



УНИВЕРЗИТЕТ У КРАГУЈЕВЦУ  
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Татјана Миладиновић

**УКЉУЧИВАЊЕ НЕНУЛТОГ ИМПУЛСА ЕЛЕКТРОНА У ПРОЦЕНУ  
БРЗИНЕ ПРЕЛАЗА У АМОСОВ-ДЕЛОНЕ-КРАЈНОВ ТЕОРИЈИ ЗА  
СЛУЧАЈ НИСКОФРЕКВЕНТНОГ ЛИНЕАРНО И ЦИРКУЛАРНО  
ПОЛАРИЗОВАНОГ ЛАСЕРСКОГ ПОЉА**

Докторска дисертација

Крагујевац, 2014.

<b><i>I. Аутор</i></b>
Име и презиме: Татјана Миладиновић
Датум и место рођења: 24.06.1977. године, Крагујевац
Садашње запослење: Истраживач сарадник на Институту за физику ПМФ- а у Крагујевцу
<b><i>II. Докторска дисертација</i></b>
Наслов: Укључивање ненулног импулса електрона у процену брзине прелаза у Амосов-Делоне-Крајнов теорији за случај нискофреквентног линеарно и циркуларно поларизованог ласерског поља
Број страница: 136
Број слика: 47
Број библиографских података: 96
Установа и место где је рад израђен: ПМФ, Крагујевац
Научна област (УДК): 535:539
Ментор: Др Владимир Ристић, ПМФ Крагујевац
<b><i>III. Оцена и одбрана</i></b>
Датум пријаве теме: 12.09.2012.
Број одлуке и датум прихватања докторске дисертације:
Комисија за оцену подобности теме и кандидата: <ul style="list-style-type: none"> <li>❖ Др Владимир Ристић, редовни професор Природно математичког факултета Универзитета у Крагујевцу, ужа научна област: Атомска, молекулска и оптичка физика;</li> <li>❖ Др Наташа Недељковић, редовни професор Физичког факултета Универзитета у Београду, ужа научна област: Физика атома и молекула;</li> <li>❖ Др Виолета Петровић, доцент Природно математичког факултета Универзитета у Крагујевцу, ужа научна област: Атомска, молекулска и оптичка физика;</li> </ul>
Комисија за оцену докторске дисертације: <ul style="list-style-type: none"> <li>❖ Др Владимир Ристић, редовни професор Природно математичког факултета Универзитета у Крагујевцу, ужа научна област: Атомска, молекулска и оптичка физика;</li> <li>❖ Др Наташа Недељковић, редовни професор Физичког факултета Универзитета у Београду, ужа научна област: Физика атома и молекула;</li> <li>❖ Др Виолета Петровић, доцент Природно математичког факултета Универзитета у Крагујевцу, ужа научна област: Атомска, молекулска и оптичка физика;</li> </ul>
Комисија за одбрану докторске дисертације: <ul style="list-style-type: none"> <li>❖ Др Владимир Ристић, редовни професор Природно математичког факултета Универзитета у Крагујевцу, ужа научна област: Атомска, молекулска и оптичка физика;</li> <li>❖ Др Наташа Недељковић, редовни професор Физичког факултета Универзитета у Београду, ужа научна област: Физика атома и молекула;</li> <li>❖ Др Виолета Петровић, доцент Природно математичког факултета Универзитета у Крагујевцу, ужа научна област: Атомска, молекулска и оптичка физика;</li> </ul>
Датум одбране дисертације:

## Захвалнице

Ова докторска дисертација је урађена на Катедри за теоријску физику Института за физику Природно-математичког факултета Универзитета у Крагујевцу.

Посебну захвалност желим да изразим свом ментору професору др Владимиру Ристићу на несебичној подршци и непроцењивој помоћи пруженој приликом израде ове дисертације.

Такође желим да се захвалим члановима комисије, доценту др Виолети Петровић која ми је драгоценим саветима помогла у току израде овог рада, као и професорки др Наташи Недељковић на свесрдној помоћи и подршци.

*Мојој породици, Аци и Нађи. Велико хвала на стрпљењу,  
разумевању и подрици.*

## Списак најважнијих физичких величина

$E_i$  - енергија јонизације

$F$  - јачина електричног поља ласера

$I$  - интензитет ласерског поља

$\gamma$  - Келдишов параметар адијабатичности

$Z$  - степен јонизације

$n^*$  - ефективни квантни број

$W$  - брзина прелаза

$p$  - почетни импулс јонизованог електрона

$U_p$  - пондеромоторни потенцијал

$\sigma$  – генерализовани ефикасни пресек

$Y$  – принос јона

## Списак слика

**Слика 1.1.** Шематски приказ (а) прелаза у линеарној оптици, (б) хармоник друге генерације.

**Слика 1.2.** Шема ласера: 1. Ласерски медијум (језгро, активна средина), 2. Енергија за побуђивање медијума, 3. Рефлектујуће огледало, 4. Рефлектујуће огледало, 5. Ласерски зрак.

**Слика 1.3.** Развој ласера великих снага.

**Слика 1.4.** Дужина трајања пулса.

**Слика 1.5.** Поларизација електромагнетног таласа: (а) линеарна, (б) циркуларна, (в) елиптична.

**Слика 1.6.** Линеарно поларизована светлост (а), циркуларно поларизована светлост (б).  $\vec{E}_x$  (плава линија) и  $\vec{E}_y$  (зелена линија) су пројекције светлосног вектора  $\vec{E}$  (црвена линија) на вертикалну и хоризонталну компоненту, респективно.

**Слика 1.7.** Положај електрона (означен црном тачкицом) у атому, у свом основном стању (лево) и побуђеном стању (десно). Кругови представљају различита стања са тачно одређеном енергијом. Хоризонталне линије представљају различите енергетске нивое.

**Слика 1.8.** Шематски приказ могућих интеракције фотона са атомом.

**Слика 1.9.** Енергетски спектар електрона расејаних на атомима аргона (а) без и (б) у присуству ласерског поља.

**Слика 1.10.** Спектар јонизованих електрона добијених јонизацијом изнад прага.

**Слика 1.11.** Мултифотонска јонизација атома: (а) нерезонантна мултифотонска јонизација, (б) резонантна мултифотонска јонизација.

**Слика 1.12.** Шематски приказ јонизације изнад прага.

**Слика 1.13.** Спектар фотоелектрона добијених у процесу јонизације изнад прага за два различита интензитета ласерског поља (а)  $I = 2,2 \times 10^{12} \text{ W/cm}^2$  и (б)  $I = 1,1 \times 10^{13} \text{ W/cm}^2$ .

**Слика 1.14.** Тунелна јонизација.

**Слика 1.15.** Јонизација потискивањем баријере.

**Слика 1.16.** Зависност броја детектованих јона хелијума (He) од интензитета ласерског поља при двострукој јонизацији. Са (+) је представљен број једноструко јонизованих атома хелијума, док са (×) број двоструко јонизованих. Испрекиданом линијом је представљен теоријски резултат који укључује само секвенцијалну јонизацију. Пуна линија базирана је на несеквенцијалној јонизацији.

**Слика 1.17.** Модел три корака (three step model).

**Слика 2.1.** Тунеловање електрона кроз потенцијалну баријеру.

**Слика 2.2.** Шематски приказ тунелне и јонизације изнад прага. Црна линија представља Кулонов потенцијал без присуства поља. Када је поље укључено долази до модификовања Кулоновог потенцијала (црвена испрекидана линија). Процес тунеловања представљен је зеленом стрелицом. Када је спољашње поље довољно јако да потисне баријеру долази до јонизације преко баријере (плава тачкаста линија).

**Слика 2.3.** Принос јона  $\text{Xe}^+$  и  $\text{Xe}^{2+}$  у функцији од интензитета поља  $\text{CO}_2$  ласера. Пуна линија представља резултате рачунате коришћењем АДК теорије.

**Слика 3.1.** Зависност брзине прелаза од параметра  $\gamma$ , у случају (а) тунелне и (б) мултифотонске јонизације. Вредност параметра  $\gamma$  се мења у интервалу од 0,1 до 10.

**Слика 3.2.** Зависност брзине прелаза од параметра  $\gamma$ , у случају (а) тунелне и (б) мултифотонске јонизације. Вредност параметра  $\gamma$  у интервалу од 0 до 1.

**Слика 3.3.** Три репрезентативне  $\gamma$  вредности су представљене:  $\gamma = 0,1$  (тунелни режим),  $\gamma = 1$  (гранична зона) и  $\gamma = 10$  (мултифотонски режим) у функцији интензитета  $I$  и фреквенције ласерског поља  $\omega$ .

**Слика 3.4.** Зависност брзине прелаза од Келдишовог параметра  $\gamma$ . Пуна линија представља мултифотонску док испрекидана тунелну јонизацију.

**Слика 3.5.** Графички приказ параболичних координата. У  $xz$  – равни, за  $\eta = \text{const}$  пуна линија, док је за  $\xi = \text{const}$  испрекидана линија.

**Слика 3.6.** Брзина прелаза  $W_{\text{PCADK}}^{\text{lin}}$  у зависности од интензитета ласерског поља  $I$  и параболичне координате  $\eta$ .

**Слика 3.7.** Зависност брзине прелаза  $W_{\text{PCADK}}^{\text{lin}}$  од параболичне координате  $\eta$ .

**Слика 3.8.** Ефективни потенцијал у смеру поља. Непертурбовани Кулонов потенцијал и потенцијал поља су приказани одвојено.

**Слика 3.9.** Приказ  $V_\xi$  и  $V_\eta$  потенцијала. „uphill“ потенцијал  $V_\xi$ , када је спољашње поље укључено ( $F > 0$ ), представља само везана стања, док „downhill“ потенцијал  $V_\eta$  представља баријеру кроз коју електрон може да тунелује.

**Слика 3.10.** Представљен је потенцијал  $V_\eta$ . До тунеловања долази за довољно мале интензитета поља  $F$ , и за вредности  $\eta_1$  које су дате апроксимацијом  $\eta_1 \simeq 1/F$ . Вредности  $\eta_0$  се налазе унутар баријере где важи  $1 \ll \eta_0 \ll 1/F$ .

**Слика 3.11.** Зависност импулса  $p(\eta)$  од параболичне координате  $\eta$  која се мења у интервалу од 185 до 586.

**Слика 3.12.** Брзине прелаза  $W_{\text{CADK}}^{\text{lin}}$  и  $W_{\text{PCADK}}^{\text{lin}}$  цртане на истом графику. Скала за интензитет ласерског поља није линеарна.

**Слика 3.13.** Пикови брзине прелаза  $W_{CADK}^{lin}$  и  $W_{pCADK}^{lin}$  цртани на истом 3Д графику, (а) представљени су само максимуми, нижа крива представља  $W_{pCADK}^{lin}$ , (б) у већем осегу него на слици (а) једва видљива нижа површина представља  $W_{pCADK}^{lin}$ .

**Слика 3.14.**  $W_{CADK}^{lin}$  (наранџаста) и  $W_{pCADK}^{lin}$  (плава) у зависности од интензитета ласерског поља  $I$ .

**Слика 3.15.** Зависност брзине прелаза  $W_{ADK}^{cir}$  и  $W_{pADK}^{cir}$  од интензитета ласерског поља и ненулног почетног импулса, (а) на целом посматраном опсегу интензитета ласерског поља, (б) и (ц) приказани су само максимуми на два различита опсега интензитета ласерског поља.

**Слика 3.16.** Дводимензионални график брзине прелаза  $W_{ADK}^{cir}$  и  $W_{pADK}^{cir}$ , (а) за нулти импулс (црвена линија) и ненулни импулс (плава линија) за фиксирано  $\eta = 190$ , (б) за нулти импулс (црвена линија) и ненулни импулс (плава линија) за фиксирано  $I = 1,1 \times 10^{14} \text{ W/cm}^2$ .

**Слика 3.17.** График брзине прелаза  $W_{ADK}^{cir}$  и  $W_{pADK}^{cir}$  у зависности од интензитета ласерског поља, када је почетни импулс електрона једнак нули и за ненулни почетни импулс електрона респективно; (а)  $\eta$  је фиксирано на 190 (2Д график), (б) променљиво  $\eta$  (3Д).

**Слика 3.18.** Брзина прелаза,  $W_{lin,p}^{ADK}$  и  $W_{lin,p,U_p}^{ADK}$  у зависности од интензитета поља,  $I$ , за (а)  $Z = 1$ ,  $W_{lin,p}^{ADK} \text{ max}$  за интензитет поља  $I = 2 \times 10^{13} \text{ W/cm}^2$  и  $W_{lin,p,U_p}^{ADK} \text{ max}$  за интензитет поља  $I = 2,2 \times 10^{13} \text{ W/cm}^2$ , (б)  $Z = 2$ ,  $W_{lin,p}^{ADK} \text{ max}$  за интензитет поља  $I = 1 \times 10^{13} \text{ W/cm}^2$  и  $W_{lin,p,U_p}^{ADK} \text{ max}$  за интензитет поља  $I = 1,75 \times 10^{13} \text{ W/cm}^2$ . Вредност за  $\eta$  је фиксирана на 190.

**Слика 3.19.** Брзина прелаза,  $W_{cir,p}^{ADK}$  и  $W_{cir,p,U_p}^{ADK}$  у зависности од интензитета поља,  $I$ , за (а)  $Z = 1$ ,  $W_{cir,p}^{ADK} \text{ max}$  за интензитет поља  $I = 7 \times 10^{12} \text{ W/cm}^2$  и  $W_{cir,p,U_p}^{ADK} \text{ max}$  за интензитет поља  $I = 1,4 \times 10^{13} \text{ W/cm}^2$ , (б)  $Z = 2$ ,  $W_{cir,p}^{ADK} \text{ max}$  за интензитет поља  $I = 4 \times 10^{12} \text{ W/cm}^2$  и  $W_{cir,p,U_p}^{ADK} \text{ max}$  за интензитет поља  $I = 1 \times 10^{13} \text{ W/cm}^2$ . Вредност за  $\eta$  је фиксирана на 270.

**Слика 3.20.** Принос јона,  $Y_{lin}^{ADK}$ ,  $Y_{lin,p}^{ADK}$  и  $Y_{lin,p,U_p}^{ADK}$  у зависности од интензитета поља,  $I$ , за (а)  $Z = 1$ , (б)  $Z = 2$ . Вредност за  $\eta$  је фиксирана на 190.

**Слика 3.21.** Принос јона,  $Y_{cir}^{ADK}$ ,  $Y_{cir,p}^{ADK}$  и  $Y_{cir,p,U_p}^{ADK}$  у зависности од интензитета поља,  $I$ , за (а)  $Z = 1$ , (б)  $Z = 2$ . Вредност за  $\eta$  је фиксирана на 270.

**Слика 3.22.** Брзина прелаза (а)  $W$ , (б)  $W_{U_p}$ , (ц)  $W_p$  у функцији интензитета ласерског поља  $I$ .

**Слика 3.23.** Генерализовани ефикасни пресеци: (а)  $\sigma$  без корекција-рачунато преко  $W$ , (б)  $\sigma_{U_p}$  са укљученим пондеромоторним потенцијалом-рачунато преко  $W_{U_p}$ , (в)  $\sigma_p$  са корекцијом за ненулни почетни импулс електрона-рачунато преко  $W_p$ .



**Слика 3.24.** Зависност брзине прелаза од (а) броја апсорбованих фотона за фиксирану вредност интензитета ласерског поља  $I = 2 \times 10^{13} \text{ W/cm}^2$ , (б) броја апсорбованих фотона и интензитета ласерског поља.

**Слика 3.25.**  $E_{max}$  и  $E_{maxApp}$  максималног броја избачених електрона атома калијума:  $E_i^K = 4,3407 \text{ eV}$ ; пуна линија представља  $E_{max}$  док испрекидана линија представља  $E_{maxApp}$  (а) и (б).

**Слика 3.26.**  $E_{max}$  и  $E_{maxApp}$  максималног броја избачених електрона атома ксенона:  $E_i^{Xe} = 12,5 \text{ eV}$ ; пуна линија представља  $E_{max}$  док испрекидана линија представља  $E_{maxApp}$  (а) и (б)

**Слика 3.27.** Цилиндрична јонизациона комора

## Списак табела

**Табела 1.** Интензитети ласерког поља на којима се уочавају максимуми брзина прелаза

**Табела 2.** Дужина баријере кроз коју електрон тунелује у зависности од интензитета поља

# Садржај

Поглавље 1: .....	1
1.1. Линеарна и нелинеарна оптика.....	1
1.1.1. Линеарна оптика.....	2
1.1.2. Нелинеарна оптика.....	2
1.2. Ласери.....	3
1.2.1. Подела ласера .....	6
1.3. Ултратратки пулс ласера .....	7
1.4. Поларизација ласерске светлости.....	9
1.5. Интеракција фотона са атомом.....	11
1.6. Вишефотонска јонизација.....	14
1.6.1. Келдишов параметар: Класификација различитих механизма јонизације ....	17
1.6.2. Мултифотонска јонизација .....	20
1.6.3. Јонизација изнад прага .....	21
1.6.4. Тунелна јонизација.....	24
1.6.5. Јонизација потискивањем баријере .....	25
1.7. Вишеструка јонизација .....	26
1.7.1. Секвенцијална јонизација .....	26
1.7.2. Несеквенцијална јонизација.....	27
1.7.2.1. <i>Колективно тунеловање</i> .....	28
1.7.2.2. <i>Shake-off mechanism</i> .....	29
1.7.2.3. <i>Електрон-атомско расејање</i> .....	29
1.8. Квазикласична апроксимација.....	31
1.8.1. Класичан опис електромагнетног поља.....	31
1.8.2. Класичан опис кретања наелектрисане честице у електромагнетном пољу... 33	
1.8.3. Квантни опис кретања наелектрисане честице у електромагнетном пољу .... 36	
1.8.3.1. <i>Калибрација брзине и дужине (Velocity and length gauge)</i> .....	36
1.8.3.2. <i>Волковљева стања (Волковљева таласна функција)</i> .....	37
Поглавље 2: .....	39
2.1. Апроксимација јаког поља.....	39
2.2. Атом у јаком ласерском пољу .....	39

2.3. Добијање брзине прелаза решавањем временски зависне Шредингерове једначине .....	41
2.4. АДК теорија .....	48
2.5. Ландау-Дихнеова адијабатска апроксимација .....	53
2.5.1. Вероватноћа јонизације и брзина прелаза .....	56
2.5.2. Добијање брзине прелаза у АДК теорији преко Ландау-Дихне адијабатске апроксимације .....	61
2.5.2.1. Добијање брзине прелаза у АДК теорији преко Ландау - Дихне адијабатске апроксимације када је почетни импулс избаченог електрона једнак нули .....	62
2.5.2.2. Добијање брзине прелаза у АДК теорији преко Ландау-Дихне адијабатске апроксимације када је почетни импулс избаченог електрона различит од нуле .....	65
2.6. Разлика између брзина прелаза у статичком и променљивом спољашњем пољу ....	68
2.7. Тунеловање у релативистичком режиму .....	70
2.8. Принос јона у тунелној јонизацији .....	71
2.9. Ефикасни пресек .....	72
2.10. МО-АДК .....	73
Поглавље 3: .....	75
3.1. Анализа у параметра .....	75
3.1.1. Параметар $\gamma$ у нерелативистичком режиму .....	76
3.1.2. Параметар $\gamma$ у релативистичком режиму .....	78
3.1.3. Параметар $\gamma$ за фиксирану фреквенцију ласерског поља $\omega$ .....	79
3.2. Утицај ненулног почетног импулса електрона на брзину прелаза у линеарно поларизованом ласерском пољу .....	80
3.3. Израз за почетни импулс избаченог електрона као функција параболичне координате $\eta$ јачине поља $F$ .....	85
3.4. Утицај ненулног почетног импулса електрона на брзину прелаза у циркуларно поларизованом ласерском пољу .....	94
3.5. Утицај ненулног почетног импулса електрона на брзину прелаза у циркуларно поларизованом ласерском пољу за различите вредности $Z$ .....	97
3.6. Једнострука и двострука тунелна јонизација племенитих гасова који су изложени линеарно и циркуларно поларизованом ласерском пољу .....	100
3.6.1. Принос јона .....	105
3.7. Утицај пондеромоторног потенцијала и ненулног почетног импулса избаченог електрона на брзину прелаза у мултифотонској јонизацији .....	107

3.8. Енергија коју има највећи број фотоелектрона при јонизацији атома калијума и ксенона.....	113
3.9. Планови за будући рад - јонизациона комора.....	118
Закључак.....	120
Литература .....	124
Додатак А: Атомски систем јединица .....	131
Додатак Б: Метод седласте тачке.....	133

## Сажетак

Предмет истраживања ове докторске дисертације је процес тунелне јонизације који представља један од начина интеракције атомских система и ултракратких ласерских пулсева. У овом процесу електрон који се налази у атому може бити јонизован пролазећи кроз потенцијалну баријеру која је деформисана деловањем јаког спољашњег поља. Анализа овог процеса се може вршити применом Амосов-Делоне-Крајнов теорије (АДК теорију).

Циљеви који су постављени пред аутора ове докторске дисертације су били проширити АДК теорију укључивањем додатних параметара и састојали су се у следећем:

1. Одређивање утицаја почетног ненулног импулса избаченог електрона и пондеромоторног потенцијала на процену брзине прелаза у АДК теорији за случај линеарно и циркуларно поларизованог ласерског поља и одређивање начина на који ови параметри утичу на ефикасни пресек и принос јона.
2. Одређивање енергије коју има највећи број избачених електрона при јонизацији атома.

Да би циљеви били остварени биће примењена постојећа знања о ласерима, поларизацији поља и хемијским елементима. Коришћене ће бити теоријске анализе и експериментални резултати добијени применом АДК теорије. За израду графика ће бити коришћен програмски пакет Wolfram Mathematica 8.

Рад је организован на следећи начин:

У првом поглављу ће бити уведени и дефинисани појмови линеарне и нелинеарне оптике, ласерског пулса и поларизације поља. Без много детаља ће бити приказани различити механизми јонизације: мултифотонска, јонизација изнад прага, тунелна и јонизација потискивањем баријере, као и неки механизми вишеструке јонизације. Представљен ће бити теоријски метод квазикласичне апроксимације, који се заснива на приступу у оквиру кога се један део система описује квантно механички док се други третира класично.

У другом поглављу ће бити дата апроксимација јаког поља, као и најважније карактеристике АДК теорије. Приказана ће бити и извођења брзине прелаза решавањем временски зависне Шредингерове једначине и применом Ландау-Дихне адијабатске апроксимације са посебним акцентом на случајеве када је почетни импулс избаченог електрона једнак и различит од нуле.

У трећем поглављу ће бити изложени резултати рада кандидата, биће испитиван утицај ненулног почетног импулса јонизованог електрона и пондеромоторног потенцијала на брзину прелаза за случај линеарно и циркуларно поларизованог ласерског поља. Биће приказано понашање величина као што су ефикасни пресек и принос јона у зависности од ових параметара, као и вредности енергија коју има највећи број избачених електрона при јонизацији атома.

## Поглавље 1:

### 1.1. Линеарна и нелинеарна оптика

Линеарна и нелинеарна оптика обухватају различите појаве које настају узајамним деловањем светлости и материје. Различити начини на које светлост интерагује са материјом су од огромног практичног значаја и зато је њихово проучавање веома битно. Упркос напретку свремене теорије разумевање чак и познатих процеса далеко је од потпуног, што захтева детаљна теоријска моделирања и отвара нова поља у теоријским проучавањима.

Развој физике понекад зависи од тога колико је неки физички параметар доступан. Интензитет светлости је један од тих параметара. У ранијим експериментима коришћени су извори који дају некохерентну светлост, светлост чији таласи нису у фази. Интензитет светлости који је могао да се постигне на овај начин није био висок а истраживања су била ограничена само на линеарну оптику. Резултат интеракције овакве светлости са материјом, био је пропорционалан интензитету апсорбоване светлости. Да би се ови процеси описали било је довољно користити пертурбациону теорију. Савремена физика је била спремна да прати нове технологије, тако да је појава ласера 1960. године као извора кохерентне светлости (светлост чији су таласи у фази), омогућила истраживања у потпуно новој области оптике. Посебно је била интересантна могућност контролисања великог броја параметра који одређују својство светлости, као што су интензитет, поларизација, фреквенција, правац простирања, фаза и дужина трајања. Напредак ове научне гране директно је зависио од развоја ласерске технологије. Од посебног значаја за примену у науци је ласерско зрачење које се емитује у виду низа пулсева. У последњих двадесет година пулсни ласери и ласери у бизини инфрацрвеног дела спектра су невероватно напредовали, што је омогућило добијање пулса енергије од једног до сто џула (J) и пулса трајања од неколико десетина до неколико стотина фемтосекунди (fs). Када се овакав пулс фокусира добија се ласерско поље чији је интензитет толико велики да при интеракцији са материјом долази до нелинеарних ефеката. Што је довело до развоја нелинеарне оптике.

Данас ласери имају веома широку примену у фундаменталним истраживањима као што су интеракција ласерског снопа са материјом, спектроскопија, нуклеарна фузија, хлађење атома. Поред велике примене у науци, константно расте примена оптике у технологији,

телекомуникацијама, медицине (генетски инжењеринг) што захтева детаљна теоријска моделирања и отвара нова поља истраживања за теоријске студије.

Линеарна и нелинеарна оптика обухватају низ процеса који се дешавају при интеракцији светлости са материјом. Теоријски опис ових оптичких процеса захтева одговарајући и детаљни квантно механички опис многочестичних система [1].

### 1.1.1 Линеарна

Линеарна оптика је област оптике која пружа потпуни опис интеракције светлости и материје у областима нижих интензитета електромагнетног зрачења. Линеарни ефекти не доводе до промена особина упадног електромагнетног поља [2]. Појаве које припадају линеарној оптици јављају се при интензитетима електромагнетног зрачења мањим од  $10^8 \text{ W/cm}^2$ .

У случају линеарних оптичких прелаза, атом апсорбује фотон из долазеће светлости и тада долази до ексцитације електрона који прелази на следећи дозвољени виши ниво. Када дође до деексцитације тог електрона, он прелази на нижи енергетски ниво при чему се емитује фотон фреквенције мање или једнаке фреквенцији упадне светлости (слика 1.1.(а)).

### 1.1.2. Нелинеарна

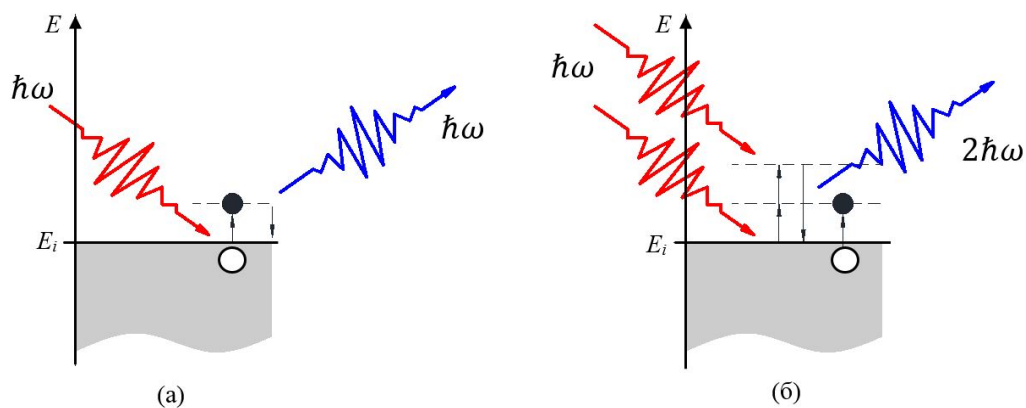
Када се разматра интеракција светлости и материје у областима виших интензитета електромагнетног зрачења интеракција је много сложенија и доводи до појаве потпуно нових процеса [3]. Ове процесе описује нелинеарна оптика. То је део оптике који се бави интеракцијом електромагнетног зрачења и материје (средине) при којој материја реагује на нелинеаран начин.

Нелинеарни ефекти могу да резултују променама особина упадног електромагнетног зрачења (особине које зависе од интензитета поља) или стварању електромагнетног зрачења које се креће новом фреквенцијом или у другом правцу. Због дуалне природе светлости нелинеарни ефекти могу довести до јонизације атома (када електрон напушта атом) - честична природа светлости или пак до појаве хармоника вишег реда - таласна природа светлости. За појаву нелинеарних ефеката потребно је електромагнетно поље високих интензитета, када се вредност електричног поља може



поредити са јачином атомског електричног поља, што је приближно  $10^9 \text{ V/cm}$ . Ову вредност интензитета електромагнетног поља дају ласери. Опсег таласних дужина који је интересантан за ову врсту истраживања се простире од инфрацрвене до ултраљубичасте.

Веома битан нелинеаран ефекат је мултифотонска апсорпција која настаје када је прелаз електрона у више стање или континуум изазван симултаном апсорпцијом више од једног фотона. Овом нелинеарном процесу одговара појава хармоника вишег реда. Пример је двофотонски процес, када већ побуђени електрон апсорбује други фотон исте фреквенције и прелази на следеће дозвољено стање са већом енергијом. Електрон се враћа у основно стање емитујући фотон чија је фреквенција два пута већа од фреквенције упадне светлости (слика 1.1.(б)) тј. долази до појаве хармоника другог реда (Second Harmonic Generation (SHG)).



Слика 1.1. Шематски приказ (а) прелаза у линеарној оптици, (б) хармоник друге генерације.

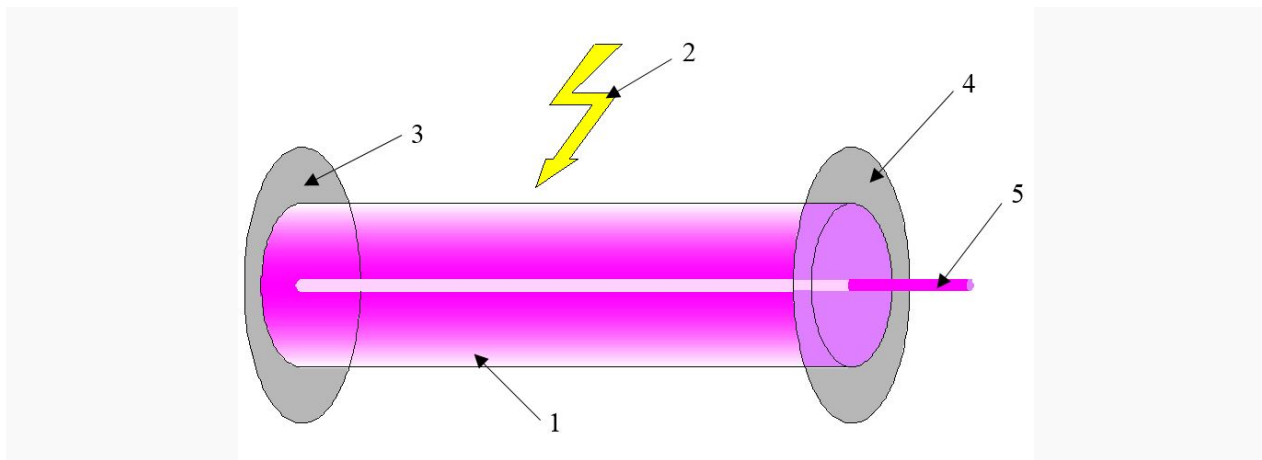
До нелинеарних ефеката може доћи у чврстим телима, течностима, гасовима и плазми. Нелинеарна оптичка истраживања су стекла фундаментални значај у проучавању особина гасова и течности, у физици кондензоване материје, органских и биолошких материјала.

## 1.2. Ласери

Ласер је скраћеница од Light Amplification by the Stimulated Emission of Radiation (LASER) што у преводу значи „појачање светлости помоћу стимулисане емисије зрачења“. Извор је светлосног зрачења. Светлост коју ласер емитује је: високо монохроматска (тачно одређене фреквенције), кохерентна (електромагнетни таласи су

међусобно у истој фази), јако усмерена и оштро фокусирана (ако два светлосна снопа имају исту енергију, снап који се фокусира у мању тачку имаће већи интензитет).

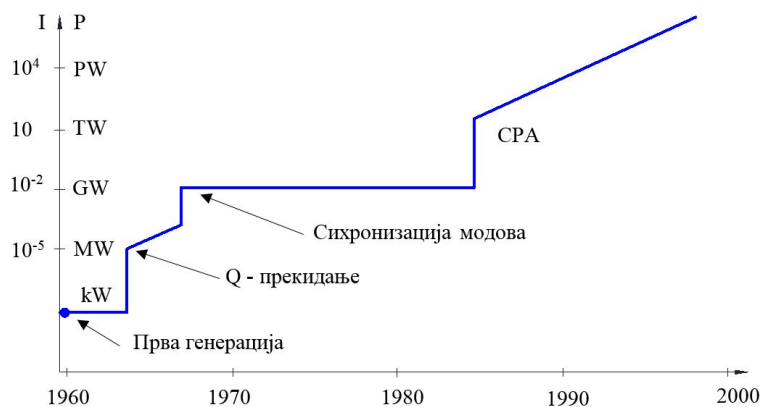
Најједноставнија шема ласера је дата на **слици 1.2.** Ласерски медијум (језгро, активна средина), смештен је између два паралелна огледала, тако да светлосни зраци који пролазе између два огледала формирају стојећи талас. Фотони који настају спонтаном емисијом у активној средини ласера емитују се у свим смеровима. Само они који су избачени у правцу огледала ће се рефлектовати између та два огледала и остати заробљени у медијуму. Фотони који велики број пута пролазе кроз ласерски медијум ће изазвати стимулисану емисију приликом проласка близу атома који су у метастабилном стању. Стимулисаном емисијом настају групе фотона који су у истом квантном стању. Такви фотони имају исту таласну дужину, смер и правац кретања. Једно од два огледала се обично направи тако да није 100% рефлектујуће већ да пропушта одређену количину светлости (обично мање од 1%), тако да фотони могу да напусте ласерски медијум. Фотони који имају потпуно исте карактеристике напуштају медијум сви (у групи) или ниједан. На тај начин ласерски зрак садржи групе кохерентних фотона, што му даје велики интензитет.



**Слика 1.2.** Шема ласера: 1. Ласерски медијум (језгро, активна средина), 2. Енергија за побуђивање медијума, 3. Рефлектујуће огледало, 4. Рефлектујуће огледало, 5. Ласерски зрак.

Откриће ласера, пре више од педесет година, изазвало је револуцију у области науке и медицине (генетски инжењеринг) и омогућило бројна истраживања унутар ових области. Када је физика у питању ова истраживања су омогућила бољи увид у саму структуру атома и молекула као и употребу нових техника у многим областима физике као што су физика плазме, спектроскопија и спектроскопска анализа особина материје.

Развој ласерске технике у почетку је био веома брз (слика 1.3.). Одмах након открића ласера прве генерације, чија је максимална снага реда величине kW, откривена је техника Q - прекидача помоћу које су остварене снаге реда MW. Увођењем технике синхронизације модова (1965) постигнута је снага од 1GW. Након тога наступио је период дуг око 20 година у току кога није било значајнијег напретка на пољу максималне снаге ласера. Даљи развој је био усмерен ка добијању ултракратких пулсева (краћих од 1ps) и њиховом појачању. Тераватни ласерски систем са временским трајањем пулса 1ps и енергијом 1J је развио 1985. године G. Mougou са сарадницима [4] користећи тзв. CPA технику (Chirped Pulse Amplification). Суштина CPA технике је у томе да се ласерски пулс мање снаге временски толико прошири (помоћу дифракционе решетке или оптичког таласовода) да се може појачати а да при томе не дође до нелинеарних ефеката. Након појачања пулс се компресује до првобитне дужине трајања.



**Слика 1.3.** Развој ласера великих снага. На апсиси су приказане године, а на ординати је представљена снага ласера у ватима  $P$  [W] и интензитет ласерског поља  $I$  [атомске јединице] која се постиже ако се ласерско зрачење снаге  $P$  фокусира на површину  $S$  радијуса  $10\mu\text{m}$ .

Јачина поља ових ласера често превазилази јачину атомског поља.

Ултракратки ласерски пулсеви су јако погодни при обради материјала зато што нема оштећења услед топљења. Стога се увелико користе у телекомуникационој техници, нанотехнологији, метрологији, оптоелектроници и многим другим подручјима технике. У војној индустрији се користе за мерење удаљености, лоцирање мете (навођење „паметних бомби“). У медицини налазе примену у дијагностици и у терапији. Користе се за рано откривање и лечење малигнух обољења, корекцију вида, прецизне хирушке захвате и њихова предност је у томе што не оштећују околно ткиво и не остављају нежељене последице. Користе се и у стоматологији, фармацији и многим другим областима.

### 1.2.1. Подела ласера

Постоји више подела ласера:

1. Према врсти материјала од којег је направљен извор, ласери се деле на:

- **Ласери чија је активна средина у чврстом стању** (solid state laser) имају језгро направљено од кристала или аморфног материјала (рубински ласер, Nd: Yag (neodymium-doped yttrium aluminum garnet:  $\text{Nd:Y}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}$ ) ласер).
- **Гасни ласери** (gas laser), имају медијум у гасовитом стању, обично се састоји од цеви испуњене гасом или смесом гасова под одређеним притиском ( $\text{CO}_2$  ласер, He-Ne ласер и аргонски ласер).
- **Полупроводнички ласер** (semiconductor laser), је ласер малих димензија, произведен од полупроводничких материјала. Најједноставнију структуру има диодни полупроводнички ласер (AlGaAs ласер).
- **Течни ласер** (liquid laser), је ласер у којем се облик активне средине може бирати наливањем течности у суд жељеног облика (Europijum Helatni ласер (TТА-TenolTrifluorAcetonat)).
- **Хемијски ласер** (chemical laser), је ласер у коме је емисија фотона узрокована хемијским процесима (Hydrogen Fluoride laser).
- **Ласери на бази боја** (dye laser) користе одређена органска једињења као активни ласерски медијум. (ласер на бази боја Exalite 351, BM-Terphenyl (BMT))
- **Ласери на парама метала** (metal vapor laser) раде на принципу јонизоване металне паре (HeCd ласер, HeHg ласер).
- **Ласери на слободним електронима** (free electron laser) користе сноп релативистичких електрона који пролазе кроз магнетно поље које наизменично мења смер дуж пута електрона (ласер *FELIX* који се налази FOM Institute for Plasma Physics Rijnhuizen у Холандији).

2. Према режиму рада ласери се деле на:

- **Континуалне ласере** који дају непрекидни ласерски сноп.

- **Пулсне ласере** који дају испрекидани ласерски сноп.

3. Ласере можемо још поделити према врсти пумпе (побуда радне запремине) која се користи:

-**Оптички пумпан**

-**Пумпан електричним путем** – Једносмерним напоном

Наизменичним напоном

Електричним пражњењем

-**Пумпан хемијским реакцијама**

-**Нуклеарно пумпан** ( $\alpha$  и  $\beta$  честице, продукти нуклеарних реакција,  $\gamma$  зрачење и неутрони)

4. Према области спектра у којој емитују светлост:

-Ласери у видљивом делу спектра

-Ласери у блиској инфрацрвеној области

-Ласери у далекој инфрацрвеној области

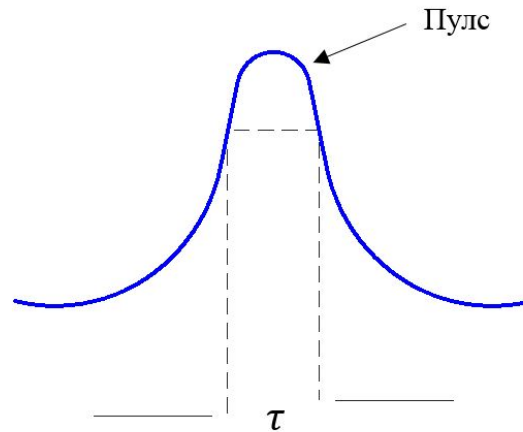
-X ласери, зрачење у области таласних дужина X зрака

### 1.3. Ултратратки пулс ласера

Ласерски системи могу емитовати ласерско зрачење континуално или у кратким пулсевима [5]. Континуални режим рада ласера подразумева емисију светлости без прекида од тренутка укључивања ласера па све до његовог искључивања. Код пулног режима светлост се емитује у тачно одређеним временским интервалима, једном или више пута са задатом фреквенцијом понављања. У зависности од дужине трајања пулса, енергије пулса, броја понављања пулса и таласне дужине потребне су веома различите методе за генерисање пулса одређених карактеристика, зашта се користе различите врсте пулсних ласера.

Дужина трајања пулса је временски интервал,  $\tau$ , између првог и последњег тренутка у коме тренутна амплитуда достиже предвиђени максимум амплитуде пулса  $t_j$ .

то је пуна ширина на половини максимума (Full Width at Half Maximum (FWHM)) у одређеном времену (слика 1.4.). Концентрисањем целокупне енергије пулса у веома кратки временски интервал и добрим фокусирањем ласерског снопа, могу се и при релативно малим енергијама постићи веома високи интензитети зрачења.



Слика 1.4. Дужина трајања пулса.

Време трајања пулса, које се такође назива и ширина пулса, може се мењати у широком опсегу. Према дужини трајања, пулсаве делимо у три групе: дуги (long), кратки (short) и ултракратки (ultrashort).

Под дугим пулсевима подразумевамо оне чија је дужина трајања знатно већа од периода ласерског поља, тада јонизовани електрон има времена да напусти фокус ласерског снопа пре него што се пулс заврши. Дужина трајања дугог пулса је од 20 наносекунди (ns) до неколико стотина микросекунди ( $\mu s$ ) и била је карактеристична за прве пулсне ласере. У кратком временском периоду напредак је био веома брз, и дужина пулса је смањена на 10 ns, добијени су кратки пулсеви. Код кратког пулса електрон нема времена да напусти фокус ласерског снопа пре него што се пулс заврши. Откриће ласера на бази боја је дужину трајања пулса скратило на испод једне пико секунде (ps). Ултракратки ласерски пулс подразумева зрачење дужине трајања реда фемтосекунди ( $10^{-15}s$ ) или краће [6]. Данас се могу генерисати пулсеви чија је дужина трајања неколико десетина атосекунди ( $10^{-18}s$ ) и чија таласна дужина лежи у подручју x-зрака [6]. Карактерише их високи максимални интензитет који доводи до нелинеарних процеса у различитим материјалима, па чак и у ваздуху. Дужина трајања пулса је коначна и може се узети да је целобројни умножак периода ласерског поља  $T_p = n_p T$ , где је  $T_p$  дужина трајања пулса,  $n_p$  број оптичких циклуса поља,  $T$  период ласерског поља.

Развојем пулсних ласера, који дају ултракратки пулсни ласерски сноп, први пут је формирано електрично поље које је упоредиво са јачином атомског поља, што је омогућило посматрање и истраживање нових процеса.

## 1.4. Поларизација ласерске светлости

Поларизација је својство (особина) таласа која описује орјентацију осциловања таласа. Раван коју дефинише линија кретања таласа са линијом осциловања назива се раван поларизације. Поларизована светлост се добија у процесима: одбијања (преламања), двојног преламања, ....

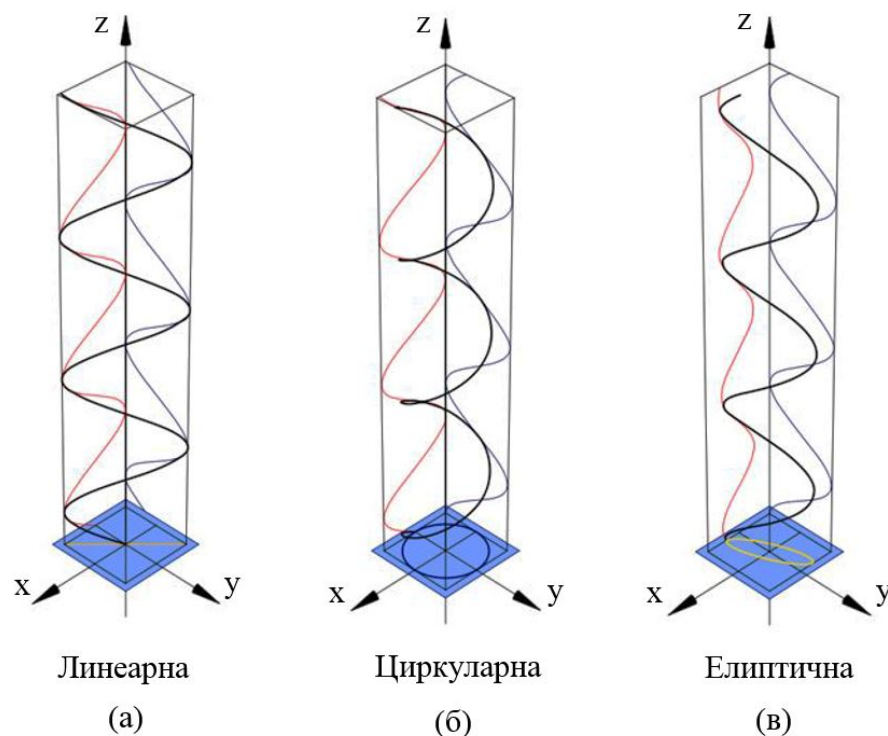
Електромагнетни таласи су трансверзални таласи при чијем простирању кроз одређену средину, честице које га сачињавају (фотони) осцилују у правцу нормалном на правац простирања таласа. Ако талас осцилује само у једној равни онда је он линеарно поларизован. Када се талас пропусти кроз одређену средину може доћи до цепања таласа на две линеарно поларизоване компоненте чије су равни поларизације ортогоналне и фазе померене за  $90^\circ$  (четвртину таласне дужине). Слагањем ове две компоненте добија се резултујући талас чија раван поларизације кружи са простирањем таласа, и тада је он циркуларно поларизован. Ако помак између ортогоналних компонената није тачно четвртина таласне дужине, онда се добија елиптично поларизован талас.

Уобичајан начин помоћу кога се одређује врста поларизације је праћење орјентације вектора електричног поља (светлосни вектор) у правцу простирања таласа. Вектор електричног поља  $\vec{E}$  раванског таласа може се произвољно поделити на две међусобно нормалне компоненте, које се могу обележити са  $\vec{E}_x$  и  $\vec{E}_y$ , и које се простиру дуж  $x$  и  $y$  осе респективно. Тако да се вектор електричног поља може представити као  $\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y$ . Правац кретања таласа је дуж  $z$  осе.

Када су  $\vec{E}_x$  и  $\vec{E}_y$  компоненте светлосног вектора у фази, векторски збир интензитета ове две компоненте је константан,  $\vec{E}_x + \vec{E}_y = \text{const}$ , тако да је правац вектора електричног поља константан. Ово је случај линеарне поларизације (слика 1.5.(а)). Ако су  $\vec{E}_x$  и  $\vec{E}_y$  ортогоналне компоненте и имају исте амплитуде али се њихове фазе разликују за  $90^\circ$ , тада је вредност амплитуде једне компоненте нула док је у истом тренутку вредност амплитуде друге компоненте или минимална или максимална. Постоје две могуће комбинације фаза

које задовољавају овај услов: фаза  $\vec{E}_x$  компоненте може бити  $90^\circ$  испред фазе компоненте  $\vec{E}_y$  или може бити  $90^\circ$  иза фазе компоненте  $\vec{E}_y$ . Вектор електричног поља у овом случају оцртава у равни кружни траг, тако да се ова поларизација назива циркуларна поларизација (слика 1.5.(б)).

Правац ротације зависи од тога који од горе наведених односа између фаза постоји и може бити десна циркуларна поларизација или лева циркуларна поларизација.

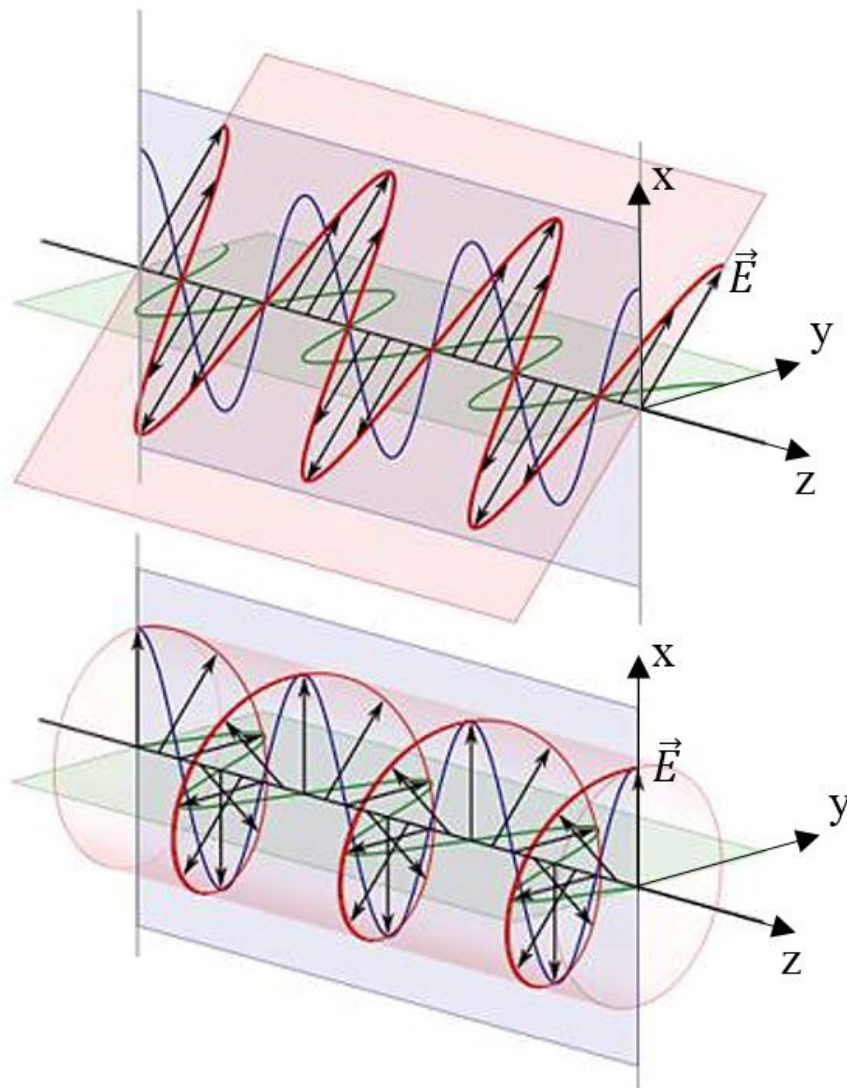


Слика 1.5. Поларизација електромагнетног таласа: (а) линеарна, (б) циркуларна, (в) елиптична.

У свим осталим случајевима разлика између фаза  $\vec{E}_x$  и  $\vec{E}_y$  компоненте није ни нула ни целобројни умножак  $90^\circ$ , што одговара тзв. елиптичној поларизацији. Вектор електричног поља у овом случају оцртава елиптични траг у равни (слика 1.5.(в)).

На слици 1.6. је приказано кретање вектора електричног поља у простору у случају линеарне и циркуларне поларизације. Нормалне компоненте вектора обележене су са  $\vec{E}_x$  (вертикална плава) и са  $\vec{E}_y$  (хоризонтална зелена). Са  $z$  је обележен правац кретања таласа.

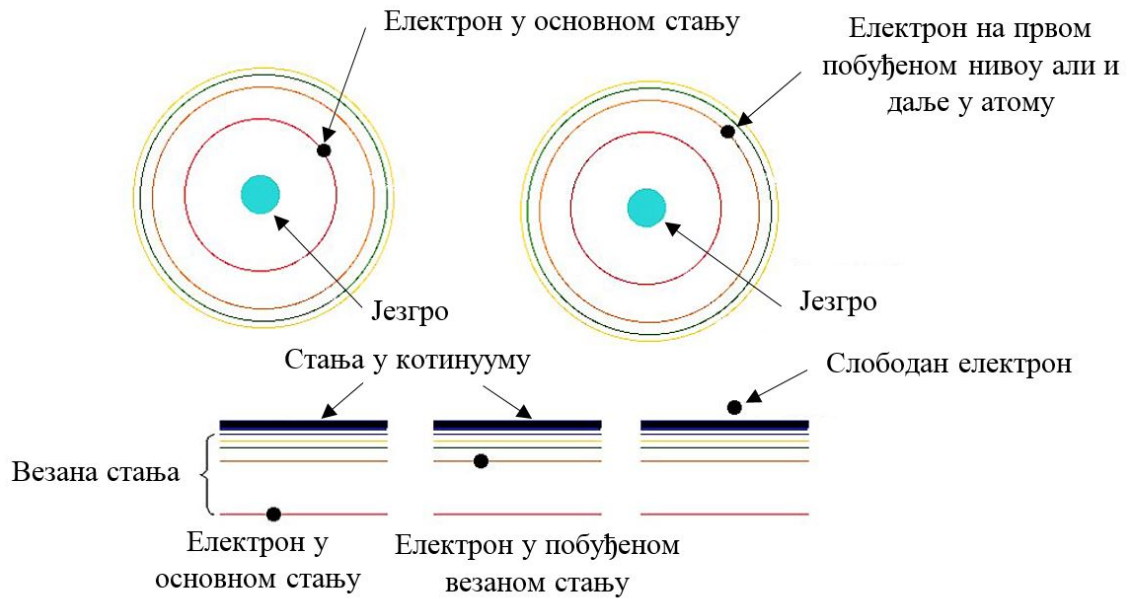




**Слика 1.6.** Циркуларно поларизована светлост (изнад), линеарно поларизована светлост (испод).  $\vec{E}_x$  (плава линија) и  $\vec{E}_y$  (зелена линија) су пројекције светлосног вектора  $\vec{E}$  (црвена линија) на вертикалну и хоризонталну раван, респективно.

## 1.5. Интеракција фотона са атомом

Развој ласерске технологије је омогућио примену нових опсега интензитета, фреквенција и дужине пулса електромагнетног зрачења у научним истраживањима. У делу атомске, молекулске и оптичке физике овај развој је водио ка новим сазнањима у области јонизације атома у јаком ласерском пољу, која превазилази једноставно „избацивање“ електрона. За разумевање ових физичких процеса од фундаменталне важности је знати како фотони интерагују са атомом.

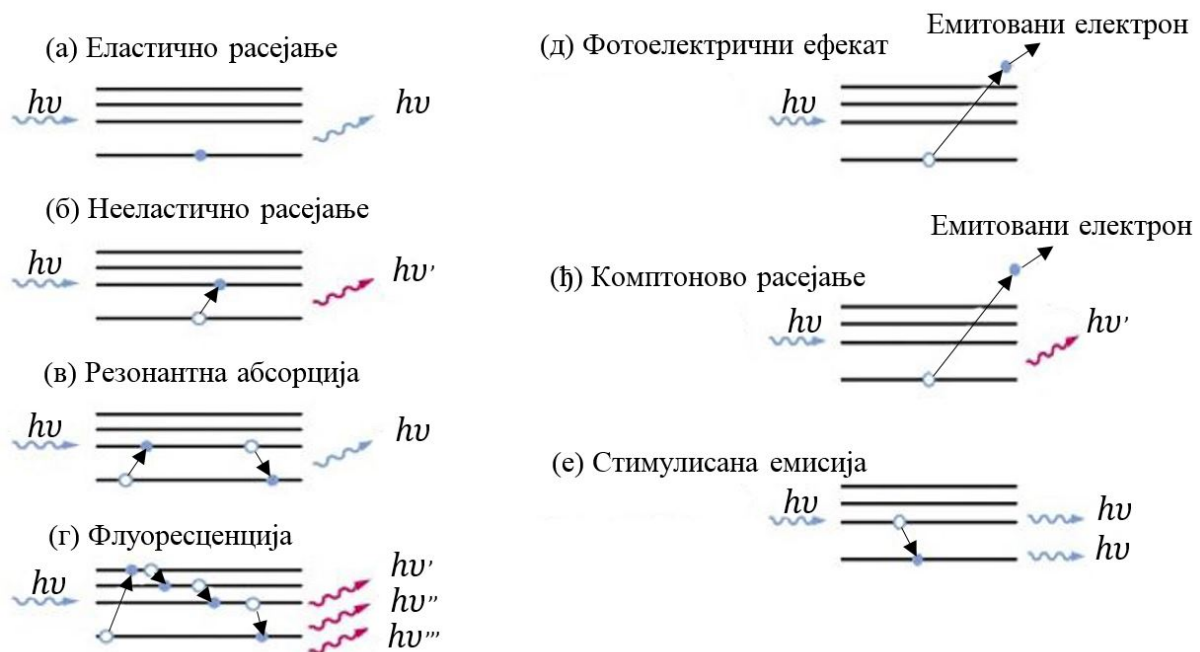


**Слика 1.7.** Положај електрона (означен са црном тачкицом) у атому, у свом основном стању (лево) и побуђеном стању (десно). Кругови представљају различита стања са тачно одређеном енергијом. Хоризонталне линије представљају различите енергетске нивое.

Атом у свом електронском омотачу има одређени број електрона који се разликује од врсте до врсте атома. Електрони су распређени по љускама. Свака љуска има тачно одређену енергију. Стање у коме електрон, који се налази у атому, има најнижу енергију назива се основно стање (ground state).

Уколико не долази ни до каквих пертурбација (промена) електрон остаје у свом основном стању. Међутим када електрон прими неку количину енергије он напушта основно стање. У зависности од количине апсорбоване енергије електрон прелази у ново (такође везано) побуђено стање или уколико је количина апсорбоване енергије велика, језгро више не може да задржи електрон и он прелази у континуум тј. електрон је слободан (**слика 1.7.**).

Електрон енергију потребну за ексцитацију може да добије на више начина. Један је апсорпцијом светлости (фотона) од стране атома при чему може доћи до више врста процеса: еластичног и нееластичног расејања, резонантне апсорпције, флуоресценције, фотоелектричног ефекта, Комптоновог расејања и стимулисане емисије (**слика 1.8.**).



Слика 1.8. Шематски приказ могуће интеракције фотона са атомом.

**Еластично расејање**, (слика 1.8.(а)), је расејање код кога упадни фотон не мења енергетско стање система. Електрон остаје у основном стању док фотон мења смер кретања али не долази до промене његове енергије. Код **нееластичног расејања** (слика 1.8.(б)), мења се и енергија система и енергија расејаног фотона. Електрон прелази из основног у побуђено стање и долази до промене енергије и смера кретања фотона. Фотон велике енергије може да побуди електрон из унутрашњости електронског омотача (слика 1.8.(в)) и да остави упражњено место на нижем енергетском нивоу. Упражњено место може да попуни електрон из вишег енергетског стања при чему се вишак енергије предаје околини емисијом фотона. Овај процес се назива процес **резонантне апсорпције**. **Флуоресценција** (слике 1.8.(г)) настаје када фотон упадног зрачења побуди електрон, који се из побуђеног стања враћа у основно стање постепено, прелазећи са једног енергетског нивоа на први следећи са нижом енергијом. При преласку на сваки наредни ниво емитује се фотон. Сви емитовани фотони имају различите енергије. У већини случајева, емитовано зрачење има већу таласну дужину и нижу енергију од апсорбоване. Ако је енергија упадног фотона већа од енергије везе електрона у атому (молекулу или кристалу) онда може доћи до јонизације мете, односно електрон може да напусти атом и то је **фотоелектрични ефекат** (слика 1.8.(д)). **Комптонов ефекат** (слика 1.8.(ф)), је нееластичан судар високо енергетских фотона и атома. Расејани фотон предаје само део

енергије избаченом електрону тако да се емитију електрон и фотон другачијих карактеристика од иницијалног. **Стимулисана емисија (слика 1.8.(е))** настаје када фотон интерагије са већ побуђеним (ексцитованим) електроном. Електрон се враћа у основно стање и долази до емитовања два фотона који имају исту енергију и фазу као и иницијални фотон.

## 1.6. Вишефотонска јонизација

Дуго се сматрало да електрон напушта атом и из свог основног стања прелази у континуум само ако је енергија апсорбованог фотона већа од енергије везе датог електрона. У том процесу електрон апсорбује само један фотон. Један део апсорбоване енергије се искористи на савладавање енергије јонизације  $E_i$ , а други део на повећање кинетичке енергије електрона  $E_k$ . Овај процес је описан Ајнштајновом (Einstein) релацијом за фотоефекат

$$E_k = hv - E_i. \quad (1.1)$$

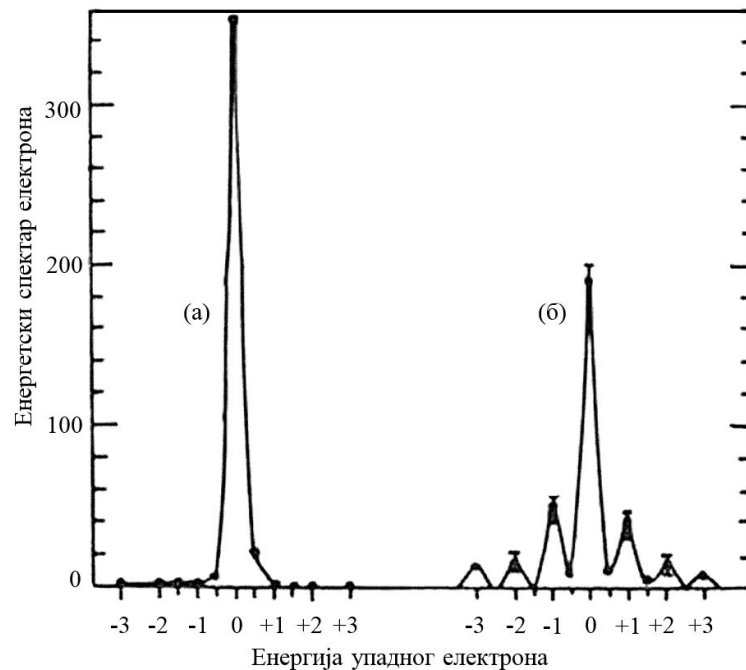
Међутим показало се да када је густина флукса фотона,  $\Phi = I/hv$ , где је  $I$  интензитет ласерског поља а  $hv$  енергија фотона, довољно велика, вероватноћа да атом апсорбује два или више фотона расте. Ако је укупна енергија апсорбованих фотона већа од јонизационог потенцијала одређеног електрона атом ће бити јонизован.



$N$  је број апсорбованих фотона,  $h$  Планкова (Planck) константа а  $v$  фреквенција електромагнетног зрачења. Као што је већ наглашено енергија сваког појединачног фотона  $hv$  је много мања од јонизационог потенцијала датог атома. Кад год се јонизациони процес, за тачно одређено везано стање може феноменолошки објаснити апсорпцијом  $N$  фотона, појава се сврстава у процес мултифотонске јонизације (Multi Photon Ionization (MPI)).

Истраживања у овој области почињу 1931. године радом Гоперт-Мајер (Göppert-Mayer) [7] када је први пут теоријски разматрана могућност јонизације атома са два фотона. За ову врсту јонизације било је потребно користити електромагнетно зрачење високих интензитета, што је постало могуће тек открићем ласера. Прве експерименте мултифотонске јонизације инертних гасова извели су Ворнов (Voronov) и Делоне (Delone) 1965. године [8]. Истраживања су вршена на атомима племенитог гаса а коришћене су и

различите таласне дужине ласерског зрачења. Резултати ових експеримената су показали да вероватноћа јонизације, односно брзина прелаза, зависи од интензитета ласерског поља. 1977. године Вајнгартсофер (Weingartshofer) [9] запазио је да се при расејању електрона упадне енергије  $E_k = 11\text{eV}$  на атомима аргона, у присуству линеарно поларизованог  $\text{CO}_2$  ласерског поља интензитета  $I = 10^9 \text{W/cm}^2$  у спектру расејаних електрона појављује седам максимума (пикова) при енергијама  $E_{k_2} = E_{k_1} + N\hbar\omega$ , за  $N = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$  (слика 1.9).

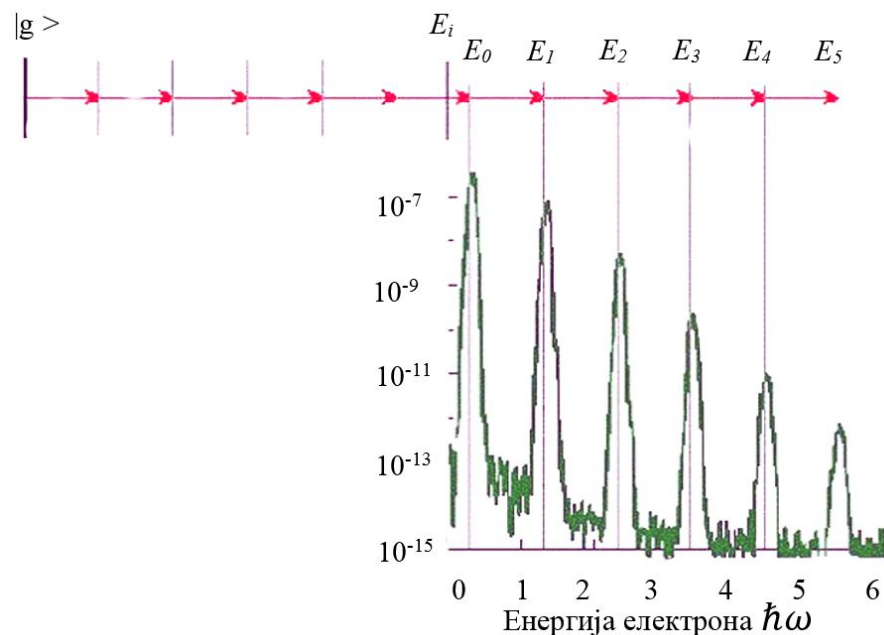


Слика 1.9. Енергетски спектар електрона расејаних на атомима аргона (а) без и (б) у присуству ласерског поља.

На мањим интензитетима поља, ласерски сноп изазива само мање пертурбације у систему атома и прелаз електрона из везаног стања у континуум може бити објашњен временски зависном пертурбационом теоријом. Како се иде ка већим интензитетима ласерског поља структура атомског система се више нарушава и процеси који се тада дешавају се не могу објаснити пертурбационом теоријом. За границу применљивости пертурбационе теорије узима када је јачина ласерског поља упоредива са јачином Кулоновог (Coulomb) поља коју осећа електрон у основном стању атома водоника. Одговарајућа критична вредност јачине поља је око  $3 \cdot 10^{16} \text{W/cm}^2$ .

Открићем јонизације изнад прага (Above Threshold Ionization (ATI)) 1979. године [10] може се рећи да је физика атомских процеса ушла у непертурбативни режим. Спектар кинетичких енергија електрона јонизованих јаким ласерским пољем у процесу ATI

састојао се од серије максимума који се налазе на међусобном растојању једнаком енергији једног фотона (слика 1.10.) [11]. Када се апсорбује минималан број фотона потребан да би дошло до јонизације у спектру се јавља један максимум. Посматрајући спектар представљен на слици 1.10. може се закључити да је дошло до апсорпције већег броја фотона од минималног броја који је неопходан за јонизацију. На слици 1.10. је са  $|g\rangle$  означено основно (ground) стање, а са  $|E_i\rangle$  почетак континуума.



Слика 1.10. Спектар јонизованих електрона добијених јонизацијом изнад прага (Above Threshold Ionization).

У другој половини 1980-тих година откривен је још један атомски процес који се одвија у присуству јаког ласерског поља: генерација виших хармоника (HHG: High order Harmonic Generation) [12], [13]. Када се ултракратки ласерски пулс фокусира на гас, који се налази у атомском стању, запажа се генерисање изузетно великог броја (више стотина) непарних хармоника упадног ласерског зрачења.

Модерним ласерима је могуће постићи изузетно велику густину флукса фотона, односно интензитет ласерског поља  $I$  је екстремно висок. У овом случају је јачина електромагнетног поља упоредива са јачином атомског поља. Тада ласерско поље деформише атомски потенцијал кроз коју електрон може да тунелује. Ако је фреквенција поља мала у поређењу са фреквенцијом осциловања електрона у везаном стању вероватноћа јонизације се знатно повећава, и овај процес се назива тунеловање или тунелна јонизација (Tunnel Ionization (TI)).

Најновија истраживања атомских јонизационих процеса су се померила ка вишим интензитетима ласерског поља између  $10^{18} \text{ W/cm}^2$  и  $10^{21} \text{ W/cm}^2$ . Брзина електрона у току ових процеса се приближава брзини светлости и тада се говори о релативистичком режиму. До сада је спроведено неколико експеримената при овим интензитетима поља [14], [15], [16]. Већина појава које су повезане са јонизацијом у супер јаком пољу тек треба да буду истражена. Једна од дилема је примењивост рачунања брзине прелаза при тунелној јонизацији, предложене у АДК теорији, за високо наелектрисане јоне (highly charged states), односно велики степен јонизације. У супер јаким пољима процес јонизације је веома брз тако да се поставља питање да ли када дође до јонизације већег броја електрона они остају у основном стању до саме јонизације. Треба напоменути да се неки од јонизованих електрона налазе у унутрашњим љускама где неколико електрона има исти главни и орбитални квантни број а различити магнетни квантни број.

Процеси који се одигравају када се атом нађе у јаком ласерском пољу могу се поделити у две групе: процеси који су могући уз помоћ ласерског поља (laser assisted processes) и процесе који су једино, искључиво могући у присуству јаког ласерског поља (laser induced processes). Да би се одиграли процеси прве групе неопходан интензитет ласерског зрачења се креће у опсегу од  $10^8 \text{ W/cm}^2$  до  $10^{12} \text{ W/cm}^2$ , док су за процесе који припадају другој групи неопходни интензитети у распону од  $10^{12} \text{ W/cm}^2$  до  $10^{16} \text{ W/cm}^2$ .

### 1.6.1. Келдишов параметар: Класификација различитих механизма јонизације

1965. године у свом раду Келдиш (Keldysh) је показао да су мултифотонска и тунелна јонизација два гранична случаја универзалног процеса нелинеарне јонизације. Овај процес је дефинисан са три параметра: фреквенцијом ласера  $\omega_L$ , амплитудом јачине ласерског поља  $F_0$  и енергијом јонизације  $E_i$ . Границу између ова два механизма јонизације могуће је дефинисати преко тзв. адијабатског параметра, који је такође познат као Келдишов параметар,  $\gamma$ , [17].

$$\gamma = \frac{\omega_L}{\omega_t} \quad (1.3)$$

где  $\omega_L$  представља фреквенцију ласерског поља а  $\omega_t$  фреквенцију тунеловања.

Келдишов параметар се може изразити и преко енергије јонизације,  $E_i$  користећи време које је потребно електрону да тунелује кроз потенцијалну баријеру. Зато је неопходно увести појам потенцијалне баријере како би се истакла разлика између баријере у

класичном и квантном смислу. Класична механика подразумева да тело при кретању заиста наилази на препреку која му онемогућава даље кретање и оно може проћи кроз њу само ако поседује довољну енергију. У квантном смислу, када се каже да честица наилази на баријеру значи да улази у област дејства одређеног физичког поља, које својом силом делује на њу, тако да је потребно да честица поседује одређену енергију да би савладала силу дејства. За разлику од класичне физике која то не дозвољава, у квантној физици је могуће да честица савлада потенцијалну баријеру иако је њена енергија мања од висине баријере (процес тунеловања).

Нека је посматрано ласерско електрично поље представљено као  $F(t) = F_0 \cos(\omega_L t)$ , при чему је  $F_0$  амплитуда осциловања поља. Ширина потенцијалне баријере  $l_t = E_i / (eF_0)$ , где је  $e$  наелектрисање. Ако се претпостави да је брзина тунеловања једнака брзини којом се електрон креће по својој атомској орбити  $v = \sqrt{2E_i/m_e}$  (првој Боровој (Bohr) орбити), где је  $m_e$  маса електрона добија се време тунеловања:

$$t_t = \frac{l_t}{v} = \frac{\frac{E_i}{eF_0}}{\sqrt{2E_i/m_e}} = \frac{\sqrt{E_i m_e}}{eF_0 \sqrt{2}}. \quad (1.4)$$

Хајзенбергова (Heisenberg) релација неодређености  $\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{4\pi}$ , даје везу између енергије електрона  $E$ , коју он има док се налази унутар потенцијалне баријере и времена  $t$  за које он тунелује. У атомским јединицама  $\hbar = 0$ , тако да је  $\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{1}{4\pi}$ , па је време тунеловања електрона кроз потенцијалну баријеру, у смеру минималне ширине баријере,  $1/(4\pi)$ . Како се фреквенција рачуна као  $\omega = 2\pi/T$ , следи да је фреквенција тунеловања једнака:

$$\omega_t = \frac{1}{4\pi} \frac{2\pi}{t_t} = \frac{eF_0}{\sqrt{2m_e E_i}}. \quad (1.5)$$

На основу једначина (1.3) и (1.5) следи да се Келдишов параметар може представити у облику:

$$\gamma = \frac{\omega_L \sqrt{2m_e E_i}}{eF_0}. \quad (1.6)$$

Келдишов параметар се такође може изразити преко пондеромоторног потенцијала  $U_p$ . Пондеромоторни потенцијал представља временски усредњену осцилаторну енергију електрона у електромагнетном пољу. За случај линеарно поларизованог ласерског поља пондеромоторни потенцијал је дат изразом:

$$U_p^{lin} = \frac{e^2 F_0^2}{4m_e \omega_L^2} = \frac{e^2 I}{4m_e \omega_L^2}. \quad (1.7)$$



Док за случај циркуларно поларизованог ласерског поља, пондеромоторни потенцијал има облик:

$$U_p^{cir} = \frac{e^2 F_0^2}{2m_e \omega_L^2} = \frac{e^2 I}{2m_e \omega_L^2}. \quad (1.8)$$

Једначине (1.7) и (1.8) у атомским јединицама имају облик:

$$U_p^{lin} = \frac{F_0^2}{4\omega_L^2} = \frac{I}{4\omega_L^2}, \quad (1.9)$$

$$U_p^{cir} = \frac{F_0^2}{2\omega_L^2} = \frac{I}{2\omega_L^2} \quad (1.10)$$

када је:  $m_e = 1$ ,  $q_e = e = 1$ ,  $\hbar = 1$ .

Комбиновањем једначина (1.6) и (1.9) добија се израз за Келдишов параметар изражен преко пондеромоторног потенцијала  $U_p^{lin}$ :

$$\gamma = \sqrt{\frac{E_i}{2U_p^{lin}}}, \quad (1.11)$$

односно, комбиновањем једначина (1.6) и (1.10) добија се израз Келдишов параметар изражен преко пондеромоторног потенцијала  $U_p^{cir}$ :

$$\gamma = \sqrt{\frac{E_i}{U_p^{cir}}}. \quad (1.12)$$

Треба напоменути, када је вредност пондеромоторног потенцијала  $U_p$  мала у односу на вредност енергије фотона  $\hbar\omega$ , доминантни су линеарни или пертурбациони процеси. Међутим, када вредност пондеромоторног потенцијала превазилази вредност енергије фотона тада је битно узети у обзир и масу мировања електрона и релативистичке ефекте. У области која се налази између ове две екстремне вредности долази до појаве бројних нелинеарних оптичких ефеката као што су вишеструко наелектрисани јони, рендгенско зрачење, генерисање плазме итд. [18], [19].

Да би дошло до тунеловања, време тунеловања  $t_t$  мора бити много мање од периода ласерског поља  $T$ , тј.  $\omega_L \ll \omega_t$ . Закључује се, да ће у случају када је  $\gamma \ll 1$  тунелна јонизација бити доминантна, а у супротном случају, када је  $\gamma \gg 1$  мултифотонска.

Иако је Келдиш прецизно дефинисао када долази до јонизације у мултифотонском а када у тунелном режиму у новијим истраживањима је уочено да граница није тако стриктна. Када је вредност  $\gamma \approx 1$  заступљена су оба механизма јонизације. Келдиш је параметар дефинисао у време када су у употреби били ласери дугих пулсева. Појава нових

технологија које су у употребу увеле ласере кратких пулсева наметнуле су потребу за већим опрезом приликом коришћења Келдишовог параметра у сврху разграничавања различитих механизма јонизације. Такође треба нагласити да у принципу, у експериментима овако оштра подела механизма којима долази до процеса јонизације атома и молекула не постоји.

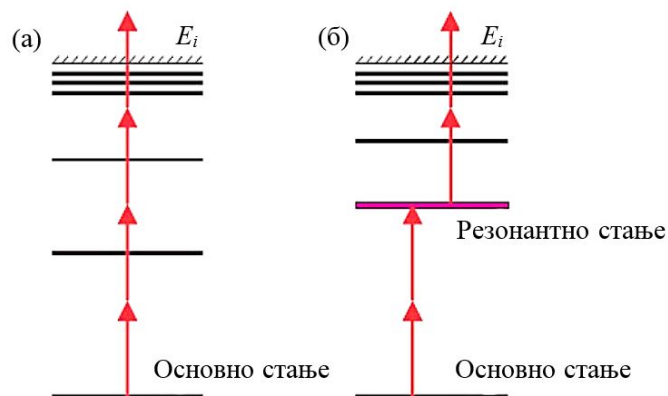
### 1.6.2. Мултифотонска јонизација

Када је  $\gamma \gg 1$  или  $F \ll F_{at}$ , где је  $F_{at}$  јачина атомског поља која је за атом водоника реда  $10^9$  V/cm, време проласка електрона кроз баријеру је знатно дуже него време трајања ласерског пулса тако да је механизам којим се врши јонизација мултифотонски. Мултифотонска јонизација је дефинисана за велике вредности параметра  $\gamma$  и може прецизно бити објашњена пертурбационом теоријом  $N$ -тог [20]. Нелинеарни процес  $N$ -фотонске јонизације описан је вероватноћом јонизације  $W_N$ :

$$W_N = \sigma_N \cdot I^N \quad (1.13)$$

где су  $\sigma_N$  генерализовани (тотални) ефикасни пресек  $N$ -фотонске јонизације,  $I$  интензитет ласерског поља а  $N$  минималан број апсорбованих фотона неопходних за јонизацију.

Постоје два механизма мултифотонске јонизације: нерезонантна мултифотонска јонизација (Nonresonant Multiphoton Ionization (NRMPI)), (слика 1.11.(а)) и резонантна мултифотонска јонизација (Resonance Enhanced Multiphoton Ionization (REMPI)), (слика 1.11.(б)).



Слика 1.11. Мултифотонска јонизација атома: (а) нерезонантна мултифотонска јонизација, (б) резонантна мултифотонска јонизација.

До нерезонантне мултифотонске јонизације долази (**слика 1.11.(а)**) када електрон апсорбује минималан број потребних фотона  $N$ . Нерезонантна мултифотонска јонизација уствари представља основну мултифотонску јонизацију.

У случају резонантне мултифотонске јонизације (**слика 1.11.(б)**) апсорпцијом одређеног броја фотона електрон прелази на резонантни ниво (међустање), а затим апсорпцијом додатних  $M$  фотона буде потпуно јонизован.

$$A + N \cdot \hbar\omega \rightarrow A^*, \quad (1.14)$$

$$A^* + M \cdot \hbar\omega \rightarrow A^+ + e. \quad (1.15)$$

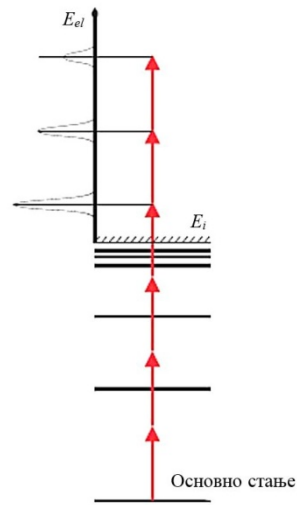
Док год је број апсорбованих фотона мањи од броја фотона потребних за директну јонизацију из основног стања у континуум, вероватноћа јонизације се повећава појавом прелазних, резонантних нивоа. На **слици 1.11.(б)**, се види да је четворо фотонска нерезонантна јонизација замењена двофотонском резонантном екситацијом, након које следи двофотонска јонизација. У многим случајевима резонантно стање је стање високе енергије (high lying state, Ридбергово (Rydberg) стање). У овом случају, процес јонизације се може посматрати као процес  $N$  тог реда који је праћен процесом  $M$  тог реда (где је  $M$  углавном један) и тада је вероватноћа јонизације много већа него вероватноћа у нерезонантном случају.

Битно је нагласити још неке разлике између резонантне и нерезонантне мултифотонске јонизације. Једна од њих је у вредностима ефикасног пресека, зато што са повећањем фреквенције ласерског зрачења фотони имају све већу енергију и када је вредност њихове енергије веома близу вредности енергије дозвољеног атомског прелаза брзина мултифотонске јонизације нагло повећава и долази до појаве резонанције. Затим време за које се одвија јонизације. Карактеристично време живота резонантног нивоа је и до једне наносекунде (ns), док до јонизације нерезонантним процесом дође у току једне фемтосекунде (fs).

### 1.6.3. Јонизација изнад прага

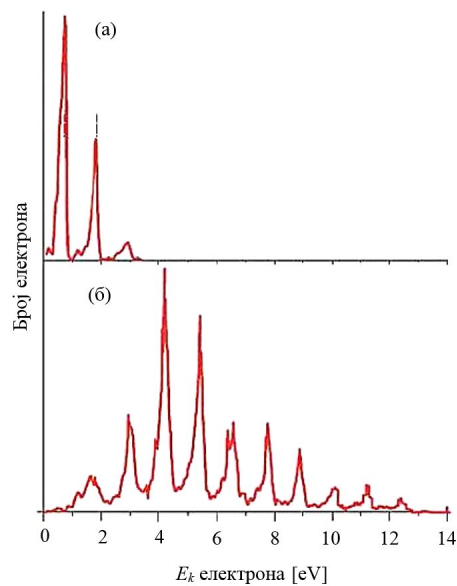
У експерименту који је изведен 1979. године [10] запажен је процес у коме је атом апсорбовао више фотона него што му је потребно за јонизацију, (**слика 1.12.**). Овај процес, када се атом или молекул, јонизује са већим бројем фотона него што је потребно

да се превазиђе праг јонизације, је назван јонизација изнад прага (AboveThreshold Ionization (ATI)) или надбаријерна јонизација.



Слика 1.12. Шематски приказ јонизације изнад прага.

Спектар кинетичких енергија фотоелектрона добијених надбаријерном јонизацијом показује низ пикова који одговарају додатно апсорбованим фотонима. Пикови се налазе на растојањима којима тачно одговара енергија фотона  $h\nu$  (слика 1.13.). Спектар је дискретан [21], [22]. У случају када се апсорбује минималан број фотона који је довољан за јонизацију спектар се састоји само од једног пика.



Слика 1.13. Спектар фотоелектрона добијених у процесу јонизације изнад прага за два различита интензитета ласерског поља, (а) за интензитет поља  $I = 2,2 \times 10^{12} \text{ W/cm}^2$  и (б)  $I = 1,1 \times 10^{13} \text{ W/cm}^2$ .

Број апсорбованих фотона се повећава са повећањем интензитета ласерског поља. Међутим и на нижим интензитетима пикови су присутни. Ово се објашњава утицајем електромагнетног поља на енергетске нивое атома. Када ласерско поље достигне довољно високе интензитета, Ридбергова стања и граница континуума се услед Штарковог (Stark) ефекта приближно померају за вредност енергије

$$U_p = \frac{e^2 F^2}{4m_e \omega^2} \quad (1.16)$$

која, као што је наведено, представља временски усредњену осцилаторну енергију електрона у електромагнетном пољу тј. пондеромоторни потенцијал. Енергија која је сада потребна електрону да би се јонизовао је  $E_i + U_p$ . Електрон који напушта фокус ласерског снопа бива убрзан градијентом поља и његова кинетичка енергија се повећава за вредност  $U_p$  што поништава помак према континууму. Ако је  $U_p$  веће од енергије фотона први пик у спектру емитованих фотона нестаје.

У случају када се јонизација врши ултракратким пулсом, интензитет поља пада на нулу пре него што јонизовани електрон напусти фокус ласерског снопа. Тада се део осцилаторне енергије врати електромагнетном пољу и енергетски спектар је одређен са

$$E_{NB}^S = (N + S) \cdot \hbar\omega - (E_i + U_p) \quad (1.17)$$

где је  $N$  минималан број фотона потребних за јонизацију, а  $S$  број додатно апсорбованих фотона.

Повећањем интензитета ласерског поља повећава се и пондеромоторни потенцијал  $U_p$  па вероватноћа јонизације директно зависи од интензитета поља. При довољно високим интензитетима поља јонизација са  $N$  фотона постаје енергетски забрањена и неопходна је апсорпција  $N + 1$  фотона. Овај ефекат се назива затварање канала изнад прага (channel closing).

Показано је да брзина надбаријерне јонизације [23] до које долази апсорбовањем  $N + S$  фотона пропорционална интензитету зрачења фотона што се може приказати изразом:

$$W_{N+S} \propto I^{N+S}. \quad (1.18)$$

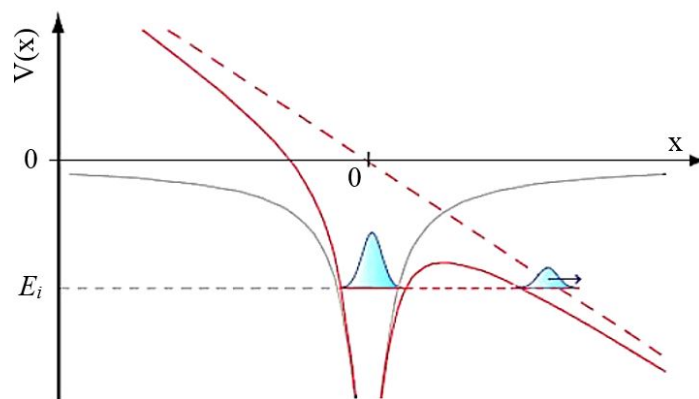
Ефекти надбаријерне јонизације се могу уочити при интензитетима где се јонизација још увек може добро описати пертурбационом теоријом као и на већим интензитетима где пертурбациону теорију не можемо користити. Непертурбационе карактеристике надбаријерне јонизације се манифестују непојављивањем неких од очекиваних пикова у спектру нижих кинетичких енергија електрона при вишим интензитетима поља.

#### 1.6.4. Тунелна јонизација

Тунелна јонизација је квантни процес. Да би се објаснио неопходно је разумети таласно честичну природу светлости и друге фундаменталне квантне законе.

Као што је већ речено, повећањем интензитета ласерског поља постигнуте су јачине електричног поља упоредиве са јачином поља атомског језгра. Келдиш [17] је у свом раду приказао да довољно јако ласерско поље,  $F \leq F_{atom}$ , деформише Кулонов потенцијал  $V(x)$  тако да формира потенцијалну баријеру кроз коју електрон може да тунелује. Овај приступ је примењив само ако је период осциловања спољашњег ласерског поља знатно дужи од времена потребног да таласни пакет тунелује кроз баријеру (квазикласична апроксимација) што је у складу тврдњом да је за  $\gamma \ll 1$ .

Може се закључити да се процес јонизације одвија јако брзо, тј. унутар малог делића оптичког циклуса близу самог максимума интензитета пулса, на месту где је потенцијална баријера максимално пригушена спољашњим пољем (**слика 1.14.**). Након јонизације из атома електрон наставља да се креће и бива убрзан ласерским пољем.



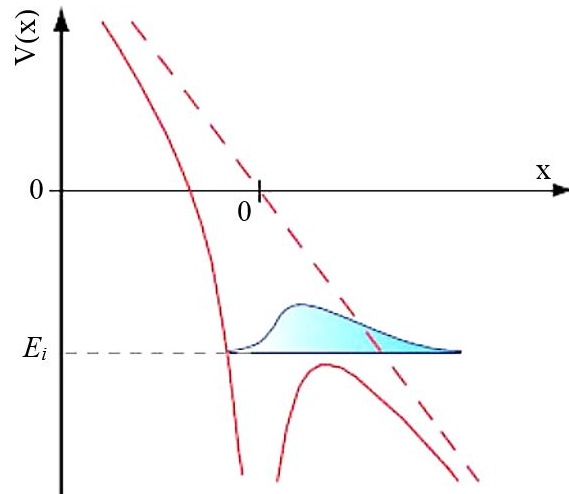
Слика 1.14. Тунелна јонизација.

Брзину прелаза електрона при тунелној јонизацији први пут је дефинисао Келдиш 1965. године [17], који је предпоставио да је поље у коме се налази атом класично тако да брзина прелаза зависи искључиво од јачине ласерског поља  $F$  и енергије јонизације  $E_i$ .

Овај процес има битну улогу у областима атомске и молекулске оптичке физике, физици чврстог стања (полупроводнички уређаји), космологији, нуклеарној физици, биофизици.

### 1.6.5. Јонизација потискивањем баријере

Јонизација потискивањем баријере (Barrier Suppression Ionization (BSI)) или јонизација преко баријере (Over Barrier Ionisation (OBI)) је процес до кога долази када је електрично поље јаче од Кулоновог потенцијала, тада се баријера смањује (потискује) до тачке где основно стање електрона није више везано и електрон је слободан да напусти Кулонов потенцијал атома (слика 1.15.).



Слика 1.15. Јонизација потискивањем баријере.

Гранична вредност јачине поља на којој долази до јонизације преко баријере рачуна се изразом

$$F_{BSI} = \frac{E_i^2}{4Z}, \quad (1.19)$$

односно одговарајућа вредност интензитета поља:

$$I_{BSI} = \frac{c\epsilon_0 F_{BSI}^2}{2}, \quad (1.20)$$

где је  $c$  брзина светлости,  $\epsilon_0$  диелектрична константа.

На основу претходне две једначине добија се да је интензитет ласерског поља неопходан да би дошло до ове врсте јонизације:

$$I_{BSI} = 4 \cdot 10^9 \frac{E_i^4}{Z^2}. \quad (1.21)$$

До јонизације преко баријере атома водоника, који се налази у основном стању долази применом нискофреквентно ласерског поља интензитета  $I = 1,4 \times 10^{14} \text{ W/cm}^2$ .

## 1.7. Вишеструка јонизација

За довољно високе интензитета ласерског поља може доћи до двоструке или вишеструке јонизације вишеелектронског атомског система. Овај процес је први пут уочен 1975. године [24].

### 1.7.1. Секвенцијална јонизација

Најједноставнији приступ при описивању двоструке или вишеструке јонизације атома је да се сви процеси јонизације дешавају независно и поступно: јонизација сваког следећег електрона је приказан као независан догађај, осим што при сваком следећем кораку долази до повећања енергије јонизације.

Ова врста јонизације се назива секвенцијална јонизација. Уопштено, секвенцијални процес који доводи до вишеструке јонизације може бити представљен низом појединачних јонизација. На примеру двоструке јонизације атома процес се може приказати као:



где су  $N$  и  $M$  број апсорбованих фотона у првом, односно другом кораку јонизације. Оба емитована електрона тунелују независно један од другог.

Вишеструку јонизацију је најбоље објаснити применом апроксимације која се назива апроксимација једног активног електрона (Single Active Electron Approximation (SAE)). У оквиру ове апроксимације доминантна је једноелектронска јонизација која води ка секвенцијалном (степенастом) повећању наелектрисања јона. У сваком наредном кораку наелектрисање се повећа за 1.

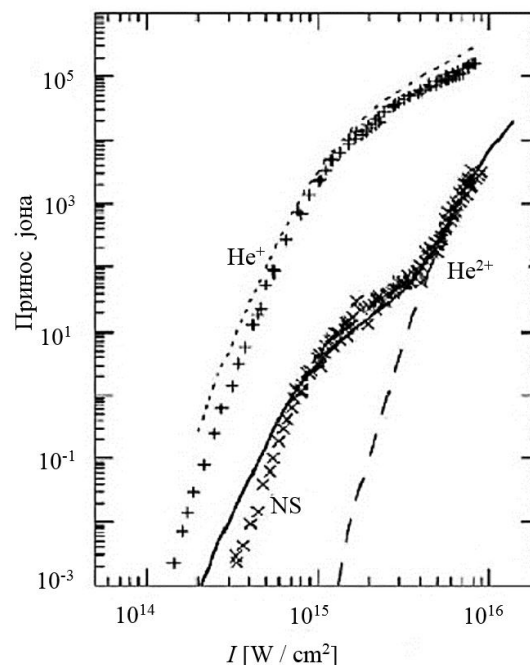
За овај приступ је карактеристично да се везе између електрона у вишеелектронском атому узимају у обзир само у таласним функцијама почетног (initial) стања када поље није укључено, тако да се осим валентног електрона, који служи да објасни овај механизам јонизације, сматра се да су сви остали електрони остали у истом (непромењеном) стању.



### 1.7.2. Несеквенцијална јонизација

Нееластично расејање електрона на атому, при коме долази до ослобађања другог електрона представља процес несеквенцијалне јонизације (NonSequential Double Ionization (NSDI)). То су јонизациони процеси, који доводе до такозване коленасте структуре (knee-structure).

Експериментална проучавања једнострукре и двострукре јонизације показала су приметно повећање приноса двоструко наелектрисаних јона за одређене интензитета поља. Уочено је да је број двоструко јонизованих атома хелијума (He) уско везан са бројем једнострукре јонизованих атома. Први експеримент [25] у коме је забележени овакви резултати изведен је 1983. Експерименти изведени касније су потврдили ове резултате [26] и [27]. До једнострукре јонизације атома хелијума, за тачно одређени интензитет поља, долази секвенцијалном јонизацијом. На том истом интензитету уочен је и пораст двоструко јонизованих атома. Закључено је да је до двострукре јонизације дошло нееластичним расејањем јонизованог електрона на јону „родитељу“, односно да обе врсте јона настају у процесу који на неки начин повезује једнострукру и двострукру јонизацију, процесу несеквенцијалне јонизације.



**Слика 1.16.** Зависност броја детектованих јона хелијума (He) од интензитета ласерског поља при двострукој јонизацији. Са (+) је представљен број једнострукре јонизованих атома хелијума, док са (x) број двоструко јонизованих. Испрекиданом линијом је представљен теоријски резултат који укључује само секвенцијалну јонизацију. Пуна линија базирана је на несеквенцијалној јонизацији.

На слици 1.16. приказани су резултати експеримента у коме је вршена јонизација атома хелијума ласерским пулсом таласне дужине 760 nm који траје 160 fs. Број једноструко јонизованих атома хелијума (+) расте са порастом интензитета све док не наступи засићење јер су скоро сви атоми јонизовани. Број двоструко јонизованих атома хелијума (×) такође расте са порастом интензитета и има засићење за исте интензитета као и код једноструке јонизације. Испрекидана линија представља резултат теоријског прорачуна који не укључује могућност несеквенцијалне јонизације, док пуна линија приказује резултате теоријских прорачуна који су базирани на несеквенцијалној јонизацији. Уочено је да се при свим несеквенцијалним процесима мора узети у обзир корелација између електрона. Динамика другог електрона који је јонизован је под утицајем првог јонизованог електрона.

Битну улогу у процесу нееластичног расејања игра поларизација ласерског поља. Поређењем приноса јона добијених коришћењем линеарно односно циркуларно поларизованог поља уочена је разлика. У случају циркуларно поларизованог поља електрон тежи да заобиђе матични јон, тако да је нееластично расејење мање вероватно. Ово доводи до приметног пада приноса двоструко наелектрисаних јона у односу на случај када је коришћено линеарно поларизовано поље [28].

Процеси несеквенцијалне јонизације су: колективно тунеловање, Shake-off mechanism, Recollision и Rescattering mechanism.

### ***1.7.2.1. Колективно тунеловање***

Двострука јонизација је феномен око кога су вођене бројне дискусије. Најважније питање које је у овим дискусијама постављано је било да ли при анализирању овог догађаја треба узети у обзир и интеракцију између јонизованих електрона. Као резултат настало је више модела којима се може описати овај процес. Овде ће укратко бити представљен модел колективног тунеловања.

Колективно тунеловање је процес у коме долази до истовременог тунеловања неколико везаних електрона кроз потенцијалну баријеру која је настала интеракцијом Кулоновог потенцијала и јаког спољашњег електричног поља. Овај процес је могућ само ако су електрони на истој удаљености од језгра. Закључено је такође да веома кратко трајање ласерског пулса, реда неколико пикосекунди [29], [30] или велика разлика између првог и

другог јонизационог потенцијала могу имати веома битну улогу у процесу колективног тунеловања.

Колективно тунеловање две честице које се одвија при ефективној енергији јонизације, која је сума енергија јонизације првог и другог електрона, требало би да има већу вероватноћу него када би се јонизовали независно, сваки кроз своју тунелну баријеру.

### ***1.7.2.2. Shake-off mechanism***

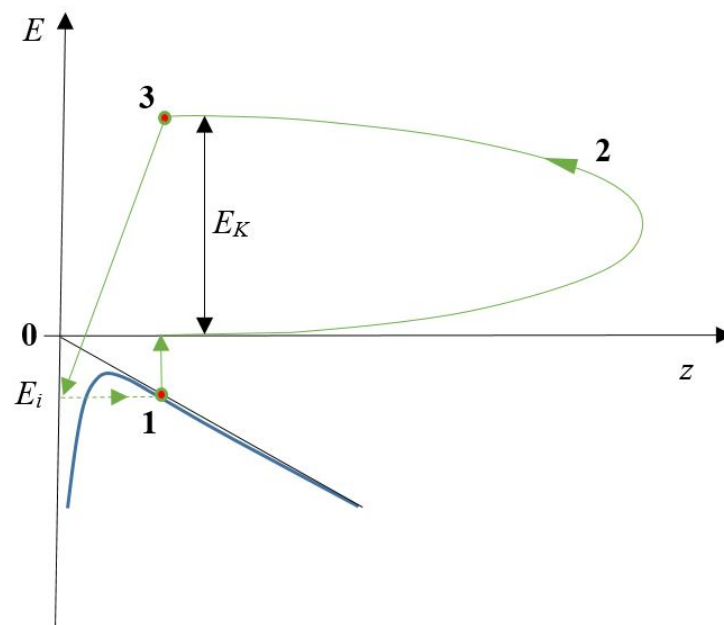
Shake off механизам двоструке јонизације први је представио Фитингоф (Fittinghoff) [31]. Овај механизам постаје доминантан када је енергија фотона јако велика, реда keV. У овом моделу се сматра да се први електрон јонизује веома брзо при чему се укупна енергија система изненада мења (изненадна апроксимација (Sudden Approximation)). Таласне функције преосталих везаних електрона прелази у нова својствена стања модификованог потенцијала. Они не могу да ухвате корак са променама, постају уздрмани („shaken“) и могу постати слободани. Неки електрони су и даље у везаном али ексцитованом (побуђеном) стању (shake-up), што значи да други електрон може бити избачен (shaken off) у току процеса деексцитације [32]. Битно је нагласити да је несеквенцијалана двострука јонизација у јаком ласерском пољу занемарљива у тунелном режиму, зато што услови за трнутну апроксимацију нису испуњени. При тунелној јонизацији Хамилтонијан се мења споро, што је суштина адијабатске апроксимације.

Механизам јонизације који је повезан са претходним а дешава се при нижим енергијама фотона је такозвани „Two-Step-One“ (TS1) процес. Јонизовани електрон, док напушта атом, снажно интерагује са другим електроном и обори га (knocks it out in) при електрон-електрон судару.

### ***1.7.2.3. Електрон-атомско расејање***

Електрон-атомско расејање представља процес при коме се јонизовани електрон вођен ласерским пољем враћа свом матичном јону „родитељу“ и интерагује са њим. Коркум (Corkum) је у свом раду 1993. године [33] да би објаснио експериментелне резултате при јонизацији хелијума, представио квазикласичан модел који је назван модел

три корака (three step model) **слика 1.17.** У првом кораку, електрон прелази из везаног стања у континуум тунеловањем или јонизацијом преко прага. У другом кораку, доминантна је интеракција електрона са ласерским пољем, тако да је кретање електрона углавном одређено променом ласерског поља. Када ласерско поље има негативни предзнак, односно промени фазу (на половини циклуса поља поље мења знак), електрон се убрзава према јону „родитељу“ и у трећем кораку интерагује са њим. При овој интеракцији може доћи до еластичног или нееластичног расејања. Ако је судар електрона и јона „родитеља“ еластичан не долази до промене укупне кинетичке енергије електрона и јона, и то је јонизација изнад прага вишег реда. У случају нееластичног расејања може доћи до рекомбинације (recombination) или јонизације електронском (electron impact ionization).



Слика 1.17. Модел три корака (three step model).

Рекомбинација је процес у коме јонизовани електрон може да се врати јону „родитељу“. Процес је праћен емисијом високо енергетских фотона чија је фреквенција једнака целобројном умношку фреквенције ласерског поља што се назива генерација високих хармоника (High Harmonic Generation (HHG)) [34].

Јонизација електронском (electron impact ionization) је процес у коме електрон интерагује са јоном „родитељем“, при чему је енергија електрон атомског расејања већа од енергије јонизације већ једном јонизованог јона. Електрон „који се вратио“ може директно да избаци други електрон који савладава свој јонизациони потенцијал и доспева у

континуум. Емисија ових електрона се одвија без приметне временске разлике тако да се може сматрати да оба електрона напуштају јон истовремено. У овом процесу јон „родитељ“ је поново јонизован. По својој природи ово је несеквенцијална двострука јонизација.

Ако енергија електрон атомског расејања није већа од енергије јонизације већ једном јонизованог јона, и није довољна да доведе до двоструке јонизације, она може довести до екситације електрона који је везан. Спољашње поље побуђени електрон веома брзо јонизује у такозваном изазваном електрон атомским расејањем екситационом тунелном процесу (recollision induced excitation plus tunneling process) [35]. Овај физички процес је много мање истражен и за његово описивање потребан је много компликованији модел од модела који описује јонизацију електронем (electron impact ionization).

## 1.8. Квазикласична апроксимација

Квазикласична апроксимација у физици се односи на теорију у којој је један део система описан квантно механички, док је други описан класично. У случају јонизационих процеса ласерско поље се третира класично док се атомски систем описује квантном теоријом. У овом моделу сматра се да везани електрон осећа утицај ефективног потенцијала атомског језгра и променљивог електричног поља, и да се јонизација дешава веома брзо у делићу оптичког циклуса поља.

### 1.8.1. Класичан опис електромагнетног поља

На наелектрисану честицу која се креће у електромагнетно пољу делује Лоренцова (Lorentz) сила:

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = q \left( \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}, t) \right) \quad (1.24)$$

где су  $q$ ,  $\vec{v}$  наелектрисање и брзина честице респективно,  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  електрично поље и  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  магнетно поље. Да би се дефинисало електромагнетно поље користе се Максвелове (Maxwell) једначине [36].

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad (1.25)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (1.26)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (1.27)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.28)$$

где је  $\rho$  густина наелектрисања,  $\vec{J}$  густина електричне струје,  $\varepsilon_0$  диелектрична константа,  $\mu_0$  магнетна пермеабилност а  $\nabla$  је набла оператор. Максвелове једначине је сем у најједноставнијим случајевима, тешко решити. Због тога је погодно електромагнетно поље изразити преко векторског и скаларног потенцијала. У складу са Хелмхолц-овом (Helmholtz) теоремом  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  се могу изразити на следећи начин [37]:

$$\vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (1.29)$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (1.30)$$

где су  $\Phi(\vec{r}, t)$  и  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  скаларни односно векторски потенцијал респективно. Једначине (1.25) и (1.28) се трансформишу у нови пар диференцијалних једначина у облику:

$$\nabla^2 \Phi + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{A}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (1.31)$$

$$\left( \nabla^2 \vec{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \right) - \nabla \left( \nabla \cdot \vec{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = -\mu_0 \vec{J} \quad (1.32)$$

Када се потенцијали представе на овај начин првобитни проблем је поједностављен, али и даље остаје компликован за решавање. Оно што може помоћи је концепт слободног рачунања (concept of gauge freedom). Користећи трансформације засноване на наведеном концепту скаларни потенцијал прелази у  $\Phi \rightarrow \Phi - \frac{\partial f}{\partial t}$  док се векторски трансформише у  $\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \nabla f$ . У наведеним трансформацијама потенцијала коришћена је скаларна функција  $f$  која не мења физичка поља  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ . Постоји више начина рачунања, а овде ће бити коришћена тзв. Кулонова калибрација (Coulomb gauge). У Кулоновој калибрацији узима се да је  $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ , што једначину којом је представљен скаларни потенцијал (1.31) преводи у облик  $\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ . Уколико у датом тренутку не постоји извор наелектрисања, сматра се да је  $\rho = 0$ , тако да из једначине (1.31) следи да је и  $\Phi = 0$ . Ово заједно са чињеницом да је и  $\vec{J} = 0$  (зато што нема извора наелектрисања, нема ни његовог усмереног кретања тј. струје) води ка томе да је векторски потенцијал електромагнетног поља дефинисан као:

$$\nabla^2 \vec{A} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}. \quad (1.33)$$

Веза између векторског потенцијала  $\vec{A}$  и јачине електричног поља  $\vec{F}(t)$  дата је једначином:

$$\vec{F}(t) = -\frac{1}{c} \frac{d\vec{A}}{dt} \quad (1.34)$$

где је  $\vec{F}$  је вектор електромагнетног поља.

За проучавање интеракције између електромагнетног зрачења и материје неопходно је познавање начина на који се електромагнетно поље мења у простору и времену. Временска зависност вектора јачине електромагнетног поља када је оно елиптично поларизовано [38] дата је изразом:

$$\vec{F}(t) = F_0(t) (\vec{e}_x \cos \omega t \pm \epsilon \vec{e}_y \sin \omega t) \quad (1.35)$$

где је  $F_0$  амплитуда поља која зависи од времена. Њен облик се може експериментално одредити. Параметар  $\epsilon$  узима вредност у интервалу  $0 \leq \epsilon \leq 1$ . Када је  $\epsilon = 0$  талас је равански поларизован, а за вредности  $\epsilon = \pm 1$  у питању је циркуларна поларизован талас. Једноставним математичком операцијама, помоћу једначина (1.34) и (1.35) добија се да:

- векторски потенцијал раванског таласа линеарно поларизованог поља има облик:

$$\vec{A} = -\frac{cF}{\omega} (\vec{e}_x \sin \omega t) \quad (1.36)$$

- векторски потенцијал раванског таласа циркуларно поларизованог поља има облик:

$$\vec{A} = \frac{cF}{\omega} (\vec{e}_x \cos \omega t + \vec{e}_y \sin \omega t). \quad (1.37)$$

Једначине (1.36) и (1.37) су веома битне зато што су неопходне за рачунање енергије почетног,  $E_i$ , и енергије крајњег стања,  $E_f$ , електрона.

### 1.8.2. Класичан опис кретања наелектрисане честице у електромагнетном пољу

У овом делу ће бити представљене Лагранжове (Lagrang) и Хамилтонове (Hamilton) једначине кретања наелектрисане честице у електромагнетном пољу. Лагранжова једначина кретања је дата у форми:

$$Q_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \quad (1.38)$$

где је  $T$  кинетичка енергија,  $q_i$  генерализована координата и  $Q_i$  генерализована сила. Генерализована сила се може написати у облику:

$$Q_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (1.39)$$

при чему је  $U(q_i, \dot{q}_i, t)$  функција координате, брзине и времена. Ова функција представља потенцијалну енергију система и за конзервативне системе важи да је:

$$U(q_i, \dot{q}_i, t) = U(q_i). \quad (1.40)$$

Лагранжијан система је  $L = T - U$ , тако да једначина (1.38) постаје:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \quad (1.41)$$

Када посматрамо конкретан случај, интеракције наелектрисане честице са електромагнетним пољем потребно је прецизно дефинисати функцију  $U(q_i, \dot{q}_i, t)$  такву да се може дефинисати Лагранжијан  $L$ . При дефиницији функције  $U$  мора се имати у виду да електромагнетна сила није конзервативна и да би се у потпуности могло описати кретање наелектрисане честице у електромагнетном пољу она мора да даје информације о јачини електричног и магнетног поља у свакој тачки трајекторије.

Ако се за генерализоване координате изаберу Декартове координате које дају положај честице  $\vec{r} = (x = x_1, y = x_2, z = x_3)$ . Тада је Лоренцова сила (јед. 1.24) генерализована сила облика  $Q_i = F_i = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})_i$  за  $i = x, y, z$ . На основу јдначине (1.39) пишемо:

$$F_{x_i} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial U}{\partial x_i}. \quad (1.42)$$

Када се генерализована сила представи преко скаларног потенцијала  $\Phi$  и векторског потенцијала  $\vec{A}$ , функција  $U(q_i, \dot{q}_i, t)$  која задовољава једначину (1.42) има облик:

$$U = U(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = q(\Phi(\vec{r}, t) - \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}). \quad (1.43)$$

Овај облик функције  $U$  даје потребну информацију о јачини електричног и магнетног поља у свакој тачки трајекторије.

Да би се добила једначина кретања наелектрисане честице у електромагнетном пољу треба решити Лагранжову диференцијална једначину другог реда (1.42) када функција  $U$  има облик дат једначиниом (1.43).



Једначину кретања наелектрисане честице у електромагнетном пољу сада треба добити преко Хамилтонијана полазећи од Лагранжијана. Као први корак дефинише се генералисани импулс:

$$p_i(q_i, \dot{q}_i, t) = \frac{\partial L(q_i, \dot{q}_i, t)}{\partial \dot{q}_i}. \quad (1.44)$$

У једначини (1.44) импулс  $p_i(q_i, \dot{q}_i, t)$  је изражен као функција генералисане брзине  $\dot{q}_i$ . Инверзијом једначине (1.44) можемо добити генералисану брзину  $\dot{q}_i$  у функцији импулса  $p_i(q_i, \dot{q}_i, t)$ .

У складу са тим варијабле у Лагранжовој формулацији  $q_i, \dot{q}_i$  прелазе у  $q_i, p_i$  у Хамилтоновој формулацији. Хамилтонијан  $H$  добијамо преко Лежандрове (Legendre) трансформације Лагранжијана једначином:

$$H(\{q_i\}, \{p_i\}, t) = \sum_j p_j \dot{q}_j(q_i, \dot{q}_i, t) - L(q_i, \dot{q}_i, t) \quad (1.45)$$

величина  $H$  (Хамилтонијан) представља укупну енергију система.

Изражене преко Хамилтонијана, једначине кретања система (Хамилтонове једначине) гласе:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (1.46)$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (1.47)$$

где су  $\dot{p}_i = -\frac{dp_i}{dt}$ ,  $\dot{q}_i = \left(\frac{dq_i}{dt}\right)$ .

За случај наелектрисане честице у електромагнетном пољу Хамилтонијан је дат следећим изразом:

$$H(\vec{r}, \vec{p}, t) = \frac{1}{2m} (\vec{p} - q\vec{A})^2 + q\Phi \quad (1.48)$$

где је  $m$  маса честице а  $\vec{p}$  је канонички импулс честице (каноничне координате су координате којима се може описати физички систем у било ком тренутку). На основу једначине (1.48) Хамилтонов оператор за наелектрисану честицу у електромагнетном пољу гласи:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} (\vec{p} - q\vec{A})^2 + q\Phi. \quad (1.49)$$

За електрон који се креће у потенцијалној јами (binding potential), са потенцијалом  $V(\vec{r})$  и који интерагује са електромагнетним пољем, Хамилтонов оператор  $\hat{H}$  има облик:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} (\vec{p} - q\vec{A})^2 + q\Phi + V(\vec{r}). \quad (1.50)$$

### 1.8.3. Квантни опис кретања наелектрисане честице у електромагнетном пољу

Посебан значај у класичној механици има сила. Њену улогу у квантној механици преузимају енергија и импулс. Да би се описао неки систем неопходно је решити Шредингерову (Schrödinger) једначину у коју улази Хамилтонијан система. Временски зависна Шредингерова једначина (Time Dependent Schrödinger Equation (TDSE)) којом се може описати кретање електрона у електромагнетном пољу гласи:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{2m_e} \left( -i\hbar \nabla + e\vec{A}(t) \right)^2 \Psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r})\Psi(\vec{r}, t) - e\Phi\Psi(\vec{r}, t) \quad (1.51)$$

У атомским јединицама  $m_e = 1$ ,  $q_e = e = 1$ ,  $\hbar = 1$ :

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \left( -i\nabla + \vec{A}(t) \right)^2 \Psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r})\Psi(\vec{r}, t) - \Phi\Psi(\vec{r}, t) \quad (1.52)$$

где су  $\vec{A}(t)$  векторски,  $\Phi$  скаларни потенцијал поља,  $V(\vec{r})$  је атомски или молекулски потенцијал. Таласна функција  $\Psi$  директно зависи од потенцијала  $V(\vec{r})$  и индиректно од поља (векторског и скаларног потенцијала поља). Међутим и за најједноставније системе једначину је немогуће решити аналитички, па се зато примењују поступци нумеричког или апроксимативног решавања.

#### 1.8.3.1. Калибрација брзине и дужине (Velocity and length gauge)

У квантној механици унитарни оператори задовољавају трансформацију:

$$\hat{T}^\dagger \hat{T} = \hat{T} \hat{T}^\dagger = \hat{I} \quad (1.53)$$

где је  $\hat{I}$  (identity operator) јединични оператор.

Ако је таласна функција  $\Psi$  решење временски зависне Шредингерове једначине,  $i\partial\Psi/\partial t = \hat{H}\Psi$ , тада је трансформисана таласна функција  $\Psi' = \hat{T}\Psi$  решење трансформисане Шредингерове једначине  $i\partial\Psi'/\partial t = \hat{H}'\Psi'$ . Систем се може описати помоћу таласне функције  $\Psi$  али се подједнако добро може описати коришћењем

трансформисане таласне функције  $\Psi'$ , под условом да се Хамилтонијан и обсервабле такође трансформишу.

Ако је  $\hat{Q}$  нека обсервабла,  $\hat{T}$  унитарни оператор тада је  $\langle \hat{Q} \rangle_{\Psi} = \langle \Psi | \hat{Q} | \Psi \rangle = \langle \hat{Q}' \rangle_{\Psi'}$  док је  $\hat{Q}' = \hat{T} \hat{Q} \hat{T}^\dagger$ . Следи да је трансформисани Хамилтонов оператор дат изразом:

$$\hat{H}' = \hat{T} \hat{H} \hat{T}^\dagger + i \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} \hat{T}^\dagger. \quad (1.54)$$

Користећи унитарну трансформацију  $\hat{T} = \exp(i\vec{r} \cdot \vec{A})$  једначина (1.52) добија постаје:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi^{\text{LG}}(\vec{r}, t) = \left( -\frac{1}{2} \nabla^2 + \vec{E} \cdot \vec{r} + V(\vec{r}) \right) \Psi^{\text{LG}}(\vec{r}, t), \quad (1.55)$$

таква да задовољава релацију:

$$\Psi^{\text{LG}}(\vec{r}, t) = \hat{T} \Psi^{\text{VG}}(\vec{r}, t) \quad (1.56)$$

где је  $\Psi^{\text{LG}}(\vec{r}, t)$  калибрација дужине (length gauge) и  $\Psi^{\text{VG}}(\vec{r}, t)$  калибрација брзине (velocity gauge). Из једначина (1.52) и (1.55) се види да су оператор интеракције светлости и материје калибрације брзине и калибрације дужине  $\vec{A}(t) \cdot \vec{p} + (1/2)\vec{A}(t)^2$  и  $\vec{E} \cdot \vec{r}$  респективно. Ове две калибрације су потпуно еквивалентне. Која ће се користити зависи од тога која је погоднија. Када се ради о прорачунима у режиму јаког поља, једноставније је користити калибрацију брзине него калибрацију дужине [39].

### 1.8.3.2. Волковљева стања (Волковљева таласна функција)

Таласна функција коначног стања слободног електрона у континууму, који се налази у електромагнетном пољу је дата Волковљевом таласном функцијом [46]. У датој функцији је узета у обзир интеракција слободног електрона са електричним пољем  $\vec{F}(t)$  које је описано векторским потенцијалом  $\vec{A}(t)$ , док је Кулонова интеракција избаченог електрона и јона занемарена. Разматрање почиње квадрирањем једначине (1.52), за случај када је  $V(\vec{r}) = 0$ . Тада се добија:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = \left( -\frac{1}{2} \nabla^2 + \vec{A}(t) \cdot \vec{p} + \frac{1}{2} \vec{A}(t)^2 \right) \Psi(\vec{r}, t). \quad (1.57)$$

Коришћењем одговарајућих оператора калибрације брзине следи да је таласна функција:

$$\Psi_{\vec{p}}^{\text{V,VG}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \exp\left(i\vec{p} \cdot \vec{r} - \frac{i}{2} \int_0^t (\vec{p} + \vec{A})^2 dt'\right). \quad (1.58)$$

Одговарајућа таласна функција применом оператора калибрације дужине дата је са:

$$\Psi_{\vec{p}}^{\text{V,LG}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \exp\left(i(\vec{p} + \vec{A}) \cdot \vec{r} - \frac{i}{2} \int_0^t (\vec{p} + \vec{A})^2 dt'\right) \quad (1.59)$$

где је  $\vec{p}$  импулс који је инварјантан у току интеракције.

Таласне функције дате једначинама (1.58) и (1.59) су Волковљеве таласне функције у калибрацији брзине и калибрацији дужине респективно. Волковљева таласна функција се користи као апроксимација за коначно стање електрона у континууму.

## Поглавље 2:

### 2.1. Апроксимација јаког поља

У овом поглављу ће бити представљен најзначајнији апроксимативни метод којим се описује интеракција јаког ласерског поља и атомских и молекулских система, апроксимација јаког поља (Strong Field Approximation (SFA)). Апроксимацију јаког поља за случај јонизације први је развио Келдиш и представио је у свом раду 1964 [17]. Касније су је побољшали (проширили) Феисел (Faisal) [40] и Рис (Reiss) [41], [42]. Сам термин strong field approximation је формулисао Рис [42]. Значај ове апроксимације лежи у чињеници да је због врло високих интензитета ласерског поља примена теорије пертурбације, као најчешће коришћеног апроксимативног метода у физици, немогућа.

У апроксимацији јаког поља јонизациони процес се описује као прелазак почетног стања без присуства поља (field free initial state) у коначно Волковљево стање (у континууму). При овом прелазу занемарује се Кулонова интеракција између избаченог електрона и јона родитеља, а то је оправдано тиме што се сматра да је интензитет ласерског поља веома висок док утицај Кулонове интеракције опада са квадратом удаљености електрона од јонизованог атома. За довољно високе интензитета ласерског поља и мале вредности Келдишовог параметра  $\gamma$  у оквиру ове апроксимације појављују се интегрални решења за чије решавање се може користити модел седласте тачке, помоћу кога се врши асимптотска анализа интеграла у комплексној равни [43] и [44].

### 2.2. Атом у јаком ласерском пољу

Користећи основне концепте и методе теоријског описивања датих у овој области физике циљ је представити неке од фундаменталних и најважнијих информација о атомским прелазима проузрокованих спољашњим пољем. За овај приказ неопходно је користити добро познате резултате квантне и класичне механике и теорије поља.

Да би се описао прелаз атома или електрона условљен деловањем спољашњег поља неопходно је јасно разумети основне карактеристике интеракције поље-атом и поље-електрон. Постоје две врсте стања у коме електрон може да се нађе: везано и слободно стање. Везаном стању одговара ограничено кретање електрона у атому, док је у слободном

стању кретање електрона неограничено у простору. Термин „слободан“ не значи да је електрон „ослобођен“ свих интеракција. Слободан електрон може да интерагује са језгром јона родитеља, са преосталим електронима у електронском омотачу јона родитеља, са другим атомима, јонима и електронима као и са спољашњим пољем. Енергија везе електрона се углавном сматра негативном  $E_n < 0$ , док је енергија слободног електрона позитивна  $E \geq 0$ . Сматра се да је енергија једнака нули  $E = 0$  на прагу јонизације. Енергетски спектар везаног стања је дискретан, односно енергија везаног стања може бити једнака само одређеним негативним вредностима које се разликују једна од друге и одговарају дискретним нивоима атома. Енергетски спектар слободног електрона је континуалан. У континууму електрон може имати било коју позитивну енергију у интервалу  $0 \leq E < \infty$ .

Описивање дискретног спектра везаног стања захтева примену квантне механике, док се кретање слободног електрона у одређеним случајевима може описати користећи класичну механику. У принципу квантна механика је довољна да да адекватан опис и дискретног и континуалног спектра. Међутим, понекада се применом класичне механике добија опис који је једноставнији и лакши за разумевање.

Проучавање и анализа јонизације атома, молекула или јона у спољашњем ласерском пољу је превише компликована без увођења апроксимација. Увођење одређених апроксимација је захтевало пре свега решавање дилеме да ли процес посматрати квантно или класично? Квантна механика је неопходна да би се објаснила стабилност атома док се јонизација атома веома добро може описати користећи и чисто класичан приступ. Квантно објашњење процеса јонизације је да током више циклуса, слабо спољашње поље може да повећава орбиту електрона све док је он не напусти. Овај ефекат се знатно повећава када се фреквенција поља поклопи са фреквенцијом осциловања електрона у атому. Јонизација атома у јаком пољу се такође може објаснити користећи класични приступ, када се сматра да је јачина спољашњег поља довољна да се „супростави“ јачини атомског поља и да електрон веома брзо може бити слободан.

Током дугог низа година теоретичари су решавали проблем атома водоника, или уопштено, атома са једним валентним електроном, који се налази у јаком ласерском пољу. Предложене су бројне методе од којих су се издвојиле две: решавање временски зависне Шредингерове једначине (Time Dependent Schrödinger Equation (TDSE)) и квазикласична апроксимација јаког поља (Strong Field Approximation (SFA)).

### 2.3. Добијање брзине прелаза решавањем временски зависне Шредингерове једначине

Коришћење квазикласичног приступа омогућава добијање решења Шредингерове једначине којима се могу описати неки карактеристични режими јонизације као што је тунеловање.

Хамилтонијан слободне честице се може одредити поштовањем општих захтева које намећу хомогеност и изотропија простора. У класичној механици ови захтеви воде ка зависности енергије честице од квадрата њеног импулса у облику  $E = p^2/2m$ , где је  $m$  маса честице. У квантној механици, исти захтеви воде ка одговарајућој вези својствених вредности енергије и импулса. Ове величине, за слободну честицу, се одржавају и могу се симултано мерити. Квантно механички опис атомских система је заснован на претпоставци да сваком стању одговар тачно одређена таласна функција  $\psi$ .

Ако једначина  $E = p^2/2m$  важи за сваку својствену вредност енергије и импулса, иста релација мора да важи и за њихове операторе:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} (\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2). \quad (2.1)$$

Ако је  $\hat{p} = -i\hbar\nabla$ , добија се Хамилтонијан за слободну честицу која се креће:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta, \quad (2.2)$$

где је  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  Лапласов оператор.

У класичној (нерелативистичкој) механици, интеракција између честица се описује додавањем још једног члана у Хамилтонијан. Додатни члан је потенцијална енергије дате интеракције  $U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots)$ , која је функција координата честица.

Хамилтонијан једне честице у спољашњем пољу је:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + U(x, y, z), \quad (2.3)$$

где први члан представља оператор кинетичке енергије, док је други потенцијална енергија.

Сменом једначине (2.2) у (2.3) Хамилтонијан добија нови облик чијим укључивањем у израз  $i\hbar(\partial\psi/\partial t) = \hat{H}\psi$  следи:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + U(x, y, z) \psi. \quad (2.4)$$

У стационарном стању једначина (2.4) има облик:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + [E - U(x, y, z)] \psi = 0 \quad (2.5)$$

док за слободну честицу, једначина (2.5) постаје:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + E \psi = 0. \quad (2.6)$$

Једначине (2.4), (2.5) и (2.6) је Шредингер извео 1926. године.

Решење Шредингерове једначине за све позитивне вредности енергије  $E$  може се наћи у облику:

$$\psi = C e^{-\frac{i}{\hbar} E t + \frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{r}}, \quad (2.7)$$

где је  $C$  константа.

Када се посматра кретање честице у било ком централно симетричном пољу раздвајање променљивих у Шредингеровој једначини написаној у сферно-поларним координатама је увек могућ. У случају Кулоновог поља раздвајање променљивих је могуће само у параболичним координатама. Кретање честице која се налази у Кулоновом пољу, као и кретања атома у спољашњем електромагнетном пољу може се посматрати дуж једне осе,  $z$  осе. Зато је за решавање проблема кретања ових честица корисно користити параболичне координате које су дефинисане на следећи начин:

$$\xi = r + z, \quad \eta = r - z, \quad \varphi = \arctan(y/x), \quad (2.8)$$

где је  $\varphi$  азимутални угао. Дефинисане су у следећим интервалима  $\xi, \eta \in (0, \infty)$ ,  $\varphi \in (0, 2\pi)$ . Декартове координате се могу изразити преко параболичних:

$$x = \sqrt{\xi\eta} \cos\varphi, \quad y = \sqrt{\xi\eta} \sin\varphi, \quad z = \frac{1}{2}(\xi - \eta), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \Leftrightarrow r = \frac{1}{2}(\xi + \eta) \quad (2.9)$$

Квадрат елемента дужине у параболичним координатама дат је изразом:

$$dl^2 = \frac{\xi+\eta}{4\xi} d\xi^2 + \frac{\xi+\eta}{4\eta} d\eta^2 + \xi\eta d\varphi^2, \quad (2.10)$$

док је елемент запремине:

$$dV = \frac{\xi+\eta}{4} d\xi d\eta d\varphi. \quad (2.11)$$



Шредингерова једначина за честицу која се налази у привлачном Кулоновом пољу чији је потенцијал  $U = -1/r = -2/(\xi + \eta)$  је:

$$\frac{4}{\xi+\eta} \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) \right) + \frac{1}{\xi \eta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + 2 \left( E + \frac{2}{\xi+\eta} \right) \psi = 0. \quad (2.12)$$

где је Лапласов оператор:

$$\Delta = \frac{4}{\xi+\eta} \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{\xi \eta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (2.13)$$

За водоников атом у електричном пољу Шредингерова једначина има облик:

$$\left( \frac{1}{2} \Delta + E + \frac{1}{r} - Fz \right) \psi = 0, \quad (2.14)$$

где је  $F$  јачина спољашњег поља,  $z$  координата. Дефинисањем таласне функције преко функција које зависе од појединачних координата  $\psi = f_1(\xi) f_2(\eta) e^{im\varphi}$  и увођењем сепарационих константи  $\beta_1$  и  $\beta_2$  које задовољавају услов  $\beta_1 + \beta_2 = 1$  следи

$$\frac{d}{d\xi} \left( \xi \frac{df_1}{d\xi} \right) + \left( \frac{1}{2} E \xi - \frac{m^2}{4\xi} - \frac{1}{4} F \xi^2 \right) f_1 = -\beta_1 f_1, \quad (2.15)$$

$$\frac{d}{d\eta} \left( \eta \frac{df_2}{d\eta} \right) + \left( \frac{1}{2} E \eta - \frac{m^2}{4\eta} - \frac{1}{4} F \eta^2 \right) f_2 = -\beta_2 f_2. \quad (2.16)$$

Да би се апроксимативно решио систем једначина (2.15), (2.16) спољашње поље  $F$  се сматра малом пертурбацијом. У нултој апроксимацији ( $F = 0$ ), за велике вредности главног квантног броја  $n$  случај се може сматрати квазикласичним.

Увођењем смене:

$$f_1 = \frac{\chi_1}{\sqrt{\xi}}, \quad f_2 = \frac{\chi_2}{\sqrt{\eta}}, \quad (2.17)$$

у једначине (2.15) и (2.16) и након примене одговарајућих математичких операција следи:

$$\frac{d^2 \chi_1}{d\xi^2} + \left( \frac{1}{2} E + \frac{\beta_1}{\xi} - \frac{m^2-1}{4\xi^2} - \frac{1}{4} F \xi \right) \chi_1 = 0 \quad (2.18)$$

$$\frac{d^2 \chi_2}{d\eta^2} + \left( \frac{1}{2} E + \frac{\beta_2}{\eta} - \frac{m^2-1}{4\eta^2} + \frac{1}{4} F \eta \right) \chi_2 = 0. \quad (2.19)$$

Ако се узме да је део који представља укупну енергију честице  $\frac{1}{4}E$ , тада се потенцијална енергија може представити као:

$$U_1(\xi) = -\frac{\beta_1}{2\xi} + \frac{m^2-1}{8\xi^2} + \frac{1}{8}F\xi \quad (2.20)$$

$$U_2(\eta) = -\frac{\beta_2}{2\eta} + \frac{m^2-1}{8\eta^2} - \frac{1}{8}F\eta. \quad (2.21)$$

Када се атом нађе у спољашњем електричном пољу,  $F \leq F_{at}$ , јачина ласерског поља је мања од атомске јачине поља и тада електрона датог атома може да тунелује кроз потенцијалну баријеру

У параболичним координатама потенцијална баријера се „пружа“ дуж  $\eta$  координате, а сматра се да електрон напушта атом у правцу  $z \rightarrow -\infty$  што одговара његовом пролазу кроз област у коме је вредност  $\eta$  велика. Добијање израза за брзину прелаза захтева да се одреди облик таласне функције када су вредности параболичних координата  $\eta$  велика док је у истом тренутку вредност  $\xi$  мала. Погодно је кренути од једначине (2.19). Ако је  $E = -\frac{1}{2}$ ,  $m = 0$  и  $\beta_2 = \frac{1}{2}$ , једначина добија облик:

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial \eta^2} + \left( \frac{1}{2\eta} + \frac{1}{4\eta^2} + \frac{1}{4}F\eta \right) \chi = -\frac{1}{4}\chi. \quad (2.22)$$

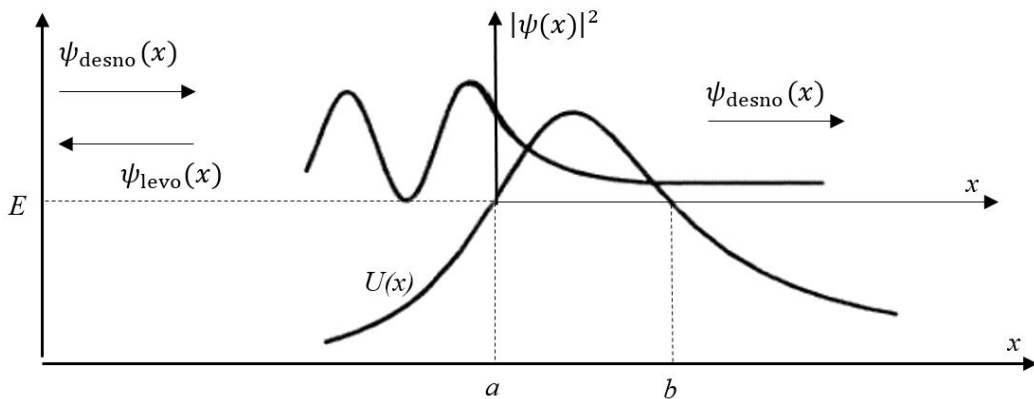
Таласна функција [46] која представља решење ове једначине је:

$$\psi \sim e^{\frac{i}{\hbar}S(r,t)} \quad (2.23)$$

где је  $S(r, t) = -Et \pm \int p dr$  укупно дејство. Ако се посматра само просторно зависни део дејства, таласна функција има облик

$$\psi \sim e^{\pm \frac{i}{\hbar} \int p dr}. \quad (2.24)$$

Да би се добила брзина прелаза електрона који се налази у атому неопходно је увести појам повратне тачке.



Слика 2.1. Тунеловање електрона кроз потенцијалну баријеру

Тачке  $x = a$  и  $x = b$  су лева и десна класична повратна тачка (слика 2.2.) у којима је  $p(x) = 0$  и  $E = U(x)$ . У складу са класичном механиком када се електрон нађе у овим тачкама он ће се зауставити а затим почети да се креће у супротном смеру. Међутим уколико електрон тунелује кроз потенцијалну баријеру он наставља да се креће. Тако да се може дефинисати више области у којима се електрон може да се нађе а самим тим и таласне функције које одговарају свакој од њих.

У области  $a < x < b$  где је  $E < U(x)$  се посматра кретање електрона у баријери, док се у областима  $x < a$  и  $x > b$  где је  $E > U(x)$  посматра кретање електрона ван баријере.

Класично, област  $a < x < b$  је апсолутно забрањена: класична честица, електрон, не може проћи кроз баријеру. Када електрон стигне у повратну тачку бива враћена. Квантномеханички, иако са веома малом вероватноћом, честица може да напусти баријеру, и управо овај ефекат је назван тунеловање.

За све  $x > b$ , област десно од повратне тачке, односно у класично дозвољеној области таласна функција се може представити преко  $\psi_{\text{desno}}$  (одлазећег таласа):

$$\psi_{\text{desno}} \sim C_1 \frac{1}{\sqrt{p}} e^{i \int p dx} + C_2 \frac{1}{\sqrt{p}} e^{-i \int p dx} . \quad (2.25)$$

Лево од повратне тачке односно у класично недозвољеној области, за  $x < a$ ,  $E < U(x)$  таласна функција се мора представити као реална комбинација два квазикласична решења Шредингерове једначине ( $\psi_{\text{desno}}$  и  $\psi_{\text{levo}}$ ), одлазећег и рефлектованог таласа:

$$\psi_{\text{levo}} \sim C_1 \frac{i}{\sqrt{|p|}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int |p| dx} + C_2 \frac{i}{\sqrt{|p|}} e^{+\frac{1}{\hbar} \int |p| dx} . \quad (2.26)$$

Коефицијенти  $C_1$  и  $C_2$  се мењају дуж четвртине полукруга [46; §47, стр. 169]

$$C_1 = \frac{1}{2} C e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ са десна на лево,} \quad (2.27)$$

односно

$$C_2 = \frac{1}{2} C e^{-i\frac{\pi}{4}} \text{ са лева на десно.} \quad (2.28)$$

Узимајући ово у обзир једначина (2.25) добија облик:

$$\psi_{\text{desno}} \sim C \frac{1}{\sqrt{p}} e^{i \int p dx + i\frac{\pi}{4}} . \quad (2.29)$$

За конкретан случај, када се електрон налази у Кулоновом пољу, ако је  $\eta_0$  вредност за  $\eta$  унутар баријере таква да важи  $1 \ll \eta_0 \ll 1/F$ , тада је за  $\eta \geq \eta_0$  таласна функција квазикласична таласна функција у класично забрањеној области и гласи:

$$\chi_{\text{levo}}(\eta) = -\frac{iC}{\sqrt{|p|}} \exp\left(\left|\int_{\eta_0}^{\eta} p(\eta) d\eta\right|\right), \text{ за } \eta < \eta_1, \quad (2.30)$$

док у класично дозвољеној области:

$$\chi_{\text{desno}}(\eta) = \frac{C}{\sqrt{p}} \exp\left(i \int_{\eta_0}^{\eta} p(\eta) d\eta + \frac{i\pi}{4}\right), \text{ за } \eta > \eta_1. \quad (2.31)$$

Константа  $C$  се добија тако што се  $\chi_{\text{levo}}(\eta)$  израчуна за  $\eta_0$  и изједначи са непертурбованом таласном функцијом [45]:

$$\sqrt{\eta_0} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(\xi+\eta_0)/2} = -\frac{iC}{\sqrt{|p_0|}}. \quad (2.32)$$

Следи да је:

$$C = i \sqrt{\frac{|p_0|\eta_0}{\pi}} e^{-(\xi+\eta_0)/2} \quad (2.33)$$

где је  $p_0 = p(\eta_0)$ . Координата  $\xi$  се овде појављује као параметар и без обзира што је вредност овог параметра мала, битна је за решавање интеграла помоћу кога се израчунава вероватноћа. Класична таласна функција (десна) [46], у класично дозвољеној области постаје:

$$\chi_{\text{desno}}(\eta, \xi) = i \sqrt{\frac{|p_0|\eta_0}{\pi p(\eta)}} e^{-(\xi+\eta_0)/2} \exp\left(i \int_{\eta_0}^{\eta} p(\eta) d\eta + \frac{i\pi}{4}\right), \text{ за } \eta > \eta_1. \quad (2.34)$$

Да би се добила густина вероватноће треба израчунати квадрат модула таласне функције (2.34)

$$|\chi_{\text{desno}}(\eta, \xi)|^2 = \frac{|p_0|\eta_0}{\pi p(\eta)} e^{-\xi-\eta_0} \exp\left(-2 \left[\int_{\eta_0}^{\eta} p(\eta) d\eta\right]\right), \text{ за } \eta > \eta_1. \quad (2.35)$$

Док је  $F\eta \ll 1$  дозвољено је сматрати да је  $|p_0| = 1/2$ . Да би чланови једначине били функције од  $F$  у имениоцу предекспоненцијалног дела једначине (2.35) се уводи смена  $p(\eta) = \sqrt{F\eta - 1}$ , док се интеграција експоненцијалног дела врши у области унутар баријере узимајући да је  $p(\eta) = \sqrt{F\eta - 1} + 1/(\eta\sqrt{F\eta - 1})$ :

$$|\chi_{\text{desno}}(\eta, \xi)|^2 = \frac{\eta_0}{\pi\sqrt{F\eta-1}} e^{-\xi-\eta_0} \exp\left(-\int_{\eta_0}^{\eta_1} \left[\sqrt{F\eta - 1} + \frac{1}{\eta\sqrt{F\eta-1}}\right] d\eta\right). \quad (2.36)$$

Интеграл у једначини (2.36) може бити решен коришћењем услова да је  $\eta_1 \approx 1/F$  и  $F\eta_0 \ll 1$ . Тада се добија да је густина вероватноће ван баријере:

$$|\chi_{\text{desno}}(\eta, \xi)|^2 = \frac{4e^{-\xi}}{\pi F \sqrt{F\eta - 1}} e^{-2/(3F)}. \quad (2.37)$$

Укупна вероватноћа јонизације је:

$$W = \int_0^\infty |f_1(\xi) f_2(\eta)|^2 v_z 2\pi \rho d\rho \quad (2.38)$$

где су  $f_1(\xi), f_2(\eta)$  функције које зависе од по једне координате,  $v_z$  је брзина електрона у правцу  $z$  осе и  $\rho$  је радијална цилиндрична координата. Део функције који зависи  $\xi, |f_1|^2$ , је укључен у  $|\chi_{\text{desno}}(\eta, \xi)|^2$  тако да се вероватноћа може написати:

$$W = \int_0^\infty \frac{|\chi_{\text{desno}}(\eta, \xi)|^2}{\eta} v_z 2\pi \rho d\rho. \quad (2.39)$$

За мало  $\xi$  и велико  $\eta$ , израз за  $z$  постаје  $z = \frac{1}{2}(\xi - \eta) \simeq -\eta/2$ . Брзина електрона  $v_z$  се може добити користећи израз:

$$\frac{1}{2} v_z^2 + Fz \simeq \frac{1}{2} v_z^2 - \frac{1}{2} F\eta. \quad (2.40)$$

Сада једначина (2.39) има облик:

$$W = \int_0^\infty \frac{|\chi_{\text{desno}}(\eta, \xi)|^2}{\eta} \sqrt{F\eta - 1} 2\pi \rho d\rho. \quad (2.41)$$

Ако је  $\rho = \sqrt{\xi\eta}$ , тада се  $d\rho$  може писати:

$$d\rho \simeq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\eta}{\xi}} d\xi, \quad (2.42)$$

Ако се примени услов да је  $\eta \gg \xi$  и израз дат једначином (2.37) следи да је:

$$W = \int_0^\infty \frac{4}{F} e^{-2/(3F)} e^{-\xi} d\xi. \quad (2.43)$$

Следи да је коначан израз за вероватноћу:

$$W = \frac{4}{F} e^{-2/(3F)}, \quad (2.44 \text{ a})$$

док брзина прелаза има облик:

$$w = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} W(F(t)) dt. \quad (2.44 \text{ b})$$

Једначина (2.44 a) представља вероватноћу јонизације атома водоника из основног стања процесом тунеловања [46], док једначина (2.44 b) представља брзину прелаза, односно вероватноћу јонизације у јединици времена. Нумеричке провере једначине (2.44 a) су показале добре резултате у области нижих вредности јачине ласерског поља  $F$ . Како је

технологија напредовала било је пожељно проширити једначину тако да се могу обухватити виши интензитети поља и комплекснији атоми. Најчешће коришћена формула којом се рачуна брзина прелаза у тунелној јонизацији је формула дата у АДК теорији.

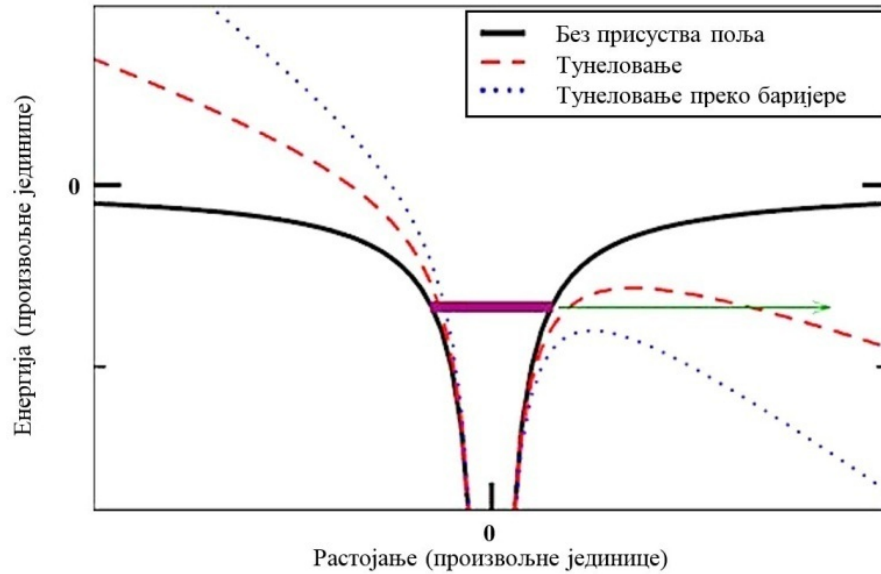
## 2.4. АДК теорија

Ландау (Landau) и Лифшиц (Lifshitz) су дали основу и фундаменталне једначине везане за јонизацију водениковог атома у електромагнетном пољу [46]. Међу многим каснијим радовима треба истаћи рад Келдиша [17]. Резултати представљени у раду Келдиша су основа модерне теорије нелинеарне јонизације променљивим пољем чија је јачина мала у поређењу са атомском јачином поља.

1966. године Переломов, Попов и Терентејев (Perelomov, Popov, Terent'ev) [38] су извели једначину која даје брзину прелаза произвољног атома у адијабатској апроксимацији у којој се сматра да се у току тунеловања електрона промене поља могу занемарити. Двадесет година касније Амосов, Делоне и Крајнов (Amosov, Delone, Kraїnov) су проширили ППТ теорију на комплексне атоме и јоне [47].

Првобитна теорија је била формулисана апроксимацијом једног активног електрона за атомске системе, да би потом била проширена тако да обухвата друге атоме, па чак и двоатомске молекуле. У овом поглављу ће бити представљена проширена теорија тунелне јонизације Амосов-Делоне-Крајнов (АДК). АДК теорија описује јонизацију атома у јаком ласерском пољу и заснована је на тунеловању електрона кроз пригушену потенцијалну баријеру која представља суперпозицију атомског потенцијала и спољашњег електричног поља [49].

Облик потенцијалне баријере без присуства поља, као и облик пригушене потенцијалне баријере када је поље укључено приказане су на **слици 2.2.**



**Слика 2.2.** Шематски приказ тунелне и јонизације изнад прага. Црна линија представља Кулонов потенцијал без присуства поља. Када је поље укључено долази до модификовања Кулоновог потенцијала (црвена испрекидана линија). Процес тунеловања представљен је зеленом стрелицом. Када је спољашње поље довољно јако да потисне баријеру долази до јонизације преко баријере (плава тачкаста линија).

За статичко електрично поље и атом водоника, вероватноћа тунеловања се може изразити аналитички. Амосов, Делоне и Крајнов [47] су кренули од израза за брзину прелаза при тунелној јонизацији водониковог атома који су извели Переломов, Попов и Терентејев [38]:

$$W_{if} = C_{n^*l^*}^2 f(l, m) \left( \frac{3Fn^{*3}}{\pi Z^3} \right) \frac{Z^2}{2n^{*2}} \left( \frac{2Z^3}{Fn^{*3}} \right)^{2n^* - |m| - 1} \exp \left( -\frac{2Z^3}{3Fn^{*3}} \right). \quad (2.45)$$

Коефицијент  $f(l, m)$  се рачуна помоћу једначине

$$f(l, m) = \frac{(2l+1)(l+|m|)!}{2^{|m|}(|m|)!(l-|m|)!} \quad (2.46)$$

где је  $n$  главни квантни број,  $l$  орбитални квантни број и  $m$  магнетни квантни број.  $n^*$  је ефективни квантни број дефинисан као:  $n^* = \frac{Z}{\sqrt{2E_i}}$ . Ефективни орбитални квантни број  $l^*$  је дефинисан као  $l^* = n_0^* - 1$ , где је  $n_0^*$  најмања вредност ефективног квантног броја  $n^*$ . Најбоље резултате дата формула даје за  $n^* \gg 1$ .  $Z$  је број избачених електрона или степен јонизације док је  $E_i$  је енергија јонизације.

Желећи да унапреде ову формулу Амосов, Делоне и Крајнов су добили аналитички израз за коефицијент  $C_{n^*l^*}$ . Кренули су од следећих претпоставки:

- битна су само почетно и коначно стања, међустања не играју никакву улогу,
- $\omega \ll E_i$ , енергија фотона је много мања од енергије електрона који се налази у везаном стању,
- $F \leq F_{at}$ , јачина ласерског поља је мања од атомске јачине поља.

Стање система, у тренутку када је на тек јонизовани електрон деловање Кулоновог поља преосталог дела атома слабо и када се деловање ласерског поља може занемарити, описује се таласном функцијом слободног електрона:

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (2.47)$$

где су  $R_{nl}(r)$  радијална функција која одређује енергију електрона у атому,  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$  сферни хармоник који описује утицај магнетног поља на стање електрона а  $n, l, m$  су главни, орбитални и магнетни квантни број респективно.

У области где се таласна функција електрона асимптотски поклапа са таласном функцијом слободног електрона, Кулоново поље којим преостали део атома делује на атом је слабо, а ласерско поље се може занемарити је:

$$\psi_{n^*lm_l} = C_{n^*l^*} \left( \sqrt{\frac{Z}{n^*}} \right)^3 \left( \frac{Zr}{n^*} \right)^{n^*-1} e^{-\frac{Zr}{n^*}} Y_l^{m_l} \left( \frac{\vec{r}}{r} \right). \quad (2.48)$$

Аналитички израз коефицијента  $C_{n^*l^*}$  за произвољно стање атома или јона атома у квазикласичној апроксимацији се може добити трансформацијом радијалног дела таласне функције слободног електрона.

У класично дозвољеној области, класична повратна тачка се може наћи у области  $r_1 < r < r_2$  [46, §36], где квазикласична радијална таласна функција електрона има облик

$$R_{n,l}(r) = \frac{a_{n,l}}{r \sqrt{p_{n,l}(r)}} \cos \left[ \int_{r_1}^{r_2} p_{n,l}(r) dr - \frac{\pi}{4} \right], \quad (2.49)$$

где је  $p_{n,l}(r)$  импулс избаченог електрона дефинисан као:

$$p_{n,l}(r) = 2 \sqrt{-\frac{Z^2}{2n^*} + \frac{Z}{r} - V} \quad (2.50)$$

У изразу (2.50)  $V$  је потенцијална енергија између електрона и преосталог дела атома. Коефицијент нормирања  $a_{n,l}$  у једначини (2.49) се рачуна из услова нормирања радијалног дела таласне функције

$$\int_{r_1}^{r_2} R_{n,l}^2(r) r^2 dr = 1 \quad (2.51)$$



на следећи начин:

$$a_{n,l}^2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{p_{n,l}(r)} \cos \left[ \int_{r_1}^{r_2} p_{n,l}(r) dr - \frac{\pi}{4} \right] dr = 1. \quad (2.52)$$

За Ридбергова стања за која важи услов  $l \ll n$ , импулс се може написати преко главног квантног броја:

$$\int_{r_1}^{r_2} p_{n,l}(r) dr = (n + 1/2) \pi. \quad (2.53)$$

Решавањем једначине (2.52) узимајући у обзир једначину (2.53) следи:

$$a_{n,l}^2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{2p_{n,l}(r)} = 1. \quad (2.54)$$

Изједначавањем једначина (2.50) и (2.53), и имајући у виду да се посматрају Ридбергова стања за која је потенцијална енергија једнака нули ( $V = 0$ ) следи:

$$2 \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{-\frac{z^2}{2n^*} + \frac{z}{r}} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi. \quad (2.55)$$

Након примене одређених математичких операција добија се

$$-\frac{z^2}{2} (-2)n^{*-3} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dn^*}{p_{n,l}(r)} dr = \pi. \quad (2.56)$$

Ефективни главни квантни број се може дефинисати:  $n^* = n - \delta_l$ , где је  $\delta_{nl}$  квантни дефект. Вредност квантног дефекта зависи од квантног броја посматраног Ридберговог стања. Претходни израз тада добија коначан облик

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{2 p_{n,l}(r)} dr = \frac{n^{*3} \pi}{2Z^2}. \quad (2.57)$$

Сменом израза (2.57) у једначину (2.54) коефицијент нормирања гласи

$$a_{n,l} = Z \sqrt{\frac{2}{n^{*3} \pi}}. \quad (2.58)$$

У класично забрањеној области, класична повратна тачка се може наћи у области  $r > r_2$  [46] где квазикласична радијална таласна функција електрона има облик

$$R_{n,l}(r) = \frac{a_{n,l}}{2r \sqrt{p_{n,l}(r)}} e^{-\int_{r_1}^{r_2} |p_{n,l}(r)| dr}. \quad (2.59)$$

У овој области импулс је:

$$p_{n,l}(r) = \sqrt{-\frac{z^2}{n^{*2}} + \frac{2z}{r} + V}. \quad (2.60)$$

У овом случају потенцијална енергија  $V$  је једнака нули тако да ће модуо импулса бити једнак:

$$|p_{n,l}(r)| = \sqrt{\frac{Z^2}{n^{*2}} - \frac{2Z}{r}}. \quad (2.61)$$

На основу једначине (2.61) радијална таласна функција (2.59) се може написати у облику:

$$R_{n,l}(r) = \frac{a_{n,l}}{2r \sqrt{p_{n,l}(r)}} e^{-\int_{r_1}^{r_2} \sqrt{\frac{Z^2}{n^{*2}} - \frac{2Z}{r}} dr}. \quad (2.62)$$

Након трансформације интеграла у експоненцијалном делу једначине (2.62) следи:

$$R_{n,l}(r) = \frac{a_{n,l}}{2r \sqrt{p_{n,l}(r)}} e^{-2n^* \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{1 - \frac{1}{Zr} \frac{d}{2n^{*2}} \left(\frac{Zr}{2n^{*2}}\right)} dr}. \quad (2.63)$$

Увођењем смене

$$x^2 = (Zr)/(2n^{*2}) \quad (2.64)$$

и решавањем интеграла добија се:

$$R_{n,l}(r) = \frac{a_{n,l}}{2r \sqrt{p_{n,l}(r)}} e^{-2n^* \left\{ \frac{Zr}{2n^{*2}} \sqrt{1 - \frac{2n^*}{Zr}} - \ln \left[ \sqrt{\frac{Zr}{2n^{*2}}} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{2n^*}{Zr}} \right) \right] \right\}} \quad (2.65)$$

Ако коефицијент нормирања  $a_{n,l}$  у претходној једначини заменимо изразом (2.58) и ако се корен у једначини (2.65) развије у ред на основу тога што је  $2n^*/Zr \ll 1$ , једначина (2.65) тада добија облик:

$$R_{n,l}(r) = \frac{Z}{r \sqrt{2\pi n^{*3} p_{n,l}(r)}} \left( \frac{2eZr}{n^{*2}} \right)^{n^*} e^{-\frac{Zr}{n^*}} \quad (2.66)$$

где је  $e$  Ојлеров (Euler) број чија је вредност 2,7182818284590.

Ефективни квантни број  $n^*$  се може изразити једначином  $n^* = Z/\sqrt{2E_i}$ , одакле следи да је вредност енергије јонизације је приближно једнака  $E_i \sim Z/n^*$ . И зато под претпоставком да је кинетичка енергија избаченог електрона приближна енергији јонизације, може се сматрати да је  $p_{n,l} \sim Z/n^*$ .

$$R_{n,l}(r) = \frac{1}{r n^*} \sqrt{\frac{Z}{2\pi}} \left( \frac{2eZr}{n^{*2}} \right)^{n^*} e^{-\frac{Zr}{n^*}}. \quad (2.67)$$

Таласна функција, као производ радијалног и сферног дела, слободног електрона у класично забрањеној области дата општом једначином:

$$\psi_{n^*lm_l} = R_{n,l}(r) Y_l^{m_l} \left( \frac{\vec{r}}{r} \right), \quad (2.68)$$

за разматрани случај добија коначан облик сменом израза за радијални део (2.67) у коначан облик таласне функције (2.68):

$$\psi_{n^*lm_l} = \frac{1}{r n^*} \sqrt{\frac{Z}{2\pi}} \left( \frac{2eZr}{n^{*2}} \right)^{n^*} e^{-\frac{Zr}{n^*}} Y_l^{m_l} \left( \frac{\vec{r}}{r} \right). \quad (2.69)$$

Поређењем једначине (2.69) и једначине (2.48) следи да коефицијент  $C_{n^*l^*}$  има облик:

$$C_{n^*l^*} = \left( \frac{2e}{n^*} \right)^{n^*} \frac{1}{\sqrt{2\pi n^*}}. \quad (2.70)$$

Заменом коефицијента који су израчунали Амосов, Делоне и Крајнов у израз за брзину прелаза која је дата у ППТ теорији добија се брзина прелаза при тунелној јонизацији водониковог атома у линеарно поларизованом електромагнетном пољу са главним квантним бројем  $n$ , орбиталним квантним бројем  $l$  и магнетним квантним бројем  $m$ :

$$W_{ADK}^{lin} = \left( \frac{2e}{n^*} \right)^{2n^*} \frac{1}{2\pi n^*} \frac{(2l+1)(l+|m|)!}{2^{|m|}(|m|)!(l-|m|)!} \left( \frac{3Fn^{*3}}{\pi Z^3} \right) \frac{Z^2}{2n^{*2}} \left( \frac{2Z^3}{Fn^{*3}} \right)^{2n^*-|m|-1} \exp \left( -\frac{2Z^3}{3Fn^{*3}} \right). \quad (2.71)$$

У циркуларно поларизованом ласерском пољу израз (2.71) постаје:

$$W_{ADK}^{cir} = \sqrt{\frac{3FZ^3}{\pi n^{*3}}} \left( \frac{3Fn^{*3}}{\pi Z^3} \right) \frac{Z^2}{2n^{*2}} \left( \frac{2e}{n^*} \right)^{2n^*} \frac{1}{2\pi n^*} \frac{(2l+1)(l+|m|)!}{2^{|m|}(|m|)!(l-|m|)!} \left( \frac{2Z^3}{Fn^{*3}} \right)^{2n^*-|m|-1} \exp \left( -\frac{2Z^3}{3Fn^{*3}} \right). \quad (2.72)$$

Изрази за вероватноћу јонизације (2.71) и (2.72) су добијени под претпоставком да је импулс избаченог електрона  $p$  једнак нули.

## 2.5. Ландау-Дихнеова адијабатска апроксимација

Израз за вероватноћу јонизације, односно брзину прелаза се може добити и коришћењем Ландау-Дихнеове (Landau Dyhne) адијабатске апроксимације [17], [46]. У првом случају када је почетни импулс избаченог електрона једнак нули и у другом када је вероватноћа јонизације функција ненултог почетног импулса избаченог електрона [48], [49], [50].

У квантној механици Хамилтонијан је оператор који је придружен опсервабли енергије. Временску еволуцију квантног система диктира Хамилтонијан преко

Шредингерове једначине  $i\hbar(\partial\psi/\partial t) = \hat{H}\psi$ , где је  $\hat{H}$  Хамилтонијан, а  $\psi$  стање система. Како Хамилтонијан представља енергију његове својствене вредности представљају могуће енергије које систем може да поседује.

Да би се извела апроксимација Ландау-Дихнеа неопходно је кренути од израза који представља Хамилтонијан система. У случају који се овде разматра Хамилтонијан система се споро мења са временом, тако да је решење временски независне Шредингерове једначине:

$$\hat{H}(t) \psi_n(t) = E_n(t) \psi_n(t) \quad (2.73)$$

Посматрамо прелазак система из почетног (непертурбованог) атомског стања у коначно стање (у континууму), када су  $\psi_i, \psi_f$  таласне функције почетног и коначног стања, респективно. Ако знамо да је стање система споро променљиво са временом неопходно је утврдити какав је однос  $E_i(t)$  енергије почетног стања, и  $E_f(t)$  енергије коначног стања електрона које зависе од времена  $t$ .

Приближавајући се тренутку  $\tau$ , где је  $\tau$  квазикласична повратна тачка, својствене вредности функција  $\psi_i, \psi_f$  се мењају. Да бисмо одредили ту промену представићемо дате функције преко њихових линеарних комбинација бирајући коефицијенте тако да следећи услови буду испуњени:

$$\int \psi_{1i}^2 d\vec{r} = \int \psi_{2f}^2 d\vec{r} = 0, \quad (2.74)$$

$$\int \psi_{1i} \psi_{2f} d\vec{r} = 1, \quad (2.75)$$

где је  $r$  просторна координата а  $\psi_{1i}$  и  $\psi_{2f}$  линеарне комбинације таласних функција почетног и коначног стања, које гласе:

$$\psi_{1i} = A_i \psi_i + A_f \psi_f, \quad (2.76)$$

$$\psi_{2f} = B_i \psi_i + B_f \psi_f. \quad (2.77)$$

Ове функције немају сингуларитет у тачки  $\tau$  и зато се од њих мора направити линеарна комбинација преко које ће моћи својствена функција да се напише у облику:

$$\psi_n(t) = C_i \psi_{1i} + C_f \psi_{2f}. \quad (2.78)$$

Сменом једначине (2.78) у једначину (2.73) следи да је:

$$\hat{H}(t)[C_i \psi_{1i} + C_f \psi_{2f}] = E_n(t)[C_i \psi_{1i} + C_f \psi_{2f}], \quad (2.79)$$

односно:

$$C_i \hat{H}(t) \psi_{1i} + C_f \hat{H}(t) \psi_{2f} = C_i E_n(t) \psi_{1i} + C_f E_n(t) \psi_{2f}. \quad (2.80)$$

Множењем једначине (2.80) са  $\psi_{1i}$  и водећи рачуна о условима (2.74), (2.75) добија се да је:

$$C_i \psi_{1i} \hat{H}(t) \psi_{1i} + C_f \psi_{1i} \hat{H}(t) \psi_{2f} = C_f E_n(t), \quad (2.81)$$

односно множењем једначине (2.80) са  $\psi_{2f}$ :

$$C_i \psi_{2f} \hat{H}(t) \psi_{1i} + C_f \psi_{2f} \hat{H}(t) \psi_{2f} = C_i E_n(t). \quad (2.82)$$

Интеграљењем једначина (2.81), (2.82) по координати  $r$  се добија:

$$C_i \int \psi_{1i} \hat{H}(t) \psi_{1i} d\vec{r} + C_f \int \psi_{1i} \hat{H}(t) \psi_{2f} d\vec{r} = C_f E_n(t) \quad (2.83)$$

$$C_i \int \psi_{2f} \hat{H}(t) \psi_{1i} d\vec{r} + C_f \int \psi_{2f} \hat{H}(t) \psi_{2f} d\vec{r} = C_i E_n(t). \quad (2.84)$$

Након увођења ознака за матричне елементе  $\hat{H}_{nm}(t) = \int \psi_n \hat{H}(t) \psi_m d\vec{r}$  једначине (2.83) и (2.84) се могу написати у форми:

$$C_i \hat{H}_{ii}(t) + C_f \hat{H}_{if}(t) = C_f E_n(t), \quad (2.85)$$

$$C_i \hat{H}_{fi}(t) + C_f \hat{H}_{ff}(t) = C_i E_n(t). \quad (2.86)$$

Како је:

$$\hat{H}_{if}(t) = \hat{H}_{if}^{tr}(t) = \hat{H}_{fi}(t) \quad (2.87)$$

систем једначина (2.85) и (2.86) има облик

$$C_i \hat{H}_{ii}(t) + C_f [\hat{H}_{if}(t) - E_n(t)] = 0, \quad (2.88)$$

$$C_i [\hat{H}_{if}(t) - E_n(t)] + C_f \hat{H}_{ff}(t) = 0. \quad (2.89)$$

У матричном облику:

$$\begin{bmatrix} \hat{H}_{ii}(t) & [\hat{H}_{if}(t) - E_n(t)] \\ [\hat{H}_{if}(t) - E_n(t)] & \hat{H}_{ff}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_i \\ C_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.90)$$

Да би систем имао решења различита од нуле, његова детерминанта мора да буде једнака нули

$$\begin{vmatrix} \hat{H}_{ii}(t) & [\hat{H}_{if}(t) - E_n(t)] \\ [\hat{H}_{if}(t) - E_n(t)] & \hat{H}_{ff}(t) \end{vmatrix} = 0. \quad (2.91)$$

Решавањем:

$$\hat{H}_{ii}(t) \hat{H}_{ff}(t) - [\hat{H}_{if}(t) - E_n(t)]^2 = 0, \quad (2.92)$$

$$\hat{H}_{if}(t) - E_n(t) = \pm \sqrt{\hat{H}_{ii}(t) \hat{H}_{ff}(t)}. \quad (2.93)$$

Из једначине (2.93), се рачунају својствене вредности енергије:

$$E_{n1}(t) = \hat{H}_{if}(t) - \sqrt{\hat{H}_{ii}(t) \hat{H}_{ff}(t)} \quad (2.94)$$

$$E_{n2}(t) = \hat{H}_{if}(t) + \sqrt{\hat{H}_{ii}(t) \hat{H}_{ff}(t)}. \quad (2.95)$$

Како својствене вредности енергија у тренутку  $\tau$  морају бити једнаке:

$$E_{n1}(t) = E_{n2}(t), \quad (2.96)$$

следи да је:

$$\sqrt{\hat{H}_{ii}(t) \hat{H}_{ff}(t)} = -\sqrt{\hat{H}_{ii}(t) \hat{H}_{ff}(t)}. \quad (2.97)$$

Може се закључити да у тренутку  $\tau$  постоји само једна својствена вредност таласне функције, односно

$$E_f(\tau) = -E_i(\tau). \quad (2.98)$$

где је  $\tau$  је комплексно време.

Енергија електрона у почетном везаном стању  $i$  једнака је енергији електрона у коначном стању у континууму  $f$ .

### 2.5.1. Вероватноћа јонизације и брзина прелаза

У квантној механици адијабатска промена је она која се дешава знатно спорије од фреквенције преласка између почетног и коначног енергетског својственог стања посматраног система  $\omega \ll \omega_{if}$ . У почетном тренутку, се узима у обзир само утицај Кулоновог потенцијала између електрона и јона родитеља док се утицај електромагнетног потенцијала ласерског поља може занемарити. Тада је енергија везе овог електрона

$E_{i(t=0)} = -E_i$ . За коначно стање се може изабрати стање које лежи на самом почетку непрекидног дела спектра, тј. на оном месту где се својствене вредности енергије мењају из негативних (дискретни део спектра) у позитивни (континуални део спектра), на основу тога може се сматрати да је енергија крајњег стања  $E_{f(t=0)} = 0$ .

Може се закључити да ће фреквенција преласка из почетног у коначно стање бити једнака непетурбованој енергији јонизације посматраног атома  $\omega_{if} = E_f - E_i = 0 - (-E_i) = E_i$ . Ово значи да је разматрана пертурбација споро променљива величина и зато се може кренути од Шредингерове једначине сматрајући да се Хамилтонијан система споро мења:

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = (\hat{H}_0 + \hat{V}(t)) |\psi(t)\rangle \quad (2.99)$$

где је  $\hat{H}_0$  временски независан Хамилтонијан атомског система а  $\hat{V}(t)$  оператор спољашњег поља. Таласна функција  $|\psi(t)\rangle$  је изабрана тако да су почетно, везано стање са енергијом  $E_i$ , и коначно, стање слободног електрона, представљени са  $|\psi_i\rangle$ ,  $|\psi(\infty)\rangle = |\psi_f\rangle$  респективно.  $S$  матрични елемент је дефинисан тако да представља амплитуду преласка између почетног  $|\psi_i\rangle$  и коначног стања  $|\psi_f\rangle$

$$S_{if} = \langle \psi_i | \hat{S} | \psi_f \rangle, \quad (2.100)$$

у граничном случају

$$S_{if} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \langle \psi_i(t) | \psi(t) \rangle. \quad (2.101)$$

Рачунање  $S_{if}$  захтева налажење решења једначине (2.99). Типична процедура почиње писањем једначине (2.99) у интегралној форми [46]:

$$|\psi(t)\rangle = |\psi_f(t)\rangle - \frac{i}{\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 t} \int_t^\infty e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 t'} dt' \hat{V}(t') |\psi(t')\rangle \quad (2.102)$$

где је таласна функција почетног стања писана у форми  $|\psi_i(t)\rangle = |\psi_i\rangle e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 t}$ , док је таласна функција коначног стања  $|\psi(\infty)\rangle = |\psi_f\rangle$ , а  $\hat{H}_0$  је ермитски оператор. Скаларним множењем једначине (2.102) са  $\langle \psi_i(t) |$  добија се

$$S_{if} = -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^\infty \langle \psi_i^*(t') | \hat{V}(t') | \psi(t') \rangle dt' \quad (2.103)$$

Једначина (2.103) је амплитуда прелаза између почетног везаног стања  $|i\rangle$ , у коначно стање у континууму  $|f\rangle$  за спољашње поље  $\hat{V}(t)$ . Квадрат ове величине даје вероватноћу прелаза:

$$W_{if} = |S_{if}|^2. \quad (2.104)$$

Израз за вероватноћу прелаза је добијен, али таласна функција  $\psi(t)$  је и даље непозната, тако да се вероватноћа још увек не може рачунати. Сматра се да  $\psi(t)$  преставља стање слободног електрона које је потпуно дефинисано његовом интеракцијом са спољашњим пољем. У променљивом пољу, таласна функција коначног стања слободног електрона  $\psi(t)$  је апроксимирана Волковљевом таласном функцијом  $\psi^V$  (јед. 1.58). Имајући ово у виду једначина (2.103) тада има облик

$$S_{if} = -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \psi_i^*(t') | \hat{V}(t') | \psi^V(t') \rangle dt'. \quad (2.105)$$

Волковљева таласна функција  $\psi^V(x, t)$  је решење Шредингерове једначине. Да би се одредила брзина прелаза потребно је наћи аналитички израз ове функције за електрон који се налази у раванском електромагнетном таласу.

Шредингерова једначина којом се описује кретање електрона у електромагнетном пољу је

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{e}{c} A(\omega, t) \right)^2 \psi^V(x, t) = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \psi^V(x, t) \quad (2.106)$$

која у атомским јединицама гласи:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{i} \nabla - A(\omega, t) \right)^2 \psi^V(x, t) = -\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t} \psi^V(x, t) \quad (2.107)$$

$A$  је векторски потенцијал.

Волковљева таласна функција дата једначином (1.58) се може представити и у облику

$$\psi^V(x, t) = C e^{\frac{i}{\hbar} S(x, t)}, \quad (2.108)$$

односно у атомским јединицама има облик:

$$\psi^V(x, t) = C e^{iS(x, t)} \quad (2.109)$$

где је  $S(x, t)$  реална функција. Сменом једначине (2.109) у (2.107) следи

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{i} \nabla - A(\omega, t) \right)^2 C e^{iS(x, t)} + \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t} C e^{iS(x, t)} = 0. \quad (2.110)$$

Квадрирањем члана у једначини (2.110) и минималним сређивањем се добија:

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{i^2} \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 (C e^{iS(x, t)}) - \frac{2}{i} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} (C e^{iS(x, t)}) + (A(\omega, t))^2 C e^{iS(x, t)} \right] + \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t} (C e^{iS(x, t)}) = 0 \quad (2.111)$$



$$\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{i^2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} \left[ i C e^{iS(x,t)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} S(x,t) \right] - \frac{2}{i} i C e^{iS(x,t)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} S(x,t) + (A(\omega, t))^2 C e^{iS(x,t)} \right] + \frac{1}{i} i C e^{iS(x,t)} \frac{\partial}{\partial t} S(x,t) = 0. \quad (2.112)$$

Из услова трансверзалности  $\nabla \cdot A(\omega, t) = 0$  следи да је:

$$\nabla^2 S(x, t) = 0. \quad (2.113)$$

Једначина (2.112) се подели са  $C e^{iS(x,t)}$  и добија се да је:

$$\frac{1}{2} (\nabla S(x, t) - A(\omega, t))^2 + \frac{\partial}{\partial t} S(x, t) = 0. \quad (2.114)$$

Поређењем једначине (2.114) са изразом за нерелативистичку енергију  $p^2/2m = E$ , имајући у виду да је у атомском систему јединица  $m = 1$ , изједначавањем израза са леве и израза са десне стране, добијају се две једначине:

$$E(x, t) = - \frac{\partial}{\partial t} S(x, t) \quad (2.115)$$

и

$$p(x, t) + A(\omega, t) = \nabla S(x, t) \quad (2.116)$$

где су  $E(x, t)$  и  $p(x, t)$  енергија и импулс избаченог електрона. У једначини (2.114) не фигурише константа  $\hbar$ , тако да се она може сматрати класичном.

Облик класичног дејства  $S(x, t)$  мора да задовољава Лапласову једначину и дефинисан је условом (2.113). Лапласову једначину задовољава било која функција чија је фаза  $\omega t$ . Најопштије решење које задовољава једначину (2.113) има облик:

$$S(x, t) = (p(x, t) + A(\omega, t)) \cdot r + \Phi(\omega t) \quad (2.117)$$

где је  $\Phi(\omega t)$  произвољна функција, док израз  $p(x, t) + A(\omega, t)$  представља канонични импулс електрона који се налази слободан у пољу. Функција  $\Phi(\omega t)$  се може представити преко енергије  $E(x, t)$  тако да следи да је:

$$\Phi(\omega t) = - \int_0^t E(\omega t') dt'. \quad (2.118)$$

Имајући ово у виду добија се да је коначан облик Волковљеве таласне функције  $\psi^V(x, t)$

$$\psi^V(x, t) = C e^{i \left[ (p(x,t) + A(\omega,t)) \cdot r - \int_0^t E(\omega t') dt' \right]}. \quad (2.119)$$

Знак експонента је изабран тако да је енергија својствене вредности позитивна  $\hat{H}(t)\psi^V = E(t)\psi^V$ . Константа  $C$  се може израчунати из услова ортонормираности делта функције за слободна (не везана) стања.

Да би се израчунала брзина прелаза није неопходно познавати Волковљеву таласну функцију коначног стања већ је неопходно знати  $\hat{V}(t) \psi^V(x, t)$ . Оператор интеракције  $\hat{V}(t)$  представља везу између укупног Хамилтонијана и Хамилтонијана слободне честице  $\hat{V}(t) = \hat{H} - \hat{H}_{free}$  при чему је  $\hat{H}_{free} = \hat{H}(\infty)$ . Тако да се може писати

$$\hat{V}(t)\psi^V(x, t) = \left(\hat{H}(t) - \hat{H}(\infty)\right)\psi^V(x, t), \quad (2.120)$$

односно

$$\hat{V}(t)\psi^V(x, t) = (E(\omega t) - E(\infty))\psi^V(x, t). \quad (2.121)$$

Сва три оператора  $\hat{H}$ ,  $\hat{H}(\infty)$  и  $\hat{V}(t)$  имају Волковљеву таласну функцију као својствене вредности, стим да  $\hat{H}$  представља укупну енергију система, док  $\hat{H}(\infty)$  даје енергију електрона која му је преостала када се поље искључи,  $\hat{V}(t)$  описује енергију коју електрон добије или изгуби у интеракцији са пољем.

Сви елементи једначине (2.105) су сада познати, тако да се амплитуда  $S_{if}$  може израчунати. Коришћењем једначина (2.105), (2.119), (2.121) и раздвајањем интеграла који зависе од  $r$  и од  $t$ , амплитуда прелаза гласи:

$$S_{if} = -\frac{i}{\hbar} C \int \Phi_0^*(r) e^{i(p(x,t)+A(\omega,t))\cdot r} d^3r \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (E(\omega t) - E(\infty)) e^{\frac{i}{\hbar}(-E_i t - \int_0^t E(\omega t') dt')} dt \quad (2.122)$$

где је  $\Phi_0(r) e^{\frac{i}{\hbar} E_i t}$  таласна функција. Из услова адијабатске трансформације  $E_i \gg \hbar \omega$ , за све реалне вредности  $t$ ,  $(E(\omega t) + E_i)/\hbar \omega > E_i/\hbar \omega \gg 1$  фаза у експоненту је велика тако да се експонент брзо мења са променом  $t$ , а вредност интеграла тежи нули. Ненулта вредност интеграла се добија за ону вредност променљиве  $t$  за коју је фаза експонента стационарна или  $E(\omega \tau) = -E_i$ . Интеграл се апроксимативно може решити користећи метод седласте тачке и тада решење једначине (2.122) има облик:

$$S_{if} = -\frac{i}{\hbar} \Phi_0^* C \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{|E'(\omega t_0)|}} \cdot (E(\omega t_0) - E(\infty)) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t (E(\omega t') + E_i) dt'}. \quad (2.123)$$

$E(\omega t)$  представља класичну енергију слободног електрона у електромагнетном пољу. Две крајње тачке процеса су оне у којима се дефинише почетна енергија везаног стања и коначна енергија мерена у тренутку  $t = 0$ . Енергија електрона је позитивно дефинисана величина за све реалне вредности аргумента  $\omega t$ , али израз  $E(\omega \tau) = -E_i$  захтева да енергија буде негативна, што условљава да у тачки  $\tau$  има имагинарну компоненту. Следи

да је јонизација атома, било да је тунелна или мултифотонска, представљена као класично кретање електрона у комплексној равни.

Ако се стање система споро мења са временом значи да је „време прелаза“ веома дуго и зато временски зависни део дејства:

$$S_{if}(\tau) \propto e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^\tau (E(\omega t) + E_i(t)) dt} \quad (2.124)$$

има велику вредност. У том смислу проблем је квазикласичан и тада услов из једначине (2.96) мора бити задовољен. У класичној механици овај услов одговара тренутном прелазу који је у пракси класично немогућ.

Узимајући у обзир једначине (2.104) и (2.124) може написати:

$$\begin{aligned} W_{if} &= |e^{-i\phi}|^2 \\ &= e^{-i\phi} e^{i\phi^*} = e^{-i(\phi - \phi^*)} = \\ &e^{-i(\text{Re}\phi + \text{Im}\phi - (\text{Re}\phi - \text{Im}\phi))} = e^{-2\text{Im}\phi}, \end{aligned} \quad (2.125)$$

односно:

$$W_{if} = e^{-2\text{Im}S_{if}(\tau)}, \quad (2.126)$$

$$W_{if} = e^{-2\text{Im}[\int_0^\tau [E_f(t) - E_i(t)] dt]}. \quad (2.127)$$

Једначина (2.127) представља израз за брзину прелаза (transition rate) система из почетног,  $i$ , у коначно стање,  $f$ , у тренутку  $\tau$  преко временски зависног дела дејства у Ландау-Дихне адијабатској трансформацији [46].

### 2.5.2. Добијање брзине прелаза у АДК теорији преко Ландау-Дихне адијабатске апроксимације

Користећи Ландау-Дихне адијабатску апроксимацију може се извести израз за брзину прелаза добијен у АДК теорији. Први корак је да се енергија почетног стања сматра једнаком енергији јонизације, док је енергија коначног стања дата у функцији векторског потенцијала спољашњег поља.

Енергија почетног и коначног стања су дата једначинама, респективно:

$$E_i(t) = -E_i, \quad (2.128)$$

$$E_f(t) = \frac{1}{2} \left( \vec{p} + \frac{\vec{A}}{c} \right)^2 \quad (2.129)$$

где је  $E_i$  непертурбовани јонизациони потенцијал атома док се за коначно стање узима стање слободног електрона у линеарно поларизованом пољу чија се јачина може дефинисати  $\vec{F}(t) = \cos\omega t$ . Јачина спољашњег поља се може изразити и преко векторског потенцијала  $\vec{A}(t)$ ,  $\vec{F}(t) = -\frac{1}{c} \frac{d\vec{A}(t)}{dt}$ . Израз за векторски потенцијал се изводи на следећи начин:

$$\vec{F}(t) = -\frac{1}{c} \frac{d\vec{A}(t)}{dt} \quad (2.130)$$

$$\int \frac{d\vec{A}(t)}{dt} = -c \int \vec{F}(t) dt$$

$$\vec{A}(t) = -c \int \vec{F} \cos\omega t dt$$

$$\vec{A}(t) = -\frac{c\vec{F}}{\omega} \sin\omega t. \quad (2.131)$$

Енергија коначног стања сада има облик:

$$E_f(t) = \frac{1}{2} \left( \vec{p} - \frac{\vec{F}}{\omega} \sin\omega t \right)^2 \quad (2.132)$$

Један од основних закључака Ландау-Дихне адијабатске апроксимације који ће бити неопходно употребити у даљем раду је да у тренутку  $\tau$  постоји само једна својствена вредност таласне функције, односно да је  $E_f(\tau) = -E_i(\tau)$ , (јед. 2.98), енергија електрона у почетном, везаном стању  $i$ , једнака је енергији електрона у коначном стању, у континууму  $f$ .

Као што је већ поменуто при извођењу брзине прелаза биће разматрана два случаја: када је почетни импулс јонизованог електрона једнак нули и када је различит од нуле.

### **2.5.2.1. Добијање брзине прелаза у АДК теорији преко Ландау-Дихне адијабатске апроксимације када је почетни импулс избаченог електрона једнак нули**

Поступак добијања брзине прелаза у АДК теорији преко Ландау-Дихне адијабатске апроксимације када је почетни импулс избаченог електрона једнак нули је заснован на претпоставци да је интензитет спољашњег ласерског поља много мањи од интензитета

атомског поља. Тако да спољашње поље утиче само на коначно стање, док основно стање остаје непертурбовано

Енергије почетног и коначног стања, у случају када је почетни импулс избаченог електрона једнак нули дате су следећим једначинама:

$$E_i(t) = -E_i \quad (2.133)$$

$$E_f(t) = \frac{1}{2} \left( \vec{p} - \frac{\vec{A}}{c} \right)^2 = \frac{F^2}{2\omega^2} \sin^2 \omega t. \quad (2.134)$$

Израз за квазикласичну повратну тачку  $\tau$  се добија из услова:

$$E_i(\tau) = E_f(\tau) \quad (2.135)$$

$$-E_i(\tau) = \frac{F^2}{2\omega^2} \sin^2 \omega \tau \quad (2.136)$$

$$\sqrt{\frac{-2E_i(\tau)\omega^2}{F^2}} = \sin \omega \tau$$

$$i \frac{\omega}{F} \sqrt{2E_i(\tau)} = \sin \omega \tau$$

$$\tau = \frac{1}{\omega} \arcsin \left( i \frac{\omega}{F} \sqrt{2E_i(\tau)} \right). \quad (2.137)$$

Једначина (2.137) је израз за повратну тачку.

Након увођења смене

$$\alpha = i \frac{\omega}{F} \sqrt{2E_i}, \quad (2.138)$$

добија се израз за повратну тачку у облику:

$$\tau = \frac{1}{\omega} \arcsin \alpha \quad (2.139)$$

За мале вредности параметра  $\omega$  (за нискофреквентна поља) могуће је применити развој у ред  $\arcsin \delta = \delta + \frac{\delta^3}{6}$ , при чему се узима у обзир само први члан развоја. Тако да је коначни израз за повратну тачку:

$$\tau = \frac{1}{\omega} \alpha \quad (2.140)$$

Као што је речено у претходном поглављу, у адијабатској апроксимацији Ландау-Дихнеа, вероватноћа јонизације атома који се налази у спољашњем се рачуна преко формуле:

$$W_{if} \propto \exp[-2 \operatorname{Im} S(\tau)] \quad (2.141)$$

где је

$$S(\tau) = \int_0^\tau [E_f(t) - E_i(t)] dt. \quad (2.142)$$

Имагинарни део дејства  $S(\tau)$  се рачуна:

$$\begin{aligned} \text{Im}S(\tau) &= \text{Im} \int_0^\tau [E_f(t) - E_i(t)] dt & (2.143) \\ &= \text{Im} \int_0^\tau \left[ \frac{F^2}{2\omega^2} \sin^2 \omega t - (-E_i(t)) \right] dt \\ &= \text{Im} \left[ \frac{F^2}{2\omega^2} \int_0^\tau \sin^2 \omega t dt + \int_0^\tau E_i(t) dt \right] \\ &= \text{Im} \left[ \frac{F^2}{2\omega^2} \int_0^\tau \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} dt + \int_0^\tau E_i(t) dt \right] \\ &= \text{Im} \left[ \frac{F^2}{2\omega^2} \left[ \frac{1}{2} \tau - \frac{1}{4\omega} \sin(2\omega\tau) \right] + E_i \tau \right] \\ &= \text{Im} \left[ \left( \frac{F^2}{4\omega^2} + E_i \right) \tau - \frac{F^2}{8\omega^3} \sin(2\omega\tau) \right] & (2.144) \end{aligned}$$

За мале вредности аргумента  $\omega\tau$  синусна функција се може развити у Мек Лоренов ред  $\sin(2\omega t) \approx 2\omega t - \frac{(2\omega t)^3}{6}$  тако да израз (2.144) постаје:

$$\begin{aligned} \text{Im}S(\tau) &= \text{Im} \left[ \left( \frac{F^2}{4\omega^2} + E_i \right) \tau - \frac{F^2}{8\omega^3} \left( 2\omega\tau - \frac{(2\omega\tau)^3}{6} \right) \right] \\ &= \text{Im} \left[ E_i \tau + \frac{F^2}{6} \tau^3 \right] & (2.145) \end{aligned}$$

Сменом једначине (2.140) у којој је дат израз за повратну тачку у једначину (2.145) следи да је

$$\text{Im}S(\tau) = \text{Im} \left[ E_i \frac{\alpha}{\omega} + \frac{F^2}{6} \left( \frac{\alpha}{\omega} \right)^3 \right]. \quad (2.146)$$

Враћајући смену за  $\alpha$  (2.138) следи:

$$\text{Im}S(\tau) = \text{Im} \left[ E_i \frac{1}{\omega} \left( i \frac{\omega}{F} \sqrt{2E_i} \right) + \frac{F^2}{6} \left( \frac{1}{\omega} i \frac{\omega}{F} \sqrt{2E_i} \right)^3 \right] \quad (2.147)$$

$$\begin{aligned} &= \text{Im} \left[ i \frac{1}{F} E_i \sqrt{2E_i} - i \frac{1}{6F} (\sqrt{2E_i})^3 \right] \\ &= \text{Im} \left[ i \frac{(\sqrt{2E_i})^3}{3F} \right]. & (2.148) \end{aligned}$$

Сменом једначине (2.148) у једначину (2.141) добија се брзина прелаза када је почетни импулс електрона једнак нули

$$W_{if} \propto \exp[-2 \operatorname{Im} S(\tau)], \quad (2.149)$$

$$W_{if} \propto \exp\left[-2 \frac{(\sqrt{2E_i})^3}{3F}\right]. \quad (2.150)$$

### 2.5.2.2. Добијање брзине прелаза у АДК теорији преко Ландау-Дихне адијабатске апроксимације када је почетни импулс избаченог електрона различит од нуле

Може се сматрати да је претпоставка да електрон увек напушта атом без почетног импулса мало вероватна. Зато је било неопходно добити брзину прелаза када је почетни импулс избаченог електрона различит од нуле.

У овом случају енергија почетног стања је дата изразом:

$$E_i(t) = -E_i. \quad (2.151)$$

Док је енергија коначног стања:

$$E_f(t) = \frac{1}{2} \left( \vec{p} + \frac{\vec{A}}{c} \right)^2 = \frac{1}{2} \left( \vec{p} - \frac{\vec{F}}{\omega} \sin \omega t \right)^2. \quad (2.152)$$

Израз за квазикласичну повратну тачку  $\tau$  се добија из услова да је:

$$E_i(\tau) = E_f(\tau) \quad (2.153)$$

Сменом једначина (2.151), (2.152) у једначину (2.153) следи:

$$-E_i(\tau) = \frac{1}{2} \left( p - \frac{F}{\omega} \sin \omega \tau \right)^2 \quad (2.154)$$

$$-2E_i(\tau) = \left( p - \frac{F}{\omega} \sin \omega \tau \right)^2$$

$$\frac{F}{\omega} \sin \omega \tau = p - i\sqrt{2E_i}$$

$$\sin \omega \tau = \frac{\omega}{F} (p - i\sqrt{2E_i}). \quad (2.155)$$

Након увођења смене

$$\delta = \frac{\omega}{F} (p - i\sqrt{2E_i}), \quad (2.156)$$

добија се да је:

$$\sin\omega\tau = \delta, \quad (2.157)$$

одакле следи:

$$\arcsin\delta = \omega\tau, \quad (2.158)$$

односно добија се израз за повратну тачку:

$$\tau = \frac{1}{\omega} \arcsin\delta. \quad (2.159)$$

За мале вредности параметра  $\omega$  (за нискофреквентна поља) могуће је применити развој у ред  $\arcsin\delta = \delta + \frac{\delta^3}{6}$ , тако да је коначни израз за повратну тачку

$$\tau = \frac{1}{\omega} \left( \delta + \frac{\delta^3}{6} \right). \quad (2.160)$$

У адијабатској апроксимацији Ландау-Дихнеа, вероватноћа јонизације атома који се налази у спољашњем се рачуна користећи формулу (2.149).

Као у претходном случају рачуна се имагинарни део дејства:

$$\text{Im}S(\tau) = \text{Im} \int_0^\tau [E_f(t) - E_i(t)] dt \quad (2.161)$$

$$= \text{Im} \int_0^\tau \left[ \frac{1}{2} \left( \vec{p} - \frac{\vec{F}}{\omega} \sin\omega t \right)^2 - (-E_i(t)) \right] dt \quad (2.162)$$

$$\begin{aligned} &= \text{Im} \left[ \int_0^\tau \frac{1}{2} p^2 dt - \int_0^\tau \frac{pF}{\omega} \sin\omega t dt + \int_0^\tau \frac{F^2}{2\omega^2} \sin^2\omega t dt + \int_0^\tau E_i dt \right] \\ &= \text{Im} \left[ \left( \frac{p^2}{2} + E_i + \frac{F^2}{4\omega^2} \right) \tau + \frac{pF}{\omega^2} \cos\omega\tau - \frac{F^2}{8\omega^3} \sin(2\omega\tau) \right]. \end{aligned} \quad (2.163)$$

За мале вредности аргумента  $\omega\tau$  косинусна и синусна функција се могу развити у Мек Лоренов ред

$$\cos\omega\tau \approx 1 - \frac{(\omega\tau)^2}{2} + \frac{(\omega\tau)^4}{24}, \quad (2.164)$$

$$\sin(2\omega\tau) \approx 2\omega\tau - \frac{(2\omega\tau)^3}{6} + \frac{(2\omega\tau)^5}{120}. \quad (2.165)$$

Сменом једначина (2.164), (2.165) у једначину (2.163) следи:

$$\begin{aligned} \text{Im}S(\tau) &= \text{Im} \left[ \left( \frac{p^2}{2} + E_i + \frac{F^2}{4\omega^2} \right) \tau + \frac{pF}{\omega^2} \left( 1 - \frac{(\omega\tau)^2}{2} + \frac{(\omega\tau)^4}{24} \right) - \frac{F^2}{8\omega^3} \left( 2\omega\tau - \frac{(2\omega\tau)^3}{6} + \frac{(2\omega\tau)^5}{120} \right) \right] \\ &= \text{Im} \left[ \frac{pF}{\omega^2} + \left( \frac{p^2}{2} + E_i \right) \tau - \frac{pF}{2} \tau^2 + \frac{F^2}{6} \tau^3 + \frac{pF\omega^2}{24} \tau^4 - \frac{F^2\omega^2}{30} \tau^5 \right]. \end{aligned} \quad (2.166)$$



Сменом израза за повратну тачку дату (2.159) у једначину (2.166) добија се:

$$\begin{aligned} \text{Im}S(\tau) = \text{Im} \left[ \frac{pF}{\omega^2} + \left(\frac{p^2}{2} + E_i\right) \left(\frac{1}{\omega} \left(\delta + \frac{\delta^3}{6}\right)\right) - \frac{pF}{2} \left(\frac{1}{\omega} \left(\delta + \frac{\delta^3}{6}\right)\right)^2 + \frac{F^2}{6} \left(\frac{1}{\omega} \left(\delta + \frac{\delta^3}{6}\right)\right)^3 + \right. \\ \left. \frac{pF\omega^2}{24} \left(\frac{1}{\omega} \left(\delta + \frac{\delta^3}{6}\right)\right)^4 - \frac{F^2\omega^2}{30} \left(\frac{1}{\omega} \left(\delta + \frac{\delta^3}{6}\right)\right)^5 \right], \end{aligned} \quad (2.167)$$

односно након сређивања:

$$\text{Im}S(\tau) = \text{Im} \left[ \left(\frac{p^2}{2\omega} + \frac{E_i}{\omega}\right) \delta - \frac{pF}{2\omega^2} \delta^2 + \left(\frac{p^2}{12\omega} + \frac{E_i}{6\omega} + \frac{F^2}{6\omega^3}\right) \delta^3 - \frac{pF}{8\omega^2} \delta^4 - \frac{F}{20\omega^3} \delta^5 \right]. \quad (2.168)$$

Враћањем смене из једначине (2.155) у једначину (2.168) следи:

$$\begin{aligned} \text{Im}S(\tau) = \text{Im} \left[ i \left[ \frac{-p^2\sqrt{2E_i} - 2E_i\sqrt{2E_i}}{2F} + \frac{2p^2\sqrt{2E_i}}{2F} - \frac{\omega^2\sqrt{2E_i}}{F^3} \left(\frac{p^2(\sqrt{2E_i})^2}{2} - \frac{p^4}{2}\right) + \frac{\omega^2\sqrt{2E_i}}{F^3} \left(-\frac{p^4}{4} + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{p^2(\sqrt{2E_i})^2}{12} - \frac{p^2E_i}{2} + \frac{E_i(\sqrt{2E_i})^2}{6}\right) - \frac{p^2\sqrt{2E_i}}{2F} + \frac{(\sqrt{2E_i})^3}{6F} + \frac{\omega^2(\sqrt{2E_i})^2}{F^3} \left(-\frac{p^4}{4} + \frac{p^2(\sqrt{2E_i})^2}{2} - \frac{(\sqrt{2E_i})^4}{20}\right) \right] \right]. \end{aligned} \quad (2.169)$$

Применом низа основних трансформација израз за имагинарни део дејства  $S(\tau)$  се добија у форми:

$$\begin{aligned} \text{Im}S(\tau) = \text{Im} \left[ i \left[ \frac{\sqrt{2E_i}}{F} \left(-\frac{(\sqrt{2E_i})^2}{6} + E_i\right) + \frac{\omega^2\sqrt{2E_i}}{F^3} \left(-\frac{(\sqrt{2E_i})^4}{30} + \frac{p^2(\sqrt{2E_i})^2}{6}\right) \right] \right] \\ = \text{Im} \left[ i \left[ \left(\frac{(\sqrt{2E_i})^3}{3F} - \frac{2\omega^2E_i^2\sqrt{2E_i}}{15F^3}\right) + \frac{\omega^2p^2E_i\sqrt{2E_i}}{3F^3} \right] \right]. \end{aligned} \quad (2.170)$$

Израз у једначини (2.170) се може посматрати као збир два одвојена члана.

$$\mathbf{I - члан} \quad \frac{(\sqrt{2E_i})^3}{3F} - \frac{2\omega^2E_i^2\sqrt{2E_i}}{15F^3} = \quad (2.171)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(\sqrt{2E_i})^3}{3F} \left(1 - \frac{2\omega^2E_i^2}{5F^2(\sqrt{2E_i})^2}\right) = \\ &= \frac{(\sqrt{2E_i})^3}{3F} \left(1 - \frac{1}{10} \frac{\omega^2(\sqrt{2E_i})^2}{F^2}\right) = \end{aligned} \quad (2.172)$$

$$= \frac{(\sqrt{2E_i})^3}{3F} \left(1 - \frac{1}{10} \gamma^2\right) = \quad (2.173)$$

$$= \frac{(\sqrt{2E_i})^3}{3F} \quad (2.174)$$

Коначан облик I - члана је добијен имајући у виду да се Келдишов параметар може изразити као  $\gamma = \frac{\omega\sqrt{2E_i}}{F}$ , у тунелном режиму његова вредност је  $\gamma \ll 1$ , и да је члан  $(1/10) \cdot \gamma^2$ , у једначини (2.173), много мањи од јединице тако да се може занемарити.

$$\text{II – члан} \quad \frac{\omega^2 p^2 E_i \sqrt{2E_i}}{3F^3} = \quad (2.175)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{p^2}{6\omega} \sqrt{2E_i} \frac{\omega^3}{F^3} 2E_i = \\ &= \frac{p^2}{6\omega} \frac{\omega^3}{F^3} (\sqrt{2E_i})^3 \\ &= \frac{p^2}{6\omega} \gamma^3 \end{aligned} \quad (2.176)$$

Израз (2.176) представља потпуно нови члан у експоненцијалном делу израза. Овим чланом се укључује ненулни почетни импулс електрона при рачунању брзине прелаза.

$$W_{if} \propto \exp \left[ -\frac{2(\sqrt{2E_i})^3}{3F} - \frac{p^2}{3\omega} \gamma^3 \right]. \quad (2.177)$$

## 2.6. Разлика између брзина прелаза у статичком и променљивом спољашњем пољу

Временски зависна јонизација укључује мноштво процеса, неки од њих су мултифотонска јонизација, енергетски померај прага јонизације и кретање јонизованог електрона. Ништа мање није значајна ни јонизација у статичком пољу. Многи ефекти добијени јонизацијом статичким пољем су применљиви у теоријским и експерименталним истраживањима. За разлику од мултифотонске јонизације која је доминантан процес у релативно слабир пољима, јонизација у јаким пољима се одвија веома брзо, тако што електрон напушта атом за време које је много краће од времена трајања ласерског пулса. Самим тим електрично поље се не мења током јонизационог процеса и може се сматрати статичким. У случају циркуларно поларизованог ласерског поља његова јачина је константна и смањује могућност проласка система кроз међустања зато што угаони импулс апсорбованих фотона смањује број доступних стања.

Међутим, проучавање и анализа јонизације у временски зависном пољу је превише компликована без увођења апроксимација. Како је јонизација у статичком пољу гранични случај јонизације у пољу које се мења у току времена она може послужити као основа за увођење апроксимативних метода.

Битно је показати да ли се и колико разликују брзине прелаза у статичком и променљивом спољашњем пољу. Резултујућа формула има облик:

$$W(F, \omega) \propto W_{\text{stat}}. \quad (2.178)$$

Можемо закључити да је брзина прелаза у променљивом спољашњем ласерском пољу јачине  $F$  и фреквенције  $\omega$  је пропорционална брзини прелаза у статичком пољу.

За случај линеарно поларизованог ласерског поља коефицијент пропорционалности има вредност  $\left(3F/\pi(\sqrt{2E_i})^3\right)^{1/2}$ , односно:

$$W(F, \omega) = \sqrt{\frac{3F}{\pi(\sqrt{2E_i})^3}} W_{\text{stat}}, \quad (2.179)$$

Аналогно једначини (2.179) веза између статичког и променљивог елиптично поларизованог ласерско поље је:

$$W(F, \omega, \varepsilon) = \sqrt{\frac{3F}{\pi(1-\varepsilon^2)(\sqrt{2E_i})^3}} W_{\text{stat}} \quad (2.180)$$

где је  $0 < \varepsilon < 1$  [51]. За линеарно поларизовано поље параметар  $\varepsilon$  има вредност  $\varepsilon = 0$ , док је за случај циркуларне поларизације његова вредност  $\varepsilon = 1$ .

Из једначина (2.178), (2.179) и (2.180) се може закључити да се брзина прелаза у статичком и променљивом спољашњем пољу разликују само по преекспоненцијалном члану, док експоненцијални члан који је најзначајнији фактор брзине прелаза,  $\exp\left[-2(\sqrt{2E_i})^3/3F\right]$ , остаје непромењен. Што значи да до адијабатске јонизације атома долази у тренутку када јачина поља достиже максималну вредност.

## 2.7. Тунеловање у релативистичком режиму

Константни напредак ласерске технологије и могућност добијања ласерског зрака интензитета реда  $10^{21} \text{ W/cm}^2$  усмерио је истраживања у правцу у коме се при проучавању јонизационих процеса морају у обзир узети релативистички ефекти. Сматра се да ће следећа генерација ласера бити извор пулсева који трају испод  $10\text{fs}$  и максималног интензитета до  $10^{23} \text{ W/cm}^2$ . На тим интензитетима јони са наелектрисањем  $Z = 50 - 60$  могу бити јонизовани. У инфрацрвеном делу спектра и интензитетима око  $10^{18} \text{ W/cm}^2$  кретање електрона у ласерском пољу постаје релативистичко. Аналитички израз за брзину прелаза у релативистичком режиму у АДК теорији се дефинише преко брзине прелаза у нерелативистичком режиму. Најбитнија разлика између релативистичке и нераелативистичке теорије настаје услед великих вредности енергија везе за електроне  $Z > 20$ . Са даљим порастом  $Z$  енергија везе почиње да игра битну улогу и постаје још значајнија.

У нерелативистичком режиму сматра се да је брзина избаченог електрона мала у односу на брзину светлости у почетном везаном и у коначном стању у континууму. У веома јаком ласерском пољу избачени електрон може имати релативистичку енергију у коначном стању. Одговарајуће једначине за брзину прелаза и кинетичку енергију избаченог електрона треба изразити за релативистички режим. Иако је већи број електрона избачен са условно речено малим, нерелативистичким енергијама, треба обратити пажњу и на мали број електрона код којих су релативистички ефекти доминантни.

Вредност Келдишовог параметра у случају тунеловања у релативистичком режиму је иста као вредност којом се дефинише процес тунелне јонизације у нерелативистичком режиму  $\gamma \ll 1$ . У релативистичком режиму Келдишов параметар  $\gamma$  се може рачунати на следећи начин [52]:

$$\gamma = \frac{\hbar\omega}{mc^2} \frac{F_s}{F} \sqrt{1 - \left(\frac{E_i}{mc^2}\right)^2} \quad (2.181)$$

где је  $F_s = \frac{m^2 c^3}{e\hbar} = 1,32 \times 10^{16} \text{ V/cm}$  Schwinger- ова јачина поља [53], док су  $m$ ,  $e$  маса и наелектрисање електрона док је  $c$  брзина светлости.

Користећи израз за вероватноћу јонизације у Ландау-Дихнеовој апроксимацији дату једначином (2.127) добија се израз за вероватноћу јонизације у релативистичком режиму [54]:

$$W_{retavistic} = W_{ADK}^{lin} \exp \left[ -\frac{2E_e \gamma^3}{3\omega} - \frac{E_e^2 \gamma}{c^2 \omega} \right] \quad (2.182)$$

где је  $c$  брзина светлости док је  $W_{ADK}^{lin}$  вероватноћа јонизације у нерелативистичком режиму дата једначином (2.69).  $E_e$  је кинетичка енергија избаченог електрона која се може рачунати изразом [54]:

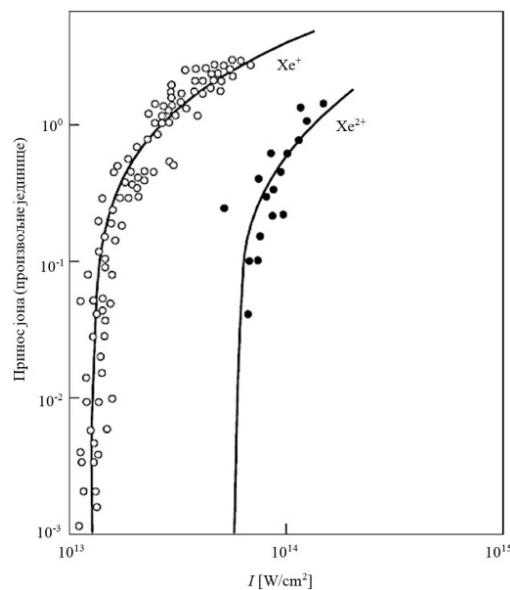
$$E_e = \sqrt{p_0^2 c^2 + c^4} - c^2 < c^2. \quad (2.183)$$

Једначином (2.183) је дато ограничење да се могу проучавати случајеви само када је вредност кинетичке енергије избаченог електрона мања од његове енергије мировања.

Анализирајући експерименталне резултате [55] може се закључити да у линеарно поларизованом пољу  $\text{CO}_2$  ласера чак и при интензитетима већим од  $10^{15} \text{ W/cm}^2$  долази до појаве релативистичких фотоелектрона чије су енергије реда неколико keV-а. Кинетичке енергије ових електрона су мање од њихових енергија мировања.

## 2.8. Принос јона у тунелној јонизацији

Систематска истраживања процеса тунелне јонизације почела су 1983. године [56] тако што су извођени разни и бројни експерименти. Мерен је принос јона у гасовима који су били изложени зрачењу IR  $\text{CO}_2$  ласера таласне дужине  $10 \mu\text{m}$ . За атоме калијума (K) узимано је  $\gamma = 0,3$  а.ј. и јачина поља  $F = 0,01$  а.ј. [57]. За атоме ксенона (Xe) узимано је  $\gamma = 0,01$  а.ј. и  $F = 0,01$  а.ј. [58].



Слика 2.3. Принос јона  $\text{Xe}^+$  и  $\text{Xe}^{2+}$  у функцији од интензитета поља  $\text{CO}_2$  ласера. Пуна линија представља резултате рачунате коришћењем АДК теорије.

На **слици 2.3.** приказана је зависност приноса јона од интензитета ласерског поља. Поређењем експерименталних резултата са одговарајућим теоријским резултатима добијеним коришћењем једначине (2.69) уочено је добро слагање у већини случајева.

У претходно наведеним радовима коришћено је линеарно поларизовано ласерско поље. Циркуларно поларизовано ласерско поље је коришћено у експериментима [59], [60].

Однос приноса јона у циркуларно поларизованом и приноса јона у линеарно поларизованом ласерском пољу је мерен [61]. Разматрана је јонизација атома аргона (Ar) коришћењем зрачења Ti-Sapphire ласера са дужином трајања пулса од 200 fs. Уочено је да овај однос расте са порастом интензитета зрачења. Измерени принос јона се добро слаже са предвиђањима АДК теорије, када је адијабатски параметар реда јединице или незнатно мањи. Јачина циркуларно поларизованог поља је  $\sqrt{2}$  пута мања него јачина линеарно поларизованог поља за исти интензитет ласерског зрачења. Са друге стране, циркуларно поларизовано поље делује тренутно, за разлику од линеарно поларизованог. Ове разлике произилазе из разлике у предекспоненцијалном фактору у једначинама (2.69) и (2.70). Ове разлике потврђене су у експерименту [60] за Хе и Аг атоме. За јонизацију ових атома циркуларно поларизованим пољем потребан је интензитет поља 1,5 пут већи у поређењу са интензитетом потребним за јонизацију линеарно поларизованим пољем

Принос јона добијених овим јонизационим прелазима, се може израчунати интегралом једначине (2.69) или једначине (2.70) по времену трајања ласерског пулса.

$$ionization\ yield = \int_{Pulse} W(F(t))dt. \quad (2.184)$$

## 2.9. Ефикасни пресек

Величина која је такође повезана са мултифотонском јонизацијом и коју можемо рачунати користећи пертурбациону теорију најнижег реда је ефикасни пресек, LOPT (Lowest Order Perturbation Theory). LOPT теорија није ограничена апроксимацијом једног активног електрона али има друга ограничења. Интензитет ласерског поља не сме бити превише висок и рачунање ефикасног пресека јонизације у којој учествује пет или више фотона захтева пуно времена.

Веза између вероватноће јонизације и ефикасног пресека дата је једначином:

$$W_N = \sigma_N \cdot \left(\frac{I}{\hbar\omega}\right)^N \quad (2.185)$$

где су  $W_N$  брзина прелаза  $N$ - фотонске јонизације у  $s^{-1}$ ,  $\sigma_N$  генерализовани ефикасни пресек,  $I$  интензитет ласерског поља у  $W/cm^2$ ,  $N$  број апсорбованих фотона,  $\hbar\omega$  енергија фотона у џулима (J).

## 2.10. МО-АДК

Одговарајући теоријски модели као и резултати добијени експериментално показали су да јонизациони процеси који се одвијају на молекулским системима могу дати информације о њиховој структури. Ова генерализација укључује развој почетне таласне функције молекула у асимптотској области, преко суме сферних хармоника и то развојем по једном центру. Сумирањем вероватноћа јонизације израчунате за сваки хармоник даје укупну вероватноћу јонизације. Овај метод узима у обзир симетрију молекулских орбита и објашњава нам неке аспекте јонизационе суперпозиције. Јонизација молекула се може описати и АДК теоријом која је проширена на двоатомске молекуле [62]. У овом раду биће дат само коначан израз за вероватноћу јонизације, под претпоставком да је молекуларна оса орјентисана дуж правца ласерског поља и да ће валентни електрон бити јонизован дуж осе која се подударе са правцем поља

$$W_{stat}(F, 0) = \frac{B^2(m)}{2^{|m|}|m|!} \frac{1}{k^{2Z/k-1}} \left(\frac{2k^3}{F}\right)^{2Z/k-|m|} e^{-2k^3/(3F)}. \quad (2.186)$$

Ако молекулска оса није орјентисана дуж правца поља, већ је померена за произвољни угао  $\mathbf{R}$  који представља Ојлерове (Euler) углове између молекулске осе и правца ласерског поља, вероватноћа јонизације је:

$$W_{stat}(F, \mathbf{R}) = \sum_{m'} \frac{B^2(m')}{2^{|m'|}|m'|!} \frac{1}{k^{2Z/k-1}} \left(\frac{2k^3}{F}\right)^{2Z/k-|m'|} e^{-2k^3/(3F)}. \quad (2.187)$$

Вероватноћа јонизације у нискофреквентном ласерском пољу дата је изразом:

$$W(F, \mathbf{R}) = \left(\frac{3F}{\pi k^3}\right)^{1/2} W_{stat}(F, \mathbf{R}) \quad (2.188)$$

Величине које фигуришу једначинама (2.186), (2.187) и (2.188) представљају:  $F$  максималну вредност јачине поља,  $k = \sqrt{2E_i}$  док је  $E_i$  енергија јонизације,  $Z$  наелектрисање (број јонизованих електрона или наелектрисање јона),  $m$  магнетни квантни

број дуж молекулске осе док је  $m'$  магнетни квантни број када молекулске оса није оријентисана дуж правца поља.  $V(m)$  и коефицијенти  $V(m')$  који зависе од магнетног квантног броја.

Једначинама (2.186), (2.187) и (2.188) дати су изрази за вероватноћу јонизације у склопу МО-АДК модела, који представља апроксимирану тунелну вероватноћу јонизације за вишеелектронске молекуле када је удаљеност између молекулских центара фиксна. Резултати који су добијени у експерименту у коме је вршена јонизација  $H_2^+$  молекулског јона у статичком пољу, били су одлична провера ове формуле а самим тим и комплетне теорије. Поређења показују да МО-АДК теорија даје добре резултате у области у којој је дефинисана, у области тунелне јонизације. Alejandro Saenz је израчунао вероватноћу јонизације за неутрални молекул  $H_2$  у статичком електричном пољу када је молекулска оса усмерена у правцу ласерског поља [63]. У прорачунима је узета у обзир веза два електрона. Слагање је и у овом случају било јако добро у тунелном режиму јонизације.



## Поглавље 3:

Јонизација атома и молекула је најважнији процес до кога долази при интеракцији ласера са материјом. У последњих четрдесет година јонизациони процес је веома добро проучен и теоријски [38], [42], [47], [64] и експериментално [65], [66], [67]. Тунелна јонизација електрона кроз потенцијалну баријеру до које долази у нискофреквентном ласерском пољу је један од веома важних механизма овог процеса и зато привлачи пажњу истраживача. Међутим још увек има простора да се овај механизам јонизације проучава са новог аспекта.

У овом поглављу је дата теоријска анализа тунелне јонизације атома и атомских јона у нискофреквентном ласерском пољу. Проучавана је брзина прелаза и принос једноструко и вишеструко јонизованих атома у линеарно и циркуларно поларизованом ласерском пољу. Како је енергија фотона у потпуности условљена таласном дужином ласерског снопа водили смо рачуна о односу енергије јонизације  $E_i$  посматраног атома, фреквенције ласера  $\omega$  и јачини ласерског поља  $F$ . Затим смо наш рад усмерили на проучавање ефикасног пресек и енергетске расподеле фотоелектрона. Важно је било размотрити и на који начин поларизација ласерског поља утиче на поменуте величине.

Наша истраживања су заснована на добро познатим законима који важе за јонизацију атома и јона који се налазе у ласерском пољу, док су резултати које смо добили представљени коришћем АДК теорије која је прихваћена као поуздан метод за описивање јонизационих процеса.

На принципу јонизационих процеса раде и јонизационе коморе које се користе у радио терапији зато резултати које смо добили могу бити веома интересантни за даља истраживања.

### 3.1. Анализа $\gamma$ параметра

Келдишов параметар  $\gamma$  је величина којом се могу проценити својства јонизације атомских и молекулских система који се налазе у ласерском пољу. Показано је да стандардна дефиниција овог параметра значајна само за квазистатична електрична поља и која се примењују при посматрању процеса тунеловања. Међутим ласери су извори раванских таласа и они су фундаментално различити од квазистатичких таласа. Та разлика

се повећава са порастом интензитета. Желели смо да проучимо „недостатке“ стандардне дефиниције параметра  $\gamma$ .

### 3.1.1. Параметар $\gamma$ у нерелативистичком режиму

До тунеловања електрона из атома долази при ниским фреквенцијама и високим интензитетима поља тако да је Келдиш дефинисао параметар  $\gamma$  који је квантитативни показатељ када до овог процеса може доћи. Параметар  $\gamma$  је дат изразом:

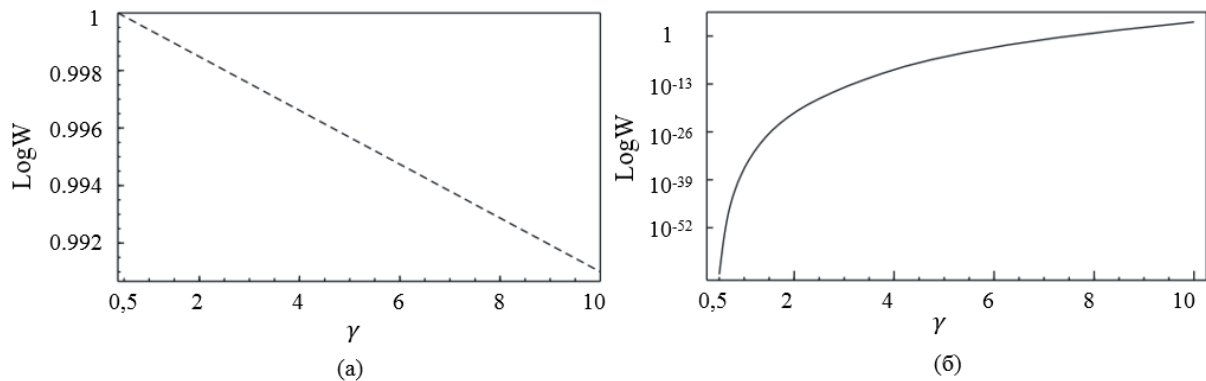
$$\gamma = \frac{\omega}{F} \sqrt{2E_i}, \quad (3.1)$$

где је  $\omega$  фреквенција ласера,  $F$  јачина ласерског поља и  $E_i$  енергија јонизације посматраног електрона. Значај овог параметра лежи и у чињеници да он материјализује Келдишов приступ процесу фотојонизације по коме су тунелна и мултифотонска јонизација само два гранична случаја једног истог процеса, при чему је тунелна јонизација доминантан процес када је испуњен услов да је  $\gamma \ll 1$ , док је у случају када је  $\gamma \gg 1$  доминантан мултифотонски процес. Да би Келдишов параметар имао вредност  $\gamma \ll 1$  или  $\gamma \gg 1$ , чиме би се раздвојили режими мултифотонске и тунелне јонизације, неопходан је добар одабир параметара  $\omega, F, E_i$ .

Од проналаска ласера шездесетих година двадесетог века па све до осамдесетих у експериментима је могао бити задовољен само услов  $\gamma \gg 1$ . Постављало се питање, да ли се у експерименталним условима може постићи да Келдишов параметар има вредност  $\gamma \ll 1$ . Феркас (Farkas) је са сарадницима 1983. године уочио тунеловање електрона са површине злата излажући га пољу  $\text{CO}_2$  ласера [68]. Међутим, тек 1985. године изведен је експеримент у коме је задовољен Келдишов услов да је  $\gamma \ll 1$  и чији су резултати недвосмислено [69] показали постојање тунелне јонизације атома ксенона ( $\text{Xe}$ ) који се налазе у пољу  $\text{CO}_2$  ласера. Још занимљивије опажање, у овом експерименту, је било да до тунелне јонизације вишеструко наелектрисаних јона ксенона,  $\text{Xe}^{2+}$  и  $\text{Xe}^{3+}$  долази неочекивано када је вредност параметра  $\gamma < 1$ . У бројним експериментима који су уследили примећено је да до тунелне јонизације долази када је  $\gamma < 0,5$  а не као што захтева Келдишова теорија  $\gamma \ll 1$  [17].

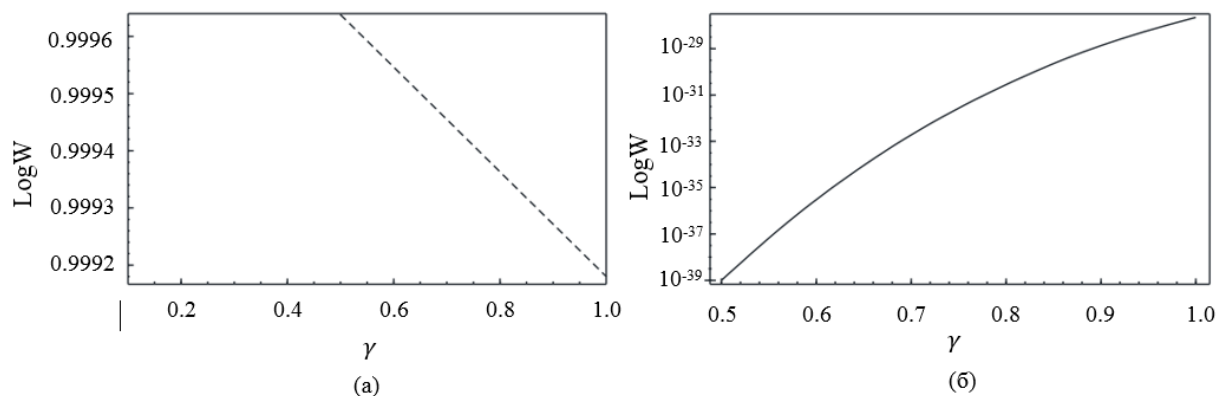
Истраживања јонизационих процеса, чак и теоријска каква су наша, захтевају прецизно дефинисање вредности параметра  $\gamma$ . Наиме није све једно да ли до процеса тунеловања долази када је  $\gamma \ll 1$  или када је  $\gamma < 1$ . Зато смо посматрали понашање брзине прелаза у

зависности од параметра  $\gamma$ . Вредност параметра  $\gamma$  смо мењали у интервалу од 0,1 до 10, док смо за брзине прелаза у тунелном и мултифотонском режиму користили одговарајуће изразе дате једначинама (3.7) и (3.57).



Слика 3.1. Зависност брзине прелаза од параметра  $\gamma$ , у случају (а) тунелне и (б) мултифотонске јонизације за вредност параметра  $\gamma$  у интервалу 0,1 – 10

Са **слике 3.1.(а)** се види да у тунелном режиму брзина прелаза има максималну вредност за  $\gamma = 0,5$  док са порастом вредности параметра  $\gamma$ , брзина прелаза тунеловања опада. Овакво понашање је очекивано зато што са порастом вредности параметра  $\gamma$  доминантни процес јонизације постаје мултифотонски (**слика 3.1.(б)**).



Слика 3.2. Зависност брзине прелаза од параметра  $\gamma$ , у случају (а) тунелне и (б) мултифотонске јонизације за вредност параметра  $\gamma$  у интервалу 0 – 1

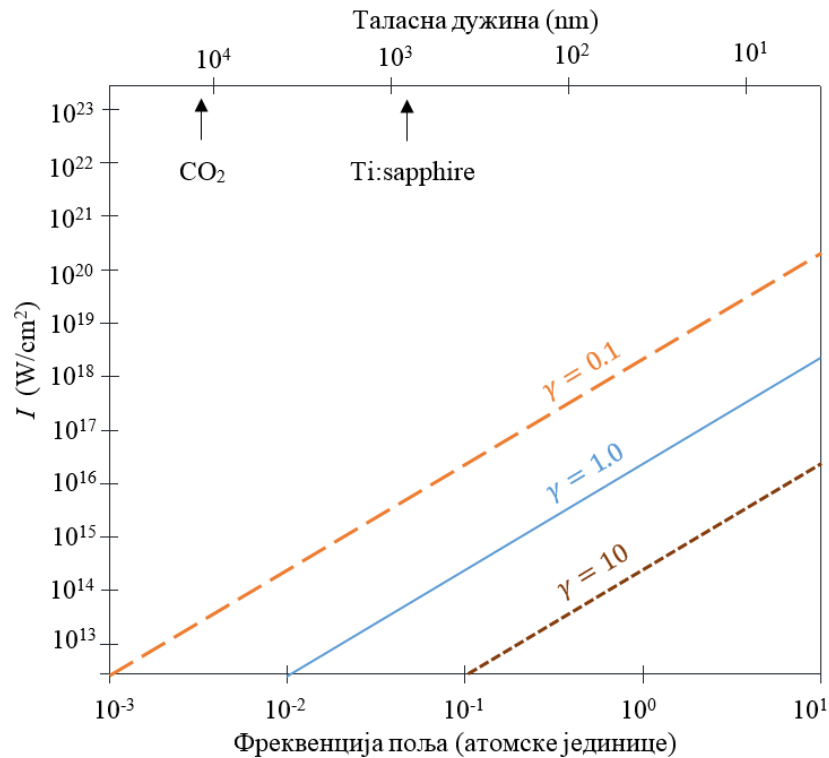
На још ужем опсегу вредности за  $\gamma$  **слика 3.2.** се недвосмислено јасно види да је највећа вероватноћа да дође до процеса тунелне јонизације за вредност параметра  $\gamma < 1$ .

### 3.1.2. Параметар $\gamma$ у релативистичком режиму

Напредак ласерске технологије и могућност добијања ласерског зрака интензитета реда величине  $10^{21} \text{ W/cm}^2$  усмерио је истраживања у правцу у коме се при проучавању јонизационих процеса у обзир морају узети релативистички ефекти. У физици јаких поља постало је уобичајено описивати јонизационе процесе користећи модел тунелне јонизације. Вредност Келдишовог параметра у случају тунеловања у релативистичком режиму је иста као вредност којом се дефинише процес тунелне јонизације у нерелативистичком режиму  $\gamma \ll 1$ . Иако је у свом раду Келдиш дао јасна ограничења при којим је вредностима параметра  $\gamma$  који модел јонизације доминантан, када су почела да се примењују поља веома високих интензитета поставило се питање да ли ови лимити Келдишовог параметра важе само за случај квазистатичког електричног поља када се утицај магнетног поља може занемарити. У случају јаких поља утицај магнетног поља се мора узети у обзир тако да је требало проверити ове границе.

Сматрало се да је „класично ограничење“ или „тунелно ограничење“  $\gamma \ll 1$ , заправо у овом случају се може сматрати да  $\gamma \rightarrow 0$  и да ли је ово ограничење које важи само у статичком електричном пољу [20], [71]. Како је ласер извор раванских таласа за  $\gamma \rightarrow 0$  је екстремно релативистичко ограничење. Да бисмо проверили ове тврдње анализирали смо понашање параметра  $\gamma$  у зависности од интензитета спољашњег поља који се мења у интервалу од  $10^{13} \text{ W/cm}^2$  до  $10^{23} \text{ W/cm}^2$ .

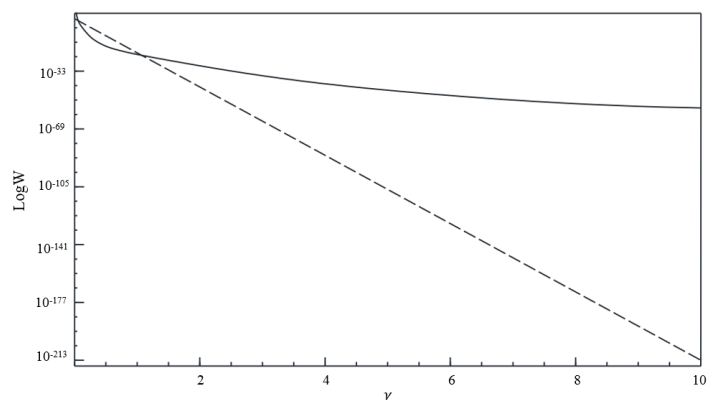
На графику на **слици 3.3.** представили смо „недостатке“ стандардне дефиниције параметра  $\gamma$ . Приказали смо на којим интензитетима поља за три фиксирани вредности параметра  $\gamma = 0,1$ ,  $\gamma = 1$  и  $\gamma = 10$ , и две таласне дужине  $\lambda = 10,6 \mu\text{m}$  за  $\text{CO}_2$  ласер и  $\lambda = 800 \text{ nm}$  за  $\text{Ti: Sapphire}$  ласер долази до тунелне јонизације у нерелативистичком и релативистичком режиму. Са **слике 3.3.** се види да за вредност Келдишовог параметра  $\gamma = 0,1$ , која према стандардној дефиницији припада тунелном нерелативистичком режиму, до јонизације долази када је фреквенција ласера  $\omega = 10 \text{ а.ј.}$  што одговара енергији фотона од  $272 \text{ eV}$ . Када је у питању атом калијума (К) на овој фреквенцији не може доћи до тунелне јонизације зато што је енергија везе валентног електрона само  $E_i^K = 4,34 \text{ eV}$ . Такође, са **слике 3.3.** се види да су за  $\gamma = 0,1$  вредности интензитета поља реда  $10^{21} \text{ W/cm}^2$  на којима се већ јављају релативистички ефекти што потврђује, претходно наведено, да до тунелне јонизације долази када је вредност  $\gamma < 0,5$  док је за  $\gamma \rightarrow 0$  у питању релативистички режим.



**Слика 3.3.** Хоризонтална линија представља фиксану вредност Келдишовог параметра  $\gamma$  за вредност  $E_i = 0,5 a. u.$  (основно стање водоника). Три репрезентативне  $\gamma$  вредности су представљене:  $\gamma = 0,1$  (тунелни режим),  $\gamma = 1$  (гранична зона) и  $\gamma = 10$  (мултифотонски режим)

### 3.1.3. Параметар $\gamma$ за фиксану фреквенцију ласерског поља $\omega$

На крају смо желели да видимо како ће се понашати брзина прелаза ако фиксирамо фреквенцију ласерског поља  $\omega$  а постепено смањујемо интензитет ласерског поља  $I$ . Са **слике 3.4.** се види да ће нижи интензитети поља аутоматски условити смањење јачине поља  $F$  што ће довести до повећања вредности параметра  $\gamma$  једначина (3.1).



**Слика 3.4.** Зависност брзине прелаза од Келдишовог параметра  $\gamma$ . Пуна линија представља мултифотонску док испрекидана тунелну јонизацију

На фиксираној фреквенцији ласерског поља за мале вредности параметра  $\gamma$  прво долази до тунелне јонизације (слика 3.4). Постепено повећање вредности параметра  $\gamma$  ће довести до „преласка“ јонизације из тунелног режима у мултифотонски режим.

На основу свега наведеног може се закључити да је Келдиш у својој теорији дошао до веома важног открића да је за ниже вредности параметра  $\gamma$  доминантан процес тунелне јонизације док је за више вредности овог параметра доминантан процес мултифотонске јонизације. Међутим такође се може закључити да није неопходно постављати „оштре“ границе важења Келдишовог параметра  $\gamma$  да би се дефинисали интензитети поља и кружне фреквенције ласера како би се механизам јонизације окарактерисао као тунелни или мултифотонски. Када су питању равански таласи тачно дефинисање вредности параметра  $\gamma$  није од пресудног значаја. У нашим радовима вредност параметра  $\gamma$  је бирана у складу са наведеним чињеницама.

Важну улогу при проучавању тунелне јонизације има и врста поларизације ласерског поља. Ласерско поље може бити поларизовано линеарно, циркуларно или елиптично. Први део нашег истраживања односи се на посматрање процеса у линеарно поларизованом ласерском пољу, док се у другом делу анализирају процеси до којих долази у циркуларно поларизованом ласерском пољу.

### **3.2. Утицај ненултoг почетног импулса електрона на брзину прелаза у линеарно поларизованом ласерском пољу**

У досадашњим истраживањима испитивани су различити физички феномени до којих долази када се атом буде изложен деловању ултракратког пулса ласерског поља. Тунелна јонизација електрона из атома је један од тих процеса. За описивање јонизације атома тунеловањем погодно је посматрати промене величина као што су вероватноћа јонизације или брзина прелаза. И поред опсежних анализа ових величина до сад се сматрало да почетни импулс јонизованог електрона не утиче на њих. Осим незнатних покушаја, као у раду [48], [72], до сада није било детаљне процене какав утицај може имати ненулти почетни импулс избаченог електрона на брзину прелаза у тунелном режиму. Имајући то у виду одлучили смо да наш рад базирамо на проучавању утицаја ненултoг почетног импулса избаченог електрона на брзину прелаза.

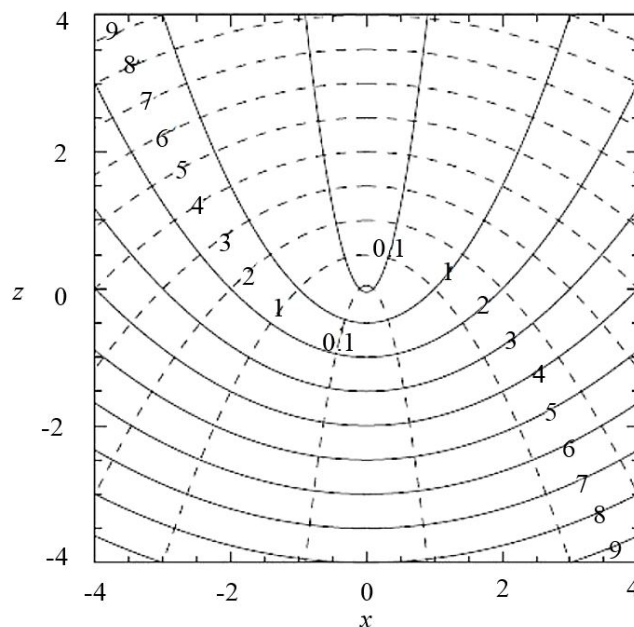
У претходним анализама [73] добијена је крива зависности брзине прелаза атома водоника, или водонику сличног атома, од интензитета ласерског поља коме је изложен када је сматрано да је почетни импулс избаченог електрона једнак нули. Крива којом је приказана брзина прелаза има облик Гаусове расподеле. Са порастом интензитета поља расте и брзина прелаза, постиже неку максималну вредност а затим са даљим порастом интензитета поља брзина прелаза опада асимптотски приближавајући се нули. Понашање криве брзине прелаза када се у њу укључи корекција за почетни импулс избаченог електрона је био предмет нашег истраживања.

Када се електрон налази у високо побуђеном стању главни квантни број је искључиво  $n \gg 1$  и тада је веома близу тога да буде слободан. Све док је енергија високо побуђеног стања мала елиптична орбита може се сматрати параболичном, тако да је оправдано коришћење израза за почетни импулс електрона израженог преко параболичних координата (слика 3.5).

Параболичне координате  $\xi, \eta$  и  $\varphi$  се могу изразити преко Декартових:

$$\xi = r + z, \quad \eta = r - z, \quad \varphi = \arctan(y/x) \quad (3.2)$$

где је  $\varphi$  азимутални угао. Дефинисане су у следећим интервалима  $\xi, \eta \in (0, \infty)$ ,  $\varphi \in (0, 2\pi)$ .



**Слика 3.5.** Графички приказ параболичних координата. У  $xz$  – равни, за  $\eta = \text{const}$  пуна линија, док је за  $\xi = \text{const}$  испрекидана линија. Површине  $\eta = \text{constant}$  и  $\xi = \text{constant}$  су параболоиди који се шире дуж  $z$  осе са теменом у координатном почетку. Координатни систем је ортогоналан.

Кроз читав рад коришћен је атомски систем јединица  $e = m_e = \hbar = 1$ .

Проучавана је јонизација атома калијума (К) који се налази у линеарно поларизованом ласерском пољу CO<sub>2</sub> ласера. Таласна дужина CO<sub>2</sub> ласерске светлости је  $\lambda = 10,6 \times 10^{-6} \text{m}$ , док се енергија једног фотона  $h\nu$  мже израчунати на следећи начин

$$\hbar\omega = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow \hbar\omega = 0,116959 \text{ eV} \quad (3.3)$$

У атомском систему јединица енергија фотона има вредност  $\omega = 0,004298$ .

Интензитет поља се мења у интервалу од  $10^{13} \text{ W/cm}^2$  до  $10^{14} \text{ W/cm}^2$ . Јачина линеарно поларизованог ласерског поља у атомским јединицама се рачуна помоћу формуле

$$F_{lin} = \frac{27,5\sqrt{I}}{5,1 \times 10^9} \quad (3.4)$$

где је  $I$  интензитет ласерског поља.

Калијум на последњем (валентном) енергетском нивоу има један електрон и његова енергија јонизације је (К) је  $E_i^K = 4,3407 \text{ eV}$  односно  $0,159509 \text{ a. j.}$  и тада је  $Z = 1$ .

На самом почетку истраживања кренули смо од резултата датог у раду [51] у коме су Бисгард (Bisgaard) и Медсен (Madsen) извели израз за почетни импулс избаченог електрона:

$$p = \sqrt{-\frac{2E_i}{4} + \frac{C_2}{\eta} - \frac{m^2-1}{4\eta^2} + \frac{1}{4}F_{lin}\eta} \quad (3.5)$$

Експлицитан израз константе  $C_2$  је дат у раду [51]

$$C_2 = Z - \frac{\sqrt{2E_i}}{2} (|m| + 1). \quad (3.6)$$

где је  $Z$  степен јонизације,  $m$  магнетни квантни број чија је вредност је у овом случају  $m = 0$ .

За брзину прелаза у линеарно поларизованом ласерском пољу користимо израз (Поглавље 2) у обичу:

$$W_{ADK}^{lin} = \left( \frac{4Z^3 e}{F_{lin} n^{*4}} \right)^{2n^*-1} \exp\left(-\frac{2Z^3}{3F_{lin} n^{*3}}\right). \quad (3.7)$$

где је

$$n^* \equiv \frac{Z}{\sqrt{2E_i}} \quad (3.8)$$

ефективни квантни број.



Користећи резултате добијене у раду [48] изведен је израз за брзину прелаза у који је укључен ненулти почетни импулс избаченог електрона тако да једначина (3.7) постаје (Поглавље 2).

$$W_{pADK}^{lin} = \left( \frac{4Z^3 e}{F_{lin} n^{*4}} \right)^{2n^*-1} \exp \left( -\frac{2Z^3}{3F_{lin} n^{*3}} - \frac{p^2 \gamma^3}{3\omega} \right). \quad (3.9)$$

Члан  $p^2 \gamma^3 / 3\omega$  дефинише у којој мери брзина прелаза зависи од почетног импулса избаченог електрона. Сменом израза за импулс (3.5) у једначину (3.9) следи да је:

$$W_{pADK}^{lin} = \left( \frac{4Z^3 e}{F_{lin} n^{*4}} \right)^{2n^*-1} \exp \left( -\frac{2Z^3}{3F_{lin} n^{*3}} - \frac{\left( \frac{2E_i + C_2}{4} + \frac{m^2 - 1}{4\eta^2} + \frac{1}{4} F_{lin} \eta \right) \gamma^3}{3\omega} \right) \quad (3.10)$$

У једначини (3.7) Кулонова интеракција између избаченог електрона и језгра је занемарена. У раду [74] ова интеракција је узета у обзир тако да је добијен коригован израз за брзину прелаза:

$$W_{cADK}^{lin} = \left( \frac{4Z^3 e}{F_{lin} n^{*4}} \frac{1}{1 + \frac{2ZF}{(p^2 + 2E_i)^2} + \frac{Z^2 F_{lin}^2}{2E_i(p^2 + 2E_i)^3}} \right)^{2n^*-1} \exp \left( -\frac{2Z^3}{3F_{lin} n^{*3}} \right) \quad (3.11)$$

где је  $W_{cADK}^{lin}$  коригована брзина прелаза при чијем рачунању је узета у обзир Кулонова интеракција. По аналогији са једначином (3.9) добија се израз за брзину прелаза у коју је укључен ненулти почетни импулс избаченог електрона:

$$W_{pcADK}^{lin} = \left( \frac{4Z^3 e}{F_{lin} n^{*4}} \frac{1}{1 + \frac{2ZF_{lin}}{(p^2 + 2E_i)^2} + \frac{Z^2 F_{lin}^2}{2E_i(p^2 + 2E_i)^3}} \right)^{2n^*-1} \exp \left( -\frac{2Z^3}{3F_{lin} n^{*3}} - \frac{p^2 \gamma^3}{3\omega} \right) \quad (3.12)$$

односно

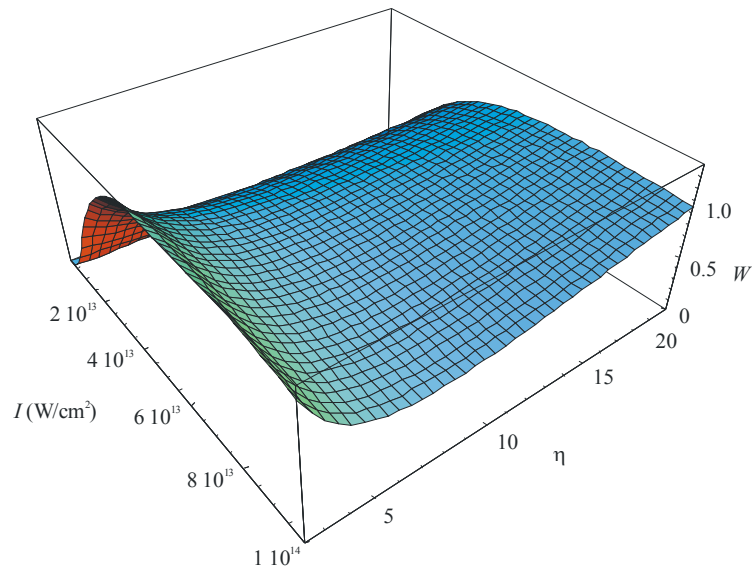
$$W_{pcADK}^{lin} = \left( \frac{4Z^3 e}{F_{lin} n^{*4}} \frac{1}{1 + \frac{2ZF_{lin}}{(p^2 + 2E_i)^2} + \frac{Z^2 F_{lin}^2}{2E_i(p^2 + 2E_i)^3}} \right)^{2n^*-1} \exp \left( -\frac{2Z^3}{3F_{lin} n^{*3}} - \frac{\left( \frac{2E_i + C_2}{4} + \frac{m^2 - 1}{4\eta^2} + \frac{1}{4} F_{lin} \eta \right) \gamma^3}{3\omega} \right) \quad (3.13)$$

Нас је интересовало како ће се понашати брзине прелаза дате једначинама (3.10) и (3.13) када се у њихово рачунање укључи ненулти почетни импулс избаченог електрона.

Атоми алкалних метала имају само један електрон у спољашњој (валентној) љусци и по својој сложености су између водониковог атома и других много електронских атома зато их је погодно користити за описивање јонизационих процеса. Енергија везе валентних електрона алкалних метала приближно је за један ред величине мања од

енергије везе електрона који се налазе у следећој попуњеној љусци. Ова чињеница омогућава да се за описивање интеракције алкалних метала и електромагнетног поља користи апроксимација једног активног електрона (Single Active Electron Approximation (SAE)).

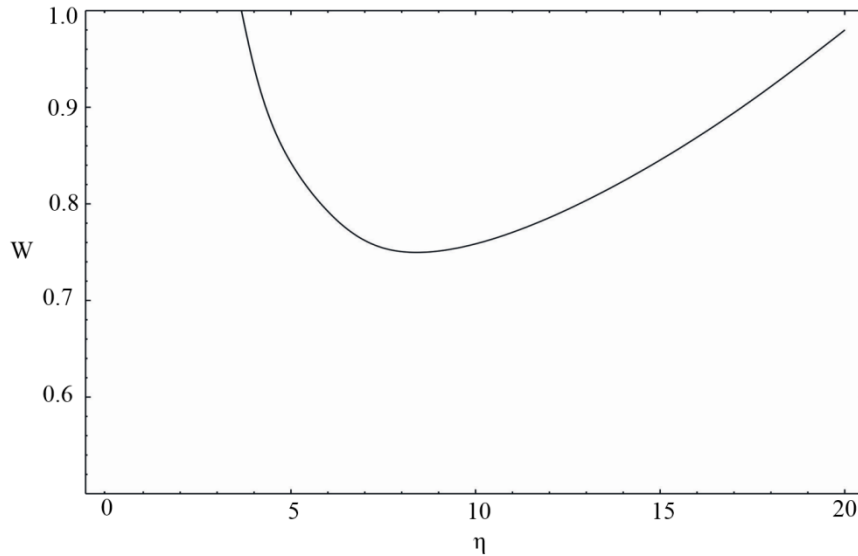
Користећи једначину (3.13) добили смо график на коме је представљена зависност брзине прелаза  $W_{pCADK}^{lin}$  од параболичне координате  $\eta$  и интензитета ласерског поља  $I$ .



Слика 3.6. Брзина прелаза  $W_{pCADK}^{lin}$  у зависности од интензитета ласерског поља  $I$  и параболичне координате  $\eta$ .

Са слике 3.6. се може видети да се на почетку деловања ласера сва енергија ласерског пулса користи за тунеловање електрона и брзина прелаза има велику вредност, док је вредност почетног импулса избаченог електрона мала. Затим брзина прелаза опада зато што се део енергије ласерског пулса користи за повећање импулса избаченог електрона, остављајући на располагању мање количине енергије за јонизацију преосталих електрона. (слика 3.6.) [75].

Зависност кориговане брзине прелаза  $W_{pCADK}^{lin}$  од импулса дата једначином (3.13), односно параболичне координате  $\eta$  може се представити и на дводимензионалном графику (слика 3.7.):



Слика 3.7. Зависност  $W_{спАДК}^{lin}$  од параболне координате  $\eta$ .

Са слике 3.7. се јасно види да брзина прелаза опада са порастом импулса. Непосредно након јонизације избачени електрон се налази у спољашњем пољу. У том тренутку електрон добија енергију од ласерског поља и његов почетни импулс се повећава. Како се енергија ласерског поља сада користи за повећање почетног импулса избаченог електрона за јонизацију следећег електрона не преостаје довољно енергије и у том тренутку брзина прелаза опада. Након што електрон потпуно напусти атом и његово кретање буде у потпуности препуштено пољу брзина прелаза наредног електрона поново расте зато што сада до атома стиже довољна количина енергије.

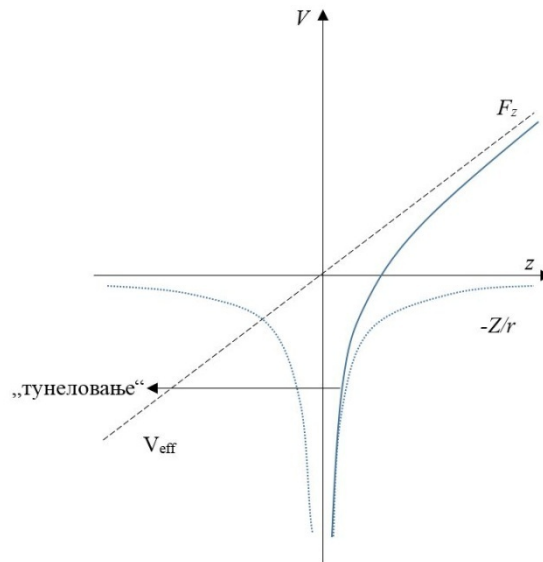
### 3.3 Израз за почетни импулс избаченог електрона као функција параболне координате $\eta$ и јачине поља $F$

Укључивање ненулног импулса електрона у процену брзине прелаза се показало као оправдано што нам је омогућило дубљу анализу процеса тунелне јонизације атома у јаком ласерском пољу [76]. У ту сврху изведен је израз за почетни импулс избаченог електрона који је функција само параболне координате  $\eta$  и јачине поља  $F$ .

Кретање електрона у атому који се налази у спољашњем електричном пољу описано је једначинама:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2} + V_{\text{eff}}, \quad V_{\text{eff}} = -Z/r + Fz \quad (3.14)$$

где је  $H$  Хамилтонијан електрона коју се налази у Кулоновој потенцијалној јами  $-\frac{Z}{r}$ ,  $Z$  је степен јонизације,  $F$  јачина ласерског поља,  $\hat{p}$  оператор импулса електрона. Ефективни потенцијал  $V_{eff}$  је померени (потиснути) Кулонов потенцијал услед интеракције Кулоновог потенцијала и спољашњег поља (слика 3.8.).



Слика 3.8. Ефективни потенцијал у смеру поља. Непетурбовани Кулонов потенцијал и потенцијал поља су приказани одвојено.

Са слике 3.8. се види да је за мале јачине поља баријера далеко тако да је вероватноћа да електрон тунелује екстремно мала. Брзина прелаза расте када јачина поља расте, тако да се може дефинисати такозвана „критична јачина поља  $F_{crit}$ “ при којој ће доћи до јонизације. Под претпоставком да се почетна енергија електрона не мења, до класичне надбаријерне јонизације долази када се максимум баријере поклапа са енергетским нивом електрона. Положај максимума баријере када је  $F > 0$  је у тачки

$$z_{barr} = -\sqrt{Z/F}, \quad (3.15)$$

док је потенцијал (енергија) у овој тачки:

$$V_{barr} = -2\sqrt{ZF}. \quad (3.16)$$

Својствена енергија водонику сличног јона, у основном стању, у атомским јединицама је  $E_n = -\frac{Z^2}{2n^2}$  за  $n = 1$ . Ова енергија мора бити једнака енергији у тачки максимума баријере

$$E_n = -Z^2/2 = -2\sqrt{ZF_{crit}}. \quad (3.17)$$

Следи да се јачина критичног поља може рачунати помоћу израза:  $F_{\text{crit}} = Z^3/16$  из кога се види да је критична јачина поља пропорционална степену јонизације  $Z$ .

Да би се добио израз за почетни импулс избаченог електрона користе се параболичне координате, дефинисане једначином (3.2):

Ако се зна да је  $\hat{p} = -i\hbar\nabla$ , и да је  $\Delta = \nabla^2$ , Лапласов оператор у параболичним координатама има облик:

$$\nabla^2 = \frac{4}{\xi+\eta} \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{\xi\eta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (3.18)$$

Аналогно једначином (3.14), Хамилтонијан за слободну честицу која се налази у спољашњем пољу представљен у параболичним координатама има облик:

$$\hat{H} = -\frac{2}{\xi+\eta} [\partial_\xi(\xi\partial_\xi) + \partial_\eta(\eta\partial_\eta)] - \frac{1}{2\xi\eta} \partial_\varphi^2 - \frac{2Z}{\xi+\eta} + F \frac{\xi-\eta}{2}. \quad (3.19)$$

Користећи израз за Хамилтонијан дат једначином (3.19) Шредингерову једначину  $\hat{H}\Psi = \mathcal{E}\Psi$ , пишемо у облику:

$$\left[ -\frac{2}{\xi+\eta} [\partial_\xi(\xi\partial_\xi) + \partial_\eta(\eta\partial_\eta)] - \frac{1}{2\xi\eta} \partial_\varphi^2 - \frac{2Z}{\xi+\eta} + F \frac{\xi-\eta}{2} \right] \Psi = \mathcal{E}\Psi \quad (3.20)$$

где је  $\mathcal{E}$  укупна енергија система.

Таласна функција се може представити у форми:

$$\Psi = f_1(\xi)f_2(\eta)e^{im\varphi}. \quad (3.21)$$

Сменом једначине (3.21) у једначину (3.20) и после примене једноставних математичких операција следи да је:

$$\frac{1}{f_1} \left( \frac{d}{d\xi} \xi \frac{df_1}{d\xi} \right) - \frac{m^2}{4\xi} - \frac{F\xi^2}{4} + \frac{\mathcal{E}\xi}{2} + \frac{1}{f_2} \left( \frac{d}{d\eta} \eta \frac{df_2}{d\eta} \right) - \frac{m^2}{4\eta} + \frac{F\eta^2}{4} + \frac{\mathcal{E}\eta}{2} + Z = 0. \quad (3.22)$$

Због даљег рачуна неопходно је увести константе раздвајања које задовољавају услов да је  $Z = Z_1 + Z_2$ . Имајући ово у виду добија се :

$$\frac{1}{f_1} \left( \frac{d}{d\xi} \xi \frac{df_1}{d\xi} \right) - \frac{m^2}{4\xi} - \frac{F\xi^2}{4} + \frac{\mathcal{E}\xi}{2} + Z_1 = 0, \quad (3.23)$$

$$\frac{1}{f_2} \left( \frac{d}{d\eta} \eta \frac{df_2}{d\eta} \right) - \frac{m^2}{4\eta} + \frac{F\eta^2}{4} + \frac{\mathcal{E}\eta}{2} + Z_2 = 0. \quad (3.24)$$

Дељењем једначина (3.23) и (3.24) са  $2\xi$  и  $2\eta$  и множењем са  $f_1$  и  $f_2$  респективно, добијају се две Шредингерове једначине:

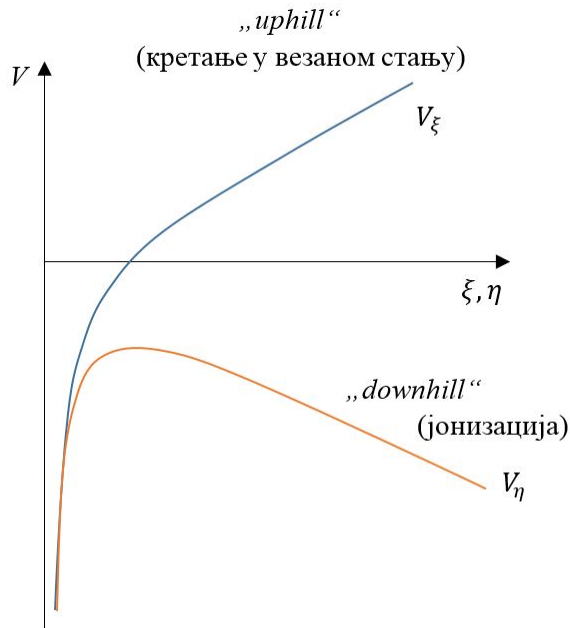
$$\left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} - \frac{m^2}{4\xi^2} \right) - \frac{Z_1}{2\xi} + \frac{F}{8} \xi \right] f_1 = \frac{\varepsilon}{4} f_1, \quad (3.25)$$

$$\left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{d^2}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{d}{d\eta} - \frac{m^2}{4\eta^2} \right) - \frac{Z_2}{2\eta} - \frac{F}{8} \eta \right] f_2 = \frac{\varepsilon}{4} f_2. \quad (3.26)$$

Из једначина (3.14), (3.25) и (3.26) уочава се да потенцијали имају облик

$$V_\xi = -\frac{Z_1}{2\xi} + \frac{F}{8} \xi, \quad V_\eta = -\frac{Z_2}{2\eta} - \frac{F}{8} \eta \quad (3.27)$$

Оба потенцијала се састоје од Кулоновог потенцијала и потенцијала који потиче од спољашњег поља, као и код  $V_{\text{eff}}$  у једначини (3.14). Ако се посматра случај када је  $F > 0$ , (атом се налази у спољашњем пољу) и када је  $\xi, \eta \geq 0$ , потенцијал  $V_\xi$  имају електрони који се налазе у везаном (основном) стању, док потенцијал  $V_\eta$  имају електрони који се налазе у потенцијалној баријери. Потенцијали  $V_\xi$  и  $V_\eta$  су „uphill“ и „downhill“ потенцијал респективно (слика 3.9.).



**Слика 3.9.** Приказ  $V_\xi$  и  $V_\eta$  потенцијала. „uphill“ потенцијал  $V_\xi$ , када је спољашње поље укључено ( $F > 0$ ), представља само везана стања, док „downhill“ потенцијал  $V_\eta$  представља баријеру кроз коју електрон може да тунелује

У случају када нема спољашњег поља, када је  $F = 0$ , Шредингерове једначине (3.25) и (3.26) су идентичне.

Ако се разматра случај тунеловања електрона у атому водоника кроз баријеру „downhill“ потенцијала (слика 3.9.) сматра се да је електрон у основном стању и да се тунеловање

дешава у негативном смеру  $z$  осе, када је  $\xi \simeq 0$  и  $\eta \simeq -2z \gg 1$ . За  $m = 0$ ,  $Z_2 = 1/2$ ,  $\mathcal{E} = -1/2$  једначина (3.26), постаје:

$$\left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{d^2}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{d}{d\eta} \right) - \frac{1}{4\eta} - \frac{F}{8}\eta \right] f_2(\eta) = -\frac{1}{8} f_2(\eta). \quad (3.28)$$

Сменом

$$\chi(\eta) = \sqrt{\eta} f_2(\eta). \quad (3.29)$$

у једначину (3.28) после низа основних математичких операција, добија се израз:

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial \eta^2} + \left( -\frac{1}{4} + \frac{1}{2\eta} + \frac{1}{4\eta^2} + \frac{1}{4} F\eta \right) \chi = 0. \quad (3.30)$$

Који се може трансформисати у облик

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial \eta^2} + \left( \frac{1}{2\eta} + \frac{1}{4\eta^2} + \frac{1}{4} F\eta \right) \chi = -\frac{1}{4} \chi. \quad (3.31)$$

Множењем једначине (3.31) са  $-1/2$ , добија се:

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \eta^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2\eta} + \frac{1}{4\eta^2} + \frac{1}{4} F\eta \right) \chi = -\frac{1}{8} \chi. \quad (3.32)$$

Како се посматра само процес тунелне јонизације у обзир се узима само параболична координата  $\eta$ . Поређењем једначина (3.14) и (3.32) може се закључити да је:

$$\hat{H} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + V(\eta). \quad (3.33)$$

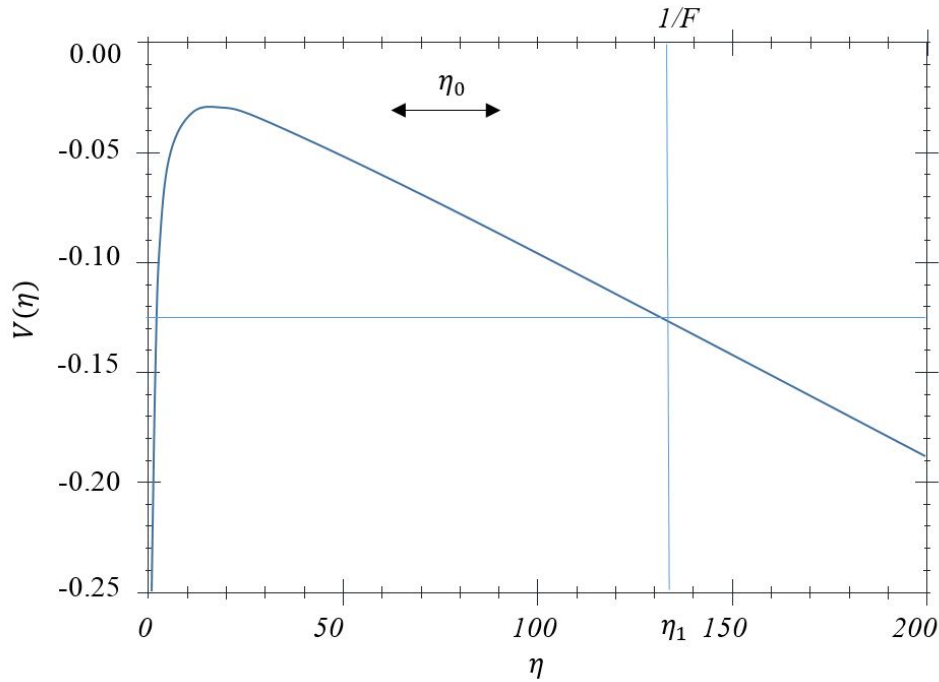
Односно добија се Шредингерова једначина у којој је  $\mathbb{E}$ , укупна енергија.:

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \eta^2} + V(\eta) \chi = \mathbb{E} \chi \quad (3.34)$$

Поређењем једначина (3.32) и (3.34) закључује се да је  $\mathbb{E} = -\frac{1}{8}$ , и да је потенцијал електрона:

$$V(\eta) = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2\eta} + \frac{1}{4\eta^2} + \frac{1}{4} F\eta \right). \quad (3.35)$$

Потенцијал  $V(\eta)$  је приказан на **слици 3.10**. са које се може уочити да параболична координата  $\eta$  унутар баријере има вредности у интервалу  $1 \ll \eta_0 \ll 1/F$ .



**Слика 3.10.** Представљен је потенцијал  $V_\eta$ . До тунеловања долази за довољно мале интензитете поља  $F$ , и за вредности  $\eta_1$  које су дате апроксимацијом  $\eta_1 \approx 1/F$ . Вредности  $\eta_0$  се налазе унутар баријере где важи  $1 \ll \eta_0 \ll 1/F$

Како се зна да је укупна енергија система једнака збиру кинетичке и потенцијалне енергије:

$$\mathbb{E} = \frac{p^2}{2} + V(\eta), \quad (3.36)$$

следи да је:

$$p = \sqrt{2(\mathbb{E} - V(\eta))}. \quad (3.37)$$

где је  $p$  импулс избаченог електрона. Када се у једначину (3.37) убаци потенцијал дат једначином (3.35), и имајући у виду да је  $\mathbb{E} = -\frac{1}{8}$ , почетни импулс јонизованог електрона  $p$  у функцији параболичне координате  $\eta$  и јачине поља  $F$  добија се у форми:

$$p = \sqrt{-\frac{1}{4} + \frac{1}{2\eta} + \frac{1}{4\eta^2} + \frac{1}{4}F\eta} \quad (3.38)$$

Пажњу треба обратити у области  $\eta \approx \eta_1$  зато што квазикласична апроксимација не важи у тачки у којој је  $\eta_1 \approx 1/F$ , која представља класичну повратну тачку у којој честица у складу са класичном механиком, стане и почне да се креће у супротном правцу. У тој



тачки је  $p(\eta_1) = 0$ , тако да се могу посматрати две области у којима се налази електрон и у којима је вредност импулса електрона у тачно одређеним интервалима.

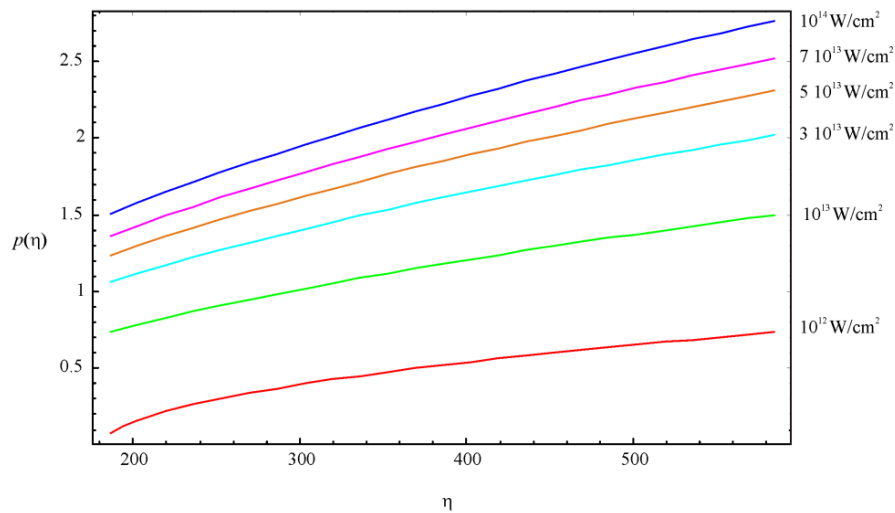
Координата  $\eta$  унутар баријере узима вредност у интервалу  $1 \ll \eta_0 \ll 1/F$  (слика 3.10.), тако да се импулс може развити у ред у тачки  $1/\eta$ :

$$p(\eta) = \left( \sqrt{F\eta - 1} + \frac{1}{\eta\sqrt{F\eta - 1}} + \dots \right) \text{ ван баријере, } \eta > \eta_1 \quad (3.39 \text{ а})$$

$$p(\eta) = \left( i\sqrt{1 - F\eta} + \frac{1}{i\eta\sqrt{1 - F\eta}} + \dots \right) \text{ унутар баријере, } \eta < \eta_1. \quad (3.39 \text{ б})$$

Може се закључити да се импулс избаченог електрона може представити преко два израза, израз који важи у класично дозвољеној области, једначина (3.39 а) и израз који важи у класично забрањеној области једначина (3.39 б).

Како је почетни импулс избаченог електрона, једначина (3.39 а), функција параболичне координате  $\eta$  и јачине поља  $F$ , било је интересно видети како се понаша импулс на тачно одређеним интензитетима поља када се координата  $\eta$  мења у интервалу (185 – 586) (слика 3.11.).



Слика 3.11. Зависност импулса  $p(\eta)$  од параболичне координате  $\eta$  која се мења у интервалу 185 – 586

Вредности за  $\eta$  је изабрана на следећи начин тако да буде  $\eta > 1/F$  и уочава се да гранична вредност за  $\eta$  зависи од јачине ласерског поља. У овој анализи изабрали смо да најнижа вредност јачине поља од које почињемо посматрање понашања брзине прелаза буде  $10^{12} \text{ W/cm}^2$ , за коју је гранична вредност  $\eta$ ,  $\eta_1 = 1/F [10^{12}] = 185,455$ . На слици 3.11. видимо да импулс избаченог електрона расте са порастом интензитета спољашњег поља и

порастан је линеаран тј. растојање између кривих се мења, као и нагиб кривих. Закључак је да што је ласерско поље јачег интензитета избачени електрон добија већи почетни импулс.

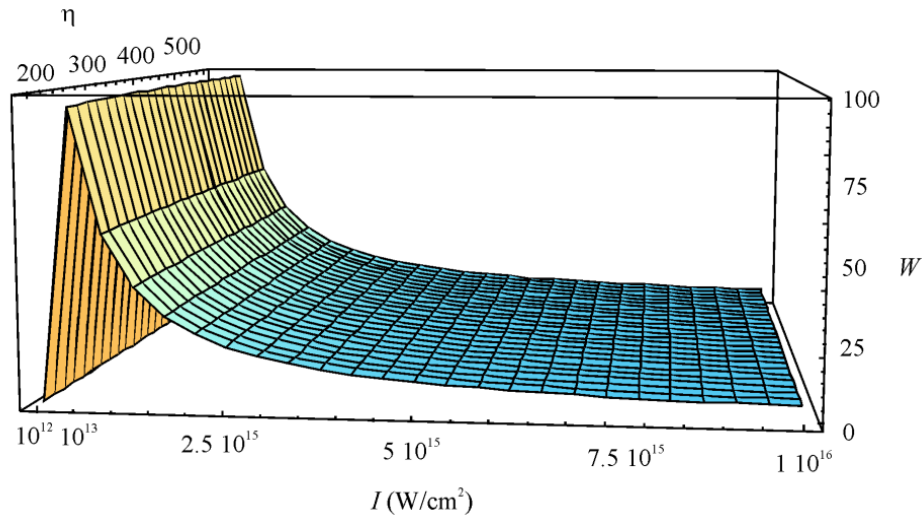
Када се у изразе за брзине прелаза дате једначинама (3.9) и (3.12) укључи израз за почетни импулс јонизованог електрона дат једначином (3.39 а) добија се брзина прелаза са корекцијом за ненулни почетни импулс у форми:

$$W_{pADK}^{lin} = \left( \frac{4Z^3 e}{F_{lin} n^{*4}} \right)^{2n^*-1} \exp \left( -\frac{2Z^3}{3F_{lin} n^{*3}} - \frac{\left( \sqrt{F_{lin} \eta - 1} + \frac{1}{\eta \sqrt{F_{lin} \eta - 1}} \right) \gamma^3}{3\omega} \right) \quad (3.40)$$

односно:

$$W_{pcADK}^{lin} = \left( \frac{4Z^3 e}{F_{lin} n^{*4}} \frac{1}{1 + \frac{2ZF_{lin}}{(p^2 + 2E_i)^2} + \frac{Z^2 F_{lin}^2}{2E_i(p^2 + 2E_i)^3}} \right)^{2n^*-1} \exp \left( -\frac{2Z^3}{3F_{lin} n^{*3}} - \frac{\left( \sqrt{F_{lin} \eta - 1} + \frac{1}{\eta \sqrt{F_{lin} \eta - 1}} \right) \gamma^3}{3\omega} \right) \quad (3.41)$$

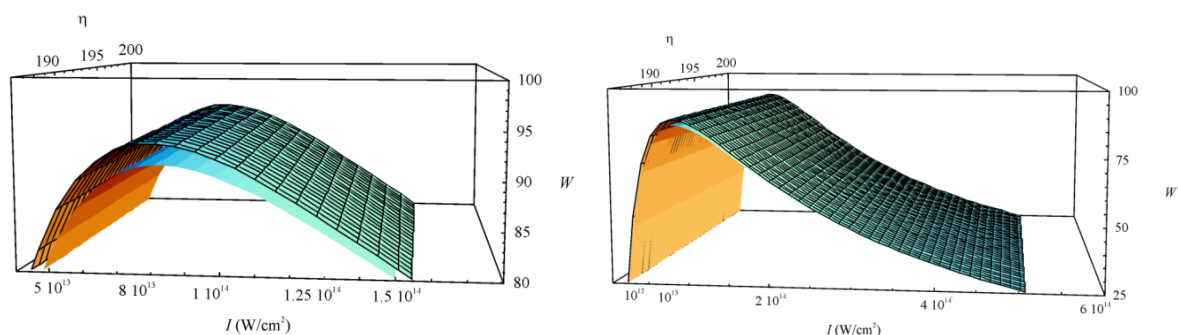
Понашање брзине прелаза датих једначинама (3.40) и (3.41) приказано је на 3Д графику (слика 3.12.) Брзине прелаза су цртане у зависности од параболичне координате  $\eta$  чије се вредности мењају у интервалу од (185-585) и у зависности од интензитета поља које се мења у опсегу  $10^{12} \text{ W/cm}^2 - 10^{16} \text{ W/cm}^2$ . На графику је брзина прелаза изражена у произвољним јединицама (arbitrary units).



Слика 3.12. Брзине прелаза  $W_{CADK}^{lin}$  и  $W_{pcADK}^{lin}$  цртане на истом графику. Скала за интензитет ласерског поља није линеарна.

Посматрајући слику 3.12. не може се јасно уочити разлика између  $W_{CADK}^{lin}$  брзине прелаза када није укључен почетни импулс избаченог електрона и  $W_{pcADK}^{lin}$  када је почетни импулс

избаченог електрона укључен зато што је разлика веома мала. Због тога су на **слици 3.13.** дате исте криве али у опсегу у коме ће бити приказан само пик кривих представљених на **слици 3.12.** Разлика се сада јасно може уочити. На **слици 3.13.** се види да при интензитетима поља  $\sim 10^{13} \text{ W/cm}^2$ , брзина прелаза има максимум, што показује да су сви доступни (расположиви) електрони избачени. У случају калијума (К), који се налази у нискофреквентном јаком пољу  $\text{CO}_2$  ласера, то је 1 валентни електрон и 8 електрона из наредне попуњене љуске, што даје 9 доступних електрона за јонизацију. За детаљнији опис јонизације ових електрона користили смо АДК теорију у целом опсегу интензитета ласерског поља у коме је посматрана промена тј. за интензитете између  $10^{12} \text{ W/cm}^2$  –  $10^{16} \text{ W/cm}^2$ .



**Слика 3.13.** Пикови брзине прелаза  $W_{CADK}^{lin}$  и  $W_{pCADK}^{lin}$  цртане на истом 3Д графику, (а) представљени су само максимуми, нижа крива представља  $W_{pCADK}^{lin}$ , (б) у већем опсегу него на слици (а), једва видљива нижа површина представља  $W_{pCADK}^{lin}$ .

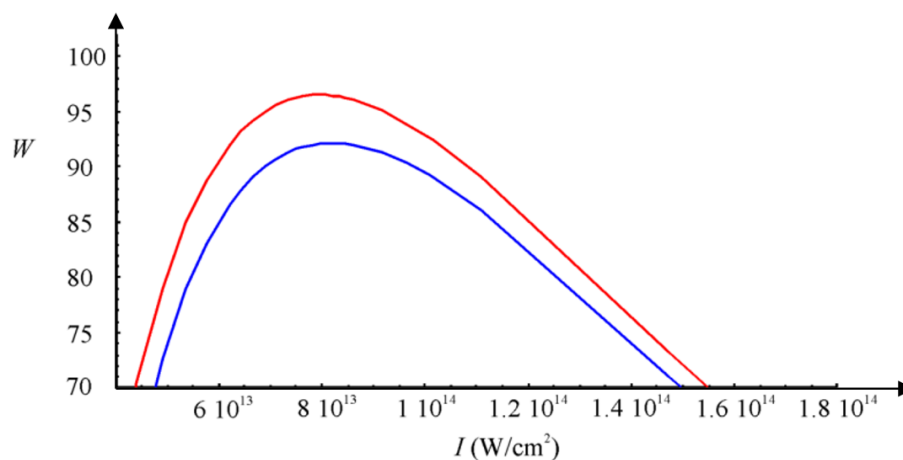
Са **слике 3.13.(а)** се види да се брзина прелаза  $W_{pCADK}^{lin}$  мања од брзине прелаза  $W_{CADK}^{lin}$ . Максимална израчуната вредност за  $W_{CADK}^{lin,max}$  је за интензитет поља  $7.9 \times 10^{13} \text{ W/cm}^2$ , док је за  $W_{pCADK}^{lin,max}$  потребан интензитет поља  $8.2 \times 10^{13} \text{ W/cm}^2$ . Закључује се да би брзина прелаза, када је укључен ненулни почетни импулс електрона, била максимална потребан је виши интензитет поља него када се рачуна максимална брзина прелаза када је почетни импулс електрона једнак нули. Ова разлика следи из чињенице да се део енергије фотона ласерског снопа преноси на избачени електрон. Закључак је да ефекат ненулног почетног импулса избаченог електрона може бити детектован.

На интензитетима  $\sim 10^{13} \text{ W/cm}^2$  брзина прелаза је максимална, што указује на то да је већина доступних електрона избачена. Након постизања максимума брзина прелаза нагло опада (**слика 3.13.(б)**) зато што је остало свега неколико електрона који могу бити јонизовани и чији је почетни импулс различит од нуле. Због тога се површине које

представљају  $W_{CADK}^{lin}$  и  $W_{pcADK}^{lin}$  асимптотски приближавају нули и разлике између њих су занемарљиве, површине су се скоро спојиле.

Ово објашњава ефекат сатурације за поља до  $10^{16} \text{ W/cm}^2$  [72]. Може се очекивати да за различите атоме до сатурације долази на вишим интензитетима ласерског поља све док не долази до релативистичких ефеката при интензитетима поља  $\sim 10^{18} \text{ W/cm}^2$  [74].

Као илустрацију претходне дискусије даћемо 2Д график на коме су приказане  $W_{CADK}^{lin}$  (наранџаста) и  $W_{pcADK}^{lin}$  (плава) у зависности од интензитета ласерског поља (слика 3.14.).



Слика 3.14.  $W_{CADK}^{lin}$  (наранџаста) и  $W_{pcADK}^{lin}$  (плава) у зависности од интензитета ласерског поља.

Дакле, максималне вредности које постижу брзине прелаза када је почетни импулс избаченог електрона једнак нули и када је вредност почетног импулса различита од нуле се не поклапају. Максимална вредност брзине прелаза када је почетни импулс избаченог електрона различит од нуле је померен у десно, ка већим интензитетима ласерског поља.

### 3.4. Утицај ненулног почетног импулса електрона на брзину прелаза у циркуларно поларизованом ласерском пољу

Предмет даљег рада био је проучавање како укључивање ненулног почетног импулса избаченог електрона утиче на брзину прелаза у циркуларно поларизованом пољу [77]. Важна особина јонизационих процеса у циркуларно поларизованом пољу је да се већина фотоелектрона избацује дуж равни поларизације. Радијус орбите електрона у равни  $F/\omega^2$  је велики у поређењу са величином атома, али мали у поређењу са радијусом

фокуса ласерског снопа. Брзина прелаза у циркуларно поларизованом ласерском пољу, дефинисана у АДК теорији, разликује са од брзине прелаза у линеарно поларизованом ласерском пољу за фактор  $\sqrt{3FZ^3/\pi n^{*3}}$  [54]:

$$W_{ADK}^{cir} = \sqrt{\frac{3F_{cir}Z^3}{\pi n^{*3}}} \left( \frac{4Z^3 e}{F_{cir} n^{*4}} \right)^{2n^*-1} \exp\left(-\frac{2Z^3}{3F_{cir} n^{*3}}\right) \quad (3.42)$$

Израз за брзину прелаза у тунелној јонизацији у циркуларно поларизованом пољу када је укључен ненулни почетни импулс избаченог електрона има облик:

$$W_{pADK}^{cir} = \sqrt{\frac{3F_{cir}Z^3}{\pi n^{*3}}} \left( \frac{4Z^3 e}{F_{cir} n^{*4}} \right)^{2n^*-1} \exp\left(-\frac{2Z^3}{3F_{cir} n^{*3}} - \frac{p^2 \gamma^3}{3\omega}\right) \quad (3.43)$$

Када се у израз (3.43) укључи импулс дат једначиним (3.39 а) добија се да је:

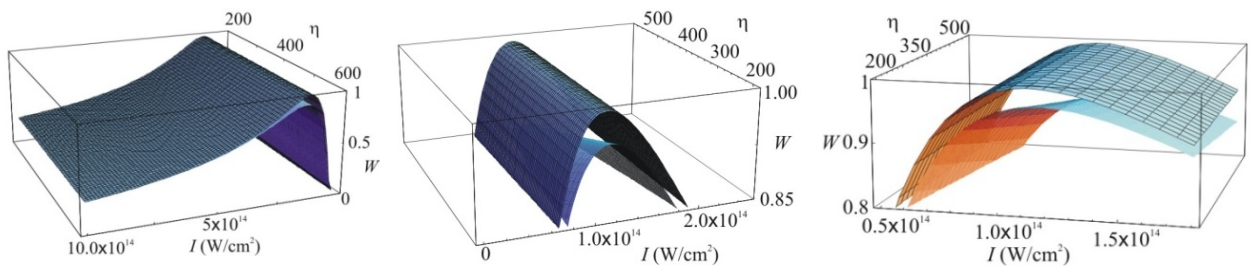
$$W_{pADK}^{cir} = \sqrt{\frac{3F_{cir}Z^3}{\pi n^{*3}}} \left( \frac{4Z^3 e}{F_{cir} n^{*4}} \right)^{2n^*-1} \exp\left(-\frac{2Z^3}{3F_{cir} n^{*3}} - \frac{\left(\sqrt{F_{cir}\eta-1} + \frac{1}{\eta\sqrt{F_{cir}\eta-1}}\right)\gamma^3}{3\omega}\right) \quad (3.44)$$

По аналогији са једначином (3.4) јачина циркуларно поларизованог ласерског поља у атомским јединицама се рачуна помоћу формуле

$$F_{cir} = \frac{19\sqrt{I}}{5,1 \times 10^9} \quad (3.45)$$

где је  $I$  интензитет ласерског поља.

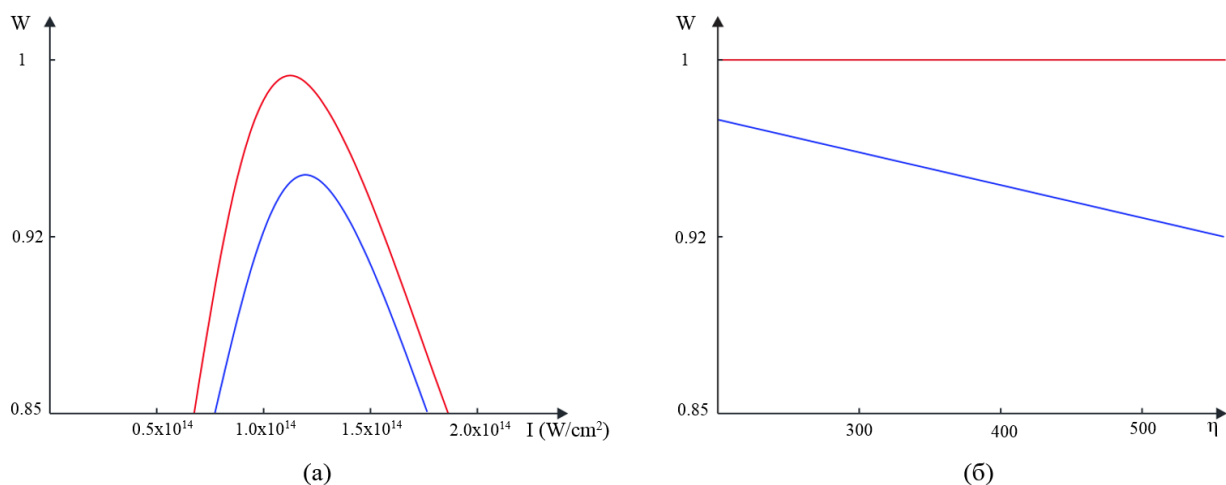
Посматрали смо понашање брзине прелаза (3.42) и (3.44) при јонизацији атома калијума (К) у циркуларно поларизованом пољу CO<sub>2</sub> ласера (слика 3.15). Интензитет поља је мењан у интервалу од  $10^{12}$  W/cm<sup>2</sup> до  $10^{16}$  W/cm<sup>2</sup>.



**Слика 3.15.** Зависност брзине прелаза  $W_{ADK}^{cir}$  и  $W_{pADK}^{cir}$  од интензитета ласерског поља и ненулног почетног импулса, (а) на целом посматраном опсегу интензитета ласерског поља, (б) и (ц) приказани су само максимуми на два различита опсега интензитета ласерског поља

На **слици 3.15.(а)** приказана је зависност брзине прелаза  $W_{ADK}^{cir}$  и  $W_{pADK}^{cir}$  од интензитета ласерског поља и ненулног почетног импулса избаченог електрона на целом посматраном опсегу интензитета ласерског поља. Као што се са **слике 3.15.** види на потпуном опсегу, немогуће је довољно добро уочити разлике између површи којима су представљене брзине прелаза. Зато су на **слици 3.15.(б)** приказани само максимуми кривих  $W_{ADK}^{cir}$  и  $W_{pADK}^{cir}$  и то када се интензитет ласерског поља мења у интервалу  $2 \times 10^{12} \text{ W/cm}^2$  до  $2,5 \times 10^{14} \text{ W/cm}^2$ . Док су на **слици 3.15.(ц)** приказани максимуми у још ужем интервалу интензитета ласерског поља  $5 \times 10^{13} \text{ W/cm}^2$  до  $1,8 \times 10^{14} \text{ W/cm}^2$ . Вредност параболичне координате  $\eta$  се мења у интервалу (200 – 600) у сва три случаја. Запажа се да се на сва три графика површина која представља брзину прелаза  $W_{pADK}^{cir}$  има очекивани облик и налази испод површи која представља  $W_{ADK}^{cir}$  што доводи до закључка да брзина прелаза опада у случају када се при рачунању у обзир узме почетни импулс избаченог електрона. Такође се може уочити да се максималне вредности брзине прелаза постижу на вишим интензитетима поља.

Да би се јасније приказала разлика и утицај ненулног почетног импулса избаченог електрона брзине прелаза ће бити представљене на 2Д графику (**слика 3.16.**). На **слици 3.16.(а)** црвеном линијом приказана брзина прелаза када је почетни импулс једнак нули, док је плавом линијом приказана брзина прелаза када је почетни импулс различит од нуле. Параболична координата  $\eta$  фиксирана је на 190, док се интензитет ласерског поља мења у интервалу  $2 \times 10^{12} \text{ W/cm}^2$  до  $2,5 \times 10^{14} \text{ W/cm}^2$ .



**Слика 3.16.** Дводимензионални график брзине прелаза  $W_{ADK}^{cir}$  и  $W_{pADK}^{cir}$ , (а) за нулти импулс (црвена линија) и ненулни импулс (плава линија) за фиксирано  $\eta = 190$ , (б) за нулти импулс (црвена линија) и ненулни импулс (плава линија) за фиксирано  $I$  на  $1.1 \times 10^{14} \text{ W/cm}^2$

Са **слике 3.16** се јасно види да почетни импулс електрона утиче на брзину прелаза тако што брзина прелаза опада а да је њен максимум померен ка већим интензитетима поља.

На **слици 3.16.(б)** је дат график на коме су представљене брзине прелаза за фиксирану вредност ласерског поља  $I = 1,1 \times 10^{14} \text{ W/cm}^2$ . Уочава се да је брзина прелаза константна када се сматра да је почетни импулс избаченог електрона једнак нули, али се такође уочава да са порастом почетног импулса електрона брзина прелаза опада. Ово потврђује [76], да се енергија ласерског пулса користи за повећање импулса избаченог електрона тако да остају мање „порције“ енергије које су доступне за јонизацију преосталих електрона.

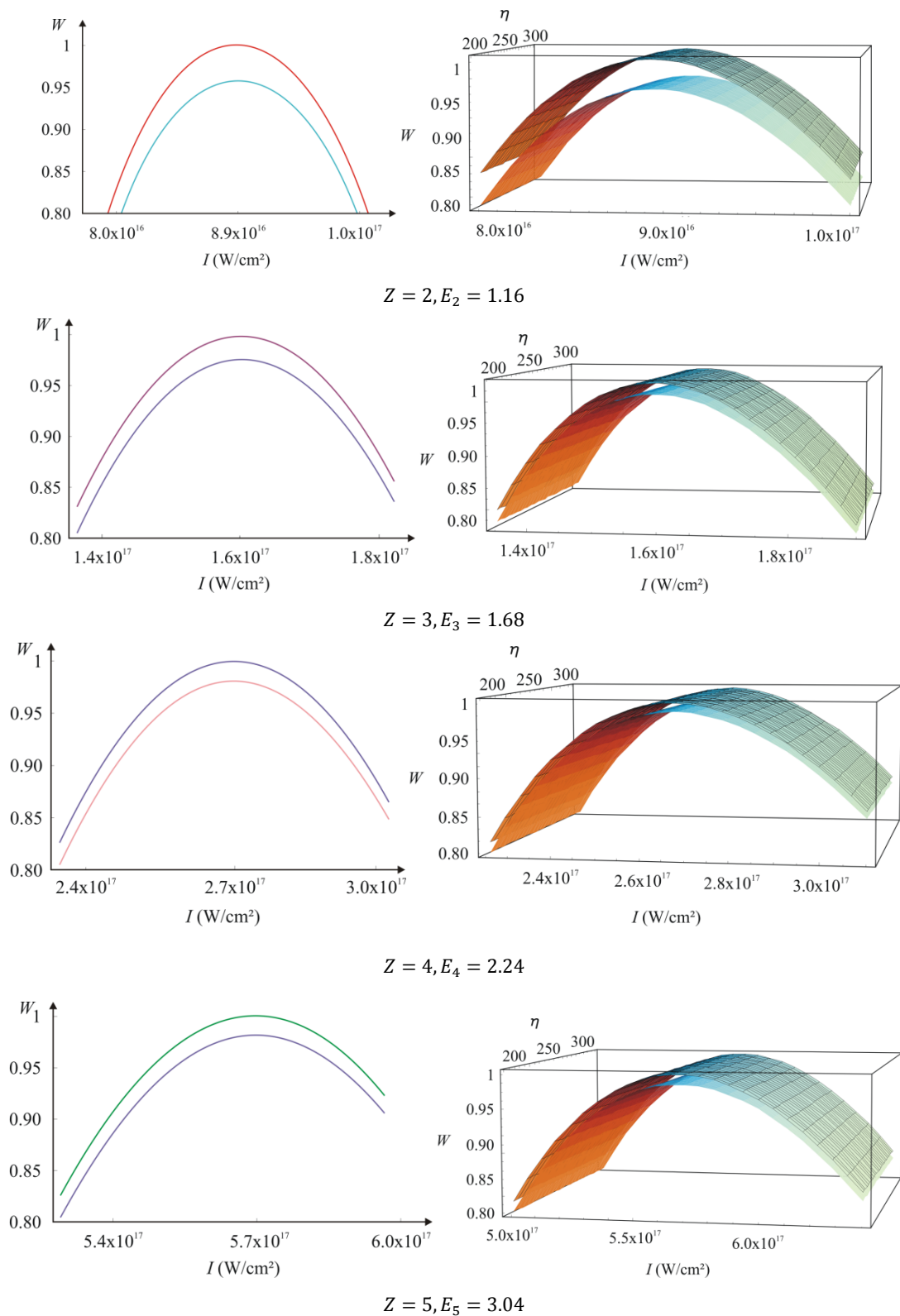
### **3.5. Утицај ненулног почетног импулса електрона на брзину прелаза у циркуларно поларизованом ласерском пољу за различите вредности $Z$**

У досадашњем раду анализирали смо брзину прелаза првог-валентног електрона и тада је  $Z = 1$ . Сада желимо да детаљно проучимо брзину прелаза за различите вредности  $Z$ , односно брзину прелаза другог, трећег, четвртог и петог електрона атома калијума (К) [78]. Експериментални поступак овог проблема је представљен у [79]. Енергија јонизације сваког електрона се разликује а како су параметри  $\gamma = \omega\sqrt{2E_i}/F$  и  $n^* = Z/\sqrt{2E_i}$  функција ове енергије неопходно их је дефинисати прецизно за сваки електрон.

Резултати су представљени на 2Д и 3Д графицима за интензитет циркуларно поларизованог ласерског поља у интервалу  $I = 10^{12} \text{ W/cm}^2 - 10^{17} \text{ W/cm}^2$ , док је вредност параболичне координате  $\eta$  мењана у интервалу  $\eta$  (1 – 300).

Како бисмо јасније приказали разлике између случаја када је почетни импулс једнак нули и када је различит од нуле на графицима су приказани само максимуми брзина прелаза  $W_{ADK}^{cir}$  и  $W_{pADK}^{cir}$ , у зависности од интензитета ласерског поља и параболичне координате  $\eta$ .

Испод сваког пара на **слици 3.17**, обележени су степен јонизације  $Z$  и одговарајућа енергија јонизације (у атомским јединицама).



**Слика 3.17.** График брзине прелаза  $W_{ADK}^{cir}$  и  $W_{pADK}^{cir}$  у зависности од интензитета ласерског поља, када је почетни импулс електрона једнак нули и за ненулни почетни импулс електрона респективно; (а)  $\eta$  је фиксирано на 190 (2Д график), (б) променљиво  $\eta$  (3Д).



Са **слике 3.17.** се може видети да је растојање између кривих које представљају брзине прелаза другог електрона,  $Z = 2$ , када је почетни импулс електрона једнак нули и када је почетни импулс различит од нуле веома приметно. За  $Z = 3$ ,  $Z = 4$  и  $Z = 5$  растојање између кривих којима су представљене исте величине је мање него када је  $Z = 2$

То се може објаснити чињеницом да енергија јонизације другог електрона има мању вредност у поређењу са енергијама јонизације електрона који се налазе ближе језгру, електронима са вишим вредностима  $Z$ . Самим тим на истим интензитетима ласерског поља након савладавања енергије везе другог електрона преостаје велики број фотона који могу бити искоришћени на повећање импулса.

Закључак је да са порастом  $Z$  утицај импулса избаченог електрона на брзину прелаза опада зато што је неопходан већи број фотона да би се савладала енергија везе јона већих степена јонизације  $Z$ , тако да је преостао много мањи број фотона који може бити искоришћен на повећање импулса електрона.

Интервали интензитета ласерског поља на којима се уочавају максимуми се разликују и приказани су у табели 1.

---

$Z$ [степен јонизације]	$I$ [ $\text{W}/\text{cm}^2$ ]
2	$7,0 \times 10^{16} - 1,0 \times 10^{17}$
3	$1,35 \times 10^{17} - 1,9 \times 10^{17}$
4	$2,3 \times 10^{17} - 3,1 \times 10^{17}$
5	$5,0 \times 10^{17} - 6,4 \times 10^{17}$

---

**Табле 1.** Интензитети ласерског поља на којима се уочавају максимуми брзина прелаза

Из **табеле 1.** се може видети да за електроне са различитим  $Z$  до максималне брзине прелаз долази на различитим интензитетима поља, тако што се за сваки наредни електрон, за веће  $Z$ , максимуми померају ка већим интензитетима, што се уклапа са чињеницом да је за сваки наредни електрон енергија јонизације све већа.

### 3.6. Једнострука и двострука тунелна јонизација племенитих гасова који су изложени линеарно и циркуларно поларизованом ласерском пољу

Ради добијања потпуније слике истраживање смо проширили на анализу брзине прелаза и принос јона при тунелној јонизацији атома племенитих гасова кристећи АДК теорију без и са корекцијама за почетни импулс избаченог електрона и пондеромоторни потенцијал.

Појам почетни импулс избаченог електрона је већ уведен зато је на овом месту прикладно увести и појам пондеромоторног потенцијала. Класично кретање електрона у променљивом електромагнетном пољу може се представити као суперпозиција брзих осцилација са малом амплитудом и спорог померања које је последица просторне зависности интензитета ласерског зрачења у посматраној запремини. Ова амплитуда има вредност  $F/\omega^2$  и увек је мања од радијуса фокуса ласерског снопа. Када ласерски пулс траје довољно дуго електрон може бити убрзан просторним градијентом ласерског поља у правцу нормалном на правац простирања ласерског снопа. Због тога се након јонизације правац кретања електрона мења. Сила која је одговорна за овакво понашање је пондеромоторна сила убрзање електрона је пондеромоторно убрзање.

Када се електрон нађе у спољашњем пољу поред кинетичке енергије он има и енергију коју добија осциловањем у том пољу. Енергија осциловања представља пондеромоторни потенцијал датог електрона.

За атоме племенитог гаса смо се одлучили зато што између њих и атома алкалних метала постоји велика разлика. Прва је да је код атома племенитог гаса велики број електрона у спољашњој љусци (изузетак је хелијум), док је друга разлика да је енергија јонизације у поређењу са енергијама јонизације атома алкалних метала знатно већа. На пример, енергија јонизације ксенона (Xe) је два пута већа од енергије јонизације атома алкалних метала. Због тога, за фиксирану вредност фреквенције ласера  $\omega$ , јонизација атома племенитог гаса захтева много већи број фотона.

Веза између енергије фотона, енергије јонизације, кинетичке енергије и пондеромоторног потенцијала електрона је дата добро познатом релацијом [54]:

$$E_k = K_{Up} \hbar \omega - \left( E_i + \frac{F^2}{4\omega^2} \right) \quad (3.46 \text{ a})$$

тада је енергија јонизације

$$E_i = K_{U_p} \hbar \omega - \left( \frac{F^2}{4\omega^2} + \frac{p^2}{2} \right) \quad (3.46 \text{ б})$$

У случају када  $U_p \neq 0$  и број абсорбованих фотона  $K_{U_p}$  зависи од пондеромоторног потенцијала на следећи начин

$$K_{U_p} = \frac{E_i}{\omega} + \frac{\left( \frac{F^2}{4\omega^2} \right)}{\omega} \quad (3.47)$$

Када је пондеромоторни потенцијал једнак нули  $U_p = 0$ , користећи закон одржања енергије (3.46 а) кинетичка енергија се може написати као:

$$E_k = K \hbar \omega - E_i \quad (3.48 \text{ а})$$

односно енергија јонизације

$$E_i = K \hbar \omega - \frac{p^2}{2} \quad (3.48 \text{ б})$$

где величина  $K$ , представља минимални цео број фотона потребних за јонизацију, дефинисан релацијом  $K = \left( \frac{E_i}{\omega} \right) + 1$ .

Брзина прелаза у променљивом линеарно поларизованом пољу у коју није укључен почетни импулс избаченог електрона ће бити дата у модификованој форми у односу на (3.7):

$$W_{lin}^{ADK} = \frac{F_{lin} D_{lin}^2}{8 \pi Z} \sqrt{\frac{3n^{*3} F_{lin}}{\pi Z^3}} \times \text{Exp} \left[ -\frac{Z}{3n^{*3} F_{lin} E_i} \right] \quad (3.49)$$

где је  $D_{lin} \equiv \left( \frac{4 Z^3 e}{F_{lin} n^{*4}} \right)^{n^*}$ , израз за  $F_{lin}$  дат је једначином (3.4).

У брзину прелаза укључујемо корекцију за почетни импулс избаченог електрона:

$$W_{lin}^{ADK} = \frac{F_{lin} D_{lin}^2}{8 \pi Z} \sqrt{\frac{3n^{*3} F_{lin}}{\pi Z^3}} \times \text{Exp} \left[ -\frac{Z}{3n^{*3} F_{lin} E_i} - \frac{p^2 \gamma^3}{3\omega} \right] \quad (3.50)$$

Импулс се рачуна користећи релацијама (3.38) и (3.39 а), поштојући услив да параболична координата  $\eta$  узима вредност  $\eta > 1/F_{lin}$ .

Може се поставити питање да ли се импулс који је уведен користећи закон одржања енергије сме рачунати преко параболичне координате. Ову дилему разрешили су Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшиц [46; § 77 стр. 298], закључили су да ако се претпостави да укупна енергија система не зависи од координате  $\eta$ , тада се импулс одржава дуж класичне путање тј.  $p_\eta = p$ .

Када се у израз (3.50) укључи модификовани израз за енергију јонизације за  $U_p = 0$  релацијом (3.48 б), а затим када је  $U_p \neq 0$  релацијом (3.46 б), респективно добијају се изрази:

$$W_{lin,p}^{ADK} = \frac{F_{lin} D_{lin}^2}{8 \pi Z} \sqrt{\frac{3n^{*3} F_{lin}}{\pi Z^3}} \times \text{Exp} \left[ -\frac{Z}{3n^{*3} F_{lin} \left( K\omega - \frac{p^2}{2} \right)} - \frac{p^2 \gamma^3}{3\omega} \right] \quad (3.51)$$

и

$$W_{lin,p,U_p}^{ADK} = \frac{F_{lin} D_{lin}^2}{8 \pi Z} \sqrt{\frac{3n^{*3} F_{lin}}{\pi Z^3}} \times \text{Exp} \left[ -\frac{Z}{3n^{*3} F_{lin} \left( KU_p \omega - \frac{p^2}{2} - \frac{F_{lin}^2}{4\omega^2} \right)} - \frac{p^2 \gamma^3}{3\omega} \right] \quad (3.52)$$

Пондеромоторни потенцијал за случај линеарно поларизовано ласерско поља је  $U_p^{lin} = F^2/4\omega^2$ .

Брзина прелаза за циркуларно поларизовану светлост ласера [54] модификована у односу на (3.42) има облик:

$$W_{cir}^{ADK} = \frac{F_{cir} D_{cir}^2}{8 \pi Z} \times \text{Exp} \left[ -\frac{Z}{3n^{*3} F_{cir} E_i} \right] \quad (3.53)$$

где је  $D_{cir} \equiv \left( \frac{4 Z^3 e}{F_{cir} n^{*4}} \right)^{n^*}$ , израз за  $F_{cir}$  дат је једначином (3.45). Понављањем претходне процедуре лако долазимо до израза:

$$W_{cir,p}^{ADK} = \frac{F_{cir} D_{cir}^2}{8 \pi Z} \times \text{Exp} \left[ -\frac{Z}{3n^{*3} F_{cir} \left( K\omega - \frac{p^2}{2} \right)} - \frac{p^2 \gamma^3}{3\omega} \right] \quad (3.54)$$

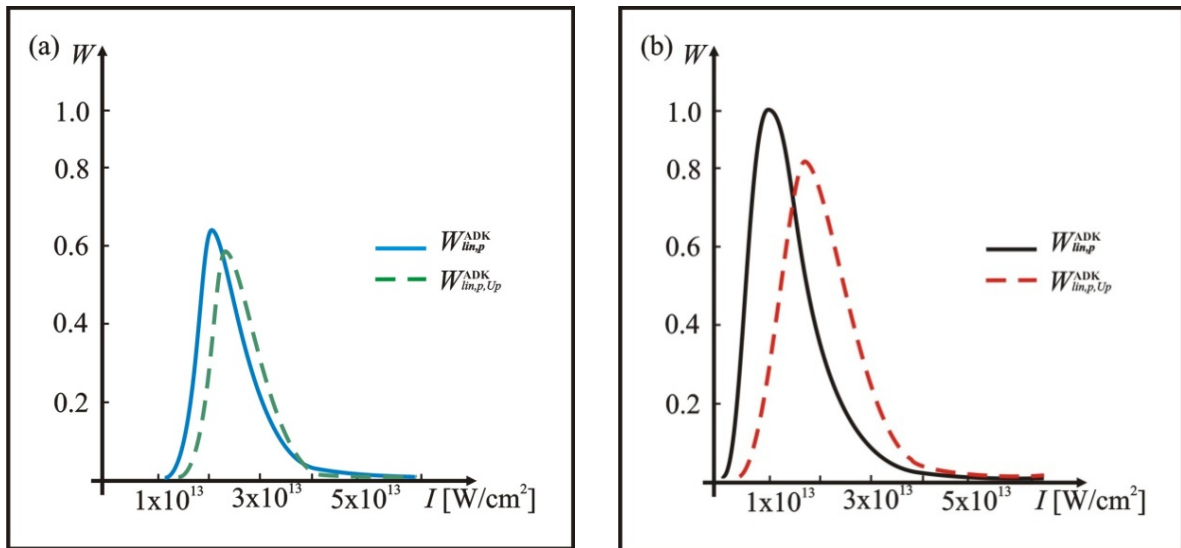
и

$$W_{cir,p,U_p}^{ADK} = \frac{F_{cir} D_{cir}^2}{8 \pi Z} \times \text{Exp} \left[ -\frac{Z}{3n^{*3} F_{cir} \left( KU_p \omega - \frac{p^2}{2} - \frac{F_{lin}^2}{4\omega^2} \right)} - \frac{p^2 \gamma^3}{3\omega} \right] \quad (3.55)$$

За импулс у циркуларном пољу важи услов да је  $\eta > 1/F_{cir}$  а пондеромоторни потенцијал у циркуларно поларизованом пољу дат изразом  $U_p^{cir} = F^2/2\omega^2$ .

Посматрали смо понашање брзина прелаза код атома племенитих гасова када су једноструко и двоструко јонизовани. Анализа је вршена за енергију фотона ласера  $\omega = 0.004298$  а.ј. за интензитете поља који се крећу у интервалу  $10^{12} \text{ W/cm}^2 - 10^{14} \text{ W/cm}^2$ , док координата  $\eta$  у линеарно поларизованом пољу узима вредност у интервалу (19 – 190), у циркуларно поларизованом пољу интервал је (3 – 265). Изабрана вредност Келдишовог параметра је  $\gamma = 0,5$  а.ј..

На слици 3.18. представљене су брзине прелаза дате једначинама (3.51) и (3.52) тако што је на слици 3.18.(а) приказане брзине прелаза  $W_{lin,p}^{ADK}$  и  $W_{lin,p,U_p}^{ADK}$  за  $Ar^+$  док су на слици 3.18.(б) приказане исте величине за  $Ar^{++}$ . Са слика 3.18 (а) и (б) се може уочити да постоји разлика између ове две брзине прелаза. За ову разлику су одговорни ненулти почетни импулс избаченог електрона и пондеромоторни потенцијал. У стандардној формули за брзину прелаза у АДК теорији сматрано је да електрон напушта атом без почетног импулса и да је пондеромоторни потенцијал много мањи у поређењу са енергијом јонизације тако да је њихово занемаривање било потпуно оправдано, међутим ове претпоставке нису у потпуности исправне и у овом раду је то показано.



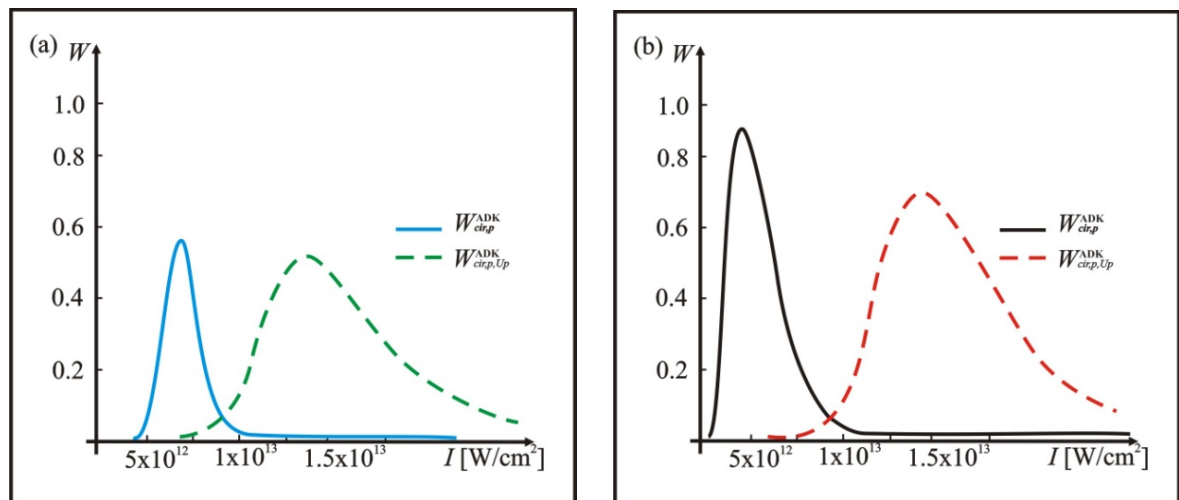
Слика 3.18. Брзина прелаза,  $W_{lin,p}^{ADK}$  и  $W_{lin,p,U_p}^{ADK}$  у зависности од интензитета поља,  $I$ , за (а)  $Z = 1$ ,  $W_{lin,p}^{ADK} \max$  за интензитет поља  $I = 2 \times 10^{13}$   $W/cm^2$  и  $W_{lin,p,U_p}^{ADK} \max$  за интензитет поља  $I = 2,2 \times 10^{13}$   $W/cm^2$ , (б)  $Z = 2$ ,  $W_{lin,p}^{ADK} \max$  за интензитет поља  $I = 1 \times 10^{13}$   $W/cm^2$  и  $W_{lin,p,U_p}^{ADK} \max$  за интензитет поља  $I = 1,75 \times 10^{13}$   $W/cm^2$ . Вредност за  $\eta$  је фиксирана на 190.

На слици 3.18.(а) плавом линијом је приказана брзина прелаза  $Ar^+$  када је у њу укључен почетни импулс избаченог електрона  $W_{lin,p}^{ADK}$ . Уочава се да ова побољшана формула има облик Гаусове расподеле, расте до неке максималне вредности а затим веома брзо опада са порастом интензитета поља и асиптотски се приближава  $x$  оси. Зелена испрекидана линија представља брзину прелаза  $Ar^+$  када је у њено рачунање укључен и пондеромоторни потенцијал  $W_{lin,p,U_p}^{ADK}$ . Посматрајући ове две криве може се уочити да се максималне вредности не поклапају, максималана вредност  $W_{lin,p,U_p}^{ADK} \max$  је мања и

померена удесно ка вишим вредностима интензитета поља. Разлог оваквом понашању лежи у томе да се део енергије фотона „потроши“ на почетни импулс избаченог електрона и пондеромоторни потенцијал а не само на савладавање енергије јонизације, због тога је брзина прелаза мања.

Слично понашање се може уочити и за  $Ar^{++}$ , **слика 3.18.(б)**. Брзина прелаза  $W_{lin,p}^{ADK}$  приказана је црном бојом, док је  $W_{lin,p,U_p}^{ADK}$  представљена црвеном испрекиданом линијом. Посматрајући графике приказане на **слици 3.18.(а)** и **3.18.(б)** уочава се веома битна разлика је да је брзина прелаза већа за  $Ar^{++}$  и то на нижим интензитетима поља. Разлог томе лежи у чињеници да је јонизацијом првог електрона „нарушена“ стабилна електронска конфигурација затворене љуске тако да се други електрон „лакше“ јонизује из отворене љуске.

Исти приступ смо користили при анализи јонизације атома племенитог гаса у циркуларно поларизованом ласерском пољу. На **слици 3.19.** приказали смо брзине прелаза које су цртане користећи једначине (3.54) и (3.55).



**Слика 3.19.** Брзина прелаза,  $W_{cir,p}^{ADK}$  и  $W_{cir,p,U_p}^{ADK}$  у зависности од интензитета поља,  $I$ , за (а)  $Z = 1$ ,  $W_{cir,p}^{ADK}$  max за интензитет поља  $I = 7 \times 10^{12} \text{ W/cm}^2$  и  $W_{cir,p,U_p}^{ADK}$  max за интензитет поља  $I = 1,4 \times 10^{13} \text{ W/cm}^2$ , (б)  $Z = 2$ ,  $W_{cir,p}^{ADK}$  max за интензитет поља  $I = 4 \times 10^{12} \text{ W/cm}^2$  и  $W_{cir,p,U_p}^{ADK}$  max за интензитет поља  $I = 1 \times 10^{13} \text{ W/cm}^2$ .

Вредност за  $\eta$  је фиксирана на 270.

Примећујемо да кад је спољашње поље циркуларно поларизовано максимуми брзине прелаза су померени ка нижим интензитетима поља. Са **слике 3.19.(а)** и **3.19.(б)** се такође уочава да укључивање пондеромоторног потенцијала утиче на смањење брзине прелаза.

Као и у случају за линеарно поларизовано ласерско поље брзине прелаза су веће када је  $Z = 2$ .

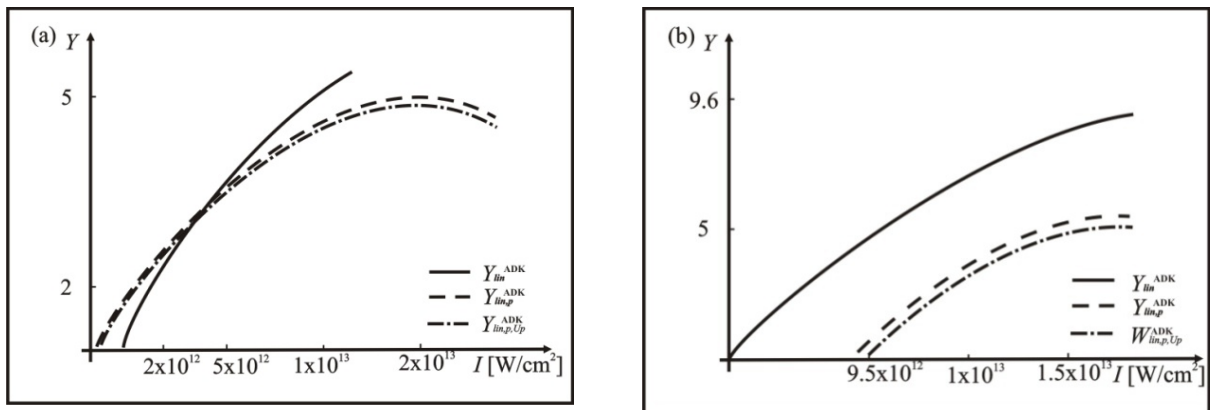
Треба напоменути да смо исте резултате добили и за остале атоме племенитих гасова.

### 3.6.1. Принос јона

У експериментима најчешће мерена величина је принос јона. Ова величина се рачуна интегралом вероватноће јонизације по дужини трајања пулса  $\tau$ :

$$Y = \int_0^{\tau} W dt. \quad (3.56)$$

На слици 3.20. и слици 3.21. су представљени резултати који су добијени рачунањем приноса јона помоћу израза (3.56) и формуле за брзину прелаза дате једначинама (3.49), (3.51), (3.52), (3.53), (3.54), (3.55) у зависности од интензитета ласерског поља.

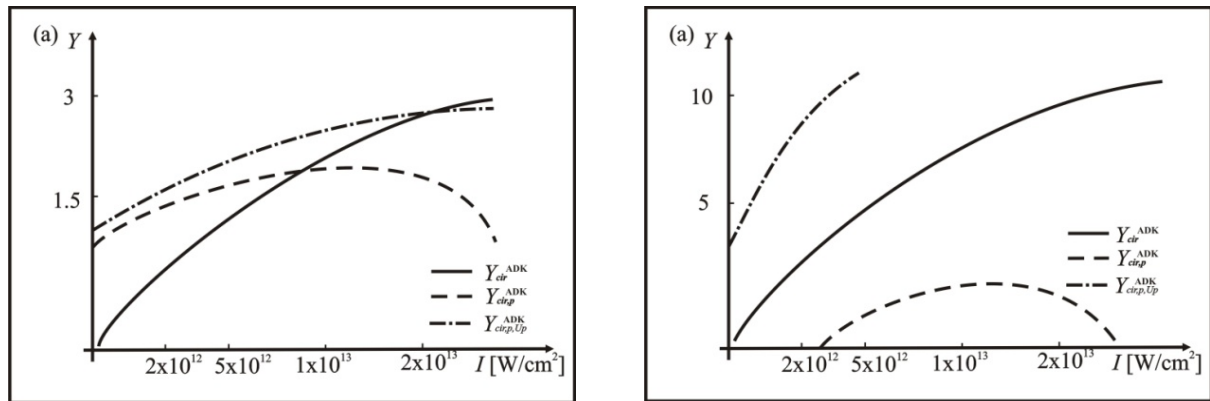


Слика 3.20. Принос јона,  $Y_{lin}^{ADK}$ ,  $Y_{lin,p}^{ADK}$  и  $Y_{lin,p,Up}^{ADK}$  у зависности од интензитета поља,  $I$ , за (а)  $Z = 1$ , (б)  $Z = 2$ .

Вредност за  $\eta$  је фиксирана на 190.

Криве којима су представљани приноси јона  $Ar^+$  када је  $Z = 1$  користећи брзине прелаза без корекција (пуна линија) и брзине прелаза са корекцијама за ненулни почетни импулс избаченог електрона (испрекидана линија) и пондеромоторни потенцијал (линија црта-тачка) дате су на слици 3.20.(а). Може се запазити да је приноси јона који се рачуна преко кориговане формуле мањи у поређењу са приносом који је рачунат користећи основну формулу за брзину прелаза. Овакво понашање је још уочљивије када долази до двоструке јонизације  $Ar^{++}$ , када је  $Z = 2$  и у потпуности је у складу са понашањем одговарајућих брзина прелаза.

За циркуларно поларизовано ласерско поље приноси су приказани на **слици 3.21**. Резултати су дати упоредо без и са корекцијама.



**Слика 3.21.** Принос јона,  $Y_{cir}^{ADK}$ ,  $Y_{cir,p}^{ADK}$  и  $Y_{cir,p,Up}^{ADK}$  у зависности од интензитета поља,  $I$ , за (а)  $Z = 1$ , (б)  $Z = 2$ . Вредност за  $\eta$  је фиксирана на 270.

Са **слике 3.21.(а)** и **3.21.(б)** можемо видети да у циркуларно поларизованом пољу утицај додатних корекција је уочљивији. Очигледно да је у циркуларно поларизованом пољу кретање електрона које као последицу има пондеромоторни потенцијал постаје посебно интересантан.

Брзина прелаза је величина која се најчешће рачуна аналитички, док је принос јона обично величина која се мери експериментално. Поредили смо наше аналитичке резултате са онима добијеним експериментално. На **слици 3.20** је показано да принос јона у линеарно поларизованом пољу и као главни закључак нашег истраживања се може сажети у следеће: линија која представља принос јона користећи формуле без икаквих корекција се на вишим интензитетима поља не поклапа са експерименталним резултатима, али се приноси  $Y_{cir,p}^{ADK}$  и  $Y_{cir,p,Up}^{ADK}$  подударају веома добро [80].

Такође смо учили слагања и са другим експерименталним резултатима [81], [82]. Експерименталних резултата за случају циркуларно поларизованог поља је мање. За нас је било интересантно поређење са резултатима датим у раду Корнева (Kornev) [83]. У овом раду је лако уочити карактеристичне облике графика који представљају принос јона и који су веома слични онима који смо ми добили користећи формуле са укљученим корекцијама (**слика 3.21**).



### 3.7. Утицај пондеромоторног потенцијала и ненултoг почетног импулса избаченог електрона на брзину прелаза у мултифотонској јонизацији

Келдиш је дефинисао параметар  $\gamma$  у сврху разграничавања различитих механизма јонизације. Када је  $\gamma \ll 1$  долази до тунелне а када је  $\gamma \gg 1$  мултифотонске јонизације. Треба нагласити да у експериментима овако оштра подела механизма којима долази до процеса јонизације атома и молекула не постоји и да су за  $\gamma \approx 1$  заступљена оба механизма јонизације.

Имајући ово у виду проширили смо истраживања и на област мултифотонске јонизације. Теоријски смо истраживали брзину прелаза и генерализовани ефикасни пресек атома у случају мултифотонског јонизационог процеса у линеарно поларизованом ласерском пољу [84] са посебним освртом на утицај пондеромоторног потенцијала и ненултoг почетног импулса избаченог електрона на поменуте физичке величине. Такође је било интересантно видети како број апсорбованих фотона утиче на брзину прелаза за тачно одређене интензитете ласерског поља.

До мултифотонске јонизације долази у јаком ласерском пољу када енергија једног фотона,  $h\nu$ , није довољна да савлада енергију везе валентног електрона. Валентни електрон ће напустити атом само ако је укупна апсорбована енергија већег броја фотона довољна да савлада енергију везе. Процес мултифотонске јонизације се може добро описати брзином прелаза електрона из везаног стања у континуум. У оквиру пертурбационе теорије, а базирано на АДК теорији [47], брзина прелаза у линеарно поларизованом ласерском пољу је [85]:

$$W \sim \left( \frac{F^2 e}{8\omega^2 E_i} \right)^{E_i/\omega} \quad (3.57)$$

Једначином (3.57) дата је брзина прелаза за случај када су пондеромоторни потенцијал и почетни импулс електрона једнаки нули. У циљу добијања прецизнијих резултата при одређивању брзине прелаза било је неопходно побољшати ову формулу.

У првом кораку смо анализирали утицај пондеромоторног потенцијала на брзину прелаза. Пондеромоторни потенцијал се може дефинисати као временски усредњена кинетичка енергија осциловања слободног електрона у ласерском пољу. Постојање пондеромоторног потенцијала проузрокује повећање јонизационог потенцијала тако да је потребан већи број

фотона или јаче ласерско поље да би дошло до јонизације. Када се у једначину (3.57) укључи пондеромоторни потенцијал  $U_p = F^2/4\omega^2$  она постаје:

$$W_{U_p} \sim \left( \frac{F^2 e}{8\omega^2 \left( E_i + \frac{F^2}{4\omega^2} \right)} \right)^{\frac{E_i + \frac{F^2}{4\omega^2}}{\omega}} \quad (3.58)$$

где  $W_{U_p}$  представља брзину прелаза са укљученом понеромоторним потенцијалом.

Затим смо разматрали утицај ненултог почетног импулса избаченог електрона на брзину прелаза. У раду [86] изведен је израз за брзину прелаза  $W_p$ , у коју је укључен ненулти импулс избаченог електрона

$$W_p \sim \left( \frac{F^2 e}{4\omega^2 p^2} \right)^{p^2/2\omega} \quad (3.59)$$

Да би генерализовали израз потребно је било изразити импулс преко параметара које лако можемо израчунати, као што су  $\omega$ ,  $E_i$  и  $F$ . Да бисмо то урадили кренули смо од закона одржања енергије:

$$K\omega = E_i + U_p + E_k \quad (3.60)$$

где је  $E_k$  кинетичка енергија избаченог електрона док је  $K$  број апсорбованих фотона.

Када до мултифотонске јонизације дође енергија апсорбованих фотона се дели на енергију неопходну да се електрон ослободи и кинетичку енергију коју електрон након јонизације носи са собом [54].

Број апсорбованих фотона  $K$  се рачуна преко формуле:

$$K = \left\langle \frac{E_i}{\omega} + 1 \right\rangle \quad (3.61)$$

где заграде  $\langle \dots \rangle$  значе целобројна вредност дате величине. Из једначине (3.60) импулс се може изразити на следећи начин:

$$p = \sqrt{2 \left( K\omega - E_i - \frac{F^2}{4\omega^2} \right)} \quad (3.62)$$

Побољшани облик формуле за мултифотонску јонизацију добија се комбиновањем једначина (3.59) и (3.62):

$$W_p \sim \left( \frac{F^2 e}{8\omega^2 \left( K\omega - E_i - \frac{F^2}{4\omega^2} \right)} \right)^{\left( K\omega - E_i - \frac{F^2}{4\omega^2} \right)/\omega} \quad (3.63)$$

Мултифотонски јонизациони процес такође може бити описан генерализованим ефикасним пресеком.

Ако је густина електрона довољно велика, ефикасни пресек симултане апсорпције више од једног фотона се не може занемарити. Поред нумеричких рачунања мултифотонски ефикасни пресек је интересантно аналитички израчунати применом квазикласичне апроксимације, коју је могуће применити за високо побуђена стања атома искључиво када је главни квантни број  $n \gg 1$ .

Амосов је у раду [87] дао формулу за ефикасни пресек при мултифотонској јонизацији узимајући у обзир услов да је  $K \gg 1$ .

Генерализовани ефикасни пресек  $K$  фотонске јонизације када је главни квантни број  $n \gg 1$  у атомским јединицама има облик

$$\sigma_n^{(K)} = \frac{T_K}{cK!^2 n^5 \omega^{(10K-1)/3}} F^{2K-2} \quad (3.64)$$

где су  $F$  и  $\omega$  јачина и фреквенција ласерског поља,  $n$  главни квантни број. Величина  $T_K$  се дефинише на следећи начин:

$$T_K = \frac{4.80 \cdot (1.30)^{2K}}{(2K+1)\sqrt{K}} \quad (3.65)$$

у случају линеарно поларизованог ласерског поља. У случају циркуларно поларизованог поља израз гласи:

$$T_K = \frac{7.52 \cdot (1.41)^{2K}}{(2K+1)\sqrt{K}} \quad (3.66)$$

Поређењем резултата које даје формула (3.64) и аналитичких и експерименталних резултата датих у [87] уочено је да формула (3.64) за рачунање ефикасног пресека даје добре резултате и за мале вредности  $K$  и мале вредности  $n$ . Као и да даје сасвим коректан ред величине за ефикасни пресек који се рачуна за случај мултифотонске јонизације атома водоника, алкалних атома и атома који имају већи број електрона у валентној љусци. Ова формула се такође користи за рачунање, чешће коришћеног, генерализованог ефикасног пресека.

За наш рад је битна веза између брзине прелаза у мултифотонској јонизацији и генерализованог ефикасног пресека:

$$W_K = \sigma_K I^K \quad (3.67)$$

где је  $\sigma_K$  је  $K$  фотонски генерализовани јонизациони ефикасни пресек а  $I$  интензитет ласерског поља. Једначина (3.67) представља основну везу између брзине прелаза и генерализованог ефикасног пресека дату преко интензитета спољашњег поља. Делоне и Крајнов су интензитет спољашњег поља изразили преко његове јачине и добили израз за генерализовани ефикасни пресек [88] у облику:

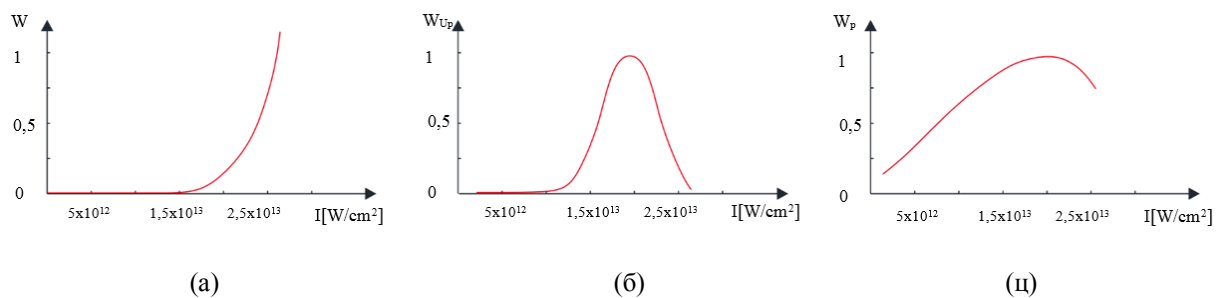
$$\sigma_K = \frac{8\pi\omega W_K}{cF^2} \quad (3.68)$$

На основу једначине (3.68) се могу посматрати три случаја генерализованог ефикасног пресека који су изражени преко брзина прелаза датих у једначинама (3.57), (3.58) и (3.63) респективно  $\sigma = \frac{8\pi\omega W}{cF^2}$ ,  $\sigma_{U_p} = \frac{8\pi\omega W_{U_p}}{cF^2}$  и  $\sigma_p = \frac{8\pi\omega W_p}{cF^2}$ , где је  $\sigma$  генерализовани ефикасни пресек без укључених корекција,  $\sigma_{U_p}$  генерализовани ефикасни пресек када је узет у обзир пондеромоторни потенцијал и  $\sigma_p$  генерализовани ефикасни пресек када се сматра да је почетни импулс електрона различит од нуле.

Посматрали смо на који начин брзина прелаза и генерализовани ефикасни пресек зависе од интензитета ласерског поља и на који начин пондеромоторни потенцијал и почетни импулс електрона утичу на ове две величине. Анализе су вршене за атоме аргона (Ar).

Енергија јонизације првог електрона атома аргона је  $E_i^{Ar} = 15,76$  eV односно у атомским јединицама  $E_i^{Ar} = 0,5791$ . Атоми су јонизовани ласерским зраком таласне дужине  $\lambda = 800$  nm чија је кружна фреквенца у атомским јединицама једнака  $\omega = 0,05696$ .

Ласерско поље је линеарно поларизовано и посматрани опсег интензитета ласерског поља је између  $5 \times 10^{11}$  W/cm<sup>2</sup> -  $3 \times 10^{13}$  W/cm<sup>2</sup>. За  $K$  је узета тачно одређена вредност тј. минимални број фотона који је потребан да би дошло до јонизације. У нашем случају је  $K = 11$ .

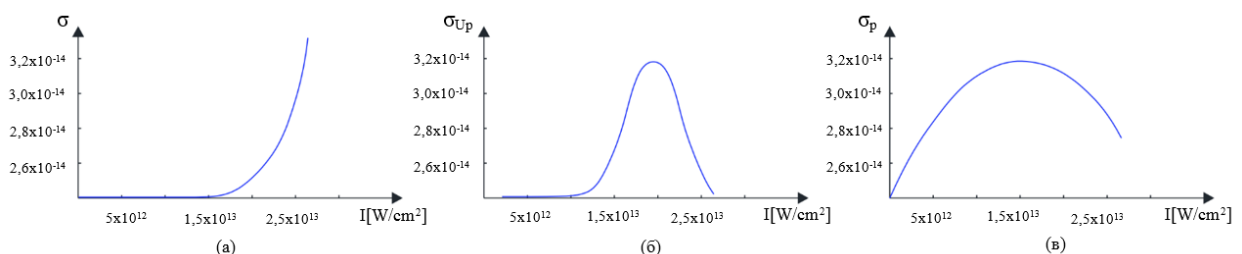


Слика 3.22. Брзина прелаза (а)  $W$ , (б)  $W_{U_p}$ , (ц)  $W_p$  у функцији интензитета ласерског поља  $I$ .

На слици 3.22.(а) смо приказали понашање брзине прелаза без икаквих корекција (јед. (3.57)) у функцији интензитета ласерског поља. Посматрајући график може се запазити да крива нема очекивани облик Гаусове расподеле [89] и да је узрок томе управо занемаривање неких физичких величина при рачунању брзина прелаза. Већ при првој корекцији, укључивањем пондеромоторног потенцијала у брзину прелаза (јед. (3.58)) добија се график (слика 3.22.(б)). Запажа се да ова крива има форму Гаусијана. Брзина прелаза расте са порастом интензитета спољашњег поља до неке максималне вредности а затим опада са даљим порастом интензитета поља. Брзина прелаза достиже максималну вредност за интензитет поља  $I = 1,9 \times 10^{13} \text{ W/cm}^2$ . На слици 3.22.(ц) приказана је брзина прелаза у коју је укључен и пондеромоторни потенцијал и ненулни импулс избаченог електрона (јед. (3.63)) у зависности од интензитета ласерског поља. У овом случају максимална вредност брзине прелаза је за  $I = 1,95 \times 10^{13} \text{ W/cm}^2$ .

Ако упоредимо интензитете поља на којима долази до максималне брзине прелаза када је укључен само пондеромоторни потенцијал и када је у брзину прелаза укључен и ненулни почетни импулс избаченог електрона уочавамо да је у другом случају максимум померен у десно тј. ка вишим интензитетима спољашњег поља. До овог помераја долази зато што се део енергије ласерског поља користи за савладавање пондеромоторног потенцијала и повећање почетног импулса избаченог електрона остављајући мањи део енергије спољашњег поља за даљу јонизацију преосталих електрона.

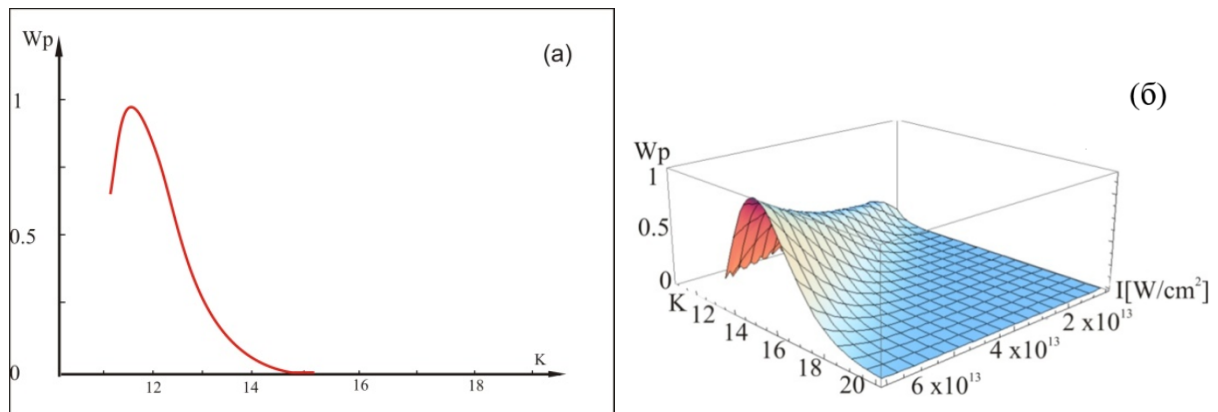
Кратко ћемо се осврнути и на понашање генерализованог ефикасног пресека. Разматрани су случајеви када пондеромоторни потенцијал и почетни импулс електрона нису узети у обзир при рачунању генерализованог ефикасног пресека и случај када су јесу (слика 3.23.).



Слика 3.23. Генерализовани ефикасни пресеци: (а)  $\sigma$  без корекција-рачунато преко  $W$ , (б)  $\sigma_{Up}$  са укљученим пондеромоторним потенцијалом- рачунато преко  $W_{Up}$ , (в)  $\sigma_p$  са корекцијом за ненулни почетни импулс електрона- рачунато преко  $W_p$ .

Са **слике 3.23.** се види да је понашање генерализованог ефикасног пресека у потпуности у складу са понашањем брзине прелаза под истим условима.

Интересантно је било видети и како број апсорбованих фотона утиче на брзину прелаза (**слика 3.24.(а)**) и како се брзина прелаза мења у функцији броја апсорбованих фотона и интензитета ласерског поља (**слика 3.24.(б)**).



**Слика 3.24.** Зависност брзине прелаза од (а) броја апсорбованих фотона за фиксирану вредност интензитета ласерског поља  $I = 2 \times 10^{13} W/cm^2$ , (б) броја апсорбованих фотона и интензитета ласерског поља.

На **слици 3.24.(а)** се јасно уочава да је брзина прелаза једнака нули када је број апсорбованих фотона мањи од 11, што је минимално потребан број фотона да би дошло до јонизације (јед. 3.61) електрона из валентне љуске атома Ag. Када број апсорбованих фотона расте расте и брзина прелаза све до неке максималне вредности, након чега опада асимптотски се приближавајући нули и задржавајући константну вредност. **Слика 3.24.(б)** показује да брзина прелаза и број апсорбованих фотона расте са порастом интензитета ласерског поља.

Укључивањем додатних величина при рачунању брзине прелаза добијају се прецизнији резултати, који су нам битни јер су брзина прелаза и принос јона директно пропорционални (види Поглавље 1). Чињеница да је принос јона чешће мерен у експериментима проучавањем брзине прелаза добијамо корисне информације које можемо употребити при анализи експерименталних резултата [90].

### 3.8. Енергија коју има највећи број фотоелектрона при јонизацији атома калијума и ксенона

У циљу детаљнијег проучавања процеса тунелне јонизације атома у јаком ласерском пољу желели смо да израчунамо на којој енергији је примећен максималан број фотоелектрона. Истичемо да смо анализирали резултате добијене у случају када је јачина спољашњег поља мала у поређењу са атомском јачином поља и у другом случају када је јачина ласерског поља реда атомске јачине поља.

У јаком ласерском пољу, потенцијална баријера атома је значајно деформисана. Како интензитет поља расте, дужина баријере кроз коју електрон треба да тунелује се смањује и електрон лакше напушта атом. Дужина баријере се може израчунати помоћу следећег израза:

$$R = \frac{E_i}{eF} \quad (3.69)$$

где је  $e$  наелектрисање атома које је у атомским јединицама једнако  $e = 1$ .

Линеарно поларизовано поље			Циркуларно поларизовано поље		
$I[\text{W}/\text{cm}^2]$	$F[\text{a.j.}]$	$R[\text{a.j.}]$	$I[\text{W}/\text{cm}^2]$	$F[\text{a.j.}]$	$R[\text{a.j.}]$
$10^{12}$	0,005392	29,5826	$10^{12}$	0,003725	42,817
$10^{13}$	0,017051	9,3548	$10^{13}$	0,011781	13,5399
$10^{14}$	0,053921	2,9582	$10^{14}$	0,037254	4,2817
$10^{15}$	0,170515	0,9354	$10^{15}$	0,11781	1,3539
$10^{16}$	0,539216	0,2958	$10^{16}$	0,372549	0,4281
$10^{17}$	1,70515	0,0935	$10^{17}$	1,1781	0,1353

**Табела 2.** Дужина баријере кроз коју електрон тунелује у зависности од интензитета поља

Анатитички изрази за енергетску и угаону расподелу електрона у јаком нискофреквентном ласерском пољу дате су у [56], [57], [91], [92], [93]. Конкретно, енергетски спектар електрона атома и јона ксенона (Xe) и калијума (K) при тунелној јонизацији до које је дошло у пољу  $\text{CO}_2$  ласера је проучавано експериментално и теоријски [94] и показано је да се резултати веома добро уклапају са предвиђањима АДК теорије [95].

Да бисмо добијени резултат упоредили са експерименталним израчунали смо теоријски очекиване вредности енергије на којима би био уочен максималан број јонизованих електрона.

Анализу почињемо представљањем Гаусове временско - просторне расподеле ласерског зрачења:

$$F(\rho, t) = F e^{-\frac{\rho^2}{2R^2} - \frac{t^2}{2t_1^2}} \quad (3.70)$$

где  $\rho$  представља аксијалну цилиндричну координату (у правцу нормалном на правац простирања таласа),  $R$  је радијус ласерског снопа,  $t$  време у коме се долази до избацивања електрона,  $t_1$  је трајање ласерског пулса и  $F$  је јачина ласерског поља.

Израз за брзину прелаза атома и позитивних јона који ће бити коришћен у овом истраживању је једна од модификација основног израза добијеног у [47], [48] је:

$$W_{ADK}^p = \left(\frac{3e}{\pi}\right)^{3/2} \frac{Z^2}{n^{*9/2}} \left(\frac{16eE_i^2}{FZ}\right)^{2n^*-3/2} \times e^{-\frac{2(2E_i)^{3/2}}{3F} - \frac{\gamma^3}{3\omega} p^2} \quad (3.71)$$

где је  $F$  јачина ласерског поља,  $n^*$  ефективни квантни број,  $Z$  степен јонизације,  $E_i$  енергија јонизације,  $p$  почетни импулс избаченог електрона и  $e = 2.71828$  [96].

Укључивањем једначине (3.70) у (3.71) добија се:

$$W_{ADK}^{pGauss} = \left(\frac{3e}{\pi}\right)^{3/2} \frac{Z^2}{n^{*9/2}} \left(\frac{16eE_i^2}{FZ}\right)^{2n^*-3/2} \times e^{-\frac{2(2E_i)^{3/2}}{3F}} \times e^{\left[\frac{2n^*-3/2}{2} - \frac{(2E_i)^{3/2}}{3F}\right] \left(\frac{\rho^2}{R^2} + \frac{t^2}{t_1^2}\right) - \frac{\gamma^3}{3\omega} p^2} \quad (3.72)$$

Узимајући у обзир једначину (3.71) и чињеницу да се први члан може занемарити зато што је  $(2n^* - 3/2)/2 \ll (2E_i)^{3/2}/3F$ , следи да је:

$$W_{ADK}^{pGauss} = W_{ADK} e^{-\frac{(2E_i)^{3/2}}{3F} \left(\frac{\rho^2}{R^2} + \frac{t^2}{t_1^2}\right) - \frac{\gamma^3}{3\omega} p^2} \quad (3.73)$$

Ако су ефекти сатурације при јонизацији укључени [48], [96], тада радијус фокуса ласерског снопа  $\rho$  може бити дефинисан са високим степеном тачности из услова:

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_{ADK}^{pGauss}(\rho) dt = 1 \quad (3.74)$$

После замене једначине (3.73) у једначину (3.74) добија се:

$$W_{ADK} e^{-\frac{(2E_i)^{3/2}}{3F} \frac{\rho^2}{R^2} - \frac{\gamma^3}{3\omega} p^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(2E_i)^{3/2}}{3F} \frac{t^2}{t_1^2}} dt = 1 \quad (3.75)$$



У оквиру једначине (3.75) је специјална врста интеграла, Поасонов интеграл (Poisson's integral) чије се решење може наћи у облику  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta x^2} dx = \sqrt{\pi/\beta}$ . Тако да након интеграљења једначине (3.75) следи:

$$W_{ADK} e^{-\frac{(2E_i)^{3/2}}{3F} \frac{\rho^2}{R^2} - \frac{\gamma^3}{3\omega} p^2} \sqrt{\pi \frac{3F t_1^2}{(2E_i)^{3/2}}} = 1 \quad (3.76)$$

Из једначине (3.76) се може добити вредност за  $\rho$  која представља област где долази до сатурације јонизације: унутар области сви атоми су јонизовани, док ван области ниједан атом није јонизован:

$$\rho^2 = \frac{3FR^2}{(2E_i)^{3/2}} \left[ \ln \left( W_{ADK} t_1 \sqrt{\pi \frac{3F}{(2E_i)^{3/2}}} \right) - \frac{\gamma^3}{3\omega} p^2 \right] \quad (3.77)$$

Формула за коначну енергију избаченог електрона се може поједноставити ако се узме у обзир услов  $t \sim t_1 \sqrt{3F/(2E_i)^{3/2}} \ll t_1$

$$E = \frac{p^2}{2} + \frac{F^2}{4\omega^2} e^{-\frac{\rho^2}{R^2}} \quad (3.78)$$

Након смене (3.77) у (3.78) добија се израз за коначну енергију избаченог електрона:

$$E_{max} = \frac{p^2}{2} + \frac{F^2}{4\omega^2} \left( W_{ADK} t_1 \sqrt{\pi \frac{3F}{(2E_i)^{3/2}}} \right)^{-\frac{3F}{(2E_i)^{3/2}}} e^{-\frac{\gamma^3 p^2 F}{\omega (2E_i)^{3/2}}} \quad (3.79)$$

У данашњим експериментима може се постићи да јачина ласерског поља буде реда атомске јачине поља чак и виша, тако да је испитивање формуле (3.79) у овим условима да би се стекао увид у области тунелне јонизације веома битан.

Када је јачина ласерског поља једнака атомској јачини поља  $F = F_{at}$ , формула за брзину прелаза дата једначином (3.71) је апроксимирана у складу са условом  $2(2E_i)^{3/2}/3F = 1$ , формулом

$$W_{ADK}^{sf} = \left( \frac{3e}{\pi} \right)^{3/2} \frac{Z^2}{n^{*9/2}} \left( \frac{16eE_i^2}{FZ} \right)^{2n^*-3/2} \times e^{-1} \quad (3.80)$$

Треба нагласити да у атомском систему јединица, јачина атомског поља је једнака јединици  $F_{at} = 1$  а.ј., што ће бити искоришћено при цртању графика.

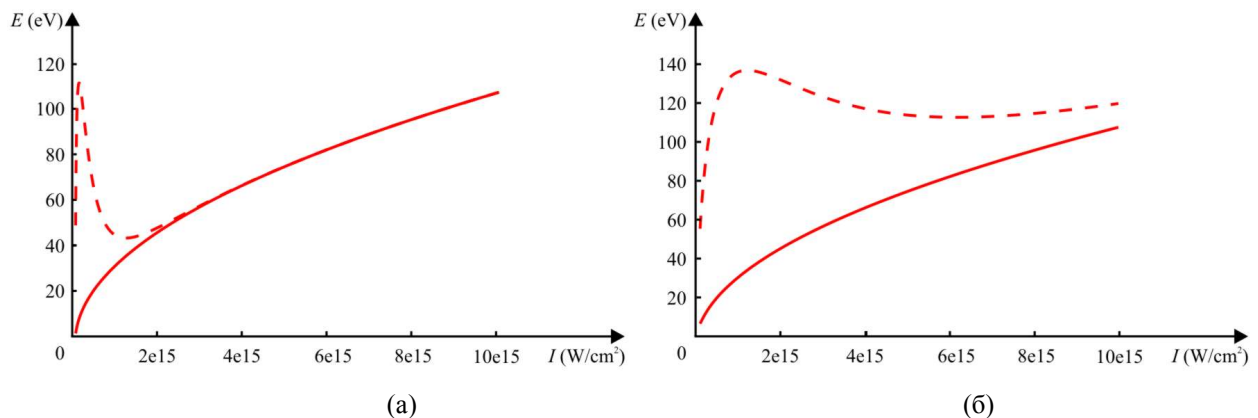
Формула за енергију на којој је добијен максималан број електрона аналогно једначини (3.79) постаје

$$E_{maxApp} = \frac{p^2}{2} + \frac{F^2}{4\omega^2} \left( W_{ADK}^{sf} t_1 \sqrt{\pi \frac{3F}{F_{at}}} \right)^{-\frac{2F}{F_{at}}} e^{-\frac{2\gamma^3 p^2 F}{3\omega F_{at}}} \quad (3.81)$$

Предмет нашег истраживања је било добити аналитичке резултате користећи формуле (3.79) и (3.81) и проценити која даје боље слагање са експерименталним резултатима при тунелној јонизацији атома калијума (К) и ксенона (Хе).

Анализирани су случајеви када су примењена ласерска поља средњег и високог интензитета у опсегу  $10^{13} \text{ W/cm}^2 - 10^{16} \text{ W/cm}^2$  [96] чија је фреквенца  $\omega = 0,004298$  у атомским јединицама. Док је  $t_1$  трајање ласерског пулса,  $t_1 = 2 \cdot 10^{-9} \text{ s}$  односно у атомским јединицама  $t_1 = 82\,628\,211$ . Енергије јонизације атома калијума (К) и атома ксенона (Хе) су  $E_i^K = 4,3407 \text{ eV}$ ,  $E_i^{Xe} = 12,5 \text{ eV}$  респективно.

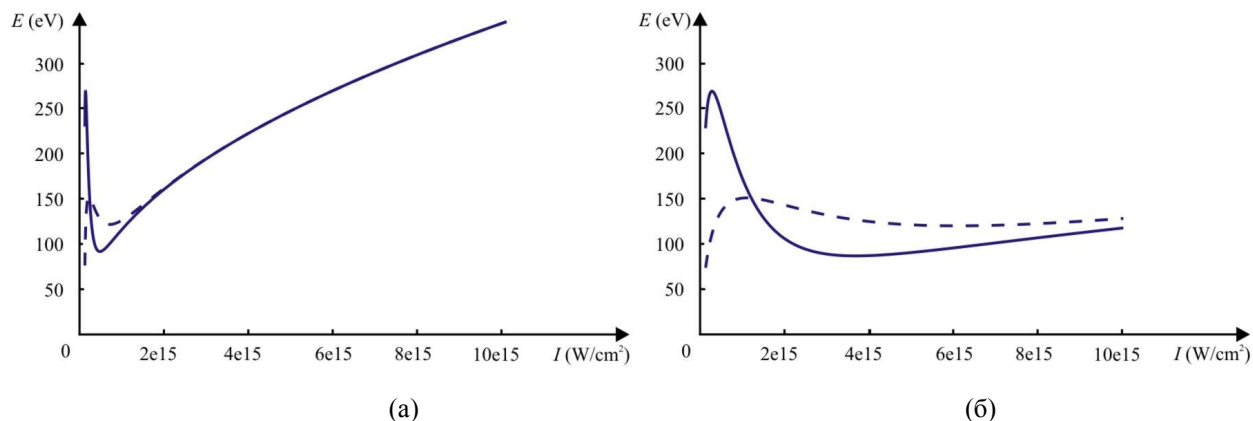
Зависност енергије максималног броја избачених електрона од интензитета ласерског поља дата је на слици 3.25. и 3.26. График на слици 3.25.(а) је цртан за атом калијума (К), када је  $Z = 1$  и вредност координате  $\eta$  фиксирана на  $\eta = 60$ , док је на слици 3.25.(б) нацртан график када је координате  $\eta$  фиксирана на  $\eta = 190$ . Графици на слици 3.26.(а) цртани су за атом ксенона (Хе) када је  $Z = 1$ , и вредност координате  $\eta$  фиксирана на  $\eta = 20$ , док је на слици 3.26.(б)  $\eta = 200$ .



**Слика 3.25.**  $E_{max}$  и  $E_{maxApp}$  максималног броја избачених електрона атома калијума:  $E_i^K = 4.3407 \text{ eV}$ ; пуна линија представља  $E_{max}$ , док испрекидана линија представља  $E_{maxApp}$  (а) за фиксирану вредност параболичне координате  $\eta = 60$  и (б) када је  $\eta = 190$

У случају атома калијума (К) поређењем резултата добијених за  $E_{max}$  са резултатима добијених преко формуле за  $E_{maxApp}$  уочава се добро слагање само на интензитетима ласерског поља  $10^{15} \text{ W/cm}^2 - 10^{16} \text{ W/cm}^2$ . Идентична вредност енергија се јавља на интензитету  $5 \times 10^{15} \text{ W/cm}^2$  (слика 3.25.). У случају атома ксенона (Хе) примењено је добро слагање такође у интервалу интензитета ласерског поља

$10^{15} \text{ W/cm}^2 - 10^{16} \text{ W/cm}^2$ , док се идентична вредност ових енергија јавља на интензитету  $10^{15} \text{ W/cm}^2$  (слика 3.26.).



**Слика 3.26.**  $E_{max}$  и  $E_{maxApp}$  максималног броја избачених електрона атома ксенона:  $E_i^{Xe} = 12.5 \text{ eV}$ ; пуна линија представља  $E_{max}$ , док испрекидана линија представља  $E_{maxApp}$  (а) за фиксирану вредност параболне координате  $\eta = 20$  и (б) када је  $\eta = 200$

Анализом резултата добијених у нашем истраживању и експерименталних резултата може се закључити да формула за  $E_{max}$  даје веома добро слагање у случају оба атома. У случају атома калијума (К) вредност за  $E_{max}$  се добро слаже са резултатима добијеним у [57], и за интензитет поља  $4 \times 10^{12} \text{ W/cm}^2$  њена вредност је  $E_{max}^K = 9,046 \text{ eV}$ .

У случају атома ксенона (Хе) добијене резултате смо поредили са резултатима у [57] у области високих енергија (200 eV и вишој) и закључили да се вредности кинетичких енергија избачених електрона добро слажу са експериментално добијеним вредностима у интервалу енергија  $E_{max}^{Xe} = 220 - 270 \text{ eV}$ . Међутим, код атома ксенона (Хе) не долази до потпуног слагања добијених (аналитичких) и експерименталних резултата, тј. енергија коју има максималан број јонизованих електрона се јавља на различитим интензитетима поља. Аналитички је добијено да је то за интензитет поља  $5 \times 10^{13} \text{ W/cm}^2$ , док је експериментално [57] овај број детектован при интензитету  $7,5 \times 10^{13} \text{ W/cm}^2$ .

### 3.9. Планови за будући рад - јонизациона комора

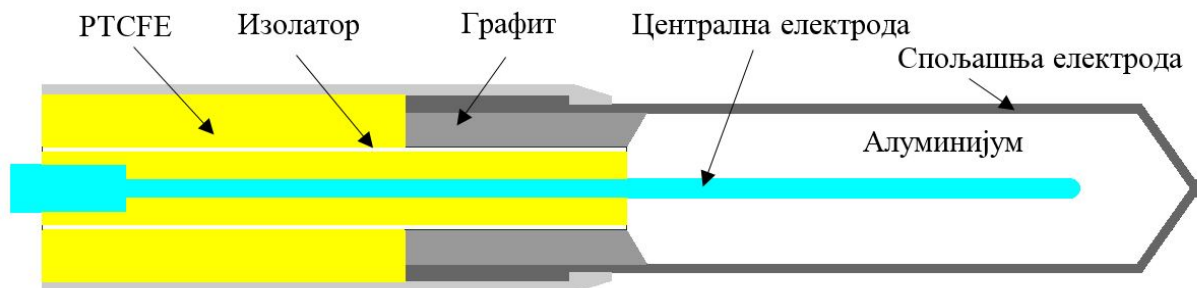
Јонизационе коморе се користе у радиотерапији и дијагностичкој радиологији за одређивање радијационе дозе. Јонизационе коморе су различитог облика и величине, у зависности од специфичних захтева, међутим све имају следеће особине:

- Јонизациона комора је гасом испуњена шупљина која је окружена проводним спољашњим зидом са централном електродом. Између зида и електроде налази се висококвалитетни изолатор како би се смањило цурење струје при примени поларизујућег напона.
- Заштитна електрода служи да смањи цурење коморе и прекида струју цурења и уземљује је. Такође обезбеђује побољшање униформност поља у активном или сензитивном волумену коморе.
- Мерење са отвореним типом коморе захтевају корекцију на температуру и притисак, како би се узеле у обзир промене у маси ваздуха у волумену коморе.

Јонизациона комора се састоји од три електроде, које дефинишу сензитивност волумена ваздуха:

1. Поларизујуће електроде, директно повезане са напајањем.
2. Мерне електроде, која мери наелектрисање или струју у сензитивном волумену коморе.
3. Заштитне електроде, која дефинише волумен коморе и спречава мерење струје цурења коморе.

Најчешће се користи цилиндрична комора **слика 3.27.**



Слика 3.27. Цилиндрична јонизациона комора

Ваздух се обично користи као сензитивни гас унутар јонизационе коморе. Иницијални догађај је интеракција индиректно јонизованог зрачења са зидом коморе фотоелектричним, Комптоновим или ефектом производње парова. Неки од насталих електрона стижу до сензитивног волумена коморе и јонизују молекуле ваздуха, стварајући позитивне јоне и ниско енергетске електроне унутар волумена коморе. Ниско енергетски електрони интерагују са неутралним молекулима кисеоника у ваздуху, формирајући негативне јоне.

Јонизациона комора је у суштини кондензатор у коме су струја или наелектрисање индуковани дејством зрачног снопа. Величина струје или напона је јако мала и мора се мерити јако прецизним инструментима као што је електрометар. Електрометри мере струју реда величине  $10^{-9}\text{A}$  или скупљено наелектрисање током одређеног временског интервала.

Наш план је да на основу информација о зрачењу које доводи до јонизације у сензитивном волумену коморе и измереној количини наелектрисања на електрометру проценимо шта се дешава у комори. Желимо да видимо до којих механизма јонизације долази, који од механизма је доминантан, када ће принос позитивних јона и ниско енергетских електрона бити већи. У сензитивном волумену коморе је ваздух, за који знамо да је смеша гасова од којих су нек у врло променљивом саставу: азота (N) има 78,08%, кисеоника (O) 20,95%, аргона (Ar) 0,93%, и у врло малим количинама криптона (Kr), ксенона (Xe), хелијума (He), неона (Ne). Анализираћемо да ли повећањем концентрације неког од ових елемената долази до повећања приноса јона или електрона. Све ово захтева рад коме ћемо се посветити у наредном периоду.

## Закључак

Најважнији процес до кога долази при интеракцији ласера са материјом је јонизација атомских и молекулских система. У случају ових јонизационих процеса неопходно је потпуно познавати структуру атома, разумети таласно честичну природу светлости и особине ласера. Сажет приказ могућих интеракција фотона са атомом и кратак осврт на развој ласерске технологије, као и основне карактеристике ласерског снопа дати су у Поглављу 1. Откриће ласера омогућило је да густина флукса фотона буде довољно велика тако да постоји велика вероватноћа да атом апсорбује два или више фотона. Јонизациони процес који се може објаснити апсорпцијом већег броја фотона назива се процес вишефотонске јонизације. Примери за ову врсту јонизације су мултифотонска и јонизација изнад прага. Ови типови јонизације као и јонизација потискавањем баријере и тунелна јонизација представљени су у Поглављу 1.

Тунелна јонизација је процес у којој електрон тунелује кроз потенцијалну баријеру и за описивање овог процеса коришћен је модел квазикласичне апроксимације, у којој се атом третира као квантни објекат док се електромагнетно поље третира класично (Поглавље 1). Келдиш је први дао теоријски оквир заснован на овом приступу. Његову теорију су проширили Переломов, Попов и Терент`ев који су извели формулу за брзину прелаза атома водоника у јаком ласерском пољу из основног стања у јонизовано. Шири домен примене ове формуле дали су Амосов, Делоне и Крајнов, који је унапређују што доводи до настанка АДК теорије. Брзина прелаза се такође може добити и решавањем временски зависне Шредингерове једначине и применом Ландау-Дихне адијабатске апроксимације. При извођењу брзине прелаза анализирана су два случаја, када је вредност почетног импулса избаченог електрона једнака нули и различита од нуле (Поглавље 2.).

У Поглављу 3 је дата теоријска анализа тунелне јонизације атома и атомских јона у нискофреквентном ласерском пољу. Проучавана је брзина прелаза, принос једноструко и вишеструко јонизованих атома, ефикасни пресек и енергетска расподела фотоелектрона. Такође, разматран је утицај поларизације ласерског поља на поменуте величине. Резултати истраживања су представљени применом АДК теорије.

Истраживање је започето анализом Келдишовог параметра  $\gamma$ , која је довела до закључка да су за случај  $\gamma \approx 1$  заступљена оба механизма јонизације, и тунелни и мултифотонски. У овом раду вредност параметара  $\gamma$  је бирана у складу са добијеним резултатима. Важну улогу при проучавању тунелне јонизације има и поларизација

ласерског поља, тако да је истраживање базирано на посматрању процеса у линеарно и циркуларно поларизованом ласерском пољу.

Овај рад је базиран на проучавању утицаја ненулног почетног импулса избаченог валентног електрона атома калијума (K),  $Z = 1$ , на брзину прелаза. Закључено је да се на почетку деловања ласера сва енергија ласерског пулса користи за тунеловање електрона и брзина прелаза је велика док је вредност почетног импулса електрона мала. Након тога, даљим деловањем ласерског поља вероватноћа јонизације опада зато што се део енергије ласерског пулса користи за повећање импулса избаченог електрона, остављајући на располагању мање количине енергије за јонизацију преосталих електрона. Ако ласерски пулс траје довољно дуго, тада укупна енергија, коју носе фотони постаје већа што доводи до повећања вероватноће јонизације осталих електрона. Уочава се да брзина прелаза има константну вредност када се сматра да је почетни импулс избаченог електрона једнак нули, али се такође уочава да са порастом почетног импулса електрона брзина прелаза опада. Исти резултати су добијени рачунањем брзине прелаза у линеарно и циркуларно поларизованом пољу.

Посматрано је понашање брзине прелаза и електрона који се налазе у првој, попуњеној љусци, када је  $Z = 2, 3, 4, 5$ . Уочена је приметна разлика између брзине прелаза другог електрона,  $Z = 2$ , када је почетни импулс електрона једнак нули и када је почетни импулс различит од нуле. За  $Z = 3$ ,  $Z = 4$  и  $Z = 5$  разлика између ових брзина прелаза је мања него за  $Z = 2$ . То се може објаснити чињеницом да енергија јонизације другог електрона има већу вредност од енергије јонизације валентног електрона, а мању вредност у поређењу са енергијама јонизације електрона који се налазе ближе језгру, електрона са вишим вредностима  $Z$ . Самим тим на истим интензитетима ласерског поља након савладавања енергије везе преостаје велики број фотона који могу бити искоришћени за повећање импулса. Закључак је да са порастом  $Z$  утицај импулса избаченог електрона на брзину прелаза опада зато што је неопходан већи број фотона да би се савладала енергија везе јона већих степена јонизације  $Z$ , тако да је преостао много мањи број фотона који може бити искоришћен на повећање импулса електрона.

Ради добијања потпуније слике истраживање је проширено на анализу брзине прелаза и принос јона при тунелној јонизацији атома племенитих гасова, односно на једноструку и двоструку тунелну јонизацију племенитих гасова који су изложени линеарно и циркуларно поларизованом ласерском пољу. Уочено је да постоји разлика између брзина прелаза без и брзине прелаза у чије су рачунање укључени ненулни почетни импулс

избаченог електрона и пондеромоторни потенцијал. За разлику су одговорне управо ове корекције.

Посматрајући понашање брзине прелаза без и са корекцијама  $Ar^+$  може се уочити да се максималне вредности не поклапају. Максималана вредност брзине прелаза са укљученим корекцијама је мања и померена ка вишим вредностима интензитета поља. Разлог оваквом понашању лежи у томе да се део енергије фотона „потроши“ на почетни импулс избаченог електрона и пондеромоторни потенцијал а не само на савладавање енергије јонизације, због тога је вероватноћа јонизације мања.

Слично понашање се може уочити и за  $Ar^{++}$ . Уочава се веома битна разлика која се огледа у чињеници да брзина прелаза има већу вредност и то на нижим интензитетима поља. Разлог томе лежи у чињеници да је јонизацијом првог електрона „нарушена“ стабилна електронска конфигурација затворене љуске тако да се други електрон „лакше“ јонизује из отворене љуске. Исти приступ је коришћен при анализи јонизације атома племенитог гаса у циркуларно поларизованом ласерском пољу.

Посматране су промене у вредностима приноса јона у зависности од интензитета ласерског поља. Запажено је да приноси јона који се рачуна користећи кориговане формуле мањи у поређењу са приносом који је рачунат користећи основну формулу за брзину прелаза. Овакво понашање је још уочљивије када долази до једноструке  $Ar^+$ , за  $Z = 1$ , и двоструке јонизације  $Ar^{++}$ , за  $Z = 2$ , и у потпуности је у складу са понашањем одговарајућих брзина прелаза. Можемо видети да је у циркуларно поларизованом пољу утицај додатних корекција уочљивији.

Сам почетак овог поглавља 3. посвећен је анализи параметра  $\gamma$ , и закључено је да су за случај  $\gamma \approx 1$  заступљена оба механизма јонизације. Имајући ово у виду проширена су истраживања и на област мултифотонске јонизације. Теоријски су анализирана брзина прелаза и генерализовани ефикасни пресек атома у случају мултифотонског јонизационог процеса у линеарно поларизованом ласерском пољу са посебним освртом на утицај пондеромоторног потенцијала и ненултoг почетног импулса избаченог електрона на поменуте физичке величине. Посматрајући понашање брзине прелаза без икаквих корекција може се запазити да крива нема очекивани облик Гаусове расподеле и да је узрок томе управо занемаривање неких физичких величина при рачунању брзина прелаза. Већ при првој корекцији, укључивањем пондеромоторног потенцијал у брзину прелаза запажа се да крива добија форму Гаусијана. Брзина прелаза расте са порастом интензитета спољашњег поља до неке максималне вредности а затим опада са даљим порастом



интензитета поља. Са укључивањем друге корекције, ненултг почетног импулса избаченог електрона облик Гаусове крива добија очекивани облик.

Интересантно је било видети и како број апсорбованих фотона утиче на брзину прелаза и како се брзина прелаза мења у функцији броја апсорбованих фотона и интензитета ласерског поља таласне дужине  $\lambda = 800 \text{ nm}$ . Јасно се уочава да је брзина прелаза једнака нули када је број апсорбованих фотона мањи од 11, што је минимално потребан број фотона да би дошло до јонизације електрона из валентне љуске атома Ag. Када број апсорбованих фотона расте расте и брзина прелаза све до неке максималне вредности, након чега опада асимптотски се приближавајући нули.

У циљу детаљнијег проучавања процеса тунелне јонизације атома у јаком ласерском пољу рачунато је на којој енергији је примећен максималан број фотоелектрона. Истичемо да су анализирани резултати добијени у случају када је јачина спољашњег поља мала у поређењу са атомском јачином поља и у другом случају када је јачина ласерског поља реда атомске јачине поља. Упоредном анализом резултата добијених у овом раду и експерименталних резултата може се закључити да: максималне вредности енергија избачених електрона применом слабих поља дају веома добро слагање и у случају атома калијума (K) и ксенона (Xe).

Како је проучавање јонизације атома и молекула у јаком електромагнетном пољу важно да би се разумели фундаментални процеси у атомској и молекулској физици добијени резултати могу бити веома интересантни за даља истраживања. Као извор јаких електромагнетних поља користе се ласери тако да ова истраживања могу наћи и практичну примену. У наредном периоду посебна пажња ће бити посвећена раду на проучавању јонизационих процеса у јонизационим коморама које се користе у радиотерапији. Средина у којој долази до јонизације у овој комори је ваздух тако да ћемо истраживања проширити и на јонизацију молекула. Експерименталне резултате је могуће објаснити коришћењем више теоријских модела. Да би примена била ефикаснија неопходно је развијати и проширити теоријски модел који ће узимати у обзир параметре који до сада нису разматрани и који може бити коришћен за анализу експерименталних резултата.

## Литература

- [1] J.E. Sipe and Ed Ghahramani, “Nonlinear optical response of semiconductors in the independent-particle approximation”, *Phys. Rev. B* **48**, 16, 11705 – 11722 (1993)
- [2] J. Perina, Quantum Statistics of Linear and Nonlinear Optical Phenomena, *Springer*, [2<sup>nd</sup> Edition Kluwer, Dordrecht 1991]
- [3] R.W. Boyd, Nonlinear optics, *Elsevier Science* (2003)
- [4] D. Strickland, G. Mourou, “Compression of amplified chirped optical pulses”, *Opt. Commun.* **56**, 3, 219 – 221 (1985)
- [5] O. Svelto, Principles of Lasers 5<sup>th</sup> ed., *Springer, Berlin, Heidelberg* (2004)
- [6] P. Agostini and L.F. DiMauro, “The physics of attosecond light pulses”, *Rep. Prog. Phys.* **67**, 813 – 855 (2004)
- [7] M. Göppert-Mayer, „Über Elementarakte mit zwei Quantensprüngen“, *Ann. Physik* **9**, 273 -294 (1931)
- [8] G.S. Voronov and N.B. Delone, “Ionization of xenon atom by the electric field of ruby laser emission”, *JETP Lett.* **1**, 66 – 68 (1965)
- [9] A. Weingartshofer, J.K. Holmes, G. Caudle and E.M. Clarke and H. Krüger, “Direct Observation of Multiphoton Processes in Laser-Induced Free Transitions”, *Phys. Rev. Lett.* **39**, 5, 269 – 270 (1977)
- [10] P. Agostini, F. Fabre, G. Mainfray, and G. Petite, N.K. Rahman, “Free-Free Transitions Following Six-Photon Ionization of Xenon Atoms”, *Phys. Rev. Lett.* **42**, 17, 1127 – 1130 (1979)
- [11] W. Becker, F. Grasbon, R. Kopold, D.B. Milošević, G.G. Paulus, H. Walther, “Above threshold ionization: From classical features to quantum effects”, *Advances in Atomic, Molecular, and Optical Physics* **48**, 35 – 97, Academic Press, Boston (2002)
- [12] K.A. McPherson, G. Gibson, H. Jara, U. Johann, T.S. Luk, I.A. McIntyre, K. Boyer and C.K. Rhodes, “Studies of multiphoton production of vacuum-ultraviolet radiation in the rare gases”, *J. Opt. Soc. Am. B* **4**, 595 – 601 (1987)
- [13] M. Ferray, A. L’Huillier, X.F. Li, A. Lompré, G. Mainfray, C. Manus, “Multiple - harmonic conversion of 1064 nm radiation in rare gases”, *J. Phys. B* **21**, L31 (1988)
- [14] M. Dammasch, M. Dörr, U. Eichmann, E. Lenz and W. Sandner, „Relativistic laser – field -drift suppression of nonsequential multiple ionization”, *Phys. Rev. A* **64**, 061402 (2001)

- [15] E.A. Chowdhury, C.P.J. Barty and B. Walker, „Nonrelativistic Ionization of the L-shell states in argon by a ”relativistic”  $10^{19}$  W/cm<sup>2</sup> LaserField”, *Phys. Rev. A* **63**, 042712 (2001)
- [16] E.A. Chowdhury and B. Walker, „Multielectron Ionization process in Ultrastrong Laser Fields”, *J. Opt. Soc. Am. B* **20**, 109 – 112 (2003)
- [17] L.V. Keldysh, „Ionization in the Field of a Strong Electromagnetic Wave”, *Sov. Phys. JETP* **20**, 5, 1307 – 1314 (1965)
- [18] T. Brabec and F. Krausz, „Intense few-cycle laser fields: Frontiers of nonlinear optics“, *Rev. Mod. Phys.* **72**, 2, 545 – 591 (2000)
- [19] V.P. Krainov and M.B. Smirnov, „Cluster beams in the super-intense femtosecond laser pulse“, *Phys. Rep.* **370**, 237 – 331 (2002)
- [20] V.S. Popov, „Tunnel and multiphoton ionization of atoms and ions in a strong laser field (Keldysh theory)“, *Physics-Uspekhi* **47**, 9, 855 – 885 (2004)
- [21] J. H. Eberly and J. Javanainen, “Short-pulse above-threshold-ionization “multiplet” effects”, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 13, 1346 – 1346 (2002)
- [22] M.F. Kling, J. Rauschenberger, A.J. Verhoef, E. Hasović, T. Uphues, D.B. Milosević, H.G. Muller, and M.J.J. Vrakking, „Imaging of carrier-envelope phase effects in above-threshold ionization with intense few-cycle laser fields“, *New Journal of Physics* **10**, 2, 025024 (2008)
- [23] M. Protopapas, C.H. Keitel, and P. L. Knight, „Atomic physics with super-high intensity lasers“, *Reports on Progress in Physics* **60**, 4, 389 – 486 (1997)
- [24] V.V. Suran, I.P. Zapesnochnyi, *Sov. Tech. Phys. Lett.* **1**, 420 (1975)
- [25] A. L’Huillier, L.A. Lompre, G. Mainfray, and C. Manus, “Multiply charged ions induced by multiphoton absorption in rare gases at  $0.53 \mu\text{m}$ ”, *Phys. Rev. A* **27**, 5, 2503 – 2512 (1983)
- [26] T. Weber, M. Weckenbrock, A. Staudte, L. Spielberger, O. Jagutzki, V. Mergel, F. Afaneh, G. Urbasch, M. Vollmer, H. Giessen i R. Dörner, “Recoil-Ion Momentum Distributions for Single and Double Ionization of Helium in Strong Laser Fields”, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 3, 443 – 446 (2000)
- [27] R. Moshhammer, B. Feuerstein, W. Schmitt, A. Dorn, C.D. Schröter, and J. Ullrich, H. Rottke, C. Trump, M. Wittmann, G. Korn, K. Hoffmanni, and W. Sandner, “Momentum Distributions of  $\text{Ne}^{n+}$  Ions Created by an Intense Ultrashort Laser Pulse”, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 3, 447 – 450 (2000)

- [28] G.D. Gillen, M.A. Walker and L.D. Van Woerkom, "Enhanced double ionization with circularly polarized light", *Phys. Rev. A* **64**, 043413 (2001)
- [29] I. Aleksakhin, N. Delone, I. Zapesochnyi, and V.V. Suran, "Observation and study of two-electron multiphoton ions of atoms", *Sov. Phys. JETP* **49**, 3, 447 – 451 (1979)
- [30] A. L'Huillier, L.A. Lompre, G. Mainfray, and C. Manus, "Multiply Charged Ions Formed by Multiphoton Absorption Processes in the Continuum", *Phys. Rev. Lett.* **48**, 26, 1814 – 1817 (1982)
- [31] D.N. Fittinghoff, P.R. Bolton, B. Chang, and K.C. Kulander, "Observation of Nonsequential Double Ionization of Helium with Optical Tunneling", *Phys. Rev. Lett.* **69**, 18, 2642 – 2645 (1992)
- [32] R. Dörner, Th. Weber, M. Weckenbrock, A. Staudte, M. Hattass, R. Moshhammer, J. Ullrich, H. Schmidt-Böcking, "Multiple ionization in strong laser fields", *Advances In Atomic, Molecular, and Optical Physics* **48**, 1 – 34, Academic Press, (2002)
- [33] P.B. Corkum, "Plasma Perspective on Strong-Field Multiphoton Ionization", *Phys. Rev. Lett.* **71**, 13, 1994 – 1997 (1993)
- [34] C.G. Wahlström, J. Larsson, A. Persson, T. Strzeczewski, S. Svanberg, P. Salières, Ph. Balcou and A. L'Huillier et al. "High-order harmonic generation in rare gases with an intense short-pulse laser", *Phys. Rev. A* **48**, 6, 4709 – 4720 (1993)
- [35] B. Walker, B. Sheehy, L.F. DiMauro, P. Agostini, K.J. Schafer, and K.C. Kulander, "Precision Measurement of Strong Field Double Ionization of Helium", *Phys. Rev. Lett.* **73**, 9, 1227 – 1230 (1994)
- [36] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, Wiley, New York, (1999)
- [37] G.B. Arfken and H.J. Weber, *Mathematical Methods For Physicists*, Elsevier, Boston (2005)
- [38] A.M. Perelomov, V.S. Popov, and M.V. Terent'ev, "Ionization of Atoms in an Alternating Electric Field", *Sov. Phys. JETP* **23**, 5, 924 – 934 (1966)
- [39] E. Cormier and P. Lambropoulos, "Optimal gauge and gauge invariance in non-perturbative time-dependent calculation of above-threshold ionization", *J. Phys. B* **29**, 1667 – 1680 (1996)
- [40] F.H.M. Faisal, "Multiple absorption of laser photons by atoms", *J. Phys. B* **6**, L89 - L92 (1973)
- [41] H.R. Reiss, "Semiclassical electrodynamics of bound systems in intense fields", *Phys. Rev. A* **1**, 803 – 818 (1970)

- [42] H.R. Reiss, „Effect of an intense electromagnetic field on a weakly bound system”, *Phys.Rev. A* **22**, 5, 1786 – 1813 (1980)
- [43] N. Bleistein and R. Handelsman, *Asymptotic Expansions of Integrals*, Holt, Rinehart and Winston, New York (1975)
- [44] D.B. Milošević, G.G. Paulus, D. Bauer and W. Becker, „Above-threshold ionization by few-cycle pulses”, *J. Phys. B* **39**, R203 - R262 (2006)
- [45] K. Burnett, V.C. Reed, J. Cooper, P.L. Knight, „Calculation of the background emitted during high-harmonic generation“, *Phys. Rev. A*, **45**, 3347 – 3349 (1992)
- [46] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *Quantum Mechanics: Non Relativistic Theory*, 3<sup>rd</sup> ed., *Butterworth Heinemann*, London (1991)
- [47] N.B. Delone, M.V. Ammosov and V.P. Krainov, „Tunnel ionization of complex atoms and of atomic ions in an alternating electromagnetic fields” *Sov. Phys. JETP* **64**, 1191 – 1194 (1986)
- [48] V.P. Krainov and V.M. Ristić, “Electron energy spectra in tunneling ionization of atoms and ions by a strong low-frequency field”, *Sov. Phys. JETP* **74**, 5, 789 – 792 (1992) [*Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 101, 1479 (1992)]
- [49] N.B. Delone, V. P. Krainov, *Atoms in Strong Light Fields*, *Springer Series in Chemical Physics* **28**, Berlin, New York: Springer Verlag (1985)
- [50] B.M. Karnakov, V.P. Krainov, *WKB Approximation in Atomic Physics*, *Springer* edition (2013) (August 28, 2012)
- [51] C.Z. Bisgaard, L.B. Madsen, “Tunneling ionization of atoms”, *Am. J. Phys.* **72**, 249 – 254 (2004)
- [52] N. Milošević, V.P. Krainov and T. Brabec, „Semiclassical Dirac Theory of Tunnel Ionization“, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 19, 193001 – 4p (2002)
- [53] J. Schwinger, “On Gauge Invariance and Vacuum Polarization”, *Phys. Rev.* **82**, 664 – 679 (1951)
- [54] N.B. Delone, V.P. Krainov, “Tunneling and barrier-suppression ionization of atoms and ions in a laser radiation field”, *Physics-Uspokhi* **41**, 5, 469 – 485 (1998)
- [55] B. Buerke et al., *Application of High Field and Short Wavelength Sources VII*, *OSA Technical Digest Series* **7**, 75 (1997)
- [56] S.L. Chin, G. Farkas and F. Yergeau, “Observation of Kr and Xe ions created by intense nanosecond CO<sub>2</sub> laser pulses”, *J. Phys. B* **16**, L223 - L226 (1983)

- [57] W. Xiong and S.L. Chin, "Tunnel ionization of K and Xe atoms in a high-intensity CO<sub>2</sub> laser radiation field", *Zh. Exp. Teor. Fiz.* **99**, 481 – 487 (1991) [Sov. Phys. JETP **72** 268 (1991)]
- [58] F.A. Ilkov, J.E. Decker and S.L. Chin, "Ionization of atoms in the tunneling regime with experimental evidence using Hg atoms", *J. Phys. B* **25**, 4005 – 4020 (1992)
- [59] L.F. Di Mauro, Super-Intense Laser -Atom Physics IV (Eds G Muller, MV Fedorov), *Dordrecht: Kluwer*, (1996)
- [60] S. Augst, D.D. Meyerhofer, "Field Ionization of Noble Gas Atoms with a Keldysh Adiabaticity Parameter of the Order of One", *Laser Phys.* **4**, 6, 1155 – 1159 (1994)
- [61] V.M. Ammosov, S. Lazaresku, S. Augst, and S.L. Chin, "Polarization Effect during Strong-Field Ionization of Atoms", *Laser Physics*, **7**, 3, 706 – 708 (1997)
- [62] X.M. Tong, Z.X. Zhao and C.D. Lin, "Theory of molecular tunneling ionization", *Phys. Rev. A* **66**, 033402 (2002)
- [63] A. Saenz, "Enhanced ionization of molecular hydrogen in very strong fields", *Phys. Rev. A* **61**, 051402(R) (2000)
- [64] A. Becker and F.H.M. Faisal, "Intense-field many-body S-matrix theory", *J. Phys. B*, **38** (3), 1 – 56 (2005)
- [65] C. Smeenk, L. Arissian, A. Staudte, D.M. Villeneuve and P.B. Corkum, "Momentum-space tomographic imaging of photoelectrons", *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, **42**, 18, 185402 (5p) (2009)
- [66] A. Rudenko, K. Zrost, C.D. Schröter, V.L. B de Jesus, B. Feuerstein, R. Moshhammer and J. Ullrich, "Resonant structures in the low-energy electron continuum for single ionization of atoms in the tunnelling regime", *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, **37**, 24, L407 - L413 (2004)
- [67] A.S. Alnaser, C.M. Maharjan, P. Wang and I.V. Litvinyuk, "Multi-photon resonant effects in strong-field ionization: origin of the dip in experimental longitudinal momentum distributions", *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, **39**, 17, L323 - L328 (2006)
- [68] G. Farkas, S.L. Chin, P. Galarneau and F. Yergeau, "A new type of intense CO<sub>2</sub> laser induced electron emission from a gold surface", *Opt. Commun.*, **48**, 275 - 278 (1983), G. Farkas and S.L. Chin, *Appl. Phys. B.*, **37**, 141 (1985)
- [69] S.L. Chin, F. Yergeau and P. Lavigne, "Tunnel ionization of Xe in an ultra-intense CO<sub>2</sub> laser field (10<sup>14</sup> W/cm<sup>2</sup>) with multiple charge creation", *J. Phys. B: At. Mol. Phys.*, **18**, 8, L213 (1985)

- [70] T.D.G. Walsh, F.A. Ilkov, J.E. Decker and S.L. Chin, “The tunnel ionization of atoms, diatomic and triatomic molecules using intense 10.6  $\mu\text{m}$  radiation.”, *J. Phy. B: At. Mol. Opt. Phys.*, **27**, 3767 – 3779 (1994)
- [71] G.F. Gribakin and M.Yu. Kuchiev, “Multiphoton detachment of electrons from negative ions”, *Phys. Rev. A*, **55**, 3760 – 3771 (1997)
- [72] V.M. Ristić, M.M. Radulović, T.S. Premović, “Turning point behavior in tunnel ionization of atoms in super – strong, low frequency laser fields”, *Laser Phys. Lett.* **2**, 314 – 317 (2005)
- [73] V.M. Ristić, J.M. Stevanović and M.M. Radulović, “Transition rate dependence on the improved turning point in ADK - theory”, *Laser Phys. Lett.* **3**, 6, 298 – 300 (2006)
- [74] V.M. Ristić, M.M. Radulović, V.P. Krainov, “Improved treatment of the turning point in tunnel ionization of atoms in low - frequency electromagnetic field”, *Laser Phys.* **4**, 928 – 932 (1998)
- [75] V.M. Ristić, T.B. Miladinović and M.M. Radulović, „Transition Rate Dependence on the Non - Zero Initial Momentum in the ADK-Theory”, *Acta Physica Polonica A*, **112**, No. 5, 909 - 914 (2007)
- [76] V.M. Ristić, T.B. Miladinović and M.M. Radulović, “Analyzing the Transition Rates of the Ionization of Atoms by Strong Fields of a CO<sub>2</sub> Laser Including Nonzero Initial Momenta”, *Laser Physics*, **18**, No.10, 1183 – 1187 (2008)
- [77] V.M. Ristić, T.B. Miladinović and M.M. Radulović, „Calculating Ionization Transition Rate for Circularly Polarized Fields, Including Non-Zero Initial Momentum”, *Acta Physica Polonica A*, **116**, No. 4, 504 – 506 (2009)
- [78] V. M. Ristić, T .B. Miladinović and J. M. Stevanović, “Circularly Polarized Laser Fields, with Different Z, Including Non-Zero Initial Momentum”, *Acta Physica Polonica A*, **119**, No. 6, 761- 763 (2011)
- [79] K. Yamakawa, Y. Akahane, Y. Fukuda, M. Aoyama, N. Inoue, H. Ueda, T. Utsumi, “Many-Electron Dynamics of a Xe Atom in Strong and Superstrong Laser Fields” *Phys. Rev. Lett.* **92**, 123001 - 4p (2004)
- [80] A. Wirth, “Attosecond transient absorption spectroscopy”, PhD Thesis Ludwig-Maximilians-Universität, München, (2011)
- [81] C.M. Maharjan, “Momentum imaging studies of electron and ion dynamics in a strong laser field”, PhD Thesis Kansas State University, Manhattan, Kansas (2007)
- [82] A.S. Kornev, E.B. Tulenko, B.A. Zon, “Kinetics of multiple ionization of rare-gas atoms in a circularly polarized laser field”, *Phys. Rev. A*, **68**, 0434141 – 0434149 (2003)

- [83] V.M. Ristić, Ph.D. Thesis, The foundation and extension of some aspects of ADK – theory, Kragujevac University, Moscow-Kragujevac 1991
- [84] T.B. Miladinović, V.M. Petrović and V.M. Ristić, “Influence of Ponderomotive Potential and NonZero Initial Momentum of Ejected Electron on Transition Rate in Multiphoton Ionization”, *Acta Physica Polonica A*, **124**, No. 4, 658- 660 (2013)
- [85] Denys I. Bondar, “Instantaneous multiphoton ionization rate and initial distribution of electron momentum”, *Phys. Rev. A*, **78**, 015405 - 4p (2008)
- [86] M.V. Amosov, I.I. Bondar, N.B. Delone, M.Yu. Ivanov, A.V. Masalov, “Cross Sections of Direct Multiphoton Ionization of Atoms” *Adv. Atom. Mol. Phys.*, **27**, 33 – 111 (1991)
- [87] N. B. Delone, V. P. Krainov, in: Multiphoton Processes in Atoms, 2nd Ed., Springer, New York (2000)
- [88] N. B. Delone, V. P. Krainov, “Atomic stabilisation in a laser field”, *Physics-Usp.*, **38**, 11, 1247 - 1269 (1995)
- [89] M.D. Perry, O.L. Landen, A. Szöke, E.M. Campbell, “Multiphoton ionization of the noble gases by an intense  $10^{14}$  W/cm<sup>2</sup> dye laser”, *Phys. Rev. A*, **37**, 747 – 760 (1988)
- [90] F. Yergeau, S.L. Chin and P. Lavigne, “Multiple Ionization of Rare-gas Atoms by an Intense CO<sub>2</sub> Laser ( $10^{14}$  W/cm<sup>2</sup>)” *J.Phys.B: At. Mol.Phys.*, **20** 723 – 729 (1987)
- [91] W. Xiong, F. Yergeau, S.L. Chin and P. Lavigne, “Multiphoton Ionization of Rare Gases by a CO<sub>2</sub> Laser: Electron Spectroscopy”, *J. Phys B:At. Mol. Opt. Phys.* **21** L159 – L164 (1998)
- [92] S. Augst, D. Strickland, D. Meyerhofer, S.L. Chin and J.H. Eberly, “Tunneling ionization of Noble Gases in a High-Intensity Laser Field” *Phys. Rev. Lett.* **63** 2212 – 2215 (1989)
- [93] A.M. Perelomov and V.S. Popov, “Ionization of atoms in an alternating electrical field. III”, *JETP* **52**, 514 – 526 (1967) [*Sov. Phys.* **25**, 336 – 343 (1967)]
- [94] V.P. Krainov, W. Xiong and S.L. Chin, “An Introductory Overview of Tunnel Ionization of Atom by Intense Lasers”, *Laser Phys.*, **2**, 4, 467–474 (1992)
- [95] N.B. Delone, I.Yu Kiyan and V.P. Krainov, “Ionization of Atoms by a Strong Low-Frequency Field” *Laser Phys.*, **3**, 2, 312 (1993)
- [96] T.B. Miladinović, J.M. Stevanović, M.M. Radulović and V.M Ristić, „The energy at which the maximum number of photoelectrons are observed during the ionization of potassium and xenon atoms“, *Physica Scripta*, **T149** (2012)



## Додатак А

### Атомски систем јединица

Атомски систем јединица се често користи али његова примена понекада може бити збуњујућа. Димензионалне провере као и конвертовање резултата прорачуна из атомског у SI систем јединица нису могуће на једноставан начин. Дobar пример је израз за нерелативистичку својствену енергију водонику сличног јона која је у атомским јединицама

$$E_n = -\frac{Z^2}{2n^2}, \quad n = 0,1,2, \dots \quad (\text{A.1})$$

где је  $Z$  степен јонизације,  $n$  главни квантни број. Десна страна једначине је бездимензионална. Ако се не зна да је са леве стране једначине енергија, не би је било могуће пребацити у SI систем. У SI систем израз (A.1) има облик

$$E_n = -\frac{Z^2}{2n^2} \frac{m_e e^4}{\hbar^2 (4\pi\epsilon_0)^2}, \quad n = 0,1,2, \dots \quad (\text{A.2})$$

У овом случају чак иако се не зна димензионалност леве стране једначине, на основу јединица величина са дене стране може се добити да је у питању енергија.  $m_e$  маса електрона,  $e$  наелектрисање електрона,  $\epsilon_0$  диелектрична константа.

У атомском систему јединица узима се да су маса електрона  $m_e$ , наелектрисање електрона  $e$  и Планкова константа  $\hbar$  једнаке јединици:

$$m_e = 1, \quad q_e = e = 1, \quad \hbar = 1. \quad (\text{A.3})$$

Атомска јединица за **дужину** одређена је Борови радијусом

$$a_0 = 4\pi\epsilon_0 \frac{\hbar^2}{m_e e^2}, \quad (\text{A.4})$$

$$1 \text{ au} = 0,529177249 \times 10^{-10} \text{ m}. \quad (\text{A.5})$$

Атомска јединица за **брзину** дата је брзином електрона на првој Боровој орбити

$$v_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar}, \quad (\text{A.6})$$

$$1 \text{ au} = 2,18769142 \times 10^6 \text{ m/s}. \quad (\text{A.7})$$

Атомска јединица за **време** се добија из атомске јединице за дужину и брзину

$$t_0 = \frac{a_0}{v_0} = (4\pi\epsilon_0)^2 \frac{\hbar^3}{m_e e^4}, \quad (\text{A.8})$$

$$1 \text{ au} = 2,41888433 \times 10^{-17} \text{ s.} \quad (\text{A.9})$$

Двострука енергија везе у атому водоника даје атомску јединицу за **енергију**

$$E_{\text{au}} = \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{m_e e^4}{\hbar^2} \quad (\text{A.10})$$

$$1 \text{ au} = 4,3598 \times 10^{-19} \text{ J} = 27,2113962 \text{ eV.} \quad (\text{A.11})$$

**Фреквенција** је одређена са

$$\omega_0 = \frac{1}{t_0} = \frac{m_e e^4}{\hbar^3}. \quad (\text{A.12})$$

$$1 \text{ au} = 4,13413732 \times 10^{16} \text{ 1/s} \quad (\text{A.13})$$

Атомска јединица за **јачину електричног поља** дата је изразом

$$F_0 = \frac{E_{\text{au}}}{e a_0} = \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{m_e e^5}{\hbar^4} \quad (\text{A.14})$$

$$1 \text{ au} = 5,14220826 \times 10^{11} \text{ V/m.} \quad (\text{A.15})$$

Атомска јединица за **интензитет** је

$$I_0 = 4\pi\epsilon_0 \frac{c}{8\pi} F_0^2 \quad (\text{A.16})$$

$$1 \text{ au} = 3,50944758 \times 10^{16} \text{ W/cm}^2. \quad (\text{A.17})$$

**Константа fine структуре** је

$$\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137,04}. \quad (\text{A.18})$$

**Брзина светлости** у вакуму у атомским јединицама једнака је реципрочной вредности константе fine структуре

$$c = 137,04. \quad (\text{A.19})$$

На крају представићемо величине и константе које се користе при проучавању интеракције ласера са атомом.

Маса електрона:  $m_e = 9,1094 \times 10^{-31} \text{ k.} \quad (\text{A.20})$

Наелектрисање електрона:  $e = 1,6022 \times 10^{-19} \text{ C.} \quad (\text{A.21})$

Планкова константа:  $h = 6,6260693 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s.} \quad (\text{A.22})$

Диракова константа:  $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05457168 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s.} \quad (\text{A.23})$

## Додатак Б

### Метод седласте тачке

Математички, седласта тачка (saddle point) је тачка у домену функције која је стационарна али није екстремна вредност. Име потиче од чињенице да површина која је представљена у две димензије, кривуда тако да подсећа на седло.

Да би проверили да ли је нека стационарна тачка која припада функцији која има реалне вредности и зависи од две променљиве  $F(x, y)$  седласта, користи се једноставан критеријум. Потребно је израчунати Hessian матрицу у тој тачки. Ако је Hessian неодређена матрица онда је та тачка седласта. На пример Hessian матрица за функцију  $z = x^2 - y^2$  у стационарној тачки  $(0,0)$  је матрица облика  $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ , у случају када је неодређена.

У најопштијем смислу, седласта тачка за глатку функцију (чији је график крива, површина или хиперповрш) је стационарна тачка, таква да крива односно површ у околини те тачке није у потпуности (искључиво) ни на једној страни тангенте простора у том тренутку.

Метод седласте тачке (saddle-point method) или метод најбржег спуштања (method of steepest descent) је метод који служи за асимптотску анализу интеграла у комплексној равни. Развио га је Б. Риман (B. Riemann) крајем прошлог века. Представља генерализацију Лапласовог метода и користи се за асимптотски развој специфичне класе интеграла облика:

$$f(\lambda) = \int_C g(z)e^{\lambda h(z)} dz, \quad (\text{Б.1})$$

при чему је  $C$  је нека произвољна контура у комплексној равни а  $g(z)$  и  $h(z)$  су аналитичке функције варијабле  $z$  у одређеној области комплексне равни која садржи контуру  $C$ , тако да су независне од  $\lambda$  која је реалан и позитиван број.

Проблем је наћи асимптотску апроксимацију овог интеграла када је  $\lambda$  велико. Метод је применљив и на општије форме подинтегралне функције, нпр. када је  $h(z)$  функција која зависи и од  $z$  и од  $\lambda$ .

Функције  $g(z)$  и  $h(z)$  не морају бити аналитичке у целој комплексној равни. Оне могу имати изоловане сингуларитете као и тачке гранања. Чак и кад се изабере да  $\lambda$  буде реално

и позитивно не губи се ништа на општости проблема. Ако је  $\lambda$  комплексно, тада ако  $\lambda \rightarrow \infty$  дуж једне гране  $\lambda = |\lambda|e^{i\alpha}$ ,  $e^{i\alpha}$  се може једноставно укључити унутар  $h(z)$  чиме се добија интеграл дефинисан у претходној једначини у коме је одговарајући параметар реалан и позитиван. Укључен је и случај када је  $\lambda$  реално и негативно тј. ако је ово услов за то када је  $\alpha = \pi$ .

У Декартовим координатама,  $x$ ,  $y$  и  $z = x + iy$ , односно

$$h(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y). \quad (\text{Б.2})$$

Функције  $h(z)$  је аналитичка функција варијабле  $z$ , док су  $\phi$  реални и  $\psi$  имагинарни део функције. Функција  $h(z)$  има извод у тачки комплексне равни за  $z_0 = x_0 + iy_0$ , односно постигнут је релативни максимум од  $\phi$ , који уједно представља и решење једначине  $\nabla\phi = 0$ .  $\nabla$  је оператор градијента који је у овом случају представљен са  $i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y}$ ,  $i$  и  $j$  су јединични вектори у правцу  $x$  и  $y$  осе. Тада функције  $\phi(x, y)$  и  $\psi(x, y)$  имају парцијалне изводе у тачки  $(x_0, y_0)$  и они у тој тачки задовољавају Коши-Риманове (Cauchy-Riemannove) једначине  $\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$ . Због једноставнијег писања уводе се следеће смене:  $\partial\phi/\partial x = \phi_x$  и  $\partial\psi/\partial y = \psi_y$ .

Како је  $z_0$  такође решење једначине

$$\nabla\psi = 0. \quad (\text{Б.3})$$

Добија се да је

$$h'(z) = \phi_x + i\psi_y = \phi_x - i\psi_y = 0. \quad (\text{Б.4})$$

када је  $z = z_0 = x_0 + iy_0$ . Пошто важи једначина (Б.2),  $\phi$  и  $\psi$  су потенцијалне функције које задовољавају Лапласову једначину

$$\Delta\phi = 0, \Delta\psi = 0, \quad (\text{Б.5})$$

где је  $\Delta$  Лапласов (Laplace) оператор или лапласијан, који је у овом случају дат изразом  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ . Према теорему о максималном модулу, функције  $\phi$  и  $\psi$  не могу имати максимуму (минимум) у области у којој је функција  $h(z)$  аналитичка. Одатле следи да је тачка  $z_0$  седласта тачка функција  $\phi$  и  $\psi$ .

На основу једначине (Б.4) каже се да је  $z_0$  седласта тачка и функције  $h(z)$ . За седласту тачку првог реда, важи да је:

$$h'(z_0) = 0, h''(z_0) \neq 0. \quad (\text{Б.6})$$

Процедура која укључује седласте тачке вишег реда базирана је на проширењу метода.

Као што је речено на почетку, овај метод се назива и метод најбржег спуштања. Посматра се контура која одговара оптималном путу. Да би се избегли проблеме око осцилација функције  $e^{i\lambda\psi}$ , бира се такав пут дуж којег је  $\psi = \text{Im } h(z) = \text{const}$ . Из Коши-Риманових једначина, следи да је  $\nabla\phi \times \nabla\psi = 0$  линије  $\phi = \text{const}$  и  $\psi = \text{const}$  су међусобно ортогоналне. Линије дуж којих се функција  $\phi$  мења најбрже, а то су линије одређене правцем  $\nabla\phi$ , су линије где је  $\phi = \text{const}$ . Ако се изабере  $\psi$  линија која пролази кроз тачку  $z_0$ , где функција  $\phi$  има седласту тачку, тада приликом овог избора морају бити испуњени следећи услови:

- Дуж изабраног оптималног пута функција  $\phi$  има што је могуће већу промену у близини свог релативног максимума
- Не постоје доприноси који потичу од осцилација функције  $e^{i\lambda\psi}$ .

Битно је напоменути да постоје две линије  $\psi = \text{const}$  које пролазе кроз седласту тачку  $S$  при  $z_0$  и при томе се у оба случаја функција  $\phi$  мења што је могуће брже. Због тога треба обратити посебну пажњу при одабиру одговарајуће линије, тј. оптималног пута којим се крећемо. Једна од линија заиста одговара путу најбржег спуштања, док друга линија одговара путу најбржег пењања. За правилан избор пута најбржег спуштања неопходно је одабрати одговарајућу фазу  $\alpha$  која се појављује у формализму који ће бити представљен.

У близини седласте тачке  $z_0$ , када важи да је  $h'(z_0) = 0$ , функција  $h(z)$  може се развити у Тејлоров (Taylor) ред:

$$h(z) = h(z_0) + \frac{1}{2}(z - z_0)^2 h''(z_0) + \mathcal{O}((z - z_0)^3). \quad (\text{Б.7})$$

Са друге стране, када се бира контура која одговара путу најбржег спуштања, на и у околини тачке  $z_0$  важи да је:

$$\phi - \phi_0 = h(z) - h(z_0) = \frac{1}{2}(z - z_0)^2 h''(z_0) < 0. \quad (\text{Б.8})$$

Израз (Б.8) је реалан, пошто се имагинарни делови  $h(z)$  и  $h(z_0)$  међусобно поништавају на оптималном путу (путу најбржег спуштања), тј.  $\psi = \psi_0$ . За потребе даљег извођења уводи се нова реална варијабла  $\tau$  на следећи начин:

$$h(z) - h(z_0) = -\tau^2, \quad (\text{Б.9})$$

чиме се  $z$  одређује као функција  $\tau$ , тј.  $z = z(\tau)$ . Једначина (Б.1) сада постаје

$$f(\lambda) \sim e^{\lambda h(z_0)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda \tau^2} g(z(\tau)) \frac{dz}{d\tau} d\tau. \quad (\text{Б.10})$$

Користећи једначину (Б.9) и развој у Тејлоров ред добија се

$$\frac{1}{2}(z - z_0)^2 h''(z_0) + \mathcal{O}((z - z_0)^3) = -\tau^2, \quad (\text{Б.11})$$

односно

$$z - z_0 = \left\{ \frac{-2}{h''(z_0)} \right\}^{\frac{1}{2}} \tau + \mathcal{O}(\tau^2). \quad (\text{Б.12})$$

Треба нагласити да ако је  $h''(z_0)$  комплексно, тада је неопходно изабрати погодну грану од  $\{-1/h''(z_0)\}^{1/2}$ , која одговара оптималном путу. Да би се овај поступак привео крају потребно је још направити развој у ред функције  $g(z(\tau))$

$$\begin{aligned} g(z(\tau)) &= g(z_0) + (z - z_0)g'(z_0) + \dots \\ &= g(z_0) + g'(z_0) \left\{ \frac{-2}{h''(z_0)} \right\}^{\frac{1}{2}} \tau + \mathcal{O}(\tau^2). \end{aligned} \quad (\text{Б.13})$$

Користећи (Б.10) и (Б.12) и претходну једначину следи

$$f(\lambda) \sim e^{\lambda h(z_0)} g(z_0) \left\{ \frac{-2}{h''(z_0)} \right\}^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda \tau^2} d\tau + \dots \quad (\text{Б.14})$$

После решавања интеграла по  $\tau$  добија се

$$f(\lambda) \sim g(z_0) \left\{ \frac{-2\pi}{\lambda h''(z_0)} \right\}^{\frac{1}{2}} e^{\lambda h(z_0)}. \quad (\text{Б.15})$$

Претпоставимо да је специфична грана од  $\{-1/h''(z_0)\}^{1/2}$  дата са

$$\{h''(z_0)\}^{-\frac{1}{2}} = |h''(z_0)|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}i\alpha}. \quad (\text{Б.16})$$

Тада се једначина (Б.15) пише у следећој форми

$$f(\lambda) \sim \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} |h''(z_0)|^{-\frac{1}{2}} g(z_0) e^{[\lambda h(z_0) + (i/2)(\pi - \alpha)]}. \quad (\text{Б.17})$$

Ова процедура која води ка једначини (Б.17) примењује у случају решавања интеграла који се јављају у амплитуди вероватноће.

1. Укључивање ненултoг импулса

УДК 535:539

електрона у процену брзине прелаза  
у Амосов-Делоне-Крајнов теорији за  
случај нискофреквентног линеарно  
и циркуларно поларизованог  
ласерског поља

2. Миладиновић Т.

Јонизација, електрон,  
АДК теорија, брзина прелаза,  
почетни импулс, принос јона

3. Универзитет у Крагујевцу

Природно математички факултет,  
Крагујевац, Србија

# **INCLUSION OF NON ZERO MOMENTUM OF AN ELECTRON IN THE ESTIMATION OF THE TRANSITION RATE IN AMMOSOV-DELONE-KRAINOV THEORY FOR THE CASE OF LOW-FREQUENCY LINEARLY AND CIRCULARLY POLARIZED LASER FIELD**

## **Summary**

The subject of research of this doctoral dissertation is process of tunnel ionization which represents one way of interacting atomic systems with ultra short laser pulse. In this process electron in atom can be ionized passing through potential barrier which is destroyed by strong laser field.

The goals that were set to the author of this dissertation were to expand ADK theory by including additional parameters and consisted of following:

1. Determination of the influence the initial non zero momentum of ejected electrons and ponderomotive potential to estimate the transition rate in the Ammos-Delone-Krainov theory (ADK theory) in the case of linearly and circularly polarized laser field.
2. Determination of energy which has the largest number of ejected electrons in the ionization of atoms.

To achieve these goals, we applied the existing knowledge about lasers, polarization fields and chemical elements, and used theoretical analysis and experimental results obtained by ADK theory. For making graphics software package Wolfram Mathematica 8 was used.

The text is organized as follows:

The first chapter introduced and defined terms such as linear and nonlinear optics, laser pulse and polarization fields. Without much detail it shows different mechanisms of ionization: multiphoton, above threshold ionization, tunnel and barrier suppression ionization, as well as a mechanism of multiple ionization. The theoretical method of quasi classical approximation, which is based on an approach within one part of the system is described quantum mechanically while the other is treated classically was presented.

The second chapter provides an approximation of a strong field, and the most important characteristics of the ADK theory. The calculation of the transition rate by solving the time-dependent Schrödinger equation and using the Landau Dychne adiabatic approximation with special emphasis on cases when the initial impulse of the ejected electron is zero and non zero is done.

In the third chapter the results of the candidate are presented. The influence of non zero the momentum of ionized electrons and ponderomotive potential on the transition rate for the case of linearly and circularly polarized laser field is considered. The behavior of the cross section and the ions yield in dependence of these parameters is shown. The energy which has a largest number of ejected electrons is calculated also.

**Dissertation supervisor:** Dr Vladimir Ristić

**Commission for the dissertation acceptance:**

Prof. dr Vladimir Ristić, Prof. dr Nataša Nedeljković, Doc. dr Violeta Petrović



<b>Title</b>	Inclusion of non zero momentum of an electron in the estimation of the transition rate in Ammosov - Delone - Krainov theory for the case of low-frequency linearly and circularly polarized laser field
<b>Author</b>	Miladinović Tatjana
<b>Key words</b>	Ionization, electron, ADK theory, transition rate, initial momentum, ions yield
<b>Pages</b>	136
<b>Figures</b>	47
<b>Tables</b>	2
<b>Equation</b>	368
<b>References</b>	96

**Kragujevac 2014**

## Биографија

Татјана Миладиновић је рођена 24.06.1977. године у Крагујевцу. Основну школу Вук Стефановић Караџић у Крагујевцу завршила је са одличним успехом, као носилац диплома “Вук Стефановић Караџић” и “Михајло Петровић Алас”. Након тога уписује се у Прву крагујевачку гимназију, математички смер, коју такође завршава са одличним успехом. После завршене средње школе уписује Природно математички факултет у Крагујевцу, студијска група физика, смер физика-информатика, који је завршила 2006. године, са просечном оценом 8,88 и одбрањеним дипломским радом, из области теорије релативности, под називом **Теорија релативности са посебним освртом на једначину  $E = mc^2$** , са оценом 10, чиме је стекла звање дипломирани физичар-информатичар.

Докторске академске студије на Институту за физику Природно математичког факултета у Крагујевцу, уписала је школске 2006/07 године.

Од априла 2006. године Татјана Миладиновић је запослена на Природно математичком факултету у Крагујевцу, прво у звању истраживача приправника, а од 2009. године у звању истраживача сарадника.

---

Proceedings of the International School and Conference on Optics and  
Optical Materials, ISCOM07, Belgrade, Serbia, September 3–7, 2007

## Transition Rate Dependence on the Non-Zero Initial Momentum in the ADK-Theory

V.M. RISTIĆ\*, T.B. MILADINOVIĆ AND M.M. RADULOVIĆ

Department of Physics, Faculty of Science, Kragujevac University  
Kragujevac, Serbia

Tunneling regime, introduced by Keldysh, in the interaction of strong lasers with atoms has been now accepted as the reliable method for describing processes when low frequency lasers are involved. Yet it was always assumed that the ionized electrons are leaving the atom with zero initial momentum. Because we are interested in how non-zero momentum influences the transition probability of tunnel ionization, we obtained the exact expression for the momentum. Here the estimation of the transition probability with nonzero momentum included was conducted. Potassium atoms in the laser field whose intensity varied from  $10^{13}$  W/cm<sup>2</sup> to  $10^{14}$  W/cm<sup>2</sup> were studied. It seems that all energy of laser field is used for tunneling ionization process at the beginning of laser pulse — ionization probability is large. After that, with further action of laser pulse, ionization probability decreases, probably because part of laser pulse energy is used for increasing momentum of ejected electrons, leaving smaller amounts of light quanta available for ionization of remaining electrons. If laser pulse lasts long enough, then the amounts of light quanta available for ionization become larger, resulting in increase in ionization probability, now with greater starting energy of ejected electrons.

PACS numbers: 32.80.-t, 32.80.Fb, 32.80.Rm

### 1. Introduction

In the interaction of strong lasers with atoms, tunneling regime reliably describes processes that involve low frequency lasers. Theoretical framework was given by Keldysh [1]; it was further developed, resulting in emerging of the ADK-theory (Ammosov, Delone, Krainov) [2]. Some recent papers [3–5] improved it further, but in them the authors always assumed that the ionized electrons are leaving the atom with zero initial momentum (except say in [6, 7]). Except for

---

\*corresponding author; e-mail: ristic@kg.ac.yu

aforementioned papers, in [8] it was given thorough calculation of dependence of the initial momentum on the parabolic coordinate  $\eta$ . So we shall use their results in our paper.

In this paper we shall use atomic units system  $e = m_e = \hbar = 1$ .

Tunneling ionization occurs when the Keldysh parameter is  $\gamma \ll 1$ , which was defined as  $\gamma = \omega\sqrt{2E_i}/F$ , where  $\omega$  is frequency of applied laser field,  $F$  is its strength, and  $E_i$  is ionization potential of an atom. Procedure was based on assumption that the external potential does not affect the energy of the initial state of ejected electron, and the atomic potential does not affect the final state of ejected electron (when it leaves the atom) as the electron is far enough from the nucleus. The external (Coulomb) potential was then treated as perturbation of final state energy, resulting in ADK-theory [2]. In [9] in constructing the ADK-theory the Coulomb interaction was included into calculations for the turning point  $\tau$ , which was not done before. Also, it was always assumed that the initial momentum of the electron leaving the atom is zero. Besides slight tries as in [6, 7], until now there were no thorough estimations of what influence can have non-zero initial momentum on the processes thereof. Thus we are offering in this paper the calculation of transition rates for changeable initial momentum.

## 2. Calculating non-zero initial momentum

Because we are interested how non-zero momentum influences the transition probability of tunnel ionization, we shall try to obtain the exact expression for aforementioned momentum. In order to do this, we shall begin with stationary Schrödinger equation for charged particle in the Coulomb field

$$\left(-\frac{1}{2}\nabla^2 + V\right)\psi = E\psi. \quad (1)$$

The easiest way [8] to solve this is to introduce parabolic coordinates in the following form:

$$\xi = r + z, \quad \eta = r - z, \quad \phi = \arctan(y/x), \quad (2)$$

with  $\xi, \eta \in [0, \infty]$ ,  $\phi \in [0, 2\pi]$ . In this coordinates, the Laplace operator is given by the following expression [10]:

$$\nabla^2 = \frac{4}{\xi + \eta} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \right] + \frac{1}{\xi\eta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}, \quad (3)$$

while the potential that electron feels  $V = -Z/r + Fz$  gets the following form in parabolic coordinates

$$V = -\frac{2Z}{\xi + \eta} + \frac{1}{2}F(\xi - \eta). \quad (4)$$

After separating variables and introducing  $f_1(\xi) = \chi_1(\xi)/\sqrt{\xi}$  and  $f_2(\eta) = \chi_2(\eta)/\sqrt{\eta}$  we obtain the following equations:

$$-\frac{1}{2} \frac{d^2 \chi_1}{d\xi^2} + \left( -\frac{C_1}{2\xi} + \frac{m^2 - 1}{8\xi^2} + \frac{F\xi}{8} \right) \chi_1 = \frac{E}{4} \chi_1, \quad (5a)$$

$$-\frac{1}{2} \frac{d^2 \chi_2}{d\eta^2} + \left( -\frac{C_2}{2\eta} + \frac{m^2 - 1}{8\eta^2} - \frac{F\eta}{8} \right) \chi_2 = \frac{E}{4} \chi_2, \quad (5b)$$

taking into account the condition for separating constants  $C_1 + C_2 = Z$ .

As our combined potential is given by Eq. (4), ionization occurs in the  $-z$  direction, i.e. along the  $\eta = r - z$  coordinate. That is the reason why we are interested in the second of two above equations. In Eq. (5b) the second term represents potential which we will denote as

$$U_2(\eta) = -\frac{C_2}{2\eta} + \frac{m^2 - 1}{8\eta^2} - \frac{F\eta}{8}, \quad (6)$$

and the momentum that corresponds to it is given by

$$p = \sqrt{-\frac{2E_i}{4} + \frac{C_2}{\eta} - \frac{m^2 - 1}{4\eta^2} + \frac{1}{4}F\eta}. \quad (7)$$

The explicit form of the separation constant  $C_2$  was obtained in paper [8]:

$$C_2 = Z - \frac{\sqrt{2E_i}}{2}(|m| + 1). \quad (8)$$

We assume that value for  $m$  is zero.

### 3. Estimating the transition probability with non-zero momentum included

Determining of transition probability in ADK-theory is based on the Landau–Dykhne adiabatic approximation [1, 10], and it consists in taking transition amplitude between initial and final states to be

$$A_{if} = \exp\left(i \int_{t_1}^{\tau} \omega_{if}(t) dt\right), \quad (9)$$

where  $\omega_{if}$  is the transition frequency from initial to final states, while  $\tau$  is complex turning point in the time plane. From this follows the expression for a transition probability

$$W_{if} = |A_{if}|^2 = \exp(-2\text{Im}\delta S(\tau)). \quad (10)$$

The complex turning point is given by equation  $\omega_{if}(\tau) = 0$  that defines classically forbidden state; it can be written in the following form  $E_f(\tau) = E_i(\tau)$ , where  $E_f(\tau)$  and  $E_i(\tau)$  are the final and initial energies in the external laser field, and  $\tau$  is the complex time.

As external fields are much smaller than the atomic field  $F \ll F_{\text{at}}$ , we assumed that laser field influences only the final state, while the initial state remains unperturbed, so  $E_f(\tau) = E_i(\tau)$  becomes

$$\frac{1}{2} \left( p - \frac{F}{\omega} \sin \omega \tau \right)^2 - \frac{Z}{\eta(\tau)} = -E_i. \quad (11)$$

From this equation, in the paper [9] there was obtained the following expression for turning point (in the zero-order approximation)

$$\tau_0 = \frac{p + i\sqrt{2E_i}}{F}, \quad (12)$$

that was subsequently used in calculating ADK ionization probability

$$W_{\text{ADK}} = \left( \frac{4Z^3 e}{Fn^{*4}} \right)^{2n^{*-1}} \exp \left( -\frac{2Z^3}{3Fn^{*3}} \right). \quad (13)$$

In above expression, the Coulomb interaction was neglected during calculation of the turning point (12), but was included in the expression (11).

This negligence was corrected in [9], which lead to the corrected expression for a turning point

$$\tau = \frac{p + i\sqrt{2E_i}}{F} - \frac{iZ}{(p^2 + 2E_i)\sqrt{2E_i}}. \quad (14)$$

What follows is the corrected form for ionization probability

$$W_{\text{cADK}} = \left( \frac{4Z^3 e}{Fn^{*4}} \frac{1}{1 + \frac{2ZF}{(p^2+2E_i)^2} + \frac{Z^2 F^2}{2E_i(p^2+2E_i)^3}} \right)^{2n^{*-1}} \exp \left( -\frac{2Z^3}{3Fn^{*3}} \right). \quad (15)$$

Expression (15) represents the transition probability without including the non-zero initial momentum into the exponent part. But if, as indicated in Sect. 2, the electron has a non-zero initial momentum (7), we obtain a final transition probability in the following form:

$$W_{\text{cADK}} = \left( \frac{4Z^3 e}{Fn^{*4}} \frac{1}{1 + \frac{2ZF}{(p^2+2E_i)^2} + \frac{Z^2 F^2}{2E_i(p^2+2E_i)^3}} \right)^{2n^{*-1}} \exp \left( -\frac{2Z^3}{3Fn^{*3}} - \frac{p^2 \gamma^3}{3\omega} \right),$$

where cADK stands for the corrected ADK. Now we shall examine how the expression for non-zero momentum (7) affects the transition probability. We plotted dependence of transition probability on intensity of field  $I$  and on  $\eta$  coordinate (momentum) (Fig. 1). We studied potassium atom in laser field whose intensity

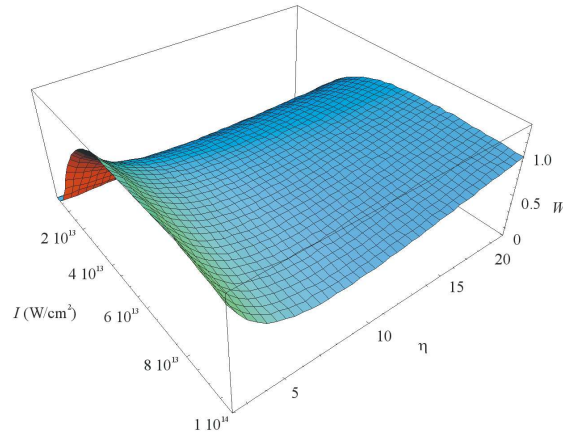


Fig. 1. Transition probability on intensity of field  $I$  and on  $\eta$  coordinate.

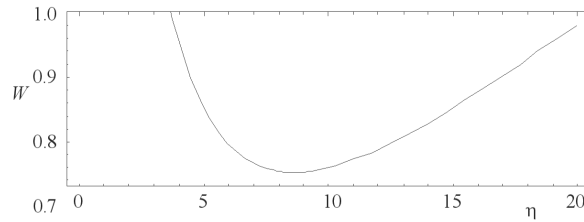


Fig. 2. Dependence of ionization probability on  $\eta$  coordinate.

varied from  $10^{13}$  W/cm<sup>2</sup> to  $10^{14}$  W/cm<sup>2</sup>. It seems that all energy of the laser field is used for tunneling ionization process at the beginning of laser pulse — ionization probability is large, and the initial momentum of electrons are very small, almost zero. After that, with further effects of laser pulse, ionization probability decreases, because part of laser pulse energy is used for increasing momentum of ejected electrons, leaving smaller amounts of light quanta available for ionization of remaining electrons. If laser pulse lasts long enough, then the amounts of light quanta available for ionization become larger, resulting in increase in ionization probability with greater energy of ejected electrons now with greater starting energy of ejected electrons.

The aforementioned situation is more obvious in Fig. 2. It shows dependence of ionization probability on  $\eta$  coordinate (momentum).

#### 4. Final remarks

Starting with the idea that the tunneling regime, introduced by Keldysh, in the interaction of strong lasers with atoms has been now accepted as the reliable method for describing processes when low frequency lasers are involved, we have calculated a few probabilities. Yet as it was always assumed that the ionized electrons are leaving the atom with zero initial momentum, we tried to correct this. Because we are interested how non-zero momentum influences the transition probability of tunnel ionization, we have obtained the exact expression for aforementioned momentum.

It seems that all energy of the laser field is used for tunneling ionization process at the beginning of laser pulse — ionization probability is large, and the initial momentum of electrons are very small, almost zero. Now, if laser pulse lasts yet, ionization probability decreases, probably because part of laser pulse energy is used for increasing momentum of ejected electrons, leaving smaller amounts of light quanta available for ionization of remaining electrons. If laser pulse lasts long enough, then the amounts of light quanta available for ionization become larger, resulting in increase in ionization probability with greater energy of ejected electrons now with greater starting energy of ejected electrons. This situation is most obvious in Fig. 2, which represents dependence of ionization probability on  $\eta$  coordinate (momentum).

### Acknowledgements

This work was supported in part by the Ministry of Science, Republic of Serbia (Project 141023).

### References

- [1] L.V. Keldysh, *Sov. Phys. JETP* **20**, 1307 (1965).
- [2] V.M. Ammosov, N.B. Delone, V.P. Krainov, *Sov. Phys. JETP* **64**, 1191 (1986).
- [3] V.M. Ristić, T.S. Premović, *Kragujevac J. Sci.* **25**, 41 (2003).
- [4] V.M. Ristić, J.M. Stevanović, M.M. Radulović, *Laser Phys. Lett.* **3**, 298 (2006).
- [5] V.M. Ristić, J.M. Stevanović, *Laser Phys. Lett.* **4**, 354 (2007).
- [6] V.P. Krainov, V.M. Ristić, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **101**, 1479 (1992).
- [7] V.M. Ristić, M.M. Radulović, T.S. Premović, *Laser Phys. Lett.* **2**, 314 (2005).
- [8] C.Z. Bisgaard, L.B. Madsen, *Am. J. Phys.* **72**, 249 (2004).
- [9] V.M. Ristić, M.M. Radulović, V.P. Krainov, *Laser Phys.* **8**, 928 (1998).
- [10] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory*, 3rd ed., Butterworth-Heinemann, London 1991.



# Analyzing the Transition Rates of the Ionization of Atoms by Strong Fields of a CO<sub>2</sub> Laser Including Nonzero Initial Momenta

V. M. Ristić\*, T. B. Miladinović, and M. M. Radulović

*Department of Physics, Faculty of Science, Kragujevac University, R. Domanovića 12, Kragujevac, 34000 Serbia*

*\*e-mail: ristic@kg.ac.yu*

Received May 12, 2008

**Abstract**—Here, the method of including nonzero initial momenta for ejected electrons in strong infrared laser fields is further developed [8]. It has been shown that, apart from being natural, including the nonzero initial momenta enables one to go into a deeper analysis of the process of tunnel ionization of atoms in strong laser fields (intensity up to  $10^{16}$  W/cm<sup>2</sup>). This is due to looking closely at Fig. 2, which indicates that all electrons that could be ejected, under the circumstances, are ejected at a field intensity  $\sim 10^{13}$  W/cm<sup>2</sup>, and that the effect of ionization after that is strongly diminished, which can be seen from the slope of the plates on Figs. 2 and 4. This also explains the saturation effect for fields up to  $10^{16}$  W/cm<sup>2</sup> [1, 4, 5, 7], and probably this saturation goes on until the fields raising relativistic effects  $\sim 10^{18}$  W/cm<sup>2</sup> [7]. Opposite to what was believed earlier [7], the atomic field intensities could be increased to values over  $10^{17}$  W/cm<sup>2</sup> only when more than 10 electrons are ejected from the atom, it is shown that the properly calculated ionization of 9 electrons increases the atomic field intensity to  $\sim 10^{18}$  W/cm<sup>2</sup>.

PACS numbers: 32.80.-t, 32.80.Fb, 32.80.Rm

DOI: 10.1134/S1054660X08100125

## 1. INTRODUCTION

There are several approaches to the problem of multiphoton ionization, and especially to the tunneling regime, when low-frequency lasers are involved [1]. But, in our opinion, the closest approach to the phenomenological picture which underlies the theoretical model is the one that leans on the assumptions based on the Keldysh approximation [2]. First, the internal potential of the atoms does not affect the energy of the final state of the ejected electron when it leaves the atom, because the electron is far enough from the nucleus (the short-range potential). Second, the potential of the external field does not influence the initial energy of the electron (for this, the external laser field should be smaller than the atomic field intensity  $\sim 10^{16}$  W/cm<sup>2</sup>). Thus, the main effect of the external field was the speeding up of the ionized electrons. The next step was to treat the Coulomb potential of the electromagnetic field as a perturbation of the final state energy, which was essential in the ADK theory [3]. Yet, when constructing the ADK theory, the Coulomb interaction was not included in the calculations of the turning point  $\tau$ , which, when revised, lead to the corrected ADK theory, or the cADK theory [1, 4–7]. But, it was always assumed that the ionized electrons are leaving the atom with zero initial momenta, which is not a natural assumption. In [8, see also references therein], we were interested in how the nonzero initial momentum influences the transition probability of the tunnel ion-

ization. Now, using a more precise expression for the momentum of the ejected electrons [9], we discuss the results that emerged during this new research: the downshift in the probability maximum, its dependence on the momenta of the ejected electrons, and, above all, the indicative result that gives one the insight into the process of the tunnel ionization of atoms in a strong laser field (up to  $10^{16}$  W/cm<sup>2</sup>) (see comment under Fig. 2).

## 2. CALCULATING NONZERO INITIAL MOMENTUM

Now, we shall obtain the exact expression for the momentum that an electron possesses when leaving the atom. In order to do this, we shall introduce parabolic coordinates  $\xi = r + z$ ,  $\eta = r - z$ , and  $\phi = \arctan(y/x)$ . The atomic unit system  $e = \hbar = m_e = 1$  will be used throughout this paper. Now, following [9], we shall begin with a stationary Schrödinger equation for a charged particle in the Coulomb field

$$\left(-\frac{1}{2}\nabla^2 - \frac{Z}{r} + Fz - E\right)\Psi = 0. \quad (1)$$

In parabolic coordinates, the Laplace's operator is given by the expression [10]

$$\nabla^2 = \frac{4}{\xi + \eta} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \right] + \frac{1}{\xi \eta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}, \quad (2)$$

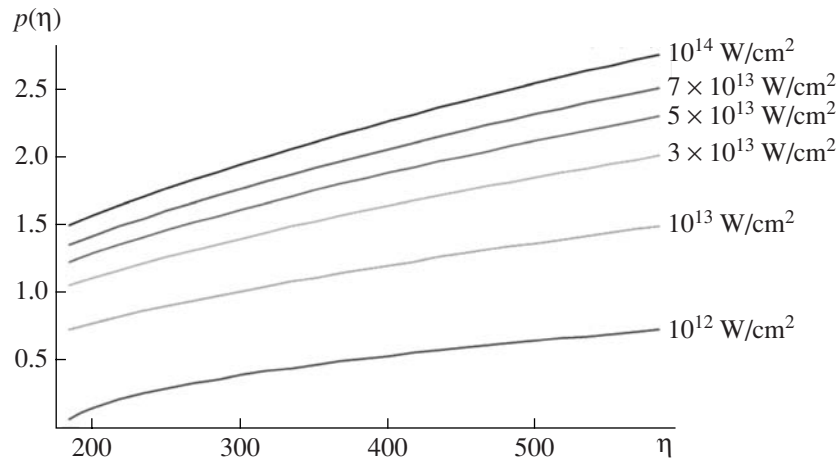


Fig. 1. Momentum plotted against  $\eta = 185\text{--}586$ .

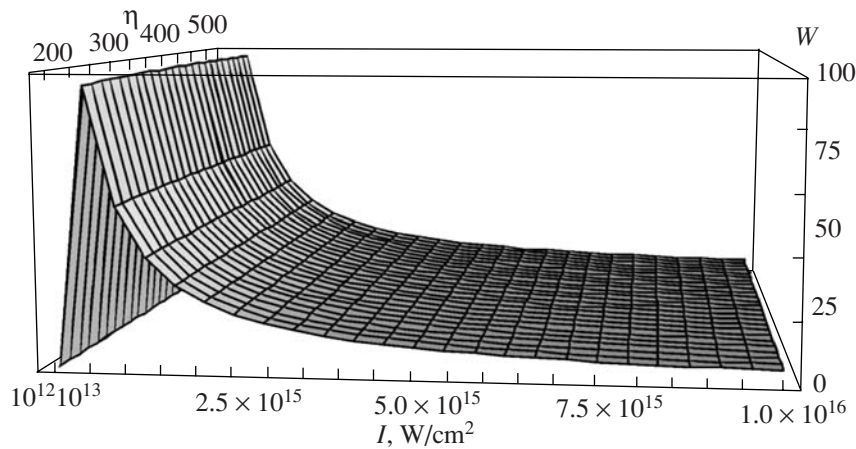


Fig. 2.  $W_{\text{CADK}}$  and  $W_{\text{pcADK}}$  transition rates plotted together. The scale for the field intensities is not linear.

so that the Schrödinger Eq. (1) gets the following form in the parabolic coordinates:

$$\frac{4}{\xi + \eta} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right) \right] + \frac{1}{\xi \eta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} + 2 \left( E + \frac{2}{\xi + \eta} \right) = 0. \quad (3)$$

After choosing the appropriate functions for a solution and bringing in the adequate separating constants  $\beta_1 + \beta_2 = 1$ , after some calculations, one obtains

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi \frac{\partial f_1}{\partial \xi} \right) + \left( \frac{E\xi}{2} - \frac{F\xi^2}{4} - \frac{m^2}{4\xi} + \beta_1 \right) f_1 = 0, \quad (4a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta \frac{\partial f_2}{\partial \eta} \right) + \left( \frac{E\eta}{2} - \frac{F\eta^2}{4} - \frac{m^2}{4\eta} + \beta_2 \right) f_2 = 0. \quad (4b)$$

As can be seen from Eq. (1), ionization occurs in the  $-z$  direction, i.e., along the  $\eta = r - z$  coordinate. Hence, we are interested in the second of the two above equations, namely (4b).

Taking into account conditions [9]  $m = 0$ ,  $\beta_2 = 1/2$ , and  $E = -1/2$ , one obtains for Eq. (4b)

$$-\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f_2}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial f_2}{\partial \eta} \right) - \frac{1}{4\eta} f_2 - \frac{F}{8} \eta f_2 = -\frac{1}{8} f_2. \quad (5)$$

Introducing function  $f_2(\eta) = \chi(\eta)/\sqrt{\eta}$ , and after straightforward but rather cumbersome calculations, Eq. (5) transforms into

$$-\frac{1}{2} \frac{d^2 \chi}{d\eta^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2\eta} + \frac{1}{4\eta^2} + \frac{1}{4} F\eta \right) \chi = -\frac{1}{8} \chi. \quad (6)$$

In Eq. (6), the second term on the left side represents the potential, which we will denote as

$$V(\eta) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\eta} + \frac{1}{4\eta^2} + \frac{1}{4}F\eta\right). \quad (7)$$

Since the momentum is generally defined as  $p(\eta) = \sqrt{2[E - V(\eta)]}$ , one finds that the momentum corresponding to (7) is given by the expression

$$p(\eta) = \sqrt{-\frac{1}{4} + \frac{1}{2\eta} + \frac{1}{4\eta^2} + \frac{F}{4}\eta}. \quad (8)$$

Developing Eq. (8) into a power series results in

$$p(\eta) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{F\eta - 1} + \frac{1}{\eta\sqrt{F\eta - 1}} + \dots\right) \quad (9)$$

outside barrier  $\eta > \frac{1}{F}$ .

It is obvious that  $\eta_L = 1/F$  is a certain limit depending on the field intensity (atomic unit system):  $\eta_L = 1/F[10^{12}] = 185.455$ . We have chosen as the lowest field intensity of  $10^{12}$  W/cm<sup>2</sup>, at which we shall begin our evaluations of the transition rate for the ejected electrons from potassium atoms in a strong field of a CO<sub>2</sub> laser.

### 3. ESTIMATING THE TRANSITION PROBABILITIES WITH NONZERO MOMENTUM INCLUDED

First, we shall analyze the dependence of momenta of ejected electrons on the coordinate  $\eta$ . It can be seen from Fig. 1 that the momentum of the ejected electrons is gaining in its strength as the intensity of the field increases and this growth is not linear, i.e., the space between the curves is changing, and also the slope of the curves and the rate of growth of the momentum is greater as the field gets stronger. This we shall discuss in more details after showing the transition rates for cADK and also something we shall call pcADK (which represents the transition rate for the case of the cADK theory with nonzero initial momenta included). But, here, we should mention that, naturally, the stronger the laser field is, the more energy is transferred to ejected electrons.

In [1, 4, 5], it was shown that the transition rate in the cADK case is given by expression

$$W_{\text{cADK}} = \left[ \frac{4Z^3 e}{Fn^{*4}} \frac{1}{1 + \frac{2ZF}{(p^2 + 2E_i)^2} + \frac{Z^2 F^2}{2E_i(p^2 + 2E_i)^3}} \right]^{2n^* - 1} \quad (10)$$

$$\times \exp\left(-\frac{2Z^3}{3Fn^*}\right);$$

in [8], the transition rate for the cADK with a correction for the nonzero initial momenta was also obtained

$$W_{\text{pcADK}} = \left[ \frac{4Z^3 e}{Fn^{*4}} \frac{1}{1 + \frac{2ZF}{(p^2 + 2E_i)^2} + \frac{Z^2 F^2}{2E_i(p^2 + 2E_i)^3}} \right]^{2n^* - 1} \quad (11)$$

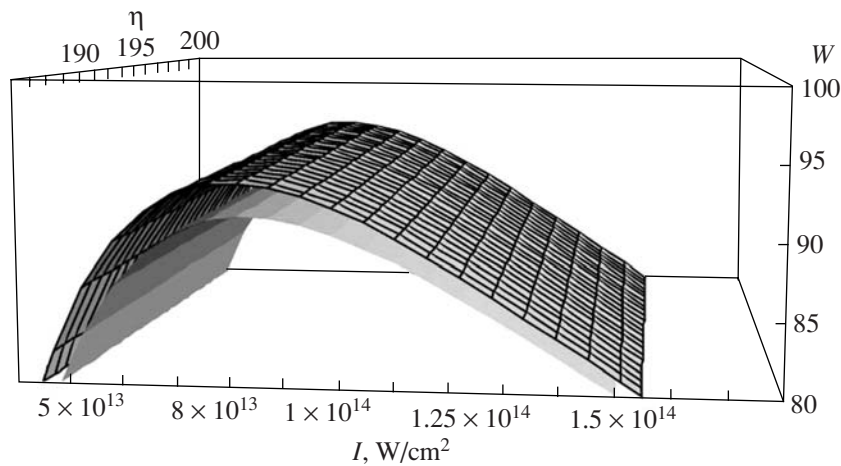
$$\times \exp\left(-\frac{2Z^3}{3Fn^*} - \frac{p^2 \gamma^3}{3\omega}\right).$$

Thus, the two transition rates, given by (10) and (11), when plotted together on a 3D graph for fields  $10^{12}$ – $10^{16}$  W/cm<sup>2</sup>, and for  $\eta$  ranging from 185–585, and arbitrary units for  $W$ , produce the following scheme:

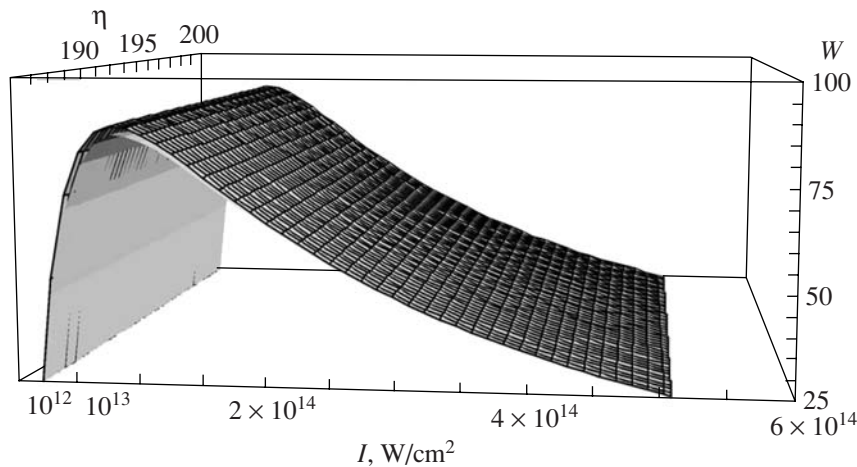
Figure 2 does not make us smarter in relation to the differences between the  $W_{\text{cADK}}$  and  $W_{\text{pcADK}}$  variants of the theory, as the differences between the two are too small to be observable for the range chosen. But, it gives us the opportunity to better understand the phenomenology of the process of tunnel ionization. Notice that the scale on Fig. 2 for the field intensities is not linear. Figure 3 is plotted for the same objects, but in the range that shows only the peak of the graph in Fig. 2 making the differences obvious, which we shall discuss later on. Now, we learn from Fig. 2 that, at the laser field intensity  $\sim 10^{13}$  W/cm<sup>2</sup>, the transition rate has a maximum, which indicates that all electrons available are ejected. In the case of potassium, in the low frequency strong field of CO<sub>2</sub> laser, it is 1 valent electron and assuming the 8 electrons of the first closed shell, which makes 9 available electrons for ionization. Their depletion leads to a freeing of the electrical charges of the atomic nuclei, making the intensity of its electrical field on the order of the magnitude of  $10^{18}$  W/cm<sup>2</sup>.<sup>1</sup> This enables us to use the cADK theory in the entire range of field intensities we are working with, i.e., for  $10^{12}$ – $10^{16}$  W/cm<sup>2</sup>.

Figure 3 is plotted for the same objects, but in the range that only shows the peak of the graph on Fig. 2 and makes the differences obvious. Hence, at the laser field intensity  $\sim 10^{13}$  W/cm<sup>2</sup>, the transition rate has a maximum, which indicates that all electrons available are ejected. In the case of potassium, in the low-frequency strong field of a CO<sub>2</sub> laser, it is 1 valent electron assuming 8 electrons of the first closed shell, which makes 9 available electrons for ionization with, i.e., for  $10^{12}$ – $10^{16}$  W/cm<sup>2</sup>. Their depletion leads to freeing electrical charges of the atomic nuclei, creating an intensity of its electrical field on the order of the magnitude of  $10^{18}$  W/cm<sup>2</sup>. This enables us to use the cADK theory

<sup>1</sup> Carefully examining the procedure of transferring from standard units (CGS) to the atomic unit system, one obtains that the gain in 9 electric charges results in a higher value for the atomic field intensity opposite the expected value of  $10^{17}$  W/cm<sup>2</sup>.



**Fig. 3.** The peak of the  $W_{\text{cADK}}$  and  $W_{\text{pcADK}}$  transition rates plotted together. The lower curved plate represents  $W_{\text{pcADK}}$ .



**Fig. 4.** The  $W_{\text{cADK}}$  and  $W_{\text{pcADK}}$  transition rates plotted together with a greater range than in Fig. 3. The barely visible lower curved plate also represents  $W_{\text{pcADK}}$ .

across the entire range of field intensities with which we are working.

A close examination of Fig. 3 tells us that the transition rate in the  $W_{\text{pcADK}}$  case is a bit smaller than in the  $W_{\text{cADK}}$  case. This maximum was calculated to yield the following values:  $W_{\text{cADK}}^{\text{max}} = 7.9 \times 10^{13} \text{ W}/\text{cm}^2$ ,

$W_{\text{pcADK}}^{\text{max}} = 8.2 \times 10^{13} \text{ W}/\text{cm}^2$ , and the differences between the two follow from the effect of transferring the energy of quanta from the laser beam to the momentum gain of the ejected electrons. Thus, the effect of the electrons ejected with nonzero momenta can be detected, although it is not so large, and, as can be seen in Fig. 4, is not long lasting.

Namely, this effect proves once again that, at the laser field intensity  $\sim 10^{13} \text{ W}/\text{cm}^2$ , the transition rate has a maximum, which indicates that almost all available

electrons are ejected. As the effect of ionization after the maximum is strongly diminished—that is, shown by the slope of the surfaces on Figs. 2 and 4, and there are fewer electrons which are taking nonzero momenta with them—the surfaces for  $W_{\text{cADK}}$  and  $W_{\text{pcADK}}$  are merged (see also Fig. 2). This explains the saturation effect for the fields up to  $10^{16} \text{ W}/\text{cm}^2$  [1, 4, 5].

It could be expected that this saturation goes further until the relativistic effects emerge at field intensities of  $\sim 10^{18} \text{ W}/\text{cm}^2$  [6].

An illustration of the above discussion could also be seen in Fig. 5, where on a 2D graph,  $W_{\text{cADK}}$  (blue) and  $W_{\text{pcADK}}$  (red) are plotted against the laser field intensity. Hence, the probability maximum is definitely down shifted when the effect of the nonzero momentum is included, and it is also moved to the left. Of course, for the range of field intensities used in Fig. 5, the conver-

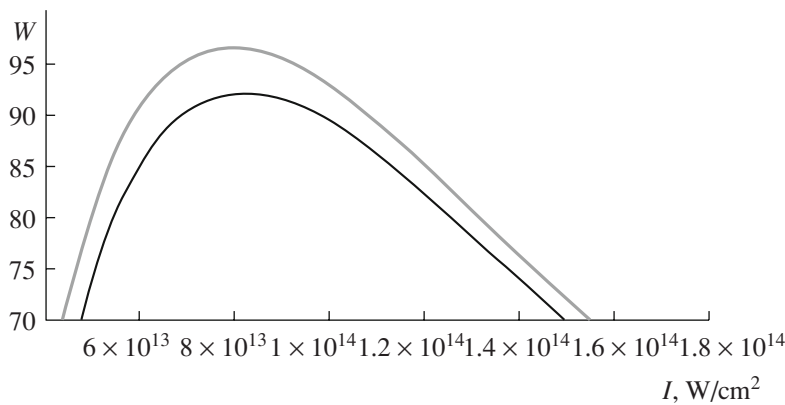


Fig. 5.  $W_{\text{cADK}}$  (blue) and  $W_{\text{pcADK}}$  (red) are plotted against the laser field intensity.

gence of the two curves such as that seen in Figs. 2 and 4 is not observable.

Once again, the difference between the curves representing  $W_{\text{cADK}}$  and  $W_{\text{pcADK}}$  emerge because of the effect of transferring the energy of the quanta from the laser beam to the momentum gain of the ejected electrons, and, thus, the maximum of the transition rate of electrons ejected from the atom is obviously diminished.

#### 4. CONCLUSIONS

We shall end this by reminding the reader of our analysis of Fig. 2, i.e., that, at the laser field intensity  $\sim 10^{13}$  W/cm<sup>2</sup>, the transition rate has a maximum, which indicates that most of the available electrons are ejected. In the case of potassium, in the low frequency strong field of a CO<sub>2</sub> laser, which we have chosen as the typical case, there are 9 electrons that, after being depleted, release the electrical charges of the atomic nuclei, thus resulting in an electrical field on the order of the magnitude of  $10^{18}$  W/cm<sup>2</sup>. This is opposite to what was believed earlier, whereby atomic fields could be increased to values of over  $10^{17}$  W/cm<sup>2</sup> only when more than 10 electrons are ejected from the atom. Thus, we can use the cADK theory for the entire range of field intensities with which we are working, i.e., for  $10^{12}$ – $10^{16}$  W/cm<sup>2</sup>.

As mentioned earlier, it was always assumed that the ionized electrons are leaving the atom with zero initial momenta. This assumption, being unnatural, has forced us to examine how the nonzero momentum influences the transition probability of the tunnel ionization, and we are discussing results that emerged in

this new research: the downshift of the probability maximum, and its dependence on the momenta of ejected electrons. Also, we discuss the saturation effect during the ionization of potassium atoms by a low-frequency field of a CO<sub>2</sub> laser (see comments after Figs. 3 and 4).

#### ACKNOWLEDGMENTS

This work was supported in part by the Ministry of Science and Ecology, Republic of Serbia (project no. 141023).

#### REFERENCES

1. V. M. Ristić, J. M. Stevanović, and M. M. Radulović, *Laser Phys. Lett.* **3**, 298 (2006).
2. L. V. Keldysh, *Sov. Phys. JETP* **20**, 1307 (1965).
3. V. M. Ammosov, N. B. Delone, and V. P. Krainov, *Sov. Phys. JETP* **64**, 1191 (1986).
4. V. M. Ristić and J. M. Stevanović, *Laser Phys. Lett.* **4**, 354 (2007).
5. V. M. Ristić, M. M. Radulović, and T. S. Premović, *Laser Phys. Lett.* **2**, 314 (2005).
6. V. M. Ristić, M. M. Radulović, and V. P. Krainov, *Laser Phys.* **8**, 928 (1998).
7. N. Milosevic, V.P. Krainov, and T. Brabec, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 193001-1 (2002).
8. V. M. Ristić, T. B. Miladinović, and M. M. Radulović, *APP A* **112/5**, 909 (2007).
9. D. Bauer, *Phys. Rev. A* **55** (3), 55 (1997); D. Bauer, *Theory of Laser-Matter Interaction* (Max-Planck-Institute, Heidelberg, 2002).
10. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory* (Nauka, Moscow, 1989; Butterworth-Heinemann, London, 1991).

# Calculating Ionization Transition Rate for Circularly Polarized Fields, Including Non-Zero Initial Momentum

V.M. RISTIĆ\*, T.B. MILADINOVIĆ AND M.M. RADULOVIĆ

Department of Physics, Faculty of Science, Kragujevac University, Kragujevac, Serbia

Potassium atoms in circularly polarized laser field whose intensity ( $I$ ) varies from  $2 \times 10^{12}$  W/cm<sup>2</sup> to  $2.5 \times 10^{14}$  W/cm<sup>2</sup> were studied. In the case when there is zero initial momentum, transition rate (that depends only on  $I$ ) exhibits standard behaviour: as  $I$  increases, so thus the rate, until it reaches its maximum value at  $1.1 \times 10^{14}$  W/cm<sup>2</sup>; after that, rate diminishes as  $I$  increases. In the case of non-zero initial momentum, transition rate (that now depends on  $I$  but additionally on initial momentum, too) exhibits following behaviour: dependence of the rate on  $I$  follows standard pattern, it rises with increase of  $I$  until it reaches its maximum, and then diminishes. But with increase of momentum, ionization rate gradually diminishes.

PACS numbers: 32.80.-t, 32.80.Fb, 32.80.Rm

## 1. Introduction

In last thirty years there have been numerous papers that studied the interaction between an atom and strong laser electromagnetic fields. Opposite to multiphoton ionization which is dominant for high frequency laser fields, one of often used models for low frequency laser fields was based on the *tunneling regime*: external field leads to the formation of a barrier through which electron can tunnel out. The connection between two regimes can be determined by the Keldysh parameter [1]. In atomic units ( $e = m_e = \hbar = 1$ ), it has the following form  $\gamma = \omega/\omega_t = \omega\sqrt{2E_i}/F$ , where  $\omega$  is frequency of laser field,  $\omega_t$  is tunneling frequency,  $F$  is strength of laser field,  $E_i$  ionization energy. For  $\gamma > 1$ , multiphoton regime prevails, for  $\gamma \ll 1$ , tunneling ionization occurs.

Thus electron tunneling through a potential barrier is one of the most important ionization mechanisms in strong low frequency external fields and has been extensively investigated — theoretical framework first was developed by Keldysh, and was later extended by Perelomov, Popov and Terent'ev. They obtained a formula for ionization rate of a bound state because of its interaction with external electromagnetic field (generated by laser) in 1966 [2]. In 1986, Ammosov, Delone and Krainov formulated ADK theory [3], extending the results of preceding theory to complex atoms and ions by calculating exactly the pre-exponent factor. Their formula for ionization rate by linearly polarized field is [3]:

$$W_{\text{ADK}}^{\text{lin}} = \left( \frac{4Z^3 e}{Fn^{*4}} \right)^{2n^*-1} \exp\left( -\frac{2Z^3}{3Fn^{*3}} \right), \quad (1)$$

where  $Z$  is charge state,  $n^* = Z/\sqrt{2E_i}$  is effective principal quantum number.

Formula given above was used as basis for calculations performed in numerous papers that dealt with different aspects of tunneling ionization ([4, 5], and references therein). In actual calculations it was usually assumed that initial momentum of ejected electron was zero.

In recent years, there have been papers that dealt with non-zero momentum of ejected electrons [6–8]. Formula for transition rate in this case (for linearly polarized laser field) has the following form [4]:

$$W_{\text{pADK}}^{\text{lin}} = \left( \frac{4Z^3 e}{Fn^{*4}} \right)^{2n^*-1} \times \exp\left( -\frac{2Z^3}{3Fn^{*3}} - \frac{p^2\gamma^3}{3\omega} \right). \quad (2)$$

In this paper we are mainly concerned with behavior of the transition rate for circularly polarized field. Ionization rate in this case differs from rates for linearly polarized light by the factor  $\sqrt{3FZ^3/\pi n^{*3}}$ .

## 2. Calculating non-zero initial momentum

Transition rate formula for circularly polarized field (in cases of zero momentum) was obtained earlier [5, 9]

$$W_{\text{ADK}}^{\text{cir}} = \sqrt{\frac{3FZ^3}{\pi n^{*3}}} \left( \frac{4Z^3 e}{Fn^{*4}} \right)^{2n^*-1} \times \exp\left( -\frac{2Z^3}{3Fn^{*3}} \right). \quad (3)$$

Finally, including the non-zero initial momentum in

\* corresponding author; e-mail: ristic@kg.ac.rs

above formula leads to the *improved expression for transition rate* in tunneling ionization by circularly polarized field

$$W_{\text{pADK}}^{\text{cir}} = \sqrt{\frac{3FZ^3}{\pi n^{*3}}} \left( \frac{4Z^3 e}{Fn^{*4}} \right)^{2n^{*}-1} \times \exp\left(-\frac{2Z^3}{3Fn^{*3}} - \frac{p^2 \gamma^3}{3\omega}\right). \quad (4)$$

In order to perform necessary calculations, we needed an expression for momentum, which we obtained in paper [8] led by results of paper [10, 11]. There, the expression for momentum was given by

$$p(\eta) = \sqrt{-\frac{1}{4} + \frac{1}{2\eta} + \frac{1}{4\eta^2} + \frac{F}{4}\eta}. \quad (5)$$

Developing it further into power series leads to following:

$$p(\eta) = \frac{1}{2} \left( \sqrt{F\eta - 1} + \frac{1}{\eta\sqrt{F\eta - 1}} + \dots \right) \quad \text{outside barrier } \eta > \frac{1}{F}. \quad (6)$$

For a field intensity of  $2 \times 10^{12}$  W/cm<sup>2</sup> lower limit for barrier has following value (atomic unit system):  $\eta_L = 1/F[2 \times 10^{12}] = 189.802$  [7, 8].

### 3. Estimating the transition probability for circularly polarized laser fields with non-zero momentum included

We studied transition rates for ionization of potassium atoms in circularly polarized electromagnetic field, both without and with non-zero momentum, see Eqs. (3), (4). Field intensities have been varied from  $10^{12}$  W/cm<sup>2</sup> to  $10^{16}$  W/cm<sup>2</sup> (at higher intensities the relativistic effects start to occur). The shape of the curved surface in the case of zero initial momentum is in its well-known form (there the rate does not depend on  $\eta$ ), see Fig. 1. But in the case of non-zero initial momentum the rate depends on  $\eta$ , namely its value decreases with increase of  $\eta$ ; see Fig. 1, the surface that is under the standard surface.

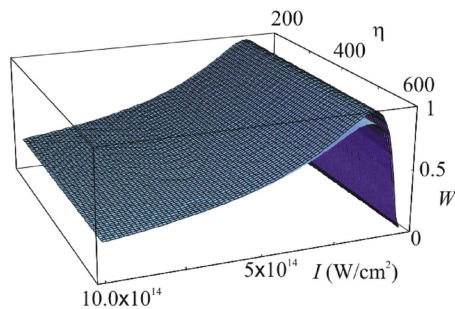


Fig. 1. Dependence of transition rates  $W_{\text{ADK}}^{\text{cir}}$  and  $W_{\text{pADK}}^{\text{cir}}$  on field intensity, for zero initial momentum and non-zero initial momentum, respectively. The figure is rotated around z-axis in order to easier distinguish between surfaces.

As for the transition rate maxima, it can be seen from Fig. 2 (that shows enlarged areas of interest from Fig. 1) that there is considerable decrease in the value in the case of non-zero initial momentum.

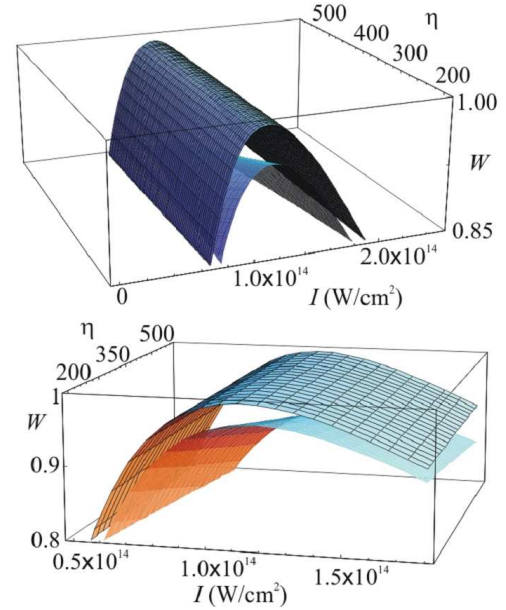


Fig. 2. Transition rates  $W_{\text{ADK}}^{\text{cir}}$  and  $W_{\text{pADK}}^{\text{cir}}$  dependence on field intensity, for zero initial momentum and non-zero initial momentum, respectively (enlarged part of Fig. 1).

In Fig. 3 there are given both maxima of transition rate, for fixed value of  $\eta$  at 190. The Figure is a two-dimensional graph of data represented in three dimensions in the upper part of Fig. 2, and it shows more clearly the influence of the initial momentum on maximum of probability.

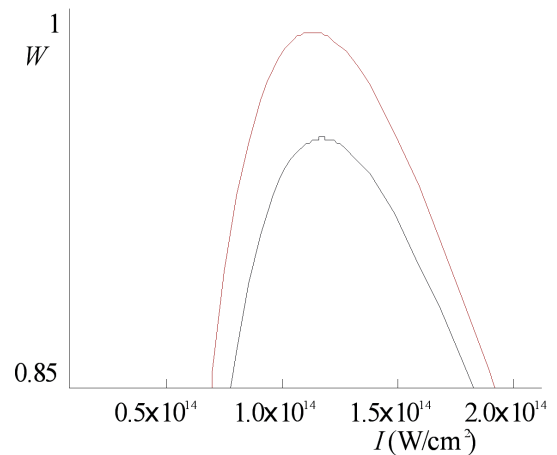


Fig. 3. Two-dimensional graphic of transition rates  $W_{\text{ADK}}^{\text{cir}}$  and  $W_{\text{pADK}}^{\text{cir}}$ , for zero (upper curve) and non-zero (lower curve) momentum, for  $\eta$  fixed at 190.

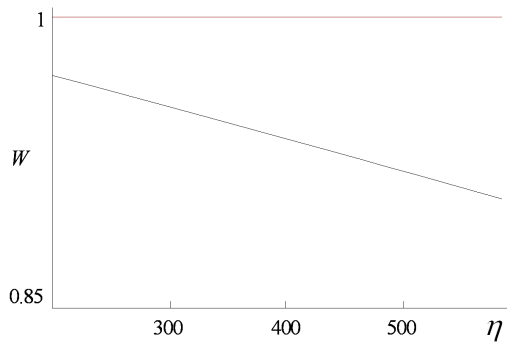


Fig. 4. Two-dimensional graphic of transition rates  $W_{\text{ADK}}^{\text{cir}}$  and  $W_{\text{PADK}}^{\text{cir}}$ , for zero (upper curve) and non-zero (lower curve) momentum, for  $I$  fixed at  $1.1 \times 10^{14}$  W/cm<sup>2</sup>.

In Fig. 4 there also can be seen both maxima in 2D graphic, only now we fixed field intensity at  $1.1 \times 10^{14}$  W/cm<sup>2</sup>. Just as in the case of linearly polarized field [8], transition rate decreases as value of momentum increases, see Fig. 4.

#### 4. Final remarks

It was shown that besides standard behaviour circularly polarized laser field has anomalous behavior when non-zero initial momenta are included into transition rate calculation. It is manifested in Fig. 2, where the surface presenting transition rate has indicative tent shape, showing that transition rate decreases as  $\eta$  increases. As  $\eta$  is representing the momentum of the ejected electron, it can be said that our earlier conclusions are confirmed [7], i.e. that part of laser pulse energy is used for increasing

momenta of ejected electrons, leaving smaller amounts of light quanta available for ionization of remaining electrons.

As electron tunneling through a potential barrier is one of the most important ionization mechanisms in strong low frequency external fields the result we obtained could be very interesting for further research.

#### Acknowledgments

This work was supported in part by the Ministry of Science, Republic of Serbia (Project 141023).

#### References

- [1] L.V. Keldysh, *Sov. Phys. JETP* **20**, 1307 (1965).
- [2] A.M. Perelomov, V.S. Popov, M.V. Terent'ev, *Sov. Phys. JETP* **23**, 924 (1966).
- [3] V.M. Ammosov, N.B. Delone, V.P. Krainov, *Sov. Phys. JETP* **64**, 1191 (1986).
- [4] V.P. Krainov, V.M. Ristić, *Sov. Phys. JETP* **101**, 1479 (1992).
- [5] N.B. Delone, V.P. Krainov, *Phys. Usp.* **41**, 469 (1998).
- [6] V.M. Ristić, T.S. Premović, *Kragujevac J. Sci.* **25**, 41 (2003).
- [7] V.M. Ristić, T.B. Miladinović, M.M. Radulović, *Acta Phys. Pol. A* **112**, 909 (2007).
- [8] V.M. Ristić, T.B. Miladinović, M.M. Radulović, *Laser Phys.* **18**, 10, 1 (2008).
- [9] E. Gubbini, PhD Thesis, 2004.
- [10] D. Bauer, *Phys. Rev. A* **55**, 55 (1997).
- [11] D. Bauer, *Theory of Laser-Matter Interaction*, Max-Planck Institute, Heidelberg 2002.



# Circularly Polarized Laser Fields, with Different $Z$ , Including Non-Zero Initial Momentum

V.M. RISTIĆ\*, T.B. MILADINOVIĆ AND J.M. STEVANOVIĆ

Faculty of Science, Kragujevac University, Radoja Domanovića 12, 34000 Kragujevac, Serbia

(Received July 27, 2010; revised version December 24, 2010; in final form January 18, 2011)

In this paper, by estimating the influence of different atom charge  $Z$  to the transition rate in tunnel ionization of atoms in strong laser fields we are developing further the observations from our earlier work. That is in the process of tunnel ionization including non-zero momentum into calculation of the transition rate gives result in lower transition rates for ejecting electrons from atoms by low-frequency laser fields, indicating that much of the photons are engaged in transferring energy to the free electron and thus unable to contribute to the effect of ionization. This is a conclusion that needs further experimental testing, which would clarify the mechanisms of tunnel ionization.

PACS: 32.80.-t, 32.80.Fb, 32.80.Rm

## 1. Introduction

It is definitely shown [1–10] that for low frequency laser fields one of the mostly used models is based on the tunneling regime: external field, due to its long duration, leads to the formation of the barrier through which electron can tunnel out. Among theories using this model the ADK-theory [1] is widely recognized. This theory was developed for linearly polarized laser fields, but it can be extended to the circularly polarized lasers, also [2, 3, 9].

As we have recently shown that the momentum of the ejected electron influences the transition rate in the case of ADK-theory [2, 7–9], we are now examining how the change of atom charge  $Z$  [8], when including non-zero momentum, contributes to transition rates for circularly polarized laser fields. Here, we are developing further the observations from our earlier work which included the ADK-theory. Namely, the process of tunnel ionization including non-zero momentum into calculation of the transition rate gives result in lower transition rates for ejecting electrons from atoms by low-frequency laser fields. All our observations indicate that much of the photons are engaged in transferring energy to the free electron and thus are unable to contribute to the effect of ionization.

Transition rate formula for circularly polarized field (in cases of zero momentum) was obtained earlier [3, 9] (atomic unit (a.u.) system  $\hbar = m_e = e = 1$ , is used here and throughout the paper).

$$W_{\text{ADK}}^{\text{cir}} = \left( \frac{3FZ^3}{\pi n^{*3}} \right)^{1/2} \left( \frac{4Z^3 e}{Fn^{*4}} \right)^{2n^*-1} \times \exp \left( -\frac{2Z^3}{3Fn^{*3}} \right), \quad (1)$$

where  $Z$  is charge state,  $F$  is field intensity,  $e$  is the logarithmic base not to be confused with elementary electric charge (which is 1 in the atomic system of units), and  $n^* = Z/\sqrt{2E_i}$  is effective principal quantum number,  $E_i$  being the ionization potential.

In order to include the non-zero initial momentum into the expression (1), we used method of complex turning point, obtained from relation  $E_i(\tau) = E_f(\tau)$ , where  $E_i$  and  $E_f$  are energies of initial and final states of ejected electron, respectively [2, 6, 11]. After expanding trigonometry functions into power series, expression for non-zero initial momentum is calculated and included into exponential part of Eq. (1):

$$W_{\text{pADK}}^{\text{cir}} = \left( \frac{3FZ^3}{\pi n^{*3}} \right) \left( \frac{4Z^3 e}{Fn^{*4}} \right)^{2n^*-1} \times \exp \left( -\frac{2Z^3}{3Fn^{*3}} - \frac{p^2 \gamma^3}{3\omega} \right). \quad (2)$$

Expression for momentum, which we obtained in paper [2, 7] is calculated introducing parabolic coordinates, by solving the Schrödinger equation for a charged particle in the Coulomb field [12, 13]. It is found that expression for momentum is

\* corresponding author; e-mail: ristic@kg.ac.rs

$$p(\eta) = \sqrt{-\frac{1}{4} + \frac{1}{2\eta} + \frac{1}{4\eta^2} + \frac{F}{4}\eta}, \quad (3)$$

where  $\eta$  is parabolic coordinate depending on the field intensity obtained from classical turning point ( $\eta \sim 1/F$ ).  $\eta$  could, in our case (3), be considered equivalent in its behavior to  $p$ . For example,  $F \approx 10^{12}$ ;  $\eta = 268.421$  (a.u. system). For greater fields,  $\eta$  is decreasing, obviously.

Further, developing Eq. (3) into power series gives

$$p(\eta) = \frac{1}{2} \left( \sqrt{F\eta - 1} + \frac{1}{\eta\sqrt{F\eta - 1}} + \dots \right)$$

Outside barrier  $\eta > 1/F$ .

Now we have introduced all necessary expressions for our further calculations. Next we shall present the new results that are obtained.

## 2. Calculating the transition rates for circularly polarized laser fields including non-zero momentum, for different charge $Z$

After that preparation we calculated transition rates for ejected electrons for various atomic charge  $Z$ , which is the new result first to be published here. The procedure is experimentally founded in [10]. Our results are shown on 3D and 2D graphs in Figs. 1–4. As parameters  $\gamma$  and  $n^*$  include in themselves ionization potential  $E_i$ :  $\gamma = \omega\sqrt{2E_i}/F$ ,  $n^* = Z/\sqrt{2E_i}$ , we, as is done in experiments [10] and also analyzed in [9], define and calculate the change of ionization energy for each ejected electron. So graphs shown are depending on various  $\eta$  [1, 300], and on field intensities  $I = 10^{12}$ – $10^{17}$  W/cm<sup>2</sup>, which are fixed for each separate graph.

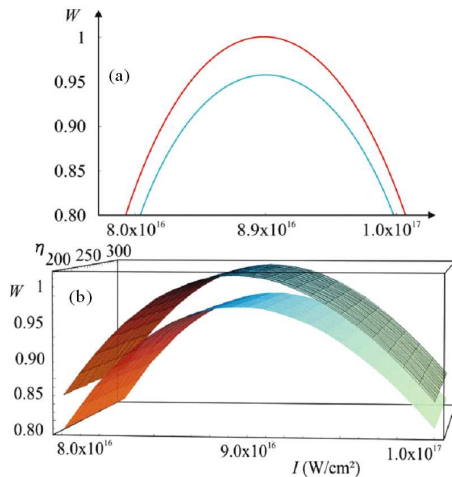


Fig. 1. Transition rates  $W_{\text{ADK}}^{\text{cir}}$  and  $W_{\text{PADK}}^{\text{cir}}$  dependence on field intensity, for zero initial momentum and non-zero initial momentum, respectively (enlarged parts),  $Z = 2$ ,  $E_2 = 1.16$ ; (a)  $\eta$  fixed at 190 (2D graph); (b)  $\eta$  varying (3D graph).

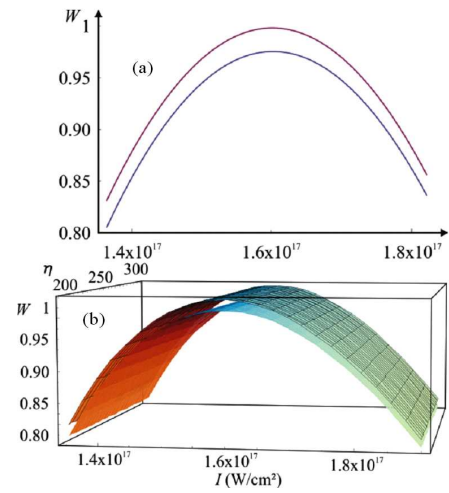


Fig. 2. Transition rates  $W_{\text{ADK}}^{\text{cir}}$  and  $W_{\text{PADK}}^{\text{cir}}$  dependence on field intensity, for zero initial momentum and non-zero initial momentum, respectively,  $Z = 3$ ,  $E_3 = 1.68$ ; (a)  $\eta$  fixed at 190 (2D graph); (b)  $\eta$  varying (3D graph).

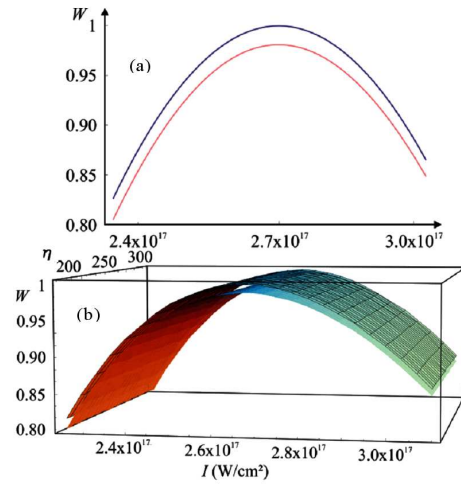


Fig. 3. Transition rates  $W_{\text{ADK}}^{\text{cir}}$  and  $W_{\text{PADK}}^{\text{cir}}$  dependence on field intensity, for zero initial momentum and non-zero initial momentum, respectively,  $Z = 4$ ,  $E_4 = 2.24$ ; (a)  $\eta$  fixed at 190 (2D graph); (b)  $\eta$  varying (3D graph).

In order to mark the difference between the case of zero momentum of the ejected electron and non-zero momentum we have shown in each figure the transition rates maxima for both  $W_{\text{ADK}}^{\text{cir}}$  and  $W_{\text{PADK}}^{\text{cir}}$ , depending on intensity of lasers and parabolic coordinate  $\eta$ , which is approximately proportional to  $p$  (3), notifying the value of ion charge number  $Z$ , and the corresponding ionization energy (atomic unit system).

One should notice considerably large gap between the curves, for  $Z = 2$ , indicating that the transition rate for ejected electrons with zero initial momentum and the

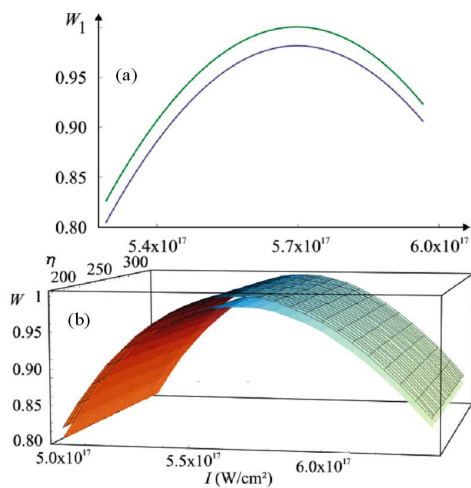


Fig. 4. Transition rates  $W_{\text{ADK}}^{\text{cir}}$  and  $W_{\text{pADK}}^{\text{cir}}$  dependence on field intensity, for zero initial momentum and non-zero initial momentum, respectively,  $Z = 5$ ,  $E_5 = 3.04$ ; (a)  $\eta$  fixed at 190 (2D graph); (b)  $\eta$  varying (3D graph).

transition rate for electrons with non-zero momentum are different. The transition rate for electrons with non-zero momentum are much lesser as lots of photons are spent for increasing momentum.

For  $Z = 3$ , the gap between curves is reduced, showing that the difference between the transition rate for ejected electrons with zero initial momentum and the transition rate for electrons with non-zero momentum are getting lesser, as  $Z$  increases.

Here, for  $Z = 4$ , the gap-effect is continuing to show itself, being smaller and smaller. See also the forthcoming figures.

Comparing Figs. 1–4 one can notice the greater  $Z$ , the lesser difference between two curves. It could be explained by the greater ionization energy needed for multiple ionized atoms.

Namely, as  $Z$  is increasing, the influence of ejected electrons momentum on transition rates is decreasing, because much more photons from laser beam are used for overcoming the binding energy in the ion for greater  $Z$ . Therefore there is much less photons which could increase the momentum of ejected electrons, which can be seen from the lesser difference between corresponding curves. This is a prediction that should be tested experimentally, of course (for the linear polarization see [10]).

### 3. Final remarks

We have noticed that as  $Z$  increases, the influence of non-zero momentum of ejected electrons decreases. It is

due to the fact that more and more photons from the laser beam are used to overcome the binding energy in the multiply ionized atom, and there are lesser photons for increasing the initial momentum of ejected electrons.

Examining carefully Figs. 1–4 one can conclude that the greater  $Z$ , the lesser difference between two curves. It could be explained by the greater ionization energy needed for multiple ionized atoms, so there are less photons left to be transferred to the ejected electron, and the effect of non-zero initial momentum is damped.

Also, though maxima are at the same laser intensities, in the case of zero momentum the transition rate is greater (which can be seen especially in 2D graphs).

As mentioned earlier in the text these are predictions of the theory which should be compared with experimental results, if any (in [10] the similar procedure for linearly polarized field is strongly confirmed by the experiment). That could clarify the mechanisms of the tunnel ionization of atoms in low frequency laser fields.

### Acknowledgments

This work was supported in part by the Ministry of Science, Republic of Serbia (project 171021).

### References

- [1] V.M. Ammosov, N.B. Delone, V.P. Krainov, *Sov. Phys.-JETP* **64**, 1191 (1986).
- [2] V.M. Ristić, T.B. Miladinović, M.M. Radulović, *Laser Phys.* **18**, 1183 (2008).
- [3] N.B. Delone, V.P. Krainov, *Phys. Usp.* **41**, 469 (1998).
- [4] M. Brewczyk, M. Gajda, *J. Phys. B, At. Mol. Opt. Phys.* **21**, L383 (1988).
- [5] S. August, D. Strickland, D.D. Meyerhofer, S.L. Chin, J.H. Eberly, *Phys. Rev. Lett.* **63**, 2212 (1989).
- [6] V.P. Krainov, V.M. Ristić, *Sov. Phys.-JETP* **101**, 1479 (1992).
- [7] V.M. Ristić, T.B. Miladinović, M.M. Radulović, *Acta Phys. Pol. A* **112**, 909 (2007).
- [8] V.M. Ristić, J.M. Stevanović, *Laser Phys. Lett.* **4**, 354 (2007).
- [9] V.M. Ristić, T.B. Miladinović, M.M. Radulović, *Acta Phys. Pol. A* **116**, 504 (2009).
- [10] K. Yamakawa, Y. Akahane, Y. Ukuda, M. Aoyama, N. Inoue, H. Ueda, T. Utsumi, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 123001 (2004).
- [11] V.M. Ristić, T.S. Premović, *Kragujevac J. Sci.* **25**, 41 (2003).
- [12] D. Bauer, *Phys. Rev. A* **55**, 2180 (1997).
- [13] D. Bauer, *Theory of Laser-Matter Interaction*, Max-Planck Institute, Heidelberg 2002.

The energy at which the maximum number of photoelectrons are observed during the ionization of potassium and xenon atoms

This article has been downloaded from IOPscience. Please scroll down to see the full text article.

2012 Phys. Scr. 2012 014047

(<http://iopscience.iop.org/1402-4896/2012/T149/014047>)

View [the table of contents for this issue](#), or go to the [journal homepage](#) for more

Download details:

IP Address: 147.91.1.43

The article was downloaded on 04/05/2012 at 11:35

Please note that [terms and conditions apply](#).

# The energy at which the maximum number of photoelectrons are observed during the ionization of potassium and xenon atoms

T B Miladinović, J M Stevanović, M M Radulović and V M Ristić

Department of Physics, Faculty of Science, Kragujevac University, Kragujevac, Serbia

E-mail: [tanja.miladinovic@gmail.com](mailto:tanja.miladinovic@gmail.com)

Received 22 August 2011

Accepted for publication 16 November 2011

Published 27 April 2012

Online at [stacks.iop.org/PhysScr/T149/014047](http://stacks.iop.org/PhysScr/T149/014047)

## Abstract

The two formulae for the energy at which the maximum number of ejected photoelectrons are detected are examined in this paper; one formula is  $E_{\max}$  with non-zero momentum included in both the exponent and the pre-exponent part of the expression, and the other formula is  $E_{\max\text{App}}$ , which represents a previous formula, but approximated for higher-intensity laser fields. We examine which formula gives numerical values that are closest to the experimental values obtained in this area of research concerning tunnel ionization of K and Xe atoms by linearly polarized laser fields. It is found that the formula  $E_{\max}$  gives satisfactory results in a wide range of laser field intensities, for both atoms. For an intensity of  $4 \times 10^{12} \text{ W cm}^{-2}$ ,  $E_{\max} = 9.046 \text{ eV}$  in the case of the K atom. In the case of the Xe atom, this  $E_{\max}$  value occurs at an intensity of  $5 \times 10^{13} \text{ W cm}^{-2}$ . In contrast, in experiments, it has been determined that this  $E_{\max}$  value occurs at an intensity of  $7.5 \times 10^{13} \text{ W cm}^{-2}$ . The formula for  $E_{\max\text{App}}$  is applicable for higher laser intensities; it is consistent with the formula for  $E_{\max}$  in a range of field intensities  $10^{15} - 10^{16} \text{ W cm}^{-2}$ .

PACS numbers: 32.80.-t, 32.80.Fb, 32.80.Rm

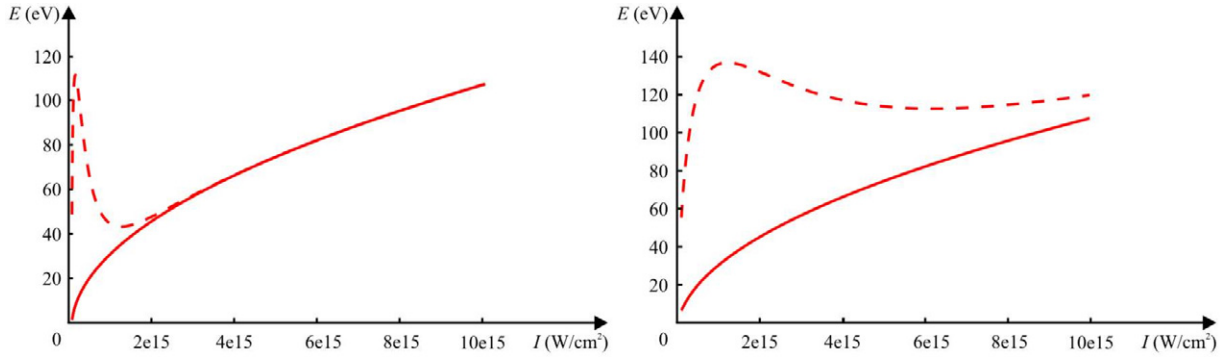
(Some figures may appear in colour only in the online journal)

## 1. Introduction

In an intense laser field, the potential barrier of an atom is distorted considerably. As the intensity increases, the length of the barrier that electrons have to pass through decreases and the electrons can escape from the atom easily. This process is known as tunnelling ionization, and analytic expressions exist for tunnelling rates of atoms [1–4] and for the energy and angular electron spectra in a strong low-frequency laser field [5–9]. In particular, the energy spectra of electrons in the tunnelling ionization of atoms and ions of xenon and potassium by the radiation of a carbon dioxide laser have been studied experimentally and theoretically [4], and it was found that the Ammosov, Delone and Krainov (ADK) theory [2, 3] fits the data very well.

The regime in which tunnelling ionization takes place is determined by the smallness of the Keldysh parameter [1] (atomic units are used throughout this paper),  $\gamma = \omega\sqrt{2E_i}/F \ll 1$ , where  $E_i$  is the atomic ionization potential and  $\omega$  angular laser frequency. In this limit an analytical expression for the total ionization rate of atoms and positive ions was found in [2], and in [10] it was corrected (for non-zero initial value of ejected electron linear momentum  $p$ ) in the following form:

$$W_{\text{ADK}}^p = \left(\frac{3e}{\pi}\right)^{3/2} \frac{Z^2}{n^{*9/2}} \left(\frac{16eE_i^2}{FZ}\right)^{2n^{*-3/2}} \times e^{-\frac{2(2E_i)^{3/2}}{3F} - \frac{\gamma^3}{3\omega} p^2}, \quad (1)$$



**Figure 1.**  $E_{\max}$  and  $E_{\max\text{App}}$  of the maximum number of ejected electrons for the potassium atom:  $E_i^K = 4.3407$  eV; the solid line represents  $E_{\max}$  and the dashed line represents  $E_{\max\text{App}}$ .

where  $n^* = Z/\sqrt{2E_i}$  is effective quantum number,  $Z$  is the charge number and  $e = 2.718\ 28$ ; the term  $p^2 \gamma^3 / 3\omega$  determines to what extent the transition rate depends on the kinetic energy of ejected electrons [11].

It was also assumed that the spatiotemporal distribution of laser radiation has a Gaussian form

$$F(\rho, t) = F e^{-\frac{\rho^2}{2R^2} - \frac{t^2}{2t_1^2}} \quad (2)$$

where  $\rho$  represents the axial cylindrical coordinate (in the direction perpendicular to the propagation of the laser beam),  $R$  is the radius of the laser beam,  $t$  is the emerging time of the ejected electron,  $t_1$  is the laser pulse duration and  $F$  is the amplitude of laser field strength.

## 2. The formula for the energy at which the maximum number of ejected photoelectrons are observed

In order to compare our results with experiments, we need to calculate the theoretically expected value of the energy at which the maximum number of ionized electrons is observed.

To this end, we substitute (2) into (1) and perform some transformations, obtaining

$$W_{\text{ADK}}^{p\text{ Gauss}} = \left(\frac{3e}{\pi}\right)^{3/2} \frac{Z^2}{n^{*9/2}} \left(\frac{16eE_i^2}{FZ}\right)^{2n^*-3/2} e^{-\frac{2(2E_i)^{3/2}}{3F}} \times e^{\left[\frac{2n^*-3/2}{2} - \frac{(2E_i)^{3/2}}{3F}\right] \left(\frac{\rho^2}{R^2} + \frac{t^2}{t_1^2}\right) - \frac{\gamma^3 p^2}{3\omega}} \quad (3)$$

Taking into account formula (1) and the fact that the first term can be neglected, because  $(2n^* - 3/2)/2 \ll (2E_i)^{3/2}/3F$ , it follows that

$$W_{\text{ADK}}^{p\text{ Gauss}} = W_{\text{ADK}} e^{-\frac{(2E_i)^{3/2}}{3F} \left(\frac{\rho^2}{R^2} + \frac{t^2}{t_1^2}\right) - \frac{\gamma^3 p^2}{3\omega}} \quad (4)$$

If the saturation effect of ionization is included [10, 11], then a focal radius  $\rho$  can be determined to a high degree of accuracy from the condition

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_{\text{ADK}}^{p\text{ Gauss}}(\rho) dt = 1. \quad (5)$$

After substituting (4) into (5), the following formula is obtained:

$$W_{\text{ADK}} e^{-\frac{(2E_i)^{3/2}}{3F} \frac{\rho^2}{R^2} - \frac{\gamma^3 p^2}{3\omega}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(2E_i)^{3/2}}{3F} \frac{t^2}{t_1^2}} dt = 1. \quad (6)$$

The solution of Poisson's integral is  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta x^2} dx = \sqrt{\pi/\beta}$ , so after integrating (6), it follows that

$$W_{\text{ADK}} e^{-\frac{(2E_i)^{3/2}}{3F} \frac{\rho^2}{R^2} - \frac{\gamma^3 p^2}{3\omega}} \sqrt{\pi \frac{3F t_1^2}{(2E_i)^{3/2}}} = 1. \quad (7)$$

From (7),  $\rho$  can be obtained; it represents the radius of the region where saturation of the ionization probability occurs: inside the region all atoms are ionized, while outside it none are ionized:

$$\rho^2 = \frac{3FR^2}{(2E_i)^{3/2}} \left[ \ln \left( W_{\text{ADK}} t_1 \sqrt{\pi \frac{3F}{(2E_i)^{3/2}}} \right) - \frac{\gamma^3 p^2}{3\omega} \right]. \quad (8)$$

The formula for the final energy of ejected electrons can be simplified by taking into account the condition  $t \sim t_1 \sqrt{3F/(2E_i)^{3/2}} \ll t_1$ ; the following is obtained:

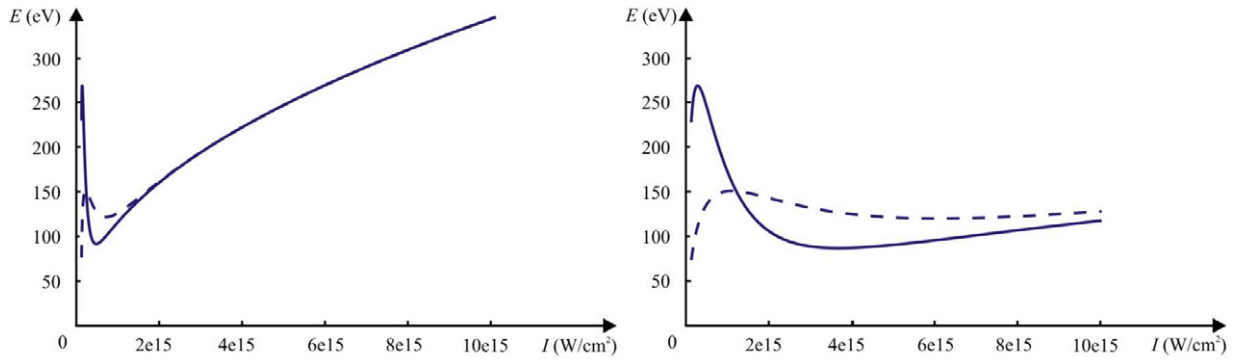
$$E = \frac{p^2}{2} + \frac{F^2}{4\omega^2} e^{-\frac{\rho^2}{R^2}}. \quad (9)$$

After substituting (8) into formula (9) for the final energy of ejected electrons, one obtains

$$E_{\max} = \frac{p^2}{2} + \frac{F^2}{4\omega^2} \left( W_{\text{ADK}} t_1 \sqrt{\pi \frac{3F}{(2E_i)^{3/2}}} \right)^{-\frac{3F}{(2E_i)^{3/2}}} e^{-\frac{\gamma^3 p^2 F}{\omega(2E_i)^{3/2}}}. \quad (10)$$

When the strength of the laser field is equal to the atomic field strength:  $F = F_{\text{at}}$ , the formula for ionization rate (1) is approximated, according to the condition  $2(2E_i)^{3/2}/3F = 1$ , with the formula

$$W_{\text{ADK}}^{\text{sf}} = \left(\frac{3e}{\pi}\right)^{3/2} \frac{Z^2}{n^{*9/2}} \left(\frac{16eE_i^2}{FZ}\right)^{2n^*-3/2} e^{-1}, \quad (11)$$



**Figure 2.**  $E_{\max}$  and  $E_{\max\text{App}}$  of the maximal number of ejected electrons for the xenon atom:  $E_i^{\text{Xe}} = 12.5$  eV; the solid line represents  $E_{\max}$  and the dashed line represents  $E_{\max\text{App}}$ .

while the formula for the energy at which the maximum number of ionized electrons are observed becomes

$$E_{\max\text{App}} = \frac{p^2}{2} + \frac{F^2}{4\omega^2} \left( W_{\text{ADK}}^{\text{sf}} t_1 \sqrt{\pi \frac{2F}{F_{\text{at}}}} \right)^{-\frac{2F}{F_{\text{at}}}} e^{-\frac{2\gamma^3 p^2 F}{3\omega F_{\text{at}}}}. \quad (12)$$

Note that in the atomic units system, the strength of an atomic field is set equal to 1. This was used for figures 1 and 2.

Formulae (10) and (12) will now be compared in order to see which one better describes the experimental results concerning tunnelling ionization.

### 3. The energy at which the maximum number of ejected photoelectrons of potassium and xenon atoms are observed

We now examine which of the two formulae (10) and (12) gives numerical values that best describe experimental results obtained during the tunnelling ionization of potassium and xenon atoms. Both the cases when medium and high laser intensities were applied were analysed. Therefore, the range of laser intensities  $10^{13}$ – $10^{16}$   $\text{W cm}^{-2}$  is examined.

The formula for  $E_{\max}$  gives results that are in good agreement with the experimental ones in a broad range of laser field intensities, for both atoms. The numerical value of  $E_{\max}$  for the potassium atom is in good agreement with that obtained in [5]. For a field intensity of  $4 \times 10^{12}$   $\text{W cm}^{-2}$ , that value is  $E_{\max}^{\text{K}} = 9.046$  eV.

In the case of xenon atoms, the obtained results are compared with the results of [5] in the high-energy spectrum (200 eV and higher). It is concluded that the values of kinetic energy of the ejected electrons are in good agreement with the experimental values:  $E_{\max}^{\text{Xe}} = 220$ – $270$  eV. The numerical value of the energy at which the maximum number of ionized electrons are detected is determined at an intensity of  $5 \times 10^{13}$   $\text{W cm}^{-2}$ , while in [5], it was determined at  $7.5 \times 10^{13}$   $\text{W cm}^{-2}$ .

For  $E_{\max\text{App}}$  the results are in good agreement with the results from the formula for  $E_{\max}$  only at laser

fields  $10^{15}$ – $10^{16}$   $\text{W cm}^{-2}$ ; for potassium, equivalent numerical values of energy occur at  $5 \times 10^{15}$   $\text{W cm}^{-2}$  (figure 1), while in the case of xenon that energy is determined at  $10^{15}$   $\text{W cm}^{-2}$  (figure 2). The fact that ejected electrons can have a non-zero value of initial momentum was taken into account by including it in both the exponential and the pre-exponential part of both the expressions for energy.

### 4. Conclusion

The main results of this work can be summarized as follows: compared with the experimental results, the formula for  $E_{\max}$  shows very good agreement in the case of both atoms. By including non-zero initial momentum in both the exponential and the pre-exponential part of the expressions for energy, the obtained results were  $E_{\max}^{\text{K}} = 9.046$  eV and  $E_{\max}^{\text{Xe}} = 250$  eV. We also concluded that the formula for  $E_{\max\text{App}}$  is useful in the case of strong fields (ones that are comparable with atomic field strength).

We stress that the numerical results stated above were obtained when the external field strength was small compared to the atomic field strength. However, in experiments nowadays the laser field strength can be of the order of the atomic field strength or even higher, so the formula  $E_{\max\text{App}}$  was examined in order to gain insight into its area of applicability as far as processes of tunnel ionization of atoms are concerned.

### Acknowledgment

This work has been supported in part by the Ministry of Science and Technological Development, Republic of Serbia (project 171021).

### References

- [1] Keldysh L V 1965 *Sov. Phys.—JETP* **20** 1307–14
- [2] Ammosov M V, Delone N B and Krainov V P 1986 *Sov. Phys.—JETP* **64** 1191
- [3] Krainov V P, Xiong W and Chin S L 1992 *Laser Phys.* **2** 467–74
- [4] Perelomov A M and Popov V S 1967 *Sov. Phys.—JETP* **25** 336
- [5] Xiong W and Chin S L 1991 *Sov. Phys.—JETP* **99** 481

- [6] Chin S L, Farkas G and Yergeau F 1983 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **16** L223–L226
- [7] Yergeau F, Chin S L and Lavigne P 1987 *J. Phys. B: At. Mol. Phys.* **20** 723–40
- [8] Xiong W, Yergeau F, Chin S L and Lavigne P 1998 *J. Phys B: At. Mol. Opt. Phys.* **21** L159–L164
- [9] Augst S, Strickland D, Meyerhofer D, Chin S L and Eberly J H 1989 *Phys. Rev. Lett.* **63** 2212–5
- [10] Krainov V P and Ristić V M 1992 *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **101** 1479–86
- [11] Delone N B, Kiyan I Yu and Krainov V P 1993 *Laser Phys.* **3** 312–22



# Influence of Ponderomotive Potential and NonZero Initial Momentum of Ejected Electron on Transition Rate in Multiphoton Ionization

T.B. MILADINOVIĆ\*, V.M. PETROVIĆ AND V.M. RISTIĆ

Department of Physics, Faculty of Science, Kragujevac University, Radoja Domanovića 12, Kragujevac, Serbia

(Received March 28, 2013; revised version May 14, 2013; in final form June 14, 2013)

The multiphoton ionization of neutral atoms irradiated by photons is an interesting topic for experimental and also theoretical examination. We study the influence of ponderomotive potential and non-zero initial momentum of ejected electrons on transition rate, and also on the generalized cross-section in the case of a multiphoton ionization process. Also, we study how the transition rate depends on the number of absorbed photons.

DOI: [10.12693/APhysPolA.124.658](https://doi.org/10.12693/APhysPolA.124.658)

PACS: 32.80.-t, 32.80.Fb, 32.80.Wr

## 1. Introduction

Atoms and molecules generally can be ionized by different mechanisms. Some of mechanisms are tunnel and multiphoton ionization. To distinguish these two mechanisms it is convenient to introduce the Keldysh parameter [1],  $\gamma$ . This parameter is a measure of the adiabaticity, and is also called the adiabatic parameter. For an atom (or molecule) in a linearly polarized laser field with a field frequency  $\omega$ , the Keldysh parameter is defined as  $\gamma = \frac{\omega}{eF} \sqrt{2mE_i}$ , where  $e$  is the electron charge,  $E_i$  — the ionization potential,  $m$  — the electron mass, and  $F$  is the strength of electromagnetic field. In atomic units,  $e = m = \hbar = 1$ , which are used throughout this paper, the Keldysh parameter becomes  $\gamma = \frac{\omega}{F} \sqrt{2E_i}$ . The tunneling regime occurs when the parameter  $\gamma$  has the values,  $\gamma \ll 1$ , while for values much greater than unity,  $\gamma \gg 1$ , the multiphoton regime dominates.

Since 1966, when the first multiphoton ionization experiments were performed by Voronov and Delone [2], many theoretical studies regarding different aspects of these processes were performed.

We theoretically investigated the transition rate and the generalized cross-section of an atom for the case of a multiphoton ionization process in a linearly polarized electromagnetic field by a plane wave laser field. We used a theoretical method based on the Ammosov–Delone–Krainov (ADK) theory [3]. Specifically, the influence of the ponderomotive potential and a non-zero initial momentum of an ejected electron on the aforementioned physical quantities was studied. Also, it was interesting to see how the number of absorbed photons influences the transition rate for some laser field intensities.

## 2. Theoretical framework

### 2.1. Transition rate without and with corrections

The multiphoton ionization process occurs in a strong laser field when the energy of a photon,  $h\nu$ , is not suffi-

cient to overcome the binding energy of the valence electron. The valence electron is ejected from the bound state into the continuum only if the absorbed energy is higher than its binding energy.

In the framework of perturbation theory, the transition rate for ionization by a linearly polarized plane wave field can be calculated [4]:

$$W \sim \left( \frac{F^2 e}{8\omega^2 E_i} \right)^{E_i/\omega}. \quad (1)$$

Here, it is assumed that the ponderomotive potential and the initial momentum of ejected electron were zero. In order to obtain more precise results for transition rates, it is necessary to improve the aforementioned formula (Eq. (1)).

First, we take into account the influence of the ponderomotive potential on the transition rate. The ponderomotive potential is time averaged kinetic energy of free electron oscillations in a laser field. The presence of the ponderomotive potential causes an increase of the ionization potential which means that more photons or a stronger laser field is necessary for the ionization process to occur.

When in the above expression we include the ponderomotive potential  $U_p$ :

$$U_p = \frac{F^2}{4\omega^2}, \quad (2)$$

it obtains the following form:

$$W_{U_p} \sim \left( \frac{F^2 e}{8\omega^2 \left( E_i + \frac{F^2}{4\omega^2} \right)} \right)^{\frac{E_i + \frac{F^2}{4\omega^2}}{\omega}}, \quad (3)$$

where  $W_{U_p}$  denotes the transition rate with the included ponderomotive potential.

Next, we consider the influence of a non-zero initial momentum of ejected electron on the transition rate. It is commonly assumed that the aforementioned momentum is equal to zero. But we find that the inclusion of non-zero initial momentum has an influence on transition rate.

In paper [5], the expression for the transition rate when the non-zero initial momentum of ejected electron is in-

\*corresponding author; e-mail: [tanja.miladinovic@gmail.com](mailto:tanja.miladinovic@gmail.com)

cluded,  $W_p$ , was derived

$$W_p \sim \left( \frac{F^2 e}{4\omega^2 p^2} \right)^{p^2/2\omega} \quad (4)$$

In order to generalize this expression, we need a formula for momentum expressed by known parameters such as  $\omega$ ,  $E_i$ , and  $F$ .

Let us recall that the energy conservation law [6] is

$$K\omega = E_i + U_p + E_k, \quad (5)$$

where  $E_k$  is the kinetic energy of an ejected electron whereas  $K$  is the number of absorbed photons

$$K = \left\langle \frac{E_i}{\omega} + 1 \right\rangle; \quad (6)$$

here, the brackets  $\langle \dots \rangle$  mean the integer quotient of the number. It follows from Eq. (5) that the momentum,  $p$ , is

$$p = \sqrt{2 \left( K\omega - E_i - \frac{F^2}{4\omega^2} \right)}. \quad (7)$$

An improved form of the formula for multiphoton ionization rate is obtained by combining Eq. (4) and Eq. (7):

$$W_p \sim \left( \frac{F^2 e}{8\omega^2 \left( K\omega - E_i - \frac{F^2}{4\omega^2} \right)} \right)^{\left( K\omega - E_i - \frac{F^2}{4\omega^2} \right)/\omega} \quad (8)$$

### 2.2. Generalized cross-section

Multiphoton ionization process also can be described by a generalized cross-section:

$$W_K = \sigma_K I^K, \quad (9)$$

where  $\sigma_K$  is the  $K$ -photon generalized ionization cross-section and  $I$  is the laser intensity.

Equation (9) presents the basic relation between transition rate and generalized cross-section. This dependence can also be expressed through the formula for a generalized cross-section [7] given in the following form:

$$\sigma_K = \frac{8\pi\omega W_K}{cF^2}. \quad (10)$$

Based on this equation we considered three cases of a generalized cross-section,  $\sigma = \frac{8\pi\omega W}{cF^2}$ ,  $\sigma_{U_p} = \frac{8\pi\omega W_{U_p}}{cF^2}$  and  $\sigma_p = \frac{8\pi\omega W_p}{cF^2}$  expressed by transition rates defined in the text above, i.e. using Eq. (1), (3), and (8), respectively.

## 3. Discussion

In this paper we observed how transition rates and generalized cross-sections depend on the laser field intensity. We have also discussed the influence of the ponderomotive potential and initial momentum of ejected electron on the behavior of these two quantities.

Calculations were performed for atoms of the noble gas Ar. Atoms are ionized by a laser of 800 nm wavelength. The laser field was linearly polarized and intensity regime was between  $5 \times 10^{11}$  and  $3 \times 10^{13}$  W/cm<sup>2</sup>. We used this intensity range because, for these intensities, the multiphoton ionization process is dominant. All graphs correspond to the particular value of  $K$ , i.e. to

the minimal number of photons required for ionization process.

Let us first analyze the transition rate without any corrections (Eq. (1)) as a function of laser field intensity. This dependence is shown in Fig. 1.

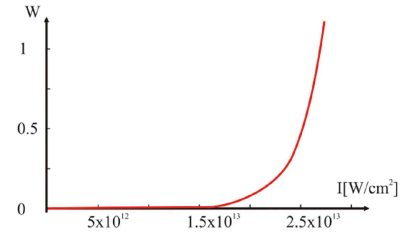


Fig. 1. The ionization rate,  $W$ , as a function of the laser field intensity,  $I$ .

The main conclusion that follows from this graph is that the transition rate does not have the expected Gaussian distribution form [8]. The reason for this deviation is that we neglected some of the quantities. So we included the ponderomotive potential in the formula for the transition rate. Based on the improved formula (Eq. (3)) Fig. 2 is obtained.

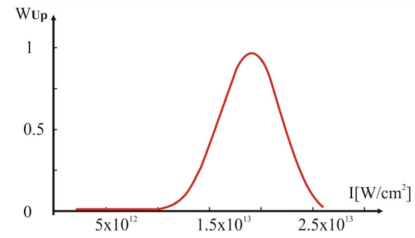


Fig. 2. The ionization rate,  $W_{U_p}$ , versus the field intensity,  $I$ .

The dependence shown in Fig. 2 has a Gaussian form. It is easily noticeable that ionization probability is increasing (for certain values of the external field) and decreasing, when the external field is higher. The maximal value of transition rate is for  $I = 1.9 \times 10^{13}$  W/cm<sup>2</sup>.

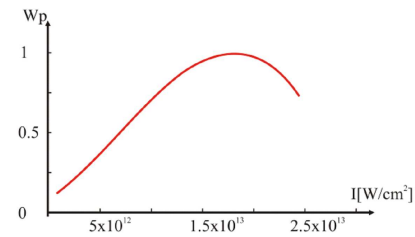


Fig. 3. The transition rate,  $W_p$ , with the non-zero initial momentum and the ponderomotive potential corrections included.

In Fig. 3, we show the transition rate with both the ponderomotive potential and the initial momentum of

an ejected electron included as a function of the driving field intensity.

In this case the maximal value of probability is for  $I = 1.95 \times 10^{13} \text{ W/cm}^2$ .

By comparing this value with the value for the case when there is only the ponderomotive potential included, we can see that this maximal value is moved to the right a bit, i.e. to higher values of laser intensity. This shift occurs because part of the laser field energy is used to overcome ponderomotive potential, leaving smaller amounts of light energy available for ionization of remaining electrons.

Next, we give a short note about the behavior of the generalized cross-section. We considered the case without corrections of the transition rate and for the cases when the corrections are involved. As the result we obtained Fig. 4.

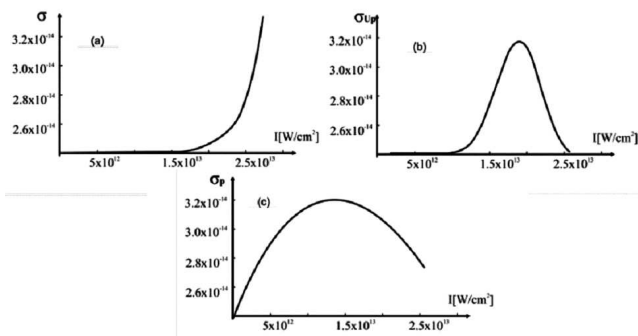


Fig. 4. Generalized cross-section when we used transition rate (a) without corrections,  $W$ , (b) with correction for ponderomotive potential,  $W_{UP}$ , (c) with correction for non-zero initial momentum,  $W_P$ .

It follows from this figure that the behavior of the generalized cross-section is in complete accordance with the behavior of the transition rate for the same conditions.

As we already noted it is interesting to see how the number of absorbed photons influences the transition rate. Also, in Fig. 5b, we show how the transition rate changes as a function of the number of absorbed photons and the laser field intensity.

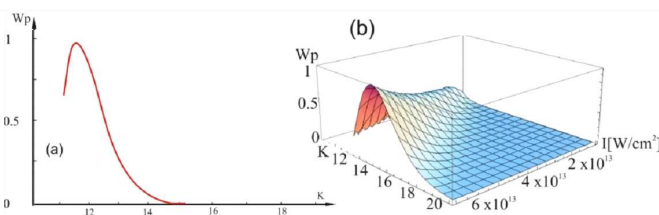


Fig. 5. (a) Dependence of the transition rate on the number of absorbed photons for  $I$  fixed at  $2 \times 10^{13} \text{ W/cm}^2$ , (b) dependence of the transition rate on the number of absorbed photons and the laser field intensity.

In Fig. 5, it can be clearly seen that the transition rate is equal to zero when the number of absorbed photons is less than 11 because this is the minimum number of photons required (see Eq. (6)) for the ionization of an electron in a valence shell of Ar. When the number of absorbed photons increases, then the transition rate increases, until some maximal value, and after that decreases, keeping a constant value and asymptotically approaching the axis.

Figure 5b shows that the transition rate and the number of absorbed photons increase with an increasing laser field intensity.

#### 4. Conclusion

In summary, we have studied the transition rate and the generalized cross-section for the multiphoton ionization process of an argon atom exposed to a linearly polarized laser field.

As mentioned earlier, it was often assumed that ponderomotive potential is negligible and that ejected electrons are leaving the atom with zero initial momentum. These assumptions forced us to examine the influence on transition rate of the multiphoton ionization. Our observations have shown that the maximum of the transition rate moves to the right, i.e. to higher values of laser field intensity, when the respective corrections are taken into account. One more reason for the study of transition rates is because the transition rate and the ion yield are in direct proportion. The fact is that the ion yield is more often measured in experiments and examination of transition rates can give useful information when analyzing the experimental results [9].

#### Acknowledgments

We are grateful to the Serbian Ministry of Education and Science for financial support through projects 171020 and 171021.

#### References

- [1] L.V. Keldysh, *Sov. Phys. JETP* **20**, 1307 (1965).
- [2] G.S. Voronov, N.B. Delone, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **50**, 78 (1966); *Sov. Phys. JETP* **23**, 54 (1966).
- [3] V.M. Ammosov, N.B. Delone, V.P. Krainov, *Sov. Phys. JETP* **64**, 1191 (1986).
- [4] V. Ristić, Ph.D. Thesis, Kragujevac University, Moscow-Kragujevac 1991.
- [5] D.I. Bondar, *Phys. Rev. A* **78**, 015405 (2008).
- [6] N.B. Delone, V.P. Krainov, *Physics-Usp.* **41**, 469 (1998).
- [7] N.B. Delone, V.P. Krainov, in: *Multiphoton Processes in Atoms*, 2nd ed., Springer, New York 2000.
- [8] N.B. Delone, V.P. Krainov, *Physics-Usp.* **38**, 1247 (1995).
- [9] M.D. Perry, O.L. Landen, A. Szöke, E.M. Campbell, *Phys. Rev. A* **37**, 747 (1988).