

UNIVERZITET U BEOGRADU

ŠUMARSKI FAKULTET

Mira J. Mirić Milosavljević

**Zenerov model viskoelastičnosti za  
ortotropno čvrsto telo i njegova primena  
u mehanici drveta**

doktorska disertacija

Beograd, 2012

UNIVERSITY OF BELGRADE

FACULTY OF FORESTRY

Mira J. Mirić Milosavljević

**Zener model viscoelasticity for  
orthotropic solid and application in  
mechanics of wood**

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2012

**MENTOR:**

**Dr Milutin Marjanov**  
redovni profesor Univerziteta u Beogradu- Šumarskog fakulteta, u penziji

**ČLANOVI KOMISIJE:**

**Dr Gradimir Danon**  
redovni profesor Univerziteta u Beogradu- Šumarskog fakulteta

**Dr Petar Todorović**  
redovni profesor Univerziteta u Beogradu- Šumarskog fakulteta, u penziji

**Dr Zdravko Popović**  
redovni profesor Univerziteta u Beogradu- Šumarskog fakulteta

**Dr Milorad Milovančević**  
redovni profesor Univerziteta u Beogradu- Mašinskog fakulteta

Datum odbrane doktorske disertacije:

## IZJAVE ZAHVALNOSTI

Zahvaljujem se:

- mentoru, Dr **Milutinu Marjanovu** na korisnim savetima i utrošenom vremenu pri odabiru teme i pri samoj izradi doktorske disertacije.
- Dr **Gradimiru Danonu** što je podelio sa mnom svoje iskustvo o drvetu i svakodnevno nadgledao izradu disertacije i što je učestvovao u radu komisije za ocenu teme i za ocenu izrađene disertacije.
- Dr **Petru Todoroviću** na učešću u radu komisije za ocenu teme i za ocenu izrađene disertacije.
- Dr **Zdravku Popoviću**, na savetima da se pri izradi disertacije poštuje struktura drveta i na učešću u radu komisije za ocenu teme i za ocenu izrađene disertacije.
- Dr **Miloradu Milovančeviću** na učešću u radu komisije za ocenu izrađene disertacije.
- Dr **Borislavu Šoškiću** na literaturi iz oblasti deformisanja drveta pri različitim uslovima sredine.
- Dr **Vladislavi Mihailović** na inspirativnim razgovorima i sugestijama pri obradi i uređenju teksta disertacije, kao i na svesrdnoj pomoći u izvođenju nastave.
- Suprugu **Miroljubu** na strpljenju i ljubavi, neophodnima za izradu ove disertacije.

**Autor**

**Marku, Miljanu i Jovanu**

# **Zenerov model viskoelastičnosti za ortotropno čvrsto telo i njegova primena u mehanici drveta**

## **Izvod**

Pri proračunu elemenata načinjenih od ortotropnih i transversalno izotropnih polimera potrebno je uzeti u obzir i elastičnu i viskoznu deformaciju, ne samo u glavnom, već i u sporednim anatomskim pravcima.

Vremenski zavistan matematički model koji je formulisan u ovom radu važi za prostorno naprezanje. Model opisuje pojavu viskoznog tečenja i relaksacije napona u konstrukcijama od viskoelastičnog ortotropnog čvrstog materijala. Pri izboru modela vodilo se računa da model dovoljno dobro prikazuje stvarno ponašanje takvih materijala i da je istovremeno primenljiv u inženjerskoj praksi. Uzeta su u obzir i elastična i viskozna svojstva materijala (model zavisi i od vremena i od prethodne istorije razvoja deformacija – tzv. memorije materijala).

Pri matematičkom modeliranju je korišćena linearna teorija viskoelastičnosti ortotropnih tela. Ta teorija formuliše osnovne vremenske veze napona i deformacija za viskoelastičan materijal izražene preko tenzora napona i deformacija. Linearna teorija se koristi jer je tenzorski račun veoma složen a ipak je omogućeno dobijanje približnog rešenja postavljenog zadatka. Za uspostavljanje veze napona i deformacija korišćen je Zenerov model (standardni linearni model čvrstog tela) jer dobro opisuje i viskozno tečenje pri konstantnom naponu i relaksaciju napona pri konstantnoj deformaciji.

Tako se mogu odrediti partikularna rešenja za nosače od ortotropnih materijala, kao što je drvo, izložene linearnom naprezanju u glavnom anatomskom pravcu.

Model je primenjen na grede i ploče od bukovine u izotermnim uslovima. Prodiskutovana je primenljivost dobijenog rešenja u praksi.

Ključne reči:

Zenerov model, viskoelastičnost, ortotropija, viskozno tečenje, relaksacija napona, bukovina

# **Zener model viscoelasticity for orthotropic solid and application in mechanics of wood**

## **Abstrakt**

The calculation of elements made of orthotropic and transversely - isotropic polymers it is necessary to take into account the elastic and viscous strain, not only in the principal, but also in secondary anatomical directions.

Time-dependent mathematical model is formulated in this paper applies to the spatial stress. The model describes the occurrence of viscous flow – creep and stress relaxation in the structure of viscoelastic orthotropic solids. The choice of model was taken into account that the model well enough to really show the behavior of such materials and that is also applicable in engineering practice. Were taken into account the elastic and viscous properties of materials (model depends on the time and the previous history of development of deformation - the memory material).

The mathematical modeling is used for linear viscoelasticity theory orthotropic body. This theory formulates the basic weather links stress and deformation of the material viscoelastic expressed through stress and strain tensor. Linear theory is used because the tensor account very complex and it is possible to obtain an approximate solution given task. To make the connection of stress and strain was used Zener model (standard linear solid) as well described and viscous flow at a constant stress and relaxation at constant deformation.

The model allows the determination of particular solutions for carriers of wood, exposed to linear strain in the "principal" anatomical direction.

The model is applied to beams and plates made of beachwood in isothermal conditions. Discussed the applicability of solutions obtained in practice.

Key words:

Zener model, viscoelasticity, orthotropic, creep, stress relaxation, beachwood.

## Ključna dokumentaciona informacija

Tip dokumenta:	Monografska publikacija
Tip zapisa:	Tekstualni štampani materijal
Vrsta rada (VR):	Doktorska disertacija
Autor (AU):	Mr Mira Mirić Milosavljević, dipl.maš.ing.
Mentor (MN):	Dr Milutin Marjanov, red.prof. u penziji
Naslov rada (NS):	Zenerov model viskoelastičnosti za ortotropno čvrsto telo i njegova primena u mehanici drveta
Jezik publikacije (JP):	Srpski
Zemlja publikovanja (ZP):	Republika Srbija
Godina izdavanja (GI):	2012.
Izdavač (IZ):	Autorski reprint
Mesto i adresa (MS):	11030 Beograd, Kneza Višeslava 1
Fizički opis rada (br.pogl./strana/ lit. navoda/tabela/slika/priloga):	7/212/76/15/95/1
Naučna oblast (NO):	Prerada drveta
Naučna disciplina (DIS):	Mašine i uređaji u preradi drveta
Predmetna odrednica/ključna reč (PO):	Zenerov model, viskoelastičnost, ortotropija, viskozno tečenje, relaksacija napona, bukovina
UDK:	630*812.7+[539.374:519.673(043.3)
Čuva se (ČU):	Biblioteka Šumarskog fakulteta, 11030 Beograd, Kneza Višeslava 1
Primedbe (P):	-
Izvod (IZ):	Formulisan je vremenski zavistan matematički model koji važi za prostorno naprezanje viskoelastičnog ortotropnog čvrstog materijala a opisuje pojavu viskoznog tečenja i relaksacije napona u drvnim konstrukcijama. Zenerov model je primenjen na grede i ploče od bukovine u izotermkim uslovima.
Datum prihvatanja teme (DP):	2005.



## Key word documentation

Document type (DT):	Monographics publication
Type of record (TR):	Textual printed article
Contains code (CC):	Ph D Thesis
Autor (AU):	Mr Mira Mirić Milosavljević, M.Sc.Mech
Mentor (MN):	Dr Milutin Marjanov, Ph D.
Title (TI):	Zener model viscoelasticity for orthotropic solid and application in mechanics of wood
Language of text (LT):	Serbian
Cantry of Publication (CP):	Serbia
Publication Year (PY):	2012.
Publisher (PB):	Autor's reprint
Publication Place (PL):	Faculty of forestry, 11030 Belgrade, Kneza Višeslava 1
Phisical description (PD):	7/212/76/15/95/1
Scientific fields (SF):	Wood processing
Scientific discipline (SD):	Machines and tools in wood processing
Subject/Key words (CX):	Zener model, viscoelasticity, orthotropic, creep, relaxation stress, beachwood
UDC	630*812.7+[539.374:519.673(043.3)
Holding data (HD):	Library Faculty of forestry , 11030 Belgrade, Kneza Višeslava 1
Note (N):	None
Abstract (AB):	Time-dependent mathematical model is formulated and applied to viscoelastic orthotropic solids and spatial stress. Model describes the creep and relaxation stress in the structure made of wood. Zener model is applied to a beams and plates made of beachwood in isothermal conditions.
Accepted by Scientific Board on (ASB):	2005.

# SADRŽAJ

<b>SPISAK SLIKA .....</b>	<b>II</b>
<b>SPISAK TABELA .....</b>	<b>VII</b>
<b>Spisak skraćenica.....</b>	<b>IX</b>
<b>Spisak korišćenih oznaka.....</b>	<b>X</b>
<b>1. Uvod .....</b>	<b>1</b>
1.1. Obrazloženje predmeta istraživanja.....	1
1.2. Značaj istraživanja.....	7
1.3. Cilj istraživanja.....	8
<b>2. Pregled i analiza reoloških modela .....</b>	<b>9</b>
2.1. Izbor modela .....	9
2.2. Linearno elastičan materijal - Hukov model .....	13
2.3. Viskozni materijal - Njutnov element .....	30
2.4. Maksvelov model-model za relaksaciju napona.....	36
2.5. Kelvin Voigt-ov model- model za viskozno tečenje .....	44
2.6. Složeniji modeli .....	49
<b>3. VEI čvrsto telo .....</b>	<b>55</b>
3.1. Viskoelastičnost.....	55
3.2. Viskozno tečenje, relaksacija napona i vrste modula u viskoelastičnosti .....	60
3.3. Uticaj temperature i vlažnosti.....	70
3.4. SLM – Zenerov model.....	81
3.5. Primena Zenerovog modela u mehanici drveta .....	95
<b>4. Analiza napona u čvrstom telu od viskoelastičnog materijala .....</b>	<b>101</b>
4.1. Matematičko modeliranje VEI čvrstog tela u vremenskom i transformisanom domenu .....	101
4.2. Matematičko modeliranje VEO čvrstog tela metodom viskoelastične analogije .....	107
<b>5. Primena Zenerovog modela za različita naprezanja u mehanici drveta.....</b>	<b>115</b>
5.1. Linearno i ravno naprezanje .....	115
5.1.1. Aksijalno zategnut štap.....	116
5.1.2. Pravo čisto savijanje štapa.....	134
5.1.3. Pravo savijanje štapa silama .....	140
5.1.4. Pravo savijanje tanke ploče jednako podeljenim opterećenjem .....	157

<b>6. Prikaz i interpretacija rezultata.....</b>	<b>169</b>
6.1. Aksijalno napregnut štap od bukovine .....	171
6.1.1. Viskozno tečenje štapa od bukovine .....	173
6.1.2. Relaksacija napona u štapu od bukovine.....	190
6.1.3. Pravo čisto savijanje štapa od bukovine .....	198
6.2. Ravno naprezanje .....	200
6.2.1. Savijanje silama štapa od bukovine.....	200
6.2.2. Proračun pravog savijanja ploče od bukovine jednako podeljenim operećenjem.....	203
<b>7. Zaključak i preporuke .....</b>	<b>206</b>
<b>Prilog I .....</b>	<b>210</b>
<b>Literatura .....</b>	<b>211</b>
<b>Biografija.....</b>	<b>215</b>

## SPISAK SLIKA

Sl. 2-1 Dijagram normalni napon – dilatacija za idealno elastično telo .....	14
Sl. 2-2 Hukov element .....	14
Sl. 2-3 Simultanost napona i dilatacije elastičnog tela .....	15
Sl. 2-4 Shematska promena napona i deformacije (sile u opruzi i izduženja) Hukovog elementa u zavisnosti od vremena .....	16
Sl. 2-5 Komponente napona u tački napregnutog elastičnog tela, u Dekartovom koordinatnom sistemu.....	17
Sl. 2-6 Linearno naprezanje ortotropnog pravougaonog paralelopipeda .....	28
Sl. 2-7 Dijagram napon - dilatacija za konstantnu brzinu opterećenja i rasterećenja za viskozni i elastoplastičan materijal .....	31
Sl. 2-8 Dijagram smičući napon - brzina klizanja za Njutново telo (levo) i Njutново telo (desno) .....	32
Sl. 2-9 Fazno kašnjenje klizanja za naponom kod Njutnovog tela.....	33
Sl. 2-10 Dijagram smičući napon – klizanje za Njutново telo (levo); Vremensko klizanje viskoznog elementa (desno).....	34
Sl. 2-11 Parametar rešetke b, i prikaz viskozne deformacije.....	34
Sl. 2-12 Dijagram smičući napon – brzina deformisanja za Njutnovske i nenjutnovske materijale .....	35
Sl. 2-13 Maksvelov model za relaksaciju napona .....	37
Sl. 2-14 Zavisnost napona Maksvelovog modela od brzine deformisanja.....	38

Sl. 2-15 Klasifikacija materijala s obzirom na vreme trajanja relaksacije .....	39
Sl. 2-16 Levo -promena modula relaksacije, desno - promena modula viskoznog tečenja kod Maksvelovog modela .....	40
Sl. 2-17 Veza efektivnog modula elastičnosti, za Maksvelov model, i energije disipacije u hidrauličnom klipu .....	42
Sl. 2-18 Grafički prikaz viskoznog tečenja i relaksacije napona, u jednoliko opterećenom i jednoliko deformisanom, kao i u rasterećenom, odnosno nedeformisanom Maksvelovom modelu .....	42
Sl. 2-19 Viskozno tečenje, relaksacija i rasterećenje Maksvelovog elementa .....	43
Sl. 2-20 Ponašanje Maksvelovog modela pri viskoznom tečenju u dijagramu s linearnom razmerom i log-log razmerom .....	44
Sl. 2-21 Kelvin Voigt-ov model za viskozno tečenje.....	44
Sl. 2-22 Fazno kašnjenje deformacije i napona kod Kelvin Voigt-ovog modela.....	45
Sl. 2-23 Levo - promena modula viskoznog tečenja (log-log razmera). Desno – promena modula relaksacije Kelvin Voigt-ovog modela. ....	47
Sl. 2-24 Grafički prikaz viskoznog tečenja i relaksacije napona u Kelvin Voigt- ovom modelu .....	47
Sl. 2-25 Viskozno tečenje, relaksacija i rasterećenje Kelvin Voigt-ovog modela .....	47
Sl. 2-26 Burgerov četvoroparametarski model.....	49
Sl. 2-27 Kriva tečenja i kriva relaksacije za Burgerov model.....	51
Sl. 2-28 Grafička metoda za određivanje parametara Burgerovog modela.....	52
Sl. 3-1 Shematski prikaz viskoznosti, elastičnosti, plastičnosti, i viskoelastičnosti.....	55
Sl. 3-2 Viskoelastične deformacije polimera.....	56
Sl. 3-3 Tipični dijagram napon- deformacija elastičnog i viskoelastičnog materijala za dve različite vrednosti vremena trajanja eksperimenta .....	56
Sl. 3-4 Pipkinov dijagram.....	57
Sl. 3-5 Dijagram tranzicije između linearnih i nelinearnih svojstava, pri konstantnoj deformaciji .....	58
Sl. 3-6 Dijagram tranzicije između linearnih i nelinearnih svojstava, pri konstantnom naponu .....	58
Sl. 3-7 Viskozno tečenje pri konstantnom opterećenju .....	61
Sl. 3-8 Uporedni prikaz deformisanja i povraćaja deformacije, pri konstantnom naponu, kod elastičnih, viskoznih i viskoelastičnih materijala.....	61
Sl. 3-9 Regioni tečenja – primarno, sekundarno i tercijarno. Dijagrami dilatacija u zavisnosti od vremena su dati za različite nivoe opterećenja. ....	63
Sl. 3-10 Relaksacija napona pri konstantnoj dilataciji .....	63
Sl. 3-11 Uporedni prikaz nastanka i restitucije napona, pri konstantnoj deformaciji, kod elastičnih, viskoznih i viskoelastičnih materijala.....	64

Sl. 3-12 Shematsko predstavljanje zavisnosti smičući modul popustljivosti - vreme, u logaritamskoj razmeri .....	65
Sl. 3-13 Shematsko predstavljanje zavisnosti smičući modul relaksacije - vreme, u logaritamskoj razmeri .....	65
Sl. 3-14 Dijagram zavisnosti smičućeg napona od klizanja. Pomeraj napona u odnosu na klizanje je fazni ugao $\delta$ .....	67
Sl. 3-15 Prikaz vektora napona i deformacije u kompleksnoj ravni.....	68
Sl. 3-16 Glavna kriva zavisnosti svojstava od temperature pri relaksaciji polimera dobijena primenom temperaturskog horizontalnog faktora pomeranja po PSVT. ....	71
Sl. 3-17 PSNV -princip superpozicije napona i vremena .....	71
Sl. 3-18 Kombinovanje TTSP i TSSP za crtanje TTSP glavne krive .....	72
Sl. 3-19 Shematski prikaz semikristalnih polimera: paralelne i krive linije predstavljaju delove polimera u kristalnom i amorfnom stanju .....	72
Sl. 3-20 Zavisnost viskoelastičnog modula od temperature kod amorfnih polimera .....	73
Sl. 3-21 Zavisnost svojstava polimera od temperature: A-za kristalni, B-za semikristalni-umreženi, C-za amorfni polimer i odgovarajuća stanja: staklasto-krto, tranziciono-viskoelastično, gumeno, plastično i tečno. ....	74
Sl. 3-22 Termomehantička kriva amorfno polimera.....	76
Sl. 3-23 Termomehantička kriva za amorfni, kristalni i umreženi polimer.....	76
Sl. 3-24 Potencijalna greška pri uzimanju samo horizontalnog faktora pomeranja .....	78
Sl. 3-25 Odnos temperature i specifične zapremine za amorfne polimere.....	79
Sl. 3-26 Odnos temperature i specifične zapremine za semikristalne (1) i kristalne (2) polimere.....	79
Sl. 3-27 Promena specifične zapremine s temperaturom za zasićene (1) i nezasićene (2) polimere .....	79
Sl. 3-28 Standardni linearni modeli za viskoelastično čvrsto telo.....	81
Sl. 3-29 Viskozno tečenje, relaksacija i rasterećenje Zenerovog modela .....	81
Sl. 3-30 Promena deformacije SLM, pri konstantnom naponu .....	85
Sl. 3-31 Kriva ukupnih deformacija za brezu, na temperaturi 60 <sup>0</sup> C: 1-pri jednostepenom opterećivanju, 2-pri višestepenom opterećivanju u radijalnom pravcu, prema gore navedenoj proceduri (Уголев, 1971.) .....	88
Sl. 3-32 Grafičko određivanje parametara Zenerovog modela: a) promena deformacije pri višestepenom opterećivanju uzorka s periodičnim rasterećenjima, b) pomoćni dijagram viskoelastičnih deformacija. (Уголев, 1971.) .....	90
Sl. 3-33 Ekvivalentne krive viskoznog tečenja i relaksacije .....	94
Sl. 3-34 Karakterističan dijagram sila-skraćenje, pri pritisku paralelno vlaknima, standardnih epruveta od bora.....	99

Sl. 3-35 Karakterističan dijagram sila-skraćenje, pri pritisku standardnih epruveta od drveta: a) upravno na vlakna u radijalnom pravcu (važi za četinare i prstenasto porodne lišćare), b) upravno na vlakna u tangencijalnom pravcu. ....	99
Sl. 3-36 Dijagram dilatacija-vreme pri zatezanju u radijalnom pravcu, za uzorak od bukovine na temperaturi 60 <sup>0</sup> , pri vlažnosti 10%. a) pri konstantnom opterećenju.....	100
Sl. 3-37 Dijagram dilatacija –vreme pri zatezanju u tangencijalnom pravcu, s konstantnim opterećenjem, na temperaturi 60 <sup>0</sup> a) za uzorak od bora vlažnosti 17% b) prosečne vrednosti za uzorke od lišćara vlažnosti 10% (Уголев, 1971.).....	100
Sl. 5-1 Aksijalno napregnuta konzola .....	117
Sl. 5-2 Uporedni prikaz rešenja za izduženje štapa, od EI i od VEI materijala .....	126
Sl. 5-3 Zavisnost Poasonovog koeficijenta između pravaca a i r od vremena, pri viskoznom tečenju i pri relaksaciji napona, za $\Delta = 0,33$ i $\tau_\epsilon=14,5\text{min}$ .....	129
Sl. 5-4 Zavisnost Poasonovog koeficijenta između pravaca a i t od vremena, pri viskoznom tečenju i pri relaksaciji napona, za $\Delta = 0,22$ i $\tau_\epsilon=14,5\text{min}$ .....	129
Sl. 5-5 Element tankog štapa, napregnut na pravo čisto savijanje .....	135
Sl. 5-6 Konzola, napregnuta na pravo čisto savijanje.....	136
Sl. 5-7 Prosta greda, napregnuta na pravo čisto savijanje .....	138
Sl. 5-8 Uporedni prikaz maksimalnih ugiba proste grede, od Hukovog EO materijala i od Zenerovog VEO materijala, s dva različita odnosa $E_H/E_K$ .....	140
Sl. 5-9 Konzola pravougaonog preseka, opterećena na slobodnom kraju centrično postavljenom koncentrisanom vertikalnom silom .....	141
Sl. 5-10 Uporedni prikaz rasporeda napona, kod konzole, od EI (isprekidana linija) i od EO materijala, za slučaj kada se pravci glavnih napona ne poklapaju s pravcima koordinatnih osa .....	148
Sl. 5-11 Konzola, pravougaonog preseka, opterećena jednako podeljenim opterećenjem.....	150
Sl. 5-12 Prosta greda, napregnuta na savijanje silama .....	154
Sl. 5-13 Ploča, jednoliko opterećena celom površinom, slobodno poduprtih stranica.....	158
Sl. 5-14 Ploča, jednoliko opterećena celom površinom, s dve slobodno poduprte i dve slobodne stranice.....	161
Sl. 6-1 Rezultati eksperimenta relaksacije napona pri konstantnoj dilataciji od 0,0362, u radijalnom pravcu, za uzorak bukovine, vlažnosti 10%, ispitivan na temperaturi od 60 <sup>0</sup> , (Уголев, 1971.).....	171
Sl. 6-2 U radijalnom pravcu, aksijalno napregnut element štapa od bukovine .....	173

Sl. 6-3 Promena modula viskoznog tečenja i modula elastičnosti, u radijalnom pravcu, tokom vremena, za posmatrani štap od bukovine.....	175
Sl. 6-4 Dijagram dilatacija u radijalnom pravcu-vreme za posmatrani viskoelastični štap od bukovine, pri konstantnom naponu zatezanja u radijalnom pravcu .....	177
Sl. 6-5 Dijagram koeficijent viskoznog tečenja u radijalnom pravcu –vreme za posmatrani viskoelastični štap od bukovine, pri bilo kojem konstantnom naponu zatezanja u radijalnom pravcu do 8 MPa, za period opterećenja i posle rasterećenja .....	179
Sl. 6-6 Uporedni prikaz modula viskoznog tečenja, u tri anatomski pravca, posmatranog viskoelastičnog štapa od bukovine.....	181
Sl. 6-7 Vizuelni prikaz članova matrice elastičnosti za uzorak od bukovine, vlažnosti 11%, ispitivan na sobnoj temperaturi .....	182
Sl. 6-8 Vizuelni prikaz članova matrice viskoelastičnosti za štap od bukovine, vlažnosti 10%, ispitivan na 60 <sup>0</sup> C, u početnom trenutku vremena .....	184
Sl. 6-9 Dijagram tangencijalne dilatacije -vreme, za posmatrani viskoelastični štap od bukovine, pri konstantnom tangencijalnom naponu zatezanja.....	187
Sl. 6-10 Dijagram podužne dilatacije -vreme za viskoelastični štap od bukovine, pri konstantnom podužnom naponu zatezanja.....	189
Sl. 6-11 Odnos viskoelastičnih dilatacija aksijalno napregnutog štapa od bukovine, u podužnom, radijalnom i tangencijalnom pravcu, pri istom nivou napona.....	190
Sl. 6-12 Promena modula relaksacije napona, u radijalnom pravcu, tokom vremena, za viskoelastični uzorak bukovine, pri konstantnoj dilataciji od 0,0362 u istom pravcu i pri otpuštanju dilatacije nakon 35 minuta.....	192
Sl. 6-13 Uporedni prikaz promene modula relaksacije napona, u tri anatomski pravca, tokom vremena, za viskoelastični štap od bukovine, pri konstantnoj deformaciji od 0,0362 i nakon opuštanja deformacije.....	193
Sl. 6-14 Dijagram podužni napon -vreme za Zenerov štap od bukovine vlažnosti 10%, na temperaturi 60 <sup>0</sup> C, pri konstantnoj podužnoj deformaciji .....	193
Sl. 6-15 Dijagram koeficijent relaksacije napona-vreme za Zenerov štap od bukovine vlažnosti 10%, na temperaturi 60 <sup>0</sup> C, pri konstantnoj podužnoj deformaciji i nakon prestanka deformisanja.....	194
Sl. 6-16 Vizuelni prikaz članova matrice krutosti za viskoelastični štap od bukovine, vlažnosti 10%, ispitivan na 60 <sup>0</sup> C, pri konstantnoj dilataciji u početnom trenutku vremena .....	196
Sl. 6-17 Uporedni prikaz ugiba za konzole od EI i VEO materijala s različitim opterećenjem.....	202
Sl. 6-18 Koeficijent ugiba $\alpha$ za EO ploču od bukovine .....	204
Sl. 6-19 Koeficijent $\alpha$ za EO i EI ploču od bukovine .....	204

Sl. 6-20 Veličine koeficijenata $\alpha, \beta_1, \beta_2$ .....	205
Sl. 6-21 Ugib i momenti savijanja ploče od bukovine kao EO materijala u zavisnosti od odnosa dužine i širine .....	205

## SPISAK TABELA

Tabela 2-1 Uporedna svojstva Maksvelovog i Kelvin Voigt-ovog modela u različitim eksperimentima ( $\tau$ je karakteristično vreme-viskozno g tečenja ili relaksacije napona).....	48
Tabela 5-1 Odnos parametra preseka $d$ , i koeficijenata napona $\beta_s$ i $\beta_B$ , za uklješteni štap napregnut na savijanje silama, od EO materijala.....	146
Tabela 5-2 Bezdimezionalni koeficijenti $\alpha$ i $\alpha_1$ za ploču od EI materijala, slobodno oslonjenu na svim stranicama, opterećenu jednako podeljenim opterećenjem.....	159
Tabela 5-3 Koeficijenti $\alpha, \beta_1, \beta_2$ ploču od EI materijala čije su dve stranice slobodno oslonjene, savijenu jednako podeljenim opterećenjem.....	162
Tabela 5-4 Huberovi koeficijenti $\alpha_1, \beta_1, \beta_2$ kada je $D_3^2 = D_1 D_2$ .....	168
Tabela 6-1 Uticaj anatomskog pravca na elastična svojstva nekih vrsta drveta-po standardnim ispitivanjima (Aškenazi, 1978.).....	170
Tabela 6-2 Uticaj anatomskog pravca na materijalne konstante-podaci dobijeni pri ispitivanju s konstantnom brzinom nanošenja opterećenja (Уголев, 1971.).....	170
Tabela 6-3 Članovi matrice elastičnosti, za štap od bukovine, vlažnosti 11%, napregnut konstantnim naponom zatezanja od 2MPa, u radijalnom pravcu, na sobnoj temperaturi i matrice viskoelastičnosti, za Zenerov štap od bukovine, vlažnosti 10%, pri 60°C, linearno napregnut konstantnim naponom zatezanja od 2MPa, u radijalnom pravcu, za različite vremenske trenutke (1/E koristi se za matricu $C_e$ a D za matricu $C_{vt}$ ).....	185
Tabela 6-4 Članovi matrice elastičnih deformacija, za štap od elastične bukovine, vlažnosti 11%, na sobnoj temperaturi i matrice viskoelastičnih deformacija, za Zenerov štap od bukovine, vlažnosti 10%, pri 60°C, oba napregnuta konstantnim naponom zatezanja od 2MPa, u radijalnom pravcu, za različite vremenske trenutke .....	186
Tabela 6-5 Članovi matrice elastičnih deformacija, za štap od bukovine, vlažnosti 11%, na sobnoj temperaturi i matrice viskoelastičnih deformacija za Zenerove štapove od bukovine, vlažnosti 10%, na 60°C, napregnute konstantnim tangencijalnim naponom zatezanja od 2MPa .....	188



Tabela 6-6 Članovi matrice elastičnih deformacija za štap od bukovine, vlažnosti 11%, na sobnoj temperaturi i matrice viskoelastičnih deformacija za Zenerov štap od bukovine, vlažnosti 10%, pri 60 <sup>0</sup> C, oba linearno napregnuta konstantnim podužnim naponom od 2MPa, za različite vremenske trenutke .....	189
Tabela 6-7 Članovi matrice krutosti za elastični štap od bukovine, i matrice krutosti za viskoleastični štap od bukovine, oba izložena konstantnoj dilataciji, u različitim vremenskim trenucima .....	197
Tabela 6-8 Članovi matrice napona za štap od bukovine, vlažnosti 11%, na sobnoj temperaturi i matrice viskoelastičnih deformacija za Zenerov štap od bukovine vlažnosti 10%, na 60 <sup>0</sup> C, izložen konstantnoj podužnoj dilataciji od 0,0362, za različite vremenske trenutke.....	197
Tabela 6-9 Uporedni prikaz ugiba za štap od bukovine, računat kao EO i VEO materijal .....	199

## SPISAK SKRAĆENICA

CUB	kubni izotropan
EI	elastičan izotropan
EO	elastičan ortotropan
EUROCOD	Evropski standardi
OHA	opšta homogena anizotropija, bez elastične simetrije
PDJ	parcijalne diferencijalne jednačine
PSNV	princip superpozicije napona i vremena
PSNVT	princip superpozicije napona, vremena i temperature
PSVT	princip superpozicije vremena i temperature
SLM	standardni linearni model
SLS	standard linear solid
SRPS	Srpski standardi
TI	transverzalan izotropan
TRG	tetragonalan izotropan
TSSP	time stress superposition princip
TTSP	time temperature superposition princip
TTSSP	time temperature stress superposition princip
VEI	viskoelastičan izotropan
VEO	viskoelastičan ortotropan
WLF	Williams, Landel, Ferry
MKE	metoda konačnih elemenata
FEM	finite element metod
MKV	metoda konačnih zapremina
FVM	finite volume metod
MKR	metoda konačnih razlika
FDM	finite difference metod
DIVK	Društvo za integritet i vek konstrukcija

## SPISAK KORIŠĆENIH OZNAKA

A		a) integraciona konstanta; b) površina preseka
a,b		dimenzije preseka
a,b,c,d		komponente dinamičkog Poasonovog koeficijenta VEI materijala
$a_T$		faktor horizontalnog pomeranja
B(t)	Pa	zapreminski viskoelastični modul
c		odnos dimenzija preseka EO materijala
c	N/m	krutost
$C, C_{pq}$ (p,q=1,2,3,4,5,6)		matrica elastičnosti
$C_1, C_2$		univerzalne konstante u WLF jednačini
$C_i$ (i=1..n)		integracione konstante
$C_{ij}$ (i,j=1,2,3,4,5,6)		komponente matrice elastičnosti
$c_{ij}$ (i,j=1,2,3,4,5,6)		komponente matrice krutosti
$C_{ve}(t)$		matrica viskoelastičnosti
$C_{vt}(t)$		matrica viskoznog tečenja
d		množilac imenioca članova matrice krutosti
d		parametar preseka EO materijala
$D'$	1/Pa	dinamički modul popustljivosti VEI materijala
$D''$	1/Pa	dinamički modul popustljivosti VEI materijala
$D(\infty)$	1/Pa	ustaljeni modul popustljivosti VEI materijala
d(t)		funkcija definisana duž vremenske ose
$\bar{D}(t)$	1/Pa	modul viskoznog tečenja u periodu posle rasterećenja
D(t)	1/Pa	modul viskoznog tečenja ili popustljivosti VEI materijala, promenljiv tokom vremena
$D^*$	Pa	dinamički modul popustljivosti VEI materijala
$D, D_{pq}$ (i,j=1,2,3,4,5,6)		matrica krutosti EI i EO materijala
$D_0$	1/Pa	početni modul popustljivosti VEI materijala
$D_0(\sigma)$	1/Pa	početni modul popustljivosti VEI materijala za određeni nivo napona
De		Deborah-ov broj
$D_i(t)$ (i=x,y,z)	1/Pa	modul viskoznog tečenja ili popustljivosti VEO materijala, promenljiv tokom vremena

$\mathbf{D}_{ij}$ ( $i,j=x,y,z$ )		tenzor brzine deformisanja
$D_{pq}$		matrica krutosti EI materijala
$\mathbf{D}_{Rel}(t)$		matrica krutosti VEO materijala pri relaksaciji napona
$E'$	Pa	modul skladištenja
$E$	Pa	Young-ov modul elastičnosti EI materijala
$E''$	Pa	modul gubitka VEI materijala
$E^*$	Pa	dinamički modul VEI materijala
$E_0$	Pa	početni modul elastičnosti VEI materijala
$E_\infty$	Pa	ustaljeni modul relaksacije VEI materijala
$E_\infty(\epsilon)$	Pa	ustaljeni modul relaksacije VEI materijala zavistan od deformacije
$E_g, E$	Pa	stakleni modul, modul krutosti
$E_H$	Pa	modul elastičnosti Hukovog modela u VEI materijalu
$E_{Hi}$ ( $i=1,2,3$ )	Pa	modul elastičnosti Hukovog modela u Zenerovom VEO materijalu
$E_i$ ( $i=1,2,3$ )	Pa	moduli elastičnosti EO materijala
$E_i$ ( $i=r,t,a$ )	Pa	moduli elastičnosti drveta u anatomskim pravcima
$E_i$ ( $i=x,y,z$ )	Pa	moduli elastičnosti EO materijala
$E_i(t)$ ( $i=r,t,a$ )	Pa	moduli relaksacije drveta u anatomskim pravcima
$\tilde{E}_i(t)$ ( $i=r,t,a$ )	Pa	moduli relaksacije drveta u anatomskim pravcima nakon rasterećenja
$E_K$	Pa	modul elastičnosti opruge Kelvin Voightovog modela u VEI materijalu
$E_{Ki}$ ( $i=1,2,3$ )	Pa	modul elastičnosti opruge Kelvin Voightovog modela u Zenerovom VEO materijalu
$E_r$	Pa	gumeni modul, modul plastičnosti
$f$		maksimalni ugib
$F$	N	sila
$F(s)$		funkcija u kompleksnom spektralnom domenu
$f(t)$		funkcija u vremenskom domenu
$F(t)$	N	sila promenljiva tokom vremena
$f(x)$		funkcija zavisna od oblika preseka
$F_0$	N	sila u početnom trenutku vremena
$\hat{f}_i(x_k,t)$ ( $i=x,y,z, k=1,2,3$ )		zapreminske sile
$F_{max}$	N	maksimalno opterećenje

$F_p$	N	opterećenje na granici proporcionalnosti
$f_t$		maksimalni ugib u pravcu t ose
$f_{tK}$		maksimalni ugib konzole u pravcu t ose
$f_{tpg}$		maksimalni ugib proste grede u pravcu t ose
$f_y$		maksimalni ugib u pravcu y ose
$f_{yk}$		maksimalni ugib konzole u pravcu y ose
$f_{yppg}$		maksimalni ugib proste grede u pravcu y ose
$G$	Pa	modul smicanja EI materijala
$G'$	Pa	smičući modul elastičnog skladištenja
$G''$	Pa	smičući modul viskoznog gubitka
$G(t)$	Pa	modul smicanja
$g, k, \chi$		parametri ortotropije
$G_i(t) (i=r, t, a)$	Pa	vremenski zavistan modul smicanja VEO materijala za ravan smicanja čija normala ima pravac ose i
$G_{ij}(i, j=1, 2, 3)$	Pa	moduli smicanja EO materijala
$G_{ij}^{\sim}(i, j=r, t, a)$	Pa	moduli smicanja drveta između anatomskih pravaca nakon rasterećenja
$G_{ij}(i, j=r, t, a)$	Pa	moduli smicanja drveta između anatomskih pravaca
$G_{ij}(i, j=x, y, z)$	Pa	moduli smicanja EO materijala
$H(t)$		Hevisajdova funkcija
$I_r$	$m^4$	glavni centralni moment inercije za r osu
$I_x$	$m^4$	glavni centralni moment inercije za x osu
$J_B(t)$	1/Pa	vremenski zavistan modul popustljivosti VEI materijala kod prostornih naprezanja
$J_E(t)$	1/Pa	vremenski zavistan modul popustljivosti VEI materijala pri zatezanju
$J_G(t)$	1/Pa	vremenski zavistan modul popustljivosti VEI materijala pri smicanju
$J_i(t) (i=x, y, z)$	1/Pa	vremenski zavistan modul popustljivosti VEO materijala u pravcu ose i
$J_{ij}(t) (i, j=x, y, z)$	1/Pa	vremenski zavistan modul popustljivosti VEO materijala za ravan smicanja ij
$K_{Rel, i}(t) (i=r, t, a)$		koeficijent relaksacije napona u anatomskom pravcu i
$k$	1/Pa	zapreminska popustljivost; parametar ortotropije
$K$	Pa	modul kompresije, zapreminski modul
$k(t)$	1/Pa	moduli popustljivosti

$K_{vt,i}(t)$ ( $i=r,t,a$ )		koeficijent viskoznog tečenja u anatomskom pravcu $i$
$\mathcal{L}(s)$		Laplasova transformacija
$m$		korekcionni faktor ortotropije
$M$	J	moment sprega
$m(t)$	Pa	moduli relaksacije
$M_0$	J	konstantni moment savijanja u pravcu $x$ ose
$M_r$	J	moment savijanja u pravcu $r$ ose
$M_x$	J	moment savijanja u pravcu $x$ ose
$M_x(t)$	J	promenljivi moment savijanja u pravcu $x$ ose
$n$		karakteristično vreme pri konstantnoj brzini nanošenja opterećenja
$N$	N	normalna sila
$n,m$		red izvoda napona i deformacije
$P$		pritisak
$P,Q$		koeficijenti ili diferencijalni operatori uz napone i dilatacije i njihove izvode, u devijatorskim delovima konstitutivnih jednačina za određeni model
$P_1,Q_1$		koeficijenti ili diferencijalni operatori uz napone i dilatacije i njihove izvode, u dilatatorskim delovima konstitutivnih jednačina za određeni model
$P^E,Q^E$		operatori zavisni od koeficijenata modela, preko kojih se računa modul elastičnosti
$p_i$ ( $i=0,1,n$ )		koeficijenti uz napone i njihove izvode
$P^v,Q^v$		operatori zavisni od koeficijenata modela, preko kojih se računa Poasonov koeficijent
$q$	N/m	jednako podeljeno opterećenje
$q_i$ ( $i=0,1,m$ )		koeficijenti uz deformacije i njihove izvode
$Q_i$ ( $i=0,1,m$ )		koeficijenti uz deformacije i njihove izvode
$R$		univerzalna gasna konstanta
$r_i$ ( $i=1,2$ )		koreni karakteristične jednačine Burgerovog modela
$R_k$		poluprečnik krivine deformisane ose konzole
$R_{pg}$		poluprečnik krivine deformisane ose proste grede
$S$		entropija
$T$	K	temperatura za koju se računa faktor pomeranja
$T$	sec	period oscilovanja
$t^*$	sec	redukovano vreme

$t_0$	sec	početno vreme
$\tan \alpha$		parametar Burgerovog modela
$\tan \beta$		parametar Burgerovog modela
$T_d$	K	temperatura degradacije
$T_f$	K	temperatura tečenja
$T_g$	K	temperatura staklastog stanja
$T_i$ ( $i=\Phi, \Theta, \Psi$ )		matrice transformacija
$T_{ij}$		komponente matrice transformacija
$T_m$	K	temperatura topljenja
$t_{max}$		maksimalna udaljenost od r ose merena u t pravcu
$T_S$	K	referentna temperatura
$T_y$	N	transverzalna sila
$U$	J	unutrašnja energija
$u, v, w$		pomeranja u pravcima x,y,z ose
$u_{i,j}(x_k, t)$ ( $i=x, y, z, k=1, 2, 3$ )		pomeranja
$u_k, v_k, w_k$		pomeranja tačaka konzole u pravcima x,y,z ose
$u_{pg}, v_{pg}, w_{pg}$		pomeranja tačaka proste grede u pravcima x,y,z ose
$W$		funkcija pomeranja
$W_i$		Weissenberg-ov broj
$\Delta$		relaksaciona čvrstoća
$\Delta H$		energija aktivacije
$\Delta \ell$	m	izduženje
$\Delta t$	K	temperaturska razlika
$E(t), E_{Rel}$	Pa	modul relaksacije, promenljiv tokom vremena
$\Phi(0)$		funkcija relaksacije napona u početnom trenutku
$\Phi(t)$		funkcija relaksacije napona
$\Phi(t, \varepsilon)$		funkcija relaksacije napona
$\Phi, \Theta, \Psi$		Ojlerovi uglovi rotacije pravca delovanja napona u odnosu na anatomski pravac
$\alpha$	$1/^\circ C$	koeficijent termičke ekspanzije
$\alpha$	rad	ugao
$\beta_s, \beta_B$		korekcionni faktori
$\delta$		fazni ugao, fazni pomeraj

$\delta_{ij}$ ( $i,j=x,y,z$ )		Kronekerov simbol
$\delta(\xi)$		Dirakova delta funkcija
$\varepsilon_K$	$^0/_{00}$	dilatacija Kelvin Voightovog modela
$\varepsilon$	$^0/_{00}$	deformacija modela
$\varepsilon(t)$	$^0/_{00}$	dilatacija promenljiva tokom vremena
$\varepsilon(t_{1+})$	$^0/_{00}$	dilatacija u periodu $t > t_1$
$\varepsilon_\infty$	$^0/_{00}$	ustaljena deformacija
$\varepsilon_H$	$^0/_{00}$	dilatacija Hukovog modela
$\varepsilon_h, \varepsilon_p$	$^0/_{00}$	opšte i partikularno rešenje PDJ
$\varepsilon_i$ ( $i=x,y,z$ )	$^0/_{00}$	dilatacije u pravcima osa $x,y,z$ EI I EO materijala
$\varepsilon_i^-(t)$ ( $i=r,t,a$ )	$^0/_{00}$	dilatacije u anatomskim pravcima posle rasterećenja
$\varepsilon_i(t)$ ( $i=x,y,z$ )	$^0/_{00}$	dilatacije u pravcima osa $x,y,z$ VEI i VEO materijala
$\varepsilon_i(t), \varepsilon_i(\sigma,t)$ ( $i=r,t,a$ )		dilatacije u anatomskim pravcima drveta
$\varepsilon_{ij}$ ( $i,j=r,t,a$ )	$^0/_{00}$	dilatacija u pravcu $i$ pri delovanju napona u pravcu $j$
$\varepsilon_{ii}$ ( $i=x,y,z$ )	$^0/_{00}$	dilatacije u pravcima osa $x,y,z$
$\varepsilon_{ij}$ ( $i,j=x,y,z$ )		tenzor deformacija
$\varepsilon_{ij}$ ( $i,j=x,y,z, i \neq j$ )	$^0/_{00}$	polovine klizanja između pravaca $x,y,z$
$\varepsilon_{ij}^e$ ( $i,j=x,y,z$ )		elastični deo tenzora deformacija
$\varepsilon_{ij}^{ve}$ ( $i,j=x,y,z$ )		viskoelastični deo tenzora deformacija
$\varepsilon_{kk}$ ( $k=x,y,z$ )		tenzor dilatacija
$\varepsilon_{kk}^e$ ( $k=x,y,z$ )		elastični deo tenzora dilatacija
$\varepsilon_{kk}^{ve}$ ( $k=x,y,z$ )		viskoelastični deo tenzora dilatacija
$\varepsilon_N$	$^0/_{00}$	dilatacija Njutnovog modela
$\varepsilon_q$ ( $q=1,2,3,4,5,6$ )	$^0/_{00}$	komponente tenzora deformacija
$\varepsilon_{ve}$	$^0/_{00}$	matrica viskoelastičnih deformacija
$\varepsilon_{vt}(\sigma,t)$	$^0/_{00}$	matrica viskoelastičnih deformacija pri viskoznom tečenju
$\varepsilon_z$	$^0/_{00}$	podužna dilatacija u pravcu ose $z$
$\varepsilon_0$	$^0/_{00}$	dilatacija modela u početnom trenutku vremena
$\varepsilon_K$	$^0/_{00}$	dilatacija Kelvin Voightovog modela
$\phi(y,z)$		naponska funkcija
$\gamma$		klizanje
$\gamma_{ij}$ ( $i,j=x,y,z, i \neq j$ )		tenzor klizanja



$\gamma_{ij}$ ( $i,j=x,y,z, i \neq j$ )		klizanja između osa $i$ i $j$
$\gamma_{ij}^e$ ( $i,j=x,y,z, i \neq j$ )		elastični deo tenzora klizanja
$\gamma_{ij}^{ve}$ ( $i,j=x,y,z, i \neq j$ )		viskoelastični deo tenzora klizanja
$\eta$	Ns/m <sup>2</sup>	viskoznost
$\eta_{i,j,k}$ ( $i,j,k=1,2,3$ )		uticajni koeficijenti drugog reda
$\eta_{ij,k}$ ( $i,j,k=1,2,3$ )		uticajni koeficijenti prvog reda
$\eta_K$	Ns/m <sup>2</sup>	viskoznost Kelvin Voightovog modela
$\eta_N$	Ns/m <sup>2</sup>	viskoznost Njutnovog modela
$\varphi$		funkcija tečenja
$\varphi(t)$		funkcija tečenja
$\varphi(t,\sigma)$		funkcija tečenja
$\varphi_\infty$		funkcija tečenja u trenutku $t=\infty$
$\Lambda$		zapreminska ili dilataciona viskoznost
$\lambda, \mu$		Lameovi koeficijenti EI materijala
$\mu_{ij,kl}$ ( $i,j,k,l=1,2,3$ )		Chentsovi koeficijenti
$\nu^*$		dinamički Poasonov koeficijent VEI materijala
$\nu_{ij}$ ( $i,j=1,2,3$ ) ( $i,j=x,y,z$ )		Poasonovi koeficijenti EO materijala, $i$ -pravac deformacije, $j$ -pravac naprezanja
$\nu_{ij}$ ( $i,j=r,t,a$ )		Poasonovi koeficijenti drveta između anatomskih pravaca, $i$ -pravac deformacije, $j$ -pravac naprezanja
$\nu_{ij}(t)$ ( $i,j=1,2,3$ )		Poasonovi koeficijenti VEO materijala, $i$ -pravac deformacije, $j$ -pravac naprezanja
$\nu_R(t)$		Poasonov koeficijent VEI materijala pri relaksaciji napona
$\nu_{vi}(t)$		Poasonov koeficijent VEI materijala pri viskoznom tečenju
$\nu$		Poasonov koeficijent EI materijal
$\nu(t)$		Poasonov koeficijent VEI materijala
$\theta_\lambda, \theta_\mu$		vremenski parametri vezani za viskoznost
$\sigma$	Pa	napon u modelu
$\sigma'$	Pa	normalni naponi koji odgovaraju viskoznoj komponenti dinamičkog modula
$\sigma''$	Pa	normalni naponi koji odgovaraju viskoznoj komponenti dinamičkog modula
$\sigma(t)$	Pa	napon promenljiv tokom vremena

$\sigma(t_{1+})$	Pa	napon u periodu $t > t_1$
$\sigma^*$	Pa	naponi koji odgovaraju dinamičkom modulu
$\sigma_\infty$	Pa	ustaljeni napon
$\sigma_g$	Pa	granični napon
$\sigma_i (i=r,t,a)$	Pa	normalni naponi u pravcu osa r,t,a
$\sigma_i (i=x,y,z)$	Pa	normalni naponi u pravcu osa x,y,z
$\sigma_{ij}(i,j=r,t,a)$	Pa	napon u pravcu i pri konstantnoj dilataciji u pravcu j
$\sigma_{ii} (i=x,y,z)$	Pa	normalni naponi
$\sigma_{ij}^e (i,j=x,y,z)$		elastični deo tenzora napona
$\sigma_{ij}^{ve} (i,j=x,y,z)$		viskoelastični deo tenzora napona
$\sigma_{ij}^v (i,j=x,y,z)$		viskozni deo tenzora napona
$\sigma_{ij} (i,j=x,y,z)$		tenzor napona
$\sigma_{kk} (k=x,y,z)$		tenzor normalnih napona
$\sigma_N$	Pa	napon u Njutnovom modelu
$\sigma_p (i=1,2,3,4,5,6)$	Pa	komponente tenzora napona
$\sigma_{Rel}(t)$	Pa	napon relaksacije
$\sigma_0$	Pa	napon u modelu u početnom trenutku vremena
$\sigma_H$	Pa	napon u Hukovom modelu
$\sigma_M$	Pa	napon u Maksvelovom modelu
$\tau$	Pa	smičući napon
$\tau'$	Pa	smičući naponi koji odgovaraju elastičnoj komponenti dinamičkog modula smicanja
$\tau$	sec	vreme
$\tau''$	Pa	smičući naponi koji odgovaraju viskoznoj komponenti dinamičkog modula smicanja
$\tau_2$		parametar Burgerovog modela
$\tau_i (i=1,2)$		vremenski parametri
$\tau_{ij} (i,j=x,y,z, i \neq j)$		tenzor smičućih napona
$\tau_{ij} (i,j=x,y,z, i \neq j)$	Pa	smičući naponi
$\tau_{p1}, \tau_{p2}$		partikularna rešenja za smičuće napone
$\tau_R$	sec	vreme relaksacije ili otpuštanja Maksvelovog i Kelvin Voigt-ovog modela

$\tau_{vt}$	sec	vreme viskoznog tečenja ili retardacije Maksvelovog i Kelvin Voigt-ovog modela
$\tau, \tau_1$	sec	vreme viskoznog tečenja u dilatatorskom i devijatorskom delu konstitutivne jednačine linearno napregnutog Zenerovog VEI modela
$\tau_K$	sec	vreme viskoznog tečenja Burgerovog modela
$\tau_M$	sec	vreme relaksacije Burgerovog modela
$\tau_\varepsilon$	sec	vreme viskoznog tečenja Zenerovog VEI modela
$\tau_{\varepsilon C}$	sec	vreme viskoznog tečenja Zenerovog VEI modela pri konstantnoj brzini nanošenja opterećenja
$\tau_{\varepsilon i} (i,j=x,y,z)$	sec	vreme viskoznog tečenja u pravcima osa x,y z Zenerovog VEO materijala
$\tau_\sigma$	sec	vreme relaksacije Zenerovog modela
$\omega$	1/rad	frekvencija, kružna učestalost
$\dot{\gamma}_{ij} (i,j=x,y,z, i \neq j)$		tenzor brzine promene klizanja
$\dot{\varepsilon}_{kk} (k=x,y,z)$		tenzor brzine promene dilatacija
$\bar{\delta}$		poprečno pomeranje
$\bar{r}$		vektor položaja
$\{P_i\}, \{Q_i\} (i=1,2,3,4,5,6)$		diferencijalni vremenski operatori za anizotropan materijal

# 1. UVOD

## 1.1. Obrazloženje predmeta istraživanja

Predmet ove doktorske disertacije su viskoelastične deformacije ortotropnih čvrstih tela, koja imaju svojstva Zenerovog modela, s primenom u mehanici drveta.

U svim prirodnim i veštačkim materijalima neprekidno se odvijaju unutrašnji procesi, koji tokom vremena dovode do promena njihovih fizičkih svojstava. Neke od tih promena se dešavaju pod dejstvom, a neke u odsustvu spoljnog opterećenja.

*Promene fizičkih svojstava neopterećenog materijala tokom vremena zovu se starenje materijala.* Trajanje neumitnog procesa starenja, kao i veličina nastalih promena, zavisi od vrste materijala. Starenje je naročito izraženo kod drveta, betona i plastičnih masa i ono u velikoj meri zavisi od hidrotermičkih uslova sredine. Kod betona, tokom starenja, dolazi do izrazitog povećanja njegove čvrstine, što je neophodno za njegovu dalju primenu. Kod svih materijala, pa i drveta, starenje u velikoj meri zavisi od temperature i vlažnosti sredine.

*Za objašnjenje nastanka i razvoja deformacija pod dejstvom spoljašnjih sila, kao i promena fizičkih svojstava materijala tokom vremena, važno je da se dobro poznaje struktura materijala.* U opštem slučaju, ukupna deformacija u tački tela sastoji se iz elastične, plastične i viskozne, a udeo tih komponenti u ukupnoj deformaciji kod raznih materijala je, razume se, različit.

Elastična deformacija se odigrava trenutno i ona je reverzibilna, odnosno, povratna. Plastična deformacije je ireverzibilna, nepovratna, a može biti trenutna ili funkcija vremena. Za nju se upotrebljava izraz *plastično tečenje* (na engleskom, *plastic flow*). Viskozna deformacija je takođe funkcija vremena. Pri konstantnom opterećenju, viskozna deformacija raste. Ta pojava naziva se *viskozno tečenje*. U engleskoj literaturi se koristi pojam *creep*, a u ruskoj, *ползучест*. Đurić (1963.) upotrebljava pojam *puženje*. Pojava da pri konstantnoj deformaciji tokom vremena napon u materijalu opada zove se *relaksacija napona*.

Veoma je teško, za svaki materijal ponaosob, postaviti veze napona i deformacija koje obuhvataju sve tri vrste deformacija. Zbog toga se u inženjerskoj praksi koriste idealni matematički modeli, koji obuhvataju deformacije koje

preovladavaju. Na taj način dobijaju se modeli elastičnih, viskoznih, plastičnih, elastoplastičnih, viskoelastičnih i viskoplastičnih materijala.

Elastični materijali proučavaju se u *teoriji elastičnosti* (Timošenko i Gudier, 1962., Lekhnitskii, 1984a). Pri izvođenju eksperimenata sa elastičnim materijalima, dešava se da deo dobijenih rezultata ima veliko rasipanje, pa se oni odbacuju. Tako dobijeni rezultati koriste se u proračunima uz različite popravne koeficijente, da bi se uzeli u obzir različiti eksploatacioni uslovi. Korekcionni koeficijenti uzimaju u obzir razlike u načinu oslanjanja; vrsti, načinu, veličini i trajanju opterećenja; poreklu i sastavu materijala; temperaturi i vlažnosti uzorka i sredine itd. Svi uticaji zatim se sakupe na jednom mestu i u vidu standardizovanih propisa ili priručnika koriste se kao smernice za konstruisanje i projektovanje.

Viskozne materijale proučava *mehanika fluida* (Лойцянский, 1970.). Deformacija viskoznog materijala se u potpunosti razvija pri konstantnom opterećenju ispod granične vrednosti i ostaje nepromenjena, sve do trenutka rasterećenja. Nakon rasterećenja viskoznog fluida trenutno nestaje deformacija.

Plastične, elastoplastične i viskoplastične materijale proučava *teorija plastičnosti*. Kod njih je prisutna trajna plastična deformacija, koja ostaje i nakon rasterećenja.

Teorija koja uzima u obzir elastične i viskozne deformacije je *teorija viskoelastičnosti* (Williams 1964., Christensen, 2003., Biot, 2008.). Teorija viskoelastičnosti može se posmatrati kao posebna *disciplina reologije, koja proučava materijale i promene njihove strukture tokom vremena*. Još u 5-om veku p.n.ere Heraklit je zapisao  $\pi\alpha\nu\tau\alpha \rho\epsilon\iota$ : sve teče. Smatra se da je reologiju kao granu nauke zasnovao Njutn u 17-om veku, definišući zakon da su smičući naponi proporcionalni konstantnoj brzini klizanja. Termin reologija, koji je opisivao proučavanje tečenja i deformisanja svih vrsta materijala, uveli su Bingham E.C. i Reiner M. 1929. godine kada je osnovano i Društvo za reologiju (Society of rheology-www.rheology.org).

Reologija govori u kakvoj vezi je napon s deformacijom, odnosno sila koja deluje na materijal s promenom oblika i zapremine. Modeli koje koristi reologija opisuju najvažnija svojstva materijala. *Tečnost* i *čvrsto telo* su takođe modeli. Matematičku podlogu za njih dali su Isak Njutn i Robert Huk. Njihovi zakoni s visokim stepenom preciznosti opisuju svojstva velikog broja realnih materijala. Navedeni modeli

ne uzimaju u obzir različitu strukturu materijala.

*Reologija se definiše kao nauka koja proučava i ona svojstva koja se ne mogu opisati Njutnovim i Hukovim zakonom. Pozitivna definicija govori da reologija proučava svojstva koja se mogu opisati bilo kojom vezom između sile i deformacije. U tom slučaju Njutnov i Hukov zakon su granični slučajevi u reologiji.*

U reologiji postoje dva različita pristupa formiranju konstitutivnih jednačina (Malkin, 1994.):

*Prvi objašnjava makro činjenice (ponašanje i svojstva materijala), zanemarujući molekularne strukture materijala. Posmatra se mikrozapremina, koja sadrži mnogo molekula, a na osnovu nje se zaključuje o makrosvojstvima tela. Kroz ovaj pristup teško je shvatiti šta se dešava sa molekulima i kako dolazi do međumolekulskih interakcija. Za formulisanje konstitutivnih jednačina primenjuju se metode diferenciranja i integracije. Primena ovog matematičkog aparata ne daje odgovor na pitanje šta se stvarno dešava u vrlo maloj zapremini materijala, ali daje dovoljno tačne podatke o ponašanju makro tela za praktičnu primenu tog materijala. Ovo je fenomenološki pristup.*

Drugi pristup se primenjuje u slučajevima kada se radi sa ekstremno malim veličinama (molekulima). Ekstrapolacija tako dobijenih rešenja teži beskonačnim vrednostima i za analizu tih problema primenjuju se posebne matematičke metode. Ovo je molekularni pristup.

*Opšta teorija viskoelastičnosti ima fenomenološki pristup i bazira se na trodimenzionoj analizi, koja koristi tenzorski račun. Za razumevanje osnovne ideje viskoelastičnosti može da se koristi i jednodimenziona analiza, kod koje nije važna geometrija deformacija.*

U okviru teorije viskoelastičnosti izdvaja se *viskoelastičnost polimera* (Ferry 1980.). Polimeri su anizotropni materijali. Njihova anizotropija je posledica specifične građe: oni su sastavljeni od makromolekula, čiji su meri međusobno povezani kovalentnim vezama. Makromolekuli su nosioci elastičnih svojstava. Šupljine između makromolekula ispunjene su viskoznom materijalom. Takva građa je uzrok posebnog ponašanja tih materijala, kada su opterećeni.

Viskoelastičnost je kod polimera posledica fazne tranzicije II reda (Zener, 1932.). *Fazna tranzicija II reda* dešava se neadijabatski i vrlo sporo, za razliku od one I

reda, za koju je potrebna promena toplotnog kapaciteta i koja nastaje uz naglu drastičnu promenu (topljenje, isparavanje, zamrzavanje..) jedne ili više fizičkih veličina.

Važne karakteristike fazne transformacije II reda su *ključni parametar* i *kritični eksponent*. Ključni parametar je ustvari mera uređenosti sistema. Kod polimera ključni parametar je  $T_g$  – temperatura staklastog stanja (glass-staklo). Na temperaturi ispod  $T_g$  sistem je u haosu a iznad  $T_g$  sistem je uređeniji. Ta temperatura je različita od  $T_m$  - temperatura topljenja (melting – topljenje). Kritični eksponent je količnik ukupnog vremena dejstva opterećenja i vremena odgovarajuće promena stanja. Ako je odnos ta dva vremena mali, promene su intenzivne i velike, a ako je odnos vremena veliki, promene su vrlo male. Taj parametar je važan zbog činjenice da se fazne transformacije dešavaju u različitim sistemima sa istim setom kritičnih eksponenata. Taj fenomen je poznat kao univerzalnost. *Univerzalnost je pretpostavka koja kaže da stanje sistema u okolini fazne transformacije zavisi samo od malog broja svojstava, kao što su dimenzionalnost sistema i struktura (simetrija), a da ne zavisi od osnovnih mikroskopskih svojstava sistema.* Ova pretpostavka opravdava fenomenološki pristup u teoriji viskoelastičnosti.

Bez obzira na vrstu polimera (linearni, razgranati ili umreženi, amorfni, kristalni ili semikristalni, prirodni ili veštački,) njihove deformacije imaju nešto zajedničko: zavise od intenziteta, vremena nanošenja i istorije opterećenja, temperature, vlage itd.

Pri konstantnom opterećenju čvrstih polimera javljaju se prvo elastične, a tokom vremena i viskozne deformacije, koje se asimptotski približavaju konačnoj veličini. Nakon uklanjanja opterećenja, gube se elastične, a zatim, postepeno, i deo viskoznih deformacija, a ostaje nepovratni deo. Ako opterećenje izazove napone, koji prekoračuju nosivost, izostaju elastične i viskozne deformacije, i nastaju samo nepovratne plastične deformacije, koje mogu biti trenutne – krti lom, ili postepene – plastično tečenje. Svojstva čvrstih polimera, su, dakle, u zavisnosti od nivoa opterećenja, viskoelastična ili plastična.

Što se tiče tečnih polimera, njihova svojstva su, pri opterećenju koje ne prelazi neku graničnu vrednost, viskoelastična.

Viskoelastična svojstva polimera mogu, dakle, da se posmatraju, kao svojstva karakteristična za spori razvoj napona i deformacija tokom vremena. Ovde je vrlo važno objasniti termin **spori** razvoj.

Ako se posmatraju viskoelastični efekti kod tečnosti, treba da se koristi ultra visoka frekvencija (karakteristično vreme eksperimenta je  $10^{-7}$ s). Deformacije betonskih greda i plastičnih cevi pod pritiskom zahtevaju godine posmatranja (karakteristično vreme je reda  $10^8$  s). Deformacije stena takođe mogu da se posmatraju kao veoma spore, ali u okviru geoloških perioda (karakteristično vreme je reda  $10^{17}$  s). To znači da bi se kompletno opisala viskoelastična svojstva, opseg vremena koje se posmatra treba da bude veličine bar s 15 decimala. Zbog toga se uobičajilo da se za viskoelastičnost obavljaju dve vrste eksperimenata:

- Merenje se vrši u konačnom opsegu vremena, pa se eksperimentalni podaci ekstrapoliraju van tog opsega.
- Koriste se specijalne metode da se ubrza ili uspori viskoelastični proces a zatim se empirijski modifikuje vremenska skala. Na primer, proces se može ubrzati povećavanjem temperature. Zatim se pretpostavi da su temperaturske promene ekvivalentne promenama na vremenskoj skali (na primer promene na  $100^{\circ}\text{C}$  traju 10s a to odgovara promeni na  $20^{\circ}\text{C}$  koje traju  $10^4$ s).

Oba pristupa su poluempirijska i dobijeni podaci mogu biti manje ili više tačni.

Pri izboru odgovarajućeg modela za polimere, glavni problem je kompatibilnost konstitutivnih jednačina sa različitim reološkim fenomenima. *Prvi uslov* koji mora da se ispuni za dobru kompatibilnost, je da objašnjenje svakog od viskoelastičnih fenomena koji može da se javi u različitim geometrijskim modelima deformisanja, mora da se tretira kao poseban slučaj opšte veze između napona i deformacije. *Drugi uslov* je da različiti reološki i viskoelastični efekti moraju biti u korelaciji. Pošto te uslove ne zadovoljavaju niti Hukov, niti Njutnov model, za viskoelastične materijale se prave drukčiji modeli.

Radi pravilnog izbora odgovarajućeg modela za određeni polimer važno je istaći osnovne razlike između viskoelastične tečnosti i viskoelastičnog čvrstog tela. Te razlike su:

- Kod viskoelastične tečnosti, u situaciji kada postoji konstantno klizanje, naponsko stanje se menja i opada do nule. Nasuprot tome, kada u viskoelastičnom čvrstom telu postoji konstantno klizanje, nastaje napon koji ostaje različit od nule dugo nakon što prestanka klizanja.
- Viskoelastična tečnost ima beskonačan broj nedeformisanih stanja, dok



viskoelastično čvrsto telo ima samo jedno.

- Viskoelastična tečnosti ima svojstvo materijalne simetrije nezavisno od koordinatnog sistema, što nije slučaj kod viskoelastičnog čvrstog tela.

U principu, razlika između čvrstih i tečnih polimera je vrlo prosta, s obzirom na molekularnu srazmeru. U slučaju viskoelastičnih tečnosti, dužina, razmak, kao i kretanje svih molekulskih lanaca, tokom dužeg vremenskog perioda, su međusobno nezavisni. Kod viskoelastičnih čvrstih polimera, hemijske veze između susednih molekula mogu biti vrlo jake, tako da ograničavaju kretanje molekula. Jačina tih međumolekulskih veza određuje veličinu dilatacija i granicu tečenja.

U ovom radu proučava se drvo kao viskoelastično čvrsto telo, koje je još i ortotropno - VEO čvrsto telo. To znači da je posmatrani opseg eksploatacionih napona u sva tri pravca znatno niži od granica plastičnosti, kao i da drvo ima različita svojstva u tri međusobno ortogonalna pravca. Za takvo čvrsto telo treba izabrati model koji dovoljno verno odražava stvarno ponašanje drveta, a da istovremeno bude primenljiv u praksi .

U prvom poglavlju ovog rada dat je opis mogućih deformacija čvrstog tela, značaj istraživanja i predviđeni ciljevi.

U drugom poglavlju dat je detaljni prikaz modela elastičnosti, viskoznosti i viskoelastičnosti. To su Hukov, Njutnov, Maksvelov, Kelvin Voigt-ov, Burgerov i dva uopštena modela. Data je analiza svakog modela posebno, kao i obrazloženje zašto koji od ovih modela ne odgovara modelu drveta, kao VEO čvrstog tela.

U trećem poglavlju, opisano je viskozno tečenje, relaksacija napona i vrste modula u viskoelastičnosti, kao i uticaj temperature i vlažnosti na viskoelastična svojstva. Dat je opis Zenerovog modela, kao modela za viskoelastično izotropno – VEI čvrsto telo i opisana su njegova svojstva. Formulisan je matematički model za proračun vremenskih deformacija linearno napregnutog, viskoelastičnog izotropnog – VEI čvrstog tela. Na osnovu detaljne analize viskoelastičnosti izabran je Zenerov model kao model koji dovoljno dobro opisuje svojstva drveta, čiji su sastavni delovi i čvrsti, i tečni polimeri.

U četvrtom poglavlju data je analiza napona prostorno napregnutog, VEI i VEO čvrstog tela. Formulisan je matematički model za proračun vremenskih deformacija prostorno napregnutog, viskoelastičnog izotropnog - VEI čvrstog tela. Izvedene su

konstitutivne jednačine prostorno napregnutog Zenerovog VEO čvrstog tela. Data je primena metode viskoelastične analogije, koja se koristi za računanje napona i deformacija, u transformisanom i vremenskom domenu kod Zenerovog VEO tela.

U petom poglavlju primenjen je dobijeni matematički model na neke slučajeve linearnog i ravnog napreznja: aksijalno zategnut štap, štap napregnut na pravo čisto savijanje, štap savijen silama, ploča opterećena jednako podeljenim opterećenjem.

U šestom poglavlju primenjen je Zenerov model na izabranu vrstu tvrdog drveta – bukvu (*F.Sylvatica*). Korišćenjem poznatih materijalnih konstanti za bukovinu, urađen je proračun za: aksijalno zategnut štap, štap napregnut na pravo čisto savijanje i savijanje silama, tanku ploču savijenu jednako podeljenim opterećenjem.

U sedmom poglavlju dati su zaključci i preporuke.

## 1.2. Značaj istraživanja

Danas se u praksi koristi mnogo materijala, koji se u različitim eksploatacionim uslovima ponašaju ili kao tečna, ili kao čvrsta tela. I pored toga, *veliki broj materijala tretiraju se i računaju kao da su elastični, iako su u stvari viskoelastični.*

Beton izgleda kao veoma kruto čvrsto telo, ali, kada je podvrgnut dejstvu spoljašnjih sila, menja dimenzije i oblik, i ponaša se kao da je tečan. Delovi napravljeni od polimernih materijala, izgledaju veoma čvrsti i tvrdi. Pri dejstvu sila oni menjaju oblik, ali ga menjaju i nakon prestanka dejstva sila. Zbog toga polimeri nisu pogodni za noseće konstrukcije. Kada se metal izloži dejstvu sila, metalni deo će malo promeniti oblik i zadržaće taj novi oblik još dugo vremena.

Osim toga, kod ortotropnih i transotropnih materijala vrlo *malo se vodi računa o njihovim viskoznim svojstvima u sporednim pravcima. Ovakav pristup sužava polje primene ortotropnih materijala u konstrukcijama.* To zanemarivanje se vrši jer je formulacija konstitutivnih jednačina koje tačno opisuju viskoelastično ponašanje polimera u različitim uslovima eksploatacije za prostorne, pa i za ravne deformacije, veoma složen problem. S druge strane, nosači od ortotropnih materijala izloženi su najčešće linearnom napreznju u „glavnom“ pravcu. Međutim, složenija naponska stanja u praksi se ne mogu izbeći. Takva naponska stanja javljaju se kod oslonaca, u okolinama veza, na mestima gde se dimenzije nosača menjaju ili, pak, na mestima gde postoje neizbežne greške u građi.

### 1.3. Cilj istraživanja

U standardnim proračunima nosećih drvnih konstrukcija po SRPS 91.080.20 povećanje trajnih deformacija uzima se u obzir pri proračunu ugiba, korišćenjem koeficijenta tečenja, čija veličina zavisi od vlažnosti materijala i odnosa stvarnih napona pri dugotrajnom opterećenju i dozvoljenih napona. Viskozne deformacije u drvnim konstrukcijama ne spominju se u SRPS-u, iako te deformacije, u zavisnosti od temperature, vlažnosti i opterećenja, mogu biti značajne u eksploatacionim uslovima.

EUROCOD5 (Evrokod 5, 1996.), kao i EUROCOD1, koji predstavljaju evropske kodove za projektovanje drvnih konstrukcija, daju preporuke za standardne proračune tako što koriste razne popravne koeficijente (Jodin, 2004.). Oni takođe ne uzimaju u obzir viskozne deformacije drveta.

Zbog toga je važno da se detaljnije *objasni značaj viskoznog tečenja i relaksacije napona kod drveta, kao VEO materijala, u nosećim konstrukcijama*. Takođe je važno *da se uspostavi jedan matematički model koji dovoljno dobro opisuje deformacije VEO materijala*. Postavljanje modela treba da da smernice i za ekstrapolaciju rezultata, dobijenih u laboratorijama, na uzorcima određenih dimenzija, pri zadatim uslovima spoljašnje sredine.

Glavni cilj ovog rada je, dakle, *da se pokaže kako linearna viskoelastičnost može da se ugradi u opštu teoriju mehanike drveta*, tako da struktura koja sadrži viskoelastične komponente može da se dimenzioniše i analizira.

## 2. PREGLED I ANALIZA REOLOŠKIH MODELA

### 2.1. Izbor modela

Model za dati materijal mora se brižljivo izabrati, uz mnogo kritične analize (Christensen, 2003., Ferry, 1980., Drozdov, 1998., Riande i sar., 2000., Howel, Kozyreff, Ockendon, 2009., Lakes, 2011., Timmermans, 1997.). Pre svega, za određeni materijal, moraju se istražiti svi fenomeni koji se mogu pojaviti. Zatim se određuju parametri koji postoje u modelu.

Model, za koji se formiraju konstitutivne jednačine, obuhvata skup idealizovanih reoloških svojstava, koja su predstavljena matematičkim, mehaničkim ili električnim elementima. Elementi modela biraju se tako da dobro opisuju svojstva posmatranog materijala. Konstitutivne jednačine ili reološke jednačine stanja su diferencijalne ili integralne jednačine, kojima se opisuje ponašanje različitih materijala, u različitim uslovima, pri različitim vrstama napreznja.

Mehanički modeli sastoje se od opruga i prigušnica. Pošto realna tela, razume se, nisu napravljena od opruga i prigušnica, može se javiti greška u korišćenju modela. I pored toga, smatra se da mehanički modeli daju dovoljno dobru aproksimaciju za opis deformacionih svojstava tela. *Glavna uloga mehaničkog modela je da pruži vizuelnu ilustraciju svojstava materijala.* Mehanički modeli se koriste za prikaz viskoelastičnih pojava (viskoznog tečenja, relaksacije napona) i vremenski zavisnih svojstava. U istu svrhu može se upotrebiti i električni model. Električni model sastavljen je od otpornika i kondenzatora. Vremenska zavisnost struje i napona opisana je diferencijalnim jednačinama, koje imaju isti oblik kao kod mehaničkih modela. Električni modeli su dobri za opis trenutnih viskoelastičnih svojstava.

Za različite materijale formiraju se različiti modeli, s ciljem da se što bolje opiše ponašanje tih materijala u različitim eksploatacionim uslovima. Zbog toga se i kaže da *konstitutivne jednačine važe za svojstva, a ne za materijal.*

Ponekad se kaže: "dobar model je samo dobra interpretacija eksperimentalnih rezultata". Ovo je pesimističan prilaz, jer je za dobru interpretaciju rezultata eksperimenta dovoljan "dobar polinom". Model je nešto više. *Prvo*, on obuhvata i

predstavu o fizičkim mehanizmima koji su uključeni, *drugo*, to je logična formulacija, zasnovana na opšte poznatim prirodnim zakonima, i tek *treće*, posledica svega toga su brojčani rezultati.

Da bi se pravilno formirale konstitutivne jednačine, koje obuhvataju što više različitih načina korišćenja materijala kako bi se verno opisalo ponašanje materijala u različitim uslovima, treba poznavati principe za njihovo formulisanje. Strogo poštovanje tih principa treba da obezbedi da jednačine budu dobro dokumentovane i da nisu kontraverzne.

Po Phan Tienu (2002.) Oldroyd J.G je prvi postavio sledeće principe za formulisanje reoloških konstitutivnih jednačina još pedesetih godina prošlog veka:

- relativno kretanje čestice je zanemarljivo;
- istorija tenzora deformacija odnosi se na delić materijala;
- postavljeni koordinatni sistem je vezan za delić materijala i deformiše se zajedno s njim;
- fizičke konstante zavise od simetrije materijala.

Ovi principi odnose se samo na male deformacije.

Malkin (1994.) je formulisao sledeća četiri principa za reološke konstitutivne jednačine, od kojih su II, III i IV saglasni s Oldroydovim:

I *Princip invarijantnosti*. Konstitutivne jednačine moraju biti nezavisne od referentnog koordinatnog sistema koji se koristi. Izražavanjem jednačina u tenzorskom obliku, čiji članovi su invarijante (Ting, 1996., Klasztorny, 2008.) a ne komponente napona, ovaj princip se automatski zadovoljava.

II *Princip materijalne objektivnosti*. Konstitutivne jednačine moraju biti nezavisne od apsolutnog kretanja u prostoru. Bilo kakvo složeno kretanje tela ne može uticati na odziv materijala.

III *Princip determinizma*. Materijal može da pamti svoju prošlost, koja utiče na njegova trenutna svojstva, ali ne govori o njegovoj budućnosti.

IV *Princip lokalne akcije*. Ponašanje elementarno malog dela materijala zavisi samo od njegove prethodne istorije, a ne od stanja susednih delića. Napon u određenoj tački materijala jedinstveno je određen istorijom deformacije proizvoljno malog elementa materijala, koji tu tačku obuhvata. Osnovni značaj ovog principa je da *memorija materijala*, kao koncept, mora biti povezana sa elementima materijala, a ne s

tačkom u prostoru.

Ovim principima mogu se dodati još dva koja važe i za velike defromacije:

V *Princip smanjenja memorije*. U slučaju elastičnih tečnosti, istorija deformacija materijalnih delića u dalekoj prošlosti imaće slabiji uticaj na trenutno naponsko stanje od istorije deformacija u nedavnoj prošlosti.

VI *Princip: konstitutivne jednačine moraju biti u skladu s termodinamičkim principima*. Na primer, uzimanje u obzir disipacije energije kod viskoznog fluida pruža korisna ograničenja za konstitutivne jednačine.

Konstitutivne jednačine formulisane korišćenjem navedenih principa treba da:

1. budu nezavisne od oblika i veličine materijala;
2. omogućavaju simuliranje ponašanja materijala pri jednostavnim napreznjima, kao što su aksijalno zatezanje i smicanje;
3. važe i za ravna i prostorna napreznja;
4. uzimaju u obzir geometrijsku, strukturnu i faznu simetriju.

Tako dobijene jednačine zavise od vremena i prethodne istorije razvoja deformacija. Poželjno je da konstitutivne jednačine budu linearne i što prostije, zbog praktične primene u industriji i tehnologiji.

Model za koji važe te jednačine ima utvrđenu teorijsku osnovu i koristi se da se objasne rezultati dobijeni eksperimentima. Takođe, model mora dobro da opisuje neke karakteristične pojave, kao što su viskozno tečenje (omekšavanje) i relaksacija napona u materijalu.

U konstitutivnim relacijama, veze između napona i deformacija ostvarene su uz pomoć materijalnih parametara, koji, u opštem slučaju, zavise od vrste materijala, njihove strukture, molekulske težine, koncentracije, molekularnog grananja, prečnika molekularnog lanca i najzad, od vremena. Kod idealno elastičnih materijala, materijalne konstante ne zavise od vremena, nego samo od odnosa napona i deformacija.

Konstitutivne relacije za viskoelastično telo zovu se *jednačine viskoelastičnosti*, materijalni parametri u tim jednačinama zovu se *viskoelastični parametrii*, a naponi i deformacije su *viskoelastične promenljive*.

Konstitutivne jednačine za prostorno napreznje su tenzorske, mogu biti dobijene empirijski ili teorijski, simetrične su, obuhvataju odstupanja i greške evidentirane u eksperimentima, a koliko su zaista dobre, pokazuje radni vek i opseg

korišćenja određenog materijala.

Po Malkinu (1994.) problemi pri formulisanju konstitutivnih jednačina su:

- Kako opisati viskoelastične efekte u trodimenzionom prostoru, pošto pravila važe za jednodimenzione deformacije?
- Da li različite fenomenološke efekte treba posmatrati odvojeno ili zajedno?
- Da li je moguće pretpostaviti svojstva materijala u uslovima različitim od eksperimentalnih, to jest, da li je dozvoljena ekstrapolacija?
- Da li su empirijske metode koje se koriste za uopštavanje različitih eksperimentalnih rezultata kontradiktorne?

Dalje se postavlja pitanje, kada treba primenjivati integralne, a kada diferencijalne konstitutivne jednačine? *Diferencijalne konstitutivne jednačine* se koriste za određivanje materijalnih funkcija ili pri *jednokratnim* statičkim ili pri dinamičkim uslovima ispitivanja. U opštem slučaju, diferencijalna relacija napon-deformacija za linearne viskoelastične materijale uključuje vreme, kao i više izvode napona i deformacija. Za slučaj rasterećenja i ponovnog opterećenja materijala, menjaju se početni i granični uslovi, pa diferencijalnu jednačinu treba rešavati ponovo.

Da bi se odredilo, kako će se menjati izlazne veličine (deformacija ili napon), kada se *skokovito variraju* ulazne veličine (napon ili deformacija kod tečenja i relaksacije), koriste se *nasledne – integralne konstitutivne jednačine* (važe za Boltzmann-ov princip linearne superpozicije opterećenja pa se zovu još i Boltzmann Voltera jednačine (Malkin, 1994)). Boltzmann-ov princip superpozicije koristi se, u viskoelastičnosti, da bi se opisalo opšte ponašanje opterećenog modela, uz uzimanje u obzir prethodne istorije materijala. Pri tome se koriste sledeće pretpostavke:

- Viskozno tečenje je funkcija celokupnog opterećenja, koje deluje u vremenu.
- Svaki korak opterećenja ima nezavisan uticaj na celokupnu istoriju opterećenja.
- Ukupna konačna deformacija jednaka je zbiru pojedinačnih, nastalih od svih uticaja.

Poredeći diferencijalne i integralne konstitutivne jednačine, može se zaključiti da i jedne i druge sadrže iste informacije o materijalu. Diferencijalne jednačine odnose se na delić materijala, na osnovu čijeg ponašanja se izvode zaključci o ponašanju materijala kao celine. Kod diferencijalnih jednačina najčešće su prisutni viskoelastični

parametri, koji su konstantni. Pošto stvarnost pokazuje, naročito kod polimera, da ti parametri ipak nisu konstantne veličine, u diferencijalne jednačine se uvode promenljivi materijalni parametri, najčešće zavisni od vremena. To, naravno, komplikuje nalaženje opštih rešenja tih jednačina. Da bi se došlo do rešenja diferencijalnih jednačina, vrši se prevođenje iz vremenskog u prostorni domen Laplasovim transformacijama,  $\mathcal{L}(s)$ , pri čemu se dobijaju obične algebarske jednačine, jednostavne za primenu.

Integralne jednačine odnose se na celu zapreminu materijala. Viskoelastični parametri kod integralnih jednačina su podintegralne funkcije zavisne od vremena.

Inače, diferencijalne jednačine opisuju linijski diskretni spekar. Integralne jednačine opisuju kontinualni spektar. Diskretni spektar aproksimira se glatkom krivom a kontinualni spektar aproksimira se skupom linija. Ova razlika je bitna u izboru vrste konstitutivnih jednačina. *Diferencijalne jednačine su jednostavnije za primenu u realnim proračunima.*

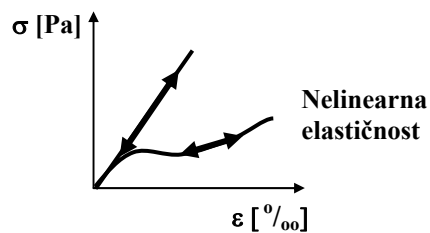
## 2.2. Linearno elastičan materijal - Hukov model

Koncept čvrstog tela je jedan oblik idealizacije stvarnih svojstava velikog broja materijala. Za neke materijale, na primer čelik i staklo, ovaj koncept je veoma dobar. Za neke druge, na primer drvo i beton, postoje odstupanja od idealizacije, ali u nekim slučajevima, u grubom računu, može se primeniti i taj koncept. Ovi primeri pokazuju da je *čvrsto telo koncept svojstava, a ne koncept materijala.*

*Model savršene elastičnosti se vezuje za idealno telo kristalaste strukture.* Taj model ne uzima u obzir molekularnu strukturu kristalastog materijala. Materijali koji se koriste u praksi nisu idealni. Pretpostavke o homogenosti i izotropiji važe s velikom sigurnošću i za takve materijale, pod uslovom da su dimenzije tela mnogo veće od dimenzija pojedinih kristala materije.

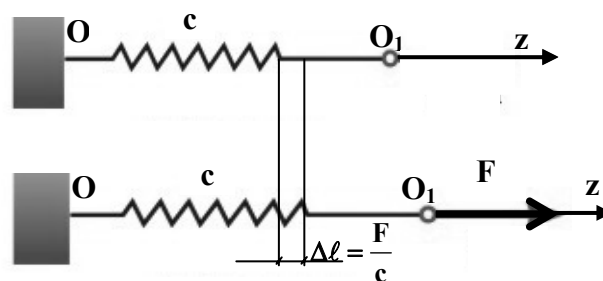
Sl. 2-1 pokazuje linearnu i nelinearnu vezu između normalnog napona  $\sigma$ , i dilatacije  $\varepsilon$ , za *elastičan izotropan (EI) materijal*. Sa slike se vidi da *jednoj vrednosti napona odgovara jedna ista dilatacija, bez obzira na vreme trajanja napona*. I za linearno, i za nelinearno elastično telo, osnovna pretpostavka je da se materijal nakon rasterećenja *vraća trenutno u prethodni oblik, bez obzira na veličinu opterećenja koje deluje*. Nelinearna elastičnost se javlja kod određene klase materijala, a za neke materijale i u slučaju prekoračenja graničnih vrednosti opterećenja.





Sl. 2-1 Dijagram normalni napon – dilatacija za idealno elastično telo

Linearno elastičan materijal se, pod dejstvom aksijalne sile koja ne prelazi graničnu nosivost, ponaša pri opterećenju kao opruga koja je u stanju statičke ravnoteže opterećena aksijalnom silom. Sl. 2-2 prikazuje oprugu, krutosti  $c(\text{N/m})$ , opterećenu silom  $F(\text{N})$ . Krutost ili konstanta opruge predstavlja silu koja izaziva izduženje opruge za jedinicu dužine. Kada se opruga opteret aksijalnom silom  $F$ , nastaje trenutno statičko izduženje  $\Delta\ell[\text{m}]$ , proporcionalno veličini opterećenja. *Veličina nastalog izduženja ne zavisi od vremena delovanja opterećenja.* Opruga je elastična samo do granične deformacije, određene graničnim opterećenjem. Prekoračenjem graničnog opterećenja, došlo bi prvo do pojave nepovratnih dilatacija, a zatim, i do kidanja opruge. Za različite materijale granično opterećenja je različito. Nakon rasterećenja, opruga je iste dužine i istog energetskog stanja kao u početnom trenutku, kao da se nikakve promene nisu dešavale.



Sl. 2-2 Hukov element

Sila u opruzi,  $F$ , računa se kao proizvod krutosti  $c$  i izduženja  $\Delta\ell$ :

$$\mathbf{F} = \mathbf{c} \cdot \Delta\ell \quad (2.1)$$

Pošto su izduženje opruge i sila u opruzi linearno zavisne veličine, kao što su i dilatacija i napon kod elastičnih materijala, može se zaključiti da za oba para veličina važe analogne veze.

Imajući u vidu jednačinu (2.1), može se napisati *algebarska konstitutivna jednačina za EI materijal*, koja glasi:

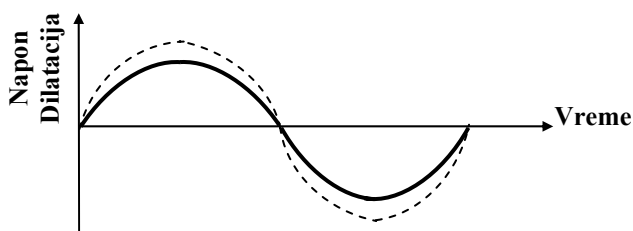
$$\sigma_z = \mathbf{E} \cdot \varepsilon_z \quad (2.2)$$

gde je:  $\sigma_z$  – normalni napon u materijalu,  $E$  – Young-ov modul elastičnosti (faktor proporcionalnosti – nagib prave u dijagramu  $\sigma$ – $\varepsilon$  (Sl. 2-1)),  $\varepsilon_z$  – podužna dilatacija materijala. Modul elastičnosti,  $E$ , je elastični parametar koji, razume se, zavisi od vrste materijala.

Jednačina (2.2) poznata je u mehanici kontinuuma kao *Hukov zakon*. Opruga, za koju važi ovaj zakon, zove se *Hukov element* (model ili telo). Zakon (2.2) koji važi za linearnu vezu normalnog napona i deformacije u čvrstom telu, prvi je formulisao Robert Hook (1635-1703).

Linearnost normalnog napona i dilatacija, u području ispod graničnih opterećenja, utvrđena je mnogobrojnim eksperimentima, za različite izotropne materijale. Takođe je dokazano da u području iznad graničnih opterećenja, dolazi do velikih dilatacija, i da veza normalnog napona i dilatacija postaje nelinearna. Do određene granice, linearna veza normalnog napona i dilatacija može se koristiti, ne samo kod izotropnih, nego i kod ortotropnih i ostalih anizotropnih materijala.

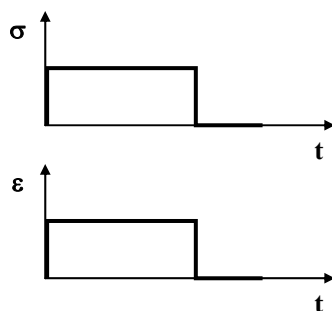
Ako se u tačku  $O_1$  na kraju opruge postavi telo mase  $m$ , pa se opruga optereti aksijalnom silom  $F$  a zatim se rastereti, nakon rasterećenja opruga obavlja harmonijsko oscilovanje pod dejstvom sile u opruzi, a zatim se vraća u nedeformisani oblik. Za vraćanje u prvobitni oblik troši se akumulirana energija. Harmonijsko oscilovanje obavlja se u razmaku od  $-\Delta l$  do  $\Delta l$ , što znači da  $\Delta l$  predstavlja amplitudu oscilovanja, a period oscilovanja,  $T$ , jednak je  $2\pi\omega$  gde je  $\omega$  kružna učestanost, frekvencija ili pulzacija. Izduženje i sila u opruzi, menjaju se po sinusnom zakonu i uvek su u fazi, odakle može da se zaključi, da se i dilatacija ovakve opruge dešava uvek simultano s normalnim naponom (Sl. 2-3).



Sl. 2-3 Simultanost napona i dilatacije elastičnog tela

Sl. 2-4 prikazuje trenutni nastanak deformacije pri naglom statičkom opterećenju i trenutni nestanak deformacije pri naglom rasterećenju elastičnih materijala. Može se primetiti da su početak delovanja opterećenja i nastanak deformacije, s jedne strane dijagrama, istovremene pojave, kao i prestanak delovanja opterećenja i nestanak

deformacije, s druge strane istih dijagrama.



Sl. 2-4 Shematska promena napona i deformacije (sile u opruzi i izduženja) Hukovog elementa u zavisnosti od vremena

Elastična deformacija u EI telu na molekularnom nivou je rezultat izduženja strukturnih lanaca, duž neke kristalografske ravni u čvrstom telu. U kristalnoj rešetki elastičnost se ispoljava samo malim otklonima atoma iz njihovog ravnotežnog položaja.

**Hukov element, dakle, dobro opisuje ponašanje EI materijala, pri dejstvu statičkog linearnog opterećenja.** Za prostorno opterećenje i za anizotropne materijale vrši se generalizacija Hukovog zakona.

Generalizacija Hukovog zakona za EI materijal (Dunica, 1998.), za prostorno naprezanje i za izotermne uslove, vrši se uz nekoliko pretpostavki:

- da su dilatacije, koje izaziva jedan od glavnih napona, nezavisne od druga dva napona;
- da važi princip superpozicije (deformacije od svih glavnih napona jednake su zbiru deformacija od pojedinih glavnih napona);
- da se pravci glavnih dilatacija poklapaju s pravcima glavnih napona.

Na taj način, dobiju se linearne algebarske jednačine, u kojima svaka komponenta napona zavisi od svih šest, međusobno nezavisnih komponenti deformacija, i obrnuto, svaka komponenta deformacija zavisi od svih šest komponenti napona.

Za generalizaciju Hukovog zakona posmatra se orijentacija osa i komponente tenzora napona u Dekartovom koordinatnom sistemu, koje prikazuje Sl. 2-5. Orijehtacije osa su tako izabrane, da su sve komponente u tenzoru napona:  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}, \sigma_{xy}$  pozitivne. Tenzor napona je drugog reda. Za Dekartov koordinatni sistem on ima sledeći oblik:

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij} = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_z \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

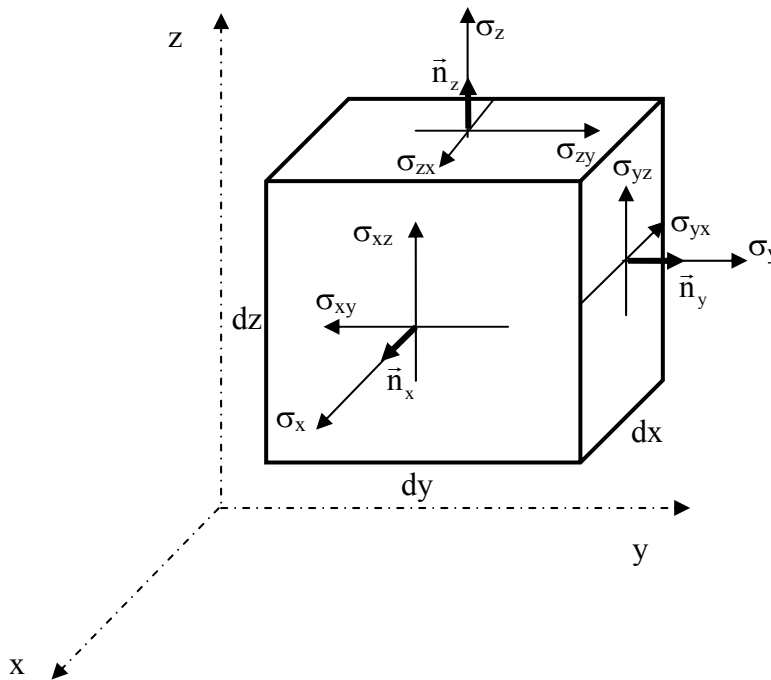
gde su:  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  - komponente normalnih napona,  $\sigma_{yz}, \sigma_{xz}, \sigma_{xy}$  - komponente smičućih napona.

Tenzor deformacija je, takođe, drugog reda i ima sledeći oblik:

$$\boldsymbol{\epsilon}_{ij} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_y & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_z \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

gde su:  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$  - komponente dilatacija u pravcima koordinatnih osa,  $\epsilon_{yz}, \epsilon_{xz}, \epsilon_{xy}$  -

polovine klizanja između odgovarajućih osa:  $\epsilon_{yz} = \frac{1}{2}\gamma_{yz}, \epsilon_{xz} = \frac{1}{2}\gamma_{xz}, \epsilon_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{xy}$ .



Sl. 2-5 Komponente napona u tački napregnutog elastičnog tela, u Dekartovom koordinatnom sistemu

Radi jednostavnosti, uvode se sledeće smene u tenzoru napona i tenzoru deformacija:

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_1; \sigma_y = \sigma_2; \sigma_z = \sigma_3; \sigma_{yz} = \tau_{yz} = \sigma_4; \sigma_{xz} = \tau_{xz} = \sigma_5; \sigma_{xy} = \tau_{xy} = \sigma_6; \\ \epsilon_x = \epsilon_1; \epsilon_y = \epsilon_2; \epsilon_z = \epsilon_3; \epsilon_{yz} = \epsilon_4; \epsilon_{xz} = \epsilon_5; \epsilon_{xy} = \epsilon_6 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Generalizacijom Hukovog zakona dobiju se jednačine za komponente napona i,

u Dekartovom koordinatnom sistemu, one glase:

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= c_{11}\varepsilon_1 + c_{12}\varepsilon_2 + c_{13}\varepsilon_3 + c_{14}\varepsilon_4 + c_{15}\varepsilon_5 + c_{16}\varepsilon_6 \\
 \sigma_2 &= c_{21}\varepsilon_1 + c_{22}\varepsilon_2 + c_{23}\varepsilon_3 + c_{24}\varepsilon_4 + c_{25}\varepsilon_5 + c_{26}\varepsilon_6 \\
 \sigma_3 &= c_{31}\varepsilon_1 + c_{32}\varepsilon_2 + c_{33}\varepsilon_3 + c_{34}\varepsilon_4 + c_{35}\varepsilon_5 + c_{36}\varepsilon_6 \\
 \sigma_4 &= c_{41}\varepsilon_1 + c_{42}\varepsilon_2 + c_{43}\varepsilon_3 + c_{44}\varepsilon_4 + c_{45}\varepsilon_5 + c_{46}\varepsilon_6 \\
 \sigma_5 &= c_{51}\varepsilon_1 + c_{52}\varepsilon_2 + c_{53}\varepsilon_3 + c_{54}\varepsilon_4 + c_{55}\varepsilon_5 + c_{56}\varepsilon_6 \\
 \sigma_6 &= c_{61}\varepsilon_1 + c_{62}\varepsilon_2 + c_{63}\varepsilon_3 + c_{64}\varepsilon_4 + c_{65}\varepsilon_5 + c_{66}\varepsilon_6
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Tih šest jednačina za napone, u skraćenom obliku, mogu se zapisati na sledeći način:

$$\sigma_p = \mathbf{D}_{pq} \varepsilon_q \tag{2.7}$$

a analogno tome, i šest jednačina za deformacije:

$$\varepsilon_p = \mathbf{C}_{pq} \sigma_q \tag{2.8}$$

gde je:  $\mathbf{D}_{pq}$  - matrica krutosti,  $\mathbf{C}_{pq}$  - matrica fleksibilnosti ili elastičnosti. Obe matrice sadrže elastične parametre, simetrične su i imaju forme kvadratnih matrica šestog reda:

$$\mathbf{D}_{pq} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

$$\mathbf{C}_{pq} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

U tenzorskom obliku, jednačina (2.7) glasi:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \gamma_{ij} + \frac{E}{1+\nu} \cdot \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \tag{2.11}$$

odnosno

$$\sigma_{ij} = 2\mu\gamma_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk} \delta_{ij} \tag{2.12}$$

Jednačina (2.8) glasi:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \tau_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (2.13)$$

gde je:  $\nu$  - Poasonov koeficijent,  $\delta_{ij}$  - Kronekerov simbol,  $\lambda$  i  $\mu$  - Lamoevi koeficijenti:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.14)$$

Ovde je važno da se napomene da jednačine (2.13) važe i za dilatacije, i za polovine klizanja, ali ne i za cela klizanja.

Jednačine (2.7) i (2.8), koje važe za tačke elastičnog tela, u matričnom obliku glase:

$$\sigma_p = \mathbf{D} \cdot \varepsilon_q \quad (2.15)$$

$$\varepsilon_q = \mathbf{C} \cdot \sigma_p \quad (2.16)$$

gde je:  $\varepsilon_q = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ 2\varepsilon_4 \\ 2\varepsilon_5 \\ 2\varepsilon_6 \end{bmatrix}$  - matrica deformacija s celim klizanjima,  $\sigma_p = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}$  - matrica

napona,  $\mathbf{D}$  - matrica krutosti:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2\mu + \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2\mu + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

$\mathbf{C}$  - matrica elastičnosti:

$$\mathbf{C} = \mathbf{D}^{-1} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Sve ovo važi za izotermske uslove. Za anizotermske uslove, u jednačinama (2.12) i (2.13) pojavljuju se dodatni članovi:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\gamma_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} - 3\alpha K\Delta t\delta_{ij} \quad (2.19)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\tau_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij} + \alpha\Delta t\delta_{ij} \quad (2.20)$$

gde je:  $\alpha$  - koeficijent termičke ekspanzije [ $1/^\circ\text{C}$ ],  $\Delta t$  - promena temperature:  $\Delta t=t-t_0$ ,  $K$  - modul kompresije koji se računa korišćenjem izraza:

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (2.21)$$

Iz ovih konstitutivnih jednačina vidi se da je za tačke tela od elastičnog materijala dovoljno poznavati samo dva, međusobno nezavisna, elastična parametra  $E$  i  $\nu$ , a ostali,  $G$ ,  $K$ ,  $\mu$  i  $\lambda$ , mogu se izraziti preko njih. O veličinama i vezama između elastičnih parametara govori Prilog I.

**Generalizacija Hukovog zakona urađena je, dakle, za tačke tela od homogenog, izotropnog materijala.** Sa stanovišta elastičnih svojstava, svi materijali mogu se podeliti, osim na homogene i nehomogene, još i na izotropne i anizotropne. Homogeni materijali, kao što je već rečeno, imaju jednaka elastična svojstava u različitim tačkama, a nehomogeni to nemaju. Ako se elastična svojstva menjaju kontinualno od tačke do tačke materijala, nehomogenost je kontinualna. Ako se menjaju s naglim skokovima – diskontinualno, nehomogenost je diskontinualna ili diskretna. Diskretna nehomogenost se javlja kod sklopova, napravljenih od delova s različitim elastičnim svojstvima (napravljenih od različitog materijala). Kod tela napravljenih od jednog materijala može se smatrati da je njegova nehomogenost statistički kontinualna, osim na mestima gde se javljaju greške u materijalu.

*Anizotropan materijal, homogen ili nehomogen, za razliku od izotropnog, ima različita elastična svojstava za različite pravce povučene kroz istu tačku. Ako su anizotropni materijali homogeni, elastična svojstva za paralelne pravce, povučene kroz različite tačke u materijalu, jednaka su. Pravci, za koje su elastična svojstva identična, zovu se elastično ekvivalentni pravci. Za izotropan materijal, svi pravci povučeni kroz jednu tačku su elastično ekvivalentni, dok su za anizotropno telo to pravci, povučeni kroz različite tačke, međusobno paralelni. Osim homogene i nehomogene, može se razlikovati još i pravolinijska i krivolinijska anizotropija, što zahteva odgovarajući oblik uzorka (paralelopiped ili cilindar), koordinatnog sistema (Dekartov pravougao, cilindričan ili sferni), konstitutivnih jednačina.*

Matrice krutosti i elastičnosti u generalizovanom Hukovom zakonu, zavise, ne samo od homogenosti i izotropije materijala, već i od simetrije. Tela od anizotropnih materijala mogu da imaju strukturnu, odnosno, elastičnu simetriju. Elastična simetrija, uvek postoji, ako postoji i strukturna. Ona pokazuje, da se, kroz svaku tačku tela od anizotropnog materijala, mogu postaviti elastično ekvivalentni pravci. Elastičnu simetriju poseduju, na primer, svi kristali, drvo, staklo, ...

**Za prostorno napregnuto** homogeno anizotropno telo, koje ne poseduje elastičnu simetriju (opšti tip homogene anizotropije – OHA), može se obaviti generalizacija Hukovog zakona, uz iste pretpostavke kao i kod elastičnih materijala. I za OHA materijale važe relacije (2.15) i (2.16), samo što su matrice krutosti i elastičnosti u ovom slučaju pune.

U tački posmatranog anizotropnog tela, obe matrice, i krutosti i elastičnosti, su simetrične. *Od ukupno 36 elemenata, različitih od nule, u svakoj od tih matrica samo po 21 je nezavisna.*

Ti nezavisni elementi su članovi glavne dijagonale i polovina vandijagonalnih članova u matricama krutosti, odnosno elastičnosti:

$$C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14}, C_{15}, C_{16}, C_{22}, C_{23}, C_{24}, C_{25}, C_{26}, C_{33}, C_{34}, C_{35}, C_{36}, C_{44}, C_{45}, C_{46}, C_{55}, C_{56}, C_{66}$$

Naponi u tački tela, od materijala OHA, u kojoj je stanje napona prostorno, računaju se, dakle, po izrazima (2.6), a izraz (2.8), za deformacije, razvija se u sledeće jednačine:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= C_{11}\sigma_1 + C_{12}\sigma_2 + C_{13}\sigma_3 + C_{14}\sigma_4 + C_{15}\sigma_5 + C_{16}\sigma_6 \\ \varepsilon_2 &= C_{21}\sigma_1 + C_{22}\sigma_2 + C_{23}\sigma_3 + C_{24}\sigma_4 + C_{25}\sigma_5 + C_{26}\sigma_6 \\ \varepsilon_3 &= C_{31}\sigma_1 + C_{32}\sigma_2 + C_{33}\sigma_3 + C_{34}\sigma_4 + C_{35}\sigma_5 + C_{36}\sigma_6 \\ 2\varepsilon_4 &= C_{41}\sigma_1 + C_{42}\sigma_2 + C_{43}\sigma_3 + C_{44}\sigma_4 + C_{45}\sigma_5 + C_{46}\sigma_6 \\ 2\varepsilon_5 &= C_{51}\sigma_1 + C_{52}\sigma_2 + C_{53}\sigma_3 + C_{54}\sigma_4 + C_{55}\sigma_5 + C_{56}\sigma_6 \\ 2\varepsilon_6 &= C_{61}\sigma_1 + C_{62}\sigma_2 + C_{63}\sigma_3 + C_{64}\sigma_4 + C_{65}\sigma_5 + C_{66}\sigma_6 \end{aligned} \quad (2.22)$$

Matrica elastičnosti, za tačku posmatranog tela, od materijala OHA, po Lekhnitskom (1984a), može da se napiše u sledećem obliku:



$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{12}/E_2 & -\nu_{13}/E_3 & \eta_{23,1}/E_1 & \eta_{13,1}/E_1 & \eta_{12,1}/E_1 \\ -\nu_{21}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{23}/E_3 & \eta_{23,2}/E_2 & \eta_{13,2}/E_2 & \eta_{12,2}/E_2 \\ -\nu_{31}/E_1 & -\nu_{32}/E_2 & 1/E_3 & \eta_{23,3}/E_3 & \eta_{13,3}/E_3 & \eta_{12,3}/E_3 \\ \eta_{1,23}/G_{23} & \eta_{2,23}/G_{23} & \eta_{3,23}/G_{23} & 1/G_{23} & \mu_{13,23}/G_{23} & \mu_{12,23}/G_{23} \\ \eta_{1,31}/G_{31} & \eta_{2,31}/G_{31} & \eta_{3,31}/G_{31} & \mu_{23,31}/G_{31} & 1/G_{31} & \mu_{12,31}/G_{31} \\ \eta_{1,12}/G_{12} & \eta_{2,12}/G_{12} & \eta_{3,12}/G_{12} & \mu_{23,12}/G_{12} & \mu_{13,12}/G_{12} & 1/G_{12} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

gde su

- $E_1, E_2, E_3$  - moduli elastičnosti pri zatezanju ili pritisku u pravcu osa  $x, y, z$ .
- $\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{21}, \nu_{23}, \nu_{31}, \nu_{32}$  - Poasonovi koeficijenti, pri čemu, prvi indeks pokazuje pravac deformacije koja se meri a drugi indeks, pravac napreznja
- $G_{23}, G_{31}, G_{12}$  - moduli smicanja za ravni, paralelne s koordinatnim ravnima
- $\eta_{23,1}, \eta_{13,1}, \eta_{12,1}, \eta_{23,2}, \eta_{13,2}, \eta_{12,2}, \eta_{23,3}, \eta_{13,3}, \eta_{12,3}$  - uticajni koeficijenti prvog reda, karakteristični za izduženja, u pravcima koordinatnih osa, koja nastaju zbog delovanja smičućih napona, u koordinatnim ravnima
- $\eta_{1,23}, \eta_{2,23}, \eta_{3,23}, \eta_{1,31}, \eta_{2,31}, \eta_{3,31}, \eta_{1,12}, \eta_{2,12}, \eta_{3,12}$  - uticajni koeficijenti drugog reda, karakteristični za klizanja, u koordinatnim ravnima, nastala zbog delovanja normalnih napona, u pravcima koordinatnih osa
- $\mu_{13,23}, \mu_{12,23}, \mu_{23,31}, \mu_{12,31}, \mu_{23,12}, \mu_{13,12}$  - Chentsovi koeficijenti, karakteristični za klizanja, u ravnima paralelnim s koordinatnim ravnima, nastala zbog delovanja smičućih napona, u drugim ravnima, paralelnim s koordinatnim.

Razume se da je matrica krutosti inverzna matrici elastičnosti.

Jednačine (2.22) važe za tačno određen, Dekartov pravougaoni koordinatni sistem, postavljen u tački anizotropnog tela. Pri rotaciji koordinatnog sistema, vrednosti elastičnih parametara se menjaju. Broj nezavisnih elastičnih parametara, različitih od nule, i dalje je 21. Zbog toga je **oznaka prostorno napregnutog homogenog anizotropnog materijala, koji ne poseduje elastičnu simetriju, OHA21**. Ove jednačine važe i za tačku nehomogenog anizotropnog tela, koje ima pravilan geometrijski oblik - na primer, oblik paralelopipeda, izloženog prostornom napreznju, samo što njegova elastična svojstva nisu konstantna, nego zavise od koordinata  $x, y, z$ .

**Za ravno stanje deformacija**, kada je na primer  $\epsilon_3 = 0$ , red kvadratne matrice elastičnosti za materijal OHA21 (2.23), više nije 6x6, nego postaje 5x5, odnosno, u

matrici se briše treći red i treća kolona:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{12}/E_2 & \eta_{23,1}/E_1 & \eta_{13,1}/E_1 & \eta_{12,1}/E_1 \\ -\nu_{21}/E_1 & 1/E_2 & \eta_{23,2}/E_2 & \eta_{13,2}/E_2 & \eta_{12,2}/E_2 \\ \eta_{1,23}/G_{23} & \eta_{2,23}/G_{23} & 1/G_{23} & \mu_{13,23}/G_{23} & \mu_{12,23}/G_{23} \\ \eta_{1,31}/G_{31} & \eta_{2,31}/G_{31} & \mu_{23,31}/G_{31} & 1/G_{31} & \mu_{12,31}/G_{31} \\ \eta_{1,12}/G_{12} & \eta_{2,12}/G_{12} & \mu_{23,12}/G_{12} & \mu_{13,12}/G_{12} & 1/G_{12} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Sada više nije potrebno poznavati 21 nezavisni elastični parametar, nego samo 15. Oznaka tako deformisanog materijala OHA je OHA15.

Ako **naponi u tački tela OHA leže u ravni x,y**, izrazi (2.22) za deformacije, dobiju jednostavniji oblik:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= C_{11}\sigma_1 + C_{12}\sigma_2 + C_{16}\sigma_6 \\ \varepsilon_2 &= C_{21}\sigma_1 + C_{22}\sigma_2 + C_{26}\sigma_6 \\ \varepsilon_3 &= C_{31}\sigma_1 + C_{32}\sigma_2 + C_{36}\sigma_6 \\ 2\varepsilon_4 &= C_{41}\sigma_1 + C_{42}\sigma_2 + C_{46}\sigma_6 \\ 2\varepsilon_5 &= C_{51}\sigma_1 + C_{52}\sigma_2 + C_{56}\sigma_6 \\ 2\varepsilon_6 &= C_{61}\sigma_1 + C_{62}\sigma_2 + C_{66}\sigma_6 \end{aligned} \quad (2.25)$$

odnosno

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E_1}\sigma_1 - \frac{\nu_{12}}{E_2}\sigma_2 + \frac{\eta_{12,1}}{E_1}\sigma_6 \\ \varepsilon_2 &= -\frac{\nu_{21}}{E_1}\sigma_1 + \frac{1}{E_2}\sigma_2 + \frac{\eta_{12,2}}{E_2}\sigma_6 \\ \varepsilon_3 &= -\frac{\nu_{31}}{E_1}\sigma_1 - \frac{\nu_{32}}{E_2}\sigma_2 + \frac{\eta_{12,3}}{E_3}\sigma_6 \\ \varepsilon_4 &= \frac{\eta_{1,23}}{2G_{23}}\sigma_1 + \frac{\eta_{2,23}}{2G_{23}}\sigma_2 + \frac{\mu_{12,23}}{2G_{23}}\sigma_6 \\ \varepsilon_5 &= \frac{\eta_{1,31}}{2G_{31}}\sigma_1 + \frac{\eta_{2,31}}{2G_{31}}\sigma_2 + \frac{\mu_{12,31}}{2G_{31}}\sigma_6 \\ \varepsilon_6 &= \frac{\eta_{1,12}}{2G_{12}}\sigma_1 + \frac{\eta_{2,12}}{2G_{12}}\sigma_2 + \frac{1}{2G_{12}}\sigma_6 \end{aligned} \quad (2.26)$$

**Za ravno napregnuto telo**, od materijala OHA, potrebno je poznavati 21 nezavisnu elastičnu konstantu, različitu od nule. Oznaka tog materijala je i dalje OHA21.

Ako je telo, od materijala OHA, **linearno napregnuto naponom  $\sigma_1$  u pravcu ose x**, izrazi (2.22) za računanje deformacija dobiju još jednostavniji oblik:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{E_1} \sigma_1; & \varepsilon_2 &= -\nu_{21} \frac{1}{E_1} \sigma_1; & \varepsilon_3 &= -\nu_{31} \frac{1}{E_1} \sigma_1 \\ \varepsilon_4 &= \frac{\eta_{1,23}}{2G_{23}} \sigma_1; & \varepsilon_5 &= \frac{\eta_{1,31}}{2G_{31}} \sigma_1; & \varepsilon_6 &= \frac{\eta_{1,12}}{2G_{12}} \sigma_1\end{aligned}\quad (2.27)$$

Za **linearno napregnuto telo**, od materijala OHA, potrebno je, dakle, poznavati 11 nezavisnih elastičnih konstanti, različitih od nule. Oznaka tog materijala je OHA11.

Izrazi (2.27) pokazuju da se, kod linearno naprnutog tela od materijala OHA11, javlja suštinska razlika u odnosu na telo od elastičnog materijala: pri dejstvu normalnih napona javljaju se ne samo dilatacije, nego i klizanja. Takođe se može zaključiti da su sve dilatacije na paralelnim pravcima, kroz različite tačke tela, jednake, jer zavise samo od elastičnih parametara i normalnih napona. Ako se posmatra telo od OHA materijala u obliku paralelepipeda, ono, posle ovakvog linearnog napreznja, zadržava isti oblik stranica, pa se takvo napreznje zove pravolinijsko. Klizanje, koje se javlja, ne samo pri linearnom, nego i pri ravnom, i prostornom napreznju tela od OHA materijala, govori da pravi uglovi paralelepipeda nakon napreznja ne ostaju pravi.

Ako je telo od materijala OHA, **izloženo hidrostatičkom pritisku**  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$ , izrazi (2.22) za deformacije, transformišu se u sledeći oblik:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \left( \frac{1}{E_1} - \nu_{12} \frac{1}{E_2} - \nu_{13} \frac{1}{E_3} \right) \sigma \\ \varepsilon_2 &= \left( -\nu_{21} \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} - \nu_{23} \frac{1}{E_3} \right) \sigma \\ \varepsilon_3 &= \left( -\nu_{31} \frac{1}{E_1} - \nu_{32} \frac{1}{E_2} + \frac{1}{E_3} \right) \sigma \\ \varepsilon_4 &= \frac{1}{2G_{23}} (\eta_{1,23} + \eta_{2,23} + \eta_{3,23}) \sigma \\ \varepsilon_5 &= \frac{1}{2G_{31}} (\eta_{1,31} + \eta_{2,31} + \eta_{3,31}) \sigma \\ \varepsilon_6 &= \frac{1}{2G_{12}} (\eta_{1,12} + \eta_{2,12} + \eta_{3,12}) \sigma\end{aligned}\quad (2.28)$$

Iz izraza (2.28) vidi se, takođe, da je u pitanju pravolinijsko napreznje i da, i dalje dolazi do deformisanja svih pravih uglova paralelepipeda. Može se, dakle, zaključiti, da je za telo od materijala OHA, **hidrostatički pritisnuto**, potrebno

poznavati 21 elastičnu konstantu, različitu od nule, od čega je samo 18 međusobno nezavisno, zbog uslova simetrije u matricama elastičnosti i krutosti. Oznaka tog materijala je OHA18.

**U tačkama homogenog anizotropnog tela, koje poseduje geometrijsku ili elastičnu simetriju, neki od navedenih koeficijenata, u matrici elastičnosti, odnosno matrici krutosti, postaju jednaki nuli (Rand, Rovenski, 2005.)**

Tela s tri ravni simetrije, koja imaju ortogonalnu homogenu anizotropiju ili ortotropiju, imaju oznaku EO.

U klasi tela od EO materijala, osim opšte ortotropije, gde su elastična svojstva različita u pravcima tri koordinatne ose, postoje i podklase:

TRG – tela s tetragonalnom simetrijom, gde su elastična svojstva ista u pravcu dve koordinatne ose a različita duž treće koordinatne ose,

TI – tela s transverzalno izotropnom simetrijom, gde je ravan, u kojoj su elastična svojstva ista u pravcu dve koordinatne ose, istovremeno i ravan izotropije, koja je inače upravna na osu simetrije i

CUB – tela s kubnom simetrijom, gde su elastična svojstva jednaka u pravcu sve tri ose a ne postoji ravan izotropije, što znači da su svi elastični parametri međusobno nezavisni.

Opšta ortotropija - EO odgovara strukturi polimera a TRG i TI simetrija strukturi kompozita i laminata.

Dalje će se posmatrati samo tela s opštom ortotropijom.

Matrica elastičnosti, za tačku tela od EO materijala, ima sledeći oblik:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

odnosno

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{12}/E_2 & -\nu_{13}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{21}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{23}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{31}/E_1 & -\nu_{32}/E_2 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

gde je

$$\begin{aligned} \nu_{12} &= -\frac{C_{12}\sigma_2}{C_{22}\sigma_2} = -\frac{C_{12}}{C_{22}}; & \nu_{13} &= -\frac{C_{13}}{C_{33}}; \\ \nu_{21} &= -\frac{C_{21}}{C_{11}}; & \nu_{23} &= -\frac{C_{23}}{C_{33}}; \\ \nu_{31} &= -\frac{C_{31}}{C_{11}}; & \nu_{32} &= -\frac{C_{32}}{C_{22}} \end{aligned}$$

Iz izraza (2.30), vidi se, da je za *prostorno napregnuto telo* od EO materijala, u slučaju, kada se ravnine elastične simetrije poklapaju s ravninama glavnih napona, dovoljno poznavati 12 različitih materijalnih konstanti:

$$E_1, E_2, E_3, \nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{21}, \nu_{23}, \nu_{31}, \nu_{32}, G_{23}, G_{31}, G_{12}$$

Deformacije u telu od EO materijala, koje je **prostorno napregnuto**, jednake su:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= C_{11}\sigma_1 + C_{12}\sigma_2 + C_{13}\sigma_3 = \frac{1}{E_1}\sigma_1 - \frac{\nu_{12}}{E_2}\sigma_2 - \frac{\nu_{13}}{E_3}\sigma_3 \\ \varepsilon_2 &= C_{21}\sigma_1 + C_{22}\sigma_2 + C_{23}\sigma_3 = -\frac{\nu_{21}}{E_1}\sigma_1 + \frac{1}{E_2}\sigma_2 - \frac{\nu_{23}}{E_3}\sigma_3 \\ \varepsilon_3 &= C_{31}\sigma_1 + C_{32}\sigma_2 + C_{33}\sigma_3 = -\frac{\nu_{31}}{E_1}\sigma_1 - \frac{\nu_{32}}{E_2}\sigma_2 + \frac{1}{E_3}\sigma_3 \\ \varepsilon_4 &= C_{44}\tau_4 = \frac{1}{2G_{23}}\tau_4; & \varepsilon_5 &= C_{55}\tau_5 = \frac{1}{2G_{31}}\tau_5; & \varepsilon_6 &= C_{66}\tau_6 = \frac{1}{2G_{12}}\tau_6 \end{aligned} \quad (2.31)$$

Jasno je da zbog simetrije matrice elastičnosti važe sledeće relacije:

$$E_2\nu_{21} = E_1\nu_{12}, \quad E_3\nu_{32} = E_2\nu_{23}, \quad E_1\nu_{13} = E_3\nu_{31} \quad (2.32)$$

zbog čega je, za **prostorno napregnuto telo** od EO materijala, broj međusobno nezavisnih materijalnih konstantni, koje treba poznavati, samo 9. Oznaka ovog materijala je EO9. Radi jednostavnijeg računanja, može se pretpostaviti da postoji analogija EO materijala sa EI materijalom, u ravninama simetrije. U tom slučaju, u tim

ravnima važe veze između modula elastičnosti i modula smicanja:  $G_{ij} = \frac{E_i}{2(1+\nu_{ij})}$

(Marjanov, Mirić Milosavljević, Mihailović, 1999b). Minimalni broj, međusobno nezavisnih materijalnih konstanti smanjuje se na 6.

Matrica krutosti inverzna je matrici elastičnosti (2.30):

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{1-\nu_{23}\nu_{32}}{E_2E_3d} & \frac{\nu_{12}+\nu_{13}\nu_{32}}{E_2E_3d} & \frac{\nu_{13}+\nu_{12}\nu_{23}}{E_2E_3d} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{21}+\nu_{23}\nu_{31}}{E_1E_3d} & \frac{1-\nu_{13}\nu_{31}}{E_1E_3d} & \frac{\nu_{23}+\nu_{21}\nu_{13}}{E_1E_3d} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{31}+\nu_{21}\nu_{32}}{E_1E_2d} & \frac{\nu_{32}+\nu_{12}\nu_{31}}{E_1E_2d} & \frac{1-\nu_{12}\nu_{21}}{E_1E_2d} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

gde je

$$d = \frac{1-\nu_{12}\nu_{21}-\nu_{23}\nu_{32}-\nu_{31}\nu_{13}-2\nu_{12}\nu_{23}\nu_{31}}{E_1E_2E_3} \quad (2.34)$$

Elastične konstante mogu se izračunati preko elemenata matrice krutosti:

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{c_{11}c_{22}c_{33} + 2c_{23}c_{12}c_{13} - c_{11}c_{23}^2 - c_{22}c_{13}^2 - c_{33}c_{12}^2}{c_{22}c_{33} - c_{23}^2} \\ E_2 &= \frac{c_{11}c_{22}c_{33} + 2c_{23}c_{12}c_{13} - c_{11}c_{23}^2 - c_{22}c_{13}^2 - c_{33}c_{12}^2}{c_{11}c_{33} - c_{13}^2} \\ E_3 &= \frac{c_{11}c_{22}c_{33} + 2c_{23}c_{12}c_{13} - c_{11}c_{23}^2 - c_{22}c_{13}^2 - c_{33}c_{12}^2}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2} \\ \nu_{21} &= \frac{c_{12}c_{33} - c_{13}c_{23}}{c_{11}c_{33} - c_{13}^2}, \quad \nu_{12} = \frac{c_{12}c_{33} - c_{13}c_{23}}{c_{22}c_{33} - c_{23}^2}, \quad \nu_{31} = \frac{c_{13}c_{22} - c_{12}c_{23}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}, \quad \nu_{13} = \frac{c_{22}c_{13} - c_{12}c_{23}}{c_{22}c_{33} - c_{23}^2} \\ \nu_{23} &= \frac{c_{11}c_{23} - c_{12}c_{13}}{c_{11}c_{33} - c_{13}^2}, \quad \nu_{32} = \frac{c_{11}c_{23} - c_{12}c_{13}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2} \\ G_{23} &= c_{44}, \quad G_{31} = c_{55}, \quad G_{12} = c_{66} \end{aligned} \quad (2.35)$$

I kod tela od EO materijala, kao i kod tela od EI materijala, ukupan deformacioni rad, od svih komponenti napona, mora biti pozitivan. Invarijante matrice elastičnosti, takođe, moraju biti pozitivne vrednosti. Iz ovih matematičkih uslova slede fizička ograničenja za veličine elastičnih konstanti

Očigledno je da u ovom slučaju moraju biti pozitivne i konačne sledeće elastične konstante:

$$0 < E_1, E_2, E_3, G_{23}, G_{31}, G_{12} < \infty \quad (2.36)$$

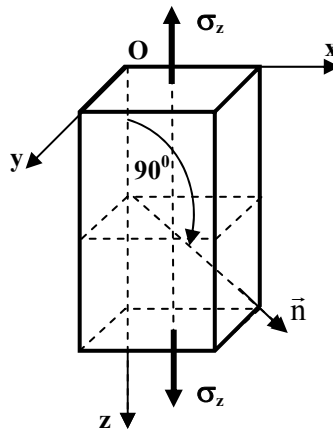
odnosno, sledeći izrazi moraju biti pozitivni:

$$\begin{aligned} (1 - \nu_{23}\nu_{32}), \quad (1 - \nu_{13}\nu_{31}), \quad (1 - \nu_{12}\nu_{21}) &> 0 \\ 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{12}\nu_{23}\nu_{31} &> 0 \end{aligned} \quad (2.37)$$

Iz izraza (2.32) i (2.37) dobiju se nove zavisnosti, između Poasonovih koeficijenta i modula elastičnosti (Lempriere, 1968.), za EO tela:

$$\begin{aligned} |\nu_{12}| < \sqrt{\frac{E_2}{E_1}}, \quad |\nu_{21}| < \sqrt{\frac{E_1}{E_2}}, \quad |\nu_{23}| < \sqrt{\frac{E_3}{E_2}}, \quad |\nu_{32}| < \sqrt{\frac{E_2}{E_3}}, \\ |\nu_{31}| < \sqrt{\frac{E_1}{E_3}}, \quad |\nu_{13}| < \sqrt{\frac{E_3}{E_1}}, \\ \nu_{12}\nu_{23}\nu_{31} < \frac{\left[1 - \nu_{12}^2 \frac{E_1}{E_2} - \nu_{23}^2 \frac{E_2}{E_3} - \nu_{31}^2 \frac{E_3}{E_1}\right]}{2} < \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (2.38)$$

Iz izraza (2.38) može se zaključiti da **Poasonovi brojevi za ortotropno telo, u zavisnosti od veličine modula elastičnosti za različite ose, mogu biti i veći od jedinice** (Theocaris, Philippidis, 1992., Norris, 2006., Ting, Chen, 2004.) **ali ne sva tri istovremeno**, pošto njihov proizvod mora biti manji od jedne polovine.



Sl. 2-6 Linearno naprezanje ortotropnog pravougaonog paralelopipeda

**Pri linearnom naprezanju**, tela od EO materijala, **oblika pravougaonog paralelopipeda**, (Sl. 2-6),  $\sigma_z = \sigma_3 = \sigma$ , javljaju se samo dilatacije, dok su klizanja jednaka nuli:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = -\frac{\nu_{13}}{E_3} \sigma_3; \quad \varepsilon_2 = -\frac{\nu_{23}}{E_3} \sigma_3 \quad \varepsilon_3 = \frac{1}{E_3} \sigma_3 \\ \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0 \end{aligned} \quad (2.39)$$

**Za slučaj linearnog naprezanja tela od EO materijala potrebno je, dakle, poznavati 3 međusobno nezavisne elastične konstante, različite od nule. Oznaka tog materijala je EO3.**

Ako na EO telo, oblika pravougaonog paralelepipeda, čije su dve i dve stranice paralelne s ravnima elastične simetrije, **deluje hidrostatički pritisak**  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$ , deformacije su sledeće:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \left( \frac{1}{E_1} - \nu_{12} \frac{1}{E_2} - \nu_{13} \frac{1}{E_3} \right) \sigma \\ \varepsilon_2 &= \left( -\nu_{21} \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} - \nu_{23} \frac{1}{E_3} \right) \sigma \\ \varepsilon_3 &= \left( -\nu_{31} \frac{1}{E_1} - \nu_{32} \frac{1}{E_2} + \frac{1}{E_3} \right) \sigma \\ \varepsilon_4 &= 0; \quad \varepsilon_5 = 0; \quad \varepsilon_6 = 0\end{aligned}\tag{2.40}$$

**Za slučaj hidrostatički pritisnutog paralelepipeda, od ORT materijala, potrebno je poznavati 9 međusobno različitih elastičnih konstanti, različitih od nule, od čega je samo 6 nezavisnih. Oznaka tog materijala je EO6.**

U EO materijalu, u opštem slučaju ravnog i prostornog naprezanja, postoje i dilatacije i klizanja. Za slučaj linearnog naprezanja i hidrostatičkog pritiska nema klizanja, odnosno, nema deformisanja oblika i pravih uglova paralelepipeda.

Međutim, sve ovo važi uz početnu pretpostavku *da se pravci glavnih deformacija poklapaju s pravcima glavnih napona*. U praksi, kod EO materijala pravci glavnih dilatacija često se ne poklapaju s pravcima glavnih napona. Zato u takvom materijalu, u opštem slučaju, čak i hidrostatički pritisak izaziva klizanje. Za ravno naprezanje drveta kao EO materijala, u slučaju kada se koordinatne ose ne poklapaju s pravcima elastične simetrije, rešenje su odredili Marjanov, Mirić Milosavljević, Mihailović, (1999a). Približno rešenje za prostorno naprezanje drveta kao EO materijala dobio je Соболев, (1979.).

Zbog široke rasprostranjenosti Hukovog elementa u praksi treba ukratko istaći njegove prednosti i nedostatke:

- *prednosti* – prva zabeležena jednačina stanja čvrstog tela, jednostavan model, linearna relacija normalni napon-dilatacija, laka generalizacija, uzima u obzir uticaj temperature,



- *nedostaci* – izveden za izotropne materijale, za čvrsta tela, za jednoaksijalna opterećenja, ne uzima u obzir smičuće napone, uzima u obzir samo kristalnu strukturu materijala, ne obuhvata klase materijala koji se različito ponašaju pri opterećenju i pri rasterećenju, ograničenost modela na napone ispod graničnih, važi samo za male deformacije.

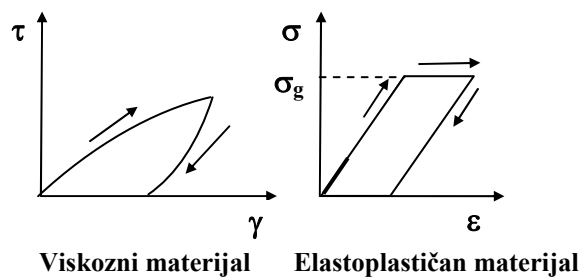
Za svaki materijal postoji oblast malih deformacija gde može da se primeni Hukov zakon. Ta oblast je različitog opsega za različite materijale. Na primer za čelike oblast primene Hukovog zakona važi za izduženja reda veličine  $10^{-3}$ - $5 \cdot 10^{-3}$  i za klizanja duplo manjeg reda veličine. Za povećanje deformacija iznad tih granica menja se karakter veze napon – deformacija.

Što se tiče procesa rasterećenja materijala eksperimenti pokazuju za materijale kao što su polimeri da nakon uklanjanja opterećenja ostaju zaostale deformacije ili zaostali naponi, odnosno materijal ne može da se vrati u potpunosti u prvobitno nedeformisano stanje. Osim toga za polimere oblik veze napon-dilatacija znatno zavisi ne samo od smera opterećenja nego i od vremena trajanja opterećenja, brzine nanošenja opterećenja, istorije opterećenja, temperature, vlage...

Zbog velikog broja materijalnih konstanti koje treba odrediti za anizotropna i ortotropna tela postavlja se pitanje opravdanosti uopštavanja Hukovog zakona. Iz tih razloga tražen je novi model koji bi bolje opisao ponašanje šire klase materijala.

### **2.3. Viskozni materijal - Njutnov element**

Primer viskoznog materijala je tečnost. Očigledno je da je *tečnost materijal koji ima svojstvo tečenja*. Posedovanje tog svojstva kod nekih drugih materijala nije uvek očigledno, pa se traži preciznije tumačenje pojma viskozne tečnosti. Dalje se može reći da je *viskozna tečnost materijal kod kojeg ostaju neke promene oblika i nakon prestanka dejstva spoljašnjih sila*. Ovakva definicija viskoznog materijala je preširoka, jer zaostale - nepovratne deformacije postoje i kod viskoznih i kod elastoplastičnih materijala (Sl. 2-7). Razlika između ove dve vrste materijala je u tome što se *kod viskoznih nepovratne deformacije javljaju i pri vrlo malim naponima*, dok se kod elastoplastičnih takve deformacije javljaju samo nakon prekoračenja graničnih opterećenja. Sa obzirom na tu razliku, može se reći da je *viskozna tečnost materijal koji teče (ima nepovratne deformacije) i pri delovanju beskonačno malih napona*.



Sl. 2-7 Dijagram napon - dilatacija za konstantnu brzinu opterećenja i rasterećenja za viskozni i elastoplastičan materijal

Pri izvođenju eksperimenata uočeno je da se kod ispitivanja ove pojave pojavljuju sledeći problemi:

Pre svega, merenja treba obavljati i pri delovanju beskonačno malih napona. Nivoi napona u eksperimentima su u nekim uobičajenim opsezima. Opsezi su konačni i određuju se u zavisnosti od mogućnosti merenja dostupnom opremom i od planiranog vremena i troškova istraživanja. Teško je eksperimentalno zabeležiti šta se tačno dešava ako se naponi smanje za nekoliko redova veličina, odnosno, teško je odrediti donju granicu napona pri kojoj se može zabeležiti pojava tečenja. Donja granična vrednost napona pri ispitivanju može biti takva da se tečenje materijala u jednom eksperimentu ne može ni uočiti, a uočava se tek s drastičnom promenom eksperimentalnih uslova, što se u praksi teško obezbeđuje.

U vezi s delovanjem vrlo malih napona, postavlja se i pitanje da li se stanje mirovanja kod viskoznih tečnosti smatra kao stanje s vrlo malim naponima, pa postoji tečenje, ili ipak postoje nekakvi zaostali naponi koji onemogućavaju pojavu tečenja. Na primer, smatra se da tečnost s pokretnom spoljašnjom granicom u mirovanju nema napona po celoj zapremini tela. Ovo nije u potpunosti istina. Na primer, tečenje može da se javi unutar tečnosti s pokretnom granicom, ako u tečnosti postoji temperaturni gradijent.

Uz to, vreme trajanja eksperimenta je ograničeno i konačno, tako da se nepovratne deformacije, iako postoje, ne mogu uočiti. Mogle bi se uočiti kada bi se vreme izvođenja eksperimenta znatno povećalo, što naravno povećava troškove istraživanja.

Ovo dovodi do potrebe da se značenje termina viskozna tečnost preformuliše. *Viskozna tečnost je materijal koji vrlo brzo relaksira.* Ta definicija daje koncept tečnosti, ne kao stanje materijala, nego kao stanje njegovih svojstava.

Sa stanovišta zadržavanja akumulirane energije može se reći da je *viskozna tečnost materijal, koji se deformiše tako da mu se kompletna energija, neophodna za deformisanje, rasipa*, pa ne preostaje energija potrebna za povratnu deformaciju.

Eksperimenti su takođe pokazali da se pri kretanju tela kroz viskozni fluid, zbog postojanja trenja, javlja otpor proporcionalan prvom stepenu brzine kretanja tela. Dakle, napon u viskoznom fluidu je linearna funkcija brzine deformisanja, a ne same deformacije. Sl. 2-8, levo, prikazuje zavisnost smičućeg napona od brzine klizanja u tački, kod ustaljenog jednodimenzionog strujanja viskoznog fluida. Može se uočiti da je ta zavisnost linearna, što znači da je koeficijent viskoznosti, kao tangens ugla  $\alpha$ , konstantan.

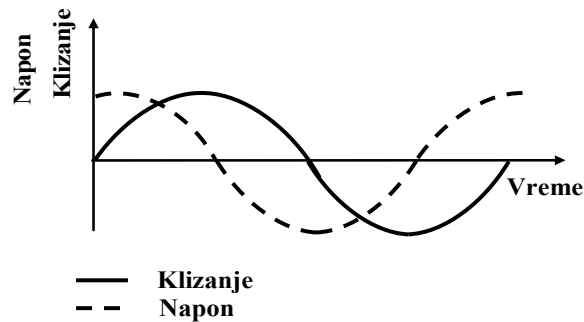


**Sl. 2-8 Dijagram smičući napon - brzina klizanja za Njutново telo (levo) i Njutново telo (desno)**

Element koji dobro opisuje ponašanje viskoznog fluida je klipni cilindar ispunjen viskoznom tečnošću i zove se *Njutново telo*. Sl. 2-8, desno, prikazuje Njutново telo. Model je dobio ime po Isaacu Newtonu (1643-1727) koji je, između ostalog, zaslužan i za razvoj diferencijalnog i integralnog računa.

Viskozni fluid poseduje svojstvo viskoznosti,  $\eta$ , čija je dimenzija  $Ns/m^2$ . *Viskoznost* je svojstvo materijala koje ne zavisi od geometrije tela. Definiše se kao unutrašnje trenje fluida, nastalo kao posledica difuzije-mešanja atoma i molekula, unutar *amorfnih* materijala. Ona dovodi do kretanja, konstantnom brzinom. Brojno je jednaka sili koja, između slojeva jedinične površine, održava jedinični gradijent brzine. Viskoznost pokazuje da *klizanje u tački raste s vremenom i pri konstantnom smičućem naponu*. Ona zavisi od temperature, pritiska i trajanja opterećenja.

Klizanje nastalo u procesu opterećenja i rasterećenja viskoznog fluida, zaostaje za smičućim naponom, što prikazuje Sl. 2-9. Sa slike se vidi da su viskozne deformacije fazno pomerene u odnosu na smičuće napone, za  $90^0$ .



Sl. 2-9 Fazno kašnjenje klizanja za naponom kod Njutnovog tela

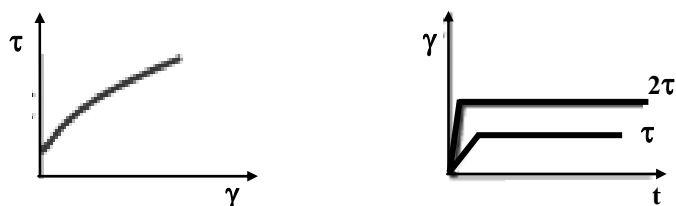
Njutn je prvi napisao *linearni zakon za kretanje čvrstog tela kroz fluid*, i on glasi:

$$\tau = \eta \frac{d\gamma}{dt} = \eta \dot{\gamma} \quad (2.41)$$

gde je  $\tau$  - smičući napon,  $\dot{\gamma}$  - brzina klizanja.

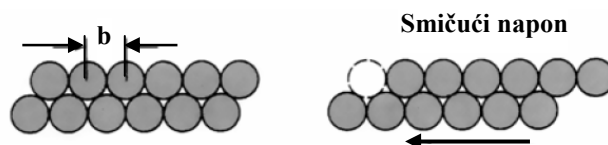
Konstantno opterećenje deluje na klip, koji se pomera sa zakašnjenjem zbog prisustva viskoznog fluida. Na taj način se deformiše tečnost unutar cilindra. Zbog faznog kašnjenja klizanja u odnosu na smičući napon, dijagram smičući napon–klizanje, u početnom delu nije linearan (Sl. 2-10, levo). Klizanje se, dakle, ne dešava trenutno već nakon određenog vremena, odnosno, *nastanak deformacije je vremenski zavisna* (Sl. 2-10, desno). Vreme potrebno da se desi klizanje zavisi i od veličine opterećenja i od brzine nanošenja opterećenja.

Deformacija koja se u potpunosti razvila, pri konstantnom opterećenju ispod granične vrednosti, ostaje nepromenjena sve do trenutka rasterećenja. Nakon rasterećenja viskoznog fluida prestaje njegovo deformisanje. Zbog viskoznosti, deformacija nije povratna. Zbog prirode viskoznog fluida, deo energije deformisanja troši se na savladavanje otpora trenja, između čestica viskoznog fluida i tako se "gubi". U tome je osnovna razlika između Hukovog - idealno elastičnog i Njutnovog - viskoznog tela. Kod Hukovog tela, povratne deformacije su trenutne i potpuno reverzibilne (nema nikakvih gubitaka energije deformisanja), dok su kod Njutnovog tela deformacije nepovratne, zbog potpunih "gubitaka" energije deformisanja, što nije u skladu sa zakonom o održanju energije.



Sl. 2-10 Dijagram smičući napon – klizanje za Njutnovo telo (levo); Vremensko klizanje viskoznog elementa (desno)

Za razliku od elastične deformacije viskozna je trajna, jer atomi menjaju svoj položaj, za udaljenost koja nije manja od parametra rešetke (veličina  $b$ , Sl. 2-11). Kod elastičnosti, otklon ne prelazi polovinu parametra rešetke.



Sl. 2-11 Parametar rešetke  $b$ , i prikaz viskozne deformacije

Generalizacijom Njutnove konstitutivne jednačine za linearno naprezanje (2.41), dobije se *konstitutivna jednačina prostorno napregnutog viskoznog fluida*:

$$\sigma_{ij} = 2\eta \mathbf{D}_{ij} \quad (2.42)$$

gde je:  $\sigma_{ij}$  - tenzor napona,  $\mathbf{D}_{ij}$  - tenzor brzine deformisanja:  $\mathbf{D}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ . Izraz

(2.42) može se napisati i u obliku Navije Stoksovih jednačina:

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \Lambda \dot{\epsilon}_{kk} \delta_{ij} + 2\eta \dot{\gamma}_{ij} \quad (2.43)$$

gde je:  $\sigma_{ij}$  - tenzor napona,  $P$  - pritisak,  $\Lambda$  - zapreminska ili dilataciona viskoznost,  $\dot{\epsilon}_{kk}$  - tenzor brzine promene dilatacija:  $\dot{\epsilon}_{kk} = \frac{\partial v_k}{\partial x_k}$ ,  $\dot{\gamma}_{ij}$  - tenzor brzine promene klizanja.

Za anizotropan materijal viskoznost više nije konstantna. U jednačinu (2.43) umesto konstantnih viskoznosti,  $\eta$  i  $\Lambda$ , uvodi se tenzor, karakterističan za određeni materijal. On je, takođe, nezavisan od tenzora napona i tenzora deformacija.

Ovaj model, dakle, dobro opisuje ponašanje viskoznih tečnih materijala, kod kojih je *viskoznost konstantna*. Oni se zovu *Njutnovske tečnosti*. Svojstva Njutnovskih tečnosti pri konstantnoj temperaturi i pritisku su:

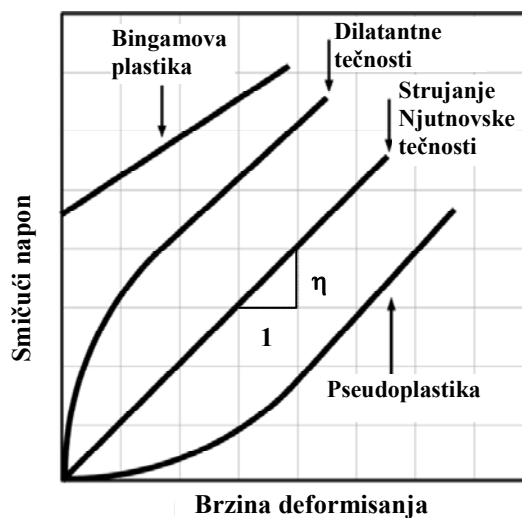
- Postojanje samo smičućih napona, nastalih pri prostim smičućim strujanjima
- Smičuća viskoznost ne zavisi od brzine klizanja
- Viskoznost je konstantna u odnosu na vreme trajanja smicanja, a napon u

tečnosti trenutno pada na nulu, kada prestane smicanje

- Viskoznosti merene pri različitim tipovima deformacija uvek su u prostoj proporciji jedna s drugom. Na primer, viskoznost merena u jednodimenzionim podužnim strujanjima triput je veća od one merene pri prostim smičućim strujanjima.

Tečnost koja pokazuje bilo kakvo odstupanje od gore navedenih svojstava zove se *nenjutnovska ili reološka tečnost*. Odstupanje u ponašanju uglavnom se prikazuje u Njutnovoju jednačini različitim izrazima za viskoznost.

Sl. 2-12 prikazuje razlike u dijagramima smičući napon – brzina deformisanja, za Njutnovsku tečnost i neke nenjutnovske materijale. Jasno se vidi da za neke nenjutnovske tečnosti, postoji nelinearnost viskoznosti. Bingamova plastika (postoji prednapon smicanja), dilatantne tečnosti (viskoznost im se povećava s povećanjem gradijenta brzine smicanja) i pseudoplastika (viskoznost im se smanjuje s povećanjem gradijenta brzine smicanja) spadaju u polimere, čija svojstva ne zavise od vremena smicanja. Postoje i nenjutnovske tečnosti, čija svojstva zavise ne samo od brzine smicanja, nego i od vremena trajanja smicanja. Njih izučavaju tiksotropija i reopeksija.



Sl. 2-12 Dijagram smičući napon – brzina deformisanja za Njutnovske i nenjutnovske materijale

Prednosti i nedostaci Njutnovog elementa:

- *Prednosti* – prva zabeležena jednačina stanja viskoznog fluida, jednostavan model, linearna relacija napon-brzina deformisanja, s konstantnom viskoznošću kao faktorom proporcionalnosti, laka generalizacija, uzima (posredno preko viskoznosti) u obzir uticaj temperature.
- *Nedostaci* – važi za amorfne izotropne materijale, važi samo za tečnosti, važi

za jednodimenziona smičuća strujanja, ne uzima u obzir normalne napone, ne uzima u obzir strukturu materijala, ograničenost modela na napone ispod graničnih, loš opis početka deformisanja (vremenska zavisnost, memorija fluida).

Dakle, Njutnova konstitutivna jednačina za napon, koja je inače empirijskog karaktera, važi za nestišljive fluide, za jednodimenziono strujanje i za strujanje bez mešanja strujnica. Smičući naponi kod takve vrste strujanja daju jednostavan naponski tenzor. Pri smicanju, kod takvog fluida, promena rastojanja između čestica direktno je proporcionalna vremenu.

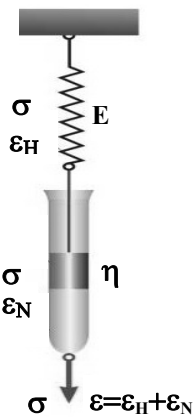
Za opisivanje šire klase polimera i dalje je potrebno tražiti bolji model. Zašto? Šta pokazuju dosadašnja merenja reoloških parametara polimera? U eksperimentima se obično zadaje napon, brzina klizanja je nepoznata, dok se reološki parametri određuju merenjem deformacija. Reološki parametri dobijeni korišćenjem Njutnovih konstitutivnih jednačina neadekvatni su za polimere, jer se pretpostavlja konstantna viskoznost i odsustvo normalnih napona. U stvarnosti, reološki parametri polimera zavise od vrste materijala: njegove strukture, molekulske težine, koncentracije.

Kako se uopštavaju Njutnove konstitutivne jednačine za polimere? Uzima se da viskoznost nije konstantna, nego da zavisi od brzine klizanja. Što se tiče učešća normalnih napona, usvaja se komplikovaniji izraz za vezu napona i brzine deformisanja. Da bi se još bolje modelirao materijal mora se pretpostaviti više reoloških parametara, koji važe i za nestacionarno strujanje. Oni govore i o memoriji materijala i o nelinearnosti dilatacija.

Drugi način je da se Njutnov model kombinuje s nekim drugim modelom.

## **2.4. Maksvelov model-model za relaksaciju napona**

Model viskoelastičnosti, koji se zove *Maksvelov model*, sastoji se iz Hukovog i Njutnovog tela, vezanih redno (Sl. 2-13).



Sl. 2-13 Maksvelov model za relaksaciju napona

Ovaj model je dobio ime po J.C.Maxwellu (1844-1906), naučniku koji je između ostalog uveo i koncept relaksacije napona u kinetičku teoriju gasova.

S obzirom na jednačine (2.2) i (2.41), brzine deformisanja Hukovog i Njutnovog

tela jednake su:  $\dot{\epsilon}_H = \frac{\dot{\sigma}}{E}$  i  $\dot{\epsilon}_N = \frac{\sigma}{\eta}$ .

Ukupna dilatacija linearno napregnutog Maksvelovog modela dobije se kao zbir dilatacija Hukovog i Njutnovog elementa. Isto važi i za brzine deformisanja,  $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_H + \dot{\epsilon}_N$ , dok je normalni napon u oba elementa jednak. Tako se *dobija konstitutivna, linearna, parcijalna diferencijalna jednačina - PDJ, za linearno napregnut Maksvelov model*, u sledećem obliku:

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta} \quad (2.44)$$

odnosno

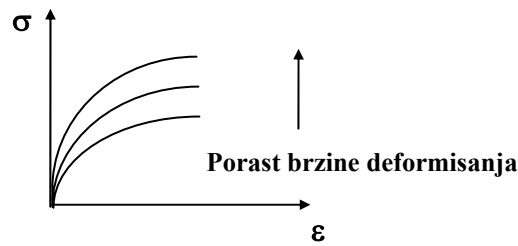
$$\sigma + p_1 \dot{\sigma} = q_1 \dot{\epsilon} \quad (2.45)$$

gde je:  $p_1 = \frac{\eta}{E} = \tau_R$ ,  $q_1 = \eta$ . Veličina  $\tau_R$ , koja predstavlja količnik viskoznosti i modula elastičnosti, ima dimenziju vremena. Zove se *vreme relaksacije ili vreme otpuštanja*. U praksi se uzima da je vreme relaksacije ono vreme koje je potrebno da početni napon opadne na 1/3 početnog napona. Drugi oblik jednačine (2.45) je sledeći:

$$\sigma + \tau_R \dot{\sigma} = \eta \dot{\epsilon} \quad (2.46)$$

Jednačine (2.44), (2.45) i (2.46) pokazuju uticaj brzine deformisanja na veličinu normalnog napona, kao što pokazuje Sl. 2-14.





Sl. 2-14 Zavisnost napona Maksvelovog modela od brzine deformisanja.

Iz jednačina (2.44), (2.45) i (2.46) vidi se da je za Maksvelov model potrebno poznavanje dva viskoelastična parametra. Jedan je viskoznost, karakterističan za tečnosti, a drugi ima dimenziju vremena, potrebnog za relaksaciju napona u tečnosti. Takođe se vidi da je veza napona i brzine deformisanja, za ovaj model, linearna.

Šta se dešava **pri konstantnoj deformaciji**  $\varepsilon = \varepsilon_0 H(t)$  s Maksvelovim modelom? U ovom slučaju, brzina deformisanja jednaka je nuli. Ako deformaciju prikažemo u obliku

$$\varepsilon = \varepsilon_0 H(t - t_0) \quad (2.47)$$

gde je  $H(t)$  Hevisajdova funkcija:

$$H(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ 1, & t > t_0 \end{cases} \quad (2.48)$$

iz jednačine (2.46) dobije se nova konstitutivna diferencijalna jednačina :

$$\sigma + \tau_R \dot{\sigma} = 0 \quad (2.49)$$

odnosno

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{\sigma}{\tau_R} \quad (2.50)$$

Jednačina (2.50) pokazuje da što je duže vreme relaksacije napon sporije opada. To važi samo za slučaj kada je ukupna deformacija konstanta, što je neophodan uslov za pojavu relaksacije napona.

Upravo zbog toga, vreme relaksacije koristi se kao osnov za klasifikaciju materijala (Sl. 2-15). Navedena slika pokazuje da u elastičnom telu nema relaksacije napona, dok viskozna tečnost relaksira vrlo brzo. Bezdimenzioni koeficijent  $t/\tau_R$  definiše stanje materijala.

Resenje jednačine (2.50) je:

$$\sigma = A e^{-\frac{t}{\tau_R}} \quad \text{za } t \geq 0 \quad (2.51)$$

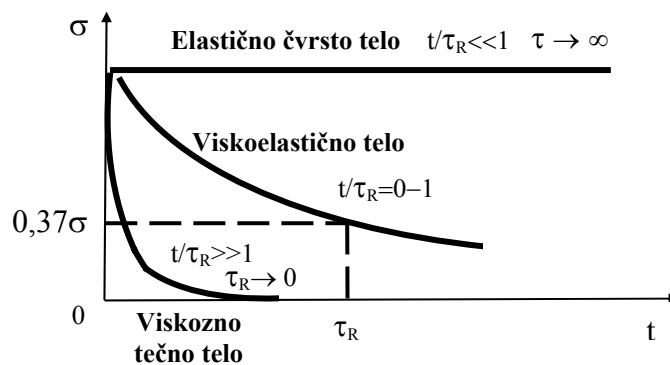
Integraciona konstanta A određuje se iz početnog uslova da je za  $t=0$ ,  $\sigma = \sigma_0 = E_0 \varepsilon_0$ , odakle je  $A = E_0 \varepsilon_0$ . Napon  $\sigma$  nalazi se iz izraza:

$$\sigma = E_0 \varepsilon_0 e^{-\frac{t}{\tau_R}} \quad (2.52)$$

odnosno:

$$\sigma(t) = E_0 \varepsilon_0 e^{-\frac{t}{\tau_R}} \quad (2.53)$$

Jednačina (2.53), prikazana u dijagramu napon-vreme, daje *krivu relaksacije napona*.



Sl. 2-15 Klasifikacija materijala s obzirom na vreme trajanja relaksacije

Iz izraza (2.53) dobije se da je  $\frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} = E_0 e^{-\frac{t}{\tau_R}}$ , odnosno može se definisati

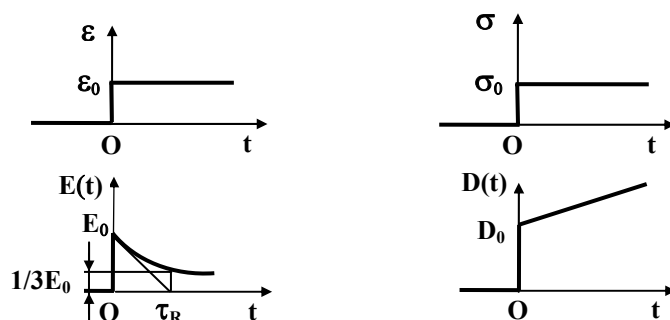
izraz za promenljivi modul elastičnosti kod relaksacije napona, *modul relaksacije*:

$$E(t) = E_{\text{rel}} = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} = E_0 e^{-\frac{t}{\tau_R}} = \frac{q_1}{p_1} e^{-\frac{t}{p_1}} \quad (2.54)$$

Iz izraza (2.54) vidi se da je modul relaksacije opadajuća funkcija, koja se menja po eksponencijalnom zakonu. Kada se u jednačinu (2.54) stavi da je  $t = \tau_R$  dobije se da je

$$E(\tau_R) = \frac{E_0}{e} \approx 0,36E_0 \approx \frac{1}{3}E_0. \text{ Dobijeni rezultat govori da je vreme relaksacije, ustvari,}$$

period potreban da se početni modul smanji za 2/3 (Sl. 2-16). On zavisi od početnog modula elastičnosti, karakterističnog za određenu viskoelastičnu tečnost.



Sl. 2-16 Levo -promena modula relaksacije, desno - promena modula viskoznog tečenja kod Maksvelovog modela

U početnom trenutku Maksvelov model se ponaša kao opruga. Viskozna komponenta deformacije javlja se naknadno. Za  $t > \tau_R$  napon opada do nule, zbog uticaja viskoznosti (po jednačini (2.52)). *Maksvelov model dobro prikazuje relaksaciju napona.*

Uvođenjem Laplasovih transformacija u jednačinu (2.44) dobije se:

$$s\bar{\varepsilon} = \frac{1}{E}s\bar{\sigma} + \frac{1}{\eta}\bar{\sigma} \quad (2.55)$$

gde je:  $\bar{\varepsilon} = \mathcal{L}(\varepsilon)$ ,  $\bar{\sigma} = \mathcal{L}(\sigma)$ .

Konstitutivna jednačina viskoelastičnosti (2.55) zove se **asocijativna jednačina** za Maksvelov model. Sve konstitutivne jednačine viskoelastičnosti za sve naredne modele, napisane u obliku Laplasovih funkcija, zvaće se asocijativne jednačine.

Laplasova transformacija je integralna transformacija, koja datu kauzalnu funkciju  $f(t)$  (original), preslikava, iz vremenskog domena ( $t$ =vreme), u funkciju  $F(s)$ , u kompleksnom spektralnom domenu. Ova transformacija je nazvana po Pjer-Simon Laplasu (1749-1827. godine), koji ju je koristio u svojim radovima o teoriji verovatnoće, iako ju je stvarno otkrio Leonard Ojler, švajcarski matematičar iz 18. veka.

Konstantna deformacija  $\varepsilon = \varepsilon_0 H(t - t_0)$ , za  $t > 0$ , primenom Laplasovih transformacija, može se izraziti u obliku:

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon_0 \frac{1}{s} \quad (2.56)$$

Zamenom izraza (2.56) u jednačinu (2.55) dobija se :

$$\varepsilon_0 = \frac{\bar{\sigma}}{E}s + \frac{\bar{\sigma}}{\eta} \quad (2.57)$$

odakle je napon jednak

$$\bar{\sigma} = \frac{E\varepsilon_0}{s + \frac{E}{\eta}} \quad (2.58)$$

Inverzna Laplasova transformacija jednačine (2.58) daje, razume se, isto rešenje za napon kao i jednačina (2.53).

**Pri konstantnom naponu**  $\sigma = \sigma_0 H(t-t_0)$ , za  $t \geq 0$ , iz jednačine (2.46), analognim postupkom, kao kod konstantne deformacije, dobija se za Maksvelov model sledeća deformacija:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \left( 1 + \frac{t}{\tau_{vt}} \right) \quad (2.59)$$

odnosno

$$\varepsilon(t) = \left( \frac{\sigma_0}{E} + \frac{\sigma_0}{\eta} t \right) = \sigma_0 \left( \frac{1}{E} + \frac{1}{\eta} t \right) \quad (2.60)$$

Veličina  $\tau_{vt}$  predstavlja količnik viskoznosti i modula elastičnosti modela, pri konstantnom naponu. Ima dimenziju vremena i zove se *vreme viskoznog tečenja ili vreme retardacije*. Ovo vreme računa se isto kao i vreme relaksacije, ali ima drugu oznaku, jer se radi o različitim početnim uslovima. Što je duže vreme viskoznog tečenja, model se sporije deformiše.

Jednačina (2.60) predstavlja jednačinu prave. Ona pokazuje da se, pri konstantnom naponu, deformacija stalno povećava s vremenom, odnosno, model može prenositi naprezanje samo pri deformisanju. Ovo svojstvo je karakteristično samo za tečnosti.

Iz jednačine (2.60) dobija se *modul viskoznog tečenja*  $D(t)$ :

$$D(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} = \frac{1}{E} + \frac{1}{\eta} t = D_0 + \frac{1}{\eta} t = \frac{1}{\eta} (\tau_{vt} + t) \quad (2.61)$$

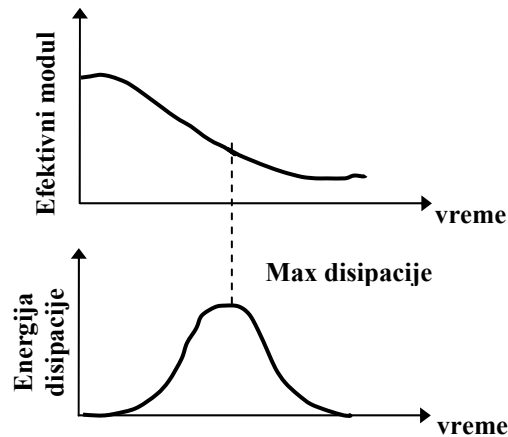
odnosno

$$D(t) = E_{vt} = \frac{1}{q_1} (p_1 + t) \quad (2.62)$$

gde je  $D_0$  - početni modul viskoznog tečenja.

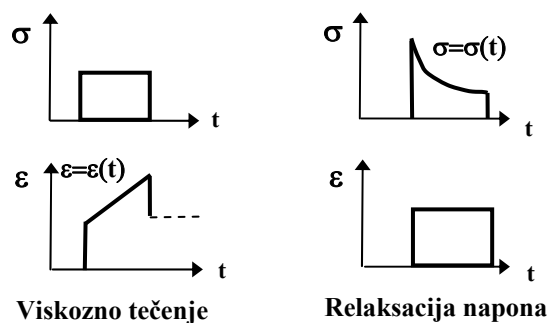
Iz izraza (2.62) vidi se da je modul viskoznog tečenja rastuća funkcija, koja raste neograničeno (Sl. 2-16). Zavisí od početne viskoznosti i vremena viskoznog tečenja, karakterističnog za određeni materijal.

Važno je još pomenuti da postoji veza između modula relaksacije i energije disipacije u hidrauličkom cilindru. Energija disipacije u hidrauličkom cilindru ima maksimum pri nekom srednjem vremenu, što pokazuje Sl. 2-17. U početnom trenutku i nakon beskonačno dugog vremena, nema pomeranja klipa u hidrauličkom cilindru, nema viskoznih deformacija, ni disipacije energije. To znači da u početnom trenutku efektivni modul mora biti jednak početnom modulu elastičnosti.



Sl. 2-17 Veza efektivnog modula elastičnosti, za Maksvelov model, i energije disipacije u hidrauličnom klipu

Iz izraza (2.60) vidi se da, odmah nakon nanošenja konstantnog opterećenja, dolazi do trenutne elastične deformacije opruge, a zatim i do daljeg rasta deformacije, konstantnom brzinom (Sl. 2-18). Deformacija se teorijski neograničeno povećava sve dok deluje opterećenje. Izraz (2.60) pokazuje da je deformacija linearno zavisna od vremena, odnosno, da se prirast deformacije obavlja konstantnom brzinom.



Sl. 2-18 Grafički prikaz viskoznog tečenja i relaksacije napona, u jednoliko opterećenom i jednoliko deformisanom, kao i u rasterećenom, odnosno nedeformisanom Maksvelovom modelu

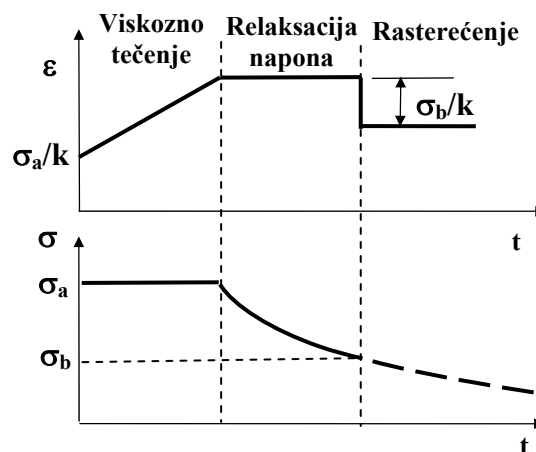
Ako se konstantni napon  $\sigma = \sigma_0 H(t - t_0)$  za  $t > 0$ , primenom Laplasovih transformacija, izrazi u obliku:  $\bar{\sigma} = \sigma_0 \frac{1}{s}$ , a zatim se taj izraz zameni u jednačinu (2.46), dobija se :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sigma_0}{E} \left( \frac{1}{s} \right) + \frac{\sigma_0}{\eta} \left( \frac{1}{s^2} \right) \quad (2.63)$$

Inverzna Laplasova transformacija jednačine (2.63) daje isto rešenje za deformaciju kao i jednačina (2.60).

Sl. 2-19 prikazuje ponašanje Maksvelovog modela u opitu viskoznog tečenja, relaksacije napona i pri rasterećenju. Maksvelov model nije dobar za opis pojave viskoznog tečenja, jer eksperimenti pokazuju da brzina deformisanja nije konstantna, da postoji granica povećanja deformacija i da je deo deformacija viskoznog tečenja povratan. Što se tiče relaksacije napona, ponašanje modela odgovara rezultatima eksperimenata.

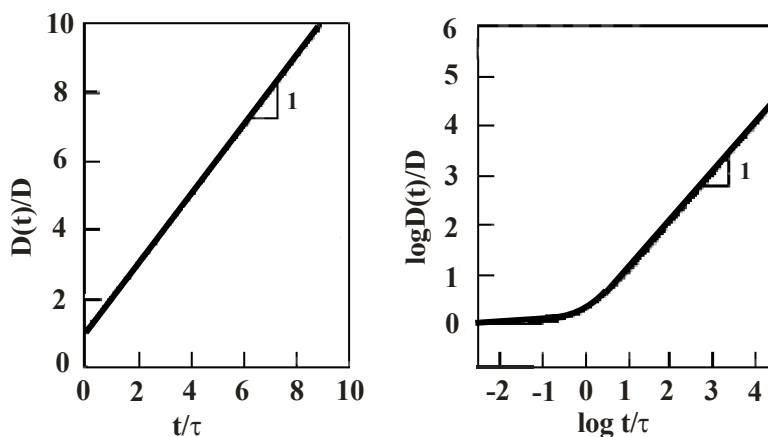
Što se tiče procesa rasterećenja, elastični deo deformacije trenutno se vraća, viskozno tečenje ostaje trajno, a to nije u skladu sa eksperimentalnim rezultatima. Zbirni dijagram, koji prikazuje Sl. 2-19, koristi se za poređenje različitih modela viskoelastičnosti.



Sl. 2-19 Viskozno tečenje, relaksacija i rasterećenje Maksvelovog elementa

Zbog ponašanja koje je opisano, može se zaključiti da je **Maksvelov model model svojstava viskoelastične tečnosti, ali ne i viskoelastičnog čvrstog tela.**

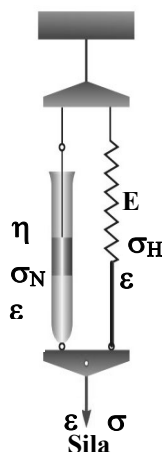
Ovde je važno objasniti, još, crtanje dijagrama zavisnosti viskoelastičnih veličina (modula) od vremena. Ako se u dijagramima koristi linearna razmera, postoji mogućnost da se izgube iz vida neke važne pojave. Sl. 2-20 prikazuju dijagrame zavisnosti istih veličina, ali u različitim razmerama (u dijagramu log-log postoji deonica koja je konstantna, što se ne vidi u dijagramu s linearnom razmerom).



Sl. 2-20 Ponašanje Maksvelovog modela pri viskoznom tečenju u dijagramu s linearnom razmerom i log-log razmerom

## 2.5. Kelvin Voigt-ov model- model za viskozno tečenje

Model viskoelastičnosti u kome su paralelno vezane opruga i hidraulički cilindar, naziva se *Kelvin Voigt-ov model* ili samo *Voigt-ov model* (Sl. 2-21).



Sl. 2-21 Kelvin Voigt-ov model za viskozno tečenje

Ukupan napon linearno napregnutog modela jednak je zbiru napona u Hukovom i Njutnovom elementu,  $\sigma = \sigma_H + \sigma_N$ . Deformacija u oba elementa je jednaka, pa se za napon dobija sledeća konstitutivna jednačina:

$$\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon} \quad (2.64)$$

odnosno

$$\sigma = q_0\varepsilon + q_1\dot{\varepsilon} \quad (2.65)$$

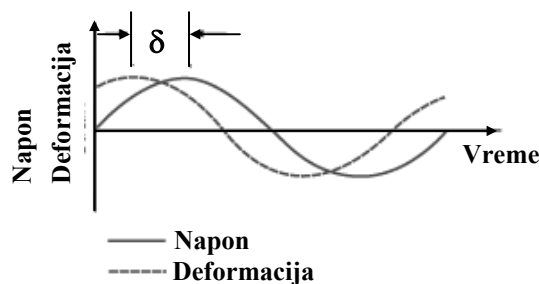
ili

$$\sigma = E(\varepsilon + \tau_v\dot{\varepsilon}) \quad (2.66)$$

gde je  $q_0 = E$ ,  $q_1 = \eta$ ,  $\tau_{vt} = \frac{q_1}{q_0}$ .

Iz jednačina (2.64), (2.65) i (2.66) vidi se da je za Kelvin Voigt-ov model potrebno poznavanje dva viskoelastična parametra, od kojih je jedan, početni modul elastičnosti, karakterističan za čvrsta tela, a drugi, vreme potrebno za viskozno tečenje. Dakle, *Kelvin Voigt-ov model služi za postavljanje veza napon-deformacija-vreme za viskoelastično čvrsto telo*. Takođe je uočljivo da je veza napona i deformacije za ovaj model linearna, i da napon ne zavisi samo od deformacije, nego i od brzine deformisanja.

Jednačina (2.66) pokazuje da postoji fazno zaostajanje deformacije i napona (Sl. 2-22).



Sl. 2-22 Fazno kašnjenje deformacije i napona kod Kelvin Voigt-ovog modela

PDJ (2.64), (2.65) i (2.66) su samo različiti oblici *konstitutivne jednačine za linearno napregnut, Kelvin Voigt-ov model*. Jednačina (2.64) je identična jednačini koja opisuje zavisnost vremena i temperature Williama Thompsona – Lorda Kelvina (1824-1907), pa odatle potiče naziv ovog modela. Drugi deo naziva modela potiče od imena nemačkog fizičara Woldemara Voigt-a (1850-1919), koji se bavio spektroskopijom, verovatnoćom (Voigt-ova kumulativna distributivna funkcija), razvojem tenzorskog računa (uveo termin tenzor i odgovarajuću notaciju – Voigt-ovu) i utvrdio je da postoji invarijantnost Maksvelove tenzorske jednačine (nezavisnost od vrste transformacije). Pojam invarijantnosti omogućava uvođenje kritičnih veličina – vremena (vreme retardacije).

**Pri konstantnom naponu**  $\sigma = \sigma_0 H(t)$  dobija se nova konstitutivna jednačina:

$$\frac{\sigma_0 H(t)}{\eta} = \frac{\varepsilon}{\tau_{vt}} + \dot{\varepsilon} \quad (2.67)$$

gde je  $\tau_{vt}$  *vreme viskoznog tečenja ili vreme retardacije*. U praksi se uzima da je vreme viskoznog tečenja, vreme potrebno da početna deformacija poraste za 2/3.



Rešavanjem jednačine (2.67), po analogiji s postupkom primenjenim kod Maksvelovog modela, dobije se odgovarajuća algebarska jednačina za viskozno tečenje:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_{vt}}} \right) \quad (2.68)$$

Izraz (2.68), prikazan u dijagramu deformacija-vreme, daje *krivu viskoznog tečenja*.

Iz izraza (2.68) vidi se da pri dejstvu konstantnog opterećenja dolazi do trenutne elastične deformacije opruge, a zatim i do dalje promene deformacije. Teorijski, deformacija se neograničeno menja sve dok deluje opterećenje. Izraz (2.68) pokazuje i da je deformacija eksponencijalno zavisna od vremena.

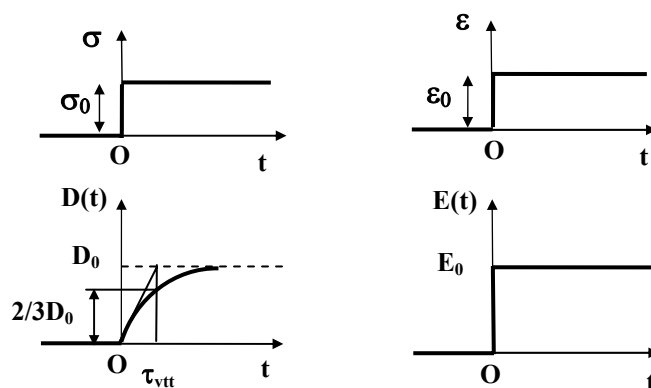
Do izraza (2.68) može se doći i primenom Laplasovih transformacija na jednačinu (2.64), kao što je urađeno kod Maksvelovog modela.

Iz jednačine (2.68) dobije se izraz za veličinu koja se zove *modul viskoznog tečenja*, a opisuje promenu modula elastičnosti tokom vremena, pri opitu zatezanja:

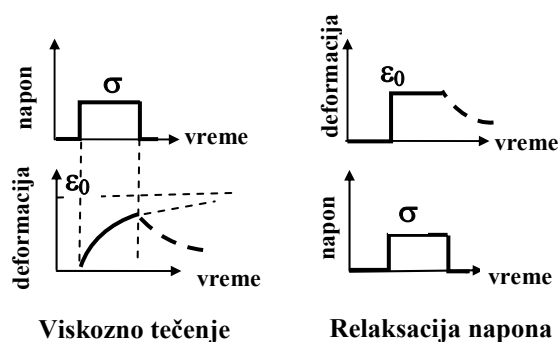
$$D(t) = E_{vt}(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} = \frac{1}{E} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_{vt}}} \right) = D_0 \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_{vt}}} \right) = \frac{1}{q_0} \left( 1 - e^{-\frac{q_0 t}{q_1}} \right) \quad (2.69)$$

Analogno tome, u testu smicanja, dobije se modul viskoznog tečenja  $J(t)$ . Promenu modula viskoznog tečenja  $D(t)$  Kelvin Voigt-ovog modela prikazuje Sl. 2-23.

Kada se u jednačinu (2.69) stavi da je  $t = \tau_{vt}$ , dobije se da je  $D(\tau_R) = D_0 \left( 1 - \frac{1}{e} \right) \approx 0,63D_0 \approx \frac{2}{3}D_0$ . To znači, da je vreme viskoznog tečenja, ono vreme, koje je potrebno da se početni modul smanji za 1/3. Promenu deformacije i napona tokom vremena, za Kelvin Voigt-ov model, prikazuje Sl. 2-24. Vidi se da deformacija asimptotski teži graničnoj vrednosti  $\varepsilon_0$ . Kelvin Voigt-ov model daje dobar opis viskoznog tečenja, u pogledu postojanja promene brzine deformisanja.

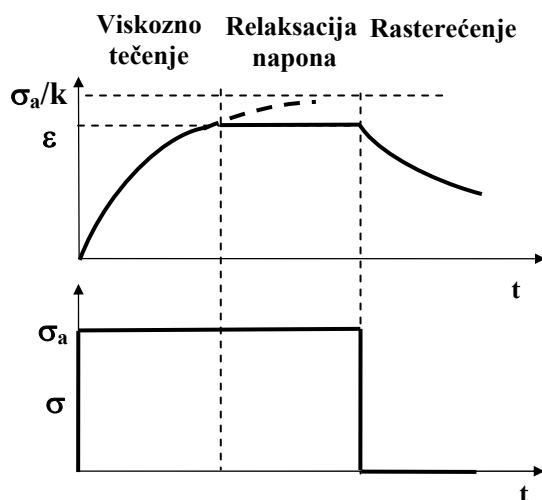


Sl. 2-23 Levo - promena modula viskoznog tečenja (log-log razmera). Desno – promena modula relaksacije Kelvin Voigt-ovog modela.



Sl. 2-24 Grafički prikaz viskoznog tečenja i relaksacije napona u Kelvin Voigt-ovom modelu

Pri konstantnoj deformaciji, iz izraza (2.64) dobije se konstantan napon. To znači da ovaj model ne opisuje relaksaciju napona. Modul relaksacije  $E(t)$  u tom slučaju je konstantan (Sl. 2-23). To se vidi i na Sl. 2-24 i Sl. 2-25 koje prikazuju ponašanje Kelvin Voigt-ovog modela u testu viskoznog tečenja, relaksacije napona i pri rasterećenju. Pri rasterećenju, deformacija se postepeno vraća, što je blisko eksperimentalnim rezultatima.



Sl. 2-25 Viskozno tečenje, relaksacija i rasterećenje Kelvin Voigt-ovog modela

Zbog ponašanja koje je opisano, (nepostojanje relaksacije napona), može se zaključiti, da je **Kelvin Voigt-ov model najprostiji model za viskoelastično čvrsto telo.**

Očigledno je da se i Maksvelov i Kelvin Voigt-ov model mogu koristiti za slučaj linearnog, ili naprezanja, ili deformacija. Za prostorno naprezanje i deformacije, mogu se napisati konstitutivne jednačine za oba modela. *Za prostorno napregnut Maksvelov mode, konstitutivna jednačina glasi:*

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \left( \dot{\tau}_{ij} + \frac{\tau_{ij}}{\tau_1} \right) - \frac{\nu}{E} \left( \dot{\sigma}_{kk} + \frac{\sigma_{kk}}{\tau_2} \right) \delta_{ij} \quad (2.70)$$

gde su: E i  $\nu$  - Jangov modul i Poasonov broj pri jednolikom strujanju,  $\tau_1$  i  $\tau_2$  - vremenski parametri,  $\delta_{ij}$  - Kronekerov delta simbol. Iz izraza (2.70) **vidi se da ravnoteža pri konstantnim naponima ne postoji, što je karakteristika fluida.** *Za prostorno napregnut Kelvin Voigt-ov model, konstitutivna jednačina glasi:*

$$\sigma_{ij} = \lambda (\epsilon_{kk} + \theta_\lambda \dot{\epsilon}_{kk}) \delta_{ij} + 2\mu (\gamma_{ij} + \theta_\mu \dot{\gamma}_{ij}) \quad (2.71)$$

gde su:  $\lambda$  i  $\mu$  - Lameovi koeficijenti kod linearnog naponskog stanja,  $\theta_\lambda$  i  $\theta_\mu$  - dva vremenska parametra, vezana za viskoznost. Ova četiri parametra mogu se identifikovati iz opita viskoznog tečenja, pri pritisku i smicanju.

**Tabela 2-1 Uporedna svojstva Maksvelovog i Kelvin Voigt-ovog modela u različitim eksperimentima ( $\tau$  je karakteristično vreme-viskoznog tečenja ili relaksacije napona)**

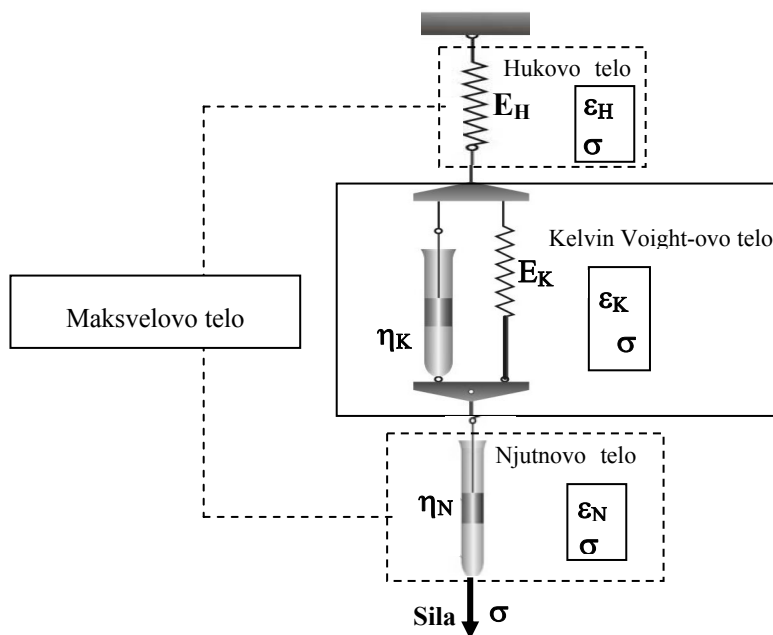
Eksperiment	Maksvelov model	Kelvin Voigt-ov model
Viskozno tečenje	$D(t) = D_0 + \frac{t}{\eta}$	$D(t) = D_0 \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$
Relaksacija napona	$E(t) = E_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$	-
Dinamički eksperiment	$D' = D_0$ $D'' = \frac{1}{\eta\omega}$ $E' = E_0 \frac{\omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2}$ $E'' = E_0 \frac{\omega\tau}{1 + \omega^2 \tau^2}$	$D' = \frac{D_0}{1 + \omega^2 \tau^2}$ $D'' = D_0 \frac{\omega\tau}{1 + \omega^2 \tau^2}$ $E' = E_0$ $E'' = \omega\eta$

Maksvelov i Kelvin Voigt-ov model su previše jednostavni za opisivanje

ponašanja viskoelastičnog materijala, za koji su karakteristični i viskozno tečenje i relaksacija napona. Uporedna svojstva Maksvelovog i Kelvin-Voigtovog modela prikazuje Tabela 2-1.

## 2.6. Složeniji modeli

Sledeći korak u modeliranju viskoelastičnih tela je kombinovanje Hukovog, Njutnovog, Maksvelovog i Kelvin Voigt-ovog modela. Ako se kombinuje Hukov model s Maksvelovim i Kelvin Voigt-ovim modelom, dobija se standardni linearni model, za viskoelastična čvrsta tela, poznat kao Zenerov. Ako se kombinuje Njutnov model s Maksvelovim i Kelvin Voigt-ovim modelom, dobija se linearni model, za viskoelastične tečnosti. Karakteristike Zenerovog modela, kao modela koji se u ovom radu koristi za VEO čvrsta tela, date su u trećem poglavlju. Model za viskoelastične tečnosti ovde nije predmet proučavanja.



Sl. 2-26 Burgerov četvoroparametarski model

Složeniji model od troparametarskog, Zenerovog modela, je četvoroparametarski, Burgerov model, koji prikazuje Sl. 2-26. Burgerov model naziva se ponekad i Maksvel Kelvinov model, jer se sastoji iz redno vezanih, Maksvelovog i Kelvinovog modela. On se koristi kao model koji **dobro opisuje termoplastične polimere**. Burgerov model ima elemente koji opisuju trenutnu elastičnost, odloženu elastičnost i jednoliko viskozno tečenje. Zbog toga on dobro opisuje većinu svojstava

karakterističnih za linearne, viskoelastične materijale. **Burgerov model važi za viskoelastične tečnosti**, što će se kasnije pokazati i kroz konstitutivne jednačine.

*Konstitutivna jednačina, linearno napregnutog, Burgerovog modela formira se, po analogiji s formiranjem jednačina kod prethodnih modela, i glasi:*

$$\ddot{\varepsilon} + \dot{\varepsilon} \frac{E_K}{\eta_K} = \frac{1}{E_H} \left[ \ddot{\sigma} + \dot{\sigma} \left( \frac{E_K}{\eta_K} + \frac{E_H}{\eta_N} + \frac{E_H}{\eta_K} \right) + \frac{E_H E_K}{\eta_K \eta_N} \sigma \right] \quad (2.72)$$

odnosno

$$p_0 \sigma + p_1 \dot{\sigma} + p_2 \ddot{\sigma} = q_0 \varepsilon + q_1 \dot{\varepsilon} + q_2 \ddot{\varepsilon} \quad (2.73)$$

gde je:  $p_0 = \frac{E_K}{\eta_K \eta_N}$ ,  $p_1 = \frac{E_K}{E_H \eta_K} + \frac{1}{\eta_N} + \frac{1}{\eta_K}$ ,  $p_2 = \frac{1}{E_H}$ ,  $q_0 = 0$ ,  $q_1 = \frac{E_K}{\eta_K}$ ,  $q_2 = 1$

Jednačina (2.73) je linearna PDJ drugog reda. Dobijena je iz uslova da je napon  $\sigma$ , jednak u svim elementima modela:  $\sigma = \sigma_H = \sigma_K = \sigma_N$  (gde je  $\sigma_H = E_H \varepsilon_H$ ,  $\sigma_K = E_K \varepsilon_K + \eta_K \dot{\varepsilon}_K$ ,  $\sigma_N = \eta_N \dot{\varepsilon}_N$ ), dok je deformacija  $\varepsilon$ , jednaka zbiru pojedinačnih deformacija:  $\varepsilon = \varepsilon_H + \varepsilon_K + \varepsilon_N$ .

Ako se uvedu smene: za vreme viskoznog tečenja  $\tau_K = \frac{\eta_K}{E_K}$  i za vreme

relaksacije  $\tau_M = \frac{\eta_N}{E_H}$ , jednačina (2.73) dobija sledeći oblik:

$$\ddot{\varepsilon} + \dot{\varepsilon} \frac{1}{\tau_K} = \frac{1}{E_H} \left[ \ddot{\sigma} + \dot{\sigma} \left( \frac{1}{\tau_K} + \frac{1}{\tau_M} + \frac{E_H}{E_K \tau_K} \right) + \frac{1}{\tau_K \tau_M} \sigma \right] \quad (2.74)$$

Jednačina (2.74) je nehomogena, linearna, PDJ drugog reda. Da bi se pokazalo za koje vrste materijala Burgerov model dobro opisuje viskozno tečenje i relaksaciju materijala, posmatraće se dva slučaja: slučaj konstantnog napona i konstantne deformacije.

Deformacija viskoznog tečenja za **slučaj konstantnog napona**, računa se iz konstitutivne jednačine, dobijene iz izraza (2.72):

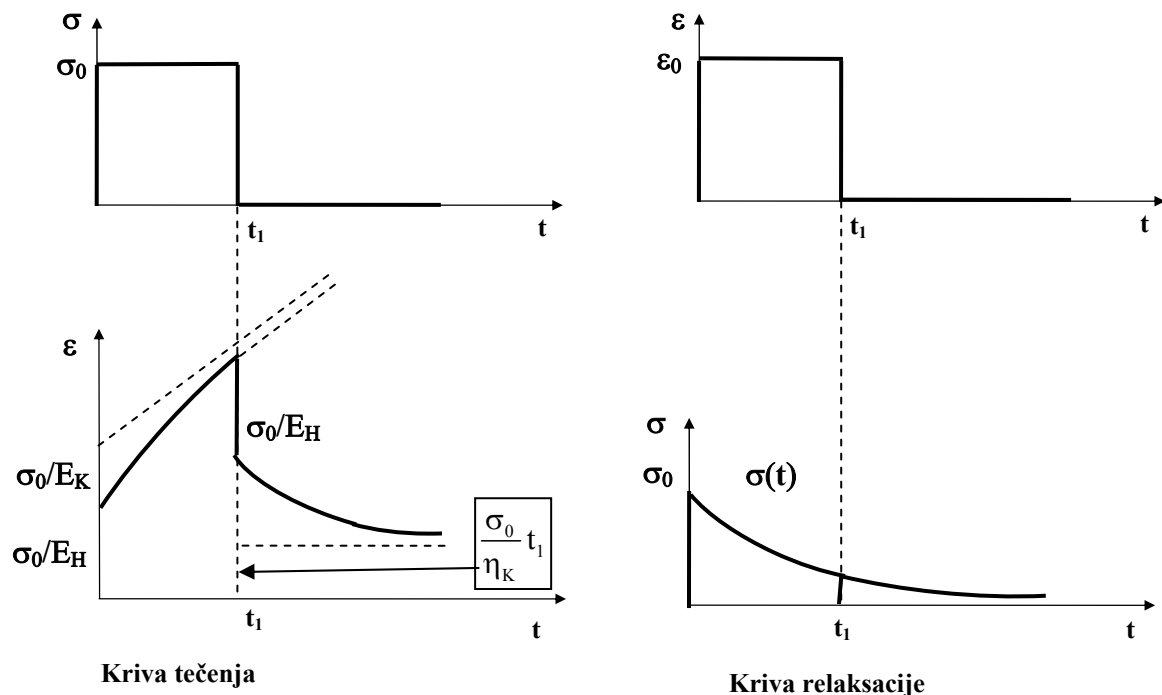
$$\ddot{\varepsilon} + \frac{E_K}{\eta_K} \dot{\varepsilon} = \frac{E_K}{\eta_K \eta_N} \sigma_0 \quad (2.75)$$

Rešenje te jednačine, uz početne uslove da je za  $t = 0$ ,  $\varepsilon(0) = \frac{\sigma_0}{E_H}$ , predstavlja

zbir opšteg i partikularnog integrala. U njemu se pojavljuju integracione konstante, koje

se određuju iz početnih uslova. Rešenje jednačine (2.75) ima sledeći oblik, i važi samo do vremena  $t_1$ :

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \left[ \frac{1}{E_H} + \frac{t}{\eta_N} + \frac{1}{E_K} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_K}} \right) \right] \quad (2.76)$$



Sl. 2-27 Kriva tečenja i kriva relaksacije za Burgerov model

Kada  $t \rightarrow \infty$ , iz izraza (2.76), dobija se da je deformacija viskoznog tečenja jednaka:  $\varepsilon(\infty) = \infty$ . Krivu tečenja za Burgerov model po jednačini (2.76) prikazuje Sl. 2-27. Dakle, **prema Burgerovom modelu, deformacija pri konstantnom naponu neograničeno raste**. Ovaj zaključak odgovara eksperimentalnim rezultatima dobijenim za viskoelastične tečnosti. Zbog toga, **Burgerov model ne može da se primeni za viskoelastična čvrsta tela, kod kojih je stvarni porast deformacije, ipak, ograničen**. Za period kada je  $t > t_1$  dobija se rešenje jednačine (2.75), uz početni uslov da je za

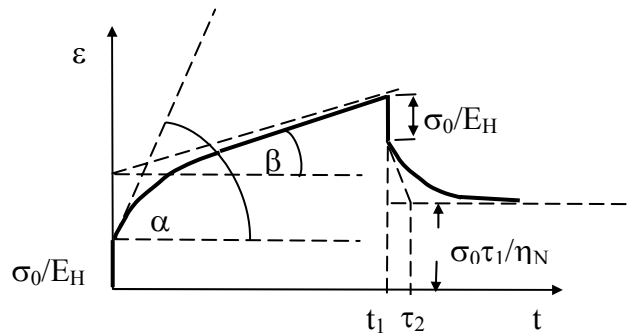
$t = t_1$ ,  $\varepsilon(t_{1+}) = \sigma_0 \left( \frac{t_0}{\eta_N} + \frac{1}{E_K} \left( 1 - e^{-\frac{t_1}{\tau_2}} \right) \right)$ . Traženo rešenje ima sledeći oblik:

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \left[ \left[ \frac{1}{E_H} + \frac{t}{\eta_N} + \frac{1}{E_K} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) \right] - \left[ \frac{1}{E_H} + \frac{t-t_1}{\eta_N} + \frac{1}{E_K} \left( 1 - e^{-\frac{t-t_1}{\tau_2}} \right) \right] \right] \quad (2.77)$$

odnosno

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \left( \frac{t_0}{\eta_N} + \frac{1}{E_K} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \left( e^{\frac{t_1}{\tau_2}} - 1 \right) \right) \quad (2.78)$$

Iz konstitutivne jednačine Burgerovog modela, vidi se da je za materijal, čija svojstva se opisuju, potrebno odrediti 4 materijalna parametra:  $E_H$ ,  $E_K$ ,  $\tau_M$  i  $\tau_K$ . Eksperimentalno je te parametre teško odrediti s dovoljnom tačnošću, iako postoji grafička metoda za njihovo nalaženje. Ta metoda prikazana je na Sl. 2-28.



Sl. 2-28 Grafička metoda za određivanje parametara Burgerovog modela

Parametri Burgerovog modela računaju se, po Riandeu i sar. (2004.) na sledeći način: s jedne strane  $\varepsilon(0) = \frac{\sigma_0}{E_H}$ , korišćenjem jednačine (2.76),  $\varepsilon(\infty) = \frac{\sigma_0 t_1}{\eta_N}$ , iz jednačine (2.78), a s druge strane iz dijagrama koji prikazuje Sl. 2-28:

$$\varepsilon(0) = \sigma_0 \left( \frac{1}{\eta_N} + \frac{1}{\eta_K} \right) = \tan \alpha, \quad \varepsilon(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t < t_1) = \frac{\sigma_0}{\eta_N} = \tan \beta \quad \text{i} \quad \tau_2 = \frac{\varepsilon(t > t_1) - \varepsilon_{\infty} |_{t=t_1}}{\dot{\varepsilon}(t > t_1) |_{t=t_1}}$$

Za slučaj konstantne deformacije, iz jednačine (2.72) dobija se odgovarajuća konstitutivna - diferencijalna jednačina:

$$\ddot{\sigma} + \dot{\sigma} \left( \frac{1}{\tau_K} + \frac{1}{\tau_M} + \frac{E_H}{E_K \tau_K} \right) + \frac{1}{\tau_K \tau_M} \sigma = 0 \quad (2.79)$$

odnosno

$$\ddot{\sigma} + 2b\dot{\sigma} + c\sigma = 0 \quad (2.80)$$

Rešenje homogene jednačine (2.79), za napon relaksacije, ima sledeći oblik:

$$\sigma(t) = C_1 e^{-\eta_1 t} + C_2 e^{-\eta_2 t} \quad (2.81)$$

gde su  $C_1$  i  $C_2$ - integracione konstante, koje se određuju iz početnih uslova:

$$\text{za } t = 0, \quad \sigma(0) = \sigma_0 = E_M \varepsilon_0, \quad \dot{\sigma}(0) = \ddot{\sigma}(0) = 0 \quad (2.82)$$

a  $r_1$  i  $r_2$  su koreni karakteristične jednačine  $r^2 + 2br + c = 0$  (karakteristična jednačina diferencijalne jednačine (2.80), u kojoj je  $a=1$ ,  $2b = \frac{1}{\tau_K} \left(1 + \frac{E_H}{E_K}\right) + \frac{1}{\tau_M}$  i  $c = \frac{1}{\tau_M \tau_K}$ ):

$$r_{1,2} = \frac{-2b \pm \sqrt{(2b)^2 - 4ac}}{2a} = -b \pm \sqrt{b^2 - c} \quad (2.83)$$

odnosno

$$r_{1,2} = -\left(\frac{1}{2\tau_K} \left(1 + \frac{E_H}{E_K}\right) + \frac{1}{2\tau_M}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2\tau_K} \left(1 + \frac{E_H}{E_K}\right) + \frac{1}{2\tau_M}\right)^2 - \frac{1}{\tau_K} \frac{1}{\tau_M}} \quad (2.84)$$

Kada  $t \rightarrow 0$ , iz izraza (2.81) dobije se da je napon relaksacije jednak:

$\sigma(0) = \sigma_0 = C_1 + C_2$  pri konstantnoj deformaciji  $\varepsilon(0) = \varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E_M}$ . Kada  $t \rightarrow \infty$ , napon

relaksira do vrednosti bliske nuli. To je takođe potvrda da **Burgerov model, i pri konstantnom naponu i pri konstantnoj deformaciji, dobro opisuje svojstva viskoelastične tečnosti, ali ne viskoelastičnog čvrstog tela.**

Krivu relaksacije za Burgerov model, prema jednačini (2.81), prikazuje Sl. 2-27.

Burgerov model pokazuje, da povećanje broja elemenata u modelu dovodi do složenijih jednačina višeg reda, što daje povećanu tačnost u opisivanju svojstava, samo određene klase materijala.

Da bi se Burgerov model usvojio kao model za viskoelastično čvrsto telo ili viskoelastičnu tečnost, on se mora ispitati u eksperimentima, koji traju veoma dugo ( $t \rightarrow \infty$ ), kako bi se dobili i viskozno tečenje i relaksacija napona.

Osim Burgerovog četvoroparametarskog modela, postoje još dve osnovne *sheme* za formiranje višeparametarskih modela (Mase, 1970.):

- Prva je generalizacija (uopštavanje) Kelvin Voight-ovog modela, odnosno, redno vezivanje više tih modela.
- Druga je generalizacija (uopštavanje) Maksvelovog modela, odnosno, paralelno vezivanje više tih modela.

Za uopšteni Kelvin Voight-ov model, konstitutivna jednačina  $i$ -tog elementa modela u diferencijalnom obliku glasi:

$$\sigma_i = E_i \varepsilon_i + \eta_i \dot{\varepsilon}_i \quad (2.85)$$

**Deformacija uopštenog Kelvin Voight-ovog modela, za slučaj konstantnog**



**napona**, glasi:

$$\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i = \sigma_0 \sum_{i=1}^n \frac{1}{E_i} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}} \right) = \sigma_0 \sum_{i=1}^n D_i \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}} \right) = \sigma_0 D(t) \quad (2.86)$$

gde je :  $\tau_i = \frac{\eta_i}{E_i}$  - vreme viskoznoг tečenja pojedinih elemenata modela.

Za uopšteni Kelvin Voight-ov model, koji se odnosi na kontinualni materijal, deformacija se računa iz izraza:

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \int_0^{\infty} D(\tau) \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}} \right) d\tau \quad (2.87)$$

gde je:  $D(\tau)$  - gustina popustljivosti.

Za uopšteni Maksvelov model, konstitutivna jednačina i-tog elementa modela u diferencijalnom obliku glasi:

$$\left( \frac{1}{E_i} \frac{d}{dt} + \frac{1}{\eta_i} \right) \sigma_i = \dot{\varepsilon}_i \quad (2.88)$$

**Napon uopštenog Maksvelovog modela, za slučaj konstantne deformacije** glasi:

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 \sum_{i=1}^n E_i e^{-\frac{t}{\tau_i}} = E(t) \varepsilon_0. \quad (2.89)$$

Kod ovih uopštenih modela javlja se čitav spektar karakterističnih vremena. Uopšteni modeli imaju povećanu tačnost opisivanja svojstava materijala, ali samo za slučaj opterećenja materijala. Što se tiče računanja parametara modela i njegove primene, sve je daleko složenije. Istovremeno, svaki od ova dva modela opisuje samo jednu vrstu materijala: ili viskoelastičnu tečnost – uopšteni Maksvelov model ili viskoelastično čvrsto telo- uopšteni Kelvin Voight-ov model. A oba modela i dalje ne mogu da opišu slučaj rasterećenja kao što to mogu Zenerov i Burgerov model.

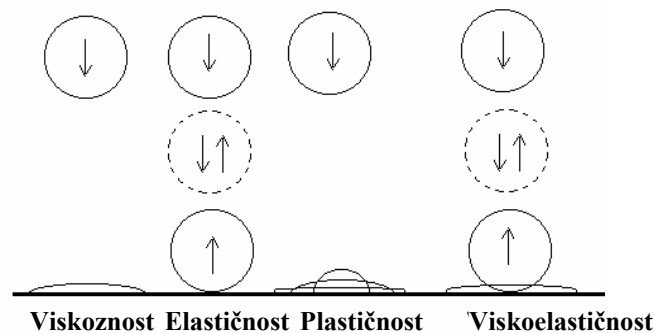
## 3. VEI ČVRSTO TELO

### 3.1. Viskoelastičnost

Viskoelastičan materijal se definiše kao materijal kod kojeg napon ne zavisi samo od trenutne deformacije, nego i od prethodnih deformacija, odnosno, od istorije razvoja deformacija. Zbog toga se *viskoelastični materijali zovu materijali s memorijom*. Za opisivanje ponašanja takvog materijala koriste se integralne konstitutivne jednačine, sa integralima koji se zovu „nasledni“. Alternativna definicija viskoelastičnog materijala govori da je to materijal kod kojeg napon zavisi ne samo od deformacije, nego i od brzine deformisanja. U tom slučaju, umesto integralnih konstitutivnih jednačina, koriste se diferencijalne.

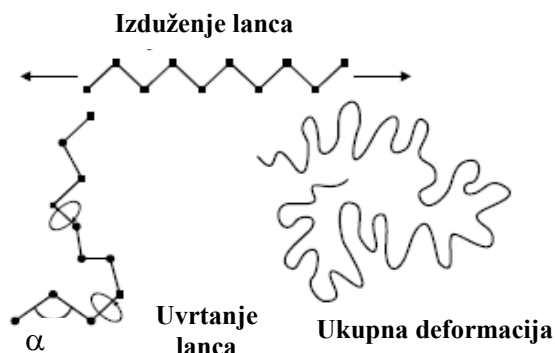
Za viskoelastičnost bi se moglo reći da objedinjuje najvažnija svojstva tečnosti i čvrstog tela. Ta svojstva imaju različit red veličine, odnosno, različite materijalne parametre – modul elastičnosti i koeficijent viskoznosti. Osim toga, za tečnost su karakteristični viskozni disipativni gubici energije, a za čvrsto telo akumulacija elastične energije. Te dve komponente takođe imaju različit red veličine.

Razlike u ponašanju viskoznog, elastičnog, plastičnog i viskoelastičnog materijala prikazuje Sl. 3-1. Viskozni uzorak teče po površini, sve dok površinske sile to dozvoljavaju. Elastični uzorak odskače pri kontaktu s površinom. Plastični uzorak se deformiše pri udaru u površinu, pri čemu veličina trajnih dilatacija zavisi od nivoa napona. Viskoelastični uzorak u početku odskače od površine (kratka vremenska razmera). Posle dužeg vremenskog perioda, uzorak se zaustavlja na površini i počinje da teče.



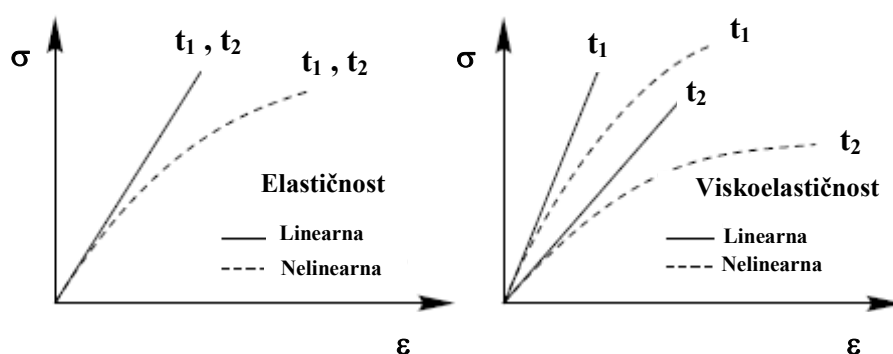
Sl. 3-1 Shematski prikaz viskoznosti, elastičnosti, plastičnosti, i viskoelastičnosti

Promene na molekularnom nivou kod viskoelastičnih materijala prikazuje Sl. 3-2. Na slici se vidi izduženje lanaca polimera, zatim uvrtnje lanaca i rezultujuća deformacija lanca.



Sl. 3-2 Viskoelastične deformacije polimera

Razlika između elastičnosti i viskoelastičnosti postoji i u linearnom, i u nelinearnom području. Usporedni prikaz linearne i nelinearne elastičnosti i viskoelastičnosti dat je na Sl. 3-3.

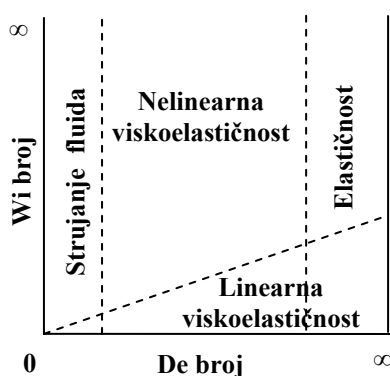


Sl. 3-3 Tipični dijagram napon- deformacija elastičnog i viskoelastičnog materijala za dve različite vrednosti vremena trajanja eksperimenta

Kako se bliže određuje područje primene linearne i nelinearne teorije viskoelastičnosti kod viskoelastičnih polimera, prikazuje Pipkinov dijagram (Sl. 3-4). Za viskoelastične materijale važni su bezdimenzionalni brojevi: Weissenberg-ov i Deborah-ov. Weissenberg-ov broj predstavlja odnos viskoznih i elastičnih sila. Računa se kao:  $Wi = \tau \dot{\epsilon}$ , gde je  $\tau$ [s] - karakteristična razmera vremena (vreme relaksacije),  $\dot{\epsilon}$  - brzina deformisanja. Deborah-ov broj se dobija iz izraza:  $De = \tau \omega = \frac{\tau}{t}$ , gde je  $t$  [s] - ukupno vreme deformisanja,  $\omega$  [1/s] - frekvencija dilatacija.

Fizičko značenje vremena  $\tau$  nije uvek isto. U opštem slučaju, to je vreme karakteristično za ponovnu izgradnju razrušene strukture materijala. Nivo organizacione

strukture materijala može biti veoma različit, kao i njeno razrušavanje i restauracija. Zbog toga se karakteristična vremena razlikuju, ne samo za različite materijale, nego i za isti materijal, u zavisnosti od početnih uslova. Opseg tog vremenskog intervala je veoma širok, pa je zbog toga važno da se objasni deo Pipkinovog dijagrama za koji je Deborah-ov broj jednak jedinici. Kada je Deborah-ov broj približno jednak jedinici materijal je viskoelastičan. Tada se procesi međumolekulske razgradnje i ponovne izgradnje odvijaju brzinama istog reda veličine. Pri malim amplitudama dilatacija ( $Wi$  broj je mali), materijal se ponaša kao linearno viskoelastičan. Kod velikih amplituda materijal postaje nelinearan.



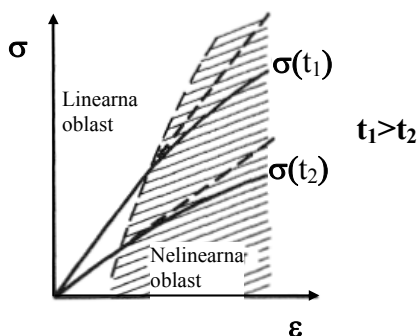
Sl. 3-4 Pipkinov dijagram

Kada je Deborah-ov broj mnogo manji od jedinice materijal se ponaša kao viskozna Njutnova tečnost. U tom slučaju međumolekularni procesi se dešavaju znatno većom brzinom od brzine deformisanja. Veličina amplitude deformacije nema uticaja na viskozna svojstva materijala. Ako je Deborah-ov broj mnogo veći od jedinice materijal se ponaša kao Hukovo elastično čvrsto telo. Deborahov broj je, dakle, bezdimenzionalni kriterijum viskoelastičnosti, odnosno, *vremenska razmera* je važan faktor u određivanju razlika između čvrstih i tečnih tela. Zbog toga je Deborah i rekao: „The mountains flow before the lord“ .

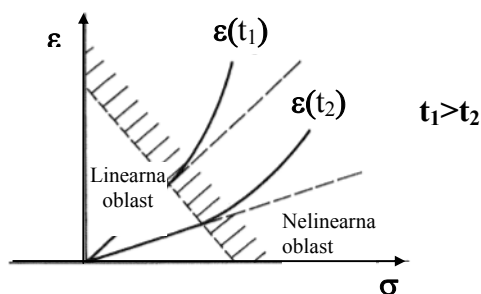
Iz Pipkinovog dijagrama vidi se da se pri velikim brzinama deformisanja na uzorku materijala javljaju nelinearni efekti. Mnogi industrijski procesi odigravaju se u tom nelinearnom području. Zato je važno da se razviju metode koje analiziraju velike brzine deformisanja. Eksperimentalna metoda, sa skokovitim nanošenjem opterećenja, vrši merenja pri konstantnom De broju, gde karakteristično vreme odgovara vremenu trajanja skoka. Druga vrsta eksperimenta je sinusoidno oscilovanje, s konstantnom amplitudom dilatacija.

Pipkinov klasifikacioni dijagram uključuje i amplitudu i frekvenciju deformacije, odnosno, vreme trajanja deformacije, i jasno daje granicu između područja linearne i nelinearne viskoelastičnosti.

O linearnom i nelinearnom području primene viskoelastičnih polimera govore Sl. 3-5 i Sl. 3-6. Sa slika se vidi da se sa smanjenjem napona smanjuje područje linearnosti, a s povećanjem dilatacija, smanjuje područje linearnosti. Smanjenje napona i povećanje dilatacija može biti uzrok razaranja i lomova materijala, pa je za područje primene ispod graničnih napona opravdana primena linearne teorije viskoelastičnosti.



Sl. 3-5 Dijagram tranzicije između linearnih i nelinearnih svojstava, pri konstantnoj deformaciji



Sl. 3-6 Dijagram tranzicije između linearnih i nelinearnih svojstava, pri konstantnom naponu

Razvoj matematičke teorije linearne viskoelastičnosti bazira se na *principu superpozicije i principu proporcionalnosti*. Bolcmanov princip superpozicije opterećenja je već dovoljno poznat, a princip proporcionalnosti znači da je dilatacija (odziv materijala), u bilo kom trenutku vremena direktno proporcionalna naponu (veličini početnog signala). U linearnoj teoriji viskoelastičnosti diferencijalne jednačine su linearne. Koeficijenti uz vremenske izvode su konstantni. Te konstante su ustvari materijalni parametri i one se ne menjaju s promenom brzine deformisanja. Vremenski izvodi su obično parcijalni izvodi. Ova ograničenja imaju za posledicu to, da je linearna teorija primenljiva samo za male deformacije.

Opšta konstitutivna jednačina za linearnu viskoelastičnost, napisana za ove

uslove, glasi:

$$\left(1 + p_1 \frac{\partial}{\partial t} + p_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dots + p_n \frac{\partial^n}{\partial t^n}\right) \sigma = \left(q_0 + q_1 \frac{\partial}{\partial t} + q_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dots + q_n \frac{\partial^n}{\partial t^n}\right) \varepsilon \quad (3.1)$$

gde su:  $p$  i  $q$  - koeficijenti uz izvode,  $n$  i  $m$  - najviši redovi izvoda, koji mogu biti međusobno jednaki, ili je  $n$  jednako  $m-1$ . Ovo je implicitni oblik diferencijalne jednačine, koja je napisana za linearno naprezanje, a može se uopštiti i za prostorno naprezanje. Matematički, to znači da se umesto skalarnih veličina  $p$  i  $q$ , u jednačinu uvode tenzorske veličine.

Oblik jednačine (3.1) veoma je važan, jer se iz nje vidi koliki je minimalni broj materijalnih parametara neophodan za poznavanje ponašanja određenog materijala, pri datim uslovima.

Na primer, korišćenjem jednačine (3.1), mogu se napisati i Hukov zakon za linearno naprezanje:

$$p_0 \sigma = q_0 \varepsilon \quad (3.2)$$

gde je  $p_0 = 1$ ,  $q_0 = E$ , kao i Njutnov zakon za linearno naprezanje:

$$p_0 \sigma = q_1 \dot{\varepsilon} \quad (3.3)$$

gde je  $p_0 = 1$ ,  $q_1 = \eta$ . Iz jednačine (3.2) i (3.3) vidi se da je minimalni broj materijalnih parametara, potrebnih za poznavanje ponašanja izotropnog materijala u uslovima linearnog opterećenja, jednak jedinici.

U tenzorskom obliku jednačina (3.1) glasi:

$$\{P\} \sigma_{ij} = \{Q\} \varepsilon_{ij} \quad (3.4)$$

gde su  $\{P\}$  i  $\{Q\}$  diferencijalni vremenski operatori, koji, za izotropan materijal, imaju sledeći oblik:

$$\{P\} = \sum_{i=0}^n p_i \frac{d^i}{dt^i} \text{ i } \{Q\} = \sum_{i=0}^m q_i \frac{d^i}{dt^i}. \quad (3.5)$$

Za anizotropan materijal, diferencijalni vremenski operatori  $\{P\}$  i  $\{Q\}$  proširuju se u oblik  $\{P_i\}$  i  $\{Q_i\}$ . Indeks  $i$  ima opseg od 1 do 6, pa se, umesto jednačine (3.5), piše šest posebnih jednačina. Koeficijenti  $p_i$  i  $q_i$  obuhvataju viskoelastična svojstva materijala.

### 3.2. Viskozno tečenje, relaksacija napona i vrste modula u viskoelastičnosti

U zakonima koji važe za viskoelastične materijale koriste se, po analogiji s Hukovim i Njutnovim zakonom, novi viskoelastični parametri - veličine koje više nisu konstantne. To su koeficijenti proporcionalnosti između vremenski promenljivih veličina: napona i deformacija. Te nove veličine zovu se *modul viskoznog tečenja* i *modul relaksacije* (već pomenuti kod Maksvelovog, Kelvin Voight-ovog i Burgerovog modela). Ovi viskoelastični moduli određuju se eksperimentalno.

Eksperimentalno ispitivanje viskoelastičnih materijala vrši se obavljanjem običnih laboratorijskih opita, iz kojih se mogu dobiti značajni podaci koji imaju vezu sa stvarnim uslovima upotrebe. Pri tome se najčešće koriste testovi s aksijalnim zatezanjem, slični onima koji se koriste za elastična tela, ali modifikovani tako da je omogućeno posmatranje vremenske zavisnosti u odzivu materijala. Tri opita koja se najviše koriste su: viskozno tečenje, relaksacija napona i dinamičko (sinusoidno) opterećenje.

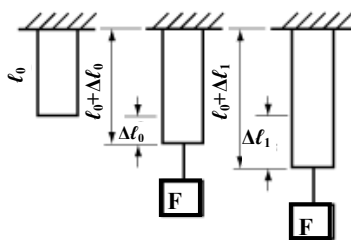
Merenje viskoznog tečenja, kod dugotrajno opterećenih materijala, koristi se za razne proizvode i ugrađene delove koji se kontinualno eksploatišu, pri konstantnom opterećenju. U tim slučajevima, dilatacija viskoznog tečenje postaje štetna. Međutim, u tehnološkoj praksi, viskozno tečenje se takođe koristi kao metoda da se postigne i fiksira odgovarajuća orijentacija vlakana u kompozitnim materijalima.

Što se tiče relaksacije napona, i to je važan fenomen u tehnološkoj praksi. Ako se tehnološki proces vodi suviše malom brzinom, u materijalu mogu da se zadrže zaostali naponi. To, naravno, utiče na kvalitet proizvoda. Suviše brza relaksacija ima suprotan efekat.

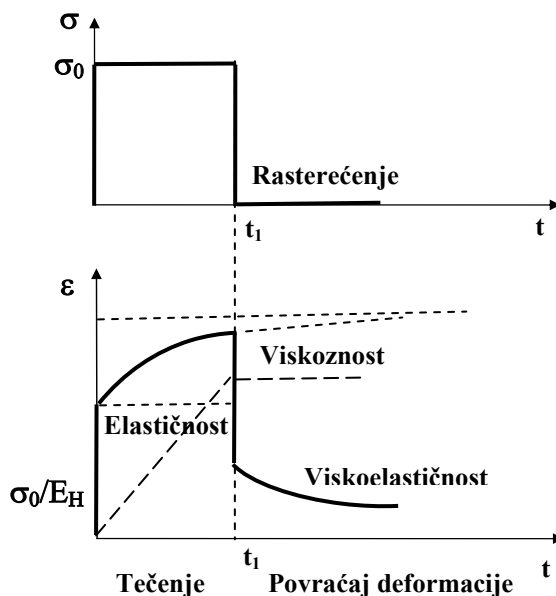
**Viskozno tečenje** je neprekidno deformisanje materijala, pod dejstvom konstantnog opterećenja (Sl. 3-7). Za linearna naprezanja, pretpostavlja se da će istorija napona, koji je vremenski zavisna, biti skokovita funkcija sa amplitudom  $\sigma_0$  (Sl. 3-8):

$$\sigma(t) = \sigma_0 H(t) \quad (3.6)$$

gde je  $H(t)$  Hevisajdova funkcija.



Sl. 3-7 Viskozno tečenje pri konstantnom opterećenju



Sl. 3-8 Uporedni prikaz deformisanja i povraćaja deformacije, pri konstantnom naponu, kod elastičnih, viskoznih i viskoelastičnih materijala

Kod ovog testa se dilatacija u viskoelastičnom materijalu  $\varepsilon(t)$ , povećava s vremenom. Količnik promenljive dilatacije i konstantne amplitude napona je veličina  $D(t)$ :

$$D(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} \quad (3.7)$$

Ona se zove *recipročna krutost*, *popustljivost tečenja* ili *modul popustljivosti – viskoznog tečenja* (Leaderman, 1957., Sieglaf, 1976., Fransoa, 2002., Kozak, Lucić, 2009.). Kod linearne viskoelastičnosti, modul viskoznog tečenja ne zavisi od veličine napona, nego samo od vremena. Skok u trenutku rasterećenja, u dijagramu dilatacija, neki autori tumače kao pojavu trenutne elastičnosti (iako ne postoji opterećenje koje fizički može stvarno da deluje trenutno). Ako se kriva opterećenja posmatra kao matematička skokovita funkcija, može se primetiti da deo dijagrama, u trenutku kada je vreme jednako nuli, sadrži jedan domen pogodan za logaritamsku skalu. Što više prolazi



vreme od trenutka rasterećenja, dilatacija se sve više smanjuje, pa može ići do neke konačne vrednosti, ili do nule, zavisno od vrste materijala. Hukov i Njutnov zakon tu pojavu ne uzimaju u obzir. Sl. 3-8 pokazuje da je i pojava dilatacije istovremena s dejstvom opterećenja. Zbog toga u slučaju viskoznog tečenja opterećenje zovemo uzrok, ili pobuda, a dilatacija je posledica, ili odziv. Odgovarajući funkcionalni oblik za modul popustljivosti, s obzirom na navedenu uzročno posledičnu vezu, i s obzirom na jednačinu (3.6), glasi:

$$D(t) = d(t) \cdot H(t) \quad (3.8)$$

gde je:  $d(t)$  - funkcija definisana duž cele vremenske ose.

Opšti oblik funkcije  $d(t)$  je sledeći:

$$d(t) = D_0(\sigma) + \varphi(t, \sigma) + \frac{t}{\eta(\sigma)} \quad (3.9)$$

gde je  $D_0(\sigma)$  – početni modul popustljivosti za određeni nivo napona,  $\varphi(t, \sigma)$  - funkcija tečenja. Grafički prikaz jednačine (3.9) daje krive viskoznog tečenja. Ako veličine  $D_0$ ,  $\varphi$  i  $\eta$  ne zavise od napona, onda je modul popustljivosti za  $t > 0$  linearna funkcija vremena:

$$D(t) = D_0 + \varphi(t) + \frac{t}{\eta} \quad (3.10)$$

Kod linearnih viskoelastičnih čvrstih tela, viskoznost  $\eta$  neograničeno raste, pa se poslednji sabirak u jednačini (3.10) gubi. Funkcija tečenja  $\varphi(t)$  postaje  $\varphi_\infty = \varphi(t \rightarrow \infty)$ . U tome slučaju, modul popustljivosti  $D(t)$ , računa se na sledeći način:

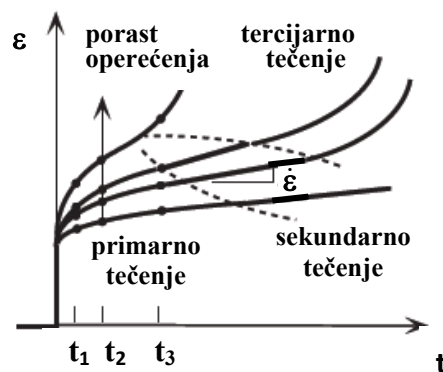
$$D(\infty) = D_0 + \varphi_\infty \quad (3.11)$$

i zove se *ustaljeni modul popustljivosti*.

Kod linearnih viskoelastičnih tečnosti, dilatacija neograničeno raste s vremenom, zbog povećanja poslednjeg člana jednačine (3.10), a ustaljena popustljivost jednaka je nuli.

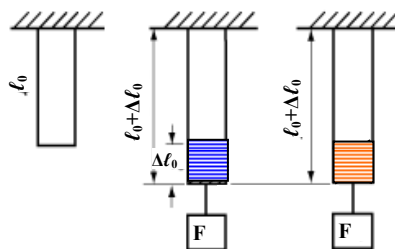
Krive tečenja, kojima se opisuje zavisnost viskozne dilatacije od vremena, za slučaj konstantne, ili promenljive brzine nanošenja opterećenja, mogu da imaju tri regiona: primarni, sekundarni i tercijarni region tečenja (Sl. 3-9). Kod primarnog tečenja kriva je konkavna nadole, kod sekundarnog, dilatacija je proporcionalna vremenu, a kod

tercijarnog, dilatacija se veoma ubrzava (to je područje koje prethodi lomu). Tercijarno tečenje uvek odgovara nelinearnoj viskoelastičnosti, a i sekundarno tečenje može da pokazuje nelinearnu viskoelastičnost. Prava linija u oblasti sekundarnog tečenja govori samo o *linearnoj zavisnosti između deformacije i vremena, i nije povezana s linearnošću veze napona i deformacije* (uzroka i posledice). Na dijagramu se vidi da se s porastom nivoa napona smanjuje linearna oblast (misli se na zavisnost deformacije od vremena), kod sekundarnog tečenja. Podaci s dijagrama, uzeti u određenim trenucima vremena, mogu se koristiti za crtanje dijagrama napon – dilatacija.



Sl. 3-9 Regioni tečenja – primarno, sekundarno i tercijarno. Dijagrami dilatacija u zavisnosti od vremena su dati za različite nivoe opterećenja.

**Relaksacija napona** predstavlja postepeno smanjenje napona kada je materijal izložen konstantnoj dilataciji (Sl. 3-10).



Sl. 3-10 Relaksacija napona pri konstantnoj dilataciji

Ako se pretpostavi da je istorija dilatacija predstavljena skokovitom funkcijom, sa amplitudom  $\varepsilon_0$  :

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 H(t) \tag{3.12}$$

napon u viskoelastičnom materijalu  $\sigma(t)$ , opada, kao što pokazuje Sl. 3-11. Restitucija napona, prikazana na slici, nije uzeta u obzir ni u Hukovom, ni u Njutnovom zakonu.

Količnik promenljivog napona i amplitude dilatacija je veličina  $E(t)$ :

$$E(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} \quad (3.13)$$

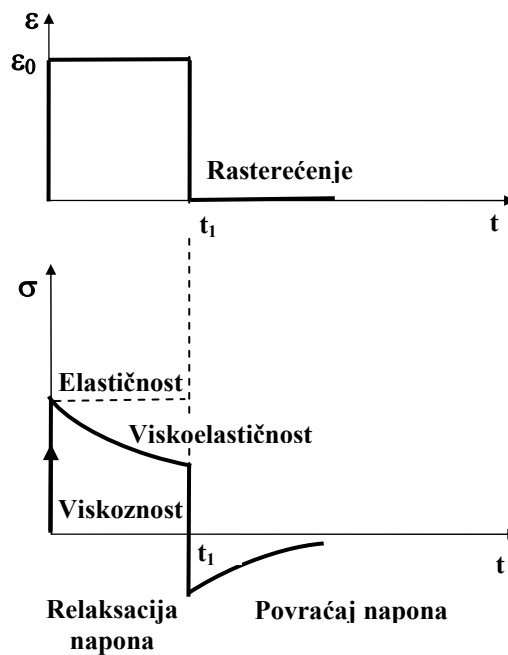
i zove se *modul relaksacije* (Leaderman, 1957., Sieglaf, 1976., Fransoa, 2002., Kozak, Lucić, 2009.).

Opšti oblik izraza, kojim se računa modul relaksacije, je sledeći:

$$E(t) = \Phi(t, \varepsilon) + E_\infty(\varepsilon) \quad (3.14)$$

gde je  $E(t)$  - trenutni modul popustljivost,  $\Phi(t, \varepsilon)$  - funkcija relaksacije. Grafički prikaz jednačine (3.14) daje krive relaksacije napona. Ako veličine  $\Phi$  i  $E_\infty$  ne zavise od deformacije, onda je modul relaksacije za  $t > 0$  linearna funkcija vremena:

$$E(t) = \Phi(t) + E_\infty \quad (3.15)$$



Sl. 3-11 Uporedni prikaz nastanka i restitucije napona, pri konstantnoj deformaciji, kod elastičnih, viskoznih i viskoelastičnih materijala

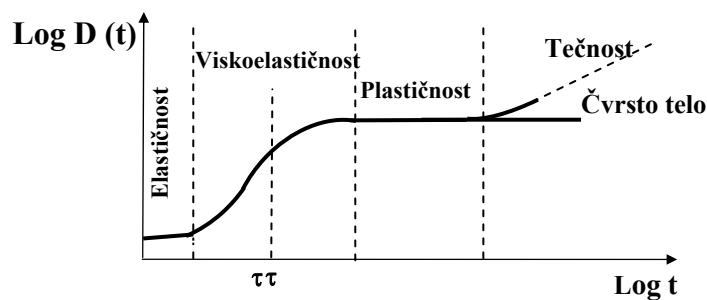
Kod linearnih, viskoelastičnih čvrstih tela, modul relaksacije  $E_\infty > 0$ . Vrednost  $E_0 = \Phi(0) + E_\infty$  zove se početni ili trenutni modul. Kod linearnih, viskoelastičnih tečnosti modul  $E_\infty \rightarrow 0$ .

Viskozno tečenje i relaksacija napona, osim kod linearnog, mogu da se jave i kod prostornog stanja, napona, ili deformacija. Modul relaksacije pri smicanju obeležava se s  $G(t)$ . Kod zapreminskih dilatacija, postoji zapreminski elastični modul  $B$ .

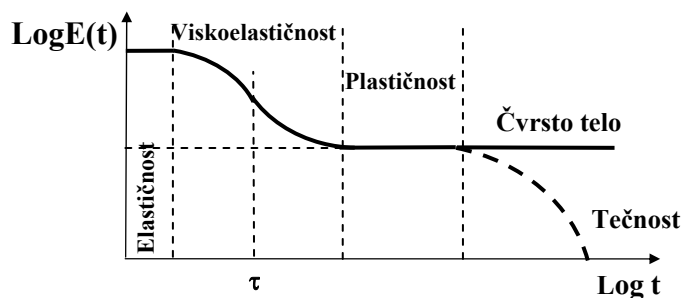
Analogna veličina u viskoelastičnosti je  $B(t)$ . Kod modula popustljivosti, postoji sličan način obeležavanja:  $J_G(t)$  je modul popustljivosti pri smicanju,  $J_E(t)$  ili  $D(t)$  je modul popustljivosti pri zatezanju, a  $J_B(t)$  je modul popustljivosti kod prostornih naprezanja.

Definisanje modula viskoznog tečenja i modula relaksacije omogućava, da se na drugi način istakne razlika između tečnosti i čvrstih tela, kao i između viskoelastičnih tečnosti i čvrstih tela. Elastična tela ispoljavaju poseban slučaj viskoznog tečenja, jer su napravljena od materijala za koji je modul popustljivosti  $D(t)=D_0H(t)$ , gde je  $D_0$  konstanta, jednaka recipročnom modulu elastičnosti. Iz navedenog izraza vidi se da je dilatacija elastičnog tela u potpunosti povratna. Drugi specijalni slučaj je viskozna tečnost. Za viskoznu tečnost modul popustljivosti je  $D(t)=(1/\eta)\cdot H(t)$ , gde je  $\eta$  viskoznost tečnosti. Iz ovog izraza vidi se da je dilatacija viskozne tečnosti neograničena.

Ward i Sweeney (2004.) smatraju da kod viskoelastičnog čvrstog tela funkcija  $D(t)$  teži konačnoj konstantnoj vrednosti, kada vreme teži beskonačnosti. Kod viskoelastične tečnosti, funkcija  $D(t)$  povećava se bez ograničenja, s porastom vremena (Sl. 3-12). Na sličan način može se definisati i viskoelastično čvrsto telo: to je materijal za koji, kada vreme teži beskonačnosti, funkcija  $E(t)$  teži konačnoj konstantnoj vrednosti. Kod viskoelastične tečnosti funkcija  $E(t)$  vrlo brzo teži nuli (Sl. 3-13).



Sl. 3-12 Shematsko predstavljanje zavisnosti smičući modul popustljivosti - vreme, u logaritamskoj razmeri



Sl. 3-13 Shematsko predstavljanje zavisnosti smičući modul relaksacije - vreme, u logaritamskoj razmeri

Između vremenski zavisnih modula postoji veza. Relacije između modula viskoznog tečenja i modula relaksacije, date su u prostornoj ravni, Laplas Karsonovom relacijom:  $p\mathcal{L}(k(t))=1/p\mathcal{L}(m(t))$ , gde su:  $k(t)$  - moduli popustljivosti,  $m(t)$  - moduli relaksacije,  $\mathcal{L}(k(t))$  - Laplas Karsonova funkcija. Njihova veza nije jednostavna i u opštem slučaju  $G(t) \neq \frac{1}{J(t)}$  kao i  $E(t) \neq \frac{1}{D(t)}$ , iako su ti moduli manifestacije jedne iste pojave – viskoelastičnosti. To je zbog toga što je relaksacija napona proces koji teži sopstvenom ravnotežnom stanju, mnogo brže nego što se to dešava pri viskoznom tečenju.

Viskozno tečenje i relaksacija napona su, dakle, *statički testovi*. Oni su pogodni za ispitivanje odziva materijala, tokom dugačkih perioda vremena, ali su manje tačni za kratke periode vremena. Za ispitivanje brzih odziva materijala koriste se *dinamički testovi*.

Kod dinamičkih reoloških merenja, za razliku od statičkih, menjaju se i veličina i pravac merene veličine, odnosno, oscilatorno se menjaju njena amplituda i smer.

U dinamičkim reološkim testovima meri se napon (ili dilatacija), koji nastaje zbog oscilatorno promenljive deformacije (ili napona). Ovakav pristup je koristan, zato što se *vektori napona i dilatacija prikazuju kao projekcije stvarnih vektora, koji rotiraju u kompleksnoj ravni, s frekvencijom  $\omega$* .

Kada je viskoelastičan materijal izložen oscilatorno promenljivom opterećenju, i dilatacija će biti oscilatorno promenljiva, i imaće istu kružnu učestalost  $\omega$ , ali će zaostajati u fazi za ugao  $\delta$ . To je slično zaostaloj deformaciji, primećenoj kod viskoznog tečenja. Dilatacija zaostaje za naponom za fazni ugao  $\delta$ , i to je vidljivo čak i kad je kontrolisana promenljiva dilatacija, a ne napon.

Taj oblik vremenski zavisnih, periodičnih dilatacija, razmatra teorija harmonijskih oscilacija. To je potpuno normalno, pošto signal proizvoljnog oblika može da se razvije korišćenjem Furijeovih redova u harmonijsku funkciju. Sa matematičkog stanovišta, periodični signal može da se napiše u obliku kompleksne eksponencijalne funkcije, korišćenjem Furijeovih pravila.

Ako se uzme, da se početak vremenske ose poklapa s vremenom u kojem dilatacija ima maksimalnu vrednost, funkcija koja opisuje dilataciju ima sledeću formu:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos \omega t \quad (3.16)$$

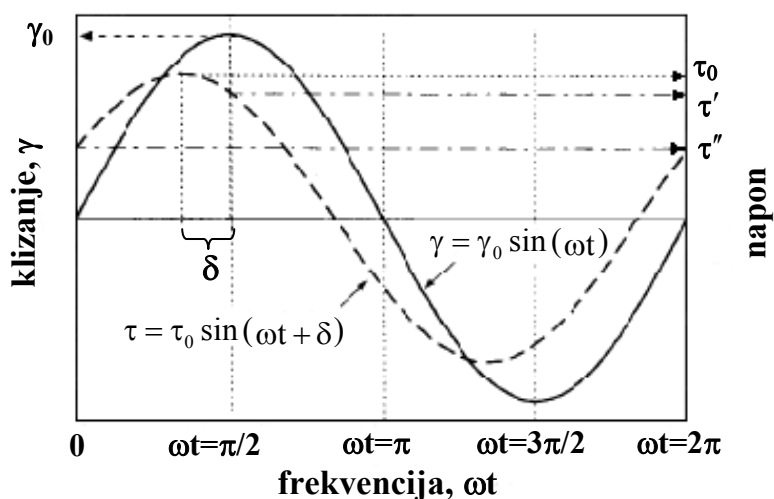
gde je  $\varepsilon_0$  -amplituda deformacije,  $\omega$  - frekvencija deformacije a t-vreme deformisanja.

Ako je dilatacija uzrokovana dejstvom mehaničke sile, ona zaostaje za naponom za fazni ugao  $\delta$ :

$$\sigma(t) = \sigma_0 \cos(\omega t + \delta) \quad (3.17)$$

gde je  $\sigma_0$  - amplituda napona,  $\omega$  - frekvencija napona, t – vreme,  $\delta$  - fazni ugao.

Opseg posmatrane frekvencije, teorijski, kreće se od nule do beskonačnosti. Međutim, frekvencije ispod 0,1Hz odgovaraju seizmičkim talasima. Za čvrsta tela opseg frekvencije je od 0,1Hz do 10kHz, zavisno od strukture i veličine. Naponski talasi od 20Hz do 20kHz odgovaraju zvučnim talasima a iznad 20kHz su ultrazvučne frekvencije. Ultrazvučne frekvencije od 1 do 10 MHz uobičajene su pri izvođenju ispitivanja bez razaranja.



Sl. 3-14 Dijagram zavisnosti smičućeg napona od klizanja. Pomeraj napona u odnosu na klizanje je fazni ugao  $\delta$ .

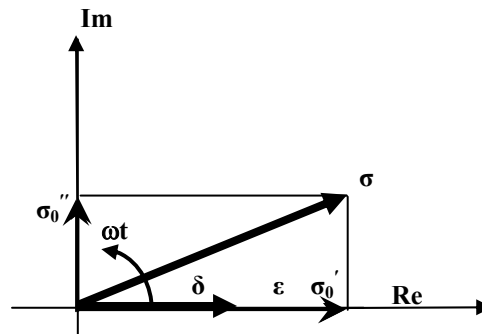
U slučaju elastičnog tela, fazni ugao  $\delta$  jednak je nuli, a primenjeni napon je u fazi s dilatacijom (Sl. 2-3) Za idealno viskoznu tečnost fazni ugao je  $\delta=\pi/2$  i napon je potpuno van faze s deformacijom, ali je u fazi s brzinom deformacije (Sl. 2-9). S povećanjem viskoznih svojstava, povećava se tangens faznog ugla  $\delta$ , dok se povećanjem elastičnih svojstava, smanjuje tangens faznog ugla  $\delta$  (Sl. 3-14). Strelice na slici pokazuju fizičko značenje smičućih napona  $\tau'$  i  $\tau''$ , koji odgovaraju elastičnoj komponenti dinamičkog modula klizanja– modulu skladištenja  $G'$ , odnosno viskoznoj komponenti – modulu gubitka  $G''$ . Shaw i MacKnight (2005.) smatraju da je tangens faznog ugla  $\delta$  (*loss tangent* – bezdimenzionalna veličina), idealan parametar za praćenje

promene iz viskoznog tečnog u čvrsto stanje, jer predstavlja meru gubitaka unutrašnjeg trenja. Za većinu metala  $\delta$  je ispod 0,01.

Vektor napona može se razložiti na dva pravca: jedna komponenta je u fazi s deformacijom, a druga je pomerena za ugao od  $90^0$ , u odnosu na fazu deformacije:

$$\sigma^* = \sigma'(t) + \sigma''(t) = \sigma_0' \cos \omega t + \sigma_0'' \sin \omega t \quad (3.18)$$

Vektor dilatacija, koji se poklapa s realnom osom, i vektor napona, fazno pomeren za ugao  $\delta$ , prikazuje Sl. 3-15.



Sl. 3-15 Prikaz vektora napona i deformacije u kompleksnoj ravni

Sa iste slike vidi se da važe i sledeće relacije:

$$\tan \delta = \frac{\sigma_0''}{\sigma_0'} \quad (3.19)$$

$$|\sigma^*| = \sigma_0 = \sqrt{(\sigma_0')^2 + (\sigma_0'')^2} \quad (3.20)$$

$$\sigma_0' = \sigma_0 \cos \delta \quad (3.21)$$

$$\sigma_0'' = \sigma_0 \sin \delta \quad (3.22)$$

Kompleksni oblik jednačine za napon  $\sigma^*$ , (3.18), definiše dva različita dinamička modula. Oba su u vezi s naponom i deformacijom:

$$E' = \frac{\sigma_0'}{\varepsilon_0} \quad (3.23)$$

$$E'' = \frac{\sigma_0''}{\varepsilon_0} \quad (3.24)$$

Oni se razlikuju po molekulskim interpretacijama. Prvi,  $E'$ , zove se *modul skladištenja* ili *akumulacije*, a drugi,  $E''$ , zove se *modul gubitka*. Odakle nazivi modul skladištenja i modul gubitka? Modul skladištenja zavisi od dela napona, koji je u fazi s

deformacijom, pa se energija koja nastaje u tom procesu deformisanja skladišti – akumulira u materijalu tokom ciklusa opterećenja. Nakon rasterećenja dolazi do povratnih dilatacija, bez gubitaka energije. Modul gubitka zavisi od dela napona koji nije u fazi s deformacijom. To znači da se energija dilatacija tokom rasterećenja konvertuje nepovratno u toplotu.

Jednačine (3.23) i (3.24) važe za testove zatezanja, a slično bi se dobilo i za opite smicanja ( $G'$  i  $G''$ ).

Kompleksni ili dinamički modul, koji se računa kao  $E^* = \frac{\sigma^*}{\varepsilon}$ , može se uz pomoć Ojlerove jednačine,  $e^{i\omega} = \cos \omega + i \sin \omega$ , predstaviti kao zbir modula skladištenja  $E'$  i modula gubitka  $E''$ :

$$E^* = E'(\omega) + i \cdot E''(\omega) \quad (3.25)$$

gde je:  $E'(\omega) = \frac{\sigma_0'}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \cos \delta$ ,  $E''(\omega) = \frac{\sigma_0''}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \sin \delta$ .

Iz jednačine (3.25) vidi se da kompleksni modul zavisi od dve veličine: apsolutne vrednosti početnog modula  $E_0 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$  i veličine faznog ugla  $\delta$ . Obe veličine mogu da zavise od frekvencije i amplitude deformisanja.

Apsolutna veličina kompleksnog modula računa se kao:  $E^* = \sqrt{(E')^2 + (E'')^2}$ .

Umesto dinamičkog modula i njegovih komponenti mogu da se koriste i njihove recipročne vrednosti, dinamička popustljivost i njene komponente:

$$D^* = D'(\omega) + i \cdot D''(\omega) \quad (3.26)$$

gde je  $D'(\omega) = \frac{\varepsilon_0}{\sigma_0} \cos \delta$  i  $D''(\omega) = \frac{\varepsilon_0}{\sigma_0} \sin \delta$ .

Odnos dinamičkog modula i dinamičke popustljivosti definiše sledeća jednačina:

$$E^* D^* = 1 \quad (3.27)$$

Jednačina (3.27) sledi iz pravila računanja kompleksnih brojeva.

Veza između dinamičkih modula i faznog ugla  $\delta$  je sledeća:

$$\delta = \frac{E''}{E'} = \frac{D'}{D''} \quad (3.28)$$

Modul skladištenja  $E'(\omega)$  predstavlja elastični (realni) deo kompleksnog modula



$E^*(\omega)$ , a modul gubitka  $E''(\omega)$ , predstavlja viskozni (imaginarni) deo kompleksnog modula.

Ako se i dilatacija predstavi u kompleksnoj ravni, onda kompleksni modul elastičnosti postaje  $E^* = \frac{\sigma^*}{\varepsilon^*}$  pa ograničenje da se početak vremenske ose poklopi s vremenom u kome dilatacija ima maksimalnu vrednost, postaje nevažno.

Dinamički modul je, dakle, sinonim za kompleksni modul, i on se koristi za prikaz prelaza iz vremenskog u frekventni domen. On nema veze s pojavom inercije ili rezonance. Oznake za dinamičke module uzete su po DIVK-u (Društvo za integritet i vek konstrukcija).

### 3.3. Uticaj temperature i vlažnosti

Za materijal koji se ugrađuje u razne konstrukcije ili uređaje važno je da se dobro poznaje promena njegovih svojstava, tokom čitavog radnog veka i u različitim uslovima eksploatacije. Čak i kod elastičnih materijala postoje ograničenja u pretpostavci da su svojstva tokom vremena konstantna. Naime, to važi samo za izotermne uslove.

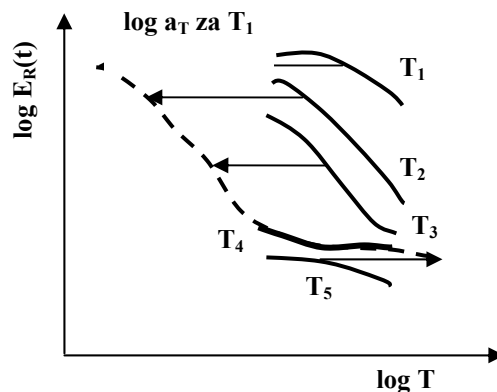
Kod polimera, kao klase materijala, molekularna struktura je uzrok velikih promena mehaničkih svojstava tokom vremena. Osim s vremenom, svojstva polimera se takođe znatno menjaju i s promenom uslova sredine. Najvažniji uticajni faktori su temperatura i vlažnost.

Uticaj temperature na svojstva polimera proučavali su: Ferry (1980.), Drozdov (1998.), Shaw, MacKnight (2005.), Brinson H.F. i Brinson L.C. (2008.), Lakes (2009.), i drugi autori.

U proučavanju uticaja temperature na svojstva polimera koristi se **PSVT-princip superpozicije vremena i temperature** (TTSP-time temperature superposition princip). Taj princip zove se i **princip smanjenja broja promenljivih**. Po tom principu opisivanje temperaturnih uticaja u viskoelastičnosti je vrlo slično opisivanju vremenskih uticaja, i vrši se u istoj vremenskoj razmeri. Za primenu principa PSVT na određeni tip polimera postoji i procedura i kriterijumi koje je odredio Ferry (1980.).

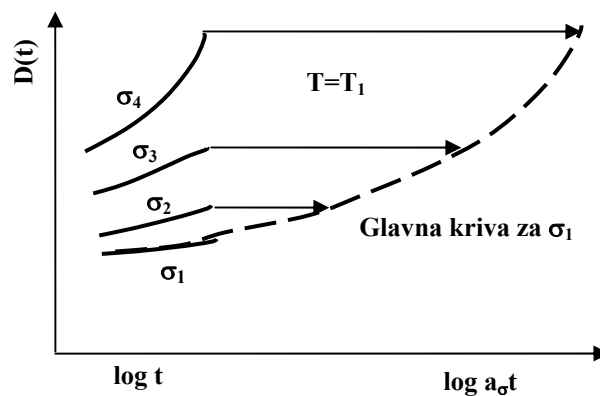
PSVT govori da podaci iz testa viskoznog tečenja, zabeleženi na temperaturi iznad referentne, mogu da se koriste za neku drugu temperaturu, uz horizontalni faktor

pomeranja jednak vremenskom (Sl. 3-16). Materijali za koje važi PSVT zovu se *prosti termoreološki materijali*.



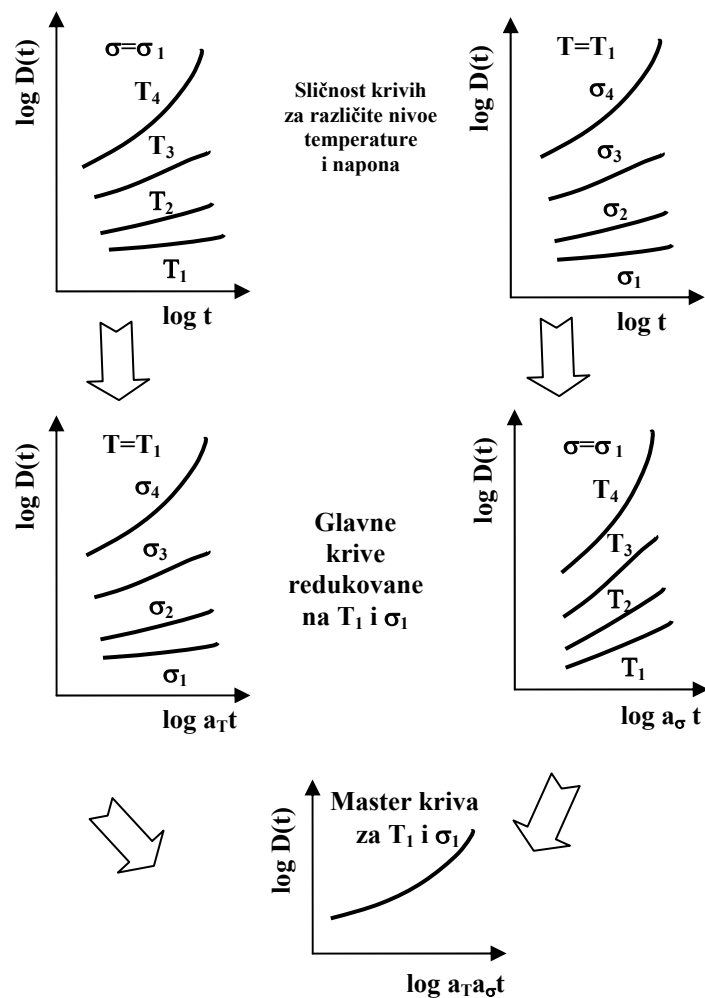
Sl. 3-16 Glavna kriva zavisnosti svojstava od temperature pri relaksaciji polimera dobijena primenom temperaturnog horizontalnog faktora pomeranja po PSVT.

Osim PSVT koristi se i PSNV - **princip superpozicije napona i vremena** (TSSP-time stress superposition princip), prikazan na (Sl. 3-17).



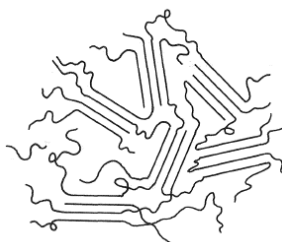
Sl. 3-17 PSNV -princip superpozicije napona i vremena

Ova dva principa mogu da se kombinuju (PSNVT - princip superpozicije napona vremena i temperature), tako da se dobije glavna (master) kriva, koja predstavlja funkciju i temperature i napona ( Sl. 3-18).



Sl. 3-18 Kombinovanje TTSP i TSSP za crtanje TTSP glavne krive

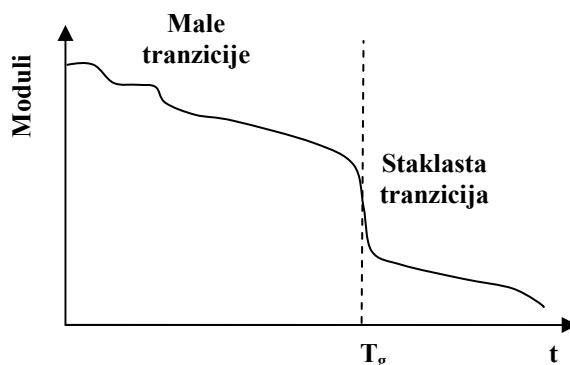
Generalno, kada se govori o zavisnosti mehaničkih svojstava polimera od temperature, treba govoriti posebno o amorfnim, o kristalnim i o semikristalnim polimerima (Sl. 3-19).



Sl. 3-19 Shematski prikaz semikristalnih polimera: paralelne i krive linije predstavljaju delove polimera u kristalnom i amorfnom stanju

Kod amorfnih polimera na niskim temperaturama može da postoji nekoliko manjih tranzicija koje ne dovode do velikih promena modula (Sl. 3-20). Osim malih tranzicija, kod njih postoji još jedna tranzicija, koja dovodi od velikih promena modula. Zove se staklasta ili fazna tranzicija II reda. Temperatura na kojoj se dešava staklasta

tranzicija obeležava se sa  $T_g$ .



Sl. 3-20 Zavisnost viskoelastičnog modula od temperature kod amorfnih polimera

Kod semikristalnih polimera postoje isti karakteristični regioni u dijagramu zavisnosti modula od temperature, kao kod amorfnih. Gubitak modula u regionu staklaste tranzicije, za semikristalne polimere, je za jedan do dva reda veličine veći nego kod amorfnih polimera. Semikristalni polimeri iznad temperature stakljenja omekšavaju, zbog povećanja viskoznosti njihovih amorfni delova, dok kristalni delovi ostaju čvrsti sve do temperature topljenja. Ispod temperature stakljenja semikristalni polimeri su u čvrstom stanju. Uticaj staklaste tranzicije na svojstva semikristalnih polimera zavisi od stepena kristalizacije i manji je nego kod čisto amorfnih.

Staklasta tranzicija zove se i *zamrzavanje molekularnog kretanja* i koristi se za poređenje vremena molekularnog kretanja i vremena izvođenja eksperimenta. Mehanizam molekularnog kretanja zavisi od različitih fizičkih i hemijskih faktora, kao što su: molekularna arhitektura, temperatura, prisustvo apsorbiranih fluida od kojih bubri polimer.

Kada se molekul polimera izduži u pravcu dejstva opterećenja dolazi do *smanjenja njegove entropije*. Ponašanje sintetičkih polimera, na primer gume, odgovara skoro u potpunosti ovom entropijskom mehanizmu s malim izobličavanjem njihovih kovalentnih veza i malim promenama njihove unutrašnje energije.

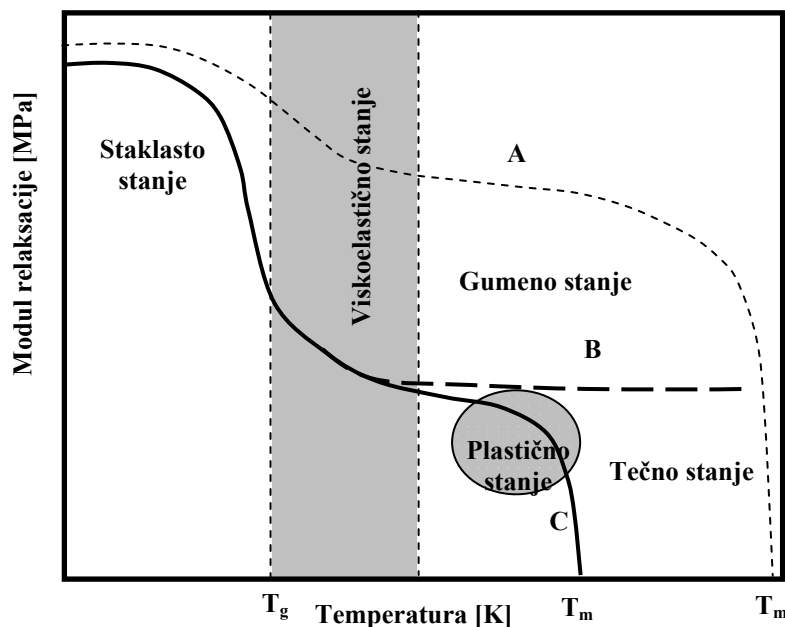
Pri promeni uglova hemijskih lanaca, atomi se mogu pomeriti u nove pozicije, s većom unutrašnjom energijom. To su mala kretanja, koja se obavljaju vrlo brzo, za  $10^{-12}$  sekundi, ali promene koje se dese mogu biti velike. Na primer, relativno blago obrtanje oko sopstvene ose jednostrukog lanca C-C, može da proizvede ogromne promene u sastavu molekula i da dovede do *povećanja unutrašnje energije*.

Koristeći zakone termodinamike može se izraziti kako povećanje mehaničkog

deformacionog rada  $Fdx$ , izvršenog u jednoj uređenoj sredini, utiče na povećanje unutrašnje energije -  $dU$ , odnosno smanjenje entropije -  $dS$ :

$$Fdx = dU - TdS \quad (3.29)$$

Jednačina (3.29), prikazuje zavisnost svojstava polimera od temperature. Na osnovu nje, vrši se podela na: elastičnu (staklasto-krtu), viskoelastičnu (kožnu), gumenu, plastičnu i tečnu oblast. Kriva koju prikazuje jednačina (3.29) zove se **termomehanička kriva**. Prikazivanje modula u zavisnosti od temperature, dato jednačinom (3.29), suštinski je alat u nauci o polimerima i njihovoj tehničkoj primeni. Tako dobijen dijagram (Sl. 3-21), osnovno je inženjersko oruđe, a tu se takođe vidi i trag molekularnog kretanja u materijalu.



Sl. 3-21 Zavisnost svojstava polimera od temperature: A-za kristalni, B-za semikristalni-umreženi, C-za amorfni polimer i odgovarajuća stanja: staklasto-krto, tranziciono-viskoelastično, gumeno, plastično i tečno.

U staklastom stanju, kod svih polimera, na temperaturama manjim od  $T_g$ , povećava se razmak atoma u molekulu, a susedni redovi atoma pomeraju se u smeru delovanja sile. Proces odmotavanja lanaca praktično je zamrznut, tako da je jedini raspoloživ odgovor polimera na dejstvo opterećenja izduživanje lanaca. Nakon prestanka delovanja sile atomi se vraćaju u prvobitni položaj. Taj odziv je trenutni, i povratan. Takve deformacije ima na primer staklo. Njegove deformacije su trenutne, i za njih važi Hukov zakon. Dakle, u staklastom stanju, moguća je samo elastična dilatacija međuatomske veze. Zbog toga polimeri u toj oblasti pokazuju relativno visok (i do 3Gpa), ali konstantan modul (nezavisan od temperature), koji se zove **modul**

**stakljenja**, obeležava se u teoriji polimera sa  $E_g$  (glass), a u teoriji elastičnosti sa  $E$ , odnosno polimer je tvrd i krt.

U viskoelastičnom stanju, u okolini temperature  $T_g$ , u trenutku opterećenja spoljašnjom silom dolazi do trenutne elastične deformacije, kao u staklastom stanju. Nakon toga, dolazi do međusobnog kretanja pojedinih delova makromolekula, odnosno, do uvrtnjanja lanaca i promene njegovog oblika. Ceo makromolekul se pri tome izdužuje, u smeru dejstva sile. Ova pojava zove se *promena konformacije makromolekula*. Molekul se vraća u prvobitno stanje nakon prestanka dejstva sile tek posle velikog perioda vremena.

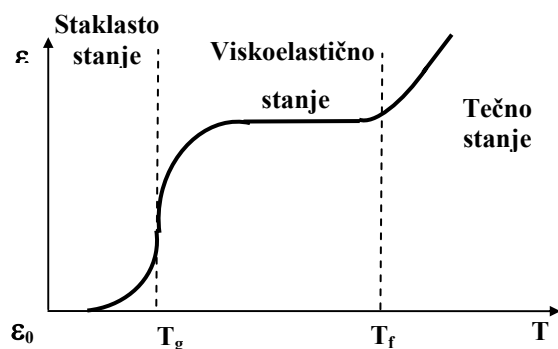
U viskoelastičnoj oblasti materijal se, dakle, ponaša kao sredina između stakla i gume - kao koža. Zbog toga se ta oblast naziva još i kožna. Za nju je karakteristična pojava naglih promena elastičnih svojstava, pa se ona zbog toga zove i *oblast tranzicije*. Za tu oblast karakterističan je viskoelastični modul  $E(t)$ , koji zavisi od vremena.

*Gumeno stanje polimera* nastaje zbog međusobnog kretanja čitavih lanaca makromolekula. Kada se temperatura poveća iznad granične vrednosti  $T_g$ , krutost dramatično opada, možda i za dva reda veličine, do neke vrednosti koja se zove **gumeni** modul  $E_r$  (ruberry), **ili modul plastičnosti**. Na temperaturama iznad  $T_g$  procesi su brzi, skoro trenutni, i polimer se ponaša kao guma, odnosno, deformacije su potpuno povratne. U gumenom regionu, nastaju izrazite razlike u ponašanju između linearnih i umreženih polimera. Umreženi polimeri zadržavaju svojstva gumenog stanja, dok kod linearnih s povećanjem temperature sve više dolaze do izražaja svojstva tečnosti.

Prelazi između deformacijskih stanja dešavaju se u prelaznim temperaturnim područjima. Svako prelazno temperaturno područje ima karakterističnu temperaturu. Temperatura prelaza iz staklastog u viskoelastično stanje obeležava se sa  $T_g$ . Zove se temperatura staklastog prelaza ili stakljenja a temperatura prelaza iz viskoelastičnog u gumeno stanje zove se temperatura tečenja i obeležava se sa  $T_f$ . To su *temperature fazne tranzicije I i II reda*.

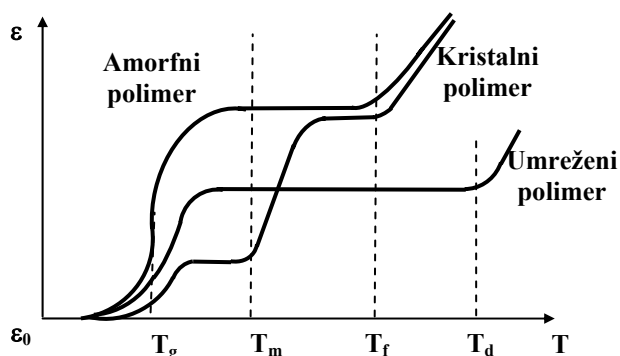
*Termomehanička kriva može se nacrtati i kao kriva deformacija – temperatura* (Sl. 3-22). U dijagramu deformacija – temperatura vidi se deo krive koji je skoro paralelan sa apscisom, što znači da je u tom području deformacija skoro konstantna. Taj deo krive zove se viskoelastični plato. Kod amorfnih polimera  $T_g$  se ne menja, a  $T_f$  raste s porastom molekulske mase, dakle, proširuje se viskoelastični plato. Kod polimera s

dovoljno malim molekulskim masama plato iščezava, pa se  $T_g$  i  $T_f$  poklapaju. Takvi polimeri direktno prelaze iz staklastog u tečno stanje.



Sl. 3-22 Termomehanička kriva amornog polimera

Sl. 3-23 prikazuje zavisnost deformacije od stepena uređenosti strukture polimera. Amorfni polimeri mogu imati sva tri deformacijska stanja. Umreženi polimeri, u istim uslovima, imaju manju viskoelastičnu deformaciju nego linearni amorfni. Oni ne prelaze u tečno stanje, nego se degradiraju na temperaturi  $T_d$ . Degradacija se dešava zbog raspadanja makromolekula. Kristalni polimeri na temperaturi neznatno iznad  $T_g$ , imaju malu viskoelastičnu deformaciju. Na temperaturi topljenja  $T_m$ , nestaje kristalni poredak. Ako je  $T_m = T_f$ , kristalni polimer postaje tečnost, koja teče, a ako je  $T_m < T_f$ , kristalni polimer ima još jednu, i to veću, viskoelastičnu deformaciju. Tačan oblik termomehaničke krive kristalnog polimera zavisi od termičke istorije uzorka, posebno od brzine hlađenja nakon topljenja i kaljenja. Kristalni polimeri su *mehanički ekvivalentni* ako imaju jednake dužine lanaca, isti procenat kristalizacije, istu kristalnu strukturu i jednake temperature  $T_g$  i  $T_m$ .



Sl. 3-23 Termomehanička kriva za amorfni, kristalni i umreženi polimer

Promenom temperature, dakle, menja se ne samo stanje polimera nego i faza. Za oblikovanje većine polimera najbolje je ako mogu da budu u tečnom stanju. Oblikovanje se radi u relativno uskom temperaturnom području, da ne bi došlo do

nepoželjnih promena u strukturi makromolekula.

Prva jednačina, koja opisuje uticaj temperature na svojstva, odnosi se na amorfne materijale. To je **Arenijusova jednačina**:

$$\Delta H = -R \left[ \frac{\partial(\ln v)}{\partial(1/T)} \right]_p \quad (3.30)$$

gde je  $\Delta H$  energija aktivacije,  $R$  je univerzalna gasna konstanta. Arenijusova jednačina opisuje uticaj temperature na brzinu hemijske reakcije. Ova jednačina ima primenu samo kod rešavanja problema gde postoji konstantna aktivaciona energija. Ona se ne može primeniti u regionu staklaste tranzicije.

U regionu staklaste tranzicije primenjuje se **jednačina WLF - Williams, Landel, Ferry**:

$$\log a_T = \frac{C_1(T - T_S)}{C_2 + (T - T_S)} \quad (3.31)$$

gde je:  $a_T$  - faktor horizontalnog pomeranja,  $C_1, C_2$  - univerzalne konstante,  $T$  - temperatura za koju se računa faktor pomeranja,  $T_S$  - referentna temperatura, različita za različite polimere. Konstante  $C_1, C_2$  u originalnom eksperimentu određene su za poliizobutilen na  $T_S = 243K$ . Veličine univerzalnih konstanti su  $C_1 = 7,4; C_2 = 51,6K$ . Po Salmenu (1984.) univerzalne konstante za drvo su  $C_1 = 18,18; C_2 = 77,2K$  a po Lenth-u (1999.) te univerzalne konstante za različite vrste drveta su  $C_1 = 2,05 - 7,3; C_2 = 66,4 - 388K$ . Jednačina (3.31) važi za amorfne polimere u opsegu od  $T_g$  do  $T_g + 100^0C$ . Ona se koristi za računanje faktora horizontalnog pomeranja, u dijagramu modul-temperatura, odnosno za redukovanje jedne promenljive.

Ispod  $T_g$  koristi se modifikovana Arenijusova jednačina:

$$a_T(T) = \exp \frac{\Delta H}{R} \left[ \frac{1}{T} - \frac{1}{T_S} \right] \quad (3.32)$$

odnosno

$$\log a_T(T) = - \frac{\Delta H}{2,303R} \left[ \frac{1}{T} - \frac{1}{T_S} \right] \quad (3.33)$$

gde je  $R$  - univerzalna gasna konstanta:  $R = 8,31J / molK$ ,  $T$  - temperatura za koju se računa faktor pomeranja,  $T_S$  - referentna temperatura, obe u  $K$ .

Kod amorfni polimera, koristi se samo horizontalni – vremenski faktor



pomeranja, a kod semikristalnih i kristalnih, treba koristiti i, empirijski određen, faktor vertikalnog pomeranja. Empirijski podaci se koriste zbog toga što mehanizam delovanja faktora vertikalnog pomeranja u termomehaničkoj krivoj nije dovoljno dobro proučen, naročito u oblasti iznad  $T_g$ . Faktor vertikalnog pomeranja neki autori zovu i *faktor omekšavanja materijala*. Nakon primene vremenskog, tj. horizontalnog faktora pomeranja, dobije se *redukovano vreme*  $t^*$ , koje se računa iz obrasca:

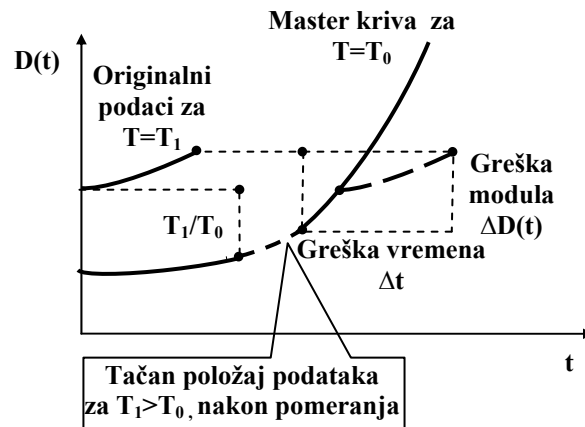
$$t^* = \frac{t}{a_T(T)} \quad (3.34)$$

Pomoću kojeg se materijalni parametri mogu izraziti na sledeći način:

$$D(t^*, T_g) = D(t, T) \quad (3.35)$$

Vreme  $t^*$  dalje figuriše i u konstitutivnim jednačinama.

Ako se primeni samo horizontalni faktor pomeranja može doći do pojave grešaka kao što pokazuje Sl. 3-24

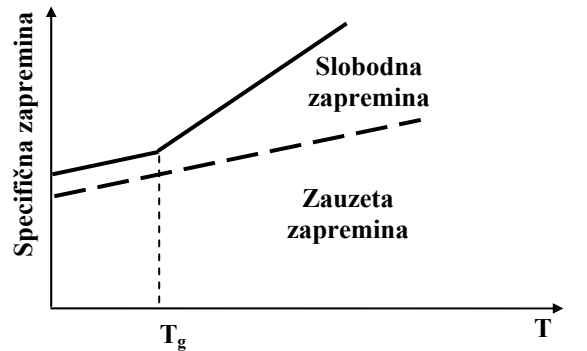


Sl. 3-24 Potencijalna greška pri uzimanju samo horizontalnog faktora pomeranja

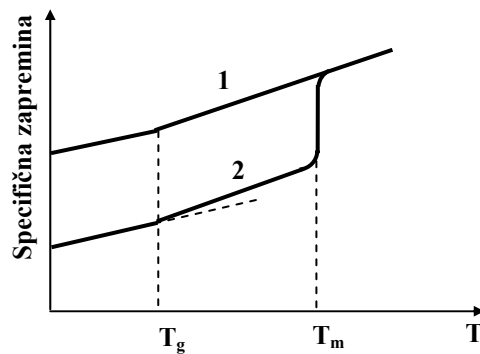
WLF jednačina važi samo za zapreminsku staklastu tranziciju, a osim od vrste polimera, zavisi i od *slobodne zapremine* (Sl. 3-25 i Sl. 3-26). Slobodna zapremina polimera (Ferry (1980), Drozdov (1998.), Brinson H.F. i Brinson L.C., (2008.)), definiše se kao razlika između zauzete zapremine i njegove specifične zapremine. Ona može da se koristi za određivanje stepena kristalizacije polimera.

Nagib krive specifična zapremina-temperatura naglo se povećava nakon temperature  $T_g$ . Povećanje slobodne zapremine za temperature iznad  $T_g$  tumači se povećanim molekularnim kretanjem. Slobodna zapremina povećava se s povećanjem sadržaja vlage. Može se, takođe, uočiti da je kod semikristalnih i kristalnih polimera teže tačno odrediti temperaturu stakljenja, nego kod amorfni.

Pošto se slobodna zapremina naglo povećava, s porastom temperature iznad temperature staklaste tranzicije, najčešće se za referentnu temperaturu uzima temperatura stakljenja, odnosno staklaste tranzicije.

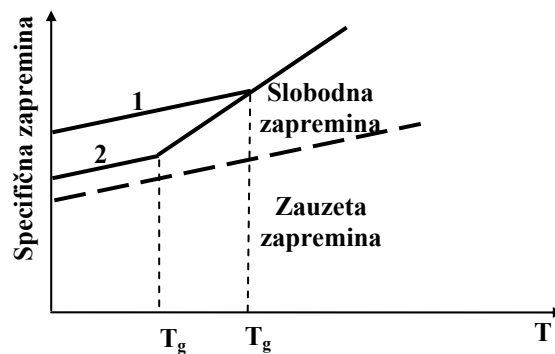


Sl. 3-25 Odnos temperature i specifične zapremine za amorfne polimere



Sl. 3-26 Odnos temperature i specifične zapremine za semikristalne (1) i kristalne (2) polimere

Slobodna zapremina razlikuje se i za zasićene i nezasićene polimere, kao što pokazuje Sl. 3-27.



Sl. 3-27 Promena specifične zapremine s temperaturom za zasićene (1) i nezasićene (2) polimere

Iz svega ovoga može se zaključiti da se uticaj temperature može posmatrati kao izolovan uticaj i kao uticaj spregnut s drugim uticajima.

Što se tiče uticaja vlažnosti na viskoelastična svojstva polimera, i on može da se posmatra kao izolovan ili u sprezi s temperaturom. Ispitivanje tog uticaja je veoma široka oblast i ovde će se samo spomenuti neki radovi koji proučavaju uticaj i

temperature i vlažnosti na drvo.

Kod drveta kao viskoelastičnog materijala vrlo je važan istovremeni uticaj vlage i temperature (Popović, 2005.).

Prema Popoviću (2006.) moduli elastičnosti drveta ako su određeni u istom anatomskom pravcu i pri istoj vlažnosti i temperaturi imaju približno jednake vrednosti pri zatezanju i savijanju.

Postoji mnogo radova koji opisuju ispitivanja drveta savijanjem ali su eksperimenti rađeni u različitim uslovima temperature i vlažnosti i za različite anatomske pravce. Podaci o tome postoje u literaturi: Ашкенази (1978.), Соболев (1979.), Kollmann (1984.), Danon, Banković (1985.), Zakić (1985.), Kolin (1985.), Popović (1996.), Zakić (2003.), Popović (2006.), Popović, Šoškić, Mirić (2007.), Kutnar, Šernek (2007.). Iz tih radova može se zaključiti da u većini slučajeva postoji linearna veza temperature i vlažnosti s jedne strane i modula elastičnosti drveta, s druge strane.

Modul elastičnosti drveta, kao i fazni pomeraj (gubitak tangente)  $\tan\delta$ , zavise i od vlažnosti i od temperature. Po Lakes-u (2009.) vlažno drvo može se posmatrati kao termoreološki prosto u opsegu temperatura od 23-130<sup>0</sup>C i u opsegu frekvencija od 0,6Hz-20kHz. On je napravio uporedni prikaz dinamičkih modula elastičnosti dobijenih iz različitih eksperimenata: za vlažno drvo preuzetih od Salmena (1984.), za suvo drvo s različitim sadržajima vlage pri savijanju i pri frekvenciji od 1 Hz od Kelly-ja i sar. (1987.), i za vakuumski sušeno drvo ispitivano na smicanje pri istoj frekvenciji od Wert-a i sar. (1984.).

Uticaj stakljenja na svojstva drveta pominje još Ivanov (1962.). On razmatra uticaj stakljenja celuloze na viskoelastična svojstva drveta. Lenth (1999.) je eksperimentalno odredio preko dielektričnih svojstava za nekoliko vrsta drveta parametre Arenijusove i WLF jednačine, temperaturu stakljenja, proučavajući relaksaciju amorfnе celuloze i hemiceluloze na temperaturama od 20-200<sup>0</sup>C u drvetu vlažnosti od 0-20%. Lakes (2009.) smatra da je nosilac viskoelastičnih svojstava drveta, kao kompozita organskog porekla, u stvari lignin, čija je temperatura stakljenja oko 100<sup>0</sup>C .

### 3.4. SLM – Zenerov model

Model viskoelastičnosti ili Kelvin Voigt-ovog modela ili Kelvin Voigt-ovo i Hukovo telo. Paralelno veza prikazuje Sl. 3-28b.

stog tela koji predstavlja Hukovim, poznat je po Standardni linearni model (SLM), ili Zenerov model. Paralelno veza

ombinaciju Maksvelovog i Hukovog tela. Sl. 3-28a prikazuje redno i Hukovo telo

$E_M$

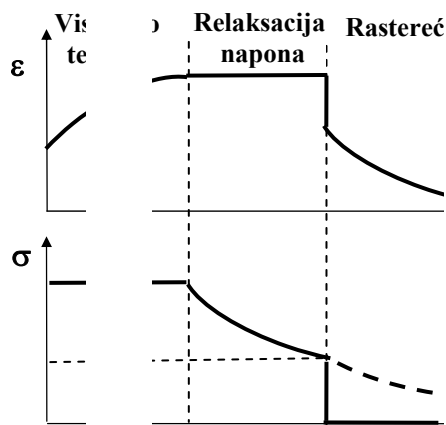
Sl. 3-28 Standa

Pri konstantnom naponu deformacija raste do određene granice. Nakon rasterećenja preostale deformacije postepeno opisuju i viskozno tečenje i rasterećenju.

linearni modeli za viskoelastično čvrsto telo

SLM daje trenutni odgovor odnosno, pri konstantnom naponu, elastična deformacija, a pri konstantnoj deformaciji, napon opada do određene granice. Nakon rasterećenja, elastična deformacija pada, kao što pokazuje Sl. 3-29. Ovaj model dobro opisuje ponašanje materijala pri rasterećenju.

čvrsto telo pri konstantnom naponu, napon opada do određene granice. Nakon rasterećenja, elastična deformacija pada, kao što pokazuje Sl. 3-29. Ovaj model dobro opisuje ponašanje materijala pri rasterećenju.



Sl. 3-29 Viskozno t

e, relaksacija i rasterećenje

erovog modela

SLM je dobio ime po Clarence Melvin Zeneru (1905–1993). Njegove rane hipoteze iz oblasti fizike čvrstih tela omogućile su razvoj računara, decenijama posle toga. On je američki fizičar, koji je prvi opisao električna svojstva korišćena kod Zenerove diode, koja je dobila ime po njemu. Inače, Zenerova dioda propušta struju, ne samo u željenom smeru kao obična dioda, nego i u suprotnom smeru, ako je napon veći od napona probijanja (poznatog kao Zenerov napon).

Zener je 1932. objavio rad u kojem je objasnio neadijabatski prelaz između energetske nivoa, pri čemu je uzeo u obzir i rasterećenje, a ne samo opterećenje materijala. S tim radom počinje istorija teorijskog istraživanja neadijabatske tranzicije koju su nastavili Landau i Stueckelberg. Zahvaljujući tom radu objašnjeno je otkazivanje - probijanje električnog izolatora, što je omogućilo pronalazak Zenerove diode, kao regulatora napona.

Pojam adijabatskog stanja ili termičke, odnosno energetske ravnoteže, je vrlo važan koncept u prirodnim naukama. Ovo stanje materijala podrazumeva postojanje dve vrste veličina koje opisuju posmatrani sistem: sopstvene vrednosti koje su uvek konstantne, i veličine koje se kontinualno menjaju (uz važan uslov da je njihova promena vrlo spora).

Sopstvene vrednosti zovu se *invarijante adijabatskog stanja*, a kontinualno promenljive veličine zovu se *adijabatski parametri stanja*. Stanje koje sistem zadržava, iako se adijabatski parametri kontinualno ali sporo menjaju, je *ravnotežno adijabatsko stanje*. Ako može da se definiše takav adijabatski parametar koji dobro oslikava ravnotežno adijabatsko stanje, on će istovremeno moći vrlo uspešno da opiše i objasni svojstva materijala izloženog, kako statičkom, tako i dinamičkom opterećenju.

Međutim, ako bi adijabatsko stanje bilo ravnotežno sve vreme, ne bi dolazilo ni do kakvih promena stanja. Takav materijal bio bi *mrtav*. Promene u materijalu, ipak, nekako se dešavaju. Te promene se zovu neadijabatska ili fazna tranzicija II reda.

Neadijabatska tranzicija dešava se jer se iznenada menja skup uticajnih promenljivih veličina. Njihova promena odudara od sporih promena adijabatskih parametara, pa se i stanje sistema usaglašava s tim promenama.

U svetu oko nas, ovakva vrsta tranzicije dešava se svuda. Kada god se dese brze promene stanja, one se mogu definisati kao neadijabatska tranzicija. Proces koji se dešavaju tokom neadijabatske tranzicije u velikoj meri zavise od odnosa dva vremena:

vremena dejstva opterećenja i vremena odgovarajuće promena stanja. Ako je odnos ta dva vremena mali, promene su intenzivne i velike, a ako je odnos vremena veliki, promene su vrlo male.

Kada se jedan parametar menja adijabatski, dve sopstvene vrednosti sistema mogu da se približe jedna drugoj, a zatim da se udalje, što govori da te sopstvene vrednosti menjaju svoj karakter. Ako se parametar varira s konačnom brzinom, sistem može skočiti iz jednog stanja u drugo, bez vidljive promene faze. Verovatnoća pojave ovakve tranzicije može se tačno izračunati, pod uslovom da sistem zadovoljava određena ograničenja.

### Redno vezan SLM

Ukupna deformacija redno vezanog SLM-a jednaka je zbiru deformacije redno vezanog Kelvin Voigt-ovog i Hukovog tela,  $\varepsilon = \varepsilon_H + \varepsilon_K$ , pa je:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_H} + \varepsilon_K \quad (3.36)$$

dok je napon u oba tela jednak ( $\sigma$ ).

Za Kelvin Voigt-ovo telo važi jednačina za napon (2.64), u sledećem obliku:

$$\sigma = E_K \varepsilon_K + \eta \dot{\varepsilon}_K \quad (3.37)$$

Zamenom deformacije  $\varepsilon_K$  iz jednačine (3.36) u jednačinu (3.37), dobija se:

$$\sigma = E_K \left( \varepsilon - \frac{\sigma}{E_H} \right) + \eta \left( \dot{\varepsilon} - \frac{\dot{\sigma}}{E_H} \right) \quad (3.38)$$

odnosno

$$\frac{E_H + E_K}{\eta} \sigma + \dot{\sigma} = E_H \left( \frac{E_K}{\eta} \varepsilon + \dot{\varepsilon} \right). \quad (3.39)$$

Jednačina (3.39), zove se *konstitutivna jednačina redno vezanog, linearno napregnutog SLM*. Ona se može napisati, u skladu s jednačinom linearne viskoelastičnosti (3.1), i u sledećem obliku:

$$p_0 \sigma + p_1 \dot{\sigma} = q_0 \varepsilon + q_1 \dot{\varepsilon} \quad (3.40)$$

odnosno

$$\sigma + \tau_\sigma \dot{\sigma} = E_H \tau_\sigma \left( \frac{1}{\tau_\varepsilon} \varepsilon + \dot{\varepsilon} \right) \quad (3.41)$$

gde je

$$\begin{aligned}
p_0 &= 1 \\
p_1 &= \frac{\eta}{E_H + E_K} = \tau_\sigma \\
q_0 &= \frac{E_H E_K}{E_H + E_K} \cdot \frac{\eta}{\eta} = E_H \frac{\tau_\sigma}{\tau_\varepsilon} \\
q_1 &= \frac{\eta E_H}{E_H + E_K} = E_H \tau_\sigma \\
\tau_\varepsilon &= \frac{\eta}{E_K}
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Veličine  $\tau_\varepsilon$  i  $\tau_\sigma$  imaju dimenzije vremena, kao kod Maksvelovog i Kelvin Voigt-ovog modela. Zovu se *vreme viskoznog tečenja* i *vreme relaksacije Zenerovog modela*.

Izraz (3.41) je linearna, PDJ prvog reda. Ona pokazuje da SLM zavisi od tri parametra materijala:  $E_H$ ,  $\tau_\varepsilon$  i  $\tau_\sigma$ , što znači da **dobro opisuje i viskozno tečenje i relaksaciju napona, i važi za viskoelastično čvrsto telo.**

**Pri konstantnom naponu**  $\sigma = \sigma_0 H(t)$ , za  $t \geq 0s$ , iz jednačine (3.41) dobije se konstitutivna jednačina viskoznog tečenja za linearno napregnut SLM:

$$\dot{\varepsilon} + \frac{E_K}{\eta} \varepsilon = \frac{E_H + E_K}{\eta E_H} \sigma_0 H(t) \tag{3.43}$$

odnosno

$$\dot{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{\tau_\varepsilon} = \frac{1}{E_H \tau_\sigma} \sigma_0 H(t) \tag{3.44}$$

Rešenje jednačine (3.44), koja je nehomogena, uz početni uslov da je za  $t=0s$   $\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E_H}$ , predstavlja zbir opšteg rešenja odgovarajuće homogene diferencijalne jednačine prvog reda i partikularnog rešenja nehomogene jednačine, i glasi:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_h + \varepsilon_p = -\frac{\sigma_0}{E_K} e^{-\frac{t}{\tau_\varepsilon}} + \left( \frac{1}{E_H} + \frac{1}{E_K} \right) \sigma_0 = \frac{E_K + E_H}{E_H E_K} \sigma_0 - \frac{\sigma_0}{E_K} e^{-\frac{t}{\tau_\varepsilon}} \tag{3.45}$$

odnosno

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{q_0} - \frac{\sigma_0}{E_K} e^{-\frac{t}{\tau_\varepsilon}} = \sigma_0 \left( \frac{1}{q_0} - \frac{1}{E_K} e^{-\frac{t}{\tau_\varepsilon}} \right) \tag{3.46}$$

Promenu deformacije prema jednačini (3.46) prikazuje Sl. 3-30. Na slici se vidi

da se deformacija asimptotski približava određenoj vrednosti.

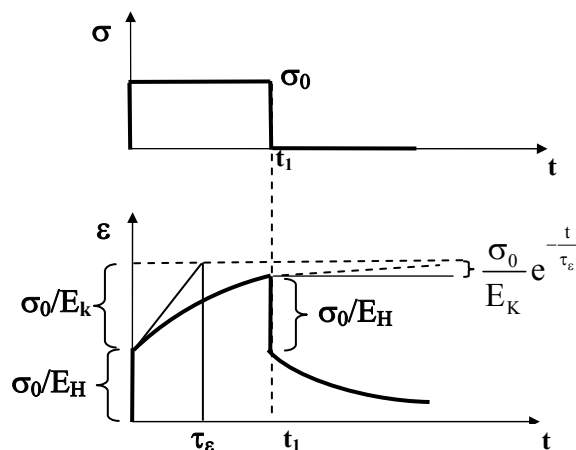
Iz jednačine (3.46) vidi se da deformacija, nastala pri konstantnom naponu, zavisi samo od vremena viskoznog tečenja, a ne od vremena relaksacije. Takođe se vidi da je deformacija konačna, čak i kada je vreme beskonačno veliko:

$$\varepsilon = \varepsilon(\infty) = \frac{E_K + E_H}{E_H E_K} \sigma_0 = \frac{\sigma_0}{E_H} \left( 1 + \frac{E_H}{E_K} \right) = \varepsilon_0 \left( 1 + \frac{E_H}{E_K} \right) > \varepsilon_0 \quad (3.47)$$

Uvođenjem smene  $\frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} = D(t)$  u jednačinu (3.46), dobije se *modul viskoznog*

*tečenja* za SLM:

$$D(t) = \left( \frac{1}{E_H} + \frac{1}{E_K} \right) - \frac{1}{E_K} e^{-\frac{t}{\tau_\varepsilon}} = \frac{1}{E_H} + \frac{1}{E_K} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_\varepsilon}} \right) = D_0 + D_1(t) \quad (3.48)$$



Sl. 3-30 Promena deformacije SLM, pri konstantnom naponu

Kao i viskozna deformacija, nastala pri konstantnom naponu, modul viskoznog tečenja zavisi samo od vremena viskoznog tečenja, a ne od vremena relaksacije napona. Veličina  $D(t)$  odnosi se na trenutno izmerenu vrednost modula elastičnosti,  $D_0$ , na početnu vrednost modula elastičnosti, a veličina  $D_1$  na dodatnu vrednost modula elastičnosti, zbog uticaja viskoznosti. Veličine  $D_0$  i  $D_1$  imaju dimenziju recipročnog modula elastičnosti.

Kada  $t \rightarrow 0s$  iz izraza (3.48) dobije se da je modul viskoznog tečenja jednak:

$D(0) = \frac{1}{E_H}$ . Kada  $t \rightarrow \infty$ , modul viskoznog tečenja asimptotski teži ustaljenoj vrednosti:



$$D(\infty) = \frac{1}{E_H} + \frac{1}{E_K} \quad (3.49)$$

Kada se u jednačinu (3.49) stavi da je  $t = \tau_\varepsilon$ , za modul viskoznog tečenja se dobija:  $D(\tau_\varepsilon) = \frac{1}{E_H} + \frac{1}{E_K} \left(1 - \frac{1}{e}\right) = \frac{1}{E_H} + \frac{2}{3} \frac{1}{E_K}$ . Ovaj rezultat govori da je vreme viskoznog tečenja, u stvari, vreme potrebno da se početni modul viskoznog tečenja  $E_H$  poveća za 2/3 modula  $E_K$ .

Grafički postupak za određivanje vremena  $\tau_\varepsilon$  prikazuje Sl. 3-30. Početna tangenta na krivu deformacija-vreme povlači se do preseka sa asimptotom iste krive, koja odgovara ustaljenom modulu viskoznog tečenja. Odsečak koji pravi ordinata tako dobijene presečne tačke na vremenskoj osi, predstavlja vreme viskoznog tečenja. Za ovaj grafički postupak, problem je da se tačno označi početni deo krive deformacija-vreme, a samim tim i tačan pravac početne tangente na krivu deformacija-vreme. Drugi problem je vreme trajanja eksperimenta, koje bi teorijski trebalo biti beskonačno veliko da bi se dobio tačan ustaljeni modul, odnosno da bi se došlo do asimptote s kojom treba da se preseče početna tangenta.

Sve ovo važi samo do trenutka rasterećenja (trenutak  $t_1$  koji prikazuje Sl. 3-30). Da bi se dobila odgovarajuća jednačina za drugi deo krive u dijagramu deformacija-vreme, koji odgovara periodu nakon rasterećenja, potrebno je rešiti jednačinu (3.41), uz uslov da je za  $t > t_1$  napon  $\sigma=0$ . Dakle, jednačina

$$\dot{\varepsilon} + \frac{E_K}{\eta} \varepsilon = 0 \quad (3.50)$$

se rešava u vremenskom intervalu od  $t-t_1$  do beskonačnosti, uz početne uslove: vreme

$$t=t_{1+}, \text{ deformacija } \varepsilon(t_{1+}) = \frac{\sigma_0}{E_K} \left(1 - e^{-\frac{t-t_1}{\tau_\varepsilon}}\right). \quad \varepsilon(t_{1+}) \text{ je deformacija u trenutku } t_1, \text{ koji se}$$

uzima kao novi početni trenutak,  $\sigma_0$  je napon u intervalu od nule do  $t_1$ .

Opšte rešenje ove homogene jednačine je:

$$\varepsilon(t) = Ae^{-\frac{t-t_1}{\tau_\varepsilon}} \quad (3.51)$$

Konstanta A određuje se iz početnih uslova, pa je konačno rešenje za jednačinu (3.51):

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_K} \left( 1 - e^{-\frac{t-t_1}{\tau_\varepsilon}} \right) e^{-\frac{t-t_1}{\tau_\varepsilon}} \quad (3.52)$$

Za vreme  $t = \infty$ ,  $\varepsilon(\infty) = 0$ . Inače, jednačina (3.52) pokazuje da deformacija nakon rasterećenja uopšte ne zavisi od početnog modula elastičnosti  $E_H$  (u trenutku  $t=0s$ ), nego samo od modula  $E_K$ .

Ovde je pokazano da je za Zenerov model nakon rasterećenja pri beskonačno velikom vremenu deformacija potpuno povratna. Međutim, rezultati eksperimenata koji se odnose na viskoelastična čvrsta tela to ne pokazuju. Zato se uzima da je beskonačno veliko vreme, u stvari, vreme trajanja određene vrste materijala. To vreme trajanja meri se godinama, decenijama, vekovima... Vreme u eksperimentima je uvek konačno i mnogo manje od vremena trajanja materijala, pa je teško odrediti vreme nakon koga bi se moglo smatrati da je deformacija nakon rasterećenja pala na nulu. Zato deonica u dijagramu deformacija – vreme, koja odgovara periodu nakon rasterećenja, treba da bude mnogo duža i razvučenija. Za periode vremena koji odgovaraju vremenu eksploatacije materijala smatra se da, ipak, postoji određena veličina zaostale deformacije. Uz ovo ograničenje, **ako je napon konstantan, može se, kao osnovni model za opis deformacije viskoelastičnog čvrstog tela, koristiti redno vezan Zenerov model.**

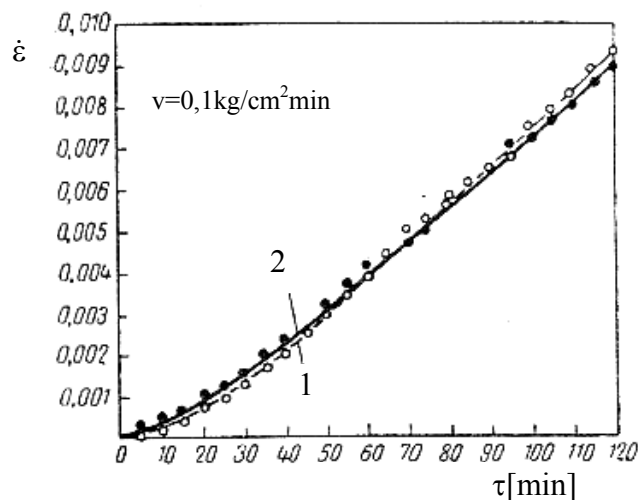
Zbog problema koji se tiču velikog vremena trajanja eksperimenta čiji rezultat služi za grafičko određivanje parametara Zenerovog modela, prikazuje se još i slučaj s **konstantnom brzinom opterećivanja**. Opterećenje se može nanositi konstantnom brzinom u jednom ciklusu, ili višestepeno.

Da bi se podaci iz višestepenog eksperimenta s konstantnom brzinom opterećivanja u svakom ciklusu, mogli koristiti kao viskoelastični parametri, potrebna je tačno utvrđena procedura izvođenja eksperimenta. Ako se višestepeni eksperiment obavlja po dole navedenoj proceduri, onda je tako dobijeni dijagram deformacija-vreme isti kao kod uzorka koji je jednostepeno opterećen, a brzina nanošenja opterećenja je konstantna (Sl. 3-31). Procedura zahteva da se, tokom višestepenog eksperimenta, nakon dostizanja određenog nivoa opterećenja, uzorak mora rasteretiti i zadržati u rasterećenom stanju dok se ne zabeleži nepovratna zaostala deformacija. Pri prelasku na novi nivo opterećenja usvaja se opterećenje koje je delovalo na kraju prethodne deonice.

To opterećenje deluje sve dok se ne dostigne deformacija iz prethodne deonice. Tek onda počinje prirast novog opterećenja konstantnom brzinom (Sl. 3-32).

Za jednostepeno opterećenje kod kojeg je napon linearno promenljiv,  $\sigma = \sigma_0 \cdot t$  (gde je  $\sigma_0$  u Pa/s), dobije se konstantna brzina nanošenja opterećenja  $\dot{\sigma} = \sigma_0$ . Takav način opterećivanja je češći pri izvođenju eksperimenta s viskoelastičnim materijalima, i jednačina (3.41) može da se reši i za taj slučaj. U ovom slučaju, dakle, rešava se jednačina (3.41) u sledećem obliku:

$$\frac{E_H + E_K}{E_H \eta} \sigma_0 t + \frac{1}{E_H} \sigma_0 = \frac{E_K}{\eta} \varepsilon + \dot{\varepsilon} \quad (3.53)$$



Sl. 3-31 Kriva ukupnih deformacija za brezu, na temperaturi 60°C: 1-pri jednostepenom opterećivanju, 2-pri višestepenom opterećivanju u radijalnom pravcu, prema gore navedenoj proceduri (Уголев, 1971.)

Rešenje jednačine (3.53) traži se za početne uslove  $t = 0s$  i  $\varepsilon(0) = 0$  (jer je

$\sigma_0(0) = 0$ ). To rešenje je zbir opšteg:  $\varepsilon_h = C \cdot e^{-\frac{t}{\tau_{\varepsilon c}}}$  i partikularnog integrala:

$\varepsilon_p = at + b$ , gde je:  $\tau_{\varepsilon c}$  - vreme viskoznog tečenja, pri konstantnoj brzini nanošenja

opterećenja,  $\tau_{\varepsilon c} = \frac{\eta}{E_K}$ . Konstante a i b određuju se iz jednačine (3.53), u koju se zameni

partikularno rešenje  $\varepsilon_p = at + b$ , i njegov prvi izvod  $\dot{\varepsilon}_p = a$ . Tako se dobija nova

jednačina:  $\frac{E_H + E_K}{E_H \eta} \sigma_0 t + \frac{1}{E_H} \sigma_0 = \frac{E_K}{\eta} (at + b) + a$ , iz koje sledi da je:

$$a = \frac{E_H + E_K}{E_H E_K} \sigma_0 = \left( \frac{1}{E_H} + \frac{1}{E_K} \right) \sigma_0 = \frac{\sigma_0}{E_\infty}, \quad b = \left( \frac{1}{E_H} - \frac{1}{E_\infty} \right) \tau_\varepsilon \sigma_0.$$

Pretpostavljeno rešenje je sada:  $\varepsilon = C \cdot e^{-\frac{t}{\tau_{\varepsilon c}}} + \frac{\sigma_0}{E_\infty} t + \left( \frac{1}{E_H} - \frac{1}{E_\infty} \right) \tau_{\varepsilon c} \sigma_0$ .

Integraciona konstanta C određuje se iz početnih uslova za  $t = 0s$  i dobija se da je:

$$0 = C + \left( \frac{1}{E_H} - \frac{1}{E_\infty} \right) \tau_{\varepsilon c} \sigma_0, \quad \text{odnosno } C = - \left( \frac{1}{E_H} - \frac{1}{E_\infty} \right) \tau_{\varepsilon c} \sigma_0. \quad \text{Konačno rešenje jednačine}$$

(3.53) sada ima oblik

$$\varepsilon = - \left( \frac{1}{E_H} - \frac{1}{E_\infty} \right) \tau_{\varepsilon c} \sigma_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau_\varepsilon}} + \frac{\sigma_0}{E_\infty} t + \left( \frac{1}{E_H} - \frac{1}{E_\infty} \right) \tau_\varepsilon \sigma_0$$

odnosno:

$$\varepsilon = \frac{\tau_{\varepsilon c} \sigma_0}{E_H} \left( 1 - \frac{E_H}{E_\infty} \right) \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_\varepsilon}} \right) + \frac{\sigma_0}{E_\infty} t \quad (3.54)$$

Ovo rešenje važi za konstantnu brzinu nanošenja opterećenja. Koristi se za crtanje dijagrama zavisnosti deformacije od vremena, iz kojeg se grafičkim putem mogu odrediti parametri modela.

Kada vreme  $t$  raste, iz izraza (3.54) se dobija da i deformacija neograničeno raste:  $\varepsilon(t \uparrow) = \frac{\tau_{\varepsilon c} \sigma_0}{E_H} \left( 1 - \frac{E_H}{E_\infty} \right) + \frac{\sigma_0}{E_\infty} t$ . Analizom izraza (3.54) može se pokazati da

postoji početna tangenta krive viskoelastičnih deformacija (prava 1, Sl. 3-32),  $\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E_H} t$

čiji je nagib konstantan). Oznake na slici su:  $\varepsilon_{uk}$  – ukupna deformacija,  $\varepsilon_{ve}$  – viskoelastična deformacija,  $\varepsilon_{zaost}$  – zaostala deformacija,  $\varepsilon_0$  – početna deformacija,  $\varepsilon_\infty$  – ustaljena deformacija,  $\varepsilon_{raz}$  – razlika deformacija koja se koristi za određivanje vremena viskoznog tečenja.

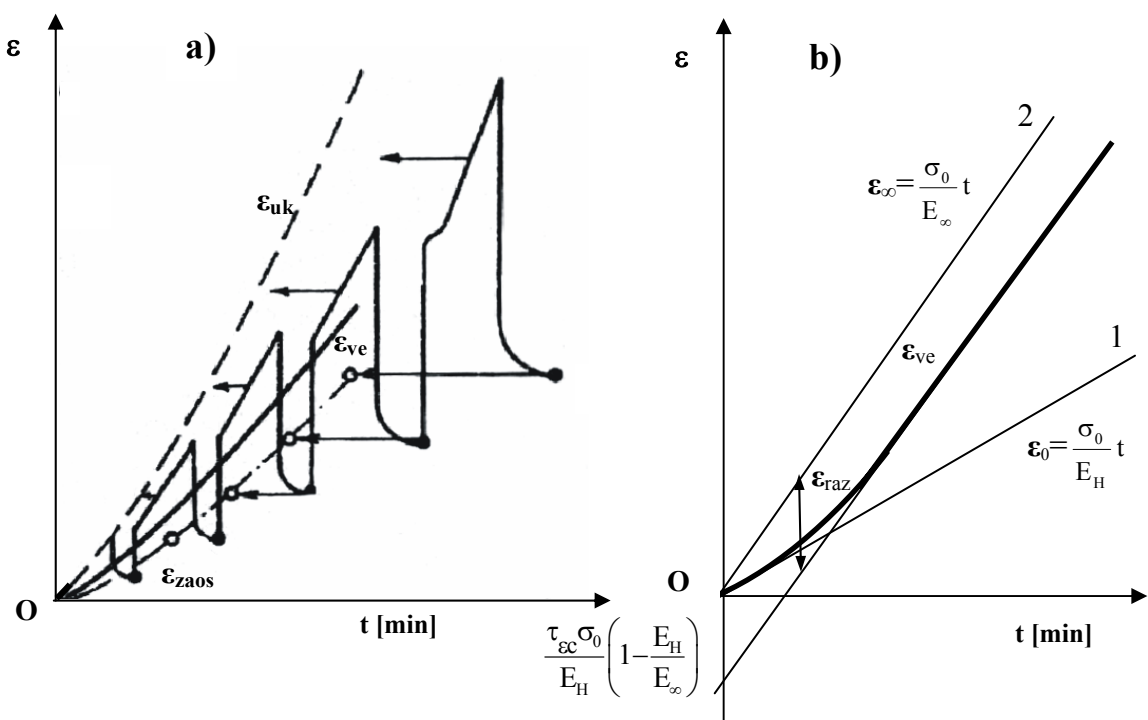
Ordinata proizvoljne tačke na početnoj tangenti određuje početnu deformaciju, odnosno, početni modul elastičnosti Zenerovog modela, u proizvoljnom trenutku vremena:

$$E_H = \frac{\sigma_0 t}{\varepsilon_0} \quad (3.55)$$

Ordinata proizvoljne tačke na pravoj paralelnoj sa asimptomom krive deformacija (prava 2, Sl. 3-32),  $\varepsilon_\infty = \sigma_0 \left( \frac{1}{E_H} + \frac{1}{E_K} \right) t$ , čiji je nagib konstantan, a koja prolazi kroz koordinatni početak, određuje konačno dostignutu deformaciju, odnosno, ustaljeni modul elastičnosti:

$$\frac{1}{E_\infty} = \frac{1}{E_H} + \frac{1}{E_K} = \frac{\varepsilon_\infty}{\sigma_0 t} \quad (3.56)$$

u proizvoljnom trenutku vremena. Ovo je izraz iz kojeg se određuje drugi parametar Zenerovog modela  $E_K$ .



Sl. 3-32 Grafičko određivanje parametara Zenerovog modela: a) promena deformacije pri višestepenom opterećivanju uzorka s periodičnim rasterećenjima, b) pomoćni dijagram viskoelastičnih deformacija. (Уголев, 1971.)

Razlika ordinata proizvoljne tačke na asimptoti pomerenoj u koordinatni početak, i tačke na stvarnoj asimptoti, predstavlja razliku deformacija  $\varepsilon_{raz}$ , koja se koristi za računanje vremena  $\tau_{\varepsilon c}$ , po izrazu:

$$\tau_{\varepsilon c} = \frac{\varepsilon_{raz}}{\sigma_0} \frac{E_H E_\infty}{(E_H - E_\infty)} \quad (3.57)$$

Уголев (1971.) karakteristično vreme pri konstantnoj brzini nanošenja opterećenja naziva vreme relaksacije (misli se na relaksaciju – smanjenje deformacija, a

ne napona), i obeležava s  $n$ . Ovako izračunato karakteristično vreme nije isto kao vreme viskoznog tečenja, računato pri konstantnom naponu, štaviše, ono je višestruko veće. To je logično, jer su u pitanju različiti uslovi ispitivanja.

U eksperimentu kojim se određuje modul elastičnosti za određeni materijal da bi se dobili viskoelastični parametri viskoznog tečenja, može se, dakle, delovati silom konstantnog intenziteta, ili silom koja se nanosi konstantnom brzinom. Tako dobijeni podaci mogu da se iskoriste za izračunavanje parametara Zenerovog modela. Pri tome, u oba slučaja, treba zabeležiti početni modul elastičnosti  $E_H$ , ustaljeni modul  $E_\infty$ , i nacrtati odgovarajući dijagram deformacija-vreme, iz kojeg se grafički mogu odrediti parametri modela.

Da bi se ispitao redno vezan SLM, za slučaj relaksacije napona, u jednačinu (3.41) se unosi **konstantna deformacija**,  $\varepsilon_0 H(t)$ . Tako se dobija nova nehomogena PDJ, odnosno, konstitutivna jednačina za relaksaciju napona:

$$\dot{\sigma} + \frac{E_H + E_K}{\eta} \sigma = \frac{E_H E_K}{\eta} \varepsilon_0 H(t) \quad (3.58)$$

ili

$$\dot{\sigma} + \frac{1}{\tau_\sigma} \sigma = \frac{E_H}{\tau_\varepsilon} \varepsilon_0 H(t) \quad (3.59)$$

Rešenje te jednačine, uz početni uslov da je za  $t=0$ ,  $\sigma = \sigma_0 = \varepsilon_0 E_H$ , glasi:

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 \left( E_H - \frac{E_K E_H}{E_H + E_K} \right) e^{-\frac{E_K + E_H}{\eta} t} + \frac{E_K E_H}{E_H + E_K} \varepsilon_0 \quad (3.60)$$

odnosno

$$\sigma(t) = \frac{E_K E_H}{E_H + E_K} \varepsilon_0 + E_H \frac{E_H}{E_H + E_K} e^{-\frac{E_K + E_H}{\eta} t} \varepsilon_0 \quad (3.61)$$

Kada je vreme beskonačno veliko, dobije se da je napon manji od početnog:

$$\sigma(\infty) = \frac{E_K}{E_H + E_K} \sigma_0 < \sigma_0 \quad (3.62)$$

Iz jednačine (3.61), korišćenjem smene

$$E(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0}, \quad \frac{\eta}{E_K + E_H} = \tau_\sigma \quad (3.63)$$

dobija se izraz za modul relaksacije SLM-a:

$$E(t) = \frac{E_H E_K}{E_H + E_K} + \frac{E_H^2}{E_H + E_K} e^{-\frac{t}{\tau} \frac{\sigma}{E_H}} = E_H - \frac{E_H^2}{E_H + E_K} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau} \frac{\sigma}{E_H}} \right) \quad (3.64)$$

odnosno

$$E(t) = E_0 - E_1(t) \quad (3.65)$$

gde je  $E_1(t)$  funkcija koja je jednaka drugom članu s desne strane izraza (3.64).

Veličina  $E(t)$  predstavlja trenutnu vrednost modula elastičnosti, pri zatezanju, karakterističnu za relaksaciju napona. Zove se *modul relaksacije*.

Veličine  $E_0$  i  $E_1$  imaju dimenziju modula elastičnosti. Veličina  $E_0$  odnosi se na početnu vrednost modula elastičnosti, a veličina  $E_1$  na smanjenje vrednosti modula elastičnosti zbog uticaja viskoznosti.

Kada  $t \rightarrow 0$ , dobija se da je modul relaksacije jednak:  $E(0) = E_H$ . Kada  $t \rightarrow \infty$  modul relaksacije teži ustaljenoj asimptotskoj vrednosti i jednak je:

$$E(\infty) = \frac{E_H E_K}{E_H + E_K} \quad (3.66)$$

Promena eksponencijalne funkcije – modula relaksacije, ista je kao promena napona na Sl. 3-11.

Sve ovo važi samo do trenutka rasterećenja ( $t_1$ , Sl. 3-11). Da bi se dobila odgovarajuća jednačina za drugi deo krive u dijagramu deformacija-vreme, gde dolazi do porasta napona, potrebno je rešiti jednačinu (3.41) uz uslov da je za  $t > t_1$  deformacija  $\varepsilon=0$ . Dakle, rešava se jednačina

$$\dot{\sigma} + \frac{E_H + E_K}{\eta} \sigma = 0 \quad (3.67)$$

u vremenskom intervalu, od  $t_1$  do beskonačnosti, uz početne uslove: za vreme  $t=t_1$  napon

je jednak  $\sigma(t_{1+}) = \varepsilon_0 \left( E_H - \frac{E_K E_H}{E_H + E_K} \right) e^{-\frac{E_K + E_H}{\eta} t_1} + \varepsilon_0 \frac{E_K E_H}{E_H + E_K} - \varepsilon_0 E_H$  odnosno

$\sigma(t_{1+}) = \varepsilon_0 \frac{E_H^2}{E_H + E_K} \left( e^{-\frac{t_1}{\tau} \frac{\sigma}{E_H}} - 1 \right)$ .  $\sigma(t_{1+})$  je napon u trenutku  $t_1$ , koji se uzima kao novi

početni trenutak, a  $\varepsilon_0$  je deformacija u intervalu od 0 do  $t_1$ .

Opšte rešenje jednačine (3.67) je:

$$\sigma(t) = Ae^{-\frac{t-t_1}{\tau_\sigma}} \quad (3.68)$$

Nakon određivanja konstante A iz početnih uslova dobija se konačno rešenje u obliku:

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 \frac{E_H^2}{E_K + E_H} \left( e^{-\frac{t_1}{\tau_\sigma}} - 1 \right) e^{-\frac{t-t_1}{\tau_\sigma}} \quad (3.69)$$

Za vreme  $t = \infty$ ,  $\sigma(\infty) = 0$ . To znači da je, za Zenerov model, pri beskonačno velikom vremenu, nakon rasterećenja relaksacija napona potpuna. Kao i kod eksperimenata koji se rade s konstantnim naponom, i ovde se smatra da je beskonačno veliko vreme, vreme trajanja usvojene vrste materijala. Zato deonica u dijagramu napon – vreme, nakon rasterećenja, treba da bude mnogo duža i razvučenija. Za periode vremena koji odgovaraju vremenu eksploataisanja materijala, smatra se da postoji određena veličina zaostalih napona. Uz ovo ograničenje, **moгуće je koristiti redno vezan Zenerov model, kao osnovni model za deformisanje viskoelastičnog čvrstog tela, kada je deformacija konstantna.**

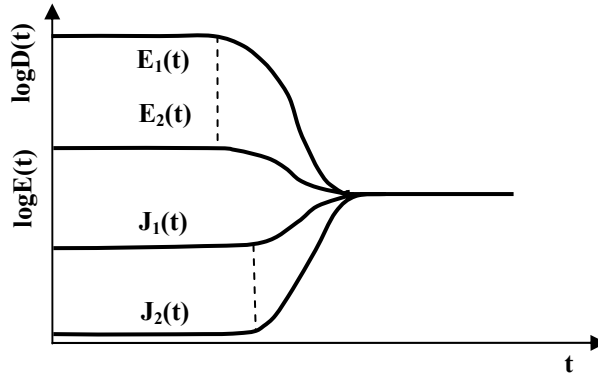
U eksperimentu kojim se određuje modul relaksacije za određeni materijal, potrebno je, dakle, beležiti: veličinu sile koja deluje kao opterećenje, veličinu deformacije i vreme, karakteristično za svaku promenu veličine ili pravca dejstva opterećenja. Zatim, treba zabeležiti početni modul relaksacije, kao i ustaljeni modul pa potom nacrtati odgovarajući dijagram napon-vreme. Tangenta na krivu relaksacije u početnom trenutku, povlači se do preseka sa asimptotom ustaljenog napona. Tako se nalazi vreme relaksacije. Osim ovog grafičkog postupka, vreme relaksacije može se odrediti i računski, iz izraza (3.64). Modul  $E_K$ , koji je potreban u izrazu (3.64), određuje se iz izraza (3.66), pod uslovom da se znaju početni i ustaljeni moduli relaksacije.

Iz izraza (3.42) može se dobiti veza između vremena viskoznog tečenja i vremena relaksacije u sledećem obliku:  $\tau_\varepsilon = \tau_\sigma \frac{E_H + E_K}{E_K}$ , odnosno,  $\tau_\varepsilon = \tau_\sigma \left( \frac{E_H}{E_K} + 1 \right)$ .

Iz ove jednačine se vidi da je vreme viskoznog tečenja uvek veće od vremena relaksacije. Za slučaj da je  $E_H \ll E_K$ , vremena viskoznog tečenja i relaksacije napona su približno jednaka, ali je pitanje da li se u tom slučaju, još uvek, može govoriti o čvrstom materijalu. Sl. 3-33 prikazuje da se za proizvoljno izabrane module relaksacije i viskoznog tečenja, fazna tranzicija II reda javlja na krivoj tečenja kasnije nego na krivoj



relaksacije.



Sl. 3-33 Ekvivalentne krive viskoznog tečenja i relaksacije

### Paralelno vezan SLM

Ukupan napon **paralelno vezanog SLM-a** jednak je zbiru napona paralelno vezanog Maksvelovog (2.44) i Hukovog tela (3.2),  $\sigma = \sigma_M + \sigma_H$ . Deformacija u oba elementa je jednaka, pa konstitutivna jednačina izgleda ovako:

$$\sigma = \eta \dot{\epsilon} - \frac{\eta}{E_M} \dot{\sigma}_M + E_H \epsilon \quad (3.70)$$

Ako se obema stranama jednačine doda član  $\frac{\eta}{E_M} \dot{\sigma}$ , dobija se :

$$\sigma + \frac{\eta}{E_M} \dot{\sigma} = E_H \epsilon + \eta \dot{\epsilon} + \frac{\eta}{E_M} \dot{\sigma}_H \quad (3.71)$$

Kada se dalje zameni da je  $\dot{\sigma}_H = E_H \dot{\epsilon}$ , dobija se diferencijalna jednačina koja predstavlja vezu napona i deformacija, za paralelno vezan SLM:

$$\sigma + \frac{\eta}{E_M} \dot{\sigma} = E_H \epsilon + \frac{\eta}{E_M} (E_M + E_H) \dot{\epsilon} \quad (3.72)$$

odnosno:

$$p_0 \sigma + p_1 \dot{\sigma} = q_0 \epsilon + q_1 \dot{\epsilon} \quad (3.73)$$

gde je

$$p_0 = 1, p_1 = \frac{\eta}{E_M} = \tau_\sigma, q_0 = E_H, q_1 = \frac{\eta}{E_M} (E_M + E_H) = E_H \tau_\epsilon, \tau_\epsilon = \eta \frac{E_H + E_M}{E_H E_M} \quad (3.74)$$

Nakon toga, obavlja se transformacija jednačine (3.73) u sledeći oblik:

$$\sigma + \tau_\sigma \dot{\sigma} = E_H (\epsilon + \tau_\epsilon \dot{\epsilon}) \quad (3.75)$$

Ovo je, konačno, *konstitutivna jednačina linearno napregnutog, paralelno vezanog SLM-a*. Jednačine (3.40) i (3.75) istog su oblika, samo im se razlikuju koeficijenti  $p_1$ ,  $q_0$ ,  $q_1$ . To znači, da su ovo **dva ekvivalentna modela materijala**. Za oba modela važno je da se odrede početni i ustaljeni moduli elastičnosti, kao i trenutni moduli, uz nalaženje vremena relaksacije, odnosno vremena viskoznog tečenja.

**Ako se paralelno vezan SLM optereti konstantnim naponom  $\sigma = \sigma_0 H(t)$ , ili se izloži konstantnoj deformaciji  $\varepsilon = \varepsilon_0 H(t)$ , dobijaju se rešenja analogna jednačinama (3.46) i (3.61).**

**Odnos vremena viskoznog tečenja i vremena relaksacije isti je kao kod redno vezanog SLM-a.**

Na sve konstitutivne jednačine dobijene u ovom poglavlju, mogu, kao i kod prethodnih modela, da se primene Laplasove transformacije i da se dobiju asocijativne jednačine.

SLM ima dakle sledeća svojstva:

- pri dejstvu opterećenja trenutno se deformiše,
- pri konstantnom naponu ima ograničenu deformaciju viskoznog tečenja,
- pri konstantnoj deformaciji ima ograničenu relaksaciju napona,
- nakon uklanjanja opterećenja ima trenutno povratnu elastičnu deformaciju, a zatim se deformacija dalje postepeno asimptotski smanjuje, skoro do nule.

SLM daje određeno poboljšanje u opisivanju ponašanja realnih materijala. Kod njega je za modeliranje materijala raspoloživo vreme relaksacije ili vreme retardacije. U stvarnosti, postoji beskrajno mnogo takvih parametara. Na primer, za različite polimere (s različitim dužinama strukturnih lanaca), vreme koje je potrebno za odgovor materijala na dejstvo opterećenja nije isto. Polimer s kraćim strukturnim lancima reaguje brže. To dalje znači da se, za modeliranje viskoelastičnih svojstava različitih polimera, koristi čitav spektar SLM, koji se međusobno razlikuju po sopstvenim vremenima relaksacije ili retardacije.

### **3.5. Primena Zenerovog modela u mehanici drveta**

U ovome radu proučava se drvo, kao VEO materijal . Ortotropija, odnosno različitost mehaničkih svojstava u tri međusobno ortogonalna pravca, je karakteristika polimera, kao klase materijala. To znači da drvo, kao materijal izgrađen od polimera,

može da se proučava u okviru te klase materijala.

Polimeri mogu imati amorfnu, kristalnu ili amorfno kristalnu strukturu. Polimeri u strukturi drveta imaju različit stepen kristalizacije amorfni polimera, kod mekog i kod tvrdog drveta. Smatra se da odatle mogu da potiču razlike u njihovim mehaničkim svojstvima.

Što se tiče drveta, kao materijala sa anatomskom simetrijom, mnogobrojni eksperimenti pokazuju da drvo ima tokom vremena promenljiva svojstva čvrstog tela. Ta promenljiva svojstva tokom vremena proučavali su: Белянкин, Яценко (1957.), Уголев (1971.), Fridley i sar., (1997.), Nogi i sar. (2003.), Majka (2004.). Njihove promene zavise od nivoa opterećenja, brzine nanošenja opterećenja, temperature, vlažnosti i njegove unutrašnje strukture. Tu se, pre svega, misli na mehanička svojstva, koja se ispoljavaju u procesu deformisanja pod dejstvom opterećenja.

Уголев (1971.) smatra da se linearno napregnuto telo od drveta može tretirati kao VEI čvrsto telo, koje se ponaša po SLM - Zenerovom modelu, a ne po Burgerovom. Burgerov model za drvo prvi su, još pre nekoliko decenija, koristili: Kollmann, Cöte, Bodig, Jane, a posle njih i mnogi drugi autori. Taj model je izabran za drvo samo zbog strukture deformacija koja, u nekim slučajevima, odgovara deformacijama linearno naprnutog drveta, pri određenim uslovima. Model je izabran bez dublje analize ponašanja modela pri različitim eksploatacionim uslovima. Razvoj reologije i viskoelastičnosti u poslednjih nekoliko decenija, omogućio je da se objasni razlika između viskoelastične tečnosti i viskoelastičnog čvrstog tela, pokazujući da izabrani mehanički model nije model strukture materijala, nego model svojstava. S tog stanovišta, **Burgerov model može biti samo model za viskoelastičnu tečnost, dok proizvoljno napregnuto telo od drveta ne prelazi iz čvrstog stanja u tečno, nego samo menja fazu.**

S obzirom na postojanje atomske simetrije drveta u tri međusobno ortogonalna pravca, ovde se uvodi pretpostavka da drvo može da se posmatra kao telo od viskoelastičnog, ali ne izotropnog, nego anizotropnog materijala. Izbor modela anizotropije, ortotropije - EO ili transverzalne izotropije - TI, zavisi od odnosa između dimenzija strukturnih elemenata drveta i dimenzija tela napravljenog od drveta.

Соболев (1979.) smatra da se za telo od drveta (masiva ili laminata) kod kojeg je površina poprečnog preseka veća od  $100 \text{ cm}^2$  može koristiti model TI materijala. To

su, na primer, razne noseće grede koje se koriste u građevinarstvu. Karakteristično telo od drveta, koje predstavlja model TI tela, je kocka ivice  $10 \text{ cm}^2$ , zapremine  $1000 \text{ cm}^3$ . Smatra se da u toj zapremini postoji, veoma različit, slučajni poredak elemenata strukture drveta. Sile koje deluju na te elemente strukture, takođe imaju veoma različitu, slučajnu orijentaciju. U tom slučaju nemoguće je apsolutno tačno odrediti radijalni i tangencijalni pravac. Dalje se smatra da je različitost mehaničkih svojstava drveta, u svim mogućim pravcima, upravnim na podužnu osu, mala, u poređenju s različitošću tih svojstava u odnosu na svojstva u pravcu podužne ose. Zbog toga se, sa zadovoljavajućim stepenom tačnosti, uzima da karakteristike velikih elemenata napravljenih od drveta odgovaraju modelu tela od TI materijala. Takav izbor modela anizotropije znatno uprošćava rešavanje zadataka teorije elastičnosti.

Za tela od drveta s površinom poprečnog preseka od  $20$  do  $100 \text{ cm}^2$ , može da se koristi i model EO i model TI materijala.

Za tela od drveta čiji je poprečni presek od  $1$  do  $20 \text{ cm}^2$ , koristi se model EO materijala. To su elementi nameštaja, drvene ambalaže, sportski rekviziti, elementi podova. Najveća karakteristična zapremina tela od drveta koje se može smatrati ortotropnim, je  $V_{\max}=10 \text{ cm}^3$ , a najmanja  $V_{\min}=1 \text{ mm}^3$ . Zapremina  $V_{\max}$  sadrži dovoljan broj strukturnih elemenata drveta, na osnovu kojih se, postupkom osrednjavanja mehaničkih karakteristika, to telo može posmatrati kao kontinualno i kvazihomogeno. Što se tiče svojstava u radijalnom i tangencijalnom pravcu, krivina prstena prirasta je mala, kao i odnos dimenzija poprečnog preseka prema radijusu krivine prstena prirasta, pa se ti uticaji zanemaruju. Zapremina  $V_{\min}$  još uvek sadrži dovoljan broj strukturnih elemenata drveta, a ipak je dovoljno velika u odnosu na debljinu prstena prirasta.

Značaj proučavanja tela od drveta kao TI materijala je u tome što se tako dobijaju važni podaci i o ponašanju delova tela od drveta, kao transverzalno izotropnog materijala. Ali, proučavanje tela od drveta kao TI materijala ne može se u potpunosti zameniti proučavanjem tela od drveta kao EO materijala, jer osim poznavanja svojstava delova tela od drveta, treba poznavati i svojstva tela od drveta kao celine.

Ispitivanje mehaničkih svojstava drveta prvo je rađeno u pravcu paralelnom vlaknima. Takvo ispitivanje obavljano je iz praktičnih razloga. Eksperimenti su pokazali da su apsolutne veličine dilatacija u pravcima vlakana, višestruko manje od veličine dilatacija u radijalnom i tangencijalnom pravcu. S obzirom na to da su podužne

dimenzije ispitivanih uzoraka uvek višestruko veće od poprečnih, izmerena izduženja u pravcu vlakana uvek su veća od izduženja u radijalnom i tangencijalnom pravcu, pa ih je lakše zabeležiti. Rezultati dobijeni u takvim merenjima korisni su za primenu u praksi. Međutim, zbog različite prirode deformisanja duž vlakana i upravno na pravac vlakana, ne može se direktno zaključiti kakve su karakteristike drveta u poprečnim pravcima. Bodig (1965) i Kunes (1968) su utvrdili da je za drvo važan faktor njegova anatomska struktura, zbog koje se javljaju različiti oblici loma pri transverzalnom pritisku, u radijalnom ili tangencijalnom pravcu. U podužnom pravcu deformacije se razvijaju skoro sve do trenutka loma, bez značajnije promene mikrostrukture. U poprečnim pravcima, uloga mikroskopskih promena strukture vrlo je značajna, iako ih je teško zabeležiti.

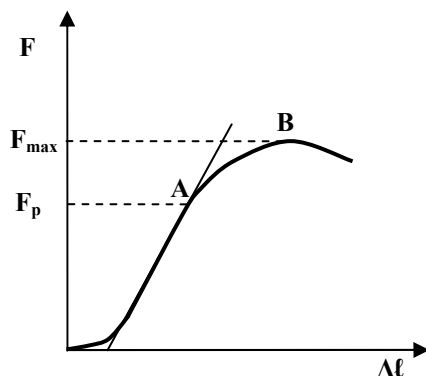
Zbog svega toga se, za određivanje odgovarajućih materijalnih karakteristika, rade eksperimenti i studije koje koriste pritisak normalno na vlakna: Wolcott i sar. (1989.), Janzen (2001.), Popović (2006.). To je takozvani transverzalni pritisak, koji može biti u radijalnom i u tangencijalnom pravcu. Ova vrsta ispitivanja, za razliku od ostalih (aksijalni pritisak ili zatezanje, savijanje), dozvoljava korišćenje uzoraka malih dimenzija. Pri tome se može koristiti i koncentrisano i površinsko opterećenje. Opterećenjem cele površine smanjuje se mogućnost greške pri očitavanju rezultata. Tako dobijeni rezultati pokazuju pravu veličinu otpornosti na lom materijala. Kod te vrste ispitivanja, umesto standardnog deformacionog kriterijuma od 2% ukupne deformacije, uzima se 5%, jer je primećeno da se maksimalni naponi javljaju tek kada se prekorači granica od 2% .

Karakterističan izgled dijagrama napon-dilatacija, pri ispitivanju drveta kao EO polimera pritisnutog paralelno vlaknima, prikazuje Sl. 3-34 ( $F_{max}$  - opterećenje, koje odgovara granici čvrstoće,  $F_p$  - opterećenje koje odgovara granici proporcionalnosti).

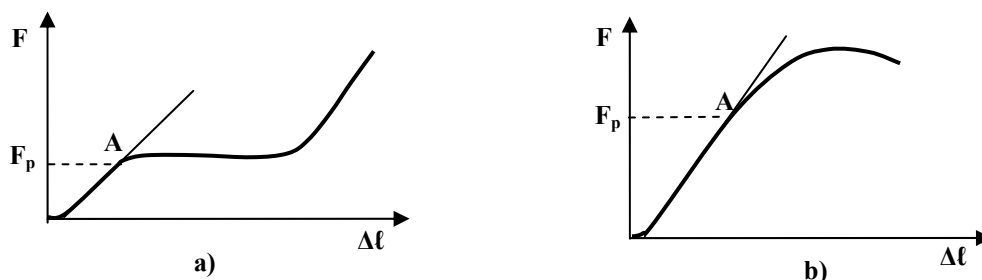
Izgled dijagrama napon-dilatacija, pri ispitivanjima u pravcima upravnim na vlakna, različit je u radijalnom i u tangencijalnom pravcu (Sl. 3-35). Razlike su naročito primetne kod opterećenja u radijalnom pravcu.

Kod sva tri dijagrama uočljivo je da na početku postoji deo krive s vrlo malim nagibom, skoro prav, kao i da posle granice proporcionalnosti postoji još jedna takva, kraća ili duža deonica (najduža kod radijalnog pritiska). Pravi deo na početku dijagrama govori o pojavi povećanja dilatacije pri konstantnom pritisku, odnosno, o pojavi

viskoelastičnih nepovratnih dilatacija, daleko pre loma. Pravi deo posle granice proporcionalnosti, koji se javlja u dijagramu za radijalni pravac, govori o postojanju viskoznog tečenja i posle granice proporcionalnosti, a pre pojave plastičnih deformacija. U preostala dva dijagrama, prava deonica odgovara maksimalnoj sili, odnosno početku pojave plastičnih deformacija koje prethode lomu. Postojanje tih deonica govori o pojavi viskoznog tečenja, pri naponim manjim od kritičnih.



Sl. 3-34 Karakterističan dijagram sila-skraćenje, pri pritisku paralelno vlaknima, standardnih epruveta od bora

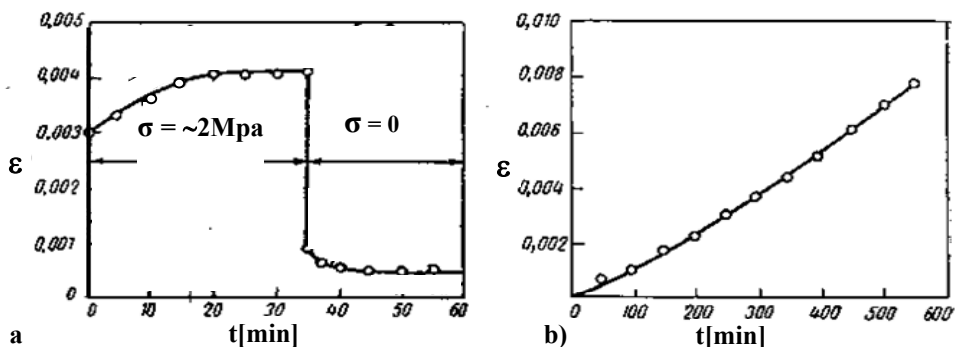


Sl. 3-35 Karakterističan dijagram sila-skraćenje, pri pritisku standardnih epruveta od drveta: a) upravno na vlakna u radijalnom pravcu (važi za četinare i prstenasto porozne lišćare), b) upravno na vlakna u tangencijalnom pravcu.

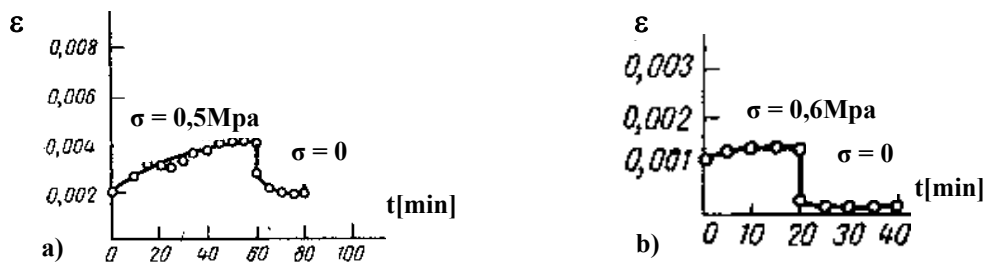
Janzen (2001.) je ispitivao dve vrste drveta, Pinus glabra (Spruce pine) i Liriodendron tulipifera (Yellow poplar), transverzalno pritiskano. Njegova ispitivanja imala su za cilj merenje gubitka mase pri biološkoj degradaciji, korišćenjem transverzalnog pritiska. Da bi to mogao da proučava morao je raspolagati polaznim podacima za uzorke koji nisu bili izloženi biološkim uticajima. Dijagram napon-dilatacija, pri radijalnom i tangencijalnom pritisku do 5% nivoa deformacija, za različite vrste mekog i tvrdog drveta, do koga je Janzen došao u svom radu, pokazuje da i u radijalnom i u tangencijalnom pravcu, kako za meko, tako i za tvrdo drvo, postoji prava deonica koja pokazuje prisustvo viskoelastičnih svojstava (pojava porasta deformacije pri konstantnom naponu). Takođe, Janzen je u svom radu potvrdio da ceo izgled

dijagrama napon-deformacija u velikoj meri zavisi od početne deonice, odnosno od vremena potrebnog da se uđe u zonu linearnosti.

Osim različitih oblika loma u različitim pravcima, postoji i nešto što je zajedničko za transversalni pritisak u radijalnom i tangencijalnom pravcu. U oba slučaja dijagrami zavisnosti promene dilatacije od vremena imaju isti oblik, pri konstantnom opterećenju, kao što pokazuju Sl. 3-36 i Sl. 3-37.



Sl. 3-36 Dijagram dilatacija-vreme pri zatezanju u radijalnom pravcu, za uzorak od bukovine na temperaturi  $60^{\circ}$ , pri vlažnosti 10%. a) pri konstantnom opterećenju b) pri konstantnoj brzini opterećenja  $0,1 \text{ kg/cm}^2 \text{ min}$  (Уголев, 1971.)



Sl. 3-37 Dijagram dilatacija –vreme pri zatezanju u tangencijalnom pravcu, s konstantnim opterećenjem, na temperaturi  $60^{\circ}$  a) za uzorak od bora vlažnosti 17% b) prosečne vrednosti za uzorke od lišćara vlažnosti 10% (Уголев, 1971.)

Navedeni dijagrami, osim toga, pokazuju veliko odstupanje od Hukovog zakona, odnosno, pokazuju postojanje svojstava viskoelastičnosti. Izgled dijagrama dozvoljava upotrebu Zenerovog modela i za tvrdo i za meko drvo.

Što se tiče opsega napona, Уголев (1971.) je utvrdio da je opseg napona u kojem dominiraju viskoelastična svojstva drveta, do 80% od granične čvrstoće.

S obzirom na širinu posmatrane problematike, u ovom radu se proučava samo drvo, kao čvrsto telo od VEO materijala sa svojstvima Zenerovog modela. Iz istog razloga, biće razmatrani samo problemi linearno ili ravno napregnutog tela od drveta, s tačno definisanom geometrijom i opterećenjem.

## 4. ANALIZA NAPONA U ČVRSTOM TELU OD VISKOELASTIČNOG MATERIJALA

### 4.1. Matematičko modeliranje VEI čvrstog tela u vremenskom i transformisanom domenu

Za VEI čvrsto telo, važe *linearne jednačine ravnoteže po naponima*, slične jednačinama za EI (elastično izotropno) telo (Timošenko, Gudier (1962.), Lekhnitskii (1984a), Mase G.T., Mase G.E. (1999.), Dunica (1998.)). One glase:

$$\sigma_{ij,j}(\mathbf{x}_k, t) + f_i(\mathbf{x}_k, t) = 0 \quad (4.1)$$

gde je  $\sigma_{ij,j}(\mathbf{x}_k, t) = \frac{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{x}_k, t)}{\partial x_j} + \frac{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{x}_k, t)}{\partial t}$ ,  $f_i(\mathbf{x}_k, t)$  su zapreminske sile.

*Linearne jednačine veze deformacija i pomeranja* glase:

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}_k, t) = \frac{1}{2} [u_{i,j}(\mathbf{x}_k, t) + u_{j,i}(\mathbf{x}_k, t)] \quad (4.2)$$

gde su  $u_{i,j}$  pomeranja:

$$u_{i,j}(\mathbf{x}_k, t) = \frac{\partial u_i(\mathbf{x}_k, t)}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i(\mathbf{x}_k, t)}{\partial t} \quad \text{i} \quad u_{j,i}(\mathbf{x}_k, t) = \frac{\partial u_j(\mathbf{x}_k, t)}{\partial x_i} + \frac{\partial u_j(\mathbf{x}_k, t)}{\partial t}.$$

*Konstitutivne jednačine* za posmatrano telo *razlikuju se u zavisnosti od vrste mehaničkog modela*. Kao što je pokazano u prethodnom poglavlju, različiti, *linearno napregnuti*, mehanički modeli, imaju različite konstitutivne jednačine i različite viskoelastične parametre.

Pri formulisanju konstitutivnih zakona za *prostorno napregnuto* telo koriste se dve metode.

*Prva metoda – uopštavanje konstitutivnih jednačina u vremenskom domenu*. Radi se uopštavanje konstitutivnih jednačina, izvedenih u III poglavlju, za linearno naprezanje, uz istovremeno razlaganje promenljivih, na elastični i viskozni deo.

Za VEI čvrsto telo, koje se ponaša u skladu s Kelvin Voigt-ovim modelom, tenzor napona predstavlja se kao zbir elastičnog i viskoznog dela:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^e + \sigma_{ij}^v \quad (4.3)$$

gde je elastični deo, po Hukovom zakonu, jednak:



$$\boldsymbol{\sigma}_{ij}^e = \lambda \boldsymbol{\varepsilon}_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \boldsymbol{\gamma}_{ij} \quad (4.4)$$

dok je viskozni, po Njutnovom zakonu, jednak:

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij}^v = \Lambda \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{kk} \delta_{ij} + 2\eta \dot{\boldsymbol{\gamma}}_{ij} \quad (4.5)$$

gde su:  $\boldsymbol{\gamma}_{ij}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_{kk}$  - tenzori klizanja i dilatacija;  $\dot{\boldsymbol{\gamma}}_{ij}$ ,  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{kk}$  - tenzori brzina deformisanja, pri smicanju i pri zatezanju. U izrazima (4.4) i (4.5),  $\lambda$  i  $\mu$  su, već poznati, Lameovi koeficijenti, a  $\Lambda$  i  $\eta$  su dilataciona i smičuća viskoznost. Uvođenjem sledećih pretpostavki: da elastični i viskozni deo deformacije ovog tela, imaju isti Poasonov broj, da tenzori brzine deformisanja,  $\dot{\boldsymbol{\gamma}}_{ij}$  i  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{kk}$ , mogu da se posmatraju kao izvodi tenzora deformacija, i da karakteristično vreme viskoznog tečenja - vreme degradacije, odnosno propadanja materijala, može da se definiše kao odnos viskoznih i elastičnih konstanti:

$$\tau_{vt} = \frac{\Lambda}{\lambda} = \frac{\eta}{\mu} \quad (4.6)$$

jednačina (4.3) dobija novi oblik:

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij} = \left( 1 + \tau_{vt} \frac{\partial}{\partial t} \right) (\lambda \boldsymbol{\varepsilon}_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \boldsymbol{\gamma}_{ij}) \quad (4.7)$$

Izraz (4.7) predstavlja *linearnu konstitutivnu jednačinu za prostorno napregnuto VEI čvrsto telo, koje se ponaša u skladu s Kelvin Voigt-ovim modelom*. Inače, ovaj oblik konstitutivne jednačine odgovara jednačini (2.71). Izraz (2.71) razlikuje se od jednačine (4.7), jer za njega ne važi pretpostavka o jednakosti Poasonovih brojeva za elastične i viskozne deformacije. Zbog toga se u njemu pojavljaju dve vremenske konstante.

**Za VEI čvrsto telo** koje se ponaša u skladu sa Zenerovim modelom, uz iste pretpostavke kao i za prethodni model, važi jednačina za deformacije:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} = \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^e + \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{ve}; \quad (4.8)$$

Za napon važi jednakost elastične (Hukov element, jednačina (4.4), konstante  $\lambda$ ,  $\mu$ ) i viskoelastične komponente (Kelvin Voigt-ov model, jednačina (4.7), konstante  $\lambda_1$ ,  $\mu_1$ ):

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij} = \boldsymbol{\sigma}_{ij}^e = \boldsymbol{\sigma}_{ij}^{ve} = \lambda \boldsymbol{\varepsilon}_{kk}^e \delta_{ij} + 2\mu \boldsymbol{\gamma}_{ij}^e = \left( 1 + \tau_{\sigma} \frac{\partial}{\partial t} \right) (\lambda_K \boldsymbol{\varepsilon}_{kk}^{ve} \delta_{ij} + 2\mu_K \boldsymbol{\gamma}_{ij}^{ve}) \quad (4.9)$$

gde se vreme degradacije,  $\tau_{\sigma}$ , računa po obrascu  $\tau_{\sigma} = \frac{\Lambda_K}{\lambda_K} = \frac{\eta_K}{\mu_K}$ . Zamenom  $\boldsymbol{\gamma}_{ij}^{ve}$ , iz

jednačine (4.8) u jednačinu (4.9), dobija se:

$$\sigma_{ij} = \frac{\tau_\varepsilon}{1-\tau_\varepsilon} (\lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \gamma_{ij}) - \frac{\tau_\varepsilon}{1-\tau_\varepsilon} \tau_{ij} + \tau_\sigma \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\tau_\varepsilon}{1-\tau_\varepsilon} (\lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \gamma_{ij} - \tau_{ij}) \right) \quad (4.10)$$

odnosno

$$\sigma_{ij} + \tau_\sigma \dot{\sigma}_{ij} = \tau_\varepsilon (\lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \gamma_{ij}) + \tau_\sigma \frac{\partial}{\partial t} ((\lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \gamma_{ij})) \quad (4.11)$$

gde je  $\tau_\varepsilon$  - vreme, koje predstavlja odnos elastične konstante modela viskoelastičnosti i

$$\text{ukupne elastične konstante : } \tau_\varepsilon = \frac{\lambda_K}{\lambda + \lambda_K} = \frac{\mu_K}{\mu + \mu_K}.$$

Na taj način, dobijena je *linearna konstitutivna jednačina, (4.11), za prostorno napregnuta VEI čvrsta tela, koja se ponašaju u skladu sa Zenerovim modelom.*

Ovo je, u stvari, skup od šest linearnih PDJ prvog reda. One zavise od 4, međusobno različita, ali konstantna, viskoelastična parametara:  $\tau_\sigma, \tau_\varepsilon, \lambda, \mu$ . Uvođenjem karakterističnog vremena  $\tau_\sigma$  smanjen je broj viskoelastičnih parametara u konstitutivnoj jednačini – misli se na eliminisanje  $\lambda_K, \mu_K$ , i omogućeno je da se *umesto parametara, promenljivih tokom vremena, koriste početni.*

U razvijenom obliku, konstitutivne jednačine (4.11), imaju sledeći oblik:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} + \tau_\sigma \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{xx} &= \tau_\varepsilon (\lambda + 2\mu) \varepsilon_{xx} + \tau_\varepsilon \lambda \varepsilon_{yy} + \tau_\varepsilon \lambda \varepsilon_{zz} + \tau_\sigma \frac{\partial}{\partial t} ((\lambda + 2\mu) \varepsilon_{xx} + \lambda \varepsilon_{yy} + \lambda \varepsilon_{zz}) \\ \sigma_{yy} + \tau_\sigma \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{yy} &= \tau_\varepsilon \lambda \varepsilon_{xx} + \tau_\varepsilon (\lambda + 2\mu) \varepsilon_{yy} + \tau_\varepsilon \lambda \varepsilon_{zz} + \tau_\sigma \frac{\partial}{\partial t} (\lambda \varepsilon_{xx} + (\lambda + 2\mu) \varepsilon_{yy} + \lambda \varepsilon_{zz}) \\ \sigma_{zz} + \tau_\sigma \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{zz} &= \tau_\varepsilon \lambda \varepsilon_{xx} + \tau_\varepsilon \lambda \varepsilon_{yy} + \tau_\varepsilon (\lambda + 2\mu) \varepsilon_{zz} + \tau_\sigma \frac{\partial}{\partial t} (\lambda \varepsilon_{xx} + \lambda \varepsilon_{yy} + (\lambda + 2\mu) \varepsilon_{zz}) \\ \tau_{yz} + \tau_\sigma \frac{\partial}{\partial t} \tau_{yz} &= 2\mu \tau_\varepsilon \gamma_{yz} + \tau_\sigma \frac{\partial}{\partial t} (2\mu \gamma_{yz}) \\ \tau_{zx} + \tau_\sigma \frac{\partial}{\partial t} \tau_{zx} &= 2\mu \tau_\varepsilon \gamma_{zx} + \tau_\sigma \frac{\partial}{\partial t} (2\mu \gamma_{zx}) \\ \tau_{xy} + \tau_\sigma \frac{\partial}{\partial t} \tau_{xy} &= 2\mu \tau_\varepsilon \gamma_{xy} + \tau_\sigma \frac{\partial}{\partial t} (2\mu \gamma_{xy}) \end{aligned} \quad (4.12)$$

Jednačine (4.7) i (4.11) su *konstitutivne jednačine za prostorno napregnuta, VEI čvrsta tela.* Ovo su PDJ s konstantnim koeficijentima. One se, i po izgledu i po strukturi, razlikuju od jednačina generalizovanog Hukovog zakona. Ono što je

zajedničko za navedene jednačine i jednačine generalizovanog Hukovog zakona je da klizanja zavise samo od odgovarajućih smičućih napona, dok je funkcionalna zavisnost različita.

Za linearno naprezanje, gde deluje samo napon  $\sigma_{zz}$  u pravcu z ose, konstitutivne jednačine (4.12) svode se na sledeće jednačine:

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\tau_\varepsilon}{\tau_\sigma} \left( (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{xx} + \lambda\varepsilon_{yy} + \lambda\varepsilon_{zz} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left( (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{xx} + \lambda\varepsilon_{yy} + \lambda\varepsilon_{zz} \right) \\
 0 &= \frac{\tau_\varepsilon}{\tau_\sigma} \left( \lambda\varepsilon_{xx} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{yy} + \lambda\varepsilon_{zz} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \lambda\varepsilon_{xx} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{yy} + \lambda\varepsilon_{zz} \right) \\
 \left( 1 + \tau_\sigma \frac{\partial}{\partial t} \right) \sigma_{zz} &= \tau_\varepsilon \left( \lambda\varepsilon_{xx} + \lambda\varepsilon_{yy} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{zz} \right) + \tau_\sigma \frac{\partial}{\partial t} \left( \lambda\varepsilon_{xx} + \lambda\varepsilon_{yy} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{zz} \right) \\
 0 &= \frac{\tau_\varepsilon}{\tau_\sigma} \gamma_{yz} + \frac{\partial}{\partial t} \gamma_{yz} \\
 0 &= \frac{\tau_\varepsilon}{\tau_\sigma} \gamma_{zx} + \frac{\partial}{\partial t} \gamma_{zx} \\
 0 &= \frac{\tau_\varepsilon}{\tau_\sigma} \gamma_{xy} + \frac{\partial}{\partial t} \gamma_{xy}
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Iz jednačina (4.13) uočljivo je da se, zbog viskoelastičnosti, u slučaju linearnog naprezanja u pravcu z ose, ne javljaju samo dilatacije, nego i klizanja, kao i kod elastičnog anizotropnog materijala.

Iz četvrte, pete i šeste jednačine, izraza (4.13), može se zaključiti, da će se klizanja menjati po eksponencijalnom zakonu:  $Be^{-\tau_\varepsilon/\tau_\sigma}$ . Klizanja postoje samo u slučaju kada je materijal prethodno već bio napregnut na smicanje. To znači da u početnom trenutku već postoji neka smičuća deformacija, inače je integraciona konstanta B jednaka nuli.

**Druga metoda – formulisanje konstitutivnih jednačina u transformisanom domenu.** Formulisanje konstitutivnih zakona za prostorno napregnuto VEI čvrsto telo radi se *po analogiji s EI telom* (Biot 1955.).

Kao što je poznato, prema Hukovom zakonu, u vezi između smičućih napona i klizanja, postoji samo jedan materijalni parametar, odnosno, u vezi normalnih napona i dilatacija, dva. U konstitutivnim zakonima za prostorno napregnuta VEI tela, ako se primeni analogija s EI telom, dva materijalna parametra predstavljaju teškoću, zbog

primene Laplasovih transformacija. Zbog toga se tenzori napona i deformacija za prostorno napregnuto EI telo razlažu na devijatorski ( $s_{ij}$ , odnosno  $e_{ij}$ ) i dilatatorski deo:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \tau_{ij} + \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij} \\ \varepsilon_{ij} &= \gamma_{ij} + \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}\end{aligned}\quad (4.14)$$

gde je  $\sigma_{kk} = 3\sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ ,  $\varepsilon_{kk} = 3\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ .

Dilatatorski deo ukazuje na promenu dimenzija, a devijatorski deo na promenu oblika. Od izraza (4.14), upotrebom jednačina generalizovanog Hukovog zakona za deformacije, kao i poznatih veza između elastičnih konstanti, mogu se dobiti sledeće jednačine:

$$\begin{aligned}\tau_{ij} &= G\gamma_{ij} \\ \sigma_{kk} &= 3K\varepsilon_{kk}\end{aligned}\quad (4.15)$$

Jednačine (4.15) daju vezu između tenzora devijatorskih napona i klizanja, kao i između tenzora dilatacionih napona i dilatacija, s po jednom elastičnom konstantom.

Sada mogu da se primene Laplasove transformacije na jednačine (4.15). Tako se dobijaju sledeći izrazi:

$$\begin{aligned}\bar{\tau}_{ij}(s) &= \bar{G}^*(s)\bar{\gamma}_{ij}(s) \\ \bar{\sigma}_{kk}(s) &= 3\bar{K}^*(s)\bar{\varepsilon}_{kk}(s)\end{aligned}\quad (4.16)$$

gde su  $\bar{\tau}_{ij}(s), \bar{\sigma}_{kk}(s), \bar{\gamma}_{ij}(s), \bar{\varepsilon}_{kk}(s)$  tenzori viskoelastičnih, devijatorskih i dilatatorskih napona i deformacija,  $\bar{G}^*(s) = s\bar{G}(s)$  je modul relaksacije pri smicanju,  $\bar{K}^*(s) = s\bar{K}(s)$  je zapreminski modul relaksacije. Dakle, sve veličine nadvučene crticom odnose se na transformisane viskoelastične promenljive. Dalje transformacije izraza (4.16) daju nov oblik konstitutivne relacije napon-deformacija za prostorno napregnuto VEI čvrsto telo:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{\bar{E}^*}{2(1+\bar{\nu}^*)}\bar{\gamma}_{ij} + \frac{\bar{\nu}^*}{1+\bar{\nu}^*} \cdot \frac{\bar{E}^*}{1-2\bar{\nu}^*}\bar{\varepsilon}_{kk}\delta_{ij}\quad (4.17)$$

gde su  $\bar{\sigma}_{ij}, \bar{\gamma}_{ij}, \bar{\varepsilon}_{kk}$  tenzori viskoelastičnih napona, klizanja i dilatacija,  $\bar{\nu}^*(s) = s\bar{\nu}(s)$  - viskoelastični Poasonov koeficijent, a  $\bar{E}^*(s) = s\bar{E}(s)$  modul viskoelastičnosti.

Izrazi za deformacije mogu se dobiti na isti način. U transformisanom domenu devijatorski i dilatacioni deo deformacija je:

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}_{ij}(s) &= \bar{J}^*(s) \bar{\tau}_{ij}(s) \\ \bar{\epsilon}_{kk}(s) &= \frac{1}{3} \bar{B}^*(s) \bar{\sigma}_{kk}(s)\end{aligned}\quad (4.18)$$

gde je  $\bar{J}^*(s) = s\bar{J}(s)$  smičuća popustljivost, a  $\bar{B}^*(s) = s\bar{B}(s)$  smičuća zapreminska popustljivost. Dalje transformacije izraza (4.18) daju nov *oblik konstitutivne relacije deformacija-napon za prostorno napregnuto VEI čvrsto telo*:

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \frac{1 + \bar{\nu}^*}{\bar{E}^*} \bar{\tau}_{ij} - \frac{\bar{\nu}^*}{\bar{E}^*} \bar{\sigma}_{kk} \delta_{ij} \quad (4.19)$$

Poređenjem izraza (2.11) i (2.13), s jedne, i (4.17) i (4.19), s druge strane, vidi se da postoji *analogija između prostorno napreghnutih EI i VEI materijala*. Ova analogija je suštinska za postavku principa viskoelastične analogije.

Polazeći od jednačina (4.15) i uzimajući u obzir relaciju (3.83), pišu se *konstitutivne jednačine, devijatorske i dilatatorske, za prostorno napregnuto VEI čvrsta tela*:

$$\begin{aligned}\{P\} \tau_{ij}(x_k, t) &= \{Q\} \gamma_{ij}(x_k, t) \\ \{P_1\} \sigma_{kk}(x_i, t) &= 3\{Q_1\} \epsilon_{kk}(x_i, t)\end{aligned}\quad (4.20)$$

gde su  $\{P\}, \{Q\}, \{P_1\}, \{Q_1\}$  različiti diferencijalni vremenski operatori (3.84), za različite mehaničke modele. Jednačine (4.20) su opšte i zavisne su od vremena.

Sada može da se napiše i matrica viskoelastičnosti za VEI telo, u kojoj su sve materijalne karakteristike zavisne od vremena:

$$\mathbf{C}_{ve} = \begin{bmatrix} D(t) & -\nu(t)D(t) & -\nu(t)D(t) & 0 & 0 & 0 \\ -\nu(t)D(t) & D(t) & -\nu(t)D(t) & 0 & 0 & 0 \\ -\nu(t)D(t) & -\nu(t)D(t) & D(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J(t) \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

*Granični uslovi*, potrebni za rešavanje sistema jednačina, (4.1), (4.2) i (4.11), zavisne od vremena:

$$\sigma_{ij}(x_k, t) n_j = F_i(x_k, t) \text{ ili } u_i(x_k, t) = L_i(x_k, t) \quad (4.22)$$

Rešavanje sistema jednačina: 3 jednačine ravnoteže (4.1), 6 jednačina veze deformacija i pomeranja (4.2), i 6 konstitutivnih jednačina (4.11), uz granične uslove (4.22), veoma je komplikovan zadatak. To je sada sistem od 15 PDJ, umesto 15

jednačina koje važe za EI čvrsto telo, gde ih je bilo 9 PDJ i 6 algebarskih. Osim toga, u ovim jednačinama javlja se veći broj materijalnih parametara.

Zbog složenosti, *rešavanje problema za slučaj prostorno napregnutog VEI čvrstog tela, proizvoljnog oblika, koje se ponaša u skladu sa Zenerovim modelom, svodi se na traženje približnih rešenja.*

*Za ravno i linearno napregnuto telo mogu se odrediti tačna rešenja, uz uvođenje određenih pretpostavki o obliku tela, koje pojednostavljaju probleme.*

Na primer, za tanki štap od VEI-og materijala, koji se ponaša po Zenerovom modelu, a linearno je napregnut konstantnim naponom u pravcu z ose, uz zanemarivanje poprečnih dilatacija, podužna dilatacija se računa prema modifikovanoj jednačini (3.45):

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_0}{E_H} + \frac{\sigma_0}{E_K} \left(1 - e^{-t/\tau}\right) = \frac{\sigma_0}{E_H} (1 + \varphi(t)) \quad (4.23)$$

gde je  $\varphi(t) = \frac{E_H}{E_K} \sigma_0 \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$  funkcija viskoznog tečenja zavisna od vremena.

## 4.2. Matematičko modeliranje VEO čvrstog tela metodom viskoelastične analogije

I do rešenja problema kod VEO čvrstih tela može se doći na dva načina: u vremenskom ili u transformisanom domenu, metodom viskoelastične analogije.

Da bi se pokazala prednost metode viskoelastične analogije prvo će biti napisane odgovarajuće jednačine u vremenskom domenu.

**U vremenskom domenu** važe jednačine ravnoteže, (4.1), veze deformacija i pomeranja, (4.2), granični uslovi, (4.22), isti kao kod prostorno napregnutog VEI čvrstog tela. **Razlika između prostorno napregnutog VEO i VEI čvrstog tela je samo u konstitutivnim jednačinama, koje, razume se, zavise od izabranog mehaničkog modela.**

Pretpostavlja se da za prostorno napregnuto VEO čvrsto telo, koje se ponaša u skladu sa Zenerovim modelom, mogu da se napišu opšte konstitutivne jednačine, generalizacijom odgovarajućih konstitutivnih jednačina za VEI telo, (4.11), na isti način kao što su jednačine za EO čvrsto telo dobijene generalizacijom Hukovog zakona, koji važi za EI čvrsto telo. Te jednačine su linearne i imaju sledeći oblik:

$$\sigma_{ij} + \tau_{\sigma_i} \dot{\sigma}_{ij} = \tau_{\varepsilon_i} (\lambda_k \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu_i \gamma_{ij}) + \tau_{\sigma_i} \frac{\partial}{\partial t} ((\lambda_k \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu_i \gamma_{ij})) \quad (4.24)$$

gde su  $\tau_{\sigma_i}, \lambda_i, \mu_i$  karakteristike viskoelastičnog materijala u pravcima koordinatnih osa x,y,z. Razvijeni oblik jednačina je sledeći:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} + \tau_{\sigma_x} \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{xx} &= \tau_{\varepsilon_x} (\lambda_x + 2\mu_x) \varepsilon_{xx} + \tau_{\varepsilon_x} \lambda_y \varepsilon_{yy} + \tau_{\varepsilon_x} \lambda_z \varepsilon_{zz} + \tau_{\sigma_x} \frac{\partial}{\partial t} ((\lambda_x + 2\mu_x) \varepsilon_{xx} + \lambda_y \varepsilon_{yy} + \lambda_z \varepsilon_{zz}) \\ \sigma_{yy} + \tau_{\sigma_y} \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{yy} &= \tau_{\varepsilon_y} \lambda_x \varepsilon_{xx} + \tau_{\varepsilon_y} (\lambda_y + 2\mu_y) \varepsilon_{yy} + \tau_{\varepsilon_y} \lambda_z \varepsilon_{zz} + \tau_{\sigma_y} \frac{\partial}{\partial t} (\lambda_x \varepsilon_{xx} + (\lambda_y + 2\mu_y) \varepsilon_{yy} + \lambda_z \varepsilon_{zz}) \\ \sigma_{zz} + \tau_{\sigma_z} \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{zz} &= \tau_{\varepsilon_z} \lambda_x \varepsilon_{xx} + \tau_{\varepsilon_z} \lambda_y \varepsilon_{yy} + \tau_{\varepsilon_z} (\lambda_z + 2\mu_z) \varepsilon_{zz} + \tau_{\sigma_z} \frac{\partial}{\partial t} (\lambda_x \varepsilon_{xx} + \lambda_y \varepsilon_{yy} + (\lambda_z + 2\mu_z) \varepsilon_{zz}) \\ \tau_{yz} + \tau_{\sigma_y} \frac{\partial}{\partial t} \tau_{yz} &= 2\tau_{\varepsilon_y} \mu_y \gamma_{yz} + \tau_{\sigma_y} \frac{\partial}{\partial t} (2\mu_y \gamma_{yz}) \\ \tau_{zx} + \tau_{\sigma_z} \frac{\partial}{\partial t} \tau_{zx} &= 2\tau_{\varepsilon_z} \mu_z \gamma_{zx} + \tau_{\sigma_z} \frac{\partial}{\partial t} (2\mu_z \gamma_{zx}) \\ \tau_{xy} + \tau_{\sigma_x} \frac{\partial}{\partial t} \tau_{xy} &= 2\tau_{\varepsilon_x} \mu_x \gamma_{xy} + \tau_{\sigma_x} \frac{\partial}{\partial t} (2\mu_x \gamma_{xy}) \end{aligned} \quad (4.25)$$

U jednačinama (4.25) postoji 12 materijalnih parametara, od čega su  $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z, \mu_x, \mu_y, \mu_z$  viskoelastične karakteristike za različite pravce, a  $\tau_{\sigma_x}, \tau_{\sigma_y}, \tau_{\sigma_z}, \tau_{\varepsilon_x}, \tau_{\varepsilon_y}, \tau_{\varepsilon_z}$  su karakteristična vremena za određene pravce. Sve ove veličine zavise od strukture materijala i uslova naprežanja.

Dakle, za prostorno napregnuto Zenerovo VEO čvrsto telo, treba rešiti sistem od 15 linearnih PDJ, uz odgovarajuće granične i početne uslove.

Dobijene linearne PDJ izražavaju opšte fizičke zakone. Fizički zakoni su univerzalni, što povećava skup mogućih rešenja. Broj nepoznatih veličina u ovim jednačinama zavisi i od broja tačaka proračunske oblasti i od vremena, jer su promenljive, u stvari, funkcije i koordinata i vremena. Zbog toga je broj promenljivih u PDJ vrlo veliki.

Da bi se od velikog broja mogućih rešenja odredilo baš ono koje opisuje postavljeni problem neophodno je pridružiti im granične i početne uslove.

U opštem slučaju, problem opisan PDJ dobro je postavljen, ako su ispunjeni sledeći uslovi:

- Postoji rešenje sistema jednačina uz određene dopunske uslove.
- Dobijeno rešenje je jedinstveno.

- Rešenje kontinualno zavisi od vrednosti koeficijenata uz izvode i od dopunskih uslova.

Konturni uslovi moraju biti korektno postavljeni, inače treći uslov neće biti ispunjen. Ako ima previše konturnih uslova, neće postojati rešenje, a ako ih je premalo, rešenje neće biti jedinstveno.

**Analitičko rešenje** PDJ ne može da se odredi za većinu realnih tehničkih problema, jer su jednačine koje ih opisuju višedimenzione, sa komplikovanim granicama, ali može da se odredi za *modelske jednačine*. To su jednačine, koje imaju pojedine osobine jednačina koje opisuju realne probleme, ali su dimenziono redukovane na najmanju moguću meru. Postoje inače, tačna analitička rešenja za neke PDJ: linearne i nelinearne s konstantnim koeficijentima uz izvode; jednačine prvog reda; sisteme jednačina prvog reda; jednačine drugog reda.

Tačna rešenja dobijenih konstitutivnih PDJ mogu da se odrede, ali samo za tela pravilnih geometrijskih oblika i za posebne slučajeve opterećenja. Ona se dobiju direktnom integracijom pojednostavljenih PDJ. U složenijim slučajevima uvode se razne pretpostavke, koje smanjuju tačnost rešenja.

**Numeričko rešenje** PDJ pretpostavlja proces svođenja beskonačnog broja nepoznatih na konačan broj (proces aproksimacije). Takva rešenja, iako približna, često se koriste u praksi.

Da bi algebarsko rešenje sistema jednačina, dobijenog iz aproksimacije PDJ, bilo blisko tačnom, mora raspolagati sledećim karakteristikama (Petrović, Stupar 1996.):

- Konzistentnost. Aproksimacija PDJ konzistentna je, ako se u graničnom procesu, kada koraci teže nuli, sistem jednačina dobijenih aproksimacijom svodi na polazne jednačine.
- Stabilnost. Numerička shema je stabilna, ako se greška, uvedena u numeričku shemu, tokom proračuna smanjuje.
- Konvergentnost. Numerička šema je konvergentna, ako se smanjivanjem koraka proračunske mreže dobijaju rešenja sve bliža tačnom rešenju PDJ. Konzistentnost i stabilnost su neophodni i dovoljni uslovi konvergentnosti numeričke sheme.
- Laksova teorema. Problem aproksimirane PDJ dobro je postavljen ako za



linearne granične uslove postupak konvergira.

- Konzervativnost jednačine. Ako se u jednačini ne javljaju izvodi koeficijenta uz parcijalne izvode ili ukoliko su koeficijenti konstante, PDJ je u konzervativnom obliku.
- Konzervativnost numeričke sheme. Ako aproksimacija PDJ odražava integralne karakteristike fizičkih zakona, bez obzira na oblik i broj tačaka proračunske mreže proračunska shema je konzervativna.

Kod svih numeričkih metoda prvo se proračunska oblast preklapa proračunskom mrežom. Uspostavljanje pravilne mreže, preko nepravilne proračunske oblasti, otežava zadavanje graničnih uslova. Za prosto povezane oblasti važi da granice realnog problema, preslikavanjem, obrazuju granice proračunske oblasti, što znači da se na njima zadaju granični uslovi.

Bez obzira na izabrani način preslikavanja s fizičke na proračunsku oblast, potrebne osobine proračunskih mreža su:

- Preslikavanje mora biti uzajamno jednoznačno.
- Raspodela koordinatnih linija u fizičkoj ravni mora biti ravnomerna.
- U fizičkoj ravni linije treba da budu ortogonalne ili bar približno ortogonalne.
- Postupak preslikavanja treba da omogući nabiranje koordinatnih linija na mestima povećanih gradijenata nepoznate funkcije ili na mestima koja se prethodno odrede.

Teško je zadovoljiti istovremeno sve navedene uslove.

Nakon izbora proračunske mreže u izabranoj numeričkoj metodi primenjuju se dva koraka:

- Aproksimacija izvoda nepoznatih funkcija u PDJ, pri čemu se dobije sistem algebarskih jednačina.
- Rešavanje ovakvog sistema jednačina, što daje vrednosti traženih funkcija u čvorovima proračunske mreže.

Najprostija tehnika za dobijanje proračunskih mreža je generisanje algebarskih mreža. Osnovni kvalitet tog generisanja je brzina i jednostavnost. Povezivanje tačaka proračunske i fizičke oblasti ostvaruje se pomoću algebarskih jednačina. Alat koji se koristi u povezivanju tačaka je interpolacija. Mane ovog generisanja proračunske mreže su: nepostojanje glatkosti parametara preslikavanja za komplikovane fizičke oblasti,

diskontinuiteti na granici mogu da se prenesu na unutrašnjost proračunske mreže, a izobličenja mreže i parametar preslikavanja teško se kontrolišu.

Numeričke metode koje mogu da se koriste su metoda konačnih elemenata-MKE ili FEM (finite element metod), metoda konačnih zapremina-MKV ili FVM (finite volume metod), metoda konačnih razlika-MKR ili FDM (finite difference metod), itd.

Procena tačnosti numeričkog proračuna povezana je sa merenjem razlike između dve funkcije, koje predstavljaju tačno i približno rešenje PDJ. Pošto se analitičko rešenje, po pravilu, ne zna, greška proračuna procenjuje se na osnovu dve uzastopne iteracije. Greška proračuna je razlika između dve funkcije, od kojih je jedna funkcija rešenje iz tekuće iteracije, a druga, rešenje iz prethodne iteracije.

Metode kod kojih je greška aproksimacije proporcionalna prvom stepenu koraka proračunske mreže su metode prvog reda tačnosti. Greške povezane sa aproksimacijama prvog reda tačnosti nazivaju se disipacione greške, jer numeričke sheme teže da umanje amplitudu rešenja. Greške povezane sa aproksimacijama drugog reda tačnosti nazivaju se disperzione greške. Kod njih aproksimativno rešenje osciluje oko tačnog. Ako rešenje prilazi tačnom samo sa jedne strane proračunska shema je monotona.

Tačnost numerički dobijenih približnih rešenja je diskutabilna, naročito u slučajevima pojave viskoznog tečenja ili relaksacije napona, odnosno u slučajevima konstantnog opterećenja ili konstantne deformacije. Naime, *pojavu ovih viskoelastičnih efekata teško može obuhvatiti numerička metoda*, zbog karakteristika koje treba da ima numerička shema (naročito konvergentnost), zbog problematike definisanja graničnih uslova (postojanje „memorije“ materijala) i potrebnih svojstava proračunske mreže (jednoznačno preslikavanje). I pored ovih nedostataka koriste se numeričke metode za proračun Kelvin Voigt-ovih VEI čvrstih tela. Za Zenerov model VEO tela ne primenjuju se numerički proračuni, jer su konstitutivne jednačine vrlo komplikovane, već se traže drugačiji načini rešavanja problema.

Ako VEO čvrsto telo ima oblik tankog štapa, linearno napregnutog u pravcu z ose, potrebno je da se računaju i poprečne dilatacije. Eksperimenti, naime, pokazuju da se baš u poprečnom pravcu često javljaju pukotine, zbog kojih dolazi do loma materijala. Naime, kod takvih materijala karakteristike u pravcima različitih osa zbog same strukture materijala mogu biti veoma različite, dok Poasonovi koeficijenti mogu biti čak i veći od jedinice. Što se tiče klizanja, ona se zanemaruju samo u slučajevima

kada ne postoje smičući naponi.

Dilatacije za tanki VEO štap, linearno napregnut u pravcu z ose, računaju se iz prve tri jednačine izraza (4.25).

Za tanak Zenerov VEO štap, *linearno napregnut konstantnim naponom*  $\sigma_{zz}$ , važe sledeće konstitutivne jednačine:

$$\begin{aligned}
 0 &= \tau_{\varepsilon_x} (\lambda_x + 2\mu_x) \varepsilon_{xx} + \tau_{\varepsilon_x} \lambda_y \varepsilon_{yy} + \tau_{\varepsilon_x} \lambda_z \varepsilon_{zz} + \tau_{\sigma_x} \frac{\partial}{\partial t} ((\lambda_x + 2\mu_x) \varepsilon_{xx} + \lambda_y \varepsilon_{yy} + \lambda_z \varepsilon_{zz}) \\
 0 &= \tau_{\varepsilon_y} \lambda_x \varepsilon_{xx} + \tau_{\varepsilon_y} (\lambda_y + 2\mu_y) \varepsilon_{yy} + \tau_{\varepsilon_y} \lambda_z \varepsilon_{zz} + \tau_{\sigma_y} \frac{\partial}{\partial t} (\lambda_x \varepsilon_{xx} + (\lambda_y + 2\mu_y) \varepsilon_{yy} + \lambda_z \varepsilon_{zz}) \\
 \sigma_{zz} + \tau_{\sigma_z} \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{zz} &= \tau_{\varepsilon_z} \lambda_x \varepsilon_{xx} + \tau_{\varepsilon_z} \lambda_y \varepsilon_{yy} + \tau_{\varepsilon_z} (\lambda_z + 2\mu_z) \varepsilon_{zz} + \tau_{\sigma_z} \frac{\partial}{\partial t} (\lambda_x \varepsilon_{xx} + \lambda_y \varepsilon_{yy} + (\lambda_z + 2\mu_z) \varepsilon_{zz}) \\
 0 &= \tau_{\varepsilon_y} \mu_y \gamma_{yz} + \tau_{\sigma_y} \frac{\partial}{\partial t} (\mu_y \gamma_{yz}) \\
 0 &= \tau_{\varepsilon_z} \mu_z \gamma_{zx} + \tau_{\sigma_z} \frac{\partial}{\partial t} (2\mu_z \gamma_{zx}) \\
 0 &= \tau_{\varepsilon_x} \mu_x \gamma_{xy} + \tau_{\sigma_x} \frac{\partial}{\partial t} (\mu_x \gamma_{xy})
 \end{aligned}
 \tag{4.26}$$

Tela od VEO materijala često nemaju viskoelastična svojstva u tri međusobno ortogonalna pravca, nego u jednom ili u dva, od tih pravaca ispoljavaju elastična svojstva. Polimeri u podužnom pravcu mogu da pokažu svojstvo elastičnosti, a da u poprečnim pravcima imaju svojstva viskoelastičnosti. Za takve polimere treća jednačina izraza (4.26) zamenjuje se odgovarajućom jednačinom uopštenog Hukovog zakona:

$$\begin{aligned}
 0 &= \tau_{\varepsilon_x} (\lambda_x + 2\mu_x) \varepsilon_{xx} + \tau_{\varepsilon_x} \lambda_y \varepsilon_{yy} + \tau_{\varepsilon_x} \lambda_z \varepsilon_{zz} + \tau_{\sigma_x} \frac{\partial}{\partial t} ((\lambda_x + 2\mu_x) \varepsilon_{xx} + \lambda_y \varepsilon_{yy} + \lambda_z \varepsilon_{zz}) \\
 0 &= \tau_{\varepsilon_y} \lambda_x \varepsilon_{xx} + \tau_{\varepsilon_y} (\lambda_y + 2\mu_y) \varepsilon_{yy} + \tau_{\varepsilon_y} \lambda_z \varepsilon_{zz} + \tau_{\sigma_y} \frac{\partial}{\partial t} (\lambda_x \varepsilon_{xx} + (\lambda_y + 2\mu_y) \varepsilon_{yy} + \lambda_z \varepsilon_{zz}) \\
 \sigma_{zz} &= \lambda_x \varepsilon_{xx} + \lambda_y \varepsilon_{yy} + (\lambda_z + 2\mu_z) \varepsilon_{zz} \\
 0 &= \tau_{\varepsilon_y} \mu_y \gamma_{yz} + \tau_{\sigma_y} \frac{\partial}{\partial t} (\mu_y \gamma_{yz}) \\
 0 &= \tau_{\varepsilon_z} \mu_z \gamma_{zx} + \tau_{\sigma_z} \frac{\partial}{\partial t} (\mu_z \gamma_{zx}) \\
 0 &= \tau_{\varepsilon_x} \mu_x \gamma_{xy} + \tau_{\sigma_x} \frac{\partial}{\partial t} (\mu_x \gamma_{xy})
 \end{aligned}
 \tag{4.27}$$

Ove jednačine važe samo za slučaj konstantnog napona, odnosno slučaj viskoznoeg tečenja.

Dakle, čak i za tanak štap od Zenerovog VEO materijala, izložen viskoznom tečenju, treba rešiti sistem od 7 PDJ: jedna jednačina ravnoteže, tri jednačine veza

deformacija i pomeranja i tri konstitutivne jednačine.

U transformisanom domenu koristi se jednostavna procedura za dobijanje rešenja, koja se zove **Alfrey-ev princip viskoelastične analogije ili korespodencije**. Tu proceduru rešavanja jednačina prvi je uspostavio polovinom prošlog veka Turner Alfrey (1918-1981.), koji je proučavao svojstva polimera i načine njihove primene. Koristi je mnogo autora: Biot (1955.), Ferry (1980.), Malkin (1994.), Christensen (2003.), Shaw, MacKnight (2005.), Brinson H.F. i Brinson L.C. (2008.).

Ta procedura ima nekoliko koraka:

- Nalazi se rešen granični problem elastičnosti, sa istom geometrijom, opterećenjem i graničnim uslovima, kao što je granični problem viskoelastičnosti koji treba rešiti.
- Opterećenje, kao i sve promenljive za opterećenje, napon, deformacije, pomeranja u elastičnom rešenju, zamenjuju se njihovim Laplasovim transformacijama.
- Sve elastične konstante zamenjuju se vremenskim transformacijama vremenski zavisnih modula (ili brzine transformacija, analognim diferencijalnim operatorima):

$$E \rightarrow \bar{E}^*(s) = s\bar{E}(s) \quad (4.28)$$

$$D \rightarrow \bar{D}^*(s) = s\bar{D}(s) \quad (4.29)$$

$$G \rightarrow \bar{G}^*(s) = s\bar{G}(s) \quad (4.30)$$

$$v \rightarrow \bar{v}^*(s) = s\bar{v}(s) \quad (4.31)$$

Rezultujući izrazi su rešenja, u transformisanom domenu, za granični problem viskoelastičnosti. Rešenja u vremenskom domenu dobijaju se odgovarajućom inverzijom.

Ovaj princip može da se primeni za uobičajene klase problema viskoelastičnosti, koji se odnose na štapove i grede (linearni), kao i za neke ravne probleme. *Ograničenje u primeni principa viskoelastične korespodencije je, da on može da se primeni, samo na granične probleme, kod kojih su granični uslovi nezavisni od vremena.* Sem za probleme statičke ravnoteže, procedura može da se primeni i kod problema dinamičke viskoelastičnosti, u kojima se funkcija opterećenja, kao i granični uslovi, mogu prikazati kao proizvodi funkcija prostorne i vremenske promenljive.

Uz pretpostavku da princip viskoelastične analogije važi i za odgovarajuće matrice, može se napisati i matrica viskoelastičnosti za Zenerovo VEO telo, po analogiji s matricom (4.21):

$$\mathbf{C}_{ve} = \begin{bmatrix} D_x(t) & -v_{xy}(t)D_y(t) & -v_{xz}(t)D_z(t) & 0 & 0 & 0 \\ -v_{yx}(t)D_x(t) & D_y(t) & -v_{yz}(t)D_z(t) & 0 & 0 & 0 \\ -v_{zx}(t)D_x(t) & -v_{zy}(t)D_y(t) & D_z(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{yz}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_{zx}(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{xy}(t) \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

## 5. PRIMENA ZENEROVOG MODELA ZA RAZLIČITA NAPREZANJA U MEHANICI DRVETA

### 5.1. Linearno i ravno naprezanje

Osnovna pretpostavka koja će se koristiti u svim proračunima je da se drvo ponaša kao Zenerovo VEO čvrsto telo. Kod ispitivanja ponašanja linearno napregnutog Zenerovog VEO čvrstog tela, potrebno je znati kako se ponaša linearno napregnuto telo od materijala: EI (Timošenko, Gudier, 1962.), EO (Lekhnitskii, 1984a.) i VEI (Brinson H.F., Brinson L.C., 2008., Riande i sar., 2000.).

Za aksijalno zategnut štap dat je prikaz proračuna napona, deformacija i pomeranja, za Zenerov VEI i VEO materijal, primenom principa viskoelastične analogije sa EI i EO materijalima. Radi definisanja konturnih uslova, odnosno potrebnih integracionih konstanti, posmatraće se konzola, opterećena centrično postavljenom konstantnom koncentrisanom silom, koja na slobodnom kraju deluje u pravcu ose nosača.

Za štap, napregnut na pravo čisto savijanje, urađen je proračun za slučaj EO materijala, a zatim, primenom principa viskoelastične analogije, i za štap od Zenerovog VEO materijala. Proračun je rađen za dva slučaja oslanjanja: za štap, uklješten na jednom kraju i za prosto oslonjenu gredu. Konzola je opterećena koncentrisanim momentima na slobodnom kraju a prosta greda koncentrisanim momentima kod oslonaca.

Kod linearnog naprezanja usvojeno je da su Poasonovi koeficijenti konstantni. Ta pretpostavka se zadržava i kod ravnog naprezanja. Takođe, i dalje se uzima da se, pri viskoznom tečenju, pravci glavnih napona, a pri relaksaciji napona, pravci glavnih dilatacija, poklapaju sa anatomskim pravcima. Izračunati parametri linearno napregnutog Zenerovog modela koriste se i za ravno naprezanje. Pored toga i dalje se uzima da važi princip viskoelastične analogije.

Što se tiče ravnog naprezanja, važno je proučiti savijanje silama štapa sačinjenog od Zenerovog VEO materijala.

Za savijanje silama tankog štapa od Zenerovog VEO materijala, uzeta je najpre

kao primer konzola opterećena centrično postavljenom vertikalnom silom na slobodnom kraju, a potom konzola i prosta greda, opterećene jednako podeljenim opterećenjem duž celih raspona.

Dalje je objašnjeno ravno naprezanja tanke ploče od Zenerovog VEO materijala. Posmatra se ploča pravougaonog oblika, opterećena jednako podeljenim opterećenjem na celoj površini, a što se tiče načina oslanjanja, posmatraju se dva slučaja: da je ploča slobodno oslonjena duž sve četiri stranice i da je slobodno oslonjena duž dve stranice.

U nekim slučajevima ravnog naprezanja, za sračunavanje napona korišćenjem jednačina ravnoteže sila, koristi se naponska funkcija za savijanje silama, koja se određuje iz uslova opterećenja i načina oslanjanja. Ista naponska funkcija postoji i kod rešenja za pomeranja.

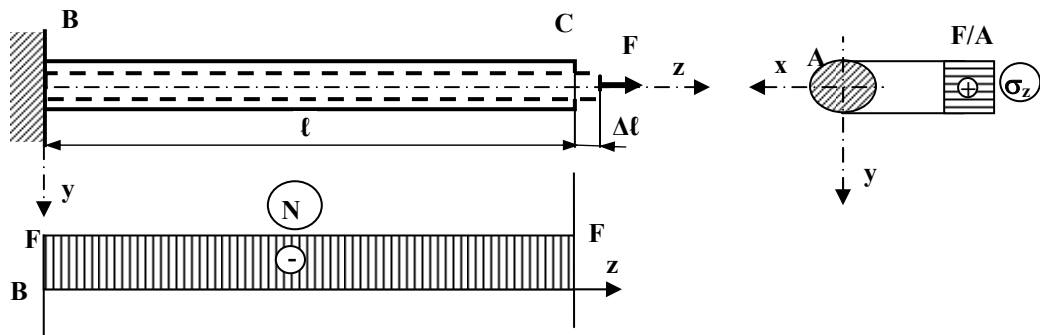
### 5.1.1. Aksijalno zategnut štap

**Za uklešteni štap, konstantnog preseka, aksijalno napregnut u pravcu ose z** (Sl. 5-1), **od EI materijala**, potrebno je, od ukupno 15 jednačina teorije elastičnosti, napisati njih 7: jedna jednačina ravnoteže, tri konstitutivne jednačine i tri jednačine veze pomeranja i deformacija:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz,z}(x, y, z) &= 0 \\ \varepsilon_{xx} &= -\nu \frac{\sigma_{zz}}{E}; \quad \varepsilon_{yy} = -\nu \frac{\sigma_{zz}}{E}; \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

Od njih sedam, četiri su PDJ. Za njihovo rešavanje, osim geometrije štapa i dve elastične konstante, potrebni su i granični uslovi na mestu ukleštenja:

$$\begin{aligned} u(0) &= v(0) = w(0) = 0 \\ \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)_0 &= \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)_0 = \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 = 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$



Sl. 5-1 Aksijalno napregnuta konzola

Za posmatrani štap matrica deformacija je:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nu \\ -\nu \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{F}{EA} \quad (5.3)$$

dok matrica elastičnosti ima već poznati izgled:

$$\mathbf{C} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Integracijom izraza za deformacije, koje prikazuje matrica (5.3), dobijaju se komponente pomeranja  $u, v, w$ :

$$u = -\nu \frac{F}{EA} x, \quad v = -\nu \frac{F}{EA} y, \quad w = \frac{F}{EA} z \quad (5.5)$$

Izduženje štapa  $\Delta \ell = w(\ell)$  jednako je:

$$\Delta \ell = \frac{F \ell}{EA} \quad (5.6)$$

Ovo su opšte poznati izrazi, koji važe, samo za konstantnu silu i konstantan presek na celom rasponu nosača. Promene poprečnih dimenzija posmatranog štapa, pravougaonog preseka  $a \times b$ , su sledeće:



$$\begin{aligned}\Delta a = u(a) &= -v \frac{Fa}{EA} \\ \Delta b = v(b) &= -v \frac{Fb}{EA}\end{aligned}\quad (5.7)$$

Ukupno poprečno pomeranje, proizvoljne tačke preseka posmatranog štapa, jednako je:

$$\bar{\delta} = u\vec{i} + v\vec{j} = -v \frac{F}{EA} (x\vec{i} + y\vec{j}) = -v \frac{F}{EA} \vec{r} \quad (5.8)$$

**Za uklješteni štap, aksijalno napregnut u pravcu ose z (Sl. 5-1), od EO materijala,** važi jednačina ravnoteže sila, tri jednačine veza deformacija i pomeranja, sve iste, kao kod štapa od EI materijala. Konstitutivne jednačine i dalje su algebarske. One se razlikuju od druge, treće i četvrte jednačine izraza (5.1), po različitim konstantama elastičnosti. To znači, da se, i u ovom slučaju, piše 7 jednačina, od kojih su 4 PDJ. Za njihovo rešavanje, osim geometrije štapa i 3 konstante, koriste se granični uslovi, po silama i po pomeranjima, koji su isti, kao kod štapa od EI materijala:

$$\begin{aligned}F_z(0) &= F_z(\ell) = F \\ u(0) &= v(0) = w(0) = 0\end{aligned}\quad (5.9)$$

Raspored napona u posmatranom štapa isti je kao kod štapa od EI materijala.

Matrica deformacija za ovakav štap glasi:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_{xz} \\ -v_{yz} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{F}{E_z A} \quad (5.10)$$

dok, puna matrica elastičnosti ima sledeći izgled:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1/E_x & -v_{xy}/E_y & -v_{xz}/E_z & 0 & 0 & 0 \\ -v_{yx}/E_x & 1/E_y & -v_{yz}/E_z & 0 & 0 & 0 \\ -v_{zx}/E_x & -v_{zy}/E_y & 1/E_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{yz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{zx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{xy} \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

Komponente pomeranja, u,v,w, dobijene iz navedenih graničnih uslova, su:

$$u = -v_{xz} \frac{F}{E_z A} x, \quad v = -v_{yz} \frac{F}{E_z A} y, \quad w = \frac{F}{E_z A} z \quad (5.12)$$

Izduženje se računa isto, kao kod štapa od EI materijala, po izrazu (5.6), u kome se, umesto modula elastičnosti E, pojavljuje  $E_z$ :

$$\Delta \ell = w(\ell) = \frac{F \ell}{E_z A} \quad (5.13)$$

Promene poprečnih dimenzija posmatranog štapa, pravougaonog preseka  $axb$ , su sledeće:

$$\begin{aligned} \Delta a = u(a) &= -v_{xz} \frac{Fa}{E_z A} \\ \Delta b = v(b) &= -v_{yz} \frac{Fb}{E_z A} \end{aligned} \quad (5.14)$$

Ukupno poprečno pomeranje proizvoljne tačke preseka ovog štapa, jednako je:

$$\vec{\delta} = u\vec{i} + v\vec{j} = -v_{xz} \frac{F}{E_z A} x\vec{i} - v_{yz} \frac{F}{E_z A} y\vec{j} = -\frac{F}{E_z A} (v_{xz}x\vec{i} + v_{yz}y\vec{j}) \quad (5.15)$$

Iz izraza (5.5), (5.8), (5.12) i (5.15) može se zaključiti sledeće:

*Kod štapa od EO materijala, isto, kao i kod štapa od EI materijala, tačke koje leže na z osi ( $x = y = 0$ ), pomeraju se samo u pravcu te ose:  $u = v = 0$ . Dalje, ravni poprečni preseki, ostaju ravni i posle deformacije, jer sve tačke jednog poprečnog preseka, imaju jednako pomeranje u pravcu z ose. Klizanja su, takođe, jednaka nuli. Elastične konstante u poprečnim pravcima ne utiču, ni na dilatacije, ni na pomeranja.*

*Kod štapa od EO materijala, za razliku od štapa od EI materijala, tačke na nekoj pravoj, paralelnoj z osi, imaju poprečno pomeranje, koje zavisi od proizvoda udaljenosti tih tačaka od z ose i Poasonovih koeficijenata. Pošto je, u opštem slučaju, za EO materijal,  $v_{xz} \neq v_{yz}$ , posmatrana prava ne ostaje paralelna z osi. To znači, da se, kod linearno napregnutog štapa, od EO materijala, menjaju, ne samo dimenzije, nego i oblik preseka nosača, iako nema klizanja.*

Sve ovo, i dalje važi, samo, za konstantnu veličinu sile i konstantan presek štapa.

**Za tanki štap, uklješten na levom kraju, aksijalno napregnut u pravcu z ose konstantnim naponom  $\sigma_z$ , od Zenerovog VEI materijala, važe jednačine ravnoteže sila, jednačine veza deformacija i pomeranja, baš kao i kod štapa od EI materijala, jer te jednačine ne zavise od konstanti, dok su konstitutivne jednačine različite.**

Da bi se dobio napon  $\sigma_z$ , deformacije  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  i komponente pomeranja,  $u, v, w$  za posmatrani štap od Zenerovog VEI materijala, mogu se primeniti različite metode:

*I metoda. Rešavanje jedne jednačine ravnoteže, tri konstitutivne jednačine i tri jednačine veze pomeranja i deformacija, u vremenskom domenu.*

Jednačina ravnoteže i tri jednačine veze pomeranja i deformacija su, i dalje, parcijalne diferencijalne. Tri konstitutivne jednačine su algebarske, jer predstavljaju posebna rešenja opštih konstitutivnih PDJ. To su rešenja, koja važe, za slučaj viskoznog tečenja, odnosno, relaksacije napona. Za rešavanje tog sistema, od 7 jednačina, od kojih su 4 PDJ, koriste se, osim graničnih uslova, po silama i po pomeranjima, još, i početni uslovi. U jednačinama se koriste, osim geometrije štapa, još i dva, vremenski promenljiva, parametra viskoelastičnosti.

Pretpostavlja se, da je napon, u preseku posmatranog štapa, ravnomerno raspoređen, isto, kao kod odgovarajućeg štapa, od EI materijala. Konstitutivna jednačina, koja se odnosi na podužnu dilataciju ovog štapa, ima formu jednačine (3.46), odnosno (4.23):

$$\varepsilon_z(t) = \frac{\sigma_{0z}}{E_H} + \frac{\sigma_{0z}}{E_K} \left(1 - e^{-t/\tau}\right) = \frac{F}{E_H A} (1 + \varphi(t)) = D(t) \frac{F}{A} \quad (5.16)$$

gde je:  $\varphi(t) = \frac{E_H}{E_K} \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$  - funkcija viskoznog tečenja, zavisna od prethodne istorije

deformisanja, strukture materijala i proteklog vremena,  $D(t) = \frac{1 + \varphi(t)}{E_H}$  - modul viskoznog tečenja.

Poprečne dilatacije, po analogiji sa EI materijalom, računaju se prema sledećim izrazima:

$$\varepsilon_x(t) = \varepsilon_y(t) = -\nu D(t) \frac{F}{A}; \quad (5.17)$$

Klizanja su jednaka nuli:  $\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{xy} = 0$ .

Matrica deformacija, za ovakav štap, ima sledeći oblik:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ve} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x(t) \\ \varepsilon_y(t) \\ \varepsilon_z(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nu D(t) \\ -\nu D(t) \\ D(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{F}{A} \quad (5.18)$$

a matrica viskoelastičnosti je:

$$\mathbf{C}_{ve} = D(t) \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

Integracijom jednačina veze deformacija i pomeranja, uz odgovarajuće granične uslove, dobijaju se komponente pomeranja,  $u, v, w$ :

$$u(x, t) = -\nu D(t) \frac{F}{A} x, \quad v(y, t) = -\nu D(t) \frac{F}{A} y, \quad w(z, t) = D(t) \frac{F}{A} z \quad (5.20)$$

Izduženje se računa, kao kod štapa od EI materijala, iz izraza (5.6), u kojem se, umesto modula elastičnosti  $E$ , pojavljuje modul viskoznog tečenja  $D(t)$ :

$$\Delta \ell(t) = w(\ell, t) = D(t) \frac{F}{A} \ell \quad (5.21)$$

Promene poprečnih dimenzija posmatranog štapa, od Zenerovog VEI materijala, pravougaonog preseka, dimenzija  $a \times b$ , su sledeće:

$$\begin{aligned} \Delta a(t) &= u(a, t) = -\nu D(t) \frac{F}{A} a \\ \Delta b(t) &= v(b, t) = -\nu D(t) \frac{F}{A} b \end{aligned} \quad (5.22)$$

*II metoda. Alfrey-ev princip viskoelastične analogije, koji se svodi na rešavanje potrebnih jednačina u transformisanom domenu.*

Alfreyeva metoda viskoelastične analogije primenjuje se na odgovarajuće izraze za napon, deformacije, pomeranja, (5.1) i (5.5), štapa, od EI materijala. Sve promenljive, kao i odgovarajuće opterećenje, zamenuju se odgovarajućim Laplasovim transformacijama. Zatim se svi parametri viskoelastičnosti izlažu Laplasovim transformacijama:

$$D(t) \rightarrow \bar{D}^*(s) = \frac{1}{\bar{E}^*(s)} = s\bar{D}(s) \quad (5.23)$$

Na taj način, dobijaju se sledeće jednačine:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(s) &= \frac{\bar{F}(s)}{A} \\ \bar{\varepsilon}_x(s) &= -v\bar{D}^*(s)\bar{\sigma}_z(s); \quad \bar{\varepsilon}_y(s) = -v\bar{D}^*(s)\bar{\sigma}_z(s); \quad \bar{\varepsilon}_z(s) = \bar{D}^*(s)\bar{\sigma}(s) \quad (5.24) \\ \bar{\Delta a}(s) &= -v\bar{D}^*(s)\frac{\bar{F}(s)}{A}a; \quad \bar{\Delta b}(s) = -v\bar{D}^*(s)\frac{\bar{F}(s)}{A}b; \quad \bar{\Delta \ell}(s) = \bar{D}^*(s)\frac{\bar{F}(s)}{A}\ell \end{aligned}$$

Inverzijom jednačina (5.24), u vremenski domen, za slučaj, da je  $F(t) = F_0H(t)$ , dobija se da je:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{F_0}{A} \\ \varepsilon_x(t) &= -vD(t)\frac{F_0}{A}; \quad \varepsilon_y(t) = -vD(t)\frac{F_0}{A}; \quad \varepsilon_z(t) = D(t)\frac{F_0}{A} \quad (5.25) \\ \Delta a(t) &= -vD(t)\frac{F_0}{A}a; \quad \Delta b(t) = -vD(t)\frac{F_0}{A}b; \quad \Delta \ell(t) = D(t)\frac{F_0\ell}{A} \end{aligned}$$

Poslednjih 6 jednačina, izraza (5.25), istog su oblika, kao i jednačine (5.16), (5.17), (5.21) i (5.22).

Izduženje,  $\Delta \ell(t)$ , dobijeno je na sledeći način:

$$\Delta \ell(t) = \frac{\ell}{A} \int_0^t D(t-\xi) \frac{d[F_0H(\xi)]}{d\xi} d\xi = \frac{F_0\ell}{A} \int_0^t D(t-\xi)\delta(\xi) d\xi = \frac{F_0\ell}{A} D(t) \quad (5.26)$$

gde je  $\delta(\xi)$  - Dirakova delta funkcija.

Ukupno poprečno pomeranje, proizvoljne tačke preseka posmatranog štapa, po analogiji sa EI štapom, jednako je:

$$\bar{\delta} = u\vec{i} + v\vec{j} = -vD(t)\frac{F_0}{A}x\vec{i} - vD(t)\frac{F_0}{A}y\vec{j} = -vD(t)\frac{F_0}{A}(x\vec{i} + y\vec{j}) \quad (5.27)$$

**Za konzolu, aksijalno napregnutu u pravcu z ose konstantnim naponom  $\sigma_z$ , od Zenerovog VEO materijala**, važe jednačina ravnoteže sila i tri jednačine veza deformacija i pomeranja, kao i kod štapa od EO materijala, jer se u tim jednačinama ne pojavljuju konstante elastičnosti. Zbog toga je i kod ovog štapa, napon u preseku ravnomerno raspoređen. Konstitutivne jednačine za posmatrani štap su jednačine izraza (4.26). Sve one su PDJ. Za rešavanje takvog sistema PDJ, osim poznate geometrije štapa i 12 različitih, viskoelastičnih parametra, potrebni su i granični i početni uslovi.

Potrebni parametri viskoelastičnosti u pomenutom sistemu jednačina su: karakteristična vremena i početne elastične konstante.

Što se tiče metode rešavanja dobijenog sistema PDJ, zbog njegove složenosti, ne koristi se metoda rešavanja u vremenskom, nego samo u transformisanom domenu. Pri tome se primenjuje Alfrey-ev princip viskoelastične analogije, koji je, zbog svoje jednostavnosti, vrlo koristan za praktičnu primenu.

U tu svrhu, uvodi se pretpostavka da se dilatacije mogu računati korišćenjem rešenja dobijenih za odgovarajući štap od EO materijala (5.13) i (5.14). U rešenjima za napon, dilatacije i pomeranja istog štapa, od EO materijala, zamenjuju se opterećenje, sve promenljive, kao i elastične konstante, odgovarajućim Laplasovim transformacijama, isto, baš kao što je urađeno kod štapa od Zenerovog VEI materijala. Tako se dobijaju sledeće jednačine:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(s) &= \frac{\bar{F}(s)}{A} \\ \bar{\varepsilon}_x(s) &= -v_{xz} \bar{D}_z^*(s) \bar{\sigma}_z(s); \quad \bar{\varepsilon}_y(s) = -v_{yz} \bar{D}_z^*(s) \bar{\sigma}_z(s); \quad \bar{\varepsilon}_z(s) = \bar{D}_z^*(s) \bar{\sigma}(s) \quad (5.28) \\ \bar{\Delta a}(s) &= -v_{xz} \bar{D}_z^*(s) \frac{\bar{F}(s)}{A} a; \quad \bar{\Delta b}(s) = -v_{yz} \bar{D}_z^*(s) \frac{\bar{F}(s)}{A} b; \quad \bar{\Delta \ell}(s) = \bar{D}_z^*(s) \frac{\bar{F}(s)}{A} \ell \end{aligned}$$

Ako je funkcija opterećenja data u obliku  $F(t) = F_0 H(t)$ , inverzija jednačina (5.28) u vremenski domen daje sledeće izraze:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{F_0}{A} \\ \varepsilon_x(t) &= -v_{xz} D_z(t) \frac{F_0}{A}; \quad \varepsilon_y(t) = -v_{yz} D_z(t) \frac{F_0}{A}; \quad \varepsilon_z(t) = D_z(t) \frac{F_0}{A} \quad (5.29) \\ \Delta a(t) &= -v_{xz} D_z(t) \frac{F_0 a}{A}; \quad \Delta b(t) = -v_{yz} D_z(t) \frac{F_0 b}{A}; \quad \Delta \ell(t) = D_z(t) \frac{F_0 \ell}{A} \end{aligned}$$

Može se zaključiti, da je matrica deformacija, za tačke posmatranog uklještenog štapa slična onoj, koja je dobijena za odgovarajući štap, od Zenerovog VEI materijala:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ve} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x(t) \\ \varepsilon_y(t) \\ \varepsilon_z(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_{xz} D_z(t) \\ -v_{yz} D_z(t) \\ D_z(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{F}{A} \quad (5.30)$$

Što se tiče matrice viskoelastičnosti, ona ima sledeću formu:

$$\mathbf{C}_{ve} = \begin{bmatrix} D_x(t) & -v_{xy}D_y(t) & -v_{xz}D_z(t) & 0 & 0 & 0 \\ -v_{yx}D_x(t) & D_y(t) & -v_{yz}D_z(t) & 0 & 0 & 0 \\ -v_{zx}D_x(t) & -v_{zy}D_y(t) & D_z(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{yz}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_{zx}(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{xy}(t) \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

Ako je funkcija opterećenja data u obliku:  $F(t) = f_0 t$ , inverzijom jednačina (5.28) u vremenski domen dobijaju se sledeći izrazi:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{f_0}{A} t \\ \varepsilon_x(t) &= -v_{xz}D_z(t) \frac{f_0}{A} t; \quad \varepsilon_y(t) = -v_{yz}D_z(t) \frac{f_0}{A} t; \quad \varepsilon_z(t) = D_z(t) \frac{f_0}{A} t \\ \Delta a(t) &= -\frac{f_0 a}{A} \int_0^t v_{xz} D_z(t) dt; \quad \Delta b(t) = -\frac{f_0 b}{A} \int_0^t v_{yz} D_z(t) dt; \quad \Delta \ell(t) = \frac{f_0 \ell}{A} \int_0^t D_z(t) dt \end{aligned} \quad (5.32)$$

Za **Zenerov model**, koji je usvojen u ovom radu, modul viskoznog tečenja je:

$$D_z(t) = \frac{1}{E_{Hz}} + \frac{1}{E_{Kz}} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_{\varepsilon_z}}} \right), \text{ pa se iz poslednje jednakosti izraza (5.32) dobija, da je}$$

izduženje jednako:

$$\Delta \ell(t) = \frac{f_0 \ell}{A} \int_0^t \left[ \frac{1}{E_{Hz}} + \frac{1}{E_{Kz}} \left( 1 - e^{-\frac{t-\xi}{\tau_{\varepsilon_z}}} \right) \right] \delta(\xi) d\xi$$

odnosno:

$$\Delta \ell(t) = \frac{f_0 \ell}{A} \left( \frac{1}{E_{Hz}} t + \frac{1}{E_{Kz}} \left( t - \tau_{\varepsilon_z} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_{\varepsilon_z}}} \right) \right) \right) \quad (5.33)$$

Integracija izraza za poprečna pomeranja je komplikovanija zbog prisustva dve vremenske funkcije.

Jednačina (5.33), govori, da su, za izračunavanje izduženja posmatranog štapa, potrebni sledeći parametri: početni modul elastičnosti  $E_{Hz}$ , vreme viskoznog tečenja  $\tau_{\varepsilon_z}$  i modul  $E_{Kz}$ . To su sve veličine, koje se lako mogu odrediti, merenjem promene

modula elastičnosti tokom vremena. Ovo sve, naravno, važi za konstantan presek nosača i poznatu geometriju nosača.

Iz izraza (5.29) i (5.32) vidi se, da je, za računanje promena poprečnih dimenzija posmatranog štapa, od Zenerovog VEO materijala, aksijalno napregnutog u pravcu z ose, dovoljno znati, osim geometrije i opterećenja, još i modul viskoznog tečenja podužnog pravca i odgovarajuće Poasonove koeficijente. To je u skladu sa istraživanjima Hiltona i Donga, koji su još 1964 dokazali, da viskoelastična anizotropija može analogno da se predstavi, ili preko jednakih vremenskih funkcija za sve pravce, ili preko različitih vremenskih funkcija za svaki pravac.

Ukupno poprečno pomeranje proizvoljne tačke preseka, posmatranog štapa od Zenerovog VEO materijala, po analogiji sa EO, jednako je:

$$\vec{\delta} = u\vec{i} + v\vec{j} = -v_{xz}D_z(t)\frac{F_0}{A}x\vec{i} - v_{yz}D_z(t)\frac{F_0}{A}y\vec{j} = -D_z(t)\frac{F_0}{A}(v_{xz}x\vec{i} + v_{yz}y\vec{j}) \quad (5.34)$$

Iz izraza (5.25), (5.27), (5.29) i (5.34) može se zaključiti sledeće:

Kod štapa od Zenerovog, VEI ili VEO materijala, isto kao i kod štapova od EI i od EO materijala, tačke koje leže na z osi ( $x = y = 0$ ), pomeraju se samo u pravcu te ose  $u = v = 0$ . Ravni poprečni preseki, i dalje, ostaju ravni i posle deformacije, jer sve tačke imaju jednaka pomeranja u pravcu z ose:  $w(x,y,z)=w(z)$ . Klizanja su, isto tako, jednaka nuli.

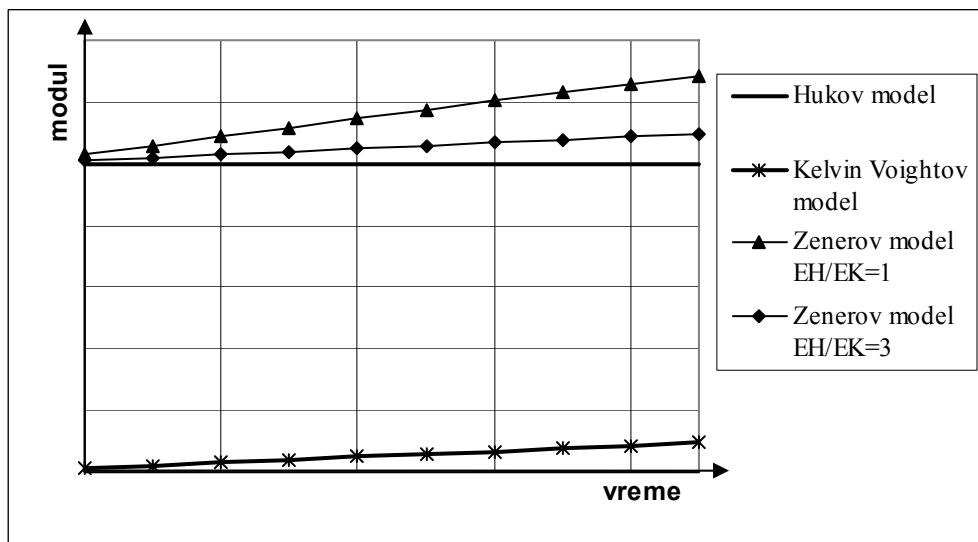
Kod aksijalno napregnutih štapova, od Zenerovog, VEI ili VEO materijala, tačke na pravoj paralelnoj z osi, imaju poprečna pomeranja, proporcionalna udaljenosti tih tačaka od z ose. Ta pomeranja su sada funkcije vremena. *Kod štapa, od Zenerovog VEI materijala, presek se, uz zadržavanje istog oblika, simetrično smanjuje ili povećava, ne samo zbog dejstva opterećenja, nego i zbog protoka vremena.* Međutim, kod Zenerovog VEO materijala,  $v_{xz} \neq v_{yz}$ , posmatrana prava ne ostaje paralelna z osi. To znači, da se, *kod štapa, od Zenerovog VEO materijala, menjaju se, ne samo dimenzije preseka nosača, nego i njegov oblik, iako nema klizanja, i to, ne samo zbog dejstva opterećenja, nego i zbog protoka vremena.*

Elastične karakteristike u poprečnim pravcima, posmatranih štapova, i dalje, ne utiču, ni na dilatacije, ni na pomeranja.

Štapovi od Zenerovog, VEI i VEO, materijala imaju jednaka izduženja. Veličine izduženja, međutim, zavise od izabranog modela viskoelastičnosti. Na Sl. 5-2, vidi se da



je, kod štapa, od materijala koji se ponaša po Hukovom modelu, izduženje konstantno. Kod štapa, od materijala koji se ponaša po Kelvin Voightovom modelu, izduženje raste, ali se ne uzima u obzir istorija deformisanja, a kod Zenerovog štapa, porast izduženja zavisi i od strukture materijala (odnos  $E_H / E_K$ ) i od istorije deformisanja.



Sl. 5-2 Uporedni prikaz rešenja za izduženje štapa, od EI i od VEI materijala

Iz izraza za računanje poprečnih dilatacija kod viskoelastičnih materijala, bilo da su VEI, bilo da su VEO, vidi se, da treba poznavati Poasonove koeficijente.

U teoriji EI materijala, pokazano je, da je Poasonov koeficijent ( $\nu$ ), važan parametar. On ima istu ulogu, kao Youngov modul ( $E$ ), smičući ( $G$ ) i zapreminski ( $K$ ) moduli, i Lameove konstante ( $\lambda, \mu$ ). Poasonov koeficijent može se izračunati, ako se znaju modul elastičnosti i modul smicanja, a ako se zna modul elastičnosti i Poasonov koeficijent, može se izračunati i zapreminski modul. Ove veze su naročito važne, za određivanje zapreminskog modula, koji se i kod izotropnih materijala teško meri. Slične veze postoje i kod VEI materijala: (Lakes, 1992., Hilton, 2001., Lakes, 2009.).

Za viskoelastične materijale važno je još, da se definišu i odgovori na sledeća pitanja: da li se može uzeti da su Poasonovi koeficijenti u viskoelastičnosti konstantni, ili su, pak, oni, uvek funkcije vremena? Usvoji li se da su konstantni, pod kojim uslovima to važi? A ako nisu konstantni, kakvog su oblika te vremenski zavisne funkcije? Da li su Poasonovi koeficijenti jednaki, pri viskoznom tečenju i pri relaksaciji napona? Da li su Poasonovi koeficijenti uvek pozitivni?

Vremenski nezavisni, odnosno, konstantni Poasonovi koeficijenti, mogući su samo pri određenim uslovima:

- da su naponi i deformacije funkcije dve nezavisne, vremenske i prostorne promenljive
- da se moduli relaksacije pri smicanju i zatezanju, kao i zapreminski moduli, izražavaju pomoću istih vremenskih funkcija

Za sve ostale uslove, Poasonovi koeficijenti zavise od vremena, i ta se zavisnost mora odrediti.

Konstantni Poasonovi koeficijenti koriste se samo, radi pojednostavljenja obimnih proračuna, dok mnogobrojni eksperimenti za realne materijale pokazuju, da, u izrazima za Poasonove koeficijente, postoji funkcionalna vremenska zavisnost.

Oblik vremenski zavisne funkcije, koja pokazuje promenu Poasonovog koeficijenta tokom vremena, zavisi od vrste i uslova eksperimenta. Za polimere, kao izrazito viskoelastične materijale, karakteristično je, da se za testove viskoznog tečenja i relaksacije napona, dobijaju različite vremenske zavisnosti za Poasonove koeficijente.

**Za VEI materijale**, može se, po analogiji sa EI materijalima, napisati izraz za **Poasonov koeficijent, u slučaju viskoznog tečenja pri zatezanju**:

$$v_{vt}(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} k \frac{1}{D(t)} \quad (5.35)$$

gde je:  $k$  - zapreminska popustljivost:  $k = \frac{1}{K}$  ( $K$  je zapreminski modul:  $K = \frac{GE}{3(3G - E)}$ ).

Poasonov koeficijent, za slučaj viskoznog tečenja pri zatezanju, je, dakle, vremenska funkcija, koja ne može biti ni monotona, ni opadajuća.

**Za istu vrstu materijala, Poasonov koeficijent, u slučaju relaksacije napona pri zatezanju**, napisan po istoj analogiji, ima sledeći izgled:

$$v_R(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} k E(t) \quad (5.36)$$

Modul viskoznog tečenja za Zenerov model, u gore navedenim izrazima, može se napisati u modifikovanom obliku:

$$D(t) = \left( \frac{1}{E_H} + \frac{1}{E_K} \right) - \frac{1}{E_K} e^{-\frac{t}{\tau_\varepsilon}} = \frac{1}{E_\infty} + \left( \frac{1}{E_\infty} - \frac{1}{E_0} \right) e^{-\frac{t}{\tau_\varepsilon}} \quad (5.37)$$

gde je:  $\frac{1}{E_\infty} = \frac{1}{E_H} + \frac{1}{E_K}$  a  $\frac{1}{E_0} = \frac{1}{E_H}$ .

Modul relaksacije za Zenerov model, u gore navedenim izrazima, takođe, se

može napisati u modifikovanom obliku:

$$E(t) = \frac{E_H E_K}{E_H + E_K} + \frac{E_H^2}{E_H + E_K} e^{-\frac{t}{\tau \sigma}} = E_\infty + (E_0 - E_\infty) e^{-\frac{t}{\tau \sigma}} \quad (5.38)$$

gde su:  $E_0$  i  $E_\infty$  iste veličine kao kod modula viskoznoeg tečenja.

Ako se uvede nova veličina, obeležena sa  $\Delta$ , koja se zove *relaksaciona čvrstoća* a računa se iz izraza  $\Delta = \frac{E_0 - E_\infty}{E_\infty}$ , dobijaju se novi izrazi koji zavise od relaksacione

čvrstoće:

$$D(t) = \frac{1}{E_\infty} \left( 1 - \frac{\Delta}{1 + \Delta} e^{-\frac{t}{\tau \sigma^{(1+\Delta)}}} \right) \quad (5.39)$$

$$E(t) = E_\infty \left( 1 + \Delta e^{-\frac{t}{\tau \sigma}} \right) \quad (5.40)$$

Uvedena relaksaciona čvrstoća je veličina koja predstavlja vezu između modula viskoznoeg tečenja i modula relaksacije napona, a računa se preko parametara Zenerovog modela.

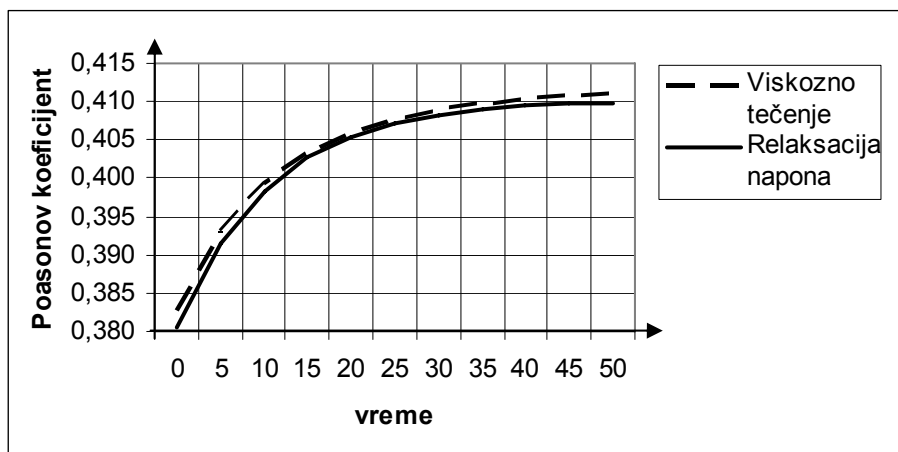
Kada se izrazi (5.39) i (5.40) unesu u izraze za Poasonove koeficijente (5.35) i (5.36) dobijaju se sledeći izrazi:

$$v_{vt}(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} k E_\infty \frac{1}{\left( 1 - \frac{\Delta}{1 + \Delta} e^{-\frac{t}{\tau \sigma^{(1+\Delta)}}} \right)} \quad (5.41)$$

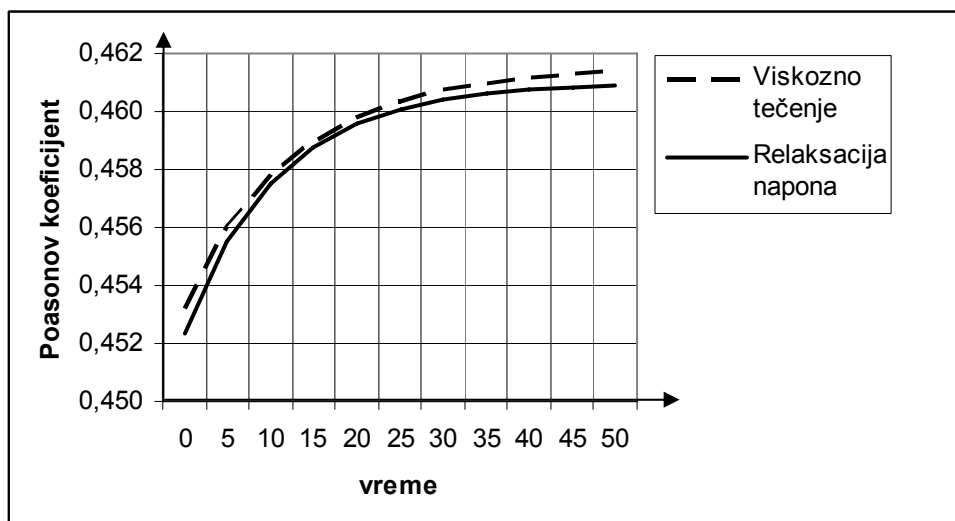
$$v_R(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} k E_\infty \left( 1 + \Delta e^{-\frac{t}{\tau \sigma}} \right) \quad (5.42)$$

Iz izraza (5.41) i (5.42) vidi se, da su Poasonovi koeficijenti pri zatezanju, za slučaj viskoznoeg tečenja i slučaj relaksacije napona, različiti. I jedan i drugi, kod Zenerovog VEI materijala, zavise od relaksacione čvrstoće, odnosno od parametara modela, i od modula zapreminskog širenja, koji se uzima da je konstantan.

Promenu Poasonovih koeficijenata, po jednačinama (5.41) i (5.42), za bukovinu, vlažnosti 11%, na temperaturi 60°C, prikazuju Sl. 5-3 i Sl. 5-4.



Sl. 5-3 Zavisnost Poasonovog koeficijenta između pravaca a i r od vremena, pri viskoznom tečenju i pri relaksaciji napona, za  $\Delta = 0,33$  i  $\tau_\epsilon = 14,5\text{min}$



Sl. 5-4 Zavisnost Poasonovog koeficijenta između pravaca a i t od vremena, pri viskoznom tečenju i pri relaksaciji napona, za  $\Delta = 0,22$  i  $\tau_\epsilon = 14,5\text{min}$

Osim izraza (5.35) i (5.36), **Poasonovi koeficijenti VEI materijala mogu se prikazati, kao funkcije, zavisne od parametara konstitutivne jednačine.**

Naime, devijatorski i dilatatorski delovi konstitutivne jednačine, proizvoljno izabranog modela, kao što je već rečeno u prethodnom poglavlju, mogu se napisati u obliku:

$$\begin{aligned} P\sigma_{ij}(t) &= Q\epsilon_{ij}(t) \\ P_1\sigma_{ii}(t) &= Q_1\epsilon_{ii}(t) \end{aligned} \quad (5.43)$$

gde su diferencijalni operatori jednaki:

$$\begin{aligned}
P &= p_0 + p_1 \frac{\partial}{\partial t} + p_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dots + p_n \frac{\partial^n}{\partial t^n} \\
Q &= q_0 + q_1 \frac{\partial}{\partial t} + q_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dots + q_n \frac{\partial^n}{\partial t^n} \\
P_1 &= r_0 + r_1 \frac{\partial}{\partial t} + r_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dots + r_n \frac{\partial^n}{\partial t^n} \\
Q_1 &= m_0 + m_1 \frac{\partial}{\partial t} + m_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dots + m_n \frac{\partial^n}{\partial t^n}
\end{aligned} \tag{5.44}$$

Da bi se došlo do izraza za Poasonove koeficijente, u kojima figurišu diferencijalni operatori konstitutivnih jednačina,  $P, Q, P_1, Q_1$ , prvo će se izvesti odgovarajući izrazi za telo, od EI materijala. **Za prostorno napregnuto telo, od EI materijala**, mogu se napisati jednačine (4.15):  $\sigma_{ij} = 2G\epsilon_{ij}$ ,  $\sigma_{kk} = 3K\epsilon_{kk}$  u obliku  $P\sigma_{ij} = Q\epsilon_{ij}$ ,  $P_1\sigma_{kk} = Q_1\epsilon_{kk}$  na osnovu čega se dobija da je:

$$P = P_1 = 1, \quad Q = 2G, \quad Q_1 = 3K. \tag{5.45}$$

Iz jednačina (4.15) i (5.45), dobijaju se veličine elastičnih konstanti  $G$  i  $K$ , izražene preko parametara konstitutivne jednačine Hukovog zakona:

$$G = \frac{1}{2} \frac{Q}{P}, \quad K = \frac{1}{3} \frac{Q_1}{P_1} \tag{5.46}$$

Pošto su diferencijalni operatori  $P, Q, P_1, Q_1$  u Hukovom zakonu, konstantne veličine, jer su u pitanju algebarske, a ne diferencijalne jednačine, onda su i moduli, smicanja  $G$  i zapreminskog širenja  $K$ , konstantne veličine.

Dalje, korišćenjem veza između elastičnih konstanti (Prilog 1):

$$E = \frac{9KG}{3K + G} \quad \text{i} \quad \nu = \frac{3K - 2G}{6K + 2G} \tag{5.47}$$

dobiju se novi izrazi, za modul elastičnosti i Poasonov koeficijent:

$$\begin{aligned}
E &= \frac{3Q_1Q}{2PQ_1 + QP_1} \\
\nu &= \frac{Q_1P - QP_1}{2PQ_1 + QP_1}
\end{aligned} \tag{5.48}$$

Ovo su važne jednačine, jer se one, primenom metode viskoelastične analogije, mogu koristiti za sve modele viskoelastičnosti.

Jednačine (5.48) mogu se predstaviti i u sledećem obliku:

$$E = \frac{Q^E}{P^E} \quad i \quad \nu = \frac{Q^V}{P^V} \quad (5.49)$$

gde je

$$\begin{aligned} Q^E &= 3Q_1Q \\ P^E &= 2PQ_1 + QP_1 \\ Q^V &= Q_1P - QP_1 \\ P^V &= 2PQ_1 + QP_1 \end{aligned} \quad (5.50)$$

Sada jednačine (5.46) mogu da se napišu u sledećem obliku, koji važi za sve modele viskoelastičnosti:

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{2} \cdot \frac{Q}{P} = \frac{1}{2} \cdot \frac{E}{1+\nu} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^E/P^E}{1+Q^V/P^V}, \\ K &= \frac{1}{3} \cdot \frac{Q_1}{P_1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{E}{1-2\nu} = \frac{1}{3} \cdot \frac{Q^E/P^E}{1-2Q^V/P^V} \end{aligned} \quad (5.51)$$

Konstitutivne jednačine za prostorno napregnuto telo, od EI materijala, su:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \frac{Q^E/P^E}{1+Q^V/P^V} \varepsilon_{ij} - \frac{Q^E Q^V / P^E P^V}{(1+Q^V/P^V)(1-2Q^V/P^V)} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1+Q^V/P^V}{Q^E/P^E} \sigma_{ij} - \frac{Q^V/P^V}{Q^E/P^E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \end{aligned} \quad (5.52)$$

Sve dobijene relacije za telo, od EI materijala, generalizuju se za telo, od VEI materijala.

**Za prostorno napregnuto telo od Zenerovog VEI materijala,** odgovarajuće viskoelastične karakteristike računaju se, prema izrazima (5.48), uz nove diferencijalne operatore  $P, Q, P_1, Q_1$ . Tu se razlikuju dva slučaja:

*I slučaj.* Pretpostavi se da **telo od VEI materijala, pri smicanju ima viskoelastična svojstva Zenerovog modela, a da se pri zatezanju ponaša kao elastično.** U tom slučaju, operatori  $P_1, Q_1$  isti su, kao u jednačinama (5.45), ali  $P, Q$  više nemaju oblik (5.45), nego se uzimaju iz konstitutivnih jednačina (3.40). Radi toga, jednačina (3.41) modifikuje se u sledeći oblik:

$$\left( \frac{1}{E_H} + \frac{1}{E_K} \right) \sigma + \frac{\eta}{E_H E_K} \dot{\sigma} = \varepsilon + \frac{\eta}{E_K} \dot{\varepsilon} \quad (5.53)$$

Novi diferencijalni operatori prikazani su, kao funkcije, zavisne od parametara Zenerovog modela:

$$\begin{aligned}
P &= \frac{1}{E_H} + \frac{1}{E_K} + \frac{\eta}{E_H E_K} \frac{\partial}{\partial t} \\
Q &= 2 \left( 1 + \frac{\eta}{E_K} \frac{\partial}{\partial t} \right)
\end{aligned}
\tag{5.54}$$

Laplasove transformacije diferencijalnih operatora su:

$$\begin{aligned}
P(s) &= \frac{1}{E_H} + \frac{1}{E_K} + \frac{\eta}{E_H E_K} s; \quad Q(s) = 2 \left( 1 + \frac{\eta}{E_K} s \right) \\
P_1(s) &= 1; \quad Q_1(s) = 3K
\end{aligned}
\tag{5.55}$$

Modul elastičnosti i Poasonov koeficijent, u transformisanom domenu, računaju se po jednačinama (5.48), u koje se, umesto diferencijalnih vremenskih operatora (5.45) i (5.54), unose transformisani operatori (5.55). Tako se dobijaju sledeći izrazi:

$$\begin{aligned}
\bar{E}(s) &= \frac{9K(1+\tau s)}{3 \frac{K}{E_\infty} + 1 + \tau \left( 3 \frac{K}{E_H} + 1 \right) s} = \frac{Q^E}{P^E} \\
\bar{v}(s) &= \frac{3 \frac{K}{E_\infty} - 2 + \tau \left( 3 \frac{K}{E_H} - 2 \right) s}{6 \frac{K}{E_\infty} + 2 + \tau \left( 6 \frac{K}{E_H} + 2 \right) s} = \frac{Q^v}{P^v}
\end{aligned}
\tag{5.56}$$

Druga jednačina izraza (5.56) koristi se za kompleksni Poasonov koeficijent, tela od VEI materijala, u sledećem obliku:

$$v^* = s\bar{v}(s) = \frac{a + bs}{c + ds}
\tag{5.57}$$

gde je

$$\begin{aligned}
a &= 3 \frac{K}{E_\infty} - 2, \quad b = \left( 3 \frac{K}{E_H} - 2 \right) \tau \\
c &= 6 \frac{K}{E_\infty} + 2, \quad d = \left( 6 \frac{K}{E_H} + 2 \right) \tau \\
\tau &= \frac{\eta}{E_K}
\end{aligned}
\tag{5.58}$$

U izrazima (5.58), uzima se, da je  $K$  konstantna veličina, jer se pretpostavlja, da se telo od VEI materijala pri zatezanju ponaša kao elastično. Konačno se inverzijom jednačine (5.57) za Poasonov koeficijent dobija:

$$v(t) = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{cd} e^{-\frac{c}{d}t}
\tag{5.59}$$

Granične vrednosti Poasonovog koeficijenta su:

$$v(t \rightarrow 0) = \frac{b}{d} = \frac{\left(3 \frac{K}{E_H} - 2\right)}{\left(6 \frac{K}{E_H} + 2\right)} = \frac{3K - 2E_H}{6K + 2E_H} \quad (5.60)$$

$$v(t \rightarrow \infty) = \frac{a}{c} = \frac{3 \frac{K}{E_\infty} - 2}{6 \frac{K}{E_\infty} + 2} = \frac{3K - 2E_\infty}{6K + 2E_\infty}$$

Dakle, Poasonov koeficijent za telo od ovakvog VEI materijala, menja se s vremenom, ali samo između graničnih vrednosti. On zavisi od parametara viskoelastičnog modela i od proteklog vremena.

Iz prve jednačine izraza (5.60) može se zaključiti da veličina  $K$  mora biti jednaka:  $K \approx \frac{2}{3} E_H$ , a iz druge jednačine istog izraza, da je  $K > \frac{2}{3} E_\infty$ .

*II slučaj.* Prepostavi se, da **telo, od VEI materijala, i pri smicanju, i pri zatezanju, ima svojstva Zenerovog modela.** Tada diferencijalni operatori  $P, Q, P_1, Q_1$  imaju sledeće oblike:

$$P(s) = \left(\frac{1}{E_H} + \frac{1}{E_K}\right) + \frac{\tau}{E_H} s$$

$$Q(s) = 2(1 + \tau s)$$

$$P_1(s) = \left(\frac{1}{E_H} + \frac{1}{E_K}\right) + \frac{\tau_1}{E_H} s$$

$$Q_1(s) = 2(1 + \tau_1 s)$$
(5.61)

gde je:  $\tau = \frac{\eta}{E_K}$ ,  $\tau_1 = \frac{\eta_1}{E_K}$ .

Transformisani modul elastičnosti i Poasonov koeficijent, tom slučaju, računaju se na sledeći način:

$$\bar{E}(s) = \frac{6(1 + \tau s) \cdot (1 + \tau_1 s)}{2(E_H + E_\infty \tau s)(1 + \tau_1 s) + (1 + \tau s)(E_H + E_\infty \tau_1 s)}$$

$$\bar{\nu}(s) = \frac{2(1 + \tau_1 s)(E_H + E_\infty \tau s) - 2(1 + \tau s)(E_H + E_\infty \tau_1 s)}{2(E_H + E_\infty \tau s)(1 + \tau_1 s) + (1 + \tau s)(E_H + E_\infty \tau_1 s)}$$
(5.62)

Iz izraza (5.62) dobijaju se izrazi za modul elastičnosti i Poasonov koeficijent, tela od VEI materijala, koje, i pri zatezanju i pri smicanju, ima svojstva Zenerovog



modela. Ti izrazi zavise od karakterističnih vremena, početnih i ustaljenih modula, kao i od proteklog vremena.

Druga jednačina izraza (5.62) koristi se za kompleksni Poasonov koeficijent u sledećem obliku:

$$v^* = s\bar{v}(s) = \frac{as}{b + cs + ds^2} \quad (5.63)$$

gde je

$$\begin{aligned} a &= 2(\tau_1 - \tau)(E_H - E_\infty), & b &= 3E_H \\ c &= (2E_\infty + E_H)\tau + (2E_H + E_\infty)\tau_1, & d &= 3E_\infty\tau\tau_1 \end{aligned} \quad (5.64)$$

Inverzijom jednačine (5.63) dobija se izraz za Poasonov koeficijent u vremenskom domenu. Zbog oblika funkcije u jednačini (5.63), teško je tačno odrediti inverznu Lapalasonovu transformaciju tog izraza, pa se, stoga, koriste približne metode integracije. Zato su i dobijeni izrazi za Poasonov koeficijent, približna rešenja, nepraktična za primenu. U praksi se uzima, da su, **Poasonovi koeficijenti, za telo od VEI materijala, koje i pri smicanju i pri zatezanju ima svojstva Zenerovog modela,** u stvari, nezavisni od vremena, odnosno, **da su konstantni.**

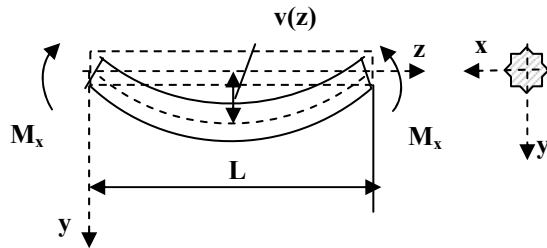
**Što se tiče tela od VEO materijala, koje, i pri smicanju i pri zatezanju, ima svojstva Zenerovog modela,** opravdana je pretpostavka, kao kod tela od VEI materijala, da su **Poasonovi koeficijenti nezavisni od vremena.** Za praktičnu primenu je, dakle, dovoljno odrediti vremenske funkcije za module viskoznog tečenja, pri zatezanju i smicanju.

Svi izvedeni izrazi u Dekartovom koordinatnom sistemu važe i za koordinatni sistem koji odgovara anatomskim osama drveta: **r,t,a**, gde su **r i t** ose u ravni preseka dok je **a** podužna osa.

Sličan izraz za matricu krutosti može se napisati i u slučaju relaksacije napona.

### 5.1.2. Pravo čisto savijanje štapa

Sledeći primer linearnog naprezanja je pravo čisto savijanje, tankog štapa. Element štapa, napregnut momentima savijanja, prikazan je na Sl. 5-5. Analiza napona i deformacija, kod greda i tankih štapova, napregnutih momentima, važan je deo teorije elastičnosti. Približno rešenje takvih problema našao je San Venan, još u 19 veku.



Sl. 5-5 Element tankog štapa, napregnut na pravo čisto savijanje

Osnovne pretpostavke u teoriji elastičnosti, koje se tiču čistog savijanja tankog štapa, od EI materijala, su:

Bernulli Ojlerova hipoteza, da preseći, koji su bili ravni i upravni na osu, pre savijanja, posle savijanja ostaju ravni i upravni na deformisanu osu.

Zbog malih dimenzija preseka, u odnosu na dužinu nosača, zanemaruju se svi smičući naponi, kao i normalni naponi, u pravcima upravnim na osu nosača.

Pri analizi pravog čistog savijanja, tankog štapa, od VEO materijala, koristi se postupak viskoelastične analogije, već primenjen na aksijalno zategnut štap. Pri tome se uzimaju poznati izrazi za raspored napona i deformacija tankog štapa od EO materijala, napregnutog na pravo čisto savijanje:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x = \sigma_y = 0; \quad \sigma_{zz} &= \frac{M_x}{I_x} y \\
 \tau_{yz} = \tau_{xz} = \tau_{xy} &= 0 \\
 \varepsilon_{xx} &= -\nu_{xz} \frac{M_x}{E_z I_x} y \\
 \varepsilon_{yy} &= -\nu_{yz} \frac{M_x}{E_z I_x} y \\
 \varepsilon_{zz} &= \frac{M_x}{E_z I_x} y \\
 \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{xy} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{5.65}$$

gde je:  $M_x$  – konstantni moment savijanja u pravcu x ose,  $y$  - vertikalno rastojanje od neutralne ose do tačke na preseku za koju se računa napon,  $E_x, E_y, E_z$  - moduli elastičnosti za odgovarajuće pravce,  $\nu_{xz}, \nu_{yz}$  - Poasonovi koeficijenti,  $I_x$  - glavni centralni moment inercije za x osu.

Jednačina za napon u izrazu (5.65) dobijena je korišćenjem jednačine ravnoteže i Beltrami Michellovih jednačina za linearno naprezanje, kao i odgovarajućih graničnih

uslova na mestu uklještenja.

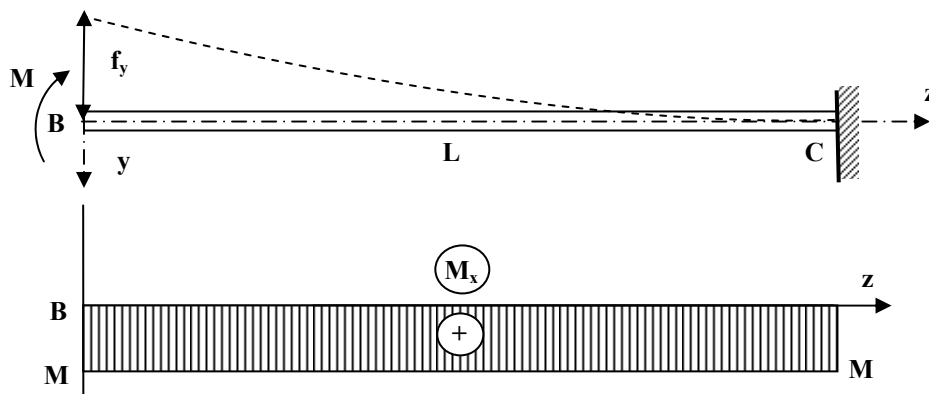
Pomeranja  $u, v, w$ , određuju se integracijom tri jednačine za dilatacije, izraza (5.65), uz pomoć odgovarajućih veza između deformacija i pomeranja. Na taj način dobija se:

$$\begin{aligned} u &= -\int v_{xz} \frac{M_x}{E_z I_x} y dx + C_1 \\ v &= -\int v_{yz} \frac{M_x}{E_z I_x} y dy + C_2 \\ w &= \int \frac{M_x}{E_z I_x} y dz + C_3 \end{aligned} \quad (5.66)$$

Integracione konstante, koje se javljaju u postupku integracije, zavise od načina oslanjanja posmatranog štapa.

Ako je štap od EO materijala, na levom kraju napregnut konstantnim momentom u pravcu  $x$  ose, a na desnom kraju ( $z=L$ ), uklješten (Sl. 5-6), tada, na mestu uklještenja, nema pomeranja i nema rotacije, odnosno, važe sledeći konturni uslovi:

$$\begin{aligned} u(L) = v(L) = w(L) = 0 \\ \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)_L = \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)_L = \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)_L = 0 \end{aligned} \quad (5.67)$$



Sl. 5-6 Konzola, napregnuta na pravo čisto savijanje

Korišćenjem tih graničnih uslova, određuju se tražene integracione konstante, pa se dobijaju pomeranja  $u_k, v_k, w_k$  tačaka posmatranog štapa:

$$\begin{aligned}
u_{pg} &= -v_{xz} \frac{M_x}{E_z I_x} xy \\
v_{pg} &= \frac{M_x}{2I_x} \left( \frac{v_{xz}}{E_z} x^2 - \frac{v_{yz}}{E_z} y^2 - \frac{1}{E_z} (L-z)^2 \right) \\
w_{pg} &= \frac{M_x}{E_z I_x} y(z-L)
\end{aligned} \tag{5.68}$$

Iz treće jednačine izraza (5.68), može se zaključiti da, preseci, nakon defomisanja, i za tela od EO materijala, napregnutog na pravo čisto savijanje, ostaju ravni, jer je pomeranje u pravcu z ose -  $w_k$ , linearna funkcija koordinate y.

Jednačina deformisane ose posmatrane konzole, za koju je  $x=y=0$  glasi:

$$v_k = -\frac{M_x}{2E_z I_x} (L-z)^2 \tag{5.69}$$

Izraz (5.69) predstavlja ravnu parabolu drugog reda. Veličina nagiba  $v'$  i maksimalnog ugiba  $f_y$ , na slobodnom kraju ( $z=0$ ), je:

$$\begin{aligned}
v'_k(0) &= \frac{M_x}{E_z I_x} L \\
f_{yk}(0) = v_k(0) = v_{\max k} &= -\frac{M_x}{2E_z I_x} L^2
\end{aligned} \tag{5.70}$$

Za slučaj malih deformacija, poluprečnik krivine deformisane ose računa se na sledeći način:

$$\frac{1}{R_k} = \frac{M_x}{E_z I_x} \tag{5.71}$$

Ako su na krajevima štapa od EO materijala, napregnutog na pravo čisto savijanje, postavljena dva oslonca, pri čemu je levi oslonac ( $x=y=0, z=0$ ) nepokretan a desni oslonac ( $x=y=0, z=L$ ) pokretan (Sl. 5-7), konturni uslovi za određivanje integracionih konstanti u izrazima (5.66) su:

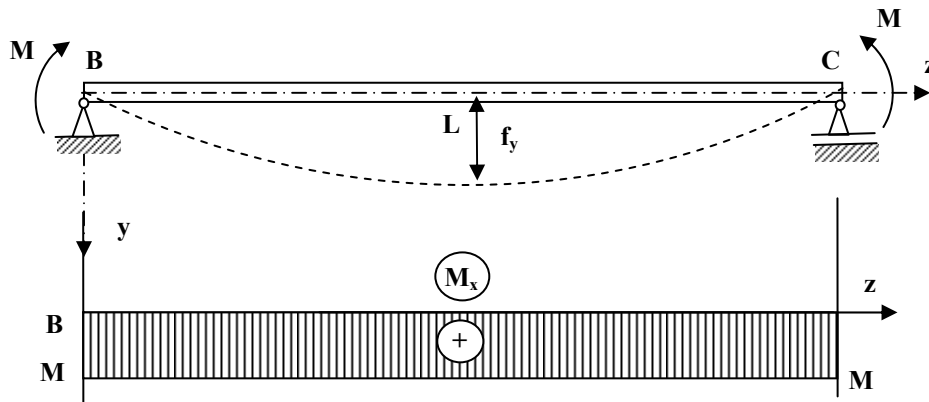
$$\begin{aligned}
u(0) = v(0) = w(0) &= 0 \\
u(L) = v(L) &= \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)_L = 0
\end{aligned} \tag{5.72}$$

Pomeranja posmatrane proste grede -  $u_{pg}, v_{pg}, w_{pg}$ , dobijena su istim postupkom, kao u prethodnom primeru i jednaka su:

$$\begin{aligned}
u_{pg} &= -v_{xz} \frac{M_x}{E_z I_x} xy \\
v_{pg} &= \frac{M_x}{2I_x} \left( \frac{v_{xz}}{E_z} x^2 - \frac{v_{yz}}{E_z} y^2 + \frac{1}{E_z} (Lz - z^2) \right) \\
w_{pg} &= \frac{M_x}{2E_z I_x} y(2z - L)
\end{aligned} \tag{5.73}$$

Savijena osa štapa ( $x=y=0$ ), ima oblik ravne parabole, ( $u=w=0$ ), čija je jednačina:

$$v_{pg} = \frac{M_x}{2E_z I_x} (Lz - z^2) \tag{5.74}$$



Sl. 5-7 Prosta greda, napregnuta na pravo čisto savijanje

Veličina ugiba  $f_y$  na sredini raspona proste grede ( $z=L/2$ ), je:

$$f_{ypg}(L/2) = v_{pg}(L/2) = v_{maxpg} = \frac{M_x}{8E_z I_x} L^2 \tag{5.75}$$

Da bi se izračunali naponi u štapu, od VEO materijala, napregnutom na pravo čisto savijanje, bilo da je uklješten na desnom kraju, ili je oslonjen kao prosta greda, potrebno je na prvu jednačinu izraza (5.65) primeniti Laplasove transformacije:

$$\bar{\sigma}_{zz}(y, s) = \frac{\bar{M}_x(s)y}{I_x} \tag{5.76}$$

Inverzija jednačine (5.76), pri delovanju konstantnog momenta, daje rešenje:

$$\sigma_{zz}(y) = \frac{M_x y}{I_x} \tag{5.77}$$

što je isto, kao prva jednačina izraza (5.65). Znači, **naponi u štapu od VEO materijala, napregnutom na pravo čisto savijanje, bez obzira na način oslanjanja, isti su, kao kod štapa od EO materijala.**

**Deformacije i pomeranja posmatranog štapa, od VEO materijala, dobiju se primenom Laplasovih transformacija na odgovarajuće izraze. Na taj način, izrazi za**

veliĉine maksimalnog ugiba (5.70) i (5.75) transformišu se u sledeći oblik:

$$\begin{aligned}\bar{f}_{yk}(0, s) &= -\frac{\bar{M}_x(s)}{2I_x} s\bar{D}_z(s)L^2 \\ \bar{f}_{ypg}(L/2, s) &= \frac{\bar{M}_x(s)}{8I_x} s\bar{D}_z(s)L^2\end{aligned}\quad (5.78)$$

Inverzija jednaĉina (5.78) pri delovanju konstantnog momenta:

$$\begin{aligned}M_x(t) &= M_0H(t) \\ \bar{M}_x(s) &= \frac{M_0}{s}\end{aligned}\quad (5.79)$$

daje sledeće izraze, za maksimalne ugibe konzole, uklještene na desnom kraju, i proste grede, obe od VEO materijala, u sluĉaju viskoznog teĉenja-konstantnog opterećenja:

$$\begin{aligned}f_{yk}(0, t) &= -\frac{M_0}{2I_x} D_z(t)L^2 \\ f_{ypg}(L/2, t) &= \frac{M_0}{8I_x} D_z(t)L^2\end{aligned}\quad (5.80)$$

Analogno navedenom postupku za maksimalne ugibe, moţe se odrediti i polupreĉnik krivine, na mestu maksimalnog ugiba, konzole ili proste grede, napregnutih na pravo ĉisto savijanje, od VEO materijala, pa se dobija da je:

$$\frac{1}{R_k(t)} = \frac{1}{R_{pg}(t)} = \frac{M_0}{I_x} D_z(t)\quad (5.81)$$

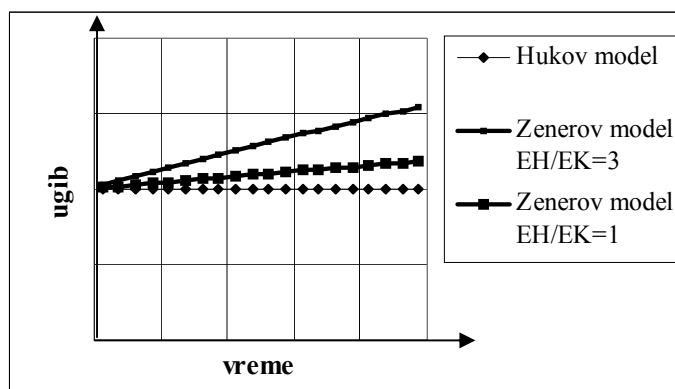
Izrazi (5.80) i (5.81) razlikuju se od izraza (5.70), (5.75) i (5.71), samo, po materijalnim parametrima, koji su kod VEO materijala vremenski zavisni.

Za Ńtap, od Zenerovog VEO materijala, napregnut na pravo ĉisto savijanje, ugibi se raĉunaju na sledeći naĉin:

$$\begin{aligned}f_{yk}(0, t) &= -\frac{M_0}{2I_x} \left[ \frac{1}{E_{Hz}} + \frac{1}{E_{Kz}} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_{\epsilon_z}}} \right) \right] L^2 \\ f_{ypg}(L/2, t) &= \frac{M_0}{8I_x} \left[ \frac{1}{E_{Hz}} + \frac{1}{E_{Kz}} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_{\epsilon_z}}} \right) \right] L^2\end{aligned}\quad (5.82)$$

Uporedni prikaz maksimalnih ugiba, za prostu gredu, od Hukovog EO materijala i od Zenerovog VEO materijala, napregnutu na pravo ĉisto savijanje, daje Sl. 5-8. S navedene slike vidi se, da je kod proste grede, od Hukovog EO materijala, ugib konstantan, a ako je u pitanju Zenerov VEO materijal, ugib tokom vremena raste, pri

čemu taj porast zavisi od strukture materijala (to jest, od odnosa  $E_H / E_K$ ) i od istorije deformisanja.



Sl. 5-8 Uporedni prikaz maksimalnih ugiba proste grede, od Hukovog EO materijala i od Zenerovog VEO materijala, s dva različita odnosa  $E_H/E_K$

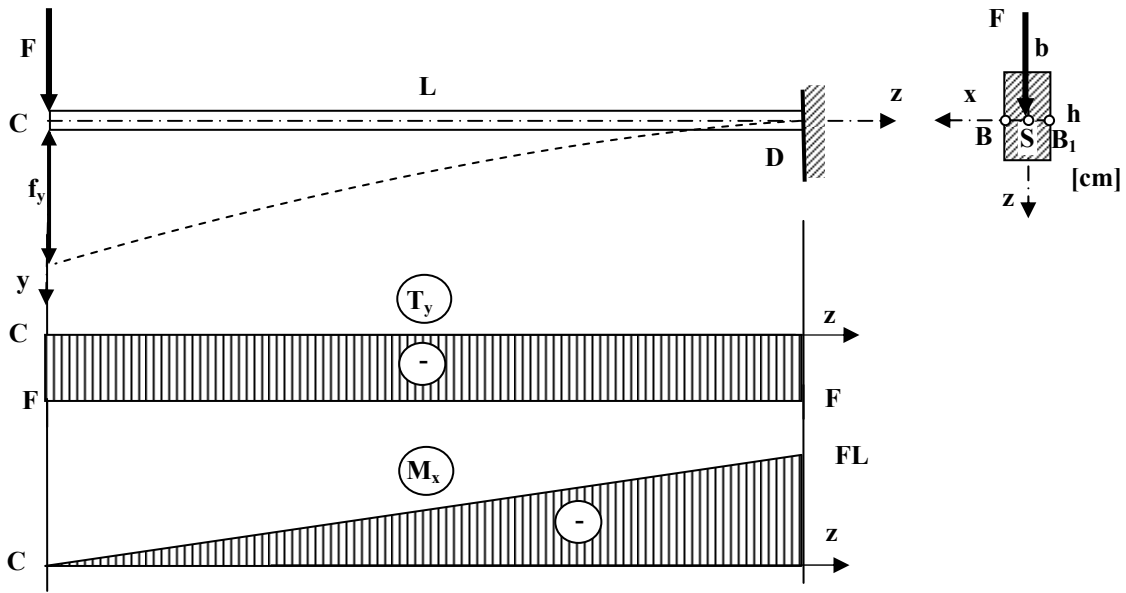
### 5.1.3. Pravo savijanje štapa silama

Jasno je, da se, i u slučaju savijanja silama deformacije štapova, od EI i od EO materijala, razlikuju. Kod štapova od EO materijala, opterećenih centrično postavljenom koncentrisanom silom koja deluje u pravcu glavne centralne ose  $y$ , preseki tokom deformisanja ne ostaju ravni, nego se krive. U tom slučaju, osim naponske funkcije, treba odrediti i funkciju krivljenja preseka, jer je savijanje praćeno i uvrtnjem. Deformisana osa nosača međutim i dalje ima oblik ravne krive, a poluprečnik krivine se i dalje računa na isti način.

Za savijanje silama, štapa od EO materijala, posmatra se nekoliko slučajeva.

*Prvi slučaj: Konzola je pravougaonog preseka, uklještena na desnom kraju, opterećena centrično postavljenom, konstantnom vertikalnom silom, na slobodnom kraju (Sl. 5-9). Smatra se, da se ravan preseka poklapa s jednom ravni elastične simetrije.*

Za određivanje napona i deformacija koristi se Saint-Venant-ov postupak. Pretpostavlja se, da su od svih komponenti napona, samo naponi  $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ , različiti od nule. To važi za sve preseke duž nosača, osim za presek na slobodnom kraju konzole, gde je  $\sigma_z = 0$ .



Sl. 5-9 Konzola pravougaonog preseka, opterećena na slobodnom kraju centrično postavljenom koncentrisanom vertikalnom silom

Uz zanemarivanje zapreminskih sila, komponentalni naponi  $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ , u proizvoljnom preseku posmatrane konzole, dobijaju se iz uslova ravnoteže sila:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (5.83)$$

Uz pretpostavku, da je raspored normalnog napona  $\sigma_z$ , u poprečnom preseku, isti, kao kod pravog čistog savijanja, odgovarajuće konzole od EI materijala:

$$\sigma_{zz} = \frac{M_x}{I_x} y \quad (5.84)$$

gde je:  $M_x = -Fz$ , treća jednačina izraza (5.83), modifikuje se u sledeći oblik:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \frac{F}{I_x} y \quad (5.85)$$

Iz prve dve jednačine izraza (5.83), vidi se, da smičući naponi, ne zavise od koordinate  $z$ , nego je:  $\tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y)$ ,  $\tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y)$ . Da bi se odredila rešenja za smičuće napone, koja zadovoljavaju jednačinu (5.85), uvodi se naponska funkcija za savijanje silama,  $\phi(y, z)$ , tako da je:



$$\begin{aligned}\tau_{xz} &= \frac{\partial\phi}{\partial y} + \tau_{p1} \\ \tau_{yz} &= -\frac{\partial\phi}{\partial x} + \tau_{p2}\end{aligned}\quad (5.86)$$

gde su :  $\tau_{p1}$  i  $\tau_{p2}$  - partikularna rešenja jednačine (5.85).

Pretpostavlja se, da je oblik tih partikularnih rešenja, za slučaj simetričnih preseka, kod štapova, čija osa se savija u obliku ravne krive, sledeći:

$$\tau_{p1} = 0, \quad \tau_{p2} = \frac{F}{2I_x} [y^2 - f(x)] \quad (5.87)$$

gde je:  $f(x)$  - funkcija zavisna od oblika preseka. Za pravougaoni presek, kod kojeg je jednačina konture:  $\left(x^2 - \frac{b^2}{4}\right)\left(y^2 - \frac{h^2}{4}\right)$ , jednačine (5.86) dobijaju sledeći oblik:

$$\begin{aligned}\tau_{xz} &= \frac{\partial\phi}{\partial y} \\ \tau_{yz} &= -\frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{F}{2I_x} \left[ \frac{h^2}{4} - y^2 \right]\end{aligned}\quad (5.88)$$

Jednačine za nalaženje komponenti deformacija glase:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= -v_{xz} \frac{\sigma_z}{E_z} = v_{xz} \frac{F}{E_z I_x} zy; \quad \varepsilon_{yy} = -v_{yz} \frac{\sigma_z}{E_z} = v_{yz} \frac{F}{E_z I_x} zy; \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\sigma_z}{E_z} = -\frac{F}{E_z I_x} zy; \\ \varepsilon_{xy} &= 0; \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{G_{xz}} \tau_{xz} = \frac{1}{G_{xz}} \frac{\partial\phi}{\partial y}; \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{G_{yz}} \tau_{yz} = -\frac{1}{G_{yz}} \left( \frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{F}{2I_x} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) \right)\end{aligned}\quad (5.89)$$

Komponente deformacija (5.89) treba da zadovolje jednačine kompatibilnosti:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= 0; \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = 0; \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial x^2}; \quad 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} &= 0\end{aligned}\quad (5.90)$$

Prva, druga, treća i šesta jednačina izraza (5.90) identički su zadovoljene. Unošenjem jednačina (5.89), u četvrtu i petu jednačinu (5.90), i korišćenjem treće jednačine (5.83), dobijaju se Beltrami-Mitchell-ove jednačine za ovo ravno naprezanje:

$$\frac{G_{xz}}{G_{yz}} \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y^2} = \left( 2 \frac{G_{xz} v_{xz}}{E_z} - 1 \right) \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z \partial y}$$

$$\frac{G_{xz}}{G_{yz}} \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial y^2} = 0$$
(5.91)

Kada se u jednačinu (5.91) uvedu izrazi za normalni napon  $\sigma_z$ :  $\sigma_z = -\frac{F}{I_x} zy$  i izraz za smičuće napone  $\tau_{xz}, \tau_{yz}$ , (5.88), dobijaju se sledeće jednačine:

$$g \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 2k \frac{F}{I_x} x$$

$$g \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$
(5.92)

gde je

$$g = \frac{G_{xz}}{G_{yz}}$$

$$k = \frac{G_{xz} v_{xz}}{E_z}$$
(5.93)

Odgovarajuća pomeranja, dobijaju se integracijom jednačina (5.89), kao i korišćenjem veza napona i deformacija napisanih, za ovaj slučaj ravnog naprezanja:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$0 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$
(5.94)

uz iste granične uslove, na mestu uklještenja, kao kod pravog čistog savijanja.

Nakon određivanja integracionih konstanti, tražene jednačine pomeranja su:

$$u = v_{xz} \frac{F}{E_z I_x} xyz$$

$$v = \frac{F}{E_z I_x} \left[ \frac{1}{6} (2L^3 - 3L^2 z + z^3) + \frac{1}{2} (v_{xz} x^2 - v_{yz} y^2) z \right]$$

$$w = \frac{F}{2E_z I_x} (L^2 - z^2) y + W - W(0)$$
(5.95)

gde je: W - funkcija pomeranja, zavisna od koordinata i napona, odnosno naponske funkcije  $\phi$ , za savijanje silama.

Funkcija W, bira se tako, da zadovoljava sledeće jednačine:

$$\begin{aligned}\frac{dW}{dx} &= \frac{1}{G_{xz}} \tau_{xz} - v_{xz} \frac{F}{E_z I_x} xy \\ \frac{dW}{dy} &= \frac{1}{G_{yz}} \tau_{yz} - \frac{F}{2E_z I_x} (v_{yz} y^2 - v_{xz} x^2)\end{aligned}\quad (5.96)$$

odnosno

$$\begin{aligned}\frac{dW}{dx} &= \frac{1}{G_{xz}} \frac{\partial \phi}{\partial y} - v_{xz} \frac{F}{E_z I_x} xy \\ \frac{dW}{dy} &= \frac{1}{G_{yz}} \left( -\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{F}{2I_x} \left[ \frac{h^2}{4} - y^2 \right] \right) - \frac{F}{2E_z I_x} (v_{yz} y^2 - v_{xz} x^2)\end{aligned}\quad (5.97)$$

Treća jednačina izraza (5.95), govori, da pomeranje, u pravcu z ose, više nije linearna funkcija koordinate y, odnosno, **u ovom slučaju savijanja silama konzole od EO materijala, preseci nakon deformisanja ne ostaju ravni, nego se krive, zbog uticaja smičućih napona, slično, kao kod odgovarajućeg štapa od EI materijala.** Deformisani preseci imaju oblik površi trećeg reda.

Naponska funkcija  $\phi$ , za posmatranu konzolu, određuje se iz jednačine, koja se dobija, kada se jednačine izraza (5.97) diferenciraju, prva po y, a druga po x, pa se dobijeni izrazi izjednače. Tako se dobija nehomogena PDJ II reda, koja ima sledeći oblik:

$$g \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{2F}{I_x} kx \quad (5.98)$$

Ona je identična kao prva jednačina izraza (5.92), dobijena iz jednačina kompatibilnosti. Na taj način, postignuto je da se i smičući naponi, i pomeranja, računaju uz pomoć naponske funkcije  $\phi$ .

Problem savijanja silama, uklještenog štapa od EO materijala, svodi se, dakle, na određivanje naponske funkcije  $\phi$ , iz jednačine (5.98), uz granični uslov, da je ta funkcija jednaka nuli, na stranicama preseka ( $x = \pm \frac{b}{2}, y = \pm \frac{h}{2}$ ). Jednačina (5.98),

primenom Furijeovih redova u intervalu  $\left(-\frac{b}{2}; \frac{b}{2}\right)$ , modifikuje se u sledeći oblik:

$$g \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -\frac{2Fb}{\pi I_x} k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin \frac{2n\pi}{b} x \quad (5.99)$$

Rešenje funkcije  $\phi$  traži se u sledećem obliku:

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) \sin \frac{2n\pi x}{a} \quad (5.100)$$

gde je:  $Y_n(y)$  - pomoćna funkcija, koju treba odrediti.

Korišćenjem graničnih uslova da je funkcija  $\phi$  na konturama preseka, gde je  $y = \pm \frac{h}{2}$ , jednaka nuli, dobija se konačan izraz za naponsku funkciju:

$$\phi = \frac{Fb^3}{2\pi^3 I_x} \frac{k}{g} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \left( 1 - \frac{\cosh \lambda_n \chi y}{\cosh \frac{\lambda_n \chi h}{2}} \right) \sin \lambda_n x \quad (5.101)$$

Tu je:  $\chi$  - parametar ortotropije:  $\chi = \sqrt{g}$ ,  $d$  - parametar preseka ortotropnog materijala:  $d = \frac{c}{\chi} = \frac{b}{h\chi}$ .

Funkcija  $\phi$ , za posmatrani uklješteni štap, zavisi od materijalnih parametara, preko parametara ortotropije  $g, \chi$  i  $k$ , pa i smičući naponi tog štapa, zavise od tih parametara. Smičući naponi  $\tau_{xz}, \tau_{yz}$  jednaki su:

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= -\frac{Fb^2}{\pi^2 I_x} \frac{k}{\chi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \frac{\sinh \lambda_n \chi y}{\cosh \frac{\lambda_n \chi h}{2}} \sin \lambda_n x \\ \tau_{yz} &= -\frac{F}{2I_x} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) - \frac{Fb^2}{\pi^2 I_x} \frac{k}{g} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \left( 1 - \frac{\cosh \lambda_n \chi y}{\cosh \frac{\lambda_n \chi h}{2}} \right) \cos \lambda_n x \end{aligned} \quad (5.102)$$

gde je  $\lambda_n = \frac{2\pi n}{a}$ .

U drugoj jednačini izraza (5.102), smičući napon  $\tau_{yz}$  dat je, kao zbir opšteg i partikularnog rešenja,  $\tau_{yz} = -\frac{F}{2I_x} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right)$ , koje se ne razlikuje od rešenja za odgovarajući štap od EI materijala. Iz izraza (5.102) se vidi da oba smičuća napona, zavise od materijalnih parametara. Poredeći prvu i drugu jednačinu izraza (5.102), može se zaključiti, da se smičući napon  $\tau_{xz}$ , u odnosu na  $\tau_{yz}$ , može zanemariti.

U konturnim tačkama preseka posmatrane konzole, gde je  $y = \pm \frac{h}{2}$ , normalni naponi imaju ekstremne vrednosti:  $\sigma_z = \pm \frac{6Fz}{bh^2}$ .

U središtu preseka istog štapa ( $x = 0, y = 0$ ), smičući napon  $\tau_{yz}^s$  jednak je:

$$\tau_{yz}^s = -\frac{3}{2} \frac{F}{bh} \left( 1 - \frac{\pi^2 k}{2} \beta_s \right) \quad (5.103)$$

gde je

$$\beta_s = d^2 \left[ \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 \cosh \frac{n\pi}{d}} \right] \quad (5.104)$$

Normalni  $\sigma_z$ , i smičući napon  $\tau_{xz}$ , su tu jednaki nuli. U tačkama B i B<sub>1</sub>, koje se nalaze na sredinama ivica paralelnih s napadnom linijom sile, ( $x = \pm \frac{b}{2}; y = 0$ ), smičući napon  $\tau_{yz}$  je maksimalan:

$$\tau_{yz\max}^B = -\frac{3}{2} \frac{F}{bh} \left( 1 + \frac{\pi^2 k}{2} \beta_B \right) \quad (5.105)$$

gde je

$$\beta_B = d^2 \left[ \frac{\pi}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \cosh \frac{n\pi}{d}} \right] \quad (5.106)$$

dok su normalni  $\sigma_z$ , i smičući napon  $\tau_{xz}$ , jednaki nuli.

Izrazi (5.103) i (5.105) pokazuju, da smičući napon  $\tau_{yz}$ , mora da se računa, po širini preseka, uz korekzione faktore  $\beta_s$  i  $\beta_B$ . Vrednosti koeficijenta  $\beta_s$  i  $\beta_B$ , računane za četiri vrednosti parametra d, prikazuje Tabela 5-1. Iz tih podataka može se zaključiti, da je, za uzane preseke, kod kojih je  $d \ll 1$ , smičući napon, u ivičnim tačkama preseka: B i B<sub>1</sub>, znatno veći, nego, kod odgovarajućeg štapa, od izotropnog materijala. Inače, za štap, od EI materijala važi, da je taj napon, konstantan po širini preseka, kao i da je jednak maksimalnoj vrednosti u težištu preseka:

$$\tau_{yz\max} = \frac{3}{2} \frac{F}{bh} \quad (5.107)$$

**Tabela 5-1 Odnos parametra preseka d, i koeficijenata napona  $\beta_s$  i  $\beta_B$ , za uklješteni štap napregnut na savijanje silama, od EO materijala**

d	$\beta_s$	$\beta_B$
0,25	0,98	4,94
0,5	0,72	1,98
1	0,30	0,63
2	0,09	0,17

Izrazi (5.105) i (5.106) daju korekcije smičućih napona, koja treba obaviti, za posmatrani uklješteni štap, od EO materijala, u odnosu, na odgovarajući štap od EI materijala. Korekcija je naročito važna za uske preseke.

Kod širokih preseka, iste visine, linearno se povećava moment inercije, pa se normalni naponi linearno smanjuju, s povećanjem širine preseka. Što se tiče maksimalnih smičućih napona  $\tau_{yz}$ , oni se smanjuju, s povećanjem širine preseka. Kod širokih preseka, kod kojih je parametar  $d$ , tj., odnos širine i visine, veći od jedinice, u stvari, istovremeno je smanjena visina i povećana širina preseka. U tom slučaju, normalni naponi se, zbog smanjenja momenta inercije, povećavaju, a smičući naponi, ostaju jednakog reda veličine, pa se, u odnosu na porast normalnih napona, mogu zanemariti.

Jednačina savijene ose posmatranog uklještenog štapa, dobija se iz druge jednačine pomeranja, izraza (5.95). Ona ima oblik:

$$v_k = \frac{F}{6E_z I_x} (z^3 - 3L^2z + 2L^3) \quad (5.108).$$

Maksimalni ugib slobodnog kraja uklještenog štapa, za koji je  $z=0$ , jednak je:

$$f_k = \frac{F}{3E_z I_x} L^3 \quad (5.109)$$

Poluprečnik krivine ose nosača, na mestu maksimalnog ugiba, isti je, kao kod odgovarajuće konzole od EI materijala, napregnute na pravo čisto savijanje.

Dakle, između uklještenog štapa naprnutog na savijanje silama, od EO materijala i EI materijala, postoje razlike u načinu proračunu:

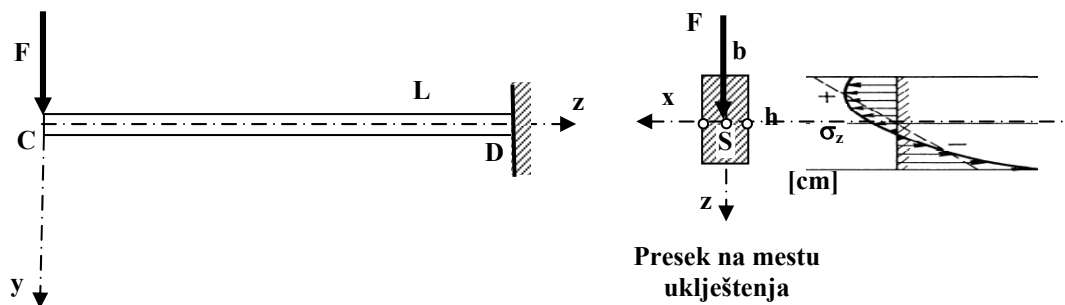
*Za uzane preseke, maksimalni smičući napon* posmatranog uklještenog štapa, od EO materijala, ne računa se isto, kao kod odgovarajućeg štapa, od EI materijala. On, ne deluje u središtu preseka, nego u tačkama na sredinama ivica, paralelnih s napadnom linijom sile. *Kod širokih preseka*, smanjuje se moment inercije, pa se povećavaju normalni naponi, dok se maksimalni smičući naponi  $\tau_{yz}$ , smanjuju, s povećanjem širine preseka.

**Smičući naponi utiču na formu jednačine savijene ose** posmatranog uklještenog štapa, od EO materijala, trpi uticaj smičućih napona. Kod tankih štapova, taj uticaj je relativno mali i obično se zanemaruje. **Maksimalni ugib slobodnog kraja konzole**, razlikuje se od jednačine, za odgovarajuću konzolu, od EI materijala, samo,

zbog modula elastičnosti.

U ovom slučaju savijanja, za približni proračun uklještenih štapova, od EO materijala, **može da se koristi hipoteza Žuravskog, uz ograničenje da ona važi samo za široke preseke.** Za uske preseke, komponenta smičućeg napona, paralelna ravni savijanja, osim što je promenljiva po visini preseka  $\tau_{yz} = \tau_{yz}(y)$ , promenljiva je i po širini preseka, dok se komponenta smičućeg napona, upravna na ravan savijanja, može, za sve preseke zanemariti ( $\tau_{xz} = 0$ ). Zbog toga su, naprezanje i deformacije, za široki štap pravougaonog preseka od EO materijala, uklješten na desnom kraju, slični naprezanju, kod odgovarajućeg štapa, od EI materijala.

Sve ovo važi samo pod uslovom da se pravci glavnih napona poklapaju s pravcima koordinatnih osa  $x, y, z$ . Ako se ti pravci ne poklapaju, raspored normalnih napona po preseku razlikuje se od odgovarajućeg rasporeda kod konzole od EI materijala, kao što pokazuje Sl. 5-10.



Sl. 5-10 Uporedni prikaz rasporeda napona, kod konzole, od EI (isprekidana linija) i od EO materijala, za slučaj kada se pravci glavnih napona ne poklapaju s pravcima koordinatnih osa

Da bi se izračunali **naponi, deformacije i pomeranja konzole, pravougaonog preseka, od Zenerovog VEO materijala, uklještena na desnom kraju, opterećene centrično postavljenom konstantnom vertikalnom silom, koja deluje na slobodnom kraju,** koristi se princip viskoelastične analogije primenjen na jednačine (5.84), (5.105), (5.108), (5.109):

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{zz}(y, z, s) &= -\frac{\bar{F}(s)zy}{I_x} \\
\bar{\tau}_{zy\max}(s) &= \frac{3}{2} \frac{\bar{F}(s)}{A} \left( 1 + \frac{\pi^2 k}{2} \beta_B \right) \\
\bar{v}_k(z, s) &= \frac{\bar{F}(s)}{6I_x} s \bar{D}_z(s) (z^3 - 3L^2z + 2L^3) \\
\bar{f}_k(s) &= \frac{\bar{F}(s)}{3I_x} s \bar{D}_z(s) L^3
\end{aligned} \tag{5.110}$$

gde je uzeto da su parametri  $k$ ,  $\beta_A$  konstantni, tokom vremena.

Inverzija jednačina (5.110) pri delovanju konstantne vertikalne sile:

$$\begin{aligned}
F(t) &= FH(t) \\
\bar{F}(s) &= \frac{F}{s}
\end{aligned} \tag{5.111}$$

daje sledeće veličine:

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz}(y, z, t) &= -\frac{Fzy}{I_x} \\
\tau_{zy\max}(t) &= \frac{2}{3} \frac{F}{A} \left( 1 + \frac{\pi^2 k}{2} \beta_A \right) \\
v_k(z, t) &= \frac{F}{6I_x} D_z(t) (z^3 - 3L^2z + 2L^3) \\
f_k(t) &= \frac{F}{3I_x} D_z(t) L^3
\end{aligned} \tag{5.112}$$

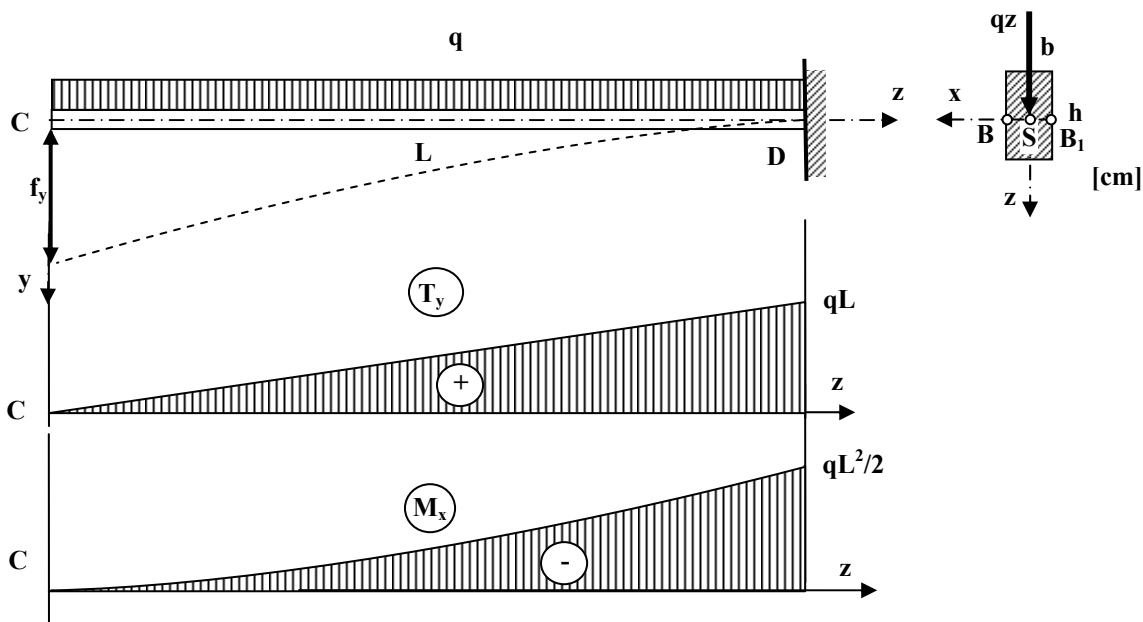
Izraz (5.112) pokazuje, da su, za posmatranu konzolu od VEO materijala, normalni i smičući naponi, konstantne veličine, tokom vremena, dok su, jednačina deformisane ose, kao i maksimalni ugib na slobodnom kraju, promenljivi. Izrazi za jednačinu deformisane ose nosača i maksimalni ugib su, uz poznati izraz za popustljivost Zenerovog modela, sledeći:

$$\begin{aligned}
v_k(z, t) &= \frac{F}{6I_x} \left[ \frac{1}{E_{Hz}} + \frac{1}{E_{Kz}} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_{\epsilon z}}} \right) \right] (z^3 - 3L^2z + 2L^3) \\
f_k(t) &= \frac{F}{3I_x} \left[ \frac{1}{E_{Hz}} + \frac{1}{E_{Kz}} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_{\epsilon z}}} \right) \right] L^3
\end{aligned} \tag{5.113}$$

*Drugi slučaj: Konzola je pravougaonog preseka, uklještena je na desnom kraju, i opterećena je jednako podeljenim opterećenje duž celog raspona (Sl. 5-11). Smatra se*



da se ravan preseka poklapa s jednom od ravni elastične simetrije.



Sl. 5-11 Konzola, pravougaonog preseka, opterećena jednako podeljenim opterećenjem

I u ovom slučaju se za određivanje napona i deformacija koristi Saint-Venant-ov postupak. Pretpostavlja se, da su od svih komponenti napona, na mestu uklještenja, samo naponi  $\sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}$  različiti od nule. To važi za sve preseke duž nosača, osim za presek na slobodnom kraju konzole, gde su svi naponi jednaki nuli. Uz zanemarivanje zapreminskih sila, tačni izrazi za napone  $\sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}$ , dobijaju se iz odgovarajućih uslova ravnoteže sila. Opterećenja, koja deluje na nosač, su: transverzalna sila  $T_y = qz$ , i moment savijanja  $M_x = -q \frac{z^2}{2}$ . Uslovi ravnoteže sila su:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (5.114)$$

Jednačine za sračunavanje komponenti deformacija glase:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= -\nu_{xy} \frac{\sigma_y}{E_y} - \nu_{xz} \frac{\sigma_z}{E_z}; & \varepsilon_{yy} &= \frac{\sigma_y}{E_y} - \nu_{yz} \frac{\sigma_z}{E_z}; & \varepsilon_{zz} &= -\nu_{zy} \frac{\sigma_y}{E_y} + \frac{\sigma_z}{E_z}; \\ \varepsilon_{xy} &= 0; & \varepsilon_{xz} &= 0; & \varepsilon_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G_{yz}} \end{aligned} \quad (5.115)$$

Odgovarajuća pomeranja dobijaju se integracijom jednačina (5.115),

korišćenjem veza deformacija i pomeranja, napisanih za ovaj slučaj ravnog napreznjanja:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ 0 &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \quad 0 = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)\end{aligned}\quad (5.116)$$

Komponente deformacija (5.115), treba da zadovolje jednačine kompatibilnosti, koje, za posmatrani štap, imaju sledeći oblik:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= 0; \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = 0; \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= - \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial x^2}; \quad 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} &= 0\end{aligned}\quad (5.117)$$

Prva, druga, treća, peta i šesta jednačina (5.117) su identički zadovoljene. Granični uslovi na mestu uklještenja, isti su, kao kod pravog čistog savijanja:

Iz jednačina (5.114), (5.115), (5.116), (5.117), uz odgovarajuće granične uslove, dobijaju se rešenja za normalne i smičuće napone, u obliku sledećih funkcija:

$$\begin{aligned}\sigma_y &= \frac{q}{2b} \left( -1 + 3 \frac{y}{h} - \frac{4y^3}{h^3} \right) \\ \sigma_z &= - \frac{qz^2 y}{2I_x} + \frac{q}{b} m \left( \frac{4y^3}{h^3} - \frac{3y}{5h} \right) \\ \tau_{zy} &= - \frac{qz}{2I_x} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right)\end{aligned}\quad (5.118)$$

gde je: m -korekcionni parametar ortotropije.

On se računa pomoću obrasca:

$$m = \frac{1}{2} \left( \frac{E_z}{G_{xz}} - 2\nu_{xz} \right)\quad (5.119)$$

U izrazu za napone (5.118), normalni napon  $\sigma_y$  i smičući napon  $\tau_{yz}$ , isti su, kao kod odgovarajuće konzole, od EI materijala. Normalni napon  $\sigma_z$  ima korekcionni član koji zavisi od materijalnih parametara EO štapa. U približnim proračunima, normalni napon  $\sigma_y$  se može zanemariti, u odnosu na napon  $\sigma_z$ , zbog višestruko veće dužine štapa, od njegovih poprečnih dimenzija. Raspored normalnih napona  $\sigma_z$ , po visini preseka, za ovakvu gredu, od EO materijala, nije više linearan, kao što je to kod

odgovarajuće grede, od EI materijala. Maksimum tog napona, nije više u ivičnim tačkama preseka, nego je pomećen ka središtu preseka. U ivičnim tačkama preseka gde je  $y = \pm \frac{h}{2}$ , normalni  $\sigma_y$  i smičući napon  $\tau_{yz}$ , jednaki su nuli.

Iz jednačina (5.114), (5.115), (5.116), (5.117) dobija se i jednačina savijene ose i maksimalni ugib za posmatranu konzolu:

$$v_k = \frac{q}{24E_z I_x} (z^4 - 4L^3 z + 3L^4) - \frac{qh^2}{80I_x} \left( -\frac{3v_{xz}}{E_z} + \frac{4}{G_{xz}} \right) (z-L)^2$$

$$f_k = \frac{qL^4}{8E_z I_x} - \frac{qh^2 L^2}{80I_x} \left( -\frac{3v_{xz}}{E_z} + \frac{4}{G_{xz}} \right)$$
(5.120)

Prvi član sa desne strane, u prvoj jednačini izraza (5.120), odgovara jednačini deformisane ose i ugibu slobodnog kraja, odgovarajuće konzole, od EI materijala. Drugi član u istoj jednačini je korekcionni. On predstavlja uticaj smičućih napona, na savijenu osu i ugib posmatrane konzole, kod EO materijala. Poluprečnik krivine savijene ose, na mestu maksimalnog ugiba, jednak je:

$$\frac{1}{R_k} = -\frac{qz^2}{2E_z I_x} + \frac{qh^2}{40I_x} \left( -\frac{3v_{xz}}{E_z} + \frac{4}{G_{xz}} \right)$$
(5.121)

Iz izraza (5.121), vidi se, da ne postoji direktna proporcionalnost krivine savijene ose i momenta savijanja, nego je, osim člana, koji se odnosi na poluprečnik krivine, za konzolu od EI materijala, potrebno računati i korekcionni član, koji se javlja zbog složenije strukture materijala. On zavisi od elastičnih konstanti, kao i od oblika i dimenzija preseka.

Da bi se izračunali **naponi, deformacije i pomeranja posmatrane konzole, od Zenerovog VEO materijala**, treba, na jednačine izraza (5.118), (5.120), (5.121) primeniti princip viskoelastične analogije. Međutim u izrazu (5.118), u drugoj jednačini za normalni napon  $\sigma_z$ , javlja se korekcionni faktor ortotropije, zavisano od materijalnih konstanti. Zbog toga se, na tu jednačinu, može primeniti metoda viskoelastične analogije, samo uz pretpostavku da taj faktor nije funkcija vremena. Korišćenjem metode viskoelastične analogije, uz pretpostavku da su Poasonovi koeficijenti konstantni tokom vremena, dobijaju se sledeće jednačine:

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_y(y, s) &= \frac{\bar{q}(s)}{2b} \left( -1 + 3\frac{y}{h} - \frac{4y^3}{h^3} \right) \\
\bar{\sigma}_z(y, z, s) &= -\frac{\bar{q}(s)z^2y}{2I_x} + \frac{\bar{q}(s)}{b} m \left( \frac{4y^3}{h^3} - \frac{3y}{5h} \right) \\
\bar{\tau}_{zy}(y, s) &= -\frac{\bar{q}(s)z}{2I_x} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) \\
\bar{v}_k(z, s) &= \frac{\bar{q}(s)}{24I_x} s\bar{D}_z(s)(z^4 - 4L^3z + 3L^4) - \frac{\bar{q}(s)h^2}{80I_x} (-3v_{xz}s\bar{D}_z(s) + 4s\bar{J}_z(s))(z-L)^2 \\
\bar{f}_k(s) &= \frac{\bar{q}(s)}{8I_x} s\bar{D}_z(s)L^4 - \frac{\bar{q}(s)h^2}{80I_x} (-3v_{xz}s\bar{D}_z(s) + 4s\bar{J}_z(s))L^2 \\
\frac{1}{\bar{R}_k(z, s)} &= \frac{\bar{q}(s)}{2I_x} s\bar{D}_z(s)z^2 + \frac{\bar{q}(s)}{40I_x} (-3v_{xz}s\bar{D}_z(s) + 4s\bar{J}_z(s))h^2
\end{aligned} \tag{5.122}$$

Inverzijom jednačina (5.122) pri delovanju konstantnog jednako podeljenog opterećenja:

$$\begin{aligned}
q(t) &= qH(t) \\
\bar{q}(s) &= \frac{q}{s}
\end{aligned} \tag{5.123}$$

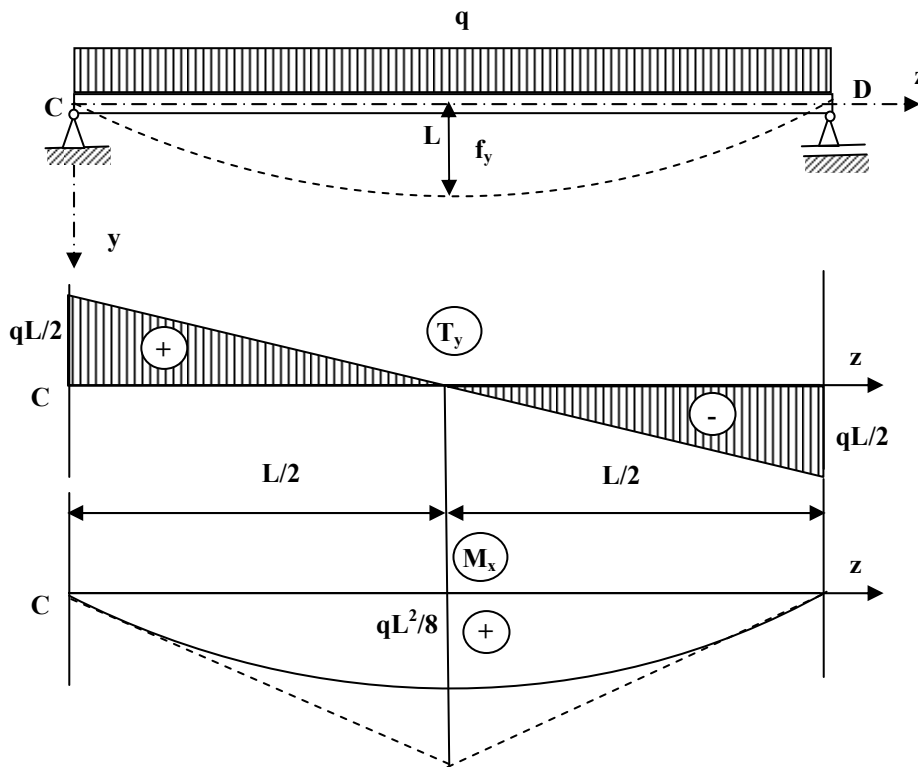
dolazi se do sledećih veličina:

$$\begin{aligned}
\sigma_y(y, t) &= \frac{q}{2b} \left( -1 + 3\frac{y}{h} - \frac{4y^3}{h^3} \right) \\
\sigma_z(y, z, t) &= -\frac{qz^2y}{2I_x} + \frac{q}{b} m \left( \frac{4y^3}{h^3} - \frac{3y}{5h} \right) \\
\tau_{zy}(y, t) &= -\frac{qz}{2I_x} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) \\
v_k(z, t) &= \frac{q}{24I_x} D_z(t)(z^4 - 4L^3z + 3L^4) - \frac{qh^2}{80I_x} (-3v_{xz}D_z(t) + 4J_z(t))(z-L)^2 \\
f_k(t) &= \frac{q}{8I_x} D_z(t)L^4 - \frac{qh^2}{80I_x} (-3v_{xz}D_z(t) + 4J_z(t))L^2 \\
\frac{1}{R_k(z, t)} &= \frac{q}{2I_x} D_z(t)z^2 + \frac{q}{40I_x} (-3v_{xz}D_z(t) + 4J_z(t))h^2
\end{aligned} \tag{5.124}$$

Izrazi (5.124) pokazuju, da su normalni i smičući naponi, konstantne veličine, dok su jednačina deformisane ose, maksimalni ugib na slobodnom kraju, kao i poluprečnik krivine, promenljivi tokom vremena. Izrazi za jednačinu deformisane ose nosača, maksimalni ugib i poluprečnik krivine su, uz poznati izraz za popustljivost Zenerovog modela, sledeći:

$$\begin{aligned}
v_k(z, t) &= \frac{q}{24I_x} \left[ \frac{1}{E_{Hz}} + \frac{1}{E_{Kz}} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_{\varepsilon_z}}} \right) \right] (z^4 - 4L^3z + 3L^4) - \\
&\quad - \frac{qh^2}{80I_x} \left( -3v_{xz} \left[ \frac{1}{E_{Hz}} + \frac{1}{E_{Kz}} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_{\varepsilon_z}}} \right) \right] + 4J_z(t) \right) (z-L)^2 \\
f_k(t) &= \frac{q}{8I_x} \left[ \frac{1}{E_{Hz}} + \frac{1}{E_{Kz}} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_{\varepsilon_z}}} \right) \right] L^4 - \frac{qh^2}{80I_x} \left( -3v_{xz} \left[ \frac{1}{E_{Hz}} + \frac{1}{E_{Kz}} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_{\varepsilon_z}}} \right) \right] + 4J_z(t) \right) L^2 \\
R_k(z, t) &= \frac{1}{2I_x} \left[ \frac{1}{E_{Hz}} + \frac{1}{E_{Kz}} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_{\varepsilon_z}}} \right) \right] z^2 + \frac{q}{40I_x} \left( -3v_{xz} \left[ \frac{1}{E_{Hz}} + \frac{1}{E_{Kz}} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_{\varepsilon_z}}} \right) \right] + 4J_z(t) \right) h^2
\end{aligned}
\tag{5.125}$$

Treći slučaj. Prosto oslonjen štاپ pravougaonog preseka, celom dužinom je opterećen jednako podeljenim opterećenjem (Sl. 5-12).



Sl. 5-12 Prosta greda, napregnuta na savijanje silama

I ovde se smatra, da se ravan preseka poklapa, sa jednom od ravni elastične simetrije. Za određivanje napona i deformacija i u ovom slučaju se koristi Saint-Venant-ov postupak. Pretpostavlja se da su, od svih komponentalnih napona, samo naponi

$\sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}$  različiti od nule. Ovo važi za sve preseke grede, osim za one na krajevima nosača, gde su normalni naponi jednaki nuli, kao i za one na sredini raspona, gde nema smičućih napona. I ovde su zanemarene zapreminske sile.

Jednačine koje se rešavaju iste su kao kod prethodnog nosača: (5.114), (5.115), (5.116), (5.117). Granični uslovi se razlikuju. Koriste se isti granični uslovi, kao kod odgovarajuće proste grede, opterećene na pravo čisto savijanje.

Rešenja za napone  $\sigma_y, \tau_{yz}$  ista su kao kod prethodnog primera, i računaju se po prvoj i trećoj jednačini izraza (5.118). Normalni napon  $\sigma_z$  računa se na sledeći način:

$$\sigma_z = \frac{q}{2I_x}(L^2 - z^2)y + \frac{q}{b} \left( \frac{E_z}{G_{xz}} - 2\nu_{xz} \right) \left( \frac{4y^3}{h^3} - \frac{3y}{5h} \right) \quad (5.126)$$

Drugi član u izrazu je korekcioni. On se javlja zbog ortotropije materijala. Izraz (5.126) ukazuje da normalni napon  $\sigma_z$  ni u ovom slučaju nema linearnu raspodelu, po visini preseka.

Jednačina savijene ose, maksimalni ugib i poluprečnik krivine savijene ose, na sredini raspona, za posmatranu prostu gredu su:

$$\begin{aligned} v_{pg} &= \frac{q}{24E_z I_x} (z^4 - 6L^3 z^2 + 5L^4) + \frac{qh^2}{80I_x} \left( -\frac{3\nu_{xz}}{E_z} + \frac{4}{G_{xz}} \right) (L^2 - z^2) \\ f_{pg} &= \frac{5qL^4}{24E_z I_x} + \frac{qh^2 L^2}{80I_x} \left( -\frac{3\nu_{xz}}{E_z} + \frac{4}{G_{xz}} \right) \\ \frac{1}{R_{pg}} &= \frac{M_x}{E_z I_x} + \frac{qh^2}{40I_x} \left( -\frac{3\nu_{xz}}{E_z} + \frac{4}{G_{xz}} \right) \end{aligned} \quad (5.127)$$

Prvi članovi s desne strane u jednačinama izraza (5.127) odgovaraju jednačini deformisane ose, ugibu slobodnog kraja i poluprečniku krivine odgovarajuće proste grede od EI materijala. Drugi članovi su korekcioni. Nastaju zbog uticaja smičućih napona i važe za ortotropni materijal. Iz izraza (5.127) vidi se, takođe, da ne postoji direktna proporcionalnost krivine savijene ose i momenta savijanja, nego je, osim člana koji se odnosi na poluprečnik krivine za prostu gredu od EI materijala, potrebno računati i korekcioni član, koji se javlja, zbog složenije strukture materijala. On zavisi od elastičnih konstanti i dimenzija preseka.

Da bi se izračunali **naponi, deformacije i pomeranja proste grede, pravougaonog preseka, od Zenerovog VEO materijala, opterećene celom dužinom, jednako podeljenim opterećenjem**, treba da se primeni princip viskoelastične

analogije na jednačinu (5.126) i na jednačine (5.127). Međutim u jednačini za normalni napon  $\sigma_z$  i u ovom slučaju se pojavljuje korekcionni faktor ortotropije. Ponovo se koristi pretpostavka, da je taj faktor konstantan tokom vremena. Na taj način, dobijaju se sledeće jednačine:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_z(y, z, s) &= -\frac{\bar{q}(s)}{2I_x}(L^2 - z^2)y + \frac{\bar{q}(s)}{b}m\left(\frac{4y^3}{h^3} - \frac{3y}{5h}\right) \\ \bar{v}_{pg}(z, s) &= \frac{\bar{q}(s)}{24I_x}s\bar{D}_z(s)(z^4 - 6L^3z + 5L^4) + \frac{\bar{q}(s)h^2}{80I_x}(-3v_{xz}s\bar{D}_z(s) + 4s\bar{J}_z(s))(L^2 - z^2) \\ \bar{f}_{pg}(s) &= \frac{5\bar{q}(s)}{24I_x}s\bar{D}_z(s)L^4 + \frac{\bar{q}(s)h^2}{80I_x}(-3v_{xz}s\bar{D}_z(s) + 4s\bar{J}_z(s))L^2 \\ \frac{1}{\bar{R}_{pg}(z, s)} &= \frac{\bar{q}(s)}{2I_x}s\bar{D}_z(s)z^2 + \frac{\bar{q}(s)}{40I_x}(-3v_{xz}s\bar{D}_z(s) + 4s\bar{J}_z(s))h^2\end{aligned}\quad (5.128)$$

Inverzijom jednačina (5.128), pri delovanju konstantnog, jednako podeljenog opterećenja:

$$\begin{aligned}q(t) &= qH(t) \\ \bar{q}(s) &= \frac{q}{s}\end{aligned}\quad (5.129)$$

dobija se:

$$\begin{aligned}\sigma_z(y, z, t) &= -\frac{q}{2I_x}(L^2 - z^2)y + \frac{q}{b}m\left(\frac{4y^3}{h^3} - \frac{3y}{5h}\right) \\ v_{pg}(z, t) &= \frac{q}{24I_x}D_z(t)(z^4 - 6L^3z + 5L^4) + \frac{qh^2}{80I_x}(-3v_{xz}D_z(t) + 4J_z(t))(L^2 - z^2) \\ f_{pg}(t) &= \frac{5q}{24I_x}D_z(t)L^4 + \frac{qh^2}{80I_x}(-3v_{xz}D_z(t) + 4J_z(t))L^2 \\ \frac{1}{R_{pg}(z, t)} &= \frac{q}{2I_x}D_z(t)z^2 + \frac{q}{40I_x}(-3v_{xz}D_z(t) + 4J_z(t))h^2\end{aligned}\quad (5.130)$$

Jednačine izraza (5.130) pokazuju da su u ovome slučaju normalni i smičući naponi vremenski invarijabilni, dok su jednačina deformisane ose, maksimalni ugib na slobodnom kraju i poluprečnik krivine na mestu maksimalnog ugiba, promenljivi. Jednačina deformisane ose nosača, maksimalni ugib i poluprečnik krivine su, uz poznati izraz za popustljivost Zenerovog modela, sledeći:

$$\begin{aligned}
v_{pg}(z, t) &= \frac{q}{24I_x} \left[ \frac{1}{E_{Hz}} + \frac{1}{E_{Kz}} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_{\varepsilon z}}} \right) \right] (z^4 - 6L^3z + 5L^4) + \\
&+ \frac{qh^2}{80I_x} \left( -3v_{xz} \left[ \frac{1}{E_{Hz}} + \frac{1}{E_{Kz}} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_{\varepsilon z}}} \right) \right] + 4J_z(t) \right) (L^2 - z^2) \\
f_{pg}(t) &= \frac{5q}{24I_x} \left[ \frac{1}{E_{Hz}} + \frac{1}{E_{Kz}} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_{\varepsilon z}}} \right) \right] L^4 + \frac{qh^2}{80I_x} \left( -3v_{xz} \left[ \frac{1}{E_{Hz}} + \frac{1}{E_{Kz}} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_{\varepsilon z}}} \right) \right] + 4J_z(t) \right) L^2 \\
\frac{1}{R_{pg}(z, t)} &= \frac{q}{2I_x} \left[ \frac{1}{E_{Hz}} + \frac{1}{E_{Kz}} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_{\varepsilon z}}} \right) \right] z^2 + \frac{q}{40I_x} \left( -3v_{xz} \left[ \frac{1}{E_{Hz}} + \frac{1}{E_{Kz}} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_{\varepsilon z}}} \right) \right] + 4J_z(t) \right) h^2
\end{aligned}
\tag{5.131}$$

#### 5.1.4. Pravo savijanje tanke ploče jednako podeljenim opterećenjem

Ako su ploče od EI materijala tanke približna teorija savijanja ploče poprečnim opterećenjem (Timošenko, 1956., Timošenko, Vojnovski-Kriger, 1962.) koristi sledeće pretpostavke:

- neutralna ravan pri savijanju je srednja ravan ploče
- preseči, koji su u nedeformisanom stanju upravni na srednju ravan ploče, ostaju ravni i nakon savijanja ploče.

Ako se posmatraju mali ugibi u odnosu na debljinu ploče, normalni naponi  $\sigma_z$  u presecima paralelnim sa srednjom ravni ploče zanemaruju se u odnosu na napone  $\sigma_x, \sigma_y$  u presecima upravnim na srednju ravan. Smičući naponi  $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$  takođe se zanemaruju. Najveći ugib i najveći naponi javljaju se u sredini ploče.

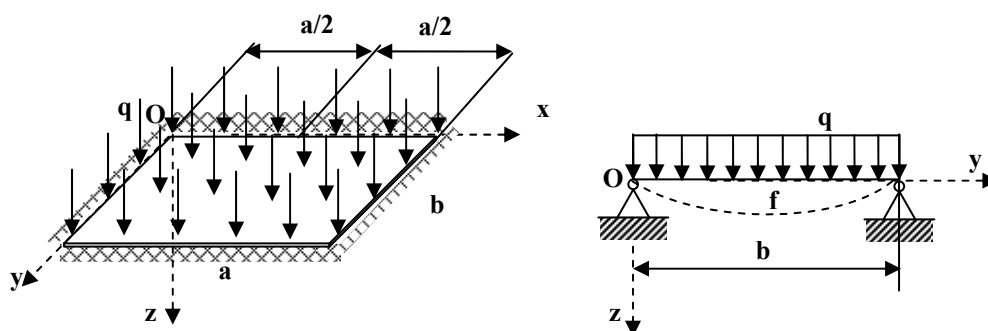
Proračun ovakvih ploča svodi se na izračunavanje ugiba iz jedne linearne PDJ. Rešenje jednačine deformisane površi zavisi od uslova oslanjanja i vrste opterećenja. Nakon određivanja pomeranja određuju se i naponi u različitim tačkama ploče.

Netačnost teorije tankih ploča izražena je u zonama ploče u blizini konture i oko otvora, ako njegov prečnik nije velik u poređenju s debljinom ploče, kao i u okolini napadne tačke koncentrisane sile, zbog većeg uticaja smičućih napona i nehomogenog polja normalnih napona.



Komplikovaniji slučaj je kada se posmatra ploča čija se debljina ne može zanemariti. Tada je potrebno uzeti u obzir sve komponente napona, a umesto jedne PDJ za elastičnu površ, treba rešavati sistem nelinearnih PDJ.

Ovde se posmatra tanka pravougaona ploča, konstantne debljine  $h$  (Sl. 5-13), čija je dužina veća od širine. Od opterećenja deluje jednako podeljeno opterećenje  $-q$  [ $N/m^2$ ] u pravcu normale na srednju površ ploče. Ravan  $xy$  je srednja površ nedeformisane ploče. Sve stranice ploče su slobodno oslonjene. Koordinatni početak  $O$  postavljen je u gornje levo teme ploče.



Sl. 5-13 Ploča, jednoliko opterećena celom površinom, slobodno poduprtih stranica

Smatra se da je u sredini ploče elastična površina bliska cilindričnoj i da ugib može da se odredi po analogiji s prostom gredom dužine  $b$ , jednoliko opterećene duž celog raspona.

PDJ iz koje se određuje pomeranje bilo koje tačke pravougaone ploče je opšte poznata:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad (5.132)$$

odnosno

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = q \quad (5.133)$$

gde je  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ .

Navijeovo rešenje za pomeranje  $w$  u jednačini (5.132) traži se za proizvoljno opterećenje  $q=f(x,y)$  koje deluje po celoj površini ploče. Funkcija proizvoljnog opterećenja može da se razvije u Furijeov dvostruki trigonometrijski red. Zbog toga se pretpostavlja da i traženo rešenje ima oblik dvostrukog Furijeovog reda po sinusima:

$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$ , gde su  $A_{mn}$  nepoznati koeficijenti reda. Oni se određuju iz uslova oslanjanja:

$$w(x=0) = w(x=a) = w(y=0) = w(y=b) = 0 \quad (5.134)$$

Nakon određivanja traženih koeficijenta, funkcija pomeranja za jednako podeljeno opterećenje koje deluje na celoj površini ploče ima sledeći oblik:

$$w = \frac{16qb^4}{\pi^6 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left( \frac{m^2}{c^2} + n^2 \right)^2} \quad (5.135)$$

U ovom slučaju elastična linija je simetrična u odnosu na ose  $x=a/2$  i  $y=b/2$ . Zbog toga se uzimaju samo neparni članovi reda. Najveći ugib u sredini ploče, gde je  $x=a/2, y=b/2$ , jednak je:

$$f = \frac{16qb^4}{\pi^6 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}-1}}{mn \left( \frac{m^2}{c^2} + n^2 \right)^2} = \alpha_1 \frac{qb^4}{D} = \alpha \frac{qb^4}{Eh^3} \quad (5.136)$$

gde su  $\alpha$  i  $\alpha_1$  bezdimenzionalni koeficijenti čije veličine zavise od odnosa dužine i širine ploče i od broja članova reda koji se računaju.

Ako se uzme samo prvi član Furijeovog reda (5.136), ugib u središtu kvadratne ploče ( $c=1$ ) jednak je:

$$f = \frac{4qb^4}{\pi^6 D} = 0,00416 \frac{qb^4}{D} = 0,0454 \frac{qb^4}{Eh^3} \quad (5.137)$$

Tabela 5-2 prikazuje raspodelu bezdimenzionalnih koeficijenata  $\alpha$  i  $\alpha_1$  računatih samo sa prvim članom reda u zavisnosti od odnosa dužine i širine ploče.

**Tabela 5-2 Bezdimezionalni koeficijenti  $\alpha$  i  $\alpha_1$  za ploču od EI materijala, slobodno oslonjenu na svim stranicama, opterećenu jednako podeljenim opterećenjem**

b/a	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2	3	4	5	$\infty$
$\alpha_1$	0,00416	0,00579	0,00729	0,00860	0,00971	0,01065	0,01348	0,01474	0,01538	0,01631
$\alpha$	0,0454	0,0633	0,0796	0,0939	0,1060	0,1162	0,1472	0,1609	0,1639	0,178

Kada se znaju pomeranja i ugibi, mogu da se odrede momenti savijanja, kao i normalni naponi u bilo kojoj tački ploče.

Ako je opterećenje u obliku koncentrisane sile  $F$  koja deluje u nekoj tački ploče

$B(\xi, \eta)$  dobije se pomeranje:

$$w = \frac{4F}{\pi^4 abD} \sum_{m=1,3,5..}^{\infty} \sum_{n=1,3,5..}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (5.138)$$

Kada sila  $F$  deluje u sredini ploče:  $\xi = x = \frac{a}{2}$ ;  $\eta = y = \frac{b}{2}$  najveći ugib je u istoj tački i jednak je:

$$f = \frac{4F}{\pi^4 abD} \sum_{m=1,3,5..}^{\infty} \sum_{n=1,3,5..}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \quad (5.139)$$

Ako se uzmu prva četiri člana Furijeovog reda u izrazu (5.139), ugib u sredini kvadratne ploče ( $a=b$ ) jednak je:

$$f = 0,01121 \frac{Fa^2}{D} \quad (5.140)$$

Prema izrazima (5.135) i (5.138) funkcije pomeranja uvek konvergiraju, ali vrlo sporo. Za tačniji proračun potrebno je uzeti veliki broj članova Furijeovog reda. Zato Navijeovo rešenje ima mali značaj za praksu.

Približno rešenje za ugib sredine ovako oslonjene ploče, gde pretpostavljeno rešenje za pomeranje ima oblik polinoma  $\left(x^2 - \frac{a^2}{4}\right)^2 \left(x^2 - \frac{b^2}{4}\right)^2 x^m y^n$ ,  $m = 0,1,2,..$ ;  $n = 0,1,2,..$ , koji zadovoljava granične uslove na ivicama ploče, glasi:

$$f = 0,003418 \frac{qb^4}{D \left(\frac{1}{c^4} + \frac{0,5714}{c^2} + 1\right)} \quad (5.141)$$

Za kvadratnu ploču  $c=1$ , pa se ugib sredine ploče računa po izrazu:

$$f = 0,003418 \frac{qb^4}{D(1+0,5714+1)} = 0,001329 \frac{qb^4}{D} = 0,0145 \frac{qb^4}{Eh^3} \quad (5.142)$$

Drugo približno rešenje za ugib sredine ove ploče, gde pretpostavljeno rešenje za pomeranje sadrži funkcije  $\left(1 + \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \left(1 + \cos \frac{2\pi y}{b}\right)$ , koje zadovoljava granične uslove na mestu oslanjanja, je:

$$f = 0,003422 \frac{qb^4}{D \left( \frac{1}{c^4} + \frac{0,6667}{c^2} + 1 \right)} \quad (5.143)$$

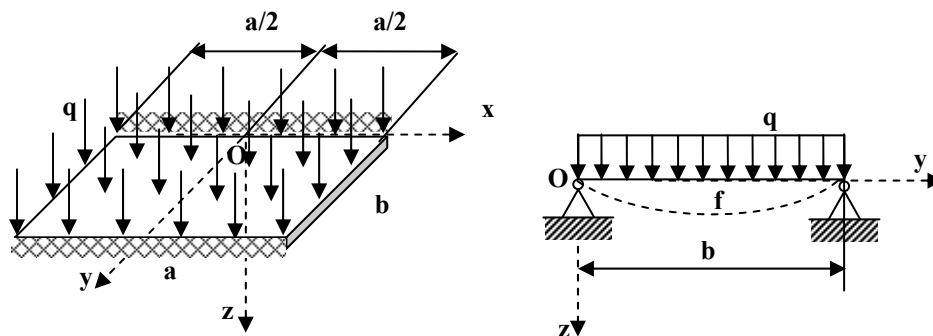
Za kvadratnu ploču ugib sredine ploče računa se po izrazu:

$$f = 0,003422 \frac{qb^4}{D(1+0,6667+1)} = 0,001283 \frac{qb^4}{D} = 0,0140 \frac{qb^4}{Eh^3} \quad (5.144)$$

Oba rešenja u odnosu na Navijeovo rešenje računato s jednim članom reda pokazuju velika odstupanja.

Leviyevo rešenje jednačine (5.132) važi za ploču koja je slobodno oslonjena duž dve duže stranice  $y=0$  i  $y=b$ . Koordinatni sistem postavlja se tako da je koordinatni početak  $O$  na sredini stranice dužine  $a$ , a ose  $x$  i  $y$  su paralelne stranicama ploče.

Za određivanje ugiba posmatra se traka ploče širine  $b$ , paralelna  $y$  osi, kao greda iste dužine, opterećena jednoliko duž celog raspona (Sl. 5-14).



Sl. 5-14 Ploča, jednoliko opterećena celom površinom, s dve slobodno poduprte i dve slobodne stranice

Rešenje se u ovom slučaju dobije razvijanjem pretpostavljene funkcije pomeranja u jednostruki Furijeov red po sinusima:  $w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{n\pi y}{b}$  gde su  $B_{mn}$  koeficijenti zavisni samo od  $x$ . Oni se određuju iz uslova oslanjanja:

$$w(y=0) = w(y=b) = w''(y=0) = w''(y=b) = 0 \quad (5.145)$$

Za pravougaonu ploču opterećenu jednako podeljenim opterećenjem po celoj površini ploče pomeranje je jednako:

$$w = \frac{4qb^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{m^5} \left( 1 - \frac{\alpha_m \tanh \alpha_m + 2}{2 \cosh \alpha_m} \cosh \frac{2\alpha_m x}{a} + \frac{\alpha_m}{2 \cosh \alpha_m} \frac{2x}{a} \sinh \frac{2\alpha_m x}{a} \right) \sin \frac{m\pi y}{b} \quad (5.146)$$

gde je:  $\alpha_m = \frac{m\pi c}{2}$

Ugib i napadni momenti u sredini ploče, gde je  $x=0, y=b/2$ , sračunati samo s prvim članom Levijevog rešenja, su:

$$f = \frac{4qb^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^5} \left( 1 - \frac{\alpha_m \tanh \alpha_m + 2}{2 \cosh \alpha_m} \right) = \alpha_1 \frac{qb^4}{D} = \alpha \frac{qb^4}{Eh^3}$$

$$M_x = \beta_1 qb^2 \quad (5.147)$$

$$M_y = \beta_2 qb^2$$

Bezdimenzionalne koeficijente  $\alpha, \alpha_1, \beta_1, \beta_2$  u izrazima (5.147) prikazuje Tabela 5-3.

Vrednosti u tabeli računate su sa Poasonovim koeficijentom  $\nu = 0,3$ .

Ako se uzme samo prvi član Furijeovog reda u izrazu (5.146), ugib u sredini kvadratne ploče ( $a=b$ ) jednak je:

$$f = 0,00406 \frac{qb^4}{D} \quad (5.148)$$

**Tabela 5-3 Koeficijenti  $\alpha, \beta_1, \beta_2$  ploču od EI materijala čije su dve stranice slobodno oslonjene, savijenu jednako podeljenim opterećenjem**

b/a	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2	3	4	5	$\infty$
$\alpha_1$	0,00406	0,00564	0,00705	0,0083	0,00931	0,01013	0,01223	0,01282	0,01297	0,01302
$\alpha$	0,0443	0,0616	0,0770	0,0906	0,1017	0,1106	0,1335	0,1400	0,1416	0,1422
$\beta_1$	0,0479	0,0626	0,0753	0,0862	0,0948	0,1017	0,1189	0,1235	0,1246	0,1250
$\beta_2$	0,0479	0,0501	0,0506	0,0493	0,0479	0,0464	0,0406	0,0384	0,0375	0,0375

Iz tabele se vidi da su, za odnos  $b/a > 4$ , koeficijenti  $\alpha, \beta_1, \beta_2$  približno jednaki onima, za  $b/a = \infty$ . To znači, da se kod dugačkih ploča ( $b > 3a$ ) može smatrati da važe obrasci, koji važe za savijanje ploče u cilindričnu površinu. Kod kraćih ploča ugibi kao i momenti savijanja i naponi su manji, odnosno, treba uzimati u obzir podatke koje prikazuje Tabela 5-3.

Približno rešenje za ugib sredine ovako oslonjene ploče, gde pretpostavljeno rešenje za pomeranje ima oblik polinoma  $\frac{q}{24D} (x^4 - 2ax^3 + a^3x) \psi(y)$ , koji zadovoljava granične uslove na ivicama ploče, kod ploča od EI materijala daje velike greške pa ovde neće biti razmatrano.

Da bi se dobili ugibi i napadni momenti za posmatranu ploču od EO materijala

posmatra se ploča na Sl. 5-13. Diferencijalna jednačine deformisane površi ove ploče (Ambartsumyan 1970., Lekhnitskii 1984b.) je:

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q \quad (5.149)$$

Granični uslovi koje treba da zadovolji rešenje ove jednačine su sledeći:

$$w(x = a/2) = w(x = -a/2) = w(y = 0) = w(y = b) = 0 \quad (5.150)$$

Ovakvi uslovi oslanjanja ploče znače da na mestima oslanjanja ploče nema momenata savijanja:

$$\begin{aligned} M_x(x = a/2) = M_x(x = -a/2) = 0 \\ M_y(y = 0) = M_y(y = b) = 0 \end{aligned} \quad (5.151)$$

Navijeovo rešenje za ovakvu ploču je:

$$w = \frac{16qb^4}{\pi^6} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left( \left( \frac{m}{c} \right)^4 D_1 + 2n^2 \left( \frac{m}{c} \right)^2 H + n^4 D_2 \right)} \quad (5.152)$$

gde je:

$$D_1 = \frac{E_x h^3}{12(1 - \nu_{xy} \nu_{yx})}, \quad D_2 = \frac{E_y h^3}{12(1 - \nu_{xy} \nu_{yx})}, \quad D_3 = D_1 \nu_{xy} + 2D_{xy}, \quad D_{xy} = \frac{G_{xy} h^3}{12} \quad (5.153)$$

Upoređivanjem izraza (5.152) i (5.135) koji važi za izotropnu ploču, vidi se da je ugib središta ortotropne ploče krutosti  $D_1$  i  $D_2$  i strana  $a$  i  $b$ , jednak ugibu središta

izotropne ploče krutosti  $D$  i strana  $a_0 = a \sqrt[4]{\frac{D}{D_1}}$  i  $b_0 = b \sqrt[4]{\frac{D}{D_2}}$ .

Ako na posmatranu ploču od EO materijala deluje koncentrisana sila  $F$  u tački  $B(\xi, \eta)$  ugib je:

$$w = \frac{4Fb^2}{c\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi \xi}{a} \sin \frac{n\pi \eta}{b}}{\left( \frac{m}{c} \right)^4 D_1 + 2n^2 \left( \frac{m}{c} \right)^2 H + n^4 D_2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (5.154)$$

Kada sila  $F$  deluje u sredini ploče gde je:  $\xi = x = \frac{a}{2}$ ;  $\eta = y = \frac{b}{2}$  najveći ugib je u istoj

tački i jednak je:

$$f = \frac{4Fb^2}{c\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{m}{c}\right)^4 D_1 + 2n^2 \left(\frac{m}{c}\right)^2 H + n^4 D_2} \quad (5.155)$$

Za Levijevo rešenje posmatra se ploča od EO materijala na Sl. 5-14. Pri tome se polazi od iste diferencijalne jednačine deformisane površi ploče (5.149) kao kod Navijeovog rešenja.

Granični uslovi koje treba da zadovolji rešenje ove jednačine su izrazi (5.145). Oni su zadovoljeni ako se rešenje jednačine (5.149) uzme u obliku:

$$w = w_0(y) + w_1(x, y) \quad (5.156)$$

gde je:  $w_0$ -ugib jednoliko opterećene trake paralelne x osi, slobodno poduprte na krajevima.

Funkcija  $w_0(y)$  za posmatranu ploču i dato opterećenje bira se u obliku:

$$w_0 = \frac{q}{24D_2} (y^4 - 2by^3 + b^3y) \quad (5.157)$$

Funkcija  $w_1(x,y)$  zadovoljava homogenu parcijalnu diferencijalnu jednačinu:

$$D_1 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^4} = 0 \quad (5.158)$$

sa odgovarajućim graničnim uslovima.

Da bi na krajevima ploče, gde je  $x = \pm \frac{a}{2}$ , bili zadovoljeni granični uslovi, za funkciju  $w_1(x,y)$  pretpostavlja se da je:

$$w_1 = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (5.159)$$

Funkcija  $X_n(x)$  odredi se, kada se jednačina (5.159) zameni u jednačinu (5.158). Tako se dobije sledeća jednačina, koja je linearna parcijalna diferencijalna, četvrtog reda.:

$$D_1 \frac{\partial^4 X_n}{\partial x^4} - 2D_3 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \frac{\partial^2 X_n}{\partial x^2} + D_2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 X_n = 0 \quad (5.160)$$

Oblik funkcije  $X_n(x)$  zavisi od korena karakteristične jednačine:

$$D_1 s^4 - 2D_3 s^2 + D_2 = 0 \quad (5.161)$$

Koreni karakteristične jednačine su:

$$s_{1,2,3,4} = \pm \frac{n\pi}{b} \sqrt{\frac{D_3}{D_1} \pm \sqrt{\left(\frac{D_3}{D_1}\right)^2 - \frac{D_2}{D_1}}} \quad (5.162)$$

Tu se razlikuju tri slučaja:

- *I slučaj.* Koreni jednačine (5.161) su realni i različiti:  $\pm s_1; \pm s_2$ ,  $s_1 > 0; s_2 > 0$ ,  $D_3^2 > D_1 D_2$
- *II slučaj.* Koreni jednačine (5.161) su realni i jednaki:  $\pm s$ ;  $s > 0$ ,  $D_3^2 = D_1 D_2$
- *III slučaj.* Koreni jednačine (5.161) su kompleksni:  $s \pm ti$ ;  $-s \pm ti$ ,  $s > 0$ ,  $t > 0$ ,  $D_3^2 < D_1 D_2$

Izrazi za funkciju  $X_n(x)$ , u sva tri slučaja, sadrže četiri integracione konstante, koje se određuju iz uslova oslanjanja na stranicama  $x = \pm \frac{a}{2}$ .

Nakon određivanja integracionih konstanti za *I slučaj* ( $D_3^2 > D_1 D_2$ ), dobije se sledeći oblik za funkciju pomeranja  $w$ :

$$w = \frac{q}{24D_2}(y^4 - 2by^3 + b^3y) + \frac{4qb^4}{D_2\pi^5} \frac{1}{s_1^2 - s_2^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \left( \frac{s_2^2 \operatorname{ch} \frac{n\pi s_1 x}{b} - s_1^2 \operatorname{ch} \frac{n\pi s_2 x}{b}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi s_1 c}{2} - \operatorname{ch} \frac{n\pi s_2 c}{2}} \right) \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (5.163)$$

gde je:  $c$  - odnos dužina i širine ploče,  $c = a / b$ .

Na osnovu funkcije  $w$  mogu da se izračunaju i momenti savijanja:

$$M_x = -\frac{qv_{xy}}{2}(y^2 - by) + \frac{4qb^2}{\pi^3} \frac{D_1}{D_2} \frac{1}{s_1^2 - s_2^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left( s_2^2 (v_{yx}^2 - s_1^2) \frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi s_1 x}{b}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi s_1 c}{2}} - s_1^2 (v_{yx}^2 - s_2^2) \frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi s_2 x}{b}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi s_2 c}{2}} \right) \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (5.164)$$



$$M_y = -\frac{q}{2}(y^2 - by) + \frac{4qb^2}{\pi^3} \frac{1}{s_1^2 - s_2^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left( s_2^2 (1 - v_{xy} s_1^2) \frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi s_1 x}{b}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi s_1 c}{2}} - \right. \\ \left. - s_1^2 (1 - v_{xy} s_2^2) \frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi s_2 x}{b}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi s_2 c}{2}} \right) \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (5.165)$$

Ugib i momenti savijanja na sredini ploče gde je  $x=0$ ,  $y=b/2$  su:

$$f = \frac{5qb^4}{384E_x h^3} \left( 1 + 1,004 \frac{1}{s_1^2 - s_2^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \left( \frac{s_2^2}{\operatorname{ch} \frac{n\pi s_1 c}{2}} - \frac{s_1^2}{\operatorname{ch} \frac{n\pi s_2 c}{2}} \right) \sin \frac{n\pi}{2} \right) \quad (5.166)$$

$$M_{x\max} = \frac{qb^2}{8} (v_{xy} + 1,032 \frac{D_1}{v_{xy} D_2} \frac{1}{s_1^2 - s_2^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left( s_2^2 (v_{yx} - s_1^2) \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{n\pi s_1 c}{2}} - \right. \\ \left. - s_1^2 (v_{yx} - s_2^2) \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{n\pi s_2 c}{2}} \right) \sin \frac{n\pi}{2} ) \quad (5.167)$$

$$M_{y\max} = \frac{qb^2}{8} (1 + 1,032 \frac{1}{s_1^2 - s_2^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left( s_2^2 (1 - v_{xy} s_1^2) \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{n\pi s_1 c}{2}} - \right. \\ \left. - s_1^2 (1 - v_{xy} s_2^2) \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{n\pi s_2 c}{2}} \right) \sin \frac{n\pi}{2} ) \quad (5.168)$$

Izrazi za ugib i momente savijanja u sredini ploče (5.166), (5.167) i (5.168), za I slučaj ( $D_3^2 > D_1 D_2$ ), napisani u skraćenom obliku su:

$$f = \alpha \frac{5qb^4}{384E_x h^3} \\ M_{x\max} = \beta_1 \frac{qb^2}{8} \\ M_{y\max} = \beta_2 \frac{qb^2}{8} \quad (5.169)$$

gde su:  $\alpha, \beta_1, \beta_2$  - bezdimenzionalni korekcionni koeficijenti, koji se računaju po odgovarajućim izrazima u zagradama, u jednačinama (5.166), (5.167) i (5.168).

Za slučaj da je  $a \gg b$ ,  $\alpha = 1, \beta_1 = v_{xy}, \beta_2 = 1$ , pa se posmatra savijanje u cilindričnu razvojnu površ.

Koeficijenti  $\alpha, \beta_1, \beta_2$  za III slučaj ( $D_3^2 < D_1 D_2$ ) su:

$$\alpha_1 = 1 - \frac{1,004}{st} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^5 \delta_n} \left( 2st \operatorname{ch} \frac{n\pi sc}{2} \cos \frac{n\pi tc}{2} + (s^2 - t^2) \operatorname{sh} \frac{n\pi sc}{2} \sin \frac{n\pi tc}{2} \right) \quad (5.170)$$

$$\beta_1 = v_{xy} + \frac{1,032}{st} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^3 \delta_n} \left( (s^2 + t^2 - v_{yx} s^2 + v_{yx} t^2) \operatorname{sh} \frac{n\pi sc}{2} \sin \frac{n\pi tc}{2} - 2v_{yx} st \operatorname{ch} \frac{n\pi sc}{2} \cos \frac{n\pi tc}{2} \right) \quad (5.171)$$

$$\beta_2 = 1 + \frac{1,032}{st} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^3 \delta_n} \left( (v_{xy} s^2 + v_{xy} t^2 - s^2 + t^2) \operatorname{sh} \frac{n\pi sc}{2} \sin \frac{n\pi tc}{2} - 2st \operatorname{ch} \frac{n\pi sc}{2} \cos \frac{n\pi tc}{2} \right) \quad (5.172)$$

$$\delta_n = \operatorname{ch} n\pi sc + \cos n\pi tc \quad (5.173)$$

Ugib i momenti savijanja na sredini ploče za II slučaj ( $D_3^2 = D_1 D_2$ ) dobiju se uz koeficijente koji se računaju po jednačinama (5.170), (5.171), (5.172), (5.173) u kojima je  $t=0$ .

Jednačine za sračunavanje ugiba i momenta savijanja u sredini ploče za II i III slučaj su:

$$f = \alpha_1 \frac{qb^4}{D_2} = \alpha \frac{qb^4}{E_y h^3}$$

$$M_x = \left( \beta_1 + \beta_2 v_{yx} \sqrt{\frac{D_1}{D_2}} \right) \frac{qa^2}{\kappa} \quad (5.174)$$

$$M_y = \left( \beta_2 + \beta_1 v_{xy} \sqrt{\frac{D_2}{D_1}} \right) qb^2$$

gde je:  $\kappa = \frac{a}{b} \sqrt[4]{\frac{D_2}{D_1}}$  a važi za  $a \geq b$ .

Koeficijente  $\alpha_1, \beta_1, \beta_2$  u zavisnosti od  $\kappa$ , za II slučaj gde je  $D_3^2 = D_1 D_2$ , koje je izračunao Huber, prikazuje Tabela 5-4.

**Tabela 5-4 Huberovi koeficijenti  $\alpha_1, \beta_1, \beta_2$  kada je  $D_3^2 = D_1 D_2$**

$\kappa$	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2	3	4	5	$\infty$
$\alpha_1$	0,00407	0,00565	0,00709	0,00831	0,00932	0,01013	0,01223	0,01282	0,01297	0,01302
$\alpha$	0,0472	0,0655	0,0822	0,0964	0,1081	0,1175	0,1419	0,1487	0,1505	0,1511
$\beta_1$	0,0368	0,0344	0,0303	0,0257	0,0214	0,0174	0,0055	0,0015	0,0004	0
$\beta_2$	0,0k368	0,0524	0,0665	0,0785	0,0884	0,0964	0,1172	0,1230	0,1245	0,1250

Približno rešenje za ugib sredine ove ploče od EO materijala, gde pretpostavljeno rešenje za pomeranje ima oblik polinoma  $\frac{q}{24D}(x^4 - 2ax^3 + a^3x)\psi(y)$ , koji zadovoljava granične uslove na ivicama ploče, ima sledeći oblik:

$$w = \frac{q}{24D}(x^4 - 2ax^3 + a^3x) \left[ 1 + \frac{k_2^2 \text{ch } k_1 y}{(k_1^2 - k_2^2) \text{ch } \frac{k_1 b}{2}} - \frac{k_1^2 \text{ch } k_2 y}{(k_1^2 - k_2^2) \text{ch } \frac{k_2 b}{2}} \right] \quad (5.175)$$

gde je

$$k_{1,2} = \frac{1}{a} \sqrt{9,871 \frac{D_3}{D_2} \pm \sqrt{97,436 \left( \frac{D_3}{D_2} \right)^2 - 97,548}} \quad (5.176)$$

Ugib sredine ploče je:

$$f = \frac{5}{384} \frac{qa^4}{D_1} \left[ 1 + \frac{1}{(k_1^2 - k_2^2)} \left( \frac{k_2^2}{\text{ch } \frac{k_1 b}{2}} - \frac{k_1^2}{\text{ch } \frac{k_2 b}{2}} \right) \right] \quad (5.177)$$

Nakon određivanja ugiba  $f$  i momenata savijanja  $M_x, M_y$  u sredini ploče mogu se odrediti i komponente napona u istoj tački, na sledeći način:

$$\sigma_{x \max} = \frac{6M_{x \max}}{h^3}; \quad \sigma_{y \max} = \frac{6M_{y \max}}{h^3}; \quad (5.178)$$

$$\sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$$

gde su:  $M_{x \max}, M_{y \max}$  – maksimalni momenti savijanja u pravcu  $x$  i  $y$  ose (5.167) i (5.168).

## 6. PRIKAZ I INTERPRETACIJA REZULTATA

Za štap, od određene vrste drveta, treba uraditi proračun parametara Zenerovog modela, korišćenjem raspoloživih eksperimentalnih podataka za viskozno tečenje u radijalnom pravcu. Dalje, s tim parametrima, treba odrediti promenu modula viskoznog tečenja tokom vremena, promene dilatacija tokom vremena pri različitim nivoima napona, kao i koeficijent viskoznog tečenja. Na osnovu dobijenih podataka, za radijalni pravac, i poznatih odnosa elastičnih konstanti za drvo u različitim pravcima, određuju se materijalni parametri za tangencijalni i podužni pravac i pišu se odgovarajuće matrice, deformacija i viskoelastičnosti. Pri tome se koriste izrazi izvedeni u poglavlju 5.1 napisani za anatomske pravce  $\mathbf{r}, \mathbf{t}, \mathbf{a}$ , gde su  $\mathbf{r}$  i  $\mathbf{t}$  pravci upravni na pravac pružanja vlakana koji odgovaraju osama  $\mathbf{x}$  i  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{a}$  je pravac paralelan pružanju vlakana koji odgovara osi  $\mathbf{z}$ .

Za predstavnika tvrdog drveta uzeto je drvo bukve, kao vrste za koju su se mogli pronaći odgovarajući eksperimentalni podaci. Podaci za izračunavanje navedenih veličina  $E_r(\sigma_0, t)$  uzeti su iz dijagrama (Уголев, 1971.) prikazanog na Sl. 3-36a, koji važi za **uzorak od bukovine** vlažnosti 10% , ispitivan na temperaturi od  $60^0$  , napregnut **na zatezanje, u radijalnom anatomskom pravcu, konstantnim naponom** od  $\sim 2$  MPa:

$$\begin{aligned} E_r(2, 0) &= E_{Hr} \sim 666 \text{MPa}, \\ E_r(2, \infty) &= E_{\sigma r} \sim 500 \text{MPa} \\ E_r(2, 10) &= E_{t,r} \sim 571 \text{MPa} \end{aligned} \quad (6.1)$$

Za bukovinu se koriste i podaci dobijeni standardnim ispitivanjima (standardna ispitivanja rade se na sobnim temperaturama) koji se odnose na trenutne vrednosti modula elastičnosti i Poasonovih koeficijenata. Za bukovinu vlažnosti 11%, vrednosti modula elastičnosti u tri anatomska pravca (Ашкенази, 1978.) su:

$$E_r = 2285 \text{MPa}; \quad E_t = 1160 \text{MPa}; \quad E_a = 14000 \text{MPa} \quad (6.2)$$

a vrednosti modula smicanja:

$$G_{rt} = 467 \text{MPa}; \quad G_{at} = 952 \text{MPa}; \quad G_{ar} = 1972 \text{MPa} \quad (6.3)$$

dok su vrednosti Poasonovih koeficijenata:

$$\begin{aligned}
 v_{tr} &= 0,75; & v_{rt} &= 0,36; \\
 v_{at} &= 0,044; & v_{ta} &= 0,51; \\
 v_{ra} &= 0,45; & v_{ar} &= 0,073
 \end{aligned}
 \tag{6.4}$$

Odnosi između navedenih elastičnih parametara za bukovinu odgovaraju podacima koje prikazuje Tabela 6-1.

**Tabela 6-1 Uticaj anatomskog pravca na elastična svojstva nekih vrsta drveta-po standardnim ispitivanjima (Aškenazi, 1978.)**

Vrsta drveta	Odnosi modula elastičnosti			Odnosi modula smicanja		
	$E_a/E_r$	$E_a/E_t$	$E_r/E_t$	$G_{ra}/G_{ta}$	$G_{ra}/G_{rt}$	$G_{ta}/G_{rt}$
Hrast	2,60	5,91	2,22	1,61	3,19	1,98
Bukva	<b>6,13</b>	<b>12,06</b>	<b>1,97</b>	<b>2,07</b>	<b>4,22</b>	<b>2,04</b>
Klen	6,58	11,46	1,74	1,02	4,03	3,94
Breza	14,79	26,48	1,79	1,05	5,70	5,43
Jasen	10,47	19,67	1,88	1,32	4,63	3,51
Srednje za lišćare	7,89	15,30	1,96	1,49	4,03	3,03
Jela	13,83	26,53	1,92	1,25	6,33	5,07
Duglazija	12,60	18,15	1,44	1,34	17,28	12,90
Bor	14,76	28,52	1,93	1,71	17,61	10,30
Smrča	23,10	40,56	1,75	1,55	18,59	11,99
Smrča kanadska	20,62	26,41	1,28	1,36	24,30	17,79
Srednje za četinare	15,67	25,73	1,67	1,34	18,15	13,95

Koristiće se i podaci koje prikazuje Tabela 6-2 dobijeni u ispitivanjima s konstantnom brzinom nanošenja opterećenja, na temperaturama od 60°C.

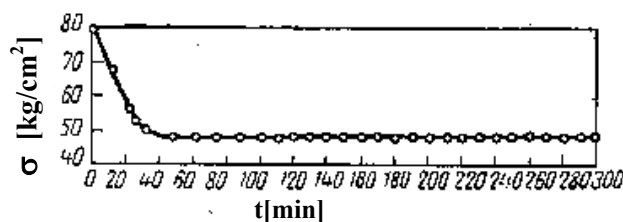
**Tabela 6-2 Uticaj anatomskog pravca na materijalne konstante-podaci dobijeni pri ispitivanju s konstantnom brzinom nanošenja opterećenja (Уголев, 1971.)**

Vrsta drveta (t=60°)	$E_H 10^3$ [Kg/cm <sup>2</sup> ]		$\frac{E_{Hr}}{E_{Ht}}$	$E_\infty 10^3$ [Kg/cm <sup>2</sup> ]		$\frac{E_{\infty r}}{E_{\infty t}}$	$\tau$ [min]		$\frac{\tau_r}{\tau_t}$	$E^{st} 10^3$ [Kg/cm <sup>2</sup> ]		$E_r^{st} / E_t^{st}$
	rad	tan		rad	tan		rad	tan		rad	tan	
	Breza	2,3	0,9	2,5	1,0	0,4	2,5	40	28	1,4	9,9*	5,9*
										6,0**	4,2**	1,4**
Bukva (W=14%)	11,3	4,5	2,5	6,0	2,6	2,3	106	90	1,2	15,8*	7,9*	2,0*
Hrast (W=10%)	10,3	7,0	1,5	5,1	3,6	1,4	149	116	1,3	11,0**	8,3**	1,3**
Liščari (W=17,5%)	6,5	3,3	2,0	3,9	1,7	2,3	116	58	2,0	-	-	-

\*\* po Černecevu; \* po Leontevu

Što se tiče relaksacije napona koristiće se podaci koje pokazuje Sl. 6-1. Sa ove slike mogu se za **uzorak od bukovine** vlažnosti 10%, ispitivan na temperaturi od  $60^{\circ}$ , **pri konstantnoj radijalnoj dilataciji** od 0,0362 pročitati sledeći podaci za  $E_r(\varepsilon_0, t)$ :

$$\begin{aligned} E_r(0,0362;0) &= E_{Hr} = 221\text{MPa} \\ E_r(0,0362;300) &= E_{\infty r} = 132\text{MPa} \\ E_r(0,0362;25) &= E_{t,r} = 138\text{MPa} \end{aligned} \quad (6.5)$$



Sl. 6-1 Rezultati eksperimenta relaksacije napona pri konstantnoj dilataciji od 0,0362, u radijalnom pravcu, za uzorak bukovine, vlažnosti 10%, ispitivan na temperaturi od  $60^{\circ}$ , (Уголев, 1971.)

Ovi podaci dobijeni su kao količnici napona, u početnom trenutku, i u trenutku 25 i 300 min, i konstantne dilatacije 0,0362.

### 6.1. Aksijalno napregnut štap od bukovine

Proračun aksijalno napregnutog štapa, od VEO materijala, radi se uz pretpostavku, da se, pravac delovanja konstantnog napona kod viskoznog tečenja, odnosno, pravac konstantne deformacije pri relaksaciji napona, poklapa s jednim od anatomskih pravaca. Sledeća pretpostavka koja je uzeta da važi kod VEO materijala je Bettijev stav o uzajamnosti radova. On za linearno EI telo glasi: ako na takvo telo deluju dva različita sistema sila, tada je rad prvog sistema sila, na pomeranjima usled delovanja drugog sistema sila, jednak radu drugog sistema sila, na pomeranjima usled delovanja prvog sistema sila.

Ako se pri aksijalnom naprezanju glavni naponi poklapaju sa anatomskim pravcima, u tom slučaju, kod drveta nema klizanja. Međutim, poznato je, da se u EO materijalu, u opštem slučaju, pravci glavnih dilatacija ne poklapaju s pravcima glavnih napona, odnosno, u praksi se često raspolaže izmerenim ili sračunatim ulaznim podacima, koji ne odgovaraju pravcima ortotropije.

Za slučaj aksijalnog naprezanja, gde se glavni naponi ne poklapaju sa anatomskim pravcima, kod drveta kao EO materijala, pojavljuje se klizanje. Dakle, u

tom slučaju, matrica deformacija za viskozno tečenje, osim dilatacija, sadrži i klizanja. Za slučaj relaksacije napona, kada se pravci glavnih dilatacija ne poklapaju s anatomskim pravcima, matrica napona, osim normalnih napona, sadrži i smičuće napone. Za matricu deformacija pri konstantnom naponu, odnosno matricu napona pri konstantnoj deformaciji, koriste se članovi proširene matrice viskoelastičnosti, odnosno proširene matrice krutosti. Oni su dobijeni korišćenjem odgovarajuće matrice transformacija, čiji izgled zavisi od uglova rotacije, između pravaca delovanja napona, odnosno, pravaca glavnih deformacija i pravaca anatomskih osa. Tako se dobijaju nove veze između napona i deformacija, koje su veoma složene, jer zavise od 3 (promenljiva) ugla i 9 parametara viskoelastičnosti (Marjanov M., Mirić Milosavljević M., Mihailović V., 1999a). Računanje članova matrice deformacija tako postaje znatno komplikovanije.

Inače, matrice transformacija, pri pojedinačnoj rotaciji oko ose x ili y ili z su:

$$\begin{aligned}
 T_x(\Phi) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Phi & \sin \Phi \\ 0 & -\sin \Phi & \cos \Phi \end{bmatrix} \\
 T_y(\Theta) &= \begin{bmatrix} \cos \Theta & 0 & -\sin \Theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \Theta & 0 & \cos \Theta \end{bmatrix} \\
 T_z(\Psi) &= \begin{bmatrix} \cos \Psi & \sin \Psi & 0 \\ -\sin \Psi & \cos \Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

gde su:  $\Phi, \Theta, \Psi$  - Ojlerovi uglovi rotacije pravca delovanja napona u odnosu na anatomski pravac. Ako je ortogonalna transformacija složena od simultanih rotacija za uglove  $\Phi, \Theta, \Psi$  oko osa x,y,z matrica transformacija postaje:

$$T = T_x(\Phi) \cdot T_y(\Theta) \cdot T_z(\Psi) \tag{6.7}$$

odnosno

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \tag{6.8}$$

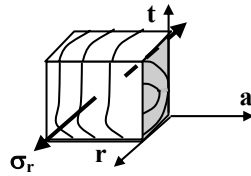
gde je

$$\begin{aligned}
T_{11} &= \cos \Theta \cos \Psi \\
T_{12} &= \cos \Theta \sin \Psi \\
T_{13} &= -\sin \Theta \\
T_{21} &= \sin \Phi \sin \Theta \cos \Psi - \cos \Phi \sin \Psi \\
T_{22} &= \sin \Phi \sin \Theta \sin \Psi + \cos \Phi \cos \Psi \\
T_{23} &= \sin \Phi \cos \Theta \\
T_{31} &= \cos \Phi \sin \Theta \cos \Psi + \sin \Phi \sin \Psi \\
T_{32} &= \cos \Phi \sin \Theta \sin \Psi - \sin \Phi \cos \Psi \\
T_{33} &= \cos \Phi \cos \Theta
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Izrazi za matrice transformacija, (6.6) i (6.9), formulisani su za konstantne uglove rotacije  $\Phi, \Theta, \Psi$ . Napisani su samo da bi se prikazala složenost mogućih problema u slučaju kada se pravci glavnih napona, odnosno glavnih dilatacija, pri viskoznom tečenju, odnosno, pri relaksaciji napona, ne poklapaju s anatomskim pravcima.

### 6.1.1. Viskozno tečenje štapa od bukovine

Posmatra se, u radijalnom pravcu aksijalno napregnut štap od bukovine. Radijalni napon zatezanja je  $\sigma_r = 2\text{MPa}$ . Napregnuti element štapa prikazuje Sl. 6-2.



Sl. 6-2 U radijalnom pravcu, aksijalno napregnut element štapa od bukovine

Prvo treba da se, po već izvedenom izrazu, odrede parametri Zenerovog modela, za modul viskoznog tečenja, u radijalnom pravcu:

$$D_r(t) = \frac{1}{E_{t,r}} = \frac{1}{E_{Hr}} + \frac{1}{E_{Kr}} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_\varepsilon}} \right) \tag{6.10}$$

i njegove granične vrednosti:

$$D_r(0) = \frac{1}{E_{Hr}} \tag{6.11}$$

$$D_r(\infty) = \frac{1}{E_{\infty r}} = \frac{1}{E_{Hr}} + \frac{1}{E_{Kr}} \tag{6.12}$$



U ovim izrazima je:  $E_{Hr}$  - početni modul elastičnosti,  $E_{\sigma r}$  - ustaljeni modul elastičnosti,  $E_{t,r}$  - trenutni modul elastičnosti,  $\tau_{\varepsilon}$  - vreme viskoznog tečenja, sve u radijalnom pravcu. Iz jednačine (6.12) odredi se parametar modela  $E_{Kr}$ , ako se zna početni i ustaljeni modul elastičnosti. Zatim se, iz jednačine (6.10), nalazi vreme viskoznog tečenja, pomoću izraza:

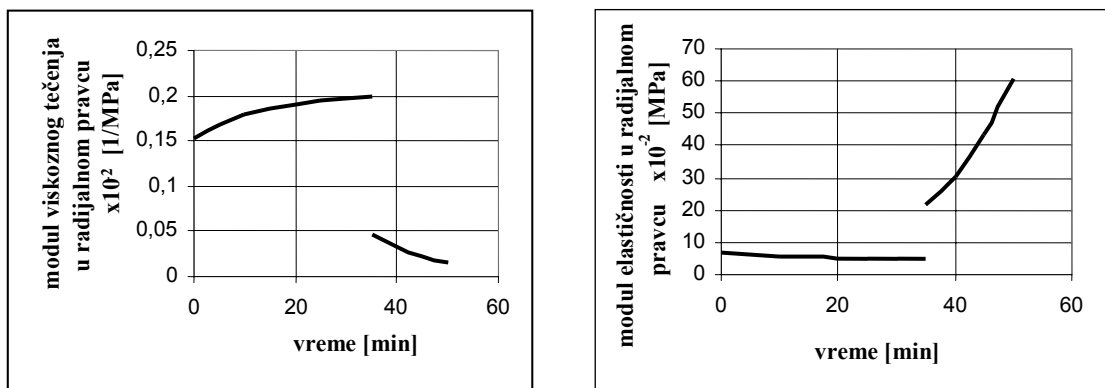
$$\tau_{\varepsilon r} = -\frac{t}{\ln\left(1 - E_{Kr}\left(\frac{1}{E_{t,r}} - \frac{1}{E_{Hr}}\right)\right)} \quad (6.13)$$

Na osnovi podataka (6.1) korišćenjem izraza (6.12) dobija se da je  $E_{Kr}=2006\text{MPa}$ . Da bi se izračunalo vreme viskoznog tečenja, prema izrazu (6.13), potrebno je, u odabranom vremenskom trenutku, sa istog dijagrama, pročitati vrednost trenutnog modula, na primer,  $E_{t,r}(10\text{min})\sim 571\text{MPa}$ . Za vreme viskoznog tečenja dobija se:  $\tau_{\varepsilon r}=14,5\text{min}$ . Vreme viskoznog tečenja može se grafički odrediti, iz navedenog dijagrama, tako, što se povuče početna tangenta, na krivu dilatacija, do preseka, sa apscisom ustaljene dilatacije. Ordinata presečne tačke definiše vreme viskoznog tečenja. Na osnovu određenih podataka za  $E_{Hr}$ ,  $E_{Kr}$  i  $\tau_{\varepsilon r}$  i izraza (6.10) piše se izraz za **modul viskoznog tečenja u radijalnom pravcu, u periodu delovanja konstantnog napona zatezanja od 2MPa, istog pravca**:

$$D_r(t < 35) = \frac{1}{666} + \frac{1}{2006}\left(1 - e^{-\frac{t}{14,5}}\right) = 0,00150 + 0,00049\left(1 - e^{-\frac{t}{14,5}}\right) \left[\frac{1}{\text{MPa}}\right]$$

Zatim se, na osnovu istih podataka, kao i ranije izvedenog izraza za Zenerov model, napiše jednačina, za **modul viskoznog tečenja u radijalnom pravcu, u periodu posle rasterećenja**:

$$D_r^-(t > 35) = \frac{1}{2006}\left(1 - e^{-\frac{35}{14,5}}\right)e^{-\frac{t-35}{14,5}} = 0,00045e^{-\frac{t-35}{14,5}} \left[\frac{1}{\text{MPa}}\right]$$



Sl. 6-3 Promena modula viskoznog tečenja i modula elastičnosti, u radijalnom pravcu, tokom vremena, za posmatrani štap od bukovine

Dijagram koji prikazuje promenu modula viskoznog tečenja i modula elastičnosti tokom vremena, pri konstantnom naponu zatezanja od 2MPa u radijalnom pravcu, kao i posle rasterećenja, prikazuje Sl. 6-3.

Dobijeni podaci za vreme viskoznog tečenja, pokazuju da se vrlo brzo nakon početka eksperimenta (posle nekoliko desetina minuta), unutar strukture drveta, odigrava fazna tranzicija II reda. Dalje ponašanje materijala tokom vremena, može se predvideti, odnosno, proračunati, po Zenerovom modelu.

**Veličina dilatacije u radijalnom pravcu**, štapa od bukovine, aksijalno napregnutog na zatezanje u istom pravcu, **može se izračunati u bilo kom vremenskom trenutku**: na primer nakon 20, 35 minuta, kao i zaostala dilatacija nakon 50 minuta, ako se rasterećenje desilo u 35-om minutu. Dilatacija uzorka nakon 20 ili 35 minuta, pri konstantnom naponu, računa se na sledeći način:

$$\varepsilon_r(2,20) = D_r(20) \cdot 2 = 0,00374$$

$$\varepsilon_r(2,35) = D_r(2,35) \cdot 2 \approx 0,004$$

jer je

$$\varepsilon_r(\sigma_0, t) = D_r(t) \sigma_0 \quad (6.14)$$

Za slučaj rasterećenja u 35-om minutu, zaostala dilatacija nakon 50 minuta, iznosi:

$$\varepsilon_r^-(2,50) = D_r^-(50) \cdot 2 = 0,000322$$

jer je

$$\varepsilon_r^-(2, t) = D_r^-(t) \cdot 2 \quad (6.15)$$

Sve veličine računata su s parametrima Zenerovog modela, od kojih su neki

određeni eksperimentalno ( $E_{Hr}$  i  $E_{\sigma r}$ ), a neki su određeni posredno, na osnovu podataka, pročitanih iz dijagrama, prema rešenjima diferencijalnih jednačina, koje važe za Zenerov model ( $E_{Kr}$  i  $\tau_{\sigma r}$ ).

*Variranjem veličine konstantnog napona, dobijaju se podaci za familiju krivih, koja će opisivati promenu dilatacije u radijalnom pravcu, tokom vremena, za različite nivoe konstantnih napona, istog pravca:  $\varepsilon_r(\sigma_0, t)$ .*

Ispitaće se uticaji napona od 0,2; 0,5; 1; 2; 3; 4; 6 i 8 MPa na posmatrani uzorak bukovine. Napon od 8 MPa, izabran kao gornja granica, odgovara veličini 75 % maksimalne čvrstoće na zatezanje u radijalnom pravcu, koja prema standardnim ispitivanjima, za bukovinu vlažnosti 10% , iznosi 13,3 MPa ( 12,5MPa pri vlažnosti 12%). Pri reološkim ispitivanjima dobija se čvrstoća na zatezanje, za oko 10-20% manja, od one koja se dobija standardnim ispitivanjima. Znači, u ovom slučaju, za bukovinu vlažnosti 10% , maksimalna reološka čvrstoća na zatezanje, u radijalnom pravcu, jednaka je 10,6MPa. U odnosu na tu veličinu, napon od 8MPa, iznosi 75% od te vrednosti, što je u preporučenim granicama. Da bi se dobila familija krivih, koja opisuju promenu dilatacije u radijalnom pravcu, tokom vremena, pri delovanju konstantnih napona od 0,2; 0,5; 1; 2; 3; 4; 6 i 8 MPa istog pravca, potrebno je izračunati odgovarajuće, vremenski zavisne dilatacije, sve do trenutka rasterećenja. One se računaju korišćenjem jednačine (6.14) i iznose:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_r(0,2;t) &= 0,2D_r(t) = 0,000397 - 0,000099e^{-\frac{t}{14,5}} \\
 \varepsilon_r(0,5;t) &= 0,000999 - 0,000249e^{-\frac{t}{14,5}} \\
 \varepsilon_r(1;t) &= 0,001998 - 0,000498e^{-\frac{t}{14,5}} \\
 \varepsilon_r(2;t) &= 0,004000 - 0,000997e^{-\frac{t}{14,5}} \\
 \varepsilon_r(3;t) &= 0,005979 - 0,00149e^{-\frac{t}{14,5}} \\
 \varepsilon_r(4;t) &= 0,007985 - 0,00199e^{-\frac{t}{14,5}} \\
 \varepsilon_r(6;t) &= 0,01199 - 0,00299e^{-\frac{t}{14,5}} \\
 \varepsilon_r(8;t) &= 0,01600 - 0,00399e^{-\frac{t}{14,5}}
 \end{aligned} \tag{6.16}$$

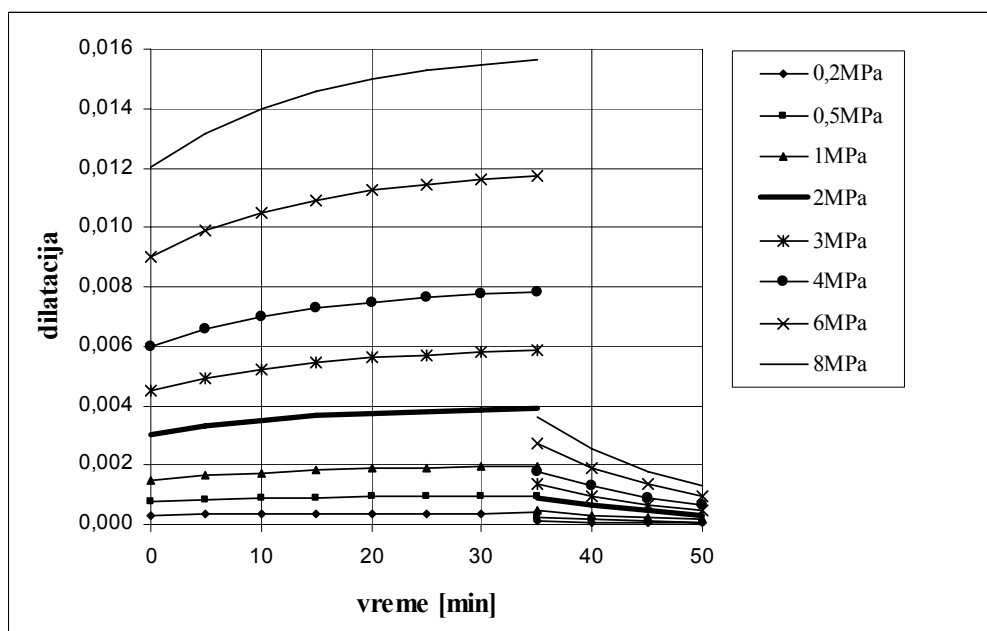
gde su:  $\varepsilon_r$  - dilatacije u radijalnom pravcu, pri delovanju napona zatezanja, istog pravca, veličine 0,2;0,5;1;2;3;4;6;8 MPa.

Krive dilatacija, u periodu nakon rasterećenja, prikazane su novim jednačinama:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^-(0,2;t) &= 0,2D_r^-(t) = 0,00009e^{\frac{t-35}{14,5}} \\ \varepsilon_r^-(0,5;t) &= 0,000225e^{\frac{t-35}{14,5}} \\ \varepsilon_r^-(1;t) &= 0,00045e^{\frac{t-35}{14,5}} \\ \varepsilon_r^-(2;t) &= 0,0009e^{\frac{t-35}{14,5}} \\ \varepsilon_r^-(3;t) &= 0,00135e^{\frac{t-35}{14,5}} \\ \varepsilon_r^-(4;t) &= 0,0018e^{\frac{t-35}{14,5}} \\ \varepsilon_r^-(6;t) &= 0,0027e^{\frac{t-35}{14,5}} \\ \varepsilon_r^-(8;t) &= 0,0036e^{\frac{t-35}{14,5}} \end{aligned} \quad (6.17)$$

gde su:  $\varepsilon_r^-$  - dilatacije u radijalnom pravcu, nakon rasterećenja od napona zatezanja, istog pravca, veličine 0,2;0,5;1;2;3;4;6;8 MPa.

Odgovarajući dijagram zavisnosti dilatacija, u radijalnom pravcu, od vremena, pri različitim nivoima konstantnih napona, istog pravca, prikazuje Sl. 6-4.



Sl. 6-4 Dijagram dilatacija u radijalnom pravcu-vreme za posmatrani viskoelastični štap od bukvine, pri konstantnom naponu zatezanja u radijalnom pravcu

Serijski prikazane punom crnom linijom, nacrtane su prema izmerenim podacima za napon zatezanja od 2MPa, a sve ostale su dobijene ekstrapolacijom, prema zakonu promene dilatacija, koji važi za Zenerov model.

Na dijagramu se vidi, da je kod svih krivih, u trenutku rasterećenja, prisutan pad dilatacije, koji odgovara elastičnom rasterećenju, kao i da svuda postoji zaostala dilatacija, koja je veća, kada je nivo napona veći.

Veličina elastičnog rasterećenja, posmatranog uzorka od bukovine, jednaka je razlici između  $\varepsilon_r(\sigma_0, 35)$  i  $\varepsilon_r^-(\sigma_0, 35)$ . Na primer nakon vremena od 35min  $\varepsilon_r(2, 35) = 0,0039$  i  $\varepsilon_r^-(2, 35) = 0,0009$ , a njihova razlika je 0,003 (vidi dijagram).

Dakle, Zenerov model, kao model s jednim karakterističnim vremenom-vremenom viskoznog tečenja, u trenutku rasterećenja, daje potpuno povratnu elastičnu dilataciju. Ovo je nedostatak modela, koji se može popraviti, rednim ili paralelnim vezivanjem više Zenerovih modela, s različitim vremenima viskoznog tečenja. U tome slučaju, dobijaju se složenije diferencijalne jednačine, pa shodno tome i složenija rešenja, što kod primene takvog modela pravi dodatne teškoće.

Ako se zna veličina modula viskoznog tečenja, u nekom trenutku vremena, pri nekom nivou napona, **može se odrediti veličina modula elastičnosti**, nakon tog vremena. Veličina odgovarajućeg modula elastičnosti, u radijalnom pravcu, posmatranog uzorka od bukovine, nakon vremena  $\tau_{er}$ , jednaka je:

$$E_{t,r}(\tau_{er}) = \frac{1}{D_r(\tau_{er})} = 550 \text{MPa}$$

Ovaj modul je naravno manji od početnog. Inače, po podacima iz literature modul elastičnosti u radijalnom pravcu, prema standardnim ispitivanjima, za bukovinu vlažnosti 11% je reda  $\sim 2300$  MPa.

Dalje se **može odrediti koeficijent viskoznog tečenja, u radijalnom pravcu,**

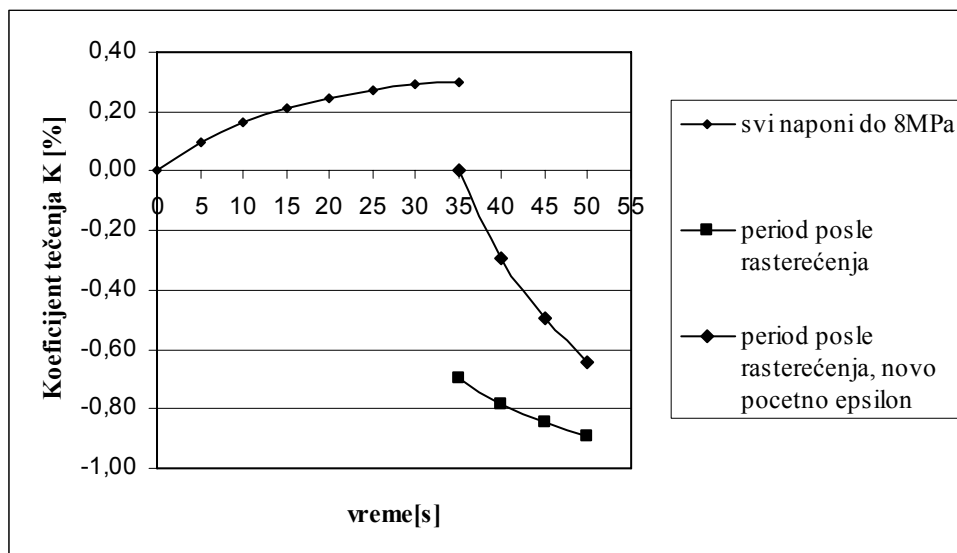
$$K_{vt,r}(t) = \frac{\varepsilon_r(\sigma_0, t) - \varepsilon_r(\sigma_0, 0)}{\varepsilon_r(\sigma_0, 0)}, \text{ koji se računa, preko dilatacija za određeni nivo}$$

**napona, u različitim vremenskim trenucima.** Koeficijent viskoznog tečenja ne zavisi od nivoa napona. Dijagram koeficijenta viskoznog tečenja prikazuje Sl. 6-5. Na slici je prikazana kriva koeficijenta viskoznog tečenja, koja važi, za sve konstantne napone ispod 75% granične čvrstoće na zatezanje. U periodu posle rasterećenja, koeficijent viskoznog tečenja može se računati na dva načina: prvi s početnom dilatacijom u

trenutku  $t=0\text{min}$ , i drugi, s početnom dilatacijom nakon rasterećenja, u trenutku  $t=35\text{min}$ . Ako se koristi početna dilatacija u trenutku  $t=0\text{min}$ , dobija se veličina, koja je uporediva s koeficijentom viskoznog tečenja u prvoj deonici. Iznenađuje činjenica, da su kod oba koeficijenta viskoznog tečenja, nakon rasterećenja, da su njegove apsolutne vrednosti, veće, nego na delu, gde opterećenje postoji. To znači, da su promene dilatacija, nakon rasterećenja, veće, nego u periodu opterećenja.

Da bi se za tačku posmatranog, aksijalno napregnutog štapa, od bukovine, dobila matrica viskoelastičnih deformacija pri konstantnom naponu zatezanja od 2 MPa u radijalnom pravcu, prvo treba odrediti materijalne parametre, u tangencijalnom i podužnom pravcu.

Pretpostaviće se da odnos između materijalnih parametara u različitim pravcima, tokom vremena, ostaje praktično nepromenjen.



Sl. 6-5 Dijagram koeficijent viskoznog tečenja u radijalnom pravcu –vreme za posmatrani viskoelastični štاپ od bukovine, pri bilo kojem konstantnom naponu zatezanja u radijalnom pravcu do 8 MPa, za period opterećenja i posle rasterećenja

Podaci koje pokazuje Tabela 6-1 koristiće se, dakle, za izračunavanje materijalnih karakteristika, u različitim pravcima.

Kod bukovine se, za radijalni pravac, uzima podatak da je  $E_r=1,97E_t$ , a za podužni:  $E_a=6,13E_r$ .

Odgovarajući **modul viskoznog tečenja, u tangencijalnom pravcu, u periodu delovanja konstantnog opterećenja**, istog pravca, je:

$$D_t(t < 35) = 1,97D_r(t < 35) = 0,00295 + 0,00098 \left( 1 - e^{-\frac{t}{14,5}} \right) \left[ \frac{1}{\text{MPa}} \right] \quad (6.18)$$

**a u periodu nakon potpunog rasterećenja**

$$D_t^-(t > 35) = 1,97D_r^-(t > 35) = 0,00088e^{-\frac{t-35}{14,5}} \left[ \frac{1}{\text{MPa}} \right] \quad (6.19)$$

Iz izraza (6.18) i (6.10) može se dobiti da je za tangencijalni pravac

$$E_{Ht} = \frac{1}{D_t(0)} = \frac{1}{0,00295} = 338\text{MPa}, \quad E_{Kt} = \frac{1}{0,00098} = 1020\text{MPa}.$$

Odnos modula viskoznog tečenja, u podužnom i radijalnom pravcu, jednak je:

$$D_a(t) = \frac{D_r(t)}{6,13}$$

**Modul viskoznog tečenja, u podužnom pravcu, u periodu delovanja konstantnog opterećenja, istog pravca, jednak je:**

$$D_a(t < 35) = 0,000244 + 0,000081 \left( 1 - e^{-\frac{t}{14,5}} \right) \left[ \frac{1}{\text{MPa}} \right] \quad (6.20)$$

**a u periodu posle rasterećenja:**

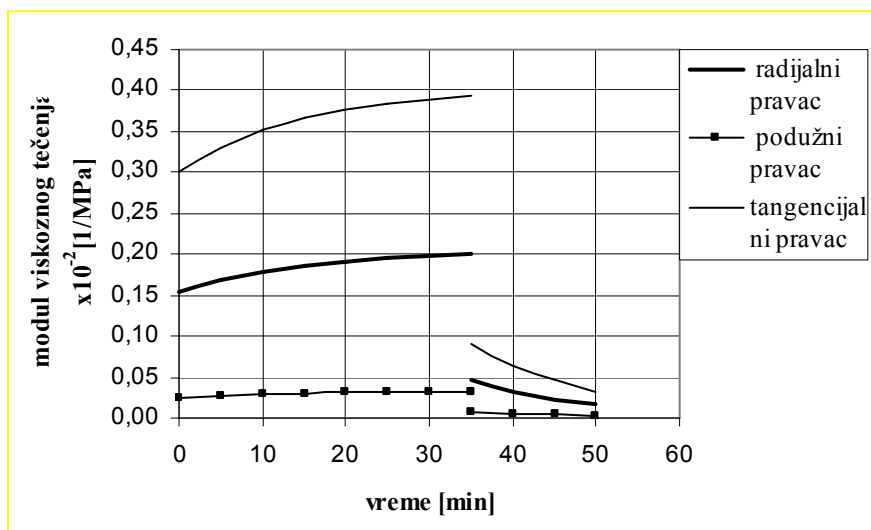
$$D_a^-(t > 35) = 0,000074e^{-\frac{t-35}{14,5}} \left[ \frac{1}{\text{MPa}} \right] \quad (6.21)$$

Iz izraza (6.20) i (6.10), može se dobiti, da je, za podužni pravac

$$E_{Ha} = \frac{1}{0,000244} = 4100\text{MPa}, \quad E_{Ka} = \frac{1}{0,000081} = 12345\text{MPa}.$$

Radi jednostavnijeg računa, pretpostavljeno je da je vreme viskoznog tečenja, u tangencijalnom i podužnom pravcu isto, kao i u radijalnom pravcu, iako se, u literaturi, mogu naći podaci, da je odnos vremena viskoznog tečenja, za radijalni i tangencijalni pravac, za bukovinu jednak 1,2 (Уголев, 1971.).

Sl. 6-6 daje uporedni prikaz modula viskoznog tečenja, u radijalnom, tangencijalnom i podužnom pravcu, pri jednakom aksijalnom naprezanju, u odgovarajućem anatomskom pravcu. Sa slike se vidi, da je, u podužnom pravcu, veoma malo izražena viskoelastičnost, dok se najveći uticaj viskoelastičnosti vidi u tangencijalnom pravcu. Zbog toga se može smatrati da su, u podužnom pravcu, elastična svojstva šta pa od bukovine izraženija, dok su u radijalnom i tangencijalnom, izraženija Zenerova viskoelastična svojstva.



Sl. 6-6 Uporedni prikaz modula viskoznog tečenja, u tri anatomiska pravca, posmatranog viskoelastičnog štapa od bukovine

Da bi se napisala matrica viskoelastičnih deformacija, za tačku posmatranog štapa od bukovine, prvo će se napisati matrice, elastičnosti i elastičnih deformacija, za podatke, dobijene u standardnim ispitivanjima.

**Matrica elastičnosti, za slučaj prostornog stanja napona u tački štapa od bukovine**, prema podacima (6.2), (6.3) i (6.4) ima sledeći oblik:

$$C_e(t) = \begin{pmatrix} 0,044 & -0,031 & -0,0031 & 0 & 0 & 0 \\ -0,033 & 0,086 & -0,0035 & 0 & 0 & 0 \\ -0,0031 & -0,0037 & 0,007 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,105 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,051 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,214 \end{pmatrix} \cdot 10^{-2} \left[ \frac{1}{\text{MPa}} \right] \quad (6.22)$$

Vizuelni prikaz članova matrice elastičnosti (6.22) daje Sl. 6-7.

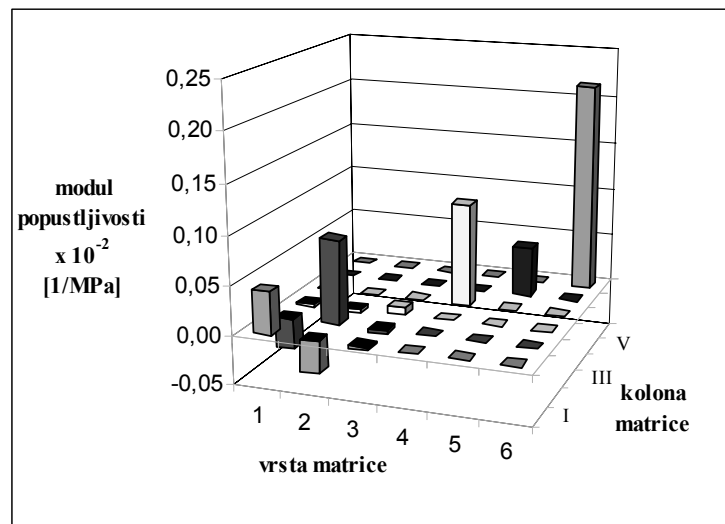
Iz matrice elastičnosti, (6.22), vidi se, da je uslov simetričnosti ispunjen, uz mala odstupanja vandijagonalnih članova, koja se mogu protumačiti, prisustvom greške, zbog zaokruživanja brojevanih veličina i nepreciznošću merenja.

**Matrica elastičnih deformacija, pri delovanju napona zatezanja od 2MPa, u radijalnom pravcu, na sobnoj temperaturi, glasi:**



$$\varepsilon_c(2, t) = \begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_t \\ \varepsilon_a \\ 2\varepsilon_{ta} \\ 2\varepsilon_{ar} \\ 2\varepsilon_{rt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{r,r} \\ \varepsilon_{t,r} \\ \varepsilon_{a,r} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,088 \\ -0,066 \\ -0,0062 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \% \quad (6.23)$$

gde su  $\varepsilon_{r,r}$  - dilatacija u radijalnom pravcu, pri delovanju napona u istom pravcu,  $\varepsilon_{t,r}$  - deformacija u tangencijalnom pravcu, pri delovanju napona u radijalnom pravcu,  $\varepsilon_{a,r}$  - deformacija u aksijalnom pravcu, pri delovanju napona u radijalnom pravcu,  $2\varepsilon_{ta}, 2\varepsilon_{ar}, 2\varepsilon_{rt}$  klizanja u odgovarajućim ravnima.



Sl. 6-7 Vizuelni prikaz članova matrice elastičnosti za uzorak od bukovine, vlažnosti 11%, ispitan na sobnoj temperaturi

Da bi se napisala, matrica viskoelastičnih deformacija, za tačku štapa od bukovine, vlažnosti 10%, u početnom trenutku, aksijalno napregnutog konstantnim naponom zatezanja od 2MPa, u radijalnom pravcu, pri 60<sup>0</sup>C, prvo će se odrediti početni moduli viskoznog tečenja pri zatezanju, i pri smicanju. Zatim će se izračunati, dilatacija u radijalnom pravcu, a za deformacije u tangencijalnom i podužnom pravcu, uzeće se isti konstantni Poasonovi koeficijenti, kao kod elastičnih deformacija.

U trenutku t=0min, **moduli viskoznog tečenja, pri zatezanju**, su:

$$D_r(0) = 0,00150 \frac{1}{\text{MPa}}$$

$$D_t(0) = 0,00295 \frac{1}{\text{MPa}}$$

$$D_a(0) = 0,000244 \frac{1}{\text{MPa}}$$

Tražena **matrica viskoelastičnosti, za slučaj prostornog naprezanja, štapa od bukovine** vlažnosti 10%, pri 60°C, u početnom trenutku, ima sledeći izgled:

$$C_{vt}(0) = \begin{bmatrix} 0,150 & -0,106 & -0,011 & 0 & 0 & 0 \\ -0,112 & 0,295 & -0,0125 & 0 & 0 & 0 \\ -0,011 & -0,0129 & 0,0244 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,47 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,24 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,72 \end{bmatrix} \cdot 10^{-2} \left[ \frac{1}{\text{MPa}} \right] \quad (6.24)$$

**Moduli viskoznog tečenja, pri smicanju** između anatomskih pravaca **i** i **j**,

računati su po izrazu:  $J_k(0) = \frac{1}{G_k(0)} = \frac{G_{ij}(0) + G_{ji}(0)}{2G_{ij}(0)G_{ji}(0)}$  ( $i, j, k = r, t, a$ ), po analogiji

sa izrazom za modul klizanja pri smicanju: gde je:  $G_{ij} = \frac{E_i}{2(1+\nu_{ij})}$  a  $G_{ji} = \frac{E_j}{2(1+\nu_{ji})}$

$G_k = \frac{2G_{ij}G_{ji}}{G_{ij} + G_{ji}}$  ( $i, j, k = r, t, a$ ) (Marjanov, Mirić Milosavljević, Mihailović, 2002.).

U matrici viskoelastičnosti, (6.24), vidi se da nije u potpunosti ispunjen uslov simetričnosti vandijagonalnih članova. Odstupanja između članova  $C_{vt12}$  i  $C_{vt21}$  su oko 5%, a između  $C_{vt23}$  i  $C_{vt32}$  su nešto manja, oko 3%. Razlog za to može biti greška pri zaokruživanju brojevanih vrednosti.

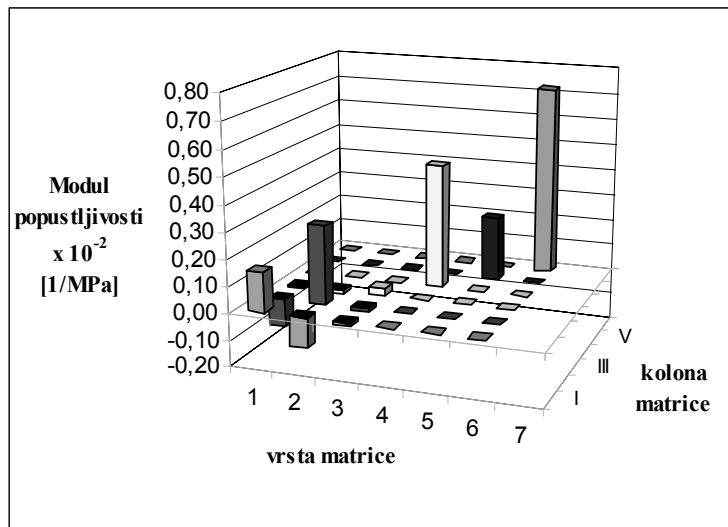
Vizuelni prikaz matrice viskoelastičnosti (6.24) daje Sl. 6-8.

Veličine viskoelastičnih deformacija, pri delovanju napona zatezanja od 2MPa, u radijalnom pravcu, u početnom trenutku, su:

$$\varepsilon_{r,r}(2,0) = 0,150 \cdot 2 = 0,3\%$$

$$\varepsilon_{t,r}(2,0) = -0,75 \cdot 0,3 = 0,11 \cdot 2 = -0,22\%$$

$$\varepsilon_{a,r}(2,0) = -0,073 \cdot 0,3 = 0,01 \cdot 2 = -0,02\%$$



Sl. 6-8 Vizuelni prikaz članova matrice viskoelastičnosti za štap od bukovine, vlažnosti 10%, ispitivan na 60°C, u početnom trenutku vremena

Sada može da se napiše, **matrica viskoelastičnih deformacija, za tačku štapa, od bukovine, vlažnosti 10%, linearno napregnutog konstantnim naponom zatezanja od 2MPa, u radijalnom pravcu, pri 60°C, u početnom trenutku:**

$$\varepsilon_{vt}(2,0) = \begin{bmatrix} \varepsilon_r(2,0) \\ \varepsilon_t(2,0) \\ \varepsilon_a(2,0) \\ 2\varepsilon_{ta} \\ 2\varepsilon_{ar} \\ 2\varepsilon_{rt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{r,r}(2,0) \\ \varepsilon_{t,r}(2,0) \\ \varepsilon_{a,r}(2,0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,30 \\ -0,22 \\ -0,02 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \% \quad (6.25)$$

Na isti način, mogu da se napišu moduli viskoznog tečenja, pri zatezanju i pri smicanju, dilatacije u radijalnom, tangencijalnom i podužnom pravcu, uz konstantne Poasonove koeficijente kao kod elastičnih deformacija, zatim matrice, viskoelastičnosti i deformacija, u bilo kom vremenskom trenutku. Prvi vremenski trenutak, u kom će se računati te veličine je  $t=15\text{min}$ , zatim  $t=35\text{min}$  i  $t=50\text{min}$ .

*Veličine članova matrice elastičnosti, za posmatrani štap od bukovine, i matrice viskoelastičnosti, za tačku štapa od bukovine vlažnosti 10%, pri 60°C, napregnute konstantnim naponom zatezanja od 2MPa, u radijalnom pravcu, u različitim vremenskim trenucima, prikazuje Tabela 6-3.*

Poređenjem članova matrice elastičnosti, izraz (6.22), i matrice viskoelastičnosti u početnom vremenskom trenutku, (6.24), vidi se razlika u vrednostima članova matrica. Razlike se javljaju, naravno, prvo zbog različitog porekla uzoraka (različita je

struktura i istorija deformisanja) a zatim i zbog uticaja temperature, na kojoj su rađeni eksperimenti. Pri ispitivanju viskoelastičnih svojstava temperatura je povišena ( $60^{\circ}\text{C}$ ), da bi eksperiment imao razumno kratko trajanje, a pri ispitivanju elastičnih svojstava eksperiment je rađen na sobnoj temperaturi, jer se beleže samo trenutne vrednosti napona i deformacija.

**Tabela 6-3 Članovi matrice elastičnosti, za štap od bukovine, vlažnosti 11%, napregnut konstantnim naponom zatezanja od 2MPa, u radijalnom pravcu, na sobnoj temperaturi i matrice viskoelastičnosti, za Zenerov štap od bukovine, vlažnosti 10%, pri  $60^{\circ}\text{C}$ , linearno napregnut konstantnim naponom zatezanja od 2MPa, u radijalnom pravcu, za različite vremenske trenutke (1/E koristi se za matricu  $C_e$  a D za matricu  $C_{vt}$ )**

		$C_{vt}$				
	Matrica	$C_e$	t=0min	t=15min	t=35min	t=50min
Modul [ $\times 10^{-2}$ 1/MPa]	$1/E_r$ ili $D_r$	0,044	0,15	0,168	0,2	0,016
	$-v_{tr} \cdot (1/E_r$ ili $D_r)$	-0,033	-0,112	-0,126	-0,142	-0,012
	$-v_{ar} \cdot (1/E_r$ ili $D_r)$	-0,0031	-0,011	-0,012	-0,0146	-0,0011
	$-v_{rt} \cdot (1/E_t$ ili $D_t)$	-0,031	-0,106	-0,118	-0,144	-0,012
	$1/E_t$ ili $D_t$	0,086	0,295	0,330	0,4	0,032
	$-v_{at} \cdot (1/E_t$ ili $D_t)$	-0,0037	-0,012	-0,014	-0,0176	-0,0014
	$-v_{ra} \cdot (1/E_a$ ili $D_a)$	-0,0031	-0,011	-0,012	-0,0135	-0,0011
	$-v_{ta} \cdot (1/E_a$ ili $D_a)$	-0,0035	-0,012	-0,014	-0,0153	-0,0013
	$1/E_a$ ili $D_a$	0,007	0,0244	0,0274	0,03	0,0026
	$J_r$	0,105	0,47	0,53	0,64	0,051
	$J_t$	0,051	0,24	0,27	0,32	0,025
	$J_a$	0,214	0,72	0,81	0,96	0,077

Kada se uporede, s jedne strane, članovi matrice viskoelastičnosti, nakon 15 i 35min od početka delovanja opterećenja, i s druge, članovi matrice viskoelastičnosti u početnom trenutku, vidi se, po članovima matrice, porast modula viskoznog tečenja, i pri zatezanju i pri smicanju, odnosno, pad modula elastičnosti i klizanja.

*Veličine članova matrice elastične deformacije, za štap od bukovine, vlažnosti 11%, na sobnoj temperaturi i matrice viskoelastične deformacije, za štap od bukovine, vlažnosti 10%, oba linearno napregnuta konstantnim naponom zatezanja od 2MPa, u radijalnom pravcu, pri  $60^{\circ}\text{C}$ , u različitim vremenskim trenucima, prikazuje Tabela 6-4.* Prema podacima koje daje Tabela 6-4, vidi se da je viskoelastična deformacija, u svim pravcima znatno veća, od odgovarajuće elastične. Takođe, može se primetiti da, i nakon 50 minuta, postoji zaostala deformacija, koja je manja od početne.

**Tabela 6-4 Članovi matrice elastičnih deformacija, za štap od elastične bukovine, vlažnosti 11%, na sobnoj temperaturi i matrice viskoelastičnih deformacija, za Zenerov štap od bukovine, vlažnosti 10%, pri 60°C, oba napregnuta konstantnim naponom zatezanja od 2MPa, u radijalnom pravcu, za različite vremenske trenutke**

	Matrica	$\epsilon_e(2,t)$	$\epsilon_{vt}(2,0)$	$\epsilon_{vt}(2,15)$	$\epsilon_{vt}(2,35)$	$\epsilon_{vt}(2,50)$
Deformacija [%]	$\epsilon_r$	0,088	0,30	0,366	0,4	0,032
	$\epsilon_t$	-0,066	-0,22	-0,252	-0,284	-0,024
	$\epsilon_a$	-0,006	-0,02	-0,024	-0,0292	-0,0022
	$2\epsilon_{ta}$	0	0	0	0	0
	$2\epsilon_{ar}$	0	0	0	0	0
	$2\epsilon_{rt}$	0	0	0	0	0

Ovde je, dakle, prikazan proračun štapa od bukovine, posmatranog kao Zenerov VEO materijal, vlažnosti 10%, pri 60°C, aksijalno napregnut konstantnim naponom zatezanja od 2MPa, u radijalnom pravcu. U proračunu je korišćena ista vremenska funkcija za Zenerov model, za sva tri atomska pravca, a odnos modula viskoznog tečenja, za različite pravce, isti je, kao kod standardnih ispitivanja.

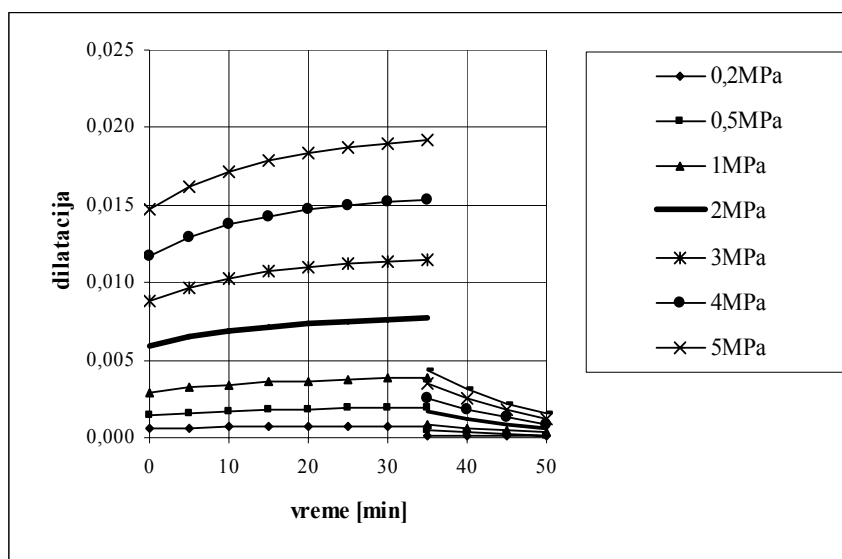
**Dilatacije u tangencijalnom pravcu**, koje nastaju zbog delovanja konstantnog napona zatezanja, istog pravca, računaju se pri naponima od 0,2; 0,5; 1; 2; 3; 4 i 5MPa, jer se, radi poređenja s dilatacijama, koje nastaju pri delovanju napona u radijalnom pravcu, uzimaju isti nivoi napona. Maksimalna čvrstoća na zatezanje u tangencijalnom pravcu, prema standardnim ispitivanjima za bukovinu, vlažnosti 10%, iznosi ~ 9MPa (8,5MPa pri vlažnosti 12%). Reološka maksimalna zatezna čvrstoća je za 20% manja a to je 7,2MPa. 70% od te vrednosti je 5MPa pa se ta vrednost uzima kao gornja granica za proračun.

Da bi se dobila familija krivih, koja opisuje promenu dilatacija, u tangencijalnom pravcu, tokom vremena, pri delovanju konstantnog napona zatezanja, istog pravca, od 0,2; 0,5; 1; 2; 3; 4 i 5 MPa, potrebno je prvo, izračunati odgovarajuće vremenski zavisne dilatacije, sve do trenutka rasterećenja. Za to se koristi izraz za modul viskoznog tečenja u tangencijalnom pravcu, (6.18).

*Odgovarajući dijagram zavisnosti dilatacija u tangencijalnom pravcu od vremena, pri različitim nivoima zatezanja, istog pravca, prikazuje Sl. 6-9. Na dijagramu se vidi da je, kod svih krivih, u trenutku rasterećenja, prisutan pad dilatacije, koji odgovara elastičnom rasterećenju, kao i da svuda postoji zaostala dilatacija, koja je veća kada je nivo napona veći.*

Veličina elastičnog rasterećenja, posmatranog uzorka od bukovine, jednaka je razlici između  $\varepsilon_r(\sigma_0, 35)$  i  $\varepsilon_r^-(\sigma_0, 35)$ . Na primer, nakon vremena od 35min  $\varepsilon_r(2, 35) = 0,0039$  i  $\varepsilon_r^-(2, 35) = 0,0009$ , a njihova razlika je 0,003 (vidi dijagram).

Dakle, Zenerov model, kao model s jednim karakterističnim vremenom-vremenom viskoznoeg tečenja, u trenutku rasterećenja, daje potpuno povratnu elastičnu dilataciju.



Sl. 6-9 Dijagram tangencijalne dilatacije -vreme, za posmatrani viskoelastični štapa od bukovine, pri konstantnom tangencijalnom naponu zatezanja

Ako se uporede Sl. 6-4 i Sl. 6-9 može se videti, da su dilatacije u tangencijalnom pravcu, za isti nivo napona zatezanja, pri opterećenju istog pravca, veće od odgovarajućih dilatacija u radijalnom pravcu.

*Veličine članova matrice elastične deformacije, za štapa od bukovine, vlažnosti 11%, na sobnoj temperaturi, i matrice viskoelastične deformacije, za štapa od bukovine, vlažnosti 10%, pri 60<sup>0</sup>C, oba linearno napregnuta konstantnim naponom zatezanja od 2MPa, u tangencijalnom pravcu, u različitim vremenskim trenucima, prikazuje*

**Dilatacije u podužnom pravcu, koje nastaju zbog delovanja konstantnog napona zatezanja istog pravca, računaju se pri naponima od 0,2; 0,5; 1; 2; 3; 4 i 5MPa, jer se, radi poređenja s dilatacijama, nastalim pri delovanju napona u radijalnom i tangencijalnom pravcu, uzimaju isti nivoi napona. Pošto je čak i minimalna čvrstoća na zatezanje u podužnom pravcu, prema standardnim ispitivanjima, znatno veća od čvrstoće na zatezanje u radijalnom i tangencijalnom pravcu, može se uzeti isti opseg**

posmatranih napona.

Tabela 6-5. Za računanje članova tih matrica koriste se članovi druge kolona, u matricama, elastičnosti (6.22) i viskoelastičnosti (6.24).

**Koeficijent tečenja, u tangencijalnom pravcu**, za viskoelastični štap od bukovine, linearno napregnut konstantnim tangencijalnim naponom zatezanja od 2MPa, **isti je, kao koeficijent tečenja, u radijalnom pravcu** (Sl. 6-5).

**Dilatacije u podužnom pravcu, koje nastaju zbog delovanja konstantnog napona zatezanja istog pravca**, računaju se pri naponima od 0,2; 0,5; 1; 2; 3; 4 i 5MPa, jer se, radi poređenja s dilatacijama, nastalim pri delovanju napona u radijalnom i tangencijalnom pravcu, uzimaju isti nivoi napona. Pošto je čak i minimalna čvrstoća na zatezanje u podužnom pravcu, prema standardnim ispitivanjima, znatno veća od čvrstoće na zatezanje u radijalnom i tangencijalnom pravcu, može se uzeti isti opseg posmatranih napona.

**Tabela 6-5 Članovi matrice elastičnih deformacija, za štap od bukovine, vlažnosti 11%, na sobnoj temperaturi i matrice viskoelastičnih deformacija za Zenerove štapove od bukovine, vlažnosti 10%, na 60°C, napregnute konstantnim tangencijalnim naponom zatezanja od 2MPa**

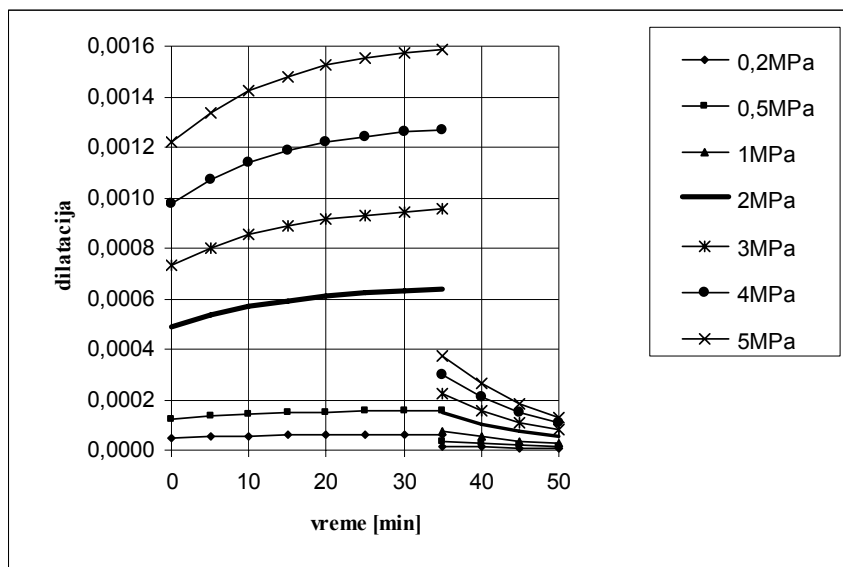
	Matrica	$\varepsilon_e(2,t)$	$\varepsilon_{vt}(2,0)$	$\varepsilon_{vt}(2,15)$	$\varepsilon_{vt}(2,35)$	$\varepsilon_{vt}(2,50)$
Deformacija [%]	$\varepsilon_r$	-0,062	-0,212	-0,236	-0,288	-0,024
	$\varepsilon_t$	0,172	0,590	0,660	0,800	0,064
	$\varepsilon_a$	-0,0074	-0,024	-0,028	-0,035	-0,0028
	$2\varepsilon_{ta}$	0	0	0	0	0
	$2\varepsilon_{ar}$	0	0	0	0	0
	$2\varepsilon_{rt}$	0	0	0	0	0

Da bi se dobila familija krivih, koja opisuje promenu podužnih dilatacija tokom vremena pri delovanju konstantnog napona od 0,2; 0,5; 1; 2; 3; 4 i 5 MPa u istom pravcu, potrebno je pre toga izračunati odgovarajuće vremenski zavisne dilatacije, sve do trenutka rasterećenja. *Odgovarajući dijagram zavisnosti dilatacija u podužnom pravcu od vremena pri različitim nivoima napona zatezanja prikazuje Sl. 6-10.*

Veličine članova *matrice elastične deformacije* za štap od bukovine, vlažnosti 11% na sobnoj temperaturi i *matrice viskoelastične deformacije* za štap od bukovine, vlažnosti 10%, pri 60°C, *oba linearno napregnuta konstantnim naponom* od 2MPa u *podužnom pravcu*, u različitim vremenskim trenucima prikazuje Tabela 6-6.

Za računanje članova tih matrica koriste se članovi treće kolone u matricama

elastičnosti, (6.22), i viskoelastičnosti, (6.24).



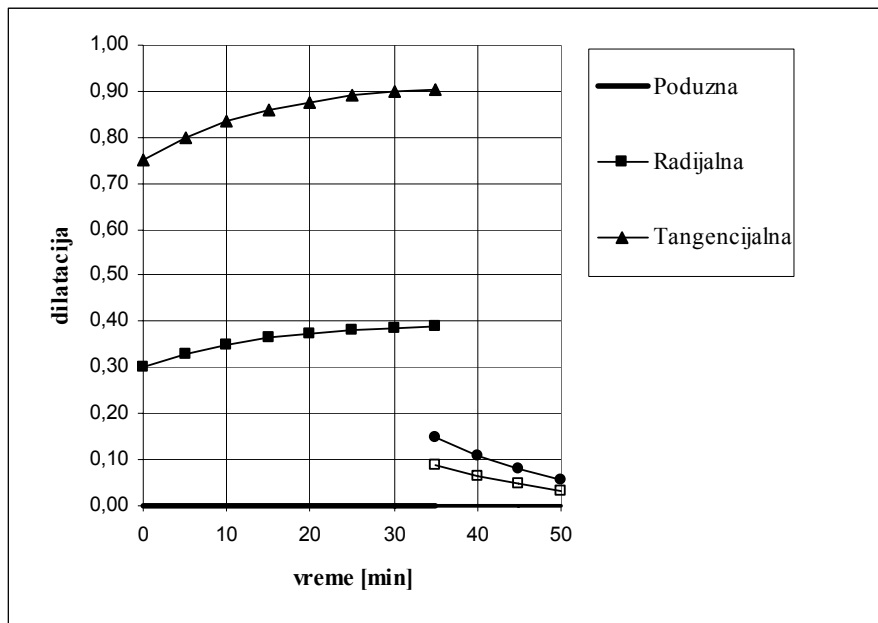
Sl. 6-10 Dijagram podužne dilatacije -vreme za viskoelastični štap od bukovine, pri konstantnom podužnom naponu zatezanja

Tabela 6-6 Članovi matrice elastičnih deformacija za štap od bukovine, vlažnosti 11%, na sobnoj temperaturi i matrice viskoelastičnih deformacija za Zenerov štap od bukovine, vlažnosti 10%, pri 60°C, oba linearno napregnuta konstantnim podužnim naponom od 2MPa, za različite vremenske trenutke

	Matrica	$\varepsilon_e(2,t)$	$\varepsilon_{vt}(2,0)$	$\varepsilon_{vt}(2,15)$	$\varepsilon_{vt}(2,35)$	$\varepsilon_{vt}(2,50)$
Deformacija [%]	$\varepsilon_r$	-0,0062	-0,022	-0,024	-0,027	-0,0022
	$\varepsilon_t$	-0,0070	-0,024	-0,028	-0,030	-0,0026
	$\varepsilon_a$	0,0014	0,0488	0,0548	0,06	0,0052
	$2\varepsilon_{ta}$	0	0	0	0	0
	$2\varepsilon_{ar}$	0	0	0	0	0
	$2\varepsilon_{rt}$	0	0	0	0	0

Odnos dilatacija, za isti nivo napona, pri opterećenju u podužnom, odnosno, radijalnom i tangencijalnom pravcu, prikazuje Sl. 6-11. Sa slike se vidi, da je, odnos dilatacija u podužnom, radijalnom i tangencijalnom pravcu, u početnom trenutku vremena, 0,00048:0,003:0,0059 (1:6,25:12,3). U poređenju s prosečnom veličinom deformacija, u podužnom, radijalnom i tangencijalnom pravcu, koje nastaju pri utezanju bukovine, 0,5:10:20 ili 1:20:40, vidi se da, uticaj viskoznog tečenja, treba uzimati, i u podužnom, i u radijalnom, i u tangencijalnom anatomskom pravcu. U podužnom pravcu ti uticaji su, čak, istog reda veličine.





Sl. 6-11 Odnos viskoelastičnih dilatacija aksijalno napregnutog štapa od bukovine, u podužnom, radijalnom i tangencijalnom pravcu, pri istom nivou napona

**Koeficijent tečenja u podužnom pravcu** za posmatrani viskoelastični štap od bukovine, ima iste vrednosti, kao koeficijent tečenja u radijalnom, odnosno, tangencijalnom pravcu (Sl. 6-5).

Iz dobijenih rezultata može se zaključiti da sve izračunate deformacije važe za štap od bukovine, proizvoljnog poprečnog preseka, koji se ponaša kao Zenerov VEO materijal.

### 6.1.2. Relaksacija napona u štapu od bukovine

Kod relaksacije napona, pri konstantnoj dilataciji u radijalnom pravcu, u Zenerovom štapu od bukovine, pri vlažnosti 10% i temperaturi 60<sup>0</sup>C, treba odrediti nove parametre Zenerovog modela uz korišćenje podataka (6.5) i već poznatih jednačina za modul relaksacije i njegove granične vrednosti:

$$E_r(t) = E_{Hr} - \frac{(E_{Hr})^2}{E_{Hr} + E_{Kr}} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_{\sigma r}}} \right)$$

$$E_r(0) = E_{Hr} \tag{6.26}$$

$$E_r(\infty) = \frac{E_{Hr} E_{Kr}}{E_{Hr} + E_{Kr}}$$

Ako su poznati početni i ustaljeni moduli elastičnosti, iz treće jednačine izraza (6.26) određuje se parametar modela  $E_K$ , ako se zna početni i ustaljeni modul

elastičnosti. Zatim se iz prve jednačine (6.26) uz poznavanje trenutnog modula određuje vreme viskoznog tečenja.

Na osnovu podataka (6.5) korišćenjem izraza (6.26) dobija se da je  $E_{Kr}=327\text{MPa}$ . Da bi se izračunalo vreme relaksacije napona, potrebno je, u odabranom vremenskom trenutku, sa istog dijagrama, pročitati vrednost trenutnog modula, na primer  $E_r(25)=138\text{MPa}$ . Dobijeno vreme relaksacije napona, u tom slučaju, je  $\tau_{\sigma r}=9,4\text{min}$ .

**Modul relaksacije napona, u radijalnom pravcu, u periodu konstantne dilatacije**, istog pravca, ima sledeći oblik:

$$E_r(t) = 221 - \frac{221^2}{221 + 327} \left( 1 - e^{-\frac{t}{9,4}} \right) = 310 + 89e^{-\frac{t}{9,4}} \quad [\text{MPa}] \quad (6.27)$$

Izraz za **modul relaksacije, u radijalnom pravcu, nakon opuštanja dilatacije**, ima sledeći oblik:

$$E_r^-(t) = \frac{(E_{Hr})^2}{E_{Kr} + E_{Hr}} \left( e^{-\frac{t_1}{\tau_{\sigma}}} - 1 \right) e^{-\frac{t-t_1}{\tau_{\sigma}}} = 89 \left( e^{-\frac{t_1}{9,4}} - 1 \right) e^{-\frac{t-t_1}{9,4}} \quad [\text{MPa}] \quad (6.28)$$

Ako se opuštanje dilatacije odigra u 35om minutu, modul relaksacije, u radijalnom pravcu, jednak je:

$$E_r^-(t) = -87e^{-\frac{t-35}{9,4}} \quad (6.29)$$

*Promenu modula relaksacije napona, u radijalnom pravcu, za uzorak Zenerovog modela bukovine, vlažnosti 10%, na temperaturi od  $60^{\circ}$ , pri konstantnoj dilataciji istog pravca od 0,0362 i posle potpunog opuštanja dilatacije nakon 35 minuta prikazuje Sl. 6-12.*

Promena modula relaksacije napona, u tangencijalnom pravcu, računa se, po analogiji s modulom viskoznog tečenja, korišćenjem odnosa trenutnih modula elastičnosti, za različite pravce, koje prikazuje Odnosi između navedenih elastičnih parametara za bukovinu odgovaraju podacima koje prikazuje Tabela 6-1.

Tabela 6-1.

Za bukovinu se uzima da je  $E_r=1,97E_t$ , a  $E_a=6,13E_r$ .

**Modul relaksacije u tangencijalnom pravcu, pri konstantnoj dilataciji, istog pravca**, jednak je:

$$E_t(t) = \frac{E_r(t)}{1,97} = 158 + 45e^{-\frac{t}{9,4}} \quad (6.30)$$

**Modul relaksacije u tangencijalnom pravcu, nakon opuštanja dilatacije,** ima sledeći oblik:

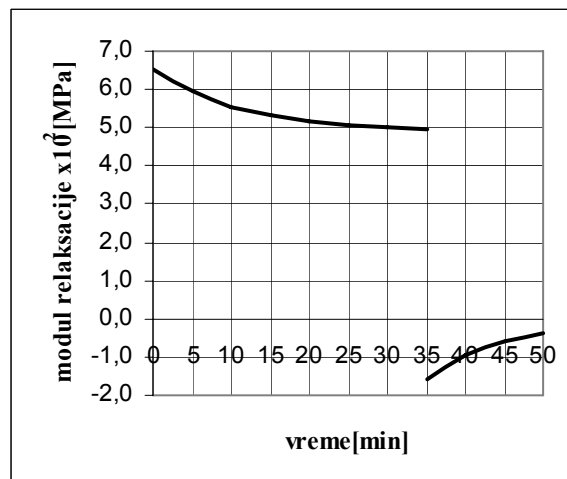
$$E_t^-(t) = -\frac{E_r^-(t)}{1,97} = -44 e^{-\frac{t-35}{9,4}} \quad (6.31)$$

**Modul relaksacije u podužnom pravcu, pri konstantnoj dilataciji, istog pravca,** jednak je:

$$E_a(t) = 6,13 \cdot E_r(t) = 1900 + 546e^{-\frac{t}{9,4}} \quad (6.32)$$

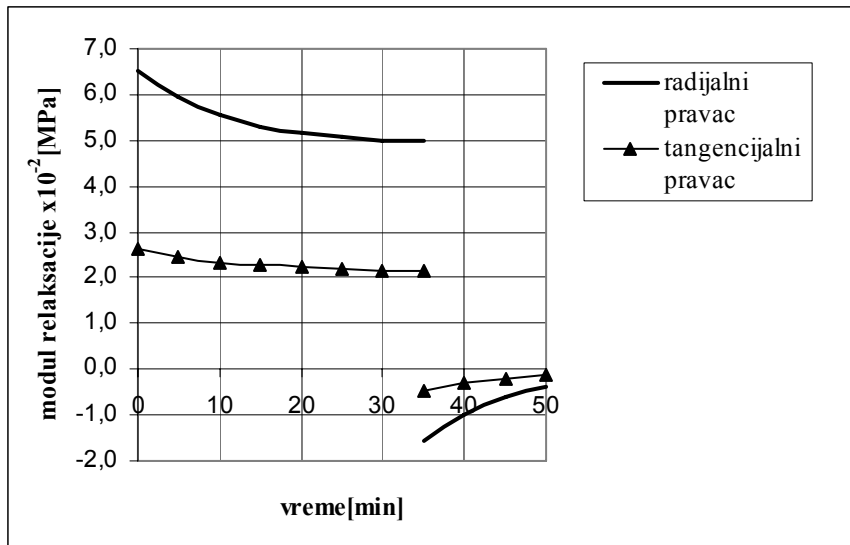
**Modul relaksacije u podužnom pravcu, nakon opuštanja dilatacije,** ima sledeći oblik:

$$E_a^-(t) = -6,13 \cdot E_r^-(t) = -533 e^{-\frac{t-35}{9,4}} \quad (6.33)$$



**Sl. 6-12 Promena modula relaksacije napona, u radijalnom pravcu, tokom vremena, za viskoelastični uzorak bukovine, pri konstantnoj dilataciji od 0,0362 u istom pravcu i pri otpuštanju dilatacije nakon 35 minuta**

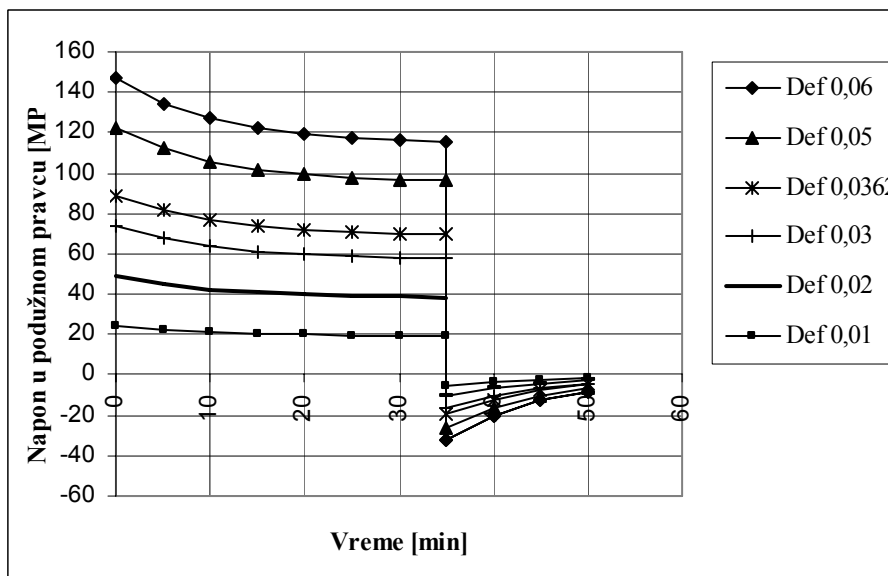
Sl. 6-13 daje *uporedni prikaz modula relaksacije napona, u radijalnom, tangencijalnom i podužnom pravcu, pri istoj veličini konstantne dilatacije, u odgovarajućem pravcu.* Slika pokazuje da, zbog većeg nivoa napona, u podužnom pravcu dolazi do veće apsolutne vrednosti pada napona tokom vremena, pa se može zaključiti da je u tome pravcu, za razliku od radijalnog i tangencijalnog pravca, viskoelastičnost veoma izražena.



Sl. 6-13 Uporedni prikaz promene modula relaksacije napona, u tri anatomska pravca, tokom vremena, za viskoelastični štap od bukovine, pri konstantnoj deformaciji od 0,0362 i nakon opuštanja deformacije

Dakle, štap od bukovine se, pri relaksaciji napona, u radijalnom i tangencijalnom pravcu, ponaša kao elastičan, a u podužnom pravcu, kao Zenerov viskoelastičan.

I kod relaksacije napona može se crtati *familija krivih za napone, pri različitim nivoima konstantnih deformacija*, baš kao što smo to činili kod viskoznog tečenja. Na Sl. 6-14 su, iz navedenog razloga te krive date samo za podužni pravac.

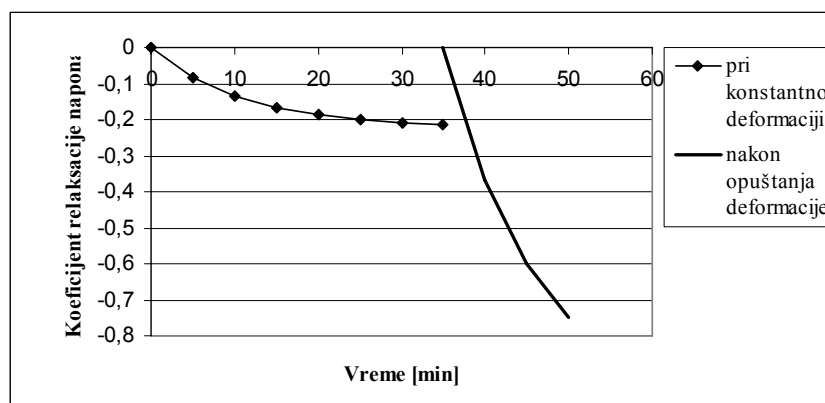


Sl. 6-14 Dijagram podužni napon -vreme za Zenerov štap od bukovine vlažnosti 10%, na temperaturi 60°C, pri konstantnoj podužnoj deformaciji

Koeficijent relaksacije napona u podužnom pravcu 
$$K_{rela} = \frac{\sigma_a(t) - \sigma_a(0)}{\sigma_a(0)}$$

računa se preko vrednosti napona, u različitim vremenskim trenucima, za određeni nivo deformacija. On ne zavisi od nivoa deformacija. Dijagram koeficijenta relaksacije prikazuje Sl. 6-15. Na slici se vidi da je koeficijent relaksacije napona uvek negativan i da je, po apsolutnoj vrednosti, znatno veći, nakon prestanka deformisanja, nego u periodu kada je deformacija bila konstantna. Deo dijagrama nakon opuštanja deformacije je nacrtan prema početnoj vrednosti u trenutku 35 min.

Da bi se formulisala matrica napona, za posmatrani viskoelastični štap od bukovine, pri konstantnoj podužnoj deformaciji, potrebna je odgovarajuća matrica krutosti. Zbog toga se prvo izračunavaju početni moduli relaksacije napona, pri konstantnoj dilataciji ili klizanju, za sve pravce, a zatim, odgovarajući moduli u različitim vremenskim trenucima.



Sl. 6-15 Dijagram koeficijent relaksacije napona-vreme za Zenerov štap od bukovine vlažnosti 10%, na temperaturi 60°C, pri konstantnoj podužnoj deformaciji i nakon prestanka deformisanja

**Moduli relaksacije napona, pri konstantnoj podužnoj dilataciji,** za posmatrani viskoelastični štap od bukovine, u početnom trenutku vremena, su:

$$\begin{aligned} E_r(0) &= 399\text{MPa} \\ E_t(0) &= 203\text{MPa} \\ E_a(0) &= 2446\text{MPa} \end{aligned} \quad (6.34)$$

**Moduli relaksacije napona pri konstantnom klizanju,** u ravni s normalom određenog pravca, su:

$$\begin{aligned} G_k(0) &= \frac{2G_{ij}(0)G_{ji}(0)}{G_{ij}(0) + G_{ji}(0)} \quad (i, j, k = r, t, a) \\ G_{ij}(0) &= \frac{E_i(0)}{2(1+\nu_{ij})} \quad G_{ji}(0) = \frac{E_j(0)}{2(1+\nu_{ji})} \end{aligned} \quad (6.35)$$

**Matrica krutosti, pri konstantnoj dilataciji** od 0,0362, za posmatrani

viskoelastični štap od bukovine, u početnom trenutku vremena, piše se, po analogiji sa izrazom (2.36). Pravicima 1,2 i 3 odgovaraju radijalna, tangencijalna i podužna osa, a konstantni moduli pri zatezanju i smicanju, zamenjuju se odgovarajućim vremenskim funkcijama:

$$D_{\text{Rel}}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1 - \nu_{ta} \nu_{at}}{E_t(t)E_a(t)d} & \frac{\nu_{rt} + \nu_{ra} \nu_{at}}{E_t(t)E_a(t)d} & \frac{\nu_{ra} + \nu_{rt} \nu_{ta}}{E_t(t)E_a(t)d} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{tr} + \nu_{ta} \nu_{ar}}{E_r(t)E_a(t)d} & \frac{1 - \nu_{ra} \nu_{ar}}{E_r(t)E_a(t)d} & \frac{\nu_{ta} + \nu_{tr} \nu_{ra}}{E_r(t)E_a(t)d} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{ar} + \nu_{tr} \nu_{at}}{E_r(t)E_t(t)d} & \frac{\nu_{at} + \nu_{rt} \nu_{ar}}{E_r(t)E_t(t)d} & \frac{1 - \nu_{rt} \nu_{tr}}{E_r(t)E_t(t)d} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_r(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_t(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_a(t) \end{bmatrix} \quad (6.36)$$

gde je :  $d = \frac{1 - \nu_{rt} \nu_{tr} - \nu_{ta} \nu_{at} - \nu_{ar} \nu_{ra} - 2\nu_{at} \nu_{ta} \nu_{ar}}{E_r(t)E_t(t)E_a(t)}$ ,  $G_r(t)$  - modul smicanja u ravni, koja

ima normalu u pravcu radijalne ose,  $G_t(t)$  - modul smicanja u ravni, koja ima normalu u pravcu tangencijalne ose,  $G_a(t)$  - modul smicanja u ravni, koja ima normalu u pravcu podužne ose.

U početnom trenutku veličina  $d(0)$  jednaka je:

$$d = \frac{1 - 0,36 \cdot 0,75 - 0,51 \cdot 0,044 - 0,073 \cdot 0,45 - 2 \cdot 0,044 \cdot 0,51 \cdot 0,073}{399 \cdot 203 \cdot 2446} = 3,42 \cdot 10^{-9}$$

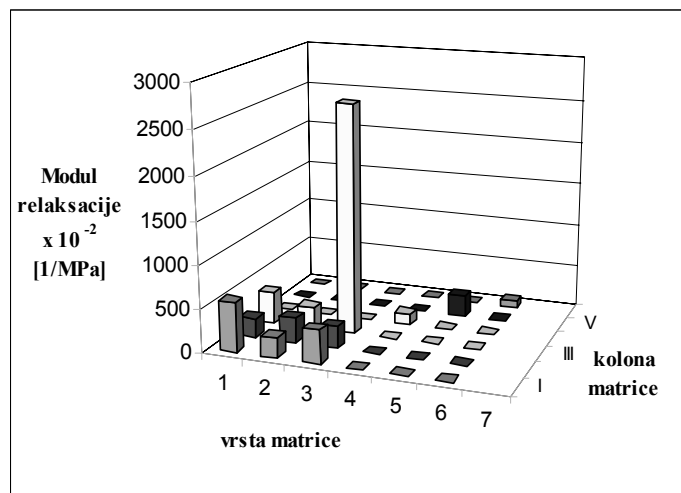
Kada se zamene odgovarajuće brojčane vrednosti za početne module, (6.34) i (6.35), u matricu (6.36), dobije se **matrica krutosti pri konstantnoj deformaciji od 0,0362** za viskoelastični štap od bukovine, u početnom trenutku vremena:

$$D_{\text{Rel}}(0) = \begin{bmatrix} 581 & 225 & 376 & 0 & 0 & 0 \\ 238 & 292 & 256 & 0 & 0 & 0 \\ 386 & 253 & 2659 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 127 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 246 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 83 \end{bmatrix} \text{MPa} \quad (6.37)$$

U matrici krutosti, (6.37), vidi se, da nije u potpunosti ispunjen uslov

simetričnosti vandijagonalnih članova. Razlog za to može biti greška pri zaokruživanju brojčanih vrednosti ili greška pri merenju.

Vizuelni prikaz članova matrice krutosti, (6.37), za štap od bukovine, vlažnosti 10%, ispitivan na 60°C, pri konstantnoj deformaciji dat je na Sl. 6-16.



Sl. 6-16 Vizuelni prikaz članova matrice krutosti za viskoelastični štap od bukovine, vlažnosti 10%, ispitivan na 60°C, pri konstantnoj dilataciji u početnom trenutku vremena

Veličine napona za štap od bukovine, vlažnosti 10%, ispitivan na 60°C, pri konstantnoj dilataciji od 0,0362 u podužnom pravcu, u početnom trenutku, su:

$$\sigma_{r,a}(0) = 376 \cdot 0,0362 = 13,6 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{t,a}(0) = 256 \cdot 0,0362 = 9,3 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{a,a}(0) = 2659 \cdot 0,0362 = 96 \text{ MPa}$$

Sada može da se napiše **matrica napona** za tačku štapa od bukovine vlažnosti 10%, pri 60°C, **pri konstantnoj dilataciji od 0,0362 u podužnom pravcu u početnom trenutku:**

$$\sigma_{\text{Rel}}(0) = \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_t \\ \sigma_a \\ \tau_{ta} \\ \tau_{ar} \\ \tau_{rt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{r,a} \\ \sigma_{t,a} \\ \sigma_{a,a} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13,6 \\ 9,3 \\ 96 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ MPa} \quad (6.38)$$

gde su  $\sigma_{r,a}$  - radijalni normalni napon, pri konstantnoj podužnoj dilataciji,  $\sigma_{t,a}$  - tangencijalni normalni napon, pri konstantnoj podužnoj dilataciji,  $\sigma_{a,a}$  - podužni

normalni napon  $\sigma$ , pri konstantnoj podužnoj dilataciji,  $\tau_{ta}, \tau_{ar}, \tau_{rt}$  smičući naponi pri konstantnom klizanju, u odgovarajućim ravnima.

Veličine članova matrice krutosti, za elastični štap od bukovine, i matrice krutosti za viskoelastični štap od bukovine, oba izložena konstantnoj dilataciji, u različitim vremenskim trenucima prikazuje Tabela 6-7.

Veličine članova matrice napona za štap od bukovine, vlažnosti 11%, na sobnoj temperaturi i za štap od bukovine, vlažnosti 10%, pri 60°C, pri konstantnoj podužnoj dilataciji prikazuje Tabela 6-8. Članovi matrica koje prikazuje Tabela 6-8 dobijeni su množenjem treće kolone matrice krutosti ( $c_{31}, c_{32}, c_{33}$ ) konstantnom dilatacijom.

**Tabela 6-7 Članovi matrice krutosti za elastični štap od bukovine, i matrice krutosti za viskoelastični štap od bukovine, oba izložena konstantnoj dilataciji, u različitim vremenskim trenucima**

	Matrica	$D_e$	$D_{Rel}$			
			t=0min	t=15min	t=35min	t=50min
Modul relaksacije napona [MPa]	$c_{11}$	3326	581	478	454	-25
	$c_{12}$	1292	225	185	176	-10
	$c_{13}$	2156	376	309	294	-17
	$c_{21}$	1360	238	196	185	10
	$c_{22}$	1670	292	240	228	-13
	$c_{23}$	1464	256	211	200	-11
	$c_{31}$	2210	386	317	302	-17
	$c_{32}$	1465	253	210	200	-11
	$c_{33}$	15220	2659	2188	2081	-114
	$c_{44}$	952	127	104	100	-6
	$c_{55}$	1972	246	200	191	-10
	$c_{66}$	467	83	69	65	-4

**Tabela 6-8 Članovi matrice napona za štap od bukovine, vlažnosti 11%, na sobnoj temperaturi i matrice viskoelastičnih deformacija za Zenerov štap od bukovine vlažnosti 10%, na 60°C, izložen konstantnoj podužnoj dilataciji od 0,0362, za različite vremenske trenutke**

	Matrica	$\sigma$	$\sigma_{Rel}(0)$	$\sigma_{Rel}(15)$	$\sigma_{Rel}(35)$	$\sigma_{Rel}(50)$
Napon [MPa]	$\sigma_r$	80	13,6	11,5	11	-0,6
	$\sigma_t$	53	9,3	7,5	7	-0,4
	$\sigma_a$	550	96	79	75	-4
	$\tau_{ta}$	0	0	0	0	0
	$\tau_{ar}$	0	0	0	0	0
	$\tau_{rt}$	0	0	0	0	0



### 6.1.3. Pravo čisto savijanje štapa od bukovine

Kada se posmatra Zenerov model štapa od bukovine, vlažnosti 10%, na 60°C, napregnut na pravo čisto savijanje momentom savijanja u pravcu (glavne centralne) x ose, uzimaju se materijalni parametri koje prikazuje Tabela 6-3. Pretpostavlja se da materijalni parametri dobijeni ispitivanjem na zatezanje, mogu da se koriste za pravo čisto savijanje.

Posmatra se štap od bukovine (Sl. 5-6 i Sl. 5-7), pravougaonog preseka, dimenzija 5x10cm, i dužine 1m, kod kojeg se pravac ose **a** poklapa s pravcem pružanja vlakana, jer u slučaju pravog čistog savijanja, veličine napona, deformacija i pomeranja zavise od oblika i dimenzija štapa.

Prosečna čvrstoća na savijanje za bukovinu vlažnosti 10% je 123MPa (prema dijagramu Kollmann Cote, 1984.), što je i približna vrednost čvrstoće na zatezanje bukovine paralelno vlaknima. Za reološka ispitivanja uzima se za 20% manja vrednost čvrstoće na savijanje, odnosno, uzima se vrednost 98MPa.

Na osnovu čvrstoće na savijanje može se izračunati prvo dozvoljena nosivost prema zadatim dimenzijama. Iz izraza (5.78) sledi  $\sigma_a \geq \frac{M_r}{I_r} t_{\max}$  odnosno

$$M_r \leq \sigma_a \frac{I_r}{t_{\max}} \quad (6.39)$$

gde je:  $I_r$  - aksijalni moment inercije pravougaonog preseka,  $I_r = \frac{1}{12} 5 \cdot 10^3 = 417 \text{cm}^4$ ,

$t_{\max}$  - maksimalna udaljenost od neutralne linije (r osa),  $t_{\max} = 5 \text{cm}$ . Iz izraza (6.39) dobije se da je  $M_r < 8,1 \text{kJ}$ . Dakle, ovakav štap može se opteretiti maksimalnim momentom savijanja u radijalnom pravcu od 8,1kJ.

Pri takvom opterećenju štapa mogu se izračunati pomeranja bilo koje tačke na preseku, zavisno od načina oslanjanja. Prema jednačinama izraza (5.82) računa se ugib u **t** pravcu, na slobodnom kraju konzole, odnosno, na sredini raspona proste grede, pri delovanju konstantnog momenta savijanja od 8,1kJ, u radijalnom pravcu, i to prvo u početnom trenutku:

$$f_{tk}(0,0) = -\frac{M_r}{2I_r E_{Ha}(0)} L^2$$

$$f_{tpg}\left(\frac{L}{2}, 0\right) = \frac{M_r}{8I_r E_{Ha}(0)} L^2$$
(6.40)

a zatim i nakon 15, 35 minuta opterećenja i nakon 15 min od trenutka rasterećenja (50 min od trenutka delovanja opterećenja).

Radi poređenja, računate su iste veličine ( $f_{tk}$  i  $f_{tpg}$ ) i za slučaj delovanja konstantnog momenta savijanja od 8,1kJ u pravcu r ose na štap od bukovine, vlažnosti 11%, koji se ponaša u skladu s Hukovim modelom prema izrazima (6.40), u kojima je, umesto veličine  $E_{Ha}$ , uzeta veličina  $E_a$  iz izraza (6.2). Dobijene vrednosti za sve ugibe prikazuje Tabela 6-9.

**Tabela 6-9 Uporedni prikaz ugiba za štap od bukovine, računat kao EO i VEO materijal**

Vrsta nosača	Konzola		Prosta greda	
	EO	VEO	EO	VEO
Vrsta materijala				
Ugibi	$f_k[m]$	$f_k[m]$	$f_{pg}[m]$	$f_{tpg}[m]$
t=0	-0,06	-0,24	0,012	0,06
t=15min	-0,06	-0,26	0,012	0,065
t=35min	-0,06	-0,29	0,012	0,073
t=50min	-0,06	-0,025	0,012	0,006

Iz tabele se vidi da ugibi štapa od bukovine, računati kao za **VEO** materijal, bilo da je štap uklješten, ili oslonjen kao prosta greda, i pri konstantnom opterećenju rastu, a da nakon rasterećenja ostaje deo trajnih deformacija.

## 6.2. Ravno naprezanje

### 6.2.1. Savijanje silama štapa od bukovine

Sada se posmatra štap od bukovine (Sl. 5-9, Sl. 5-11 i Sl. 5-12), pravougaonog preseka, dimenzija 5x10cm, i dužine 1m, kod kojeg se pravac ose **a** poklapa s pravcem pružanja vlakana. Štap na Sl. 5-9 opterećen je centrično postavljenom, konstantnom vertikalnom silom, na slobodnom kraju, od 1kN. Štapovi na Sl. 5-11 i Sl. 5-12 opterećeni su jednako podeljenim opterećenjem intenziteta 1kN/m, duž celog raspona.

Odgovarajuća pomeranja i ugibi štapa na Sl. 5-9, od EO i VEO materijala su:

$$v_k(a, \tau) = \frac{F_t}{6I_r E_a} (a^3 - 3L^2 a + 2L^3)$$

$$f_k(\tau) = \frac{F_t}{3I_r E_a} L^3$$
(6.41)

$$v_k(a, \tau) = \frac{F_t}{6I_r} \left[ \frac{1}{E_{Ha}} + \frac{1}{E_{Ka}} \left( 1 - e^{-\frac{\tau}{\epsilon_a}} \right) \right] (a^3 - 3L^2 a + 2L^3)$$

$$f_k(\tau) = \frac{F_t}{3I_r} \left[ \frac{1}{E_{Ha}} + \frac{1}{E_{Ka}} \left( 1 - e^{-\frac{\tau}{\epsilon_a}} \right) \right] L^3$$
(6.42)

gde su:  $r, t, a$  - pravci koordinatnih osa, prva dva su upravna na vlakna a treći je paralelan s njima,  $\tau$  - vreme.

Odgovarajuća pomeranja i ugibi štapa na Sl. 5-11, od EO i VEO materijala su:

$$v_k = \frac{q}{24E_a I_r} (a^4 - 4L^3 a + 3L^4) - \frac{qh^2}{80I_r} \left( -\frac{3v_{ra}}{E_a} + \frac{4}{G_{ra}} \right) (a-L)^2$$

$$f_k = \frac{qL^4}{8E_a I_r} - \frac{qh^2 L^2}{80I_r} \left( -\frac{3v_{ra}}{E_a} + \frac{4}{G_{ra}} \right)$$
(6.43)

$$\begin{aligned}
v_k(a, \tau) &= \frac{q}{24I_r} \left[ \frac{1}{E_{Ha}} + \frac{1}{E_{Ka}} \left( 1 - e^{-\frac{\tau}{\tau_{\varepsilon_z}}} \right) \right] (a^4 - 4L^3a + 3L^4) - \\
&\quad - \frac{qh^2}{80I_r} \left( -3v_{ra} \left[ \frac{1}{E_{Ha}} + \frac{1}{E_{Ka}} \left( 1 - e^{-\frac{\tau}{\tau_{\varepsilon_z}}} \right) \right] + 4J_a(\tau) \right) (a-L)^2 \\
f_k(\tau) &= \frac{q}{8I_r} \left[ \frac{1}{E_{Ha}} + \frac{1}{E_{Ka}} \left( 1 - e^{-\frac{\tau}{\tau_{\varepsilon_z}}} \right) \right] L^4 - \frac{qh^2}{80I_r} \left( -3v_{ra} \left[ \frac{1}{E_{Ha}} + \frac{1}{E_{Ka}} \left( 1 - e^{-\frac{\tau}{\tau_{\varepsilon_z}}} \right) \right] + 4J_z(\tau) \right) L^2
\end{aligned}
\tag{6.44}$$

Odgovarajuća pomeranja i ugibi štapa na Sl. 5-12, od EO i VEO materijala su:

$$\begin{aligned}
v_{pg} &= \frac{q}{24E_a I_r} (a^4 - 6L^3a^2 + 5L^4) + \frac{qh^2}{80I_r} \left( -\frac{3v_{ra}}{E_a} + \frac{4}{G_{ra}} \right) (L^2 - a^2) \\
f_{pg} &= \frac{5qL^4}{24E_a I_r} + \frac{qh^2L^2}{80I_r} \left( -\frac{3v_{ra}}{E_a} + \frac{4}{G_{ra}} \right)
\end{aligned}
\tag{6.45}$$

$$\begin{aligned}
v_{pg}(z, \tau) &= \frac{q}{24I_r} D_a(\tau) (a^4 - 6L^3a + 5L^4) + \frac{qh^2}{80I_r} (-3v_{ra} D_a(\tau) + 4J_a(\tau)) (L^2 - a^2) \\
f_{pg}(\tau) &= \frac{5q}{24I_r} D_a(\tau) L^4 + \frac{qh^2}{80I_r} (-3v_{ra} D_a(\tau) + 4J_a(\tau)) L^2
\end{aligned}
\tag{6.46}$$

gde je:  $D_a(\tau)$  - modul popustljivosti u pravcu vlakana.

Izrazi (6.42), (6.44) i (6.46) važe za slučaj konstantnog opterećenja tokom vremena.

Što se tiče napona, oni se, za tri posmatrana štapa od VEO materijala, s različitim načinom oslanjanja i različitim opterećenjem, računaju iz izraza:

$$\begin{aligned}
\sigma_a &= -\frac{F}{I_r} at \\
\tau_{ta\max} &= -\frac{3}{2} \frac{F}{bh} \left( 1 + \frac{\pi^2 k}{2} \beta_B \right)
\end{aligned}
\tag{6.47}$$

$$\sigma_t(t, \tau) = \frac{q}{2b} \left( -1 + 3 \frac{t}{h} - \frac{4t^3}{h^3} \right)$$

$$\sigma_a(t, a, \tau) = -\frac{qa^2 t}{2I_x} + \frac{q}{b} m \left( \frac{4t^3}{h^3} - \frac{3t}{5h} \right) \quad (6.48)$$

$$\tau_{at}(t, \tau) = -\frac{qa}{2I_x} \left( \frac{h^2}{4} - t^2 \right)$$

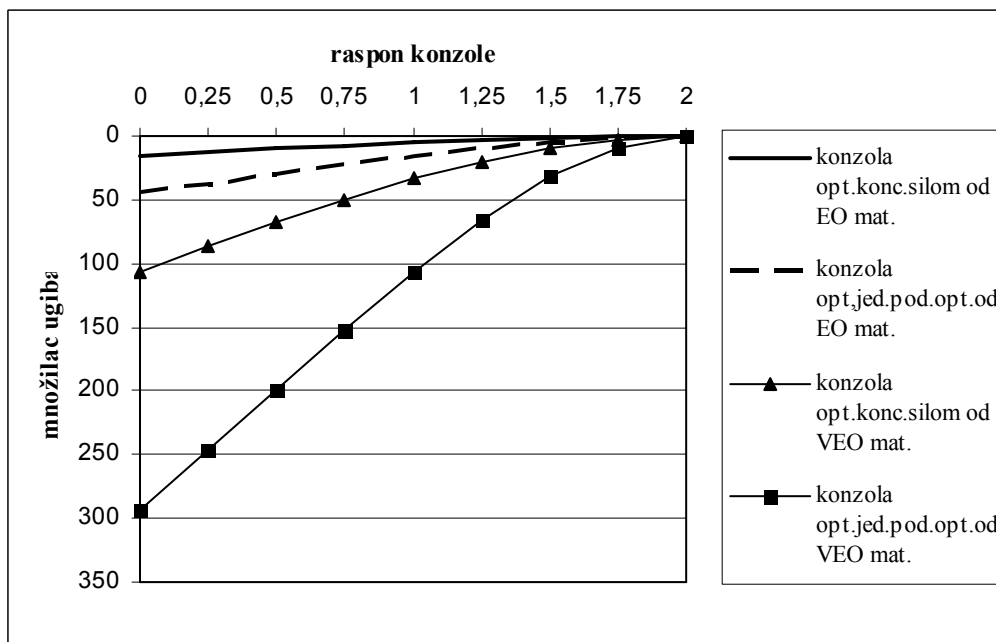
$$\sigma_t(t, \tau) = \frac{q}{2b} \left( -1 + 3 \frac{t}{h} - \frac{4t^3}{h^3} \right)$$

$$\sigma_a(t, a, \tau) = -\frac{q}{2I_r} (L^2 - a^2) t + \frac{q}{b} m \left( \frac{4t^3}{h^3} - \frac{3t}{5h} \right) \quad (6.49)$$

$$\tau_{at}(t, \tau) = -\frac{qa}{2I_r} \left( \frac{h^2}{4} - t^2 \right)$$

Ako se faktor ortotropije posmatra kao konstantan odnos materijalnih parametara tokom vremena, može se reći da su naponi (6.47), (6.48) i (6.49) jednaki naponima kod odgovarajućih nosača od EO materijala.

Što se tiče ugiba oni se znatno razlikuju za nosače od EO i VEO materijala kao što pokazuje Sl. 6-17.



Sl. 6-17 Uporedni prikaz ugiba za konzole od EI i VEO materijala s različitim opterećenjem

## 6.2.2. Proračun pravog savijanja ploče od bukovine jednako podeljenim opterećenjem

Za ploču od bukovine opterećenu jednako podeljenim opterećenjem uzimaju se elastična svojstva (Ашкенази, 1978.) data u izrazima (6.2), (6.3), (6.4):

$$E_r = 2285 \text{MPa}; \quad E_t = 1160 \text{MPa}; \quad E_a = 14000 \text{MPa}$$

$$G_{rt} = 467 \text{MPa}; \quad G_{at} = 952 \text{MPa}; \quad G_{ar} = 1972 \text{MPa}$$

$$v_{tr} = 0,75; \quad v_{rt} = 0,36;$$

$$v_{at} = 0,044; \quad v_{ta} = 0,51;$$

$$v_{ra} = 0,45; \quad v_{ar} = 0,073$$

Prvo se računaju krutosti  $D_1$ ,  $D_2$  i  $D_3$  po izrazima (5.153) napisanim za r,t,a koordinatni sistem (x osi odgovara a osa, y osi odgovara r osa).

$$D_1 = \frac{E_a h^3}{12(1 - v_{ra} v_{ar})}, \quad D_2 = \frac{E_r h^3}{12(1 - v_{ra} v_{ar})}, \quad D_3 = D_1 v_{ar} + 2D_{ar}, \quad D_{ar} = \frac{G_{ar} h^3}{12}$$

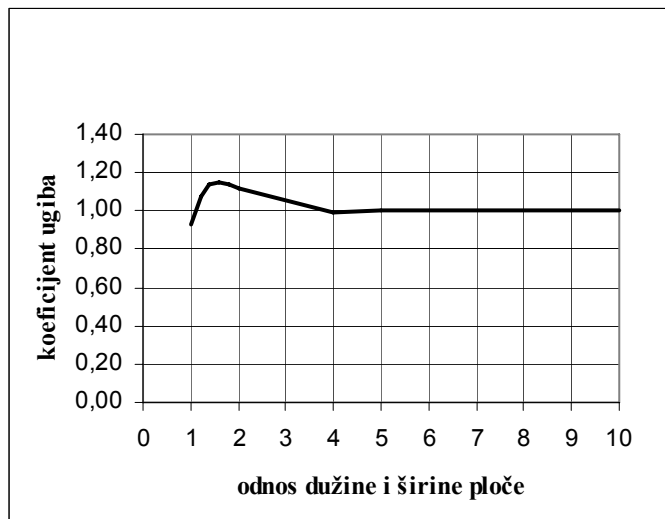
Izračunate vrednosti za ploču, debljine 20 mm, su:  $D_1 = 0,00965$ ,  $D_2 = 0,00157$ ,  $D_{ar} = 0,00131$ ,  $D_3 = 0,00271$ .

Odnos  $D_1 \cdot D_2 = 0,00965 \cdot 0,00157 = 0,0000151$  što je veće od  $D_3^2 = 0,00271^2 = 0,00000734$ . To znači da se ugibi i napadni momenti računaju po izrazima (5.174) uz bezdimenzione koeficijente  $\alpha, \beta_1, \beta_2$  koji se računaju po izrazima (5.170), (5.171), (5.172) i (5.173). Da bi se oni izračunali, potrebno je da se odrede rešenja jednačine (5.161), koja, nakon zamene izračunatih veličina  $D_1$ ,  $D_2$  i  $D_3$  ima sledeći oblik:

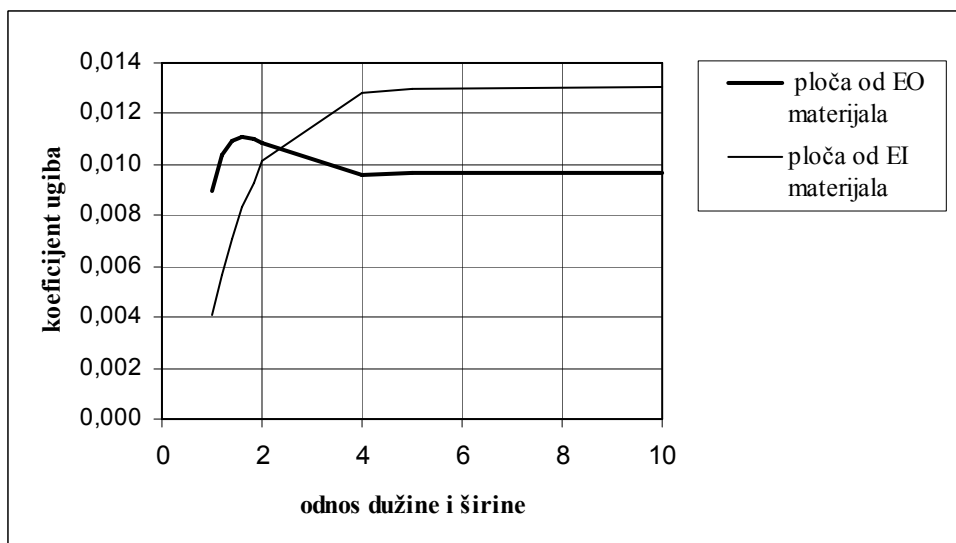
$$0,00965s^4 - 2 \cdot 0,00271s^2 + 0,00157 = 0$$

Rešenja ove jednačine su:  $(s_{1,2})^2 = 0,28 \pm 0,29i$ ;  $(s_{3,4})^2 = -0,28 \pm 0,29i$ . Sa ovim vrednostima, izračunati su koeficijenti  $\alpha, \beta_1, \beta_2$ , s jednim članom beskonačnih redova (5.170), (5.171), (5.172), (5.173) za različite vrednosti c. Tako izračunate vrednosti koeficijenta  $\alpha$  prikazuje Sl. 6-18. Vidi se da se maksimalni ugib ovakve ploče javlja u slučaju kada je odnos dužine i širine oko 1,5. Uporedni prikaz rešenja za koeficijent ugiba računatih po izrazima za EI i EO materijal dat je na Sl. 6-19. Vidi se da je ugib ploče od EI materijala maksimalan kod odnosa c=4 i da se posle te vrednosti ugib ploče može računati kao kod odgovarajuće grede. Za ploču od EO materijala se

takođe za odnos dužine i širine veći od 4 ugib ploče može računati kao kod odgovarajuće grede. Druga približna rešenja za ugib ploče od EO materijala daju velika odstupanja i slična su rešenju za ugib ploče od EI materijala, pa nisu prikazana na dijagramu.



Sl. 6-18 Koeficijent ugiba  $\alpha$  za EO ploču od bukovine



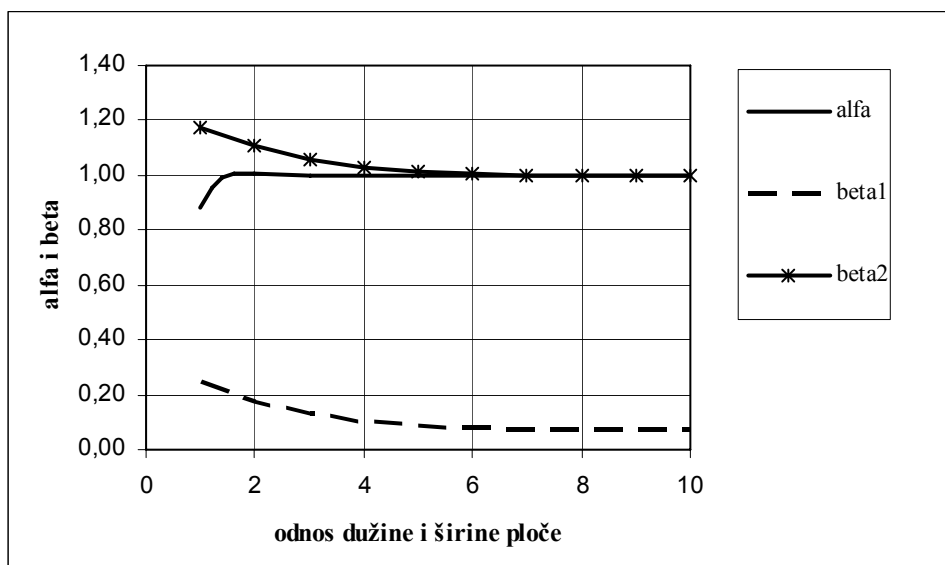
Sl. 6-19 Koeficijent  $\alpha$  za EO i EI ploču od bukovine

Na Sl. 6-20 prikazane su veličine koeficijenata  $\alpha, \beta_1, \beta_2$  u zavisnosti od odnosa dužine i širine ploče od bukovine.

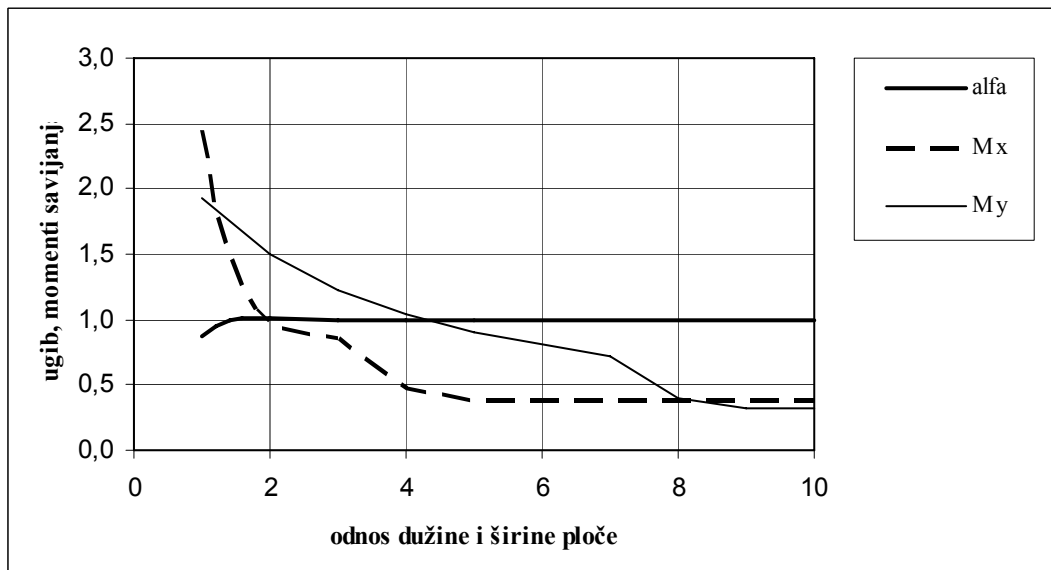
Na Sl. 6-21 dat je prikaz ugiba i momenata savijanja ploče od bukovine računane kao EO materijal.

Ugibi i momenti savijanja ploče od bukovine nisu računati kao kod VEO materijala, jer je pokazano da postoji velika razlika još između računa za EI i EO

materijal. Tačnost proračuna ploče od bukovine kao VEO materijala bila bi problematična, jer u izrazima za koeficijente  $\alpha, \beta_1, \beta_2$  postoje materijalne konstante čiji odnos se, kao i u prethodnim slučajevima uzima da je konstantan. Za tačniji proračun takvih ploča potrebna je dublja analiza, što nije predviđeno u izradi ovog rada.



Sl. 6-20 Veličine koeficijenata  $\alpha, \beta_1, \beta_2$



Sl. 6-21 Ugib i momenti savijanja ploče od bukovine kao EO materijala u zavisnosti od odnosa dužine i širine



## 7. ZAKLJUČAK I PREPORUKE

U ovom radu je primenom fenomenološke teorije viskoelastičnosti urađeno matematičko modeliranje VEO čvrstog tela sa svojstvima Zenerovog modela. Za taj model potrebni su ulazni podaci karakteristični za određenu vrstu materijala. Izabrani materijal je bukovina. Proračun je rađen za linearno i neka ravna naprezanja tela od bukovine.

Kod linearnih naprezanja drvenih štapova lako se uvodi Zenerov model u proračun ako se pretpostavi da su Poasonovi koeficijenti konstantni. Tada su Laplasove i inverzne Laplasove transformacije izraza za napon, deformacije i pomeranja, poznatih iz teorije elastičnosti ortotropnog čvrstog tela, vrlo jednostavne. Razlog je postojanje samo jednog materijalnog parametra koji je zavistan od vremena (modul popustljivosti ili modul relaksacije).

Kod aksijalno zategnutog štapa od bukovine proračun viskoznog tečenja i relaksacije napona urađen je za sva tri atomska pravca na osnovu eksperimentalnih podataka za samo jedan atomski pravac, uz pretpostavku da su odnosi između materijalnih parametara konstantni tokom vremena. Računate su dilatacije u sva tri atomska pravca, jer kod EO materijala, i pored malih dimenzija preseka u odnosu na dužinu nosača, dilatacije u poprečnim pravcima su veoma značajne. Time se može objasniti i pojava lomova kod EO materijala baš u poprečnim pravcima. Takođe je pokazano da se drvo, aksijalno napregnuto konstantnim naponom u pravcu podužne ose, za približan proračun u podužnom pravcu može i dalje posmatrati kao EI materijal. U poprečnim pravcima mora da se uzme u obzir viskozno tečenje. Za slučaj konstantne deformacije relaksacija napona u podužnom pravcu je značajnija od one u poprečnim pravcima.

Proračun drveta kao Zenerovog materijala rađen je u uslovima jednokratnog statičkog opterećenja, jer je cilj ovog rada bio da se pokaže kako linearna viskoelastičnost može da se ugradi u opštu teoriju mehanike drveta. Pri tome je korišćeno samo jedno karakteristično vreme za jednu vrstu materijala: vreme viskoznog tečenja ili vreme relaksacije.

Pošto se veliki deo podataka o materijalima dobija upravo iz testova zatezanja, u kojima se često rezultati na početku i na kraju ispitivanja dosta rasipaju pa se zbog toga

isključuju iz dalje obrade, bilo bi korisno uvesti ovakav proračun u obradu eksperimentalnih podataka. Na taj način može se skratiti vreme trajanja eksperimenta jer se on može obaviti na jednom nivou napona a podaci za druge nivoe napona (koji moraju biti ispod graničnih) dobiju se ekstrapolacijom po Zenerovom modelu.

Svi članovi matrice viskoelastičnosti određeni su po analogiji s matricom elastičnosti, jer je pretpostavljeno da princip korespondencije važi i za te dve matrice. Članovi dobijene matrice viskoelastičnosti mogu se koristiti i za proračun naprezanja gde se javljaju smičući naponi, što zbog vremenskog ograničenja u pogledu izrade ovog rada nije urađeno.

Takođe je urađen i proračun ugiba kod štapa od bukovine napregnutog na pravo čisto savijanje posmatranog kao Zenerov VEO materijal.

Smatra se da rezultati proračuna ne zavise od veličine uzorka. Zbog toga se mogu koristiti i za noseće konstrukcije i za elemente nameštaja, drvene ambalaže, sportske rekvizite, elemente podova.

Proračun koji je urađen za bukovinu na isti način može da se sprovede i za bilo koju drugu vrstu drveta uz odgovarajuće ulazne podatke, koji se odnose na početni, ustaljeni i trenutni modul elastičnosti.

Modifikovanje standardnih eksperimenata da bi se došlo do traženih podataka znači, pre svega, uvođenje merenja proteklog vremena. Da bi vreme izvođenja eksperimenta bilo konačno, merenje treba vršiti na povišenim temperaturama (za drvo preko 60<sup>0</sup>C). Takođe, rezultate dobijene u eksperimentima treba prikazivati u log-log razmeri.

Što se tiče ravnog naprezanja, kod pravog savijanja silama štapa od bukovine, već i za EO materijal, dobijaju se izrazi za napone, deformacije i pomeranja koji odstupaju od izraza formiranih za EI telo. Odgovarajući izrazi za štapove od VEO materijala sadrže faktor ortotropije koji je usvojen kao konstantan. Čak i s tom pretpostavkom dobijene veličine su tačnije (rastu tokom vremena) od onih računatih po teoriji elastičnosti (konstantne su).

Kod savijanja ploče od bukovine jednako podeljenim opterećenjem urađen je takođe proračun za EO materijal i dobijene vrednosti upoređene su s onima iz teorije elastičnosti. Izrazi za VEO materijal nisu izvedeni jer bi se u proračunu uzeli isti koeficijenti u izrazima za ugib i momente savijanja a rezultat bi se razlikovao od onoga

za EO materijal samo po promenljivim modulima elastičnosti. Ti izrazi bi bili tačniji od onih dobijenih u teoriji elastičnosti i u teoriji ortotropnih materijala ali bi imali grešku jer je za koeficijente u izrazima za ugib i momente savijanja pretpostavljeno da odnosi između materijalnih konstanti ostaju isti tokom vremena. Budući da ti koeficijenti zavise od više vremenski promenljivih funkcija tu bi trebala da se uradi detaljna analiza tih vremenskih funkcija.

Iz svega ovoga zaključuje se da se Zenerov VEO model, pri napreznjima ispod graničnih, može bez problema koristiti u slučajevima linearnih napreznja drveta.

Ono što dalje može da se uradi, a u ovom radu nije urađeno, je:

- da se izvrši uopštavanje izvedenih izraza za promenljive (zavisne od koeficijenata konstitutivne jednačine) Poasonove koeficijente za VEI materijal modela, tako, da oni važe i za VEO materijal;
- da se urade Laplasove transformacije tako dobijenih izraza, koji važe za više vrsta linearnih napreznja, gde bi postojale dve ili više vremenski promenljivih funkcija (materijalnih parametara);
- da se uradi proračun s primenom Zenerovog modela i za slučaj aksijalnog pritiska a ne samo zatezanja, jer je drvo materijal koji se različito ponaša pri zatezanju i pri pritisku (za ovo su potrebni eksperimentalno određeni ulazni podaci za aksijalno pritisnuto drvo);
- da se u slučajevima ravnih napreznja uvedu koeficijenti ortotropije promenljivi tokom vremena;
- da se razmotri postupak primene principa korespodencije i na napreznja gde se javljaju smičući naponi;
- da se razmotri postupak primene principa korespodencije i na neka prostorna napreznja uz jasno definisanu geometriju uzorka;
- da se uradi proračun VEO materijala za slučajeve napreznja gde se pravci glavnih napona ne poklapaju s anatomskim pravcima drveta;
- da se urade proračuni za grede i ploče od VEO materijala čiji presek ima oblik različit od pravougaonika;
- da se urade proračuni za grede i ploče od VEO materijala s otvorima različitih oblika;

- da se izračuna spektar vremena viskoznog tečenja i vremena relaksacije napona za pojedine vrste drveta u zavisnosti od parametara Zenerovog modela, koji bi mogao da se koristi i za slučaj višestepenog opterećenja.

Na osnovu svega gore navedenog zaključuje se da Zenerov model kao model VEO materijala može lako da se uvede u proračune i može imati široku primenu u mehanici drveta. Takođe, može da omogući obavljanje proračuna, bez primene numeričkih metoda.

## PRILOG I

Odnosi između različitih elastičnih konstanti.  $A^+ = \sqrt{(E + \lambda)^2 + 8\lambda^2}$

	$\lambda$	G	E	$\nu$	K
$\lambda, G$			$\frac{G(3\lambda + 2G)}{\lambda + G}$	$\frac{\lambda}{2(\lambda + G)}$	$\frac{3\lambda + 2G}{3}$
$\lambda, E$		$\frac{A^+ + (E - 3\lambda)}{4}$		$\frac{A^+ - (E + \lambda)}{4\lambda}$	$\frac{A^+ + (E + 3\lambda)}{6}$
$\lambda, \nu$		$\frac{\lambda(1 - 2\nu)}{2\nu}$	$\frac{\lambda(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{\nu}$		$\frac{\lambda(1 + \nu)}{3\nu}$
$\lambda, K$		$\frac{3(K - \lambda)}{2}$	$\frac{9K(K - \lambda)}{3K - \lambda}$	$\frac{\lambda}{3K - \lambda}$	
$G, E$	$\frac{(2G - E)G}{E - 3G}$			$\frac{E - 2G}{2G}$	$\frac{GE}{3(3G - E)}$
$G, \nu$	$\frac{2G\nu}{1 - 2\nu}$		$2G(1 + \nu)$		$\frac{2G(1 + \nu)}{3(1 - 2\nu)}$
$G, K$	$\frac{3K - 2G}{3}$		$\frac{9KG}{3K + G}$	$\frac{3K - 2G}{2(3K + G)}$	
$E, \nu$	$\frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$	$\frac{E}{2(1 + \nu)}$			$\frac{E}{3(1 - 2\nu)}$
$E, K$	$\frac{3K(3K - E)}{9K - E}$	$\frac{3EK}{9K - E}$		$\frac{3K - E}{6K}$	
$\nu, K$	$\frac{3K\nu}{1 + \nu}$	$\frac{3K(1 - 2\nu)}{2(1 + \nu)}$	$3K(1 - 2\nu)$		

## LITERATURA

- Ambartsumyan S.A. (1970). Determination of the state of stress and deformation of plates. U: *Theory of anisotropic plates*. Technomic, U.S.A.
- Biot M.A., (1955). Dynamics of viscoelastic anisotropic media. Proceedings fourth midwestern conference on solid mechanics, Purdue University, Lafayette.
- Biot M.A., (2008). Mechanics of viscoelastic media under initial stress. U: *Mechanics of incremental deformations*. John Wiley & sons,inc. New York.
- Brinson H.F. i Brinson L.C. (2008). *Polymer engeneering science and viscoelasticity*. Springer science+Business media, New York.
- Christensen R. M. (2003). *Theory of viscoelasticity*. Dover publications, inc.Mineola, New York.
- Danon G., Banković R. (1985). Priprema suvog bukovog drveta za obradu savijanjem. *Glasnik šumarskog fakulteta. Serija B, Drvna industrija*. 3, 21-33.
- Drozdov A.D. (1998). Constitutive models in linear viscoelasticity. Constitutive models in thermoviscoelasticity U: *Mechanics of viscoelastic solids*. John Wiley & sons, England.
- Dunica Š. (1998). Konstitutivne jednačine, Teorija grede. U: *Otpornost materijala*. Građevinski fakultet, Beograd
- Đurić M., (1963). Beton kao viskoelastičan materijal. U: *Teorija spregnutih i prethodno napregnutih konstrukcija*. Naučno delo, Beograd.
- Evrokod 5 : proračun drvenih konstrukcija. Deo 1, Opšta pravila i pravila za proračun zgrada. (1996). Građevinski fakultet, Univerziteta u Beogradu.
- Ferry J.D. (1980). *Viscoelastic properties of polymers*. John Wiley & sons, New York.
- Fransoa D. (2002). ESIS TC7D-1-96D Preporuke za terminologiju i nomenklaturu u oblasti integriteta konstrukcija. *Integritet i vek konstrukcija*. 1-2, 55-68.
- Fridley K.J., Rosowsky D.V., Hong P. (1997). Time-dependent service-load behavior of wood floors: analitical model. *Computers&structures*. Vol 66, No6, 847-860.
- Hilton H.H. (2001). Implications and constraints of time dependent Poisson ratios in linear isotropic and anisotropic viscoelasticity. *Journal of elasticity*. 63, 221-251.
- Howel P., Kozyreff G., Ockendon J. (2009). Modelling solids, Aproximate theories, More general theories. U: *Applied solid mechanics*. Cambridge University press, New York.
- Janzen S. (2001). *Use of transverse compression propeties as a measurement of wood biodeterioration*. Master of science thesis in forest product, Mississippi State University Department of Forest product, Mississippi
- Jodin P. (2004). Projektovanje drvene grede sa otvorima pomoću EUROCODE5. *Integritet i vek konstrukcija*. 4(3), 117-128.

- Klasztorny M. (2008). Coupled and uncoupled constitutive equation of linear elasticity and visco elasticity of orthotropic materials. *Journal of theoretical and applied mechanics, Warsaw*, 46, 1, pp 3-20.
- Kolin B. (1985). Uticaj temperature na pritisnu čvrstoću i graničnu higroskopnost drveta. Doktorska disertacija., Šumarski fakultet, Univerziteta u Beogradu.
- Kollmann F.P. (1984). Mechanics and Rheology of Wood. U: *Principles of Wood Science and Technology (Volume I: Solid Wood)*, Kollmann F.P. i Cote W.A. Springer-Verlag, Berlin.
- Kozak D., Lucić M. (2009). Nomenklatura i terminologija iz područja polimera i polimernih material, VII. Definicije pojmova koji se odnose na mehanička svojstva polimera u području do loma VII4. *Kemija u industriji*. 58(11), 515-540.
- Kutnar A., Šernek M. (2007). Densification of wood. *Zbornik gozdarstva i lesarstva*, 82, 53-62.
- Lakes R. S.(2009).: *Viscoelastic materials*. Cambrige university press, New York.
- Lakes R.S. (1992). The time-dependent Poissons ratio of viscoelastic materials can increase or decrease. *Cellular polymers*, 11, pp 466-469.
- Lakes R.S., Wineman A. (2006). On Poissons ratio in linearly viscoelastic solids. *Journal of elasticity*, 85, 45-63.
- Leaderman H. (1957). Proposed nomenclature for linear viscoelastic behavior. *Transactions of the society of the reology*. Vol 1, 213-222.
- Lekhnitskii S.G. (1984a). General equations of the theory of elasticity of an anisotropic body. Equilibrium of an anisotropic cantilever under a bending load of the simplest type. U: *Theory of elasticity of an anisotropic body*. Mir publishers, Moscow.
- Lekhnitskii S.G. (1984b). Theory of bending of anisotropic plates. U: *Anisotropic plates*. Gordon and Breach science publishers, New York.
- Lempriere B.M. (1968). Poissons ratio in orthotropic materials. *AIAA Journale*, Vol.6, No. 11, pp 2226-2227.
- Lenth C.A. (1999). Wood material behavior in severe enviroments. DrSci thesis, Faculty of the Virginia polytechnic Institute.
- Majka J. (2004). Stress development in dependence of the wood drying rate. *Electronic journal of Polish agricultural Universities, Wood technology*, Vol 7. Issue 1.
- Malkin A.Y. (1994). Elastic solids. Viscoelasticity. U: *Rheology fundamentals*. ChemTec publishing, Toronto
- Marjanov M., Mirić Milosavljević M., Mihailović V. (1999a). Generalizacija Hukovog zakona za ortotropan materijal. *Materijali i konstrukcije*, br. 1-2,
- Marjanov M., Mirić Milosavljević M., Mihailović V. (1999b). Moduli klizanja ortotropnih materijala. Simpozijum o istraživanjima i primeni savremenih dostignuća u našem građevinarstvu u oblasti materijala i konstrukcija, XXI Kongres YUDIMK-a, Beograd.

- Marjanov M., Mirić Milosavljević M., Mihailović V. (2002). Moduli rotacija anatomskih pravaca i moduli klizanja između njih kod ortotropnih materijala. *Izgradnja*, br.3,
- Mase G.E. (1970). Viscoelasticity. U: *Theory and problems of continuum mechanics*. Mc-Graw- Hill book company, New York.
- Mase G.T., Mase G.E. (1999). Three-dimensional problems, The correspondence principle. U: *Continuum mechanics for engineers*. CRC press, Boca Raton, Florida.
- Nogi M., Yamamoto H., Okuyama T. (2003). Relaxation mechanism of residual stress inside logs by heat treatment: choosing the heating time and temperature. *Journal of wood science* .49, 22-28.
- Norris A. N. (2006). Poissons ratio in cubic materials. *Royal society, series A*, 462, pp. 3385-3405.
- Petrović Z., Stupar S. (1996). *Projektovanje računarom: metod konačnih razlika*. Univerzitet u Beogradu.
- Phan Tien N. (2002). Rheological properties. Constitutive equation. U: *Understanding viscoelasticity, basics of rheology*. Springer-Verlag, Berlin.
- Popović Z. (1996). *Fenomen tečenja aksijalno pritisnutog jelovog lameliranog drveta pod konstantnim i promenljivim opterećenjem*. Doktorska disertacija, Univerzitet u Beogradu, Šumarski fakultet, Srbija
- Popović Z. (2005). Ključ uspešnog rada sa drvetom, razumevanje odnosa drvo – voda. *Drvotehnika*. 5,14-15.
- Popović Z. (2006). Uticaj vlažnosti i temperature na savojni modul elastičnosti bukovog drveta. *Šumarstvo*. 1-2, 49-65.
- Popović Z., Šoškić B., Mirić M. (2007). Effect hidrothermal treatment on some mechanical properties of beechwood. *Prerada drveta*. 19, 15-21.
- Rand O., Rovenski V. (2005). Anisotropic material, Beams of general anisotropy. U: *Analytical methods in anisotropic elasticity with symbolic computational tools*. Birkhauser, Boston.
- Riande E., Diaz-Galleja R., Prolongo M.J., Masegosa R.M., Salom C. (2000). Multiaxial analysis of linear viscoelastic stress. *Polymer viscoelasticity, stress and strain in practice*. Marcell Dekker, inc., New York.
- Shaw M. T., MacKnight W.J. (2005). Phenomenological treatment of viscoelasticity. Viscoelastic models. Time temperature correspondence. U: *Introduction to polymer viscoelasticit*. John Wiley & sons, New York.
- Sieglaf C.L. (1976 ). Proposed nomenclature for steady shear flow and linear viscoelastic behavior. *Transactions of the society of the reology*. Vol 20(2), 311-317.
- Theocaris P.S., Philippidis T.P. (1992). True bounds on Poissons ratios for transversely isotropic solids. *Journal of strain analysis*. Vol. 27, No 1, pp. 43-44.
- Timmermans P.H.M. (1997). Evaluation of a constitutive model for solid polymeric. Dr Sci thesis, Technische Universiteit, Eindhoven



- Timošenko S. (1956). Tanke ploče i ljuske. U : *Otpornost materijala, II deo*. Građevinska knjiga, Beograd.
- Timošenko S. i Gudier J.N. (1962). *Teorija elastičnosti*. Građevinska knjiga, Beograd.
- Timošenko S. i Vojnovski-Kruger S. (1962). Savijanje anizotropnih ploča. U : *Teorija ploča i ljuski*. Građevinska knjiga, Beograd.
- Ting T.C.T. (1996). The Stroh formalism. U: *Anisotropic elasticity, theory and applications*. Oxford University press, New York, Oxford.
- Ting T.C.T., Chen T. (2004). Poissons ratio for anisotropic elastic materials can have no bounds. *Q. Jl. Mech.Appl.Mat.* 58 (1), 73-82.
- Ward .I.M., Sweeney J. (2004). Principles of linear viscoelasticity. U: *An introduction to the mechanical properties of solid polymers*. John Wiley & sons, England.
- Wert C.A., Weller M., Caulfield D. (1984.) Dynamic loss properties of wood. *Journale of Applied Physics*, Vol. 56, Issue 9, 2453-2458
- Williams M.L. (1964). Structural analisis of viscoelastic material. Reprinted from *AIAA Journale by the American institute of aeronautics*, pp 785-798.
- Wolcott M.P., Kasal B., Kamke F.A., Dillard D.A. (1989). Testing small wood specimens in transverse compression. *Wood and fiber science*. Vol 21, No 3, pp 320-329.
- Zakić B. (1985). Reološka svojstva drveta. U: *Uvod u mehaniku drveta*. Zavod za grafičku delatnost Instituta za vodoprivredu Jaroslav Černi, Beograd
- Zakić B. (2003). Rheological properties of wood. U: *Plasticity in wood*. Srpska akademija nauka i umetnosti, Beograd
- Zener C. (1932). Non adiabatic crossing of energy levels. *Royal society of London, series A*. Vol 137, No 833, pp. 696-702.
- Ашкенази Е.К. (1978). Анизотропия характеристик упругости по экспериментальным данным. У: *Анизотропия древесины и древесных материалов*. Лесная промышленность, Москва.
- Белянкин Ф.П., Яценко В.Ф. (1957). Закономерности изменения напряженного состояния во времени при постоянной величине заданной начальной деформации. У: *Деформативность и сопротивляемость древесины как упруго-вязко-пластического тела*. Академия наук УССР, Киев.
- Иванов. Ю. М. (редактор). (1962). К вопросу застеклования природной целлюлозы в древесине. У: *Строение и физические свойства древесины*. Академия наук СССР, Москва
- Лойцянский Л.Г. (1970). Динамика вязкой несжимаемой жидкости. У: *Механика жидкости и газа*. Nauka, Moskva
- Соболев Ю. С. (1979). Механические характеристики древесины при сжатии. У: *Древесина как конструкционный материал*. Лесная промышленность, Москва.
- Уголев Б.Н. (1971). *Деформативность древесины и напряжения при сушке*. Лесная промышленность, Москва.

## BIOGRAFIJA

Mr Mira Mirić Milosavljević rođena je 2.10.1959. godine u Petrovcu kod Podravske Slatine. Od 1962. godine živela je u Rumi gde je završila osnovnu školu, a zatim i gimnaziju prirodno matematičkog smera, s diplomom Mihajlo Petrović Alas za fiziku i matematiku, 1977. godine.

Na Mašinski fakultet Univerziteta u Beogradu upisala se 1977.godine. Nakon završenih studija diplomirala je u roku, 1982. godine, na smeru termotehnika, s prosečnom ocenom 8,57 i ocenom 10 na diplomskom radu: **Sagorevanje u fluidizovanom sloju**, iz oblasti Pogonski materijali.

Nakon diplomiranja radila je tri godine u preduzeću „Heroj Srba“ u Smederevu kao tehnolog za procesnu opremu, godinu dana u „IMR-u“ u Beogradu kao inženjer za održavanje u energetici i tri godine u „Termoventu“ u Beogradu kao inženjer za distributivne elemente u klimatizaciji.

1989.godine počela je da radi na Šumarskom fakultetu Univerziteta u Beogradu kao asistent pripravnik na predmetu Tehnička mehanika na Katedri za projektovanje finalnih proizvoda.

Magistrirala je na Mašinskom fakultetu Univerziteta u Beogradu 2003. godine na smeru primenjena mehanika fluida. Naziv magistarskog rada je **Temperaturski granični sloj na obrtnim telima**. Izabrana je u zvanje asistenta na predmetu Tehnička mehanika na Katedri za mašine i uređaje 2004. godine.

Mr Mira Mirić Milosavljević je izvodila vežbe iz predmeta Tehnička mehanika na prvoj godini studija sa svim obrazovnim profilima, i na drugoj godini studija na preradi drveta sve do 2002. godine kada je izmenjen plan i program. Od 2003. izvodila je vežbe na prvoj godini studija za smerove Prerada drveta i Zaštita od erozije. Za potrebe nastave, zajedno s kolegicom Dr Vladislavom Mihailović, napisala je Zbirku rešenih zadataka sa kolokvijuma iz Tehničke mehanike, koja je objavljena 2005. godine, u izdanju Šumarskog fakulteta Univerziteta u Beogradu.

Osim toga, Mr Mira Mirić Milosavljević je u proteklom periodu objavila 4 naučna rada, učestvovala je u dva naučna projekta i na jednom simpozijumu, i bila je član komisije za odbranu 11 diplomskih radova u periodu do 2009. godine.

Прилог 1.

## Изјава о ауторству

Потписани-а Мира Ј. Мирић Милосављевић

број уписа \_\_\_\_\_

### Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Зенеров модел вискоеластичности за ортотропно чврсто тело и његова примена у механици дрвета.

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 4.4.2012.

Мира Ј. Мирић Милосављевић

Прилог 2.

## Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Мира Ј. Мирић Милосављевић

Број уписа \_\_\_\_\_

Студијски програм \_\_\_\_\_

Наслов рада: Зенеров модел вискоеластичности за ортотропно чврсто  
тело и његова примена у механици дрвета

Ментор: Др Милутин Марјанов

Потписани Мира Ј. Мирић Милосављевић

изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

**Потпис докторанда**

У Београду, 4.4.2012.

Мира Ј. Мирић Милосављевић

Прилог 3.

## Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Зенеров модел вискоеластичности за ортотропно чврсто тело и његова примена у механици дрвета.

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

У Београду, \_\_\_\_\_ 4.4.2012.

Потпис докторанда

