УНИВЕРЗИТЕТ У КРАГУЈЕВЦУ
ПРИРОДНО–МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Татјана Томовић

АНАЛИЗА И ПРИМЕНЕ КВАДРАТУРНИХ ФОРМУЛА ГАУСОВОГ ТИПА ЗА ТРИГОНОМЕТРИЈСКЕ ПОЛИНОМЕ

Докторска дисертација

Крагујевац, 2014.

ИДЕНТИФИКАЦИОНА СТРАНИЦА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

I. Аутор
Име и презиме: Татјана Томовић
Датум и место рођења: 30.06.1984. Нови Пазар
Садашње запослење: асистент на Природно–математичком факултету, Универзитет у Крагујевцу
II. Докторска дисертација
Наслов: Анализа и примене квадратурних формула Гаусовог типа за тригонометријске полиноме
Број страница: 119
Број слика: –
Број библиографских података: 75
Установа и место где је рад израђен: Природно–математички факултет, Универзитет у Крагујевцу
Научна област (УДК): Математика (Нумеричка анализа, УДК 51)
Ментор: др Марија Станић
III. Оцена и одбрана
Датум пријаве теме: 13.02.2013.
Број одлуке и датум прихватања докторске дисертације:
Комисија за оцену подобности теме и кандидата: академик др Градимир В. Миловановић–редовни професор Математичког института САНУ у Београду др Александар С. Цветковић–ванредни професор Машинског факултета у Београду др Дејан Р. Бојовић–ванредни професор Природно–математичког факултета у Крагујевцу др Марија П. Станић–ванредни професор Природно–математичког факултета у Крагујевцу
Комисија за оцену и одбрану докторске дисертације: академик др Градимир В. Миловановић–редовни професор Математичког института САНУ у Београду др Александар С. Цветковић–редовни професор Машинског факултета у Београду др Дејан Р. Бојовић–ванредни професор Природно–математичког факултета у Крагујевцу др Марија П. Станић–ванредни професор Природно–математичког факултета у Крагујевцу
Датум одбране дисертације:

Садржај

Листа табела

Предговор

Ова докторска дисертација је проистекла као резултат вишегодишњег рада под менторством др Марије Станић, ванредног професора на Природно–математичком факултету Универзитета у Крагујевцу. Тема истраживања докторске дисертације су квадратурне формуле Гаусовог[1] типа које представљају важан део Нумеричке интеграције, која је део Нумеричке анализе. Са друге стране област истраживања је повезана и са Теоријом ортогоналних система што је део Теорије апроксимација.

У периоду од 2008. до 2010. године резултати овог истраживања обављени су у оквиру пројекта под називом „Ортогонални полиноми и примене”(#144004), финансираног од стране Министарства науке Републике Србије, под руководством академика Градимира В. Миловановића, а затим од 2011. године у оквиру пројекта „Апроксимација интегралних и диференцијалних оператора и примене”(#174015), који финансира Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије, под руководством академика Градимира В. Миловановића. У том периоду публиковано је неколико радова [61]–[64] у којима су детаљно изучавани остаци квадратурних формула за тригонометријске полиноме. Концепт вишеструке ортогоналности у просторима тригонометријских полинома полу–целобројног степена ће бити публикован у раду [65], а такође је део ове докторске дисертације.

Познате квадратурне формуле Гаусовог типа, које имају максималан алгебарски степен тачности, изучавају се скоро два века. Такође, током тог периода добијене су различите генерализације и уопштења. Један вид генерализације су квадратурне формуле Гаусовог типа са максималним степеном тачности у неком линеарном простору, различитом од простора алгебарских полинома. Такав пример су квадратурне формуле Гаусовог типа са максималним тригонометријским степеном тачности, односно квадратурне формуле Гаусовог типа за тригонометријске полиноме. Први радови у тој области публиковани су од стране руских математичара Турецког[2] и Мисовског[3]. Последњих седам година професори Г. В. Миловановић, А. С. Цветковић и М. П. Станић

[1] Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855), немачки математичар
[2] Abram Haimovich Turetzkii (1905–1975), руски математичар
[3] Ivan Petrovich Mysovskikh (1921–2007), руски математичар

су интезивно проучавали тригонометријске полиноме полу–целобројног степена и њихову примену на конструкцију квадратурних формула максималног тригонометријског степена тачности. Проблеми који до сада нису разматрани односе се на оцене остатака ових квадратурних формула.

Предмет ове дисертације је анализа квадратурних формула Гаусовог типа за тригонометријске полиноме и њихове примене, а посебна пажња је посвећена оцени остатака таквих квадратурних формула. Један део дисертације је посвећен и оптималним скуповима квадратурних формула за тригонометријске полиноме и, са тим у вези, вишеструко ортогоналним тригонометријским полиномима полу–целобројног степена. Дисертација је организована на следећи начин.

Прва глава је уводног карактера. У њој је дат кратак преглед основних резултата о Гаусовим квадратурним формулама за алгебарске полиноме. Посебно су истакнути резултати добијени за оцену остатка тих квадратурних формула који ће бити коришћени у осталим поглављима. На крају поглавља је дата генерализација на квадратурне формуле за неполиномске функције.

У другој глави су представљени резултати о тригонометријским полиномима полу–целобројног и целобројног степена, као и нумерички метод за њихову конструкцију. Одговарајуће квадратурне формуле Гаусовог типа са максималним тригонометријским степеном тачности анализиране су у трећој глави. Посебно су, у поглављима 3.1 и 3.2, посматране квадратурне формуле за непарним, односно, парним бројем чворова, респективно. Наведени су и нумерички методи за њихову конструкцију, базирани на датим особинама тригонометријских полинома полу–целобројног и целобројног степена. У оба случаја (паран и непаран број чворова) посебно су посматране квадратурне формуле са парном тежинском функцијом и веза са одговарајућим Гаусовим квадратурним формулама за алгебарске полиноме.

У четвртој глави су дати резултати оцене остатака квадратурних формула Гаусовог типа за тригонометријске полиноме. У поглављу 4.1 су дате оцене остатака Гаусових квадратурних формула за тригонометријске полиноме са непарним бројем чворова за 2π–периодичне функције, аналитичке на одређеној области комплексне равни (унутрашњост кружнице око интервала $[-1,1]$ са центром у координатном почетку) у односу на тежинске функције $w(x)=1$, $x\in[0,2\pi)$, као и $w(x)=1+\cos x$ и $w(x)=1-\cos x$, $x\in[-\pi,\pi)$. За неке парне тежинске функције добијене су оцене остатака Гаусових квадратурних формула за тригонометријске полиноме у случају парног и непарног броја чворова за функције аналитичке на одређеној области комплексне равни (унутрашњост кружнице и елипсе). Ти резултати су дати у поглављу 4.2. Такође су наведени и нумерички примери, као илустрација неких од добијених резултата.

Пета глава је посвећена појму вишеструке ортогоналности. На почетку је дат преглед најважнијих резултата о вишеструко ортогоналним алгебарским полиномима. Затим је у поглављу 5.2 уведен појам вишеструко ортогоналних тригонометријских полинома полу–целобројног степена, дате су и основне особине, као и рекурентне релације у случају парних тежинских функција. На крају је дата карактеризација оптималног скупа квадратурних формула које имају тригонометријски степен тачности (поглавље 5.4) уз нумеричке примере.

Најважнији допринос аутора у овој дисертацији огледа се у следећим резултатима:

- оцена остатака Гаусових квадратурних формула за тригонометријске полиноме са непарним бројем чворова за функције аналитичке на одређеном делу комплексне равни у односу на јединичну тежинску функцију, тежинску функцију $1-\cos x$ и $1+\cos x$, $x \in [-\pi, \pi)$ (теореме 4.1, 4.2 и 4.3, према резултатима радова [63], [61]);
- оцена остатака Гаусових квадратурних формула за тригонометријске полиноме са парним и непарним бројем чворова за функције аналитичке на одређеном делу комплексне равни у односу на неке парне тежинске функције на интервалу $(-\pi, \pi)$ (поглавље 4.2 према резултатима рада [64]);
- оцена остатака Гаусових квадратурних формула за тригонометријске полиноме са парним и непарним бројем чворова за функције аналитичке на одређеном делу комплексне равни у односу на парне тежинске функције на интервалу $[-\pi, \pi)$ које се своде на Чебишевљеве[4] (према резултатима рада [64]) и Гегенбауерове[5] тежинске функције (одељак 4.2.2);
- концепт вишеструко ортогоналних тригонометријских полинома полу–целобројног степена, као и рекурентне релације за њихову конструкцију у случају парних тежинских функција (поглавља 5.2 и 5.3, редом, базирана на раду [65]);
- дефиниција и карактеризација оптималних скупова квадратурних формула за периодичне интегранде (поглавље 5.4 базирано на раду [65]).

[4] Pafnuty Lvovich Chebyshev (1821–1894), руски математичар
[5] Leopold Bernhard Gegenbauer (1849–1903), аустријски математичар

***

Овом приликом посебно се захваљујем свом ментору др Марији Станић на стручној помоћи и великој подршци коју ми је свакодневно пружала од почетка наше сарадње. Захвалност дугујем и професору Александру Цветковићу на сарадњи која ми је значајно помогла у разумевању читаве области. Желим да се захвалим академику Градимиру В. Миловановићу на пројектима под његовим руководством.

На крају, најискреније се захваљујем својој породици, пријатељима и мени драгим људима који су од првог дана веровали у мене, на стрпљењу, пожртвованости и љубави које су ми несебично пружали свих ових година.

Крагујевац, 08.01.2014. Татјана Томовић

„*Математика – то је језик којим говоре све природне науке. Не постоји математичка област, ма како она апстрактна била, која се не би могла применити на појаве реалног света.*”

— Николај Лобачевски —

Глава 1

Увод

Одређени интеграл представља један од најзначајнијих објеката математичке анализе. Израчунавање многих физичких величина (површина, запремина, дужина пређеног пута, момент инерције,...) своди се управо на проблем израчунавања одређеног интеграла дате функције. С друге стране, познато је да одређени интеграл, у општем случају, није могуће тачно израчунати, па приближно израчунавање одређеног интеграла представља један од важних проблема нумеричке анализе. Нумеричка интеграција функција састоји се у приближном израчунавању одређених интеграла. Почеци нумеричке интеграције срећу се још у античком периоду. Један пример античке нумеричке интеграције је Грчка квадратура круга, односно израчунавање површине круга коришћењем уписаних и описаних правилних многоуглова. Тај процес је омогућио Архимеду[1] да дође до доње и горње границе броја π. Током векова, посебно у периоду од XVI века, развијени су многи методи нумеричке интеграције (видети, на пример [46] и [11]).

Нумеричком интеграцијом функција добијају се приближне вредности одређених интеграла на основу низа вредности подинтегралне функције по одређеној формули. Формуле за нумеричко израчунавање једноструких интеграла називају се квадратурне формуле, за израчунавање двоструких интеграла кубатурне формуле итд. У даљем тексту бавићемо се само квадратурним формулама.

Потреба за нумеричком интеграцијом јавља се у великом броју случајева. Наиме, Њутн[2]–Лајбницова[3] формула

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a),$$

[1] Archimedes (287–212 п. н. е.), грчки математичар
[2] Isaac Newton (1642–1727), британски математичар
[3] Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716), немачки математичар

где је F примитивна функција за функцију f, не може се увек успешно применити. Навешћемо неке од тих случајева:

- функција F се не може представити помоћу коначног броја елементарних функција (на пример, када је $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$);
- примена Њутн–Лајбницове формуле често доводи до врло сложеног израза, чак и код израчунавања интеграла једноставних функција, као на пример:

$$\begin{aligned}\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} =& \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{a^2 + a\sqrt{2} + 1}{a^2 - a\sqrt{2} + 1} \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\operatorname{arctg} \frac{a}{\sqrt{2} - a} + \operatorname{arctg} \frac{a}{\sqrt{2} + a} \right);\end{aligned}$$

- код интеграције функција, чије су вредности познате само на дискретном скупу тачака.

1.1 Квадратурне формуле Гаусовог типа за алгебарске полиноме

У овом поглављу ћемо дати преглед основних резултата везаних за квадратурне формуле Гаусовог типа за алгебарске полиноме. Притом, ограничићемо се само на оне резултате који су нам неопходни за даље излагање, као и за упоређивање са квадратурним формулама за тригонометријске полиноме које ће бити детаљно анализиране у глави 3. Више детаља о Гаусовим квадратурним формулама за алгебарске полиноме се може наћи у [10], [2], [20], [13], [14], [21], [33], [16], итд.

Са $\mathcal{P}$ ћемо обележавати скуп свих реалних полинома, а са $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}$, $n \in \mathbb{N}_0$, скуп свих полинома степена не вишег од n.

Нека је тежинска функција $\widetilde{w}(x)$ интеграбилна и ненегативна на интервалу $[a, b)$, таква да може имати вредност нула само на скупу мере нула. Квадратурна формула са n тачака је формула облика

$$\int_a^b f(x)\, \widetilde{w}(x)\, \mathrm{d}x = \sum_{\nu=1}^{n} \sigma_\nu f(\tau_\nu) + \widetilde{R}_n(\widetilde{w}; f), \tag{1.1}$$

где збир

$$Q_n(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \sigma_\nu f(\tau_\nu)$$

представља апроксимацију интеграла $\int_a^b f(x)\,\widetilde{w}(x)\,\mathrm{d}x$, а $\widetilde{R}_n(\widetilde{w};f)$ је одговарајући остатак. Остатак квадратурне формуле је грешка која настаје апроксимацијом интеграла одговарајућом сумом. Тачке $\tau_\nu(\in[a,b))$, $\nu=1,2,\ldots,n$, се називају чворови, а σ_ν, $\nu=1,2,\ldots,n$, тежине квадратурне формуле.

Квадратурна формула (1.1) има алгебарски степен тачности d ако за све полиноме $p\in\mathcal{P}_d$ важи $\widetilde{R}_n(\widetilde{w};p)=0$ и постоји полином $q\in\mathcal{P}_{d+1}$ такав да је $\widetilde{R}_n(\widetilde{w};q)\neq 0$.

Један од начина за конструкцију квадратурних формула је да се чворови унапред фиксирају, а да се затим тежине одреде из услова максималног алгебарског степена тачности. Ако се у том поступку примењује интерполациони полином, онда се такве формуле називају квадратурне формуле интерполационог типа. Природно се дошло на идеју да се чворови не фиксирају унапред него да се одређују тако да се алгебарски степен тачности повећа. За квадратурну формулу са n тачака максималан алгебарски степен тачности је $2n-1$, и тада се квадратурна формула назива *Гаусова квадратурна формула*.

Нека су чворови τ_ν, $\nu=1,2,\ldots,n$, унапред фиксиране тачке из интервала $[a,b)$. Тежине σ_ν, $\nu=1,2,\ldots,n$, одредићемо из услова максималне тачности квадратурне формуле. Ако τ_ν, $\nu=1,2,\ldots,n$, узмемо за чворове интерполације може се конструисати Лагранжов[4] интерполациони полином

$$p_n(x)=\sum_{\nu=0}^{n} f(\tau_\nu)\ell_\nu(x), \tag{1.2}$$

где је

$$\ell_\nu(x)=\prod_{\substack{k=1\\k\neq\nu}}^{n}\frac{x-\tau_k}{\tau_\nu-\tau_k}.$$

Множећи (1.2) са $\widetilde{w}(x)$ и интеграцијом на интервалу $[a,b)$, добијамо да су тежине квадратурне формуле (1.1) дате са

$$\sigma_\nu=\int_a^b\prod_{\substack{k=1\\k\neq\nu}}^{n}\frac{x-\tau_k}{\tau_\nu-\tau_k}\,\widetilde{w}(x)\,\mathrm{d}x,\qquad \nu=1,2,\ldots,n. \tag{1.3}$$

Тако добијена квадратурна формула је интерполационог типа и има алгебарски степен тачности $n-1$.

Алгебарски степен тачности се може повећати ако чворови квадратурне формуле нису фиксирани унапред већ се одређују из услова максималног алгебарског степена тачности, тј. из услова да је квадратурна формула тачна за све полиноме степена $2n-1$, и то су квадратурне формуле Гаусовог типа. Међутим, из услова да је квадратурна формула тачна за све полиноме степена $2n-1$ добијамо нелинеаран систем $2n$ једначина за одређивање $2n$ непознатих

[4] Joseph–Louis Lagrange (1736–1813), италијанско–француски математичар

(n чворова и n тежина квадратурне формуле), који у општем случају није једноставан за решавање. Зато су анализирани полиноми чије су нуле чворови квадратурне формуле, и добијен је фундаментални резултат за конструкцију Гаусових квадратурних формула. Квадратурна формула (1.1), где су тежине σ_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, дате са (1.3), је Гаусова квадратурна формула ако и само ако су чворови $\tau_\nu (\in [a, b))$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, нуле ортогоналног полинома степена n у односу на тежинску функцију $\widetilde{w}(x)$.

Својство ортогоналних полинома да задовољавају трочлану рекурентну релацију је најзначајнија информација за конструкцију ортогоналних полинома.

Теорема 1.1. *Систем моничних ортогоналних полинома $\{\pi_k\}$ задовољава трочлану рекурентну релацију*

$$\pi_{k+1}(t) = (t - \alpha_k)\pi_k(t) - \beta_k \pi_{k-1}(t), \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad \pi_{-1}(t) = 0, \quad \pi_1(t) = 1,$$

где је

$$\alpha_k = \frac{(t\pi_k, \pi_k)_{\widetilde{w}}}{(\pi_k, \pi_k)_{\widetilde{w}}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\beta_k = \frac{(\pi_k, \pi_k)_{\widetilde{w}}}{(\pi_{k-1}, \pi_{k-1})_{\widetilde{w}}}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

и скаларни производ је дат са $(f, g)_{\widetilde{w}} = \int_a^b f(x) g(x)\, \widetilde{w}(x)\, \mathrm{d}x$, $f, g \in \mathcal{P}$.

Доказ теореме 1.1 може се наћи готово у свим књигама које се баве ортогоналним полиномима (на пример [32], [4], [16], [31]).

За неке тежинске функције добијене су експлицитне формуле за одговарајуће ортогоналне полиноме и њихове нуле. Издвојићемо Чебишевљеве полиноме због примене у глави 4, као и њиховог значаја у нумеричкој анализи. Најбољи показатељ тога је следећа реченица којом почиње књига [30]:

„Chebyshev polynomials are everywhere dense in numerical analysis."

Чебишевљеви полиноми. Чебишевљеви полиноми прве врсте су ортогонални у односу на прву Чебишевљеву тежинску функцију $1/\sqrt{1-x^2}$, $x \in (-1, 1)$, и за $|x| \leq 1$ су дати са

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

Чворови Гаусове квадратурне формуле (1.1) у односу на прву Чебишевљеву тежинску функцију, су нуле полинома $T_n(x)$, и експлицитно су дате са

$$x_k = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right), \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

а све тежине су једнаке π/n.

Друга Чебишевљева тежинска функција је облика $\sqrt{1-x^2}$, $x \in (-1, 1)$, а одговарајући ортогонални полиноми су Чебишевљеви полиноми друге врсте, који се могу записати у облику

$$U_n(x) = \frac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Нуле Чебишевљевог полинома друге врсте, тј. чворови Гаусове квадратурне формуле (1.1) у односу на другу Чебишевљеву тежинску функцију, су

$$x_k = \cos\frac{k\pi}{n+1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

а тежине су дате са

$$\sigma_k = \frac{\pi}{n+1}\sin^2\frac{k\pi}{n+1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

1.2 Оцене остатка Гаусових квадратурних формула за алгебарске полиноме

Остатак Гаусове квадратурне формуле за алгебарске полиноме је проучаван деценијама уназад. У овом поглављу ћемо дати кратак преглед неких резултата, а за детаљније изучавање читаоце упућујемо на [10], [66], [3], [27], [18], [19], [17], [23], [54], [24], [42], [60], [67], [51].

Посматраћемо Гаусове квадратурне формуле облика

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, w(x)\, \mathrm{d}x = \sum_{\nu=1}^{n} \sigma_\nu f(\tau_\nu) + \widetilde{R}_n(\widetilde{w}; f). \tag{1.4}$$

Остатак квадратурне формуле $\widetilde{R}_n(\widetilde{w}; f)$ је често изражаван преко $2n$–тог извода дате функције f. У раду [10] добијена је оцена остатка квадратурне формуле (1.4) која не садржи извод функције f, при чему је коришћена чињеница да је $\widetilde{R}_n(\widetilde{w}; f)$ ограничена линеарна функционела у одговарајућем Хилбертовом[5] простору $\mathcal{H}$ аналитичких функција f. Тада, очигледна неједнакост

$$|\widetilde{R}_n(\widetilde{w}; f)| \le \delta_n \|f\|_{\mathcal{H}}, \quad \delta_n = \|\widetilde{R}_n\|,$$

може бити коришћена за оцену грешке у случају $\widetilde{w}(x) = 1$, где је $\|\widetilde{R}_n\|$ норма функционеле $\widetilde{R}_n$, и $\|f\|_{\mathcal{H}}$ норма функције f у Хилбертовом простору $\mathcal{H}$. Међутим, ова оцена остатка захтева анализу функције f у комплексној равни $\mathbb{C}$, па је зато примењива у релативно једноставнијим случајевима, где заиста можемо добити поуздане оцене. Такође, одређивање норме функционеле $\widetilde{R}_n$ може бити тешко, зависно од избора простора $\mathcal{H}$.

Рад [10] је настављен радом [22], где је посматрана квадратурна формула са еквидистантним чворовима τ_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, са нагласком на добијању општег израза за δ_n који се може једноставно израчунати.

[5] David Hilbert (1862–1943), немачки математичар

У раду [75] је такође посматран случај $\widetilde{w}(x) = 1$. За конкретну норму $\|f\|$ изабрани су τ_ν и σ_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, тако да је δ_n минимално за свако фиксирано n. На тај начин је добијена нова класа интегралних формула.

Много једноставнија и старија техника оцене остатка квадратурне формуле (1.4) је базирана на Кошијевој[6] теореми (видети [17], [18], [19]).

Нека је функција f аналитичка на домену D који садржи интервал $[-1, 1]$. Са Γ означимо било коју контуру у D око интервала $[-1, 1]$. Тада за свако $t \in [-1, 1]$, на основу Кошијеве формуле, важи:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z - t} \, \mathrm{d}z, \quad t \in [-1, 1].$$

Применом линеарне функционеле

$$\widetilde{R}_n(\widetilde{w}; f) = \int_{-1}^{1} f(x) \, \widetilde{w}(x) \, \mathrm{d}x - \sum_{\nu=1}^{n} \sigma_\nu f(\tau_\nu)$$

на обе стране Кошијеве формуле, добијамо

$$\widetilde{R}_n(\widetilde{w}; f) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \widetilde{R}_n\left(\widetilde{w}; \frac{1}{z - \cdot}\right) f(z) \, \mathrm{d}z,$$

односно,

$$\widetilde{R}_n(\widetilde{w}; f) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma K_n(z) f(z) \, \mathrm{d}z. \tag{1.5}$$

Функција

$$K_n(z) = \widetilde{R}_n\left(\widetilde{w}; \frac{1}{z - \cdot}\right) \tag{1.6}$$

се назива *језгро* функционеле $\widetilde{R}_n$. Из (1.5) добијамо оцену остатка

$$\begin{aligned} |\widetilde{R}_n(\widetilde{w}; f)| &\le \frac{1}{2\pi} \max_{z \in \Gamma} |K_n(z)| \cdot \int_\Gamma |f(z)| |\mathrm{d}z| \\ &\le \frac{\ell(\Gamma)}{2\pi} \max_{z \in \Gamma} |K_n(z)| \max_{z \in \Gamma} |f(z)|, \end{aligned} \tag{1.7}$$

где је $\ell(\Gamma)$ дужина контуре Γ. Први максимум зависи само од квадратурног правила (тј. од $\widetilde{w}(x)$), док други зависи само од функције f. У литератури, $\max_{z \in \Gamma} |K_n(z)|$ је или ограничен одозго, или је одређен асимптотски за довољно велико n (или велико z, или обоје). Оцена грешке (1.5) зависи и од избора контуре Γ. Најчешће посматране контуре су концентричне кружнице

$$C_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}, \quad r > 1,$$

[6] Augustin–Louis Cauchy (1789–1857), француски математичар

или конфокалне елипсе (имају фокус у ± 1 и сума полуоса им је једнака ρ)

$$\mathcal{E}_\rho = \{z \in \mathbb{C} : z = \frac{1}{2}(\rho e^{i\theta} + \rho^{-1} e^{-i\theta}), 0 \le \theta \le 2\pi\}, \quad \rho > 1.$$

Ове елипсе, када $\rho \to 1$, се скупљају према интервалу $[-1, 1]$, а постају више кружног облика када се ρ повећава.

Ако функција f има полове на интервалу $[-1, 1]$, квадратурна формула (1.4) ће споро конвергирати. Штавише, оцена (1.7) се не може применити, пошто f више није аналитичка на домену D који садржи интервал $[-1, 1]$.

Познато је, међутим, како се полови могу укључити у рачун, а да се задржи брзина конвергенције коју добијамо у случају када је f аналитичка функција (видети [17]). Претпоставимо, једноставности ради, да функција f има само коначан број полова p_i у коначном делу комплексне равни, и да су сви полови прости, тада важи

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, \widetilde{w}(x)\, \mathrm{d}x = \sum_{\nu=1}^{n} \sigma_\nu f(\tau_\nu) - \sum_i K_n(p_i) \operatorname*{Res}_{p_i} f + \widetilde{R}_n(\widetilde{w}; f),$$

где $\operatorname*{Res}_{p_i} f$ означава резидум функције f у полу p_i. За остатак $\widetilde{R}_n(\widetilde{w}; f)$ имамо исту репрезентацију као у случају када је f аналитичка:

$$\widetilde{R}_n(\widetilde{w}; f) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma K_n(z) f(z)\, \mathrm{d}z,$$

при чему је Γ контура у D око интервала $[-1, 1]$, која обухвата и полове p_i. Значи, оцене остатка ће важити и у овом случају ако кружница C_r, $r > 1$, односно елипса $\mathcal{E}_\rho$, $\rho < 1$, обухватају и полове p_i.

1.2.1 Максимум језгра K_n на кружници и одговараујуће оцене остатка квадратурне формуле

Следећа теорема је доказана у [18] и даје максимум језгра K_n датог са (1.6) на кружници C_r, $r > 1$.

Теорема 1.2. *Важи:*

$$\max_{z \in C_r} |K_n(z)| = \begin{cases} K_n(r), & \text{ако је } \widetilde{w}(x)/\widetilde{w}(-x) \text{ неопадајућа на } (-1,1), \\ |K_n(-r)|, & \text{ако је } \widetilde{w}(x)/\widetilde{w}(-x) \text{ нерастућа на } (-1,1). \end{cases} \tag{1.8}$$

Напомена 1.1. *Ако је $\widetilde{w}(x) = \widetilde{w}(-x)$ на $(-1, 1)$ тада, на основу симетрије, $K_n(r) = |K_n(-r)|$, важи било који случај у* (1.8).

У ситуацијама разматраним у претходној теореми, модуо језгра $K_n(z)$ достиже свој максимум на кружници C_r у тачки $z = r$ или $z = -r$ на реалној оси. За Јакобијеву[7] тежинску функцију $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, $\alpha > -1, \beta > -1$, следи да се максимум достиже у $z = r$ ако је $\alpha \le \beta$, односно у $z = -r$ ако је $\alpha > \beta$. Оцена остатка (1.7), заједно са на пример првим случајем теореме 1.2, даје коначну оцену остатка

$$|\widetilde{R}_n(\widetilde{w}; f)| \le r \cdot K_n(r) \cdot \max_{z \in C_r} |f(z)|. \tag{1.9}$$

Ова оцена остатка много зависи од понашања функције f на контури C_r. Ако је f брзо осцилаторна функција на C_r, тада неједнакост (1.9) може бити непримењљива. Неко побољшање се може добити, за специфичне функције f, оптимизацијом границе са десне стране неједнакости (1.9) као функције од r (видети [18, 6. Examples]).

1.2.2 Максимум језгра K_n на елипси и одговараујуће оцене остатка квадратурне формуле

Испитивање језгра K_n на елипси $\mathcal{E}_\rho$ је знатно теже него у случају кружнице C_r. Боље оцене остатка су добијене само за неке специјалне тежинске функције, и овде ће бити изложени ти резултати. Неки општији резултати се могу наћи у [18], [17], [23], [54].

Теорема 1.3 ([54, Theorem 3.2]). *Језгро K_n, дато са* (1.6)*, у односу на парну тежинску функцију $\widetilde{w}(x)$, $x \in (-1,1)$, задовољава следеће.*

(а) *Ако $\widetilde{w}(x)\sqrt{1-x^2}$ расте на $(0,1)$, тада важи*

$$\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |K_n(z)| = K_n\left(\frac{1}{2}(\rho + \rho^{-1})\right) \quad \text{за} \ \ \rho \ge \rho_n^* = \begin{cases} 2.4139, & n = 2, \\ 2.0017, & n = 3, \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+\sqrt{3}), & n \ge 4. \end{cases}$$

(б) *Ако $\widetilde{w}(x)\sqrt{1-x^2}$ опада на $(0,1)$, тада важи*

$$\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |K_n(z)| = K_n\left(\frac{\mathrm{i}}{2}(\rho - \rho^{-1})\right) \quad \text{за} \quad \rho \ge \rho_n^*,$$

где је $\rho_n^* = 1 + \sqrt{2}$ ако је $n \ge 1$ непарно, а ако је $n \ge 2$ парно, тада је ρ_n^* највећа нула функције

$$d_n(\rho) = (\rho - \rho^{-1}) - 4 - (\rho^2 - \rho^{-2})\left(\frac{(n+1)^2}{(\rho^{n+1} + \rho^{-n-1})^2} + \frac{(n+3)^2}{(\rho^{n+3} + \rho^{-n-3})^2}\right).$$

[7] Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851), немачки математичар

Интересантан за детаљно разматрање је случај Јакобијеве тежинске функције $\widetilde{w}(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, $\alpha > -1, \beta > -1$, иако је прецизне резултате тешко добити за произвољне вредности параметара. Приметимо да на основу једнакости која важи за Јакобијеве полиноме, $p_n^{(\alpha,\beta)}(z) = (-1)^n p_n^{(\beta,\alpha)}(-z)$, добијамо да је $|K_n^{(\beta,\alpha)}(z)| = |K_n^{(\alpha,\beta)}(-z)| = |K_n^{(\alpha,\beta)}(-\overline{z})|$, па замена параметара резултује пресликавањем у односу на имагинарну осу. Зато је довољно посматрати случај $\alpha \le \beta$.

Чебишевљеве тежинске функције

Следећа теорема даје максимум модула језгра K_n када је $\alpha = \beta = -1/2$ у Јакобијевој тежинској функцији, тј. када је тежинска функција прва Чебишевљева (доказ теореме се може наћи у [17], [18]).

Теорема 1.4. *Ако је* $\widetilde{w}(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ *на* $(-1,1)$, *тада је*

$$\max_{z\in\mathcal{E}_\rho} |K_n(z)| = K_n\left(\frac{1}{2}(\rho+\rho^{-1})\right),$$

тј. максимум $|K_n(z)|$ *на* $\mathcal{E}_\rho$ *се достиже на реалној оси.*

За $\alpha = \beta = 1/2$ у Јакобијевој тежинској функцији, имамо другу Чебишевљеву тежинску функцију. Први резултати у овом случају су добијени у раду [18] само када је n непарно.

Теорема 1.5. *Ако је* $\widetilde{w}(x) = (1-x^2)^{1/2}$ *на* $(-1,1)$ *и* n *непарно, тада је*

$$\max_{z\in\mathcal{E}_\rho} |K_n(z)| = K_n\left(\frac{\mathrm{i}}{2}(\rho-\rho^{-1})\right),$$

тј. максимум $|K_n(z)|$, *за непарно* n, *се на* $\mathcal{E}_\rho$ *достиже на имагинарној оси.*

Касније је у раду [19] испитан и случај када је n парно и доказана следећа теорема.

Теорема 1.6. *За сваки природан број* n, $n \ge 2$, *са* $\rho_n > 1$ *означимо јединствено решење једначине*

$$\frac{a_1(\rho)}{a_n(\rho)} = \frac{1}{n}, \quad a_j(\rho) = \frac{1}{2}(\rho^j+\rho^{-j}), \quad j = 1,2,\ldots, \quad \rho > 1.$$

Ако је $\widetilde{w}(x) = (1-x^2)^{1/2}$ *на* $(-1,1)$, *и* $n \ge 2$ *парно, тада је*

$$\max_{z\in\mathcal{E}_\rho} |K_n(z)| = \left|K_n\left(\frac{\mathrm{i}}{2}(\rho-\rho^{-1})\right)\right|, \text{ за } \rho \ge \rho_{n+1},$$

тј. максимум $|K_n(z)|$ *на* $\mathcal{E}_\rho$, *када је* $\rho \ge \rho_{n+1}$, *се достиже на имагинарној оси. Ако је* $1 < \rho < \rho_{n+1}$, *тада* $|K_n(z)|$ *достиже максимум за неко* $z = z^* = 1/2\left(\rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta^*} + \rho^{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta^*}\right) \in \mathcal{E}_\rho$, *где је* $(n/(n+1))\pi/2 < \theta^* < \pi/2$.

Теорема 1.7 ([18]). *Ако је* $\widetilde{w}(x) = \sqrt{(1+x)(1-x)}$ *на* $(-1,1)$, *тада је*

$$\max_{z\in\mathcal{E}_\rho} |K_n(z)| = K_n\left(\frac{1}{2}(\rho+\rho^{-1})\right),$$

тј. максимум $|K_n(z)|$ *на* $\mathcal{E}_\rho$ *се достиже на реалној оси.*

Гегенбауерове тежинске функције

Као специјалан случај општије теореме 1.3 добијена је следећа теорема, која даје максимум модула језгра у случају Гегенбауерове тежинске функције $(1-x^2)^\alpha$, $\alpha > -1$.

Теорема 1.8 ([54, Theorem 5.2]). *За језгро* K_n *дато са* (1.6), *где је* $\widetilde{w}(x) = (1-x^2)^\alpha$, $x \in (-1,1)$, $\alpha > -1$, $\alpha \notin (-1/2, 1/2)$, *Гегенбауерова тежинска функција, на свакој елипси* $\mathcal{E}_\rho$, $\rho \geq \rho_n^*$ *важи*

$$\max_{z\in\mathcal{E}_\rho} |K_n(z)| = \begin{cases} K_n\left(\frac{1}{2}(\rho+\rho^{-1})\right), & \text{ако је } -1<\alpha\leq -\frac{1}{2},\ n\geq 2,\\ \left|K_n\left(\frac{\mathrm{i}}{2}(\rho-\rho^{-1})\right)\right|, & \text{ако је } \alpha\geq \frac{1}{2},\ n\geq 1. \end{cases}$$

Параметар ρ_n^* *је за* $\alpha \in (-1, 1/2]$ *дат са*

$$\rho_n^* = \begin{cases} 2.4139, & n=2,\\ 2.0017, & n=3,\\ \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\sqrt{3}), & n\geq 4. \end{cases}$$

Ако је $\alpha \geq \frac{1}{2}$, *тада је* ρ_n^* *највећа нула функције*

$$d_n(\rho) = \left(\rho-\rho^{-1}\right)^2 - 4 - \left(\rho^2-\rho^{-2}\right)^2 \left(\frac{(n+1)^2}{\left(\rho^{n+1}+\rho^{-n-1}\right)^2} + \frac{(n+3)^2}{\left(\rho^{n+3}+\rho^{-n-3}\right)^2}\right)$$

ако је $n \geq 2$ *парно, а ако је* $n \geq 1$ *непарно, тада је* $\rho_n^* = 1+\sqrt{2}$.

За максимум $|K_n(z)|$ на елипси $\mathcal{E}_\rho$, када је $\widetilde{w}(x) = (1-x^2)^\alpha$, $x \in (-1,1)$, $\alpha \in (-1/2, 1/2)$, добијени су само емпиријски резултати засновани на израчунавањима. Ако је $-1/2 < \alpha < 0$, тада се максимум достиже на имагинарној оси ако је $n = 1$, а са повећањем n максимум се помера дуж $\mathcal{E}_\rho$ према реалној оси и то све брже са повећањем ρ. Ако је $0 \leq \alpha < 1/2$, тада се максимум достиже на имагинарној оси, осим у случају ако је n парно и ρ није велико, када се претпоставља да је мало изван имагинарне осе (видети [17], [18]).

1.2.3 Израчунавање $K_n(z)$

За одређивање оцене остатка Гаусове квадратурне формуле (1.4) важно је одредити максимум модула језгра $K_n(z)$ датог са (1.6), тј.

$$K_n(z) = \widetilde{R}_n\left(\widetilde{w}; \frac{1}{z-\cdot}\right) = \int_{-1}^{1} \frac{\widetilde{w}(x)}{z-x}\,\mathrm{d}x - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sigma_\nu}{z-\tau_\nu}.$$

Међутим, за практична израчунавања погоднији је следећи облик

$$K_n(z) = \frac{q_n(z)}{\pi_n(z)}, \quad q_n(z) = \int_{-1}^{1} \frac{\pi_n(x)}{z-x}\widetilde{w}(x)\,\mathrm{d}x, \quad z \in \mathbb{C}\backslash[-1,1],$$

где је π_n ортогоналан полином степена n у односу на тежинску функцију $\widetilde{w}$ (видети [18, 23]). Тада полиноми $\pi_n(z)$ и $q_n(z)$ могу бити добијени коришћењем трочлане рекурентне релације

$$y_{k+1} = (z-\alpha_k)y_k - \beta_k y_{k-1}, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

где је $\beta_0 = \int_{-1}^{1} \widetilde{w}(x)\,\mathrm{d}x$.

Заиста, полином π_n се једноставно добија применом дате рекурентне релације, при чему су почетне вредности:

$$y_{-1} = 0, \quad y_0 = 1, \quad \text{за} \quad y_n = \pi_n.$$

Полином q_n (степена $n-1$) је минимално решење дате рекурентне релације за $z \in \mathbb{C}\backslash[-1,1]$ (пошто $q_n/\pi_n \to 0$, $n \to \infty$) и јединствено је одређен једном почетном вредношћу

$$y_{-1} = 1, \quad \text{за} \quad y_n = q_n,$$

а може бити добијен коришћењем следеће рекурзије детаљно описане у [15]. Нека је

$$r_\nu^{[\nu]} = 0, \quad r_{k-1}^{[\nu]} = \frac{\beta_k}{z-\alpha_k - r_k^{[\nu]}}, \quad k = \nu, \nu-1, \ldots, 2, 1. \tag{1.10}$$

Тада, ако је $z \in \mathbb{C}\backslash[-1,1]$, $\lim\limits_{\nu\to\infty} r_{k-1}^{[\nu]}(z) = r_{k-1}(z)$ постоји, и

$$q_{-1}(z) = 1, \quad q_k(z) = r_{k-1}(z)q_{k-1}(z), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{1.11}$$

Стога, за одређивање $q_n(z)$ са грешком ε, полазимо од неке почетне вредности $\nu_0 > n$ индекса ν, и увећавамо ν, рецимо за 5, све док не буде задовољено $|r_{k-1}^{[\nu+5]}(z) - r_{k-1}^{[\nu]}(z)| \le \varepsilon |r_{k-1}^{[\nu+5]}(z)|$ за свако $k = 0, 1, \ldots, n$. Онда применимо (1.11), при чему $r_{k-1}(z)$ апроксимирамо са $r_{k-1}^{[\nu+5]}(z)$ за добијени индекс ν.

У специјалном случају Јакобијеве тежинске функције $\widetilde{w}(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, $\alpha > -1, \beta > -1$, итерација по индексу ν се може избећи. Одговарајућа вредност за ν, када је $z = \pm r$, $r \geq 1$, је независна од α и β, и то је најмањи цео број који задовољава (видети [15])

$$\nu \geq n + \frac{\ln(1/\varepsilon)}{2\ln(r + \sqrt{r^2-1})}. \tag{1.12}$$

У овом случају израчунавање $q_n(z)$ коришћењем (1.10)–(1.11) је делимично ефикасно, чак и у случају када је $z = \pm r$ релативно близу интервала $[-1, 1]$.

Нагласимо чињеницу да је алгоритам (1.10)–(1.11) применљив за произвољан компексан број $z \notin [-1, 1]$. Међутим, израчунавање ν на основу (1.12) за произвољну Јакобијеву тежинску функцију је мало копликованије. Сада је потребно одредити најмањи цео број који задовољава

$$\nu \geq n + \frac{\ln(1/\varepsilon)}{2\ln|z + (z-1)^{1/2}(z+1)^{1/2}|}, \tag{1.13}$$

где се главне вредности $\arg(z-1)$ и $\arg(z+1)$ користе у израчунавању квадратних корена. Ако је $z = \mathrm{i}y$ чисто имагинарно, (1.13) се своди на

$$\nu \geq n + \frac{\ln(1/\varepsilon)}{2\ln(y + \sqrt{y^2+1})}.$$

1.3 Генералисане Гаусове квадратурне формуле

Класичне Гаусове квадратурне формуле (за алгебарске полиноме) су ефикасне за апроксимацију интеграла када је интегранд функција која се може добро апроксимирати алгебарским полиномом. Међутим, за неке интеграле, као што су на пример интеграли периодичних функција, брзо–осцилаторних функција, класичан Гаусов метод апроксимације интеграла није довољно добар, али се он на природан начин може проширити на неполиномске функције. Нека је

$$\{\varphi_0(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t), \cdots\}, \quad t \in [a, b], \tag{1.14}$$

систем линеарно независних функција, изабран тако да је комплетан у неком простору функција (видети [14], [28], [29]). Нека је $\widetilde{w}(x)$ тежинска функција, интеграбилна и ненегативна на интервалу $[a, b)$, таква да може имати вредност нула само на скупу мере нула. Ако квадратурна формула

$$\int_a^b f(x)\widetilde{w}(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu f(t_\nu) + \widetilde{R}_n(\widetilde{w}; f) \tag{1.15}$$

тачно интеграли првих $2n$ функција система (1.14), кажемо да је квадратурна формула (1.15) Гаусова за систем функција (1.14), односно *генералисана Гаусова квадратурна формула*. Егзистенција и јединственост генералисане Гаусове квадратурне формуле (1.15) је обезбеђења условом да првих $2n$ функција система (1.14) формирају Чебишевљев систем на $[a, b]$ (не постоји линеарна комбинација $a_0\phi_0 + a_1\phi_1 + \cdots + a_n\phi_n$ која има $n + 1$ различиту нулу на $[a, b]$). Познато је да су све тежине $A_1, A_2, \ldots, A_n$ у (1.15) позитивне.

Специјално, ако је систем функција (1.14) облика

$$\{1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \ldots\}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

добијамо квадратурне формуле за тригонометријске полиноме, које ће бити детаљније анализиране у наредним поглављима.

Глава 2

Ортогонални системи тригонометријских полинома

Почевши од фундаменталних резултата датих у [69], ортогонални полиноми су основни алат у анализи проблема у математици и инжењерству. На пример, проблеми везани за моменте, квадратурне формуле, апросимацију и интерполацију, као и све њихове примене у инжењерству, се решавају коришћењем ортогоналних полинома и њихових особина.

Добро је познато да се за конструкцију квадратурних формула са максималним алгебарским степеном тачности мора разматрати ортогоналност у потпростору алгебарских полинома. Због конструкције квадратурних формула са максималним тригонометријским степеном тачности јавила се потреба за изучавањем ортогоналних система тригонометријских полинома, целобројног и полу–целобројног степена. У даљем тексту ћемо разликовати систем тригонометријских полинома целобројног степена

$$\mathcal{T} = \{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots\}$$

и систем тригонометријских полинома полу–целобројног степена

$$\begin{aligned}\mathcal{T}^{1/2} = &\Big\{\cos \frac{1}{2}x, \sin \frac{1}{2}x, \cos\left(1+\frac{1}{2}\right)x, \sin\left(1+\frac{1}{2}\right)x,\\ &\cos\left(2+\frac{1}{2}\right)x, \sin\left(2+\frac{1}{2}\right)x, \dots, \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x, \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x, \dots\Big\}.\end{aligned}$$

Тригонометријске функције облика

$$t_{n+1/2}(x) = \sum_{\nu=0}^{n}\left(c_\nu \cos\left(\nu+\frac{1}{2}\right)x + d_\nu \sin\left(\nu+\frac{1}{2}\right)x\right), \tag{2.1}$$

такве да је $c_\nu, d_\nu \in \mathbb{R},\ |c_n| + |d_n| \neq 0$, зову се *тригонометријски полиноми полу–целобројног степена* $n + 1/2$.

Означимо са $\mathcal{T}_n^{1/2}$, $n \in \mathbb{N}_0$, линеал над скупом $\{\cos(k + 1/2)x, \sin(k + 1/2)x : k = 0, 1, \ldots, n\}$, тј. скуп свих тригонометријских полинома полу–целобројног степена не вишег од $n + 1/2$.

Тригонометријске функције облика

$$t_n(x) = c_0 + \sum_{\nu=1}^{n} \left(c_\nu \cos \nu x + d_\nu \sin \nu x\right), \tag{2.2}$$

такве да је $c_\nu, d_\nu \in \mathbb{R},\ |c_n| + |d_n| \neq 0$, зову се *тригонометријски полиноми (целобројног) степена* n.

Са $\mathcal{T}_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, означаваћемо скуп свих тригонометријских полинома степена не вишег од n, тј. линеал над скупом $\{\cos kx, \sin kx : k = 0, 1, \ldots, n\}$.

2.1 Ортогонални тригонометријски полиноми полу–целобројног степена

Основне особине тригонометријских полинома полу–целобројног степена дате су у [70], детаљна анализа ових тригонометријских полинома је дата у [38], [40], [37], [8], [39], док је асимптотско понашање анализирано у [9].

Очигледно је

$$A_{n+1/2}(x) = A \prod_{k=0}^{2n} \sin \frac{x - x_k}{2} \quad (A \text{ константа различита од } 0) \tag{2.3}$$

тригонометријски полином полу–целобројног степена $n + 1/2$. Важи и обрат овог тврђења: сваки тригонометријски полином полу–целобројног степена облика (2.1) се може представити у облику (2.3), где је

$$A = (-1)^n 2^{2n} \mathrm{i}(c_n - \mathrm{i}d_n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}/2 \sum_{k=0}^{2n} x_k},$$

а $x_0, x_1, \ldots, x_{2n}$ су нуле тригонометријске функције (2.1), које леже у траци $0 \leq \operatorname{Re} x < 2\pi$ (видети [70]).

Теорема 2.1 ([6]). *Тригонометријски полином полу–целобројног степена* $n + 1/2$ *има на траци* $0 \leq \operatorname{Re} z < 2\pi$ *тачно* $2n+1$ *нула, бројећи и њихове вишеструкости, при чему се комплексне нуле јављају у конјугованим паровима.*

Напомена 2.1. *Закључујемо, на основу претходне теореме, да тригонометријски полином полу–целобројног степена* $n + 1/2$ *не може имати паран број промена знака на интервалу* $[0, 2\pi)$. *Такође, то важи за било који интервал дужине* 2π *облика* $[L, L + 2\pi)$, $L \in \mathbb{R}$.

Веза између тригонометријског полинома полу–целобројног степена $A_{n+1/2}$ и алгебарског полинома степена $2n+1$ дата је у следећој леми (видети [40]).

Лема 2.1. *Нека је*

$$A_{n+1/2}(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(c_k \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x + d_k \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x \right) \in \mathcal{T}_n^{1/2},$$

и $a_k = c_k - \mathrm{i}d_k$, $k = 0, 1, \ldots, n$. *Тада се* $A_{n+1/2}(x)$ *може представити у облику*

$$A_{n+1/2}(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n+1/2)x} Q_{2n+1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}),$$

где је $Q_{2n+1}(z)$ *алгебарски полином степена* $2n+1$, *дат са*

$$Q_{2n+1}(z) = \overline{a}_n + \overline{a}_{n-1}z + \cdots + \overline{a}_1 z^{n-1} + \overline{a}_0 z^n + a_0 z^{n+1} + \cdots + a_{n-1}z^{2n} + a_n z^{2n+1}.$$

Сваки тригонометријски полином (целобројног степена) се може представити преко тригонометријског полинома полу–целобројног степена. Таква репрезентација дата је у следећој леми (видети [65]). Специјалан случај, када је $m = n$, је доказан у [40].

Лема 2.2. *Сваки тригонометријски полином степена* $n+m$, $m \le n$,

$$B_{n+m}(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n+m} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

може на јединствен начин бити представљен у облику

$$B_{n+m}(x) = A_{n+1/2}(x) S_{m-1/2}(x) + T_n(x), \tag{2.4}$$

где је

$$A_{n+1/2}(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(c_k \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x + d_k \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x \right)$$

дати тригонометријски полином полу–целобројног степена $n+1/2$, $c_n + \mathrm{i}d_n \ne 0$, *а*

$$S_{m-1/2} = \sum_{\nu=0}^{m-1} \left(\gamma_\nu \cos\left(\nu+\frac{1}{2}\right)x + \delta_\nu \sin\left(\nu+\frac{1}{2}\right)x \right),$$

$$T_n(x) = u_0 + \sum_{k=1}^{n} (u_k \cos kx + v_k \sin kx)$$

су тражени тригонометријски полиноми полу–целобројног степена $m - 1/2$ *и степена* n, *респективно.*

Доказ. Упоређивањем коефицијената уз $\cos \ell x$ и $\sin \ell x$, $\ell = n+1, n+2, \dots, n+m$, са обе стране једнакости (2.4), добијамо следећи систем једначина за одређивање непознатих коефицијената γ_ν, δ_ν, $\nu = 0, 1, \dots, m-1$:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{k=\ell-m}^{n}(c_k\gamma_{\ell-k-1} - d_k\delta_{\ell-k-1}) &= a_\ell, \\
\frac{1}{2}\sum_{k=\ell-m}^{n}(c_k\delta_{\ell-k-1} + d_k\gamma_{\ell-k-1}) &= b_\ell,
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

за $\ell = n+1, n+2, \dots, n+m$. Пошто овај систем може бити записан у облику

$$
\sum_{k=\ell-m}^{n}(c_k + \mathrm{i}d_k)(\gamma_{\ell-k-1} + \mathrm{i}\delta_{\ell-k-1}) = 2(a_\ell + \mathrm{i}b_\ell), \quad \ell = n+1, \dots, n+m,
$$

детерминанта система је $(c_n + \mathrm{i}d_n)^m \neq 0$. Према томе, непознати коефицијенти γ_ν и δ_ν, $\nu = 0, 1, \dots, m-1$, могу бити јединствено одређени из система (2.5).

Даље, из једначине

$$
\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m-1}(c_k\gamma_k + d_k\delta_k) + u_0 = a_0,
$$

која је добијена упоређивањем слободних чланова са обе стране једнакости (2.4), лако се добија непознати коефицијент u_0.

Слично, ако упоредимо коефицијенте уз $\cos \ell x$ и $\sin \ell x$, $\ell = 1, 2, \dots, n$, са обе стране једнакости (2.4), добићемо систем једначина:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{k=\ell}^{j}(c_k\gamma_{k-\ell} + d_k\delta_{k-\ell}) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m-\ell-1}(c_k\gamma_{k+\ell} + d_k\delta_{k+\ell}) & \\
+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\ell-1}(c_k\gamma_{\ell-k-1} - d_k\delta_{\ell-k-1}) + u_\ell &= a_\ell, \\
\frac{1}{2}\sum_{k=\ell}^{j}(d_k\gamma_{k-\ell} - c_k\delta_{k-\ell}) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m-\ell-1}(c_k\delta_{k+\ell} - d_k\gamma_{k+\ell}) & \\
+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\ell-1}(c_k\delta_{\ell-k-1} + d_k\gamma_{\ell-k-1}) + v_\ell &= b_\ell,
\end{aligned}
$$

за $\ell = 1, 2, \dots, m-1$, $j = \min\{n, \ell+m-1\}$ и

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{k=\ell}^{j}(c_k\gamma_{k-\ell} + d_k\delta_{k-\ell}) + \frac{1}{2}\sum_{k=\ell-m}^{\ell-1}(c_k\gamma_{\ell-k-1} - d_k\delta_{\ell-k-1}) + u_\ell &= a_\ell, \\
\frac{1}{2}\sum_{k=\ell}^{j}(d_k\gamma_{k-\ell} - c_k\delta_{k-\ell}) + \frac{1}{2}\sum_{k=\ell-m}^{\ell-1}(c_k\delta_{\ell-k-1} + d_k\gamma_{\ell-k-1}) + v_\ell &= b_\ell,
\end{aligned}
$$

за $\ell = m, m+1, \ldots, n$ и $j = \min\{n, \ell+m-1\}$, из кога се добијају јединствена решења за коефицијенте u_ℓ, v_ℓ, $\ell = 1, 2, \ldots, n$. $\square$

Претпоставимо да је w тежинска функција, интеграбилна и ненегативна на $[0, 2\pi)$, која има вредност нула само на скупу мере нула.

За дату тежинску функцију w, скаларни производ функција f и g уводимо са

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\, w(x)\, \mathrm{d}x, \quad f, g \in \mathcal{T}^{1/2}. \tag{2.6}$$

Дефиниција 2.1. *Систем $\{A_{k+1/2}\}$, $A_{k+1/2} \in \mathcal{T}_k^{1/2}$, је систем ортогоналних тригонометријских полинома полу–целобројног степена у односу на скаларни производ* (2.6)*, тј. у односу на тежинску функцију w на интервалу $[0, 2\pi)$, ако и само ако је $(A_{k+1/2}, A_{j+1/2}) = 0$ за све $0 \le j < k$, $k \in \mathbb{N}$.*

Према дефиницији 2.1, $A_{n+1/2}$ је ортогонални тригонометријски полином степена $n + 1/2$ ако је ортогоналан на сваком елементу простора $\mathcal{T}_{n-1}^{1/2}$ у односу на тежинску функцију w на интервалу $[0, 2\pi)$, тј. ако је

$$\int_0^{2\pi} A_{n+1/2}(x)t(x)\, w(x)\, \mathrm{d}x = 0, \quad t \in \mathcal{T}_{n-1}^{1/2}.$$

Пошто је димензија простора $\mathcal{T}_{n-1}^{1/2}$ једнака $2n$, а тригонометријски полином полу–целобројног степена $A_{n+1/2}$ има $2n+2$ коефицијената, закључујемо да $A_{n+1/2}$ има два слободна коефицијента и ми ћемо изабрати да то буду c_n и d_n. Коефицијенте c_n и d_n зваћемо *водећим коефицијентима* тригонометријског полинома полу–целобројног степена $A_{n+1/2}$.

У $[70, \S3.]$ доказана је следећа теорема.

Теорема 2.2. *Тригонометријски полином полу–целобројног степена $A_{n+1/2}$ који је ортогоналан на интервалу $[0, 2\pi)$ на свим тригонометријским полиномима полу–целобројног степена не вишег од $n - 1/2$ у односу на тежинску функцију w, јединствено је одређен ако су унапред задати водећи коефицијенти c_n и d_n.*

Наравно да не можемо изабрати водеће коефицијенте $c_n = d_n = 0$, јер у том случају немамо тригонометријски полином степена $n + 1/2$ већ степена не вишег од $n - 1/2$. Специјално, за избор водећих коефицијената $c_n = 1$ и $d_n = 0$, означаваћемо одговарајући ортогонални тригонометријски полином полу–целобројног степена са $A_{n+1/2}^C$, а за избор $c_n = 0$ и $d_n = 1$ са $A_{n+1/2}^S$.

У [70] су посматрани ортогонални тригонометријски полиноми полу–целобројног степена само на интервалу $[0, 2\pi)$. Касније је у раду [40] доказано да се могу посматрати ортогонални тригонометријски полиноми полу–целобројног степена на било ком другом интервалу дужине 2π, односно на интервалу облика $[L, L + 2\pi)$, $L \in \mathbb{R}$.

Лема 2.3. *Ако је $\{A_{n+1/2}\}$ низ ортогоналних тригонометријских полинома полу–целобројног степена на интервалу $[0, 2\pi)$ у односу на тежинску функцију w, тада је $\{\widetilde{A}_{n+1/2}\}$, где је $\widetilde{A}_{n+1/2} = A_{n+1/2}(x - L)$, $n \in \mathbb{N}_0$, $L \in \mathbb{R}$, низ ортогоналних тригонометријских полинома полу–целобројног степена на интервалу $[L, 2\pi + L)$ у односу на тежинску функцију $\widetilde{w}(x) = w(x - L)$, $x \in [L, 2\pi + L)$.*

У наставку ћемо посматрати интервал $[0, 2\pi)$ или интервал $[-\pi, \pi)$, као специјалан случај интервала облика $[L, L + 2\pi)$, $L \in \mathbb{R}$, за $L = -\pi$.

2.1.1 Рекурентне релације

Својство тригонометријских полинома полу–целобројног степена, ортогоналних у односу на скаларни производ (2.6), да задовољавају петочлане рекурентне релације је важно за њихову конструкцију.

За $\nu, \mu \in \mathbb{N}_0$ уведимо ознаке

$$\begin{aligned} I_\nu^C &= (A_{\nu+1/2}^C, A_{\nu+1/2}^C), \quad & J_{\nu,\mu}^C &= (2\cos x A_{\nu+1/2}^C, A_{\mu+1/2}^C), \\ I_\nu^S &= (A_{\nu+1/2}^S, A_{\nu+1/2}^S), \quad & J_{\nu,\mu}^S &= (2\cos x A_{\nu+1/2}^S, A_{\mu+1/2}^S), \\ I_\nu &= (A_{\nu+1/2}^C, A_{\nu+1/2}^S), \quad & J_{\nu,\mu} &= (2\cos x A_{\nu+1/2}^C, A_{\mu+1/2}^S). \end{aligned}$$

Теорема 2.3. *Тригонометријски полиноми полу–целобројног степена $A_{k+1/2}^C(x)$ и $A_{k+1/2}^S(x)$, $k \geq 1$, ортогонални у односу на скаларни производ* (2.6), *задовољавају следеће петочлане рекурентне релације:*

$$\begin{aligned} A_{k+1/2}^C(x) &= (2\cos x - \alpha_k^{(1)}) A_{k-1/2}^C(x) - \beta_k^{(1)} A_{k-1/2}^S(x) \\ &\quad - \alpha_k^{(2)} A_{k-3/2}^C(x) - \beta_k^{(2)} A_{k-3/2}^S(x), \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} A_{k+1/2}^S(x) &= (2\cos x - \delta_k^{(1)}) A_{k-1/2}^S(x) - \gamma_k^{(1)} A_{k-1/2}^C(x) \\ &\quad - \delta_k^{(2)} A_{k-3/2}^S(x) - \gamma_k^{(2)} A_{k-3/2}^C(x), \end{aligned} \tag{2.8}$$

где су коефицијенти $\alpha_k^{(j)}, \beta_k^{(j)}, \gamma_k^{(j)}, \delta_k^{(j)}$, $k \geq 1$, $j = 1, 2$, решења следећих система линеарних једначина

$$\begin{aligned} J_{k-1,k-j}^C &= \alpha_k^{(j)} I_{k-j}^C + \beta_k^{(j)} I_{k-j}, \quad & J_{k-1,k-j} &= \alpha_k^{(j)} I_{k-j} + \beta_k^{(j)} I_{k-j}^S, \\ J_{k-j,k-1} &= \gamma_k^{(j)} I_{k-j}^C + \delta_k^{(j)} I_{k-j}, \quad & J_{k-1,k-j}^S &= \gamma_k^{(j)} I_{k-j} + \delta_k^{(j)} I_{k-j}^S, \end{aligned}$$

и $\alpha_1^{(2)} = \beta_1^{(2)} = \gamma_1^{(2)} = \delta_1^{(2)} = 0$.

Доказ теореме 2.3, као и детаљна анализа коефицијената датих рекурентних релација и експлицитне формуле за рачунање коефицијената за неке специјалне тежинске функције могу се наћи у радовима [40], [8], [38] и [39].

2.1.2 Парне тежинске функције

У раду [40] посматрана је и симетрична тежинска функција на интервалу $(0, 2\pi)$, односно тежинска функција за коју важи

$$w(x) = w(2\pi - x), \quad x \in (0, 2\pi).$$

Специјално, ако је $w(x)$, $x \in [0, 2\pi)$, симетрична тежинска функција, тада тежинска функција $\widetilde{w}(x) = w(x + \pi)$, $x \in (-\pi, \pi)$, задовољава $\widetilde{w}(x) = \widetilde{w}(-x)$, $x \in (-\pi, \pi)$, тј. функција $\widetilde{w}$ је парна у свом домену. Приметимо да је скаларни производ (2.6) у овом случају дат са

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\, w(x)\,\mathrm{d}x, \quad f, g \in \mathfrak{T}^{1/2}.$$

У наставку, када то не доводи до забуне, користићемо ознаку $w(x)$ за тежинску функцију на било ком интервалу облика $[L, L + 2\pi)$, $L \in \mathbb{R}$, при чему ће бити наглашен домен тежинске функције.

Ако је тежинска функција $w(x)$ парна на $(-\pi, \pi)$, тада су одговарајући ортогонални тригонометријски полиноми полу–целобројног степена дати са (видети [40], [8])

$$A^C_{n+1/2}(x) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu \cos\left(\nu + \frac{1}{2}\right) x, \quad c_n = 1,$$

$$A^S_{n+1/2}(x) = \sum_{\nu=0}^{n} g_\nu \sin\left(\nu + \frac{1}{2}\right) x, \quad g_n = 1,$$

и задовољавају следеће трочлане рекурентне релације

$$A^C_{n+1/2}(x) = (2\cos x - \alpha_n^{(1)})A^C_{n-1/2}(x) - \alpha_n^{(2)} A^C_{n-3/2}(x),$$

$$A^S_{n+1/2}(x) = (2\cos x - \delta_n^{(1)})A^S_{n-1/2}(x) - \delta_n^{(2)} A^S_{n-3/2}(x),$$

где су коефицијенти $\alpha_n^{(j)}$, $\delta_n^{(j)}$, $n \geq 1$, $j = 1, 2$, решења следећих једначина

$$J^C_{n-1,n-j} = \alpha_n^{(j)} I^C_{n-j}, \quad J^S_{n-1,n-j} = \delta_n^{(j)} I^S_{n-j},$$

и $\alpha_1^{(2)} = \delta_1^{(2)} = 0$.

2.2 Ортогонални тригонометријски полиноми целобројног степена

Ортогоналност као и особине које важе за ортогоналне тригонометријске полиноме полу–целобројног степена, дате у поглављу 2.1, у аналогном облику важе и за ортогоналне тригонометријске полиноме целобројног степена. Већина особина ортогоналних тригонометријских полинома целобројног степена се могу наћи у радовима [5], [6], као и [62], [64].

Са $\widetilde{\mathcal{T}}_n$ ћемо означавати $\mathcal{T}_n \backslash \mathcal{L}\{\cos nx\}$ или $\mathcal{T}_n \backslash \mathcal{L}\{\sin nx\}$, где је са $\mathcal{L}$ означен линеал, тј. $\mathcal{L}\{x\} = \{ax : a \in \mathbb{R}\}$. Очигледно је димензија простора $\widetilde{\mathcal{T}}_n$ једнака $2n$.

Тригонометријски полином (2.2) се може представити у облику

$$A_n(x) = A \prod_{k=0}^{2n-1} \sin \frac{x - x_k}{2} \quad (A \text{ константа различита од } 0) \tag{2.9}$$

где су $x_0, x_1, \ldots, x_{2n-1}$ нуле тригонометријске функције (2.2), које леже у траци $-\pi \le \operatorname{Re} x < \pi$ (видети [5], [31]). Очигледно, важи да је (2.9) тригонометријски полином степена n. За нуле тригонометријског полинома важи следећа теорема (видети [5], [6]).

Теорема 2.4. *Тригонометријски полином степена n има на траци $-\pi \le \operatorname{Re} z < \pi$ тачно $2n$ нула, бројећи и њихове вишеструкости. Штавише, комплексне нуле се јављају у конјугованим паровима.*

Напомена 2.2. *Приметимо да, на основу претходне теореме, тригонометријски полином степена n не може имати непаран број промена знака на интервалу $[-\pi, \pi)$. Такође, исто важи за било који интервал дужине 2π облика $[L, L + 2\pi)$, $L \in \mathbb{R}$.*

Сваки тригонометријски полином (2.2) степена n може бити представљен коришћењем алгебарског полинома степена $2n$ у облику $t(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx} q(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})$, где је $q(s)$, $s = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$, алгебарски полином степена $2n$ (видети [41, стр. 19–20]). Полином $q(s)$ је само–инверзан (видети [68] и [41, стр. 16]), тј. $q(s) = s^{2n}\overline{q(1/\overline{s})}$.

У следећој леми је дата репрезентација тригонометријског полинома степена $n + m$ преко датог тригонометријског полинома степена n.

Лема 2.4. *За дати тригонометријски полином степена n*

$$A_n(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{n} (c_k \cos kx + d_k \sin kx), \quad c_n + \mathrm{i} d_n \neq 0,$$

сваки тригонометријски полином $B_{n+m} \in \mathfrak{T}_{n+m}$, *облика*

$$B_{n+m}(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n+m} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

се може на јединствен начин представити у облику

$$B_{n+m}(x) = A_n(x) S_m(x) + \widetilde{T}_n(x), \tag{2.10}$$

где су

$$S_m(x) = \gamma_0 + \sum_{\nu=1}^{m} \left(\gamma_\nu \cos \nu x + \delta_\nu \sin \nu x\right),$$

$$\widetilde{T}_n(x) = u_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (u_k \cos kx + v_k \sin kx) + u_n \cos nx,$$

$S_m \in \mathfrak{T}_m$ *и* $\widetilde{T}_n(x) \in \widetilde{\mathfrak{T}}_n(x)$ *тражени полиноми.*

Доказ. Упоређивањем коефицијената уз $\cos \ell x$ и $\sin \ell x$, $\ell = n+1, \ldots, n+m$ са обе стране једнакости (2.10) добијамо систем једначина за одређивање непознатих коефицијената γ_ν, δ_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, m$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{k=\ell-m}^{n} (c_k \gamma_{\ell-k} - d_k \delta_{\ell-k}) &= a_\ell \\ \frac{1}{2} \sum_{k=\ell-m}^{n} (c_k \delta_{\ell-k} + d_k \gamma_{\ell-k}) &= b_\ell \end{aligned} \tag{2.11}$$

за $\ell = n+1, n+2, \ldots, n+m$. Ако овај систем запишемо у облику

$$\sum_{k=\ell-m}^{n} (c_k + \mathrm{i} d_k)(\gamma_{\ell-k} + \mathrm{i}\delta_{\ell-k}) = 2(a_\ell + \mathrm{i} b_\ell), \quad \ell = n+1, \ldots, n+m,$$

закључујемо да је детерминанта система $(c_n + \mathrm{i} d_n)^m \neq 0$. Зато су γ_ν и δ_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, m$, јединствена решења система (2.11). Даље, из једначине

$$\gamma_0 d_n + \frac{1}{2} \sum_{k=n-m}^{n-1} (c_k \delta_{n-k} + d_k \gamma_{n-k}) = b_n$$

која је добијена упоређивање слободних чланова са обе стране једнакости (2.10), налазимо јединствено решење за γ_0. На крају, упоређивање коефицијената уз $\cos \ell x$ и $\sin \ell x$, $\ell = 1, 2, \ldots, n$, са обе стране једнакости (2.10), добијамо систем једначина

$$c_0\gamma_0 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}(c_k\gamma_k + d_k\delta_k) + u_0 = a_0$$

$$c_0\gamma_1 + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{m+1}(c_k\gamma_{k-1} + d_k\delta_{k-1}) + c_1\gamma_0 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}(c_k\gamma_{k+1} + d_k\delta_{k+1}) + u_1 = a_1$$

$$c_0\delta_1 + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{m+1}(d_k\gamma_{k-1} - c_k\delta_{k-1}) + d_1\gamma_0 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}(c_k\delta_{k+1} - d_k\gamma_{k+1}) + v_1 = b_1$$

$$c_0\gamma_\ell + \frac{1}{2}\sum_{k=\ell+1}^{j}(c_k\gamma_{k-\ell} + d_k\delta_{k-\ell}) + c_\ell\gamma_0 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-\ell}(c_k\gamma_{k+\ell} + d_k\delta_{k+\ell}) + \\ + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\ell-1}(c_k\gamma_{\ell-k} - d_k\delta_{\ell-k}) + u_\ell = a_\ell$$

$$c_0\delta_\ell + \frac{1}{2}\sum_{k=\ell+1}^{j}(d_k\gamma_{k-\ell} - c_k\delta_{k-\ell}) + d_\ell\gamma_0 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-\ell}(c_k\delta_{k+\ell} - d_k\gamma_{k+\ell}) + \\ + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\ell-1}(c_k\delta_{\ell-k} + d_k\gamma_{\ell-k}) + v_\ell = b_\ell$$

$$\ell = 2, 3, \ldots, m-1, j = \min\{n, \ell+m\}$$

$$c_0\gamma_m + \frac{1}{2}\sum_{k=m+1}^{2m}(c_k\gamma_{k-m} + d_k\delta_{k-m}) + c_m\gamma_0 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}(c_k\gamma_{m-k} - d_k\delta_{m-k}) + u_m = a_m$$

$$c_0\delta_m + \frac{1}{2}\sum_{k=m+1}^{2m}(d_k\gamma_{k-m} - c_k\delta_{k-m}) + d_m\gamma_0 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}(c_k\delta_{m-k} + d_k\gamma_{m-k}) + v_m = b_m$$

$$\frac{1}{2}\sum_{k=\ell+1}^{j}(c_k\gamma_{k-\ell} + d_k\delta_{k-\ell}) + c_\ell\gamma_0 + \frac{1}{2}\sum_{k=\ell-m}^{\ell-1}(c_k\gamma_{\ell-k} - d_k\delta_{\ell-k}) + u_\ell = a_\ell$$

$$\frac{1}{2}\sum_{k=\ell+1}^{j}(d_k\gamma_{k-\ell} - c_k\delta_{k-\ell}) + d_\ell\gamma_0 + \frac{1}{2}\sum_{k=\ell-m}^{\ell-1}(c_k\delta_{\ell-k} + d_k\gamma_{\ell-k}) + v_\ell = b_\ell$$

$$\ell = m+1, m+2, \ldots, n-1, j = \min\{n, \ell+m\}$$

$$c_n\gamma_0 + \frac{1}{2}\sum_{k=n-m}^{n-1}(c_k\gamma_{n-k} - d_k\delta_{n-k}) + u_n = a_n,$$

из кога се добијају јединствена решења за u_0, u_k и v_k, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, и u_n. $\square$

Следећом дефиницијом уводимо појам ортогоналних тригонометријских полинома целобројног степена. Аналогно случају ортогоналних тригонометријских полинома полу–целобројног степена, може се уместо интервала $[0, 2\pi)$

посматрати било који интервал облика $[L, L+2\pi)$, $L \in \mathbb{R}$. Ми ћемо посматрати интервал облика $[-\pi, \pi)$. Скаларни производ функција f и g уводимо са

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\, w(x)\, \mathrm{d}x, \quad f, g \in \mathcal{T}, \tag{2.12}$$

где је $w(x)$ тежинска функција на интервалу $[-\pi, \pi)$.

Дефиниција 2.2. *За тригонометријске полиноме $\{A_n\}$, $A_n \in \mathcal{T}_n$, кажемо да су ортогонални тригонометријски полиноми целобројног степена у односу на тежинску функцију w на интервалу $[-\pi, \pi)$ ако и само ако је $(A_n, A_k) = 0$ за све $0 \leq k < n$, $n \in \mathbb{N}$, где је скаларни производ дат са* (2.12).

На основу дефиниције 2.2 закључујемо да је A_n ортогонални тригонометријски полином степена n, ако је

$$\int_{-\pi}^{\pi} A_n(x)A_k(x)w(x)\, \mathrm{d}x = 0, \quad 0 \leq k < n, \tag{2.13}$$

тј. ако је ортогоналан са сваком елементу простора $\mathcal{T}_{n-1}$. Пошто је димензија простора $\mathcal{T}_{n-1}$ једнака $2n-1$, а тригонометријски полином A_n има $2n+1$ непознатих коефицијената, поставља се питање под којим условима је полином A_n јединствено одређен.

Теорема 2.5. *Тригонометријски полином степена n*

$$A_n(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(c_k \cos kx + d_k \sin kx\right), \tag{2.14}$$

који је ортогоналан на интервалу $[-\pi, \pi)$ на свим тригонометријским полиномима степена из $\mathcal{T}_{n-1}$ у односу на тежинску функцију w, јединствено је одређен ако су унапред задати водећи коефицијенти c_n и d_n.

Доказ. Услови ортогоналности тригонометријског полинома A_n могу бити записани у облику

$$\int_{-\pi}^{\pi} A_n(x) \cos \nu x\, w(x)\, \mathrm{d}x = 0, \quad \nu = 0, 1, \ldots, n-1,$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} A_n(x) \sin \nu x\, w(x)\, \mathrm{d}x = 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Када заменимо тригонометријски полином $A_n(x)$, дат са (2.14), у претходне услове и уведемо ознаке:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos \nu x \cos kx\, w(x)\, \mathrm{d}x = \alpha_{k,\nu}, \quad k, \nu = 0, 1, \ldots, n,$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos \nu x \sin kx\, w(x)\, \mathrm{d}x = \beta_{k,\nu}, \quad \nu = 0, 1, \ldots, n,\ k = 1, 2, \ldots, n,$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin \nu x \sin kx\, w(x)\, \mathrm{d}x = \gamma_{k,\nu}, \quad k, \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

добијамо следећи систем једначина за одређивање непознатих коефицијената c_k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, и d_k, $k = 1, 2, \ldots, n-1$:

$$
\begin{aligned}
&c_0\alpha_{0,\nu} + \sum_{k=1}^{n-1} (c_k\alpha_{k,\nu} + d_k\beta_{k,\nu}) = -c_n\alpha_{n,\nu} - d_n\beta_{n,\nu}, \quad \nu = 0, 1, \ldots, n-1, \\
&c_0\beta_{\nu,0} + \sum_{k=1}^{n-1} (c_k\beta_{\nu,k} + d_k\gamma_{\nu,k}) = -c_n\beta_{\nu,n} - d_n\gamma_{\nu,n}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n-1.
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

Детерминанта система је

$$
\Delta = \begin{vmatrix}
\alpha_{0,0} & \alpha_{1,0} & \beta_{1,0} & \alpha_{2,0} & \beta_{2,0} & \cdots & \alpha_{n-1,0} & \beta_{n-1,0} \\
\alpha_{0,1} & \alpha_{1,1} & \beta_{1,1} & \alpha_{2,1} & \beta_{2,1} & \cdots & \alpha_{n-1,1} & \beta_{n-1,1} \\
\beta_{1,0} & \beta_{1,1} & \gamma_{1,1} & \beta_{1,2} & \gamma_{1,2} & \cdots & \beta_{1,n-1} & \gamma_{1,n-1} \\
\alpha_{0,2} & \alpha_{1,2} & \beta_{1,2} & \alpha_{2,2} & \beta_{2,2} & \cdots & \alpha_{n-1,2} & \beta_{n-1,2} \\
\beta_{2,0} & \beta_{2,1} & \gamma_{2,1} & \beta_{2,2} & \gamma_{2,2} & \cdots & \beta_{2,n-1} & \gamma_{2,n-1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\alpha_{0,n-1} & \alpha_{1,n-1} & \beta_{1,n-1} & \alpha_{2,n-1} & \beta_{2,n-1} & \cdots & \alpha_{n-1,n-1} & \beta_{n-1,n-1} \\
\beta_{n-1,0} & \beta_{n-1,1} & \gamma_{n-1,1} & \beta_{n-1,2} & \gamma_{n-1,2} & \cdots & \beta_{n-1,n-1} & \gamma_{n-1,n-1}
\end{vmatrix}
$$

Пошто је $\alpha_{k,\nu} = \alpha_{\nu,k}$, $k, \nu = 0, 1, \ldots, n-1$, и $\gamma_{k,\nu} = \gamma_{\nu,k}$, $k, \nu = 1, 2, \ldots, n-1$, детерминанта Δ је симетрична. Посматрајмо сада следећу квадратну форму променљивих $\xi_0, \xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \ldots, \xi_{n-1}, \eta_{n-1}$:

$$
\begin{aligned}
F &= \sum_{\nu=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{k,\nu}\xi_k\xi_\nu + 2\sum_{\nu=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} \beta_{k,\nu}\xi_\nu\eta_k + \sum_{\nu=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} \gamma_{k,\nu}\eta_k\eta_\nu \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} w(x) \left[\sum_{\nu=0}^{n-1} \xi_\nu \cos \nu x\right] \cdot \left[\sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \cos kx\right] \mathrm{d}x + \\
&\quad + 2\int_{-\pi}^{\pi} w(x) \left[\sum_{\nu=0}^{n-1} \xi_\nu \cos \nu x\right] \cdot \left[\sum_{k=1}^{n-1} \eta_k \sin kx\right] \mathrm{d}x + \\
&\quad + \int_{-\pi}^{\pi} w(x) \left[\sum_{\nu=1}^{n-1} \eta_\nu \sin \nu x\right] \cdot \left[\sum_{k=1}^{n-1} \eta_k \sin kx\right] \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} w(x) \left[\sum_{\nu=0}^{n-1} \xi_\nu \cos \nu x\right]^2 \mathrm{d}x + \\
&\quad + 2\int_{-\pi}^{\pi} w(x) \left[\sum_{\nu=0}^{n-1} \xi_\nu \cos \nu x\right] \cdot \left[\sum_{k=1}^{n-1} \eta_k \sin kx\right] \mathrm{d}x + \\
&\quad + \int_{-\pi}^{\pi} w(x) \left[\sum_{k=1}^{n-1} \eta_k \sin kx\right]^2 \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} w(x) \left[\sum_{\nu=0}^{n-1} \xi_\nu \cos \nu x + \sum_{k=1}^{n-1} \eta_k \sin kx\right]^2 \mathrm{d}x > 0.
\end{aligned}
$$

Квадратна форма F је позитивна и њена детерминанта је једнака Δ, па је $\Delta > 0$ и систем (2.15) има јединствено решење по променљивим c_k, $k = 0, 1, \dots, n-1$, и d_k, $k = 1, 2, \dots, n-1$. □

Специјално, ако водеће коефицијенте изаберемо тако да је $c_n = 1$ и $d_n = 0$, односно $c_n = 0$ и $d_n = 1$, добијамо

$$A_n^C(x) = \cos nx + \sum_{\nu=1}^{n-1} \big(c_\nu^{(n)} \cos \nu x + d_\nu^{(n)} \sin \nu x \big) + c_0^{(n)}, \tag{2.16}$$

$$A_n^S(x) = \sin nx + \sum_{\nu=0}^{n-1} \big(f_\nu^{(n)} \cos \nu x + g_\nu^{(n)} \sin \nu x \big) + f_0^{(n)}, \tag{2.17}$$

респективно.

Теорема 2.6. *Ортогонални тригонометријски полином целобројног степена A_n у односу на скаларни производ* (2.12) *има у интервалу $[-\pi, \pi)$ тачно $2n$ различитих простих нула.*

Доказ. Приметимо најпре да $A_n(x)$ има бар једну нулу на интервалу $[-\pi, \pi)$, јер ако то не би важило, тада, за $n \in \mathbb{N}$ услов ортогоналности

$$\int_{-\pi}^{\pi} A_n(x) \cos \frac{x}{2}\, w(x)\, \mathrm{d}x = 0$$

не би био испуњен, јер интегранд не мења знак на $[-\pi, \pi)$. Такође, A_n има паран број промена знака на $[-\pi, \pi)$ (видети напомену 2.2).

Претпоставимо да A_n има $2m$, $m < n$, промена знака на $[-\pi, \pi)$. Означимо те нуле са $y_1, y_2, \dots, y_{2m}$ и дефинишимо

$$t(x) = \prod_{k=1}^{2m} \sin \frac{x - y_k}{2}.$$

Како је $t \in \mathcal{T}_m$, $m < n$, због услова ортогоналности важило би

$$\int_{-\pi}^{\pi} A_n(x) t(x)\, w(x)\, \mathrm{d}x = 0,$$

што је немогуће јер интегранд не мења знак на $[-\pi, \pi)$. Стога, тригонометријски полином A_n има тачно $2n$ различитих простих нула. □

2.2.1 Рекурентне релације

Својство тригонометријских полинома полу–целобројног степена, ортогоналних у односу на скаларни производ (2.6), да задовољавају петочлане рекурентне релације (видети одељак 2.1.1) се може аналогно доказати и за тригонометријске полиноме целобројног степена.

За $\nu, \mu \in \mathbb{N}_0$ уведимо ознаке

$$\begin{aligned} I_\nu^C &= (A_\nu^C, A_\nu^C), \quad J_{\nu,\mu}^C = (2\cos x A_\nu^C, A_\mu^C), \\ I_\nu^S &= (A_\nu^S, A_\nu^S), \quad J_{\nu,\mu}^S = (2\cos x A_\nu^S, A_\mu^S), \\ I_\nu &= (A_\nu^C, A_\nu^S), \quad J_{\nu,\mu} = (2\cos x A_\nu^C, A_\mu^S). \end{aligned}$$

Напоменимо да смо исте ознаке увели и у случају тригонометријских полинома полу–целобројног степена, али са обзиром на то да ћемо ознаке користити у оквиру поглавља и да ће увек бити наглашен полу–целобројни степен, неће доћи до забуне.

Теорема 2.7. *Тригонометријски полиноми целобројног степена* $A_k^C(x)$ *и* $A_k^S(x)$, $k \geq 1$, *ортогонални у односу на скаларни производ* (2.12)*, задовољавају следеће петочлане рекурентне релације:*

$$\begin{aligned} A_k^C(x) = (2\cos x - \alpha_k^{(1)})A_{k-1}^C(x) - \beta_k^{(1)}A_{k-1}^S(x) \\ - \alpha_k^{(2)}A_{k-2}^C(x) - \beta_k^{(2)}A_{k-2}^S(x), \end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned} A_k^S(x) = (2\cos x - \delta_k^{(1)})A_{k-1}^S(x) - \gamma_k^{(1)}A_{k-1}^C(x) \\ - \delta_k^{(2)}A_{k-2}^S(x) - \gamma_k^{(2)}A_{k-2}^C(x), \end{aligned} \tag{2.19}$$

где су коефицијенти $\alpha_k^{(j)}, \beta_k^{(j)}, \gamma_k^{(j)}, \delta_k^{(j)}$, $k \geq 1$, $j = 1, 2$, *решења следећих система линеарних једначина*

$$J_{k-1,k-j}^C = \alpha_k^{(j)} I_{k-j}^C + \beta_k^{(j)} I_{k-j}, \quad J_{k-1,k-j} = \alpha_k^{(j)} I_{k-j} + \beta_k^{(j)} I_{k-j}^S,$$

$$J_{k-j,k-1} = \gamma_k^{(j)} I_{k-j}^C + \delta_k^{(j)} I_{k-j}, \quad J_{k-1,k-j}^S = \gamma_k^{(j)} I_{k-j} + \delta_k^{(j)} I_{k-j}^S,$$

и $\alpha_1^{(2)} = \beta_1^{(2)} = \gamma_1^{(2)} = \delta_1^{(2)} = 0$.

Доказ. Како су тригонометријски полиноми целобројног степена $A_\nu^C(x)$ и $A_\nu^S(x)$, $\nu = 0, 1, \ldots, k$, линеарно независни, израз $2\cos x A_{k-1}^C(x)$ можемо представити у следећем облику

$$2\cos x A_{k-1}^C(x) = A_k^C(x) + \sum_{\nu=0}^{k-1} \left(\alpha_k^{(k-\nu)} A_\nu^C(x) + \beta_k^{(k-\nu)} A_\nu^S(x) \right).$$

Ако сада обе стране претходне једнакости помножимо редом са $w(x)A_\nu^C(x)$ и $w(x)A_\nu^S(x)$ за $\nu = 0, 1, \ldots, k-3$, и интегралимо на $[-\pi, \pi)$, због ортогоналности добијамо следеће хомогене системе линеарних једначина

$$\alpha_k^{(k-\nu)} I_\nu^C + \beta_k^{(k-\nu)} I_\nu = 0, \quad \alpha_k^{(k-\nu)} I_\nu + \beta_k^{(k-\nu)} I_\nu^S = 0,$$

са непознатим коефицијентима $\alpha_k^{(k-\nu)}, \beta_k^{(k-\nu)}$, $\nu = 0, 1, \ldots, k-3$. Детерминанте претходних система су

$$\begin{aligned} D_\nu = &\left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(A_\nu^C(x)\right)^2 w(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(A_\nu^S(x)\right)^2 w(x)\,\mathrm{d}x\right) \\ &- \left(\int_{-\pi}^{\pi} A_\nu^C(x) A_\nu^S(x)\, w(x)\,\mathrm{d}x\right)^2, \quad \nu = 0, 1, \ldots, k-3. \end{aligned}$$

Да би показали да је $D_\nu \neq 0$, $\nu = 0, 1, \ldots, k-3$, искористићемо интегралну неједнакост Коши–Шварц[1]–Буњаковског[2] (видети [45, стр. 45]):

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\right), \quad f, g \in L^2[a, b],$$

у којој важи знак једнакости ако и само ако су функције f и g линеарно зависне.

Са обзиром на то да су тригонометријски полиноми целобројног степена $A_\nu^C(x)$ и $A_\nu^S(x)$ линеарно независни, закључујемо да је $D_\nu \neq 0$, $\nu = 0, 1, \ldots, k-3$, па претходни хомогени системи имају само тривијална решења $\alpha_k^{(k-\nu)} = \beta_k^{(k-\nu)} = 0$, $\nu = 0, 1, \ldots, k-3$. Према томе, претходна рекурентна релација редукује се на петочлану рекурентну релацију

$$\begin{aligned} 2\cos x A_{k-1}^C(x) = &A_k^C(x) + \alpha_k^{(1)} A_{k-1}^C(x) + \beta_k^{(1)} A_{k-1}^S(x) \\ &+ \alpha_k^{(2)} A_{k-2}^C(x) + \beta_k^{(2)} A_{k-2}^S(x), \end{aligned}$$

тј. добијамо рекурентну релацију (2.18).

Ако обе стране претходне рекурентне релације помножимо са $w(x)A_{k-j}^C(x)$ и $w(x)A_{k-j}^S(x)$, $j = 1, 2$, и интегралимо на $[-\pi, \pi)$, добићемо следеће системе линеарних једначина:

$$J_{k-1,k-j}^C = \alpha_k^{(j)} I_{k-j}^C + \beta_k^{(j)} I_{k-j}, \quad J_{k-1,k-j} = \alpha_k^{(j)} I_{k-j} + \beta_k^{(j)} I_{k-j}^S, \quad j = 1, 2,$$

са непознатим коефицијентима $\alpha_k^{(j)}, \beta_k^{(j)}$, $j = 1, 2$. Користећи опет исте аргументе може се показати да добијени системи такође имају јединствена решења.

Аналогно се добија рекурентна релација (2.19) за $A_k^S(x)$. □

[1] Karl Hermann Amandus Schwarz (1843–1921), немачки математичар
[2] Viktor Yakovych Bunyakovsky (1804–1889), украјински математичар

2.2.2 Парне тежинске функције

Посматраћемо посебно случај када је тежинска функција $w(x)$ парна на $(-\pi,\pi)$.

Лема 2.5. *Ако је тежинска функција* $w(x)$ *парна на* $(-\pi,\pi)$*, тада у* (2.18) *и* (2.19) *важи* $\beta_k^{(j)}=0$, $\gamma_k^{(j)}=0$, $j=1,2$, $k\in\mathbb{N}$, *и за коефицијенте у* (2.16) *и* (2.17) *важи да је* $d_\nu^{(n)}=0$, $\nu=1,2,\dots,n-1$, *и* $f_k^{(n)}=0$, $k=0,1,2,\dots,n-1$.

Доказ. Ако применимо Грам[3]–Шмитов[4] поступак ортогонализације на базу простора $\mathcal{T}_n$, тј. на

$$\{\cos 0x,\cos x,\sin x,\dots,\cos nx,\sin nx\},$$

у односу на скаларни производ (2.12), за $k\in\mathbb{N}_0$, $\nu\in\mathbb{N}$, имамо

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin\nu x\,w(x)\,\mathrm{d}x=0,$$

па закључујемо да се добијени систем ортогоналних функција може представити помоћу два низа функција φ_k, $k\in\mathbb{N}_0$, које зависе само од косинусних функција, и ψ_ν, $\nu\in\mathbb{N}$, које зависе само од синусних функција. Добијени систем функција, пошто је јединствен, мора бити једнак ортогоналним тригонометријским полиномима A_ν^C, $\nu\in\mathbb{N}_0$, и A_ν^S, $\nu\in\mathbb{N}$, тј. A_ν^C, $\nu\in\mathbb{N}_0$, зависи само од косинусних функција, па је $d_k^{(\nu)}=0$, $k=1,2,\dots,n-1$, $\nu\in\{0,1,\dots,n\}$, а A_ν^S, $\nu\in\mathbb{N}$, зависи само од синусних функција, па је $f_k^{(\nu)}=0$, $k=0,1,\dots,n-1$, $\nu\in\{1,2,\dots,n\}$. Зато се систем од две петочлане рекурентне релације претвара у две независне трочлане рекурентне релације, тј. $\beta_k^{(j)}=0$, $\gamma_k^{(j)}=0$, $j=1,2$, $k\in\mathbb{N}$. □

На основу претходне леме закључујемо да када је тежинска фунцкија $w(x)$ парна на $(-\pi,\pi)$, тригонометријски полиноми целобројног степена (2.16) и (2.17) своде се на:

$$A_n^C(x)=\sum_{\nu=0}^{n}c_\nu^{(n)}\cos\nu x,\quad c_n^{(n)}=1, \tag{2.20}$$

$$A_n^S(x)=\sum_{\nu=1}^{n}g_\nu^{(n)}\sin\nu x,\quad g_n^{(n)}=1,$$

и задовољавају следеће трочлане рекурентне релације

$$A_n^C(x)=(2\cos x-\alpha_n^{(1)})A_{n-1}^C(x)-\alpha_n^{(2)}A_{n-2}^C(x),$$

[3] Jorgen Pedersen Gram (1850–1916), дански математичар

[4] Erhard Schmidt (1876–1959), немачки математичар

$$A_n^S(x) = (2\cos x - \delta_n^{(1)})A_{n-1}^S(x) - \delta_n^{(2)}A_{n-2}^S(x),$$

где су коефицијенти $\alpha_n^{(j)}$, $\delta_n^{(j)}$, $n \geq 1$, $j = 1, 2$, решења следећих једначина

$$J_{n-1,n-j}^C = \alpha_n^{(j)} I_{n-j}^C, \quad J_{n-1,n-j}^S = \delta_n^{(j)} I_{n-j}^S,$$

и $\alpha_1^{(2)} = \delta_1^{(2)} = 0$.

Глава 3

Квадратурне формуле Гаусовог типа за тригонометријске полиноме

Детаљније о познатој Гаусовој квадратурној формули са максималним алгебарским степеном тачности смо писали у глави 1. Такође смо поменули један пример уопштења тих квадратурних формула на квадратурне формуле са максималним тригонометријским степеном тачности. Квадратурне формуле Гаусовог типа за тригонометријске полиноме су веома важне због њихове примене у чистој и примењеној математици, као и у другим наукама. Такве квадратурне формуле су изучаване у многим радовима, на пример, [70], [47], [48], [49], [5], [6], [26], [36], [40], [38], [52]. Различити методи за конструкцију ових квадратурних формула су упоређени у [40].

Са $w(x)$ означићемо ненегативну и интеграбилну тежинску функцију на интервалу $[-\pi, \pi)$, која има вредност нула само на скупу мере нула.

Дефиниција 3.1. *Квадратурна формула*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, w(x)\, \mathrm{d}x = \sum_{\nu=0}^{n} w_\nu f(x_\nu) + R_n(f), \tag{3.1}$$

где је $-\pi \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n < \pi$, има тригонометријски степен тачности d ако за све тригонометријске полиноме $t \in \mathcal{T}_d$ важи $R_n(t) = 0$ и постоји тригонометријски полином $g \in \mathcal{T}_{d+1}$ такав да је $R_n(g) \neq 0$.

Напомена 3.1. *Турецки је у раду [70] посматрао интервал $[0, 2\pi)$ уместо интервала $[-\pi, \pi)$, али како је доказано у [40], поменута квадратурна формула може бити разматрана на било ком интервалу облика $[L, 2\pi + L)$, $L \in \mathbb{R}$ (доказ се своди на коришћење одговарајуће особине ортогоналних тригонометријских полинома дате лемом 2.3). Зато ћемо у наставку посматрати квадратурне формуле на интервалу $[-\pi, \pi)$, као специјалан случај интервала облика $[L, 2\pi + L)$, $L \in \mathbb{R}$, за $L = -\pi$, или на интервалу $[0, 2\pi)$.*

Максималан тригонометријски степен тачности квадратурних формула облика (3.1) са $n+1$ чвором је n. Такве квадратурне формуле су познате као *квадратурне формуле Гаусовог типа за тригонометријске полиноме*. Пошто је димензија простора $\mathcal{T}_n$ једнака $2n+1$, из услова максималне тачности квадратурне формуле (3.1) добијамо нелинеаран систем од $2n+1$ једначина за одређивање $2n+2$ непознате $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $w_0, w_1, \ldots, w_n$. Зато, поступајући као у случају квадратурних формула са максималним алгебарским степеном тачности (видети поглавље 1.1), уместо директног решавања добијеног система, анализирају се особине тригонометријског полинома чије су нуле чворови x_ν, $\nu = 0, 1, \ldots, n$, квадратурне формуле (3.1). Због овог метода морамо посебно разматрати квадратурне формуле са парним односно непарним бројем чворова. Конструкција квадратурних формула за оба случаја је слична, са разликом што се користе ортогонални тригонометријски полиноми полу–целобројног и целобројног степена, у случају непарног, односно парног броја чворова, респективно. Кратак преглед најважнијих резултата, као и референце са детаљнијом анализом квадратурних формула (са непарним и парним бројем чворова) за тригонометријске полиноме, дат је у следећа два поглавља.

3.1 Квадратурне формуле са непарним бројем чворова

Посматраћемо квадратурне формуле са непарним бројем чворова, односно квадратурне формуле са максималним парним тригонометријским степеном течности. Постоји неколико различитих метода за конструкцију таквих квадратурних формула (видети [40] и тамо дате референце), али метод представљен у [70] је симулација развоја Гаусових квадратурних формула за алгебарске полиноме.

Интерполациона квадратурна формула за тригонометријске полиноме (3.1) је у овом случају облика

$$\int_0^{2\pi} f(x)\, w(x)\, \mathrm{d}x = \sum_{\nu=0}^{2n} w_\nu f(x_\nu) + R_n(f), \tag{3.2}$$

где је $0 \le x_0 < x_1 < \cdots < x_{2n} < 2\pi$ и

$$w_\nu = \int_0^{2\pi} \ell_\nu(x)\, w(x)\, \mathrm{d}x, \quad \ell_\nu(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq\nu}}^{2n} \frac{\sin\left(\frac{x-x_j}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x_\nu-x_j}{2}\right)}, \quad \nu = 0, 1, \ldots, 2n. \tag{3.3}$$

Максималан тригонометријски степен тачности квадратурне формуле (3.2) је $2n$. Познато је (видети [70], [40]) да је (3.2) квадратурна формула Гаусовог типа за тригонометријске полиноме, тј. тачна за све тригонометријске полиноме степена $2n$, ако и само ако су чворови x_ν, $\nu = 0, 1, \ldots, 2n$, нуле ортогоналног тригонометријског полинома полу–целобројног степена $n + 1/2$ у односу на тежинску функцију w на $[0, 2\pi)$. Детаљна анализа таквих Гаусових квадратурних формула као и нумерички методи за конструкцију се могу наћи у [70], [40], [8].

За неке тежинске функције, добијене су и експлицитне формуле за чворове и тежинске коефицијенте квадратурне формуле (3.2) (видети [70, §3]). Специјално (видети [70, Example 1.]), ако је тежинска функција $w(x) = 1$, тада је квадратурна формула (3.2) са максималним тригонометријским степеном тачности дата са

$$\int_0^{2\pi} f(x)\, w(x)\, \mathrm{d}x = \sum_{\nu=0}^{2n} \frac{2\pi}{2n+1} f\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n+1}\right) + R_n(f),$$

где је $R_n(f) = 0$ за $f \in \mathcal{T}_{2n}$.

3.1.1 Парне тежинске функције

Посматраћемо квадратурне формуле Гаусовог типа (3.2) при чему је интервал интеграције $[-\pi, \pi)$ и тежинска функција $w(x)$ парна на интервалу $(-\pi, \pi)$, тј. $w(-x) = w(x)$, $x \in (-\pi, \pi)$, односно квадратурне формуле облика

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, w(x)\, \mathrm{d}x = \sum_{\nu=0}^{2n} w_\nu f(x_\nu) + R_n(f), \tag{3.4}$$

где је $-\pi \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_{2n} < \pi$ и

$$w_\nu = \int_{-\pi}^{\pi} \ell_\nu(x)\, w(x)\, \mathrm{d}x, \quad \ell_\nu(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq\nu}}^{2n} \frac{\sin\left(\frac{x-x_j}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x_\nu-x_j}{2}\right)}, \quad \nu = 0, 1, \ldots, 2n. \tag{3.5}$$

Веза између квадратурне формуле (3.4) и одређене Гаусове квадратурне формуле за алгебарске полиноме је разматрана у раду [40], где су доказане и следеће две леме. Основне резултате о Гаусовим квадратурним формулама за алгебарске полиноме читаоци могу наћи у глави 1.

Лема 3.1. *Нека је w парна тежинска функција на интервалу $(-\pi, \pi)$. Нека су τ_ν, σ_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, чворови и тежински коефицијенти Гаусове квадратурне формуле за алгебарске полиноме са n тачака у односу на тежинску функцију*

$$\widetilde{w}_1(x) = w(\arccos x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad x \in (-1, 1). \tag{3.6}$$

Тада за квадратурну формулу Гаусовог типа за тригонометријске полиноме (3.4) *у односу на тежинску функцију w на $(-\pi,\pi)$, имамо*

$$w_{2n-\nu-1} = w_\nu = \frac{\sigma_{\nu+1}}{1+\tau_{\nu+1}}, \quad \nu = 0,1,\ldots,n-1, \tag{3.7}$$

$$w_{2n} = \int_{-\pi}^{\pi} w(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{\nu=0}^{2n-1} w_\nu,$$

$$x_{2n-\nu-1} = -x_\nu = \arccos\tau_{\nu+1}, \quad \nu = 0,1,\ldots,n-1, \quad x_{2n} = \pi. \tag{3.8}$$

Лема 3.2. *Нека је w парна тежинска функција на интервалу $(-\pi,\pi)$. Нека су τ_ν,σ_ν, $\nu = 1,2,\ldots,n$, чворови и тежински коефицијенти Гаусове квадратурне формуле за алгебарске полиноме са n тачака у односу на тежинску функцију*

$$\widetilde{w}_2(x) = w(\arccos x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \quad x \in (-1,1), \tag{3.9}$$

Тада за квадратурну формулу Гаусовог типа за тригонометријске полиноме (3.4) *у односу на тежинску функцију w на $(-\pi,\pi)$, имамо*

$$w_{2n-\nu} = w_\nu = \frac{\sigma_{\nu+1}}{1-\tau_{\nu+1}}, \quad \nu = 0,1,\ldots,n-1, \quad w_n = \int_{-\pi}^{\pi} w(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{\substack{\nu=0\\ \nu\neq n}}^{2n} w_\nu,$$

$$x_{2n-\nu} = -x_\nu = \arccos\tau_{\nu+1}, \quad \nu = 0,1,\ldots,n-1, \quad x_n = 0. \tag{3.10}$$

За дату функцију f увешћемо следеће функције:

$$f_1(x) = \frac{f(-\arccos x) + f(\arccos x)}{1+x}; \tag{3.11}$$

$$f_2(x) = \frac{f(-\arccos x) + f(\arccos x)}{1-x}. \tag{3.12}$$

Са $\widetilde{R}_n(\widetilde{w};g)$ ћемо означити остатак Гаусове квадратурне формуле у односу на тежинску функцију $\widetilde{w}$ на интервалу $(-1,1)$ конструисане за алгебарске полиноме:

$$\int_{-1}^{1} g(x)\,\widetilde{w}(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{\nu=1}^{n} \sigma_\nu g(\tau_\nu) + \widetilde{R}_n(\widetilde{w};g). \tag{3.13}$$

Детаљније о овим квадратурним формулама и остатку $\widetilde{R}_n(\widetilde{w};g)$ читалац може наћи у поглављима 1.1 и 1.2, као и, у тамо датим референцама.

Сада ћемо дати везу остатка Гаусове квадратурне формуле за тригонометријске полиноме са остатком одговарајуће Гаусове квадратурне формуле за алгебарске полиноме (видети [64]).

Лема 3.3. *Ако је $f(\pi) = 0$, тада је остатак $R_n(f)$ квадратурне формуле Гаусовог типа* (3.4) *у односу на парну тежинску функцију w на $(-\pi, \pi)$ једнак остатку $\widetilde{R}_n(\widetilde{w}_1; f_1)$ Гаусове квадратурне формуле конструисане за алгебарске полиноме, где су $\widetilde{w}_1(x)$ и f_1 дати са* (3.6) *и* (3.11)*, респективно.*

Доказ. Елементарним трансформацијама и сменом $x := \arccos x$ у интегралу на левој страни (3.4), добијамо

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, w(x)\, \mathrm{d}x &= \int_{-\pi}^{0} f(x)\, w(x)\, \mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} f(x)\, w(x)\, \mathrm{d}x \\
&= \int_{0}^{\pi} f(-x)\, w(x)\, \mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} f(x)\, w(x)\, \mathrm{d}x \\
&= \int_{0}^{\pi} (f(-x) + f(x))\, w(x)\, \mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} (f(-\arccos x) + f(\arccos x)) \frac{w(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}\, \mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{f(-\arccos x) + f(\arccos x)}{1+x}\, \widetilde{w}_1(x)\, \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Применом Гаусове квадратурне формуле конструисане за алгебарске полиноме у односу на тежинску функцију $\widetilde{w}_1(x)$, $x \in (-1, 1)$, добијамо

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(-\arccos x) + f(\arccos x)}{1+x}\, \widetilde{w}_1(x)\, \mathrm{d}x = \sum_{\nu=1}^{n} \sigma_\nu f_1(\tau_\nu) + \widetilde{R}_n(\widetilde{w}_1; f_1),$$

где је f_1 дато са (3.11). Заменом (3.8) и (3.7) у суму на десној страни (3.4) и коришћењем $f(\pi) = 0$ имамо

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=0}^{2n} w_\nu f(x_\nu) &= \sum_{\nu=0}^{n-1} w_\nu f(x_\nu) + \sum_{\nu=0}^{n-1} w_{2n-\nu-1} f(x_{2n-\nu-1}) + w_{2n} f(x_{2n}) \\
&= \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{\sigma_{\nu+1}}{1+\tau_{\nu+1}} f(-\arccos \tau_{\nu+1}) + \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{\sigma_{\nu+1}}{1+\tau_{\nu+1}} f(\arccos \tau_{\nu+1}) \\
&\quad + w_{2n} f(\pi) \\
&= \sum_{\nu=0}^{n-1} \sigma_{\nu+1} \frac{f(-\arccos \tau_{\nu+1}) + f(\arccos \tau_{\nu+1})}{1+\tau_{\nu+1}} \\
&= \sum_{\nu=1}^{n} \sigma_\nu f_1(\tau_\nu).
\end{aligned}$$

Значи добијамо да су остаци, $R_n(f)$ и $\widetilde{R}_n(\widetilde{w}_1; f_1)$, ове две квадратурне формуле једнаки. □

Следећа лема се може доказати на сличан начин.

Лема 3.4. *Ако је $f(0) = 0$, тада је остатак $R_n(f)$ квадратурне формуле Гаусовог типа* (3.4) *у односу на парну тежинску функцију w на $(-\pi, \pi)$ једнак остатку $\widetilde{R}_n(\widetilde{w}_2; f_2)$ Гаусове квадратурне формуле конструисане за алгебарске полиноме, где су $\widetilde{w}_2(x)$ и f_2 дати са* (3.9) *и* (3.12)*, респективно.*

3.2 Квадратурне формуле са парним бројем чворова

Пошто је број чворова паран квадратурна формула (3.1) је у овом случају дата са

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, w(x)\, \mathrm{d}x = \sum_{\nu=0}^{2n-1} w_\nu f(x_\nu) + R_n(f), \tag{3.14}$$

где је $-\pi \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_{2n-1} < \pi$.

Аналогно поступку који је користио Турецки у [70], конструисаћемо интерполационе квадратурне формуле облика (3.14), тј. квадратурне формуле (3.14) које су тачне за све тригонометријске полиноме из $\widetilde{\mathcal{T}}_n$. За конструкцију таквих квадратурних формула нам је потребан тригонометријски интерполациони полином у Лагранжовом облику. У [5, Theorem 3.3.] доказана је теорема о егзистенцији и јединствености траженог интерполационог полинома.

Теорема 3.1. *Нека су $x_\nu \in [-\pi, \pi)$, $\nu = 0, 1, \ldots, 2n-1$, $2n$ различитих чворова и y_j, $j = 0, 1, \ldots, 2n-1$, реални бројеви и посматрајмо интерполациони проблем*

$$\widetilde{T}_n(x_j) = y_j, \quad j = 0, 1, \ldots, 2n-1. \tag{3.15}$$

Тада важи:

1° *ако је $\sum_{j=0}^{2n-1} x_j \neq k\pi$ за свако $k \in \mathbb{Z}$, тада постоји јединствено решење интерполационог проблема* (3.15) *у простору $\mathcal{T}_n \backslash \mathcal{L}\{\cos nx\}$ и $\mathcal{T}_n \backslash \mathcal{L}\{\sin nx\}$;*

2° *ако је $\sum_{j=0}^{2n-1} x_j = k\pi$, где је k непаран цео број, тада постоји јединствено решење интерполационог проблема* (3.15) *у простору $\mathcal{T}_n \backslash \mathcal{L}\{\cos nx\}$;*

3° *ако је $\sum_{j=0}^{2n-1} x_j = k\pi$, где је k паран цео број, тада постоји јединствено решење интерполационог проблема* (3.15) *у простору $\mathcal{T}_n \backslash \mathcal{L}\{\sin nx\}$.*

У [5] је, такође, дата репрезентација интерполационог полинома Лагранжовог типа:

$$\widetilde{T}_n(x) = \sum_{\nu=0}^{2n-1} f(x_\nu) \widetilde{s}_\nu(x), \tag{3.16}$$

где је

$$\widetilde{s}_\nu(x) = \frac{1}{2A'_n(x_\nu)\sin\eta_n}\sin\left(\frac{x+\alpha_\nu}{2}\right)\frac{A_n(x)}{\sin\left(\frac{x-x_\nu}{2}\right)}$$

или

$$\widetilde{s}_\nu(x) = \frac{1}{2A'_n(x_\nu)\cos\eta_n}\cos\left(\frac{x+\alpha_\nu}{2}\right)\frac{A_n(x)}{\sin\left(\frac{x-x_\nu}{2}\right)},$$

ако је $\widetilde{\mathcal{T}}_n$ простор $\mathcal{T}_n \backslash \mathcal{L}\{\sin nx\}$ односно $\mathcal{T}_n \backslash \mathcal{L}\{\cos nx\}$, респективно,

$$\eta_n = \frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{2n-1} x_\nu, \quad \alpha_\nu = \prod_{\substack{k=0\\k\neq\nu}}^{2n-1} x_k,$$

и

$$A_n(x) = A\prod_{k=0}^{2n-1}\sin\frac{x-x_k}{2} \quad (A \text{ константа различита од } 0).$$

Ако обе стране једнакости (3.16) помножимо са $w(x)$ и интегралимо на $[-\pi,\pi)$, добијамо да су тежине у квадратурној формули (3.14) дате са

$$w_\nu = \int_{-\pi}^{\pi}\widetilde{s}_\nu(x)\,w(x)\,\mathrm{d}x, \quad \nu = 0,1,\ldots,2n-1. \tag{3.17}$$

Ако чворови x_ν, $\nu = 0,1,\ldots,2n-1$, нису унапред фиксирани, може се повећати тачност квадратурне формуле (3.14), тако да она буде тачна за све тригонометријске полиноме $t \in \mathcal{T}_{2n-1}$.

Теорема 3.2. *Квадратурна формула облика* (3.14)*, у којој су тежински коефицијенти* w_ν, $\nu = 0,1,\ldots,2n-1$, *дати са* (3.17)*, је Гаусова квадратурна формула, тј. има тригонометријски степен тачности* $2n-1$, *ако и само ако су чворови* x_ν $(\in[-\pi,\pi))$, $\nu = 0,1,\ldots,2n-1$, *нуле ортогоналног тригонометријског полинома целобројног степена* $A_n(x)$ *у односу на тежинску функцију* $w(x)$ *на* $[-\pi,\pi)$.

Доказ. Претпоставимо да је формула (3.14) тачна за све тригонометријске полиноме из простора $\mathcal{T}_{2n-1}$. Нека је

$$t(x) = A_n(x)Q_{n-1}(x),$$

где је

$$A_n(x) = A\prod_{\nu=0}^{2n-1}\sin\frac{x-x_\nu}{2}$$

и Q_{n-1} произвољан тригонометријски полином степена не вишег од $n-1$. Тада $t(x) \in \mathcal{T}_{2n-1}$ па важи

$$\int_{-\pi}^{\pi} t(x)\,w(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} A_n(x)Q_{n-1}(x)\,w(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{\nu=0}^{2n-1} w_\nu A_n(x_\nu)Q_{n-1}(x_\nu) = 0,$$

тј. тригонометријски полином $A_n(x)$ је ортогоналан на $(-\pi,\pi)$ у односу на тежинску функцију $w(x)$ на произвољном тригонометријском полиному Q_{n-1}.

Обратно, нека су x_ν, $\nu=0,1,\ldots,2n-1$, нуле полинома $A_n(x)$, на интервалу $[-\pi,\pi)$, који је ортогоналан на свим тригонометријским полиномима степена не вишег од $n-1$ у односу на тежинску функцију $w(x)$ на интервалу $(-\pi,\pi)$.

Применом леме 2.4, специјално када је $m=n-1$, тригонометријски полином $t(x)\in\mathfrak{T}_{2n-1}$ може бити представљен у облику

$$t(x)=A_n(x)Q_{n-1}(x)+\widetilde{P}_n(x),\quad Q_{n-1}\in\mathfrak{T}_{n-1},\widetilde{P}_n\in\widetilde{\mathfrak{T}}_n.$$

Сада добијамо

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}t(x)\,w(x)\,\mathrm{d}x&=\int_{-\pi}^{\pi}A_n(x)Q_{n-1}(x)\,w(x)\,\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi}\widetilde{P}_n(x)\,w(x)\,\mathrm{d}x\\&=\sum_{\nu=0}^{2n-1}w_\nu\widetilde{P}_n(x_\nu)=\sum_{\nu=0}^{2n-1}w_\nu t(x_\nu),\end{aligned}$$

тј. квадратурна формула (3.14) је тачна за све тригонометријске полиноме степена мањег или једнаког од $2n-1$. $\square$

3.2.1 Парне тежинске функције

Посматраћемо квадратурне формуле (3.14) Гаусовог типа када је тежинска функција w парна на интервалу на интервалу $(-\pi,\pi)$.

Напоменимо да су у [5] чворови x_ν, $\nu=0,1,\ldots,2n-1$, нуле би–ортогоналног тригонометријског система (видети [5, Corollary 5.6.]), али се у случају парне тежинске функције би–ортогоналност своди на ортогоналност дату дефиницијом 2.2.

Везе, аналогне оним међу квадратурним формулама Гаусовог типа (3.4) и одређеним Гаусовим квадратурним формулама за алгебарске полиноме, добијене су и за квадратурне формуле (3.14) (видети [64]). Прво ћемо навести потребан помоћни резултат. Користићемо рекурентне релације, особине ортогоналних тригонометријских полинома, као и ознаке које су дате у поглављу 2.2.

Лема 3.5. *За парну тежинску функцију* $w(x)$, $x\in(-\pi,\pi)$, *и за свако* $0\le k\le n-1$, $n\in\mathbb{N}$, *важи:*

$$\int_{-1}^{1}C_n(x)C_k(x)\frac{w(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x=0,\quad C_n(x)=\sum_{\nu=0}^{n}c_\nu^{(n)}T_\nu(x)$$

и

$$\int_{-1}^{1}S_n(x)S_k(x)\sqrt{1-x^2}w(\arccos x)\,\mathrm{d}x=0,\quad S_n(x)=\sum_{\nu=0}^{n}g_\nu^{(n)}U_\nu(x),$$

где су T_ν и U_ν, $\nu \in \mathbb{N}_0$, Чебишевљеви полиноми прве и друге врсте, респективно.

Полиноми $C_n(x)$ и $S_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, задовољавају следеће трочлане рекурентне релације:

$$
\begin{aligned}
C_n(x) &= (2x - \alpha_n^{(1)})C_{n-1}(x) - \alpha_n^{(2)}C_{n-2}(x), \quad \alpha_1^{(2)} = 0, \quad C_0 = 1, \\
S_n(x) &= (2x - \delta_n^{(1)})S_{n-1}(x) - \delta_n^{(2)}S_{n-2}(x), \quad \delta_1^{(2)} = 0, \quad S_0 = 1.
\end{aligned} \tag{3.18}
$$

Доказ. Пошто је $A_n^C \in \mathcal{T}_n$ ортогоналан на свим A_k^C, $0 \le k \le n-1$, у односу на парну тежинску функцију $w(x)$, закључујемо да је (на основу (2.13))

$$\int_0^\pi A_n^C(x)A_k^C(x)w(x)\,\mathrm{d}x = 0, \quad n,k \in \mathbb{N}, \quad n > k.$$

Сменом $x := \arccos x$, добијамо

$$\int_{-1}^1 A_n^C(\arccos x)A_k^C(\arccos x)\frac{w(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = 0. \tag{3.19}$$

Пошто је $\cos(\nu \arccos x) = T_\nu(x)$, следи да је

$$A_n^C(\arccos x) = \sum_{\nu=0}^n c_\nu^{(n)} T_\nu(x),$$

где је A_n^C дато са (2.20). Сада, мењајући $A_n^C(\arccos x)$ у (3.19) и означавањем $C_n(x) = \sum_{\nu=0}^n c_\nu^{(n)} T_\nu(x)$ добијамо прво тврђење.

Друго тврђење се може доказати на исти начин коришћењем услова ортогоналности за A_n^S и једнакости $\sin(\nu \arccos x) = \sqrt{1-x^2}U_\nu(x)$.

Одговарајуће рекурентне релације се добијају заменом $x := \arccos x$ у рекурентним релацијама за A_n^C и A_n^S датих у одељку 2.2.2. □

Из доказа леме 3.5 се види да је

$$A_n^C(\arccos x) = C_n(x), \tag{3.20}$$

где алгебарски полином C_n задовољава трочлану рекурентну релацију (3.18).

Сада ће у следеће две леме бити дате везе квадратурне формуле Гаусовог типа (3.14) и одговарајуће Гаусове квадратурне формуле за алгебарске полиноме.

Лема 3.6. *Нека је w парна тежинска функција на интервалу $(-\pi,\pi)$ и нека су τ_ν и σ_ν, $\nu = 1,2,\ldots,n$, чворови и тежински коефицијенти Гаусове квадратурне формуле са n тачака за алгебарске полиноме у односу на тежинску функцију*

$$\widetilde{w}_3(x) = \frac{w(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1,1). \tag{3.21}$$

Тада за квадратурну формулу Гаусовог типа (3.14) *у односу на тежинску функцију w на $(-\pi,\pi)$ важи:*

$$
\begin{aligned}
w_{2n-1-\nu} &= w_\nu = \sigma_{\nu+1}, \quad \nu = 0,1,\ldots,n-1, \\
x_{2n-1-\nu} &= -x_\nu = \arccos \tau_{\nu+1}, \quad \nu = 0,1,\ldots,n-1.
\end{aligned} \tag{3.22}
$$

Доказ. Сменом $x := \arccos x$ добијамо да су нуле тригонометријског полинома $A_n^C(x)$ дате са $x_{2n-1-\nu} = -x_\nu = \arccos \tau_{\nu+1}$, $\nu = 0, \dots, n-1$. Тежински коефицијенти Гаусове квадратурне формуле се могу добити коришћењем Шохатове[1] формуле (видети [55], [35])

$$\sigma_\nu = \frac{\mu_0}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{C_n(\tau_\nu)}{\prod_{j=2}^k \alpha_{j,0}^{(2)}} \right)^2}, \quad \nu = 1, 2, \dots, n,$$

где је

$$\mu_0 = \int_{-1}^1 \frac{w(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x.$$

Применом (3.20) добијамо

$$\sigma_\nu = \frac{\mu_0}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{A_n^C(x_{2n-\nu})}{\prod_{j=2}^k \alpha_{j,0}^{(2)}} \right)^2}, \quad \nu = 1, 2, \dots, n.$$

Како је $w(x)$, $x \in (-\pi, \pi)$, парна тежинска функција, тежински коефицијенти w_ν су дати са

$$w_{2n-1-\nu} = \frac{2\mu_0}{\displaystyle 2\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{A_n^C(x_{2n-1-\nu})}{\prod_{j=2}^k \alpha_{j,0}^{(2)}} \right)^2},$$

за $\nu = 0, 1, \dots, n-1$, где је

$$\int_{-\pi}^{\pi} w(x) \, \mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi} w(x) \, \mathrm{d}x = 2\int_{-1}^1 \frac{w(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x = 2\mu_0.$$

Упоређујући формуле за тежинске коефицијенте добијамо да је $w_{2n-1-\nu} = \sigma_{\nu+1}$, $\nu = 0, 1, \dots, n-1$, и пошто је квадратурна формула симетрична следи да је $w_\nu = w_{2n-1-\nu}$, $\nu = 0, 1, \dots, n-1$. □

Применом сличних аргумената може се доказати следећа лема.

Лема 3.7. *Нека је w парна тежинска функција на интервалу $(-\pi, \pi)$ и нека су τ_ν и σ_ν, $\nu = 1, 2, \dots, n$, чворови и тежински коефицијенти Гаусове квадратурне формуле за алгебарске полиноме са n тачака у односу на тежинску функцију*

$$\widetilde{w}_4(x) = w(\arccos x)\sqrt{1-x^2}, \quad x \in (-1, 1). \tag{3.23}$$

Тада за квадратурну формулу Гаусовог типа (3.14) *у односу на тежинску функцију w на $(-\pi, \pi)$ важи:*

$$w_{2n-1-\nu} = w_\nu = \frac{\sigma_{\nu+1}}{1-\tau_{\nu+1}^2}, \quad \nu = 0, 1, \dots, n-1,$$

$$x_{2n-1-\nu} = -x_\nu = \arccos \tau_{\nu+1}, \quad \nu = 0, 1, \dots, n-1.$$

[1] James Alexander Shohat (1886–1944), амерички математичар

За дату функцију f уведимо следеће функције:

$$f_3(x) = f(-\arccos x) + f(\arccos x); \tag{3.24}$$

$$f_4(x) = \frac{f(-\arccos x) + f(\arccos x)}{1-x^2}. \tag{3.25}$$

У следеће две леме је дата веза остатка квадратурне формуле Гаусовог типа (3.14) и остатка $\widetilde{R}_n(\widetilde{w}; g)$ одговарајуће Гаусове квадратурне формуле (3.13) конструисане за алгебарске полиноме у односу на тежинску функцију $\widetilde{w}$ на интервалу $(-1, 1)$.

Лема 3.8. *Остатак $R_n(f)$ квадратурне формуле Гаусовог типа* (3.14) *у односу на парну тежинску функцију w на $(-\pi, \pi)$ је једнак остатку $\widetilde{R}_n(\widetilde{w}_3; f_3)$ Гаусове квадратурне формуле конструисане за алгебарске полиноме, где су $\widetilde{w}_3(x)$ и f_3 дати са* (3.21) *и* (3.24)*, респективно.*

Доказ. Елементарним трансформацијама и сменом $x := \arccos x$ у интегралу на левој страни (3.14), добијамо

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, w(x)\, \mathrm{d}x &= \int_{-\pi}^{0} f(x)\, w(x)\, \mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} f(x)\, w(x)\, \mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{1} \big(f(-\arccos x) + f(\arccos x)\big)\, \widetilde{w}_3(x)\, \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Применом Гаусове квадратурне формуле конструисане за алгебарске полиноме у односу на тежинску функцију $\widetilde{w}_3(x)$, $x \in (-1, 1)$, добијамо

$$\int_{-1}^{1} f_3(x)\, \widetilde{w}_3(x)\, \mathrm{d}x = \sum_{\nu=1}^{n} \sigma_\nu f_3(\tau_\nu) + \widetilde{R}_n(\widetilde{w}_3; f_3),$$

где је f_3 дато са (3.24). Заменом (3.22) у суму на десној страни (3.14) добијамо

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=0}^{2n-1} w_\nu f(x_\nu) &= \sum_{\nu=0}^{n-1} w_\nu f(x_\nu) + \sum_{\nu=0}^{n-1} w_{2n-1-\nu} f(x_{2n-1-\nu}) \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} \sigma_\nu f(-\arccos \tau_\nu) + \sum_{\nu=1}^{n} \sigma_\nu f(\arccos \tau_\nu) \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} \sigma_\nu \big(f(-\arccos \tau_\nu) + f(\arccos \tau_\nu)\big) \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} \sigma_\nu f_3(\tau_\nu).\end{aligned}$$

Закључујемо да су остаци $R_n(f)$ и $\widetilde{R}_n(\widetilde{w}_3; f_3)$ једнаки. $\square$

На сличан начин се може доказати и следећа лема.

Лема 3.9. *Остатак* $R_n(f)$ *квадратурне формуле Гаусовог типа* (3.14) *у односу на парну тежинску функцију* w *на* $(-\pi, \pi)$ *је једнак остатку* $\widetilde{R}_n(\widetilde{w}_4; f_4)$ *Гаусове квадратурне формуле конструисане за алгебарске полиноме, где су* $\widetilde{w}_4(x)$ *и* f_4 *дати са* (3.23) *и* (3.25)*, респективно.*

Глава 4

Оцене остатака квадратурних формула Гаусовог типа за тригонометријске полиноме

О остатку Гаусове квадратурне формуле за алгебарске полиноме је писано у поглављу 1.2. Сада ћемо посматрати остатак квадратурних формула Гаусовог типа за тригонометријске полиноме.

Прве резултате око оцене остатка квадратурних формула Гаусовог типа за тригонометријске полиноме дао је Штенгер[1] у [67] и то само у случају тежинске функције $w(x) = 1$. Ми смо у [61] и [63] за оцену остатка квадратурних формула Гаусовог типа за тригонометријске полиноме користили метод аналоган методу Штенгера из [66] за оцену остатака Гаусових квадратурних формула за алгебарске полиноме. Предност нашег метода, који је дат у поглављу 4.1, је шира област примене, јер се може осим за $w(x) = 1$ применити и на квадратурне формуле са другим тежинским функцијама.

Коришћењем везе између квадратурних формула са максималним тригонометријским степеном тачности и одговарајућих квадратурних формула за алгебарске полиноме, добијене су оцене остатака за квадратурне формуле са парним тежинским функцијама у случају максималног парног и непарног тригонометријског степена тачности за функције које су аналитичке на одређеној области комплексне равни. Сада је коришћен метод дат у [18], [17]. Преглед добијених резултата је дат у поглављу 4.2, а најважнији резултати се могу наћи радовима [62], [64].

[1] Frank Stenger, University of Utah

4.1 Метод Штенгера

Посматраћемо квадратурне формуле Гаусовог типа за тригонометријске полиноме са максималним парним степеном тачности, тј. са непарним бројем чворова облика (3.2), чији су тежински коефицијенти дати са (3.3). Прецизније, биће дата оцена остатка за квадратурну формулу (3.2) у специјалном случају када је $w(x) = 1$, тј. за Гаусову квадратурну формулу облика

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{\nu=0}^{2n} \frac{2\pi}{2n+1} f\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n+1}\right) + R_n(f), \tag{4.1}$$

као и оцена остатка за Гаусове квадратурне формуле

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,w(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{\nu=0}^{2n} w_\nu f(x_\nu) + R_n(f), \tag{4.2}$$

у односу на тежинске функције $w(x) = 1 - \cos x$ и $w(x) = 1 + \cos x$, $x \in (-\pi, \pi)$, и 2π–периодичне функције f, аналитичке на домену $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le \rho\}$, $\rho > 1$. За добијање ових резултата потребни су нам помоћни резултати, које ћемо дати у следеће четири леме.

Лема 4.1. *Ако је* $L \le x_0 < x_1 < \cdots < x_{2n} < L + 2\pi$, $L \in \mathbb{R}$, *тада важи следећа једнакост:*

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}n(x_k - x)} \prod_{\substack{j=0 \\ j\ne k}}^{2n} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x_j}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_k} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x_j}} = \prod_{\substack{j=0 \\ j\ne k}}^{2n} \frac{\sin\left(\frac{x - x_j}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x_k - x_j}{2}\right)}.$$

Доказ. Заиста,

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\mathrm{i}n(x_k - x)} \prod_{\substack{j=0 \\ j\ne k}}^{2n} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x_j}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_k} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x_j}} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}n(x_k - x)} \prod_{\substack{j=0 \\ j\ne k}}^{2n} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_j/2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-x_j)/2} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x_j-x)/2}\right)}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_k/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_j/2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x_k-x_j)/2} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x_j-x_k)/2}\right)} \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}n(x_k - x)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2n(x - x_k)/2} \prod_{\substack{j=0 \\ j\ne k}}^{2n} \frac{2\sin\left(\frac{x - x_j}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x_k - x_j}{2}\right)} \\
&= \prod_{\substack{j=0 \\ j\ne k}}^{2n} \frac{\sin\left(\frac{x - x_j}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x_k - x_j}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

□

Лема 4.2. *Нека је* f 2π*–периодична функција и нека је аналитичка на домену* $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le \rho\}$, *за* $\rho > 1$ *и* $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \rho\}$. *Тада важи*

$$f(s) = \sum_{k=0}^{2n} f(s_k) \left(\frac{s_k}{s}\right)^n \frac{p(s)}{(s - s_k)p'(s_k)} + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \frac{p(s)}{s^n} \oint_C \frac{f(\xi)\xi^n}{(\xi - s)p(\xi)}\,\mathrm{d}\xi, \tag{4.3}$$

где је $L \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_{2n} < L + 2\pi$, $L \in \mathbb{R}$, $s_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x_k}$, $k = 0, 1, \ldots, 2n$, $s = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ *и* $p(s) = \prod_{k=0}^{2n}(s - s_k)$.

Доказ. Ако применимо теорему о резидуму на контурни интеграл

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{p(s)}{s^n}\oint_C \frac{f(\xi)\xi^n}{(\xi - s)p(\xi)}\,\mathrm{d}\xi,$$

добијамо

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{p(s)}{s^n}\oint_C \frac{f(\xi)\xi^n}{(\xi - s)p(\xi)}\,\mathrm{d}\xi &= \frac{p(s)}{s^n}\left(\frac{f(s)s^n}{p(s)} + \sum_{k=0}^{2n}\frac{f(s_k)s_k^n}{(s_k - s)p'(s_k)}\right)\\ &= f(s) + \frac{p(s)}{s^n}\sum_{k=0}^{2n}\frac{f(s_k)s_k^n}{(s_k - s)p'(s_k)},\end{aligned}$$

тј.

$$f(s) = \sum_{k=0}^{2n} f(s_k)\left(\frac{s_k}{s}\right)^n \frac{p(s)}{(s - s_k)p'(s_k)} + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{p(s)}{s^n}\oint_C \frac{f(\xi)\xi^n}{(\xi - s)p(\xi)}\,\mathrm{d}\xi.$$

□

Напомена 4.1. *Означимо суму са десне стране једнакости* (4.3) *са* $t(s)$, *тј.*

$$t(s) = \sum_{k=0}^{2n} f(s_k)\left(\frac{s_k}{s}\right)^n \frac{p(s)}{(s - s_k)p'(s_k)}. \tag{4.4}$$

Приметимо да је $p(s)/(s - s_k)$ *полином по променљивој* s *степена* $2n$, *и да се тригонометријски полином* $t(s)$ *може представити у облику* $s^{-n}q(s)$, *где је* $q(s)$ *алгебарски полином степена не вишег од* $2n$. *Увођењем смене* $s = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ *и* $s_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x_k}$, $k = 0, 1, \ldots, 2n$, *у* (4.4), *добијамо*

$$t(x) = \sum_{k=0}^{2n} f(x_k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n(x_k - x)} \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{2n} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x_j}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_k} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x_j}}$$

тј. применом леме 4.1,

$$t(x) = \sum_{k=0}^{2n} f(x_k) \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{2n} \frac{\sin\left(\frac{x - x_j}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x_k - x_j}{2}\right)}.$$

Дакле, $t(x)$ *је тригонометријски интерполациони полином функције* $f(x)$.

Лема 4.3. *Нека су* $x_k = (2k+1)\pi/(2n+1)$, $k = 0, 1, \ldots, 2n$, *чворови квадратурне формуле* (4.1) *и нека је* $s_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x_k}$, $k = 0, 1, \ldots, 2n$. *Тада важи следећа репрезентација:*

$$p(z) = \prod_{k=0}^{2n}(z - s_k) = 1 + z^{2n+1}.$$

Доказ. Из $p(z) = 0$, следи да је $z^{2n+1} = -1$, односно $z_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2k+1)\pi/(2n+1)}$, $k = 0, 1, \ldots, 2n$, што је и требало доказати. □

Лема 4.4. *Нека су τ_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, нуле Чебишевљевог полинома друге врсте $U_n(x)$, $x_{2n-\nu-1} = -x_\nu = \arccos \tau_{\nu+1}$, $\nu = 0, 1, \ldots, n-1$, $x_{2n} = \pi$ и $s_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x_k}$, $k = 0, 1, \ldots, 2n$. Тада важи*

$$p(s) = \prod_{k=0}^{2n}(s - s_k) = 1 + s + s^2 + \cdots + s^{2n+1}.$$

Доказ. Очигледно је

$$p(s) = 1 + s + s^2 + \cdots + s^{2n+1} = \frac{1 - s^{2n+2}}{1 - s}, \quad s \neq 1.$$

Сада, из $p(s) = 0$ добијамо $s_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{2n+2}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{n+1}}$, $k = 1, \ldots, 2n+1$ (приметимо да је $k \neq 0$ јер је $s \neq 1$). Елементарним трансформацијама добијамо

$$s_{2n+1-\nu} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2n+1-\nu}{n+1}\pi} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\nu+1}{n+1}\pi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x_\nu}, \quad \nu = 0, 1, \ldots, n-1,$$

$s_{n+1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x_{2n}}$ и $s_{\nu+1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x_{2n-\nu-1}}$, $\nu = 0, 1, \ldots, n-1$, где је $x_{2n-\nu-1} = -x_\nu = \frac{\nu+1}{n+1}\pi$, $\nu = 0, 1, \ldots, n-1$, $x_{2n} = \pi$. Даље, следи да су $x_{2n-\nu-1} = -x_\nu = \arccos \tau_{\nu+1}$, $\nu = 0, 1, \ldots, n-1$, $x_{2n} = \pi$, где су $\tau_k = \cos(k\pi/(n+1))$, $k = 1, 2, \ldots, n$, нуле Чебишевљевог полинома друге врсте $U_n(x)$ (видети [33]). □

Следећа лема се може доказати на сличан начин.

Лема 4.5. *Нека су τ_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, нуле Чебишевљевог полинома друге врсте $U_n(x)$, $x_{2n-\nu} = -x_\nu = \arccos \tau_{\nu+1}$, $\nu = 0, 1, \ldots, n-1$, $x_n = 0$ и $s_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x_k}$, $k = 0, 1, \ldots, 2n$. Тада важи*

$$p(s) = \prod_{k=0}^{2n}(s - s_k) = -1 + s - s^2 + \cdots - s^{2n} + s^{2n+1}.$$

У следећој теореми ћемо дати оцену остатка квадратурне формуле Гаусовог типа за тригонометријске полиноме (4.1).

Теорема 4.1. *Нека је f $2\pi-$периодична функција и нека је аналитичка на домену $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \rho\}$, где је $\rho > 1$, и $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \rho\}$. За остатак $R_n(f)$ у квадратурној формули* (4.1)*, важи следећа оцена:*

$$|R_n(f)| \leq \frac{2\pi}{\rho^{2n+1} - 1} \max_{\xi \in C} |f(\xi)|.$$

Доказ. Коришћењем леме 4.2 добијамо

$$f(s) = \sum_{k=0}^{2n} f(s_k) \left(\frac{s_k}{s}\right)^n \frac{p(s)}{(s - s_k)p'(s_k)} + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \frac{p(s)}{s^n} \oint_C \frac{f(\xi)\xi^n}{(\xi - s)p(\xi)} \,\mathrm{d}\xi, \tag{4.5}$$

где је $s = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$, $p(s) = \prod_{k=0}^{2n}(s-s_k)$, $s_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x_k}$, $k = 0,1,\ldots,2n$ и x_k, $k = 0,1,\ldots,2n$, су чворови квадратурне формуле (4.1), тј. p је полином уведен у леми 4.3. Пошто је $s = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ и $x \in (0,2\pi)$, следи да $s \in C_1$, где је C_1 јединична кружница са центром у координатном почетку, и $\mathrm{d}x = (\mathrm{i}s)^{-1}\,\mathrm{d}s$. Множећи (4.5) са $(\mathrm{i}s)^{-1}$ и интеграцијом по јединичној кружници C_1, добијамо

$$\begin{aligned}\int_{C_1} \frac{f(s)}{\mathrm{i}s}\,\mathrm{d}s = \int_{C_1} \sum_{k=0}^{2n} f(s_k)\left(\frac{s_k}{s}\right)^n \frac{p(s)}{(s-s_k)p'(s_k)}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{i}s}\\ + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{1}{\mathrm{i}}\int_{C_1}\frac{p(s)}{s^{n+1}}\int_C \frac{f(\xi)\xi^n}{(\xi-s)p(\xi)}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{4.6}$$

На основу напомене 4.1 имамо да је

$$\int_{C_1} \sum_{k=0}^{2n} f(s_k)\left(\frac{s_k}{s}\right)^n \frac{p(s)}{(s-s_k)p'(s_k)}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{i}s} = \sum_{k=0}^{2n} f(x_k)\int_0^{2\pi}\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{2n}\frac{\sin\left(\frac{x-x_j}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x_k-x_j}{2}\right)}\,\mathrm{d}x,$$

и помоћу (3.3), добијамо

$$\int_{C_1} \sum_{k=0}^{2n} f(s_k)\left(\frac{s_k}{s}\right)^n \frac{p(s)}{(s-s_k)p'(s_k)}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{i}s} = \sum_{k=0}^{2n}\omega_k f(x_k).$$

Тада, пошто је

$$\int_{C_1}\frac{f(s)}{\mathrm{i}s}\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

на основу (4.6), следи

$$R_n(f) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{1}{\mathrm{i}}\int_{C_1}\frac{p(s)}{s^{n+1}}\int_C\frac{f(\xi)\xi^n}{(\xi-s)p(\xi)}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}s.$$

Даље, заменом редоследа интеграције добијамо

$$R_n(f) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{1}{\mathrm{i}}\int_C\frac{f(\xi)\xi^n}{p(\xi)}\int_{C_1}\frac{p(s)}{s^{n+1}(\xi-s)}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\xi. \tag{4.7}$$

Посматрајмо сада интеграл

$$\int_{C_1}\frac{p(s)}{s^{n+1}(\xi-s)}\,\mathrm{d}s.$$

Очигледно је да за $|s/\xi| < 1$, тј. $|\xi| > |s| = 1$, добијамо

$$\begin{aligned}\int_{C_1}\frac{p(s)}{s^{n+1}(\xi-s)}\,\mathrm{d}s &= \int_{C_1}\frac{p(s)}{s^{n+1}\xi\,(1-s/\xi)}\,\mathrm{d}s = \int_{C_1}\frac{p(s)}{s^{n+1}\xi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{s^k}{\xi^k}\,\mathrm{d}s\\ &= \int_{C_1} p(s)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{s^{k-n-1}}{\xi^{k+1}}\,\mathrm{d}s = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\xi^{k+1}}\int_{C_1} p(s)s^{k-n-1}\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Применом леме 4.3, следи

$$\begin{aligned}\int_{C_1} \frac{p(s)}{s^{n+1}(\xi - s)}\,\mathrm{d}s &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\xi^{k+1}} \int_{C_1} (1 + s^{2n+1}) s^{k-n-1}\,\mathrm{d}s \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\xi^{k+1}} \int_{C_1} s^{k-n-1}\,\mathrm{d}s + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\xi^{k+1}} \int_{C_1} s^{k+n}\,\mathrm{d}s \\ &= \sum_{\substack{k=0\\k\neq n}}^{\infty} \frac{1}{\xi^{k+1}} \int_{C_1} s^{k-n-1}\,\mathrm{d}s + \frac{1}{\xi^{n+1}} \int_{C_1} \frac{\mathrm{d}s}{s} \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\xi^{k+1}} \int_{C_1} s^{k+n}\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Сви интеграли у суми на десној страни претходне једнакости су једнаки нули, осим $\int_{C_1} s^{-1}\,\mathrm{d}s = 2\pi\mathrm{i}$, тако да добијамо

$$\int_{C_1} \frac{p(s)}{s^{n+1}(\xi - s)}\,\mathrm{d}s = 2\pi\mathrm{i}\frac{1}{\xi^{n+1}},$$

што са (4.7) даје

$$R_n(f) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{1}{\mathrm{i}} \int_C \frac{f(\xi)\xi^n}{p(\xi)} \left(2\pi\mathrm{i}\frac{1}{\xi^{n+1}}\right) \mathrm{d}\xi$$

тј.

$$R_n(f) = \frac{1}{\mathrm{i}} \int_C \frac{f(\xi)\xi^{-1}}{p(\xi)}\,\mathrm{d}\xi. \tag{4.8}$$

Даље, из (4.8) добијамо

$$|R_n(f)| = \left| \frac{1}{\mathrm{i}} \int_C \frac{f(\xi)\xi^{-1}}{p(\xi)}\,\mathrm{d}\xi \right|,$$

тј.

$$\begin{aligned}|R_n(f)| &\le \max_{\xi\in C} |f(\xi)| \max_{\xi\in C} \left| \frac{\xi^{-1}}{1 + \xi^{2n+1}} \right| \int_C |\,\mathrm{d}\xi| \\ &= \ell(C) \max_{\xi\in C} |f(\xi)| \max_{\xi\in C} \left| \frac{\xi^{-1}}{1 + \xi^{2n+1}} \right|,\end{aligned}$$

где је $\ell(C) = 2\rho\pi$ обим крижнице C. Такође, пошто је C кружница полупречника $\rho > 1$, следи да се максимум достиже када је израз $|\xi^{2n+1} - (-1)|$ минималан, тј. када је $\xi = -\rho$:

$$\begin{aligned}|R_n(f)| &\le 2\rho\pi \frac{\rho^{-1}}{|1 + (-\rho)^{2n+1}|} \max_{\xi\in C} |f(\xi)| \\ &= 2\rho\pi \frac{\rho^{-1}}{\rho^{2n+1} - 1} \max_{\xi\in C} |f(\xi)| \\ &= \frac{2\pi}{\rho^{2n+1} - 1} \cdot \max_{\xi\in C} |f(\xi)|.\end{aligned}$$

□

Посматрајмо сада квадратурну формулу (4.2) у односу на парну тежинску функцију $w(x) = 1 - \cos x$, $x \in (-\pi, \pi)$.

Теорема 4.2. *Нека је $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le \rho\}$, где је $\rho > 1$, $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \rho\}$ и нека је f $2\pi-$периодична функција, аналитичка на домену D. За остатак $R_n(f)$ у* (4.2) *за $w(x) = 1 - \cos x$, $x \in (-\pi, \pi)$, важи следећа оцена*

$$|R_n(f)| \le \frac{\pi(\rho+1)^2}{\rho(\rho^{2n+2}-1)} \max_{\xi \in C} |f(\xi)|.$$

Доказ. На основу леме 4.2 добијамо

$$f(s) = \sum_{k=0}^{2n} f(s_k) \left(\frac{s_k}{s}\right)^n \frac{p(s)}{(s-s_k)p'(s_k)} + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \frac{p(s)}{s^n} \oint_C \frac{f(\xi)\xi^n}{(\xi - s)p(\xi)} \,\mathrm{d}\xi, \tag{4.9}$$

где је $s = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$, $p(s) = \prod_{k=0}^{2n}(s - s_k)$, $s_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x_k}$, $k = 0, 1, \ldots, 2n$, и x_k, $k = 0, 1, \ldots, 2n$, су чворови квадратурне формуле (4.2). Како је $s = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ и $x \in (-\pi, \pi)$, следи да $s \in C_1$, где је C_1 јединична кружница са центром у координатном почетку, $\mathrm{d}x = (\mathrm{i}s)^{-1}\,\mathrm{d}s$ и $w(x) = 1 - (\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})/2$, тј. $w(s) = 1 - (s + s^{-1})/2 = -(s-1)^2/(2s)$. Множењем једнакости (4.9) са $(\mathrm{i}s)^{-1}w(s)$ и интеграцијом по јединичној кружници C_1, добијамо

$$\begin{aligned}\int_{C_1} \frac{f(s)w(s)}{\mathrm{i}s}\,\mathrm{d}s &= \int_{C_1} \sum_{k=0}^{2n} f(s_k)\left(\frac{s_k}{s}\right)^n \frac{p(s)}{(s-s_k)p'(s_k)} \frac{w(s)}{\mathrm{i}s}\,\mathrm{d}s \\ &\quad + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \frac{1}{\mathrm{i}} \int_{C_1} \frac{p(s)w(s)}{s^{n+1}} \int_C \frac{f(\xi)\xi^n}{(\xi-s)p(\xi)}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{4.10}$$

Даље, на основу напомене 4.1, истим поступком као у доказу претходне теореме добијамо

$$R_n(f) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \frac{1}{\mathrm{i}} \int_C \frac{f(\xi)\xi^n}{p(\xi)} \int_{C_1} \frac{p(s)w(s)}{s^{n+1}(\xi - s)}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\xi. \tag{4.11}$$

Посматрајмо сада интеграл

$$\int_{C_1} \frac{p(s)w(s)}{s^{n+1}(\xi - s)}\,\mathrm{d}s.$$

Лако се види да за $|s/\xi| < 1$, тј. $|\xi| > |s| = 1$, добијамо

$$\begin{aligned}\int_{C_1} \frac{p(s)w(s)}{s^{n+1}(\xi - s)}\,\mathrm{d}s &= \int_{C_1} \frac{p(s)w(s)}{s^{n+1}\xi\,(1 - s/\xi)}\,\mathrm{d}s \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\xi^{k+1}} \int_{C_1} p(s)w(s)s^{k-n-1}\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Пошто је $w(\arccos x)\sqrt{(1+x)/(1-x)} = \sqrt{1-x^2}$ Чебишевљева тежинска функција друге врсте, познато је да су чворови Гаусове квадратурне формуле са n тачака конструисане за алгебарске полиноме дати са $\tau_k = \cos(k\pi/(n+1))$, $k = 1, 2, \dots, n$ (видети поглавље 1.1). Коришћењем (3.8), добијамо да су x_ν, $\nu = 0, 1, \dots, 2n$, чворови квадратурне формуле (4.2) у односу на парну тежинску функцију $w(x) = 1 - \cos x$, $x \in (-\pi, \pi)$, дати са $x_{2n-\nu-1} = -x_\nu = \cos\tau_{\nu+1}$, $\nu = 0, 1, \dots, n-1$, $x_{2n} = \pi$. Даље, коришћењем леме 4.4 добијамо

$$p(s) = \prod_{k=0}^{2n}(s - s_k) = \frac{1 - s^{2n+2}}{1 - s}$$

и

$$\begin{aligned}
\int_{C_1} \frac{p(s)w(s)}{s^{n+1}(\xi - s)}\,\mathrm{d}s = &-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\xi^{k+1}}\int_{C_1}\frac{1-s^{2n+2}}{1-s}\frac{(s-1)^2}{2s}s^{k-n-1}\,\mathrm{d}s\\
=&\frac{1}{2}\sum_{\substack{k=0\\k\neq n}}^{n-1}\frac{1}{\xi^{k+1}}\int_{C_1}\frac{\mathrm{d}s}{s^{n+1-k}} + \frac{1}{2}\frac{1}{\xi^{n+1}}\int_{C_1}\frac{\mathrm{d}s}{s}\\
&-\frac{1}{2}\sum_{\substack{k=0\\k\neq n+1}}^{n}\frac{1}{\xi^{k+1}}\int_{C_1}\frac{\mathrm{d}s}{s^{n+2-k}} - \frac{1}{2}\frac{1}{\xi^{n+2}}\int_{C_1}\frac{\mathrm{d}s}{s}\\
&+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\xi^{k+1}}\left(-\int_{C_1}\frac{\mathrm{d}s}{s^{-n-1-k}} + \int_{C_1}\frac{\mathrm{d}s}{s^{-n-k}}\right).
\end{aligned}$$

Сви интеграли на десној страни претходне једнакости су једнаки нули, осим $\int_{C_1} s^{-1}\,\mathrm{d}s = 2\pi\mathrm{i}$, па добијамо

$$\int_{C_1}\frac{p(s)w(s)}{s^{n+1}(\xi - s)}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi\mathrm{i}}{\xi^{n+1}} - \frac{2\pi\mathrm{i}}{\xi^{n+2}}\right) = \pi\mathrm{i}\frac{\xi - 1}{\xi^{n+2}},$$

што са (4.11) даје

$$R_n(f) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{1}{\mathrm{i}}\int_C \frac{f(\xi)\xi^n}{p(\xi)}\pi\mathrm{i}\frac{\xi - 1}{\xi^{n+2}}\,\mathrm{d}\xi$$

тј.

$$R_n(f) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\int_C \frac{f(\xi)(\xi-1)}{\xi^2(1-\xi^{2n+2})/(1-\xi)}\,\mathrm{d}\xi = -\frac{1}{2\mathrm{i}}\int_C\frac{f(\xi)(\xi-1)^2}{(1-\xi^{2n+2})\xi^2}\,\mathrm{d}\xi.$$

Даље, добијамо

$$|R_n(f)| = \left|-\frac{1}{2\mathrm{i}}\int_C\frac{f(\xi)(\xi-1)^2}{(1-\xi^{2n+2})\xi^2}\,\mathrm{d}\xi\right|$$

тј.

$$\begin{aligned}
|R_n(f)| &\leq \frac{1}{2}\max_{\xi\in C}|f(\xi)|\max_{\xi\in C}\left|\frac{(\xi-1)^2}{(1-\xi^{2n+2})\xi^2}\right|\int_C|\,\mathrm{d}\xi|\\
&= \frac{\ell(C)}{2}\max_{\xi\in C}|f(\xi)|\max_{\xi\in C}\frac{|\xi-1|^2}{|1-\xi^{2n+2}||\xi|^2},
\end{aligned}$$

где је $\ell(C) = 2\rho\pi$ обим кружнице C. Како је C кружница полупречника $\rho > 1$, очигледно је да $|\xi - 1|^2$ достиже свој максимум када је $\xi = -\rho$ и $|1 - \xi^{2n+2}|$ достиже свој минимум за $\xi = \pm\rho$. Стога, $|\xi - 1|/|1 - \xi^{2n+2}|$ достиже максимум за $\xi = -\rho$, тј.

$$|R_n(f)| \leq \frac{2\rho\pi}{2} \frac{|-\rho - 1|^2}{|1 - (-\rho)^{2n+2}||\rho|^2} \max_{\xi \in C} |f(\xi)| = \frac{\pi(\rho + 1)^2}{\rho(\rho^{2n+2} - 1)} \max_{\xi \in C} |f(\xi)|.$$

□

На сличан начин можемо анализирати и квадратурну формулу (4.2) за парну тежинску функцију $w(x) = 1 + \cos x$, $x \in (-\pi, \pi)$.

Теорема 4.3. *Нека је f $2\pi-$периодична функција и нека је аналитичка на домену $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \rho\}$, где је $\rho > 1$, и $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \rho\}$. За остатак $R_n(f)$ у* (4.2) *за $w(x) = 1 + \cos x$, $x \in (-\pi, \pi)$, важи следећа оцена:*

$$|R_n(f)| \leq \frac{\pi(\rho + 1)^2}{\rho(\rho^{2n+2} - 1)} \max_{\xi \in C} |f(\xi)|.$$

Доказ. Аналогно, као у доказу теореме 4.2 добијамо

$$R_n(f) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \frac{1}{\mathrm{i}} \int_C \frac{f(\xi)\xi^n}{p(\xi)} \int_{C_1} \frac{p(s)w(s)}{s^{n+1}(\xi - s)} \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}\xi, \tag{4.12}$$

где је $s = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$, $x \in (-\pi, \pi)$, $p(s) = \prod_{k=0}^{2n}(s - s_k)$, $s_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x_k}$, $k = 0, 1, \ldots, 2n$, и x_k, $k = 0, 1, \ldots, 2n$, су чворови квадратурне формуле (4.2), $\mathrm{d}x = (\mathrm{i}s)^{-1} \, \mathrm{d}s$, и $w(x) = 1 + (\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})/2$, тј.

$$w(s) = 1 + \frac{s + s^{-1}}{2} = \frac{(s + 1)^2}{2s}.$$

Приметимо да, како је $s = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ и $x \in (-\pi, \pi)$, следи да $s \in C_1$, где је C_1 јединична кружница са центром у координатном почетку. Посматрајмо сада интеграл

$$\int_{C_1} \frac{p(s)w(s)}{s^{n+1}(\xi - s)} \, \mathrm{d}s.$$

Лако се види да за $|s/\xi| < 1$, тј. $|\xi| > |s| = 1$, добијамо

$$\int_{C_1} \frac{p(s)w(s)}{s^{n+1}(\xi - s)} \, \mathrm{d}s = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\xi^{k+1}} \int_{C_1} p(s)w(s)s^{k-n-1} \, \mathrm{d}s.$$

Пошто је $w(\arccos x)\sqrt{(1 - x)/(1 + x)} = \sqrt{1 - x^2}$ Чебишевљева тежинска функција друге врсте, познато је да су чворови Гаусове квадратурне формуле са n тачака конструисане за алгебарске полиноме дати са $\tau_k = \cos(k\pi/(n + 1))$, $k = 1, 2, \ldots, n$ (видети поглавље 1.1). На основу (3.10), добијамо да су x_ν, $\nu =$

$0, 1, \ldots, 2n$, чворови квадратурне формуле (4.2) у односу на тежинску функцију $w(x) = 1 + \cos x$, $x \in (-\pi, \pi)$, дати са

$$x_{2n-\nu} = -x_\nu = \arccos \tau_{\nu+1}, \nu = 0, 1, \ldots, n-1, \quad x_n = 0.$$

Даље, коришћењем леме 4.5 добијамо

$$p(s) = -1 + s - s^2 + \cdots - s^{2n} + s^{2n+1} = \frac{s^{2n+2} - 1}{s+1}, \quad s \neq -1$$

и

$$\begin{aligned}
\int_{C_1} \frac{p(s)w(s)}{s^{n+1}(\xi - s)} \, \mathrm{d}s =& \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\xi^{k+1}} \int_{C_1} \frac{s^{2n+2} - 1}{s+1} \frac{(s+1)^2}{2s} s^{k-n-1} \, \mathrm{d}s \\
=& \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\xi^{k+1}} \left(\int_{C_1} \frac{\mathrm{d}s}{s^{-n-1-k}} + \int_{C_1} \frac{\mathrm{d}s}{s^{-n-k}} \right) \\
& - \frac{1}{2} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{1}{\xi^{k+1}} \int_{C_1} \frac{\mathrm{d}s}{s^{n+1-k}} - \frac{1}{2} \frac{1}{\xi^{n+1}} \int_{C_1} \frac{\mathrm{d}s}{s} \\
& - \frac{1}{2} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq n+1}}^{\infty} \frac{1}{\xi^{k+1}} \int_{C_1} \frac{\mathrm{d}s}{s^{n+2-k}} - \frac{1}{2} \frac{1}{\xi^{n+2}} \int_{C_1} \frac{\mathrm{d}s}{s}.
\end{aligned}$$

Пошто је $\int_{C_1} s^{-1} \, \mathrm{d}s = 2\pi \mathrm{i}$ и сви остали интеграли на десној страни претходне једнакости су једнаки нули, добијамо

$$\int_{C_1} \frac{p(s)w(s)}{s^{n+1}(\xi - s)} \, \mathrm{d}s = \frac{1}{2} \left(-\frac{2\pi \mathrm{i}}{\xi^{n+1}} - \frac{2\pi \mathrm{i}}{\xi^{n+2}} \right) = -\pi \mathrm{i} \frac{\xi + 1}{\xi^{n+2}},$$

што са (4.12) даје

$$\begin{aligned}
R_n(f) &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \frac{1}{\mathrm{i}} \int_C \frac{f(\xi)\xi^n}{p(\xi)} (-\pi \mathrm{i}) \frac{\xi + 1}{\xi^{n+2}} \, \mathrm{d}\xi \\
&= -\frac{1}{2\mathrm{i}} \int_C \frac{f(\xi)(\xi + 1)}{\xi^2 (\xi^{2n+2} - 1)/(\xi + 1)} \, \mathrm{d}\xi \\
&= -\frac{1}{2\mathrm{i}} \int_C \frac{f(\xi)(\xi + 1)^2}{(\xi^{2n+2} - 1)\xi^2} \, \mathrm{d}\xi.
\end{aligned}$$

Зато је

$$|R_n(f)| = \left| -\frac{1}{2\mathrm{i}} \int_C \frac{f(\xi)(\xi + 1)^2}{(\xi^{2n+2} - 1)\xi^2} \, \mathrm{d}\xi \right|,$$

тј.

$$|R_n(f)| \leq \frac{\ell(C)}{2} \max_{\xi \in C} |f(\xi)| \max_{\xi \in C} \frac{|\xi + 1|^2}{|\xi^{2n+2} - 1||\xi|^2},$$

где је $\ell(C) = 2\rho\pi$ обим кружнице C полупречника $\rho > 1$. Очигледно је да $|\xi + 1|^2$ достиже свој максимум на C када је $\xi = \rho$. Пошто је $\xi = \rho$ једна од тачака у којој $|\xi^{2n+2}-1|$ достиже свој минимум на C, закључујемо да $|\xi+1|/|\xi^{2n+2}-1|$ достиже максимум на C када је $\xi=\rho$, тј. важи

$$|R_n(f)| \leq \frac{2\rho\pi}{2}\frac{|\rho+1|^2}{|\rho^{2n+2}-1||\rho|^2}\max_{\xi\in C}|f(\xi)| = \frac{\pi(\rho+1)^2}{\rho(\rho^{2n+2}-1)}\max_{\xi\in C}|f(\xi)|.$$

□

4.1.1 Нумерички примери

У овом поглављу даћемо неколико нумеричких примера који илуструју добијене теоријске резултате.

Пример 4.1. *Посматрајмо интеграцију функције* $f(x)=1/(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-3/2)$, *на интервалу* $(-\pi,\pi)$ *са тежинском функцијом* $w(x)=1-\cos x$.

Лако се добија да је

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos x}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-3/2}\,\mathrm{d}x = -\frac{8\pi}{9}.$$

Пошто је $f(z)=1/(z-3/2)$ можемо изабрати $\rho\approx 3/2$, за максимално прихватљиву вредност за ρ. Применом теореме 4.2 закључујемо да се остатак квадратурне формуле понаша као $R_n\approx C/1.5^{2n+1}$. Табела 4.1 приказује апсолутне вредности остатака (бројеви у заградама означавају децималне експоненте), као и количнике остатака $|R_n/R_{n-10}|$. Приметимо да, на основу теореме, морамо добити да је $|R_n/R_{n-10}|\approx(2/3)^{20}\approx 3.(-4)$, што је и добијено нумерички (видети табелу 4.1, при чему бројеви у заградама означавају децималне експоненте).

n	5	15	25	35
$\lvert R_n\rvert$	2.7(−3)	8.1(−7)	2.4(−10)	7.3(−14)
$\lvert R_n/R_{n-10}\rvert$		3.(−4)	3.(−4)	3.(−4)

Табела 4.1. Стварни остатак $|R_n|$, $n=5(10)35$, и количник $|R_n/R_{n-10}|$ у интеграцији функције $f(x)=1/(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-3/2)$ са тежинском функцијом $w(x)=1-\cos x$.

Пример 4.2. *Посматраћемо интеграл функције* $f(x)=1/(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+4/3)$, *на интервалу* $(-\pi,\pi)$ *са тежинском функцијом* $w(x)=1+\cos x$.

Једноставно се добија да је

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos x}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+4/3}\,\mathrm{d}x = \frac{15}{16}\pi.$$

У овом случају је $f(z) = 1/(z + 4/3)$, и на основу услова теореме 4.3, можемо узети $\rho \approx 4/3$, као максималну дозвољену вредност за ρ. Оцена остатка квадратурне формуле, добијена теоријски, показује да се остатак, као функција од n, понаша као $|R_n| \approx c/1.33^{2n+1}$, где је c независно од n и зависи од ρ. У табели 4.2 су дате стварне вредности остатка (бројеви у загради су вредности децималних експонената). Пошто смо проверили асимптотско понашање за $|R_n(f)|$ дат је и количник остатака $|R_n/R_{n-10}|$. На основу теоријских резултата требало би да важи $|R_n/R_{n-10}| \approx (3/4)^{20} \approx 3.2(-3)$, што је и добијено нумерички (видети табелу 4.2).

n	10	20	30	40
$\lvert R_n\rvert$	$0.35(-3)$	$0.11(-5)$	$0.35(-8)$	$0.11(-10)$
$\lvert R_n/R_{n-10}\rvert$		$3.2(-3)$	$3.2(-3)$	$3.2(-3)$

Табела 4.2. Стварни остатак $|R_n|$, $n = 10(10)40$, и количник $|R_n/R_{n-10}|$ у интеграцији функције $f(x) = 1/(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + 4/3)$ на интервалу $(-\pi, \pi)$ у односу на тежинску функцију $w(x) = 1 + \cos x$.

Пример 4.3. *Посматрајмо следећи интеграл*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + 5/4\mathrm{i}}(1 + \cos x)\,\mathrm{d}x = -\frac{4\pi}{5}\mathrm{i}.$$

Сада је $w(x) = 1 + \cos x$ *и* $f(z) = z/(z + 5/4\,\mathrm{i})$.

На основу теореме 4.3 функција f мора бити аналитичка на домену D, зато су $1 < \rho < 5/4$ прихватљиве вредности, тј. максимална дозвољена вредност за ρ је $\rho \approx 5/4$. У овом случају остатак, као функција од n, би требало да се понаша као $|R_n| \approx c/1.25^{2n+1}$, а за количнике остатака треба да важи $|R_n/R_{n-10}| \approx (4/5)^{20} \approx 1.1(-2)$, што је и добијено нумерички (видети табелу 4.3).

n	5	15	25	35
$\lvert R_n\rvert$	0.48	$0.51(-2)$	$0.59(-4)$	$0.68(-6)$
$\lvert R_n/R_{n-10}\rvert$		$1.1(-2)$	$1.1(-2)$	$1.1(-2)$

Табела 4.3. Стварни остатак $|R_n|$, $n = 5(10)35$, и количник $|R_n/R_{n-10}|$ у интеграцији функције $f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}/(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + 5/4\mathrm{i})$ на интервалу $(-\pi, \pi)$ са тежинском функцијом $w(x) = 1 + \cos x$.

4.2 Парне тежинске функције

О квадратурним формулама Гаусовог типа за тригонометријске полиноме са непарним, односно парним бројем чворова смо писали у поглављима 3.1 и 3.2, респективно. У овом поглављу ћемо посматрати остатак R_n ових квадратурних формула где је $w(x)$, $x \in (-\pi, \pi)$, парна тежинска функција, тј. остатак квадратурних формула Гаусовог типа облика

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, w(x)\, \mathrm{d}x = \sum_{\nu=0}^{2n} w_\nu f(x_\nu) + R_n(f) \tag{4.13}$$

и

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, w(x)\, \mathrm{d}x = \sum_{\nu=0}^{2n-1} w_\nu f(x_\nu) + R_n(f). \tag{4.14}$$

Са D ће бити означена област у комплексној равни која садржи интервал $[-1,1]$, а са Γ контура у D око интервала $[-1,1]$. Специјално, посматраћемо случајеве када је Γ једна од следећих контура: концентричне кружнице,

$$C_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}, \quad r > 1,$$

или конфокалне елипсе (имају фокус у тачкама ± 1 и суму полу–оса $\rho > 1$),

$$\mathcal{E}_\rho = \left\{ z \in \mathbb{C} : z = \frac{1}{2}\left(\rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \rho^{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right), 0 \le \theta \le 2\pi \right\}, \quad \rho > 1.$$

Када $\rho \downarrow 1$, елипса $\mathcal{E}_\rho$ се сужава према интервалу $[-1,1]$, док повећавањем ρ она постаје све више кружног облика. Предност елиптичке контуре у односу на кружну, је што је у том случају потребна аналитичност функције f на мањем региону комплексне равни, посебно када је ρ близу 1. Са $\ell(\Gamma)$ означавамо дужину Γ.

Теорема 4.4. *Нека је f 2π–периодична функција, $f(\pi) = 0$ и $(f(\arccos z) + f(-\arccos z))/(1+z)$ аналитичка на домену D који садржи интервал $[-1,1]$, и нека је Γ контура у D, око интервала $[-1,1]$. Ако је w парна на $(-\pi,\pi)$, тада за остатак $R_n(f)$ у* (4.13) *важи следећа оцена:*

$$|R_n(f)| \le \frac{\ell(\Gamma)}{2\pi} \max_{z\in\Gamma} |K_n(z)| \max_{z\in\Gamma} |f_1(z)|, \tag{4.15}$$

где је

$$K_n(z) = \widetilde{R}_n\left(\widetilde{w}_1; \frac{1}{z - \cdot}\right), \tag{4.16}$$

$\widetilde{R}_n$ је дато са (3.13)*, а f_1 и $\widetilde{w}_1$ са* (3.11) *и* (3.6)*, респективно.*

Доказ. Сменом $x := \arccos x$ у интегралу на левој страни једнакости (4.13) и применом Гаусове квадратурне формуле у односу на тежинску функцију $\widetilde{w}_1$, добијамо

$$\int_{-1}^{1} f_1(x)w(\arccos x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\mathrm{d}x = \sum_{\nu=1}^{n} \sigma_\nu f_1(\tau_\nu) + \widetilde{R}_n(\widetilde{w}_1; f_1). \tag{4.17}$$

На основу леме 3.3, остаци квадратурних формула (4.13) и (4.17) су једнаки. У случају Гаусове квадратурне формуле конструисане за алгебарске полиноме у односу на тежинску функцију $\widetilde{w}_1(x)$, $x \in (-1,1)$, за функцију $f_1(z)$ аналитичку на домену D, који садржи интервал $[-1,1]$, важи оцена (видети поглавље 1.2)

$$|R_n(f)| \le \frac{\ell(\Gamma)}{2\pi} \max_{z\in\Gamma} |K_n(z)| \max_{z\in\Gamma} |f_1(z)|,$$

где је $K_n(z) = \widetilde{R}_n\left(\widetilde{w}_1; 1/(z-\cdot)\right)$ и Γ контура у D, око интервала $[-1,1]$. □

Теорема 4.5. *Ако је парна тежинска функција* w *нерастућа на* $(0,\pi)$, *тада за језгро* K_n *дато са* (4.16) *важи:*

$$\max_{z\in C_r} |K_n(z)| = K_n(r),$$

па је

$$|R_n(f)| \le rK_n(r) \max_{z\in C_r} |f_1(z)|\,. \tag{4.18}$$

Доказ. Нека је тежинска функција w нерастућа на $(0,\pi)$.

Ако је $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in (-1,1)$, тада је $\arccos x_1 > \arccos x_2$, односно $w(\arccos x_1) \le w(\arccos x_2)$ и $w(\arccos(-x_1)) \ge w(\arccos(-x_2))$, па је

$$\frac{w(\arccos x_1)}{w(\arccos(-x_1))} \le \frac{w(\arccos x_2)}{w(\arccos(-x_2))},$$

тј. $w(\arccos x)/w(\arccos(-x))$ је неопадајућа функција на $(-1,1)$. Даље, како је $(1+x)/(1-x)$ растућа функција на $(-1,1)$ и

$$\frac{\widetilde{w}_1(x)}{\widetilde{w}_1(-x)} = \frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{w(\arccos x)}{w(\arccos(-x))}, \quad x \in (-1,1),$$

следи да је $\widetilde{w}_1(x)/\widetilde{w}_1(-x)$ неопадајућа функција на $(-1,1)$. Стога, на основу теореме 1.2 добијамо $\max_{z\in C_r} |K_n(z)| = K_n(r)$. Неједнакост (4.18) добијамо заменом добијеног максимума и $\ell(C_r) = 2r\pi$ у (4.15). □

Теорема 4.6. *Нека је* f 2π*–периодична функција,* $f(0) = 0$ *и* $(f(\arccos z) + f(-\arccos z))/(1-z)$ *аналитичка на домену* D *који садржи интервал* $[-1,1]$, *и нека је* Γ *контура у* D, *око интервала* $[-1,1]$. *Ако је тежинска функција* w

парна на $(-\pi, \pi)$*, за остатак* $R_n(f)$ *квадратурне формуле* (4.13) *важи следећа оцена:*

$$|R_n(f)| \leq \frac{\ell(\Gamma)}{2\pi} \max_{z\in\Gamma} |K_n(z)| \max_{z\in\Gamma} |f_2(z)| ,$$

где је

$$K_n(z) = \widetilde{R}_n\left(\widetilde{w}_2; \frac{1}{z-\cdot}\right), \tag{4.19}$$

$\widetilde{R}_n$ *је дато са* (3.13)*, а* f_2 *и* $\widetilde{w}_2$ *са* (3.12) *и* (3.9)*, респективно.*

Доказ. Увођењем смене $x := \arccos x$ у интегралу на левој страни једнакости (4.13), аналогно као у доказу теореме 4.4, добијамо

$$\int_{-1}^{1} f_2(x) w(\arccos x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x = \sum_{\nu=1}^{n} \sigma_\nu f_2(x_\nu) + \widetilde{R}_n(\widetilde{w}_2; f_2).$$

Према леми 3.4, коришћењем истог поступка као у доказу теореме 4.4, лако се добија да важи оцена

$$|R_n(f)| \leq \frac{\ell(\Gamma)}{2\pi} \max_{z\in\Gamma} |K_n(z)| \max_{z\in\Gamma} |f_2(z)|,$$

где је $K_n(z) = \widetilde{R}_n\left(\widetilde{w}_2; 1/(z-\cdot)\right)$ и Γ контура у D, око интервала $[-1, 1]$. □

Напомена 4.2. *Приметимо да је уместо интервала* $(-\pi, \pi)$ *могао бити посматран било који интервал дужине* 2π*, тј. било који интервал облика* $(\alpha\pi - 2\pi, \alpha\pi)$*,* $\alpha \in \mathbb{R}$*. У случају симетричне тежинске функције на* $(\alpha\pi - 2\pi, \alpha\pi)$ *у односу на* $\alpha\pi - \pi$*, сличне оцене остатака се могу добити за функцију* f *аналитичку у одређеном домену, која задовољава* $f(\beta\pi) = 0$*, за* $\beta = \alpha$ *или* $\beta = \alpha - 1$*.*

Теорема 4.7. *Ако је парна тежинска функција* w *неопадајућа на* $(0, \pi)$*, тада за језгро* K_n *дато са* (4.19) *важи:*

$$\max_{z\in C_r} |K_n(z)| = |K_n(-r)|,$$

па је

$$|R_n(f)| \leq r|K_n(-r)| \max_{z\in C_r} |f_1(z)| .$$

Доказ. Нека је тежинска функција w неопадајућа на $(0, \pi)$.

Аналогно као у доказу теореме 4.5 добијамо да је $w(\arccos x)/w(\arccos(-x))$ је нерастућа функција на $(-1, 1)$, и пошто је функција $(1-x)/(1+x)$ опадајућа на $(-1, 1)$ и

$$\frac{\widetilde{w}_2(x)}{\widetilde{w}_2(-x)} = \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{w(\arccos x)}{w(\arccos(-x))}, \quad x \in (-1, 1),$$

имамо да је $\widetilde{w}_2(x)/\widetilde{w}_2(-x)$ нерастућа функција на $(-1,1)$. Стога, на основу теореме 1.2 следи да је $\max_{z\in C_r}|K_n(z)| = |K_n(-r)|$. $\square$

Квадратурна формула са максималним непарним тригонометријским степеном тачности, тј. Гаусова квадратурна формула са парним бројем чворова (4.14), може бити анализирана на сличан начин.

Теорема 4.8. *Нека је f 2π–периодична функција, $f(-\arccos z)+f(\arccos z)$ аналитичка функција на домену D, који садржи интервал $[-1,1]$, и нека је Γ контура у D, око интервала $[-1,1]$. Ако је тежинска функција w парна на интервалу $(-\pi,\pi)$, тада за остатак $R_n(f)$ из* (4.14) *важи следећа оцена:*

$$|R_n(f)| \leq \frac{\ell(\Gamma)}{2\pi}\max_{z\in\Gamma}|K_n(z)|\max_{z\in\Gamma}|f_3(z)|,$$

где је

$$K_n(z) = \widetilde{R}_n\left(\widetilde{w}_3; \frac{1}{z-\cdot}\right), \tag{4.20}$$

$\widetilde{R}_n$ је дато са (3.13)*, а $\widetilde{w}_3$ и f_3 су дате са* (3.21) *и* (3.24)*, респективно.*

Доказ. Сменом $x := \arccos x$ у интегралу на левој страни једнакости (4.14), добијамо

$$\int_{-1}^{1} f_3(x)\frac{w(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \sum_{\nu=1}^{n}\sigma_\nu f_3(\tau_\nu) + \widetilde{R}_n(\widetilde{w}_3; f_3).$$

Коришћењем леме 3.8, аналогно као у доказу теореме 4.4 закључујемо да важи оцена

$$|R_n(f)| \leq \frac{\ell(\Gamma)}{2\pi}\max_{z\in\Gamma}|K_n(z)|\max_{z\in\Gamma}|f_3(z)|,$$

где је $K_n(z) = \widetilde{R}_n\left(\widetilde{w}_3; 1/(z-\cdot)\right)$, и Γ контура у D, око интервала $[-1,1]$. $\square$

Теорема 4.9. *Језгро K_n дато са* (4.20) *задовољава*

$$\max_{z\in C_r}|K_n(z;w)| = \begin{cases} K_n(r), & \text{ако је } w(x) \text{ нерастућа функција на } (0,\pi),\\ |K_n(-r)|, & \text{ако је } w(x) \text{ неопадајућа функција } (0,\pi),\end{cases}$$

и важи

$$|R_n(f)| \leq r\max_{z\in C_r}|K_n(z)|\max_{z\in C_r}|f_3(z)|.$$

Доказ. Ако је тежинска функција w нерастућа на $(0,\pi)$ лако се види да је $\widetilde{w}_3(x)/\widetilde{w}_3(-x)$ нерастућа функција на $(-1,1)$. Стога, на основу теореме 1.2 добијамо $\max_{z\in C_r}|K_n(z)| = K_n(r)$.

На сличан начин добијамо да ако је тежинска функција w неопадајућа на $(0,\pi)$, тада је $\widetilde{w}_3(x)/\widetilde{w}_3(-x)$ нерастућа функција на $(-1,1)$, па на основу теореме 1.2 имамо да је $\max_{z\in C_r}|K_n(z)| = |K_n(-r)|$. $\square$

Теорема 4.10. *Ако је w парна тежинска функција на $(-\pi, \pi)$, $w(\pi - x) = w(x)$, $x \in (0, \pi)$, и w је опадајућа функција на $(0, \pi/2)$, тада језгро K_n дато са* (4.20) *задовољава:*

$$\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |K_n(z; w)| = K_n \left(\frac{1}{2} \left(\rho + \rho^{-1} \right) \right), \quad \textit{за} \quad n \geq 2 \quad \textit{и}$$

$$\rho \geq \rho_n^* = \begin{cases} 2.4139, & n = 2, \\ 2.0017, & n = 3, \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1 + \sqrt{3}), & n \geq 4. \end{cases}$$

Доказ. Нека је $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in (0, 1)$. Тада је $\arccos x_1 > \arccos x_2$ и пошто је w опадајућа функција на $(0, \pi/2)$, следи да је $w(\arccos x_1) < w(\arccos x_2)$, тј. $w(\arccos x)$ је растућа функција на $(0, 1)$, и стога важи да је

$$\widetilde{w}_3(x)\sqrt{1 - x^2} = \frac{w(\arccos x)}{\sqrt{1 - x^2}}\sqrt{1 - x^2} = w(\arccos x)$$

растућа функција на $(0, 1)$, где је $\widetilde{w}_3$ дато са (3.21). Елементарним трансформацијама и коришћењем особине $w(\pi - x) = w(x)$, $x \in (0, \pi)$, добијамо

$$\widetilde{w}_3(-x) = \frac{w(\arccos(-x))}{\sqrt{1 - (-x)^2}} = \frac{w(\pi - \arccos x)}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{w(\arccos x)}{\sqrt{1 - x^2}} = \widetilde{w}_3(x),$$

тј. $\widetilde{w}_3$ је парна функција на $(-1, 1)$. Даље, пошто је $\widetilde{w}_3(x)\sqrt{1 - x^2}$ растућа функција на $(0, 1)$ и $\widetilde{w}_3(x)$ парна на $(-1, 1)$, закључујемо, на основу теореме 1.3, да је

$$\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |K_n(z; w)| = K_n \left(\frac{1}{2} \left(\rho + \rho^{-1} \right) \right), \quad \text{за} \quad n \geq 2 \quad \text{и}$$

$$\rho \geq \rho_n^* = \begin{cases} 2.4139, & n = 2, \\ 2.0017, & n = 3, \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1 + \sqrt{3}), & n \geq 4. \end{cases}$$

□

Коришћењем леме 3.9 и сличних аргумената као у доказу теореме 4.8, лако се доказује и следећа теорема.

Теорема 4.11. *Нека је f 2π–периодична функција таква да је $(f(-\arccos z) + f(\arccos z))/(1 - z^2)$ аналитичка функција на домену D, који садржи интервал $[-1, 1]$, и нека је Γ контура у D, око интервала $[-1, 1]$. Ако је тежинска функција w парна на интервалу $(-\pi, \pi)$, тада за остатак $R_n(f)$ из* (4.14) *важи следећа оцена:*

$$|R_n(f)| \leq \frac{\ell(\Gamma)}{2\pi} \max_{z \in \Gamma} |K_n(z)| \max_{z \in \Gamma} |f_4(z)|,$$

где је

$$K_n(z) = \widetilde{R}_n\left(\widetilde{w}_4; \frac{1}{z - \cdot}\right), \tag{4.21}$$

$\widetilde{R}_n$ *је дато са* (3.13)*, а* $\widetilde{w}_4$ *и* f_4 *су дате са* (3.23) *и* (3.25)*, респективно.*

Максимум модула језгра K_n датог са (4.21) на кружници и елипси дају следеће две теореме, респективно.

Теорема 4.12. *Језгро* K_n *дато са* (4.21) *задовољава*

$$\max_{z\in C_r}|K_n(z;w)| = \begin{cases} K_n(r), & \text{ако је } w(x) \text{ нерастућа функција на } (0,\pi), \\ |K_n(-r)|, & \text{ако је } w(x) \text{ неопадајућа функција } (0,\pi), \end{cases}$$

и важи

$$|R_n(f)| \le r \max_{z\in C_r}|K_n(z)| \max_{z\in C_r}|f_4(z)|.$$

Теорема 4.13. *Ако је* w *парна тежинска функција на* $(-\pi,\pi)$*,* $w(\pi - x) = w(x)$*,* $x \in (0,\pi)$*, и* w *је растућа на* $(0,\pi/2)$*, тада језгро* K_n *дато са* (4.21) *задовољава*

$$\max_{z\in\mathcal{E}_\rho}|K_n(z;w)| = \left|K_n\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\rho-\rho^{-1}\right)\right)\right|, \quad \text{за} \quad \rho \ge \rho_n^*.$$

Параметар ρ_n^* *је највећа нула функције*

$$d_n(\rho) = \left(\rho-\rho^{-1}\right)^2 - 4 - \left(\rho^2-\rho^{-2}\right)^2\left(\frac{(n+1)^2}{\left(\rho^{n+1}+\rho^{-n-1}\right)^2} + \frac{(n+3)^2}{\left(\rho^{n+3}+\rho^{-n-3}\right)^2}\right)$$

ако је $n \ge 2$ *парно, а ако је* $n \ge 1$ *непарно, тада је* $\rho_n^* = 1+\sqrt{2}$*.*

Доказ. Нека је $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in (0,1)$. Тада је $\arccos x_1 > \arccos x_2$ и како је w растућа функција на $(0,\pi/2)$ добијамо да је $w(\arccos x_1) > w(\arccos x_2)$, тј. $w(\arccos x)$ је опадајућа функција на $(0,1)$. Даље, пошто је $\widetilde{w}_4$ дато са (3.23), и

$$\frac{\widetilde{w}_4(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{w(\arccos x)\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} = w(\arccos x),$$

следи да је $\widetilde{w}_4(x)/\sqrt{1-x^2}$опадајућа функција на $(0,1)$. Како је $w(\pi-x) = w(x)$, $x \in (0,\pi)$, добијамо

$$\begin{aligned}\widetilde{w}_4(-x) &= w(\arccos(-x))\sqrt{1-(-x)^2} = w(\pi - \arccos x)\sqrt{1-x^2} \\ &= w(\arccos x)\sqrt{1-x^2} = \widetilde{w}_4(x), \quad x \in (-1,1),\end{aligned}$$

тј. $\widetilde{w}_4$ је парна функција на $(-1,1)$. Сада, на основу теореме 1.3, добијамо дато тврђење. $\square$

4.2.1 Нумерички примери

У овом одељку ћемо дати нумеричке примере као демонстрацију добијених теоријских резултата.

Приметимо да у оценама остатка $R_n(f)$, добијеним у поглављу 4.2, имамо такозвано језгро $K_n(z)$, тј. максимум језгра на одговарајућој контури. Језгро K_n је дато са

$$K_n(z) = \widetilde{R}_n\left(\widetilde{w}; \frac{1}{z-\cdot}\right) = \int_{-1}^{1} \frac{\widetilde{w}(x)}{z-x}\,\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n} \sigma_k \frac{1}{z-\tau_k}, \tag{4.22}$$

где су σ_k, τ_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, тежине и чворови Гаусове квадратурне формуле са n тачака, конструисане за алгебарске полиноме, у односу на тежинску функцију $\widetilde{w}(x)$, $x \in (-1,1)$ (за алтернативни начин добијања K_n видети одељак 1.2.3).

Пример 4.4. *Посматрајмо интеграл*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos x}{\sqrt{3-\cos x}}(2+\cos x)\,\mathrm{d}x.$$

Овде се може узети $w(x) = 2+\cos x$ *и* $f(x) = (1+\cos x)/\sqrt{3-\cos x}$.

Сменом $x := \arccos x$ добијамо интеграл

$$\int_{-1}^{1} \frac{2}{\sqrt{3-x}} \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}(2+x)\,\mathrm{d}x.$$

Овде је $\widetilde{w}_1(x) = w(\arccos x)\sqrt{(1+x)/(1-x)} = (2+x)\sqrt{1+x}/\sqrt{1-x}$, а $f_1(z) = 2/\sqrt{3-z}$, квадратни корен треба схватити у смислу главне вредности. Сингуларитет је у $z = 3$, зато су све кружнице C_r, где је $1 < r < 3$, прихватљиве. Пошто је

$$|\sqrt{3-z}| = \sqrt{|3-z|} \geq \sqrt{3-|z|}$$

следи да је

$$|f_1(z)| \leq \frac{2}{\sqrt{3-r}}, \quad z \in C_r.$$

Како је $w(x)$ нерастућа функција $(0,\pi)$, из теореме 4.5, добијамо да је

$$\max_{z\in C_r} |K_n(z)| = K_n(r),$$

односно, на основу теореме 4.4, следи да је

$$|R_n(f)| \leq rK_n(r)\frac{2}{\sqrt{3-r}}, \quad 1 < r < 3, \tag{4.23}$$

где је $K_n(z) = \widetilde{R}_n\left(\widetilde{w}_1; 1/(z-\cdot)\right)$ дато са (4.22), за $\widetilde{w} = \widetilde{w}_1$. Нумерички резултати су дати у табели 4.4.

n	r	оцена остатка (4.23)	$\|R_n\|$
15	2.9	$4.3(-9)$	$6.3(-10)$
	2.8	$3.1(-9)$	
	2	$1.8(-9)$	
	1.5	$2.1(-9)$	
20	2.9	$3.3(-9)$	$4.9(-10)$
	2.8	$2.4(-9)$	
	2	$1.4(-9)$	
	1.5	$1.7(-9)$	

Табела 4.4. Оцена остатка (4.23) и стварна вредност остатка $|R_n|$.

Пример 4.5. *Посматраћемо интеграцију на интервалу $(-\pi, \pi)$, са тежинском функцијом $w(x) = 3 - \cos x$, функције $f(x) = (2 - \cos x)/(5\mathrm{i} - 2\cos x)^2$, тј.*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{2 - \cos x}{(5\mathrm{i} - 2\cos x)^2}(3 - \cos x)\,\mathrm{d}x.$$

Увођењем смене $x := \arccos x$ добијамо интеграл

$$\int_{-1}^{1} \frac{2(2 - x)}{(5\mathrm{i} - 2x)^2}\frac{3 - x}{\sqrt{1 - x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Овде је $\widetilde{w}_3(x) = (3 - x)/\sqrt{1 - x^2}$, $f_3(x) = 2(2 - x)/(5\mathrm{i} - 2x)^2$ и на основу услова теореме 4.8 можемо изабрати $r \approx 5/2$ за максималну прихватљиву вредност за r. Како је у овом случају тежинска функција $w(x) = 3 - \cos x$ неопадајућа на $(0, \pi)$ и

$$|f_3(z)| \leq \frac{2(2 - r)}{(5 - 2r)^2}, \quad z \in C_r,$$

на основу теорема 4.8 и 4.9 добијамо да је оцена остатка дата са:

$$|R_n(f)| \leq r\frac{2(2 - r)}{(5 - 2r)^2}|K_n(-r)|, \quad 1 < r < 5/2, \tag{4.24}$$

где је $K_n(z) = \widetilde{R}_n\left(\widetilde{w}_3; 1/(z - \cdot)\right)$ дато са (4.22), за $\widetilde{w} = \widetilde{w}_3$. Стварни остатак и оцена остатка у овом случају су дати у табели 4.5.

Пример 4.6. *Сада ћемо посматрати интеграл*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos^2 x}{(5 - \cos x)}(1 + \sin^2 x)^3\,\mathrm{d}x,$$

где је тежинска функција $w(x) = (1 + \sin^2 x)^3$ и $f(x) = (1 - \cos^2 x)/(5 - \cos x)$.

Како је $(f(\arccos z) + f(-\arccos z))/(1 - z^2) = 2/(5 - z)$, најближи сингуларитет је $z = 5$, па су зато све елипсе $\mathcal{E}_\rho$, са $1 < \rho < 5 + 2\sqrt{6}$, прихватљиве.

n	r	оцена остатка (4.24)	$\lvert R_n\rvert$
20	2.4	$4.0(-7)$	$2.4(-9)$
	2.1	$6.9(-9)$	
	1.8	$5.3(-9)$	
	1.6	$7.6(-9)$	
25	2.4	$3.8(-10)$	$2.4(-12)$
	2.1	$6.5(-12)$	
	1.8	$4.8(-12)$	
	1.6	$6.7(-12)$	

Табела 4.5. Оцена остатка (4.24) и стварна вредност остатка $|R_n|$.

Тежинска функција $w(x)$ је парна на $(-\pi,\pi)$. Зато, на основу теореме 4.11 (за $\Gamma=\mathcal{E}_\rho$) добијамо

$$|R_n(f)| \le \frac{\ell(\mathcal{E}_\rho)}{2\pi}\max_{z\in\mathcal{E}_\rho}|K_n(z;w)|\max_{z\in\mathcal{E}_\rho}|f_4(z)|, \tag{4.25}$$

где је $f_4(z)=2/(5-z)$, $\widetilde{w}_4(x)=\sqrt{1-x^2}(2-x^2)^3$ и $K_n(z)=\widetilde{R}_n\left(\widetilde{w}_4;1/(z-\cdot)\right)$ дато са (4.22), за $\widetilde{w}=\widetilde{w}_4$.

Даље, следи да је

$$\ell(\mathcal{E}_\rho)=2(\rho+\rho^{-1})\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\left(\frac{2}{\rho+\rho^{-1}}\right)^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta,$$
$$|f_4(z)|\le\frac{2}{5-(\rho+\rho^{-1})/2},\qquad z\in\mathcal{E}_\rho.$$

Како је w парна тежинска функција, $w(\pi-x)=w(x)$, $x\in(-\pi,\pi)$, и w је растућа функција на $(0,\pi/2)$, следи да је (видети теорему 4.13)

$$\max_{z\in\mathcal{E}_\rho}|K_n(z;w)|=\left|K_n\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\rho-\rho^{-1}\right)\right)\right|,\qquad \rho\ge\rho_n^*.$$

Параметар ρ_n^*, за неке вредности у случају када је $n\ge 2$ парно, је дат у [54, Table 1] (за $n=20$ имамо $\rho_n^*=2.41421356237$), а ако је $n\ge 1$ непарно, онда је $\rho_n^*=1+\sqrt{2}$. Коначно, из (4.25), добијамо

$$\begin{aligned}|R_n(f)|\le&\frac{2}{\pi}\frac{\rho+\rho^{-1}}{5-(\rho+\rho^{-1})/2}\left|K_n\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\rho-\rho^{-1}\right)\right)\right|\times\\ &\times\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\left(\frac{2}{\rho+\rho^{-1}}\right)^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta,\end{aligned}\tag{4.26}$$

где је $\rho_n^*\le\rho<5+2\sqrt{6}$. Нумерички резултати су дати у табели 4.6.

n	ρ	оцена остатка (4.26)	$\|R_n\|$
15	4.9	1.4(−11)	6.3(−12)
	3.9	1.1(−11)	
	2.9	1.0(−11)	
	2.6	8.7(−12)	
20	4.9	9.5(−12)	3.7(−12)
	3.9	6.9(−12)	
	2.9	7.2(−12)	
	2.6	7.3(−12)	

Табела 4.6. Оцена остатка (4.26) и стварна вредност остатка $|R_n|$.

4.2.2 Тежине које се своде на Чебишевљеве и Гегенбауерове

У овом одељку ћемо прво посматрати следеће парне тежинске функције на $(-\pi, \pi)$:

$$w_1(x) = 1 - \cos x, \quad w_2(x) = 1, \quad w_3(x) = 1 + \cos x, \quad w_4(x) = 1 - \cos^2 x.$$

Ове тежинске функције се своде на другу и трећу Чебишевљеву тежинску функцију, тј. на $\sqrt{1-x^2}$ и $\sqrt{(1+x)/(1-x)}$, $x \in (-1,1)$. Остатак Гаусове квадратурне формуле за алгебарске полиноме у односу на Чебишевљеве тежинске функције је анализиран у [18], [19].

Теорема 4.14. *Нека је f 2π–периодична функција, таква да је $f(\pi) = 0$ и нека је $(f(\arccos z) + f(-\arccos z))/(1+z)$ аналитичка на домену D који садржи интервал $[-1,1]$, а Γ контура у D око $[-1,1]$, $w \in \{w_1, w_2\}$. За остатак $R_n(f)$ у* (4.13) *важи следећа оцена:*

$$|R_n(f)| \leq \frac{\ell(\Gamma)}{2\pi} \max_{z\in\Gamma} |K_n(z;w)| \max_{z\in\Gamma} |f_1(z)|, \tag{4.27}$$

где је $K_n(z;w) = \widetilde{R}_n(\widetilde{w}_1; 1/(z-\cdot))$, $\widetilde{R}_n$ је дато са (3.13)*, f_1 и $\widetilde{w}_1$ су дате са* (3.11) *и* (3.6)*, респективно.*

(а) *За $\Gamma = C_r$ и $w = w_1$ имамо да је*

$$\max_{z\in C_r} |K_n(z;w)| = K_n(r).$$

(б) *Када је n непарно и $w = w_1$ максимум за $|K_n(z;w)|$ на $\Gamma = \mathcal{E}_\rho$ се достиже на имагинарној оси:*

$$\max_{z\in\mathcal{E}_\rho} |K_n(z;w)| = \left| K_n\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\rho - \rho^{-1}\right)\right)\right|. \tag{4.28}$$

Ако је $n \geq 2$ *парно, тада постоји* $\rho*$ *такво да за свако* $\rho \geq \rho*$ *важи* (4.28)*, а ако је* $1 < \rho < \rho*$*, тада* $|K_n(z; w)|$ *достиже максимум за неко* $z = z^* = 1/2\left(\rho e^{i\theta^*} + \rho^{-1}e^{-i\theta^*}\right) \in \mathcal{E}_\rho$*, где је* $(n/(n+1))\pi/2 < \theta^* < \pi/2$.

(в) *Ако је* $\Gamma = C_r$ *и* $w = w_2$*, тада је*

$$\max_{z \in C_r} |K_n(z; w)| = K_n(r).$$

(г) *За* $w = w_2$ *максимум од* $|K_n(z; w)|$ *на* $\Gamma = \mathcal{E}_\rho$ *се достиже на реалној оси:*

$$\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |K_n(z; w)| = K_n\left(\frac{1}{2}\left(\rho + \rho^{-1}\right)\right). \tag{4.29}$$

Доказ. Аналогно као у доказу теореме 4.4 добијамо оцену (4.27).

(а) У овом случају је $w(x) = w_1(x)$ и $\widetilde{w}_1(x) = w_1(\arccos x)\sqrt{(1+x)/(1-x)} = \sqrt{1-x^2}$. Како је $\widetilde{w}_1(x)/\widetilde{w}_1(-x) = 1$ неопадајућа функција на $(-1, 1)$, на основу теореме 1.2, следи да је

$$\max_{z \in C_r} |K_n(z; w)| = K_n(r).$$

(б) Како је у овом случају $w(x) = w_1(x)$ и $\widetilde{w}_1(x) = \sqrt{1-x^2}$, тј. добијамо другу Чебишевљеву тежинску функцију, на основу теореме 1.5, закључујемо да је

$$\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |K_n(z; w)| = \left|K_n\left(\frac{i}{2}\left(\rho - \rho^{-1}\right)\right)\right|,$$

када је n непарно. Нека је сада $n \geq 2$ паран број и $\rho_n > 1$ јединствен корен једначине

$$\frac{a_1(\rho)}{a_n(\rho)} = \frac{1}{n}, \quad a_j = \frac{1}{2}\left(\rho^j + \rho^{-j}\right), \quad j = 1, 2, 3, \ldots.$$

Тада, ако је $\rho \geq \rho_{n+1} = \rho*$, максимум за $|K_n(z; w)|$ на $\mathcal{E}_\rho$ се достиже на имагинарној оси, а ако је $1 < \rho < \rho*$, тада $|K_n(z; w)|$ достиже свој максимум у некој тачки $z = z^* = 1/2\left(\rho e^{i\theta^*} + \rho^{-1}e^{-i\theta^*}\right) \in \mathcal{E}_\rho$, где је $(n/(n+1))\pi/2 < \theta^* < \pi/2$ (видети теорему 1.6).

(в) За $w(x) = w_2(x)$ имамо $\widetilde{w}_1(x) = w_2(\arccos x)\sqrt{(1+x)/(1-x)}$, односно $\widetilde{w}_1(x) = \sqrt{(1+x)/(1-x)}$. Како је $\widetilde{w}_1(x)/\widetilde{w}_1(-x) = (1+x)/(1-x)$ неопадајућа функција на $(-1, 1)$, на основу теореме 1.2, добијамо

$$\max_{z \in C_r} |K_n(z; w)| = K_n(r).$$

(г) Како је у овом случају $w(x) = w_2(x)$ и $\widetilde{w}_1(x)$ је трећа Чебишевљева тежинска функција (видети претходни случај), на основу теореме 1.7, следи (4.29). □

Теорема 4.15. *Нека је f 2π–периодична функција, таква да је $f(0) = 0$ и нека је $(f(\arccos z) + f(-\arccos z))/(1 - z)$ аналитичка на домену D, који садржи интервал $[-1, 1]$, а Γ контура у D око $[-1, 1]$. За остатак $R_n(f)$ у* (4.13) *важи следећа оцена:*

$$|R_n(f)| \leq \frac{\ell(\Gamma)}{2\pi} \max_{z\in\Gamma} |K_n(z; w_3)| \max_{z\in\Gamma} |f_2(z)|, \tag{4.30}$$

где је $K_n(z; w_3) = \widetilde{R}_n(\widetilde{w}_2; 1/(z - \cdot))$, $\widetilde{R}_n$ је дато са (3.13)*, f_2 је дато са* (3.12) *и $\widetilde{w}_2$ са* (3.9)*, за $w = w_3$.*

(а) *Ако је $\Gamma = C_r$, тада је*

$$\max_{z\in C_r} |K_n(z; w_3)| = K_n(r).$$

(б) *Када је n непарно максимум за $|K_n(z; w_3)|$ на $\Gamma = \mathcal{E}_\rho$ се достиже на имагинарној оси:*

$$\max_{z\in\mathcal{E}_\rho} |K_n(z; w_3)| = \left|K_n\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\rho - \rho^{-1}\right)\right)\right|. \tag{4.31}$$

Ако је $n \geq 2$ парно, тада постоји $\rho*$ такво да за свако $\rho \geq \rho*$ важи (4.31)*, а ако је $1 < \rho < \rho*$, $|K_n(z; w_3)|$ достиже свој максимум у $z = z^* = 1/2\left(\rho e^{\mathrm{i}\theta^*} + \rho^{-1}e^{-\mathrm{i}\theta^*}\right) \in \mathcal{E}_\rho$ за $(n/(n + 1))\pi/2 < \theta^* < \pi/2$.*

Доказ. Аналогно доказу теореме 4.6 добијамо оцену (4.30).

(а) Нека је Γ дато са C_r, $r > 1$, кружница у D и $\widetilde{w}_2(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Како је $\widetilde{w}_2(x)/\widetilde{w}_2(-x) = 1$ неопадајућа функција на $(-1, 1)$, на основу теореме 1.2, следи да је

$$\max_{z\in C_r} |K_n(z; w_3)| = K_n(r).$$

(б) Нека је сада $\Gamma = \mathcal{E}_\rho$, $\rho > 1$. Пошто је $\widetilde{w}_2$ друга Чебишевљева тежинска функција, аналогно као у доказу претходне теореме, добијамо тражени максимум за $|K_n(z; w_3)|$. □

Теорема 4.16. *Нека је f 2π–периодична функција и $f(\arccos z) + f(-\arccos z)$ аналитичка функција на домену D, који садржи интервал $[-1, 1]$, и нека је Γ контура у D око $[-1, 1]$. За остатак $R_n(f)$ у* (4.14) *важи следећа оцена:*

$$|R_n(f)| \leq \frac{\ell(\Gamma)}{2\pi} \max_{z\in\Gamma} |K_n(z; w_4)| \max_{z\in\Gamma} |f_3(z)|, \tag{4.32}$$

где је $K_n(z; w_4) = \widetilde{R}_n(\widetilde{w}_3; 1/(z - \cdot))$, $\widetilde{R}_n$ је дато са (3.13)*, f_3 је дато са* (3.24) *и $\widetilde{w}_3$ са* (3.21)*, за $w = w_4$.*

(а) *Ако је* $\Gamma = C_r$, *тада је*

$$\max_{z \in C_r} |K_n(z; w_4)| = K_n(r).$$

(б) *Када је* n *непарно, максимум за* $|K_n(z; w_4)|$ *на* $\Gamma = \mathcal{E}_\rho$ *се достиже на имагинарној оси:*

$$\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |K_n(z; w_4)| = \left| K_n\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\rho - \rho^{-1}\right)\right)\right|. \tag{4.33}$$

Ако је $n \geq 2$ *парно, тада постоји* $\rho*$ *такво да за свако* $\rho \geq \rho*$ *важи* (4.33), *а ако је* $1 < \rho < \rho*$, *тада* $|K_n(z; w_4)|$ *достиже максимум за* $z = z^* = 1/2\left(\rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta^*} + \rho^{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta^*}\right) \in \mathcal{E}_\rho$, *где је* $(n/(n+1))\pi/2 < \theta^* < \pi/2$.

Доказ. Сменом $x := \arccos x$, $w(x) = w_4(x)$ и применом леме 3.8, као у доказу теореме 4.8, добијамо (4.32).

Случајеви (а) и (б) се лако могу доказати коришћењем сличних аргумената као у доказу претходне две теореме. □

Сада ћемо посматрати остатак Гаусових квадратурних формула (4.13) и (4.14) у односу на следеће парне тежинске функције на интервалу $(-\pi, \pi)$:

$$w_1^\alpha(x) = (\sin^2 x)^{\alpha - 1/2}(1 - \cos x), \quad w_2^\alpha(x) = (\sin^2 x)^{\alpha - 1/2}(1 + \cos x), \quad \alpha > 0,$$
$$w_3^\alpha(x) = (\sin^2 x)^{\alpha - 1/2}, \quad \alpha > 0.$$

Пошто су све тежинске функције $w_i^\alpha(x)$, $x \in (-\pi, \pi)$, $\alpha > 0$, $i = 1, 2, 3$, парне на $(-\pi, \pi)$ закључујемо да важе оцене остатака Гаусових квадратурних формула дате у теоремама 4.4, 4.6, 4.8 и 4.11, али се максимум модула језгра K_n не може добити коришћењем теорема које су дате у претходном поглављу за све вредности параметра α.

Следеће теореме дају локализацију максимума модула језгра K_n на кружници C_r, $r > 1$, и елипси $\mathcal{E}_\rho$, $\rho > 1$, коришћењем чињенице да се тежинске функције $w_i^\alpha(x)$, $x \in (-\pi, \pi)$, $\alpha > 0$, $i = 1, 2, 3$, сменом $x := \arccos x$ своде на Гегенбауерове тежинске функције $(1 - x^2)^\alpha$, $x \in (-1, 1)$, $\alpha > 0$. Остатак Гаусове квадратурне формуле за алгебарске полиноме у односу на Гегенбауерове тежинске функције је разматран у радовима [18], [19], [54].

Теорема 4.17. *Језгро* $K_n(z; w^\alpha)$, $w^\alpha \in \{w_1^\alpha, w_2^\alpha, w_3^\alpha\}$, $\alpha > 0$, *дато са* (4.16) *ако је* $w^\alpha = w_1^\alpha$, *са* (4.19) *ако је* $w^\alpha = w_2^\alpha$, *и са* (4.21) *ако је* $w^\alpha = w_3^\alpha$, *задовољава следеће.*

(а) *За сваку кружницу* C_r, $r > 1$, *имамо да је*

$$\max_{z \in C_r} |K_n(z; w^\alpha)| = K_n(r), \quad \alpha > 0.$$

(б) *Ако је $\alpha \geq 1/2$, тада на свакој елипси $\mathcal{E}_\rho$, за $\rho \geq \rho_n^*$, важи:*

$$\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |K_n(z; w^\alpha)| = \left| K_n\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\rho - \rho^{-1}\right)\right)\right|,$$

где је параметар ρ_n^* највећа нула функције

$$d_n(\rho) = \left(\rho - \rho^{-1}\right)^2 - 4 - \left(\rho^2 - \rho^{-2}\right)^2 \left(\frac{(n+1)^2}{\left(\rho^{n+1} + \rho^{-n-1}\right)^2} + \frac{(n+3)^2}{\left(\rho^{n+3} + \rho^{-n-3}\right)^2}\right)$$

ако је $n \geq 2$ парно, док ако је $n \geq 1$ непарно, тада је $\rho_n^* = 1 + \sqrt{2}$.

Доказ. Детаљан доказ ће бити дат за случај $w^\alpha = w_1^\alpha$. Потпуно слично се доказују одговарајућа тврђења за случајеве $w^\alpha = w_2^\alpha$ и $w^\alpha = w_3^\alpha$.

У овом случају $K_n(z; w_1^\alpha)$ је дато са (4.16), где је $\widetilde{w}_1$ дато са (3.6) за $w = w_1^\alpha$, тј. $\widetilde{w}_1(x) = w_1^\alpha(\arccos x)\sqrt{(1+x)/(1-x)} = (1-x^2)^\alpha$, $\alpha > 0$, $x \in (-1, 1)$.

(а) Како је $\widetilde{w}_1(x)/\widetilde{w}_1(-x) = 1$ неопадајућа функција на $(-1, 1)$, на основу теореме 1.2, следи да је

$$\max_{z \in C_r} |K_n(z; w_1^\alpha)| = K_n(r), \quad \alpha > 0.$$

(б) Пошто је у овом случају $\widetilde{w}_1(x) = (1-x^2)^\alpha$, $\alpha > 0$, $x \in (-1, 1)$, тј. $\widetilde{w}_1(x)$ је Гегенбауерова тежинска функција. Када је $\alpha \geq 1/2$, на основу теореме 1.8, следи да је

$$\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |K_n(z; w_1^\alpha)| = \left| K_n\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\rho - \rho^{-1}\right)\right)\right|, \quad \text{за} \quad \rho \geq \rho_n^*.$$

Параметар ρ_n^* је највећа нула функције

$$d_n(\rho) = \left(\rho - \rho^{-1}\right)^2 - 4 - \left(\rho^2 - \rho^{-2}\right)^2 \left(\frac{(n+1)^2}{\left(\rho^{n+1} + \rho^{-n-1}\right)^2} + \frac{(n+3)^2}{\left(\rho^{n+3} + \rho^{-n-3}\right)^2}\right)$$

ако је $n \geq 2$ парно, док ако је $n \geq 1$ непарно, тада је $\rho_n^* = 1 + \sqrt{2}$. □

Напомена 4.3. *За максимум $|K_n(z; w^\alpha)|$, $w^\alpha \in \{w_1^\alpha, w_2^\alpha, w_3^\alpha\}$, $\alpha > 0$, на елипси $\mathcal{E}_\rho$ када је $0 < \alpha < 1/2$ имамо само емпиријске резултате засноване на израчунавањима. На основу њих се закључује да се максимум достиже на имагинарној оси, осим у случају када је n парно и ρ није много велико, када се претпоставља да је мало изван имагинарне осе (видети [18]).*

Теорема 4.18. *За $K_n(z; w_3^\alpha)$, $\alpha \geq 0$, дато са (4.20), важи следеће.*

(а) *На свакој кружници C_r, $r > 1$, следи да је*

$$\max_{z \in C_r} |K_n(z; w_3^\alpha)| = K_n(r), \quad \alpha \geq 0.$$

(б) *Ако је $\alpha \geq 3/2$, тада на свакој елипси $\mathcal{E}_\rho$, за $\rho \geq \rho_n^*$, важи:*

$$\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |K_n(z; w_3^\alpha)| = \left| K_n \left(\frac{\mathrm{i}}{2} \left(\rho - \rho^{-1} \right) \right) \right|.$$

Параметар ρ_n^* је највећа нула функције

$$d_n(\rho) = \left(\rho - \rho^{-1}\right)^2 - 4 - \left(\rho^2 - \rho^{-2}\right)^2 \left(\frac{(n+1)^2}{\left(\rho^{n+1} + \rho^{-n-1}\right)^2} + \frac{(n+3)^2}{\left(\rho^{n+3} + \rho^{-n-3}\right)^2} \right)$$

ако је $n \geq 2$ парно, а ако је $n \geq 1$ непарно, тада је $\rho_n^* = 1 + \sqrt{2}$.

За $0 < \alpha \leq 1/2$, имамо да је

$$\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |K_n(z; w_3^\alpha)| = K_n \left(\frac{1}{2} \left(\rho + \rho^{-1} \right) \right), \quad \text{за} \quad n \geq 2 \quad \text{и}$$

$$\rho \geq \rho_n^* = \begin{cases} 2.4139, & n = 2, \\ 2.0017, & n = 3, \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1 + \sqrt{3}), & n \geq 4. \end{cases}$$

Доказ. Пошто је у овом случају $K_n(z; w_3^\alpha)$, $\alpha \geq 0$, дато са (4.20) и $\widetilde{w}_3$ са (3.21), за $w = w_3^\alpha$, $\alpha > 0$, закључујемо да је $\widetilde{w}_3(x) = w_3^\alpha(\arccos x)/\sqrt{1 - x^2} = (1 - x^2)^{\alpha - 1}$, $\alpha > 0$, $x \in (-1, 1)$.

(а) Сада, пошто је $\widetilde{w}_3(x)/\widetilde{w}_3(-x) = 1$ неопадајућа функција на $(-1, 1)$, на основу теореме 1.2, добијамо

$$\max_{z \in C_r} |K_n(z; w_3^\alpha)| = K_n(r).$$

(б) Када је $\alpha \geq 3/2$, тада из теореме 1.8, следи

$$\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |K_n(z; w_3^\alpha)| = \left| K_n \left(\frac{\mathrm{i}}{2} \left(\rho - \rho^{-1} \right) \right) \right|, \quad \text{за} \quad \rho \geq \rho_n^*.$$

Параметар ρ_n^* је највећа нула функције

$$d_n(\rho) = \left(\rho - \rho^{-1}\right)^2 - 4 - \left(\rho^2 - \rho^{-2}\right)^2 \left(\frac{(n+1)^2}{\left(\rho^{n+1} + \rho^{-n-1}\right)^2} + \frac{(n+3)^2}{\left(\rho^{n+3} + \rho^{-n-3}\right)^2} \right)$$

ако је $n \geq 2$ парно, док ако је $n \geq 1$ непарно, тада је $\rho_n^* = 1 + \sqrt{2}$.
Ако је $0 < \alpha \leq 1/2$, тада добијамо (видети теорему 1.8)

$$\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |K_n(z; w_3^\alpha)| = K_n \left(\frac{1}{2} \left(\rho + \rho^{-1} \right) \right), \quad \text{за} \quad n \geq 2 \quad \text{и}$$

$$\rho \geq \rho_n^* = \begin{cases} 2.4139, & n = 2, \\ 2.0017, & n = 3, \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1 + \sqrt{3}), & n \geq 4. \end{cases}$$

□

Напомена 4.4. *Ако је* $1/2 < \alpha < 3/2$*, тада за максимум израза* $|K_n(z; w_3^\alpha)|$ *на елипси* $\mathcal{E}_\rho$ *имамо само емпиријске резултате на основу којих се закључује следеће. Када је* $1/2 < \alpha < 1$*, тада се максимум достиже на имагинарној оси ако је* $n = 1$*; са повећањем* n *тачка у којој се достиже максимум се помера дуж елипсе* $\mathcal{E}_\rho$ *према реалној оси, и то брже ако је* ρ *веће. Ако је* $1 \leq \alpha < 3/2$ *максимум се достиже на имагинарној оси, осим када је* n *парно и* ρ *није много велико, а тада се претпоставља да је мало изван имагинарне осе* (*видети* [18]).

Глава 5

Вишеструко ортогонални тригонометријски полиноми полу–целобројног степена и оптимални скупови квадратурних формула

Вишеструко ортогонални полиноми (eng. multiple orthogonal polynomials) представљају генерализацију ортогоналних полинома у смислу да они задовољавају $p \in \mathbb{N}$ услова ортогоналности.

Нека је $p \in \mathbb{N}$ и нека је $W = \{w_1, w_2, \dots, w_p\}$ скуп p тежинских функција на реалној правој, таквих да је носач сваке функције w_i подскуп неког интервала E_i. Нека је $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_p)$ вектор (уређена p–торка) ненегативних целих бројева, који се зове *мулūи–индекс*, а $|\mathbf{n}| = n_1 + n_2 + \cdots + n_p$ његова дужина.

Уведимо парцијално уређење мулти–индекса на следећи начин:

$$\mathbf{m} \preceq \mathbf{n} \Leftrightarrow m_\nu \leq n_\nu \text{ за свако } \nu = 1, 2, \dots, p. \tag{5.1}$$

5.1 Вишеструко ортогонални алгебарски полиноми

Вишеструко ортогоналне алгебарске полиноме је први увео Хермите[1] у доказу трансцедентности броја e, и даље су коришћени у теорији бројева и теорији апроксимација. Наиме, у Хермите–Падеовој[2] апроксимацији, која се

[1] Charles Hermite (1822–1901), француски математичар
[2] Henri Eugéne Padé (1863–1953), француски математичар

користи за рационалну апроксимацију система Маркових[3] функција, имениоци задовољавају више релација ортогоналности које су еквивалентне условима ортогоналности вишеструко ортогоналних полинома. За више детаља о вишеструко ортогоналним полиномима и Хермите–Падеовој апроксимацији читаоце упућујемо на књигу [50, Chapter 4], прегледне чланке [1], [12] и [44], као и радове [53], [57], [58], [59], [71], [74], и поглавље 23 књиге [25]. Такође, вишеструко ортогонални полиноми су коришћени у доказима ирационалности и трансцедентности неких реалних бројева (видети [71], [72], [74]).

Постоје два типа вишеструко ортогоналних полинома.

- **Вишеструко ортогонални полиноми типа I**
  Вишеструко ортогонални полиноми типа I су представљени вектором

  $$(B_{\mathbf{n},1}, B_{\mathbf{n},2}, \ldots, B_{\mathbf{n},p}) \tag{5.2}$$

  p полинома, где је $B_{\mathbf{n},j}$, $1 \leq j \leq p$, полином степена $n_j - 1$ и важе следећи услови ортогоналности:

  $$\sum_{j=1}^{p} \int_{E_j} x^k B_{\mathbf{n},j}\, w_j(x)\,\mathrm{d}x = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, |\mathbf{n}| - 2, \tag{5.3}$$

  са нормализацијом

  $$\sum_{j=1}^{p} \int_{E_j} x^{|\mathbf{n}|-1} B_{\mathbf{n},j}\, w_j(x)\,\mathrm{d}x = 1. \tag{5.4}$$

  За $p = 1$ имамо обичне ортогоналне полиноме.

  Сваки полином $B_{\mathbf{n},j}$ има n_j коефицијената. Вектор (5.2) је комплетно одређен ако можемо одредити свих $|\mathbf{n}|$ непознатих коефицијената. Услови (5.3)–(5.4) дају линеаран систем од $|\mathbf{n}|$ једначина за рачунање ових $|\mathbf{n}|$ непознатих коефицијената полинома $B_{\mathbf{n},j}$, $j = 1, 2, \ldots, p$. Кажемо да је мулти–индекс нормалан за тип I ако услови (5.3)–(5.4) јединствено одређују полиноме у (5.2).

  За вишеструко ортогоналне полиноме типа I увешћемо и следећу функцију:

  $$B_{\mathbf{n}}(x) = \sum_{\nu=1}^{p} B_{\mathbf{n},\nu} w_\nu(x). \tag{5.5}$$

- **Вишеструко ортогонални полиноми типа II**
  Под вишеструко ортогоналним полиномом типа II подразумева се моничан полином $P_{\mathbf{n}}$ степена $|\mathbf{n}|$ такав да задовољава следеће услове ортогоналности:

  $$\int_{E_\nu} P_{\mathbf{n}}(x) x^k\, w_\nu(x)\,\mathrm{d}x = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n_\nu - 1, \quad \nu = 1, 2, \ldots, p. \tag{5.6}$$

[3] Андре́й Андре́евич Марков (1856–1922), руски математичар

> Услови ортогоналности (5.6) дају систем од $|\mathbf{n}|$ линеарних једначина за одређивање $|\mathbf{n}|$ непознатих коефицијената моничног полинома $P_{\mathbf{n}}$. Пошто матрица овог система може бити сингуларна, потребни су додатни услови за p тежинских функција који ће обезбедити јединственост вишеструко ортогоналног полинома.

Вишеструко ортогоналан полином типа II $P_{\mathbf{n}}$ је јединствен ако и само ако је вектор вишеструко ортогоналних полинома типа I јединствен (видети [25]). Ако је полином $P_{\mathbf{n}}$ јединствен, тада је мулти–индекс $\mathbf{n}$ нормалан. Ако су сви мулти–индекси нормални тада кажемо да p тежинских функција чини *савршен систем*.

Следећа два система тежинских функција су савршени системи (видети [74]):

1. Angelesco систем, за који су интервали E_i (носачи тежинских функција), дисјунктни, тј. $E_i \cap E_j = \varnothing$ за $1 \leq i \neq j \leq p$;

2. AT систем, где све тежинске функције имају носаче у истом интервалу E и скуп
$$\{x^k w_\nu(x) : k = 0, 1, \ldots, n_\nu - 1, \nu = 1, 2, \ldots, p\}$$
чини Чебишевљев систем на E за све мулти–индексе $\mathbf{n}$.

Важе следећа тврђења (видети [74], [25]).

Теорема 5.1. *За Angelesco систем вишеструко ортогонални полином типа II $P_{\mathbf{n}}(x)$ може се представити као производ p полинома, $P_{\mathbf{n}}(x) = \prod_{j=1}^{p} q_{n_j}(x)$, где сваки полином q_{n_j} има тачно n_j нула на E_j.*

Теорема 5.2. *За AT систем вишеструко ортогонални полином типа II $P_{\mathbf{n}}(x)$ има тачно $|\mathbf{n}|$ нула на E. За вектор вишеструко ортогоналних полинома типа I линеарна комбинација $\sum_{j=1}^{p} B_{\mathbf{n},j}(x) w_j(x)$ има тачно $|\mathbf{n}| - 1$ нула на E.*

5.1.1 Рекурентне релације

Као што ортогонални полиноми на реалној правој увек задовољавају трочлану рекурентну релацију, тако постоје и рекурентне релације за вишеструко ортогоналне полиноме. Прво су добијене рекурентне релације реда $p + 1$ за вишеструко ортогоналне полиноме типа II за такозване скоро дијагоналне мулти–индексе (видети [72]), а затим и рекурентне релације за произвољан мулти–индекс, такозване рекурентне релације „најближих суседа”, за вишеструко ортогоналне полиноме типа I и II.

Нека скуп тежинских функција $W = \{w_1, w_2, \dots, w_p\}$ чини један од посматраних система у поглављу 5.1 и нека за сваку тежинску функцију w_k, $k = 1, 2, \dots, p$

$$(f, g)_k = \int_{E_k} f(x) g(x)\, w_k(x)\, \mathrm{d}x, \quad f, g \in \mathcal{P}_n,$$

означава одговарајући скаларни производ функција f и g.

Рекурентне релације у случају скоро дијагоналних мулти–индекса

Нека је $p \in \mathbb{N}$ и нека је $m \in \mathbb{N}_0$. Записаћемо га у облику $m = \ell p + j$, где је $0 \le j < p$ и $\ell = [m/p]$. *Скоро дијагоналан мулти–индекс* $\mathbf{d}(m)$, који одговара броју m, је мулти–индекс

$$\mathbf{d}(m) = (\underbrace{\ell+1, \ell+1, \dots, \ell+1}_{j \text{ пута}}, \underbrace{\ell, \ell, \dots, \ell}_{p-j \text{ пута}}).$$

Са P_m означићемо одговарајуће вишеструко ортогоналне полиноме типа II $P_{\mathbf{d}(m)}$, у односу на скуп тежина W.

Узимајући за скаларне производе $(\cdot, \cdot)_{j+\ell p} = (\cdot, \cdot)_j$ за свако $\ell \in \mathbb{Z}$ важи следећа теорема (доказ се може наћи у [43]).

Теорема 5.3. *Вишеструко ортогонални полиноми типа II са скоро дијагоналним мулти–индексима $\{P_m\}$ задовољавају рекурентну релацију*

$$P_{m+1}(x) = (x - a_{m,p}) P_m(x) - \sum_{k=0}^{p-1} a_{m,k} P_{m-p+k}(x), \quad m \ge 0, \tag{5.7}$$

где је $P_0(x) = 1$, $P_i(x) = 0$, за $i = -1, -2, \dots, -p$,

$$a_{m,0} = \frac{(xP_m, P_{[(m-p)/p]})_{j+1}}{(P_{m-p}, P_{[(m-p)/p]})_{j+1}}$$

и

$$a_{m,k} = \frac{(xP_m - \sum_{i=0}^{k-1} a_{m,i} P_{m-p+i}, P_{[(m-p+k)/p]})_{j+k+1}}{(P_{m-p+k}, P_{[(m-p+k)/p]})_{j+k+1}}, \quad k = 1, 2, \dots, p,$$

где је $\ell = [m/p]$ и $j = m - \ell p \in \{0, 1, \dots, p-1\}$.

Мењајући $m = 0, 1, \dots, n-1$ у (5.7) добијамо

$$H_n \begin{bmatrix} P_0(x) \\ P_1(x) \\ \vdots \\ P_{n-1}(x) \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} P_0(x) \\ P_1(x) \\ \vdots \\ P_{n-1}(x) \end{bmatrix} - P_n \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

тј.

$$H_n \mathbf{P}_n(x) = x\mathbf{P}_n(x) - P_n(x)\mathbf{e}_n, \tag{5.8}$$

где је

$$\mathbf{P}_n(x) = \begin{bmatrix} P_0(x) & P_1(x) & \cdots & P_{n-1}(x) \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

и H_n следећа доња (са траком) Хесенбергова[4] матрица реда n

$$H_n = \begin{bmatrix} \alpha_{0,p} & 1 & & & & & & & \\ \alpha_{1,p-1} & \alpha_{1,p} & 1 & & & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \\ \alpha_{p,0} & \cdots & \alpha_{p,p-1} & \alpha_{p,p} & 1 & & & & \\ & \alpha_{p+1,0} & \cdots & \alpha_{p+1,p-1} & \alpha_{p+1,p} & 1 & & & \\ & & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \alpha_{n-2,0} & \cdots & \alpha_{n-2,p-1} & \alpha_{n-2,p} & 1 \\ & & & & \alpha_{n-1,0} & \cdots & \alpha_{n-1,p-1} & \alpha_{n-1,p} \end{bmatrix}$$

Ова врста матрица се добија и у конструкцији ортогоналних полинома на радијалним зрацима у комплексној равни (видети [34]).

Нека су $x_i^{(n)}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, нуле полинома $P_n(x)$. Тада се релација (5.8) своди на проблем сопствених вредности

$$x_i^{(n)} \mathbf{P}_n(x_i^{(n)}) = H_n \mathbf{P}_n(x_i^{(n)}).$$

Према томе, $x_i^{(n)}$ су сопствене вредности матрице H_n, а $P_n(x_i^{(n)})$ одговарајући сопствени вектори. Једноставно се добија и следећа репрезентација вишеструко ортогоналних полинома типа II

$$P_n(x) = \det(xI_n - H_n),$$

где је I_n јединична матрица реда n.

Нуле полинома $P_n(x)$, као сопствене вредности матрице H_n, можемо добити QR алгоритмом (EISPACK рутина COMQR [56, с. 277–284]). Такође се могу користити и MATLAB или MATHEMATICA.

Рекурентне релације „најближих суседа”

Рекурентне релације за опште мулти–индексе, такозване рекурентне релације „најближих суседа”дате су у [25] и [73]. Ове релације укључују мулти–индексе облика $\mathbf{n} \pm \mathbf{e}_\nu$, где је $\mathbf{e}_\nu$ стандардни јединични вектор са 1 на ν–ој координати.

[4] Karl Adolf Hessenberg (1904–1959), немачки математичар

Са $\mathbf{0}$ ћемо означити мулти–индекс $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$. Нека је $(i_1, i_2, \ldots, i_p)$ пермутација p–торке $(1, 2, \ldots, p)$ и нека су $\boldsymbol{\sigma}_\nu$ следећи мулти–индекси:

$$\boldsymbol{\sigma}_\nu = \sum_{j=1}^{\nu} \mathbf{e}_{i_j}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, p. \tag{5.9}$$

Мулти–индекс $\boldsymbol{\sigma}_\nu$ има ν координата једнаких 1 и $p-\nu$ једнаких 0. Полином $P_{\mathbf{n}-\boldsymbol{\sigma}_\nu}$ је степена $|\mathbf{n}| - \nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, p$, и $\mathbf{n} - \boldsymbol{\sigma}_p = (n_1 - 1, n_2 - 1, \ldots, n_p - 1)$. Изаберимо $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$ и претпоставимо да су сви мулти–индекси $\mathbf{m} \preceq \mathbf{n} + \mathbf{e}_k$ нормални. Тада важи следећа рекурентна релација (видети [25])

$$xP_{\mathbf{n}}(x) = P_{\mathbf{n}+\mathbf{e}_k}(x) + a_{\mathbf{n},0}(k)P_{\mathbf{n}}(x) + \sum_{\nu=1}^{p} a_\nu(\mathbf{n})P_{\mathbf{n}-\boldsymbol{\sigma}_\nu}(x), \tag{5.10}$$

где су

$$a_{\mathbf{n},0} = \int_E xP_{\mathbf{n}}(x)B_{\mathbf{n}+\mathbf{e}_k}(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$a_\nu(\mathbf{n}) = \int_E xP_{\mathbf{n}}(x)B_{\mathbf{n}-\boldsymbol{\sigma}_{\nu-1}}(x)\,\mathrm{d}x, \quad \nu = 1, 2, \ldots, p,$$

а $B_{\mathbf{n}}$ је функција за полиноме типа I дата са (5.5) и $\boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbf{0}$.

Напомена 5.1. *Ако је $(1, 1, \ldots, 1) \preceq \mathbf{n}$, тада је и $\mathbf{n} - \boldsymbol{\sigma}_p$ мулти–индекс. Међутим, јавља се проблем када мулти–индекс $\mathbf{n}$ има неке координате једнаке 0, тј. када $\mathbf{n} - \boldsymbol{\sigma}_p$ има негативних координата. Такође, пошто је* (5.10) *рекурентна релација реда $p+1$, потребна нам је $p+1$ почетна вредност. Проблем почетних вредности је повезан са проблемом када су неке координате мулти–индекса $\mathbf{n}$ једнаке 0. Међутим, ако је $n_\ell = 0$, за неко $\ell \in \{1, 2, \ldots, p\}$, тада у ствари немамо услове ортогоналности у односу на тежинску функцију w_ℓ, тј. имамо услове ортогоналности у односу на $p-1$ тежинску функцију; ако $\mathbf{n}$ има две координате једнаке 0, тада имамо услове ортогоналности у односу на $p-2$ тежинске функције, и тако даље. Коначно, ако је $(1, 1, \ldots, 1) \npreceq \mathbf{n}$ и $n_{\ell_1} = n_{\ell_2} = \cdots = n_{\ell_r} = 0$ за одређено $r \in \{1, 2, \ldots, p\}$, изабраћемо пермутацију $(i_1, i_2, \ldots, i_p)$ за коју је $\{i_p, i_{p-1}, \ldots, i_{p-r+1}\} = \{\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_r\}$, и поставити да је $P_{\mathbf{n}-\boldsymbol{\sigma}_j}(x) = 0$, за $j = p, p-1, \ldots, p-r+1$, тј. $P_{\mathbf{m}}(x) = 0$ ако мулти–индекс $\mathbf{m}$ има бар једну негативну координату. Сада се лако закључује да су почетни услови рекурентне релације* (5.10) *дати са*

$$P_{\mathbf{0}}(x) = 1, \quad P_{-\boldsymbol{\sigma}_j}(x) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, p.$$

За $p = 1$ вишеструко ортогонални полиноми типа II се своде на обичне ортогоналне полиноме, а рекурентна релација реда $p+1$ се своди на познату трочлану рекурентну релацију.

Напомена 5.2. *Ако је $n_\nu = 0$ за неко $\nu \in \{1, 2, \ldots, p\}$, тада је одговарајућа координата у полиному типа I нула полином, тј. $B_{\mathbf{n},\nu}(x) = 0$. За $\mathbf{n} = \mathbf{0}$ имамо да је $B_{\mathbf{0},\nu}(x) = 0$, $\nu = 1, 2, \ldots, p$, и стога је $B_{\mathbf{0}}(x) = 0$. За $\mathbf{n} = \mathbf{e}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, p$, имамо да је $B_{\mathbf{e}_\nu,\nu}$ полином степена 0, тј. $B_{\mathbf{e}_\nu,\nu} = a_\nu$, где је a_ν константа која може бити добијена из услова нормализације* (5.4). *Стога, $\int_E a_\nu\, w_\nu(x)\,\mathrm{d}x = 1$, тј.*

$$a_\nu = \frac{1}{\int_E w_\nu(x)\,\mathrm{d}x},$$

и

$$B_{\mathbf{e}_\nu}(x) = B_{\mathbf{e}_\nu,\nu}(x) w_\nu(x) = a_\nu w_\nu(x), \quad \nu = 1, 2, \ldots, p. \tag{5.11}$$

Такође, за $(1, 1, \ldots, 1) \not\preceq \mathbf{n}$, имамо да је $B_{\mathbf{n},\nu}(x) = 0$ ако је $n_\nu = 0$, и $B_{\mathbf{n},\nu}(x) = B_{\mathbf{e}_\nu,\nu}(x)$ ако је $n_\nu = 1$. Сада једноставно добијамо

$$B_{\boldsymbol{\sigma}_\nu}(x) = \sum_{j=1}^{\nu} B_{\mathbf{e}_{i_j},i_j}(x) w_{i_j}(x) = \sum_{j=1}^{\nu} a_{i_j} w_{i_j}(x), \quad \nu = 1, 2, \ldots, p, \tag{5.12}$$

где је $\boldsymbol{\sigma}_\nu$ дата са (5.9), *за пермутацију $(i_1, i_2, \ldots, i_p)$.*

Вишеструко ортогонални полиноми типа I такође задовољавају рекурентну релацију дату следећом теоремом.

Теорема 5.4. *Нека је $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ мулти–индекс. Изаберимо $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$ такво да је $n_k \neq 0$, и претпоставимо да су сви мулти–индекси $\mathbf{m} \preceq \mathbf{n} + (1, 1, \ldots, 1)$ нормални. Нека је $\boldsymbol{\sigma}_j$, $j = 1, 2, \ldots, p$, мулти–индекс дат са* (5.9). *Тада функције $\{\mathbf{B}_{\mathbf{m}}\}$ за полиноме типа I, дате са* (5.5), *задовољавају рекурентну релацију*

$$xB_{\mathbf{n}}(x) = B_{\mathbf{n}-\mathbf{e}_k}(x) + b_{\mathbf{n},0}(k) B_{\mathbf{n}}(x) + \sum_{j=1}^{p} b_j(\mathbf{n}) B_{\mathbf{n}+\boldsymbol{\sigma}_j}(x), \tag{5.13}$$

где је $B_{\mathbf{0}}(x) = 0$ и $B_{\boldsymbol{\sigma}_j}(x)$, $j = 1, 2, \ldots, p$, дато са (5.12). *Коефицијенти рекурентне релације су дати са*

$$\begin{aligned} b_{\mathbf{n},0}(k) &= \int_E x B_{\mathbf{n}}(x) P_{\mathbf{n}-\mathbf{e}_k}(x)\,\mathrm{d}x, \\ b_j(\mathbf{n}) &= \int_E x B_{\mathbf{n}}(x) P_{\mathbf{n}+\boldsymbol{\sigma}_{j-1}}(x)\,\mathrm{d}x, \quad j = 1, 2, \ldots, p, \end{aligned}$$

где је $P_{\mathbf{m}}$ одговарајући вишеструко ортогоналан полином типа II и $\boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbf{0}$.

Такође, интересантне су и рекурентне релације за вишеструко ортогоналне полиноме типа II који дају везу између полинома у односу на мулти–индекс $\mathbf{n}$, један мулти–индекс $\mathbf{n} + \mathbf{e}_k$ и свих суседних мулти–индекса облика $\mathbf{n} - \mathbf{e}_j$, $1 \leq j \leq p$.

Теорема 5.5. *Нека је* $\mathbf{n}$ *мулти–индекс. Изаберимо* $k \in \{1, , \dots, p\}$ *и претпоставимо да су сви мулти–индекси* $\mathbf{m} \preceq \mathbf{n} + \mathbf{e}_k$ *нормални. Тада вишеструко ортогонални полиноми типа II задовољавају следећу рекурентну релацију:*

$$xP_{\mathbf{n}}(x) = P_{\mathbf{n}+\mathbf{e}_k}(x) + a_{\mathbf{n},0}P_{\mathbf{n}}(x) + \sum_{j=1}^{p} a_{\mathbf{n},j}P_{\mathbf{n}-\mathbf{e}_j}(x),$$

са почетним условима $P_{\mathbf{0}}(x) = 1$ *и* $P_{-\mathbf{e}_j}(x) = 0$, $j = 1, 2, \dots, p$. *Коефицијенти рекурентне релације су дати са*

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{n},0} &= \int_E xP_{\mathbf{n}}(x)B_{\mathbf{n}+\mathbf{e}_k}(x)\,\mathrm{d}x, \\ a_{\mathbf{n},j} &= \frac{\displaystyle\int_E x^{n_j}P_{\mathbf{n}}(x)\,w_j(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_E x^{n_j-1}P_{\mathbf{n}-\mathbf{e}_j}(x)\,w_j(x)\,\mathrm{d}x}, \quad j = 1, 2, \dots, p, \end{aligned}$$

где је $B_{\mathbf{m}}$ *функција за полиноме типа I дата са* (5.5).

Сличне рекурентне релације за суседне мулти–индексе важе и за вишеструко ортогоналне полиноме типа I.

Теорема 5.6. *Нека је* $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ *мулти–индекс. Изаберимо* $k \in \{1, 2, \dots, p\}$ *такво да је* $n_k \neq 0$, *и претпоставимо да су сви мулти–индекси* $\mathbf{m} \preceq \mathbf{n}$ *и* $\mathbf{n} + \mathbf{e}_\nu$, $\nu = 1, 2, \dots, p$, *нормални. Тада функције* $\{B_{\mathbf{m}}\}$ *за полиноме типа I, дате са* (5.5), *задовољавају рекурентну релацију*

$$xB_{\mathbf{n}}(x) = B_{\mathbf{n}-\mathbf{e}_k}(x) + b_{\mathbf{n},0}(k)B_{\mathbf{n}}(x) + \sum_{j=1}^{p} b_j(\mathbf{n})B_{\mathbf{n}+\mathbf{e}_j}(x),$$

где је $B_{\mathbf{0}}(x) = 0$ *и* $B_{\mathbf{e}_j}(x)$, $j = 1, 2, \dots, p$, *дато са* (5.11). *Коефицијенти рекурентне релације су дати са*

$$\begin{aligned} b_{\mathbf{n},0}(k) &= \int_E xB_{\mathbf{n}}(x)P_{\mathbf{n}-\mathbf{e}_k}(x)\,\mathrm{d}x, \\ b_j(\mathbf{n}) &= \frac{k_{\mathbf{n},j}}{k_{\mathbf{n}+\mathbf{e}_j,j}}, \quad j = 1, 2, \dots, p, \end{aligned}$$

где је $P_{\mathbf{m}}$ *одговарајући вишеструко ортогоналан полином типа II и* $k_{\mathbf{m},j}$ *је водећи коефицијент полинома* $B_{\mathbf{m},j}$ (*степена* $m_j - 1$).

5.2 Вишеструко ортогонални тригонометријски полиноми полу–целобројног степена

У поглављу 2.1 смо навели најважније особине тригонометријских полинома полу–целобројног степена. Природно се намеће питање уопштења на вишеструко ортогоналне тригонометријске полиноме полу–целобројног степена. Дефиниција и основне особине таквих полинома су дате у раду [65].

Линеал над скупом $\{\cos(k+1/2)x, \sin(k+1/2)x : k = 0,1,2,\ldots,m\}$ ћемо, као и у глави 2, означити са $\mathcal{T}_m^{1/2}$, $m \in \mathbb{N}_0$, а са $\mathcal{T}_m$ линеарни простор тригонометријских полинома степена не вишег од m. Наравно, важи да је $\dim(\mathcal{T}_m) = 2m+1$ и $\dim(\mathcal{T}_m^{1/2}) = 2(m+1)$. Такође, нагласићемо да уместо ознаке $t_{m+1/2}$ (која је коришћена у поглављу 2.1) у овом поглављу тригонометријски полиноми полу–целобројног степена ће, због прегледности записа, бити означени са

$$t_m^{1/2}(x) = \sum_{\nu=0}^{m} \left(c_\nu \cos\left(\nu + \frac{1}{2}\right) x + d_\nu \sin\left(\nu + \frac{1}{2}\right) x \right),$$

где је $c_\nu, d_\nu \in \mathbb{R}$, $|c_m| + |d_m| \neq 0$, и могу се представити у облику

$$t_m^{1/2}(x) = A \prod_{k=0}^{2m} \sin \frac{x - x_k}{2} \qquad (A \text{ константа различита од } 0).$$

Нека је $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_p\}$ скуп p тежинских функција, ненегативних и интеграбилних на интервалу E дужине 2π. У овој глави увек ћемо подразумевати да је интервал E затворен са леве стране и отворен са десне стране, тј. да је облика $[L, L+2\pi)$, $L \in \mathbb{R}$.

Аналогно вишеструко ортогоналним алгебарским полиномима, описаним у поглављу 5.1, дефинишу се вишеструко ортогонални тригонометријски полиноми полу–целобројног степена.

Дефиниција 5.1. *Нека је* $\mathbf{n}$ *мулти–индекс. Вишеструко ортогонални тригонометријски полиноми полу–целобројног степена типа* I *у односу на* W *су представљени вектором* $(A_{\mathbf{n},1}^{1/2}, A_{\mathbf{n},2}^{1/2}, \ldots, A_{\mathbf{n},p}^{1/2})$ *тригонометријских полинома полу–целобројног степена, где је* $A_{\mathbf{n},\nu}^{1/2}$ *полу–целобројног степена* $n_\nu - 1/2$, $\nu = 1,2,\ldots,p$, *такав да су задовољени следећи услови ортогоналности:*

$$\text{(5.14)} \quad \sum_{\nu=1}^{p} \int_E A_{\mathbf{n},\nu}^{1/2} \cos\left(k + \frac{1}{2}\right) x \, w_\nu(x) \,\mathrm{d}x = 0, \qquad k = 0,1,2,\ldots,|\mathbf{n}| - 2,$$
$$\sum_{\nu=1}^{p} \int_E A_{\mathbf{n},\nu}^{1/2} \sin\left(k + \frac{1}{2}\right) x \, w_\nu(x) \,\mathrm{d}x = 0, \qquad k = 0,1,2,\ldots,|\mathbf{n}| - 2,$$

са нормализацијом:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\nu=1}^{p}\int_E A_{\mathbf{n},\nu}^{1/2}\cos\left(|\mathbf{n}|-\frac{1}{2}\right)x\,w_\nu(x)\,\mathrm{d}x=1,\\
&\sum_{\nu=1}^{p}\int_E A_{\mathbf{n},\nu}^{1/2}\sin\left(|\mathbf{n}|-\frac{1}{2}\right)x\,w_\nu(x)\,\mathrm{d}x=1.
\end{aligned}
\tag{5.15}
$$

Услови (5.14)–(5.15) дају систем од $2|\mathbf{n}|$ једначина за одређивање $2|\mathbf{n}|$ непознатих коефицијената тригонометријских полинома полу–целобројног степена $A_{\mathbf{n},\nu}^{1/2}$, $\nu=1,2,\ldots,p$. Мулти–индекс $\mathbf{n}$ је нормалан за тип I ако систем (5.14)–(5.15) има јединствено решење.

За вишеструко ортогоналне полиноме типа I уводимо и следећу функцију:

$$
A_{\mathbf{n}}(x)=\sum_{\nu=1}^{p}A_{\mathbf{n},\nu}^{1/2}w_\nu(x).
\tag{5.16}
$$

Тада, услови ортогоналности (5.14) и нормализација (5.15) постају

$$
\begin{aligned}
&\int_E A_{\mathbf{n}}(x)\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x\,\mathrm{d}x=0, \qquad k=0,1,2,\ldots,|\mathbf{n}|-2,\\
&\int_E A_{\mathbf{n}}(x)\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x\,\mathrm{d}x=0, \qquad k=0,1,2,\ldots,|\mathbf{n}|-2,
\end{aligned}
\tag{5.17}
$$

и

$$
\begin{aligned}
&\int_E A_{\mathbf{n}}(x)\cos\left(|\mathbf{n}|-\frac{1}{2}\right)x\,\mathrm{d}x=1,\\
&\int_E A_{\mathbf{n}}(x)\sin\left(|\mathbf{n}|-\frac{1}{2}\right)x\,\mathrm{d}x=1,
\end{aligned}
\tag{5.18}
$$

респективно.

Дефиниција 5.2. *Нека је* $\mathbf{n}$ *мулти–индекс. Тригонометријски полином полу–целобројног степена* $T_{\mathbf{n}}^{1/2}$ *је вишеструко ортогоналан полином полу–целобројног степена типа II у односу на* W *ако је полу–целобројног степена* $|\mathbf{n}|+1/2$ *и задовољава следеће услове ортогоналности:*

$$
\begin{aligned}
&\int_E T_{\mathbf{n}}^{1/2}(x)\cos\left(k_\nu+\frac{1}{2}\right)x\,w_\nu(x)\,\mathrm{d}x=0, \qquad k_\nu=0,1,\ldots,n_\nu-1,\\
&\int_E T_{\mathbf{n}}^{1/2}(x)\sin\left(k_\nu+\frac{1}{2}\right)x\,w_\nu(x)\,\mathrm{d}x=0, \qquad k_\nu=0,1,\ldots,n_\nu-1,
\end{aligned}
\tag{5.19}
$$

за $\nu=1,2,\ldots,p$.

Напомена 5.3. *Приметимо да, ако је неко* $n_\nu=0$, *тада немамо услове ортогоналности* (5.19) *у односу на одговарајућу тежину* w_ν.

За $p = 1$ добијамо обичне ортогоналне тригонометријске полиноме полу–целобројног степена, о којима смо детаљније писали у поглављу 2.1.

Услови ортогоналности (5.19) дају систем линеарних једначина за непознате коефицијенте тригонометријског полинома $T_{\mathbf{n}}^{1/2}$. Са обзиром на то да је

$$T_{\mathbf{n}}^{1/2}(x) = \sum_{k=0}^{|\mathbf{n}|} \left(a_k \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x + b_k \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x \right) \in \mathfrak{T}_{|\mathbf{n}|}^{1/2},$$

имамо $2|\mathbf{n}|+2$ непознатих коефицијената $a_k, b_k,\ k = 0,1,\ldots,|\mathbf{n}|$. Услови (5.19) дају $2(n_1+n_2+\cdots+n_p) = 2|\mathbf{n}|$ једначина за одређивање $2|\mathbf{n}|+2$ непознатих коефицијената тригонометријског полинома $T_{\mathbf{n}}^{1/2}$, па морамо фиксирати 2 коефицијента. Унапред ћемо фиксирати водеће коефицијенте $a_{|\mathbf{n}|}$ и $b_{|\mathbf{n}|}$ (наравно, $a_{|\mathbf{n}|}^2 + b_{|\mathbf{n}|}^2 \neq 0$). Специјално, за избор водећих коефицијената, $(a_{|\mathbf{n}|}, b_{|\mathbf{n}|}) \in \{(1,0),(0,1)\}$, уводимо следеће ознаке

(5.20)

$$T_{\mathbf{n}}^{C,1/2}(x) = \cos\left(|\mathbf{n}|+\frac{1}{2}\right)x + \sum_{k=0}^{|\mathbf{n}|-1} \left(c_k^{(\mathbf{n})} \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x + d_k^{(\mathbf{n})} \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x \right),$$

$$T_{\mathbf{n}}^{S,1/2}(x) = \sin\left(|\mathbf{n}|+\frac{1}{2}\right)x + \sum_{k=0}^{|\mathbf{n}|-1} \left(f_k^{(\mathbf{n})} \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x + g_k^{(\mathbf{n})} \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x \right).$$

Полиноме $T_{\mathbf{n}}^{C,1/2}(x)$ и $T_{\mathbf{n}}^{S,1/2}(x)$ називамо монични косинусни односно монични синусни вишеструко ортогонални тригонометријски полином полу–целобројног степена, респективно.

Ако систем једначина (5.19) има јединствено решење, тада је мулти–индекс $\mathbf{n}$ нормалан за тип II.

Лема 5.1. *Мулти–индекс* $\mathbf{n}$ *је нормалан за тип I ако и само ако је нормалан за тип II.*

Доказ. За $\nu = 1,\ldots,p$, уведимо следеће ознаке:

$$I_{i,j}^{C,\nu} = \int_E \cos\left(i+\frac{1}{2}\right)x \cos\left(j+\frac{1}{2}\right)x\, w_\nu(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$I_{i,j}^{S,\nu} = \int_E \sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x \sin\left(j+\frac{1}{2}\right)x\, w_\nu(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$I_{i,j}^{\nu} = \int_E \cos\left(i+\frac{1}{2}\right)x \sin\left(j+\frac{1}{2}\right)x\, w_\nu(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$m_{i,j}^{(\nu)} = \begin{bmatrix} I_{i,j}^{C,\nu} & I_{i,j}^{\nu} \\ I_{j,i}^{\nu} & I_{i,j}^{S,\nu} \end{bmatrix},$$

за $i, j = 0, 1, \ldots$, и

$$M_\nu = \begin{bmatrix} m_{0,0}^{(\nu)} & m_{0,1}^{(\nu)} & \cdots & m_{0,|\mathbf{n}|-1}^{(\nu)} \\ m_{1,0}^{(\nu)} & m_{1,1}^{(\nu)} & \cdots & m_{1,|\mathbf{n}|-1}^{(\nu)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n_\nu-1,0}^{(\nu)} & m_{n_\nu-1,1}^{(\nu)} & \cdots & m_{n_\nu-1,|\mathbf{n}|-1}^{(\nu)} \end{bmatrix}.$$

Тада је матрица система (5.14)–(5.15) дата са

$$M^I = \begin{bmatrix} M_1^T & M_2^T & \cdots & M_p^T \end{bmatrix}_{2|\mathbf{n}|\times 2|\mathbf{n}|},$$

а матрица система (5.19) (водећи коефицијенти тригонометријског полинома $T_{\mathbf{n}}^{1/2}$ су фиксирани) је

$$M^{II} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_p \end{bmatrix}_{2|\mathbf{n}|\times 2|\mathbf{n}|}.$$

Очигледно је матрица M^{II} транспонована матрици M^I, што значи да су детерминанте система (5.19) и (5.14)–(5.15) једнаке, тј. систем (5.14)–(5.15) има јединствено решење ако и само ако систем (5.19) има јединствено решење. $\square$

На основу леме 5.1, можемо говорити само о нормалним мулти–индексима. Ако су сви мулти–индекси нормални, тада тежине чине *савршени систем функција*.

Пошто матрица коефицијената система (5.19) може бити сингуларна, потребни су додатни услови за p тежинских функција да би обезбедили јединственост вишеструко ортогоналних тригонометријских полинома полу–целобројног степена. Лако је приметити да је јединственост обезбеђена условом да је скуп функција

$$\{w_\nu(x)\cos(k_\nu+1/2)x, w_\nu(x)\sin(k_\nu+1/2)x : k_\nu = 0, 1, \ldots, n_\nu-1, \nu = 1, 2, \ldots, p\},$$

Чебишевљев систем на E за мулти–индекс $\mathbf{n}$. Такав скуп $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_p\}$ зваћемо *тригонометријски АТ систем* (*ТАТ систем*) тежинских функција за мулти–индекс $\mathbf{n}$.

Особине нула вишеструко ортогоналних тригонометријских полинома полу–целобројног степена типа I и II су дате у следеће две теореме.

Теорема 5.7. *Нека је* $\mathbf{n}$ *мулти–индекс такав да је* $W = \{w_1, w_2, \dots, w_p\}$ *TAT систем тежинских функција за сваки мулти–индекс* $\mathbf{m}$ *за који важи* $\mathbf{m} \preceq \mathbf{n}$. *За вишеструко ортогоналне тригонометријске полиноме полу–целобројног степена типа I у односу на* W *функција* $A_{\mathbf{n}}(x)$, *дата са* (5.16), *има тачно* $2|\mathbf{n}|-1$ *простих нула на* E.

Доказ. Једноставно је уочити да функција $A_{\mathbf{n}}(x)$ за полиноме типа I има бар једну промену знака на E, јер ако претпоставимо супротно, за $|\mathbf{n}| \geq 1$ ортогоналност

$$\int_E A_{\mathbf{n}}(x) \sin\frac{x-L}{2}\,\mathrm{d}x = 0$$

не би била могућа јер $\sin(x-L)/2$ не мења знак на $[L, 2\pi+L)$.

Функција $A_{\mathbf{n}}(x)$ има највише $2|\mathbf{n}|-1$ нула на E пошто је у питању TAT систем. Број промена знака на E је непаран (видети напомену 2.1). Претпоставимо да има $2m-1$, $m < |\mathbf{n}|$, промена знака у тачкама $x_1, x_2, \dots, x_{2m-1} \in E$, и означимо

$$Q(x) = \prod_{i=1}^{2m-1} \sin\frac{x-x_i}{2}.$$

Тада, $A_{\mathbf{n}}(x)Q(x)$ не мења знак на E и

$$\int_E A_{\mathbf{n}}(x)Q(x)\,\mathrm{d}x \neq 0,$$

што је у контрадикцији са условима ортогоналности (5.14). Зато је $m = |\mathbf{n}|$, што значи да $A_{\mathbf{n}}(x)$ има тачно $2|\mathbf{n}|-1$ простих нула на E. □

Теорема 5.8. *Претпоставимо да је* $\mathbf{n}$ *мулти–индекс такав да је скуп тежинских функција* $W = \{w_1, w_2, \dots, w_p\}$ *TAT систем за све мулти–индексе* $\mathbf{m}$ *за које важи* $\mathbf{m} \preceq \mathbf{n}$. *Вишеструко ортогоналан тригонометријски полином полу–целобројног степена типа II* $T_{\mathbf{n}}^{1/2}(x)$ *у односу на* W *има тачно* $2|\mathbf{n}|+1$ *простих нула на* E.

Доказ. Слично као у доказу теореме 5.7 закључујемо да $T_{\mathbf{n}}^{1/2}(x)$ има непаран број промена знака на E за $|\mathbf{n}| \geq 1$.

Претпоставимо да полином $T_{\mathbf{n}}^{1/2}(x)$ има $2m+1$ промена знака на E у тачкама $x_0, x_1, \dots, x_{2m}$ и да је $m < |\mathbf{n}|$. Нека је $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_p)$ мулти–индекс такав да је $m = |\mathbf{m}|$, $\mathbf{m} \preceq \mathbf{n}$, и $m_j < n_j$ за бар једно j. Конструишимо сада функцију

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{p} Q_{m_i}^{1/2}(x) w_i(x),$$

где је сваки $Q_{m_i}^{1/2}$ тригонометријски полином полу–целобројног степена $m_i - 1/2$, за $i \neq j$, а $Q_{m_j}^{1/2}$ је тригонометријски полином полу–целобројног степена $m_j + 1/2$, тако да она задовољава интерполационе услове

$$Q(x_k) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, 2m,$$

и $Q(x_{2m+1}) = 1$, за неку додатну тачку $x_{2m+1} \in E$. Пошто радимо са Чебишевљевим системом од $2m+2$ функције, интерполациони проблем има јединствено решење, а како функција Q већ има $2m+1$ нула она не може имати додатних промена знака. Наравно, функција Q није идентички једнака нули, јер је $Q(x_{2m+1}) \neq 0$. Очигледно $T_{\mathbf{n}}^{1/2}(x)Q(x)$ не мења знак на E, па је

$$\int_E T_{\mathbf{n}}^{1/2}(x)Q(x)\,\mathrm{d}x \neq 0,$$

што је у контрадикцији са условима ортогоналности (5.19). Према томе, $T_{\mathbf{n}}^{1/2}(x)$ има тачно $2|\mathbf{n}|+1$простих нула на E. □

Доказаћемо сада следећу биортогоналност између вишеструко ортогоналних тригонометријских полинома полу–целобројног степена типа II $T_{\mathbf{n}}^{1/2}(x)$ и функције $A_{\mathbf{m}}(x)$ за полиноме типа I, дате са (5.16).

Теорема 5.9. *Претпоставимо да су* $\mathbf{n}$ *и* $\mathbf{m}$ *два мулти–индекса таква да је скуп* $W = \{w_1, w_2, \dots, w_p\}$ *ТАТ систем тежинских функција у односу на оба мулти–индекса* $\mathbf{n}$ *и* $\mathbf{m}$. *Тада важи следећа биортогоналност:*

$$\int_E T_{\mathbf{n}}^{1/2}(x)A_{\mathbf{m}}(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & \text{ако је } \mathbf{m} \preceq \mathbf{n}, \\ 0, & \text{ако је } |\mathbf{n}| \leq |\mathbf{m}|-2, \\ a_{|\mathbf{n}|} + b_{|\mathbf{n}|}, & \text{ако је } |\mathbf{n}| = |\mathbf{m}|-1, \end{cases} \tag{5.21}$$

где је $T_{\mathbf{n}}^{1/2}(x)$ *одговарајући вишеструко ортогоналан тригонометријски полином полу–целобројног степена типа II са водећим коефицијентима* $a_{|\mathbf{n}|}$ *и* $b_{|\mathbf{n}|}$, *и* $A_{\mathbf{m}}(x)$ *одговарајућа функција за полиноме типа I, дата са* (5.16).

Доказ. Пошто је $A_{\mathbf{m}}(x)$ дата са (5.16) следи да је

$$\begin{aligned}\int_E T_{\mathbf{n}}^{1/2}(x)A_{\mathbf{m}}(x)\,\mathrm{d}x &= \int_E T_{\mathbf{n}}^{1/2}(x)\left(\sum_{\nu=1}^{p} A_{\mathbf{m},\nu}^{1/2} w_\nu(x)\right)\mathrm{d}x \\ &= \sum_{\nu=1}^{p}\int_E T_{\mathbf{n}}^{1/2}(x)A_{\mathbf{m},\nu}^{1/2}\, w_\nu(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Претпоставимо прво да је $\mathbf{m} \preceq \mathbf{n}$. На основу (5.1) и услова ортогоналности (5.19) за $T_{\mathbf{n}}^{1/2}(x)$, закључујемо да су сви интеграли на десној страни претходне једнакости једнаки нули, тј.

$$\int_E T_{\mathbf{n}}^{1/2}(x)A_{\mathbf{m}}(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Како су $a_{|\mathbf{n}|}$ и $b_{|\mathbf{n}|}$ водећи коефицијенти тригонометријског полинома $T_{\mathbf{n}}^{1/2}$, добијамо

$$
\begin{aligned}
(5.22) \qquad \int_E T_{\mathbf{n}}^{1/2}(x) A_{\mathbf{m}}(x)\,\mathrm{d}x = & a_{|\mathbf{n}|} \int_E A_{\mathbf{m}}(x)\, \cos\left(|\mathbf{n}| + \frac{1}{2}\right) x\,\mathrm{d}x \\
& + b_{|\mathbf{n}|} \int_E A_{\mathbf{m}}(x)\, \sin\left(|\mathbf{n}| + \frac{1}{2}\right) x\,\mathrm{d}x \\
& + \sum_{k=0}^{|\mathbf{n}|-1} a_k \int_E A_{\mathbf{m}}(x)\, \cos\left(k + \frac{1}{2}\right) x\,\mathrm{d}x \\
& + \sum_{k=0}^{|\mathbf{n}|-1} b_k \int_E A_{\mathbf{m}}(x)\, \sin\left(k + \frac{1}{2}\right) x\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Ако је $|\mathbf{n}| \le |\mathbf{m}| - 2$, коришћењем услова ортогоналности (5.17) за $A_{\mathbf{m}}(x)$, добијамо да су сви интеграли на десној страни претходне једнакости једнаки нули и зато је

$$\int_E T_{\mathbf{n}}^{1/2}(x) A_{\mathbf{m}}(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Да би комплетирали доказ посматрајмо случај $|\mathbf{n}| = |\mathbf{m}| - 1$. На основу услова (5.18) и (5.17), из (5.22) добијамо дато тврђење. □

5.3 ТАТ систем парних тежинских функција

Нека је у овом поглављу интервал $E = [-\pi, \pi)$ и нека су тежинске функције $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_p\}$ парне на интервалу $(-\pi, \pi)$. Као и у претходном поглављу нека је $\mathbf{n}$ мулти–индекс и $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_p\}$ ТАТ систем у односу на $\mathbf{n}$ на интевалу $[-\pi, \pi)$.

Теорема 5.10. *Нека је $\mathbf{n}$ мулти–индекс и нека је $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_p\}$ ТАТ систем у односу на $\mathbf{n}$ на интервалу $[-\pi, \pi)$. Ако су све тежинске функције скупа W парне на интервалу $(-\pi, \pi)$, тада је у* (5.20) *$d_k^{(\mathbf{n})} = 0$ и $f_k^{(\mathbf{n})} = 0$, $k = 0, 1, \ldots, |\mathbf{n}| - 1$, тј. монични тригонометријски полиноми полу–целобројног степена се своде на*

$$(5.23) \qquad T_{\mathbf{n}}^{C,1/2}(x) = \cos\left(|\mathbf{n}| + \frac{1}{2}\right) x + \sum_{k=0}^{|\mathbf{n}|-1} c_k^{(\mathbf{n})} \cos\left(k + \frac{1}{2}\right) x$$

и

$$(5.24) \qquad T_{\mathbf{n}}^{S,1/2}(x) = \sin\left(|\mathbf{n}| + \frac{1}{2}\right) x + \sum_{k=0}^{|\mathbf{n}|-1} g_k^{(\mathbf{n})} \sin\left(k + \frac{1}{2}\right) x.$$

Доказ. Полазећи од базе простора $\mathcal{T}_{|\mathbf{n}|}^{1/2}$, тј. од

$$\left\{\cos\left(0+\frac{1}{2}\right)x, \sin\left(0+\frac{1}{2}\right)x, \ldots, \cos\left(|\mathbf{n}|+\frac{1}{2}\right)x, \sin\left(|\mathbf{n}|+\frac{1}{2}\right)x, \right\}$$

применом Грам–Шмитовог поступка ортогонализације, у односу на скаларни производ

$$(f,g)_\nu = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\, w_\nu(x)\, \mathrm{d}x, \quad \nu = 1,2,\ldots,p,$$

добијамо систем ортогоналних функција $\varphi_k^{(\nu)}$ и $\psi_k^{(\nu)}$, $k = 0,1,\ldots,|\mathbf{n}|$, при чему функције $\varphi_k^{(\nu)}$ зависе само од косинусних функција, а $\psi_k^{(\nu)}$ зависе једино од синусних функција, јер за $i,j \in \mathbb{N}_0$ имамо

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(i+\frac{1}{2}\right)x \sin\left(j+\frac{1}{2}\right)x\, w_\nu(x)\, \mathrm{d}x = 0, \quad \nu = 1,2,\ldots,p.$$

За свако $\nu = 1,2,\ldots,p$ добијени систем функција, пошто је јединствен, мора бити једнак моничним вишеструко ортогоналним тригонометријским полиномима типа II полу–целобројног степена $T_{\mathbf{n}}^{C,1/2}$ и $T_{\mathbf{n}}^{S,1/2}$, тј. следи да $T_{\mathbf{n}}^{C,1/2}$ зависи само од косинусних функција, а $T_{\mathbf{n}}^{S,1/2}$ зависи само од синусних функција, односно своде се на (5.23) и (5.24), респективно. $\square$

Из формула (5.23) и (5.24) непосредно добијамо следећи резултат.

Последица 5.1. *Нека је* $\mathbf{n}$ *мулти–индекс и нека је* $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_p\}$ *ТАТ систем у односу на* $\mathbf{n}$ *на интервалу* $[-\pi,\pi)$. *Ако су све тежинске функције скупа* W *парне на интервалу* $(-\pi,\pi)$, *тада важи:*

$$T_{\mathbf{n}}^{C,1/2}(-\pi) = 0, \quad T_{\mathbf{n}}^{S,1/2}(0) = 0.$$

Теорема 5.11. *Нека је* $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_p)$ *мулти–индекс такав да је скуп тежинских функција* $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_p\}$ *ТАТ систем у односу на* $\mathbf{n}$ *на интервалу* $[-\pi,\pi)$. *Ако су све тежиснске функције система* W *парне функције на интервалу* $(-\pi,\pi)$, *тада важи:*

$$\int_{-1}^{1} C_{\mathbf{n}}(x)C_{k_\nu}(x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} w_\nu(\arccos x) = 0, \quad k_\nu = 0,1,\ldots,n_\nu - 1,$$

и

$$\int_{-1}^{1} S_{\mathbf{n}}(x)S_{k_\nu}(x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} w_\nu(\arccos x) = 0, \quad k_\nu = 0,1,\ldots,n_\nu - 1,$$

за $\nu = 1,2,\ldots,p$, *где су* $C_{k_\nu}, S_{k_\nu} \in \mathcal{P}_{k_\nu}$, $C_{\mathbf{n}}, S_{\mathbf{n}} \in \mathcal{P}_{|\mathbf{n}|}$, *алгебарски полиноми облика*

$$C_{\mathbf{n}}(x) = \sum_{k=0}^{|\mathbf{n}|} c_k^{(\mathbf{n})}\left(T_k(x) - (1-x)U_{k-1}(x)\right)$$

и

$$S_{\mathbf{n}}(x) = \sum_{k=0}^{|\mathbf{n}|} g_k^{(\mathbf{n})}(T_k(x) + (1+x)U_{k-1}(x)),$$

T_k и U_k, $k \in \mathbb{N}_0$, су Чебишевљеви полиноми прве и друге врсте, респективно.

Доказ. Пошто су све тежине $w_\nu(x)$, $\nu = 1, 2, \ldots, p$, парне на интервалу $(-\pi, \pi)$, из услова ортогоналности полинома $T_{\mathbf{n}}^{C,1/2}$, закључујемо да је

$$\int_0^\pi T_{\mathbf{n}}^{C,1/2}(x) T_{k_\nu}^{C,1/2}(x)\, w_\nu(x)\, \mathrm{d}x = 0, \quad k_\nu = 0, 1, \ldots, n_\nu - 1, \quad \nu = 1, 2, \ldots, p.$$

Увођењем смене $x := \arccos x$, добијамо

$$\int_{-1}^1 T_{\mathbf{n}}^{C,1/2}(\arccos x) T_{k_\nu}^{C,1/2}(\arccos x)\, \frac{w_\nu(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}\, \mathrm{d}x = 0. \tag{5.25}$$

Једноставним трансформацијама добијамо

$$\cos\left(\left(k + \frac{1}{2}\right) \arccos x\right) = \sqrt{\frac{1+x}{2}} T_k(x) - \sqrt{\frac{1-x}{2}} \sqrt{1-x^2} U_{k-1}(x),$$

где су $T_k(x)$ и $U_{k-1}(x)$, Чебишевљеви полиноми прве и друге врсте, респективно, па онда следи да је

$$T_{\mathbf{n}}^{C,1/2}(\arccos x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}} \sum_{k=0}^{|\mathbf{n}|} (T_k(x) - (1-x)U_{k-1}(x)).$$

Заменом у (5.25) и применом елементарних трансформација добијамо прво тврђење. Друго тврђење се може добити на сличан начин коришћењем услова ортогоналности полинома $T_{\mathbf{n}}^{S,1/2}$ и

$$\sin\left(\left(k + \frac{1}{2}\right) \arccos x\right) = \sqrt{\frac{1-x}{2}} T_k(x) + \sqrt{\frac{1+x}{2}} \sqrt{1-x^2} U_{k-1}(x).$$

□

Из доказа теореме 5.11 закључујемо да је

$$T_{\mathbf{n}}^{C,1/2}(\arccos x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}} C_{\mathbf{n}}(x), \tag{5.26}$$

где је $C_{\mathbf{n}}$ алгебарски вишеструко ортогоналан полином типа II у односу на мулти–индекс $\mathbf{n}$ и скуп тежинских функција

$$\left\{ \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} w_1(\arccos x), \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} w_2(\arccos x), \ldots, \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} w_p(\arccos x) \right\} \tag{5.27}$$

на интервалу $[-1, 1)$.

То значи да можемо рачунати нуле алгебарског вишеструко ортогоналног полинома (као што је описано у одељку 5.1.1), а онда одредити нуле тригонометријског полинома полу–целобројног степена $T_{\mathbf{n}}^{C,1/2}$. Везу између нула ових полинома даје следећа лема.

Лема 5.2. *Нека је* $\mathbf{n}$ *мулти–индекс и нека је* $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_p\}$ *ТАТ систем у односу на* $\mathbf{n}$ *на интервалу* $[-\pi, \pi)$ *и нека су све тежинске функције система* W *парне на интервалу* $(-\pi, \pi)$. *Ако су* τ_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, n$ *нуле алгебарског вишеструко ортогоналног полинома у односу на мулти–индекс* $\mathbf{n}$ *и скуп тежинских функција* (5.27) *на интервалу* $(-1, 1)$, *тада за нуле тригонометријског полинома полу–целобројног степена вишеструко ортогоналног у односу на* $(W, \mathbf{n})$, *на интервалу* $[-\pi, \pi)$ *важи:*

$$x_0 = -\pi, \quad x_{2n-\nu+1} = -x_\nu = \arccos \tau_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Доказ. На основу последице 5.1 закључујемо да је $x_0 = -\pi$. Даље, из (5.26), добијамо:

$$x_{2n-\nu+1} = -x_\nu = \arccos \tau_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

где су τ_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, нуле алгебарског вишеструко ортогоналног полинома у односу на мулти–индекс $\mathbf{n}$ и скуп тежинских функција (5.27) на интервалу $(-1, 1)$. $\square$

Аналогно се доказује и следећа лема.

Лема 5.3. *Нека је* $\mathbf{n}$ *мулти–индекс и нека је* $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_p\}$ *ТАТ систем у односу на* $\mathbf{n}$ *на интервалу* $[-\pi, \pi)$ *и нека су све тежинске функције система* W *парне на интервалу* $(-\pi, \pi)$. *Ако су* τ_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, n$ *нуле алгебарског вишеструко ортогоналног полинома у односу на мулти–индекс* $\mathbf{n}$ *и скуп тежинских функција*

$$\left\{ \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} w_1(\arccos x), \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} w_2(\arccos x), \ldots, \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} w_p(\arccos x) \right\}$$

на интервалу $(-1, 1)$, *тада за нуле тригонометријског полинома полу–целобројног степена вишеструко ортогоналног у односу на* $(W, \mathbf{n})$, *на интервалу* $[-\pi, \pi)$ *важи:*

$$x_n = 0, \quad x_{2n-\nu} = -x_\nu = \arccos \tau_{\nu+1}, \quad \nu = 0, 1, \ldots, n-1.$$

5.3.1 Рекурентне релације за скоро дијагоналне мулти–индексе

Пошто вишетруко ортогонални алгебарски полиноми задовољавају рекурентне релације реда $p + 1$, природно се дошло до испитивања рекуретних релација за вишеструко ортогоналне тригонометријске полиноме полу–целобројног степена типа II, и добијене су сличне рекурентне релације у случају када су све тежинске функције парне.

Нека је n природан број који се може написати у облику $n = \ell p + j$, за $\ell = [n/p]$ и $j \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ и $\mathbf{d}(n)$ скоро дијагоналан мулти–индекс који одговара природном броју n.

Означићемо одговарајуће моничне вишеструко ортогоналне тригонометријске полиноме полу–целобројног степена типа II, у односу на парне тежинске функције $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_p\}$, са

$$T_n^{C,1/2} = T_{\mathbf{d}(n)}^{C,1/2}, \quad T_n^{S,1/2} = T_{\mathbf{d}(n)}^{S,1/2},$$

Теорема 5.12. *Нека је $m \in \mathbb{N}$ и нека је скуп парних тежинских функција $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_p\}$ ТАТ систем на интервалу $(-\pi, \pi)$ у односу на сваки скоро дијагонални мулти–индекс $\mathbf{d}(k) \preceq \mathbf{d}(m+1)$, $k \in \mathbb{N}$. Вишеструко ортогонални тригонометријски полиноми полу–целобројног степена типа II са скоро дијагоналним–мулти индексима $T_m^{C,1/2}$ и $T_m^{S,1/2}$, $m \geq 0$, задовољавају следеће рекурентне релације:*

$$2\cos x T_m^{C,1/2}(x) = T_{m+1}^{C,1/2}(x) + \sum_{k=0}^{p} \alpha_{m,p-k} T_{m-k}^{C,1/2}(x), \tag{5.28}$$

$$2\cos x T_m^{S,1/2}(x) = T_{m+1}^{S,1/2}(x) + \sum_{k=0}^{p} \beta_{m,p-k} T_{m-k}^{S,1/2}(x), \tag{5.29}$$

са почетним условима $T_0^{C,1/2}(x) = \cos(x/2)$ и $T_i^{C,1/2}(x) = 0$, $i = -1, -2, \ldots, -p$, односно, $T_0^{S,1/2}(x) = \sin(x/2)$ и $T_i^{S,1/2}(x) = 0$, $i = -1, -2, \ldots, -p$, за релације (5.28) *и* (5.29)*, респективно.*

Доказ. Пошто је у случају парних тежинских функција $T_i^{C,1/2}$, $k = 0, 1, \ldots, m$, дато са (5.23), израз $2\cos x T_m^{C,1/2}(x)$ може бити представљен у облику

$$2\cos x T_m^{C,1/2}(x) = T_{m+1}^{C,1/2}(x) + \sum_{k=0}^{m} \alpha_{m,k} T_k^{C,1/2}(x). \tag{5.30}$$

Претпоставимо да је $m = \ell p + j$. Приметимо да је за $m \leq p$ једнакост (5.30) истог облика као једнакост (5.28) са датим почетним условима. Посматрајмо сада случај $m > p$. Треба показати да је $\alpha_{m,rp+i} = 0$ за $r = 0, 1, \ldots, \ell - 2$ и $i = 0, 1, \ldots, p-1$, и када је $r = \ell - 1$ такође за $i = 0, 1, \ldots, j-1$, тако да се десна страна једнакости (5.30) своди на

$$T_{m+1}^{C,1/2}(x) + \sum_{k=m-p}^{m} \alpha_{m,k} T_k^{C,1/2}(x),$$

која је истог облика као десна страна (5.28).

Доказаћемо претходно тврђење индукцијом по r.

Нека је $r = 0$. Помножимо обе стране једнакости (5.30) са $T_0^{C,1/2}(x)w_1(x)$ и интегралимо на $[-\pi, \pi)$. Због услова ортогоналности (5.19) (специјално за $\nu = 1$ прва координата мулти–индекса $\mathbf{d}(m)$ је $\ell + 1$, $\ell > 1$) десна страна се редукује на

$$\alpha_{m,0} \int_{-\pi}^{\pi} T_0^{C,1/2}(x) T_0^{C,1/2}(x)\, w_1(x)\, \mathrm{d}x,$$

а лева је облика

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos x T_0^{C,1/2}(x) T_m^{C,1/2}(x)\, w_1(x)\, \mathrm{d}x$$

и једнака је нули кад год је $m > p$, па је $\alpha_{m,0} = 0$. Да бисмо доказали да је $\alpha_{m,1} = 0$ помножимо једнакост (5.30) са $T_0^{C,1/2}(x)w_2(x)$ и интегралимо на $[-\pi, \pi)$. Уопштено, за произвољно $i = 0, 1, \ldots, p-1$, помножимо једнакост (5.30) са $T_0^{C,1/2}(x)w_{i+1}(x)$ и интегралимо на интервалу $[-\pi, \pi)$. Из услова ортогоналности (5.19) следи да је $\alpha_{m,i} = 0$, $i = 0, 1, \ldots, p-1$.

Претпоставимо сада да за $n \leq r-1$ и $i = 0, 1, \ldots, p-1$ $(r \leq \ell - 2)$ важи $\alpha_{m,np+i} = 0$. Покажимо да је тада $a_{m,rp+i} = 0$ за $i = 0, 1, \ldots, p-1$. Помножимо обе стране једнакости (5.30) са $T_r^{C,1/2}(x)w_1(x)$ и интегралимо на интервалу $[-\pi, \pi)$. Због услова ортогоналности (5.19) (специјално за $\nu = 1$ прва координата мулти–индекса $\mathbf{d}(m)$ је $\ell + 1$, $\ell \geq r + 2$) лева страна, тј.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos x T_r^{C,1/2}(x) T_m^{C,1/2}(x)\, w_1(x)\, \mathrm{d}x,$$

је једнака 0, а десна страна се редукује на

$$\alpha_{m,rp} \int_{-\pi}^{\pi} T_r^{C,1/2}(x) T_{rp}^{C,1/2}(x)\, w_1(x)\, \mathrm{d}x.$$

Претходни интеграл је различит од 0, јер би у супротном имали један услов ортогоналности више што би имлицирало $T_{rp}^{C,1/2}(x) \equiv 0$. Према томе, $\alpha_{m,rp} = 0$. Слично, ако једнакост (5.30) помножимо са $T_r^{C,1/2}(x)w_{i+1}(x)$ и интегралимо на $[-\pi, \pi)$, из услова ортогоналности (5.19) добијамо да је $\alpha_{m,rp+i} = 0$, $i = 1, 2, \ldots, p-1$.

Нека је на крају $r = \ell - 1$. Ако помножимо (5.30) са $T_{\ell-1}^{C,1/2}(x)w_{i+1}(x)$ и интегралимо на $[-\pi, \pi)$ лева страна ће бити једнака нули за $i = 0, 1, \ldots, j-1$ (првих j координата мулти–индекса $\mathbf{d}(m)$ су $\ell+1$, $\ell = r+1$), док ће десна страна бити пропорционална са $\alpha_{m,(\ell-1)p+i}$. Дакле $\alpha_{m,(\ell-1)p+i} = 0$ за $i = 0, 1, \ldots, j-1$, што је и требало доказати.

Аналогно се добија рекурентна релација (5.29) за $T_m^{S,1/2}(x)$. $\square$

На основу претходне теореме, вишеструко ортогонални тригонометријски полиноми полу–целобројног степена типа II $T_m^{C,1/2}$ и $T_m^{C,1/2}$ се могу конструисати ако су познати коефицијенти рекурентних релација.

Размотрићемо најпре детаљно најједноставнији случај $p = 2$ за тригонометријске полиноме $T_m^{C,1/2}$ (потпуно аналогно се добијају одговарајући коефицијенти рекурентне релације за тригонометријске полиноме $T_m^{S,1/2}$). У овом случају имамо мулти–индексе $\mathbf{d}(m) = (m_1, m_2)$, где је $m_1 = [(m+1)/2]$ и $m_2 = [m/2]$, $m_1 + m_2 = m$. Рекурентне релације (5.28) су тада облика

(5.31)

$$\begin{aligned}
T_1^{C,1/2}(x) &= 2\cos x T_0^{C,1/2}(x) - \alpha_{02} T_0^{C,1/2}(x),\\
T_2^{C,1/2}(x) &= 2\cos x T_1^{C,1/2}(x) - \alpha_{11} T_0^{C,1/2}(x) - \alpha_{12} T_1^{C,1/2}(x),\\
T_3^{C,1/2}(x) &= 2\cos x T_2^{C,1/2}(x) - \alpha_{20} T_0^{C,1/2}(x) - \alpha_{21} T_1^{C,1/2}(x) - \alpha_{22} T_2^{C,1/2}(x),\\
T_4^{C,1/2}(x) &= 2\cos x T_3^{C,1/2}(x) - \alpha_{30} T_1^{C,1/2}(x) - \alpha_{31} T_2^{C,1/2}(x) - \alpha_{32} T_3^{C,1/2}(x),\\
&\ \ \vdots
\end{aligned}$$

тј.

$$T_{m+1}^{C,1/2}(x) = (2\cos x - \alpha_{m,2}) T_m^{C,1/2} - \alpha_{m,1} T_{m-1}^{C,1/2}(x) - \alpha_{m,0} T_{m-2}^{C,1/2}(x), \tag{5.32}$$

за $m \geq 1$ и почетним условима $T_0^{C,1/2}(x) = \cos(x/2)$, $T_{-1}^{C,1/2}(x) = T_{-2}^{C,1/2}(x) = 0$.

Да бисмо одредили коефицијенте рекурентне релације (5.31), односно (5.32), увешћемо следеће скаларне производе:

$$\langle f, g \rangle_\nu = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x)\, w_\nu(x)\, \mathrm{d}x, \quad \nu = 1, 2, \quad f, g \in \mathcal{T}^{1/2},$$

и користићемо услове ортогоналности

$$\left\langle T_m^{C,1/2}, T_i^{C,1/2} \right\rangle_1 = 0 \text{ за } i \leq \left[\frac{m-1}{2}\right], \quad \left\langle T_m^{C,1/2}, T_i^{C,1/2} \right\rangle_2 = 0 \text{ за } i \leq \left[\frac{m-2}{2}\right].$$

Како је $\left\langle T_1^{C,1/2}, T_0^{C,1/2} \right\rangle_1 = 0$, из прве једнакости у (5.31) добијамо

$$\alpha_{02} = \frac{\left\langle 2\cos x T_0^{C,1/2}, T_0^{C,1/2} \right\rangle_1}{\left\langle T_0^{C,1/2}, T_0^{C,1/2} \right\rangle_1}. \tag{5.33}$$

У следећем кораку користимо другу једнакост у (5.31), као и чињеницу да је

$\left\langle T_2^{C,1/2}, T_0^{C,1/2} \right\rangle_1 = 0$ и $\left\langle T_2^{C,1/2}, T_0^{C,1/2} \right\rangle_2 = 0$. Тако да добијамо

$$\alpha_{11} = \frac{\left\langle 2\cos x T_1^{C,1/2}, T_0^{C,1/2} \right\rangle_1}{\left\langle T_0^{C,1/2}, T_0^{C,1/2} \right\rangle_1} \qquad \left(\text{због } \left\langle T_1^{C,1/2}, T_0^{C,1/2} \right\rangle_1 = 0\right) \tag{5.34}$$

$$\alpha_{12} = \frac{\left\langle 2\cos x T_1^{C,1/2} - \alpha_{11} T_0^{C,1/2}, T_0^{C,1/2} \right\rangle_2}{\left\langle T_1^{C,1/2}, T_0^{C,1/2} \right\rangle_2}. \tag{5.35}$$

Слично, трећа једнакост у (5.31) и услови ортогоналности

$$\left\langle T_3^{C,1/2}, T_0^{C,1/2} \right\rangle_1 = 0, \quad \left\langle T_3^{C,1/2}, T_0^{C,1/2} \right\rangle_2 = 0, \quad \left\langle T_3^{C,1/2}, T_1^{C,1/2} \right\rangle_1 = 0$$

дају

$$\alpha_{20} = \frac{\left\langle 2\cos x T_2^{C,1/2}, T_0^{C,1/2} \right\rangle_1}{\left\langle T_0^{C,1/2}, T_0^{C,1/2} \right\rangle_1} \tag{5.36}$$

$$\alpha_{21} = \frac{\left\langle 2\cos x T_2^{C,1/2} - \alpha_{20} T_0^{C,1/2}, T_0^{C,1/2} \right\rangle_2}{\left\langle T_1^{C,1/2}, T_0^{C,1/2} \right\rangle_2} \tag{5.37}$$

$$\alpha_{22} = \frac{\left\langle 2\cos x T_2^{C,1/2} - \alpha_{20} T_0^{C,1/2} - \alpha_{21} T_1^{C,1/2}, T_1^{C,1/2} \right\rangle_1}{\left\langle T_2^{C,1/2}, T_1^{C,1/2} \right\rangle_1} \tag{5.38}$$

Настављајући ову процедуру даље можемо доказати следећи резултат.

Теорема 5.13. *Нека је $m = 2\ell + \nu$, где је $\ell = [m/2]$ и $\nu \in \{0,1\}$. Коефицијенти рекурентне релације* (5.32) *могу се представити у облику*

$$\alpha_{m,0} = \frac{\left\langle 2\cos x T_m^{C,1/2}, T_{[(m-2)/2]}^{C,1/2} \right\rangle_{\nu+1}}{\left\langle T_{m-2}^{C,1/2}, T_{[(m-2)/2]}^{C,1/2} \right\rangle_{\nu+1}}, \tag{5.39}$$

$$\alpha_{m,1} = \frac{\left\langle 2\cos x T_m^{C,1/2} - \alpha_{m,0} T_{m-2}^{C,1/2}, T_{[(m-1)/2]}^{C,1/2} \right\rangle_{\nu}}{\left\langle T_{m-1}^{C,1/2}, T_{[(m-1)/2]}^{C,1/2} \right\rangle_{\nu}}, \tag{5.40}$$

$$\alpha_{m,2} = \frac{\left\langle 2\cos x T_m^{C,1/2} - \alpha_{m,0} T_{m-2}^{C,1/2} - \alpha_{m,1} T_{m-1}^{C,1/2}, T_{[m/2]}^{C,1/2} \right\rangle_{\nu+1}}{\left\langle T_m^{C,1/2}, T_{[m/2]}^{C,1/2} \right\rangle_{\nu+1}}, \tag{5.41}$$

где је $\langle \cdot, \cdot \rangle_{j+2m} = \langle \cdot, \cdot \rangle_j$, $j = 1, 2$, за свако $m \in \mathbb{Z}$.

Претходна теорема се може уопштити на случај $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 3$, парних тежинских функција w_j, $j = 1, 2, \ldots, p$. Узимајући за скаларне производе $\langle \cdot, \cdot \rangle_{j+rp} = \langle \cdot, \cdot \rangle_j$, $r \in \mathbb{Z}$, важи следећи резултат.

Теорема 5.14. *Нека је $m \in \mathbb{N}$ и нека је скуп парних функција $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_p\}$ ТАТ систем на интервалу $[-\pi, \pi)$ у односу на сваки скоро дијагонални мулти–индекс $\mathbf{d}(k) \preceq \mathbf{d}(m+1)$, $k \in \mathbb{N}$. Тригонометријски вишеструко ортогонални полиноми полу–целобројног степена типа II са скоро дијагоналним–мулти индексима $T_m^{C,1/2}$ и $T_m^{S,1/2}$, $m \geq 0$, задовољавају следеће рекурентне релације:*

$$T_{m+1}^{C,1/2}(x) = (2\cos x - \alpha_{m,p}) T_m^{C,1/2}(x) - \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_{m,k} T_{m-p+k}^{C,1/2}(x), \tag{5.42}$$

$$T_{m+1}^{S,1/2}(x) = (2\cos x - \beta_{m,p}) T_m^{S,1/2}(x) - \sum_{k=0}^{p-1} \beta_{m,k} T_{m-p+k}^{S,1/2}(x). \tag{5.43}$$

Коефицијенти рекурентне релације су дати са

$$\alpha_{m,0} = \frac{\left\langle 2\cos x T_m^{C,1/2}, T_{[(m-p)/p]}^{C,1/2} \right\rangle_{j+1}}{\left\langle T_{m-p}^{C,1/2}, T_{[(m-p)/p]}^{C,1/2} \right\rangle_{j+1}}$$

и

$$\alpha_{m,k} = \frac{\left\langle 2\cos x T_m^{C,1/2} - \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_{m,i} T_{m-p+i}^{C,1/2}, T_{[(m-p+k)/p]}^{C,1/2} \right\rangle_{j+k+1}}{\left\langle T_{m-p+k}^{C,1/2}, T_{[(m-p+k)/p]}^{C,1/2} \right\rangle_{j+k+1}}, \quad k = 1, 2, \ldots, p,$$

$$\beta_{m,0} = \frac{\left\langle 2\cos x T_m^{S,1/2}, T_{[(m-p)/p]}^{S,1/2} \right\rangle_{j+1}}{\left\langle T_{m-p}^{S,1/2}, T_{[(m-p)/p]}^{S,1/2} \right\rangle_{j+1}}$$

и

$$\beta_{m,k} = \frac{\left\langle 2\cos x T_m^{S,1/2} - \sum_{i=0}^{k-1} \beta_{m,i} T_{m-p+i}^{S,1/2}, T_{[(m-p+k)/p]}^{S,1/2} \right\rangle_{j+k+1}}{\left\langle T_{m-p+k}^{S,1/2}, T_{[(m-p+k)/p]}^{S,1/2} \right\rangle_{j+k+1}}, \quad k = 1, 2, \ldots, p,$$

где је $\ell = [m/p]$ и $j = m - \ell p \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$.

Сви потребни скаларни производи могу се рачунати тачно, изузимајући једино грешке заокругљивања, коришћењем Гаусових квадратурних формула за тригонометријске полиноме у односу на одговарајуће тежинске функције

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\, w_i(t)\, \mathrm{d}t = \sum_{\nu=0}^{2N} A_{i,\nu}^{(N)} g(\tau_{i,\nu}^{(N)}) + R_{i,N}(g), \quad i = 1, 2, \ldots, p. \tag{5.44}$$

Дакле, за одређивање вишеструко ортогоналног полинома полу–целобројног степена типа II $T_m^{C,1/2}$ и $T_m^{S,1/2}$, $m \geq 0$, са скоро дијагоналним индексом у односу на скуп парних тежинских функција користимо рекурентне релације (5.42) и (5.43) и квадратурне формуле (5.44).

5.4 Оптималан скуп квадратурних формула за тригонометријске полиноме

Тригонометријски степен тачности квадратурне формуле и одговарајуће квадратурне формуле Гаусовог типа за тригонометријске полиноме у односу на једну тежинску функцију су детаљно описане у глави 3. Сада ћемо, аналогно оптималном скупу квадратурних формула за алгебарске полиноме, увести појам оптималног скупа квадратурних формула за тригонометријске полиноме.

Нека је $\mathbf{n}$ мулти–индекс и нека је $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_p\}$ ТАТ систем у односу на $\mathbf{n}$ на интервалу E. Разматраћемо проблем израчунавања скупа од p одређених интеграла са истим интервалом интеграције E, у односу на тежинске функције из скупа W и истим интеграндом, тј. скуп интеграла облика:

$$\int_E f(x) w_\nu(x)\, \mathrm{d}x, \quad \nu = 1, 2, \ldots, p.$$

Коришћење скупа од p Гаусових квадратурних формула није оптимално јер захтева велики број израчунавања вредности интегранда у односу на постигнути степен тачности. Зато се уводи скуп квадратурних формула које су оптималне за тригонометријске полиноме у Боргесовом[5] смислу.

Као у [7], уводимо „количник перформансе”(eng. perfromance ratio) у односу на тригонометријски степен тачности на следећи начин:

$$R_T = \frac{\text{Укупан тригонометријски степен тачности} + 1}{\text{Број израчунавања вредности интегранда}}.$$

Ако су чворови за сваку од p квадратурних формула различити тада је очигледно да ће R_T бити максимално ако користимо скуп од p Гаусових квадратурних формула. У том случају је

$$R_T = \frac{2n+1}{p(2n+1)} = \frac{1}{p},$$

па је $R_T < 1/2$ за свако $p > 2$.

Ако изаберемо скуп од $2n + 1$ различитих чворова, заједничких за све квадратурне формуле, тада тежински коефицијенти за сваку од p квадратурних

[5] Carlos F. Borges, Naval Postgraduate School

формула могу бити изабрани на такав начин да је $R_T > 1/2$, што ћемо и показати у наставку.

Дефиниција 5.3. *Нека је* $\mathbf{n}$ *мулти–индекс и нека је* $W = \{w_1, w_2, \dots, w_p\}$ *TAT систем у односу на* $\mathbf{n}$ *на интервалу* E. *Скуп квадратурних формула облика:*

$$\int_E f(x) w_\nu(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{2|\mathbf{n}|} A_{\nu,k} f(x_k), \quad \nu = 1, 2, \dots, p, \tag{5.45}$$

је оптималан скуп у односу на $(W, \mathbf{n})$ *ако и само ако тежински корфицијенти* $A_{\nu,k}$, $\nu = 1, 2, \dots, p$, $k = 0, 1, \dots, 2|\mathbf{n}|$, *и чворови* x_k, $k = 0, 1, \dots, 2|\mathbf{n}|$, *задовољавају следеће једначине:*

$$\sum_{k=0}^{2|\mathbf{n}|} A_{\nu,k} = \int_E w_\nu(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\sum_{k=0}^{2|\mathbf{n}|} A_{\nu,k} \cos m_\nu x_k = \int_E \cos m_\nu x\, w_\nu(x)\,\mathrm{d}x, \quad m_\nu = 1, 2, \dots, |\mathbf{n}| + n_\nu,$$

$$\sum_{k=0}^{2|\mathbf{n}|} A_{\nu,k} \sin m_\nu x_k = \int_E \sin m_\nu x\, w_\nu(x)\,\mathrm{d}x, \quad m_\nu = 1, 2, \dots, |\mathbf{n}| + n_\nu,$$

за $\nu = 1, 2, \dots, p$.

Напомена 5.4. *Приметимо да оптималан скуп квадратурних формула има* $2|\mathbf{n}|+1$ *различитих чворова, заједничких за све квадратурне формуле, и тригонометријски степен тачности* $|\mathbf{n}| + m$, *где је* $m = \min\{n_1, n_2, \dots, n_p\}$. *Према томе,*

$$R_T = \frac{|\mathbf{n}| + m + 1}{2|\mathbf{n}| + 1} = \frac{1}{2} + \frac{m + 1/2}{2|\mathbf{n}| + 1} > 1/2.$$

Карактеризација оптималног скупа квадратурних формула за тригонометријске полиноме је дата следећом теоремом, која је уопштење фундаменталне теореме за Гаусове квадратурне формуле.

Теорема 5.15. *Нека је* $\mathbf{n}$ *мулти–индекс и нека је* $W = \{w_1, w_2, \dots, w_p\}$ *TAT систем у односу на* $\mathbf{n}$ *на интервалу* E. *Скуп квадратурних формула* (5.45) *је оптималан скуп у односу на* $(W, \mathbf{n})$ *ако и само ако важи:*

1° *све квадратуре су тачне за све тригонометријске полиноме из* $\mathcal{T}_{|\mathbf{n}|}$;

2° $T_{\mathbf{n}}^{1/2}(x) = \prod_{k=0}^{2|\mathbf{n}|} \sin((x - x_k)/2)$ *је вишеструко ортогоналан тригонометријски полином полу–целобројног степена* $|\mathbf{n}| + 1/2$ *типа* II *у односу на* $(W, \mathbf{n})$.

Доказ. Претпоставимо прво да квадратурне формуле (5.45) чине оптималан скуп у односу на $(W, \mathbf{n})$.

За свако $\nu = 1, 2, \ldots, p$, одговарајућа квадратурна формула у односу на тежинску функцију w_ν је тачна за све тригонометријске полиноме степена мањег или једнаког од $|\mathbf{n}| + n_\nu$, па самим тим и за све тригонометријске полиноме степена мањег или једнаког од $|\mathbf{n}|$. Према томе, тврђење 1° је доказано.

За доказ тврђења 2° претпоставимо да је $S^{1/2}_{m_\nu - 1}(x)$, $\nu = 1, 2, \ldots, p$, тригонометријски полином полу–целобројног степена $m_\nu - 1/2$, где је $m_\nu \leq n_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, p$. Онда је $T^{1/2}_{\mathbf{n}}(x) S^{1/2}_{m_\nu - 1}(x)$ тригонометријски полином степена мањег или једнаког од $|\mathbf{n}| + n_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, p$. Пошто је одговарајућа квадратурна формула, у односу на тежинску функцију w_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, p$, тачна за све такве полиноме и $T^{1/2}_{\mathbf{n}}(x_k) = 0$, $k = 0, 1, \ldots, 2|\mathbf{n}|$, следи да је

$$\int_E T^{1/2}_{\mathbf{n}}(x) S^{1/2}_{m_\nu - 1}(x)\, w_\nu(x)\, \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{2|\mathbf{n}|} A_{\nu,k} T^{1/2}_{\mathbf{n}}(x_k) S^{1/2}_{m_\nu - 1}(x_k) = 0,$$

за $\nu = 1, 2, \ldots, p$, односно $T^{1/2}_{\mathbf{n}}(x)$ је вишеструко ортогоналан тригонометријски полином полу–целобројног степена $|\mathbf{n}| + 1/2$ типа II у односу на W.

Претпоставимо сада да за квадратурне формуле (5.45) важе тврђења 1° и 2°.

Нека је $B_{|\mathbf{n}|+n_\nu}(x) \in \mathcal{T}_{|\mathbf{n}|+n_\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots, p$. На основу леме 2.2, $B_{|\mathbf{n}|+n_\nu}(x)$ можемо записати у облику

$$B_{|\mathbf{n}|+n_\nu}(x) = T^{1/2}_{\mathbf{n}}(x) S^{1/2}_{n_\nu - 1}(x) + P_{|\mathbf{n}|}(x),$$

где је $S^{1/2}_{n_\nu - 1} \in \mathcal{T}^{1/2}_{n_\nu - 1}$ и $P_{|\mathbf{n}|} \in \mathcal{T}_{|\mathbf{n}|}$. Тада је

$$\begin{aligned} \int_E B_{|\mathbf{n}|+n_\nu}(x)\, w_\nu(x)\, \mathrm{d}x &= \int_E [T^{1/2}_{\mathbf{n}}(x) S^{1/2}_{n_\nu - 1}(x) + P_{|\mathbf{n}|}(x)]\, w_\nu(x)\, \mathrm{d}x \\ &= \int_E T^{1/2}_{\mathbf{n}}(x) S^{1/2}_{n_\nu - 1}(x)\, w_\nu(x)\, \mathrm{d}x + \int_E P_{|\mathbf{n}|}(x)\, w_\nu(x)\, \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

$\nu = 1, 2 \ldots, p$. Из тврђења 2° је

$$\int_E T^{1/2}_{\mathbf{n}}(x) S^{1/2}_{n_\nu - 1}(x)\, w_\nu(x)\, \mathrm{d}x = 0, \quad \nu = 1, 2 \ldots, p,$$

и, пошто је $P_{|\mathbf{n}|} \in \mathcal{T}_{|\mathbf{n}|}$, на основу 1° добијамо да је

$$\int_E P_{|\mathbf{n}|}(x)\, w_\nu(x)\, \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{2|\mathbf{n}|} A_{\nu,k} P_{|\mathbf{n}|}(x_k), \quad \nu = 1, 2 \ldots, p,$$

и, према томе,

$$\int_E B_{|\mathbf{n}|+n_\nu}(x)\, w_\nu(x)\, \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{2|\mathbf{n}|} A_{\nu,k} P_{|\mathbf{n}|}(x_k), \quad \nu = 1, 2 \ldots, p.$$

Коначно, пошто је $T_{\mathbf{n}}^{1/2}(x_k) = 0$, $k = 0, 1, \ldots, 2|\mathbf{n}|$, следи да је $B_{|\mathbf{n}|+n_\nu}(x_k) = P_{|\mathbf{n}|}(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots, 2|\mathbf{n}|$, $\nu = 1, 2 \ldots, p$, и зато добијамо

$$\int_E B_{|\mathbf{n}|+n_\nu}(x)\, w_\nu(x)\, \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{2|\mathbf{n}|} A_{\nu,k} B_{|\mathbf{n}|+n_\nu}(x_k), \quad \nu = 1, 2 \ldots, p,$$

односно, квадратурна формула у односу на тежинску функцију w_ν је тачна за све тригонометријске полиноме степена мањег или једнаког од $|\mathbf{n}| + n_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, p$. Према томе, скуп квадратурних формула (5.45) је оптималан у односу на $(W, \mathbf{n})$. $\square$

Напомена 5.5. *Када је $p = 1$ оптимални скуп квадратурних формула се своди на Гаусове квадратурне формуле за тригонометријске полиноме описане у глави* 3.

5.4.1 Нумерички примери

У овом одељку ћемо илустровати карактеризацију оптималног скупа квадратурних формула (5.45). Према теореми 5.15 чворови оптималног скупа квадратурних формула у односу на $(W, \mathbf{n})$ су нуле вишеструко ортогоналног тригонометријског полинома полу–целобројног степена типа II $T_{\mathbf{n}}^{1/2}$ за дати ТАТ систем W. Када нађемо чворове онда тежинске коефицијенте $A_{\nu,k}$, $k = 0, 1, \ldots, 2|\mathbf{n}|$, $\nu = 1, 2, \ldots, p$, налазимо из услова 1° теореме 5.15.

Пример 5.1. *Одредићемо параметре оптималног скупа квадратурних формула на интервалу $E = [-\pi, \pi)$, за $p = 2$, $\mathbf{n} = (2, 1)$, у односу на тежинске функције $w_1(x) = 1$ и $w_2(x) = 1 + \sin 2x$.*

Прво проверимо да следећи скуп функција

$$\left\{ \cos\frac{x}{2}, \sin\frac{x}{2}, \cos\frac{3x}{2}, \sin\frac{3x}{2}, \cos\frac{x}{2}(1 + \sin 2x), \sin\frac{x}{2}(1 + \sin 2x) \right\},$$

представља Чебишевљев систем на интервалу $[-\pi, \pi)$. Нека су $-\pi \le y_1 < y_2 \cdots < y_6 < \pi$ произвољне различите тачке. Коришћењем елементарних трансформација и особина детерминанти једноставно се добија да је детерминанта

$$\begin{vmatrix}
\cos\frac{y_1}{2} & \sin\frac{y_1}{2} & \cos\frac{3y_1}{2} & \sin\frac{3y_1}{2} & \cos\frac{y_1}{2}(1+\sin 2y_1) & \sin\frac{y_1}{2}(1+\sin 2y_1) \\
\cos\frac{y_2}{2} & \sin\frac{y_2}{2} & \cos\frac{3y_2}{2} & \sin\frac{3y_2}{2} & \cos\frac{y_2}{2}(1+\sin 2y_2) & \sin\frac{y_2}{2}(1+\sin 2y_2) \\
\cos\frac{y_3}{2} & \sin\frac{y_3}{2} & \cos\frac{3y_3}{2} & \sin\frac{3y_3}{2} & \cos\frac{y_3}{2}(1+\sin 2y_3) & \sin\frac{y_3}{2}(1+\sin 2y_3) \\
\cos\frac{y_4}{2} & \sin\frac{y_4}{2} & \cos\frac{3y_4}{2} & \sin\frac{3y_4}{2} & \cos\frac{y_4}{2}(1+\sin 2y_4) & \sin\frac{y_4}{2}(1+\sin 2y_4) \\
\cos\frac{y_5}{2} & \sin\frac{y_5}{2} & \cos\frac{3y_5}{2} & \sin\frac{3y_5}{2} & \cos\frac{y_5}{2}(1+\sin 2y_5) & \sin\frac{y_5}{2}(1+\sin 2y_5) \\
\cos\frac{y_6}{2} & \sin\frac{y_6}{2} & \cos\frac{3y_6}{2} & \sin\frac{3y_6}{2} & \cos\frac{y_6}{2}(1+\sin 2y_6) & \sin\frac{y_6}{2}(1+\sin 2y_6)
\end{vmatrix}$$

једнака
$$-1024 \prod_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{6} \sin \frac{y_i - y_j}{2} \neq 0.$$

Према томе, имамо Чебишевљев систем функција, тј. $W = \{w_1, w_2\}$ је TAT систем за мулти–индекс $\mathbf{n} = (2, 1)$.

Сада, вишеструко ортогонални тригонометријски полином типа II полу–целобројног степена $|\mathbf{n}|+1/2 = 3+1/2$ се може добити из услова ортогоналности (5.19). Изабраћемо водеће коефицијенте $a_3 = b_3 = 1$, па је

$$T_{\mathbf{n}}^{1/2}(x) = \cos \frac{7x}{2} + \sin \frac{7x}{2} + \sum_{k=0}^{2} \left(a_k \cos \left(k + \frac{1}{2} \right) x + b_k \sin \left(k + \frac{1}{2} \right) x \right).$$

Решење одговарајућег система (5.19) је $a_0 = b_0 = a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = 0$, тј. $T_{\mathbf{n}}^{1/2}(x) = \cos(7x/2) + \sin(7x/2)$. Нуле тригонометријског полинома $T_{\mathbf{n}}^{1/2}(x)$, тј. чворови квадратурних формула x_i, $i = 0, 1, \ldots, 6$, су

$$x_0 = -\frac{13\pi}{14},\ x_1 = -\frac{9\pi}{14},\ x_2 = -\frac{5\pi}{14},\ x_3 = -\frac{\pi}{14},\ x_4 = \frac{3\pi}{14},\ x_5 = \frac{\pi}{2},\ x_6 = \frac{11\pi}{14}.$$

Тежинске коефицијенте $A_{\nu,k}$, $\nu = 1, 2$, $k = 0, 1, \ldots, 6$, добијамо, коришћењем услова 1° теореме 5.15, тј. из услова да су квадратурне формуле (5.45) тачне за све тригонометријске полиноме из $\mathcal{T}_3$. Резултати су дати у табели 5.1.

k	$A_{1,k}$	$A_{2,k}$
0	0.897597901025655	1.28705103454674
1	0.897597901025655	1.59936819864474
2	0.897597901025655	0.195827603406575
3	0.897597901025655	0.508144767504572
4	0.897597901025655	1.77269114865139
5	0.897597901025655	0.897597901025655
6	0.897597901025655	0.0225046533999260

Табела 5.1. Тежински коефицијенти $A_{\nu,k}$, $\nu = 1, 2$, $k = 0, 1, \ldots, 6$, оптималног скупа квадратурних формула у односу на $W = \{1, 1 + \sin 2x\}$ и $\mathbf{n} = (2, 1)$.

Пример 5.2. *Конструишимо сада оптималан скуп квадратурних формула на интервалу $E = [0, 2\pi)$, за $p = 3$, $\mathbf{n} = (1, 1, 1)$, у односу на тежинске функције $w_1(x) = 3 - \cos 2x$, $w_2(x) = 1 + 2\sin x$, и $w_3(x) = 2 + \cos x$.*

У вом случају треба проверити да је скуп функција

$$\left\{ \cos \frac{x}{2} w_1(x), \sin \frac{x}{2} w_1(x), \cos \frac{x}{2} w_2(x), \sin \frac{x}{2} w_2(x), \cos \frac{x}{2} w_3(x), \sin \frac{x}{2} w_3(x) \right\}$$

Чебишевљев систем на интервалу $[0, 2\pi)$, што се може урадити као у примеру 5.1.

Одредићемо монични тригонометријски синусни полином полу–целобројног степена $T_{\mathbf{n}}^{S,1/2} \in \mathcal{T}_3^{1/2}$. На основу услова ортогоналности (5.19) добијамо да је $T_{\mathbf{n}}^{S,1/2} = \sin(7x/2)$. Тада су чворови x_i, $i = 0, 1, \ldots, 6$, оптималног скупа квадратурних формула дати са

$$x_0 = 0,\ x_1 = \frac{2\pi}{7},\ x_2 = \frac{4\pi}{7},\ x_3 = \frac{6\pi}{7},\ x_4 = \frac{8\pi}{7},\ x_5 = \frac{10\pi}{7},\ x_6 = \frac{12\pi}{7}.$$

За свако $\nu = 1, 2, 3$, тежински коефицијенти $A_{\nu,k}$, $k = 0, 1, \ldots, 6$, дати у табели 5.2, могу бити добијени коришћењем услова 1° у теореми 5.15.

k	$A_{1,k}$	$A_{2,k}$	$A_{3,k}$
0	1.79519580205131	0.897597901025655	2.69279370307697
1	2.89252802633042	2.30113849626382	2.35483893951061
2	3.50150146779564	2.64778439627711	1.59546147879785
3	2.13315056561766	1.67650416806782	0.986488037332638
4	2.13315056561766	0.1186916339834889	0.986488037332638
5	3.50150146779564	−0.852588594225803	1.59546147879785
6	2.89252802633042	−0.505942694212505	2.35483893951061

Табела 5.2. Тежински коефицијенти $A_{\nu,k}$, $\nu = 1, 2, 3$, $k = 0, 1, \ldots, 6$, оптималног скупа квадратурних формула у односу на $W = \{3 - \cos 2x, 1 + 2\sin x, 2 + \cos x\}$ и $\mathbf{n} = (1, 1, 1)$.

Пример 5.3. *Одредимо сада параметре оптималног скупа квадратурних формула на интервалу $E = [-\pi, \pi)$, за $p = 2$, $\mathbf{n} = (2, 2)$, у односу на парне тежинске функције $w_1(x) = 1 + \cos x$ и $w_2(x) = 1 + \cos 2x$.*

Прво треба проверити да је скуп функција

$$\Big\{ \cos\frac{x}{2}w_1(x), \sin\frac{x}{2}w_1(x), \cos\frac{3x}{2}w_1(x), \sin\frac{3x}{2}w_1(x), \cos\frac{x}{2}w_2(x), \sin\frac{x}{2}w_2(x), \cos\frac{3x}{2}w_2(x), \sin\frac{3x}{2}w_2(x)\Big\}$$

Чебишевљев систем на интервалу $[-\pi, \pi)$, што се може урадити аналогно примеру 5.1.

Одредићемо вишеструко ортогонални монични косинусни тригонометријски полином полу–целобројног степена $T_{\mathbf{n}}^{C,1/2} \in \mathcal{T}_4^{1/2}$ коришћењем рекурентних релација датих у одељку 5.3.1. На основу почетног услова $T_0^{C,1/2}(x) = \cos(x/2)$ из (5.33) добијамо коефицијент $\alpha_{02} = 4/3$, што са првом једначином у (5.31) даје

$$T_1^{C,1/2}(x) = \cos\frac{3x}{2} - \frac{1}{3}\cos\frac{x}{2}.$$

У следећем кораку из (5.34) и (5.35) добијамо $\alpha_{11} = 5/9$ и $\alpha_{12} = 8/3$, па заменом у другу једначину у (5.31) добијамо

$$T_2^{C,1/2}(x) = \cos\frac{5x}{2} - 3\cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{x}{2}.$$

Слично, коришћењем једнакости (5.36)–(5.38) и треће једнакости у (5.31), добијамо $T_3^{C,1/2}(x) = \cos(7x/2)$. На крају, из (5.39)–(5.41), за $m = 3$, и четврте једнакости у (5.31) добијамо $T_4^{C,1/2}(x) = \cos(9x/2)$. Нуле тригонометријског полинома $T_{\mathbf{n}}^{C,1/2}(x)$, тј. чворови оптималног скупа квадратурних формула x_i, $i = 0, 1, \ldots, 8$, су

$$x_0 = -\pi,\ x_1 = -\frac{7\pi}{9},\ x_2 = -\frac{5\pi}{9},\ x_3 = -\frac{3\pi}{9},$$
$$x_4 = -\frac{\pi}{9},\ x_5 = \frac{\pi}{9},\ x_6 = \frac{3\pi}{9},\ x_7 = \frac{5\pi}{9},\ x_8 = \frac{7\pi}{9}.$$

За свако $\nu = 1, 2$, тежински коефицијенти $A_{\nu,k}$, $k = 0, 1, \ldots, 8$, дати у табели 5.3 (бројеви у заградама означавају децималне експоненте), се лако добијају коришћењем услова 1° у теореми 5.15.

k	$A_{1,k}$	$A_{2,k}$
0	$-6.89098837277279(-29)$	1.396263401595464
1	0.1633317908364284	0.819360998412773
2	0.576902403182691	0.0421024932213876
3	1.047197551196598	0.349065850398866
4	1.354160908374076	1.232931610759035
5	1.354160908374076	1.232931610759035
6	1.047197551196598	0.349065850398866
7	0.576902403182691	0.0421024932213876
8	0.1633317908364284	0.819360998412773

Табела 5.3. Тежински коефицијенти $A_{\nu,k}$, $\nu = 1, 2$, $k = 0, 1, \ldots, 8$, оптималног скупа квадратурних формула у односу на $W = \{1+\cos x, 1+\cos 2x\}$ и $\mathbf{n} = (2, 2)$.

Литература

[1] A. I. Aptekarev, *Multiple orthogonal polynomials*, J. Comput. Appl. Math. **99** (1998), 423–447.

[2] L. Chakalov, *General quadrature formulae of Gaussian type*, East J. Approx. **2** (1995), 261–276 [prevod na engleski sa: Bulgar. Akad. Nauk Izv. Mat. Inst. **1** (1954), 67–84].

[3] M. M. Chawla and M. K. Jain, *Error estimates for Gauss quadrature formulas for analytic functions*, Math. Comp. **22** (1968), 82–90.

[4] T. S. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Gordon and Breach, New York, 1978.

[5] R. Cruz–Barroso, L. Darius P. Gonzáles-Vera, and O. Njåstad, *Quadrature rules for periodic integrands. Bi–orthogonality and para–orthogonality*, Ann. Math. et Informancae. **32** (2005), 5–44.

[6] R. Cruz–Barroso, P. González–Vera, and O. Njåstad, *On bi–orthogonal systems of trigonometric functions and quadrature formulas for periodic integrands*, Numer. Algor. Vol. **44** (4) (2007), 309–333.

[7] C. F. Borges, *On a class of Gauss–like quadrature rules*, Numer. Math. **67** (1994), 271–288.

[8] A. S. Cvetković and M. P. Stanić, *Trigonometric orthogonal systems*, In: Approximation and Computation–In Honor of Gradimir V. Milovanović, Series: Springer Optimization and Its Applications, Vol. 42 (W. Gautschi, G. Mastroianni, Th.M. Rassias, eds.), pp. 103–116, Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 2011.

[9] A. S. Cvetković, M. P. Stanić, Z. M. Marjanović, and T. V. Tomović, *Asymptotic behavior of orthogonal trigonometric polynomials of semi–integer degree*, Appl. Math. Comput. **218** (23) (2012), 11528–11533.

[10] P. J. Davis, *Errors of numerical approximation for analytic functions*, J. Rational Mech. Anal. 2 (1953), 303–313.

[11] P. J. Davis and P. Rabinowitz, *Methods of Numerical Integration–second edition*, Academic Press, New York, 1984.

[12] M. G. De Bruin, *Simultaneous Padé approximation and orthogonality*, In C. Brezinski, A. Draux, A.P. Magnus, P. Maroni, and A. Ronveaux, editors, Proc. Polynômes Orthogoneaux et Applications, Bar–le–Duc, 1984, Volume 1171 of Lecture Notes in Math., pp. 74–83, Springer, 1985.

[13] H. Engels, *Numerical Quadrature and Cubature*, Academic Press, London, 1980.

[14] W. Gautschi, *A survey of Gauss–Christoffel quadrature formulae*, P. L. Butzer, F. Fehér (Eds.), E. B. Christoffel, Birkhäuser, Basel, 1981, 72–147.

[15] W. Gautschi, *Minimal solutions of three–term recurrence relations and orthogonal polynomials*, Math. Comp. 36 (1981), 547–554.

[16] W. Gautschi, *Orthogonal Polynomials, Computation and Approximation*, Oxford University Press, 2004.

[17] W. Gautschi, *Remainder estimates for analytic functions*, In: Numerical Integration (T.O. Espelied, A. Genz, eds.), pp. 133–145, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1992.

[18] W. Gautschi and R. S. Varga, *Error bounds for Gaussian quadrature of analytic functions*, SIAM J. Numer. Anal. **20** (1983), 1170–1186.

[19] W. Gautschi, E. Tychopoulos, and R. S. Varga, *A note on the contour integral representation of the remainder term for a Gauss–Chebyshev quadrature rule*, SIAM J. Numer. Anal. **27** (1990), 219–224.

[20] A. Ghizzetti and A. Ossicini, *Quadrature Formulae*, Akademie Verlag, Berlin, 1970.

[21] G. H. Golub and J. H. Welsch, *Calculation of Gauss quadrature rule*, Math. Comput. **23** (1986), 221–230.

[22] G. Hammerling, *Ableitungsfreie Scrhranken fur Quadraturfehler*, Num. Math. 5 (1963), 226–233.

[23] D. B. Hunter, *Some error expansions for Gaussian quadrature*, BIT **35** (1995), 64–82.

[24] D. B. Hunter and G. Nikolov, *Gaussian quadrature of Chebyshev polynomials*, J. Comput. Appl. Math. **94** (2) (1998), 123–131.

[25] M. E. H. Ismail, *Classical and Quantum Orthogonal Polynomials in One Variable*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications 98, Cambridge University Press, 2005.

[26] C. Jagels and L. Reichel, *Szegő–Lobatto quadrature rules*, J. Comput. Appl. Math. **200** (2007), 116–126.

[27] N. S. Kambo, *Error of the Newton–Cotes and Gauss–Legendre quadrature formulas*, Math. Comp. **24** (1970), 261–269.

[28] S. Karlin and W. J. Studden, *Tchebycheff Systems with Applications in Analysis and Statistics, Pure and Applied Mathematics*, Vol. XV, John Wiley Interscience (New York), 1966.

[29] J. Ma, V. Rokhlin and S. Wandzura, *Generalized Gaussian quadrature rules for systems of arbitrary functions*, SIAM J. Numer. Anal. **33** (1996), 971–996.

[30] J. C. Mason and D. Handscomb, *Chebyshev Polynomials*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, London, New York, Washington, 2003.

[31] G. Mastroianni and G. V. Milovanović, *Interpolation Processes–Basic Theory and Applications*, Springer Monographs in Mathematics, Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg, 2008.

[32] G. V. Milovanović, *Numerička analiza, I deo*, Naučna knjiga, Beograd, 1991.

[33] G. V. Milovanović, *Numerička analiza, II deo*, Naučna knjiga, Beograd, 1991.

[34] G. V. Milovanović, *Orthogonal polynomials on the radial rays in the complex plane and applications*, Rend. Circ. Mat. Palermo, Serie II, Suppl. **68** (2002), 65-94.

[35] G. V. Milovanović and A. S. Cvetković, *Note on a construction of weights in Gauss–type quadrature formula*, Facta Univ. Ser. Math. Inform. **15** (2000), 36–83.

[36] G. V. Milovanović, A. S. Cvetković, and M. P. Stanić, *A special Gaussian rule for trigonometric polynomials*, Banach J. Math. Anal. **1** (1) (2007), 85–90.

[37] G. V. Milovanović, A. S. Cvetković, and M. P. Stanić, *Christoffel–Darboux formula for orthogonal trigonometric polynomials of semi–integer degree*, Facta Univ. Ser. Math. Inform. **23** (2008), 29–37.

[38] G. V. Milovanović, A. S. Cvetković, and M. P. Stanić, *Explicit formulas for five–term recurrence coefficients of orthogonal trigonometric polynomials of semi–integer degree*, Appl. Math. Comput. **198** (2008), 559–573.

[39] G. V. Milovanović, A. S. Cvetković, and M. P. Stanić, *Moment functional and orthogonal trigonometric polynomials of semi–integer degree*, J. Comput. Anal. Appl. **13** (5) (2011), 907–922.

[40] G. V. Milovanović, A. S. Cvetković, and M. P. Stanić, *Trigonometric orthogonal systems and quadrature formulae*, Comput. Math. Appl. **56** (11) (2008), 2915–2931.

[41] G. V. Milovanović, D. S. Mitrinović, and Th. M. Rassias, *Topics in Polynomials: Extremal Problems, Inequalites, Zeros*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, NJ, London, Hong Kong, 1994.

[42] G. V. Milovanović, M. M. Spalević, and M. S. Pranić, *Error estimates for Gaussian quadratures of analytic functions*, J. Comput. Appl. Math. **233** (3) (2009), 802–807.

[43] G.V. Milovanović, M. P. Stanić, *Construction of multiple orthogonal polynomials by discretized Stieltjes–Gautschi procedure and corresponding Gaussian quadratures*, Facta Univ. Ser. Math. Inform. **18** (2003), 9–29.

[44] G. V. Milovanović, M. P. Stanić, *Multiple orthogonality and applications in numerical integration*, In: Nonlinear Analysis: Stability, Approximation, and Inequalities, Series: Springer Optimization and its Applications, Vol. 68 (P. Georgiev, P.M. Pardalos, H.M. Srivastava eds.), Chapter 26, pp. 431–455, Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 2012.

[45] D. S. Mitrinović, *Analitičke nejednakosti*, Građevinska knjiga, Beograd, 1970.

[46] B. P. Moors, *Valeur Approximative d'une Integrale Definie*, Gauthier–Villars, Paris, 1905.

[47] C. R. Morrow and T. N. L. Patterson, *Construction of algebraic cubature rules using polynomial ideal theory*, SIAM J. Numer. Anal. **15** (5) (1978), 953–976.

[48] I. P. Mysovskikh, *Quadrature formulae of the highest trigonometric degree of accuracy*, Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz. **25** No. 8 (1985), 1246–1252 (in Russian); U.S.S.R. Comput. Maths. Math. Phys. **25** (1985), 180–184 (English).

[49] I. P. Mysovskikh, *Algorithms to construct quadrature formulae of highest trigonometric degree of precision*, Metody Vychisl. **16** (1991), 5–16 (in Russian).

[50] E. M. Nikishin, V. N. Sorokin, *Rational Approximations and Orthogonality*, vol. 92, Transl. Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1991.

[51] S. E. Notaris, *The error norm of quadrature formulae*, Numer. Algor. **60** (4) (2012), 555–578.

[52] F. Peherstorfer, *Positive trigonometric quadrature formulas and quadrature on the unit circle*, Math. Comp. **80** (275) (2011), 1685–1701.

[53] L. R. Piñeiro, *On simultaneous approximations for a collection of Markov functions*, Vestnik Mosk. Univ., Ser. I, no. 2 (1987), 67–70 [English translation in Moscow Univ. Math. Bull. **42** (2) (1987), 52–55].

[54] T. Schira, *The remainder term for analytic functions of symmetric Gaussian quadrature*, Math. Comp. **66** (1997), 297–310.

[55] J. A. Shohat, *On a certain formula of mechanical quadraeures with non–equidistant ordinates*, Trans. Amer. Math. Soc. **31** (1929), 448–463.

[56] B. T. Smith, et al. *Matrix Eigensystem Routines EISPACK Guide Lect.* Notes Comp. Science Vol. **6**, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1976.

[57] V. N. Sorokin, *Generalization of classical polynomials and convergence of simultaneous Padé approximants*, Trudy Sem. Petrovsk. **11** (1986), 125–165 [English translation in J. Soviet Math. **45** (1986), 1461–1499].

[58] V. N. Sorokin, *Simultaneous Padé approximation for functions of Stieltjes type*, Sib. Mat. Zh. **31** (5) (1990), 128–137 [English translation in Sib. Math. J. **31** (5) (1990), 809–817].

[59] V. N. Sorokin, *Hermite–Padé approximations for Nikishin systems and the irrationality of* $\zeta(3)$, Uspekhi Mat. Nauk **49** (2) (1994), 167–168 [English translation in Russian Math. Surveys **49** (2) (1994), 176–177].

[60] M. M. Spalević and M. S. Pranić, *Error bounds of certain Gaussian quadrature formulae*, J. Comput. Appl. Math. **234** (4) (2010), 1049–1057.

[61] M. P. Stanić, A. S. Cvetković, and T. V. Tomović, *Error bound of certain Gaussian quadrature rule for trigonometric polynomials*, Kragujevac J. Math **36** (1) (2012), 63–72.

[62] M. P. Stanić, A. S. Cvetković, and T. V. Tomović, *Error bounds for some quadrature rules with maximal trigonometric degree of exactness*, AIP Conf. Proc. **1479** (2012), 1042–1045.

[63] M. P. Stanić, A. S. Cvetković, and T. V. Tomović, *Error estimates for quadrature rules with maximal even trigonometric degree of exactness*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas, Fis. Nat. Ser. A. Mat. RACSAM (to appear) DOI: 10.1007/s13398-013-0129-3.

[64] M. P. Stanić, A. S. Cvetković, and T. V. Tomović, *Error estimates for some quadrature rules with maximal trigonometric degree of exactness*, Math. Methods Appl. Sci. (to appear) DOI: 10.1002/mma.2929.

[65] M. P. Stanić, G. V. Milovanović, and T. V. Tomović, *Multiple orthogonal trigonometric polynomials of semi–integer degree and the corresponding quadrature rules*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N. S.) (to appear).

[66] F. Stenger, *Bounds on the error of Gauss–type quadratures*, Numer. Math. **8** (1966), 150–160.

[67] F. Stenger, *Handbook of Sinc Numerical Methods*, CRC Press, London, 2010.

[68] G. Szegő, *On bi–orthogonal systems of trigonometric polynomials*, Magyar Tud. Akad. Kutató Int. Kőzl, **8** (1963), 255–273.

[69] G. Szegő, *Orthogonal Polynomials*, volume 33 of Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island, 3rd edition, 1967. First edition 1939.

[70] A. H. Turetzkii, *On quadrature formulae that are exact for trigonometric polynomials*, East J. Approx. **11** (2005), 337–359 (translation in English from Uchenye Zapiski, Vypusk 1(149), Seria Math. Theory of Functions, Collection of papers, Izdatel'stvo Belgosuniversiteta imeni V.I. Lenina, Minsk, (1959), 31–54).

[71] W. Van Assche, *Multiple orthogonal polynomials, irrationality and transcedence*, In: Cuntuniued Fractions: From Analytic Number Theory to Constructive Approximation (B. C. Bertdt and F. Geszresy, eds,) Contemporary Mathematics **236**, Amer. Math. Soc. providence, RI, (1999), 325–342.

[72] W. Van Assche, *Non–symmetric linear difference equations for multiple orthogonal polynomials*, CRM Proceedings and Lecture Notes **25** (2000), 391–405.

[73] W. Van Assche, E. Coussement, *Nearest neighbor recurrence relations for multiple orthogonal polynomials*, J. Approx. Theory **163** (2011), 1427–1448.

[74] W. Van Assche, E. Coussement, *Some classical multiple orthogonal polynomials*, J. Comput. Appl. Math. **127** (2001), 317–347.

[75] H. Wilf, *Exactness conditions in numerical quadrature*, Num. Math. **5** (1964), 315–319.

Додатак

Summary

Numerical integration is the study of how the numerical value of an integral can be found. Also called quadrature, which refers to finding a square whose area is the same as the area under a curve, it is one of the classical topics of numerical analysis. Of the central interest is the process of approximating a definite integral from values of the integrand when exact mathematical integration is not available.

The principal topic of this doctoral dissertation is Gaussian quadrature rule with maximal trigonometric degree of exactness, as a generalization of the classical Gaussian quadrature rule for algebraic polynomials. The research in this dissertation is connected with the following subjects: Theory of Orthogonality, Numerical Integration and Approximation Theory.

This dissertation, beside Preface and References with 75 items, consists of five chapters: Introduction; Orthogonal systems of trigonometric polynomials; Quadrature rules of Gaussian type for trigonometric polynomials; Error estimates for quadrature rules of Gaussian type for trigonometric polynomials; Multiple orthogonal trigonometric polynomials of semi–integer degree and the corresponding quadrature rules.

The first chapter of the thesis contains a short history of Gaussian quadrature rules for algebraic polynomials, including some error estimates of such quadrature rules and their generalizations on non–polynomial functions. Generalization on quadrature rules for trigonometric polynomials is a motivation for the research that is presented within this dissertation.

Definitions and features of trigonometric polynomials of semi–integer and integer degree are presented in the second chapter.

The third chapter is devoted to quadrature rules with maximal trigonometric degree of exactness, i.e., quadrature rules of Gaussian type. The quadrature rules with an even and an odd number of nodes are observed particulary. Also, in the both cases (even and odd numbers of nodes) quadrature rules with even

weight functions are considered and the connection with corresponding Gaussian quadrature rules for algebraic polynomials is given.

The fourth chapter presents the latest results about error estimates for Gaussian quadrature rule for trigonometric polynomials. At first, error estimates in the case of quadrature rules with an odd numbers of nodes for 2π–periodic functions, analytic in circular domain, and with respect to the weight functions $w(x) = 1$, $x \in [0, 2\pi)$, $w(x) = 1 + \cos x$ and $w(x) = 1 - \cos x$, $x \in [-\pi, \pi)$ are given. Also, for some even weight functions the error bounds of Gaussian quadrature rules for trigonometric polynomials in the both cases (even and odd number of nodes) and for 2π–periodic integrand in certain domain of complex plane (circular and elliptic) are given. Several numerical examples are also included.

In the fifth chapter multiple orthogonal trigonometric polynomials of semi–integer degree and the corresponding optimal quadrature formulae for trigonometric polynomials are introduced. Also, some numerical examples are included.

The problem of numerical integration is open–ended, no finite collection of techniques is likely to cover all possibilities that arise and to which an extra bit of special knowledge may be of great assistance.

Биографија

Татјана Томовић је рођена 30.06.1984. године у Новом Пазару. Основну школу *Јован Јовановић Змај* завршила је као носилац дипломе *Вук Караџић* и ђак генерације. Гимназију у Новом Пазару, завршила је 2003. године као носилац дипломе *Вук Караџић*. Добитница је више награда на такмичењима из математике и физике. Након тога, уписала је Природно-математички факултет у Крагујевцу, смер математика-информатика и дипломирала са просечном оценом 10 и као студент генерације.

Током студија више пута је проглашена за најбољег студента Природно–математичког факултета. Добитник је стипендије у оквиру пројекта ЕФГ банке и Националне штедионице, стипендије фонда „Dennis Hale”, стипендиста Министарства просвете и Министарства науке и технолошког развоја Републике Србије.

Докторске студије из математике на Природно–математичком факултету у Крагујевцу уписала је 2007. године и све предмете предвиђене планом и програмом положила са просечном оценом 10.

У звање асистента (ужа научна област Математичка анализа са применама) на Институту за математику и информатику Природно–математичког факултета у Крагујевцу изабрана је 2008. године. У досадашњем раду на Институту за математику и информатику изводила је вежбе из предмета: Анализа 1, Анализа

2, Нумеричка математика, Нумеричка анализа, Образовни софтвер 1, Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, Основи програмирања, Архитектура рачунара и рачунарске мреже, Математика 2 (за студенте физике) и Математика 3 (за студенте физике).

Татјана Томовић се активно бави научно–истраживачким радом из области нумеричке анализе. У периоду од 2008. до 2010. године била је учесник пројекта *Ортогонални полиноми и примене*, финансираног од стране Министарства науке Републике Србије. Тренутно је ангажована на пројекту *Апроксимација интегралних и диференцијалних оператора и примене* који финансира Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије.

Резултате истраживања објавила је у оквиру следећих научних радова.

1. A. S. Cvetković, M. P. Stanić, Z. M. Marjanović, and T. V. Tomović, *Asymptotic behavior of orthogonal trigonometric polynomials of semi–integer degree*, Appl. Math. Comput. **218** (23) (2012), 11528–11533.

2. M. P. Stanić, A. S. Cvetković, and T. V. Tomović, *Error bound of certain Gaussian quadrature rule for trigonometric polynomials*, Kragujevac J. Math **36** (1) (2012), 63–72.

3. M. P. Stanić, A. S. Cvetković, and T. V. Tomović, *Error bounds for some quadrature rules with maximal trigonometric degree of exactness*, AIP Conf. Proc. **1479** (2012), 1042–1045.

4. M. P. Stanić, A. S. Cvetković, and T. V. Tomović, *Error estimates for quadrature rules with maximal even trigonometric degree of exactness*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas, Fis. Nat. Ser. A. Mat. RACSAM (to appear) DOI:10.1007/s13398-013-0129-3.

5. M. P. Stanić, A. S. Cvetković, and T. V. Tomović, *Error estimates for some quadrature rules with maximal trigonometric degree of exactness*, Math. Methods Appl. Sci. (to appear) DOI: 10.1002/mma.2929.

6. M. P. Stanić, G. V. Milovanović, and T. V. Tomović, *Multiple orthogonal trigonometric polynomials of semi–integer degree and the corresponding quadrature rules*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N. S.) (to appear).