

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФИЛОЗОФСКИ ФАКУЛТЕТ
ДС/СС 05/4-02 бр. 1607/1-ХИ/7
06.11.2014. године

На основу члана 231. став 1. алинеја 17. и члана 278. Статута Факултета, Наставно-научно веће Филозофског факултета у Београду је на својој XV редовној седници, одржаној дана 06.11.2014. године, донело следећу

О Д Л У К У

Прихвата се Извештај комисије са оценом докторске дисертације: ГЕДЕЛ О АКСИОМАТИЗАЦИЈИ ТЕОРИЈЕ СКУПОВА, кандидата Милоша Ацића и одобрава усмена одбрана.

Универзитет је дао сагласност на предлог теме 13.03.2012. године.

Кандидат Милош Ацић објавио је рад: О странпутицама натурализма, *Theoria*, 3 (2012).

Доставити:

1x Универзитету у Београду
1x Комисији
1x Стручном сараднику за
докторске дисертације
1x Шефу Одсека за правне послове
1x Архиви

ПРЕДСЕДНИК ВЕЋА

Проф. др Милош Арсенијевић

Факултет <u>Филозофски</u>	УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ Веће научних области друштвено-хуманистичких наука (Назив већа научних области коме се захтев упућује)
04/1-2 бр.6/2589 (број захтева)	
7.11.2014. (датум)	

ЗАХТЕВ
за давање сагласности на реферат о урађеној докторској дисертацији

Молимо да, сходно члану 46. ст. 5. тач. 3. Статута Универзитета у Београду («Гласник Универзитета», бр. 131/06), дате сагласност на реферат о урађеној докторској дисертацији кандидата

Милоша (Радован) Аџића

(име, име једног од родитеља и презиме)

КАНДИДАТ

Милош (Радован) Аџић

(име, име једног од родитеља и презиме)

пријавио је докторску дисертацију под насловом: _____

Гедел о аксиоматизацији теорије скупова

06-17372/17-

Универзитет је дана 13.03.2012. својим актом под бр 12 дао сагласност на предлог теме докторске дисертације која је гласила: _____

Гедел о аксиоматизацији теорије скупова

Комисија за оцену и одбрану докторске дисертације кандидата

Милоша (Радован) Аџића

(име, име једног од родитеља и презиме)

образована је на седници одржаној 25.09.2014. одлуком факултета под бр 1307/1-XII/2 у саставу: _____

Име и презиме члана комисије	звање	научна област	установа у којој је запослен
1. др Коста Дошен	редовни проф.	филозофија	Филозофски ф.
2. др Живан Лазовић	редовни проф	исто	Филозофски ф.
3. др Стево Годорчевић	редовни проф.	математика	Универзитет у Торонту
4. Др Александар Перовић	доцент	филозофија	Саобраћајни ф.

Наставно-научно веће факултета прихватило је извештај Комисије за оцену и одбрану докторске дисертације на седници одржаној дана 6.11.2014.

Прилог: 1. Извештај комисије са предлогом 2. Акт Наставно-научног већа факултета о усвајању извештаја 3. Примедбе дате у току стављања извештаја на увид јавности, уколико је таквих примедби било.	ДЕКАН ФАКУЛТЕТА Проф. др Милош Арсенијевић
--	---

НАСТАВНО НАУЧНОМ ВЕЋУ
ФИЛОЗОФСКОГ ФАКУЛТЕТА
УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ

Реферат о завршеној докторској дисертацији
ГЕДЕЛ О АКСИОМАТИЗАЦИЈИ ТЕОРИЈЕ СКУПОВА
докторанда МИЛОША АЦИЋА

Одлуком Наставно-научног већа Филозофског факултета од 25.9.2014. изабрани смо у комисију за анализу и оцену докторске дисертације *Гедел о аксиоматизацији теорије скупова* докторанда Милоша Ацића. На основу увида у рад кандидата, подносимо Научном већу Филозофског факултета овај извештај.

1. Основни подаци о кандидату и дисертацији

Милош Ацић се родио 1982. године. Завршио је гимназију у Смедеревској Паланци. Студије филозофије на Одељењу за филозофију Филозофског факултета у Београду уписао је 2002. године, а завршио 2008. године са просечном оценом 9,82 и оценом 10 на дипломском испиту. Он је током својих студија филозофије имао леп успех у свим предметима, али је показао нарочиту склоност ка логици. Његов дипломски рад из те области под насловом *Истраживања о законима асоцијативности и комутативности*, одбрањен 16.06.2008, превазилази у многоне уобичајене захтеве који се постављају за дипломске радове на Одељењу за филозофију. У њему је Ацић показао да је упућен у обимну и веома специјализовану литературу. Показао је и завидан ниво зрелости и оригиналности.

На докторске студије филозофије на Одељењу за филозофију Филозофског факултета уписао се школске године 2008-2009. На тим студијама предмети које је изабрао су углавном били усмерени ка логици, и он је положио четири предмета (ТЕОРИЈА ДЕДУКЦИЈЕ, ФИЛОЗОФИЈА И ПОСЕБНЕ НАУКЕ, ТРАДИЦИОНАЛНА И САВРЕМЕНА МЕТАФИЗИКА и ТЕОРИЈА СКУПОВА на Математичком факултету

Универзитета у Београду) са оценом 10. Дана 29.12.2011. одбранио је предлог теме докторске дисертације под насловом „Гедел о аксиоматизацији теорије скупова” пред комисијом у саставу проф. др Живан Лазовић, проф. др Мирјана Борисављевић, доц. др Александар Перовић и проф. др Коста Дошен (ментор).

Од 01.02.2009. године запослен је као сарадник у настави на одељењу за филозофију Филозофског факултета у Београду, где држи наставу из предмета Логика на првој години студија филозофије и изборног предмета Филозофија математике на четвртој. Од 30.9.2010. ради у звању асистента на истом предмету.

Аџић је био сарадник на пројекту „Репрезентације логичких структура и њихове примене у рачунарству” Математичког Института у Београду у периоду од 2009. до 2010. Тренутно учествује на пројектима „Репрезентације логичких структура и формалних језика и њихове примене у рачунарству” и „Динамички системи у природи и друштву: филозофски и емпиријски аспекти” чији су носиоци, редом, Математички Институт у Београду и Институт за филозофију Филозофског факултета у Београду, а које финансира Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије.

Аџић је до сада објавио 5 научних и стручних радова и то:

- 1) Аџић М. „Онтолошка и епистемолошка димензија Геделовог платонизма”, *Theoria*, Српско филозофско друштво, Београд, 2 (2010), 39-50.
- 2) Аџић М. „Филозофска теорија скупова, критички осврт на књигу Michaela Pottera *Set Theory and its Philosophy*”, *Theoria*, Српско филозофско друштво, Београд, 2 (2010), 127-132 (часопис категорије М24).
- 3) Аџић М., Милошевић С. „Алгоритми, категорије и докази - теме из српске модерне логике”, *Култура*, Завод за проучавање културног развитака, Београд, 134 (2012), 366-387.
- 4) Аџић М., Милошевић С. „Из старије српске логике”, *Култура*, Завод за проучавање културног развитака, Београд, 134 (2012), 237-245.
- 5) Аџић М. „О странпутицама натурализма”, прихваћено за објављивање у: *Theoria*, Српско филозофско друштво, Београд, 3 (2012).

Завршена докторска дисертација под насловом *Гедел о аксиоматизацији теорије скупова* има укупно 279 страна, уз пратеће садржаје (насловна страна и резиме

на српском и енглеском језику, подаци о комисији, садржај, биографија кандидата и неопходне изјаве о ауторству). Основни текст заузима 267 страна, а остатак чини списак коришћене литературе.

2. Предмет и циљ дисертације

Циљ ове дисертације је да испита детаље Геделове платонистичке позиције у филозофији математике, аргументе који се износе за и против ње, као и последице које ова позиција има за формулисање нових аксиома теорије скупова. Аџић разматра неке конкретне предлоге нових аксиома које је Гедел понудио, пре свега јаке аксиоме бесконачности или аксиоме великих кардинала, као и Геделову сугестију да централни принцип на којем би требало да почивају све нове аксиоме теорије скупова јесте принцип рефлексије. Осим тога, Аџић упоређује Геделова гледишта о новим аксиомама са неким савременим гледиштима да би видео да ли се и у којој мери ова последња могу сматрати унапређењима Геделовог програма.

3. Основне хипотезе од којих се полазило у истраживању

Основна хипотеза од које се у овом раду полази јесте непотпуност формалних математичких теорија које садрже Пеанову аритметику. То је последица прве Геделове теореме о непотпуности. У вези са овим општијим феноменом непотпуности је и независност хипотезе континуума (CH) од аксиома Цермело-Френкел теорије скупова (ZFC). Овај су резултат доказали Гедел (конзистентност CH са аксиомама ZFC) и Коен (конзистентност негације CH са аксиомама ZFC). Овај последњи резултат представља полазиште овог рада, јер по Геделовом мишљењу независност CH од аксиома ZFC не ставља тачку на ово питање. Хипотеза континуума мора бити истинита или лажна, а њена неодлучивост на основу данас познатих аксиома само значи да ове аксиоме не садрже потпун опис добро одређене математичке стварности [Godel, 1947, p. 181]. Пошто тренутно прихваћене аксиоме не одлучују CH, поставља се питање које бисмо нове аксиоме требали да усвојимо да бисмо на ово и сродна питања могли да дамо одговор. Геделове сугестије о томе како би те нове аксиоме требало да изгледају и шта се све од њих очекује детаљно се испитују у овој дисертацији.

4. Кратак опис садржаја дисертације

У првом делу дисертације (главе 2-5) Аџић испитује основне претпоставке Геделовог платонизма и труди се да пажљиво разликује два основна аспекта Геделове позиције: онтолошки и епистемолошки. С обзиром на платонистичко становиште, Геделов одговор на питање о онтолошком статусу математичких објеката је очекиван: они постоје независно од свести, као и нашег сазнања о њима. Одговор који је Гедел понудио у погледу могућности њиховог сазнања је, међутим, много комплекснији. У приказима Геделовог платонизма често се наводи његово уверење да ми поседујемо способност математичке интуиције, аналогне чулном опажању, која нам омогућава сазнање математичких објеката. Међутим, упркос чињеници да је Гедел својим опаскама заиста упућивао на једно такво гледиште, то ни у ком случају не исцрпљује све његове аргументе у прилог платонизму. Аџић наводи Геделове аргументе за платонизам који су независни од његовог схватања математичке интуиције, као и места у Геделовим радовима која упућују на то да Гедел види платонизам, упркос свим његовим недостацима, као једино одрживо становиште. По Аџићевом мишљењу Гедел наступа са позиције логичара са истанчаним разумевањем математичке и скуповно-теоријске праксе као и дубоких резултата логике и основа математике. Његови аргументи природно проистичу из тога.

После формулисања Геделове позиције, Аџић представља неке од критика које су јој упућиване. Он на првом месту разматра Бенасерафов (Paul Benacerraf) аргумент усмерен против математичког платонизма који има следећу структуру:

1. Ако је математички платонизам истинит, онда поседујемо знање апстрактних математичких ентитета.
2. Ако поседујемо знање апстрактних математичких ентитета, онда смо са њима каузално повезани.
3. Ми нисмо каузално повезани са апстрактним математичким ентитетима.
4. Математички платонизам није истинит.

По Аџићевом мишљењу премисе (1) и (3) овог аргумента се не чине проблематичним. Тако трећа премиса следи из дефиниције самог платонизма док прва премиса непосредно следи из ове дефиниције заједно са чињеницом да поседујемо математичко сазнање. Са платонистичког становишта, проблематичан део

овогаргумента почива у премиси (2), која је све само не очигледна. Ако заједно са Геделом сматрамо да поседујемо способност математичке интуиције, јасно је да ћемо ову премису сматрати лажном. Међутим, приговор овом аргументу можемо изнети и не позивајући се експлицитно на компоненте платонистичке позиције, што Ацић у овом одељку такође чини. После тога он испитује аргумент против платонизма који је формулисао Филд (Hartry Field), а који има за циљ да отклони недостатке Бенасерафовог аргумента и да у исто време задржи сву оштрину напада на платонизам.

Ацић истиче да постоје индиције да је Гедел, после 1954. године, разматрао платонистичко становиште које почива на идеји математичке интуиције комплекснијој од оне која је у јаком смислу аналогна опажању, па нам помоћу ње математички објекти бивају дати у непосредном искуству и наводи следећи цитат из Гедела:

„Треба истаћи да се математичка интуиција не мора схватити као способност која нам омогућава непосредно сазнање њених објеката. Изгледа да је пре случај да, као и у случају физичког искуства, ми формирамо наше идеје тих објеката на основу нечега што јесте непосредно дато. Међутим, ово нешто није, или није у суштинском смислу, осет.“ [Godel1964, p. 268]

Ацић закључује да ћемо снагу Геделовог становишта бити у могућности да проценимо тек пошто испитамо да ли и у којој мери овакво разумевање математичке интуиције јесте у складу са начелним епистемолошким становиштем које усвајамо. Ово нас природно доводи до разматрања епистемолошких позиција са којих наступамо приликом објашњења математичког сазнања. По Ацићевом мишљењу, можемо тврдити да наша емпиристичка епистемологија представља Прокрустову постељу за платонизам па да није адекватна у погледу објашњења математичког сазнања. У овом смислу, он истиче да би једна рационалистичка епистемологија могла имати више изгледа на успех.

После формулације Геделовог филозофског становишта, приговора који су му упућивани, као и могућих одговора на њих, Ацић разматра на који начин Геделов платонизам сугерише усвајање нових аксиома теорије скупова које би нам пружиле одговоре на питања која тренутно прихваћена аксиоматизација ZFC оставља отвореним. То га доводи до проблема оправдања нових аксиома. Ацић детаљно испитује Геделову поделу типова оправдања нових аксиома на унутрашње и

спољашње. Унутрашње оправдање нових аксиома почива на анализи појма скупа док се спољашње оправдање заснива на последицама које усвајање неког тврђења као аксиоме носи са собом. Аџић даље показује да је могуће понудити унутрашње оправдање свих аксиома теорије ZFC (са могућим изузетком аксиоме замене) позивајући се на појам кумулативне хијерархије скупова која, са своје стране, почива на *итеративном појму скупа*.

У наставку рада он испитује на који начин је могуће, служећи се итеративним појмом скупа, оправдати неке од аксиома великих кардинала, на првом месту аксиома које тврде постојање недостижних и Малоових кардинала. Поред анализе итеративног појма скупа, он разматра још неке хеуристичке принципе који се могу пронаћи у литератури а који руководе потрагом за новим аксиомама и служе приликом оправдања већ прихваћених.

У другом делу рада (глава 6) Аџић се бави принципима рефлексije који почивају на идеји да је универзум теорије скупова толико велики да га не можемо на задовољавајући начин описати унутар наше теорије. Та идеја се у овом одељку технички разрађује. Аџић принципе рефлексije посматра кроз неколико кључних аспеката у којима се јављају у савременој теорији скупова, и то као:

1. извор унутрашњег оправдања аксиома теорије скупова;
2. теорема теорије ZF ;
3. нове аксиоме теорије ZFC и централни део аксиоматизације неких алтернативних теорија, као што је Акерманова (Wilhelm Ackermann) теорија класа A .

Аџић истиче Геделово становиште да принципи рефлексije пружају веома снажно оправдање аксиомама теорије скупова, како оним тренутно прихваћеним тако и неким кандидатима за нове аксиоме. Посебно га занима у којој је мери могуће пружити оправдање јаких аксиома бесконачности позивајући се на овај принцип. Да ли је, на пример, могуће формулисати нове аксиоме које на неки начин почивају на принципу рефлексije а које за последицу имају $V \neq L$?

Што се могућих проширења теорије ZFC принципима рефлексije тиче, Аџић истиче да се сви велики кардинали чије је постојање на овај начин могуће доказати релативизују на L. Ово има за последицу да је одговор на питање постављено у

последњој реченици претходног пасуса одричан, барем ако принципе рефлексije схватимо на уобичајен начин. Наравно, није искључено да неки нови принципи рефлексije, који почивају на другачијим идејама, могу да превазиђу баријеру $V=L$.

Поред могућих проширења теорије ZFC принципима рефлексije, Аџић испитује и једну другачију теорију скупова, наиме Акерманову теорију класа A у чијој је аксиоматизацији, за разлику од оне од ZFC, идеја рефлексije од почетка присутна. Иако је Акерманова теорија A еквиконзистентна са ZF и тиме не доказује ниједно тврђење о скуповима које ZF није у стању да докаже, и даље је отворено питање могућих проширења теорије A , која би имала неке занимљиве последице. Наравно, сасвим је могуће проширити теорију A неким јаким аксиомама бесконачности које су формулисане у контексту теорије ZFC, али је такав потез са становишта оправдања нових аксиома по Аџићевом мишљењу потпуно непримерен. Наиме, саме те аксиоме су оно што би требало на изванредан начин оправдати, а чак и када бисмо имали некакав разлог да их усвојимо као додатне аксиоме није јасно зашто бисмо то учинили у контексту теорије A пре него теорије ZFC којој оне природно припадају. Наравно, остаје могућност да се испитају могућа проширења теорије A новим аксиомама које су нека врста природних ојачања аксиома које имамо у A . Аџић истиче да је могуће формулисати веома јака проширења теорије A на овај начин, али да се и најјача до сада позната проширења теорије A показују као недовољна да докажу $V \neq L$.

У овом погледу, проширења теорије A су у сличном положају као и проширења теорије ZFC принципима рефлексije. Наиме, иако је могуће пружити солидну интуитивну подршку таквим теоријама, оне су напосто недовољно јаке. Конкретно, све ове теорије су релативно конзистентне у односу на први Ердешов кардинал $\kappa(\omega)$, што даје додатну подршку Келнеровој (Peter Koellner) хипотези да су сви могући разложни принципи рефлексije релативно конзистентни у односу на овај кардинал и тиме недовољни да би се превазишла $V=L$ баријера.

Аџић истиче да и најјаче њему познато проширење Акерманове теорије A – теорија T којом се детаљно бави у одељку [6.4] - такође не може да ову баријеру превазиђе. Он ово доказује у одељку [6.4] и тај резултат до сада није забележен у литератури.

У трећем и последњем делу овог рада (глава 7) Аџић разматра неке од савремених програма формулисања нових аксиома теорије скупова. Највише пажње посвећује Вудиновом (Hugh Woodin) програму. Он испитује филозофске аспекте Вудиновог

програма као и програма (или позиција) који су му, у извесном смислу, конкурентски. Такође, он испитује шта се тачно очекује од сваког програма формулисања нових аксиома теорије скупова, и колико су такви програми у складу са Геделовим гледиштима.

Закључци до којих Аџић у овом одељку долази су углавном негативни. По његовом мишљењу, чак и ако прихватимо веома либерално читање Геделовог становишта на основу којег је аксиоме могуће оправдати ослањајући се у потпуности (или готово у потпуности) на њихове последице, није јасно да Вудинов програм успева да на конклузиван начин изолује додатну аксиому (или класу аксиома) коју би требало усвојити. Овome у прилог говори и чињеница да је сам Вудин у последњих неколико година ближи идеји да је хипотеза континуума истинита, а не лажна. Овакав заокрет у својој основи има појам “крајњег L-a” (*the ultimate L*), унутрашњег модела теорије скупова који би за разлику од Геделовог конструктивилног универзума L, који је минималан, имао извесна својства максималности.

5. Остварени резултати и научни допринос дисертације

У глави 2 брани се теза да је онтолошка димензија Геделовог платонизма у филозофији математике независна и основнија од епистемолошке димензије. То је супротно Бенасерафовом схватању Геделових гледишта, које је у емпиристичкој филозофској традицији, а слаже се са Парсонсовим схватањем Гедела. У овом одељку је начињен напор да се у Геделовим малобројним објављеним текстовима и текстовима из заоставшине, доступним тек од пре десет-петнаест година, нађу аргументи за тезу се у овом одељку брани.

У глави 3 Аџић брани гледиште да је Гедел у периоду од 1944. до 1959. под математичком интуицијом подразумевао способност *разумевања* основних математичких појмова. То је у супротности са разумевањем интуиције као „мистичне способности непосредног увида“ која се често приписује Геделу од стране његових критичара. Такође, Аџић у овом одељку пореди Геделово платонистичко становиште у филозофији математике са разним конкурентским гледиштима, пре свега номиналистичким. Он закључује да ова да ова друга не могу бити права конкуренција Геделовом платонизму и другим класичним позицијама у филозофији математике (као

што су Хилбертов формализам и Брауверов интуиционизам), јер нису мотивисана математички релевантним проблемима и не доводе до нових *математичких* резултата.

У глави 5 Аџић испитује неке од аргумената у прилог постајања способности математичке интуиције који се могу пронаћи у новијој литератури о филозофији математике. Конкретно, Аџић критички разматра аргументе које је Џејмс Роберт Браун (James Robert Brown) формулисао у својој скорашњој студији *Platonism, Naturalism, and Mathematical Knowledge*, закључујући да су ови аргументи неконклузивни, те да не могу одиграти ону улогу која им је намењена.

У одељку [6.4] Аџић доказује конзистентност Алкорове теорије T , једног проширења Акерманове теорије класа A , уз слабије претпоставке од оних које су у литератури.

6. Закључак

На основу претходног комисија може да закључи да дисертација под насловом *Гедел о аксиомама теорије скупова* докторанда Милоша Аџића испуњава све формалне услове који се пред овакав рад постављају. Она је у свему урађена према одобреној пријави. Та теза је оригинално и самостално научно дело које сведочи о великој ерудицији, изванредном познавању литературе, и постиже лепе резултате. Истичемо да се ради о првој докторској тези из филозофије математике у српском народу, и радујемо се што је тај рад компетентно и успешно написан. Зато предлагемо Научном већу Филозофског факултета да докторанду Милошу Аџићу одобри јавну одбрану ове тезе.

Комисија:

Проф. др Коста Дошен, Филозофски
факултет, Универзитет у Београду, МЕНТОР

Проф. др Живан Лазовић, Филозофски
факултет, Универзитет у Београду

Проф. др Стево Тодорчевић, Департман за
математику, Универзитет у Торонту, и
Универзитет Дени Дидро, Париз VII,
редовни члан САНУ

Проф. др Александар Перовић,
Саобраћајни факултет, Универзитет у
Београду

У Београду _____