UNIVERZITET U KRAGUJEVCU

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

Radosav S Đorđević

# VEROVATNOSNE LOGIKE

- doktorska disertacija -

mentor:

v.prof. dr Miodrag Rašković

Kragujevac, 1991.

SADRŽAJ:

## U V O D

Verovatnosne logike spadaju u oblast infinitarnih logika sa generalisanim kvantifikatorima. Razvoj teorije modela logike prvog reda uticao je na proučavanje logika sa "bogatijom" strukturom. Ovakve logike dopuštaju sjedinjavanje u domen logike osnovnih matematičkih struktura. Topološka logika je, na primer, logika čiji modeli pored strukture prvog reda imaju i topologiju na univerzumu (videti [12],[51],[53]). Strukture verovatnosnih logika, uvedenih sredinom sedamdesetih godina sa ciljem da se model-teoretski proučava verovatnoća, su strukture prvog reda sa verovatnosnom merom na univerzumu.

Početak proučavanja verovatnosnih logika $L_{\mathcal{A}P}$ i $L_{\mathcal{A}\int}$ vezan je za H.J. Keislera i njegov rad [28]. Potreba da definabilni skupovi budu merljivi u svakoj verovatnosnoj strukturi, uslovila je da se umesto uobičajenih kvantifikatora $\forall x$ i $\exists x$ koriste verovatnosni kvantifikatori $P\vec{x}\geq r$ , gde je $\vec{x}$ konačan niz promenljivih i $r\in[0,1]$, ili integralni operatori $\int\ldots d\vec{x}$ . Najinteresantniji modeli za logike $L_{\mathcal{A}P}$ i $L_{\mathcal{A}\int}$ su oblika $\langle A,X,\mu\rangle$, gde je $\mu$ verovatnosna mera na A i X slučajna promenljiva definisana na A, jer se u jeziku ovih logika lako izražavaju mnoge osobine slučajnih promenljivih. Razvoju teorije modela ovih verovatnosnih logika naročito su doprineli D. Hoover ([18],[19]) i H.J. Keisler ([28],[30]).

Dodavanjem novog operatora E[ | ] logici $L_{\mathcal{A}\int}$ radićemo sa modelima sa uslovnim očekivanjem slučajnih promenljivih u odnosu na $\sigma$-algebre. Keisler u [30] dokazuje teoremu potpunosti za logiku $L_{\mathcal{A}E}$ sa operatorom uslovnog očekivanja, a značajan doprinos njenom daljem razvoju dao je S. Fajardo u [11].

Inspirisani Keislerovim radom na stohastičkim diferencijalnim jednačinama, Hoover i Keisler uvode adaptiranu verovatnosnu logiku $L_{ad}$ , koja je, pre svega, pogodna za proučavanje stohastičkih procesa. Jezikom ove logike lako je izraziti i pojmove martingala, Markovljevog procesa, Brownovog kretanja i slično. Rodenhausen u svojoj disertaciji [50] daje skup aksioma za logiku $L_{ad}$ i dokazuje teoremu potpunosti. Znatno jednostavniji dokaz teoreme potpunosti za $L_{ad}$ daje Keisler u [31]. Keisler u [32] uvodi dva tipa elementarne ekvivalentnosti za $L_{ad}$ i koristeći aparat nestandardne analize i model-teoretske tehnike daje direktnu primenu ove logike u teoriju verovatnoće.

Uopšte, tehnike koje koristimo u verovatnosnim logikama su vrlo raznovrsne i kreću se od čisto logičkih, pa preko tehnika nestandardne analize, do čisto analitičkih. U tom kontekstu, pomenimo i Hooverov rad [23] u kojem autor, oslanjajući se na neke konstrukcije von Neumanna i pogodno uvedenu sintaksu jedne modifikacije $L(\int)_{\mathcal{A}}$ logike $L_{\mathcal{A}\int}$, realizuje logiku $L(\int)_{\mathcal{A}}$ na analitičkim skupovima sa Borelovom merom, ne primenjujući tehnike nestandardne analize.

Razvoju verovatnosnih logika doprineo je i M. Rašković radovima [40],[41],[43] i [47]. U ovim radovima rešeni su Keislerovi problemi iz [30] vezani za teoreme potpunosti dvoverovatnosnih logika $L^{a}_{\mathcal{A}P_1P_2}$ i $L^{s}_{\mathcal{A}P_1P_2}$ u apsolutno neprekidnom i singularnom slučaju. Rešavanje drugih logičkih problema vezanih za navedene dvoverovatnosne logike, kao i za druge, analogne, tipove dvoverovatnosnih logika, motivisalo je ovaj rad.

Rad je podeljen u šest glava.

U §1 opisane su strukture u kojima realizujemo verovatnosne logike, kao i osnovne tehnike nestandardne analize koje se pri tome koriste.

Deo §2 sadrži opise sintakse i semantike verovatnosnih logika $L_{\mathcal{A}P}$, $L_{\mathcal{A}\int}$, $L_{\mathcal{A}E}$ i $L_{ad}$, kao i njihove važnije logičke rezultate.

U §3 rešavaju se problemi Barwiseove potpunosti, potpunosti, kompaktnosti, egzistencije analitičkih i hiperkonačnih modela za dvoverovatnosne logike $L_{\mathcal{A}P_1P_2}$, $L_{\mathcal{A}\int_1\int_2}$ i $L_{ad}$ u apsolutno neprekidnom i singularnom slučaju.

Viševerovatnosna logika $BC\{L_{\mathcal{A}P_i} : i \in I\}$, $I \in \mathcal{A}$, dobijena Booleovom kombinacijom verovatnosnih logika $L_{\mathcal{A}P_i}$ uvedena je u §4, i date su neke model-teoretske osobine ove logike.

Motivisani Keislerovim problemima vezanim za logiku $L_{\mathcal{A}P\forall}$ sa verovatnosnim i univerzalnim kvantifikatorom, kao i nekim topološkim logikama koje uvode J. Sgro u [51] i M. Ziegler u [12] i [53], u §5 uvodimo i verovatnosnu logiku $L^{2}_{\mathcal{A}P\forall}$ drugog reda i rešavamo problem potpunosti za ovu logiku.

Deduktivni aparat konačne verovatnosne logike $L_{\mathcal{A}P}$ možemo interpretirati u jednakosnoj logici njene Tarski-Lindenbaumove algebre, što nas dovodi do pojma cilindričnih verovatnosnih algebri. Glava §6 sadrži samo neke moguće pravce razvoja ovih algebri sa ciljem da se problemi tipa reprezentacije, aksiomatizabilnosti ili odlučivosti standardnih cilindričnih algebri, rešavaju i za slučaj cilindričnih verovatnosnih algebri.

Zahvaljujem se profesoru M. Raškoviću za nesebičnu pomoć i savete pri izradi ovog rada. Takođe sam zahvalan i profesorima H. J. Keisleru i Ž. Mijajloviću, čije su sugestije za vreme boravka u Madisonu, na univerzitetu države Wisconsin, bile za mene veoma korisne.

# §1 OSNOVNI POJMOVI IZ NESTANDARDNE TEORIJE MERE I DOPUSTIVIH SKUPOVA

Sa ciljem da se model-teoretski proučava verovatnoća uvedene su sredinom sedamdesetih godina razne verovatnosne logike. Zajednički deo struktura verovatnosnih logika čini struktura logike prvog reda sa verovatnosnom merom na univerzumu. Prvi deo ove glave sadrži opise raznih tipova verovatnosnih modela.

Pored čisto logičkih i analitičkih tehnika koristimo i neke tehnike nestandardne analize. Posebno ističemo konstrukciju Loebove mere na nestandardnom univerzumu i Loebovu konstrukciju Daniellovog integrala. Pored osnovnih pojmova iz teorije nestandardne analize, drugi deo ove glave sadrži i opise navedenih konstrukcija.

Verovatnosne logike koje opisujemo su definisane nad nekim prebrojivim dopustivim skupom $\mathcal{A}$ koji sadrži $\omega$ i čiji su svi elementi prebrojivi, tj. $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{HC}$ . Treći deo ove glave sadrži osnovne napomene iz teorije dopustivih skupova.

## 1.1 VEROVATNOSNE STRUKTURE

Osnovni pojmovi vezani za teoriju verovatnoće i razne tipove verovatnosnih struktura se mogu naći u [13],[28],[30] i sl.

*Konačno aditivan verovatnosni prostor* je trojka $\langle A, S, \mu\rangle$ gde je S algebra podskupova od A, a $\mu: S \to [0,1]$ konačno aditivna verovatnosna mera na A, tj. $\mu(A) = 1$ i za $X, Y \in S$

$$\mu(X \cup Y) = \mu(X-Y) + \mu(Y-X) + \mu(X \cap Y).$$

Ako je S $\sigma$-algebra i $\mu$ prebrojivo aditivna verovatnosna mera, tj. za $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \ldots$ i $X_i \in S$ važi $\mu(\bigcup_n X_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(X_n)$, tada trojku $\langle A, S, \mu \rangle$ zovemo *verovatnosnim prostorom.*

Trojka $\langle A^n, S^n, \mu^n \rangle$, $n \in N$, gde je $S^n$ $\sigma$-algebra generisana merljivim pravougaonicima $X_1 \times \ldots \times X_n$ za $X_i \in S$, a $\mu^n : S^n \to [0,1]$ mera na $A^n$ definisana sa $\mu^n(X_1 \times \ldots \times X_n) = \mu(X_1) \cdot \ldots \cdot \mu(X_n)$, predstavlja *n-stepen verovatnosnog prostora* $\langle A, S, \mu \rangle$ .

Kako *dijagonalni skupovi* $D_{ij} = \{\vec{x} \in A^n : x_i = x_j\}$ u opštem slučaju nisu $\mu^n$-merljivi, a kako su logike koje posmatramo logike sa jednakošću, to je potrebno proširiti verovatnosni prostor $\langle A^n, S^n, \mu^n \rangle$ .

TEOREMA 1.1.1 (Keisler [30])

Ako je $\langle A, S, \mu \rangle$ verovatnosni prostor sa merljivim singltonima, tada, za svako $n \in N$, postoji verovatnosni prostor $\langle A^n, S^{(n)}, \mu^{(n)} \rangle$ za koji je $S^{(n)}$ $\sigma$-algebra generisana merljivim pravougaonicima i dijagonalnim skupovima $D_{ij}$, a $\mu^{(n)}$ jedinstveno proširenje mere $\mu^n$ na $S^{(n)}$ takvo da $\mu^{(n)}(D_{ij}) = \sum_{a \in A} (\mu\{a\})^2$. Takođe za svaki skup $X \in S^{(n)}$ , postoji $\mu^n$-merljiv skup Y tako da $\mu^{(n)}(X \Delta Y) = 0$ . $\square$

Dobro poznata Fubinijeva teorema za proizvod mera, koristi se pri dokazu odgovarajućih, sličnih, osobina za verovatnosni prostor $\langle A^n, S^{(n)}, \mu^{(n)} \rangle$ .

TEOREMA 1.1.2

Ako je $\langle A, S, \mu \rangle$ verovatnosni prostor sa merljivim singltonima i $B \in S^{(m+n)}$, tada važi:

(1) Svaki odsečak $B_{\vec{x}} = \{\vec{y} \in A^n : (\vec{x}, \vec{y}) \in B\}$ je $\mu^{(n)}$-merljiv ;

(2) Funkcija $f(\vec{x}) = \mu^{(n)}(B_{\vec{x}})$ je $\mu^{(m)}$-merljiva ;

(3) $\mu^{(m+n)}(B) = \int f(\vec{x})d\mu^{(m)}(\vec{x})$ . □

Neka je $L=\{R_i, c_j\}$ jezik verovatnosne logike sa relacijskim simbolima $R_i$, $i\in I$, konačne dužine i konstantnim simbolima $c_j$, $j\in J$.

*Verovatnosna struktura jezika* L je struktura $<\mathfrak{A},\mu>$, pri čemu je $\mathfrak{A} = <A, R_i^{\mathfrak{A}}, c_j^{\mathfrak{A}}>_{i\in I, j\in J}$ klasična struktura logike prvog reda bez operacija, a $\mu$ verovatnosna mera ($\sigma$-aditivna) na A takva da je svaki singlton merljiv i da je za svaku $n_i$-arnu relaciju $R_i$, skup $R_i^{\mathfrak{A}}$ $\mu^{(n_i)}$-merljiv.

Zamenom dijagonalnog proizvoda $\mu^{(n)}$ mere $\mu$ nekom verovatnosnom merom $\mu_n$ na $A^n$, za svako $n\in\mathbb{N}$, dobićemo neke druge, značajne, primere verovatnosnih struktura.

*Slaba verovatnosna struktura jezika* L je struktura $<\mathfrak{A},\mu_n>_{n\in\mathbb{N}}$ takva da je $\mu_n$ konačno aditivna verovatnosna mera na $A^n$ sa merljivim singltonima.

*Gradirana verovatnosna struktura jezika* L je struktura $<\mathfrak{A},\mu_n>_{n\in\mathbb{N}}$ za koju važi:

(1) Svako $\mu_n$ je prebrojivo aditivna verovatnosna mera na $A^n$ ;

(2) Svaka n-arna relacija $R_i^{\mathfrak{A}}$ je $\mu_n$-merljiva, relacija identiteta je $\mu_2$-merljiva ;

(3) $\mu_n \times \mu_m \subseteq \mu_{n+m}$ ;

(4) Svako $\mu_n$ se čuva pri permutaciji skupa $\{1,2,\dots,n\}$, tj. ako je $\pi$ permutacija skupa $\{1,2,\dots,n\}$ i X $\mu_n$-merljiv skup, tada je i skup $\pi X = \{(a_{\pi(1)}, \quad ,a_{\pi(n)}) : (a_1,\dots,a_n) \in S\}$ $\mu_n$-merljiv i $\mu_n(\pi X) = \mu_n(X)$ ;

(5) $\{\mu_n : n\in\mathbb{N}\}$ ima Fubinijevu osobinu, tj. ako je $B \subseteq A^{m+n}$ neki $\mu_{m+n}$-merljiv skup, tada važi:

(i) Svaki odsečak $B_{\vec{x}} = \{\vec{y} : (\vec{x},\vec{y})\in B\}$ je $\mu_n$-merljiv;

(ii) Funkcija $f(\vec{x}) = \mu_n(B_{\vec{x}})$ je $\mu_m$-merljiva ;

(iii) $\mu_{m+n}(B) = \int f(\vec{x})d\mu_m(\vec{x})$ .

Iz teorema 1.1.1 i 1.1.2 sledi da za verovatnosnu strukturu $\langle\mathfrak{A},\mu\rangle$ jezika L, struktura $\langle\mathfrak{A},\mu^{(n)}\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ je gradirana verovatnosna struktura jezika L.

Sledeći primer verovatnosne strukture je integralni analogon slabe verovatnosne strukture jezika L, a značajan je za one verovatnosne logike koje umesto verovatnosnih kvantifikatora koriste integralne operatore.

*Slaba integralna struktura jezika* L je struktura $\langle\mathfrak{A},\mathcal{I}\rangle$, gde je $\mathcal{I}$ pozitivna, linearna, realna funkcija definisana na skupu funkcija $A\to\mathbb{R}$ ( $\mathcal{I}$ igra ulogu Daniellovog integrala ), tj.

(1) $\mathcal{I}(r) = r$ , $r\in\mathbb{R}$ ;

(2) $\mathcal{I}(r\cdot f + s\cdot g) = r\cdot\mathcal{I}(f) + s\cdot\mathcal{I}(g)$ ;

(3) Ako je $f(a)\geq 0$ za svako $a\in A$, tada $\mathcal{I}(f)\geq 0$.

Znatan deo rada vezan je za dvoverovatnosne strukture. Ranije uvedenim pojmovima pridružimo odgovarajuće pojmove vezane za prostor sa dve mere, u apsolutno neprekidnom i singularnom slučaju, i istaknimo neke bitne osobine ovih struktura.

Mera $\mu_1$ je *apsolutno neprekidna* u odnosu na meru $\mu_2$ (oznaka: $\mu_1 \ll \mu_2$) definisanu na istoj $\sigma$-algebri S, ako važi:

$$\text{iz } \mu_2(X) = 0 \text{ sledi } \mu_1(X) = 0 \text{ za svako } X\in S.$$

*Apsolutno neprekidna dvoverovatnosna struktura jezika* L je struktura $\langle\mathfrak{A},\mu_1,\mu_2\rangle$ u kojoj su skupovi $R_i^{\mathfrak{A}}$ $\mu_k^{(n_i)}$-merljivi za k=1,2 i $\mu_1 \ll \mu_2$ .

*Apsolutno neprekidna gradirana dvoverovatnosna struktura jezika* L je gradirana struktura $\langle\mathfrak{A},\mu_n^1,\mu_n^2\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ u kojoj je $\mu_n^1 \ll \mu_n^2$ za svako $n\in\mathbb{N}$.

U slučaju apsolutne neprekidnosti mere $\mu_1$ u odnosu na meru $\mu_2$, u prostoru sa ovim merama možemo odrediti takozvani Radon-Nikodymov izvod mere $\mu_1$ u odnosu na meru $\mu_2$ ( oznaka: $d\mu_1 / d\mu_2$ ).

**TEOREMA 1.1.3**

Ako su $\mu_1$ i $\mu_2$ mere na $\sigma$-algebri merljivih podskupova od A i $\mu_1 \ll \mu_2$, tada postoji $\mu_2$-merljiva funkcija $f: A \to \mathbb{R}^+$ takva da važi $\int g d\mu_1 = \int f \cdot g d\mu_2$ za svaku $\mu_1$-integrabilnu funkciju $g: A \to \mathbb{R}$ (posledica: $\mu_1(B) = \int_B f d\mu_2$ za svaki merljiv skup B ). □

Funkciju f iz prethodne teoreme zovemo *Radon-Nikodymovim izvodom* mere $\mu_1$ u odnosu na meru $\mu_2$.

Mere $\mu_1$ i $\mu_2$ definisane na istoj $\sigma$-algebri S su *uzajamno singularne* (oznaka: $\mu_1 \perp \mu_2$) ako postoji skup $X \in S$ takav da je $\mu_1(X) = 0$ i $\mu_2(X) = 1$.

*Singularna dvoverovatnosna struktura jezika* L je struktura $\langle \mathfrak{A}, \mu_1, \mu_2 \rangle$ takva da je $\mu_1 \perp \mu_2$.

*Singularna gradirana dvoverovatnosna struktura jezika* L je gradirana struktura $\langle \mathfrak{A}, \mu_n^1, \mu_n^2 \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ takva da je $\mu_n^1 \perp \mu_n^2$ za svako $n \in \mathbb{N}$.

Posmatrajmo dvoverovatnosni prostor $\langle A, S, \mu_1, \mu_2 \rangle$ u kome važi:

$$\mu_k\{a : \mu_1\{a\} > 0 \text{ i } \mu_2\{a\} > 0 \} = 0 , \ k=1,2 \qquad \text{(S)}$$

Koristeći teoremu Łos-Marczewskog (videti [37],[43]), mere $\mu_1$ i $\mu_2$ možemo proširiti do mera $\bar{\mu}_1$ i $\bar{\mu}_2$ respektivno, koje su uzajamno singularne. Lako je videti da i mere $\mu_1^{(n)}$, $\mu_2^{(n)}$ možemo proširiti do odgovarajućih singularnih mera, a time od dvoverovatnosne strukture koja zadovoljava uslov (S) dobijamo singularnu gradiranu dvoverovatnosnu strukturu. Stoga će uslov (S) biti posebno značajan za slučaj singularnih dvoverovatnosnih logika.

Za teoriju verovatnoće interesantne su i neke druge strukture. Na primer, ako jezik $L = \{X_i, c_j\}$ sadrži simbole slučajnih promenljivih $X_i$ umesto relacija, posmatraćemo strukture slučajnih promenljivih.

U verovatnosnom prostoru $\langle A,S,\mu\rangle$ svaku $\mu^{(n)}$-merljivu funkciju $X:A^n\to\mathbb{R}$ zvaćemo *slučajnom promenljivom.*

*Struktura slučajne promenljive jezika* L je struktura $\mathfrak{A}=\langle A,X_i^{\mathfrak{A}},c_j^{\mathfrak{A}},\mu\rangle_{i\in I,j\in J}$ takva da je $\mu$ verovatnosna mera na A sa merljivim singltonima, i svako $X_i^{\mathfrak{A}}$ $n_i$-arna slučajna promenljiva.

Neka je $\langle A,S,\mu\rangle$ verovatnosni prostor, $\mathcal{F}$ $\sigma$-podalgebra od S i $g:A\to\mathbb{R}$ ograničena i merljiva funkcija. Tada, $\mathcal{F}$-merljivu funkciju $h:A\to\mathbb{R}$ takvu da je za svako $B\in\mathcal{F}$ ispunjeno $\int_B g d\mu = \int_B h d\mu$, zovemo *uslovnim očekivanjem funkcije* g *u odnosu na* $\mathcal{F}$ (oznaka: $h=E[g|\mathcal{F}]$ ili $h(x)=E[g(\cdot)|\mathcal{F}](x)$ ). Uslovno očekivanje $h=E[g|\mathcal{F}]$ postoji (posledica Radon-Nikodymove teoreme, gde je $h:A\to\mathbb{R}$ Radon-Nikodymov izvod mere $\nu(B)=\int_B g d\mu$, $B\in\mathcal{F}$, u odnosu na meru $\mu|\mathcal{F}$ ) i skoro sigurno je jedinstveno, u smislu da su dve takve funkcije jednake svuda osim, možda, na skupu mere nula.

PRIMER 1.1.4

Ako su $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ $\sigma$-podalgebre algebre S takve da $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$, tada za ograničenu i merljivu funkciju $g:A\to\mathbb{R}$ važi:

$$E[g|\mathcal{F}_1] = E[E[g|\mathcal{F}_1]|\mathcal{F}_2] \ . \ \blacksquare$$

*Struktura uslovnog očekivanja jezika* L je struktura $\langle\mathfrak{A},\mathcal{F}\rangle$, gde je $\mathfrak{A}$ struktura slučajne promenljive jezika L, a $\mathcal{F}$ $\sigma$-podalgebra algebre $\mu$-merljivih skupova.

Na kraju ovog dela uvedimo i pojmove adaptiranih prostora i adaptiranih verovatnosnih struktura, koje su pogodne za proučavanje stohastičkih procesa.

*Stohastički proces* je $\mu\otimes\beta$-merljiva funkcija $X:A\times[0,1]\to\mathbb{R}$, gde je $\mu$ verovatnosna mera na A, a $\beta$ Borelova mera na $[0,1]$.

Familija $\{\mathcal{F}_t : t\in[0,1]\}$ $\sigma$-algebri $\mu$-merljivih podskupova od A je *filtracija* ako je $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$ za svako $t\in[0,1]$.

*Adaptirani prostor* je struktura $\langle A, S, \mu, \mathcal{F}_t \rangle_{t\in[0,1]}$ gde je $\{\mathcal{F}_t : t\in[0,1]\}$ filtracija.

Ako je $L=\{X_i, c_j\}$ i $X_i$ su simboli stohastičkih procesa, tada je *adaptirana verovatnosna struktura jezika* L struktura $\mathfrak{A}=\langle A, X_i^{\mathfrak{A}}, c_j^{\mathfrak{A}}, \mu, \mathcal{F}_t \rangle_{i\in I, j\in J, t\in[0,1]}$, gde je $\langle A, \mu, \mathcal{F}_t \rangle_{t\in[0,1]}$ adaptirani prostor, $c_j^{\mathfrak{A}}\in A$ i $X_i^{\mathfrak{A}}: A\times[0,1]\to\mathbb{R}$ stohastički proces.

## 1.2. LOEBOVA MERA I DANIELLOV INTEGRAL

Konstrukcijom proširenja $^*\mathbb{R}$ strukture $\mathbb{R}$ realnih brojeva, koje sadrži infinitezimalne i beskonačne elemente, i zadržava sve osobine strukture $\mathbb{R}$, A. Robinson je 1960. godine postavio osnove nestandardne analize. Utapanje standardne matematičke strukture $\mathfrak{M}$ u neko njeno nestandardno proširenje $^*\mathfrak{M}$ koje sadrži neke "lepe" elemente, nazvane internalnim, koristi se, pre svega, za utvrđivanje novih standardnih rezultata.

Primena nestandardne teorije mere ima osnovu u P. Loebovom otkriću metode konstrukcije bogatijih standardnih prostora mera (takozvanih Loebovih prostora) pomoću nestandarnih prostora (videti [34] i [36]).

Osnovne definicije i osobine teorije nestandardne analize se mogu naći u [4],[49] ili [52].

*Superstruktura* nad skupom U praelemenata je iterativno definisana sa:

$$V_0(U)=U\ ;$$

$$V_{n+1}(U)=V_n(U) \cup \mathcal{P}(V_n(U))\ ;$$

$$V_\omega(U) = \bigcup_{n<\omega} V_n(U)\ ,$$

gde je $\mathcal{P}(X)$ oznaka za partitivni skup skupa X .

*Ograničenom formulom* zvaćemo formulu logike prvog reda u kojoj su svi kvantifikatori ograničeni, tj. oblika $\forall x\in y$ ili $\exists x\in y$.

Pretpostavimo da za nestandardni univerzum nad kojim radimo važi:

(i) $* : \langle V_\omega(U),\in\rangle\to\langle V_\omega({}^*U),\in\rangle$ je identitet na $U$, i čuva istinitost ograničenih formula (princip ekstenzije i transfera) ;

(ii) Ako je $X_0 \supseteq X_1 \supseteq \ldots$ niz nepraznih skupova iz ${}^*V_n(U)$, $n<\omega$, tada je $\bigcap_{k<\omega} X_k$ neprazan ($\omega_1$-zasićenost) .

Elemente skupa ${}^*V_\omega(U) = \bigcup_{n<\omega} {}^*V_n(U)$ zovemo *internalnim objektima*.

Loebovom konstrukcijom, polazeći od nekog internalnog prostora sa merom koja je obično samo konačno aditivna, dobijamo novi standardni prostor sa $\sigma$-aditivnom merom.

Strukturu $\langle M,S,\mu\rangle$ zovemo *internalnim *-konačno aditivnim verovatnosnim prostorom* ako je $M$ internalan skup u $V_\omega({}^*U)$, $S$ internalna algebra na $M$ i $\mu:S\to{}^*[0,1]$ konačno aditivna funkcija. Kompletiranjem prebrojivo aditivnog verovatnosnog prostora $\langle M,\sigma(S),\hat{\mu}\rangle$ za koji važi:

(i) $\sigma(S)$ je $\sigma$-algebra generisana algebrom $S$ ;

(ii) $\hat{\mu}(X) = {}^\circ\mu(X)$ za svako $X\in S$, gde za $r\in{}^*\mathbb{R}$ , ${}^\circ r$ označava standardni deo broja $r$ ;

nastaje *Loebov prostor* sa *Loebovom merom* $\hat{\mu}$ određenom funkcijom $\mu$.

**TEOREMA 1.2.1** (Loeb [34])

Neka je $\langle M,S,\mu\rangle$ internalan *-konačno aditivan verovatnosni prostor i ${}^\circ\mu:S\to[0,1]$ preslikavanje definisano sa ${}^\circ\mu(X) = {}^\circ(\mu(X))$. Tada ${}^\circ\mu$ ima jedinstvenu $\sigma$-aditivnu ekstenziju $\hat{\mu}$ definisanu na $\sigma$-algebri $\sigma(S)$ generisanoj sa $S$, pomoću $\hat{\mu}(X)=\inf\{{}^\circ\mu(Y):Y\in S \text{ i } X\subseteq Y\}= \sup\{{}^\circ\mu(Y):Y\in S \text{ i } Y\subseteq X\}$. Takođe, za svako $X\in\sigma(S)$ postoji internalan

$Y \in S$ tako da $\hat{\mu}(X \nabla Y) = 0$ . □

Dakle, mera $\hat{\mu}$ je kompletna mera na $\sigma$-algebri $\sigma(S)$ koja zadovoljava:

(i) $\hat{\mu}(X) = {}^{\circ}\mu(X)$ za svako $X \in S$ ;

(ii) Ako $X \in \sigma(S)$ i $\varepsilon > 0$ u $\mathbb{R}$, tada postoje $Y, Z \in S$ tako da $Y \subseteq X \subseteq Z$ i $\hat{\mu}(Z-Y) < \varepsilon$ .

Među svim Loebovim prostorima najznačajniji su takozvani hiperkonačni prostori.

*Hiperkonačan verovatnosni prostor* je prostor $\langle M, S, \mu \rangle$ takav da je univerzum $M$ beskonačan $*$-konačan skup, a mera $\mu$ Loebova mera koja odgovara *$*$-prebrajajućoj* meri $\nu$ na $M$, tj. konačno aditivnoj meri definisanoj sa $\nu(X) = |X|/|M|$ , $X \in S$ ( $|X|$ je oznaka za internalnu kardinalnost skupa $X \subseteq M$ ).

*Hiperkonačan gradirani prostor* je prostor $\langle M, S, \mu_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$, gde je $M$ beskonačan $*$-konačan skup i svaka mera $\mu_n$ Loebova mera generisana $*$-prebrajajućom merom na $M^n$.

Dakle, to su beskonačni verovatnosni prostori koji su sa nestandardne tačke gledanja konačni, a samim tim i formalno slični konačnim prostorima. Neki standardni pojmovi, na primer Lebesqueova mera i integracija, mogu se definisati jednostavnom prebrajajućom verovatnosnom merom na hiperkonačnom skupu. Za slučaj integracije na $[0,1]$ dovoljno je uzeti $M = \{0, 1/H, 2/H, \ldots, 1\}$, gde $H \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ , i $\int_0^1 f(x)dx = {}^{\circ}\left( \sum_{k=1}^{n} {}^*f(k/H) \cdot 1/H \right)$ za neprekidnu funkciju $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, a za slučaj Lebesqueove mere možemo iskoristiti sledeći primer.

PRIMER 1.2.2

Neka je $M = \{ k/H : k \in {}^*\mathbb{Z} \text{ i } -H^2 \leq k \leq H^2 \}$ , $S$ familija svih internalnih podskupova od $M$ i $\mu : S \to {}^*\bar{\mathbb{R}}^+$ prebrajajuća mera data sa

$\mu(X)=|X|/H$ za $X\in S$. Neka je $\sigma(S)$ Loebova algebra generisana sa S i $\hat{\mu}$ Loebova mera određena merom $\mu$. Ako je $\mathcal{B}$ $\sigma$-algebra podskupova $B\subseteq\mathbb{R}$ takvih da $st^{-1}(B)\cap M\in\sigma(S)$, tada je mera $\lambda$ na $\mathcal{B}$ definisana sa $\lambda(B)=\hat{\mu}(st^{-1}(B)\cap M)$ Lebesqueova mera. ■

Paralelno prethodnom, u slučaju logika koje umesto verovatnosnih kvantifikatora imaju integralne operatore, koristimo Loebovu konstrukciju mere (videti [36]) koja odgovaru Daniellovom integralu (prethodna konstrukcija mere odgovarala je Lebesqueovom integralu).

Vektorski podprostor $\mathcal{F}\subseteq\mathbb{R}^A$ realnih funkcija na skupu A je *vektorska rešetka* ako važi: iz $f,g\in\mathcal{F}$ sledi $\min\{f,g\}\in\mathcal{F}$ i $\max\{f,g\}\in\mathcal{F}$ .

*Daniellov integral* je trojka $\langle A,\mathcal{F},\mathcal{I}\rangle$ gde je $\mathcal{I}:\mathcal{F}\to\mathbb{R}$ realna funkcija sa osobinama:

(1) $\mathcal{I}(\alpha\cdot f+\beta\cdot g)=\alpha\cdot\mathcal{I}(f)+\beta\cdot\mathcal{I}(g)$ , $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ , $f,g\in\mathcal{F}$ ;

(2) Ako $f,g\in\mathcal{F}$ i $f\le g$ , tada $\mathcal{I}(f)\le\mathcal{I}(g)$ ;

(3) Ako za niz $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ , $f_n\in\mathcal{F}$, važi $f_1\le f_2\le\ldots$ i $f_n\to f$, $n\to\infty$, $f\in\mathcal{F}$, tada $\mathcal{I}(f)=\lim_{n\to\infty}\mathcal{I}(f_n)$ .

Funkcije iz $\mathcal{F}$ zovemo *elementarnim funkcijama*.

TEOREMA 1.2.3 (Loeb [36])

U $\omega_1$-zasićenom nestandardnom univerzumu, neka je M internalna vektorska rešetka funkcija iz internalnog skupa A u ${}^*\mathbb{R}$ (skup hiperrealnih brojeva) i neka je $\mathcal{I}$ internalan, pozitivan, linearan funkcional na M takav da $1\in M$ i $\mathcal{I}(1)=1$. Tada postoji kompletna verovatnosna mera $\mu$ na A takva da za svaku ograničenu funkciju $\varphi\in M$, njen standardni deo je funkcija integrabilna u odnosu na $\mu$ i $\int{}^{\circ}\varphi d\mu={}^{\circ}\mathcal{I}(\varphi)$ . □

Primenom ove teoreme i iterativnim korišćenjem Daniellovog integrala, definisaćemo i mere $\mu_n$ na $A^n$ za svako $n\in\mathbb{N}$, a time smo u mogućnosti da napravimo i gradirani verovatnosni prostor.

## 1.3. DOPUSTIVI SKUPOVI

Verovatnosne logike spadaju u oblast infinitarnih logika sa generalisanim kvantifikatorima. Formule verovatnosne logike $L_{\mathcal{A}P}$ možemo smatrati elementima prebrojivog dopustivog skupa $\mathcal{A}$, takvog da $\omega\in\mathcal{A}$ i svaki $a\in\mathcal{A}$ je prebrojiv skup. Time se dobija mogućnost primene osobina dopustivih skupova i za verovatnosne logike.

Osnovni pojmovi iz teorije dopustivih skupova se mogu naći u [2]. Navedimo neke od njih.

Neka je L jezik logike prvog reda sa jednakošću, relacijskim, funkcijskim i konstantnim simbolima, i neka je $\mathcal{M}=\langle M,\dots\rangle$ struktura za L. Neka je $\bar{L}=L(\in,\dots)$ proširenje jezika L dobijeno dodavanjem novih simbola, a medu njima i simbola pripadanja $\in$ .

Kolekcija $\Delta_0$*-formula* jezika $\bar{L}$ je najmanja kolekcija Y koju čine atomske formule iz $\bar{L}$ i koja je zatvorena za negacije, konačne konjunkcije i disjunkcije, i za ograničene kvantifikatore. Ovo poslednje znači: ako $\varphi\in Y$, tada i formule $(\forall u\in v)\varphi$ i $(\exists u\in v)\varphi$ pripadaju kolekciji Y .

Teoriju KPU (skup aksioma Kripke-Platek sa urelementima) čine formule:

$\forall x(x\in a\Leftrightarrow x\in b) \Leftrightarrow a=b$ ;

$\exists x\varphi(x) \Rightarrow \exists x(\varphi(x)\wedge(\forall y\in x)\neg\varphi(y))$, gde y nije slobodno u $\varphi$ ;

$\exists a(x\in a\wedge y\in a)$ ;

$\exists b\ \forall y\in a\ \forall x\in y\ (x\in b)$ ;

$\exists b\forall x(x\in b \Leftrightarrow x\in a\wedge\varphi(x))$, gde b nije slobodno u $\Delta_0$-formuli $\varphi$ ;

$\forall x \in a \exists y \varphi(x,y) \Rightarrow \exists b \forall x \in a \exists y \in b \varphi(x,y)$, gde, opet, b nije slobodno u $\Delta_0$-formuli $\varphi$ .

Skup A je *tranzitivan* ako važi $\forall y \in A\ \forall z \in y\ (z \in A)$ .

$\Sigma$-funkcijski simbol TC definisan tako da za svako x, TC(x) predstavlja najmanji tranzitivan skup koji sadrži x, zovemo *tranzitivnim zatvorenjem.*

Tranzitivan skup koji je model teorije KPU zovemo *dopustivim skupom.*

Formule oblika $\exists u \varphi(u)$ , gde je $\varphi$ $\Delta_0$-formula, zovemo *$\Sigma_1$-formulama.* Klasa *$\Sigma$-formula* je najmanja klasa koja sadrži $\Delta_0$-formule i zatvorena je za konjunkcije i disjunkcije, ograničene kvantifikatore i egzistencijalni kvantifikator.

*$\Pi_1$-formule* i klasa *$\Pi$-formula* su slično definisani. Razlika je što umesto egzistencijalnog koristimo univerzalni kvantifikator.

Formulu koja je logički ekvivalentna nekoj $\Sigma_1$-formuli i nekoj $\Pi_1$-formuli zovemo *$\Delta_1$-formulom.*

Navedimo sako Barwiseove teoreme potpunosti i kompaktnosti za logiku $L_{\mathcal{A}}$ prvog reda definisanu nad prebrojivim dopustivim skupom $\mathcal{A}$, tj. za logiku $L_{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \cap L_{\omega_1\omega}$ koja predstavlja dopustiv fragment logike $L_{\omega_1\omega}$ nad prebrojivim dopustivim skupom $\mathcal{A}$ .

**TEOREMA 1.3.1** (Barwise [2])

Skup valjanih rečenica logike $L_{\mathcal{A}}$ je $\Sigma_1$-definabilan nad $\mathcal{A}$.□

**TEOREMA 1.3.2** (Barwise [2])

Neka je T skup rečenica logike $L_{\mathcal{A}}$ koji je $\Sigma_1$-definabilan nad $\mathcal{A}$. Ako svaki $\mathcal{A}$-konačan podskup od T ima model, tada i T ima model. □

## §2 RAZNI TIPOVI VEROVATNOSNIH LOGIKA

Logički i model-teoretski rezultati verovatnosnih logika pružaju mogućnost daljeg proučavanja nekih delova teorije verovatnoće kao, na primer, uslovnog očekivanja, stohastičkih procesa i sl. U zavisnosti od primene, uvedeno je više tipova verovatnosnih logika. U ovoj glavi izloženi su osnovni rezultati vezani za logiku sa verovatnosnim kvantifikatorima $L_{\mathcal{A}P}$, logiku sa integralnim operatorima $L_{\mathcal{A}\int}$, logiku sa operatorom uslovnog očekivanja $L_{\mathcal{A}E}$ i adaptiranu verovatnosnu logiku $L_{ad}$. Najveći deo tih rezultata dobili su Keisler (videti [28],[30] i [31]) i Hoover (videti [18] i [23]).

### 2.1. LOGIKA SA VEROVATNOSNIM KVANTIFIKATORIMA

Verovatnosnu logiku $L_{\mathcal{A}P}$ uveo je H.J. Keisler u [28]. Želja da svaki definabilan skup bude merljiv u svakoj verovatnosnoj strukturi, uslovila je da formule logike $L_{\mathcal{A}P}$ izgradimo tako što umesto uobičajenih kvantifikatora $\forall x$ i $\exists x$ koristimo verovatnosne kvantifikatore $P\vec{x}\geq r$ ($\vec{x}$ je konačan niz promenljivih i $r\in[0,1]\cap\mathcal{A}$). Dakle, nad prebrojivim $\mathcal{A}$-rekurzivnim skupom $L=\{R_i, c_j\}$ relacijskih i konstantnih simbola, formule logike $L_{\mathcal{A}P}$ su izgrađene tako da $L_{\mathcal{A}P} = \mathcal{A} \cap L_{\omega_1 P}$. Očigledno je kvantifikator $Px\geq 1$ slab analogon kvantifikatora $\forall x$, dok je $Px>0$ jači kvantifikator od $\exists x$, gde je

$(P\vec{x}>r)\varphi$ zamena za $\neg(P\vec{x}\geq 1-r)\neg\varphi$ .

Koristeći Fubinijevu teoremu 1.1.2 lako se pokazuje da za svaku verovatnosnu strukturu $\mathfrak{A}=\langle A,R_i^{\mathfrak{A}},c_j^{\mathfrak{A}},\mu\rangle$, svaku formulu $\varphi(\vec{x},\vec{y})$ logike $L_{\mathcal{A}P}$ i svako $\vec{a}$ iz $A^m$, skup $\{\vec{b}\in A^n:\mathfrak{A}\models\varphi[\vec{a},\vec{b}]\}$ je $\mu^{(n)}$-merljiv. Ova osobina daje mogućnost da relaciju zadovoljenja formula logike $L_{\mathcal{A}P}$ u verovatnosnoj strukturi $\mathfrak{A}$ definišemo kao i za standardnu logiku $L_{\mathcal{A}}$ , osim što za slučaj kvantifikatora koristimo:

$$\mathfrak{A}\models(P\vec{y}\geq r)\varphi(\vec{x},\vec{y})[\vec{a}]\quad\text{akko}\quad\mu^{(n)}\{\vec{b}:\mathfrak{A}\models\varphi[\vec{a},\vec{b}]\}\geq r.$$

Navedimo neke osobine verovatnosnog prostora izražavajući ih rečenicama logike $L_{\mathcal{A}P}$.

PRIMER 2.1.1

(a) Element $a\in A$ je *atom* verovatnosnog prostora $\langle A,S,\mu\rangle$ ako je $\mu\{a\}>0$. Model $\mathfrak{A}=\langle A,R_i^{\mathfrak{A}},c_j^{\mathfrak{A}},\mu\rangle_{i\in I,j\in J}$ je *atomičan* ako je svaki element skupa A atom. Svaki atomičan model je prebrojiv, a svaki prebrojiv model zadovoljava rečenicu $(Px\geq 1)(Py>0)\ x=y$ .

U slučaju atomičnih modela rečenice $(\forall x)\varphi(x,\vec{a})$ i $(Px\geq 1)\varphi(x,\vec{a})$ su ekvivalentne za svaku formulu $\varphi(x,\vec{y})$ logike $L_{\mathcal{A}P}$ i svako $\vec{a}\in A^n$ (slično su $(\exists x)\varphi(x,\vec{a})$ i $(Px>0)\varphi(x,\vec{a})$ ekvivalentne rečenice).

(b) Uslovna verovatnoća $\mu^{(n)}(\varphi(\vec{x})\,|\,\psi(\vec{x}))=r$ ako $\mu^{(n)}(\psi(\vec{x}))>0$ , izražava se rečenicom $\bigwedge_{q\in Q\cap[0,1]}((P\vec{x}\geq r\cdot q)(\varphi(\vec{x})\wedge\psi(\vec{x}))\Longleftrightarrow(P\vec{x}\geq q)\psi(\vec{x}))$ logike $L_{\mathcal{A}P}$ .

(c) Uslov $\mu^{(n)}\{\vec{a}:\mathfrak{A}\models\varphi[\vec{a}]\}\leq\mu^{(n)}\{\vec{a}:\mathfrak{A}\models\psi[\vec{a}]\}$ možemo izraziti na sledeći način: $\mathfrak{A}\models\bigwedge_{r\in Q\cap[0,1]}((P\vec{x}\leq r)\varphi(\vec{x})\Rightarrow(P\vec{x}\leq r)\psi(\vec{x}))$ . ∎

D. Hoover u [18] uvodi aksiome i pravila izvođenja za logiku $L_{\mathcal{A}P}$ , i dokazuje potpunost tog skupa aksioma samo za gradirane verovatnosne strukture. Skup aksioma za verovatnosne modele upotpunjen je aksiomom $B_4$ , koju je uveo Keisler u [30], gde je teorema potpunosti logike $L_{AP}$ dokazana u dva koraka. Prvo, konstrukcijom slabog modela, modela koji nije verovatnosan ali u kome se logika može interpretirati i u kome su aksiome zadovoljene, a zatim se slab model koristi pri konstrukciji jakog, tj. verovatnosnog modela. Stoga su i aksiome logike $L_{\mathcal{A}P}$ svrstane u dve grupe:

1. *Aksiome za slabu* $L_{\mathcal{A}P}$

$A_1$ Sve aksiome logike $L_{\mathcal{A}}$ bez kvantifikatora.

$A_2$ $(P\vec{x}\geq r)\varphi \Rightarrow (P\vec{x}\geq s)\varphi$ , gde $r\geq s$ (monotonost).

$A_3$ $(P\vec{x}\geq r)\varphi(\vec{x}) \Rightarrow (P\vec{y}\geq r)\varphi(\vec{y})$ .

$A_4$ $(P\vec{x}\geq 0)\varphi$ .

$A_5$ (i) $((P\vec{x}\leq r)\varphi \wedge (P\vec{x}\leq s)\psi) \Rightarrow (P\vec{x}\leq r+s)(\varphi \vee \psi)$ ;

(ii) $((P\vec{x}\geq r)\varphi \wedge (P\vec{x}\geq s)\psi \wedge (P\vec{x}\leq 0)(\varphi \wedge \psi)) \Rightarrow$

$\Rightarrow (P\vec{x}\geq r+s)(\varphi \vee \psi)$ (konačna aditivnost) .

$A_6$ $(P\vec{x}>r)\varphi \Longleftrightarrow \bigvee_{n\in\mathbb{N}} (P\vec{x}\geq r+1/n)\varphi$ (Arhimedova aksioma).

2. *Dodatne aksiome za punu* $L_{\mathcal{A}P}$

$B_1$ $\bigwedge_{\Psi\subseteq\Phi}(P\vec{x}\geq r)\wedge\Psi \Rightarrow (P\vec{x}\geq r)\wedge\Phi$ , gde je $\Psi$ konačan podskup od $\Phi$

(prebrojiva aditivnost).

$B_2$ $(Px_1\ldots x_n\geq r)\varphi \Longleftrightarrow (Px_{\pi 1}\ldots x_{\pi n}\geq r)\varphi$ ,

gde je $\pi$ permutacija skupa $\{1,\ldots,n\}$ (simetričnost).

$B_3$ $(P\vec{x}\geq r)(P\vec{y}\geq s)\varphi \Rightarrow (P\vec{x}\vec{y}\geq r\cdot s)\varphi$ ,

gde su sve promenljive u $\vec{x}$ i $\vec{y}$ različite.

$B_4$ Za svako $r<1$ , $(P\vec{x}\geq 1)(P\vec{y}>0)(P\vec{z}\geq r)(\varphi(\vec{x},\vec{z}) \Longleftrightarrow \varphi(\vec{y},\vec{z}))$ ,

i promenljive u $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ su različite.

Pravila izvođenja za $L_{\mathcal{A}P}$ su:

$C_1$ $\varphi, \varphi \Rightarrow \psi \vdash \psi$ (modus ponens).

$C_2$ $\{ \varphi \Rightarrow \psi : \psi\in\Psi \} \vdash \varphi \Rightarrow \wedge \Psi$ (konjunkcija).

$C_3$ $\quad \varphi \Rightarrow \psi(\vec{x}) \vdash \varphi \Rightarrow (P\vec{x}\geq 1)\psi(\vec{x})$ ,

gde $\vec{x}$ nije slobodan u $\varphi$ (generalizacija).

Da u aksiomi $B_3$ ne važi ekvivalentnost i da kvantifikatori $P\vec{x}\geq r$ i $P\vec{y}\geq s$ ne komutiraju pokazuje sledeći primer.

PRIMER 2.1.2

Neka je $A=\{a,b,c\}$, $\mu\{a\}=\mu\{b\}=\mu\{c\}=1/3$ i $R$ binarni relacijski simbol jezika $L$.

(a) Ako je $R^{\mathfrak{A}}=\{(a,a),(a,b),(b,b),(b,c)\}$, tada $\mathfrak{A}\models (Px\geq 1/2)(Py\geq 1/2)R(x,y)$ , $\mathfrak{A}\models (Pxy\geq 1/4)R(x,y)$ , ali ne i $\mathfrak{A}\models (Py\geq 1/2)(Px\geq 1/2)R(x,y)$ .

(b) Ako je $R^{\mathfrak{A}}=\{(a,b),(b,c),(c,a)\}$, tada $\mathfrak{A}\models (Pxy\geq 1/4)R(x,y)$ , ali ne $\mathfrak{A}\models (Px\geq 1/2)(Py\geq 1/2)R(x,y)$ niti $\mathfrak{A}\models (Py\geq 1/2)(Px\geq 1/2)R(x,y)$. ∎

Uobičajena Henkinova konstrukcija koristi se pri dokazu slabe teoreme potpunosti logike $L_{\mathcal{A}P}$.

TEOREMA 2.1.3 (Hoover [18])

Teorija T je konzistentna u slaboj $L_{\mathcal{A}P}$ (aksiome $A_1$-$A_6$) akko postoji slab verovatnosni model za T u kojem je svaka teorema logike $L_{\mathcal{A}P}$ tačna. □

Loebovom konstrukcijom (teorema 1.2.1) od internalne strukture $^*\mathfrak{A} = \langle ^*A, ^*R_i, ^*c_j, ^*\mu_n\rangle_{i\in I, j\in J, n\in N}$ generisane slabom verovatnosnom strukturom $\mathfrak{A}$, dobijamo gradiranu verovatnosnu strukturu $\hat{\mathfrak{A}} = \langle ^*A, ^*R_i, ^*c_j, \hat{\mu}_n\rangle$, gde je $\hat{\mu}_n$ Loebova mera generisana merom $\mu_n$ za svako $n\in\mathbb{N}$.

TEOREMA 2.1.4 (Hoover [18])

Teorija T je konzistentna u gradiranoj $L_{\mathcal{A}P}$ (aksiome $A_1$-$A_6$, $B_1$-$B_3$) akko postoji gradirani verovatnosni model za T u kojem je svaka teorema logike $L_{\mathcal{A}P}$ tačna. □

Da je neophodno proširiti skup aksioma gradirane $L_{\mathcal{A}P}$, što je urađeno dodavanjem aksiome $B_4$, pokazuje Hooverov primer poznat kao "White Noise", kojim se određuje gradirana verovatnosna struktura koja nije $L_{\mathcal{A}P}$-ekvivalentna nekoj verovatnosnoj strukturi.

PRIMER 2.1.5

Neka je $H\in{}^*\mathbb{N}-\mathbb{N}$, $A={}^*\mathcal{P}(H)$ skup svih internalnih podskupova od H (dakle, i A je $*$-konačan skup), $\mu_n$ internalna verovatnosna mera na $A^n$ koja svakom elementu dodeljuje istu težinu i $\hat{\mu}_n$ Loebova mera od $\mu_n$. Neka je $L=\{R\}$, gde je R binarna relacija na A određena sa $R(a,b)$ akko $f(a)\in b$, a $f:A\to H$ je internalna funkcija koja razbija A na H istih delova. Struktura $\mathfrak{A} = \langle A,R,\hat{\mu}_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ je gradirana jer $\{\hat{\mu}_n:n\in\mathbb{N}\}$ ima Fubinijevu osobinu i relacija R na A je internalna, pa otuda i $\hat{\mu}_2$-merljiva. Tada za skoro svako $a\in A$ i skoro svako $b\in A$ važi $\hat{\mu}_1\{z:f(a)\in z \Leftrightarrow f(b)\in z\} \le 1/2$ (za $f(a)\neq f(b)$ ova mera nije veća ni od 1/4). Stoga, $\mathfrak{A} \models (Px\ge 1)(Py\ge 1)(Pz\le 1/2)R(x,z) \Leftrightarrow R(y,z)$, tj. $\mathfrak{A} \models (Px\le 0)(Py>0)(Pz>1/2)R(x,z) \Leftrightarrow R(y,z)$. Dakle, $B_4$ aksioma ne važi u $\mathfrak{A}$, pa gradirana struktura $\mathfrak{A}$ nije $L_{\mathcal{A}P}$-ekvivalentna nekoj verovatnosnoj strukturi. ∎

Napomenimo da aksiome gradirane $L_{\mathcal{A}P}$ zajedno sa $(Px\ge 1)(Py>0)x=y$ (videti primer 2.1.1 (a)) daju $B_4$ aksiomu. Zaista za svako $a\in A$, $\mu^{(n)}\{\vec{b}\in A^n : \mathfrak{A}\models (P\vec{z}\ge r)\varphi(\vec{a},\vec{z}) \Leftrightarrow \varphi(\vec{b},\vec{z})\} \ge \mu^{(n)}\{\vec{a}\}$, i $\mu^{(n)}\{\vec{a}\} > 0$ za skoro svako $\vec{a}$.

Navedena rečenica je ključna za dokaz potpunosti atomičnih modela verovatnosne logike.

TEOREMA 2.1.6 (Keisler [30])

Prebrojiv skup rečenica $\Phi$ logike $L_{\mathcal{A}P}$ ima atomičan model akko je $\Phi \cup \{(Px\geq 1)(Py>0)x=y\}$ konzistentna teorija logike $L_{\mathcal{A}P}$. □

Aksioma $B_4$ obezbeduje aproksimaciju skupa $\varphi(\vec{x},\vec{y})$ konačnom unijom merljivih pravougaonika.

TEOREMA 2.1.7 (Keisler [30])

Ako je $\mathfrak{U}$ gradirana verovatnosna struktura koja zadovoljava sve teoreme logike $L_{\mathcal{A}P}$, $\varepsilon>0$ i $\varphi(\vec{y})$ formula sa slobodnim promenljivim $\vec{y}=y_1\ldots y_n$, tada postoji konačno mnogo formula $\psi_{ij}(\vec{x},y_j)$, $i=1,2,\ldots,m$, $j=1,2,\ldots,n$ tako da

$$\mathfrak{U}\models (P\vec{x}>0)(P\vec{y}>1-\varepsilon)(\varphi(\vec{y}) \Longleftrightarrow \bigvee_{i=1}^{m} \bigwedge_{j=1}^{n} \psi_{ij}(\vec{x},y_j)) \text{ . } \square$$

Navedena aproksimacija $L_{\mathcal{A}P}$-definabilnih skupova konačnom unijom $\mu_1^n$-merljivih skupova, daje mogućnost izgradnje verovatnosnog modela $L_{\mathcal{A}P}$-ekvivalentnog gradiranom verovatnosnom modelu $\hat{\mathfrak{U}}=\langle {}^*A, {}^*R_i, {}^*c_j, \hat{\mu}_n\rangle$ (videti [30]). Ovo je poslednji korak u rešavanju problema potpunosti logike $L_{\mathcal{A}P}$.

TEOREMA 2.1.8 (Keisler [30])

Prebrojiva teorija T je konzistentna u $L_{\mathcal{A}P}$ akko ima verovatnosni model. □

Od ostalih model-teoretskih rezultata za logiku $L_{\mathcal{A}P}$ pomenimo: Barwiseove teoreme potpunosti i kompaktnosti, konačnu kompaktnost, Robinsonovu neprotivrečnost i Craigovu interpolaciju. Dokazi ovih rezultata se mogu naći u [18] ili [30].

Rezultati Barwiseovog tipa za logiku $L_{\mathcal{A}P}$ dobijaju se na isti način kao i za $L_{\mathcal{A}}$ (videti [2]).

TEOREMA 2.1.9

Skup valjanih rečenica logike $L_{\mathcal{A}P}$ je $\Sigma_1$-definabilan na $\mathcal{A}$. □

TEOREMA 2.1.10

Ako je T teorija logike $L_{\mathcal{A}P}$ $\Sigma_1$-definabilna na $\mathcal{A}$, čiji svaki $\mathcal{A}$-konačan podskup ima verovatnosni model, tada i T ima verovatnosni model. □

Sledeći primer pokazuje da logika $L_{\mathcal{A}P}$ ne zadovoljava punu kompaktnost.

PRIMER 2.1.11

Ako je $T=\{(Px\le 1/n)R(x) : n\in N\} \cup \{(Px>0)R(x)\}$, gde je R unarni predikat, tada svaki konačan podskup od T ima verovatnosni model, ali T nema verovatnosni model. ■

To je razlog zašto posmatramo samo poseban skup formula logike $L_{\mathcal{A}P}$ .

Skup *univerzalno konjunktivnih formula logike* $L_{\mathcal{A}P}$ je najmanji skup koji sadrži sve formule bez kvantifikatora, i zatvoren je za proizvoljne konjunkcije, konačne disjunkcije i kvantifikatore $P\vec{x}\ge r$ .

Primetimo da aksioma $B_4$ nije univerzalno konjunktivna rečenica, te da konačna kompaktnost za verovatnosne modele nekog skupa univerzalno konjunktivnih rečenica ne važi. Naime, svaki konačan podskup skupa

$$T=\{(Px\ge 1)(Py\ge 1-1/n)(Pz\ge 1/2)\neg(R(x,z)\Leftrightarrow R(y,z)):n\in N\}$$

univerzalno konjunktivnih rečenica ima verovatnosni model (primer 2.1.5), dok T nema model, jer iz T sledi "white noise" rečenica

$$(Px\ge 1)(Py\ge 1)(Pz\le 1/2)(R(x,z)\Leftrightarrow R(y,z)).$$

Ali, moguće je dokazati konačnu kompaktnost za gradirane verovatnosne modele univerzalno konjunktivnog skupa rečenica.

TEOREMA 2.1.12 (Hoover [18])

Ako svaki konačan podskup skupa T univerzalno konjunktivnih rečenica ima gradirani verovatnosni model, tada i T ima gradirani verovatnosni model. □

U teoriji modela logike $L_{\mathcal{A}P}$ hiperkonačne strukture imaju svojstvo ekspandibilnosti. Isto svojstvo imaju i zasićene strukture u teoriji modela logike prvog reda. Pitanje istovetnosti svojstava zasićenosti i ekspandibilnosti postavio je Ž. Mijajlović u razgovoru sa autorom. Primer H.J. Keislera da ultrastepen zasićenih struktura ne mora da bude zasićen, što nije slučaj sa ekspandibilnošću, pokazuje da je svojstvo ekspandibilnosti samo posledica svojstva zasićenosti strukture logike prvog reda. Ali, navedena činjenica da hiperkonačne strukture logike $L_{\mathcal{A}P}$ imaju svojstvo ekspandibilnosti ukazuje da će ulogu zasićenih struktura u teoriji modela verovatnosnih logika odigrati hiperkonačne strukture. Stoga, koristeći egzistenciju i jedinstvenost hiperkonačnih modela logike $L_{\mathcal{A}P}$ dobijamo svojstvo Robinsonove neprotivrečnosti za ovu logiku.

TEOREMA 2.1.13 (Keisler [30])

Ako je $\mathfrak{N}$ bezatomična verovatnosna struktura jezika L i M beskonačan $*$-konačan skup, tada postoji hiperkonačna verovatnosna struktura $\mathfrak{M}$ sa univerzumom M koja je $L_{\mathcal{A}P}$-ekvivalentna strukturi $\mathfrak{N}$.

TEOREMA 2.1.14 (Keisler [30])

Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ hiperkonačne verovatnosne struktura sa istim univerzumom. Modeli $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ su $L_{\mathcal{A}P}$-ekvivalentni akko postoji internalan izomorfizam $h:\mathfrak{M}\to\mathfrak{N}$ , tj. internalna bijekcija $h:M\to N$ koja je izomorfizam verovatnosnih prostora i za svaku formulu $\varphi(\vec{x})$ logike $L_{\mathcal{A}P}$ i $\vec{a}\in M^n$ važi: $\mathfrak{M}\models\varphi[\vec{a}]$ akko $\mathfrak{N}\models\varphi[h\vec{a}]$. □

TEOREMA 2.1.15 (Keisler [30])

Ako su $\mathfrak{U}^1$ i $\mathfrak{U}^2$ verovatnosni modeli za $L^1$ i $L^2$ respektivno tako da $\mathfrak{U}^1|L^0$ i $\mathfrak{U}^2|L^0$ su $L^0_{\mathcal{A}P}$-ekvivalentni modeli, gde je $L^0=L^1\cap L^2$, tada postoji verovatnosni model $\mathfrak{U}^3$ jezika $L^3=L^1\cup L^2$ takav da $\mathfrak{U}^3|L^1$

i $\mathfrak{A}^1$ su $L^1_{\mathcal{A}P}$-ekvivalentni, $\mathfrak{A}^3|L^2$ i $\mathfrak{A}^2$ su $L^2_{\mathcal{A}P}$-ekvivalentni modeli. □

Craigova interpolacija za logiku $L_{\mathcal{A}P}$ ne sledi direktno iz Robinsonove neprotivrečnosti, jer ne važi kompaktnost za ovu logiku. Keisler u [30] pri dokazu Craigove interpolacione teoreme koristi Henkinovu konstrukciju.

TEOREMA 2.1.16 (Keisler [30])

Ako je $L^0=L^1\cap L^2$ i ako su $\varphi,\psi$ rečenice logika $L^1_{\mathcal{A}P}$, $L^2_{\mathcal{A}P}$ respektivno, takve da $\models \varphi \Rightarrow \psi$, tada postoji rečenica $\theta$ logike $L^0_{\mathcal{A}P}$ takva da $\models \varphi \Rightarrow \theta$ i $\models \theta \Rightarrow \psi$. □

Na kraju ovog dela, istaknimo vezu između verovatnosnih struktura i struktura slučajne promenljive. Koristeći Fubinijevu teoremu zaključujemo da svaka relacija $R(x,\vec{y})$ u verovatnosnom modelu $\mathfrak{A}$ generiše slučajnu promenjivu $X:A\to\mathbb{R}$ definisanu sa $X(a)=\mu^{(n)}\{\vec{b} : \mathfrak{A}\models R(a,\vec{b})\}$. Uslov $X(a)\geq r$ možemo izraziti sa $\mathfrak{A}\models (P\vec{y}\geq r)R(x,\vec{y})[a]$. Stoga, razne osobine slučajnih promenljivih možemo izraziti rečenicama verovatnosne logike.

PRIMER 2.1.17

(a) $X_n\to X$ s.s. izražavamo pomoću $(Px\geq 1)\bigwedge_n \bigvee_m \bigwedge_{k\geq m} |X_k(x)-X(x)|\leq 1/n$, gde $|X_k(x)-X(x)|\leq 1/n$ se može izraziti pomoću

$$\bigwedge_{q\in\mathbb{Q}} (X_k(x)\geq q \Rightarrow X(x)\geq q-1/n) \wedge (X(x)\geq q \Rightarrow X_k(x)\geq q-1/n).$$

(b) $X_n\to X$ u verovatnoći, izražavamo sa

$$\bigwedge_n \bigvee_m \bigwedge_{k\geq m} (Px\geq 1-1/n)|X_k(x)-X(x)|\leq 1/n.$$

(c) Slučajne promenljive $X_1$ i $X_2$ imaju istu distribuciju izražavamo sa: $\bigwedge_{q\in\mathbb{Q}} \bigwedge_{r\in\mathbb{Q}} (Px\geq r)(X_1(x)\geq q) \Leftrightarrow (Px\geq r)(X_2(x)\geq q)$. ■

Jezik $L=\{X_i,c_j\}$ koga čine simboli slučajnih promenljivih i konstanti, generiše prebrojiv jezik $L' = \{[X_i\geq r],[X_i\leq r],c_j : r\in\mathbb{Q}\}$ relacijskih i konstantnih simbola. Skup formula logike slučajne promenljive $L_{\mathscr{A}P}(\mathbb{R})$ definišimo kao skup formula logike $L'_{\mathscr{A}P}$. Sledeće četiri aksiome opisuju relevantne osobine slučajnih promenljivih.

$D_1$ $[X_i \geq r] \Rightarrow [X_i \geq s]$, gde $r \geq s$ ;

$D_2$ $[X_i > r] \Longleftrightarrow \bigvee_n [X_i \geq r+1/n]$ ;

$D_3$ $[X_i \geq r] \Longleftrightarrow \bigwedge_n [X_i \geq r-1/n]$ ;

$D_4$ $\bigvee_n ([X_i \geq -n] \wedge [X_i \leq n])$ .

Navedene aksiome zajedno sa aksiomama $A_1$-$A_6$ i $B_1$-$B_4$ logike $L'_{\mathscr{A}P}$, čine potpun sistem aksioma logike $L_{\mathscr{A}P}(\mathbb{R})$. Potpunost i druge model-teoretske osobine logike $L_{\mathscr{A}P}(\mathbb{R})$ izvodimo iz odgovarajućih osobina logike $L'_{\mathscr{A}P}$ tako što verovatnosni model $\mathfrak{A}'$ prevodimo u model slučajne promenljive $\mathfrak{A}$ pomoću

$$X^{\mathfrak{A}}(\vec{a}) = \sup\{ r \in \mathbb{Q} : \mathfrak{A}' \models [X \geq r][\vec{a}] \} .$$

Navedimo samo teoremu potpunosti za $L_{\mathscr{A}P}(\mathbb{R})$.

TEOREMA 2.1.18

Prebrojiva teorija T logike $L_{\mathscr{A}P}(\mathbb{R})$ ima model slučajne promenljive akko je konzistentna u logici $L_{\mathscr{A}P}(\mathbb{R})$ . □

## 2.2. LOGIKA SA INTEGRALIMA

Neka je $\langle A, S, \mu \rangle$ verovatnosni prostor i $f: A \to \mathbb{R}$ $\mu$-integrabilna funkcija. Dodro je poznato da:

$$\int f d\mu > r \quad \text{akko} \quad \bigvee_{\substack{n<\omega,\ r_1, q_1, \ldots, r_n, q_n \in \mathbb{Q} \\ r_i \in [0,1],\ \Sigma r_i q_i > r}} \ \bigwedge_{1 \leq i \leq n} \mu\{a : f(a) > q_i\} \geq r_i \qquad (I)$$

Ova osobina daje mogućnost izražavanja Lebesqueovog integrala pomoću mere, tj. rečenicom sa verovatnosnim kvantifikatorima. Kako je neke osobine verovatnosnog prostora, na primer, osobine slučajne promenljive, obično lakše izraziti koristeći integrale, to uvodimo logiku sa integralima $L_{\mathcal{A}\int}$ , koja je, u izvesnom smislu, ekvivalentna logici $L_{\mathcal{A}P}$ (osobina (I)).

Opišimo sintaksu i semantiku logike $L_{\mathcal{A}\int}$ .

Jezik $L=\{R_i, c_j\}$ je prebrojiv $\mathcal{A}$-rekurzivan skup konačnih relacijskih i konstantnih simbola.

*Atomski termi* su oblika $1(R(\vec{x}))$ ili $1(x=y)$ , za svaku atomsku formulu logike prvog reda.

Skup *terma* logike $L_{\mathcal{A}\int}$ sadrži atomske terme, zatvoren je za integralne operatore, tj. ako je $\tau$ term i $x$ individualna promenljiva tada je i $\int\tau dx$ term, i zatvoren je za neprekidne funkcije $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ takve da $F|\mathbb{Q}^n\in\mathcal{A}$, tj. ako su $\tau_1,\dots,\tau_n$ termi, tada je i $\mathbb{F}(\tau_1,\dots,\tau_n)$ term ( specijalno, za n=0, $r\in\mathcal{A}\cap\mathbb{R}$ je term ).

*Zatvoreni termi* su termi bez slobodnih promenljivih, pri čemu integralni operator "vezuje" promenljive.

Skup *formula* logike $L_{\mathcal{A}\int}$ sadrži atomske formule, tj. formule tipa $\tau\geq 0$ gde je $\tau$ term, i zatvoren je za negacije i prebrojive konjunkcije. Ovo poslednje znači da ako je $\Phi$ skup formula sa konačno mnogo promenljivih i $\Phi\in\mathcal{A}$, tada je i $\bigwedge\Phi$ formula.

*Rečenice* su formule bez slobodnih promenljivih.

Dakle, prave kvantifikacije na skupu formula nema, već pri građenju terma koristimo integralne operatore.

Vrednost terma u verovatnosnom modelu $\mathfrak{U}$ definisana je sa:

(i) $$1(R(\vec{x}))^{\mathfrak{U}}(\vec{a}) = \begin{cases} 1 & \text{ako } \vec{a}\in R^{\mathfrak{U}} \\ 0 & \text{inače} \end{cases},$$

$$1(x=y)^{\mathfrak{U}}(a,b)= \begin{cases} 1 & \text{ako } a=b \\ 0 & \text{inače} \end{cases};$$

(ii) $$(\int\tau(x,\vec{y})dx)^{\mathfrak{U}}(\vec{a}) = \int\tau^{\mathfrak{U}}(b,\vec{a})d\mu(b) ;$$

(iii) $$\mathbb{F}(\tau_1,\dots,\tau_n)^{\mathfrak{U}}(\vec{a}) = F(\tau_1^{\mathfrak{U}}(\vec{a}),\dots,\tau_n^{\mathfrak{U}}(\vec{a}))$$

( specijalno: $r^{\mathfrak{U}} = r$ ) .

Zadovoljenje atomskih formula definisano je sa:

$$\mathfrak{A} \models \tau \geq 0\ [\vec{a}] \quad \text{akko} \quad \tau^{\mathfrak{A}}(\vec{a}) \geq 0\ .$$

Aksiome logike $L_{\mathcal{A}\int}$ dobijene su, uglavnom, translacijom odgovarajućih aksioma logike $L_{\mathcal{A}P}$. Sledeći skup aksioma logike $L_{\mathcal{A}\int}$ motivisan disertacijom Rodenhausena [50], uveo je Keisler u [30].

$E_1$ Sve šeme aksioma logike $L_{\mathcal{A}}$ bez kvantifikatora sa $\mathbf{1}(x=y)=1$ umesto $x=y$ .

$E_2$ $\tau = 0 \vee \tau = 1$ , za svaki atomski term $\tau$ .

$E_3$ (i) $r \geq r$ ,

(ii) $\tau \geq r \Rightarrow \tau \geq s$ , za $r \geq s$ .

$E_4$ $\langle\tau_1, \ldots, \tau_m\rangle \in S \Rightarrow \mathbb{F}(\tau_1, \ldots, \tau_m) \in [a,b]$ , za svaki racionalan zatvoreni pravougaonik $S \subseteq \mathbb{R}^m$ i $[a,b]=F(S)$ .

$E_5$ (i) $\int r dx = r$ ,

(ii) $\int \tau(x)dx = \int \tau(y)dy$ ,

(iii) $\int\int \tau(x,y)dxdy = \int\int \tau(x,y)dydx$ ,

(iv) $\int(r\cdot\sigma + s\cdot\tau)dx = r\cdot\int\sigma dx + s\cdot\int\tau dx$ .

$E_6$ $\tau > r \Longleftrightarrow \bigvee_n \tau \geq r+1/n$ .

$E_7$ Za svako $m \in \mathbb{N}$ ,

$$\bigvee_k \int \mathbb{F}_k(1-\int \mathbb{F}_m(\int|\tau(\vec{x},\vec{z})-\tau(\vec{y},\vec{z})|d\vec{z})d\vec{y})d\vec{x} \geq 1-1/m\ ,$$

gde je $F_k(s) = \begin{cases} 1 & \text{ako } s \geq 2/k \\ 0 & \text{ako } s \leq 1/k \\ \text{linearno} & \text{inače} \end{cases}$ ,

a $\int\tau d\vec{x}$ je $\int(\int\ldots(\int\tau dx_1)\ldots dx_{n-1})dx_n$ .

Pravila izvođenja su:

$F_1$ $\varphi\ ,\ \varphi \Rightarrow \psi \vdash \psi$ .

$F_2$ $\{\ \varphi \Rightarrow \psi : \psi \in \Psi\ \} \vdash \varphi \Rightarrow \bigwedge \Psi$ .

$F_3$ $\varphi \Rightarrow (\tau(x) \geq 0) \vdash \varphi \Rightarrow (\int\tau(x)dx) \geq 0$ , gde $x$ nije slobodno u $\varphi$ .

Problem potpunosti za logiku $L_{\mathcal{A}\int}$ rešava se Henkinovom konstrukcijom slabe integralne strukture, a zatim Loebovom konstrukcijom Daniellovog integrala (videti [30] i [36]).

**TEOREMA 2.2.1** (Keisler [30])

Prebrojiva teorija T je konzistentna u $L_{\mathcal{A}\int}$ akko ima verovatnosni model. □

Indukcijom po izgrađenosti terma logike $L_{\mathcal{A}\int}$, svakom termu $\tau(\vec{x})$ i svakom $r\in\mathbb{R}\cap\mathcal{A}$ pridružimo formulu $\varphi_{\tau,r}$ logike $L_{\mathcal{A}P}$, tako da u svakoj verovatnosnoj strukturi $\mathfrak{A}$ važi :

$$\tau^{\mathfrak{A}}(\vec{a}) > r \ \text{ akko } \ \mathfrak{A} \models \varphi_{\tau,r}[\vec{a}] \ , \ \vec{a}\in A^n \ .$$

Ako je $\tau(\vec{x})$ oblika $1(R(\vec{x}))$, tada $\varphi_{\tau,r}$ je $\begin{cases} x = x & \text{za } r<0 \\ R(\vec{x}) & \text{za } 0\le r<1 \\ x \neq x & \text{za } r\ge 1 \end{cases}$ , i

slično za $1(x=y)$. Ako je $\tau(\vec{x})$ oblika $\int\sigma(\vec{x},y)dy$, tada $\varphi_{\tau,r}$ je

$$\bigvee_{\substack{n<\omega,\ r_1,q_1,\dots,r_n,q_n\in\mathbb{Q} \\ r_i\in[0,1],\ \Sigma r_i\cdot q_i > r}} \ \bigwedge_{1\le i\le n} (Py\ge r_i)\ \varphi_{\sigma,q_i}(\vec{x},y) \quad \text{(osobina (I))}.$$

Ako je $\tau(\vec{x})$ oblika $\mathbb{F}(\tau_1,\dots,\tau_n)$ i $F^{-1}(r,+\infty)$ prebrojiva unija otvorenih pravougaonika $\Pi_i=(r_{1i},s_{1i})\times\dots\times(r_{ni},s_{ni})$, tada $\varphi_{\tau,r}$ je

$$\bigvee_i \ \bigwedge_{1\le j\le n} \Big(\varphi_{\tau_j,r_{ji}} \wedge \bigvee_{q\in\mathbb{Q},\, q<s_{ji}} \neg\varphi_{\tau_j,q}\Big) \ .$$

Stoga, za svaku formulu $\varphi(\vec{x})$ logike $L_{\mathcal{A}P\int}$, koja ima sve simbole i pravila kao i $L_{\mathcal{A}P}$ i $L_{\mathcal{A}\int}$, postoji formula $\psi(\vec{x})$ logike $L_{\mathcal{A}P}$ i formula $\theta(\vec{x})$ logike $L_{\mathcal{A}\int}$ tako da $L_{\mathcal{A}P\int}\models \varphi(\vec{x}) \Longleftrightarrow \psi(\vec{x})$ i $L_{\mathcal{A}P\int}\models \varphi(\vec{x}) \Longleftrightarrow \theta(\vec{x})$. Takođe, za rečenicu $\varphi$ logike $L_{\mathcal{A}P}$ važi $L_{\mathcal{A}P\int}\models \varphi$ akko $L_{\mathcal{A}P}\models \varphi$, i za rečenicu $\psi$ logike $L_{\mathcal{A}\int}$ važi $L_{\mathcal{A}P\int}\models \psi$ akko $L_{\mathcal{A}\int}\models \psi$. Dakle, logika $L_{\mathcal{A}P\int}$ je konzervativna definiciona ekstenzija i logike $L_{\mathcal{A}P}$ i logike $L_{\mathcal{A}\int}$, pa možemo napraviti paralelu između model-teoretskih rezultata koji važe za obe logike.

Navedimo samo teoremu konačne kompaktnosti za logiku $L_{\mathcal{A}\int}$. Ulogu univerzalno konjunktivnih formula igraju formule oblika $\tau\in[r,s]$, gde je $\tau$ term logike $L_{\mathcal{A}\int}$.

TEOREMA 2.2.2 (Keisler [28])

Ako je $T$ skup rečenica logike $L_{\mathcal{A}\int}$ oblika $\tau\in[r,s]$, i ako svaki konačan podskup od $T$ ima gradirani verovatnosni model, tada i $T$ ima gradirani verovatnosni model. □

Paralelno povezivanju verovatnosne kvantifikacije i slučajnih promenljivih uvodenjem logike $L_{\mathcal{A}P}(\mathbb{R})$ , možemo povezati integralne operatore i slučajne promenljive logikom $L_{\mathcal{A}\int}(\mathbb{R})$.

Neka je $L=\{X_i,c_j\}$.

*Atomski termi* logike $L_{\mathcal{A}\int}(\mathbb{R})$ su oblika $X_{i,r}(\vec{x})$ ili $1(x=y)$, dok su *termi* i *formule* definisani na isti način kao i za $L_{\mathcal{A}\int}$ .

Vrednost terma u strukturi $\mathfrak{A}$ slučajne promenljive, u slučaju pridodatog atomskog terma definisana je sa:

$$X^{\mathfrak{A}}_{i,r}(\vec{a}) = \min(r,\max(-r,X^{\mathfrak{A}}_i(\vec{a}))) .$$

Da bi dobili potpun sistem aksioma logike $L_{\mathcal{A}\int}(\mathbb{R})$, dovoljno je samo aksiomu $E_2$ logike $L_{\mathcal{A}\int}$ zameniti sledećim aksiomama:

$G_1$ $1(x=y) = 0 \vee 1(x=y) = 1$ .

$G_2$ $X_{i,s}(\vec{x}) = \min(s,\max(-s,X_{i,r}(\vec{x})))$ za $0\le s\le r$ .

$G_3$ $\bigvee_k (|X_{i,k+1}(\vec{x})| \le k)$ .

$G_4$ Za svako $m\in\mathbb{N}$ , $\bigvee_k \int|X_{i,k+1}(\vec{x}) - X_{i,k}(\vec{x})|d\vec{x} \le 1/m$ .

Logike $L_{\mathcal{A}P}(\mathbb{R})$ i $L_{\mathcal{A}\int}(\mathbb{R})$ imaju zajedničku konzervativnu definicionu ekstenziju. Drugim rečima, to su ekvivalentne logike, pa model-teoretski rezultati koji važe za $L_{\mathcal{A}P}(\mathbb{R})$ važe i za $L_{\mathcal{A}\int}(\mathbb{R})$.

Na kraju ovog dela, navedimo i jednu modifikaciju logike sa integralima koju je uveo D. Hoover u [23]. U logici $L(\int)_{\mathcal{A}}$ možemo realizovati teoriju mere već na slabim integralnim modelima. Opišimo ovu logiku i njene analitičke modele.

Prebrojiv jezik L je disjunktna unija skupova $L^2$, $L^{\mathbb{R}}$ i $L^f$

koji su $\Sigma$-definabilni na $\mathcal{A}$. Skup $L^2$ čine relacijski simboli koji uzimaju u modelu vrednosti 0 i 1 (lažno i tačno), $L^{\mathbb{R}}$ čine oni relacijski simboli koji uzimaju vrednosti iz $[0,1]$, dok $L^f$ čine svi funkcijski i konstantni simboli.

Nad prebrojivo mnogo promenljivih $v_0, v_1, v_2, \ldots$ koristeći konstantne i funkcijske simbole definisani su *termi logike* $L(\int)_{\mathcal{A}}$ kao i za logiku prvog reda.

*Atomske formule* su oblika $R(t_1,\ldots,t_n)$, gde $R \in L^{\mathbb{R}} \cup L^2$ je n-arni relacijski simbol i $t_1,\ldots,t_n$ su termi, ili $r$, gde $r \in \mathbb{R} \cap \mathcal{A}$.

Skup *realno-vrednosnih formula* sadrži atomske formule, zatvoren je za neprekidne realne funkcije dva argumenta $+$, $\cdot$, min i max, zatvoren je za supremum, tj. ako je $\Phi$ prebrojiv skup realno-vrednosnih formula sa konačno mnogo slobodnih promenljivih i $b \in \mathbb{R} \cap \mathcal{A}$, tada je i $\min(\sup\Phi, b)$ realno-vrednosna formula, i zatvoren je za integralne operatore.

Skup *iskaza* logike $L(\int)_{\mathcal{A}}$ čine izrazi oblika $\varphi = \psi$ ili $\varphi \le \psi$, gde su $\varphi, \psi$ realno-vrednosne formule, i zatvoren je za negacije i prebrojive konjunkcije i disjunkcije.

Prednost ove logike nad logikom $L_{\mathcal{A}\int}$ je, između ostalog, što možemo pomoću iskaza opet napraviti realno-vrednosne formule. Naime, ako je p iskaz, tada $1(p)$ je realno-vrednosna formula definisana sa:

$$1(\varphi \le \psi) = 1 - \min(\sup_{n \ge 0} n(\varphi - \psi), 1) \ ;$$

$$1(\varphi = \psi) = \min(1(\varphi \le \psi), 1(\psi \le \varphi)) \ ;$$

$$1(\neg p) = 1 - 1(p) \ ;$$

$$1(\bigvee_i p_i) = \min(\sup_i 1(p_i), 1) \ .$$

Aksiome logike $L(\int)_{\mathcal{A}}$ (videti [23]):

$H_1$ Sve aksiome logike $L_{\mathcal{A}}$ bez kvantifikatora sa iskazima u formulaciji.

$H_2$ Sve konačne teoreme bez kvantifikatora teorije realnih, zatvorenih polja sa max i min, plus dijagram uređenog polja realnih brojeva $\langle\mathbb{R},+,\cdot,\leq\rangle$ i

$$(\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \varphi \leq \psi+1/n) \Rightarrow \varphi \leq \psi .$$

$H_3$ $0 \leq R \wedge R \leq 1$ za $R\in L^{\mathbb{R}}$ ,

$R = 0 \vee R = 1$ za $R\in L^2$ .

$H_4$ $\min(\sup\Phi, b) \leq \psi \iff \bigwedge_{\varphi\in\Phi} \min(\varphi, b) \leq \psi$ .

$H_5$ $(t=t) = 1$ , $(s=t) = (t=s)$ , $\min(s=t, t=u) \leq s=u$ ,

$\min(s_1=t_1,\dots,s_n=t_n) \leq f(s_1,\dots,s_n)=f(t_1,\dots,t_n)$ ,

$\min(s_1=t_1,\dots,s_n=t_n, R(s_1,\dots,s_n)) \leq R(t_1,\dots,t_n)$ ,

gde $s,t,u,s_1,\dots,s_n,t_1,\dots,t_n$ su termi, $R\in L^2\cup L^{\mathbb{R}}$ i $f\in L^f$ .

$H_6$ $\int\varphi(x)dx = \int\varphi(y)dy$ ,

$\int\varphi\cdot\psi dx = \varphi\cdot\int\psi dx$ ako $x$ nije slobodno u $\varphi$ ,

$\int\varphi+\psi dx = \int\varphi dx + \int\psi dx$ ,

$\int\int\varphi dxdy = \int\int\varphi dydx$ .

$H_7$ $\int\min(\sup\Phi, b)dx = \min(\sup\{\int\min(\sup\Phi_0, b)dx : \Phi_0\subseteq\Phi \text{ konačan}\}, b)$.

$H_8$ Za svako realno $\varepsilon>0$ ,

$P\{\vec{x}: P\{\vec{y}: \int|\varphi(\vec{x},\vec{z}) - \varphi(\vec{y},\vec{z})|d\vec{z} < \varepsilon\} > 0\} = 1$ ,

gde $P\{\vec{x}: p(\vec{x})\} = \int 1(p)d\vec{x}$ .

Pravila izvođenja su:

$I_1$ $\varphi$ , $\varphi \Rightarrow \psi \vdash \psi$ .

$I_2$ $p(x) \vdash p(t)$ , $x$ promenljiva , $t$ term .

$I_3$ $\varphi \leq \psi \vdash \int\varphi dx \leq \int\psi dx$ .

Pod modelom logike $L(\int)_{\mathcal{A}}$ podrazumevamo analitički verovatnosni model. Naime, univerzum $A$ modela $\mathfrak{A}=\langle A, R^{\mathfrak{A}}, c^{\mathfrak{A}}, f^{\mathfrak{A}}, \mu\rangle$

logike $L(\int)_{\mathcal{A}}$ je analitički podskup skupa $\mathbb{R}$ realnih brojeva, sve relacije $R^{\mathfrak{U}}$ su $dom(\mu^k)/\mathcal{B}$-merljive funkcije $A^k \to [0,1]$ $(A^k \to \{0,1\})$ za $R \in L^{\mathbb{R}}$ $(R \in L^2)$, i sve funkcije $f^{\mathfrak{U}}: A^k \to A$ su $dom(\mu^k)/dom(\mu)$-merljive.

Realizacija teorije mere na slaboj integralnoj strukturi biće opisana u drugom delu glave §3 . Navedimo samo teoremu potpunosti za analitičke modele, koju je D. Hoover dokazao u [23] ne koristeći Loebovu konstrukciju mere na nestandardnom univerzumu.

**TEOREMA 2.2.3**

Teorija T logike $L(\int)_{\mathcal{A}}$ koja je $\Sigma$-definabilna na $\mathcal{A}$ i konzistentna u logici $L(\int)_{\mathcal{A}}$ ima analitički verovatnosni model. □

Analitički verovatnosni model dobro poznatim tehnikama nestandardne analize (videti primer 1.2.2), možemo transformisati u hiperkonačan model, što zajedno sa prethodnom teoremom obezbeđuje egzistenciju hiperkonačnog modela za logiku $L(\int)_{\mathcal{A}}$ .

## 2.3. LOGIKA SA OPERATOROM USLOVNOG OČEKIVANJA

Za izražavanje takvih pojmova iz teorije verovatnoće kao što su martingali, Markovljevi procesi i slično, potrebno je izgraditi takvu verovatnosnu logiku koja će imati razrađen koncept uslovnog očekivanja. To se postiže dodavanjem novog operatora $E[\,|\,]$ logici $L_{\mathcal{A}\int}$ , koji igra ulogu uslovnog očekivanja.

Logiku uslovnog očekivanja $L_{\mathcal{A}E}$ uveo je Keisler u [30], a doprinos u rešavanju nekih logičkih problema kao što su egzistencija i jedinstvenost hiperkonačnih modela logike $L_{\mathcal{A}E}$ , Robinsonova neprotivrečnost i Craigova interpolacija, dao je Fajardo u [11].

Skup terma logike $L_{\mathcal{A}E}$ proširen je u odnosu na $L_{\mathcal{A}\int}(\mathbb{R})$

dodavanjem novog uslova: ako je $\tau(\vec{x},y)$ term i z promenljiva, tada je i $E[\tau(\vec{x},y)|y](z)$ term u kome je y vezana a z slobodna promenljiva.

Interpretacija terma u strukturi uslovnog očekivanja za slučaj operatora uslovnog očekivanja data je sa:

$E[\tau(\vec{x},y)|y](z)^{\mathfrak{A}}: A^n x A \to \mathbb{R}$ je $\mu^{(n)} x\mathcal{F}$-merljiva funkcija takva da za svako $\vec{a}\in A^n$ $E[\tau(\vec{x},y)|y](z)^{\mathfrak{A}}(\vec{a},b)=E[\tau^{\mathfrak{A}}(\vec{a},\cdot)|\mathcal{F}](b)$ za $\mu$-skoro svako $b\in A$.

Da bi dobili potpun skup aksioma logike $L_{\mathcal{A}E}$, dovoljno je aksiomama i pravilima izvođenja logike $L_{\mathcal{A}\int}(\mathbb{R})$ dodati sledeće dve aksiome, kojima formalizujemo definiciju uslovnog očekivanja.

$J_1$ $E[\tau(\vec{x},y)|y](z) = E[\tau(\vec{x},u)|u](z)$ ,

gde se promenljive y i u ne pojavljuju u $\vec{x}$ .

$J_2$ $\int E[\sigma(y)|y](y)\cdot\tau(y)dy = \int E[\sigma(y)|y](y)\cdot E[\tau(y)|y](y)dy$ .

Keisler u [30] rešava problem potpunosti za logiku $L_{\mathcal{A}E}$ prevođenjem rečenica ove logike u rečenice logike $K_{\mathcal{A}\int}(\mathbb{R})$, gde je K novi jezik proširen simbolima slučajne promenljive $X_\tau$ za svaki term $\tau$ logike $L_{\mathcal{A}E}$ oblika $E[\sigma(\vec{x},y)|y](z)$, a zatim koristi potpunost za logiku $K_{\mathcal{A}\int}(\mathbb{R})$. Fajardo u [11] daje jedno proširenje teoreme potpunosti za $L_{\mathcal{A}E}$ koristeći familiju $\{\mathcal{F}_n : n\in\mathbb{N}\}$ $\sigma$-podalgebri algebre $\mu$-merljivih skupova u strukturi uslovnog očekivanja, za koju važi $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}$ , $n\in\mathbb{N}$ . Dovoljno je dodati prebrojivo novih aksioma: $E_n[\tau(\vec{x},y)|y]=E_{n+1}[E_n[\tau(\vec{x},y)|y]|y]$ , $n\in\mathbb{N}$ (videti primer 1.1.4).

TEOREMA 2.3.1 (Fajardo [11])

Neka je T teorija logike $L_{\mathcal{A}\{E_n : n\in\mathbb{N}\}}$ sa operatorima uslovnog očekivanja za svako $n\in\mathbb{N}$. Teorija T ima model oblika $\mathfrak{A}=\langle A, X_i^{\mathfrak{A}}, c_j^{\mathfrak{A}}, \mu, \mathcal{F}_n\rangle_{i\in I, j\in J, n\in\mathbb{N}}$ za koji je $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}$ , $n\in\mathbb{N}$, akko je konzistentna sa aksiomama ove logike . □

Fajardo u [11] uvodi pojam hiperkonačnih modela logike $L_{\mathcal{A}E}$ paralelno Keislerovim definicijama istih za logiku $L_{\mathcal{A}P}$ , i rešava probleme egzistencije i jedinstvenosti ovih modela, a pomoću njih dokazuje svojstva Robinsonove neprotivrečnosti i Craigove interpolacije za logiku $L_{\mathcal{A}E}$ .

## 2.4. ADAPTIRANA VEROVATNOSNA LOGIKA

Za model-teoretsko proučavanje teorije stohastičkih procesa potrebno je izvršiti modifikaciju logike sa uslovnim očekivanjem. Logiku koju ćemo zvati adaptiranom verovatnosnom logikom i označavati sa $L_{ad}$ uveo je Keisler, a posebno proučavao Rodenhausen u svojoj disertaciji [50].

Promenljive logike $L_{ad}$ razdvajamo u dve grupe: jedna verovatnosna promenljiva x prve vrste i prebrojivo mnogo vremenskih promenljivih $t_1, t_2, \ldots$ druge vrste. Nelogički simboli jezika L su simboli stohastičkih procesa $X_i$ , $i \in I$ .

Atomski termi logike $L_{ad}$ su oblika $X_{i,r}(x,t)$ za svako $r \in \mathbb{Q}^+$.

Terme logike $L_{ad}$ čine: atomski termi ; svaka vremenska promenljiva t ; svaki realan broj $r \in \mathbb{R} \cap \mathcal{A}$ ; izrazi oblika $\mathbb{F}(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, gde $F \in C_{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)$ i $\tau_1, \ldots, \tau_n$ su termi ; izrazi oblika $\int \tau dx$ , $\int \tau dt$ , $E[\tau | s](x,t)$ gde je $\tau$ term a s, t vremenske promenljive.

Formule logike $L_{ad}$ su definisane kao i za logiku $L_{\mathcal{A}\int}$ .

Interpretacija terma i zadovoljenje formula logike $L_{ad}$ u adaptiranom verovatnosnom modelu su uobičajeno definisani.

Izrazimo neke poznate osobine stohastičkih procesa rečenicama logike $L_{ad}$ .

PRIMER 2.4.1

(a) Proces $\tau(x)$ je *martingal* ako $s\le t \Rightarrow \tau(s)=E[\tau(t)|s]$ s.s. ,

gde $E[\tau|s]$ je skraćenica za $E[\tau|s](x,s)$ a

$\tau(s)=\sigma(s)$ s.s. za $\int|\tau(s)-\sigma(s)|dx \le 0$ .

(b) $\tau(s)$ je Markovljev proces sa neprekidnom funkcijom prelaza $F\to T_F$ (Fellerov proces) za $F\in C_{\mathcal{A}}(\mathbb{R})$ ako

$$s\le t \Rightarrow E[F(\tau(t))|s]=T_F(s,t,\tau(s)) \text{ s.s.}$$

(c) X je Brownovo kretanje ako

(i) X je martingal ,

(ii) $s=0 \Rightarrow X(s)=0$ s.s. ,

(iii) $s\le t \Rightarrow E[(X(t)-X(s))^2|s]=t-s$ s.s. ,

(iv) $s\le t \Rightarrow E[F(X(t)-X(s))|s]=\int F(X(t)-X(s))dx$ s.s. . ∎

Skup aksioma logike $L_{ad}$ dao je Rodenhausen u [50]. Navedimo aksiomatizaciju koja se može naći u [31].

$K_1$ Svi primeri tautologija iskaznog računa.

$K_2$ $\bigwedge\Phi \Rightarrow \varphi$ , gde $\varphi\in\Phi$ .

$K_3$ (i) $X_{i,a}(x,t)=\min(a,\max(-a,X_{i,b}(x,t)))$ za $0\le a\le b$ ,

(ii) $\bigvee_k |X_{i,k+1}(x,t)| \le k$ ,

(iii) za svako m , $\bigvee_k \int\int|X_{i,k+1}(x,t)-X_{i,k}(x,t)|dxdt \le 1/m$.

$K_4$ (i) $a \ge a$ ,

(ii) $\tau \ge a \Rightarrow \tau \ge b$ za $a \ge b$ ,

(iv) $0 \le \tau \wedge \tau \le 1$ .

$K_5$ $(\tau_1,\dots,\tau_m)\in S \Rightarrow F(\tau_1,\dots,\tau_m)\in[a,b]$ , za svaki racionalan zatvoren pravougaonik $S\subseteq\mathbb{R}^m$ , $F\in C_{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^m)$ i $F(S)=[a,b]$ .

$K_6$ (i) $\int a dt = a$ , $\int a dx = a$ ,

(ii) za svako $f\in C[0,1]$ i $\int_0^1 f(\xi)d\xi = a$

imamo aksiomu $\int f(t)dt = a$ ,

(iii) $\int\tau(s,\dots)ds = \int\tau(t,\dots)dt$ ;

(iv) $\int\int\tau(s,t,\dots)dsdt = \int\int\tau(s,t,\dots)dtds$ ,

(v) $\int(a\cdot\tau+b\cdot\sigma)dx = a\cdot\int\tau dx + b\cdot\int\sigma dx$ ,

(vi) $\bigwedge_m \bigvee_n \int\int\int|\tau(x,\vec{s},\dots)-\tau(x,\vec{t},\dots)|\max(0,1-|\vec{s}-\vec{t}|n)d\vec{s}d\vec{t}dx\le 1/mn$

tj. $\tau$ je $\mu\times\lambda^k$-merljiva funkcija.

$K_7$ (i) $E[\tau(s,\dots)|s](x,t) = E[\tau(u,\dots)|u](x,t)$ ,

(ii) $\int E[\tau|t]\cdot\sigma dx = \int E[\tau|t]\cdot E[\sigma|t]dx$ ,

(iii) $s\le t \Rightarrow E[\tau|s]=E[E[\tau|s]|t]$ .

Pravila izvođenja su:

$L_1$ $\varphi\ ,\ \varphi\Rightarrow\psi \vdash \psi$ ,

$L_2$ $\{\varphi\Rightarrow\psi : \psi\in\Psi\} \vdash \varphi\Rightarrow\bigwedge\Psi$ ,

$L_3$ $\varphi\Rightarrow(\tau\ge 0) \vdash \varphi\Rightarrow(\int\tau dx\ge 0)$ , $\varphi\Rightarrow(\tau\ge 0) \vdash \varphi\Rightarrow(\int\tau dt\ge 0)$ ,

gde promenljive x i t nisu slobodne u $\varphi$ .

Teoremu potpunosti za logiku $L_{ad}$ Keisler u [31] dokazuje u dva koraka. Prvo, za podlogiku $L_d$ (aksiome $K_1$-$K_6$) koja nema operator uslovnog očekivanja, potpunost se dokazuje uobičajenom primenom Henkinove konstrukcije slabog integralnog modela i Loebove konstrukcije Daniellovog integrala. Drugo, prevođenjem rečenica logike $L_{ad}$ u rečenice logike $K_d$ , gde je K proširenje jezika L novim simbolima stohastičkih procesa $X_\tau$ za svaki term $\tau$ oblika $E[\sigma|s](x,t)$, dobijamo dokaz potpunosti i za punu logiku $L_{ad}$.

**TEOREMA** 2.4.2 (Keisler [31])

Svaka rečenica logike $L_{ad}$ konzistentna sa aksiomama ove logike ima adaptirani verovatnosni model. □

Adaptirane verovatnosne strukture $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ su *slabo* $L_{ad}$*-ekvivalentne* (oznaka: $\mathfrak{A}\equiv^{\omega}\mathfrak{B}$) ako modeli $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ zadovoljavaju iste rečenice logike $L_{ad}$ .

Modeli $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ su *jako* $L_{ad}$*-ekvivalentni* (oznaka: $\mathfrak{A} \equiv^{S} \mathfrak{B}$) ako za svako $\vec{a}\in[0,1]^{n}$ i formulu $\varphi(\vec{t})$ logike $L_{ad}$ (x nije slobodno u $\varphi$) važi $\mathfrak{A}\models\varphi[\vec{a}]$ akko $\mathfrak{B}\models\varphi[\vec{a}]$ .

Adaptirani prostor $\mathcal{G}=\langle A,S,\mu,\mathcal{F}_{t}\rangle_{t\in[0,1]}$ je *zasićen* ako za svaka dva jezika $L^{1}\subseteq L^{2}$ (sa simbolima stohastičkih procesa), i proširenje $\mathfrak{A}^{1}$ prostora $\mathcal{G}$ za jezik $L^{1}$, za $\mathfrak{B}^{1}\equiv^{S}\mathfrak{A}^{1}$ i $\mathfrak{B}^{2}$ proširenje modela $\mathfrak{B}^{1}$ za jezik $L^{2}$, postoji proširenje $\mathfrak{A}^{2}$ modela $\mathfrak{A}^{1}$ za jezik $L^{2}$ tako da $\mathfrak{A}^{2}\equiv^{S}\mathfrak{B}^{2}$. *Slaba zasićenost* se definiše isto sa zapažanjem da koristimo slabu $L_{ad}$-ekvivalentnost.

Adaptirani prostor $\langle A,S,\mu,\mathcal{F}_{t}\rangle_{t\in[0,1]}$ takav da za neki internalan $*$-adaptiran prostor $\langle A,T,\nu,\mathcal{G}_{s}\rangle_{s\in[0,1]}$, algebra S je Loebova algebra generisana sa T, mera $\mu$ je kompletizacija Loebove mere od $\nu$ i $\mathcal{F}_{t}$ je $\sigma$-algebra generisana sa $\bigcup_{o s=t}\mathcal{G}_{s}\cup\{\mu\text{-nula skupovi}\}$, zovemo *adaptiranim Loebovim prostorom.*

Zasićenim strukturama teorije modela prvog reda odgovaraju zasićeni adaptirani prostori logike $L_{ad}$. Egzistencija adaptiranog Loebovog prostora koji dopušta Brownovo kretanje (videti Anderson [1]) i činjenica da su ti prostori zasićeni, obezbeđuju egzistenciju zasićenih adaptiranih verovatnosnih prostora, što daje svojstva Robinsonove neprotivrečnosti i Craigove interpolacije za logiku $L_{ad}$ . Više detalja o ovim konstrukcijama biće izneto u trećem delu glave §3 .

U adapriranoj logici $L_{ad}$ možemo da aksiomatizujemo neke osnovne pojmove opšte teorije stohastičkih procesa. Navedimo dva primera takvih aksiomatizacija.

PRIMER 2.4.3

Slučajna promenljiva $S:A\to[0,1]$ je *vreme zaustavljanja* u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_t : t\in[0,1]\}$ ako za svako $t\in[0,1]$ važi $\{a\in A: S(a)\le t\}\in\mathcal{F}_t$.

Pretpostavimo da su nelogički simboli jezika L simboli slučajnih promenljivih $S_i$, $i\in I$.

*Struktura vremena zaustavljanja jezika* L je struktura $\mathfrak{A}=\langle A, S_i^{\mathfrak{A}}, c_j^{\mathfrak{A}}, \mu, \mathcal{F}_t\rangle_{i\in I, j\in J, t\in[0,1]}$ takva da je svaka slučajna promenljiva $S_i^{\mathfrak{A}}$ vreme zaustavljanja u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_t : t\in[0,1]\}$.

Neka su atomski termi logike $L_{ad}$ oblika $S_{i,r}(x)$, sa istom interpretacijom kao i $X_{i,r}(x,t)$.

Ako aksiomama logike $L_{ad}$ dodamo aksiome:

$M_1$ $\quad \bigwedge_{r\in\mathbb{Q}^+} (0\le S_{i,r}\le 1)$ s.s. ,

$M_2$ $\quad \bigwedge_{r\in\mathbb{Q}^+} \bigvee_k \int F_k(\int |E[\min(S_{i,r},t)|t](x,t)-\min(S_{i,t}',t)|dx)dt \ge 1,$

$$\text{gde}\quad F_k(u) = \begin{cases} 0 & \text{ako } u\ge 0 \\ 1 & \text{ako } u\le 1/k \\ \text{linearno} & \text{inače} \end{cases},$$

i $\varphi\le\psi$ s.s. je zamena za $\int(\varphi-\min(\varphi,\psi))dx\le 0$ ,

dobićemo potpun skup aksioma za strukturu vremena zaustavljanja jezika L . ■

PRIMER 2.4.4

Neka je $\langle A,\mu,\mathcal{F}_t\rangle_{t\in[0,1]}$ adaptirani prostor.

$\sigma$-algebru $\mathcal{O}$ na $A\times[0,1]$ generisanu $\mu\times\beta$-merljivim skupovima B takvim da za svako $t\in[0,1]$, $B_t=\{a:(a,t)\in B\}\in\mathcal{F}_t$ i $B_t = \bigcap_{s>t} B_s$ , zovemo *optimalnom $\sigma$-algebrom u odnosu na filtraciju* $\{\mathcal{F}_t : t\in[0,1]\}$.

Stohastički proces X je *optimalan* ako je funkcija X merljiva u odnosu na optimalnu $\sigma$-algebru $\mathcal{O}$ .

Model $\mathfrak{U}=\langle A, X_i^{\mathfrak{U}}, c_j^{\mathfrak{U}}, \mu, \mathcal{F}_t\rangle_{i\in I, j\in J, t\in[0,1]}$ jezika $L=\{X_i, c_j\}$ zovemo *optimalnim modelom* ako je svaki stohastički proces $X_i^{\mathfrak{U}}$ optimalan u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_t : t\in[0,1]\}$.

Neka je T prebrojiv skup rečenica logike $L_{ad}$ i neka je

$$M_3 \qquad \bigwedge_{r\in\mathbb{Q}^+} \quad \bigvee_k \int\mathbb{F}_k(\int|E[X_{i,r}(t)|t](x,t) - X_{i,r}(t)|dx)dt \geq 1 \ .$$

Ako T ima adaptirani model, tada je $T \cup \{M_3\}$ konzistentna teorija u logici $L_{ad}$ . Ako je $T \cup \{M_3\}$ konzistentna teorija logike $L_{ad}$ , tada T ima optimalan model. ∎

Dokazi potpunosti navedenih aksiomatizacija u primerima 2.4.3 i 2.4.4 mogu se naći u [10]. Napomenimo da su aksiome $M_1$-$M_3$ zapisane u jeziku logike $L_{ad}$ , za razliku od [10] gde autor koristi i verovatnosne kvantifikatore $(P\vec{t}\geq r)$ za $r\in\mathbb{Q}\cap[0,1]$.

Na sličan način moguće je izvršiti aksiomatizaciju za prediktabilne stohastičke procese, za martingale i drugo.

## §3 DVOVEROVATNOSNE LOGIKE

H.J. Keisler u članku [30] o raznim verovatnosnim logikama postavlja probleme potpunosti i drugih logičkih i model-teoretskih rezultata za klase dvoverovatnosnih logika. Teoreme potpunosti logika $L^a_{\mathcal{A}P_1P_2}$ i $L^s_{\mathcal{A}P_1P_2}$ sa dva tipa verovatnosnih kvantifikatora u apsolutno neprekidnom i singularnom slučaju respektivno, dokazao je M. Rašković u [41] i [43]. U [45] dokazane su teoreme konačne kompaktnosti za obe logike. Proučavanje drugih model-teoretskih osobina ovih logika, kao i proučavanje osobina analognih dvoverovatnosnih logika onih logika opisanih u §2 , motivisali su ovaj rad.

### 3.1. LOGIKE SA DVA TIPA VEROVATNOSNIH KVANTIFIKATORA

Logika $L^a_{\mathcal{A}P_1P_2}$ ( a označava apsolutno neprekidni slučaj ) je slična standardnoj verovatnosnoj logici $L_{\mathcal{A}P}$. Razlika je u tome što ova logika ima dva tipa verovatnosnih kvantifikatora $P_1\vec{x}\geq r$ i $P_2\vec{x}\geq r$ .

Aksiome i pravila izvođenja za $L^a_{\mathcal{A}P_1P_2}$ su aksiome logike $L_{\mathcal{A}P}$ , stim da i $P_1$ i $P_2$ igraju ulogu $P$ , zajedno sa sledećim aksiomama:

$N_1$ *Aksiome neprekidnosti verovatnosnih kvantifikatora*

(i) $\bigwedge_n \bigvee_m (P_i\vec{y} < 1/n)(P_j\vec{x}\in[r-1/m,r))\ \varphi(\vec{x},\vec{y})$ , $i,j=1,2$ ,

(ii) $\bigwedge_n \bigvee_m (P_i\vec{y} < 1/n)(P_j\vec{x}\in(r,r+1/m])\ \varphi(\vec{x},\vec{y})$ , $i,j=1,2$ .

$N_2$ *Aksioma apsolutne neprekidnosti*

$$\bigwedge_{\varepsilon\in\mathbb{Q}^+} \bigvee_{\delta\in\mathbb{Q}^+} \bigwedge_n \bigwedge_{\varphi\in\Phi_n} ((P_2\vec{x} < \delta)\varphi(\vec{x}) \Rightarrow (P_1\vec{x} < \varepsilon)\varphi(\vec{x}))\ ,$$

gde je $\Phi = \bigcup_n \Phi_n$ , $\Phi, \Phi_n \in \mathcal{A}$ i $\Phi_n=\{\varphi\in\Phi:\ \varphi$ ima n slobodnih promenljivih$\}$ , $n<\omega$ .

Potpunost navedenog skupa aksioma logike $L^a_{\mathcal{A}P_1P_2}$ može se dokazati u tri koraka, takozvanom slabom-srednjom-jakom konstrukcijom.

Prvo, Henkinovom konstrukcijom dokazujemo egzistenciju slabog modela. Pri tome, *slab model logike* $L^a_{\mathcal{A}P_1P_2}$ je struktura $\mathfrak{U}=\langle A, R^{\mathfrak{U}}_i, c^{\mathfrak{U}}_j, \mu_{n,k}\rangle_{i\in I, j\in J, n\in\mathbb{N}, k=1,2}$ takva da je svako $\mu_{n,k}$ konačno aditivna verovatnosna mera na $A^n$ sa merljivim singltonima, i tako da je skup $\{\vec{b}\in A^n:\ \mathfrak{U}\models \varphi[\vec{a},\vec{b}]\}$ $\mu_{n,k}$-merljiv za svaku formulu $\varphi(\vec{x},\vec{y})$ i svako $\vec{a}\in A^m$ .

Dobro je poznato da je definicija ( videti uvod ) apsolutne neprekidnosti mere $\mu_1$ u odnosu na meru $\mu_2$ ekvivalentna uslovu: za svako $\varepsilon>0$ , postoji $\delta>0$ tako da za svaki merljiv skup $X$ , iz $\mu_2(X)<\delta$ sledi $\mu_1(X)<\varepsilon$ . U slučaju konačno aditivnih mera, a slabi modeli rade sa takvim merama , ovi uslovi nisu ekvivalentni. Stoga, aksiomu $N_2$ ne možemo zameniti "prirodnijom" aksiomom oblika: $\bigwedge_n \bigwedge_{\varphi\in\Phi_n} (P_2\vec{x}=0)\varphi(\vec{x}) \Rightarrow (P_1\vec{x}=o)\varphi(\vec{x})$ . U to nas može ubediti i sledeći primer.

PRIMER 3.1.1

Neka je $L=\{R_1(x), R_2(x), \dots\}$ $\Sigma_1$-definabilan skup unarnih predikata, i neka je $T=\{(P_2x\le 1/2^{n-1})R_n(x): n\in\mathbb{N}\}\cup\{(P_1x\ge 1)R_n(x): n\in\mathbb{N}\}$ prebrojiva $\Sigma_1$-definabilna teorija. Struktura $\mathfrak{N}=\langle\mathbb{N}, R^{\mathfrak{N}}_n, \mu_1, \mu_2\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ takva da je: $R^{\mathfrak{N}}_n = \{n, n+1, n+2, \dots\}$ , $\mu_1$ konačno aditivna mera na skupu prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ za koju važi

(1) $\mu_1(A)\in\{0,1\}$ za svako $A\subseteq\mathbb{N}$ ,

(2) $\mu_1(\mathbb{N})=1$ i $\mu_1(A)=0$ za svaki konačan skup A

(filter $\mathcal{F}$ kofinitnih podskupova od $\mathbb{N}$ proširimo do ultrafiltra $\mathcal{U}$ , i definišimo $\mu_1$ sa $\mu_1(A) = \begin{cases} 1 & \text{ako } A\in\mathcal{U} \\ 0 & \text{ako } A\notin\mathcal{U} \end{cases}$ ), a mera $\mu_2$ je mera na $\mathbb{N}$ takva da $\mu_2\{n\}=1/2^n$ za svako $n\in\mathbb{N}$ , predstavlja slab dvoverovatnosni model teorije T. Očigledno je da teorija T nema pravi apsolutno neprekidni dvoverovatnosni model. ∎

Kako su formule logike $L^a_{\mathcal{A}P_1P_2}$ skupovi elementi dopustivog skupa $\mathcal{A}$ i $L^a_{\mathcal{A}P_1P_2} = \mathcal{A} \cap L^a_{\omega_1 P_1 P_2}$ , to je potrebno proširiti aksiomu $N_2$ na sve formule logike $L^a_{\mathcal{A}P_1P_2}$. Ovaj problem se u [41] rešava konstrukcijom *srednjeg modela*, tj. slabog modela u kojem još važi: za svako $\varepsilon>0$, postoji $\delta>0$ tako da za svaku formulu $\varphi(\vec{x},\vec{y})$ i svako $\vec{a}\in A^m$, ako je $\mu_{n,2}\{\vec{b}\in A^n:\ \mathfrak{U}\models\varphi[\vec{a},\vec{b}]\}<\delta$ , tada je $\mu_{n,1}\{\vec{b}\in A^n:\ \mathfrak{U}\models\varphi[\vec{a},\vec{b}]\}<\varepsilon$ . Osnovne ideje ove konstrukcije koristimo u drugom delu ove glave.

Apsolutna neprekidnost uniformno po svakoj formuli $\varphi(\vec{x},\vec{y})$ u srednjem modelu, uslovljava apsolutnu neprekidnost internalnih skupova u nestandardnoj strukturi $^*\mathfrak{U}$. Loebovom konstrukcijom dvoverovatnosne strukture (teorema 1.2.1) zadržavamo apsolutnu neprekidnost i za sve Loeb-merljive skupove, jer se ovi skupovi mogu aproksimirati internalnim skupovima. Ovim, poslednjim korakom u konstrukciji apsolutno neprekidnog dvoverovatnosnog modela, završavamo skicu dokaza sledeće teoreme potpunosti logike $L^a_{\mathcal{A}P_1P_2}$.

**TEOREMA 3.1.2** (Rašković [41])

Rečenica $\varphi$ logike $L^a_{\mathcal{A}P_1P_2}$ je konzistentna akko ima apsolutno neprekidan dvoverovatnosan model. ∎

Ova teorema se sličnim argumentima može proširiti i na svaku $\Sigma_1$-definabilnu teoriju logike $L^a_{\mathcal{A}P_1P_2}$. Međutim, apsolutno neprekidna dvoverovatnosna struktura ne može biti tako aksiomatizovana da važi puna teorema potpunosti, što pokazuje sledeći primer.

PRIMER 3.1.3 (Rašković [41])

Neka je $L = \{R_1(x), R_2(x), \ldots\}$ $\Delta_1$-definabilan skup unarnih predikata koji nije podskup nekog elementa iz $\mathcal{A}$ (pa $L \notin \mathcal{A}$) i neka je $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ neka numeracija svih formula logike $L^a_{\mathcal{A}P_1P_2}$. Posmatrajmo teoriju $T = \{(P_1xy \geq 1)x \neq y,\ (P_2xy \geq 1)x \neq y\} \cup \{(P_2x < 1/2^n)S_n(x):\ n \in \mathbb{N}\} \cup$ $\cup \{(P_1x \geq 1/2)(S_1(x) \wedge \ldots \wedge S_n(x)):\ n \in \mathbb{N}\}$, gde je $S_n(x)$ prvi predikat jezika L koji se ne javlja u formulama $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ ( takav predikat postoji jer bi, inače, $L \subseteq TC(\varphi_1) \cup \ldots \cup TC(\varphi_n) \in \mathcal{A}$ ).

Teorija T očigledno nema apsolutno neprekidan dvoverovatnosan model. Ali, teorija T je konzistentna sa aksiomama logike $L^a_{\mathcal{A}P_1P_2}$. Zaista, ako je $A = [0,1]$, $\mu_1$ Lebesqueova mera na A, $\mu_2(B) = \int_B f d\mu_1$ za svako $B \subseteq A$ i $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ako } x \in [0, 1/2) \\ 1 & \text{ako } x \in [1/2, 1] \end{cases}$ i $B_i = [0, 1/2 + 1/2^{i+2})$, tada za svaki Booleov atom $A^{k_1 \ldots k_n}_{i_1 \ldots i_n} = B^{k_1}_{i_1} \cap \ldots \cap B^{k_n}_{i_n}$, gde je $B^k_n = \begin{cases} B_n & \text{za } k=1 \\ A - B_n & \text{za } k=-1 \end{cases}$, iz $\mu_2( A^{k_1 \ldots k_n}_{i_1 \ldots i_n} ) = 0$ sledi $\mu_1( A^{k_1 \ldots k_n}_{i_1 \ldots i_n} ) = 0$. Kako samo konačno predikata $S_n(x)$ može biti u nekom elementu skupa $\mathcal{A}$, a predikate možemo interpretirati sa $R^{\mathfrak{A}}_n = \begin{cases} B_n & \text{ako za neko } m \in \mathbb{N},\ R_n = S_m \\ B_1 & \text{inače} \end{cases}$, to važi i aksioma apsolutne neprekidnosti. Stoga, teorija T je konzistentna u $L^a_{\mathcal{A}P_1P_2}$. ∎

Za logiku $L^a_{\mathcal{A}P_1P_2}$ ne važi teorema kompaktnosti. Primer

2.1.11 sa , na primer , $P_1$ umesto P , to potvrduje . Koristeći ultraproizvod, konstrukciju Loebove mere, kao i činjenicu da se uslov apsolutne neprekidnosti u srednjem modelu izražava rečenicom prvog reda $(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall X)(\ \mu_2(X)<\delta \Rightarrow \mu_1(X)<\varepsilon\ )$ , primenom Losove teoreme u [45] je dokazana teorema konačne kompaktnosti za skup univerzalno konjunktivnih rečenica ove logike.

**TEOREMA 3.1.4**

Ako je T skup univerzalno konjunktivnih rečenica logike $L^a_{\mathcal{A}P_1P_2}$ i ako svaki konačan podskup od T ima gradirani apsolutno neprekidni dvoverovatnosni model, tada i T ima takav model. ∎

Logika $L^s_{\mathcal{A}P_1P_2}$ ( s označava singularan slučaj ) razlikuje se od prethodne logike samo u semantici. Strukture za logiku $L^s_{\mathcal{A}P_1P_2}$ su singularni dvoverovatnosni modeli.

Za aksiomatizaciju ovih modela dovoljno je aksiomu $N_2$ zameniti aksiomom *singularnosti* :

$$(P_1x=0)((P_1y>0)x=y \wedge (P_2y>0)x=y)\ ,\ i=1,2\ .$$

*Slaba struktura logike* $L^s_{\mathcal{A}P_1P_2}$ definisana je kao i za $L^a_{\mathcal{A}P_1P_2}$ , dok je *srednja struktura logike* $L^s_{\mathcal{A}P_1P_2}$ ona slaba struktura $\mathfrak{A}$ u kojoj postoji merljiv skup $B\subseteq A$ takav da je $\mu_1(B)=0$ i $\mu_2(B)=1$ .

Henkinova konstrukcija obezbeđuje egzistenciju slabog modela konzistentne teorije T logike $L^s_{\mathcal{A}P_1P_2}$ u kojem važi aksioma singularnosti. Dakle, u modelu $\mathfrak{A}$ važi: $\mu_k\{a:\mu_1\{a\}>0 \text{ i } \mu_2\{a\}>0\}=0$ , $k=1,2$ , što primenom konstrukcije iz [43] ( videti uvod ) , dopušta proširenje konačno aditivnih mera $\mu_1$ i $\mu_2$ do uzajamno singularnih mera. Dobijeni srednji model teorije T možemo Loebovom konstrukcijom ( teorema 1.2.1 ) transformisati u singularan dvoverovatnosan model teorije T, čime je završena skica dokaza teoreme potpunosti za logiku $L^{S}_{\mathcal{A}P_1P_2}$.

**TEOREMA** 3.1.5 (Rašković [43])

Teorija T logike $L^{S}_{P_1P_2}$ je konzistentna akko ima singularan dvoverovatnosan model. ∎

Uslov singularnosti u srednjem modelu izražavamo rečenicom prvog reda: $(\exists X)(\mu_1(X)=0 \ \wedge \ \mu_2(X)=1)$ , što i u ovom slučaju obezbeđuje konačnu kompaktnost.

**TEOREMA** 3.1.6

Ako svaki konačan podskup skupa T univerzalno konjunktivnih rečenica logike $L^{S}_{\mathcal{A}P_1P_2}$ ima gradirani singularni dvoverovatnosni model, tada i T ima takav model. □

## 3.2 LOGIKE SA DVA TIPA INTEGRALNIH OPERATORA

Koristeći dva tipa integralnih operatora $\int_1 \ldots dx$ i $\int_2 \ldots dx$ pri građenju terma logike $L_{\mathcal{A}\int}$ , dobijamo širu logiku $L_{\mathcal{A}\int_1\int_2}$ kojom možemo model-teoretski da proučavamo, na primer, odnose slučajnih veličina u dvoverovatnosnom prostoru sa merama koje su ili u apsolutno neprekidnom ili u singularnom odnosu.

Logike $L_{\mathcal{A}P_1P_2}$ i $L_{\mathcal{A}\int_1\int_2}$ imaju zajedničku konzervativnu definicionu ekstenziju, što omogućava da dođemo do sličnih rezultata i za logiku $L_{\mathcal{A}\int_1\int_2}$ . U ovom delu većina tih rezultata biće detaljno dokazana.

Dokažimo, prvo, svojstvo Barwiseove potpunosti za logike $L^{a}_{\mathcal{A}\int_1\int_2}$ i $L^{S}_{\mathcal{A}\int_1\int_2}$ , odnosno da je skup svih rečenica ovih logika, koje su valjane u svakom, odgovarajućem, dvoverovatnosnom modelu, $\Sigma_1$ nad $\mathcal{A}$ . Mada je Barwiseova potpunost posledica teoreme potpunosti za navedene logike, što je takođe sadržaj ovog dela, dajemo njen direktan dokaz da bi istakli kako se neke bitne osobine slučajnih promenljivih u dvoverovatnosnom prostoru izražavaju integralima.

Da bi dokazali Barwiseovu potpunost logike $L^{a}_{\mathcal{A}\int_1\int_2}$ ( videti Rašković, Živaljević [47] ) uvedimo širu logiku $L^{a}_{\mathcal{A}\int_1\int_2 X}$ dodavanjem prebrojivo novih unarnih relacijskih simbola $[X\geq r]$, $[X\leq r]$ za $r\in\mathbb{Q}$, i dokažimo potpunost ove nove logike.

Dvoverovatnosni modeli logike $L^{a}_{\mathcal{A}\int_1\int_2 X}$ su oblika $\mathfrak{U}=\langle A, R_i^{\mathfrak{U}}, c_j^{\mathfrak{U}}, [X\geq r]^{\mathfrak{U}}, [X\leq r]^{\mathfrak{U}}, \mu_1, \mu_2\rangle_{i\in I, j\in J, r\in\mathbb{Q}}$, gde $X^{\mathfrak{U}}: A\to\mathbb{R}^{+}$ je Radon-Nikodymov izvod mere $\mu_1$ u odnosu na meru $\mu_2$.

Aksiome i pravila izvođenja logike $L^{a}_{\mathcal{A}\int_1\int_2 X}$ su kao i za logiku $L_{\mathcal{A}\int}$ ( sa $\int_1$ i $\int_2$ umesto $\int$ ) zajedno sa sledećim aksiomama:

$O_1$ *Aksiome neprekidnosti integralnih operatora*

(i) $\bigwedge_n \bigvee_m \bigvee_k \int_i G_k(\int_j \tau(\vec{x},\vec{y})d\vec{x})d\vec{y} < 1/n$ , $i,j=1,2$ ,

$$\text{gde je}\quad G_k(s) = \begin{cases} 1 & \text{ako } r-1/m+1/k\leq s\leq r-2/k \\ 0 & \text{ako } s\leq r-1/m \text{ ili } s\geq r-1/k \\ \text{linearno} & \text{inače} \end{cases},$$

(ii) $\bigwedge_n \bigvee_m \bigvee_k \int_i H_k(\int_j \tau(\vec{x},\vec{y})d\vec{x})d\vec{y} < 1/n$ , $i,j=1,2$ ,

$$\text{gde je}\quad H_k(s) = \begin{cases} 1 & \text{ako } r+2/k\leq s\leq r+1/m-1/k \\ 0 & \text{ako } s\leq r+1/k \text{ ili } s\geq r+1/m \\ \text{linearno} & \text{inače} \end{cases},$$

$O_2$ *Aksiome slučajne promenljive* $(i=1,2)$

(i) $\bigvee_k \int_i J_k(1[X<r](x), 1[X\geq s](x))dx \geq 1$ , $r\geq s$ ,

$$\text{gde je}\quad J_k(s,t) = \begin{cases} 1 & \text{ako } s\geq 2/k \text{ ili } t\geq 2/k \\ 0 & \text{ako } s\leq 1/k \text{ i } t\leq 1/k \\ \text{linearno} & \text{inače} \end{cases}$$

(ii) $\bigvee_p \bigvee_k \int_i J_k(1[X\leq r](x), \sum_{n=1}^{p} 1[X\geq r+1/n](x))dx \geq 1$ ,

(iii) $\bigvee_p \bigvee_k \int_i J_k(\sum_{n=1}^{p} 1[X<r-1/n](x), 1[X\geq r](x))dx \geq 1$ ,

$$(iv)\quad \bigvee_p \bigvee_k \int_i \mathbb{L}_k\Big(\sum_{n=1}^{p} 1[X\geq -n](x),\ \sum_{n=1}^{p} 1[X\leq n](x)\Big)dx \geq 1\ ,$$

$$\text{gde je}\quad L_k(s,t) = \begin{cases} 1 & \text{ako } s\geq 2/k \quad \text{i} \quad t\geq 2/k \\ 0 & \text{ako } s\leq 1/k \quad \text{ili} \quad t\leq 1/k \\ \text{linearno} & \text{inače} \end{cases}.$$

$O_3$ *Radon-Nimodymove aksiome* ($n\in\mathbb{N}$; $s_0,\ldots,s_n\in\mathbb{Q}$)

$$(i)\quad \Big(\bigwedge_{0\leq i\leq n-1} \int_2 \tau(x)\cdot 1[X<s_{i+1}](x)\cdot 1[X\geq s_i](x)dx \geq r_i\Big) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Big(\int_1 \tau(x)dx \geq \sum_{i=0}^{n-1} r_i\cdot s_i\Big),\quad (s_0\leq s_1\leq\ldots\leq s_n)\ ,$$

$$(ii)\quad \Big(\bigwedge_{0\leq i\leq n-1} \int_2 \tau(x)\cdot 1[X<s_{i+1}](x)\cdot 1[X\geq s_i](x)dx \leq r_i\Big) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Big(\int_1 \tau(x)\cdot 1[X\leq m](x)dx \leq \sum_{i=0}^{n-1} r_i\cdot s_{i+1}\Big),\quad (s_0\leq s_1\leq\ldots\leq s_n=m,\ m\in\mathbb{N}.$$

Ranije pomenutom slabom-gradiranom-jakom konstrukcijom verovatnosnih modela dokazaćemo teoremu potpunosti za logiku $L^a_{\mathcal{A}\int_1\int_2 X}$.

TEOREMA 3.2.1

Svaka rečenica $\varphi$ logike $L^a_{\mathcal{A}\int_1\int_2 X}$ je konzistentna akko ima dvoverovatnosan model.

**Dokaz:** Uslov je dovoljan jer sve aksiome predstavljaju poznate osobine slučajne promenljive i Radon-Nikodymovog izvoda.

Neka je rečenica $\varphi$ konzistentna u logici $L^a_{\mathcal{A}\int_1\int_2 X}$ i neka je $C$ prebrojiv skup novih konstantnih simbola i $K=L\cup C$. Koristeći Henkinovu konstrukciju dobijamo maksimalan neprotivurečan skup $\Phi$ rečenica logike $K^a_{\mathcal{A}\int_1\int_2 X}$ tako da važi:

(1) $\varphi\in\Phi$ ,

(2) iz $(\int_k \tau(x)dx>0)\in\Phi$ sledi $(\tau(c)>0)\in\Phi$ za neko $c\in C$, $k=1,2$ (osobina svedoka (2) dobijena je primenom pravila generalizacije ).

Henkinova teorija $\Phi$ inducira slabu strukturu

$\mathfrak{A}=\langle A, R_i^{\mathfrak{A}}, [X\le r]^{\mathfrak{A}}, [X\ge r]^{\mathfrak{A}}, c_j^{\mathfrak{A}}, \mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2\rangle$ sa univerzumom $A=C$ i $\mathcal{I}_i(\tau(x,\vec{c}))=$ $=\sup\{r: (\int_i \tau(x,\vec{c})dx \ge r)\in\Phi\}$, $i=1,2$ , takvu da svaka rečenica iz $\Phi$ važi u $\mathfrak{A}$ .

Sledeći korak je konstrukcija gradiranog apsolutno neprekidnog dvoverovatnosnog modela. Ovu strukturu formiraćemo na nestandardnom univerzumu koristeći Loebovu konstrukciju Daniellovog integrala (teorema 1.2.3). Ova konstrukcija daje verovatnosne mere $\mu_1$ i $\mu_2$ na $^*A$ takve da za svaki $*$-term $\tau(x)$, standardni deo od $^*\mathcal{I}_i(\tau)$ je integral $\int {}^{\circ}\tau(b)^{\mathfrak{A}}d\mu_i(b)$ ( mere $\mu_n^i$, $i=1,2$, $n\in\mathbb{N}$, na $^*A^n$ dobijamo koristeći iterativno integrale ). Dobijeni gradirani model zadovoljava skoro svuda aksiomu $E_7$, pa time inducira dvoverovatnosni model $\langle\mathfrak{B},\nu_1,\nu_2\rangle$ rečenice $\psi$ (videti [30]).

Ako je $X^{\mathfrak{B}}(b) = \sup\{ r\in\mathbb{Q}: [X\le r]^{\mathfrak{B}}(b) \}$ , $b\in B$ , tada Radon-Nikodymove aksiome daju $\nu_1(D)=\int_D X^{\mathfrak{B}}d\nu_2$ za svaki merljiv skup $D\subseteq B$, t.j. $\nu_1 \ll \nu_2$ . Dakle, model $\mathfrak{B}$ je apsolutno neprekidan dvoverovatnosan model rečenice $\psi$ . ∎

Ma koji dvoverovatnosan model $\mathfrak{A}$ logike $L^a_{\mathcal{A}\int_1\int_2}$ možemo proširiti do modela logike $L^a_{\mathcal{A}\int_1\int_2 X}$ pomoću $X^{\mathfrak{A}}=d\mu_1/d\mu_2$ i $[X\le r]^{\mathfrak{A}}(a)$ akko $X^{\mathfrak{A}}(a)\le r$ . Skup valjanih $L^a_{\mathcal{A}\int_1\int_2 X}$-rečenica je $\Sigma_1$-definabilan formulom, na primer, $\exists P$ ( $P$ je dokaz za $\psi$ ) . Skup $L^a_{\mathcal{A}\int_1\int_2 X}$-rečenica koje ne sadrže simbole oblika $[X\ge r]$ ili $[X\le r]$ je takođe $\Sigma_1$-definabilan formulom $\exists z$ ( $z=TC(\varphi) \wedge (\forall t\in z)\neg S(t)$ ) , gde je $S(t)$ $\Delta_0$-formula koja definiše skup simbola $[X\ge r]$ i $[X\le r]$ . Time je završen dokaz Barwiseove potpunosti za logiku $L^a_{\mathcal{A}\int_1\int_2}$ .

TEOREMA 3.2.2

Skup svih valjanih rečenica logike $L^a_{\mathcal{A}\int_1\int_2}$ je $\Sigma_1$-definabilan nad $\mathcal{A}$ . ∎

Sličan rezultat za logiku $L^s_{\mathcal{A}\int_1\int_2}$ dobijamo uvođenjem logike $L^a_{\mathcal{A}\int_1\int_2 R}$ koja ima novi unarni relacijski simbol $R$ . Aksiomama logike $L_{\mathcal{A}\int}$ dodajemo samo aksiomu singularnosti:

$$\int_1 1(R(x))dx = 0 \ \wedge \ \int_2 1(R(x)dx = 1 \ .$$

TEOREMA 3.2.3

Svaka rečenica $\psi$ logike $L^s_{\mathcal{A}\int_1\int_2 R}$ je konzistentna akko ima singularan dvoverovatnosan model.

**Dokaz:** Koristi se ista Loeb-Hoover-Keisler konstrukcija kao i u apsolutno neprekidnom slučaju, sa jedinim zapažanjem da za skup $D=\{b\in B: R^{\mathfrak{B}}(b)\}$ dobijamo $\nu_1(D)=0$ i $\nu_2(D)=1$ , tj. $\nu_1 \perp \nu_2$ . ∎

Singularan dvoverovatnosan model $\langle \mathfrak{A}, \mu_1, \mu_2 \rangle$ logike $L^s_{\mathcal{A}\int_1\int_2}$ možemo proširiti do modela logike $L^s_{\mathcal{A}\int_1\int_2 R}$ uzimajući $R^{\mathfrak{A}}(a)$ akko $a\in B$ , gde je $B$ skup određen uslovom $\mu_1 \perp \mu_2$ .

Kao posledicu prethodnog razmatranja dobijamo Barwiseovu potpunost za logiku $L^s_{\mathcal{A}\int_1\int_2}$ .

TEOREMA 3.2.4

Skup svih valjanih rečenica logike $L^s_{\mathcal{A}\int_1\int_2}$ je $\Sigma_1$-definabilan nad $\mathcal{A}$ . ∎

Teoreme 3.2.2 i 3.2.4 uopštavamo teoremama potpunosti za logike $L^a_{\mathcal{A}\int_1\int_2}$ i $L^s_{\mathcal{A}\int_1\int_2}$ respektivno.

Iz Radon-Nikodymove i Fubinijeve teoreme sledi da za svaki term $\tau(x,y,\vec{z})$ logike $L^a_{\mathcal{A}\int_1\int_2}$ i apsolutno neprekidan dvoverovatnosan model $\mathfrak{A}$ , funkcija $\tau(x,y,\vec{a})^{\mathfrak{A}}: A\times A \to R$ je *kompatibilna sa merama* $\mu_1$ *i* $\mu_2$ , tj. $\int\int \tau(b,c,\vec{a})^{\mathfrak{A}} d\mu_1(b) d\mu_2(c) = \int\int \tau(b,c,\vec{a})^{\mathfrak{A}} d\mu_2(c) d\mu_1(b)$ .

Ova činjenica, kao i Loebova konstrukcija Daniellovog integrala, upućuje nas da aksiomatizaciju logike $L^a_{\mathcal{A}\int_1\int_2}$ izvršimo tako što aksiomama logike $L_{\mathcal{A}\int}$ dodamo aksiome neprekidnosti integralnih operatora ($O_1$ i $O_2$) i sledeće *aksiome apsolutne neprekidnosti* :

$P_1$ $\quad \bigwedge_{\varepsilon\in\mathbb{Q}^+} \bigvee_{\delta\in\mathbb{Q}^+} \bigwedge_n \bigwedge_{\tau\in T_n} (|\int_2\tau(\vec{x})d\vec{x}|<\delta \Rightarrow |\int_1\tau(\vec{x})d\vec{x}|<\varepsilon)$ ,

gde je $T = \cup_n T_n$ , $T, T_n \in \mathcal{A}$ i $T_n$ je skup terma sa n slobodnih promenljivih ,

$P_2$ $\quad \int_1(\int_2\tau dy)dx = \int_2(\int_1\tau dx)dy$ .

Da je navedena aksiomatizacija kompletna na klasi apsolutno neprekidnih dvoverovatnosnih modela, dokazaćemo koristeći *slabu-srednju-jaku konstrukciju modela.*

Ako je T konzistentna teorija logike $L^a_{\mathcal{A}\int_1\int_2}$ i $\Sigma_1$-definabilna nad $\mathcal{A}$, tada uobičajenom Henkinovom konstrukcijom dobijamo slab integralni model $\mathfrak{A}=\langle A, R_i^{\mathfrak{A}}, c_j^{\mathfrak{A}}, \mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2\rangle_{i\in I, j\in J}$ teorije T u kojem je svaka teorema logike $L^a_{\mathcal{A}\int_1\int_2}$ tačna. Neka je K=L∪C jezik uveden u ovoj konstrukciji, gde je C skup novih konstantnih simbola.

Sledeći korak je dokaz potpunosti za *srednji integralni model*, tj. slab model $\mathfrak{A}$ u kojem još važi: za svako $\varepsilon>0$, postoji $\delta>0$ tako da za svaki term $\tau(x,\vec{y})$ i $\vec{a}\in A^n$, iz $|\mathcal{I}_2(\tau(x,\vec{a}))|<\delta$ sledi $|\mathcal{I}_1(\tau(x,\vec{a}))|<\varepsilon$ .

**LEMA 3.2.5**

Neka je T teorija logike $L^a_{\mathcal{A}\int_1\int_2}$ koja je $\Sigma_1$-definabilna nad $\mathcal{A}$ . Teorija T je konzistentna akko ima srednji integralni model u kojem je svaka teorema logike $L^a_{\mathcal{A}\int_1\int_2}$ tačna.

**Dokaz:** Neka je $\mathfrak{A}$ slab integralni model i K=L∪C . Želimo da proširimo aksiomu $P_1$ na sve terme logike $L^a_{\mathcal{A}\int_1\int_2}$.

Neka je $K'$ jezik sa četiri vrste promenljivih: $X, Y, Z, \ldots$ promenljive za skupove; $x, y, z, \ldots$ metapromenljive; $r, s, t, \ldots$ promenljive za realne brojeve iz $[0,1]$ i $U, V, W, \ldots$ promenljive za funkcije $A^n \to \mathbb{R}$, $n \geq 0$.

Predikati jezika $K'$ su : $\leq$ za realne brojeve; $E^s_n(\vec{x}, X)$ za skupove, $n \geq 1$; $E^t_{n+1}(\vec{x}, r, U)$ za terme, $n \geq 0$ i $I_m(U, r)$ za integralne operatore, $m = 1, 2$.

Funkcijski simboli jezika $K'$ su : $f, g, h, \ldots$ za svaku neprekidnu realnu funkciju $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ takvu da $F|\mathbb{Q}^n \in \mathcal{A}$, $n \geq 0$.

Konstantni simboli jezika $K'$ su : $X_\varphi$ za svaku formulu $\varphi$; $U_\tau$ za svaki term $\tau$ i $\bar{r}$ za svaki realan broj $r \in [0,1] \cap \mathcal{A}$.

Neka je $S$ teorija logike $K'_{\mathcal{A}}$ prvog reda definisana sledećim formulama:

$S_1$ *Dobra definisanost*

(i) $(\forall X) \bigwedge_{n<m} \neg(\exists \vec{x}, \vec{y})(E^s_m(\vec{x}, \vec{y}, X) \wedge E^s_n(\vec{x}, X))$ , gde $\{\vec{x}\} \cap \{\vec{y}\} = \emptyset$;

(ii) $(\forall U) \bigwedge_{n<m} \neg(\exists \vec{x}, \vec{y}, r, s)(E^t_{m+1}(\vec{x}, \vec{y}, r, U) \wedge E^t_{n+1}(\vec{x}, s, U))$ ;

(iii) $(\forall U)(\forall \vec{x}, r, s)((E^t_{n+1}(\vec{x}, r, U) \wedge E^t_{n+1}(\vec{x}, s, U)) \Rightarrow r = s)$ .

$S_2$ *Ekstenzionalnost*

(i) $(\forall \vec{x})(E^s_n(\vec{x}, X) \Leftrightarrow E^s_n(\vec{x}, Y)) \Leftrightarrow X = Y$ ;

(ii) $(\forall \vec{x}, r)(E^t_{n+1}(\vec{x}, r, U) \Leftrightarrow E^t_{n+1}(\vec{x}, r, V)) \Leftrightarrow U = V$ .

$S_3$ *Interpretacija terma*

(i) $(\forall \vec{x})(E^t_{n+1}(\vec{x}, 0, U_\tau) \vee E^t_{n+1}(\vec{x}, 1, U_\tau))$ ako $\tau$ je $\mathbf{1}(R(\vec{x}))$;

(ii) $(\forall x, y)(E^t_{2+1}(x, y, 0, U_\tau) \vee E^t_{2+1}(x, y, 1, U_\tau))$ ako $\tau$ je $1(x = y)$ ;

(iii) $E^t_{0+1}(\bar{r}, U_\tau)$ ako $\tau$ je $r$ ;

(iv) $(\forall \vec{x}, r)(E^t_{n+1}(\vec{x}, r, U_\tau) \Leftrightarrow (\exists \vec{s})( \bigwedge_{i=1}^{k} E^t_{n+1}(\vec{x}, s_i, U_{\tau_i}) \wedge \wedge f(s_1, \ldots, s_k) = r))$ ako $\tau$ je $F(\tau_1, \ldots, \tau_k)$ ;

(v) $(\forall\vec{x},r)(E^t_{n+1}(\vec{x},r,U_\tau) \Leftrightarrow (\exists V)((\forall y,s)(E^t_{1+1}(y,s,V) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow E^t_{n+1+1}(\vec{x},y,s,U_\sigma)) \wedge I_m(V,r)))$ ako $\tau$ je $\int_m \sigma(\vec{v},v_0)dv_0$ .

$S_4$ *Zadovoljenje formula*

(i) $(\forall\vec{x})(E^s_n(\vec{x},X_\varphi) \Leftrightarrow (\exists r\geq 0)E^t_{n+1}(\vec{x},r,U_\tau))$ ako $\varphi$ je $\tau\geq 0$;

(ii) $(\forall\vec{x})(E^s_n(\vec{x},X_{\neg\varphi}) \Leftrightarrow \neg E^s_n(\vec{x},X_\varphi))$ ;

(iii) $(\forall\vec{x})(E^s_n(\vec{x},X_{\wedge\Phi}) \Leftrightarrow \bigwedge_{\varphi\in\Phi} E^s_n(x,X_\varphi))$ .

$S_5$ *Interpretacija integralnih operatora* $I_1$ , $I_2$

(i) $(\forall U)((\bigwedge_{n\geq 2} \neg(\exists\vec{x},r)E^t_{n+1}(\vec{x},r,U)) \Leftrightarrow (\exists_1 s)\ I_m(U,s))$ ;

(ii) $(\forall r)\ I_m(U_r,r)$ ;

(iii) $(\forall U,V,r,s)\ I_m(r\cdot U+s\cdot V)=r\cdot I_m(U)+s\cdot I_m(V)$ ,

gde je $I_m(U)=r$ akko $I_m(U,r)$ ;

(iv) $(\forall U)((\forall x)(\exists r\geq 0)E^t_{1+1}(x,r,U) \Rightarrow (\exists s\geq 0)\ I_m(U,s))$ .

$S_6$ *Apsolutna neprekidnost*

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall U)(|I_2(U)|<\delta \Rightarrow |I_1(U)|<\varepsilon) .$$

$S_7$ *Aksiome Arhimedovog polja (za realne brojeve)* .

$S_8$ *Transformacija aksioma logike* $K^a_{\mathcal{A}\int_1\int_2}$

$(\forall\vec{x})E^s_n(\vec{x},X_\varphi)$ , gde je $\varphi$ aksioma .

$S_9$ *Realizacija svih rečenica* $\psi$ *teorije* T

$$(\forall x_0)\ E^s_1(x_0,X_\psi) .$$

Slab model $\mathfrak{A}$ logike $K^a_{\mathcal{A}\int_1\int_2}$ možemo transformisati u *standardnu strukturu* $\mathfrak{B}=\langle B,P,Q,F,E^{s\mathfrak{B}}_n,E^{t\mathfrak{B}}_{n+1},I^\mathfrak{B}_1,I^\mathfrak{B}_2,\leq,f,X^\mathfrak{B}_\varphi,U^\mathfrak{B}_\tau,r\rangle$ logike $K'_\mathcal{A}$ , gde je $B=A$ , $P\subseteq\bigcup_{n\geq 1}\mathcal{P}(A^n)$ , $Q\subseteq\bigcup_{n\geq 0}\mathcal{P}(A^n\times\mathbb{R})$ , $F=F'\cap[0,1]$ i $F'\subseteq\mathbb{R}$ je polje , $X^\mathfrak{B}_\varphi\in P$ za svaku formulu $\varphi$ i $U^\mathfrak{B}_\tau\in Q$ za svaki term $\tau$ . Dovoljno je uzeti: $X^\mathfrak{B}_\varphi = \{\vec{a}\in A^n : \mathfrak{A}\models\varphi[\vec{a}]\}$,

$P=\{X^\mathfrak{B}_\varphi : \varphi$ je formula logike $L^a_{\mathcal{A}\int_1\int_2}\}$ ,

$U^\mathfrak{B}_\tau(\vec{a})=\tau^\mathfrak{A}(\vec{a})$ za $\vec{a}\in A^n$ ,

$Q=\{U^\mathfrak{B}_\tau : \tau$ je term logike $L^a_{\mathcal{A}\int_1\int_2}\}$ i

$I_m^{\mathfrak{S}}(U_\tau^{\mathfrak{S}}) = \mathcal{I}_m(\tau)$ , gde je $\tau$ term sa najviše jednom slobodnom promenljivom, $m=1,2$ .

Kako je teorija S $\Sigma_1$-definabilna nad $\mathcal{A}$ i aksioma $P_1$ važi u slabom modelu $\mathfrak{U}$ , koristeći teoremu Barwiseove kompaktnosti 1.3.2, zaključujemo da postoji standardan model prvog reda $\mathfrak{D}$ teorije S . Model $\mathfrak{D}$ možemo transformisati u srednji model $\mathfrak{E}$ teorije T pomoću :

$$R^{\mathfrak{E}} = \{ \vec{x}\in D^n : E_n^{s\mathfrak{D}}(\vec{x}, X_{1(R(\vec{x}))=1}) \} \quad \text{i}$$

$$\mathcal{I}_m(\tau(x,\vec{a})) = I_m^{\mathfrak{D}}(U_{\tau(x,\vec{a})}) \quad \text{za } \vec{a}\in D^n , \ m=1,2 .$$

Ovim je dokaz teoreme potpunosti za srednje integralne modele završen. ∎

Poslednji korak je konstrukcija "jakog", tj. apsolutno neprekidnog dvoverovatnosnog modela.

TEOREMA 3.2.6

Teorija T logike $L^a_{\mathcal{A}\int_1\int_2}$ koja je $\Sigma_1$-definabilna nad $\mathcal{A}$ i konzistentna sa aksiomama ove logike, ima apsolutno neprekidan dvoverovatnosan model.

**Dokaz:** Neka je $\mathfrak{U}$ srednji integralni model teorije T. Loebovom konstrukcijom Daniellovog integrala dobijamo verovatnosne mere $\mu_1$ i $\mu_2$ na $^*A$ takve da $^\circ(^*\mathcal{I}_m(\tau))=\int^\circ(\tau^{\mathfrak{U}}(b))d\mu_m(b)$ za svaki $*$-term $\tau(x)$ i $m=1,2$ .

Mere $\mu_n^m$ na $^*A^n$ definišemo iterativnim korišćenjem integrala.

Apsolutna neprekidnost u srednjem modelu i aksioma $P_2$ daju $\mu_n^1 \ll \mu_n^2$ za svako $n\in\mathbb{N}$ . Dobijeni gradirani apsolutno neprekidni dvoverovatnosni model $\hat{\mathfrak{U}}=\langle{}^*A, {}^*R_i, {}^*c_j, \mu_n^1, \mu_n^2\rangle_{i\in I, j\in J, n\in\mathbb{N}}$ zadovoljava aksiomu $E_7$ skoro svuda i , samim tim, generiše apsolutno neprekidan dvoverovatnosan model teorije T . ∎

Primer teorije $T = \{\int 1(R(x))dx\le 1/n : n\in\mathbb{N}\} \cup \{\int 1(R(x))dx>0\}$, gde je R neki unarni predikat, pokazuje da puna kompaktnost za logiku $L_{\mathcal{A}\int}$ ( a time i $L^a_{\mathcal{A}\int_1\int_2}$ i $L^s_{\mathcal{A}\int_1\int_2}$ ) ne važi. Zato posmatramo specijalan skup rečenica oblika $\tau\in[r,s]$, gde je $\tau$ term.

**TEOREMA 3.2.7**

Ako svaki konačan podskup skupa T rečenica logike $L^a_{\mathcal{A}\int_1\int_2}$ oblika $\tau\in[r,s]$ ima gradiran apsolutno neprekidan dvoverovatnosan model, tada i T ima takav model.

**Dokaz:** Pretpostavimo da su $\mathfrak{U}_\psi$ srednji integralni modeli za svaki konačan podskup $\psi\subseteq T$. Posmatrajmo ultraproizvod $^*\mathfrak{U}$ modela $\mathfrak{U}_\psi$, takav da za svako $\varphi\in T$, skoro svi $\mathfrak{U}_\psi$ zadovoljavaju $\varphi$. Loebovom konstrukcijom napravimo gradirani dvoverovatnosni model $\hat{\mathfrak{U}}$.

Indukcijom se lako pokazuje da svaka rečenica logike $L^a_{\mathcal{A}\int_1\int_2}$ oblika $\tau\in[r,s]$ tačna u skoro svim modelima $\mathfrak{U}_\psi$ tačna je i u $\hat{\mathfrak{U}}$. Kako se uslov apsolutne neprekidnosti u srednjem modelu izražava rečenicom $S_6$, a primenom Loebove konstrukcije, u modelu $\hat{\mathfrak{U}}$ rečenicom logike prvog reda $(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall X)(\mu_2(X)<\delta \Rightarrow \mu_1(X)<\varepsilon)$, to, primenom Losove teoreme, ovaj uslov važi i u $^*\mathfrak{U}$. Dakle, gradirani model $\hat{\mathfrak{U}}$ teorije T je i apsolutno neprekidan. ■

U klasi singularnih dvoverovatnosnih modela, potpun skup aksioma logike $L^s_{\mathcal{A}\int_1\int_2}$ dobijamo tako što aksiome $P_1$ i $P_2$ zamenimo *aksiomom singularnosti* :

$$\bigvee_k \int_i \mathbb{L}_k(\int_1 1(x=y)dy, \int_2 1(x=y)dy)dx = 0\ , \quad i=1,2\ ,$$

gde je, da podsetimo, $L_k(s,t) = \begin{cases} 1 & \text{ako } s\geq 2/k \ \text{ i } \ t\geq 2/k \\ 0 & \text{ako } s\leq 1/k \ \text{ ili } \ t\leq 1/k \\ \text{linearno inače} & \end{cases}$.

**TEOREMA 3.2.8**

Teorija T logike $L^s_{\mathcal{A}\int_1\int_2}$ je konzistentna akko T ima singularan dvoverovatnosan model.

**Dokaz:** Teži deo teoreme dokažimo primenom Loebove konstrukcije dvoverovatnosne strukture $\hat{\mathfrak{U}}=\langle {}^*\mathfrak{U},\mu_1,\mu_2\rangle$ polazeći od slabog integralnog modela $\langle\mathfrak{U},\mathcal{I}_1,\mathcal{I}_2\rangle$ teorije T. Izložimo neke bitne detalje ove konstrukcije.

Neka je $\mathcal{F}=\{B\subseteq A:\chi_B\in\mathrm{dom}\mathcal{I}_1=\mathrm{dom}\mathcal{I}_2\}$ polje skupova podskupova od A i $\nu_k(B)=\mathcal{I}_k(\chi_B)$, $B\in\mathcal{F}$, $k=1,2$ , gde je $\chi_B$ karakteristična funkcija skupa B. Lako je proveriti sledeće osobine uvedene familije $\mathcal{F}$ podskupova od A i funkcija $\nu_k$ :

(i) $\emptyset\in\mathcal{F}$ i $\nu_k(\emptyset)=0$ , $k=1,2$ ;

(ii) $A\in\mathcal{F}$ i $\nu_k(A)=1$ ;

(iii) Ako $B\in\mathcal{F}$ , tada $\nu_k(B)\geq 0$ ;

(iv) Ako $B,C\in\mathcal{F}$ , tada $A-B\in\mathcal{F}$ , $B\cap C\in\mathcal{F}$ , $B\cup C\in\mathcal{F}$ , tj. $\mathcal{F}$ je polje skupova.

(v) Ako $B,C\in\mathcal{F}$ i $B\cap C=\emptyset$ , tada $\nu_k(B\cup C)=\nu_k(B)+\nu_k(C)$ , tj. mere $\nu_k$ su konačno-aditivne.

(vi) Ako $a\in A$ , tada $\{a\}\in\mathcal{F}$ , jer $\chi_{\{a\}}=(x=a)^{\mathfrak{U}}\in\mathrm{dom}\mathcal{I}_k$ .

(vii) Skup $B=\{a\in A:\nu_1\{a\}>0$ i $\nu_2\{a\}>0\}\in\mathcal{F}$ i $\nu_k(B)=0$, $k=1,2$ , (aksioma singularnosti).

Osobina (vii) dozvoljava nam da , primenom teoreme Łos-Marczewskog (videti uvod), razdvojimo mere $\nu_1$ i $\nu_2$ , tj. možemo da proširimo $\mathcal{F}$ do najmanjeg polja skupova $\mathcal{G}$ koje sadrži $\mathcal{F}$ i neki pridodati skup B takav da za novo dobijene konačno-aditivne mere $\bar{\nu}_1$ i $\bar{\nu}_2$ važi: $\bar{\nu}_1(B)=1$ , $\bar{\nu}_2(B)=0$ . Paralelno, proširimo i slab model $\langle\mathfrak{U},\mathcal{I}_1,\mathcal{I}_2\rangle$ do modela $\langle\mathfrak{U},\bar{\mathcal{I}}_1,\bar{\mathcal{I}}_2\rangle$ teorije T tako da za svako $C\in\mathcal{G}-\mathcal{F}$ važi $\chi_C\in\mathrm{dom}\bar{\mathcal{I}}_1=\mathrm{dom}\bar{\mathcal{I}}_2$ i $\bar{\mathcal{I}}_k(\chi_C)=\bar{\nu}_k(C)$ , $k=1,2$ .

Polazeći od "srednjeg" modela $\langle\mathfrak{U}.\bar{\mathcal{I}}_1,\bar{\mathcal{I}}_2\rangle$ , Loebovom konstrukcijom Daniellovog integrala, dobijamo verovatnosne mere $\mu_1$ i $\mu_2$ na ${}^*A$ za koje važi $\mu_1\perp\mu_2$ . Za iterativno definisane mere $\mu_n^1$ i $\mu_n^2$ na ${}^*A^n$ takođe važi svojstvo singularnosti.

Na uobičajeni način, dobijeni gradirani singularni model generiše singularan dvoverovatnosan model $\hat{\mathfrak{A}}$ teorije T . ■

Konačna kompaktnost skupa rečenica oblika $\tau\in[r,s]$ važi i za logiku $L^{s}_{\mathcal{A}\int_1\int_2}$ .

TEOREMA 3.2.9

Ako svaki konačan podskup skupa T rečenica logike $L^{s}_{\mathcal{A}\int_1\int_2}$ oblika $\tau\in[r,s]$, ima gradiran singularan dvoverovatnosan model, tada i teorija T ima takav model.

**Dokaz:** Neka su $\mathfrak{A}_\Psi$ slabi integralni modeli, za svaki konačan podskup $\Psi\subseteq T$. Neka je $^{*}\mathfrak{A} = \prod \bar{\mathfrak{A}}_\Psi$ , gde su $\bar{\mathfrak{A}}_\Psi$ srednji integralni modeli za svako $\Psi\subseteq T$, opisani u prethodnoj teoremi.

Uslov singularnosti u srednjem modelu izražavamo rečenicom

$$(\exists f)(\ \bar{\mathcal{F}}_1(f)=1 \wedge \bar{\mathcal{F}}_2(f)=0\ )$$

Primenom Łosove teoreme, ovaj uslov važi i u $^{*}\mathfrak{A}$, a primenom Loebove konstrukcije na $^{*}\mathfrak{A}$ , u dobijenom modelu $\hat{\mathfrak{A}}$ važi rečenica logike prvog reda: $(\exists X)(\ \mu_1(X)=1 \wedge \mu_2(X)=0\ )$ .

Stoga, svaka rečenica oblika $\tau\in[r,s]$ tačna u skoro svim srednjim modelima $\bar{\mathfrak{A}}_\Psi$ , tačna je i u gradiranom singularnom dvoverovatnosnom modelu $\hat{\mathfrak{A}}$ . ■

Logike sa integralnim operatorima možemo poboljšati dodavanjem funkcijskih simbola jeziku ovih logika, i tako izgrađenom sintaksom da ih možemo realizovati u *analitičkim modelima* , tj. modelima čiji je univerzum analitički podskup realne prave i čije su relacije i funkcije Borel-merljive u odnosu na univerzum.

Logika $L(\int_1,\int_2)^{a}_{\mathcal{A}}$ je slična logici $L(\int)_{\mathcal{A}}$ opisanoj u 2.2., stim da koristimo dva tipa integralnih operatora $\int_1\ldots dx$ i $\int_2\ldots dx$. Hooverovim aksiomama logike $L(\int)_{\mathcal{A}}$ dodajemo sledeće aksiome:

$Q_1$ $\bigwedge_n \bigvee_m P_i\{ \vec{y} : P_j\{ \vec{x} : p(\vec{x},\vec{y})\} \in [r-1/m, r)\} < 1/n$ .

$Q_2$ $\bigwedge_n \bigvee_m P_i\{ \vec{y} : P_j\{ \vec{x} : p(\vec{x},\vec{y})\} \in (r, r+1/m]\} < 1/n$ , $i,j=1,2$,

gde je $P_i\{ \vec{x} : p(\vec{x}) \}$ zamena za $\int_i 1(p)d\vec{x}$ , a p iskaz i $1(p)$, indikator od p , realno-vrednosna formula.

$Q_3$ $\bigwedge_{\varepsilon\in\mathbb{Q}^+} \bigvee_{\delta\in\mathbb{Q}^+} \bigwedge_n \bigwedge_{\varphi\in\Phi_n} (|\int_2 \varphi d\vec{x}|<\delta \Rightarrow |\int_1 \varphi d\vec{x}|<\varepsilon)$ ,

gde je $\Phi=\cup\Phi_n$ , $\Phi,\Phi_n\in\mathcal{A}$ i $\Phi_n$ skup realno-vrednosnih formula $\varphi\in\Phi$ sa n slobodnih promenljivih.

$Q_4$ $\int_1\int_2 \varphi dxdy = \int_2\int_1 \varphi dydx$ .

Na slabom integralnom modelu $\langle\mathfrak{U},\mathcal{I}_1,\mathcal{I}_2\rangle$ ove logike možemo "realizovati" teoriju mere. Koristićemo sledeće pojmove.

*Srednja vrednost* (oznaka: $E_k[X]$, $k=1,2$) *$\mathcal{A}$-merljive ograničene funkcije* $X:A^\infty\to\mathbb{R}$ , tj. X je $\varphi^{\mathfrak{U}}$ za neku realno-vrednosnu formulu $\varphi$ logike $L(\int_1,\int_2)^a_{\mathcal{A}}$ , određena je sa $(\int_k X d\vec{x})^{\mathfrak{U}}$ , $k=1,2$ .

Ako je $\mathcal{F}$ konačna algebra $\mathcal{A}$-merljivih skupova, tj. skupova $F\subseteq A^\infty$ čiji su indikatori $1(F)$ $\mathcal{A}$-merljive funkcije, tada *uslovno očekivanje od* X *u odnosu na* $\mathcal{F}$ (oznaka: $E_k[X|\mathcal{F}]$, $k=1,2$) je $\mathcal{A}$-merljiva funkcija $E_k[X|\mathcal{F}](s)=\begin{cases} E_k[X\cdot 1(F)]/E_k[1(F)] & , E_k[1(F)]>0 \\ 0 & , \text{inače} \end{cases}$ ,

gde je F atom algebre $\mathcal{F}$ koji sadrži s .

Koristeći navedene pojmove i osobine uslovnog očekivanja, D. Hoover u [23] dokazuje lemu o aproksimaciji realno-vrednosnih formula sa konačno slobodnih promenljivih pomoću konačno-vrednosnih formula sa jednom slobodnom promenljivom.

**LEMA 3.2.10** (Hoover [23])

Ako je $\langle\mathfrak{U},\mathcal{I}\rangle$ slab integralni model logike $L(\int)_{\mathcal{A}}$ , $\varphi(\vec{x})$ realno-vrednosna formula sa slobodnim promenljivim $\vec{x}=x_1\ldots x_n$ i $\varepsilon>0$ , tada postoje konačno-vrednosne formule $\psi_{ij}(x_j)$ , $i=1,2,\ldots,m$ $j=1,2,\ldots,n$ , tako da $E|\varphi(\vec{x}) - \sum_i \prod_j \psi_{ij}(x_j)|^{\mathfrak{U}} < \varepsilon$ . □

Napomenimo da je u slučaju logike $L_{\mathcal{A}\int}$ aproksimacija formula "pravougaonicima" bila realizovana tek na gradiranim verovatnosnim strukturama.

Pretpostavimo, prvo, da je L jezik bez jednakosti i bez funkcijskih simbola. U ovom slučaju se kompletnost navedene aksiomatizacije na klasi analitičkih apsolutno neprekidnih dvoverovatnosnih modela, može dokazati koristeći uobičajenu slabu-srednju-jaku konstrukciju modela. Navedimo, pri svakoj pojedinačnoj konstrukciji, samo one detalje koji karakterišu logiku $L(\int_1,\int_2)^a_{\mathcal{A}}$.

Koristeći Henkinovu konstrukciju dokazujemo teoremu slabe potpunost, tj. da skup T iskaza logike $L(\int_1,\int_2)^a_{\mathcal{A}}$ koji je $\Sigma_1$-definabilan nad $\mathcal{A}$ i konzistentan sa aksiomama, ima slab integralni model $\langle\mathfrak{A},\mathcal{I}_1,\mathcal{I}_2\rangle$. Prelazak sa slabog na srednji integralni model sličan je onom u slučaju logike $L^a_{\mathcal{A}\int_1\int_2}$.

**TEOREMA 3.2.11**

Ako je T skup iskaza logike $L(\int_1,\int_2)^a_{\mathcal{A}}$ koji je $\Sigma_1$-definabilan i konzistentan sa aksiomama, tada postoji srednji integralni model teorije T.

Dokaz: Neka je $K=L\cup C$ jezik uveden u Henkinovoj konstrukciji slabog modela $\langle\mathfrak{A},\mathcal{I}_1,\mathcal{I}_2\rangle$ teorije T, gde je C skup novih konstantnih simbola, i neka je K′ jezik sa četiri vrste promenljivih i sa istim predikatima kao i u teoremi 3.2.5 (koristimo oznaku $E^f_{n+1}$ umesto $E^t_{n+1}$). Funkcijski simboli jezika K′ su $+$ , $\cdot$ , max , min i sup za realne brojeve, a konstantni simboli su $X_p$ za svaki iskaz p logike $K(\int_1,\int_2)^a_{\mathcal{A}}$ , $U_\varphi$ za svaku realno-vrednosnu formulu $\varphi$ i $\bar{r}$ za svaki realan broj $r\in R\cap\mathcal{A}$ .

Teoriju S logike $K'_{\mathcal{A}}$ čine formule:

$R_1$ *Dobra definisanost* , kao i $S_1$ iz teoreme 3.2.5 ;

$R_2$ *Ekstenzionalnost* , kao i $S_2$ ;

$R_3$ *Interpretacija realno-vrednosnih formula*

(i) $E^f_{0+1}(\bar{r}, U_\varphi)$ ako je $\varphi$ atomska formula r ;

(ii) $(\forall\vec{x}, r)(E^f_{n+1}(\vec{x}, r, U_\varphi) \Leftrightarrow E^s_n(\vec{x}, X_{R(v_1,\dots,v_n)=r}))$

ako je $\varphi$ oblika $R(v_1,\dots,v_n)$ za $R \in L^{\mathbb{R}} \cup L^2$ ;

(iii) $(\forall\vec{x}, r)( E^f_{n+1}(\vec{x}, r, U_{\varphi+\psi}) \Leftrightarrow (\exists s, t)( E^f_{n+1}(\vec{x}, s, U_\varphi) \wedge$
$\wedge\ E^f_{n+1}(\vec{x}, t, U_\psi) \wedge r=s+t ))$ ;

(iv) $(\forall\vec{x}, r)( E^f_{n+1}(\vec{x}, r, U_{\varphi\cdot\psi}) \Leftrightarrow (\exists s, t)( E^f_{n+1}(\vec{x}, s, U_\varphi) \wedge$
$\wedge\ E^f_{n+1}(\vec{x}, t, U_\psi) \wedge r=s\cdot t ))$ ;

(v) $(\forall\vec{x}, r)( E^f_{n+1}(\vec{x}, r, U_{\min\{\varphi,\psi\}}) \Leftrightarrow (\exists s, t)( E^f_{n+1}(\vec{x}, s, U_\varphi) \wedge$
$\wedge\ E^f_{n+1}(\vec{x}, t, U_\psi) \wedge r=\min\{s,t\} ))$ ;

(vi) $(\forall\vec{x}, r)( E^f_{n+1}(\vec{x}, r, U_{\max\{\varphi,\psi\}}) \Leftrightarrow (\exists s, t)( E^f_{n+1}(\vec{x}, s, U ) \wedge$
$\wedge\ E^f_{n+1}(\vec{x}, t, U_\psi) \wedge r=\max\{s,t\} ))$ ;

(vii) $(\forall\vec{x}, r)( E^f_{n+1}(\vec{x}, r, U_{\min(\sup\Phi, s)}) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow ( \bigwedge_{\varphi\in\Phi} (\exists r_\varphi)E^f_{n+1}(\vec{x}, r_\varphi, U_\varphi) \wedge r=\min( \sup_{\varphi\in\Phi} r_\varphi , s)))$ ;

(viii) $(\forall\vec{x}, r)( E^f_{n+1}(\vec{x}, r, U_\varphi) \Leftrightarrow (\exists V)((\forall y, s)( E^f_{1+1}(y, s, V) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow E^f_{n+1+1}(\vec{x}, y, s, U_\psi)) \wedge I_m(V, r)))$ ,

ako je $\varphi$ oblika $\int_m \psi(\vec{v}, v_0)dv_0$ za m=1,2 .

$R_4$ *Zadovoljenje iskaza* , kao i $S_4$ , stim da (i) zamenimo sledećim formulama:

$(\forall\vec{x})( E^s_n(\vec{x}, X_{\varphi=\psi}) \Leftrightarrow (U_\varphi(\vec{x})=U_\psi(\vec{x})))$ ,

gde je $U_\varphi(\vec{x})=r$ akko $E^f_{n+1}(\vec{x}, r, U_\varphi)$ ;

$(\forall\vec{x})( E^s_n(\vec{x}, X_{\varphi\le\psi}) \Leftrightarrow (U_\varphi(\vec{x})\le U_\psi(\vec{x})))$ .

Preostali skupovi formula $R_5, R_6, R_7, R_8$ i $R_9$ su definisani kao u teoremi 3.2.5 , stim da u $R_7$ pored aksioma Arhimedovog polja imamo i sve teoreme teorije realnih zatvorenih polja sa maksimumom i minimumom.

Teorija S ima standardni model $\mathfrak{B}$, koji možemo da transformišemo u srednji integralni model $\mathfrak{D}$ teorije T pomoću:

$$R^{\mathfrak{D}}(x)=r \text{ akko } E^{f\mathfrak{B}}_{n+1}(\vec{x},r,U_R) \text{ za } R\in L^{\mathbb{R}}\cup L^2 ,$$

$$\mathcal{I}^{\mathfrak{D}}_m(\varphi(x,\vec{a})) = I^{\mathfrak{B}}_m(U_{\varphi(x,\vec{a})}) \text{ za } \vec{a}\in B^n \text{ i } m=1,2 . \blacksquare$$

Koristeći srednje integralne modele umesto slabih, dobićemo još jednu verziju leme o aproksimaciji pravougaonicima.

**LEMA 3.2.12**

Ako je $<\mathfrak{U},\mathcal{I}_1,\mathcal{I}_2>$ sredji integralni model logike $L(\int_1,\int_2)^a_{\mathcal{A}}$, $\varphi(\vec{x})$ realno-vrednosna formula, $\vec{x}=x_1,\dots,x_n$ , i $\varepsilon>0$ , tada postoje konačno-vrednosne formule $\psi_{ij}(x_j)$ , $i=1,\dots,m$ , $j=1,\dots,n$ , tako da $E_k|\varphi(\vec{x}) - \sum_i \prod_j \psi_{ij}(x_j)|^{\mathfrak{U}} < \varepsilon$ za $k=1,2$ .

**Dokaz:** Srednju vrednost $E_k[X]$ $\mathcal{A}$-merljive funkcije $X: A^{\infty}\to\mathbb{R}$ možemo iterativno definisati pomoću "Daniellovog integrala" $\mathcal{I}_k$ .

Koristeći uslov apsolutne neprekidnosti u srednjem modelu, nalazimo niz $0<\delta_n\le\delta_{n-1}\le\dots\le\delta_1\le\delta_0=\varepsilon$ realnih brojeva, takav da za svaku realno-vrednosnu formulu $\varphi(x,\vec{a})$ sa parametrima iz A , iz $|\mathcal{I}_2(\varphi(x,\vec{a}))|<\delta_i$ sledi $|\mathcal{I}_1(\varphi(x,\vec{a}))|<\delta_{i-1}$ za $i=1,2,\dots,n$ . Za $\delta_n$ i $E_2[X]$ postoje konačno-vrednosne formule $\psi_{ij}(x_j)$ takve da $E_2|\varphi(\vec{x})-\sum_i \prod_j \psi_{ij}(x_j)|^{\mathfrak{U}}<\delta_n\le\varepsilon$ (lema 3.2.10) . Primenom aksiome $Q_4$ i izbora niza $\{\delta_n\}$ zaključujemo da $E_1|\varphi(\vec{x})-\sum_i \prod_j \psi_{ij}(x_j)|^{\mathfrak{U}}<\delta_0=\varepsilon$ . $\blacksquare$

Da bi dobili glavni rezultat, potpunost logike $L(\int_1,\int_2)^a_{\mathcal{A}}$ za slučaj kada jezik L nema jednakost i funkcijske simbole, konstruišimo, prvo, verovatnosnu strukturu $<[0,1],\lambda_1,\lambda_2>$ Borel-merljivih skupova.

Numerišimo realno-vrednosne formule $\varphi_1,\varphi_2,\dots$ logike $L(\int_1,\int_2)^a_{\mathcal{A}}$ , tako da su slobodne promenljive formule $\varphi_n$ među promenljivim $v_1,\dots,v_n$ .

Za svako $n\in\mathbb{N}$, izaberimo $\mathcal{F}_n$ kao najmanju algebru podskupova skupa A takvih da za svaku konačno-vrednosnu formulu $\psi(v_1)$ iz leme 3.2.13 za $\varphi=\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ i $\varepsilon=2^{-2n}$, ograničena funkcija $\psi(v_1)^{\mathfrak{U}}$ je $\mathcal{F}_n$-merljiva, tj. $E_2[\psi(v_1)^{\mathfrak{U}}|\mathcal{F}_n]=\psi(v_1)^{\mathfrak{U}}$ s.s. .

Neka je $\mathcal{A}_n$ skup atoma algebre $\mathcal{F}_n$, koja je, očigledno, konačna algebra, i neka je $\mathcal{F}_n^{\#}$ konačna algebra na $A^{\infty}$ generisana skupovima oblika $F_1 x\ldots xF_n xA^{\infty}$, gde $F_1,\ldots,F_n\in\mathcal{A}_n$ .

Za svako $n\in\mathbb{N}$, izaberimo homomorfizam $T_n:\mathcal{F}_n\to\mathcal{B}$ Booleovih algebri sa osobinama:

(i) $T_{n+1}|\mathcal{F}_n = T_n$ ;

(ii) Za atom $F\in\mathcal{A}_n$, $T_n(F)$ je interval dužine $E_2[1(F)]$ ;

(iii) Ako $F\in\mathcal{A}_n$ i $E_2[1(F)]=0$, tada $T_n(F)=\varnothing$ .

Homomorfizam $T_n$ inducira preslikavanje $T_n^{\#}:\mathcal{F}_n^{\#}\to\mathcal{B}^{\infty}$, kao i preslikavanje $T'_n$ skupa $\mathcal{F}_n^{\#}$-merljivih funkcija $A^{\infty}\to\mathbb{R}$ u skup Borelovih funkcija $[0,1]^{\infty}\to\mathbb{R}$ . Neka je $h_{\varphi,n}=E_2[\varphi^{\mathfrak{U}}|\mathcal{F}_n^{\#}]$, $g_{\varphi,n}=T'_n(h_{\varphi,n})$ i $g_{\varphi} = \liminf_{n\to\infty} g_{\varphi,n}$, za svaku realno-vrednosnu formulu $\varphi$ .

Za svako $n\in\mathbb{N}$, na algebri $\mathcal{F}_n^{\#}$ definišimo mere $\mu_n^1$ i $\mu_n^2$ pomoću $\mu_n^m(F)=E_m[1(F)]$, $m=1,2$ . Iz apsolutne neprekidnosti u srednjem modelu, kao i aksiome $Q_4$, sledi $\mu_n^1 \ll \mu_n^2$ . Neka je $f_n$ Radon-Nikodymov izvod mere $\mu_n^1$ u odnosu na meru $\mu_n^2$, $\bar{f}_n = T'_n(f_n)$ i $\bar{f} = \liminf_{n\to\infty} \bar{f}_n$ . Neka je $\lambda_2^{\infty}$ Lebesqueova mera definisana na Borelovim skupovima algebre $T_n^{\#}(\mathcal{F}_n^{\#})$, i neka je $\lambda_1^{\infty}(B) = \int_B \bar{f}d\lambda_2^{\infty}$, $B\in T_n^{\#}(\mathcal{F}_n^{\#})$ .

U analitičkom apsolutno neprekidnom dvoverovatnosnom prostoru $\mathfrak{M}=\langle[0,1],\lambda_1,\lambda_2\rangle$, gde je $\lambda_k=\lambda_k^{\infty}|[0,1]$, $k=1,2$, interpretirajmo relacije $R\in L^{R}\cup L^{2}$ na sledeći način:

$$R^{\mathfrak{M}}(a_1,\dots,a_k) = g_{R(\vec{x}_{\vec{a}})}(s_{\vec{a}}) \quad ,$$

pri čemu, ako su $a_{i_1},\dots,a_{i_j}$ svi različiti elementi u nizu $a_1,\dots,a_n$ , tada $\vec{x}_{\vec{a}} = x_1,\dots,x_n$ je niz promenljivih sa osobinom $x_i=v_m$ za $a_i=a_{i_m}$ , i $s_{\vec{a}}$ je niz elemenata iz A sa osobinom $(s_{\vec{a}})_m=a_{i_m}$ za $m\le j$ .

Razlog za ovakvu interpretaciju relacijskih simbola leži u činjenici da jezik L nema simbol jednakosti, i da, ako skup A nema elemenata pozitivne mere, tada dijagonalni skup ima meru 0 . Tako, na primer, ako je R(x,y) relacija ekvivalencije na A , tada će $g_{R(v_1,v_2)}$ biti identički 0 , a $g_{R(v_1,v_1)}$ identički 1 .

Dobijeni model $\langle\mathfrak{M},\lambda_1,\lambda_2\rangle$ je elementarno ekvivalentan srednjem modelu $\langle\mathfrak{A},\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2\rangle$ .

TEOREMA 3.2.13

$$\langle\mathfrak{M},\lambda_1,\lambda_2\rangle \equiv_{\mathcal{A}} \langle\mathfrak{A},\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2\rangle$$

Dokaz: Dovoljno je pokazati da za realno-vrednosnu formulu $\varphi$ logike $L(\int_1,\int_2)^a_{\mathcal{A}}$ važi

$$(1) \qquad \varphi^{\mathfrak{M}} = g_\varphi \text{ s.s. },$$

jer to povlači da za svaku rečenicu $\psi$ ove logike važi $\psi^{\mathfrak{M}} = \psi^{\mathfrak{A}}$ .

U [23] Hoover dokazuje relaciju (1) za realno-vrednosne formule oblika: atomske formule, $\psi+\theta$ , $\psi\cdot\theta$ , $\min(\psi,\theta)$ , $\max(\psi,\theta)$ , $\min(\sup\Phi,b)$ i $\int_2\psi dx$ . Stoga, proverimo samo slučaj formule $\varphi$ oblika $\int_1\psi dx$ .

Koristeći, $h_{\int_1\psi dx,n} = E_2[(\int_1\psi dx)^{\mathfrak{A}}|\mathcal{F}^{\#}_n]$

$$= \sum_i E_2[1(F_i)\cdot(\int_1\psi dx)^{\mathfrak{A}}]\cdot 1(F_i)/E_2[1(F_i)] \text{ s.s.}$$

$$= \int_1\sum_i E_2[1(F_i)\cdot\psi^{\mathfrak{A}}]\cdot 1(F_i)/E_2[1(F_i)]dx \quad (\text{iz } Q_4)$$

$$= \int_1 \sum_{i,j} E_2[1(F_i \times G_j)\cdot\psi^{\mathfrak{U}}]\cdot 1(F_i \times G_j)/E_2[1(F_i \times G_j)]dx$$

$$= \int_1 h_{\psi,n} dx \quad ,$$

gde su atomi algebre $\mathcal{F}_n^{\#}$ zapisani u obliku $F_i \times G_j$ , $1 \le i,j \le m$ i $G_j$-ovi zavise od x , a $F_i$-ovi ne zavise od x , dobijamo

$$\varphi^{\mathfrak{M}} = \int \psi^{\mathfrak{M}}\, d\lambda_1^{\infty}$$

$$= \int g_{\psi}\cdot \bar{f}\, d\lambda_2^{\infty} \qquad \text{(teorema 1.1.3)}$$

$$= \liminf_{n\to\infty} \int g_{\psi,n}\cdot \bar{f}_n\, d\lambda_2^{\infty}$$

$$= \liminf_{n\to\infty} T'_n(\int h_{\psi,n}\cdot f_n\, d\mu_n^2)$$

$$= \liminf_{n\to\infty} T'_n(\int h_{\psi,n}\, d\mu_n^1) \qquad \text{(opet, teorema 1.1.3)}$$

$$= \liminf_{n\to\infty} T'_n(h_{\int_1 \psi dx,n})$$

$$= \liminf_{n\to\infty} g_{\int_1 \psi dx,n}$$

$$= g_{\varphi} \quad \text{s.s.} \ . \ \blacksquare$$

Za slučaj kada jezik L ima jednakost i, možda, funkcijske simbole, dovoljno je primetiti da su u svakom koraku Hooverove konstrukcije (videti [23]) dobijene mere u apsolutno neprekidnom odnosu. Ovim je završen dokaz teoreme potpunosti za analitičke apsolutno neprekidne dvoverovatnosne modele.

TEOREMA 3.2.14

Skup rečenica logike $L(\int_1,\int_2)^a_{\mathcal{A}}$ koji je $\Sigma_1$-definabilan nad $\mathcal{A}$ i konzistentan sa aksiomama, ima analitički apsolutno neprekidni dvoverovatnosni model. $\blacksquare$

Potpunost za analitičke singularne dvoverovatnosne modele logike $L(\int_1,\int_2)^s_{\mathcal{A}}$ realizovaćemo koristeći Hooverovu konstrukciju analitičkog modela i konstrukciju iz teoreme 3.2.8 . Potpun skup aksioma logike $L(\int_1,\int_2)^s_{\mathcal{A}}$ dobijamo tako što aksiome $Q_3$ i $Q_4$ zamenimo odgovarajućom aksiomom singularnosti:

$$\int_k 1(\int_1 x{=}y dy > 0)\cdot 1(\int_2 x{=}y dy > 0)\, dx = 0 \quad , \; k=1,2 \; .$$

Primetimo da relacija = pripada jeziku L, odnosno skupu $L^2$. Ako skupu $L^2$ dodamo novi binarni relacijski simbol $\simeq$ , i u jeziku $L^{\simeq}=(L-\{=\})\cup\{\simeq\}$ interpretiramo $\simeq$ kao jednakost, a zatim za svaki n-arni relacijski simbol R iz $L^{\simeq}$ i terme $\tau_1(\vec{x}_1),\dots,\tau_n(\vec{x}_n)$ (promenljive u $\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n$ se ne ponavljaju) uvedemo novi relacijski simbol $R_{\tau_1(\vec{x}_1),\dots,\tau_n(\vec{x}_n)}(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)$ (videti [23]), dobićemo logiku $L'(\int_1,\int_2)^S_{\mathcal{A}}$ čiji jezik L' nema jednakost i sadrži samo relacijske simbole. Dokažimo stav potpunosti za logiku $L'(\int_1,\int_2)^S$ ( u svakom koraku Hooverove konstrukcije analitičkog modela za logiku $L(\int_1,\int_2)^S_{\mathcal{A}}$ dobićemo mere u uzajamno singularnom odnosu).

**TEOREMA** 3.2.15

Skup rečenica T logike $L'(\int_1,\int_2)^S_{\mathcal{A}}$ koji je $\Sigma_1$-definabilan nad $\mathcal{A}$ i konzistentan sa aksiomama, ima analitički singularni dvoverovatnosni model.

**Dokaz:** Neka je $\mathfrak{U}=\langle A,R^{\mathfrak{U}},\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2\rangle$ slab integralni model teorije T. Konačno-aditivne mere $\nu_1,\nu_2$ definisane na polju skupova $\mathcal{F}=\{B\subseteq A:\alpha_B\in dom\mathcal{F}_1=dom\mathcal{F}_2\}$ pomoću $\nu_k(B)=\mathcal{F}_k(\alpha_B)$ , k=1,2 , proširimo do singularnih konačno-aditivnih mera $\bar{\nu}_1$ i $\bar{\nu}_2$ , a zatim odredimo srednji model $\bar{\mathfrak{U}}=\langle A,R^{\mathfrak{U}},\bar{\mathcal{F}}_1,\bar{\mathcal{F}}_2\rangle$ teorije T pomoću $\bar{\mathcal{F}}_k(\alpha_C)=\bar{\nu}_k(C)$ , za svako C iz proširenja polja $\mathcal{F}$ (videti dokaz teoreme 3.2.8).

Singularnost mera u srednjem modelu sačuvaćemo i u analitičkom modelu teorije T.

Neka je $A_1\subseteq A$ baš onaj element proširenja polja skupova $\mathcal{F}$ pomoću kojeg su mere $\nu_1$ i $\nu_2$ "razdvojene". Dakle, $\bar{\nu}_1(A_1)=1$ , $\bar{\nu}_2(A_2)=1$ , gde je $A_2=A-A_1$. Formirajmo slabe integralne modele $\mathfrak{U}_1=\langle A_1,R^{\mathfrak{U}}\cap A_1,\mathcal{J}_1\rangle$ i $\mathfrak{U}_2=\langle A_2,R^{\mathfrak{U}}\cap A_2,\mathcal{J}_2\rangle$, gde je $dom\mathcal{J}_k=\{f|A_k: f\in dom\bar{\mathcal{F}}_k\}$ i

$\mathcal{J}_k(f|A_k)=\bar{\mathcal{J}}_k(f)$ , $k=1,2$ . Za svaku realno-vrednosnu formulu $\varphi(\vec{x})$ , $\vec{x}=x_1,\dots,x_n$ , logike $L'(\int_1,\int_2)^s_{\mathcal{A}}$ , odredimo funkcije $\varphi^{\bar{\mathfrak{U}}}|A_k:A_k^n\to\mathbb{R}$ , $k=1,2$ (interpretacija formule $\varphi(\vec{x})$ u modelu $\mathfrak{U}_k$), a zatim pomoću tih funkcija primenom Hooverove konstrukcije izgradimo analitičke modele $<[0,1]_k,\lambda_k>$ , $k=1,2$ , gde je $[0,1]_k$ primerak jediničnog intervala, a $\lambda_k$ Lebesqueova mera definisana na algebri Borelovih skupova intervala $[0,1]$. Lako se proverava da je model $\mathfrak{M}=<[0,1]_1\amalg[0,1]_k,\bar{\lambda}_1,\bar{\lambda}_2>$, gde je $[0,1]_1\amalg[0,1]_2$ disjunktna unija jediničnih intervala, $\bar{\lambda}_1|[0,1]_2\equiv 0$ , $\bar{\lambda}_2|[0,1]_1\equiv 0$ , $\bar{\lambda}_k|[0,1]_k\equiv \lambda_k$ analitički singularni dvoverovatnosni model teorije $T$ . ∎

Teoreme 3.2.15 i 3.2.16, kao i primer 1.2.2, obezbeđuju egzistenciju hiperkonačnih dvoverovatnosnih modela logika $L(\int_1,\int_2)^a_{\mathcal{A}}$ i $L(\int_1,\int_2)^s_{\mathcal{A}}$ respektivno, koji igraju ulogu zasićenih modela, i čijom primenom, slično prethodnim konstrukcijama, možemo dokazati odgovarajuća svojstva navedenih dvoverovatnosnih logika.

## 3.3. ADAPTIRANE DVOVEROVATNOSNE LOGIKE

Verovatnosne mere $\mu_1$ i $\mu_2$ na univerzumu A dvoverovatnosnog prostora $<A,S,\mu_1,\mu_2>$ i $\sigma$-podalgebra $\mathcal{F}$ algebre merljivih skupova S, određuju uslovna očekivanja $E_1[\cdot|\mathcal{F}]$ i $E_2[\cdot|\mathcal{F}]$ respektivno. Izgradimo, stoga, logiku koja ima dva tipa integracije $\int_1\dots dx$ i $\int_2\dots dx$ po jedinoj verovatnosnoj promenljivoj $x$ , integraciju $\int\dots dt$ po vremenskoj promenljivoj $t$ , i dva tipa operatora uslovnog očekivanja $E_1[\tau|s](x,t)$ i $E_2[\tau|s](x,t)$.

Sintaksa i semantika adaptirane verovatnosne logike $L_{ad}$ opisana je u 2.4.. Sa nešto više detalja izložimo potpunost adaptirane dvoverovatnosne logike $L^a_{ad}$ u apsolutno neprekidnom slučaju. Ostali model-teoretski rezultati dobijaju se slično kao u pomenutom četvrtom delu glave §2 .

Aksiomama $K_1$-$K_7$ logike $L_{ad}$ pridružimo aksiome neprekidnosti integralnih operatora $O_1$ i $O_2$ po promenljivoj $x$ , kao i aksiomu apsolutne neprekidnosti, koja je oblika:

$$\bigwedge_{\varepsilon\in\mathbb{Q}^+} \bigvee_{\delta\in\mathbb{Q}^+} \bigwedge_{n} \bigwedge_{\tau\in T_n} (|\int_2 \tau(x,\vec{t})dx|<\delta \Rightarrow |\int_1 \tau(x,\vec{t})dx|<\varepsilon) ,$$

gde je $T=\cup_n T_n$ , a $T_n$ je skup terma sa n slobodnih vremenskih promenljivih, i $T, T_n \in \mathcal{A}$ .

Navedeni skup aksioma je potpun u klasi apsolutno neprekidnih dvoverovatnosnih adaptiranih struktura, što možemo dokazati u dva koraka. Prvo za logiku $L_d^a$ bez operatora uslovnog očekivanja.

*Slaba integralna struktura logike* $L_d^a$ je oblika $\mathfrak{U}=\langle A,T,x_i,\mathcal{I}_1,\mathcal{I}_2,\mathcal{J}\rangle_{i\in I}$ , gde su A i T neprazni skupovi, $x_i$ stohastički procesi, $\mathcal{I}_1$ i $\mathcal{I}_2$ pozitivni linearni funkcionali definisani na skupu terma logike $L_d^a$ sa parametrima iz T i slobodnom promenljivom $x$ , i $\mathcal{J}$ pozitivan linearan funkcional definisan na skupu terma sa parametrima iz $A\cup T$ i najviše jednom slobodnom (vremenskom) promenljivom $t$ . Onu slabu strukturu u kojoj za svako $\varepsilon>0$, postoji $\delta>0$ tako da za svaki term $\tau(x,\vec{a})$ sa parametrima iz T , iz $|\mathcal{I}_2(\tau(x,\vec{a}))|<\delta$ sledi $|\mathcal{I}_1(\tau(x,\vec{a}))|<\varepsilon$, zovemo *srednjom integralnom strukturom logike* $L_d^a$ .

Neka je $\varphi$ rečenica konzistentna u logici $L_d^a$ . Konstrukcija slabog, zatim, srednjeg integralnog modela rečenice $\varphi$ slična je onoj opisanoj u lemi 3.2.5 , pa izostavljamo detalje. Napomenimo samo da pri prelazu sa standardnog modela $\mathfrak{B}$ odgovarajuće teorije S, na srednji model $\mathfrak{D}$ , stohastičke procese definišemo pomoću:

$X_i^{\mathfrak{I}}(c,a)=\sup\{r\in\mathbb{R}: E^s_{1+1}(c,a,X_{x_{i,r}}\geq r)\}$ (oznake su kao u lemi 3.2.5).

Loebovom konstrukcijom, polazeći od internalne srednje strukture ${}^*\mathfrak{U}=\langle{}^*A,{}^*T,{}^*x_i,{}^*\mathcal{I}_1,{}^*\mathcal{I}_2,{}^*\mathcal{P}\rangle_{i\in I}$, dobijamo verovatnosne mere $\mu_1$ i $\mu_2$ na ${}^*A$ u apsolutno neprekidnom odnosu, i dobijamo verovatnosnu meru $\delta$ na ${}^*T$ koja je *lifting* Borelove mere $\lambda$ na $[0,1]$, tj. za Borelov skup $S\subseteq[0,1]$, $st^{-1}(S)$ je $\delta$-merljiv skup i $\delta(st^{-1}(S))=\lambda(S)$, gde je $st:{}^*T\rightarrow[0,1]$ definisano sa $st(c)=\sup\{r\in\mathbb{R}: {}^*\mathfrak{U}\models c\geq r\}$. Preslikavanje $x_i: A\times[0,1]\rightarrow\mathbb{R}$ definišimo sa $x_i(b,st(c))=\sup\{r\in\mathbb{R}: {}^*\mathfrak{U}\models X_{i,r}(b,c)\geq r\}$, što daje dvoverovatnosni model $\bar{\mathfrak{U}}=\langle{}^*A,[0,1],x_i,\mu_1,\mu_2,\lambda\rangle_{i\in I}$ rečenice $\varphi$. Time je dokazana potpunost logike $L^a_d$.

**TEOREMA 3.3.1**

Svaka rečenica konzistentna u logici $L^a_d$ ima apsolutno neprekidan dvoverovatnosan model. ∎

Da bi proširili teoremu 3.3.1 i na logiku $L^a_{ad}$, koja ima i operatore uslovnog očekivanja, prevedimo svaki term $\tau$ logike $L^a_{ad}$ u term $\hat{\tau}$ logike $K^a_d$, gde je K proširenje jezika L novim nelogičkim simbolima $X_\tau(x,s,\vec{t})$ za svaki term $\tau$ oblika $E[\sigma|u](x,s)$.

Svakom termu $\tau$ logike $L^a_{ad}$ pridružimo *gornju granicu* $\|\tau\|$ na sledeći način:

(i) $\|X_{i,r}(x,t)\| = r$ ;

(ii) $\|t\| = 1$ ;

(iii) $\|r\| = |r|$ (apsolutna vrednost broja r) ;

(iv) $\|\int_k \tau dx\| = \|\tau\|$ , $k=1,2$ ;

(v) $\|\int\tau dt\| = \|\tau\|$ ;

(vi) $\|E_k[\tau|s](x,t)\| = \|\tau\|$ , $k=1,2$ ;

(vii) $\|F(\tau_1,\dots,\tau_n)\| = \sup\{|F(s_1,\dots,s_n)|: |s_i|\leq\|\tau_i\|,\ i\leq n\}$ .

Očigledno je $|\tau(x,\vec{t})^{\mathfrak{U}}(a,\vec{b})|\leq\|\tau\|$ .

Za atomski term $\tau$ neka je $\hat{\tau}=\tau$ , a za term $\tau$ oblika $E[\sigma|u](x,s)$ neka je $\hat{\tau}=X_{\tau,\|\tau\|}(x,s,\vec{t})$ . Takođe, pretpostavimo da transformacija $\wedge$ komutira sa svim integralnim kvantifikatorima i sa neprekidnim funkcijama $F\in C_{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)$ .

Slično, svakoj formuli $\psi$ logike $L^a_{ad}$ pridružimo formulu $\hat{\psi}$ logike $K^a_d$ , tako da $\wedge$ komutira sa veznicima, i $\widehat{\tau\geq 0} = \hat{\tau}\geq 0$ .

**TEOREMA 3.3.2**

Svaka rečenica $\varphi$ konzistentna u logici $L^a_{ad}$ ima apsolutno neprekidan adaptiran dvoverovatnosan model.

**Dokaz:** Osnovnu ideju Keislera [31] "prilagodimo" našem dvoverovatnosnom slučaju.

Transformacijom $\wedge$ prevedimo rečenicu $\varphi$ i sve aksiome logike $L^a_{ad}$ . Tada je $\hat{\varphi}$ rečenica konzistentna u logici $K^a_d$ . Neka je $\mathfrak{U}=\langle A,x_1,x_\tau,\mu_1,\mu_2,\rangle$ apsolutno neprekidan dvoverovatnosan model rečenice $\hat{\varphi}$ (teorema 3.3.1). Za svako $b\in[0,1]$, neka je $F_b$ $\sigma$-algebra podskupova od $A$ generisana skupovima oblika $\{a:X_\tau(a,b,\vec{c})\geq r\}$ , gde je $r\in\mathbb{R}$ , $\vec{c}\in[0,1]^n$ i $\tau$ term oblika $E[\sigma|u](x,s)$ . Struktura $\langle A,x_i,\mu_1,\mu_2,G_b\rangle_{i\in I,b\in[0,1]}$ , gde je $G_b = \bigcap_{a>b} F_a$ , $G_1 = F_1$ , je apsolutno neprekidan adaptiran dvoverovatnosan model rečenice $\varphi$ . ∎

Singularan slučaj adaptirane dvoverovatnosne logike možemo rešiti tako što uvodimo još jednu verovatnosnu promenljivu $y$ , i još jedan atomski term $1(x=y)$, čija je interpretacija u modelu uobičajeno definisana. Potpun skup aksioma logike $L^s_{ad}$ dobijamo tako što aksiomu apsolutne neprekidnosti zamenimo aksiomom singularnosti (videti teoremu 3.2.8 i prethodnu konstrukciju) .

## §4 BOOLEOVA KOMBINACIJA VEROVATNOSNIH LOGIKA

U prvom delu uvedena je logika $BC\{L_{\mathcal{A}P_i} : i\in I\}$ koja predstavlja Booleovu kombinaciju verovatnosnih logika $L_{\mathcal{A}P_i}$, $i\in I$ i $I\in\mathcal{A}$. Dakle, formule logike $L_{\mathcal{A}P_i}$, $i\in I$, igraju ulogu iskaznih slova u logici $BC\{L_{\mathcal{A}P_i} : i\in I\}$. Dokazaćemo potpunost, konačnu kompaktnost, teoreme o normalnoj formi i monotonoj klasi, osobine Robinsonove neprotivrečnosti, Craigove interpolacije i konzervativne ekstenzije logike $BC\{L_{\mathcal{A}P_i} : i\in I\}$. Primenom ovih osobina dokazaćemo, u drugom delu, neka svojstva viševerovatnosne logike $L_{\mathcal{A}}\{P_i : i\in I\}$.

Tretirajući formule verovatnosne logike $L_{\mathcal{A}P_i}$, $i\in I$ i $I\in\mathcal{A}$, kao iskazna slova, izgradimo viševerovatnosnu logiku $BC\{L_{\mathcal{A}P_i} : i\in I\}$. Dakle, skup formula ove logike (*BC-formule*) je najmanji skup sastavljen od svih formula logika $L_{\mathcal{A}P_i}$ (*$P_i$-formule*) za svako $i\in I$ i koji je zatvoren za negaciju i prebrojive disjunkcije i konjunkcije.

Ako su $\mathfrak{A}_i = \langle A_i, R_j^{\mathfrak{A}_i}, c_k^{\mathfrak{A}_i}, \mu_i\rangle_{j\in J, k\in K}$ verovatnosni modeli za jezik $L=\{R_j, c_k\}$ verovatnosnih logika $L_{\mathcal{A}P_i}$, $i\in I$, tada *BC-verovatnosni model* $\mathfrak{A} = \langle A, R_j^{\mathfrak{A}}, c_k^{\mathfrak{A}}, \nu_i\rangle_{i\in I, j\in J, k\in K}$ definišimo na sledeći način. Univerzum $A$ ovog modela je takva disjunktna unija skupova $A_i$, $i\in I$, u kojoj su skupovi $\{c_k^{\mathfrak{A}_i} : k\in K\}$ za svako $i\in I$

identifikovani (oznaka: $A = \coprod A_i$), relacijski simboli su interpretirani pomoću $R_j^{\mathfrak{U}} = \coprod R_j^{\mathfrak{U}_i}$, a konstanta $c_k$ kao element $\{c_k^{\mathfrak{U}_i} : i \in I\}$ iz pomenute identifikacije. Skup $B \subseteq A$ je $\nu_i$-merljiv, $i \in I$, ako i samo ako je skup $B \cap A_i$ $\mu_i$-merljiv i $\nu_i(B) = \mu_i(B \cap A_i)$.

Polazeći od slabe ili gradirane verovatnosne strukture $\mathfrak{U}_i$ dobijamo, respektivno, *slabu* ili *gradiranu BC-verovatnosnu strukturu*.

Relacija zadovoljenja BC-formula u BC-verovatnosnom modelu definisana je kao i za iskaznu logiku. Slučaj verovatnosne kvantifikacije (pri građenju $P_i$-formula) interpretiran je pomoću:

$$\mathfrak{U} \models (P_i \vec{x} \geq r)\varphi(\vec{x}, \vec{y})[\vec{b}] \quad \text{akko} \quad \nu_i^{(n)}\{\vec{a} \in A_i^n : \mathfrak{U}_i \models \varphi[\vec{a}, \vec{b}]\} \geq r,$$

gde je $\varphi(\vec{x}, \vec{y})$ $P_i$-formula i $\vec{b} \in A_i^n \subseteq A^n$.

Aksiome i pravila izvođenja logike $BC\{L_{\mathcal{A}P_i} : i \in I\}$ su $A_1$-$A_6$, $B_1$-$B_4$ i $C_1$-$C_3$, uz zapažanje da se u njihovoj formulaciji, tamo gde ima smisla, $P_i$-formula zamenjuje BC-formulom.

Potpunost skupa aksioma logike $BC\{L_{\mathcal{A}P_i} : i \in I\}$ zasniva se na potpunosti tog skupa aksioma za logike $L_{\mathcal{A}P_i}$, $i \in I$, i iskaznu logiku.

**TEOREMA 4.1**

Teorija T logike $BC\{L_{\mathcal{A}P_i} : i \in I\}$ je konzistentna akko ima BC-verovatnosni model.

**Dokaz:** Uslov je dovoljan jer su sve aksiome tačne u svakom BC-verovatnosnom modelu, i pravilima izvođenja čuva se valjanost aksioma.

Neka je T konzistentna teorija logike $BC\{L_{\mathcal{A}P_i} : i \in I\}$. Neka je $C = \bigcup_{i \in I} C_i$ (disjunktna unija) prebrojiv skup novih konstantnih simbola i $C \in \mathcal{A}$, i neka je $K = L \cup C$. Henkinovom konstrukcijom proširimo teoriju T do maksimalne $BC\{K_{\mathcal{A}P_i} : i\in I\}$-konzistentne teorije $T_\omega$ sa osobinama svedoka:

Ako $\varphi(\vec{c})\in T_\omega$ za svako $\vec{c}$ iz $C_i$ , tada i $(P_i\vec{x}\geq 1)\varphi(\vec{x})\in T_\omega$ ,

gde je $\varphi$ neka $P_i$-formula (za svako $i\in I$) .

Na skupu $C_i$ relacija $\simeq_i$ definisana sa $c\simeq_i d$ akko $c=d\in T_\omega$ je relacija ekvivalencije ( šta više, kongruencija ). Slabi verovatnosni modeli $\mathfrak{A}_i$ , za svako $i\in I$ , sa univerzumom $A_i=C_i/\simeq_i$ , relacijama $R^{\mathfrak{A}_i}([c_1^i],\ldots,[c_n^i])$ akko $R(c_1^i,\ldots,c_n^i)\in T_\omega$ i merama $\mu_{n,i}$ definisanim na podskupovima skupa $A_i^n$ koji su određeni $P_i$-formulama i parametrima iz $C_i$ , pomoću

$$\mu_{n,i}\{[\vec{c}]:\varphi(\vec{c},\vec{d})\in T_\omega\} = \sup\{r\in\mathbb{R}:(P_i\vec{x}\geq r)\varphi(\vec{x},\vec{d})\in T_\omega\} ,$$

grade slab BC-verovatnosan model $\mathfrak{A}$ teorije $T_\omega$ (otuda i T). Za svako $i\in I$, slab verovatnosan model $\mathfrak{A}_i$ je $L_{\mathcal{A}P_i}$-elementarno ekvivalentan nekom verovatnosnom modelu $\mathfrak{B}_i$ , pa je i slab BC-verovatnosan model $\mathfrak{A}$ $BC\{L_{\mathcal{A}P_i} : i\in I\}$-elementarno ekvivalentan BC-verovatnosnom modelu $\mathfrak{B}$ . ∎

Skup *univerzalno konjunktivnih formula logike* $BC\{L_{\mathcal{A}P_i} : i\in I\}$ je najmanji skup koji sadrži sve univerzalno konjunktivne $P_i$-formule, za svako $i\in I$, i zatvoren je za proizvoljne konjunkcije i konačne disjunkcije.

**TEOREMA 4.2**

Neka je T skup univerzalno konjunktivnih rečenica logike $BC\{L_{\mathcal{A}P_i} : i\in I\}$ . Ako svaki konačan podskup od T ima gradirani BC-verovatnosni model, tada i T ima takav model.

**Dokaz:** Neka je $\mathfrak{A}_\Psi = \coprod \mathfrak{A}_\Psi^i$ BC-verovatnosan model za $\Psi\subseteq T$, gde je $\Psi$ bilo koji konačan podskup od T . Model $^*\mathfrak{A} = \coprod {}^*\mathfrak{A}^i$ , gde je $^*\mathfrak{A}^i$ ultraproizvod modela $\mathfrak{A}_\Psi^i$ , $\Psi\subseteq T$ , ima osobinu da za svaku rečenicu $\varphi$ iz T skoro svi $\mathfrak{U}_\Psi$ zadovoljavaju $\varphi$ . Gradirani BC-verovatnosni model $\mathfrak{A} = \coprod \mathfrak{A}^i$ , gde je gradirani model $\mathfrak{A}^i$ dobijen Loebovom konstrukcijom iz modela ${}^*\mathfrak{U}^i$ , ima osobinu da svaka univerzalno konjunktivna BC-formula koja važi u skoro svim modelima $\mathfrak{U}_\Psi$ važi i u $\mathfrak{A}$ . ■

Svaka $P_i$-formula $\varphi(\vec{x})$ gradirane logike $L_{\mathcal{A}P_i}$ je ekvivalentna prebrojivoj Booleovoj kombinaciji $P_i$-formula oblika $(P_i\vec{y}\geq r)\psi(\vec{x},\vec{y})$, gde je $\psi(\vec{x},\vec{y})$ konačna konjunkcija atomskih $P_i$-formula ( teorema o normalnoj formi, videti [19] ili [30] ). Otuda, i svaka BC-formula gradirane $BC\{L_{\mathcal{A}P_i} : i\in I\}$ logike je ekvivalentna Booleovoj kombinaciji $P_i$-formula istog oblika, tj. važi teorema o normalnoj formi i za logiku $BC\{L_{\mathcal{A}P_i} : i\in I\}$ .

Prebrojivu konjunkciju $\bigwedge_n \varphi_n(\vec{x})$ BC-formula ($P_i$-formula) takvu da za svako $n\in\mathbb{N}$ važi $\models \varphi_{n+1}(\vec{x}) \Rightarrow \varphi_n(\vec{x})$, zovemo *monotonom konjunkcijom.* Prebrojiva disjunkcija $\bigvee_n \varphi_n(\vec{x})$ BC-formula ($P_i$-formula) je *monotona* ako važi $\models \varphi_n(\vec{x}) \Rightarrow \varphi_{n+1}(\vec{x})$ u logici $BC\{L_{\mathcal{A}P_i} : i\in I\}$ ( $L_{\mathcal{A}P_i}$ ). *Skup monotonih BC-formula ($P_i$-formula) logike* $BC\{L_{\mathcal{A}P_i} : i\in I\}$ ( $L_{\mathcal{A}P_i}$ ) je najmanji skup koji sadrži sve konačne formule i zatvoren je za monotone konjunkcije i disjunkcije (u slučaju $P_i$-formule, zatvoren je i za verovatnosne kvantifikatore $P_i\vec{x}\geq r$). Napomenimo da konačne formule gradimo pomoću konačnih konjunkcija i disjunkcija, pa konačna BC-formula sadrži samo konačno mnogo konačnih $P_i$-formula.

Svaka $P_i$-formula $\varphi(\vec{x})$ ekvivalentna je monotonoj $P_i$-formuli $\varphi'(\vec{x})$ logike $L_{\mathcal{A}P_i}$ (teorema o monotonoj formi, videti [15], teorema 2.16), $i\in I$, i skup svih BC-formula logike $BC\{L_{\mathcal{A}P_i} : i\in I\}$ koje su ekvivalentne nekoj monotonoj formuli sa istim slobodnim promenljivim, zatvoren je za negacije, konjunkcije i monotone konjunkcije (videti [27]). Otuda, teorema o monotonoj formi važi i za logiku $BC\{L_{\mathcal{A}P_i} : i \in I\}$.

**TEOREMA 4.3**

Svaka formula $\varphi(\vec{x})$ logike $BC\{L_{\mathcal{A}P_i} : i \in I\}$ je ekvivalentna nekoj monotonoj formuli $\varphi'(\vec{x})$ . ∎

Povezivanjem odgovarajućih rezultata za verovatnosne logike $L_{\mathcal{A}P_i}$ , $i \in I$, i "iskazne forme" logike $BC\{L_{\mathcal{A}P_i} : i \in I\}$, dokažimo teoreme o Robinsonovoj neprotivrečnosti i Craigovoj interpolaciji za logiku $BC\{L_{\mathcal{A}P_i} : i \in I\}$ .

**TEOREMA 4.4**

Neka je $L^0 = L^1 \cap L^2$ i neka su $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ BC-verovatnosni modeli jezika $L^1$ i $L^2$ respektivno, takvi da su restrikcije $\mathfrak{A}|L^0$ i $\mathfrak{B}|L^0$ $BC\{L^0_{\mathcal{A}P_i} : i \in I\}$-ekvivalentni modeli. Tada postoji BC-verovatnosan model $\mathfrak{C}$ jezika $L^1 \cup L^2$ takav da $\mathfrak{C}|L^1$ i $\mathfrak{A}$ su $BC\{L^1_{\mathcal{A}P_i} : i \in I\}$-ekvivalentni, a $\mathfrak{C}|L^2$ i $\mathfrak{B}$ su $BC\{L^2_{\mathcal{A}P_i} : i \in I\}$-ekvivalentni modeli.

**Dokaz:** Neka su $\mathfrak{A}_i$ i $\mathfrak{B}_i$ restrikcije modela $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ za logike $L^1_{\mathcal{A}P_i}$ i $L^2_{\mathcal{A}P_i}$ respektivno, $i \in I$ ( ako je $\mathfrak{A} = \langle \coprod A_i, R_j^{\mathfrak{A}}, c_k^{\mathfrak{A}}, \nu_i \rangle$ BC-verovatnosan model, tada je, na primer, $\mathfrak{A}_i = \langle A_i, R_j^{\mathfrak{A}} \cap A_i, c_k^{\mathfrak{A}}, \nu_i | A_i \rangle$ verovatnosan model ). Ako je $\varphi$ $P_i$-rečenica logike $L^0_{\mathcal{A}P_i}$ , tada

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_i|L^0 \models \varphi \quad & \text{akko} \quad \mathfrak{A}|L^0 \models \varphi , \\ & \text{akko} \quad \mathfrak{B}|L^0 \models \varphi , \\ & \text{akko} \quad \mathfrak{B}_i|L^0 \models \varphi . \end{aligned}$$

Stoga, postoji verovatnosan model $\mathfrak{C}_i$ jezika $L^1 \cup L^2$ , takav da $\mathfrak{C}_i|L^1$ i $\mathfrak{A}_i$ su $L^1_{\mathcal{A}P_i}$-ekvivalentni, a $\mathfrak{C}_i|L^2$ i $\mathfrak{B}_i$ su $L^2_{\mathcal{A}P_i}$-ekvivalentni (teorema 2.1.15). Odgovarajući BC-verovatnosan model $\mathfrak{C}$ generisan verovatnosnim modelima $\mathfrak{C}_i$, $i\in I$, zadovoljava tražene uslove. ∎

TEOREMA 4.5

Ako je $L^0=L^1\cap L^2$ i ako su $\varphi$ i $\psi$ rečenice logika $BC\{L^1_{\mathcal{A}P_i}:i\in I\}$ i $BC\{L^2_{\mathcal{A}P_i}:i\in I\}$ respektivno tako da $\models \varphi \Rightarrow \psi$, tada postoji BC-rečenica $\theta$ jezika $L^0$ takva da $\models \varphi \Rightarrow \theta$ i $\models \theta \Rightarrow \psi$.

Dokaz: Ako takvo $\theta$ ne postoji, Henkinovom konstrukcijom izgradimo slabe BC-verovatnosne modele $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ rečenica $\varphi$ i $\neg\psi$ respektivno, tako da $\mathfrak{A}|L^0$ i $\mathfrak{B}|L^0$ su $BC\{L^0_{\mathcal{A}P_i}:i\in I\}$-ekvivalentni modeli. Iz teoreme potpunosti za verovatnosne logike i načina na koji smo izgradili BC-verovatnosan model pomoću verovatnosnih modela, sledi da postoje BC-verovatnosni modeli $\mathfrak{C}$ i $\mathfrak{D}$ rečenica $\varphi$ i $\neg\psi$ čije restrikcije $\mathfrak{C}|L^0$ i $\mathfrak{D}|L^0$ su $BC\{L^0_{\mathcal{A}P_i}:i\in I\}$-ekvivalentni modeli. Iz prethodne teoreme sledi da $\varphi \wedge \neg\psi$ ima BC-verovatnosan model, što je nemoguće. ∎

Istaknimo vezu između verovatnosnih logika $L_{\mathcal{A}P_i}$, $i\in I$, Booleove kombinacije $BC\{L_{\mathcal{A}P_i}:i\in I\}$ i logike $L_{\mathcal{A}\{P_i:i\in I\}}$ čije formule sadrže "izmešane" verovatnosne kvantifikatore, tj. skup svih formula logike $L_{\mathcal{A}\{P_i:i\in I\}}$ je najmanji skup koji sadrži atomske formule i zatvoren je za negaciju, prebrojive konjunkcije i verovatnosne kvantifikatore $P_i\vec{x}\geq r$, za svako $i\in I$. Napomenimo da smo deo ove "veze" već koristili, na primer, u teoremi 4.4.

TEOREMA 4.6 (konzervativna ekstenzija)

(a) Za ma koju $P_i$-rečenicu $\varphi$ važi: $L_{\mathcal{A}P_i}\models\varphi$ akko $L_{\mathcal{A}\{P_i:i\in I\}}\models\varphi$.

(b) Za ma koju BC-rečenicu $\varphi$ važi:

$$L_{\mathcal{A}\{P_i:i\in I\}}\models\varphi \quad\text{akko}\quad BC\{L_{\mathcal{A}P_i}:i\in I\}\models\varphi .$$

Dokaz: Dovoljno je primetiti da svaki viševerovatnosni model $\langle\mathfrak{A},\mu_j\rangle_{j\in I}$ možemo redukovati na verovatnosne modele $\langle\mathfrak{A},\mu_i\rangle$ za svako

$i \in I$ , a zatim, na uobičajen način, izgraditi BC-verovatnosan model $\langle \hat{\mathfrak{U}}, \nu_i \rangle_{i \in I}$ . ∎

## §5 VEROVATNOSNA LOGIKA DRUGOG REDA

Beskonačna logika $L_{\mathcal{A}P\forall}$, sa običnim i verovatnosnim kvantifikatorima, je minimalna ekstenzija beskonačne logike $L_{\mathcal{A}}$ i verovatnosne logike $L_{\mathcal{A}P}$. Dakle, u ovoj logici pri građenju formula koristimo i kvantifikatore $\forall$, $\exists$ i $P\vec{x}\geq r$.

Sinteza aksioma logike $L_{\mathcal{A}}$ ( videti, na primer, [26] ), aksioma verovatnosne logike $L_{\mathcal{A}P}$ i aksiome

$$(\forall x)\ \varphi(x) \Rightarrow (Px\geq 1)\varphi(x)\ ,$$

daje potpun skup aksioma logike $L_{\mathcal{A}P\forall}$ samo za slabe verovatnosne modele (videti [42]).

Keisler u [30] postavlja problem potpunosti logike $L_{\mathcal{A}P\forall}$, zatim, potpunosti restrikcije logike $L_{\mathcal{A}P\forall}$ u kojoj se univerzalan kvantifikator ne pojavljuje unutar dejstva verovatnosnih kvantifikatora, kao i restrikcije logike $L_{\mathcal{A}P\forall}$ na one strukture u kojima su svi definabilni skupovi Borelovi ( *apsolutne Borelove strukture* ) . Ovi problemi su i dalje otvoreni. Opisana konstrukcija verovatnosnog modela nije dovoljna, jer konstrukcija Loebove mere ne čuva istinitost formula koje sadrže univerzalan i egzistencijalan kvantifikator.

Dokažimo teoremu o monotonoj klasi formula logike $L_{\mathcal{A}P\forall}$. Pojam monotone formule dat je u §4 .

TEOREMA 5.1

Svaka formula $\varphi(\vec{x})$ logike $L_{\mathcal{A}P\forall}$ je logički ekvivalentna nekoj monotonoj formuli $\psi(\vec{x})$ .

**Dokaz:** Skup koji sadrži konačne formule i zatvoren je za kvantifikatore, konačne konjunkcije i disjunkcije, i monotone konjunkcije i disjunkcije, zovemo skupom *normalnih formula.*

Kako je svaka prebrojiva konjunkcija $\bigwedge_n \varphi_n$ ekvivalentna monotonoj konjunkciji $\bigwedge_n (\bigwedge_{m\leq n} \varphi_m)$ ( slično za prebrojive disjunkcije ), i kako negaciju možemo svesti samo na negaciju atomskih formula, to je svaka formula $\varphi(\vec{x})$ logike $L_{\mathcal{A}P\forall}$ logički ekvivalentna nekoj normalnoj formuli.

Sledeće dve osobine pokazuju da je skup monotonih formula zatvoren za verovatnosni kvantifikator $P\vec{x}\geq r$ .

(1) Ako je $\bigvee_n \varphi_n(\vec{x})$ monotona disjunkcija, tada

$\models (P\vec{x}\geq r) \bigvee_n \varphi_n(\vec{x}) \iff \bigvee_n (P\vec{x}\geq r)\ \varphi_n(\vec{x})$ , i formula na desnoj strani ekvivalencije je takođe monotona disjunkcija.

(2) Ako je $\bigwedge_n \varphi_n(\vec{x})$ monotona konjunkcija, tada

$\models (P\vec{x}\geq r) \bigwedge_n \varphi_n(\vec{x}) \iff \bigvee_m \bigwedge_n (P\vec{x}\geq r+1/m)\ \varphi_n(\vec{x})$ , i poslednja disjunkcija je monotona.

Stoga je u [27] pri dokazu teoreme o monotonoj klasi za logiku $L_{\mathcal{A}}$ , dovoljno preslikavanju $G:K\to K$ , gde je K najmanja klasa formula logike $L_{\mathcal{A}P\forall}$ koja sadrži konačne formule i zatvorena je za kvantifikatore i konačne i beskonačne konjunkcije i disjunkcije, pridodati i sledeća svojstva:

(i) $G((P\vec{x}\geq r)\varphi) = (P\vec{x}\geq r)G(\varphi)$ , gde je $\varphi$ beskonačna formula.

(ii) $G((P\vec{x}\geq r)\varphi \wedge \psi) = (P\vec{x}\geq r)G(\varphi\wedge\psi)$ , gde je $\varphi$ beskonačna, a $\psi$ konačna formula, i promenljive $\vec{x}$ nisu slobodne u $\psi$ .

(iii) $G(\varphi \wedge (P\vec{x}\geq r)\psi) = (P\vec{x}\geq r)G(\varphi\wedge\psi)$ , gde je $\psi$ beskonačna formula, i $\vec{x}$ nije slobodno u $\varphi$ .

(slično za disjunkcije)

Preslikavanje G ima osobine da svakoj formuli $\psi(\vec{x})$ pridružuje logički ekvivalentnu formulu $G(\psi(\vec{x}))$, i da svakoj normalnoj formuli pridružuje monotonu formulu. Dakle, prvo, formuli $\varphi(\vec{x})$ logike $L_{\mathcal{A}P\forall}$ pridružimo logički ekvivalentnu normalnu formulu $\psi(\vec{x})$, a zatim i logički ekvivalentnu monotonu formulu $G(\psi(\vec{x}))$ . ∎

Uvedimo jedan tip verovatnosne logike drugog reda sa univerzalnim kvantifikatorom nad skupovnim promenljivim i verovatnosnim kvantifikatorima nad individualnim promenljivim.

Opišimo sintaksu verovatnosne logike $L^2_{\mathcal{A}P\forall}$ drugog reda.

Jezik L čine prebrojiv skup $\{c_j : j\in J\}$ individualnih konstanti, i za svako $n\in\mathbb{N}$, najviše prebrojivi skupovi $\{P^n_k : k\in K_n\}$ n-arnih skupovnih (predikatskih) konstanti.

Logički simboli verovatnosne logike drugog reda $L^2_{\mathcal{A}P\forall}$ su:

(a) prebrojiv skup *individualnih promenljivih* $x_0, x_1, x_2, \dots$ ,

(b) za svako $n\in\mathbb{N}$, skup n-arnih *skupovnih (predikatskih) promenljivih* $X^n, Y^n, Z^n, \dots$ ,

(c) simbol $\perp$ ,

(d) veznici $\neg$ i $\wedge$ ,

(e) kvantifikatori: $P\vec{x}\geq r$, gde je $\vec{x}=x_1,\dots,x_n$ n-torka različitih individualnih promenljivih i $r\in\mathcal{A}\cap[0,1]$, $\forall X$ i $\exists X$, gde je X skupovna promenljiva.

Logičke simbole $\vee$ , $\Rightarrow$ , $P\vec{x}\leq r$ , $P\vec{x}>r$ , $P\vec{x}<r$ uvodimo kao skraćenice na uobičajen način.

*Formule* su definisane induktivno sa:

(i) $\perp$ je formula ,

(ii) za $n \geq 1$, $X^n(\xi_1,\dots,\xi_n)$ i $P^n_k(\xi_1,\dots,\xi_n)$ su formule gde je $\xi_i$ ili individualna promenljiva ili individualna konstanta ,

(iii) skup formula je zatvoren za iskazne veznike ,

(iv) skup formula je zatvoren i za kvantifikatore, ali tako da se univerzalan i egzistencijalan kvantifikator ne pojavljuju unutar dejstva verovatnosnih kvantifikatora.

Razlog ove restrikcije leži u primeni teoreme Fubinija pri realizaciji zadovoljenja formula logike $L^2_{\mathcal{A}P\forall}$ u verovatnosnim modelima drugog reda.

Opišimo i semantiku logike $L^2_{\mathcal{A}P\forall}$ .

*Verovatnosna struktura drugog reda* je struktura $\mathfrak{A}=\langle A,\{A_n:n\in\mathbb{N}\},c^{\mathfrak{A}}_j,R^n_k,\mu\rangle_{j\in J,n\in\mathbb{N},k\in K_n}$ , gde je $\langle A,\mu\rangle$ verovatnosan ($\sigma$-aditivan) prostor sa merljivim singltonima, $c^{\mathfrak{A}}_j\in A$ , $A_n\subseteq\mathcal{P}(A^n)$, $n\geq 1$, i $R^n_k\in A_n$ su $\mu^{(n)}$-merljivi skupovi, $k\in K_n$ .

Relacija zadovoljenja formula logike $L^2_{\mathcal{A}P\forall}$ u verovatnosnoj strukturi $\mathfrak{A}$ drugog reda definisana je induktivno na uobičajen način. Navedimo samo neke istaknute delove ove definicije:

(i) nije $\mathfrak{A}\models\perp$ ,

(ii) $\mathfrak{A}\models X^n(x_1,\dots,x_n)[B,a_1,\dots,a_n]$ akko $(a_1,\dots,a_n)\in B$ , gde je $a_i\in A$ , $i=1,2,\dots,n$ i $B\in A_n$ , i

$\mathfrak{A}\models P^n_k(x_1,\dots,x_n)[a_1,\dots,a_n]$ akko $(a_1,\dots,a_n)\in R^n_k$ .

(iii) $\mathfrak{A}\models\forall X^n\varphi$ akko za svako $B\in A_n$ , $\mathfrak{A}\models\varphi[B]$ .

Logika $L^2_{\mathcal{A}P\forall}$ ima sledeći skup aksioma:

$T_1$ $\quad\varphi\Rightarrow(\psi\Rightarrow\varphi)$ ;

$T_2$ $\quad(\varphi\Rightarrow(\psi\Rightarrow\theta))\Rightarrow((\varphi\Rightarrow\psi)\Rightarrow(\varphi\Rightarrow\theta))$ ;

$T_3$ $(\neg\varphi \Rightarrow \neg\psi) \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$ ;

$T_4$ $\forall X^n\varphi \Rightarrow S_B^{X^n}\varphi$ , gde je $S_B^{X^n}\varphi$ formula dobijena zamenom svakog slobodnog pojavljivanja promenljive $X^n$ u $\varphi$ sa B , i B je n-arna skupovna promenljiva ili konstanta slobodna za $X^n$ u $\varphi$, tj. $\varphi$ i $S_B^{X^n}\varphi$ imaju isti broj vezanih promenljivih ;

$T_5$ $\forall X^n(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \forall X^n\psi)$ , gde se $X^n$ ne javlja slobodno u $\varphi$ ;

$T_6$ Sve aksiome logike $L_{\mathcal{A}P}$ $(A_2\text{-}A_6 + B_1\text{-}B_4)$ ;

$T_7$ Aksiome za meru nad skupovnim promenljivim

(i) $(\forall X^n)((P\vec{x}\geq r)X^n(\vec{x}) \Rightarrow (P\vec{x}\geq s)X^n(\vec{x}))$ , gde je $r\geq s$ ;

(ii) $(\forall X^n)((P\vec{x}\geq r)X^n(\vec{x}) \Longleftrightarrow (P\vec{y}\geq r)X^n(\vec{y}))$ ;

(iii) $(\forall X^n)(P\vec{x}\geq 0)X^n(\vec{x})$ ;

(iv) $(\forall X^n)(\forall Y^n)(((P\vec{x}\leq r)X^n(\vec{x})\wedge(P\vec{x}\leq s)Y^n(\vec{x})) \Rightarrow$
$\Rightarrow (P\vec{x}\leq r+s)(X^n(\vec{x})\vee Y^n(\vec{x})))$ ;

(v) $(\forall X^n)(\forall Y^n)(((P\vec{x}\geq r)X^n(\vec{x})\wedge(P\vec{x}\geq s)Y^n(\vec{x}) \wedge$
$\wedge (P\vec{x}\leq 0)(X^n(\vec{x})\wedge Y^n(\vec{x}))) \Rightarrow (P\vec{x}\geq r+s)(X^n(\vec{x})\vee Y^n(\vec{x})))$ ;

(vi) $(\forall X^n)((P\vec{x}>r)X^n(\vec{x}) \Longleftrightarrow \bigvee_k (P\vec{x}\geq r+1/k)X^n(\vec{x}))$ ;

(vii) $\bigwedge_{L\subseteq M} (P\vec{x}\geq r)\bigwedge_{i\in L} X_i^n(\vec{x}) \Rightarrow (P\vec{x}\geq r)\bigwedge_{i\in M} X_i^n(\vec{x})$ , gde je $M\subseteq\mathbb{N}$ i L prolazi kroz sve konačne podskupove od M ;

(viii) $(\forall X^n)((Px_1\ldots x_n\geq r)X^n(\vec{x}) \Longleftrightarrow (Px_{\pi 1},\ldots,x_{\pi n}\geq r)X^n(\vec{x}))$, gde je $\pi$ neka permutacija skupa $\{1,2,\ldots,n\}$ ;

(ix) $(\forall X^{n+m})((P\vec{x}\geq r)(P\vec{y}\geq s)X^{n+m}(\vec{x},\vec{y}) \Rightarrow (P\vec{x}\vec{y}\geq rs)X^{n+m}(\vec{x},\vec{y}))$ ;

(x) za svako $r<1$,
$(\forall X^{n+m})(P\vec{x}\geq 1)(P\vec{y}>0)(P\vec{z}\geq r)(X^{n+m}(\vec{x},\vec{z}) \Longleftrightarrow X^{n+m}(\vec{y},\vec{z}))$ ;

$T_8$ $(\exists X^n)(P\vec{x}\geq 1)(X^n(\vec{x}) \Longleftrightarrow \varphi(\vec{x}))$ .

Pravila izvođenja logike $L^2_{\mathcal{A}P\forall}$ su:

$U_1$ $\varphi$ , $\varphi \Rightarrow \psi \vdash \psi$ ;

$U_2$ $\{\varphi \Rightarrow \psi : \psi \in \Psi\} \vdash \varphi \Rightarrow \bigwedge\Psi$ ;

$U_3$ (i) $\varphi \Rightarrow \psi(\vec{x}) \vdash \varphi \Rightarrow (P\vec{x}\geq 1)\psi(\vec{x})$ , gde je $\psi$ formule logike $L_{\mathcal{A}P}$ i promenljive iz $\vec{x}$ nisu slobodne u $\varphi$ ;

(ii) $\varphi \Rightarrow \psi(X) \vdash \varphi \Rightarrow (\forall X)\psi(X)$ , gde skupovna promenljiva X nije slobodna u $\varphi$ .

Sve aksiome, osim $T_8$ , su valjane u verovatnosnoj strukturi drugog reda i svim pravilima izvođenja primenjenim na valjane formule, dobijamo valjanu formulu. Zbog aksiome $T_8$ uvodimo pojam *verovatnosnog modela drugog reda.*

*Verovatnosni model drugog reda* je verovatnosna struktura $\mathfrak{A}$ drugog reda u kojoj svaki primer aksiome $T_8$ važi.

**TEOREMA 5.2**

Ako je teorija T konzistentna u $L^2_{\mathcal{A}P\forall}$ , tada T ima verovatnosan model drugog reda.

**Dokaz:** Neka je C prebrojiv skup novih individualnih konstanti i, za svako $n\geq 1$, neka je $D_n$ prebrojiv skup novih n-arnih skupovnih konstanti ($C, D_n \in \mathcal{A}$, $n\in\mathbb{N}$). Neka je $K = L\cup C\cup(\cup D_n)$ .

Henkinovom konstrukcijom proširimo teoriju T do maksimalne $K^2_{\mathcal{A}P\forall}$-konzistentne teorije $\Phi$ sa sledećim osobinama svedoka:

(i) $\Phi$ je kompletna teorija, tj. za svaku rečenicu $\varphi$ logike $K^2_{\mathcal{A}P\forall}$ ili $\varphi\in\Phi$ ili $\neg\varphi\in\Phi$ ;

(ii) ako $\bigwedge\Psi \in K^2_{\mathcal{A}P\forall}$ i $\Psi\subseteq\Phi$ , tada $\bigwedge\Psi\in\Phi$ ;

(iii) ako je $\varphi(\vec{x})$ formula logike $K_{\mathcal{A}P}$ i $\varphi(\vec{c})\in\Phi$ za svako $\vec{c}$ iz C, tada i $(P\vec{x}\geq 1)\varphi(\vec{x})\in\Phi$ ;

(iv) ako je $\varphi(X^n)$ formula logike $K^2_{\mathcal{A}P\forall}$ i $\varphi(P)\in\Phi$ za svaku n-arnu skupovnu konstantu $P\in D_n$ , tada $(\forall X^n)\varphi(X^n)\in\Phi$ .

Definišimo slab verovatnosni model $\mathfrak{A}_\Phi = \langle A, \{A_n : n\in\mathbb{N}\}, c^{\mathfrak{A}}, R^{\mathfrak{A}}, \mu_n\rangle$

drugog reda na sledeći način:

(i) $A=\{c^{\mathfrak{A}}: c\in C_K\}$ , gde je $C_K$ skup individualnih konstanti jezika K ;

(ii) $R^{\mathfrak{A}}=\{(a_1,\dots,a_n)\in A^n: P(a_1,\dots,a_n)\in\Phi\}$ za svaku n-arnu skupovnu konstantu P jezika K ;

(iii) $A_n=\{R^{\mathfrak{A}}: P\in S^n_K\}$ , gde je $S^n_K$ skup n-arnih skupovnih konstanti ;

(iv) skupovi $\{\vec{c}^{\mathfrak{A}}\in A^n: \varphi(\vec{c},\vec{d})\in\Phi\}$ su $\mu_n$-merljivi, gde je $\varphi$ formula logike $K_{\mathcal{A}P}$, $\vec{d}$ iz C a $\mu_n$ konačno-aditivna mera definisana sa $\mu_n\{\vec{c}^{\mathfrak{A}}\in A^n: \varphi(\vec{c},\vec{d})\in\Phi\} = \sup\{r: (P\vec{x}\geq r)\varphi(\vec{x},\vec{d})\in\Phi\}$ ;

(v) $\mu_n(R^{\mathfrak{A}}) = \sup\{r: (P\vec{x}\geq r)P(\vec{x})\in\Phi\}$ .

Lako je proveriti da za svaku rečenicu $\varphi$ logike $K^2_{\mathcal{A}P\forall}$ važi:

$$\mathfrak{A}_\Phi\models\varphi \text{ akko } \varphi\in\Phi .$$

Dobijeni kanonski model $\mathfrak{A}_\Phi$ teorije $\Phi$ je i slab verovatnosan model drugog reda teorije T .

Od internalne strukture ${}^*\mathfrak{A}_\Phi=\langle{}^*A,\{\sigma A_n: n\in\mathbb{N}\},{}^*c,{}^*R,{}^*\mu_n\rangle$, gde je $\sigma A_n=\{{}^*B: B\in A_n\}$, Loebovom i Keislerovom konstrukcijom, primenom transfer principa, dobijamo verovatnosni model $\hat{\mathfrak{A}}_\Phi=\langle{}^*A,\{\sigma A_n: n\in\mathbb{N}\},{}^*c,{}^*R,\mu\rangle$ drugog reda za teoriju T . ■

Jednakost za individualne promenljive možemo uvesti pomoću: $x = y$ akko $\forall X^1(\, X^1(x) \Leftrightarrow X^1(y)\, )$ , i aksiome jednakosti sada postaju teoreme.

Dvoverovatnosne logike drugog reda $L^{2a}_{\mathcal{A}P\forall}$ i $L^{2s}_{\mathcal{A}P\forall}$ uvodimo slično kao u §3. Primetimo da će aksioma apsolutne neprekidnosti

$$\bigwedge_{\varepsilon\in\mathbb{Q}^+}\ \bigvee_{\delta\in\mathbb{Q}^+} (\forall X^n)((P_2\vec{x}<\delta)X^n(\vec{x}) \Rightarrow (P_1\vec{x}<\varepsilon)X^n(\vec{x}))$$

zajedno sa modifikovanom aksiomom $T_8$

$$(\exists X^n)((P_1\vec{x}\geq 1)(X^n(\vec{x}) \Leftrightarrow \varphi(\vec{x})) \wedge (P_2\vec{x}\geq 1)(X^n(\vec{x}) \Leftrightarrow \varphi(\vec{x})))$$

i paralelno uvedenim pojmom dvoverovatnosnog modela logike drugog reda, obezbediti apsolutnu neprekidnost mera $\mu_\kappa$, čime je izbegnuta konstrukcija srednjeg verovatnosnog modela.

Slično, aksioma

$$\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} (\exists X^n)((P_1\vec{x}\le 0)X^n(\vec{x}) \wedge (P_2\vec{x}\ge 1)X^n(\vec{x}))$$

obezbeđuje singularnost mera $\mu_\kappa^n$, za svako $n\in\mathbb{N}$.

## §6 CILINDRIČNE VEROVATNOSNE ALGEBRE

Odnos Booleove algebre i iskazne logike, ili odnos cilindrične algebre i logike prvog reda, motiviše nas da uvedemo algebre, koje ćemo zvati cilindričnim verovatnosnim algebrama, a koje "odgovaraju", na primer, konačnoj gradiranoj verovatnosnoj logici $L_{\mathcal{A}P}$ ( $\omega\notin\mathcal{A}$ ) . Na taj način, u mogućnosti smo da deduktivni aparat konačne gradirane verovatnosne logike interpretiramo u jednakosnoj logici njene Tarski-Lindenbaumove algebre.

Neka je $\langle M,S,\mu_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ gradiran verovatnosan prostor. Za $\vec{k}=k_1,\dots,k_n$ , $k_i<\omega$ i $r\in[0,1]$ definišimo unarnu operaciju $C^r_{\vec{k}}$ na podskupovima od $M^\omega$ pomoću:

$$C^r_{\vec{k}}(X)=\{y\in M^\omega:\mu_n\{(x_{k_1},\dots,x_{k_n}):x\in X \text{ i } x_i=y_i \text{ za } i\notin\{k_1,\dots,k_n\}\}\geq r\}.$$

Dakle, operacijom $C^r_{\vec{k}}$ vrši se "cilindrifikacija" samo onih odsečaka skupa X čija mera nije manja od r . Nazovimo, stoga, ove operacije *verovatnosnim cilindrifikacijama.* Mera $\mu_\omega$ na skupu $M^\omega$, generisana je merama $\mu_n$ na skupu $M^n$, za svako $n\in\mathbb{N}$ . Iz Fubinijeve teoreme sledi da za svaki $\mu_\omega$-merljiv skup X, odsečak $\{(x_{k_1},\dots,x_{k_n}):x\in X \text{ i } x_i=y_i \text{ za } i\notin\{k_1,\dots,k_n\}\}$ je $\mu_n$-merljiv za svako $y\in M^\omega$, i $C^r_{\vec{k}}(X)$ je $\mu_\omega$-merljiv skup, što govori o korektnosti definicije operacija $C^r_{\vec{k}}$ .

*Cilindrično verovatnosno polje skupova* je skup $\mathcal{B}$

podskupova od $M^{\omega}$ , koji je polje skupova u Booleovom smislu, sadrži istaknute elemente $D_{ij}=\{x\in M^{\omega}: x_i=x_j\}$ i koji je zatvoren za operacije $C^{r}_{\vec{k}}$ .

*Cilindrična verovatnosna skupovna algebra nad gradiranim verovatnosnim prostorom* $\langle M,S,\mu_n\rangle_{n\in N}$ (oznaka: $CPS_{\mu}$) je struktura $\langle \mathcal{B},\cup,\cap,-,\emptyset,M^{\omega},C^{r}_{\vec{k}},D_{ij}\rangle_{r\in[0,1],\vec{k},i,j<\omega}$ sa cilindričnim verovatnosnim poljem skupova kao univerzumom, sa konstantama $\emptyset, M^{\omega}$ i $D_{ij}$ , unarnim operacijama komplementiranja i verovatnosne cilindrifikacije, i sa binarnim operacijama unije i preseka.

Apstrakcijom ovog pojma, dobićemo opšti pojam cilindrične verovatnosne algebre (dimenzije $\omega$).

*Cilindrična verovatnosna algebra* (CP-algebra) je struktura $\mathfrak{A}=\langle A,+,\cdot,-,0,1,c^{r}_{\vec{k}},d_{ij}\rangle_{r\in[0,1],\vec{k},i,j<\omega}$ , gde je $\langle A,+,\cdot,-,0,1\rangle$ Booleova algebra, $c^{r}_{\vec{k}}$ unarna operacija na $A$ , $d_{ij}\in A$ , tako da važe sledeće aksiome $(x,y\in A)$ :

$CP_1$ $c^{r}_{\vec{k}}(0)=0$ za $r>0$ , $c^{r}_{\vec{k}}(1)=1$ za svako $r\in[0,1]$ ;

$CP_2$ $c^{0}_{\vec{k}}(x)=1$ za svako $x\in A$ ;

$CP_3$ $c^{r}_{\vec{k}}(x)\le c^{s}_{\vec{k}}(x)$ za $r\ge s$ ;

$CP_4$ $c^{r}_{\vec{k}}(x\cdot c^{s}_{\vec{k}}(y))=c^{r}_{\vec{k}}(x)\cdot c^{s}_{\vec{k}}(y)$ za $r>0$ ili $r=s=0$ ;

$CP_5$ (i) $c^{1-r}_{\vec{k}}(-x)\cdot c^{1-s}_{\vec{k}}(-y)\le c^{1-r-s}_{\vec{k}}(-(x+y))$ ,

(ii) $c^{r}_{\vec{k}}(x)\cdot c^{s}_{\vec{k}}(y)\cdot c^{1}_{\vec{k}}(-x\cdot y)\le c^{r+s}_{\vec{k}}(x+y)$ ;

$CP_6$ Ako je $x\le c^{r}_{\vec{k}}(c^{s-1/n}_{\vec{t}}(y))$ za svako $n\in N$ , tada je $x\le c^{r}_{\vec{k}}(c^{s}_{\vec{t}}(y))$ ;

$CP_7$ $c^{r}_{k_1\ldots k_n}(x)=c^{r}_{k_{\pi(1)}\ldots k_{\pi(n)}}(x)$ , gde je $\pi$ neka permutacija skupa $\{1,2,\ldots,n\}$ ;

$CP_8$ $\quad c^r_{\vec{k}}(c^s_{\vec{t}}(x)) \le c^{r\cdot s}_{\vec{k},\vec{t}}(x)$ za $\{\vec{k}\}\cap\{\vec{t}\}=\emptyset$ ;

$CP_9$ $\quad d_{ii} = 1$ ;

$CP_{10}$ $\quad c^r_k(d_{ik}\cdot d_{kj}) \le d_{ij}$ za $r>0$ i $k\notin\{i,j\}$ ;

$CP_{11}$ $\quad c^r_k(d_{kj}\cdot x)\cdot c^r_k(d_{kj}\cdot -x) = 0$ za $k\ne j$ i $r>0$ .

TEOREMA 6.1

Svaka cilindrična verovatnosna skupovna algebra $CPS_\mu$ je cilindrična verovatnosna algebra.

Dokaz: Proverimo samo neke, manje trivijalne, aksiome.

Aksiome $CP_2$, $CP_3$, $CP_5$, $CP_6$, $CP_7$ i $CP_8$ izražavaju, tim redom, nenegativnost, monotonost, konačnu aditivnost, Arhimedovo svojstvo, simetričnost i nezavisnost proizvoda verovatnosnih mera $\mu_n$, pa koristeći ta svojstva mera $\mu_n$, zaključujemo da navedene aksiome važe u $CPS_\mu$ .

Proverimo aksiomu $CP_4$ . Neka je $z\in C^r_{\vec{k}}(X\cap C^s_{\vec{k}}(Y))$ i $r>0$ ili $r=s=0$ . To je ekvivalentno sa

$\mu_n\{(x_{k_1},\dots,x_{k_n}):x\in X\cap C^s_{\vec{k}}(Y)$ i $z_i=x_i$ za $i\notin\{\vec{k}\}\} \ge r$ akko

$\mu_n\{(x_{k_1},\dots,x_{k_n}):x\in X$ i $(z_i=x_i$ za $i\notin\{\vec{k}\})$ i $\mu_n\{(y_{k_1},\dots,y_{k_n}):$ $:y\in Y$ i $(y_i=x_i$ za $i\notin\{\vec{k}\})\} \ge s\} \ge r$ akko

$\mu_n\{(x_{k_1},\dots,x_{k_n}):x\in X$ i $(z_i=x_i$ za $i\notin\{\vec{k}\})$ i $\mu_n\{(y_{k_1},\dots,y_{k_n}):$ $:y\in Y$ i $(y_i=z_i$ za $i\notin\{\vec{k}\})\} \ge s\} \ge r$ akko

$\mu_n\{(x_{k_1},\dots,x_{k_n}):x\in X$ i $(z_i=x_i$ za $i\notin\{\vec{k}\})\} \ge r$ i

$\mu_n\{(y_{k_1},\dots,y_{k_n}):y\in Y$ i $(y_i=z_i$ za $i\notin\{\vec{k}\})\} \ge s$ akko

$z\in C^r_{\vec{k}}(X)$ i $z\in C^s_{\vec{k}}(Y)$ .

Proverimo aksiomu $CP_{10}$ . Neka $y\in C^r_k(D_{ik}\cap D_{kj})$ i $r>0$, $k\notin\{i,j\}$ . Tada, $\{x_k:x\in D_{ik}\cap D_{kj}$ i $x_m=y_m$ za $m\ne k\} \ne \emptyset$ , pa

$y_i = x_i = x_k = x_j = y_j$ , tj. $y \in D_{ij}$ .

Proverimo aksiomu $CP_{11}$ . Ako $y \in C^r_k(D_{kj} \cap X) \cap C^r_k(D_{kj} \cap (-X))$ i $r>0$ , $k \neq j$ , tada $\{x_k : x \in X \cap D_{kj}$ i $x_i = y_i,\ i \neq k\} \neq \emptyset$ i $\{z_k : z \in -X \cap D_{kj}$ i $y_i = z_i,\ i \neq k\} \neq \emptyset$ , pa za $i \neq k$ imamo $x_i = y_i = z_i$ , a za $i = k$ imamo $x_k = x_j = y_j = z_j = z_k$ , tj. $x = z$ i $x \in X$, $z \in -X$, što je nemoguće. ∎

Istaknimo neke od osobina cilindričnih verovatnosnih algebri.

TEOREMA 6.2

(i) $c^r_{\vec{k}}(c^s_{\vec{k}}(x)) = c^s_{\vec{k}}(x)$ za $r>0$ ili $r=s=0$ ;

(ii) ako $x \le y$ , tada $c^r_{\vec{k}}(x) \le c^r_{\vec{k}}(y)$ ;

(iii) $c^{1-p}_{\vec{k}}(x) \cdot c^{1-q}_{\vec{t}}(y) \le c^{1-p\cdot q}_{\vec{k},\vec{t}}(x \cdot y)$ ;

(iv) $c^{r+p-r\cdot p}_{\vec{k},\vec{t}}(x) \le c^r_{\vec{k}}(c^p_{\vec{t}}(x))$ ;

(v) $c^1_{\vec{k}}(c^1_{\vec{t}}(x)) = c^1_{\vec{k},\vec{t}}(x)$ . □

Navedimo i neke elementarne pojmove i osobine iz teorije univerzalnih algebri, reduciranih na slučaj cilindrične verovatnosne algebre.

*Homomorfizam cilindrične verovatnosne algebre* $\mathfrak{A}$ *u cilindričnu verovatnosnu algebru* $\mathfrak{B} = \langle B, +', \cdot', -', 0', 1', c^{r\,\prime}_{\vec{k}}, d_{ij}' \rangle$ je funkcija $f: A \to B$ za koju važi:

(i) $f(x+y) = f(x) +' f(y)$ ;

(ii) $f(x \cdot y) = f(x) \cdot' f(y)$ ;

(iii) $f(-x) = -'f(x)$ ;

(iv) $f(0) = 0'$ ;

(v) $f(1) = 1'$ ;

(vi) $f(c^r_{\vec{k}}(x)) = c^{r\,\prime}_{\vec{k}}(f(x))$ ;

(vii) $f(d_{ij}) = d_{ij}'$ .

*Ideal cilindrične verovatnosne algebre* $\mathfrak{A}$ je ideal I Booleove algebre $\langle A,+,\cdot,-,0,1,\rangle$ takav da za svako $\vec{k}$ i $r\in(0,1]$, ako $x\in I$, tada $c^r_{\vec{k}}(x)\in I$. Definišimo novu CP-algebru

$\mathfrak{A}/I = \langle A/I,\hat{+},\hat{\cdot},\hat{-},\hat{0},\hat{1},\hat{c}^r_{\vec{k}},\hat{d}_{ij}\rangle$ pomoću $\langle A/I,\hat{+},\hat{\cdot},\hat{-},\hat{0},\hat{1}\rangle=\langle A,+,\cdot,-,0,1\rangle/I$

$\hat{c}^r_{\vec{k}}[x] = [c^r_{\vec{k}}(x)]$ i $\hat{d}_{ij} = [d_{ij}]$. Lako se proverava da je $\mathfrak{A}/I$ zaista CP-algebra i da postoji prirodan homomorfizam iz $\mathfrak{A}$ na $\mathfrak{A}/I$.

Teorija univerzalne algebre daje, dobro poznatu, vezu homomorfizma i ideala cilindričnih verovatnosnih algebri.

**TEOREMA 6.3**

Ako je f homomorfizam CP-algebre $\mathfrak{A}$ na CP-algebru $\mathfrak{B}$ i $I=\{x\in A: f(x)=0'\}$, tada je I ideal algebre $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}\cong\mathfrak{A}/I$. □

Razmotrimo vezu između konačne gradirane verovatnosne logike i cilindrične verovatnosne algebre.

Neka je $Form_L$ skup svih formula logike $L_{\mathcal{A}P}$ na jeziku $L=\{R_i,c_j\}$ sa skupom promenljivih $\{v_k:k<\omega\}$. Logičke simbole $\vee,\wedge,\neg,\top,\bot,(P\vec{v}\geq r)$ možemo da posmatramo kao operacije na skupu $Form_L$ a tako dobijenu algebru $\mathcal{F}orm_L=\langle Form_L,\vee,\wedge,\neg,\bot,\top,(P\vec{v}\geq r),v_i=v_j\rangle$ slobodnom algebrom nad skupom atomarnih formula.

Neka je $\Sigma$ neka teorija logike $L_{\mathcal{A}P}$. Relacija $\equiv_\Sigma$ definisana na skupu $Form_L$ pomoću: $\varphi\equiv_\Sigma\psi$ akko $\Sigma\models\varphi\Longleftrightarrow\psi$, je kongruencija algebre $\mathcal{F}orm_L$. Da se relacija $\equiv_\Sigma$ "slaže" i sa operacijama $(P\vec{v}\geq r)$ sledi iz: ako $\Sigma\models\varphi\Longleftrightarrow\psi$, tada $\Sigma\models(P\vec{v}\geq r)\varphi\Longleftrightarrow(P\vec{v}\geq r)\psi$.

*Cilindrična verovatnosna algebra formula teorije* $\Sigma$ *je* faktor algebra $\mathcal{F}orm/\equiv\ = \langle Form/\equiv, +, \cdot, -, 0, 1, c^r_{\vec{k}}, d_{ij}\rangle$, gde za $\varphi, \psi \in L_{\mathcal{A}P}$, $i, j < \omega$ i $\vec{k} = k_1, \ldots, k_n$ važi:

(i) $[\varphi] + [\psi] = [\varphi \vee \psi]$ ;

(ii) $[\varphi] \cdot [\psi] = [\varphi \wedge \psi]$ ;

(iii) $-[\varphi] = [\neg\varphi]$ ;

(iv) $0 = [\neg(v_0 = v_0)]$ ;

(v) $1 = [v_0 = v_0]$ ;

(vi) $c^r_{\vec{k}}[\varphi] = [(Pv_{\vec{k}} \geq r)\varphi]$ ;

(vii) $d_{ij} = [v_i = v_j]$ .

Na taj način, pitanje ekvivalentnosti formula $\varphi$ i $\psi$ u odnosu na teoriju $\Sigma$ , sveli smo na pitanje da li važi identitet $[\varphi] = [\psi]$ u algebri $\mathcal{F}orm/\equiv$ , što dalje prevodimo na skupovne operacije sa odgovarajućim skupovima valuacija. Naime, $\Sigma \models \varphi \Leftrightarrow \psi$ akko za svaki gradirani verovatnosni model $\mathfrak{M}$ teorije $\Sigma$ važi $\varphi^{\mathfrak{M}} = \psi^{\mathfrak{M}}$, gde je $\varphi^{\mathfrak{M}} = \{\ s \in M^{\omega} : \mathfrak{M} \models \varphi[s]\ \}$. Homomorfizam algebre $\mathcal{F}orm_L$ na cilindričnu verovatnosnu skupovnu algebru $CPS_{\mu}$ nad gradiranim verovatnosnim modelom $\mathfrak{M}$, odreden je sledećim očiglednim osobinama:

(i) $(\varphi \vee \psi)^{\mathfrak{M}} = \varphi^{\mathfrak{M}} \cup \psi^{\mathfrak{M}}$ ;

(ii) $(\varphi \wedge \psi)^{\mathfrak{M}} = \varphi^{\mathfrak{M}} \cap \psi^{\mathfrak{M}}$ ;

(iii) $(\neg\varphi)^{\mathfrak{M}} = -(\varphi^{\mathfrak{M}})$ ;

(iv) $(\neg(v_0 = v_0))^{\mathfrak{M}} = \emptyset$ ;

(v) $(v_0 = v_0)^{\mathfrak{M}} = M^{\omega}$ ;

(vi) $((Pv_{\vec{k}} \geq r)\varphi)^{\mathfrak{M}} = C^r_{\vec{k}}(\varphi^{\mathfrak{M}})$ ;

(vii) $(v_i = v_j)^{\mathfrak{M}} = D_{ij}$ .

**TEOREMA 6.4**

Ako je $\Sigma$ teorija logike $L_{\mathcal{A}P}$ i $\mathfrak{M}$ gradirani verovatnosni model teorije $\Sigma$, tada je funkcija $f:\mathcal{F}orm/\equiv \to CPS_{\mu}$ definisana sa $f([\varphi])=\varphi^{\mathfrak{M}}$, $\varphi\in Form_L$, homomorfizam algebre $\mathcal{F}orm/\equiv$ na algebru $CPS_{\mu}$. □

Koristeći uobičajenu tehniku teorije univerzalne algebre, lako se dokazuje sledeća činjenica.

**TEOREMA 6.5**

Ako je I ideal algebre $\mathcal{F}orm/\equiv$ definisane teorijom $\Sigma$ logike $L_{\mathcal{A}P}$, i ako je T skup onih rečenica $\varphi$ logike $L_{\mathcal{A}P}$ za koje je $-[\varphi]\in I$, tada je $\Sigma\subseteq T$ i algebra $(\mathcal{F}orm/\equiv)/I$ je izomorfna sa algebrom $\mathcal{F}orm/\equiv_T$ definisanom teorijom T . □

Svakom elementu $x\in A$, cilindrične verovatnosne algebre $\mathfrak{A}$, pridružimo njegovu *dimenziju* pomoću: $\Delta x=\{k: c_k^r(x)\neq x$ za neko $r>0\}$.

**TEOREMA 6.6**

Ako je $f:\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ homomorfizam cilindričnih verovatnosnih algebri i $x\in A$, tada je $\Delta f(x)\subseteq\Delta x$ .

Dokaz: Ako $k\in\Delta f(x)$, tada $c_k^r(f(x))\neq f(x)$ za neko $r>0$ , tada $f(c_k^r(x))\neq f(x)$ za neko $r>0$ , pa $c_k^r(x)\neq x$ za neko $r>0$ , tj. $k\in\Delta x$. ■

Cilindrična verovatnosna algebra $\mathfrak{A}$ je *lokalno konačno dimenziona* ako je skup $\Delta x$ konačan za svako $x\in A$ .

**TEOREMA 6.7**

$\mathcal{F}orm/\equiv$ je lokalno konačno dimenziona cilindrična verovatnosna algebra.

Dokaz: Ako je $\varphi$ neka formula logike $L_{\mathcal{A}P}$ , i $v_k$ promenljiva koja se ne javlja u $\varphi$ , tada $\models (Pv_k\geq r)\varphi \Leftrightarrow \varphi$ za svako $r>0$ . Stoga, $C_k^r([\varphi])=[(Pv_k\geq r)\varphi]=[\varphi]$ za svako $r>0$ , tj. $k\notin\Delta[\varphi]$ . Kako formula $\varphi$ ima konačno mnogo promenljivih, to je i skup $\Delta[\varphi]$ konačan. ■

U gradiranom verovatnosnom modelu rečenica

$(Pv_k \geq r)(v_k = v_i \wedge \varphi)$ za $r>0$, obezbeduje zamenu promenljive $v_k$ promenljivom $v_i$. Slično, operacije ${}^rS^i_k$ cilindrične verovatnosne algebre $\mathfrak{A}$ definisane pomoću ${}^rS^i_k(x) = \begin{cases} x & , k=i \\ c^r_k(d_{ki} \cdot x) & , k \neq i \end{cases}$,

za $r>0$, imaju ulogu "zamene promenljivih".

TEOREMA 6.8

Neka je $L=\{R_j, c_k\}$, $\mathfrak{A}$ cilindrična verovatnosna algebra, i $f:\{R_j : j \in J\} \to A$ funkcija takva da $\Delta f(R_j) \subseteq n_j$, $j \in J$, gde je $n_j$ dužina relacije $R_j$. Tada, postoji homomorfizam g algebre $\mathcal{F}orm/\equiv_{\emptyset}$ (za $\Sigma = \emptyset$) u algebru $\mathfrak{A}$, tako da $g[R_j(v_0, \ldots, v_{n_j - 1})] = f(R_j)$, $j \in J$.

**Dokaz:** Induktivno po složenosti formula logike $L_{\mathcal{A}P}$, definišimo funkciju $h: Form_L \to A$ sa osobinom:

$$\text{ako } \vdash \varphi \text{ , tada } h(\varphi)=1 \quad (T) .$$

Ako je $\varphi$ atomska formula oblika $R(v_{k_0}, \ldots, v_{k_{n-1}})$, gde je R relacijski simbol dužine n, izaberimo prvih n brojeva $i_0, \ldots, i_{n-1}$ iz skupa $\omega - \{k_0, \ldots, k_{n-1}, 0, 1, \ldots, n-1\}$ i stavimo : $h(R(v_{k_0}, \ldots, v_{k_{n-1}})) = {}^rS^{k_0}_{i_0} \circ \ldots \circ {}^rS^{k_{n-1}}_{i_{n-1}} \circ {}^rS^{i_0}_{0} \circ \ldots \circ {}^rS^{i_{n-1}}_{n-1}(f(R))$, za neko $r>0$. Za ostale slučajeve formule $\varphi$, definišimo $h(\varphi)$ na uobičajen način:

$$h(v_k = v_i) = d_{ki} \quad ;$$

$$h(\varphi \vee \psi) = h(\varphi) + h(\psi) \quad ;$$

$$h(\varphi \wedge \psi) = h(\varphi) \cdot h(\psi) \quad ;$$

$$h(\neg\varphi) = -h(\varphi) \ ;$$

$$h((P\vec{v}_{\vec{k}} \geq r)\varphi) = c^r_{\vec{k}}(h(\varphi)) \ .$$

Pokažimo da svaka aksioma konačne gradirane verovatnosne logike $L_{\mathcal{A}P}$ pripada skupu $\Phi = \{\varphi \in Form_L : h(\varphi)=1\}$.

Za aksiome logike $L_{\mathcal{A}}$ bez kvantifikatora dovoljno je pokazati da iz $h(\varphi)\neq 1$ sledi da $\varphi$ nije tautologija. Zaista, neka je I maksimalan ideal Booleove algebre $\mathfrak{B}=\langle Form/\equiv,+,\cdot,-,0,1\rangle$ takav da $h(\varphi)\in I$, i neka je $\pi:\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}/I$ prirodni homomorfizam. Tada je $\mathfrak{B}/I$ dvoelementna Booleova algebra. Iz $h(\varphi)\neq 1$ , sledi $\pi\circ h(\varphi)=0$, tj. $\varphi$ nije tautologija. Aksioma koja obezbeđuje zamenu promenljivih u atomskoj formuli, pripada skupu $\Phi$ na osnovu definicija funkcije h i operacija zamene promenljhivih ${}^{r}S_{k}^{i}$ .

Ako je $\varphi$ oblika $(P\vec{x}\geq r)\psi \Rightarrow (P\vec{x}\geq s)\psi$ , $r\geq s$ (aksioma $A_2$), tada $h(\varphi) = - c^{r}_{\vec{k}}(h(\psi)) + c^{r}_{\vec{k}}(h(\psi)) = 1$ zbog $CP_3$ .

Ako je $\varphi$ oblika $(P\vec{x}\geq 0)\psi$ (aksioma $A_3$), tada $h(\varphi) = c^{0}_{\vec{k}}(h(\psi)) = 1$ zbog $CP_2$ .

Slično za ostale aksiome konačne gradirane verovatnosne logike. Skup $\Phi$ je takođe zatvoren za pravila izvođenja.

Dakle, svaka teorema konačne gradirane verovatnosne logike $L_{\mathcal{A}P}$ pripada skupu $\Phi$ , čime je (T) dokazano.

Funkcija $g:\mathcal{F}orm/\equiv_{\emptyset} \to \mathfrak{A}$ definisana sa $g([\varphi]) = h(\varphi)$ , $\varphi\in Form_L$ , je željeni homomorfizam. ∎

Teoreme 6.3 , 6.5 i 6.8 daju da je svaka lokalno konačno dimenziona cilindrična verovatnosna algebra $\mathfrak{A}$ izomorfna nekoj algebri $\mathcal{F}orm/\equiv$ , za neko L i teoriju $\Sigma$ . Ovim je dokazana teorema o Booleovoj reprezentaciji lokalno konačno dimenzionih cilindričnih verovatnosnih algebri.

**TEOREMA 6.9**

Svaka lokalno konačno dimenziona cilindrična verovatnosna algebra $\mathfrak{A}$, $|A|>1$ , se može homomorfno preslikati na neku cilindričnu verovatnosnu skupovnu algebru. ∎

Monografija Henkin, Monk, Tarski [15] (dva dela) posvećena je cilindričnim algebrama i, između ostalog, bavi se reprezentacijom, aksiomatizabilnošću i odlučivošću ovih algebri. Paralelno, možemo ove probleme ispitivati i za cilindrične verovatnosne algebre. Utisak je da se zbog "prirodnosti" verovatnosne logike $L_{\mathcal{A}P}$ mogu očekivati i "povoljniji" rezultati.

Varijacija na dvoverovatnosne logike $L^{a}_{\mathcal{A}P_1P_2}$ ili $L^{s}_{\mathcal{A}P_1P_2}$ daje dva tipa verovatnosnih cilindrifikacija povezanih apsolutno neprekidnim ili singularnim odnosom, što, takođe, može biti predmet budućih istraživanja.

## LITERATURA:


[1] Anderson R.M., A non-standard representation of Brownian motion and Itô integration, Israel J. Math. 25(1976), 15-46.

[2] Barwise J., Admissible sets and structures, Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[3] Chang C.C. and H.J. Keisler, Model theory, North-Holland, Amsterdam, 1973.

[4] Cutland N., Nonstandard measure theory and its applications, Bull. London Math. Soc. 15(1983), 529-589.

[5] Dalen D.van, Logic and structures, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[6] Đorđević R.S., Barwise completeness theorems for logics with integrals, Publ. de L'inst. Math. (u štampi).

[7] Đorđević R.S., Analytic completeness theorem for absolutely continuous biprobability models, Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math. (u štampi).

[8] Đorđević R.S., Analytic completeness theorem for singular biprobability logic, (u pripremi).

[9] Đorđević R.S., A logics with two types of integral operators, Czechoslovakian Math. Journal (u pripremi).

[10] Fajardo S., Completeness theorems for the general theory of stochastic processes, Proceding of the 6th Latin American symposium on Math. Logic, Caracas, 1983, 174-194.

[11] Fajardo S., Probability logic with conditional expectation, Ann. Pure Appl. Logic 28(1985), 137-161.

[12] Flum J. and M. Ziegler, Topological model theory, Springer--Verlag, Berlin, 1980.

[13] Halmos P., Measure theory, Van Nostrand, Princeton, New York, 1950.

[14] Henkin L., The completeness of the first-order functional calculus, J. Symbolic Logic 14(1949), 159-166.

[15] Henkin L., D. Monk and A. Tarski, Cylindric algebras, North--Holland, Amsterdam, 1971.

[16] Henson C.W., Analytic sets, Baire sets and the standard part map, Can. J. Math. 31(1979), 663-672.

[17] Henson C.W. , Unbounded Loeb measures , Proc. of Amer. Math. Soc. 74(1979), 143-150.

[18] Hoover D., Probability logic, Ann. Math. Logic 14(1978), 287-313.

[19] Hoover D., A normal form theorem for $L_{\omega_1 P}$ with applications, J. Symbolic Logic 47(1982), 605-624.

[20] Hoover D., Synonymity, generalized martingales and subfiltrations, Ann. of Probability 12(1984), 703-713.

[21] Hoover D., A probabilistic interpolation theorem, J. Symbolic Logic (1985), 708-713.

[22] Hoover D., A characterization of adapted distributions, Ann. of Probability (1987), 1600-1611.

[23] Hoover D., An analytic completeness theorem for logics with probability quantifiers, J. Symbolic Logic 52(1987), 802-816.

[24] Hoover D. and H.J. Keisler, Adapted probability distributions, Trans. of Amer. Math. Soc. 286(1984), 159-201.

[25] Keisler H.J., Logic with the quantifier "there exist uncountably many", Ann. Math. Logic (1970), 1-93.

[26] Keisler H.J., Model theory for infinitary logic, North-Holland, Amsterdam, 1971.

[27] Keisler H.J., The monotone class theorem in infinitary logic, Proc. of Amer. Math. Soc. 64(1977), 129-134.

[28] Keisler H.J., Hyperfinite model theory, Logic Colloquium'76, North-Holland, Amsterdam, 1977, 5-110.

[29] Keisler H.J., An infinitesimal approach to stochastic analysis, Memoirs of the Amer. Math. Soc., Number 297, vol 48, 1984.

[30] Keisler H.J., Probability quantifiers, deo 14. u "Model theoretic logics" (editori J.Barwise i S. Feferman), Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[31] Keisler H.J., A completeness proof for adapted probability logic, Ann. Pure Appl. Logic 31(1986), 61-70.

[32] Keisler H.J., Hyperfinite models of adapted probability logic, Ann. Pure Appl. Logic 31(1986), 71-86.

[33] Lindström T., A Loeb measure approach to theorems of Prohorov, Sazanov and Gross, Trans. of Amer. Math. Soc. 269(1982), 521-534.

[34] Loeb P., Conversion from nonstandard to standard measure space and applications in probabilitry theory, Trans. of Amer. Math. Soc. 211(1975), 113-122.

[35] Loeb P., Weak limits of measures and the standard part map, Proc. of Amer. Math. Soc. 77(1979), 128-135.

[36] Loeb P., A functional approach to nonstandard measure theory, Contemporary Math. 26(1984), 251-261.

[37] Łos J. and E. Marczewski, Extension of measures, Fund. Math. 36(1949), 267-276.

[38] Mijajlović Ž., An introduction to model theory, Novi Sad, 1987.

[39] Monk J.D., Mathematical logic, Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[40] Rašković M., Model theory for $L_{\mathcal{AM}}$ logic, Publ. de L'inst. Math. 37(1985), 17-22.

[41] Rašković M., Completeness theorem for biprobability models, J. Symbolic Logic 51(1986), 586-590.

[42] Rašković M., Weak completeness theorem for $L_{\mathcal{A}P\forall}$ logic, Zbornik radova, PMF Kragujevac 8(1987), 69-72.

[43] Rašković M., Completeness theorem for singular biprobability models, Proc. of Amer. Math. Soc. 102(1988), 389-392.

[44] Rašković M., Verovatnosne logike drugog reda, 4. jugoslovenski seminar za logiku i računarstvo, Dubrovnik, 1990.

[45] Rašković M. and R. Đorđević, Finite compactness theorem for biprobability logics, Math. Balkanica 4(1990).

[46] Rašković M. and R. Đorđević, A Boolean combination of probability logics with applications, (u pripremi).

[47] Rašković M. and R. Živaljević, Barwise completeness theorems for some biprobability logics, Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math. 32(1986), 133-135.

[48] Robbin J.W., Mathematical logic, W.A. Benjamin, New York, 1969.

[49] Robinson A., Non-standard analysis, North-Holland, Amsterdam, 1966.

[50] Rodenhausen H., The completeness theorem for adapted probability logic, Ph.D. Thesis, Heidelberg, 1982.

[51] Sgro J., Completeness theorems for topological models, Ann. Math. Logic 11(1977), 173-193.

[52] Stroyan K.D. and A.J. Luxemburg, Introduction to the theory of infinitesimals, Academic Press, New York, 1967.

[53] Ziegler M., Topological model theory, deo 15. u "Model theoretic languages" (editori J. Barwise i S. Fefermann), Springer-Verlag, Berlin, 1985.