0877	0.4514	0.0901	0.4533	0.0858
		0.5	3	0.7769	0.7708	0.0789	0.7771	0.0803	0.7586	0.0791
		0.9	3	0.9328	0.9252	0.0374	0.9338	0.0340	0.9148	0.0411

Табела 3.1: Наставак

					МВ		ЈНУМД		Бајесова	
n	m	p	λ	R	$\widetilde{R}$	$sg(\widetilde{R})$	$\widehat{R}$	$sg(\widehat{R})$	$\check{R}$	$sg(\check{R})$
20	20	0.2	0.5	0.0952	0.0981	0.0344	0.0951	0.0336	0.1015	0.0350
		0.5	0.5	0.2212	0.2222	0.0679	0.2206	0.0686	0.2263	0.0671
		0.9	0.5	0.3624	0.3566	0.0904	0.3619	0.0933	0.3581	0.0877
		0.2	1	0.1813	0.1861	0.0496	0.1810	0.0493	0.1877	0.0495
		0.5	1	0.3935	0.3956	0.0817	0.3939	0.0836	0.3936	0.0799
		0.9	1	0.5934	0.5877	0.0845	0.5949	0.0861	0.5802	0.0830
		0.2	1.5	0.2592	0.2657	0.0604	0.2593	0.0607	0.2656	0.0598
		0.5	1.5	0.5276	0.5275	0.0837	0.5266	0.0861	0.5214	0.0821
		0.9	1.5	0.7408	0.7316	0.0685	0.7388	0.0689	0.7211	0.0689
		0.2	2	0.3297	0.3363	0.0682	0.3291	0.0690	0.3345	0.0672
		0.5	2	0.6321	0.6325	0.0801	0.6326	0.0825	0.6236	0.0793
		0.9	2	0.8347	0.8287	0.0517	0.8352	0.0511	0.8180	0.0536
		0.2	3	0.4512	0.4588	0.0774	0.4514	0.0794	0.4541	0.0761
		0.5	3	0.7769	0.7761	0.0663	0.7783	0.0676	0.7649	0.0674
		0.9	3	0.9328	0.9291	0.0272	0.9335	0.0258	0.9211	0.0303
100	100	0.2	0.5	0.0952	0.0954	0.0152	0.0948	0.0151	0.0961	0.0152
		0.5	0.5	0.2212	0.2209	0.0307	0.2206	0.0307	0.2218	0.0306
		0.9	0.5	0.3624	0.3611	0.0414	0.3621	0.0416	0.3613	0.0411
		0.2	1	0.1813	0.1825	0.0220	0.1815	0.0220	0.1829	0.0220
		0.5	1	0.3935	0.3933	0.0370	0.3930	0.0372	0.3929	0.0368
		0.9	1	0.5934	0.5917	0.0383	0.5931	0.0384	0.5901	0.0382
		0.2	1.5	0.2592	0.2606	0.0270	0.2593	0.0270	0.2606	0.0269
		0.5	1.5	0.5276	0.5276	0.0381	0.5274	0.0383	0.5263	0.0379
		0.9	1.5	0.7408	0.7395	0.0306	0.7409	0.0306	0.7373	0.0307
		0.2	2	0.3297	0.3317	0.0306	0.3303	0.0307	0.3314	0.0305
		0.5	2	0.6321	0.6335	0.0366	0.6336	0.0368	0.6317	0.0365
		0.9	2	0.8347	0.8337	0.0230	0.8350	0.0230	0.8316	0.0232
		0.2	3	0.4512	0.4525	0.0350	0.4510	0.0351	0.4516	0.0348
		0.5	3	0.7769	0.7771	0.0303	0.7775	0.0305	0.7748	0.0304
		0.9	3	0.9328	0.9317	0.0120	0.9325	0.0119	0.9301	0.0123

Табела 3.2: Интервали поверења за R и њихови проценти прекривања

					ASIM			BOOTp			BAJES		
n	m	p	λ	R	доња	горња	%	доња	горња	%	доња	горња	%
10	10	0.2	0.5	0.0952	0.0045	0.1958	90.2	0.0252	0.2283	93.3	0.0336	0.2272	94.6
		0.5	0.5	0.2212	0.0381	0.4085	89.9	0.0609	0.4271	92.3	0.0833	0.4392	95.0
		0.9	0.5	0.3624	0.1094	0.5970	92.6	0.1083	0.5750	94.3	0.1503	0.6036	95.1
		0.2	1	0.1813	0.0523	0.3303	92.5	0.0803	0.3704	94.2	0.0811	0.3530	94.6
		0.5	1	0.3935	0.1740	0.6176	91.5	0.1882	0.6220	93.7	0.1954	0.6152	94.9
		0.9	1	0.5934	0.3493	0.8105	91.4	0.3150	0.7702	92.9	0.3394	0.7784	95.3
		0.2	1.5	0.2592	0.1035	0.4391	92.9	0.1362	0.4804	94.7	0.1280	0.4522	94.9
		0.5	1.5	0.5276	0.3045	0.7583	92.1	0.3101	0.7482	94.4	0.3013	0.7337	94.8
		0.9	1.5	0.7408	0.5388	0.9148	91.3	0.4927	0.8710	94.9	0.4985	0.8724	95.8
		0.2	2	0.3297	0.1544	0.5301	92.8	0.1890	0.5686	94.5	0.1728	0.5334	95.1
		0.5	2	0.6321	0.4141	0.8474	91.4	0.4119	0.8261	93.6	0.3907	0.8097	94.9
		0.9	2	0.8347	0.6752	0.9651	91.6	0.6280	0.9251	93.5	0.6210	0.9241	95.7
		0.2	3	0.4512	0.2529	0.6756	92.5	0.2865	0.7016	94.0	0.2567	0.6609	94.9
		0.5	3	0.7769	0.5915	0.9520	90.7	0.5754	0.9178	93.9	0.5389	0.9030	94.9
		0.9	3	0.9328	0.8447	1.0019	90.3	0.8068	0.9746	94.2	0.7889	0.9730	95.6
10	20	0.2	0.5	0.0952	0.0228	0.1781	91.9	0.0407	0.2075	94.3	0.0410	0.1962	94.6
		0.5	0.5	0.2212	0.0815	0.3745	91.9	0.1012	0.3947	93.6	0.1051	0.3887	94.5
		0.9	0.5	0.3624	0.1752	0.5371	93.7	0.1739	0.5274	93.3	0.1884	0.5357	95.8
		0.2	1	0.1813	0.0731	0.3099	93.4	0.1004	0.3498	94.6	0.0912	0.3227	94.9
		0.5	1	0.3935	0.2174	0.5823	92.8	0.2370	0.5941	93.4	0.2226	0.5745	94.9
		0.9	1	0.5934	0.4141	0.7574	93.7	0.3981	0.7357	93.4	0.3915	0.7336	95.4
		0.2	1.5	0.2592	0.1257	0.4234	93.5	0.1586	0.4663	94.2	0.1404	0.4287	94.7
		0.5	1.5	0.5276	0.3431	0.7275	92.8	0.3572	0.7272	94.5	0.3288	0.7030	95.2
		0.9	1.5	0.7408	0.5957	0.8754	93.3	0.5735	0.8502	94.2	0.5525	0.8454	95.6
		0.2	2	0.3297	0.1743	0.5133	92.8	0.2097	0.5545	93.3	0.1843	0.5111	94.7
		0.5	2	0.6321	0.4481	0.8233	91.7	0.4557	0.8126	93.4	0.4173	0.7881	94.8
		0.9	2	0.8347	0.7202	0.9364	92.6	0.6967	0.9123	93.8	0.6690	0.9074	96.0
		0.2	3	0.4512	0.2708	0.6623	93.0	0.3061	0.6927	93.3	0.2680	0.6449	95.0
		0.5	3	0.7769	0.6169	0.9366	89.5	0.6109	0.9117	92.7	0.5620	0.8922	94.4
		0.9	3	0.9328	0.8693	0.9873	90.4	0.8492	0.9699	93.3	0.8205	0.9667	95.7
20	10	0.2	0.5	0.0952	0.0113	0.1853	91.1	0.0257	0.2033	92.7	0.0368	0.2133	94.9
		0.5	0.5	0.2212	0.0469	0.3958	90.7	0.0627	0.4045	92.2	0.0897	0.4282	94.8
		0.9	0.5	0.3624	0.1101	0.5916	92.3	0.1070	0.5689	93.7	0.1552	0.6048	94.6
		0.2	1	0.1813	0.0655	0.3067	93.1	0.0821	0.3276	94.3	0.0897	0.3280	95.1
		0.5	1	0.3935	0.1856	0.5944	92.1	0.1891	0.5907	93.6	0.2095	0.5990	94.9
		0.9	1	0.5934	0.3524	0.8055	91.6	0.3154	0.7654	93.3	0.3532	0.7802	94.8
		0.2	1.5	0.2592	0.1220	0.4064	93.6	0.1401	0.4269	95.0	0.1430	0.4211	95.3
		0.5	1.5	0.5276	0.3194	0.7287	92.6	0.3139	0.7149	94.5	0.3246	0.7155	94.9
		0.9	1.5	0.7408	0.5447	0.9102	92.8	0.4969	0.8675	94.5	0.5199	0.8741	95.2
		0.2	2	0.3297	0.1777	0.4906	93.8	0.1960	0.5092	94.8	0.1943	0.4990	95.1
		0.5	2	0.6321	0.4347	0.8189	92.9	0.4226	0.7981	94.2	0.4251	0.7950	95.2
		0.9	2	0.8347	0.6798	0.9601	93.0	0.6317	0.9218	94.1	0.6446	0.9246	95.3
		0.2	3	0.4512	0.2850	0.6290	92.8	0.3014	0.6407	94.2	0.2918	0.6251	94.7
		0.5	3	0.7769	0.6161	0.9254	91.9	0.5950	0.8974	94.4	0.5868	0.8925	94.7
		0.9	3	0.9328	0.8519	0.9985	91.9	0.8149	0.9737	94.4	0.8162	0.9739	95.2

Табела 3.2: Наставак

					ASIM			BOOTp			BAJES		
n	m	p	λ	R	доња	горња	%	доња	горња	%	доња	горња	%
20	20	0.2	0.5	0.0952	0.0307	0.1655	93.0	0.0419	0.1811	94.6	0.0459	0.1814	95.1
		0.5	0.5	0.2212	0.0892	0.3553	92.2	0.1011	0.3660	93.4	0.1122	0.3725	94.5
		0.9	0.5	0.3624	0.1793	0.5338	93.0	0.1757	0.5231	92.8	0.1983	0.5384	94.8
		0.2	1	0.1813	0.0888	0.2834	93.1	0.1044	0.3034	94.1	0.1034	0.2959	94.3
		0.5	1	0.3935	0.2355	0.5557	94.1	0.2441	0.5600	94.6	0.2454	0.5561	95.6
		0.9	1	0.5934	0.4221	0.7532	94.0	0.4039	0.7322	94.2	0.4139	0.7365	94.9
		0.2	1.5	0.2592	0.1472	0.3842	94.4	0.1655	0.4057	94.9	0.1596	0.3924	95.2
		0.5	1.5	0.5276	0.3635	0.6914	93.1	0.3673	0.6882	94.1	0.3607	0.6801	94.6
		0.9	1.5	0.7408	0.5974	0.8657	94.3	0.5742	0.8425	94.1	0.5752	0.8431	94.5
		0.2	2	0.3297	0.2027	0.4698	93.1	0.2220	0.4905	94.0	0.2119	0.4734	94.4
		0.5	2	0.6321	0.4755	0.7894	92.7	0.4745	0.7799	93.6	0.4618	0.7699	94.7
		0.9	2	0.8347	0.7273	0.9300	93.7	0.7036	0.9086	94.7	0.6996	0.9076	95.2
		0.2	3	0.4512	0.3070	0.6106	94.0	0.3255	0.6264	94.7	0.3084	0.6048	95.1
		0.5	3	0.7769	0.6462	0.9061	92.6	0.6369	0.8886	94.3	0.6179	0.8793	94.7
		0.9	3	0.9328	0.8757	0.9825	92.0	0.8575	0.9680	94.3	0.8500	0.9668	95.2
100	100	0.2	0.5	0.0952	0.0657	0.1251	93.8	0.0683	0.1279	94.4	0.0688	0.1283	94.3
		0.5	0.5	0.2212	0.1608	0.2811	94.3	0.1635	0.2834	94.6	0.1654	0.2850	95.1
		0.9	0.5	0.3624	0.2800	0.4422	94.6	0.2791	0.4400	94.6	0.2831	0.4436	95.0
		0.2	1	0.1813	0.1393	0.2257	94.3	0.1429	0.2294	94.7	0.1423	0.2284	94.8
		0.5	1	0.3935	0.3208	0.4659	95.2	0.3228	0.4670	95.2	0.3224	0.4665	95.4
		0.9	1	0.5934	0.5166	0.6667	94.8	0.5130	0.6622	94.8	0.5142	0.6634	95.0
		0.2	1.5	0.2592	0.2077	0.3134	94.8	0.2119	0.3176	95.0	0.2102	0.3154	95.2
		0.5	1.5	0.5276	0.4529	0.6022	94.4	0.4539	0.6019	94.4	0.4519	0.6003	94.7
		0.9	1.5	0.7408	0.6795	0.7995	94.6	0.6748	0.7944	94.8	0.6747	0.7946	95.0
		0.2	2	0.3297	0.2718	0.3917	94.9	0.2762	0.3959	94.6	0.2735	0.3929	94.9
		0.5	2	0.6321	0.5619	0.7052	94.7	0.5617	0.7036	94.7	0.5587	0.7013	95.0
		0.9	2	0.8347	0.7886	0.8789	94.6	0.7841	0.8742	94.9	0.7831	0.8739	95.2
		0.2	3	0.4512	0.3840	0.5211	94.6	0.3882	0.5246	94.4	0.3841	0.5204	94.6
		0.5	3	0.7769	0.7177	0.8366	94.3	0.7155	0.8331	94.7	0.7118	0.8307	94.6
		0.9	3	0.9328	0.9080	0.9553	94.8	0.9046	0.9520	95.0	0.9035	0.9516	95.2

Глава 4

МОДЕЛ СА ГЕОМЕТРИЈСКОМ И ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНОМ КОМПОНЕНТОМ

4.1 Мотивација и параметар поузданости

У овој глави оцењиваће се параметар поузданости модела у коме стрес и снага не само да имају расподеле које припадају различитим фамилијама расподела као што је то био случај у моделу из претходне главе, него је чак расподела стреса дискретног типа, а расподела снаге апсолутно непрекидног типа. Овим моделом могу се моделирати ситуације из реалног живота, а следећи примери то и доказују.

Пример 8 *Дошавши на посао службеник је схватио да је заборавио лозинку за приступање систему, али се сећа да се лозинка састоји од одређеног, њему познатог, броја цифара. Сваки покушај уношења лозинке на случајан начин траје једну јединицу времена, тако да је мерни број времена потребног за налажење лозинке уствари једнак броју покушаја. Нека је X то време, а Y време до телефонског позива* *првог клијента. Тада је R вероватноћа да службеник приступи систему пре него што први клијент позове.*

Пример 9 *Дошло је до нестанка струје у кући. Нека је Y време трајања батерије која замењује напајање струјом неког уређаја у случају нестанка струје. Власник куће хитно зове електродистрибуцију. Како је телефонска линија често заузета потребно је да позове више пута, а за сваки покушај потребна му је једна јединица времена. Нека је X време потребно да власник добије телефоном електродистрибуцију, а мерни број тог времена уствари је једнак броју покушаја. Тада је R вероватноћа да власник добије телефоном електродистрибуцију пре него што уређај престане да ради.*

Број независних једнако вероватних покушаја до првог успеха има геометријску расподелу, па у оба примера X има геометријску расподелу. Како Y у оба примера има експоненцијалну расподелу, то из ових и сличних примера следи потреба за увођењем оваквог модела и потреба за оцењивањем његовог параметра поузданости. Овај модел је увео и њиме се бавио *Jovanović* (2015).

Нека X има геометријску $\mathcal{G}(p)$ расподелу, а Y експоненцијалну $\mathcal{E}(\lambda)$ расподелу, и случајне величине X и Y су независне. Закон расподеле случајне величине X је

$$P\{X = x; p\} = (1-p)^{x-1}p, \quad x \in \mathbb{N},$$

где је $0 < p < 1$, а густина расподеле случајне величине Y је

$$f_Y(y; \lambda) = \lambda e^{-\lambda y}, \quad y \geq 0,$$

где је $\lambda > 0$. Следи да је

$$\begin{aligned} R &= P\{X < Y\} = \sum_{k=1}^{\infty} P\{X = k, Y > k\} = \sum_{k=1}^{\infty} P\{X = k\}P\{Y > k\} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1}p \int_{k}^{\infty} \lambda e^{-\lambda y}dy = \sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1}p \int_{-\infty}^{-\lambda k} e^{s}ds \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1}pe^{-\lambda k} = pe^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\left((1-p)e^{-\lambda}\right)^{k-1} = \frac{pe^{-\lambda}}{1-(1-p)e^{-\lambda}} \\
&= \frac{p}{e^{\lambda}-1+p}. \qquad (4.1)
\end{aligned}
$$

Нека су $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ и $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$ узорци стреса који има геометријску $\mathcal{G}(p)$ расподелу и снаге која има експоненцијалну $\mathcal{E}(\lambda)$ расподелу, где су p и λ непознати параметри. У следећим поглављима ће на основу тих узорака разним методима бити оцењиван параметар поузданости R.

4.2 MB оцена

За функцију веродостојности важи да је

$$
\begin{aligned}
L(p,\lambda) &= \prod_{i=1}^{n} P\{X = x_i; p\}\prod_{j=1}^{m} f_Y(y_j;\lambda) = \prod_{i=1}^{n}(1-p)^{x_i-1}p\prod_{j=1}^{m}\lambda e^{-\lambda y_j} \\
&= (1-p)^{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i - n} p^n \lambda^m e^{-\lambda\sum\limits_{j=1}^{m} y_j}. \qquad (4.2)
\end{aligned}
$$

Како за логаритам функције веродостојности важи да је

$$
\ln L(p,\lambda) = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\Big)\ln(1-p) + n\ln p + m\ln\lambda - \lambda\sum_{j=1}^{m} y_j,
$$

то се из система једначина веродостојности

$$
\frac{\partial \ln L(p,\lambda)}{\partial p} = 0, \qquad \frac{\partial \ln L(p,\lambda)}{\partial \lambda} = 0,
$$

добија да је

$$
-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i - n}{1-p} + \frac{n}{p} = 0, \qquad \frac{m}{\lambda} - \sum_{j=1}^{m} y_j = 0,
$$

односно

$$p = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}, \qquad \lambda = \frac{m}{\sum\limits_{j=1}^{m} y_j}.$$

Следи да је

$$\widetilde{p} = \frac{1}{\overline{X}}, \qquad \widetilde{\lambda} = \frac{1}{\overline{Y}}. \tag{4.3}$$

Коришћењем израза (4.1) на основу теореме 2.1 добија се да за МВ оцену параметра поузданости R важи да је

$$\widetilde{R} = \frac{1}{\overline{X} e^{\frac{1}{\overline{Y}}} - \overline{X} + 1}. \tag{4.4}$$

4.3 ЈНУМД оцена

У овом поглављу ће осим ЈНУМД оцене параметра поузданости R бити одређена и ЈНУМД оцена њене средње квадратне грешке.

Статистика T_X, где је $T_X = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, је комплетна довољна статистика за p и има негативну биномну расподелу са параметрима n и p, као што је показано у поглављу 3.3. Како је

$$f_Y(y;\lambda) = \lambda e^{-\lambda y} = e^{-\lambda y + \ln \lambda}, \quad y \geq 0,$$

то се на основу дефиниције 2.3 може закључити да је расподела за Y регуларан случај експоненцијалне фамилије расподела. Из теореме 2.3 следи да је T_Y, где је $T_Y = \sum\limits_{j=1}^{m} Y_j$, комплетна довољна статистика за λ. Како збир l независних исто расподељених случајних величина које имају експоненцијалну $\mathcal{E}(\lambda)$ расподелу има гама $\Gamma(l, \frac{1}{\lambda})$ расподелу, то T_Y има гама $\Gamma(m, \frac{1}{\lambda})$ расподелу чија је густина расподеле

$$g_{T_Y}(y) = \frac{\lambda^m y^{m-1} e^{-\lambda y}}{\Gamma(m)}, \quad y \geq 0.$$

Непристрасна оцена за R је $I\{X_1 < Y_1\}$. Важи да је

$$
\begin{aligned}
& E(I\{X_1 < Y_1\}|T_X = t_X, T_Y = t_Y) = P\{X_1 < Y_1|T_X = t_X, T_Y = t_Y\} \\
= \ & \lim_{\epsilon\to 0+} P\{X_1 < Y_1|T_X = t_X, t_Y \le T_Y < t_Y + \epsilon\} \\
= \ & \lim_{\epsilon\to 0+} \frac{P\{X_1 < Y_1, \sum\limits_{i=1}^{n} X_i = t_X, t_Y \le \sum\limits_{j=1}^{m} Y_j < t_Y + \epsilon\}}{P\{T_X = t_X, t_Y \le T_Y < t_Y + \epsilon\}} \\
= \ & \lim_{\epsilon\to 0+} \frac{\sum\limits_{k=1}^{w} P\{X_1 = k, Y_1 > k, \sum\limits_{i=2}^{n} X_i = t_X - k, t_Y \le Y_1 + \sum\limits_{j=2}^{m} Y_j < t_Y + \epsilon\}}{P\{T_X = t_X, t_Y \le T_Y < t_Y + \epsilon\}} \\
= \ & \lim_{\epsilon\to 0+} \frac{\sum\limits_{k=1}^{w} P\{X_1 = k\} P\{\sum\limits_{i=2}^{n} X_i = t_X - k\} P\{Y_1 > k, t_Y \le Y_1 + \sum\limits_{j=2}^{m} Y_j < t_Y + \epsilon\}}{P\{T_X = t_X\} P\{t_Y \le T_Y < t_Y + \epsilon\}} \\
= \ & \lim_{\epsilon\to 0+} \frac{\sum\limits_{k=1}^{w} \Big[(1-p)^{k-1} p \binom{t_X-k-1}{n-2} p^{n-1} (1-p)^{t_X-k-n+1}}{\binom{t_X-1}{n-1} p^n (1-p)^{t_X-n} \int\limits_{t_Y}^{t_Y+\epsilon} \frac{\lambda^m y^{m-1} e^{-\lambda y}}{\Gamma(m)} dy} \\
& \cdot \Bigg(\int\limits_0^{t_Y-k} dv \int\limits_{t_Y-v}^{t_Y+\epsilon-v} \lambda e^{-\lambda u} \frac{\lambda^{m-1} v^{m-2} e^{-\lambda v}}{\Gamma(m-1)} du + \int\limits_{t_Y-k}^{t_Y+\epsilon-k} dv \int\limits_{k}^{t_Y+\epsilon-v} \lambda e^{-\lambda u} \frac{\lambda^{m-1} v^{m-2} e^{-\lambda v}}{\Gamma(m-1)} du \Bigg) \Bigg] \\
= \ & \lim_{\epsilon\to 0+} \frac{(m-1) \sum\limits_{k=1}^{w} \Big[\binom{t_X-k-1}{n-2}}{\binom{t_X-1}{n-1} \lambda \int\limits_{t_Y}^{t_Y+\epsilon} y^{m-1} e^{-\lambda y} dy} \Bigg(\int\limits_0^{t_Y-k} v^{m-2} e^{-\lambda v} dv \int\limits_{t_Y-v}^{t_Y+\epsilon-v} \lambda e^{-\lambda u} du \\
& + \int\limits_{t_Y-k}^{t_Y+\epsilon-k} v^{m-2} e^{-\lambda v} dv \int\limits_{k}^{t_Y+\epsilon-v} \lambda e^{-\lambda u} du \Bigg) \Bigg] \\
= \ & \lim_{\epsilon\to 0+} \frac{(m-1) \sum\limits_{k=1}^{w} \Big[\binom{t_X-k-1}{n-2}}{\binom{t_X-1}{n-1} \lambda \int\limits_{t_Y}^{t_Y+\epsilon} y^{m-1} e^{-\lambda y} dy} \Bigg(\int\limits_0^{t_Y-k} v^{m-2} e^{-\lambda v} \big(e^{-\lambda(t_Y-v)} - e^{-\lambda(t_Y+\epsilon-v)} \big) dv \\
& + \int\limits_{t_Y-k}^{t_Y+\epsilon-k} v^{m-2} e^{-\lambda v} \big(e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(t_Y+\epsilon-v)} \big) dv \Bigg) \Bigg]
\end{aligned}
$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0+} \frac{(m-1)\sum\limits_{k=1}^{w}\left[\binom{t_X-k-1}{n-2}\right.}{\binom{t_X-1}{n-1}\lambda\int\limits_{t_Y}^{t_Y+\epsilon} y^{m-1}e^{-\lambda y}dy}\Bigg(\Big(e^{-\lambda t_Y}-e^{-\lambda(t_Y+\epsilon)}\Big)\int\limits_{0}^{t_Y-k} v^{m-2}dv$$

$$\left.+e^{-\lambda k}\int\limits_{t_Y-k}^{t_Y+\epsilon-k} v^{m-2}e^{-\lambda v}dv - e^{-\lambda(t_Y+\epsilon)}\int\limits_{t_Y-k}^{t_Y+\epsilon-k} v^{m-2}dv\Bigg)\right]$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0+} \frac{\sum\limits_{k=1}^{w}\left[\binom{t_X-k-1}{n-2}\right.}{\binom{t_X-1}{n-1}\lambda\int\limits_{t_Y}^{t_Y+\epsilon} y^{m-1}e^{-\lambda y}dy}\Big[\Big(e^{-\lambda t_Y}-e^{-\lambda(t_Y+\epsilon)}\Big)(t_Y-k)^{m-1}$$

$$\left.+(m-1)e^{-\lambda k}\int\limits_{t_Y-k}^{t_Y+\epsilon-k} v^{m-2}e^{-\lambda v}dv - e^{-\lambda(t_Y+\epsilon)}\Big((t_Y+\epsilon-k)^{m-1}-(t_Y-k)^{m-1}\Big)\Big]\right]$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0+} \frac{\sum\limits_{k=1}^{w}\left[\binom{t_X-k-1}{n-2}\right.}{\binom{t_X-1}{n-1}\lambda\int\limits_{t_Y}^{t_Y+\epsilon} y^{m-1}e^{-\lambda y}dy}\Big[e^{-\lambda t_Y}\Big((t_Y-k)^{m-1}-e^{-\lambda\epsilon}(t_Y+\epsilon-k)^{m-1}\Big)$$

$$\left.+(m-1)e^{-\lambda k}\int\limits_{t_Y-k}^{t_Y+\epsilon-k} v^{m-2}e^{-\lambda v}dv\Big]\right],$$

где је $w=\min\{t_X-n+1, s\}$, а s је највећи природан број мањи од t_Y. Користећи Лопиталово правило добија се да је

$$E(I\{X_1<Y_1\}|T_X=t_X, T_Y=t_Y) = \lim_{\epsilon\to 0+} \frac{\sum\limits_{k=1}^{w}\left[\binom{t_X-k-1}{n-2}\right.}{\binom{t_X-1}{n-1}\lambda(t_Y+\epsilon)^{m-1}e^{-\lambda(t_Y+\epsilon)}}$$

$$\cdot\Big[e^{-\lambda t_Y}e^{-\lambda\epsilon}\Big(\lambda(t_Y+\epsilon-k)^{m-1}-(m-1)(t_Y+\epsilon-k)^{m-2}\Big)$$

$$\left.+(m-1)e^{-\lambda k}(t_Y+\epsilon-k)^{m-2}e^{-\lambda(t_Y+\epsilon-k)}\Big]\right]$$

$$= \frac{\sum\limits_{k=1}^{w}\binom{t_X-k-1}{n-2}\Big[e^{-\lambda t_Y}\Big(\lambda(t_Y-k)^{m-1}-(m-1)(t_Y-k)^{m-2}\Big)+(m-1)(t_Y-k)^{m-2}e^{-\lambda t_Y}\Big]}{\binom{t_X-1}{n-1}\lambda t_Y^{m-1}e^{-\lambda t_Y}}$$

$$= \frac{\sum\limits_{k=1}^{w} \binom{t_X-k-1}{n-2}(t_Y-k)^{m-1}}{\binom{t_X-1}{n-1}t_Y^{m-1}}.$$

На основу теореме 2.4 следи да за ЈНУМД оцену параметра поузданости R важи да је

$$\widehat{R} = \frac{1}{\binom{T_X-1}{n-1}} \sum_{k=1}^{W} \binom{T_X-k-1}{n-2}\left(1-\frac{k}{T_Y}\right)^{m-1}, \tag{4.5}$$

где је $W = \min\{T_X - n + 1, s\}$, а s је највећи природан број мањи од T_Y. Ова формула важи за $T_Y > 1$. Ако $T_Y \in [0,1]$, онда је $\widehat{R} = 0$.

ЈНУМД оцена средње квадратне грешке ЈНУМД оцене за R је уствари ЈНУМД оцена дисперзије од $\widehat{R}$. Да би се она израчунала треба прво израчунати ЈНУМД оцену за R^2. Непристрасна оцена за R^2 је $I\{X_1 < Y_1, X_2 < Y_2\}$. Важи да је

$$\begin{aligned}
& E(I\{X_1 < Y_1, X_2 < Y_2\}|T_X = t_X, T_Y = t_Y) \\
= \ & P\{X_1 < Y_1, X_2 < Y_2 | T_X = t_X, T_Y = t_Y\} \\
= \ & \lim_{\epsilon \to 0+} P\{X_1 < Y_1, X_2 < Y_2 | T_X = t_X, t_Y \le T_Y < t_Y + \epsilon\} \\
= \ & \lim_{\epsilon \to 0+} \frac{P\{X_1 < Y_1, X_2 < Y_2, \sum\limits_{i=1}^{n} X_i = t_X, t_Y \le \sum\limits_{j=1}^{m} Y_j < t_Y + \epsilon\}}{P\{T_X = t_X, t_Y \le T_Y < t_Y + \epsilon\}} \\
= \ & \lim_{\epsilon \to 0+} \frac{\sum\limits_{k=2}^{q}\sum\limits_{r=1}^{k-1} P\{X_1 = r, Y_1 > r, X_2 = k-r, Y_2 > k-r, \sum\limits_{i=3}^{n} X_i = t_X - k,}{P\{T_X = t_X, t_Y \le T_Y < t_Y + \epsilon\}} \\
& t_Y \le Y_1 + Y_2 + \sum_{j=3}^{m} Y_j < t_Y + \epsilon\} \\
= \ & \lim_{\epsilon \to 0+} \frac{\sum\limits_{k=2}^{q}\sum\limits_{r=1}^{k-1} \Big(P\{X_1 = r\}P\{X_2 = k-r\}P\{\sum\limits_{i=3}^{n} X_i = t_X - k\}}{P\{T_X = t_X\}P\{t_Y \le T_Y < t_Y + \epsilon\}} \\
& \cdot P\{Y_1 > r, Y_2 > k-r, t_Y \le Y_1 + Y_2 + \sum_{j=3}^{m} Y_j < t_Y + \epsilon\}\Big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= \; & \lim_{\epsilon\to 0+} \frac{\sum\limits_{k=2}^{q}\sum\limits_{r=1}^{k-1}\Big[(1-p)^{r-1}p(1-p)^{k-r-1}p\binom{t_X-k-1}{n-3}p^{n-2}(1-p)^{t_X-k-n+2}}{\binom{t_X-1}{n-1}p^n(1-p)^{t_X-n}\int\limits_{t_Y}^{t_Y+\epsilon}\frac{\lambda^m y^{m-1}e^{-\lambda y}}{\Gamma(m)}dy} \\
& \cdot\Big(\int\limits_{0}^{t_Y+\epsilon-k}dz\int\limits_{r}^{t_Y+\epsilon-k+r-z}du\int\limits_{k-r}^{t_Y+\epsilon-u-z}\lambda e^{-\lambda u}\lambda e^{-\lambda v}\frac{\lambda^{m-2}z^{m-3}e^{-\lambda z}}{\Gamma(m-2)}dv \\
& -\int\limits_{0}^{t_Y-k}dz\int\limits_{r}^{t_Y-k+r-z}du\int\limits_{k-r}^{t_Y-u-z}\lambda e^{-\lambda u}\lambda e^{-\lambda v}\frac{\lambda^{m-2}z^{m-3}e^{-\lambda z}}{\Gamma(m-2)}dv\Big)\Big] \\
= \; & \lim_{\epsilon\to 0+} \frac{(m-1)(m-2)\sum\limits_{k=2}^{q}\sum\limits_{r=1}^{k-1}\Big[\binom{t_X-k-1}{n-3}}{\binom{t_X-1}{n-1}\lambda\int\limits_{t_Y}^{t_Y+\epsilon}y^{m-1}e^{-\lambda y}dy} \\
& \cdot\Big(\int\limits_{0}^{t_Y+\epsilon-k}z^{m-3}e^{-\lambda z}dz\int\limits_{r}^{t_Y+\epsilon-k+r-z}e^{-\lambda u}du\int\limits_{k-r}^{t_Y+\epsilon-u-z}\lambda e^{-\lambda v}dv \\
& -\int\limits_{0}^{t_Y-k}z^{m-3}e^{-\lambda z}dz\int\limits_{r}^{t_Y-k+r-z}e^{-\lambda u}du\int\limits_{k-r}^{t_Y-u-z}\lambda e^{-\lambda v}dv\Big)\Big] \\
= \; & \lim_{\epsilon\to 0+} \frac{(m-1)(m-2)\sum\limits_{k=2}^{q}\sum\limits_{r=1}^{k-1}\Big[\binom{t_X-k-1}{n-3}}{\binom{t_X-1}{n-1}\lambda\int\limits_{t_Y}^{t_Y+\epsilon}y^{m-1}e^{-\lambda y}dy} \\
& \cdot\Big(\int\limits_{0}^{t_Y+\epsilon-k}z^{m-3}e^{-\lambda z}dz\int\limits_{r}^{t_Y+\epsilon-k+r-z}e^{-\lambda u}\big(e^{-\lambda(k-r)}-e^{-\lambda(t_Y+\epsilon-u-z)}\big)du \\
& -\int\limits_{0}^{t_Y-k}z^{m-3}e^{-\lambda z}dz\int\limits_{r}^{t_Y-k+r-z}e^{-\lambda u}\big(e^{-\lambda(k-r)}-e^{-\lambda(t_Y-u-z)}\big)du\Big)\Big] \\
= \; & \lim_{\epsilon\to 0+} \frac{(m-1)(m-2)\sum\limits_{k=2}^{q}\sum\limits_{r=1}^{k-1}\Big[\binom{t_X-k-1}{n-3}}{\binom{t_X-1}{n-1}\lambda\int\limits_{t_Y}^{t_Y+\epsilon}y^{m-1}e^{-\lambda y}dy}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\cdot\Bigg(\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda(k-r)}\int\limits_0^{t_Y+\epsilon-k} z^{m-3}e^{-\lambda z}\big(e^{-\lambda r}-e^{-\lambda(t_Y+\epsilon-k+r-z)}\big)dz \\
&-\int\limits_0^{t_Y+\epsilon-k} z^{m-3}e^{-\lambda z}e^{-\lambda(t_Y+\epsilon-z)}(t_Y+\epsilon-k-z)dz \\
&-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda(k-r)}\int\limits_0^{t_Y-k} z^{m-3}e^{-\lambda z}\big(e^{-\lambda r}-e^{-\lambda(t_Y-k+r-z)}\big)dz \\
&+\int\limits_0^{t_Y-k} z^{m-3}e^{-\lambda z}e^{-\lambda(t_Y-z)}(t_Y-k-z)dz\Bigg)\Bigg]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \lim_{\epsilon\to 0+} & \frac{(m-1)(m-2)\sum\limits_{k=2}^{q}\sum\limits_{r=1}^{k-1}\binom{t_X-k-1}{n-3}\Big[\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda k}\int\limits_0^{t_Y+\epsilon-k} z^{m-3}e^{-\lambda z}dz}{\binom{t_X-1}{n-1}\lambda\int\limits_{t_Y}^{t_Y+\epsilon} y^{m-1}e^{-\lambda y}dy} \\
&-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda(t_Y+\epsilon)}\int\limits_0^{t_Y+\epsilon-k} z^{m-3}dz-e^{-\lambda(t_Y+\epsilon)}\Bigg((t_Y+\epsilon-k)\int\limits_0^{t_Y+\epsilon-k} z^{m-3}dz-\int\limits_0^{t_Y+\epsilon-k} z^{m-2}dz\Bigg) \\
&-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda k}\int\limits_0^{t_Y-k} z^{m-3}e^{-\lambda z}dz-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t_Y}\int\limits_0^{t_Y-k} z^{m-3}dz+e^{-\lambda t_Y}\Bigg((t_Y-k)\int\limits_0^{t_Y-k} z^{m-3}dz-\int\limits_0^{t_Y-k} z^{m-2}dz\Bigg)\Bigg]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \lim_{\epsilon\to 0+} & \frac{\sum\limits_{k=2}^{q}\sum\limits_{r=1}^{k-1}\binom{t_X-k-1}{n-3}\Big[\frac{1}{\lambda}(m-1)(m-2)e^{-\lambda k}\int\limits_{t_Y-k}^{t_Y+\epsilon-k} z^{m-3}e^{-\lambda z}dz}{\binom{t_X-1}{n-1}\lambda\int\limits_{t_Y}^{t_Y+\epsilon} y^{m-1}e^{-\lambda y}dy} \\
&-\frac{1}{\lambda}(m-1)e^{-\lambda(t_Y+\epsilon)}(t_Y+\epsilon-k)^{m-2}-e^{-\lambda(t_Y+\epsilon)}\Bigg((m-1)(t_Y+\epsilon-k)^{m-1} \\
&-(m-2)(t_Y+\epsilon-k)^{m-1}\Bigg)-\frac{1}{\lambda}(m-1)e^{-\lambda t_Y}(t_Y-k)^{m-2} \\
&+e^{-\lambda t_Y}\Bigg((m-1)(t_Y-k)^{m-1}-(m-2)(t_Y-k)^{m-1}\Bigg)\Bigg]
\end{aligned}
$$

$$
= \lim_{\epsilon\to 0+} \frac{\sum\limits_{k=2}^{q}\sum\limits_{r=1}^{k-1}\binom{t_X-k-1}{n-3}\Big[\frac{1}{\lambda}(m-1)(m-2)e^{-\lambda k}\int\limits_{t_Y-k}^{t_Y+\epsilon-k} z^{m-3}e^{-\lambda z}dz}{\binom{t_X-1}{n-1}\lambda\int\limits_{t_Y}^{t_Y+\epsilon} y^{m-1}e^{-\lambda y}dy}
$$

$$
-e^{-\lambda t_Y}\Big[\frac{1}{\lambda}(m-1)\Big(e^{-\lambda\epsilon}(t_Y+\epsilon-k)^{m-2}-(t_Y-k)^{m-2}\Big)
$$

$$
+\Big(e^{-\lambda\epsilon}(t_Y+\epsilon-k)^{m-1}-(t_Y-k)^{m-1}\Big)\Big]\Big],
$$

где је $q=\min\{t_X-n+2,s\}$, а s је, као и раније, највећи природан број мањи од t_Y. Користећи Лопиталово правило добија се да је

$$
E(I\{X_1<Y_1,X_2<Y_2\}|T_X=t_X,T_Y=t_Y)
$$

$$
= \lim_{\epsilon\to 0+} \frac{\sum\limits_{k=2}^{q}\sum\limits_{r=1}^{k-1}\binom{t_X-k-1}{n-3}\Big[\frac{1}{\lambda}(m-1)(m-2)e^{-\lambda k}(t_Y+\epsilon-k)^{m-3}e^{-\lambda(t_Y+\epsilon-k)}}{\binom{t_X-1}{n-1}\lambda(t_Y+\epsilon)^{m-1}e^{-\lambda(t_Y+\epsilon)}}
$$

$$
-e^{-\lambda t_Y}\Big[\frac{1}{\lambda}(m-1)e^{-\lambda\epsilon}\big(-\lambda(t_Y+\epsilon-k)^{m-2}+(m-2)(t_Y+\epsilon-k)^{m-3}\big)
$$

$$
+e^{-\lambda\epsilon}\big(-\lambda(t_Y+\epsilon-k)^{m-1}+(m-1)(t_Y+\epsilon-k)^{m-2}\big)\Big]\Big]
$$

$$
= \frac{\sum\limits_{k=2}^{q}\sum\limits_{r=1}^{k-1}\binom{t_X-k-1}{n-3}\Big[\frac{1}{\lambda}(m-1)(m-2)(t_Y-k)^{m-3}-\frac{1}{\lambda}(m-1)\Big(-\lambda(t_Y-k)^{m-2}}{\binom{t_X-1}{n-1}\lambda t_Y^{m-1}}
$$

$$
+(m-2)(t_Y-k)^{m-3}\Big)+\lambda(t_Y-k)^{m-1}-(m-1)(t_Y-k)^{m-2}\Big]
$$

$$
= \frac{\sum\limits_{k=2}^{q}\sum\limits_{r=1}^{k-1}\binom{t_X-k-1}{n-3}(t_Y-k)^{m-1}}{\binom{t_X-1}{n-1}t_Y^{m-1}}.
$$

На основу теореме 2.4 добија се да за ЈНУМД оцену за R^2 важи да је

$$
\widehat{R^2}=\frac{1}{\binom{T_X-1}{n-1}}\sum_{k=2}^{Q}\binom{T_X-k-1}{n-3}(k-1)\Big(1-\frac{k}{T_Y}\Big)^{m-1}, \tag{4.6}
$$

где је $Q=\min\{T_X-n+2,s\}$, а s је највећи природан број мањи од T_Y. Ова формула важи за $T_Y>2$. Ако $T_Y\in[0,2]$, онда је $\widehat{R^2}=0$.

Коначно, на основу теореме 2.7 добија се да за ЈНУМД оцену дисперзије од $\widehat{R}$, а самим тим за ЈНУМД оцену средње квадратне грешке ЈНУМД оцене за R, важи да је

$$\widehat{D}(\widehat{R}) = (\widehat{R})^2 - \widehat{R^2}, \tag{4.7}$$

где су $\widehat{R}$ и $\widehat{R^2}$ оцене дефинисане једнакостима (4.5) и (4.6).

4.4 Бајесова оцена

У овом поглављу ће бити разматрана Бајесова оцена параметра поузданости R у односу на функцију губитака која мери квадратно одступање. Како је фамилија бета расподела конјугована фамилији геометријских расподела, а фамилија гама расподела фамилији експоненцијалних расподела, то се претпоставља да непознати параметар p има априорну бета $\mathcal{B}(a, b)$, $a, b \in \mathbb{N}$, расподелу, а непознати параметар λ априорну гама $\Gamma(\alpha, \beta)$, $\alpha \in \mathbb{N}$, $\beta > 0$, расподелу, где су a, b, α и β познати параметри. Како је природно претпоставити да су расподеле за p и λ независне, то следи да за заједничку априорну расподелу важи да је

$$h(p, \lambda) \propto p^{a-1}(1-p)^{b-1}\lambda^{\alpha-1}e^{-\frac{\lambda}{\beta}}, \quad p \in (0,1), \lambda > 0. \tag{4.8}$$

На основу формуле (2.22), коришћењем једнакости (4.2) и (4.8) добија се да за апостериорну расподелу важи да је

$$\begin{aligned} h(p, \lambda | \mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{(1-p)^{t_X - n} p^n \lambda^m e^{-\lambda t_Y} p^{a-1}(1-p)^{b-1}\lambda^{\alpha-1}e^{-\frac{\lambda}{\beta}}}{\int\limits_0^1 \int\limits_0^\infty (1-p)^{t_X - n} p^n \lambda^m e^{-\lambda t_Y} p^{a-1}(1-p)^{b-1}\lambda^{\alpha-1}e^{-\frac{\lambda}{\beta}} d\lambda \, dp} \\ &= \frac{p^{n+a-1}(1-p)^{t_X-n+b-1}\lambda^{m+\alpha-1}e^{-\lambda(t_Y+\frac{1}{\beta})}}{\int\limits_0^1 \int\limits_0^\infty p^{n+a-1}(1-p)^{t_X-n+b-1}\lambda^{m+\alpha-1}e^{-\lambda(t_Y+\frac{1}{\beta})} d\lambda \, dp}, \end{aligned}$$

где $p \in (0,1)$, а $\lambda > 0$. Увођењем, поједностављења ради, ознака A, B, C и D, где је

$$A = n + a, \quad B = t_X - n + b, \quad C = m + \alpha, \quad D = t_Y + \frac{1}{\beta}, \tag{4.9}$$

коначно се добија да је

$$h(p, \lambda | \mathbf{x}, \mathbf{y}) = K p^{A-1}(1-p)^{B-1} \lambda^{C-1} e^{-\lambda D},$$

где је

$$\begin{aligned} K &= \left(\int_0^1 p^{A-1}(1-p)^{B-1} dp \int_0^\infty \lambda^{C-1} e^{-\lambda D} d\lambda \right)^{-1} \\ &= \left(B(A,B) \frac{1}{D^C} \int_0^\infty s^{C-1} e^{-s} ds \right)^{-1} \\ &= \frac{\Gamma(A+B) D^C}{\Gamma(A)\Gamma(B)\Gamma(C)} = \frac{(A+B-1)! D^C}{(A-1)!(B-1)!(C-1)!}. \end{aligned}$$

За одређивање апостериорне расподеле за R користи се трансформација случајног вектора (p, λ) у случајни вектор (R, V), где је $V = e^\lambda - 1 + p$. Како је $R = \frac{p}{e^\lambda - 1 + p}$, то је $p = RV$, а $\lambda = \ln(1 + V(1-R))$, па за Јакобијан трансформације важи да је

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial p}{\partial R} & \frac{\partial p}{\partial V} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial R} & \frac{\partial \lambda}{\partial V} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} V & R \\ \frac{-V}{1+V(1-R)} & \frac{1-R}{1+V(1-R)} \end{vmatrix} = \frac{V}{1+V(1-R)}.$$

Следи да за заједничку апостериорну расподелу за R и V важи да је

$$\begin{aligned} h_{R,V}(r, v | \mathbf{x}, \mathbf{y}) &= h\big(p(r,v), \lambda(r,v) | \mathbf{x}, \mathbf{y}\big) |J| \\ &= K(rv)^{A-1}(1-rv)^{B-1}(\ln(1+v(1-r)))^{C-1} e^{-D\ln(1+v(1-r))} \frac{v}{1+v(1-r)} \\ &= \frac{K r^{A-1} v^A (1-rv)^{B-1} (\ln(1+v(1-r)))^{C-1}}{(1+v(1-r))^{D+1}}, \end{aligned}$$

где $r \in (0,1)$, а $0 < w < \frac{1}{r}$. Апостериорна расподела за R добија се интеграцијом заједничке апостериорне расподеле за R и V по v. Коришћењем биномне формуле, смена $\ln(1 + v(1-r)) = t$ и $-t(D - s - l) = z$, те применом парцијалне интеграције $C-1$ пута добија се да је

$$\begin{aligned}
h_R(r|\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \int\limits_0^{\frac{1}{r}} \frac{Kr^{A-1}v^A(1-rv)^{B-1}(\ln(1+v(1-r)))^{C-1}}{(1+v(1-r))^{D+1}}dv \\
&= Kr^{A-1}\int\limits_0^{-\ln r}\Big(\frac{e^t-1}{1-r}\Big)^A\Big(1-r\frac{e^t-1}{1-r}\Big)^{B-1}\frac{t^{C-1}}{e^{t(D+1)}}\frac{e^t}{1-r}dt \\
&= K\frac{r^{A-1}}{(1-r)^{A+B}}\int\limits_0^{-\ln r}(e^t-1)^A(1-re^t)^{B-1}t^{C-1}e^{-tD}dt \\
&= K\frac{r^{A-1}}{(1-r)^{A+B}}\int\limits_0^{-\ln r}\sum_{s=0}^{A}\binom{A}{s}e^{ts}(-1)^{A-s}\sum_{l=0}^{B-1}\binom{B-1}{l}(-re^t)^l t^{C-1}e^{-tD}dt \\
&= K\sum_{s=0}^{A}\sum_{l=0}^{B-1}\binom{A}{s}\binom{B-1}{l}\frac{(-1)^{A-s+l}r^{A+l-1}}{(1-r)^{A+B}}\int\limits_0^{-\ln r}t^{C-1}e^{-t(D-s-l)}dt \\
&= K\sum_{s=0}^{A}\sum_{l=0}^{B-1}\binom{A}{s}\binom{B-1}{l}\frac{(-1)^{A-s+l}r^{A+l-1}}{(1-r)^{A+B}(s+l-D)^C}\int\limits_0^{(D-s-l)\ln r}z^{C-1}e^z dz \\
&= K\sum_{s=0}^{A}\sum_{l=0}^{B-1}\binom{A}{s}\binom{B-1}{l}\frac{(-1)^{A-s+l+C-1}(C-1)!}{(1-r)^{A+B}(s+l-D)^C} \\
&\quad\cdot\Big(r^{A+D-s-1}\sum_{k=0}^{C-1}\frac{(s+l-D)^{C-1-k}}{(C-1-k)!}(\ln r)^{C-1-k}-r^{A+l-1}\Big),
\end{aligned}$$

где $r\in(0,1)$.

За функцију губитака која мери квадратно одступање Бајесова оцена параметра поузданости R једнака је условном математичком очекивању $E(R|\mathbf{X},\mathbf{Y})$. Како се у овом случају то очекивање не може експлицитно израчунати, у следећем потпоглављу ће бити одређена Бајесова оцена параметра поузданости R коришћењем Линдлијеве апроксимације.

4.4.1 Линдлијева апроксимација

Lindley (1980) је развио метод који апроксимира вредност количника два интеграла задатог у облику

$$\frac{\int w(\theta)e^{L(\theta)}d\theta}{\int \nu(\theta)e^{L(\theta)}d\theta},$$

где је $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$ k-димензионални реални параметар, $L(\theta)$ је логаритам функције веродостојности, а $w(\theta)$ и $\nu(\theta)$ су произвољне функције параметра θ. Апостериорно математичко очекивање, тј. условно математичко очекивање $U(\theta)$ при услову $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ је један пример таквог количника јер је

$$E(U(\theta)|\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\int U(\theta)e^{Q(\theta)}d\theta}{\int e^{Q(\theta)}d\theta},$$

где је $Q(\theta) = L(\theta) + \rho(\theta)$, а $\rho(\theta)$ је логаритам априорне расподеле за θ. Применом Линдлијеве апроксимације на овом примеру за случај дводимензионалног параметра $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ добија се да важи да је

$$E(U(\theta)|\mathbf{x}, \mathbf{y}) \approx U(\theta) + \frac{1}{2}(S + Q_{30}S_{12} + Q_{21}C_{12} + Q_{12}C_{21} + Q_{03}S_{21}), \quad (4.10)$$

где је

$$S = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} U_{ij}\tau_{ij}, \quad (4.11)$$

$U_i = \frac{\partial U}{\partial \theta_i}$, $U_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial \theta_i \partial \theta_j}$, $i, j \in \{1, 2\}$, коефицијент τ_{ij} је (i, j) елемент матрице инверзне матрици $Q^* = (-Q^*_{ij})$, $i, j \in \{1, 2\}$, а $Q^*_{ij} = \frac{\partial^2 Q}{\partial \theta_i \partial \theta_j}$,

$$Q_{\eta\xi} = \frac{\partial^{\eta+\xi} Q}{\partial \theta_1^{\eta} \partial \theta_2^{\xi}}, \quad (4.12)$$

$\eta, \xi \in \{0, 1, 2, 3\}$, $\eta + \xi = 3$, и за $i \neq j$ је

$$S_{ij} = (U_i\tau_{ii} + U_j\tau_{ij})\tau_{ii}, \quad C_{ij} = 3U_i\tau_{ii}\tau_{ij} + U_j(\tau_{ii}\tau_{jj} + 2\tau_{ij}^2). \quad (4.13)$$

Вредност десне стране израза (4.10) се рачуна у тачки $(\overline{\theta}_1, \overline{\theta}_2)$, максимуму функције $Q(\theta_1, \theta_2)$.

За условно математичко очекивање параметра поузданости R при услову $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ важи да је

$$\begin{aligned} E(R|\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \int\int R(p,\lambda)h(p,\lambda|\mathbf{x},\mathbf{y})dpd\lambda = \frac{\int\int R(p,\lambda)h(p,\lambda)e^{L(p,\lambda)}dpd\lambda}{\int\int h(p,\lambda)e^{L(p,\lambda)}dpd\lambda} \\ &= = \frac{\int\int R(p,\lambda)e^{L(p,\lambda)+\ln h(p,\lambda)}dpd\lambda}{\int\int e^{L(p,\lambda)+\ln h(p,\lambda)}dpd\lambda}. \end{aligned}$$

На овај израз може се применити Линдлијева апроксимација (4.10) узимајући да је $\theta = (p,\lambda)$, $U = R = \frac{p}{e^{\lambda}-1+p}$ и

$$\begin{aligned} Q(p,\lambda) &= \ln p^{A-1}(1-p)^{B-1}\lambda^{C-1}e^{-\lambda D} \\ &= (A-1)\ln p + (B-1)\ln(1-p) + (C-1)\ln\lambda - \lambda D, \end{aligned} \tag{4.14}$$

где су A, B, C и D дефинисане једнакостима (4.9). Из једнакости (4.14) следи да је

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial p} &= \frac{A-1}{p} - \frac{B-1}{1-p}, \\ \frac{\partial Q}{\partial \lambda} &= \frac{C-1}{\lambda} - D. \end{aligned}$$

Изједначавањем ових израза са нулом и решавањем добијених једначина добија се да је

$$\overline{p} = \frac{A-1}{A+B-2}, \quad \overline{\lambda} = \frac{C-1}{D}, \tag{4.15}$$

максимум функције $Q(p,\lambda)$. Лако се израчунава да је

$$U_1 = \frac{\partial R}{\partial p} = \frac{e^{\lambda}-1}{(e^{\lambda}-1+p)^2}, \qquad U_2 = \frac{\partial R}{\partial \lambda} = -\frac{pe^{\lambda}}{(e^{\lambda}-1+p)^2}, \tag{4.16}$$

$$U_{11} = \frac{\partial^2 R}{\partial p^2} = -2\frac{e^{\lambda}-1}{(e^{\lambda}-1+p)^3}, \qquad U_{22} = \frac{\partial^2 R}{\partial \lambda^2} = \frac{pe^{\lambda}(e^{\lambda}-p+1)}{(e^{\lambda}-1+p)^3}. \tag{4.17}$$

Како је

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q}{\partial p^2} &= -\frac{A-1}{p^2} - \frac{B-1}{(1-p)^2}, \\ \frac{\partial^2 Q}{\partial p \partial \lambda} &= 0, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \lambda^2} \;=\; -\frac{C-1}{\lambda^2},$$

то је

$$Q^* = \begin{bmatrix} \frac{A-1}{p^2} + \frac{B-1}{(1-p)^2} & 0 \\ 0 & \frac{C-1}{\lambda^2} \end{bmatrix},$$

па је

$$(Q^*)^{-1} = \left(\left(\frac{A-1}{p^2} + \frac{B-1}{(1-p)^2}\right)\frac{C-1}{\lambda^2}\right)^{-1} \begin{bmatrix} \frac{C-1}{\lambda^2} & 0 \\ 0 & \frac{A-1}{p^2} + \frac{B-1}{(1-p)^2} \end{bmatrix}.$$

Одатле следи да је

$$\tau_{11} = \left(\frac{A-1}{p^2} + \frac{B-1}{(1-p)^2}\right)^{-1}, \quad \tau_{22} = \frac{\lambda^2}{C-1}, \quad \tau_{12} = \tau_{21} = 0. \tag{4.18}$$

На основу једнакости (4.12) добија се да је

$$Q_{30} = \frac{\partial^3 Q}{\partial p^3} = 2\left(\frac{A-1}{p^3} - \frac{B-1}{(1-p)^3}\right), Q_{03} = \frac{\partial^3 Q}{\partial \lambda^3} = 2\frac{C-1}{\lambda^3}, Q_{21} = Q_{12} = 0. \tag{4.19}$$

Коначно, користећи изразе (4.10), (4.11) и (4.13) добија се да за Линдлијеву апроксимацију Бајесове оцене параметра поузданости R важи да је

$$\check{R}_{Lindley} = R + \frac{1}{2}(U_{11}\tau_{11} + U_{22}\tau_{22} + Q_{30}U_1\tau_{11}^2 + Q_{03}U_2\tau_{22}^2),$$

где су сви изрази на десној страни ове једнакости дефинисани једнакостима (4.1) и (4.16) – (4.19) и њихове вредности се рачунају у тачки $(\overline{p}, \overline{\lambda})$ одређеној једнакостима (4.15).

4.5 Интервали поверења

4.5.1 Асимптотски интервал поверења

Прво ће бити одређена заједничка асимптотска расподела МВ оцена $\widetilde{p}$ и $\widetilde{\lambda}$ непознатих параметара p и λ и асимптотска расподела МВ оцене $\widetilde{R}$

параметра поузданости R, а затим на основу тога асимптотски интервал поверења за R.

Теорема 4.1 *Нека* $\frac{n}{m} \to s$ *кад* $n \to \infty$, $m \to \infty$, *где је* s *позитиван реалан број. Тада важи*

$$(\sqrt{n}(\widetilde{p} - p), \sqrt{n}(\widetilde{\lambda} - \lambda)) \xrightarrow{R} \mathcal{N}_2(\mathbf{0}, J)$$

кад $n \to \infty$, *где су* $\widetilde{p}$ *и* $\widetilde{\lambda}$ *МВ оцене непознатих параметара* p *и* λ *дефинисане једнакостима* (4.3), *а*

$$J = \begin{bmatrix} p^2(1-p) & 0 \\ 0 & s\lambda^2 \end{bmatrix}. \tag{4.20}$$

Доказ: Као што је показано у доказу теореме 3.1, важи да

$$\sqrt{n}(\widetilde{p} - p) \xrightarrow{R} \mathcal{N}(0, p^2(1-p)) \tag{4.21}$$

кад $n \to \infty$.

Како је

$$f_Y(y;\lambda) = \lambda e^{-\lambda y},$$

то је

$$\ln f_Y(y;\lambda) = \ln \lambda - \lambda y.$$

Следи да је

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln f_Y(y;\lambda)}{\partial \lambda} &= \frac{1}{\lambda} - y, \\ \frac{\partial^2 \ln f_Y(y;\lambda)}{\partial \lambda^2} &= -\frac{1}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Одавде се добија да је

$$E\left(\frac{\partial^2 \ln f_Y(y;\lambda)}{\partial \lambda^2}\right) = -\frac{1}{\lambda^2}, \tag{4.22}$$

па на основу теореме 2.8 важи да

$$\sqrt{m}(\widetilde{\lambda}-\lambda) \xrightarrow{R} \mathcal{N}(0,\lambda^2)$$

кад $m \to \infty$. Како је

$$\sqrt{n}(\widetilde{\lambda}-\lambda) = \sqrt{\frac{n}{m}}\sqrt{m}(\widetilde{\lambda}-\lambda)$$

и $\frac{n}{m} \to s$ кад $n \to \infty$, $m \to \infty$, то

$$\sqrt{n}(\widetilde{\lambda}-\lambda) \xrightarrow{R} \mathcal{N}(0,s\lambda^2) \tag{4.23}$$

кад $n \to \infty$.

Коначно, користећи независност X и Y, а самим тим и независност $\widetilde{p}$ и $\widetilde{\lambda}$, из израза (4.21) и (4.23) следи тврђење теореме. ■

Теорема 4.2 *Нека $\frac{n}{m} \to s$ кад $n \to \infty$, $m \to \infty$, где је s позитиван реалан број. Тада важи*

$$\sqrt{n}(\widetilde{R}-R) \xrightarrow{R} \mathcal{N}\left(0, p^2\frac{(1-p)(e^\lambda-1)^2+s\lambda^2e^{2\lambda}}{(e^\lambda-1+p)^4}\right) \tag{4.24}$$

кад $n \to \infty$, где је $\widetilde{R}$ МВ оцена параметра поузданости R дефинисана једнакошћу (4.4).

Доказ: Како је $R = \frac{p}{e^\lambda-1+p}$, то је

$$\frac{\partial R}{\partial p} = \frac{e^\lambda-1}{(e^\lambda-1+p)^2}, \quad \frac{\partial R}{\partial \lambda} = -\frac{pe^\lambda}{(e^\lambda-1+p)^2}.$$

Ови парцијални изводи су непрекидни и нису једнаки нули. Нека је

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial R}{\partial p} & \frac{\partial R}{\partial \lambda} \end{bmatrix} = \frac{1}{(e^\lambda-1+p)^2}\begin{bmatrix} e^\lambda-1 & -pe^\lambda \end{bmatrix}.$$

На основу теорема 2.9 и 4.1 следи да

$$\sqrt{n}(\widetilde{R}-R) \xrightarrow{R} \mathcal{N}(0,BJB^T)$$

кад $n \to \infty$, где је матрица J дефинисана једнакошћу (4.20). Како је

$$\begin{aligned}
BJB^T &= \frac{1}{(e^\lambda-1+p)^2}\begin{bmatrix} e^\lambda-1 & -pe^\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p^2(1-p) & 0 \\ 0 & s\lambda^2 \end{bmatrix}\frac{1}{(e^\lambda-1+p)^2}\begin{bmatrix} e^\lambda-1 \\ -pe^\lambda \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{(e^\lambda-1+p)^4}\begin{bmatrix} e^\lambda-1 & -pe^\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p^2(1-p)(e^\lambda-1) \\ -s\lambda^2 pe^\lambda \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{(e^\lambda-1+p)^4}(p^2(1-p)(e^\lambda-1)^2 + p^2 s\lambda^2 e^{2\lambda}) \\
&= p^2\frac{(1-p)(e^\lambda-1)^2 + s\lambda^2 e^{2\lambda}}{(e^\lambda-1+p)^4},
\end{aligned}$$

то следи тврђење теореме. ■

Као што је већ појашњено у потпоглављу 3.5.1, за велико n се за оцену средње квадратне грешке МВ оцене $\widetilde{R}$ параметра поузданости R може узети МВ оцена диперзије од $\widetilde{R}$. Ако се у изразу (4.24) означи да је $\sigma_R^2 = p^2\frac{(1-p)(e^\lambda-1)^2+s\lambda^2e^{2\lambda}}{(e^\lambda-1+p)^4}$, онда за дисперзију од $\widetilde{R}$ важи да се асимптотски понаша као $\frac{\sigma_R^2}{n}$, па се за велико n може узети да за МВ оцену дисперзије од $\widetilde{R}$ важи да је

$$\widetilde{D}(\widetilde{R}) \approx \frac{\widetilde{\sigma}_R^2}{n}, \tag{4.25}$$

где је

$$\widetilde{\sigma}_R^2 = \widetilde{p}^2\frac{(1-\widetilde{p})(e^{\widetilde{\lambda}}-1)^2 + s\widetilde{\lambda}^2 e^{2\widetilde{\lambda}}}{(e^{\widetilde{\lambda}}-1+\widetilde{p})^4}, \tag{4.26}$$

а $\widetilde{p}$ и $\widetilde{\lambda}$ су оцене дефинисане једнакостима (4.3).

На основу теореме 4.2 може се одредити асимптотски интервал поверења за R. Из израза (4.24) следи да је

$$P\Big\{-z_{\frac{1+\gamma}{2}} < \frac{\widetilde{R}-R}{\widetilde{\sigma}_R}\sqrt{n} < z_{\frac{1+\gamma}{2}}\Big\} \approx \gamma,$$

где је z_α α-квантил нормалне $\mathcal{N}(0,1)$ расподеле. Одавде се добија да је

$$P\Big\{\widetilde{R} - z_{\frac{1+\gamma}{2}}\frac{\widetilde{\sigma}_R}{\sqrt{n}} < R < \widetilde{R} + z_{\frac{1+\gamma}{2}}\frac{\widetilde{\sigma}_R}{\sqrt{n}}\Big\} \approx \gamma.$$

Према томе, $100\gamma\%$ асимптотски интервал поверења за параметар поузданости R је

$$I_R^{(ASIM)} = \left(\widetilde{R} - z_{\frac{1+\gamma}{2}}\frac{\widetilde{\sigma}_R}{\sqrt{n}}, \widetilde{R} + z_{\frac{1+\gamma}{2}}\frac{\widetilde{\sigma}_R}{\sqrt{n}}\right), \tag{4.27}$$

где су $\widetilde{R}$ и $\widetilde{\sigma}_R$ МВ оцене дефинисане једнакостима (4.4) и (4.26).

4.5.2 *Bootstrap-p* интервал поверења

У односу на модел са геометријском и Пуасоновом компонентом алгоритам за одређивање параметарског *bootstrap-p* интервала поверења за параметар поузданости R код овог модела има мале измене везане за особености самог модела, и то у прва два корака.

1. На основу реализованих почетних узорака $(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $(y_1, y_2, ..., y_m)$ оценити МВ оценама $\widetilde{p}$ и $\widetilde{\lambda}$ непознате параметре p и λ користећи једнакости (4.3).

2. Извући узорке $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ из геометријске $\mathcal{G}(\widetilde{p})$ расподеле и $(y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*)$ из експоненцијалне $\mathcal{E}(\widetilde{\lambda})$ расподеле и на основу та два узорка користећи једнакост (4.4) израчунати $\widetilde{R}^*$, МВ оцену за R.

3. Поновити N пута корак 2. Добијене одговарајуће вредности $\widetilde{R}_i^*$, $1 \leq i \leq N$, поређати у неопадајући низ.

4. За $100\gamma\%$ *bootstrap-p* интервал поверења за параметар поузданости R узима се
$$I_R^{(BOOTp)} = \left(\widetilde{R^*}^{(\frac{1-\gamma}{2})}, \widetilde{R^*}^{(\frac{1+\gamma}{2})}\right),$$
где је $\widetilde{R^*}^{(\alpha)}$ α-квантил тог низа, тј. вредност која је на месту $N\alpha$ по реду у том низу. Ако $N\alpha$ није природан број, уз претпоставку да је $\alpha \leq 0.5$, уместо $N\alpha$ узима се највећи природан број мањи или једнак од $(N + 1)\alpha$.

4.6 Симулације и закључак

За упоређивање различитих тачкастих и интервалних оцена параметра поузданости R користе се симулације аналогне онима из поглавља 3.6.

За фиксиране вредности n, m, p и λ врши се следећа процедура. Бира се узорак $\mathbf{x}$ обима n из геометријске $\mathcal{G}(p)$ расподеле и узорак $\mathbf{y}$ обима m из експоненцијалне $\mathcal{E}(\lambda)$ расподеле. На основу тих узорака рачунају се МВ оцена параметра поузданости R и оцена њене стандардне грешке (корен оцене средње квадратне грешке) користећи једнакости (4.4) и (4.25), као и ЈНУМД оцена параметра поузданости R и оцена њене стандардне грешке користећи једнакости (4.5) и (4.7).

Како параметри априорне расподеле нису познати и требало би их додатно оцењивати, Бајесова оцена се рачуна коришћењем неинформативне Џефрисове априорне расподеле. На основу поглавља 3.6 за Џефрисову априорну расподелу за p важи да је $h_p(p) \propto p^{-1}(1-p)^{-\frac{1}{2}}$, док за апостериорну расподелу за p важи да је

$$h_p(p|\mathbf{x}) = \frac{p^{n-1}(1-p)^{t_x-n-\frac{1}{2}}}{B(n, t_x - n + \frac{1}{2})}, \quad 0 < p < 1.$$

На основу израза (2.23) и једнакости (2.24) и (4.22), добија се да за Џефрисову априорну расподелу за λ важи да је $h_\lambda(\lambda) \propto \lambda^{-1}$. Коришћењем израза (2.20) добија се да за апостериорну расподелу за λ важи да је

$$\begin{aligned} h_\lambda(\lambda|\mathbf{y}) &= \frac{\lambda^{-1}\lambda^m e^{-\lambda t_y}}{\int\limits_0^\infty \lambda^{-1}\lambda^m e^{-\lambda t_y} d\lambda} = \frac{\lambda^{m-1} e^{-\lambda t_y}}{\int\limits_0^\infty \lambda^{m-1} e^{-\lambda t_y} d\lambda} = \frac{t_y^m \lambda^{m-1} e^{-\lambda t_y}}{\int\limits_0^\infty s^{m-1} e^{-s} ds} \\ &= \frac{t_y^m \lambda^{m-1} e^{-\lambda t_y}}{\Gamma(m)}, \quad \lambda > 0. \end{aligned}$$

На основу свега тога, из бета $\mathcal{B}(n, t_x - n + \frac{1}{2})$ расподеле бира се апостериорна вредност за p, а из гама $\mathit{\Gamma}(m, \frac{1}{t_y})$ расподеле бира се апостериорна вредност за λ. Коришћењем једнакости (4.1) израчунава се вредност за R. Бајесова оцена параметра поузданости R се рачуна као аритметичка средина свих вредности R које се добијају понављањем бирања апостериорних вредности p и λ и израчунавањем вредности R, у овом случају, 5000 пута. Оцена стандардне грешке Бајесове оцене се добија као стандардно одступање израчунатих вредности за R.

Асимптотски интервал поверења за параметар поузданости R одређује се на основу једнакости (4.27), а *bootstrap-p* интервал поверења коришћењем алгоритма из потпоглавља 4.5.2 (у овим симулацијама коришћено $N = 1000$). Границе Бајесовог интервала поверења се рачунају као одговарајући квантили низа израчунатих вредности за R које се помињу код рачунања Бајесове оцене параметра поузданости R.

За разне вредности n, m, p и λ ова процедура је поновљена по 5000 пута, а резултати симулација су дати у табелама 4.1 и 4.2.

У табели 4.1 дате су аритметичке средине тачкастих оцена параметра поузданости R и аритметичке средине оцена њихових стандардних грешака. За скоро све случајеве за $(n, m) \in \{(10, 10), (10, 20), (20, 10), (20, 20)\}$ и већину случајева за $(n, m) = (100, 100)$ ЈНУМД оцена је очекивано најближа правој вредности R. За сваку комбинацију обима узорака ЈНУМД и Бајесова оцена у приближно истом броју случајева имају најмању вредност стандардне грешке. Кад нису најмање, вредности стандардних грешака и ЈНУМД и Бајесове оцене су обично највеће. У највећем броју случајева МВ оцена има вредност стандардне грешке која је средња међу ове три оцене. За велике вредности обима узорака, $(n, m) = (100, 100)$, оцене стандардних грешака скоро да се и не разликују, а за мале и велике вредности R, $R \leq 0.1043$ или $R \geq 0.8026$, без обзира на величине узорака, ЈНУМД оцена је и најближа правој вредности R и има најмању стандардну грешку од све три оцене.

У табели 4.2 дате су аритметичке средине доњих и горњих граница 95% интервала поверења, као и проценти прекривања ових интервала. У скоро свим случајевима највећи проценат прекривања имају Бајесови интервали поверења. Најмањи проценат прекривања имају асимптотски интервали поверења, сем за велике вредности p и мале вредности λ, $p = 0.9$, $\lambda \leq 0.5$, када је њихов проценат прекривања нешто бољи него код *bootstrap-p* интервала поверења. За велике вредности обима узорака, $(n, m) = (100, 100)$, проценат прекривања Бајесових интервала поверења је опет највећи, мада су у тим случајевима проценти прекривања сва три типа интервала поверења скоро изједначени.

На основу свега овога може се закључити да је за тачкасто оцењивање параметра поузданости R и код овог модела најбоље користити ЈНУМД оцену, а за интервално оцењивање Бајесов интервал поверења.

Табела 4.1: Тачкасте оцене за R и њихове стандардне грешке

					МВ		ЈНУМД		Бајесова	
n	m	p	λ	R	$\widetilde{R}$	$sg(\widetilde{R})$	$\widehat{R}$	$sg(\widehat{R})$	$\check{R}$	$sg(\check{R})$
		0.2	0.1	0.6554	0.6474	0.0955	0.6575	0.1004	0.6419	0.0952
		0.5	0.1	0.8262	0.8144	0.0591	0.8267	0.0585	0.8071	0.0618
		0.9	0.1	0.8954	0.8847	0.0352	0.8947	0.0342	0.8798	0.0374
		0.2	0.2	0.4746	0.4704	0.1068	0.4742	0.1145	0.4718	0.1050
		0.5	0.2	0.6931	0.6771	0.0877	0.6918	0.0908	0.6712	0.0881
		0.9	0.2	0.8026	0.7869	0.0603	0.8028	0.0600	0.7806	0.0621
		0.2	0.5	0.2357	0.2416	0.0862	0.2373	0.0889	0.2516	0.0878
10	10	0.5	0.5	0.4353	0.4275	0.1077	0.4371	0.1155	0.4310	0.1060
		0.9	0.5	0.5811	0.5620	0.0997	0.5829	0.1044	0.5598	0.0986
		0.2	1	0.1043	0.1096	0.0539	0.1041	0.0516	0.1210	0.0591
		0.5	1	0.2254	0.2260	0.0910	0.2268	0.0949	0.2383	0.0927
		0.9	1	0.3437	0.3282	0.1082	0.3417	0.1163	0.3370	0.1068
		0.2	2	0.0304	0.0344	0.0242	0.0303	0.0204	0.0428	0.0306
		0.5	2	0.0726	0.0771	0.0502	0.0719	0.0462	0.0917	0.0580
		0.9	2	0.1235	0.1271	0.0746	0.1253	0.0745	0.1448	0.0805
		0.2	0.1	0.6554	0.6510	0.0808	0.6529	0.0838	0.6414	0.0820
		0.5	0.1	0.8262	0.8206	0.0468	0.8260	0.0463	0.8120	0.0503
		0.9	0.1	0.8954	0.8908	0.0247	0.8955	0.0242	0.8855	0.0271
		0.2	0.2	0.4746	0.4762	0.0902	0.4730	0.0953	0.4712	0.0892
		0.5	0.2	0.6931	0.6870	0.0697	0.6927	0.0712	0.6776	0.0717
		0.9	0.2	0.8026	0.7947	0.0431	0.8023	0.0429	0.7870	0.0459
		0.2	0.5	0.2357	0.2451	0.0715	0.2376	0.0734	0.2474	0.0713
10	20	0.5	0.5	0.4353	0.4349	0.0858	0.4365	0.0902	0.4310	0.0850
		0.9	0.5	0.5811	0.5699	0.0728	0.5800	0.0746	0.5623	0.0740
		0.2	1	0.1043	0.1113	0.0434	0.1052	0.0423	0.1161	0.0452
		0.5	1	0.2254	0.2280	0.0710	0.2253	0.0733	0.2312	0.0710
		0.9	1	0.3437	0.3388	0.0804	0.3453	0.0838	0.3379	0.0799
		0.2	2	0.0304	0.0336	0.0184	0.0304	0.0164	0.0376	0.0208
		0.5	2	0.0726	0.0769	0.0380	0.0727	0.0363	0.0834	0.0408
		0.9	2	0.1235	0.1247	0.0547	0.1234	0.0550	0.1317	0.0565
		0.2	0.1	0.6554	0.6443	0.0862	0.6574	0.0899	0.6453	0.0849
		0.5	0.1	0.8262	0.8132	0.0550	0.8262	0.0547	0.8109	0.0553
		0.9	0.1	0.8954	0.8866	0.0340	0.8964	0.0331	0.8846	0.0346
		0.2	0.2	0.4746	0.4673	0.0968	0.4763	0.1025	0.4744	0.0956
		0.5	0.2	0.6931	0.6767	0.0819	0.6931	0.0844	0.6768	0.0808
		0.9	0.2	0.8026	0.7865	0.0593	0.8025	0.0591	0.7847	0.0593
		0.2	0.5	0.2357	0.2353	0.0784	0.2362	0.0806	0.2484	0.0812
20	10	0.5	0.5	0.4353	0.4207	0.1022	0.4332	0.1086	0.4297	0.1007
		0.9	0.5	0.5811	0.5582	0.0991	0.5797	0.1037	0.5620	0.0969
		0.2	1	0.1043	0.1053	0.0491	0.1031	0.0478	0.1177	0.0548
		0.5	1	0.2254	0.2188	0.0864	0.2223	0.0900	0.2346	0.0890
		0.9	1	0.3437	0.3302	0.1076	0.3445	0.1155	0.3439	0.1063
		0.2	2	0.0304	0.0327	0.0223	0.0299	0.0195	0.0412	0.0285
		0.5	2	0.0726	0.0764	0.0484	0.0726	0.0454	0.0921	0.0567
		0.9	2	0.1235	0.1256	0.0733	0.1241	0.0731	0.1458	0.0802

Табела 4.1: Наставак

					МВ		ЈНУМД		Бајесова	
n	m	p	λ	R	$\widetilde{R}$	$sg(\widetilde{R})$	$\widehat{R}$	$sg(\widehat{R})$	$\check{R}$	$sg(\check{R})$
20	20	0.2	0.1	0.6554	0.6498	0.0687	0.6548	0.0705	0.6468	0.0686
		0.5	0.1	0.8262	0.8198	0.0414	0.8259	0.0411	0.8161	0.0424
		0.9	0.1	0.8954	0.8909	0.0238	0.8957	0.0234	0.8886	0.0245
		0.2	0.2	0.4746	0.4716	0.0773	0.4735	0.0801	0.4723	0.0765
		0.5	0.2	0.6931	0.6874	0.0619	0.6947	0.0629	0.6841	0.0621
		0.9	0.2	0.8026	0.7953	0.0416	0.8031	0.0415	0.7921	0.0423
		0.2	0.5	0.2357	0.2384	0.0617	0.2361	0.0627	0.2437	0.0624
		0.5	0.5	0.4353	0.4320	0.0781	0.4369	0.0809	0.4336	0.0773
		0.9	0.5	0.5811	0.5710	0.0711	0.5815	0.0727	0.5695	0.0707
		0.2	1	0.1043	0.1075	0.0382	0.1047	0.0374	0.1133	0.0402
		0.5	1	0.2254	0.2248	0.0660	0.2252	0.0675	0.2313	0.0665
		0.9	1	0.3437	0.3369	0.0791	0.3441	0.0822	0.3412	0.0783
		0.2	2	0.0304	0.0325	0.0168	0.0305	0.0154	0.0366	0.0191
		0.5	2	0.0726	0.0752	0.0360	0.0725	0.0347	0.0828	0.0390
		0.9	2	0.1235	0.1247	0.0543	0.1238	0.0547	0.1342	0.0566
100	100	0.2	0.1	0.6554	0.6535	0.0311	0.6545	0.0313	0.6528	0.0311
		0.5	0.1	0.8262	0.8252	0.0182	0.8263	0.0182	0.8244	0.0183
		0.9	0.1	0.8954	0.8944	0.0104	0.8953	0.0103	0.8939	0.0104
		0.2	0.2	0.4746	0.4746	0.0352	0.4750	0.0355	0.4747	0.0352
		0.5	0.2	0.6931	0.6913	0.0279	0.6928	0.0280	0.6906	0.0279
		0.9	0.2	0.8026	0.8008	0.0183	0.8023	0.0183	0.8002	0.0184
		0.2	0.5	0.2357	0.2362	0.0279	0.2358	0.0280	0.2374	0.0280
		0.5	0.5	0.4353	0.4341	0.0356	0.4351	0.0358	0.4345	0.0355
		0.9	0.5	0.5811	0.5789	0.0319	0.5810	0.0320	0.5785	0.0318
		0.2	1	0.1043	0.1050	0.0170	0.1044	0.0169	0.1062	0.0172
		0.5	1	0.2254	0.2257	0.0301	0.2258	0.0303	0.2270	0.0302
		0.9	1	0.3437	0.3427	0.0362	0.3442	0.0365	0.3435	0.0361
		0.2	2	0.0304	0.0306	0.0073	0.0302	0.0072	0.0314	0.0075
		0.5	2	0.0726	0.0729	0.0162	0.0723	0.0161	0.0745	0.0165
		0.9	2	0.1235	0.1229	0.0250	0.1227	0.0251	0.1249	0.0252

Табела 4.2: Интервали поверења за R и њихови проценти прекривања

					ASIM			BOOTp			BAJES		
n	m	p	λ	R	доња	горња	%	доња	горња	%	доња	горња	%
		0.2	0.1	0.6554	0.4602	0.8347	92.80	0.4333	0.8038	95.06	0.4423	0.8115	95.26
		0.5	0.1	0.8262	0.6985	0.9303	93.68	0.6521	0.8990	94.68	0.6679	0.9077	95.38
		0.9	0.1	0.8954	0.8157	0.9537	95.30	0.7748	0.9323	92.72	0.7963	0.9413	95.60
		0.2	0.2	0.4746	0.2611	0.6797	91.38	0.2609	0.6660	94.84	0.2724	0.6789	95.46
		0.5	0.2	0.6931	0.5052	0.8491	93.14	0.4621	0.8114	94.32	0.4850	0.8271	95.22
		0.9	0.2	0.8026	0.6688	0.9051	94.60	0.6114	0.8709	92.96	0.6463	0.8877	95.84
		0.2	0.5	0.2357	0.0726	0.4105	91.34	0.0975	0.4281	94.66	0.1093	0.4482	95.30
10	10	0.5	0.5	0.4353	0.2164	0.6387	91.50	0.2076	0.6155	93.92	0.2356	0.6453	94.92
		0.9	0.5	0.5811	0.3666	0.7573	93.02	0.3173	0.7128	92.70	0.3655	0.7476	95.20
		0.2	1	0.1043	0.0041	0.2152	89.96	0.0301	0.2418	94.34	0.0383	0.2646	95.48
		0.5	1	0.2254	0.0476	0.4044	90.10	0.0706	0.4080	93.56	0.0916	0.4476	94.78
		0.9	1	0.3437	0.1161	0.5404	90.30	0.1153	0.5131	91.96	0.1531	0.5643	95.14
		0.2	2	0.0304	-0.0130	0.0818	86.58	0.0048	0.1029	93.76	0.0078	0.1223	95.16
		0.5	2	0.0726	-0.0211	0.1754	86.72	0.0112	0.1987	92.80	0.0188	0.2378	95.24
		0.9	2	0.1235	-0.0191	0.2732	87.54	0.0201	0.2834	92.62	0.0345	0.3399	95.52
		0.2	0.1	0.6554	0.4926	0.8094	92.04	0.4841	0.7931	94.42	0.4656	0.7845	94.44
		0.5	0.1	0.8262	0.7288	0.9124	92.68	0.7069	0.8932	94.16	0.6967	0.8928	94.36
		0.9	0.1	0.8954	0.8423	0.9392	94.82	0.8243	0.9273	94.38	0.8250	0.9308	95.64
		0.2	0.2	0.4746	0.2993	0.6530	93.26	0.3090	0.6526	95.42	0.2952	0.6420	95.60
		0.5	0.2	0.6931	0.5504	0.8235	93.12	0.5313	0.8016	94.82	0.5220	0.8019	94.98
		0.9	0.2	0.8026	0.7103	0.8791	94.46	0.6842	0.8599	93.90	0.6874	0.8666	95.24
		0.2	0.5	0.2357	0.1050	0.3852	91.96	0.1284	0.4079	94.02	0.1246	0.4010	94.40
10	20	0.5	0.5	0.4353	0.2668	0.6030	93.10	0.2681	0.5940	95.50	0.2674	0.5981	95.56
		0.9	0.5	0.5811	0.4273	0.7125	93.84	0.4019	0.6878	93.54	0.4137	0.7023	95.16
		0.2	1	0.1043	0.0262	0.1964	91.44	0.0459	0.2218	95.02	0.0470	0.2213	95.24
		0.5	1	0.2254	0.0888	0.3672	92.26	0.1057	0.3765	94.98	0.1112	0.3861	95.24
		0.9	1	0.3437	0.1812	0.4964	93.30	0.1775	0.4821	94.78	0.1932	0.5034	95.66
		0.2	2	0.0304	-0.0024	0.0697	89.80	0.0090	0.0858	94.30	0.0104	0.0896	94.52
		0.5	2	0.0726	0.0024	0.1514	90.18	0.0218	0.1694	94.34	0.0259	0.1821	95.50
		0.9	2	0.1235	0.0176	0.2319	89.74	0.0380	0.2401	93.12	0.0466	0.2636	94.80
		0.2	0.1	0.6554	0.4754	0.8132	92.58	0.4418	0.7816	94.36	0.4729	0.8022	94.82
		0.5	0.1	0.8262	0.7055	0.9210	93.52	0.6583	0.8915	93.34	0.6902	0.9051	94.44
		0.9	0.1	0.8954	0.8199	0.9532	95.00	0.7797	0.9325	92.94	0.8086	0.9429	95.00
		0.2	0.2	0.4746	0.2776	0.6571	92.44	0.2668	0.6374	94.26	0.2967	0.6672	95.04
		0.5	0.2	0.6931	0.5163	0.8371	93.22	0.4687	0.8002	92.80	0.5106	0.8239	94.78
		0.9	0.2	0.8026	0.6702	0.9027	94.28	0.6127	0.8690	92.62	0.6582	0.8886	95.08
		0.2	0.5	0.2357	0.0816	0.3890	92.12	0.0971	0.3949	94.40	0.1177	0.4316	95.46
20	10	0.5	0.5	0.4353	0.2203	0.6210	91.68	0.2058	0.5947	93.10	0.2463	0.6358	94.84
		0.9	0.5	0.5811	0.3640	0.7524	93.22	0.3138	0.7079	92.76	0.3722	0.7475	95.18
		0.2	1	0.1043	0.0090	0.2016	89.54	0.0294	0.2172	92.72	0.0405	0.2505	94.94
		0.5	1	0.2254	0.0494	0.3882	89.88	0.0682	0.3867	92.66	0.0939	0.4365	95.34
		0.9	1	0.3437	0.1194	0.5411	91.08	0.1167	0.5128	92.30	0.1601	0.5694	95.06
		0.2	2	0.0304	-0.0111	0.0765	85.64	0.0045	0.0913	92.90	0.0079	0.1148	95.48
		0.5	2	0.0726	-0.0185	0.1713	86.26	0.0114	0.1894	92.14	0.0199	0.2344	94.92
		0.9	2	0.1235	-0.0180	0.2692	86.66	0.0203	0.2786	92.24	0.0356	0.3399	94.64

Табела 4.2: Наставак

					ASIM			BOOTp			BAJES		
n	m	p	λ	R	доња	горња	%	доња	горња	%	доња	горња	%
20	20	0.2	0.1	0.6554	0.5151	0.7845	93.42	0.5006	0.7681	94.50	0.5048	0.7722	94.74
		0.5	0.1	0.8262	0.7387	0.9009	94.04	0.7169	0.8841	94.14	0.7235	0.8888	94.64
		0.9	0.1	0.8954	0.8443	0.9375	94.70	0.8268	0.9263	93.68	0.8356	0.9312	95.10
		0.2	0.2	0.4746	0.3202	0.6230	93.38	0.3197	0.6166	95.00	0.3253	0.6231	94.96
		0.5	0.2	0.6931	0.5660	0.8087	93.38	0.5438	0.7883	94.64	0.5545	0.7968	94.94
		0.9	0.2	0.8026	0.7138	0.8768	94.96	0.6875	0.8586	94.58	0.7028	0.8678	95.60
		0.2	0.5	0.2357	0.1174	0.3594	92.80	0.1306	0.3698	94.70	0.1370	0.3796	95.12
		0.5	0.5	0.4353	0.2790	0.5850	93.82	0.2733	0.5733	94.64	0.2879	0.5886	95.12
		0.9	0.5	0.5811	0.4317	0.7102	94.42	0.4052	0.6859	94.06	0.4294	0.7048	95.48
		0.2	1	0.1043	0.0326	0.1823	92.12	0.0462	0.1962	94.38	0.0512	0.2068	94.96
		0.5	1	0.2254	0.0956	0.3541	92.12	0.1066	0.3573	94.10	0.1192	0.3770	95.18
		0.9	1	0.3437	0.1818	0.4919	93.44	0.1771	0.4772	94.06	0.1998	0.5040	95.86
		0.2	2	0.0304	-0.0004	0.0653	89.78	0.0089	0.0757	93.98	0.0111	0.0838	94.88
		0.5	2	0.0726	0.0046	0.1457	90.04	0.0215	0.1589	94.24	0.0272	0.1768	95.60
		0.9	2	0.1235	0.0183	0.2311	90.98	0.0380	0.2384	93.64	0.0485	0.2661	95.10
100	100	0.2	0.1	0.6554	0.5925	0.7145	94.94	0.5895	0.7109	94.90	0.5901	0.7118	95.32
		0.5	0.1	0.8262	0.7894	0.8609	95.30	0.7855	0.8572	95.24	0.7865	0.8582	95.34
		0.9	0.1	0.8954	0.8741	0.9147	95.34	0.8712	0.9122	94.50	0.8725	0.9133	95.04
		0.2	0.2	0.4746	0.4055	0.5436	94.66	0.4053	0.5424	94.74	0.4063	0.5438	95.02
		0.5	0.2	0.6931	0.6367	0.7460	94.76	0.6324	0.7415	94.88	0.6342	0.7434	94.96
		0.9	0.2	0.8026	0.7650	0.8367	95.14	0.7604	0.8326	94.76	0.7629	0.8348	95.24
		0.2	0.5	0.2357	0.1815	0.2910	94.06	0.1844	0.2932	94.72	0.1858	0.2952	94.56
		0.5	0.5	0.4353	0.3644	0.5039	94.72	0.3632	0.5014	94.86	0.3660	0.5048	94.96
		0.9	0.5	0.5811	0.5164	0.6413	95.12	0.5111	0.6359	94.54	0.5156	0.6402	95.08
		0.2	1	0.1043	0.0717	0.1383	94.62	0.0746	0.1411	94.78	0.0758	0.1429	95.24
		0.5	1	0.2254	0.1666	0.2847	95.04	0.1687	0.2856	94.96	0.1716	0.2896	95.46
		0.9	1	0.3437	0.2718	0.4136	94.02	0.2700	0.4104	94.10	0.2751	0.4162	94.24
		0.2	2	0.0304	0.0163	0.0450	93.64	0.0182	0.0469	94.52	0.0189	0.0482	95.20
		0.5	2	0.0726	0.0411	0.1046	93.44	0.0446	0.1075	94.16	0.0463	0.1106	94.68
		0.9	2	0.1235	0.0739	0.1718	94.56	0.0776	0.1739	95.60	0.0808	0.1790	95.76

Даљи правци истраживања

У овој дисертацији истраживани су *stress-strength* модели са независним компонентама. Оргинални резултати дати су у поглављима 2.1 и 2.2, као и потпоглављу 2.4.2, где су израчунате неке оцене параметра поузданости R за неке случајеве у којима обе компоненте имају расподеле из исте фамилије расподела. Оргиналне су и комплетне главе 3 и 4 у којима су уведена и истраживана два нова модела са независним компонентама које имају расподеле из различитих фамилија, па чак и расподеле различитог типа.

Даљи правац истраживања могао би да иде у смеру увођења нових модела са независним компонентама које имају расподеле из различитих фамилија или расподеле различитог типа, а који такође имају примену у пракси. Истраживања би се могла проширити и на случајеве таквих модела са зависним компонентама или таквих вишекомпонентних модела. Такође, оцењивање параметра поузданости таквих модела помоћу цензурисаних узорака, узорака изабраних методом рангираних скупова или неком другом методом би могле представљати неке од могућности.

Литература

[1] Ahmad, K. E., Fakhry, M. E. and Jaheen Z. F. (1995), Bayes estimation of $P(Y > X)$ in the geometric case, *Microelectronics Reliability* 35(5), pp. 817-820.

[2] Ahmad, K. E., Fakhry, M. E. and Jaheen Z. F. (1997), Empirical Bayes estimation of $P(Y < X)$ and characterizations of Burr-type X model, *Journal of Statistical Planning and Inference* 64(2), pp. 297-308.

[3] AL-Hussaini, E. K., Mousa, M. A. M. A. and Sultan, K. S. (1997), Parametric and nonparametric estimation of $P(Y < X)$ for finite mixtures of lognormal components, *Communications in Statistics - Theory and Methods* 26(5), pp. 1269-1289.

[4] Al-Mutairi, D. K., Ghitany, M. E. and Kundu, D. (2013), Inferences on Stress-Strength Reliability from Lindley Distributions, *Communications in Statistics - Theory and Methods* 42(8), pp. 1443-1463.

[5] Ali, M. M., Pal, M. and Woo, J. (2010), Estimation of $Pr(Y < X)$ when X and Y Belong to Different Distribution Families, *Journal of Probability and Statistical Science* 8(1), pp. 19-33.

[6] Ali, M. M., Pal, M. and Woo, J. (2012), Estimation of $P(Y < X)$ in a Four-Parameter Generalized Gamma Distribution, *Austrian Journal of Statistics* 41(3), pp. 197-210.

[7] Ali, M. M. and Woo, J. (2005a), Inference on Reliability $P(Y < X)$ in the Levy Distribution, *Mathematical and Computer Modelling* 41(8-9), pp. 965-971.

[8] Ali, M. M. and Woo, J. (2005b), Inference on Reliability $P(Y < X)$ in a p-Dimensional Rayleigh Distribution, *Mathematical and Computer Modelling* 42(3-4), pp. 367-373.

[9] Amiri, N., Azimi, R., Yaghmaei, F. and Babanezhad, M. (2013), Estimation of stress-strength parameter for two-parameter Weibull distribution, *International Journal of Advanced Statistics and Probability* 1(1), pp. 4-8.

[10] Asgharzadeh, A., Valiollahi, R. and Raqab, M. Z. (2011), Stress-strength reliability of Weibull distribution based on progressively censored samples, *SORT* 35(2), pp. 103-124.

[11] Asgharzadeh, A., Valiollahi, R. and Raqab, M. Z. (2015), Estimation of $Pr(Y < X)$ for the two-parameter of generalized exponential records, *Communications in Statistics - Simulation and Computation.* DOI: 10.1080/03610918.2014.964046.

[12] Awad, A. M., Azzam, M. M. and Hamdan, M. A. (1981), Some inference results on $Pr(X < Y)$ in the bivariate exponential model, *Communications in Statistics - Theory and Methods* 10(24), pp. 2515-2525.

[13] Awad, A. M. and Gharraf, M. K. (1986), Estimation of $P(Y < X)$ in the Burr case: a comparative study, *Communications in Statistics - Simulation and Computation* 15(2), pp. 389-403.

[14] Babayi, S., Khorram, E. and Tondro, F. (2014), Inference of $R = P[X < Y]$ for generalized logistic distribution, *Statistics* 48(4), pp. 862-871.

[15] Baklizi, A. (2003), Confidence Intervals for $P(X < Y)$ in the Exponential Case with Common Location Parameter, *Journal of Modern Applied Statistical Methods* 2(2), pp. 341-349.

[16] Baklizi, A. (2008a), Estimation of $Pr(X < Y)$ Using Record Values in the One and Two Parameter Exponential Distributions, *Communications in Statistics - Theory and Methods* 37(5), pp. 692-698.

[17] Baklizi, A. (2008b), Likelihood and Bayesian estimation of $Pr(X < Y)$ using lower record values from the generalized exponential distribution, *Computational Statistics&Data Analysis* 52(7), pp. 3468-3473.

[18] Barbiero, A. (2011), Confidence Intervals for Reliability of Stress-Strength Models in the Normal Case, *Communications in Statistics - Simulation and Computation* 40(6), pp. 907-925.

[19] Barbiero, A. (2012), Interval estimators for reliability: the bivariate normal case, *Journal of Applied Statistics* 39(3), pp. 501-512.

[20] Barbiero, A. (2013), Inference on Reliability of Stress-Strength Models for Poisson Data, *Journal of Quality and Reliability Engineering* 2013, pp. 1-8.

[21] Bartoszewicz, J. (1977), Estimation of $P\{Y < X\}$ in the exponential case, *Zastosowania Matematyki* 16(1), pp. 1-8.

[22] Basu, A. P. (1981), The Estimation of $P(X < Y)$ for Distributions Useful in Life Testing, *Naval Research Logistics Quarterly* 28(3), pp. 383-392.

[23] Beg, M. A. (1980a), On the Estimation of $Pr\{Y < X\}$ for the Two-Parameter Exponential Distribution, *Metrika* 27(1), pp. 29-34.

[24] Beg, M. A. (1980b), Estimation of $Pr\{Y < X\}$ for Exponential-Family, *IEEE Transactions on Reliability* 29(2), pp. 158-159.

[25] Beg, M. A. and Singh, N. (1979), Estimation of $Pr(Y < X)$ for the Pareto Distribution, *IEEE Transactions on Reliability* 28(5), pp. 411-414.

[26] Bhattacharyya, G. K. and Johnson, R. A. (1974), Estimation of Reliability in a Multicomponent Stress-Strength Model, *Journal of the American Statistical Association* 69(348), pp. 966-970.

[27] Birnbaum, Z. W. (1956), On a Use of the Mann-Whitney Statistic, *Proceedings of the Third Berkley Symposium in Mathematics, Statistics and Probability*, University of California Press, Berkley, CA, vol. 1, pp. 13-17.

[28] Casella, G. and Berger, R. L. (2002), *Statistical Inference*, Second Edition, Duxbury, California.

[29] Chandra, S. and Owen, D. B. (1975), On estimating the reliability of a component subject to several different stresses (strengths), *Naval Research Logistics Quarterly* 22(1), 31-39.

[30] Chao, A. (1982), On Comparing Estimators of $Pr\{Y < X\}$ in the Exponential Case, *IEEE Transactions on Reliability* 31(4), pp. 389-392.

[31] Church, J. D. and Harris, B. (1970), The Estimation of Reliability from Stress-Strength Relationships, *Tehnometrics* 12(1), pp. 49-54.

[32] Constantine, K., Karson, M. and Tse, S. K.(1990), Confidence Interval Estimation of $P(Y < X)$ in the Gamma Case, *Communications in Statistics - Simulation and Computation* 19(1), pp. 225-244.

[33] Constantine, K., Tse, S. K. and Karson, M. (1986), Estimation of $P(Y < X)$ in the Gamma Case, *Communications in Statistics - Simulation and Computation* 15(2), pp. 365-388.

[34] Downton, F. (1973), The Estimation of $Pr(Y < X)$ in the Normal Case, *Technometrics* 15(3), pp. 551-558.

[35] Efron, B. and Tibshirani, R. J. (1993), *An Introduction to the Bootstrap*, Chapman and Hall, New York.

[36] Enis, P. and Geisser, S. (1971), Estimation of the Probability that $Y < X$, *Journal of the American Statistical Association* 66(333), pp. 162-168.

[37] Fisher, R. A., Corbet, A. S. and Williams, C. B. (1943), The Relation Between the Number of Species and the Number of Individuals in a

Random Sample of an Animal Population, *Journal of Animal Ecology* 12(1), pp. 42-58.

[38] Genç, A. I. (2013), Estimation of $P(X > Y)$ with Topp-Leone distribution, *Journal of Statistical Computation and Simulation* 83(2), pp. 326-339.

[39] Govindarajulu, Z. (1967), Two-sided Confidence Limits for $P(X < Y)$ Based on Normal Samples of X and Y, *Sankhyã: The Indian Journal of Statistics, Series B* 29(1,2), pp. 35-40.

[40] Gradshteyn, I. S. and Ryzhik, I. M. (1980), *Table of Integrals, Series and Products*, Seventh Edition, Academic Press, New York.

[41] Guo, H. and Krishnamoorthy, K. (2004), New Approximate Inferential Methods for the Reliability Parameter in a Stress-Strength Model: The Normal Case, *Communications in Statistics - Theory and Methods* 33(7), pp. 1715-1731.

[42] Gupta, R. C., Ghitany, M. E. and Al-Mutairi, D. K. (2010), Estimation of reliability from Marshall-Olkin extended Lomax distributions, *Journal of Statistical Computation and Simulation* 80(8), pp. 937-947.

[43] Gupta, R. C., Ghitany, M. E. and Al-Mutairi, D. K. (2013), Estimation of reliability from a bivariate log-normal data, *Journal of Statistical Computation and Simulation* 83(6), pp. 1068-1081.

[44] Gupta, R. C., Ramakrishnan, S. and Zhou, X. (1999), Point and interval estimation of $P(X < Y)$: the normal case with common coefficient of variation, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* 51(3), pp. 571-584.

[45] Gupta, R. C. and Subramanian, S. (1998), Estimation of reliability in a bivariate normal distribution with equal coefficients of variation, *Communications in Statistics - Simulation and Computation* 27(3), pp. 675-698.

[46] Gupta, R. D. and Gupta, R. C. (1988), Estimation of $P\{Y_p > \max(Y_1, Y_2, \ldots, Y_{p-1})\}$ in the exponential case, *Communications in Statistics - Theory and Methods* 17(3), pp. 911-924.

[47] Hanagal, D. D. (1997), Note on estimation of reliability under bivariate Pareto stress-strength model, *Statistical Papers* 38(4), pp. 453-459.

[48] Hogg, R. V., McKean, J. W. and Craig, A. T. (2005), *Introduction to Mathematical Statistics*, Sixth Edition, Pearson Prentice Hall, New Jersey.

[49] Huang, K., Mi, J. and Wang, Z. (2012), Inference about reliability parameter with gamma strength and stress, *Journal of Statistical Planning and Inference* 142(4), pp. 848-854.

[50] Ismail, R., Jeyaratnam, S. and Panchapakesan, S. (1986), Estimation of $Pr[X > Y]$ for Gamma Distributions, *Journal of Statistical Computation and Simulation* 26(3-4), pp. 253-267.

[51] Ivshin, V. V. (1996), Unbiased Estimators of $P(X < Y)$ and their Variances in the Case of Uniform and Two-Parameter Exponential Distributions, *Journal of Mathematical Sciences* 81(4), pp. 2790-2793.

[52] Jeevanand, E. S. (1997), Bayes estimation of $P(X_2 < X_1)$ for a bivariate Pareto distribution, *The Statistician* 46(1), pp. 93-99.

[53] Johnson, N. L., Kemp, A. W. and Kotz, S. (2005), *Univariate Discrete Distributions*, Third Edition, John Wiley & Sons, New Jersey.

[54] Johnson, R. A. (1988), Stress-strength Models for Reliability, In *Handbook of Statistics*, ed. Krishnaiah, P.R. and Rao, C.R., Elsevier, North Holland, vol. 7, pp. 27-54.

[55] Jovanović, M. (2015), Estimation of $P\{X < Y\}$ for Geometric-Exponential Model Based on Complete and Censored Samples, *Communications in Statistics - Simulation and Computation.* DOI: 10.1080/03610918.2015.1073302.

[56] Jovanović, M. and Rajić, V. (2014), Estimation of $P\{X < Y\}$ for gamma exponential model, *Yugoslav Journal of Operations Research* 24(2), pp. 283-291.

[57] Kakade, C. S., Shirke, D. T. and Kundu, D. (2008), Inference for $P(Y < X)$ in Exponentiated Gumbel Distribution, *Journal of Statistics and Applications* 3(1-2), pp. 121-133.

[58] Kelley, G. D., Kelley, J. A. and Schucany, W. R. (1976), Efficient Estimation of $P(Y < X)$ in the Exponential Case, *Technometrics* 18(3), pp. 359-360.

[59] Kotz, S., Lumelskii, Y. and Pensky, M. (2003), *The Stress-Strength Model and its Generalizations*, World Scientific Publishing, Singapore.

[60] Krishnamoorthy, K. and Lin, Y. (2010), Confidence limits for stress-strength reliability involving Weibull models, *Journal of Statistical Planning and Inference* 140(7), pp. 1754-1764.

[61] Krishnamoorthy, K., Mukherjee, S. and Guo, H. (2007), Inference on reliability in two-parameter exponential stress-strength model, *Metrika* 65(3), pp. 261-273.

[62] Kundu, D. and Gupta, R. D. (2005), Estimation of $P[Y < X]$ for generalized exponential distribution, *Metrika* 61(3), pp. 291-308.

[63] Kundu, D. and Gupta, R. D. (2006), Estimation of $P[Y < X]$ for Weibull Distributions, *IEEE Transactions on Reliability* 55(2), pp. 270-280.

[64] Kundu, D. and Raqab, M. Z. (2009), Estimation of $R = P(Y < X)$ for three-parameter Weibull distribution, *Statistics and Probability Letters* 79(17), pp. 1839-1846.

[65] Kundu, D. and Raqab, M. Z. (2015), Estimation of $R = P[Y < X]$ for three-parameter generalized Rayleigh distribution, *Journal of Statistical Computation and Simulation* 85(4), pp. 725-739.

[66] Lindley, D. V. (1980), Approximate Bayesian methods, *Trabajos de Estadistica* 21, pp. 223-237.

[67] Lio, Y. L. and Tsai, T. R. (2012), Estimation of $\delta = P(X < Y)$ for Burr XII distribution based on the progressively first failure-censored samples, *Journal of Applied Statistics* 39(2), pp. 309-322.

[68] Lloyd, D. K. and Lipow, M. (1962), *Reliability, Management, Methods and Mathematics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jork.

[69] Makhdoom, I. (2012), Estimation of $R = P[Y < X]$ for Weighted Exponential Distribution, *Journal of Applied Sciences* 12(13), pp. 1384-1389.

[70] McCool, J. I. (1991), Inference on $P(Y < X)$ in the Weibull Case, *Communications in Statistics - Simulation and Computation* 20(1), pp. 129-148.

[71] Mokhlis, N. A. (2005), Reliability of a Stress-Strength Model with Burr Type III Distributions, *Communications in Statistics - Theory and Methods* 34(7), pp. 1643-1657.

[72] Mukherjee, S. P. and Sharan L. K. (1985), Estimation of failure probability from a bivariate normal stress-strength distribution, *Microelectronics Reliability* 25(4), pp. 699-702.

[73] Nadar, M., Kýzýlaslan, F. and Papadopoulos, A. (2014), Classical and Bayesian estimation of $P(Y < X)$ for Kumaraswamy's distribution, *Journal of Statistical Computation and Simulation* 84(7), pp. 1505-1529.

[74] Nadarajah, S. (2002), Reliability for Beta Models, *Serdica Mathematical Journal* 28(3), pp. 267-282.

[75] Nadarajah, S. (2003a), Reliability for Lifetime Distributions, *Mathematical and Computer Modelling* 37(7-8), pp. 683-688.

[76] Nadarajah, S. (2003b), Reliability for Extreme Value Distributions, *Mathematical and Computer Modelling* 37(9-10), pp. 915-922.

[77] Nadarajah, S. (2004), Reliability for Laplace distributions, *Mathematical Problems in Engineering* 2004(2), pp. 169-183.

[78] Nadarajah, S. (2005a), Reliability for some bivariate beta distributions, *Mathematical Problems in Engineering* 2005(1), pp. 101-111.

[79] Nadarajah, S. (2005b), Reliability for some bivariate gamma distributions, *Mathematical Problems in Engineering* 2005(2), pp. 151-163.

[80] Nadarajah, S. and Kotz, S. (2003), Reliability for Pareto models, *Metron* LXI(2), pp. 191-204.

[81] Nadarajah, S. and Kotz, S. (2006), Reliability for some bivariate exponential distributions, *Mathematical Problems in Engineering* 2006(1), pp. 1-14.

[82] Nandi, S. B. and Aich, A. B. (1994), A Note on Confidence Bounds for $P(X > Y)$ in Bivariate Normal Samples, *Sankhyã: The Indian Journal of Statistics, Series B* 56(2), pp. 129-136.

[83] Obradović, M., Jovanović, M. and Milošević, B. (2014), Optimal Unbiased Estimates of $P\{X < Y\}$ for Some Families of Distributions, *Metodoloki Zvezki - Advances in Methodology and Statistics* 11(1), pp. 21-29.

[84] Obradović, M., Jovanović, M., Milošević, B. and Jevremović, V. (2015), Estimation of $P\{X \leq Y\}$ for geometric-Poisson model, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics* 44(4), pp. 949-964.

[85] Odat, N. (2010), Estimation of Reliability Based on Pareto Distribution, *Applied Mathematical Sciences* 4(55), pp. 2743-2748.

[86] Owen, D. B., Craswell, K. J. and Handson, D. L. (1964), Nonparametric Upper Confidence Bounds for $Pr\{Y < X\}$ and Confidence Limits for $Pr\{Y < X\}$ when X and Y are Normal, *Journal of the American Statistical Association* 59(307), pp. 906-924.

[87] Pal, M., Ali, M. M. and Woo, J. (2005), Estimation and testing of $P(Y > X)$ in two-parameter exponential distributions, *Statistics* 39(5), pp. 415-428.

[88] Raqab, M. Z. and Kundu, D. (2005), Comparison of Different Estimators of $P[Y < X]$ for a Scaled Burr Type X Distribution, *Communications in Statistics - Simulation and Computation* 34(2), pp. 465-483.

[89] Raqab, M. Z., Madi, M. T. and Kundu, D. (2008), Estimation of $P(Y < X)$ for the Three-Parameter Generalized Exponential Distribution, *Communications in Statistics - Theory and Methods* 37(18), pp. 2854-2864.

[90] Reiser, B. and Guttman, I. (1986), Statistical Inference for $Pr(Y < X)$: The Normal Case, *Technometrics* 28(3), pp. 253-257.

[91] Reiser, B. and Guttman, I. (1987), A comparison of three point estimators for $P(Y < X)$ in the normal case, *Computational Statistics&Data Analysis* 5(1), pp. 59-66.

[92] Rezaei, S., Tahmasbi, R. and Mahmoodi, M. (2010), Estimation of $P[Y < X]$ for generalized Pareto distribution, *Journal of Statistical Planning and Inference* 140(2), pp. 480-494.

[93] Rinco, S. (1983), Estimation of $Pr\{Y_p > \max(Y_1, \dots, Y_{p-1})\}$: predictive approach in exponential case, *The Canadian Journal of Statistics / La Revue Canadienne de Statistique* 11(3), pp. 239-244.

[94] Roy, D. (1993), Estimation of failure probability under a bivariate normal stress-strength distribution, *Microelectronics Reliability* 33(15), pp. 2285-2287.

[95] Saraçoglu, B. and Kaya, M. F. (2007), Maximum Likelihood Estimation and Confidence Intervals of System Reliability for Gompertz Distribution in Stress-Strength Models, *Selçuk Journal of Applied Mathematics* 8(2), pp. 25-36.

[96] Saraçoglu, B., Kaya, M. F. and Abd-Elfattah, A. M. (2009), Comparison of Estimators for Stress-Strength Reliability in the Gompertz Case, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics* 38(3), pp. 339-349.

[97] Saraçoglu, B., Kinaci, I. and Kundu, D. (2012), On estimation of $R = P(Y < X)$ for exponential distribution under progressive type-II censoring, *Journal of Statistical Computation and Simulation* 82(5), pp. 729-744.

[98] Sathe, Y. S. and Dixit U. J. (2001), Estimation of $P[X \leq Y]$ in the negative binomial distribution, *Journal of Statistical Planning and Inference* 93(1-2), pp. 83-92.

[99] Sathe, Y. S. and Shah, S. P. (1981), On estimating of $P(X > Y)$ for the exponential distribution, *Communications in Statistics - Theory and Methods* 10(1), pp. 39-47.

[100] Surles, J. G. and Padgett, W. J. (1998), Inference for $P(Y < X)$ in the Burr type X model, *Journal of Applied Statistical Science* 7(2), pp. 225-238.

[101] Surles, J. G. and Padgett, W. J. (2001), Inference for Reliability and Stress-Strength for a Scaled Burr Type X distribution, *Lifetime Data Analysis* 7, pp. 187-200.

[102] Tong, H. (1974), A Note on the Estimation of $Pr(Y < X)$ in the Exponential Case, *Technometrics* 16(4), pp. 625. Errata: (1975) *Technometrics* 17(3), pp. 395.

[103] Tong, H. (1977), On the Estimation of $Pr(Y \leq X)$ for Exponential Families, *IEEE Transactions on Reliability* 26(1), pp. 54-56.

[104] Weerahandi, S. and Johnson, R. A. (1992), Testing Reliability in a Stress-Strength Model When X and Y are Normally Distributed, *Technometrics* 34(1), pp. 83-91.

[105] Woodward, W. A. and Kelley, G. D. (1977), Minimum Variance Unbiased Estimation of $P[Y < X]$ in the Normal Case, *Technometrics* 19(1), pp. 95-98.

Биографија аутора

Милан Јовановић је рођен 20.03.1975. у Бијељини. Завршио је основну школу ,,Нада Пурић" у Ваљеву и Ваљевску гимназију као ђак генерације. Током основне и средње школе освојио је више награда на републичким и савезним такмичењима из математике. Математички факултет Универзитета у Београду, смер теоријска математика са применама, уписао је 1993. године, а завршио га је 1997. године са просечном оценом 9.75. Магистарску тезу под насловом ,,О екстремним вредностима низова независних случајних величина са истом расподелом која је мешавина расподела" одбранио је 2004. године на истом факултету.

На Фармацеутском факултету у Београду 1998. године држао је вежбе на предмету Математика за фармацеуте. Од 1998. године запослен је на Математичком факултету у Београду. Држао је вежбе на предметима Математика 1 и Математика 2 (за студенте физике), Математика и статистика, Математика, Биостатистика (за студенте биологије), Теорија вероватноћа, Математичка статистика, Теорија узорака, Вероватноћа и статистика и Одабрана поглавља теорије вероватноће.

Области његовог научног интересовања су теорија вероватноћа и математичка статистика. Објавио је осам научних радова

– у часописима ван SCI листе:

1. Mladenović, P. and Jovanović, M. (2003), On properties of mixed distributions concerning extreme values, *Statistička revija* 52(1-4), pp. 1-9.

2. Jovanović, M. and Rajić, V. (2014), Estimation of $P\{X < Y\}$ for

gamma exponential model, *Yujor* 24(2), pp. 283-291.

3. Obradović, M., Jovanović, M. and Milošević, B. (2014), Optimal unbiased estimates of $P\{X < Y\}$ for some families of distributions, *Metodološki zvezki - Advances in Methodology and Statistics* 11(1), pp. 21-30.

– у часописима са SCI листе:

1. Kočović, J., Ćojbašić-Rajić, V. and Jovanović, M. (2015), Estimating a tail of the mixture of log-normal and inverse Gaussian distribution, *Scandinavian Actuarial Journal* 2015(1), pp. 49-58.

2. Obradović, M., Jovanović, M. and Milošević, B. (2015), Goodness-of-fit tests for Pareto distribution based on a characterization and their asymptotics, *Statistics* 49(5), pp. 1026-1041.

3. Jovanović, M., Milošević, B., Nikitin, Ya. Yu., Obradović, M. and Volkova, K. Yu. (2015), Tests of exponentiality based on Arnold-Villasenor characterization and their efficiencies, *Computational Statistics & Data Analysis* 90, pp. 100-113.

4. Obradović, M., Jovanović, M., Milošević, B. and Jevremović, V. (2015), Estimation of $P\{X \leq Y\}$ for geometric-Poisson model, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics* 44(4), pp. 949-964.

5. Jovanović, M., Estimation of $P\{X < Y\}$ for Geometric-Exponential Model Based on Complete and Censored Samples, *Communications in Statistics - Simulation and Computation.*
DOI: 10.1080/03610918.2015.1073302.

Имао је следећа саопштења на научним конференцијама:

1. Jovanović, M. and Mladenović, P., *On properties of mixed distributions concerning extreme values*, Proceedings of XXX SYM-OP-IS, pp. 557-560, Herceg Novi, 2003.

2. Jovanović, M., *Finite mixture distributions and domains of attraction of the Fréchet and the Weibull distributions*, XI Kongres matematičara Srbije i Crne Gore, Petrovac, 2004.

3. Obradović, M., Milošević, B. and Jovanović, M., *Optimal unbiased estimates for* $P\{X < Y\}$, 10th Applied Statistics, Ribno, Slovenia, 2013.

Ожењен је и има две ћерке.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани Милан Јовановић

број уписа ____

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Оцењивање праметра поузданости двокомпонентног система

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

МЈовановић

У Београду, 12.10.2015.

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Милан Јовановић

Број уписа ______________________________

Студијски програм Вероватноћа и математичка статистика

Наслов рада **Оцењивање праметра поузданости двокомпонентног система**

Ментор проф. др Павле Младеновић

Потписани Милан Јовановић

изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

MJovanović

У Београду, 12.10.2015.

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Оцењивање праметра поузданости двокомпонентног система

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио.

1. Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

5. Ауторство – без прераде

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

MJovanović

У Београду, 12.10.2015.

1. Ауторство - Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.