

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Слободан В. Савић

**ЗАКРИВЉЕНИ КОНТИНУАЛНО
НЕХОМОГЕНИ И НЕИЗОТРОПНИ
КОНАЧНИ ЕЛЕМЕНТИ ВИШЕГ РЕДА
ЗА ВЕЛИКОДОМЕНСКО
ЕЛЕКТРОМАГНЕТСКО МОДЕЛОВАЊЕ**

докторска дисертација

Београд, 2015

UNIVERSITY OF BELGRADE
SCHOOL OF ELECTRICAL ENGINEERING

Slobodan V. Savić

**CURVED CONTINUOUSLY
INHOMOGENEOUS AND ANISOTROPIC
HIGHER ORDER FINITE ELEMENTS FOR
LARGE-DOMAIN ELECTROMAGNETIC
MODELING**

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2015

Ментор:

др Милан Илић, ванредни професор
Универзитет у Београду – Електротехнички факултет

Чланови комисије:

др Антоније Ђорђевић, редовни професор
Универзитет у Београду – Електротехнички факултет

др Бранислав Нотарош, редовни професор
Electrical and Computer Engineering Department
Colorado State University
Fort Collins, Colorado, USA

др Бранко Колунџија, редовни професор
Универзитет у Београду – Електротехнички факултет

др Драган Олћан, ванредни професор
Универзитет у Београду – Електротехнички факултет

Датум одбране: _____

*Породици и пријатељима.
Драгојлу, моме првом учитељу.*

Закривљени континуално нехомогени и неизотропни коначни елементи вишег реда за великодоменско електромагнетско моделовање

Резиме

Савремено друштво се у великој мери ослања на електронске сервисе, уређаје и системе. За успешно разумевање начина рада постојећих електронских уређаја и система, као и приликом пројектовања нових, неопходно је спровести одговарајућу електромагнетску (ЕМ) анализу. У већини случајева ЕМ анализу није могуће спровести аналитички, а до решења се тада мора доћи на неки други начин, најчешће нумеричком електромагнетиком. Метода коначних елемената (*finite element method*, FEM) представља једну од најпопуларнијих техника нумеричке електромагнетике.

Са развојем технике и технологије пред FEM се стално постављају све изазовнији захтеви, као што су: ефикасно и тачно моделовање континуално нехомогених неизотропних средина, ефикасна просторна сегментација са високом тачношћу резултата, ефикасно моделовање отворених ЕМ проблема и имплементација прилагођена новим рачунарски системима. Како би се остварили савремени захтеви, основне формулације и имплементације FEM методе, познате од раније, морају се стално унапређивати. У овој дисертацији описано је нумеричко моделовање континуално нехомогених неизотропних средина FEM методом. Тензори параметара континуално нехомогених неизотропних средина добијени су применом теорије трансформационе електромагнетике, а описана је и теорија трансформационе електромагнетике у векторској и тензорској нотацији прилагођеној инжењерима. Како би се проширио дијапазон проблема који се могу решити FEM методом, описано је моделовање отворених ЕМ проблема, а посебно су продискутовани детаљи у вези са апсорпционим граничним условом (*absorbing boundary condition*, ABC). У циљу постизања резултата високе тачности предложено је ново просторно мапирање великих закривљених коначних елемената. Како би се боље искористили тренутно расположиви рачунарски ресурси, спроведена је и паралелизација делова рачунарског кода FEM методе.

Применом приказане теорије трансформационе електромагнетике конструисана је сферна прекривка за смањење радарског попречног пресека (позната од раније), а затим је конструисана и коцкаста прекривка за смањење радарског попречног пресека. Конструисани су великодоменски нумерички модели сферне и коцкасте прекривке за смањење радарског попречног пресека. Анализом нумеричких резултата закључено је да је великодоменска FEM метода вишег реда способна да ефикасно и тачно моделује ове прекривке, као и да тачно описује све ефекте простирања електромагнетског поља кроз континуално нехомогене и неизотропне средине. Нумеричким моделима прекривки постигнуто је одлично детектовање свих феномена смањења радарског попречног пресека, као и одлично поклапање са аналитичким (када постоје) и алтернативним нумеричким решењима. У односу на алтернативна нумеричка решења, приказани нумерички модели са вишим редом апроксимације поља и великим геометријски флексибилним континуално нехомогеним коначним елементима показали су се врло ефикасним и тачним. Проширењем резултата и закључака из ове дисертације могуће је конструисати ефикасне и тачне нумеричке моделе ЕМ проблема насталих применом теорије трансформационе електромагнетике у будућности, посебно ако те проблеме није могуће решити аналитички.

У дисертацији је затим разматрана могућност ефикасног моделовања отворених ЕМ проблема FEM методом. Представљен је симетрични (неригорозно имплементиран) АВС другог реда примењен на великодоменске закривљене Лагранжове елементе. У оквиру приказаног АВС другог реда неригорозно је имплементиран прорачун дивергенције роторски-конформних функција базиса. Перформансе симетричног неригорозног АВС другог реда испитане су кроз неколико нумеричких примера и закључено је да је тачност добијених решења упоредива са другим нумеричким и аналитичким решењима. У односу на АВС првог реда, неригорозни АВС другог реда проширио је скуп проблема који се могу ефикасно и тачно моделовати великодоменском FEM методом. Показано је да закључци о неопходности ригорозне имплементације симетричног АВС другог реда у малодоменској FEM-АВС методи не важе стриктно и у великодоменској FEM-АВС методи.

Иако се, посебно у последње време, великодоменски начин моделовања интензивно користи у нумеричкој ЕМ, одређивање оптималних геометријских параметризација скромно је обухваћено у тренутно доступној литератури. У дисертацији су разматране и појединости геометријског моделовања Лагранжовим елементима реда вишег од првог. Представљена је геометријска параметризација константном брзином и њена апроксимација Лагранжовим великим закривљеним коначним елементима. Кроз неколико нумеричких примера показано је да је геометријском параметризацијом константном брзином могуће постићи значајно тачније резултате у односу на стандардно коришћене геометријске параметризације.

У циљу проширења скупа проблема које је могуће ефикасно моделовати FEM методом на постојећим персоналним рачунарима, спроведена је паралелизација рачунарски најзахтевнијих делова FEM рачунарског кода. Паралелизација рачунарских кодова посебно је актуелна у нумеричкој електромагнетици, а спроведеном паралелизацијом додата је практична вредност постојећој имплементацији великодоменске FEM методе.

Кључне речи: метода коначних елемената, моделовање континуално нехомогених и неизотропних средина, великодоменско моделовање, полиномске базисне функције вишег реда, апсорпциони гранични услов.

Научна област: Електротехника и рачунарство

Ужа научна област: Електромагнетика

УДК број: 621.3

Curved continuously inhomogeneous and anisotropic higher order finite elements for large-domain electromagnetic modeling

Abstract

Modern society is heavily reliant on electronic services, devices and systems. When analyzing functionality of existing electronic devices and systems, as well as when designing a new one, it is necessary to perform adequate electromagnetic (EM) analysis. In most cases, the EM analysis cannot be performed analytically, i.e., in a closed form, and the solution must then be obtained in an alternative manner, usually employing computational electromagnetics. The finite element method (FEM) is one of the most popular computational electromagnetics techniques.

With rapid development of technology, FEM is constantly confronted with increasingly challenging requirements such as: efficient and accurate modeling of continuously inhomogeneous and anisotropic media, efficient meshing for high accuracy results, efficient modeling of open EM problems and programming appropriate for the new computer architectures. In order to achieve these new requirements, basic FEM formulations and implementations, used in the past, must be constantly improved. In this dissertation, we propose, present and evaluate numerical modeling of continuous inhomogeneous and anisotropic media by the FEM. The parameters of continuously inhomogeneous and anisotropic media tensors in the presented models are obtained by transformation electromagnetics. In addition, the transformation electromagnetics is presented in a novel fashion, where vector and tensor notations are adapted for engineers. Moreover, to extend the range of problems that can be solved by the FEM technique, modeling of open EM problems is described with special emphasis on the absorbing boundary condition (ABC). In addition, novel spatial mapping of large curved finite elements for achieving high accuracy of results is also proposed and evaluated. Finally, for more efficient use of currently available computing resources, existing FEM computer code is partially parallelized.

Utilizing the presented theory of transformation electromagnetics, we first construct the (formerly known) spherical cloak, after which we design a novel cubical cloak. For both the spherical and the cubical cloak we design higher-order large-domain numerical

models, which we evaluate by simulations. From the obtained numerical results, we conclude that the higher-order large-domain FEM technique is fully capable of efficient and accurate modeling of cloaks, as well as of accurate modeling of all the effects of the field propagation through continuously inhomogeneous anisotropic media. The developed models achieved excellent prediction of all phenomena regarding the reduction of the radar cross section using cloaks, as well as excellent agreement with analytical (when available) and other numerical results. Compared to the alternative numerical results, the presented higher-order large domain numerical models with geometrically flexible continuously inhomogeneous finite elements proved to be very efficient and accurate. By extending the results and conclusions from this dissertation, it is possible to construct efficient and accurate numerical models for EM problems arising in application of transformation electromagnetics in the future, particularly if the problems cannot be solved analytically.

As a special class of problems, in this dissertation we also address efficient modeling of open EM problems by the FEM. We present a symmetric (non-rigorously implemented) second-order absorbing boundary condition (ABC), applied to large-domain curved Lagrange-type elements. Within the presented second-order ABC, computation of divergence of curl-conforming basis functions is implemented non-rigorously. We validate the accuracy of solutions obtained by employing the symmetric non-rigorous second-order ABC on a few numerical examples. We conclude that it is on a par with other existing numerical and analytical solutions. Thus, utilizing the non-rigorous second-order ABC instead of the first-order ABC, the set of problems that can be efficiently and accurately modeled by the large-domain FEM technique is expanded. It is shown that the conclusions for the necessity for rigorous implementation of the symmetric second-order ABC in small-domain FEM technique does not apply strictly to the large-domain FEM technique.

Although, particularly recently, large-domain modeling has been extensively used in computational EM, determining the optimal geometric parametrization is still only modestly covered in the available literature. Additionally, we study details of geometrical modeling by large Lagrange elements with (geometrical) interpolation orders higher than one. Constant-speed parametrization and its approximation by the large curved Lagrange finite elements are presented. In few numerical examples, we

show that utilization of the constant-speed parametrization can yield significantly higher accuracy of solutions compared to alternative standard parametrizations.

In order to expand the set of problems that can be efficiently modeled using existing personal computers (PCs), we implement the parallelization of the computationally most demanding parts of the FEM code. Parallelization of computer codes is a mainstream topic in the computational EM community and the implemented parallelization adds significant practical value to used large-domain FEM code.

Keywords: finite element method, continuously inhomogeneous and anisotropic medium modeling, large-domain modeling, higher-order polynomial basis functions, absorbing boundary condition.

Scientific area: Electrical and Computer Engineering

Scientific subarea: Electromagnetics

UDC number: 621.3

Садржај

1. УВОД	1
1.1. ЗНАЧАЈ НУМЕРИЧКЕ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ У САВРЕМЕНОЈ ЕЛЕКТРОТЕХНИЦИ	1
1.2. ПРЕГЛЕД НАЈЗНАЧАЈНИЈИХ МЕТОДА НУМЕРИЧКЕ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ И ТРЕНУТНО СТАЊЕ У СВЕТУ	3
1.2.1. Метода граничних елемената (метода момената, МоМ)	5
1.2.2. Метода коначних елемената (FEM)	6
1.2.3. Метода коначних разлика (FD и FDTD)	8
1.3. БУДУЋНОСТ НУМЕРИЧКЕ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ	10
1.4. ЗНАЧАЈ, ПРЕДМЕТ И ЦИЉ ИСТРАЖИВАЊА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ	11
2. ОСНОВЕ ТЕОРИЈЕ ЕЛЕКТРОМАГНЕТСКОГ ПОЉА	15
2.1. УВОД	15
2.2. МАКСВЕЛОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ	15
2.3. КОНСТИТУТИВНЕ РЕЛАЦИЈЕ	18
2.4. ТАЛАСНА ЈЕДНАЧИНА	19
2.5. ГРАНИЧНИ УСЛОВИ	21
2.6. РЕЗИМЕ	23
3. МЕТОДА КОНАЧНИХ ЕЛЕМЕНАТА	24
3.1. УВОД	24
3.2. ПРОБЛЕМИ ГРАНИЧНИХ ВРЕДНОСТИ КАО ТЕОРИЈСКА ОСНОВА МЕТОДЕ КОНАЧНИХ ЕЛЕМЕНАТА	25
3.2.1. Рејли-Риц метода	26
3.2.2. Метода отежаних резидуала	27
3.3. ОСНОВНИ КОРАЦИ У МЕТОДИ КОНАЧНИХ ЕЛЕМЕНАТА	28
3.4. ОСНОВНЕ ЈЕДНАЧИНЕ МЕТОДЕ КОНАЧНИХ ЕЛЕМЕНАТА	30
3.5. ГЕОМЕТРИЈСКА ДИСКРЕТИЗАЦИЈА	33
3.5.1. Интерполациони закривљени параметарски хексаедар вишег геометријског реда	36
3.5.2. Интерполациони полиноми Лагранжовог типа	37
3.5.3. Векторска алгебра и анализа у уопштеном закривљеном координатном систему	39
3.5.3.1. Примарни и реципрочни вектори	39
3.5.3.2. Градијент, дивергенција и ротор	44
3.5.4. Векторска алгебра и анализа за уопштене закривљене параметарске хексаедре Лагранжовог типа	46
3.6. АПРОКСИМАЦИЈА ЕЛЕКТРИЧНОГ ПОЉА	47
3.6.1. Векторске хијерархијске роторски-конформне полиномске функције базиса вишег реда	52
3.7. ФОРМИРАЊЕ ФИНАЛНОГ СИСТЕМА ЛИНЕАРНИХ ЈЕДНАЧИНА	53
3.8. МОДЕЛОВАЊЕ КОНТИНУАЛНО НЕХОМОГЕНИХ И НЕИЗОТРОПНИХ СРЕДИНА	57
3.9. РЕЗИМЕ	60
4. ТРАНСФОРМАЦИОНА ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКА	62
4.1. УВОД	62
4.2. ИНВАРИЈАНТНОСТ МАКСВЕЛОВИХ ЈЕДНАЧИНА У ОДНОСУ НА КООРДИНАТНЕ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ	63
4.2.1. Координатне трансформације базе простора и координатне трансформације коваријантних и контраваријантних компоненти вектора и тензора	64

4.2.2.	Веза између параметара средине у два координатна система у случају класичног облика Максвелових једначина	74
4.2.3.	Веза између параметара средине у два координатна система у случају инваријантног облика Максвелових једначина	80
4.3.	ОДРЕЂИВАЊЕ ПАРАМЕТАРА СРЕДИНЕ ЗА ЖЕЉЕНУ МАНИПУЛАЦИЈУ ПРОСТОПЕРИОДИЧНИМ ЕЛЕКТРОМАГНЕТСКИМ ПОЉЕМ	84
4.4.	ПРЕКРИВКЕ ЗА СМАЊЕЊЕ РАДАРСКОГ ПОПРЕЧНОГ ПРЕСЕКА	88
4.4.1.	Сферна конформна прекривка за смањење радарског попречног пресека	91
4.4.2.	Коцкаста конформна прекривка за смањење радарског попречног пресека	100
4.5.	РЕЗИМЕ	103
5. МОДЕЛОВАЊЕ ОТВОРЕНИХ ЕЛЕКТРОМАГНЕТСКИХ ПРОБЛЕМА МЕТОДОМ КОНАЧНИХ ЕЛЕМЕНАТА		105
5.1.	Увод	105
5.2.	АПСОРПЦИОНИ ГРАНИЧНИ УСЛОВ ДРУГОГ РЕДА	107
5.3.	ФОРМИРАЊЕ ФИНАЛНОГ СИСТЕМА ЛИНЕАРНИХ ЈЕДНАЧИНА У МЕТОДИ КОНАЧНИХ ЕЛЕМЕНАТА ВИШЕГ РЕДА И ПРОРАЧУН ПОЉА ИЗВАН НУМЕРИЧКОГ ДОМЕНА	116
5.4.	РЕЗИМЕ	122
6. НУМЕРИЧКИ ПРИМЕРИ		125
6.1.	Увод	125
6.2.	ПРОСТОРНО МАПИРАЊЕ ПАРАМЕТРИЗАЦИЈОМ КОНСТАНТНОМ БРЗИНОМ У ВЕЛИКОДОМЕНСКОМ ЕЛЕКТРОМАГНЕТСКОМ МОДЕЛОВАЊУ	129
6.2.1.	Геометријско пресликавање параметризацијом централном пројекцијом и параметризацијом константном брзином	132
6.2.2.	Нумерички примери тродимензионе МоМ-SIE ЕМ анализе коришћењем RCP и CSP мапирања	136
6.3.	ПРЕПОРУКЕ ЗА КОРИШЋЕЊЕ КОНАЧНИХ ЕЛЕМЕНАТА ВИШЕГ РЕДА У АНАЛИЗИ НЕИЗОТРОПНИХ УНИАКСИЈАЛНИХ СРЕДИНА	140
6.3.1.	Нумерички резултати и дискусија	142
6.4.	ПРЕКРИВКЕ ЗА СМАЊЕЊЕ РАДАРСКОГ ПОПРЕЧНОГ ПРЕСЕКА	144
6.4.1.	Сферна прекривка за смањење радарског попречног пресека	149
6.4.2.	Коцкаста прекривка за смањење радарског попречног пресека	160
6.5.	НЕРИГОРОЗНИ АПСОРПЦИОНИ ГРАНИЧНИ УСЛОВ ДРУГОГ РЕДА	168
6.5.1.	Савршено проводан сферни расејач	170
6.5.2.	Диелектрични сферни расејач	180
6.6.	УБРЗАВАЊЕ ПОПУЊАВАЊА МАТРИЦА У МЕТОДИ КОНАЧНИХ ЕЛЕМЕНАТА ВИШЕГ РЕДА ОРЕНМР ПАРАЛЕЛИЗАЦИЈОМ ЗАПРЕМИНСКИХ ИНТЕГРАЛА	182
6.6.1.	Нумерички резултати и дискусија	184
6.7.	РЕЗИМЕ	187
7. ЗАКЉУЧАК		193
ЛИТЕРАТУРА		199
ПРИЛОГ		208
	ТЕНЗОРИ ПАРАМЕТАРА СРЕДИНЕ СФЕРНЕ ПРЕКРИВКЕ ЗА СМАЊЕЊЕ РАДАРСКОГ ПОПРЕЧНОГ ПРЕСЕКА	208
БИОГРАФИЈА АУТОРА		213

1. Увод

1.1. Значај нумеричке електромагнетике у савременој електротехници

Савремено друштво се у великој мери ослања на електронске сервисе, уређаје и системе међу којима су: телевизија, радио, интернет, мобилна телефонија, сателитски комуникациони системи, радарски системи, електрични мотори и генератори, рачунари, микроталасни филтри, системи за формирање слике у медицини, системи за дистрибуцију електричне енергије, трансформатори, као и многи други. Познавање теорије електромагнетског поља, скраћено електромагнетике (ЕМ), неопходно је приликом анализе рада постојећих електронских уређаја и система, као и приликом синтезе и пројектовања нових. Анализу ЕМ проблема аналитички, тј. у затвореном облику, могуће је спровести у врло малом броју специјалних случајева [1]. Најчешће су то проблеми високе симетрије који се ретко сусрећу у пракси. Анализа сложених уређаја и система који се често сусрећу у свакодневной инжењерској пракси по правилу се не може спровести аналитички, а до решења се тада долази увођењем одређених апроксимација – уместо анализе конкретног проблема анализира се поједностављен модел за који је могуће доћи до аналитичког решења, применом нумеричких метода [2] или на неки други начин.

Пре појаве рачунара, како би се избегли интензивни нумерички прорачуни тешки човеку, до решења се обично долазило исцрпним аналитичким манипулацијама, тј. симболичким прорачунима. Појава електронских рачунара и њихова комерцијална омасовљеност променила је начин на који данас решавамо већину инжењерских проблема. Појавом рачунара постало је ефикасније решавати проблеме који се могу поделити на кораке који захтевају релативно једноставне математичке операције, а који могу захтевати интензивне нумеричке

прорачуне. Самим тим постало је могуће решити шири спектар проблема него раније. Део електромагнетике заснован на овој парадигми назива се нумеричка електромагнетика (*computational electromagnetics*, СЕМ).

Савремена нумеричка ЕМ омогућава релативно брз и ефикасан процес дизајнирања електронских уређаја и система, у коме је употреба скувих прототипова, са дугим временом израде, сведена на минимум. Студије случаја омогућавају бољи увид у начин функционисања уређаја, а аутоматизација прорачуна, тј. оптимизација, омогућава пројектовање уређаја нових, до тада непознатих својстава [3].

Нумеричка електромагнетика је релативно зрела научна дисциплина, чији корени датирају и шест деценија уназад [4]. Нумеричка електромагнетика има широк спектар примене у савременој електротехници. У електроенергетици користи се приликом пројектовања и анализе рада електричних машина. Приликом анализе и пројектовања савремених уређаја и система у телекомуникацијама, као што су антене и бежичне мреже, користи се нумеричка ЕМ. Са порастом радног такта модерних микропроцесора и електричних уређаја, њихове димензије постају упоредиве са таласном дужином. Тада се електрична кола не могу више анализирати класичном теоријом електричних кола, већ је потребна (нумеричка) ЕМ анализа. У последње време све су популарнија и истраживања биолошких ефеката изложености живе ћелије ЕМ пољима, као и смањења уочљивости објеката радаром, у којима се интензивно користи нумеричка ЕМ.

Теоријску окосницу нумеричке електромагнетике чине теорија ЕМ поља, нумеричка математика, линеарна алгебра и векторска анализа. Међутим, приликом практичне примене, подједнаку пажњу потребно је посветити и геометријском моделовању, визуелном приказу (геометрије проблема и добијених резултата), рачунарској техници, алгоритмима и програмирању. У том смислу, нумеричка ЕМ је и мултидисциплинарна.

1.2. Преглед најзначајнијих метода нумеричке електромагнетике и тренутно стање у свету

Према тренутним схватањима, макроскопско електромагнетско поље непокретних средина у потпуности је описано помоћу четири Максвелове једначине уз конститутивне релације. О овим једначинама више речи ће бити у поглављу 2. Нумеричка електромагнетика се бави приближним тј. нумеричким решавањем ових једначина.

Прву важну класу нумеричких метода за решавање Максвелових једначина чине потпуне тј. пуноталасне нумеричке методе у ЕМ (*full-wave* СЕМ). Потпуна нумеричка електромагнетска анализа, скраћено нумеричка електромагнетска анализа, представља поступак апроксимативног решавања Максвелових једначина. При конструкцији нумеричких модела у (Максвеловим) једначинама од којих се полази не уводе се никакве додатне апроксимације својстава електромагнетског поља (на пример, за врло високе или врло ниске учестаности).

Најпознатије методе нумеричке електромагнетике су [5]:

- Метода граничних елемената (*boundary element method*, ВЕМ), која се обично назива и методом момената (*method of moments*, МоМ) [6-9], из историјских разлога,
- Метода коначних елемената (*finite element method*, FEM) [10-13] и
- Метода коначних разлика (*finite difference*, FD), са најчешћом формулацијом у временском домену (*finite difference time domain*, FDTD) [8, 14].

Ову поделу нумеричких метода требало би схватити условно и у ширем смислу, пошто постоје и други начини класификације. Методе се могу поделити и на основу домена решавања проблема – временски и фреквенцијски, типа једначина које се решавају – интегралне и диференцијалне, формулације – површинске и запреминске, и на многе друге начине, а у отвореној литератури не постоји јединствена подела [15].

Другу важну класу нумеричких метода за решавање Максвелових једначина чине асимптотске методе. Ове методе се заснивају на апроксимацији

математичких модела физичких својстава електромагнетског поља, тј. апроксимацији Максвелових једначина, и заменом тих једначина другим скупом једначина. Ова два скупа једначина, Максвелове једначине и њихова апроксимација, теже један другоме у граничном процесу (на пример, тачност одређених асимптотских нумеричких метода се побољшава са порастом учестаности). Најзначајније асимптотске нумеричке методе за решавање ЕМ проблема су физичка оптика (*physical optics*, PO), геометријска оптика (*geometrical optics*, GO) и униформна теорија дифракције (*uniform theory of diffraction*, UTD). Асимптотске нумеричке методе могу бити врло погодне за одређену класу проблема (на пример, када су димензије објекта много веће од таласне дужине). Међутим, инхерентне апроксимације ограничавају домен њихове примене, па се оне не могу успешно применити за решавање општих ЕМ проблема. Самим тим, асимптотске методе имају незаобилазна фундаментална ограничења, која су последица уведених апроксимација, док се област примене (потпуних) нумеричких метода проширује са повећавањем брзине рада рачунара и расположиве меморије, тј. са повећањем рачунарских ресурса [који је до сада приближно пратио Муров закон (*Moore's law*)]. Побољшањем алгоритама потпуних нумеричких метода додатно се проширује област њихове примене на постојећим рачунарским системима. У наставку ове дисертације апроксимативне нумеричке методе неће се детаљније разматрати. Биће дат кратак преглед (потпуних) нумеричких метода, а метода коначних елемената биће приказана детаљно.

Све методе нумеричке ЕМ деле основне идеје и концепте, и у ширем смислу се могу сагледати као посебне имплементације решавања истог скупа математичких модела физичких закона. Међутим, у пракси, свака од метода има својих специфичности у погледу теоријске формулације, алгорита, програмирања и коришћења, као и оптималних области примене. Према томе, свака од метода се може посматрати као посебна дисциплина. У наставку су приказана најосновнија својства најзначајнијих метода нумеричке електромагнетике.

1.2.1. Метода граничних елемената (метода момената, МоМ)

Приликом пројектовања антена и расејача, од свих метода нумеричке ЕМ, метода момената [6-9] је једна од најпопуларнијих. У оквиру методе момената, полази се од интегралног облика Максвелових једначина, а према теореме површинске или запреминске еквиваленције, утицај антена и/или расејача на ЕМ поље описује се еквивалентним изворима. Полазећи од теореме запреминске еквиваленције, еквивалентни извори су запреминске (електричне и/или магнетске) струје, а тада је могуће анализирати и ЕМ проблеме са континуално нехомогеним срединама. Генерално, због обимности нумеричких прорачуна, иако омогућава моделовање ширег дијапазона ЕМ проблема, запреминска формулација методе момената ређе се користи. У методи момената најчешће се користи теорема површинске еквиваленције у којој су еквивалентни извори површинске (електричне и/или магнетске) струје. У површинској формулацији методе момената, посматрају се део по део хомогене изотропне средине које се налазе у хомогеном окружењу. Ове средине могу бити начињене од проводних, диелектричних или/или магнетских материјала. Раздвојне површи двеју средина, тј. два материјала, геометријски се моделују плочама и жицама [9] по чијим површима се одређују еквивалентни (површински) извори. Након примене граничних услова, и кроз процес нумеричког тестирања, добија се систем линеарних једначина са матрицом коефицијената која је у општем случају попуњена.

Традиционално, метода момената се примењује за решавање проблема у фреквенцијском домену, на једној или више учестаности. Приликом првобитних формулација методе момената у временском домену (*time domain integral equation*, TDIE), постојао је одређен број потешкоћа са стабилношћу решења [4]. Иако се последњих година интензивно ради на развоју ових метода, комерцијално доступни TDIE кодови су још увек релативно ретки. Методом момената могу се анализирати две групе проблема – (детерминистички) проблеми са побудом, и, ређе, (недетерминистички) проблеми без побуде (*eigen-analysis*).

Предности методе момената су:

- Изузетна ефикасност приликом моделовања савршених (или скоро савршених) проводника у хомогеној средини. Тада је потребно моделовати само раздвојне површи проводника и околног простора.
- Аутоматско задовољење услова зрачења (*radiation condition*), што је врло важно приликом анализе антена и расејача, тј. анализе отворених ЕМ проблема.

Слабе стране методе момената:

- Метода момената није у стању да подједнако ефикасно моделује материјале у које ЕМ поље продире дубоко као што то могу методе засноване на диференцијалним једначинама. Ово је посебно изражено у случају континуално нехомогених материјала и материјала са великим губицима.
- Пошто су елементи матрице система линеарних једначина фреквенцијски зависни, приликом широкопојасне фреквенцијске анализе, за сваку учестаност комплетна процедура прорачуна се најчешће мора поновити у потпуности, што може бити временски врло захтевно.

1.2.2. Метода коначних елемената (FEM)

Прве практичне примене методе коначних елемената на решавање инжењерских проблема датирају из 50-их година прошлог века, иако је математичка основа била позната и раније. Метода је првобитно коришћена у оквиру механике и термодинамике [16], а 60-их година прошлог века појавиле су се и прве примене у оквиру електромагнетике [10-13].

Теоријску основу методе коначних елемената представљају методе за приближно решавање проблема граничних вредности. Две најчешће коришћене методе за приближно решавање проблема граничних вредности су варијациона анализа (тј. варијациони рачун) и метода отежаних резидуала, о којима ће бити више речи у одељку 3.2. Без обзира на своју теоријску основу, било да се пошло од варијационог рачуна или методе отежаних резидуала, методом коначних

елемената решавају се Максвелове једначине у диференцијалном облику. Анализирани ЕМ проблем геометријски се дели на већи број мањих целина, тј. коначних елемената (*finite elements*, FE), а ЕМ поље се апроксимира у оквиру сваког FE одређеним функцијама базиса уз задовољење граничних услова за ЕМ поље на споју два FE.

Метода коначних елемената врло ефикасно моделује сложене и (континуално) нехомогене средине које могу бити и неизотропне. Као и методом момената, методом коначних елемената могу се анализирати две групе проблема – проблеми без побуде, у оквиру којих се одређују сопствене вредности и сопствени вектори (*eigen-analysis*), и (детерминистички) проблеми са побудом. Одређивање модова таласовода и резонантних учестаности шупљина представљају само неке од примера анализе сопствених вредности методом коначних елемената.

Метода коначних елемената у својој формулацији не садржи (инхерентно) услов зрачења (*radiation condition*), па се приликом анализе отворених ЕМ проблема (антена и расејача) овоме мора посветити посебна пажња, о чему ће више речи бити у поглављу 5. Традиционално, FEM се користи за анализу у фреквенцијском домену, мада постоје и формулације у временском домену.

Предности методе коначних елемената:

- Врло једноставан третман нехомогених и неизотропних средина.
- Једноставна анализа дисперзивних средина (у фреквенцијском домену).
- Могућност ефикасног решавања проблема сопствених вредности.
- Једноставно проширење формулације на функције базиса вишег реда, што може значајно смањити потребу за рачунарским ресурсима.
- Коначни елементи могу бити конформни (геометријски прате облик коју моделују), што у многоме олакшава геометријско моделовање закривљених структура. Конформни елементи постоје и у методи момената [17], али је њихова имплементација сложенија него у методи коначних елемената.

- Могућност анализе проблема у којима је истовремено изражено више физичких феномена (на пример, у електроенергетским уређајима велике снаге могуће је истовремено моделовати ЕМ поље и термодинамичке и механичке процесе кроз систем спрегнутих диференцијалних једначина).

Слабе стране методе коначних елемената:

- Неефикасна анализа отворених ЕМ проблема са савршеним (или скоро савршеним) проводницима у хомогеном простору у поређењу са методом момената.
- Просторна сегментација (*mesh*) може постати врло комплексна у случају великих и сложених модела.
- Знатно комплекснија имплементација у поређењу са методом коначних разлика, поготову у случају базисних функција вишег реда и конформних коначних елемената.

1.2.3. Метода коначних разлика (FD и FDTD)

Као и методом коначних елемената, методом коначних разлика решавају се Максвелове једначине у диференцијалном облику, а читав ЕМ проблем дели се на геометријски једноставније делове, тј. коначне елементе. За разлику од методе коначних елемената, метода коначних разлика не користи варијационе формуле и методу отежаних остатака (резидуала), већ се оператор парцијалног извода у Максвеловим једначинама директно апроксимира оператором коначних разлика.

За разлику од методе момената и методе коначних елемената, метода коначних разлика најчешће се користи у временском домену. До решења се долази у узастопним дискретним тренуцима времена (*marching-on-in-time*). Електромагнетско поље се директно одређује у дискретним тачкама простора, без потребе за формирањем и решавањем система линеарних једначина. Тачке у којима се одређује ЕМ поље обично су униформно расподељене по коначним елементима. Широкопојасна фреквенцијска анализа може се спровести само једним проласком у времену уз каснију примену Фуријеове трансформације. На

тај начин могу се одредити широкопојасне фреквенцијске карактеристике недисперзивних уређаја и система. Анализа дисперзивних средина, чији параметри зависе од учестаности, отежана је пошто захтева и рачунање конволуционих интеграла. Таласоводи и већина материјала који се користе у пракси су дисперзивни, што у многоме ограничава домен примене методе коначних разлика, барем у основној формулацији. Постоје и формулације методе коначних разлика у фреквенцијском домену, мада никада нису доживеле велику популарност у широј ЕМ заједници.

Предности методе коначних разлика у временском домену:

- Изузетно једноставна имплементација која је барем за ред величине једноставнија у односу на методу момената и методу коначних елемената.
- Подједнако једноставан третман нехомогених средина као и методом коначних елемената.
- У случају недисперзивних средина до широкопојасне фреквенцијске анализе може се једноставно доћи само једном анализом у временском домену, уз каснију примену Фуријеове трансформације.

Слабе стране методе коначних разлика:

- Слаба геометријска флексибилност. Пошто се ЕМ поље обично одређује у дискретним тачкама униформно расподељеним по коначним елементима (на пример, униформно распоређеним у Декартовом координатном систему), моделовање закривљених структура може бити релативно компликовано.
- Имплементација у случају дисперзивних средина је релативно комплексна.
- Као и у случају методе коначних елемената, неефикасна анализа отворених ЕМ проблема са савршеним (или скоро савршеним) проводницима у хомогеном простору у поређењу са методом момената.

- Приликом анализе у простопериодичном режиму, тј. анализе линеарног система са простопериодичним побудама исте учестаности, прорачуни могу бити знатно сложенији у односу на методу момената и методу коначних елемената.

1.3. Будућност нумеричке електромагнетике

На првом месту, чини се реалним очекивати даљи напредак рачунарске технике и перформанси личних рачунара. Без сумње, ово је и до сада био један он најзначајнијих фактора који су омогућили развоја нумеричких метода. Новина је у томе што се до унапређења перформанси рачунара више не долази (искључиво) процесорима вишег радног такта, већ (по правилу) процесорима са више језгара. Ово у великој мери утиче и на алгоритме у нумеричкој анализи, где је потребно доста пажње посветити паралелизацији прорачуна. Алгоритме нумеричке електромагнетике потребно је прилагодити новим архитектурама рачунарских система, о чему ће бити више речи у одељку 6.6. Алгоритми у оквиру постојећих метода унапређују се свакодневно. Имплементације метода постају све комплексније, са циљем да се број прорачуна смањи што више.

Теорија нумеричке електромагнетике изузетно је напредовала од свог почетка 60-их година прошлог века. Нумеричком ЕМ данас је могуће решити врло широк дијапазон реалних проблема. Доста је урађено и на пољу хибридизације метода (на пример, FEM-МоМ [18] и МоМ-PO), при чему се комбинују предности сваке од метода. Аутоматска поновна геометријска сегментација је једна од важнијих тема за будућност и уско је повезана са методама процене грешке решења [19-21]. Све већи значај се придаје и процесима аутоматске оптимизације у оквиру нумеричке ЕМ [3]. Нумеричка ЕМ је жива и актуелна научна дисциплина која ће без сумње наставити да се унапређује и усавршава у годинама које долазе.

1.4. Значај, предмет и циљ истраживања докторске дисертације

Метода коначних елемената је једна од најзначајнијих нумеричких метода за моделовање широког спектра инжењерских проблема. Иако је, у основном облику, формулисана пре доста времена, а нумеричка електромагнетика добро изучена научна област, развојем технике и технологије пред савремене нумеричке алате за анализу ЕМ проблема стално се постављају нови и комплекснији задаци.

Првобитно развијене формулације методе коначних елемената, ниског реда апроксимације ЕМ поља и скромне геометријске флексибилности, постају недовољно ефикасне и тачне за данашње потребе, поготову када је циљ да се симулације врше на многобројним и приступачним личним рачунарима. Због тога, у последње време, нумеричке методе вишег реда апроксимације поља са геометријски флексибилним елементима постају све значајније и чешће коришћене у модерној инжењерској пракси. Са друге стране, свако додатно усложњавање модела пред инжењера-корисника поставља нови скуп могућности и параметара симулације које је потребно правилно изабрати. Стога је, како би се процес нумеричког моделовања олакшао корисницима и како би се метода могла успешно користити у пракси, неопходно проучити разне аспекте нумеричке анализе ЕМ поља.

Нове ЕМ структуре и пратећи елементи који их моделују данас могу бити врло комплексни, како геометријски, тако и по својствима параметара средине (континуално нехомогене и неизотропне). Средине добијене недавно развијеном теоријом трансформационе електромагнетике су по правилу нехомогене и неизотропне. Стога се јавља нова потреба за методама које су у стању да их ефикасно и тачно моделују, као и скуп препорука за исправно и ефикасно коришћење тих метода.

Важно је напоменути да, иако постоје нумеричке методе које су се показале ефикаснијим за одређену класу проблема (на пример, метода момената за анализу отворених ЕМ проблема), када је потребно анализирати проблеме изузетне комплексности (континуално нехомогене и неизотропне средине), метода коначних елемената и даље представља један од првих избора. Развојем нових

апсорпционих граничних услова настоји се да се повећа тачност и прошири дијапазон могућности примене методе коначних елемената у електромагнетици. Такође, декомпозицијом домена (*domain decomposition*) могуће је различите делове проблема решавати различитим нумеричким методама (оптималним за тај део проблема), а касније комбинацијом ових решења формирати финално решење целог проблема.

Предмет истраживања ове докторске дисертације су нумеричко моделовање и анализа електромагнетских проблема великодоменским, закривљеним, континуално нехомогеним и неизотропним коначним елементима вишег реда.

У дисертацији је најпре, у поглављу 2, описана основна теорија електромагнетских поља, а у поглављу 3 је приказан математички апарат неопходан за примену и разумевање детаља методе коначних елемената. Изложена је и теорија у вези са великодоменском методом коначних елемената вишег реда апроксимације поља.

Затим је, у поглављу 4, сагледана теорија трансформационе електромагнетике (трансформационе оптике). Иако теорија трансформационе електромагнетике, у последње време, представља један од значајнијих праваца истраживања, у отвореној литератури недостају извођења окренута инжењерима. У оквиру ове дисертације изложена је (по први пут) теорија трансформационе електромагнетике у облику погодном за инжењере. Применом ове теорије развијен је алгоритам и софтвер за конструкцију и нумеричку анализу нових теоријских ЕМ структура (покривних слојева) за смањење радарског попречног пресека (*radar cross section, RCS*) расејача. Инхерентно својство оваквих структура је континуална промена неизотропних параметара средине. На конкретним примерима, у одељку 6.4, проверена је тачност и ефикасност новог великодоменског начина моделовања оваквих структура закривљеним континуално нехомогеним и неизотропним коначним елементима вишег реда. Како у свету не постоји комерцијално доступан софтвер за нумеричку ЕМ анализу у коме се користе велики континуално нехомогени и неизотропни коначни елементи, добијени резултати су упоређени са аналитичким решењима (која постоје у веома ограниченом броју случајева) и са нумеричким решењима

добијеним моделовањем малодоменским хомогеним тетраедарским коначним елементима ниског реда апроксимације ЕМ поља. Иако је практична примена ЕМ структура добијених на описани начин за сада ограничена, њихова примена у коначним елементима математички произвољних (па и нефизичких) параметара средине може бити веома корисна у конструкцији нових апсорпционих слојева за ограничавање нумеричког домена (затварање) у методи коначних елемената.

У наставку, у поглављу 5, размотрене су могућности затварања домена нумеричке анализе отворених ЕМ проблема методом коначних елемената локалним и глобалним граничним условима. Развијен је нови (неригорозни) апсорпциони гранични услов (*absorbing boundary condition*, АВС) другог реда, примерен великим закривљеним хексаедарским елементима вишег реда апроксимације поља и геометрија, а његове перформансе су, у одељку 6.5, упоређене са до сада коришћеним апсорпционим граничним условом првог реда. Апсорпциони гранични услов другог реда се најчешће користи као оптималан услов локалног типа за затварање FEM домена у постојећим софтверским пакетима, који по правилу користе запреминску дискретизацију простора (мешинг) тетраедрима, и базисне функције ниског реда, када се овај услов лако имплементира. Међутим, ефикасна имплементација апсорпционог граничног услова реда вишег од првог, за велике закривљене елементе вишег реда, није описана у отвореној литератури.

Као незаобилазан функционални део разматрања ЕМ анализе великим закривљеним елементима, у одељку 6.2, дат је осврт на специфичности у погледу својстава дискретизација геометрије разматраног проблема (меша) закривљеним великодоменским елементима заснованим на Лагранжовим интерполационим полиномима вишег реда. Предложена је једна врста једноставног просторног мапирања родитељских домена на закривљене домене у циљу постизања што тачнијих резултата ЕМ анализе. На основу ограниченог скупа нумеричких експеримената, у одељку 6.3, дате су смернице за избор параметара нумеричких симулација великодоменском методом коначних елемената вишег реда приликом моделовања неизотропних средина. Коначно, у циљу што ефикаснијег искоришћења расположивих рачунарских ресурса, у одељку 6.6, спроведена је

паралелизација (рачунарски) најзахтевнијих делова рачунарског кода методе коначних елемената.

Основни циљ истраживања ове дисертације је нумеричко моделовање континуално нехомогених и неизотропних ЕМ средина добијених теоријом трансформационе електромагнетике. У оквиру основног циља истраживања, проучена је и теорија трансформационе електромагнетике и њена примена у нумеричкој анализи конкретних ЕМ проблема. Унапређене су перформансе постојећих апроксимативних апсорпционих граничних услова у моделовању великим закривљеним коначним елементима. Одређена су и правила оптималног избора редова полинома апроксимације ЕМ поља и електричне величине коначних елемената, као и редова полинома нумеричке интеграције у случају изотропних и неизотропних средина. Повећана је тачност нумеричких прорачуна подобнијим функцијама просторног мапирања код великих закривљених елемената, а одређени делови алгоритама методе коначних елемената убрзани су процесом паралелизације.

2. Основе теорије електромагнетског поља

2.1. Увод

Након објављивања књиге Џејмс Кларк Максвела (*James Clerk Maxwell*) [22, 23], теорија електромагнетског поља (електромагнетика) постаје саставни део многих инжењерских и научних истраживања. Иако релативно једноставне по форми, поготову у савременој математичкој нотацији, Максвелове једначине, према тренутним схватањима, макроскопски описују електромагнетско поље од статичког до оптичког дела спектра, од електрично малих до међупланетарних размера. Радар, осматрање на даљину, геоелектромагнетика, биоелектромагнетика, антене, бежичне комуникације, оптика и брза електрична кола само су неки од примера успешне практичне примене електромагнетике.

Проблеми електромагнетске анализе подразумевају решавање Максвелових једначина уз одређене граничне услове. У овом поглављу биће изложене само основе теоријске електромагнетике, неопходне за разумевање и примену методе коначних елемената и праћење излагања у остатку дисертације. Појединости ове комплексне и широке научне дисциплине превазилазе оквире ове дисертације, а заинтересован читалац детаље може потражити у [24-30].

2.2. Максвелове једначине

Максвелове једначине представљају скуп фундаменталних једначина које описују макроскопске електромагнетске феномене непокретних средина. Могу бити записане у интегралном или диференцијалном облику. Иако се методом коначних елемената (апроксимативно) решавају Максвелове једначине у диференцијалном облику, оба облика ће бити изложена због целовитости.

У општем случају временски променљивог електромагнетског поља, Максвелове једначине у интегралном облику гласе

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}, \quad (2.1)$$

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}, \quad (2.2)$$

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \rho \, dv \text{ и} \quad (2.3)$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (2.4)$$

Редом, ове једначине се називају Фарадејев закон електромагнетске индукције (*Faraday's law*), Максвел-Амперов закон (*Maxwell–Ampere law*), Гаусов закон (*Gauss's law*) и закон конзервације магнетског флуksа. У овим једначинама \mathbf{E} је вектор јачине електричног поља, \mathbf{D} је вектор електричне индукције (тј. вектор електричног помераја), \mathbf{H} је вектор јачине магнетског поља, \mathbf{B} је вектор магнетске индукције, \mathbf{J} је вектор површинске густине запреминске електричне струје и ρ је запреминска густина вишка наелектрисања. Приликом одређених теоријских разматрања, а посебно приликом извођења теореме еквиваленције, врши се уопштење (проширење) једначина (2.1) и (2.4). Једначини (2.1) додаје се члан који у себи садржи (фиктивне) магнетске струје, а једначини (2.4) додаје се члан који у себи садржи (фиктивна) магнетска оптерећења. Према тренутним схватањима, овим члановима не може се придружити физички смисао. Њихова улога је чисто математичка и није од посебног значаја у оквиру ове дисертације. У једначинама (2.1) и (2.2) S представља произвољну (отворену) оријентисану површ чији је обод оријентисана контура C , а оријентације су им повезане по правилу десне завојнице. У једначинама (2.3) и (2.4) S представља произвољну затворену површ која ограничава домен v , оријентисану упоље.

Једначина континуитета, која представља математички запис закона одржања укупне количине наелектрисања у природи, у општем случају временски променљивог електромагнетског поља гласи

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = - \int_v \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dv, \quad (2.5)$$

и може се извести из једначина (2.2) и (2.3). Једначине (2.1)-(2.5) важе под свим околностима без обзира на: средину у којој се примењују, облик запремине v , површи S и контуре C .

У посебном случају (линеарних средина), када су све величине које описују електромагнетско поље простопериодичне функције времена исте кружне учестаности ω , у циљу поједностављења анализе, могуће је увести фазорске представнике простопериодичних величина [25]. Како постоји бијективно пресликавање између фазорских и комплексних представника простопериодичних величина, једначине (2.1)-(2.5) могу се записати у комплексном облику

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -j\omega \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}, \quad (2.6)$$

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\mathbf{J} + j\omega\mathbf{D}) \cdot d\mathbf{S}, \quad (2.7)$$

$$\int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \rho \, dv, \quad (2.8)$$

$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \text{ и} \quad (2.9)$$

$$\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -j\omega \int_v \rho \, dv, \quad (2.10)$$

где је $j = \sqrt{-1}$ имагинарна јединица, а \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{H} , \mathbf{B} , \mathbf{J} и ρ су комплексни представници одговарајућих простопериодичних величина које описују електромагнетско поље.

Максвелове једначине у диференцијалном облику могу се извести полазећи од Максвелових једначина у интегралном облику уз примену теореме Гауса и Остроградског и Стоксове теореме [26]. Посматрајмо произвољан део простора у коме су све величине које описују електромагнетско поље, заједно са одговарајућим просторним изводима, континуалне функције простора. У том случају, у том делу простора, електромагнетско поље је описано Максвеловим једначинама у диференцијалном облику

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.11)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (2.12)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \text{ и} \quad (2.13)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.14)$$

Једначина континуитета у диференцијалном облику је

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (2.15)$$

У једначинама (2.11)-(2.15) $\nabla \times$ представља оператор ротора, а $\nabla \cdot$ оператор дивергенције.

У случају простопериодичног електромагнетског поља, увођењем комплексних представника, Максвелове једначине у диференцијалном облику се упрошћавају и постају

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B}, \quad (2.16)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega \mathbf{D}, \quad (2.17)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \text{ и} \quad (2.18)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.19)$$

а једначина континуитета постаје

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -j\omega \rho. \quad (2.20)$$

У оквиру ове дисертације, методом коначних елемената анализираће се електромагнетски проблеми линеарних средина у простопериодичном режиму. Од посебног значаја ће нам бити једначине (2.16)-(2.19) уз једначину континуитета (2.20).

2.3. Конститутивне релације

Максвелове једначине, без обзира на облик у коме се записују (интегрални или диференцијални), описују својства електромагнетског поља независно од посматране средине (медијума). За потпуни опис електромагнетског проблема, осим Максвелових једначина, потребне су и једначине које ближе описују својства средине, тј. материјала у чијем присуству се одређује електромагнетско поље. По свом типу те једначине представљају локалну везу између вектора електромагнетског поља, а називају се конститутивним релацијама. Конститутивне релације описују макроскопска својства посматране средине.

У случају линеарних, нехомогених и неизотропних средина, конститутивне релације су

$$\mathbf{D} = \overline{\overline{\varepsilon}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}, \quad (2.21)$$

$$\mathbf{B} = \overline{\overline{\mu}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{H} \text{ и} \quad (2.22)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_i + \overline{\overline{\sigma}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}. \quad (2.23)$$

У конститутивним релацијама $\overline{\overline{\varepsilon}}$, $\overline{\overline{\mu}}$ и $\overline{\overline{\sigma}}$ представљају тензоре пермитивности, пермеабилности и електричне проводности димензија 3×3 , респективно, а \mathbf{r} представља вектор положаја. Тензори се обично записују матрично, на пример, као у (4.82), а концепт тензора детаљније је описан у одељку 4.2.1. У случају изотропних средина, тензори постају скалари, а у случају хомогених средина пермитивност, пермеабилност и електрична проводност не зависе од положаја. Помоћу вектор побудних струја \mathbf{J}_i моделује се побуда електромагнетског система. Вектор $\overline{\overline{\sigma}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}$ представља кондукционе струје. У оквиру ове дисертације, методом коначних елемената анализираће се електромагнетски проблеми континуално нехомогених и неизотропних средина, па ће се, према томе, користити конститутивне релације у облику (2.21)-(2.23).

2.4. Таласна једначина

Методом коначних елемената директно се одређује расподела електромагнетског поља, без примене теореме еквиваленције. У случају простопериодичног режима, решава се систем Максвелових једначина (2.16)-(2.19) уз конститутивне релације (2.21)-(2.23). Заменом конститутивних релација (2.21)-(2.23) у Максвелове једначине (2.16)-(2.19), добија се систем (спрегнутих) једначина по \mathbf{E} и \mathbf{H} ; у случају стационарних поља ($\omega = 0$) једначине су распрегнуте. Ради лакшег нумеричког решавања, обично се из овог система једначина, једноставним аналитичким манипулацијама, елиминише један од вектора, \mathbf{E} или \mathbf{H} , а уместо диференцијалних једначина првог реда, добија се диференцијална једначина другог реда. Тако се елиминацијом вектора \mathbf{H} из једначина (2.16) и (2.17) добија једначина

$$\nabla \times \left(\overset{=-1}{\underline{\mu}}_r \cdot \nabla \times \mathbf{E} \right) - k_0^2 \overset{=}{\underline{\epsilon}}_r \cdot \mathbf{E} = -j\omega \mu_0 \mathbf{J}, \quad (2.24)$$

која се назива нехомогеном векторском таласном једначином (по вектору \mathbf{E}). У овој једначини $k_0 = \lambda_0 / 2\pi = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ представља таласни број у слободном простору (вакууму), $\overset{=}{\underline{\epsilon}}_r$ и $\overset{=}{\underline{\mu}}_r$ су тензори релативне пермитивности и пермеабилности ($\overset{=}{\underline{\epsilon}} = \epsilon_0 \overset{=}{\underline{\epsilon}}_r$ и $\overset{=}{\underline{\mu}} = \mu_0 \overset{=}{\underline{\mu}}_r$), λ_0 је таласна дужина у слободном простору, а ϵ_0 и μ_0 су пермитивност и пермеабилност слободног простора, респективно. Ако се посматра део простора без извора електромагнетског поља ($\mathbf{J} = 0$ и $\rho = 0$), нехомогена векторска таласна једначина (по вектору \mathbf{E}) (2.24) постаје хомогена векторска таласна једначина, а облика је

$$\nabla \times \left(\overset{=-1}{\underline{\mu}}_r \cdot \nabla \times \mathbf{E} \right) - k_0^2 \overset{=}{\underline{\epsilon}}_r \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (2.25)$$

Решење нехомогене векторске таласне једначине (2.24), које задовољава и једначину (2.18), аутоматски задовољава једначину континуитета (2.20). Решење хомогене векторске таласне једначине аутоматски задовољава одговарајућу Максвелову једначину по дивергенцији [(2.18) за $\rho = 0$ и (2.19), респективно].

Дуалним поступком, из једначина (2.16) и (2.17) могуће је елиминисати вектор \mathbf{E} , при чему се долази до нехомогене векторске таласне једначине по вектору \mathbf{H} . Теоријски, избор облика векторске таласне једначине (по \mathbf{E} или по \mathbf{H}) не би требало да утиче на нумеричко решење. Међутим, приликом одређивања нумеричког (апроксимативног) решења показује се да одређени тип векторске таласне једначине води ка тачнијем решењу за одређену групу проблема¹. Такође, начин имплементације граничних услова зависи од избора облика векторске таласне једначине. Све ово би требало узети у обзир приликом избора облика векторске таласне једначине која ће се решавати методом коначних елемената. У практичним нумеричким применама, оба облика векторске таласне

¹ На пример, показује се да се приликом анализе правоугаоних таласовода методом коначних елемената, ТЕ модови тачније одређују полазећи од векторске таласне једначине по \mathbf{E} , а да се ТМ модови тачније одређују полазећи од векторске таласне једначине по \mathbf{H} .

једначине (по \mathbf{E} и по \mathbf{H}) равноправно се користе, а надаље, без губитка општости, разматраће се само формулација по вектору \mathbf{E} .

Постоје и нумеричке имплементације које директно решавају диференцијалне једначине првог реда по оба вектора (\mathbf{E} и \mathbf{H}) истовремено, најчешће у временском домену [31]. Формулације преко два поља имају одређених предности у односу на формулације преко једног поља. Основна мана формулације преко два поља, у односу на формулацију преко једног поља, је што се ред система једначина дуплира. Због тога се, за сада, овакав приступ доста ређе користи.

2.5. Гранични услови

На раздвојној површи две средине, када се параметри средина скоковито мењају, Максвелове једначине попримају посебан облик који се назива граничним условима. За одређен (детерминистички) електромагнетски проблем (са ненултим побудама), од свих могућих решења која задовољавају Максвелове једначине, гранични услови ће издвојити једно (право) решење посматраног проблема. У случају неодређених електромагнетских проблема (без побуде, на пример, проблема сопствених вредности), од свих могућих решења Максвелових једначина, гранични услови ће издвојити само једну групу решења посматраног проблема.

Посматрајмо раздвојну површ две средине, приказану на слици 2.1. Нека на раздвојној површи, у општем случају, постоје сингуларни извори електромагнетског поља: површинске електричне струје \mathbf{J}_s и површинска електрична наелектрисања ρ_s . Нека је \mathbf{n} вектор нормале на раздвојну површ, усмерен (по договору) од средине 2 ка средини 1. У том случају, гранични услови су

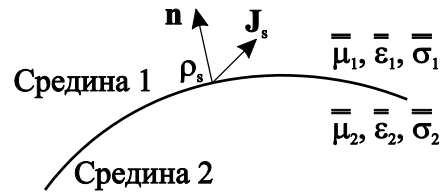
$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0, \quad (2.26)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_s, \quad (2.27)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_s \text{ и} \quad (2.28)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0, \quad (2.29)$$

при чему су вектори \mathbf{E}_1 , \mathbf{D}_1 , \mathbf{H}_1 и \mathbf{V}_1 вектори електромагнетског поља непосредно уз раздвојну у средини 1, а вектори \mathbf{E}_2 , \mathbf{D}_2 , \mathbf{H}_2 и \mathbf{V}_2 су вектори електромагнетског поља непосредно уз раздвојну површ у средини 2. У случају да на раздвојној површи нема извора електромагнетског поља ($\rho_s = 0$ и $\mathbf{J}_s = 0$), једначине (2.27) и (2.28) се модификују (са десне стране остаје нула), а гранични услови се тада називају и услови континуитета електромагнетског поља.



Слика 2.1. Уз граничне услове на раздвојној површи две средине.

Као посебан случај, приказан на слици 2.2, посматрајмо сценарио у коме је средина 2 (са слике 2.1) замењена савршеним електричним проводником (*perfect electric conductor*, PEC). Дефиниција савршеног електричног проводника је да по његовој запремини не може постојати електрично поље и не може постојати простопериодично магнетско поље (по запремини PEC-а је $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{D} = 0$ и $\mathbf{H} = 0$, $\mathbf{V} = 0$ ако је $\omega \neq 0$). У том случају ($\omega \neq 0$) гранични услови постају

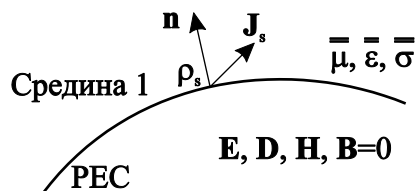
$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0, \quad (2.30)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = \rho_s, \quad (2.31)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_s \text{ и} \quad (2.32)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{V} = 0, \quad (2.33)$$

при чему су \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{H} и \mathbf{V} вектори електромагнетског поља у средини 1, непосредно изнад савршеног електричног проводника.



Слика 2.2. Уз граничне услове на раздвојној површи савршеног електричног проводника (ПЕС).

2.6. Резиме

У овом поглављу представљене су, у најкраћим цртама, теоријске основе електромагнетике неопходне за разумевање и примену методе коначних елемената. Прво су приказане Максвелове једначине у интегралном облику као фундаменталне једначине електромагнетског поља из којих се (користећи се векторском анализом) могу извести Максвелове једначине у диференцијалном облику. Представљене су и конститутивне релације (у најопштијем случају). Посебно је разматран случај простопериодичних електромагнетских поља, у оквиру којег је представљена векторска таласна једначина. На крају су, на раздвојним површинама двеју средина, приказани гранични услови.

Иако су у оквиру овога поглавља представљене теоријске основе електромагнетике неопходне за успешно разумевање методе коначних елемената, одређен број важних концепата је изостављен. Принцип дуалности, теорема јединствености решења, теорема реципроцитета, разни облици принципа еквиваленције и Поинтингова теорема само су неки од њих. Заинтересован читалац детаље може потражити у [24-30].

3. Метода коначних елемената

3.1. Увод

Метода коначних елемената је нумеричка техника за одређивање апроксимативног (нумеричког) решења проблема граничних вредности (*boundary-value problems*). У теорији диференцијалних једначина проблемом граничних вредности називају се проблеми одређивања функција описаних диференцијалним једначинама на одређеном домену и скупом ограничења које те функције морају да задовоље на граници домена. Ова ограничења називамо граничним условима. Проблеми граничних вредности јављају се у великом броју практичних инжењерских проблема, математичких проблема и проблема примењене физике, тако да постоји велика потреба за ефикасном и робусном методом за њихово решавање. Метода коначних елемената има историју дужу од 70 година, а први пут је представљена у раду [32]. Своју практичну примену започиње 50-их година прошлог века приликом пројектовања авиона и летелица, а данас се сматра општом методом за решавање широког дијапазона инжењерских проблема и проблема примењене математике и физике. Корени методе коначних елемената су у класичним методама за приближно решавање проблема граничних вредности.

У оквиру овог поглавља биће изложене (у најкраћим цртама) основе класичних метода за решавање проблема граничних вредности, као увод у методу коначних елемената. Биће дат кратак осврт на методу коначних елемената, а детаљније ће се разматрати појединости у вези са електромагнетским моделовањем континуално нехомогених и неизотропних средина геометријски флексибилним великододомским коначним елементима вишег реда полиномске апроксимације (електричног) поља. Укратко ће бити представљени детаљи у вези

са геометријским моделовањем и полиномском апроксимацијом електромагнетског поља.

3.2. Проблеми граничних вредности као теоријска основа методе коначних елемената

Проблеми граничних вредности често се сусрећу приликом математичког моделовања (линеарних) физичких система. Проблем граничних вредности у случају векторског поља и линеарне средине математички се може описати помоћу линеарне операторске једначине

$$\mathcal{L}\mathbf{f} = \mathbf{g}, \quad (3.1)$$

где је \mathcal{L} линеарни оператор, \mathbf{g} представља (векторску) побуду система, а \mathbf{f} је непозната векторска функција која се одређује. По дефиницији, оператор представља пресликавање једног простора функција у други простор функција [9]. Линеарни оператор пресликава линеарну комбинацију (векторских) функција у исту линеарну комбинацију одговарајућих (векторских) функција. Приликом нумеричког моделовања електромагнетских проблема операторске једначине су интегралне или диференцијалне једначина по (непознатој) расподели електричног и магнетског поља, струја и наелектрисања, а векторска функција \mathbf{f} је један од вектора који описују електромагнетско поље (\mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{H} , \mathbf{V} и \mathbf{J}). Ове једначине су линеарне ако су све средине линеарне.

Линеарна операторска једначина (3.1) важи над доменом Ω (део простора), а за потпун опис проблема граничних вредности потребан је и гранични услов (за непознату функцију \mathbf{f}) на граници $\partial\Omega$ домена Ω . Гранични услов може се скраћено записати у облику линеарне операторске једначине

$$\mathbf{BC}(\mathbf{f}) = \mathbf{p}. \quad (3.2)$$

У овом изразу \mathbf{BC} представља гранични услов записан у облику линеарног оператора, а \mathbf{p} представља вектор на граници $\partial\Omega$ домена Ω (на пример, вектор подужне густине површинске струје \mathbf{J}_s). У посебним случајевима гранични услови могу се записати и у облику линеарног функционала. У оквиру

електромагнетике, линеарни функционал пресликава линеарну комбинацију вектора у исту линеарну комбинацију одговарајућих скалара.

Пожељно је једначину (3.1) уз гранични услов (3.2) решити аналитички (у затвореном облику), ако је то могуће. У оквиру електромагнетике, аналитичка решења постоје у врло малом броју специјалних случајева. То су, по правилу, проблеми високе симетрије [1], при чему се граничне површи $\partial\Omega$ домена Ω обично поклапају са неком од координатних површи (стандардних) координатних система. Такви проблеми се релативно ретко сусрећу у пракси. У већини случајева важних за праксу, проблеми граничних вредности не могу се решити аналитички, а до решења се мора доћи неком од апроксимативних метода. Ово је уједно и основна мотивација за развој апроксимативних метода за решавање проблема граничних вредности, међу којима су најпознатије Рејли-Риц метода (*Rayleigh–Ritz method*) и метода отежаних резидуала (*weighted residual method*).

3.2.1. Рејли-Риц метода

Рејли-Риц метода [33] припада групи варијационих метода у оквиру које је проблем граничних вредности формулисан помоћу варијационог израза над одговарајућим функционалом. Функционал пресликава (у нашем случају) векторску просторну функцију у скалар [9]. За сваки електромагнетски проблем потребно је (у општем случају) конструисати посебан функционал. Приликом конструкције функционала полази се од (непознате) функције \mathbf{f} која (аутоматски) задовољава граничне услове (3.2). Функционал се конструише тако да када (непозната) функција \mathbf{f} представља минимум (тј. екстремум) функционала, аутоматски задовољава и одговарајућу линеарну операторску једначину (3.1). На тај начин успостављена је директна веза између решења проблема граничних вредности, граничних услова и минимума (тј. локалног екстремума) одговарајућег функционала.

У оквиру Рејли-Риц методе непозната векторска функција \mathbf{f} се представља као линеарна комбинација познатих (векторских) функција (базиса) и (скаларних) коефицијената који се одређују. Апроксимативно решење проблема граничних

вредности одређује се минимизацијом функционала у односу на коефицијенте развоја.

Један од основних недостатака Рејли-Риц методе је у томе што се са променом линеарне операторске једначине (3.1) и/или граничног услова (3.2), поново мора конструисати одговарајући функционал. За одређен број проблема граничних вредности који се јављају у електромагнетици постоје већ развијени функционали, мада они подразумевају да је линеарни оператор позитивно-дефинисан (*positive-definite*) и да је ауто-адјунгован (*self-adjoint*). Посебно, у случају неизотропних средина функционали могу бити релативно сложени [11].

3.2.2. Метода отежаних резидуала

Метода отежаних резидуала (*weighted residual method*) [6, 7] полази од остатка (резидуала) линеарне операторске једначине (3.1), дефинисаног као

$$\mathbf{r} = \mathcal{L}\mathbf{f} - \mathbf{g}. \quad (3.3)$$

Тачно решење \mathbf{f} проблема граничних вредности ће задовољити услов $\mathbf{r} = 0$ у свакој тачки домена Ω , док то неће бити испуњено за апроксимативно (приближно) решење $\tilde{\mathbf{f}}$, у општем случају. Уместо строгог услова $\mathbf{r} = 0$, у свакој тачки домена Ω , посматра се релаксиран услов у коме се (на неки начин) усредњен отежан резидуал изједначава са нулом. Уместо решења оригиналног проблема \mathbf{f} , дефинисаног релацијом $\mathbf{r} = 0$, посматра се решење релаксираног проблема $\tilde{\mathbf{f}}$, дефинисано релацијом

$$\int_{\Omega} \mathbf{w}_i \cdot (\mathcal{L}\tilde{\mathbf{f}} - \mathbf{g}) d\Omega = 0, \quad i = 1, \dots, N_t, \quad (3.4)$$

где је \mathbf{w}_i тежинска (тј. тест) функција, а N_t је укупан број тежинских функција којима се тестира отежани резидуал.

Апроксимативно решење проблема (3.4) може се потражити у облику линеарне комбинације познатих функција развоја (тј. функција базиса) (\mathbf{f}_j) и непознатих коефицијената (α_j) који се одређују, у облику

$$\tilde{\mathbf{f}} = \sum_{j=1}^{N_b} \alpha_j \mathbf{f}_j, \quad (3.5)$$

где N_b представља укупан број функција базиса. Заменом релације (3.5) у израз (3.4), долази се до финалног система линеарних једначина који се решава

$$\sum_{j=1}^{N_b} \alpha_j \int_{\Omega} \mathbf{w}_i \cdot \mathcal{L} \mathbf{f}_j d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{g} d\Omega, \quad i = 1, \dots, N_t. \quad (3.6)$$

Обично се узима да је $N_t = N_b = N$, где је N ред финалног система линеарних једначина.

Избор базисних и тест функција је произвољан, и у општем случају утицаће на квалитет финалног решења. Један од најпопуларнијих избора је Галеркинова метода (*Galerkin method*) [9]. У оквиру Галеркинове методе, функције базиса једнаке су одговарајућим тест функцијама (тј. важи $\mathbf{w}_i = \mathbf{f}_i$). У случају позитивно-дефинисаног (*positive-definite*) и ауто-адјунгованог (*self-adjoint*) линеарног оператора \mathcal{L} , Рејли-Риц метода и Галеркинова метода воде ка истом систему линеарних једначина. У оквиру ове дисертације користиће се Галеркинова метода у комбинацији са полиномским, хијерархијским, роторски-конформним функцијама базиса вишег реда, о којима ће више речи бити у одељку 3.6.

Ознаке за домен (Ω) и границу домена ($\partial\Omega$) општег су типа и могу се користити у оквиру једнодимензионих, дводимензионих, тродимензионих и вишедимензионих (математичких) проблема. У оквиру ове дисертације решаваће се тродимензиони ЕМ проблеми, па ће се уместо опште ознаке Ω за домен користити (стандардна) ознака V за запремину, а уместо опште ознаке $\partial\Omega$ за границу домена користиће се стандардна ознака S за површ.

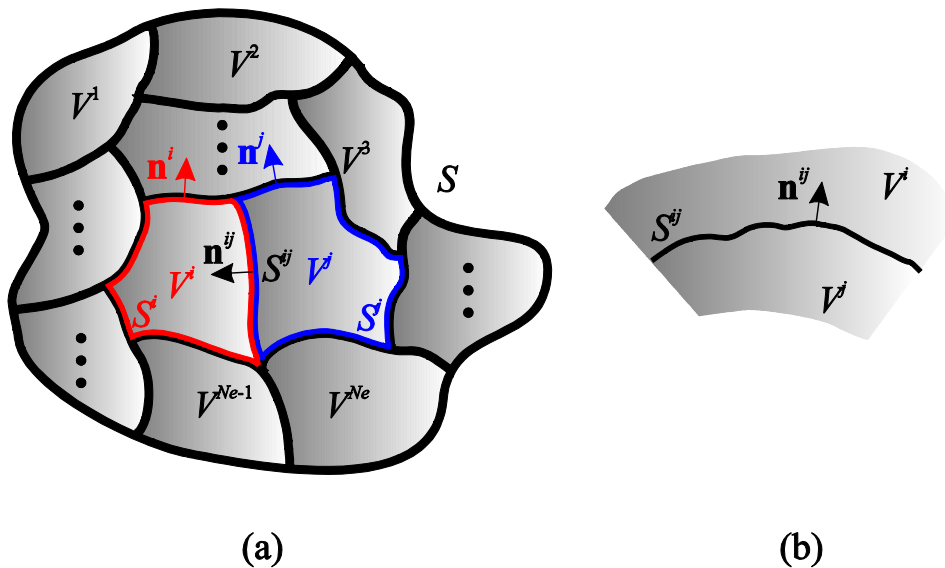
3.3. Основни кораци у методи коначних елемената

Приликом директног решавања проблема граничних вредности Рејли-Риц методом или методом отежаних резидуала, потребно је одредити (целодоменске) функције базиса које су у стању да задовољавајуће тачно апроксимирају решење по читавом домену V и граничне услове на граници домена S . У већини

практичних проблема, сложених геометрија, ово је изузетно тежак задатак. Уместо оваквог приступа, читав домен V могуће је изделити на већи број геометријски једноставнијих непреклапајућих поддомена V^e , који се називају коначни елементи. Подела домена V на коначне елементе илустрована је на слици 3.1 (а), а читав процес детаљније је објашњен у одељку 3.5. Коначним елементима потребно је обухватити читав простор од интереса, тј. математички поддомени задовољавају релације

$$\bigcup_{e=1}^{N_e} V^e = V \text{ и } \bigcap_{e=1}^{N_e} V^e = \emptyset, \quad (3.7)$$

при чему N_e представља укупан број коначних елемената.



Слика 3.1. (а) Геометријска подела ЕМ проблема на коначне елементе.
(б) Раздвојна површ два коначна елемента.

Функције базиса деле се на групе. У основној варијанти свака од група функција базиса дефинисана је само над једним коначним елементом, а у напреднијој варијанти функције базиса дефинисане су над групом суседних коначних елемената (на пример, дублети из [9]). Функције базиса се бирају тако да задовољавајуће тачно апроксимирају решење по запремини коначног елемента V^e и одређене граничне услове на његовој граници S^e . Детаљи у вези са функцијама базиса изложени су у одељку 3.6. Пошто су поддомени V^e по правилу геометријски доста једноставнији од оригиналног домена V , конструисање (поддоменских) функција базиса је доста олакшано. Ово

представља основну идеју методе коначних елемената: геометријски сложен проблем дели се на већи број геометријски мање сложених коначних елемената, једноставнијих за апроксимацију непознатог поља.

Процедура решавања проблема граничних вредности методом коначних елемената може се (грубо) поделити на следеће кораке: Геометријска дискретизација проблема тј. геометријско моделовање, одабир функција базиса, конструкција глобалног система линеарних једначина, решавање система линеарних једначина и обрада добијених резултата. У практичним имплементацијама не постоји оштра граница између појединих корака, а основни кораци обично се међусобно преклапају. У наредним одељцима овог поглавља изложени су детаљи методе коначних елемената са посебним освртом на моделовање неизотропних и континуално нехомогених средина.

3.4. Основне једначине методе коначних елемената

Као што је већ речено у одељку 2.4, методом коначних елемената приближно решавамо проблеме граничних вредности. У оквиру ове дисертације проблем граничних вредности, тј. електромагнетски проблем, формулисан је помоћу хомогене векторске таласне једначине (2.25), тј. посматрају се део простора без извора електромагнетског поља [$\mathbf{J} = 0$ у (2.24)]. Побуда електромагнетског проблема је у облику инцидентног таласа и укључује се кроз површинске интеграле облика (3.53) и (3.54) који фигуришу у десном члану једначине (3.48). На основу кратке дискусије у вези са проблемима граничних вредности из одељка 3.2 и закључака из одељка 3.3, део простора у коме се одређује расподела ЕМ поља (домен V) најпре се дели на већи број једноставнијих непреклапајућих целина (поддомене V^e који се називају коначним елементима). Овај процес, детаљније описан у одељку 3.5, назива се геометријском дискретизацијом. Математички је описан једначинама (3.7) и илустрован је на слици 3.1 (а).

По запремини сваког коначног елемента (V^e), у коме нема извора ЕМ поља, електрично поље мора да задовољава хомогену векторску таласну једначину (2.25), а на граничној површи (S^e) домена од интереса ЕМ поље мора да

задовољава граничне услове (2.30)-(2.33). Поље које задовољава претходне једначине и граничне услове, на основу теореме јединствености решења [25], представљаће и јединствено решење ЕМ проблема (под условом да су задовољени сви услови теореме јединствености решења).

Приликом приближног (нумеричког) решавања ЕМ проблема, да би се дијапазон могућих решења проширио, а процес решавања олакшао, претходне услове потребно је релаксирати. Уместо егзактног задовољења векторске таласне једначине, задовољава се слаба формулација (*weak formulation*) векторске таласне једначине (на пример, методом отежаних резидуала), а уместо задовољења свих граничних услова, тражи се решење које задовољава гранични услов (2.30) експлицитно (егзактно) и гранични услов (2.32) имплицитно (у ширем смислу), када се решава векторска таласна једначина по електричном пољу. У строгој формулацији таласне једначине одговарајући вектори морају бити два пута диференцијабилни [на пример, вектор $\overset{=-1}{\mu}_r \cdot \nabla \times \mathbf{E}$ у (2.24) и (2.25) мора бити континуална функција по читавом домену V , тј. мора имати континуалан ротор] [13]. Конструкција функција базиса која задовољава оваква својства (C^1 континуалност) по правилу је доста тешка и због тога, за сада, није доживела већу популарност. Због тога се, једноставним аналитичким манипулацијама, ред извода у оригиналним таласним једначинама (2.24) и (2.25) снижава, базисне функције тада морају бити (само) континуалне по читавом домену V (C^0 континуалност), а за овакав облик таласне једначине кажемо да је слабе формулације [и за један коначан елемент приказана је у (3.10)]. Познато је да решавање слабе формулације таласне једначине може проузроковати одређен број лажних (нефизичких) решења (*spurious solutions*), при чему већ постоје технике за елиминацију ових решења [13].

Заменом израза (2.25) у израз (3.4) за један коначан елемент долазимо до једначине

$$\int_{V^e} \mathbf{w}_i \cdot \nabla \times \left(\overset{=-1}{\mu}_r \cdot \nabla \times \tilde{\mathbf{E}}^e \right) dV^e - k_0^2 \int_{V^e} \mathbf{w}_i \cdot \left(\overset{=e}{\epsilon}_r \cdot \tilde{\mathbf{E}}^e \right) dV^e = 0,$$

$$i = 1, \dots, N_t, \quad (3.8)$$

$$e = 1, \dots, N_e,$$

при чему $\tilde{\mathbf{E}}^e$ представља приближно решење за električno poље e -тог коначног елемента. Пошто ће се у остатку текста разматрати само приближно (нумеричко) решење за električno poље, ради једноставнијег записа надаље ће се ознака тилда (\sim) изоставити. Решење за električno poље тражи се у облику линеарне комбинације непознатих коефицијената и познатих (векторских) функција (базиса), што ће детаљније бити објашњено у одељку 3.6. Директним решавањем једначине (3.8) пред функције базиса (\mathbf{f}_j) и тест функције (\mathbf{w}_i) не би били постављени једнако строги услови; функције базиса би требало да буду такве да $\nabla \times \left(\overset{=-1}{\mu_r} \cdot \nabla \times \mathbf{f}_j \right)$ буде коначна ненулта функција по читавом домену V . Исто својство би требало да имају и тест функције \mathbf{w}_i . Оваква „несиметрија“ захтева, приликом избора базисних и тест функција, посебно је неефикасна у оквиру Галеркинове методе ($\mathbf{w}_i = \mathbf{f}_i$). У слабој формулацији методе коначних елемената, једначина (3.8) векторским манипулацијама се своди на другачији облик [10, 13].

Први векторски Гринов идентитет [24] је облика

$$\int_{V^e} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) dV^e - \int_{V^e} \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{B}) dV^e = \oint_{S^e} (\mathbf{A} \times \nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n}^e dS^e \quad (3.9)$$

при чему су \mathbf{A} и \mathbf{B} две произвољне (континуалне) векторске функције [са дефинисаним свим потребним просторним изводима у изразу (3.9)], а \mathbf{n}^e је нормала на површ S^e која ограничава домен V^e , усмерена упоље. Применом првог векторског Гриновог идентитета на израз (3.8), уз избор $\mathbf{A} = \mathbf{w}_i$ и

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times \left(\overset{=-1}{\mu_r} \cdot \nabla \times \mathbf{E}^e \right),$$

долазимо до финалног израза који ће се решавати

методом коначних елемената:

$$\begin{aligned} & \int_{V^e} (\nabla \times \mathbf{w}_i) \cdot \left(\overset{=-1}{\mu_r} \cdot \nabla \times \mathbf{E} \right) dV^e - k_0^2 \int_{V^e} \mathbf{w}_i \cdot \left(\overset{=-e}{\epsilon_r} \cdot \mathbf{E} \right) dV^e = \\ & \oint_{S^e} \left[\mathbf{w}_i \times \left(\overset{=-1}{\mu_r} \cdot \nabla \times \mathbf{E} \right) \right] \cdot \mathbf{n}^e dS^e = - \oint_{S^e} \left[\mathbf{n}^e \times \left(\overset{=-1}{\mu_r} \cdot \nabla \times \mathbf{E} \right) \right] \cdot \mathbf{w}_i dS^e, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$i = 1, \dots, N_t,$

уз граничне услове (за део простора без извора ЕМ поља)

$$\mathbf{n}^{ij} \times \mathbf{E}^i = \mathbf{n}^{ij} \times \mathbf{E}^j \text{ и} \quad (3.11)$$

$$\mathbf{n}^{ij} \times \mathbf{H}^i = \mathbf{n}^{ij} \times \mathbf{H}^j, \quad (3.12)$$

$$i, j = 1, \dots, N_e.$$

Последњи гранични услов (3.12), након примене израза (2.16) и (2.22), може се написати у облику погоднијем за примену у једначини (3.10),

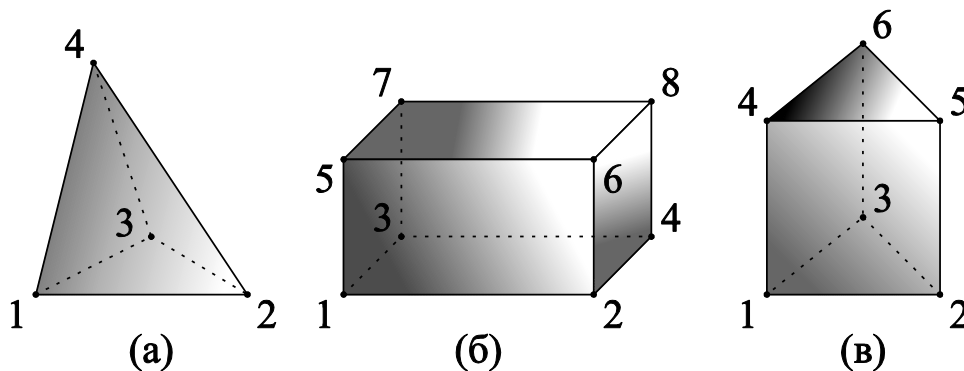
$$\mathbf{n}^{ij} \times \left(\overset{=i-1}{\boldsymbol{\mu}_r} \cdot \nabla \times \mathbf{E}^i \right) = \mathbf{n}^{ij} \times \left(\overset{=j-1}{\boldsymbol{\mu}_r} \cdot \nabla \times \mathbf{E}^j \right), \quad (3.13)$$

при чему \mathbf{E}^i и \mathbf{E}^j представљају векторе електричног поља непосредно са две стране раздвојне површи i -тог и j -тог коначног елемента, а \mathbf{n}^{ij} је нормала на ту раздвојну површ, усмерена од средине j ка средини i и приказана на слици 3.1 (б). Приликом формирања система линеарних једначина методом коначних елемената израз (3.13) ће се користити у изразу (3.10).

3.5. Геометријска дискретизација

Геометријска дискретизација је први корак приликом анализе било ког проблема методом коначних елемената. Начин на који ће проблем бити геометријски подељен на коначне елементе, утиче на потребне рачунарске ресурсе, укупно време извршавања симулације, као и на стабилност и тачност нумеричког решења.

Најчешће коришћени елементи за тродимензионо (3-D) геометријско моделовање у оквиру методе коначних елемената су тетраедар [34-40], квадар [35, 39, 40] и тространа призма [41, 42], а који су приказани на слици 3.2.



Слика 3.2. Најчешће коришћени коначни елементи: (а) тетраедар, (б) квадар и (в) тространа призма.

Генерално, избор коначних елемената представља компромис између геометријске флексибилности елемената и једноставности имплементације нумеричке методе. Такође, за одређен број геометријски једноставнијих коначних елемената, као што су тетраедар и квадар, већ постоје готова софтверска решења за аутоматску просторну сегментацију произвољних геометрија [43]. У случају геометријски сложенијих коначних елемената, када комерцијално доступна решења за просторну сегментацију не постоје, потребно је развити софтвер од почетка или генерисати геометријске моделе „ручно“, што може бити врло дугачак захтеван и заморан посао [44].

Када се моделују структуре са израженим закривљењима, тетраедар, квадар и тространа призма обично не представљају најбољи избор [45]. Због својих правих ивица и равних страница, у околини области са израженим закривљењима потребан је велики број коначних елемената. Елементи могу бити значајно мањих димензија него што то диктирају ограничења нумеричке методе – у случају апроксимације поља полиномима ниског реда, да би се добили задовољавајуће тачни резултати, линеарне димензије коначних елемената су реда величине $\lambda/10$, где λ представља таласну дужину у посматраном коначном елементу. Са повећањем броја коначних елемената (врло брзо) расте и потреба за рачунарским ресурсима, а укупно време извршавања симулације се продужава.

У поређењу са малодоменским начином моделовања великим бројем електрично малих коначних елемената, моделовање великодоменским коначним елементима са полиномском апроксимацијом поља вишег реда показало се као врло ефикасно [45]. На овај начин могуће је значајно смањити ред финалног

система линеарних једначина, а самим тим и потребе за рачунарским ресурсима и укупно време извршавања симулације, уз задржавање исте (или постизање боље) тачности апроксимације поља. Могуће је повећати тачност и ефикасност методе коначних елемената у (готово) свим ситуацијама [45]. Уместо великог броја електрично малих коначних елемената са ниским редовима полиномске апроксимације поља, могуће је користити мањи број електрично великих коначних елемената са високим редовима полиномске апроксимације поља и максималним линеарним димензијама и до 2λ . У посебним ситуацијама, када се анализира део простора са пуно ситних детаља и/или врло брзом променом ЕМ поља (на пример, део простора са ивичним ефектом), електрично велики коначни елементи се могу произвољно поделити на већи број мањих коначних елемената. На овај начин уситњавањем коначних елемената само у критичном делу проблема, критични део се моделује у малодоменском духу, док је остатак могуће моделовати на великодоменски начин задржавајући све предности које тај начин моделовања има.

Да би се у потпуности искористили сви потенцијали великодоменских коначних елемената, коначни елементи морају бити геометријски флексибилни како не би дошло до њиховог уситњавања диктираног геометријом и закривљењима. Као један од атрактивних избора флексибилних елемената, са (по потреби) закривљеним страницама, је уопштени интерполациони закривљени параметарски хексаедар вишег (теоријски произвољног) геометријског реда. Овај елемент је први пут представљени 1988. године [46], а у оквиру ове дисертације користиће се за моделовање 3-D неизотропних и континуално нехомогених електромагнетских структура произвољних геометрија.

У наредним одељцима дат је кратак опис интерполационих закривљених параметарских хексаедара произвољног геометријског реда. Описане су основне геометријске и математичке релације неопходне за имплементацију хексаедарских елемената у методи коначних елемената за електромагнетску анализу континуално нехомогених и неизотропних средина.

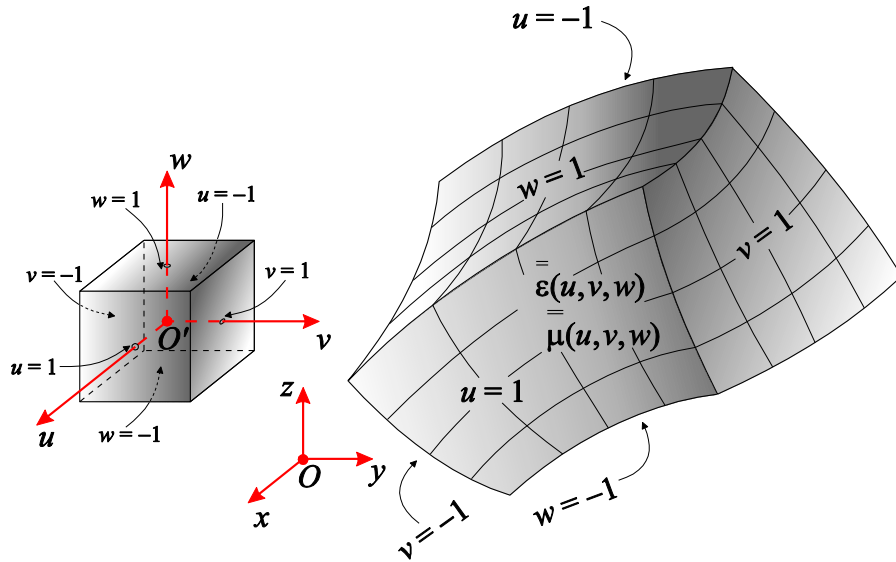
3.5.1. Интерполациони закривљени параметарски хексаедар вишег геометријског реда

Уопштени хексаедар [45, 47-49] одређен је помоћу $Q^e = (1 + K_u^e)(1 + K_v^e)(1 + K_w^e)$ интерполационих тачака произвољно распоређених у простору, при чему $K_u^e, K_v^e, K_w^e \geq 1$ представљају геометријске редове e -тог коначног елемента у одговарајућим правцима локалног координатног система. Аналитички, овај хексаедар описан је релацијом

$$\mathbf{r}(u, v, w) = \sum_{i=1}^{Q^e} \mathbf{r}_i L_i^{K_u^e, K_v^e, K_w^e}(u, v, w) = \sum_{m=0}^{K_u^e} \sum_{n=0}^{K_v^e} \sum_{l=0}^{K_w^e} \mathbf{r}_{mnl} u^m v^n w^l, \quad -1 \leq u, v, w \leq 1, \quad (3.14)$$

где \mathbf{r}_i ($i = 1, \dots, Q^e$) представљају векторе положаја интерполационих чворова а $L_i^{K_u^e, K_v^e, K_w^e}$ су (троструки) интерполациони полиноми Лагранжовог типа (*Lagrange interpolation polynomials*). Ови полиноми задовољавају релацију $L_i^{K_u^e, K_v^e, K_w^e}(u_j, v_j, w_j) = \delta_{ij}$, при чему су u_j, v_j и w_j параметарске координате j -те интерполационе тачке, а $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ представља Кронекерову делта функцију.

Константни вектори положаја \mathbf{r}_{mnl} могу се одредити полазећи од вектора \mathbf{r}_i , а имплементација помоћу њих погодна је због боље ефикасности рачунарског програма. Једначина (3.14) представља пресликавање (мапирање) родитељског елемента, у нашем случају јединичне коцке која заузима $-1 \leq u, v, w \leq 1$ део $u-v-w$ простора, у закривљени параметарски хексаедар у Декартовом $x-y-z$ простору. Ово пресликавање илустровано је на слици 3.3. У алгоритмима у оквиру методе коначних елемената, који ће се користити у овој дисертацији, компоненте свих вектора представљене су помоћу Декартових компоненти [на пример, $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$] а родитељски елементи и $u-v-w$ простор користе се ради једноставније (рачунарске) имплементације у случају произвољних елемената. Једном развијеном рачунарском рутином за родитељске елементе могу се вршити прорачуни произвољних коначних елемената.



Слика 3.3. Илустрација пресликавања родитељске јединичне коцке у закривљени параметарски хексаedar описаног једначином (3.14).

3.5.2. Интерполациони полиноми Лагранжовог типа

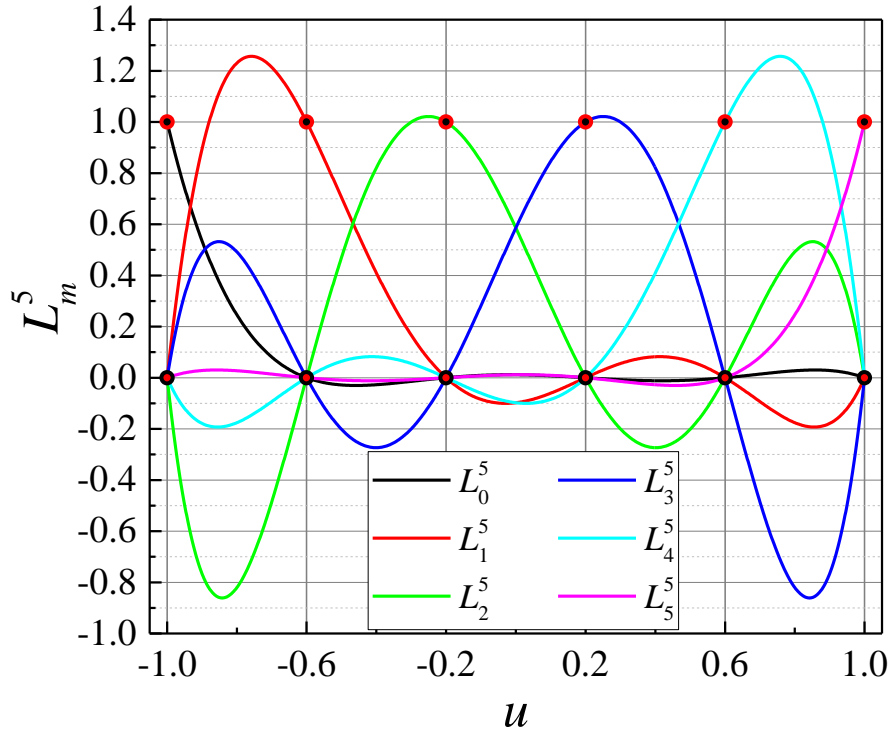
Приликом конструисања троструког (тродимензионог) Лагранжовог интерполационог полинома $L_i^{K_u^e, K_v^e, K_w^e}(u, v, w)$, неопходног за пресликавање (3.14), полази се од једноструког (једнодимензионог) Лагранжовог интерполационог полинома $L_m^{K_u^e}(u)$, $m = 0, \dots, K_u^e$, дефинисаног над доменом $-1 \leq u \leq 1$. Лагранжов интерполациони полином $L_m^{K_u^e}(u)$ је полином K_u^e -тог реда по u , јединичне вредности у интерполационој тачки u_m и нулте вредности у свим осталим интерполационим тачкама. Математички, описан је релацијом

$$\begin{aligned}
 L_m^{K_u^e}(u) &= \frac{(u - u_0)(u - u_1) \dots (u - u_{m-1})(u - u_{m+1}) \dots (u - u_{K_u^e})}{(u_m - u_0)(u_m - u_1) \dots (u_m - u_{m-1})(u_m - u_{m+1}) \dots (u_m - u_{K_u^e})} = \\
 &= \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq m}}^{K_u^e} \frac{u - u_j}{u_m - u_j}, \quad m = 0, \dots, K_u^e,
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

где u_j ($j = 0, \dots, K_u^e$) представљају интерполационе тачке у опсегу $-1 \leq u \leq 1$. У случају униформно распоређених интерполационих тачака, њихове координате одређене су једноставном релацијом

$$u_j = \frac{2j - K_u^e}{K_u^e}, \quad j = 0, \dots, K_u^e. \tag{3.16}$$

На слици 3.4 приказани су (једноструки) Лагранжови интерполациони полиноми петог реда ($K_u^e = 5$). Тачкама су приказане карактеристичне вредности у интерполационим тачкама. Произвольна (континуална) функција може се апроксимирати линеарном комбинацијом Лагранжових интерполационих полинома, при чему коефицијенти у линеарном развоју одговарају вредности функције у одговарајућим интерполационим тачкама.



Слика 3.4. Једноструки Лагранжови интерполациони полиноми петог реда ($K_u^e = 5$).

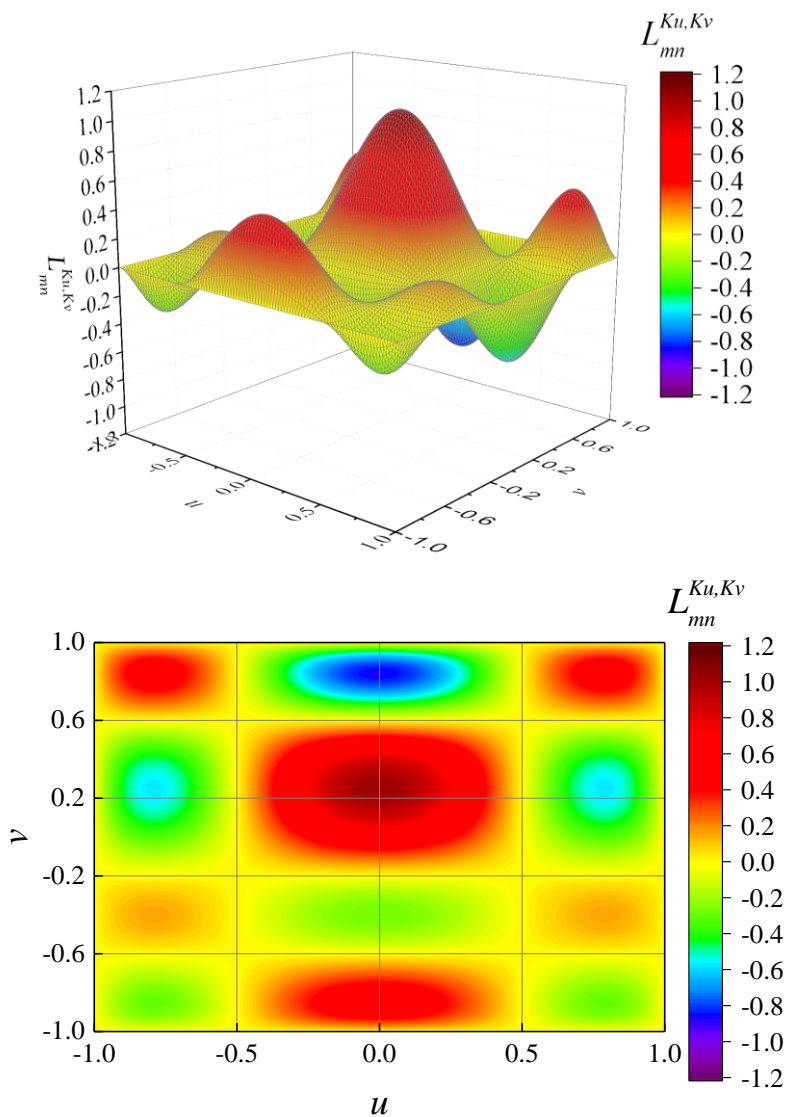
Троструки Лагранжови интерполациони полиноми добијају се једноставним множењем једноструких Лагранжових интерполационих полинома за сваки од праваца $u - v - w$ простора. Математички, описани су релацијом

$$L_i^{K_u^e, K_v^e, K_w^e}(u, v, w) = L_{mnl}^{K_u^e, K_v^e, K_w^e}(u, v, w) = L_m^{K_u^e}(u)L_n^{K_v^e}(v)L_l^{K_w^e}(w), \quad 1 \leq i \leq Q^e, \quad (3.17)$$

при чему је $i = 1 + m + n(1 + K_u^e) + l(1 + K_u^e)(1 + K_v^e)$, $0 \leq m \leq K_u^e$, $0 \leq n \leq K_v^e$, $0 \leq l \leq K_w^e$ и $Q^e = (1 + K_u^e)(1 + K_v^e)(1 + K_w^e)$.

Просторне (троструке) векторске функције није лако графички представити, па је због тога на слици 3.5 приказан двоструки Лагранжов интерполациони

полином за $m=2$, $n=3$, $K_u^e=4$ и $K_v^e=5$, а координатне u - v линије одговарају интерполационим тачкама. Двоструки интерполациони Лагранжов полином дефинише се потпуно аналогно као у (3.17).



Слика 3.5. Двоструки Лагранжов интерполациони полином (горња слика) и његова пројекција у u - v равни (доња слика) за $m=2$, $n=3$, $K_u^e=4$ и $K_v^e=5$.

3.5.3. Векторска алгебра и анализа у уопштеном закривљеном координатном систему

3.5.3.1 Примарни и реципрочни вектори

Једна од значајнијих погодности векторске анализе је што облик једначина записаних помоћу оператора просторних извода не зависи од избора

координатног система. Тако и облик једначина које описују (електромагнетско) поље не зависи од избора (посебног) координатног система [24]. Међутим, приликом конкретних прорачуна, векторска поља представљају се помоћу својих компоненти (скалара), тј пројекција у односу на одређене векторе базе простора. У случају стандардних координатних система, избор вектора базе простора је праволинијски и очигледан (на пример, у случају Декартовог координатног система векторску базу простора чине ортови \mathbf{i}_x , \mathbf{i}_y и \mathbf{i}_z). У случају уопштених закривљених координатних система, примарни и реципрочни вектори могу чинити базу простора, а детаљи у вези са њима приказани су у наставку. Уопштени закривљени координатни системи неопходни су за дефинисање и имплементацију уопштених закривљених параметарских хексаедара који ће се користити у оквиру методе коначних елемената.

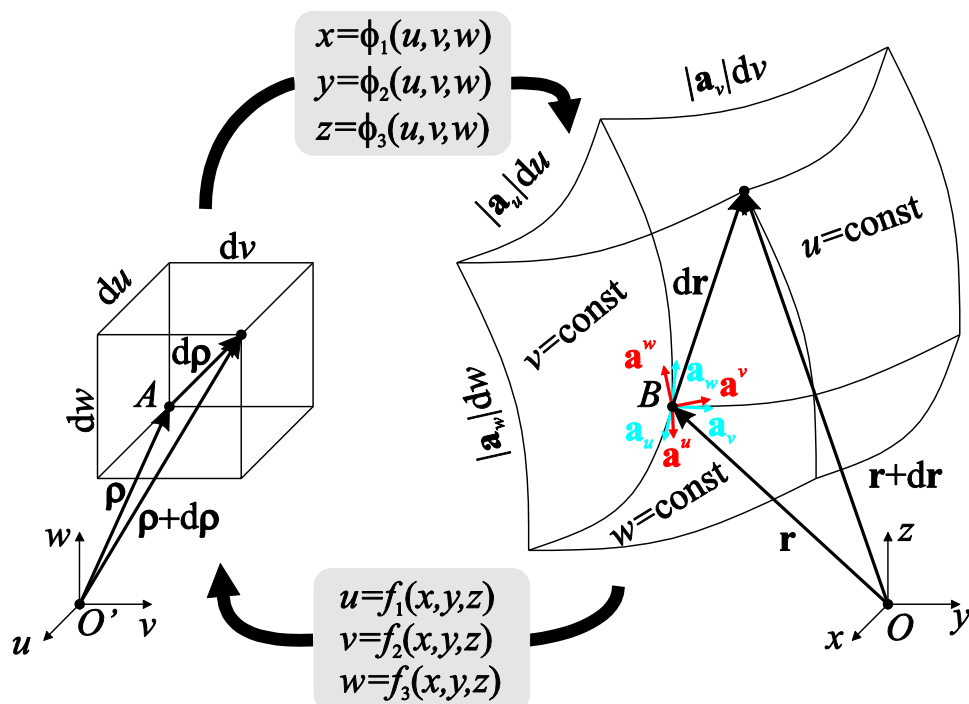
Посматрајмо три независне, континуалне и једнозначне функције Декартових координата x , y и z

$$u = f_1(x, y, z), \quad v = f_2(x, y, z) \quad \text{и} \quad w = f_3(x, y, z), \quad (3.18)$$

које пресликавају тачку $B(x, y, z)$ Декартовог координатног система у одговарајућу тачку $A(u, v, w)$ u - v - w координатног система. Систем једначина (3.18) може се решити по x , y и z . Нека су тако новодобијене функције из (3.19) такође континуалне независне и једнозначне. Ове функције пресликавају тачку A u - v - w координатног система у одговарајућу тачку B Декартовог координатног система као

$$x = \phi_1(u, v, w), \quad y = \phi_2(u, v, w) \quad \text{и} \quad z = \phi_3(u, v, w). \quad (3.19)$$

Променљиве u , v и w називају се уопштеним (или закривљеним) координатама, а често се у литератури ради лакше манипулације записују у индексној нотацији (на пример, као ω^i у [50] или као u^i у [51]). У овој дисертацији уопштене координате у индексној нотацији обележаваћемо као q^i , ($i=1,2,3$). Конкретно, у нашем случају $q^1 = u$, $q^2 = v$ и $q^3 = w$. Пресликавање између ова два координатна система илустровано је на слици 3.6.



Слика 3.6. Илустрација пресликавања између Декартовог и уопштеног закривљеног координатног система.

Кроз тачку B уопштеног $u-v-w$ координатног система пролазе три координатне површи којима одговара једна константна уопштена координата ($u = \text{const}$, $v = \text{const}$ и $w = \text{const}$). Такође, кроз тачку B пролазе три координатне линије којима одговарају две константне уопштене координате и једна променљива уопштена координата (на пример, $u \neq \text{const}$, $v = \text{const}$ и $w = \text{const}$).

Нека вектор $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y, z)$ представља вектор положаја тачке B у односу на произвољан координатни почетак O , а нека је $\mathbf{p} = \mathbf{p}(u, v, w)$ одговарајући вектор положаја тачке A у односу на координатни почетак O' . Компоненте вектора положаја \mathbf{r} и \mathbf{p} повезане су трансформацијама (3.18) и (3.19). Тада се вектор положаја \mathbf{r} може представити у функцији уопштених координата

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}(u, v, w) = x\mathbf{i}_x + y\mathbf{i}_y + z\mathbf{i}_z = \\ &= \phi_1(u, v, w)\mathbf{i}_x + \phi_2(u, v, w)\mathbf{i}_y + \phi_3(u, v, w)\mathbf{i}_z. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Прираштај вектора положаја \mathbf{r} услед елементарног помераја дуж (уопштених) координатних линија је [50] (одговарајући прираштај вектора \mathbf{p} је $d\mathbf{p}$)

$$d\mathbf{r}(u, v, w) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} dv + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} dw \quad (3.21)$$

и може се написати у облику

$$d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{a}_i dq^i = \mathbf{a}_u du + \mathbf{a}_v dv + \mathbf{a}_w dw, \quad (3.22)$$

при чему се вектори

$$\mathbf{a}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \quad \mathbf{a}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \quad \text{и} \quad \mathbf{a}_w = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \quad (3.23)$$

називају примарни вектори [24, 50, 52] и дефинисани су као $\mathbf{a}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i}$, ($i=1,2,3$). У

нашем случају $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_u$, $\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_v$ и $\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_w$. Ови вектори могу да представљају једну од база уопштеног закривљеног координатног система², а њихов правац тангентан је на одговарајуће уопштене координатне линије. Смер им је у смеру пораста уопштених координата.

Произвољан вектор \mathbf{F} сада се може представити помоћу примарних вектора који чине базу простора као

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^3 F^i \mathbf{a}_i = F^u \mathbf{a}_u + F^v \mathbf{a}_v + F^w \mathbf{a}_w, \quad (3.24)$$

при чему се F^i , ($i=1,2,3$), тј. F^u , F^v и F^w називају контраваријантним компонентама вектора \mathbf{F} у $u-v-w$ координатном систему.

Посматрајмо сада елементарну запремину у $u-v-w$ координатном систему (елементарни квадар дужина ивица du , dv и dw) и одговарајући закривљени паралелепипед у Декартовом координатном систему (дужина ивица $|\mathbf{a}_u|du$, $|\mathbf{a}_v|dv$ и $|\mathbf{a}_w|dw$). Однос њихових запремина је (не узимајући знак у обзир, тј. под претпоставком да примарни вектори \mathbf{a}_u , \mathbf{a}_v и \mathbf{a}_w чине триедар десне оријентације)

² Важно је напоменути да примарни вектори у случају трансформације (3.14) не морају бити јединичне дужине и међусобно управни. У зависности од трансформација (3.18) и (3.19) не морају чак бити ни истих димензија у два координатна система (на пример, вектори $\partial \mathbf{r} / \partial \phi$ и $\partial \mathbf{r} / \partial \theta$ у сферном координатном систему су димензије дужине, а у Декартовом координатном систему $\partial \mathbf{r} / \partial x$ је без димензије).

$$J = \frac{\mathbf{a}_u du \cdot (\mathbf{a}_v dv \times \mathbf{a}_w dw)}{dudv dw} = \mathbf{a}_u \cdot (\mathbf{a}_v \times \mathbf{a}_w) = \mathbf{a}_v \cdot (\mathbf{a}_w \times \mathbf{a}_u) = \mathbf{a}_w \cdot (\mathbf{a}_u \times \mathbf{a}_v), \quad (3.25)$$

при чему J уједно представља и јакобијан (детерминанту Јакобијеве матрице) $u-v-w$ координатног система. Сада је могуће дефинисати три нова вектора који чине нову базу простора као

$$\mathbf{a}^u = \frac{1}{J} \mathbf{a}_v \times \mathbf{a}_w, \quad \mathbf{a}^v = \frac{1}{J} \mathbf{a}_w \times \mathbf{a}_u \quad \text{и} \quad \mathbf{a}^w = \frac{1}{J} \mathbf{a}_u \times \mathbf{a}_v. \quad (3.26)$$

Вектори \mathbf{a}^u , \mathbf{a}^v и \mathbf{a}^w називају се реципрочни вектори [24, 50, 52], управни су на одговарајуће уопштене координатне површи и задовољавају релацију

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}^j = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (3.27)$$

при чему је у нашем случају $\mathbf{a}^1 = \mathbf{a}^u$, $\mathbf{a}^2 = \mathbf{a}^v$ и $\mathbf{a}^3 = \mathbf{a}^w$, а δ_{ij} је Кронекерова делта функција. Произвољан вектор \mathbf{F} може се сада представити и помоћу реципрочних вектора као

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^3 F_i \mathbf{a}^i = F_u \mathbf{a}^u + F_v \mathbf{a}^v + F_w \mathbf{a}^w, \quad (3.28)$$

при чему се F_i , ($i=1,2,3$), тј. F_u , F_v и F_w називају коваријантним компонентама вектора \mathbf{F} у $u-v-w$ координатном систему, а на основу (3.27) одређују се као

$$F_u = \mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_u, \quad F_v = \mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_v \quad \text{и} \quad F_w = \mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_w. \quad (3.29)$$

Такође, на основу (3.27), контраваријантне компоненте вектора \mathbf{F} одређују се као

$$F^u = \mathbf{F} \cdot \mathbf{a}^u, \quad F^v = \mathbf{F} \cdot \mathbf{a}^v \quad \text{и} \quad F^w = \mathbf{F} \cdot \mathbf{a}^w. \quad (3.30)$$

Аналогно, полазећи од (3.25) и (3.26), примарни вектори могу се изразити помоћу реципрочних вектора као

$$\mathbf{a}_u = J(\mathbf{a}^v \times \mathbf{a}^w), \quad \mathbf{a}_v = J(\mathbf{a}^w \times \mathbf{a}^u) \quad \text{и} \quad \mathbf{a}_w = J(\mathbf{a}^u \times \mathbf{a}^v). \quad (3.31)$$

Важно је напоменути и то да је декларисање вектора као примарних и реципрочних потпуно произвољно. За један скуп примарних и реципрочних вектора, постоји други скуп примарних и реципрочних вектора, при чему су примарни вектори првог скупа реципрочни вектори другог скупа и обрнуто. Са друге стране, када је једном дато пресликавање (3.19) помоћу њега су одређени

примарни и реципрочни вектори првог скупа изразима (3.20), (3.23), (3.25) и (3.26). Да би се одредила веза између вектора првог и другог скупа, потребно је одредити други скуп функција пресликавања (γ_1 , γ_2 и γ_3 уместо f_1 , f_2 и f_3),

$$x = \gamma_1(u, v, w), \quad y = \gamma_2(u, v, w) \quad \text{и} \quad z = \gamma_3(u, v, w), \quad (3.32)$$

тако да примарни вектори другог скупа буду једнаки реципрочним векторима првог скупа. Ово захтева решавање сложених система диференцијалних једначина (по γ_1 , γ_2 и γ_3). У општем случају овај систем једначина не мора имати решење у затвореном облику.

3.5.3.2 Градијент, дивергенција и ротор

Посматрајмо скаларну функцију f и векторску функцију \mathbf{F} . Нека је просторна зависност ових функција изражена помоћу контраваријантних компоненти вектора положаја (тј. помоћу уопштених координата u , v и w), и нека су функције записане у облику $f = f(u, v, w)$ и $\mathbf{F} = \mathbf{F}(u, v, w)$. Тада је згодно просторне изводе (градијент, дивергенцију и ротор) представити у облику са парцијалним изводима по уопштеним координатама u , v и w .

Градијент скаларне функције f у уопштеном закривљеном координатном систему може се одредити као [24, 50]

$$\begin{aligned} \nabla f &= \sum_{i=1}^3 \mathbf{a}^i \frac{\partial f}{\partial q^i} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial u} \mathbf{a}^u + \frac{\partial f}{\partial v} \mathbf{a}^v + \frac{\partial f}{\partial w} \mathbf{a}^w, \end{aligned} \quad (3.33)$$

при чему је $q^1 = u$, $q^2 = v$ и $q^3 = w$, а $\mathbf{a}^1 = \mathbf{a}^u$, $\mathbf{a}^2 = \mathbf{a}^v$ и $\mathbf{a}^3 = \mathbf{a}^w$.

Дивергенција векторске функције \mathbf{F} у уопштеном закривљеном координатном систему може се одредити као [24, 50]

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{F} &= \sum_{i=1}^3 \mathbf{a}^i \cdot \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial q^i} = \frac{1}{J} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial (J F^i)}{\partial q^i} = \\ &= \frac{1}{J} \left[\frac{\partial (J F^u)}{\partial u} + \frac{\partial (J F^v)}{\partial v} + \frac{\partial (J F^w)}{\partial w} \right], \end{aligned} \quad (3.34)$$

при чему је J јакобијан у u - v - w координатном систему дефинисан у (3.25).

Ротор векторске функције \mathbf{F} у уопштеном закривљеном координатном систему може се одредити као [24, 50]

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{F} &= \sum_{i=1}^3 \mathbf{a}^i \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial q^i} = \frac{1}{J} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_u & \mathbf{a}_v & \mathbf{a}_w \\ \partial/\partial u & \partial/\partial v & \partial/\partial w \\ F_u & F_v & F_w \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{J} \left[\left(\frac{\partial F_w}{\partial v} - \frac{\partial F_v}{\partial w} \right) \mathbf{a}_u + \left(\frac{\partial F_u}{\partial w} - \frac{\partial F_w}{\partial u} \right) \mathbf{a}_v + \left(\frac{\partial F_v}{\partial u} - \frac{\partial F_u}{\partial v} \right) \mathbf{a}_w \right].\end{aligned}\quad (3.35)$$

Приликом векторске анализе у уопштеном закривљеном координатном систему, произвољна векторска функције \mathbf{F} може се потпуно равноправно представити помоћу контраваријантних пројекција и примарних вектора као у (3.24) или помоћу коваријантних пројекција и реципрочних вектора као у (3.28).

Посматрајмо сада, за почетак, посебан случај у коме је векторска функција $\mathbf{F} = \mathbf{F}(u, v, w)$ изражена помоћу контраваријантних пројекција и примарних вектора [као у (3.24)]. Нека нам је од значаја да одредимо њен ротор. Да бисмо могли да користимо израз (3.35) за одређивање ротора, потребно је наћи везу између контраваријантних (F^u , F^v и F^w) и коваријантних (F_u , F_v и F_w) компоненти функције \mathbf{F} у затвореном (аналитичком) облику. То подразумева решавање система диференцијалних једначина [[24], стр. 40, једначина (14)], што може бити аналитички врло захтевно. У општем случају овај систем диференцијалних једначина чак ни не мора имати аналитичко (затворено) решење. До везе између контраваријантних (F^u , F^v и F^w) и коваријантних (F_u , F_v и F_w) пројекција функције \mathbf{F} се (тада) може доћи и нумеричким решавањем система диференцијалних једначина. Нумеричко решавање система диференцијалних једначина може бити врло захтевно са становишта рачунарских ресурса и по правилу уноси одређену (нумеричку грешку), па га је пожељно избећи кад год је то могуће. Други начин за прорачун ротора био би замена парцијалних извода у изразу (3.35) коначним разликама, а затим њихов нумерички прорачун. Према томе, закључујемо да је, када год је потребно одредити ротор векторске функције изражене помоћу u , v и w координата, погодно функцију представити у облику (3.28), тј. помоћу реципрочних вектора и коваријантних компоненти. Аналогним резонавањем закључујемо да је, кад год је

потребно одредити дивергенцију векторске функције изражене помоћу u , v и w координата, погодно функцију представити у облику (3.24), тј. помоћу примарних вектора и контраваријантних пројекција.

3.5.4. Векторска алгебра и анализа за уопштене закривљене параметарске хексаедре Лагранжовог типа

Векторска алгебра и анализа за уопштени закривљени координатни систем, изложене до сада, важе у општем случају. Функције пресликавања [ϕ_1 , ϕ_2 и ϕ_3 у изразима (3.19) и (3.20)] између уопштеног u - v - w и Декартовог координатног система могу попримити произвољан облик. У посебном случају, када је то пресликавање описано Лагранжовим интерполационим полиномима као у (3.14), већина израза може се поједноставити.

У случају уопштених закривљених параметарских хексаедара, примарни вектор \mathbf{a}_u одређује се заменом (3.14) у (3.23)

$$\mathbf{a}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \sum_{i=1}^{Q^e} \mathbf{r}_i L_i^{K_u^e, K_v^e, K_w^e}(u, v, w) = \sum_{i=1}^{Q^e} \mathbf{r}_i \frac{\partial L_i^{K_u^e, K_v^e, K_w^e}(u, v, w)}{\partial u}. \quad (3.36)$$

Вектори положаја интерполационих чворова \mathbf{r}_i , $i=1, \dots, Q^e$, константни су и на њих парцијални извод (по уопштеној координати u) не делује. На основу (3.17) и (3.15) одређујемо парцијални извод Лагранжових интерполационих полинома

$$\frac{\partial L_i^{K_u^e, K_v^e, K_w^e}(u, v, w)}{\partial u} = \frac{\partial L_m^{K_u^e}(u)}{\partial u} L_n^{K_v^e}(v) L_l^{K_w^e}(w) \text{ и} \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial L_m^{K_u^e}(u)}{\partial u} = L_m^{K_u^e}(u) \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq m}}^{K_u^e} \frac{1}{u - u_j}. \quad (3.38)$$

Заменом (3.37) и (3.38) у (3.36) долазимо до финалног израза за примарни вектор \mathbf{a}_u у уопштеном закривљеном параметарском хексаедру Лагранжовог типа

$$\mathbf{a}_u = \sum_{i=1}^{Q^e} \mathbf{r}_i L_i^{K_u^e, K_v^e, K_w^e}(u, v, w) \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq m}}^{K_u^e} \frac{1}{u - u_j}. \quad (3.39)$$

Аналогним поступком могуће је одредити и остала два примарна вектора \mathbf{a}_v и \mathbf{a}_w . Сада се на основу израза (3.25) одређује јакобијан за $u-v-w$ координатни систем, а на основу израза (3.26) и реципрочни вектори.

Важно је напоменути да, иако је просторна зависност свих вектора у уопштеним закривљеним параметарским хексаедрима изражена у функцији уопштених (тј. локалних u , v и w) координата, сви вектори могу да се представе помоћу својих Декартових компоненти, тј. могу да се запишу у облику $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$, $\mathbf{a}_u = (a_{u,x}, a_{u,y}, a_{u,z})$ и $\mathbf{a}^u = (a_x^u, a_y^u, a_z^u)$, и аналогно за остале векторе. Ово је очигледно на основу (3.39): ако су вектори \mathbf{r}_i изражени помоћу својих Декартових компоненти и вектор \mathbf{a}_u ће бити изражен помоћу својих Декартових компоненти. На овај начин могуће је приликом манипулације векторима користити (познате и једноставне) изразе векторске алгебре за Декартов координатни систем. На пример за сабирање, скаларно множење и векторско множење (било која) два вектора, формуле су

$$\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j = (x_i + x_j, y_i + y_j, z_i + z_j), \quad (3.40)$$

$$\mathbf{a}_u \cdot \mathbf{a}^v = (a_{u,x} a_x^v, a_{u,y} a_y^v, a_{u,z} a_z^v) \quad \text{и} \quad (3.41)$$

$$\mathbf{a}_u \times \mathbf{a}^v = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_x & \mathbf{i}_y & \mathbf{i}_z \\ a_{u,x} & a_{u,y} & a_{u,z} \\ a_x^v & a_y^v & a_z^v \end{vmatrix}, \quad (3.42)$$

при чему су \mathbf{i}_x , \mathbf{i}_y и \mathbf{i}_z ортови Декартовог координатног система. Аналогни изрази важе и за остале векторске комбинације [на пример, мешовити производ три вектора $\mathbf{a}_u \cdot (\mathbf{a}_v \times \mathbf{a}^w)$].

3.6. Апроксимација електричног поља

Приликом нумеричког (апроксимативног) решавања једначине (3.10), електрично поље представља се у облику линеарне комбинације познатих функција (базиса) и непознатих коефицијената који се одређују методом коначних елемената. Принциписки, ова апроксимација може се написати у два облика

$$\mathbf{E} = \sum_{j=1}^{N_b^e} \beta_j^e h_j^e, \quad e = 1, 2, \dots, N_e \text{ или} \quad (3.43)$$

$$\mathbf{E} = \sum_{j=1}^{N_b^e} \alpha_j^e \mathbf{f}_j^e, \quad e = 1, 2, \dots, N_e, \quad (3.44)$$

при чему је N_b^e укупан број функција базиса e -тог коначног елемента, N_e је укупан број коначних елемената, h_j^e и \mathbf{f}_j^e су (познате) функције базиса а β_j^e и α_j^e су непознати коефицијенти који се одређују методом коначних елемената. Аналогни изрази важе за сваки од осталих коначних елемената.

Апроксимација (електричног) поља изразом (3.43) користи скаларне функције базиса (h_j^e) и векторске (непознате) коефицијенте (β_j^e), а коначни елементи са оваквом апроксимацијом (електричног) поља називају се скаларним коначним елементима. Приликом анализе електромагнетских проблема скаларним коначним елементима свака од (Декартових) компоненти (електричног) поља апроксимира се скаларном (базисном) функцијом у одређеном броју интерполационих тачака. Због тога се ова врста коначних елемената назива и чворним-елементима (*node-based finite elements*). Показано је да скаларни коначни елементи имају потешкоћа приликом моделовања граничних услова на споју два коначна елемента са скоковитом променом параметара средине [37, 53] и приликом моделовања (сингуларног) ЕМ поља на ивицама и рогљевима [54], а у решењима се појављују и нефизички модови приликом анализе шупљина и резонатора [34, 54, 55].

Апроксимација (електричног) поља изразом (3.44) користи векторске функције базиса (\mathbf{f}_j^e) и скаларне коефицијенте (α_j^e), а коначни елементи са оваквом апроксимацијом (електричног) поља називају се векторским коначним елементима. Векторски коначни елементи за степене слободе користе ивице (тј. странице) коначних елемената. У физици, број степени слободе представља број независних параметара који у потпуности одређују стање физичког система. Строго математички, у оквиру линеарне алгебре, број степени слободе представља ранг (квадратне) матрице система линеарних једначина, тј. представља димензију домена вектора решења система линеарних једначина. У оквиру ове дисертације метода коначних елемената резултује системом линеарно независних једначина, па је ред система једначина уједно и број степени слободе.

За разлику од скаларних коначних елемената који за степене слободе користе интерполационе тачке коначних елемената, код векторских коначних елемената функције базиса изражене су помоћу локалних координата дуж ивица или по страницама одговарајућег елемента. Због тога се векторски коначни елементи називају и ивични елементи (*edge elements*). Иако је теоријска основа векторских коначних елемената представљена пре више од пола века [56], њихова употребљивост и значај за електромагнетику прошли су неопажено све до објављивања радова [57, 58]. У овим радовима Неделек (*Nedelec*) поставља теоријске основе за дефинисање ивичних елемената за тетраедар и правоугаони квадар. Након тога Босави и Верите (*Bosavit and Verite*) [59] решавају проблем вихорних струја (*eddy-currents problem*) помоћу тетраедарских ивичних елемената, а Хано (*Hano*) [60] помоћу четвороугаоних ивичних елемената решава проблеме таласовода са диелектричним препрекама. Мур и Хуп (*Mur and Hoop*) помоћу ивичних елемената анализирају електромагнетска поља нехомогених средина. Користећи хексаедарске ивичне елементе, Ван Велиј (*van Welij*) [61] решава проблеме вихорних струја. Краули (*Crowley*) са сарадницима [46] развија софистицираније коначне елементе, са коваријантном пројекцијом компоненти непознатог поља (*covariant projection elements*), који омогућавају коришћење елемената са закривљеним страницама и ивицама. Према тренутним схватањима, векторски коначни елементи, када су исправно примењени, превазилазе све поменуте недостатке скаларних коначних елемената [62], па ће они и бити коришћени у методи коначних елемената у оквиру ове дисертације.

У зависности од посматраног проблема, векторске функције базиса згодно је изабрати тако да што боље описују апроксимирану физичку величину [40]. Тако, када се коначним елементима апроксимира расподела струје, пожељно је користити функције базиса које аутоматски задовољавају једнакост нормалних компоненти на споју два коначна елемента. Коначни елементи са оваквим функцијама базиса називају се дивергенцијски-конформни (*divergence-conforming finite elements*). Са друге стране, када се функцијама базиса апроксимира електрично поље, згодно је користити функције базиса које аутоматски задовољавају једнакост тангенцијалних компоненти електричног поља на споју два коначна елемента. Коначни елементи са оваквим функцијама базиса називају

се роторски-конформним (*curl-conforming finite elements*). У случају дивергенцијски-конформних коначних елемената не форсира се (експлицитно) једнакост тангенцијалних компоненти функција базиса на споју два елемента, а у случају роторски-конформних коначних елемената не форсира се (експлицитно) једнакост нормалних компоненти функција базиса на споју два елемента. Не наметање једнакости тангенцијалних компоненти функција базиса код дивергенцијски-конформних коначних елемената и не наметање једнакости нормалних функција базиса код роторски-конформних коначних елемената представља додатни степен слободе, неопходан приликом моделовања скоковито нехомогених средина. Недостатак овог степена слободе сматра се за основни разлог појаве нефизичких модова приликом коришћења скаларних коначних елемената.

У оквиру ове дисертације користиће се полиномске векторске роторски-конформне функције базиса вишег реда дефинисане над уопштеним, закривљеним параметарским хексаедром вишег (геометријског) реда. Полиномске векторске базисне функције могу бити интерполационог [40, 41] или хијерархијског [37, 63] типа.

Интерполационе функције базиса обично су међусобно ортогоналније у односу на одговарајуће хијерархијске базисне функције. Због тога интерполационе функције базиса обично резултују боље условљеним матрицама финалног система једначина, тј. матрицама са мањим кондиционим бројем [11] (*condition number*) у односу на хијерархијске функције базиса [40]. Ово је посебно пожељна особина када се (финални) систем једначина решава итеративним методама [64]. Са друге стране, развијене су методе за побољшање условљености матрице система линеарних једначина добијене коришћењем хијерархијских функција базиса [64]. Међутим, због начина конструкције интерполационих функција базиса, није могуће користити коначне елементе са различитим бројем степени слободе у оквиру једног проблема, тј. није могуће (итеративно) побољшати тачност решења повећавањем редова полинома апроксимације непознатог поља p -рафинирањем (*p-refinement*), већ је то могуће постићи само уситњавањем коначних елемената, односно h -рафинирањем (*h-refinement*), у региону са критичном тачношћу. Показује се да је побољшање тачности решења

повећањем редова полинома апроксимације поља доста ефикасније са становишта заузећа рачунарских ресурса и укупног времена извршавања симулације у односу на уситњавање коначних елемената [45]. Немогућност коришћења коначних елемената са различитим степенима апроксимације поља у оквиру нумеричког модела представља главни недостатак интерполационих коначних елемената, који не постоји код хијерархијских коначних елемената.

Хијерархијске функције базиса омогућавају да се у оквиру једног проблема користе коначни елементи са различитим степенима (полиномске) апроксимације, без губитка континуалности тангенцијалне компоненте (електричног) поља на споју два елемента [62]. На овај начин могуће је повећати тачност анализе повећањем редова полиномске апроксимације само у критичним регионима са брзом променом ЕМ поља p -рафинирањем, што може водити ка врло ефикасном начину моделовања [45] и пуном искоришћењу геометријске флексибилности закривљених параметарских уопштених хексаедара вишег реда, као и свих других предности великодоменског начина моделовања. Великодоменским начином моделовања, када се користе геометријски флексибилни елементи, уместо великог броја коначних елемената електромагнетски проблем се описује малим бројем електрично великих коначних елемената. На тај начин, уз коришћење полиномске апроксимације поља вишег реда, постиже се значајна уштеда рачунарских ресурса за постизање исте (или боље) тачности нумеричке анализе. Када се користе геометријски флексибилни елементи, разлика у ефикасности између великодоменског и малодоменског начина моделовања посебно постаје изражену у регионима за закривљењима (приликом моделовања сфера, цилиндара, елипсоида и осталих облика који се често сусрећу у пракси).

Због предности хијерархијских функција базиса изложених изнад, у оквиру ове дисертације користиће се векторске хијерархијске роторски-конформне полиномске функције базиса вишег реда. Кратак опис ових функција базиса изложен је у наредном одељку, а детаљи се могу пронаћи у [45].

3.6.1. Векторске хијерархијске роторски-конформне полиномске функције базиса вишег реда

Електрично поље по запремини сваког коначног елемента (уопштеног закривљеног параметарског хексаедра) описано је развојем

$$\mathbf{E} = \sum_{i=0}^{N_u^e-1} \sum_{j=0}^{N_v^e} \sum_{k=0}^{N_w^e} \alpha_{u,ijk}^e \mathbf{f}_{u,ijk}^e + \sum_{i=0}^{N_u^e} \sum_{j=0}^{N_v^e-1} \sum_{k=0}^{N_w^e} \alpha_{v,ijk}^e \mathbf{f}_{v,ijk}^e + \sum_{i=0}^{N_u^e} \sum_{j=0}^{N_v^e} \sum_{k=0}^{N_w^e-1} \alpha_{w,ijk}^e \mathbf{f}_{w,ijk}^e, \quad (3.45)$$

при чему су \mathbf{f}^e роторски-конформне, хијерархијске, полиномске, векторске базисне функције e -тог коначног елемента изражене помоћу коваријантних пројекција. Ове функције дефинисане су као

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{u,ijk}^e &= u^i P_j(v) P_k(w) \mathbf{a}_u^r = P_{u,ijk}(u, v, w) \mathbf{a}_u^r, \\ \mathbf{f}_{v,ijk}^e &= P_i(u) v^j P_k(w) \mathbf{a}_v^r = P_{v,ijk}(u, v, w) \mathbf{a}_v^r, \\ \mathbf{f}_{w,ijk}^e &= P_i(u) P_j(v) w^k \mathbf{a}_w^r = P_{w,ijk}(u, v, w) \mathbf{a}_w^r, \end{aligned} \quad (3.46)$$

при чему су полиноми P дефинисани као

$$P_i(u) = \begin{cases} 1-u, & i=0, \\ 1+u, & i=1, \\ u^i-1, & i=2, 4, 6, \dots, \\ u^i-u, & i=3, 5, 7, \dots, \end{cases} \quad -1 \leq u, v, w \leq 1, \quad (3.47)$$

а N_u^e , N_v^e и N_w^e су степени полиномске апроксимације непознатог поља e -тог коначног елемента у правцу одговарајуће локалне координате (u , v и w). Непознати коефицијенти расподеле поља су $\alpha_{u,ijk}^e$, $\alpha_{v,ijk}^e$ и $\alpha_{w,ijk}^e$. Реципрочни вектори \mathbf{a}_u^r , \mathbf{a}_v^r и \mathbf{a}_w^r и локалне координате u , v и w дефинисани су изразима (3.26) и (3.18), респективно.

Потребно је приметити да су границе сума у изразу (3.45) умањене за један у односу на степен апроксимације у оним сумама које доприносе варијацији поља дуж локалне координате која одговара коваријантној пројекцији функције базиса једноставним полиномима (u^i , v^j или w^k), а остају неумањене у осталим случајевима. Овакав избор граница сума у складу је са критеријумом умањеног градијента [57, 58] (*reduced-gradient criterion*). Кад год се решава једначина облика (3.10), полиномску апроксимацију поља пожељно је изабрати тако да се

(потпуним) полиномима истог реда описује тражена функција (вектор електричног поља у нашем случају) и њен ротор. На тај начин се оба члана са леве стране знака једнакости једначине (3.10) апроксимирају полиномима истог степена. Без ове интервенције, функција коју одређујемо (вектор \mathbf{E} у нашем случају) била би описана полиномима вишег реда у односу на њен ротор, а ово би водило ка (непотребно) већем финалном систему линеарних једначина и појави нефизичких модова критичних учестаности виших од критичне учестаности доминантног мода приликом анализе шупљина и резонатора [62].

Да би се дошло до израза (3.45), полази се од израза налик (3.45), пре него што су одговарајуће границе сума умањене за један. Уклањањем одређеног броја чланова облика $\nabla\phi$ (при чему је ϕ произвољна скаларна функција) из ове суме, долази се до финалног развоја (3.45). Чланови облика $\nabla\phi$ ни на који начин не доприносе бољем описивању роторског дела једначине (3.10).

Степени апроксимације у развоју (3.45) могу бити високог реда, тако да је могуће користити електрично велике коначне елементе (чије су линеарне димензије реда величине 2λ , при чему је λ таласна дужина у коначном елементу). У поређењу са традиционално коришћеним функцијама базиса нижег реда и малодоменским начином моделовања, великодоменским начином моделовања значајно се смањују потребе за рачунарским ресурсима, а укупно време извршавања симулације се скраћује. Графичка представа једнодимензионог и дводимензионог облика функција базиса (3.46) може се пронаћи у [65].

3.7. Формирање финалног система линеарних једначина

Уврштањем израза (3.45) у израз (3.10) и применом Галеркинове методе формирамо систем линеарних једначина за e -ти коначни елемент. Записан у матричном облику, овај систем једначина гласи

$$\left([A^e] - k_0^2 [B^e] \right) \cdot \{\alpha^e\} = \{G_s^e\}, \quad e = 1, 2, \dots, N_e, \quad (3.48)$$

при чему је N_e укупан број коначних елемената. Димензије квадратних матрица $[A^e]$ и $[B^e]$ као и вектора слободних чланова $\{G_s^e\}$ и вектора непознатих коефицијената $\{\alpha^e\}$ су $N_u^e(1+N_v^e)(1+N_w^e) + (1+N_u^e)N_v^e(1+N_w^e) + (1+N_u^e)(1+N_v^e)N_w^e$.

Пошто функције базиса (и тест функције) имају три компоненте у локалном ($u-v-w$) координатном систему, матрице $[A^e]$ и $[B^e]$ могу се представити помоћу блокова матрица као

$$[A^e] = \begin{bmatrix} [UUA^e] & [UVA^e] & [UWA^e] \\ [VUA^e] & [VVA^e] & [VWA^e] \\ [WUA^e] & [WVA^e] & [WWA^e] \end{bmatrix} \text{ и } [B^e] = \begin{bmatrix} [UUB^e] & [UVB^e] & [UWB^e] \\ [VUB^e] & [VVB^e] & [VWB^e] \\ [WUB^e] & [WVB^e] & [WWB^e] \end{bmatrix}, \quad (3.49)$$

при чему се елементи блокова одговарајућих матрица рачунају као

$$UUA_{\hat{i}\hat{j}\hat{k},ijk}^e = \int_{V^e} (\nabla \times \mathbf{f}_{u,\hat{i}\hat{j}\hat{k}}^e) \cdot \left(\overset{=e-1}{\mu}_r \cdot \nabla \times \mathbf{f}_{u,ijk}^e \right) dV^e, \quad \begin{array}{l} \hat{i}, i = 0, 1, \dots, N_u^e - 1, \\ \hat{j}, j = 0, 1, \dots, N_v^e, \\ \hat{k}, k = 0, 1, \dots, N_w^e, \end{array} \quad (3.50)$$

$$UVA_{\hat{i}\hat{j}\hat{k},ijk}^e = \int_{V^e} (\nabla \times \mathbf{f}_{u,\hat{i}\hat{j}\hat{k}}^e) \cdot \left(\overset{=e-1}{\mu}_r \cdot \nabla \times \mathbf{f}_{v,ijk}^e \right) dV^e, \quad \begin{array}{l} \hat{i} = 0, 1, \dots, N_u^e - 1, \\ i = 0, 1, \dots, N_u^e, \\ \hat{j} = 0, 1, \dots, N_v^e, \\ j = 0, 1, \dots, N_v^e - 1, \\ \hat{k}, k = 0, 1, \dots, N_w^e, \end{array}$$

$$UUB_{\hat{i}\hat{j}\hat{k},ijk}^e = \int_{V^e} \mathbf{f}_{u,\hat{i}\hat{j}\hat{k}}^e \cdot \left(\overset{=e}{\varepsilon}_r \cdot \mathbf{f}_{u,ijk}^e \right) dV^e, \quad \begin{array}{l} \hat{i}, i = 0, 1, \dots, N_u^e - 1, \\ \hat{j}, j = 0, 1, \dots, N_v^e, \\ \hat{k}, k = 0, 1, \dots, N_w^e, \end{array} \quad (3.51)$$

$$UVB_{\hat{i}\hat{j}\hat{k},ijk}^e = \int_{V^e} \mathbf{f}_{u,\hat{i}\hat{j}\hat{k}}^e \cdot \left(\overset{=e}{\varepsilon}_r \cdot \mathbf{f}_{v,ijk}^e \right) dV^e, \quad \begin{array}{l} \hat{i} = 0, 1, \dots, N_u^e - 1, \\ i = 0, 1, \dots, N_u^e, \\ \hat{j} = 0, 1, \dots, N_v^e, \\ j = 0, 1, \dots, N_v^e - 1, \\ \hat{k}, k = 0, 1, \dots, N_w^e, \end{array}$$

и аналогно за остале блокове матрица $[A^e]$ и $[B^e]$. У овим изразима индекси тест функција \hat{i} , \hat{j} и \hat{k} уведени су како би се разликовали од индекса функција базиса i , j и k из израза (3.46) и (3.47).

Такође, вектор слободних коефицијената $\{G_s^e\}$ може се представити као

$$\{G_s^e\} = \begin{Bmatrix} \{UG_{s,\hat{i}\hat{j}\hat{k}}^e\} \\ \{VG_{s,\hat{i}\hat{j}\hat{k}}^e\} \\ \{WG_{s,\hat{i}\hat{j}\hat{k}}^e\} \end{Bmatrix}. \quad (3.52)$$

Пре замене развоја (3.45) у површински интеграл израза (3.10), елементи одговарајућег подниза рачунају се као

$$UG_{s,\hat{i}\hat{j}\hat{k}}^e = \oint_{S^e} \left[\mathbf{f}_{u,\hat{i}\hat{j}\hat{k}}^e \times \left(\overset{=e-1}{\mu_r} \cdot \nabla \times \mathbf{E} \right) \right] \cdot \mathbf{n}^e dS^e, \quad \begin{array}{l} \hat{i} = 0, 1, \dots, N_u^e - 1, \\ \hat{j} = 0, 1, \dots, N_v^e, \\ \hat{k} = 0, 1, \dots, N_w^e, \end{array} \quad (3.53)$$

и аналогно за остале поднизове у (3.52). Након примене израза (2.16) и (2.22) израз (3.53) се може записати и као

$$UG_{s,\hat{i}\hat{j}\hat{k}}^e = jk_0 Z_0 \oint_{S^e} \mathbf{f}_{u,\hat{i}\hat{j}\hat{k}}^e \cdot (\mathbf{n}^e \times \mathbf{H}) dS^e, \quad \begin{array}{l} \hat{i} = 0, 1, \dots, N_u^e - 1, \\ \hat{j} = 0, 1, \dots, N_v^e, \\ \hat{k} = 0, 1, \dots, N_w^e, \end{array} \quad (3.54)$$

при чему је $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$ таласна импеданса слободног простора. Оба облика

површинског интеграла, (3.53) и (3.54), представљају погодну нумеричку везу између суседних елемената и везу између посматраног проблема и околне средине (приликом побуде електромагнетског проблема инцидентним таласима). Приликом формирања глобалног система једначина, ако на раздвојној површи два коначна елемента не постоје сингуларни извори ЕМ поља, од површинског интеграла по затвореној површи сваког коначног елемента остаће само површински интеграл по површи која ограничава читав домен, а доприноси површинског интеграла на споју два коначна елемента се потиру.

Вектор $\{\alpha^e\}$ непознатих коефицијената такође се може записати преко поднизова који одговарају компонентама електричног поља локалног $u-v-w$ координатног система

$$\{\alpha^e\} = \left\{ \begin{array}{l} \{\alpha_u^e\} \\ \{\alpha_v^e\} \\ \{\alpha_w^e\} \end{array} \right\}. \quad (3.55)$$

Приликом прорачуна запреминских интеграла, тј. одређивања елемената матрица $[A^e]$ и $[B^e]$, након замена израза за функције базиса (3.46) и (3.47) и примене теорије описане у одељку 3.5.3, подинтегралне функције постају полиномски тензори по u , v и w координатама. У општем случају ови интеграли немају затворена (аналитичка) решења, а нумеричку интеграцију најједноставније је спровести у родитељском $u-v-w$ домену. У оквиру ове дисертације за нумеричку интеграцију користиће се Гаус-Лежандрова метода (*Gauss-Legendre quadrature*), са детаљима описаним у [65].

Након формирања система линеарних једначина за један коначни елемент (3.48), потребно је формирати глобални систем једначина који садржи једначине за све коначне елементе и узима у обзир граничне услове на споју два елемента и на граници целокупног домена. Принциписки једноставна процедура формирања глобалног система једначина описана је у [10]. Процедура описана у [10] идејно је једноставна и доприноси бољем разумевању методе коначних елемената, али њена директна примена била би нумерички неефикасна. Ефикаснија процедура описана је у [65].

Приликом комбиновања једначина сваког коначног елемента, потребно је идентификовати коефицијенте који доприносе тангенцијалној компоненти електричног поља по површи тог коначног елемента. У циљу задржавања континуалности тангенцијалне компоненте електричног поља по читавом домену од интереса, на споју два коначна елемента потребно је идентификовати одговарајуће коефицијенте једног и другог коначног елемента са две стране раздвојне површи који доприносе тангенцијалној компоненти електричног поља и на одговарајући начин их изједначити. Ова процедура је релативно једноставна

када се користе роторски-конформне функције базиса, а ефикасна нумеричка имплементација описана је у [65]. Такође, кроз процес формирања финалног система једначина имплицитно се задовољава гранични услов (3.12) тј. (3.13) на споју два коначна елемента, док је гранични услов (3.11) задовољен експлицитно, изједначавањем одговарајућих коефицијената развоја електричног поља.

3.8. Моделовање континуално нехомогених и неизотропних средина

Приликом (нумеричког) решавања практичних инжењерских проблема јављају се и континуално нехомогене средине. У проблеме тог типа спадају анализа антена са континуалном променом параметара средине [66-68], расејање и дифракција ЕМ таласа од континуално нехомогених сочива [69, 70] и пропација кроз јоносферу [71], нехомогену плазму [72, 73] и радијално нехомогена оптичка влакна [74]. Осим практичних проблема, одређена класа математичких материјала, добијених теоријом трансформационе електромагнетике (као што су прекривке за смањење радарског попречног пресека), могу имати сложену промену тензора параметара средине. Према томе, за решавање ове класе проблема потребна је нумеричка метода способна да опише сложене проблеме са континуалном променом параметара средине који могу бити и тензори.

Једна од важних предности методе коначних елемената, често дискутована приликом теоријских разматрања [10, 11, 13], је њена инхерентна способност да релативно једноставно и ефикасно моделује континуално нехомогене и неизотропне средине. Ово је очигледно на основу једначина (3.10), (3.50), (3.51), (3.53) и (3.54).

Са друге стране, карактеристичан пример методе која има потешкоћа приликом моделовања континуално нехомогених и неизотропних средина је метода момената формулисана помоћу површинских еквивалентних извора. Оваква формулација захтева део-по-део хомогене изотропне средине, па је у случају континуално нехомогених изотропних средина читав проблем потребно поделити на велики број електрично малих хомогених делова. Хомогене средине представљају део-по-део константну просторну апроксимацију стварне промене

параметара средине. На овај начин губе се све предности великодоменског начина моделовања и коришћења базисних функција вишег реда [75]. Такође, површинска формулација није у стању да моделује неизотропне средине у општем случају [76, 77]. Тада је неопходно користити методу момената формулисану помоћу еквивалентних запреминских извора. Запреминска формулација методе момената по правилу нумерички је мање ефикасна у поређењу са површинском формулацијом [78].

Приликом практичне имплементације методе коначних елемената малодоменским приступом, са великим бројем електрично малих коначних елемената (чије су линеарне димензије реда величине $\lambda/10$), инхерентну способност методе да моделује континуално нехомогене и неизотропне средине тешко је искористити. Наиме, у већини практичних примена, када се посматрани део анализираног простора подели на велики број електрично малих коначних елемената (диктиран ниским редом апроксимације поља), просторна промена параметара средине релативно је блага у једном елементу, а замена ових елемената хомогеним коначним елементима представља релативно добру апроксимацију. Тачност ове апроксимације постаје све боља даљим уситњавањем коначних елемената кроз процес адаптивне поновне просторне поделе h -рафинирањем, па нема практичне потребе за континуално нехомогеним коначним елементима. Међутим, да би се у потпуности искористиле предности великодоменских елемената са (произвољно) високим степеном апроксимације поља, када су линеарне димензије коначних елемената реда величине λ , морају се користити елементи чији параметри средине могу да се мењају у простору [79].

Као што је већ речено у одељку 3.5, просторна зависност примарних и реципрочних вектора, базисних и тест функција и јакобијана трансформације између локалног и глобалног (Декартовог) координатног система представљена је помоћу локалних $u-v-w$ координата. Такође, нумеричка интеграција спроводи се у локалном $u-v-w$ координатном систему. Ради лакше примене векторске алгебре, сви вектори представљају се помоћу својих глобалних (Декартових) компоненти. Према томе, и просторну зависност параметара (тензора) средине потребно је представити помоћу локалних $u-v-w$ координата, а компоненте

тензора требало би да буду компоненте глобалног (Декартовог) координатног система [80].

Просторну зависност било које физичке величине могуће је представити на разне начине. Пошто је у оквиру постојеће методе коначних елемената већ развијена просторна интерполација Лагранжовим полиномима неопходна за геометријско дефинисање закривљених параметарских хексаедара (одељак 3.5), иста процедура ће се користити и за просторну апроксимацију промене параметара средине.

Посматрајмо тензор релативне пермитивности у оквиру једног коначног елемента, $\overset{=e}{\varepsilon}_r$, у изразима (3.10), (3.50), (3.51), (3.53) и (3.54). Тензор пермитивности може се представити као

$$\begin{aligned} \overset{=e}{\varepsilon}_r(u, v, w) &= \begin{bmatrix} \varepsilon_{r,xx}^e(u, v, w) & \varepsilon_{r,xy}^e(u, v, w) & \varepsilon_{r,xz}^e(u, v, w) \\ \varepsilon_{r,yx}^e(u, v, w) & \varepsilon_{r,yy}^e(u, v, w) & \varepsilon_{r,yz}^e(u, v, w) \\ \varepsilon_{r,zx}^e(u, v, w) & \varepsilon_{r,zy}^e(u, v, w) & \varepsilon_{r,zz}^e(u, v, w) \end{bmatrix} = \\ &= \sum_{m=0}^{M_u^e} \sum_{n=0}^{M_v^e} \sum_{l=0}^{M_w^e} \varepsilon_{r,mnl} L_i^{M_u^e, M_v^e, M_w^e}(u, v, w), \quad -1 \leq u, v, w \leq 1, \end{aligned} \quad (3.56)$$

при чему је $i = 1 + m + n(1 + M_u^e) + l(1 + M_u^e)(1 + M_v^e)$, и потпуно аналогно за тензор релативне пермеабилности $\overset{=e}{\mu}_r$. У овом изразу $\varepsilon_{r,mnl} = \overset{=e}{\varepsilon}_r(u_m, v_n, w_l)$ су тензори релативне пермитивности у интерполационим тачкама дефинисаним векторима положаја $\mathbf{r}_{mnl}^e = (u_m, v_n, w_l)$ са локалним координатама u_m , v_n и w_l дефинисаним у (3.16). Редови апроксимације промене параметара средине по запремини коначних елемената у правцу одговарајућих локалних координата су M_u^e , M_v^e и M_w^e ($M_u^e, M_v^e, M_w^e \geq 1$), а $L_i^{M_u^e, M_v^e, M_w^e}$ су троструки Лагранжови интерполациони полиноми дефинисани у (3.15) и (3.17). На овај начин, избором адекватно високих редова апроксимације промене параметара средине (M_u^e , M_v^e и M_w^e) могуће је апроксимирати произвољну промену параметара средине по запремини великодоменског коначног елемента приказаног на слици 3.3.

Важно је напоменути да су избори геометријских редова коначног елемената (K_u^e , K_v^e и K_w^e), степена полиномске апроксимације (N_u^e , N_v^e и N_w^e), степена нумеричке интеграције и степена апроксимације промена параметара средине (M_u^e , M_v^e и M_w^e) потпуно произвољни. На тај начин, уз коришћење хијерархијских, векторских, роторски-конформних, полиномских функција базиса, могуће је ефикасно моделовати врло широк дијапазон електромагнетских проблема: коначни елементи могу бити различитих облика, различитих величина са произвољном променом параметара средине. За одређену класу једноставнијих електромагнетских проблема постоје препоруке за избор параметара симулације [81]. Са друге стране, у случају континуално нехомогених и неизотропних средина, такав скуп препорука још увек не постоји. Анализирани су само посебни случајеви [82], а до избора оптималних параметара анализе за општи случај вероватно је најлакше доћи адаптацијом решења више итерација.

3.9. Резиме

У оквиру овог поглавља укратко је изложена теорија неопходна за примену и разумевање методе коначних елемената. Представљен је проблем граничних вредности као теоријска основа методе коначних елемената и описане су две најчешће коришћене методе за његово решавање: Рејли-Риц метода и метода отежаних резидуала. Изложене су основне једначине које описују електромагнетско поље и које се решавају методом коначних елемената (векторске таласне једначине).

Наведени су основни кораци у оквиру методе коначних елемената. Посебна пажња посвећена је геометријском моделовању. Математички су описани закривљени параметарски хексаедри вишег (геометријског) реда Лагранжовог типа, дефинисани помоћу уопштеног закривљеног координатног система. Изложен је и математички апарат неопходан за векторску анализу и алгебру у закривљеном координатном систему. Описана је апроксимација (електричног) поља векторским, роторски-конформним, хијерархијским, полиномским функцијама базиса вишег реда. Посебна пажња посвећена је нумеричком ЕМ

моделовању континуално нехомогених и неизотропних средина. Овакве средине могу настати након примене трансформационе електромагнетике у циљу конструкције ЕМ средина жељених својстава и функција којима се може манипулисати ЕМ пољем по вољи. Теорија трансформационе електромагнетике детаљније је изложена у наредном поглављу.

4. Трансформациона електромагнетика

4.1. Увод

У последње време трансформациона електромагнетика постала је један од важнијих токова истраживања теоријске и примењене електромагнетике. Посебно су популарна истраживања у вези са новим материјалима неопходним за дизајнирање нових компоненти, уређаја и електромагнетских система у радио-фреквентном, микроталасном и оптичком делу спектра [83-90]. Један од важних праваца истраживања у овој области је концепт контроле простирања електромагнетских поља. Вођењем и усмеравањем оптичких линија, тј. линија Поинтинговог вектора, у срединама конструисаним помоћу технике трансформационе електромагнетике [91-99] могу се постићи ефекти неопходни за функционисање неких ЕМ уређаја и система. Трансформациона електромагнетика заснована је на инваријантности облика Максвелових једначина (записаних на одговарајући начин) у односу на трансформације координата. Трансформациона електромагнетика омогућава дизајнирање нових средина сложених интеракција између ЕМ таласа и медијума. У процесу дизајнирања, координатне трансформације се прво користе за преобликовање оригиналног простора (а самим тим и преусмеравање оптичких линија) на жељени начин, а затим се новонастала просторна закривљења трансформишу у одговарајуће промене параметара средине (тензора пермитивности и пермеабилности). Електромагнетске средине добијене применом трансформационе електромагнетике по правилу су континуално нехомогене и неизотропне и врло захтевне за нумеричко моделовање. Нумеричка анализа оваквих средина биће приказана у поглављу 6.

У оквиру овог поглавља биће приказани детаљна математичка извођења и основе у вези са координатним трансформацијама тензора параметара средине

неопходних за примену трансформационе електромагнетике. Биће одређени тензори параметара средине за сферну и коцкасту прекривку за смањење радарског попречног пресека. Коначно, анализом блиског поља сферне прекривке обасјане униформним равним таласом, коришћењем аналитичких израза, детаљније ће бити разматран ефекат заклањања расејача.

4.2. Инваријантност Максвелових једначина у односу на координатне трансформације

Максвелове једначине могу се записати у два облика. Први облик записа зваћемо стандардни облик. У стандардном облику записа Максвелових једначина мења се форма оператора просторних извода са променом координатног система, а компоненте вектора и тензора у једном координатном систему не могу се тумачити као компоненте вектора и тензора у другом координатном систему. Компоненте вектора и тензора у два координатна система описују исте физичке величине помоћу различитих база простора (примарних и реципрочних вектора и ортова координатних система). Као илустративан пример, могу се упоредити оператори ротора у два различита (стандардна) координатна система (на пример, Декартовом и сферном координатном систему). Такође, ако би се сферне компоненте електромагнетског поља тумачиле као Декартове компоненте, у општем случају, оне не би задовољавале Максвелове једначине.

Други облик записа Максвелових једначина зваћемо инваријантни облик. У инваријантном облику записа Максвелових једначина промењена је дефиниција просторних извода (у односу на стандардни облик), тако да се просторни изводи по облику не разликују у различитим координатним системима. Пошто и даље Максвеловим једначинама желимо да опишемо исто електромагнетско поље (исте векторе \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{H} и \mathbf{B}) у оба координатна система, промена дефиниције просторних извода мора бити праћена одговарајућом променом (тензора) параметара средине која би требало да компензује промену дефиниције просторних извода. Пошто се по облику Максвелове једначине у два координатна система сада неће разликовати, компоненте вектора и тензора у једном координатном систему можемо интерпретирати као компоненте вектора и тензора

у другом координатном систему. Оваква интерпретација описује нови електромагнетски проблем, са новим векторима електромагнетског поља и тензорима параметара нове електромагнетске средине. Погодним избором трансформација координатних система, полазећи од једноставних електромагнетских проблема (обично униформних средина у којима се простире униформан, раван, трансверзалан електромагнетски талас), могуће је одредити тензоре параметара средине у којима ће се електромагнетски талас простирати по жељи. Могуће је заобилазити одређене објекте, концентрисати ЕМ поље или имати ЕМ поље које одговара просторно помереним изворима (у односу на праве изворе ЕМ поља). Инваријантни облик Максвелових једначина даје додатни степен слободе неопходан за одређивање тензора параметара средина за жељену манипулацију електромагнетским пољем. По правилу, на овакав начин могуће је имати већу контролу над простирањем електромагнетског поља и могуће је конструисати сложеније електромагнетске средине жељених карактеристика него до сада. За разлику од досадашње праксе, где су се за контролу простирања електромагнетског поља користили закључци на основу решења неких једноставних (каноничних и по правилу део по део хомогених) електромагнетских проблема (на пример, преламање ЕМ поља на споју две хомогене средине), применом трансформационе електромагнетике могуће је одредити параметре средине за знатно сложенију контролу простирања ЕМ таласа. Ово је основна идеја која стоји иза трансформационе електромагнетике, а математичка основа описана је у одељцима 4.2.1, 4.2.2 и 4.2.3.

4.2.1. Координатне трансформације базе простора и координатне трансформације коваријантних и контраваријантних компоненти вектора и тензора

Посматрајмо два уопштена закривљена тродимензиона координатна система. Први координатни систем зваћемо g -координатни систем, а други h -координатни систем. Да би се јасно разликовало ком координатном систему вектори базе и компоненте вектора и тензора припадају, придружићемо им ознаку (g) у случају првог координатног система и ознаку (h) у случају другог координатног система. Ознаке (g) и (h) налазиће се у индексу или натпису одговарајућих вектора базе и

компоненти вектора и тензора. У случају контраваријантних компоненти вектора и тензора и реципрочних вектора, ознаке (g) и (h) налазиће се у индексу. У случају коваријантних компоненти вектора и тензора и примарних вектора, ознаке (g) и (h) налазиће се у натпису.

Нека између (уопштених) координата првог и другог координатног система постоји једнозначно пресликавање (без сингуларитета) дефинисано аналитичким релацијама

$$g^i = f^i(h^1, h^2, h^3), \quad i=1,2,3 \text{ и} \quad (4.1)$$

$$h^j = (f^{-1})^j(g^1, g^2, g^3), \quad j=1,2,3, \quad (4.2)$$

при чему су f^i и $(f^{-1})^j$ ($i, j=1,2,3$) произвољне (међусобно инверзне) једнозначне (несингуларне) аналитичке функције.

Аналогно изразу (3.23), уведемо примарне векторе g - и h -координатног система

$$\mathbf{a}_i^{(g)} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial g^i}, \quad i=1,2,3 \text{ и} \quad (4.3)$$

$$\mathbf{a}_j^{(h)} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial h^j}, \quad j=1,2,3, \quad (4.4)$$

при чему је $\mathbf{r} = \mathbf{r}(g^1, g^2, g^3) = \mathbf{r}(h^1, h^2, h^3)$ вектор положаја изражен помоћу компоненти у два координатна система.

Правило о трансформацији примарних вектора између два координатна система једноставно се може извести полазећи од израза (4.3) и (4.4) и применом правила о диференцирању сложених функција. Након примене правила о диференцирању сложених функција на израз (4.4) добијамо

$$\mathbf{a}_j^{(h)} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial h^j} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial g^i} \frac{\partial g^i}{\partial h^j}, \quad j=1,2,3. \quad (4.5)$$

Уврштањем израза (4.3) у израз (4.5) долазимо до правила о трансформацији примарних вектора g -координатног система у примарне векторе h -координатног система

$$\mathbf{a}_j^{(h)} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial g^i}{\partial h^j} \mathbf{a}_i^{(g)}, \quad j=1,2,3. \quad (4.6)$$

Аналогно се може показати да правило о трансформацији примарних вектора h -координатног система у примарне векторе g -координатног система гласи

$$\mathbf{a}_i^{(g)} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial h^j}{\partial g^i} \mathbf{a}_j^{(h)}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.7)$$

Посматрајмо сада произвољну векторску функцију $\mathbf{F} = \mathbf{F}(g^1, g^2, g^3) = \mathbf{F}(h^1, h^2, h^3)$. Ова векторска функција, на основу израза (3.24), може се потпуно равноправно представити помоћу контраваријантних компоненти и примарних вектора у било ком од два координатна система као

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^3 F_{(g)}^i \mathbf{a}_i^{(g)} \quad \text{и} \quad (4.8)$$

$$\mathbf{F} = \sum_{j=1}^3 F_{(h)}^j \mathbf{a}_j^{(h)}. \quad (4.9)$$

Уврштањем израза (4.7) у израз (4.8), векторску функцију \mathbf{F} можемо записати у облику

$$\mathbf{F} = \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial h^j}{\partial g^i} F_{(g)}^i \right) \mathbf{a}_j^{(h)}. \quad (4.10)$$

Поређењем израза (4.9) и (4.10) закључујемо да правило о трансформацији контраваријантних компоненти вектора из g -координатног система у контраваријантне компоненте вектора у h -координатни систем гласи

$$F_{(h)}^j = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial h^j}{\partial g^i} F_{(g)}^i, \quad j = 1, 2, 3, \quad (4.11)$$

а да правило о трансформацији контраваријантних компоненти вектора из h -координатног система у контраваријантне компоненте вектора у g -координатном систему гласи

$$F_{(g)}^i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial g^i}{\partial h^j} F_{(h)}^j, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.12)$$

Посматрајмо сада произвољну скаларну функцију f . Градијент скаларне функције f , на основу израза (3.33), потпуно равноправно се може представити у било ком од два координатна система као

$$\nabla f = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial g^i} \mathbf{a}_{(g)}^i \text{ и} \quad (4.13)$$

$$\nabla f = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f}{\partial h^j} \mathbf{a}_{(h)}^j. \quad (4.14)$$

У посебном случају, када је скаларна функције f једна од уопштених координата h -координатног система, тј. $f = h^j$ ($j=1,2,3$), изрази (4.13) и (4.14) постају (редом)

$$\nabla h^j = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial h^j}{\partial g^i} \mathbf{a}_{(g)}^i, \quad j=1,2,3 \text{ и} \quad (4.15)$$

$$\nabla h^j = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial h^j}{\partial h^i} \mathbf{a}_{(h)}^i = \sum_{i=1}^3 \delta_{ij} \mathbf{a}_{(h)}^i = \mathbf{a}_{(h)}^j, \quad j=1,2,3, \quad (4.16)$$

пошто су уопштене координате h -координатног система међусобно независне, тј. важи $\frac{\partial h^j}{\partial h^i} = \delta_{ij}$, где је δ_{ij} ($i, j=1,2,3$) Кронекерова делта функција. У неким уџбеницима [100], уместо израза (3.26) за дефиницију реципрочних вектора, користи се израз облика (4.16). Поредићи изразе (4.15) и (4.16), закључујемо да правило о трансформацији реципрочних вектора из g -координатног система у реципрочне векторе у h -координатном систему гласи

$$\mathbf{a}_{(h)}^j = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial h^j}{\partial g^i} \mathbf{a}_{(g)}^i, \quad j=1,2,3, \quad (4.17)$$

а да правило о трансформацији реципрочних вектора из h -координатног система у реципрочне векторе у g -координатном систему гласи

$$\mathbf{a}_{(g)}^i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial g^i}{\partial h^j} \mathbf{a}_{(h)}^j, \quad i=1,2,3. \quad (4.18)$$

Посматрајмо поново произвољну векторску функцију $\mathbf{F} = \mathbf{F}(g^1, g^2, g^3) = \mathbf{F}(h^1, h^2, h^3)$. На основу израза (3.28) векторска функција \mathbf{F} потпуно равноправно се може представити помоћу коваријантних компоненти и реципрочних вектора у било ком од два координатна система као

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^3 F_i^{(g)} \mathbf{a}_{(g)}^i \text{ и} \quad (4.19)$$

$$\mathbf{F} = \sum_{j=1}^3 F_j^{(h)} \mathbf{a}_{(h)}^j. \quad (4.20)$$

Уврштањем израза (4.18) у израз (4.19), векторску функцију \mathbf{F} можемо записати у облику

$$\mathbf{F} = \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial g^i}{\partial h^j} F_i^{(g)} \right) \mathbf{a}_{(h)}^j, \quad (4.21)$$

а на основу израза (4.20) и (4.21) закључујемо да правило о трансформацији коваријантних компоненти вектора из g -координатног система у коваријантне компоненте вектора у h -координатном систему гласи

$$F_j^{(h)} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial g^i}{\partial h^j} F_i^{(g)}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (4.22)$$

Правило о трансформацији коваријантних компоненти вектора из h -координатног система у коваријантне компоненте вектора у g -координатном систему гласи

$$F_i^{(g)} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial h^j}{\partial g^i} F_j^{(h)}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.23)$$

Осим правила о трансформацији база простора (примарних и реципрочних вектора) и коваријантних и контраваријантних компоненти вектора између два координатна система, у конститутивним релацијама (2.21)-(2.23), у случају неизотропних средина, појављују се и тензори. Електромагнетске средине добијене применом трансформационе електромагнетике по правилу су неизотропне, па су нам, према томе, за успешно разумевање теорије трансформационе електромагнетике неопходна и правила о трансформацији компоненти тензора између два координатна система. Полазећи директно од тензорских релација [облика $\mathbf{D} = \overset{=}{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{E}$ као у (2.21)] може доћи до неких нејасноћа (које компоненте вектора и тензора су повезане тензорским релацијама у уопштеним координатним системима). Због тога ће се, у оквиру ове дисертације, кренути од еквивалентних израза дефинисаних помоћу дијада. Пошто дијаде у себи садрже и векторе базе простора, јасно је одређено које компоненте вектора и тензора учествују у изразима.

Дијадична функција (*dyadic function*), или једноставније дијадик (*dyadic*), састоји се од 9 компоненти (за разлику од вектора који се састоји од 3 компоненте

вектора). Свака компонента дијаде, од укупно 9, састоји се даље из скаларног коефицијента (T_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$) и дијаде (*dyad*) у облику уређеног пара (потребно је водити рачуна о редоследу) вектора базе простора ($\mathbf{b}_i \mathbf{b}_j$, $i, j = 1, 2, 3$). Према томе, дијадична функција, тј. дијада, дефинише се као [50]

$$\overline{\overline{\mathbf{T}}} = \sum_{i,j=1}^3 T_{ij} \mathbf{b}_i \mathbf{b}_j. \quad (4.24)$$

Када се скаларни коефицијенти T_{ij} , који чине дијаду, напишу у облику матрице, за матрицу $\overline{\overline{\mathbf{T}}}$ се каже да представља тензор другог ранга (*rank 2 tensor*). Тензори параметара средине, $\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}$, $\overline{\overline{\boldsymbol{\mu}}}$ и $\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}$, који се појављују у конститутивним релацијама (2.21)-(2.23) су такође тензори другог ранга, а трансформишу се између два уопштена координатна система по истим правилима као и уопштени тензори другог ранга $\overline{\overline{\mathbf{T}}}$.

Вектори базе простора ($\mathbf{b}_i \mathbf{b}_j$, $i, j = 1, 2, 3$) у дефиницији дијаде (4.24) могу бити примарни вектори ($\mathbf{b}_i \mathbf{b}_j = \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j$, $i, j = 1, 2, 3$) и тада се дијада може записати као

$$\overline{\overline{\mathbf{T}}} = \sum_{i,j=1}^3 T^{ij} \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j, \quad (4.25)$$

а скаларни коефицијенти T^{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) тада представљају елементе контраваријантног тензора $\overline{\overline{\mathbf{T}}}$. Ако су вектори базе простора у изразу (4.24) реципрочни вектори ($\mathbf{b}_i \mathbf{b}_j = \mathbf{a}^i \mathbf{a}^j$, $i, j = 1, 2, 3$), дијада је описана изразом

$$\overline{\overline{\mathbf{T}}} = \sum_{i,j=1}^3 T_{ij} \mathbf{a}^i \mathbf{a}^j, \quad (4.26)$$

а скаларни коефицијенти T_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) тада представљају елементе коваријантног тензора $\overline{\overline{\mathbf{T}}}$. Као последња могућност, вектори базе простора могу бити мешовитог типа ($\mathbf{b}_i \mathbf{b}_j = \mathbf{a}_i \mathbf{a}^j$ или $\mathbf{b}_i \mathbf{b}_j = \mathbf{a}^i \mathbf{a}_j$, $i, j = 1, 2, 3$), а тада је дијада описана изразом

$$\overline{\overline{\mathbf{T}}} = \sum_{i,j=1}^3 T_j^i \mathbf{a}_i \mathbf{a}^j = \sum_{i,j=1}^3 T_i^j \mathbf{a}^i \mathbf{a}_j, \quad (4.27)$$

при чему скаларни коефицијенти T_j^i и T_i^j ($i, j = 1, 2, 3$) представљају елементе мешовитих тензора $\overline{\overline{T}}_j^i$ и $\overline{\overline{T}}_i^j$, респективно. Мешовити тензори нису од посебног значаја у оквиру ове дисертације, па њихове трансформације између два координатна система неће бити разматране.

Посматрајмо сада произвољну дијаду $\overline{\overline{\mathbf{T}}}$ изражену помоћу контраваријантних тензора и примарних вектора као у (4.25). Дијада $\overline{\overline{\mathbf{T}}}$ може се потпуно равноправно представити у било ком од два уопштена координатна система као

$$\overline{\overline{\mathbf{T}}} = \sum_{i,j=1}^3 T_{(g)}^{ij} \mathbf{a}_i^{(g)} \mathbf{a}_j^{(g)} \text{ и} \quad (4.28)$$

$$\overline{\overline{\mathbf{T}}} = \sum_{m,n=1}^3 T_{(h)}^{mn} \mathbf{a}_m^{(h)} \mathbf{a}_n^{(h)}. \quad (4.29)$$

Уврштањем израза (4.7) у израз (4.28), дијада $\overline{\overline{\mathbf{T}}}$ се може записати у облику

$$\overline{\overline{\mathbf{T}}} = \sum_{m,n=1}^3 \left(\sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial h^m}{\partial g^i} \frac{\partial h^n}{\partial g^j} T_{(g)}^{ij} \right) \mathbf{a}_m^{(h)} \mathbf{a}_n^{(h)}, \quad (4.30)$$

а поређењем израза (4.29) и (4.30) закључујемо да правило о трансформацији контраваријантних тензора из g -координатног система у контраваријантне тензоре у h -координатном систему гласи

$$T_{(h)}^{mn} = \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial h^m}{\partial g^i} \frac{\partial h^n}{\partial g^j} T_{(g)}^{ij}, \quad m, n = 1, 2, 3, \quad (4.31)$$

а да правило о трансформацији контраваријантних тензора из h -координатног система у контраваријантне тензоре у g -координатном систему гласи

$$T_{(g)}^{ij} = \sum_{m,n=1}^3 \frac{\partial g^i}{\partial h^m} \frac{\partial g^j}{\partial h^n} T_{(h)}^{mn}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (4.32)$$

Представимо сада дијаду $\overline{\overline{\mathbf{T}}}$ помоћу коваријантних тензора и реципрочних вектора, као у изразу (4.26), у два координатна система као

$$\overline{\overline{\mathbf{T}}} = \sum_{i,j=1}^3 T_{ij}^{(g)} \mathbf{a}_{(g)}^i \mathbf{a}_{(g)}^j \text{ и} \quad (4.33)$$

$$\overline{\overline{\mathbf{T}}} = \sum_{m,n=1}^3 T_{mn}^{(h)} \mathbf{a}_{(h)}^m \mathbf{a}_{(h)}^n. \quad (4.34)$$

Након уврштања израза (4.18) у израз (4.33) дијада $\overline{\mathbf{T}}$ може се записати у облику

$$\overline{\mathbf{T}} = \sum_{m,n=1}^3 \left(\sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial g^i}{\partial h^m} \frac{\partial g^j}{\partial h^n} T_{ij}^{(g)} \right) \mathbf{a}_{(h)}^m \mathbf{a}_{(h)}^n, \quad (4.35)$$

а поређењем израза (4.34) и (4.35) закључујемо да правило о трансформацији коваријантних тензора из g -координатног система у коваријантне тензоре у h -координатном систему гласи

$$T_{mn}^{(h)} = \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial g^i}{\partial h^m} \frac{\partial g^j}{\partial h^n} T_{ij}^{(g)}, \quad m, n = 1, 2, 3. \quad (4.36)$$

Правило о трансформацији коваријантних тензора из h -координатног система у коваријантне тензоре у g -координатном систему гласи

$$T_{ij}^{(g)} = \sum_{m,n=1}^3 \frac{\partial h^m}{\partial g^i} \frac{\partial h^n}{\partial g^j} T_{mn}^{(h)}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (4.37)$$

Тензорске једначине, записане у најкомпактнијем облику [на пример, $\mathbf{D} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \overline{\mathbf{E}}$ као у конститутивним релацијама (2.21)-(2.23)], могу довести до забуне приликом тумачења у ком облику (помоћу којих компоненти) су записани тензори [изрази (4.25)-(4.27)] и вектори [изрази (3.24) и (3.28)]. Упркос томе, овакви изрази често се сусрећу у отвореној литератури [101]. Полазећи од аналогних израза записаних помоћу дијада, потенцијална забуна се може лако отклонити. У ту сврху користићемо скаларни производ између дијаде и вектора. Постоје два облика скаларног производа између дијаде и вектора, а у оба случаја скаларни производ дијаде и вектора је вектор [50].

Предњи скаларни производ (*anterior scalar product*) вектора \mathbf{F} и дијаде $\overline{\mathbf{T}}$ симболички се записује као

$$\mathbf{V} = \mathbf{F} \cdot \overline{\mathbf{T}}, \quad (4.38)$$

а у зависности од тога помоћу којих компоненти су представљени вектор \mathbf{F} [изрази (3.24) и (3.28)] и тензор $\overline{\mathbf{T}}$ [изрази (4.25) и (4.26)], тензорске релације еквивалентне изразу (4.38) за предњи скаларни производ вектора и дијаде могу бити записане у једном од два облика

$$B_j = \sum_{i=1}^3 T_{ij} F^i, \quad j=1,2,3 \text{ или} \quad (4.39)$$

$$B^j = \sum_{i=1}^3 T^{ij} F_i, \quad j=1,2,3. \quad (4.40)$$

Задњи скаларни производ (*posterior scalar product*) вектора \mathbf{F} и дијаде $\overline{\mathbf{T}}$ симболички се записује као

$$\mathbf{C} = \overline{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{F}, \quad (4.41)$$

а у зависности од тога помоћу којих компоненти су представљени вектор \mathbf{F} и тензор $\overline{\mathbf{T}}$, тензорске релације еквивалентне изразу (4.41) за задњи скаларни производ вектора и дијаде могу бити записане у једном од два облика

$$C_i = \sum_{j=1}^3 T_{ij} F^j, \quad i=1,2,3 \text{ или} \quad (4.42)$$

$$C^i = \sum_{j=1}^3 T^{ij} F_j, \quad i=1,2,3. \quad (4.43)$$

Тензорске релације аналогне изразу (4.41) за задњи скаларни производ вектора и дијаде, тј. релације (4.42) и (4.43), могу се записати и у матричном облику као $\{C_i\} = \overline{\mathbf{T}}_{ij} \{F^j\}$ и $\{C^i\} = \overline{\mathbf{T}}^{ij} \{F_j\}$, респективно. У овом матричном запису $\{C_i\}$, $\{C^i\}$, $\{F_j\}$ и $\{F^j\}$ представљају векторе (колона матрице) коваријантних и контраваријантних компоненти вектора \mathbf{C} и \mathbf{F} , а $\overline{\mathbf{T}}_{ij}$ и $\overline{\mathbf{T}}^{ij}$ представљају коваријантне и контраваријантне тензоре, респективно. Према томе изразе облика $\mathbf{D} = \overline{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{E}$ [као у конститутивним релацијама (2.21)-(2.23)], требало би тумачити на следећи начин: ако је пермитивност изражена помоћу коваријантног тензора $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}$, векторе електричног поља и електричне индукције требало би изразити помоћу контраваријантних и коваријантних компоненти, респективно. Ако је пермитивност изражена помоћу контраваријантног тензора $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{ij}$, векторе електричног поља и електричне индукције требало би изразити помоћу коваријантних и контраваријантних компоненти, респективно, и аналогно за остале изразе у конститутивним релацијама (2.21)-(2.23).

За крај потражимо везу која постоји између јакобијана [дефинисаног у (3.25)] у два координатна система. Јакобијан се појављују и приликом прорачуна просторних извода [изрази (3.34) и (3.35)], па ће нам веза између јакобијана у два координатна система бити од посебног интереса у наредном одељку. Јакобијан у g -координатном систему је, на основу (3.25)

$$J_{(g)} = \mathbf{a}_i^{(g)} \cdot (\mathbf{a}_j^{(g)} \times \mathbf{a}_k^{(g)}), \quad (i, j, k) = (1, 2, 3), \quad (4.44)$$

док је јакобијан у h -координатном систему

$$J_{(h)} = \mathbf{a}_i^{(h)} \cdot (\mathbf{a}_j^{(h)} \times \mathbf{a}_k^{(h)}), \quad (i, j, k) = (1, 2, 3). \quad (4.45)$$

У изразима (4.44) и (4.45), и надаље, ознака $(i, j, k) = (1, 2, 3)$ значи да уређени пар (i, j, k) чини било коју цикличну пермутацију уређеног пара $(1, 2, 3)$. Заменом израза (4.7) у израз (4.44) добијамо

$$\begin{aligned} J_{(g)} &= \left(\sum_{m=1}^3 \frac{\partial h^m}{\partial g^i} \mathbf{a}_m^{(h)} \right) \cdot \left[\left(\sum_{n=1}^3 \frac{\partial h^n}{\partial g^j} \mathbf{a}_n^{(h)} \right) \times \left(\sum_{p=1}^3 \frac{\partial h^p}{\partial g^k} \mathbf{a}_p^{(h)} \right) \right] = \\ &= \sum_{\substack{m,n, \\ p=1}}^3 \frac{\partial h^m}{\partial g^i} \frac{\partial h^n}{\partial g^j} \frac{\partial h^p}{\partial g^k} \mathbf{a}_m^{(h)} \cdot (\mathbf{a}_n^{(h)} \times \mathbf{a}_p^{(h)}), \quad (i, j, k) = (1, 2, 3). \end{aligned} \quad (4.46)$$

Члан облика $\mathbf{a}_m^{(h)} \cdot (\mathbf{a}_n^{(h)} \times \mathbf{a}_p^{(h)})$, уз коришћење (4.45), може се записати као $\mathbf{a}_m^{(h)} \cdot (\mathbf{a}_n^{(h)} \times \mathbf{a}_p^{(h)}) = J_{(h)} e_{mnp}$, при чему је e_{mnp} Леви-Цивита симбол (*Levi-Civita symbol*) дефинисан као

$$e_{mnp} = \begin{cases} +1, & \text{ако је } (m, n, p) \text{ једнако } (1, 2, 3), (2, 3, 1) \text{ или } (3, 1, 2), \\ -1, & \text{ако је } (m, n, p) \text{ једнако } (3, 2, 1), (1, 3, 2) \text{ или } (2, 1, 3), \\ 0, & \text{ако је } m = n \text{ или } n = p \text{ или } p = m, \end{cases} \quad (4.47)$$

посебно погодан за тензорску анализу у индексној нотацији. Израз (4.46) сада постаје

$$J_{(g)} = J_{(h)} \sum_{\substack{m,n, \\ p=1}}^3 \frac{\partial h^m}{\partial g^i} \frac{\partial h^n}{\partial g^j} \frac{\partial h^p}{\partial g^k} e_{mnp}, \quad (i, j, k) = (1, 2, 3). \quad (4.48)$$

Уведимо сада матрицу (мешовити тензор) $\overline{\overline{A}}_j$ трансформације између g - и h -координатног система. Нека су елементи тензора $\overline{\overline{A}}_j$ дефинисани као

$$A_j^i = \frac{\partial h^i}{\partial g^j}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (4.49)$$

Тада се матрица \overline{A}_j^i назива и Јакобијева матрица. Лако је показати да се детерминанта тензора (Јакобијева матрице) \overline{A}_j^i у индексној нотацији може записати као

$$\det(\overline{A}_j^i) = \sum_{\substack{m,n,p \\ p=1}}^3 \frac{\partial h^i}{\partial g^m} \frac{\partial h^j}{\partial g^n} \frac{\partial h^k}{\partial g^p} e_{mnp} = \sum_{\substack{m,n,p \\ p=1}}^3 \frac{\partial h^m}{\partial g^i} \frac{\partial h^n}{\partial g^j} \frac{\partial h^p}{\partial g^k} e_{mnp}, \quad (i, j, k) = (1, 2, 3), \quad (4.50)$$

а на основу тога и на основу израза (4.48) да је веза између јакобијана у два координатна система

$$\frac{J_{(g)}}{J_{(h)}} = \det(\overline{A}_j^i). \quad (4.51)$$

4.2.2. Веза између параметара средине у два координатна система у случају класичног облика Максвелових једначина

Посматрајмо део простора без извора електромагнетског поља ($\rho = 0$ и $\mathbf{J} = 0$). У том делу простора простопериодично електромагнетско поље у потпуности је описано Максвеловим једначинама у диференцијалном облику (2.16)-(2.19) (уврштањем $\rho = 0$ и $\mathbf{J} = 0$). Посебно, у том случају, ако су задовољене прве две Максвелове једначине [(2.16) и (2.17)] и $\omega \neq 0$, последње две Максвелове једначине [(2.18) и (2.19)] задовољене су аутоматски, на основу векторског идентитета $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$ (у коме је \mathbf{F} произвољна, несингуларна векторска функција). Према томе, за потпуно описивање простопериодичног електромагнетског поља ($\omega \neq 0$) у делу простора без извора, довољно је посматрати само прве две (роторске) Максвелове једначине.

Посматрајмо два уопштена координатна система (g - и h -координатни системи, дефинисани раније), чије су локалне координате повезане релацијама (4.1) и (4.2). Ова два координатна система користићемо за описивање (једног истог) простопериодичног електромагнетског поља у делу простора без извора. Након примене конститутивне релације (2.22), записане у тензорском облику (4.43)

преко контраваријантних тензора пермеабилности, прва Максвелова једначина, у g -координатном систему, постаје

$$\left(\nabla_{(g)} \times \mathbf{E}\right)^i = -j\omega \sum_{j=1}^3 \mu_{(g)}^{ij} H_j^{(g)}, \quad i=1,2,3, \quad (4.52)$$

у којој су $\mu_{(g)}^{ij}$, ($i, j=1,2,3$) елементи контраваријантног тензора пермеабилности у g -координатном систему, $H_j^{(g)}$, ($j=1,2,3$) су коваријантне компоненте вектора јачине магнетског поља у g -координатном систему, а $\left(\nabla_{(g)} \times\right)^i$, ($i=1,2,3$) представља оператор ротора изражен преко контраваријантних компоненти [као у (3.35)] у g -координатном систему. Према томе, на основу (3.35), ротор електричног поља изражен преко контраваријантних компоненти у g -координатном систему је

$$\left(\nabla_{(g)} \times \mathbf{E}\right)^i = \frac{1}{J_{(g)}} \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial E_k^{(g)}}{\partial g^j} e_{ijk}, \quad i=1,2,3, \quad (4.53)$$

где је $J_{(g)} = \mathbf{a}_1^{(g)} \cdot (\mathbf{a}_2^{(g)} \times \mathbf{a}_3^{(g)})$ јакобијан g -координатног система, $E_k^{(g)}$, ($k=1,2,3$) су коваријантне компоненте вектора електричног поља у g -координатном систему, а e_{ijk} представља Леви-Цивита симбол (*Levi-Civita symbol*) дефинисан у (4.47). Аналогно, једначине (4.52) и (4.53) могу се написати и за h -координатни систем

$$\left(\nabla_{(h)} \times \mathbf{E}\right)^i = -j\omega \sum_{j=1}^3 \mu_{(h)}^{ij} H_j^{(h)}, \quad i=1,2,3 \text{ и} \quad (4.54)$$

$$\left(\nabla_{(h)} \times \mathbf{E}\right)^i = \frac{1}{J_{(h)}} \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial E_k^{(h)}}{\partial h^j} e_{ijk}, \quad i=1,2,3. \quad (4.55)$$

Полазећи од једначина (4.52)-(4.55) и правила о трансформацији компоненти вектора (из одељка 4.2.1), у наставку овог одељка, извешћемо правило о трансформацији контраваријантних тензора параметара средине између два координатна система у случају класичног облика Максвелових једначина. Класичан облик Максвелових једначина није инваријантан, а оператори (градијента, дивергенције и ротора) мењају свој облик у различитим координатним системима (као једноставан пример, упоредити изразе за операторе градијента, дивергенције и ротора у Декартовом и сферном координатном систему).

Уврштањем правила о трансформацији коваријантних компоненти вектора из g -координатног система у h -координатни систем описаном у (4.22), израз (4.55) постаје

$$\begin{aligned} (\nabla_{(h)} \times \mathbf{E})^i &= \frac{1}{J_{(h)}} \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial E_k^{(h)}}{\partial h^j} e_{ijk} = \frac{1}{J_{(h)}} \sum_{\substack{j,k, \\ m=1}}^3 \frac{\partial}{\partial h^j} \left(\frac{\partial g^m}{\partial h^k} E_m^{(g)} \right) e_{ijk} = \\ &= \frac{1}{J_{(h)}} \sum_{m=1}^3 \left(\sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial^2 g^m}{\partial h^j \partial h^k} e_{ijk} \right) E_m^{(g)} + \frac{1}{J_{(h)}} \sum_{\substack{j,k, \\ m=1}}^3 \frac{\partial g^m}{\partial h^k} \frac{\partial E_m^{(g)}}{\partial h^j} e_{ijk}, \quad i=1,2,3. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Заменом редоследа индекса j и k у суми $\sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial^2 g^m}{\partial h^j \partial h^k} e_{ijk}$ у изразу (4.56), и уз

примену правила о Леви-Цивитовом симболу $e_{ijk} = -e_{ikj}$ које директно следи из

$$(4.47), \text{ закључујемо да мора важити } \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial^2 g^m}{\partial h^j \partial h^k} e_{ijk} = 0, \quad (m=1,2,3), \text{ па израз (4.56)}$$

постаје

$$(\nabla_{(h)} \times \mathbf{E})^i = \frac{1}{J_{(h)}} \sum_{\substack{j,k, \\ m=1}}^3 \frac{\partial g^m}{\partial h^k} \frac{\partial E_m^{(g)}}{\partial h^j} e_{ijk}, \quad i=1,2,3. \quad (4.57)$$

Покажимо сада да се израз (4.57) може записати и као

$$(\nabla_{(h)} \times \mathbf{E})^i = \sum_{n=1}^3 \frac{\partial h^i}{\partial g^n} (\nabla_{(g)} \times \mathbf{E})^n, \quad i=1,2,3. \quad (4.58)$$

Мотивација за овакву трансформацију контраваријантних компоненти ротора електричног поља је правило (4.11) о трансформацији контраваријантних компоненти (општег) вектора (\mathbf{F}) између два координатна система. Даље, израз (4.58) се матрично (тензорски) може записати као

$$\{(\nabla_{(h)} \times \mathbf{E})^i\} = \overset{=i}{\mathbf{A}_n} \{(\nabla_{(g)} \times \mathbf{E})^n\}, \quad (4.59)$$

при чему су елементи (мешовитог) тензора $\overset{=i}{\mathbf{A}_n}$ димензија 3×3 одређени изразом (4.49). Везу између израза (4.57) и (4.58), тј. њихову једнакост, касније ћемо искористити за успостављање правила о трансформацији тензора параметара средине између два координатна система. За почетак, пођимо од израза (4.58) уз уврштање израза (4.53)

$$\begin{aligned}
(\nabla_{(h)} \times \mathbf{E})^i &= \sum_{n=1}^3 \frac{\partial h^i}{\partial g^n} (\nabla_{(g)} \times \mathbf{E})^n = \sum_{n=1}^3 \frac{\partial h^i}{\partial g^n} \left(\frac{1}{J_{(g)}} \sum_{p,m=1}^3 \frac{\partial E_m^{(g)}}{\partial g^p} e_{npm} \right) = \\
&= \frac{1}{J_{(g)}} \sum_{\substack{m,n, \\ p=1}}^3 \frac{\partial h^i}{\partial g^n} \frac{\partial E_m^{(g)}}{\partial g^p} e_{npm}, \quad i=1,2,3,
\end{aligned} \tag{4.60}$$

а израз (4.60) након примене теореме о диференцирању сложене функције постаје

$$(\nabla_{(h)} \times \mathbf{E})^i = \frac{1}{J_{(g)}} \sum_{\substack{m,n, \\ p,j=1}}^3 \frac{\partial h^i}{\partial g^n} \frac{\partial h^j}{\partial g^p} \frac{\partial E_m^{(g)}}{\partial h^j} e_{npm}, \quad i=1,2,3. \tag{4.61}$$

Поређењем израза (4.57) и (4.61) закључујемо да је потребно доказати да важи једнакост

$$\frac{1}{J_{(h)}} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial g^m}{\partial h^k} e_{ijk} = \frac{1}{J_{(g)}} \sum_{n,p=1}^3 \frac{\partial h^i}{\partial g^n} \frac{\partial h^j}{\partial g^p} e_{npm}, \quad i, j, m=1,2,3, \tag{4.62}$$

чиме би аутоматски била доказана и једнакост израза (4.57) и (4.58).

Множењем израза (4.62) са $\frac{\partial h^s}{\partial g^m}$, ($s=1,2,3$), и сумирањем по m , израз (4.62)

постаје

$$\frac{1}{J_{(h)}} \sum_{k=1}^3 \left(\sum_{m=1}^3 \frac{\partial g^m}{\partial h^k} \frac{\partial h^s}{\partial g^m} \right) e_{ijk} = \frac{1}{J_{(g)}} \sum_{\substack{m,n, \\ p=1}}^3 \frac{\partial h^i}{\partial g^n} \frac{\partial h^j}{\partial g^p} \frac{\partial h^s}{\partial g^m} e_{npm}, \quad i, j, s=1,2,3. \tag{4.63}$$

Како је, на основу правила о диференцирању сложене функције,

$$\sum_{k=1}^3 \left(\sum_{m=1}^3 \frac{\partial g^m}{\partial h^k} \frac{\partial h^s}{\partial g^m} \right) e_{ijk} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial h^s}{\partial h^k} e_{ijk} = \sum_{k=1}^3 \delta_{sk} e_{ijk} = e_{ijs}, \quad \text{једнакост (4.63), уз примену}$$

(4.51), постаје

$$\sum_{\substack{m,n, \\ p=1}}^3 \frac{\partial h^i}{\partial g^n} \frac{\partial h^j}{\partial g^p} \frac{\partial h^s}{\partial g^m} e_{npm} = \frac{J_{(g)}}{J_{(h)}} e_{ijs} = \det(\overset{=}{\mathbf{A}}_j) e_{ijs}, \quad i, j, s=1,2,3. \tag{4.64}$$

На крају, потребно је доказати да израз (4.64) важи за све могуће случајеве $i, j, s=1,2,3$. Ако уређени пар (i, j, s) чини било коју цикличну пермутацију уређеног пара $(1,2,3)$, на основу (4.47), $e_{ijs} = 1$. Тада, на основу (4.50), израз (4.64)

постаје стандардни израз за прорачун детерминанте $\det(\overset{=}{\mathbf{A}}_j)$ у индексној нотацији. До истог закључка се може доћи и ако уређени пар (i, j, s) чини било

коју цикличну пермутацију уређеног пара (3,2,1). Ако су у уређеном пару (i, j, s) барем два коефицијента једнака (на пример, $i = j$), тада је, на основу (4.47), $e_{ijs} = 0$. Заменом редоследа индекса чинилаца производа (на пример, међусобном заменом редоследа индекса i и j , и међусобном заменом редоследа индекса n и p), уз примену правила $e_{npm} = -e_{pnm}$ за Леви-Цивитов симбол, лева страна једнакости (4.64) тада (такође) мора бити једнака нули. Према томе, доказали смо да једнакост (4.64) важи за свако $i, j, s = 1, 2, 3$, а самим тим доказали смо и једнакост израза (4.57) и (4.58). Даље ћемо, на основу израза (4.58), извести правило о трансформацији контраваријантног тензора пермеабилности између два координатна система у случају Максвелових једначина у класичном облику.

На основу израза (4.52), (4.54) и (4.58), закључујемо да морају важити релације

$$\begin{aligned} (\nabla_{(h)} \times \mathbf{E})^i &= -j\omega \sum_{j=1}^3 \mu_{(h)}^{ij} H_j^{(h)} = \sum_{n=1}^3 \frac{\partial h^i}{\partial g^n} (\nabla_{(g)} \times \mathbf{E})^n = \\ &= \sum_{n=1}^3 \frac{\partial h^i}{\partial g^n} \left(-j\omega \sum_{m=1}^3 \mu_{(g)}^{nm} H_m^{(g)} \right) = -j\omega \sum_{m,n=1}^3 \frac{\partial h^i}{\partial g^n} \mu_{(g)}^{nm} H_m^{(g)}, \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (4.65)$$

при чему $H_m^{(g)}$ ($m = 1, 2, 3$) представља коваријантне компоненте вектора јачине магнетског поља у g -координатном систему. Правило о трансформацији коваријантних компоненти вектора из h -координатног система у коваријантне компоненте у g -координатном систему описано је у (4.23). Након примене израза (4.23) на $H_m^{(g)}$ ($m = 1, 2, 3$) у (4.65), једноставно се долази до једнакости погодне за одређивање правила о трансформацији контраваријантног тензора пермеабилности између два координатна система у случају Максвелових једначина записаних у класичном облику

$$\sum_{j=1}^3 \mu_{(h)}^{ij} H_j^{(h)} = \sum_{m,n=1}^3 \frac{\partial h^i}{\partial g^n} \mu_{(g)}^{nm} \frac{\partial h^j}{\partial g^m} H_j^{(h)}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.66)$$

одакле следи да мора важити

$$\mu_{(h)}^{ij} = \sum_{m,n=1}^3 \frac{\partial h^i}{\partial g^n} \mu_{(g)}^{nm} \frac{\partial h^j}{\partial g^m}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (4.67)$$

На основу правила (4.67) о трансформацији контраваријантног тензора пермеабилности између два координатна система, закључујемо да се контраваријантни тензор пермеабилности трансформише као контраваријантни тензор другог ранга тензорске густине (*tensor density*) нула. Правило о трансформацији тензора пермеабилности описано релацијом (4.67) скраћено се у матричној (тензорској) нотацији може записати као

$$\overset{=ij}{\mu}_{(h)} = \overset{=i}{A}_n \cdot \overset{=nm}{\mu}_{(g)} \cdot \overset{=j}{A}_m^T, \quad (4.68)$$

при чему је пермеабилност описана контраваријантним тензорима, елементи тензора $\overset{=i}{A}_n$ описани су у (4.49), а натпис Т означава оператор транспоновања матрице, тј. тензора.

Аналогним поступком, полазећи од друге (роторске) Максвелове једначине (2.17) и конститутивне релације (2.21) за део простора без извора електромагнетског поља, могуће је одредити правило о трансформацији контраваријантних тензора пермитивности између два координатна система

$$\varepsilon_{(h)}^{ij} = \sum_{m,n=1}^3 \frac{\partial h^i}{\partial g^n} \varepsilon_{(g)}^{nm} \frac{\partial h^j}{\partial g^m}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (4.69)$$

које се даље може представити у матричној (тензорској) нотацији као

$$\overset{=ij}{\varepsilon}_{(h)} = \overset{=i}{A}_n \cdot \overset{=nm}{\varepsilon}_{(g)} \cdot \overset{=j}{A}_m^T, \quad (4.70)$$

при чему је пермитивност описана контраваријантним тензорима.

Према томе, простопериодично електромагнетско поље у делу простора без извора електромагнетског поља, потпуно равноправно се може представити Максвеловим једначинама у класичном (варијантном) облику у било ком координатном систему. Компоненте вектора које описују електромагнетско поље у два координатна система трансформишу се према правилима описаним у одељку 4.2.1, а контраваријантни тензори параметара средине трансформишу се као контраваријантни тензори другог ранга тензорске густине нуле [изрази (4.67)-(4.70)]. За Максвелове једначине тада кажемо да су варијантне (да им облик зависи од избора координатног система), што се јасно види на основу израза (4.53) и (4.55), у којима је, у општем случају $J_{(g)} \neq J_{(h)}$, а још очигледније на

основу поређења облика Максвелових једначина у два стандардна координатна система (на пример, сферног и Декартовог координатног система).

4.2.3. Веза између параметара средине у два координатна система у случају инваријантног облика Максвелових једначина

У одељку 4.2.2 показали смо како се промена координатног система одражава на једначине које описују простопериодично електромагнетско поље (Максвелове једначине и конститутивне релације) у делу простора без извора. Пошто у оба координатна система желимо да опишемо исти просторни феномен, тј. исто електромагнетско поље, закључили смо да се (коваријантне и/или контраваријантне) компоненте вектора (електричног и магнетског поља) морају трансформисати према правилима из одељка 4.2.1. Кренули смо од Максвелових једначина записаних у стандардном облику помоћу оператора (просторних извода) чији се облик (у општем случају) разликује у различитим координатним системима, а касније показали да се под тим околностима контраваријантни тензори параметара средине у два координатна система трансформишу као (4.67) и (4.68) у случају контраваријантног тензора пермеабилности, тј. као (4.69) и (4.70) у случају контраваријантног тензора пермитивности.

Посматрајмо сада једначине (4.54) и (4.55). Основна идеја која стоји иза инваријантног облика Максвелових једначина је врло једноставна; променити дефиницију просторних извода [конкретно, оператора ротора у изразима (4.54) и (4.55)] тако да се њихов облик не разликује у различитим координатним системима. Посматрајући изразе (4.53) и (4.55), закључујемо да се ови изрази (по облику) разликују само у мултипликативној константи (јакобијанима $J_{(g)}$ и $J_{(h)}$, респективно). Пошто желимо да Максвелове једначине, и у овом измењеном (тј. инваријантном) облику, и даље описују исти просторни феномен (исто простопериодично електромагнетско поље у делу простора без извора), промена дефиниције просторних извода мора бити праћена одговарајућом променом тензора параметара средине (у односу на стандардни облик Максвелових једначина). Инваријантни облик Максвелових једначина посебно је користан и погодан за примену на проблеме физике и примењене математике [102] у којима се проблем описује у два координатна система. Описивање (истог)

електромагнетског поља у два координатна система је уједно и основна идеја која стоји иза трансформационе електромагнетике, за чију успешну примену је неопходно познавање инваријантног облика Максвелових једначина. Циљ овог одељка је извођење правила о трансформацији тензора параметара средине између два координатна система у случају инваријантног облика Максвелових једначина. Ово правило ће се касније користити у оквиру трансформационе електромагнетике за одређивање тензора параметара средине за (произвољну) манипулацију електромагнетским пољем.

Теоријска разматрања у вези са инваријантним обликом Максвелових једначина детаљно су изложена у отвореној литератури [103]. Најпознатији запис инваријантних Максвелових једначина су једначине Максвел-Минковског (*Maxwell–Minkowski equations*). У њима се разматра најопштији случај четвородимензионе представе електромагнетских поља. Прве три димензије четвородимензионог простора представљају просторне координате (тродимензионог простора), а за четврту димензију користи се време. На овај начин у обзир се узимају и релативистички ефекти дилатације времена између два координатна система. Иако су сви посебни случајеви инваријантног облика Максвелових једначина, и пратећа правила трансформације тензора параметара средине, обухваћени једначинама Максвел-Минковског [103], ове једначине су по свом облику и нотацији превасходно окренуте физичарима, а најчешће се користе у (специјалној) теорији релативности [103]. Записи су сложени, са сложеном нотацијом, посебно када се користи Ајнштајнова нотација за суме (*Einstein summation convention*), па су ови изрази тешко употребљиви у свакодневној инжењерској пракси. Циљ нам је да изведемо правила о трансформацији тензора параметара средине, у случају простопериодичног електромагнетског поља у делу простора без извора, користећи нотацију и математички апарат познат инжењерима. Такође, нећемо посматрати релативистичке ефекте трансформације времена између два координатна система, тј. уместо четвородимензионог простора у једначинама Максвел-Минковског, посматраћемо одговарајући тродимензиони простор. Иако се правила о трансформацији тензора параметара средине између два координатна система у случају инваријантних Максвелових једначина обилато користе у трансформационој електромагнетици и

трансформационој оптици [99], детаљна извођења није лако пронаћи у отвореној литератури. Извођење окренуто физичарима у коме се користи и матрица метрике која повезује два координатна система може се пронаћи у [102], а у извођењу у раду [104], према мишљењу аутора ове дисертације, изостављени су неки важни детаљи. Детаљно извођење дато је у наставку, а користе се и закључци из одељка 4.2.2.

У одељку 4.2.2 показали смо да је простопериодично електромагнетско поље, у делу простора без извора, у два координатна система, у потпуности одређено једначинама (4.52)-(4.55) и аналогним једначинама на основу друге Максвелове једначине. На основу тих једначина извели смо правило о трансформацији тензора параметара средине у случају класичног облика Максвелових једначина. Посматрајући изразе (4.53) и (4.55), уочавамо да се они по облику разликују само у мултипликативној константи испред суме, тј. јакобијану ($J_{(g)}$ и $J_{(h)}$) одговарајућег координатног система.

Пођимо поново од прве Максвелове једначине (2.16) и конститутивне релације (2.22), и напишимо једначине (4.54) и (4.55) у (новом) облику

$$\left(\hat{\mathbf{V}}_{(h)} \times \mathbf{E}\right)^i = -j\omega \sum_{j=1}^3 \hat{\mu}_{(h)}^{ij} H_j^{(h)}, \quad i=1,2,3 \text{ и} \quad (4.71)$$

$$\left(\hat{\mathbf{V}}_{(h)} \times \mathbf{E}\right)^i = \frac{1}{J_{(g)}} \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial E_k^{(h)}}{\partial h^j} e_{ijk}, \quad i=1,2,3, \quad (4.72)$$

где је $J_{(g)} = \mathbf{a}_1^{(g)} \cdot (\mathbf{a}_2^{(g)} \times \mathbf{a}_3^{(g)})$ јакобијан g -координатног система, $E_k^{(h)}$ ($k=1,2,3$) су коваријантне компоненте вектора електричног поља у h -координатном систему, $H_j^{(h)}$ ($j=1,2,3$) су коваријантне компоненте вектора јачине магнетског поља у h -координатном систему, а e_{ijk} представља Леви-Цивита симбол дефинисан у (4.47).

У изразима (4.71) и (4.72) $\left(\hat{\mathbf{V}}_{(h)} \times\right)^i$ ($i=1,2,3$) представља нови (инваријантни) оператор ротора изражен преко контраваријантних компоненти у h -координатном систему, дефинисан тако да се по форми не разликује од одговарајућег оператора ротора у g -координатном систему [израза (4.53)]. Ово је постигнуто заменом јакобијана $J_{(h)}$ јакобијаном $J_{(g)}$ у изразу (4.55). У изразу (4.71) $\hat{\mu}_{(h)}^{ij}$ ($i, j=1,2,3$) представља елементе новог контраваријантног тензора пермеабилности у h -

координатном систему, чија би промена у односу на елементе контраваријантног тензора $\hat{\mu}_{(h)}^{ij}$ пермеабилности у изразу (4.54) требало да компензује промену дефиниције ротора и обезбеди задовољење (оригиналне) прве Максвелове једначине уз одговарајуће конститутивне релације. У изразима (4.71) и (4.72) ознака $\hat{\cdot}$ (у $\hat{\nabla}_{(h)}$ и $\hat{\mu}_{(h)}^{ij}$) користи се како би се одговарајући симболи разликовали у случају класичног и инваријантног облика Максвелових једначина.

Пошто исти просторни феномен (тј. исто електромагнетско поље) описујемо у два координатна система, компоненте електромагнетског поља (тј. коваријантне и/или контраваријантне компоненте вектора електричног и магнетског поља) у два координатна система морају се трансформисати према правилима из одељка 4.2.1 и у случају инваријантног облика Максвелових једначина. Аналогно, следећи поступак детаљно описан у одељку 4.2.2, може се показати да правило о трансформацији новог контраваријантног тензора пермеабилности између два координатна система у случају Максвелових једначина записаних у инваријантном облику гласи

$$\hat{\mu}_{(h)}^{ij} = \frac{1}{\det(\hat{A}_i)} \sum_{m,n=1}^3 \frac{\partial h^i}{\partial g^n} \mu_{(g)}^{nm} \frac{\partial h^j}{\partial g^m}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (4.73)$$

што се скраћено у матричној (тензорској) нотацији може записати као

$$\hat{\mu}_{(h)}^{ij} = \frac{\hat{A}_i \cdot \mu_{(g)} \cdot \hat{A}_j^T}{\det(\hat{A}_i)}, \quad (4.74)$$

при чему је $\hat{\mu}_{(h)}^{ij}$ нови контраваријантни тензор пермеабилности, а сви остали елементи који учествују у изразима (4.73) и (4.74) већ су описани у одељку 4.2.2.

Даље, аналогним поступком, полазећи од друге (роторске) Максвелове једначине (2.17) написане у инваријантном облику, и конститутивне релације (2.21) за део простора без извора простопериодичног електромагнетског поља, могуће је одредити правило о трансформацији новог контраваријантног тензора пермитивности између два координатна система

$$\hat{\varepsilon}_{(h)}^{ij} = \frac{1}{\det(\mathbf{A}_i)} \sum_{m,n=1}^3 \frac{\partial h^i}{\partial g^n} \varepsilon_{(g)}^{nm} \frac{\partial h^j}{\partial g^m}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (4.75)$$

које се даље може представити у матричној (тензорској) нотацији као

$$\hat{\varepsilon}_{(h)}^{\overset{=}{i}j} = \frac{\overset{=}{i} \mathbf{A}_n \cdot \varepsilon_{(g)} \cdot \overset{=}{j} \mathbf{A}_m}{\det(\mathbf{A}_i)}, \quad (4.76)$$

при чему је $\hat{\varepsilon}_{(h)}^{\overset{=}{i}j}$ нови контраваријантни тензор пермитивности.

На основу правила о трансформацији тензора параметара средине између два координатна система изложених у овом одељку [изрази (4.73)-(4.76)], закључујемо да се тензори параметара средине у случају инваријантног облика Максвелових једначина трансформишу као тензори другог ранга тензорске густине један [102-104].

4.3. Одређивање параметара средине за жељену манипулацију простопериодичним електромагнетским пољем

У одељку 4.2 показали смо да се Максвелове једначине могу записати у два облика: у класичном облику (одељак 4.2.2) и у инваријантном облику (одељак 4.2.3). Инваријантни облик Максвелових једначина користи се у оквиру трансформационе електромагнетике [99] за одређивање тензора параметара средине након трансформације координатних система. Оваквим (по правилу) неизотропним и континуално нехомогеним срединама може се манипулисати електромагнетским пољем по жељи (повијањем, концентрацијом и преусмеравањем) [91]. У оквиру овог одељка биће изложена теоријска основа у вези са прекривкама за смањење радарског попречног пресека тродимензионих електромагнетских расејача. Теоријска основа трансформационе електромагнетике биће детаљније изложена на примеру прекривке за смањење радарског попречног пресека облика сфере, а биће изложена и теоријска основа неопходна за конструкцију прекривке за смањење радарског попречног пресека облика коцке. Анализом електромагнетског поља у околини сферне прекривке за

смањење радарског попречног пресека детаљније ће бити објашњен начин њеног функционисања.

Када су Максвелове једначине записане у стандардном облику, приликом трансформације координатног система, (коваријантне) компоненте вектора електромагнетског поља трансформишу се у складу са правилима о трансформацији (коваријантних) компоненти вектора између два координатна система [(4.22) и (4.23)]. На тај начин (коваријантне) компоненте вектора (електричног и магнетског поља) у два координатна система, повезане релацијама (4.22) и (4.23), представљају двојаку репрезентацију истог физичког феномена (тј. истог поља). Тензори параметара средине тада се трансформишу као тензори другог ранга тензорске густине нула [(4.68) и (4.70)] и описују исту средину у два координатна система. Оператори просторних извода мењају свој облик између два координатна система [у општем случају $J_{(g)} \neq J_{(h)}$ у (4.53) и (4.55)], па се због тога компоненте електричног и магнетског поља из једног координатног система [у једначинама (4.52) и (4.53)] не могу тумачити као компоненте електричног и магнетског поља у другом координатном систему [у једначинама (4.54) и (4.55)].

Максвелове једначине у другом координатном систему [(4.54) и (4.55)] могу се записати и у другачијем облику, тако да се вектори **E** и **H** не промене, тј. да и даље представљају двојаку репрезентацију истог просторног феномена. Могуће је променити дефиницију просторних извода у другом координатном систему [од израза (4.55) на израз (4.72)], тако да се просторни изводи по облику не разликују у односу на одговарајуће просторне изводе у првом (оригиналном) координатном систему [као у (4.53)]. Ову промену дефиниције просторног извода мора пратити и одговарајућа промена тензора параметара средине [од израза (4.54) на израз (4.71)], тако да компоненте вектора електромагнетског поља у два координатна система и даље представљају вектор истог поља. Овакав облик Максвелових једначина [(4.71) и (4.72)] назива се инваријантним обликом Максвелових једначина. Пошто се по своме облику ове једначине сада не разликују у односу на Максвелове једначине у првом координатном систему [(4.52) и (4.53)], могуће је компоненте електромагнетског поља из једног координатног система тумачити као компоненте електромагнетског поља у другом координатном систему. Тако је,

на пример, компоненте електромагнетског поља из h -координатног система $E_i^{(h)}$ и $H_j^{(h)}$ ($i, j = 1, 2, 3$) из израза (4.71) и (4.72), могуће тумачити као одговарајуће компоненте електромагнетског поља у g -координатном систему, при чему је (очигледно) потребно и координате h -координатног система у изразима за $E_i^{(h)}$ и $H_j^{(h)}$ тумачити као одговарајуће координате g -координатног система. На крају је и (контраваријантне) тензоре параметара средине из h -координатног система потребно тумачити као (контраваријантне) тензоре параметара средине у g -координатном систему. Оваква интерпретација координата и компоненти вектора и тензора из једног координатног система као координата и компоненти вектора и тензора другог координатног система, симболички се може записати као

$$E_i^{(h)} \xrightarrow{h^m \rightarrow g^m} \tilde{E}_i^{(g)}, \quad i, m = 1, 2, 3, \quad (4.77)$$

$$H_j^{(h)} \xrightarrow{h^m \rightarrow g^m} \tilde{H}_j^{(g)}, \quad j, m = 1, 2, 3, \quad (4.78)$$

$$\hat{\epsilon}_{(h)}^{ij} \xrightarrow{h^m \rightarrow g^m} \tilde{\epsilon}_{(g)}^{ij}, \quad i, j, m = 1, 2, 3, \text{ и} \quad (4.79)$$

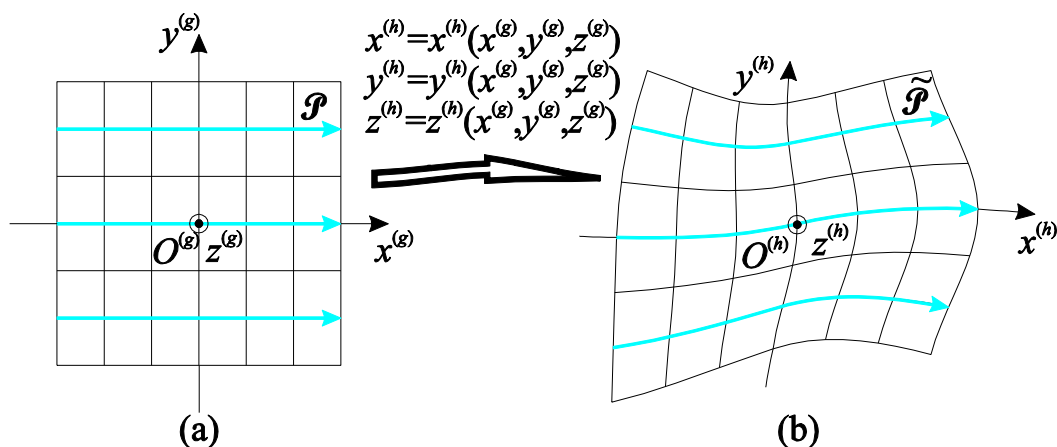
$$\hat{\mu}_{(h)}^{ij} \xrightarrow{h^m \rightarrow g^m} \tilde{\mu}_{(g)}^{ij}, \quad i, j, m = 1, 2, 3, \quad (4.80)$$

а значење ознаке $\hat{}$ објашњено је у одељку 4.2.3. При томе је важно приметити да сада овако повезане компоненте вектора електромагнетског поља више не описују исто електромагнетско поље, пошто се (у општем случају) база простора (примарни и реципрочни вектори) два координатна система разликују. Самим тим ни тензори параметара средине не описују исту средину. Да би се разликовали у односу на оригиналне величине, нове величине додатно ћемо обележавати симболом \sim .

Тумачење компоненти вектора електромагнетског поља и тензора параметара средине из једног координатног система као компоненти електромагнетског поља и тензора параметара средине у другом координатном систему представља основну идеју у оквиру трансформационе електромагнетике. На овај начин погодним избором трансформација координата у два координатна система могуће је одредити тензоре параметара средине за нови електромагнетски проблем [као у изразима (4.74) и (4.76)]. У оквиру новог електромагнетског проблема,

електромагнетским пољем ће се манипулисати по жељи, а у складу са оригиналном трансформацијом координатног система.

Као илустративан пример, посматрајмо произвољну хомогену и изотропну средину (на пример, ваздух) са униформним равним прогресивним таласом, као на слици 4.1 (а). Зраци светлости (тј. линије Поинтинговог вектора \mathcal{P} равног таласа) су међусобно паралелни. Користећи се инваријантним обликом Максвелових једначина, детаљно разматраним у одељку 4.2.3, и закривљењем оригиналног координатног система у нови координатни систем одговарајућом функцијом трансформација координата и применом трансформационе електромагнетике, линије Поинтинговог вектора повијаће се на сличан начин [91] као што је приказано на слици 4.1 (б). Параметри средине новог електромагнетског проблема одређују се као (4.74) и (4.76), а погодним избором функција координатних трансформација линије Поинтинговог вектора могу се повијати по жељи. На тај начин могуће је пројектовати нове електромагнетске средине за манипулацију електромагнетским таласом. У оквиру овог поглавља биће описане сферне и коцкасте прекривке за смањење радарског попречног пресека тродимензионих расејача. Њихова заједничка особина је да повијају линије Поинтинговог вектора тако да постоји део простора који се заобилази Поинтинговим вектором, а који је самим тим невидљив у електромагнетском смислу за посматраче споља. У даљем тексту овај регион зваћемо *void region*, у складу са иностраном литературом.



Слика 4.1. Пример координатних трансформација помоћу којих се повијају зраци (линије Поинтинговог вектора): (а) Оригинални координатни систем са паралелним зрацима и (б) Трансформисани закривљени координатни систем за закривљеним зрацима.

Ради краћег записа, у наставку текста, координате и компоненте вектора и тензора (оригиналног) g -координатног система неће се додатно обележавати [ознаком (g)], док ће се ознака (h) и даље задржати за координате и компоненте вектора и тензора у (новом) h -координатном систему.

4.4. Прекривке за смањење радарског попречног пресека

Вероватно најпознатија примена технике трансформационе електромагнетике су прекривке за смањење радарског попречног пресека. У принципу, постоје два типа прекривке за смањење радарског попречног пресека добијених теоријом трансформационе електромагнетике: (1) цилиндричне (тј. дводимензионе, засноване на координатној трансформацији која полази од праве) и (2) сферне (тј. тродимензионе, засноване на координатној трансформацији која полази од тачке). У случају цилиндричне прекривке, права из оригиналног координатног система трансформише се у цилиндар коначног попречног пресека у новом координатном систему. Сферна прекривка добија се трансформацијом тачке из оригиналног координатног система у објекат коначне запремине у новом координатном систему. У оба случаја циљ је да се у новом координатном систему створи део простора кроз који не пролазе координатне линије. Као што је већ речено, овај регион се обично назива *void region*, а показаћемо да је он у потпуности електромагнетски изолован од остатка простора, као и да својим присуством не

ремети околно електромагнетско поље. Овај део простора је невидљив (у електромагнетском смислу) за посматраче споља. Прва теоријска разматрања оваквих прекривки појављују се у [91] и [92], а заснивају се на трансформационој електромагнетици и асимптотским методама анализе електромагнетских проблема (на пример, геометријској оптици). У овим радовима се предвиђа да се прекривкама може постићи значајно смањење радарског попречног пресека, чак и када се параметри средине незнатно разликују у односу на теоријски одређене (егзактне) вредности, и потпуно потискивање расејаног поља за прекривке са егзактним параметрима средине. Успостављена је и веза између параметара средине оваквих прекривки и раније анализираних средина за смањење расејаног поља, на пример савршено прилагођеног слоја (*perfectly matched layer*, PML). Савршено прилагођени слојеви су математички уведене средине које се користе за затварање нумеричког домена приликом анализе отворених електромагнетских проблема методом коначних елемената.

Детаљније студије спроведене су у случају дводимензионих прекривки [93, 95, 96, 98]. Нумеричка анализа цилиндричних прекривки у [93, 95] показује да мала рефлексија оваквих структура није претерано осетљива на благе промене пермитивности и пермеабилности, да се перформансе постепено деградирају са повећањем губитака, као и да се ефекат заклањања може постићи и цилиндром састављеним од осам део по део хомогених цилиндричних слојева као апроксимација за континуалну промену параметара средине. Нумеричка студија дводимензионе прекривке са хомогеним и изотропним слојевима представљена је у [97]. Покушај да се оваква прекривка и физички реализује описан је у [98], где је метални цилиндар „сакривен“ унутар прекривке конструисане од вештачки направљених материјала (метаматеријала), дизајнираних да функционишу у опсегу микроталасних учестаности. Новије студије, засноване на аналитичким методама, детаљније истражују проблеме сингуларности материјала и перформанси поједностављених (неегзактних) прекривки [105] и апликације прекривки на заклањање (*shielding*) антена у РФ и микроталасном опсегу [99]. Врло корисна аналитичка студија расејања сферних прекривки, помоћу Мије редова (*Mie series*), приказана је у [106]. Нелинеарне координатне трансформације (вишег реда) уведене су како би се добило више степени слободе приликом

дизајнирања параметара средине, посебно приликом побољшања перформанси (неезактних) прекривки: када је континуална промена параметара средине замењена коначним бројем део-по-део хомогених делова. Детаљна студија оптималне просторне дискретизације (дебљине сваког слоја, нелинеарног фактора просторне трансформације и осталог) за линеарну и нелинеарну³ сферну прекривку добијену трансформационом електромагнетиком, као и утицај просторне дискретизације на ефекат скривања расејача приказани су у [107].

Могућности физичке реализације прекривки за смањење радарског пресека испитане су теоријски и експериментално у више радова. У раду [106] показано је да је у случају идеалне прекривке за смањење радарског попречног пресека расејано поље у потпуности потиснуто у свим правцима и на свим учестаностима. Показано је и да се у случају дисперзивних прекривки са коначним губицима расејано поље уназад у потпуности потискује, без обзира на тангенс угла губитака, док се перформансе прекривки у осталим правцима постепено деградирају са повећањем губитака. Према томе, ако се извор и пријемник ЕМ таласа налазе на истом месту (анализа моностатичког радарског попречног пресека) дисперзивна прекривка остаје невидљива без обзира на тангенс угла губитака. На основу својства каузалности, које морају поседовати сви физички остварљиви системи, у раду [108] испитана су ограничења неопходна за физичку реализацију дисперзивне прекривке за смањење радарског попречног пресека. Такође је показано да се идеална прекривка не може практично реализовати, а да физички остварљива прекривка мора бити дисперзивна (тј. мора имати коначне губитке). Даље је показано да се, полазећи од параметара идеалне прекривке, додавањем губитака могу конструисати физички остварљиве прекривке којима се у значајној мери смањује расејано поље. Кроз нумеричку FDTD анализу физички оствариве прекривке показано је да се може конструисати прекривка врло добрих перформанси, а да је деградација перформанси највећа у правцу унапред, што је објашњено и теоријски. Како би се боље разумели изазови приликом физичке

³ Термин „нелинеарна прекривка“ односи се на нелинеарну координатну трансформацију помоћу које је прекривка конструисана, а у материјалном смислу прекривка је линеарна. Везе између одговарајућих вектора у конститутивним релацијама су линеарне за оба типа прекривки („линеарну“ и „нелинеарну“ прекривку).

реализације прекривке, у раду [93] приказана је пуноталасна нумеричка ЕМ анализа идеалне и дисперзивне прекривке, а приликом моделовања губитака није вођено рачуна о физичкој остварљивости (каузалности). Показано је и да перформансе прекривке нису посебно осетљиве на благе промене параметара средине, као и да се врло добре перформансе прекривке могу постићи апроксимацијом просторних параметара средине са осам хомогених концентричних слојева. Полазећи од поједностављених параметара средине прекривке (тако да само једна компонента тензора буде просторно променљива), користећи се апроксимацијом ефективне средине (*effective medium approximation*), у раду [97] прекривка је конструисана помоћу коначног броја хомогених и изотропних слојева за које се верује да их је могуће физички реализовати. У раду [98], по први пут је представљена физичка реализације прекривке за смањење радарског попречног пресека. Постигнуто је добро поклапање мерења са резултатима нумеричке анализе, а приликом конструкције прекривке пошло се од поједностављених (једноставнијих за физичку реализацију) параметара средине. У раду [109] перформансе немагнетске апроксимативне прекривке испитане су експериментално у видљивом делу спектра.

4.4.1. Сферна конформна прекривка за смањење радарског попречног пресека

Посматрајмо (линеарно) пресликавање (трансформацију) између координата (оригиналног) сферног g -координатног система и (новог) сферног h -координатног система потребно за дефиницију сферне прекривке за смањење радарског попречног пресека. Ово пресликавање дефинисано је релацијама између сферних координата као

$$r^{(h)} = R_1 + \frac{R_2 - R_1}{R_2} r, \quad \theta^{(h)} = \theta, \quad \phi^{(h)} = \phi, \quad (4.81)$$

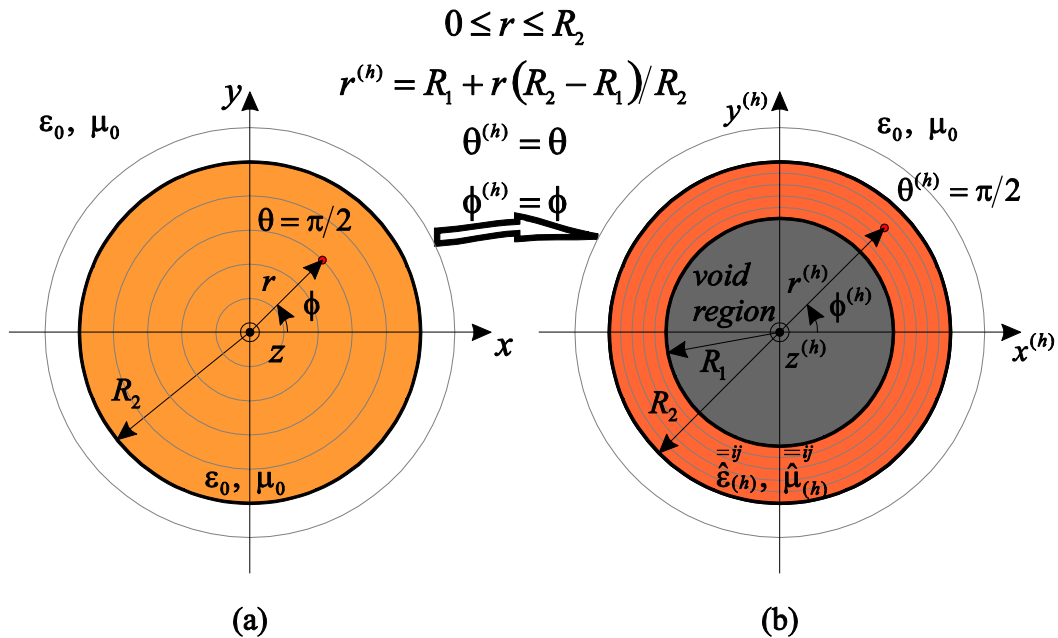
за домен пресликавања $0 \leq r \leq R_2$, $0 \leq \phi < 2\pi$ и $0 \leq \theta \leq \pi$. Ван овог домена пресликавање је јединично (тј. $r^{(h)} = r$, $\theta^{(h)} = \theta$ и $\phi^{(h)} = \phi$ за $r > R_2$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ и $0 \leq \theta \leq \pi$). Према томе, на основу теорије изложене у оквиру одељка 4.3, ван

домена трансформације (за $r > R_2$) параметри средине оригиналног и новог електромагнетског проблема неће се разликовати.

Трансформација координата описана релацијом (4.81) користи се приликом конструкције линеарне сферне прекривке за смањење радарског попречног пресека [91, 92] унутрашњег полупречника R_1 и спољашњег полупречника R_2 . Под термином „линеарна прекривка“ мисли се на прекривку добијену линеарним координатним трансформацијама, а овај термин не би требало мешати и поистовећивати са линеарности средине од које је сачињена прекривка. Применом трансформационе електромагнетике, полазећи од линеарних електромагнетских средина, увек се добијају линеарне електромагнетске средине, без обзира на облик координатних трансформација. Графичка представа ове трансформације у равни $z = z^{(h)} = 0$ приказана је на слици 4.2 за (а) оригинални и (б) трансформисани координатни систем. Лопта полупречника R_2 из оригиналног координатног система, тј. део простора $0 \leq r \leq R_2$, пресликава се у сферну љуску унутрашњег полупречника R_1 и спољашњег полупречника R_2 у трансформисаном координатном систему, тј. у део простора $R_1 \leq r^{(h)} \leq R_2$. Показаћемо да је део простора $r^{(h)} < R_1$ (означен као *void region* на слици 4.2) изолован у електромагнетском смислу од околног простора, тј. да је невидљив за посматрача споља. Видећемо да је овај ефекат (теоријски) независан од правца наилаaska инцидентног таласа и учестаности.

Матрица пресликавања између g - и h -координатног система [Јакобијева матрица са елементима дефинисаним у (4.49)] одређена је у прилогу [израз (П 1)]. Поступком детаљно описаним у прилогу, полазећи од израза (П 14), одређујемо сферне тензоре (тензоре који повезују сферне компоненте вектора који учествују у конститутивним релацијама) параметара средине прекривке за смањење радарског попречног пресека. Изражени у оригиналном координатном систему ови тензори су

$$\frac{\overset{=}{\tilde{\epsilon}}_{r,\theta,\phi}}{\epsilon_0} = \frac{\overset{=}{\tilde{\mu}}_{r,\theta,\phi}}{\mu_0} = \begin{bmatrix} \frac{R_2(r-R_1)^2}{(R_2-R_1)r^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R_2}{R_2-R_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R_2}{R_2-R_1} \end{bmatrix}. \quad (4.82)$$



Слика 4.2. Графичка представа координатне трансформације која се користи приликом конструкције сферне прекривке за смањење радарског попречног пресека: (а) пресек оригиналног простора са ваздушном сфером полупречника R_2 , и (б) трансформисан простор са делом изолованим од спољашњег ЕМ поља (*void region*) окружен неизотропном, континуално нехомогеном сферном љуском унутрашњег полупречника R_1 и спољашњег полупречника R_2 са тензорима параметара средине дефинисаним у одељку 4.2.3.

Покажимо сада да се сферном љуском са тензорима параметара средине као у (4.82) електромагнетским пољем манипулише на такав начин да електромагнетски талас заобилази део простора $r < R_1$ који је на слици 4.2 означен као *void region*. Тада је тај део простора у електромагнетском смислу изолован од остатка простора, не резултује никаквим расејаним електромагнетским пољем, па је самим тим и невидљив (у електромагнетском смислу) за посматраче споља. Овај ефекат не зависи од особина (геометријских и електромагнетских) објекта који би се сместио у *void region*, а не зависи ни од типа и учестаности инцидентног таласа (којим се „осветљава“ овај објекат).

Нека се сферна љуска за смањење радарског попречног пресека налази у вакууму (тј. ваздуху) у пољу униформног равног простопериодичног инцидентног електромагнетског таласа. На овај начин не губи се на општости анализе пошто се произвољан електромагнетски талас може представити као (векторска) сума равних таласа (различитих учестаности и различитих праваца наилаaska). Нека се инцидентни талас простире у правцу и смеру x -осе. Нека је линијски поларисан, тако да има само z -компоненту електричног поља. Овај талас се може математички описати у оригиналном (сферном) g -координатном систему помоћу Декартових и сферних координата као

$$\mathbf{E} = E_0 e^{-jk_0 x} \mathbf{i}_z = E_0 e^{-jk_0 r \sin \theta \cos \phi} (\cos \theta \mathbf{i}_r - \sin \theta \mathbf{i}_\theta), \quad (4.83)$$

при чему је E_0 комплексни представник простопериодичног електричног поља у координатном почетку, $k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ је фазни коефицијент, а ω је угаона учестаност. Даље, овај вектор може се представити преко својих коваријантних компоненти и реципрочних вектора у оригиналном g -координатном систему као

$$\mathbf{E} = E_1 \mathbf{a}^1 + E_2 \mathbf{a}^2 + E_3 \mathbf{a}^3, \quad (4.84)$$

при чему су коваријантне компоненте у g -координатном систему

$$E_1 = E_0 e^{-jk_0 r \sin \theta \cos \phi} \cos \theta, \quad (4.85)$$

$$E_2 = E_0 e^{-jk_0 r \sin \theta \cos \phi} (-r \sin \theta) \text{ и} \quad (4.86)$$

$$E_3 = 0, \quad (4.87)$$

а $\mathbf{a}^1 = \mathbf{i}_r$, $\mathbf{a}^2 = \frac{1}{r} \mathbf{i}_\theta$ и $\mathbf{a}^3 = \frac{1}{r \sin \theta} \mathbf{i}_\phi$ су реципрочни вектори g -координатног система изражени помоћу ортова сферног координатног система. Применом правила о трансформацији коваријантних компоненти вектора (4.22), коваријантне компоненте вектора електричног поља у h -координатном систему су

$$E_1^{(h)} = \frac{R_2}{R_2 - R_1} E_0 e^{-jk_0 \frac{R_2}{R_2 - R_1} (r^{(h)} - R_1) \sin \theta^{(h)} \cos \phi^{(h)}} \cos \theta^{(h)}, \quad (4.88)$$

$$E_2^{(h)} = \frac{R_2}{R_2 - R_1} E_0 e^{-jk_0 \frac{R_2}{R_2 - R_1} (r^{(h)} - R_1) \sin \theta^{(h)} \cos \phi^{(h)}} (R_1 - r^{(h)}) \sin \theta^{(h)} \text{ и} \quad (4.89)$$

$$E_3^{(h)} = 0. \quad (4.90)$$

Као што је описано у одељку 4.3 и изразима (4.77) и (4.78), коваријантне компоненте електромагнетског поља из (новог) h -координатног система потребно је тумачити као коваријантне компоненте електромагнетског поља у (оригиналном) g -координатном систему. Такође, координате h -координатног система потребно је тумачити као координате g -координатног система. Даље, везама између ортова (оригиналног) сферног координатног система и реципрочних вектора g -координатног система, приказаним испод израза (4.87), могуће је одредити сферне компоненте електричног поља по запремини сферне љуске са тензорима параметара средине (4.82), када се она налази у слободном простору обасјана униформним равним инцидентним таласом (4.83). У том случају, сферне компоненте електричног поља по запремини сферне љуске су

$$\tilde{E}_r = \frac{R_2}{R_2 - R_1} E_0 e^{-jk_0 \frac{R_2}{R_2 - R_1} (r - R_1) \sin \theta \cos \phi} \cos \theta, \quad (4.91)$$

$$\tilde{E}_\theta = \frac{R_2}{R_2 - R_1} E_0 e^{-jk_0 \frac{R_2}{R_2 - R_1} (r - R_1) \sin \theta \cos \phi} \left(\frac{R_1 - r}{r} \right) \sin \theta \quad \text{и} \quad (4.92)$$

$$\tilde{E}_\phi = 0. \quad (4.93)$$

Одговарајући вектор јачине магнетског поља униформног равног електромагнетског таласа, раније описаног електричним пољем (4.83), изражен помоћу Декартових и сферних компоненти у g -координатном систему је

$$\mathbf{H} = H_0 e^{-jk_0 x} \mathbf{i}_y = H_0 e^{-jk_0 r \sin \theta \cos \phi} \left(\sin \theta \sin \phi \mathbf{i}_r + \cos \theta \sin \phi \mathbf{i}_\theta + \cos \phi \mathbf{i}_\phi \right), \quad (4.94)$$

при чему је $H_0 = -E_0/Z_0$ комплексни представник простопериодичног магнетског поља униформног равног таласа у координатном почетку, а $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} \approx 120\pi \Omega$ је таласна импеданса у вакууму. Аналогним поступком као и за вектор електричног поља, сферне компоненте новог вектора јачине магнетског поља по запремини сферне љуске са тензорима параметара средине (4.82), када се она налази у слободном простору обасјана униформним равним инцидентним таласом (4.83), су

$$\tilde{H}_r = \frac{R_2}{R_2 - R_1} H_0 e^{-jk_0 \frac{R_2}{R_2 - R_1} (r - R_1) \sin \theta \cos \phi} \sin \theta \sin \phi, \quad (4.95)$$

$$\tilde{H}_\theta = \frac{R_2}{R_2 - R_1} H_0 e^{-jk_0 \frac{R_2}{R_2 - R_1} (r - R_1) \sin\theta \cos\phi} \left(\frac{r - R_1}{r} \right) \cos\theta \sin\phi \quad (4.96)$$

$$\tilde{H}_\phi = \frac{R_2}{R_2 - R_1} H_0 e^{-jk_0 \frac{R_2}{R_2 - R_1} (r - R_1) \sin\theta \cos\phi} \left(\frac{r - R_1}{r} \right) \cos\phi. \quad (4.97)$$

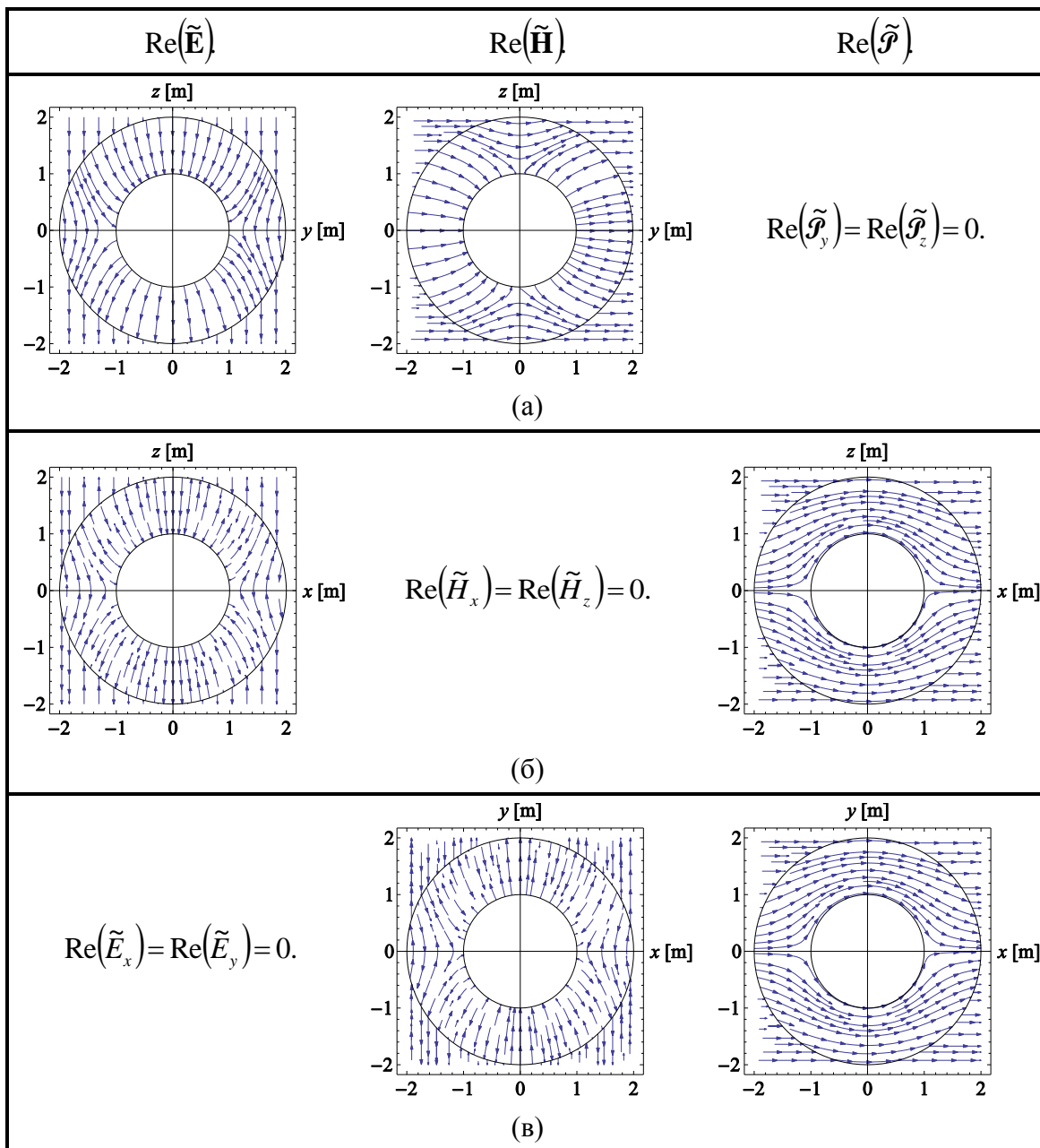
Оригинални Поинтингов вектор изражен помоћу Декартових и сферних компоненти у g -координатном систему је

$$\mathcal{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* = \frac{|E_0|^2}{Z_0} \mathbf{i}_x = \frac{|E_0|^2}{Z_0} (\sin\theta \cos\phi \mathbf{i}_r + \cos\theta \cos\phi \mathbf{i}_\theta - \sin\phi \mathbf{i}_\phi), \quad (4.98)$$

док је нови Поинтингов вектор дат изразом

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{P}} &= \tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{H}}^* \\ &= \frac{|E_0|^2}{Z_0} \left(\frac{R_2}{R_2 - R_1} \right)^2 \left(\frac{r - R_1}{r} \right) \left[\left(\frac{r - R_1}{r} \right) \sin\theta \cos\phi \mathbf{i}_r + \cos\theta \cos\phi \mathbf{i}_\theta - \sin\phi \mathbf{i}_\phi \right]. \end{aligned} \quad (4.99)$$

Изрази (4.91)-(4.93), (4.95)-(4.97) и (4.99) описују електромагнетско поље по запремини сферне љуске параметара средине (4.82) која се налази у вакууму и обасјана је униформним, равним, простопериодичним прогресивним таласом описаним у (4.83) и (4.94). Да би смо боље разумели на који начин је унутрашњост сферне љуске електромагнетски изолована од остатка простора, згодно је скицирати електромагнетско поље у непосредној околини сферне љуске. На слици 4.3 приказане су линије електричног поља, магнетског поља и Поинтинговог вектора у три пресека ($x=0$, $y=0$ и $z=0$) сферне прекривке за смањење радарског попречног пресека, тј. нацртане су линије поља дефинисаних изразима (4.91)-(4.93), (4.95)-(4.97) и (4.99). Сферна прекривка унутрашњег полупречника $R_1 = 1$ m и спољашњег полупречника $R_2 = 2$ m, тензора параметара средине као у (4.82) налази се у вакууму и обасјана је равним, униформним таласом описаним изразом (4.83) ($E_0 = 1$ V/m, $\lambda_0 = 1$ m и $k_0 = 2\pi/\lambda_0$). Прекиди линија поља на раздвојној површи сферне љуске и ваздуха (површ $r = R_2$) на слици 4.3 последица су алгоритама за скицирање линија поља, заиста не постоје и не би им требало приписивати физички смисао.



Слика 4.3. Линије реалних делова вектора електричног поља (прва колона), магнетског поља (друга колона) и Поинтинговог вектора (трећа колона) за линеарну сферну прекривку за смањење радарског попречног пресека. Прекривка ($R_1 = 1 \text{ m}$, $R_2 = 2 \text{ m}$) тензора параметара средине (4.82) је окружена вакуумом и налази се у пољу равнoг инцидентног таласа [$E_0 = 1 \text{ V/m}$, $\lambda_0 = 1 \text{ m}$ и $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ у изразу (4.83)] у равни (а) $x = 0$, (б) $y = 0$ и (в) $z = 0$.

Са слике 4.3 се јасно види како електромагнетско поље заобилази унутрашњост сферне љуске и неометано наставља простирање као униформан раван талас (као да сферна љуска није ни постојала). Према тома, произвољан објекат смештен унутар сферне љуске потпуно је невидљив за посматраче споља.

Како бисмо стекли бољи увид у електромагнетске феномене који се дешавају приликом простирања електромагнетског таласа кроз сферну љуску, потражимо вредности израза (4.91)-(4.93), (4.95)-(4.97) и (4.99) на границама сферне љуске.

На унутрашњој површи сферне љуске ($r = R_1^+$), електрично и магнетско поље

$$\lim_{r \rightarrow R_1^+} (\tilde{\mathbf{E}}) = \frac{R_2}{R_2 - R_1} E_0 \cos \theta \mathbf{i}_r, \quad (4.100)$$

$$\lim_{r \rightarrow R_1^+} (\tilde{\mathbf{H}}) = \frac{R_2}{R_2 - R_1} H_0 \sin \theta \sin \phi \mathbf{i}_r, \quad (4.101)$$

имају само нормалну (радијалну) компоненту. Самим тим, на унутрашњој површи сферне љуске Поинтингов вектор ишчезава,

$$\lim_{r \rightarrow R_1^+} (\tilde{\mathcal{P}} = \tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{H}}^*) = 0, \quad (4.102)$$

на основу чега закључујемо да нема размене електромагнетске енергије између унутрашњости сферне љуске и околне средине.

На раздвојној површи сферне љуске и вакуума ($r = R_2^-$) електрично и магнетско поље су

$$\lim_{r \rightarrow R_2^-} (\tilde{\mathbf{E}}) = E_0 e^{-jk_0 R_2 \sin \theta \cos \phi} \left[\left(\frac{R_2}{R_2 - R_1} \right) \cos \theta \mathbf{i}_r - \sin \theta \mathbf{i}_\theta \right], \quad (4.103)$$

$$\lim_{r \rightarrow R_2^-} (\tilde{\mathbf{H}}) = H_0 e^{-jk_0 R_2 \sin \theta \cos \phi} \left[\left(\frac{R_2}{R_2 - R_1} \right) \sin \theta \sin \phi \mathbf{i}_r + \cos \theta \sin \phi \mathbf{i}_\theta + \cos \phi \mathbf{i}_\phi \right], \quad (4.104)$$

док је Поинтингов вектор

$$\lim_{r \rightarrow R_2^-} (\tilde{\mathcal{P}}) = \frac{|E_0|^2}{Z_0} \left[\sin \theta \cos \phi \mathbf{i}_r + \left(\frac{R_2}{R_2 - R_1} \right) \cos \theta \cos \phi \mathbf{i}_\theta - \left(\frac{R_2}{R_2 - R_1} \right) \sin \phi \mathbf{i}_\phi \right]. \quad (4.105)$$

Поређењем израза (4.83) и (4.103) и израза (4.94) и (4.104) са две стране раздвојне површи $r = R_2$, закључујемо да су задовољени гранични услови (2.26) и (2.28) једнакости тангенцијалних компоненти вектора \mathbf{E} и \mathbf{H} на раздвојној површи $r = R_2$ без извора електромагнетског поља. Такође, закључујемо да су задовољени и гранични услови (2.27) и (2.29) једнакости нормалних компоненти вектора \mathbf{D} и \mathbf{V} на раздвојној површи $r = R_2$ без извора електромагнетског поља [тензори параметара средине (4.82) су дијагонални, па су, према томе, нормалне

(радијалне) компоненте вектора **E** и **D** и вектора **H** и **B** повезане само помоћу елемента прве врсте и прве колоне тензора параметара средине (4.82) који одговара радијалним компонентама]. Приликом преласка из вакуума у сферну љуску линије вектора електричног и магнетског поља леме се ка нормали на раздвојну површ. Поређењем израза (4.99) и (4.105) на раздвојној површи $r = R_2$ закључујемо да је задовољена једнакост нормалне (радијалне) компоненте Поинтинговог вектора са две стране раздвојне површи. Овај услов мора бити задовољен на свакој раздвојној површи без извора електромагнетског поља.

Као додатак линеарној трансформацији координатног система (4.81) помоћу које се могу одредити тензори параметара средине линеарне прекривке за смањење радарског попречног пресека, као додатни примери за испитивање робусности и стабилности великодоменске методе коначних елемената приликом моделовања континуално нехомогених и неизотропних средина, уведена су још два типа нелинеарне сферне прекривке (видети фусноту 3) за смањење радарског попречног пресека [110]. Нелинеарне прекривке се класификују према позитивном (конкавна нагоре) или негативном (конкавна надолу) знаку другог извода одговарајуће трансформације координата. Нелинеарна трансформација која ће се користити приликом конструкције сферне прекривке за смањење радарског попречног пресека аналитички се може описати (за трансформациони домен $0 \leq r \leq R_2$, $0 \leq \phi < 2\pi$ и $0 \leq \theta \leq \pi$) као

$$r^{(h)} = \sqrt[l]{\frac{R_2^l - R_1^l}{R_2} r + R_1^l}, \quad \theta^{(h)} = \theta, \quad \phi^{(h)} = \phi, \quad (4.106)$$

за случај трансформације конкавне нагоре, и

$$r^{(h)} = R_1 R_2^l \sqrt[l]{\frac{R_2}{R_2^{l+1} - (R_2^l - R_1^l)r}}, \quad \theta^{(h)} = \theta, \quad \phi^{(h)} = \phi, \quad (4.107)$$

за случај трансформације конкавне надолу. У оба случаја l представља степен нелинеарности (l не мора бити цео број). Тензори параметара средине у случају нелинеарне прекривке одређују се аналогно као и тензори параметара средине линеарне прекривке за смањење радарског попречног пресека у изразу (4.82). Сва три типа сферне прекривке за смањење радарског попречног пресека (један линеаран и два нелинеарна) нумерички ће се моделовати у оквиру поглавља б.

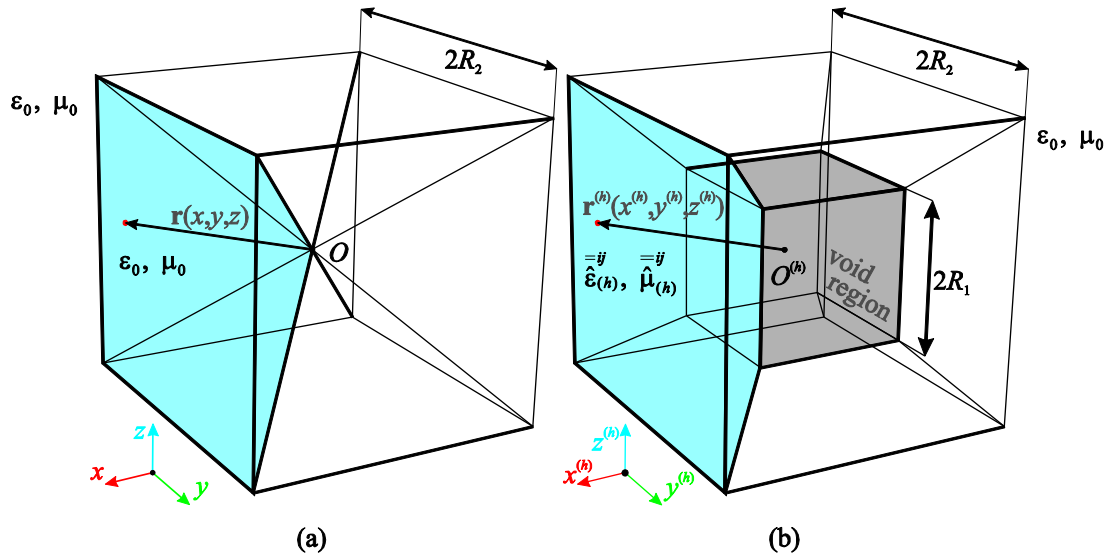
4.4.2. Коцкаста конформна прекривка за смањење радарског попречног пресека

Осим стандардних (каноничних) облика (као што су сфера и кружни цилиндар), конструкција и анализа прекривки за смањење радарског попречног пресека сложенијих облика привлачи подједнаку пажњу истраживача. У оквиру [111], координатне трансформације представљене су у облику хомогеног тополошког мапирања (аналитичких релацијама између координата одговарајућих координатних система у затвореном облику) када је то могуће, док се у случају прекривки сложеног облика, за које није могуће пронаћи функције хомогеног тополошког мапирања у затвореном облику, користе разне апроксимације. Координатне трансформације за нерегуларне облике као што су елипсоид, коцка зарубљених рогљева и зарубљени цилиндри приказане су у [112], при чему је расподела расејаног поља симулирана апроксимацијом дискретним диполима. Када су у питању прекривке за смањење радарског попречног пресека са оштрим ивицама и рогљевима, у раду [113] представљени су дизајн и анализа дводимензионе прекривке квадратног попречног пресека. Генерализација овог концепта на тродимензионе прекривке, тј. конструкција, анализа и евалуација перформанси коцкасте тродимензионе прекривке за смањење радарског попречног пресека, први пут је приказана у раду [114], и биће описани у овом и наредним одељцима.

Да бисмо конструисали коцкасту конформну (унутрашња и спољашња површ прекривке исте су форме) прекривку за смањење радарског попречног пресека, пођимо од једноставне координатне трансформације која пресликава x, y, z координате оригиналног Декартовог координатног система [илустровано на слици 4.4 (а)] у $x^{(h)}, y^{(h)}, z^{(h)}$ координате новог Декартовог координатног система [илустровано на слици 4.4 (б)]. Аналитички, за једну шестину коцкасте прекривке, ово пресликавање може се представити као

$$\begin{aligned}
x^{(h)} &= R_1 + \frac{R_2 - R_1}{R_2} x, \\
y^{(h)} &= \left(\frac{R_2 - R_1}{R_2} + \frac{R_1}{x} \right) y \text{ и} \\
z^{(h)} &= \left(\frac{R_2 - R_1}{R_2} + \frac{R_1}{x} \right) z,
\end{aligned} \tag{4.108}$$

у којима R_1 и R_2 представљају половину дужине унутрашње и спољашње стране коцкасте љуске, респективно. Овим пресликавањем шестина оригиналне хомогене и изотропне (на пример, ваздушне) коцке из оригиналног Декартовог координатног система ($0 < x \leq R_2$, $|y| < |x|$ и $|z| < |x|$) пресликава се у једну шестину коцкасте љуске у новом Декартовом координатном систему ($R_1 < x^{(h)} \leq R_2$, $|y^{(h)}| < |x^{(h)}|$ и $|z^{(h)}| < |x^{(h)}|$). Илустрација пресликавања координата (4.108) приказана је на слици 4.4 осенченим деловима, а слична трансформација координата може се конструисати и за осталих пет делова коцкасте љуске. У новом координатном систему постојаће део простора изолован од спољашњег електромагнетског поља који својим присуством неће утицати на расподелу околног поља. Овај део простора означен је као *void region* на слици 4.4. Трансформација координата дата изразом (4.108) може се посматрати као уопштење трансформације координата неопходне за конструкцију дводимензионе прекривке за смањење радарског попречног пресека представљене у раду [113].



Слика 4.4. Илустрација координатне трансформације описане у (4.108) која се користи приликом конструкције коцкасте прекривке за смањење радарског попречног пресека: (а) оригинални координатни систем са ваздушном коцком и (б) нови координатни систем са делом простора електромагнетски изолованим до спољашње средине (*void region*), окруженим континуално нехомогеним и неизотропним слојем који се састоји од 6 зарубљених правилних четвоространих пирамида. Једна шестина прекривке конструисана помоћу координатне трансформације (4.108) осенчена је на десној слици.

Да бисмо одредили тензоре параметара средине једне шестине коцкасте прекривке за смањење радарског попречног пресека, полазимо од координатне трансформације (4.108), поступка описаног у одељцима 4.2.3 [једначина (4.74) и (4.76)] и 4.3 [једначина (4.77)-(4.80)]. Мешовити Декартов тензор $\overline{\overline{A}}_j^i$ пресликавања између оригиналног (Декартовог) g - и новог (Декартовог) h -координатног система [чији су елементи описани у (4.49)] је

$$\overline{\overline{A}}_j^i = \begin{bmatrix} \frac{R_2 - R_1}{R_2} & 0 & 0 \\ -\frac{R_1 y}{x^2} & \frac{R_2 - R_1}{R_2} + \frac{R_1}{x} & 0 \\ -\frac{R_1 z}{x^2} & 0 & \frac{R_2 - R_1}{R_2} + \frac{R_1}{x} \end{bmatrix}. \quad (4.109)$$

У Декартовом координатном систему одговарајући примарни и реципрчни вектори су једнаки и једнаки су ортовима координатног система. Самим тим, одговарајуће коваријантне и контраваријантне компоненте вектора и тензора су једнаке и једнаке су Декартовим компонентама вектора и тензора. Према томе,

Декартови тензори пермитивности и пермеабилности једне шестине коцкасте љуске означене на слици 4.4 (б) су

$$\frac{\overset{=x,y,z}{\tilde{\epsilon}}}{\epsilon_0} = \frac{\overset{=x,y,z}{\tilde{\mu}}}{\mu_0} = \frac{R_2}{R_2 - R_1} \begin{bmatrix} \frac{(R_1 - x)^2}{x^2} & \frac{R_1(R_1 - x)y}{x^3} & \frac{R_1(R_1 - x)z}{x^3} \\ \frac{R_1(R_1 - x)y}{x^3} & 1 + \frac{R_1^2 y^2}{x^4} & \frac{R_1^2 yz}{x^4} \\ \frac{R_1(R_1 - x)z}{x^3} & \frac{R_1^2 yz}{x^4} & 1 + \frac{R_1^2 z^2}{x^4} \end{bmatrix}. \quad (4.110)$$

За одређивање тензора параметара средине осталих пет делова коцкасте љуске може се користити аналогна процедура. Алтернативно, може се кренути од тензора (4.110), а његовом ротацијом око оса Декартовог координатног система могу се добити тензори параметара средине осталих делова коцкасте љуске. Коцкаста прекривка за смањење радарског попречног пресека посебно је изазовна за нумеричко моделовање јер осим континуално нехомогених тензора параметара средине, поседује и ивице и рогљеве. Нумеричка анализа ове прекривке биће приказана у оквиру поглавља 6.

4.5. Резиме

У оквиру овог поглавља изложена је теорија трансформационе електромагнетике. Представљена су два облика записа Максвелових једначина: стандардни и инваријантни (који се користи у оквиру трансформационе електромагнетике). Приказана су детаљна математичка извођења неопходна за одређивање (тензора) параметара средине применом трансформационе електромагнетике, у општем случају. Колико је аутору ове дисертације познато, иако се ова правила доста користе у отвореној литератури, детаљна извођења у облику погодном за инжењере не постоје у отвореној литератури. Укратко је описан концепт прекривки за смањење радарског попречног пресека, а тензори параметара средине су приказани за сферну и коцкасту прекривку. Ове прекривке су континуално нехомогене и неизотропне (линеарне средине), посебно захтевне за нумеричку анализу. Приказана је и анализа блиског поља у околини сферне прекривке за смањење радарског попречног пресека коришћењем егзактних аналитичких израза. Ова анализа би требало да допринесе бољем разумевању

механизма смањења радарског попречног пресека. Нумеричка анализа ових прекривки великодоменском методом коначних елемената биће приказана у поглављу 6.

5. Моделовање отворених електромагнетских проблема методом коначних елемената

5.1. Увод

Да би се искористиле све погодности методе коначних елемената (ефикасно моделовање комплексних средина и алгоритми који резултују симетричним, слабо попуњеним матрицама система линеарних једначина) и приликом решавања отворених електромагнетских проблема (анализе антена и расејача), бесконачни простор у коме постоји електромагнетско поље нумерички се мора ограничити. Ограничавање домена прорачуна може се спровести на разне начине [12]: савршено прилагођеним слојевима (*perfectly matched layer*, PML) [115], хибридизацијом методе коначних елемената са методом момената (FEM-MoM) [18] или применом апсорпционих граничних услова (*absorbing boundary condition*, ABC) [116-119]. Хибридизацијом методе коначних елемената и методе момената (FEM-MoM), са становишта методе коначних елемената, еквивалентне површинске (електричне и магнетске) струје представљају егзактне граничне услове глобалног типа – вектори електричног и магнетског поља повезани су у потпуности, по читавој граничној површи. Тиме се губи (врло пожељно) својство матрица система у методи коначних елемената – матрице система требало би да буду ретке (слабо попуњене), што омогућава конструкцију врло ефикасних алгоритама за решавање система линеарних једначина (са становишта заузећа рачунарских ресурса и времена извршавања). Са друге стране, апсорпциони гранични услови су локалног типа (повезују векторе електромагнетског поља локално), па самим тим њихова примена, у зависности од имплементације, резултује никаквим или минималним повећањем попуњености матрица система линеарних једначина, а у имплементацији као у [116] повећање реда система је занемарљиво. Апсорпциони гранични услови су апроксимативни (неегзактни)

гранични услови. Њихова примена неизоставно уноси одређене грешке у глобална решења, а њихова тачност расте са повећањем реда граничног услова и/или са удаљавањем површи на којој се примењују од антена и расејача.

У зависности од облика апсорпционог граничног услова од кога се полази, апсорпциони гранични услови (реда вишег од првог) могу резултовати симетричним или несиметричним матрицама система у методи коначних елемената. Симетричност матрица система једначина сматра се (врло) пожељним својством у нумеричкој анализи, па ће се у овом поглављу детаљније разматрати симетричан апсорпциони гранични услов другог реда и специфичности његове примене у великодоменској методи коначних елемената вишег реда.

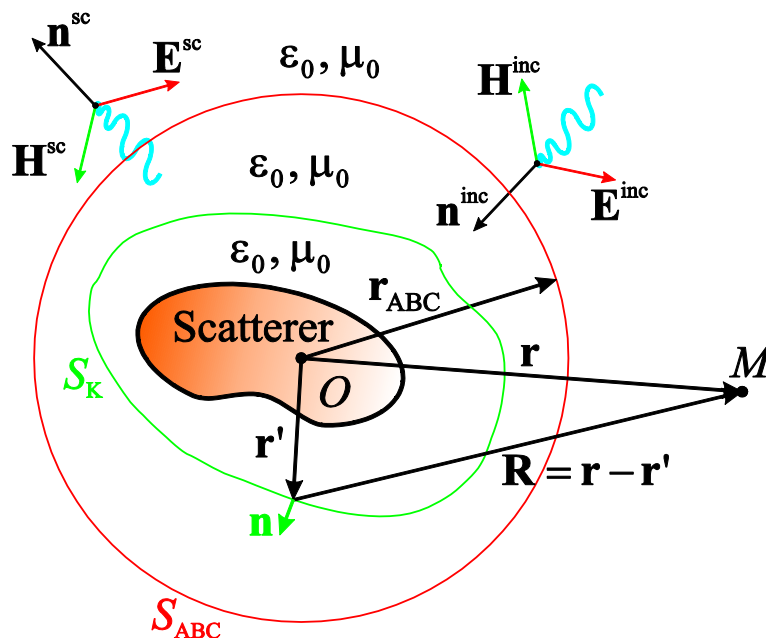
Симетрични АВС другог реда састоји се од три члана, од којих последњи члан представља дивергенцију тангенцијалне компоненте базисних функција по АВС површи. Када се користе роторски-конформне функције базиса [које аутоматски задовољавају једнакост тангенцијалних компоненти вектора електричног поља са две стране раздвојне површи на споју коначних елемената (*finite elements*, FEs), али не задовољавају аутоматски једнакост нормалних компоненти], прва два члана АВС другог реда могу се прорачунати праволинијски. Прорачун трећег члана захтева вишу континуалност базисних функција него што то обезбеђују роторски-конформне базисне функције, а директан прорачун дивергенције резултује Дираковим импулсима по АВС површи на споју два FE. Са повећањем тачности глобалног решења, иако то није наметнуто експлицитно конструкцијом базисних функција, у хомогеном делу простора, једнакост нормалних компоненти на споју два FE биће све боље задовољена. Самим тим и ниво сингуларног дела трећег члана (у коме се рачуна дивергенција) симетричног АВС другог реда постаће све мањи. Према томе, за очекивати је да би директан (негзактан) прорачун трећег члана симетричног АВС другог реда у великодоменској методи коначних елемената вишег реда требало да резултује тачнијим решењима него када се овакав приступ примени у малодоменској методи коначних елемената.

Једно од могућих решења проблема прорачуна дивергенције базисних функција била би промена типа базисних функција, тј. њихова конструкција тако да аутоматски буду и дивергенцијски-конформне по АВС површи. Оваква промена типа базисних функција представља нетривијалан задатак, посебно када

се користе великодоменски закривљени елементи. Због сложености прорачуна трећег члана симетричног ABC другог реда, као што је укратко објашњено, одређен број аутора једноставно искључује из прорачуна овај члан. У раду [120] закључено је да ако се трећи члан не прорачуна егзактно, тј. ако се не користе дивергенцијски-конформне (по ABC површи) базисне функције, резултати нумеричке анализе ће бити готово исте тачности као и да је овај члан изузет из прорачуна, тј. да су у том случају прорачун и примена трећег члана сувишни. У овом поглављу показаћемо да такви закључци не важе у великодоменској методи коначних елемената вишег реда. Великодоменска метода коначних елемената је у стању да тачније моделује електромагнетско поље, самим тим и све његове физичке особине (једнакост нормалних компоненти електричног поља на споју два FE у хомогеном делу простора), чак и када те особине нису аутоматски наметнуте (кроз конструкцију базисних функција).

5.2. Апсорпциони гранични услов другог реда

Посматрајмо усамљени електромагнетски расејач (коначних димензија) који се налази у линеарној хомогеној средини, као што је приказано на слици 5.1. Нека је расејач осветљен инцидентним електромагнетским таласом. У већини случајева сматра се да је инцидентни талас униформан и раван, а теорија изложена у наставку важи и у општем случају.



Слика 5.1. Уз анализу отворених ЕМ проблема коришћењем АВС и уз прорачун (блиског и далеког) поља изван S_{ABC} површи.

У делу простора без извора електромагнетског поља (тј. у делу простора изван електромагнетског расејача и изван извора инцидентног таласа), у простопериодичном режиму, вектор електричног поља задовољава хомогену векторску таласну једначину. Полазећи од израза (2.24) векторска таласна једначина тада постаје

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - k^2 \mathbf{E} = 0, \quad (5.1)$$

при чему је $k = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$ таласни број у делу простора изван расејача, а вектор \mathbf{E} представља вектор укупног електричног поља које се може, на основу принципа суперпозиције, представити као збир инцидентног \mathbf{E}^{inc} и расејаног \mathbf{E}^{sc} електричног поља ($\mathbf{E} = \mathbf{E}^{inc} + \mathbf{E}^{sc}$). У наставку ћемо сматрати, без губитка општости, да се електромагнетски расејач налази у слободном простору, тј. да је $k = k_0 = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$. Тада све једначине и закључци остају у важности и у случају произвољне линеарне хомогене средине (једноставном заменом $k_0 \rightarrow k$).

На основу теореме еквиваленције, утицај расејача на расподелу електромагнетског поља може се заменити еквивалентним изворима расејаног електромагнетског поља (струјама и наелектрисањима који изван расејача

стварају расејано електромагнетско поље описано векторима \mathbf{E}^{sc} и \mathbf{H}^{sc}), а читав електромагнетски проблем тада се може хомогенизовати (део простора расејача може се заменити средином параметара ϵ_0 и μ_0 са еквивалентним изворима расејаног поља). У даљој дискусији сматраћемо да су извори расејаног поља (наелектрисања и струје) познати. Пошто вектори \mathbf{E}^{sc} и \mathbf{H}^{sc} , на основу принципа суперпозиције и теореме еквиваленције, одговарају електромагнетском проблему у коме постоје (само) еквивалентни извори електромагнетског поља (у вакууму), којима се замењује утицај расејача на електромагнетско поље, вектори \mathbf{E}^{sc} и \mathbf{H}^{sc} представљају решење новог електромагнетског проблема, па стога морају задовољавати хомогену векторску таласну једначину облика (5.1). Пошто се у оквиру ове дисертације користи метода коначних елемената формулисана помоћу вектора електричног поља, посматраћемо векторску таласну једначину за расејано електрично поље

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}^{\text{sc}} - k_0^2 \mathbf{E}^{\text{sc}} = 0. \quad (5.2)$$

Теоријски, постоје два могућа решења за вектор расејаног електричног поља \mathbf{E}^{sc} која истовремено задовољавају једначину (5.2) и одговарајуће граничне услове на површи расејача: прво решење представља електромагнетски талас који се простире од расејача ка бесконачности, а друго решење представља електромагнетски талас који се простире из бесконачности ка расејачу. Пошто само прво решење има физичког смисла, за потпуно описивање електромагнетског проблема, осим једначине (5.2) и граничних услова на површи расејача, потребан је још један (независан) гранични услов који ће елиминисати друго (нефизичко) решење. У духу моделовања електромагнетских проблема методом коначних елемената, потребан је гранични услов који ће затворити нумерички домен (у делу простора ка бесконачности). Гранични услов који може послужити у ове сврхе је Зомерфелдов услов зрачења [121] (*Sommerfeld radiation condition*) који се може записати у облику

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r [\mathbf{i}_r \times (\nabla \times \mathbf{E}^{\text{sc}}) - j k_0 \mathbf{E}^{\text{sc}}] = 0, \quad (5.3)$$

при чему r и \mathbf{i}_r представљају стандардне ознаке за радијалну координату и радијални орт сферног координатног система, респективно. Иако је Зомерфелдов

услов (5.3) егзактан (не уноси никакве апроксимације), није могуће директно га применити у методи коначних елемената. Пошто се примењује по површи сфере бесконачног полупречника ($r \rightarrow \infty$), домен прорачуна требало би да буде бесконачних димензија што би резултовало потребом за бесконачним рачунарским ресурсима. Са друге стране, Зомерфелдов услов (5.3) може се аутоматски задовољити у методи момената [на пример, избором одговарајуће (од две могуће) везе између извора електромагнетског поља (наелектрисања и струја) и закаснелих потенцијала]. Ово представља једну од главних предности методе момената у односу на методу коначних елемената приликом анализе отворених електромагнетских проблема.

Један од могућих апроксимативних услова зрачења, настао изједначавањем израза из угласте заграде (5.3) са нулом, је $\mathbf{i}_r \times (\nabla \times \mathbf{E}^{sc}) - jk_0 \mathbf{E}^{sc} = 0$. Такав (апроксимативан) услов примењује се на површи сфере S_{ABC} коначног полупречника r_{ABC} , а мотивација за његово увођење полази од израза (5.3). Пошто, на основу израза (5.3), мора важити гранична вредност $\lim_{r \rightarrow \infty} (\mathbf{i}_r \times (\nabla \times \mathbf{E}^{sc}) - jk_0 \mathbf{E}^{sc}) = 0$ за $r \rightarrow \infty$, иста гранична вредност мора важити и приближно за неко коначно, довољно велико r , тј. мора важити и $\mathbf{i}_r \times (\nabla \times \mathbf{E}^{sc}) - jk_0 \mathbf{E}^{sc} \approx 0$, довољно далеко од расејача. Такав приближан (апроксимативан) гранични услов постаје све тачнији са повећањем растојања од расејача на коме се примењује. Пошто се примењује на површи сфере коначног полупречника r_{ABC} , тј. домен прорачуна је коначних димензија, овакав апроксимативан гранични услов може се користити и у методи коначних елемената. Потреба за рачунарским ресурсима је сада коначна и расте са повећањем r_{ABC} . Са друге стране, стварно електромагнетско поље (које би одговарало тачном решењу електромагнетског проблема) задовољава описани апроксимативни гранични услов само приближно (при чему се тачност апроксимације повећава са повећањем полупречника r_{ABC}). Апроксимативне граничне услове зрачења (примењене на површи фиктивне сфере S_{ABC} коначног полупречника r_{ABC}) надаље ћемо називати апсорпционим граничним условима

(*absorbing boundary condition, ABC*), пошто (делимично) апсорбују расејано електромагнетско поље, а тиме опонашају зрачење електромагнетских таласа у бесконачан околни простор. Гранични услов приказан у овом пасусу представља ABC првог реда, о коме ће, између осталог, бити више речи у наставку.

У раду [122] показано је да расејано (електрично) поље које задовољава једначину (5.2), одговарајуће граничне услове на површи расејача и Зомерфелдов услов зрачења (5.3) (тј. простире се од расејача ка бесконачности), у делу простора изван расејача, може бити записано у облику Вилкоковского развоја (*Wilcox expansion theorem*)

$$\mathbf{E}^{\text{sc}}(r, \theta, \phi) = \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{E}_n^{\text{sc}}(\theta, \phi)}{r^n}, \quad (5.4)$$

при чему \mathbf{E}_n^{sc} представља (комплексне векторске) коефицијенте развоја ($n = 0, 1, \dots, \infty$) који су одређени геометријским и електромагнетским својствима расејача (тј. граничним условима на његовој површи) и својствима инцидентног поља (учестаношћу, поларизацијом, интензитетом и правцем наиласка). Пошто је изразом (5.4) описано стварно (физичко) електрично поље у линеарном хомогеном делу простора без извора, развој (5.4) је униформно конвергентан и може бити диференциран члан-по-план бесконачно пута [122], што се може закључити и на основу облика израза (5.4).

Расејано електрично поље \mathbf{E}^{sc} (које одговара тачном решењу електромагнетског проблема) у потпуности би задовољило егзактан апсорпциони гранични услов (бесконачног реда). Самим тим егзактан апсорпциони гранични услов задовољило би и \mathbf{E}^{sc} описано развојем (5.4), а може се показати да би егзактан апсорпциони гранични услов био задовољен у потпуности и за сваки од чланова развоја (5.4) понаособ [118] (сваки од чланова развоја представља један мод сферног таласа који се простире од расејача). Посматрајмо, за почетак, (неегзактан) ABC првог реда [117]

$$\mathbf{i}_r \times (\nabla \times \mathbf{E}^{\text{sc}}) - jk_0 \mathbf{E}^{\text{sc}} = 0. \quad (5.5)$$

У раду [117] показано је да само први члан развоја (5.4), тј. члан који се добија за $n = 0$, задовољава егзактно ABC првог реда, па према томе расејано електрично

поље \mathbf{E}^{sc} задовољава АВС првог реда само апроксимативно. Грешка која се прави применом АВС првог реда зависи од растојања као $O(1/r_{\text{ABC}}^3)$. Самим тим мотивација за конструкцију АВС реда вишег од првог врло је једноставна; потребно је конструисати гранични услов (тј. линеаран оператор) који ће, када се примени изван расејача, на површи (фиктивне) сфере⁴ полупречника r_{ABC} , бити егзактно задовољен за што већи број чланова развоја (5.4). Према томе, када се примени на расејано електрично поље \mathbf{E}^{sc} [тј. на суму свих чланова из (5.4)], АВС вишег реда би требало да буде тачније задовољен у односу на АВС првог реда, тј. грешка би требало да опада са растојањем брже од $O(1/r_{\text{ABC}}^3)$.

Приликом конструкције АВС вишег реда, у раду [118] пошло се од линеарног оператора N -тог реда L_N , дефинисаног као

$$L_N(\mathbf{u}) = \mathbf{i}_r \times \nabla \times \mathbf{u} - \left(\mathbf{j}k_0 + \frac{N}{r} \right) \mathbf{u}, \quad N = 0, 1, \dots, \quad (5.6)$$

при чему је \mathbf{u} произвољна векторска функција. Полазећи од оператора L_N , конструисан је оператор B_N , дефинисан као

$$B_N(\mathbf{u}) = L_{N-1}^{(N)}(\mathbf{u}_t) + sL_N^{(N-1)}(\nabla_t u_r), \quad N = 1, 2, \dots, \quad (5.7)$$

при чему је s произвољан (ненегативан и реалан) параметар, ознаке (N) и $(N-1)$ у натписима значе да је оператор L примењен N тј. $N-1$ пута, респективно, а $\nabla_t u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \mathbf{i}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} \mathbf{i}_\phi$ представља тангенцијалну на површи

S_{ABC} (тј. управну у односу на радијални правац) компоненту градијента радијалне компоненте вектора \mathbf{u} . Оператор B_N примењиваћемо на расејано електрично поље \mathbf{E}^{sc} , на површи фиктивне сфере коначног полупречника r_{ABC} . Може се показати [118] да првих N чланова (све до члана $n = N-1$) развоја (5.4) задовољава (егзактно) гранични услов облика

⁴ Постоје и покушаји да се АВС примени на (фиктивним) површима другачијим од сферне. Овакав АВС неће бити детаљније анализиран у оквиру ове дисертације.

$$\mathbf{B}_N \left(\frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \frac{\mathbf{E}_n^{\text{sc}}(\theta, \phi)}{r^n} \right) \Big|_{r=r_{\text{ABC}}} = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (5.8)$$

Такође, може се показати [118], да када се оператор \mathbf{B}_N примени на расејано електрично поље \mathbf{E}^{sc} [тј. на суму свих чланова из израза (5.4)], добија се (векторска) функција чија је зависност од r_{ABC} облика

$$\mathbf{B}_N(\mathbf{E}^{\text{sc}}) \Big|_{r=r_{\text{ABC}}} = \mathbf{B}_N \left(\frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{E}_n^{\text{sc}}(\theta, \phi)}{r^n} \right) \Big|_{r=r_{\text{ABC}}} = O \left(\frac{1}{r_{\text{ABC}}^{2N+1}} \right). \quad (5.9)$$

Према томе, за довољно велико r_{ABC} и довољно велико N важи да је $\mathbf{B}_N(\mathbf{E}^{\text{sc}}) \Big|_{r=r_{\text{ABC}}} \approx 0$. Апроксимативно, овакав гранични услов (за коначно r_{ABC} и коначно N) може се записати као

$$\mathbf{B}_N(\mathbf{E}^{\text{sc}}) \Big|_{r=r_{\text{ABC}}} = 0, \quad (5.10)$$

и назива се апсорпционим граничним условом N -тог реда. Апсорпциони гранични услов N -тог реда постаје све тачнији са повећањем реда оператора \mathbf{B}_N и полупречника r_{ABC} фиктивне сфере по чијој површи се примењује.

Важно је поменути да је АВС реда вишег од првог ($N > 1$), применљив у методи коначних елемената за решавања тродимензионих електромагнетских проблема, по први пут представљен у раду [117], у облику

$$\left\{ \prod_{n=2}^N \left[\mathbf{i}_r \times (\nabla \times \quad) - jk_0 - \frac{2(n-1)}{r} \right] \right\} \left[\mathbf{i}_r \times (\nabla \times \mathbf{E}^{\text{sc}}) - jk_0 \mathbf{E}_t^{\text{sc}} \right] \Big|_{r=r_{\text{ABC}}} = 0, \quad (5.11)$$

при чему $\mathbf{E}_t^{\text{sc}} = E_{\theta}^{\text{sc}} \mathbf{i}_{\theta} + E_{\phi}^{\text{sc}} \mathbf{i}_{\phi}$ представља тангенцијалну (на површ S_{ABC}) компоненту расејаног електричног поља. Полазећи од овог израза, у посебном случају $N = 2$, АВС другог реда постаје

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_r \times (\nabla \times \mathbf{E}^{\text{sc}}) &= -jk_0 \mathbf{i}_r \times (\mathbf{i}_r \times \mathbf{E}^{\text{sc}}) + \frac{r_{\text{ABC}}}{2(1 + jk_0 r_{\text{ABC}})} \nabla \times \{ \mathbf{i}_r [\mathbf{i}_r \cdot (\nabla \times \mathbf{E}^{\text{sc}})] \} \\ &+ \frac{jk_0 r_{\text{ABC}}}{2(1 + jk_0 r_{\text{ABC}})} \nabla_t (\mathbf{i}_r \cdot \mathbf{E}^{\text{sc}}). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Како би се стекао бољи увид у механизам функционисања и перформансе АВС другог реда у облику (5.12), у раду [119] испитано је у којој мери сферни модови електромагнетског таласа задовољавају овај гранични услов. У том раду тачност АВС другог реда облика (5.12) испитана је посебно за ТЕ и ТМ (у односу на r) сферне модове, а грешка је приказана у функцији реда сферног мода и полупречника r_{ABC} . Такође, примећено је да је други члан у изразу (5.12) задужен (искључиво) за апсорпцију ТЕ модова, а да је трећи члан задужен (искључиво) за апсорпцију ТМ модова. Према томе, закључено је да АВС другог реда, у облику (5.12), природно раздваја апсорпцију ТЕ и ТМ модова. Напоменуто је да је потребно посветити једнаку пажњу прорачуну оба члана, како би се добили што тачнији резултати нумеричке анализе отворених електромагнетских проблема, у општем случају. У истом раду [119], полазећи од израза (5.12), уз примену идентитета векторске анализе на трећи члан (задужен искључиво за апсорпцију ТМ таласа), и занемарујући одређени броја чланова са просторним изводима вишег реда, изведена је алтернативна формула за АВС другог реда. Комбинујући трећи члан из тог израза са трећим чланом из израза (5.12) [са тежинским коефицијентима $(s-1)$ и $(2-s)$, респективно, при чему је s ненегативан реалан параметар], изведен је алтернативни облик АВС другог реда

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_r \times (\nabla \times \mathbf{E}^{sc}) = & -jk_0 \mathbf{i}_r \times (\mathbf{i}_r \times \mathbf{E}^{sc}) + \frac{r_{ABC}}{2(1 + jk_0 r_{ABC})} \nabla \times \left\{ \mathbf{i}_r [\mathbf{i}_r \cdot (\nabla \times \mathbf{E}^{sc})] \right\} \\ & + (s-1) \frac{r_{ABC}}{2(1 + jk_0 r_{ABC})} \nabla_r (\nabla \cdot \mathbf{E}_r^{sc}) + (2-s) \frac{jk_0 r_{ABC}}{2(1 + jk_0 r_{ABC})} \nabla_r (\mathbf{i}_r \cdot \mathbf{E}^{sc}). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Поредећи изразе (5.12) и (5.13), закључујемо да је (5.12) посебан случај (5.13) за $s=1$, као и да се ова два апсорпциона гранична услова не разликују са становишта апсорпције ТЕ сферних таласа. У раду [119] упоређене су перформансе (5.12) и (5.13), а као што је и очекивано, закључено је да (5.12) боље апсорбује ТМ сферне таласе (оба облика подједнако апсорбују ТЕ сферне таласе). Кроз студију случаја, показано је да је оптимално s у (5.13) (са становишта апсорпције ТМ таласа) између $s=0$ и $s=1$ ($s \approx 0,5$). Иако је АВС другог реда у облику (5.13), по први пут представљен у раду [118], полазећи од оператора \mathbf{B}_2 из израза (5.7), у том раду није јасно назначено да израз (5.13) није добијен директно

полазећи од (5.10), већ да је потребно занемарити и одређен број просторних извода вишег реда, тј. да израз (5.13) представља ABC другог реда (5.10) само приближно. Није продискутовано ни на који начин занемаривања просторних извода вишег реда утичу на перформансе апсорпције ТМ таласа.

Опште је познато [10, 11, 13, 65], а може се закључити и на основу израза (3.10) и граничног услова (3.13), да се доприноси површинског интеграла у изразу (3.10), на споју два коначна елемента на коме нема извора електромагнетског поља, могу анулирати погодним формирањем финалног система линеарних једначина. Према томе, површински интеграл из израза (3.10) тада је потребно прорачунати само по површи S која ограничава нумерички домен методе коначних елемената. Ако је површ $S = S_{ABC}$ површ фиктивне сфере (полупречника r_{ABC}) која се налази у слободном простору и на коју ће касније бити примењен ABC, тада је (по површи S_{ABC}) $\mu_r = 1$ и $\mathbf{n}^e = \mathbf{i}_r$, па последњи члан у изразу (3.10) постаје

$$-\oint_{S^e} \left[\mathbf{n}^e \times \left(\mu_r^{-1} \cdot \nabla \times \mathbf{E} \right) \right] \cdot \mathbf{w}_i dS^e = -\oint_{S_{ABC}} \mathbf{w}_i \cdot [\mathbf{i}_r \times (\nabla \times \mathbf{E})] dS, \quad (5.14)$$

за оне коначне елементе и оне странице тих коначних елемената које чине површ S_{ABC} , а једнак је нули у свим осталим случајевима. Раздвајајући електрично поље на (познато) инцидентно и (непознато) расејано поље, подинтегрални члан у површинском интегралу (5.14) може се написати као $\mathbf{i}_r \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \mathbf{i}_r \times (\nabla \times \mathbf{E}^{inc}) + \mathbf{i}_r \times (\nabla \times \mathbf{E}^{sc})$. Заменом израза за $\mathbf{i}_r \times (\nabla \times \mathbf{E}^{sc})$ из израза за ABC (5.5), (5.12) или (5.13), а каснијом сменом $\mathbf{E}^{sc} = \mathbf{E} - \mathbf{E}^{inc}$, могуће је формирати (детерминистички) финални систем једначина формулисан помоћу (укупног) електричног поља \mathbf{E} . Детаљи прорачуна елемената система једначина за FEM-ABC методу са роторски-конформним хијерархијским базисним функцијама вишег реда биће приказани у наредном одељку.

5.3. Формирање финалног система линеарних једначина у методи коначних елемената вишег реда и прорачун поља изван нумеричког домена

Апсорпциони гранични услов другог реда, у општем случају, приказан је у (5.13), у коме s представља произвољан (ненегативан и реалан) параметар. Два избора за параметар s посебно су значајна: $s = 1$, чиме се анулира трећи члан израза (5.13), а апсорпциони гранични услов другог реда постаје облика (5.12) и $s = 2$, чиме се анулира последњи (четврти) члан у (5.13), а апсорпциони гранични услов постаје облика

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_r \times (\nabla \times \mathbf{E}^{\text{sc}}) = & -jk_0 \mathbf{i}_r \times (\mathbf{i}_r \times \mathbf{E}^{\text{sc}}) + \frac{r_{\text{ABC}}}{2(1 + jk_0 r_{\text{ABC}})} \nabla \times \{ \mathbf{i}_r [\mathbf{i}_r \cdot (\nabla \times \mathbf{E}^{\text{sc}})] \} \\ & + \frac{r_{\text{ABC}}}{2(1 + jk_0 r_{\text{ABC}})} \nabla_t (\nabla \cdot \mathbf{E}_t^{\text{sc}}). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Иако избор $s = 1$ резултује тачнијим апсорпционим граничним условом другог реда (5.12), као што је објашњено у одељку 5.2 и раду [119], применом овог граничног услова нарушила би се симетричност матрица система једначина у методи коначних елемената [због постојања просторног извода првог (непарног) реда у члану $\nabla_t (\mathbf{i}_r \cdot \mathbf{E}^{\text{sc}})$]. Иако рачунарске рутине и алгоритми за решавање система линеарних једначина не захтевају симетричне матрице, када се решавају несиметрични системи линеарних једначина потребни су додатни прорачуни. Симетричност матрица сматра се пожељном особиним у методи коначних елемената, па је просторни извод првог реда у АВС другог реда облика (5.12) непожељан. Због тога ћемо, како би се задржала симетричност матрица у методи коначних елемената, у оквиру ове дисертације користити АВС другог реда облика (5.15).

Полазећи од израза (3.10), (5.14) и АВС другог реда у облику (5.15), процедуром потпуно аналогном као у одељку 3.7, формирамо систем линеарних једначина методом коначних елемената (за e -ти коначни елемент). Записан у матричном облику систем једначина постаје

$$\left([A^e] - k_0^2 [B^e] + jk_0 [S^e] \right) \cdot \{ \alpha^e \} = \{ G_s^e \}, \quad e = 1, 2, \dots, N_e, \quad (5.16)$$

а у односу на израз (3.48) видимо да је додата матрица $[S^e]$ (која представља допринос површинског интеграла базисних функција по ABC површи).

Вектор слободних коефицијената $\{G_s^e\}$ може се, као и раније, представити помоћу поднизова (који одговарају једној посебној групи тест функција)

$$\{G_s^e\} = \left\{ \begin{array}{l} \{UG_{s,\hat{i}\hat{j}\hat{k}}^e\} \\ \{VG_{s,\hat{i}\hat{j}\hat{k}}^e\} \\ \{WG_{s,\hat{i}\hat{j}\hat{k}}^e\} \end{array} \right\}, \quad (5.17)$$

а елементи (на пример) подниза $\{UG_{s,\hat{i}\hat{j}\hat{k}}^e\}$ даље се могу представити у облику

$$UG_{s,\hat{i}\hat{j}\hat{k}}^e = UG_{s,\hat{i}\hat{j}\hat{k}}^{e,1ABC} \quad \hat{i} = 0, 1, \dots, N_u^e - 1, \\ + UG_{s,\hat{i}\hat{j}\hat{k}}^{e,2ABC^{TE}} + UG_{s,\hat{i}\hat{j}\hat{k}}^{e,2ABC^{TM}}, \quad \hat{j} = 0, 1, \dots, N_v^e, \\ \hat{k} = 0, 1, \dots, N_w^e, \quad (5.18)$$

при чему елементи $UG_{s,\hat{i}\hat{j}\hat{k}}^{e,1ABC}$ представљају допринос ABC првог реда, $UG_{s,\hat{i}\hat{j}\hat{k}}^{e,2ABC^{TE}}$ представљају допринос ABC другог реда којим се апсорбују ТЕ сферни модови, а елементи $UG_{s,\hat{i}\hat{j}\hat{k}}^{e,2ABC^{TM}}$ представљају допринос ABC другог реда којим се апсорбују ТМ сферни модови. Након једноставних аналитичких манипулација, за оне коначне елементе и оне странице коначних елемената које чине ABC површ S_{ABC} , елементи подниза $\{UG_{s,\hat{i}\hat{j}\hat{k}}^e\}$ рачунају се као

$$UG_{s,\hat{i}\hat{j}\hat{k}}^{e,1ABC} = \oint_{S_{ABC}} [(\mathbf{i}_r \times \mathbf{f}_{u,\hat{i}\hat{j}\hat{k}}^e) \cdot (\nabla \times \mathbf{E}^{inc}) + jk_0 (\mathbf{i}_r \times \mathbf{f}_{u,\hat{i}\hat{j}\hat{k}}^e) \cdot (\mathbf{i}_r \times \mathbf{E}^{inc})] dS, \\ UG_{s,\hat{i}\hat{j}\hat{k}}^{e,2ABC^{TE}} = \frac{r_{ABC}}{2(1 + jk_0 r_{ABC})} \oint_{S_{ABC}} \{ \mathbf{i}_r \cdot (\nabla \times \mathbf{f}_{u,\hat{i}\hat{j}\hat{k}}^e) \} [\mathbf{i}_r \cdot (\nabla \times \mathbf{E}^{inc})] dS \text{ и} \quad (5.19) \\ UG_{s,\hat{i}\hat{j}\hat{k}}^{e,2ABC^{TM}} = -\frac{r_{ABC}}{2(1 + jk_0 r_{ABC})} \oint_{S_{ABC}} [(\nabla \cdot \mathbf{f}_{t u,\hat{i}\hat{j}\hat{k}}^e) \cdot (\nabla \cdot \mathbf{E}_t^{inc})] dS.$$

У свим осталим случајевима (када одређена површ коначног елемента не припада површи S_{ABC}) $UG_{s,\hat{i}\hat{j}\hat{k}}^e = 0$. У изразу за $UG_{s,\hat{i}\hat{j}\hat{k}}^{e,2ABC^{TM}}$, t у индексу означава тангенцијалну компоненту вектора по површи S_{ABC} . Аналогно се могу одредити

елементи остала два подниза $\{VG_{s,\hat{i}\hat{j}\hat{k}}^e\}$ и $\{WG_{s,\hat{i}\hat{j}\hat{k}}^e\}$ вектора слободних коефицијената $\{G_s^e\}$.

Матрица $[S^e]$ може се представити преко блокова матрица (који одговарају једној посебној комбинацији базисних и тест функција) као

$$[S^e] = \begin{bmatrix} [UUS^e] & [UVS^e] & [UWS^e] \\ [VUS^e] & [VVS^e] & [VWS^e] \\ [WUS^e] & [WVS^e] & [WWS^e] \end{bmatrix}, \quad (5.20)$$

при чему се сваки од блокова матрица даље може представити као збир дела који одговара доприносу ABC првог реда, дела који одговара доприносу ABC другог реда којим се апсорбују ТЕ сферни модови и дела који одговара доприносу ABC другог реда којим се апсорбују ТМ сферни модови. На пример, елементи блока матрице $[UVS^e]$ могу се представити као

$$UVS_{\hat{i}\hat{j}\hat{k},ijk}^e = UVS_{\hat{i}\hat{j}\hat{k},ijk}^{e,1ABC} + \frac{r_{ABC}}{2k_0(k_0 r_{ABC} - j)} \left(UVS_{\hat{i}\hat{j}\hat{k},ijk}^{e,2ABC^{TE}} + UVS_{\hat{i}\hat{j}\hat{k},ijk}^{e,2ABC^{TM}} \right), \quad \begin{aligned} \hat{i} &= 0, 1, \dots, N_u^e - 1, \\ i &= 0, 1, \dots, N_u^e, \\ \hat{j} &= 0, 1, \dots, N_v^e, \\ j &= 0, 1, \dots, N_v^e - 1, \\ \hat{k}, k &= 0, 1, \dots, N_w^e, \end{aligned} \quad (5.21)$$

чији се елементи рачунају као

$$\begin{aligned} UVS_{\hat{i}\hat{j}\hat{k},ijk}^{e,1ABC} &= \oint_{S_{ABC}} (\mathbf{i}_r \times \mathbf{f}_{u,\hat{i}\hat{j}\hat{k}}^e) \cdot (\mathbf{i}_r \times \mathbf{f}_{v,ijk}^e) dS, \\ UVS_{\hat{i}\hat{j}\hat{k},ijk}^{e,2ABC^{TE}} &= - \oint_{S_{ABC}} \left\{ \mathbf{i}_r \cdot (\nabla \times \mathbf{f}_{u,\hat{i}\hat{j}\hat{k}}^e) \right\} \left[\mathbf{i}_r \cdot (\nabla \times \mathbf{f}_{v,ijk}^e) \right] dS, \\ UVS_{\hat{i}\hat{j}\hat{k},ijk}^{e,2ABC^{TM}} &= \oint_{S_{ABC}} \left[(\nabla \cdot \mathbf{f}_{t u,\hat{i}\hat{j}\hat{k}}^e) (\nabla \cdot \mathbf{f}_{t v,ijk}^e) \right] dS, \end{aligned} \quad (5.22)$$

за оне коначне елементе и оне странице коначних елемената које чине ABC површ S_{ABC} . У свим осталим случајевима (када површ коначног елемента не припада површи S_{ABC}) $UVS_{\hat{i}\hat{j}\hat{k},ijk}^e = 0$. У изразу за $UVS_{\hat{i}\hat{j}\hat{k},ijk}^{e,2ABC^{TM}}$, t у индексу означава тангенцијалну компоненту вектора по површи S_{ABC} . Аналогно се могу одредити

елементи осталих блокова матрице $[S^e]$. Сви остали елементи у изразу (5.16) већ су дефинисани у одељку 3.7.

Приликом прорачуна елемената вектора слободних чланова $\{G_{s,\hat{i}\hat{j}\hat{k}}^{e,2ABC^{TM}}\}$ и елемената матрице $\{S_{\hat{i}\hat{j}\hat{k},ijk}^{e,2ABC^{TM}}\}$ потребно је прорачунати и дивергенцију тангенцијалних компоненти (на ABC површ S_{ABC}) функција базиса и тест функција. У Галеркиновом поступку (који се користи у оквиру ове дисертације), тест функције једнаке су базисним функцијама, па се прорачун њихове дивергенције неће посебно разматрати.

Функције базиса, које се користе у овој дисертацији, су роторски-конформне хијерархијске полиномске функције вишег реда. У питању су континуалне функције по запремини и површи сваког од коначних елемената, па, према томе, не постоје никакве потешкоће при прорачуну произвољних просторних извода. Због саме дефиниције базисних функција, у овој дисертацији помоћу примарних компоненти и реципрочних вектора, одређене просторне изводе (ротор) могуће је прорачунати аналитички (у затвореном облику), док је за друге просторне изводе (на пример, дивергенцију) тада неопходно спровести нумеричко диференцирање. Са друге стране, примена ABC другог реда захтева прорачун дивергенције базисних функција по читавој површи S_{ABC} , што укључује и раздвојне линије између два коначна елемента по површи S_{ABC} . За роторски-конформне базисне функције, једнакост нормалних компоненти на раздвојним површима/линијама између два коначна елемента није аутоматски задовољена, па ће, самим тим, у дивергенцији базисних функција по површи S_{ABC} постојати и сингуларни чланови (на раздвојним линијама два коначна елемента). Строга имплементација ABC другог реда захтевала би посебан третман ових сингуларних чланова [116, 120], а у оквиру ове дисертације, у одељку 6.5, испитаћемо колики је утицај ових сингуларних чланова и каква тачност решења се може очекивати њиховим занемаривањем, тј. коришћењем неригорозног симетричног ABC другог реда. Показаћемо да закључци из рада [120] не важе и у случају великодоменске методе коначних елемената са апроксимацијом поља вишег реда.

Пошто су функције базиса роторски-конформне, тј. изражене су помоћу примерних компоненти и реципрочних вектора [као у (3.46)], њихова дивергенција не може се одредити у аналитичком (затвореном) облику. Уместо тога, ову процедуру неопходно је спровести нумерички. Као илустративан пример, прикажимо прорачун дивергенције члана облика $\nabla \cdot \mathbf{f}_{u,ijk}^e$. Полазећи од израза (3.34), за прорачун дивергенције у уопштеном закривљеном координатном систему, и израза (3.46) за дефиницију базисних функција можемо, за почетак, одредити $\nabla \cdot \mathbf{f}_{u,ijk}^e$:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{f}_{u,ijk}^e &= iu^{i-1} P_j(v) P_k(w) \mathbf{a}_u^r \cdot \mathbf{a}_u^r + \frac{1}{J} u^i P_j(v) P_k(w) \frac{\partial}{\partial u} (\mathbf{J} \mathbf{a}_u^r \cdot \mathbf{a}_u^r) \\ &+ u^i \frac{\partial P_j(v)}{\partial v} P_k(w) \mathbf{a}_u^r \cdot \mathbf{a}_v^r + \frac{1}{J} u^i P_j(v) P_k(w) \frac{\partial}{\partial v} (\mathbf{J} \mathbf{a}_u^r \cdot \mathbf{a}_v^r) \\ &+ u^i P_j(v) \frac{\partial P_k(w)}{\partial w} \mathbf{a}_u^r \cdot \mathbf{a}_w^r + \frac{1}{J} u^i P_j(v) P_k(w) \frac{\partial}{\partial w} (\mathbf{J} \mathbf{a}_u^r \cdot \mathbf{a}_w^r). \end{aligned} \quad (5.23)$$

Након краће анализе, полазећи од овог израза, може се одредити и дивергенција тангенцијалне компоненте базисне функције по ABC површ S_{ABC} , $\nabla \cdot \mathbf{f}_{t,u,ijk}^e$, која се користи у изразу (5.22) као

$$\nabla \cdot \mathbf{f}_{t,u,ijk}^e = \begin{cases} 0, & \text{на } u = \pm 1 \text{ површима FE,} \\ \nabla \cdot \mathbf{f}_{u,ijk}^e, & \text{на } v = \pm 1 \text{ површима FE и} \\ \nabla \cdot \mathbf{f}_{u,ijk}^e, & \text{на } w = \pm 1 \text{ површима FE.} \end{cases} \quad (5.24)$$

На крају, парцијалне изводе (на пример) облика $\frac{\partial}{\partial v} (\mathbf{J} \mathbf{a}_u^r \cdot \mathbf{a}_v^r)$ из (5.23) потребно је прорачунати нумерички (правилном средњих разлика) као

$$\frac{\partial}{\partial v} (\mathbf{J} \mathbf{a}_u^r \cdot \mathbf{a}_v^r) = \frac{(\mathbf{J} \mathbf{a}_u^r \cdot \mathbf{a}_v^r)_{|v=v+dv} - (\mathbf{J} \mathbf{a}_u^r \cdot \mathbf{a}_v^r)_{|v=v-dv}}{2 dv}, \quad (5.25)$$

при чему dv представља прираштај локалне координате v приликом нумеричког диференцирања. Прорачун дивергенције тангенцијалних компоненти за све остале базисне функције [које се појављују у изразима (5.19) и (5.23)] спроведе се аналогном процедуром. Иако се, када год је то могуће, у електромагнетским нумеричким методама тежи избегавању нумеричког прорачуна просторних извода, превасходно због ефикасности нумеричких алгоритама, важно је

напоменути да у предложеној FEM-ABC методи нумерички прорачун дивергенције готово да уопште не утиче на усложњавање прорачуна и готово да не продужава укупно време извршавања симулација. Рачунарски најзахтевнији део методе коначних елемената представља прорачун запреминских интеграла, а с обзиром на то да је дивергенцију потребно прорачунати само по S_{ABC} површи и само за оне базисне функције које имају ненулту тангенцијалну компоненту по површи S_{ABC} , површински интеграл из (5.14) представља занемарљив део укупних прорачуна. Погодним избором корака нумеричког диференцирања (dv из претходног примера), нумеричко диференцирање може се спровести врло тачно и његова грешка не би требало да утиче на укупну тачност нумеричког модела.

На крају, када је приказаном FEM-ABC методом прорачунато (електрично) поље у непосредној околини расејача, тј. унутар нумеричког домена (унутар површи S_{ABC} са слике 5.1), од интереса може бити и поље изван нумеричког домена (на пример, у произвољној тачки M са слике 5.1 или у далеких тачкама тј. у зони зрачења). Поље изван нумеричког домена може се прорачунати применом Кирхофове векторске интеграционе методе (*Kirchhoff method of integration*) [24]. За успешну примену ове методе, потребно је посматрати затворену Кирхофову површ S_K , са јединичном нормалом \mathbf{n} усмереном упоље, као на слици 5.1. Кирхофова површ S_K у потпуности лежи у нумеричком домену прорачуна, тј. између расејача и површи S_{ABC} . За ознаке као на слици 5.1, може се показати да се у било којој тачки M изван површи S_{ABC} расејано електрично поље може одредити као [24]

$$\mathbf{E}^{sc}(\mathbf{r}) = \oint_{S_K} \{ [\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}')] \nabla' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + [\mathbf{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')] \times \nabla' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \mathbf{n} \times [\nabla' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')] G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \} dS, \quad (5.26)$$

при чему \mathbf{E} представља укупно електрично поље по површи S_K , $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ представља Гринову функцију, која је у слободном простору облика $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{-jk_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$, а прим у набла оператору ∇' значи да је просторно

диференцирање потребно спровести само по \mathbf{r}' координатама. У далеким тачкама овај израз се поједностављује и постаје

$$\mathbf{E}^{\text{sc}}(\mathbf{r}) = \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \oint_{S_K} \{jk_0 [\mathbf{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')] \times \mathbf{i}_r - \mathbf{i}_r \times \mathbf{i}_r \times \mathbf{n} \times [\nabla' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')]\} e^{-jk_0 \mathbf{r}' \cdot \mathbf{i}_r} dS. \quad (5.27)$$

Полазећи од израза (5.27), лако се може прорачунати и радарски попречни пресек

$$\sigma = \lim_{r \rightarrow \infty} 4\pi r^2 \frac{|\mathbf{E}^{\text{sc}}(\mathbf{r})|^2}{|\mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{r})|^2} = \frac{1}{4\pi |\mathbf{E}^{\text{inc}}|^2} \left| \oint_{S_K} \{jk_0 [\mathbf{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}') \times \mathbf{i}_r - \mathbf{i}_r \times \mathbf{i}_r \times \mathbf{n} \times [\nabla' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')]\} e^{-jk_0 \mathbf{r}' \cdot \mathbf{i}_r} dS \right|^2. \quad (5.28)$$

Пошто је у изразима (5.26)-(5.28) од просторних извода електричног поља \mathbf{E} једино потребно прорачунати ротор ($\nabla' \times$), а како је електрично поље \mathbf{E} изражено помоћу роторски-конформних функција базиса, овај члан се може прорачунати аналитички, па је површинске интеграле могуће једноставно прорачунати нумеричком интеграцијом помоћу Гаус-Лежандрове методе. Уколико је од интереса укупно електрично поље изван површи S_{ABC} , оно се лако може одредити као $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{\text{sc}} + \mathbf{E}^{\text{inc}}$, пошто је \mathbf{E}^{inc} познато унапред.

5.4. Резиме

У овом поглављу теоријски су разматрани отворени електромагнетски проблеми и могућности њиховог моделовања методом коначних елемената. Укратко су изложене основне поставке тренутно доступних решења за ограничавање нумеричког домена прорачуна. Закључено је да је, са становишта ефикасности и заузећа рачунарских ресурса, апсорпциони гранични услов један од првих избора.

Укратко је изложена теоријска основа апсорпционих граничних услова и указано је на инхерентна ограничења овог апроксимативног граничног услова. Посебна пажња посвећена је примени симетричног апсорпционог граничног услова другог реда у великодоменској методи коначних елемената са хијерархијским полиномским роторски-конформним функцијама базиса вишег

реда. Приказани су и детаљи потребни за праволинијску нумеричку имплементацију симетричног ABC другог реда у великодоменску методу коначних елемената (експлицитно су приказани сви интегрални чланови који су потребно прорачунати приликом попуњавања матрица система).

Посебна пажња посвећена је имплементационим детаљима у вези са прорачуном дивергенције роторски-конформних функција базиса по S_{ABC} површи. Како роторски-конформне функције базиса не задовољавају аутоматски и једнакост нормалних компоненти поља на споју два FE, након примене дивергенције на овакве базисне функције, на линијама споја два FE (по S_{ABC} површи) појавиће се сингуларни чланови, које није могуће лако интегралити. Иако већ постоје решења која делимично решавају овај проблем [116], а у СЕМ заједници влада мишљење да, ако се не прорачунају егзактно, делови интеграла са сингуларним члановима не доприносе квалитету решења [120], кроз нумеричке примере из одељка 6.5 показаћемо да такви закључци не важе (стриктно) и у случају полиномских базисних функција вишег реда са великодоменским елементима и неригорозном имплементацијом симетричног ABC другог реда. Када су коначни елементи електрично велики, а укупно полиномско решење високе тачности, по S_{ABC} површи постојаће мали број сингуларних чланова не тако високог нивоа, па њихово неузимање у обзир не утиче много на укупно решење. На овај начин могуће је у потпуности искористити све предности великодоменског начина моделовања методом коначних елемената вишег реда, а у случају отворених (зрачећих) ЕМ проблема и конструисати ефикасне и задовољавајуће тачне нумеричке моделе. Такође, оваквим граничним условом није потребно спровести велике измене на постојећем FEM рачунарском коду, које би било неопходно спровести приликом замене постојећих базисних функција базисним функцијама које су и дивергенцијски-конформне по S_{ABC} површи.

На крају, коришћењем Кирхофове векторске интеграционе методе, полазећи од познатог FEM решења за електрично поље у непосредној околини расејача

(или антене), приказане су и једначине неопходне за прорачун расејаног (и/или укупног) електричног поља изван S_{ABC} површи (у блиском и далеком пољу).

6. Нумерички примери

6.1. Увод

Након објављивања рада [91], трансформациона електромагнетика постала је врло популарна научна дисциплина, поготову у круговима који се баве теоријском и нумеричком електромагнетиком. Применом теорије трансформационе електромагнетике, на релативно једноставан и сликовит начин, могу се конструисати ЕМ средине жељених својстава. Жељена својства и функционалност ЕМ средина по правилу се постижу манипулацијом простирања електромагнетског поља по њиховој запремини. Електромагнетске средине добијене конструкцијом ЕМ уређаја применом теорије трансформационе електромагнетике су, готово без изузетка, неизотропне и континуално нехомогене са релативно сложеном и брзом просторном променом својих параметара. Анализа оваквих ЕМ проблема може се спровести у аналитичком облику само за врло уску групу проблема високе симетрије, а у свим осталим случајевима потребно је спровести нумеричку анализу. Према томе, пред нумеричке методе постављени су врло високи захтеви – ефикасно моделовање електрично великих ЕМ проблема континуално нехомогених и неизотропних средина са релативно сложеном просторном променом параметара.

Већином тренутно доступних софтверских пакета за моделовање ЕМ поља није могуће спровести ефикасну нумеричку анализу континуално нехомогених и (произвољно) неизотропних средина. Тренутно доступни комерцијални софтверски пакети којима се могу (апроксимативно) моделовати неизотропне средине користе хомогене коначне елементе, па су нумерички модели континуално нехомогених средина, добијени коришћењем хомогених коначних елемената, релативно неефикасни са становишта заузећа рачунарских ресурса. Како би се проширио дијапазон проблема које је могуће анализирати на тренутно

широко доступним персоналним рачунарима, повећањем ефикасности нумеричких метода и смањењем њихових потреба за рачунарским ресурсима, потребно је континуално нехомогене неизотропне средине моделовати континуално нехомогеним неизотропним коначним елементима. Великодоменска метода коначних елемената вишег реда [45] у стању је да на ефикасан начин моделује континуално нехомогене [79] и произвољно неизотропне средине [80]. Цена која се при томе плаћа је усложњавање параметара подешавања нумеричког модела у циљу постизања оптималних перформанси. У овом поглављу биће указано и на одређен број избора и одлука које је потребно донети када се континуално нехомогене и неизотропне средине моделују великодоменском методом коначних елемената вишег реда полиномске апроксимације поља. Закључци и препоруке биће изведени двојак: теоријским разматрањима и/или кроз нумеричке експерименте. Посебна пажња биће посвећена тачном (са становишта геометрије модела и апроксимације ЕМ поља) геометријском моделовању. Биће представљене и одређене препоруке за избор оптималних редова полинома апроксимације поља у неизотропним срединама. На основу ових препорука биће конструисани ефикасни и тачни нумерички модели континуално нехомогених и неизотропних прекривки за смањење радарског попречног пресека. Као посебан циљ у оквиру овог поглавља, на примерима анализе блиског и далеког поља у околини прекривки за смањење радарског попречног пресека, биће испитана тачност, ефикасност и робусност предложених нумеричких модела. Применом теорије трансформационе електромагнетике биће конструисана и коцкаста прекривка за смањење радарског попречног пресека, посебно сложена за нумеричко моделовање. На крају, како би се укупно време извршавања симулација скратило, биће описана и спроведена паралелизација одређених делова рачунарског програма методе коначних елемената. Паралелизација рачунарских програма тренутно представља један од популарнијих праваца развоја нумеричке електромагнетике.

У овом поглављу прво ће бити представљено оптимално мапирање великих закривљених четвороуглова који се користе као (коначни) елементи у анализи антена и расејача великодоменском методом момената. Напоменимо да су исти четвороуглови веома значајни и за оптимално моделовање великих закривљених

хексаедара у методи коначних елемената, где се користе за затварање домена прорачуна кроз хибридную FEM-МоМ методу, а и генерално представљају граничне површи хексаедарских коначних елемената. Мапирање ће бити спроведено геометријском параметризацијом константном брзином, а биће представљена и апроксимација ове параметризације коришћењем великих закривљених четвороуглова Лагранжовог типа вишег геометријског реда. Важност правилног распореда интерполационих чворова најпре ће бити разматрана теоријски, а затим ће бити приказана кроз неколико једноставних нумеричких примера. Овакав распоред интерполационих чворова гарантује минимално изобличење (финалног) закривљеног параметризованог простора (тј. минимално изобличење диференцијалне лучне дужине у функцији параметара оригиналног простора).

Осим оптималне просторне сегментације (геометријске параметризације константном брзином), у циљу постизања што веће ефикасности и тачности нумеричких модела, потребно је изабрати и редове полиномске апроксимације непознатог поља на оптималан начин. Избор оптималних редова полиномске апроксимације посебно је захтеван задатак приликом моделовања неизотропних средина. У оквиру овог поглавља биће установљене и прелиминарне препоруке за усвајање оптималних (или скоро оптималних) редова хијерархијских полиномских базисних функција и редова Гаус-Лежандрове нумеричке интеграције за нумеричку анализу електромагнетских поља у униаксијалним (*uniaxial*) срединама методом коначних елемената вишег реда. Униаксијалне средине су најједноставнији облик неизотропних средина (тензори параметара средина имају ненулте елементе само на главној дијагонали). Препоруке ће бити утврђене на основу (ограниченог) скупа нумеричких симулација униаксијалног коцкастог ЕМ расејача. Циљ је да се обезбеди оптималан баланс између рафинирања геометријске сегментације (*h*-рафинирања) и рафинирања редова полиномске апроксимације непознатог поља (*p*-рафинирања), што финално води ка значајном смањењу укупног броја непознатих и укупног времена извршавања симулације потребних за постизање одговарајуће тачности.

Затим ће бити приказана ефикасна и тачна нумеричка електромагнетска анализа тродимензионе сферне прекривке за смањење радарског попречног

пресека. Колико је аутору ове дисертације познато, оваква нумеричка анализа сферне прекривке за смањење радарског попречног пресека представљена је по први пут у раду [123]. Параметри средине прекривке добијени су применом теорије трансформационе електромагнетике, као што је описано у одељку 4.4.1. Примењена нумеричка метода добијена је хибридизацијом методе коначних елемената вишег реда, којом се врши дискретизација континуално нехомогене и неізотропне прекривке, и методе момената вишег реда, која се користи за нумеричко затварање домена прорачуна. Након тога, биће представљена и нова конформна коцкаста прекривка за смањење радарског попречног пресека, чији ће електромагнетски параметри такође бити добијени применом трансформационе електромагнетике. Перформансе прекривке биће испитане ригорозном пуноталасном нумеричком анализом (хибридном FEM-МоМ методом вишег реда), у блиском и далеком пољу. Колико је аутору ове дисертације познато, конформна коцкаста прекривка (са оштрим ивицама и рогљевима) и њена ригорозна пуноталасна нумеричка анализа представљени су по први пут у [114]. Описана методологија конструкције коцкасте прекривке може се проширити и употребити за конструкцију савршено прилагођених слојева (PML), који се користе приликом нумеричке анализе отворених електромагнетских проблема методом коначних елемената. Помоћу PML-ова ограничава се, иначе бесконачан, домен прорачуна електромагнетског поља. Вештачки PML-слојеви требало би да што мање рефлектују расејано електромагнетско поље (које се теоријски простире од расејача до у бесконачност), тј. требало би да што боље опонашају пропацију EM таласа у слободној средини (вакууму).

Биће имплементиран симетричан, неегзактан ABC другог реда на закривљеним великодоменским хексаедрима помоћу нумеричког диференцирања дивергенцијски-неконформних компоненти електричног поља једног од чланова у изразу за ABC. Процедура нумеричког диференцирања биће спроведена без наметања једнакости нормалне (у односу на раздвојну ивицу) компоненте електричног поља на споју два FE и без додавања нових скаларних променљивих. Овакав приступ биће евалуиран и продискутован кроз неколико нумеричких примера. Биће анализиран савршено проводан сферни расејачи, а тачност анализе биће испитана прорачуном нормализоване L_2 норме грешке радарског попречног

пресека. Анализираће се и моностатички радарски попречни пресек диелектричног сферног расејач у опсегу учестаности.

На крају овог поглавља, у циљу скраћења укупног времена извршавања симулација приликом нумеричке анализе, биће разматран и процес паралелизације временски захтевних прорачуна запреминских интеграла у оквиру методе коначних елемената. Паралелизација прорачуна запреминских интеграла биће спроведена коришћењем OpenMP библиотеке. Спроведеном паралелизацијом неће бити нарушена постојећа структура пажљиво конструисаних оригиналних алгоритама погодних за минимизирање редундантних прорачуна у методи коначних елемената вишег реда. На овај начин биће обезбеђена постепена транзиција постојећег рачунарског кода за нумеричку електромагнетску анализу методом коначних елемената вишег реда на нове мулти-процесорске рачунарске системе.

6.2. Просторно мапирање параметризацијом константном брзином у великодоменском електромагнетском моделовању

Последњих година, у нумеричкој електромагнетици све интензивније се користе закривљени елементи за геометријско моделовање антена и расејача [10, 17, 75, 124-129]. Овакви елементи пружају већу флексибилност приликом моделовања и омогућавају да се у моделима разних структура користе (електрично) већи елементи, поготову када су упарени са базисним функцијама вишег реда апроксимације струја и поља. На тај начин могуће је конструисање врло ефикасних нумеричких модела електромагнетских проблема. Најчешће коришћени закривљени параметарски елементи у нумеричкој електромагнетици засновани су на полиномској параметризацији [на пример, Лагранжовим интерполационим полиномима, Безиеовим кривама (*Bézier curves*) и сплајновима (*splines*)] [10, 17, 75, 124-127]. Користе се и сложеније параметризације засноване на рационалним полиномским функцијама [на пример, рационалним Безиеовим кривама (*rational Bézier curves*) и неуниформним рационалним Б-сплајновима, скраћено NURBS (*nonuniform rational B-splines*)], прилагођене за нумеричку

електромагнетику [128-131]. Рационалне полиномске параметризације омогућавају егзактно моделовање свих коничних пресека (на пример, егзактно моделовање круга и елипсе), а коначни елементи који користе рационалну полиномску параметризацију геометрије, могу се конструисати тако да аутоматски обезбеде континуалност тангенцијалних компоненти поља на споју два елемента. Цена која се при томе плаћа је сложенија имплементација и комплексније упаривање финалне полиномске структуре јер је потребно изједначавање одговарајућих коефицијената развоја поља на споју два коначна елемента. Према томе, када се користе полиномске базисне функције изражене помоћу параметарских координата (на пример, помоћу координата $u-v-w$ локалног координатног система), применом рационалних полиномских параметризација прорачун интеграла поља и уопштених импеданси (унутрашњих производа) [17] обично је редундантан и неефикасан.

Иако се готово сва истраживања моделовања закривљених геометрија великододменским (коначним) елементима у нумеричкој електромагнетици фокусирају на дефиницији и имплементацији једног одређеног типа базисних функција, као и на прорачуну одговарајућих импеданси (тј. интеграла у закривљеном простору), питање проблема расподеле интерполационих чворова, којима се управља геометријом закривљених елемената, ретко се разматра у отвореној литератури. Колико је аутору ове дисертације познато, проблем расподеле чворова је по први пут представљен у раду [132]. Ово питање посебно је важно када се желе добити резултати високе тачности (неопходни за успешно нумеричко моделовање прекривки за смањење радарско попречног пресека код којих су расејана поља врло ниског нивоа). Пресликавање родитељског елемента у одређени закривљени елемент, типично спроведено неком врстом пројекције, може се спровести на разне начине. Проблем избора типа пројекције посебно је важан када се користе великододменски закривљени елементи вишег реда (на пример, Лагранжови елементи реда већег од два када постоје више од два интерполациона чвора по ивици елемента).

У овом одељку усредсредићемо се на уопштене параметарске закривљене четвороуглове Лагранжовог типа и истаћи ћемо важност правилног распореда интерполационих чворова. Ови четвороуглови су основни геометријски

(градивни) елементи за анализу металних и диелектричних антена и расејача методом момената вишег реда у површинској формулацији (*surface integral equation, SIE*) [17], али уједно представљају и граничне површи великих закривљених хексаедара Лагранжовог типа, па су од подједнаке важности и у методи коначних елемената. У овом одељку анализа је приказана у оквиру методе момената, ради једноставнијег излагања. Међутим, сви закључци директно се могу применити за нумеричко моделовање великодоменском методом коначних елемената вишег реда.

Распоред интерполационих чворова четвороуглова требало би спровести на такав начин да изобличење параметарских координата у финалном простору буде минимизирано, тј. да диференцијална лучна дужина по читавом финалном простору буде што униформнија. Увешћемо параметризацију константном брзином [133] (*constant speed parametrization, CSP*) МоМ-SIE површи и њену апроксимацију коришћењем великих Лагранжових четвороуглова. Нагласићемо важност, у општем случају, постизања параметризације константном брзином [тј. постизања параметризације константном дужином лучне координате (*constant arc-length parametrization*)] дуж координатних линија по површи МоМ елемената, у егзактном или апроксимативном смислу. На тај начин добијају се финални резултати нумеричке електромагнетске анализе највише могуће тачности за задати степен геометријске апроксимације и задате редове полинома апроксимације поља и струја. Занимљив пример примене параметризације константном лучном дужином може се пронаћи у [134], где се параметризација константном лучном дужином користи у контексту оптимизације директивности и импедансе жичаних антена. У овом одељку одредићемо и једноставне формуле за егзактно пресликавање родитељских праволинијских сегмената и квадрата на кружне лукове и делове сфере у закривљеном простору, респективно, које резултују униформно (или скоро униформно) распоређеним интерполационим чворовима у финалном домену. На овај начин постићи ћемо минимално геометријско изобличење финалног простора. Пресликавање параметризацијом константном брзином разликује се, у смислу изобличења простора, у односу на конвенционалне начине пресликавања засноване на параметризацији централном пројекцијом (*ray casting parametrization, RCP*). Даље, демонстрираћемо генералну

применљивост пресликавања параметризацијом константном брзином на сложеније површи позиционирањем интерполационих Лагранжових чворова на такав начин да се еквилистантне тачке из родитељског простора пресликавају у еквилистантне тачке дуж одговарајућих закривљених координатних линија у финалном простору. Параметре оваквог пресликавања одредићемо нумеричким решавањем једначина параметризације константном брзином у финалном параметарском простору. У наставку приказане су (у најкраћим цртама) разлике између параметризације централном пројекцијом и параметризације константном брзином, генерално. Дат је и један нумерички пример моделовања сферне површи великодоменским закривљеним четвороугловима. На том примеру указано је на разлику тачности нумеричких решења када се користе CSP и RCP.

6.2.1. Геометријско пресликавање параметризацијом централном пројекцијом и параметризацијом константном брзином

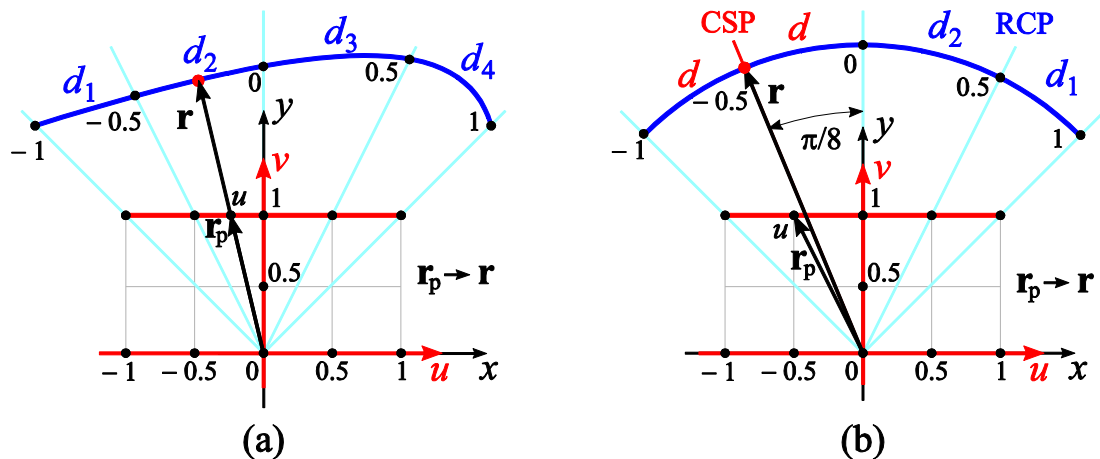
Посматрајмо произвољну закривљену линију коју би требало параметризовати за потребе СЕМ анализе, као што је приказано на слици 6.1 (а). Пођимо, при томе, од параметарске једначине за праволинијски сегмент у родитељском $(u-v)$ домену, математички описаног вектором положаја као $\mathbf{r}_p = u\mathbf{i}_x + \mathbf{i}_y$, $-1 \leq u \leq 1$, $v = 1$, и потражимо трансформацију $\mathbf{r}_p \rightarrow \mathbf{r}$, у облику $\mathbf{r}(u) = x(u)\mathbf{i}_x + y(u)\mathbf{i}_y$ (пошто је $v = 1 = \text{const}$, \mathbf{r} не зависи од v), при чему је \mathbf{r} вектор положаја одговарајућих тачака дуж закривљене линије описан Декартовим координатама у финалном простору. Конвенционално, мапирање праволинијског сегмента спроводи се пројекцијом његових тачака на одговарајућу закривљену линију. Пројекција се спроводи из заједничког центра пројекције. Аналогна процедура за мапирање квадрата на закривљену површ дата је у [9, 135]. Овакав облик мапирања може се назвати зракасто мапирање, тј. мапирање параметризацијом централном пројекцијом (*ray casting parametrization*, RCP), по аналогији са зракастим мапирањем (*ray-casting*) које се примењује у рачунарској графичи [136, 137]. Применом на четвртину кружног лука полупречника a , као што је приказано на слици 6.1 (б), функција RCP мапирања се може одредити као

$$\mathbf{r}(u) = a \frac{\mathbf{r}_p(u)}{|\mathbf{r}_p(u)|} = a \frac{u\mathbf{i}_x + \mathbf{i}_y}{\sqrt{1+u^2}}, \quad (6.1)$$

при чему је промена диференцијалне лучне дужине dl кружног лука у функцији промене параметра u једнака $dl/du = \sqrt{(\partial x/\partial u)^2 + (\partial y/\partial u)^2} = a/(1+u^2)$, и зависи само од локалне u координате. На десној половини слике 6.1 (б) јасно се може видети да се еквилистантне тачке из родитељског домена, RCP мапирањем, мапирају у нееквилистантне тачке дуж кружног лука ($d_1 < d_2$), што је у складу са претходном формулом ($dl/du \neq \text{const}$). Уведимо сада другачији тип мапирања, као што је приказано на левој половини слике 6.1 (б), при чему се интерполациони чвор из родитељске тачке $u = -0,5$, $v = 1$ пресликава на средину леве половине кружног лука. Овај тип мапирања требало би да резултује пресликавањем униформно распоређених интерполационих чворова из родитељског домена (са праволинијског сегмента $-1 \leq u \leq 1$, $v = 1$) у униформно распоређене тачке дуж кружног лука. Пресликавање $\mathbf{r}_p \rightarrow \mathbf{r}$ са оваквим својством дато је формулом

$$\mathbf{r}(u) = a \sin\left(\frac{\pi u}{4}\right) \mathbf{i}_x + a \cos\left(\frac{\pi u}{4}\right) \mathbf{i}_y, \quad (6.2)$$

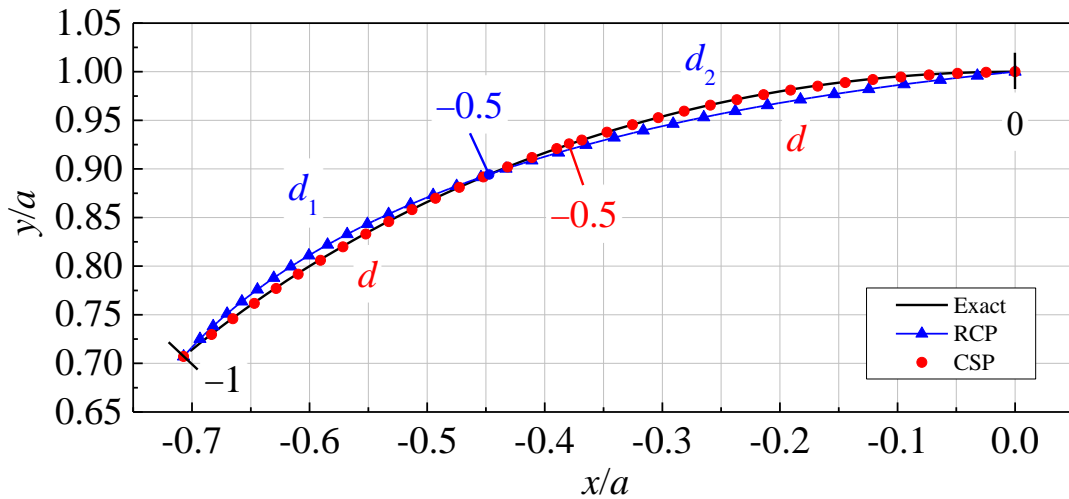
за које је $dl/du = a\pi/4$ константно. Овакав тип мапирања зваћемо мапирање параметризацијом константном брзином (*constant speed parametrization*, CSP), пошто је брзина којом се мапирани тачке крећу дуж закривљене линије, изражена у функцији параметра u , константна дуж читаве криве (за $-1 \leq u \leq 1$).



Слика 6.1. Пресликавање између родитељске линије (праволинијског сегмента $-1 \leq u \leq 1, v = 1$) и параметарске криве за (а) произвољну криву коришћењем RCP мапирања и (б) четвртину кружног лука коришћењем RCP (десна половина) и CSP (лева половина) мапирања.

Да бисмо јасније показали разлику насталу апроксимацијом RCP мапирања (6.1) и CSP мапирања (6.2) кружног лука Лагранжовим елементима, моделујмо леву половину кружног лука са слике 6.1 (б) Лагранжовим интерполационим полиномима другог (геометријског) реда ($K_u = K_v = 2$). Три интерполациона чвора у $u-v$ родитељском домену су еквиливантни [одговарају им тачке $u = -1, u = -0,5$ и $u = 0, v = 1$], а на слици 6.2 приказани су резултати добијени користећи RCP и CSP мапирања, респективно и Лагранжове (интерполационе) полиноме другог реда. Јасно се може видети да Лагранжова апроксимација CSP мапирања описује оригиналну криву (кружни лук) готово егзактно, док Лагранжова апроксимација RCP мапирања одступа од оригиналне криве, додуше не много. Према томе, може се очекивати да ће нумерички модели са CSP мапирањем резултовати тачнијим симулацијама. Такође, прорачунати однос dl/du значајно је униформнији дуж апроксимираног кружног лука у случају Лагранжове апроксимације CSP криве у односу на Лагранжову апроксимацију RCP криве. Према томе, осим веће геометријске тачности, додатно очекујемо и боља нумеричка решења методом момената када се користи CSP мапирање у односу на случај када се користи RCP мапирање. Површинске еквивалентне електричне и магнетске струје, у МоМ моделу, изражене су као функције координата родитељског домена, тј. помоћу локалних u и v координата на уопштеном четвороуглу. Интеграција и тестирање се такође спровode у родитељском домену,

у односу на који Лагранжова апроксимација CSP мапирања уноси мања геометријска изобличења.



Слика 6.2. Геометријско моделовање осмине кружног лука засновано на апроксимацији RCP и CSP мапирања, респективно, помоћу Лагранжових параметарских кривих другог реда. Растојања између суседних интерполационих чворова, који одговарају RCP и CSP мапирању, приказана су на слици, а приказани су и интерполациони чворови који одговарају границама домена ($u = -1$ и $u = 0$) и средини домена ($u = -0,5$).

Пошто смо на претходном једноставном примеру геометријског моделовања дела кружног лука приказали разлику између RCP и CSP мапирања, размотримо даље мапирање квадратног родитељског домена ($-1 \leq u \leq 1$, $-1 \leq v \leq 1$) на шестину сфере (полупречника a). Егзактно RCP мапирање, одређено аналогно као у (6.1) [9, 135], илустровано је у левом уметку слике 6.3, са кога се може уочити сличан проблем изобличења пројектованог параметарског простора као на слици 6.1. Коришћење CSP мапирања, уз задржавање интерполационих тачака униформно распоређених дуж одговарајућих делова две карактеристичне кружнице на делу сфере (кружнице у поларној и екваторијалној равни), може представљати решење овог проблема, као и у претходном примеру. Генерализацијом CSP мапирања (6.2), CSP мапирање квадратног домена на шестину површи сфере дато је изразима

$$h(u, v) = \sqrt{1 + \tan^2\left(\frac{\pi u}{4}\right) + \tan^2\left(\frac{\pi v}{4}\right)}, \quad (6.3)$$

$$x = \frac{a}{h} \tan\left(\frac{\pi u}{4}\right), \quad y = \frac{a}{h} \tan\left(\frac{\pi v}{4}\right) \quad \text{и} \quad z = \frac{a}{h},$$

и приказано је као десни уметак на слици 6.3, при чему је h помоћни параметар уведен ради скраћивања записа.

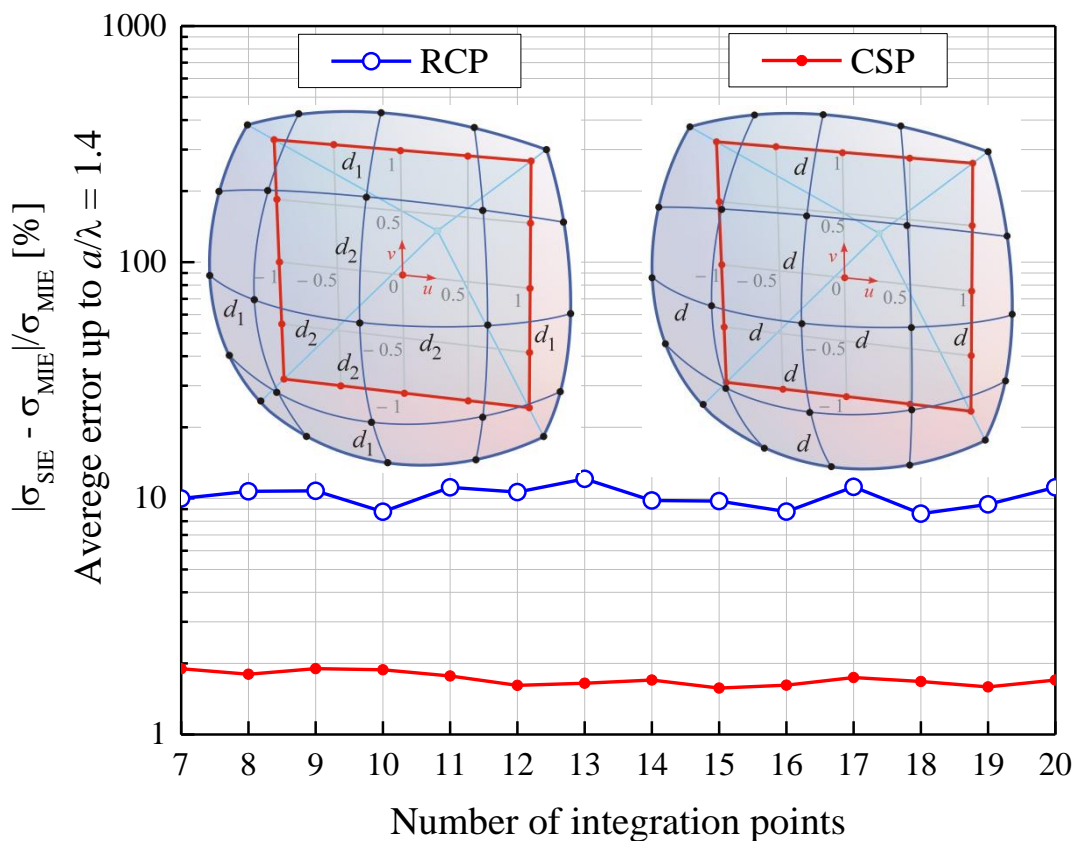
Експлицитне аналитичке изразе за CSP мапирање, у општем случају, тешко је (или немогуће) пронаћи. Уместо тога, позиционирањем Лагранжових интерполационих тачака на такав начин да еквиливантним тачкама из родитељског домена одговарају еквиливантне тачке (дуж одговарајућих координатних линија) у новом домену, могу се постићи задовољавајуће тачни резултати. Оваква процедура може се спровести нумерички, дуж произвољних параметарских линија, као што ће бити описано у примеру из одељка 6.2.2.

Приметимо, на крају, да иако је CSP мапирање у овом одељку представљено у комбинацији са Лагранжовим интерполационим закривљеним параметарским елементима, CSP мапирање може се применити на било коју криву или закривљену површ описану произвољном математичком једначином, укључујући и оне дефинисане помоћу NURBS [138]. Наиме, било која крива може се репараметризовати тако да се постигне параметризација константном брзином [133], што се, у општем случају, мора урадити нумерички [138]. У наставку су приказани нумерички резултати за моделе чија је геометрија добијена апроксимацијом RCP и CSP мапирања Лагранжовим елементима, као и анализа тачности резултата за ова два случаја [132].

6.2.2. Нумерички примери тродимензионе МоМ-SIE ЕМ анализе коришћењем RCP и CSP мапирања

Као први пример тродимензионе МоМ-SIE ЕМ анализе коришћењем RCP и CSP мапирања, посматрајмо диелектрични ($\epsilon_r = 4$, $\mu_r = 1$) сферни расејач полупречника a у слободном простору. Сферна површ расејача моделована је помоћу 6 Лагранжових четвороугаоних елемената четвртог геометријског реда ($K_u = K_v = 4$). Еквивалентне површинске електричне и магнетске струје по

површи МоМ елемената описане су полиномским дивергенцијски-конформним хијерархијским базисним функцијама [17] реда $N_u = N_v = 6$, у оба правца (у правцу u и v локалних оса). Кроз нумеричке експерименте утврђено је да CSP модел даје задовољавајуће тачне резултате за моностатички радарски попречни пресек до учестаности на којој је $a/\lambda = 2$, при чему λ представља таласну дужину у диелектрику расејача, и да има знатно боље перформансе у односу на RCP модел који резултује уочљивим грешкама чак од релативно ниских учестаности на којима је $a/\lambda \approx 0,42$, и значајним грешкама на учестаностима на којима је $a/\lambda > 1,4$. Додатно, на слици 6.3 представљена је релативна грешка нумеричког решења у процентима за моностатички радарски попречни пресек [у односу на аналитичко решење (Мие редом)], усредњена по учестаности до учестаности на којој је $a/\lambda = 1,4$. Грешка је приказана у функцији броја интеграционих тачака нумеричке Гаус-Лежандрове интеграције. Користи се исти број тачака нумеричке интеграције ($NGL_u = NGL_v = NGL$) у оба правца по површи четвороугаоних елемената у МоМ-SIE моделу. Са слике 6.3 закључујемо да, иако оба модела резултују нумерички стабилним решењем, CSP модел даје око 5 пута нижу усредњену грешку у посматраном опсегу учестаности.



Слика 6.3. МоМ-SIE анализа диелектричног ($\epsilon_r = 4$) сферног расејача (6 четвороуглова, $K_u = K_v = 4$ и $N_u = N_v = 6$), помоћу RCP и CSP модела мапирања: апсолутна релативна RCS грешка усредњена је за различите вредности a/λ и приказана је у функцији броја интеграционих тачака Гаус-Лежандрове интеграционе формуле (у уметку су приказани и детаљи RCP и CSP пресликавања родитељског квадрата на површ сфере).

Као други и последњи пример, и демонстрација опште применљивости CSP мапирања на сложеније закривљене површи произвољно дефинисане неком врстом математичке једначине, спровешћемо CSP моделовање и анализу металног расејача облика двоструко-шиљастог издуженог сфероида (*double ogive*), који представља стандардни нумерички тест успостављен од стране Конзорцијума електромагнетских кодова (*Electromagnetic Code Consortium, EMCC*), на учестаности $f = 1,57 \text{ GHz}$ [139]. Метални расејач геометријски је сегментиран, на основу једначина из [139], помоћу 24 МоМ четвороугаона елемента четвртог геометријског реда ($K_u = K_v = 4$), а изглед модела приказан је у уметку слике 6.4. Даље, CSP алгоритам примењен је на параметар t из [139] у границама $-2,5 \text{ in} < t < 0$ и $0 < t < 5 \text{ in}$, респективно. За параметарске линије дефинисане

помоћу $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ координата, одређујемо распоред интерполационих тачака по површи металног расејача тако да лучна дужина између било које две суседне интерполационе тачке буде иста и једнака $1/N$ укупне лучне дужине обухваћене параметром t , при чему је N број сегмената на који се дели посматрана координатна линија описана параметром t . Ова процедура спроведена је нумерички решавањем скупа једначина

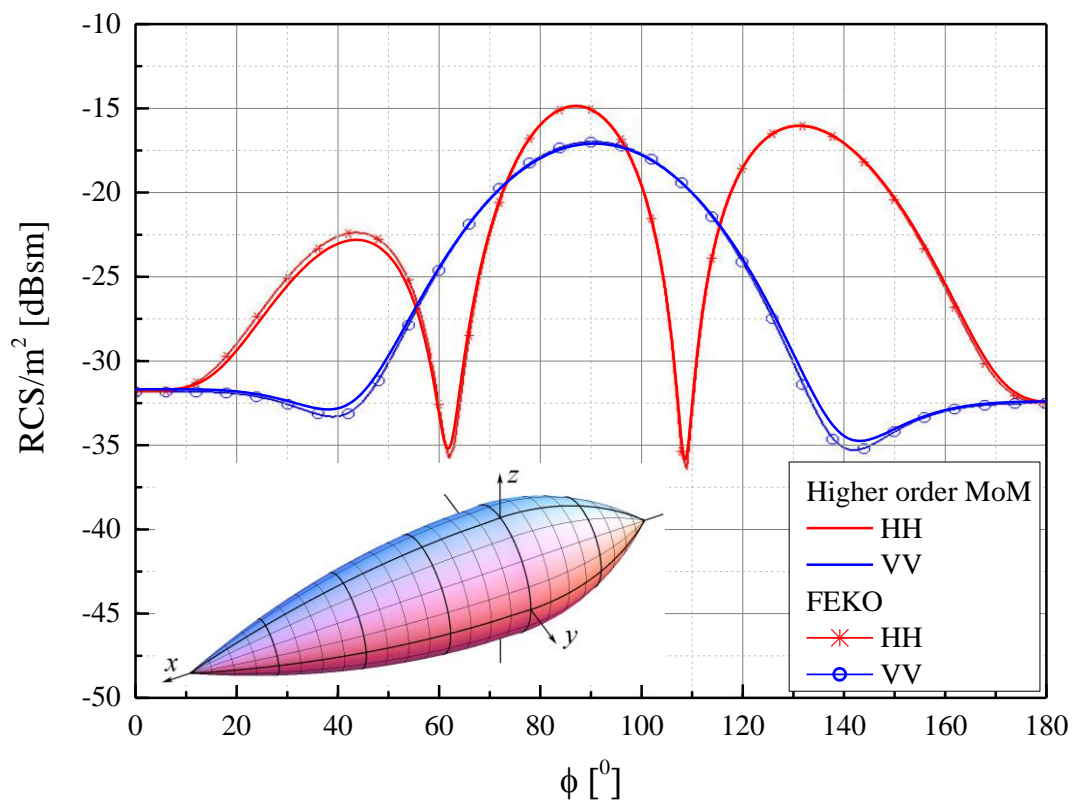
$$\int_{t=t_0}^{t_{xOy,i}} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2} dt = \frac{i}{8} \int_{t=t_0}^{t_8} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2} dt, \quad (6.4)$$

$i = 0, \dots, 7, \text{ и}$

$$\int_{t=t_{xOy,i}}^{t_{24}} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2} dt = \frac{24-i}{16} \int_{t=t_8}^{t_{24}} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2} dt, \quad (6.5)$$

$i = 9, \dots, 24,$

при чему је $t_0 = -2,4925 \text{ in}$ и $t_{24} = 4,9925 \text{ in}$ (врхови металног расејача су изостављени у моделу), а $t_{xOy,8} = 0$ (у равни $t = 0$ постоји дисконтинуитет првог извода по површи металног расејача). Једначине (6.4) и (6.5) решавају се стандардном методом сечице за нумеричко проналажење корена једначине, при чему су и интегрални прорачунати нумерички. Решење ових једначина су бројне вредности параметра t распоређени на CSP начин у xOy -равни ($t_{xOy,i}$, $i = 0, \dots, 24$). Са друге стране, метални расејач је осно симетричан, па је CSP расподела ψ параметра ($0 \leq \psi < 2\pi$) [139] дата као $\psi_j = j2\pi/16$, $j = 0, \dots, 15$. Коначно, координате интерполационих чворова (којима су дефинисани МоМ елементи) добијене су заменом параметара $t_{xOy,i}$ и ψ_j ($i = 0, \dots, 24$ и $j = 0, \dots, 15$) у једначине геометрије металног расејача [139]. Резултати за моностатички радарски попречни пресек металног расејача (облика двоструко-шиљастог сфероида) добијени МоМ методом вишег реда ($N_u = N_v = 3$, укупан број непознатих је 420) уз примену CSP мапирања [дефинисаног изразима (6.4) и (6.5)] приказани су на слици 6.4 и упоређени су са резултатима са FEKO веб сајта [140]. Као што се може видети, постигнуто је одлично поклапање два скупа резултата.



Слика 6.4. RCS металног двоструко-шиљастог сфероида (*double ogive*) на учестаности $f = 1,57 \text{ GHz}$ [139] у функцији азимутног угла (елевациони угао је нула) за хоризонталну (HH) и вертикалну (VV) поларизацију респективно: поређење МоМ-SIE решења вишег реда (модел је добијен коришћењем CSP параметризације) са решењима добијеним помоћу FEKO софтверског пакета [140]; геометријски модел се састоји од 24 закривљена ($K_u = K_v = 4$) четвороугаона елемента, као што је приказано у уметку слике.

6.3. Препоруке за коришћење коначних елемената вишег реда у анализи неізотропних униаксијалних средина

Метода коначних елемената представља један од најбољих избора за нумеричку анализу сложених произвољно нехомогених и неізотропних електромагнетских структура у фреквенцијском домену [13]. У скорије време, великодоменско моделовање вишег реда, у коме се обично користе полиномске базисне функције реда вишег од другог, стекло је значајну популарност због смањења укупног броја непознатих за конкретан ЕМ проблем и повећања тачности и ефикасности нумеричке анализе [17, 18, 40, 45, 75, 80, 141]. Међутим, основна предност нумеричких метода вишег реда, њихова флексибилност у

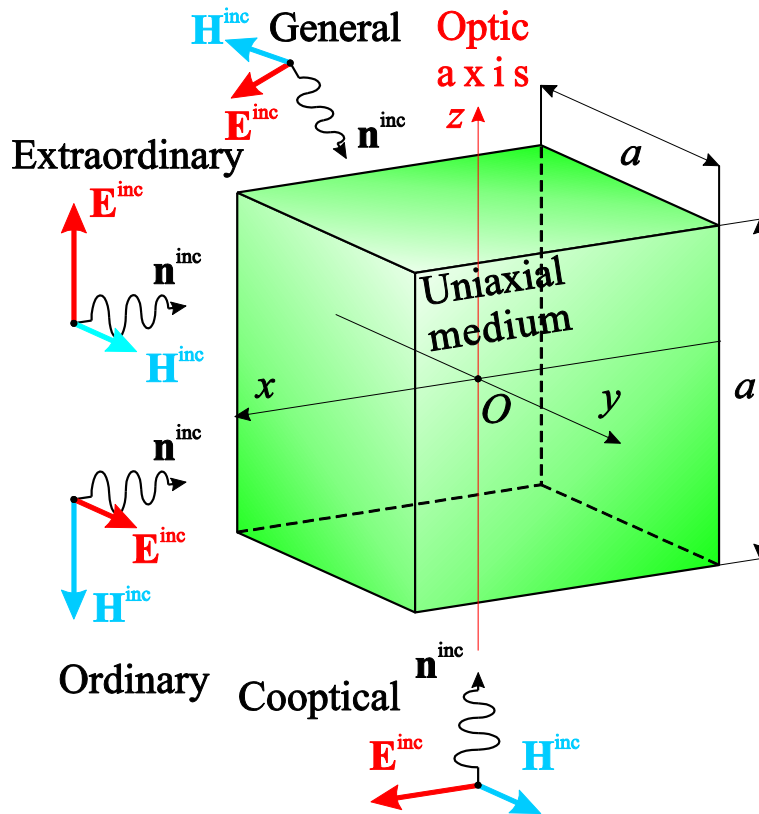
погледу величине и облика елемената, као и бржа конвергенција резултата повећавањем редова полиномске апроксимације поља, представља и њихову основну слабост. Приликом конструкције нумеричког модела сада постоје нови (непознати) параметри симулације чије подешавање не може бити у потпуности аутоматизовано за добијање оптималних перформанси модела. Коришћење великодоменских нумеричких метода вишег реда захтева широко и експертско познавање софистицираних техника моделовања ЕМ поља, као и значајно искуство у њиховој примени. Ово важи како приликом конструкције иницијалних модела, тако и приликом њиховог рафинирања (у реалном времену), које сада може ићи у два правца: увођење нових електрично мањих коначних елемената h -рафинирањем или повећавање редова полиномске апроксимације непознатог поља p -рафинирањем. Ниједном од ова два приступа не може се пружити предност без унапред утврђених упутстава заснованих на интензивним нумеричким експериментима и студијама случаја.

Чини се да је најзначајнија и најсвеобухватнија студија случаја оптималних (или скоро оптималних) редова полиномске апроксимације поља и геометријске сегментације у великодоменском моделовању вишег реда спроведена у [81], додуше доминантно у оквиру методе момената вишег реда и само за металне и хомогене диелектричне структуре. Тада су сви закључци и препоруке изведени у односу на таласну дужину у посматраној средини λ (тј. у односу на електричну величину елемената). Колико је аутору ове дисертације познато, таква студија не постоји за великодоменско моделовање произвољно неизотропних и нехомогених средина методом коначних елемената, кроз које не само да се талас простира на значајно сложенији начин у односу на простирање кроз изотропне хомогене средине, већ и дефиниција таласне дужине у неизотропној средини постаје нетривијалан задатак, а нерешив за произвољно неизотропне средине [27]. Главна мотивација за рад представљен у [82], и поново приказан у овом одељку, је недостатак препорука и рецепата за усвајање редова полинома развоја непознатог електричног поља и допустивих електричних величина елемената у великодоменском начину моделовања униаксијално неизотропних средина методом коначних елемената вишег реда. Главни циљ у овом одељку је

успостављање прелиминарних упутстава и препорука заснованих на почетном и ограниченом скупу нумеричких експеримената.

6.3.1. Нумерички резултати и дискусија

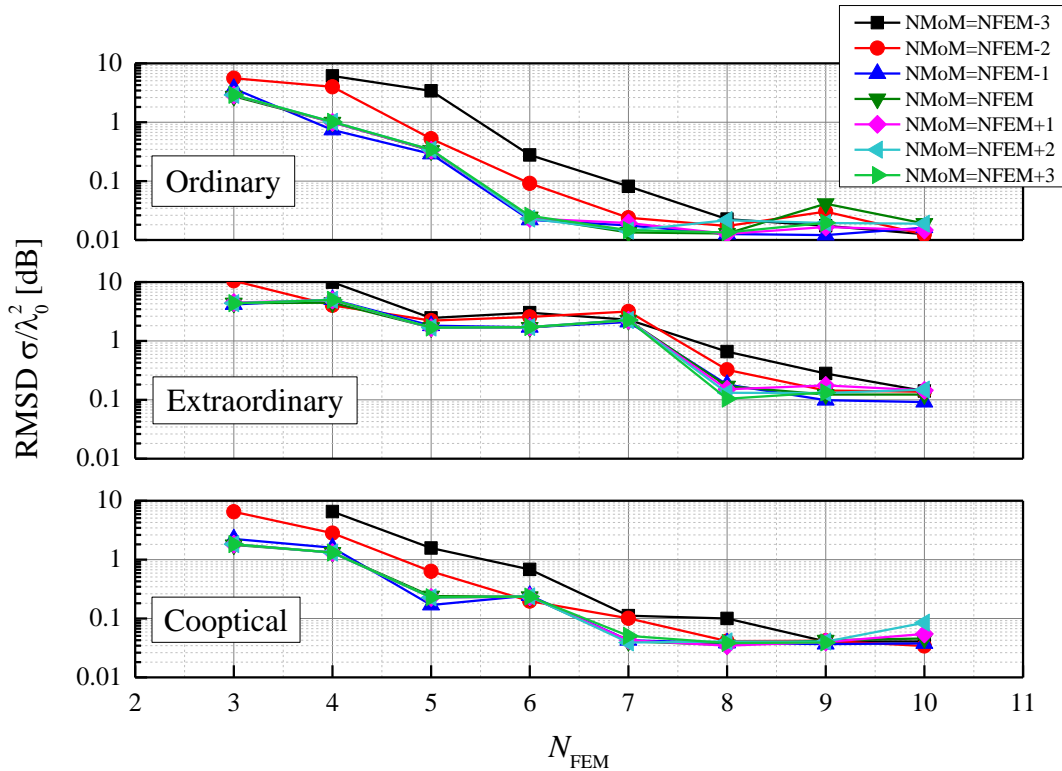
Посматрајмо хомоген немагнетски електрично неизотропан коцкасти расејач без губитака, дужине странице $a = 1$ m, који се налази у слободном простору, као што је приказано на слици 6.5. У електричном смислу, расејач је униаксијално неизотропан ($\epsilon_r^{xx} = \epsilon_r^{yy} = 2,25$ и $\epsilon_r^{zz} = 9$, док су сви остали елементи тензора пермитивности једнаки 0), при чему је z -оса уједно и оптичка оса. На основу теорије о пропагацији униформних равних таласа кроз хомогене униаксијалне средине [27], линеарно поларизован раван талас може се раставити на обичан мод (*ordinary mode*), за који је вектор електричног помераја (\mathbf{D}) управан на раван коју дефинишу оптичка оса и нормала на еквифазну површ, и посебан мод (*extraordinary mode*), за који вектор \mathbf{D} лежи у равни коју дефинишу оптичка оса и нормала на еквифазну површ. Ова два мода имају различит таласни број, у општем случају. Већ на основу овог најједноставнијег примера неизотропне средине, очигледно је да је врло тешко одредити оптималне параметре нумеричког модела у општем случају произвољно инцидентног поља. Стога ћемо у прелиминарној анализи посматрати само три посебна случаја: (i) раван инцидентни талас који има само y -компоненту електричног поља (*ordinary case* на слици 6.5), који наилази управно на леву страницу расејача ($\theta_{\text{inc}} = 0^\circ$, $\phi_{\text{inc}} = 0^\circ$), (ii) раван инцидентни талас који има само z -компоненту електричног поља (*extraordinary case* на слици 6.5), који наилази управно на леву страницу расејача ($\theta_{\text{inc}} = 0^\circ$, $\phi_{\text{inc}} = 0^\circ$), и (iii) раван инцидентни талас који има само x -компоненту електричног поља (*ordinary case* на слици 6.5, који ће се надаље, ради једноставности, називати кооптички мод, *cooptical case* на слици 6.5), који наилази управно на доњу страницу расејача ($\theta_{\text{inc}} = 180^\circ$, $\phi_{\text{inc}} = 0^\circ$). Геометријски, расејач је моделован помоћу само једног трилинеарног коначног елемента ($K_u = K_v = K_w = 1$).



Слика 6.5. Униаксијални неизотропни коцкасти расејач са три карактеристична инцидентна равна таласа.

На слици 6.6 приказана је средња квадратна грешка (*root-mean-square-deviation*, RMSD) нумерички прорачунатог моностатичког радарског попречног пресека, у опсегу учестаности од 50 MHz до 250 MHz, за случајеве (i)-(iii), у односу на у потпуности рафинирана FEM-МоМ решења вишег реда. Користе се само елементи са изотропним редовима полинома $N_u = N_v = N_w = N_{\text{FEM}}$ у FEM делу нумеричког модела, и слично $N_u^{\text{MoM}} = N_v^{\text{MoM}} = N_w^{\text{MoM}} = N_{\text{MoM}}$ у МоМ делу нумеричког модела. На основу закључака из [81], за редове полинома нумеричке интеграције Гаус-Лежандровим формулама у FEM делу користимо $NGL_{\text{FEM}} = N_{\text{FEM}} + 4$, и аналогно у МоМ делу. Са слике 6.6 закључујемо да су оптимални редови полиномске апроксимације поља у FEM $N_{\text{FEM}} = 6$, $N_{\text{FEM}} = 8$ и $N_{\text{FEM}} = 7$ за обичан (*ordinary*), посебан (*extraordinary*) и кооптички (*cooptical*) мод, респективно, којима одговарају „колена“ са минималним вредностима на RMSD кривама. За сваки од случајева, оптимални редови полинома апроксимације поља у FEM домену и редови полинома апроксимације струје у МоМ домену повезани

су као $N_{\text{MoM}} = N_{\text{FEM}} - 1$, што је конзистентно са закључцима из [81]. Као што је и очекивано, на основу теорије из [27], посебан мод (*extraordinary mod*) је најзахтевнији за моделовање, због испољавања већег таласног броја у односу на обичан (*ordinary*) мод. Једно могуће решење за моделовање посебног мода полиномима нижег реда је просторно рафинирање модела (*h*-рафинирање) у правцу управном на оптичку осу.



Слика 6.6. Средња квадратна грешка нормализованог моностатичког радарског попречног пресека, добијеног у опсегу учестаности од 50 MHz до 250 MHz, за три карактеристична инцидентна таласа, у функцији степена полинома FEM апроксимације поља.

6.4. Прекривке за смањење радарског попречног пресека

У овом одељку приказани су прецизни и ефикасни нумерички модели континуално нехомогених и неизотропних прекривки за смањење радарског попречног пресека (*cloak*). Нумеричко моделовање оваквих (сложених) средина врло је захтевно, а метода коначних елемената вишег реда чини се правим избором. У раду [123], колико је аутору ове дисертације познато, представљена је

по први пут великодоменска анализа сферне прекривке за смањење радарског попречног пресека континуално нехомогеним неизотропним закривљеним коначним елементима вишег реда, а у раду [114] по први пут је представљена коцкаста прекривка за смањење радарског попречног пресека и њена одговарајућа нумеричка анализа.

Већина резултата истраживања прекривки за смањење радарског попречног пресека добијених теоријом трансформационе електромагнетике, доступних у отвореној литератури, у мањој или већој мери се ослања на аналитичке и апроксимативне методе (на пример, на теорију геометријске оптике). Чини се да предности алтернативног приступа нису у потпуности истражене. Дводимензионе, а поготову тродимензионе прекривке, могу се анализирати пуноталасном ригорозном нумеричком методом заснованом на техници нумеричке електромагнетике и аналитичким формулама које описују континуалну промену параметара средине. Ефикасно нумеричко моделовање тродимензионих прекривки за смањење радарског попречног пресека не само да би обезбедило алтернативно решење за сферне и остале облике који се могу анализирати и аналитички (на пример, теоријом Мије редова), већ постаје неопходно приликом анализе и дизајна расејача сложенијих геометрија које се могу сусрести у пракси, а за која не постоје аналитичка решења. Наравно, увек би требало имати на уму да нумеричка решења инхерентно уносе одређену грешку, делом због ограничења нумеричког модела (апроксимација поља коначним бројем базисних функција и геометријска апроксимација полиномима коначног реда), а делом због процеса дискретизације континуалних величина. Осим тога, у нумеричком моделу, реални бројеви представљају се коначним бројем значајних цифара.

Примери нумеричке анализе дводимензионих прекривки за смањење радарског попречног пресека приказани су у радовима [93-95]. У овим радовима представљена је пуноталасна дводимензиона нумеричка анализа цилиндричних бесконачно дугачких прекривки за смањење радарског попречног пресека, спроведена коришћењем комерцијалног софтвера COMSOL Multiphysics. Софтверски пакет COMSOL Multiphysics заснован је на методи коначних елемената. У оквиру овог комерцијалног софтвера користе се хомогени неизотропни коначни елементи, па се уместо континуалне просторне промене

параметара средине користи део по део хомогена апроксимација. Последица оваквог модела је увођење чак до 32 хомогена слоја за задовољавајуће тачну апроксимацију просторне промене параметара средине прекривке [93]. Пошто се користе електрично мали коначни елементи, пријављено је да је нумерички модел из [93] имао чак 340000 непознатих. Тродимензиона пуноталасна нумеричка анализа прекривке за смањење радарског попречног пресека приказана је у [142]. У овом раду, као и у претходним радовима, нумеричка анализа је спроведена комерцијалним софтвером COMSOL Multiphysics, а модел се састоји од 23285 електрично мала коцкаста коначна елемента. Нумерички домен је затворен PML-ом, а модел има 422233 непознатих.

У овом одељку представљени су ефикасни и прецизни пуноталасни тродимензиони нумерички модели линеарних и нелинеарних прекривки (видети фусноту 3) за смањење радарског попречног пресека заснованих на теорији трансформационе електромагнетике, по први пут приказани у [123] и [114]. Посматрају се два геометријска облика прекривки: сферна и коцкаста. Нумерички модели настали су хибридизацијом методе коначних елемената вишег реда којом се врши дискретизација неизотропног и континуално нехомогеног дела простора прекривке и методе момената вишег реда за нумеричко затварање домена методе коначних елемената и моделовање околног хомогеног, изотропног и бесконачног спољашњег дела проблема. Прекривка је моделована помоћу уопштених закривљених хексаедарских коначних елемената произвољног геометријског реда Лагранжовог типа. Ови елементи описани су једначином (3.14) и приказани су на слици 3.3. Геометријски редови ових коначних елемената означени су са K_u^e , K_v^e и K_w^e у изразу (3.14). Апроксимација непознатог електричног поља спроведена је помоћу роторски-конформних хијерархијских полиномских векторских функција базиса произвољног реда апроксимације поља унутар коначних елемената [45]. Развој поља по непознатим функцијама базиса приказан је у (3.45), а хијерархијске полиномске векторске функције базиса вишег реда описане су изразом (3.46) и пратећим изразом (3.47). Степени полиномске апроксимације непознатог поља у изразу (3.45) означени су са N_u^e , N_v^e и N_w^e . Просторна промена нехомогених тензора пермитивности и пермеабилности описана је просторним

Лагранжовим интерполационим полиномима произвољног реда апроксимације нехомогености [79]. Просторна промена тензора параметара средине описана је изразом (3.56), у коме су редови апроксимације нехомогености означени као M_u^e , M_v^e и M_w^e . Због овакве апроксимације нема потребе за дискретизацијом параметара континуално нехомогене средине прекривке. Самим тим нема потребе ни за заменом стварне просторне промене тензора параметара средине део по део хомогеном средином. Део по део хомогена апроксимација континуално нехомогених тензора средине је дискретизација која се најчешће сусреће у већини објављених радова у вези са прекривкама за смањење радарског попречног пресека. Пошто у методи коначних елемената која се користи у овој дисертацији коначни елементи могу бити и закривљени, за прецизно геометријско описивање нумеричког модела довољно је користити мали број коначних елемената, чак и у случају закривљених објеката и објеката нестандардних облика. На крају, пошто се користе функције базиса апроксимације непознатог поља вишег реда, нема потребе за дискретизацијом проблема геометријски малим коначним елементима ниског реда апроксимације поља, која би за последицу имала велики број непознатих коефицијената у нумеричком моделу. Коначни елементи могу бити електрично велики и испуњени неизотропним и континуално нехомогеним срединама.

Спољашње површи прекривке моделоване су помоћу уопштених закривљених четвороуглова произвољног геометријског реда, а за апроксимацију еквивалентних површинских електричних и магнетских струја у методи момената користе се дивергенцијски-конформне хијерархијске полиномске базисне функције произвољног реда [17].

У овом одељку је представљена и нова конформна коцкаста прекривка за смањење радарског попречног пресека добијена применом теорије трансформационе електромагнетике, као и њена ригорозна нумеричка пуноталасна верификација великодоменском FEM-МоМ методом вишег реда. Прекривка је конструисана помоћу теорије трансформационе електромагнетике и координатне трансформације сличне трансформацији у раду [113]. Нумеричка карактеризација коцкасте прекривке спроведена је применом FEM-МоМ методе и

приступа за анализу оваквих структура представљеног у [123] у коме се користе велики неизотропни континуално нехомогени уопштени хексаедарски коначни елементи. Конструкција ове коцкасте прекривке, са оштрим ивицама и рогљевима, и њена ригорозна тродимензиона нумеричка анализа по први пут су представљени у раду [114]. Будући да ће за евентуалне будуће примене, из практичних разлога, пожељније бити танке конформне прекривке на сложеним тродимензионим објектима, у оквиру овог одељка доминантно ћемо анализирати танке коцкасте прекривке. Перформансе коцкасте прекривке анализираће се и у блиској, и у далекој зони, за прекривке без губитака и са губицима (за различите тангенсе угла губитака), у широком опсегу учестаности. Показаћемо да је нумеричким моделом коцкасте прекривке са губицима и без губитака постигнуто значајно смањење (пет до 10 редова величине) моностатичког радарског попречног пресека коцкастог РЕС расејача у читавом анализираном опсегу учестаности. Такође, показаћемо да је једноставним нумеричким моделом са само 24 коначна елемента и применом великодоменске методе коначних елемената, постигнута велика ефикасност и тачност решења у поређењу са алтернативним пуноталасним нумеричким решењима добијеним комерцијалним софтверским пакетима. Показаћемо да је у том случају постигнуто смањење броја непознатих од око 30 пута. У ситуацијама када се користе танке конформне прекривке за облагање тродимензионих објеката сложених геометрија са ивицама и рогљевима, пуноталасна нумеричка анализа је неизбежна, пошто се овакви проблеми не могу третирати Мије теоријом расејања или било којом другом аналитичком методом. Према томе, као додатни циљ, испитаћемо способност и перформансе наше континуално нехомогене и неизотропне FEM-МоМ методе вишег реда у овом специфичном, нумерички захтевном случају анализе коцкасте прекривке. Згодно је приметити да се практично сви претходни резултати нумеричке пуноталасне карактеризације разних прекривки за смањење радарског попречног пресека заснивају на комерцијалном софтверском пакету COMSOL Multiphysics (на пример, у [93, 113]), који користи малодоменске хомогене коначне елементе ниског реда апроксимације непознатог поља. Надамо се да представљена коцкаста прекривка и њена нумеричка верификација могу бити од посебног значаја истраживачима који трагају за координатном трансформацијом неопходном

приликом конструкције конформне прекривке за смањење радарског попречног коцкастог расејача или расејача сличних сложенијих облика са оштрим ивицама и рогљевима. Такође, надамо се да ова студија може бити од посебног значаја приликом развоја конформних савршено прилагођених слојева (PML) заснованих на трансформационој електромагнетици. Овакви слојеви, као математички концепт, користе се за локално нумеричко затварање домена прорачуна отворених електромагнетских проблема анализираних методом коначних елемената. Студија може служити и као полазна основа приликом развоја одговарајуће прекривке поједностављених параметара средине, конструисане помоћу више хомогених и изотропних слојева, што би могло потенцијално обезбедити једноставнију експерименталну демонстрацију [97, 143]. Овакве, поједностављене прекривке могле би се анализирати на основу ефективне апроксимације средине (*effective medium approximation*) и као ефективно неизотропне средине (као у [97]).

У овом одељку представљени су нумерички модели прекривки за смањење радарског попречног пресека. Модели су засновани на великододенској методи коначних континуално нехомогених неизотропних и геометријски флексибилних елемената, вишег реда полиномске апроксимације електричног поља. Кроз нумеричке експерименте испитане су перформансе предложене нумеричке методе и њена могућност да ефикасно моделује изузетно комплексне средине прекривки за смањење радарског попречног пресека. Увидом у нумеричке резултате додатно је продубљено разумевање ефекта смањења радарског попречног пресека оваквих прекривки. Представљена је и нова врста коцкасте прекривке, посебно изазовне за нумеричко моделовање, која је такође нумерички анализирана. На овај начин отворен је пут за даљу нумеричку анализу комплексних структура добијених применом трансформационе електромагнетике, за које је реално очекивати да ће у будућности бити све присутније приликом пројектовања разних ЕМ система.

6.4.1. Сферна прекривка за смањење радарског попречног пресека

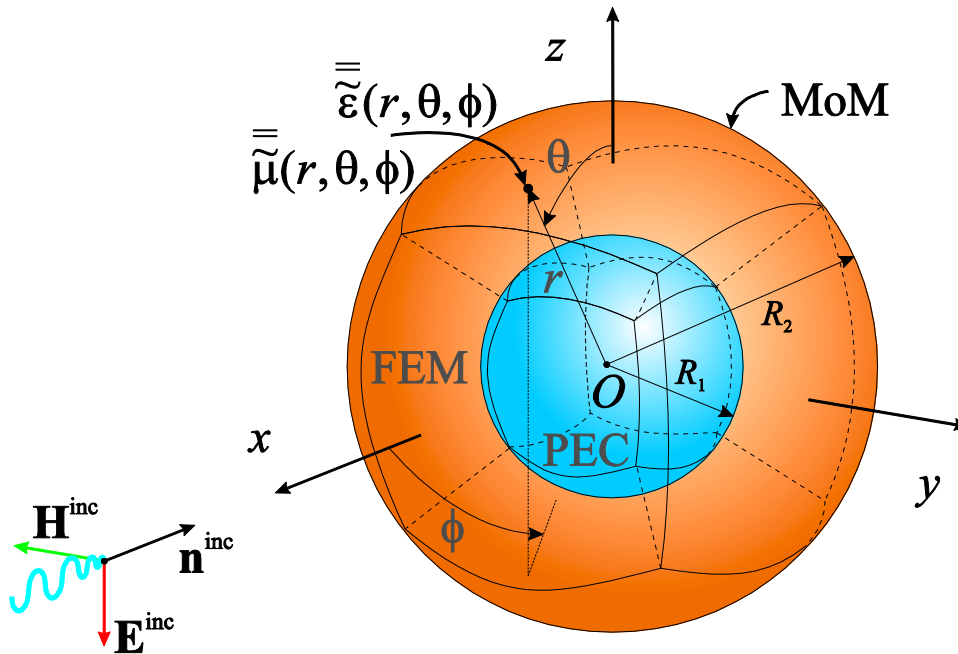
Посматрајмо сферни расејач пречника $d = 2R_1$ који се налази у ваздуху, као што је приказано на слици 6.7. Сферни расејач начињен је од савршеног

електричног проводника, а површ расејача геометријски је моделована помоћу шест закривљених четвороуглова четвртог геометријског реда ($K_u = K_v = 4$). Сферни PEC расејач обложен је сферним слојем, тј. сферном љуском унутрашњег полупречника R_1 и спољашњег полупречника R_2 . Сферна љуска представља прекривку за смањење радарског попречног пресека, тензора параметара средине $\bar{\bar{\epsilon}}$ и $\bar{\bar{\mu}}$, описаних у (4.82) у случају линеарне прекривке, а тензора параметара средине описаних аналогним изразима добијених полазећи од просторних трансформација (4.106) и (4.107) у случају нелинеарне прекривке (видети фусноту 3). Анализираћемо расејање, тј. далеко поље PEC расејача обложеног прекривком за смањење радарског попречног пресека. На графицима ћемо приказати моностатички радарски попречни пресек (*monostatic radar cross-section, monostatic RCS*) и бистатички радарски попречни пресек (*bistatic radar cross-section, bistatic RCS*). Расејач је побуђен линијски поларизованим униформним равним прогресивним таласом који наилази из правца $\theta_{inc} = 90^\circ$, $\phi_{inc} = 0^\circ$. Инцидентно електрично поље има само θ компоненту, као што је назначено на слици 6.7. Прекривка је моделована помоћу само шест великих закривљених хексаедарских коначних елемената, у облику јастучића који налажу на PEC расејач са једне стране и на површ $r = R_2$ са друге стране, четвртог геометријског реда ($K_u = K_v = K_w = 4$), као што је приказано на слици 6.7. Коначни елементи нумерички су затворени PEC граничним условом на унутрашњој површи прекривке ($r = R_1$) и великим конформним МоМ четвороугловима четвртог геометријског реда, са еквивалентним површинским електричним и магнетским струјама на спољашњој површи прекривке ($r = R_2$). Континуална промена тензора пермитивности и пермеабилности нехомогене прекривке, описана у (4.82), моделована је Лагранжовим интерполационим полиномима четвртог реда апроксимације нехомогености [$M_u = M_v = M_w = 4$ у изразу (3.56)], при чему се интерполациони чворови за апроксимацију нехомогености поклапају са интерполационим чворовима геометријске апроксимације. У оквиру методе коначних елемената, у овој дисертацији, тензори параметара средине имплементирани су као Декартови. Полазећи од (4.82), лако

се могу одредити одговарајући Декартови тензори параметара средине (видети прилог). Тако су, на пример, елементи прве врсте и прве колоне Декартовог тензора пермитивности и пермеабилности (xx -компонента), изведени полазећи од одговарајућег сферног тензора пермитивности и пермеабилности у (4.82), дати изразима

$$\tilde{\varepsilon}^{xx} = \frac{x^2 \tilde{\varepsilon}^{rr} + (y^2 + z^2) \tilde{\varepsilon}^{00}}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \tilde{\mu}^{xx} = \frac{x^2 \tilde{\mu}^{rr} + (y^2 + z^2) \tilde{\mu}^{00}}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (6.6)$$

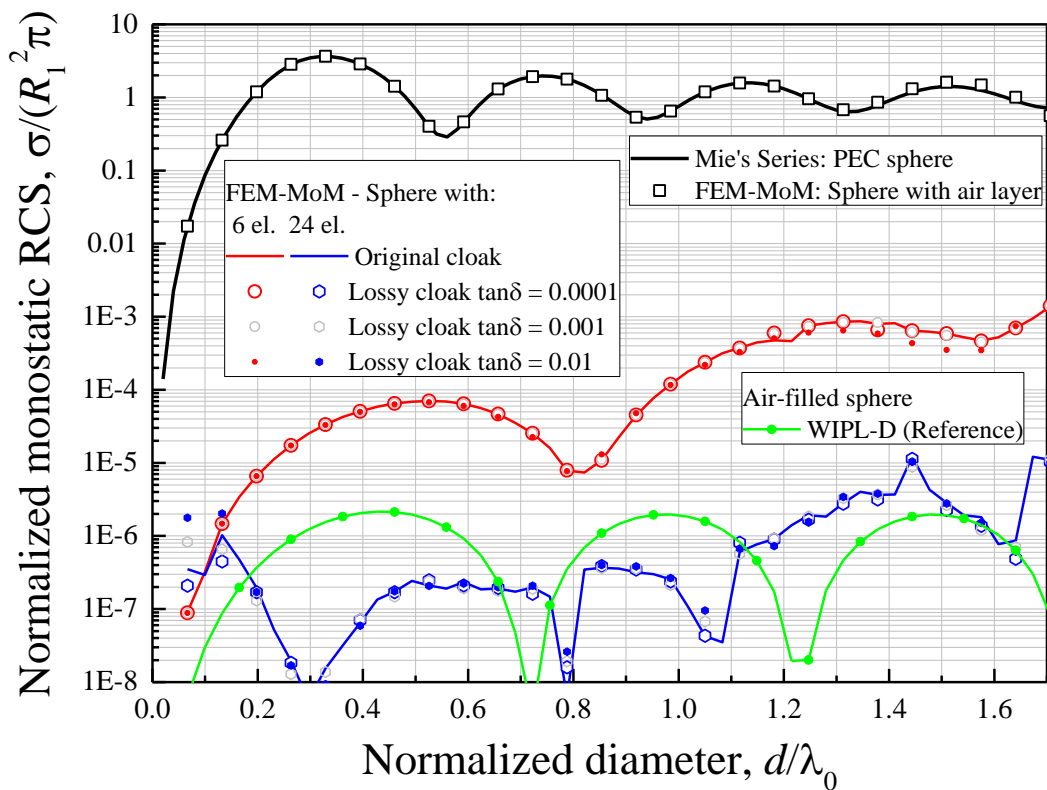
а аналогно се могу добити и изрази за остале елементе Декартовог тензора пермитивности и пермеабилности прекривке. Редови апроксимације непознатог поља за све хексаедарске коначне елементе су $N_u = N_v = N_w = 6$, што резултује у 3900 непознатих коефицијената расподеле поља у методи коначних елемената. Редови апроксимације расподеле непознатих површинских струја за све четвороуглове су $N_u = N_v = 5$, што резултује у само 600 непознатих коефицијената расподеле струје у методи момената. Трајање извршавања симулације је приближно 150 s по једној учестаности на скромном Windows 7 персоналном рачунару са Intel® Core™ i5 CPU 760 процесором радног такта 2,8 GHz и са 8 GB оперативне меморије (RAM-a). Приметити да је оваквим нумеричким моделом постигнуто смањење укупног броја непознатих за два реда величине у поређењу са нумеричком анализом спроведеном у [144], за коју нису дата времена извршавања симулација.



Слика 6.7. FEM-MoM модел сферног PEC расејача са сферном прекривком за смањење радарског попречног пресека. Прекривка је моделована помоћу 6 великих закривљених континуално нехомогених и неизотропних коначних елемената са полиномском апроксимацијом поља вишег реда.

За почетак, поставимо да је $R_2/R_1 = 1,1$ у једначини (4.81) за линеарну прекривку и прикажимо на слици 6.8 нормализовани моностатички радарски попречни пресек $\sigma/(R_1^2\pi)$ сферног PEC расејача обложеног сферном прекривком. Моностатички радарски попречни пресек добијен је помоћу ригорозне пуноталасне нумеричке FEM-MoM методе у функцији нормализованог пречника PEC расејача d/λ_0 (при чему је λ_0 таласна дужина у слободном простору на радној учестаности). Приказани су резултати за линеарну прекривку без губитака и са губицима, за опсег тангенса угла губитака од $\tan\delta = 0,0001$ до $\tan\delta = 0,01$. Приказани резултати добијени су за оригинални нумерички модел са 6 коначних елемената, приказан на слици 6.7, као и за геометријски h -рафиниран модел који се састоји од 24 коначна елемента. Приликом конструкције модела са 24 коначна елемента, кренуло се од оригиналног модела са 6 коначних елемената у коме је сваки коначни елемент симетрично подељен на 2×2 коначна елемента у трансверзалном правцу. Сваки оригинални јастучић уситњен је у четири идентична јастучића. Као додатна провера стабилности нумеричког модела, приказани су и резултати за PEC расејач без прекривке, тј. за нумерички модел са

б коначних елемената у коме су континуално нехомогени и неизотропни коначни елементи, који чине прекривку за смањење радарског попречног пресека, замењени ваздушним елементима, уз задржавање свих осталих параметара нумеричког модела. У „ваздушном“ моделу задржани су степени апроксимације поља, геометрије и нехомогености из модела са прекривком за смањење радарског попречног пресека. Резултати за расејач са „ваздушном“ прекривком пореде се са аналитичким решењима за моностатички радарски попречни пресек усамљене РЕС сфере пречника $d = 2R_1$. Као што се може видети са слике 6.8, постигнуто је одлично поклапање ова два скупа решења. Додатно, на слици 6.8, приказани су и у потпуности рафинирани по геометрији и полиномској апроксимацији струја, тј. *hp*-рафиниран, резултати добијени методом момената за хомогену ваздушну сферу, пречника $d = 2R_1$. Ови резултати добијени су једним од водећих комерцијалних софтвера за пуноталасну ЕМ анализу – WIPL-D Pro [145], а користе се као референца за поређење. Овим поређењем сагледава се ред величине радарског попречног пресека расејања од „невидљивог“ објекта, исте геометрије као и оригинални РЕС расејач, сачињеног од ваздуха, који се може добити нумеричком анализом.



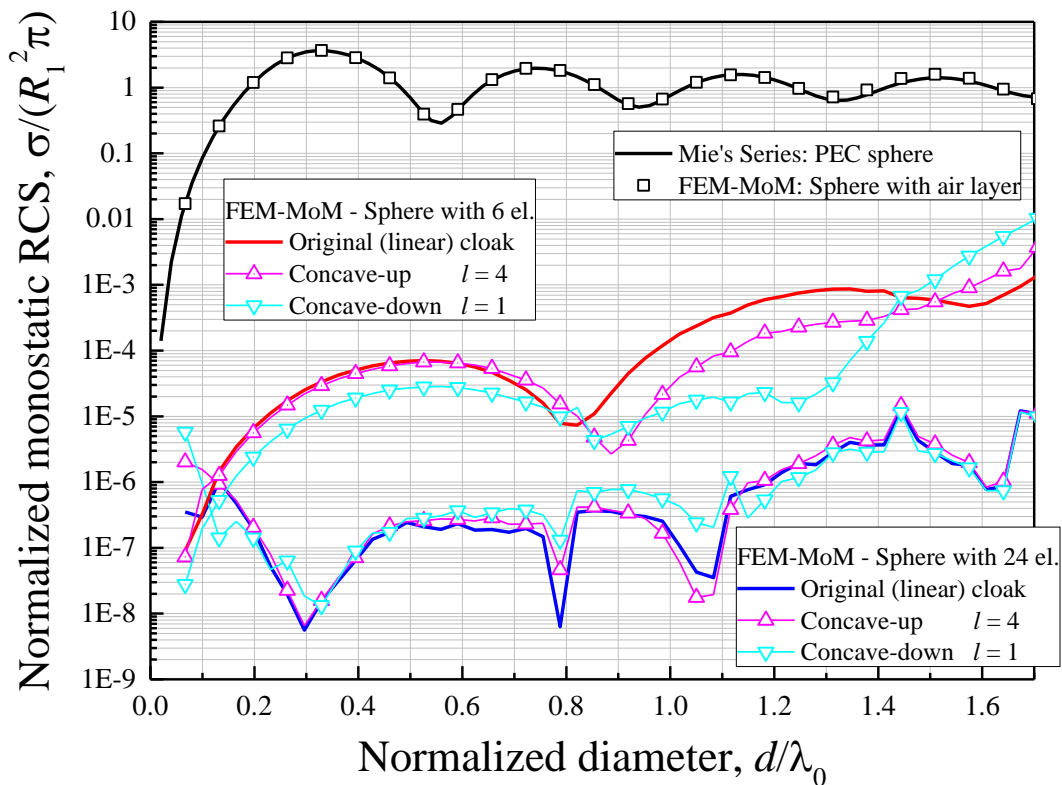
Слика 6.8. Нормализовани моностатички радарски попречни пресек PEC сфере са линеарном прекривком за смањење радарског попречног пресека са губицима и без губитака ($R_2/R_1 = 1,1$ на слици 6.7) и PEC сфере без прекривке, добијен ригорозном пуноталасном FEM-MoM нумеричком методом у функцији нормализованог пречника PEC расејача d/λ_0 (λ_0 представља таласну дужину у слободном простору на радној учестаности). PEC расејач без прекривке конструисан је полазећи од нумеричког модела прекривке са 6 коначних елемената, заменом коначних елемената прекривке ваздушним коначним елементима, уз задржавање свих осталих параметара симулације, а резултати су упоређени са аналитичким решењем у форми Мије реда. Такође, на слици је приказан и нормализовани моностатички радарски попречни пресек ваздушне сфере добијен помоћу WIPL-D софтвера[145], као референца за ред величине нумеричког решења за расејање од „невидљивог“ ваздушног објекта истог геометријског облика и димензија као и оригинални PEC расејач.

На основу нумеричких резултата са слике 6.8 може се уочити одлична конвергенција нумеричке методе и значајно смањење радарског попречног пресека сферног PEC расејача са прекривком за смањење радарског попречног пресека. У читавом опсегу учестаности постигнуто је смањење радарског попречног пресека за три до пет редова величине за модел са 6 коначних елемената и пет до седам редова величине за модел са 24 коначна елемента, иако је у питању врло танка прекривка чија је дебљина само једна десетина

полупречника РЕС расејача. Прекривка за смањење радарског попречног пресека, теоријски, у потпуности потискује расејано поље на свим учестаностима и у свим правцима. Са слике 6.8 можемо да приметимо да и релативно груб модел са 24 коначна елемента резултује расејањем уназад толико ниским да је у потпуности упоредиво на најбољом могућом нумеричком апроксимацијом расејања од „невидљивог“ ваздушног расејача истог облика и димензија као и оригинални, добијеном помоћу WIPL-D софтвера и чисте методе момената. Такође, пошто будуће потенцијалне апликације прекривке за смањење радарског пресека могу захтевати танке конформне прекривке на тродимензионим расејачима сложених облика, танке прекривке као и њихова анализа и дизајн, засновани на нумеричким симулацијама уместо аналитичким и апроксимативним методама, могу бити од посебног значаја у будућности. Пример танке прекривке за смањење радарског попречног пресека засноване на техници поништавања расејаног поља (*scattering cancelation technique*) приказан је у [146]. Такође, са слике 6.8 видимо да додавање губитака у прекривку практично не утиче на нумеричко решење за расејање уназад, што је у складу са теоријским предвиђањима [93, 106].

Као следећи нумерички пример анализирамо танку ($R_2/R_1 = 1,1$ као и у претходном примеру) нелинеарну прекривку, засновану на конкавној нагоре (4.106) и конкавној надоле (4.107) нелинеарној координатној трансформацији, за степене нелинеарности $l=4$ и $l=1$, респективно. Осим различитих тензора параметара средине, који се са повећањем степена нелинеарности трансформације l брже просторно мењају, нумерички модели не разликују се у односу на претходне нумеричке моделе за линеарну прекривку, за коју су резултати приказани на слици 6.8. Користе се исте геометријске апроксимације, исти редови апроксимације поља и површинских струја и исти редови полиномске апроксимације нехомогености. На основу резултата са слике 6.9 за нормализовани моностатички радарски попречни пресек РЕС расејача са танком нелинеарном прекривком, закључујемо да се нумеричка решења за нелинеарну прекривку добијена FEM-МоМ методом вишег реда веома добро поклапају са решењима за линеарну прекривку. Самим тим, закључујемо да предложена нумеричка метода подједнако добро може да моделује и континуално нехомогене средине добијене

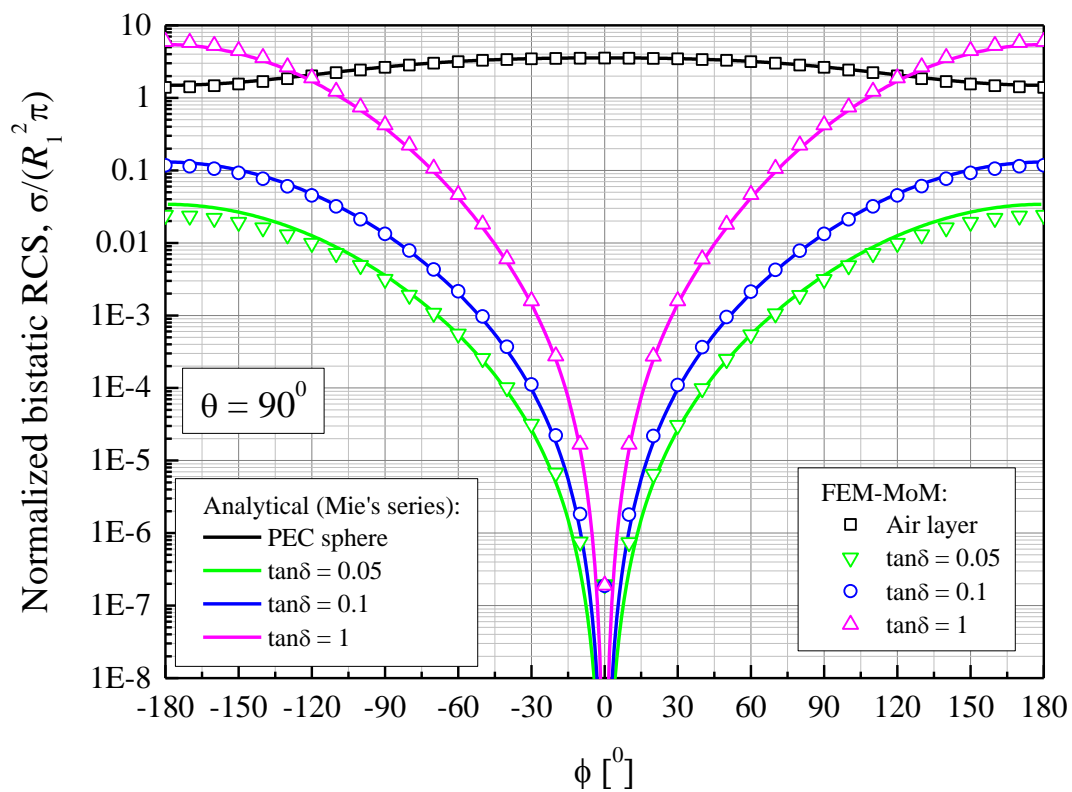
теоријом трансформационе електромагнетике, и у случају нелинеарних координатних трансформација, без потребе за рафинирањем геометријске поделе или увођења део по део константне апроксимације стварне просторне промене тензора параметара средине. У случају да је нелинеарност просторне трансформације израженија, тј. да је већи степен нелинеарности l , што за последицу има бржу просторну промену тензора параметара средине, може се користити полиномска апроксимација нехомогености реда вишег од четвртог у изразу (3.56). На тај начин, вишим редовима Лагранжових полинома може се постићи боља апроксимација брзе континуалне промене параметара средине по запремини великих коначних елемената. Редови апроксимације нехомогености четвртог реда [$M_u = M_v = M_w = 4$ у (3.56)] су се показали довољним за приказане нумеричке примере.



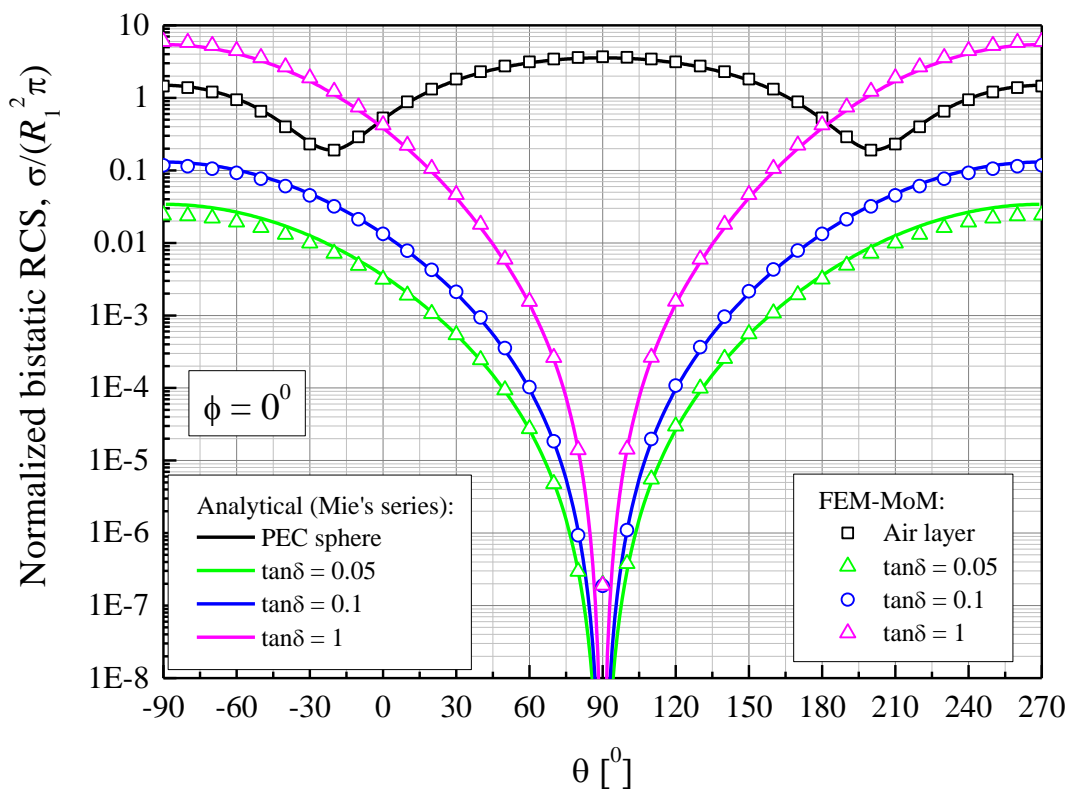
Слика 6.9. Нормализовани моностатички радарски попречни пресек ПЕС сферног расејача са нелинеарном прекривком, без губитака, односа $R_2/R_1 = 1,1$ на слици 6.7 прорачунат помоћу FEM-MoM методе вишег реда у функцији нормализованог пречника расејача $d = 2R_1$. Посматра се нелинеарна прекривка конкавна нагоре и конкавна надолу, са два степена нелинеарности просторне трансформације, $l = 4$ у једначини (4.106) и $l = 1$ у једначини (4.107), респективно. Резултати за ПЕС расејач са ваздушном и линеарном прекривком, поновљени резултати са слике 6.8, приказани су ради једноставнијег поређења.

Као последњи нумерички пример у овом одељку, посматрајмо дебљу [$R_2/R_1 = 1,5$ у једначини (4.81)] линеарну прекривку. На сликама 6.10 и 6.11 приказан је нормализовани бистатички радарски попречни пресек ПЕС сферног расејача, нормализованог пречника $d/\lambda_0 = 0,3$, са и без прекривке са губицима за смањење радарског попречног пресека, у два карактеристична пресека, $\theta = 90^\circ$ и $\phi = 0^\circ$, респективно. За симулације је коришћен једноставнији модел са 6 коначних елемената приказан на слици 6.7. За тангенс угла губитака прекривке између $\tan \delta = 0,05$ и $\tan \delta = 1$, нумерички резултати упоређени су са егзактним аналитичким решењима добијеним на основу резултата из [106]. Велико смањење радарског попречног пресека σ , од три до седам редова величине, постигнуто је

прекривком, а поклапање аналитичких и нумеричких решења је одлично за све правце расејања осим у околини правца који одговара расејању уназад, тј. моностатичком радарском попречном пресеку. Тај правац одговара средини графика на обе слике, а теоријски у том правцу, и у случају прекривке са губицима, нема расејаног поља, тј. $\sigma \rightarrow 0$. У том правцу сва нумеричка решења на сликама 6.10 и 6.11 су готово истог нивоа, без обзира на ниво губитака, и представљају најнижи ниво радарског попречног пресека који се може постићи коришћењем описане нумеричке методе са рачунарском представом реалних бројева у једнострукој тачности и описаног нумеричког модела са свим својим апроксимацијама и ограничењима. Такође, може се приметити да је у овом случају моностатички радарски попречни пресек два реда величине нижи у поређењу са резултатима за танку прекривку ($R_2/R_1 = 1,1$) на истој учестаности ($d/\lambda_0 = 0,3$) када се користи исти једноставнији FEM-МоМ модел са 6 коначних елемената. Наиме, нормализовани моностатички пресек је $\sigma/(R_1^2\pi) \approx 2 \times 10^{-7}$ када се користи дебља прекривка, а $\sigma/(R_1^2\pi) \approx 3,5 \times 10^{-5}$ када се користи тања прекривка. Очигледно, дебља прекривка је мање захтевна за нумеричку анализу, што се може приписати споријој промени тензора параметара средине, а самим тим и споријој просторној промени електромагнетског поља по прекривци.



Слика 6.10. Нормализовани бистатички радарски попречни пресек, у равни $\theta = 90^\circ$, сферног PEC расејача са слике 6.7 са и без сферне прекривке са губицима за смањење радарског попречног пресека. За прекривку је $R_2/R_1 = 1,5$ а нормализовани пречник PEC расејача је $d/\lambda_0 = 0,3$.

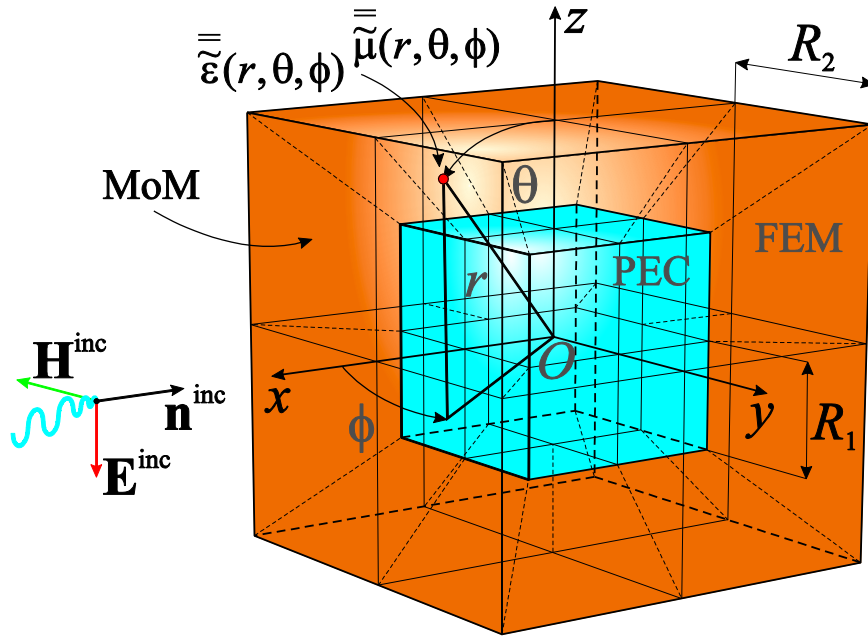


Слика 6.11. Нормализовани бистатички радарски попречни пресек, у равни $\phi = 0^\circ$, сферног PEC расејача са слике 6.7 са и без сферне прекривке са губицима за смањење радарског попречног пресека. За прекривку је $R_2/R_1 = 1,5$ а нормализовани пречник PEC расејача је $d/\lambda_0 = 0,3$.

6.4.2. Коцкаста прекривка за смањење радарског попречног пресека

Посматрајмо коцкасти савршено проводан расејач дужине стране $d = 2R_1$ који се налази у ваздуху. Расејач је обасјан линијски поларизованим униформним равним електромагнетским таласом који наилази из правца $\theta_{inc} = 90^\circ$, $\phi_{inc} = 0^\circ$. Инцидентно електрично поље има само θ компоненту, као што је приказано на слици 6.12. Расејач је обложен конформном прекривком за смањење радарског попречног пресека. Прекривка је облика коцкасте љуске, дужине унутрашње стране $2R_1$ и дужине спољашње стране $2R_2$. Тензори параметара средине прекривке за смањење радарског попречног пресека приказани су у (4.110). Коцкаста прекривка нумерички је моделована помоћу 24 велика хексаедарска коначна елемента. Користе се по четири идентична коначна елемента за сваку од

страница PEC расејача. Елементи су првог геометријског реда ($K_u = K_v = K_w = 1$), нумерички су затворених PEC граничним условом на унутрашњој површи и помоћу 24 велика конформна МоМ четвороугла првог геометријског реда ($K_u = K_v = 1$) на спољашњој површи. Површи МоМ четвороуглова еквивалентним површинским електричним и магнетским струјама представљају ригорозан граничан услов за затварање FEM домена прорачуна. Просторна промена тензора параметара средине унутар хексаедарских елемената апроксимирана је Лагранжовим интерполационим полиномима четвртог реда ($M_u = M_v = M_w = 4$). Редови полиномске апроксимације расподеле електричног поља у методи коначних елемената су $N_u = N_v = N_w = 6$ за све хексаедарске елементе, што резултује у само 15564 FEM непознатих коефицијената расподеле електричног поља. Редови полиномске апроксимације непознатих еквивалентних површинских електричних и магнетских струја у методи момената су $N_u = N_v = 5$ за све четвороуглове, што резултује у само 2400 МоМ непознатих коефицијената расподеле површинских струја. Укупно време извршавања симулације на скромном Windows 7 персоналном рачунару са Intel Core i5-760 процесором радног такта 2,8 GHz и са 8 GB оперативне меморије (RAM-а) је око 3 min на једној учестаности. Згодно је приметити да нумеричка анализа исте структуре помоћу COMSOL Multiphysics комерцијалног софтверског пакета захтева 82549 малих коначних тетраедарских елемената и 536968 FEM непознатих, као и да резултати нису успели да исконвергирају за учестаности за које је $d/\lambda_0 > 0,66$ ($d = 2R_1$ је дужина странице PEC расејача а λ_0 је таласна дужина у слободном простору на радној учестаности).



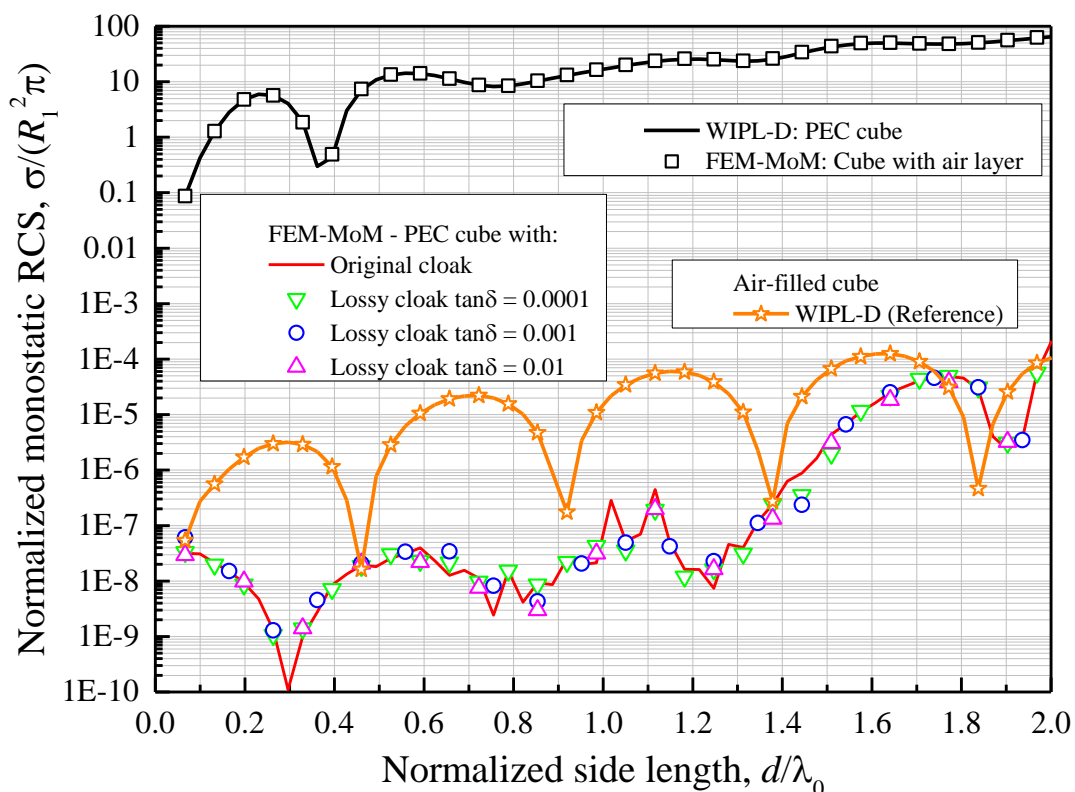
Слика 6.12. FEM-MoM модел коцкастог PEC расејача са прекривком за смањење радарског попречног пресека у облику коцкасте љуске. Прекривка је моделована помоћу 24 велика континуално нехомогених и неизотропних коначна елемената са полиномском апроксимацијом поља вишег реда.

За почетак, сматрамо да је прекривка танка, тј. да је у једначини (4.108) $R_2/R_1 = 1,1$. На слици 6.13 приказан је нормализовани моностатички радарски попречни пресек PEC коцкастог расејача обложеног конформном прекривком за смањење радарског попречног пресека. Нормализације је извршена у односу на $R_1^2\pi$, а резултати су приказани у функцији нормализоване дужине странице расејача d/λ_0 . Резултати су добијени ригорозном пуноталасном хибридном нумеричком FEM-MoM методом. Приказани су резултати за прекривку без губитака, као и резултати за прекривку са губицима за тангенс угла губитака између $\tan\delta = 0,0001$ и $\tan\delta = 0,01$. Прекривка је моделована помоћу 24 коначна елемента, као што је приказано на слици 6.12. Како бисмо додатно испитали стабилност нумеричке методе, на слици 6.13 приказани су и резултати за коцкасти PEC расејач, без прекривке за смањење радарског попречног пресека. Тада су континуално нехомогени и неизотропни коначни елементи, који чине прекривку, замењени са ваздушним коначним елементима. Сви параметри симулације, степени полинома апроксимације поља и струја, степени геометријске апроксимације и степени полиномске апроксимације нехомогености, исти су као и за нумерички модел PEC расејача са прекривком за смањење радарског попречног

пресека која се састоји од 24 континуално нехомогена и неизотропна елемента. Резултати за коцкасти PEC расејач са „ваздушним“ јастучићима упоређени су са нумеричким резултатима добијеним помоћу методе момената коришћењем комерцијалног софтверског пакета WIPL-D [145]. Као што се може видети са слике 6.13, постигнуто је одлично поклапање ових резултата. Као додатни резултат за поређење, на слици 6.13 приказани су и у потпуности *hp*-рафинирани WIPL-D резултати за расејање од усамљене ваздушне коцке дужине странице $d = 2R_1$. Ови резултати требало би да нам дају јасан увид у ред величине за моностатички радарски попречни пресек који се може добити нумеричком методом једним од светски водећих софтверских пакета за нумеричку тродимензиону анализу, за расејање од ваздушног, теоријски невидљивог, расејача исте геометрије као и оригинални PEC расејач.

На основу нумеричких резултата са слике 6.13 може се уочити значајно смањење моностатичког радарског попречног пресека PEC расејача са прекривком, у односу на исти расејач без прекривке. Постигнуто је смањење радарског попречног пресека за 5 до 10 редова величине, у читавом опсегу учестаности. Имајући у виду да је прекривка за смањење радарског попречног пресека теоријски идеална, тј. да у потпуности анулира расејано електромагнетско поље у свим правцима и на свим учестаностима, закључујемо да приказани великодобенски нумерички модел са 24 коначна елемента резултује расејањем толико ниског нивоа, да су резултати упоредиви са најбољим нумеричким резултатима за расејање од невидљивог ваздушног расејача исте геометрије као и оригинални PEC расејач, добијеног помоћу WIPL-D софтвера и методе момената. Може се приметити да су нумерички резултати за далеко поље коцкастог PEC расејача са конформном прекривком за смањење радарског попречног пресека, слични или бољи у односу на одговарајуће резултате за линеарну сферну прекривку из рада [123] и одељка 6.4.1. Веће потискивања расејаног поља коцкастом прекривком може се приписати чињеници да је геометријски модел егзактан у случају расејача са коцкастом прекривком, док је он приближан, апроксимиран Лагранжовим интерполационим полиномима четвртог реда, у случају расејача са сферном прекривком. На крају, закључујемо да додавање

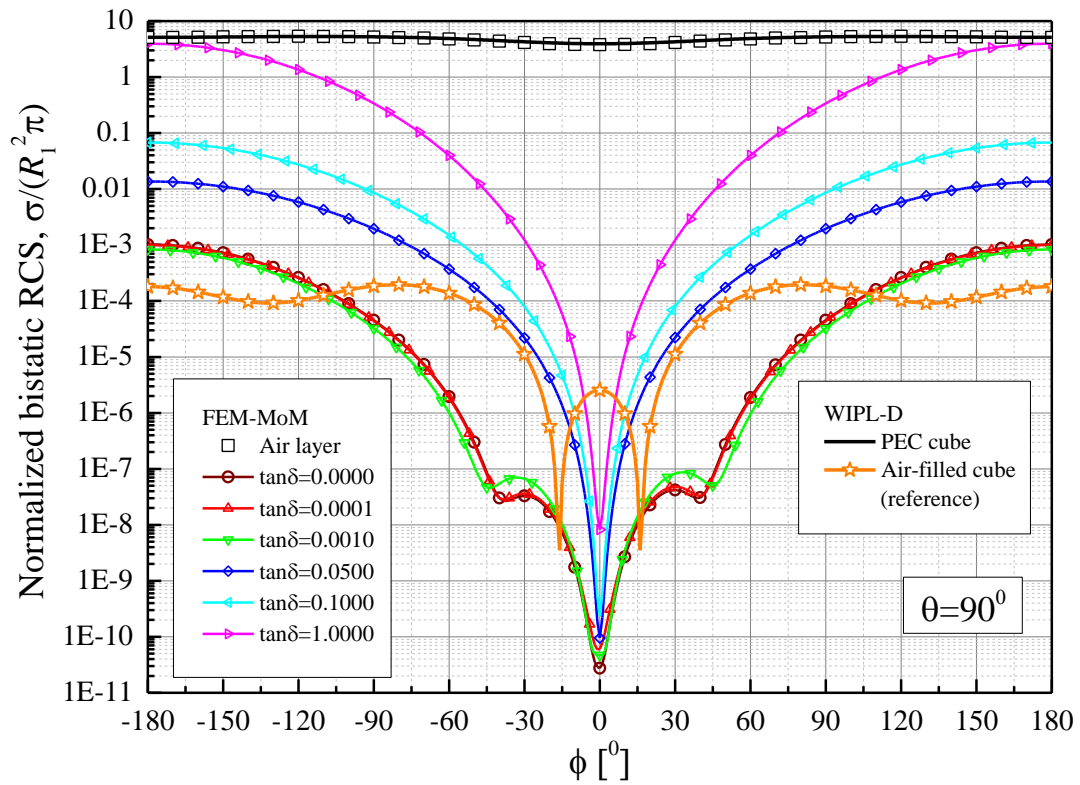
губитака не деградира перформансе коцкасте прекривке, што је у складу са закључцима из [93] и [106].



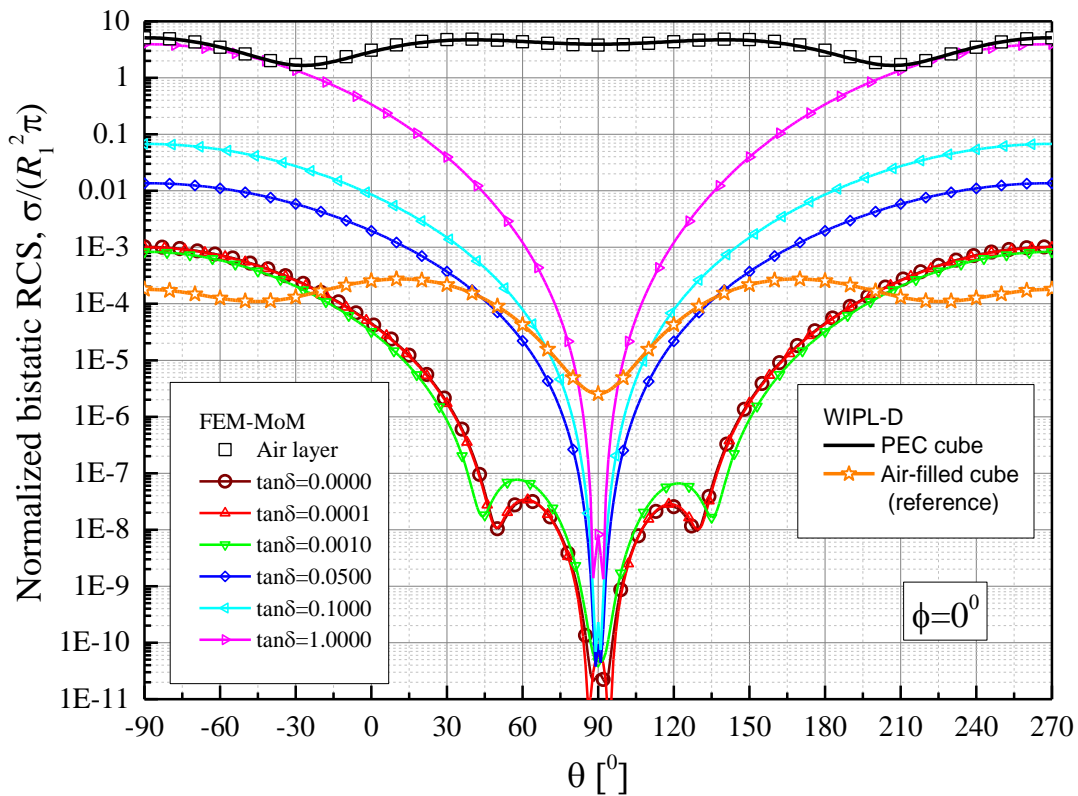
Слика 6.13. Нормализовани моностатички радарски попречни пресек коцкастог PEC расејача са прекривком за смањење радарског попречног пресека са слике 6.12 ($R_2/R_1 = 1,1$). Приказани су резултати за прекривку без губитака и прекривку са губицима, као и резултати за PEC расејач са ваздушном прекривком, добијени пуноталасном ригорозном FEM-MoM нумеричком анализом вишег реда. Резултати су приказани у функцији нормализоване дужине странице расејача d/λ_0 (λ_0 представља таласну дужину у слободном простору на радној учестаности). Нумерички FEM-MoM резултати за коцкасти PEC расејач са ваздушном прекривком упоређени су са WIPL-D решењима за PEC расејач. WIPL-D решење за ваздушни коцкасти расејач је такође приказано као референца за најбоље нумеричко решење нултог расејања од невидљивог ваздушног расејача исте геометрије као и оригинални PEC расејач.

За исти нумерички модел и инцидентно поље приказано на слици 6.12, на сликама 6.14 и 6.15, у две карактеристичне равни, $\theta = 90^\circ$ и $\phi = 0^\circ$, респективно, приказани су нумерички резултати за нормализовани бистатички радарски попречни пресек PEC расејача са прекривком за смањење радарског попречног пресека и PEC расејача са ваздушном прекривком. Приказани су резултати за прекривку са губицима и без губитака, као и референтни (WIPL-D) резултати за

PEC расејач и ваздушни расејач исте геометрије као и оригинални PEC расејач. За све резултате нормализована дужина странице PEC расејача је $d/\lambda_0 = 0,3$. Са слика закључујемо да је прекривком постигнуто значајно смањење радарског попречног пресека у односу на расејач без прекривке. Постигнуто је смањење радарског попречног пресека за четири до 10 редова величине. Видимо и да је деградација перформанси прекривке постепена са повећањем губитака, поготову у правцу унапред, за $|\phi| = 180^\circ$ на слици 6.14 и за $\theta = -90^\circ$ и $\theta = 270^\circ$ на слици 6.15, што је у складу са закључцима из [93] и [106]. Резултати су конзистентни са резултатима из [123] и резултатима из одељка 6.4.1.



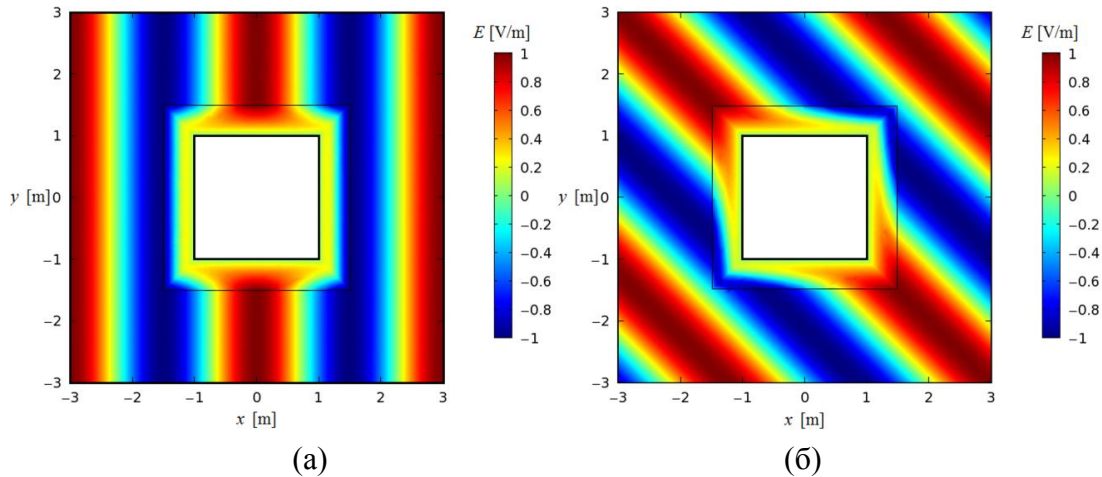
Слика 6.14. Нормализовани бистатички радарски попречни пресек, у равни $\theta = 90^\circ$, коцкастог PEC расејача са слике 6.12 са прекривком и без прекривке за смањење радарског попречног пресека ($R_2/R_1 = 1,1$, $d/\lambda_0 = 0,3$ и $d = 2R_1$). Прекривка је без губитака ($\tan \delta = 0$) и са губицима ($0,0001 \leq \tan \delta \leq 1$). Резултати су добијени помоћу FEM-MoM методе вишег реда. Приказани су и референтни WIPL-D резултати за усамљени PEC коцкасти расејач и за расејање од ваздушне коцке, као што је објашњено у опису слике 6.13.



Слика 6.15. Нормализовани бистатички радарски попречни пресек, у равни $\phi = 0^\circ$, коцкастог PEC расејача са слике 6.12 са прекривком и без прекривке за смањење радарског попречног пресека ($R_2/R_1 = 1,1$, $d/\lambda_0 = 0,3$ и $d = 2R_1$). Прекривка је без губитака ($\tan\delta = 0$) и са губицима ($0,0001 \leq \tan\delta \leq 1$). Резултати су добијени помоћу FEM-MoM методе вишег реда. Приказани су и референтни WIPL-D резултати за усамљени PEC коцкасти расејач и за расејање од ваздушне коцке, као што је објашњено у опису слике 6.13.

Као последњи нумерички пример у овом одељку, на слици 6.16 приказани су резултати за блиско поље за исти PEC расејач као у претходним примерима, са нешто дебљом прекривком ($R_2/R_1 = 1,5$). Изабрана је дебља прекривка како би се блиско поље у равни $z = 0$ могло лепше приказати. Сви остали параметри нумеричког модела исти су као у претходним нумеричким примерима за танку прекривку. Нумерички резултати добијени FEM-MoM методом вишег реда и COMSOL Multiphysics софтверским пакетом, практично се не разликују у случају нормализоване дужине странице PEC расејача $d/\lambda_0 = 0,66$. Ово је уједно и најкраћа таласна дужина за коју COMSOL решења конвергирају. Пошто се FEM-MoM и COMSOL решења за блиско поље практично не разликују, на слици 6.16 приказан је само један скуп резултата. Резултати за блиско поље на слици 6.16, за

два карактеристична правца наиласка инцидентног таласа, јасно приказују трансформацију, тј. преусмеравање, електромагнетског поља прекривком за смањење радарског попречног пресека. На овај начин потврђен је механизам постизања електромагнетске невидљивости објеката унутар прекривке са ивицама и рогљевима, а резултати и закључци су у складу са теоријским разматрањем из одељка 4.4.1 и са слике 4.3.



Слика 6.16. Блиско поље у равни $z = 0$ PEC коцке са прекривком за смањење радарског попречног пресека са слике 6.12 ($R_2/R_1 = 1,5$ и $d/\lambda_0 = 0,66$). Побуда је униформни раван талас амплитуде $E_0 = 1 \text{ V/m}$, који наилази из правца
(а) $\theta_{\text{inc}} = 90^\circ$, $\phi_{\text{inc}} = 0^\circ$ и (б) $\theta_{\text{inc}} = 90^\circ$, $\phi_{\text{inc}} = 45^\circ$.

6.5. Неригорозни апсорпциони гранични услов другог реда

Приликом анализе отворених тродимензионих ЕМ проблема симетрични векторски АВС другог реда представља један од најчешће коришћених начина затварања домена методе коначних елемената. Оваквим апроксимативним граничним условом задржава се постојећа слабо попуњена структура симетричних матрица у методи коначних елемената, а додавање АВС резултује занемарљивим додатним нумеричким прорачунима, уз постизање задовољавајуће тачних резултата [119]. Поређења ради, иако су по својој природи егзактни, тј. инхерентно не уносе никакве грешке, гранични услови засновани на интегралним једначинама и површинској формулацији методе момената резултују попуњеним

матрицама система једначина. Такође, сложеност прорачуна граничних услова у методи момената није занемарљива у односу на прорачуне у методи коначних елемената. Са друге стране, у једном од чланова симетричног АВС другог реда потребно је прорачунати и дивергенцију тангенцијалне компоненте базисних функција по АВС површи. Да би овај члан могао да се ефикасно прорачуна, а касније и ефикасно интеграл по АВС површи, неопходно је да базисне функције буду дивергенцијски-конформне по АВС површи. Роторски-конформне базисне функције, које се стандардно користе у методи коначних елемената, не испуњавају ово својство. У литератури је спроведена студија случаја тачности симетричног неригорозног АВС, тј. АВС у коме се не намеће једнакост нормалних компоненти електричног поља на споју два коначна елемента и у коме се занемарује сингуларни члан на спојним ивицама [120]. Тада је закључено да неегзактан прорачун АВС члана са дивергенцијом резултује грешком сличног нивоа као и када се читав овај члан у потпуности изузме.

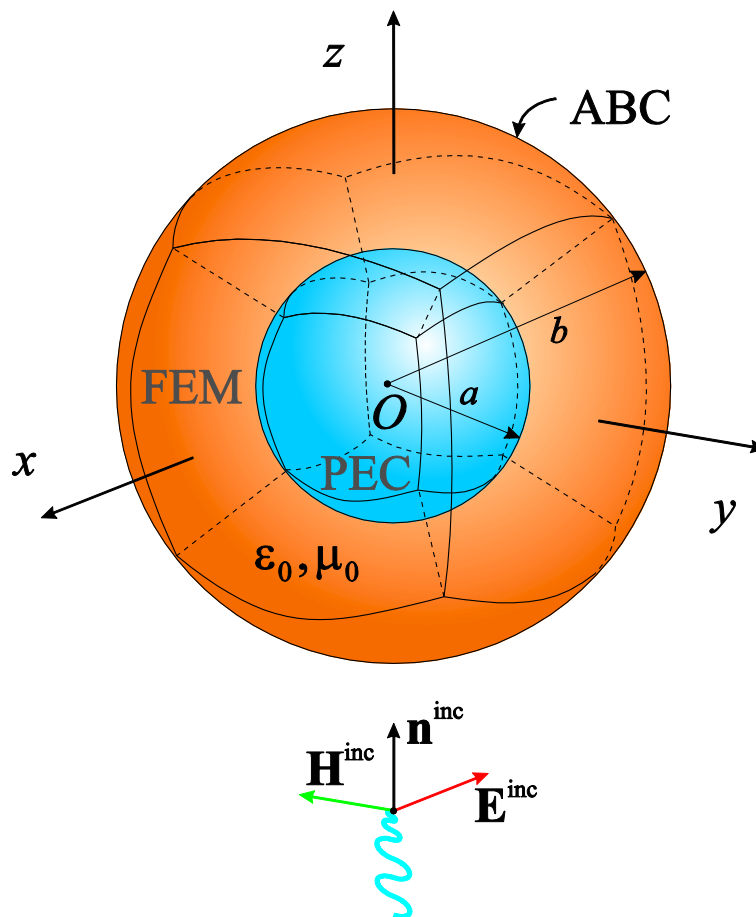
Промене базисних функција, тако да оне буду и дивергенцијски-конформне по АВС површи, захтевале би свеобухватне измене на постојећем FEM рачунарском коду. Метода којом се могу приближно прорачунати узастопни просторни изводи и над дивергенцијски-неконформним компонентама електричног поља, у стандардној FEM формулацији са роторски-конформним функцијама базиса, представљена је у раду [116]. Показано је да се оваквом методом задржава симетричност FEM матрица уз постизање задовољавајуће тачних резултата, а цена која се при томе плаћа је увођење нових скаларних променљивих и не тако мала интервенција на постојећем FEM рачунарском коду.

Са друге стране, у свим досадашњим испитивања тачности симетричног АВС другог реда, приказаним у отвореној литератури, користи се малодоменска FEM формулација – коначни елементи, чак и када су закривљени, електрично су мали дужине ивица реда величине $\lambda/10$ (λ представља таласну дужину у посматраној средини на радној учестаности). Ово резултује врло финим мешом по читавом домену прорачуна, а такође и по АВС површи. Иако су фини мешеви и мали елементи неопходни приликом моделовања реалних структура финих детаља, као и делова простора са брзом променом ЕМ поља, они нису неопходни на АВС површи, која је глатка површ сфере у слободном простору, довољно удаљена од

расејача, тако да просторна промена поља није претерано брза. Према томе, великодоменски начин моделовања закривљеним хексаедрима, чије ивице могу бити дужине и до 2λ , у комбинацији са полиномским функцијама базиса вишег реда, може се врло ефикасно искористити за моделовање АВС површи. Редови полиномске апроксимације поља могу бити полиноми чак десетог реда. Овакав начин моделовања, додатно, осим значајног смањења укупног броја непознатих, резултује и значајно мањим бројем ивица, тј. заједничких граница које деле коначни елементи по АВС површи. Ове ивице уједно представљају и локације на којима постоји дисконтинуитет нормалних, у односу на ивицу, компоненти електричног поља, тј. локације на којима је прорачун дивергенције критичан, па смањење њиховог броја може водити и ка значајном смањењу грешке анализе када се дивергенцијски члан АВС прорачунава неригорозно. У наставку овог одељка, кроз неколико нумеричких примера, испитане су перформансе симетричног неригорозног АВС другог реда у великодоменској методи коначних елемената вишег реда. Уочено је значајно одступање закључака у односу на оне из малодоменске методе коначних елемената. Нумерички резултати добијени FEM-АВС методом, представљеном у овој дисертацији, имају добру тачност и велику ефикасност.

6.5.1. Савршено проводан сферни расејач

Посматрајмо савршено проводан сферни расејач, приказан на слици 6.17. Полупречник сферног расејача је $a = 1\text{ m}$, а бесконачан простор који окружује расејач, тј. вакуум, нумерички је завршен на површи фиктивне сфере полупречника b . На тој површи примењен је неригорозни апсорпциони гранични услов другог реда (5.15). Шест закривљених хексаедарских коначних елемената користи се за моделовање простора између PEC расејача полупречника a , и АВС граничне површи полупречника b . Елементи су у облику ваздушних јастучића који са једне стране налажу на PEC расејач а са друге стране су завршени АВС граничним условом. Пермитивност им је ϵ_0 , пермеабилност је μ_0 и другог су геометријског реда ($K_u = K_v = K_w = K = 2$).



Слика 6.17. Великодоменски FEM-ABC модел сферног PEC расејача ($a = 1$ m, $b = 1,1$ m, $b = 1,5$ m или $b = 2$ m). Модел се састоји од шест коначних елемената, PEC граничног услова на површи $r = a$ и неригорозног апсорпционог граничног услова другог реда на површи $r = b$.

За почетак, посматрајмо линијски поларизован униформан раван инцидентни електромагнетски талас. Инцидентно електрично поље има само θ компоненту, $\mathbf{E}^{\text{inc}} = (1 + j0)\mathbf{i}_\theta$ V/m], и наилази из правца $\theta_{\text{inc}} = 180^\circ$, $\phi_{\text{inc}} = 0^\circ$, као на слици 6.17. Анализа је спроведена на учестаности $f = 299,792$ MHz којој одговара таласна дужина у слободном простору $\lambda_0 = 1$ m. Нумерички, FEM-ABC методом вишег реда, прорачунава се бистатички радарски попречни пресек. Бистатички радарски попречни пресек прорачунава се за 37 униформно распоређених праваца по θ координати, од $\theta_{\text{start}} = 0^\circ$ до $\theta_{\text{stop}} = 180^\circ$ са кораком од $\Delta\theta = 5^\circ$, и за 73 униформно распоређена праваца по ϕ координати, од $\phi_{\text{start}} = 0^\circ$ до $\phi_{\text{stop}} = 360^\circ$ са кораком од $\Delta\phi = 5^\circ$. Затворена површ за прорачун Кирхофовог интеграла је површ сфере полупречника $(a + b)/2$. Кирхофов интеграл се користи за прорачун далеког поља

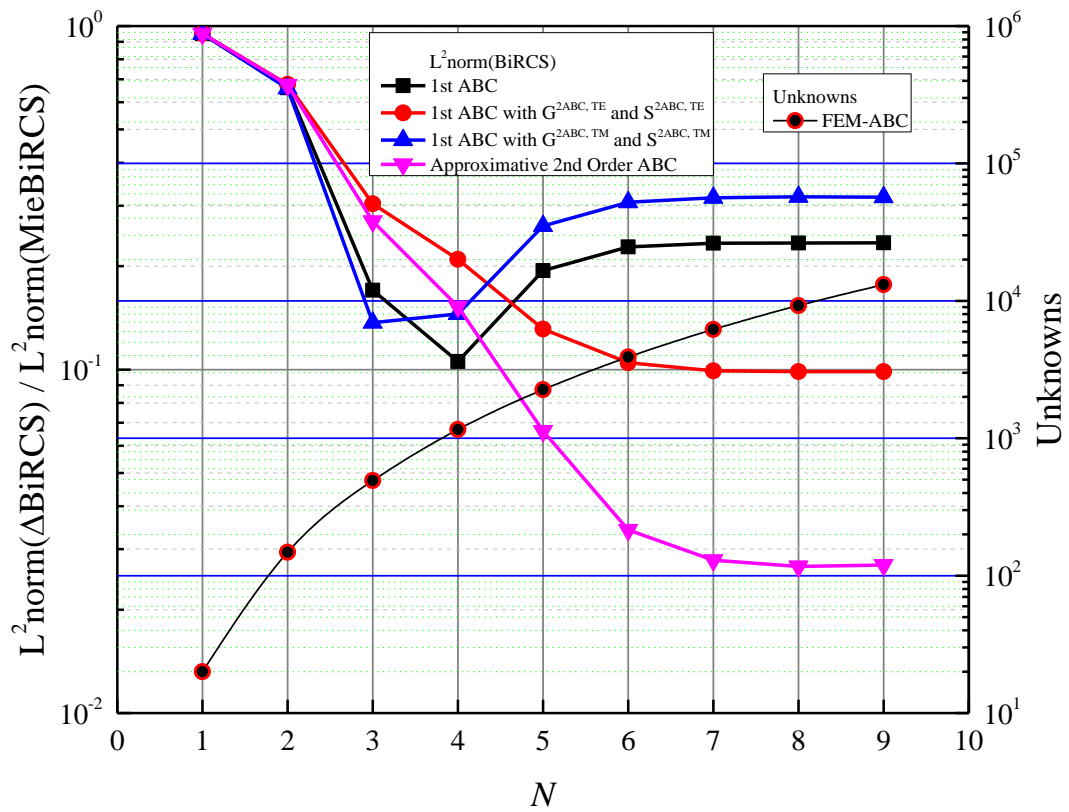
на основу познатог блиског поља, као што је приказано у (5.27). Површ за прорачун Кирхофовог интеграла једнако је удаљена од ABC површи и површи PEC расејача). Оваквим избором Кирхофове површи направљен је компромис између површи расејача и ABC површи. На површи расејача поље добро описује физички систем, због егзактног граничног услова, али му је промена релативно брза због нагле промене параметара средине. На ABC површи просторна промена поља доста је блажа, али поље не одговара у потпуности расподели поља у физичком систему. Пошто је ABC гранични услов апроксимативног типа, поље по ABC површи одговара стварној расподели поља само апроксимативно. Редови полиномске апроксимације непознатог електричног поља по запремини 6 ваздушних коначних елемената исти су у свим правцима ($N_u = N_v = N_w = N$), а редови нумеричке интеграције Гаус-Лежандровом формулом су $NGL_u = NGL_v = NGL_w = NGL = 13$, без обзира на ред апроксимације поља N .

На слици 6.18 приказана је нормализована L^2 норма грешке бистатичког радарског попречног пресека добијеног FEM-ABC методом вишег реда за $b = 1,1$ m. L^2 норма, која се још назива и Еуклидска норма, прорачуната је у односу на аналитичко решење добијено применом Мије редова. Дебљина слоја између расејача и ABC граничног услова је само $(b - a)/\lambda_0 = 0,1$. На слици 6.19 приказана је нормализована L^2 норма грешке бистатичког радарског попречног пресека када је $b = 1,5$ m, а дебљина слоја између расејача и ABC граничног услова тада је $(b - a)/\lambda_0 = 0,5$. Нормализација L^2 норме грешке нумерички прорачунатог бистатичког радарског попречног пресека врши се L^2 нормом аналитичког решења за одговарајући бистатички радарски попречни пресек као

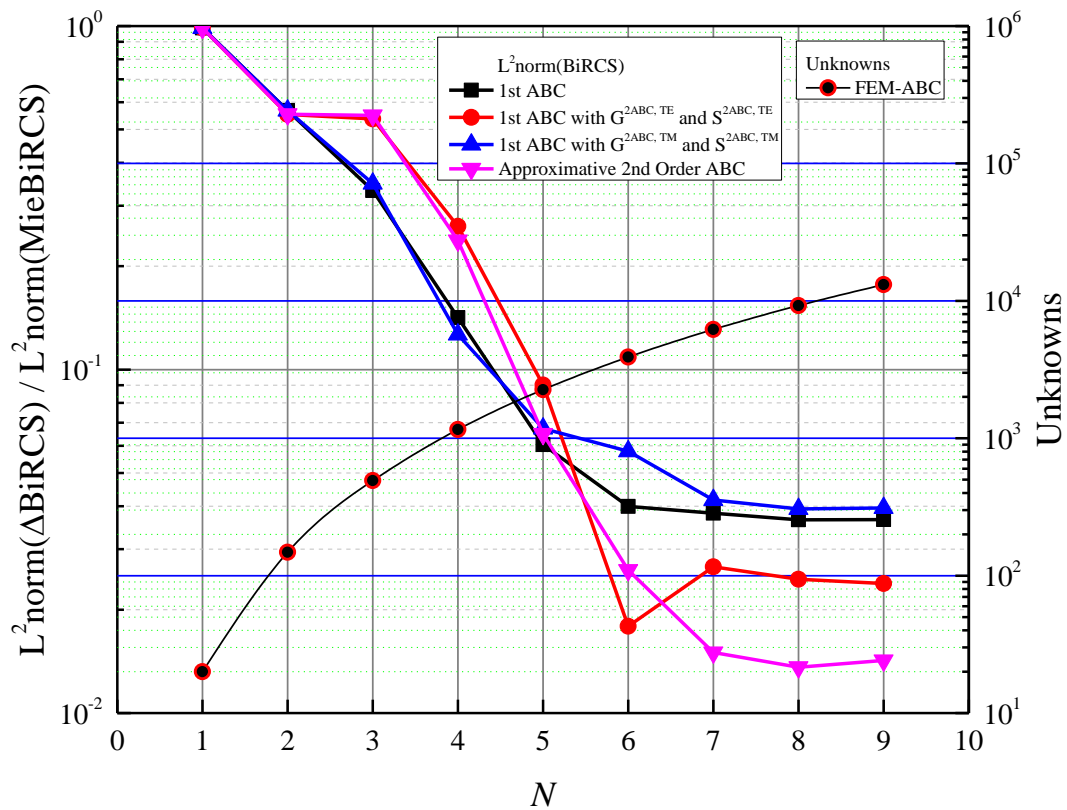
$$\frac{L^2 \text{norm}(\Delta \text{BiRCS})}{L^2 \text{norm}(\text{MieRCS})} = \frac{\sum_{\theta=0}^{180^\circ} \sum_{\phi=0}^{360^\circ} (\text{FEMBiRCS}(\theta, \phi) - \text{MieBiRCS}(\theta, \phi))^2}{\sum_{\theta=0}^{180^\circ} \sum_{\phi=0}^{360^\circ} \text{MieBiRCS}(\theta, \phi)^2}, \quad (6.7)$$

при чему $\text{FEMBiRCS}(\theta, \phi)$ означава бистатички радарски попречни пресек у функцији правца одређеног сферним координатама θ и ϕ добијен FEM-ABC методом вишег реда, а $\text{MieBiRCS}(\theta, \phi)$ означава бистатички радарски попречни

пресек добијен аналитичким формулама. Бистатички радарски пресек $MieBiRCS(\theta, \phi)$ узима се за референтно решење. Грешка нумеричког решења у односу на аналитичко решење је $\Delta BiRCS(\theta, \phi) = FEMBiRCS(\theta, \phi) - MieBiRCS(\theta, \phi)$, а приликом прорачуна L^2 норме сумирање се врши по свим правцима у којима је бистатички радарски попречни пресек прорачунат: 37 праваца по θ и 73 праваца по ϕ координати, као што је објашњено раније. На сликама 6.18 и 6.19 нормализована L^2 норма грешке бистатичког радарског попречног пресека приказана је у функцији редова полинома апроксимације непознатог електричног поља FEM-ABC методом, а додатно је приказан и одговарајући број FEM-ABC непознатих. Пореди се резултати за ABC првог и неригорозног ABC другог реда, а приказани су и резултати за ABC првог реда у коме је укључен по један од чланова ABC другог реда: чланови $G^{2ABC^{TE}}$ и $S^{2ABC^{TE}}$ у једном случају и $G^{2ABC^{TM}}$ и $S^{2ABC^{TM}}$ у другом случају. Значење ових чланова описано је у одељку 5.3 једначинама (5.18) и (5.19)].



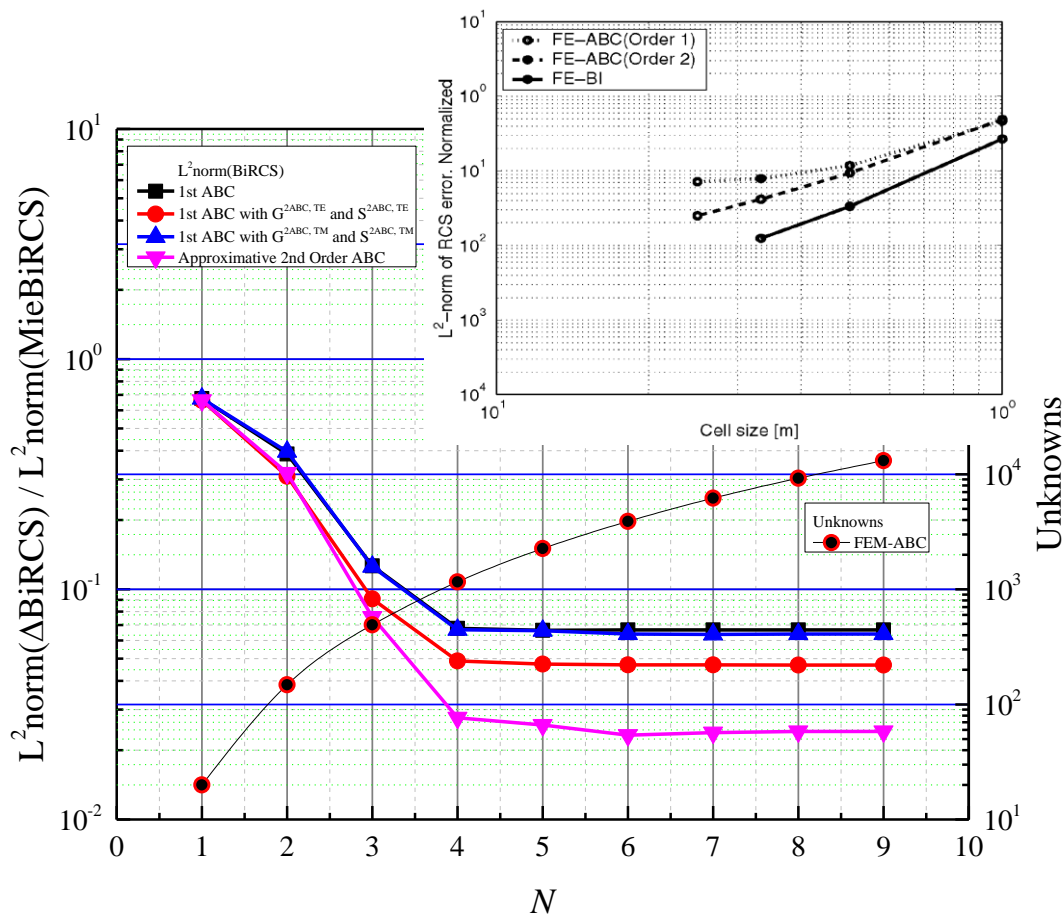
Слика 6.18. Нормализована L^2 норма грешке бистатичког радарског попречног пресека РЕС расејача полупречника $a = 1$ m са апсорпционим граничним условом примењеним на фиктивној сфери полупречника $b = 1,1$ m за модел као на слика 6.17 [$\lambda_0 = 1$ m и $(b - a)/\lambda_0 = 0,1$]. Приказан је и укупан број непознатих.



Слика 6.19. Нормализована L^2 норма грешке бистатичког радарског попречног пресека PEC расејача полупречника $a = 1$ m са апсорпционим граничним условом примењеним на фиктивној сфери полупречника $b = 1,5$ m за модел као на слика 6.17 [$\lambda_0 = 1$ m и $(b - a)/\lambda_0 = 0,25$]. Приказан је и укупан број непознатих.

Посматрајмо, даље, исти сферни PEC расејач полупречника $a = 1$ m, моделован на исти начин као и у претходним примерима. Сферни PEC расејач модела је помоћу шест коначних елемената другог геометријског реда, са PEC граничним условом на површи $r = a$, неригорозним ABC граничним условом на површи $r = b$ и површи $r = (a + b)/2$ за прорачун Кирхофовог интеграла. У односу на претходни пример, радна учестаност је нижа, $f = 119,92$ MHz, а њој одговара таласна дужина у слободном простору $\lambda_0 = 2,5$ m. Полупречник фиктивне сферне површи на којој је примењен неригорозни ABC другог реда је $b = 2$ m. Дебљина слоја између PEC расејача и ABC граничног услова је $(b - a)/\lambda_0 = 0,25$. На слици 6.20 приказани су резултати за нормализовану L^2 норму грешке бистатичког радарског попречног пресека, прорачунату као у (6.7) за 37 праваца по θ координати и 73 праваца по ϕ координати. Нормализована L^2

норма грешке бистатичког радарског попречног пресека приказана је у функцији редова полинома апроксимације непознатог поља N ($N_u = N_v = N_w = N$) за фиксан ред нумеричке интеграције ($NGL_u = NGL_v = NGL_w = NGL = 13$). На слици је приказан и број непознатих у FEM-ABC моделу, а приказани су и резултати из [116], ради једноставнијег поређења.



Слика 6.20. Нормализована L^2 норма грешке бистатичког радарског попречног пресека РЕС расејача полупречника $a = 1 \text{ m}$ са апсорпционим граничним условом примењеним на фиктивној сфери полупречника $b = 2 \text{ m}$ за модел као на слика 6.17 [$\lambda_0 = 2,5 \text{ m}$ и $(b - a)/\lambda_0 = 0,25$]. Приказан је и укупан број непознатих. У уметку су приказани и резултати из [116].

У уметку слике 6.20 приказани су и одговарајући резултати нормализоване L^2 норме грешке бистатичког радарског попречног пресека сферног РЕС расејача, представљени у раду [116]. Како би се решио проблем прорачуна дивергенције роторски-конформних функција базиса, у раду [116] приказан је поступак у коме се уместо директног прорачуна дивергенције роторски-конформних функција

базиса, уводи нова скаларна променљива којом се замењује утицај, тешке за прорачун, дивергенције роторски-конформних функција базиса. Кроз процес формирања глобалног система једначина, који укључује и новододате скаларне променљиве за описивање утицаја дивергенције базисних функција, предвиђено је да се могу превазићи потешкоће приликом директне имплементације АВС другог реда у комбинацији са роторски-конформним функцијама базиса, поготову када се користи велики број електрично малих коначних елемената приликом моделовања закривљених структура. Поредећи два скупа решења са слике 6.20, резултате добијене FEM-ABC методом представљеном у овој дисертацији и резултате из [116], закључујемо да је у овом примеру непотребно уводити нове скаларне променљиве. Резултати добијени директном неригорозном имплементацијом АВС граничног услова другог реда изузетно добро се слажу са резултатима из [116]. Ова појава може се приписати чињеници да се читав FEM-ABC модел састоји од само 6 коначних елемената, па је, према томе, и број спојева коначних елемената на АВС површи релативно мали. Спојеви коначних елемената представљају регионе где је прорачун дивергенције критичан. Такође, са повећањем редова полиномске апроксимације непознатог поља у методи коначних елемената вишег реда, укупан квалитет решења се поправља. Тада, иако гранични услов о једнакости нормалних компоненти поља на раздвојној површи два коначна елемента није наметнут експлицитно, задовољење једнакости нормалних компоненти електричног поља наметнуто је глобално кроз процес формирања финалног система једначина. Са повећањем тачности нумеричке симулације смањује се неједнакост нормалних компоненти електромагнетског поља на споју два коначна елемента, а тиме се смањује и утицај критичног прорачуна дивергенције на споју два коначна елемента, тј. смањује се утицај сингуларних члана који се не узимају у обзир експлицитно у АВС.

Са слика 6.18 и 6.19 јасно се види да се применом неригорозног АВС другог реда добијају решења за бистатички радарски попречни пресек знатно мање L^2 норме грешке, у поређењу са одговарајућим решењима добијеним применом АВС првог реда. У случају када је неригорозни АВС другог реда примењен на сферној површи полупречника $b = 1,1 \text{ m}$, на слици 6.18 L^2 норма грешке бистатичког радарског попречног пресека мања је за читав ред величине у односу на

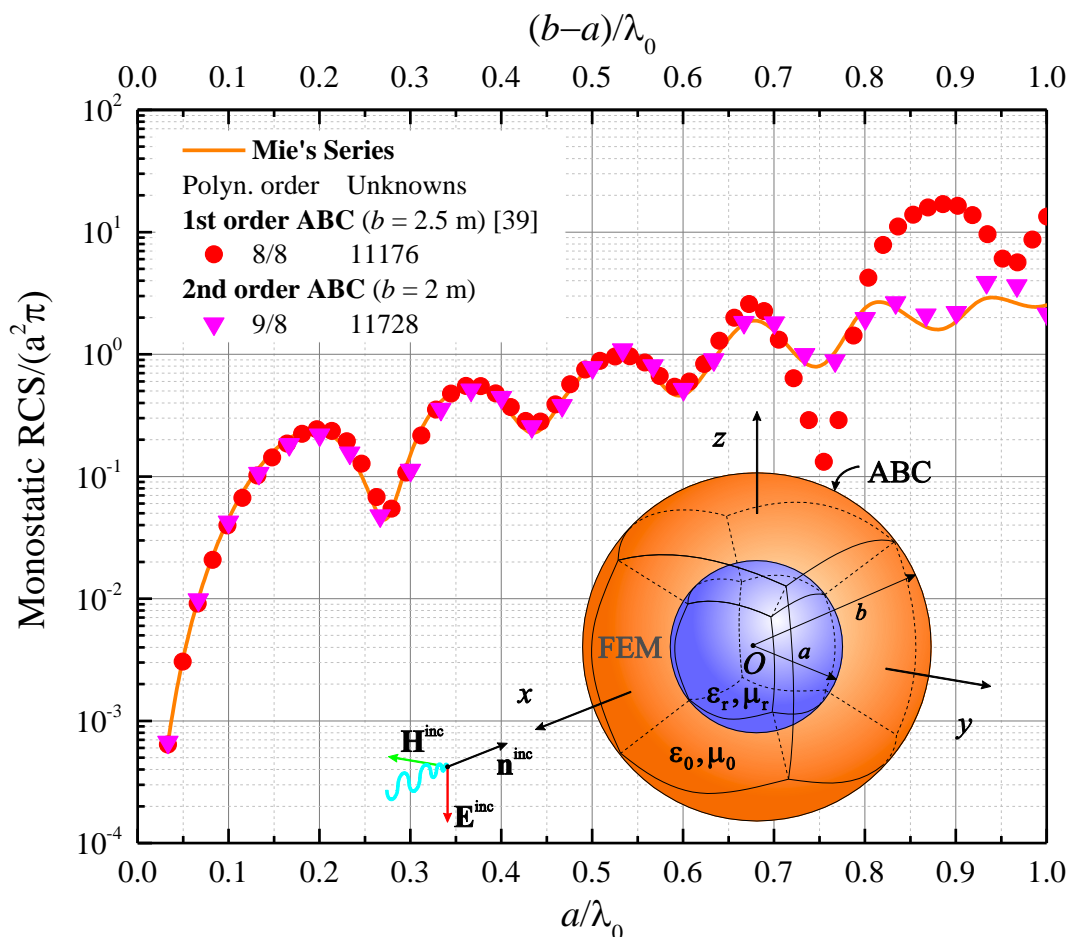
одговарајуће решење добијено применом ABC првог реда. Са повећањем растојања ABC граничног услова од расејача, разлика у перформансама између неригорозног ABC другог и ABC првог реда постепено се смањује, а када је $b = 1,5 \text{ m}$, на слици 6.19 разлика у L^2 норми грешке бистатичког радарског попречног пресека је око 3 пута. Теоријски, за довољно велико растојање апсорпционог граничног услова од расејача, перформансе ABC првог и виших редова не би требало да се разликују. У граничном процесу када $b \rightarrow \infty$ ABC било ког реда, почевши од првог, представља идеалан апсорпциони гранични услов, што је у складу са добијеним резултатима. Према томе, применом неригорозног ABC другог реда, површ на којој се примењује апсорпциони гранични услов, за задату тачност симулације, може се поставити ближе површи расејача, у односу на случај када се користи ABC првог реда. Тиме се домен нумеричког прорачуна методе коначних елемената смањује, а смањује се и потреба за рачунарским ресурсима. Такође, са слика 6.18 и 6.19 може се уочити да постоје граница након којих се даљим повећањем редова полиномске апроксимације поља не добијају значајно тачнија решења. Овим границама одговарају приближно хоризонтални делови кривих. Такође, са слика се може закључити и да се нивои минималне грешке прорачуна бистатичког радарског попречног пресека смањују са удаљавањем ABC површи од површи расејача. Апсорпциони гранични услови су гранични услови апроксимативног типа и неизбежно уносе одређену грешку у решење. Са друге стране, и сама метода коначних елемената уноси одређену грешку у решење. Са слика 6.18 и 6.19 можемо закључити да предложена FEM-ABC метода има добру и стабилну конвергенцију – са повећавањем редова полиномске апроксимације поља, FEM решење постаје све тачније. У почетку конвергенција је стрмија, а касније блажа, све док се не достигне ниво тачности решења ограничен одговарајућим апсорпционим граничним условом. Тада наступа заравњени део карактеристика. Очигледно, на сликама 6.18, 6.19 и 6.20 достигнута је граница када ABC представља ограничавајући фактор тачности укупног решења. Такође, из приказаних резултата закључујемо да сваки од два члана за које се разликују ABC првог и ABC другог реда делимично доприносе побољшању перформанси ABC. Као што је предвиђено у раду [119] и предвиђено у одељку 5.1, на основу приказаних резултата може се потврдити да део ABC

другог реда којим се апсорбују ТЕ сферни модови више доприноси тачности решења у односу на део АВС другог реда којим се апсорбују ТМ сферни модови. Апсорпција ТЕ сферних модова постиже се укључивањем само чланова $G^{2ABC^{TE}}$ и $S^{2ABC^{TE}}$ у АВС првог реда, а апсорпција ТМ сферних модова постиже се укључивањем само чланова $G^{2ABC^{TM}}$ и $S^{2ABC^{TM}}$ у АВС првог реда. Приликом прорачуна чланова $G^{2ABC^{TM}}$ и $S^{2ABC^{TM}}$ у методи коначних елемената са роторски-конформним функцијама базиса, посебну пажњу требало би обратити приликом интеграције сингуларног члана површинске дивергенције на споју два коначна елемента. Из приказаних нумеричких примера можемо закључити да када се од АВС другог реда укључе само чланови $G^{2ABC^{TM}}$ и $S^{2ABC^{TM}}$, њихов допринос тачности решења врло је мали у односу на АВС првог реда, а некада се тачност решења и квари. Са друге стране, када се уз чланове $G^{2ABC^{TE}}$ и $S^{2ABC^{TE}}$ укључе и чланови $G^{2ABC^{TM}}$ и $S^{2ABC^{TM}}$, долази до синергијског дејства и добијају се значајно тачнија решења него када се користи само једна група чланова. Самим тим, иако је примењен неригорозно, АВС другог реда у великодоменској методи коначних елемената са полиномски роторски-конформним функцијама базиса вишег реда резултује значајно тачнијим решењима у односу на одговарајуће АВС резултате првог реда. Очигледно, закључци из рада [120], у коме се користила малодоменска метода коначних елемената, да је чланове $G^{2ABC^{TM}}$ и $S^{2ABC^{TM}}$ потребно прорачунати искључиво ригорозно како би приметно доприносили тачности финалног решења, не важе у случају великодоменске методе коначних елемената са функцијама базиса вишег реда. Такође, у раду [120] закључено је да ако се чланови $G^{2ABC^{TM}}$ и $S^{2ABC^{TM}}$ не прорачунавају ригорозно, тј. када се не узимају у обзир сингуларни чланови који постоје на споју два коначна елемента, ови чланови уопште неће доприносити тачности решења, па се, према томе, препоручује њихово изузимање из нумеричког модела. Разлика у резултатима и закључцима у случају малодоменске [120] и великодоменске методе коначних елемената, може се приписати чињеници да су полиномске функције базиса вишег реда у стању да прецизније моделују електромагнетско поље. Тада је и решење глобално тачније, па је и разлика нормалних компоненти електричног поља на

споју два коначна елемента истих параметара средине мања. Самим тим мањи је и утицај сингуларног члана површинске дивергенције који се неригорозним прорачуном АВС другог реда не узима у обзир.

6.5.2. Диелектрични сферни расејач

Као последњи нумерички пример у оквиру овог одељка, посматрајмо диелектрични сферни расејач, приказан у уметку слике 6.21. Релативна пермитивност и пермеабилност расејача су $\epsilon_r = 2,25$ и $\mu_r = 1$, респективно. Полупречник сферног диелектричног расејача је $a = 1$ m, а расејач је геометријски моделован помоћу само једног закривљеног хексаедра другог геометријског реда ($K_u = K_v = K_w = K = 2$). Бесконачан простор у околини расејача нумерички је завршен на површи фиктивне сфере полупречника $b = 2$ m, на којој је примењен неригорозни АВС другог реда. Део простора између расејача и АВС граничне површи моделован је помоћу 6 закривљених коначних елемената другог геометријског реда. Ови ваздушни коначни елементи имају електричне особине слободног простора (ϵ_0 и μ_0), унутрашњи полупречник им је a а спољашњи b .



Слика 6.21. Нормализовани моностатички RCS диелектричног сферног расејача приказаног у уметку слике: поређење FEM-ABC резултата добијених помоћу ABC првог реда [49] и неригорозног ABC другог реда са аналитичким резултатима добијеним помоћу Мије редова.

За униформан раван инцидентни електромагнетски талас, приказан у уметку слике 6.21, прорачунат је нормализовани моностатички радарски попречни пресек диелектричног расејача, $\sigma/(a^2\pi)$, а резултати су приказани на слици 6.21. Редови полиномске апроксимације непознатог електричног поља су $N_u = N_v = N_w = N = 9$ за централни диелектрични елемент и $N_u = N_v = N_w = N = 8$ за остале ваздушне елементе. Редови нумеричке интеграције су $NGL_u = NGL_v = NGL_w = NGL = 13$ за све коначне елементе. Нумерички модел резултује у 11728 FEM непознатих. На слици 6.21 приказани су и раније објављени резултати у [49], за исти диелектрични сферни расејач, добијени применом ABC првог реда на површи фиктивне сфере полупречника $b = 2,5$ m. У [49] $N = 8$ и $NGL = 12$ за све коначне

елементе, што резултује у 11176 FEM непознатих. Као што се са слике 6.21 може видети, иако је сада ABC примењен на ближем растојању од расејача ($b = 2 \text{ m}$ за ABC другог реда и $b = 2,5 \text{ m}$ за ABC првог реда из рада [49]), резултати за моностатички RCS добијен неригорозним ABC другог реда доста се боље поклапају са аналитичким решењима у односу на одговарајуће резултате добијене за ABC првог реда. FEM-ABC решења другог реда поклапају се врло добро са аналитичким решењима у читавом опсегу анализираних учестаности, све до $a/\lambda_0 = 1$, док се решења добијена ABC првог реда добро поклапају са аналитичким решењима само до учестаности на којој је $a/\lambda_0 \approx 0,7$. Овим примером, као и претходним, приказана је предност ABC другог реда, у односу на ABC првог реда, чак и када је ABC другог реда имплементиран неригорозно, без посебног разматрања прорачуна дивергенције роторски-конформних функција базиса. Предност у перформансама неригорозног ABC другог реда у односу на ABC првог реда може водити ка смањењу потребе за рачунарским ресурсима за постизање одређене тачности нумеричких симулација, тј. може отворити могућности за нумеричке анализе електрично већих структура на расположивим рачунарским ресурсима.

6.6. Убрзавање попуњавања матрица у методи коначних елемената вишег реда OpenMP паралелизацијом запреминских интеграла

Пројектовање помоћу рачунара је један од главних токова научних истраживања у разним областима, а посебно у нумеричкој електромагнетици. Метода коначних елемената је једна од најпопуларнијих нумеричких метода за решавање широког дијапазона инжењерских проблема и проблема примењене електромагнетике. Електрична величина симулираних модела и захтеви за рачунарским ресурсима непрестано расту, док се нове генерације рачунара унапређују, не повећањем радне учестаности, већ повећавањем броја језгара процесора, из генерације у генерацију. Према томе, постојеће рачунарске алгоритме требало би изменити како би се искористиле све предности нових

архитектура рачунарских система. Паралелизација рачунарских програма за нумеричку ЕМ анализу представља један од главних токова данашњих истраживања.

Приликом развоја новог или адаптације постојећег алгорита, потребно је донети одлуке које се тичу избора рачунарског система на коме ће се конкретан алгоритам извршавати, тј. потребно је прилагодити алгоритам рачунарском систему. Тренутно две најзаступљеније архитектуре рачунарских система су: архитектура са пуно језгара (*many-core architecture*) и архитектура са више језгара (неколико или неколико десетина језгара) [147]. Архитектура са пуно језгара жртвује секвенцијалне перформансе сваког од језгара унутар процесора у циљу повећања паралелног протока обрађиваних података (*streaming workflow*). Архитектура са више језгара жртвује паралелни проток обрађиваних података за читав процесор у циљу повећања перформанси једног језгра и смањења укупног кашњења приликом прорачуна (*low-latency computation*). Традиционални алгоритми у оквиру методе коначних елемената ниског реда (првог или другог) инхерентно су погодни за паралелизацију. Тада је већина временски захтевних операција локалног типа и ограничена је на један коначни елемент. Веза између коначних елемената је слабија, а операције прорачуна могу се спровести у паралели за више коначних елемената истовремено, на глобалном нивоу за читав симулирани модел. Са друге стране, ово није нужно случај у методи коначних елемената вишег реда. Пошто се тада поље апроксимира полиномима реда вишег од другог, а суседни коначни елементи деле већи број заједничких коефицијената, процес паралелизације прорачуна сложенији је него у малодоменској методи коначних елемената. Приликом убрзавања алгоритама методе коначних елемената вишег реда за секвенцијално извршавање, тј. извршавање на рачунарској архитектури са једним језгром (*single-core architecture*), доста пажње је посвећено избегавању редундантних прорачуна. Самим тим, приликом прорачуна повећана је веза између суседних коначних елемената и смањена је шанса за једноставну паралелизацију прорачуна на глобалном нивоу. Метода коначних елемената вишег реда омогућава значајно смањење броја непознатих и рачунарских ресурса за конкретни електромагнетски проблем коришћењем *h*-, *p*- и *hp*-рафинирања, а самим тим омогућава и значајно повећање тачности нумеричке анализе

коришћењем расположивих рачунарских ресурса. Према томе, због својих предности, метода коначних елемената вишег реда постала је врло популарна у последње време. Упркос свему томе, чини се да проблем паралелизације алгоритама методе коначних елемената вишег реда није довољно обрађен у отвореној литератури. Добро је познато да паралелизовани алгоритми методе коначних елемената нижег реда могу бити врло неефикасни у случају полиномске апроксимације вишег реда. У случају апроксимације поља полиномима вишег реда, када су прорачуни између два коначна елемента повезанији, паралелизацију је погодније спровести на нивоу једног коначног елемента него на глобалном нивоу [148].

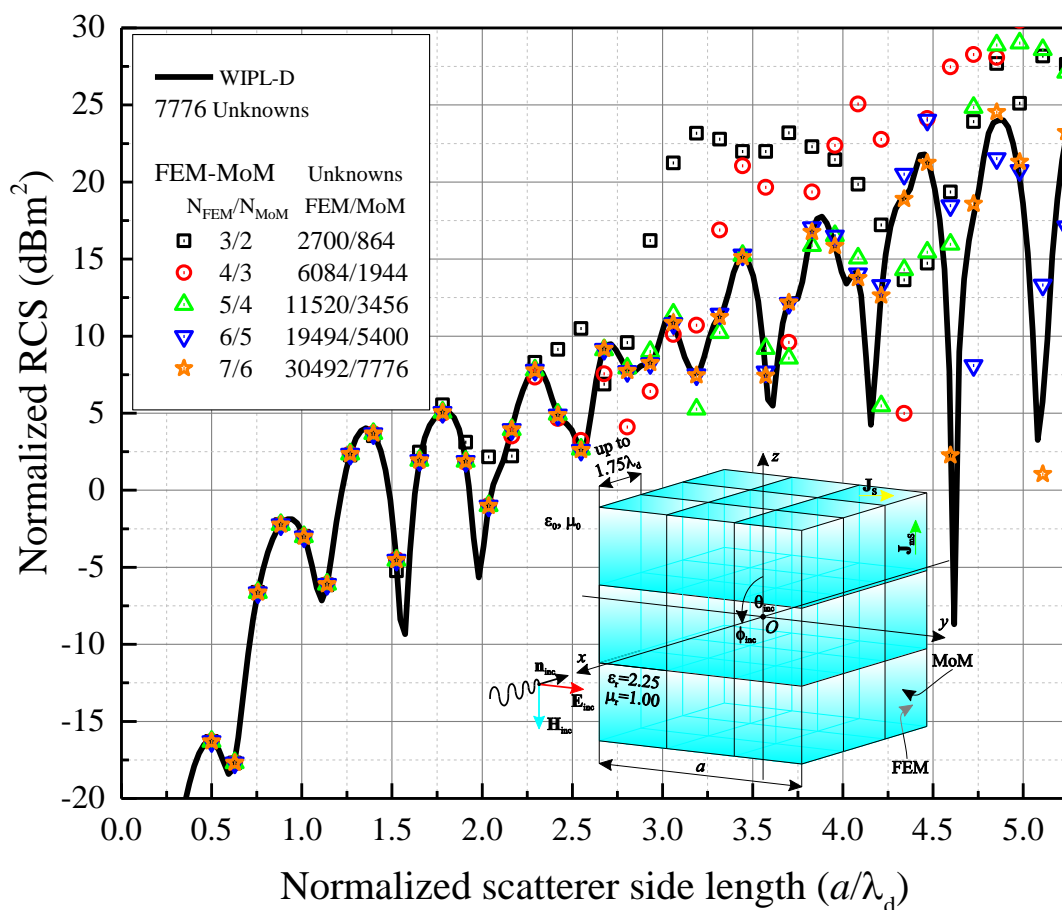
У овом одељку разматраћемо адаптацију постојећег алгоритма методе коначних елемената вишег реда за извршавање на рачунарској архитектури са више језгара. Имплементираћемо паралелизацију само запреминских интеграла коришћењем OpenMP библиотеке. Са становишта заузећа рачунарских ресурса прорачун запреминских интеграла представљају најзахтевнији део нумеричке анализе приликом попуњавања матрица система. Паралелизацију ћемо спровести на нивоу једног коначног елемента, тако да нећемо утицати на нередундантност прорачуна матричних елемената за суседне коначне елементе, тј. нећемо нарушити основну структуру постојећег алгоритма. Пошто нумеричка интеграција заузима највећи део времена матричног попуњавања [149], овај део рачунарског програма методе коначних елемената паралелизован је први, као увод за потпуну паралелизацију свих фаза рачунарског програма, у будућности.

6.6.1. Нумерички резултати и дискусија

Да бисмо илустровали ефекте паралелизације нумеричког прорачуна запреминских FEM интеграла, посматрајмо хомоген, без губитака, диелектричан ($\epsilon_r = 2,25$) коцкаст расејач дужине странице a , као што је приказано у уметку слике 6.22. Расејач се налази у слободном простору и осветљен је униформним равним инцидентним таласом који наилази управно на једну страницу расејача ($\theta_{inc} = 90^\circ$ и $\phi_{inc} = 0^\circ$). У оквиру овог примера FEM домен је нумерички ограничен помоћу еквивалентних непознатих електричних и магнетских површинских струја

подужне густине \mathbf{J}_s и \mathbf{J}_{ms} , респективно. Ове струје се одређују великодоменском МоМ-SIE методом [17], а у комбинацији са прорачуном поља у расејачу методом коначних елемената резултују хибридном FEM-МоМ методом вишег реда [18]. На основу закључака из [81], диелектрични расејач геометријски је моделован помоћу 27 идентична хексаедарска коначна елемента [45] затворених са 54 идентична МоМ четвороугаона елемента [17].

На слици 6.22 приказан је нормализовани (у односу на λ_0^2) моностатички радарски попречни пресек расејача, у функцији a/λ_d , при чему су λ_0 и λ_d таласне дужине у слободном простору и диелектрику расејача, респективно. Процесом p -рафинирања, резултати су добијени за различите редове ($3 \leq N_{FEM} \leq 7$) полинома апроксимације поља у методи коначних елемената вишег реда, и за различите редове ($2 \leq N_{MoM} \leq 6$) полинома апроксимације еквивалентних електричних и магнетских струја у методи момената вишег реда. Број тачака нумеричке Гаус-Лежандрове интеграције је $NGL_{FEM/MoM} = N_{FEM/MoM} + 4$, у FEM и МоМ делу модела, респективно, као што је објашњено у [81]. Резултати су упоређени са референтним МоМ-SIE решењем добијеним комерцијалним софтверским пакетом WIPL-D [145]. Са слике 6.22 можемо да уочимо врло добру конвергенцију резултата добијених помоћу хибридне FEM-МоМ методе вишег реда са p -рафинирањем (број FEM/МоМ непознатих приказан је у легенди слике). Такође, можемо приметити да се FEM-МоМ решења за $N_{FEM} = 7$, $N_{MoM} = 6$ готово савршено поклапају са референтним решењем у читавом опсегу анализираних учестаности. Дужина странице FEM/МоМ коначних елемената иде до $1,75 \lambda_d$, а овај нумерички модел користиће се за процену убрзавања попуњавања матрица методе коначних елемената.

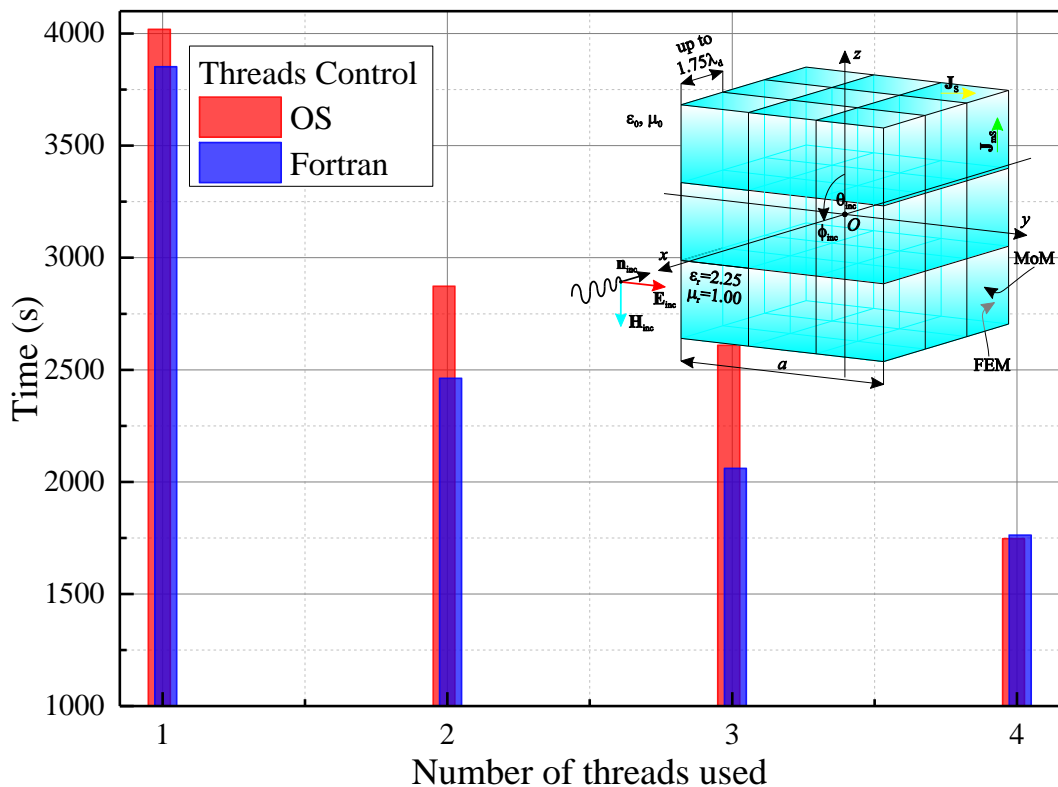


Слика 6.22. Нормализовани моностатички радарски попречни пресек коцкастог диелектричног расејача приказаног у уметку слике.

Времена попуњавања матрица методе коначних елемената добијена су на скромном Windows 7 персоналном рачунару са Intel® Core™ i5-760 процесором, који подржава 4 процесорске нити (*threads*), радног такта 2,8 GHz са 8 GB оперативне меморије (RAM), и приказана су на слици 6.23 у функцији броја коришћених процесорских нити. Контрола броја коришћених процесорских нити спроведена је на два начина: (а) контролом кроз оперативни систем, кроз параметар *process affinity* у оквиру менаџера задатака (*Task Manager*), и (б) директно кроз OpenMP библиотеку у FORTRAN рачунарском коду методе коначних елемената.

Са слике 6.23, за посматрани пример, можемо да закључимо да је постигнуто значајно убрзање извршавања симулације (чак до 2,28 пута када се користе све четири рачунарске нити) само паралелизацијом нумеричког прорачуна запреминских интеграла методе коначних елемената. Такође, изгледа да је

ефикасније спровести контролу броја коришћених рачунарских нити директно у рачунарском коду помоћу OpenMP библиотеке, него контролом кроз оперативни систем.



Слика 6.23. Времена попуњавања матрица методе коначних елемената за различит број коришћених процесорских нити.

6.7. Резиме

У овом поглављу прво је представљена параметризација константном брзином за мапирање МоМ-SIE граничних површи у анализи антена и расејача и њена апроксимација великим Лагранжовим четвороугловима. Лагранжови четвороуглови уједно представљају и површи коначних елемената у методи момената, а сви закључци о параметризацији геометрије константном брзином из методе момената лако се могу проширити и применити и у методи коначних елемената. Теоријским разматрањима и кроз нумеричке примере, указано је на важност примене параметризације константном брзином, тј. параметризације константном лучном дужином, дуж координатних линија по површи расејача. Правилан распоред интерполационих тачака, који гарантује минимално

изобличење финалног координатног система, посебно је важан када се у нумеричком моделу користе велики закривљени елементи вишег геометријског реда. Приликом тродимензионе МоМ-SIE нумеричке анализе диелектричног сферног расејача, CSP мапирање површи родитељске коцке на површ сфере резултовало је у просеку пет пута мањом процентуалном грешком прорачунатог радарског попречног пресека у односу на случај када се користи RCP мапирање. Нумерички резултати за радарски попречни пресек потврдили су све закључке и очекивања изведена на основу геометријске анализе са слике 6.2. Закључено је да наизглед мале непрецизности у геометријском моделу могу резултовати значајним грешкама приликом прорачуна радарског попречног пресека. Све ово још више наглашава важност и потребу за правилним геометријским моделовањем, односно потребу за CSP мапирањем, када се користе великодоменски елементи. Представљени концепт CSP мапирања затим је проширен за примену на произвољне закривљене површи дефинисане неком врстом параметарске једначине, а тада је потребно нумерички решити скуп једначина добијених CSP мапирањем. Проширење концепта CSP мапирања представљено је тродимензионом МоМ-SIE анализом EMCC металног расејача облика двоструко-шиљастиг сфероида (*double ogive*). Концепт CSP мапирања не мора се користити искључиво у комбинацији са приказаном Лагранжовом геометријском апроксимацијом, већ се може проширити и на друге геометријске апроксимације, као што су NURBS, поготову када се желе добити резултати високе тачности коришћењем нумеричких модела са што мање коначних елемената.

Осим важности избора геометријских параметара модела у методи коначних елемената, тј. избора геометријске параметризације, указано је и на важност правилног избора редова полинома апроксимације поља и електричне величине коначних елемената. На основу ограниченог скупа нумеричких симулација неизотропних EM расејача, установљене су прелиминарне препоруке за одређивање оптималних (или скоро оптималних) редова хијерархијских полиномских базисних функција и редова Гаус-Лежандрове интеграционе формуле у FEM анализи униаксијалних средина. Униаксијалне средине представљају најједноставнији случај неизотропних средина, а нумеричка анализа

униаксијалних средина може представљати основу за даљу анализу произвољно неизотропних средина и одређивање оптималних параметара нумеричких модела. Резултати нумеричке анализе униаксијалног расејача су у складу са теоријом из [27], иако свеукупно посматрани ЕМ модел диелектричног расејача у слободном простору није хомоген и подржава ЕМ поља сложенија од линијски поларизованог униформног равног ЕМ таласа описаног у [27]. Приказани прецизни геометријски модели добијени CSP мапирањем и препоруке за избор оптималних редова полиномске апроксимације електричног поља приликом моделовања неизотропних средина представљају добру полазну основу приликом конструкције сложенијих нумеричких модела континуално нехомогених и неизотропних прекривки за смањење радарског попречног пресека. Нумеричка анализа прекривки за смањење радарског попречног пресека такође је представљена у овом поглављу. Када се користе великодоменски коначни елементи, где год то геометрија структуре и динамика промене поља дозвољавају, нумерички модели конструисани на великодоменски начин могу бити врло ефикасни, а приказани резултати симулација пружају корисне смернице за успешну и ефикасну нумеричку ЕМ анализу униаксијалних средина.

Приказани су и врло ефикасни тродимензиони нумерички модели прекривки за смањење радарског попречног пресека. Посебно, приказана је ефикасна великодоменска нумеричка FEM-МоМ анализа линеарне и нелинеарне сферне прекривке (видети фусноту 3), по први пут представљена у [123]. Тензори параметара средине прекривки добијени су трансформационом електромагнетиком. Континуално нехомоген неизотропан домен прекривке моделован је помоћу великих закривљених коначних елемената. Овакви коначни елементи омогућавају континуалну промену тензора параметара средине и апроксимацију поља полиномима вишег реда. Флексибилност ове нумеричке методе омогућила је врло ефикасно моделовање прекривке помоћу само шест коначних елемената и моделовање површи прекривке помоћу шест закривљених четвороуглова, што за последицу има веома мали укупан број непознатих и мало заузеће рачунарских ресурса. Оваквим нумеричким моделом постигнуто је значајно смањење моностатичког радарског попречног пресека сферног РЕС расејача у релативно широком опсегу учестаности. Моностатички радарски

попречни пресек сферног РЕС расејача смањен је за три до пет редова величине за једноставнији модел са шест коначних елемената и пет од седам редова величине за сложенији модел са 24 коначна елемента. Узимајући у обзир утицај експлицитних апроксимација приликом моделовања сферне геометрије и континуалне промене тензора параметара средине, у оба случаја Лагранжовим интерполационим полиномима четвртог реда, и утицај инхерентних нумеричких апроксимација FEM-МоМ методе и рачунарских програма, генерално, може се закључити да је ефекат скривања објеката сферном прекривком моделован врло тачно. Сви релевантни ефекти скривања објекта прекривком за смањење радарског попречног пресека детектовани су предложеном пуноталасним нумеричким методом. Предложена метода и нумерички модел могу се додатно прилагодити за анализу и дизајн електрично већих и/или сложенијих тродимензионих прекривки за смањење радарског попречног пресека одговарајућим рафинирањем оригиналног модела и то: повећањем редова полинома апроксимације поља (p -рафинирањем), повећањем укупног броја коначних елемената (h -рафинирањем) или комбинацијом претходна два поступка (hp -рафинирањем) [75]. Сложеније прекривке могу бити произвољно нехомогене, а могу садржати и оштре ивице и рогљеве. За разлику од сферне прекривке, која се може анализирати и аналитички, помоћу Мије редова, у случају сложенијих прекривки нумеричка анализа постаје неизоставна. Самим тим расте и важност и потреба за нумеричким методама које су у стању да моделују такве проблеме што тачније и на што ефикаснији начин.

Затим је представљена и нова конформна коцкаста прекривка за смањење радарског попречног пресека, добијена применом трансформационе електромагнетике, као и њена ригорозна пуноталасна нумеричка верификација у блиском и далеком пољу, заснована на предложеној великодоменској FEM-МоМ методи вишег реда. Нумеричка верификација функционисања прекривке спроведена је помоћу великих континуално нехомогених уопштених хексаедарских коначних елемената, без потребе за просторном дискретизацијом услед нехомогености средине поделом на велики број електрично малих коначних елемената. Подела на велики број електрично малих коначних елемената типична је за примера нумеричке анализе оваквих средина малодоменском методом

коначних елемената. Применом великодоменске FEM-МоМ методе вишег реда, за постизање резултата сличне тачности у поређењу са анализом коришћењем COMSOL Multiphysics софтвера, остварено је смањење укупног броја непознатих за око 30 пута. Представљеним нумеричким FEM-МоМ моделом постигнуто је значајно смањење моностатичког радарског попречног пресека коцкастог PEC расејача са прекривком са губицима и без губитака. У читавом анализираном опсегу учестаности постигнуто је смањење моностатичког радарског попречног пресека за пет до десет редова величине. Приказане су тачност и ефикасност једноставног нумеричког модела са (само) 24 коначна елемента. Овај модел резултује моностатичким радарским попречним пресеком толико ниског нивоа да је упоредив са најбољом могућом апроксимацијом нултог расејања од ваздушне коцке истих димензија као и оригинални PEC расејач, добијеним WIPL-D софтвером. Потискивање далеког расејаног поља у нумеричким FEM-МоМ резултатима за коцкасту прекривку исто је, или боље, у односу на потискивање код линеарне сферне прекривке, што се може приписати чињеници да је геометријски модел егзактан у случају коцкасте прекривке, а апроксимативан, апроксимиран Лагранжовим интерполационим полиномима четвртог реда, у случају сферне прекривке. Резултати за бистатички радарски попречни пресек коцкасте прекривке без губитака и са губицима, за различите тангенсе угла губитака, конзистентни су са одговарајућим резултатима за сферну и цилиндричну прекривку; повећање губитака прекривке не утиче на перформансе прекривке за расејање уназад, а перформансе се постепено деградирају за расејање унапред. Приказана коцкаста прекривка и њена нумеричка верификацију могу бити од посебног интереса приликом истраживања координатних трансформација неопходних за конструисање конформних прекривки за коцкасте расејаче и расејаче сличног облика, са оштрим ивицама и рогљевима, као и приликом развоја PML-а заснованог на трансформационој електромагнетици.

У постојећи FEM рачунарски код имплементиран је симетричан неригорозан ABC другог реда. Оваква неригорозна имплементација, чији су детаљи изложени раније, не захтева свеобухватне измене рачунарског кода, које би биле неопходне у случају промене типа базисних функција [120] или додавања нових скаларних променљивих [116]. Са нагласком на *p*-рафинирању, приказани резултати

нумеричке анализе PEC и диелектричног сферног расејача показују одлично слагање са аналитичким решењима. Нумерички пример анализе сферног PEC расејача показује да је нормализована L_2 норма грешке радарског попречног пресека доста мања када се у прорачун ABC укључи и члан са дивергенцијом, него када се тај члан у потпуности изостави. Прорачун члана са дивергенцијом спроведен је на, раније описани, неригорозан начин. Изведени закључци да неригорозно прорачунат члан са дивергенцијом значајно доприноси квалитету решења не подударују са до сада објављеним резултатима [120]. Сва досадашња истраживања у овоме правцу обухватала су само малодоменску методу коначних елемената са ниским редом апроксимације поља, а један од циљева овога поглавља био је и испитивање перформанси симетричног неригорозног ABC другог реда у великодоменској методи коначних елемената са хијерархијским полиномским роторски-конформним функцијама базиса вишег реда. Приказани нумерички резултати за PEC расејач показују да је тачност предложене методе истог реда величине као и у методама у којима је члан ABC у коме се прорачунава дивергенција третиран ригорозније [116]. На примеру анализе диелектричног сферног расејача, у релативно широком опсегу учестаности, упоређене су перформансе ABC првог реда и симетричног неегзактног ABC другог реда. На основу приказаних резултата може се закључити да се приближно истим заузећем рачунарских ресурса ABC другог реда могу добити значајно тачнији резултати.

На крају, како би се обезбедило постепено прилагођење постојећег рачунарског програма методе коначних елемената вишег реда на мулти-процесорске рачунарске системе, као и боље искоришћење расположивих рачунарских ресурса, паралелизовани су запремински интегрални који се прорачунавају приликом попуњавања матрица система методе коначних елемената. Паралелизација је спроведена коришћењем OpenMP библиотеке. Структура оригиналних рачунарских алгоритама, конструисаних како би се избегли редувантни прорачуни у методи коначних елемената вишег реда, није нарушена спроведеном паралелизацијом. Приликом нумеричке анализе диелектрично великог диелектричног расејача остварено је укупно скраћење извршавања симулације од 2,28 пута на рачунарском систему са четири процесорске нити.

7. Закључак

На почетку дисертације, у најкраћим цртама, приказана је теоријска основа електромагнетског поља, неопходна за примену и разумевање методе коначних елемената. Приказане су Максвелове једначине (у интегралном и диференцијалном облику). За случај простопериодичних поља, приказана је и векторска таласна једначина која ће се решавати методом коначних елемената. Конститутивне релације приказане су у тензорском облику, посебно погодном за анализу неизотропних средина. Закључено је да се велики број инжењерских и математичких проблема може приказати у облику проблема граничних вредности, као и да се, у већини практичних случајева, овакви проблеми не могу решити егзактно (у затвореном облику). Према томе, постоји велика реална потреба за ефикасним и тачним методама за приближно (нумеричко) решавање проблема граничних вредности. Као две најчешће коришћене методе за приближно решавање проблема граничних вредности приказане су Рејли-Риц метода и метода отежаних резидуала, које представљају теоријску основу методе коначних елемената. Метода коначних елемената приказана је кроз низ основних целина – приказане су основне једначине које се решавају методом коначних елемената, процес геометријске дискретизације, апроксимација електричног поља базисним функцијама (вишег реда), формирање финалног система линеарних једначина, као и детаљи у вези са моделовањем континуално нехомогених и неизотропних средина.

У оквиру методе коначних елемената која је коришћена у овој дисертацији, геометријска дискретизација спроведена је Лагранжовим закривљеним параметарским хексаедрима вишег (геометријског) реда. Лагранжови коначни елементи пружају велику флексибилност приликом геометријског моделовања и могућност моделовања објеката малим бројем електрично великих коначних

елемената, што резултује коришћењем свих предности великодоменског начина моделовања, а финално води ка ефикасним и тачним нумеричким моделима. Затим су приказани детаљи векторске анализе у закривљеним координатним системима, неопходни за имплементацију базисних функција у закривљеним параметарским хексаедрима. Концепти векторске анализе у закривљеним координатним системима у наставку дисертације интензивно су коришћени у теорији трансформационе електромагнетике. Апроксимација поља спроведена је векторским хијерархијским роторски-конформним полиномским функцијама базиса вишег реда. Редови полиномске апроксимације непознатог поља могу бити врло високи (чак и до десетог реда), чиме се, кроз процес p -рафинирања, постиже добра конвергенција резултата, а нумерички модели постају значајно ефикаснији у односу на нумеричке моделе добијене искључиво h -рафинирањем. Приказане су и појединости моделовања континуално нехомогених и неизотропних средина великодоменском методом коначних елемената. На тај начин постављена је комплетна основа неопходна за каснија теоријска разматрања у оквиру трансформационе електромагнетике, као и за пројектовање нумеричких модела за (ефикасно и тачно) моделовање електромагнетских проблема насталих применом трансформационе електромагнетике. Средине добијене трансформационом електромагнетиком по правилу су континуално нехомогене и неизотропне. Како трансформациона електромагнетика постаје све више заступљена у СЕМ заједници, потреба за нумеричком методом способном да ефикасно и тачно моделује такве средине већа је него икада раније.

Иако је трансформациона електромагнетика постала једна од популарнијих области истраживања у СЕМ заједници, колико је аутору ове дисертације познато, у отвореној литератури не постоје објашњења основних идеја и концепата који стоје иза теорије трансформационе електромагнетике изложена на начин погодан електроинжењерима. Примера ради, аутор ове дисертације није успео да пронађе (у отвореној литератури) детаљна математичка извођења формула за прорачун тензора параметара средина прекривки за смањење радарског попречног пресека. Ове формуле појављују се у готово свим радовима у вези са трансформационом електромагнетиком. У овој дисертацији представљена су детаљна математичка извођења тензора параметара средине којима се постиже жељена манипулација

електромагнетским пољем. При томе, пошло се од координатних трансформација базе простора и координатних трансформација коваријантних и контраваријантних компоненти вектора и тензора. Затим су Максвелове једначине написане у два облика: (i) у стандардном облику, у коме промена координатног система доводи до промене форме оператора просторних извода, и (ii) у инваријантном облику, у коме промена координатног система не мења форму оператора просторних извода. Задржавање исте форме оператора просторних извода у (ii) праћена је одговарајућом променом тензора параметара средине. Интерпретирајући компоненте вектора и тензора инваријантног облика Максвелових једначина из једног координатног система као компоненте вектора и тензора у другом координатном систему, добијају се нове (по правилу континуално нехомогене и неизотропне) средине којима се по жељи може манипулисати електромагнетским пољем. Као пример класичног избора средина добијених трансформационом електромагнетиком, одређени су тензори параметара средине сферне прекривке за смањење радарског попречног пресека расејача (познати од раније), а приказана је и расподела блиског поља добијена аналитичким релацијама представљеним у дисертацији. Расподела блиског поља добијена на основу аналитичких (егзактних) формула требало би да додатно допринесе разумевању механизма смањења радарског попречног пресека расејача прекривкама добијеним теоријом трансформационе електромагнетике. Надамо се да ће изложена теорија и аналитичко израчунавање блиског поља бити корисни свим истраживачима у области трансформационе електромагнетике, као и да ће допунити већ постојећу релативно обимну литературу из ове области. Одређени су и параметри коцкасте прекривке за смањење радарског попречног пресека расејача. Те две прекривке коришћене су као референтни примери процене способности великодоменске методе коначних елемената да ефикасно и тачно моделује средине добијене трансформационом електромагнетиком. Кроз нумеричке примере показани су ефикасност и тачност моделовања прекривки за смањење радарског попречног пресека великодоменском методом коначних елемената. Јасно су уочени сви релевантни ефекти и механизми смањења радарског попречног пресека оваквим прекривкама. На основу добијених резултата закључујемо да ће великодоменска FEM метода највероватније бити у

стању да добро моделује и нове електромагнетске средине које ће се у будућности добијати трансформационом електромагнетиком.

Приликом моделовања отворених електромагнетских проблема методом коначних елемената потребно је нумерички затворити домен прорачуна, тј. поставити апсорпциони гранични услов на коначном растојању од расејача и/или антена. Апсорпциони гранични услов, у том случају, представља један од првих избора (са становишта ефикасности и заузећа рачунарских ресурса). У овој дисертацији приказан је симетричан неегзактан АВС другог реда, погодан за примену у великодоменској методи коначних елемената, поготову у случају p -рафинираних нумеричких модела. Представљени су и имплементациони детаљи симетричног неегзактног апсорпционог граничног услова другог реда (до нивоа прорачуна површинских интеграла помоћу базисних функција). Посебна пажња посвећена је детаљима у вези са прорачуном дивергенције роторски-конформних (и дивергенцијски-неконформних) функција базиса по АВС површи, који се јављају приликом директне имплементације симетричног АВС другог реда. Предност директне имплементације (којом се не мења облик базисних функција нити се уводе нове променљиве) је у томе што резултује минималном изменом FEM рачунарског кода изван рутине којима се прорачунавају површински интегрални. По први пут је представљен АВС другог реда у комбинацији за великодоменским закривљеним параметарским хексаедрима. Кроз нумеричке примере анализе савршено проводног сферног расејача и диелектричног сферног расејача, показано је да, иако члан АВС другог реда у коме се прорачунава дивергенција није имплементиран ригорозно, он значајно доприноси тачности нумеричког модела, па су резултати добијени коришћењем АВС другог реда доста тачнији у односу на резултате добијене коришћењем АВС првог реда. Показано је и да се досадашњи закључци из литературе у вези са значајем ригорозне имплементације тог члана из малодоменске FEM-АВС методе не могу праволинијски применити и на великодоменску FEM-АВС методу. Надамо се да ће ова студија бити од користи СЕМ заједници, а имплементацијом симетричног неегзактног АВС другог реда значајно је проширен скуп проблема који се могу анализирати великодоменском FEM-АВС методом вишег реда.

Посебна пажња посвећена је тачном моделовању закривљених објеката великодоменским p -рафинираним елементима. Уочено је да је, у циљу постизања резултата високе тачности, осим добре геометријске апроксимације (у којој нумерички модел геометријски што боље описује стварну структуру), једнаку пажњу потребно посветити и распореду интерполационих тачака Лагранжових елемената (реда вишег од првог). Закључено је да способност базисне функције да тачно опише анализирани електромагнетски проблем представља комбинацију њених својстава у родитељском (параметарском) домену и својстава параметризације којом се родитељски домен пресликава на финални нумерички модел. Представљен је и механизам конструкције геометријске параметризације константном брзином, која у општем случају води ка најмањем изобличењу финалног простора. Кроз неколико нумеричких примера верификоване су све полазне хипотезе и показано је да је, за добијање тачних нумеричких решења великодоменским СЕМ методама, потребно посветити посебну пажњу геометријском моделовању и конструкцији одговарајућих параметризација просторног мапирања. Иако се, у последње време, великодоменске СЕМ методе све више користе, чини се да питање оптималне параметризације геометријског мапирања није довољно обухваћено постојећом литературом. Надамо се да ће теоријска разматрања и нумерички резултати представљени у овој дисертацији допринети укупном знању из области нумеричке електромагнетике.

Коначно, како се у току израде дисертације јавила потреба за ефикаснијим прорачунима на модерном рачунарском хардверу, урађена је и делимична паралелизација постојећег FEM кода. Паралелизацијом рачунарски најзахтевнијих делова кода, постигнуто је значајно убрзање извршавања симулација, чиме се проширио и скуп проблема које је могуће симулирати на тренутно доступним персоналним рачунарима.

У наставку истраживања сагледале би се могућности развоја савршено прилагођених слојева за нумеричко затварање отворених електромагнетских проблема приказаном теоријом трансформационе електромагнетике. Пошто савршено прилагођени слојеви представљају чисто математички концепт (који се користи у нумеричкој електромагнетици), приликом њихове имплементације не мора се водити рачуна о физичкој остварљивости таквих средина. Уколико се

укаже потреба, сагледаће се могућности комбиновања савршено прилагођених слојева и апсорпционих граничних. Занимљиво би било испитати и разлике у перформансама неригорозног симетричног АВС другог реда, приказаног у овој дисертацији, и (ригорозног) несиметричног АВС другог реда. Такође, сагледале би се могућности имплементације АВС другог реда на (фиктивним) површима различитим од сфере, што би могло водити ка ефикаснијим нумеричким моделима. Спровешће се додатне паралелизације и убрзавања постојећег FEM рачунарског кода, чиме ће се повећати његова практична употребљивост и вредност.

Литература

- [1] S. V. Savić, A. Krneta, M. Stevanović, D. I. Olćan, M. Tasić, M. M. Ilić, *et al.*, "Analytic solutions of electromagnetic fields in inhomogeneous media," *International Journal of Electrical Engineering Education*, vol. 52, no. 2, pp. 131-141, April 2015.
- [2] T. J. Brazil, "Simulating circuits and devices," *IEEE Microwave Magazine*, vol. 4, no. 1, pp. 42-50, March 2003.
- [3] B. M. Kolundzija and D. I. Olcan, "Multiminima heuristic methods for antenna optimization," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 54, no. 5, pp. 1405-1415, May 2006.
- [4] D. B. Davidson, *Computational electromagnetics for rf and microwave engineering*, 2 ed.: Cambridge University Press, 2010.
- [5] T. Rylander, A. Bondeson, and P. Ingelström, *Computational electromagnetics*, 2 ed.: Springer, 2012.
- [6] J. J. H. Wang, *Generalized moment methods in electromagnetics: Formulation and computer solution of integral equations*: Wiley-Interscience, 1991.
- [7] R. F. Harrington, *Field computation by moment methods*. New Jersey Wiley-IEEE Press, 1993.
- [8] A. F. Peterson, S. L. Ray, and R. Mittra, *Computational methods for electromagnetics*, 1 ed. New York: IEEE Press, 1997.
- [9] B. M. Kolundzija and A. R. Djordjevic, *Electromagnetic modeling of composite metallic and dielectric structures* Norwood, Massachusetts: Artech House, 2002.
- [10] P. P. Silvester and R. L. Ferrari, *Finite elements for electrical engineers*, 3 ed. New York: Cambridge University Press, 1996.
- [11] J. L. Volakis, A. Chatterjee, and L. C. Kempel, *Finite element method for electromagnetics (antennas, microwave circuits, and scattering applications)*, 1 ed. New York: IEEE Press, 1998.
- [12] J.-M. Jin and D. J. Riley, *Finite element analysis of antennas and arrays*, 1 ed. Hoboken, New Jersey: Wiley-IEEE Press, 2009.
- [13] J.-M. Jin, *The finite element method in electromagnetics*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 2014.
- [14] A. Taflove and S. C. Hagness, *Computational electrodynamics: The finite-difference time-domain method*, 3 ed. Norwood, Massachusetts: Artech House, 2005.
- [15] A. H.-D. Cheng and D. T. Cheng, "Heritage and early history of the boundary element method," *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 29, no. 3, pp. 268-302, March 2005.
- [16] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, and J. Z. Zhu, *The finite element method: Its basis and fundamentals*, 7 ed. New York: Butterworth-Heinemann, 2013.
- [17] M. Djordjević and B. M. Notaroš, "Double higher order method of moments for surface integral equation modeling of metallic and dielectric antennas and scatterers," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 52, no. 8, pp. 2118-2129, August 2004.
- [18] M. M. Ilić, M. Djordjević, A. Ž. Ilić, and B. M. Notaroš, "Higher order hybrid fem-mom technique for analysis of antennas and scatterers," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 57, no. 5, pp. 1452-1460, May 2009.

- [19] Z. J. Cendes and D. N. Shenton, "Adaptive mesh refinement in the finite element computation of magnetic fields," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 21, no. 5, pp. 1811-1816, September 1985.
- [20] D. N. Shenton and Z. J. Cendes, "Max - an expert system for automatic adaptive magnetics modeling," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 22, no. 5, pp. 805-807, September 1986.
- [21] D. K. Sun, Z. J. Cendes, and J.-F. Lee, "Adaptive mesh refinement, h-version, for solving multiport microwave devices in three dimensions," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 36, no. 4, pp. 1596-1599, July 2000.
- [22] J. C. Maxwell, *A treatise on electricity and magnetism*, 3 ed. vol. 1. New York: Dover Publications, 1954.
- [23] J. C. Maxwell, *A treatise on electricity and magnetism*, 3 ed. vol. 2. New York: Dover Publications, 1954.
- [24] J. A. Stratton, *Electromagnetic theory*. New Jersey: Wiley-IEEE Press, 2007.
- [25] R. F. Harrington, *Time-harmonic electromagnetic fields*, 2nd ed. New York: Wiley-IEEE Press, 2001.
- [26] J. D. Jackson, *Classical electrodynamics*, 3 ed. New Jersey: Wiley, 1998.
- [27] J. A. Kong, *Electromagnetic wave theory*. New Jersey: Wiley, 1986.
- [28] N. Ida, *Engineering electromagnetics*, 1 ed. New York: Springer, 2000.
- [29] J. G. Van Bladel, *Electromagnetic fields*, 2 ed. New Jersey: Wiley-IEEE Press, 2007.
- [30] J.-M. Jin, *Theory and computation of electromagnetic fields*, 1 ed. New Jersey: Wiley-IEEE Press, 2010.
- [31] Z. Lou and J.-M. Jin, "A novel dual-field time-domain finite-element domain-decomposition method for computational electromagnetics," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 54, no. 6, pp. 1850-1862, June 2006.
- [32] R. Courant, "Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations," *Bulletin of The American Mathematical Society*, vol. 49, no. 1, pp. 1-23, January 1943.
- [33] S. G. Mikhlin, *Variational methods in mathematical physics*. Macmillan, New York: Pergamon Press, 1964.
- [34] J. P. Webb, "The finite-element method for finding modes of dielectric-loaded cavities (short paper)," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 33, no. 7, pp. 635-639, July 1985.
- [35] A. Chatterjee, J.-M. Jin, and J. L. Volakis, "Computation of cavity resonances using edge-based finite elements," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 40, no. 11, pp. 2106-2108, November 1992.
- [36] J.-S. Wang and N. Ida, "Eigenvalue analysis in electromagnetic cavities using divergence free finite elements," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 27, no. 5, pp. 3978-3981, September 1991.
- [37] J. P. Webb and B. Forghani, "Hierarchical scalar and vector tetrahedra," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 29, no. 2, pp. 1495-1498, March 1993.
- [38] J. S. Savage and A. F. Peterson, "Higher-order vector finite elements for tetrahedral cells," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 44, no. 6, pp. 874-879, June 1996.
- [39] T. V. Yioultis and T. D. Tsiboukis, "Development and implementation of second and third order vector finite elements in various 3-d electromagnetic field

- problems," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 33, no. 2, pp. 1812-1815, March 1997.
- [40] R. D. Graglia, D. R. Wilton, and A. F. Peterson, "Higher order interpolatory vector bases for computational electromagnetics," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 45, no. 3, pp. 329-342, March 1997.
- [41] R. D. Graglia, D. R. Wilton, A. F. Peterson, and I.-L. L. Gheorma, "Higher order interpolatory vector bases on prism elements," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 46, no. 3, pp. 442-450, March 1998.
- [42] T. Ozdemir and J. L. Volakis, "Triangular prisms for edge-based vector finite element analysis of conformal antennas," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 45, no. 5, pp. 788-797, May 1997.
- [43] CUBIT. (2015). *The cubit geometry and mesh generation toolkit*. Available: <https://cubit.sandia.gov/>
- [44] S. V. Savić, M. M. Ilić, B. M. Kolundžija, and B. M. Notaroš, "Efficient modeling of complex electromagnetic structures based on the novel algorithm for spatial segmentation using hexahedral finite elements," *Telfor Journal*, vol. 2, no. 2, pp. 98-101, 2010.
- [45] M. M. Ilić and B. M. Notaroš, "Higher order hierarchical curved hexahedral vector finite elements for electromagnetic modeling," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 51, no. 3, pp. 1026-1033, March 2003.
- [46] C. W. Crowley, P. P. Silvester, and H. Hurwits Jr., "Covariant projection elements for 3d vector field problems," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 24, no. 1, pp. 397-400, January 1988.
- [47] A. Ž. Ilić, S. V. Savić, M. M. Ilić, and B. M. Notaroš, "Analysis of electromagnetic scatterers using hybrid higher order fem-mom technique," in *Proceedings of 16th Telecommunications Forum TELFOR 2008*, Belgrade, Serbia, 2008, pp. 480-483.
- [48] B. M. Notaroš, M. M. Ilić, A. Ž. Ilić, M. Djordjević, and S. V. Savić, "Efficient higher order finite element–moment method modeling of 3-d radiation and scattering problems," in *Proceedings of The 25th Annual Review of Progress in Applied Computational Electromagnetics, ACES 2009*, Monterey, California, USA, 2009, pp. 627-632.
- [49] M. M. Ilić, S. V. Savić, and B. M. Notaroš, "First order absorbing boundary condition in large-domain finite element analysis of electromagnetic scatterers," in *Proceedings of 10th International Conference on Telecommunications in Modern Satellite, Cable and Broadcasting Services, TELSIS 2011*, Niš, Serbia, 2011, pp. 424-427.
- [50] C.-T. Tai, *Generalized vector and dyadic analysis; applied mathematics in field theory*, 2 ed. New Jersey: Wiley-IEEE Press, 1997.
- [51] H. Nguyen-Schäfer and J.-P. Schmidt, *Tensor analysis and elementary differential geometry for physicists and engineers* vol. 21. New York: Springer, 2014.
- [52] J. W. Gibbs and E. B. Wilson, *Vector analysis; a text-book for the use of students of mathematics and physics*, 2 ed. New Haven: Yale University Press, 1947.
- [53] X. Yuan, D. R. Lynch, and K. Paulsen, "Importance of normal field continuity in inhomogeneous scattering calculations," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 39, no. 4, pp. 638-642, April 1991.

- [54] M. Hara, T. Wada, T. Fukasawa, and F. Kikuchi, "A three dimensional analysis of rf electromagnetic fields by the finite element method," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 19, no. 6, pp. 2417-2420, November 1983.
- [55] J. P. Webb, "Efficient generation of divergence-free fields for the finite element analysis of 3d cavity resonances," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 24, no. 1, pp. 162-165, January 1988.
- [56] H. Whitney, *Geometric integration theory*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1957.
- [57] J. C. Nedelec, "Mixed finite elements in r3," *Numerische Mathematik*, vol. 35, no. 3, pp. 315-341, September 1980.
- [58] J. C. Nedelec, "A new family of mixed finite elements in r3," *Numerische Mathematik*, vol. 50, no. 1, pp. 57-81, January 1986.
- [59] A. Bossavit and J.-C. Verite, "A mixed fem-biem method to solve 3-d eddy-current problems," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 18, no. 2, pp. 431-435, March 1982.
- [60] M. Hano, "Finite-element analysis of dielectric-loaded waveguides," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 32, no. 10, pp. 1275-1279, October 1984.
- [61] J. S. van Welij, "Calculation of eddy currents in terms of h on hexahedra," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 21, no. 6, pp. 2239-2241, November 1985.
- [62] J. P. Webb, "Edge elements and what they can do for you," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 29, no. 2, pp. 1460-1465, March 1993.
- [63] J. Wang and J. P. Webb, "Hierarchical vector boundary elements and p-adaption for 3-d electromagnetic scattering," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 45, no. 12, pp. 1869-1879, December 1997.
- [64] M. M. Kostić and B. M. Kolundžija, "Maximally orthogonalized higher order bases over generalized wires, quadrilaterals, and hexahedra," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 61, no. 6, pp. 3153-3148, June 2013.
- [65] M. M. Ilić, "Higher order hexahedral finite elements for electromagnetic modeling," PhD Dissertation in Electrical Engineering, Department of Electrical and Computer Engineering, University of Massachusetts Dartmouth, Massachusetts Dartmouth, 2003.
- [66] O. Lafond, M. Himdi, H. Merlet, and P. Lebars, "An active reconfigurable antenna at 60 ghz based on plate inhomogeneous lens and feeders," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 61, no. 4, pp. 1672-1678, April 2013.
- [67] K. Iizuka, "Technique of fabricating inhomogeneous mediums and the behaviour of a dipole in such a medium," *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers*, vol. 114, no. 5, pp. 595-603, May 1967.
- [68] L. Vegni, F. Bilotti, and A. Toscano, "Analysis of cavity backed rectangular patch antennas with inhomogeneous chiral substrates via a fem-bem formulation," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 37, no. 5, pp. 3260-3263, September 2001.
- [69] C. S. Liang, D. A. Streater, J.-M. Jin, E. Dunn, and T. Rozendal, "A quantitative study of luneberg-lens reflectors," *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 47, no. 2, pp. 30-42, April 2005.

- [70] G. S. Brown and R. i. S. Awadallah, "A luneburg–kline representation for wave propagation in a continuously inhomogeneous medium," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 46, no. 12, pp. 1884-1886, December 1988.
- [71] K. Davis, *Ionospheric radio propagation*. New York: Dover Publications, 1966.
- [72] C. T. Swift, "Radiation patterns of a slotted-cylinder antenna in the presence of an inhomogeneous lossy plasma," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 12, no. 6, pp. 728-738, November 1964.
- [73] A. T. Villeneuve, "Propagation of electromagnetic waves through inhomogeneous slabs," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 13, no. 6, pp. 926-933, November 1965.
- [74] K. Okamoto and T. Okoshi, "Vectorial wave analysis of inhomogeneous optical fibers using finite element method," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 26, no. 2, pp. 109-114, February 1978.
- [75] B. M. Notaroš, "Higher order frequency-domain computational electromagnetics," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 56, no. 8, pp. 2251-2276, August 2008.
- [76] M. S. Tong, Y. Q. Zhang, R. P. Chen, and C. X. Yang, "Fast solutions of volume integral equations for electromagnetic scattering by large highly anisotropic objects," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 62, no. 7, pp. 1429-1436, July 2014.
- [77] R. D. Graglia, P. L. E. Uslenghi, and R. S. Zich, "Moment method with isoparametric elements for three-dimensional anisotropic scatterers," *Proceedings of the IEEE*, vol. 77, no. 5, pp. 750-760, May 1989.
- [78] W. C. Chew, *Waves and fields in inhomogeneous media*. New York: IEEE Press, 1995.
- [79] M. M. Ilić, A. Ž. Ilić, and B. M. Notaroš, "Continuously inhomogeneous higher order finite elements for 3-d electromagnetic analysis," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 57, no. 9, pp. 2798-2803, September 2009.
- [80] A. B. Manić, S. B. Manić, M. M. Ilić, and B. M. Notaroš, "Large anisotropic inhomogeneous higher order hierarchical generalized hexahedral finite elements for 3-d electromagnetic modeling of scattering and waveguide structures," *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 54, no. 7, pp. 1644-1649, 2012.
- [81] E. M. Klopff, N. J. Šekeljić, M. M. Ilić, and B. M. Notaroš, "Optimal modeling parameters for higher order mom-sie and fem-mom electromagnetic simulations," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 60, no. 6, pp. 2790-2801, June 2012.
- [82] S. V. Savić and M. M. Ilić, "Guidelines for utilization of higher order finite elements in uniaxial media," in *Proceedings of The 29th Annual Review of Progress in Applied Computational Electromagnetics, ACES 2013*, Monterey, California, USA, 2013, pp. 18-22.
- [83] A. Alu and N. Engheta, "Optical metamaterials based on optical nanocircuits," *Proceedings of the IEEE*, vol. 99, no. 10, pp. 1669-1681, October 10 2011.
- [84] N. Engheta and R. W. Ziolkowski, Eds., *Metamaterials: Physics and engineering explorations*, 1 ed. New Jersey: Wiley-IEEE Press, 2006.
- [85] C. Caloz and T. Itoh, *Electromagnetic metamaterials: Transmission line theory and microwave applications (the engineering approach)*, 1 ed. New Jersey: Wiley-IEEE Press, 2005.

- [86] F. Capolino, Ed. *Metamaterials handbook: Theory and phenomena of metamaterials*, 1 ed. New York: CRC Press, 2009.
- [87] F. Capolino, Ed. *Metamaterials handbook: Applications of metamaterials*, 1 ed. New York: CRC Press, 2009.
- [88] W. Cai and V. M. Shalaev, *Optical metamaterials: Fundamentals and applications*, 2010 ed. New York: Springer, 2010.
- [89] J. B. Pendry, "Negative refraction," *Contemporary Physics*, vol. 45, no. 3, pp. 191-202, May 1 2004.
- [90] A. Scherer, O. Painter, J. Vuckovic, M. Loncar, and T. Yoshie, "Photonic crystals for confining, guiding, and emitting light," *IEEE Transactions on Nanotechnology*, vol. 1, no. 1, pp. 4-11, March 2002.
- [91] J. B. Pendry, D. Schurig, and D. R. Smith, "Controlling electromagnetic fields," *Science*, vol. 312, no. 5781, pp. 1780-1782, June 23 2006.
- [92] D. Schurig, J. B. Pendry, and D. R. Smith, "Calculation of material properties and ray tracing in transformation media," *Optics Express*, vol. 14, no. 21, pp. 9794-9804, October 16 2006.
- [93] S. A. Cummer, B.-I. Popa, D. Schurig, D. R. Smith, and J. Pendry, "Full-wave simulations of electromagnetic cloaking structures," *Physical Review E: Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, vol. 74, no. 3, p. 036621, September 27 2006.
- [94] F. Zolla, S. Guenneau, A. Nicolet, and J. B. Pendry, "Electromagnetic analysis of cylindrical invisibility cloaks and the mirage effect," *Optics Letters*, vol. 32, no. 9, pp. 1069-1071, April 3 2007.
- [95] Y. Ni, L. Gao, and C.-W. Qiu, "Achieving invisibility of homogeneous cylindrically anisotropic cylinders," *Plasmonics*, vol. 5, no. 3, pp. 251-258, 2010.
- [96] M. Farhat, S. Guenneau, A. B. Movchan, and S. Enoch, "Achieving invisibility over a finite range of frequencies," *Optics Express*, vol. 16, no. 8, pp. 5656-5661, April 7 2008.
- [97] Y. Huang, Y. Feng, and T. Jiang, "Electromagnetic cloaking by layered structure of homogeneous isotropic materials," *Optics Express*, vol. 15, no. 18, pp. 11133-11141, August 21 2007.
- [98] D. Schurig, J. J. Mock, B. J. Justice, S. A. Cummer, J. B. Pendry, A. F. Starr, *et al.*, "Metamaterial electromagnetic cloak at microwave frequencies," *Science*, vol. 314, no. 5801, pp. 977-980, November 10 2006.
- [99] K. Do-Hoon and D. H. Werner, "Transformation electromagnetics: An overview of the theory and applications," *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 52, no. 1, pp. 24-46, 2010.
- [100] L. Brand, *Vector and tensor analysis*. New York: John Wiley and Sons, 1947.
- [101] O. Ozgun and M. Kuzuoglu, "Form invariance of maxwell's equations: The pathway to novel metamaterial specifications for electromagnetic reshaping," *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 52, no. 3, pp. 51-65, June 2010.
- [102] A. J. Ward and J. B. Pendry, "Refraction and geometry in maxwell's equations," *Journal of Modern Optics*, vol. 43, no. 4, pp. 773-793, 1996/04/01 1996.
- [103] E. J. Post, *Formal structure of electromagnetics; general covariance and electromagnetics*. Netherlands, Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1962.

- [104] G. W. Milton, M. Briane, and J. R. Willis, "On cloaking for elasticity and physical equations with a transformation invariant form," *New Journal of Physics*, vol. 8, no. 10, pp. 1-20, October 2006.
- [105] M. Yan, W. Yan, and M. Qiu, "Invisibility cloaking by coordinate transformation." vol. 52, E. Wolf, Ed., ed: Elsevier, 2009, pp. 261-304.
- [106] H. Chen, B.-I. Wu, B. Zhang, and J. A. Kong, "Electromagnetic wave interactions with a metamaterial cloak," *Physical Review Letters*, vol. 99, no. 6, pp. 063903-4, August 6 2007.
- [107] C. Qiu, L. Hu, B. Zhang, B.-I. Wu, S. G. Johnson, and J. D. Joannopoulos, "Spherical cloaking using nonlinear transformations for improved segmentation into concentric isotropic coatings," *Optics Express*, vol. 17, no. 16, pp. 13467-13478, July 21 2009.
- [108] P. Yao, Z. Liang, and X. Jiang, "Limitation of the electromagnetic cloak with dispersive material," *Applied Physics Letters*, vol. 92, no. 3, p. 031111, January 25 2008.
- [109] I. I. Smolyaninov, Y. J. Hung, and C. C. Davis, "Two-dimensional metamaterial structure exhibiting reduced visibility at 500 nm," *Optics Letters*, vol. 33, no. 12, pp. 1342-1344, June 12 2008.
- [110] C. W. Qiu, L. Hu, and S. Zouhdi, "Isotropic non-ideal cloaks providing improved invisibility by adaptive segmentation and optimal refractive index profile from ordering isotropic materials," *Optics Express*, vol. 18, no. 14, pp. 14950-14959, June 29 2010.
- [111] H. Ma, S. Qu, Z. Xu, and J. Wang, "Approximation approach of designing practical cloaks with arbitrary shapes," *Optics Express*, vol. 16, no. 20, pp. 15449-15454, September 16 2008.
- [112] Y. You, G. W. Kattawar, P.-W. Zhai, and P. Yang, "Invisibility cloaks for irregular particles using coordinate transformations," *Optics Express*, vol. 16, no. 9, pp. 6134-6145, April 16 2008.
- [113] M. Rahm, D. Schurig, D. A. Roberts, S. A. Cummer, D. R. Smith, and J. B. Pendry, "Design of electromagnetic cloaks and concentrators using form-invariant coordinate transformations of maxwell's equations," *Photonics and Nanostructures - Fundamentals and Applications*, vol. 6, no. 1, pp. 87-95, 2008.
- [114] S. V. Savić, B. M. Notaroš, and M. M. Ilić, "Conformal cubical 3d transformation-based metamaterial invisibility cloak," *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 30, no. 1, pp. 7-12, January 2013.
- [115] J.-P. Berenger, "A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves," *Journal of Computational Physics*, vol. 114, no. 2, pp. 185-200, October 1994.
- [116] M. M. Botha and D. B. Davidson, "Rigorous, auxiliary variable-based implementation of a second-order abc for the vector fem," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 54, no. 11, pp. 3499-3504, November 2006.
- [117] A. F. Peterson, "Absorbing boundary conditions for the vector wave equation," *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 1, no. 2, pp. 62-64, April 1988.
- [118] J. P. Webb and V. N. Kanellopoulos, "Absorbing boundary conditions for the finite element solution of the vector wave equation," *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 2, no. 10, pp. 370-372, October 1989.

- [119] A. F. Peterson, "Accuracy of 3-d radiation boundary conditions for use with the vector helmholtz equation," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 40, no. 3, pp. 351-355, March 1992.
- [120] V. N. Kanellopoulos and J. P. Webb, "The importance of the surface divergence term in the finite element-vector absorbing boundary condition method," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 43, no. 9, pp. 2168-2170, September 1995.
- [121] S. H. Schot, "Eighty years of sommerfeld's radiation condition," *Historia Mathematica*, vol. 19, no. 4, pp. 385-401, November 1992.
- [122] C. H. Wilcox, "An expansion theorem for electromagnetic fields," *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 9, no. 2, pp. 115-134, May 1956.
- [123] S. V. Savić, A. B. Manić, M. M. Ilić, and B. M. Notaroš, "Efficient higher order full-wave numerical analysis of 3-d cloaking structures," *Plasmonics*, vol. 8, no. 2, pp. 455-463, June 1 2013.
- [124] J. P. Swartz and D. B. Davidson, "Curvilinear vector finite elements using a set of hierarchical basis functions," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 55, no. 2, pp. 440-446, February 2007.
- [125] G. Kang, J. Song, W. C. Chew, K. C. Donepuđi, and J.-M. Jin, "A novel grid-robust higher order vector basis function for the method of moments," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 49, no. 6, pp. 908-915, June 2001.
- [126] W. Ding and G. Wang, "Treatment of singular integrals on generalized curvilinear parametric quadrilaterals in higher order method of moments," *IEEE Antennas And Wireless Propagation Letters*, vol. 8, pp. 1310-1313, 2009.
- [127] M. S. Tong and W. C. Chew, "A higher-order nyström scheme for electromagnetic scattering by arbitrarily shaped surfaces," *IEEE Antennas And Wireless Propagation Letters*, vol. 4, pp. 277-280, 2005.
- [128] E. Martini, G. Pelosi, and S. Selleri, "A hybrid finite-element–modal-expansion method with a new type of curvilinear mapping for the analysis of microwave passive devices," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 51, no. 6, pp. 1712-1717, June 2003.
- [129] L. Valle, F. Rivas, and M. F. Catedra, "Combining the moment method with geometrical modelling by nurbs surfaces and bezier patches," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 42, no. 3, pp. 373-381, March 1994.
- [130] M. D. Davidović, B. M. Notaroš, and M. M. Ilić, "B-spline entire-domain higher order finite elements for 3-d electromagnetic modeling," *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, vol. 22, no. 10, pp. 497-499, October 2012.
- [131] M. D. Davidović and M. M. Ilić, "Double b-spline finite elements for 3d electromagnetic modeling," *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 56, no. 3, pp. 619-624, March 2014.
- [132] M. M. Ilić, S. V. Savić, A. Ž. Ilić, and B. M. Notaroš, "Constant speed parametrization mapping of curved boundary surfaces in higher-order moment-method electromagnetic modeling," *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, vol. 10, pp. 1457-1460, December 2011.
- [133] B. O'Neill, *Elementary differential geometry*, 2 ed. Burlington, Massachusetts: Academic Press, 2006.

- [134] J. Kataja and K. Nikoskinen, "The parametric optimization of wire dipole antennas," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 59, no. 2, pp. 350-356, February 2011.
- [135] B. M. Kolundžija and B. D. Popović, "Entire-domain galerkin method for analysis of metallic antennas and scatterers," *IEE Proceedings H Microwaves, Antennas and Propagation*, vol. 140, no. 1, pp. 1-10, February 1993.
- [136] J. Arvo, R. L. Cook, A. S. Glassner, E. Haines, P. Hanrahan, P. S. Heckbert, *et al.*, A. S. Glassner, Ed. *An introduction to ray tracing*, 1 ed. San Diego, California: Academic Press, 1989.
- [137] A. De Cusatis Junior, L. H. De Figueiredo, and M. Gattass, "Interval methods for ray casting implicit surfaces with affine arithmetic," in *XII Brazilian Symposium on Computer Graphics and Image Processing*, Campinas, Sao Paulo, 1999, pp. 65-71.
- [138] G. Casciola and S. Morigi, "Reparametrization of nurbs curves," *International Journal of Shape Modeling*, vol. 2, no. 2&3, pp. 1-14, September 1996.
- [139] A. C. Woo, H. T. G. Wang, M. J. Schuh, and M. L. Sanders, "Benchmark radar targets for the validation of computational electromagnetics programs," *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 35, no. 1, pp. 84-89, February 1993.
- [140] "Feko," Altair Development S.A. (Pty) Ltd., 2011 Available: <http://feko.info/applications/RCS>.
- [141] J. P. Webb, "Hierarchical vector basis functions of arbitrary order for triangular and tetrahedral finite elements," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 47, no. 8, pp. 1244-1253, August 1999.
- [142] E. P. Furlani and A. Baev, "Optical nanotrapping using cloaking metamaterial," *Physical Review E: Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, vol. 79, no. 2, p. 026607, February 19 2009.
- [143] B. Zhang, H. Chen, and B.-I. Wu, "Limitations of high-order transformation and incident angle on simplified invisibility cloaks," *Optics Express*, vol. 16, no. 19, pp. 14655-14660, September 3 2008.
- [144] A. Alù and N. Engheta, "Plasmonic materials in transparency and cloaking problems: Mechanism, robustness, and physical insights," *Optics Express*, vol. 15, no. 6, pp. 3318-3332, March 19 2007.
- [145] "Wipl-d pro," 11.0 WIPL-D d.o.o., 2013 Available: <http://www.wipld.com>.
- [146] M. D. Guild, M. R. Haberman, and A. Alù, "Plasmonic cloaking and scattering cancelation for electromagnetic and acoustic waves," *Wave Motion*, vol. 48, no. 6, pp. 468-482, September 2011.
- [147] G. R. Markall, A. Slemmer, D. A. Ham, P. H. J. Kelly, C. D. Cantwell, and S. J. Sherwin, "Finite element assembly strategies on multi- and many-core architectures," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, pp. 1-18, January 19 2012.
- [148] P. E. J. Vos, S. J. Sherwin, and R. M. Kirby, "From h to p efficiently: Implementing finite and spectral/hp element methods to achieve optimal performance for low- and high-order discretisations," *Journal of Computational Physics*, vol. 229, no. 13, pp. 5161-5181, July 1 2010.
- [149] A. Dziekonski, P. Sypek, A. Lamecki, and M. Mrozowski, "Finite element matrix generation on a gpu," *Progress In Electromagnetics Research*, vol. 128, pp. 249-265, May 31 2012.

Прилог

Тензори параметара средине сферне прекривке за смањење радарског попречног пресека

Посматрајмо пресликавање (4.81) између (оригиналног) сферног g -координатног система ($g^1 = r$, $g^2 = \theta$ и $g^3 = \phi$) и (новог) сферног h -координатног система ($h^1 = r^{(h)}$, $h^2 = \theta^{(h)}$ и $h^3 = \phi^{(h)}$). Ово пресликавање се користи приликом конструкције сферне прекривке за смањење радарског попречног пресека. Мешовити тензор $\overset{=}{A}_j$ пресликавања између g - и h -координатног система [чији су елементи описани у (4.49)] је

$$\overset{=}{A}_j = \begin{bmatrix} \frac{R_2 - R_1}{R_2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{П } 1)$$

Користећи се изразима (4.74) и (4.76) могуће је одредити контраваријантне тензоре параметара средине у (новом) h -координатном систему, а касније ове тензоре интерпретирати као тензоре средине у (оригиналном) g -координатном систему, као што је описано у (4.79) и (4.80). На овај начин параметре средине сферне прекривке за смањење радарског попречног пресека представили бисмо помоћу контраваријантних тензора. Међутим, параметре средине згодно је представити помоћу тензора неког од стандардних (ортонормалних) координатних система (као што су Декартов, сферни или цилиндрични координатни) систем. На тај начин стиче се бољи (практичан) увид у особине параметара средине (на пример, лакше се тумаче гранични услови). У овоме прилогу одредићемо параметре средине сферне прекривке за смањење радарског попречног пресека изражене помоћу сферних тензора (тј. тензора чији елементи

одговарају компонентама сферног координатног система). Извођење ће бити дато за тензор пермеабилности, а аналогно извођење важи и за тензор пермитивности.

Произвољна векторска функција \mathbf{F} може се изразити помоћу контраваријантних компоненти и примарних вектора у (оригиналном сферном) g -координатном систему као

$$\mathbf{F} = F_{(g)}^1 \mathbf{a}_1^{(g)} + F_{(g)}^2 \mathbf{a}_2^{(g)} + F_{(g)}^3 \mathbf{a}_3^{(g)}, \quad (\text{П } 2)$$

при чему се примарни вектори могу изразити помоћу ортова (оригиналног) сферног координатног система као

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1^{(g)} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial g^1} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \mathbf{i}_r, \\ \mathbf{a}_2^{(g)} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial g^2} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = r \mathbf{i}_\theta \text{ и} \\ \mathbf{a}_3^{(g)} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial g^3} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = r \sin \theta \mathbf{i}_\phi. \end{aligned} \quad (\text{П } 3)$$

У претходним изразима вектор \mathbf{r} представља (произвољан) вектор положаја (независан од координатног система). Векторска функција \mathbf{F} се даље може изразити помоћу компоненти (F_r, F_θ, F_ϕ) и ортова $(\mathbf{i}_r, \mathbf{i}_\theta, \mathbf{i}_\phi)$ (оригиналног) сферног координатног система, а они се даље могу тумачити као контраваријантне компоненте и примарни вектори v -координатног система, респективно. Тада се функција \mathbf{F} може записати и као

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= F_r \mathbf{i}_r + F_\theta \mathbf{i}_\theta + F_\phi \mathbf{i}_\phi, \\ F_r &= F_{(v)}^1, F_\theta = F_{(v)}^2, F_\phi = F_{(v)}^3, \\ \mathbf{i}_r &= \mathbf{a}_1^{(v)}, \mathbf{i}_\theta = \mathbf{a}_2^{(v)}, \mathbf{i}_\phi = \mathbf{a}_3^{(v)}, \\ \mathbf{F} &= F_{(v)}^1 \mathbf{a}_1^{(v)} + F_{(v)}^2 \mathbf{a}_2^{(v)} + F_{(v)}^3 \mathbf{a}_3^{(v)}. \end{aligned} \quad (\text{П } 4)$$

Комбинацијом израза (П 2)-(П 4) закључујемо да између контраваријантних компоненти v - и g -координатног система важе релације

$$F_{(g)}^1 = F_{(v)}^1, F_{(g)}^2 = \frac{1}{r} F_{(v)}^2 \text{ и } F_{(g)}^3 = \frac{1}{r \sin \theta} F_{(v)}^3. \quad (\text{П } 5)$$

Поредећи изразе (4.11) и (П 5) закључујемо да је матрица (мешовити тензор) пресликавања између v - и g -координатног система

$$\overline{\overline{\mathbf{B}}}_j^i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r \sin \theta} \end{bmatrix}. \quad (\text{П } 6)$$

Оваквом процедуром могуће је одредити матрицу пресликавања $\overline{\overline{\mathbf{B}}}_j^i$ између ν - и g -координатног система без потребе за познавањем аналитичких веза између (уопштених) координата два координатна система, попут оних у (4.1) и (4.2). Користећи се (мешовитим) тензором $\overline{\overline{\mathbf{B}}}_j^i$ и једначином облика (4.74) (у којој је тензор $\overline{\overline{\mathbf{A}}}_j^i$ потребно заменити тензором $\overline{\overline{\mathbf{B}}}_j^i$) може се доћи до везе између сферног тензора пермеабилности у ν -координатном систему и контраваријантног тензора у g -координатном систему.

Векторску функцију \mathbf{F} можемо изразити и помоћу контраваријантних компоненти и примарних вектора h -координатног система као

$$\mathbf{F} = F_{(h)}^1 \mathbf{a}_1^{(h)} + F_{(h)}^2 \mathbf{a}_2^{(h)} + F_{(h)}^3 \mathbf{a}_3^{(h)}, \quad (\text{П } 7)$$

при чему се примарни вектори могу изразити помоћу ортова (новог) сферног h -координатног система

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1^{(h)} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial h^1} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r^{(h)}} = \mathbf{i}_r^{(h)}, \\ \mathbf{a}_2^{(h)} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial h^2} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta^{(h)}} = r^{(h)} \mathbf{i}_\theta^{(h)} \text{ и} \\ \mathbf{a}_3^{(h)} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial h^3} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi^{(h)}} = r^{(h)} \sin \theta^{(h)} \mathbf{i}_\phi^{(h)}. \end{aligned} \quad (\text{П } 8)$$

Ортови (новог) сферног h -координатног система поклапају се са ортовима (оригиналног) g -координатног система ($\mathbf{i}_r = \mathbf{i}_r^{(h)}$, $\mathbf{i}_\theta = \mathbf{i}_\theta^{(h)}$, и $\mathbf{i}_\phi = \mathbf{i}_\phi^{(h)}$), а ознака (h) остављена је због општости. Векторска функција \mathbf{F} се даље може изразити помоћу компоненти $(F_r^{(h)}, F_\theta^{(h)}, F_\phi^{(h)})$ и ортова $(\mathbf{i}_r^{(h)}, \mathbf{i}_\theta^{(h)}, \mathbf{i}_\phi^{(h)})$ (новог) сферног h -координатног система, а они се даље могу тумачити као контраваријантне компоненте и примарни вектори u -координатног система, респективно. Тада се функција \mathbf{F} може записати као

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} &= F_r^{(h)} \mathbf{i}_r^{(h)} + F_\theta^{(h)} \mathbf{i}_\theta^{(h)} + F_\phi^{(h)} \mathbf{i}_\phi^{(h)}, \\
F_r^{(h)} &= F_{(u)}^1, F_\theta^{(h)} = F_{(u)}^2, F_\phi^{(h)} = F_{(u)}^3, \\
\mathbf{i}_r^{(h)} &= \mathbf{a}_1^{(u)}, \mathbf{i}_\theta^{(h)} = \mathbf{a}_2^{(u)}, \mathbf{i}_\phi^{(h)} = \mathbf{a}_3^{(u)}, \\
\mathbf{F} &= F_{(u)}^1 \mathbf{a}_1^{(u)} + F_{(u)}^2 \mathbf{a}_2^{(u)} + F_{(u)}^3 \mathbf{a}_3^{(u)}.
\end{aligned} \tag{П 9}$$

Комбинацијом израза (П 7)-(П 9) закључујемо да између контраваријантних компоненти h - и u -координатног система важе релације

$$F_{(u)}^1 = F_{(h)}^1, F_{(u)}^2 = r^{(h)} F_{(h)}^2 \text{ и } F_{(u)}^3 = r^{(h)} \sin \theta^{(h)} F_{(h)}^3. \tag{П 10}$$

Поредећи изразе (4.11) и (П 10) закључујемо да је матрица (мешовити тензор) пресликавања између h - и u -координатног система

$$\overline{\overline{C}}_j^i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^{(h)} & 0 \\ 0 & 0 & r^{(h)} \sin \theta^{(h)} \end{bmatrix}. \tag{П 11}$$

Користећи се (мешовитим) тензором $\overline{\overline{C}}_j^i$ и једначином облика (4.74) (у којој је тензор $\overline{\overline{A}}_j$ потребно заменити тензором $\overline{\overline{C}}_j^i$) може се доћи до везе између контраваријантног тензора пермеабилности у h -координатном систему и сферног тензора пермеабилности у u -координатном систему. Координатни системи g - и h - су стандардни координатни системи које смо користили и у остатку текста (а који су уведени у поглављу 4). Координатни системи v - и u - уведени су у овоме одељку како бисмо могли да одредимо сферне тензоре (тензоре чији су елементи сферне компоненте) параметара средине прекривке за смањење радарског попречног пресека.

Пођимо од сферног тензора пермеабилности $\mu_{(v)}^{=r,\theta,\phi}$ у v -координатном систему.

Применом тензора $\overline{\overline{B}}_j^i$ добијамо контраваријантни тензор пермеабилности у g -координатном систему. Даље, полазећи од контраваријантног тензора у g -координатном систему и применом тензора $\overline{\overline{A}}_j^i$ добијамо контраваријантни тензор пермеабилности у h -координатном систему. Финално, полазећи од контраваријантног тензора из h -координатног система и применом тензора $\overline{\overline{C}}_j^i$

одређујемо сферни тензор пермеабилности у u -координатом систему. Сукцесивном применом израза облика (4.74) овај поступак се може записати као

$$\hat{\mu}_{(u)}^{=r,\theta,\phi} = \frac{\overset{=i}{C}_n \cdot \left(\overset{=n}{A}_i \cdot \left(\overset{=i}{B}_n \cdot \overset{=r,\theta,\phi}{\mu}_{(v)} \cdot \overset{=j}{B}_m \right) \cdot \overset{=m}{A}_j \right) \cdot \overset{=j}{C}_m}{\det(\overset{=j}{A}_i) \det(\overset{=j}{B}_i) \det(\overset{=j}{C}_i)}. \quad (\text{П } 12)$$

Пошто смо приликом конструкције сферне прекривке за смањење радарског попречног пресека расејача пошли од хомогене изотропне средине (на пример, ваздуха) описаног сферним тензором пермеабилности

$$\overset{=r,\theta,\phi}{\mu}_{(v)} = \mu_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{П } 13)$$

заменом израза (4.81), (П 1), (П 6), (П 11) и (П 13) у (П 12) добијамо

$$\hat{\mu}_{(u)}^{=r,\theta,\phi} = \mu_0 \begin{bmatrix} \frac{R_2(r^{(h)} - R_1)^2}{(R_2 - R_1)r^{(h)2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R_2}{R_2 - R_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R_2}{R_2 - R_1} \end{bmatrix}. \quad (\text{П } 14)$$

Интерпретирајући сферни тензор $\hat{\mu}_{(u)}^{=r,\theta,\phi}$ из (новог) u -координатног система као сферни тензор у (оригиналном) v -координатном систему [тј. заменом $r^{(h)} \rightarrow r$ у изразу (П 14), као што је описано у (4.77)-(4.80)], долазимо до сферних тензора параметара средине сферне прекривке за смањење радарског попречног пресека (4.82).

Биографија аутора

Слободан В. Савић рођен је 28. јуна 1985. године у Београду, где је завршио основну и средњу електротехничку школу „Никола Тесла“, обе као носилац Вукове дипломе и ученик генерације. Електротехнички факултет у Београду уписао је 2004. године. Дипломирао је 27. септембра 2008. године на Одсеку за телекомуникације, Смер микроталасна техника, са просечном оценом 9,67, по четворогодишњем студијском програму. Дипломски рад, „Електродинамичка анализа расејача хибридном ФЕМ-МоМ методом вишег реда“, одбранио је са оценом 10. Након тога уписао је дипломске академске – мастер студије на Смеру за микроталасну технику, које је завршио 28. септембра 2009. године са просечном оценом 10,0, по једногодишњем студијском програму. Мастер рад, „Ефикасно моделовање сложених електромагнетских структура засновано на новом алгоритму просторне сегментације хексаедарским коначним елементима“, одбранио је са оценом 10. Након тога уписао је докторске студије на Смеру за микроталасну технику. На докторским студијама положио је све предмете са просечном оценом 10,0.

За сарадника у настави на годину дана при Катедри за општу електротехнику изабран је 14. априла 2009. године. За асистента за ужу научну област Електромагнетика, антене и микроталаси, на Катедри за општу електротехнику, изабран је 25. маја 2010.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а Слободан Савић

број индекса 2009/5017

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

**Закривљени континуално нехомогени и неизотропни коначни елементи
вишег реда за великодоменско електромагнетско моделовање**

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 25. 05. 2015. год.

Слободан Савић

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Слободан Савић

Број индекса 2009/5017

Студијски програм Електротехника и рачунарство

Наслов рада **Закривљени континуално нехомогени и неизотропни коначни елементи вишег реда за великодоменско електромагнетско моделовање**

Ментор др Милан Илић, ванредни професор

Потписани/а Слободан Савић

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 25. 05. 2015. год.

Слободан Савић

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

**Закривљени континуално нехомогени и неизотропни коначни елементи
вишег реда за великодоменско електромагнетско моделовање**

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 25. 05. 2015. год.

Слободан Сабут