

## ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

## ИЗВЕШТАЈ О ОЦЕНИ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

<b>I ПОДАЦИ О КОМИСИЈИ</b>
<p>1. Датум и орган који је именовео комисију 21.1.2016. године, Наставно-научно веће Природно-математичког факултета Универзитета у Новом Саду</p> <p>2. Састав комисије са знаком имена и презимена сваког члана, звања, назива уже научне области за коју је изабран у звање, датума избора у звање и назив факултета, установе у којој је члан комисије запослен:</p> <p>1. др Драгослав Херцег, редовни професор Природно-математичког факултета Универзитета у Новом Саду, ужа научна област нумеричка математика, изабран у звање 25.5.1989, председник</p> <p>2. др Хелена Зарин, редовни професор Природно-математичког факултета Универзитета у Новом Саду, ужа научна област нумеричка математика, изабрана у звање 1.12. 2013, ментор</p> <p>3. др Љиљана Теофанов, ванредни професор Факултета техничких наука Универзитета у Новом Саду, ужа научна област математика, изабрана у звање 1.12.2014, ментор</p> <p>4. др Зорица Узелац, редовни професор Факултета техничких наука Универзитета у Новом Саду, ужа научна област математика, изабрана у звање 1.4.2000, члан</p>
<b>II ПОДАЦИ О КАНДИДАТУ</b>
<p>1. Име, име једног родитеља, презиме: Мирјана, Миливој, Брдар</p> <p>2. Датум рођења, општина, држава: 13.03.1979, Сомбор, Србија</p> <p>3. Назив факултета, назив студијског програма дипломских академских студија – мастер и стечени стручни назив: Природно-математички факултет Универзитета у Новом Саду, студијски програм: дипломирани математичар, стручни назив: дипломирани математичар</p> <p>4. Година уписа на докторске студије и назив студијског програма докторских студија: 2010, Математика</p> <p>5. Назив факултета, назив магистарске тезе, научна област и датум одбране: -</p> <p>6. Научна област из које је стечено академско звање магистра наука: -</p>
<b>III НАСЛОВ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ</b>
<p>“Двопараметарски сингуларно пертурбовани контурни проблеми на мрежама различитог типа“</p>

#### IV ПРЕГЛЕД ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ:

Навести кратак садржај са назнаком броја страна, поглавља, слика, шема, графикана и сл.

Докторска дисертација је написана на 160 страна на српском језику. Садржи 5 поглавља у следећем редоследу:

1. Увод
2. Поступци коначних елемената
3. Једнодимензионални проблем конвекције-реакције-дифузије
4. Дводимензионални проблем конвекције-реакције-дифузије
5. Закључак и даљи правци истраживања.

Дисертација садржи и библиографију са 107 библиографских јединица, биографију кандидаткиње, 35 графика, 5 слика и 25 табела. Поред наведеног, садржи и кључне документацијске информације на српском и енглеском језику, предговор и списак ознака.

#### V ВРЕДНОВАЊЕ ПОЈЕДИНИХ ДЕЛОВА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ:

Наслов докторске дисертације је јасно формулисан и одражава текст и садржај истраживања.

У предговору дисертације је представљена мотивација за изучавање сингуларно пертурбованих проблема методом коначних елемената и дат је сажет преглед садржаја.

У првом поглављу Увод формално је уведен појам сингуларно пертурбованих проблема, као и главни циљ при констукцији нумеричких метода за њихово решавање. Укратко је описан поступак коначних елемената на слојно-адаптивним мрежама (Бахваловљевој, Дуран-Шишкиновој и Дурановој), и представљен је предмет изучавања дисертације – проблем конвекције-реакције-дифузије у једној и две димензије. Објашњен је појам слоја који карактерише ове проблеме и истакнути су главни резултати добијени у дисертацији. Подробно је дат преглед садржаја.

Наредно поглавље је посвећено прегледу основних појмова и неких теоријских резултата из поља функционалне анализе који ће се користити у даљем раду. Описан је поступак коначних елемената на примеру парцијалне диференцијалне једначине другог реда. Наведене су теореме о егзистенцији слабог решења и оцени грешке. Објашњен је појам коначног елемента и дати су неки примери са илустрацијама. Представљен је Лагранжов интерполант и Клеманов квази-интерполант.

У Глави 3 је најпре представљен линеарни једнодимензионални проблем конвекције-реакције-дифузије са детаљним освртом на литературу у којој је разматран, како поступцима коначних елемената, тако и разним диференцијалним шемама. Поменути су и радови који се баве једнопараметарским једнодимензионалним сингуларно пертурбованим проблемима, а из којих су потекле идеје за анализу проблема у тези. Представљена је слаба формулација полазног проблема, Галеркинов метод коначних елемената и декомпозиција решења проблема. Уведене су слојно-адаптивне мреже: Шишкинова, Бахваловљева, Дуран-Шишкинова и Дуранова и изведене бројне леме о њиховим особинама потребним за даљу анализу. Све мреже су графички представљене за карактеристичне изборе пертурбационих параметара. Уз познате информације о понашању тачног решења и његових извода, за довољно глатке полазне функције доказане су теореме о грешци интерполације и дискретизације Галеркиновог поступка коначних елемената на Бахваловљевој, Дуран-Шишкиновој и Дурановој мрежи, редом. У анализи грешке на Бахваловљевој мрежи коришћен је Клеманов квази-интерполант због поседовања особине стабилности, док је на осталим поменутих мрежама коришћен стандардни Лагранжов интерполант. Показана је униформна конвергенција Галеркиновог поступка коначних елемената у енергетској норми за проблем конвекције-реакције-дифузије. Добијени резултати су верификовани добро одабраним нумеричким експериментима. Сва тестирања у овом поглављу су обављена у програмском пакету *Mathematica*. Анализа грешке, као и нумерички резултати јасно показују да су Дуранова, а онда и Дуран-Шишкинова мрежа једноставне за коришћење, поготово у односу на Бахваловљеву мрежу, а и дају резултате веће тачности за одређени избор пертурбационих параметара. Оригинални резултати овог дела тезе који се односе на Бахваловљеву мрежу су публиковани у *Journal of Computational and Applied Mathematics* (M21 часопис са SCI листе), а на рекурзивно задатим мрежама у *Applied Mathematics and Computation* (M21 часопис са SCI листе).

У четвртом поглављу тезе описан је дводимензионални линеарни проблем конвекције-реакције-дифузије и његово нумеричко решавање помоћу поступка коначних елемената. Описане су врсте слојева који могу да се јаве код поменутих проблема и представљени познати резултати на Шишкиној мрежи. Приказан је Галеркинов поступак коначних елемената на троугловима и четвороугловима. Конструисана је Дуран-Шишкинова и Дуранова мрежа, обе прилагођене слојевима који се појављују у решењу проблема. Представљене су особине корака и графички представљени неки примери ових мрежа. У анализи грешке је употребљен Лагранжов интерполант. Користећи стандардну оцену грешке интерполације, инверзне оцене и познати резултат о декомпозицији решења и понашању тачног решења и његових извода, изведене су оцене грешке интерполације, дискретизације и оцене грешке у енергетској норми поступка коначних елемената са део по део билинеарним функцијама. Нумеричким експериментима потврђена су теоријска тврђења. Сва тестирања у овом поглављу су обављена у програмском пакету *Matlab*. Дата су поређења са резултатима добијеним на Шишкиној и Бахваловљевој мрежи. Добијени резултати су бољи од резултата на Шишкиној мрежи, а упоредиви са резултатима на Бахваловљевој мрежи. Главне резултате овог поглавља кандидаткиња је презентovala на *12-th Annual Workshop on Numerical methods for problems with layer phenomena* одржаном у априлу 2015. у Дрездену.

Последње поглавље је посвећено закључку у ком је истакнуто да је доказан први ред конвергенције у енергетској норми Галеркиновог поступка коначних елемената за сингуларно пертурбоване проблеме са два мала параметра, што представља оригиналан допринос теорији коначних елемената. Изложене су претпоставке да би се добијени ред конвергенције могао побољшати применом „streamline-diffusion“ поступка коначних елемената и увођењем полиномних функција вишег степена којима се врши апроксимација решења посматраних проблема. Предложено је и анализирање проблема у балансираној норми за коју је познато да боље описује слојеве него енергетска норма.

У делу Списак ознака дате су најчешће коришћене ознаке.

Избор референци и за једnodимензионални и за дводимензионални проблем је адекватан и обухвата најважније савремене методе и најновија истраживања на пољу сингуларно пертурбованих проблема, нарочито проблема конвекције-реакције-дифузије.

## **VI СПИСАК НАУЧНИХ И СТРУЧНИХ РАДОВА КОЈИ СУ ОБЈАВЉЕНИ ИЛИ ПРИХВАЋЕНИ ЗА ОБЈАВЉИВАЊЕ НА ОСНОВУ РЕЗУЛТАТА ИСТРАЖИВАЊА У ОКВИРУ РАДА НА ДОКТОРСКОЈ ДИСЕРТАЦИЈИ**

Таксативно навести називе радова, где и када су објављени. Прво навести најмање један рад објављен или прихваћен за објављивање у часопису са ISI листе односно са листе министарства надлежног за науку када су у питању друштвено-хуманистичке науке или радове који могу заменити овај услов до 01. јануара 2012. године. У случају радова прихваћених за објављивање, таксативно навести називе радова, где и када ће бити објављени и приложити потврду о томе.

Mirjana Brdar, Helena Zarin, A singularly perturbed problem with two parameters on a Bakhvalov-type mesh, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 292 (2016), 307-319.

Mirjana Brdar, Helena Zarin, On graded meshes for a two-parameter singularly perturbed problem, *Applied Mathematics and Computation*, 282 (2016), 97-107.

## **VII ЗАКЉУЧЦИ ОДНОСНО РЕЗУЛТАТИ ИСТРАЖИВАЊА**

У тези су разматрани сингуларно пертурбовани проблеми са два мала параметра, односно проблеми конвекције-реакције-дифузије, у једној и две димензије и добијени су следећи резултати:

- За једnodимензионални случај је приказан Галеркинов поступак са линеарним коначним елементима. Уведене су слојно-адаптивне мреже за наведени проблем: Бахваловљева, Дуран-Шишкинова и Дуранова мрежа. Дате су теореме о грешкама интерполације и дискретизације. Доказана је униформна конвергенција нумеричког поступка у енергетској норми.
- У дводимензионалном случају је проблем постављен на јединичном квадрату и дискретизован је помоћу поступка коначних елемената са део по део билинеарним функцијама. Конструисане су Дуран-Шишкинова и Дуранова мрежа. Сложенијом анализом су изведене теореме о оцени грешке интерполације и дискретизације и доказана униформна

<p>конвергенција датог нумеричког поступка у енергетској норми.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Сви теоретски резултати су нумерички верификовани на неколико адекватних примера, варирајући посматрани тест проблем, слојно-адаптивне мреже и одговарајући број чворова мреже, као и вредности пертурбационих параметара. Експериментална поређења са резултатима добијеним на Шишкиновој, као и Бахваловљевој мрежи показују ефикасност рекурзивно задатих мрежа.</li> <li>- Прецизно су дате смернице за даља истраживања и истакнута отворена питања за сингуларно пертурбоване проблеме са два мала параметра.</li> </ul>
<p><b>VIII ОЦЕНА НАЧИНА ПРИКАЗА И ТУМАЧЕЊА РЕЗУЛТАТА ИСТРАЖИВАЊА</b>  Експлицитно навести позитивну или негативну оцену начина приказа и тумачења резултата истраживања.</p> <p>Резултате истраживања добијених у овој докторској дисертацији, кандидаткиња је приказала систематично и прегледно. Изложена материја је презентована на квалитетан начин, и за проблем у једној и две димензије. Извршена је адекватна селекција литературе са познатим резултатима. Теоретски резултати су математички коректно доказани кроз више лема и теорема, а оцене из оригиналних тврђења су тестиране на довољном броју примера. Резултати експеримената су приказани табеларно и графички, и изведени су јасни и прецизни закључци. Комисија позитивно оцењује начин приказа и тумачења резултата истраживања.</p>
<p><b>IX КОНАЧНА ОЦЕНА ДОКТОРСKE ДИСЕРТАЦИЈЕ:</b>  Експлицитно навести да ли дисертација јесте или није написана у складу са наведеним образложењем, као и да ли она садржи или не садржи све битне елементе. Дати јасне, прецизне и концизне одговоре на 3. и 4. питање:</p>
<p>1. Да ли је дисертација написана у складу са образложењем наведеним у пријави теме?</p> <p>Докторска дисертација је написана у складу са образложењем наведеним у пријави теме.</p>
<p>2. Да ли дисертација садржи све битне елементе?</p> <p>Докторска дисертација је прегледно и добро написана. Организована је у пет поглавља, при чему трећа и четврта глава чине највећи и потпуно оригинални део тезе. Кратак уводни део и друго поглавље имају за циљ да упознају читаоца са темом истраживања и поступком коначних елемената. Сва оригинална тврђења су доказана, а докази су математички коректно изведени. Списак литературе на крају дисертације се састоји од 107 референци које су у тексту цитиране на исправан начин. Према свом садржају и наведеним аргументима, докторска дисертација задовољава критеријуме за стицање докторског звања из области математичких наука.</p>
<p>3. По чему је дисертација оригиналан допринос науци?</p> <p>Дисертација садржи оригинални научни допринос из области нумеричке математике, који се огледа у извођењу реда конвергенције поступка коначних елемената за проблеме конвекције-реакције-дифузије. Дефинисане су слојно-адаптивне мреже: Бахваловљева, Дуран-Шишкинова и Дуранова, као и поступак коначних елемената са део по део линеарним функцијама (у једној димензији) и део по део билинеарним функцијама (у две димензије). Извршена је њихова теоријска анализа и показане су грешке интерполације и дискретизације и униформна конвергенција првог реда на поменутих мрежама. Теоријски резултати су експериментално потврђени на релевантним примерима.</p>
<p>4. Недостаци дисертације и њихов утицај на резултат истраживања</p> <p>Дисертација нема недостатака.</p>

**X ПРЕДЛОГ:**

На основу укупне оцене дисертације, Комисија предлаже да се докторска дисертација кандидата Мирјане Брдар, под називом “Двопараметарски сингуларно пертурбовани контурни проблеми на мрежама различитог типа“, прихвати, а кандидаткињи одобри одбрана.

У Новом Саду, 4.3.2016.

---

др Драгослав Херцег  
редовни професор ПМФ-а у Новом Саду  
председник

---

др Хелена Зарин  
редовни професор ПМФ-а у Новом Саду  
ментор

---

др Љиљана Теофанов  
ванредни професор ФТН-а у Новом Саду  
ментор

---

др Зорица Узелац  
редовни професор ФТН-а у Новом Саду  
члан