



Univerzitet u Nišu
Mašinski fakultet



Ivan R. Pavlović

**Dinamička stabilnost viskoelastičnih kontinualnih
sistema pod dejstvom slučajnih poremećaja**

Doktorska disertacija

Niš, 2014. god.



University of Niš
Mechanical faculty



Ivan R. Pavlović

**Dynamic stability of viscoelastic continuous systems
subjected to random excitation**

Doctoral dissertation

Niš, 2014.

Mentor: redovni profesor dr Predrag Kozić, Mašinski fakultet Univerziteta u Nišu.

Komentor: docent dr Goran Janevski, Mašinski fakultet Univerziteta u Nišu.

Član komisije: redovni profesor dr Predrag Rajković, Mašinski fakultet Univerziteta u Nišu.

Član komisije: vanredni profesor dr Nataša Trišović, Mašinski fakultet Univerziteta u Beogradu.

Član komisije: redovni profesor u penziji dr Zoran Golubović, Mašinski fakultet Univerziteta u Beogradu.

Datum odbrane: 25. 12. 2014. god.

Najiskrenije se zahvaljujem:

Mentoru, dr Predragu Koziću, redovnom profesoru Mašinskog fakulteta Univerziteta u Nišu, na razumevanju, stručnoj pomoći i korisnim savetima koje mi je pružio u toku rada.

Komentoru, dr Goranu Janevskom, docentu Mašinskog fakulteta Univerziteta u Nišu, na nesebičnoj stručnoj podršci i spremnosti da prenese svoje znanje.

Članovima komisije, dr Predragu Rajkoviću, redovnom profesoru Mašinskog fakulteta Univerziteta u Nišu, dr Zoranu Goluboviću, redovnom profesoru Mašinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu, i dr Nataši Trišović, vanrednom profesoru Mašinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu, na korisnim primedbama i savetima prilikom uobličavanja ove doktorske disertacije.

Svom ocu, dr Ratku Pavloviću, redovnom profesoru Mašinskog fakulteta Univerziteta u Nišu, na svemu što me je naučio i za put na koji me je usmerio.

Svojoj supruzi Dragani i ćerki Danici na ljubavi, strpljenju i podršci.

Doktorska disertacija je realizovana u okviru projekta Ministarstva prosvete i nauke Republike Srbije "Dinamička stabilnost i nestabilnost mehaničkih sistema pod dejstvom stohastičkih poremećaja" OI 174011.

Deki i unuku Pavlović - Ratku i Nikoli

Dinamička stabilnost viskoelastičnih kontinualnih sistema pod dejstvom slučajnih poremećaja

U ovoj disertaciji je analizirana dinamička stabilnost elastičnih i viskoelastičnih mehaničkih sistema, kao i nanostruktura, podvrgnutih dejstvu pritisnih sila koje predstavljaju vremenski promenljive stohastičke funkcije. Ovakvi slučajni poremećaji mogu sadržati beli spektar kao što su širokopolasni procesi tipa belog šuma, realnog šuma, ograničenog šuma, itd., ili su to regularni slučajni procesi sa zadatom funkcijom gustine raspodele verovatnoće (Gauss-ov i harmonijski proces).

Granice skoro sigurne stabilnosti za diskretizovani sistem stohastičkih diferencijalnih jednačina čiji su koeficijenti širokopolasni procesi dobijene su određivanjem najvećeg eksponenta Ljapunova i momenta eksponenta Ljapunova korišćenjem metode stohastičkog usrednjenja prvog i drugog reda. U slučaju procesa koji ne sadrže beli spektar oblasti stabilnosti dobijene su metodom funkcionala Ljapunova. Analiziran je uticaj fizičkih i geometrijskih parametara na oblasti skoro sigurne stohastičke stabilnosti.

Izvršena je numerička verifikacija analitičkih rezultata dobijenih metodom momenta eksponenta Ljapunova kao i numeričko određivanje momenata eksponenta Ljapunova korišćenjem simulacije zasnovane na Monte Carlo metodi.

Ključne reči: Viskoelastični sistem, nanostruktura, slučajni proces, eksponent Ljapunova, moment eksponenta Ljapunova, funkcional Ljapunova, stohastičko usrednjenje, metod Monte Carlo.

Naučna oblast: Mašinsko inženjerstvo

Uža naučna oblast: Primenjena mehanika

UDK: 551.3:517.938

Dynamic stability of viscoelastic continuous systems subjected to random excitation

Dynamic stability of elastic and viscoelastic mechanical systems and nanostructures under the influence of axial forces which are represented by time dependent stochastic functions is analyzed in this dissertation. These disturbances can be wideband random processes such as white noise, real noise, bounded noise etc., or regular random processes with known probability density function distribution (Gaussian and harmonic process).

Almost sure boundaries for discretised stochastic differential equations which contain wideband processes are obtained by maximal Liapunov exponent and moment Liapunov exponent which are determined using the first and second order stochastic averaging method. In case of non white processes stability boundaries are obtained by Liapunov functional method. Influence of different physical and geometric parameters on almost sure stochastic stability regions are analyzed.

Numerical verification for analytical results obtained by moment Liapunov exponent method, as well as numerical determination of moment Liapunov exponents were performed using the simulation based on Monte Carlo method.

Key words: Viscoelastic system, nanostructure, random process, Liapunov exponent, moment Liapunov exponent, Liapunov functional, stochastic averaging, Monte Carlo method.

Scientific field: Mechanical engineering

Major in: Applied mechanics

UDK: 551.3:517.938

SADRŽAJ

1. UVOD.....	1
1.1 Pregled istraživanja stohastičke stabilnosti mehaničkih sistema	3
1.2 Definicije stohastičke stabilnosti kontinualnih sistema	7
1.3 Metode određivanja oblasti stohastičke stabilnosti kontinualnih sistema.....	8
1.4 Direktna metoda Ljapunova.....	9
1.5 Metode konstrukcije funkcionala Ljapunova.....	9
1.6 Metoda diskretizacije	11
1.7 Eksponenti Ljapunova	12
1.8 Moment eksponenta Ljapunova.....	13
2. OSNOVI VISKOELASTIČNIH MATERIJALA.....	17
2.1 Voigt-Kelvin-ov model materijala.....	19
2.2 Maxwell-ov model materijala	20
2.3 Generalisani Maxwell-ov model materijala	20
2.4 Standardni linearni čvrsti (Zener-ov) model materijala	21
2.5 Troparametarski viskoelastični čvrsti model materijala	22
3. NELOKALNA TEORIJA ELASTIČNOSTI.....	23
3.1 Uvod u nelokalnu teoriju stabilnosti i oscilacija greda	25
3.2 Uvod u opštu teoriju greda.....	26
3.3 Nelokalna teorija Euler-Bernoulli-jevog modela grede	27
3.4 Nelokalna teorija Timošenkovog modela grede	29
3.5 Nelokalna teorija Reddy-jevog modela grede.....	30
4. SLUČAJNI PROCESI.....	33
4.1 Funkcija raspodele verovatnoće i funkcija gustine raspodele verovatnoće	34

4.2 Matematičko očekivanje i momenti	35
4.3 Korelacione funkcije i funkcije spektralne gustine	36
4.4 Ergodički slučajni procesi	39
4.5 Gauss-ov i harmonijski proces	40
4.6 Wiener-ov process	41
4.7 Proces belog šuma	43
4.8 Procesi Markova	44
4.9 Difuzioni procesi	45
4.10 Jednačine Kolmogorova	46
4.10.1 Prva (obrnuta) difuziona jednačina Kolmogorova	46
4.10.2 Druga (direktna) difuziona jednačina Kolmogorova (Fokker-Planck-ova jednačina)	47
4.11 Stohastički integrali	48
4.11.1 Stohastički Riman-ovi integrali	48
4.11.2 Stohastički Riman-Stiltjes-ovi integrali	48
4.11.3 Integral tipa Itô	49
4.12 Stohastičke diferencijalne jednačine	49
4.13 Proces realnog šuma (Ornstein-Uhlenbeck-ov proces)	50
4.14 Proces ograničenog šuma	51
4.15 Itô-ovo diferencijalno pravilo (Itô lema)	52
4.16 Integral Stratonoviča	53
4.17 Stratonovičeva stohastička diferencijalna jednačina	54
4.18 Aproksimacija fizičkog procesa difuzionim procesom	55
4.19 Metoda usrednjenja stohastičkih diferencijalnih jednačina	56
5. DINAMIČKA STABILNOST SISTEMA VISKOELASTIČNIH GREDA	59
5.1 Konstrukcija funkcionala Ljapunova	61
5.2 Skoro sigurna stabilnost pri dejstvu poremećaja koji ne sadrže beli spektar	66
5.3 Skoro sigurna stabilnost pod dejstvom širokopojasnih poremećaja	69
5.4 Numerički rezultati i diskusija	77
5.4.1 Primena ortogonalnih polinoma	77
5.4.2 Poremećaj ne sadrži beli spektar	80
5.4.3 Širokopojasna pobuda	85

6. DINAMIČKA STABILNOST NANOSTRUKTURA.....	89
6.1 Uvodne napomene	89
6.2 Nelokalne konstitutivne relacije	90
6.3 Viskoelastična nanogreda	90
6.3.1 Nelokalna Rayleigh-jeva teorija greda.....	90
6.3.2 Formulacija problema	91
6.3.3 Analiza stabilnosti pod dejstvom procesa koji ne sadrže beli spektar	93
6.3.4 Analiza stabilnosti pod dejstvom procesa tipa belog šuma.....	97
6.3.5 Numerički rezultati i diskusija	99
6.4 Sistem elastično spojenih nanogreda	107
6.4.1 Formulacija problema	107
6.4.2 Konstrukcija funkcionala Ljapunova	109
6.4.3 Skoro sigurna nestabilnost	114
6.4.4 Numerički rezultati i diskusija	117
7. STOHAŠTIČKO USREDNENJE DRUGOG REDA.....	125
7.1 Stohastičko usrednjenje prvog reda	130
7.2 Stohastičko usrednjenje drugog reda	132
7.3 Oblasti stabilnosti.....	136
7.4 Numeričko određivanje p -tog momenta eksponenta Ljapunova.....	139
ZAKLJUČAK	145
LITERATURA.....	151

LISTA OZNAKA

a - amplituda

c_i - koeficijenti viskoznog prigušenja

f_{0i} - konstantna komponenta aksijalne sile

$m(t)$ - matematičko očekivanje slučajnog procesa

p - funkcija gustine raspodele verovatnoće

q - specifično opterećenje

t, T - vreme

t_{ij} - komponente tenzora lokalnog napona

$u, v, w; U, V, W$ - komponente pomeranja u pravcima osa Decartes-ovog koordinatnog sistema

$x, y, z; X, Y, Z$ - koordinate tačke u Decartes-ovom pravougaonom koordinatnom sistemu

A - poprečni presek nosača

$E[\cdot]$ - matematičko očekivanje

E - modul elastičnosti

G - modul klizanja

$H_n(x)$ - Hermite-ovi polinomi

I - aksijalni moment inercije poprečnog preseka

J - aksijalni moment inercije mase

$K(t_1, t_2)$ - kovarijansa slučajnog procesa

\bar{K}, K - modul krutosti Winkler-ovog elastičnog sloja

L - dužina nosača

$\mathbf{L}, \mathbf{N}, \mathcal{L}$ - diferencijalni operatori

$M(\cdot)$ - operator usrednjenja

P - verovatnoća slučajnog događaja

$R(t_1, t_2)$ - autokorelaciona funkcija

$S(\omega)$ - spektralna gustina slučajnog procesa

$T_n(x)$ - Čebiševljevi polinomi

\mathbf{V} - funkcional Ljapunova

$W(t)$ - Wiener-ov proces

$X^{(k)}(t)$ - jedna od realizacija slučajnog procesa

$\|\cdot\|$ - norma

\mathcal{L}_H - diferencijalni operator Helmholtz-ovog tipa

\mathcal{L}_{oH} - diferencijalni operator bi-Helmholtz-ovog tipa

ε - mali parametar

ε_{ij} - komponente tenzora nelokalne deformacije

$\bar{\eta}, \eta$ - vreme retardacije

λ - eksponent Ljapunova

μ_i - parametri nelokalnosti

ν - Poisson-ov koeficijent

ρ - gustina materijala

$\rho(t_1, t_2)$ - koeficijent korelacije

σ_{ij} - komponente tenzora nelokalnog napona

$\sigma_f^2(t)$ - varijansa slučajnog procesa $f(t)$

φ - fazno pomeranje

ϕ - fazni ugao

ψ_i - obrtanje poprečnog preseka nosača

$\Lambda(p)$ - moment eksponenta Ljapunova

LISTA ILUSTRACIJA

<i>Slika 2.1 Voigt-Kelvin-ov model</i>	19
<i>Slika 2.2 Maxwell-ov model</i>	20
<i>Slika 2.3 Generalisani Maxwell-ov model</i>	21
<i>Slika 2.4 Zener-ov model</i>	21
<i>Slika 2.5 Troparametarski model</i>	22
<i>Slika 3.1 Nanogreda i njen tipičan element</i>	27
<i>Slika 4.1 Realizacije slučajnog procesa $X^{(k)}(t)$</i>	33
<i>Slika 4.2 Autokorelacione funkcije i odgovarajuće funkcije spektralne gustine</i>	39
<i>Slika 4.3 Funkcija gustine raspodele verovatnoće za a) Gauss-ov i b) harmonijski proces</i>	41
<i>Slika 4.4 Difuzioni proces</i>	46
<i>Slika 4.5 Spektralna gustina Ornstein-Uhlenbeck-ovog procesa</i>	51
<i>Slika 4.6 Spektralna gustina procesa ograničenog šuma</i>	52
<i>Slika 5.1 Fizički model elastično povezanih viskoelastičnih greda</i>	59
<i>Slika 5.2 Oblasti stabilnosti za Gauss-ov i harmonijski proces u funkciji odnosa determinističkih opterećenja</i>	81
<i>Slika 5.3 Oblasti stabilnosti za Gauss-ov i harmonijski proces u funkciji redukovane krutosti greda</i>	81
<i>Slika 5.4 Oblasti stabilnosti za Gauss-ov i harmonijski proces u funkciji redukovane krutosti Winkler-ovog sloja</i>	82
<i>Slika 5.5 Oblasti stabilnosti za a) Gauss-ov i b) harmonijski proces u funkciji odnosa determinističkih opterećenja</i>	82

<i>Slika 5.6 Oblasti stabilnosti za a) Gauss-ov i b) harmonijski proces u funkciji redukovane krutosti Winkler-ovog sloja.....</i>	<i>83</i>
<i>Slika 5.7 Oblasti stabilnosti za sistem dvostrukih greda pod uticajem normalno raspodeljenog opterećenja u funkciji vremena retardacije</i>	<i>83</i>
<i>Slika 5.8 Oblasti stabilnosti za sistem dvostrukih greda pod uticajem normalno raspodeljenog opterećenja u funkciji redukovanih krutosti greda</i>	<i>84</i>
<i>Slika 5.9 Oblasti stabilnosti za sistem dvostrukih greda pod uticajem normalno raspodeljenog opterećenja u funkciji krutosti Winkler-ovog sloja.....</i>	<i>84</i>
<i>Slika 5.10 Oblasti stabilnosti sistema dvostrukih greda u funkciji redukovane krutosti donje grede kada je gornja greda izložena dejstvu slučajne pritisne sile tipa belog šuma.....</i>	<i>86</i>
<i>Slika 5.11 Oblasti stabilnosti sistema dvostrukih greda u funkciji redukovane krutosti donje grede kada su obe grede izložene dejstvu slučajne pritisne sile tipa belog šuma</i>	<i>86</i>
<i>Slika 5.12 Oblasti stabilnosti sistema dvostrukih greda u funkciji parametra α_2 kada su obe grede izložene dejstvu slučajne pritisne sile tipa realnog šuma</i>	<i>87</i>
<i>Slika 5.13 Oblasti stabilnosti sistema dvostrukih greda u funkciji parametara σ_{1R}, σ_{2R}, kada su obe grede izložene dejstvu slučajne pritisne sile tipa realnog šuma.....</i>	<i>87</i>
<i>Slika 5.14 Oblasti stabilnosti sistema dvostrukih greda u funkciji redukovane krutosti e_1 kada su obe grede izložene ograničenom šumu.....</i>	<i>88</i>
<i>Slika 6.1 Blok-dijagram sistema opisanog jednačinom (6.44)</i>	<i>98</i>
<i>Slika 6.2 Poređenje numeričkih i analitičkih rezultata.....</i>	<i>99</i>
<i>Slika 6.3 Oblasti stabilnosti za Gauss-ov i harmonijski proces u funkciji parametra r koji uzima u obzir uticaj inercije obrtanja poprečnog preseka</i>	<i>100</i>
<i>Slika 6.4 Oblasti stabilnosti za Gauss-ov i harmonijski proces u funkciji koeficijenta nanoskaliranja</i>	<i>101</i>
<i>Slika 6.5 Oblasti stabilnosti za Gauss-ov i harmonijski proces u funkciji determinističke komponente pritisne sile</i>	<i>101</i>
<i>Slika 6.6 Oblasti stabilnosti za Gauss-ov i harmonijski proces u funkciji vremena retardacije</i>	<i>102</i>
<i>Slika 6.7 Uticaj koeficijenta nanoskaliranja za Helmholtz-ov i bi- Helmholtz-ov oblik jezgra na oblasti stabilnosti za Gauss-ov i harmonijski proces</i>	<i>102</i>

<i>Slika 6.8 Oblasti stabilnosti za a) Gauss-ov i b) harmonijski proces u funkciji determinističke komponente pritisne sile</i>	<i>103</i>
<i>Slika 6.9 Oblasti stabilnosti za a) Gauss-ov i b) harmonijski proces u funkciji koeficijenta nanoskaliranja</i>	<i>103</i>
<i>Slika 6.10 Oblasti stabilnosti za proces realnog šuma u funkciji parametra r koji uzima u obzir uticaj inercije obrtanja poprečnog preseka.....</i>	<i>104</i>
<i>Slika 6.11 Oblasti stabilnosti za proces realnog šuma u funkciji koeficijenta nanoskaliranja μ_0</i>	<i>104</i>
<i>Slika 6.12 Oblasti stabilnosti za proces realnog šuma u funkciji vremena retardacije η</i>	<i>105</i>
<i>Slika 6.13 Oblasti stabilnosti za proces ograničenog šuma u funkciji koeficijenta nanoskaliranja μ_0.....</i>	<i>105</i>
<i>Slika 6.14 Oblasti stabilnosti za proces ograničenog šuma u funkciji parametra r koji uzima u obzir uticaj inercije obrtanja poprečnog preseka.....</i>	<i>106</i>
<i>Slika 6.15 Oblasti stabilnosti za proces belog šuma u funkciji koeficijenta nanoskaliranja μ_0</i>	<i>106</i>
<i>Slika 6.16 Oblasti stabilnosti za proces belog šuma u funkciji parametra η</i>	<i>106</i>
<i>Slika 6.17 Geometrija sistema elastično spojenih dvostrukih nanogreda</i>	<i>107</i>
<i>Slika 6.18 Oblasti nestabilnosti sistema dvostrukih nanogreda opterećenih Gauss-ovim i harmonijskim procesom u funkciji krutosti elastičnog sloja.....</i>	<i>117</i>
<i>Slika 6.19 Oblasti nestabilnosti sistema dvostrukih nanogreda opterećenih Gauss-ovim i harmonijskim procesom u funkciji odnosa determinističkih komponenti aksijalnih sila</i>	<i>118</i>
<i>Slika 6.20 Oblasti nestabilnosti sistema dvostrukih nanogreda opterećenih Gauss-ovim i harmonijskim procesom u funkciji koeficijenta nanoskaliranja za Helmholtz-ov i bi-Helmholtz-ov tip jezgra.....</i>	<i>118</i>
<i>Slika 6.21 Uticaj koeficijenta nanoskaliranja za Helmholtz-ov tip jezgra i determinističkih komponenti aksijalnih sila na oblasti nestabilnosti sistema dvostrukih nanogreda opterećenih Gauss-ovim i harmonijskim procesom.....</i>	<i>119</i>
<i>Slika 6.22 Uticaj koeficijenta nanoskaliranja za Helmholtz-ov tip jezgra i krutosti elastičnog sloja na oblasti nestabilnosti sistema dvostrukih nanogreda opterećenih Gauss-ovim i harmonijskim procesom.....</i>	<i>119</i>

<i>Slika 6.23 Oblasti nestabilnosti sistema dvostrukih nanogreda za a) Gauss-ov i b) harmonijski proces u funkciji odnosa determinističkih komponenti aksijalnih sila.....</i>	<i>120</i>
<i>Slika 6.24 Oblasti nestabilnosti sistema dvostrukih nanogreda za a) Gauss-ov i b) harmonijski proces u funkciji krutosti elastičnog sloja.....</i>	<i>120</i>
<i>Slika 6.25 Oblasti nestabilnosti za sistem dvostrukih nanogreda pod dejstvom normalno raspodeljenih opterećenja u funkciji krutosti elastičnog sloja K.....</i>	<i>121</i>
<i>Slika 6.26 Oblasti nestabilnosti za sistem dvostrukih nanogreda pod dejstvom normalno raspodeljenih opterećenja u funkciji odnosa determinističkih aksijalnih opterećenja.....</i>	<i>122</i>
<i>Slika 6.27 Oblasti nestabilnosti za sistem dvostrukih nanogreda pod dejstvom normalno raspodeljenih opterećenja u funkciji koeficijenta viskoznog prigušenja β.....</i>	<i>122</i>
<i>Slika 6.28 Oblasti nestabilnosti za sistem dvostrukih nanogreda pod dejstvom normalno raspodeljenih opterećenja u funkciji koeficijenta nanoskaliranja za Helmholtz-ov tip jezgra μ_0.....</i>	<i>123</i>
<i>Slika 7.1 Poređenje granica stabilnosti p-tog momenta u funkciji koeficijenta prigušenja ζ....</i>	<i>138</i>
<i>Slika 7.2 Poređenje granica stabilnosti p-tog momenta u funkciji koeficijenta prigušenja ζ za različite vrednosti parametra p: a) p=1, b) p=2 i c) p=4</i>	<i>138-139</i>
<i>Slika 7.3 Varijacija momenta eksponenta Ljapunova u odnosu na p za različite vrednosti intenziteta procesa σ_f: a) $\sigma_f = 1$, b) $\sigma_f = 4$ i $\sigma_f = 8$.....</i>	<i>141-142</i>
<i>Slika 7.4 Varijacija momenta eksponenta Ljapunova u odnosu na p za različite vrednosti intenziteta procesa σ_g: a) $\sigma_g = 0.8$, b) $\sigma_g = 1$ i $\sigma_g = 1$.....</i>	<i>142-143</i>

1. UVOD

Pri ispitivanju dinamičkih procesa vrlo često se srećemo sa analizom mogućih poremećaja, čija priroda nije dovoljno jasna. Takvi poremećaji mogu biti izazvani kako spoljašnjim slučajnim poremećajima tako i nekontrolisanim promenama geometrijskih i fizičkih parametara sistema. Na primer, neravnomernost puta izaziva pojavu oscilacija pri kretanju transportnih vozila, nesavršenost elastičnih elemenata i konstruktivni ekscentriciteti kod mašina i uređaja u proizvodnim procesima prouzrokuju mehaničke poremećaje, itd. Kada takvi poremećaji ne dovode do suštinskog odstupanja od zadatog kretanja sistema, moguće ih je zanemariti i dobiti praktično tačno rešenje. Takav princip da pri zadatim tačnim početnim uslovima i poznatim opterećenjima svakom trenutku vremena odgovara tačno određeno stanje sistema je karakterističan za klasičnu mehaniku, a posebno za klasičnu teoriju oscilacija. U određenom vremenskom intervalu skup stanja sistema jednoznačno opisuje njegovu „trajektoriju“. Takva jednoznačna veza stanja sistema i vremena se terminološki definiše kao deterministički pristup, koji u potpunosti isključuje različite vrste nekontrolisanih poremećaja, a koji realno postoje u prirodi.

Međutim, kada nekontrolisani poremećaji o kojima je napred bilo reči, dovode do reakcije sistema i pojave prinudnih oscilacija, javlja se potreba konstrukcije novog fizičkog modela za ispitivanje dinamičkih procesa. Sama priroda ove problematike zahteva izgradnju novog matematičkog aparata koji omogućava najtačniji opis spoljašnjih opterećenja koja nemaju deterministički karakter. Adekvatna matematička disciplina koja sadrži metode za rešavanje nedeterminističkih problema je *teorija slučajnih procesa*.

U brojnim realnim primerima uticaj dejstva slučajnih poremećaja igra vrlo značajnu, a ponekad i odlučujuću ulogu, pa njihovo zanemarivanje dovodi do ozbiljnih grešaka. Osnovna karakteristika slučajnih procesa je neodređenost očekivanog ponašanja za svaku pojedinačnu realizaciju procesa, kao i eksplicitna izraženost statističkog karaktera skupa velikog broja realizacija. Metode teorije verovatnoće i teorije slučajnih procesa omogućavaju ocenu i analizu masovnih događaja nezavisno od tačnog ponašanja individualnih realizacija.

Za primenu metoda teorije verovatnoće neophodno je da se višestruka realizacija slučajnog događaja odvija pod praktično jednakim uslovima. Obično se pri ispitivanju slučajnih procesa u mehaničkim, a posebno nestacionarnim, sistemima podrazumeva da je ispunjen uslov masovnosti. Za stacionarne slučajne procese usvajanje hipoteze o ergodičnosti procesa omogućava da se umesto skupa realizacija posmatra samo jedna, a da dobijena informacija reprezentuje ponašanje sistema. Za mnoge praktične probleme takav pristup proučavanju slučajnih procesa se pokazao adekvatnim, a korelaciona teorija, kao oblast teorije slučajnih procesa koja se bavi ovom problematikom, zauzima centralno mesto. U problemima gde se korelaciona teorija ne može primeniti, koristi se teorija procesa Markova.

Kao što je poznato, matematički modeli determinističkih dinamičkih sistema sa konačnim brojem stepeni slobode su obične diferencijalne jednačine, a kod kontinualnih sistema to su parcijalne diferencijalne jednačine. Analogno prethodnoj formulaciji, kod stohastičkih dinamičkih sistema matematički modeli su stohastičke (obične i parcijalne) diferencijalne jednačine. U našim razmatranjima stohastičkih sistema zadržaćemo se na determinističkim graničnim uslovima. Slučajni poremećaji u stohastičkim diferencijalnim jednačinama najčešće figurišu kao koeficijenti uz odgovarajuće izvode, pa su to parametarske stohastičke diferencijalne jednačine.

Stacionarni i skoro sigurno neprekidni (neprekidni sa verovatnoćom jednakoj jedinici) slučajni procesi nazivaju se regularnim. Matematički modeli ovih procesa opisuju se regularnim stohastičkim diferencijalnim jednačinama koje su analogne klasičnim diferencijalnim jednačinama matematičke fizike. Takve diferencijalne jednačine često su primenjivane i analizirane od strane fizičara i inženjera, a manje od matematičara. Posle određenih dodatnih pretpostavki i uprošćenja omogućavaju primenu odgovarajuće modifikovane metode za determinističke diferencijalne jednačine. U nekom smislu one predstavljaju proširenje klasične teorije parcijalnih diferencijalnih jednačina, a pri analizi stabilnosti pomoću metode Ljapunova može se koristiti obično parcijalno diferenciranje za skoro sve realizacije procesa.

Ukoliko su koeficijenti stohastičke diferencijalne jednačine, koji kod mehaničkih sistema najčešće predstavljaju parametarsku pobudu, širokopolasni Gauss-ovi procesi kakav je na primer, Wiener-ov proces, koji nisu diferencijabilni, tada se ovakve diferencijalne jednačine nazivaju stohastičke (parcijalne ili obične) diferencijalne jednačine tipa Itô.

Slično kao u klasičnoj tako i u statističkoj dinamici mogu se uočiti dva osnovna pravca analize ponašanja dinamičkih sistema. Prvi je kvantitativni i zasniva se na određivanju

efektivnih rešenja parcijalnih, stohastičkih diferencijalnih jednačina, njihovih statističkih karakteristika kao i verovatnoće nalaženja rešenja u određenoj oblasti. Zbog toga se stohastičke diferencijalne jednačine rešavaju simulacijom ili formiranjem determinističkih diferencijalnih jednačina po statističkim momentima, koje se rešavaju poznatim metodama (analitičkim ili numeričkim). Drugi pravac proučavanja dinamičkih sistema je usmeren na dobijanje kvalitativnih informacija o egzistenciji, jedinstvenosti i stabilnosti rešenja, a što se odnosi na veze između početnih uslova i rešenja u bilo kom trenutku, tendencije rasta rešenja do beskonačnosti, opadanja do nule ili na određivanje oblasti kretanja. Problematika koja se razmatra u ovoj disertaciji usmerena je na analizu stabilnosti kontinualnih viskoelastičnih sistema podvrgnutih dejstvu različitih tipova slučajnih poremećaja.

1.1 Pregled istraživanja stohastičke stabilnosti mehaničkih sistema

Stabilnost mehaničkih sistema pod dejstvom stohastičkih poremećaja se intenzivno proučava više decenija. Samuels [1] je autor jednog od prvih radova u kome je razvijena opšta teorija za ispitivanje srednje kvadratne stabilnosti linearnih sistema diferencijalnih jednačina sa koeficijentima tipa belog šuma. Caughey [2] je izvršio korekciju primera kojima je Samuels ilustrovao svoja istraživanja i pokazao da nije moguće stabilisati sistem sa negativnim prigušenjem, kao i da je srednje kvadratna stabilnost potreban, ali ne i dovoljan uslov za skoro sigurnu stabilnost sistema. Da bi to bilo ispunjeno, potrebno je da su stabilni svi statistički momenti.

Jedna od najčešće korišćenih metoda za ispitivanje skoro sigurne stabilnosti stohastičkih sistema putem određivanja najvećeg eksponenta Ljapunova je metoda stohastičkog usrednjenja. Ariaratnam i dr. [3] su dobili uslove skoro sigurne asimptotske stabilnosti jedne klase linearnih sistema sa dva stepena slobode koji je podvrgnut dejstvu širokopojasne slučajne parametarske pobude malog intenziteta. Kombinujući metodu stohastičkog usrednjenja i metodu Khasminskii odredili su asimptotske izraze za najveći eksponent Ljapunova, a svoja teorijska razmatranja su primenili na problem stabilnosti savojno-uvojnih oscilacija tanke elastične grede podvrgnute dejstvu stohastički promenljivih momenata koji dejstvuju na krajevima nosača.

Analitički postupak zasnovan na metodi stohastičkog usrednjenja obvojnice energije, koji je korišćen za proučavanje elastičnih okeanskih struktura, dali su Moshchuk i Ibrahim [4]. Morski talasi su modelirani kao uskopojasni Gauss-ov slučajni proces generisan izlazom filtera prvog, drugog i četvrtog reda. Isti autori, Moshchuk i Ibrahim [5], su prethodni

problem proširili na ne-Gauss-ove procese generisane preko nelinearnog filtera koji je pobuđen procesom belog šuma.

Dinamičku stabilnost pokretne elastične trake podvrgnute slučajnim parametarskim pobudama proučavali su Kozić i Pavlović [6]. Određeni su uslovi srednje kvadratne i skoro sigurne asimptotske stabilnosti trake kada su stohastički parametarski poremećaji nekorelirani procesi. Postupak ispitivanja stabilnosti nelinearnih dinamičkih sistema putem stohastičkog usrednjenja drugog reda razvili su Hijawi i dr. [7]. Izvršena je analiza statističkog odziva oscilatora drugog reda sa tri tipa nelinearnosti i pokazano je da se rezultati usrednjenja drugog reda dobro slažu sa ocenom određenom Monte Carlo simulacijom.

Metodu stohastičkog usrednjenja koristili su Namachchivaya i Ramakrishnan [8] za ispitivanje dinamičkog ponašanja parametarski pobuđenog simetričnog sistema sa dva stepena slobode, a uslovi skoro sigurne stabilnosti su dobijeni određivanjem maksimalnog eksponenta Ljapunova. Kozić i Pavlović [9] su ispitivali srednje kvadratnu i skoro sigurnu stabilnost torzijskih oscilacija pokretne trake korišćenjem eksponenta Ljapunova u prvoj i drugoj aproksimaciji. Dinamičku stabilnost negiroskopskih viskoelastičnih sistema podvrgnutih dejstvu višestrukih parametarskih pobuda istraživali su Ariaratnam i Abdelrahman [10]. Najveći eksponent Ljapunova kao indikator skoro sigurne asimptotske stabilnosti dobijen je metodom stohastičkog usrednjenja i postupka Khasminskii, a kao primer je posmatrana viskoelastična tankozidna greda opterećena silom na sredini i momentima na krajevima. Pokazano je da na stabilnost sistema utiču samo vrednosti spektra poremećaja koje su bliske dvostrukim prirodnim frekvencijama sistema i zbiru i razlici prirodnih frekvencija tankozidne viskoelastične grede. Jednu efikasnu metodu za ispitivanje stabilnosti elastičnih sistema podvrgnutih dejstvu stohastičke parametarske pobude dao je Potapov [11]. Metoda je bazirana na simulaciji stohastičkih procesa, numeričkim rešavanjem diferencijalnih jednačina koje opisuju poremećeno kretanje sistema i sračunavanjem najvećeg eksponenta Ljapunova. Primenom ove metode može se oceniti skoro sigurna stabilnost i stabilnost statističkih momenata različitog reda. Pokazano je da se rezultati dobijeni za filtere različitog reda principijelno razlikuju od onih koji su dobijeni za procese tipa Gauss-ovog belog šuma. Labou i Ma [12] su proučavali skoro sigurnu asimptotsku stabilnost elastičnih sistema podvrgnutih parametarskim pobudama. Poremećaji se sastoje od harmonijskih funkcija i stohastičkih komponenti. Dobijeni su eksplicitni izrazi za najveći eksponent Ljapunova primenom jednog alternativnog probabilističkog pristupa i određene su oblasti

stabilnosti pravougaone grede opterećene stohastičkim aksijalnim silama i momentima na krajevima.

Pored eksponenta Ljapunova, u savremenoj teoriji dinamičke stabilnosti sistema podvrgnutih dejstvu stohastičkih poremećaja koristi se i moment eksponenta Ljapunova. Za linearni konzervativni sistem sa malim slučajnim poremećajima Khasminskii i Moshchuk [13] su dali asimptotski razvoj u red za moment eksponenta Ljapunova i indeks stabilnosti. U svojstvu primera prikazan je mehanički sistem sa jednim stepenom slobode, pri čemu je parametarska pobuda prisutna u prigušenju i krutosti sistema.

Za sistem sa dva stepena slobode, koji je podvrgnut dejstvu realnog šuma (Ornstein-Uhlenbeck-ov proces) Xie [14] je primenio metodu regularne perturbacije u cilju određivanja momenata eksponenta Ljapunova. Na osnovu momenta eksponenta Ljapunova, eksponenta Ljapunova i indeksa stabilnosti odredio je uslove skoro sigurne stabilnosti sistema. U slučaju ograničenog šuma Xie [15] je odredio oblasti skoro sigurne stabilnosti na osnovu dijagrama momenata eksponenta Ljapunova za različite vrednosti perturbacionog parametra i parametara ograničenog šuma. Isti autor, Xie [16], je za isti sistem, koji je sada podvrgnut istovremenom dejstvu harmonijskog i realnog šuma odredio uslove skoro sigurne stabilnosti sračunavajući momente eksponenta Ljapunova i eksponente Ljapunova. Analiza je sprovedena za perturbacije nultog, prvog i drugog reda.

Za parametarski pobuđen oscilator Kozić i dr. [17] su pomoću momenta p -tog reda eksponenta Ljapunova odredili oblasti skoro sigurne stabilnosti razvijajući sopstveni problem u ortogonalni Fourier-ov red. Ovaj razvoj dovodi do determinante neograničenog reda, čija se konvergencija utvrđuje numeričkim postupkom.

Eksponent Ljapunova i moment eksponenta Ljapunova odredili su Kozić i dr. [18] za ispitivanje skoro sigurne stabilnosti Hill-ove diferencijalne jednačine čiji su koeficijenti prigušenja i frekvencije modelirani procesima tipa belog šuma. Teorijska razmatranja su primenjena na tanku, slobodno oslonjenu prostu gredu, koja je podvrgnuta aksijalnim silama i vremenski promenljivom prigušenju kao stohastičkim pobudama malog intenziteta. Isti autori, Kozić i dr. [19], su pomoću eksponenta Ljapunova i momenta eksponenta Ljapunova dobili uslove skoro sigurne stabilnosti sistema dvostrukih greda koji je podvrgnut dejstvu parametarske pobude tipa belog šuma. Verifikacija aproksimativnih rezultata dobijenih preko momenta eksponenta Ljapunova je izvršena numeričkom Monte Carlo simulacijom. Uticaj moda na stabilnost statističkih momenata i skoro sigurnu stabilnost elastične grede, gde je uzet u obzir uticaj poprečnog smicanja, proučavali su Kozić i dr. [20]. Granice stabilnosti su dobijene u funkciji koeficijenta prigušenja, spektralne gustine stohastičke sile i broja moda.

Dinamičko ponašanje Timošenkove grede podvrgnute dejstvu ograničenog šuma putem sračunavanja p -tog momenta eksponenta Ljapunova proučavali su Janevski i dr. [21]. U tom cilju primenjena je metoda regularne perturbacije, a granice skoro sigurne stabilnosti su dobijene u funkciji koeficijenta prigušenja i statističkih karakteristika aksijalne pritisne sile. Skoro sigurnu stabilnost tankozidne grede podvrgnute dejstvu ekscentričnog aksijalnog opterećenja razmatrali su Janevski i dr. [22]. Verifikacija aproksimativnih rezultata za moment eksponenta Ljapunova izvršena je numeričkom Monte Carlo simulacijom.

Kada se proučava dinamička stabilnost kontinualnih mehaničkih sistema pod dejstvom stohastičkih opterećenja, metode eksponenta Ljapunova i momenata eksponenta Ljapunova zahtevaju da se izvrši diskretizacija parcijalnih diferencijalnih jednačina. To nije moguće uvek učiniti, pa se ispitivanje stabilnosti vrši primenom direktne metode Ljapunova koja se u literaturi može naći i pod nazivom *metoda funkcionala Ljapunova*.

Plaut i Infante [23] su autori jednog od prvih radova u kome je proučavana skoro sigurna stabilnost primenom funkcionala Ljapunova. Oni su dali jedan opšti postupak za konstrukciju funkcionala koji se odnosi na sisteme opisane linearnim parcijalnim diferencijalnim jednačinama sa vremenski promenljivim stohastičkim koeficijentima. Naredni kvalitativni skok u proučavanju stohastičke stabilnosti kontinualnih sistema predstavlja rad Kozin-a [24] gde je dat postupak konstrukcije „najboljeg“ funkcionala Ljapunova. Polazeći od opšteg oblika funkcionala u kvadratnoj formi, Kozin traži onaj koji će obezbediti najveće oblasti stabilnosti u funkciji viskoznog prigušenja i varijanse.

Dinamičku stabilnost nelinearnih kontinualnih sistema pod dejstvom različitih tipova stohastičkih opterećenja proučavao je Tylikowski [25],[26],[27] i [28]. Dobijeni su uslovi skoro sigurne asimptotske stabilnosti za izotropne ploče i ljuste, kao i antisimetrične poprečno i ugaono lamelovane ploče podvrgnute dejstvu stohastičkih, vremenski promenljivih sila koje dejstvuju u srednjoj ravni nosača. Analizirane su relacije između uslova stabilnosti linearizovanog i nelinearnog sistema diferencijalnih jednačina.

Uticao poprečnog smicanja i inercije obrtanja na dinamičku stabilnost i nestabilnost nosača podvrgnutih dejstvu slučajnog opterećenja proučali su Pavlović i dr. [29], Pavlović i Pavlović [30], Tylikowski i dr. [31] i Pavlović i dr. [32]. Pokazano je da je kod viskoelastičnih laminatnih ploča uticaj inercije obrtanja na oblasti skoro sigurne stabilnosti vrlo značajan i ne može se zanemariti kao kod elastičnih, simetričnih, poprečno lamelovanih nosača. Kod poprečno postavljenih simetričnih i antisimetričnih laminatnih gređa uticaj

poprečnog smicanja na oblasti skoro sigurne nestabilnosti je jako izražen kada je odnos dužine nosača i poprečnih dimenzija mali. Analiziran je uticaj odnosa glavnih krutosti lamela, faktora poprečnog smicanja, broja lamela i broja moda na oblasti skoro sigurne nestabilnosti.

1.2 Definicije stohastičke stabilnosti kontinualnih sistema

Neka je dat kontinualni dinamički sistem čije se kretanje opisuje u prostoru D^N , koji je podskup N -dimenzionalnog Euklidskog prostora sa prostornim promenljivim $\mathbf{x} = [x_1 \cdots x_N]$. Granica prostora D^N je B^{N-1} , a kretanje sistema je opisano sistemom funkcija $\mathbf{u} = [u_1(\mathbf{x}, t) \cdots u_M(\mathbf{x}, t)]$ koje zadovoljavaju sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \mathcal{F}_i(t, u_1, \dots, u_M, x_1, \dots, x_N), \quad i = 1, 2, \dots, M_1, \quad (1.1)$$

i jednačine veza

$$\mathcal{B}_j(t, u_1, \dots, u_M, x_1, \dots, x_N) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, M_2, \quad (1.2)$$

gde su \mathcal{F}_i i \mathcal{B}_j diferencijalni operatori po prostornim promenljivim, $M_1 + M_2 = M$, a t je vreme. Funkcije $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ uzimaju vrednosti $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t)$ u trenutku $t = 0$ i te vrednosti se nazivaju početni uslovi, a na granici B^{N-1} vrednosti $\mathbf{u}_1(\mathbf{x}, t)$ koje se nazivaju granični uslovi.

Slično kao u teoriji stabilnosti determinističkih sistema, gde su definicije stabilnosti formulisane u smislu uniformne konvergencije rešenja s obzirom na početne uslove, uvode se definicije stabilnosti stohastičkih sistema kao što je prikazano u radovima Kozin-a [24] i Tylikowski-og [33]. Kako u teoriji verovatnoće postoje tri osnovna tipa uniformne konvergencije: konvergencija u verovatnoći, konvergencija u srednjem i skoro sigurna konvergencija (sa verovatnoćom jednakom jedinici), moguće je formulisati tri osnovne definicije stohastičke stabilnosti. Za nas je najvažnija definicija skoro sigurne stabilnosti koja glasi: Trivijalno rešenje $\mathbf{u} \equiv 0$ je skoro sigurno stohastički stabilno ako je zadovoljena logička relacija

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \lim_{\|\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0)\| \rightarrow 0} P \left\{ \sup_{t > 0} \|\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\| > \varepsilon \right\} = 0, \quad (1.3)$$

gde P označava verovatnoću, a $\|\cdot\|$ je pogodno izabrana norma koja zadovoljava dva osnovna postulata

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\| &> 0 \quad \text{ako je} \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \neq 0, \\ \|\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\| &= 0 \quad \text{ako je} \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0,\end{aligned}\tag{1.4}$$

kao i relaciju trougla

$$\|\mathbf{u}_1(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}_2(\mathbf{x}, t)\| \leq \|\mathbf{u}_1(\mathbf{x}, t)\| + \|\mathbf{u}_2(\mathbf{x}, t)\|.\tag{1.5}$$

Za trivijalno rešenje $\mathbf{u} \equiv 0$ se kaže da je skoro sigurno asimptotski stabilno ako je skoro sigurno stabilno u smislu definicije (1.3) i ako je

$$P\left\{\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\| = 0\right\} = 1.\tag{1.6}$$

1.3 Metode određivanja stohastičke stabilnosti kontinualnih sistema

Sa stanovišta teorije oscilacija, problemi opisani diferencijalnim jednačinama čiji koeficijenti eksplicitno zavise od vremena, spadaju u klasu parametarskih oscilacija. U determinističkim problemima, ispitivanje i određivanje oblasti stabilnosti parametarskih oscilacija vrši se modeliranjem kretanja preko Mathieu-ove diferencijalne jednačine i Ince-Strutt-ovih dijagrama.

Pri prelasku na parametarsku stohastičku pobudu, kriterijum stabilnosti zavisi od statističkih karakteristika pobude i parametara mehaničkog sistema. Ako je parametarska pobuda uskopojasni proces ili ima neku ograničenu oblast u ravni amplitudno-frekventne karakteristike, javlja se niz oblasti nestabilnosti oblika klina analognih oblastima parametarske rezonancije kod determinističkih sistema. Problem postaje složeniji kada je u pitanju širokopojasna parametarska pobuda, a dinamički sistem je kontinualan sa beskonačnim brojem sopstvenih frekvencija.

Problemi opšte prirode se uvećavaju kada nije poznata spektralna gustina poremećaja, već samo opšte informacije o gustini raspodele verovatnoće. Takvi problemi se mogu prevazići korišćenjem direktne metode Ljapunova.

Metoda diskretizacije predstavlja uprošćenje kontinualnih mehaničkih sistema, pri čemu se beskonačan broj stepeni slobode zamenjuje konačnim. Na taj način se modifikuje matematički model i sa parcijalnih diferencijalnih jednačina se prelazi na odgovarajući sistem običnih diferencijalnih jednačina.

1.4 Direktna metoda Ljapunova

Direktna metoda Ljapunova zasniva se na korišćenju pozitivno definitnog funkcionala, pri čemu se na osnovu njegovog ponašanja duž trajektorija rešenja stohastičke diferencijalne jednačine može suditi o stabilnosti sistema, Tylikowski [33], Pavlović [34]. Movčan [35] je dao uopštenje direktne metode Ljapunova za ispitivanje stabilnosti kontinualnih sistema, pri čemu je uveden pojam stabilnosti s obzirom na dve mere rastojanja rešenja od neporemećenog rešenja, uopšte od trivijalnog rešenja. Prva mera, $\|\cdot\|_0$, se odnosi na ocenu početnih uslova, a druga, $\|\cdot\|$, na ocenu rešenja u bilo kom narednom trenutku.

Funkcional Ljapunova \mathbf{V} je pozitivno definitan s obzirom na normu $\|\cdot\|$, ako je

$$\bigwedge_{\mathbf{u} \in X(\bar{\Omega})} \mathbf{V} > 0 \text{ ako je } \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} \|\mathbf{u}\| > \varepsilon \Rightarrow \mathbf{V} > \delta . \quad (1.7)$$

Funkcional Ljapunova je neprekidan s obzirom na normu $\|\cdot\|_0$, ako je

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} \|\mathbf{u}_0\|_0 < \delta \Rightarrow \mathbf{V} < \varepsilon . \quad (1.8)$$

Ako je funkcional \mathbf{V} nerastući duž proizvoljnog rešenja diferencijalne jednačine, tada je trivijalno rešenje stohastičke parcijalne diferencijalne jednačine stabilno u smislu definicije (1.3). Najčešće su obe mere odstupanja izjednačene i vezane nekom relacijom sa funkcionalom \mathbf{V} . U razmatranju konkretnih kontinualnih sistema je $\|\cdot\|_0 = \|\cdot\| = \sqrt{\mathbf{V}}$.

Primena direktne metode Ljapunova za određivanje uslova stohastičke stabilnosti kontinualnih sistema zahteva različite prilaze i različite metode dokaza što zavisi od tipova diferencijalnih jednačina koje opisuju ponašanje kontinualnog dinamičkog sistema. Tako se na primer, analize skoro sigurne asimptotske stabilnosti i uniformne stohastičke stabilnosti diferencijalnih jednačina tipa Itô, vrše različitim metodama. Sem toga, i izbor funkcionala zavisi od tipa diferencijalne jednačine kontinualnog sistema.

1.5 Metode konstrukcije funkcionala Ljapunova

Jedan od osnovnih problema pri analizi stabilnosti kontinualnih sistema primenom direktne metode Ljapunova je izbor pozitivno definitnog funkcionala. Opšta metoda konstrukcije funkcionala Ljapunova ne postoji, ali postoje metode konstrukcije funkcionala koje se odnose na određene tipove problema.

Jedna od prvih metoda za konstrukciju funkcionala Ljapunova, koja poseduje izvesni karakter opštosti, predložena je od strane Parks-a i Pritchard-a [36] i široko je primenjivana u analizi stabilnosti i determinističkih i stohastičkih problema. Nedostatak ove metode ogleda se u nejednoznačnosti izbora funkcionala.

Drugi način konstrukcije funkcionala Ljapunova potiče od Plaut-a i Infante-a [23], koji su autori predložili za ispitivanje skoro sigurne stohastičke stabilnosti problema opisanih stohastičkim diferencijalnim jednačinama tipa Itô.

Kozin [24], je predložio metodu konstrukcije funkcionala Ljapunova i nazvao ga je „najbolji“ funkcional. Ovaj funkcional je korišćen za analizu stabilnosti problema opisanih regularnim diferencijalnim jednačinama drugog reda s obzirom na vreme i linearno viskozno prigušenje. Stohastički članovi u delu diferencijalnog operatora po prostornim promenljivim su stacionarni i ergodički procesi čije su realizacije neprekidne sa verovatnoćom jedan.

Dalje je izložena Parks-Pritchard-ova metoda konstrukcije funkcionala koja će biti korišćena pri proučavanju stabilnosti kontinualnih sistema.

Neka je $\mathbf{L}(\cdot)$ operator parcijalnog diferenciranja po vremenu t i prostornim promenljivim x_i koji sadrži izvode po vremenu do reda r . Rešenje diferencijalne jednačine $\mathbf{L}(\mathbf{u}) = 0$ u cilindričnom prostoru $C^{N+1} = \Omega \times \Delta$ je $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Uvedimo novi diferencijalni operator $\mathbf{N}(\cdot)$, $r-1$ reda po t , koji je dobijen iz operatora $\mathbf{L}(\cdot)$ formalnim diferenciranjem po vremenu t . Integral proizvoda ova dva operatora po prostoru $C_t^{N+1} = \Omega \times \{\tau : 0 \leq \tau \leq t\}$ jednak je nuli s obzirom na diferencijalne jednačine kretanja

$$\int_{C_t^{N+1}} \mathbf{L}(\mathbf{u})\mathbf{N}(\mathbf{u})dC_t^{N+1} = 0. \quad (1.9)$$

Predstavimo proizvod $\mathbf{L}(\mathbf{u})\mathbf{N}(\mathbf{u})$ u obliku zbira divergencije vektora \mathbf{q} i određene kvadratne forme koja sadrži izvode po \mathbf{u} , s tim što su izvodi po vremenu reda nižeg od r

$$\int_{C_t^{N+1}} \mathbf{L}(\mathbf{u})\mathbf{N}(\mathbf{u})dC_t^{N+1} = \int_{C_t^{N+1}} [\text{div}\mathbf{q}(\mathbf{u}) + Q(\mathbf{u})]dC_t^{N+1} = 0. \quad (1.10)$$

Korišćenjem Green-ove formule i graničnih uslova, dobija se

$$\int_{C_t^{N+1}} [\text{div}\mathbf{q}(\mathbf{u}) + Q(\mathbf{u})]dC_t^{N+1} = \int_{\partial C_t^{N+1}} \mathbf{q}(\mathbf{u}) d(\partial C_t^{N+1}) + \int_{C_t^{N+1}} Q(\mathbf{u})dC_t^{N+1}. \quad (1.11)$$

Prethodna relacija proizilazi iz niza parcijalnih integracija, zamene nultih graničnih uslova i svođenja na članove $r-1$ reda u izvodima po vremenu. Izjednačujući identitet

$$\mathbf{V}(t)\Big|_0^t - \int_0^t \frac{d\mathbf{V}}{dt} dt = 0, \quad (1.12)$$

sa relacijom (1.11), vidi se, da se može izabrati prvi član u (1.11) kao funkcional Ljapunova

$$\mathbf{V} = \int_{\Omega} \mathbf{q}(\mathbf{u}) d\Omega, \quad (1.13)$$

dok je njegov izvod po vremenu

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = - \int_{\Omega} Q(\mathbf{u}) d\Omega. \quad (1.14)$$

Očigledno je da predstavljanje (1.11) nije jednoznačno, a zadovoljavajuću formu funkcionala i njegovog izvoda po vremenu zasnivamo na uslovu pozitivne definitnosti funkcionala. Prednost ove metode je njena izvesna opštost, kao i istovremeno određivanje vremenskog izvoda funkcionala.

1.6 Metoda diskretizacije

U slučaju kada granični uslovi dinamičkog sistema ne zavise od vremena, parcijalne diferencijalne jednačine (1.1) i (1.2) se mogu svesti na sistem običnih diferencijalnih jednačina, pri čemu je njihov broj beskonačan, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \Leftrightarrow \{f_1(t), f_2(t), \dots, f_s(t), \dots\}$. Prelaz sa opštih parcijalnih diferencijalnih jednačina (koje mogu biti nelinearne) na diskretizovan model sistema običnih stohastičkih diferencijalnih jednačina može se izvršiti približnim metodama. Najpodesnija je metoda Galerkina koja se zasniva na minimalizaciji kvadrata greške diskretizovanog rešenja.

U praktičnim problemima analiza se vrši tako što se proučava konačan broj običnih stohastičkih diferencijalnih jednačina i ispituje stabilnost trivijalnog rešenja $f_1(t) = f_2(t) = \dots = f_s(t) = 0$. Treba napomenuti da ovakvo ograničavanje broja diferencijalnih jednačina nema čvrste matematičke osnove. Ova metoda je često korišćena pri ispitivanju stohastičke stabilnosti kontinualnih sistema u jednomodalnoj aproksimaciji u radovima Ariaratnam-a i Xie-a, [37],[38].

1.7 Eksponenti Ljapunova

Savremena teorija stabilnosti stohastičkih dinamičkih sistema se zasniva na eksponentima Ljapunova i momentu eksponenata Ljapunova. Za linearne stohastičke sisteme eksponenti Ljapunova su analogni sopstvenim vrednostima determinističkih linearnih sistema. Najveći eksponent Ljapunova ne određuje samo stabilnost linearnog stohastičkog sistema, već i brzinu rasta ili opadanja tokom vremena. S druge strane, p -ti moment eksponenta Ljapunova sudi o stabilnosti p -tog momenta linearnog stohastičkog sistema.

Između momenta eksponenta Ljapunova i eksponenta Ljapunova postoji jednostavna veza. Naime, najveći eksponent Ljapunova je prvi izvod p -tog momenta eksponenta Ljapunova u tački $p=0$. Prema tome, p -ti moment eksponenta Ljapunova predstavlja ciljni karakteristični broj za proučavanje dinamičke stabilnosti linearnih stohastičkih sistema.

Neka linearni stohastički sistem diferencijalnih jednačina ima oblik

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(\xi(t)) \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (1.15)$$

gde je $\xi(t) = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d\}^T$ d -dimenzioni vektor stohastičkih procesa. Pretpostavimo da je $\xi(t)$ proces kod koga je jedna realizacija usrednjena po vremenu reprezentna za ceo skup i da je $E[\|\mathbf{A}(\xi(0))\|] < \infty$, gde je $\|\mathbf{A}\|$ norma matrice \mathbf{A} određena najvećom sopstvenom vrednošću matrice $\sqrt{\mathbf{A}^* \mathbf{A}}$, a zvezdicom je označena operacija transponovanja i konjugovanosti ukoliko je \mathbf{A} kompleksna matrica. Tada postoji $r \leq n$ realnih brojeva $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ i r celih brojeva d_1, d_2, \dots, d_r kojima se redom množi svaki od brojeva λ_i , kao i r slučajnih potprostora $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}_r$. Pritom je:

1. d_k dimenzija slučajnog potprostora \mathbf{E}_k , a $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}_r$ potprostor n -dimenzionalnog vektorskog prostora, tj. $\mathbf{R}^n = \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2 \otimes \dots \otimes \mathbf{E}_r$,

2. $d_1 \lambda_1 + d_2 \lambda_2 + \dots + d_r \lambda_r = \text{tr}\{E[\|\mathbf{A}(\xi(0))\|]\}$, gde je sa $\text{tr}(\mathbf{A})$ označen trag matrice \mathbf{A} , i predstavlja zbir članova na glavnoj dijagonali matrice \mathbf{A} ,

3. rešenje sistema (1.15) raste ili opada eksponencijalno reda λ_k za veliko $|t|$ ako i samo ako sistem polazi iz slučajnog potprostora \mathbf{E}_k isključujući nulti element, tj.

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{t} \log \|\mathbf{x}(t)\| = \lambda_k \text{ ako i samo ako je } \mathbf{x}_0 \in \mathbf{E}_k \setminus \{\mathbf{0}\} \text{ i}$$

4. za skoro sve slučajne početne vektore \mathbf{x}_0 , eksponencijalni učinak rasta ili opadanja $\lambda(\mathbf{x}_0)$ sistema jednak je jednom od karakterističnih brojeva $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$, tj.

$$\lambda(\mathbf{x}_0) \in \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\}.$$

Realni karakteristični brojevi $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ predstavljaju srednji eksponencijalni udeo rasta ili opadanja rešenja za veliko $|t|$ i nazivaju se *eksponentima Ljapunova*. Za sud o stabilnosti linearnog stohastičkog sistema najvažniji je najveći eksponent Ljapunova

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{t} \log \|\mathbf{x}(t)\|. \quad (1.16)$$

Ako je najveći eksponent Ljapunova negativan, trivijalno rešenje sistema (1) je skoro sigurno asimptotski stabilno, tj. za bilo koje $\varepsilon > 0$ i $\rho > 0$, postoji $\delta(\varepsilon, \rho) > 0$ takvo da je

$$P\left\{\sup_{t>0} \|\mathbf{x}(t)\| > \varepsilon\right\} < \rho, \quad (1.17)$$

uvek kada je $\|\mathbf{x}(0)\| < \delta$ i

$$P\left\{\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t)\| = 0\right\} = 1, \quad (1.18)$$

gde relacija (1.18) predstavlja uslov skoro sigurne stabilnosti (stabilnost sa verovatnoćom 1).

Ako je najveći eksponent Ljapunova $\lambda_{\max} > 0$, trivijalno rešenje sistema (1.15) je skoro sigurno nestabilno.

1.8 Moment eksponenta Ljapunova

Analogno definiciji eksponenta Ljapunova, definiše se *moment reda p eksponenta Ljapunova* za rešenje sistema (1.15) u obliku

$$\Lambda(p) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{t} \log E\left[\|\mathbf{x}(t)\|^p\right]. \quad (1.19)$$

Moment reda p eksponenta Ljapunova $\Lambda(p)$ karakteriše eksponencijalni rast ili opadanje momenta reda p rešenja $E\left[\|\mathbf{x}(t)\|^p\right]$. Ako je $\Lambda(p) < 0$, tada je moment reda p asimptotski stabilan, tj. $E\left[\|\mathbf{x}(t)\|^p\right] \rightarrow 0$ kada $t \rightarrow \infty$.

Moment eksponenta Ljapunova $\Lambda(p)$ ima sledeće osobine:

1. $\Lambda(p, \mathbf{x}(0)) = \Lambda(p)$ za sve početne vrednosti $\mathbf{x}(0)$ u n -dimenzionalnom vektorskom prostoru bez nultog elementa.
2. Za sve realne vrednosti p , $\Lambda(p)$ je realna, analitička i konveksna funkcija.
3. $\Lambda(p)/p$ je rastuća funkcija, a $\Lambda(p)$ prolazi kroz nulu, $\Lambda(0) = 0$ i

$$\lambda = \Lambda'(p)|_{p=0} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\Lambda(p)}{p}, \quad (1.20)$$

tj. nagib funkcije $\Lambda(p)$ u nuli jednak je eksponentu Ljapunova.

4. Moment reda p eksponenta Ljapunova je osnovna sopstvena vrednost diferencijalnog sopstvenog problema

$$L(p, \mathbf{q})T(\mathbf{q}) = \Lambda(p)T(\mathbf{q}), \quad (1.21)$$

za nenegativnu sopstvenu funkciju $T(\mathbf{q})$.

Relacija (1.20) predstavlja najjasniju vezu između skoro sigurne stabilnosti i stabilnosti momenta linearnog sistema (1.15).

Da bi se dobila kompletna slika dinamičke stabilnosti sistema (1.15), od posebne važnosti je proučavanje stabilnosti realizacije i momenta p -tog reda za sve realne vrednosti parametra p i odrediti, kako najveći eksponent Ljapunova tako i p -ti moment eksponenta Ljapunova. Vrednost parametra $p_s \neq 0$ za koju je moment eksponenta Ljapunova jednak nuli, $\Lambda(p_s) = 0$, naziva se indeks stabilnosti.

Mada je moment eksponenta Ljapunova veoma važan u proučavanju dinamičke stabilnosti stohastičkih sistema, postupak njegovog određivanja je veoma složen. Analitički postupak određivanja momenta se zasniva na metodi perturbacije, a numerički na korišćenju metode Monte Carlo simulacije.

Detaljna analiza stabilnosti određivanjem momenta eksponenta Ljapunova perturbacionom metodom data je u doktorskoj disertaciji u referenci [39].

Metoda regularne perturbacije se zasniva na asimptotskom razvoju momenta eksponenta Ljapunova $\Lambda_{x(t)}(p)$ u diferencijalnom problemu sopstvene vrednosti (1.21) po malom parametru ε , što je prikazano u radu Khasminskii-og i Moshchuk-a [13]. U tom cilju sopstvena vrednost $\Lambda(p)$ i sopstvena funkcija $T(\mathbf{q})$ glase

$$\Lambda(p) = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \Lambda_i(p) = \Lambda_0(p) + \varepsilon \Lambda_1(p) + \varepsilon^2 \Lambda_2(p) + \dots + \varepsilon^n \Lambda_n(p), \quad (1.22)$$

$$T(\mathbf{q}) = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i T_i(\mathbf{q}) = T_0(\mathbf{q}) + \varepsilon T_1(\mathbf{q}) + \varepsilon^2 T_2(\mathbf{q}) + \dots + \varepsilon^n T_n(\mathbf{q}),$$

dok je $L(p, \mathbf{q})$ diferencijalni operator

$$L(p, \mathbf{q}) = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i L_i(p, \mathbf{q}) = L_0(p, \mathbf{q}) + \varepsilon L_1(p, \mathbf{q}) + \varepsilon^2 L_2(p, \mathbf{q}) + \dots + \varepsilon^m L_m(p, \mathbf{q}). \quad (1.23)$$

Diferencijalni operatori drugog reda $L_j(p, \mathbf{q})$, $j = 1, 2, \dots, m$, su oblika

$$L_j(p, \mathbf{q}) = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N a_{kl}^{(j)}(p, \mathbf{q}) \frac{\partial^2}{\partial q_k \partial q_l} + \sum_{k=1}^N b_k^{(j)}(p, \mathbf{q}) \frac{\partial}{\partial q_k} + c^{(j)}(p, \mathbf{q}). \quad (1.24)$$

Zamenom relacija (1.22), (1.23) i (1.24) u (1.21) i izjednačavanjem članova uz iste stepene malog parametra ε , dobijaju se perturbacije:

$$\begin{aligned} 0\text{-tog reda} \quad & L_0(p, \mathbf{q}) T_0(\mathbf{q}) = \Lambda_0(p) T_0(\mathbf{q}), \\ 1\text{-og reda} \quad & L_0(p, \mathbf{q}) T_1(\mathbf{q}) + L_1(p, \mathbf{q}) T_0(\mathbf{q}) = \Lambda_0(p) T_1(\mathbf{q}) + \Lambda_1(p) T_0(\mathbf{q}), \\ & \vdots \\ n\text{-tog reda} \quad & L_0(p, \mathbf{q}) T_n(\mathbf{q}) + L_1(p, \mathbf{q}) T_{n-1}(\mathbf{q}) = \sum_{k=0}^n \Lambda_k(p) T_{n-k}(\mathbf{q}). \end{aligned} \quad (1.25)$$

Sukcesivnim rešavanjem perturbacija, počev od nultog reda, uz korišćenje Fredholm-ove alternative, određuju se članovi razvoja momenta eksponenta Ljapunova.

2. OSNOVI VISKOELASTIČNIH MATERIJALA

Mnogi materijali ispoljavaju viskoelastične osobine kada su izloženi deformacijama koje istovremeno zavise od opterećenja, vremena i temperature. Na primer, visoke zgrade vibriraju kada su dinamički opterećene vetrom ili zemljotresom. Viskoelastični materijali imaju osobinu apsorpcije (prigušenja) takvih vibracija. Viskoelastični amortizeri, koji se koriste kod nekih visokih zgrada, sastoje se od čeličnih ploča obloženih viskoelastičnim jedinjenjima polimera. Amorfne, čvrste supstance kao što je staklo, mogu da se ponašaju kao vrlo viskozne tečnosti na povišenim temperaturama gde se vremenski odziv materijala može meriti u sekundama. S druge strane, na sobnoj temperaturi krutost stakla je mnogo veća tako da, iako tečenja i dalje ima, njegov odziv se može meriti godinama i decenijama. Slično, viskoelastično ponašanje je primećeno i u drugim materijalima, na primer kod drveta, polimera, ljudskog tkiva itd.

Pronađeni i razvijeni viskoelastični materijali korišćeni su u velikom broju različitih aplikacija. Istovremeno elastično i viskozno ponašanje materijala značajno je otpornije na smicanje i zatezanje. Dodatni sintetički polimeri pomažu u stabilizaciji materijala i čine da se materijal ponaša saglasno zahtevima konstruktora. Zbog svog složenog ponašanja, korišćenje linearnih osobina materijala je neadekvatno kod tačnog određivanja finalnog oblika viskoelastičnih materijala, vremena potrebnog da bi se dostigao taj oblik, kao i napona u elementu. U ovakvim slučajevima viskoelastičnost materijala mora biti detaljnije proučena.

U klasičnoj teoriji elastičnosti pretpostavlja se da su veze između napona i deformacija linearne i nezavisne od vremena, Novacki [40]. Uvođenjem pretpostavke o malim deformacijama može se primeniti princip superpozicije za opterećenja i deformacije. Izvedeni eksperimenti sa nekim materijalima pokazuju da, na primer, nakon naglog dejstva opterećenja, koje zatim ostaje konstantno, deformacija raste sa vremenom. Nakon uklanjanja opterećenja deformacija se ne gubi trenutno.

U cilju opisivanja ovakvih fenomena formuliše se veza između napona i deformacija koja je opštija od one kod idealno elastičnog tela. Ta veza ima oblik

$$f(\sigma, \varepsilon, t) = 0, \quad (2.1)$$

gde je σ napon, ε deformacija, a t vreme.

Pod pretpostavkom da su deformacije male, na osnovu Bolcman-ovog principa superpozicije, formirana je teorija linearne viskoelastičnosti. Bolcman-ov princip predstavlja osnovu matematičke teorije linearne viskoelastičnosti koji tvrdi da ako naponski ciklus $\sigma_1(t)$ proizvodi deformaciju $\varepsilon_1(t)$, a naponski ciklus $\sigma_2(t)$ deformaciju $\varepsilon_2(t)$, tada zbir ciklusa $\sigma_1(t) + \sigma_2(t)$ proizvodi deformaciju $\varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t)$. Prema tome, relacija (2.1) ima oblik linearne diferencijalne ili integralne jednačine.

Promenljivost mehaničkih svojstava sredine tokom vremena modelira se kombinovanjem idealno elastičnog tela i viskoznog fluida. Elastične osobine se opisuju Hooke-ovim zakonom, a viskozne Newton-ovim zakonom. Reološki model elastičnosti je opruga sa linearnom karakteristikom, pri čemu je koeficijent proporcionalnosti modul elastičnosti, a reološki model viskoznosti je kinematski par koji se sastoji od cilindra ispunjenog viskoznom tečnošću u kome se pomera klip. Taj kinematski par se obično naziva prigušnica. Pri kretanju klipa tečnost struji iz jedne u drugu komoru cilindra, brzinom koja je proporcionalna naponu.

U teoriji linearne viskoelastičnosti veliku ulogu igraju funkcije puženja i relaksacije, koje predstavljaju mere mehaničkih osobina tela.

Funkcija puženja $\varphi(t, \sigma_0)$, na primeru zategnutog štapa opterećenog u početnom trenutku $t = 0$ konstantnim opterećenjem koje prouzrokuje napon σ_0 , predstavlja odnos

$$\varphi(t, \sigma_0) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0}. \quad (2.2)$$

Ako je napon $\sigma(\tau)$ neprekidna funkcija promenljive τ u intervalu $-\infty < \tau < t$, izraz za deformaciju u trenutku t ima sledeći oblik

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t \frac{\partial \sigma(\tau)}{\partial \tau} \varphi(t - \tau) d\tau. \quad (2.3)$$

Funkcija relaksacije za primer zategnutog štapa, koji u trenutku $t = 0$ ima deformaciju ε_0 glasi

$$\psi(t, \varepsilon_0) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0}. \quad (2.4)$$

Ako je deformacija $\varepsilon(\tau)$ neprekidna funkcija vremena τ u intervalu $-\infty < \tau < t$, izraz za napon u trenutku t ima oblik

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t \frac{\partial \varepsilon(\tau)}{\partial \tau} \psi(t - \tau) d\tau. \quad (2.5)$$

Relacije (2.3) i (2.5) predstavljaju veze između napona i deformacija pri linearnom stanju napona. Očigledno je da su funkcije puženja i relaksacije fundamentalne pri opisivanju osobina materijala. Jednačine (2.3) i (2.5) su ekvivalentne Hooke-ovom zakonu kada su φ i ψ nezavisne od vremena. Ove relacije se mogu posmatrati i kao integralne jednačine, gde je jedna od fundamentalnih veličina nepoznata, dok je druga, koja se nalazi na desnoj strani, poznata. U ovom slučaju su funkcije φ i ψ jezgra Volterra-ine integralne jednačine.

Vrlo često se mehaničko ponašanje linearnog viskoelastičnog materijala matematički opisuje linearnom diferencijalnom jednačinom

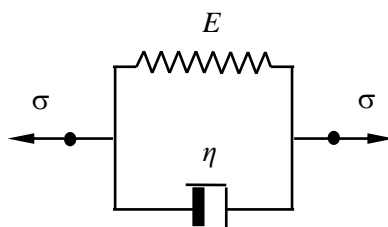
$$\sigma + p_1 \frac{d\sigma}{dt} + p_2 \frac{d^2\sigma}{dt^2} + \dots + p_n \frac{d^n\sigma}{dt^n} = q_0 \varepsilon + q_1 \frac{d\varepsilon}{dt} + q_2 \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + \dots + q_m \frac{d^m\varepsilon}{dt^m}, \quad (2.6)$$

gde su $p_1, p_2, \dots, p_n, q_0, q_1, \dots, q_m$, parametri koji zavise od fizičkih konstanti materijala.

Najčešće korišćeni modeli materijala sa viskoelastičnim osobinama su Voigt-Kelvin-ov model, Maxwell-ov model, generalisani Maxwell-ov model, standardni viskoelastični model i troparametarski model.

2.1 Voigt-Kelvin-ov model materijala

U ovom modelu opruga i prigušnica su vezane paralelno (Sl. 2.1).



Slika 2.1 Voigt-Kelvin-ov model

Deformacije opruge i prigušnice su jednake, $\varepsilon_E = \varepsilon_\eta = \varepsilon$, a napon je jednak zbiru komponentnih napona

$$\sigma(t) = \sigma_E(t) + \sigma_\eta(t) = E\varepsilon_E(t) + \eta \frac{d\varepsilon_\eta(t)}{dt} = E \left(\varepsilon(t) + \bar{\eta} \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \right), \quad (2.7)$$

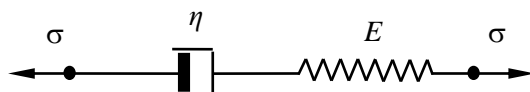
pri čemu je E modul elastičnosti, a $\bar{\eta} = \eta/E$ je vreme retardacije (zaostajanja).

Funkcija puženja za Voigt-Kelvin-ov model glasi

$$\varphi(t) = \frac{1}{E} (1 - e^{-t/\bar{\eta}}). \quad (2.8)$$

2.2 Maxwell-ov model materijala

Ovaj model se sastoji od opruge i prigušnice, koji su vezani redno (Sl. 2.2).



Slika 2.2 Maxwell-ov model

Napon u opruzi i prigušnici je isti, $\sigma_E = \sigma_\eta = \sigma$, a ukupna dilatacija je jednaka zbiru komponentnih dilatacija $\varepsilon(t) = \varepsilon_E(t) + \varepsilon_\eta(t)$, pa je

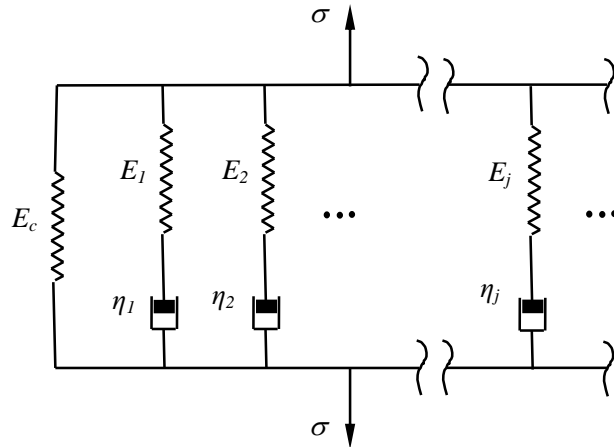
$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \frac{d\varepsilon_E(t)}{dt} + \frac{d\varepsilon_\eta(t)}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma_E(t)}{dt} + \frac{1}{\eta} \sigma_\eta = \frac{1}{E} \left(\frac{d\sigma(t)}{dt} + \frac{1}{\bar{\eta}} \sigma(t) \right). \quad (2.9)$$

Funkcija relaksacije za Maxwell-ov model ima oblik

$$\psi(t) = E e^{-t/\bar{\eta}}. \quad (2.10)$$

2.3 Generalisani Maxwell-ov model materijala

Ovaj model se sastoji od nizia n Maxwell-ovih modela sa različitim vremenima retardacije, koji su vezani paralelno, (Sl. 2.3).



Slika 2.3 Generalisani Maxwell-ov model

Dilatacije su u svim elementima jednake, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_n = \varepsilon$, a napon je jednak zbiru komponentnih napona koji se javljaju u Maxwell-ovim elementima

$$\sigma = \sum_{i=1}^n \sigma_i, \quad (2.11)$$

pri čemu je za i -ti element

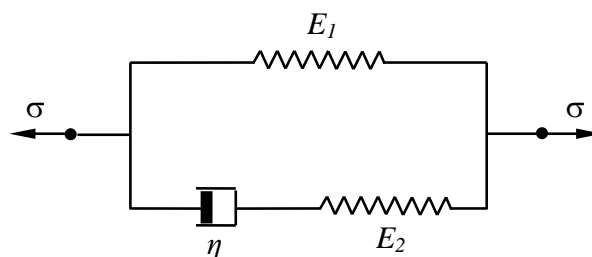
$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \frac{1}{E_i} \left(\frac{d\sigma_i(t)}{dt} + \frac{1}{\bar{\eta}_i} \sigma_i(t) \right). \quad (2.12)$$

Funkcija relaksacije za generalisani Maxwell-ov model ima oblik

$$\psi(t) = \sum_{i=1}^n E_i e^{-t/\bar{\eta}_i}. \quad (2.13)$$

2.4 Standardni linearni čvrsti (Zener-ov) model materijala

Ovaj model predstavlja paralelnu vezu Hooke-ovog (elastičnog) i Maxwell-ovog tela (Sl. 2.4).



Slika 2.4 Zener-ov model

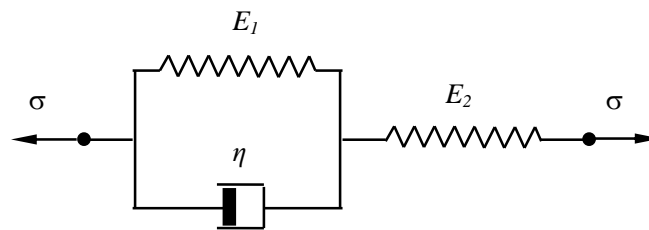
Napon i deformacija su funkcionalno povezani diferencijalnom jednačinom

$$\sigma(t) + \bar{\eta} \frac{d\sigma(t)}{dt} = E_1 \varepsilon(t) + (E_1 + E_2) \bar{\eta} \frac{d\varepsilon(t)}{dt}, \quad (2.14)$$

gde je vreme retardacije $\bar{\eta} = \eta / E_2$.

2.5 Troparametarski viskoelastični čvrsti model materijala

Redna veza Hooke-ovog i Voigt-Kelvin-ovog tela predstavlja ovaj model viskoelastičnog materijala (Shirahatti i Sinha [41]), (Sl. 2.5).



Slika 2.5 Troparametarski model

Za troparametarski model materijala, konstitutivna jednačina ima oblik

$$\sigma(t) + p_1 \frac{d\sigma(t)}{dt} = q_0 \varepsilon(t) + q_1 \frac{d\varepsilon(t)}{dt}, \quad (2.15)$$

gde su $p_1 = \eta / (E_1 + E_2)$, $q_0 = E_1 E_2 / (E_1 + E_2)$ i $q_1 = E_1 \eta / (E_1 + E_2)$.

3. NELOKALNA TEORIJA ELASTIČNOSTI

Nelokalna teorija polja se bavi fizikom materijalnih tela, pri čemu je mehaničko ponašanje jedne tačke tela uslovljeno mehaničkim stanjem svih tačaka tela. Prema klasičnoj teoriji, materijalne tačke tela su kontinualno raspoređene, pri čemu su im pridružene neke fizički nezavisne promenljive kao što su masa, električno i magnetno polje, itd. Stanje tela u jednoj materijalnoj tački je opisano relacijama odziva objekta koje formiraju drugu klasu kao što je napon, unutrašnja energija, toplota, itd. Takve jednačine se nazivaju konstitutivne jednačine.

Nelokalna teorija vrši generalizaciju klasične teorije u dva ključna aspekta:

1. Zakon održanja energije važi za celo telo,
2. Stanje tela u jednoj materijalnoj tački je opisano funkcionalnim odzivom.

Ovo znači da je potrebno potpuno poznavanje svih nezavisnih promenljivih u svim tačkama tela da bi se opisalo stanje tela u svakoj tački. Nelokalnost u vremenu se formuliše kao zavisnost od memorije. Kao podklasa prethodne definicije javljaju se gradijentne teorije koje se odnose na ograničenu nelokalnost.

Prema Eringen-u [42] osnovne jednačine polja nelokalne elastičnosti za izotropan materijal imaju sledeći oblik:

- Navier-ove jednačine kretanja deformabilnog tela u Decartes-ovom koordinatnom sistemu glase

$$\begin{aligned} \frac{\partial t_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{xz}}{\partial z} + \rho(X - \ddot{u}) &= 0, \\ \frac{\partial t_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial z} + \rho(Y - \ddot{v}) &= 0, \\ \frac{\partial t_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial t_{zz}}{\partial z} + \rho(Z - \ddot{w}) &= 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

- Veza između lokalnog i nelokalnog napona

$$t_{ij}(\mathbf{X}) = \int_V \alpha(|\mathbf{X}' - \mathbf{X}|, \beta) \sigma_{ij}(\mathbf{X}') dV(\mathbf{X}'). \quad (3.2)$$

- Komponente tenzora nelokalne deformacije

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (3.3)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right).$$

- Hooke-ov zakon

$$t_{xx} = \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2\mu\varepsilon_{xx}, \quad t_{yy} = \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2\mu\varepsilon_{yy}, \quad t_{xy} = 2\mu\varepsilon_{xy}, \quad (3.4)$$

$$t_{zz} = \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2\mu\varepsilon_{zz}, \quad t_{xz} = 2\mu\varepsilon_{xz}, \quad t_{yz} = 2\mu\varepsilon_{yz}.$$

U relacijama (3.1)-(3.4) t_{ij} i σ_{ij} su komponente tenzora nelokalnog (klasičnog) i lokalnog napona, X, Y i Z su komponente specifične zapreminske sile, ρ je gustina materijala, u, v i w komponentna pomeranja u x, y i z pravcu, ε_{ij} su komponente tenzora nelokalne deformacije, a λ i μ su Lamé-ove konstante koje se mogu izraziti preko modula elastičnosti E i Poisson-ovog koeficijenta ν

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (3.5)$$

Iz relacija (3.1)-(3.4) se vidi da se jednačine nelokalne i klasične teorije elastičnosti razlikuju samo u tome da nelokalna teorija sadrži dopunsku jednačinu (3.2). Ova jednačina uspostavlja vezu između napona nelokalne i klasične teorije elastičnosti. Funkcija jezgra $\alpha(|\mathbf{X}' - \mathbf{X}|, \beta)$ predstavlja nelokalni modul koji uzima u obzir nelokalne uticaje u referentnoj tački \mathbf{X} izazvane lokalnom deformacijom u tački \mathbf{X}' . Veličina $|\mathbf{X}' - \mathbf{X}|$ predstavlja rastojanje izraženo Euklidskom normom, a β je materijalna konstanta koja zavisi od unutrašnjih i spoljašnjih dužinskih karakteristika kao što su dužina prsline, talasna dužina itd. Ova konstanta je data izrazom

$$\beta = \frac{e_o a}{\ell}, \quad (3.6)$$

gde je e_o - konstanta poređenja modela sa eksperimentalnim rezultatima i drugim potvrđenim modelima. Određuje se tako da relacije modela nelokalne elastičnosti obezbeđuju zadovoljavajuću aproksimaciju sa krivama disperzije atoma ravnih talasa i onih koji su

dobijeni iz dinamike rešetki atoma. Članovi a i ℓ su unutrašnje i spoljašnje dužinske karakteristike nano strukture.

Prema Eringen-u [42] nelokalni modul može biti u obliku

$$\alpha(|\mathbf{X}|, \beta) = \frac{1}{2\pi\ell^2\beta^2} K_0(\sqrt{\mathbf{x} \circ \mathbf{x}} / \ell\beta), \quad (3.7)$$

gde je K_0 modifikovana Bessel-ova funkcija

$$K_0(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!i!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2i}. \quad (3.8)$$

Pretpostavljajući funkciju jezgra kao Green-ovu funkciju, Eringen pokazuje da se integralna konstitutivna relacija (3.2) može predstaviti u ekvivalentnoj diferencijalnoj formi

$$\mathcal{L} t_{ij} = \sigma_{ij}, \quad (3.9)$$

gde je diferencijalni operator Helmholtz-ovog tipa

$$\mathcal{L} = \left[1 - (e_0 a)^2 \nabla^2 \right], \quad (3.10)$$

a $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ je Laplace-ov operator.

Mogu se uzeti i drugi oblici diferencijalne forme, kao što je na primer, diferencijalni operator bi-Helmholtz-ovog tipa

$$\mathcal{L} = \left[1 - c_1^2 \nabla^2 + c_2^4 \nabla^4 \right] = \left(1 - e_1^2 \nabla^2 \right) \left(1 - e_2^2 \nabla^2 \right), \quad (3.11)$$

koji se može predstaviti kao proizvod dva operatora Helmholtz-ovog tipa. Detaljna analiza teorije nelokalne elastičnosti bi-Helmholtz-ovog tipa može se naći u radu Lazar-a i dr. [43].

3.1 Uvod u nelokalnu teoriju stabilnosti i oscilacija greda

Jedan od najjednostavnijih jednodimenzionalnih kontinualnih strukturnih modela proizvedenih od nano materijala i nano dimenzija se definiše kao nano greda. Takav tip strukture se široko koristi u mnogim inženjerskim granama kao što je građevinarstvo, mašinska i vazduhoplovna tehnika. Prvobitno je ova problematika bila vezana za buran razvoj nanostrukturnih komponenata kao što su nano elektromehanički i mikro

elektromehanički sistemi. Strukturni elementi kao što su grede, ploče i membrane našli su široku primenu u takvim sistemima.

Rezultati eksperimentalne i atomske simulacije ukazuju na značajan uticaj dimenzija na mehaničke karakteristike takvih struktura kada njihove dimenzije postaju vrlo male. Napomenimo da klasična teorija elastičnosti ne zavisi od dimenzija, pa ne može predvideti njihov uticaj na mehaničko ponašanje sistema. S druge strane, atomski i molekularni modeli su ograničeni kapacitetima kompjutera i nisu pogodni za adekvatno modeliranje nano i mikro elektromehaničkih sistema. Ovo su razlozi koji su doveli do izuzetnog interesovanja za teorije kontinuma koje uzimaju u obzir dimenzije objekta pri modeliranju struktura malih dimenzija. Između ostalih, nelokalna teorija kontinuma koju su razvili Eringen i njegovi saradnici, veoma je značajna u proučavanju mnogih problema kao što su prostiranje talasa, dislokacija i prostiranje prslina.

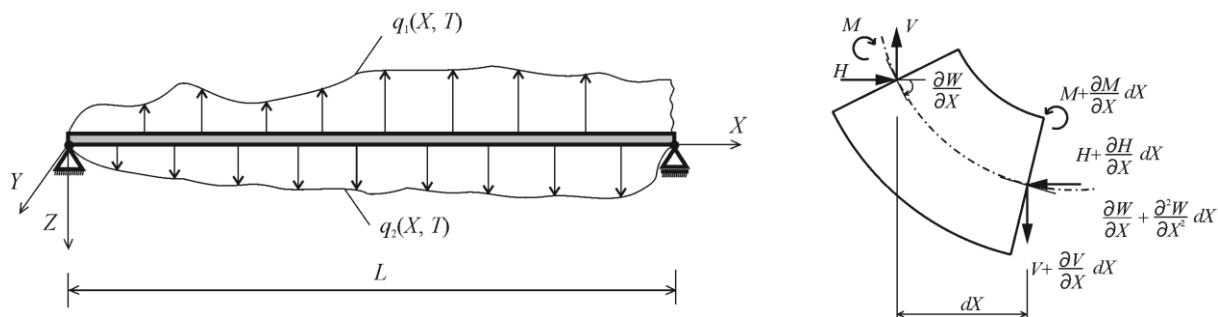
Dinamički problemi nanogreda vezani za Euler-Bernoulli-jev, Timošenkov, Reddy-jev i Levinson-ov model su proučavani u brojnim radovima. Jedan od prvih je rad Peddieson-a i dr. [44] gde je za određivanje statičkih deformacija greda primenjena nelokalna teorija kontinuma zasnovana na uprošćenom Eringen-ovom modelu [42]. Nelokalna teorija nano greda je kasnije korišćena od strane Zhang-a i dr. [45] u ispitivanju statičkih i oscilatornih karakteristika ugljeničnih prostih i složenih nanocevi. Analitička rešenja savijanja, izvijanja i oscilovanja različitih modela greda na osnovu Eringen-ove nelokalne teorije dao je Reddy [46]. Lei i dr. [47] su koristili nelokalni viskoelastični model i spoljašnje viskozno prigušenje za analizu dinamičkih karakteristika Timošenkove grede sa različitim graničnim uslovima.

Na osnovu Euler-Bernoulli-jevog i Timošenkovog modela, Tylikowski [48],[49] je proučavao dinamičku nestabilnost nano greda podvrgnutih dejstvu vremenski promenljivog stohastičkog opterećenja. Koristeći maksimalni eksponent Ljapunova, Potapov [50] je proučavao asimptotsku stabilnost i skoro sigurnu asimptotsku stabilnost greda, pri čemu je uzet u obzir uticaj nelokalne elastičnosti i prigušenja. U radu Pavlovća i dr. [51] proučavana je skoro sigurna stabilnost viskoelastične nanogrede podvrgnute dejstvu realnog šuma.

3.2 Uvod u opštu teoriju greda

Postoji više teorija greda pomoću kojih se opisuje kinematika i geometrija deformacije greda. U cilju opisivanja različitih teorija, uvešćemo Decartes-ov koordinatni sistem tako da se X -osa poklopa sa osom grede, Z -osa je usmerena naniže u ravni dejstva

opterećenja, a Y -osa je upravna na ravan opterećenja (Sl. 3.1). Pomeranja u pravcima koordinatnih osa su u , w i $v=0$ koja zavise od koordinata X , Z i vremena T .



Slika 3.1 Nanogreda i njen tipičan element

Normalna sila, transverzalna sila i napadni moment u nekom preseku grede su

$$F_N = \int_A t_{xx} dA, \quad F_T = \int_A t_{xz} dA, \quad M = \int_A Z t_{xx} dA, \quad (3.12)$$

gde je A površina poprečnog preseka grede, a t_{xx} i t_{xz} su lokalni normalni i tangencijalni napon u proizvoljnoj tački preseka nosača. Komponente

$$P = \int_A Z^3 t_{xx} dA, \quad R = \int_A Z^2 t_{xx} dA, \quad (3.13)$$

se javljaju samo u teorijama višeg reda, kao što je na primer Reddy-jeva teorija.

3.3 Nelokalna teorija Euler-Bernoulli-jevog modela grede

Euler-Bernoulli-jeva teorija greda se zasniva na polju pomeranja

$$U = U(X, T) = -Z \frac{\partial W(X, T)}{\partial X}, \quad W = W(X, T). \quad (3.14)$$

Jedina deformacija koja je različita od nule je dilatacija u pravcu X

$$\varepsilon_x = \varepsilon = \frac{\partial U}{\partial X} = -Z \frac{\partial^2 W}{\partial X^2}. \quad (3.15)$$

Na osnovu dinamičkih jednačina elementa grede (Sl. 3.1) dobija se

$$m\ddot{a} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad \Rightarrow \quad \rho A \frac{\partial^2 W}{\partial T^2} + c_1 \frac{\partial W}{\partial T} = \frac{\partial V}{\partial X} - q_1 + q_2, \quad (3.16)$$

$$J\ddot{\phi} = \sum_{i=1}^n M_i \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial X} - V - H \frac{\partial W}{\partial X} = 0.$$

gde je ρ gustina materijala, c_1 koeficijent viskoznog prigušenja, q_1 i q_2 kontinualna opterećenja na donjoj i gornjoj strani grede, a V i H su komponente glavnog vektora unutrašnjih sila.

Nelokalni normalni napon je

$$\sigma = \mathcal{L}t_{xx} = E\varepsilon, \quad (3.17)$$

gde je \mathcal{L} diferencijalni operator Helmholtz-ovog tipa

$$\mathcal{L}_H = \left[1 - (e_o a)^2 \frac{\partial^2}{\partial X^2} \right], \quad (3.18)$$

ili bi-Helmholtz-ovog tipa

$$\mathcal{L}_{bH} = \left(1 - e_1^2 \frac{\partial^2}{\partial X^2} \right) \left(1 - e_2^2 \frac{\partial^2}{\partial X^2} \right). \quad (3.19)$$

Primenom diferencijalnog operatora \mathcal{L} na izraz za napadni moment u relaciji (3.15) dobija se

$$\mathcal{L}M = -EI \frac{\partial^2 W}{\partial X^2}. \quad (3.20)$$

Na osnovu relacija (3.15), (3.16) i (3.20) dobija se

$$\mathcal{L} \left[\rho A \frac{\partial^2 W}{\partial T^2} + c_1 \frac{\partial W}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial H}{\partial X} \right) + q_1 - q_2 \right] + \frac{\partial^2}{\partial X^2} \left(EI \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \right) = 0. \quad (3.21)$$

Za gredu konstantnog poprečnog preseka, koja je na krajevima opterećena aksijalnom pritiskom silom koja zavisi od vremena, $H = F(T)$, relacija (3.21) postaje

$$\mathcal{L} \left[\rho A \frac{\partial^2 W}{\partial T^2} + c_1 \frac{\partial W}{\partial T} + F(T) \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + q_1 - q_2 \right] + EI \frac{\partial^4 W}{\partial X^4} = 0. \quad (3.22)$$

U slučaju Voigt-Kelvin-ovog materijala grede, relacija (3.17) postaje

$$\sigma = \mathcal{L}t_{xx} = E \left(\varepsilon + \bar{\eta} \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right), \quad \bar{\eta} = \frac{\eta}{E}, \quad (3.23)$$

pa je osnovna dinamička jednačina grede

$$\mathcal{L} \left[\rho A \frac{\partial^2 W}{\partial T^2} + c_1 \frac{\partial W}{\partial T} + F(T) \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + q_1 - q_2 \right] + EI \left(\frac{\partial^4 W}{\partial X^4} + \bar{\eta} \frac{\partial^5 W}{\partial T \partial X^4} \right) = 0. \quad (3.24)$$

Za slobodno oslonjeni nosač granični uslovi su

$$\left. \begin{array}{l} X = 0 \\ X = L \end{array} \right\} W = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} = 0, \quad (3.25)$$

dok je za konzolni nosač

$$\left. \begin{array}{l} X = 0 \\ X = L \end{array} \right\} \begin{array}{l} W = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial X} = 0, \\ \frac{\partial^3 W}{\partial X^3} = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} = 0. \end{array} \quad (3.26)$$

3.4 Nelokalna teorija Timošenkovog modela grede

U Timošenkovoj teoriji gređa polje pomeranja je

$$U = U(X, T) = -Z\psi, \quad W = W(X, T), \quad \frac{\partial W(X, T)}{\partial X} = \psi + \varphi, \quad (3.27)$$

gde je ψ ugao obrtanja poprečnog preseka usled savijanja momentom, a φ ugao obrtanja poprečnog preseka usled smicanja.

Normalna dilatacija i deformacija usled smicanja su

$$\varepsilon_x = \varepsilon = \frac{\partial U}{\partial X} = -Z \frac{\partial \psi}{\partial X}, \quad \gamma_{xz} = \varphi = \frac{\partial W}{\partial X} - \psi. \quad (3.28)$$

Na osnovu dinamičkih jednačina elementa gređe dobija se

$$\begin{aligned} m\vec{a} &= \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \Rightarrow \rho A \frac{\partial^2 W}{\partial T^2} + c_1 \frac{\partial W}{\partial T} = \frac{\partial V}{\partial X} - q_1 + q_2, \\ J\ddot{\psi} &= \sum_{i=1}^n M_i \Rightarrow \rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} + c_2 \frac{\partial \psi}{\partial T} = \frac{\partial M}{\partial X} - V - H \frac{\partial W}{\partial X}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Transverzalna sila i moment savijanja su

$$F_T = V + H \frac{\partial W}{\partial X} = k_s \int_A t_{xz} dA, \quad M = \int_A Z t_{xx} dA, \quad (3.30)$$

gde je k_s faktor korekcije smicanja. Nelokalni normalni i tangencijalni napon napon su

$$\sigma = \mathcal{L}t_{xx} = E\varepsilon, \quad \tau = \mathcal{L}t_{xz} = G\varphi, \quad (3.31)$$

pri čemu je G modul klizanja.

S obzirom na relacije (3.29), (3.30) i (3.31), dobija se

$$\mathcal{L} \left[\rho A \frac{\partial^2 W}{\partial T^2} + c_1 \frac{\partial W}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial H}{\partial X} \right) - q_1 + q_2 \right] - k_s GA \left(\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} - \frac{\partial \psi}{\partial X} \right) = 0, \quad (3.32)$$

$$\mathcal{L} \left(\rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} + c_2 \frac{\partial \psi}{\partial T} \right) - k_s GA \left(\frac{\partial W}{\partial X} - \psi \right) - \frac{\partial}{\partial X} \left(EI \frac{\partial \psi}{\partial X} \right) = 0.$$

U slučaju Voigt-Kelvin-ovog materijala nosača, relacije (3.31) imaju oblik

$$\sigma = E\varepsilon + E\bar{\eta} \frac{\partial \varepsilon}{\partial T}, \quad \tau = G\varphi + G\bar{\eta} \frac{\partial \varphi}{\partial T}, \quad (3.33)$$

pa se na osnovu relacija (3.29) i (3.30) dobija

$$\mathcal{L} \left(V + H \frac{\partial W}{\partial X} \right) = k_s GA \left(1 + \bar{\eta} \frac{\partial}{\partial T} \right) \left(\frac{\partial W}{\partial X} - \psi \right), \quad \mathcal{L}M = -EI \left(\frac{\partial \psi}{\partial X} + \bar{\eta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial X \partial T} \right), \quad (3.34)$$

gde je I aksijalni moment inercije preseka. Eliminacijom transverzalne sile i momenta se dobija

$$\mathcal{L} \left[\rho A \frac{\partial^2 W}{\partial T^2} + c_1 \frac{\partial W}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial H}{\partial X} \right) - q_1 + q_2 \right] - k_s GA \left(1 + \bar{\eta} \frac{\partial}{\partial T} \right) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} - \frac{\partial \psi}{\partial X} \right) = 0, \quad (3.35)$$

$$\mathcal{L} \left(\rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} + c_2 \frac{\partial \psi}{\partial T} \right) - k_s GA \left(1 + \bar{\eta} \frac{\partial}{\partial T} \right) \left(\frac{\partial W}{\partial X} - \psi \right) - \frac{\partial}{\partial X} \left[EI \left(\frac{\partial \psi}{\partial X} + \bar{\eta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial X \partial T} \right) \right] = 0.$$

3.5 Nelokalna teorija Reddy-jevog modela grede

U poboljšanoj teoriji grede Reddy [52] daje polje pomeranja u obliku

$$U = U(X, T) = -Z\psi - c_1 Z^3 \left(\frac{\partial W(X, T)}{\partial X} - \psi \right), \quad W = W(X, T), \quad (3.36)$$

gde je $c_1 = 4/(3h^2)$, a h je visina pravougaonog poprečnog preseka grede.

Normalna dilatacija i deformacija usled smicanja su

$$\varepsilon_x = \varepsilon = \frac{\partial U}{\partial X} = -Z \frac{\partial \psi}{\partial X} - c_1 Z^3 \left(\frac{\partial^2 W(X, T)}{\partial X^2} - \frac{\partial \psi}{\partial X} \right), \quad \gamma_{xz} = (1 - 3c_1 Z^2) \left(\frac{\partial W}{\partial X} - \psi \right). \quad (3.37)$$

Na osnovu dinamičkih jednačina elementa grede dobija se

$$\begin{aligned} \rho A \frac{\partial^2 W}{\partial T^2} - c_1 m_4 \frac{\partial^3 \psi}{\partial X \partial T^2} - c_1^2 m_6 \left(\frac{\partial^4 W}{\partial X^2 \partial T^2} - \frac{\partial^3 \psi}{\partial X \partial T^2} \right) - c_1 \frac{\partial^2 P}{\partial X^2} - \frac{\partial \hat{Q}}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial X} \left(H \frac{\partial W}{\partial X} \right) + q = 0, \\ \rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} + c_1 \hat{m}_4 \left(\frac{\partial^3 W}{\partial X \partial T^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} \right) + \frac{\partial \hat{M}}{\partial X} - \hat{Q} = 0, \end{aligned} \quad (3.38)$$

gde su uvedene oznake

$$m_k = \int_A \rho z^k = dA, \quad \hat{m}_2 = m_2 - c_1 m_4, \quad \hat{m}_4 = m_4 - c_1 m_6, \quad \hat{M} = M - c_1 P, \quad \hat{Q} = Q - 3c_1 R. \quad (3.39)$$

U slučaju idealno elastičnog materijala, na osnovu nelokalne teorije, osnovne dinamičke jednačine glase

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[\rho A \frac{\partial^2 W}{\partial T^2} - c_1 m_4 \frac{\partial^3 \psi}{\partial X \partial T^2} - c_1^2 m_6 \left(\frac{\partial^4 W}{\partial X^2 \partial T^2} - \frac{\partial^3 \psi}{\partial X \partial T^2} \right) + \frac{\partial}{\partial X} \left(H \frac{\partial W}{\partial X} \right) - q \right] = \\ = G \tilde{A} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} - \frac{\partial \psi}{\partial X} \right) - c_1 E J \frac{\partial^3 \psi}{\partial X^3} - c_1^2 E K \left(\frac{\partial^4 W}{\partial X^4} - \frac{\partial^3 \psi}{\partial X^3} \right) = 0, \end{aligned} \quad (3.40)$$

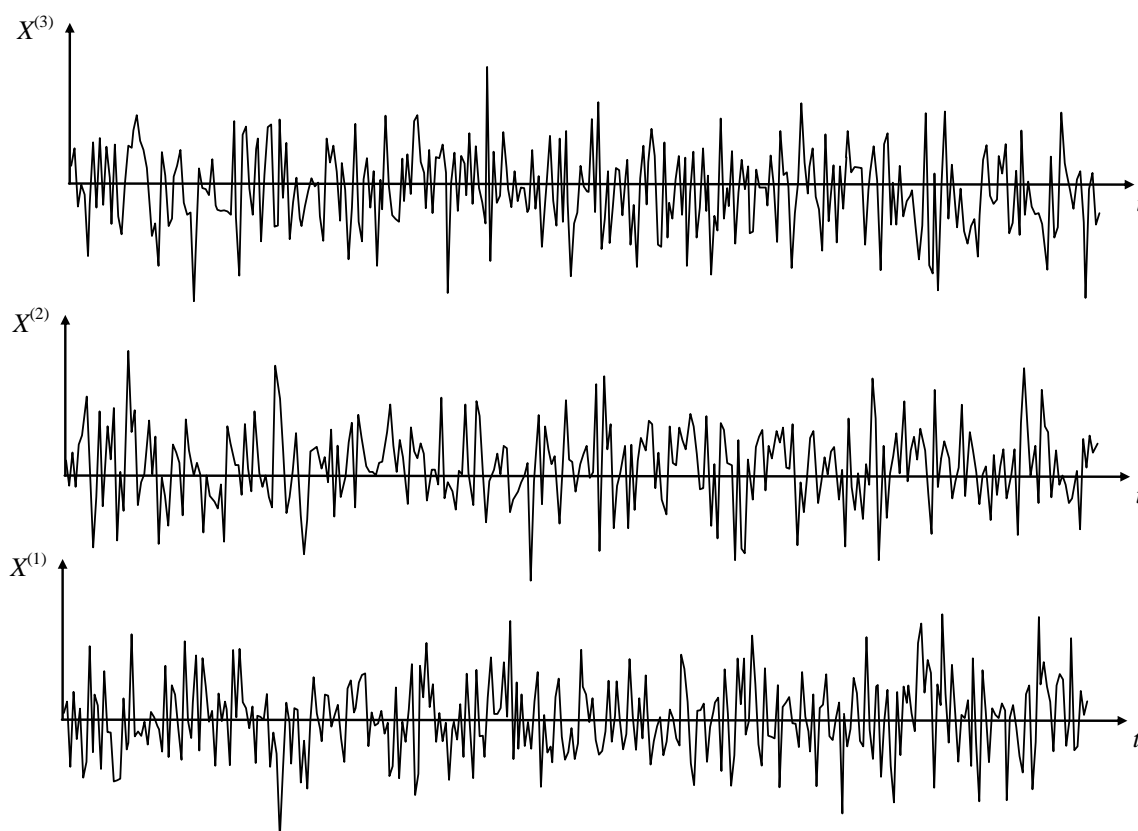
$$\mathcal{L} \left[\rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} + c_1 \hat{m}_4 \left(\frac{\partial^3 W}{\partial X \partial T^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} \right) \right] = E \hat{I} \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} - c_1 E \hat{J} \left(\frac{\partial^3 W}{\partial X^3} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} \right) - G \tilde{A} \left(\frac{\partial W}{\partial X} - \psi \right) = 0,$$

gde je

$$\begin{aligned} (A, I, J, K) = \int_A (1, z^2, z^4, z^6) dA, \quad \bar{A} = A - 3c_1 I, \quad \bar{I} = I - 3c_1 J, \\ \tilde{A} = \bar{A} - 3c_1 \bar{I}, \quad \hat{I} = I - c_1 J, \quad \hat{J} = J - c_1 K. \end{aligned} \quad (3.41)$$

4. SLUČAJNI PROCESI

Slučajni proces se može grubo definisati kao kontinualan fizički proces koji je prouzrokovan nedeterminističkim uticajima. U svakom od serija eksperimenata, slučajni proces $X(t)$ generiše zapis $X^k(t)$, koji predstavlja realizaciju primerka funkcije procesa u pojedinačnom eksperimentu. Slučajna priroda procesa se odražava u činjenici da ne postoje dva zapisa identična u svakom pogledu, kao što je prikazano na Sl. 4.1. Skup svih mogućih realizacija slučajnog procesa naziva se familija realizacija. Dok je svaka realizacija definitna funkcija vremena t , tj. $X^k(t)$ je obična funkcija za fiksirano k , familija svih realizacija se može opisati jedino statistički. Prema tome, za bilo koju pojedinačnu vrednost t , $X(t)$ je slučajna promenljiva.



Slika 4.1 Realizacije slučajnog procesa $X^k(t)$

Slučajni proces može biti funkcija jedne promenljive kao što je vreme t (na primer brzina obrtanja vratila), a može zavisiti od nekoliko nezavisno promenljivih kao što je na primer polje pritiska u fluidu koji zavisi od vremena i položaja, Xie [53] i Mališić [54].

4.1 Funkcija raspodele verovatnoće i funkcija gustine raspodele verovatnoće

Slučajni proces je opisan različitim funkcijama raspodele verovatnoće. Na osnovu Sl. 4.1 u određenom trenutku t , funkcija raspodele verovatnoće prvog reda za $X(t)$ se definiše kao

$$F_1(x, t) = \mathbf{P}\{X(t) < x\}. \quad (4.1)$$

Uočimo dva vremenska trenutka t_1 i t_2 . Verovatnoća da je $X(t_1) < x_1$ i $X(t_2) < x_2$ predstavlja funkciju raspodele verovatnoće drugog reda

$$F_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = \mathbf{P}\{X(t_1) < x_1, X(t_2) < x_2\}. \quad (4.2)$$

Slično, funkcija raspodele verovatnoće reda n definiše se kao

$$F_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) = \mathbf{P}\{X(t_1) < x_1, X(t_2) < x_2, \dots, X(t_n) < x_n\}. \quad (4.3)$$

Slučajni proces je potpuno određen ukoliko su poznate funkcije raspodele verovatnoće za svaki red $n = 1, 2, \dots$. Odgovarajuća funkcija gustine raspodele verovatnoće reda n , $n=1, 2, \dots$, definiše se kao

$$p_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) = \frac{\partial^n F_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}, \quad (4.4)$$

ili

$$p_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \mathbf{P}\{x_1 < X(t_1) < x_1 + dx_1; x_2 < X(t_2) < x_2 + dx_2; \dots; x_n < X(t_n) < x_n + dx_n\}. \quad (4.5)$$

Često je nepotrebno ili nemoguće odrediti funkcije raspodele verovatnoće bilo kog reda. U praksi, dovoljno je poznavanje funkcija raspodele verovatnoće prvog i drugog reda. Konkretno, za Gauss-ov slučajni proces, funkcija raspodele verovatnoće prvog i drugog reda opisuje proces u potpunosti.

Ukoliko su funkcije raspodele verovatnoće invarijantne sa promenom vremena, tj., ako je

$$F_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) = F_n(x_1, t_1 + \tau; x_2, t_2 + \tau; \dots; x_n, t_n + \tau), \quad (4.6)$$

za svako n i proizvoljno τ , za slučajni proces se kaže da je stacionaran. Ovo znači da je funkcija raspodele verovatnoće prvog reda nezavisna od vremena, a funkcija raspodele verovatnoće drugog reda zavisi samo od vremenske razlike

$$F_1(x, t) = F_1(x), \quad F_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = F_2(x_1, x_2; t_2 - t_1). \quad (4.7)$$

Smatra se da je slučajni proces stacionaran kada se fizički faktori koji utiču na njega ne menjaju vremenom.

4.2 Matematičko očekivanje i momenti

Na osnovu dostupnih eksperimentalnih podataka u brojnim fizičkim primenama je veoma teško odrediti sve funkcije raspodele verovatnoće, a često ovako detaljna informacija nije ni neophodna. U takvim slučajevima, pri ovakvim ograničenjima, potrebno je poznavati samo neke srednje karakteristike slučajnog procesa. Za slučajni proces $X(t)$ mogu se definisati dva tipa usrednjenja:

Statistička ili srednja vrednost skupa za određenu vrednost vremenskog parametra t označena sa $E[X(t)]$, određena je sračunavanjem očekivanja ili srednje vrednosti slučajne vrednosti $X(t)$ na celom skupu realizacija

$$E[X(t)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X^{(k)}(t). \quad (4.8)$$

Vremenski usrednjena vrednost označava se sa $\bar{X}(t)$ i određena je odabirom pojedinačne realizacije $X^{(k)}(t)$ i sračunavanjem srednje vrednosti za $X^{(k)}(t)$ za celi vremenski interval

$$\bar{X}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X^{(k)}(t) dt. \quad (4.9)$$

Svako od ovih usrednjenja se takođe može definisati za bilo koju funkciju slučajnog procesa. Najjednostavnije od tih funkcija su polinomi $X^{k_1}(t_1), X^{k_2}(t_2), \dots, X^{k_n}(t_n)$, čije se srednje vrednosti nazivaju *momenti*.

Od svih momenata koji se dobijaju na osnovu funkcije raspodele verovatnoće prvog reda najvažnije je *matematičko očekivanje* (očekivana vrednost ili moment prvog reda) i *srednje kvadratno očekivanje* (moment drugog reda), a definišu se, redom

$$m(t) = m_1(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} xp_1(x, t)dx, \quad (4.10)$$

$$m_2(t) = E[X^2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p_1(x, t)dx. \quad (4.11)$$

Varijansa slučajnog procesa $X(t)$, označava se sa $Var[X(t)] = \sigma^2(t)$ i definisana je izrazom

$$\sigma^2(t) = E[\{X(t) - m(t)\}^2] = m_2(t) - m^2(t), \quad (4.12)$$

što predstavlja očekivanje kvadrata disperzije srednje vrednosti. Pozitivni kvadratni koren varijanse se naziva *standardna devijacija* i predstavlja rasipanje krive gustine verovatnoće oko srednje vrednosti.

Kod stacionarnih procesa, pošto je $p_1(x, t)$ nezavisno od vremena t , matematičko očekivanje i momenti su takođe nezavisni od t .

4.3 Korelacione funkcije i funkcije spektralne gustine

Najvažnija srednja vrednost dobijena iz raspodele verovatnoće drugog reda je *autokorelaciona funkcija*

$$R(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 p_2(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2. \quad (4.13)$$

Prefiks *auto* označava da su razmatrane dve slučajne promenljive, $X(t_1)$ i $X(t_2)$, koje odgovaraju istom slučajnom procesu. Srodna veličina je *kovarijansa* slučajne funkcije, koja opisuje zavisnost između vrednosti slučajne funkcije u dva trenutka t_1 i t_2 , i definiše se kao

$$K(t_1, t_2) = E[\{X(t_1) - m(t_1)\}\{X(t_2) - m(t_2)\}] = R(t_1, t_2) - m(t_1)m(t_2), \quad (4.14)$$

gde je $m(t) = E[X(t)]$. Za dve slučajne promenljive se kaže da su *nekorelirane* ukoliko je njihova kovarijansa jednaka nuli.

Uopštena autokorelaciona funkcija je *poprečno-korelaciona funkcija* i definiše se kao

$$E[X(t_1)Y(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} xy p_{XY}(x, t_1; y, t_2) dx dy, \quad (4.15)$$

gde $X(t_1)$ i $Y(t_2)$ pripadaju različitim slučajnim procesima $X(t)$ i $Y(t)$.

Dva slučajna procesa $X(t_1)$ i $Y(t_2)$ su nezavisna ako je

$$p_{XY}(x, t_1; y, t_2) = p_X(x, t_1)p_Y(y, t_2), \quad (4.16)$$

a jednačina (4.15) postaje

$$E[X(t_1)Y(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} xp_X(x, t_1)dx \int_{-\infty}^{+\infty} yp_Y(y, t_2)dy = E[X(t_1)]E[Y(t_2)]. \quad (4.17)$$

Kod stacionarnih slučajnih procesa autokorelaciona funkcija zavisi jedino od vremenske razlike t_2-t_1 i često se označava sa $R(\tau)$, gde je $\tau = t_2-t_1$. Autokorelaciona funkcija ima sledeće osobine:

1. $R(0)=E[X^2(t)]$, što predstavlja srednju kvadratnu vrednost za slučajni proces $X(t)$.
2. $R(\tau)$ je simetrična u okolini $\tau = 0$ pošto je

$$R(\tau) = E[X(t), X(t+\tau)] = E[X(t-\tau)X(t)] = E[X(t)X(t-\tau)] = R(-\tau). \quad (4.18)$$

3. Imajući u vidu nejednakost $E[\{X(t) \pm X(t-\tau)\}^2] \geq 0$, dobija se

$$E[X^2(t)] + E[X^2(t+\tau)] \geq \pm 2E[X(t)X(t+\tau)], \quad (4.19)$$

ili,

$$R(0) \geq |R(\tau)|. \quad (4.20)$$

Na osnovu osobina 2 i 3 jasno je da, ukoliko postoji, $R'(0)$ mora biti jednako nuli, a $R''(0)$ je negativno.

4. Ukoliko nema periodične komponente, onda je

$$\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} R(\tau) = 0. \quad (4.21)$$

5. Pošto je

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n R(\tau_i - \tau_j) u_i u_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E[X(\tau_i)X(\tau_j)] u_i u_j = E \left[\left\{ \sum_{i=1}^n X(\tau_i) u_i \right\}^2 \right] \geq 0, \quad (4.22)$$

za proizvoljno n i proizvoljne vrednosti $u_1, u_2, \dots, u_n; t_1, t_2, \dots, t_n$, onda je $R(\tau)$ nenegativno definitna funkcija. Na osnovu osobine i teoreme zasnovane na Bochner-u, iz teorije Fourier-ovih integrala, $R(\tau)$ se može napisati u sledećem obliku

$$R(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[S(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega, \quad (4.23)$$

pa je $S(\omega)$ Fourier-ova transformacija funkcije $R(\tau)$

$$S(\omega) = \mathcal{F}[R(\tau)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (4.24)$$

Funkcija $S(\omega)$ se naziva *spektralna gustina* slučajnog procesa $X(t)$. Jednačine (4.23) i (4.24) povezuju autokorelacionu funkciju i spektralnu gustinu stacionarnog slučajnog procesa što nas upućuje na Wiener-Khinchine-ove relacije.

Značenje izraza „spektralna gustina“ postaje jasnije kada se posmatra relacija

$$E[X^2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p_1(x, t) dx = R(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \frac{d\omega}{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) df, \quad (4.25)$$

gde je $\omega = 2\pi f$. Ako se slučajni proces $X(t)$ posmatra kao struja, tada $E[X^2(t)]$ daje usrednjenu energiju rasipanja u jediničnom otporniku, pri čemu je $S(\omega)$ učešće u energiji na frekvenciji f na intervalu df .

Neki od primera autokorelacionih funkcija i njima odgovarajućih spektralnih gustina su:

1. Periodična funkcija

$$R(\tau) = A^2 \cos \omega_0 \tau, \quad (4.26)$$

$$S(\omega) = A^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\tau} \cos \omega_0 \tau d\tau = \pi A^2 [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)],$$

gde je $\delta(\cdot)$ Dirac-ova delta funkcija. Stoga je celokupna energija skoncentrisana na frekvencijama $\omega = \pm\omega_0$, kao što je prikazano na Sl. 4.2 a).

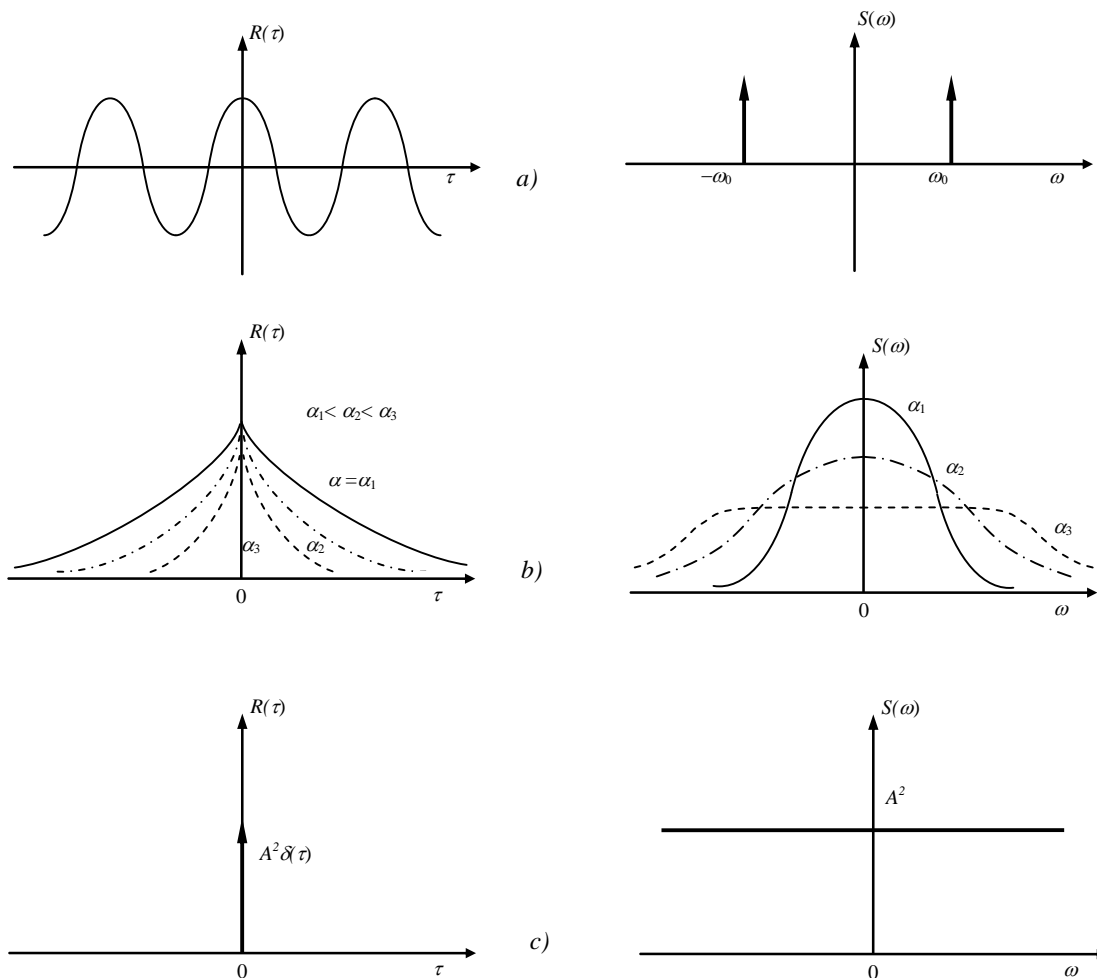
2. Eksponencijalna autokorelaciona funkcija, kao što je prikazano na Sl. 4.2 b)

$$R(\tau) = A^2 e^{-\alpha|\tau|}, \quad S(\omega) = \frac{2\alpha A^2}{\alpha^2 + \omega^2}. \quad (4.27)$$

3. Proces belog šuma

$$R(\tau) = A^2 \delta(\tau), \quad S(\omega) = A^2. \quad (4.28)$$

Za ovaj slučajni proces funkcija spektralne gustine je konstantna na celom frekventnom intervalu, kao što se vidi na Sl. 4.2 c). Proces se ne može fizički realizovati jer je njegova ukupna srednja energija beskonačna.



Slika 4.2 Autokorelacione funkcije i odgovarajuće funkcije spektralne gustine

4.4 Ergodički slučajni procesi

Srednje vrednosti o kojima je bilo reči u prethodnom tekstu, odnosile su se na usrednjenja skupova (familija). Praktično sračunavanje je jako otežano, jer se zahteva veliki broj realizacija. Sa druge strane vremensko usrednjenje određene realizacije definisano jednačinom (4.9) se može jednostavno sračunati. U tom slučaju je poželjno znati pod kojim uslovima su dva tipa usrednjenih vrednosti jednake. Slučajni proces čija srednja vrednost poseduje ovu osobinu se naziva *ergodički*. U osnovi „ergodički“ znači da je bilo koja pojedinačna realizacija usrednjena po vremenu reprezentna za ceo skup.

Prema tome, za ergodički slučajni proces važi

$$E[X(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T X^{(k)}(t) dt, \quad (4.29)$$

$$R(\tau) = E[X(t)X(t+\tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T X^{(k)}(t)X^{(k)}(t+\tau)dt,$$

gde je $X^{(k)}(t)$ karakteristični zapis. Dok su vremenske srednje vrednosti nezavisne od vremena, očigledno je da je stacionarnost neophodan uslov ergodičnosti. Mnogi praktični slučajni procesi se često smatraju ergodičkim.

4.5 Gauss-ov i harmonijski proces

Veoma bitan slučajni proces je Gauss-ov proces čije su funkcije gustine raspodele verovatnoće za jednodimenzionalnu i dvodimenzionalnu raspodelu date sledećim izrazima

$$p_1(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(t)} \exp\left\{-\frac{[x - m(t)]^2}{2\sigma^2(t)}\right\}, \quad (4.30)$$

$$p_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x_1 - m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x_1 - m_1)(x_2 - m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2 - m_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}, \quad (4.31)$$

gde je

$$m(t) = E[X(t)], \quad \sigma^2(t) = E[\{X(t) - m(t)\}^2], \quad \rho(t_1, t_2) = \frac{K(t_1, t_2)}{\sigma_1\sigma_2}, \quad (4.32)$$

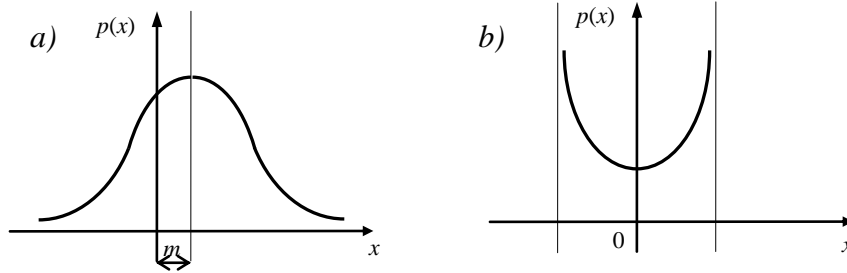
$$m_1 = m(t_1), \quad m_2 = m(t_2), \quad \sigma_1 = \sigma(t_1), \quad \sigma_2 = \sigma(t_2).$$

Harmonijski proces ima jednodimenzionalnu funkciju gustine raspodele verovatnoće

$$p_1(x, t) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{A^2 - x^2}}, \quad (4.33)$$

i predstavlja gustinu verovatnoće događaja da se u proizvoljnom trenutku materijalna tačka koja vrši harmonijsko kretanje, nalazi na rastojanju x , ($x = A \sin \omega t$) od ravnotežnog položaja. Matematičko očekivanje i varijansa harmonijskog procesa su

$$m(t) = E[X(t)] = 0, \quad \sigma^2(t) = E[\{X(t) - m(t)\}^2] = \frac{1}{2} A^2. \quad (4.34)$$



Slika 4.3 Funkcija gustine raspodele verovatnoće za a) Gauss-ov i b) harmonijski proces

4.6 Wiener-ov proces

Wiener-ov ili Brown-ov proces se označava sa $W(t)$ ili $B(t)$ i predstavlja osnovu moderne teorije slučajnih procesa. Definiše se na sledeći način:

1. $W(t)$ je neprekidna funkcija od t , ima realne vrednosti i Gauss-ovog je tipa.
2. $W(t)$ ima nultu srednju vrednost, tj. $E[W(t)] = 0$.
3. $E[W(t)W(s)] = R(t, s) = \sigma^2 \min(t, s) = \begin{cases} \sigma^2 t, & \text{ako je } t < s, \\ \sigma^2 s, & \text{ako je } t > s. \end{cases}$

Uslov 3 ukazuje da je varijansa Wiener-ovog procesa

$$\text{Var}[W(t)] = E[W^2(t)] = \sigma^2 t, \quad (4.35)$$

i

$$E\left[|W(t) - W(s)|^2\right] = E[W^2(t)] + E[W^2(s)] - 2E[W(t)W(s)] = \sigma^2(t - s), \text{ za } t \geq s, \quad (4.36)$$

ili

$$E\left[|dW(t)|^2\right] = \sigma^2 dt, \text{ gde je } dW(t) = W(t + dt) - W(t). \quad (4.37)$$

Često se uzima da je $\sigma^2 = 1$, tako da je $W(t) = \sigma \tilde{W}(t)$ i $E\left[|d\tilde{W}(t)|^2\right] = dt$. $\tilde{W}(t)$ se naziva jediničnim ili standardnim Wiener-ovim procesom. Nadalje ćemo proces $\tilde{W}(t)$ označavati sa $W(t)$.

Osobine Wiener-ovog procesa su:

- a) $W(t)$ ima nezavisne priraštaje

$$E[\{W(t_4) - W(t_3)\}\{W(t_2) - W(t_1)\}] = 0, \quad (4.38)$$

stoga $W(t)$ ima ortogonalne priraštaje.

Iz uslova 2 definicije Wiener-ovog procesa se dobija

$$E[(W(t_4) - W(t_3))E[W(t_2) - W(t_1)]] = 0, \quad (4.39)$$

što dovodi do

$$E[\{W(t_4) - W(t_3)\}\{W(t_2) - W(t_1)\}] = E[W(t_4) - W(t_3)]E[W(t_2) - W(t_1)], \quad (4.40)$$

i ukazuje da $W(t)$ ima nekorelirane priraštaje. Kako je iz uslova definicije 1 i 2, $W(t)$ Gauss-ov proces sa nultom srednjom vrednošću, priraštaji $W(t)$ su nezavisni.

Neka je $\tilde{W}(t) = W(t) - W(0)$, tada je $\tilde{W}(0) = 0$. Stoga se standardni Wiener-ov proces $W(t)$ može definisati sa $W(0) = 0$ sa verovatnoćom 1.

b) *Neprekidnost*

Kako je $E\left[|W(t) - W(s)|^2\right] = t - s \rightarrow 0$, kada $t \rightarrow s$, $W(t)$ je srednjekvadratno

neprekidna.

Neka je $X(t) = W(t + \Delta t) - W(t)$, tada se iz definicije Wiener-ovog procesa dobija

$$E[X(t)] = E[W(t + \Delta t)] - E[W(t)] = 0, \quad (4.41)$$

$$E[X^2(t)] = E\left[|W(t + \Delta t) - W(t)|^2\right] = |\Delta t|.$$

Iz relacija (4.41) sledi da je $X(t)$ Gauss-ov proces sa nultom srednjom vrednošću i varijansom $|\Delta t|$. Funkcija gustine verovatnoće za slučajni proces $X(t)$ ima oblik

$$p_X(\xi, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi|\Delta t|}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2|\Delta t|}\right). \quad (4.42)$$

Na osnovu osobina normalne slučajne promenljive

$$E[X^4(t)] = 3\{E[X^2(t)]\}^2 = 3(\Delta t)^2, \quad (4.43)$$

dobija se

$$E\left[|W(t_2) - W(t_1)|^4\right] = 3|t_2 - t_1|^2. \quad (4.44)$$

Prema tome, $W(t)$ zadovoljava uslov Kolmogorovljeve teoreme što ukazuje da je $W(t)$ neprekidna funkcija sa verovatnoćom 1.

c) *Nediferencijabilnost*

Kako je iz jednačine (4.41)

$$E\left[\left|\frac{W(t + \Delta t) - W(t)}{\Delta t}\right|^2\right] = \frac{1}{|\Delta t|} \rightarrow \infty, \quad \text{kada } |\Delta t| \rightarrow 0, \quad (4.45)$$

sledi da je standardni Wiener-ov proces $W(t)$ nediferencijabilan u srednje kvadratnom smislu. Može se takođe pokazati da je $W(t)$ nediferencijabilna funkcija sa verovatnoćom 1.

4.7 Proces belog šuma

Beli šum se definiše kao stacionarni proces $X(t)$, na vremenskom intervalu $-\infty < t < +\infty$ sa

$$E[X(t)] = 0, \quad E[X(t)X(t + \tau)] = R(\tau) = S_0\delta(\tau). \quad (4.46)$$

Spektralna gustina $S(\omega)$ za proces $X(t)$ je

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} R(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} S_0\delta(\tau) d\tau = S_0 = \text{const.} \quad (4.47)$$

Varijansa procesa belog šuma je $E[X^2(t)] = R(0) = \infty$.

Neka je ubuduće $Z(t)$ Gauss-ov proces, tada $Z(t)$ zadovoljava uslove Wiener-ovog procesa i može se izraziti kao $Z(t) = \sqrt{S_0}W(t)$, gde je $W(t)$ jedinični "prošireni" Wiener-ov proces na vremenskom intervalu $-\infty < t < +\infty$ pri čemu je vremenski opseg t proširen sa $[0, +\infty]$ na $(-\infty, +\infty)$. Sada se može dobiti sledeća formalna veza

$$Z(t) = \sqrt{S_0}W(t), \quad -\infty < t < +\infty, \quad S_0 = \sigma^2, \quad (4.48)$$

$$E[Z(t)] = 0, \quad E[dZ(t_1)dZ(t_2)] = \begin{cases} 0, & t_1 \neq t_2, \\ \sigma^2 dt, & t_1 = t_2 = t. \end{cases}$$

4.8 Procesi Markova

Za slučajan proces $X(t)$, $a \leq t \leq b$, se kaže da je proces Markova ako je u trenucima vremena $a < t_1 < t_2 < \dots < t_n < b$

$$P\{X(t_n) \leq \xi_n | X(t_j) = \xi_j, j = 1, 2, \dots, n-1\} = P\{X(t_n) \leq \xi_n | X(t_{n-1}) = \xi_{n-1}\}, \quad (4.49)$$

što znači da verovatnoća da proces uzima vrednost manju od ξ_n u narednom trenutku t_n zavisi od vrednosti procesa u datom trenutku t_{n-1} i nezavisna je od vrednosti u prethodnim trenucima $t_{n-2}, t_{n-3}, \dots, t_1$.

Jednačina (4.49) se može napisati pomoću funkcija raspodele verovatnoće

$$F_X(\xi_n, t_n | \xi_{n-1}, t_{n-1}; \xi_{n-2}, t_{n-2}; \dots; \xi_1, t_1) = F_X(\xi_n, t_n | \xi_{n-1}, t_{n-1}), \quad (4.50)$$

gde je $X = \{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)\}$, ili pomoću funkcija gustine raspodele verovatnoće

$$P_X(\xi_n, t_n | \xi_{n-1}, t_{n-1}; \xi_{n-2}, t_{n-2}; \dots; \xi_1, t_1) = P_X(\xi_n, t_n | \xi_{n-1}, t_{n-1}). \quad (4.51)$$

Za proces Markova su poznate sve konačno dimenzionalne raspodele kada je poznata dvodimenzionalna funkcija raspodele verovatnoće $F_X(\xi_1, t_1; \xi_2, t_2)$, a takođe poznata je funkcija gustine raspodele verovatnoće $p_X(\xi_1, t_1; \xi_2, t_2)$. Na primer, ako je $t_3 > t_2 > t_1$, trodimenzionalna funkcija gustine raspodele verovatnoće je

$$\begin{aligned} p_X(\xi_1, t_1; \xi_2, t_2; \xi_3, t_3) &= p_X(\xi_3, t_3 | \xi_2, t_2; \xi_1, t_1) \cdot p_X(\xi_1, t_1; \xi_2, t_2) = \\ &= p_X(\xi_3, t_3 | \xi_2, t_2) \cdot p_X(\xi_1, t_1; \xi_2, t_2), \end{aligned} \quad (4.52)$$

gde je

$$p_X(\xi_2, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(\xi_1, t_1; \xi_2, t_2) d\xi_1, \quad p_X(\xi_3, t_3 | \xi_2, t_2) = \frac{p_X(\xi_2, t_2; \xi_3, t_3)}{p_X(\xi_2, t_2)}. \quad (4.53)$$

Uslovna funkcija raspodele verovatnoće $F_X(\xi, t | \eta, s)$, $t > s$, poznata je kao funkcija raspodele prelaza; a uslovna funkcija gustine raspodele verovatnoće $p_X(\xi, t | \eta, s)$, $t > s$ poznata je kao funkcija gustine raspodele prelaza koja se često označava kao $q_X(\xi, t | \eta, s)$.

Ako je $q_X(\xi, t + \tau | \eta, s + \tau) = q_X(\xi, t | \eta, s)$ za bilo koje τ , proces se naziva stacionarnim. Tada $q_X(\xi, t | \eta, s)$ zavisi od ξ, η i vremenske razlike $t-s$.

4.9 Difuzioni procesi

Slučajni proces $X(t)$ sa neprekidnim vremenskim parametrom t se naziva difuzioni proces ako zadovoljava uslove procesa Markova, a njegove trajektorije realizacija su neprekidne funkcije vremena t .

Osobina da su trajektorije realizacija difuzionog procesa neprekidne, može se izraziti u sledećem obliku

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} P\{|X(t + \Delta t) - X(t)| > \varepsilon | X(t) = \xi\} = 0, \quad (4.54)$$

što znači da je verovatnoća velikih promena procesa $X(t)$ za kratak vremenski interval, mala.

Svi difuzioni procesi su definisani pomoću dva parametra koji opisuju srednju vrednost i varijansu beskonačno malih razlika. Ako označimo beskonačno malo pomeranje u trenutku Δt sa $\Delta X(t) = X(t + \Delta t) - X(t)$, onda se može definisati

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} E[\Delta X(t) | X(t) = \xi] = a(\xi, t), \quad (4.55)$$

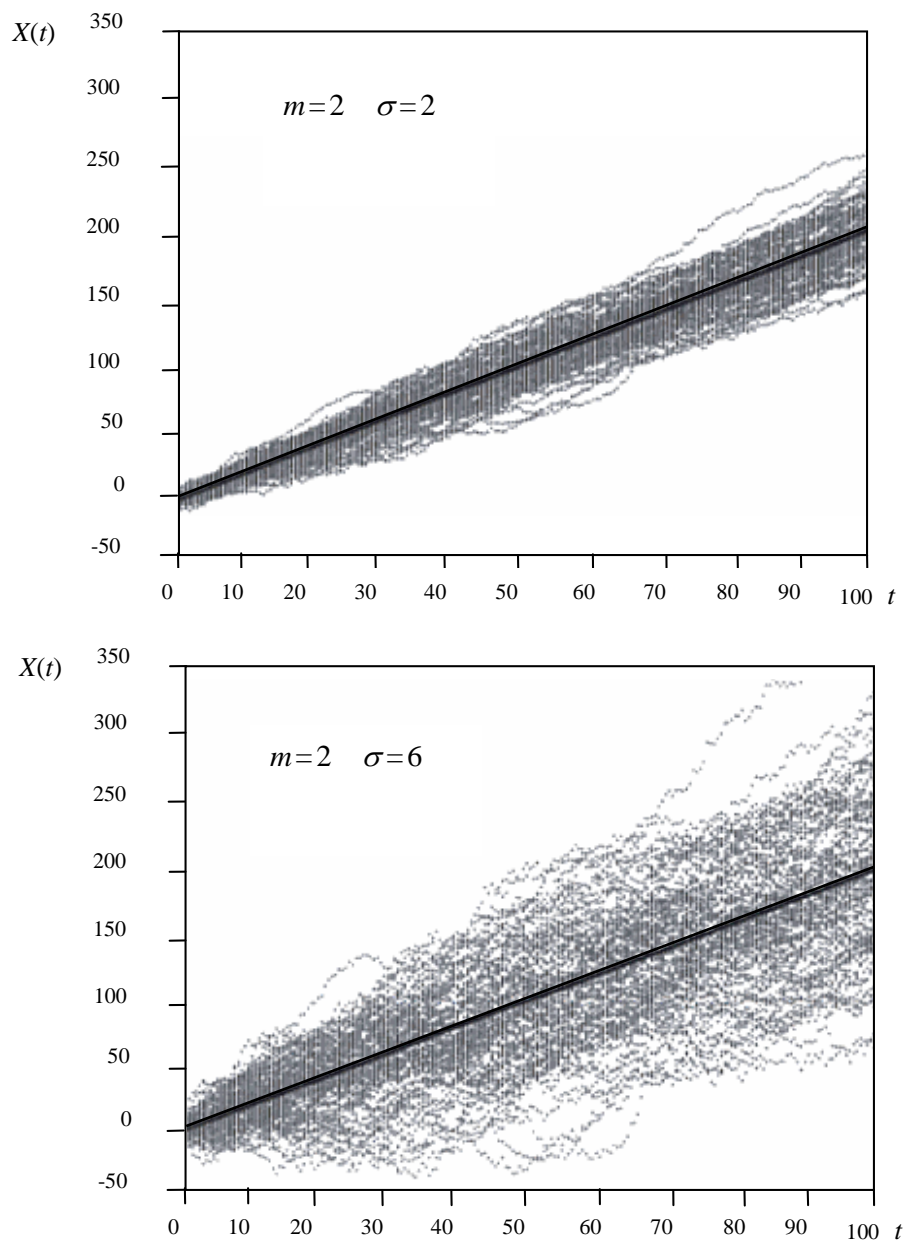
$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} E\{[\Delta X(t)]^2 | X(t) = \xi\} = b(\xi, t). \quad (4.56)$$

Na osnovu teorije verovatnoće, očekivana vrednost $E[Y]$ karakteriše tendenciju slučajne promenljive Y ka centru. Varijansa $Var(Y) = E[Y^2] - \{E[Y]\}^2$ karakteriše varijaciju ili disperziju slučajne promenljive Y oko srednje vrednosti $E[Y]$; dakle $E[Y^2]$ je mera varijacije ili disperzije za Y .

Prema tome, $a(\xi, t)$ karakteriše centralnu sklonost ili srednju vrednost odstupanja i naziva se koeficijent prenosa, dok $b(\xi, t)$ daje meru disperzije odstupanja i naziva se koeficijent difuzije. Kao ilustraciju, razmotrimo difuzioni proces sa konstantnim koeficijentom prenosa m i koeficijentom difuzije σ^2 . Takav proces se može matematički modelirati Itô-ovom stohastičkom diferencijalnom jednačinom

$$dX(t) = mdt + \sigma dW(t), \quad X(0) = 0. \quad (4.57)$$

Rešenja Itô-ove jednačine prikazana su na Sl. 4.4 za $m = 2$ i $\sigma = 2$ i 6.



Slika 4.4 Difuzioni proces

4.10 Jednačine Kolmogorova

4.10.1 Prva (obrnuta) difuziona jednačina Kolmogorova

U prvoj jednačini Kolmogorova funkcija gustine raspodele prenosa $q(\xi, t | \xi_0, t_0) \equiv p_X(\xi, t | \xi_0, t_0)$ za fiksno (ξ, t) je zasnovana na zavisnosti od (ξ_0, t_0) . Prva (obrnuta) jednačina Kolmogorova ima oblik

$$\frac{\partial q(\xi, t | \xi_0, t_0)}{\partial t_0} + a(\xi_0, t_0) \frac{\partial q(\xi, t | \xi_0, t_0)}{\partial \xi_0} + \frac{b(\xi_0, t_0)}{2} \frac{\partial^2 q(\xi, t | \xi_0, t_0)}{\partial \xi_0^2} = 0, \quad (4.58)$$

sa graničnim uslovom

$$q(\xi, t | \xi_0, t_0) \rightarrow \delta(\xi - \xi_0) \quad \text{kada} \quad t_0 \rightarrow t. \quad (4.59)$$

Relacija (4.59) se može napisati u formalnom obliku

$$A_{t_0, \xi_0} q(\xi, t | \xi_0, t_0) = 0, \quad (4.60)$$

gde je

$$A_{t_0, \xi_0}(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t_0} + a(\xi_0, t_0) \frac{\partial(\cdot)}{\partial \xi_0} + \frac{b(\xi_0, t_0)}{2} \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \xi_0^2}. \quad (4.61)$$

$A_{t_0, \xi_0}(\cdot)$ je diferencijalni ili beskonačno mali generator difuzionog procesa $X(t)$.

4.10.2 Druga (direktna) difuziona jednačina Kolmogorova (Fokker-Planck-ova jednačina)

U ovom slučaju funkcija gustine raspodele prenosa $q(\xi, t | \xi_0, t_0)$ za fiksno ξ_0 i t_0 posmatra se kao funkcija od ξ i t , za $t > t_0$. Druga (direktna) jednačina Kolmogorova ima oblik

$$\frac{\partial q(\xi, t | \xi_0, t_0)}{\partial t} = - \frac{\partial [a(\xi, t) q(\xi, t | \xi_0, t_0)]}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 [b(\xi, t) q(\xi, t | \xi_0, t_0)]}{\partial \xi^2}, \quad (4.62)$$

odnosno

$$\frac{\partial q(\xi, t | \xi_0, t_0)}{\partial t} = L_{\xi}^* q(\xi, t | \xi_0, t_0), \quad (4.63)$$

sa početnim uslovom

$$q(\xi, t | \xi_0, t_0) \rightarrow \delta(\xi - \xi_0) \quad \text{kada} \quad t \rightarrow t_0, \quad (4.64)$$

gde je operator L_{ξ}^*

$$L_{\xi}^*(\cdot) = - \frac{\partial [a(\xi, t)(\cdot)]}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 [b(\xi, t)(\cdot)]}{\partial \xi^2}. \quad (4.65)$$

4.11 Stohastički integrali

4.11.1 Stohastički Riemann-ovi integrali

Integral oblika

$$Y = \int_a^b f(t)X(t) dt, \quad (4.66)$$

gde je $f(t)$ deterministička funkcija, a $X(t)$ slučajni proces sa nultim matematičkim očekivanjem $E[X(t)] = 0$, generiše slučajnu promenjivu Y i naziva se stohastički Riemann-ov integral. Može se pokazati da je

$$E[Y] = \int_a^b f(t)E[X(t)]dt = 0, \quad (4.67)$$

$$E[Y^2] = \int_a^b \int_a^b f(t)f(s)E[X(t)X(s)]dtds.$$

Integral (4.66) se može uopštiti na sledeći način

$$Y(t) = \int_a^b f(t,s)X(s)ds, \quad c \leq t \leq d, \quad (4.68)$$

gde je $Y(t)$ slučajni proces.

4.11.2 Stohastički Riemann-Stieltjes-ovi integrali

Integral oblika

$$Y = \int_a^b f(t) dX(t), \quad (4.69)$$

gde je $f(t)$ deterministička funkcija, a $X(t)$ slučajni proces, generiše slučajnu promenjivu Y i naziva se stohastički Riemann-Stieltjes-ov integral.

Integral (4.69) se može uopštiti na sledeći način

$$Y(\omega) = \int_a^b f(t, \omega) dX(t, \omega), \quad \omega \in \Omega, \quad (4.70)$$

gde je Ω prostor verovatnoće, $f(t, \omega)$ je slučajna funkcija od t i ω , a $X(t, \omega)$ je slučajni proces sa ortogonalnim priraštajima.

4.11.3 Integral tipa Itô

Neka je $f(t, \omega)$ stohastička funkcija koja zavisi od $\{W(s), 0 \leq s \leq t\}$ i nezavisna je od $\{W(s), s > t\}$, $0 \leq t \leq T$, gde je $W(t)$ standardni Wiener-ov proces. Stohastički integral

$$I(t, \omega) = \int_0^t f(s, \omega) dW(s), \quad \omega \in \Omega, \quad (4.71)$$

se naziva Itô integral. Pokazuje se da Itô integral ima osobine

$$E[I(t, \omega)] = 0, \quad E[I^2(t, \omega)] = \int_0^t E[f^2(s, \omega)] ds. \quad (4.72)$$

4.12 Stohastičke diferencijalne jednačine

Stohastička diferencijalna jednačina oblika

$$dX(t) = m(X, t)dt + \sigma(X, t)dW(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4.73)$$

sa početnim uslovom $X(0) = x_0$, sa verovatnoćom 1, predstavlja se integralnom jednačinom

$$X(t) = x_0 + \int_0^t m(X, t)dt + \int_0^t \sigma(X, t)dW(t). \quad (4.74)$$

Kako je drugi integral u jednačini (4.74) integral tipa Itô, tada je jednačina (4.73) *Itô stohastička diferencijalna jednačina*.

Može se pokazati da je rešenje $X(t)$ stohastičke diferencijalne jednačine difuzioni proces Markova sa koeficijentom prenosa $a = m(X, t)$ i koeficijentom difuzije $b = \sigma^2(X, t)$. Gustina verovatnoće prenosa zadovoljava prvu i drugu jednačinu Kolmogorova, (4.58) i (4.62).

Dalje, neka je $\mathbf{X}(t) = \{X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)\}^T$ n -dimenzionalni vektor, a $\mathbf{W}(t) = \{W_1(t), W_2(t), \dots, W_d(t)\}^T$ d -dimenzionalni vektor Wiener-ovog procesa. Za sistem stohastičkih diferencijalnih jednačina tipa Itô

$$dX_i = m_i(\mathbf{X}, t)dt + \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}(\mathbf{X}, t) dW_j, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.75)$$

vektor prenosa i difuziona matrica, koja je simetrična i nenegativna, imaju oblik

$$\mathbf{a}(\mathbf{X}, t) = \{m_1(\mathbf{X}, t), m_2(\mathbf{X}, t), \dots, m_n(\mathbf{X}, t)\}^T, \quad (4.76)$$

$$[b_{ij}(\mathbf{X}, t)] = \left[\sum_{k=1}^d \sigma_{ik}(\mathbf{X}, t) \sigma_{jk}(\mathbf{X}, t) \right] \Rightarrow \mathbf{b} = \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}^T, \quad \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}, t) = [\sigma_{ij}(\mathbf{X}, t)]_{n \times d}.$$

4.13 Proces realnog šuma (Ornstein-Uhlenbeck-ov proces)

Ornstein-Uhlenbeck-ov proces $X(t)$ predstavlja se jednodimenzionalnom stohastičkom diferencijalnom jednačinom tipa Itô

$$dX(t) = -\alpha X(t)dt + \sigma dW(t), \quad X(t_0) = X_0. \quad (4.77)$$

gde su α i σ konstante.

Matematičko očekivanje procesa $X(t)$, s obzirom da je $E[dW(t)] = 0$, je

$$m_X(t) = E[X(t)] = e^{-\alpha(t-t_0)} E[X_0]. \quad (4.78)$$

Varijansa realnog šuma je

$$\text{Var}[X(t)] = E[\{X(t) - m_X(t)\}^2] = K(t, t) = e^{-2\alpha(t-t_0)} \text{Var}[X_0] + \frac{\sigma^2}{2\alpha} [1 - e^{-2\alpha(t-t_0)}]. \quad (4.79)$$

Na osnovu relacija (4.78) i (4.79), za zadati početni uslov $X(t_0) = X_0$, $X(t)$ ima matematičko očekivanje $\mu_{X(t)}$ i standardnu devijaciju $\sigma_{X(t)}$

$$\mu_{X(t)} = X_0 e^{-\alpha(t-t_0)}, \quad \sigma_{X(t)}^2 = \frac{\sigma^2}{2\alpha} [1 - e^{-2\alpha(t-t_0)}]. \quad (4.80)$$

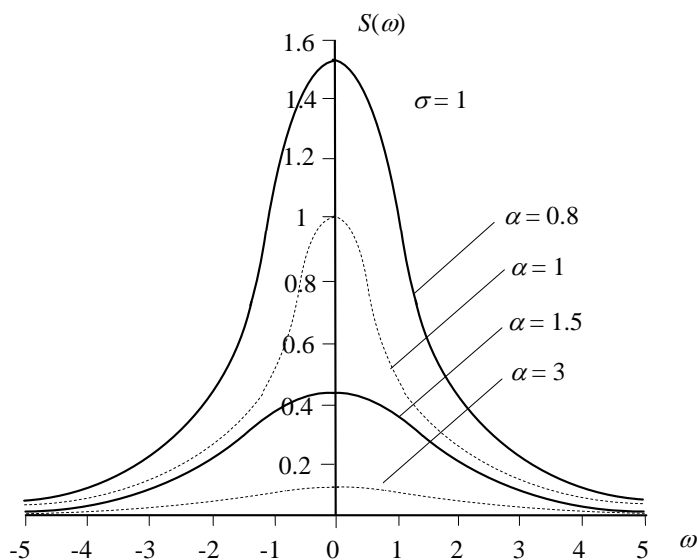
Na osnovu druge Kolmogorovljeve jednačine pokazuje se da proces $X(t)$ ima normalnu (Gauss-ovu) raspodelu sa matematičkim očekivanjem $\mu_{X(t)}$ i standardnom devijacijom $\sigma_{X(t)}$ date relacijom (4.80). Autokorelaciona funkcija procesa je

$$R(\tau) = E[X(t)X(t+\tau)] = \frac{\sigma^2}{2\alpha} e^{-\alpha|\tau|}, \quad (4.81)$$

a spektralna gustina je (Sl. 4.5)

$$S(\omega) = \frac{\sigma^2}{\alpha^2 + \omega^2}. \quad (4.82)$$

Kada α raste $S(\omega)$ teži ravnoj liniji u širokom frekventnom opsegu. U specijalnom slučaju kada $\sigma = \alpha\sqrt{S_0} \rightarrow \infty$, proces $X(t)$ teži Gauss-ovom procesu belog šuma sa konstantnom spektralnom gustinom $S(\omega) = S_0$, tj. to je proces realnog šuma $X(t) = \sqrt{S_0} \xi(t)$, gde je $\xi(t)$ jedinični proces Gauss-ovog belog šuma.



Slika 4.5 Spektralna gustina Ornstein-Uhlenbeck-ovog procesa

4.14 Proces ograničenog šuma

Ornstein-Uhlenbeck-ov proces $X(t)$ definisan jednačinom (4.77), je normalno raspodeljena slučajna promenjiva u određenom trenutku t , nije ograničen i može uzimati različite proizvoljno velike vrednosti sa malim verovatnoćama. Kao takav ne može se koristiti kao realan model šuma u različitim inženjerskim aplikacijama. Stoga je proces ograničenog šuma, dat u sledećem obliku, često korišćen kao model šuma

$$Y(t) = \cos[\nu t + \sigma W(t) + \theta], \quad (4.83)$$

gde su ν i σ konstante, a θ je uniformno raspodeljen slučajan broj na intervalu $(0, 2\pi)$.

Uvođenje faznog ugla θ u jednačinu (4.83) čini $Y(t)$ stacionarnim procesom.

Jednačina (4.83) se može napisati u obliku

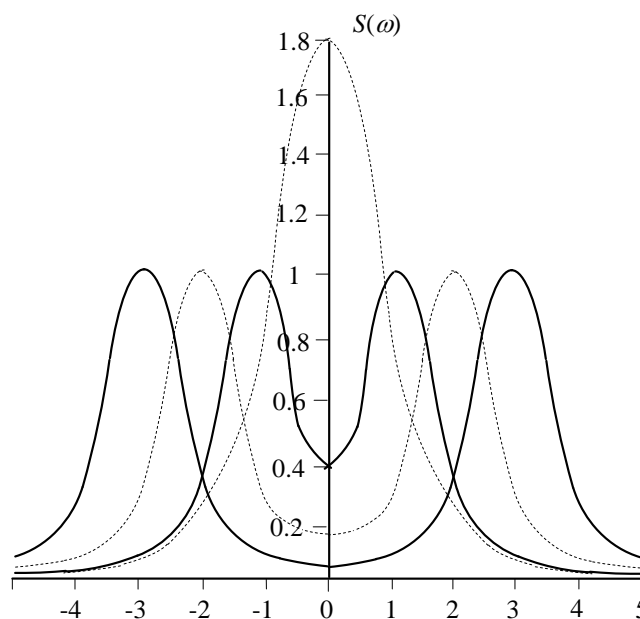
$$Y(t) = \cos Z(t), \quad dZ(t) = \nu dt + \sigma dW(t), \quad (4.84)$$

sa početnim uslovom $Z(0) = \theta$. Korelaciona funkcija za proces $Y(t)$ je

$$R(\tau) = E[X(t)X(t+\tau)] = \frac{1}{2} \cos \nu\tau \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}|\tau|\right). \quad (4.85)$$

Spektralna gustina procesa $Y(t)$ je (Sl. 4.6)

$$S(\omega) = \frac{\sigma^2 \left(\omega^2 + \nu^2 + \frac{1}{4} \sigma^4 \right)}{2 \left[\left(\omega - \nu \right)^2 + \frac{1}{4} \sigma^4 \right] \left[\left(\omega + \nu \right)^2 + \frac{1}{4} \sigma^4 \right]}. \quad (4.86)$$



Slika 4.6 Spektralna gustina procesa ograničenog šuma

4.15 Itô-ovo diferencijalno pravilo (Itô lema)

Neka je $X(t)$ neki difuzioni proces koji je opisan stohastičkom Itô diferencijalnom jednačinom

$$dX(t) = m(X, t)dt + \sigma(X, t)dW(t) \quad (4.87)$$

i neka je $\phi(X, t)$ neka skalarna funkcija jedanput diferencijabilna po vremenu t i dvaput po X .

Itô diferencijal skalarne funkcije $\phi(X, t)$ je dat izrazom

$$d\phi(X, t) = \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + m(X, t) \frac{\partial \phi}{\partial X} + \frac{1}{2} \sigma^2(X, t) \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \right] dt + \sigma(X, t) \frac{\partial \phi}{\partial X} dW. \quad (4.88)$$

Sračunavanjem matematičkog očekivanja obeju strana u relaciji (4.88), dobija se

$$dE[\phi(X, t)] = E \left[\left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} + m(X, t) \frac{\partial \phi}{\partial X} + \frac{1}{2} \sigma^2(X, t) \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \right\} \right] dt,$$

ili (4.89)

$$\frac{d}{dt} E[\phi(X, t)] = E \left[\left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} + m(X, t) \frac{\partial \phi}{\partial X} + \frac{1}{2} \sigma^2(X, t) \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \right\} \right].$$

Ukoliko je problem opisan sistemom stohastičkih Itô diferencijalnih jednačina

$$dX_i = m_i(\mathbf{X}, t) dt + \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}(\mathbf{X}, t) dW_j, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.90)$$

onda Itô diferencijal skalarne funkcije $\phi(\mathbf{X}, t)$ ima oblik

$$d\phi(\mathbf{X}, t) = \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \sum_{i=1}^n m_i(\mathbf{X}, t) \frac{\partial \phi}{\partial X_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij}(\mathbf{X}, t) \frac{\partial^2 \phi}{\partial X_i \partial X_j} \right] dt + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}(\mathbf{X}, t) \frac{\partial \phi}{\partial X_i} dW_j, \quad (4.91)$$

pri čemu je $\mathbf{b}(\mathbf{X}, t) = \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}^T$.

4.16 Integral Stratonoviča

Pretpostavimo da je $X(t)$ difuzioni proces sa koeficijentom prenosa $m(X, t)$ i koeficijentom difuzije $\sigma(X, t)$. Ako se interval vremena $[t_0, t]$ podeli na n segmenata u određenim trenucima $t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$, $\Delta t_{j+1} = t_{j+1} - t_j$, $\Delta = \max \Delta t_{j+1}$, tada je integral Stratonoviča definisan relacijom

$$\int_{t_0}^{*t} f(X, t) dX(t) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta \rightarrow 0}} \sum_{j=0}^{n-1} f \left(\frac{X(t_j) + X(t_{j+1})}{2}, t_j \right) [X(t_{j+1}) - X(t_j)], \quad (4.92)$$

gde * iznad znaka integrala ukazuje da je reč o integralu u smislu Stratonoviča, a za funkciju $f(X, t)$ se pretpostavlja da je neprekidna po vremenu t i da ima neprekidne prve izvode $\partial f(X, t) / \partial X$.

Na desnoj strani jednačine (4.92) može se pisati

$$f \left(\frac{X(t_j) + X(t_{j+1})}{2}, t_j \right) \rightarrow f \left(\frac{X(t_j) + X(t_{j+1})}{2}, \frac{t_j + t_{j+1}}{2} \right), \quad (4.93)$$

a rezultat se ne bi promenio. Kako proces $X(t)$ zadovoljava Itô diferencijalnu jednačinu (4.87), tada sa verovatnoćom 1 važi

$$\int_{t_0}^{*t} f(X, t) dX(t) = \int_{t_0}^t f(X, t) dX(t) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \frac{\partial f(X, t)}{\partial X} \sigma^2(X, t) dt, \quad (4.94)$$

gde je dodatni član običan integral. Jednačina (4.94) daje vezu između integrala tipa Itô i integrala Stratonoviča. U vektorskom obliku, ova veza glasi

$$\int_{t_0}^{*t} f(\mathbf{X}, t) dX_j(t) = \int_{t_0}^t f(\mathbf{X}, t) dX_j(t) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{t_0}^t \frac{\partial f(\mathbf{X}, t)}{\partial X_k} b_{jk}(\mathbf{X}, t) dt. \quad (4.95)$$

4.17 Stratonovičeva stohastička diferencijalna jednačina

Diferenciranje u smislu Stratonoviča označavaćemo zvezdicom: $d^*(\cdot)$. Proces $X(t)$ zadovoljava Stratonovičevu stohastičku diferencijalnu jednačinu u obliku

$$d^* X(t) = m^*(X, t) dt + \sigma^*(X, t) dW(t), \quad (4.96)$$

kojoj odgovara stohastička integralna jednačina

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^t m^*(X(s), s) ds + \int_{t_0}^{*t} \sigma^*(X(s), s) dW(s), \quad (4.97)$$

pri čemu je $dW(t) = d^*W(t)$.

Neka proces $X(t)$ zadovoljava stohastičku Itô diferencijalnu jednačinu (4.87), tada je

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^t m(X(s), s) ds + \int_{t_0}^t \sigma(X(s), s) dW(s). \quad (4.98)$$

Pokazuje se da je

$$\int_{t_0}^{*t} f(X, t) dW(t) - \int_{t_0}^t f(X, t) dW(t) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \frac{\partial f(X, t)}{\partial X} \sigma(X, t) dt, \quad (4.99)$$

pa se relacija (4.98) može napisati u obliku

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^t \left[m(X, s) - \frac{1}{2} \sigma(X, s) \frac{\partial \sigma(X, s)}{\partial X} \right] ds + \int_{t_0}^t \sigma(X, s) dW(s). \quad (4.100)$$

Upoređivanjem relacija (4.97) i (4.100) zaključujemo da je

$$m(X,t) = m^*(X,t) + \frac{1}{2} \sigma(X,t) \frac{\partial \sigma(X,t)}{\partial X}, \quad \sigma(X,t) = \sigma^*(X,t), \quad (4.101)$$

odakle sledi da je rešenje stohastičke diferencijalne jednačine Stratonoviča (4.96) difuzioni proces sa koeficijentom prenosa $m(X,t)$ i koeficijentom difuzije $\sigma^2(X,t)$ datih relacijom (4.101).

Ako proces $\mathbf{X}(t)$ zadovoljava n -dimenzionalni sistem diferencijalnih jednačina Stratonoviča

$$d^* X_i = m_i^*(\mathbf{X},t) dt + \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}^*(\mathbf{X},t) dW_j, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.102)$$

kojoj odgovara Itô sistem diferencijalnih jednačina (4.90), tada je

$$m_i(\mathbf{X},t) = m_i^*(\mathbf{X},t) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^d \sigma_{jk}(\mathbf{X},t) \frac{\partial \sigma_{ik}(\mathbf{X},t)}{\partial X_j}, \quad \sigma_{ij}(\mathbf{X},t) = \sigma_{ij}^*(\mathbf{X},t). \quad (4.103)$$

4.18 Aproksimacija fizičkog procesa difuzionim procesom

Razmotrimo neki fizički sistem opisan diferencijalnom jednačinom prvog reda

$$\dot{X}(t) = f(X,t) + g(X,t) \xi(t), \quad (4.104)$$

gde je $\xi(t)$ stacionarni širokopojasni proces. Ukoliko se $\xi(t)$ aproksimira procesom belog šuma, postavlja se pitanje koja diferencijalna jednačina odgovara približnom rešenju $X(t)$. Odgovor na ovo pitanje daje teorema Vong-Zakai-ja [55] koja tvrdi da niz rešenja jednačine (4.104), sa verovatnoćom 1, teži difuzionom procesu $X(t)$ koji se dobija kao rešenje stohastičke diferencijalne jednačine Stratonoviča

$$d^* X(t) = f(X,t) dt + g(X,t) dW(t). \quad (4.105)$$

Jednačini (4.105) odgovara Itô diferencijalna jednačina

$$dX(t) = \left[f(X,t) + \frac{1}{2} g(X,t) \frac{\partial g(X,t)}{\partial X} \right] dt + g(X,t) dW(t). \quad (4.106)$$

Ako je fizički proces opisan sistemom diferencijalnih jednačina

$$\dot{X}_i^{(n)}(t) = f_i^{(n)}(\mathbf{X}^{(n)},t) + \sum_{j=1}^d g_{ij}(\mathbf{X}^{(n)},t) \xi_j^{(n)}(t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.107)$$

tada, sa verovatnoćom 1, $\{X_i^{(n)}(t)\} \rightarrow X_i(t)$ gde je $X_i(t)$ rešenje diferencijalne jednačine Stratonoviča

$$d^* \dot{X}_i(t) = f_i(\mathbf{X}, t) + \sum_{j=1}^d g_{ij}(\mathbf{X}, t) dW_j(t), \quad (4.108)$$

odnosno, u Itô smislu

$$dX_i = \left[f_i(\mathbf{X}, t) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^d g_{jk}(\mathbf{X}, t) \frac{\partial g_{ij}(\mathbf{X}, t)}{\partial X_j} \right] dt + \sum_{k=1}^d g_{ik}(\mathbf{X}, t) dW_k. \quad (4.109)$$

4.19 Metoda usrednjenja stohastičkih diferencijalnih jednačina

Metodu stohastičkog usrednjenja je razvio Stratonovič [56] kombinujući fizičke i matematičke argumente pri proučavanju uticaja šuma na elektronske releje i oscilacije vakuumskih cevi. Stroge matematičke dokaze metode stohastičkog usrednjenja dao je Khasminskii u radovima [57] i [58]. Ova metoda predstavlja primenu dobro poznate metode usrednjenja Bogoljubov-Mitropoljskog za obične nelinearne diferencijalne jednačine sa malim parametrom na stohastičke diferencijalne jednačine.

Razmotrimo jednačinu

$$\dot{X}(t) = \varepsilon F(X, t, \xi(t), \varepsilon), \quad (4.110)$$

gde je $0 < \varepsilon \ll 1$ mali parametar, a $\xi(t)$ je stacionarni stohastički proces sa nultim matematičkim očekivanjem. Razvojem u red funkcije na desnoj strani jednačine (4.110) dobija se

$$F(X, t, \xi(t), \varepsilon) = F^{(0)}(X, t, \xi(t)) + \varepsilon F^{(1)}(X, t) + o(\varepsilon), \quad (4.111)$$

gde su, $F^{(0)}$ i $F^{(1)}$ glatke funkcije svojih argumenata sa svojim prvim i drugim izvodima, ograničene.

Neka je $M_t(\cdot)$ operator usrednjenja definisan na sledeći način

$$M_t(\cdot) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (\cdot) dt, \quad (4.112)$$

gde se integracija vrši po eksplicitno prisutnom vremenskom parametru t u podintegralnoj funkciji.

Pretpostavimo da važi sledeće:

1. Postoje sledeće uniformne granične vrednosti po X i t

$$m(\bar{X}) = M_t \left\{ F^{(1)} + \int_{-\infty}^0 E \left[\frac{\partial F^{(0)}}{\partial X} F_\tau^0 \right] d\tau \right\},$$

$$\sigma^2(\bar{X}) = M_t \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} E [F^{(0)} F_\tau^0] d\tau \right\},$$
(4.113)

gde je $F_\tau^{(0)} = F^{(0)}(X, t + \tau, \xi(t + \tau))$.

2. Autokorelaciona funkcija $R(\tau) = E[\xi(t)\xi(t + \tau)]$ stohastičkog procesa $\xi(t)$ dovoljno brzo opada ka nuli kada τ raste, tj. $\xi(t)$ ima malo vreme korelacije τ_c u poređenju sa vremenom relaksacije τ_r sistema. Vreme korelacije τ_c karakteriše veličinu vremenskog intervala na kome se proteže značajna korelacija između vrednosti procesa $\xi(t)$, dok vreme relaksacije τ_r daje aproksimativnu meru na vremenskoj skali na kojoj su uočene značajne promene amplituda odziva procesa.

Tada, na vremenskom intervalu reda $1/\varepsilon^2$, proces $X(t)$ se može uniformno aproksimirati difuzionim procesom Markova $\bar{X}(t)$ čiji je koeficijent prenosa $\varepsilon^2 m(\bar{X})$ i koeficijent difuzije $\varepsilon^2 \sigma^2(\bar{X})$, tj. proces $\bar{X}(t)$ zadovoljava stohastičku Itô diferencijalnu jednačinu

$$d\bar{X}(t) = \varepsilon^2 m(\bar{X}) dt + \varepsilon \sigma(\bar{X}) dW(t). \quad (4.114)$$

U vektorskom slučaju, pretpostavimo da je problem opisan sistemom stohastičkih diferencijalnih jednačina oblika

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \varepsilon \mathbf{F}(\mathbf{X}, t, \xi(t), \varepsilon), \quad (4.115)$$

gde je

$$\mathbf{X}(t) = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}^T, \quad \xi(t) = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d\}^T,$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^{(0)}(\mathbf{X}, t, \xi(t)) + \varepsilon \mathbf{F}^{(1)}(\mathbf{X}, t) + o(\varepsilon). \quad (4.116)$$

Pretpostavimo da su ispunjeni uslovi analogni uslovima 1. i 2, tada se, na vremenskom intervalu reda $1/\varepsilon^2$, proces $\mathbf{X}(t)$ može aproksimovati n -dimenzionalnim

vektorom difuzionog procesa Markova $\bar{\mathbf{X}}(t)$ koji zadovoljava sistem Itô diferencijalnih jednačina

$$d\bar{\mathbf{X}}(t) = \varepsilon^2 \mathbf{m}(\bar{\mathbf{X}}) dt + \varepsilon \boldsymbol{\sigma}(\bar{\mathbf{X}}) d\mathbf{W}(t), \quad (4.117)$$

gde je $\mathbf{W}(t) = \{W_1, W_2, \dots, W_n\}^T$ n -dimenzionalni vektor međusobno nezavisnih standardnih Wiener-ovih procesa. Vektor prenosa $\varepsilon^2 \mathbf{m}(\bar{\mathbf{X}})$ i $n \times n$ matrica $\varepsilon \boldsymbol{\sigma}(\bar{\mathbf{X}})$ dati su sledećom relacijom

$$\begin{aligned} \mathbf{m}(\bar{\mathbf{X}}) &= M_t \left\{ \mathbf{F}^{(1)} + \int_{-\infty}^0 E \left[\frac{\partial \mathbf{F}^{(0)}}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{F}_\tau^0 \right] d\tau \right\}, \\ \mathbf{b}(\bar{\mathbf{X}}) &= \boldsymbol{\sigma}(\bar{\mathbf{X}}) \boldsymbol{\sigma}^T(\bar{\mathbf{X}}) = M_t \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} E [\mathbf{F}^{(0)} \mathbf{F}_\tau^0] d\tau \right\}, \end{aligned} \quad (4.118)$$

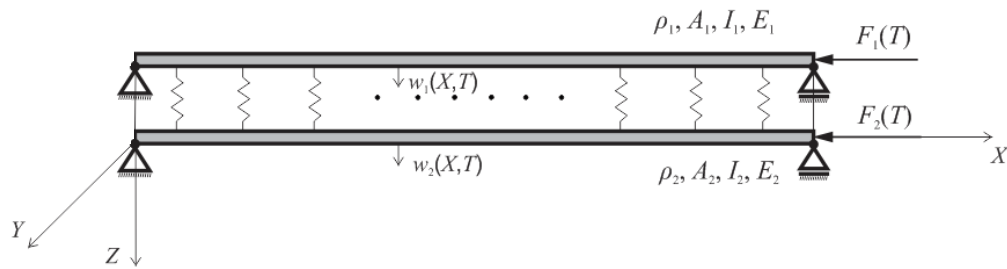
gde je $\mathbf{F}_\tau^{(0)} = \mathbf{F}^{(0)}(\mathbf{X}, t + \tau, \boldsymbol{\xi}(t + \tau))$, a $\varepsilon^2 \mathbf{b}(\bar{\mathbf{X}})$ je $n \times n$ difuziona matrica. U razvijenom obliku, relacije (4.118) glase

$$\begin{aligned} m_i(\bar{\mathbf{X}}) &= M_t \left\{ F_i^{(1)} + \int_{-\infty}^0 E \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial F_i^{(0)}}{\partial X_j} F_{j\tau}^0 \right] d\tau \right\}, \\ [\boldsymbol{\sigma}(\bar{\mathbf{X}}) \boldsymbol{\sigma}^T(\bar{\mathbf{X}})]_{ij} &= M_t \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} E [F_i^{(0)} F_{j\tau}^{(0)}] d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (4.119)$$

Ovde je važno uočiti redosled članova u jednačini (4.117). Koefficient prenosa je reda $o(\varepsilon^2)$, a i difuziona matrica je reda $o(\varepsilon^2)$. Kako je metoda stohastičkog usrednjenja aproksimacija prvog reda, ova jednačina obezbeđuje da prenosni i difuzioni članovi imaju kompatibilan udeo u toj aproksimaciji.

5. DINAMIČKA STABILNOST SISTEMA VISKOELASTIČNIH GREDA

Posmatrajmo mehanički sistem koji se sastoji od dve paralelne vitke prizmatične i homogene viskoelastične grede, koje su kontinualno spojene jednim Winkler-ovim elastičnim slojem. Grede su istih dužina i slobodno su oslonjene na krajevima. Na krajevima greda deluju aksijalne pritisne sile F_1 i F_2 , kao što je prikazano na Sl. 5.1.



Slika 5.1 Fizički model elastično povezanih viskoelastičnih greda

Na osnovu Euler-Bernoulli-jeve teorije greda, spregnute diferencijalne jednačine transverzalnih oscilacija sistema date su u radu Zhang-a i dr. [45] relacijama

$$\rho_1 A_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + \bar{v}_1 \frac{\partial^5 w_1}{\partial t \partial X^4} + E_1 I_1 \frac{\partial^4 w_1}{\partial X^4} + F_1(t) \frac{\partial^2 w_1}{\partial X^2} + \bar{K}(w_1 - w_2) = 0, \quad (5.1)$$

$$\rho_2 A_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} + \bar{v}_2 \frac{\partial^5 w_2}{\partial t \partial X^4} + E_2 I_2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial X^4} + F_2(t) \frac{\partial^2 w_2}{\partial X^2} + \bar{K}(w_2 - w_1) = 0, \quad (5.2)$$

gde su w_i ($i = 1, 2$) transverzalna pomeranja greda, ρ_i gustine materijala greda, \bar{v}_i vremena retardacije, X prostorna koordinata u pravcu ose greda, t vreme, $E_i I_i$ ($i = 1, 2$) savojne krutosti greda, \bar{K} modul krutosti Winkler-ovog elastičnog sloja, a $F_1(t)$ i $F_2(t)$ su vremenski promenljivi stohastički procesi.

Granični uslovi za slobodno oslonjene krajeve greda su

$$\left. \begin{array}{l} X = 0 \\ X = L \end{array} \right\} w_1 = 0, \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial X^2} = 0, \quad w_2 = 0, \quad \frac{\partial^2 w_2}{\partial X^2} = 0, \quad (5.3)$$

gde je L dužina greda.

Pretpostavimo da su proizvodi $\rho_1 A_1$ i $\rho_2 A_2$ jednaki ($\rho_1 A_1 = \rho_2 A_2 = \rho A$), pri čemu individualni parametri greda mogu biti različiti. U cilju svodenja diferencijalnih jednačina (5.1) i (5.2) na bezdimenzioni oblik uvešćemo sledeće smene

$$X = Lx, \quad 2\nu_i = \frac{\bar{\nu}_i}{\rho A}, \quad e_i = \frac{E_i I_i}{\rho A L^4}, \quad f_{oi} + f_i(t) = \frac{F_i(t)}{\rho A L^2}, \quad K = \frac{\bar{K}}{\rho A}, \quad (i = 1, 2), \quad (5.4)$$

gde su ν_i , e_i i K redukovane veličine vremena retardacije, krutosti greda i krutosti Winklerovog elastičnog sloja, a f_{oi} i $f_i(t)$ su redukovane konstantne i stohastičke komponente aksijalnih sila.

Prema tome, diferencijalne jednačine (5.1) i (5.2) nakon uvođenja bezdimenzionih koordinata postaju

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + 2\nu_1 \frac{\partial^5 w_1}{\partial t \partial x^4} + e_1 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + (f_{o1} + f_1(t)) \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + K(w_1 - w_2) = 0, \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} + 2\nu_2 \frac{\partial^5 w_2}{\partial t \partial x^4} + e_2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} + (f_{o2} + f_2(t)) \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + K(w_2 - w_1) = 0, \quad (5.6)$$

a granični uslovi (5.3) imaju oblik

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array} \right\} w_1 = 0, \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = 0, \quad w_2 = 0, \quad \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} = 0. \quad (5.7)$$

U ovom delu disertacije biće ispitivana skoro sigurna asimptotska stabilnost sistema elastično povezanih greda podvrgnutih dejstvu stohastičkih vremenski promenljivih aksijalnih opterećenja. U cilju ocene poremećenog rešenja, kako je ranije rečeno, neophodno je uvesti meru rastojanja $\|\cdot\|$ rešenja jednačina (5.5) i (5.6) dobijenu pod uslovom da zadovoljava zadate netrivialne početne uslove i rešenja dobijena za trivialne početne uslove. Kada stohastički poremećaji ne sadrže beli spektar, za ravnotežno stanje jednačina (5.5) i (5.6) kaže se da je skoro sigurno stohastički stabilno ako je

$$P \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{w}(\cdot, t)\| \rightarrow 0 \right\} = 1, \quad (5.8)$$

gde je $\mathbf{w} = \text{col}(w_1, w_2)$ matrica kolona. Kada su poremećaji širokopojasni procesi, porast norme vektora $\mathbf{w}(\cdot, t)$ se može oceniti određivanjem najvećeg eksponenta Ljapunova λ , koji je određen relacijom

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|\mathbf{w}(\cdot, t)\|. \quad (5.9)$$

5.1 Konstrukcija funkcionala Ljapunova

Prvi problem koji je napred formulisan rešićemo metodom funkcionala Ljapunova. Za konstrukciju funkcionala Ljapunova korišćićemo metodu koju su razvili Parks i Pritchard [36]. U tom cilju napisaćemo diferencijalne jednačine kretanja sistema (5.5) i (5.6) u formalnom obliku $\mathbf{Lw} = 0$ i uvešćemo linearni operator \mathbf{N} koji predstavlja formalni izvod operatora \mathbf{L} po operatoru diferenciranja po vremenu

$$\mathbf{Nw} = 2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w_1}{\partial t} + \nu_1 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} \\ \frac{\partial w_2}{\partial t} + \nu_2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} \end{array} \right\}. \quad (5.10)$$

Integracijom skalarnog proizvoda vektora $(\mathbf{Lw} \circ \mathbf{Nw})$ na pravougaoniku $C = [x : 0 \leq x \leq 1] \times [0, t]$, a s obzirom na diferencijalne jednačine (5.5) i (5.6), očigledno je

$$\int_0^1 \int_0^t (\mathbf{Lw} \circ \mathbf{Nw}) dt dx = 0. \quad (5.11)$$

U razvijenom obliku, relacija (5.11) ima oblik

$$\begin{aligned} & 2 \int_0^1 \int_0^t \left\{ \left[\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + 2\nu_1 \frac{\partial^5 w_1}{\partial t \partial x^4} + e_1 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + (f_{o1} + f_1(t)) \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + K(w_1 - w_2) \right] \left(\frac{\partial w_1}{\partial t} + \nu_1 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} \right) + \right. \\ & \left. + \left[\frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} + 2\nu_2 \frac{\partial^5 w_2}{\partial t \partial x^4} + e_2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} + (f_{o2} + f_2(t)) \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + K(w_2 - w_1) \right] \left(\frac{\partial w_2}{\partial t} + \nu_2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} \right) \right\} dt dx = 0. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Prva dva člana u izrazu (5.12) su

$$\begin{aligned} I_1 &= 2 \int_0^1 \int_0^t \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} + 2\nu_i \frac{\partial^5 w_i}{\partial t \partial x^4} \right) \left(\frac{\partial w_i}{\partial t} + \nu_i \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} \right) dt dx = \\ &= 2 \int_0^1 \int_0^t \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} + \nu_i \frac{\partial^5 w_i}{\partial t \partial x^4} \right) \left(\frac{\partial w_i}{\partial t} + \nu_i \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} \right) dt dx + 2 \int_0^1 \int_0^t \nu_i \frac{\partial^5 w_i}{\partial t \partial x^4} \left(\frac{\partial w_i}{\partial t} + \nu_i \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} \right) dt dx. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Prvi integral u izrazu (5.13) je

$$I_{11} = 2 \int_0^l \int_0^t \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} + v_i \frac{\partial^5 w_i}{\partial t \partial x^4} \right) \left(\frac{\partial w_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} \right) dt dx = \int_0^l \left(\frac{\partial w_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} \right)^2 dx, \quad (5.14)$$

a drugi je

$$I_{12} = 2 \int_0^l \int_0^t v_i \frac{\partial^5 w_i}{\partial t \partial x^4} \left(\frac{\partial w_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} \right) dt dx = 2v_i^2 \int_0^l \int_0^t \frac{\partial^5 w_i}{\partial t \partial x^4} \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} dt dx + 2v_i \int_0^l \int_0^t \frac{\partial^5 w_i}{\partial t \partial x^4} \frac{\partial w_i}{\partial t} dt dx, \quad (5.15)$$

odakle je

$$I_{12} = 2v_i^2 \int_0^l \left(\frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} \right)^2 dt dx + 2v_i \int_0^l \int_0^t \frac{\partial^5 w_i}{\partial t \partial x^4} \frac{\partial w_i}{\partial t} dt dx. \quad (5.16)$$

Konačno, izraz (5.13) ima oblik

$$I_1 = I_{11} + I_{12} = \int_0^l \left[\left(\frac{\partial w_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} \right)^2 + v_i^2 \left(\frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} \right)^2 \right] dx + 2v_i \int_0^l \int_0^t \frac{\partial w_i}{\partial t} \frac{\partial^5 w_i}{\partial t \partial x^4} dt dx, \quad i = 1, 2. \quad (5.17)$$

Naredni član u (5.12) je

$$I_2 = 2 \int_0^l \int_0^t \left\{ e_i \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} \left(\frac{\partial w_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} \right) \right\} dt dx = 2e_i \int_0^l \int_0^t \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} \frac{\partial w_i}{\partial t} dt dx + 2v_i e_i \int_0^l \int_0^t \left(\frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} \right)^2 dt dx, \quad (5.18)$$

gde je

$$\begin{aligned} I_{21} &= 2e_i \int_0^l \int_0^t \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} \frac{\partial w_i}{\partial t} dt dx = 2e_i \int_0^l \int_0^t \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^3 w_i}{\partial x^3} \frac{\partial w_i}{\partial t} \right) - \frac{\partial^3 w_i}{\partial x^3} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x \partial t} \right] dt dx = \\ &= 2e_i \int_0^l \left(\frac{\partial^3 w_i}{\partial x^3} \frac{\partial w_i}{\partial t} \right) \Big|_0^t dt - 2e_i \int_0^l \int_0^t \frac{\partial^3 w_i}{\partial x^3} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x \partial t} dt dx. \end{aligned} \quad (5.19)$$

S obzirom na granične uslove (5.7), prvi član je jednak nuli, pa se dobija

$$\begin{aligned} I_{21} &= -2e_i \int_0^l \int_0^t \frac{\partial^3 w_i}{\partial x^3} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x \partial t} dt dx = -2e_i \int_0^l \int_0^t \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x \partial t} \right) - \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \frac{\partial^3 w_i}{\partial x^2 \partial t} \right] dt dx = \\ &= -2e_i \int_0^l \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x \partial t} \right) \Big|_0^t dt + 2e_i \int_0^l \int_0^t \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \frac{\partial^3 w_i}{\partial x^2 \partial t} dt dx. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Na osnovu graničnih uslova ponovo je prvi član jednak nuli, tako da je

$$I_2 = I_{21} + 2\nu_i e_i \int_0^1 \int_0^t \left(\frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} \right)^2 dt dx = e_i \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \right)^2 dx + 2\nu_i e_i \int_0^1 \int_0^t \left(\frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} \right)^2 dt dx, \quad i=1,2. \quad (5.21)$$

Izraz koji sadrži konstantnu komponentu sile u (5.12) je

$$\begin{aligned} I_3 &= 2 \int_0^1 \int_0^t f_{i0} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial t} + \nu_i \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} \right) dt dx = \\ &= 2f_{i0} \int_0^1 \int_0^t \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \frac{\partial w_i}{\partial t} dt dx + 2\nu_i f_{i0} \int_0^1 \int_0^t \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} dt dx. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Prvi integral u izrazu (5.22) je

$$\begin{aligned} I_{31} &= 2f_{i0} \int_0^1 \int_0^t \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \frac{\partial w_i}{\partial t} dt dx = 2f_{i0} \int_0^1 \int_0^t \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x} \frac{\partial w_i}{\partial t} \right) - \frac{\partial w_i}{\partial x} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x \partial t} \right] dt dx = \\ &= 2f_{i0} \int_0^1 \left(\frac{\partial w_i}{\partial x} \frac{\partial w_i}{\partial t} \right) \Big|_0^1 dt - 2f_{i0} \int_0^1 \int_0^t \frac{\partial w_i}{\partial x} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x \partial t} dt dx. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Prvi član u (5.23) je jednak nuli, pa je

$$I_{31} = -f_{i0} \int_0^1 \left(\frac{\partial w_i}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (5.24)$$

Na sličan način se dobija drugi integral u izrazu (5.22)

$$\begin{aligned} I_{32} &= 2\nu_i f_{i0} \int_0^1 \int_0^t \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} dt dx = 2\nu_i f_{i0} \int_0^1 \int_0^t \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \frac{\partial^3 w_i}{\partial x^3} \right) - \left(\frac{\partial^3 w_i}{\partial x^3} \right)^2 \right] dt dx = \\ &= 2\nu_i f_{i0} \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \frac{\partial^3 w_i}{\partial x^3} \right) \Big|_0^1 dt - 2\nu_i f_{i0} \int_0^1 \int_0^t \left(\frac{\partial^3 w_i}{\partial x^3} \right)^2 dt dx = -2\nu_i f_{i0} \int_0^1 \int_0^t \left(\frac{\partial^3 w_i}{\partial x^3} \right)^2 dt dx. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Konačno je

$$I_3 = I_{31} + I_{32} = -f_{i0} \int_0^1 \left(\frac{\partial w_i}{\partial x} \right)^2 dx - 2\nu_i f_{i0} \int_0^1 \int_0^t \left(\frac{\partial^3 w_i}{\partial x^3} \right)^2 dt dx, \quad (5.26)$$

pri čemu indeks i uzima vrednosti $i = 1, 2$.

Izraz koji sadrži krutost Winkler-ovog sloja u (5.12) je

$$\begin{aligned}
I_4 &= 2K \int_0^1 \int_0^t \left[(w_1 - w_2) \left(\frac{\partial w_1}{\partial t} + \nu_1 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} \right) + (w_2 - w_1) \left(\frac{\partial w_2}{\partial t} + \nu_2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} \right) \right] dt dx = \\
&= 2K \int_0^1 \int_0^t \left[(w_1 - w_2) \left(\frac{\partial w_1}{\partial t} - \frac{\partial w_2}{\partial t} \right) + (w_1 - w_2) \left(\nu_1 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} - \nu_2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} \right) \right] dt dx.
\end{aligned} \tag{5.27}$$

Prvi integral u (5.27) je

$$I_{41} = 2K \int_0^1 \int_0^t (w_1 - w_2) \left(\frac{\partial w_1}{\partial t} - \frac{\partial w_2}{\partial t} \right) dt dx = K \int_0^1 (w_1 - w_2)^2 dx, \tag{5.28}$$

a drugi je

$$I_{42} = 2K \int_0^1 \int_0^t (w_1 - w_2) \left(\nu_1 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} - \nu_2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} \right) dt dx. \tag{5.29}$$

Transformisanjem članova u (5.29) dobija se

$$\begin{aligned}
2K \nu_1 \int_0^1 \int_0^t w_1 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} dt dx &= 2K \nu_1 \int_0^1 \int_0^t \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right)^2 dt dx, \\
2K \nu_2 \int_0^1 \int_0^t w_2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} dt dx &= 2K \nu_2 \int_0^1 \int_0^t \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \right)^2 dt dx, \\
-2K \nu_2 \int_0^1 \int_0^t w_1 \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} dt dx - 2K \nu_1 \int_0^1 \int_0^t w_2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} dt dx &= \\
= -2K \nu_2 \int_0^1 \int_0^t \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} dt dx - 2K \nu_1 \int_0^1 \int_0^t \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} dt dx &= -2K(\nu_1 + \nu_2) \int_0^1 \int_0^t \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} dt dx,
\end{aligned} \tag{5.30}$$

pa je

$$I_{42} = 2K \int_0^1 \int_0^t \left[\nu_1 \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right)^2 + \nu_2 \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \right)^2 - (\nu_1 + \nu_2) \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \right] dt dx. \tag{5.31}$$

Konačno se dobija

$$I_4 = K \int_0^1 (w_1 - w_2)^2 dx + 2K \int_0^1 \int_0^t \left[\nu_1 \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right)^2 + \nu_2 \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \right)^2 - (\nu_1 + \nu_2) \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \right] dt dx, \tag{5.32}$$

dok integrali koji sadrže stohastičke komponente ostaju neizmenjeni.

Zamenom izraza (5.17), (5.21), (5.26) i (5.32) u (5.12), razdvajanjem članova u kojima se integracija sprovodi samo po prostornoj promenljivoj x i članova u kojima se

integracija sprovodi po prostornoj i vremenskoj promenljivoj, relacija (5.12) se može napisati u obliku

$$\mathbf{V} \Big|_0^t - \int_0^t \frac{d\mathbf{V}}{dt} dt = 0, \quad (5.33)$$

pri čemu je

$$\begin{aligned} \mathbf{V} = \int_0^1 & \left[\left(\frac{\partial w_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_2}{\partial t} + v_2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} \right)^2 + v_1^2 \left(\frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} \right)^2 + v_2^2 \left(\frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} \right)^2 \right. \\ & \left. + e_1 \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right)^2 + e_2 \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \right)^2 - f_{o1} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 - f_{o2} \left(\frac{\partial w_2}{\partial x} \right)^2 + K(w_1 - w_2)^2 \right] dx, \end{aligned} \quad (5.34)$$

a

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -2 \int_0^1 & \left[v_1 \left(\frac{\partial^3 w_1}{\partial t \partial x^2} \right)^2 + v_2 \left(\frac{\partial^3 w_2}{\partial t \partial x^2} \right)^2 + e_1 v_1 \left(\frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} \right)^2 + e_2 v_2 \left(\frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} \right)^2 - \right. \\ & \left. - f_{o1} v_1 \left(\frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3} \right)^2 - f_{o2} v_2 \left(\frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3} \right)^2 + K v_1 \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right)^2 + K v_2 \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \right)^2 - \right. \\ & \left. - K(v_1 + v_2) \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + f_1(t) \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \left(\frac{\partial w_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} \right) + f_2(t) \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial w_2}{\partial t} + v_2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} \right) \right] dx. \end{aligned} \quad (5.35)$$

U svojstvu mere rešenja uzećemo normu u obliku $\|\mathbf{w}\| = \sqrt{\mathbf{V}}$ pa funkcional \mathbf{V} mora biti pozitivno definitan. To će biti ispunjeno ako je

$$\int_0^1 \left[e_1 \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right)^2 + e_2 \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \right)^2 - f_{o1} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 - f_{o2} \left(\frac{\partial w_2}{\partial x} \right)^2 + K(w_1 - w_2)^2 \right] dx > 0. \quad (5.36)$$

Saglasno početnim uslovima (5.8), možemo rešenja diferencijalnih jednačina (5.5) i (5.6) pretpostaviti u obliku

$$w_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_{1n}(t) \sin \alpha_n x, \quad w_2(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_{2n}(t) \sin \alpha_n x, \quad (5.37)$$

gde je $\alpha_n = n\pi$, pa se posle zamene (5.37) u (5.36) ova relacija svodi na

$$(e_1 \alpha_n^4 - f_{o1} \alpha_n^2 + K) T_{1n}^2 - 2KT_{1n} T_{2n} + (e_2 \alpha_n^4 - f_{o2} \alpha_n^2 + K) T_{2n}^2 > 0, \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (5.38)$$

Pretpostavimo da važe nejednakosti

$$f_{o1} < \frac{e_1 \alpha_n^4 + K}{\alpha_n^2}, \quad f_{o2} < \frac{e_2 \alpha_n^4 + K}{\alpha_n^2}, \quad (5.39)$$

koje predstavljaju uslove da su grede, svaka ponaosob postavljene na Winkler-ov elastični sloj i podvrgnute dejstvu konstantnih pritisnih sila, stabilne u statičkom smislu. Relacija (5.38) je zadovoljena pod uslovom da važe relacije (5.39) i ako je

$$\chi f_{o1}^2 \alpha_n^2 - f_{o1} [(e_2 + \chi e_1) \alpha_n^4 + K(1 + \chi)] + e_1 e_2 \alpha_n^6 + K(e_2 + e_1) \alpha_n^2 > 0, \quad (5.40)$$

gde je uveden odnos veličina konstantnih komponenti pritisnih sila $\chi = f_{o2} / f_{o1}$.

Izjednačavanjem relacije (5.40) sa nulom dobija se

$$f_{o1}^{(1,2)} = \frac{(e_2 + \chi e_1) \alpha_n^4 + K(1 + \chi) \pm \sqrt{[(e_2 - \chi e_1) \alpha_n^4 + K(1 - \chi)]^2 + 4\chi K^2}}{2\chi \alpha_n^2}. \quad (5.41)$$

Kritično opterećenje jednako je manjoj vrednosti u izrazu (5.41)

$$f_{o1}^{cr} = \frac{(e_2 + \chi e_1) \alpha_n^4 + K(1 + \chi) - \sqrt{[(e_2 - \chi e_1) \alpha_n^4 + K(1 - \chi)]^2 + 4\chi K^2}}{2\chi \alpha_n^2}, \quad (5.42)$$

i ekvivalentno je relaciji (20) u radu Pavlovića i dr. [59] kada je $e_1 = e_2 = e$.

Za $\chi = 0$ i $K = 0$, kritična opterećenja pri izvijanju greda dobijena iz relacija (5.39) i (5.42) jednaka su Euler-ovoj kritičnoj sili. Prema tome, funkcional Ljapunova je pozitivno definitan ukoliko su determinističke komponente aksijalnih opterećenja manje od kritične sile pri izvijanju, tj. ako su uslovi statičke stabilnosti (5.39) i (5.42) za sistem dvostrukih greda zadovoljeni.

5.2 Skoro sigurna stabilnost pri dejstvu poremećaja koji ne sadrže beli spektar

Uvedimo nepoznatu skalarnu funkciju $\zeta(t)$ u obliku

$$\frac{1}{\mathbf{V}} \frac{d\mathbf{V}}{dt} \leq \zeta(t). \quad (5.43)$$

Kako je tačka maksimuma specijalni slučaj stacionarne tačke potražićemo ekstremalu iz relacije

$$\delta(\dot{\mathbf{V}} - \zeta \mathbf{V}) = 0. \quad (5.44)$$

Za varijacioni problem (5.44) odgovarajuće Euler-Lagrange-ove jednačine glase

$$\left(\varsigma + 2\nu_1 \frac{\partial^4}{\partial x^4}\right) \frac{\partial w_1}{\partial t} + \left(\varsigma \nu_1 \frac{\partial^4}{\partial x^4} + f_1(t) \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) w_1 = 0, \quad (5.45)$$

$$\left(\varsigma + 2\nu_2 \frac{\partial^4}{\partial x^4}\right) \frac{\partial w_2}{\partial t} + \left(\varsigma \nu_2 \frac{\partial^4}{\partial x^4} + f_2(t) \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) w_2 = 0, \quad (5.46)$$

$$\begin{aligned} &\left(\varsigma \nu_1 \frac{\partial^4}{\partial x^4} + f_1(t) \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \frac{\partial w_1}{\partial t} + \left[\varsigma \left(2\nu_1^2 \frac{\partial^8}{\partial x^8} + e_1 \frac{\partial^4}{\partial x^4} + f_{o1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + K\right) + 2e_1 \nu_1 \frac{\partial^8}{\partial x^8} + \right. \\ &\left. + 2\nu_1 f_{o1} \frac{\partial^6}{\partial x^6} + 2\nu_1 f_1(t) \frac{\partial^6}{\partial x^6} + 2\nu_1 K \frac{\partial^4}{\partial x^4}\right] w_1 - K \left[\varsigma + (\nu_1 + \nu_2) \frac{\partial^4}{\partial x^4}\right] w_2 = 0, \end{aligned} \quad (5.47)$$

$$\begin{aligned} &\left(\varsigma \nu_2 \frac{\partial^4}{\partial x^4} + f_2(t) \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \frac{\partial w_2}{\partial t} + \left[\varsigma \left(2\nu_2^2 \frac{\partial^8}{\partial x^8} + e_2 \frac{\partial^4}{\partial x^4} + f_{o2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + K\right) + 2e_2 \nu_2 \frac{\partial^8}{\partial x^8} + \right. \\ &\left. + 2\nu_2 f_{o2} \frac{\partial^6}{\partial x^6} + 2\nu_2 f_2(t) \frac{\partial^6}{\partial x^6} + 2\nu_2 K \frac{\partial^4}{\partial x^4}\right] w_2 - K \left[\varsigma + (\nu_1 + \nu_2) \frac{\partial^4}{\partial x^4}\right] w_1 = 0, \end{aligned} \quad (5.48)$$

Sistem diferencijalnih jednačina (5.45) – (5.48) se može uprostiti ako se izvrši eliminacija izvoda po vremenu funkcija w_1 i w_2 , pa se na taj način dobijaju dve diferencijalne jednačine u kojima su nepoznate samo funkcije w_1 i w_2

$$\left[\ell_{01}^{(2)} - \left(\varsigma + 2\nu_1 \frac{\partial^4}{\partial x^4}\right) \ell_{11}\right] w_1 + \left[\left(\varsigma + 2\nu_1 \frac{\partial^4}{\partial x^4}\right) \ell_{12}\right] w_2 = 0, \quad (5.49)$$

$$\left[\left(\varsigma + 2\nu_2 \frac{\partial^4}{\partial x^4}\right) \ell_{12}\right] w_1 + \left[\ell_{01}^{(2)} - \left(\varsigma + 2\nu_2 \frac{\partial^4}{\partial x^4}\right) \ell_{22}\right] w_2 = 0, \quad (5.50)$$

gde su zbog preglednijeg zapisa uvedeni diferencijalni operatori

$$\ell_{oi} = \varsigma \nu_i \frac{\partial^4}{\partial x^4} + f_i(t) \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \ell_{0i}^{(2)} = \ell_{oi} \ell_{oi}, \quad \ell_{12} = K \left[\varsigma + (\nu_1 + \nu_2) \frac{\partial^4}{\partial x^4}\right], \quad (5.51)$$

$$\ell_{ii} = \varsigma \left(2\nu_i^2 \frac{\partial^8}{\partial x^8} + e_i \frac{\partial^4}{\partial x^4} + f_{oi} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + K\right) + 2\nu_i \left(e_i \frac{\partial^8}{\partial x^8} + f_{oi} \frac{\partial^6}{\partial x^6} + f_i(t) \frac{\partial^6}{\partial x^6} + K \frac{\partial^4}{\partial x^4}\right), \quad (i=1,2).$$

Zamenom pretpostavljenih rešenja (5.37) u diferencijalne jednačine (5.49) i (5.50), dobija se sistem algebarskih jednačina koje sadrže nepoznate funkcije $T_{1n}(t)$ i $T_{2n}(t)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[(\zeta v_1 \alpha_n^4 - \alpha_n^2 f_1(t))^2 - (\zeta + 2v_1 \alpha_n^4) \ell_{11}^n \right] T_{1n}(t) + (\zeta + 2v_1 \alpha_n^4) \ell_{12}^n T_{2n}(t) \right\} = 0, \quad (5.52)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (\zeta + 2v_2 \alpha_n^4) \ell_{12}^n T_{1n}(t) + \left[(\zeta v_2 \alpha_n^4 - \alpha_n^2 f_2(t))^2 - (\zeta + 2v_2 \alpha_n^4) \ell_{22}^n \right] T_{2n}(t) \right\} = 0,$$

gde su uvedene oznake

$$\ell_{ii}^n = \zeta (2v_i^2 \alpha_n^8 + e_i \alpha_n^4 - f_{oi} \alpha_n^2 + K) + 2v_i \alpha_n^4 (e_i \alpha_n^4 - f_{oi} \alpha_n^2 - f_i(t) \alpha_n^2 + K), \quad (i=1,2), \quad (5.53)$$

$$\ell_{12}^n = K [\zeta + (v_1 + v_2) \alpha_n^4].$$

Netrivijalna rešenja za funkcije $T_{1n}(t)$ i $T_{2n}(t)$ postoje pod uslovom da je determinanta sistema (5.52) jednaka nuli, što daje algebarsku jednačinu četvrtog reda

$$a_{1n} \zeta_n^4 + a_{2n} \zeta_n^3 + a_{3n} \zeta_n^2 + a_{4n} \zeta_n + a_{5n} = 0, \quad (5.54)$$

čiji su koeficijenti dati izrazima

$$a_{1n} = e_{1n} e_{2n} + K(e_{1n} + e_{2n}),$$

$$a_{2n} = 4(v_1 + v_2) \alpha_n^4 a_{1n},$$

$$a_{3n} = 4(v_1^2 + 4v_1 v_2 + v_2^2) \alpha_n^8 a_{1n} - K^2 (v_1 - v_2)^2 \alpha_n^8 - (e_{1n} + K) F_{2n}^2(t) - (e_{2n} + K) F_{1n}^2(t),$$

$$a_{4n} = 16v_1 v_2 (v_1 + v_2) \alpha_n^{12} a_{1n} - 2K^2 (v_1 + v_2) (v_1 - v_2)^2 \alpha_n^{12} - 4\alpha_n^4 [v_1 (e_{1n} + K) F_{2n}^2(t) - v_2 (e_{2n} + K) F_{1n}^2(t)], \quad (5.55)$$

$$a_{5n} = 16v_1^2 v_2^2 \alpha_n^{16} a_{1n} - 4K^2 v_1 v_2 (v_1 - v_2)^2 \alpha_n^{16} + F_1^2(t) F_2^2(t) - 4\alpha_n^8 [v_1^2 (e_{1n} + K) F_2^2(t) + v_2^2 (e_{2n} + K) F_1^2(t)],$$

i sa oznakama

$$e_{in} = e_i \alpha_n^4 - f_{oi} \alpha_n^2 + v_i^2 \alpha_n^8, \quad F_{in}(t) = \alpha_n^2 (2v_i^2 \alpha_n^6 + f_i(t)), \quad (i=1,2). \quad (5.56)$$

Kao što je poznato iz teorije algebarskih jednačina, rešenje jednačine (5.54) se može dobiti u zatvorenom obliku. Bez gubitka opštosti, možemo uzeti da su vremena retardacije oba nosača ista, tj. $v_1 = v_2 = v$. U tom slučaju algebarska jednačina (5.54) se svodi na bikvadratnu jednačinu

$$(\zeta_n + 2v \alpha_n^4)^4 - \frac{(e_{1n} + K) F_{2n}^2(t) + (e_{2n} + K) F_{1n}^2(t)}{a_{1n}} (\zeta_n + 2v \alpha_n^4)^2 + \frac{F_{1n}^2(t) F_{2n}^2(t)}{a_{1n}} = 0. \quad (5.57)$$

Iz jednačine (5.57) se lako dobija

$$\zeta_n = \sqrt{\frac{(e_{1n} + K)F_{2n}^2(t) + (e_{2n} + K)F_{1n}^2(t) + \sqrt{[(e_{1n} + K)F_{2n}^2(t) - (e_{2n} + K)F_{1n}^2(t)]^2 + 4K^2F_{1n}^2(t)F_{2n}^2(t)}}{2[e_{1n}e_{2n} + K(e_{1n} + e_{2n})]}} - 2\nu\alpha_n^4, \quad (5.58)$$

gde su znaci izabrani tako da rešenje bude realno i pozitivno.

Nakon određivanja nepoznatih funkcija ζ_n , vratimo se na diferencijalnu nejednačinu (5.43). Zbog ortogonalnosti funkcija $\sin \alpha_n x$, funkcional Ljapunova (5.34) možemo napisati u obliku $\mathbf{V} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{V}_n$ pa se ocena funkcionala \mathbf{V} može izvršiti nizom nejednakosti

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{d \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{V}_n}{dt} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n \mathbf{V}_n \leq \left(\max_n \zeta_n \right) \mathbf{V}. \quad (5.59)$$

Integracijom relacije (5.59) po vremenu, dobija se

$$\mathbf{V} \leq \mathbf{V}_0 \exp \left[\frac{1}{t} \int_0^t \max_n \zeta_n(\tau) d\tau \right] t. \quad (5.60)$$

Kada su stohastički procesi $f_1(t)$, $f_2(t)$ ergodički i stacionarni, tada će trivijalna rešenja sistema stohastičkih diferencijalnih jednačina (5.5) i (5.6) biti skoro sigurno asimptotski stabilna ako je

$$E \left[\max_n \zeta_n(t) \right] < 0, \quad (5.61)$$

gde je $E[\cdot]$ operator matematičkog očekivanja.

5.3 Skoro sigurna stabilnost pod dejstvom širokopojasnih poremećaja

Zamenom relacija (5.37) u diferencijalne jednačine (5.5) i (5.6), primenom metode diskretizacije, svodimo parcijalne diferencijalne jednačine na beskonačan sistem običnih diferencijalnih jednačina

$$\ddot{T}_{1n} + 2\nu_1\alpha_n^4\dot{T}_{1n} + e_1\alpha_n^4T_{1n} - (f_{o1} + f_1(t))\alpha_n^2T_{1n} + K(T_{1n} - T_{2n}) = 0, \quad (5.62)$$

$$\ddot{T}_{2n} + 2\nu_2\alpha_n^4\dot{T}_{2n} + e_1\alpha_n^4T_{2n} - (f_{o1} + f_1(t))\alpha_n^2T_{2n} + K(T_{2n} - T_{1n}) = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Ako zamenimo u diferencijalne jednačine (5.62) pretpostavljena rešenja u obliku

$$T_{1n} = A_{1n} \cos(\omega_{1n} t + \alpha_{01}), \quad T_{2n} = A_{2n} \cos(\omega_{2n} t + \alpha_{02}), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (5.63)$$

za slučaj kada su vremena retardacije i stohastički procesi jednaki nuli, $\nu_1 = \nu_2 = 0$, $f_1(t) = f_2(t) = 0$, dobijamo sistem homogenih algebarskih jednačina po nepoznatim amplitudama A_{1n} , A_{2n} . Ovaj sistem imaće netrivialna rešenja ako je determinanta sistema jednaka nuli. Iz tog uslova se dobija frekventna jednačina odakle se određuju prirodne frekvencije u n -tom modu

$$\omega_{1n,2n}^2 = \frac{(e_1 + e_2)\alpha_n^4 - (f_{01} + f_{02})\alpha_n^2 + 2K}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{[(e_1 - e_2)\alpha_n^4 - (f_{01} - f_{02})\alpha_n^2]^2 + 4K^2}. \quad (5.64)$$

Izjednačavanjem izraza (5.64) sa nulom, pod pretpostavkom da važi uslov (5.39), dolazimo do identičnog izraza za kritičnu silu koji smo dobili iz uslova pozitivne definitnosti funkcionala Ljapunova (5.42).

Kako su приметили Ariaratnam i Abdelrahman [60], efektivna analiza diferencijalnih jednačina (5.62) se može izvršiti ograničavajući se samo na prvi mod ($n = 1$).

Osnovne prirodne frekvencije $\omega_{11} = \omega_1$, $\omega_{21} = \omega_2$, dobijene iz relacije (5.64) su

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[(e_1\pi^4 + e_2\pi^4 - f_{01}\pi^2 - f_{02}\pi^2 + 2K) \mp \sqrt{(e_1\pi^4 - e_2\pi^4 - f_{01}\pi^2 + f_{02}\pi^2)^2 + 4K^2} \right]. \quad (5.65)$$

U cilju uprošćenja diferencijalnih jednačina (5.62), uvodimo nove promenljive z_1 i z_2 transformacijom oblika $\mathbf{T} = \mathbf{QZ}$, gde su označena matrica \mathbf{Q} i promenljive \mathbf{T} i \mathbf{Z}

$$\mathbf{T} = \begin{Bmatrix} T_{11} \\ T_{21} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} K & cK \\ e_1\pi^4 - f_{01}\pi^2 + K - \omega_1^2 & c(e_1\pi^4 - f_{01}\pi^2 + K - \omega_2^2) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix}, \quad (5.66)$$

a c je parametar koji se bira tako da se dobije podesno skaliranje. U našem slučaju je $c^2 = 1$, pa ćemo uzeti da je $c = -1$, jer bi $c = 1$ vodilo ka neodređenosti. Diferencijalne jednačine (5.62) sada imaju oblik

$$\begin{aligned} \ddot{z}_1 + 2(\beta_{11}\dot{z}_1 + \beta_{12}\dot{z}_2) + \omega_1^2 z_1 + (c_{12}z_1 + c_{11}z_2)f_1(t) - c_{11}(z_1 + z_2)f_2(t) &= 0, \\ \ddot{z}_2 + 2(\beta_{21}\dot{z}_1 + \beta_{22}\dot{z}_2) + \omega_2^2 z_2 + c_{11}(z_1 - z_2)f_1(t) - (c_{11}z_1 - c_{12}z_2)f_2(t) &= 0, \end{aligned} \quad (5.67)$$

gde su uvedene oznake

$$c_{11} = \frac{e_1 \alpha_1^4 - f_{01} \alpha_1^2 + K - \omega_1^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \pi^2, \quad c_{12} = \frac{e_1 \alpha_1^4 - f_{01} \alpha_1^2 + K - \omega_2^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \pi^2, \quad (5.68)$$

$$\beta_{11} = (-c_{12} \nu_1 + c_{11} \nu_2) \pi^2, \quad \beta_{12} = \beta_{21} = -c_{11} (\nu_1 - \nu_2) \pi^2, \quad \beta_{22} = (c_{11} \nu_1 - c_{12} \nu_2) \pi^2.$$

Očigledno je da sistem (5.67) ima trivijalno rešenje $z_1 = z_2 = 0$. Pretpostavimo da su $f_1(t)$ i $f_2(t)$ ergodički stohastički procesi sa malim vremenom korelacije. Neka su koeficienti β_{ij} , ($i, j = 1, 2$), kao i kosinusne i sinusne spektralne gustine procesa $f_1(t)$ i $f_2(t)$, male veličine istog reda parametra ε , $0 < \varepsilon \ll 1$.

Ako uvedemo transformaciju

$$z_i = a_i \cos \phi_i, \quad \dot{z}_i = -\omega_i a_i \sin \phi_i, \quad \dot{\phi}_i = \omega_i t + \varphi_i, \quad i = 1, 2, \quad (5.69)$$

dobija se sledeći sistem četiri diferencijalne jednačine prvog reda

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= -2 \left(\beta_{11} a_1 \sin^2 \phi_1 + \beta_{12} \frac{\omega_2}{\omega_1} a_2 \sin \phi_1 \sin \phi_2 \right) + \\ &+ \frac{\sin \phi_1}{\omega_1} \left[(c_{12} a_1 \cos \phi_1 + c_{11} a_2 \cos \phi_2) f_1(t) - c_{11} (a_1 \cos \phi_1 + a_2 \cos \phi_2) f_2(t) \right], \\ \dot{\phi}_1 &= \frac{\cos \phi_1}{\omega_1 a_1} \left[-2 (\beta_{11} \omega_1 a_1 \sin \phi_1 + \beta_{12} \omega_2 a_2 \sin \phi_2) + \right. \\ &+ \left. (c_{12} a_1 \cos \phi_1 + c_{11} a_2 \cos \phi_2) f_1(t) - c_{11} (a_1 \cos \phi_1 + a_2 \cos \phi_2) f_2(t) \right], \\ \dot{a}_2 &= -2 \left(\beta_{21} \frac{\omega_1}{\omega_2} a_1 \sin \phi_1 \sin \phi_2 + \beta_{22} a_2 \sin^2 \phi_2 \right) + \\ &+ \frac{\sin \phi_2}{\omega_2} \left[c_{11} (a_1 \cos \phi_1 - a_2 \cos \phi_2) f_1(t) - (c_{11} a_1 \cos \phi_1 - c_{12} a_2 \cos \phi_2) f_2(t) \right], \\ \dot{\phi}_2 &= \frac{\cos \phi_2}{\omega_2 a_2} \left[-2 (\beta_{21} \omega_1 a_1 \sin \phi_1 + \beta_{22} \omega_2 a_2 \sin \phi_2) + \right. \\ &+ \left. c_{11} (a_1 \cos \phi_1 - a_2 \cos \phi_2) f_1(t) - (c_{11} a_1 \cos \phi_1 - c_{12} a_2 \cos \phi_2) f_2(t) \right]. \end{aligned} \quad (5.70)$$

Kosinusne i sinusne poprečne spektralne gustine ergodičkih stohastičkih procesa $f_1(t)$ i $f_2(t)$ su definisane na sledeći način

$$(S_{ij}(\omega); \psi_{ij}(\omega)) = 2 \int_0^{\infty} E \{ f_i(t) f_j(t + \tau) \} (\cos \omega \tau; \sin \omega \tau) d\tau, \quad (i, j = 1, 2). \quad (5.71)$$

Kada ε teži nuli, rešenje sistema diferencijalnih jednačina (5.70) konvergira u slabom smislu difuzionom procesu Markova, kome odgovaraju Itô diferencijalne jednačine oblika

$$da_i = m_{ai}dt + \sigma_{i1}dW_{\omega_1} + \sigma_{i2}dW_{\omega_2}, \quad (5.72)$$

$$d\varphi_i = m_{\varphi i}dt + \eta_{i1}dW_{\varphi_1} + \eta_{i2}dW_{\varphi_2},$$

gde su W_{ai} i $W_{\varphi i}$ mešoviti nezavisni jedinični Wiener-ovi procesi. Primenom metode stohastičkog usrednjenja Khasminskii, dobijaju se koeficijenti prenosa i difuzione matrice u obliku

$$\begin{aligned} m_{a1} &= \left[-\beta_{11} + 3C_{\omega_1}S_{1a}(2\omega_1) + 2C_{\omega_1}q_{\omega}S_0^- \right] a_1 + C_{\omega_1}S_0^+ \frac{a_2^2}{a_1}, \\ m_{a2} &= \left[-\beta_{22} + 3C_{\omega_1}q_{\omega}^2S_{2a}(2\omega_2) + 2C_{\omega_1}q_{\omega}S_0^- \right] a_2 + C_{\omega_1}q_{\omega}^2S_0^+ \frac{a_1^2}{a_2}, \\ m_{\varphi_1} &= 2C_{\omega_1} \left[\psi_{1\varphi}(2\omega_1) + q_{\omega}\psi_0^- \right], \\ m_{\varphi_2} &= 2C_{\omega_1}q_{\omega} \left[q_{\omega}\psi_{2\varphi}(2\omega_2) + \psi_0^- \right], \\ [\sigma\sigma^T]_{11} &= 2C_{\omega_1} \left[S_{1a}(2\omega_1)a_1^2 + S_0^+a_2^2 \right], \\ [\sigma\sigma^T]_{12} &= [\sigma\sigma^T]_{21} = 2C_{\omega_1}q_{\omega}S_0^-a_1a_2, \\ [\sigma\sigma^T]_{22} &= 2C_{\omega_1}q_{\omega}^2 \left[S_0^+a_1^2 + S_{2a}(2\omega_2)a_2^2 \right], \\ [\eta\eta^T]_{11} &= 2C_{\omega_1} \left[2S_{1a}(0) + S_{1a}(2\omega_1) + S_0^+ \frac{a_2^2}{a_1^2} \right], \\ [\eta\eta^T]_{12} &= -2C_{\omega_1}q_{\omega} \left[2(q_c S_{11}(0) - q_c^2 S_{12}(0) - S_{21}(0) + q_c S_{22}(0)) - S_0^+ \right], \\ [\eta\eta^T]_{21} &= -2C_{\omega_1}q_{\omega} \left[2(q_c S_{11}(0) - S_{12}(0) - q_c^2 S_{21}(0) + q_c S_{22}(0)) - S_0^+ \right], \\ [\eta\eta^T]_{22} &= 2C_{\omega_1}q_{\omega}^2 \left[2S_{2a}(0) + S_{2a}(2\omega_2) + S_0^+ \frac{a_1^2}{a_2^2} \right], \end{aligned} \quad (5.73)$$

gde su uvedene oznake

$$C_{\omega_1} = \frac{c_{11}^2}{16\omega_1^2}, \quad q_{\omega} = \frac{\omega_1}{\omega_2}, \quad S_0^{\pm} = S_{11}^{\pm} - S_{12}^{\pm} - S_{21}^{\pm} + S_{22}^{\pm},$$

$$\psi_0^{\pm} = \psi_{11}^{\pm} - \psi_{12}^{\pm} - \psi_{21}^{\pm} + \psi_{22}^{\pm},$$

$$(S_{ij}^{\pm}, \psi_{ij}^{\pm}) = [S_{ij}^{\pm}(\omega_1 + \omega_2), \psi_{ij}^{\pm}(\omega_1 + \omega_2)] \pm [S_{ij}^{\pm}(\omega_1 - \omega_2), \psi_{ij}^{\pm}(\omega_1 - \omega_2)], \quad (5.74)$$

$$S_{1a}(\omega) = q_c^2 S_{11}(\omega) - q_c (S_{12}(\omega) + S_{21}(\omega)) + S_{22}(\omega), \quad q_c = \frac{c_{12}}{c_{11}},$$

$$S_{2a}(\omega) = S_{11}(\omega) - q_c [S_{12}(\omega) + S_{21}(\omega)] + q_c^2 S_{22}(\omega).$$

Za sistem sa dva stepena slobode, diferencijalne jednačine (5.72) po amplitudama sistema glase

$$da_1 = m_{a1} dt + \sigma_{11} dW_{a1} + \sigma_{12} dW_{a2}, \quad (5.75)$$

$$da_2 = m_{a2} dt + \sigma_{21} dW_{a1} + \sigma_{22} dW_{a2}.$$

Usrednjeni vektor amplituda (a_1, a_2) je dvodimenzionalni difuzioni proces, pa se može primeniti postupak Khasminskii-og [58] u cilju određivanja najvećeg eksponenta Ljapunova amplitudnog procesa. Uvođenjem novih promenljivih ρ i ϕ

$$\rho = \frac{1}{2} \log(a_1^2 + a_2^2), \quad \tan \phi = \frac{a_2}{a_1}, \quad \phi \in (0, \pi/2), \quad (5.76)$$

i korišćenjem Itô-ovog diferencijalnog pravila, dobijaju se sledeće Itô diferencijalne jednačine za funkcije ρ i ϕ

$$d\rho = Q(\phi) dt + \Sigma(\phi) dW(t), \quad (5.77)$$

$$d\phi = \Phi(\phi) dt + \Psi(\phi) dW(t),$$

gde je

$$\Sigma(\phi) dW(t) = \sum_{j=1}^2 \left(\sigma_{a1j} \frac{\partial \rho}{\partial a_1} + \sigma_{a2j} \frac{\partial \rho}{\partial a_2} \right) dW_j(t), \quad (5.78)$$

$$\Psi(\phi) dW(t) = \sum_{j=1}^2 \left(\sigma_{a1j} \frac{\partial \phi}{\partial a_1} + \sigma_{a2j} \frac{\partial \phi}{\partial a_2} \right) dW_j(t).$$

Koeficijenti prenosa $Q(\phi)$ i $\Phi(\phi)$ u relacijama (5.77) dati su izrazima

$$Q(\phi) = \lambda_1 \cos^2 \phi + \lambda_2 \sin^2 \phi + 2C_{\omega_1} q_{\omega} S_0^- + \Psi^2(\phi), \quad (5.79)$$

$$\Phi(\phi) = \frac{1}{2} (\lambda_2 - \lambda_1) \sin 2\phi + \Psi^2(\phi) \operatorname{ctg} 2\phi.$$

U relacijama (5.79) uvedene su oznake

$$\lambda_1 = -\beta_{11} + 2C_{\omega 1} S_{1a}(2\omega_1), \quad \lambda_2 = -\beta_{22} + 2C_{\omega 1} q_{\omega}^2 S_{2a}(2\omega_2), \quad (5.80)$$

dok je

$$\begin{aligned} \Psi^2(\phi) &= \left\{ \left(\sigma_{a11} \frac{\partial \phi}{\partial a_1} + \sigma_{a21} \frac{\partial \phi}{\partial a_2} \right) \left(\sigma_{a12} \frac{\partial \phi}{\partial a_1} + \sigma_{a22} \frac{\partial \phi}{\partial a_2} \right) \right\} \left\{ \left(\sigma_{a11} \frac{\partial \phi}{\partial a_1} + \sigma_{a21} \frac{\partial \phi}{\partial a_2} \right) \right\} \left\{ \left(\sigma_{a12} \frac{\partial \phi}{\partial a_1} + \sigma_{a22} \frac{\partial \phi}{\partial a_2} \right) \right\} = \\ &= (\sigma_{a11}^2 + \sigma_{a12}^2) \left(\frac{\partial \phi}{\partial a_1} \right)^2 + 2(\sigma_{a11} \sigma_{a21} + \sigma_{a12} \sigma_{a22}) \frac{\partial \phi}{\partial a_1} \frac{\partial \phi}{\partial a_2} + (\sigma_{a21}^2 + \sigma_{a22}^2) \left(\frac{\partial \phi}{\partial a_2} \right)^2, \end{aligned} \quad (5.81)$$

pa je konačno

$$\Psi^2(\phi) = A + B \cos 2\phi + C \cos^2 2\phi, \quad (5.82)$$

gde je

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} C_{\omega 1} \left[(1 + q_{\omega}^2) S_0^+ + S_{1a}(2\omega_1) + q_{\omega}^2 S_{2a}(2\omega_2) - 2q_{\omega} S_0^- \right], \\ B &= -C_{\omega 1} (1 - q_{\omega}^2) S_0^+, \\ C &= \frac{1}{2} C_{\omega 1} \left[(1 + q_{\omega}^2) S_0^+ - S_{1a}(2\omega_1) - q_{\omega}^2 S_{2a}(2\omega_2) + 2q_{\omega} S_0^- \right]. \end{aligned} \quad (5.83)$$

Na osnovu druge jednačine u (5.77) se vidi da je $\phi(t)$ autodifuzioni proces koji je nesingularan, jer je koeficijent difuzije ϕ procesa $\Psi(\phi)$ u Itô diferencijalnoj jednačini različit od nule na intervalu $[0, \pi/2]$. Za ovaj proces možemo odrediti funkciju gustine verovatnoće $p(\phi)$ rešavanjem sledeće Fokker-Planck-ove jednačine

$$\frac{\partial p(\phi)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \phi} [\Phi(\phi) p(\phi)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} [\Psi^2(\phi) p(\phi)], \quad (5.84)$$

koja za stacionarnu funkciju raspodele verovatnoće, $\partial p(\phi) / \partial t = 0$, glasi

$$\frac{1}{2} \Psi^2(\phi) \frac{dp(\phi)}{d\phi} + \left[\frac{1}{2} \frac{d\Psi^2(\phi)}{d\phi} - \Phi(\phi) p(\phi) \right] = C_1, \quad (5.85)$$

gde je C_1 integraciona konstanta koja se određuje iz uslova normalizacije

$$\int_0^{\pi/2} p(\phi) d\phi = 1. \quad (5.86)$$

Relacija (5.85) predstavlja linearnu diferencijalnu jednačinu prvog reda čije je rešenje

$$p(\phi) = \frac{C_1}{\Psi^2(\phi)U(\phi)} - \frac{C_0}{\Psi^2(\phi)U(\phi)} \int U(\phi) d\phi, \quad U(\phi) = \exp \left[-2 \int \frac{\Phi(\phi)}{\Psi^2(\phi)} d\phi \right], \quad (5.87)$$

a kako nema akumulacije količine verovatnoće na granicama, konstanta $C_0 = 0$, pa je proces ϕ ergodički u intervalu $0 \leq \phi \leq \pi/2$. Prema tome, invarijantna funkcija gustine verovatnoće procesa ϕ je

$$p(\phi) = \frac{C_1}{\Psi^2(\phi)U(\phi)}. \quad (5.88)$$

Nakon integracije drugog integrala u (5.87) dobija se:

a) Za $\Delta = 4AC - B^2 < 0$,

$$p(\phi) = \frac{C_1 \sin 2\phi}{\Psi^2(\phi)} \exp \left[-\frac{2(\lambda_2 - \lambda_1)}{\sqrt{|\Delta|}} \operatorname{Tgh}^{-1} \frac{B + 2A \sin^2 \phi}{\sqrt{|\Delta|}} \right].$$

b) Za $\Delta = 4AC - B^2 = 0$,

$$p(\phi) = \frac{C_1 \sin 2\phi}{\Psi^2(\phi)} \exp \left[-\frac{2(\lambda_2 - \lambda_1)}{B + 2A \sin^2 \phi} \right]. \quad (5.89)$$

c) Za $\Delta = 4AC - B^2 > 0$,

$$p(\phi) = \frac{C_1 \sin 2\phi}{\Psi^2(\phi)} \exp \left[-\frac{2(\lambda_2 - \lambda_1)}{\sqrt{\Delta}} \operatorname{Tg}^{-1} \frac{B + 2A \sin^2 \phi}{\sqrt{\Delta}} \right].$$

Na osnovu relacije (5.85) dobija se normalizaciona konstanta

$$C_1 = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\exp(-z_G) - \exp(-z_D)}, \quad (5.90)$$

pri čemu je:

a) Za $\Delta = 4AC - B^2 < 0$,

$$z_G = B T g h^{-1} \frac{B+2A}{\sqrt{|\Delta|}}, \quad z_D = B T g h^{-1} \frac{B}{\sqrt{|\Delta|}}.$$

b) Za $\Delta = 4AC - B^2 = 0$,

$$z_G = \frac{2(\lambda_2 - \lambda_1)}{B+2A}, \quad z_D = \frac{2(\lambda_2 - \lambda_1)}{B}. \quad (5.91)$$

c) Za $\Delta = 4AC - B^2 > 0$,

$$z_G = B T g^{-1} \frac{B+2A}{\sqrt{\Delta}}, \quad z_D = B T g^{-1} \frac{B}{\sqrt{\Delta}}.$$

Norma procesa je $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, pa je eksponent Ljapunova sistema dat sledećim izrazom

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \rho(t). \quad (5.92)$$

Integracijom prve jednaćine u (5.77) sledi

$$\rho(t) = \rho(0) + \int_0^t Q(\phi) dt + \int_0^t \Sigma(\phi) dW(t), \quad (5.93)$$

a nakon deljenja sa t je

$$\frac{1}{t} \rho(t) = \frac{1}{t} \rho(0) + \frac{1}{t} \int_0^t Q(\phi) dt + \frac{1}{t} \int_0^t \Sigma(\phi) dW(t). \quad (5.94)$$

Kako je proces ϕ ergodički i kako je $E[dW(t)] = 0$, sledi da je

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \rho(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t Q(\phi) dt + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \Sigma(\phi) dW(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t Q(\phi) dt = E[Q(\phi)]. \quad (5.95)$$

Na osnovu relacija (5.92) i (5.95), nakon određivanja funkcije gustine raspodele verovatnoće, najveći eksponent Ljapunova je

$$\lambda = E[Q(\phi)] = \int_0^{\pi/2} Q(\phi) p(\phi) d\phi. \quad (5.96)$$

Prema Ariaratnam-u i Abdelrahman-u [60], najveći eksponent Ljapunova, sa verovatnoćom 1, dat je izrazima:

a) Za $\Delta = 4AC - B^2 < 0$,

$$\lambda = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) + 2C_{\omega_1} q_{\omega} S_0^- + \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1) \frac{\exp\left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\sqrt{|\Delta|}} Tgh^{-1}\gamma_2\right) + \exp\left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\sqrt{|\Delta|}} Tgh^{-1}\gamma_1\right)}{\exp\left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\sqrt{|\Delta|}} Tgh^{-1}\gamma_2\right) - \exp\left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\sqrt{|\Delta|}} Tgh^{-1}\gamma_1\right)}.$$

b) Za $\Delta = 4AC - B^2 = 0$,

$$\lambda = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) + 2C_{\omega_1} q_{\omega} S_0^- + \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1) \frac{\exp\left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{B - 2C}\right) + \exp\left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{B + 2C}\right)}{\exp\left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{B - 2C}\right) - \exp\left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{B + 2C}\right)}. \quad (5.97)$$

c) Za $\Delta = 4AC - B^2 > 0$,

$$\lambda = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) + 2C_{\omega_1} q_{\omega} S_0^- + \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1) \frac{\exp\left(-\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\sqrt{\Delta}} tg^{-1}\gamma_2\right) + \exp\left(-\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\sqrt{\Delta}} tg^{-1}\gamma_1\right)}{\exp\left(-\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\sqrt{\Delta}} tg^{-1}\gamma_2\right) - \exp\left(-\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\sqrt{\Delta}} tg^{-1}\gamma_1\right)},$$

gde je

$$\gamma_1 = \frac{B + 2C}{\sqrt{|\Delta|}}, \quad \gamma_2 = \frac{B - 2C}{\sqrt{|\Delta|}}. \quad (5.98)$$

5.4 Numerički rezultati i diskusija

5.4.1 Primena ortogonalnih polinoma

Jedan pogodan način za dobijanje granica oblasti skoro sigurne stabilnosti je da se na relaciju (5.61) primeni Schwartz-ova nejednačina. Radi pojednostavljenja, uzmimo da na sistem dejstvuju dva stohastička procesa $f(t)$ i $g(t)$ sa statističkim karakteristikama

$$E[f(t)] = E[g(t)] = 0, \quad \sigma_f^2 = E[f^2(t)], \quad \sigma_g^2 = E[g^2(t)], \quad r = \frac{E[f(t)g(t)]}{\sigma_f \sigma_g}, \quad (5.99)$$

gde je r koeficijent korelacije procesa f i g . Primenom Schwartz-ove nejednačine $E[\sqrt{XY}] \leq \sqrt{E[X]E[Y]}$ na relaciju (5.57) dobija se

$$\begin{aligned} & (e_{1n} + K)E[F_{2n}^2(t)] + (e_{2n} + K)E[F_{1n}^2(t)] + \\ & + E \left[\sqrt{[(e_{1n} + K)F_{2n}^2(t) - (e_{2n} + K)F_{1n}^2(t)]^2 + 4K^2 F_{1n}^2(t)F_{2n}^2(t)} \right] \leq \quad (5.100) \\ & \leq 4v\alpha_n^4 [e_{1n}e_{2n} + K(e_{1n} + e_{2n})]. \end{aligned}$$

Nakon još jedne primene Schwartz-ove nejednačine na relaciju (5.100) dobija se algebarska jednačina

$$F(\sigma_1, \sigma_2, r, v, f_{01}, f_{02}, e_1, e_2, K, n) = 0, \quad (5.101)$$

čijim rešavanjem određujemo granice oblasti skoro sigurne stabilnosti. Važno je napomenuti da se primenom Schwartz-ove nejednačine ne dobijaju maksimalne oblasti stabilnosti. Kozin [24] je pokazao da je poznavanje funkcija gustine raspodele verovatnoće potreban i dovoljan uslov za dobijanje optimalnih rezultata. Kada na sistem deluje više stohastičkih poremećaja, relacija (5.61) zahteva poznavanje višedimenzionalne funkcije gustine verovatnoće.

Kada su u pitanju dva stohastička procesa sa poznatom funkcijom zajedničke raspodele gustine verovatnoće $p(f, g)$ relacija (5.61) ima oblik

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \max_n \zeta_n(f, g) p(f, g) df dg < 0, \quad (5.102)$$

i predstavlja sličnu relaciju jednačini (5.101), ali njeno numeričko rešavanje nije nimalo jednostavno. Naime, granice integrala se moraju definisati konačnim izrazima koji najčešće sadrže nepoznate varijanse procesa. Razni autori su dali različite metode rešavanja problema. Za slučaj jednodimenzionalnog procesa Kozin [24] je, na osnovu grafičkog prikaza, formirao iterativni postupak za određivanje korena integro-algebarske jednačine. U slučaju dvodimenzionalnih procesa Xie [53] je izložio optimizacionu metodu i kompleksnu metodu ograničene optimizacije.

Grupa autora sa Mašinskog fakulteta Univerziteta u Nišu (Pavlović i dr. [29],[30],[59]) je razvila metodu rešavanja problema (5.102) na osnovu ortogonalnih Hermite-ovih i Čebiševljevih polinoma. U osnovi ove metode je ideja da se nesvojstveni

integrali zamene konačnom sumom proizvoda koeficijenata Gauss-ovih kvadrature formula i veličine podintegralne funkcije sračunate u nulama ortogonalnih polinoma. Na primer, za jednodimenzionalni proces relacija (5.102) glasi

$$\int_R \max_n \zeta_n(f) p(f) df \approx \sum_{k=1}^n W_k \max_n \zeta_n(\xi_k), \quad (5.103)$$

pri čemu se koeficijenti kvadrature W_k biraju prema funkciji gustine raspodele procesa, a ξ_k su nule izabranog ortogonalnog polinoma.

Za slučaj Gauss-ove raspodele gustine verovatnoće procesa primenjujemo odgovarajuće Gauss-Hermite-ove kvadrature formule, pri čemu su ξ_k nule Hermite-ovih polinoma

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) = \sum_{k=0}^{k=\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k n!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k}, \quad (5.104)$$

dok su koeficijenti kvadrature

$$W_k = \frac{2^{n+1} \sqrt{\pi} n!}{[H'_{n+1}(\xi_k)]^2}. \quad (5.105)$$

Za slučaj harmonijske raspodele gustine verovatnoće procesa primenjujemo odgovarajuće Gauss-Čebiševljeve kvadrature formule, pri čemu su za Čebiševljeve polinome

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) = \frac{1}{2} n \sum_{k=0}^{k=\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k (n-k-1)!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k}, \quad (5.106)$$

a nule ξ_k su date izrazima

$$\xi_k = \cos \frac{2k-1}{n} \pi, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (5.107)$$

dok su koeficijenti kvadrature konstantni

$$W_k = \frac{\pi}{n}. \quad (5.108)$$

Izloženi postupak se lako proširuje na slučaj dvodimenzionalnih slučajnih procesa, kao što je prikazano u radovima Khasminskii-og [58] i Pavlovića i dr. [59].

5.4.2 Poremećaj ne sadrži beli spektar

Na osnovu relacija (5.58) i (5.61) može se dobiti minimalno vreme retardacije koje obezbeđuje skoro sigurnu asimptotsku stabilnost sistema kada su poznate funkcije gustine verovatnoće za oba stohastička procesa. U svojstvu primera razmotrićemo slučajne procese koji imaju Gauss-ovu ili harmonijsku raspodelu gustine verovatnoće. Za harmonijski proces je $f_1(t) = H \cos(\omega t + \theta)$, gde su H , ω fiksirane amplituda i frekvencija, a θ je uniformno raspodeljena faza na intervalu $[0, 2\pi)$.

U prvom koraku proučavaćemo slučaj kada je gornja greda opterećena determinističkim i stohastičkim silama, dok je donja greda podvrgnuta dejstvu samo determinističke sile, tj. $f_2(t) = 0$ i $f_{o2} \neq 0$. Tada se relacija (5.58) svodi na

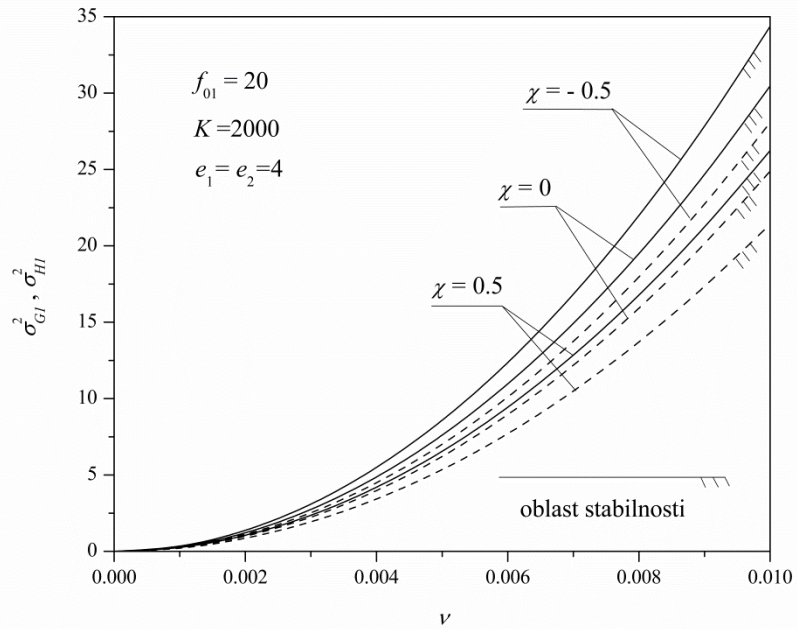
$$\zeta_n = \sqrt{\frac{4v^4 \alpha_n^4 (e_{1n} + K) + (e_{2n} + K) F_{1n}^2(t) + \sqrt{[4v^4 \alpha_n^4 (e_{1n} + K) - (e_{2n} + K) F_{1n}^2(t)]^2 + 16v^4 \alpha_n^4 K^2 F_{1n}^2(t)}}{2[e_{1n} e_{2n} + K(e_{1n} + e_{2n})]}} - 2v\alpha_n^4. \quad (5.109)$$

Stohastička komponenta koja dejstvuje na gornju gredu ima nulto matematičko očekivanje i varijanse σ_{G1}^2 i σ_{H1}^2 , pri čemu se indeks G odnosi na Gauss-ov, a indeks H na harmonijski proces. Granice skoro sigurne asimptotske stabilnosti Gauss-ovog procesa su predstavljene punom, a granice harmonijskog procesa isprekidanom linijom. Na Sl. 5.2, 5.3 i 5.4 oblasti stabilnosti sistema viskoelastičnih dvostrukih greda prikazane su na dijagramima gde je na apscisi vreme retardacije v , a na ordinati su varijanse stohastičkog procesa.

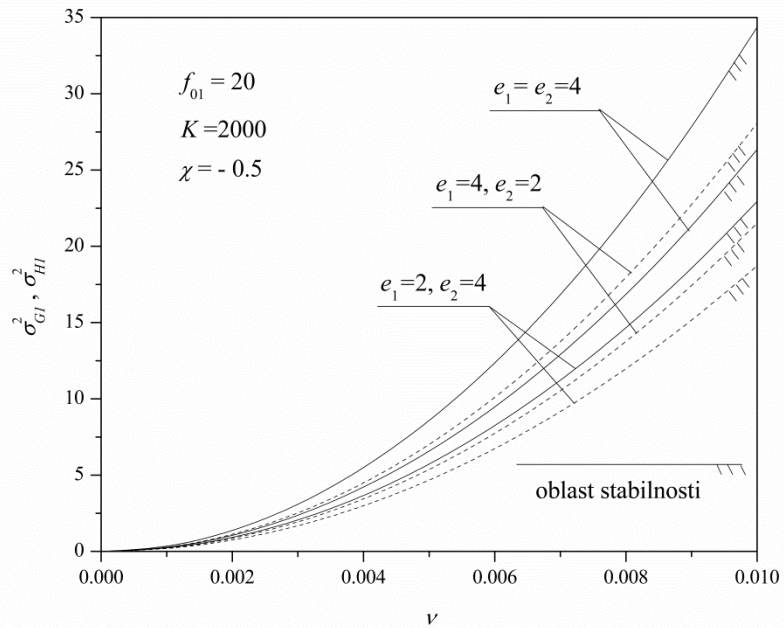
Na Sl. 5.2 prikazane su oblasti skoro sigurne stabilnosti u funkciji odnosa veličina determinističkih komponenti aksijalnih opterećenja greda $\chi = f_{o2} / f_{o1}$. Znak minus na dijagramu ukazuje da jedna od sila, u ovom slučaju ona koja dejstvuje na donju gredu, ima zatezni karakter. Pri tome je uzeto da su redukovane krutosti nosača jednake, a komponenta pritisne sile na gornjoj gredi je konstantna. Može se zaključiti da zatezna sila f_{o2} , povećava oblasti stabilnosti, ali to povećanje nije srazmerno smanjenju oblasti stabilnosti kada sila f_{o2} ima pritisni karakter.

Na Sl. 5.3 dati su dijagrami stabilnosti u funkciji redukovanih krutosti greda e_1 i e_2 . Sračunavanja su izvršena za slučaj kada je donja greda izložena aksijalnoj pritisnoj sili

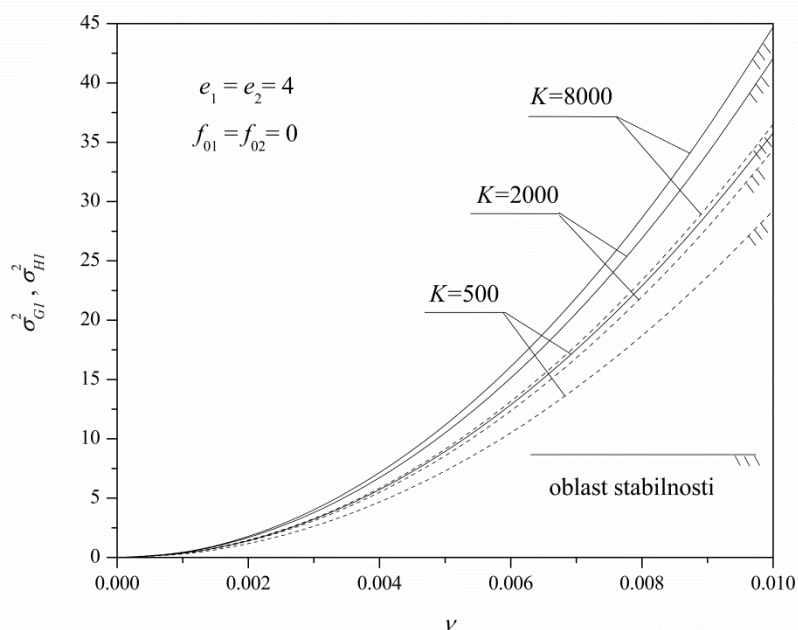
konstantnog intenziteta. Može se uočiti da se sa smanjenjem savojnih krutosti nosača smanjuju oblasti stabilnosti. To smanjenje je izraženije kada se smanjuje savojna krutost nosača koji je podvrgnut dejstvu stohastičkog poremećaja.



Slika 5.2 Oblasti stabilnosti za Gauss-ov i harmonijski proces u funkciji odnosa determinističkih opterećenja



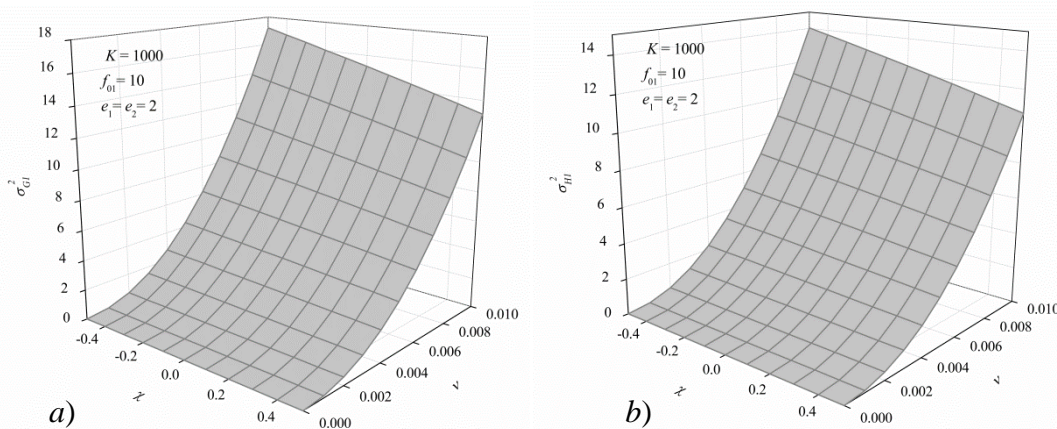
Slika 5.3 Oblasti stabilnosti za Gauss-ov i harmonijski proces u funkciji redukovane krutosti greda



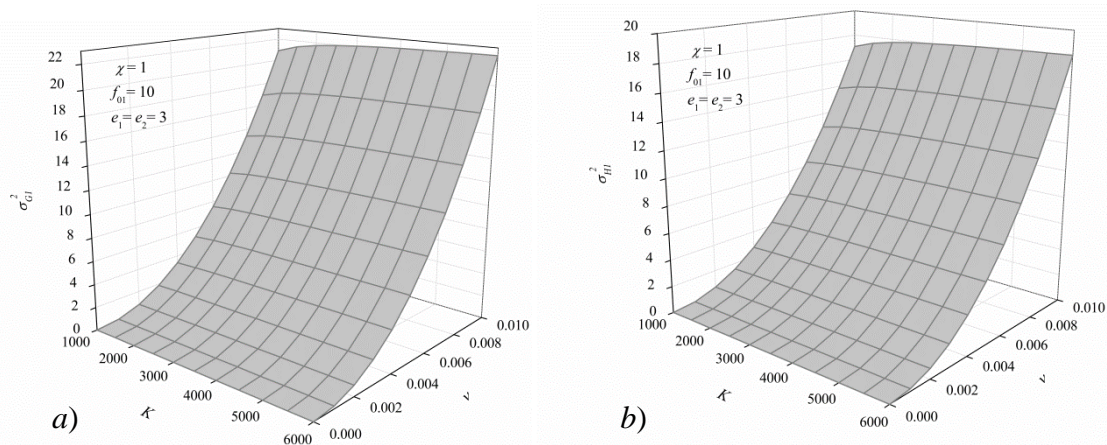
Slika 5.4 Oblasti stabilnosti za Gauss-ov i harmonijski proces u funkciji redukovane krutosti Winkler-ovog sloja

Na Sl. 5.4 dati su dijagrami stabilnosti u funkciji redukovane krutosti Winkler-ovog sloja K . Sračunavanja su izvršena za slučaj kada su determinističke komponente aksijalnih sila jednake nuli. Može se uočiti da se sa povećanjem krutosti Winkler-ovog sloja, uvećavaju oblasti stabilnosti. Povećanje oblasti stabilnosti je mnogo izraženije kada je krutost sloja manja, a sa povećanjem krutosti sloja uvećanje oblasti stabilnosti je znatno manje.

Prostorni prikaz uticaja odnosa determinističkog opterećenja i krutosti Winkler-ovog elastičnog sloja na oblasti stabilnosti viskoelastičnih dvostrukih greda dat je na Sl. 5.5 i 5.6.



Slika 5.5 Oblasti stabilnosti za a) Gauss-ov i b) harmonijski proces u funkciji odnosa determinističkih opterećenja

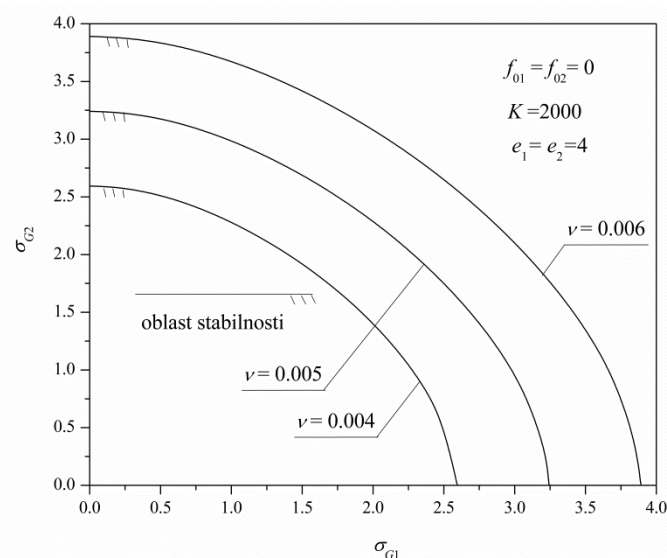


Slika 5.6 Oblasti stabilnosti za a) Gauss-ov i b) harmonijski proces u funkciji redukovane krutosti Winkler-ovog sloja

Napomenimo da je u cilju poređenja Gauss-ovog i harmonijskog procesa uzeto da je varijansa harmonijskog procesa $\sigma_{H1}^2 = H^2 / 2$, kako je to prikazano u poglavlju 4.5, relacija (4.34).

Kada su obe grede opterećene stohastičkim opterećenjem, smatraćemo da procesi $f_1(t)$ i $f_2(t)$ nisu u korelaciji ($r=0$) i da imaju normalnu raspodelu sa nultim matematičkim očekivanjem i disperzijama σ_{G1} i σ_{G2} , redom.

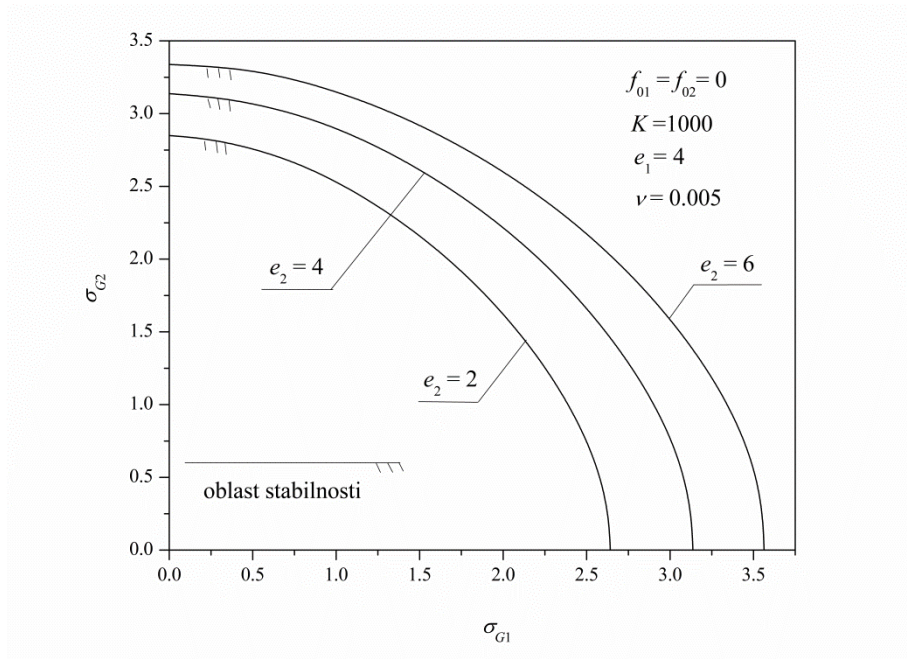
Oblasti stabilnosti su prikazane u ravni disperzija σ_{G1} i σ_{G2} i date su u funkciji vremena retardacije, redukovane krutosti greda i krutosti Winkler-ovog sloja (Sl. 5.7, 5.8 i 5.9). Pri ovome je uzeto da su determinističke komponente pritishnih sila jednake nuli, $f_{01} = f_{02} = 0$.



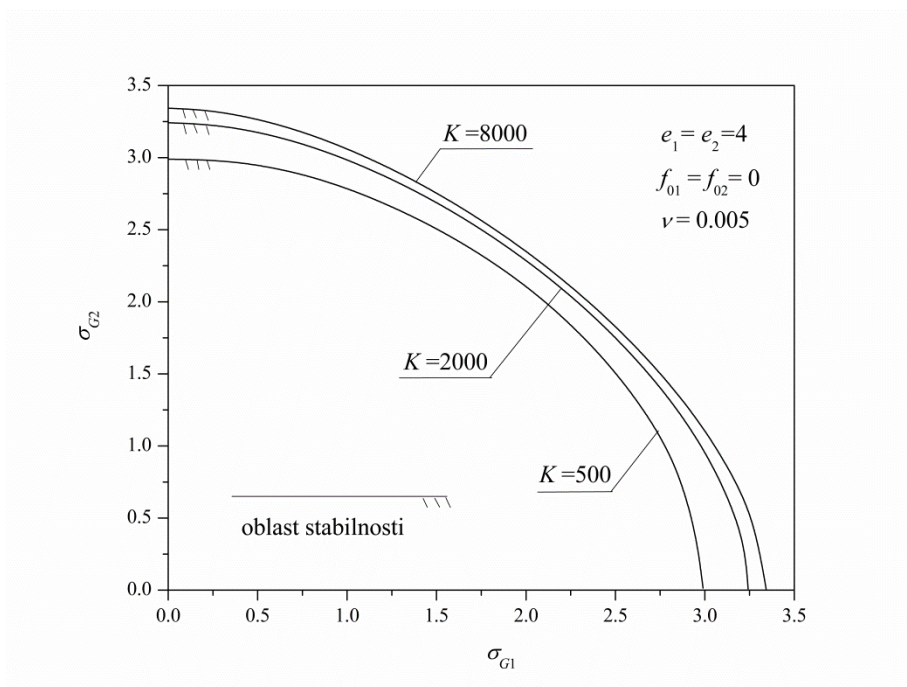
Slika 5.7 Oblasti stabilnosti za sistem dvostrukih greda pod uticajem normalno raspodeljenog opterećenja u funkciji vremena retardacije

Na osnovu dijagrama sa Sl. 5.7 i 5.8 može se zaključiti da porast vremena retardacije i krutosti greda vodi do značajnog porasta oblasti stabilnosti.

Kao što je pomenuto, porast krutosti Winkler-ovog sloja izaziva ograničeno povećanje oblasti stabilnosti što se jasno uočava na osnovu granica stabilnosti prikazanih na Sl. 5.9.



Slika 5.8 Oblasti stabilnosti za sistem dvostrukih greda pod uticajem normalno raspodeljenog opterećenja u funkciji redukovanih krutosti greda



Slika 5.9 Oblasti stabilnosti za sistem dvostrukih greda pod uticajem normalno raspodeljenog opterećenja u funkciji krutosti Winkler-ovog sloja

5.4.3 Širokopojasna pobuda

Na osnovu relacija (5.97) mogu se dobiti oblasti skoro sigurne stabilnosti kada su procesi širokopojasni sa poznatim spektralnim gustinama. Kada su slučajni procesi nekorelirani Gauss-ovi beli šumovi tada se poremećaji mogu prikazati u obliku

$$df_i(t) = \sigma_{iW} dW_i(t), \quad i = 1, 2, \quad (5.110)$$

sa konstantnom spektralnom gustinom $S_{iW}(\omega) = \sigma_{iW}^2$, gde je $W_i(t)$ jedinični Wiener-ov proces.

Za realni šum ili Ornstein-Uhlenbeck-ov proces poremećaji su opisani Itô diferencijalnim jednačinama

$$df_i(t) = -\alpha_i f_i(t) dt + \sigma_{iR} dW_i(t), \quad i = 1, 2, \quad (5.111)$$

sa spektralnom gustinom

$$S_{iR}(\omega) = \frac{\sigma_{iR}^2}{\alpha_i^2 + \omega^2}. \quad (5.112)$$

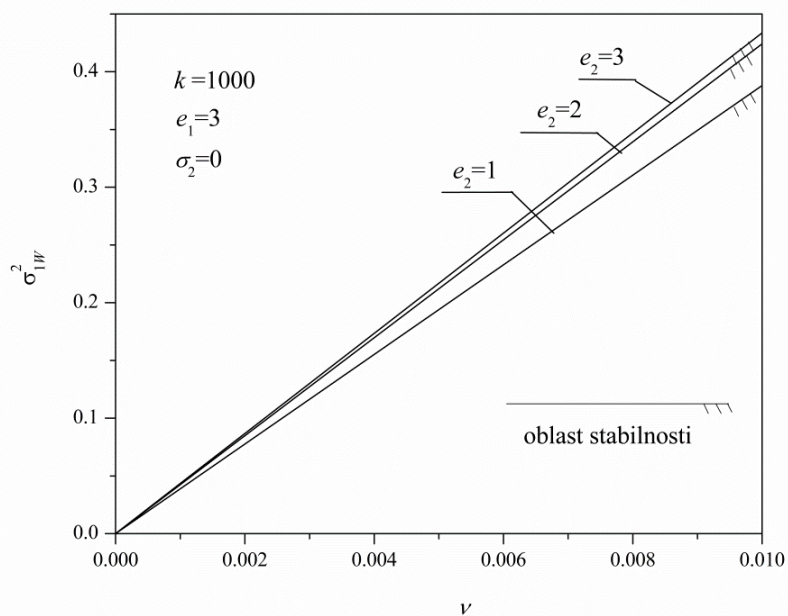
Proces ograničenog šuma definiše se sledećim izrazom

$$f_i(t) = \cos Z_i(t), \quad dZ_i(t) = \nu_i dt + \sigma_{iB} dW_i(t), \quad i = 1, 2, \quad (5.113)$$

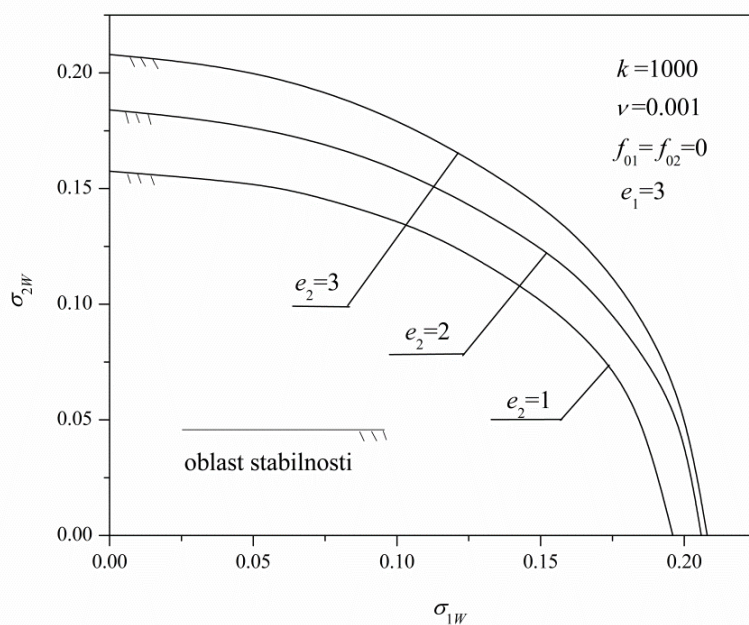
dok je spektralna gustina procesa

$$S(\omega) = \frac{\sigma^2 \left(\omega^2 + \nu^2 + \frac{1}{4} \sigma^4 \right)}{2 \left[\left(\omega - \nu \right)^2 + \frac{1}{4} \sigma^4 \right] \left[\left(\omega + \nu \right)^2 + \frac{1}{4} \sigma^4 \right]}. \quad (5.114)$$

Na Sl. 5.10 i 5.11 prikazane su oblasti skoro sigurne stabilnosti sistema viskoelastičnih dvostrukih greda u funkciji redukovanih krutosti greda za slučaj kada su opterećenja slučajni procesi tipa belog šuma. Kada je opterećena samo gornja greda, na Sl. 5.10 date su oblasti stabilnosti u zavisnosti od intenziteta belog šuma i vremena retardacije. U slučaju kada su obe grede podvrgnute dejstvu aksijalnih stohastičkih opterećenja oblasti stabilnosti su prikazane na Sl. 5.11. Može se zapaziti da se oblasti stabilnosti povećavaju kada redukovana krutost donje grede e_2 raste.

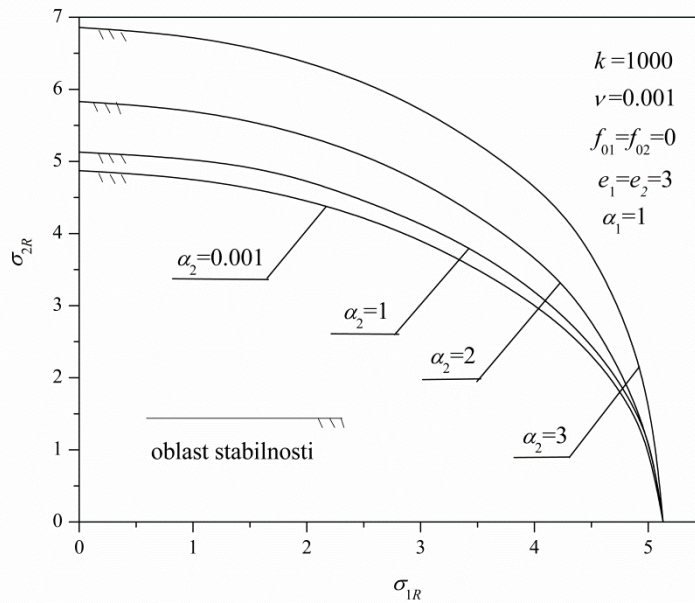


Slika 5.10 Oblasti stabilnosti sistema dvostrukih greda u funkciji redukovane krutosti donje grede kada je gornja grede izložena dejstvu slučajne pritisne sile tipa belog šuma

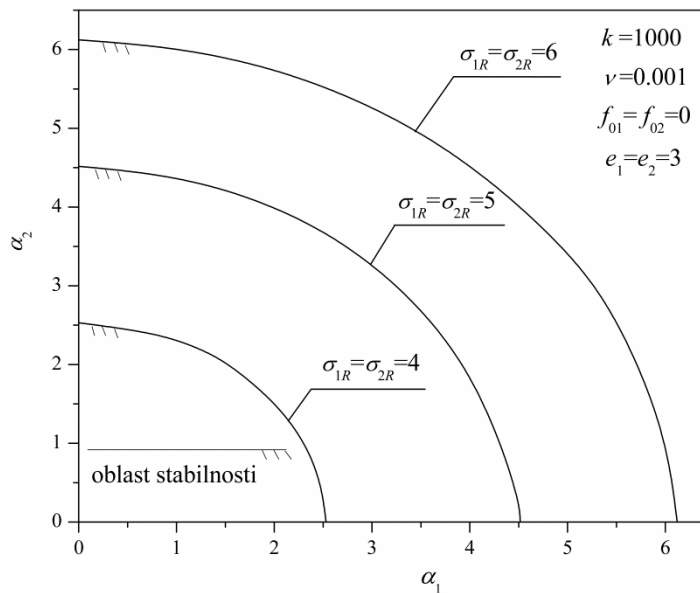


Slika 5.11 Oblasti stabilnosti sistema dvostrukih greda u funkciji redukovane krutosti donje grede kada su obe grede izložene dejstvu slučajne pritisne sile tipa belog šuma

U slučaju kada su grede izložene dejstvu pritisnih sila tipa realnog šuma, oblasti stabilnosti su određene parametrima σ_{1R} , σ_{2R} , α_1 , i α_2 .



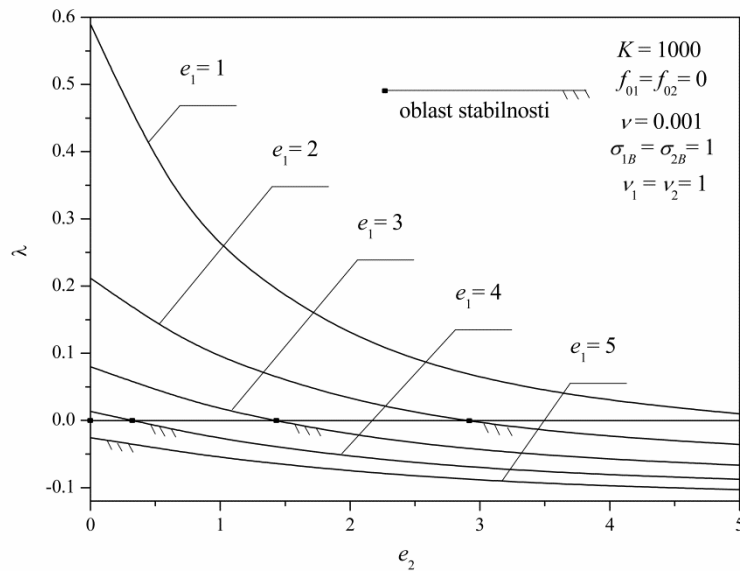
Slika 5.12 Oblasti sttabilnosti sistema dvostrukih greda u funkciji parametra α_2 kada su obe grede izložene dejstvu slučajne pritisne sile tipa realnog šuma



Slika 5.13 Oblasti stabilnosti sistema dvostrukih greda u funkciji parametara σ_{1R}, σ_{2R} , kada su obe grede izložene dejstvu slučajne pritisne sile tipa realnog šuma

Na Sl. 5.12 oblasti stabilnosti su date u ravni σ_{1R}, σ_{2R} u funkciji parametra α_2 dok je parametar α_1 fiksiran. Oblasti stabilnosti rastu kada raste parametar α_2 , a sve granične krive se sažimaju u zajedničku tačku na σ_{1R} osi. U ravni α_1, α_2 na Sl. 5.13, oblasti stabilnosti su date u funkciji intenziteta pritisnih sila tipa realnog šuma.

Za proces ograničenog šuma oblasti stabilnosti prikazane su u ravni eksponenta Ljapunova i redukovane krutosti donje grede. Oblasti stabilnosti nalaze se u zoni gde je eksponent Ljapunova negativan. Sa Sl. 5.14 može se zaključiti da porast redukovanih krutosti greda ima veoma značajan uticaj na povećanje stabilnosti sistema.



Slika 5.14 Oblasti stabilnosti sistema dvostrukih greda u funkciji redukovane krutosti e_1 kada su obe grede izložene ograničenom šumu

Deo rezultata ovog poglavlja objavljen je u radu [61].

6. DINAMIČKA STABILNOST NANOSTRUKTURA

6.1 Uvodne napomene

Jednostavan model jednodimenzionalne strukture načinjene od nanomaterijala, čije su dimenzije reda nanometra formuliše se kao nanogreda. U novije vreme, nanostrukturne komponente se koriste za nano elektromehaničke i mikro elektromehaničke sisteme. Brojni autori istraživali su dinamičke probleme nanogreda koji su zasnovani na različitim teorijama greda (Euler-Bernoulli-jeva, Timošenkova, Reddy-jeva teorija, itd.).

Nelokalna teorija kontinuma prvi put je primenjena u nanotehnologiji od strane Peddieson-a i dr. [44], gde su analizirane statičke deformacije linijskih struktura na osnovu Eringen-ove [42] teorije. Lu i dr. [62] su koristili Euler-Bernoulli-jevu i Timošenkovu teoriju greda u cilju proučavanja oscilatornih karakteristika jednozidnih i dvozidnih nanocevi. Reddy [46] je koristio različite nelokalne teorije greda radi određivanja analitičkih rešenja za savijanje, oscilovanje i izvijanje greda. Aranda-Ruiz i dr. [63] su odredili prirodne frekvencije savojnih oscilacija nanokonzole sa linearno promenljivim poprečnim presekom. Nelokalni viskoelastični konstitutivni model sa spoljašnjim viskoznom prigušenjem koje zavisi od brzine, primenom metode prenosne funkcije, proučavali su Lei i dr. [47] radi analize dinamičkih karakteristika Timošenkovih greda sa različitim graničnim uslovima.

Dinamičku nestabilnost Euler-Bernoulli-jevih i Timošenkovih nanogreda podvrgnutih dejstvu vremenski promenljivih stohastičkih opterećenja izučavao je Tylikowski [48],[49], dok je Potapov [50] razmatrao asimptotsku i skoro sigurnu stabilnost greda koristeći metodu maksimalnog eksponenta Ljapunova, pri čemu je uzimao u obzir uticaj nelokalne elastičnosti i prigušenja.

U ovom poglavlju disertacije biće ispitivana skoro sigurna stabilnost viskoelastične nanogrede u funkciji vremena retardacije, varijanse procesa stohastičke pritisne sile, geometrijskog parametra, koeficijenta skaliranja i intenziteta determinističke komponente aksijalnog opterećenja. Suštinski doprinos ove analize se ogleda u jasnom formulisanju granica oblasti stabilnosti kada se uzima u obzir inercija rotacije poprečnog preseka

viskoelastične nanogrede. Sem procesa koji nemaju beli spektar, biće razmatrani slučajevi kada su poremećaji tipa belog, realnog i ograničenog šuma, a oblasti skoro sigurne stabilnosti su dobijene numeričkim određivanjem momenta eksponenta Ljapunova.

6.2 Nelokalne konstitutivne relacije

Eringenova nelokalna teorija [42] u integralnoj formulaciji pretpostavlja da napon u nekoj referentnoj tački \mathbf{X} zavisi od deformacije u svim tačkama \mathbf{X}' tela, koje se obuhvataju preko težinskog jezgra $\alpha(|\mathbf{X}'-\mathbf{X}|)$

$$t_{ij}(\mathbf{X}) = \int_V \alpha(|\mathbf{X}'-\mathbf{X}|) \sigma_{ij}(\mathbf{X}') dV, \quad (6.1)$$

gde su t_{ij} i σ_{ij} nelokalni i lokalni (klasični) tenzori napona. Eringen preporučuje težinsko jezgro u obliku Grinove funkcije linearnog diferencijalnog operatora \mathcal{L}

$$\mathcal{L}\alpha(|\mathbf{X}'-\mathbf{X}|) = \delta(|\mathbf{X}'-\mathbf{X}|) \quad (6.2)$$

gde je δ Dirakova funkcija. Primenom jednačine (6.2) na jednačinu (6.1), integralna forma nelokalnog tenzora napona se svodi na diferencijalni oblik

$$\mathcal{L}t_{ij} = \sigma_{ij}. \quad (6.3)$$

U Eringenovoj [42] nelokalnoj elastičnosti Helmholtz-ovog i bi-Helmholtz-ovog tipa, linearni operatori \mathcal{L} imaju oblik

$$\mathcal{L}_H = 1 - \bar{\mu}_0^2 \nabla^2, \quad \mathcal{L}_{bH} = (1 - \bar{\mu}_1^2 \nabla^2)(1 - \bar{\mu}_2^2 \nabla^2), \quad (6.4)$$

gde je ∇^2 Laplace-ov operator, a $\bar{\mu}_0$, $\bar{\mu}_1$ i $\bar{\mu}_2$ su nenegativni parametri nelokalnosti.

6.3 Viskoelastična nanogreda

6.3.1 Nelokalna Rayleigh-jeva teorija greda

Na Sl. 3.1 prikazana je uniformna greda dužine L koja je podvrgnuta dejstvu transverzalnog opterećenja po jedinici dužine (q_1 na gornjoj strani i q_2 na donjoj strani nosača), i aksijalnog pritiska H . Osa X se poklapa sa osom grede, a transverzalna opterećenja su paralelna sa Z -osom. Elementarni deo grede je takođe prikazan na slici, ali bez sila viskozno prigušenja.

Dinamičke jednačine elementa grede su

$$\rho A \frac{\partial^2 W}{\partial T^2} + c_1 \frac{\partial W}{\partial T} = \frac{\partial V}{\partial X} + q, \quad (6.5)$$

$$\rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} + c_2 \frac{\partial \psi}{\partial T} = V - \frac{\partial M}{\partial X} + H \frac{\partial W}{\partial X},$$

gde je $q = q_1 - q_2$, ρ gustina materijala grede, A površina poprečnog preseka, $W = W(X, T)$ pomeranje u pravcu Z -ose, ψ ugao obrtanja poprečnog preseka usled savijanja nosača, T vreme, V smicajna sila tokom savijanja, I aksijalni moment inercije poprečnog preseka za savijanje u jednoj ravni, M moment savijanja, a c_1 i c_2 su koeficijenti viskoznog prigušenja. Na osnovu Euler-Benoulli-jeve teorije greda je

$$\varepsilon_{xx} = -Z \frac{\partial^2 W}{\partial X^2}, \quad \psi = \frac{\partial W}{\partial X}, \quad (6.6)$$

gde je ε_{xx} poprečna dilatacija. Nelokalni napon za viskoelastični Voigt-Kelvin-ov materijal grede ima oblik

$$t_{xx} = E \varepsilon_{xx} + E \bar{\eta} \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial T}, \quad (6.7)$$

pri čemu je $\bar{\eta}$ vreme retardacije, a E je Young-ov modul elastičnosti.

Na osnovu jednačina (6.7) i (6.3) dobija se

$$\mathcal{L}M = -EI \left(\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \bar{\eta} \frac{\partial^3 W}{\partial X^2 \partial T} \right). \quad (6.8)$$

Eliminacijom veličina V i M iz jednačina (6.5) i (6.8) dobija se parcijalna diferencijalna jednačina po transverzalnem pomeranju W

$$\mathcal{L} \left[\rho A \frac{\partial^2 W}{\partial T^2} + c_1 \frac{\partial W}{\partial T} - c_2 \frac{\partial^3 W}{\partial X^2 \partial T} - \rho I \frac{\partial^4 W}{\partial X^2 \partial T^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial X^2} - q \right] + EI \left(\frac{\partial^4 W}{\partial X^4} + \bar{\eta} \frac{\partial^5 W}{\partial X^4 \partial T} \right) = 0. \quad (6.9)$$

6.3.2 Formulacija problema

Na osnovu izraza (6.9), zanemarivanjem spoljnog viskoznog prigušenja ($c_1 = c_2 = 0$), osnovna diferencijalna jednačina transverzalnih oscilacija nanogrede ima oblik

$$\mathcal{L} \left[\rho A \frac{\partial^2 W}{\partial T^2} - \rho I \frac{\partial^4 W}{\partial X^2 \partial T^2} + F(t) \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \right] + EI \frac{\partial^4 W}{\partial X^4} + EI \bar{\eta} \frac{\partial^5 W}{\partial X^4 \partial T} = 0. \quad (6.10)$$

Za slobodno oslonjene ivice, granični uslovi su

$$\left. \begin{array}{l} X = 0 \\ X = L \end{array} \right\} W = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} = 0. \quad (6.11)$$

Uvođenjem sledećih parametara

$$\begin{aligned} T = k_t t, \quad W = Lw, \quad X = Lx, \quad k_t = L^2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}}, \\ 2\eta = \frac{\bar{\eta}}{k_t}, \quad f_o + f(t) = \frac{F(t)}{\rho A L^2}, \quad r^2 = \frac{I}{A L^2}, \end{aligned} \quad (6.12)$$

može se diferencijalna jednačina (6.10) svesti na bezdimenzioni oblik, gde je η redukovano vreme retardacije, f_o i $f(t)$ su redukovana konstantna i stohastička komponenta aksijalne sile.

Prema tome, jednačina (6.10) ima oblik

$$\mathcal{L} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - r^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + (f_o + f(t)) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\eta \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} = 0, \quad (6.13)$$

gde su operatori (6.4) za Helmholtz-ov i bi-Helmholtz-ov oblik jezgra

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_H = 1 - \mu_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad \text{ili} \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}_{bH} = \left(1 - \mu_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(1 - \mu_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right), \quad \mu_i = \frac{e_i a}{L}, \quad i = 1, 2. \quad (6.14)$$

Granični uslovi (6.11) sada imaju oblik

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array} \right\} W = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0. \quad (6.15)$$

Naš cilj je ispitivanje skoro sigurne asimptotske stabilnosti viskoelastične Rayleigh-jeve nanogrede podvrgnute dejstvu aksijalnog, stohastičkog, promenljivog opterećenja. U cilju ocene poremećenog rešenja, potrebno je uvesti meru odstupanja $\|\cdot\|$ rešenja jednačine (6.13) sa netrivialnim početnim uslovima od trivialnog rešenja. Da bi ravnotežno stanje jednačine (6.13) bilo skoro sigurno stohastički stabilno potrebno je da bude zadovoljen izraz (5.8), tj.

$$P \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{w}(\cdot, t)\| \rightarrow 0 \right\} = 1. \quad (6.16)$$

6.3.3 Analiza stabilnosti sistema pod dejstvom procesa koji ne sadrže beli spektar

Problem koji je definisan u poglavlju 6.3.1 rešavaćemo primenom metode funkcionala Ljapunova. U tom cilju konstruisaćemo funkcional primenom metode Parks–Pritchard-a [36]. Napišimo jednačinu (6.13) u formalnom obliku $\mathbf{L}w = 0$, i uvedimo linearni operator \mathbf{N} koji predstavlja formalni izvod operatora \mathbf{L} po $\partial/\partial t$

$$\mathbf{N}w = 2\mathcal{L}\left(\frac{\partial w}{\partial t} - r^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^4 \partial t}\right) + 2\eta \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}. \quad (6.17)$$

Integracijom skalarnog proizvoda vektora $(\mathbf{L}w \circ \mathbf{N}w)$ na pravougaoniku $C = [x: 0 \leq x \leq 1] \times [0, t]$ imajući u vidu jednačinu (6.13), jasno je da važi

$$\int_0^1 \int_0^t (\mathbf{L}w \circ \mathbf{N}w) dt dx = 0. \quad (6.18)$$

U razvijenom obliku relacija (6.18) ima oblik

$$2 \int_0^1 \int_0^t \left\{ \mathcal{L} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - r^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + (f_o + f(t)) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\eta \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} \right\} \cdot \left[\mathcal{L} \left(\frac{\partial w}{\partial t} - r^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} \right) + \eta \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right] dt dx = 0. \quad (6.19)$$

Parcijalnom integracijom pojedinih članova jednačine (6.19) dobija se

$$\begin{aligned} I_1 &= 2 \int_0^1 \int_0^t \left[\mathcal{L} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - r^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} \right) + 2\eta \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} \right] \left[\mathcal{L} \left(\frac{\partial w}{\partial t} - r^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} \right) + \eta \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right] dt dx = \\ &= 2 \int_0^1 \int_0^t \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}w}{\partial t^2} - r^2 \frac{\partial^4 \mathcal{L}w}{\partial x^2 \partial t^2} + \eta \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} \right) \left(\frac{\partial \mathcal{L}w}{\partial t} - r^2 \frac{\partial^3 \mathcal{L}w}{\partial x^2 \partial t} + \eta \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) dt dx + \\ &\quad + 2 \int_0^1 \int_0^t \eta \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}w}{\partial t} - r^2 \frac{\partial^3 \mathcal{L}w}{\partial x^2 \partial t} + \eta \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) dt dx. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Nakon sračunavanja, sledi da je

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \left[\mathcal{L} \left(\frac{\partial w}{\partial t} - r^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} \right) + \eta \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right]^2 dx + \eta^2 \int_0^1 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right)^2 dx + \\ &\quad 2\eta \int_0^1 \int_0^t \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}w}{\partial t} - r^2 \frac{\partial^3 \mathcal{L}w}{\partial x^2 \partial t} \right) + \eta \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right] dt dx. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Integral koji sadrži konstantnu komponentu sile je

$$\begin{aligned}
I_2 &= 2f_o \int_0^1 \int_0^t \mathcal{L} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left[\mathcal{L} \left(\frac{\partial w}{\partial t} - r^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} \right) + \eta \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right] dt dx = \\
&= 2f_o \int_0^1 \int_0^t \frac{\partial^2 \mathcal{L} w}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \mathcal{L} w}{\partial t} - r^2 \frac{\partial^3 \mathcal{L} w}{\partial x^2 \partial t} \right) dt dx + 2f_o \eta \int_0^1 \int_0^t \left(\mathcal{L} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} dt dx.
\end{aligned} \tag{6.22}$$

Prvi član u relaciji (6.22) je

$$\begin{aligned}
I_{21} &= 2f_o \int_0^1 \int_0^t \frac{\partial^2 \mathcal{L} w}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \mathcal{L} w}{\partial t} - r^2 \frac{\partial^3 \mathcal{L} w}{\partial x^2 \partial t} \right) dt dx = \\
&= 2f_o \int_0^1 \int_0^t \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L} w}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L} w}{\partial t} \right) - \frac{\partial \mathcal{L} w}{\partial x} \frac{\partial^2 \mathcal{L} w}{\partial x \partial t} \right] dt dx - 2f_o r^2 \int_0^1 \int_0^t \frac{\partial^2 \mathcal{L} w}{\partial x^2} \frac{\partial^3 \mathcal{L} w}{\partial x^2 \partial t} dt dx = \\
&= 2f_o \int_0^1 \frac{\partial \mathcal{L} w}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L} w}{\partial t} \Big|_0^1 dt - 2f_o \int_0^1 \int_0^t \frac{\partial \mathcal{L} w}{\partial x} \frac{\partial^2 \mathcal{L} w}{\partial x \partial t} dt dx - 2f_o r^2 \int_0^1 \int_0^t \frac{\partial^2 \mathcal{L} w}{\partial x^2} \frac{\partial^3 \mathcal{L} w}{\partial x^2 \partial t} dt dx.
\end{aligned} \tag{6.23}$$

Imajući u vidu granične uslove (6.15) prvi član u (6.23) je jednak nuli, pa se konačno za izraz I_2 dobija

$$I_2 = -f_o \int_0^1 \left[\left(\mathcal{L} \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx + r^2 \left(\mathcal{L} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right)^2 \right] dx + 2f_o \eta \int_0^1 \int_0^t \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \left(\mathcal{L} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dt dx. \tag{6.24}$$

Za Helmholtz-ov tip jezgra je

$$\begin{aligned}
I_{3H} &= 2 \int_0^1 \int_0^t \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \left[\left(\mathcal{L}_H \frac{\partial w}{\partial t} - r^2 \mathcal{L}_H \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} \right) + \eta \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right] dt dx = \\
&= \int_0^1 \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \mu_0^2 \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right)^2 + r^2 \left[\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right)^2 + \mu_0^2 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right)^2 \right] \right\} dx + 2\eta \int_0^1 \int_0^t \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right)^2 dt dx,
\end{aligned} \tag{6.25}$$

dok je za bi-Helmholtz-ov tip jezgra

$$\begin{aligned}
I_{3bH} &= 2 \int_0^1 \int_0^t \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \left[\left(\mathcal{L}_{bH} \frac{\partial w}{\partial t} - r^2 \mathcal{L}_{bH} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} \right) + \eta \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right] dt dx = \\
&= \int_0^1 \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + (\mu_1^2 + \mu_2^2) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right)^2 + \mu_1^2 \mu_2^2 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right)^2 + \right. \\
&\quad \left. + r^2 \left[\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right)^2 + (\mu_1^2 + \mu_2^2) \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right)^2 + \mu_1^2 \mu_2^2 \left(\frac{\partial^5 w}{\partial x^5} \right)^2 \right] \right\} dx + 2\eta \int_0^1 \int_0^t \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right)^2 dt dx,
\end{aligned} \tag{6.26}$$

dok integrali koji sadrže stohastičke komponente ostaju neizmenjeni.

Razdvajanjem članova u (6.19) kod kojih je integracija vršena po prostornoj promenljivoj i ostalih članova u kojima se integracija sprovodi po prostornoj promenljivoj i vremenu, relacija (6.19) se može napisati kao suma dva integrala

$$\mathbf{V} \Big|_0^t - \int_0^t \frac{d\mathbf{V}}{dt} dt = 0, \quad (6.27)$$

pri čemu je

$$\mathbf{V} = \int_0^1 \left[\left(\mathcal{L} \frac{\partial w}{\partial t} - r^2 \mathcal{L} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} + \eta \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right)^2 + \eta^2 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right)^2 - f_0 \left(\frac{\partial \mathcal{L} w}{\partial x} \right)^2 - f_0 r^2 \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L} w}{\partial x^2} \right)^2 \right] dx + \mathbf{V}_e. \quad (6.28)$$

Za Helmholtz-ov i bi-Helmholtz-ov operator, funkcionali \mathbf{V}_e su

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{eH} &= \int_0^1 \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \mu_0^2 \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right)^2 + r^2 \left[\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right)^2 + \mu_0^2 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right)^2 \right] \right\} dx, \\ \mathbf{V}_{eBH} &= \int_0^1 \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + (\mu_1^2 + \mu_2^2) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right)^2 + \mu_1^2 \mu_2^2 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + r^2 \left[\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right)^2 + (\mu_1^2 + \mu_2^2) \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right)^2 + \mu_1^2 \mu_2^2 \left(\frac{\partial^5 w}{\partial x^5} \right)^2 \right] \right\} dx. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Izvod po vremenu funkcionala (6.28) je

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{V}}{dt} &= -2 \int_0^1 \left[\eta \left(\frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} \right) \left(\mathcal{L} \frac{\partial w}{\partial t} - r^2 \mathcal{L} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} \right) + f_0 \eta \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \mathcal{L} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \right. \\ &\quad \left. + f(t) \mathcal{L} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(\mathcal{L} \frac{\partial w}{\partial t} - r^2 \mathcal{L} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} + \eta \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) + \eta \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right)^2 \right] dx. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Kao mera rešenja uzima se norma u obliku $\|\mathbf{w}\| = \sqrt{\mathbf{V}}$, pa funkcional \mathbf{V} mora biti pozitivno definitan. To će biti ispunjeno ako je

$$-f_0 \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L} w}{\partial x} \right)^2 + r^2 \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L} w}{\partial x^2} \right)^2 \right] dx + \mathbf{V}_e \geq 0. \quad (6.31)$$

Rešenje pretpostavljamo tako da zadovoljava granične uslove (6.15) u sledećem obliku

$$w(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} T_m(t) \sin \alpha_m x, \quad (6.32)$$

gde je $\alpha_m = m\pi$, pa se relacija (6.31) posle integracije svodi na

$$f_o \leq \frac{\alpha_m^2}{1 + \mu_o^2 \alpha_m^2}, \quad f_o \leq \frac{\alpha_m^2}{(1 + \mu_1^2 \alpha_m^2)(1 + \mu_2^2 \alpha_m^2)}. \quad (6.33)$$

Prva relacija u (6.33) se odnosi na Helmholtz-ov, a druga na bi-Helmholtz-ov tip jezgra.

Možemo zaključiti da je funkcional Ljapunova pozitivno definitan ako je deterministička komponenta aksijalnog opterećenja manja od kritične sile pri statičkom savijanju koju je odredio Reddy [46], a koja je ekvivalentna relaciji (6.33) za slučaj Helmholtz-ovog i bi-Helmholtz-ovog tipa jezgra.

Definišimo skalarnu funkciju $\lambda(t)$ u obliku

$$\frac{1}{\mathbf{V}} \frac{d\mathbf{V}}{dt} \leq \lambda(t). \quad (6.34)$$

Kako je tačka maksimuma partikularni slučaj stacionarne tačke, možemo napisati

$$\delta(\dot{\mathbf{V}} - \lambda \mathbf{V}) = 0. \quad (6.35)$$

Korišćenjem Euler-ovih varijacionih jednačina, dobija se

$$\begin{aligned} & \lambda \left(\mathcal{L}^{(2)} v - r^2 \mathcal{L}^{(2)} v'' + \eta \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \right) + 2\eta \left(\mathcal{L} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - r^2 \mathcal{L} \frac{\partial^6 v}{\partial x^6} \right) + \\ & + \lambda \eta \left(\mathcal{L} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - r^2 \mathcal{L} \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} \right) + f(t) \left(\mathcal{L}^{(2)} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - r^2 \mathcal{L}^{(2)} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) = 0, \quad (6.36) \\ & \lambda \eta \left(\mathcal{L} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - r^2 \mathcal{L} \frac{\partial^6 v}{\partial x^6} \right) + f(t) \left(\mathcal{L}^{(2)} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - r^2 \mathcal{L}^{(2)} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \right) + \\ & + \lambda \left[2\eta^2 \frac{\partial^8 w}{\partial x^8} + f_o \mathcal{L}^{(2)} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - f_o r^2 \mathcal{L}^{(2)} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \mathcal{L} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - r^2 \mathcal{L} \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} \right] + \\ & + 2f_o \eta \mathcal{L} \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} + 2f(t) \eta \mathcal{L} \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} + 2\eta \frac{\partial^8 w}{\partial x^8} = 0, \end{aligned}$$

gde je $v = \partial w / \partial t$.

S obzirom na granične uslove (6.15), i rešenje (6.32), iz relacija (6.36) se dobija algebarska jednačina

$$A_m \lambda_m^2 + 2B_m \lambda_m + C_m = 0, \quad (6.37)$$

gde je

$$\begin{aligned} A_m &= \mathcal{L}_m r_m^2 (\eta^2 \alpha_m^8 + F_0 \mathcal{L}_m r_m^2), \quad B_m = 2\eta \alpha_m^4 (\eta^2 \alpha_m^8 + F_0 \mathcal{L}_m r_m^2), \\ C_m &= 4\eta^2 \alpha_m^8 (F_0 - f(t) \alpha_m^2 \mathcal{L}_m) - \mathcal{L}_m r_m^2 f^2(t) \alpha_m^4 \mathcal{L}_m^2, \\ r_m^2 &= 1 + r^2 \alpha_m^4, \quad F_0 = \alpha_m^4 - f_0 \alpha_m^2 \mathcal{L}_m, \end{aligned} \quad (6.38)$$

a za Helmholtz-ov i bi-Helmholtz-ov tip jezgra je

$$\mathcal{L}_{mH} = 1 + \mu_0^2 \alpha_m^2, \quad \mathcal{L}_{mbH} = (1 + \mu_1^2 \alpha_m^2)(1 + \mu_2^2 \alpha_m^2). \quad (6.39)$$

Rešavanjem jednačine (6.37), dobija se nepoznata funkcija λ_m u obliku

$$\lambda_m = \frac{1}{r_m^2 \mathcal{L}_m} \left[-2\eta \alpha_m^4 + \frac{|2\eta^2 \alpha_m^8 + \alpha_m^2 r_m^2 \mathcal{L}_m f(t)|}{\sqrt{\eta^2 \alpha_m^8 + r_m^2 \mathcal{L}_m (\alpha_m^4 - f_0 \alpha_m^2 \mathcal{L}_m)}} \right], \quad (6.40)$$

gde je ispred korena uzet znak plus kako bi se dobile maksimalne oblasti stabilnosti.

Rešavanjem diferencijalne nejednačine (6.34), možemo izvršiti ocenu funkcionala \mathbf{V}

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} \leq \left(\max_m \lambda_m \right) \mathbf{V}, \quad (6.41)$$

pa se nakon integracije relacije (6.41) dobija

$$\mathbf{V} \geq \mathbf{V}_0 \exp \left[\frac{1}{t} \int_0^t \max_m \lambda_m(\tau) d\tau \right] t. \quad (6.42)$$

Kada je proces $f(t)$ ergodički i stacionaran, može se zaključiti da je trivijalno rešenje jednačine (6.13) skoro sigurno asimptotski stabilno ako je

$$E \left\{ \max_m \lambda_m(t) \right\} < 0, \quad (6.43)$$

pri čemu $E\{\cdot\}$ predstavlja operator matematičkog očekivanja.

6.3.4 Analiza stabilnosti pod dejstvom procesa tipa belog šuma

Viskoelastična Rayleigh-jeva nanogreda je najpre analizirana za slučaj kada je aksijalno opterećenje proces tipa realnog šuma. Za analizu stabilnosti korišćena je numerička metoda određivanja momenta eksponenata Ljapunova. Verifikacija predložene simulacije

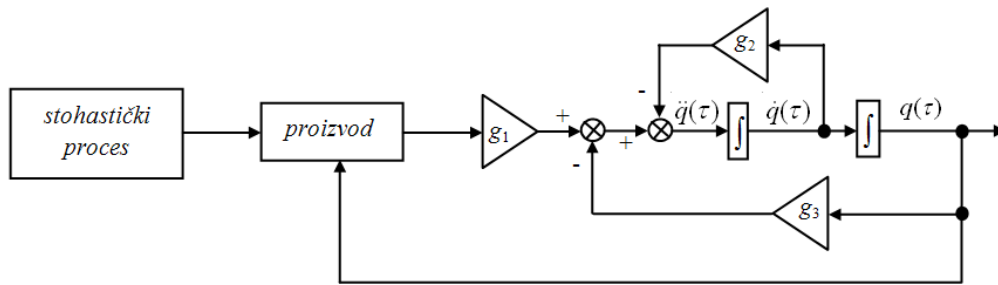
izvršena je na osnovu analitičkih rezultata dobijenih u radu Xie-a [14]. U ovoj referenci je analiziran moment eksponenata Ljapunova za dvodimenzionalni sistem opisan stohastičkom diferencijalnom jednačinom

$$\frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2} + 2\beta \frac{\partial q}{\partial \tau} + [\omega_0^2 - \varepsilon_0 \xi(\tau)] q(\tau) = 0, \quad (6.44)$$

pri čemu je stohastički proces realni šum opisan Itô diferencijalnom jednačinom

$$d\xi(\tau) = -\alpha_0 \xi(\tau) d\tau + \sigma_0 dW(\tau). \quad (6.45)$$

Prema diferencijalnoj jednačini (6.44) predložena je sledeća simulaciona šema



Slika 6.1 Blok-dijagram sistema opisanog jednačinom (6.44)

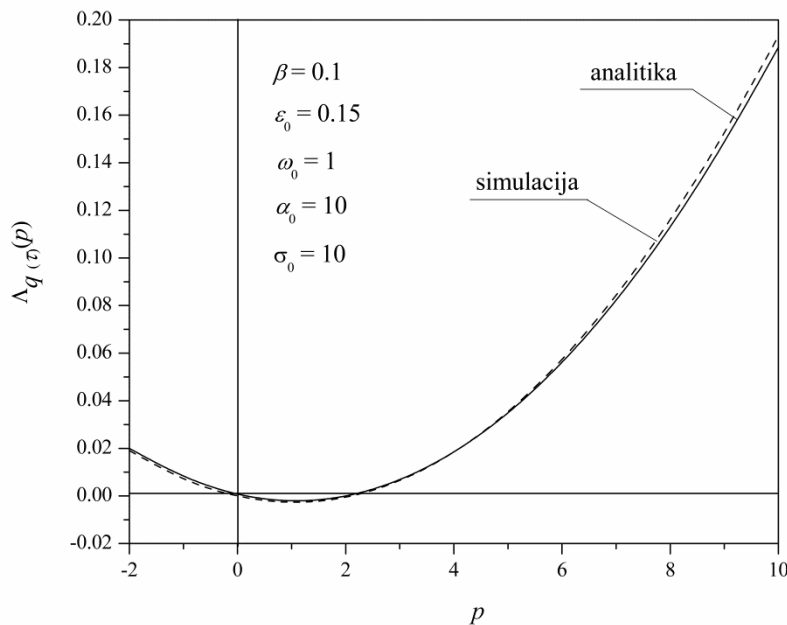
pri čemu je stohastički proces realnog šuma $\xi(\tau)$ ulazni, a rešenje q je izlazni signal simulacije. Pojačanja g_1 , g_2 i g_3 su redom ε_0 , 2β i ω_0^2 .

U cilju verifikacije analitičkih rezultata koji su dobijeni u ovom radu izvršena je simulacija blok dijagrama prikazanog na Sl. 6.1. Na osnovu rada Gillespie-ja [64], napravljen je programski kod za simulaciju procesa realnog šuma, prikazan u referenci [65], koji je u ovom primeru korišćen za simulaciju ulaznog signala. Primenjena je numerička metoda Runge-Kutta za rešavanje stohastičkih diferencijalnih jednačina. Na osnovu prikazane metode Monte Carlo simulacije koju su koristili Kozić i dr. u [20], broj simulacija je $N=2000$, a za početne uslove je uzeto $q(0) = 1$ i $\dot{q}(0) = 0$. Slično kao u analiziranom radu parametri sistema koji su korišćeni u ovom primeru su $\omega_0 = 1$, $\alpha_0 = 1$, $\sigma_0 = 1$, $\varepsilon_0 = 0.1$, $\beta = 1$.

Stabilnost p -tog momenta trivijalnog rešenja sistema (6.44), $E[\|\mathbf{q}(\tau)\|_E^p]$, određena je momentom eksponenta Ljapunova koji je definisan sledećim izrazom

$$\Lambda_{q(\tau)} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \log E[\|\mathbf{q}(\tau)\|_E^p], \quad (6.46)$$

gde je $E[\cdot]$ očekivana vrednost vektora $\mathbf{q}(\tau) = \{q(\tau), \dot{q}(\tau)\}^T$, a $\|\cdot\|_E$ predstavlja Euklidsku normu. Promenljive stanja sistema $q_1 = q(\tau)$ i $q_2 = \dot{q}(\tau)$ dobijene su iz simulacije, a moment eksponenta Ljapunova sračunat je na osnovu izraza (6.46). Analitički i numerički rezultati za posmatrani sistem prikazani su na Sl. 6.2.



Slika 6.2 Poređenje numeričkih i prethodno dobijenih analitičkih rezultata u radu [14]

Dobijeni rezultati u potpunosti potvrđuju opravdanost programskog koda koji je korišćen za simulaciju procesa realnog šuma. Ova simulacija je dalje korišćena u cilju određivanja momenata eksponenata Ljapunova za viskoelastičnu nanogredu kada na nju deluju procesi tipa realnog, belog i ograničenog šuma. Zamenom relacije (6.32) u diferencijalnu jednačinu (6.13), dobija se diskretizovana jednačina oblika

$$(1 + r^2 \alpha_m^2) \ddot{T}_n(t) + \frac{2\eta \alpha_m^4}{(1 + \mu_0^2 \alpha_m^2)} \dot{T}_n(t) + \alpha_m^2 \left[\frac{\alpha_m^2}{(1 + \mu_0^2 \alpha_m^2)} - (f_0 + f(t)) \right] T_n(t) = 0. \quad (6.47)$$

Sada se može primeniti simulaciona šema prikazana na Sl. 6.1 sa koeficijentima g_1 , g_2 i g_3

$$g_1 = \frac{\alpha_m^2}{1 + r^2 \alpha_m^2}, \quad g_2 = \frac{\alpha_m^4}{(1 + r^2 \alpha_m^2)(1 + \mu_0^2 \alpha_m^2)}, \quad g_3 = \frac{2\eta \alpha_m^4}{(1 + r^2 \alpha_m^2)(1 + \mu_0^2 \alpha_m^2)}. \quad (6.48)$$

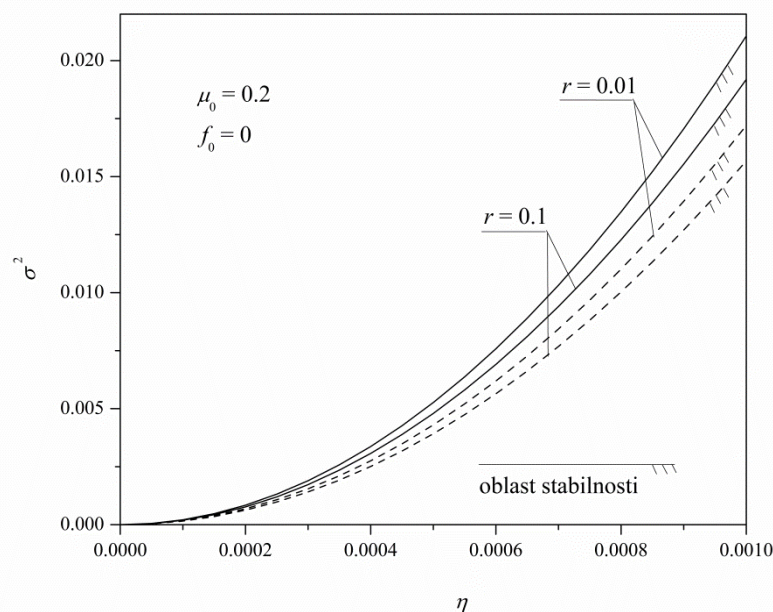
6.3.5 Numerički rezultati i diskusija

Na osnovu relacije (6.43) mogu se dobiti oblasti skoro sigurne stabilnosti viskoelastičnih nanogreda kada je uzeta u obzir inercija obrtanja preseka, u slučaju kada

stohastički proces ne sadrži beli spektar. Oblasti stabilnosti određene su za Gauss-ov i harmonijski proces sa uniformno raspodeljenom fazom u intervalu $[0, 2\pi]$. Pretpostavimo harmonijski proces u obliku $f_h(t) = A_h \cos(\omega t + \theta)$, gde je fazni ugao θ slučajna promenljiva, a A_h amplituda, tako da je varijansa $A_h^2/2$.

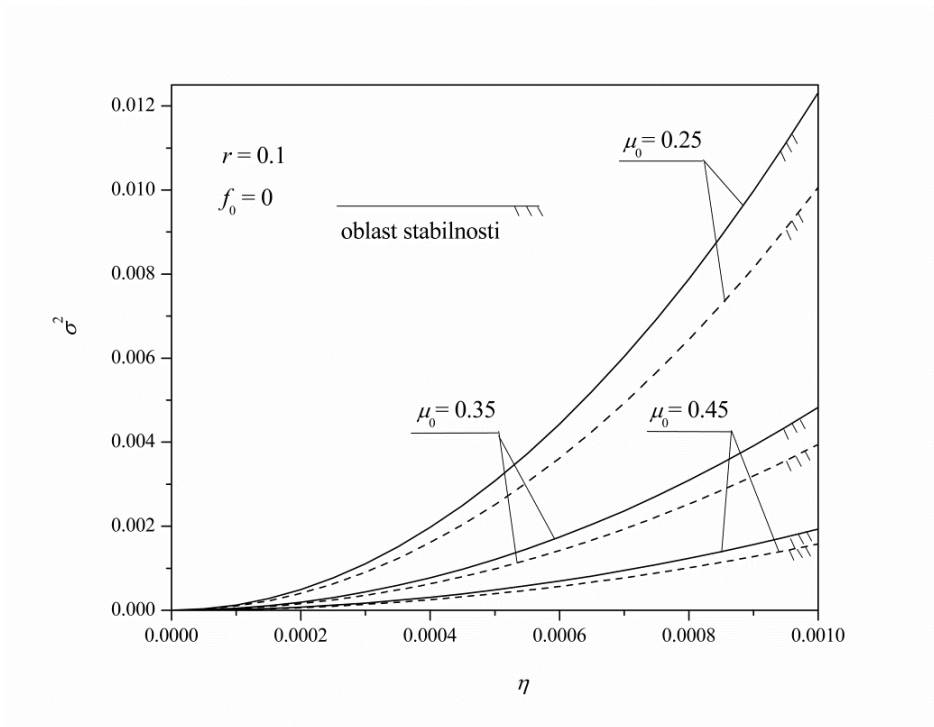
Granice skoro sigurne asimptotske stabilnosti za Gauss-ov proces prikazane su punom linijom, a za harmonijski proces isprekidanom linijom. Sračunavanja su izvršena korišćenjem Gauss-Christoffel-ovih kvadrature formula. Za Gauss-ov proces korišćeni su parametri Hermite-ovih polinoma, a za harmonijski proces koeficijenti Chebyshev-ljevih polinoma.

Na Sl. 6.3, 6.4 i 6.5 oblasti stabilnosti prikazane su u ravni varijanse slučajnog procesa i vremena retardacije materijala nanogrede. Sl. 6.3 ilustruje uticaj inercije obrtanja preseka na oblasti stabilnosti za oba procesa. U slučaju Gauss-ove pobude, zanemarivanje inercije obrtanja preseka prouzrokuje grešku od oko 9.8%, dok je za harmonijsku pobudu ova greška nešto manja i iznosi 9.26%. U svakom slučaju, kod nanogreda sa visokim vrednostima parametra r , inercija rotacije preseka se ne sme zanemariti.

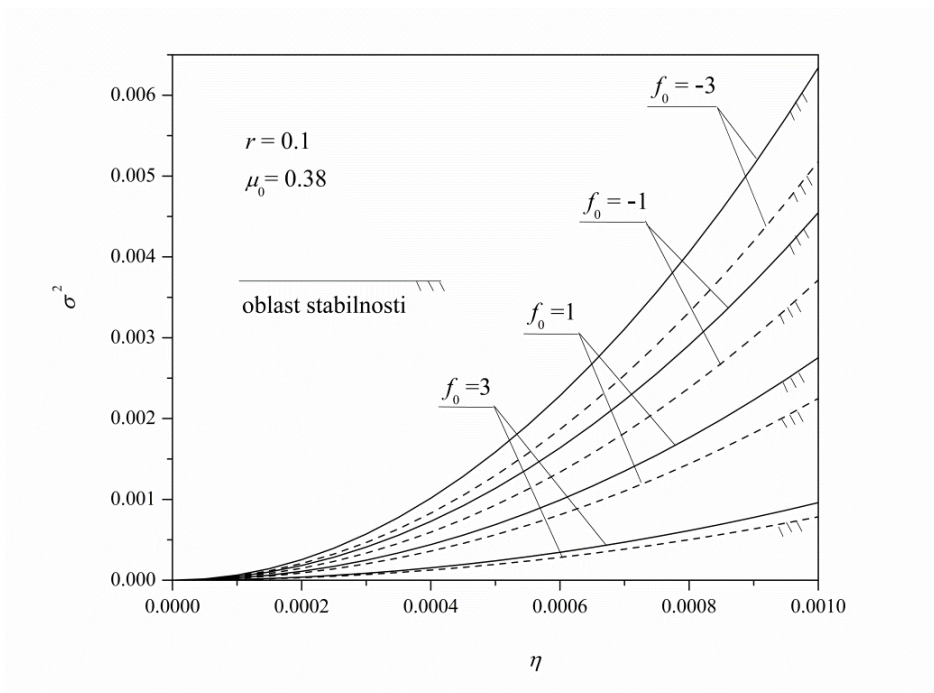


Slika 6.3 Oblasti stabilnosti za Gauss-ov i harmonijski proces u funkciji parametra r koji uzima u obzir uticaj inercije obrtanja poprečnog preseka

Na Sl. 6.4 oblasti stabilnosti su prikazane u funkciji parametra nanoskaliranja za Helmholtz-ov tip jezgra μ_o . Može se zaključiti da se oblasti stabilnosti povećavaju kada parameter skaliranja opada. Generalno govoreći, efekat nelokalnosti uvećava oblasti nestabilnosti nanogrede.

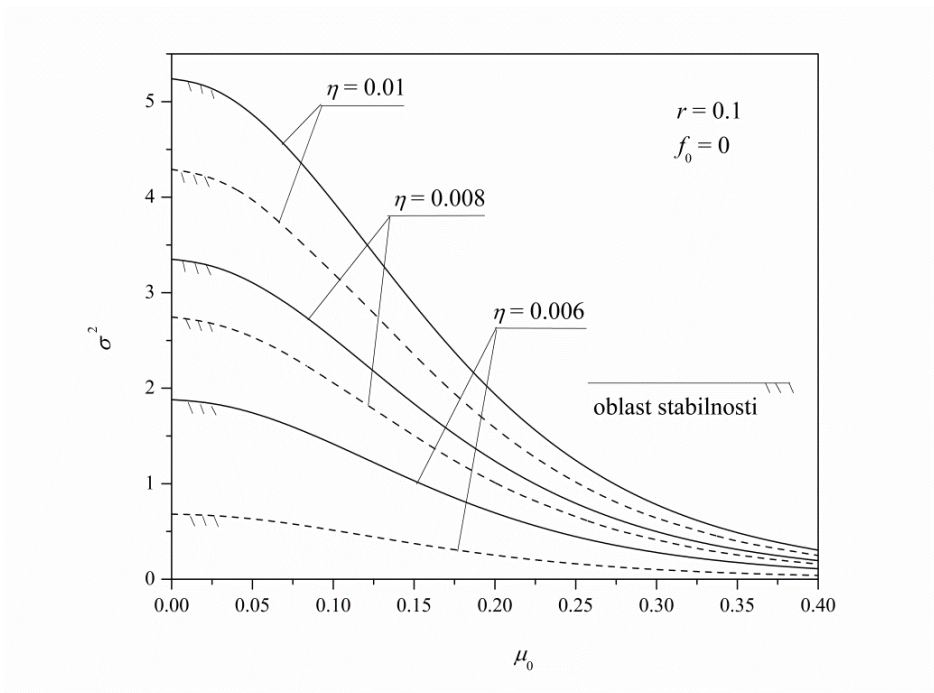


Slika 6.4 Oblasti stabilnosti za Gauss-ov i harmonijski proces u funkciji koeficijenta nanoskaliranja

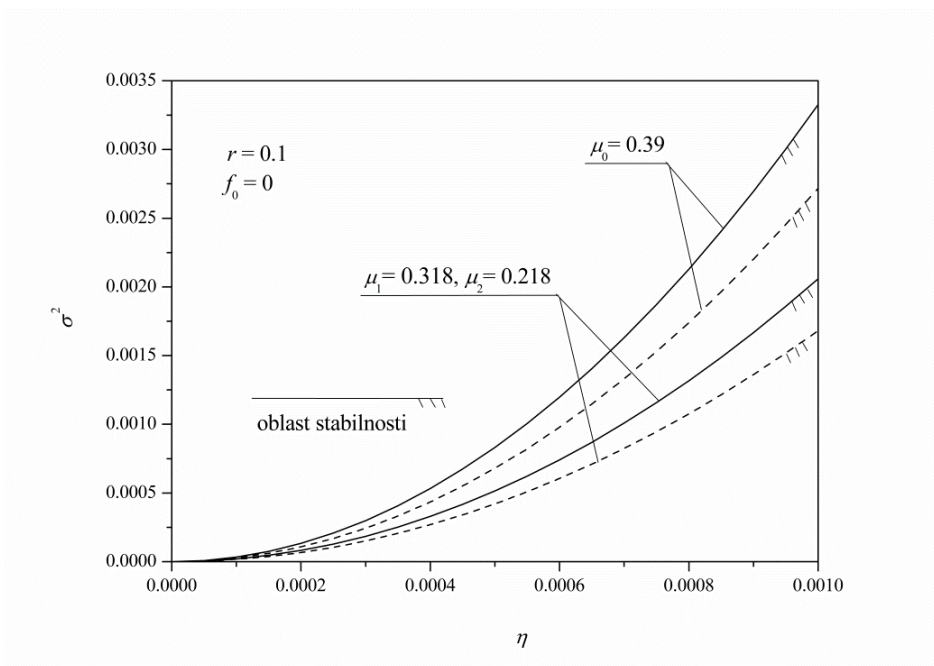


Slika 6.5 Oblasti stabilnosti za Gauss-ov i harmonijski proces u funkciji determinističke komponente pritiskne sile

Oblasti stabilnosti se povećavaju kada se konstantna komponenta aksijalnog opterećenja menja od kompresije ($f_0 = 3$) prema zatezanju ($f_0 = -3$) kako je prikazano na Sl. 6.5.



Slika 6.6 Oblasti stabilnosti za Gauss-ov i harmonijski proces u funkciji vremena retardacije



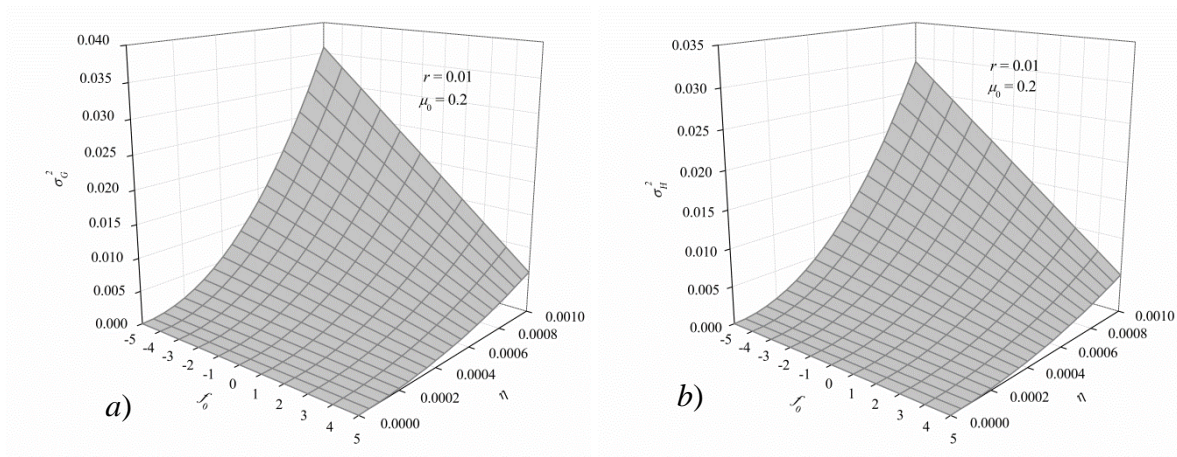
Slika 6.7 Uticaj koeficijenta nanoskaliranja za Helmholtz-ov i bi-Helmholtz-ov oblik jezgra na oblasti stabilnosti za Gauss-ov i harmonijski proces

Na Sl. 6.6 oblasti stabilnosti su date u ravni koeficijenta nanoskaliranja i varijanse slučajnog procesa za različite vrednosti vremena retardacije. Može se primetiti da se oblasti stabilnosti značajno uvećavaju sa porastom vremena retardacije.

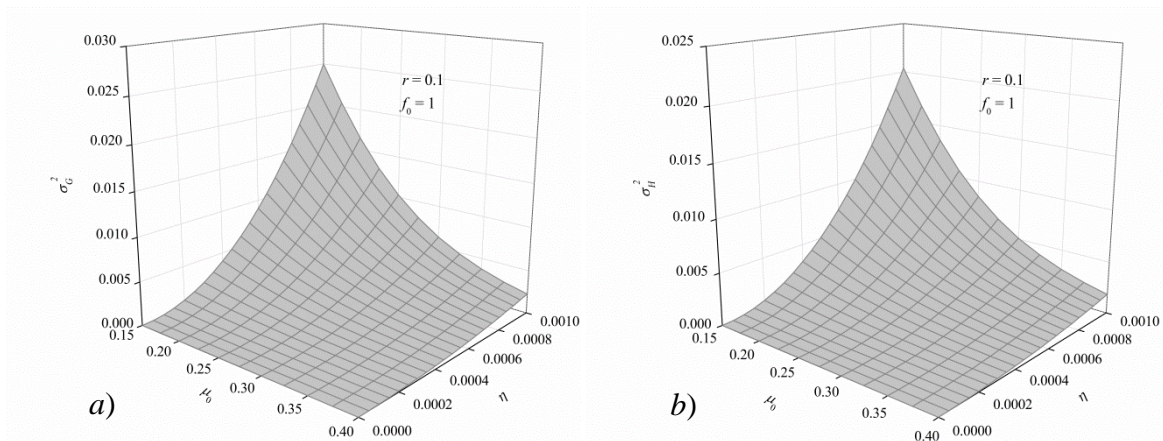
Uticaj koeficijenta nanoskaliranja za Helmholtz-ov i bi-Helmholtz-ov oblik jezgra na oblasti stabilnosti prikazan je na Sl. 6.7. Na osnovu rada Lazar-a i dr. [43], za Helmholtz-ov tip jezgra

korišćena je vrednost koeficijenta nanoskaliranja $\mu_0 = 0.39$, dok su za bi-Helmholtz-ov tip jezgra korišćeni koeficijenti nanoskaliranja $\mu_1 = 0.318$ i $\mu_2 = 0.218$.

Na Sl. 6.8 i 6.9 dat je prostorni prikaz uticaja determinističke komponente pritisne sile i koeficijenta nanoskaliranja na oblasti stabilnosti viskoelastične nanogrede.



Slika 6.8 Oblasti stabilnosti za a) Gauss-ov i b) harmonijski proces u funkciji determinističke komponente pritisne sile

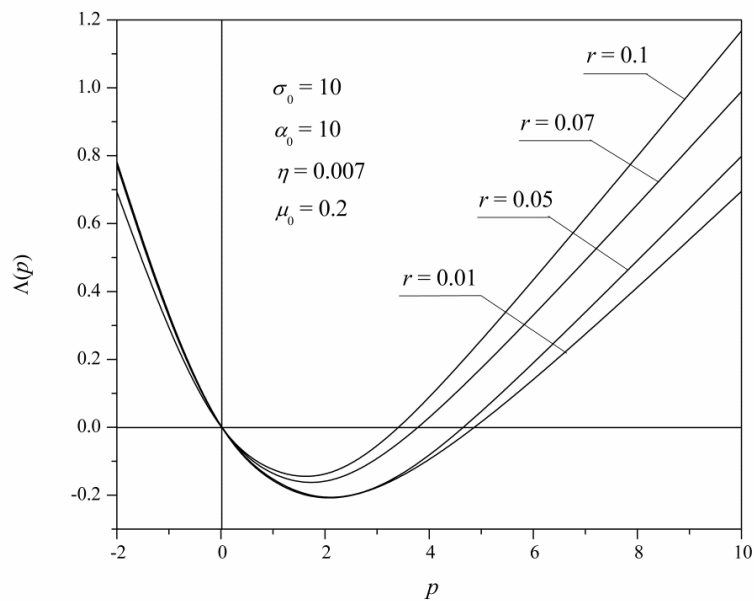


Slika 6.9 Oblasti stabilnosti za a) Gauss-ov i b) harmonijski proces u funkciji koeficijenta nanoskaliranja

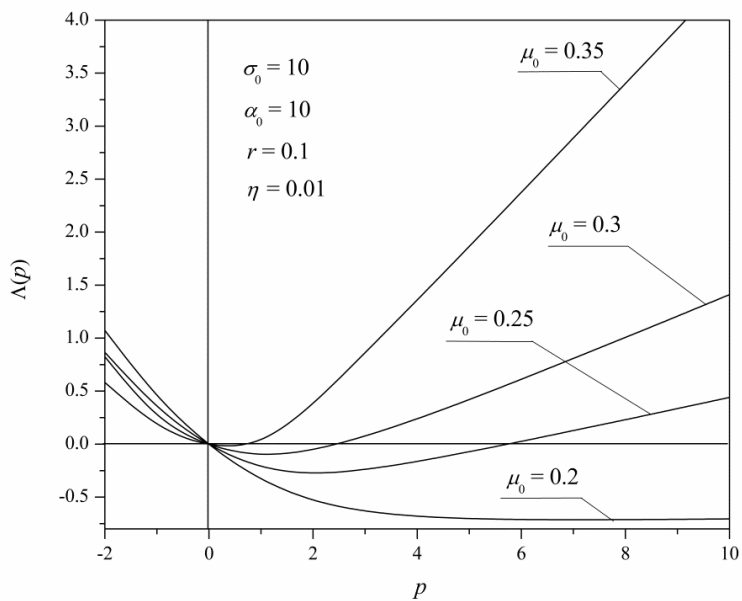
Može se zaključiti da su oblasti stabilnosti veće u slučaju Helmholtz-ovog tipa jezgra za oba procesa. Generalno, efekat nelokalnosti smanjuje oblasti stabilnosti nanogrede.

Kada je pobuda proces realnog šuma, korišćenjem istih parametara simulacije kao u test primeru (6.44), moment eksponenata Ljapunova je dobijen numeričkim putem za različite vrednosti r , μ_0 i η . Oblasti skoro sigurne stabilnosti se nalaze u delu ravni gde je

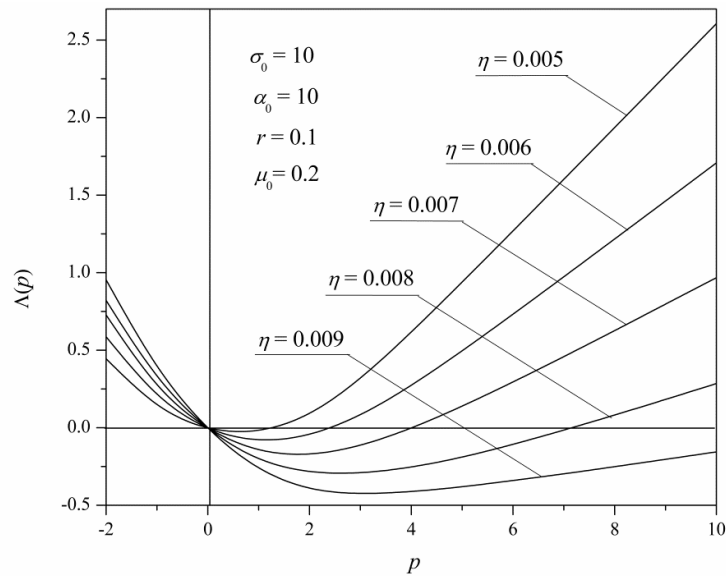
moment eksponenta Ljapunova negativan. Ukoliko se zanemari uticaj inercije preseka ($r=0$), kod pobude tipa realnog šuma čini se veća greška nego što je to u slučaju procesa koji ne sadrže beli spektar, što je očigledno sa Sl. 6.10. Smanjenje koeficijenta nanoskaliranja μ_0 i povećanje vremena retardacije η dovodi do značajnog povećanja oblasti skoro sigurne stabilnosti, kako je to prikazano na Sl. 6.11 i 6.12.



Slika 6.10 Oblasti stabilnosti za proces realnog šuma u funkciji parametra r koji uzima u obzir uticaj inercije obrtanja poprečnog preseka

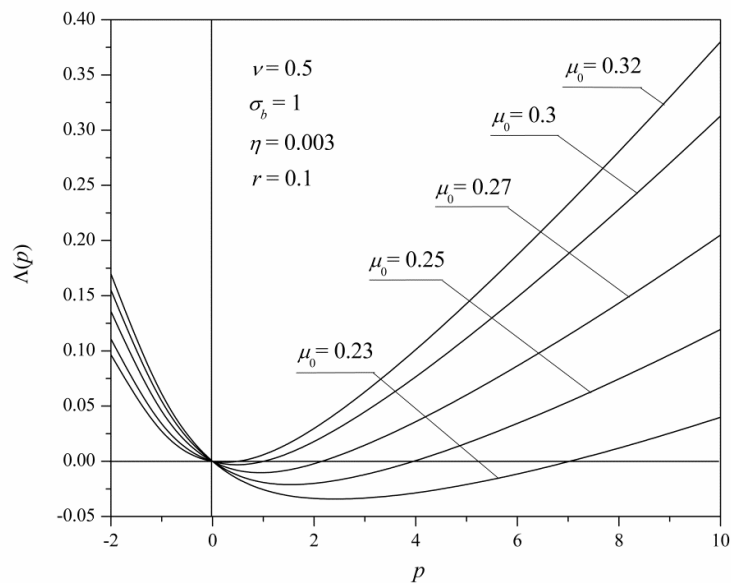


Slika 6.11 Oblasti stabilnosti za proces realnog šuma u funkciji koeficijenta nanoskaliranja μ_0

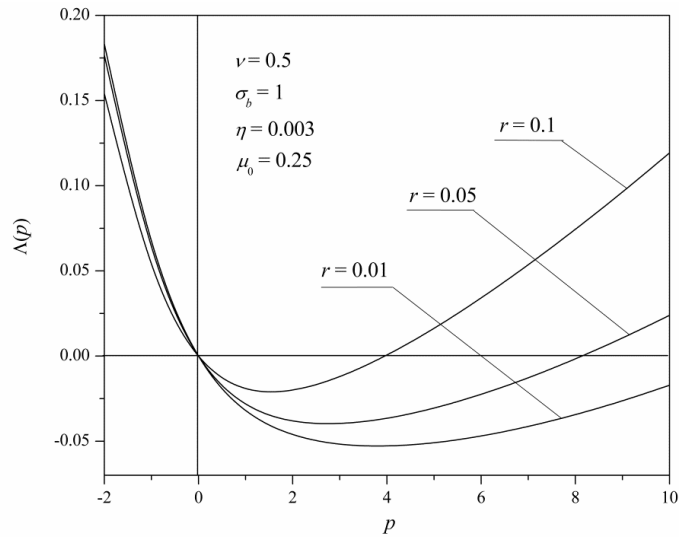


Slika 6.12 Oblasti stabilnosti za proces realnog šuma u funkciji vremena retardacije η

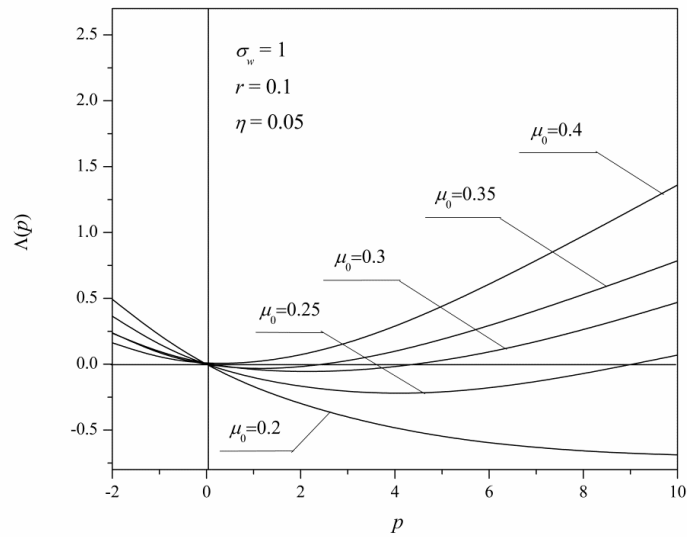
Kod analize stabilnosti viskoelastične nanogrede numeričkom simulacijom kada na nju deluju procesi belog i ograničenog šuma, potrebno je najpre adaptirati programski kod za simulaciju ulaznog signala na osnovu definicija ovih procesa datim u poglavlju 5.4.3, (jednačine 5.110 i 5.113). U cilju poređenja sa rezultatima prikazanim na Sl. 6.10, 6.11 i 6.12 za proces realnog šuma, moment eksponenta Ljapunova za proces ograničenog šuma dat je za različite vrednosti parametara nanoskaliranja μ_0 i geometrijskog faktora r (Sl. 6.13 i 6.14), dok je stabilnost nanogrede kada na nju deluje proces belog šuma prikazana za različite vrednosti parametara μ_0 i η (Sl. 6.15 i 6.16).



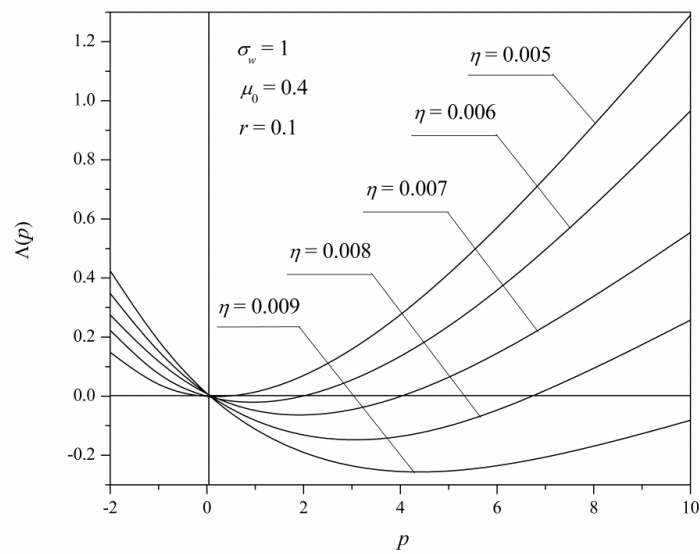
Slika 6.13 Oblasti stabilnosti za proces ograničenog šuma u funkciji koeficijenta nanoskaliranja μ_0



Slika 6.14 Oblasti stabilnosti za proces ograničenog šuma u funkciji parametra r koji uzima u obzir uticaj inercije obrtanja poprečnog preseka



Slika 6.15 Oblasti stabilnosti za proces belog šuma u funkciji koeficijenta nanoskaliranja μ_0

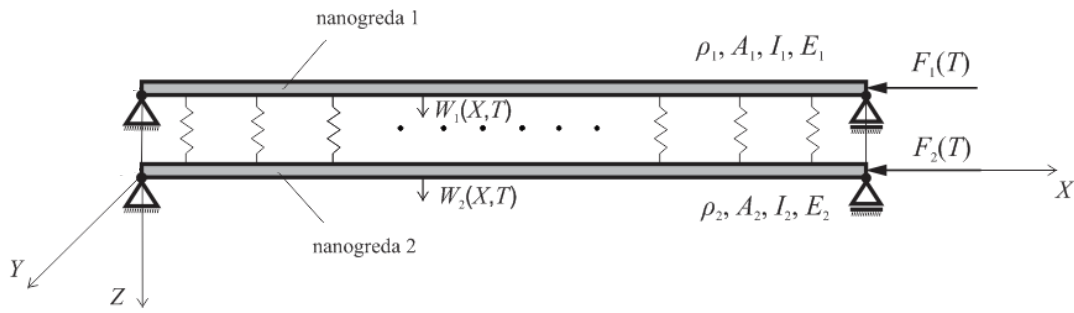


Slika 6.16 Oblasti stabilnosti za proces belog šuma u funkciji parametra η

6.4 Sistem elastično spojenih nanogreda

6.4.1 Formulacija problema

Razmotrimo sistem sastavljen od dve paralelne, tanke, homogene nanogrede spojene elastičnim slojem čija je krutost \bar{K} jednaka Winkler-ovoj konstanti u Winkler-ovom modelu datom u radu Murmu-a i Adhikari-ja [66]. Obe nanogrede su iste dužine i prosto su oslonjene na krajevima. Nanogrede su izložene aksijalnim silama F_1 i F_2 kao što je prikazano na Sl. 6.17.



Slika 6.17. Geometrija sistema elastično spojenih dvostrukih nanogreda

Na osnovu relacije (3.23), diferencijalne jednačine transverzalnih vibracija sistema dvostrukih nanogreda su

$$\mathcal{L} \left[\rho_1 A_1 \frac{\partial^2 W_1}{\partial T^2} + c_1 \frac{\partial W_1}{\partial T} + F_1(t) \frac{\partial^2 W_1}{\partial X^2} + \bar{K}(W_1 - W_2) \right] + E_1 I_1 \frac{\partial^4 W_1}{\partial X^4} = 0, \quad (6.49)$$

$$\mathcal{L} \left[\rho_2 A_2 \frac{\partial^2 W_2}{\partial T^2} + c_2 \frac{\partial W_2}{\partial T} + F_2(t) \frac{\partial^2 W_2}{\partial X^2} + \bar{K}(W_2 - W_1) \right] + E_2 I_2 \frac{\partial^4 W_2}{\partial X^4} = 0, \quad (6.50)$$

gde su $E_i I_i$, ($i=1,2$), savojne krutosti nanogreda, a $F_1(t)$ i $F_2(t)$ su vremenski zavisni stacionarni slučajni procesi.

Na osnovu prosto oslonjenih ivica, granični uslovi su

$$\left. \begin{array}{l} X = 0 \\ X = L \end{array} \right\} W_1 = 0, \quad \frac{\partial^2 W_1}{\partial X^2} = 0, \quad W_2 = 0, \quad \frac{\partial^2 W_2}{\partial X^2} = 0, \quad (6.51)$$

gde je L dužina grede.

Kao i u pomenutoj referenci, pretpostavlja se da su obe nanogrede identične

$$\rho_1 A_1 = \rho_2 A_2 = \rho A, \quad E_1 I_1 = E_2 I_2 = EI, \quad c_1 = c_2 = c, \quad (6.52)$$

ali su aksijalne sile različite.

U cilju dobijanja bezdimenzionih jednačina (6.49) i (6.50) uvodimo sledeće parametre

$$T = k_t t, \quad W_i = L w_i, \quad X = L x, \quad k_t = L^2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}}, \quad (6.53)$$

$$2\beta = \frac{ck_t}{\rho A}, \quad f_{oi} + f_i(t) = \frac{F_i(t)}{\rho A L^2}, \quad K = \frac{\overline{KL^4}}{\rho A}, \quad (i=1,2),$$

gde su β i K koeficijent prigušenja i redukovana krutost elastičnog sloja, redom, a f_{oi} i $f_i(t)$, ($i=1,2$), su redukovane konstantne i stohastičke komponente aksijalnih sila.

Nakon uvođenja parametara (6.53) u jednačine (6.49) i (6.50) dobija se

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + 2\beta \frac{\partial w_1}{\partial t} + [f_{o1} + f_1(t)] \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + K(w_1 - w_2) \right\} + \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} = 0, \quad (6.54)$$

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} + 2\beta \frac{\partial w_2}{\partial t} + [f_{o2} + f_2(t)] \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + K(w_2 - w_1) \right\} + \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} = 0, \quad (6.55)$$

gde su operatori

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_H = 1 - \mu_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad \text{ili} \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}_{bH} = \left(1 - \mu_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(1 - \mu_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right), \quad \mu_i = \frac{e_i a}{L}, \quad i=1,2. \quad (6.56)$$

Granični uslovi (6.51) sada imaju oblik

$$\left. \begin{array}{l} X=0 \\ X=L \end{array} \right\} W_1 = 0, \quad \frac{\partial^2 W_1}{\partial X^2} = 0, \quad W_2 = 0, \quad \frac{\partial^2 W_2}{\partial X^2} = 0, \quad (6.57)$$

Cilj istraživanja je ispitivanje skoro sigurne asimptotske nestabilnosti dvostrukih nanogreda izloženih vremenski zavisnim stohastičkim aksijalnim opterećenjima. Da bi se ocenila perturbaciona rešenja, neophodno je uvesti meru razlike $\|\cdot\|$ rešenja u jednačinama (6.54) i (6.55) u slučaju netrivialnih i trivijalnih početnih uslova. Da bi ravnotežno stanje jednačina (6.54) i (6.55) bilo skoro sigurno stohastički nestabilno potrebno je da bude zadovoljen sledeći izraz

$$P \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{w}(\cdot, t)\| \rightarrow \infty \right\} = 1, \quad (6.58)$$

gde je $\mathbf{w} = \text{col}(w_1, w_2)$ matrica kolone.

6.4.2 Konstrukcija funkcionala Ljapunova

Prethodno formulisani cilj istraživanja rešićemo primenom metode funkcionala Ljapunova. U cilju primene direktne metode Ljapunova, funkcional se može konstruisati korišćenjem Parks-Pritchard-ove metode [36], pri čemu ćemo koristiti metodologiju primenjenu u prethodnim poglavljima. Dakle, ako se jednačine (6.54) i (6.55) napišu u formalnom obliku $\mathbf{Lw} = 0$, i uvede operator \mathbf{N} koji predstavlja formalni izvod operatora \mathbf{L} u odnosu na $\partial/\partial t$ kako je to izloženo u poglavlju 5.1, dobija se

$$\mathbf{Nw} = 2 \begin{Bmatrix} \mathcal{L} \left(\frac{\partial w_1}{\partial t} + \beta w_1 \right) \\ \mathcal{L} \left(\frac{\partial w_2}{\partial t} + \beta w_2 \right) \end{Bmatrix}. \quad (6.59)$$

Integraljenjem skalarnog proizvoda vektora $(\mathbf{Lw} \circ \mathbf{Nw})$ u cilindričnom prostoru $C = [x : 0 \leq x \leq 1] \times [0, t]$ na osnovu jednačina (6.54) i (6.55), jasno je da

$$\int_0^1 \int_0^t (\mathbf{Lw} \circ \mathbf{Nw}) dt dx = 0. \quad (6.60)$$

U razvijenom obliku, relacija (6.60) ima oblik

$$\begin{aligned} & 2 \int_0^1 \int_0^t \left\{ \left(\mathcal{L} \left[\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + 2\beta \frac{\partial w_1}{\partial t} + [f_{o1} + f_1(t)] \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + K(w_1 - w_2) \right] + \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} \right) \left(\frac{\partial \mathcal{L} w_1}{\partial t} + \beta \mathcal{L} w_1 \right) + \right. \\ & \left. + \left(\mathcal{L} \left[\frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} + 2\beta \frac{\partial w_2}{\partial t} + [f_{o2} + f_2(t)] \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + K(w_2 - w_1) \right] + \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} \right) \left(\frac{\partial \mathcal{L} w_2}{\partial t} + \beta \mathcal{L} w_2 \right) \right\} dt dx = 0. \end{aligned} \quad (6.61)$$

Prva dva člana u izrazu (6.61) su

$$\begin{aligned} I_1 &= 2 \int_0^1 \int_0^t \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L} w_i}{\partial t^2} + 2\beta \frac{\partial \mathcal{L} w_i}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \mathcal{L} w_i}{\partial t} + \beta \mathcal{L} w_i \right) dt dx = \\ &= 2 \int_0^1 \int_0^t \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L} w_i}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial \mathcal{L} w_i}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \mathcal{L} w_i}{\partial t} + \beta \mathcal{L} w_i \right) dt dx + 2 \int_0^1 \int_0^t \beta \frac{\partial \mathcal{L} w_i}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L} w_i}{\partial t} + \beta \mathcal{L} w_i \right) dt dx. \end{aligned} \quad (6.62)$$

Prvi integral u izrazu (6.62) je

$$I_{11} = 2 \int_0^1 \int_0^t \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L} w_i}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial \mathcal{L} w_i}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \mathcal{L} w_i}{\partial t} + \beta \mathcal{L} w_i \right) dt dx = \int_0^1 \left(\frac{\partial \mathcal{L} w_i}{\partial t} + \beta \mathcal{L} w_i \right)^2 dx, \quad (6.63)$$

a drugi je

$$I_{12} = 2 \int_0^1 \int_0^t \beta \frac{\partial \mathcal{L}w_i}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}w_i}{\partial t} + \beta \mathcal{L}w_i \right) dt dx = 2\beta^2 \int_0^1 \int_0^t \frac{\partial \mathcal{L}w_i}{\partial t} \mathcal{L}w_i dt dx + 2\beta \int_0^1 \int_0^t \left(\frac{\partial \mathcal{L}w_i}{\partial t} \right)^2 dt dx, \quad (6.64)$$

odakle je

$$I_{12} = 2\beta^2 \int_0^1 (\mathcal{L}w_i)^2 dx + 2\beta \int_0^1 \int_0^t \left(\frac{\partial \mathcal{L}w_i}{\partial t} \right)^2 dt dx. \quad (6.65)$$

Konačno, izraz (6.62) ima oblik

$$I_1 = I_{11} + I_{12} = \int_0^1 \int_0^t \left(\frac{\partial \mathcal{L}w_i}{\partial t} + \beta \mathcal{L}w_i \right)^2 dx + 2\beta^2 \int_0^1 (\mathcal{L}w_i)^2 dx + 2\beta \int_0^1 \int_0^t \left(\frac{\partial \mathcal{L}w_i}{\partial t} \right)^2 dt dx, \quad i = 1, 2. \quad (6.66)$$

Izraz koji sadrži konstantnu komponentu sile u (6.61) je

$$\begin{aligned} I_2 &= 2 \int_0^1 \int_0^t f_{i0} \frac{\partial^2 \mathcal{L}w_i}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}w_i}{\partial t} + \beta \mathcal{L}w_i \right) dt dx = \\ &= 2f_{i0} \int_0^1 \int_0^t \frac{\partial^2 \mathcal{L}w_i}{\partial x^2} \frac{\partial \mathcal{L}w_i}{\partial t} dt dx + 2\beta f_{i0} \int_0^1 \int_0^t \frac{\partial^2 \mathcal{L}w_i}{\partial x^2} \mathcal{L}w_i dt dx. \end{aligned} \quad (6.67)$$

Prvi integral u izrazu (6.67) je

$$\begin{aligned} I_{21} &= 2f_{i0} \int_0^1 \int_0^t \frac{\partial^2 \mathcal{L}w_i}{\partial x^2} \frac{\partial \mathcal{L}w_i}{\partial t} dt dx = 2f_{i0} \int_0^1 \int_0^t \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}w_i}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}w_i}{\partial t} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}w_i}{\partial x} \frac{\partial^2 \mathcal{L}w_i}{\partial x \partial t} \right] dt dx = \\ &= 2f_{i0} \int_0^1 \left(\frac{\partial \mathcal{L}w_i}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}w_i}{\partial t} \right) \Big|_0^1 dt - 2f_{i0} \int_0^1 \int_0^t \frac{\partial \mathcal{L}w_i}{\partial x} \frac{\partial^2 \mathcal{L}w_i}{\partial x \partial t} dt dx. \end{aligned} \quad (6.68)$$

Prvi član je jednak nuli, pa je

$$I_{21} = -f_{i0} \int_0^1 \left(\frac{\partial \mathcal{L}w_i}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (6.69)$$

Na sličan način se dobija drugi integral u izrazu (6.67)

$$\begin{aligned} I_{22} &= 2\beta f_{i0} \int_0^1 \int_0^t \frac{\partial^2 \mathcal{L}w_i}{\partial x^2} \mathcal{L}w_i dt dx = 2\beta f_{i0} \int_0^1 \int_0^t \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}w_i}{\partial x} \mathcal{L}w_i \right) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}w_i}{\partial x} \right)^2 \right] dt dx = \\ &= 2\beta f_{i0} \int_0^1 \left(\frac{\partial \mathcal{L}w_i}{\partial x} \mathcal{L}w_i \right) \Big|_0^1 dt - 2\beta f_{i0} \int_0^1 \int_0^t \left(\frac{\partial \mathcal{L}w_i}{\partial x} \right)^2 dt dx = -2\beta f_{i0} \int_0^1 \int_0^t \left(\frac{\partial \mathcal{L}w_i}{\partial x} \right)^2 dt dx. \end{aligned} \quad (6.70)$$

Konačno je

$$I_2 = I_{21} + I_{22} = -f_{io} \int_0^1 \left(\frac{\partial \mathcal{L} w_i}{\partial x} \right)^2 dx - 2\beta f_{io} \int_0^1 \int_0^t \left(\frac{\partial \mathcal{L} w_i}{\partial x} \right)^2 dt dx, \quad (6.71)$$

pri čemu indeks i uzima vrednosti $i = 1, 2$.

Izraz koji sadrži krutost Winkler-ovog sloja u (6.61) je

$$\begin{aligned} I_3 &= 2K \int_0^1 \int_0^t \left[(\mathcal{L} w_1 - \mathcal{L} w_2) \left(\frac{\partial \mathcal{L} w_1}{\partial t} + \beta \mathcal{L} w_1 \right) + (\mathcal{L} w_2 - \mathcal{L} w_1) \left(\frac{\partial \mathcal{L} w_2}{\partial t} + \beta \mathcal{L} w_2 \right) \right] dt dx = \\ &= 2K \int_0^1 \int_0^t \left[(\mathcal{L} w_1 - \mathcal{L} w_2) \left(\frac{\partial \mathcal{L} w_1}{\partial t} - \frac{\partial \mathcal{L} w_2}{\partial t} \right) + \beta (\mathcal{L} w_1 - \mathcal{L} w_2) (\mathcal{L} w_1 - \mathcal{L} w_2) \right] dt dx. \end{aligned} \quad (6.72)$$

Prvi integral u (6.72) je

$$I_{31} = 2K \int_0^1 \int_0^t (\mathcal{L} w_1 - \mathcal{L} w_2) \left(\frac{\partial \mathcal{L} w_1}{\partial t} - \frac{\partial \mathcal{L} w_2}{\partial t} \right) dt dx = K \int_0^1 (\mathcal{L} w_1 - \mathcal{L} w_2)^2 dx, \quad (6.73)$$

a drugi je

$$I_{32} = 2K\beta \int_0^1 \int_0^t (\mathcal{L} w_1 - \mathcal{L} w_2)^2 dt dx. \quad (6.74)$$

Konačno se dobija

$$I_3 = I_{31} + I_{32} = K \int_0^1 (\mathcal{L} w_1 - \mathcal{L} w_2)^2 dx + 2K\beta \int_0^1 \int_0^t (\mathcal{L} w_1 - \mathcal{L} w_2)^2 dt dx, \quad (6.75)$$

dok integrali koji sadrže stohastičke komponente ostaju neizmenjeni.

Integracija poslednjeg člana u (6.61) se mora sprovesti posebno za svaki oblik jezgra.

Za Helmholtz-ov tip jezgra je

$$I_{4H} = 2 \int_0^1 \int_0^t \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} \left(\frac{\partial w_i}{\partial t} - \mu_0^2 \frac{\partial^3 w_i}{\partial x^2 \partial t} \right) dt dx + 2\beta \int_0^1 \int_0^t \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} \left(w_i - \mu_0^2 \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \right) dt dx, \quad (6.76)$$

koji nakon parcijalne integracije postaje

$$I_{4H} = \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \right)^2 + \mu_0^2 \left(\frac{\partial^3 w_i}{\partial x^3} \right)^2 \right] dx + 2\beta \int_0^1 \int_0^t \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} \mathcal{L}_H w_i dt dx. \quad (6.77)$$

Za bi-Helmholtz-ov tip jezgra je

$$I_{4bH} = 2 \int_0^1 \int_0^t \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} \left(\frac{\partial w_i}{\partial t} - (\mu_1^2 + \mu_2^2) \frac{\partial^3 w_i}{\partial x^2 \partial t} + \mu_1^2 \mu_2^2 \frac{\partial^5 w_i}{\partial x^4 \partial t} \right) dt dx + 2\beta \int_0^1 \int_0^t \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} \mathcal{L}_{bH} w_i dt dx, \quad (6.78)$$

pa se sličnim postupkom kao u slučaju Helmholtz-ovog tipa dobija

$$I_{4bH} = \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \right)^2 + (\mu_1^2 + \mu_2^2) \left(\frac{\partial^3 w_i}{\partial x^3} \right)^2 + \mu_1^2 \mu_2^2 \left(\frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} \right)^2 \right] dx + 2\beta \int_0^t \int_0^t \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} \mathcal{L}_{bH} w_i dt dx, \quad (6.79)$$

gde je $i=1,2$.

Zamenom izraza (6.66), (6.71), (6.75) i (6.77) ili (6.79) u (6.61), razdvajanjem članova u kojima se integracija sprovodi samo po prostornoj promenljivoj x i članova u kojima se integracija sprovodi po prostornoj i vremenskoj promenljivoj, relacija (6.61) se može napisati u obliku

$$\mathbf{V} \Big|_0^t - \int_0^t \frac{d\mathbf{V}}{dt} dt = 0, \quad (6.80)$$

gde je

$$\begin{aligned} \mathbf{V} = \int_0^1 \left\{ \left[\mathcal{L} \left(\frac{\partial w_1}{\partial t} + \beta_1 w_1 \right) \right]^2 + \left[\mathcal{L} \left(\frac{\partial w_2}{\partial t} + \beta_2 w_2 \right) \right]^2 + \beta_1^2 (\mathcal{L} w_1)^2 + \beta_2^2 (\mathcal{L} w_2)^2 + \right. \\ \left. - f_{o1} \left[\mathcal{L} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right) \right]^2 - f_{o2} \left[\mathcal{L} \left(\frac{\partial w_2}{\partial x} \right) \right]^2 + K [\mathcal{L} (w_1 - w_2)]^2 \right\} dx + \mathbf{V}_e. \end{aligned} \quad (6.81)$$

Za Helmholtz-ov i bi-Helmholtz-ov operator, funkcionali \mathbf{V}_e imaju oblik

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{eH} = \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right)^2 + \mu_0^2 \left(\frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \right)^2 + \mu_0^2 \left(\frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3} \right)^2 \right] dx, \\ \mathbf{V}_{eBH} = \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right)^2 + (\mu_1^2 + \mu_2^2) \left(\frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3} \right)^2 + \mu_1^2 \mu_2^2 \left(\frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \right)^2 + (\mu_1^2 + \mu_2^2) \left(\frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3} \right)^2 + \mu_1^2 \mu_2^2 \left(\frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} \right)^2 \right] dx. \end{aligned} \quad (6.82)$$

Izvod po vremenu funkcionala (6.81) je

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -2 \int_0^1 \left[\beta \left[\mathcal{L} \left(\frac{\partial w_1}{\partial t} \right) \right]^2 + \beta \left[\mathcal{L} \left(\frac{\partial w_2}{\partial t} \right) \right]^2 + \beta f_{o1} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \mathcal{L} w_1 + \beta f_{o2} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \mathcal{L} w_2 + \right. \\ \left. + f_1(t) \mathcal{L} \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right) \mathcal{L} \left(\frac{\partial w_1}{\partial t} + \beta_1 w_1 \right) + f_2(t) \mathcal{L} \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \right) \mathcal{L} \left(\frac{\partial w_2}{\partial t} + \beta_2 w_2 \right) + \right. \\ \left. + K \beta [\mathcal{L} (w_1 - w_2)]^2 + \beta \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} \mathcal{L} w_1 + \beta \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} \mathcal{L} w_2 \right] dx. \end{aligned} \quad (6.83)$$

Za meru rešenja može se uzeti $\|\mathbf{w}\| = \sqrt{\mathbf{V}}$, a funkcional \mathbf{V} mora biti pozitivno definitan. To će biti zadovoljeno ako je

$$\mathbf{V}_{\mathcal{L}} + \int_0^1 \left\{ -f_{o1} \left[\mathcal{L} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right) \right]^2 - f_{o2} \left[\mathcal{L} \left(\frac{\partial w_2}{\partial x} \right) \right]^2 + K [\mathcal{L}(w_1 - w_2)]^2 \right\} dx \geq 0. \quad (6.84)$$

Rešenje pretpostavljamo tako da zadovoljava granične uslove (6.57) u sledećem obliku

$$w_1(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} T_{1m}(t) \sin \alpha_m x, \quad w_2(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} T_{2m}(t) \sin \alpha_m x, \quad (6.85)$$

gde je $\alpha_m = m\pi$, a relacija (6.84) je redukovana na

$$\left(\frac{\alpha_m^4}{\mathcal{L}_m} - f_{o1} \alpha_m^2 + K \right) T_{1m}^2 - 2KT_{1m}T_{2m} + \left(\frac{\alpha_m^4}{\mathcal{L}_m} - f_{o2} \alpha_m^2 + K \right) T_{2m}^2 > 0, \quad (m = 1, 2, 3...), \quad (6.86)$$

gde je

$$\mathcal{L}_m = \mathcal{L}_{mH} = 1 + \mu_0^2 \alpha_m^2, \quad \mathcal{L}_m = \mathcal{L}_{mbH} = (1 + \mu_1^2 \alpha_m^2)(1 + \mu_2^2 \alpha_m^2), \quad (6.87)$$

za Helmholtz-ov i bi-Helmholtz-ov tip jezgra, redom.

Pretpostavimo da je

$$f_{o1} < \frac{\alpha_m^2}{\mathcal{L}_m} + \frac{K}{\alpha_m^2}, \quad f_{o2} < \frac{\alpha_m^2}{\mathcal{L}_m} + \frac{K}{\alpha_m^2}, \quad (6.88)$$

što uvodi uslov da su grede, razdvojene i leže na elastičnom sloju, statički stabilne. Za Helmholtz-ovo jezgro, desna strana jednačine (6.88) je ekvivalentna relaciji (40) u radu Murmu-a i Adhikari-a [68].

Relacija (6.86) je zadovoljena ukoliko je

$$f_{o1}f_{o2} - \left(\frac{\alpha_m^2}{\mathcal{L}_m} + \frac{K}{\alpha_m^2} \right) (f_{o1} + f_{o2}) + \left(\frac{\alpha_m^2}{\mathcal{L}_m} + \frac{K}{\alpha_m^2} \right)^2 - \frac{K^2}{\alpha_m^4} \geq 0. \quad (6.89)$$

Uvođenjem odnosa aksijalnih opterećenja $\chi = f_{o2} / f_{o1}$ u relaciju (6.89) se posle jednostavnih algebarskih transformacija dobija

$$f_{o1(1,2)} = \frac{(1 + \chi) \left(\frac{\alpha_m^2}{\mathcal{L}_m} + \frac{K}{\alpha_m^2} \right) \mp \sqrt{(1 - \chi)^2 \left(\frac{\alpha_m^2}{\mathcal{L}_m} + \frac{K}{\alpha_m^2} \right)^2 + 4\chi K^2}}{2\chi}. \quad (6.90)$$

Za $\chi = 1$, sile izvijanja određene iz relacija (6.90) ekvivalentne su izrazima (36) i (37) dobijenih od strane Murmu-a i Adhikari-a u [67]. Kritična sila izvijanja je

$$f_{o1}^{cr} = \frac{(1 + \chi) \left(\frac{\alpha_m^2}{\mathcal{L}_m} + \frac{K}{\alpha_m^2} \right) - \sqrt{(1 - \chi)^2 \left(\frac{\alpha_m^2}{\mathcal{L}_m} + \frac{K}{\alpha_m^2} \right)^2 + 4\chi K^2}}{2\chi}. \quad (6.91)$$

Funkcional Ljapunova je pozitivno definitan ukoliko su determinističke komponente aksijalnih opterećenja manje od kritične sile izvijanja, tj. ako su statički uslovi stabilnosti (6.88) i (6.89) za sistem dvostrukih nanogreda zadovoljeni.

6.4.3 Skoro sigurna nestabilnost

Neka je skalarna funkcija $\lambda(t)$ definisana kao

$$\frac{1}{\mathbf{V}} \frac{d\mathbf{V}}{dt} \geq \lambda(t). \quad (6.92)$$

Kako je minimalna tačka pojedinačni slučaj stacionarne tačke, može se napisati

$$\delta(\dot{\mathbf{V}} - \lambda \mathbf{V}) = 0. \quad (6.93)$$

Euler-ove jednačine za varijacioni problem (6.93) glase

$$(\lambda + 2\beta) \mathcal{L}^{(2)} \left(\frac{\partial w_1}{\partial t} \right) + \mathcal{L}^{(2)} \left[\left(\lambda \beta + f_1(t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) w_1 \right] = 0, \quad (6.94)$$

$$(\lambda + 2\beta) \mathcal{L}^{(2)} \left(\frac{\partial w_2}{\partial t} \right) + \mathcal{L}^{(2)} \left[\left(\lambda \beta + f_2(t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) w_2 \right] = 0, \quad (6.95)$$

$$\begin{aligned} & \left(\lambda \beta + f_1(t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \mathcal{L}^{(2)} \left(\frac{\partial w_1}{\partial t} \right) + \left[\lambda \left(2\beta^2 \mathcal{L}^{(2)} + \frac{\partial^4}{\partial x^4} \mathcal{L} + f_{o1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathcal{L}^{(2)} + K \mathcal{L}^{(2)} \right) + \right. \\ & \left. 2\beta \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} \mathcal{L} + f_{o1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathcal{L}^{(2)} + f_1(t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathcal{L}^{(2)} + K \mathcal{L}^{(2)} \right) \right] w_1 - K(\lambda + 2\beta) \mathcal{L}^{(2)} w_2 = 0, \end{aligned} \quad (6.96)$$

$$\begin{aligned} & \left(\lambda \beta + f_2(t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \mathcal{L}^{(2)} \left(\frac{\partial w_2}{\partial t} \right) + \left[\lambda \left(2\beta^2 \mathcal{L}^{(2)} + \frac{\partial^4}{\partial x^4} \mathcal{L} + f_{o2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathcal{L}^{(2)} + K \mathcal{L}^{(2)} \right) + \right. \\ & \left. 2\beta \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} \mathcal{L} + f_{o2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathcal{L}^{(2)} + f_2(t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathcal{L}^{(2)} + K \mathcal{L}^{(2)} \right) \right] w_2 - K(\lambda + 2\beta) \mathcal{L}^{(2)} w_1 = 0, \end{aligned} \quad (6.97)$$

gde je $\mathcal{L}^{(2)} = \mathcal{L}\mathcal{L}$.

Eliminisanjem vremenskih izvoda promenljivih w_1 i w_2 , jednačine (6.94)-(6.97) se svode na

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(\lambda\beta + f_1(t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(\lambda\beta \mathcal{L}^{(2)} + f_1(t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathcal{L}^{(2)} \right) - \right. \\ & \left. - (\lambda + 2\beta) \left[\lambda \left(2\beta^2 \mathcal{L}^{(2)} + \frac{\partial^4}{\partial x^4} \mathcal{L} + f_{o1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathcal{L}^{(2)} + K \mathcal{L}^{(2)} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2\beta \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} \mathcal{L} + f_{o1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathcal{L}^{(2)} + f_1(t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathcal{L}^{(2)} + K \mathcal{L}^{(2)} \right) \right] \right\} w_1 + K(\lambda + 2\beta) \mathcal{L}^{(2)} w_2 = 0, \end{aligned} \quad (6.98)$$

$$\begin{aligned} & K(\lambda + 2\beta) \mathcal{L}^{(2)} w_1 + \left\{ \left(\lambda\beta + f_2(t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(\lambda\beta \mathcal{L}^{(2)} + f_2(t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathcal{L}^{(2)} \right) - \right. \\ & \left. - (\lambda + 2\beta) \left[\lambda \left(2\beta^2 \mathcal{L}^{(2)} + \frac{\partial^4}{\partial x^4} \mathcal{L} + f_{o2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathcal{L}^{(2)} + K \mathcal{L}^{(2)} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2\beta \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} \mathcal{L} + f_{o2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathcal{L}^{(2)} + f_2(t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathcal{L}^{(2)} + K \mathcal{L}^{(2)} \right) \right] \right\} w_2 = 0. \end{aligned} \quad (6.99)$$

Uvođenjem rešenja (6.85) u jednačine (6.98) i (6.99) dobija se

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[(\lambda_m \beta - \alpha_m^2 f_1(t))^2 - (\lambda_m + 2\beta) \ell_{1m} \right] T_{1m}(t) + K(\lambda_m + 2\beta)^2 T_{2m}(t) \right\} = 0, \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ K(\lambda_m + 2\beta)^2 T_{1m}(t) + \left[(\lambda_m \beta - \alpha_m^2 f_2(t))^2 - (\lambda_m + 2\beta) \ell_{2m} \right] T_{2m}(t) \right\} = 0, \end{aligned} \quad (6.100)$$

gde je

$$\ell_{im} = \lambda_m \left(2\beta^2 + \frac{\alpha_m^4}{\mathcal{L}_m} - f_{oi} \alpha_m^2 + K \right) + 2\beta \left(\frac{\alpha_m^4}{\mathcal{L}_m} - f_{oi} \alpha_m^2 - \alpha_m^2 f_i(t) + K \right), \quad (i = 1, 2). \quad (6.101)$$

Netrivijalna rešenja funkcija $T_{1m}(t)$ i $T_{2m}(t)$ postoje kada je determinanta sistema (6.100) jednaka nuli, što vodi do bikvadratne jednačine po nepoznatoj λ_m

$$b_{0m} (\lambda_m + 2\beta)^4 + b_{1m} (\lambda_m + 2\beta)^2 + b_{2m} = 0, \quad (6.102)$$

gde je

$$b_{0m} = K \left(2\beta^2 + 2 \frac{\alpha_m^4}{\mathcal{L}_m} - f_{o1} \alpha_m^2 - f_{o2} \alpha_m^2 \right) + \left(\beta^2 + \frac{\alpha_m^4}{\mathcal{L}_m} - f_{o1} \alpha_m^2 \right) \left(\beta^2 + \frac{\alpha_m^4}{\mathcal{L}_m} - f_{o2} \alpha_m^2 \right),$$

$$b_{1m} = \left(K + \beta^2 + \frac{\alpha_m^4}{\mathfrak{L}_m} - f_{o2}\alpha_m^2 \right) (2\beta^2 + \alpha_m^2 f_1(t))^2 + \\ + \left(K + \beta^2 + \frac{\alpha_m^4}{\mathfrak{L}_m} - f_{o1}\alpha_m^2 \right) (2\beta^2 + \alpha_m^2 f_2(t))^2, \quad (6.103)$$

$$b_{2m} = (2\beta^2 + \alpha_m^2 f_1(t))^2 (2\beta^2 + \alpha_m^2 f_2(t))^2.$$

Rešavanjem jednačine (6.102) dobija se

$$\lambda_m = \frac{a_{1m}F_{2m}^2(t) + a_{2m}F_{1m}^2(t) + \sqrt{(a_{1m}F_{2m}^2(t) - a_{2m}F_{1m}^2(t))^2 + 4K^2F_{1m}^2(t)F_{2m}^2(t)}}{2 \left[\left(\beta^2 + \frac{\alpha_m^4}{\mathfrak{L}_m} - f_{o1}\alpha_m^2 \right) \left(\beta^2 + \frac{\alpha_m^4}{\mathfrak{L}_m} - f_{o2}\alpha_m^2 \right) + K \left(2\beta^2 + 2\frac{\alpha_m^4}{\mathfrak{L}_m} - f_{o1}\alpha_m^2 - f_{o2}\alpha_m^2 \right) \right]} - 2\beta, \quad (6.104)$$

gde je

$$a_{im} = K + \beta^2 + \frac{\alpha_m^4}{\mathfrak{L}_m} - f_{oi}\alpha_m^2, \quad F_{im}(t) = 2\beta^2 + \alpha_m^2 f_i(t). \quad (6.105)$$

Pri rešavanju bikvadratne jednačine ispred oba korena uzet je znak plus, jer je λ_m realna i pozitivna funkcija.

Rešavanjem diferencijalne nejednačine (6.92), može se oceniti vrednost funkcionala \mathbf{V}

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} \geq \left(\min_m \lambda_m \right) \mathbf{V}, \quad (6.106)$$

a nakon integracije relacije (6.106) po vremenu, dobija se

$$\mathbf{V} \geq \mathbf{V}_0 \exp \left[\frac{1}{t} \int_0^t \min_m \lambda_m(\tau) d\tau \right] t. \quad (6.107)$$

Kada su procesi $f_1(t)$, $f_2(t)$ ergodički i stacionarni, može se zaključiti da je trivijalno rešenje jednačina (6.54) i (6.55) skoro sigurno asimptotski nestabilno ako je

$$E \left\{ \min_m \lambda_m(t) \right\} > 0, \quad (6.108)$$

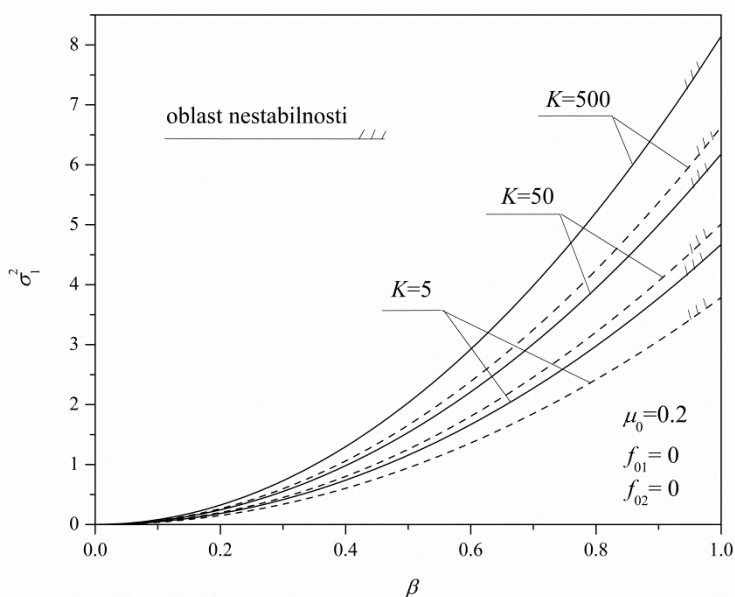
gde $E\{\}$ označava operator matematičkog očekivanja.

6.4.4 Numerički rezultati i diskusija

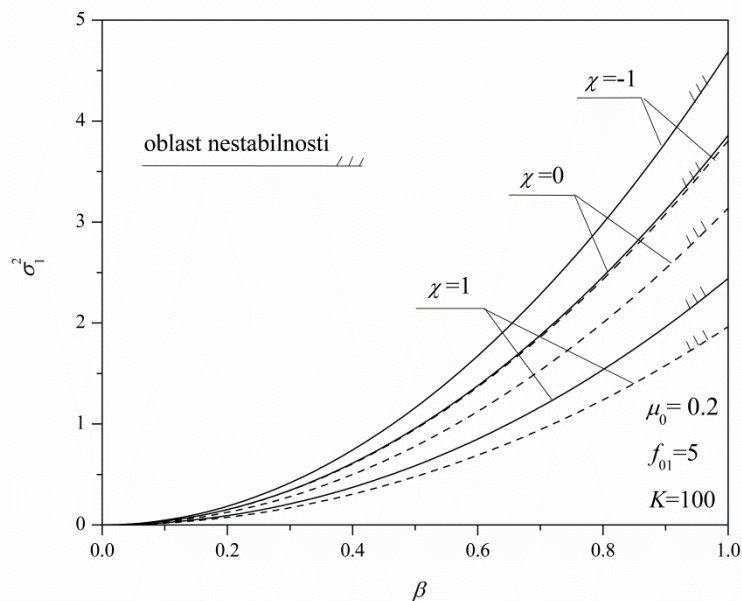
Relacija (6.108) pruža mogućnost određivanja oblasti skoro sigurne nestabilnosti elastično spojenih nanogreda. Oblasti nestabilnosti sistema dvostrukih nanogreda dobijeni su za Gauss-ov i harmonijski proces sa uniformno raspodeljenom fazom u opsegu $[0, 2\pi]$. Pretpostavimo harmonijski proces $f_h(t) = A_h \cos(\omega t + \theta)$, gde je faza θ slučajna promenljiva a amplituda A_h se koristi za sračunavanje varijanse procesa $A_h^2 / 2$.

Najpre, razmotriće se slučaj kada je gornja greda izložena determinističkim i stohastičkim silama, a donja greda samo determinističkom opterećenju, tj. $f_2(t) = 0$ i $f_{o2} \neq 0$. Poznavanje funkcije gustine verovatnoće $p(f_1)$ procesa $f_1(t)$ pruža mogućnost dobijanja preciznijih rezultata, (Kozin [24]). Oblasti nestabilnosti su date u funkciji varijanse opterećenja σ_1^2 , koeficijenta viskoznog prigušenja β , redukovane krutosti elastičnog sloja K , koeficijenta nanoskaliranja za Helmholtz-ov i bi-Helmholtz-ov tip jezgra, \mathcal{L}_H i \mathcal{L}_{bH} i odnosa intenziteta determinističkih opterećenja $\chi = f_{o1} / f_{o2}$.

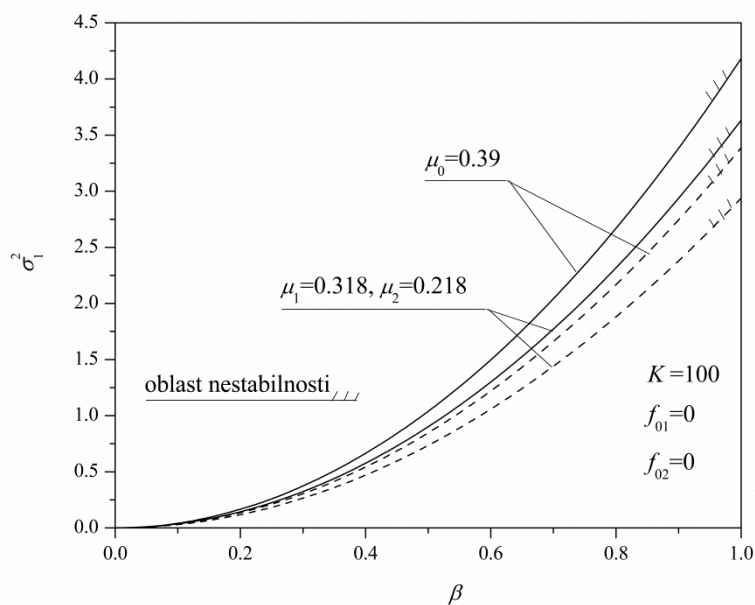
Na Sl. 6.18, 6.19 i 6.20 oblasti nestabilnosti sistema dvostrukih nanogreda date su u ravni promenljivih varijanse σ_1^2 i koeficijenta viskoznog prigušenja β , a u funkciji redukovane krutosti elastičnog sloja K , odnosa determinističkih opterećenja χ , i koeficijenata nanoskaliranja za Helmholtz-ov i bi-Helmholtz-ov tip jezgra, \mathcal{L}_H i \mathcal{L}_{bH} .



Slika 6.18 Oblasti nestabilnosti sistema dvostrukih nanogreda opterećenih Gauss-ovim i harmonijskim procesom u funkciji krutosti elastičnog sloja



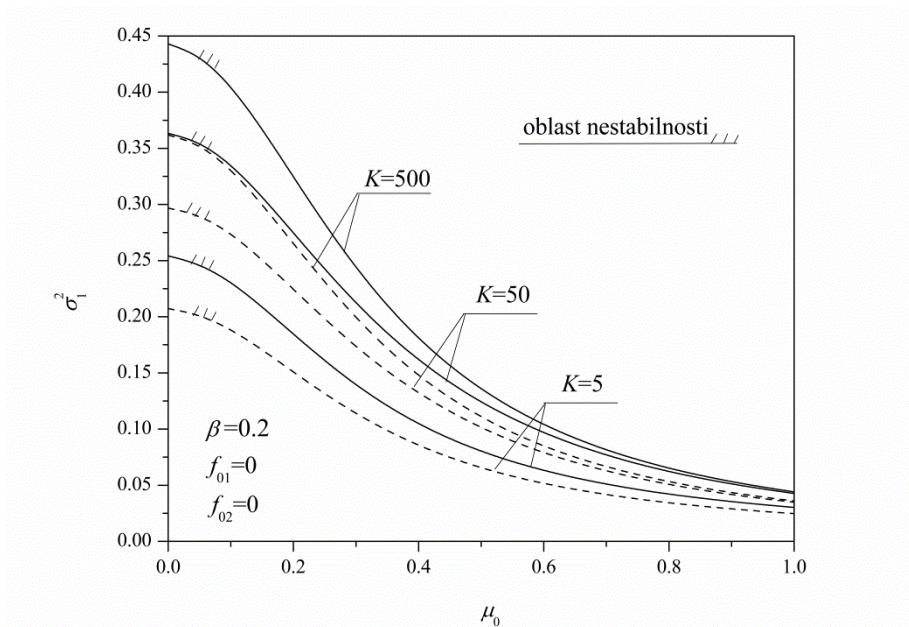
Slika 6.19 Oblasti nestabilnosti sistema dvostrukih nanogreda opterećenih Gauss-ovim i harmonijskim procesom u funkciji odnosa determinističkih komponenti aksijalnih sila



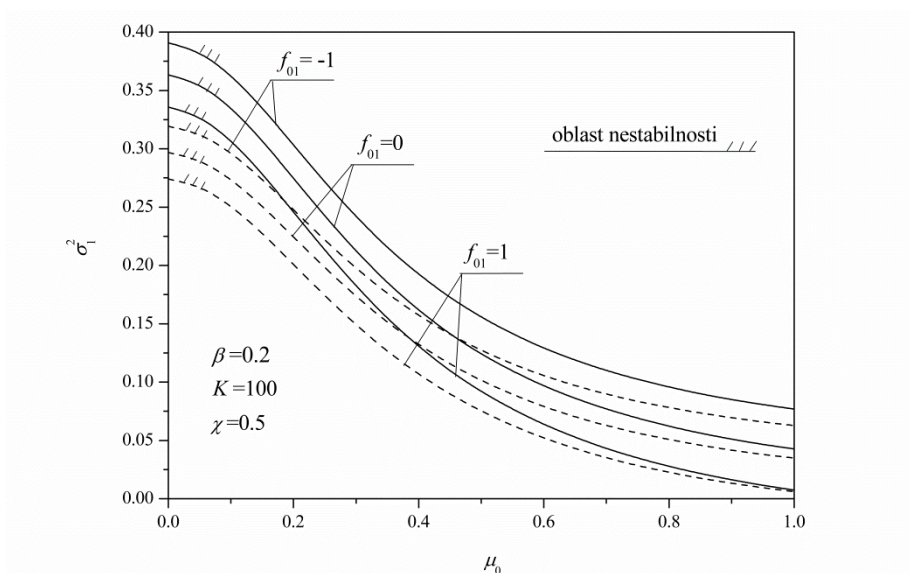
Slika 6.20 Oblasti nestabilnosti sistema dvostrukih nanogreda opterećenih Gauss-ovim i harmonijskim procesom u funkciji koeficijenata nanoskaliranja za Helmholtz-ov i bi-Helmholtz-ov tip jezgra

Može se primetiti da su oblasti nestabilnosti veće za harmonijski nego za Gauss-ov proces. Na Sl. 6.18 prikazan je uticaj krutosti elastičnog sloja na oblasti nestabilnosti za oba procesa, a evidentno je da se oblasti nestabilnosti smanjuju kako raste krutost K . Negativna vrednost χ , na Sl. 6.19 ukazuje na to da je deterministička komponenta koja deluje na donju

gredu f_{o2} , zatezna sila koja smanjuje oblasti nestabilnosti. Uticaj koeficijenta nanoskaliranja za Helmholtz-ov i bi-Helmholtz-ov tip jezgra na oblasti nestabilnosti prikazan je na Sl. 6.20. Može se zaključiti da su oblasti nestabilnosti veće u slučaju bi-Helmholtz-ovog tipa jezgra za oba procesa. Generalno, nelokalni efekti povećavaju oblasti nestabilnosti sistema dvostrukih nanogreda.



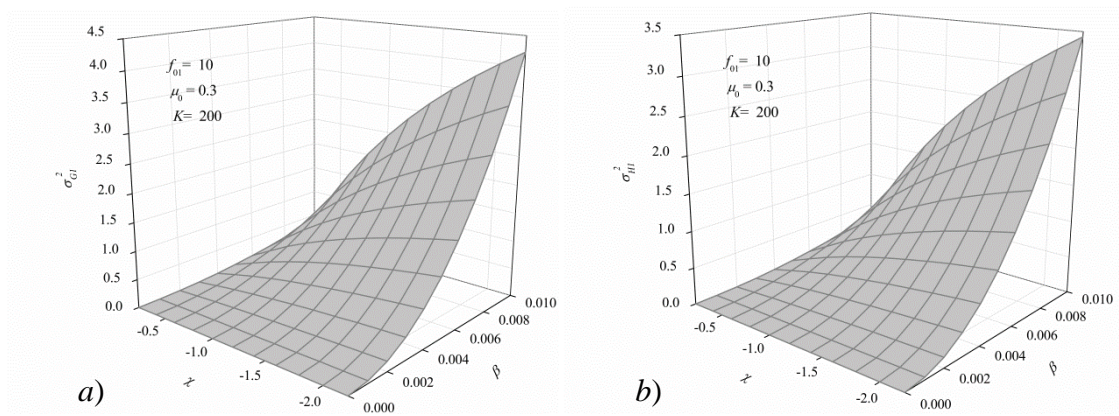
Slika 6.21 Uticaj koeficijenta nanoskaliranja za Helmholtz-ov tip jezgra i determinističkih komponenti aksijalnih sila na oblasti nestabilnosti sistema dvostrukih nanogreda opterećenih Gauss-ovim i harmonijskim procesom



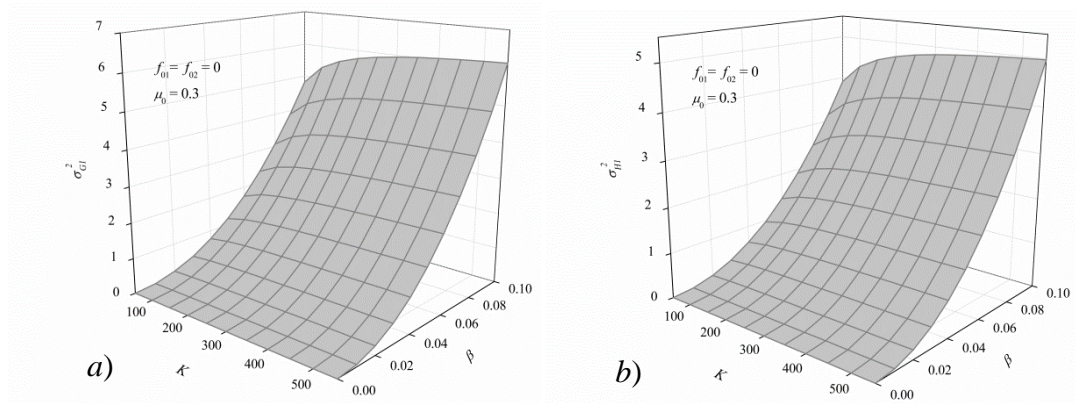
Slika 6.22 Uticaj koeficijenta nanoskaliranja za Helmholtz-ov tip jezgra i krutosti elastičnog sloja na oblasti nestabilnosti sistema dvostrukih nanogreda opterećenih Gauss-ovim i harmonijskim procesom

Na Sl. 6.21 i 6.22 oblasti nestabilnosti sistema dvostrukih nanogreda prikazane su u ravni varijanse σ_1^2 i koeficijenta nanoskaliranja za Helmholtz-ov tip jezgra μ_0 u funkciji redukovane krutosti elastičnog sloja K i determinističkih komponenti aksijalnih opterećenja f_{01} i f_{02} . Za manje koeficijente nanoskaliranja, uticaj krutosti elastičnog sloja na oblasti nestabilnosti je veoma značajan, dok je za veće vrednosti zanemarljiv, kao što je to prikazano na Sl. 6.21. Sl. 6.22 ilustruje promene oblasti nestabilnosti kada su obe determinističke komponente pritisne sile ($f_{01} = 1$), kada su jednake nuli i kada su zatezne sile ($f_{01} = -1$), pri čemu je $f_{02} = 0.5f_{01}$. Za jednake apsolutne vrednosti pritisnih i zateznih sila oblasti stabilnosti se proporcionalno uvećavaju i smanjuju u odnosu na slučaj kada je deterministička sila jednaka nuli. Ova konstatacija važi i za veće vrednosti koeficijenta nanoskaliranja.

Prostorni prikaz uticaja promene odnosa determinističkog opterećenja i koeficijenta nanoskaliranja na oblasti stabilnosti dvostrukih nanogreda dat je na Sl. 6.23 i 6.24.



Slika 6.23 Oblasti nestabilnosti sistema dvostrukih nanogreda za a) Gauss-ov i b) harmonijski proces u funkciji odnosa deterministih komponenti aksijalnih sila



Slika 6.24 Oblasti nestabilnosti sistema dvostrukih nanogreda za a) Gauss-ov i b) harmonijski proces u funkciji krutostsi elastičnog sloja

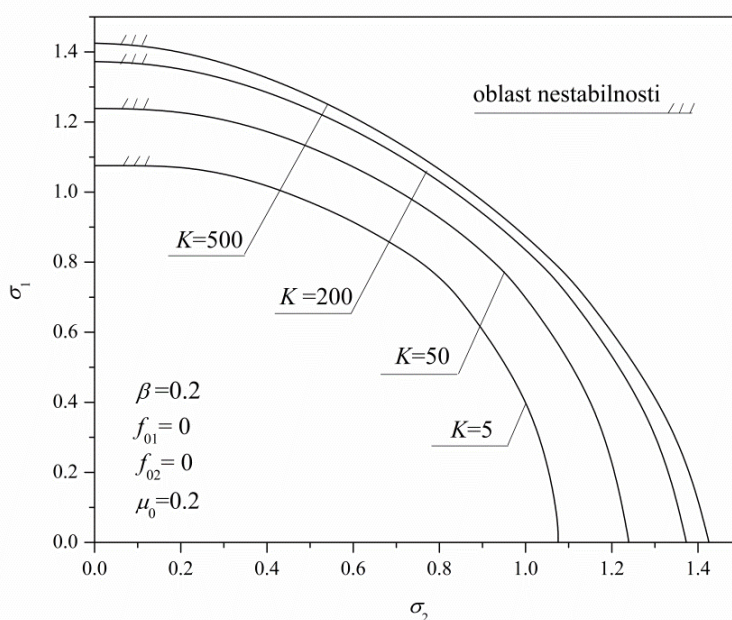
Ista analiza se može izvršiti i u slučaju kada je $f_1(t) = 0$ i $f_{o1} \neq 0$.

Kada su obe grede opterećene na pritisak stohastičkim opterećenjem, razmotrimo slučaj kada procesi $f_1(t)$ i $f_2(t)$ imaju normalnu raspodelu. Dvodimenziona funkcija gustine verovatnoće je u tom slučaju data u Gauss-ovom obliku

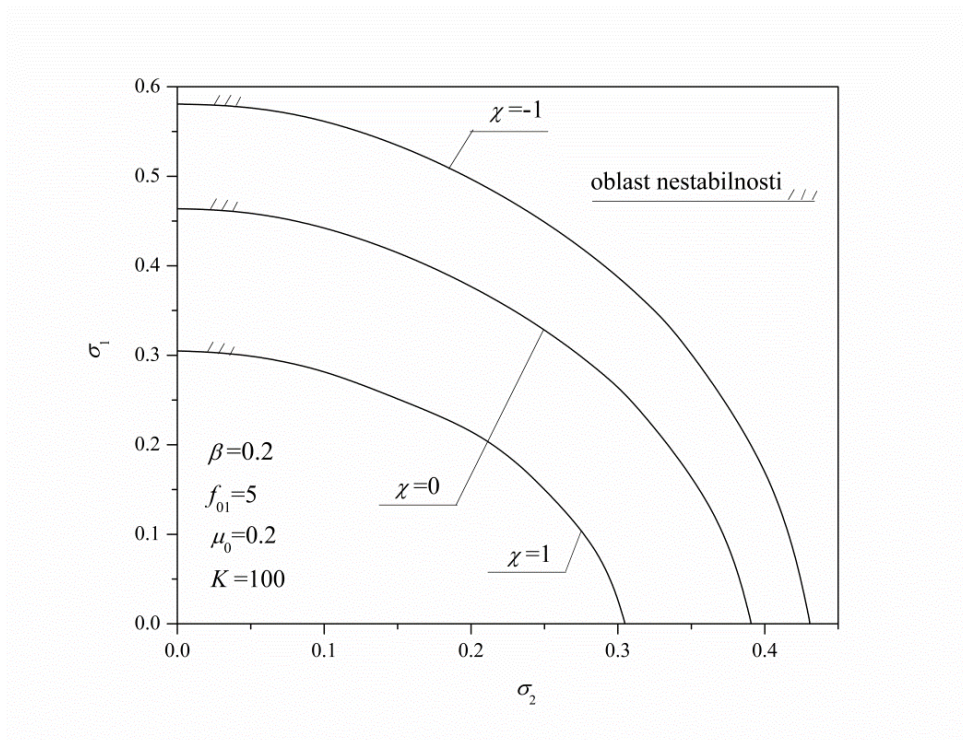
$$p(f_1, f_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left(-\frac{f_1^2}{2\sigma_1^2} - \frac{f_2^2}{2\sigma_2^2}\right), \quad (6.109)$$

gde su σ_1 i σ_2 varijanse procesa $f_1(t)$ i $f_2(t)$.

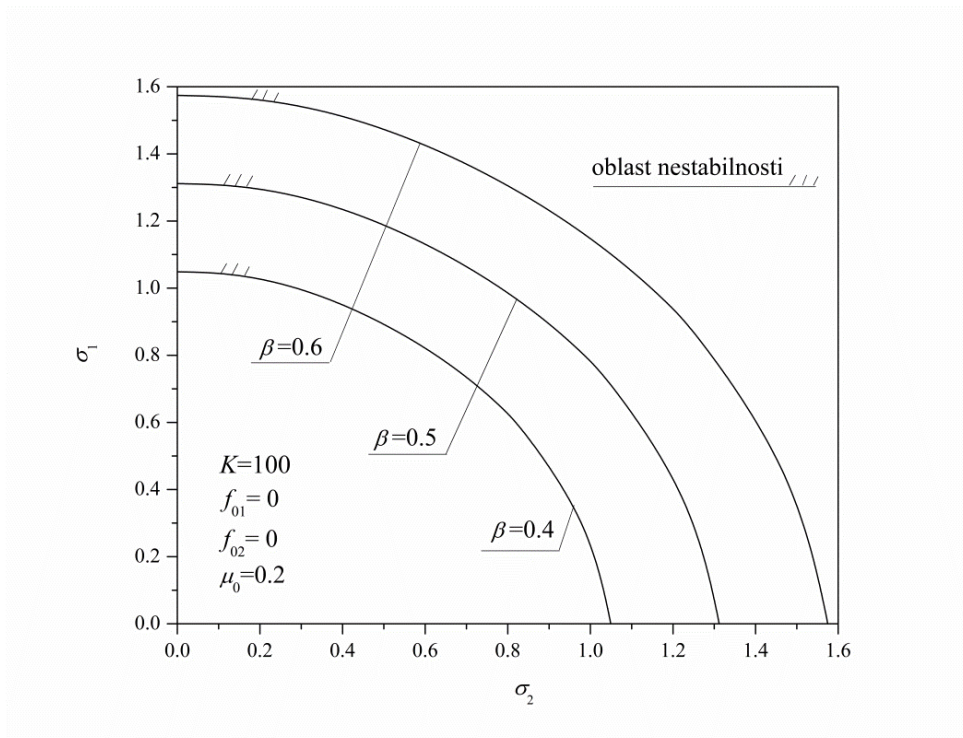
Oblasti nestabilnosti u ravni σ_1, σ_2 su date u funkciji redukovane krutosti elastičnog sloja K (Sl. 6.25), odnosa determinističkih aksijalnih opterećenja χ (Sl. 6.26), koeficijenta prigušenja β (Sl. 6.27) i koeficijenta nanoskaliranja μ_0 za Helmholtz-ov tip jezgra (Sl. 6.28). Na osnovu rezultata prikazanih na Sl. 6.25-6.28 može se zaključiti da porast krutosti elastičnog sloja, determinističkih sila od pritisnih do zateznih i koeficijenta prigušenja, dovodi do smanjenja oblasti nestabilnosti, dok porast koeficijenta nanoskaliranja smanjuje oblasti nestabilnosti.



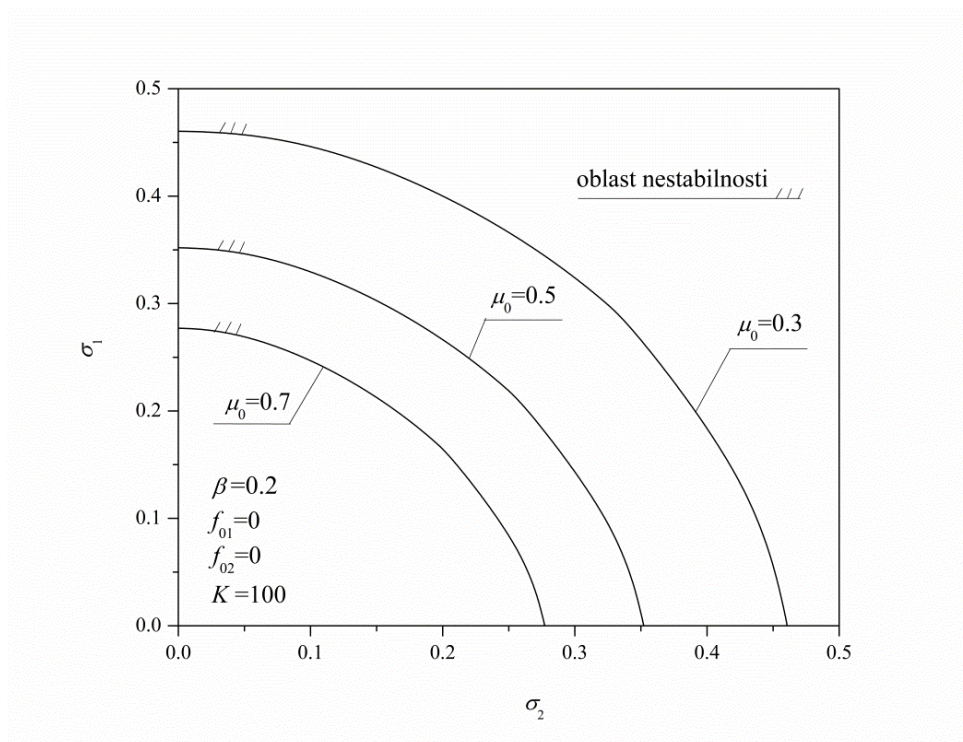
Slika 6.25 Oblasti nestabilnosti za sistem dvostrukih nanogreda pod dejstvom normalno raspodeljenih opterećenja u funkciji krutosti elastičnog sloja K



Slika 6.26 Oblasti nestabilnosti za sistem dvostrukih nanogreda pod dejstvom normalno raspodeljenih opterećenja u funkciji odnosa determinističkih aksijalnih opterećenja



Slika 6.27 Oblasti nestabilnosti za sistem dvostrukih nanogreda pod dejstvom normalno raspodeljenih opterećenja u funkciji koeficijenta viskoznog prigušenja β



Slika 6.28 Oblasti nestabilnosti za sistem dvostrukih nanogreda pod dejstvom normalno raspodeljenih opterećenja u funkciji koeficijenta nanoskaliranja za Helmholtz-ov tip jezgra μ_0

7. STOHAŠTIČKO USREDNJENJE DRUGOG REDA

Metoda stohastičkog usrednjenja ima za cilj da se rešenje stohastičkog dinamičkog sistema aproksimira difuzionim procesom Markova. Rešenje treba da zadovoljava Itô stohastičke diferencijalne jednačine pri čemu vreme korelacije dovoljno brzo teži nuli, odnosno da je poremećaj širokopojasni slučajni proces. Ovako formulisana metoda se naziva usrednjenje prvog reda i pokazala se vrlo korisnom za određivanje statističkih karakteristika odziva dinamičkih sistema sa nelinearnim prigušenjima. Međutim, kada u sistemu postoje određene nelinearnosti vezane za krutost i inerciju, njihovi uticaji se, primenom usrednjenja prvog reda, gube. Ovakav tip nelinearnosti može se prepoznati u odzivu sistema ako se postupak proširi na usrednjenje višeg reda. Na primer, kada su u pitanju kubne nelinearnosti potrebno je i dovoljno koristiti usrednjenje drugog reda. S obzirom da usrednjenje drugog reda zahteva mukotrpa matematička sračunavanja, primenjuje se samo u neophodnim slučajevima.

U cilju prikaza ovog postupka posmatrajmo sistem običnih stohastičkih diferencijalnih jednačina oblika

$$\ddot{x}_i + \omega_i^2 x_i = \varepsilon F_i(x_i, \dot{x}_i, \xi(t)), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (7.1)$$

gde je $\xi(t)$ stacionaran širokopojasni slučajni proces za koji se može uvesti norma kao njegova mera.

Pretpostavkom rešenja sistema (7.1) uvođenjem novih promenljivih a_i , x_i , $i = 1, 2, \dots, n$ u obliku

$$x_i = a_i \cos \phi_i, \quad \dot{x}_i = -a_i \omega_i \sin \phi_i, \quad \phi_i = \omega_i t + \varphi_i, \quad (7.2)$$

dobija se $2n$ diferencijalnih jednačina prvog reda po amplitudama i fazama

$$\begin{aligned} \dot{a}_i &= -\frac{\varepsilon}{\omega_i} F_i \{a_i \cos \phi_i, -a_i \omega_i \sin \phi_i, \xi(t)\} \sin \phi_i, \\ \dot{\varphi}_i &= -\frac{\varepsilon}{a_i \omega_i} F_i \{a_i \cos \phi_i, -a_i \omega_i \sin \phi_i, \xi(t)\} \cos \phi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Radi pojednostavljenja, ograničimo se na slučaj sistema sa jednim stepenom slobode ($n = 1$). Razvijmo desne strane diferencijalnih jednačina (7.3) u stepene redove po stepenima malog parametra ε

$$\begin{aligned}\dot{a} &= \varepsilon G(a, \phi, \xi(t)) = \varepsilon G_1(a, \phi, \xi(t)) + \varepsilon^2 G_2(a, \phi, \xi(t)) + \varepsilon^3 G_3(a, \phi, \xi(t)) + \dots, \\ \dot{\phi} &= \varepsilon H(a, \phi, \xi(t)) = \varepsilon H_1(a, \phi, \xi(t)) + \varepsilon^2 H_2(a, \phi, \xi(t)) + \varepsilon^3 H_3(a, \phi, \xi(t)) + \dots.\end{aligned}\quad (7.4)$$

Diferencijalne jednačine (7.4) se u literaturi nazivaju standardne asimptotske jednačine.

U sledećem koraku uvodimo transformaciju promenljivih radi definisanja ne-oscilatorne amplitude a^* , faznog ugla ϕ^* i faznog pomeranja φ^*

$$\begin{aligned}a &= a^* + \varepsilon u(a^*, \phi^*), \\ \varphi &= \varphi^* + \varepsilon v(a^*, \phi^*),\end{aligned}\quad (7.5)$$

pri čemu a^* i φ^* moraju zadovoljiti novi sistem diferencijalnih jednačina

$$\begin{aligned}\dot{a}^* &= \varepsilon G^*(a^*, \varphi^*, \xi(t)) = \varepsilon G_1^*(a^*, \varphi^*, \xi(t)) + \varepsilon^2 G_2^*(a^*, \varphi^*, \xi(t)) + \varepsilon^3 G_3^*(a^*, \varphi^*, \xi(t)) + \dots, \\ \dot{\varphi}^* &= \varepsilon H^*(a^*, \varphi^*, \xi(t)) = \varepsilon H_1^*(a^*, \varphi^*, \xi(t)) + \varepsilon^2 H_2^*(a^*, \varphi^*, \xi(t)) + \varepsilon^3 H_3^*(a^*, \varphi^*, \xi(t)) + \dots.\end{aligned}\quad (7.6)$$

Relacije (7.6) se nazivaju ne-oscilatorne asimptotske jednačine i imaju sličan oblik kao i relacije (7.5). Oscilatorni članovi u relacijama (7.5) su zamenjeni funkcijama u i v . Ti oscilatorni članovi se takođe razvijaju u stepene redove po malom parametru ε

$$\begin{aligned}u(a^*, \phi^*) &= u_1(a^*, \phi^*) + \varepsilon u_2(a^*, \phi^*) + \varepsilon^2 u_3(a^*, \phi^*) + \dots, \\ v(a^*, \phi^*) &= v_1(a^*, \phi^*) + \varepsilon v_2(a^*, \phi^*) + \varepsilon^2 v_3(a^*, \phi^*) + \dots.\end{aligned}\quad (7.7)$$

U cilju uprošćenja analize, postupak se razdvaja na dva koraka. U prvom koraku se ne uključuju oscilatorni članovi koji se odnose na slučajnu pobudu, dok se drugi korak bavi uticajem oscilatornih članova. Diferenciranjem relacija (7.5) dobijamo

$$\begin{aligned}\dot{a} &= \dot{a}^* + \varepsilon \left\{ \dot{a}^* \frac{\partial u}{\partial a^*} + (\omega + \dot{\phi}^*) \frac{\partial u}{\partial \phi^*} \right\}, \\ \dot{\phi} &= \dot{\phi}^* + \varepsilon \left\{ \dot{a}^* \frac{\partial v}{\partial a^*} + (\omega + \dot{\phi}^*) \frac{\partial v}{\partial \phi^*} \right\}.\end{aligned}\quad (7.8)$$

Zamenom relacija (7.6) u (7.8), za slučaj kada je $\xi(t) = 0$, dobija se

$$\begin{aligned} \dot{a} = \varepsilon G(a^*, \varphi^*, 0) + \varepsilon \left\{ \varepsilon G^* \frac{\partial u}{\partial a^*} + (\omega + \varepsilon H^*) \frac{\partial u}{\partial \phi^*} \right\} = \varepsilon G_1^* + \varepsilon^2 G_2^* + \dots + \\ + \varepsilon \left\{ \varepsilon (\varepsilon G_1^* + \varepsilon^2 G_2^* + \dots) \frac{\partial (u_1 + \varepsilon u_2 + \dots)}{\partial a^*} + [\omega + \varepsilon (\varepsilon H_1^* + \varepsilon^2 H_2^* + \dots)] \frac{\partial (u_1 + \varepsilon u_2 + \dots)}{\partial \phi^*} \right\}, \end{aligned} \quad (7.9)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} = \varepsilon H(a^*, \varphi^*, 0) + \varepsilon \left\{ \varepsilon G^* \frac{\partial v}{\partial a^*} + (\omega + \varepsilon H^*) \frac{\partial v}{\partial \phi^*} \right\} = \varepsilon H_1^* + \varepsilon^2 H_2^* + \dots + \\ + \varepsilon \left\{ \varepsilon (\varepsilon G_1^* + \varepsilon^2 G_2^* + \dots) \frac{\partial (v_1 + \varepsilon v_2 + \dots)}{\partial a^*} + [\omega + \varepsilon (\varepsilon H_1^* + \varepsilon^2 H_2^* + \dots)] \frac{\partial (v_1 + \varepsilon v_2 + \dots)}{\partial \phi^*} \right\}. \end{aligned}$$

Paralelno sa razvojem jednačina (7.9) u stepene redove po stepenima malog parametra ε , razvijamo polazne jednačine (7.4) u Tejlorov red, za slučaj kada je $\xi(t) = 0$. Tada dobijamo sledeći sistem diferencijalnih jednačina

$$\dot{a} = \varepsilon G(a^* + \varepsilon u, \phi^* + \varepsilon v, 0) = \varepsilon \left\{ G^*(a^*, \phi^*, 0) + \varepsilon u \left. \frac{\partial G}{\partial a} \right|^* + \varepsilon v \left. \frac{\partial G}{\partial \phi} \right|^* + \dots \right\}, \quad (7.10)$$

$$\dot{\varphi} = \varepsilon H(a^* + \varepsilon u, \phi^* + \varepsilon v, 0) = \varepsilon \left\{ H^*(a^*, \phi^*, 0) + \varepsilon u \left. \frac{\partial H}{\partial a} \right|^* + \varepsilon v \left. \frac{\partial H}{\partial \phi} \right|^* + \dots \right\}.$$

Ako izjednačimo desne strane jednačina (7.9) i (7.10) izjednačavajući koeficijente uz iste stepene malog parametra ε , dobijaju se sledeće relacije:

1. Jednačine prvog reda (koeficijenti uz ε) su

$$\begin{aligned} G_1^*(a^*, \varphi^*, 0) + \omega \frac{\partial u_1(a^*, \varphi^*)}{\partial \phi^*} = G_1(a^*, \varphi^*, 0), \\ H_1^*(a^*, \varphi^*, 0) + \omega \frac{\partial v_1(a^*, \varphi^*)}{\partial \phi^*} = H_1(a^*, \varphi^*, 0). \end{aligned} \quad (7.11)$$

Rešavanjem ovih jednačina možemo odrediti nepoznate funkcije $u_1(a^*, \varphi^*)$ i $v_1(a^*, \varphi^*)$.

2. Jednačine drugog reda (koeficijenti uz ε^2) su

$$\begin{aligned} G_2^* + \omega \frac{\partial u_2}{\partial \phi^*} + G_1^* \frac{\partial u_1}{\partial a^*} + H_1^* \frac{\partial u_1}{\partial \phi^*} = G_2|^* + u_1 \left. \frac{\partial G_1}{\partial a} \right|^* + v_1 \left. \frac{\partial G_1}{\partial \phi} \right|^*, \\ H_2^* + \omega \frac{\partial v_2}{\partial \phi^*} + G_1^* \frac{\partial v_1}{\partial a^*} + H_1^* \frac{\partial v_1}{\partial \phi^*} = H_2|^* + u_1 \left. \frac{\partial H_1}{\partial a} \right|^* + v_1 \left. \frac{\partial H_1}{\partial \phi} \right|^*. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Rešavanjem ovih jednačina možemo odrediti nepoznate funkcije $u_2(a^*, \phi^*)$ i $v_2(a^*, \phi^*)$.

U jednačinama (7.11) i (7.12) funkcije $G_i^*(a^*, \varphi^*, 0)$ i $H_i^*(a^*, \varphi^*, 0)$ su izjednačene sa ne-oscilatornim članovima. Diferencijalni članovi tipa $\omega \frac{\partial u_i}{\partial \phi^*}$ i $\omega \frac{\partial v_i}{\partial \phi^*}$ su izjednačeni sa oscilatornim članovima u svakoj od jednačina. Oscilatorne funkcije $u_1(a^*, \phi^*)$ i $v_1(a^*, \phi^*)$ se dobijaju integracijom izraza $\frac{\partial u_1}{\partial \phi^*}$ i $\frac{\partial v_1}{\partial \phi^*}$. Prema izrazima (7.11) sledi da je

$$G_1^*(a^*, \varphi^*, 0) = \text{ne-oscilatorni član funkcije } G_1(a^*, \phi^*, 0), \quad (7.13)$$

$$H_1^*(a^*, \varphi^*, 0) = \text{ne-oscilatorni član funkcije } H_1(a^*, \phi^*, 0),$$

$$u_1(a^*, \phi^*) = \frac{1}{\Omega} \int \{\text{oscilatorni članovi funkcije } G_1(a^*, \phi^*, 0)\} d\phi^* + g_1(a^*), \quad (7.14)$$

$$v_1(a^*, \phi^*) = \frac{1}{\Omega} \int \{\text{oscilatorni članovi funkcije } H_1(a^*, \phi^*, 0)\} d\phi^* + h_1(a^*),$$

gde su $g_1(a^*)$ i $h_1(a^*)$ integracione konstante koje se određuju tako da ne-oscilatorna amplituda bude jednaka punoj amplitudi odziva osnovnog harmonika $\cos \phi^*$. Ovo se obezbeđuje zamenom oscilatornih funkcija $u_1(a^*, \phi^*)$ i $v_1(a^*, \phi^*)$ u jednačine (7.2) ukupnog odziva sistema

$$\begin{aligned} x(t) &= a(t) \cos \phi(t) = (a^* + \varepsilon u_1 + \dots) \cos(\phi^* + \varepsilon v_1 + \dots) \cong \\ &\cong a^* \cos \phi^* + \varepsilon (u_1 \cos \phi^* - v_1 a^* \sin \phi^* \dots) + \dots \end{aligned} \quad (7.15)$$

Ne-oscilatorne funkcije višeg reda $G_i^*(a^*, \varphi^*, 0)$ i $H_i^*(a^*, \varphi^*, 0)$ i oscilatorne komponente višeg reda $u_i(a^*, \phi^*)$ i $v_i(a^*, \phi^*)$, $i = 2, 3, \dots, n$, se određuju na analogan način. Može se uočiti da izrazi na levoj strani relacija (7.12) zavise od prethodno sračunatih veličina iz (7.11). Članovi na desnoj strani jednačina (7.12) su određeni na osnovu koeficijenata standardnih asimptotskih jednačina (7.4) gde je zamenjeno $\xi(t) = 0$.

Izloženi postupak kada je $\xi(t) = 0$ predstavlja prvi korak. U drugom koraku uzima se u obzir uticaj članova pobude. Ovo se izvodi tako što se zameni transformacija (7.5) u članove pobude i svaki član se razvije u stepeni red po malom parametru ε . Dobijene komponente pobude se pridodaju odgovarajućim komponentama funkcije $G_i^*(a^*, \varphi^*, 0)$ i $H_i^*(a^*, \varphi^*, 0)$, uz iste stepene po ε .

U brojnim istraživanjima stabilnosti diskretnih i kontinualnih stohastičkih sistema koeficijent prigušenja, bilo spoljašnjeg ili unutrašnjeg, je bila konstantna veličina. U realnosti, koeficijent prigušenja je promenljiva veličina, odnosno u opštem slučaju to je vremenski zavisna slučajna funkcija. Za diskretne sisteme sa vremenski promenljivim viskoznom prigušenjem Ariaratnam i Ly [68] i Ariaratnam i Xie [69] su odredili granice skoro sigurne stabilnosti kada su poznate statističke karakteristike spoljašnjeg procesa i procesa koeficijenta viskoznog prigušenja.

U cilju konkretnog prikaza stohastičkog usrednjenja drugog reda razmotrićemo sledeći primer.

Posmatrajmo kontinualni dinamički sistem koji zauzima ograničen prostor Ω sa definisanom granicom C u jednodimenzionalnom, dvodimenzionalnom ili trodimenzionalnom prostoru $\{\mathbf{x}\}$. Označimo sa $w(\mathbf{x}, t)$ pomeranje sistema u odnosu na ravnotežno stanje, koje ćemo, radi jednostavnosti, uzeti da je $w(\mathbf{x}, t) \equiv 0$.

Neka je dinamičko ponašanje sistema opisano linearnom parcijalnom diferencijalnom jednačinom oblika

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2[\alpha\alpha + \sqrt{\varepsilon}g(t)]\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + [f_0 + \sqrt{\varepsilon}f(t)]\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0. \quad (7.16)$$

Vrednosti α i f_0 u jednačini (7.16) su pozitivne konstante, a funkcije $g(t)$ i $f(t)$ predstavljaju širokopojasne stacionarne procese sa nultom srednjom vrednošću. Stohastička diferencijalna jednačina (7.16) opisuje transverzalne oscilacije tanke elastične grede pritisnute vremenski promenljivim aksijalnim silama, koja se nalazi u polju spoljašnjeg viskoznog prigušenja. Greda je slobodno oslonjena na svojim krajevima, pa su homogeni vremenski nezavisni granični uslovi oblika

$$\left. \begin{array}{l} z = 0 \\ z = 1 \end{array} \right\}, \quad w(z, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 w(z, t)}{\partial z^2} = 0. \quad (7.17)$$

Radi diskretizacije diferencijalne jednačine (7.16) razmotrimo transformaciju u prvom modu pretpostavljajući rešenje u obliku

$$w(z, t) = q(t) \sin \pi z. \quad (7.18)$$

Zamenom pretpostavljenog rešenja (7.18) u (7.16) dobija se stohastička diferencijalna jednačina drugog reda oblika

$$\ddot{q}(t) + 2\alpha\alpha \dot{q}(t) + \omega_0^2 [1 - \sqrt{\varepsilon}\xi_1(t)]q(t) + \sqrt{\varepsilon}\omega_0\xi_2(t)\dot{q}(t) = 0, \quad (7.19)$$

gde je $\omega_0^2 = \pi^4 - \pi^2 f_0$, a funkcije $\xi_1(t)$ i $\xi_2(t)$

$$\xi_1(t) = \frac{\pi^2}{\omega_0^2} f(t), \quad \xi_2(t) = \frac{2}{\omega_0} g(t), \quad (7.20)$$

su korelirani širokopojasni stacionarni stohastički procesi sa nulnim srednjim vrednostima.

7.1 Stohastičko usrednjenje prvog reda

U cilju korišćenja metode stohastičkog usrednjenja zamenom novim promenljivim $a(t)$ i $\Phi(t)$ primenjuje se sledeća transformacija

$$q(t) = a(t) \cos \Phi(t), \quad \dot{q}(t) = -a(t)\omega_0 \sin \Phi(t) \dot{\Phi}(t), \quad (7.21)$$

gde je $\Phi(t) = \omega_0 t + \varphi(t)$.

Iz jednačine (7.21) se dobija

$$\dot{a}(t) \cos \Phi(t) - a(t) \dot{\Phi}(t) \sin \Phi(t) = 0, \quad (7.22)$$

Zamenom (7.21) u (7.19) dobija se

$$\begin{aligned} \dot{a}(t) \sin \Phi(t) + a(t) \dot{\Phi}(t) \cos \Phi(t) = & -2\varepsilon\alpha a(t) \sin \Phi(t) - \\ & -\sqrt{\varepsilon}\omega_0 \xi_1(t) a(t) \cos \Phi(t) - \sqrt{\varepsilon}\omega_0 \xi_2(t) a(t) \sin \Phi(t). \end{aligned} \quad (7.23)$$

Rešavanjem diferencijalnih jednačina (7.22) i (7.23), $P(t)$ i $\varphi(t)$ se mogu rešiti i napisati u standardnom obliku

$$\dot{P}(t) = \varepsilon F_1^{(1)}(P, \varphi, t) + \sqrt{\varepsilon} [F_{11}^{(1)}(P, \varphi, \xi_1, t) + F_{12}^{(1)}(P, \varphi, \xi_2, t)], \quad (7.24)$$

$$\dot{\varphi}(t) = \varepsilon F_2^{(1)}(P, \varphi, t) + \sqrt{\varepsilon} [F_{21}^{(1)}(P, \varphi, \xi_1, t) + F_{22}^{(1)}(P, \varphi, \xi_2, t)],$$

gde su

$$P(t) = a(t)^p,$$

$$F_1^{(1)}(P, \varphi, t) = -2\alpha p P \sin^2 \Phi, \quad F_2^{(1)}(\varphi, t) = -\alpha \sin 2\Phi,$$

$$F_{11}^{(1)}(P, \varphi, \xi_1, t) = -\frac{\omega_0 p P}{2} \xi_1 \sin 2\Phi, \quad F_{12}^{(1)}(P, \varphi, \xi_2, t) = -\omega_0 p P \xi_2 \sin^2 \Phi, \quad (7.25)$$

$$F_{21}^{(1)}(\varphi, \xi_1, t) = -\omega_0 \xi_1 \cos^2 \Phi, \quad F_{22}^{(1)}(\varphi, \xi_2, t) = -\frac{\omega_0}{2} \xi_2 \sin 2\Phi.$$

Pretpostavimo da su $\xi_1(t)$ i $\xi_2(t)$ stacionarni širokopojasni slučajni procesi sa nultom srednjom vrednošću i korelacionom matricom $[K_{ij}(t)]$, $i, j = 1, 2$. Ako su koeficijenti u jednačinama (7.24) dovoljno glatki procesi, $\xi_1(t)$ i $\xi_2(t)$ imaju dovoljno dobre zajedničke osobine, a njihova korelaciona matrica $[K_{ij}(t)]$ dovoljno brzo opada kada $\tau \rightarrow \infty$, tada postoji granični difuzioni proces Markova kada $\varepsilon \rightarrow 0$, što se može opisati poznatim Itô stohastičkim diferencijalnim jednačinama

$$\begin{aligned} d\bar{P}(t) &= \varepsilon \bar{m}_p + \sqrt{\varepsilon} \bar{\sigma}_{11} dB_1(t) + \sqrt{\varepsilon} \bar{\sigma}_{12} dB_2(t), \\ d\bar{\varphi}(t) &= \varepsilon \bar{m}_\varphi + \sqrt{\varepsilon} \bar{\sigma}_{21} dB_1(t) + \sqrt{\varepsilon} \bar{\sigma}_{22} dB_2(t), \end{aligned} \quad (7.26)$$

gde su $B_1(t)$ i $B_2(t)$ dva procesa Brown-ovog kretanja. Primenom operacije usrednjenja, $P(t)$ i $\varphi(t)$ se direktno zamenjuju sa $\bar{P}(t)$ i $\bar{\varphi}(t)$. Elementi vektora prenosa \bar{m}_p , \bar{m}_φ i difuzione matrice $\mathbf{b}(\bar{P}, \bar{\varphi}) = \boldsymbol{\sigma}(\bar{P}, \bar{\varphi}) \boldsymbol{\sigma}^T(\bar{P}, \bar{\varphi})$ dati su u skladu sa graničnom teoremom Khasminskii-og sledećim izrazima

$$\begin{aligned} \bar{m}_p &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ F_1^{(1)}(P, \varphi, t) + \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 \int_{-\infty}^0 \left[\frac{\partial F_{1k}^{(1)}(P, \varphi, \xi_k(t), t)}{\partial P} F_{1l}^{(1)}(P, \varphi, \xi_l(t+\tau), t+\tau) K_{kl}(\tau) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial F_{1k}^{(1)}(P, \varphi, \xi_k(t), t)}{\partial \varphi} F_{2l}^{(1)}(P, \varphi, \xi_l(t+\tau), t+\tau) K_{kl}(\tau) \right] d\tau \right\} dt, \\ \bar{m}_\varphi &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ F_2^{(1)}(P, \varphi, t) + \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 \int_{-\infty}^0 \left[\frac{\partial F_{2k}^{(1)}(P, \varphi, \xi_k(t), t)}{\partial P} F_{1l}^{(1)}(P, \varphi, \xi_l(t+\tau), t+\tau) K_{kl}(\tau) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial F_{2k}^{(1)}(P, \varphi, \xi_k(t), t)}{\partial \varphi} F_{2l}^{(1)}(P, \varphi, \xi_l(t+\tau), t+\tau) K_{kl}(\tau) \right] d\tau \right\} dt, \quad (7.27) \\ b_{ij} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left\{ \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 F_{ik}^{(1)}(P, \varphi, \xi_k(t), t) F_{jl}^{(1)}(P, \varphi, \xi_l(t+\tau), t+\tau) K_{kj}(\tau) \right\} dt, \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\bar{P}, \bar{\varphi}) = [\bar{\sigma}_{ij}], \quad i, j = 1, 2.$$

Tako, zamenom relacija (7.25) u sistem (7.27) i nakon primene granične teoreme Khasminskii, dobijaju se sledeći koeficijenti prenosa i difuzije \bar{m}_p , \bar{m}_φ , b_{11} , b_{12} , b_{21} i b_{22}

$$\bar{m}_p = -p\bar{P}\alpha + \bar{P}\omega_0^2 \left\{ \frac{p^2}{8} S_2(0) + \frac{p(p+2)}{16} [S_1(2\omega_0) + S_2(2\omega_0) - 2\Psi_{12}(2\omega_0)] \right\},$$

$$\bar{m}_\varphi = \frac{\omega_0^2}{8} [\Psi_1(2\omega_0) + \Psi_2(2\omega_0) - 2S_{12}(2\omega_0)], \quad b_{12} = b_{21} = \frac{\bar{P}\omega_0^2 p}{4} S_{12}(0), \quad (7.28)$$

$$b_{11} = \bar{P}^2 p^2 b_{22}, \quad b_{22} = \frac{\omega_0^2}{8} [S_1(2\omega_0) + S_2(2\omega_0) + 2S_2(0) - 2\Psi_{12}(2\omega_0)],$$

gde su $S(\omega_0)$ i $\Psi(\omega_0)$ sinusne i kosinusne spektralne gustine procesa $\xi_1(t)$ i $\xi_2(t)$ date relacijama

$$\begin{aligned} S_1(\omega_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} K_{11}(\tau) \cos \omega_0 \tau d\tau, & S_2(\omega_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} K_{22}(\tau) \cos \omega_0 \tau d\tau, \\ S_{12}(\omega_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} K_{12}(\tau) \cos \omega_0 \tau d\tau, & \Psi_{12}(\omega_0) &= - \int_{-\infty}^{\infty} K_{12}(\tau) \sin \omega_0 \tau d\tau. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Očigledno je da promenljiva \bar{P} ne zavisi od $\bar{\varphi}$, pa se prva jednačina sistema (7.26) može rešiti nezavisno. Na osnovu osobine Brown-ovog procesa jasno je da su matematička očekivanja drugog i trećeg člana u jednačini (7.26) jednaka nuli.

Određivanjem matematičkog očekivanja obe strane prve jednačine u relacijama (7.26) dobija se

$$dE[\bar{P}(t)] = \varepsilon p \langle -\alpha + \omega_0^2 \left\{ \frac{p}{8} S_2(0) + \frac{p+2}{16} [S_1(2\omega_0) + S_2(2\omega_0) - 2\Psi_{12}(2\omega_0)] \right\} \rangle E[\bar{P}] dt. \quad (7.30)$$

Iz izraza (7.30), a na osnovu njegove definicije, moment eksponenta Ljapunova za usrednjeni sistem je

$$\Lambda(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log E[\bar{P}(t)]}{t} = \varepsilon p \langle -\alpha + \omega_0^2 \left\{ \frac{p}{8} S_2(0) + \frac{p+2}{16} [S_1(2\omega_0) + S_2(2\omega_0) - 2\Psi_{12}(2\omega_0)] \right\} \rangle, \quad (7.31)$$

a eksponent Ljapunova ima oblik

$$\lambda = \left. \frac{d\Lambda(p)}{dp} \right|_{p=0} = \varepsilon \left\{ -\alpha + \frac{\omega_0^2}{8} [S_1(2\omega_0) + S_2(2\omega_0) - 2\Psi_{12}(2\omega_0)] \right\}. \quad (7.32)$$

Granice skoro sigurne stabilnosti i stabilnosti p -tog momenta određene su sa $\lambda = 0$ i $\Lambda(p) = 0$, redom.

7.2 Stohastičko usrednjenje drugog reda

U cilju dobijanja bolje aproksimacije može se primeniti stohastičko usrednjenje drugog reda i dobijeni rezultati porediti sa rezultatima dobijenim usrednjenjem prvog reda.

Funkcije $F_1^{(1)}$ i $F_2^{(1)}$ sadrže proizvode sinusnih i kosinusnih funkcija sa faznim uglom $\Phi(t)$ pa predstavljaju oscilatorne članove. Takve funkcije sa višestrukim faznim uglom predstavljaju izrazite oscilacije ili više harmonike u rešenju za sporo promenljivu amplitudu i fazno pomeranje. Kada se proučava samo stacionarni odziv, oscilacije sa višim frekvencijama imaju lokalizovano dejstvo i ne utiču značajnije na usrednjeno ponašanje sistema u dugom vremenskom intervalu. Prema tome, oscilatorni efekti se mogu eliminisati, a diferencijalne jednačine kretanja uprostiti uvođenjem transformacija

$$\begin{aligned} P(t) &= \bar{P}(t) + \varepsilon P_1(\bar{P}, \bar{\varphi}, t), \\ \varphi(t) &= \bar{\varphi}(t) + \varepsilon \varphi_1(\bar{P}, \bar{\varphi}, t), \end{aligned} \quad (7.33)$$

gde su $\bar{P}(t)$ i $\bar{\varphi}(t)$ veličine dobijene usrednjenjem prvog reda. Diferenciranjem jednačine (7.33) u odnosu na vreme t dobija se

$$\begin{Bmatrix} \dot{P}(t) \\ \dot{\varphi}(t) \end{Bmatrix} = A \begin{Bmatrix} \dot{\bar{P}} \\ \dot{\bar{\varphi}} \end{Bmatrix} + \varepsilon \begin{Bmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial t} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \end{Bmatrix}, \quad (7.34)$$

gde je

$$A = \begin{bmatrix} 1 + \varepsilon \frac{\partial P_1}{\partial \bar{P}} & \varepsilon \frac{\partial P_1}{\partial \bar{\varphi}} \\ \varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial \bar{P}} & 1 + \varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial \bar{\varphi}} \end{bmatrix}. \quad (7.35)$$

Lako se određuje inverzna matrica

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 - \varepsilon \frac{\partial P_1}{\partial \bar{P}} & -\varepsilon \frac{\partial P_1}{\partial \bar{\varphi}} \\ -\varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial \bar{P}} & 1 - \varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial \bar{\varphi}} \end{bmatrix}. \quad (7.36)$$

Zamenom jednačina (7.24) u jednačine (7.34) dobija se

$$\begin{Bmatrix} \dot{\bar{P}} \\ \dot{\bar{\varphi}} \end{Bmatrix} = \varepsilon A^{-1} \begin{Bmatrix} F_1^{(1)} - \frac{\partial P_1}{\partial t} \\ F_2^{(1)} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \end{Bmatrix} + \sqrt{\varepsilon} A^{-1} \begin{Bmatrix} F_{11}^{(1)} + F_{12}^{(1)} \\ F_{21}^{(1)} + F_{22}^{(1)} \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \varepsilon \left\{ \begin{array}{c} F_1^{(1)} - \frac{\partial P_1}{\partial t} \\ F_2^{(1)} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \end{array} \right\} + \varepsilon^2 \left\{ \begin{array}{c} -\frac{\partial P_1}{\partial P} \left(F_1^{(1)} - \frac{\partial P_1}{\partial t} \right) - \frac{\partial P_1}{\partial \varphi} \left(F_2^{(1)} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \right) \\ -\frac{\partial \varphi_1}{\partial P} \left(F_1^{(1)} - \frac{\partial P_1}{\partial t} \right) - \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi} \left(F_2^{(1)} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \right) \end{array} \right\} + \\
&+ \sqrt{\varepsilon} \left\{ \begin{array}{c} F_{11}^{(1)} + F_{12}^{(1)} \\ F_{21}^{(1)} + F_{22}^{(1)} \end{array} \right\} + \varepsilon^{\frac{3}{2}} \left\{ \begin{array}{c} -\frac{\partial P_1}{\partial P} (F_{11}^{(1)} + F_{12}^{(1)}) - \frac{\partial P_1}{\partial \varphi} (F_{21}^{(1)} + F_{22}^{(1)}) \\ -\frac{\partial \varphi_1}{\partial P} (F_{11}^{(1)} + F_{12}^{(1)}) - \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi} (F_{21}^{(1)} + F_{22}^{(1)}) \end{array} \right\}, \tag{7.37}
\end{aligned}$$

odnosno kraće

$$\left\{ \begin{array}{c} \dot{\bar{P}} \\ \dot{\bar{\varphi}} \end{array} \right\} = \varepsilon \left\{ \begin{array}{c} F_1^* \\ F_2^* \end{array} \right\} + \varepsilon^2 \left\{ \begin{array}{c} F_1^{**} \\ F_2^{**} \end{array} \right\} + \sqrt{\varepsilon} \left\{ \begin{array}{c} F_{11}^* + F_{12}^* \\ F_{21}^* + F_{22}^* \end{array} \right\} + \varepsilon^{\frac{3}{2}} \left\{ \begin{array}{c} F_{11}^{**} + F_{12}^{**} \\ F_{21}^{**} + F_{22}^{**} \end{array} \right\}, \tag{7.38}$$

gde je

$$F_1^* = -2\alpha p \bar{P} \sin^2 \bar{\Phi} - \frac{\partial P_1}{\partial t}, \quad F_2^* = -\alpha \sin 2\bar{\Phi} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}, \quad \bar{\Phi}(t) = \omega_0 t + \bar{\varphi}(t),$$

$$F_1^{**} = -\frac{\partial P_1}{\partial P} F_1^* - \frac{\partial P_1}{\partial \varphi} F_2^* - 2\alpha p \bar{P} \varphi_1 \sin 2\bar{\Phi} - 2\alpha p P_1 \sin^2 \bar{\Phi},$$

$$F_2^{**} = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial P} F_1^* - \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi} F_2^* - 2\alpha \varphi_1 \cos 2\bar{\Phi},$$

$$F_{11}^* = -\frac{\omega_0 p P}{2} \xi_1 \sin 2\bar{\Phi}, \quad F_{12}^* = -\omega_0 p P \xi_2 \sin^2 \bar{\Phi},$$

$$F_{21}^* = -\omega_0 \xi_1 \cos^2 \bar{\Phi}, \quad F_{22}^* = -\frac{\omega_0}{2} \xi_2 \sin 2\bar{\Phi}, \tag{7.39}$$

$$F_{11}^{**} = -\frac{\partial P_1}{\partial P} F_{11}^* - \frac{\partial P_1}{\partial \varphi} F_{21}^* - (\omega_0 p \bar{P} \varphi_1 \cos 2\bar{\Phi} + \frac{\omega_0 p P_1}{2} \sin 2\bar{\Phi}) \xi_1,$$

$$F_{12}^{**} = -\frac{\partial P_1}{\partial P} F_{12}^* - \frac{\partial P_1}{\partial \varphi} F_{22}^* - (\omega_0 p \bar{P} \varphi_1 \sin 2\bar{\Phi} + \omega_0 p P_1 \sin^2 \bar{\Phi}) \xi_2,$$

$$F_{21}^{**} = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial P} F_{11}^* - \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi} F_{21}^* + \omega_0 \varphi_1 \sin 2\bar{\Phi} \xi_1, \quad F_{22}^{**} = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial P} F_{12}^* - \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi} F_{22}^* - \omega_0 \varphi_1 \cos 2\bar{\Phi} \xi_2.$$

Član prvog reda u prvoj jednačini sistema (7.38), označen sa F_1^* , nakon usrednjenja treba da bude jednak rezultatu dobijenom usrednjenjem prvog reda. Stavljanjem da je F_1^* usrednjena vrednost determinističkog uslova u P u prvoj jednačini sistema (7.24)

$$F_1^* = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F_1^{(1)} dt, \quad (7.40)$$

dobija se

$$P_1 = \frac{\alpha p \bar{P}}{2\omega_0} \sin 2\bar{\Phi}. \quad (7.41)$$

Slično se dobija da je

$$\varphi_1 = \frac{\alpha}{2\omega_0} \cos 2\bar{\Phi}. \quad (7.42)$$

Zamenom jednačina (7.41) i (7.42) u (7.39) prethodno prikazani metod stohastičkog usrednjenja se može primeniti na jednačine (7.38). Na osnovu istog postupka usrednjenja, dobija se usrednjeni oblik jednačina (7.38)

$$\begin{aligned} d\bar{P}(t) &= \bar{m}_p^* + \bar{\sigma}_{11}^* dB_1(t) + \bar{\sigma}_{12}^* dB_2(t), \\ d\bar{\varphi}(t) &= \bar{m}_\varphi^* + \bar{\sigma}_{21}^* dB_1(t) + \bar{\sigma}_{22}^* dB_2(t), \end{aligned} \quad (7.43)$$

gde su članovi višeg reda zanemareni i gde su koeficijenti prenosa i difuzije dati sledećim relacijama

$$\begin{aligned} \bar{m}_p^* &= \varepsilon \bar{m}_p + \varepsilon^2 \frac{p(p+2)}{8} \bar{P} \alpha \omega_0 S_{12}(2\omega_0), \quad \bar{m}_\varphi^* = \varepsilon \bar{m}_\varphi + \varepsilon^2 \frac{\alpha \omega_0}{8} \Psi_{12}(2\omega_0), \\ b_{11}^* &= \varepsilon b_{11} + \varepsilon^2 \frac{p^2 \bar{P}^2 \alpha \omega_0}{4} S_{12}(2\omega_0), \quad b_{12}^* = b_{21}^* = \varepsilon b_{12} + \varepsilon^2 \frac{p \bar{P} \alpha \omega_0}{8} S_2(0), \\ b_{22}^* &= \varepsilon b_{22} + \varepsilon^2 \frac{\alpha \omega_0}{4} [2S_{12}(0) + S_{12}(2\omega_0)], \end{aligned} \quad (7.44)$$

$$\mathbf{b}^*(\bar{P}, \bar{\varphi}) = [b_{ij}^*] = \boldsymbol{\sigma}^*(\bar{P}, \bar{\varphi}) \boldsymbol{\sigma}^{*T}(\bar{P}, \bar{\varphi}), \quad \boldsymbol{\sigma}^*(\bar{P}, \bar{\varphi}) = [\bar{\sigma}_{ij}^*], \quad i, j = 1, 2.$$

Sračunavanjem matematičkog očekivanja obe strane prve jednačine iz sistema (7.43) dobija se

$$\begin{aligned} dE[\bar{P}(t)] &= \langle -\varepsilon p \alpha + \varepsilon p \omega_0^2 \left\{ \frac{p}{8} S_2(0) + \frac{p+2}{16} [S_1(2\omega_0) + S_2(2\omega_0) - 2\Psi_{12}(2\omega_0)] \right\} + \\ &+ \varepsilon^2 \frac{p(p+2)}{8} \alpha \omega_0 S_{12}(2\omega_0) \rangle E[\bar{P}] dt. \end{aligned} \quad (7.45)$$

Kao u slučaju stohastičkog usrednjenja prvog reda tako i za stohastičko usrednjenje drugog reda dobija se moment eksponenta Ljapunova

$$\Lambda(p) = \varepsilon p \left\langle -\alpha + \omega_0^2 \left\{ \frac{p}{8} S_2(0) + \frac{p+2}{16} [S_1(2\omega_0) + S_2(2\omega_0) - 2\Psi_{12}] \right\} \right\rangle + \varepsilon^2 \frac{p(p+2)}{8} \alpha \omega_0 S_{12}(2\omega_0), \quad (7.46)$$

dok je eksponent Ljapunova za usrednjenje drugog reda

$$\lambda = \left. \frac{d\Lambda(p)}{dp} \right|_{p=0} = \varepsilon \left\langle -\alpha + \frac{\omega_0^2}{8} [S_1(2\omega_0) + S_2(2\omega_0) - 2\Psi_{12}(2\omega_0)] \right\rangle + \varepsilon^2 \frac{\alpha \omega_0}{4} S_{12}(2\omega_0). \quad (7.47)$$

7.3 Oblasti stabilnosti

U radu Kozića i dr. [18] analizirana je stabilnost sistema (7.16) kada su parametarkse pobude $f(t)$ i $g(t)$ širokopojasni stohastički procesi sa konstantnim spektralnim gustinama. Korišćenjem transformacije Khasminskii, jednačina (7.16) je konvertovana u Itô diferencijalnu jednačinu i dobijeni su uslovi stabilnosti za različite vrednosti konstantne pritiskne sile i koeficijenta prigušenja primenom perturbacione metode. U cilju poređenja sa rezultatima datim u referenci [18], uzećemo da su $f(t)$ i $g(t)$ procesi belog šuma sa autokorelacionim funkcijama koje su date izrazima

$$\begin{aligned} R_{ff}(t_1, t_2) &= E[f(t_1)f(t_2)] = 4\varepsilon S_f \delta(t_2 - t_1) = \varepsilon \beta \delta(t_2 - t_1) = \sigma_f^2 \delta(t_2 - t_1), \\ R_{gg}(t_1, t_2) &= E[g(t_1)g(t_2)] = \varepsilon \tau^4 S_g \delta(t_2 - t_1) = \varepsilon \gamma \delta(t_2 - t_1) = \sigma_g^2 \delta(t_2 - t_1). \end{aligned} \quad (7.48)$$

Uzajamne korelacione funkcije procesa $\xi_1(t)$ i $\xi_2(t)$ su

$$\begin{aligned} R_{\xi_1 \xi_1}(t_1, t_2) &= E[\xi_1(t_1)\xi_1(t_2)] = S_1 \delta(t_2 - t_1), \\ R_{\xi_2 \xi_2}(t_1, t_2) &= E[\xi_2(t_1)\xi_2(t_2)] = S_2 \delta(t_2 - t_1), \end{aligned} \quad (7.49)$$

$$R_{\xi_1 \xi_2}(t_1, t_2) = E[\xi_1(t_1)\xi_2(t_2)] = S_{12} \delta(t_2 - t_1) = \rho \sqrt{S_1 S_2} \delta(t_2 - t_1),$$

gde je $0 < \rho \leq 1$ koeficijent korelacije. S obzirom na izraz (7.20), kosinusne spektralne gustine procesa $\xi_1(t)$ i $\xi_2(t)$ su

$$S_1 = \frac{\sigma_f^2}{\varepsilon \omega_0^4}, \quad S_2 = \frac{\sigma_g^2}{\varepsilon \omega_0^2}, \quad S_{12} = \rho \frac{\sigma_f \sigma_g}{\varepsilon \omega_0^3}. \quad (7.50)$$

Na osnovu dobijenih rezultata za eksponente Ljapunova pri stohastičkom usrednjenju prvog i drugog reda, kažemo da je sistem asimptotski stabilan kada je eksponent Ljapunova negativan. Iz izraza za eksponent Ljapunova dobijen stohastičkim usrednjenjem prvog reda (7.32) granice oblasti skoro sigurne stabilnosti sistema su date relacijom

$$\sigma_f < \omega_0 \sqrt{8\zeta - \sigma_g^2}, \quad (7.51)$$

gde je $\zeta = \varepsilon\alpha$. Istim postupkom, na osnovu izraza (7.47) za eksponent Ljapunova određen stohastičkim usrednjenjem drugog reda granice oblasti skoro sigurne stabilnosti su određene izrazom

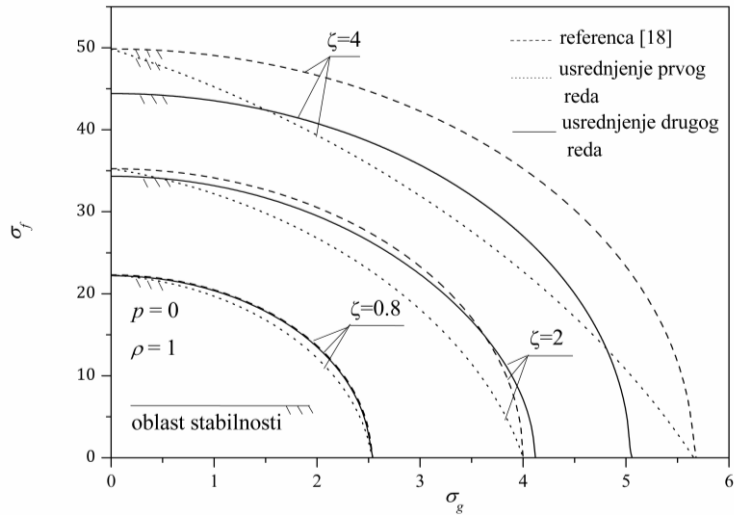
$$\sigma_f < -\zeta \rho \sigma_g + \sqrt{8\zeta\omega_0^2 + (\zeta^2 \rho^2 - \omega_0^2)\sigma_g^2}. \quad (7.52)$$

Očigledno, da kada je koeficijent korelacije $\rho = 0$, procesi $f(t)$ i $g(t)$ su međusobno nezavisni, a uslov (7.52) se svodi na relaciju (7.51). U tom slučaju, granice skoro sigurne stabilnosti dobijene stohastičkim usrednjenjem prvog i drugog reda su jednake. Za $\rho \neq 0$ procesi $f(t)$ i $g(t)$ su korelirani, a granice skoro sigurne stabilnosti (7.52) najmanje opadaju za $\rho = 1$. Granice skoro sigurne stabilnosti će se porediti sa rezultatima dobijenih perturbacionom metodom u referenci [18] za isti sistem. Imajući u vidu rezultate date u referenci [18] (jednačina (45)), gde je izvršena smena $\omega^2 = \omega_0^2 - \zeta^2$, određujemo granice skoro sigurne stabilnosti sistema (7.16)

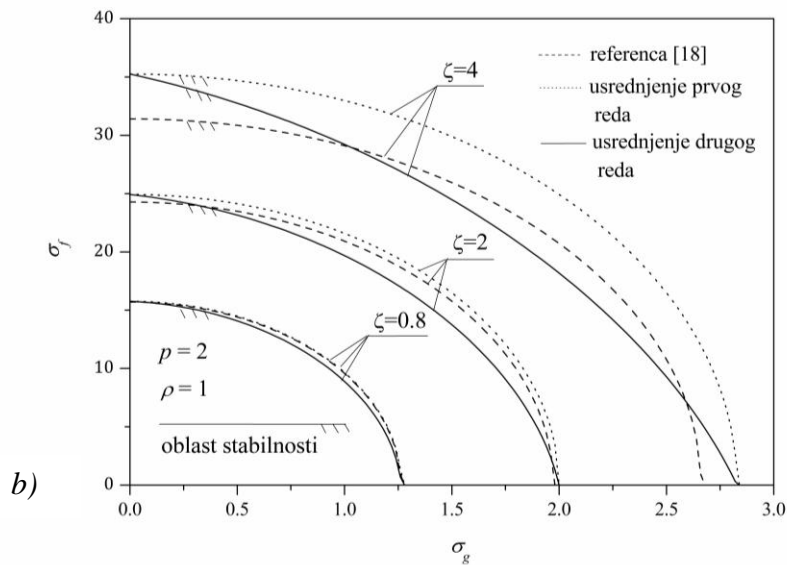
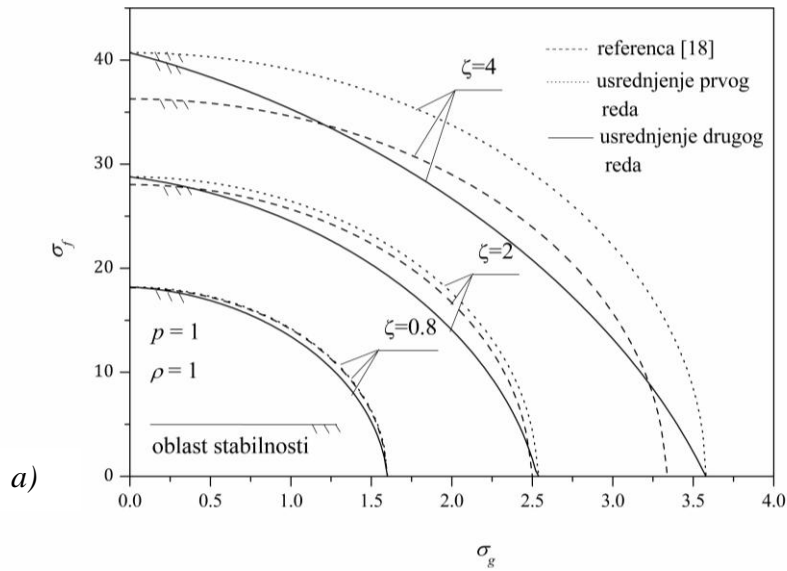
$$\sigma_f < \sqrt{8\zeta\omega_0^2 - \omega_0^2\sigma_g^2 - 8\zeta^3}. \quad (7.53)$$

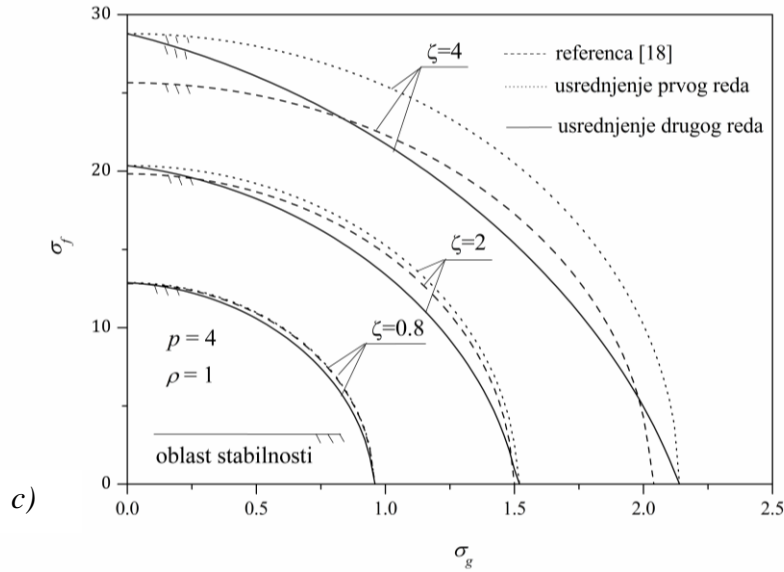
U cilju poređenja, na Sl. 7.1 prikazane su oblasti stabilnosti dobijene postupkom stohastičkog usrednjenja prvog i drugog reda i na osnovu rezultata dobijenih perturbacijom prvog reda u referenci [18] (jednačina (42)) za različite vrednosti ζ . Može se primetiti da su krive koje određuju granice stabilnosti vrlo bliske za male vrednosti koeficijenta prigušenja ζ . Takođe, na Sl. 7.1 je jasno da je uslov stabilnosti dobijen stohastičkim usrednjenjem drugog reda najstroži.

Na Sl. 7.2 poređeni su rezultati stabilnosti p -tog momenta dobijeni stohastičkim usrednjenjem prvog i drugog reda u jednačinama (7.30) i (7.46) sa rezultatima u referenci [18] (jednačina (48)) za različite vrednosti stepena norme p . Može se videti da su granice stabilnosti uže za veće vrednosti p . Takođe, Sl. 7.2 ukazuje da metoda stohastičkog usrednjenja drugog reda ne poboljšava značajno tačnost aproksimacije tako da su rezultati dobijeni usrednjenjem prvog reda potpuno prihvatljivi u inženjerskim aplikacijama.



Slika 7.1 Poređenje granica stabilnosti p -tog momenta u funkciji koeficijenta prigušenja ζ





Slika 7.2 Poređenje granica stabilnosti p -tog momenta u funkciji koeficijenta prigušenja ζ za različite vrednosti parametra p : a) $p=1$, b) $p=2$ i c) $p=4$

7.4 Numeričko određivanje p -tog momenta eksponenta Ljapunova

Numeričko određivanje momenta eksponenta Ljapunova korišćeno je u cilju verifikacije prethodno dobijenih analitičkih rezultata. Numerička procedura se zasniva na razvoju tačnog rešenja Itô stohastičkih diferencijalnih jednačina u funkciji jednakih vremenskih koraka h i malog parametra ε , kao što je prikazano u radu Milstein-a i Tretyakov-a [70]. Vektor stanja sistema (7.19) je napisan kao sistem Itô stohastičkih diferencijalnih jednačina u obliku

$$dx_1 = \omega_0 x_2 dt, \quad (7.54)$$

$$dx_2 = \left[-\omega_0 x_1 - \varepsilon \left(2\alpha - \frac{\gamma}{2} \right) \right] dt + \sqrt{\varepsilon} \frac{\sqrt{\beta}}{\omega_0} x_1 dw_1(t) - \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\gamma} x_2 dw_2(t),$$

gde je $x_1 = \frac{1}{\omega_0} q(t)$, $x_2 = \frac{1}{\omega_0^2} \dot{q}(t)$, $w_1(t)$ i $w_2(t)$ su standardni Wiener-ovi procesi, a β i γ se mogu odrediti na osnovu izraza (7.48). Za numeričko određivanje rešenja stohastičke diferencijalne jednačine korišćena je metoda Runge-Kutta sa greškom $R = O(h^4 + \varepsilon^4 h)$. Interval diskretizacije je $[t_0, T]: \{t_k : k = 0, 1, 2, 3, \dots, N; t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = T\}$, a vremenski korak je $h = t_{k+1} - t_k$. Metoda Runge-Kutta za $(k+1)$ vektor stanja $X = (x_1, x_2)$ je

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= x_1^{(k)} (R_{11}^{(0)} + \sqrt{\varepsilon} R_{11}^{(1)} + \varepsilon R_{11}^{(2)}) + x_2^{(k)} (R_{12}^{(0)} + \sqrt{\varepsilon} R_{12}^{(1)} + \varepsilon R_{12}^{(2)}), \\ x_2^{(k+1)} &= x_1^{(k)} (R_{21}^{(0)} + \sqrt{\varepsilon} R_{21}^{(1)} + \varepsilon R_{21}^{(2)}) + x_2^{(k)} (R_{22}^{(0)} + \sqrt{\varepsilon} R_{22}^{(1)} + \varepsilon R_{22}^{(2)}), \end{aligned} \quad (7.55)$$

gde je

$$\begin{aligned}
R_{11}^{(0)} &= 1 - \frac{h^2 \omega_0^2}{2} + \frac{h^4 \omega_0^4}{24}, & R_{11}^{(1)} &= h^{3/2} \left[\sqrt{\beta} \left(\eta + \frac{\xi}{2} \right) + \frac{h}{6} \sqrt{\gamma} \xi \omega_0^2 \right], & R_{11}^{(2)} &= \frac{h^3 \omega_0^2}{3} \left(\alpha - \frac{\gamma}{4} \right), \\
R_{12}^{(0)} &= h \omega_0 \left(1 - \frac{h^2 \omega_0^2}{6} \right), & R_{12}^{(1)} &= h^{3/2} \omega_0 \left[\frac{h}{6} \sqrt{\beta} \xi - \sqrt{\gamma} \left(\eta + \frac{\xi}{2} \right) \right], \\
R_{12}^{(2)} &= -h^2 \omega_0 \left(1 - \frac{h^2 \omega_0^2}{9} \right) \left(\alpha - \frac{\gamma}{4} \right),
\end{aligned} \tag{7.56}$$

$$R_{21}^{(0)} = -R_{12}^{(0)}, \quad R_{21}^{(1)} = \frac{\sqrt{h}}{\omega_0} \left[\sqrt{\beta} \xi \left(1 - \frac{h^2 \omega_0^2}{3} \right) + \omega_0^2 h \sqrt{\gamma} \left(-\eta + \frac{\xi}{2} \right) \right], \quad R_{21}^{(2)} = -R_{12}^{(2)},$$

$$R_{22}^{(0)} = R_{11}^{(0)}, \quad R_{22}^{(1)} = \sqrt{h} \left[h \sqrt{\beta} \left(-\eta + \frac{\xi}{2} \right) - \sqrt{\gamma} \xi \left(1 - \frac{h^2 \omega_0^2}{3} \right) \right],$$

$$R_{22}^{(2)} = -h^2 \omega_0 \left(1 - \frac{h^2 \omega_0^2}{9} \right) \left(\alpha - \frac{\gamma}{4} \right),$$

a slučajne promenljive ξ i η su simulirane na sledeći način

$$P(\xi = -1) = P(\xi = 1) = \frac{1}{2}, \quad P\left(\eta = \frac{-1}{\sqrt{12}}\right) = P\left(\eta = \frac{1}{\sqrt{12}}\right) = \frac{1}{2}. \tag{7.57}$$

Određivanjem L rešenja stohastičkih diferencijalnih jednačina (7.54) p -ti moment se može odrediti na sledeći način

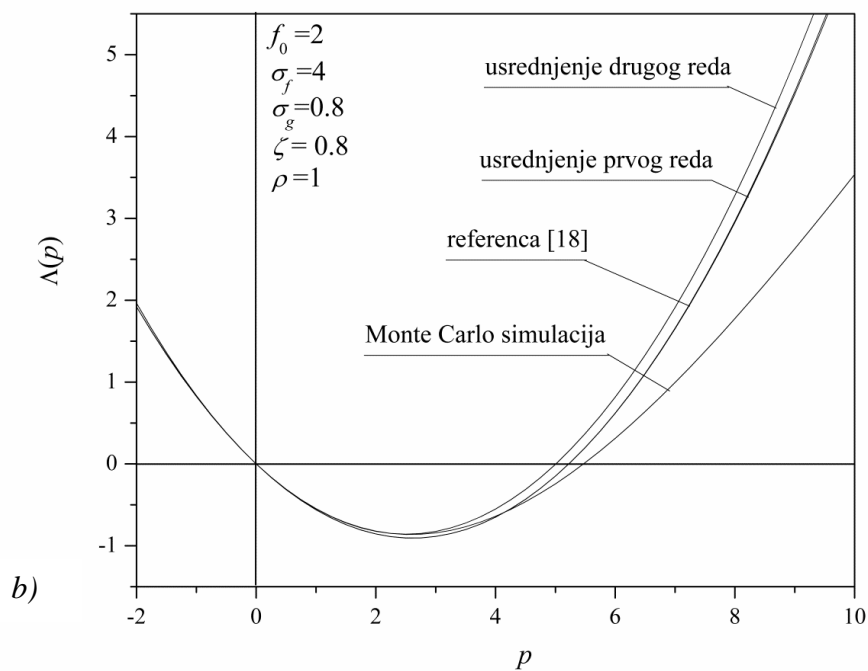
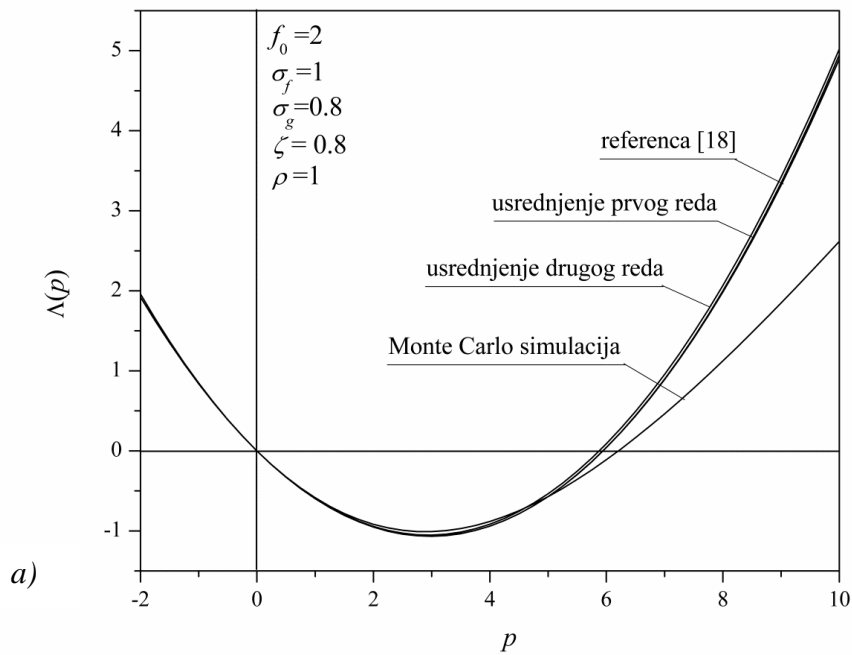
$$E \left[\|X(t_{k+1})\|^p \right] = \frac{1}{L} \sum_{s=1}^L \|X_s(t_{k+1})\|^p, \quad X_s(t_{k+1}) = \sqrt{[X_s(t_{k+1})]^T [X_s(t_{k+1})]}. \tag{7.58}$$

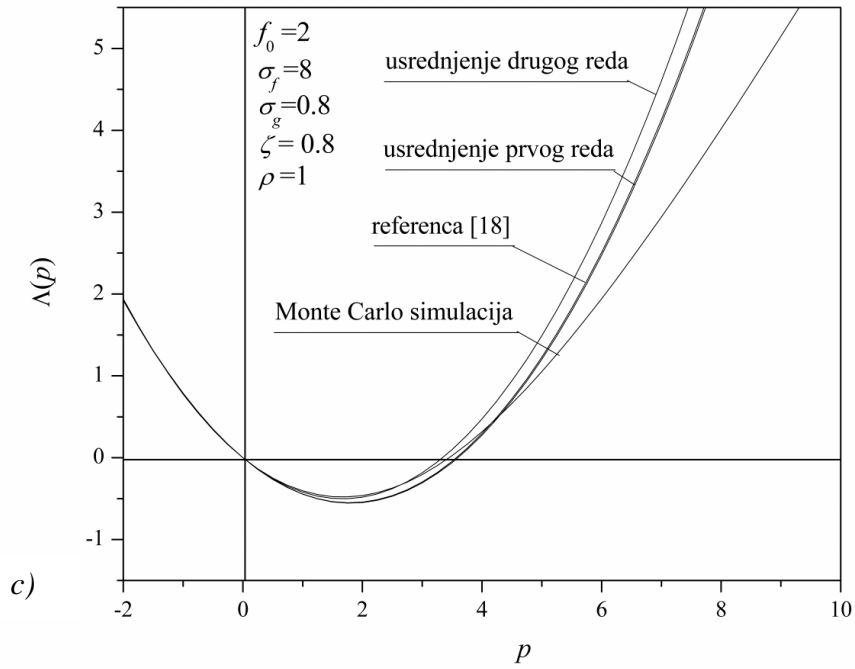
Mote Carlo metodom možemo numerički sračunati p -ti moment eksponenta Ljapunova definisan izrazom

$$\Lambda(p) = \frac{1}{T} \log E \left[\|X(T)\|^p \right]. \tag{7.59}$$

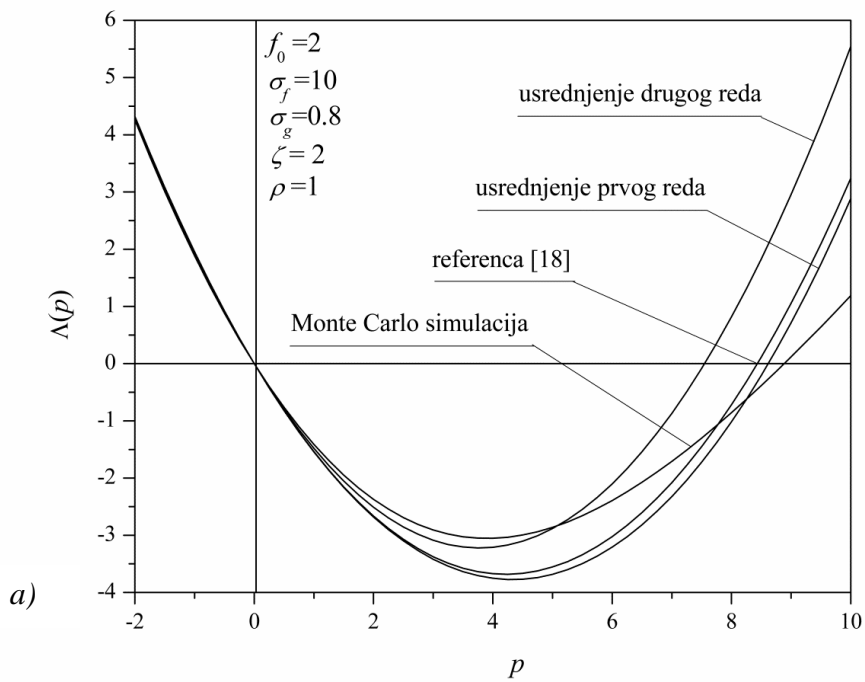
Na Sl. 7.3 i 7.4 prikazano je poređenje aproksimativnih analitičkih rezultata za moment eksponenta Ljapunova dobijen stohastičkim usrednjenjem prvog i drugog reda, rezultata prve perturbacije u referenci [18] (jednačina (30)) i numeričkih rezultata dobijenih Monte Carlo simulacijom za različite vrednosti σ_g , σ_f i ζ . Broj realizacija uzorka u Monte Carlo simulaciji je $L=4000$, vremenski korak integracije je $t=0.00005$ [s], a ukupno vreme

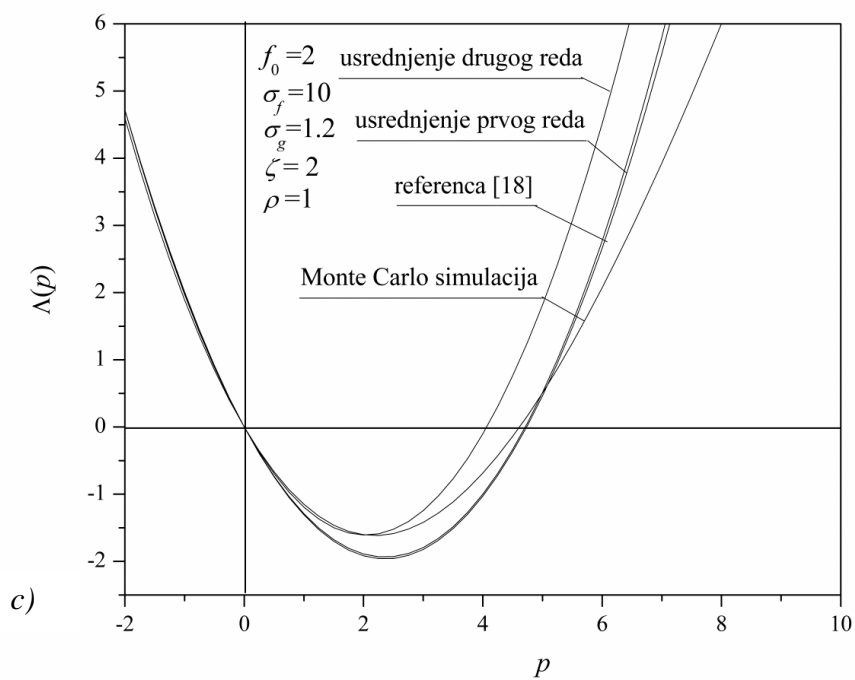
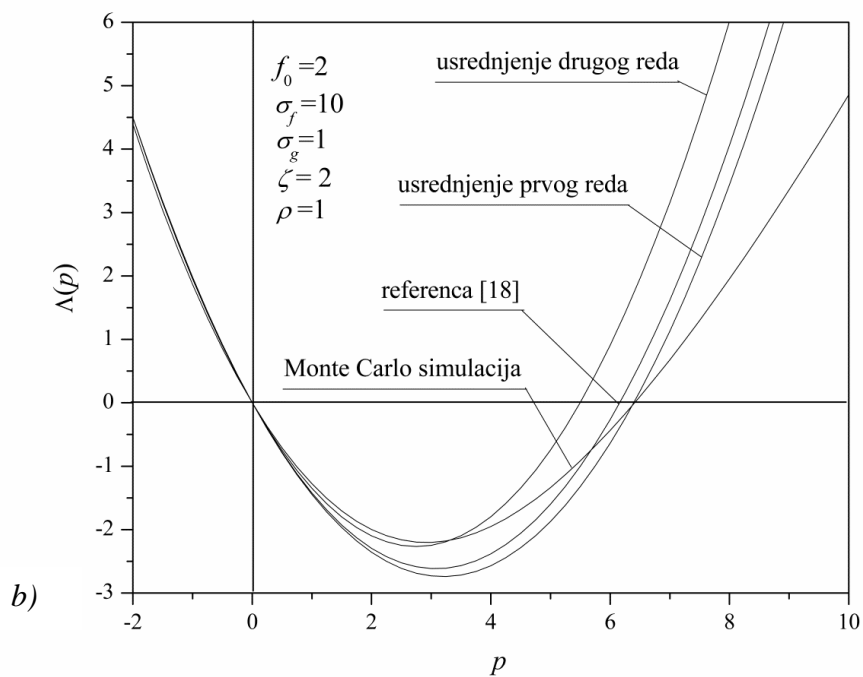
trajanja simulacije je $T=0.5$ [s]. Može se zapaziti veoma dobro poklapanje rezultata dobijenih metodom stohastičkog usrednjenja prvog reda i rezultata dobijenih Monte Carlo metodom za male vrednosti σ_g , σ_f i ζ , tj., za slabiji intenzitet šumova. Takođe, i na ovim slikama je pokazano da metoda stohastičkog usrednjenja drugog reda ne poboljšava značajno tačnost aproksimacije tako da se opet može izvesti zaključak da su rezultati dobijeni usrednjenjem prvog reda potpuno prihvatljivi u inženjerskim aplikacijama.





Slika 7.3 Varijacija momenta eksponenta Ljapunova u odnosu na p za različite vrednosti intenziteta procesa σ_f : a) $\sigma_f = 1$, b) $\sigma_f = 4$ i $\sigma_f = 8$





Slika 7.4 Varijacija momenta eksponenta Ljapunova u odnosu na p za različite vrednosti intenziteta procesa σ_g : a) $\sigma_g = 0.8$, b) $\sigma_g = 1$ i $\sigma_g = 1.2$

Rezultati iz ovog poglavlja objavljeni su u radu [71].

ZAKLJUČAK

U ovoj disertaciji detaljno je obrađena i analizirana dinamička stabilnost elastičnih i viskoelastičnih mehaničkih sistema i nanostrukture pod dejstvom slučajnih poremećaja. Izloženi rad se sastoji od sedam poglavlja.

Prva četiri poglavlja predstavljaju uvodni deo rada.

U prvom poglavlju dat je osvrt na prethodna istraživanja u analizi stabilnosti mehaničkih sistema pod dejstvom slučajne pobude, date su osnovne definicije stabilnosti kontinualnih sistema kao i neke od metoda za njihovo određivanje (metode funkcionala Ljapunova, eksponenta Ljapunova metodom stohastičkog usrednjenja i momenta eksponenta Ljapunova metodom regularne perturbacije).

Drugo poglavlje se bavi osnovama viskoelastičnih materijala. Ovde su prikazani najčešće korišćeni modeli zasnovani na kombinaciji elastičnih i viskoznih osobina materijala. Kombinovanjem elastičnog (Hooke-ovog) i viskoznog (Newton-ovog) reološkog modela prikazani su Voigt-Kelvin-ov, Maxwell-ov, generalisani Maxwell-ov, Zener-ov i troparametarski modeli materijala.

Treće poglavlje opisuje nelokalnu teoriju elastičnosti tela kao i neke od nelokalnih teorija gređa. Polazeći od poznatih relacija iz klasične teorije elastičnosti (Navier-ovih jednačina kretanja deformabilnog tela, geometrije linearne deformacije tela izražene preko komponenata tenzora deformacije i generalisanog Hooke-ovog zakona) i uvođenjem dopunske Eringen-ove jednačine veze između lokalnog i nelokalnog napona prikazana je u kratkim crtama nelokalna teorija elastičnosti. Pretpostavljajući funkciju jezgra kao Green-ovu funkciju, integralna veza između lokalnog i nelokalnog napona predstavljena je u ekvivalentnoj diferencijalnoj formi, gde je diferencijalni operator Helmholtz-ovog ili bi-Helmholtz-ovog tipa. U ovom delu prikazane su nelokalne teorije Euler-Bernoulli-jevog, Timošenkovog i Reddy-jevog modela gređe.

Četvrto poglavlje bavi se slučajnim procesima kao i osnovnim statističkim definicijama srednjih vrednosti ovih procesa (funkcija raspodele verovatnoće i funkcija gustine raspodele verovatnoće, matematičko očekivanje i statistički momenti, korelacione

funkcije i funkcije spektralne gustine). Posebna pažnja je posvećena ergodičkim slučajnim procesima, a detaljnije su opisani slučajni procesi koji predstavljaju pobudu sistema za koje je vršena analiza stabilnosti u daljem radu (širokopojasni procesi tipa belog, realnog i ograničenog šuma) kao i metoda usrednjenja stohastičkih diferencijalnih jednačina. Od procesa koji nemaju beli spektar prikazani su Gauss-ov i harmonijski proces.

U petom poglavlju, korišćenjem direktne metode Ljapunova i metode eksponenta Ljapunova, a na osnovu Euler-Bernoulli-jeve teorije greda analizirana je stabilnost sistema viskoelastičnih dvostrukih greda pod dejstvom aksijalnih opterećenja. Grede su međusobno spojene Winkler-ovim elastičnim slojem, a aksijalne sile koje deluju na njihovim krajevima sastoje se od determinističkog dela i vremenski zavisne stohastičke funkcije. Uslovi skoro sigurne stabilnosti određene su za procese koji ne sadrže beli spektar (Gauss-ov i harmonijski proces) i za širokopojasne procese tipa belog, realnog i ograničenog šuma.

Numerički rezultati za procese koji nemaju beli spektar su dobijeni zamenom nesvojstvenih integrala sumom proizvoda koeficijenata Gauss-ovih kvadraturnih formula i veličina poditegralne funkcije sračunate u nulama ortogonalnih polinoma. Za slučaj Gauss-ove raspodele gustine verovatnoće procesa primenjene su odgovarajuće kvadrature formule pri čemu su korišćene nule Hermite-ovih polinoma. U slučaju harmonijske raspodele gustine verovatnoće korišćene su nule Čebiševljevih polinoma.

Oblasti skoro sigurne stabilnosti dobijene su u funkciji vremena retardacije, savojne krutosti, modula krutosti Winkler-ovog elastičnog sloja, intenziteta determinističkih komponenti aksijalnih opterećenja i parametara stohastičkih procesa.

U slučaju kada je gornja greda opterećena determinističkim i stohastičkim silama, dok je donja podvrgnuta samo determinističkom opterećenju, oblasti skoro sigurne stabilnosti date su za Gauss-ov, harmonijski i procese koji imaju beli spektar. Zaključeno je da se smanjenjem savojnih krutosti nosača smanjuju oblasti stabilnosti. To smanjenje je izraženije kada se smanjuje savojna krutost nosača koji je podvrgnut dejstvu stohastičkog poremećaja. U slučaju kada se menja krutost Winkler-ovog elastičnog sloja sračunavanja su izvršena kada su determinističke komponente aksijalnih sila jednake nuli. Povećanjem krutosti elastičnog sloja uvećavaju se oblasti stabilnosti. To uvećanje je izraženije kada je krutost sloja manja, a sa povećanjem krutosti sloja tendencija uvećanja oblasti stabilnosti drastično opada. Konstantna zatezna sila na donjoj gredi povećava oblast stabilnosti, ali to povećanje nije srazmerno smanjenju oblasti stabilnosti kada ova sila ima pritisni karakter. Treba naglasiti, kada procesi ne sadrže beli spektar, oblasti stabilnosti su veće za Gauss-ov nego za harmonijski proces.

Kada su obe grede stohastički opterećene, u slučaju procesa koji ne sadrže beli spektar, uzeto je da procesi $f_1(t)$ i $f_2(t)$ imaju normalnu raspodelu sa koeficijentom korelacije jednakim nuli. Oblasti stabilnosti su prikazane u ravni disperzije slučajnih procesa pri čemu su determinističke komponente pritisnih sila jednake nuli. Zaključeno je da porast vremena retardacije i krutosti greda vodi do značajnog porasta oblasti stabilnosti, a da porast krutosti Winkler-ovog sloja izaziva ograničeno povećanje oblasti stabilnosti.

Kada su aksijalne sile širokopojasni procesi, tada funkcije $f_1(t)$ i $f_2(t)$ predstavljaju procese belog, realnog i ograničenog šuma. U slučaju dejstva procesa belog šuma, kada je opterećena samo gornja greda prikazane su oblasti stabilnosti u ravni intenziteta belog šuma i vremena retardacije, a u funkciji redukovane krutosti donje grede. Kada su obe grede opterećene procesima belog šuma oblasti stabilnosti su date u ravni intenziteta ovih procesa. Zaključeno je da se oblasti stabilnosti povećavaju kada redukovana krutost druge grede raste.

U slučaju kada su grede izložene procesu realnog šuma, oblasti stabilnosti su određene parametrima σ_{1R} , σ_{2R} , α_1 , i α_2 . Oblasti stabilnosti su date u ravni σ_{1R} , σ_{2R} , u funkciji parametra α_2 dok je parametar α_1 fiksiran. Oblasti stabilnosti rastu kada raste parametar α_2 , a sve granične krive se sažimaju u zajedničku tačku na σ_{1R} osi. U ravni α_1 , α_2 oblasti stabilnosti su dati u funkciji intenziteta realnog šuma.

Za proces ograničenog šuma oblasti stabilnosti prikazane su u ravni eksponenta Ljapunova i redukovane krutosti donje grede u funkciji redukovane krutosti gornje grede. Oblasti stabilnosti nalaze u zoni gde je eksponent Ljapunova negativan. Zaključeno je da porast redukovanih krutosti greda ima veoma značajan uticaj na povećanje stabilnosti sistema.

Šesto poglavlje proučava dinamičku stabilnost elastičnih i viskoelastičnih nanostruktura pod dejstvom različitih tipova slučajnih poremećaja. U delu 6.1 date su uvodne napomene i prethodna istraživanja u oblasti nanostruktura dok su u delu 6.2 date nelokalne konstitutivne relacije. U delu 6.3 korišćenjem direktne metode Ljapunova i metode momenta eksponenta Ljapunova, a na osnovu nelokalne Eringen-ove teorije elastičnosti i Rayleigh-jeve teorije greda analizirana je stabilnost viskoelastične nanogrede pod uticajem aksijalnih pritisnih sila koje se sastoje od konstantnog dela i vremenski zavisne stohastičke funkcije. Za određivanje oblasti stabilnosti u slučaju Gauss-ovog i harmonijskog procesa korišćena je direktna metoda Ljapunova. U slučaju realnog i ograničenog šuma, uslovi skoro sigurne stabilnosti dobijeni su numeričkim sračunavanjem momenta eksponenta Ljapunova korišćenjem razvijene simulacione metode (prikazane u ovom poglavlju).

Oblasti skoro sigurne stabilnosti dobijene su u funkciji vremena retardacije, varijansi stohastičkih procesa, geometrijskog parametra, koeficijenta nanoskaliranja i intenziteta determinističkih komponenti aksijalnih opterećenja.

Na osnovu numeričkih rezultata, u slučaju Gauss-ove pobude, zanemarivanje inercije rotacije prouzrokuje grešku od oko 9.8%, dok je za harmonijsku pobudu ova greška nešto manja i iznosi 9.26%. Može se zaključiti da se, u slučaju nanogreda sa velikim parametrom r , inercija rotacije ne sme zanemariti.

Jedan od važnih zaključaka koji se odnose na nanostrukture, da se oblasti stabilnosti uvećavaju sa smanjenjem koeficijenta nanoskaliranja. Oblasti stabilnosti se uvećavaju kako se konstantna komponenta menja od pritisne ka zateznoj, a povećanje vremena retardacije značajno uvećava oblasti stabilnosti.

Oblasti stabilnosti za Helmholtz-ov su veće nego za bi-Helmholtz-ov tip jezgra. Opšte gledano, nelokalni efekti smanjuju oblasti stabilnosti Rayleigh-jevih nanogreda.

Kada je pobuda proces realnog šuma, korišćenjem istih parametara simulacije kao u test primeru, moment eksponenata Ljapunova je dobijen numeričkim putem za različite vrednosti geometrijskog faktora, koeficijenta nanoskaliranja i vremena retardacije. Ukoliko se zanemari uticaj inercije preseka kod pobude tipa realnog šuma čini se veća greška nego što je to u slučaju procesa koji nemaju beli spektar. Smanjenje koeficijenta nanoskaliranja i povećanje vremena retardacije dovodi do značajnog povećanja oblasti skoro sigurne stabilnosti.

Kod analize stabilnosti viskoelastične nanogrede kada na nju deluju procesi belog i ograničenog šuma, programski kod za simulaciju ulaznog signala adaptiran je na osnovu definicija ovih procesa. U cilju komparacije sa rezultatima dobijenim za proces realnog šuma, moment eksponenta Ljapunova za proces ograničenog šuma analiziran je za različite vrednosti parametara nanoskaliranja i geometrijskog faktora, dok je stabilnost nanogrede kada na nju deluje proces belog šuma analizirana za različite vrednosti koeficijenta nanoskaliranja i vremena retardacije.

U delu 6.4, analizirana je nestabilnost dvostrukih nanogreda korišćenjem direktne metode Ljapunova, na osnovu nelokalne Eringen-ove teorije elastičnosti i Euler-Bernoullijeve teorije greda. Grede su međusobno spojene elastičnim slojem. I u ovom delu grede su pod uticajem aksijalnih pritisnih sila koje se sastoje od determinističkog dela i vremenski zavisne stohastičke funkcije. Uslovi skoro sigurne nestabilnosti, za procese koji ne sadrže beli spektar, dobijeni su u funkciji koeficijenta viskoznog prigušenja, krutosti elastičnog sloja, koeficijenta nanoskaliranja i intenziteta determinističkih komponenti aksijalnih opterećenja.

U slučaju kada je gornja greda opterećena determinističkim i stohastičkim silama a donja samo determinističkim silama, oblasti stabilnosti su date za Gauss-ov i harmonijski proces.

Smanjenje krutosti elastičnog medijuma vodi do uvećanja oblasti nestabilnosti, dok rast determinističkog dela pritise aksijalne sile smanjuje oblasti nestabilnosti. Opšti zaključak je da su oblasti nestabilnosti veće za harmonijski nego za Gauss-ov proces.

Kada su determinističke komponente sila koje deluju na donju gredu zatezne, dolazi do smanjenja oblasti nestabilnosti. Oblasti nestabilnosti za bi-Helmholtz-ov tip jezgra su veće nego za slučaj Helmholtz-ovog tipa jezgra. Kao i u delu 6.3 može se zaključiti da nelokalni efekti povećavaju oblasti nestabilnosti sistema dvostrukih nanogreda.

Za manje koeficijente nanoskaliranja uticaj elastičnog sloja na oblasti nestabilnosti je veoma značajan, ali za veće vrednosti koeficijenta ovaj uticaj isčezava. Oblasti nestabilnosti su veće kada su obe komponente sila pritise nego kada su zatezne. Granice nestabilnosti su na skoro jednakom rastojanju u odnosu na krivu kada su determinističke komponente jednake nuli i takav trend se nastavlja i za veće vrednosti koeficijenta nanoskaliranja.

Kada je donja greda aksijalno opterećena oblasti nestabilnosti su date u funkciji odnosa determinističkih komponenti. Oblasti stabilnosti se povećavaju kako se odnos determinističkih komponenti smanjuje.

Kada su obe grede stohastički opterećene uzeto je da procesi $f_1(t)$ i $f_2(t)$ imaju normalnu raspodelu. Može se zaključiti da porast krutosti elastičnog sloja, determinističkih sila od pritiskih ka zateznim, kao i koeficijenta prigušenja vodi do smanjenja oblasti nestabilnosti, dok povećanje koeficijenta nanoskaliranja uvećava oblasti nestabilnosti.

U sedmom poglavlju analizirana je stabilnost sistema pod dejstvom dva zavisna slučajna procesa određivanjem momenta eksponenta Ljapunova pomoću metode stohastičkog usrednjenja prvog i drugog reda. Naime, kada u sistemu postoje nelinearnosti koje se odnose na krutost i inerciju, njihovi uticaji se, primenom usrednjenja prvog reda gube. Ovakav tip nelinearnosti se može uočiti u rešenju stohastičkih diferencijalnih jednačina ako se primeni postupak stohastičkog usrednjenja višeg reda. Na primer, kada su u pitanju kubne nelinearnosti potrebno je i dovoljno koristiti usrednjenje drugog reda. S obzirom da usrednjenja višeg reda zahtevaju obimna matematička sračunavanja to se ona primenjuju samo u neophodnim slučajevima.

Na usrednjene Ito diferencijalne jednačine koje odgovaraju p -tom stepenu norme primenjena je metoda stohastičkog usrednjenja prvog i drugog reda u cilju analitičkog određivanja momenta eksponenta Ljapunova u uslovima malog fluktuacionog parametra ε .

Za stohastičkih sistem opisan Ito diferencijalnim jednačinama korišćen je Monte Carlo simulacioni algoritam za određivanje momenta eksponenta Ljapunova. Metoda Monte Carlo simulacije aproksimira analitičku metodu stohastičkog usrednjenja prvog i drugog reda kod određivanja momenta eksponenta Ljapunova i daje kriterijume za ocenu tačnosti aproksimiranih analitičkih rezultata.

Može se zaključiti, na osnovu aproksimiranih analitičkih rezultata i Monte Carlo simulacije momenta eksponenta Ljapunova, da povećanje intenziteta šuma σ_g , uvećava oblasti stabilnosti za $p > 0$ što znači da ovaj process stabilizuje sistem. Takođe, povećanjem intenziteta šuma σ_f , oblasti stabilnosti p -tog momenta za $p > 0$ se sužavaju, kao što je i očekivano. Dobijeni rezultati su od velikog značaja u inženjerskim aplikacijama.

U ovom radu su detaljno proučavani linearni elastični i viskoelastični dinamički sistemi. Metoda funkcionala Ljapunova i metoda stohastičkog usrednjenja drugog reda daju široke mogućnosti za proučavanje nelinearnih mehaničkih sistema podvrgnutih slučajnim poremećajima bilo da su oni regularni ili da sadrže beli spektar. Istraživanja vezana za ispitivanje stabilnosti kontinualnih sistema sa velikim ugibima i nelinearnim krutostima Winkler-ovog sloja predstavljala bi ozbiljan prodor u proučavanju ove problematike.

LITERATURA

- [1] Samuels, J.C., (1960), *On the stability of random systems and the stabilization of deterministic systems with random noise*, The Journal of the Acoustical Society of America, 32, p. 594.
- [2] Caughey, T.K., (1960), *Coment on „On the stability of random systems and the stabilization of deterministic systems with random noise“ by J. C. Samuels*, The Journal of the Acoustical Society of America, 32, p. 1356.
- [3] Ariaratnam, S.T., Tam, D.S.F., Xie, W-C., (1991), *Lyapunov exponents and stochastic stability of coupled linear systems under white noise excitation*, Probabilistic Engineering Mechanics, 6(2), pp. 51-56.
- [4] Moshchuk, N., Ibrahim, R.A., (1995), *Response statistics of ocean structures to non-linear hydrodynamic loading, Part I: Gaussian ocean waves*, Journal of Sound and Vibration, 184(4), pp. 681-701.
- [5] Moshchuk, N., Ibrahim, R.A., (1995), *Response statistics of ocean structures to non-linear hydrodynamic loading, Part II: Non-Gaussian ocean waves*, Journal of Sound and Vibration, 191(1), pp. 107-128.
- [6] Kozić, P., Pavlović, R., (1997), *The stability of a thin moving elastic strip subjected to random parametric excitations*, Journal of Sound and Vibrations, 206(2), pp. 280-285.
- [7] Hijawi, M., Moshchuk, N., Ibrahim, R.A., (1997), *Unified second-order stochastic averaging approach*, Transaction ASME Journal of Applied Mechanics, 64, pp. 281-291.
- [8] Namachchivaya, N.S., Ramakrishnan, N., (2003), *Stochastic dynamics of parametrically excited two d.o.f. systems with symmetry*, Journal of Sound and Vibrations, 262, pp. 613-631.
- [9] Kozić, P., Pavlović, R., (2004), *Stochastic stability of torsion oscillations in moving thin elastic bands*, Journal of Sound and Vibrations, 274, pp. 1103-1109.
- [10] Ariaratnam, S.T., Abdelrahman, N. M., (2004), *Stochastic stability of non-gyroscopic viscoelastic systems*, International Journal of Solids and Structures, 41, pp. 2685-2709.
- [11] Potapov, V.D., (2008), *Stability of elastic systems under a stochastic parametric excitation*, Archive of Applied Mechanics, 78, pp. 883-894.

- [12] Labou, M., Ma, T-W., (2009), *Lyapunov exponents of parametrically coupled linear two-DOF stochastic systems and related stability problems*, Journal of Sound and Vibrations, 325, pp. 421-435.
- [13] Khasminskii, R., Moshchuk, N., (1998), *Moment Lyapunov exponent and stability index for linear conservative system with small random perturbation*, SIAM Journal on Applied Mathematics, 58(1), pp. 245-256.
- [14] Xie, W.C., (2001), *Moment Lyapunov exponents of a two-dimensional system under real-noise excitation*, Journal of Sound and Vibration, 239, pp. 139-155.
- [15] Xie, W.C., (2003), *Moment Lyapunov exponents of a two-dimensional system under bounded noise parametric excitation*, Journal of Sound and Vibration, 263, pp. 593-616.
- [16] Xie, W.C., (2007), *Moment Lyapunov exponents of a two-dimensional system under combined harmonic and real noise excitations*, Journal of Sound and Vibration, 303, pp. 109-134.
- [17] Kozić, P., Pavlović, R., Rajković, P., (2007), *Moment Lyapunov exponent and stochastic stability of parametrically excited oscillator*, Meccanica, 42, pp. 323-330.
- [18] Kozić, P., Janevski, G., Pavlović, R., (2008), *Moment Lyapunov exponents of the stochastic parametrical Hill's equation*, International Journal of Solids and Structures, 45, pp. 6056-6066.
- [19] Kozić, P., Janevski, G., Pavlović, R., (2010), *Moment Lyapunov exponents and stochastic stability of a double-beam system under compressive axial loading*, International Journal of Solids and Structures, 47, pp. 1435-1442.
- [20] Kozić, P., Pavlović, R., Janevski, G., Golubović, Z., (2010), *Influence of the mode number on the stochastic stability regions of the elastic beam*, Meccanica, 45, pp. 553-565.
- [21] Janevski, G., Kozić, P., Pavlović, R., Golubović, Z., (2011), *The moment Lyapunov exponent of a Timoshenko beam under bounded noise excitation*, Archive of Applied Mechanics, 81, pp. 403-417.
- [22] Janevski, G., Kozić, P., Pavlović, R., (2012), *Moment Lyapunov exponents and stochastic stability of a thin-walled beam subjected to eccentric axial loads*, Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 50(1), pp. 61-83.
- [23] Plaut, R.H., Infante, E.F., (1970), *On the stability of some continuous systems subjected to random excitation*, Transaction ASME Journal of Applied Mechanics, 37, pp. 623-629.
- [24] Kozin, F., (1972), *Stability of linear stochastic systems*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 294, pp. 186-229.

- [25] Tylikowski, A., (1978), *Stability of a nonlinear rectangular plate*, Transaction ASME Journal of Applied Mechanics, 45, pp. 583-585.
- [26] Tylikowski, A., (1984), *Dynamic stability of a nonlinear cylindrical shell*, Transaction ASME Journal of Applied Mechanics, 51, pp. 852-856.
- [27] Tylikowski, A., (1989), *Dynamic stability of nonlinear antisymmetrically-laminated cross-ply rectangular plates*, Transaction ASME Journal of Applied Mechanics, 56(2), pp. 375-381.
- [28] Tylikowski, A., (1993), *Dynamic stability of nonlinear antisymmetrically laminated angle-ply plates*, International Journal of Non-Linear Mechanics, 28(3), pp. 291-300.
- [29] Pavlović, R., Kozić P., Rajković P., (2001), *Influence of transverse shear on stochastic instability of viscoelastic beam*, International Journal of Solids and Structures, 38, pp. 6829-6837.
- [30] Pavlović, R., Pavlović, I., (2005), *Influence of rotatory inertia and transverse shear on stochastic instability of the cross-ply laminated beam*, International Journal of Solids and Structures, 42, pp. 4913-4926.
- [31] Tylikowski, A., Pavlović, R., Kozić, P., (2011), *Influence of transverse shear on stochastic instability of symmetric cross-ply laminated plates*, Probabilistic Engineering Mechanics, 26, pp. 454-460.
- [32] Pavlović, R., Kozić P., Mitić, S., Pavlović, I., (2012), *Influence of rotatory inertia on dynamic stability of the viscoelastic symmetric cross-ply laminated plates*, Mechanics Research Communications, 45, pp. 28-33.
- [33] Tylikowski, A., (1991), *Stochastyczna stateczność układów ciągłych*, Monografia, PWN Warszawa, pp. 230.
- [34] Pavlović, R., (2000), *Stabilnost kontinualnih sistema pod dejstvom slučajne pobude*, Monografija, Mašinski fakultet, Niš, pp. 168.
- [35] Movčanvčan, A.A., (1960), *Устойчивость процессов по двум метрикам*, Прикладная математика и механика, pp. 988-1001.
- [36] Parks, P.C., Pritchard, A.J., (1969), *On the construction and use of Liapunov functionals*, Proceedings of the 4th IFAC Congress, Technical Session, 20, Stability, NOT, Warszawa, pp. 59-73.
- [37] Ariaratnam, S.T., Xie, W-C., (1989), *Stochastic perturbation of Pitchfork bifurcations*, Structural Safety, 6, pp. 205-210.
- [38] Ariaratnam, S.T., Xie, W-C., (1990), *Lyapunov exponent and rotation number of a two-dimensional nilpotent stochastic system*, Dynamic and Stability of Systems, 5, pp. 1-9.

- [39] Janevski, G., (2009), *Dinamička stabilnost mehaničkih sistema pri dejstvu slučajnih opterećenja*, Doktorska disertacija, Mašinski fakultet, Niš.
- [40] Novacki, V., (1966), *Dinamika elastičnih sistema*, „Građevinska knjiga“, Beograd, pp. 383.
- [41] Shirahatti, U. S., Sinha, S. C., (1994), *On the Stability of Perfect Viscoelastic Columns*, Journal of Sound and Vibration, 174, (1), pp. 57-68.
- [42] Eringen, A.C., (2002), *Nonlocal Continuum Field Theories*, Springer-Verlag, New York.
- [43] Lazar, M., Maugin, G.A., Aifantis E.C., (2006), *On a Theory of Nonlocal Elasticity of bi-Helmholtz Type and Some Applications*, International Journal of Solids and Structures, 43, pp. 1404-1421.
- [44] Peddieson, J., Buchanan, G.R., McNitt, R.P., (2003), *Application of Nonlocal Continuum Models to Nanotechnology*, International Journal of Engineering Science, 41, pp. 305-312.
- [45] Zhang, Y. Q., Lu, Y., Wang, S.L., Liu, X., (2008), *Vibration and Buckling of a Double-Beam System Under Compressive Axial Loading*, Journal of Sound and Vibration, 318, pp. 341-352.
- [46] Reddy, J.N., (2007), *Nonlocal theories for bending, buckling and vibrations of beams*, International Journal of Engineering Science, 45, pp. 288-307.
- [47] Lei, Y., (2013), *Vibration of nonlocal Kelvin-Voigt viscoelastic damped Timoshenko beams*, International Journal of Engineering Science, 66-67, pp. 1-13.
- [48] Tylikowski, A., (2011), *Stochastic Stability via Nonlocal Continuum Mechanics*, Probabilistic Engineering Mechanics, 26(1), pp. 76-80.
- [49] Tylikowski, A., (2011), *Dynamical Instability Analysis of Nanotubes Using Nonlocal Shear Beam Theory*, International Journal of Bifurcation and Chaos, 21(10), pp. 3047-3052.
- [50] Potapov, V.D., (2013), *Stability via Nonlocal Continuum Mechanics*, International Journal of Solids and Structures, 50, pp. 637-641.
- [51] Pavlović, I., Pavlović, R., Kozić, P., Janevski, G., Cirić, I., (2013), *Stability of a Viscoelastic Nanobeam Under Real-Noise Excitation*, 2nd International Conference (Mechanical Engineering in the 21st century), Niš, Serbia.
- [52] Reddy, J.N., (2008), *Nonlocal theories of beams for the analysis of carbon nanotubes*, Journal of Applied Physics, 103, 023511, pp. 1-16.
- [53] Xie, W.-C., (2006), *Dynamic Stability of Structures*, Cambridge University Press, pp. 435.

- [54] Mališić, J., (1989), *Slučajni procesi – teorija i primene*, „Građevinska knjiga“, Beograd, pp. 457.
- [55] Wong, E., Zakai, M., (1965), *On the relation between ordinary and stochastic equations*, International Journal of Engineering Science, 3(2), pp. 213-229.
- [56] Stratonovich, R.L., (1963), *Topics in the theory of random noise*, Vol. 1, Gordon and Breach, NY.
- [57] Khasminskii, R.Z., (1966), *On stochastic processes defined by differential equations with a small parameter*, Theory of Probability and Its Applications, 11(2), pp. 211-228.
- [58] Khasminskii, R.Z., (1966), *A limit theorem for the solutions of differential equations with random right-hand sides*, Theory of Probability and Its Applications, 11(3), pp. 390-406.
- [59] Pavlović, R., Kozić, P., Pavlović, I., (2012), *Dynamic stability and instability of a double-beam system subjected to random forces*, International Journal of Mechanical Sciences, 62, pp. 111-119.
- [60] Ariaratnam, S.T., Abdelrahman, N.M., (2001), *Almost-sure stochastic stability of viscoelastic plates in supersonic flow*, AIAA Journal, 39(3), pp. 465-472.
- [61] Pavlović, I., Pavlović, R., Kozić, P., Janevski, G., (2012), *Almost-sure stochastic stability of a viscoelastic double-beam system*, Archive of Applied Mechanics, 83, pp. 1591-1605.
- [62] Lu, P., (2007), *Dynamic analysis of axially prestressed micro/nanobeam structures based on nonlocal beam theory*, Journal of Applied Physics, 101, pp. 073504.
- [63] Aranda-Ruiz, J., Loya, J., Fernandez-Saez, J., (2012), *Bending vibrations of rotating nonuniform nanocantilevers using the eringen nonlocal elasticity theory*, Composite Structures, 94, pp. 2990-3001.
- [64] Gillespie, D.T., (1996), *Exact Numerical Simulation of the Ornstein-Uhlenbeck Process and its Integral*, Physical review E, 54, pp. 2084–2091.
- [65] William, S., (2010), *On the Simulation and Estimation of the Mean-Reverting Ornstein-Uhlenbeck Process* (accessed 10/01/2014),
<http://commoditymodels.files.wordpress.com/2010/02/estimating-the-parameters-of-a-mean-reverting-ornstein-uhlenbeck-process1.pdf>
- [66] Murmu, T., Adhikari, S., (2012), *Nonlocal Elasticity Based Vibration of Initially Pre-Stressed Coupled Nanobeam Systems*, European Journal of Mechanics A/Solids, 34, pp. 52-62.

- [67] Murmu, T., Adhikari, S., (2011), *Axial Instability of Double-Nanobeam-Systems*, Physics Letters A, 375, pp. 601-608.
- [68] Ariaratnam, S.T., Ly, B.L., (1989), *Almost-sure stability of some linear stochastic system*, ASME Journal of Applied Mechanics, 56, pp. 175-179.
- [69] Ariaratnam, S.T., Xie., W.C., (1989), *Effect of correlation on the almost-sure asymptotic stability of second-order linear stochastic systems*, ASME Journal of Applied Mechanics, 56, pp. 685-690.
- [70] Milstein, N.G., Tretyakov, V.N., (1997), *Numerical methods in the weak sense for stochastic differential equations with small noise*, SIAM Journal on Numerical Analysis, 34(6), pp. 2142-2167.
- [71] Janevski, G., Kozić, P., Pavlović, I., (2014), *Moment Lyapunov exponents of the parametrical Hill's equation under the excitation of two correlated wideband noises*, Structural Engineering and Mechanics, Article in press.

Biografski podaci o kandidatu

Ivan Pavlović rođen je 02. 11. 1979. godine u Nišu. Osnovnu školu i gimnaziju "Svetozar Marković" (računarsko-programerski smer) završio je u Nišu. Mašinski fakultet u Nišu upisao je školske 1998/99. godine, a diplomirao je novembra 2003. godine na smeru Računarski podržane proizvodne tehnologije, sa prosečnom ocenom 9,06 i ocenom 10 na diplomskom ispitu. Dobio je nagradu Vlade Republike Srbije za najbolje studente u 2001. godini. Takođe, dobio je nagradu 2002. godine za najboljeg studenta četvrte godine Mašinskog fakulteta u Nišu. U periodu od 2001. do 2003. godine bio je predsednik studentske asocijacije Mašinskog fakulteta u Nišu.

Poslediplomske studije upisao je školske 2004/05. godine na Mašinskom fakultetu u Nišu, smer Automatsko upravljanje i robotika.

Bio je angažovan na projektima Ministarstva prosvete, nauke i tehnološkog razvoja Republike Srbije: "Savremeno daljinsko upravljanje sistemima za vodosnabdevanje i tretman otpadnih voda" kao istraživač stipendista (2003.-2006. godine) i "Deterministička i stohastička stabilnost mehaničkih sistema" kao istraživač pripravnik (2006.-2010. godine).

Oktobra 2009. godine upisao je doktorske studije iz oblasti Primenjena mehanika. Marta 2010. godine izabran je za asistenta na Katedri za mehaniku. U proteklom periodu bio je angažovan u nastavi na izvođenju vežbanja na sledećim predmetima: Mehanika I-Statika, Mehanika II-Kinematika, Otpornost materijala, Inženjerska grafika, Internet upravljanje i Tehnička fizika.

Bio je član organizacionih odbora više međunarodnih naučnih konferencija.

U periodu od 2009. do 2013. godine bio je angažovan kao istraživač na bilateralnim DAAD projektima Mašinskog fakulteta u Nišu i Instituta za automatiku i tehniku IAT iz Bremena "Robust Vision for Rehabilitation Robotic" i "Novel Approach in Human Detection in Robotic". Od 2013. godine angažovan je na bilateralnom DAAD projektu Mašinskog fakulteta u Nišu i Instituta za mehaniku Tehničkog univerziteta u Berlinu "Intelligent control of smart structures".

Trenutno je angažovan na projektu Ministarstva prosvete, nauke i tehnološkog razvoja Republike Srbije pod nazivom "Dinamička stabilnost i nestabilnost mehaničkih sistema pod dejstvom stohastičkih poremećaja".

Govori engleski jezik, a služi se nemačkim jezikom.

Oženjen je, otac dvoje dece.



Прилог 1.

ИЗЈАВА О АУТОРСТВУ

Изјављујем да је докторска дисертација, под насловом

"Динамичка стабилност вискоеластичних континуалних система под дејством случајних поремећаја"

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација, ни у целини, ни у деловима, није била предложена за добијање било које дипломе, према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права, нити злоупотребио/ла интелектуалну својину других лица.

У Нишу, 25.12.2014.

Аутор дисертације: Иван Павловић

Потпис докторанда:

Иван Павловић



Прилог 2.

**ИЗЈАВА О ИСТОВЕТНОСТИ ШТАМПАНЕ И ЕЛЕКТРОНСКЕ ВЕРЗИЈЕ ДОКТОРСКЕ
ДИСЕРТАЦИЈЕ**

Име и презиме аутора: Иван Павловић

Студијски програм: примењена механика

Наслов рада:

"Динамичка стабилност вискоеластичних континуалних система под дејством случајних поремећаја"

Ментор: др Предраг Козић, ред. проф

Изјављујем да је штампана верзија моје докторске дисертације истоветна електронској верзији, коју сам предао/ла за уношење у **Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци, који су у вези са добијањем академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада, и то у каталогу Библиотеке, Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Нишу, као и у публикацијама Универзитета у Нишу.

У Нишу, 25.12.2014.

Аутор дисертације: Иван Павловић

Потпис докторанда:

Иван Павловић



Прилог 3.

ИЗЈАВА О КОРИШЋЕЊУ

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Никола Тесла“ да, у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу, унесе моју докторску дисертацију, под насловом:

„Динамичка стабилност вискоеластичних континуалних система под дејством случајних поремећаја“
која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату, погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију, унету у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу, могу користити сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons), за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство – некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да подвучете само једну од шест понуђених лиценци; кратак опис лиценци је у наставку текста).

У Нишу, 25.12.2014.

Аутор дисертације: Иван Павловић

Потпис докторанда:

Иван Павловић

17. 10. 2014

1. 612-638/14¹

НАСТАВНО-НАУЧНОМ ВЕЋУ МАШИНСКОГ ФАКУЛТЕТА У НИШУ

Одлуком Наставно-научног већа Машинског факултета Универзитета у Нишу, бр. 612-465-12/2014 од 14. јула 2014. године, именовани смо за чланове Комисије за оцену и одбрану докторске дисертације Ивана Павловића, дипл. маш. инж, под називом

“Динамичка стабилност вискоеластичних континуалних система под дејством случајних поремећаја”

Након прегледа докторске дисертације, сагласно Закону о високом образовању и Статуту Машинског факултета Универзитета у Нишу, Комисија подноси следећи:

ИЗВЕШТАЈ

Подаци о кандидату

Кандидат Иван Павловић рођен је 02. 11. 1979. године у Нишу. Основну школу и гимназију “Светозар Марковић” (рачунарско-програмерски смер) завршио је у Нишу. Машински факултет у Нишу уписао је школске 1998/99. године, а дипломирао је новембра 2003. године на смеру Рачунарски подржане производне технологије, са просечном оценом 9,06 и оценом 10 на дипломском испиту. Тема дипломског рада кандидата била је “Пројектовање детерминистичких и стохастичких мултиваријабилних система и њихова примена на решавању практичних проблема”. Током студија од 2000 до 2003. године учествовао је на Машинијадама као такмичар у знању из математике и информатике и у спортским такмичењима у одбојци и стоном тенису. Добио је награду Владе Републике Србије за најбоље студенте у 2001. години. Такође, добио је награду 2002. године за најбољег студента четврте године Машинског факултета у Нишу. У периоду од 2001. до 2003. године био је председник студентске асоцијације Машинског факултета у Нишу.

Последиломске студије уписао је школске 2004/05. године на Машинском факултету у Нишу, смер Аутоматско управљање и роботика.

Од децембра 2003. године до маја 2006. године био је ангажован као истраживач стипендиста на пројекту Министарства просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије “Савремено даљинско управљање системима за водоснабдевање и третман отпадних вода”, ев. бр. 6370, руководилац пројекта др Властимир Николић, ред. проф. Од 2006. до 2010. године био је ангажован као истраживач приправник на пројекту Министарства просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије под називом “Детерминистичка и стохастичка стабилност механичких система” ев. бр. 144023, руководилац пројекта др Ратко Павловић, ред. проф.

Октобра 2009. године уписао је докторске студије из области Примењена механика. Марта 2010. године изабран је за асистента на Катедри за механику. У протеклом периоду био је ангажован у настави на извођењу вежбања на следећим предметима: Механика I-

Статика, Механика II-Кинематика, Отпорност материјала, Инжењерска графика, Интернет управљање и Техничка физика.

Био је члан организационих одбора више међународних научних конференција.

У периоду од 2009. до 2013. године био је ангажован као истраживач на билатералним ДААД пројектима Машинског факултета у Нишу и Института за аутоматику ИАТ из Бремена "Robust Vision for Rehabilitation Robotic" и "Novel Approach in Human Detection in Robotic". Од 2013. године ангажован је на билатералном ДААД пројекту Машинског факултета у Нишу и Института за механику Техничког универзитета у Берлину "Intelligent control of smart structures".

Тренутно је ангажован на пројекту Министарства просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије под називом "Динамичка стабилност и нестабилност механичких система под дејством стохастичких поремећаја" ев. број. 174011, руководилац пројекта др Ратко Павловић, ред. проф.

Кандидат је аутор или коаутор 22 научних и стручних радова објављених у часописима или изложених на домаћим и међународним конференцијама.

Радови кандидата објављени у међународним часописима са ISI листе који су непосредно повезани са темом докторске дисертације су:

Радови кандидата објављени у врхунским међународним часописима (M21):

1. Pavlović R., **Pavlović I.**: Influence of rotatory inertia and transverse shear on stochastic instability of the cross-ply laminated beam, *International Journal of Solids and Structures*, (2005), Vol. 42(18-19), str. 4913-4926.
2. Pavlović R., Kozić P., Rajković P., **Pavlović I.**: Dynamic stability of a thin-walled beam subjected to axial loads and end moments, *Journal of Sound and Vibration*, (2007), Vol. 301(3-5), str. 690-700.
3. Pavlović R., Rajković P., **Pavlović I.**: Dynamic stability of the viscoelastic rotating shaft subjectet to random excitation, *International Journal of Mechanical Sciences*, (2008), Vol. 50(2), str. 359-364.
4. Pavlović R., Kozić P., **Pavlović I.**: Dynamic stability and instability of a double-beam system subjected to random forces, *International Journal of Mechanical Sciences*, (2012), Vol. 62(1), str. 111-119.
5. **Pavlović I.**, Ćirić I., Đekić P., Nikolić V., Pavlović R., Џојбашић Ж., Radenković G.: Rheological model optimization using advanced evolutionary computation for the analysis of the influence of recycled rubber on rubber blend dynamical behavior, *Meccanica*, (2013), Vol. 48(10), str. 2467-2477.

Радови кандидата објављени у истакнутим међународним часописима (M22):

1. Pavlović R., Rajković P., **Pavlović I.**: Amost sure stability of a moving elastic band, *Trans. ASME Journal of Applied Mechanics*, (2008), Vol. 75(4), str. 041016.
2. Pavlović R., Kozić P., Mitić S., **Pavlović I.**: Influence of rotatory inertia on dynamic stability of the viscoelastic symmetric cross-ply laminated plates, *Mechanics Research Communications*, (2012), Vol. 45, str. 28-33.

Радови кандидата објављени (или биће објављени) у међународним часописима (M23):

1. Pavlović R., Kozić P., Mitić S., **Pavlović I.**: Stochastic stability of rotating shaft, *Archive of Applied Mechanics*, (2009), Vol. 79(12), str. 1163-1171.

2. **Pavlović I.**, Pavlović R., Kozić P., Janevski G.: **Almost sure stochastic stability of a viscoelastic double-beam system**, *Archive of Applied Mechanics*_(2013), Vol. 83(11), str. 1591-1605.
3. Janevski G., Kozić P., **Pavlović I.**: **Moment Lyapunov exponents of the parametrical Hill's equation under the excitation of two correlated wideband noises**, *Structural Engineering and Mechanics* , Рад ће бити штампан у 2014. години.

Радови објављени у часописима националног значаја (M50):

1. Ćirić I., Ćojbašić Ž., Tomić M., Pavlović M., Pavlović V., **Pavlović I.**, Nikolić V.: **Intelligent control of DaNI robot based on robot vision and object recognition**, *Facta Universitatis*, (2012), Vol. 11(2), str. 129-140.

Саопштења кандидата на међународним скуповима штампана у Зборницима радова (M33):

1. Nikolić V., Ćojbašić Ž., Ćirić I., **Pavlović I.**: **Advanced Control Concept for the Remote Heating System of Niš**, *Proceedings of the IX Triennial International SAUM Conference on Systems, Automatic Control and Measurements*, ISBN 978-86-85195-49-5, (2007), str. 45-49, Niš.
2. Pavlović R., Kozić P., **Pavlović I.**: **Influence of rotatory inertia on dynamic stability of the symmetric cross-ply laminated plates**, *2nd International Congress of Serbian Society of Mechanics (IConSSM 2009)*, Section D-04 (*Interdisciplinary and Multidisciplinary Problems*) Palić (Subotica), Serbia.
3. **Pavlović I.**, Ćirić I., Đekić P.: **Optimal rheological model parameter setting for viscoelastical elements**, *1st International Conference (Mechanical Engineering in the 21st century)*, (2010), str. 37-40. Niš, Serbia.
4. G. Janevski, P. Kozić, **Pavlović I.**: **Moment Lyapunov exponents and stochastic stability of a thin-walled beam driven by real noise**, *3rd International Congress of Serbian Society of Mechanics (IConSSM 2011)*, str. 517-533 (C-21), Vlasina lake, Serbia.
5. Pavlović R., **Pavlović I.**, Stojanović V.: **Influence of transverse shear and rotary inertia on vibration and stability of cross-ply laminated plates**, *3rd International Congress of Serbian Society of Mechanics (IConSSM 2011)*, str. 975-985 (D-06), Vlasina lake, Serbia.
6. Pavlović R., Rajković P., **Pavlović I.**: **The numerical treatment of fractional differential equations for the lateral vibrations of an axially compressed visco-elastic rod**, *4th Serbian-Greek Symposium*, (D-06), Vlasina lake, Serbia.
7. Ćirić I., **Pavlović I.**, Petrović E., Djekić P., Milisavljević J.: **Evolutionary computation for viscoelastic element model parameters estimation**, *Proceedings of the 28th Danubia-Adria Symposium on Advances in Experimental Mechanics* (2011), str. 241-243, Budapest, Hungary.
8. Janevski G., Nešić N., Kozić P., **Pavlović I.**: **Transverse vibration of a damped beam with one step change subjected to axial force**, *4th International Congress of Serbian Society of Mechanics (IConSSM 2013)*, str. 541-546, (C-44), Vrnjačka Banja, Serbia.
9. **Pavlović I.**, Pavlović R., Kozić P., Janevski G., Ćirić I.: **Stochastic stability of a viscoelastic double-beam system under wideband noises**, *4th International Congress of Serbian Society of Mechanics (IConSSM 2013)*, str. 559-564. (C-47), Vrnjačka Banja, Serbia.
10. **Pavlović I.**, Pavlović R., Kozić P., Janevski G., Ćirić I.: **Stability of a Viscoelastic Nanobeam Under Real-Noise Excitation**, *2nd International Conference (Mechanical Engineering in the 21st century)*, (2013), str. 45-48, Niš, Serbia.

Саопштења кандидата на скуповима националног значаја штампана у Зборницима радова (M63):

1. Nikolić V., Ćojbašić Ž., Ćirić I., Pavlović I.: **Savremeni koncepti upravljanja dislociranim objektima komunalnih sistema**, *Vodovod i kanalizacija*, 2007, Zbornik radova, str. 48-54, Tara, Serbia.
2. Nikolić V., Ćojbašić Ž., Pavlović I., Ćirić I.: **Inteligentno daljinsko upravljanje sistemima za vodosnabdevanje i tretman otpadnih voda**, *31. naučno-stručni skup sa međunarodnim učešćem HIPNEF 2008*, Zbornik radova, str. 455-460, Vrnjačka Banja, Serbia.

Техничка решења кандидата (M80):

1. Ćojbašić Ž., Nikolić V., Ćirić I., Pavlović I.: **Неуро-фази класификатор објекта код роботске визије сложеног рехабилитационог роботског система ФРИЕНД (2011).**

Учешће кандидата у научно истраживачким националним пројектима:

1. Научно-истраживачки пројекат који финансира Министарство за науку и заштиту животне средине Републике Србије. **Савремено даљинско управљање системима за водоснабдевање и третман отпадних вода. Ев. број 6370.** Руководилац пројекта др Властимир Николић, ред. проф.
2. Научно-истраживачки пројекат који финансира Министарство за науку и заштиту животне средине Републике Србије. **Детерминистичка и стохастичка стабилност механичких система. Ев. број 144023.** Руководилац пројекта др Ратко Павловић, ред. проф.
3. Научно-истраживачки пројекат који финансира Министарство за науку и заштиту животне средине Републике Србије. **Динамичка стабилност и нестабилност механичких система под дејством стохастичких поремећаја. Ев. број 174011.** Руководилац пројекта др Ратко Павловић, ред. проф.

Учешће кандидата у научно истраживачким међународним пројектима:

1. Билатерални пројекат DAD-MNTR RS, у оквиру програма "PPP Serbien" Bremen-Niš. **Robust Vision for Rehabilitation Robotics**, 2009-2011.
2. Билатерални пројекат DAD-MNTR RS, у оквиру програма "PPP Serbien" Bremen-Niš. **A novel approach to human detection and tracing in robotics**, 2012-2013.
3. Билатерални пројекат DAD-MNTR RS, у оквиру програма "PPP Serbien" Bremen-Niš. **Intelligent control of smart structures**, 2013-2014.

Анализа докторске дисертације

Докторска дисертација кандидата Ивана Павловића, дипл. маш. инж, написана је на 156 страна Б5 формата. Проблематика анализирана у дисертацији изложена је у 8 поглавља у оквиру којих су уводна разматрања и закључак. Садржај дисертације дат је на почетку рада. На крају рада је списак литературе са 72 библиографске једнице. Дисертација садржи 58 графичких прилога.

Садржај текста докторске дисертације изложен је кроз следећа поглавља:

1. Увод.
2. Основи вискоеластичних материјала.
3. Нелокална теорија еластичности.
4. Случајни процеси.

5. Динамичка стабилност система вискоеластичних греда.
6. Динамичка стабилност наноструктура.
7. Стохастичко усредњење другог реда.
8. Закључак.

Докторску дисертацију кандидата Ивана Павловића, дипл. маш. инж, чини осам делова који су засебно формирано по поглављима.

У првом поглављу дат је преглед најновијих истраживања кроз анализу радова у области стохастичке стабилности дискретних и континуалних механичких система. Дате су дефиниције стохастичке стабилности и методе за одређивање стохастичке стабилности континуалних система: Директна метода Љапунова, метода конструкције функционала Љапунова и метода дискретизације. Такође, приказан је поступак одређивања експонента Љапунова и момената експонента Љапунова применом пертурбационе методе.

У другом поглављу приказан је утицај времена и температуре на деформације и напоне у материјалима када они испољавају вискоеластичне особине. У класичној теорији еластичности везе између напона и деформација су линеарне и не зависе од времена јер су уведене претпоставке о малим деформацијама у материјалу па се може применити принцип суперпозиције за оптерећења и деформације. Експерименти су показали да након наглог дејства оптерећења, које затим остаје константно, деформација расте са временом. Обрнуто, након наглог уклањања оптерећења деформација се не губи тренутно. У циљу описивања оваквих феномена формулисана су општије везе између напона и деформација које узимају у обзир и време. Променљивост механичких особина материјала током времена моделира се комбиновањем идеално еластичног тела и вискозног флуида. Еластичне особине материјала описују се *Hook-овим*, а вискозне *Newton-овим* законом. Реолошки модел еластичности је опруга са линеарном карактеристиком, при чему је коефицијент пропорционалности модул еластичности, а реолошки модел вискозности је пригушница која има карактеристику да је брзина пропорционална напону. Приказани су најчешће коришћени модели материјала са вискоеластичним особинама: *Voigt-Kelvin-ов* модел, *Maxwell-ов* модел, генерализовани *Maxwell-ов* модел, стандардни вискоеластични модел (*Zener-ов*) и тропараметарски модел.

У трећем поглављу у кратким цртама описана је нелокална теорија еластичности увођењем допунске *Eringen-ове* једначине везе између локалног и нелокалног напона. Претпостављена је функција језгра као *Green-ова* функција, а интегрална веза између локалног и нелокалног напона представљена је у еквивалентној диференцијалној форми, где је диференцијални оператор *Helmholtz-овог* или *bi-Helmholtz-овог* типа. Приказан је модел једнодимензионог континуалног модела нано димензија који се дефинише као нано греда. Такав модел се широко користи у инжењерској пракси. Такође, применом нелокалне теорије еластичности и за случај *Voigt-Kelvin-овог* модела материјала изведене су основне динамичке једначине нано греда *Euler-Bernoulli-јевог*, *Тимошенковог* и *Reddy-јевог* типа.

У четвртном поглављу дате су основне величине случајних променљивих и случајних процеса (функција расподеле вероватноће и функција густине расподеле вероватноће, математичко очекивање и статистички моменти, корелационе функције и функције спектралне густине). Садржај овог поглавља ограничен је на описивање случајних процеса који представљају побуде у динамичким системима, разматраним у дисертацији. Детаљно су приказани случајни процеси: *Gauss-ов* и хармонијски процес, *Wiener-ов* процес, процес белог шума, процес реалног шума (*Ornstein-Uhlenbeck-ов* процес), процес ограниченог шума. Такође, дате су основе теорије стохастичких диференцијалних једначина, *Itô-ове* и *Стратоновичеве*, као и релације између стохастичких интеграла у *Itô-овој* и *Стратоновичевој*

интерпретацији. На крају овог поглавља изложена је метода стохастичког усредњења првог реда коју је развио Стратонович. Она представља примену методе усредњења Богољубов-Митропољског за обичне диференцијалне једначине са малим параметром на стохастичке диференцијалне једначине.

У петом поглављу анализиран је механички систем који се састоји од две паралелне хомогене вискоеластичне Euler-Bernoulli-јеве греде под дејством аксијалних оптерећења, које су континуално спојене Winkler-овим еластичним слојем. Аксијалне притисне силе делују на крајевима греда и имају детерминистички и стохастички део. Коришћењем директне методе Љапунова и методе експонента Љапунова одређени су услови скоро сигурне стабилности за процесе који не садрже бели спектар (Gauss-ов и хармонијски процес) и за широкопојасне процесе белог, реалног и ограниченог шума. Области скоро сигурне стабилности добијене су у функцији времена ретардације, савојне крутости, крутости Winkler-овог еластичног слоја, интензитета детерминистичких компоненти аксијалних оптерећења и параметара стохастичких процеса. За стохастичке процесе који не садрже бели спектар нумерички резултати добијени су заменом несвојствених интеграла сумом производа коефицијената Gauss-ових квадратурних формула и величина подинтегралних функција срачунатих у нулама ортогоналних полинома. За случајне процесе који имају Gauss-ову расподелу густине вероватноће примењене су Gauss-Hermite-ове квадратурне формуле, а за процесе који имају хармонијску расподелу густине вероватноће коришћене су Gauss-Чебишевљеве квадратурне формуле.

Затим је анализиран случај када је горња греда оптерећена притисном силом која има детерминистички и стохастички део, а доња је изложена само дејству детерминистичке притисне силе. За овакав случај притисног оптерећења такође су одређени услови скоро сигурне стабилности за процесе који не садрже бели спектар (Gauss-ов и хармонијски процес) и процесе који имају бели спектар. На основу добијених резултата закључено је да се смањењем савојних крутости носача смањују области стабилности. Анализиран је утицај промене крутости Winkler-овог еластичног слоја и закључено је да се повећањем крутости повећава област стабилности. Ово повећање је значајније за мање вредности крутости, док се повећањем крутости слоја тенденција увећања области стабилности, значајно смањује. За процесе који не садрже бели спектар утврђено је такође, да су области стабилности за Gauss-ов процес веће него за хармонијски при једнаким параметрима система. Када су обе греде оптерећене притисним силама, описаним стохастичким процесима $f_1(t)$ и $f_2(t)$ који имају нормалну расподелу вероватноће, затим када су оба процеса некорелирани бели, реални и ограничени шумови одређене су области стабилности у функцији дисперзија случајних процеса. Утврђено је да пораст времена ретардације и крутости греда значајно утиче на повећање области стабилности греда, док је утицај повећања крутости Winkler-овог еластичног слоја знатно мањи.

У шестом поглављу у првом делу анализирана је динамичка стабилност различитих наноструктура. Изведена је диференцијална једначина трансферзалних осцилација вискоеластичне наногреде Voigt-Kelvin-овог модела материјала, на основу динамичких једначина кретања елементарног делића греде. Најпре је одређена област скоро сигурне стабилности, униформне вискоеластичне Rayleigh-јеве наногреде изложене дејству трансверзалног оптерећења по јединици дужине q_1 и q_2 и аксијалној сили притиска, коришћењем директне методе Љапунова и методом момената експонента Љапунова. У случају када је притисна сила Gauss-ов и хармонијски процес област скоро сигурне стабилности одређена је коришћењем директне методе Љапунова, а када је притисна сила типа реалног и ограниченог шума област скоро сигурне стабилности добијена је

срачунавањем момената експонента Љапунова. Валидација добијених резултата извршена је методом симулације коју је оригинално развио и применио кандидат. Области стабилности добијене су у функцији времена ретардације, варијанси (дисперзије) стохастичких процеса, геометријских параметара, коефицијента наноскалирања и интензитета детерминистичке компоненте аксијалног оптерећења. Један од важних закључака који важе за наноструктуре, јесте да се област стабилности повећава смањивањем коефицијента наноскалирања и повећавањем времена ретардације. За Helmholtz-ов тип језгра области стабилности су веће него за bi-Helmholtz-ов. Опште говорећи, нелокални ефекти смањују област стабилности Rayleigh-јеве наногреде.

У другом делу овог поглавља анализиран је механички систем који се састоји од две танке хомогене наногреде спојене еластичним слојем Winkler-овог типа. Греде су аксијално оптерећене притисним силама које имају детерминистички и стохастички део. Услови скоро сигурне стохастичке стабилности одређене су применом директне методе Љапунова. За случај када је стохастички део притисних сила процес који не садржи бели спектар услови скоро сигурне стохастичке стабилности добијени су у функцији коефицијента вискозног пригушења, крутости еластичног слоја, коефицијента наноскалирања и интензитета детерминистичких компоненти аксијалног притисног оптерећења. Утврђено је да се смањењем крутости Winkler-овог еластичног слоја смањује област стабилности. Као и у претходном примеру тако и за овај механички систем утврђено је да је област стабилности за Helmholtz-ов тип језгра већа него за bi-Helmholtz-ов. Када се детерминистички део притисних сила смањује тако да оне постају затезне та појава изазива повећање области стабилности, док повећање коефицијента наноскалирања смањује област стабилности.

У седмом поглављу најпре је изложен поступак стохастичког усредњења другог реда, а затим је анализирана стабилност кретања механичког система чије кретање описује двопараметарска Hill-ова диференцијална једначина при дејству два корелирана широкопојасна процеса. На усредњене Itô-ове диференцијалне једначине које одговарају p -том степену норме примењена је метода стохастичког усредњења првог и другог реда. Експонент Љапунова и моменти експонента Љапунова одређени су као редови малог флукуационог параметра ε . Моменти експонента Љапунова су важни карактеристични бројеви којим се описује динамичка стабилност стохастичких система. Када је p -ти моменти експонента Љапунова негативан решење које описује кретање стохастичког система је стабилно. Овако одређени аналитички изрази за експонент Љапунова и моменте експонента Љапунова искоришћени су за анализу скоро сигурне стабилности и стабилности момената стационарног решења које описује кретање танке хомогене греде изложене аксијалном притиску и пригушењу. Ове величине су широкопојасни независни стохастички процеси малог интензитета. Границе скоро сигурне стабилности и стабилности момената одређене на основу аналитичких израза, а срачунате су и нумерички применом симулационог алгорита који одговара методи Монте Карло. Овако добијени резултати показују велику подударност чиме се потврђује тачност апроксимативних аналитичких резултата.

У закључку аутор даје на систематичан начин закључна разматрања сваког сегмента докторске дисертације и истиче најбитније резултате до којих је дошао истраживањем, а такође наводи који су могући даљи правци истраживања у овој области.

ЗАКЉУЧАК И ПРЕДЛОГ

На основу изложене анализе докторске дисертације и остварених резултата чланови Комисије за оцену и одбрану закључују да:

- ❖ садржај поднете докторске дисертације у потпуности одговара теми прихваћеној од стране Наставно-научног већа Машинског факултета Универзитета у Нишу,
- ❖ кандидат је овладао потребним знањима из различитих области, а нарочито из области осцилација и стабилности стохастичких механичких система,
- ❖ кандидат је испољио потребну самосталност и инвентивност у научноистраживачком раду,
- ❖ кандидат је дошао до оригиналних резултата који су публиковани у високоранжираним часописима и саопштени на конференцијама из уже научне области којој припада тема докторске дисертације,
- ❖ добијени резултати пружају могућност за даља нумеричко-теоријска истраживања у овој области,
- ❖ рад је одговарајуће конципиран, технички квалитетно урађен и омогућава прегледно праћење изложеног садржаја и добијених резултата истраживања.

На основу свега изложеног, чланови Комисије су мишљења да поднета докторска дисертација представља вредан допринос изучавању проблематике динамичке стабилности вискоеластичних механичких система под дејством случајних поремећаја. Комисија предлаже Наставно-научном већу Машинског факултета у Нишу да поднесу рад кандидата **Ивана Павловића**, дипл. маш. инж. под називом

“Динамичка стабилност вискоеластичних континуалних система под дејством случајних поремећаја”

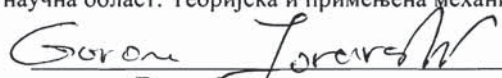
прихвати као докторску дисертацију и кандидата позове на усмену јавну одбрану.

У Нишу, Београду
октобра 2014. год.

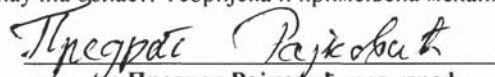
ЧЛАНОВИ КОМИСИЈЕ



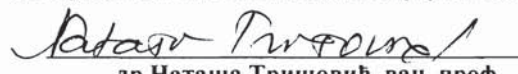
др Предраг Козић, ред. проф.
Машинског факултета Универзитета у Нишу
Ужа научна област: Теоријска и примењена механика.



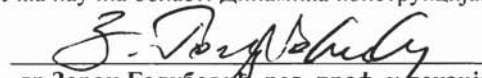
др Горан Јанџић, доцент
Машинског факултета Универзитета у Нишу
Ужа научна област: Теоријска и примењена механика.



др Предраг Рајковић, ред. проф.
Машинског факултета Универзитета у Нишу
Ужа научна област: Математика и информатика.



др Наташа Тришовић, ван. проф.
Машинског факултета Универзитета у Београду
Ужа научна област: Динамика конструкција.



др Зоран Голубовић, ред. проф. у пензији
Машинског факултета Универзитета у Београду
Ужа научна област: Теоријска и примењена механика.