



**UNIVERZITET U NIŠU**  
**MAŠINSKI FAKULTET U NIŠU**

---



*mr Saša Milanović*

**DOKTORSKA DISERTACIJA**

---

Niš, decembar 2013.



**Univerzitet u Nišu**  
**Mašinski fakultet u Nišu**

Katedra za hidroenergetiku

---



*mr Saša Milanović, dipl.maš.ing.*

**ISTRAŽIVANJE TURBULENTNOG DVOFAZNOG  
STRUJANJA U PRAVIM KANALIMA  
PNEUMATSKOG TRANSPORTA GRANULARNOG  
MATERIJALA NEKRUŽNOG POPREČNOG  
PRESEKA**

doktorska disertacija

**Mentor: *prof. dr Gradimir Ilić***

---

**Niš, decembar 2013.**



**University of Niš**  
**Faculty of Mechanical Engineering in Niš**

Chair for hydraulic engineering



---

**RESEARCH OF TWO PHASE TURBULENT FLOW OF  
GRANULAR MATERIAL PNEUMATIC TRANSPORT IN  
STRAIGHT CHANNELS WITH NONCIRCULAR  
CROSS SECTION**

by

**Saša Milanović, MSc Mech. Eng.**

PhD Dissertation

submitted to Faculty of Mechanical Engineering of University of Niš  
for the degree of

*PhD in mechanical engineering*

---

**Niš, December 2013.**

## **Zahvalnica**

*Ovom prilikom bih želeo da se zahvalim svima koji su mi svojim zalaganjem i korisnim sugestijama pomogli i doprineli na bilo koji način, pri izradi ovog rada, a pre svega:*

*- profesoru Gradimiru Iliću, na prihvatanju mentorstva i iskazane podrške u toku izrade disertacije,*

*- komentoru profesoru Žarku Stevanoviću na ogromnoj, nesebičnoj i velikodušnoj pomoći u svim etapama izrade disertacije, bez obzira na sve probleme koji su se javljali tokom izrade disertacije,*

*- profesoru Božidaru Bogdanoviću, na korisnim sugestijama tokom rada, i*

*- svim kolegama i prijateljima na pomoći, podršci i korisnim sugestijama.*

## ***Predgovor***

*Turbulentni transport materije, količine kretanja i toplote predstavlja glavnu odliku većine tokova fluida koji se svakodnevno susreću ne samo u inženjerskim i tehničkim uređajima nego i prirodnim vodotocima, atmosferskim strujanjima, a takođe i u živim organizmima. Matematičko modeliranje turbulentnih transportnih procesa predstavlja opšteprihvaćen metod za proračun bitnih karakteristika turbulentnih tokova fluida. Ovaj postupak nalazi primenu u naučnoistraživačkim analizama, laboratorijskim eksperimentima za verifikaciju osnovnih teoretskih postavki, a često za eksploataciju empirijom ili eksperimentom stečenih saznanja na nove nepoznate situacije i uslove. Sve više se koristi i u svakodnevnoj inženjerskoj praksi kao neizbežno oruđe za prognozu ishoda ili optimizaciju projektnih i konstruktivnih parametara, odnosno radnih uslova pri razvoju novih tehnoloških procesa, mašina, uređaja i postrojenja u kojima su kretanje fluida i turbulentni transportni fenomeni dominirajući faktor.*

## REZIME

Dvofazni turbulentni tokovi tipa gas-čvrste čestice u kanalima ne-kružnog poprečnog preseka (kvadratni, pravougaoni, itd.), veoma često se sreću u inženjerskoj praksi. Primeri, ovog tipa strujanja se mogu sresti u sistemima za provetravanje i klimatizaciju, sistemima za pneumatički transport granularnog i zrnastog materijala, turbomašinama, izmenjivačima toplote, nuklearnim reaktorima, otvorenim kanalima, itd. Dvofazna strujanja tipa gas-čvrste čestice karakterišu strujni fenomeni koji su posledica interakcije gasne i čvrste faze.

U ovakvim kanalima se pored osnovnog strujanja duž kanala, javljaju i sekundarna strujanja u ravni poprečnog preseka kanala. Mehanizmi koji dovode do pojave sekundarnog strujanja su različiti (zakrivljeni kanali, različito temperaturno opterećenje zidova kanala, itd.). Ovaj tip strujanja poznat kao Prandtl-ovo sekundarno strujanje prve vrste, bio je predmet istraživanja velikog broja istraživača.

Poseban fenomen strujanja koje se javlja u pravim kanalima u režimu razvijenog turbulentnog strujanja je sekundarno strujanje druge vrste, poznato u literaturi kao Prandtl-ovo sekundarno strujanje druge vrste. Ovom problemu je vrlo malo pažnje posvećeno u dosadašnjoj istraživačkoj praksi.

Ovaj tok ima značajan uticaj u ukupnom mehanizmu prenosa materije, impulsa i toplote u kanalu i okolini. Prenos impulsa visokog intenziteta u kanalu ima za posledicu velike gradijente tranzverzalnih brzina u ravni poprečnog preseka. Sekundarni tok proizvodi povećani smicajni napon prema rogljevima kanala i značajno utiče na intenzitet prenosa toplote sa fluida na zid kanala i obrnuto.

Ovo su samo neki od razloga zašto je fenomenu sekundarnog strujanja druge vrste u dvofaznom sistemu gas-čvrste čestice posvećena posebna pažnja u ovom radu. Razmatran je stacionaran, nestišljiv, potpuno razvijen turbulentni tok u pravom kanalu kvadratnog poprečnog preseka, čiji zidovi imaju konstantnu temperaturu različitu od temperature okoline.

**Ključne reči:** *pneumatski transport, čvrste čestice, kanal, dvofazna strujanja.*

## ABSTRACT

The two-phase turbulent flows of gas-solid particles, in the channels of non-circular cross-section (square, rectangular, etc.), are very often encountered in engineering practice. Examples of this flows type can be found in ventilation systems and air conditioning, in systems for pneumatic transport of granular materials, in turbo machines, heat exchangers, nuclear reactors, open channels, etc. Two-phase flows of gas-solids are characterized by a variety of phenomena which are a consequence of interaction the gas and the solid phases.

In these channels beside the main stream along the channel occur secondary flows in the plane of the channel cross section. The mechanisms that lead to the secondary flows are different (curved channels, different temperature load of channel walls etc.). This type of flows, known as Prandtl's secondary flow of the first kind, was the subject of a large number of researchers.

A special flow phenomenon which occurs in straight channels in the regime of fully developed turbulent flow is a secondary flow of the second kind, known in the literature as secondary flow of Prandtl's second kind. To this problem is a very little attention has been paid so far in research practice.

This flow has a significant impact in the total mechanism of mass, impulse and heat transfer in the channel and in environment. Transfers of high intensity impulses in the channel have as a consequence large gradients of transversal velocity in the plane of channel cross section. Produced secondary flow increase shear stress in the corners of the channels and has a significant effect on the intensity of heat transfer from fluid to the wall of the channel, and vice versa.

These are some of the reasons why special attention to the phenomenon of secondary currents of the second kind in the two-phase system gas-solid particles is given in this paper. Considered flow is turbulent, steady, incompressible and fully developed in the straight channel of square cross-section, whose walls have a constant temperature different from the environmental temperature.

**Key words:** *Pneumatic transport, Solid particles, Channel, Two-phase flow.*

# SADRŽAJ

## OZNAKE

1. UVOD.....	1
1.1. Problemi pneumatičkog transporta.....	2
1.2. Pneumatički transport kanalima ne-kružnog poprečnog preseka.....	10
1.3. Predmet istraživanja.....	12
2. PREGLED DOSADAŠNJIH ISTRAŽIVANJA.....	13
3. OSNOVNI ZAKONI TURBULENCIJE.....	19
3.1. Zakon konzervacije.....	19
3.2. Jednačina kontinuiteta.....	23
3.3. Jednačina kretanja.....	23
3.4. Energetska jednačina.....	24
3.5. Generalizacija zakona konzervacije.....	25
4. FIZIČKI MODEL.....	27
4.1. Formulacija fizičkog modela gasne faze.....	27
4.2. Formulacija fizičkog modela čvrste faze.....	34
5. MATEMATIČKI MODEL.....	36
5.1. Matematički model gasne faze.....	36
5.1.1. Osnovne jednačine održanja.....	38
5.1.2. Turbulentni modeli.....	40
5.1.2.1. Model Reynolds-ovih napona.....	40
5.1.2.2. Model turbulentnih temperaturskih flukseva.....	45



---

5.2. Matematički model čvrste faze .....	47
5.2.1. Jednačina trajektorija čestica .....	48
5.2.2. Jednačina impulsa čvrste faze .....	48
5.2.3. Stohastički model turbulencije čvrste faze .....	50
5.2.4. Integraljenje jednačine impulsa čestice.....	52
5.2.4.1. Određivanje Lagrange-ovog vremenskog koraka integracije $\Delta t_L$ ....	52
5.2.4.2. Pokretanje čestica.....	54
5.2.4.3. Određivanje karakteristika čestica.....	54
5.2.4.4. Određivanje interfaznih članova.....	56
6. VALIDACIJA MODELA .....	59
6.1. Definicija validacionog modela .....	59
6.2. Granični uslovi validacionog modela .....	60
6.3. Rezultati validacionog modela .....	61
7. REALAN PROBLEM.....	64
7.1. Postavka problema .....	64
7.2. Prikaz rezultata monofaznog strujanja.....	71
7.3. Granični uslovi čvrste faze.....	75
7.4. Prikaz rezultata dvofaznog strujanja.....	79
7.4.1. Kvarc.....	79
7.4.2. Pepeo.....	86
7.4.3. Brašno.....	93
7.5. Diskusija rezultata.....	103
7.5.1. Kvarc.....	105
7.5.2. Pepeo.....	108
7.5.3. Brašno.....	110
9. ZAKLJUČAK.....	112
10. LITERATURA.....	115

---

## OZNAKE

$A$	[-]	- konstanta, faktor multiplikacije
$A_{KP}$	[m <sup>2</sup> ]	- kontrolna površina
$A_P$	[m <sup>2</sup> ]	- površina poprečnog preseka čestice
$A_{zid}$	[m <sup>2</sup> ]	- površina stranica jednog bisektora kanala
$a$	[-]	- koeficijent toplotne difuzije
$B$	[-]	- konstanta
$b$	[-], [m]	- koeficijent uzgonske sile, širina kanala
$C'$	[-]	- konstanta
$C_i$	[-]	- konstanta
$C_{zi}$	[-]	- empirijski koeficijenti
$C_{\theta i}$	[-]	- empirijski koeficijenti
$C_{\varepsilon i}$	[-]	- empirijski koeficijenti
$C_D$	[-]	- koeficijent otpora čestice
$C_\mu$	[-]	- konstanta turbulentnog modela
$c_o$	[ms <sup>-1</sup> ]	- brzina "lebdenja"
$c_P$	[Jkg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ]	- specifična toplota
$D_P$	[m]	- prečnik čvrste čestice
$D_h$	[m]	- hidraulički prečnik čvrste čestice
$D/Dt$	[-]	- supstitucionalni izvod
$\tilde{F}_i$	[N]	- trenutna komponenta zapreminske sile
$F_i$	[N]	- usrednjena komponenta zapreminske sile
$f_i$	[N]	- fluktuaciona komponenta zapreminske sile
$f_\varepsilon$	[-]	- funkcija turbulentnog Reynolds-ovog broja

---

$g$	[ms <sup>-2</sup> ]	- vektor gravitacije
$h$	[Jkg <sup>-1</sup> ]	- usrednjena entalpija
$k$	[m <sup>2</sup> s <sup>-2</sup> ]	- kinetička energija turbulencije
$L$	[m]	- dužina kanala
$\ell_e$	[m]	- lokalna dužinska razmera turbulencije
$m_p$	[kg]	- masa čvrste čestice
$\dot{m}$	[kgs <sup>-1</sup> ]	- maseni protok transportovanog fluida
$\dot{m}_p$	[kgs <sup>-1</sup> ]	- maseni protok transportovanih čestica
$Nu$	[-]	- Nuselt-ov broj
$n_i$	[-]	- ort normale na koordinatnu ravan
$\tilde{P}$	[Nm <sup>-2</sup> ]	- trenutni pritisak
$P$	[Nm <sup>-2</sup> ]	- usrednjeni pritisak
$p$	[Nm <sup>-2</sup> ]	- fluktuacija pritiska
$Pr$	[-]	- Prandtl-ov broj
$Pe$	[-]	- Peclet-ov broj
$R_{ij}$	[s <sup>-1</sup> ]	- tenzor rotacije
$\mathfrak{R}_p$	[-]	- funkcija otpora čestice
$Re$	[-]	- Reynolds-ov broj
$St$	[-]	- Stokes-ov broj
$S_{ij}$	[s <sup>-1</sup> ]	- tenzor deformacije
$S_{Ui}^{IF}$	[-]	- interfazni članovi interakcije
$T$	[K]	- temperatura
$T_{ij}$	[Nm <sup>-2</sup> ]	- tenzor ukupnog napona
$t_{zid}$	[K]	- temperatura zida kanala
$t_i$	[s]	- vremenski korak
$\Delta t_i$	[s]	- vremenski intervali

---

---

$\tilde{U}_{i,j,k}$	[ms <sup>-1</sup> ]	- trenutna komponenta brzine vazduha
$U_{i,j,k}$	[ms <sup>-1</sup> ]	- usrednjene komponente brzine vazduha
$U_\tau$	[ms <sup>-1</sup> ]	- usrednjena frikciona brzina
$u_{i,j,k}$	[ms <sup>-1</sup> ]	- fluktuaciona komponenta brzine vazduha
$\overline{u_i u_j}$	[m <sup>2</sup> s <sup>-2</sup> ]	- komponente turbulentnih napona
$\tilde{U}_p$	[ms <sup>-1</sup> ]	- trenutna brzina čestice
$U_p$	[ms <sup>-1</sup> ]	- usrednjena brzina čestice
$u_p$	[ms <sup>-1</sup> ]	- fluktuaciona brzina čestice
$V_{KZ}$	[m <sup>3</sup> ]	- kontrolna zapremina
$V_P$	[m <sup>3</sup> ]	- zapremina čestice
$x_{i,j,k}$	[m]	- koordinate
$x_p$	[-]	- vektor pozicije čestica
$\alpha$	[-]	- konstanta
$\beta$	[-]	- konstanta
$\gamma$	[-]	- konstanta
$\delta_{ij}$	[-]	- Kroenecker-ov operator
$\varepsilon$	[m <sup>2</sup> s <sup>-3</sup> ]	- brzina disipacije turbulentne kinetičke energije
$\tilde{I}_V$	[N]	- trenutna vrednost zapreminske sile
$\tilde{I}_A$	[N]	- trenutna vrednost površinske sile
$\theta$	[K]	- fluktuacija temperature
$\eta$	[s <sup>-1</sup> ]	- brojčani protok čestica za jednu numeričku ćeliju
$\kappa$	[-]	- Von Karman-ova konstanta
$\lambda$	[m], [Wm <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ]	- Taylor-ova mikro razmera, - koeficijent provođenja toplote
$\mu$	[kgm <sup>-1</sup> s <sup>-1</sup> ]	- dinamička viskoznost, koncentracija čvrstih čestica transportovanog materijala
$\nu$	[m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> ]	- kinematska viskoznost, konstanta

---

---

$\rho$	[kgm <sup>-3</sup> ]	- gustina transportnog gasa
$\rho_p$	[kgm <sup>-3</sup> ]	- gustina transportovanih čvrstih čestica
$\overline{\rho u_i u_j}$	[Nm <sup>-2</sup> ]	- tenzor turbulentnih napona
$\overline{\rho \theta u_i}$	[kgKm <sup>-2</sup> s <sup>-1</sup> ]	- turbulentni temperaturni fluks
$\overline{\rho' u_i}$	[kgm <sup>-2</sup> s <sup>-1</sup> ]	- turbulentni materijalni fluks
$\sigma$	[-]	- standardna devijacija
$\sigma_{i,j}$	[Nm <sup>-2</sup> ]	- tenzor sfernih napona
$\tau$	[s]	- vremenska makro razmera turbulencije
$\tau_{i,j}$	[Nm <sup>-2</sup> ]	- tenzor smičućih (viskozni) napona
$\tilde{X}$	[-]	- odgovarajuća trenutna promenljiva čestica
$\tilde{\Phi}$	[-]	- trenutna vrednost opšte promenljive
$\Phi$	[-]	- usrednjena vrednost opšte promenljive
$\tilde{\phi}$	[-]	- trenutna vrednost opšte promenljive po jedinici mase
$\phi$	[-]	- usrednjena vrednost opšte promenljive po jedinici mase
$\tilde{\Omega}_{i,j,k}$	[s <sup>-1</sup> ]	- trenutne komponente vrtložnosti
$\Omega_{i,j,k}$	[s <sup>-1</sup> ]	- usrednjane komponente vrtložnosti
$\omega_{i,j,k}$	[s <sup>-1</sup> ]	- fluktuacione komponente vrtložnosti

## INDEKSI

KP	- kontrolna površina
KZ	- kontrolna zapremina
0	- početak Lagrange-ovog vremenskog koraka
P	- transportovane čvrste čestice
i, j, k	- indeksi koordinatnih osa
n	- kraj Lagrange-ovog vremenskog koraka

## 1. UVOD

U širokoj inženjerskoj praksi vrlo često se susreću dvofazna strujanja tipa gas – čvrste čestice. Najčešći primeri ovog tipa strujanja se javljaju u sistemima pneumatičkog transporta granularnog materijala, sistemima za klimatizaciju i provetravanje, procesnim i energetske sistemima, itd. U opštem slučaju, dvofazno strujanje karakteriše poseban kompleks strujnih fenomena koji su posledica interakcija gasne i čvrste faze, hemijskih reakcija između faza, složenih toplotnih tokova sa zapreminskim efektima radijacije gasa i površinskim efektima radijacije čestica, itd.

Zbog svoje složenosti, dvofazno strujanje je stalni predmet i izazov u istraživačkoj praksi, a usmeren je ka rešavanju navedenih kompleksnih problema. Istraživačka praksa u ovoj oblasti je ukazala na glavni problem adekvatnog modeliranja turbulentnih efekata u dvofaznim strujnim tokovima. Rezultati dosadašnjih istraživanja nisu ni izbliza rešili sve probleme modeliranja turbulentnih mehanizama dvofaznog strujanja, tako da se još uvek ni izotermalno strujanje gasa sa česticama ne može uvek pouzdano predvideti i proračunati. Zbog toga je razvoj matematičkih modela turbulentnih strujanja dvofaznih sistema stalno

aktuelan i zahteva dalje provere i usavršavanja. Ovo je osnovni motiv izbora predmeta istraživanja predložene doktorske disertacije.

## 1.1. Problemi pneumatičkog transporta

Transport bilo kog čvrstog materijala ili fluida može se obaviti pokretnim ili nepokretnim sredstvima transporta. Pod pokretnim sredstvima transporta podrazumeva se transport drumskim, vazdušnim ili vodenim putem, odnosno transport kamionima, vozovima, brodovima i avionima. Pod nepokretnim sredstvima transporta podrazumeva se uobičajeno cevovodni i trakasti transport [6]. Transport manjih količina materijala pokretnim sredstvima ima prednost u slučaju brzog i povremenog transporta. Međutim, ako je reč o potrebi kontinualnog snabdevanja materijalom, tada cevovodni ili trakasti transport imaju prednost. U svakom slučaju kada se radi o transportu većih količina materijala neophodno je izvršiti tehno-ekonomsku analizu čiji će rezultati ukazati na najisplativiji način transporta, [74].

U zavisnosti od toga kojim fluidom se vrši transport čvrstih materijala razlikuju se *hidraulički transport*, kada se transport vrši vodom i *pneumatički transport* kada se transport vrši gasom, najčešće vazduhom.

Hidraulički transport je, u stvari, cevni transport mešavine usitnjenog materijala i vode. Razume se, hidraulički ima smisla transportovati čvrste sipkave materijale koji ne menjaju svoja fizička svojstva niti hemijski reaguju u dodiru sa vodom (kako bi sa njom gradila jedinjenja koja bi dovela do zapušanja cevovoda), ili su pak ove promene u funkciji tehnološkog procesa (kod unutrašnjeg hidrauličkog transporta). Hidraulički se transportuju različite usitnjene rude svih vrsta i njihove jalovine, usitnjeni uglj, ugljeni prah, pesak, pepeo, šljaka, celulozna vlakna, hartijska masa, koncentri stočne hrane itd. Dok se hidraulički ne bi trebalo transportovati materijali koji se u vodi rastvaraju kao što su: šećer, so, veštačka đubriva i dr.

Pneumatičkim transportom, praktično se mogu transportovati gotovo svi sipkasti i zrnasti materijali bez posebnog ograničenja. Tako da se pneumatički transportuju: ugljeni prah, pepeo, žitarice (kukuruz, pšenica, raž, ječam, suncokret, soja, i sl.) i njeni proizvodi (brašno, šećer, stočna hrana, itd.), pesak, pepeo, šljaka, kafa, kakao, so, piljevina u drvanoj industriji, deterdžent, veštačko đubrivo, itd.

Ako se isti sipkasti materijal može transportovati i hidraulički i pneumatički tada presudnu ulogu pri odluci o načinu transportovanja ima dužina cevovoda – hidraulički transport se primenjuje za veća rastojanja a pneumatički za manja rastojanja. Pri hidrauličkom transportu dužina transporta praktično nije ograničena, ali pri nekoj željenoj dužini transporta samo se postavlja pitanje ekonomičnosti i primene takvog vida transporta.

Ideju hidrauličkog ili pneumatičkog transporta ponudila je sama priroda, kroz hidraulički transport blata, mulja, peska, stabala rečnim koritima ili nošenje prašine i raznog sitnog semena pa čak i insekata snagom vetra. Dakle, priroda je ponudila ideju transporta čvrstih čestica materijala hidraulički ili pneumatički dok je istraživačima i inženjerima prepustila da urede, odnosno definišu uslove pod kojima je moguće vršiti organizovani transport nekog čvrstog materijala.

Pod pneumatičkim transportom se podrazumeva transport čvrstih čestica rastresitih, praškastih i zrnastih materijala najčešće strujom vazduha ili nekim drugim gasom. Transport materijala zasniva se na činjenici da struja gasa deluje na čestice aero-dinamičkim silama, koje pri odgovarajućim brzinama gasa postaju dovoljno velike da čestice materijala budu ponete strujom gasa. Kretanje čestica materijala pri pneumatičkom transportu je haotično i sa sudarima ali sa osnovnim komponentama brzine u pravcu ose cevovoda koja je naravno manja od brzine transportnog gasa.

Prve instalacije pneumatičkog transporta pojavile su se krajem XIX veka i bile su namenjene za pretovar pšenice iz velikih prekookeanskih brodova u Londonskim dokovima, a vremenom se ovaj vid transporta počeo primenjivati i na druge rastresite materijale [74]. Primena pneumatičkog transporta je veoma široka i raznovrsna, i podrazumeva transport: ugljenog praha, pepela i šljake u



termoelektranama, kreča u prahu, cementa, gipsa, brašna, šećera, deterdženta, veštačkog đubriva, svih vrsta žitarica, piljevine u drvanoj industriji, papira, itd. Do intenzivnog teorijskog i eksperimentalnog istraživanja u oblasti pneumatičkog transporta, a samim tim i do intenzivnog razvoja ovog vida transporta, dolazi nakon II Svetskog rata.

Prednosti pneumatičkog transporta praškastog, zrnastog i vlaknastog materijala u odnosu na mehanički transport istog materijala, [6],[14] su sledeće:

- lako uklapanje transportnog cevovoda u raspoloživi prostor,
- mogućnost transporta u svim pravcima,
- mogućnost povezivanja unutrašnjeg transporta sa nekim tehnološkim procesom, kao što su: sušenje ili vlaženje materijala vazduhom, zagrevanje ili hlađenje materijala vazduhom, razvrstavanje materijala po krupnoći na osnovu brzine taloženja, itd.,
- istovremeni transport sa više mesta na jedno ili sa jednog na više mesta,
- mogućnost visokog stepena automatizacije transportnog procesa i raspoređivanja materijala po skladišnim prostorima (silosima), što poslugu svodi na minimum,
- mogućnost velikih transportnih kapaciteta po jednoj liniji (i do 300 t/h),
- srazmerno mali investicioni troškovi održavanja,
- zanemarljiv gubitak mase u toku transporta,
- transport bez zaprašivanja okoline,
- malobrojno osoblje potrebno za nadgledanje transporta.

Nedostaci pneumatičkog transporta, [6],[14] su:

- ne može se primeniti na sve materijale, već samo na praškaste, zrnaste i vlaknaste,

- za vreme transporta, materijal se donekle usitnjava, naročito kad sistem pneumatičkog transporta nije dobro dimenzionisan i kad strujni parametri nisu dobro odabrani,
- dužina transporta ne prelazi 2 [km] pa je zbog toga ograničen na primenu unutar fabričkih krugova i hala,
- usled vlažnosti materijala dolazi do slepljivanja i zagušenja cevovoda,
- veće habanje delova koji su u kontaktu sa čvrstim česticama transportovanog materijala,
- usled povećanog trenja može doći do neželjenih efekata naelektrisanja transportovanih čestica,
- neophodnost razdvajanja čvrste faze od fluida na kraju transporta (ugradnja separatora i filtera),
- potrošnja pogonske energije je pri istom kapacitetu viša nego kod mehaničkog transporta.

Na ukupnu cenu nekog proizvoda bitno utiču i njegovi transportni troškovi. Zato je veoma važno izabrati pravi način transporta i izračunati njegove optimalne parametre. Kada su u pitanju praškasti i zrnasti materijali, onda pored ostalih načina transporta dolazi u obzir i leteći pneumatički transport. S obzirom na dobre i loše strane letećeg pneumatičkog transporta, može se uzeti da je ovaj način transporta povoljniji:

- kod transporta velikih količina manje abrazivnih materijala u unutrašnjem transportu većih dužina,
- u slučajevima kada se pneumatički transport rešava za već gotove objekte (zgrade) sa postavljenim mašinama,
- ako se njime rešava i sprečavanje zaprašivanja radne sredine (okoline),
- ako se ovakav transport povezuje sa nekim tehničko-tehnološkim procesom.

Uzimajući u obzir samo troškove transporta, upoređenje letećeg pneumatičkog transporta sa mehaničkim transportom prikazano je u tabeli 1.1:

**Tabela 1.1**

Vrsta troškova	Pneumatički transport	Mehanički transport
Investicioni	niži	viši
Pogonski (potrošnja energije)	niži	viši
Posluga	niži	viši
Održavanje	niži*	viši*

\* *izuzimajući grube abrazivne materijale*

Zbog toga je od interesa poznavanje i oblasti primene pneumatičkog transporta:

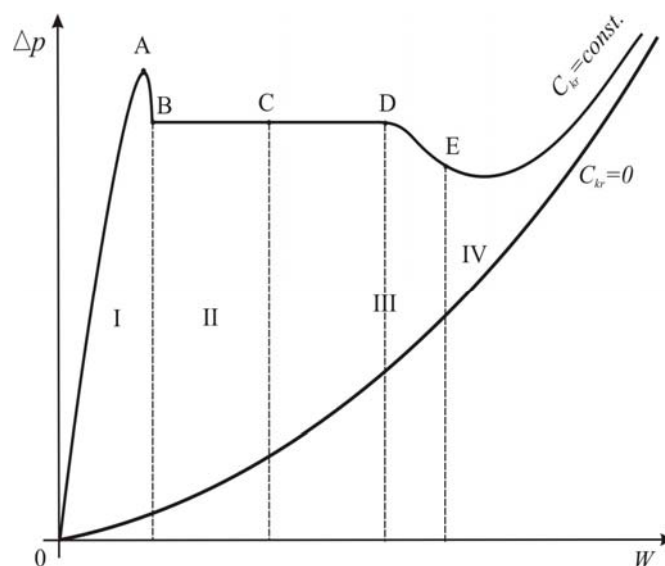
- istovar i pretovar praškastih i zrnastih materijala (cement, koncentri stocne hrane, žitarice, i dr.) iz prevoznih sredstava pomoću kojih se obavlja njihov transport u rasutom stanju (teretni brodovi, šleperi, auto-cisterne, vagon-cisterne, i sl.),
- transport žitarica i njihovih prerađevina u mlinovima i silosima,
- prenos uglja u prahu u termoelektranama,
- prenos elektro-filterskog pepela u termoelektranama,
- transport peska u livnicama,
- transport deterdženta u prahu, kalcinisane sode i drugih praškastih i zrnastih materija u hemijskoj i procesnoj industriji,
- izbacivanje svih vrsta prašina sakupljenih usisavanjem iz zagađenih prostorija, hala, i od raznih mašina koje obradom nekih predmeta stvaraju prašinu,
- izbacivanje piljevine, šuški i sitnih otpadaka u drvenoj industriji,
- prenos rezanog duvana u fabrikama cigareta,
- prenos otpadaka kože u kožarskoj industriji,

- prenos administrativne pošte unutar fabrika i laboratorija, u bankama, novinskim agencijama itd., danas se uglavnom obavlja pneumatičkim transportom – pneumatska pošta.

Postoji više podela pneumatičkog transporta čvrstih čestica materijala [6], [14]. Osnovna podela pneumatičkog transporta je prema prirodi kretanja čvrstih čestica materijala za vreme transporta:

- transport materijala u fluidizovanom stanju,
- transport materijala potiskivanjem i
- leteći pneumatički transport.

Kod sistema transporta na bazi fluidizacije transportu materijala prethodi proces fluidizacije odnosno stvara se jedna tkz. „fluidizovana masa“ koja dobija osobine tečnosti odgovarajuće viskoznosti. Kao i kod kretanja tečnosti, uzrok kretanja fluidizovanog materijala može biti gravitacija (transport fluidizovanog materijala u kanalima) ili razlika pritiska između protočnih preseka transportnog cevovoda (Flid-liftovi).



**Slika 1.1.** Fazni dijagram fluidizacije

I – fluidizacija materijala u nasutom stanju pri konstantnoj poroznosti,  
II – potpuna fluidizacija materijala, III – pneumatski transport na bazi fluidizacije i IV - leteći pneumatski transport.

Pneumatički transport potiskivanjem vrši se po principu da vazduh pod pritiskom potiskuje manje ili veće homogene klipove testastog, slabo lepljivog materijala (npr. betonske smeše) ili potiskuje patrone koje se pune transportovanim materijalom (vazдушna pošta u bankama i drugim ustanovama). Pneumatičkim transportom potiskivanjem može se transportovati i praškasti materijal, ako se radi o visinskoj razlici 20÷30 [m] i manjim dužinama. Ovaj princip transporta koristi se vrlo često pri transportu betonske smeše.

Leteći pneumatički transport je cevni transport mešavine rastresitog, zrnastog i praškastog transportovanog materijala i transportnog vazduha, kod koga su čestice materijala rasejane po čitavom poprečnom preseku transportnog kanala, te se tako stiče utisak kao da čestice lete [6]. Da bi se izbegla opasnost od eksplozije pri transportu nekih praškastih materijala, umesto vazduha se koristi neki inertni gas (npr. azot), s tom razlikom što njegova kontura cirkulacije je zatvorena.

U zavisnosti da li se transportovani materijal usisava, potiskuje ili i usisava i potiskuje (slika 1.2.), leteći pneumatički transport može biti:

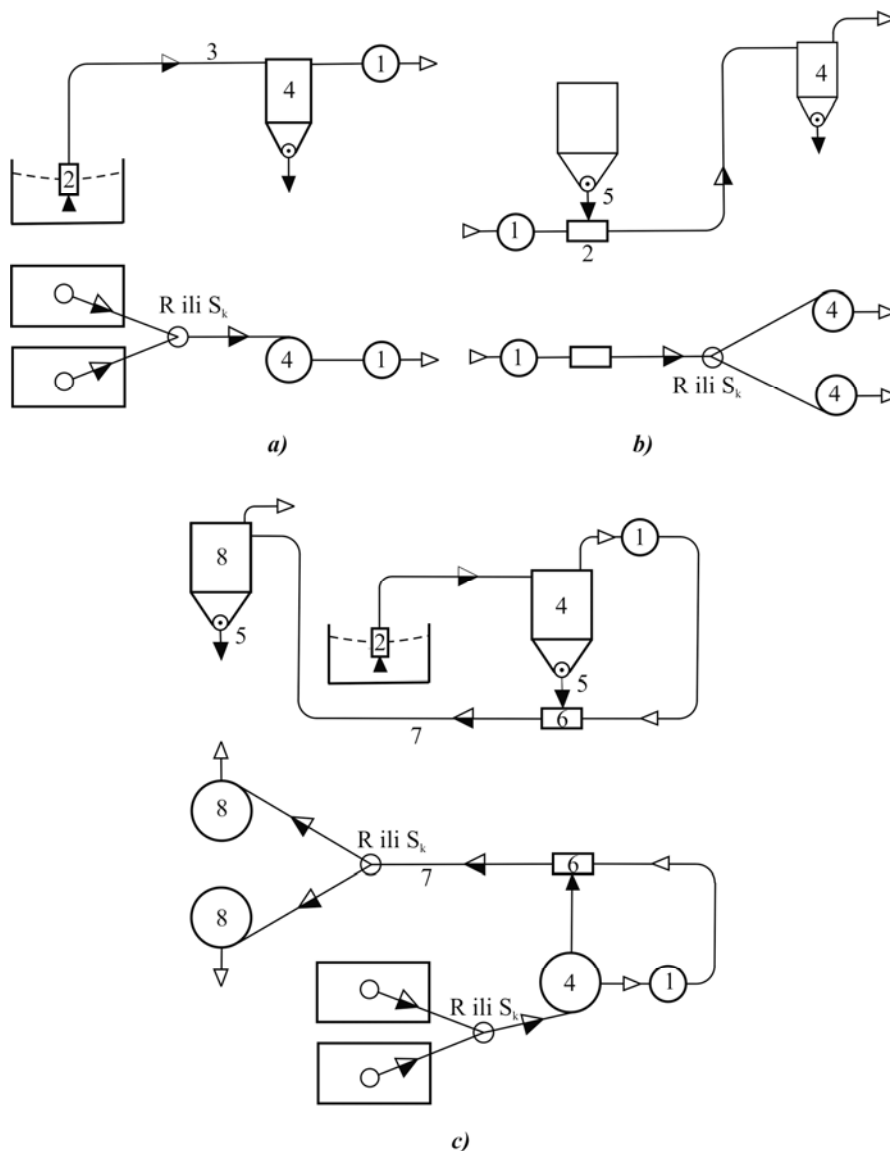
- usisni,
- potisni ili
- kombinovani.

U zavisnosti od koncentracije čvrstih čestica transportovanog materijala u struji transportnog vazduha, leteći pneumatički transport može biti:

- niske ( $\mu < 1$ ),
- srednje ( $1 < \mu < 10$ ) i
- visoke ( $10 < \mu < 80$ ) koncentracije.

U odnosu na veličinu pritiska, leteći pneumatički transport se deli na transport:

- niskog pritiska (do 10000 Pa = 0,1 bar),
- srednjeg pritiska (0,1÷1 bar) i
- visokog pritiska (> 1 bar).



**Slika 1.2.** Šeme izvođenja letećeg pneumatičkog transporta  
a) usisni, b) potisni i c) kombinovani leteći pneumatički transport

1 – vakuum pumpa (sl.2.a), duvaljka (sl.2.b i sl.2.c); 2 – mešač; 3 – cevovodi transporta materijala; 4 – odvajači; 5 – dozator; 6 – mešač; 7 – cevovodi transporta materijala; 8 – odvajači.

Kod pneumatičkog transporta niskog pritiska vazдушnu struju stvaraju ventilatori, a kod pneumatičkog transporta srednjeg pritiska vazдушnu struju stvaruju turbo-duvaljke ili vakuum pumpe, ako se radi o usisnom transportu. Kod pneumatičkog transporta visokog pritiska, vazдушnu struju stvaraju turbo-duvaljke (stepena sabijanja do 3 bara) i kompresori (stepena sabijanja obično 3÷8 bara). Razume se, usisni leteći pneumatički transport ne može biti visokog pritiska, pri

čemu je vakuum ispod jednog bara. Pneumatički transport na bazi fluidizacije spada u kategoriju visoke koncentracije, a u odnosu na pritisak spada u grupu potisnog transporta [74].

## 1.2. Pneumatički transport kanalima ne-kružnog poprečnog preseka

U osnovi svih procesa transporta materije, količine kretanja i toplote nalazi se najuticajniji faktor i uzrok glavnih poteškoća u rasvetljavanju ovih fenomena - turbulencija. Zato turbulencija predstavlja polaznu tačku i zajedničku nit svih razmatranja vezanih za ove fenomene. Turbulencija je po prirodi nestacionarni, nelinearni, nepovratni, stohastički, trodimenzijski fenomen, i kao takva je "otporna" na egzaktni matematički tretman, uprkos činjenici da na primer Navier-Stokes-ove jednačine u potpunosti definišu kretanje elementarnog fluidnog delića, bez obzira na nivo turbulentnosti i njenu strukturu. Iako nam danas stoje na raspolaganju numeričke metode za rešavanje diferencijalnih jednačina kakve su i Navier-Stokes-ove jednačine, osnovni problem u slučaju turbulentnih strujanja sastoji se u potrebi za veoma finom diskretizacijom polja fluida u prostoru i vremenu kako bi se numeričkom mrežom pokrila dovoljno gusto i najsitnija vrtložna struktura [67].

Na primer, ako posmatramo jednu od glavnih karakteristika turbulentnog strujnog polja, njegovu dužinsku mikro razmeru, onda bi vrednost ovog parametra trebala biti reda veličine 0,1 [mm] da bi se adekvatno opisalo ponašanje onih vrtloga koji dominantno utiču na turbulentnu strukturu. Posmatrano sa numeričkog stanovišta, ako bi se odgovarajuća procedura računanja sproveda u diskretnom broju tačaka reda veličine  $10^8$ , i imajući na umu da je u svakoj diskretnoj tački potrebno odrediti najmanje šest parametara strujanja (pritisak, gustinu, temperaturu i tri komponente brzine), onda bi posmatrani strujni prostor bio reda veličine kubnog decimetra, [71]. U ovom slučaju, količina podataka i brzina

računanja se približuju maksimalnim performansama današnjih računara. Sa druge strane efekti su minimalni jer je za inženjersku praksu prostor od jednog kubnog decimetra skoro neprihvatljiv.

Turbulentni tokovi u kanalima ne-kružnog poprečnog preseka (kvadratni, pravougaoni, trougaoni, itd.) veoma često se susreću u inženjerskoj praksi. Kao primeri, mogu se navesti izmenjivači toplote, sistemi za ventilaciju i klimatizaciju, nuklearni reaktori, turbomašine, otvoreni kanali, itd. U ovakvim kanalima se pored primarnog toka duž kanala, javljaju i sekundarni tokovi u ravni poprečnog preseka kanala. Mehanizmi koji uzrokuju pojavu sekundarnog toka su različiti.

U zakrivljenim kanalima, gde centrifugalna sila deluje upravno na primarni pravac toka, indukuje se različiti pritisak po poprečnom preseku kanala, što rezultuje u pojavi sekundarnog toka. Ovaj mehanizam je karakterističan za turbulentni i laminarni režim strujanja, kao i za kanale kružnog poprečnog preseka. Ovaj tip sekundarnog toka se javlja i u slučaju postojanja jakih temperaturnih gradijenata u ravni poprečnog preseka kanala, na primer ako je jedan zid kanala toplotno opterećen, a ostali zidovi ne. Za ovakve sekundarne tokove se kaže da su to Prandtl-ovi sekundarni tokovi prve vrste. Osnovna karakteristika ovih tokova je da nivo brzine u sekundarnom toku dostiže vrednosti 20÷30% od srednje brzine primarnog toka.

Prandtl-ovi sekundarni tokovi druge vrste se javljaju u pravim kanalima ne-kružnog poprečnog preseka, i za razliku od tokova prve vrste, oni se javljaju samo u slučaju turbulentnog strujanja. Iako je nivo brzina sekundarnog toka druge vrste 2÷3% od srednje brzine primarnog toka, ovaj tok ima znatan uticaj u ukupnim mehanizmima prenosa materije, impulsa i toplote u kanalu i okolini. Prenos velikog impulsa ka rogljevima kanala uzrokuje velike gradijente transverzalnih brzina u ravni poprečnog preseka. Kod otvorenih kanala, sekundarni tok pokreće fluid sa relativno malim impulsom prema centralnom delu kanala i uzrokuje određenu depresiju brzinskog maksimuma ispod slobodne površi fluida. Nadalje, sekundarni tok proizvodi povećani smicajni napon prema rogljevima kanala, što je veoma značajno u slučajevima transporta određenih sedimenata, ili pri razrešavanju problema erozije kanala. Takođe, sekundarni tok značajno utiče na intenzitet prenosa toplote sa fluida na zid kanala ili obratno.



### 1.3. Predmet istraživanja

Fenomenološki posmatrano, predmet istraživanja ove doktorske disertacije je usmeren ka poboljšanju turbulentnih modela za dvofazna strujanja tipa gas – čvrste čestice. Ograničenje je vezano za razmatranje samo izotermalnih tokova koji dominiraju u sistemima pneumatičkog transporta granularnog materijala. Ovako široko definisan predmet istraživanja je sužen na istraživanje fenomena dvofaznog strujanja tipa gas – čvrste čestice u pravim kanalima ne-kružnog poprečnog preseka.

Poseban fenomen strujanja koji je istražen, vezan je za prave kanale ne-kružnog poprečnog preseka u režimu razvijenog turbulentnog strujanja, pod kojim se podrazumeva turbulentni tok gde su profili brzina u poprečnim presecima ustaljeni tj. ne menjaju se. Poznata je činjenica da se u kanalima proizvoljnog poprečnog preseka i oblika u režimima i laminarnog i turbulentnog strujanja javlja sekundarno strujanje u ravni upravnoj na glavni tok usled dejstva centrifugalnih sila (zakrivljeni kanali, različito toplotno opterećenje, itd.). Ovaj tip sekundarnog strujanja, poznat u literaturi kao Prandtl-ovo sekundarno strujanje prve vrste, uglavnom je bio predmet istraživanja velikog broja istraživača i u publikovanoj literaturi postoji obilje rezultata ovih istraživanja. Razlog ovome je intenzivan sekundarni tok koji uzrokuje taloženje čvrstih čestica materijala na zidove kanala sa neželjenim propratnim efektima kao što su na primer promena koeficijenta prenosa toplote, abrazija materijala kanala, itd.

Međutim, u potpuno pravim kanalima ne-kružnog poprečnog preseka, u režimu razvijenog turbulentnog strujanja, indukuje se sekundarno strujanje koje je u literaturi poznato kao Prandtl-ovo sekundarno strujanje druge vrste. Značaj ovog strujanja je svakako manji u odnosu na sekundarni tok prve vrste, ali se ne može zanemariti njegov uticaj, posebno u slučaju kada je u pitanju dvofazni tok tipa gas-čvrste čestice sa visokim Stokes-ovim brojem (mali prečnici čestica). Ovom problemu je vrlo malo pažnje posvećivano u dosadašnjoj istraživačkoj praksi.

## 2. PREGLED DOSADAŠNJIH ISTRAŽIVANJA

Iako se poslednjih godina prave određeni koraci u pravcu direktnog numeričkog rešavanja transportnih jednačina za turbulentne tokove, istina uz znatna pojednostavljenja i kompromise, za praktične proračune i analizu turbulentnih transportnih procesa još uvek se polazi od vremenski usrednjenih jednačina konzervacije materije, količine kretanja i energije na način kako je to predložio *Osborn Reynolds*.

Međutim, poznato je da se u procesu usrednjavanja "gube" neke informacije, što rezultuje u pojavi novih - "suvišnih"- promenljivih kao što su Reynolds-ovi naponi  $\overline{\rho u_i u_j}$  - u jednačinama za količinu kretanja, turbulentni temperaturni fluks  $\overline{\rho \theta u_i}$  - u energetske jednačini, odnosno, turbulentni materijalni fluks  $\overline{\rho' u_i}$  - u jednačini kontinuiteta, što zahteva uvođenje dopunskih aproksimativnih relacija kojima se ove nove nepoznate definišu u funkciji raspoloživih poznatih veličina [50].

Sistem diferencijalnih i algebarskih relacija kojima se postiže zatvaranje usrednjenih jednačina konzervacije, naziva se popularno **model turbulencije** i omogućava da se aproksimativno matematički simuliraju usrednjeni efekti

složenih turbulentnih interakcija u procesima transporta materije, količine kretanja i energije.

Do pojave savremenih računara modeliranje turbulentnih transportnih procesa nije imalo velikog smisla zbog nemogućnosti rešavanja osnovnih usrednjenih jednačina konzervacije u opštem parcijalnom diferencijalnom obliku, te se modeliranje svodilo na proste algebarske formulacije kakva je Prandtl-ova putanja mešanja ili Boussinesq-ov koncept turbulentne viskoznosti. Sa druge strane, usrednjene jednačine konzervacije su rešavane prevođenjem na formu običnih diferencijalnih jednačina uz obilno korišćenje empirije ("*integralne metode*"), što je jako ograničavalo primenljivost ovakvih metoda na veoma usku familiju prostih slučajeva turbulentnih transportnih procesa, uglavnom tipa graničnog sloja. Pojava moćnih računara i mogućnost rešavanja parcijalnih diferencijalnih jednačina donosi značajan podsticaj razvoju modela turbulencije i praatnih transportnih procesa materije i energije.

Naučni skup "*Proračun turbulentnog graničnog sloja*", održan na Univerzitetu u Stanfordu 1968. godine [50], sa ciljem da se izvrši uporedna procena tada raspoloživih metoda za proračun turbulentnog zidnog graničnog sloja, predstavlja značajnu prekretnicu u razvoju modela turbulencije i metoda proračuna. Glavni moto ovog skupa bio je legitimizacija metoda koje baziraju na numeričkom rešavanju aproksimativno zatvorenih usrednjenih jednačina konzervacije u izvornom, parcijalno diferencijalnom obliku koje su se pokazale kao tačnije i opštije od najboljih integralnih metoda.

Dalju potvrdu afirmaciji ovih metoda daje "*Konferencija o slobodnim smicajnim turbulentnim tokovima*", odražana 1973. godine u Langley (NASA, 1973).

U periodu koji je neposredno prethodio ovim skupovima, a posebno nakon njih, sledi snažan razvoj ovih metoda i popularizacija njihove primene za praktične proračune. Razvijaju se složeniji modeli turbulencije koji u sprezi sa novim numeričkim metodama omogućavaju proračun turbulentnih korelacija koje je čak teško dobiti i merenjem, pa ove metode principijelno daju mogućnost stvarnog prognoziranja transportnih fenomena u sasvim nepoznatim uslovima.

Stanfordska konferencija 1968. godine označava početak razvoja i primene složenih modela turbulencije, kada je posebno naglašen značaj i potreba za modeliranjem dinamike svih turbulentnih korelacija drugog reda, kao što su tenzor turbulentnih napona  $\overline{\rho u_i u_j}$  i turbulentni temperaturski fluks  $\overline{\rho \theta u_i}$ , što je podrazumevalo razmatranje i rešavanje transportnih diferencijalnih jednačina za ove korelacije, makar u modeliranom obliku. Tada je istovremeno naglašena nužnost da se pri modeliranju održe opšti kinematski uslovi simetričnosti i invarijantnosti na transformaciju koordinatnog sistema. Modeli koji zadovoljavaju ove kriterijume obećavali su najveću verovatnoću uspešne ekstrapolacije na opisivanje turbulentnih transportnih procesa u fizičkim i geometrijskim uslovima koji se razlikuju od onih za koje su modeli verifikovani na bazi eksperimentalnih rezultata.

Iako početne ideje datiraju još od prvih pokušaja Kolmogorov-a (1942), Chou-a (1945), Rotte (1951), Davidov-a (1951, 1961) naučni skup u Stanfordu 1968. godine predstavlja začetak "*modela drugog reda*" odnosno "*naponsko - fluksnih*" diferencijalnih modela. Naziv "*modeli drugog reda*" potiče od korelacije  $\overline{u_i u_j}$ , koja je drugog reda ( dvostruka korelacija, statistički moment drugog reda ) kao korelacije najvišeg reda za koju se transportna diferencijalna jednačina rešava simultano sa usrednjenim jednačinama konzervacije. Istina, u dekadi koja sledi iza ovog skupa, modeli drugog reda ustupaju mesto prostijim modelima, kao što su dvojednačinski  $k-\varepsilon$ , ( gde je  $k=0,5\overline{u_i u_j}$  - kinetička energija turbulencije, a  $\varepsilon$  - brzina disipacije turbulentne kinetičke energije), zatim trojednačinski  $k-\overline{u_1 u_2}-\varepsilon$  model, te algebarski naponski modeli, ali svi oni osnovne informacije crpu iz egzaktnih jednačina za korelaciju  $\overline{u_i u_j}$ , iako izbegavaju direktno rešavanje ovih jednačina [71].

Prve numeričke simulacije sekundarnog toka druge vrste u kvadratnom pravom kanalu sproveli su Launder i Ying (1973). Autori su odmah uočili činjenicu da izračunati Reynolds-ovi naponi turbulentnim modelima baziranim na hipotezi o izotropnoj turbulenciji ( $k-\varepsilon$ ), ne daju nikakav efekat u transportnoj jednačini (4.1), za komponentu vrtložnosti  $\Omega_z$  upravnu na ravan poprečnog preseka kanala,

odnosno da se njima ne može "prepoznati" sekundarni tok. Da bi prevazišli ovaj problem, autori su iskoristili turbulentni naponski model Hanjalića i Launder-a (1972), za komponente turbulentnog napona i  $\overline{u_2u_3}$ , prevodeći transportne jednačine za ove komponente napona u algebarsku formu. Međutim, ovaj model turbulencije, nazvan LY, vrlo brzo je doživeo kritiku. Kacker (1973) je izneo tvrdnju da LY model daje vrednost  $(\overline{u_3u_3} - \overline{u_2u_2})/U_\tau^2$  približno 10 puta manju od realne vrednosti. Naime, u algebarskim izrazima, [71], LY modela:

$$\overline{u_3u_3} - \overline{u_2u_2} = C' \frac{k}{\varepsilon} \left( \overline{u_1u_3} \frac{\partial U_1}{\partial x_3} - \overline{u_1u_2} \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right) \quad (2.1)$$

$$\overline{u_2u_3} = C' \frac{k}{\varepsilon} \left( \overline{u_1u_2} \frac{\partial U_1}{\partial x_3} + \overline{u_1u_3} \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right) \quad (2.2)$$

originalno preporučena vrednost konstante  $C'=0,067$  od strane Hanjalića i Launder-a proizvodi nerealno veliki sekundarni tok, pa je zbog toga za ove proračune korišćena vrednost  $C'=0,0185$ . Veća vrednost konstante  $C'=0,067$  proizvodi razliku između napona  $\overline{u_3u_3}$  i  $\overline{u_2u_2}$  sa faktorom  $2 \div 3$ . Ove nekonzistentnosti modela Hanjalića i Launder-a posledica su ne uzimanja u obzir mehanizama turbulentnih interakcija u blizini zida, gde je osnovna karakteristika da su fluktuacije brzine upravne na zid prigušene, dok su fluktuacije paralelne sa zidom intenzivirane.

Činjenica je da model LY daje relativno korektnu predikciju sekundarnog toka, uprkos tome što je produkcionni član  $\overline{u_3u_3} - \overline{u_2u_2}$  deset puta manji. Ovaj rezultat je posledica zanemarivanja gradijenata sekundarnih komponenti brzine u izrazima (2.1 i 2.2). Međutim, ranije je naglašeno (Perkins) da gradijenti sekundarnih komponenti brzine značajno utiču na generisanje turbulentnog smičućeg napona  $\overline{u_2u_3}$ .

Kada se ovi gradijenti zanemare, turbulentni član  $A_5$  u jednačini (4.1) (ponor), znatno se smanjuje, a kako je sekundarni tok generisan odgovarajućom

razlikom između turbulentnih članova  $A_4$  i  $A_5$ , pogonski član  $A_4$  se takođe mora smanjiti na nerealno malu vrednost. Prema tome, može se zaključiti da turbulentni model LY korektno određuje sekundarni tok, ali na pogrešan način. Demuren i Rodi (1984) su pokazali da je doprinos gradijenata sekundarnih komponenti brzine na turbulentni smičući napon  $\overline{u_2 u_3}$  veći od doprinosa gradijenata primarne brzine u većem delu poprečnog preseka pri razvijenom turbulentnom toku, iako je njihov model turbulencije baziran na algebarskim formama izraza za turbulentne napone. Sledeći tehniku Reece-a (1976), koji koristi hipotezu o lokalnoj ravnoteži produkcije i disipacije u modeliranim jednačinama za turbulentne napone, Demuren i Rodi (DR model) su dobili sledeće algebarske izraze, [71]:

$$\overline{u_1 u_1} = \frac{2k}{C_1 \varepsilon} \left[ \frac{\varepsilon}{3} (\alpha + \beta + C_1 - 1) - (1 - \alpha) \left( \overline{u_1 u_3} \frac{\partial U_1}{\partial x_3} + \overline{u_1 u_2} \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right) \right] \quad (2.3)$$

$$\overline{u_2 u_2} = \frac{\frac{2k}{C_1 \varepsilon} \left\{ \frac{\varepsilon}{3} (\alpha + \beta + C_1 - 1) + \beta \overline{u_1 u_2} \frac{\partial U_1}{\partial x_2} - \overline{u_2 u_3} \left[ (1 - \alpha) \frac{\partial U_2}{\partial x_3} - \beta \frac{\partial U_3}{\partial x_2} \right] - \gamma k \frac{\partial U_2}{\partial x_2} \right\}}{1 + \frac{2k}{C_1 \varepsilon} (1 - \alpha - \beta) \frac{\partial U_2}{\partial x_2}} \quad (2.4)$$

$$\overline{u_3 u_3} = \frac{\frac{2k}{C_1 \varepsilon} \left\{ \frac{\varepsilon}{3} (\alpha + \beta + C_1 - 1) + \beta \overline{u_1 u_3} \frac{\partial U_1}{\partial x_3} - \overline{u_2 u_3} \left[ (1 - \alpha) \frac{\partial U_3}{\partial x_2} - \beta \frac{\partial U_2}{\partial x_3} \right] - \gamma k \frac{\partial U_3}{\partial x_3} \right\}}{1 + \frac{2k}{C_1 \varepsilon} (1 - \alpha - \beta) \frac{\partial U_3}{\partial x_3}} \quad (2.5)$$

$$\overline{u_2 u_3} = \frac{k}{C_1 \varepsilon} \left\{ \beta \left( \overline{u_1 u_3} \frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \overline{u_1 u_2} \frac{\partial U_1}{\partial x_3} \right) - \left[ (1 - \alpha) \overline{u_2 u_2} - \beta \overline{u_3 u_3} + \gamma k \right] \frac{\partial U_3}{\partial x_2} - \left[ (1 - \alpha) \overline{u_3 u_3} - \beta \overline{u_2 u_2} + \gamma k \right] \frac{\partial U_2}{\partial x_3} \right\} \quad (2.6)$$

$$\overline{u_1 u_2} = \frac{k}{C_1 \varepsilon} \left\{ \beta \overline{u_1 u_3} \frac{\partial U_3}{\partial x_2} - \left[ (1 - \alpha) \overline{u_2 u_2} - \beta \overline{u_1 u_1} + \gamma k \right] \frac{\partial U_1}{\partial x_2} - (1 - \alpha) \left( \overline{u_2 u_3} \frac{\partial U_1}{\partial x_3} + \overline{u_1 u_3} \frac{\partial U_2}{\partial x_3} \right) \right\} \quad (2.7)$$

$$1 + \frac{k}{C_1 \varepsilon} (1 - \alpha - \beta) \frac{\partial U_2}{\partial x_2}$$

$$\overline{u_1 u_3} = \frac{k}{C_1 \varepsilon} \left\{ \overline{\beta u_1 u_2} \frac{\partial U_2}{\partial x_3} - \left[ (1 - \alpha) \overline{u_3 u_3} - \beta \overline{u_1 u_1} + \gamma k \right] \frac{\partial U_1}{\partial x_3} - (1 - \alpha) \left( \overline{u_2 u_3} \frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \overline{u_1 u_2} \frac{\partial U_3}{\partial x_2} \right) \right\} \quad (2.8)$$
$$I + \frac{k}{C_1 \varepsilon} (1 - \alpha - \beta) \frac{\partial U_3}{\partial x_3}$$

Dodatna aproksimacija u prethodnim izrazima je da su gradijenti svih komponentata brzine po koordinati primarnog pravca toka  $x_1$  zanemareni, što je tačno samo u slučaju potpuno razvijenog turbulentnog toka u pravom kanalu. Važno je uočiti da su Demuren i Rodi zadržali gradijente sekundarnih komponenti brzine po koordinatama  $x_2$  i  $x_3$ , za razliku od LY modela.

Postoje još nekoliko varijanti aproksimacije algebarskih izraza za turbulentne napone, kao na primer NR model, Naot-a i Rodi-ja (1982). U principu može se zaključiti da navedeni pristupi ne koriste puni naponski model turbulencije, pa je i to jedan od razloga da se u ovoj doktorskoj disertaciji pristupilo istraživanju primene kompletnih turbulentnih modela za turbulentne napone i temperaturske flukseve.

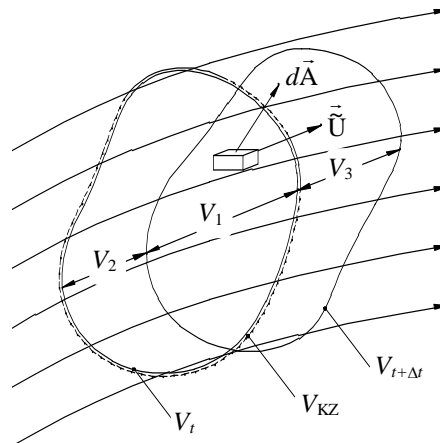
## 3. OSNOVNI ZAKONI TURBULENCIJE

### 3.1. Zakon konzervacije

Matematička formulacija fenomena strujanja fluida u sprezi sa prenosom impulsa, materije ili toplote je diferencijalnog karaktera. Jednačine koje definišu opšte principe konzervacije materije, količine kretanja i energije su parcijalne diferencijalne jednačine. Pri numeričkom rešavanju parcijalnih diferencijalnih jednačina potrebno je sve jednačine svesti na istu formu primenjujući zakon konzervacije. Da bi se pojasnili pojedini članovi transportnih jednačina kao i postupak generalizacije ukratko se navodi postupak konzervacije.

Da bi se uočile bitne razlike između primene zakona konzervacije na jedan materijalni sistem i na jednu kontrolnu zapreminu, posmatraće se nepokretna kontrolna zapremina  $V_{KZ}$  kojom je obuhvaćen jedan po obliku proizvoljni inženjerski sistem u kome se nalazi određena količina materije, odnosno jedan materijalni sistem, što je prikazano na slici 3.1.





**Slika 3.1.** Kontrolna zapremina i materijalni sistem

Ako se sa  $\tilde{\phi}(\vec{x}, t)$  označi bilo koja kontinualna funkcija vektora položaja  $\vec{x}$  i vremena  $t$ , a koja može da predstavlja bilo koju fizičku promenljivu čija se promena posmatra u uočenom materijalnom sistemu (materija, energija, količina kretanja, itd.) po jedinici materije, onda će ukupna "količina" ove promenljive u kontrolnoj zapremini u posmatranom trenutku vremena biti:

$$\tilde{\phi} = \int_{V_{KZ}} \rho \tilde{\phi} dV \quad (3.1)$$

gde je  $\rho$  - gustina fluida.

Promena promenljive  $\tilde{\phi}_t$  u ovom materijalnom sistemu desiće se tokom vremena zbog postojanja izvora ili ponora unutar ovog sistema, i usled interakcije materijalnog sistema sa okolinom na granici sistema. Vremenska promena generalne promenljive  $\tilde{\phi}$  u kontrolnoj zapremini nastupiće, takođe, zbog postojanja izvora i ponora unutar kontrolne zapremine, interakcije sa okolinom, ali i usled proticanja fluida kroz graničnu površ. Prema tome, ukupna promena promenljive  $\tilde{\phi}$  u posmatranom materijalnom sistemu može se predstaviti jednačinom, [22]:

$$\left(\frac{\tilde{\phi}}{\Delta t}\right)_{MS} = \left(\frac{\tilde{\phi}}{\Delta t}\right)_{KZ} + \int_{A_{KP}} \tilde{\phi} \rho (\vec{U} \cdot d\vec{A}) \quad (3.2)$$

Ova jednačina povezuje promenu generalne promenljive  $\tilde{\phi}$  u materijalnom sistemu (MS) i kontrolnoj zapremini (KZ) kroz koju protiče fluid.

Uopšteni oblik Reynolds-ove transportne teoreme (1903), koja ima opšti kinematički oblik nezavistan od bilo kog fizičkog zakona, definiše promenu promenljive  $\tilde{\phi}$  u kontrolnoj zapremini  $V_{KZ}$  ograničenom kontrolnom površi  $A_{KP}$ .

$$\left(\frac{d\tilde{\phi}}{dt}\right)_{V_{KZ}} = \frac{d}{dt} \int_{V_{KZ}} \rho \tilde{\phi} dV = \int_{V_{KZ}} \frac{\partial(\rho \tilde{\phi})}{\partial t} dV + \int_{A_{KP}} \rho \tilde{\phi} (\vec{U} \cdot d\vec{A}) \quad (3.3)$$

gde je:  $\vec{U}$  - trenutni vektor brzine fluida,

$d\vec{A}$  - diferencijalni element površine.

U opštem slučaju može se zaključiti da promena generalne promenljive  $\tilde{\phi}$  u kontrolnoj zapremini kroz koju protiče fluid nastaje kao posledica dva efekta:

- promena same generalne promenljive  $\tilde{\phi}$  ( $\tilde{\phi}$  po jedinici mase) tokom vremena, unutar kontrolne zapremine, usled dejstva izvora i ponora, što rezultira promenom  $(\partial\tilde{\phi}/\partial t)dV$  unutar svakog zapreminskog elementa  $dV$ ;
- kretanjem kroz prostor, kontrolna površina zahvata nove delove prostora, a time i promenljivu  $\tilde{\phi}$  u novozahvaćenim oblastima, uslovljavajući promenu  $\tilde{\phi}$  za iznos  $\rho \tilde{\phi} (\vec{b} \cdot d\vec{A})$ .

Matematičkim transformacijama i primenom Gauss-ove teoreme prethodna jednačina dobija oblik:

$$\int_{V_{KZ}} \frac{\partial(\rho \tilde{\phi})}{\partial t} dV + \int_{V_{KZ}} \nabla \cdot (\rho \tilde{\phi} \vec{U}) dV = \int_{V_{KZ}} \left[ \frac{\partial(\rho \tilde{\phi})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \tilde{\phi} \vec{U}) \right] dV \quad (3.4)$$

Promena promenljive  $\tilde{\phi}$  u proizvoljnoj tački usvojenog koordinatnog sistema, može se generalno izraziti opštim zakonom o održanju polja:

$$\int_{V_{kz}} \left[ \frac{\partial(\rho\tilde{\phi})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\tilde{\phi}\vec{U}) - \tilde{I} \right] dV = 0 \quad (3.5)$$

gde  $\tilde{I}$  - predstavlja sumu zapreminskih i površinskih efekata koji deluju izvan ili unutar posmatrane kontrolne zapremine.

Diferencijalni oblik opšteg zakona o održanju polja definiše promenu promenljive  $\tilde{\phi}$  u proizvoljnoj tački usvojenog koordinatnog sistema u fluidu koji se kreće lokalnom brzinom  $\vec{U}$ . Ovaj oblik opšteg zakona o održanju polja dobija se iz uslova da je prethodna jednačina zadovoljena ako je podintegralna funkcija jednaka nuli s obzirom na proizvoljnu kontrolnu zapreminu:

$$\frac{\partial(\rho\tilde{\phi})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho\tilde{\phi}\vec{U}_j) - \tilde{I} = 0 \quad (3.6)$$

Diferencijalna jednačina (3.6) definiše konzervaciju promenljive  $(\rho\tilde{\phi})$  koja predstavlja promenljivu  $\tilde{\phi}$  po jedinici zapremine. Član  $\partial(\rho\tilde{\phi})/\partial t$  može se eksplicitno izraziti, prebacivanjem druga dva člana sa desne strane znaka jednakosti, tako da u tom slučaju jednačina definiše lokalnu promenu promenljive  $(\rho\tilde{\phi})$ , pa se jednačina (3.6) često naziva lokalna diferencijalna jednačina konzervacije. Jednačina (3.6) ima opšte značenje i pogodna je za izvođenje diferencijalnih jednačina za konzervaciju pojedinih fizičkih veličina, i pokazuje da ukupna promena generalne promenljive  $\tilde{\phi}$  nastupa samo ako postoji izvor ili ponor te promenljive.

### 3.2. Jednačina kontinuiteta

Jednačina kontinuiteta za turbulentne tokove dobija se na osnovu opšte jednačine konzervacije polja (3.6), zamenom promenljive  $\tilde{\Phi} = 1$ . U slučaju da u kontrolnoj zapremini nema izvora ili ponora materije onda je produkcija jednaka nuli ( $\tilde{I} = 0$ ), tako da se dobija:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \tilde{U}_i) = 0 \quad (3.7)$$

Dekompozicija na usrednjene i fluktuacione delove trenutnih vrednosti parametara i razvijajući jednačinu (3.7) po pravilima Reynolds-ove statistike usrednjavanja dobija se:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \rho U_i + \overline{\rho' u_i} \right] = 0 \quad (3.8)$$

Jednačina kontinuiteta (3.8) ima dodatne članove  $\overline{\rho' u_i}$ , nazvane turbulentni maseni fluksevi. Ovi članovi zavise od nivoa korelacije između fluktuacija gustine i brzine. Njihov uticaj u većini inertnih tokova je mali, pa se zbog toga zanemaruju, tako da se koristi jednačina kontinuiteta sa usrednjenim vrednostima, oblika:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho U_i) = 0 \quad (3.9)$$

### 3.3. Jednačina kretanja

Prema drugom Newton-ovom zakonu, vremenska promena količine kretanja, odnosno impulsa sistema materijalnih tačaka jednaka je sumi svih sila koje deluju na posmatrani sistem. U ovom slučaju ako se koristiti opšta forma

zakona o održanju polja jednačina (3.6), tako što promenljiva  $\tilde{\Phi}$  ima sada značenje brzine  $\tilde{\Phi} = \tilde{U}_i$ , dok je produkcija jednaka sumi svih sila koje deluju na elementarnu kontrolnu zapreminu. Sile koje deluju na fluid mogu biti zapreminske  $\tilde{I}_V = \tilde{F}_i$  (sila gravitacije, centrifugalna sila, itd.) i površinske sile  $\tilde{I}_A = \tilde{\sigma}_{ij}$  (sile usled delovanja normalnih i smicajnih napona). Sada jednačina (3.6) postaje:

$$\rho \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial t} + \rho \tilde{U}_j \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \tilde{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} + \rho \tilde{F}_i \quad (3.10)$$

Matematičkim transformacijama, dekompozicijom i Reynolds-ovim usrednjavanjem, dobija se Reynolds-ova jednačina kretanja:

$$\rho \frac{\partial U_i}{\partial t} + \rho U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = \rho F_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \overline{u_i u_j} \right) \quad (3.11)$$

Član u jednačini (3.11)  $-\overline{\rho u_i u_j}$  predstavlja tenzor turbulentnih napona (tenzor Reynolds-ovih napona) i glavni je uzrok transporta količine kretanja osnovnog toka usled turbulentnih fluktuacija.

### 3.4. Energetska jednačina

Oduzimanjem jednačine kinetičke energije od jednačine ukupne energije, dobija se jednačina unutrašnje energije, [68]:

$$\rho \frac{D\tilde{u}}{Dt} = \rho \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \rho \tilde{U}_j \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_j} = \rho \tilde{q}_G - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} - \tilde{P} \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_i} + \tilde{\tau}_{ij} \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_j} \quad (3.12)$$

pretposlednji i poslednji član predstavljaju produkciju unutrašnje energije na račun mehaničke (kinetičke), energije. Poslednji član koji predstavlja disipaciju

mehaničke energije je uvek pozitivan, dok pretposlednji član ima predznak koji zavisi od predznaka divergencije brzine i kao takav predstavlja povratno pretvaranje mehaničke energije u toplotnu energiju i obratno. Disipacioni član uzrokuje uvek interno zagrevanje fluida, dok član  $\tilde{P}\partial\tilde{U}_i/\partial x_i$  interno zagreva ili hladi fluid zavisno od predznaka divergencije brzine.

Sređivanjem prethodne jednačine kao i dekompozicijom i Reynolds-ovim usrednjavanjem dobija se forma jednačine energije koja je najčešće u upotrebi:

$$\rho \frac{DT}{Dt} = \rho \frac{\partial T}{\partial t} + \rho U_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\mu}{Pr} \frac{\partial T}{\partial x_i} - \rho \overline{\theta u_i} \right) \quad (3.13)$$

gde je  $Pr = \nu/a$  - Prandtl-ov broj, dok korelacija  $\rho \overline{\theta u_i}$  - predstavlja vektor turbulentnih temperaturskih flukseva, koji se javlja u procesu usrednjavanja.

### 3.5. Generalizacija zakona konzervacije

Parcijalne diferencijalne jednačine koje opisuju procese transporta materije, količine kretanja i toplote, radi lakšeg numeričkog rešavanja, mogu se napisati u formi lokalnih konzervativnih jednačina. Da bi se olakšalo rešavanje zadatka, moguće je sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina generalizovati, što bi podrazumevalo dobijanje samo jedne reprezentativne diferencijalne jednačine, za koju se sprovodi procedura diskretizacije i za nju traži numeričko rešenje, a koje bi, važno za svaku jednačinu ponaosob. Dodatni članovi koji se prilikom

osrednjavanja javljaju, mogu se prebaciti na desnu stranu znaka jednakosti i tretirati kao dodatni izvor ili ponor, tako da generalna diferencijalna jednačina konzervacije ima oblik:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\rho\Phi)}_l + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho U_j \Phi)}_c - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right)}_d = \underbrace{S_\Phi}_s \quad (3.14)$$

gde je fizičko tumačenje članova jednačine sledeće:

- $l$  - predstavlja lokalni doprinos promenljive  $\Phi$ ,
- $c$  - konvektivni transport promenljive  $\Phi$ ,
- $d$  - difuzioni transport promenljive  $\Phi$ ,
- $s$  - predstavlja izvor ili ponor (negativni izvor) promenljive  $\Phi$ .

Treba napomenuti da su svi članovi u diferencijalnoj jednačini (3.14) dati po jedinici zapremine, i kada se integrale po ograničenoj zapremini, onda se dobijaju prave jedinice posmatranih veličina. Veoma često se prethodni sistem daje u obliku tabele 3.1, [71], gde se definišu značenja izabrane generalne promenljive  $\Phi$ , transportnog koeficijenta  $\Gamma_\Phi$ , i izvornog člana  $S_\Phi$ .

**Tabela 3.1.**

JEDNAČINA:	$\Phi$	$\Gamma_\Phi$	$S_\Phi$
KONTINUITETA	1	0	0
IMPULSA	$U_i$	$\mu$	$-\frac{\partial P}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \overline{u_i u_j})$
ENERGIJE	$T$	$\mu / \text{Pr}$	$-\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \overline{\theta u_i})$

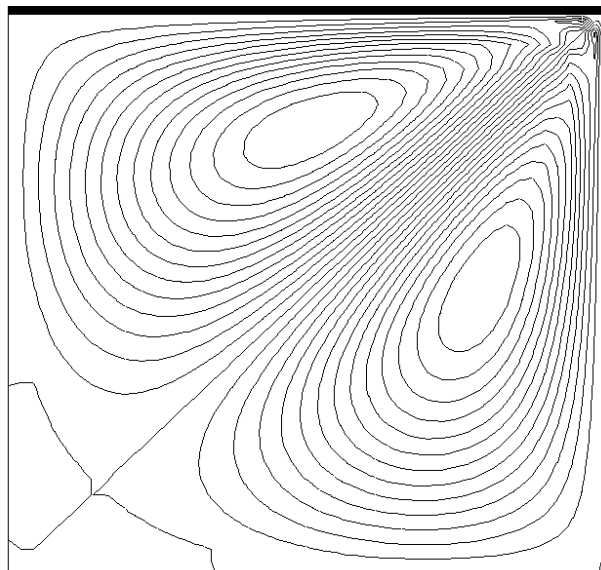
## 4. FIZIČKI MODEL

### 4.1. Formulacija fizičkog modela gasne faze

Fizika generisanja sekundarnog toka je bila predmet istraživanja velikom broju teoretičara i eksperimentatora. Saznanja o genezi sekundarnog toka druge vrste su prvenstveno napredovala srazmerno kvalitetu merne tehnike, i to pre svega u oblasti merenja turbulentnih fluktuacija brzinskog polja. Iz dosadašnjeg spektra eksperimentalnih baza koje tretiraju ovaj problem, izdvojiće se one koje su značajno uticale na stavove i zaključke o pravoj fizici nastanka sekundarnog toka druge vrste.

Razmatraće se potpuno razvijen turbulentni tok, koji podrazumeva da su profili brzina, odnosno brzine u poprečnim presecima ustaljene tj. ne menjaju se, u pravom kanalu kvadratnog poprečnog preseka čiji su zidovi opterećeni uniformnim temperaturskim fluksom.





**Slika 4.1.** Strujne linije sekundarnog toka u bisektoru pravog kanala kvadratnog poprečnog preseka.

Generalni zaključak koji se može izvesti iz dosadašnjih eksperimentalnih baza je da su istraživanja ukazala na intenzitet i posledične efekte koje proizvodi sekundarni tok, ali ne i na potpuno jasnu prirodu nastajanja ovog fenomena. Prandtl (1926) je prvi ukazao na fenomen pojave sekundarnog toka u ne-kružnim pravim kanalima, sugerišući intuitivno da je on posledica turbulentnog režima strujanja. Sve do rada Einstein-a i Li-a (1958) nije sprovedena ozbiljnija analiza nastanka sekundarnog toka.

Einstein i Li su po prvi put ukazali na činjenicu da postojanje gradijenata Reynolds-ovih napona promoviše sekundarno kretanje fluida. U cilju da se eksperimentalno utvrde uzroci nastanka sekundarnog toka, Brundett i Baines (1964) su merili sve tri komponente brzine i svih šest komponenti Reynolds-ovih napona u kanalu kvadratnog poprečnog preseka, u potpuno razvijenom turbulentnom toku. Rezultati merenja su poslužili da se odrede veličine pojedinih članova u transportnoj jednačini za komponentu vrtložnosti koja koincidira sa pravcem osnovnog toka (slika 4.1).

U slučaju stacionarnog i nekompresibilnog strujanja, transportna jednačina za komponentu vrtložnosti upravnu na ravan poprečnog preseka  $\Omega_l$  ima sledeći oblik [71]:

$$\begin{aligned}
 & \overbrace{U_1 \frac{\partial \Omega_l}{\partial x_1} + U_2 \frac{\partial \Omega_l}{\partial x_2} + U_3 \frac{\partial \Omega_l}{\partial x_3}}^{A_1} - \overbrace{\Omega_l \frac{\partial U_1}{\partial x_1} - \Omega_2 \frac{\partial U_1}{\partial x_2} - \Omega_3 \frac{\partial U_1}{\partial x_3}}^{A_2} = \\
 & = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial \overline{u_1 u_2}}{\partial x_3} - \frac{\partial \overline{u_1 u_3}}{\partial x_2} \right)}_{A_3} + \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} (\overline{u_3 u_3} - \overline{u_2 u_2})}_{A_4} - \underbrace{\left( \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \overline{u_2 u_3}}_{A_5} + \\
 & + \underbrace{v \left( \frac{\partial^2 \Omega_l}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Omega_l}{\partial x_3^2} \right)}_{A_6}
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

gde su komponente vektora vrtložnosti definisane na poznati način:

$$\Omega_1 = \frac{\partial U_2}{\partial x_3} - \frac{\partial U_3}{\partial x_2} ; \quad \Omega_2 = \frac{\partial U_1}{\partial x_3} - \frac{\partial U_3}{\partial x_1} ; \quad \Omega_3 = \frac{\partial U_2}{\partial x_1} - \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \tag{4.2}$$

Fizički smisao članova u transportnoj jednačini (4.1), za komponentu vrtložnosti upravnu na ravan poprečnog preseka  $\Omega_l$  je sledeći:

$A_1$  - reprezentuje konvektivni transport komponente vrtložnosti  $\Omega_l$  osnovnim tokom fluida,

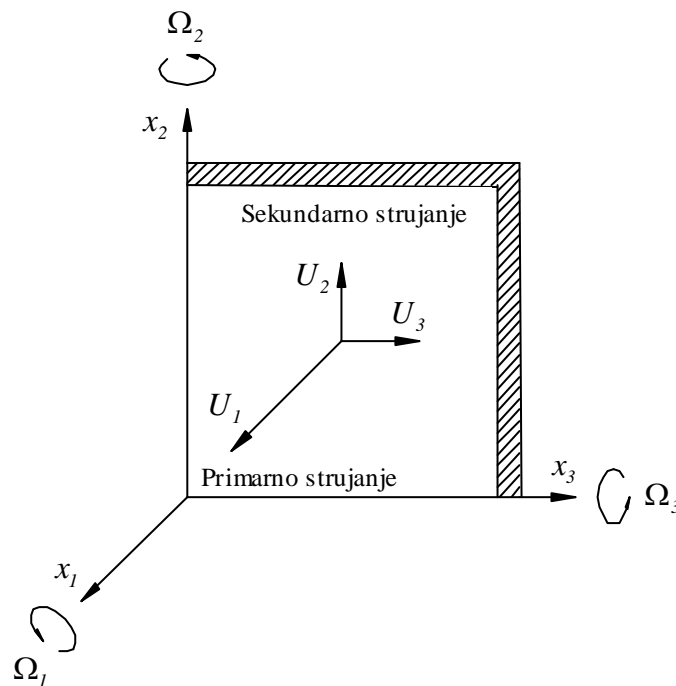
$A_2$  - definiše efekte izduženja ili sabijanja vrtloga dejstvom gradijenata usrednjene brzine glavnog toka, i u principu je glavni promoter sekundarnog strujanja prve vrste,

$A_3$ ,  $A_4$  i  $A_5$  - izražavaju uticaj turbulentnih napona na produkciju ili destrukciju komponente vrtložnosti  $\Omega_l$ ,

$A_6$  - predstavlja proces viskozne disipacije komponente vrtložnosti  $\Omega_l$ .

Brundett i Baines su razmatrali potpuno razvijeni turbulentni tok, odakle proističe uslov da su svi gradijenti po  $x_1$  osi (osa glavnog toka) jednaki nuli, tako da se jednačina (4.1), redukuje na sledeći oblik:

$$\begin{aligned}
 & \overbrace{U_2 \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2} + U_3 \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_3}}^{A_1} = \\
 & = \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} (\overline{u_3 u_3} - \overline{u_2 u_2})}_{A_4} - \underbrace{\left( \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \overline{u_2 u_3}}_{A_5} + \underbrace{v \left( \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial x_3^2} \right)}_{A_6}
 \end{aligned} \tag{4.3}$$



**Slika 4.2.** Šema strujnog toka u pravom kanalu ne-kružnog poprečnog preseka.

Rezultati merenja Brundett-a i Baines-a, kao i ranija merenja Hoagland-a (1960), poslužila su za određivanje nivoa uticaja pojedinih članova u jednačini (4.3). Merenja su pokazala da je od dva turbulentna člana dominantan član  $A_4$  i da je uravnotežen konvektivnim članom  $A_1$  i viskoznom disipacijom  $A_6$ . Na osnovu ovih merenja, Brundett i Baines su izveli zaključak da se komponenta

vtložnosti  $\Omega_1$  generiše turbulentnom produkcijom normalnih Reynolds-ovih napona (član  $A_4$ ), zatim prenosi konvektivnim mehanizmom (član  $A_1$ ), da bi konačno disipirala usled viskoznih efekata (član  $A_6$ ). Ovaj zaključak je kasnije kritikovao Perkins (1970), navodeći nedostatke tačnosti merenja jednostrukom vrelom žicom, što je uzrokovalo grešku merenja smičućeg napona  $\overline{u_2 u_3}$  reda veličine  $\pm 100\%$ , a time i neopravdano zanemarivanje člana  $A_5$ .

Gessner i Jones (1965) su merenja izveli sondama sa toplom žicom i X-zracima što je omogućilo da se komponente Reynolds-ovih napona mnogo tačnije odrede. Umesto direktnog određivanja vrednosti članova u jednačini za vrtložnost  $\Omega_1$ , oni su koristili Reynolds-ove jednačine kretanja za komponente brzine duž strujnica sekundarnog toka, i određivali vrednosti članova iz tih jednačina. Merenja brzina su vršena u tačkama duž strujnica, a gradijenata brzine po normalama na strujnice. Na ovaj način, svaki član u jednačinama kretanja sekundarnog toka određen je sa zadovoljavajućom tačnošću. Rezultati merenja su pokazali da su konvektivni i disipacioni članovi za dva reda veličina manji od turbulentnih članova (viskozni disipacioni član je nešto značajniji u neposrednoj blizini rogljeva kanala).

Takođe, pokazalo se da su članovi sa turbulentnim normalnim i smičućim naponima, (koji koincidiraju članovima  $A_4$  i  $A_5$  u jednačini (4.3), respektivno) u jednačinama kretanja sekundarnog toka, istog reda veličine, i da je njihov zbir uravnotežen članom gradijenta pritiska. Kako član gradijenta pritiska iščezava pri matematičkoj manipulaciji dobijanja jednačine za vrtložnost, Gessner i Jones su doneli kontradiktorni zaključak prethodnom zaključku Brundett-a i Baines-a, da je glavni promotor sekundarnog toka razlika između turbulentnih članova, a da je disipativni član zanemarljivo mali.

Međutim, nasuprot merenjima Brundett-a i Baines-a, Gessner i Jones su merenja sprovedli u uslovima nepotpuno razvijenog turbulentnog toka, tako da se može reći da su ova merenja svakako tačnija zbog kvaliteta merne opreme, ali da se njihov zaključak mora uzeti sa određenom rezervom jer turbulentni tok u

kanalu nije bio potpuno razvijen, odnosno fenomen sekundarnog toka nije bio u potpunosti izolovan.

Perkins (1970) je eksperimentalno istraživao mehanizme generisanja komponente vrtložnosti  $\Omega_1$ , u tokovima blizu rogljeva kanala sa približno konstantnim pritiskom u kanalu. Ovaj tip strujanja se može približno smatrati istim tipom strujanja kao što je slučaj sa potpuno razvijenim turbulentnim tokom u pravom kanalu. Rezultati istraživanja Perkins-a, takođe, ukazuju na zaključke Gessner-a i Jones-a. Perkins se složio da dva odvojena mehanizma doprinose generisanju sekundarnog turbulentnog smičućeg napona  $\overline{u_2 u_3}$ .

Prvi mehanizam je posledica postojanja gradijenata brzina u ravni poprečnog preseka, pri čemu se njihov doprinos generisanju napona  $\overline{u_2 u_3}$  može izraziti članovima koji se nalaze u jednačinama turbulentnih modela baziranih na izotropnom konceptu turbulentne viskoznosti ( $k$ - $\varepsilon$  model).

Drugi mehanizam je posledica distorzije primarnog polja napona u blizini rogljeva kanala, odnosno gradijenata primarne brzine. Ovi izdvojeni mehanizmi generisanja turbulentnog smičućeg napona  $\overline{u_2 u_3}$  se ne mogu izolovati i posebno meriti, pa je Perkins pretpostavio da su istog reda veličine. Kasnije će se pokazati da je pri formiranju matematičkog modela, stvarno potrebno uzeti u obzir oba mehanizma.

Nasuprot svom prethodnom ubeđenju, Gessner (1973) je potvrdio da anizotropija turbulentnih normalnih napona (član  $A_4$ ) nije glavni i jedini promoter sekundarnog toka. Kako su svi članovi u jednačini (4.1) najmanje za jedan red veličine manji u odnosu na članove u jednačinama za druge dve komponente vrtložnosti  $\Omega_2$  i  $\Omega_3$ , (sadrže gradijente primarne brzine koji su mnogo veći u odnosu na gradijente sekundarnih brzina), Gessner je izneo ideju da je potrebno ispitivati ove jednačine umesto jednačine za vrtložnost  $\Omega_1$ , kako bi se mogao jasnije doneti zaključak o pravom generatoru sekundarnog toka.

Analizirajući rezultate eksperimenta, specijalno namenjenog za analizu vrednosti članova u jednačinama za komponente vrtložnosti usmerene u pravcima stranica roglja kanala, Gessner je doneo zaključak da se konverzija usrednjene u turbulentnu vrtložnost, preko transverzalnih gradijenata primarnog smičućeg napona, može uravnotežiti jedino konvektivnim transportom vrtložnosti preko sekundarnog toka u toj oblasti.

Drugim rečima, sekundarni tok je posledica transverzalnih gradijenata primarnih smičućih napona u oblasti rogljeva kanala. Ovi zaključci nisu u koliziji sa prethodnim, ali oni ne objašnjavaju genezu sekundarnog toka. Geneza sekundarnog toka se, ipak, mora tražiti u jednačini za komponentu vrtložnosti  $\Omega_1$ , jer je to jednačina konzervacije ove veličine u kojoj se direktno javljaju produkcionni članovi ove veličine, koji imaju dominantnu ulogu u stvaranju sekundarnog toka.

Na osnovu iznetih rezultata eksperimentalnih istraživanja o fizici nastajanja sekundarnog toka druge vrste, mogu se doneti sledeći stavovi: u jednačini za turbulentnu vrtložnost  $\Omega_1$  (4.1 ili 4.3), turbulentni članovi  $A_4$  i  $A_5$  imaju dominantnu ulogu, suprotnog su znaka i pojedinačno su mnogo veći od konvektivnog člana  $A_1$ . Viskozni član  $A_6$  je zanemarljivo mali, izuzev u zidnoj zoni rogljeva kanala. Iz prethodnih stavova proističe zaključak da je razlika između turbulentnih članova  $A_4$  i  $A_5$  istog reda veličine kao konvektivni član  $A_1$ , pa se konačno može zaključiti da je upravo ta razlika između relativno velikih turbulentnih članova, mehanizam koji generiše sekundarni tok, [71].

Kao posledica ovog zaključka, nameće se potreba za što tačnijim modeliranjem svih Reynolds-ovih napona u cilju realističke simulacije sekundarnih tokova druge vrste u pravom kanalu kvadratnog poprečnog preseka pri razvijenom turbulentnom strujanju.

## 4.2. Formulacija fizičkog modela čvrste faze

Sisteme fluida sa česticama tj. dvofazne tokove karakteriše kompleks velikog broja međusobno povezanih samih po sebi složenih fenomena koji su posledica uticaja između faza. Pri razmatranju dvofaznih strujnih tokova sa međudejstvom faza, pri modeliranju strujanja usvojen je kombinovani pristup rešavanja strujnog polja. Gasna struja se rešava primenom Euler-ovog pristupa - koncept kontinuuma, a čvrsta faza se rešava primenom Lagrange-ovog pristupa - koncept praćenja trajektorija čestica. Interfazna interakcija gasne i čvrste faze se simultano adaptira kroz iterativni postupak na sledeći način:

- Prvi korak:** Na početku integracije jednačina konzervacije, prvo se rešava gasna faza bez prisustva interfaznih članova.
- Drugi korak:** Nakon određenog broja iteracija, dobijeno polje gasne struje se "*zamrzne*" i kroz njega se "*puste*" čestice. Na osnovu dobijenih trajektorija čestica, određuju se interfazni članovi interakcije čvrste i gasne faze.
- Treći korak:** Trajektorije čestica se "*zamrznu*" i ponovo se rešava strujno polje gasne faze, ali sada sa dobijenim interfaznim članovima iz prethodnog koraka.
- Četvrti korak:** Ako nije postignuta konvergencija rešenja, koraci dva i tri se sukcesivno ponavljaju do dostizanja postavljenog kriterijuma konvergencije rešenja.

Kada je u pitanju gasna faza, pri definisanju njenog matematičkog modela, usvojene su sledeće pretpostavke:

- strujanje je stacionarno,
- strujanje je trodimenzionalno,
- strujanje je nekompresibilno,
- strujanje je izotermalno,
- strujanje je hemijski inertno.

Za definisanje matematičkog modela čvrste faze usvojene su sledeće pretpostavke:

- čestice su različitih dimenzija,
- čestice ne menjaju masu prolaskom kroz kanal,
- čestice imaju konstantnu temperaturu kroz kanal,
- zanemaren je uticaj kolizije (sudara) čestica,
- čestice pri udaru o zidove i unutrašnje prepreke kanala gube određeni nivo impulsa,
- čestice se stohastički kreću, odnosno turbulentno strujno polje gasne struje, modulira determinističke trajektorije čestica koje su dobijene iz usrednjenih vrednosti brzina gasne struje.



## 5. MATEMATIČKI MODEL

### 5.1. Matematički model gasne faze

Matematički model gasne faze će se formirati za trodimenzijski potpuno razvijeno turbulentno strujanje u pravom kanalu kvadratnog poprečnog preseka. Pod razvijenim turbulentnim strujanjem se podrazumeva: turbulentno strujanje u kanalu gde su profili brzina u poprečnim presecima ustaljeni tj. ne menjaju se. Pretpostaviće se stacionarno i nestišljivo turbulentno strujanje. Zidovi kanala imaju konstantnu temperaturu, različitu od temperature okoline. Zanimariće se zapreminske sile gravitacije i efekti temperaturskog uzgona. Pored definisanja punog naponskog modela turbulencije za određivanje komponenti Reynolds-ovih napona, potrebno je rešavati dodatne dve transportne jednačine za određivanje transverzalnih komponenti temperaturskog fluksa  $\overline{\theta u_2}$  i  $\overline{\theta u_3}$ , jer se pretpostavlja da je komponenta temperaturskog fluksa  $\overline{\theta u_1}$  zanemarljivo mala.

Opšta jednačina održanja impulsa, materije i energije za gasnu fazu identična je opšte poznatoj jednačini konzervacije polja (Reynolds-a) za jednofazni fluid sa dodatkom interfaznog člana:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \Phi) + U_j \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \Phi) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma_\phi \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right) = S_\phi + S_\phi^{IF} \quad (5.1)$$

gde je:

$\Phi$  - univerzalni parametar (promenljiva) gasne faze (na primer: komponente brzine gasne faze);

$\rho$  - gustina gasne faze;

$U_j$  - komponente vektora usrednjene brzine gasne faze;

$\Gamma_\phi$  - transportni, difuzioni koeficijent parametra  $\Phi$  (na primer: za komponente brzine gasne faze je  $\Gamma_\phi = \mu$ , odnosno to je dinamička viskoznost gasne faze);

$S_\phi$  - izvorni član, to je izvor ili ponor parametra  $\Phi$ , (na primer: ako je parametar gasne faze komponenta brzine gasne faze, uz zanemarivanje zapreminskih sila, izvorni član je:  $S_\phi = -\partial P / \partial x_i$ , odnosno to je gradijent površinskih sila);

$S_\phi^{IF}$  - interfazni član interakcije čvrste i gasne faze. Ovaj član uzima u obzir uticaj čestica tj. čvrste faze na gasnu, odnosno odnosi se na razmatranje uzajamnog transfera količine kretanja, energije i mase između faza. Interfazni član interakcije se određuje metodom praćenja trajektorija čestica čvrste faze, što je u literaturi poznato kao Lagrange-ov pristup u rešavanju strujnog polja.

### 5.1.1. Osnovne jednačine održanja

U uslovima izoternog strujanja, efekti uzgonskih kretanja, uzrokovani temperaturnim gradijentima su zanemarljivi, takođe, u ovim uslovima može se smatrati da je gustina gasne faze konstantna. Diferencijalni model gasne faze je baziran na jednačini kontinuiteta i Navier-Stokes-ovim jednačinama.

Prema usvojenim pretpostavkama fizičkog modela, usrednjene jednačine održanja materije, impulsa i toplote imaju sledeće oblike [22], [71] :

- jednačina kontinuiteta:

$$\frac{\partial U_j}{\partial x_j} = 0 \quad (5.2)$$

- jednačine kretanja:

$$U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j} + S_{U_i}^{IF} \quad (5.3)$$

gde su:  $U_i$  – usrednjana komponenta brzine transportnog gasa,

$\nu$  – kinematska viskoznost,

$\rho$  – gustina transportnog gasa,

$P$  – usrednjeni pritisak,

$\overline{u_i u_j}$  - komponente turbulentnih napona i

$S_{U_i}^{IF}$  – interfazni član interakcije čvrste i gasne faze. Problemu određivanja

interfaznih članova  $S_{U_i}^{IF}$ , biće posvećena posebna pažnja u poglavlju

5.2.

- energetska jednačina:

$$U_j \frac{\partial T}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( a \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial \overline{\theta u_j}}{\partial x_j} \quad (5.4)$$

gde su:  $T$  – usrednjena temperatura;

$a = \lambda / \rho c_p$  – koeficijent toplotne difuzije i

$\overline{\theta u_j}$  – komponente turbulentnih temperaturskih flukseva.

U prethodnim diferencijalnim jednačinama svi članovi su dati po jedinici zapremine, tako da kada se integrale po uočenoj zapremini strujnog prostora, dobijaju se prave jedinice za masu, silu, energiju ili za bilo koju drugu veličinu. Osetljivost određivanja Reynolds-ovih napona zahteva primenu punog naponskog modela turbulencije. U narednom poglavlju, detaljno su opisani ovi modeli. Posebna pažnja je posvećena određivanju interfaznih članova interakcije između transportovanih čvrstih čestica materijala i transportnog vazduha kao gasne faze. Prisustvo čvrste faze izaziva pojavu dodatnih izvora količine kretanja, energije i mase u gasnoj fazi. Uočene promene količine kretanja, energije i mase čestica transportovanog materijala odražavaju se na gasnu fazu – transportni vazduh i moraju se uzeti u obzir pri rešavanju jednačina gasne faze.

## 5.1.2. Turbulentni modeli

### 5.1.2.1. Model Reynolds-ovih napona

Polazna osnova za formiranje naponskog modela turbulencije je egzaktna transportna jednačina koja definiše dinamiku Reynolds-ovih napona [50], a koja se za nestišljiv fluid može predstaviti u sledećem obliku (Rotta, 1951):

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\frac{\partial u_i u_j}{\partial t}}_a + U_k \underbrace{\frac{\partial u_i u_j}{\partial x_k}}_b &= \underbrace{\left( f_i u_j + f_j u_i \right)}_c - \underbrace{\left( u_i u_k \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + u_j u_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right)}_d - \\
 &\underbrace{2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}}_e + \underbrace{\frac{p}{\rho} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)}_f - \\
 &\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \left[ u_i u_j u_k \right]}_{g^1} + \underbrace{\frac{p}{\rho} \left( u_i \delta_{jk} + u_j \delta_{ik} \right)}_{g^2} - \underbrace{\nu \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_k}}_{g^3} \quad (5.5)
 \end{aligned}$$

Članovi u prethodnoj jednačini imaju sledeće fizičko tumačenje:

- a* - lokalna promena turbulentnih napona;
- b* - konvektivna promena turbulentnih napona;
- c* - generisanje turbulentnih napona usled delovanja fluktuirajuće komponente zapreminskih sila;
- d* - generisanje turbulentnih napona usled deformisanja glavnog toka;
- e* - viskozna destrukcija turbulentnih napona;
- f* - redistribucija među pojedinim komponentama turbulentnog napona usled dejstva fluktuirajućeg pritiska;
- g* - difuzioni transport turbulentnih napona usled fluktuacija brzine (član  $g^1$ ), pritiska (član  $g^2$ ) i molekularni transport (član  $g^3$ ).

U slučaju turbulentnih tokova sa značajnom promenom gustine (veliki temperaturni gradijenti, sagorevanje itd.) u jednačini se pojavljuju i članovi koji sadrže korelacije sa fluktuirajućom gustinom (aktivni skalar), a koja je u ovom slučaju zanemarena (pasivni skalar).

Naponski model turbulencije podrazumeva simultano rešavanje jednačine (5.5), sa jednačinom kretanja u Reynolds-ovoj usrednjenoj formi, [50], [71]. Međutim, u egzaktnom obliku mogu se tretirati samo članovi  $a$ ,  $b$ ,  $d$ , i  $g^3$ , te u određenim situacijama i član  $c$ . Očigledno je da ostali članovi,  $e$ ,  $f$ ,  $g^1$  i  $g^2$ , predstavljaju korelacije koje se moraju modelovati u funkciji raspoloživih zavisno promenljivih veličina.

Zavisno promenljive veličine koje stoje na raspolaganju (za koje se rešavaju transportne jednačine) u naponskom modelu su: usrednjena brzina  $U_i$ , tenzor turbulentnih napona  $\overline{\rho u_i u_j}$  i jedan ili više parametara koji mogu direktno ili indirektno karakterisati veličinu onih vrtloga koji imaju najvažniju funkciju u bitnim turbulentnim interakcijama i mehanizmu turbulentnog transporta.

Kao što je to već rečeno, najčešće se uzima brzina disipacije turbulentne kinetičke energije:  $\varepsilon = \nu \overline{(\partial u_i / \partial x_k)^2}$ , koja je kao fenomen vezana za najsitniju vrtložnu strukturu, ali koja ipak zavisi, pre svega, od energetski dominirajućih vrtloga, pa se može koristiti i kao promenljiva koja definiše veličinu ovih vrtloga. Međutim, za karakterizaciju vremenske razmere turbulencije uvodi se kao dodatna promenljiva sama kinetička energija turbulencije, pri čemu se vremenska makro razmera turbulencije indirektno određuje, kao  $\tau = k / \varepsilon$ .

Od prvih ideja o modeliranju jednačine (5.5) (Rotta, 1951), pa do danas, u literaturi su prisutni brojni pristupi i predlozi za zatvaranje ove jednačine. Međutim, ekstenzivno testiranje modela na različitim tipovima strujanja dovelo je do toga da se veliki broj modela odbaci, a da se zadrže samo bazični modeli kojih ima nekoliko i koji se razlikuju u nijansama. Do razlike u bazičnim naponskim modelima turbulencije može doći tek u budućnosti daljom verifikacijom modela na

složenim turbulentnim strujanjima, a takođe i novim teorijskim i eksperimentalnim saznanjima o fizici turbulencije.

Turbulencija koja se javlja u inženjerskim i prirodnim strujnim tokovima uglavnom je karakterisana visokim  $Re$  brojevima, pa se u praksi uglavnom nalaze turbulentni modeli koji su ograničeni na ovakve uslove.

Izraženi efekti viskoznosti, koji se javljaju u strujnom polju sa niskim  $Re$  brojevima, te u viskoznim zonama neposredno uz čvrsti zid, svojim prigušnim dejstvom utiču na turbulentne interakcije i samu turbulentnu strukturu, pa se u tim slučajevima zahteva poseban pristup u modeliranju svih članova u transportnoj jednačini (5.5). Isto se može reći za uticaj zida koji deluje kao prigušivač turbulentnih fluktuacija, a takođe i kao njihov reflektor, što zahteva da se ovi efekti moraju uzeti u obzir [67]. Slični zaključci važe i za ostale nehidrodinamičke efekte, kao što su toplotni efekti, prisustvo druge faze (čvrste čestice, tečne kapljice), itd.

S obzirom na ove zaključke, većina modela je razvijena za najprostije uslove strujanja, odnosno za simulaciju izotermalnog turbulentnog strujanja nestišljivog fluida, daleko od čvrstog zida i za visoke  $Re$  brojeve u odsustvu svih ostalih efekata.

Međutim, uticaj zida i neizbežni viskozni efekti koji se javljaju na njemu, bez obzira na veličinu  $Re$  broja u osnovnoj struji, predstavljaju faktor koji se mora uzeti u obzir, ako se želi simulirati bilo kakav strujni tok ograničen čvrstim zidom. S obzirom na čestu prisutnost ovakvih strujnih tokova u inženjerskoj praksi, uticaj zida je zastupljen u gotovo svim modelima koji pretenduju da budu univerzalni. Znatno manji broj modela obuhvata viskozne efekte u celini, koji su od interesa za prognoziranje strujnih tokova sa niskim globalnim  $Re$  brojem kao što je na primer prirodna konvekcija. Još je manji broj modela koji uzimaju u obzir ostale spomenute efekte dvofaznosti, hemijske reakcije itd.

Modelovane forme članova u transportnoj jednačini (5.5), dovode do zatvorenog oblika transportne jednačine za Reynolds-ove napone, [50], [71] :

$$U_k \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( C'_g \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_k u_n} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_n} \right) + \mathbf{P}_{ij} + \Phi_{ij,1} + \Phi_{ij,2} + \Phi_{ij,z} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \varepsilon \quad (5.6)$$

gde su:

$$\mathbf{P}_{ij} = -\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \quad (5.7)$$

$$\Phi_{ij,1} = -C_l \frac{\varepsilon}{k} \left( \overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right) \quad (5.8)$$

$$\Phi_{ij,2} = -\alpha \left( \mathbf{P}_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \mathbf{P} \right) - \beta k \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \gamma \left( \mathbf{D}_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \mathbf{P} \right) \quad (5.9)$$

$$\mathbf{D}_{ij} = -\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_k}{\partial x_j} - \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \quad (5.10)$$

$$\mathbf{P} = -\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad (5.11)$$

$$\Phi_{ij,z} = \Phi_{ij,z1} + \Phi_{ij,z2} \quad (5.12)$$

$$\Phi_{ij,z1} = C_{z1} \left( \overline{u_k u_m} \delta_{ij} n_k n_m - \frac{3}{2} \overline{u_k u_i} n_k n_j - \frac{3}{2} \overline{u_k u_j} n_k n_i \right) \cdot f_z \cdot \frac{k}{\varepsilon} \quad (5.13)$$

$$\Phi_{ij,z2} = C_{z2} \left( \Phi_{km,2} \delta_{ij} n_k n_m - \frac{3}{2} \Phi_{ki,2} n_k n_j - \frac{3}{2} \Phi_{kj,2} n_k n_i \right) \cdot f_z \quad (5.14)$$

$$f_z = \frac{C_\mu^{0.75} k^{1.5}}{0.417 \cdot \varepsilon} \cdot \frac{1}{x_{nz}} \quad (5.15)$$



Zatvaranje naponskog modela za Reynolds-ove napone (5.6), [50], [71], se vrši dodatnom transportnom diferencijalnom jednačinom za disipaciju kinetičke energije turbulencije, tako da se  $\varepsilon$  - disipacija kinetičke energije turbulencije pojavljuje kao nova dodatna promenljiva koja se određuje iz sopstvene transportne jednačine:

$$U_k \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( C_\varepsilon \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_k u_j} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + \frac{\varepsilon}{k} (C_{\varepsilon 1} \mathbf{P} - C_{\varepsilon 2} \varepsilon) \quad (5.16)$$

Empirijski koeficijenti modela turbulencije za Reynolds-ove napone, prikazani su tabeli 5.1.

**Tabela 5.1.**

$C'_g$	$C_1$	$C_2$	$C_{z1}$	$C_{z2}$	$C_\mu$	$C_\varepsilon$	$C_{\varepsilon 1}$	$C_{\varepsilon 2}$
0.21	1.50	0.40	0.50	0.06	0.09	0.15	1.44	1.90

U prethodnim izrazima uvedene su standardne oznake za kinetičku energiju turbulencije  $k = \frac{1}{2} \overline{u_i u_i}$ , ortove normale na koordinatne ravni  $n_i$ , i normalno odstojanje od prepreke  $x_{nz}$ , te Kroenecker-ov operator  $\delta_{ij}$ .

### 5.1.2.2. Model turbulentnih temperaturskih flukseva

Egzaktna transportna diferencijalna jednačina za turbulentne temperaturske flukseve se dobija množenjem jednačina kretanja za trenutne vrednosti brzina sa fluktuacijom temperature  $\theta$ , zatim njenim sabiranjem sa energetsom jednačinom za trenutne vrednosti temperature pomnoženom sa fluktuacijom brzine  $u_i$  te sprovođenjem Reynolds-ove procedure usrednjavanja nad ovako dobijenom zbirnom jednačinom.

Svakako u ovoj proceduri se izdvajaju jednačine kretanja i energetska jednačina sa usrednjenim vrednostima. Zapreminske sile se uvode preko Boussinesq-ove aproksimacije za uzgonsku silu uzrokovanu temperaturskim gradijentima. Tako dobijana egzaktna transportna diferencijalna jednačina za turbulentne temperaturske flukseve  $\overline{\theta u_i}$  ima oblik, [71]:

$$\begin{aligned}
 \frac{a}{Dt} = & \underbrace{-\overline{u_i u_k} \frac{\partial T}{\partial x_k}}_{P_{\theta i}^T} - \underbrace{\overline{\theta u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k}}_{P_{\theta i}^U} - \underbrace{g_i \beta \overline{\theta^2}}_{B_{\theta i}} + \underbrace{\frac{\partial \theta}{\partial x_i} \frac{p}{\rho}}_{\Phi_{\theta i}} - \underbrace{(a + \nu) \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}}_{\varepsilon_{\theta i}} + \\
 & + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \underbrace{a \frac{\partial \theta}{\partial x_k} u_i + \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \theta}_{D_{\theta i}^v} - \underbrace{\overline{\theta u_i u_k}}_{D_{\theta i}^\theta} - \underbrace{\frac{\theta p}{\rho} \delta_{ik}}_{D_{\theta i}^p} \right) \quad (5.17) \\
 & \underbrace{\hspace{10em}}_{D_{\theta i}}
 \end{aligned}$$

Članovi u prethodnoj jednačini imaju sledeće fizičko tumačenje:

$a$  – lokalna promena turbulentnih temperaturskih flukseva;

$P_{\alpha}^T$  - generisanje turbulentnih temperaturskih flukseva gradijentom

usrednjene temperature;

- $P_{\theta i}^U$  - generisanje turbulentnih temperaturskih flukseva gradijentom usrednjene brzine;
- $B_{\theta i}$  - generisanje turbulentnih temperaturskih flukseva uzgonskim silama;
- $D_{\theta i}^v$  - viskozna disipacija temperaturskih flukseva;
- $D_{\theta i}^\theta$  - turbulentna difuzija usled fluktuacija brzine;
- $D_{\theta i}^p$  - turbulentna difuzija usled fluktuacija pritiska;
- $\Phi_{\theta i}$  - redistributivna korelacija pritisak-temperatura;
- $\varepsilon_{\theta i}$  - brzina disipacije turbulentnih temperaturskih flukseva.

Produkcioni članovi  $P_{\theta i}^T$ ,  $P_{\theta i}^U$  i  $B_{\theta i}$ , generisani gradijentom usrednjene temperature, gradijentom usrednjene brzine i uzgonskim silama, respektivno, mogu se zadržati u originalnom obliku, dok ja za članove  $D_{\theta i} = D_{\theta i}^v + D_{\theta i}^\theta + D_{\theta i}^p$ ,  $\Phi_{\theta i}$  i  $\varepsilon_{\theta i}$  potrebno sprovesti odgovarajuću proceduru modeliranja.

Modelovane forme članova u jednačini (5.17), dovode do zatvorenog oblika transportne jednačine za turbulentne temperaturske flukseve, [71] :

$$U_k \frac{\partial \overline{\theta u_i}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( C_\theta \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_k u_j} \frac{\partial \overline{\theta u_i}}{\partial x_j} \right) + P_{\theta i} + \Phi_{\theta i} + \Phi_{\theta i, z} + \varepsilon_{\theta i} \quad (5.18)$$

gde su:

$$P_{\theta i} = -\overline{u_k u_i} \frac{\partial T}{\partial x_k} - \overline{\theta u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \quad (5.19)$$

$$\Phi_{\theta i} = -C_{\theta 1} \frac{\varepsilon}{k} \overline{\theta u_i} + C_{\theta 2} \overline{\theta u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \quad (5.20)$$

$$\Phi_{\theta i, z} = -C_{\theta 1z} \frac{\varepsilon}{k} \overline{\theta u_k n_i n_k} \cdot f_z \quad (5.21)$$

Empirijski koeficijenti modela turbulentnih temperaturnih flukseva, dati su u tabeli 5.2.

**Tabela 5.2.**

$C_{\theta}$	$C_{\theta 1}$	$C_{\theta 2}$	$C_{\theta z 1}$
0.11	2.45	0.66	0.80

U modelu je zanemarena brzina disipacije temperaturnih flukseva  $\varepsilon_{\theta i} = 0$ , a kako je zanemaren i uticaj fluktuacija zapreminskih gravitacionih sila, u modelu je eliminisana jednačina za temperaturnu varijansu  $\overline{\theta^2}$ .

## 5.2. Matematički model čvrste faze

Prisustvo čvrstih čestica u strujnim tokovima koji se sreću u ogromnoj većini tehničkih procesa u mnogome usložnjava problem, kako zbog potrebe modeliranja toka diskretne faze tako i zbog međusobnog dejstva faza. Prisustvo čestica stvara aerodinamičke otpore koji uslovljavaju promenu količine kretanja obeju faza. Kao što je već rečeno u fizičkom modelu, matematički model čvrste faze bazira na Lagrange-ovom konceptu rešavanja zadatka, koji je bliži fizičkoj stvarnosti i obezbeđuje kroz više informacija (putanje, vreme boravka u određenom prostoru) realniju sliku i pouzdanije predviđanje kretanja čvrstih čestica u turbulenciji fluida. Lagrange-ov koncept podrazumeva praćenje trajektorija čvrstih čestica transportovanog materijala. Na osnovu ovog koncepta, određuju se pozicije – trajektorije čvrstih čestica (transportovanog materijala), njihov impuls, promena brzine, temperature kao i mase duž tih trajektorija i

konačno interfazni članovi, uzimajući u obzir prethodno usvojene pretpostavke modela čvrste faze.

### 5.2.1. Jednačina trajektorija čestica

Pozicije čestica se određuju rešavanjem sledeće jednačine kretanja za svaku grupu čestica:

$$\frac{dx_p}{dt} = \tilde{U}_p \quad (5.22)$$

gde je:

$x_p$  - vektor pozicije čestica, a

$\tilde{U}_p$  - vektor trenutne brzine čestica.

### 5.2.2. Jednačina impulsa čvrste faze

Vektor trenutne brzine čvrste čestice  $\tilde{U}_p$  se određuje iz jednačine impulsa čvrste faze:

$$m_p \frac{d\tilde{U}_p}{dt} = \underbrace{\mathfrak{R}_p(\tilde{U} - \tilde{U}_p)}_A + \underbrace{m_p b g}_B - \underbrace{V_p \nabla P}_C \quad (5.23)$$

gde je:

$m_p$  - masa čestice,

$\mathfrak{R}_p$  - funkcija otpora čestice, koja će se naknadno odrediti,

$\tilde{U}$  - vektor trenutne brzine gasne faze, jednake zbiru usrednjene brzine ( $U$ ) dobijene rešavanjem jednačine (5.3) i njene turbulentne fluktuacije ( $u$ ), tako da je:  $\tilde{U} = U + u$ . Fluktuaciona komponenta  $u$  će se naknadno odrediti na bazi usvojenog stohastičkog modela turbulencije;

$g$  - vektor gravitacije,

$b$  - koeficijent uzgonske sile,

$V_p$  - zapremina čestice,

$\nabla P$  - gradijent pritiska kontinualne faze.

Prvi član sa desne strane znaka jednakosti u jednačini (5.23)  $A$  - predstavlja silu otpora relativnom kretanju čestice u odnosu na gasnu fazu i predstavlja dominantnu silu koja deluje na čvrste čestice u pravcu strujanja i izaziva njihovo kretanje. Drugi član  $B$  - predstavlja silu gravitacije, a treći član  $C$  - uzgonsku silu. Sila gravitacije i uzgonska sila su upravne na pravac kretanja čestice, tj. na pravac sile otpora relativnom kretanju, ali su suprotnog smera, pa se može pretpostaviti da je njihovo dejstvo na čvrstu česticu transportovanog materijala uravnoteženo. Kako su vertikalne sile uravnotežene, na čestice transportovanog materijala deluje samo sila reakcije otpora, usled koje se čvrste čestice kreću. Ostale sile koje deluju na čvrste čestice transportovanog materijala su zanemarene (sila usled porasta gradijenta pritiska, Basset-ova, Saffman-ova i Magnus-ova sila).

Funkcija otpora čvrste čestice se može odrediti jednim od sledećih izraza:

$$\mathfrak{R}_p = 0,5 \rho A_p C_D |\tilde{U} - \tilde{U}_p| \quad (5.24)$$

$$\mathfrak{R}_p = g m_p \frac{|\tilde{U} - \tilde{U}_p|}{c_o^2} \quad (5.24')$$

gde je:  $\tilde{U}_p$  - vektor trenutne brzine čvrste čestice,

$\tilde{U}$  - vektor trenutne brzine gasne faze,

$c_o$  – brzina "lebdjenja",

$A_p = \pi D_p^2 / 4$  - površina poprečnog preseka čvrste čestice,

$C_D$  - koeficijent otpora čvrste čestice, koji se određuje iz sledećeg izraza,  
[12]:

$$C_D = \frac{24}{Re} (1 + 0,15 Re^{0,687}) + \frac{0,42}{1 + 4,25 \times 10^4 Re^{-1,16}} \quad (5.25)$$

gde je:  $Re = \frac{D_p |\tilde{U} - \tilde{U}_p|}{\nu}$  - Reynolds-ov broj za česticu.

Izraz 5.25 [12], validan je za sferičnu česticu transportovanog materijala i za  $Re < 10^5$ .

### 5.2.3. Stohastički model turbulencije čvrste faze

Kao što je već napomenuto, u jednačini impulsa (5.23) figurira trenutna brzina gasne faze koja se sastoji iz usrednjenog i fluktuacionog dela. Fluktuacioni deo  $u$  se određuje pod pretpostavkom da statistička raspodela svake fluktuacione komponente brzine ima normalnu raspodelu sa srednjom vrednošću nula i standardnom devijacijom:

$$\sigma = \sqrt{\frac{2}{3} k} \quad (5.26)$$

gde je  $k$  - turbulentna kinetička energija.

Za fluktuacionu komponentu vektora brzine gasne faze  $u$ , pretpostavlja se da deluje tokom vremenskog intervala  $\Delta t_s$  koji se određuje kao minimum dva vremena:

- (a)  $\Delta t_e$  - vreme života lokalnog vrtloga kroz koji čestica prolazi, i
- (b)  $\Delta t_r$  - vreme prolaska čestice kroz lokalni vrtlog.

Vreme života lokalnog vrtloga se određuje iz relacije:

$$\Delta t_e = \frac{\ell_e}{|u|} \quad (5.27)$$

gde je  $\ell_e$  veličina lokalnog vrtloga (lokalna dužinska razmera turbulencije), određena iz izraza:

$$\ell_e = \frac{C_\mu^{3/4} k^{3/2}}{\varepsilon} \quad (5.28)$$

gde je:  $\varepsilon$  - brzina disipacije turbulentne kinetičke energije, određena iz sopstvene transportne jednačine (5.16);

$k$  - turbulentna kinetička energija, a

$C_\mu$  - je konstanta turbulentnog modela.

Vreme prolaska čestice kroz lokalni vrtlog se određuje iz izraza:

$$\Delta t_r = \frac{\ell_e}{|\tilde{U} - \tilde{U}_p|} \quad (5.29)$$



#### 5.2.4. Integraljenje jednačine impulsa čestice

Integraljenje jednačine impulsa čestica sprovodi se kroz sledeće sekvence u drugom iterativnom koraku, opisanom na kraju prethodne glave:

1. Određuje se Lagrange-ov vremenski korak integracije;
2. Pokretanje čestica na osnovu njenih početnih i graničnih uslova;
3. Određuju se karakteristike čestice za svaku novu poziciju čestice;
4. Određuju su interfazni članovi.

U narednom tekstu definisane su prethodne četiri sekvence.

##### 5.2.4.1. Određivanje Lagrange-ovog vremenskog koraka integracije $\Delta t_L$

Lagrange-ov vremenski korak integracije se određuje iz sledećeg izraza:

$$\Delta t_L = \max \left[ t_0, \min(t_1, t_2, t_3) \right] \quad (5.30)$$

gde se vremena  $t_0 \div t_3$ , određuju na sledeći način:

- (a)  $t_0$  - je minimalni vremenski korak koji se zadaje proizvoljno. Uobičajeno je da ovaj vremenski korak ne bude manji od  $10^{-7}$  sekundi.

- (b)  $t_1$  - je vremenski korak koji se dobija kada se minimalno vreme prolaska čestice kroz numeričku ćeliju podeli sa minimalnim brojem Lagrange-ovih koraka koji se proizvoljno definišu (uobičajena praksa je da ovaj broj ne bude veći od 10). Minimalno vreme prolaska čestice kroz numeričku ćeliju se određuje za svaku numeričku ćeliju deljenjem njene minimalne dimenzije i maksimalne brzine.
- (c)  $t_2$  - je vreme relaksacije impulsa. Ovo vreme se dobija reorganizacijom impulsne jednačine u obliku:

$$\frac{d\tilde{U}_p}{dt} = A - B\tilde{U}_p \quad (5.31)$$

odakle se određuje vreme relaksacije  $t_2$ , gde je  $A$  - faktor multiplikacije. Vrednost ovog faktora od  $10^{10}$  isključuje ovo vreme iz jednačine (5.30). Uključivanje ovog vremena zadavanjem vrednosti faktora multiplikacije manjeg od  $10^{10}$  daje vrlo male vremenske korake za male čestice.

- (d)  $t_3$  - je maksimalni vremenski korak koji se iskustveno zadaje.

Treba napomenuti da se Lagrange-ov vremenski korak može dalje redukovati nakon određivanja naredne pozicije čestice u slučajevima:

- (a) česticama se ne dozvoljava da preskaču numeričke ćelije. Ako je trenutni vremenski korak toliko veliki da je novo izračunata pozicija čestice takva da je preskočila narednu ćeliju, ovaj vremenski korak se smanjuje kako bi se integracija sproveda za svaku numeričku ćeliju.
- (b) u graničnim ćelijama (numeričke ćelije na zidovima ili unutrašnjim preprekama). Česticama koje uđu u ovakve ćelije smanjuje se vremenski korak integracije.

#### 5.2.4.2. Pokretanje čestica

Nakon određivanja Lagrange-ovog vremenskog koraka  $\Delta t_L$ , pristupa se "pokretanju" čestica integraljenjem jednačine trajektorija čestice (5.22). Integral ove jednačine je:

$$x_p^n = x_p^0 + \tilde{U}_p^0 \cdot \Delta t_L \quad (5.32)$$

gde je sa "n" označena vrednost pozicionog vektora čestice na kraju vremenskog koraka, a sa "0" označena vrednost pozicionog vektora čestice na početku vremenskog koraka  $\Delta t_L$ . Iste oznake se odnose i na brzinu čestice. Na početku integracije, vrednosti sa oznakom "0" označavaju početne i granične uslove.

#### 5.2.4.3. Određivanje karakteristika čestica

Karakteristike čvrstih čestica se određuju rešavanjem jednačine impulsa čestica (5.23), koja se može napisati u opštem obliku kao:

$$\frac{d\tilde{X}}{dt} = A - B \cdot \tilde{X} \quad (5.33)$$

gde je sa  $\tilde{X}$  označena odgovarajuća trenutna promenljiva čestice (kao npr. impuls, masa, entalpija), a A i B su konstante.

Integraljenje se vrši u vremenskom domenu Lagrange-ovog vremenskog koraka  $\Delta t_L$ , tako da se vrednost promenljive  $\tilde{X}^n$  na kraju vremenskog koraka

može odrediti na osnovu odgovarajuće početne vrednosti promenljive  $\tilde{X}^0$ , i konstanti A i B na sledeći način:

$$\tilde{X}^n = \tilde{X}^0 \exp(-B \Delta t_L) + \frac{A}{B} [1 - \exp(-B \Delta t_L)] \quad (5.34)$$

Ako je konstanta B jednaka nuli, iz jednačine (5.33) se vidi da promena promenljive  $\tilde{X}$  ne zavisi od nje same, tako da je korišćenje jednačine (5.34) neupotrebljivo jer se deli sa nulom. U ovom slučaju, itegraljenje jednačine (5.33) je direktno:

$$\tilde{X}^n = \tilde{X}^0 + A \cdot \Delta t_L \quad (5.35)$$

Kada je u pitanju impuls čestica, što je u ovom slučaju jedina promenljiva, jednačina impulsa (5.31) se može napisati u sledećem obliku:

$$\frac{d\tilde{U}_p}{dt} = \frac{\mathfrak{R}_p \tilde{U}}{m_p} + b g - \frac{1}{\rho_p} \nabla P - \frac{\mathfrak{R}_p}{m_p} \tilde{U}_p \quad (5.36)$$

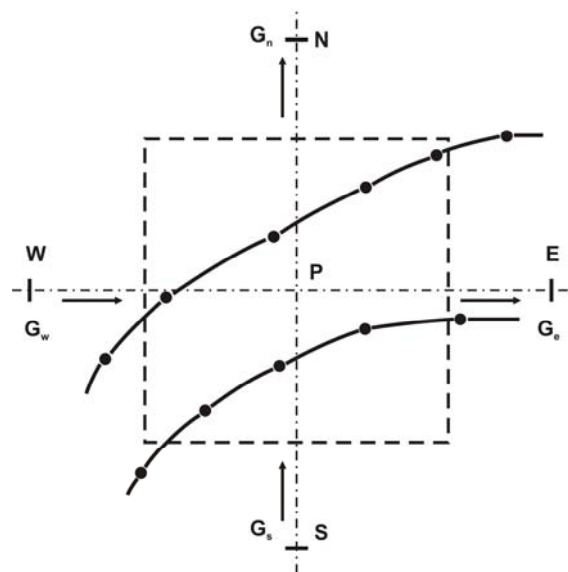
odakle se mogu definisati konstante A i B:

$$A = \frac{\mathfrak{R}_p \tilde{U}}{m_p} + b g - \frac{1}{\rho_p} \nabla P \quad (5.37)$$

$$B = \frac{\mathfrak{R}_p}{m_p} \quad (5.38)$$

#### 5.2.4.4. Određivanje interfaznih članova

Osnovni problem pri analizi dvofaznog turbulentnog strujanja tipa gas-čvrste čestice se odnosi na tretman uzajamne razmene količine kretanja, energije i mase između faza jer čestice prelaze iz jednog vrtloga u drugi. Ovaj zaključak je zasnovan na uočenoj promeni količine kretanja, energije i mase čestica pri prolasku kroz određeni segment strujnog polja, pri čemu te promene moraju ostati u gasnoj fazi. Prema tome, pri modeliranju dvofaznog turbulentnog toka, prisustvo disperzne faze izaziva pojavu dodatnih izvora količine kretanja, energije i mase u jednačinama gasne faze. Osnovni pristup određivanja interfaznih članova interakcije je zasnovan na podeli strujnog polja na numeričke ćelije i razmatranje svake ćelije kao kontrolne zapremine. Šematski prikaz jedne kontrolne zapremine i trajektorije čestica koje prolaze kroz nju je dat na slici 5.1, gde su sa G označeni maseni fluksevi kontinualne faze kroz pojedine granične površine kontrolne zapremine, [67]. Tako da promena na primer: količine kretanja čestica za vreme prolaska kroz posmatranu numeričku ćeliju (kontrolnu zapreminu) se uzima kao izvor (ili ponor) količine kretanja u kontinualnoj fazi - transportnom vazduhu.



slika 5.1. Trajektorije čvrstih čestica kroz numeričku ćeliju

Matematički model kontinualne faze se postavlja na osnovu modela razvijenih za čist fluid uz korekciju zbog prisustva čvrstih čestica. Naime, u jednačinama gasne faze prisustvo čvrstih čestica izaziva pojavu dodatnih izvora količine kretanja, energije i mase. Može se reći da kada čestica prođe kompletnu numeričku ćeliju, u njoj se javlja interfazna interakcija izmene impulsa, energije ili mase. Na primer, ako se čestica kreće većom brzinom od okoline tj. gasne faze, čestica će se zbog interakcije faza usporiti, tj. brzina čestice će se smanjiti dok će se brzina gasne faze u okolini čvrste čestice povećati. Ovi interfazni članovi interakcije se moraju dodati u jednačini kretanja gasne faze, te se na odgovarajući način trebaju odrediti. Interfazni članovi interakcije opisuju promenu količine kretanja čestica transportovanog materijala odnosno promenu količine kretanja gasne faze zbog prisustva čvrstih čestica u njoj. Interfazni član interakcije u jednačini (5.3) ustvari predstavlja silu otpora kretanju čvrste čestice u struji vazduha tj. sila otpora strujanju fluida oko čvrste čestice, koja je istog intenziteta i pravca ali suprotnog smera od sile reakcije otpora koja izaziva kretanje čestica. Što znači da je uzajamni uticaj između faza ustvari dat intenzitetom ovih sila, tako da se interfazni član interakcije određuje rešavanjem jednačine kretanja čestice:

$$m_p \frac{d\tilde{U}_p}{dt} = S_{U_i}^{IF} \quad (5.39)$$

Integraljenje jednačine (5.39) se vrši za svaku numeričku ćeliju, vodeći računa o Lagrange-ovom vremenskom koraku kako ne bi došlo do preskakanja ćelija odnosno kako bi se integraljenje sprovedo za svaku numeričku ćeliju. Rešavanjem prethodne jednačine uzimajući u obzir prethodno usvojene pretpostavke, dobijaju se interfazni članovi interakcije između faza. Oni se javljaju u jednačini kretanja gasne faze (5.3), jednaki su promeni impulsa kretanja čestica za svaku numeričku ćeliju i opisuju promenu količine kretanja gasne faze zbog prisustva čvrstih čestica a određeni su na sledeći način:

$$S_{U_i}^{IF} = \frac{\pi}{6} \sum \eta \left[ \rho_p^0 \tilde{U}_{p,i}^0 (D_p^0)^3 - \rho_p^n \tilde{U}_{p,i}^n (D_p^n)^3 \right] \quad (5.40)$$

gde su:  $\tilde{U}_{p,i}$  - komponente vektora trenutne brzine čvrstih čestica,

$D_p$  – prečnik čvrstih čestica,

$\rho_p$  – gustina čvrstih čestica,

$n$  - kraj Lagrange-ovog vremenskog koraka,

$0$  - početak Lagrange-ovog vremenskog koraka,

$i$  - komponenta vektora brzine čestice ( $i=1,2,3$ ). Ako je u pitanju pravougaoni koordinatni sistem, onda su ovim indeksom označene komponente brzine u  $x$ ,  $y$  i  $z$  pravcu, respektivno,

$\eta$  - protok broja čestica za jednu ćeliju (maseni protok čestica kroz numeričku ćeliju podeljen sa masom tih čestica),

$\Sigma$  - sumiranje se vrši za sve Lagrange-ove vremenske korake u okviru kompletnog prolaza čestice kroz jednu numeričku ćeliju.

Pod pretpostavkom da je u uslovno stacionarnom strujanju, protok čestica koji ulazi u kontrolnu zapreminu jednak onom koji iz nje izlazi, koncentracija čestica se može aproksimirati na osnovu broja čestica koje ulaze u kontrolnu zapreminu. Tako da se pri određivanju protoka broja čestica kroz kontrolnu zapreminu vrši sumiranje po trajektorijama koje presecaju posmatranu kontrolnu zapreminu. Protok broja čestica koje ulaze u posmatranu kontrolnu zapreminu u ulaznom preseku "i" (masene frakcije  $Z_i$ ) sa inicijalnim prečnikom  $D_p$  (masene frakcije  $Z_j$ ), određen je izrazom, [67]:

$$\eta = \frac{6 Z_i Z_j \dot{m}_p}{\pi \rho_p D_p^3} \quad (5.41)$$

Ovim je matematički model dvofaznog strujanja tipa vazduh-čvrste čestice transportovanog materijala, matematički jednoznačno zaokružen.

## 6. VALIDACIJA MODELA

### 6.1. Definicija validacionog modela

U svrhu validacije predloženih naponskih modela turbulencije, razmatraće se prav kanal kvadratnog poprečnog preseka čija je stranica  $b=2[m]$ , koji je korišćen u eksperimentalnoj studiji Po-a (1975) i Perkins-a (1970)). Uslovi strujanja definisani su Reynolds-ovim brojem  $Re=5,0E+04$ , ulaznom brzinom  $U_{1,ulaz} = 1,0 [ms^{-1}]$ , Prandtl-ovim brojem  $Pr=3,0$  i konstantnom temperaturom zidova kanala  $t_{zid}=10[°C]$ . Radi jednostavnosti usvojene su konstantne karakteristike fluida:  $\rho = 1,0 [kgm^{-3}]$  i  $c_p = 1,0 [Jkg^{-1}K^{-1}]$ . Kinematski viskozitet se određuje na osnovu prethodno definisanog Reynolds-ovog broja, ulazne brzine i hidrauličkog prečnika:  $\nu = U_{1,ulaz} D_h / Re$ . Koeffcijent provođenja toplote je određen na osnovu Prandtl-ovog broja  $\lambda = \rho c_p \nu / Pr$ .



Očekivani pad pritiska duž kanala može se odrediti na osnovu poznatih empirijskih izraza:  $dP/dx_l = C_{fr} \rho U_{l,ulaz}^2 / 2D_h$  i  $C_{fr} = 1/(1,82 \log Re - 1,64)^2$ , dok se frikciona brzina određuje iz izraza  $U_\tau = U_{l,ulaz} \sqrt{C_{fr} / 8}$ . Pretpostavljeni toplotni fluks sa strane zida se može odrediti iz korelacije za Nusselt-ov broj  $Nu = 0,023 Re^{0,8} Pr^{0,4}$ ,  $\dot{q}_{ulaz} = (t_{zid} - t_{sr}) \lambda Nu / D_h$ , gde je  $t_{sr} = 5 [^\circ\text{C}]$ . Na osnovu prethodnih relacija određena je približna promena temperature duž kanala, izrazom  $dt/dx_l = \dot{q}_{ulaz} A_{zid} / c_p \dot{m}$ , gde je:  $A_{zid} = (b^2 / 4)L$  površina stranica jednog bisektora kanala jer se zbog simetrije razmatra samo jedan kvadrant kanala, a  $\dot{m} = \rho U_{l,ulaz} b^2 / 4$  je maseni protok fluida u jednom bisektoru kanala, [71].

## 6.2. Granični uslovi validacionog modela

Uslovi strujanja, mehanizmi prenošenja toplote i geometrija zahtevaju primenu određenih graničnih uslova. Ulazne vrednosti i inicijalizacija kinetičke energije turbulencije, brzine disipacije, turbulentnih napona i temperaturnih flukseva se određuje na osnovu izraza:

$$k_{ulaz} = U_{1,ulaz}^2 C_{fr} / 4; \quad \varepsilon_{ulaz} = 0,1643 k_{ulaz}^{1,5} / 0,09 D_h$$

$$\overline{u_1 u_1}_{ulaz} = \overline{u_2 u_2}_{ulaz} = \overline{u_3 u_3}_{ulaz} = \frac{2}{3} k_{ulaz}; \quad \overline{u_3 u_1}_{ulaz} = \overline{u_3 u_2}_{ulaz} = 0,3 k_{ulaz}$$

$$\overline{\theta u_1}_{ulaz} = \overline{\theta u_3}_{ulaz} = 0$$

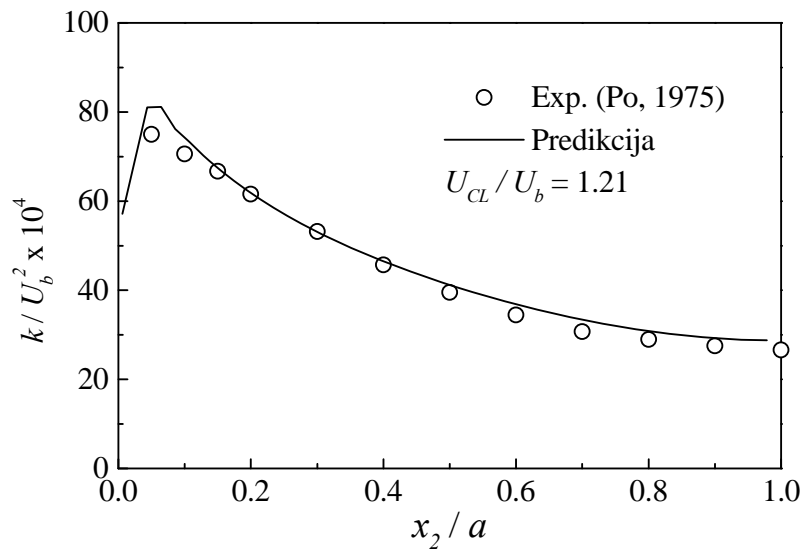
Za komponente usrednjene brzine, paralelne sa zidovima kanala ( $U_2$  i  $U_3$ ), usrednjenu entalpiju ( $h$ ), i brzinu disipacije kinetičke energije ( $\varepsilon$ ), granični uslovi na

zidovima kanala određeni su standardnim logaritamskim funkcijama. U ovom slučaju uzeta je vrednost Von Karman-ove konstante  $\kappa = 0,417$  i koeficijenta hrapavosti  $E=8,6$  [71]. Komponente turbulentnih napona i temperaturnih flukseva na zidovima kanala određuju se iz sopstvenih transportnih jednačina, jer su u njima uključeni članovi prisustva zida:  $\Phi_{ij,z}$  i  $\Phi_{\theta i,z}$ . Ova tehnika zadavanja graničnih uslova ekvivalentna je ne-ravnotežnim zidnim funkcijama. Da bi se u potpunosti definisao problem, preostalo je definisati uslove u ravnima simetrije. Za  $x_1 - x_2$  ravan simetrije, granični uslovi su sledeći:  $\overline{u_1 u_3} = \overline{u_1 u_2} = \overline{\theta u_3} = 0$ , a za  $x_1 - x_3$  ravan simetrije, granični uslovi su:  $\overline{u_2 u_3} = \overline{u_1 u_2} = \overline{\theta u_2} = 0$ .

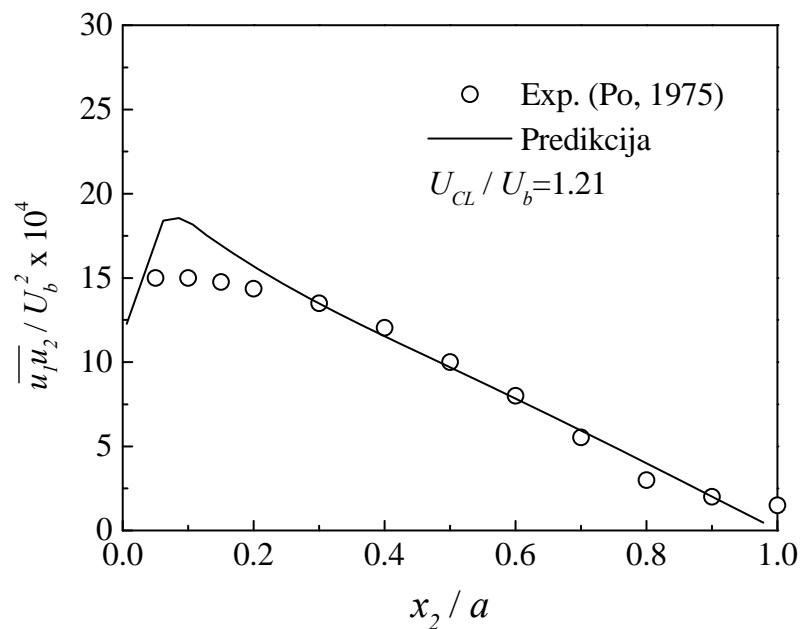
### 6.3. Rezultati validacionog modela

Poređenje proračunskih i eksperimentalnih rezultata se bazira na raspoloživim eksperimentalnim podacima. Interesantno je porediti turbulentne korelacije. Na raspolaganju je relativno mali broj ovakvih studija, tako da su izabrane dostupne eksperimentalne studije Po-a (1975) i Perkins-a (1970).

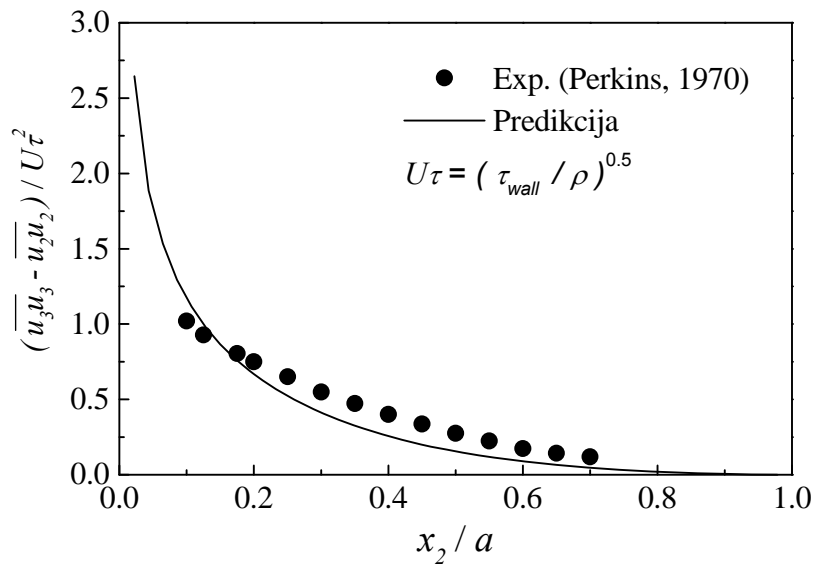
Na slikama 6.1 i 6.2 date su promene kinetičke energije turbulencije i korelacije  $\overline{u_1 u_2}$ , respektivno, normalizovane sa prosečnom brzinom osnovnog toka u kanalu  $U_b$ . Za razmatrani slučaj, odnos prosečne brzine i brzine u osi simetrije je  $U_{CL}/U_b = 1,21$ . Na slici 6.3 data je promena razlike komponenti smičućih napona u ravni poprečnog preseka  $\overline{u_3 u_3} - \overline{u_2 u_2}$ , normalizovana sa frikcionom brzinom  $U_\tau$ .



**Slika 6.1.** Promena kinetičke energije turbulencije duž koordinate  $x_2$  ( $a = b/2$  - polovina širina kanala)



**Slika 6.2.** Promena  $\overline{u_1 u_2}$  komponente Reynolds-ovog napona duž koordinate  $x_2$  ( $a = b/2$  - polovina širina kanala)



**Slika 6.3.** Promena razlike sekundarnih komponenti normalnih Reynolds-ovih napona duž koordinate  $x_2$  ( $a = b/2$  - polovina širina kanala)

Na osnovu ovih dijagrama može se videti da je u velikoj meri ostvareno poklapanje eksperimentalnih i proračunskih rezultata, te se može zaključiti da usvojeni modeli turbulencije daju dobre rezultate, te će se primeniti u daljoj analizi realnog problema dvofaznog strujanja tipa gas-čvrste čestice.

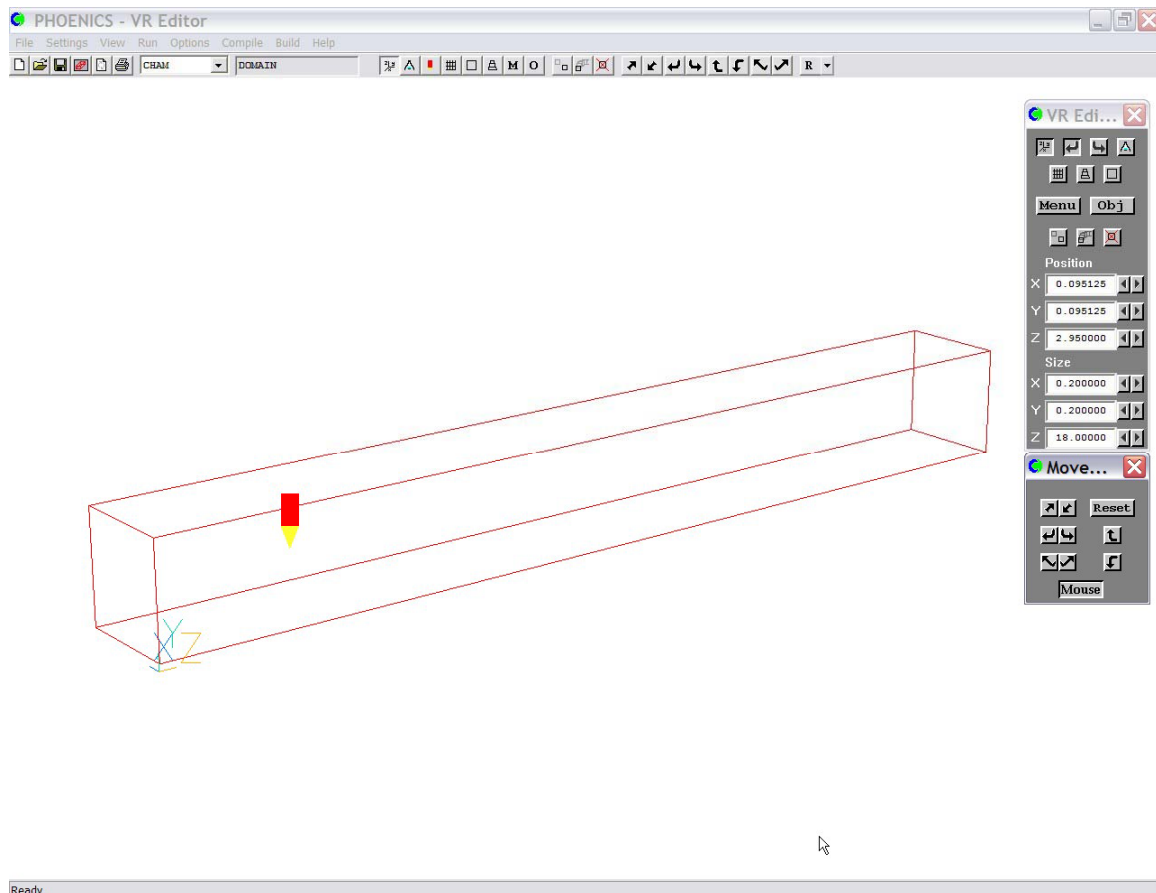
## 7. REALAN PROBLEM

### 7.1. Postavka problema

Za rešavanje postavljenog zadatka, posmatrano je dvofazno razvijeno turbulentno strujanje tipa gas (vazduh) - čvrste čestice, u pravom kanalu kvadratnog poprečnog preseka, dimenzije stranica 200 [mm]. Da bi se formirao režim potpuno razvijenog turbulentnog strujanja sa ustaljenim brzinama, kako bi se indukovalo i došlo do izražaja sekundarno strujanje, koje je u literaturi poznato kao Prandtl-ovo sekundarno strujanje druge vrste, uzima se kanal dužine  $80D_h$ , što iznosi 18 [m], prikazan na slici 7.1. Kanal je prikazan u razmeri po x-osi i y-osi 10:1 dok je po z-osi 1:1.

Mehanizmi koji dovode do pojave sekundarnih tokova kod turbulentnih strujanja su različiti. Poznata je činjenica da se u kanalima proizvoljnog poprečnog preseka i oblika: kružni, kvadratni ili pravougaoni, bez obzira na režim strujanja: laminarno ili turbulentno, javlja sekundarno strujanje u ravni poprečnog preseka kanala. U krivinama kanala i zakrivljenim kanalima dejstvo centrifugalne sile, koja deluje upravno na pravac osnovnog toka, izaziva različite pritiske u ravni

poprečnog preseka kanala proizvodeći sekundarno strujanje. Nejednake temperature zidova kanala, dovode do različitih temperaturnih gradijenata u struji fluida, što takođe izaziva sekundarno strujanje u poprečnom preseku kanala. Ovaj tip sekundarnog strujanja poznat je kao Prandtl-ovo sekundarno strujanje prve vrste.

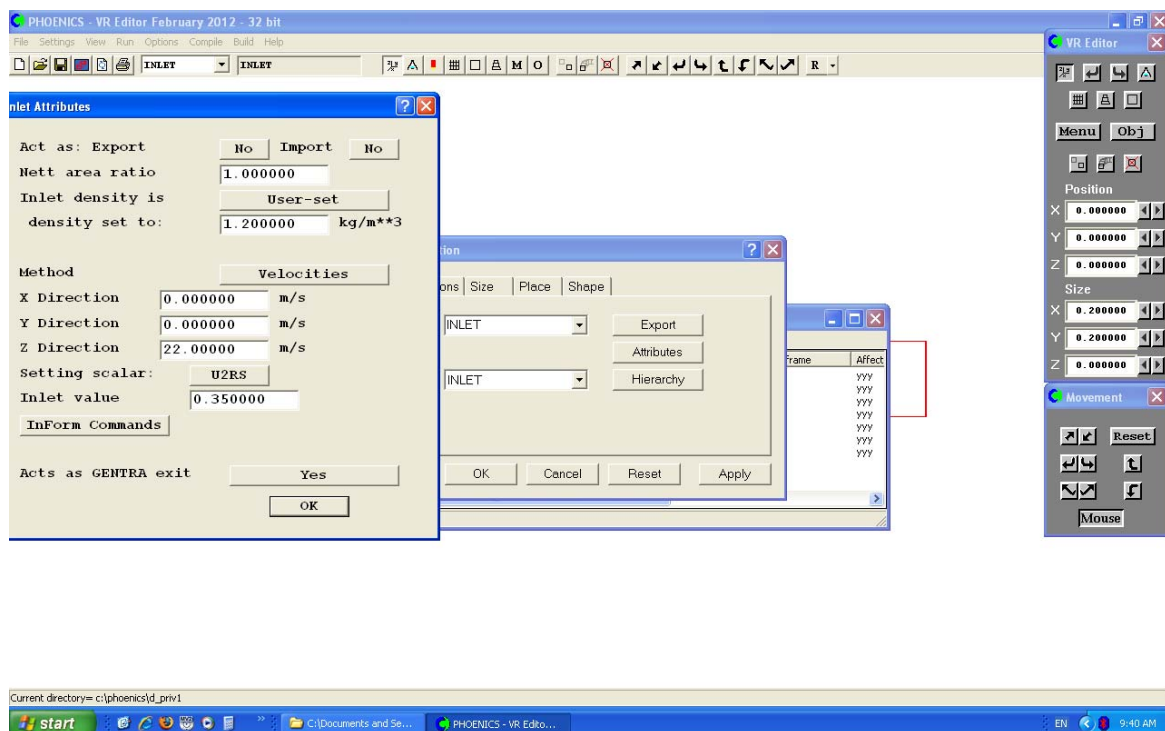


**Slika 7.1.** Oblik kanala

Efekte Prandtl-ovog sekundarnog strujanja druge vrste, koje se javlja u pravim kanalima ne-kružnog poprečnog preseka u režimu samo razvijenog turbulentnog strujanja, kakvo je i ovo, su svakako manji u odnosu na efekte Prandtl-ovog sekundarnog strujanja prve vrste koje se javlja kako kod laminarnog tako i kod turbulentnog strujanja. Uticaj Prandtl-ovog sekundarnog strujanja druge vrste, bez obzira na veličinu, ne može se zanemariti, posebno u slučaju dvofaznog strujnog toka tipa vazduh-čvrste čestice, kod koga su čvrste čestice transportovanog materijala relativno malog prečnika, odnosno imamo dvofazni strujni tok sa visokim Stokes-ovim brojem.

Kako bi se uočili efekti sekundarnog strujanja druge vrste u poprečnom preseku posmatranog kanala, razmatrana su tri slučaja simulacije turbulentnog dvofaznog strujanja tipa gas-čvrste čestice, gde je transportni fluid uvek bio vazduh dok su kao transportovani materijal korišćene čestice: kvarca, pepela i brašna. Karakteristike transportovanih materijala prikazane su u tabelama 7.1, 7.2 i 7.3.

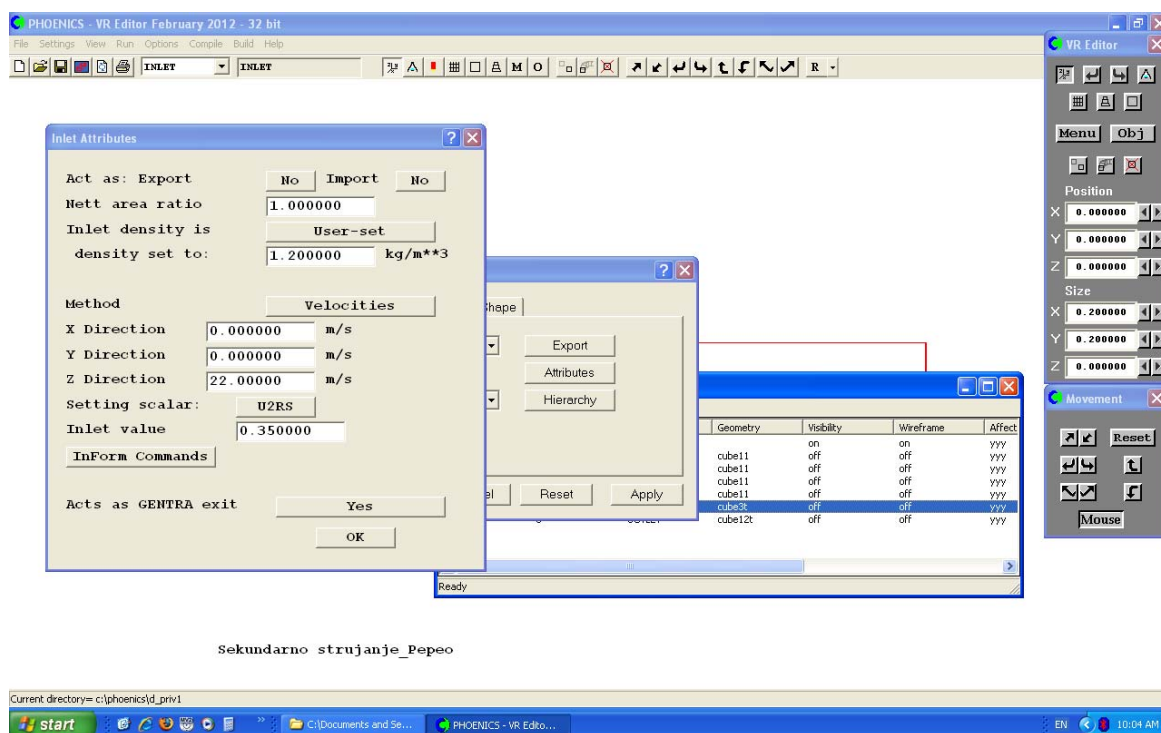
Najpre je kao transportovani materijal razmatran transport čvrstih čestica kvarca prečnika 0,5 mm i gustine 2500 kg/m<sup>3</sup>, [6]. Pri formiranju matematičkog modela, transportovane čestice su na ulazu u kanal ravnomerno raspoređene po čitavom poprečnom preseku kanala. Kako bi se posmatralo i uočilo ponašanje transportovanog materijala, izabrano je šest grupa čestica koje su raspoređene duž x i y ose, tabela 7.1 u kojoj su prikazani njihovi položaji.



**Slika 7.2.** Karakteristike transportnog vazduha na ulazu u kanal pri transportovanju čestica kvarca

Transportovanim česticama je na ulazu u kanal zadata početna brzina, kako bi se iniciralo njihovo kretanje, koja je u ovom slučaju izabrana tako, da je početna brzina čestica na ulazu u kanal jednaka brzini lebdenja čestica i iznosi 2,8 m/s. Pored definisanja početne inicijalne brzine transportovanih čestica kvarca, potrebno je definisati i brzinu strujanja transportnog vazduha na ulazu, koja se kreće od 12÷22 m/s [6], pri čemu je usvojena vrednost od 22 m/s, što se može videti na slici 7.2, dok je pritisak vazduha usvojen 1 bar a gustina 1,2 kg/m<sup>3</sup>. Karakteristične veličine transportovanog materijala – kvarca, kao i raspored grupa posmatranih čestica kvarca u poprečnom preseku kanala na ulazu, prikazane su u tabeli 7.1.

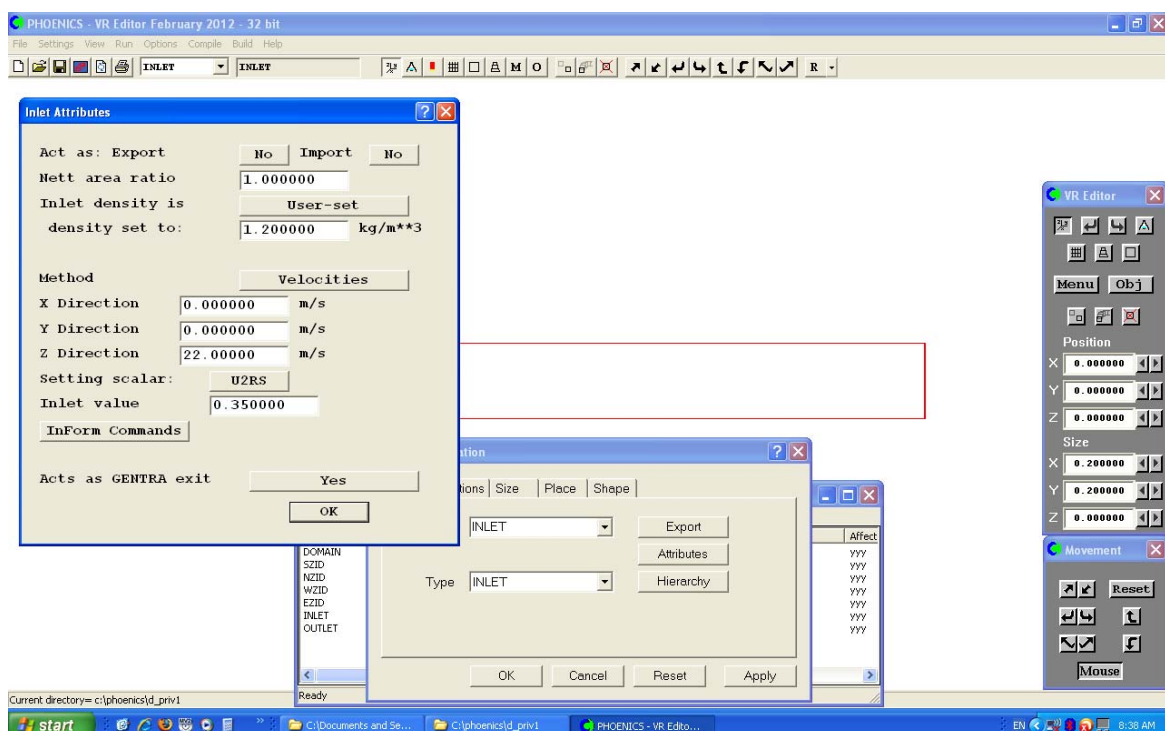
Kao sledeći transportovani materijali korišćeni su: pepeo (prečnika čestica 0,14 mm i gustine 1800 kg/m<sup>3</sup>) i brašno (prečnika čestica 0,20 mm i gustine 1410 kg/m<sup>3</sup>), [6]. Za formiranje matematičkog modela transportovanja čestica pepela i brašna usvojene su kao i u slučaju transportovanja čestica kvarca, isti uslovi: brzina čvrstih čestica na ulazu 2,8 m/s, brzina transportnog vazduha na ulazu 22 m/s, pritisak vazduha 1 bar i gustina vazduha 1,2 kg/m<sup>3</sup>, što je prikazano na slikama 7.3 i 7.4, kako bi se dobijeni rezultati mogli uporediti.



**Slika 7.3.** Karakteristike transportnog vazduha na ulazu u kanal pri transportovanju čestica pepela



Međutim, poznato je da su preporučene vrednosti brzine lebdenja i brzine transportnog vazduha pri transportovanju čestica pepela 0,36 m/s i 12÷20 m/s, dok pri transportovanju čestica brašna su 1,2÷1,5 m/s i približno 20 m/s, [6]. Čestice pepela i brašna su prilikom simulacija kao i čestice kvarca, ravnomerno raspoređene u poprečnom preseku kanala na ulazu po uočenim grupama, duž x i y ose. Karakteristike transportovanih materijala – čestica pepela i brašna kao i raspored grupa u ravni poprečnog preseka kanala na ulazu, prikazane su u tabelama 7.2 i 7.3.



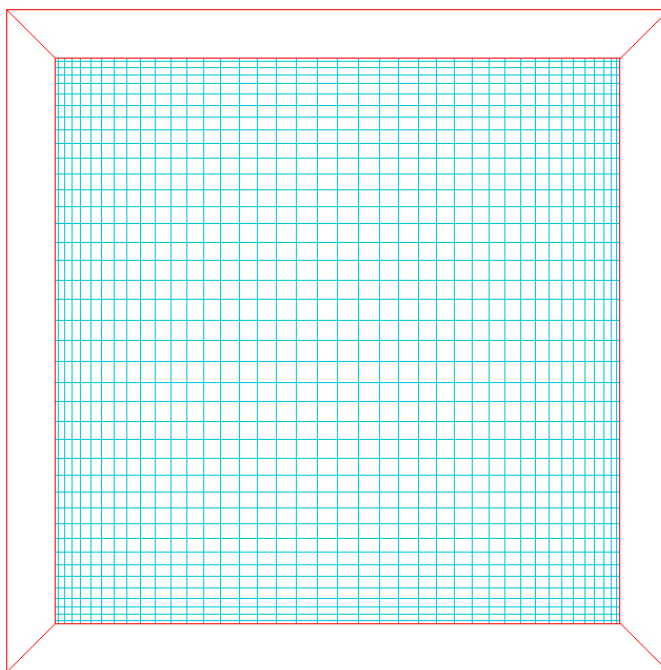
**Slika 7.4.** Karakteristike transportnog vazduha na ulazu u kanal pri transportovanju čestica brašna

Pri simuliranju turbulentnog dvofaznog strujanja, posmatrano je izotermno, stacionarno i trodimenzijsko strujanje transportnog gasa - vazduha, pri čemu je pretpostavljeno da se masa i temperatura čvrstih čestica koje se stohastički kreću duž kanala, ne menja tokom transportnog procesa, tj. zanemaren je uticaj međusobnog sudaranja čestica kao i udaranja čestica o zidove kanala. Pri rešavanju matematičkog modela pretpostavljeno je da se temperatura zidova kanala ne menja duž kanala i da je različita od temperature okoline.

Rešavanje matematičkog modela sprovodi se iterativnim putem do postizanja konvergentnosti rešenja od 0,1%. Iterativni postupak sastoji se od četiri koraka koji se sukcesivno ponavljaju. Prisustvo čestica u turbulentnom toku usložnjava problem, kako zbog potrebe modeliranja toka diskretne faze, tako i zbog međusobnog dejstva faza. Kako se radi o turbulentnom strujanju na čestice transportovanog materijala deluju pored usrednjenih i fluktuacione komponente sila. Čvrste čestice migriraju iz jednog vrtloga u drugi pri čemu aerodinamički otpori uslovljavaju promenu količine kretanja obeju faza. Pri modeliranju dvofaznih turbulentnih tokova koristi se uglavnom kombinovani pristup rešavanja zadatka. Kontinualna faza – vazдушna struja tretira se kao kontinuum i rešava primenom Euler-ovog pristupa, koji je pogodniji sa stanovišta korišćenja numeričkog algoritma. Disperzna faza tj. čvrste čestice se rešavaju primenom Lagrange-ovog pristupa vezanog za dinamiku čestica što se svodi na određivanje njihovih trajektorija i promena brzine, temperature i mase čestica duž tih trajektorija a prisustvo čvrste faze se uzima u obzir kao izvor ili ponor količine kretanja u jednačinama za gasnu fazu.

Osnovni problem pri razmatranju dvofaznog strujanja tipa gas – čvrste čestice se zasniva na promeni količine kretanja, energije i mase transportovanog materijala pri prolazu kroz određeni segment strujnog polja i logičkim zaključkom da te promene moraju ostati u gasnoj fazi. Promena količine kretanja čestica za vreme prolaska kroz posmatranu numeričku kontrolnu zapreminu se uzima kao izvor ili ponor količine kretanja kontinualne – gasne faze. Tako da se matematički model gasne faze postavlja za monofazni tok uz korekciju zbog prisustva čvrstih čestica. U prvom iterativnom koraku posmatra se samo vazдушna struja i za nju se rešavaju jednačine konzervacije kao da nema disperzne faze. Vršiti se integraljenje jednačina konzervacije kao da prisustvo čvrstih čestica nema nikakvog uticaja na gasnu fazu. Prisustvo disperzne faze izaziva pojavu dodatnih izvora količine kretanja u jednačinama gasne struje preko dodatnih članova koji opisuju promenu količine kretanja čvrstih čestica odnosno promenu količine kretanja gasne faze zbog prisustva čestica. Zbog toga se u drugom iterativnom koraku dobijeno strujno polje gasne faze u vremenu ukoči odnosno "zamrzne", i u njemu posmatra kretanje čvrstih čestica. U tako ukočenom strujnom polju gasne

faze, određuju se trajektorije čvrstih čestica. Na osnovu tako dobijenih trajektorija čvrstih čestica, određuju se interfazni članovi interakcije međusobnog dejstva transportnog vazduha i transportovanog materijala – čestica. Kako bi se uzeli u obzir interfazni članovi interakcije, odnosno uticaj jedne faze na drugu, u trećem iterativnom koraku se dobijene trajektorije transportovanih čestica iz prethodnog koraka "zamrznu" i ponovo se rešava strujno polje gasne faze. Rešavanje strujnog polja gasne faze se sada vrši tako što se uzima u obzir uticaj transportovanih čestica preko prethodno dobijenih interfaznih članova interakcije. Ako je postignuta konvergencija rešenja od 0,1% zadatak je završen, a ukoliko nije dostignut kriterijum konvergencije rešenja nastavlja se rešavanje zadatka, ponavljanjem drugog i trećeg iterativnog koraka do postizanja zadatog kriterijuma konvergencije rešenja.



**Slika 7.5.** Numerička mreža za poprečni presek kanala

Tokom simulacija, ispitivan je uticaj finoće numeričke mreže, a u radu su prikazani rezultati numeričke mreže najviše rezolucije iznad koje finoća mreže ne utiče na dobijene rezultate:  $NX=40$ ,  $NY=40$ ,  $NZ=180$ , slika 7.5.

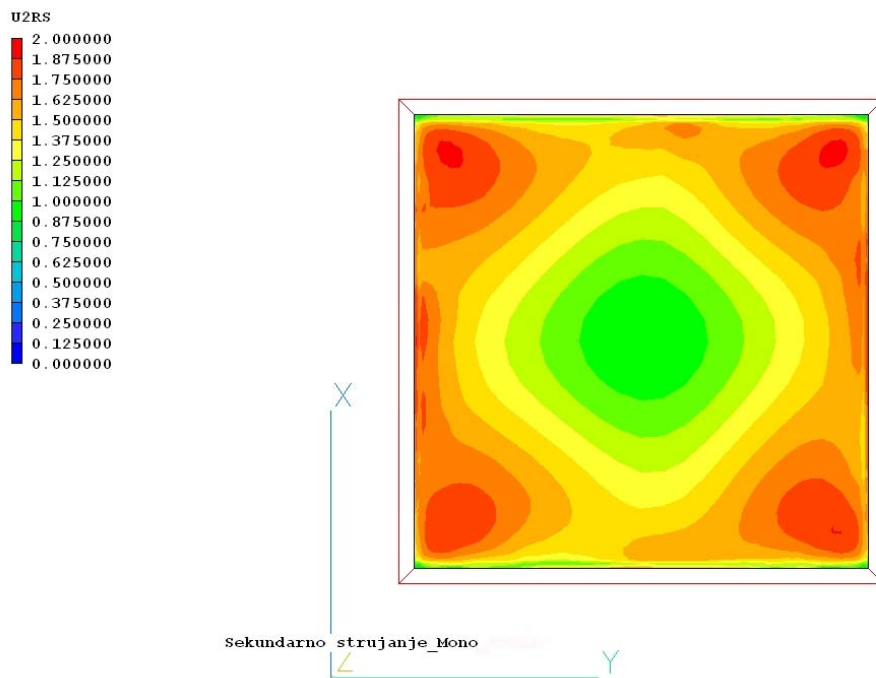
Numerička mreža po poprečnom preseku kanala je ne uniformna, zbog čega su numeričke ćelije različitih veličina. Numeričke ćelije u sredini kanala su ređe, tj. imaju veću površinu, dok su one koje se nalaze bliže zidovima i rogljevima kanala gušće, odnosno njihova površina je manja. Ukupni maseni protok koji se zadaje kroz poprečni presek kanala, kao uslov na ulazu u kanal, je zadavan kao parcijalni protok u numeričkim ćelijama proporcionalno površinama ćelija. Kako su numeričke ćelije različitih površina, tj. ćelije u blizini zidova i rogljeva kanala su manje površine, to su i maseni protoci transportovanog materijala (čestica) u njima manji, za razliku od numeričkih ćelija smeštenih u središnjem delu kanala koje su veće i u njima su maseni protoci veći. Tako kada se pogleda čitav poprečni presek kanala, dobija se ravnomerna raspodela transportovanih čvrstih čestica po čitavom poprečnom preseku. Takva mreža je prikazana na slici 7.5 za poprečni presek izabranog kanala.

## 7.2. Prikaz rezultata monofaznog strujanja

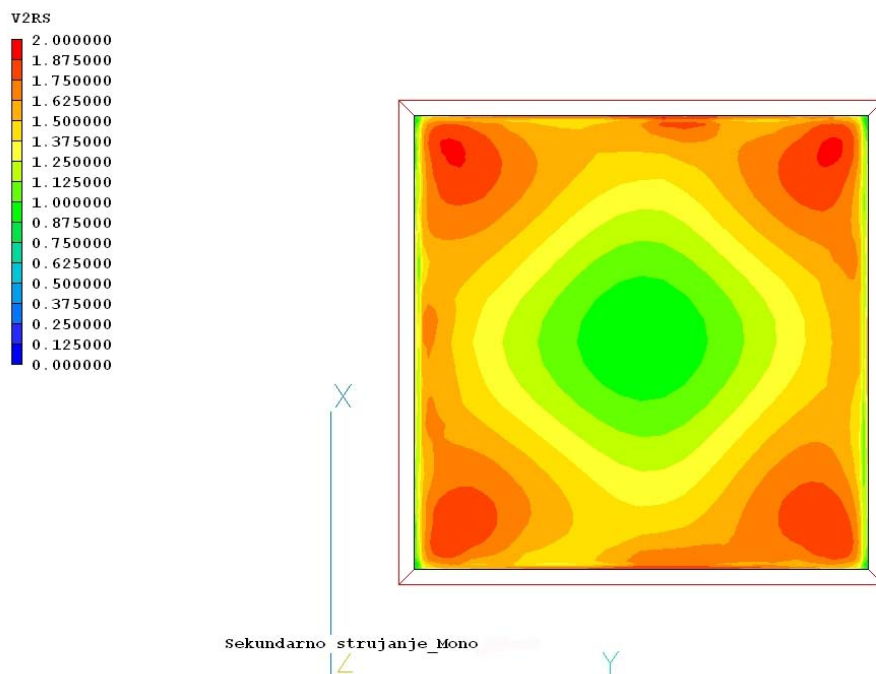
Za razliku od validacionog postupka, prikazanog u poglavlju 6, za potrebe komparativne analize monofaznog i dvofaznog strujanja u definisanom realnom problemu, izvršena je simulacija monofaznog strujanja sa istim graničnim uslovima za gasnu fazu kao i u simulacijama dvofaznog strujanja za različite tipove transportovanja čvrstih čestica. Takođe, zadržana je ista finoća numeričke mreže kanala.

Dominantan parametar koji utiče na sekundarni tok druge vrste su turbulentni tangencijalni naponi u poprečnoj ravni kanala, pa je on izabran kao parametar za poređenje uticaja dvofaznog toka na razmatrani fenomen.

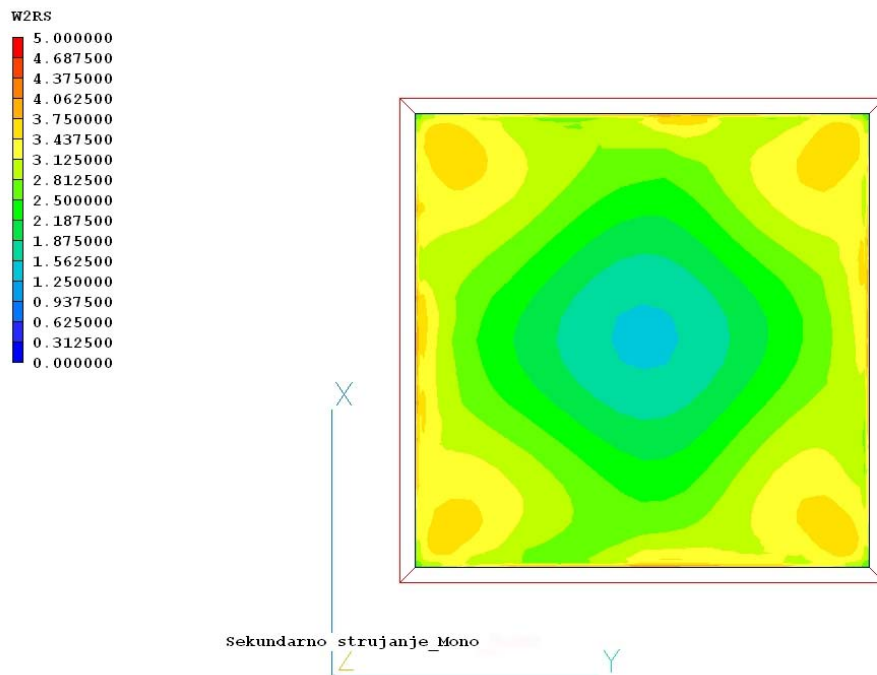
Referentne slike za poređenje i kvantifikaciju uticaja čestica na modifikaciju polja turbulentnih napona u poprečnim presecima kanala, su prikazane na sledećim slikama:



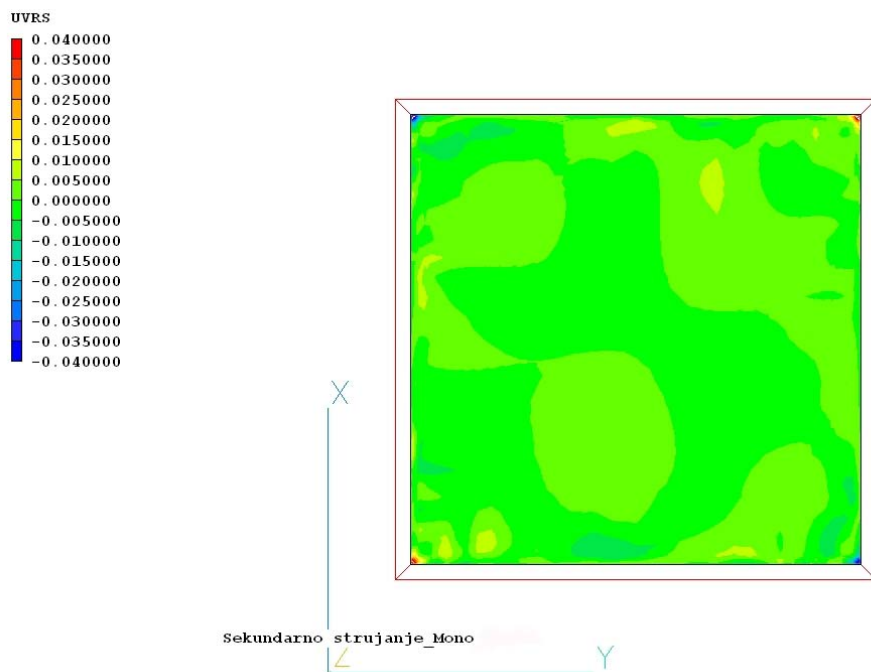
**Slika 7.6.** Referentna raspodela turbulentnog napona  $\overline{u_1 u_1}$  u poprečnom preseku kanala, na sredini, za monofazno strujanje



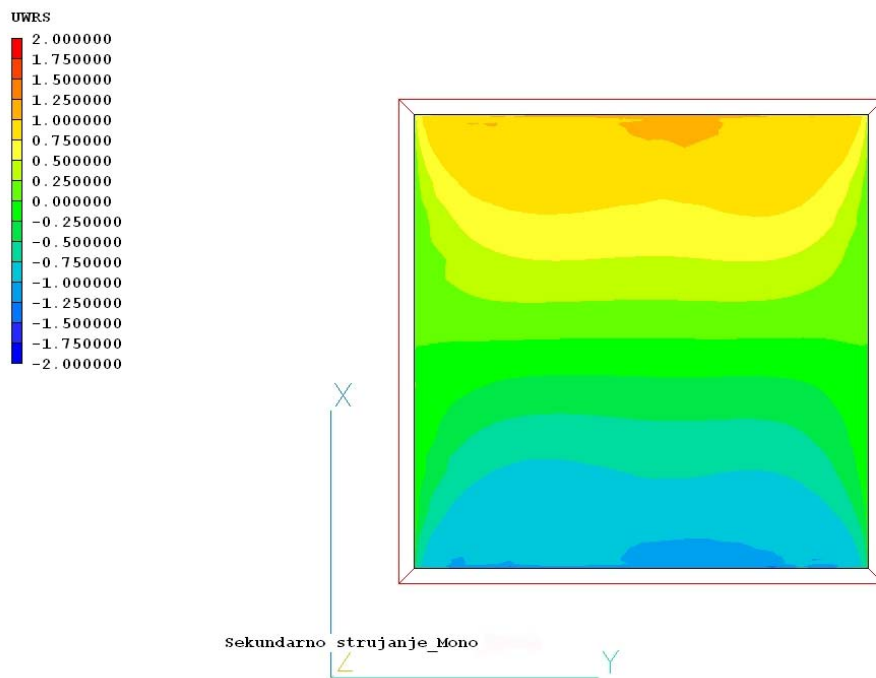
**Slika 7.7.** Referentna raspodela turbulentnog napona  $\overline{u_2 u_2}$  u poprečnom preseku kanala, na sredini, za monofazno strujanje



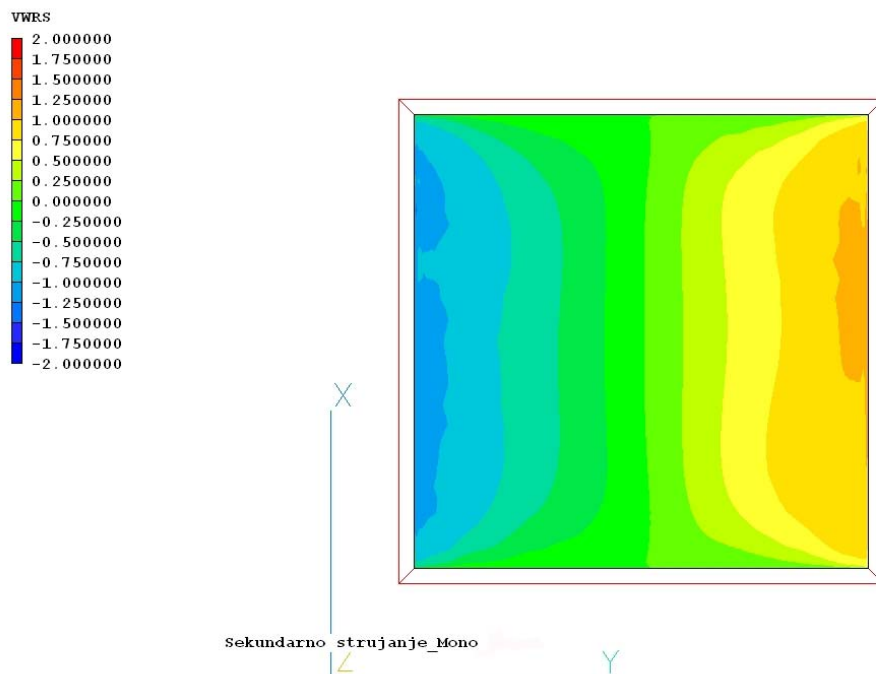
*Slika 7.8. Referentna raspodela turbulentnog napona  $\overline{u_3u_3}$  u poprečnom preseku kanala, na sredini, za monofazno strujanje*



*Slika 7.9. Referentna raspodela turbulentnog napona  $\overline{u_1u_2}$  u poprečnom preseku kanala, na sredini, za monofazno strujanje*



**Slika 7.10.** Referentna raspodela turbulentnog napona  $\overline{u_1 u_3}$  u poprečnom preseku kanala, na sredini, za monofazno strujanje



**Slika 7.11.** Referentna raspodela turbulentnog napona  $\overline{u_2 u_3}$  u poprečnom preseku kanala, na sredini, za monofazno strujanje

### 7.3. Granični uslovi čvrste faze

Granični uslovi za kvarc

Tabela 7.1.

**Kvarc**

$X_P$ (m)	$Y_P$ (m)	$Z_P$ (m)	$U_P$ (m/s)	$V_P$ (m/s)	$W_P$ (m/s)	$D$ (m)	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\dot{m}$ (kg/s)
Grupa 1								
0,01412	0,01412	0	0	0	2,8	5,00E-04	2500	6,85E-02
0,01412	0,03913	0	0	0	2,8	5,00E-04	2500	8,84E-02
0,01412	0,07663	0	0	0	2,8	5,00E-04	2500	1,05E-01
0,01412	0,1234	0	0	0	2,8	5,00E-04	2500	1,05E-01
0,01412	0,1609	0	0	0	2,8	5,00E-04	2500	8,84E-02
0,01412	0,1859	0	0	0	2,8	5,00E-04	2500	6,85E-02
Grupa 2								
0,03913	0,01412	0	0	0	2,8	5,00E-04	2500	8,86E-02
0,03913	0,03913	0	0	0	2,8	5,00E-04	2500	1,15E-01
0,03913	0,07663	0	0	0	2,8	5,00E-04	2500	1,36E-01
0,03913	0,1234	0	0	0	2,8	5,00E-04	2500	1,36E-01
0,03913	0,1609	0	0	0	2,8	5,00E-04	2500	1,15E-01
0,03913	0,1859	0	0	0	2,8	5,00E-04	2500	8,86E-02
Grupa 3								
0,07663	0,01412	0	0	0	2,8	5,00E-04	2500	1,05E-01
0,07663	0,03913	0	0	0	2,8	5,00E-04	2500	1,35E-01
0,07663	0,07663	0	0	0	2,8	5,00E-04	2500	1,61E-01
0,07663	0,1234	0	0	0	2,8	5,00E-04	2500	1,61E-01
0,07663	0,1609	0	0	0	2,8	5,00E-04	2500	1,35E-01
0,07663	0,1859	0	0	0	2,8	5,00E-04	2500	1,05E-01
Grupa 4								
0,1234	0,01412	0	0	0	2,8	5,00E-04	2500	1,05E-01
0,1234	0,03913	0	0	0	2,8	5,00E-04	2500	1,35E-01
0,1234	0,07663	0	0	0	2,8	5,00E-04	2500	1,61E-01
0,1234	0,1234	0	0	0	2,8	5,00E-04	2500	1,61E-01
0,1234	0,1609	0	0	0	2,8	5,00E-04	2500	1,35E-01
0,1234	0,1859	0	0	0	2,8	5,00E-04	2500	1,05E-01
Grupa 5								
0,1609	0,01412	0	0	0	2,8	5,00E-04	2500	8,86E-02
0,1609	0,03913	0	0	0	2,8	5,00E-04	2500	1,15E-01
0,1609	0,07663	0	0	0	2,8	5,00E-04	2500	1,36E-01
0,1609	0,1234	0	0	0	2,8	5,00E-04	2500	1,36E-01
0,1609	0,1609	0	0	0	2,8	5,00E-04	2500	1,15E-01
0,1609	0,1859	0	0	0	2,8	5,00E-04	2500	8,86E-02
Grupa 6								
0,1859	0,01412	0	0	0	2,8	5,00E-04	2500	6,85E-02
0,1859	0,03913	0	0	0	2,8	5,00E-04	2500	8,84E-02
0,1859	0,07663	0	0	0	2,8	5,00E-04	2500	1,05E-01
0,1859	0,1234	0	0	0	2,8	5,00E-04	2500	1,05E-01
0,1859	0,1609	0	0	0	2,8	5,00E-04	2500	8,84E-02
0,1859	0,1859	0	0	0	2,8	5,00E-04	2500	6,85E-02



## Granični uslovi za pepeo

Tabela 7.2.

## Pepeo

$X_P$ (m)	$Y_P$ (m)	$Z_P$ (m)	$U_P$ (m/s)	$V_P$ (m/s)	$W_P$ (m/s)	$D$ (m)	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\dot{m}$ (kg/s)
Grupa 1								
0,01412	0,01412	0	0	0	2,8	1,40E-04	1800	6,85E-02
0,01412	0,03913	0	0	0	2,8	1,40E-04	1800	8,84E-02
0,01412	0,07663	0	0	0	2,8	1,40E-04	1800	1,05E-01
0,01412	0,1234	0	0	0	2,8	1,40E-04	1800	1,05E-01
0,01412	0,1609	0	0	0	2,8	1,40E-04	1800	8,84E-02
0,01412	0,1859	0	0	0	2,8	1,40E-04	1800	6,85E-02
Grupa 2								
0,03913	0,01412	0	0	0	2,8	1,40E-04	1800	8,86E-02
0,03913	0,03913	0	0	0	2,8	1,40E-04	1800	1,15E-01
0,03913	0,07663	0	0	0	2,8	1,40E-04	1800	1,36E-01
0,03913	0,1234	0	0	0	2,8	1,40E-04	1800	1,36E-01
0,03913	0,1609	0	0	0	2,8	1,40E-04	1800	1,15E-01
0,03913	0,1859	0	0	0	2,8	1,40E-04	1800	8,86E-02
Grupa 3								
0,07663	0,01412	0	0	0	2,8	1,40E-04	1800	1,05E-01
0,07663	0,03913	0	0	0	2,8	1,40E-04	1800	1,35E-01
0,07663	0,07663	0	0	0	2,8	1,40E-04	1800	1,61E-01
0,07663	0,1234	0	0	0	2,8	1,40E-04	1800	1,61E-01
0,07663	0,1609	0	0	0	2,8	1,40E-04	1800	1,35E-01
0,07663	0,1859	0	0	0	2,8	1,40E-04	1800	1,05E-01
Grupa 4								
0,1234	0,01412	0	0	0	2,8	1,40E-04	1800	1,05E-01
0,1234	0,03913	0	0	0	2,8	1,40E-04	1800	1,35E-01
0,1234	0,07663	0	0	0	2,8	1,40E-04	1800	1,61E-01
0,1234	0,1234	0	0	0	2,8	1,40E-04	1800	1,61E-01
0,1234	0,1609	0	0	0	2,8	1,40E-04	1800	1,35E-01
0,1234	0,1859	0	0	0	2,8	1,40E-04	1800	1,05E-01
Grupa 5								
0,1609	0,01412	0	0	0	2,8	1,40E-04	1800	8,86E-02
0,1609	0,03913	0	0	0	2,8	1,40E-04	1800	1,15E-01
0,1609	0,07663	0	0	0	2,8	1,40E-04	1800	1,36E-01
0,1609	0,1234	0	0	0	2,8	1,40E-04	1800	1,36E-01
0,1609	0,1609	0	0	0	2,8	1,40E-04	1800	1,15E-01
0,1609	0,1859	0	0	0	2,8	1,40E-04	1800	8,86E-02
Grupa 6								
0,1859	0,01412	0	0	0	2,8	1,40E-04	1800	6,85E-02
0,1859	0,03913	0	0	0	2,8	1,40E-04	1800	8,84E-02
0,1859	0,07663	0	0	0	2,8	1,40E-04	1800	1,05E-01
0,1859	0,1234	0	0	0	2,8	1,40E-04	1800	1,05E-01
0,1859	0,1609	0	0	0	2,8	1,40E-04	1800	8,84E-02
0,1859	0,1859	0	0	0	2,8	1,40E-04	1800	6,85E-02

## Granični uslovi za brašno

Tabela 7.3.

## Brašno

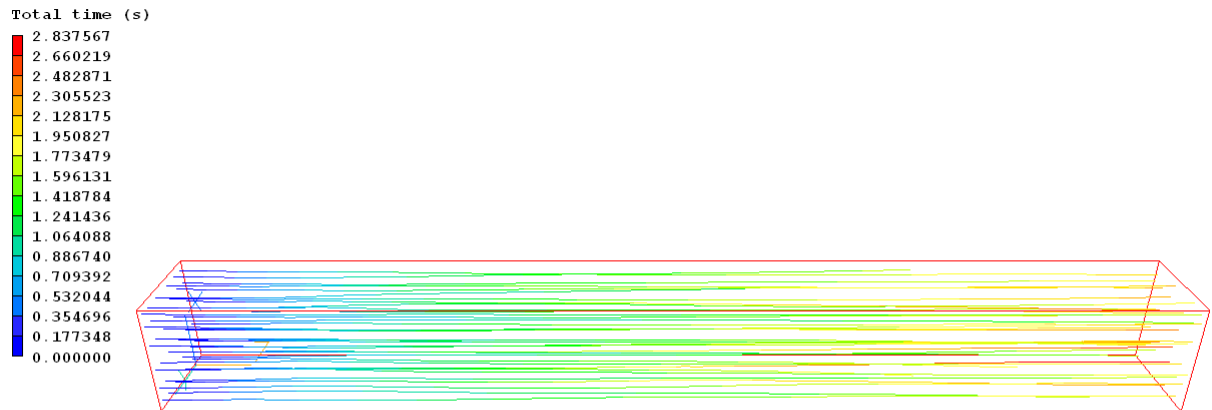
$X_P$ (m)	$Y_P$ (m)	$Z_P$ (m)	$U_P$ (m/s)	$V_P$ (m/s)	$W_P$ (m/s)	$D$ (m)	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\dot{m}$ (kg/s)
Grupa 1								
0,01412	0,01412	0	0	0	2,8	2,00E-04	1410	6,85E-02
0,01412	0,03913	0	0	0	2,8	2,00E-04	1410	8,84E-02
0,01412	0,07663	0	0	0	2,8	2,00E-04	1410	1,05E-01
0,01412	0,1234	0	0	0	2,8	2,00E-04	1410	1,05E-01
0,01412	0,1609	0	0	0	2,8	2,00E-04	1410	8,84E-02
0,01412	0,1859	0	0	0	2,8	2,00E-04	1410	6,85E-02
Grupa 2								
0,03913	0,01412	0	0	0	2,8	2,00E-04	1410	8,86E-02
0,03913	0,03913	0	0	0	2,8	2,00E-04	1410	1,15E-01
0,03913	0,07663	0	0	0	2,8	2,00E-04	1410	1,36E-01
0,03913	0,1234	0	0	0	2,8	2,00E-04	1410	1,36E-01
0,03913	0,1609	0	0	0	2,8	2,00E-04	1410	1,15E-01
0,03913	0,1859	0	0	0	2,8	2,00E-04	1410	8,86E-02
Grupa 3								
0,07663	0,01412	0	0	0	2,8	2,00E-04	1410	1,05E-01
0,07663	0,03913	0	0	0	2,8	2,00E-04	1410	1,35E-01
0,07663	0,07663	0	0	0	2,8	2,00E-04	1410	1,61E-01
0,07663	0,1234	0	0	0	2,8	2,00E-04	1410	1,61E-01
0,07663	0,1609	0	0	0	2,8	2,00E-04	1410	1,35E-01
0,07663	0,1859	0	0	0	2,8	2,00E-04	1410	1,05E-01
Grupa 4								
0,1234	0,01412	0	0	0	2,8	2,00E-04	1410	1,05E-01
0,1234	0,03913	0	0	0	2,8	2,00E-04	1410	1,35E-01
0,1234	0,07663	0	0	0	2,8	2,00E-04	1410	1,61E-01
0,1234	0,1234	0	0	0	2,8	2,00E-04	1410	1,61E-01
0,1234	0,1609	0	0	0	2,8	2,00E-04	1410	1,35E-01
0,1234	0,1859	0	0	0	2,8	2,00E-04	1410	1,05E-01
Grupa 5								
0,1609	0,01412	0	0	0	2,8	2,00E-04	1410	8,86E-02
0,1609	0,03913	0	0	0	2,8	2,00E-04	1410	1,15E-01
0,1609	0,07663	0	0	0	2,8	2,00E-04	1410	1,36E-01
0,1609	0,1234	0	0	0	2,8	2,00E-04	1410	1,36E-01
0,1609	0,1609	0	0	0	2,8	2,00E-04	1410	1,15E-01
0,1609	0,1859	0	0	0	2,8	2,00E-04	1410	8,86E-02
Grupa 6								
0,1859	0,01412	0	0	0	2,8	2,00E-04	1410	6,85E-02
0,1859	0,03913	0	0	0	2,8	2,00E-04	1410	8,84E-02
0,1859	0,07663	0	0	0	2,8	2,00E-04	1410	1,05E-01
0,1859	0,1234	0	0	0	2,8	2,00E-04	1410	1,05E-01
0,1859	0,1609	0	0	0	2,8	2,00E-04	1410	8,84E-02
0,1859	0,1859	0	0	0	2,8	2,00E-04	1410	6,85E-02

U prethodnim tabelama 7.1, 7.2 i 7.3 detaljno su definisani granični uslovi transportovanog materijala na ulazu u kanal za korišćeni tip čvrstih čestica: kvarca, pepela i brašna, respektivno.

Za rešavanje postavljenog zadatka posmatrano je šest grupa čvrstih čestica raspoređenih duž  $x$  i  $y$  ose. Kako bi rešavanje matematičkog modela dvofaznog strujanja započelo potrebno je zadati početnu brzinu čvrstih čestica na ulazu u kanal, kao i brzinu transportnog vazduha. Početna brzina čvrstih čestica je izabrana ista za sve materijale 2,8 m/s, i odgovara brzini lebdenja čestica kvarca u struji fluida (vazduha), kako bi se iterativni postupak ubrzao, i ako su brzine lebdenja brašna i pepela nešto manje, (brašno 1,2÷1,5 m/s i pepeo 0,36 m/s). Takođe za brzinu transportnog vazduha na ulazu u kanal usvojena je ista vrednost od 22 m/s. Matematički model je postavljen tako da se posmatra kretanje čvrstih čestica sferičnog oblika, preporučenih vrednosti ekvivalentnog prečnika i gustine [4], tabele 7.1, 7.2 i 7.3. Kako je izabrana numerička mreža koja nije uniformna tj. mreža sa različitim površinama numeričkih ćelija, ukupni maseni protok koji se zadaje kao uslov na ulazu, zadavani su parcijalni maseni protoci u ćelijama proporcionalno površinama ćelija. Za numeričke ćelije po sredini kanala čije su površine veće i protoci su veći, dok su površine ćelija bliže zidovima kanala manje te su u njima i protoci manji.

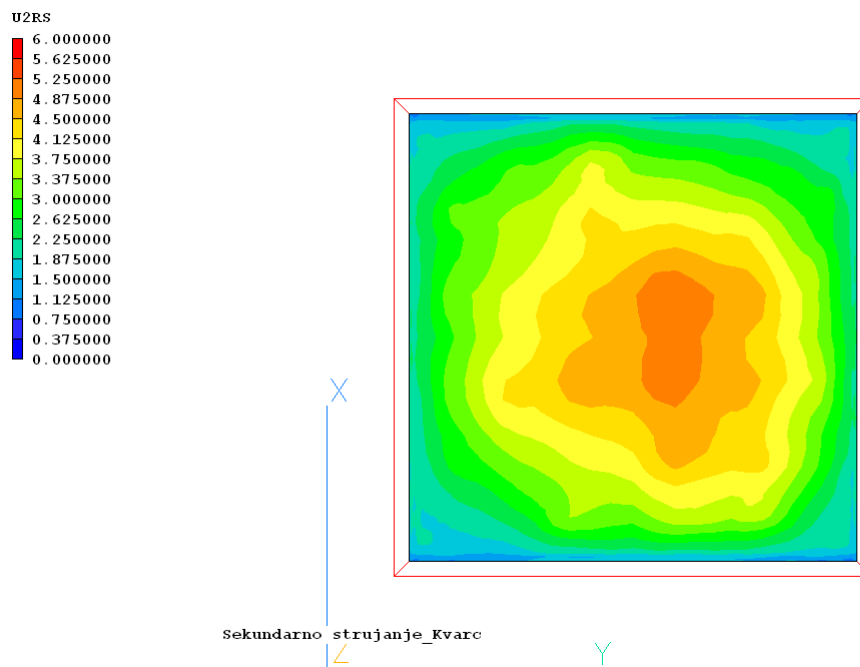
## 7.4. Prikaz rezultata dvofaznog strujanja

### 7.4.1. Kvarc

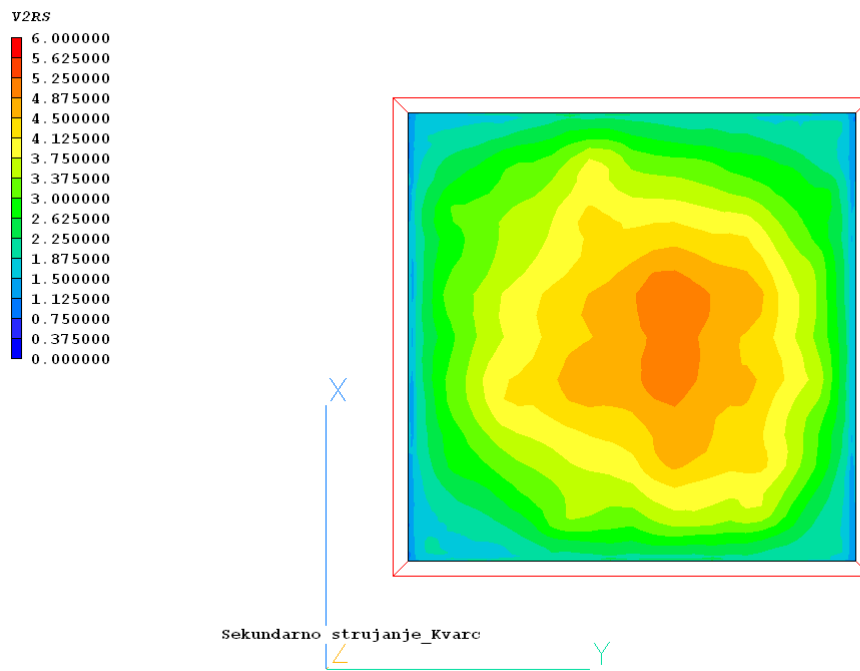


Sekundarno strujanje\_Kvarc

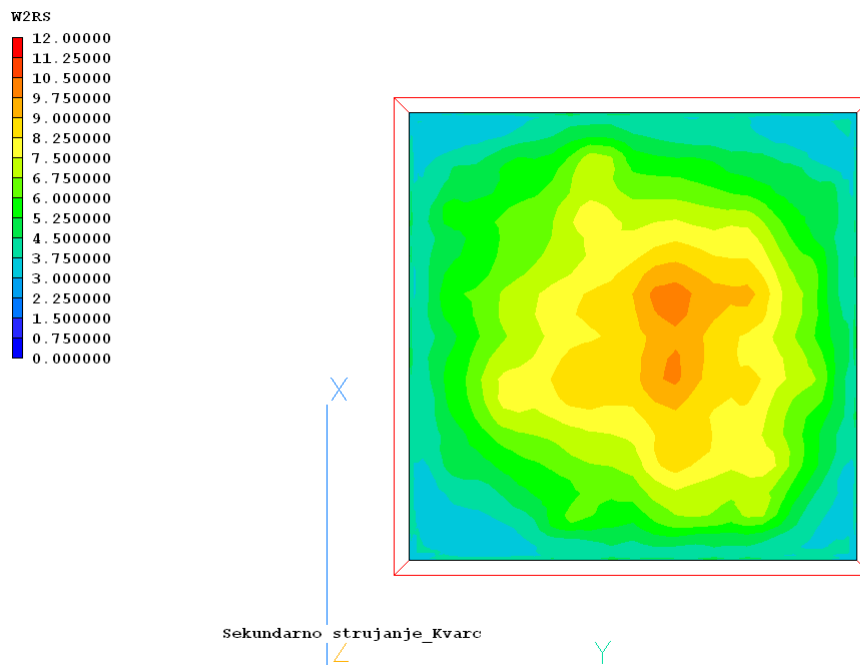
**Slika 7.12.** Putanje čestica kvarca duž kanala



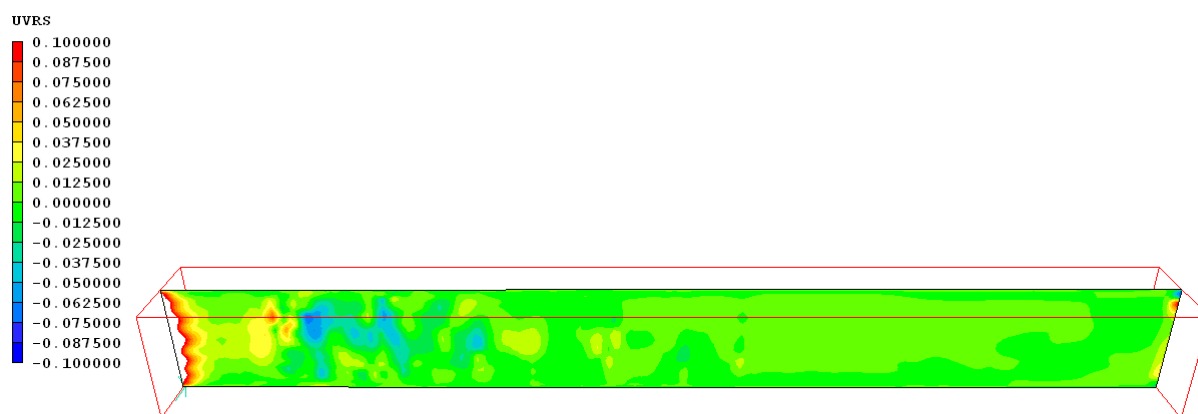
**Slika 7.13.** Raspodela turbulentnih napona  $\overline{u_1 u_1}$  u poprečnom preseku kanala, na sredini



**Slika 7.14.** Raspodela turbulentnih napona  $\overline{u_2 u_2}$  u poprečnom preseku kanala, na sredini

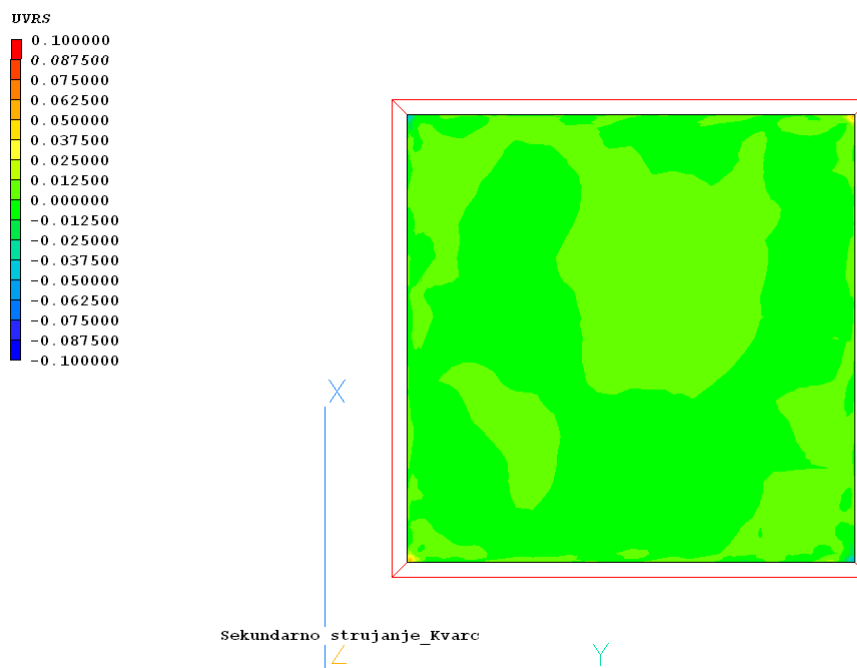


**Slika 7.15.** Raspodela turbulentnih napona  $\overline{u_3 u_3}$  u poprečnom preseku kanala, na sredini

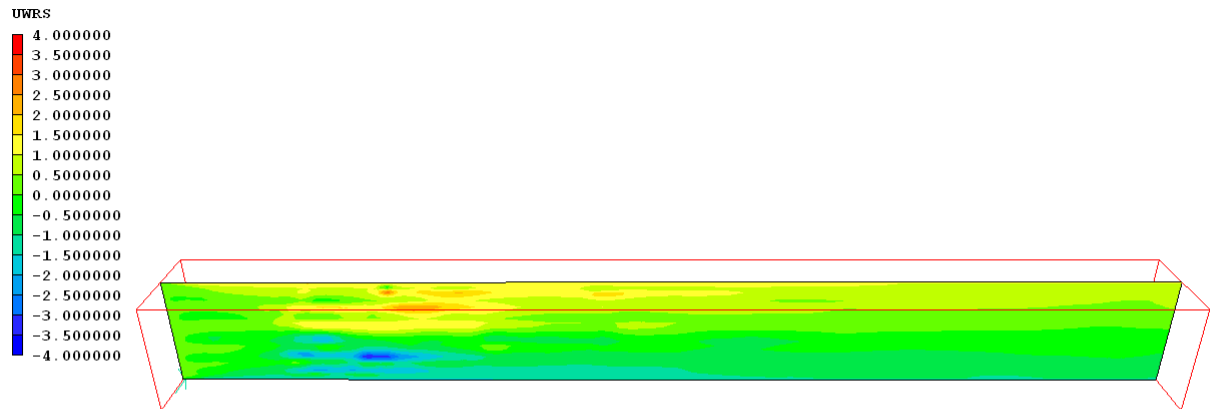


Sekundarno strujanje\_Kvarc

**Slika 7.16.** Raspodela turbulentnih napona  $\overline{u_1 u_2}$  duž kanala

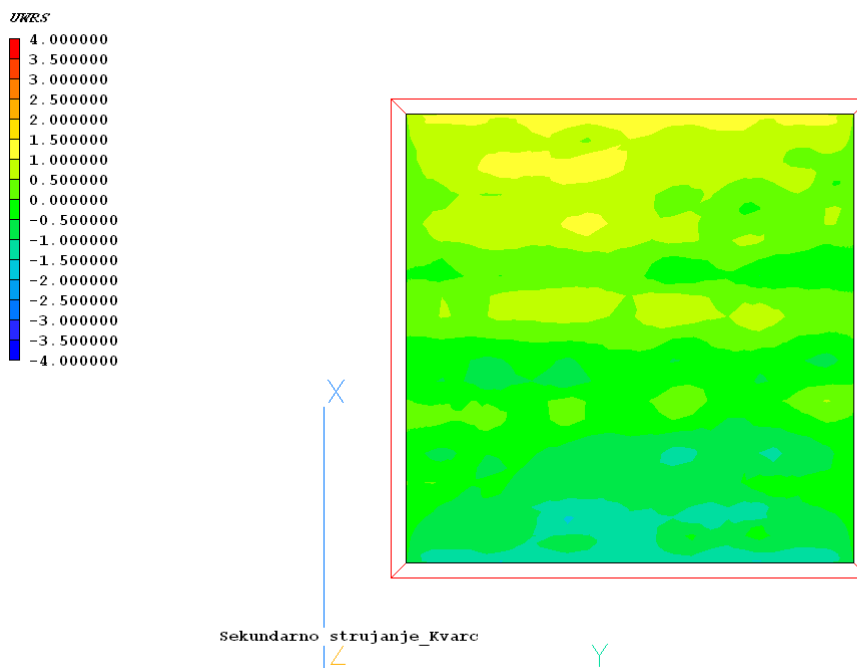


**Slika 7.17.** Raspodela turbulentnih napona  $\overline{u_1 u_2}$  u poprečnom preseku kanala, na sredini

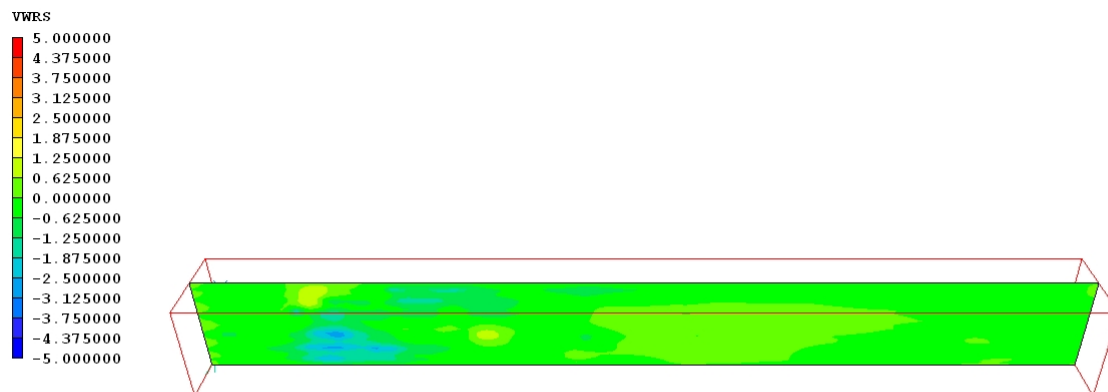


Sekundarno strujanje\_Kvarc

**Slika 7.18.** Raspodela turbulentnih napona  $\overline{u_1 u_3}$  duž kanala

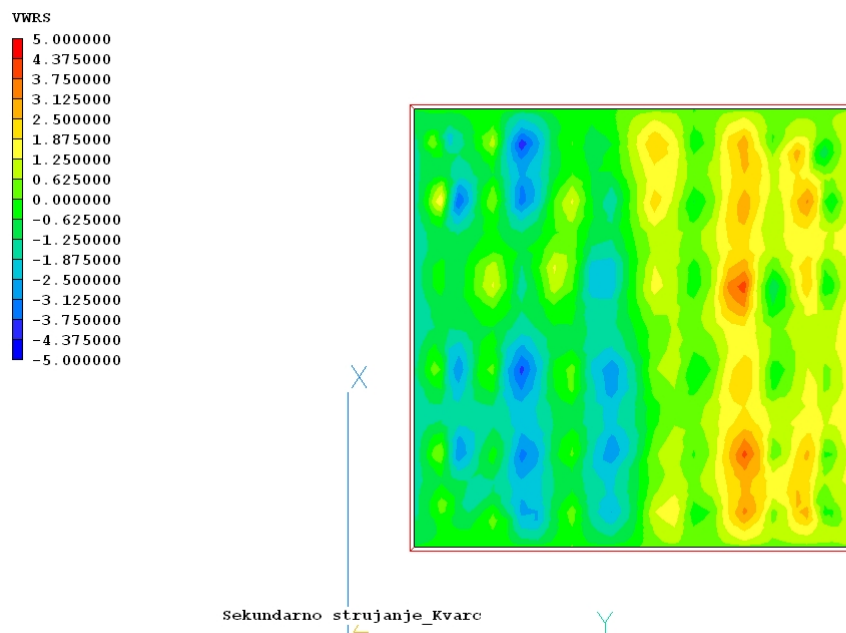


**Slika 7.19.** Raspodela turbulentnih napona  $\overline{u_1 u_3}$  u poprečnom preseku kanala, na sredini



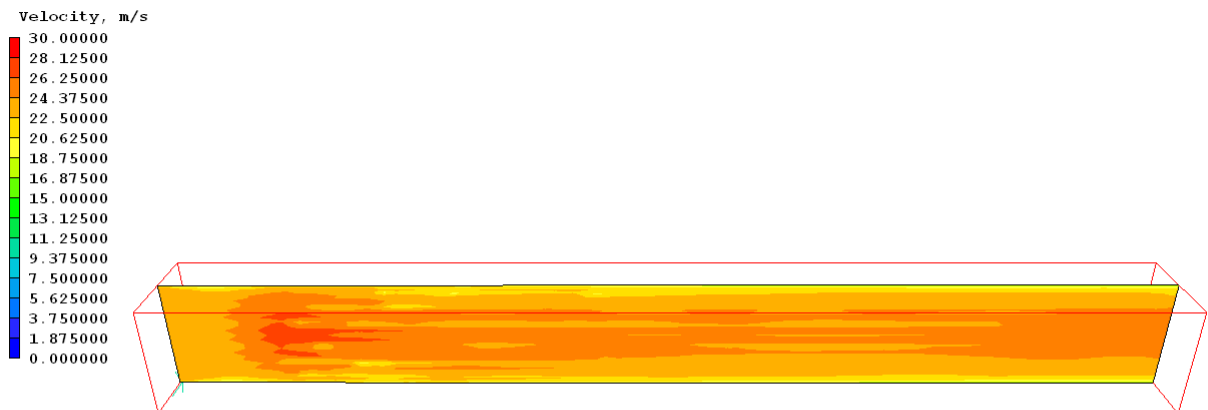
Sekundarno strujanje\_Kvarc

**Slika 7.20.** Raspodela turbulentnih napona  $\overline{u_2 u_3}$  duž kanala



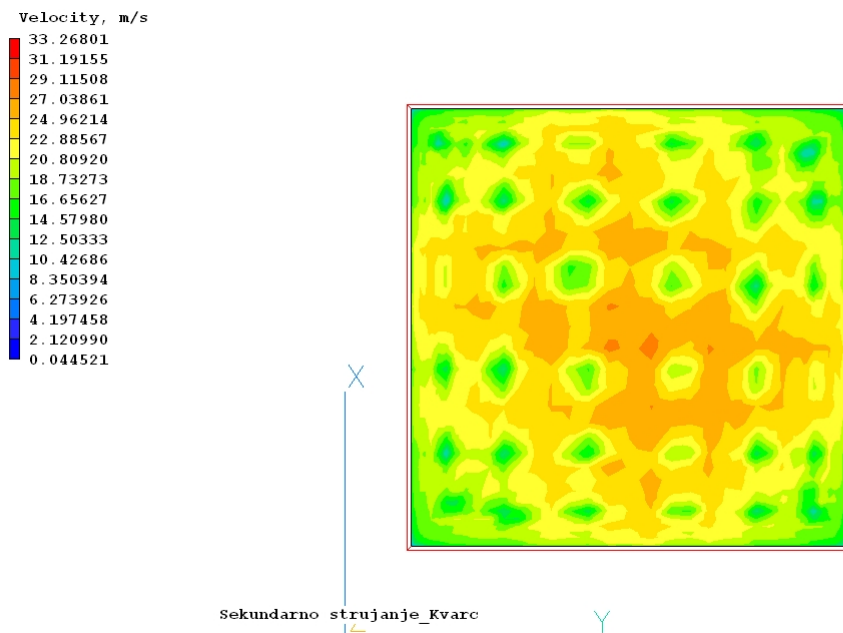
**Slika 7.21.** Raspodela turbulentnih napona  $\overline{u_2 u_3}$  u poprečnom preseku kanala, na sredini



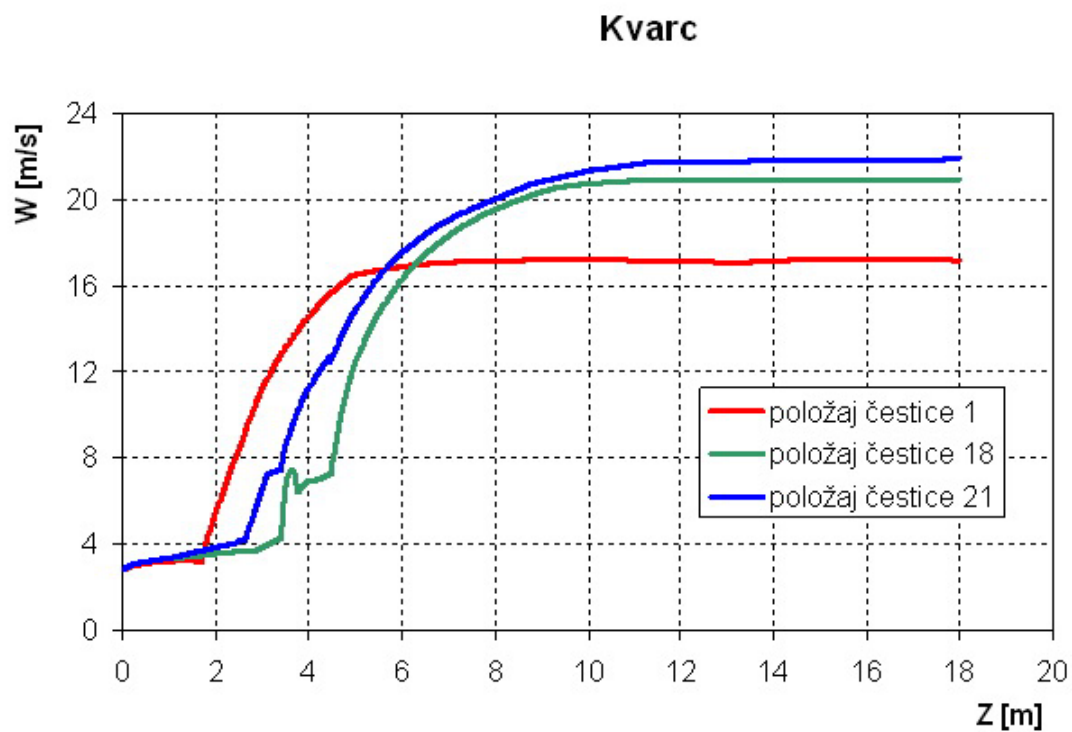


Sekundarno strujanje\_Kvarc

**Slika 7.22.** Promena brzine duž kanala

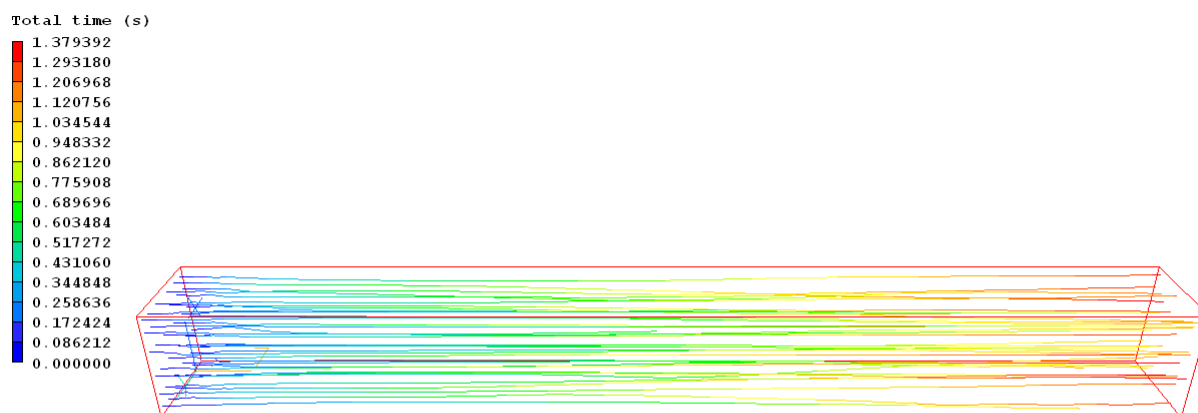


**Slika 7.23.** Promena brzine u poprečnom preseku na sredini kanala



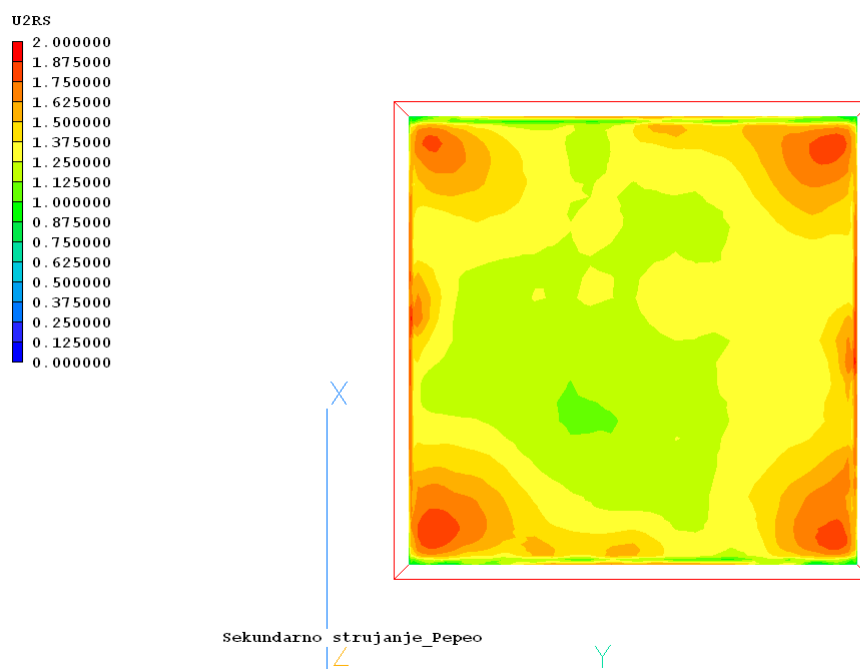
**Slika 7.24.** Promena brzine čestice u položaju 1,18 i 21 duž kanala

### 7.4.2. Pepeo

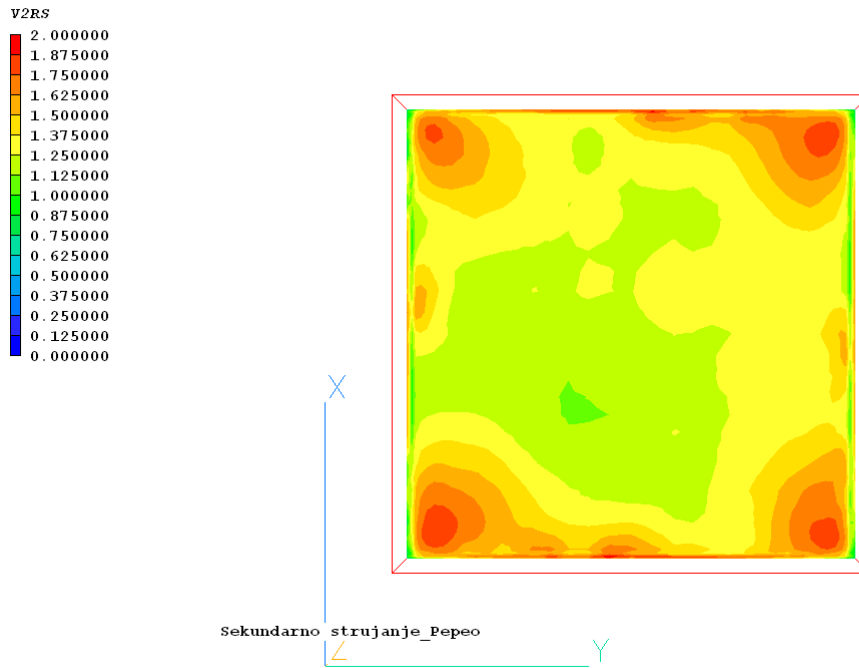


Sekundarno strujanje\_Pepeo

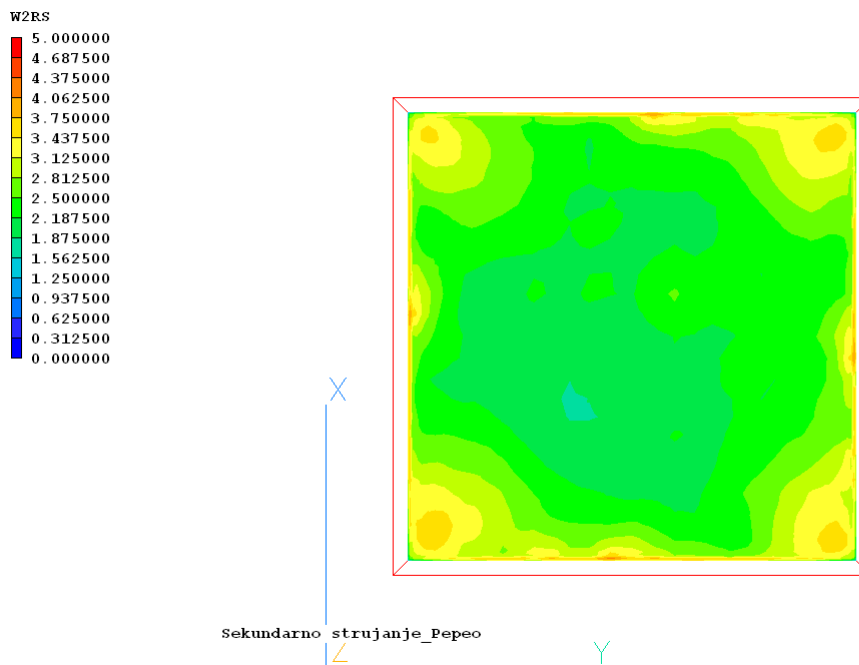
**Slika 7.25.** Putanje čestica pepela duž kanala



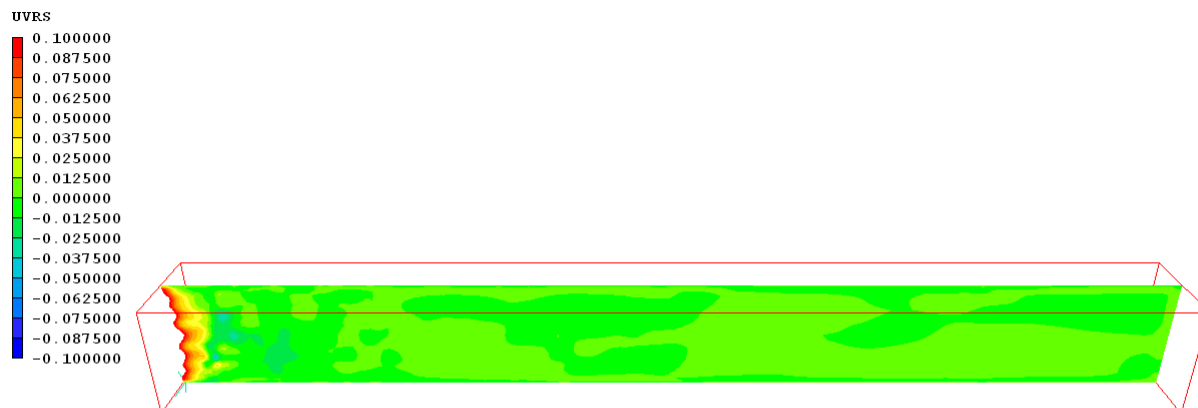
**Slika 7.26.** Raspodela turbulentnih napona  $\overline{u_1 u_1}$  u poprečnom preseku kanala, na sredini



**Slika 7.27.** Raspodela turbulentnih napona  $\overline{u_2 u_2}$  u poprečnom preseku kanala, na sredini

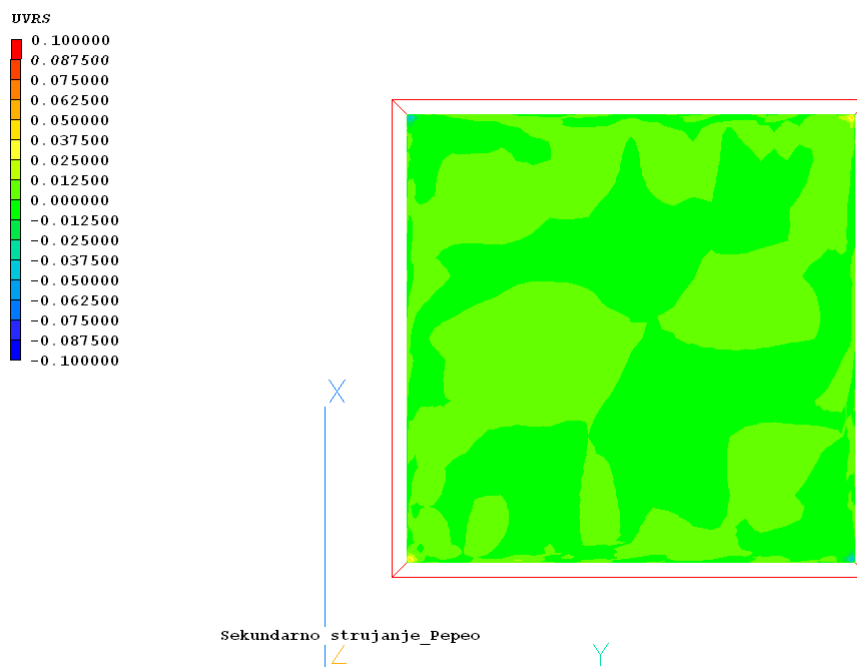


**Slika 7.28.** Raspodela turbulentnih napona  $\overline{u_3 u_3}$  u poprečnom preseku kanala, na sredini

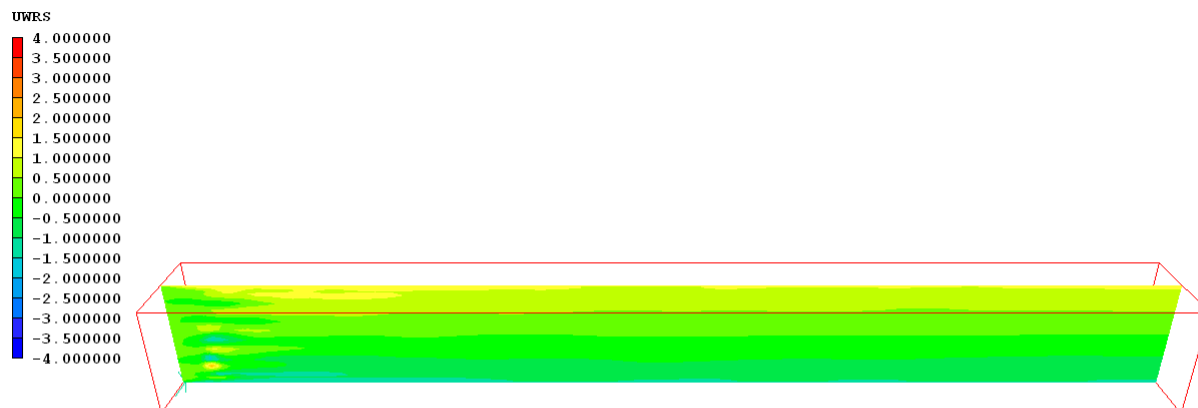


Sekundarno strujanje\_Pepeo

**Slika 7.29.** Raspodela turbulentnih napona  $\overline{u_1 u_2}$  duž kanala

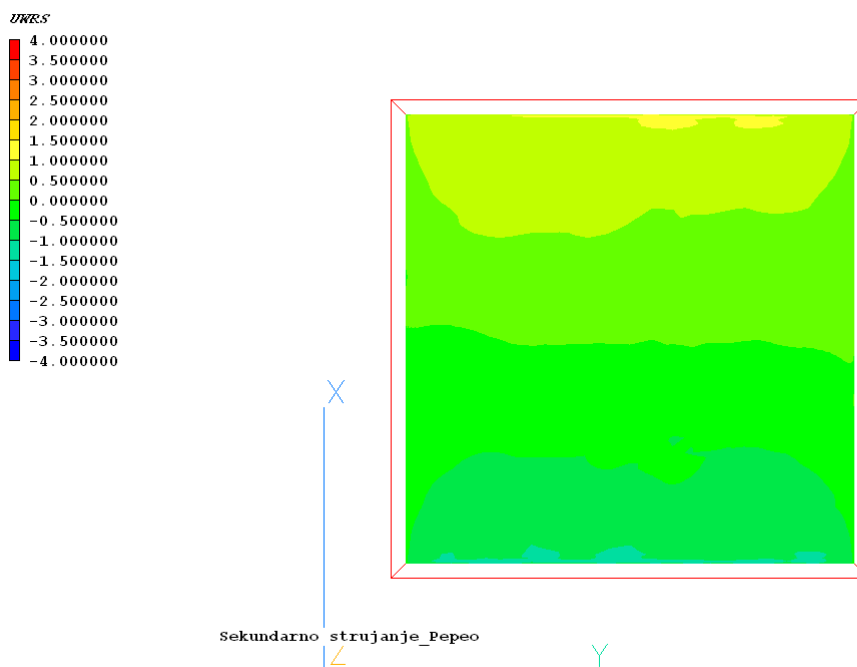


**Slika 7.30.** Raspodela turbulentnih napona  $\overline{u_1 u_2}$  u poprečnom preseku kanala, na sredini

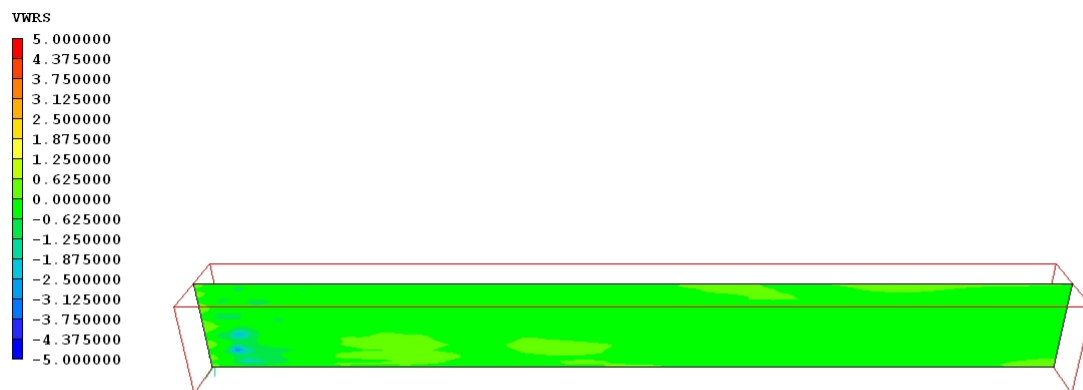


Sekundarno strujanje\_Pepeo

**Slika 7.31.** Raspodela turbulentnih napona  $\overline{u_1 u_3}$  duž kanala

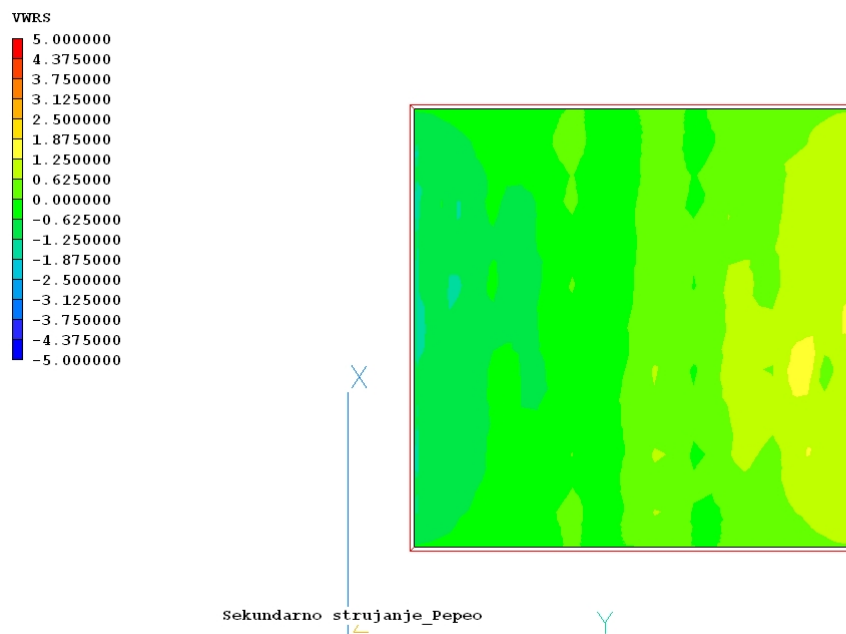


**Slika 7.32.** Raspodela turbulentnih napona  $\overline{u_1 u_3}$  u poprečnom preseku kanala, na sredini

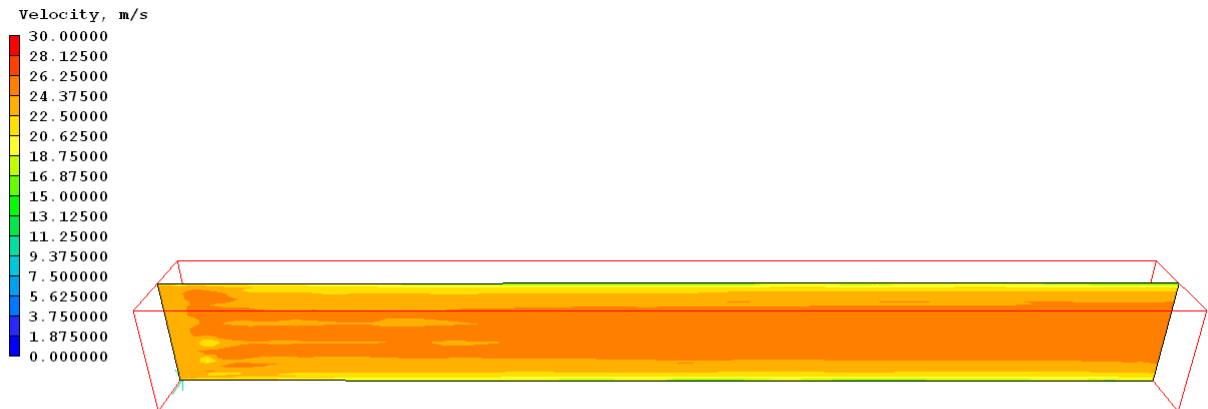


Sekundarno strujanje\_Pepeo

**Slika 7.33.** Raspodela turbulentnih napona  $\overline{u_2 u_3}$  duž kanala

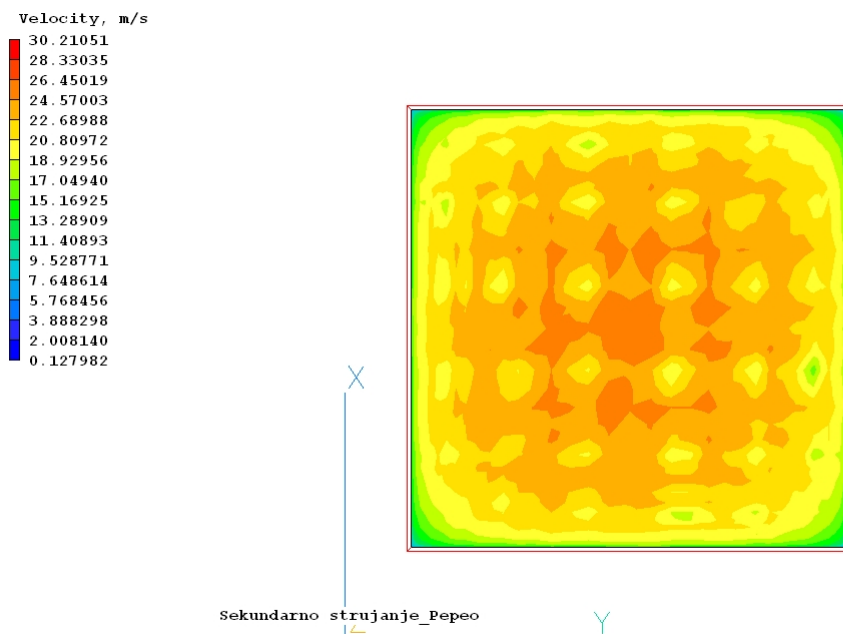


**Slika 7.34.** Raspodela turbulentnih napona  $\overline{u_2 u_3}$  u poprečnom preseku kanala, na sredini



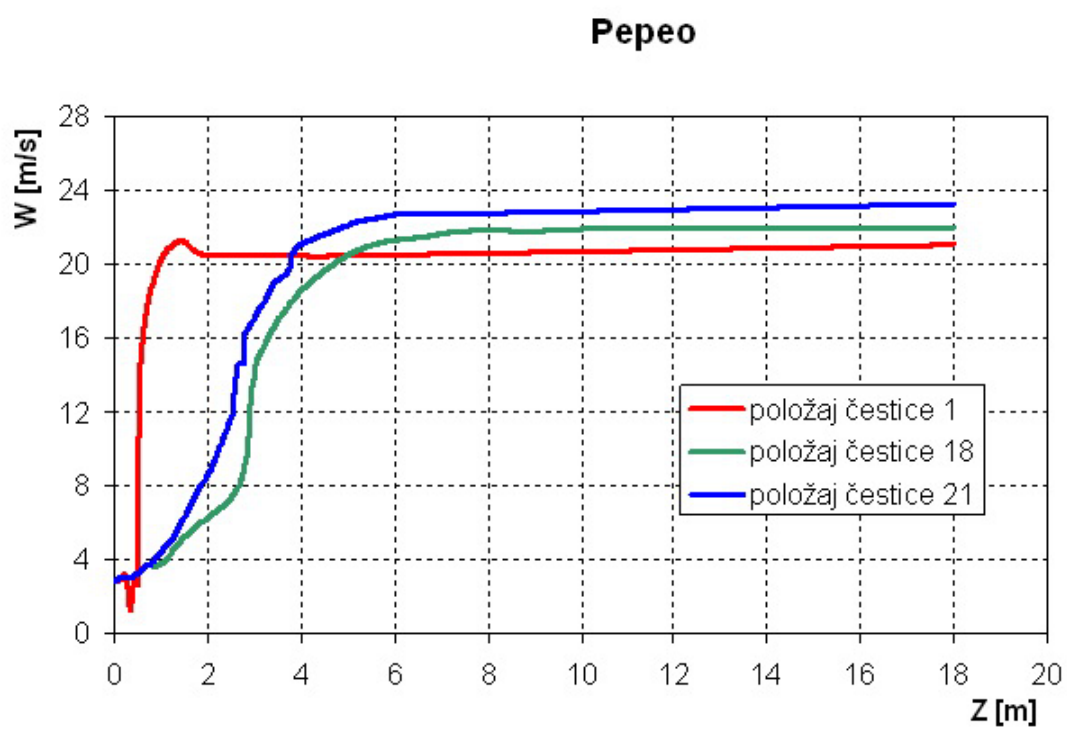
Sekundarno strujanje\_Pepeo

**Slika 7.35.** Promena brzine duž kanala



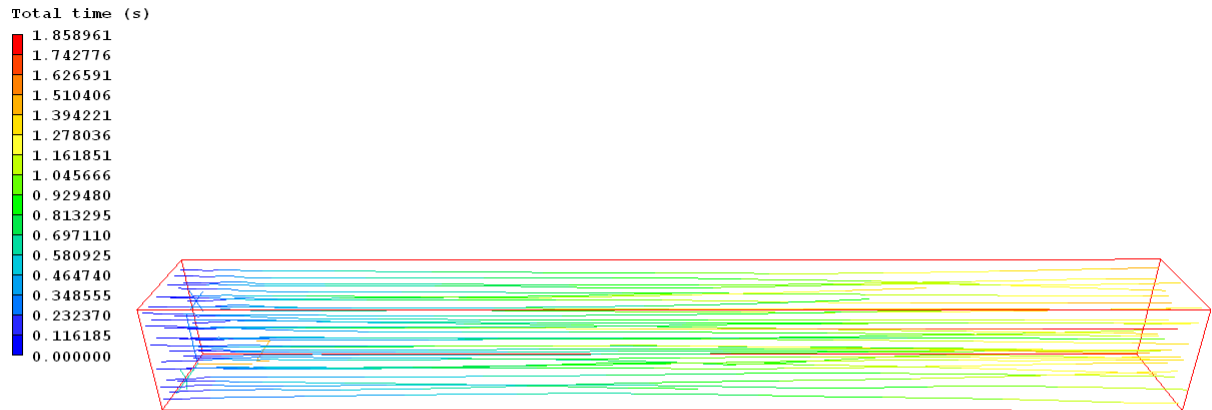
**Slika 7.36.** Promena brzine u poprečnom preseku na sredini kanala





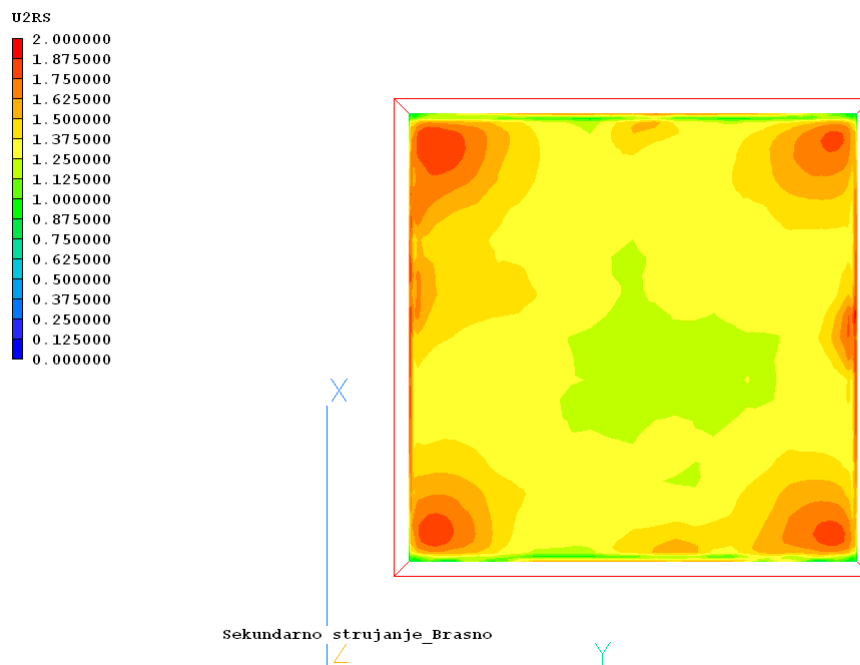
**Slika 7.37.** Promena brzine čestice u položaju 1, 18 i 21 duž kanala

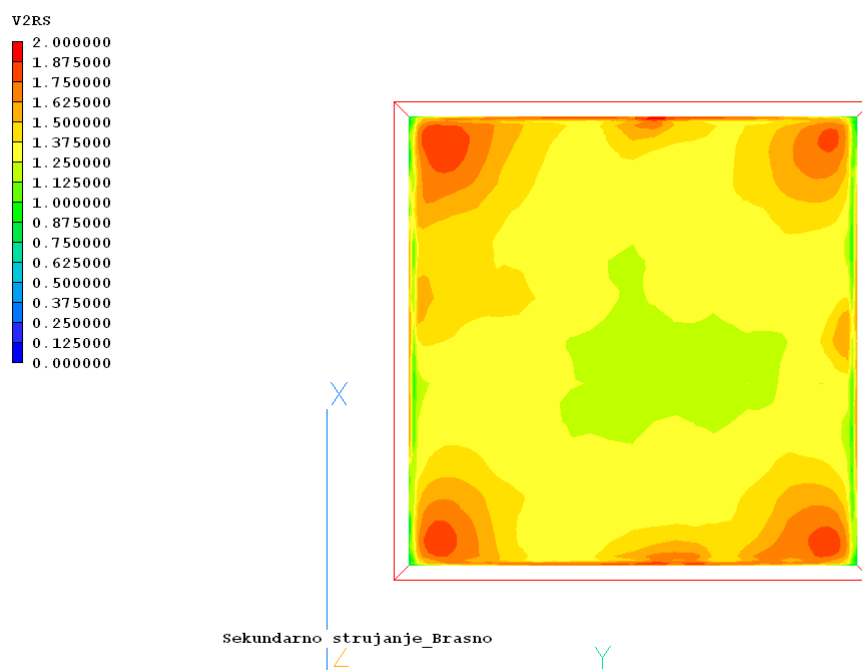
## 7.4.3. Brašno



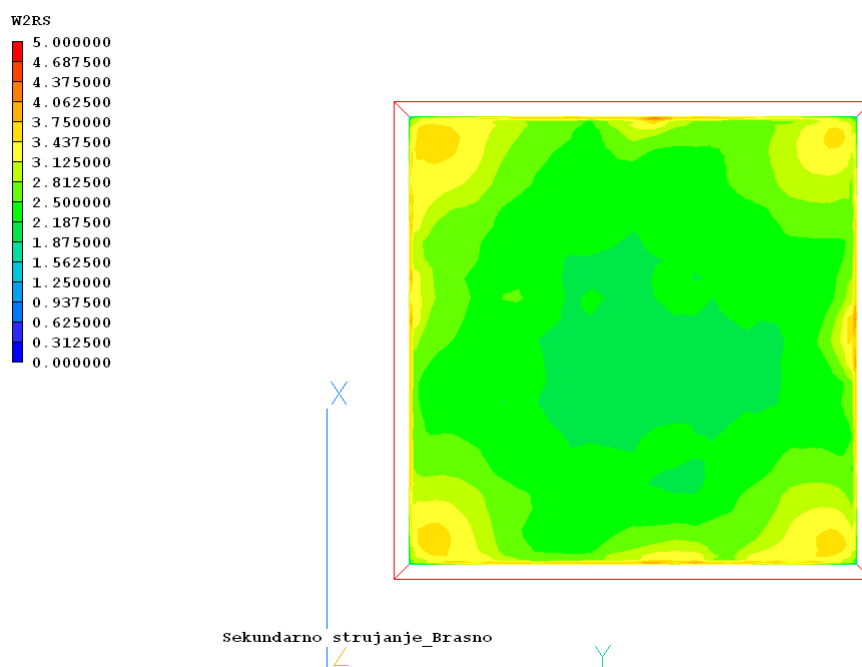
Sekundarno strujanje\_Brasno

Slika 7.38. Putanje čestica brašna duž kanala

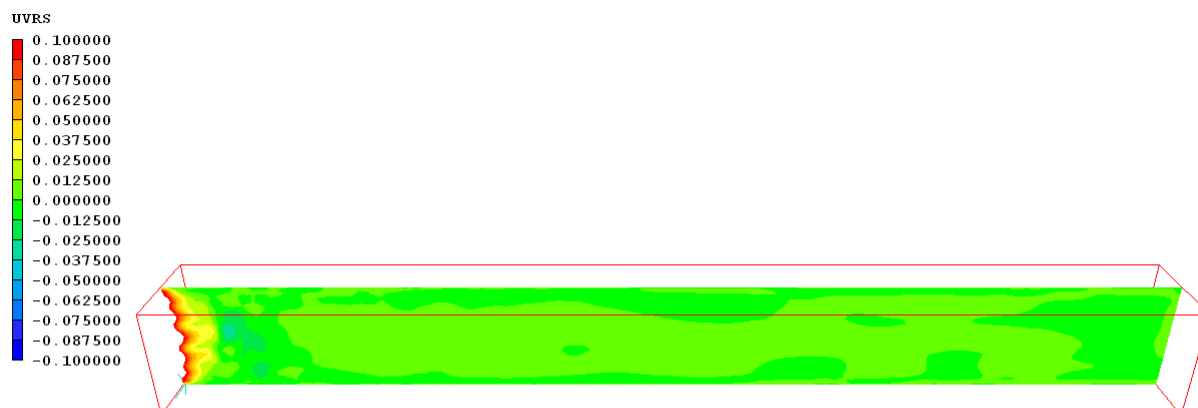
Slika 7.39. Raspodela turbulentnih napona  $\overline{u_1 u_1}$  u poprečnom preseku kanala, na sredini



**Slika 7.40.** Raspodela turbulentnih napona  $\overline{u_2 u_2}$  u poprečnom preseku kanala, na sredini

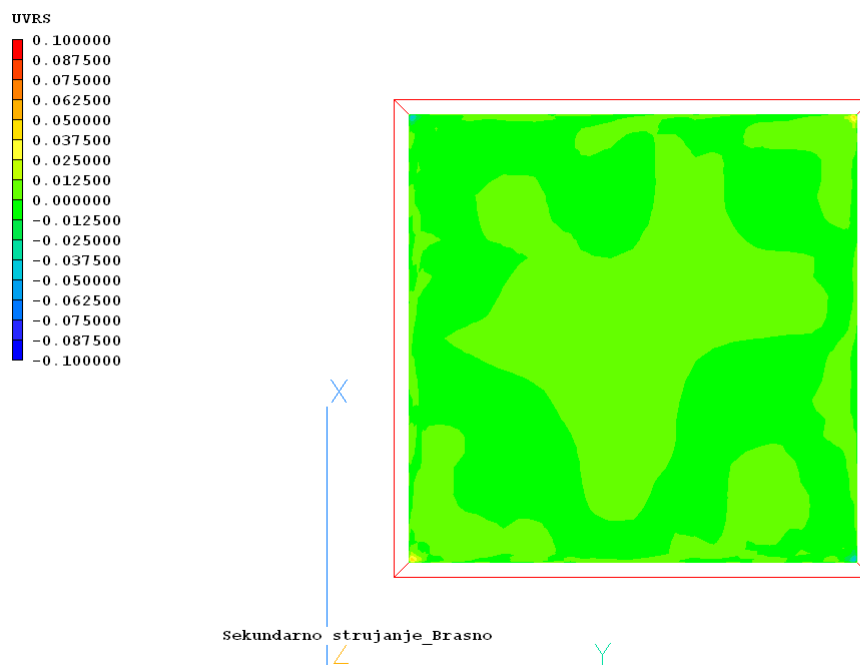


**Slika 7.41.** Raspodela turbulentnih napona  $\overline{u_3 u_3}$  u poprečnom preseku kanala, na sredini

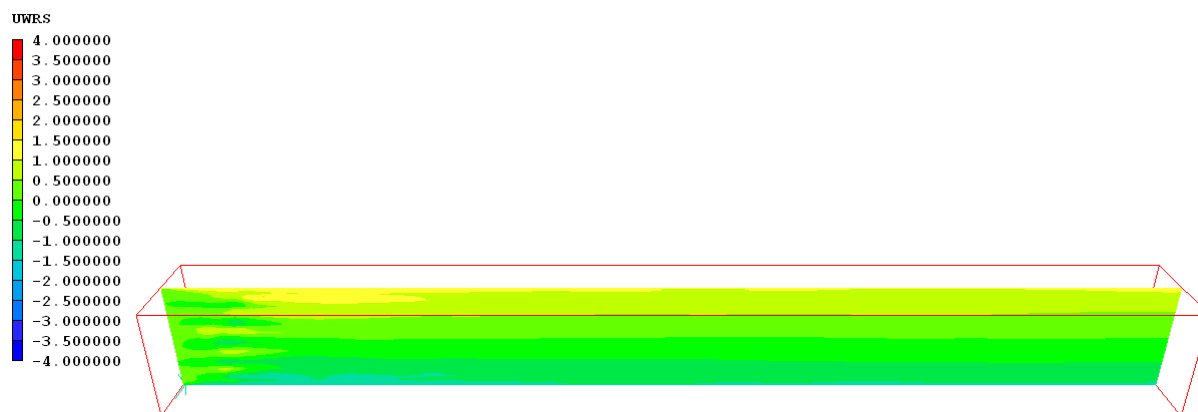


Sekundarno strujanje\_Brasno

**Slika 7.42.** Raspodela turbulentnih napona  $\overline{u_1 u_2}$  duž kanala

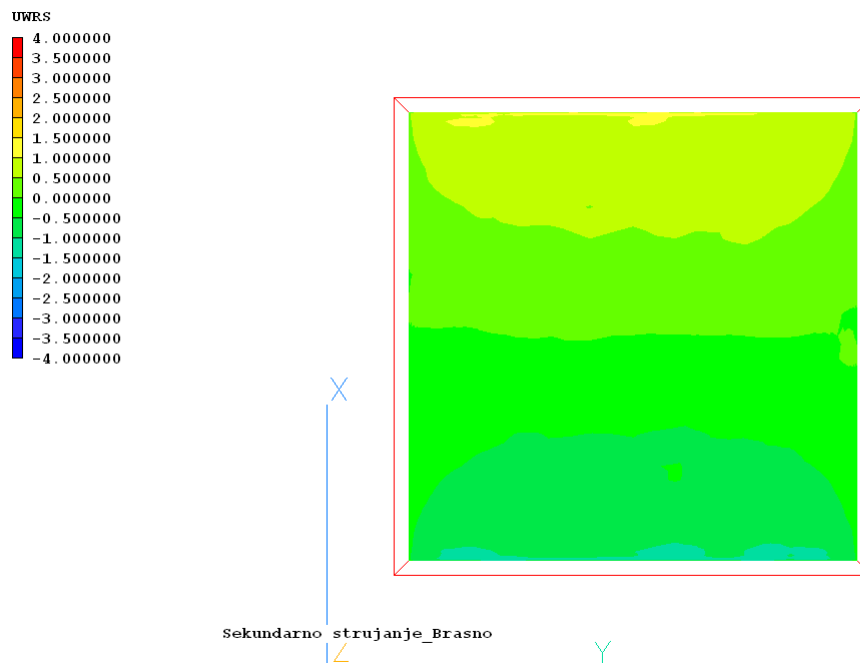


**Slika 7.43.** Raspodela turbulentnih napona  $\overline{u_1 u_2}$  u poprečnom preseku kanala, na sredini

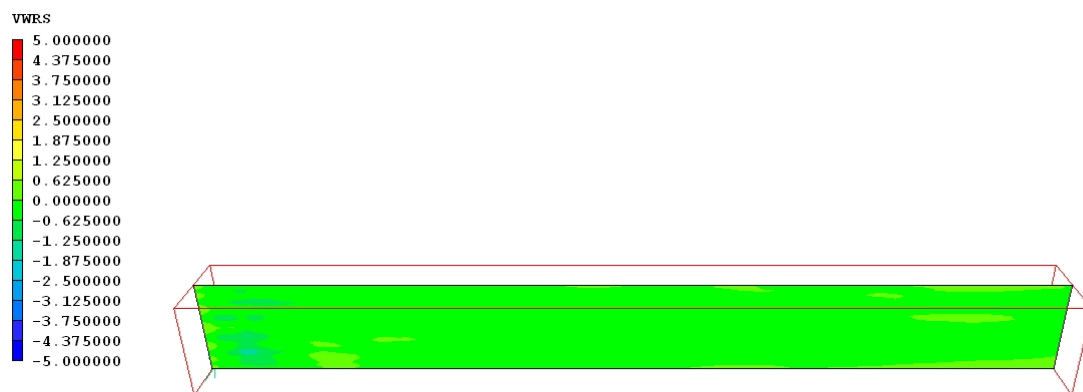


Sekundarno strujanje\_Brasno

**Slika 7.44.** Raspodela turbulentnih napona  $\overline{u_1 u_3}$  duž kanala

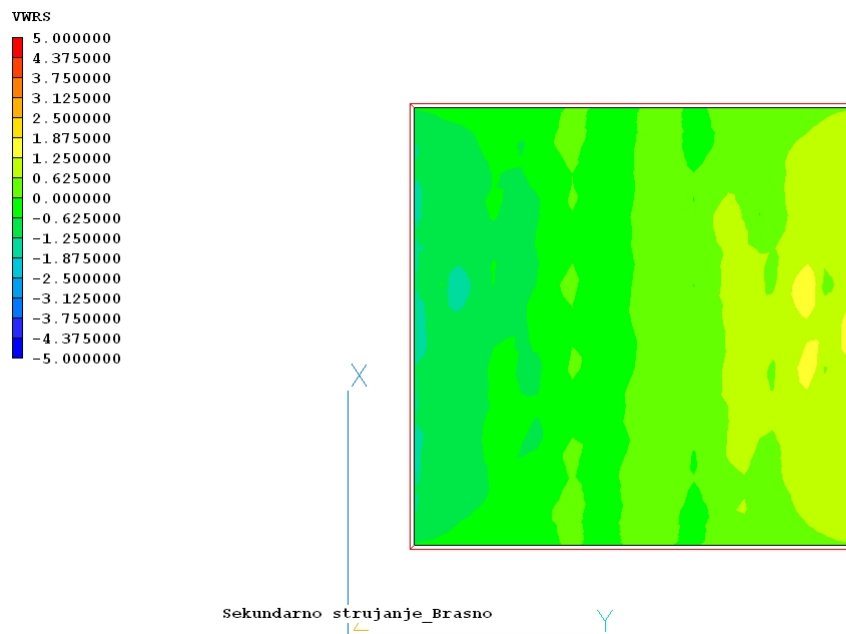


**Slika 7.45.** Raspodela turbulentnih napona  $\overline{u_1 u_3}$  u poprečnom preseku kanala, na sredini kanala

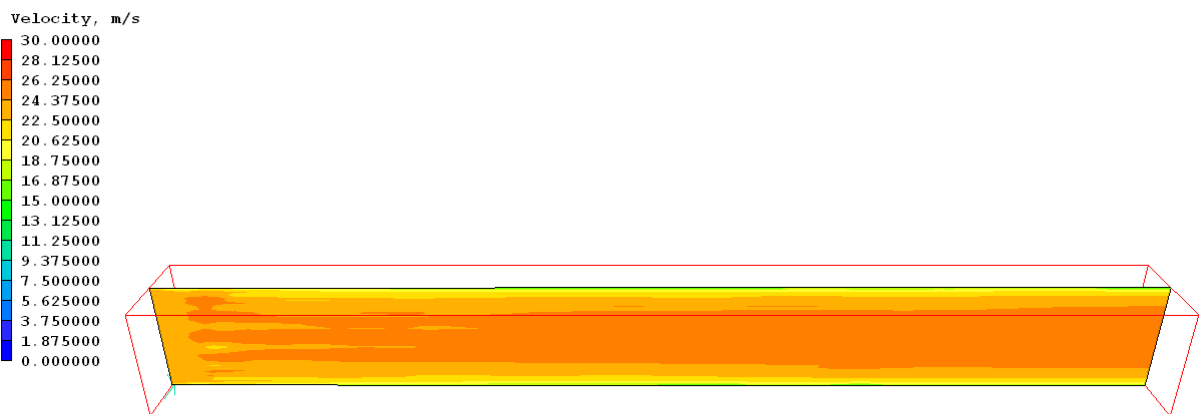


Sekundarno strujanje\_Brasno

**Slika 7.46.** Raspodela turbulentnih napona  $\overline{u_2 u_3}$  duž kanala

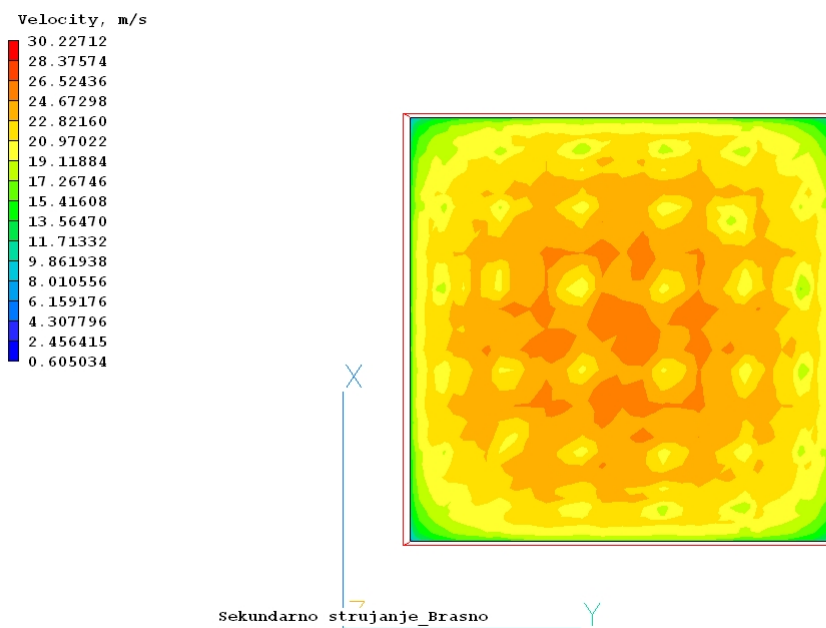


**Slika 7.47.** Raspodela turbulentnih napona  $\overline{u_2 u_3}$  u poprečnom preseku kanala, na sredini kanala

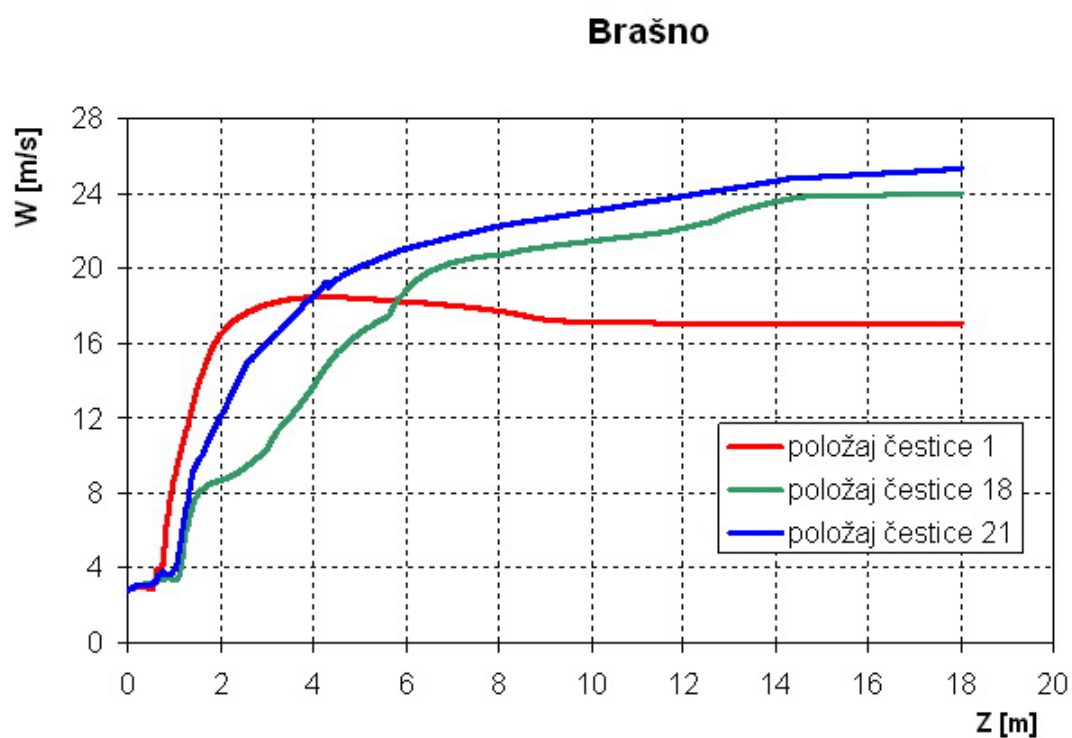


Sekundarno strujanje\_Brasno

**Slika 7.48.** Promena brzine duž kanala



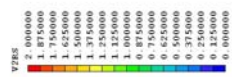
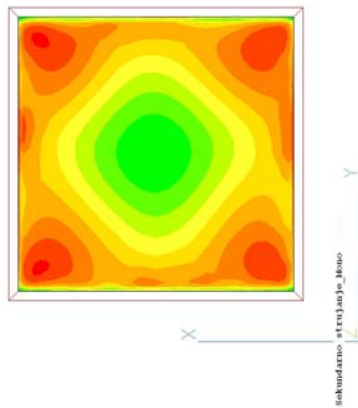
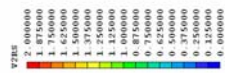
**Slika 7.49.** Promena brzine u poprečnom preseku na sredini kanala



**Slika 7.50.** Promena brzine čestice u položaju 1, 18 i 21 duž kanala

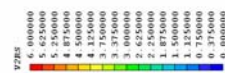
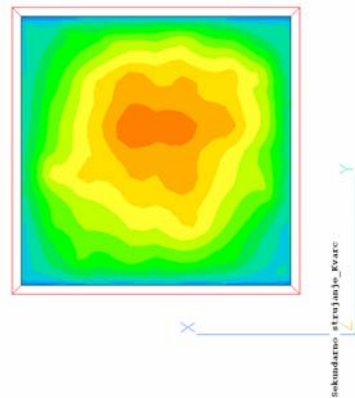
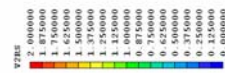


RAŠNO



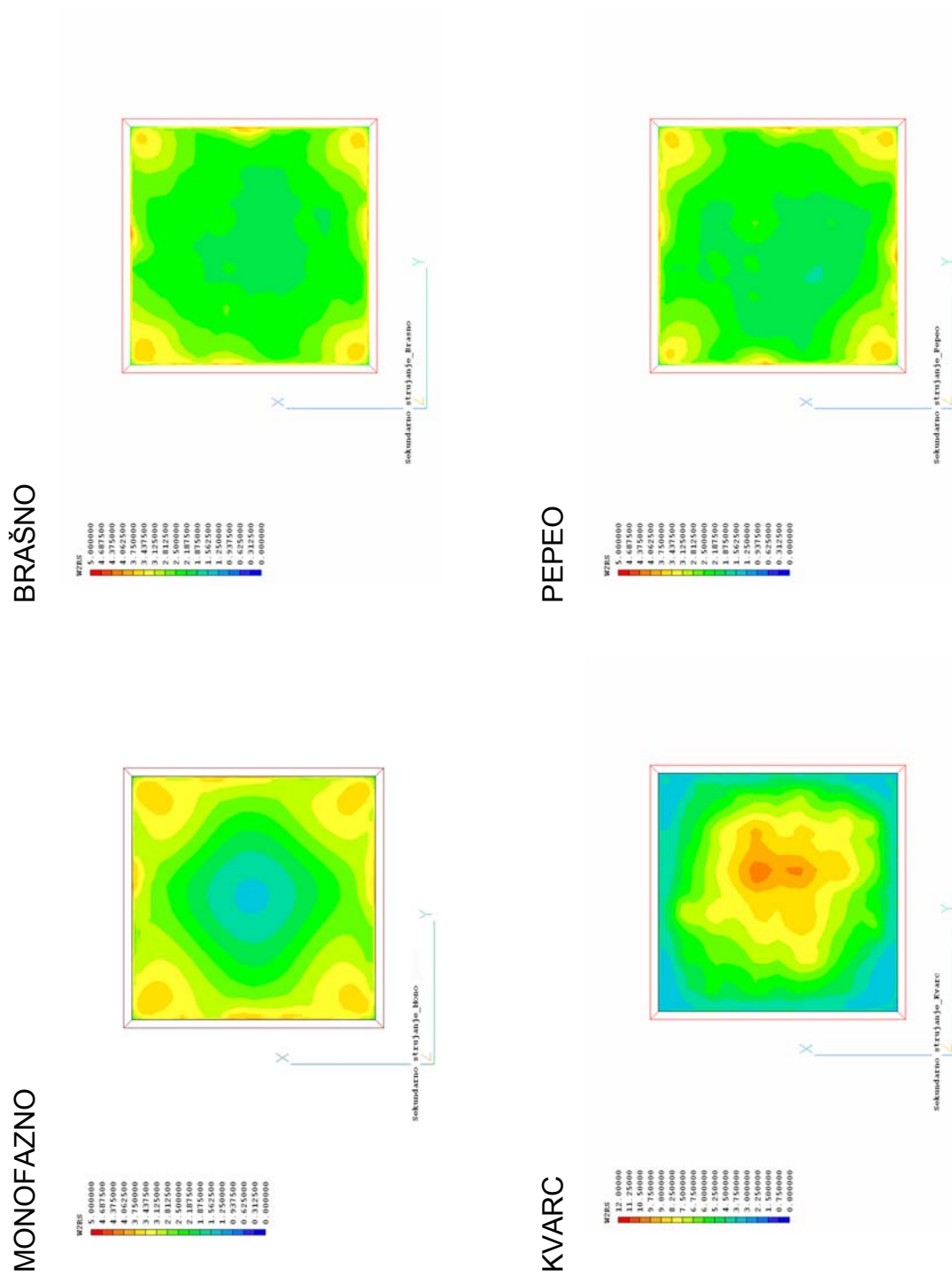
MONOFAZNO

PEPEO

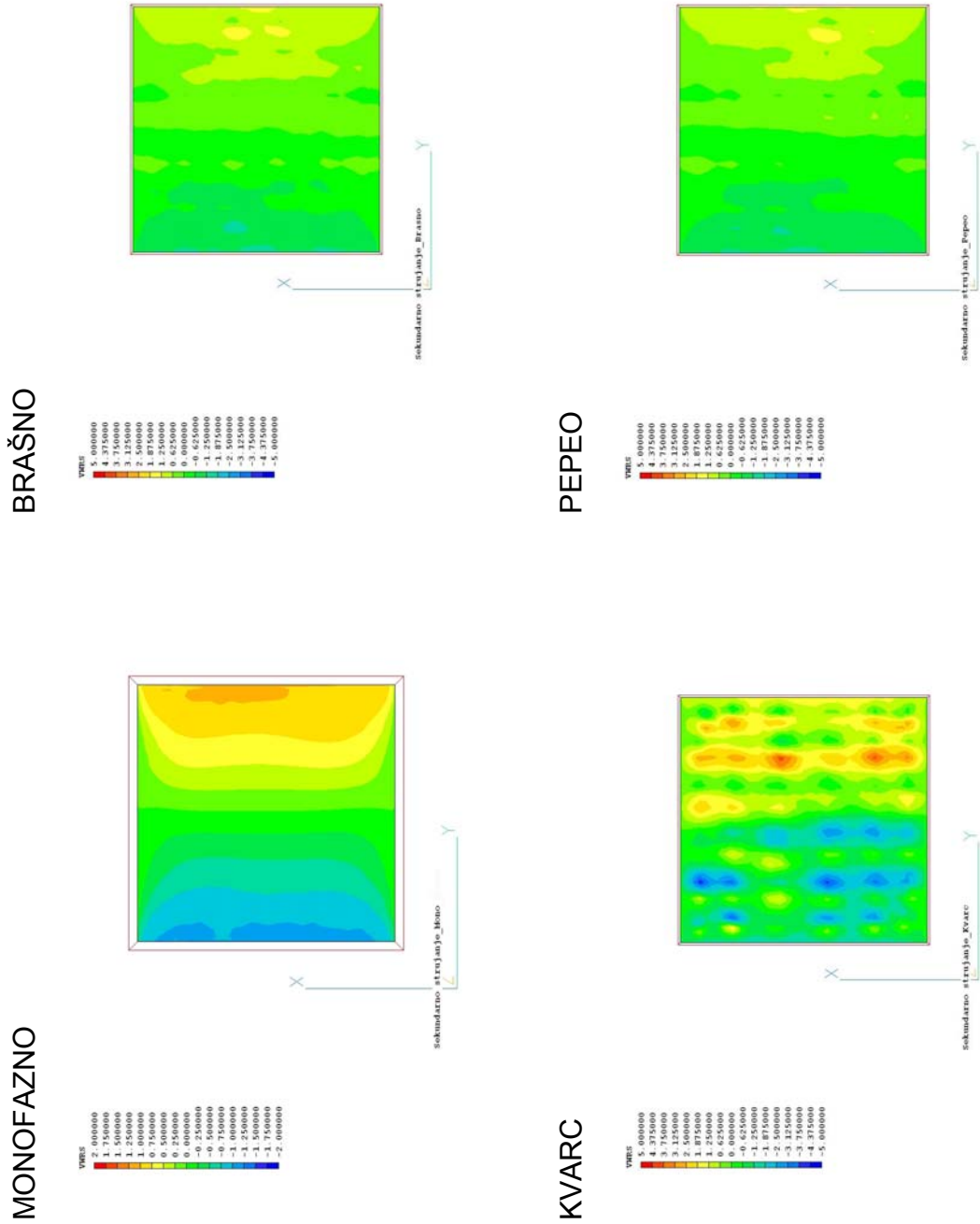


KVARC

**Slika 7.51.** Raspodela turbulentnih napona  $\overline{u_2 u_2}$  u poprečnom preseku kanala, na sredini za monofazno i dvofazno strujanje



**Slika 7.52.** Raspodela turbulentnih napona  $u_3u_3$  u poprečnom preseku kanala, na sredini za monofazno i dvofazno strujanje



**Slika 7.53.** Raspodela turbulentnih napona  $u_2 u_3$  u poprečnom preseku kanala, na sredini za monofazno i dvofazno strujanje

## 7.5. Diskusija rezultata

Kao što je rečeno u poglavlju 4, do formiranja sekundarnog strujanja druge vrste u pravom kanalu ne-kružnog poprečnog preseka pri razvijenom turbulentnom strujanju dolazi usled postojanja gradijenata Reynolds-ovih napona.

Turbulentni članovi:  $A_4 = \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} (\overline{u_3 u_3} - \overline{u_2 u_2})$  i  $A_5 = \left( \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \overline{u_2 u_3}$ , koji sadrže

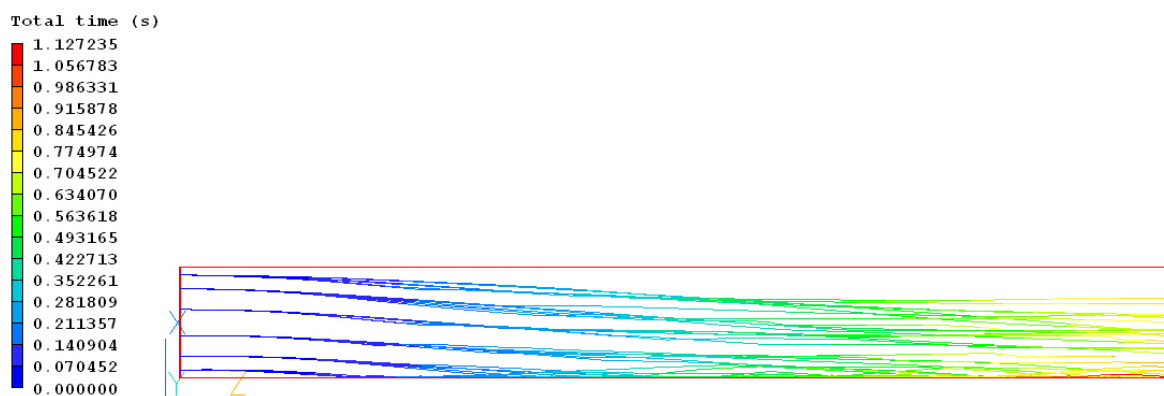
Reynolds-ove napone imaju dominantnu ulogu i suprotnog su znaka u jednačini za vrtložnost, čiji se pravac poklapa sa osnovnim pravcem strujanja (4.3). Ovi članovi izražavaju uticaj turbulentnih napona na produkciju ili destrukciju turbulentne vrtložnosti. Gledjući ih pojedinačno, turbulentni članovi mogu biti mnogo veći od konvektivnog člana  $A_1 = U_2 \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2} + U_3 \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_3}$ , u jednačini za turbulentnu

vrtložnost čiji je pravac upravan na poprečni presek kanala. Generisanje turbulentnih normalnih i smičućih napona zavisi od veličine gradijenata brzine sekundarnog i primarnog toka. Gradijenti brzina sekundarnog toka imaju veći uticaj na generisanje turbulentnih smičućih napona  $\overline{u_2 u_3}$  u odnosu na gradijente primarne brzine u većem delu poprečnog preseka pri razvijenom turbulentnom strujanju. Razlika između turbulentnih članova je gotovo istog reda veličine kao i sam konvektivni član i upravo ta razlika između relativno velikih turbulentnih članova je glavni uzrok formiranja sekundarnog toka druge vrste u poprečnom preseku kanala. Sekundarni tok pokreće fluid sa malim impulsom ka sredini kanala i proizvodi povećane smicajne napone prema rogljevima kanala.

Može se reći da je vrtložnost veća ukoliko je produkcija turbulentnih napona veća, te se može zaključiti da je upravo ta razlika između relativno velikih turbulentnih članova  $A_4$  i  $A_5$  baš taj mehanizam koji generiše sekundarno strujanje. Ukoliko je ta razlika veća, sekundarni tok je intenzivniji i izraženiji. Prisustvo čestica u gasnoj fazi dovodi do povećanja razlike između članova koji sadrže turbulentne napone, te samim tim i do intenzivnijeg sekundarnog strujanja. Posmatrajući slike turbulentnih napona 7.51, 7.52 i 7.53 može se videti da ukoliko je razlika između normalnih turbulentnih napona  $\overline{u_3 u_3}$  i  $\overline{u_2 u_2}$  i smičućeg

turbulentnog napona  $\overline{u_2 u_3}$  veća, sekundarno strujanje je izraženije. Sekundarni tok je intenzivniji u slučaju dvofaznog strujanja odnosno prisustva čvrstih čestica transportovanog materijala u struji transportnog vazduha.

Dvofazne tokove karakteriše u opštem slučaju kompleks velikog broja međusobno povezanih sami po sebi komplikovanih fenomena, koji su posledica multikomponentnosti smeše. Prisustvo druge faze – čvrstih čestica u fluidu uvodi nove specifičnosti u razmatranju turbulentnih strujanja. Sistemi fluida sa čvrstim česticama u kojima je fluid osnovna noseća faza, a čestice predstavljaju primesu javljaju se u mnogim tehničkim procesima. Disperzna faza utiče na promene karakteristike toka nosećeg fluida i obrnuto, karakteristike toka nosećeg fluida utiču na ponašanje čestica u toku. Čvrste čestice transportovanog materijala se kreću usled dejstva aerodinamičkih sila nosećeg fluida – transportnog vazduha, koje pri odgovarajućim brzinama gasa postaju dovoljno velike da čestice materijala budu ponete strujom gasa. Sila koja izaziva kretanje čvrstih čestica transportovanog materijala je sila reakcije otpora čestica. Pored sile reakcije otpora koja deluje u pravcu kretanja čestica i izaziva njihovo kretanje, na čestice deluju i sile otpora kretanja čestica, kao i sile u pravcu upravnom na pravac kretanja čestica tj. strujanja nosećeg fluida. U vertikalnom pravcu deluju uzgonska sila i gravitacijske sile.



Sekundarno strujanje\_v50\_Brasno

**Slika 7.54.** Putanje čestica brašna duž kanala u vertikalnoj ravni

Kako je reč o turbulentnom strujanju, na čestice deluju kako usrednjene tako i fluktuacione komponente ovih sila. Delovanje ovih sila na čestice dovodi ih u prividno stanje "letenja". Fluktuacione komponente vertikalnih sila, potpomognute dejstvom Magnus-ove i Basset-ove sile, deluju na čestice tako da sprečavaju njihovo taloženje u kanalu. Ukoliko su pulsacione sile nedovoljne da podignu čestice u osnovnoj struji, odnosno vertikalne sile neuravnotežene dolazi do narušavanja kretanja čestica transportovanog materijala. U tom slučaju može doći do gomilanja čestica u donjem delu kanala, možda čak do taloženja a u ekstremnim slučajevima do prekida transportovanja materijala. U slučaju kada se uzme da su vertikalne sile neuravnotežene a pulsacione nedovoljne da čestice drže u struji transportnog fluida, čestice se gomilaju u donjoj zoni kanala, što se vidi sa slike 7.54, na osnovu putanja čestica brašna. Putanje kretanja čvrstih čestica kod pepela su slične, dok je kod transportovanja kvarca uticaj neuravnoteženosti vertikalnih sila izraženiji, pa postoji mogućnost možda i taloženja transportovanog materijala.

### 7.5.1. Kvarc

Na ulazu u kanal transportovani materijal – čestice kvarca, kao što je već rečeno, ravnomerno su raspoređene u poprečnom preseku kanala i svojom početnom, inicijalnom brzinom, koja je jednaka brzini lebdenja, (2,8 m/s) ulaze u struju transportnog vazduha koji ih pokreće. Brzina transportnog vazduha na ulazu u kanal je uniformna i iznosi 22 m/s. Transport materijala – čestica se zasniva na činjenici da transportni gas – vazduh deluje na čvrste čestice svojim aero-dinamičkim silama, čime započinje njihovo transportovanje. Čvrste čestice

transportovanog materijala – kvarca, zahvata transportni vazduh i nosi sa sobom, odnosno aero-dinamičke sile transportnog vazduha postaju dovoljno velike da čestice materijala budu ponete strujom vazduha. Čestice transportovanog materijala se kreću usled dejstva sile reakcije otpora, koja ima pravac strujanja transportnog vazduha i kojom transportni vazduh deluje na čvrste čestice materijala, pri čemu se pretpostavlja da sile koje deluju u pravcu upravnom na pravac strujanja transportnog vazduha su uravnotežene. Kako sila reakcije otpora čvrstih čestica, koje se kreću, vremenom raste, brzina čestica je sve veća.

Kretanje čvrstih čestica transportovanog materijala u struji transportnog vazduha je takvo da sa porastom brzine njihovo ubrzanje se smanjuje. Ubrzanje čvrstih čestica transportovanog materijala se smanjuje gotovo do nule kada njihova brzina postaje jednolika. Na početku kanala brzina čvrstih čestica lagano raste na kratkom delu puta, približno linearno, pri čemu je taj put duži za čestice koje su bliže zidu kanala u odnosu na čestice koje su bliže rogljevima i sredini kanala. Kod čestica u sredini kanala put linearnog rasta brzine je duži u odnosu na čestice u rogljevima a kraći u odnosu na čestice blizu zida. Kako se turbulentno strujanje razvija, profil brzine se deformiše tako što im se brzina naglo povećava sa jednim malim prekidom, opet kod čestica blizu zida kanala, pri čemu je taj prekid kod čestica u sredini kanala slabije izražen, slika 7.24. Uspostavljanjem razvijenog turbulentnog strujanja, profili brzina transportovanih čestica se stabilizuju, ubrzanje gotovo da prestaje i čvrste čestice materijala se kreću jednoliko, sl. 7.24, sa brzinama koje su manje od brzine okolnog vazduha.

Na početku kanala sila otpora kretanju čvrstih čestica je još uvek dovoljno velika, čime se sprečava veće povećanje brzine čvrstih čestica transportovanog materijala. Ona ostaje gotovo jednolika, čak se u nekim trenucima i smanjuje, odnosno čestice se usporavaju, što se vidi na slici 7.24, nakon čega brzina naglo raste. Put čestica transportovanog materijala na kome brzina raste je duži kod čestica koje se nalaze bliže zidu, kako zbog viskoznih efekata koji se javljaju na njemu, tako i zbog uticaja samog zida kanala, kao i same brzine transportnog vazduha.

Viskozne zone neposredno uz čvrst zid svojim prigušnim dejstvom utiču na turbulentne interakcije, čija je karakteristika da su fluktuacije brzina upravne na zid prigušene, dok su fluktuacije brzina paralelne zidu intenzivirane, ali utiču i na samu turbulentnu strukturu strujanja. Sa početkom razvijanja turbulentnog strujanja, brzina čestica transportovanog materijala se povećava. Uspostavljanjem potpuno razvijenog turbulentnog strujanja, profil brzine se stabilizuje, brzina postaje gotovo jednolika, što znači da ubrzanje čvrstih čestica prestaje i čestice transportovanog materijala se kreću gotovo jednoliko, (sl. 7.24), težeći brzini transportnog vazduha, koju nikada ne postižu.

Brzina transportnog vazduha se menja od brzine na ulazu koja iznosi 22 m/s, do brzine koja odgovara određenom delu kanala, npr. u sredini kanala gde imamo potpuno razvijeno turbulentno strujanje sa brzinom od gotovo 30 m/s, dok u neposrednoj blizini zida kanala brzina je oko 20 m/s. Što znači da je brzina transportnog vazduha u tankom sloju blizu zida najmanja, tako da na osnovu profila brzine po preseku kanala može se zaključiti da je došlo do uspostavljanja razvijenog turbulentnog strujanja, slika 7.22. Brzina vazduha je nešto manja u rogljevima kanala, sl. 7.23, ali je ipak veća od brzine čestica u tom delu kanala, koja iznosi oko 17 m/s pri uspostavljanju transporta. Na slici 7.23 mogu se uočiti položaji posmatranih grupa čestica, gde zbog prisutnosti čvrstih čestica imamo manju brzinu. Upoređujući sliku 7.24 na kojoj je prikazana promena brzine čestica duž kanala, sa slikom 7.23 gde se vidi promena brzine koja odgovara poprečnom preseku kanala na polovini dužine, može se videti poklapanje brzina u posmatranim položajima preseka i to tako da su na mestima čestica brzine manje od okoline.

Na izlazu iz kanala, slika 7.12, na osnovu prikazanih putanja čvrstih čestica, može se zaključiti da sve čestice transportovanog materijala napuštaju kanal u gotovo istom rasporedu, uniformno kao i na ulazu, ali sa brzinom koju su postigle tokom procesa transporta. Može se primetiti da čestice napuštaju kanal sa različitim brzinama, što se može zaključiti na osnovu vremena transportovanja. Vreme transportovanja čvrstih čestica najkraće je u sredini kanala u odnosu na vreme transportovanja čestica koje su bliže zidu ili rogljevima kanala, saglasno tome su i brzine čestica u središnjem delu kanala veće od brzina ostalih čestica.



### 7.5.2. Pepeo

Pri simulacijama transporta pepela, zadržane su iste karakteristike transportnog vazduha na ulazu, početna brzina od 22 m/s i ista početna brzina čestica pepela od 2,8 m/s. Kao što je već rečeno, brzina lebdenja čestica pepela je manja i iznosi oko 0,36 m/s, ali kako bi se iterativni postupak skratio usvojena je ista inicijalna brzina čestica pepela na ulazu u kanal kao i kod kvarca. Transportovani materijal - pepeo je ravnomerno raspoređen na ulazu u kanal, takođe u šest grupa duž x i y ose. Čestice pepela napuštaju kanal po čitavom poprečnom preseku, slika 7.25, na kojoj su date trajektorije čestica i vreme za koje čestice napuštaju kanal. Sa slike se veoma jasno može videti da je vreme transporta pepela kraće, za iste početne uslove u odnosu na transportovanje kvarca, što znači da je brzina transportovanog materijala – čestica pepela veća u odnosu na čestice kvarca. Izlazni poprečni presek kanala je čitavim presekom ispunjen transportovanim materijalom, pri čemu je vreme transportovanja najkraće za čestice koje se nalaze u sredini kanala.

Čestice pepela na ulazu svojom početnom inicijalnom brzinom zahvata struja transportnog vazduha i dejstvom sile reakcije otpora one počinju da se kreću. Kako sila reakcije otpora čvrstih čestica koje se kreću vremenom raste, a uzgonska, potisna i sila težine koje deluju upravno na pravac kretanja čestica, su uravnotežene, brzina čestica se povećava. Vreme za koje aero-dinamičke sile transportnog vazduha postaju dovoljno velike da savladaju otpore čestica materijala znatno je kraće u odnosu na transport čestica kvarca. Dužina kanala na kojoj je brzina transportnog vazduha jednolika i približno konstantna je znatno manja nego u slučaju transportovanja čestica kvarca, tako da je vreme porasta brzine čestica pepela kraće. Vreme uspostavljanja režima potpuno razvijenog turbulentnog strujanja je kraće, pa samim tim i čestice pepela ranije dostižu svoju maksimalnu brzinu, čija vrednost zavisi od položaja čestice, slika 7.37. Sa slike se vidi da čestice koje se nalaze bliže zidu kanala kasnije dostižu brzinu približnu

jednolikoj od čestica koje se nalaze u sredini kanala i neposrednoj blizini rogljeva kanala, što potvrđuje snažniji uticaj zida i viskoznih efekata na njemu.

Porast brzine čvrstih čestica transportovanog materijala - pepela se odvija slično kao i kod transportovanja kvarca. Na početku kanala, blizu ulaza, brzina linearno raste, samo što je porast brzine izraženiji za čestice blizu rogljeva kanala u odnosu na čestice u sredini i blizu zida, slika 7.37. Kako imamo čestice manje gustine i manjeg prečnika, razvijeno turbulentno strujanje se brže uspostavlja i uticaj zida je ranije uočljiv. Uticaj zida, viskozni efekti i turbulentne interakcije na njemu dovode do toga da je brzina čestica u rogljevima kanala manja od brzine čestica blizu zida i u sredini kanala. Najveća je brzina čestica koje se nalaze u sredini kanala tj. u potpuno razvijenom turbulentnom toku. Brzina čestica transportovanog materijala naglo raste već na samom početku kanala kod čestica u rogljevima, dok kod čestica blizu zida do porasta brzina dolazi nešto kasnije. Brzina transportovanih čestica raste do trenutka kada njihovo ubrzanje može se reći prestaje, tj. teži nuli, u tom trenutku čestice postižu brzinu čija se vrednost tokom transporta malo menja. Tako da se može reći da se čestice dalje kreću jednolikom brzinom ali manjom brzinom od okolne sredine tj. transportnog vazduha. Put na kome dolazi do porasta brzine čestica je duži za čestice koje su bliže zidu u odnosu na čestice bliže sredini ili rogljevima kanala.

Brzina transportnog vazduha pri transportovanju pepela se menja od 22 m/s na ulazu do brzine od 28 m/s, u sredini kanala gde imamo potpuno razvijeno turbulentno strujanje, slika 7.35. U neposrednoj blizini zida kanala brzina je između 20 i 22 m/s, slika 7.36, dok je brzina vazduha najmanja u rogljevima kanala. Na slici 7.36 mogu se uočiti položaji posmatranih grupa čestica, gde kao i u slučaju transportovanja kvarca postoje oblasti u kojima je zbog prisutnosti čestica brzina manja u odnosu na okolinu. Takođe, upoređujući sliku 7.37 na kojoj je prikazana promena brzine čestica duž kanala, sa slikom 7.36 gde se vidi promena brzine koja odgovara poprečnom preseku kanala na sredini, može se uočiti poklapanje brzina u posmatranim položajima preseka. Za razliku od prethodnog slučaja kada se razvijeno turbulentno strujanje uspostavlja znatno kasnije, sada pri transportovanju čestica pepela se uspostavlja gotovo u prvoj

trećini kanala, nakon čega imamo gotovo ne deformisan profil brzine kontinualne faze, slika 7.35.

### 7.5.3. Brašno

Sledeći materijal koji je korišćen kao transportovani materijal je brašno gustine  $1410 \text{ kg/m}^3$  sa česticama prečnika  $0,2 \text{ mm}$ . Čvrste čestice brašna, kao i prethodno transportovani materijali, raspoređene su ravnomerno po grupama u poprečnom preseku kanala, slika 7.38, na kojoj su prikazane putanje posmatranih čestica brašna duž kanala. Transportovani materijal – brašno napušta kanal, možemo reći, gotovo sa istim rasporedom čestica na izlazu, što znači da je izlazni poprečni presek ravnomerno ispunjen transportovanim materijalom. Razlika koja se javlja jeste u vremenu transportovanja. Vreme transportovanja – brašna je kraće od vremena transportovanja čestica kvarca, ali duže od vremena transportovanja čestica pepela, pri čemu čestice u sredini kanala prve napuštaju kanal.

Transportni vazduh kojim se vrši transport čestica brašna na ulazu u kanal ima brzinu od  $22 \text{ m/s}$ , dok čestice brašna na ulazu imaju početnu brzinu od  $2,8 \text{ m/s}$ , i ako se brzina lebdenja brašna nalazi u granicama od  $1,2$  do  $1,5 \text{ m/s}$ , kako bi se skratio iterativni postupak. Čestice brašna svojom početnom inicijalnom brzinom ulaze u kanal gde usled dejstva aero-dinamičkih sila uzrokovanih dejstvom transportnog vazduha počinju da se kreću. Brzina transportnog vazduha na ulazu je jednolika dok brzina čestica raste, odnosno čestice počinju da se kreću savladavajući otpore. Ubrzanje čestica brašna je najveće na početku kretanja, odnosno na ulazu u kanal, koje se tokom transportovanja smanjuje, pri čemu se brzina čestica brašna povećava. Uspostavljanjem razvijenog turbulentnog strujanja brzine čestica rastu težeći da dostignu brzinu transportnog

vazduha koju nikad ne postižu. Brzina čestica u prvom delu kanala raste i to tako što brzina čestica koje su bliže rogljevima kanala brže raste, od čestica koje su bliže zidu i sredini kanala. Kako aero-dinamičke sile transportnog vazduha postaju sve veće u odnosu na sile otpora, brzina čestica raste, ali za razliku od porasta brzina čestica kvarca i pepela, porast brzine čestica brašna je postepen, što je izraženije kod čestica koje se nalaze blizu zida kanala, slika 7.50. Sa slike se može uočiti da nakon prestanka ubrzanja, promena brzine čestica brašna ima tendenciju blagog pada, za čestice blizu roglja kanala, dok za one bliže zidu i sredini kanala brzina blago raste, za razliku od promene brzina kod čestica kvarca i pepela gde su brzine gotovo konstantne. Dužina puta na kome brzine čestica kvarca i pepela rastu je kraća u odnosu na čestice brašna, odnosno dužina kanala u kojoj se uspostavljaju jednolike brzine čestica je veća.

Brzina transportnog vazduha na ulazu je uniformna, zatim dolazi do povećanja brzine strujanja i formiranja razvijenog turbulentnog strujanja sa gotovo ujednačenim profilom brzine duž transportnog kanala, slika 7.48. Promena brzine duž kanala je kao i u prethodna dva slučaja najveća po sredini kanala, gotovo iznosi 30 m/s, a kako se približavamo zidu brzina je manja i iznosi 22 m/s. Na slici 7.49 prikazana je promena brzine u poprečnom preseku kanala na sredini, na kojoj se uočavaju oblasti posmatranih grupa čestica. U posmatranim oblastima brzine su manje, što ukazuje na prisutnost čestica u tim delovima preseka kanala tj. brzine odgovaraju brzinama čestica u tim položajima, dok su brzine oko njih veće i odgovaraju okolini, odnosno transportnom vazduhu.

## Zaključak

Turbulentni transport količine kretanja, toplote i materije predstavlja glavnu odliku strujanja fluida koje se svakodnevno susreće ne samo u inženjerskim i tehničkim uređajima već i u prirodnim vodotocima i atmosferskim strujanjima. Razumevanje mehanizma turbulentnih interakcija, ili predviđanje ovih fenomena (bar globalnih posledica) u složenim fizičkim i geometrijskim uslovima predstavlja istraživački izuzetan izazov. U svakodnevnoj inženjerskoj praksi vrlo često se susreću dvofazna turbulentna strujanja tipa gas–čvrste čestice. Primeri ovog tipa strujanja se javljaju u sistemima pneumatičkog transporta granularnog, zrnastog i praškastog materijala, sistemima za klimatizaciju i provetravanje, procesnim i energetskim sistemima. Dvofazna strujanja karakterišu posebni kompleksi strujnih fenomena koji su posledica interakcija gasne i čvrste faze. U osnovi svih dvofaznih strujanja, transporta materije, količine kretanja ili toplote nalazi se turbulencija. Turbulencija je po prirodi nestacionarni, nelinearni, nepovratni, stohastički, trodimenzijski fenomen, i kao takva je “*otporna*” na egzaktni matematički tretman. Bez obzira što nam stoje na raspolaganju savremene numeričke metode za rešavanje diferencijalnih jednačina, osnovni problem u slučaju turbulentnih strujanja sastoji se u potrebi za veoma finom diskretizacijom polja fluida u prostoru i vremenu kako bi se numeričkom mrežom pokrila dovoljno gusto i najsitnija vrtložna struktura.

U ovom radu nakon uvodnih komentara i pregleda dosadašnjih istraživanja, posebna pažnja usmerena je ka poboljšanju turbulentnih modela za dvofazna strujanja tipa gas–čvrste čestice. Ograničenja su vezana za razmatranja samo izotermalnih tokova u pravim kanalima ne-kružnog poprečnog preseka, koji dominiraju u sistemima pneumatičkog transporta materijala.

Poseban fenomen strujanja koji je istraživan, vezan je za prave kanale ne-kružnog poprečnog preseka u režimu potpuno razvijenog turbulentnog strujanja.

U pravim kanalima ne-kružnog poprečnog preseka u režimu potpuno razvijenog turbulentnog strujanja indukuje se sekundarno strujanje, poznato kao Prandtl-ovo sekundarno strujanje druge vrste. Uticaj ovog vida strujanja je manji u odnosu na Prandtl-ovo sekundarno strujanje prve vrste, ali se ne može zanemariti posebno u slučaju dvofaznih strujnih tokova sa česticama relativno malog prečnika (tj. kod strujanja sa visokim Stokes-ovim brojem).

Pri numeričkom razmatranju dvofaznog strujanja tipa gas-čvrste čestice sa uzajamnim dejstvom faza pri definisanju matematičkog modela korišćena su dva pristupa. Obe faze se tretiraju kao kontinuum (Euler-ov pristup), prvi pristup, dok u drugom pristupu posebno se razmatra dinamika čvrstih čestica, što se svodi na održavanje njihovih trajektorija (Lagrange-ov pristup). Prisustvo čvrste faze se uzima u obzir preko dodatnih članova, koji definišu interfazne izvore ili ponore količine kretanja, materije ili toplote u jednačini održanja gasne faze. U radu je korišćen Lagranžev pristup u razmatranju disperzne faze.

U radu za rešavanje dvofaznog strujanja korišćen je pun Reynolds-ov naponski model turbulencije. Modelovanje turbulencije zavisi od koncepta turbulentnih modela. Naponski model podrazumeva simultano rešavanje transportne jednačine za turbulentne napone sa jednačinom kretanja u Reynolds-ovoj usrednjenoj formi. Pri vremenskom usrednjavanju Reynolds-ovih jednačina, gube se neke važne informacije, naime pojavljuju se korelacije fluktuacionih delova različitih fizičkih veličina drugog reda koje se modeluju u funkciji raspoloživih zavisno promenljivih veličina, kako bi matematički model bio određen. Pun Reynolds-ov naponski model podrazumeva da je svaka komponenta Reynolds-ovog napona određena iz sopstvene transportne diferencijalne jednačine, koje su modelovane.

Za validaciju navedenih modela turbulencije, razmatran je prav kanal kvadratnog poprečnog preseka, koji je korišćen u eksperimentalnoj studiji Po-a (1975) i Perkins-a (1970). Zadavanjem određenih graničnih uslova strujanja, mehanizma prenošenja materije, impulsa, toplote i geometrije izvršena je validacija turbulentnog modela. Na osnovu dobijenih rezultata, može se videti da je u velikoj meri ostvareno poklapanje eksperimentalnih i proračunskih rezultata,

te se može zaključiti da usvojeni modeli turbulencije daju dobre rezultate, i može se primeniti u daljoj analizi realnog problema dvofaznog strujanja.

Numeričke simulacije transportnih procesa, materije i količine kretanja pri turbulentnom dvofaznom strujnom toku tipa gas-čvrste čestice izvršene su korišćenjem vodećeg svetskog softverskog paketa iz oblasti numeričke mehanike fluida, prenosa toplote i materije: **PHOENICS 3.3.1**. Svi numerički eksperimenti izvršeni su za iste početne strujne uslove. Usvojena je jedinstvena uniformna mreža za sve numeričke eksperimente sa brojem ćelija u  $x^1 \equiv x$ ,  $x^2 \equiv y$  i  $x^3 \equiv z$  pravcima, respektivno 40x40x180. Prilikom podešavanja simulacija ispitivana je osetljivost rezultata na nivo rezolucije mreže a prikazana rešenja se odnose na mrežu koja je dala optimalne rezultate u relaciji vazduh-broj ćelija. Strujanje je posmatrano u pravom kanalu kvadratnog poprečnog preseka, dimenzije stranice 200 [mm] i dužine 18 [m]. Tokom simulacija, ispitivan je uticaj finoće numeričke mreže, a u radu su prikazani rezultati numeričke mreže najviše rezolucije iznad koje finoća mreže ne utiče na dobijene rezultate. Za potrebe komparativne analize monofaznog i dvofaznog strujanja u definisanom realnom problemu, izvršena je simulacija monofaznog strujanja sa istim graničnim uslovima kao i za simulaciju dvofaznog strujanja za različite tipove čestica, pri čemu je zadržana ista finoća numeričke mreže kanala.

Izvršenim numeričkim simulacijama dobijen je pouzdan naponski model turbulencije koji opisuje složenu fiziku turbulentne indukcije sekundarnog strujanja u pravim kanalima ne-kružnog poprečnog preseka kao i dobijanje adekvatnih interfaznih članova interakcije u sistemima dvofaznog strujanja tipa gas-čvrste čestice pri visokim Stokes-ovim brojem. Kretanje čestica je praćeno Lagrange-ovom metodom, tj. praćena je svaka čestica u proračunskom domenu duž svoje putanje uz određene pretpostavke usvojene na početku matematičkog modela: izostavljeni su međusobni sudari čestica i podrazumevani su elastični sudari sa zidovima kanala.

Praktičan doprinos rada je u dobijanju pouzdanog i modernog inženjerskog alata na bazi numeričkog pristupa proračuna složenih fenomena pneumatičkog transporta granularnog i zrnastog materijala u kanalima ne-kružnog poprečnog preseka.

## LITERATURA

- [1] Babić M., *Osnove turbomašina*, Naučna knjiga, Beograd, 1990.
- [2] Babić M., Stojković S., *Turbomašine-Teorija i matematičko modeliranje*, Prosveta, Beograd, 1997.
- [3] Batchelor, G.K., *The Theory of Homogeneous Turbulence*, The Syndics of the Cambridge University Press, London. 1956.
- [4] Белов А.И., Исаев А.с., *Моделированные Турбулентных Течений*, Санкт-Петербург, 2001.
- [5] Bird.B. R, Steward E.W., Lightfoot N.E., *Transport Phenomena*, Now York, 2001.
- [6] Bogdanović B., Milanović S., Bogdanović-Jovanović J., *Leteći pneumatički transport*, Mašinski fakultet Univrziteta u Nišu, Niš, 2009.
- [7] Bogdanović B., Milanović S., Bogdanović J., *Proračun pada pritiska u pravolinijskim deonicama cevovoda visokopritisnog letećeg pneumatičkog transporta*, PROCESING 2002, Subotica. 2002.
- [8] Bogdanović B., Bogdanović-Jovanović J., Milanović S., *Proračun pada pritiska transportnog vazduha pri izotermskom i neizotermskom letećem pneumatičkom transportu*, Simpozijum Termičara Srbije, Sokobanja. 2009.
- [9] Boussinesq J., *Essai sur la theorie des eaux courantes*, Mem.Pres. Div. Savants Acad.Sci., Paris, 1877. 23, p.46.
- [10] Бурсиан В.Р., *Пневматический транспорт на предприятиях пищевой, "Пищевая промышленность"*, Москва, 1964.
- [11] Chou P.Y., *On Velocity Correlation and the Solution of the Equations of Turbulent Fluctuation*, Quart. J. Appl. Math., 1945. Vol. 3, pp. 38-54.
- [12] Clift, Grace and Weber, *Bubbles, Drops and Particles*, Academic Press, London.1978.



- [13] Craft T.J., Launder, B.E., Suga, K., *Extending the applicability of eddy viscosity models through the use of deformation invariants and non-linear elements*, Proc. 5<sup>th</sup> Int. Symp. on Refined Flow Modelling and Turbulence Measurements, pp 125-132, Presses Ponts et Chaussees, Paris. 1993.
- [14] Crnojević C., *Transport čvrstih materijala fluidom*, Mašinski fakultet Univerzitet u Beogradu, Beograd, 2002.
- [15] Chung J.T., *Computation Fluid Dinamics*, University of Alabama in Huntsville. 2002.
- [16] Daly B.J. Harlow F.H., *Transport Equations in Turbulence*, Physic Fluids, 1970. Vol. 13, p 2634.
- [17] Davidov B.I., *K statističeskoj dinamike nesžimaemoi turbulentnoi židkosti*, Dokl. AN SSSR, 1961. Vol. 136, pp. 47-50.
- [18] Ferziger H.J., Perić M., *Computational Methods for Fluid dinamics*, Berlin 2002.
- [19] Gatski T.B. Speziale C.G., *On explicit algebraic stress models for complex turbulent flows*, J.Fluid Mech., 1993. Vol. 254, pp.59-78.
- [20] Gibson M.M. Youns B.A., *Calculation of swirling jets with a Reynolds stress closure*, The Physics of Fluids, 1986. Vol. 29, p. 38.
- [21] Hajdin G., *Mehanika fluida*, Građevinska knjiga, Beograd. 1983.
- [22] Hanjalić K., *Opšte jednačine transportnih procesa*, Mašinski fakultet Univerziteta u Sarejevu, Sarajevo. 1976.
- [23] Hanjalić K., Launder B.E., *Contribution towards a Reynolds Stress Closure for Low-Re-number Turbulence*, J. Fluid Mech. 1976. Vol. 74, p 593.
- [24] Hanjalić K. et all., *Reynolds Stress - Dissipation Method for high Re - number Turbulent Flows*, The 1980-81 AFOSR-HTTM-Stanford Conference on Complex Turbulent Flows. 1981.
- [25] Hanjalić K., *Dinamika stišljivog fluida*, Svjetlost, Sarajevo. 1978.
- [26] Hanjalić K., *Closure Models for Incompressible Turbulent Flows*, Department of Applied Physics, Delft University of Technology of the The Netherlands, 2005.
- [27] Hanjalić K., Haddžić I., Jakirlić S., *Modeling turbulent wall flows subjected to strong pressure variations*, Journal of Fluids Engineering, 1999., Vol. 121, p.57
- [28] Hanjalić K., *Turbulence and transport phenomena-Modeling and simulation*, Darmstadt, 2005.
- [29] Hinze J.O., *Turbulence*, McGraw-Hill, New York. 1959.
- [30] Ilić G., Radojković N., Stojanović I., *Termodinamika II*, Mašinski fakultet – Univerzitet u Nišu. Niš.1996.
- [31] Irvin H.P.A.H., *Measurements of a Self-Preserving Plane Wall Jet in a Positive Pressure Gradients*, J. Fluid Mech., 1973. Vol. 61, p 33.

- [32] Jevtović V., Mikašinović M., *Priručnik o transportu fluida* (sa katalogom), Privredni pregled, Beograd, 1971 Jones W.P., Launder B.E., *The Prediction of Laminarization with a Two-Equations on Turbulence*, Int. J. Heat Mass Transfer, 1972. Vol. 15. p 301.
- [33] Jovičić N., *Numeričko modeliranje turbulentnog strujanja fluida u hidrauličkim turbomašinama*, Doktorska disertacija, Mašinski fakultet, Univerzitet u Kragujevcu, 2000.
- [34] Калинушкин М.П., Орловский З.Э., Сегаль И.С., *Пнеуматический транспорт в строительстве*, Москва 1961.
- [35] Kesić P., *Osnove mehanike fluida*, Svjetlost, Sarajevo. 1988.
- [36] Kolmogorov A.N., *Equations of Turbulence Motion of an Incompressible Turbulent Fluid*, Izv. Akad. Nauk SSSR, 1942. Ser. Phys. VI, p. 56.
- [37] Krsmanović Lj., Gajić A., *Turbomašine-Teorijske osnove*, Mašinski fakultet, Beograd, 1992.
- [38] Krstić M., *Mehaničke operacije i uređaji procesnih postojenja*, Univerzitet u Sarajevu, Sarajevo, 1970.
- [39] Лабунцов Д.А., Ягов В.В., *Механика двухфазных систем*, Москва, 2000.
- [40] Lai Y.G., So R.M.C., *On near-wall turbulent flow modelling*, Journal Fluid Mechanics, 1990. Vol. 221, p. 641.
- [41] Lam C.K.G., Bremhorst K., *A modified form of the  $k-\epsilon$  model for predicting wall turbulence*, ASME J.Fluids Engng., 1987. Vol. 103, p. 456.
- [42] Launder B.E., Spalding D.B., *Mathematical Models of Turbulence*, Academic Press, London and New York. 1972.
- [43] Launder B.E., Reece G.J., Rodi, W., *Progress in the development of a Reynolds stress turbulence closure*, J. Fluid Mech., 1975. Vol.68, p. 537.
- [44] Launder B.E., *Turbulence transport models for numerical computation of complex turbulent flows*, Univ. California, Davis. 1978.
- [45] Лоцинский Л.Г., *Механика жидкости и газа*, Наука, Москва. 1970.
- [46] Lumley J.L., *A model for computation of stratified turbulent flows*, Proc. Int. Symp. on Stratified Flow, Novosibirsk. 1972.
- [47] Lumley J.L., Khajeh Nouri B.J., *Computational modelling of turbulent transport*, Adv. Geophys., 1974. Vol.18A.
- [48] Lumley J.L., *Computational modeling of turbulent flows*, Advances in Appl. Mechanics. 1978. Vol.18.
- [49] Malić D., *Termodinamika i termotehnika*, Građevinska knjiga, Beograd, 1975.
- [50] Matematski modeli turbulentnih transportnih procesa, Zbornik radova posvećen Akademiku Muhamedu Riđanoviću, Akademija Nauke i Umetnosti Bosne i Hercegovine, Sarajevo. 1984.

- [51] Millionščikov M.D., *Viroždenie odnorodnoi izotropnoi turbulentnosti v vjaskoi nesžimaemoi židskosti*, Dokl. AN SSSR 22, 1941. No 5, 235-240.
- [52] Myong H.K., Kasagi N., *Trans. ASME J. Fluids Eng.*, 1990. Vol. 122, pp 521-524.
- [53] Panton L. R., *Incompressible Flow*, Published by John Wiley and Sons, New York. 1984.
- [54] Patankar S.V., *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere (McGraw-Hill), New York, 1980.
- [55] Pozirikidis C., *Fluid Dynamics-Theoriz, Computation and Numerical Simulation*, University of California, San Diego.
- [56] *Пневмо–транспортное оборудование*, справочник, Машиностроение 1986.
- [57] Разумов М.И., *Псевдооживление и пневмотранспорт сыпучих материалов*, Москва, 1972.
- [58] Riđanović M., *Hidrodinamika–osnove*, Zavod za Hidrotehniku Građevinskog fakulteta u Sarajevu, Sarajevo. 1972.
- [59] Rodi W., *The prediction of freeturbulent boundary layers by use of a two-equation model of turbulence*, Ph.D. Thesis, University of London, Faculty of Engng. 1972.
- [60] Rodi W., *A new algebraic relations for calculating the Reynolds stresses*, ZAMM 56. 1976. T219.
- [61] Rotta J.C., *Statistische Theorie Nichthomogener Turbulenz*, Z. Phys. 1951. Vol.129, p. 547.
- [62] Rotta J.C., *Turbulent boundary layers in incompressible flow*, Prog. Aero Sci., v. Vol. 2 (Ed. Ferri, Kuchemann and Sterne).
- [63] Rangwala A.S., *Turbo-Machinery Dynamics*, Design and Operation, McGraw-Hill, New Yorker, 2005.
- [64] Saljnikov N.V., *Statika i kinematika fluida*, Izdavač: Mašinski fakultet Univerzitet u Beogradu, Beograd. 2003.
- [65] Saljnikov N.V., *Dinamika viskoznog nestišljivog fluida*, Mašinski fakultet Univerzitet u Beogradu, Beograd. 1969.
- [66] Shih T.H., Zhu J., Lumley J.L., *A realizable Reynolds-stress algebraic equation model*, NASA TM 105993. 1993.
- [67] Sijerčić M., *Matematičko modeliranje kompleksnih turbulentnih transportnih procesa*, Jugoslovensko društvo termičara - edicija: Naučno-istraživačka dostignuća, Beograd, 1998.
- [68] Sijerčić M., Stevanović Ž., *Eddy-Viscosity and Second-Moment Models of Free Premixed Flame*, J. Thermal Science, 1998. Vol. 2, pp. 13-31.

- [69] Speziale C.G., Sarkar S., Gatski T.B., *Modelling the presurre-strain correlation of turbulence, an invariant dynamical systems approach*, J.Fluid Mech., 1990. Vol. 227, pp. 245-272.
- [70] Speziale C.G., *J. Fluid Mech.* 1987. Vol. 178, pp 459-475
- [71] Stevanović Ž., *Numerički aspekti turbulentnog prenošenja impulsa i toplote*, Mašinski fakultet Univrziteta u Nišu, Niš, 2008.
- [72] Степанов Г.Ю., *Гидродинамика решеток турбомашин*, Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1962.
- [73] Stupar G., Tucaković D., živković T., Ivanović V., Živanović V., Komarov D., *3-D MODEL Strujanja čvrste i gasne faze u kolenu kanala iza razdvajajuća aerosmeše ventilatorskog mlina*, KGH, Zbornik radova, str. 57-63, Beograd 2012
- [74] Šašić M., *Transport fluida i čvrstih materijala cevima*, Naučna knjiga, Beograd, 1985.
- [75] Šašić M., *Proračun transport fluida i čvrstih materijala cevima*, Naučna knjiga, Beograd, 1990.
- [76] Урбан Я., *Пневматический транспорт*, Машиностроение, Москва, 1967.
- [77] Vasić S., *Primjena jedno i dvorazmjernih modela turbulencije na proračun neravnoteženih homogenih tokova fluida*, (mag.rad) Mašinski fakultet, Beograd. 1982.
- [78] Voronjec K., Obradović N., *Mehanika fluida*, Građevinska knjiga, Beograd, 1970.
- [79] Yap, C., *Turbulent heat and momentum transfer in recirculating and impinging flows*, PhD Thesis, Faculty of Technology, University of Manchester, 1987.
- [80] White M.F., *Fluid Mechanics*, University of Rhode Islabd, 2009.

# **P R I L O G 1**

**Izveštaj komisije za ocenu i odbranu doktorske  
disertacije**

**Наставно - научном већу  
Машинског факултета Универзитета у Нишу**

**ПРЕДМЕТ: Извештај комисије за оцену и одбрану докторске  
дисертације**

Одлуком Наставно - научног већа Машинског факултета у Нишу, број: 612-682-10/2013 од 15.10.2013. именовани смо за чланове Комисије за оцену и одбрану докторске дисертације кандидата мр Саше Милановића, дипл. инж. маш., под називом:

***"ИСТРАЖИВАЊЕ ТУРБУЛЕНТНОГ ДВОФАЗНОГ СТРУЈАЊА У  
ПРАВИМ КАНАЛИМА ПНЕУМАТСКОГ ТРАНСПОРТА ГРАНУЛАРНОГ  
МАТЕРИЈАЛА НЕКРУЖНОГ ПОПРЕЧНОГ ПРЕСЕКА"***

Након прегледа докторске дисертације, сагласно Закону о високом образовању и Статуту Машинског факултета Универзитета у Нишу, комисија подноси следећи:

**И З В Е Ш Т А Ј**

**1. ОСНОВНИ БИОГРАФСКИ ПОДАЦИ О КАНДИДАТУ**

**1.1. Лични подаци:**

Име (име оца) презиме:	Саша (Мирко) Милановић
Датум и место рођења:	04.11.1962. год.
ЈМБГ:	0411962730045
Пол:	мушки
Адреса становања:	Бранка Крсмановића 4/46, Ниш
Страни језик:	руски
Брачни и породични статус:	ожењен, отац двоје деце.

**1.2. Подаци о досадашњем образовању:**

Основну школу "Васа Албанац" завршио је у селу Округлици и Гушевцу 1977. год. са одличним успехом.

Средњу машинску техничку школу – смер "конструктор техничар" завршио је 1981. год. са одличним успехом као носилац "Аласове" дипломе.

Машински факултет у Нишу уписао је 1982/83. год. Основне студије завршио је са просечном оценом 8,49 (осам и 49/100). Дипломирао је 1987. год. на смеру Енергетика оценом 10 (десет). У години дипломирања проглашен је за студента генерације на Машинском факултету у Нишу и награђен је од стране факултета и Универзитета Повељом и ручним сатом.

Након завршених основних студија Саша Милановић ради у Електронској индустрији у ООУР-у "КЛИМА УРЕЂАЈИ" у Нишу на радном месту конструктора. Истовремено уписује последипломске студије на Машинском факултету у Нишу смер Хидроенергетике школске 1987/88. год. и све предвиђене испите наставним програмом и планом положио је просечном оценом 9,63 (девет 63/100). Магистарски рад под називом "Прорачун просторног струјања кроз аксијалне турбомашине као комплекс два димензијска струјања" одбранио је 1996. год.

Као студент учествовао је у извођењу лабораторијских вежби из *Физике*. За асистента-приправника на Машинском факултету у Нишу на *Катедри за хидроенергетику* изабран је 1988. год. за предмет: *Компресори и вентилатори*. За асистента на истом факултету биран је 1997. год. за предмет: *Компресори и вентилатори*, за ужу научну област *Теоријска и примењена механика флуида*. Као асистент-приправник а касније и као асистент био је ангажован у извођењу вежби из следећих предмета: *Компресори и вентилатори, Транспорт цевима, Хидропреносници снаге, Транспорт у струји флуида, Хидрауличке компоненте, Уљна хидраулика и пнеуматика, Хидростатички преносници снаге, Хидропнеуматски елементи у мехатроници, Пројектовање хидрауличких и пнеуматичких система, Системи водоснабдевања, Основи хидрауличног и пнеуматичког транспорта материјала, Елементи уљне хидраулике и пнеуматике, Пумпне станице и Техничког цртања*, и прегледу графичких радова из *Механике I*.

Кандидат је коаутор два Универзитетска уџбеника: "*КОМПРЕСОРИ - Термодинамика процеса сабијања гасова*" и "*ЛЕТЕЋИ ПНЕУМАТИЧКИ ТРАНСПОРТ*", аутор је или коаутор 34 научних и стручних радова објављених у часописима или изложени на домаћим или међународним конференцијама. Као истраживач учествовао је у реализацији 10 научно-истраживачких пројеката.

Радови кандидата публиковани у часописима или изложени на домаћим, међународним конференцијама или објављени у националним часописима, су:

- Spasić Ž., Milanović S., Šušteršič V., Nikolić B., ***Low-pressure reversible axial fan with straight profile blades and relatively high efficiency***, Thermal Science (2012), Vol. 16, Suppl. 2 pp. S593-S603, (M23=3.0, R52=3.0).
- ♦ Jovanović M., Milenković D., Petrović G., Milić P., ***Milanović S., Theoretical and experimental analysis of dynamik processes of pipe branch for supply water to the pelton turbine***, Thermal Science (2012), Vol. 16, Suppl. 2 pp. S612-S629, (M23=3.0, R52=3.0).

- ◆ Bogdanović B., Bogdanović-Jovanović J., **Milanović S.**, Spasić Ž., *Pressure drop calculation of transport air in rectilinear pipeline sections in the high pressure pneumatic conveying*, The second international conference-Mechanical Engineering in the XXI Century (2013), Conference proceedings, pp. 159-162, (M33=1.0, R54=1.0).
- ◆ Bogdanović B., Bogdanović-Jovanović J., **Milanović S.**, *Calculation of operating parameters for different numbers of revolutions, considering the influence of Reynolds number*, SIMTERM (2011), (M33=1.0, R54=1.0)
- ◆ Bogdanović B., Bogdanović-Jovanović J., Spasić Ž., **Milanović S.**, *Reversible axial fan with blades created of slightly distorted panel profiles*, Fakta Universitatis, series: Mechanical Engineering, Vol. 7, N°1, (2009), pp. 23-36. (M53=1.0, R63=1.0).
- ◆ Bogdanović B., Bogdanović-Jovanović J., **Milanović S.**, *Proračun pada pritiska transportnog vazduha pri izotermnom i neizotermnom letećem pneumatičkom transportu*, SIMTERM (2009), Zbornik radova, (M33=1.0, R54=1.0)
- ◆ Bogdanović B., **Milanović S.**, *Solution of the direct problem in theory of flow through straight plane profile cascade by using conformal mapping into band  $-\pi/2 \leq \text{Im}Z \leq \pi/2$* , Fakta Universitatis, series: Mechanical Engineering, Vol. 1, N°7, (2000), pp. 809-816, (M53=1.0, R63=1.0).
- ◆ Bogdanović B., **Milanović S.**, Bogdanović-Jovanović J., *Proračun pada pritiska u pravolinijskim deonicama cevovoda visokopritisnog letećeg pneumatičkog transporta*, Procesing (2002), Subotica, str. 28-31, (M33=1.0, R54=1.0).
- ◆ Bogdanović B., **Milanović S.**, *The basic problems in the realization of the numerical program for prediction of potential flow through straight plane cascade of profiles by conformal mapping of flow into band*, II International Symposium "Contemporary Problems of Fluid Mechanics", Beograd (1996), Conference proceedings, pp. 193-196, (M33=1.0, R54=1.0).
- ◆ Bogdanović B., **Milanović S.**, *Određivanje rasporeda brzine po konturi profila prave ravanske rešetke konformnim preslikavanjem strujanja na pojas  $-\pi/2 \leq \text{Im}Z \leq \pi/2$  i problemi koji su pratili realizaciju programa za rešavanje zadatka na računaru*, XXII Jugoslovenski kongres teorijske i primenjene mehanike, Vrnjačka Banja (1997), Zbornik radova, str. 57-62, (M33=1.0, R54=1.0).
- ◆ Bogdanović B., Bogdanović-Jovanović J., **Milanović S.**, *Matematički model simulacije rada mreže navodnjavanja kišenjem*, SIMTERM (2005), Zbornik radova, (M33=1.0, R54=1.0)
- ◆ Milenković D., Boričić Z., Stamenković Ž., **Milanović S.**, *Energetska efikasnost pumpnih postrojenja za povišenje pritiska*, HIPNEF '09, Vrnjačka Banja (2008), Zbornik radova str. 219-226, (M63=0.5, R65=0.5).



## 2. АНАЛИЗА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Докторска дисертација кандидата мр Саше М. Милановића, дипломираног инжењера машинства, започиње са две стране наслова на српском и енглеском језику, поруком, предговором, резимеом на српском и енглеском језику, након чега следи садржај дисертације на две странице а потом и списак ознака на четири странице. Основни текст дисертације изложен је на 114 страница формата А4, подељен у 8 поглавља и садржи 66 једначина и израза, 63 нумерисане графичке илустрације и 7 нумерисаних табела. На крају рада на 5 страница наведена је цитирана литература са 80 библиографских јединица. Докторска дисертација је урађена у MS Word текст процесору.

Следећи предмет и циљеве рада, садржај основног текста докторске дисертације изложен је у оквиру следећих поглавља:

1. Увод
  2. Преглед досадашњих истраживања
  3. Основни закони турбуленције
  4. Физички модел
  5. Математички модел
  6. Валидација модела
  7. Реалан проблем
  8. Закључак
- Литература

### Рад садржи:

- ◆ Анализу могућих начина транспорта материјала, са посебним освртом на пнеуматички транспорт зрнастог, грануларног и прашкастог материјала у каналима не-кружног попречног пресека;
- ◆ Основне карактеристике турбулентних двофазних токова који представљају основу свих процеса транспорта материје са посебним освртом на секундарна струјања у равни попречног пресека канала;
- ◆ Детаљну анализу досадашњих истраживања моделирања турбулентних транспортних процеса и решавања основних усредњених једначина конзервације у општем парцијалном диференцијалном облику;
- ◆ Поступак конзервације система парцијалних диференцијалних једначина и њихове генерализације;
- ◆ Анализу генерисања секундарног тока друге врсте у потпуно развијеном турбулентном току у правим каналима квадратног попречног пресека;
- ◆ Дефинисање математичког модела гасне и чврсте фазе која је присутна у већини техничких процеса транспорта;
- ◆ Валидацију математичког модела са расположивим и доступним резултатима експерименталних истраживања;

- ◆ Анализу реалног транспорта чврстих честица материјала у правим каналима не-кружног попречног пресека при развијеном турбулентном струјању;
- ◆ Анализу добијених резултата и доношење одговарајућих закључака на основу извршених нумеричких истраживања.

**У првом поглављу** које представља уводни део докторске дисертације наведени су основни видови транспорта материјала. Посебна пажња је посвећена транспорту чврстог материјала флуидом односно пнеуматичком транспорту растреситог материјала који представља двофазно струјање типа гас-чврсте честице. Дате су основне карактеристике пнеуматичког транспорта: настанак, поделе, начини извођења, предности, недостаци и области његове примене. Основни узрок у расветљавању сложених феномена транспортних процеса двофазног струјања у каналима квадратног пресека који доминирају у инжењерској пракси је турбуленција. Познато је да у развијеном турбулентном току долази до индуковања струјања у равни попречног пресека канала. Ова струјања су позната као секундарна струјања прве и друге врсте. Утицај ових струјања код двофазног струјања није занемарљив па је посебна пажња посвећена секундарном струјању друге врсте у турбулентним моделима.

**У другом поглављу** наведена су досадашња истраживања у области директног нумеричког решавања транспортних једначина за турбулентне токове који углавном доминирају у транспортним процесима материјала. Сложени ефекти турбулентних интеракција апроксимативно се математички симулирају моделима турбуленције којима се постиже затварање усредњених једначина конзервације. Наведени су од првих идеја симулација *Колмогоров-а*, *Давидов-а*, па све до симулација секундарног тока друге врсте *Launder-а*, *Ying-а*, *Хањалића*, *Demuren-а* и *Rodi-а*.

**Треће поглавље** дисертације посвећено је извођењу основних диференцијалних једначина конзервације за произвољно уочену контролну запремину. Најпре је приказан поступак добијања локалне диференцијалне једначине за произвољну запремину. На основу локалне диференцијалне једначине конзервације изведене су: једначина континуитета, једначина кретања и енергетска једначина. Дата је генерализација парцијалних диференцијалних једначина које описују процесе транспорта материје, количине кретања и енергије.

**У четвртном поглављу** дата је формулација физичког модела гасне фазе. Описана је физика генерисања секундарног тока и то секундарног тока друге врсте у правим каналима не-кружног попречног пресека при развијеном турбулентном струјању. Показано је да је феномен постојања секундарног тока у не-кружним каналима последица турбулентног струјања, односно постојања градијената турбулентних (*Reynolds-ovih*) напона. Ако се посматра некомп्रेसибилно, стационарно потпуно развијено турбулентно струјање, у транспортној једначини за компоненту турбулентне вртложности изражен је утицај нормалних и тангенцијалних турбулентних напона. Уколико је већа разлика између турбулентних

чланова у једначини за турбулентну вртложност, механизам који генерише узроке појаве секундарног тока друге врсте, чији се утицај не може занемарити, посебно у случају двофазних система код којих су чврсте честице малог пречника, је израженији. При разматрању двофазних система струјања са међудејством фаза, при дефинисању модела описана су два приступа: *Euler-ov* и *Lagrange-ov*. *Euler-ovim* концептом се решава гасна фаза, док се *Lagrange-ov* концепт користи за решавање чврсте фазе. Описано је решавање задатка двофазног струјања које се спроводи итеративним поступком у четири итеративна корака до постизања критеријума конвергентности решења. У првом кораку се решава само гасна фаза без присуства дисперзне фазе, у другом се гасна фаза "замрзне" и у струјном пољу гасне фазе посматра се кретање честица којима се одређују путање, односно интерфазни чланови интеракције, да би се у следећем кораку поново решавало струјно поље гасне фазе, али сада са интерфазним члановима из претходног корака и све тако до постизања конвергентности решења.

**У петом поглављу** дефинисан је математички модел гасне и чврсте фазе. Временским усредњавањем једначина одржања појављују се додатни непознати флукуациони чланови различитих величина (*Reynolds-ovi* турбулентни напони, материјални или топлотни флукс) које треба одредити на одговарајући начин како би математички модел био једнозначно одређен. Математички модел гасне фазе се формира за пун напонски модел турбуленције, што значи да је свака компонента *Reynolds-ovog* напона одређена из сопствене транспортне диференцијалне једначине. Ове једначине нису егзактне већ моделоване у функцији расположивих зависно променљивих величина. Основни принцип који је коришћен за добијање ових једначина је да се корелације до другог реда задржавају у изворном облику а да се чланови који садрже корелације реда три и више моделирају градијентном методом. У процесу добијања моделских једначина турбуленције испитује се допринос сваког члана са циљем квантификације доприноса сваког члана понаособ. Пун напонски модел турбуленције подразумева симултано решавање моделоване једначине за *Reynolds-ove* напоне са једначином кретања у усредњеној форми. Затварање напонског модела за *Reynolds-ove* напоне извршено је додатном транспортном диференцијалном једначином за дисипацију кинетичке енергије турбуленције.

Присуство чврстих честица ствара аеродинамичке отпоре који условљавају промену количине кретања обеју фаза и математички модел чврсте фазе је базиран на *Lagrange-ovom* концепту. На основу овог концепта одређене су трајекторије чврстих честица, њихов импулс и промена брзине. Трајекторије чврстих честица одређиване су из једначине кретања за сваку уочену групу честица, док су брзине одређиване из једначине импулса при чему је претпостављено да су силе које делују управно на правац основног тока односно на правац кретања честица, уравнотежене. Међусобни утицај између фаза дат је интерфазним чланом који представља разлику између силе реакције отпора која изазива кретање честица и силе отпора кретању честица кроз гасну фазу.

**Шесто поглавље** дисертације посвећено је валидацији математичког модела са резултатима коришћеним у експерименталним истраживањима *Po-a* и *Perkins-a*.

У **седмом поглављу** решаван је реалан проблем: транспорт чврстих честица кварца, пепела и брашна. Изабран је канал квадратног попречног пресека  $0,2 \times 0,2\text{m}$  и дужине  $18\text{m}$  како би дошло до успостављања потпуно развијеног турбулентног струјања код кога је профил брзине у попречном пресеку устаљен. У том случају може доћи до формирања секундарног струјања у равни попречног пресека канала. Задатак је решаван у софтверском пакету из области нумеричке механике флуида, преноса масе и топлоте *PHOENICS 3.3.1*. На основу добијених резултата брзина честица види се да брзине расту и теже брзини основне струје али је не достижу. Највећа је брзина честица у средини канала где је и брзина основне струје највећа а најмања је брзина честица у рогљевима канала.

### 3. ЗАКЉУЧАК И ПРЕДЛОГ

На основу прегледа докторске дисертације и анализе постигнутих резултата, чланови Комисије за оцену и одбрану докторске дисертације констатују следеће:

- ◆ Поднети рад у потпуности одговара теми прихваћеној од стране Наставно-научног већа Машинског факултета Универзитета у Нишу.
- ◆ Кандидат поседује знања из различитих области потребних за израду докторске дисертације.
- ◆ Кандидат је израдом докторске дисертације испољио висок степен научног прилаза проблематици у области теоријског и нумеричког истраживања из области теоријске и примењене механике флуида.
- ◆ Кандидат је показао потребан ниво самосталности у истраживању и способност да изврши синтезу научних знања у циљу реализације постављеног задатка.
- ◆ Рад је адекватно конципиран, технички квалитетно урађен и омогућава прегледно праћење изложеног садржаја и добијених резултата истраживања.
- ◆ Резултати истраживања имају задовољавајућу тачност и велики степен општости.
- ◆ Остварени резултати пружају широке могућности за даља теоријска и експериментална истраживања и представљају вредан допринос у разматрању пнеуматичког транспорта материјала.

На основу свега напред изложеног, чланови Комисије за оцену и одбрану докторске дисертације са задовољством предлажу Наставно-научном већу Машинског факултета Универзитета у Нишу, да рад кандидата мр Саше М. Милановића, дипломираног инжењера машинства, под називом:

**"ИСТРАЖИВАЊЕ ТУРБУЛЕНТНОГ ДВОФАЗНОГ СТРУЈАЊА У ПРАВИМ КАНАЛИМА ПНЕУМАТСКОГ ТРАНСПОРТА ГРАНУЛАРНОГ МАТЕРИЈАЛА НЕКРУЖНОГ ПОПРЕЧНОГ ПРЕСЕКА"**

прихвати као докторску дисертацију и кандидата позове на усмену јавну одбрану.

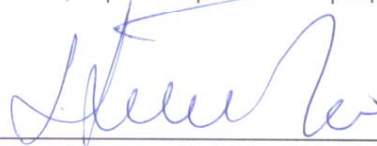
У Нишу и Београду,  
децембар 2013. год.

Чланови комисије:



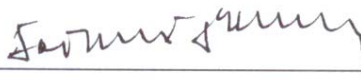
---

**др Градимир Илић,**  
редовни професор Машинског факултета Универзитета у Нишу  
(ужа научна област: Термотехника, термоенергетика и процесна техника)



---

**др Жарко Стевановић,**  
научни саветник Института за нуклеарне науке Винча  
(ужа научна област: Теоријски и примењени процеси преноса топлоте и масе)



---

**др Божидар Богдановић,**  
редовни професор Машинског факултета Универзитета у Нишу  
(ужа научна област: Теоријска и примењена механика флуида)