

Наставно-научном већу
Математичког факултета
Универзитета у Београду

На седници Наставно-научног већа Математичког факултета одржаној 14.12.2012 одређени смо у комисију за преглед и оцену докторске дисертације,

Топологија и комбинаторика
квазиторусних многострукости и
 K -степенa

дипломираног математичара Ђорђа Баралића. Комисија је поднешену дисертацију пажљиво прегледала и након консултација подноси Већу следећи,

ИЗВЕШТАЈ

1. Биографија кандидата

Ђорђе Баралић је рођен 29.09.1986. у Крагујевцу, где је завршио основну школу "Станислав Сремчевић" и Прву крагујевачку гимназију као ученик генерације. Према сопственим речима таленат за математику је открио у Математичкој радионици младих професора Зорана Васиљевића. Током основне и средње школе учествовао је на математичким такмичењима и освајач је медаља на међународним математичким олимпијадама (сребрна БМО 2005, бронзана ММО 2004, БМО 2004, ЈБМО 2001). Дипломирао је 2008. године на Природно-математичком факултету у Крагујевцу, смер теоретска математика, са просечном оценом 10 након чега је уписао докторске студије на Математичком факултету у Београду. Исте године је запослен на Математичком институту САНУ где је ангажован у оквиру пројекта 174020 "Геометрија и топологија многострукости, класична механика и интегрални динамички системи", као и пројекта "Жива математика" и раду ЦГТА семинара (Семинар за комбинаторику, геометрију, топологију и алгебру). Током докторских студија учествовао је и имао предавања и постере на 2 математичка конгреса, 10 међународних научних конференција и боравио у математичким институтима у Пизи (Италија), Оберволфаху (Немачка), Берлину (Немачка), Љубљана (Словенија), Темишвар (Румунија) и Стокхолму (Шведска). Учествовао је и на 1. Хајделберг Лауреат

Форуму 2013. Аутор је једне збирке задатака. Поред торусне, геометријске и алгебарске топологије, у његов научни интерес спадају комбинаторика, дискретна и комбинаторна геометрија, класична и рачунарска пројективна геометрија.

2. Публиковани научни радови, радови на рецензији и друге публикације

1. Dj. Baralić, *Immersion and Embeddings of Quasitoric Manifolds over the Cube*, Publications de l'Institut Mathematique, Beograd (у штампи).
(категирија M23)
2. Dj. Baralić, *On Non-Zero Degree Maps between Quasitoric 4-manifolds*, на рецензији (Homology, Homotopy and Applications), препринт <http://arxiv.org/abs/1301.0848>
3. Dj. Baralić, B. Prvulović, G. Stojanović, S. Vrećica and R. Živaljević, *Topological Obstructions to Totally Skew Embeddings* Transactions of American Mathematical Society. AMS, (2012), vol. **364** no. **4**, 2213-2226.
(категирија M21)
4. Dj. Baralić, B. Grbić and Dj. Žikelić, *Theorems about Quadrilaterals and Conics*, прихваћен за штампу у International Journal of Computer Mathematics.
(категирија M23)
5. Dj. Baralić and I. Spasojević, *New Theorems about Pascal's Hexagram*, Proceedings of the Second Mathematical Conference of Republic of Srpska, 41–48.
6. Dj. Baralić and I. Spasojević, *Illumination of Pascal's Hexagram and Octagrammum Mysticum*, Discrete and Computational Geometry (на ревизији), препринт <http://arxiv.org/abs/1209.4795>
7. Dj. Baralić, *Around the Carnot theorem*, на ревизији, препринт <http://arxiv.org/abs/1308.6144>
8. Dj. Baralić: *How to Understand Grassmannians?* The Teaching of Mathematics. The Mathematical Society of Serbia, Belgrade, 2011
9. Ђ. Баралић: *300 припремних задатака за јуниорске математичке олимпијаде - Искусство Србије*, Матица Српска - Друштво чланова у Црној Гори, Подгорица, Црна Гора, 2012.

3. Област докторске дисертације

Област дисертације је алгебарска топологија многострукости и генералнијих простора (K -степен) на којима дејствују n -димензионални тополошки торуси T^n . Теорија торусних дејстава је сама по себи важна област еквиваријантне алгебарске топологије која датира од самих почетака ове математичке дисциплине. Пре двадесетак година појавила се нова област „торусна

топологија“ која повезује еквиваријатну топологију са алгебарском и симплектичком геометријом, комбинаториком и комутативном алгебром.

Торусна топологија је област веома интензивног развоја са најактивнијим групама математичара у Русији (Москва, институт Стеклова) где ради школа коју воде Виктор Бухштабер и Тарас Панов, више група у С.А.Д. (Fred Cohen, Antony Bahri, Martin Bendersky), Мексику (Samuel Gitler), Пољској (Tadeus Januszkiewicz), Манчестеру (Nigel Ray), у Јапану (Mikiya Masuda, Osaka), Јужној Кореји, Канади, и многим другим земљама. Добар преглед активности у оквиру ове дисциплине нуди „ Manchester Toric Topology Page “,

<http://www.maths.manchester.ac.uk/~nige/tortop.html>

У оквиру торусне топологије посебну пажњу привукли су тзв. квазиторусни варијетети (квазиторусне многострукости) асоцирани са простим конвексним политопами, који у топологији играју улогу сличну улози несингуларних торусних варијетета у алгебарској геометрији и симплектичкој геометрији.

4. Приказ дисертације са акцентом на оригиналним доприносима

Дисертација има 144 + 15 страна текста са чак 79 слика и дијаграма. Списак литературе се састоји од 66 библиографских јединица. Поред увода и додатка, у коме је дат преглед најважнијих чињеница везаних за тополошке групе, дејства група и еквиваријатна пресликавања, дисертација има још пет глава. Главе 2 и 3 (Симплицијални комплекси, Политопи) су прегледног карактера и излажу материјал везан за наведене области у обиму неопходном за читање централних глава тезе.

Глава 4 (Торусни варијетети и квазиторусне многострукости) уводи квазиторусне многострукости као централне објекте истраживања тезе потенцирајући геометријски и комбинаторни приступ (видети нпр. Дефиницију 4.3.2 као и Сliku 4.5 где је квазиторусна многострукост раслојена над припадним конвексним политопом). У овој глави су изложени сви централни резултати везани за ову класу многострукости укључујући и фундаменталне резултате Мартина Дејвиса и Тадеуша Јанушкијевича (M. Davis, T. Januszkiewicz) о репрезентацији кохомолошког прстена квазиторусног варијетета.

Глава 5 (Степени пресликавања међу квазиторусним многострукостима) и Глава 6 (Тотално коса улагања и имерзије квазиторусних многострукости) покривају централне оригиналне доприносе тезе, укључујући и ауторове резултате публиковане у међународним научним публикацијама.

У Глави 5 се разматра проблем одређивања скупа $D(M, N)$ свих целих бројева који се могу појавити као степени пресликавања између две задане

многострукости M и N . У питању је класични тополошки проблем који је посебно актуелизован радовима познатих кинеских тополога Хаибао Дуана и Шишенг Ванга (Haibao Duan, Shicheng Wang). По правилу се детаљно изучавају посебне класе многострукости као на пример у радовима Легранда, Матвеева и Цишанга (Legrand, Matveev, Zieschang) који су изучавали степене пресликавања међу специјалним класама 3-многострукости.

Борђе Баралић у сличном духу, ослањајући се на резултате Дуана и Ванга изучава степене пресликавања међу квазиторусним 4-многострукостима и добија низ врло интересантних резултата. Одговори које је добио показују у којој мери скуп степена $D(M, N)$ зависи од аритметичких особина одговарајућих параметара. На пример у Ставу 5.3.4 на страни 84 показује да у случају повезаних сума комплексних пројективних простора $M = N = \mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$ број $n \geq 0$ се појављује као степен ако и само ако се сваки прост делилац од n облика $4k - 1$ јавља паран број пута у његовој канонској факторизацији на просте бројеве. Сличан услов се појављује и у Теоремама 5.3.9, 5.3.13, 5.3.14 које се односе на ширу класу 4-многострукости.

Једна од занимљивости је да се анализа и решавање чисто тополошког проблема на крају своди на решавање система диофантских једначина и укључује класичне резултате о представљању целих бројева у облику суме квадрата и особине Адамарових матрица ($\{-1, 1\}$ -матрице за које важи једнакост у Адамаровој неједнакости).

Као контраст горе изложеном аутор даје довољне услове у Теорему 5.5.4 за важење једнакости $D(M, N) = \mathbb{Z}$ односно услове да се сваки цео број појављује као степен пресликавања између две квазиторусне 4-многострукости. Као последицу добија резултат да за задану квазиторусну 4-многострукост постоји бесконачно много квазиторусних торусних 4-многострукости које се у њу могу прсликати са сваким унапред заданим степеном. За поређење наведимо се у већ поменути радовима Дуана и Ванга (видети нпр. рад *The degrees of maps between manifolds*, *Mathematische Zeitschrift* 2003) обрађују у примерима само случајеви најпростијих 4-многострукости.

Глава 6 је посвећена *уопшћуно косим* (totally skew) улагањима многострукости. Проблематика улагања и *имерзија* (локалних улагања) многострукости спада у једну од централних тема топологије. Потпуно коса улагања су се недавно појавила у радовима Гомија и Табачникова (M. Ghomi, S. Tabachnikov. *Totally skew embeddings of manifolds*. *Math. Zetschrift*, 2008). Улагање многострукости M у еуклидски простор \mathbb{R}^d је потпуно косо ако су тангентни простори уложене многострукости у сваке две различите тачке мимоилазни у амбијентном простору \mathbb{R}^d . Услов је врло

интересантан јер повезује топологију многострукости са геометријским и комбинаторним својствима као што су конвексност кривих, суседност код конвексних политопа, и др.

У тиму са групом београдских математичара (Б. Првуловић, Г. Стојановић, С. Врећица, Р. Живаљевић) Ђорђе Баралић анализира опструкције кохомолошког карактера (теорија векторских раслојења и карактеристичних кохомолошких класа) за постојање потпуно косих улагања. Основи ове теорије са применама изложене су у заједничком раду,

- Dj. Baralić, B. Prvulović, G. Stojanović, S. Vrećica, R. Živaljević, Topological Obstructions to Totally Skew Embeddings, Transactions of American Mathematical Society, AMS, 2012,

а у дисертацији су предмет поглавља 6.1. Имајући квазиторусне многострукости као основну тему истраживања, аутор се природно бави питањем њихових потпуно косих улагања. У случају многострукости над јединичним кубом добија посебно садржајне резултате. Као пример показује (Теорема 6.3.3) да за сваки природан број постоји квазиторусна многострукост над хиперкубом I^n која се не може потпуно косо уложити у еуклидски простор димензије мање од $8n - 4\alpha(n) + 1$ тј. да се у овој класи достиже теоретски очекивана горња граница.

Сличном техником (Теорема 6.4.5) добија и теоретски најбоље оцене за минималну имерзиону димензију еуклидских простора за једну класу квазиторусних многострукости над хиперкубом.

5. Закључак

Докторска дисертација „Топологија и комбинаторика квазиторусних многострукости и K -степен“ је врло леп и садржајан прилог топологији квазиторусних многострукости и свим дисциплинама са којима се она граничи. С обзиром на мноштво интересантних резултата али и примењених техника, које укључују дејства група, теорију карактеристичних кохомолошких класа, као и технике елементарне теорије бројева и теорије конвексних политопа, аутор се представио као комплетан млади математичар. Овај утисак је утолико јачи ако истакнемо (видети списак научних радова) да је аутор већ достигао и значајан експертски ниво у доприносима класичној пројективној геометрији у којој развија врло интересантан и нов правац истраживања базиран на применама програмског пакета *Cinderella*.

Са задовољством предлажемо Научно-наставном већу Математичког факултета Универзитета у Београду да прихвати овај рад као докторску дисертацију кандидата Ђорђа Баралића и одреди комисију за њену јавну одбрану.

др Синиша Врећица
редовни професор
Математички факултет Београд

др Раде Живаљевић (ментор)
редовни професор
Математички институт САНУ

др Свјетлана Терзић
дописни члан ЦАНУ, редовни професор
ПМФ Подгорица

др Владимир Грујић
доцент
Математички факултет Београд

Београд, 19 октобар 2013