УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Зоран С. Пуцановић

АНАЛИЗА ПРСТЕНА И МОДУЛА ПРИДРУЖИВАЊЕМ ГРАФОВА

ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА

БЕОГРАД, 2012.

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MATHEMATICS

Zoran S. Pucanović

THE ANALYSIS OF THE RINGS AND MODULES USING ASSOCIATED GRAPHS

DOCTORAL DISSERTATION

BELGRADE, 2012.

МЕНТОР:

др Зоран Петровић,
ванредни професор, Универзитет у Београду, Математички факултет

ЧЛАНОВИ КОМИСИЈЕ:

др Александар Липковски,
редовни професор, Универзитет у Београду, Математички факултет

др Гојко Калајџић,
ванредни професор, Универзитет у Београду, Математички факултет

др Љубомир Чукић,
ванредни професор, Универзитет у Београду, Грађевински факултет

Датум одбране:

____

Посвећено

мојој супрузи Наташи

АНАЛИЗА ПРСТЕНА И МОДУЛА ПРИДРУЖИВАЊЕМ ГРАФОВА

САЖЕТАК

Ова докторска дисертација проучава различите особине комутативних прстена и модула алгебарско комбинаторним методама. Ако се граф на одговарајући начин придружи прстену R или R-модулу M, онда испитивањем његових особина долазимо до корисних информација о R и M.

У овој тези одређен је радијус тоталног графа комутативног прстена R у случају када је тај граф повезан. Типична раширења као што су прстен полинома, прстен формалних редова, идеализација R-модула M и прстен матрица $M_n(R)$ такође су испитани. Установљене су везе између тоталног графа полазног прстена R и тоталних графова ових раширења.

Дефинисањем тоталног графа модула дато је једно уопштење тоталног графа комутативног прстена. Испитане су и доказане његове различите особине. Установљене су везе са тоталним графом прстена као и неке везе са графом делитеља нуле.

У циљу бољег разумевања чистих прстена, уведен је чисти граф $\mathcal{C}\Gamma(R)$ комутативног прстена са јединицом R. Детаљно су испитане његове особине. Даљим истраживањем чистих графова добијени су додатни резултати везани за друге класе комутативних прстена.

Један од предмета ове тезе је и истраживање особина одговарајућег линијског графа $\mathrm{L}(\mathrm{T}\Gamma(R))$ тоталног графа $\mathrm{T}\Gamma(R)$. Дата је комплетна класификација свих комутативних прстена чији су линијски графови тоталног графа планарни или тороидални. Доказано је да за цео број $g \geq 0$ постоји само коначно много комутативних прстена таквих да је $\gamma(\mathrm{L}(\mathrm{T}\Gamma(R))) = g$.

У овој тези су такође класификовани сви тороидални графови који су графови пресека идеала комутативног прстена R. Дато је и једно побољшање постојећих резултата о планарности ових графова.

Кључне речи: комутативни прстени, чисти прстени, модули, делитељи нуле, тоталан граф, чисти граф, линијски граф, граф пресека, род графа

Научна област: Математика

Ужа научна област: Алгебра

УДК број: [512.55:512.71]:519.171(043.3)

AMS класификација: 13A99, 13C99, 13H99, 05C10, 05C25

THE ANALYSIS OF THE RINGS AND MODULES USING ASSOCIATED GRAPHS

ABSTRACT

This dissertation examines various properties of commutative rings and modules using algebraic combinatorial methods. If the graph is properly associated to a ring R or to an R-module M, then examination of its properties gives useful information about the ring R or R-module M.

This thesis discusses the determination of the radius of the total graph of a commutative ring R in the case when this graph is connected. Typical extensions such as polynomial rings, formal power series, idealization of the R-module M and relations between the total graph of the ring R and its extensions are also dealt with.

The total graph of a module, a generalization of the total graph of a ring is presented. Various properties are proved and some relations to the total graph of a ring as well as to the zero-divisor graph are established.

To gain a better understanding of clean rings and their relatives, the clean graph $\mathcal{C}\Gamma(R)$ of a commutative ring with identity is introduced and its various properties established. Further investigation of clean graphs leads to additional results concerning other classes of commutative rings.

One of the topics of this thesis is the investigation of the properties of the corresponding line graph $\mathrm{L}(\mathrm{T}\Gamma(R))$ of the total graph $\mathrm{T}\Gamma(R)$. The classification of all commutative rings whose line graphs of the total graph are planar or toroidal is given. It is shown that for every integer $g \geq 0$ there are only finitely many commutative rings such that $\gamma(\mathrm{L}(\mathrm{T}\Gamma(R))) = g$.

Also, in this thesis all toroidal graphs which are intersection graphs of ideals of a commutative ring R are classified. An improvement over the previous results concerning the planarity of these graphs is presented.

Keywords: commutative rings, clean rings, modules, zero-divisors, total graph, clean graph, line graph, intersection graph, genus of a graph

Scientific area: Mathematics

Scientific field: Algebra

UDC number: [512.55:512.71]:519.171(043.3)

AMS Subject Classification: 13A99, 13C99, 13H99, 05C10, 05C25

Садржај

ПРЕДГОВОР

Егзистенција правих делитеља нуле обично проузрокује проблеме у раду са комутативним прстенима. Мада имају мултипликативно својство, њихови збирови не могу се контролисати и затвореност сабирања у општем случају није испуњена. Тако, један веома важан подскуп у прстену нема алгебарску структуру, не мора бити ни потпрстен, а ни идеал. Његов подскуп нилпотентних елемената је идеал, па се неправилности у прстенима изазване нилпотентима могу избећи посматрањем одговарајућих редукованих прстена. У комутативној алгебри у значајној мери заступљен је рад са доменима, комутативним прстенима без правих делитеља нуле. Они су наравно много погоднији за изучавање, али проблеми изазвани постојањем правих делитеља нуле у прстену не могу се увек избећи. На пример, сама дефиниција једнозначне факторизације, једне од фундаменталних особина комутативних прстена, подразумева да он нема правих делитеља нуле. Постоје наравно многа уопштења и мање или више успешни покушаји да се појам једнозначне факторизације прошири и на комутативне прстене који нису домени. Многи знаменити алгебристи (попут Андерсона, Гилмера, Капланског, Нагате и других) проучавали су са разних аспеката понашање делитеља нуле у комутативним прстенима и проблематику у вези са њима.

Дубља анализа делитеља нуле у комутативним прстенима, нарочито у Нетериним, дата је у [32]. Од важнијих резултата о структури делитеља нуле истакнимо познати резултат из ове књиге ([32, теорема 2]): Скуп делитеља нуле комутативног прстена је унија простих идеала. Доста резултата о овој проблематици може се наћи у монографији [29]. Значајан допринос овој теми дао је и Н.Ганесан доказавши да је прстен са коначно много делитеља нуле коначан ([24, теорема 1]). Особине и утицај делитеља нуле на особине прстена и даље су, као и у прошлом веку, атрактиван проблем за многе математичаре.

Последњих десетак година дошло је до промене приступа у проучавању структуре делитеља нуле у прстенима. Са чисто алгебарског приступа прелази се на алгебарско комбинаторне методе и повезују се две различите дисциплине: комутативна алгебра и теорија графова. Пионирски рад у повезивању прстена и графова припада Беку [13] и настао је 1988. године. Ипак, прави замах у овој области почиње од 1999. године радом [8] Андерсона и Ливингстона. Аутори комутативном прстену R придружују *граф делитеља нуле* $\Gamma(R)$, тако што за темена графа узимају све праве делитеље нуле у R. Темена x и y суседна су у $\Gamma(R)$ акко је $xy = 0$. Они између осталог доказују да је (неочекивано) $\Gamma(R)$ увек повезан, и више, $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) \leq 3$ [8, теорема 2.3]. Велико изненађење представља чињеница да делитељи нуле имају врло специфичну графовску структуру иако немају јасну алгебарску. Стога овај рад привлачи велику пажњу и многи аутори настављају да следе овај приступ у проучавању делитеља нуле у комутативним прстенима. Свакако, већ на основу поменуте теореме видимо да има алгебарске користи од увођења овог графа. Постављају се зато и друга занимљива питања у вези са $\Gamma(R)$. На пример: Када је он комплетан? У којим случајевима је планаран, а у којим тороидалан? Каква је структура графа делитеља нуле прстена полинома и прстена формалних редова над R? За које прстене је $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) \leq 2$? У каквој су вези ови појмови из теорије графова са алгебарским својствима прстена R? У радовима [8, 9, 11, 12, 35, 45, 46] истражују се разне особине графа $\Gamma(R)$ и дају се одговори на нека од ових питања. У раду [6] ови радови су систематизовани и дат је преглед главних резултата везаних за граф $\Gamma(R)$.

Наравно, граф се може придружити прстену или некој другој алгебарској структури на разне начине у зависности од тога које особине проучавамо. Корист од тога може бити мања или већа, тј. не можемо увек очекивати повратну информацију о прстену иако знамо структуру њему придруженог графа. Често се дешава да неизоморфни прстени имају изоморфне придружене графове. Такав је случај и са графом $\Gamma(R)$. У циљу ефикаснијег решавања овог и сличних проблема, долази се до разних уопштења овог графа, а уводе се и нови графови. Андерсон и Бадави у раду [7] дефинишу *тотални граф комутативног прстена* $T(\Gamma(R))$. За темена узимају све елемента прстена R. Темена x и y су суседна акко је $x+y$ делитељ нуле у R. Овако дефинисан граф фаворизује адитивна својства делитеља нуле у односу на мултипликативна, којима је дата предност у $\Gamma(R)$. Структура графа $T(\Gamma(R))$ природно зависи од тога да ли делитељи нуле формирају идеал у R или то није случај, тако да се овде појављују занимљиве везе са алгебарским особинама прстена R. О овом графу биће доста речи у овој дисертацији.

Бекова идеја показала се корисном и у решавању различитих проблема у теорији комутативних прстена који не морају имати везе само са делитељима нуле. У [21] аутори генералишу ову идеју ради прочавања факторизације у доменима и дефинишу *иредуцибилне дивизор графове*, у ознаци $Irr(R)$. Користећи ове графове они карактеришу разне класе домена, укључујући и домене са једнозначном факторизацијом.

Како структура комутативних прстена зависи пре свега од њихових идеала, природно је дефинисати и графове базиране на идеалима. У раду [50], аутори дефинишу *комаксималан граф* узимајући за темена све елементе прстена R. Темена x и y су суседна акко $Rx+Ry=R$. Више о комаксималним графовима читалац може наћи у [37]. У раду [18] аутори дефинишу *граф пресека идеала* $G(R)$, тако што за темена узимају све нетривијалне идеале у R. Темена (идеали) I и J суседна су у $G(R)$ акко је $I\cap J\neq 0$. У овом раду бавићемо се и неким питањима везаним за овај граф. Наравно, ово су само неке од могућности за придруживање графа комутативном прстену. Слично се може поступити и у некомутативним прстенима (видети, на пример [47]). Заинтересовани читалац може у литератури наћи још доста графова асоцираних прстенима, али и другим алгебарским структурама: семигрупама, групама, парцијално уређеним скуповима, итд.

У овој дисертацији изучавају се особине прстена и модула анализом њима придружених графова. Првобитна идеја била је проучавање структуре делитеља нуле у комутативним прстенима са чисто алгебарског становишта. Већ први површан преглед постојеће литературе и савремених резултата у овој области довео нас је до алгебарско – комбинаторног приступа овој проблематици. Мотивацију за разматрање овог проблема аутор овог рада и његов ментор пронашли су у горе цитираним радовима. Временом су се почетна интересовања за графове придружене прстенима са делитељима нуле проширила и на неке друге класе прстена, као и на линијске графове и графове пресека идеала. Њима је и посвећен већи део овог рада.

У уводној глави овог рада укратко су изложени основни појмови и терминологија из теорије графова и теорије комутативних прстена. Ту су такође дати искази постојећих тврђења и теорема које касније у раду користимо. Ове теореме наводимо без доказа, са референцама где се они могу наћи. Остале главе садрже оригиналне резултате.

Друга глава базира се на раду [40] и посвећена је проучавању тоталног графа $T(\Gamma(R))$ и његових асоцираних подграфова, за комутативан прстен R. Специјално, овде се одређује радијус за $T(\Gamma(R))$ и разматрају се повезаност и дијаметар за $T(\Gamma(R[X]))$, $T(\Gamma(R[[X]]))$, $T(\Gamma(R(+)M))$ и $T(\Gamma(M_n(R)))$.

У трећој глави која се ослања на рад [43], презентована је једна генерализација графа $T(\Gamma(R))$. За R-модул M над комутативним прстеном R дефинишемо *тотални граф модула* $T(\Gamma(M))$. Улогу делитеља нуле у $T(\Gamma(M))$ преузимају торзиони елементи модула M. Испоставља се да је структура овог графа у тесној вези са структуром $T(\Gamma(R))$.

Централно место овог рада је четврта глава у којој су изложени резултати из рада [15]. Мотивисани дефиницијом *чистог прстена* дефинишемо *чисти граф* $\mathcal{C}\Gamma(R)$. За скуп темена узимамо све елементе комутативног прстена R. Темена x и y су суседна акко је $x+y$ инвертибилан или идемпотентан. Разматрамо типична питања као што су повезаност, обим и дијаметар овог графа и њихову алгебарску интерпретацију у посматраном прстену. Мада је увођење овог графа мотивисано класом чистих прстена, испоставља се да је његова структура у тесној вези и са другим класама прстена, као што су, на пример, полуперфектни комутативни прстени. У овој глави дајемо и одговор на питање када је $\mathcal{C}\Gamma(R)$ планаран а када тороидалан, за коначан прстен R.

Пета глава је комбинаторног карактера. У овој глави изложени су главни резултати из рада [41]. За комутативан прстен R, разматра се линијски граф $L(T(\Gamma(R)))$ тоталног графа $T(\Gamma(R))$. Проучавају се неке његове особине са посебним акцентом на питање утапања овог графа. Између осталог, доказујемо да за фиксиран цео број $g \geq 0$ постоји само коначно много комутативних прстена R таквих да је $L(T(\Gamma(R)))$ рода g.

Шеста глава бави се питањем тороидалности графа пресека идеала $G(R)$ и базирана је на раду [42]. У мањој мери обрађује се и питање планарности. Главни резултат шесте главе је класификација свих тороидалних графова који су графови пресека идеала неког комутативног прстена.

За несебичну помоћ при изради ове дисертације захваљујем се мом ментору Зорану Петровићу. Захваљујући његовим примедбама неки од доказа су знатно краћи и елегантнији а главни резултати јасније презентовани. Његове идеје и сугестије, као и стрпљење у раду са мном, помогле су да ова дисертација угледа светлост дана.

Београд,

Октобар 2012. *Зоран Пуцановић*

ГЛАВА 1

УВОД

У овој глави даћемо кратак преглед основних појмова и дефиниција из теорије графова и теорије комутативних прстена које у даљем раду користимо. Упознаћемо се са терминологијом и навешћемо неколико познатих теорема и тврђења потребних за наш рад. Генералне референце за теорију комутативних прстена су стандардни уџбеници комутативне алгебре [10] и [32]. Што се тиче теорије графова, следићемо терминологију из [22] и [52]. Уколико неки од појмова није дефинисан или су потребна детаљнија објашњења, читалац их може пронаћи у овим књигама.

1.1 Основни појмови и терминологија

1.1.1 Појмови из теорије комутативних прстена

Уколико се не нагласи другачије, прстен R у овом раду биће увек комутативан прстен са јединицом и $R^* = R \setminus \{0\}$. Елемент $a \in R$ је *делитељ нуле* ако је $ab = 0$ за неко $b \in R^*$. Са $Z(R)$ означавамо скуп делитеља нуле прстена R и са $Z(R)^* = Z(R) \setminus \{0\}$ скуп *правих делитеља нуле*. $\mathrm{Reg}(R)$ је скуп *регуларних* елемената прстена R, $\mathrm{Reg}(R) = R \setminus Z(R)$ и

$\mathrm{Nil}(R)$ је идеал његових нилпотентних елемената. Скупове инвертибилних и идемпотентних елемената прстена R означавамо редом са $\mathrm{U}(R)$ и $\mathrm{Id}(R)$. За прстен полинома, формалних редова и идеализацију R-модула M користимо стандардне ознаке $R[X]$, $R[[X]]$ и $R(+)M$. Идеал прстена R генерисан елементима $x_1, \ldots, x_k$ означаваћемо са $(x_1, \ldots, x_k)$, или са $\langle x_1, \ldots, x_k \rangle$ ако прва ознака може довести до забуне или закомпликовати запис.

Значајан део овог рада ослања се на Артинове прстене, специјално и на коначне прстене. Ово је највише изражено у деловима где испитујемо род неког графа придруженог прстену. Истакнимо овде једну корисну теорему о структури Артинових прстена.

Теорема 1. [10, теорема 8.7]*Артинов прстен R изоморфан је коначном директном производу $R_1 \times \cdots \times R_n$ Артинових локалних прстена R_i.*

Постоје нека размимоилажења разних аутора у дефиницији локалног прстена. Ми ћемо овде следити терминологију из [32]; комутативан прстен са јединственим максималним идеалом је *квазилокалан*; прстен је *локалан* ако је Нетерин квазилокалан. Артинови локални прстени имају релативно просту структуру, па се горња декомпозиција Артиновог прстена показује корисном при свођењу одређеног компликованијег проблема на нижи ниво. Специјално, ово важи и за све коначне прстене. Није тешко видети да за коначне локалне прстене важи следеће корисно тврђење.

Тврђење 2. [2, примедба 1.1]*Нека је R коначан локалан прстен са максималним идеалом M. Тада постоји прост број p и позитивни цели бројеви t, l, k такви да је $\mathrm{char}(R) = p^t$, $|M| = p^l$, $|R| = p^k$ и $\mathrm{char}(R/M) = p$.*

Прстен R који није домен и има коначно много делитеља нуле мора бити коначан. За такав прстен R важи $|R| \leq |Z(R)|^2$. Истакнимо ову теорему у оригиналној верзији.

Теорема 3. [24, теорема 1]*Комутативан прстен R са n ($n \geq 1$) правих делитеља нуле мора бити коначан и не садржи више од $(n+1)^2$ елемената.*

Веома практичне резултате у вези коначних прстена дали су Корбас и Вилијамс. Они су класификовали до на изоморфизам све коначне комутативне прстене до реда p^5, за прост број p. Ова анализа је веома детаљна па те резултате нећемо овде експлицитно наводити. По потреби ћемо се позивати на поједине делове тих радова. Целокупне резултате читалац може наћи у радовима [19, 20].

1.1.2 Појмови из теорије графова

Под појмом *граф* у овом раду увек подразумевамо прост неоријентисан граф без петљи. Граф G је уређен пар (V, E), где је $E \subseteq [V]^2$ и $[V]^2$ је скуп свих 2-елементних подскупова од V. Ако су G и G' графови, онда је G' подграф графа G ако је $V' \subseteq V$ и $G' \subseteq G$. Ако G' садржи све ивице $xy \in E$ за $x, y \in V'$ (ивицу $\{x, y\}$ означавамо са xy), кажемо да је G' *индуковани подграф* од G. Користимо ознаку $G[V']$ за индуковани подграф генерисан са V'. Ако је $F \subseteq [V]^2$, онда је $G - F := (V, E \setminus F)$. Графови G и H су изоморфни ако постоји бијекција $f : V(G) \to V(H)$ таква да су темена x и y суседна у G акко су темена $f(x)$ и $f(y)$ суседна у H.

Степен темена x, у ознаци $\deg(x)$, је број темена у G суседних темену x и $\delta(G) = \min\{\deg(v) \mid v \in V(G)\}$ је *минималан степен* графа G. Ако сва темена графа G имају степен $k = \delta(G)$, граф G је *k-регуларан.* Два темена x и y у G су *повезана* ако постоји пут у G чија је почетна тачка x и крајња y. Ако су свака два темена из G повезана, кажемо да је граф G *повезан. Растојање* $\mathrm{d}(x, y)$ темена $x, y \in G$ је дужина најкраћег пута од x до y ако су темена x и y повезана ($\mathrm{d}(x, y) = \infty$ ако такав пут не постоји). *Дијаметар* графа G је

$$\mathrm{diam}(G) = \sup\{\mathrm{d}(x, y) \mid x, y \in V(G)\}.$$

Ексцентрицитет темена x је растојање до њему најудаљенијег темена,

$e(x) = \max\{d(x, y) \mid y \in V(G)\}$. Ако је $\mathrm{diam}(G)$ коначан, занимљиво је видети колики је најмањи ексцентрицитет темена у G. Темена у G најмањег ексцентрицитета образују *центар* графа G. Дефинише се *радијус* графа G као $r(G) = \min\{e(x) \mid x \in V(G)\}$. На тај начин радијус графа је најмањи ексцентрицитет, док је дијаметар повезаног графа једнак највећем ексцентрицитету неког темена. За повезане графове дијаметра d и радијуса r важи $r \leq d \leq 2r$. *Цикл* (*контура*) C_n дужине n у G је пут

$$x_1 — x_2 — \cdots — x_n — x_1,$$

где је $x_i \neq x_j$ када је $i \neq j$ и $n \geq 3$. *Обим* графа G, у ознаци $\mathrm{gr}(G)$, дефинише се као дужина најкраће контуре у G ако G садржи контуру; у супротном $\mathrm{gr}(G) = \infty$. Повезан граф без контура је *стабло*. Контура која пролази кроз свако теме графа тачно једном је *Хамилтонова контура*. Граф G је Хамилтонов ако садржи Хамилтонову контуру. Контура која пролази сваку ивицу графа тачно једном је *Ојлерова контура*. Граф G је Ојлеров ако садржи Ојлерову контуру. Познато је да је повезан неоријентисан граф са бар једном ивицом Ојлеров акко су му сва темена парног степена.

Ако је $E(G) = [V]^2$, онда је G *комплетан* граф. Ако је скуп $V(G)$ дисјунктна унија скупова A и B таквих да је $|A| = m$, $|B| = n$, и тако да су два темена суседна акко она припадају различитим скуповима, онда је граф G *комплетан бипартитан* граф. За комплетне и комплетно бипартитне графове користимо ознаке K^n и $K_{m,n}$ редом. У овом раду допуштамо да неки од m и n буде бесконачан кардинал. Специјално, $K_{1,n}$ је *звезда* граф.

Подскуп $S \subseteq V(G)$ је *клика* ако је индуковани подграф генерисан са S комплетан. *Клика број* графа G, у ознаци $\mathrm{cl}(G)$, је највећи цео број $r \geq 1$ такав да је $K^r \subseteq G$. Ако је $K^r \subseteq G$ за сваки цео број $r \geq 1$, онда је $\mathrm{cl}(G) = \infty$. *Хроматски број* графа G, у ознаци $\chi(G)$, је минималан број боја потребних за бојење темена из G тако да никоја два суседна темена нису обојена истом бојом. Увек наравно важи $\mathrm{cl}(G) \leq \chi(G)$.

Нека је n ненегативан цео број и S_n оријентабилна површ рода n. *Род* графа G, у ознаци $\gamma(G)$, је најмање n тако да се G може утопити у S_n. Ако се G утапа у површ S_k, компоненте од $S_k - G$ зовемо *областима*. *Триангулација* површи S_k је утапање у коме све области имају границу која се састоји од тачно 3 ивице. За коначан повезан граф G рода g са n темена и m ивица важи Ојлерова формула

$$n - m + f = 2 - 2g, \tag{1.1.1}$$

где је f број области добијених (минималним) утапањем G у површ рода g.

Ако се граф G може представити у равни тако да му се ивице не секу, онда је G рода 0 или *планаран*; ако се исто то може урадити на торусу, G је рода 1 или *тороидалан*. Ако је H подграф графа G, онда је $\gamma(H) \leq \gamma(G)$.

Како је планарност једна од фундаменталних особина графа, добро је знати који графови су планарни а који нису. Позната теорема Куратовског даје просту карактеризацију ових графова.

Теорема 4. [33]*Граф је планаран акко не садржи потподелу од K^5 или $K_{3,3}$.*

За испитивање рода неког графа често је погодно посматрати његове комплетне или комплетно бипартитне подграфове. Истакнимо овде познате резултате о роду ових графова на које ћемо се касније позивати. Означимо са $\lceil x \rceil$ најмањи цео број који је већи или једнак од x. Важи следеће тврђење.

Тврђење 5. [48, 49]

$$\gamma(K^n) = \left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\rceil, \text{ ако је } n \geq 3. \tag{1.1.2}$$

$$\gamma(K_{m,n}) = \left\lceil \frac{(m-2)(n-2)}{4} \right\rceil, \text{ ако је } m, n \geq 2. \tag{1.1.3}$$

Према претходном тврђењу K^n је планаран за $n \leq 4$ и тороидалан за $5 \leq n \leq 7$. Графови $K_{3,n}$ (за $3 \leq n \leq 6$) и $K_{4,4}$ су тороидални. Користећи једнакост 1.1.1 и неке комбинаторне идентитете може се показати да важи следеће тврђење ([54, теорема 2.1]).

Тврђење 6. *Нека је G прост граф са n темена, где је $n \geq 3$. Нека је $\gamma(G) = g$ и $\delta(G)$ минималан степен графа G. Тада је*

$$\delta(G) \leq 6 + \frac{12g - 12}{n},$$

где једнакост важи акко утапање представља триангулацију површи.

Последица 7. *Нека је G прост граф са n ($n \geq 3$) темена.*

1) *Ако је $\gamma(G) = 0$, онда је $\delta(G) \leq 5$, тј. постоји теме x, такво да је* $\deg(x) \leq 5$.

2) *Ако је $\gamma(G) = 1$, онда је $\delta(G) \leq 6$, тј. постоји теме x, такво да је* $\deg(x) \leq 6$. *Штавише, $\delta(G) = 6$ акко је G триангулација торуса која је* 6-*регуларна.*

ГЛАВА 2

ТОТАЛНИ ГРАФ КОМУТАТИВНОГ ПРСТЕНА

У овој глави дати су неки нови резултати у вези са тоталним графом комутативног прстена. Најпре се дискутује одређивање радијуса тоталног графа комутативног прстена са јединицом R када је овај граф повезан. Даље се разматрају нека типична раширења, као што су: прстен полинома, прстен формалних редова над R, идеализација R-модула M и прстен матрица $M_n(R)$. Посматрају се везе тоталних графова прстена и тоталних графова његових раширења.

2.1 Дефиниција тоталног графа

Нека је R комутативан прстен са јединицом и нека је $Z(R)$ скуп његових делитеља нуле. *Тотални граф* $T(\Gamma(R))$ дефинише се на следећи начин:

$$V(T(\Gamma(R))) := R, \quad E(T(\Gamma(R))) := \{\{r_1, r_2\} : r_1 + r_2 \in Z(R)\},$$

где $V(T(\Gamma(R)))$ ($E(T(\Gamma(R)))$) означава скуп темена (ивица) графа $T(\Gamma(R))$.

Граф $T(\Gamma(R))$ дефинисан је у раду [7]. У овоме раду ради лакшег записа уместо $T(\Gamma(R))$ користићемо ознаку $\mathrm{T}\Gamma(R)$.

Карактеристике $\mathrm{T}\Gamma(R)$ природно зависе од тога да ли је $Z(R)$ идеал у R или не, па се у зависности од тога његове особине увек одвојено испитују. За прстене у којима делитељи нуле не образују идеал $\mathrm{T}\Gamma(R)$ има сложену структуру која је са алгебарског гледишта занимљива за проучавање. Тотални граф $\mathrm{T}\Gamma(R)$ увек садржи индуковане подграфове $\mathrm{Reg}(\Gamma(R))$, $\mathrm{Z}(\Gamma(R))$ и $\mathrm{Nil}(\Gamma(R))$ са теменима редом у $\mathrm{Reg}(R)$, $Z(R)$ и $\mathrm{Nil}(R)$. Ови подграфови доста говоре о његовој структури.

Када је $Z(R)$ идеал у R, структура $\mathrm{T}\Gamma(R)$ је релативно проста и може се прецизно описати. Из дефиниције непосредно следи да је $\mathrm{T}\Gamma(R)$ тада неповезан и да представља дисјунктну унију комплетног подграфа $\mathrm{Z}(\Gamma(R))$ и подграфа $\mathrm{Reg}(R)$. У том случају једино је $\mathrm{Reg}(R)$ занимљив за проучавање. Његова структура потпуно је описана теоремом 8. Теореме 9 и 10 су њене директне последице.

Теорема 8. [7, теорема 2.2]*Нека је R комутативан прстен такав да је $Z(R)$ идеал у R, и нека је $|Z(R)| = \alpha$ и $|R/Z(R)| = \beta$ (допуштено је да α и β буду и бесконачни кардинали).*

1) *Ако $2 \in Z(R)$, онда је* $\mathrm{Reg}(R)$ *унија $\beta - 1$ дисјунктних K^{α}.*

2) *Ако $2 \notin Z(R)$, онда је* $\mathrm{Reg}(R)$ *унија $(\beta - 1)/2$ дисјунктних $K_{\alpha,\alpha}$.*

Овде наравно важи $\beta - 1 = (\beta - 1)/2 = \beta$, за бесконачан кардинал β.

Теорема 9. [7, теорема 2.4]*Нека је R комутативан прстен такав да је $Z(R)$ идеал у R. Тада*

1) $\mathrm{Reg}(R)$ *је комплетан акко $R/Z(R) \cong \mathbb{Z}_2$ или $R \cong \mathbb{Z}_3$.*

2) $\mathrm{Reg}(R)$ *је повезан акко $R/Z(R) \cong \mathbb{Z}_2$ или $R/Z(R) \cong \mathbb{Z}_3$.*

3) $\mathrm{Reg}(R)$ *(дакле и* $\mathrm{Z}(\Gamma(R))$ *и* $\mathrm{T}\Gamma(R)$*) је тотално неповезан акко је R домен и* $\mathrm{char}(R) = 2$.

Теорема 10. [7, теорема 2.5]*Нека је R комутативан прстен такав да је $Z(R)$ идеал у R. Тада*

1) $\operatorname{diam}(\operatorname{Reg}(R)) = 0, 1, 2$ *или* ∞.

Специјално, $\operatorname{diam}(\operatorname{Reg}(R)) \leq 2$ *ако је* $\operatorname{Reg}(R)$ *повезан.*

2) $\operatorname{gr}(\operatorname{Reg}(R)) = 3, 4$ *или* ∞.

Специјално, $\operatorname{gr}(\operatorname{Reg}(R)) \leq 4$ *ако* $\operatorname{Reg}(R)$ *садржи контуру.*

Када делитељи нуле не чине идеал структура тоталног графа $T\Gamma(R)$ не може се тако прецизно описати као у првом случају. Подграфови $\mathrm{Z}(\Gamma(R))$ и $\operatorname{Reg}(\Gamma(R))$ у овом случају нису дисјунктни, јер постоје $x, y \in Z(R)$ такви да $x + y \notin Z(R)$. Темена $-x \in Z(R)$ и $x + y \in \operatorname{Reg}(R)$ тада су суседна. Приметимо да овде мора да важи $|Z(R)| \geq 3$. Истакнимо неколико битних резултата о структури $T\Gamma(R)$ када $Z(R)$ није идеал.

Теорема 11. [7, теорема 3.3]*Нека је R комутативан прстен такав да $Z(R)$ није идеал у R. Тада је* $T\Gamma(R)$ *повезан акко је $\langle Z(R) \rangle = R$ (тј. $R = \langle z_1, \ldots, z_n \rangle$ за неке $z_1, \ldots, z_n \in Z(R)$). Специјално, ако је R коначан комутативан прстен и $Z(R)$ није идеал у R, онда је* $T\Gamma(R)$ *повезан.*

Теорема 12. [7, теорема 3.4]*Нека је R комутативан прстен такав да $Z(R)$ није идеал у R и $\langle Z(R) \rangle = R$ (тј.* $T\Gamma(R)$ *је повезан). Нека је $n \geq 2$ најмањи природан број такав да је $R = \langle z_1, \ldots, z_n \rangle$ за неке $z_1, \ldots, z_n \in Z(R)$. Тада је* $\operatorname{diam}(T\Gamma(R)) = n$*. Специјално, ако је R коначан комутативан прстен и $Z(R)$ није идеал у R, онда је* $\operatorname{diam}(T\Gamma(R)) = 2$.

Последица 13. [7, последица 3.5]*Нека је R комутативан прстен такав да $Z(R)$ није идеал у R и претпоставимо да је* $T\Gamma(R)$ *повезан. Тада*

1) $\operatorname{diam}(T\Gamma(R)) = \mathrm{d}(0, 1)$.

2) *Ако је* $\operatorname{diam}(T\Gamma(R)) = n$, *онда је* $\operatorname{diam}(\operatorname{Reg}(\Gamma(R))) \geq n - 2$.

2.2 Радијус тоталног графа

2.2.1 $Z(R)$ је идеал у R

Како је $Z(R)$ увек унија простих идеала прстена R [32, теорема 2], у случају да је $Z(R)$ идеал, он мора бити прост. Приметимо да је у том случају индуковани подграф $\mathrm{Z}(\Gamma(R))$ комплетан; дакле,

$$r(\mathrm{Z}(\Gamma(R))) = \mathrm{diam}(\mathrm{Z}(\Gamma(R))) = 1.$$

Међутим, тада је тотални граф $\mathrm{T}\Gamma(R)$ неповезан јер теме $x \in Z(R)$ није суседно ни са једним $y \in \mathrm{Reg}(R)$ (у супротном, $x + y \in Z(R)$ доводи до контрадикције $y = x + y - x \in Z(R)$). Како је $\mathrm{T}\Gamma(R)$ неповезан нема смисла говорити о његовом радијусу, али можемо размотрити радијус подграфа регуларних елемената. Структура $\mathrm{Reg}(\Gamma(R))$ описана је у теореми 8. Према теореми 9, $\mathrm{Reg}(\Gamma(R))$ је повезан акко је $R/Z(R) \cong \mathbb{Z}_2$ или $R/Z(R) \cong \mathbb{Z}_3$.

У првом случају $\mathrm{Reg}(\Gamma(R))$ је комплетан граф K^α, где је $\alpha = |Z(R)|$, па је

$$r(\mathrm{Reg}(\Gamma(R))) = \mathrm{diam}(\mathrm{Reg}(\Gamma(R))) = 1\,.$$

У другом случају $\mathrm{Reg}(\Gamma(R))$ је комплетан бипартитан граф $K_{\alpha,\alpha}$, па је

$$r(\mathrm{Reg}(\Gamma(R))) = \mathrm{diam}(\mathrm{Reg}(\Gamma(R))) = 2\,.$$

2.2.2 $Z(R)$ није идеал у R

Ако је R комутативан прстен такав да $Z(R)$ није идеал у R и ако је $\mathrm{T}\Gamma(R)$ повезан, одређивање његовог радијуса постаје сложеније. Ако делитељи нуле не образују идеал, онда се за сваки природан број n може конструисати прстен R_n такав да је $\mathrm{diam}(\mathrm{T}\Gamma(R_n)) = n$ [7, пример 3.8].

Како сада постоје прстени чији тотални графови имају произвољно велики дијаметар, природно је поставити питање шта се дешава са радијусом тоталног графа. Одговор је помало неочекиван, видећемо да је радијус увек једнак дијаметру. Као мотивација могу нам послужити коначни комутативни прстени код којих $Z(R)$ није идеал. Према теореми 12, ако је R коначан и $Z(R)$ није идеал у R, онда је $\mathrm{diam}(\mathrm{T}\Gamma(R)) = 2$.

Теорема 14. *Нека је R коначан комутативан прстен са јединицом у коме $Z(R)$ није идеал. Тада је $r(\mathrm{T}\Gamma(R)) = 2$.*

Доказ: Како је $d = \mathrm{diam}(\mathrm{T}\Gamma(R)) = 2$, биће $r = r(\mathrm{T}\Gamma(R)) \leq 2$, па је довољно доказати да је $r \neq 1$. Претпоставимо супротно, нека је $r = 1$. Тада постоји $x \in R$такво да је $e(x) = 1$, тј. x је суседно сваком темену графа. Одавде је $x \in Z(R)$ (x је суседно са 0). Тачније $x \in Z(R)^*$, јер би у супротном 1 било суседно са 0, тј. R би онда био нула прстен.

Даље, како $Z(R)$ није идеал, постоје $a, b \in Z(R)$ такви да $a+b \in \mathrm{Reg}(R)$. При томе важи да је $x \neq a$; у супротном, како је $e(x) = 1$, теме x било би суседно и темену b, што доводи до контрадикције $x + b = a + b \in Z(R)$. Слично, $x \neq b$. Тада је очигледно и $x \neq a + b$, јер су $\mathrm{Reg}(R)$ и $Z(R)$ дисјунктни скупови.

Теме $c = -x + a + b$ не припада скупу $\{a, b, 0\}$ и суседно је са x. Важи $x + c \in Z(R)$, односно $x - x + a + b = a + b \in Z(R)$, што је у супротности са претпоставком да $a + b \in \mathrm{Reg}(R)$. Овим су испитане све могућности, па радијус мора бити 2. $\square$

Напомена 15. Претходне теорема је последица теореме 16, али је њен доказ овде дат као мотивација за општији случај.

Нека је R комутативан прстен са јединицом у коме $Z(R)$ није идеал. Према теореми 11, $\mathrm{T}\Gamma(R)$ је повезан акко је R адитивно генерисан својим делитељима нуле. Дакле $\langle Z(R) \rangle = R$, тј. $R = \langle z_1, \ldots, z_n \rangle$ за неке $z_1, \ldots, z_n \in Z(R)$. Према теореми 12 и последици 13, $\mathrm{diam}(\mathrm{T}\Gamma(R)) = n = \mathrm{d}(0, 1)$ за минималан број таквих генератора. Докажимо сада да је под тим условима радијус тоталног графа једнак његовом дијаметру.

Теорема 16. *Нека је R комутативан прстен са јединицом такав да $Z(R)$ није идеал у R и нека је $n \geq 2$ најмањи природан број такав да је $R = \langle z_1, \ldots, z_n \rangle$, за неке $z_1, \ldots, z_n \in Z(R)$. Тада је $r(\mathrm{T}\Gamma(R)) = n$.*

Доказ: Из датих услова $\mathrm{diam}(\mathrm{T}\Gamma(R)) = n$, па је свакако $r = r(\mathrm{T}\Gamma(R)) \leq n$. Довољно је само доказати да неједнакост $r \leq n-1$ није могућа.

Нека је $r \leq n-1$. Тада постоји $x \in R$ такав да је $e(x) \leq n-1$, тј. за свако $y \in R$, $\mathrm{d}(x, y) \leq n-1$. Специјално, $\mathrm{d}(x, 1+x) \leq n-1$ и $\mathrm{d}(x, 1-x) \leq n-1$. Нека је:

$$x — s_1 — s_2 — \cdots — s_{k-2} — 1 + (-1)^{k-1}x,$$

пут дужине $k-1 \leq n-1$ у $\mathrm{T}\Gamma(R)$. Тако добијамо $k-1$ делитеља нуле $x+s_1\,,\ s_1+s_2\,,\ \ldots\,,\ s_{k-3}+s_{k-2}\,,\ s_{k-2}+1+(-1)^{k-1}x$, за које важи:

$$\langle x+s_1\,,\ s_1+s_2\,,\ \ldots\,,\ s_{k-3}+s_{k-2}\,,\ s_{k-2}+1+(-1)^{k-1}x \rangle \subseteq \langle Z(R) \rangle = R.$$

Како $1 \in \langle x+s_1\,,\ s_1+s_2\,,\ \ldots\,,\ s_{k-3}+s_{k-2}\,,\ s_{k-2}+1+(-1)^{k-1}x \rangle$, мора да важи:

$$\langle x+s_1\,,\ s_1+s_2\,,\ \ldots\,,\ s_{k-3}+s_{k-2}\,,\ s_{k-2}+1+(-1)^{k-1}x \rangle = R.$$

Прстен R се дакле адитивно може генерисати са $k-1$ делитеља нуле што противречи претпоставци о минималном броју генератора. □

2.3 Тотални граф неких раширења прстена

2.3.1 Прстен полинома

Нека је R комутативан прстен и $R[X]$ прстен полинома. Приметимо најпре да за делитеље нуле увек важи

$$Z(R) \subseteq Z(R[X]) \subseteq Z(R)[X].$$

Друга инклузија може бити права, нпр. $2+3x \in Z(\mathbb{Z}_6)[X] \setminus Z(\mathbb{Z}_6[X])$. Јасно је да је и прва инклузија права. Позната теорема Мек Која потпуно описује делитеље нуле прстена полинома: $f(x) \in Z(R[X])$ акко постоји $r \in R^*$ такав да је $rf(x) = 0$. Дакле, осим што коефицијенти морају бити делитељи нуле, потребно је и да идеал генерисан њима има ненула анулатор. У складу са тим кажемо да је R *Мек Којев прстен* акко за сваки коначно генерисани идеал $I \subseteq Z(R)$ важи $\mathrm{Ann}(I) \neq 0$. Добро је познато да је прстен полинома $R[X]$ увек Мек Којев.

Структура тоталног графа прстена полинома $\mathrm{T}\Gamma(R[X])$ зависиће од тога да ли је $Z(R[X])$ идеал у $R[X]$. Према [35, теорема 3.3] $Z(R[X])$ је идеал у $R[X]$ акко је R Мек Којев прстен у коме је $Z(R)$ идеал. Користећи овај резултат можемо описати структуру тоталног графа прстена полинома. Посматрамо два случаја.

1) $Z(R[X])$ је идеал у $R[X]$.

Очигледно је онда подграф делитеља нуле $\mathrm{Z}(\Gamma(R[X]))$ комплетан. Тада важи $Z(R[X]) = Z(R)[X]$, па је

$$R[X]/Z(R[X]) = R[X]/Z(R)[X] \cong (R/Z(R))\,[X].$$

Са десне стране је прстен полинома који не може бити изоморфан ни са $\mathbb{Z}_2$ ни са $\mathbb{Z}_3$. Према теореми 9, $\mathrm{Reg}(\Gamma(R[X]))$ није повезан. Из претходне анализе може се окарактерисати структура тоталног графа прстена полинома у којима делитељи нуле чине идеал.

Теорема 17. *Нека је R комутативан Мек Којев прстен такав да је $Z(R)$ идеал у R. Тада је $\mathrm{T}\Gamma(R[X])$ неповезан. Индуковани подграф $\mathrm{Z}(\Gamma(R[X]))$ је комплетан, док је $\mathrm{Reg}(\Gamma(R[X]))$ неповезан.*

Напомена 18. Како је $R[x]$ увек Мек Којев прстен и $R[X, Y] = R[X][Y]$, то се уз претпоставке да је R Мек Којев и да је $Z(R)$ идеал у R, из претходног непосредно добија да је $\mathrm{Reg}(\Gamma(R[X, Y]))$ неповезан.

2) $Z(R[X])$ није идеал у $R[X]$.

Лема 19. *Нека је R комутативан прстен такав да $Z(R)$ није идеал у R. Тада важи:*

$$\langle Z(R[X])\rangle = R[X] \quad \textit{акко} \quad \langle Z(R)\rangle = R.$$

Доказ: Нека је $\langle Z(R[X])\rangle = R[X]$. Тада постоје полиноми $f_1(X), \ldots, f_n(X) \in Z(R[X])$ такви да је $R[X] = \langle f_1(X), \ldots, f_n(X)\rangle$ и $f_1(X) + \cdots + f_n(X) = 1$. Одавде је $z_1 + \cdots + z_n = 1$, где су $z_1, \ldots, z_n$ константни коефицијенти ових полинома. Како је $Z(R[X]) \subseteq Z(R)[X]$, сви коефицијенти ових полинома су делитељи нуле. Дакле, $z_1, \ldots, z_n \in Z(R)$. Одавде је $R = \langle Z(R)\rangle = \langle z_1, \ldots, z_n\rangle$. Други смер доказа је очигледан. □

Комбинујући лему 19 и теореме 11, 12 и 16 добијамо следећи резултат.

Теорема 20. *Нека је R комутативан прстен такав да $Z(R)$ није идеал у R. Тада је $\mathrm{T}\Gamma(R[X])$ повезан акко је $\mathrm{T}\Gamma(R)$ повезан, тј. постоје $z_1, \ldots, z_n \in Z(R)$ такви да је $R = \langle Z(R)\rangle = \langle z_1, \ldots, z_n\rangle$. Ако је n минималан број таквих генератора, онда је*

$$\mathrm{diam}(\mathrm{T}\Gamma(R[X])) = r(\mathrm{T}\Gamma(R[X])) = n\,.$$

2.3.2 Прстен формалних редова

Иако сродни по конструкцији, прстени полинома и формалних редова поред бројних заједничких особина имају и неке које их битно разликују. Такав је случај и са делитељима нуле – теорема Мек Која не мора да важи у прстену $R[[X]]$. У раду [23], Филдс је презентовао формални ред са инвертибилним коефицијентом који је прави делитељ нуле. Овим примером показано је да за разлику од прстена полинома овде не мора да важи $Z(R[[X]]) \subseteq Z(R)[[X]]$. Наравно, не важи ни обратно. Узрок овоме су нилпотентни елементи. Наиме, за редукован прстен R, у раду [25] показано је да $f(X) \in Z(R[[X]])$ акко постоји $z \in Z(R)^*$ такав да је

$zf(X) = 0$. Проблематиком одређивања дијаметра графова $\Gamma(R[X])$ и $\Gamma(R[[X]])$ баве се радови [11] и [35]. Аутори су у потпуности окарактерисали $\mathrm{diam}(\Gamma(R[X]))$ за произвољан прстен R и $\mathrm{diam}(\Gamma(R[[X]]))$ за редукован прстен R. За нередуковане прстене проблем одређивања дијаметра није решен.

Даље разматрамо редукован прстен R и анализирамо одговарајући тотални граф $T\Gamma(R[[X]])$. Прво питање које се природно поставља је када је $Z(R[[X]])$ идеал у $R[[X]]$. Претпоставимо зато да је $Z(R)$ идеал у R. Тада важи $Z(R[[X]]) \subseteq Z(R)[[X]]$. Овде ће важити једнакост акко је R *пребројиво Мек Којев*, тј. сваки пребројиво генерисани идеал $I \subseteq Z(R)$ има ненула анулатор. Тако долазимо до резултата који ћемо исказати у облику следеће леме.

Лема 21. *Нека је R редукован, пребројиво Мек Којев прстен такав да је $Z(R)$ идеал у R. Тада је $Z(R[[X]])$ идеал у $R[[X]]$ и важи $Z(R[[X]]) = Z(R)[[X]]$.*

Под овим условима је

$$R[[X]]/Z(R[[X]]) = R[[X]]/Z(R)[[X]] \cong (R/Z(R))\,[[X]].$$

Десна страна није изоморфна ни са $\mathbb{Z}_2$ ни са $\mathbb{Z}_3$, па се може формулисати теорема слична оној код полинома.

Теорема 22. *Нека је R редукован, пребројиво Мек Којев прстен такав да је $Z(R)$ идеал у R. Тада $T\Gamma(R[[X]])$ није повезан, индуковани подграф $\mathrm{Z}(\Gamma(R[[X]]))$ је комплетан и $\mathrm{Reg}(\Gamma(R[[X]]))$ је неповезан.*

На потпуно исти начин као и код полинома доказује се да за редуковани прстен R у коме $Z(R)$ није идеал, важи

$$\langle Z(R[[X]])\rangle = R[[X]] \quad \text{акко} \quad \langle Z(R)\rangle = R.$$

Тако добијамо следећу теорему.

Теорема 23. *Нека је R редукован комутативан прстен такав да $Z(R)$ није идеал у R. Тада је* $\mathrm{T}\Gamma(R[[X]])$ *повезан акко је* $\mathrm{T}\Gamma(R)$ *повезан, тј. постоје* $z_1, \ldots, z_n \in Z(R)$ *такви да је* $R = \langle Z(R) \rangle = \langle z_1, \ldots, z_n \rangle$. *Ако је* $n \geq 2$ *минимални број таквих генератора, онда је*

$$\mathrm{diam}(\mathrm{T}\Gamma(R[[X]])) = r(\mathrm{T}\Gamma(R[[X]])) = n.$$

2.3.3 Идеализација

Техника идеализације модула веома је важна при конструкцији разних прстена са делитељима нуле. Нека је R комутативан прстен и M R-модул. Операције на $R \times M$ дефинишемо са:

$$(r_1, m_1) + (r_2, m_2) = (r_1 + r_2, m_1 + m_2)\,,$$

$$(r_1, m_1)(r_2, m_2) = (r_1 r_2, r_1 m_2 + r_2 m_1)\,.$$

Добијени комутативан прстен зовемо *идеализацијом модула M над R*, у ознаци $R(+)M$. Овом конструкцијом R-модул M можемо видети као идеал $0(+)M$ прстена $R(+)M$. Како је $(0, m_1)(0, m_2) = (0, 0)$, то је овај идеал нилпотентан индекса 2. Приметимо такође да идентификујући $m \in M$ са $(0, m) \in R(+)M$, све елементе модула видимо као делитеље нуле у идеализацији. Разни аспекти идеализације детаљно су испитани и описани у [5], док се особинама графа $\Gamma(R(+)M)$ баве радови [9] и [12]. Предмет нашег разматрања је тотални граф $\mathrm{T}\Gamma(R(+)M)$. Према [29, теорема 25.3], делитељи нуле у идеализацији су:

$$Z(R(+)M) = \{(r, m) \mid r \in Z(R) \cup Z(M),\, m \in M\}\,.$$

Основна питања којима се бавимо су особине тоталног графа $\mathrm{T}\Gamma(R(+)M)$, његових подграфова $\mathrm{Z}(\Gamma(R(+)M))$ и $\mathrm{Reg}(\Gamma(R(+)M))$ и њихове везе са одговарајућим полазним графом $\mathrm{T}\Gamma(R)$ и пографовима $\mathrm{Z}(\Gamma(R))$ и $\mathrm{Reg}(\Gamma(R))$. Они се могу мање или више разликовати под одређеним условима. Као мотивацију погледајмо неколико примера.

Пример 24. Идеализација $R(+)R$, где је R комутативан прстен и $M = R$ један R-модул.

Доказаћемо да особине тоталног графа прстена и његове идеализације остају исте.

Нека је $Z(R)$ идеал у R. Као што је већ познато, $\mathrm{T}\Gamma(R)$ је неповезан, $\mathrm{Z}(\Gamma(R))$ је комплетан док је $\mathrm{Reg}(\Gamma(R))$ повезан акко је $R/Z(R) \cong \mathbb{Z}_2$ или $R/Z(R) \cong \mathbb{Z}_3$. Како је $Z(R)$ идеал у R, очигледно је и $Z(R(+)R) = Z(R)(+)R$ идеал у $R(+)R$. Дакле $\mathrm{T}\Gamma(R(+)R)$ је неповезан и $\mathrm{Z}(\Gamma(R(+)R))$ је комплетан. Како је

$$(R(+)R)/(Z(R(+)R)) = (R(+)R)/(Z(R)(+)R) \cong R/Z(R)(+)0 \cong R/Z(R),$$

подграф $\mathrm{Reg}(\Gamma(R(+)R))$ биће повезан акко је $\mathrm{Reg}(\Gamma(R))$ повезан.

Нека $Z(R)$ није идеал у R. Тада ни $Z(R(+)R) = Z(R)(+)R$ није идеал у $R(+)R$. Одавде је $\mathrm{T}\Gamma(R(+)R)$ повезан акко је $\mathrm{T}\Gamma(R)$ повезан и важи $\mathrm{diam}(\mathrm{T}\Gamma(R(+)M)) = \mathrm{diam}(\mathrm{T}\Gamma(R))$. Доказ се може извести поредећи пут $x — s_1 — \cdots — s_n — y$ у $\mathrm{T}\Gamma(R)$, са путевима

$$(x,0) — (s_1,t_1) — \cdots — (s_n,t_n) — (y,0), \;\; (x,a) — (s_1,0) — \cdots — (s_n,0) — (y,b)$$

у $\mathrm{T}\Gamma(R(+)R)$. За извођење видети доказ [7, теорема 3.16].

Пример 25. Идеализација $\mathbb{Z}[X]/(X^2)(+)\mathbb{Z}_{10}$.

Показаћемо да се овде особине графова $\mathrm{T}\Gamma(R)$ и $\mathrm{T}\Gamma(R(+)M)$ значајно разликују. Први је неповезан док је други повезан.

Нека је $R = \mathbb{Z}[X]/(X^2) = \{a + bx \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, где је x одговарајућа класа и $M = \mathbb{Z}_{10}$. Лако је проверити да је M R-модул ако множење дефинишемо са $(a + bx)m := am$. Скуп делитеља нуле $Z(R) = \{ax \mid a \in Z\}$ је (главни) идеал у R, одакле је $\mathrm{T}\Gamma(R)$ неповезан и $\mathrm{Z}(\Gamma(R))$ комплетан. Такође је $R/Z(R) \cong \mathbb{Z}$, па $\mathrm{Reg}(\Gamma(R))$ није повезан.

С друге стране $Z(M) = P \cup Q$, где су $P = 2\mathbb{Z} + \langle x \rangle$ и $Q = 5\mathbb{Z} + \langle x \rangle$ прости идеали. $Z(M)$ није идеал у R. Приметимо да је овде $Z(R) \subseteq Z(M)$. Лако се може видети да онда ни скуп делитеља нуле

$$Z(R(+)M) = \{(z, m) \mid z \in P \cup Q, m \in \mathbb{Z}_{10}\},$$

није идеал у $R(+)M$. Узмимо, на пример $z_1 = (2, 0)$, $z_2 = (5, 0)$. Тада $z_1, z_2 \in Z(R(+)M)$, али $z_1 + z_2 = (7, 0) \in \mathrm{Reg}(R(+)M)$. Даље, како је $(3, 5)z_1 + (-1, 0)z_2 = (1, 0)$, важи да је $\langle Z(R) \rangle = \langle z_1, z_2 \rangle = R(+)M$, па је $\mathrm{T}\Gamma(R(+)M)$ повезан и $\mathrm{diam}(\mathrm{T}\Gamma(R(+)M)) = 2$. Подграф $\mathrm{Z}(\Gamma(R(+)M)$ такође је повезан дијаметра 2. Подграф $\mathrm{Reg}(\Gamma(R(+)M)$ је комплетан, јер ће за (s_1, m_1), $(s_2, m_2) \in \mathrm{Reg}(\Gamma(R(+)M)$ важити $s_1 + s_2 \in P$, односно $(s_1 + s_2, m_1 + m_2) \in \mathrm{Z}(\Gamma(R(+)M))$.

Претходни примери нас мотивишу да видимо под којим условима се особине тоталног графа прстена R преносе на тотални граф идеализације $R(+)M$. Како очигледно увек важи $Z(R)(+)M \subseteq Z(R(+)M)$, прва питања која се постављају су услови под којима важи једнакост, као и услови под којима је тај скуп идеал. У доказима користимо општи резултат о идеалима у идеализацији [5, теорема 3.1]: За идеал I прстена R и подмодул N R-модула M, $I(+)N$ је идеал у $R(+)M$ акко је $IM \subseteq N$. При томе је $(R(+)M)/(I(+)N) \cong (R/I)(+)(M/N)$. Важи следећа теорема.

Теорема 26. *Нека је R комутативан прстен и M неки R-модул такав да је $Z(M) \subseteq Z(R)$. Тада су следећи услови еквивалентни:*

1) *$Z(R(+)M)$ је идеал у $R(+)M$.*

2) *$Z(R)$ је идеал у R.*

При томе важи $Z(R)(+)M = Z(R(+)M)$.

Доказ: Нека је најпре $Z(R)$ идеал у R. Како је $Z(M) \subseteq Z(R)$, биће и $Z(R) \cup Z(M) = Z(R)$, па је $Z(R(+)M) = Z(R)(+)M$. Скуп са десне стране сада је идеал према [5, теорема 3.1].

Нека је сада $Z(R(+)M)$ идеал у $R(+)M$, и нека су $z_1, z_2 \in Z(R)$. Тада $(z_1, 0), (z_2, 0) \in Z(R(+)M)$ па је и $(z_1 + z_2, 0) \in Z(R(+)M)$. Одавде је $z_1 + z_2 \in Z(R) \cup Z(M) = Z(R)$. Слично, ако је $r \in R$ и $z \in Z(R)$, онда је $(r, 0) \in R(+)M$ и $(z, 0) \in Z(R(+)M)$. Биће дакле $(r, 0)(z, 0) = (rz, 0) \in Z(R(+)M)$, па је и $rz \in Z(R) \cup Z(M) = Z(R)$. □

Теорема 27. *Нека је R комутативан прстен такав да је $Z(R)$ идеал у R и нека је M R-модул за који је $Z(M) \subseteq Z(R)$. Тада је* $\mathrm{T}\Gamma(R(+)M)$ *неповезан,* $\mathrm{Z}(\Gamma(R(+)M))$ *је комплетан, док је* $\mathrm{Reg}(\Gamma(R(+)M))$ *повезан акко је* $\mathrm{Reg}(\Gamma(R))$ *повезан.*

Доказ: Из претходне теореме и [7, теорема 2.1], добијамо да је $\mathrm{T}\Gamma(R(+)M)$ неповезан и $\mathrm{Z}(\Gamma(R(+)M))$ комплетан. Даље,

$$(R(+)M)/(Z(R(+)M)) = (R(+)M)/(Z(R)(+)M) \cong R/Z(R)(+)0 \cong R/Z(R).$$

Одавде је $\mathrm{Reg}(\Gamma(R(+)M))$ повезан акко је $\mathrm{Reg}(\Gamma(R))$ повезан. □

Случај када $Z(R)$ није идеал у R испитан је у [7]. Аутори су доказали да тада из повезаности $\mathrm{T}\Gamma(R)$ следи повезаност графа $\mathrm{T}\Gamma(R(+)M)$ и да је $\mathrm{diam}(\mathrm{T}\Gamma(R(+)M)) \leq \mathrm{diam}(\mathrm{T}\Gamma(R))$ ([7, теорема 3.17]). Под додатним условом $Z(R)(+)M = Z(R(+)M)$ важи и више: $\mathrm{T}\Gamma(R(+)M)$ је повезан акко је $\mathrm{T}\Gamma(R)$ повезан и тада је $\mathrm{diam}(\mathrm{T}\Gamma(R(+)M)) = \mathrm{diam}(\mathrm{T}\Gamma(R))$ ([7, теорема 3.16]).

2.3.4 Матрице

Мада овде излазимо из оквира комутативне алгебре, вредно је испитати и тотални граф прстена матрица $M_n(R)$ над комутативним прстеном

R. Графови делитеља нуле у некомутативном прстену могу се дефинисати на разне начине али уобичајена дефиниција припада Redmondu [47]. За графове прстена матрица над комутативним прстенима видети [14].

Нека је R прстен. $Z_L(R) = \{x \in R \mid xa = 0, \text{за неко } a \in R^*\}$ је скуп левих делитеља нуле, $Z_D(R) = \{x \in R \mid bx = 0, \text{за неко } b \in R^*\}$ скуп десних делитеља нуле и $Z(R) = \{x \in R \mid xy = 0 \text{ или } yx = 0 \text{ за неко } y \in R^*\}$ скуп делитеља нуле у R. Редмонд дефинише усмерени и неусмерени граф, у ознаци $\Gamma(R)$, $\overline{\Gamma}(R)$ редом. Темена оба графа су у $Z(R)^*$, с тим што је $x \to y$ у $\Gamma(R)$ акко је $xy = 0$, док је $x — y$ у $\overline{\Gamma}(R)$ акко $xy = 0$ или $yx = 0$. Према [47, теорема 2.3], граф $\Gamma(R)$ је повезан акко $Z_L(R) = Z_D(R)$ и тада је $\operatorname{diam}(\Gamma(R)) \leq 3$, док је $\overline{\Gamma}(R)$ увек повезан и $\operatorname{diam}(\overline{\Gamma}(R)) \leq 3$, ([47, теорема 3.2]). Дефинисаћемо тотални (неусмерени) граф $\mathrm{T}\Gamma(R)$ некомутативног прстена R на исти начин као и у комутативном случају: темена су сви елементи прстена R и два темена $x, y \in R$ су суседна акко је $x + y \in Z(R)$. Лако се може показати да у случају када је $Z(R)$ идеал за овако дефинисани тотални граф важе резултати аналогни онима у комутативним прстенима.

Нека је сада R комутативан прстен, $n \geq 2$ и $M_n(R)$ прстен квадратних матрица над R. Познато је да у овом прстену важи $A \in Z(M_n(R))$ акко $\det(A) \in Z(R)$ [16, теорема 9.1], па је $Z_L(M_n(R)) = Z_D(M_n(R)) = Z(M_n(R))$. Овај скуп наравно није идеал у $M_n(R)$.

Нека су $A, B \in M_n(R)$ произвољне матрице. Тада ће постојати матрица $C \in M_n(R)$ таква да је $A — C — B$ пут у $\mathrm{T}\Gamma(M_n(R))$. Заиста, за $A = [A_{\downarrow 1}, \ldots, A_{\downarrow n}]$, $B = [B_{\downarrow 1}, \ldots, B_{\downarrow n}]$, бирамо $C = [-A_{\downarrow 1}, -B_{\downarrow 2}, 0, \ldots, 0]$. За овако одабрану матрицу C важи $(A + C)_{\downarrow 1} = 0$, $(C + B)_{\downarrow 2} = 0$. Одавде је $A + C, C + B \in Z(M_n(R))$. На тај начин доказана је следећа теорема.

Теорема 28. *Нека је R комутативан прстен. Тада је $\mathrm{T}\Gamma(M_n(R))$ повезан и $\operatorname{diam}(\mathrm{T}\Gamma(M_n(R))) = 2$.*

ГЛАВА 3

ТОТАЛНИ ГРАФ МОДУЛА

Ова глава бави се уопштењем тоталног графа прстена $T\Gamma(R)$. Ако се на сличан начин дефинише тотални граф $T\Gamma(M)$ произвољног R-модула M показаћемо да је он његова природна генерализација.

Нека је R комутативан прстен са јединицом, уз стандардне ознаке $R^* = R\backslash\{0\}$ и $Z(R)^* = Z(R)\backslash\{0\}$. Нека је M произвољан R-модул, $M^* = M\backslash\{0\}$ и

$$T(M) = \{m \in M \mid rm = 0\,, \text{ за неко } \; r \in R^*\}$$

подскуп његових торзионих елемената. Дефинишемо *тотални граф модула* $T\Gamma(M)$ на следећи начин:

$$V(T\Gamma(M)) := M, \quad E(T\Gamma(M)) := \{\{m_1, m_2\} : m_1 + m_2 \in \mathrm{T}(M)\},$$

где $V(\Gamma)$ $(E(\Gamma))$ означавају темена (ивице) графа Γ.

За $M = R$, тј. када прстен R посматрамо као R-модул, $T(M) = Z(R)$, па добијамо тотални граф прстена $T\Gamma(R)$ дефинисан у [7].

3.1 $T(M)$ је подмодул модула M

Структура тоталног графа $T\Gamma(M)$ може се прецизно описати у случајевима у којима торзиони елементи чине подмодул. Почнимо најпре од крајности $T(M) = M$ и $T(M) = \{0\}$.

Теорема 29. *Тотални граф* $\mathrm{T}\Gamma(M)$ *је комплетан акко је* $T(M) = M$.

Доказ: Ако је $T(M) = M$, онда за свака два темена $m_1, m_2 \in M$ важи $m_1 + m_2 \in T(M)$. Дакле, она су суседна у $\mathrm{T}\Gamma(M)$. С друге стране, ако је $\mathrm{T}\Gamma(M)$ комплетан, онда је свако теме графа суседно са 0. Одавде је $m = m + 0 \in T(M)$, одакле следи тражени резултат. $\square$

Напомена 30. Услов претходне теореме $T(M) = M$ сигурно је задовољен ако је $\mathrm{Ann}(M) \neq 0$. Илуструјмо ово следећим примерима.

Пример 31. Нека је $R = \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ и $M = \mathbb{Z}_n$, R-модул са операцијом дефинисаном са $(a, b) \cdot m := am$. Тада је $\mathrm{Ann}(M) \neq (0, 0)$ јер $(0, b) \in \mathrm{Ann}(M)$, за свако $b \in \mathbb{Z}_m$. Дакле, $\mathrm{T}\Gamma(M)$ је комплетан.

Пример 32. Свака коначна Абелова група M је торзиони $\mathbb{Z}$-модул. Ако је специјално, $R = \mathbb{Z}$ и $M = \mathbb{Z}_n$, R-модул са уобичајено дефинисаним множењем, онда је $\mathrm{T}\Gamma(M) \cong K^n$. То значи да се сви коначни комплетни графови могу реализовати као тотални графови модула.

Погледајмо када се, за разлику од случаја када је $\mathrm{T}\Gamma(M)$ комплетан, добија друга крајност – његова тотална неповезаност. Ако је $T(M) = \{0\}$, онда су темена m_1 и m_2 суседна акко је $m_2 = -m_1$. Ако је при том $M \neq 0$, $\mathrm{T}\Gamma(M)$ је неповезан граф и његове једине ивице су оне које спајају темена m_i и $-m_i$.

Теорема 33. *Нека је* R *комутативан прстен и нека је* M R*-модул. Тада је* $\mathrm{T}\Gamma(M)$ *тотално неповезан акко* $\mathrm{char}(R) = 2$ *и* M *је без торзије.*

Доказ: Ако је $\mathrm{T}\Gamma(M)$ тотално неповезан, онда 0 није суседно ниједном темену, тј. $0 + m = m \notin T(M)$ за свако $m \in M^*$. Дакле $T(M) = \{0\}$, тј.

M је без торзије. Даље, како је $m + (-m) = 0$, из тоталне неповезаности графа следи да је $m = -m$, тј. $2m = 0$ за свако $m \in M$. Како је $T(M) = \{0\}$, мора да важи $2 = 0$, односно $\mathrm{char}(R) = 2$. Обратна импликација је очигледна. $\square$

Лема 34. *Нека је R комутативан прстен, $T(M)$ подмодул R-модула M и $x \in M \backslash T(M)$. Тада важи: $2x \in T(M)$ акко $2 \in Z(R)$.*

Доказ: Нека је најпре $2 \in Z(R)$, тј. постоји $r \in R^*$ такво да је $2r = 0$. Тада $2x \in T(M)$ за свако x, јер је $r(2x) = (2r)x = 0$.

Даље, нека је $2x \in T(M)$. Како $x \notin T(M)$, имамо да је $x \neq 0$ и за свако $r \in R$: $rx = 0 \Rightarrow r = 0$. Како $2x \in T(M)$, постоји $a \in R^*$ за које је $a(2x) = 0$. Одавде је $(2a)x = 0$. Како $x \notin T(M)$, мора бити $2a = 0$, тј. $2 \in Z(R)$. $\square$

Теорема 35. *Нека је R комутативан прстен и M R-модул такав да је $T(M)$ његов прави подмодул. Тада је $\mathrm{T}\Gamma(M)$ неповезан.*

Доказ: Ако је $T(M) = \{0\}$, онда теме 0 очигледно није суседно ниједном темену. Ако $T(M) \neq \{0\}$, онда су подграфови са теменима из $T(M)$ и $M \setminus T(M)$ дисјунктни. Заиста, ако би $x \in T(M)$ и $y \in M \setminus T(M)$ били суседни, онда $x + y \in T(M)$. Будући да је $T(M)$ подмодул, ово доводи до контрадикције $y \in T(M)$. $\square$

Опис структуре графа $\mathrm{T}\Gamma(M)$ када је $T(M)$ прави подмодул сличан је опису структуре графа $\mathrm{T}\Gamma(R)$ када је $Z(R)$ идеал у R. Изнећемо зато доказ у кратким цртама.

Посматрамо количнички модул $M/T(M)$. Нека важи $|T(M)| = \alpha$ и $|M/T(M)| = \beta$, где допуштамо да α и β буду и бесконачни кардинали. Нека су $x, y \in M \setminus T(M)$ такви да је $x + T(M) \neq y + T(M)$. Елементи $x + m_1$, $x + m_2$ истог косета $x + T(M)$ суседни су акко $2x \in T(M)$ (односно $2 \in Z(R)$ према леми 34). Тада $x + m_1$ и $y + m_2$ нису суседни. У супротном, добијамо $x - y = x + y - 2y \in T(M)$, одакле $x + T(M) = y + T(M)$. Како је сваки косет кардиналности α, добијамо да је $\mathrm{T}\Gamma(M)$ дисјунктна унија β комплетних графова K^{α}.

Ако $2 \notin Z(R)$, онда елементи $x+m_1$, $x+m_2$ косета $x+T(M)$ очигледно нису суседни. Елементи $x+m_1$, $y+m_2$ различитих косета суседни су акко $x+y \in T(M)$, односно $y+T(M) = -x+T(M)$. Добијамо да је подграф индукован теменима из $M \setminus T(M)$ дисјунктна унија $(\beta-1)/2$ ($=\beta$, ако је β бесконачан) дисјунктних комплетно бипартитних графова $K_{\alpha,\alpha}$. Важи дакле следећа теорема.

Теорема 36. *Нека је R комутативан прстен и M R-модул такав да је $T(M)$ прави подмодул. Нека је $|T(M)| = \alpha$ и $|M/T(M)| = \beta$.*

1) Ако $2 \in Z(R)$, онда је $\mathrm{T}\Gamma(M)$ *унија β дисјунктних комплетних графова K^α.*

2) Ако $2 \notin Z(R)$, онда је $\mathrm{T}\Gamma(M)$ *унија $\dfrac{\beta-1}{2}$ дисјунктних комплетно бипартитних графова $K_{\alpha,\alpha}$ и једног комплетног графа K^α.*

Пример 37. Узмимо R-модул $M = R \oplus R$.

1) Ако је $R = \mathbb{Z}_4$, онда је $\mathrm{T}\Gamma(M)$ унија 4 дисјунктна K^4.

2) Ако је $R = \mathbb{Z}_9$, онда је $\mathrm{T}\Gamma(M)$ дисјунктна унија једног комплетног графа K^9 и 4 комплетна бипартитна $K_{9,9}$.

Теореме 29 и 36 дају комплетан опис структуре тоталног графа $\mathrm{T}\Gamma(M)$ када је $T(M)$ подмодул. Природно се постављају питања када је $T(M)$ подмодул модула M и у каквој је то вези са случајем када је $Z(R)$ идеал у R. Када је $Z(R) = \{0\}$, тј. ако је R домен, $T(M)$ је наравно подмодул. Доказаћемо да је $T(M)$ подмодул и у нешто општијем случају.

Теорема 38. *Нека је R комутативан прстен. Ако је $Z(R) = \langle z \rangle$ главни идеал и $z \in \mathrm{Nil}(R)$, онда је $T(M)$ подмодул модула M.*

Доказ: Нека је $Z(R) = \langle z \rangle$ и претпоставимо да $T(M)$ није подмодул модула M. Тада постоје $m_1, m_2 \in T(M)$ такви да $m_1 + m_2 \notin T(M)$. Нека за $r_1, r_2 \in R^*$ важи $r_1 m_1 = r_2 m_2 = 0$. Како је онда $r_1 r_2 (m_1 + m_2) = 0$ и $m_1 + m_2 \notin T(M)$, мора да важи $r_1r_2 = 0$, односно $r_1, r_2 \in Z(R)$. Како је $z \in \mathrm{Nil}(R)$, можемо претпоставити да је $r_1 = az^k$ и $r_2 = bz^m$ за неке $a, b \notin Z(R)$. Не умањујући општост, претпоставимо да је $k \geq m$. Тада за елемент $br_1 \in R^*$ важи $br_1(m_1+m_2) = 0$, што је у супротности са претпоставком да елемент m_1+m_2 није торзион. $\square$

Напомена 39. Под претпоставкама претходне теореме следи да је $Z(R) = \mathrm{Nil}(R)$. Нека је R прстен полинома $\mathbb{Z}[X]$. Ако дефинишемо нестандардно множење у R са $p(X) * q(X) = p(0)q(0)$, онда $Z(R) = \mathrm{Nil}(R) = \langle X \rangle$. Тако су испуњени услови теореме 38. Ово је такође испуњено у прстенима $\mathbb{Z}_{p^n}$ за сваки $n \geq 2$ и прост број p. Овде је $Z(R) = \mathrm{Nil}(R) = \langle p \rangle$.

Када делитељи нуле образују идеал који није главни, $T(M)$ не мора бити подмодул, чак иако је $Z(R) = \mathrm{Nil}(R)$. Илуструјмо то следећим примером.

Пример 40. Нека је R локалан прстен $\mathbb{Z}_4[X]/(2X, X^2)$. Лако се проверава да је овде $Z(R) = \mathrm{Nil}(R) = (2, x)$, где је x одговарајућа класа. Нека је $M = R/2R \oplus R/xR$ и нека су $m_1 = (1 + 2R, xR), m_2 = (2R, 1 + xR) \in M$. Тада $m_1, m_2 \in T(M)$, јер је $2m_1 = xm_2 = 0$, док $m_1 + m_2 = (1 + 2R, 1 + xR) \notin T(M)$.

3.2 $T(M)$ није подмодул модула M

Почињемо овај одељак једним интересантним резултатом који повезује тотални граф модула са графом делитеља нуле.

Теорема 41. *Нека је R комутативан прстен такав да је* $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) = 3$. *Тада $T(R \oplus R)$ није подмодул R-модула $R \oplus R$.*

Доказ: Како је $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) = 3$ постоје $r_1, r_2 \in Z(R)^*$ за које је $\mathrm{d}(r_1, r_2) = 3$. Нека је $r_1 — s — t — r_2$ пут у $\Gamma(R)$. Елементи $m_1 = (r_1, 0)$ и $m_2 = (0, r_2)$

припадају $T(R \oplus R)$ јер је $sm_1 = tm_2 = 0$, док $m_1 + m_2 = (r_1, r_2) \notin T(M)$. У супротном, ако $(r_1, r_2) \in T(M)$ постоји $r \in Z(R)^*$ за који је $rr_1 = rr_2 = 0$; ово доводи до контрадикције $\mathrm{d}(r_1, r_2) \leq 2$. $\square$

Нека је M R-модул. У претходном поглављу видели смо да случај када је $Z(R)$ идеал у R може, али не мора да имплицира да је $T(M)$ подмодул у M. Исто важи и ако $Z(R)$ није идеал у R. На пример, ако $M = \mathbb{Z}_6$ посматрамо као $\mathbb{Z}_6$-модул, онда јасно $T(M)(= Z(R))$ није подмодул у M ($Z(R)$ није идеал у R). С друге стране, ако $M = \mathbb{Z}_6$ посматрамо као модул над $R = \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$, са множењем $(a, b) \cdot m = am$, онда $Z(R)$ није идеал, али $T(M)$ јесте подмодул, јер је $\mathrm{Ann}(M) = \{(0, r) \mid r \in \mathbb{Z}_6\}$. Као што већ знамо, у случају када $Z(R)$ није идеал у R, $\mathrm{T}\Gamma(R)$ је повезан акко је $\langle Z(R) \rangle = R$. Ако је прстен R адитивно генерисан својим делитељима нуле, повезаност графа $\mathrm{T}\Gamma(R)$ имаће суштинску улогу у повезаности графа $\mathrm{T}\Gamma(M)$. Разматрамо зато у овом поглављу случај када торзиони елементи не чине подмодул R-модула M нити делитељи нуле чине идеал у R.

Лема 42. *Нека је R комутативан прстен и M R-модул. Ако је јединица прстена R сума n делитеља нуле, онда је сваки елемент модула M сума највише n торзионих елемената.*

Доказ: Очигледно, ако је $a \in Z(R)$ и $x \in M$, онда је $ax \in T(M)$, па за свако $m \in M$ важи:

$$1 = z_1 + \cdots + z_n \;\Rightarrow\; m = z_1 m + \cdots + z_n m\,. \quad \square$$

Лему 42 можемо преформулисати у нешто генералнијој форми: ако је R генерисан (адитивно) својим делитељима нуле, онда је сваки R-модул генерисан својим торзионим елементима.

Теорема 43. *Нека је R комутативан прстен и нека је M R-модул такав да $T(M)$ није подмодул. Тада је $\mathrm{T}\Gamma(M)$ повезан акко је M генерисан својим торзионим елементима.*

Доказ: Докажимо да из повезаности графа ТΓ(M) следи да је модул M генерисан торзионим елементима. Претпоставимо да то није тачно. Тада постоји $m \in M$ који нема репрезентацију облика $m = m_1 + \cdots + m_n$, где су $m_i \in T(M)$. Наравно $m \neq 0$, јер $0 \in T(M)$. Доказаћемо да тада не постоји пут од 0 до m у ТΓ(M). Ако је $0 — s_1 — s_2 — \cdots — s_k — m$ пут у ТΓ(M), онда су s_1, $s_1 + s_2, \ldots,$ $s_{k-1} + s_k$, $s_k + m$, торзиони елементи и m се тада може представити као:

$$m = (s_k + m) - (s_{k-1} + s_k) + \cdots + (-1)^{k-1}(s_1 + s_2) + (-1)^k s_1.$$

Ово је у контрадикцији са претпоставком да m није сума торзионих елемената. Обратна импликација може се доказати на сличан начин као и теорема 11, па ћемо доказ изоставити. □

Теорема 44. *Нека је R комутативан прстен и M R-модул. Ако је* ТΓ(R) *повезан, онда је повезан и* ТΓ(M).

Доказ: Нека је ТΓ(R) повезан и нека је $m \in M$. Показаћемо да постоји пут од 0 до m у ТΓ(M). Нека је:

$$0 — r_1 — r_2 — \cdots — r_k — 1 \tag{3.2.1}$$

пут од 0 до 1 у ТΓ(R). Тада су $r_1, r_1+r_2, \ldots, r_k+1 \in Z(R)$. Како за $r \in Z(R)$ и $m \in M$ важи $rm \in T(M)$, „множењем” пута 3.2.1 са m добијамо да је:

$$0 — r_1m — r_2m — \cdots — r_km — m \tag{3.2.2}$$

пут од 0 до m у ТΓ(M). Како се свака два темена могу спојити преко 0, ТΓ(M) је повезан. □

Напомена 45. Приметимо да према претходном доказу важи следећа особина: ако је $\mathrm{d}(0,1) = n$ у ТΓ(R), онда је $\mathrm{d}(0,m) \leq n$ у ТΓ(M), за свако $m \in M$.

Теорема 46. *Ако је сваки елемент модула M сума највише n торзионих елемената, онда је* $\operatorname{diam}(\mathrm{T}\Gamma(M)) \leq n$. *Ако је n најмањи такав број, онда је* $\operatorname{diam}(\mathrm{T}\Gamma(M)) = n$.

Доказ: Докажимо најпре да је под датим условима растојање прозвољног елемента m до 0 највише n. Нека је $m = m_1 + \cdots + m_n$, где $m_i \in T(M)$. Тада за $a_i = (-1)^{i+n}(m_1 + \cdots + m_i)$,

$$0 — a_1 — a_2 — \cdots — a_n,$$

је пут од 0 до m дужине n у $\mathrm{T}\Gamma(M)$. Нека $x, y \in M$. Доказујемо да је онда $\mathrm{d}(x, y) \leq n$. Доказ изводимо користећи путеве (A) од 0 до $x - y$ и (B) од 0 до $x + y$. Нека су то путеви:

$$(A) \qquad x - y — s_1 — s_2 — \cdots — s_{n-1} — 0\,,$$

$$(B) \qquad x + y — t_1 — t_2 — \cdots — t_{n-1} — 0\,.$$

Према претходном, дужина тих путева је највише n. У зависности од тога да ли је n паран или непаран, добијамо путеве (A') или (B') од x до y дужине n.

$$(A') \qquad x — (s_1 - y) — (s_2 + y) — \cdots — (s_{n-1} - y) — y\,,$$

$$(B') \qquad x — (t_1 + y) — (t_2 - y) — \cdots — (t_{n-1} - y) — y\,.$$

Нека је сада n најмањи такав број и нека је $m = m_1 + \cdots + m_n$ најкраће представљање елемента m као суме торзионих. Докажимо да је $\mathrm{d}(0, m) = n$. Према претходном је $\mathrm{d}(0, m) \leq n$. Претпоставимо зато да је $\mathrm{d}(0, m) = k < n$ и нека је $0 — s_1 — s_2 — \cdots — s_{k-1} — m$ пут у $\mathrm{T}\Gamma(M)$. Користећи исти аргумент као и у доказу теореме 61, долазимо до контрадикције – репрезентације елемента m као суме $k < n$ торзионих елемената. Овим је теорема доказана. □

Последица 47. *Нека је R комутативан прстен такав да $Z(R)$ није идеал у R, $\langle Z(R) \rangle = R$ и нека је M R-модул. Ако је* $\operatorname{diam}(\mathrm{T}\Gamma(R)) = n$, *онда је* $\operatorname{diam}(\mathrm{T}\Gamma(M)) \leq n$. *Специјално, ако је R коначан, онда је* $\operatorname{diam}(\mathrm{T}\Gamma(M)) \leq 2$.

Доказ: Директно следи комбинујући лему 42 и теорему 46. Посебно, ако је R коначан комутативан прстен у коме $Z(R)$ није идеал, онда је према теореми 12, $\mathrm{diam}(\mathrm{T}\Gamma(R)) = 2$. $\square$

Као што је већ речено, за свако $n \geq 2$ може се конструисати комутативан прстен R_n, у коме $Z(R_n)$ није идеал, такав да је $\mathrm{diam}(\mathrm{T}\Gamma(R_n)) = n$. То значи да и $\mathrm{T}\Gamma(M)$ може имати дијаметар n за свако n, ако R_n посматрамо као R_n-модул.

Нека је $\mathrm{T}\Gamma(M)$ повезан и $\langle Z(R) \rangle = R$. Из следећег примера видимо да онда $\mathrm{diam}(\mathrm{T}\Gamma(M))$ не мора зависити од броја генератора из $Z(R)$.

Пример 48. Нека је R комутативан прстен и нека су $z_1, z_2 \in Z(R)$ такви да је $z_1 + z_2 = 1$. Нека је $M = R/z_1R \oplus R/z_2R$.

Ако је $z_1z_2 \neq 0$, онда $z_1z_2 \in \mathrm{Ann}(M)$, одакле је M торзиони модул. Дакле $\mathrm{diam}(\mathrm{T}\Gamma(M)) = 1$.

Ако је $z_1z_2 = 0$, онда се множењем једнакости $z_1 + z_2 = 1$ са z_1 добија $z_1^2 = z_1$. Одавде z_1 мора бити идемпотентан. Нека су $m_1 = (1 + z_1R, 0)$ и $m_2 = (0, 1 + z_2R)$ елементи из $T(M)$. Доказујемо да тада $m_1 + m_2 \notin T(M)$. Ако је $r(1+z_1R, 1+z_2R) = 0$, онда $r \in z_1R \cap z_2R$, тј. $r = z_1a = z_2b$. Множењем последње једнакости са z_1, добија се $z_1^2a = 0$. Како је z_1 идемпотентан, важи $r = z_1a = 0$. Дакле $T(M)$ није подмодул модула M, па према теореми 46, мора да важи $\mathrm{diam}(\mathrm{T}\Gamma(M)) = 2$.

ГЛАВА 4

ЧИСТИ ГРАФ

У овој глави, R је комутативан прстен са јединицом, $\mathrm{U}(R)$ скуп његових инвертибилних елемената, $\mathrm{Id}(R)$ скуп његових идемпотентних елемената, $\mathrm{Z}(R)$ скуп његових делитеља нуле. Због једноставности уводимо ознаку $\mathrm{UI}(R) = \mathrm{U}(R) \cup \mathrm{Id}(R)$. За сваки природан број n, $\mathrm{U}_n(R)$ означава скуп оних елемената прстена R који се могу представити у облику суме $k \leq n$ инвертибилних елемената, док $\mathrm{U}'(R)$ означава све елементе из R који се могу представити као коначне суме инвертибилних, тј. $\mathrm{U}'(R) = \cup_{n=1}^{\infty} \mathrm{U}_n(R)$. Прстени генерисани својим инвертибилним елементима предмет су многих истраживања. R је *добар*, или према Рафаелу ([44]), S*-прстен*, ако је $R = \mathrm{U}'(R)$. Прстен је према Вамосу ([51]) n*-добар*, или према Хенриксену ([27]), (S, n)*-прстен*, ако је $R = \mathrm{U}_n(R)$. Према Николсону ([38]) прстен је *чист* ако је сваки његов елемент збир инвертибилног и идемпотентног. Хиао и Тонг у [56] генерализују ове прстене уводећи појам n*-чистих* и Σ*-чистих* прстена у којима је редом сваки елемент збир идемпотентног и n инвертибилних, односно идемпотентног и коначно много инвертибилних. Класа n-чистих прстена садржи чисте и n-добре прстене, док класа Σ-чистих прстена садржи све претходно описане класе. Између осталог, Хиао и Тонг показују да је групни прстен $\mathbb{Z}_{(p)}G$, где је G циклична група реда 3, 2-чист за сваки прост број $p \neq 2$. Како су Хан и Николсон раније у [26] показали да групни прстен $\mathbb{Z}_{(7)}G$ није чист, имамо прстен који је 2-чист али није чист. С друге стране, Камило и Ју су у [17] показали да сваки чист прстен у коме је 2 инвертибилан мора бити и 2-добар, дакле и 2-чист. Од осталих резултата из ове области поменимо још резултат Хенриксена, који је у [27] показао да је $M_n(R)$ 3-добар за произвољан прстен R и за свако $n \geq 2$.

Главна идеја у овој глави је да комутативном прстену са јединицом придружимо граф на начин који ће омогућити боље разумевање својстава горе поменутих класа прстена. Задржаћемо се овде на комутативном случају мада се исти граф може дефинисати и за некомутативне прстене. Дефинишемо *чисти граф* $\mathcal{C}\Gamma(R)$ комутативног прстена R на следећи начин:

$$V(\mathcal{C}\Gamma(R)) := R, \quad E(\mathcal{C}\Gamma(R)) := \{\{r_1, r_2\} : r_1 + r_2 \in \mathrm{UI}(R)\},$$

где $V(\Gamma)$ ($E(\Gamma)$) означава скуп темена (ивица) графа Γ.

Веза са чистим прстенима је лако видљива. Нека је R чист прстен. Тада је $\mathcal{C}\Gamma(R)$ повезан и $\mathrm{diam}(\mathcal{C}\Gamma(R)) \leq 4$. Наиме, ако су $x, y \in R$, онда је $x = u_1 + e_1$, $y = u_2 + e_2$, за неке $u_1, u_2 \in \mathrm{U}(R)$, $e_1, e_2 \in \mathrm{Id}(R)$. Тада је

$$x = u_1 + e_1 — (-u_1) — 0 — (-u_2) — u_2 + e_2 = y$$

пут од x до y у $\mathcal{C}\Gamma(R)$, одакле следи тврђење. Овде заправо важи тачнији резултат, доказаћемо да је $\mathrm{diam}(\mathcal{C}\Gamma(R)) = 2$ за сваки чисти прстен R.

У делу 4.1 бавимо се питањима везаним за структуру овог графа. Испитујемо под којим условима је $\mathcal{C}\Gamma(R)$ комплетан и да ли може бити комплетан бипартитан. Доказујемо да је $\mathcal{C}\Gamma(R)$ стабло акко је $R = \mathbb{Z}_2$, као и да је његов обим 3, 4 или ∞. Главни резултати налазе се у делу 4.2. Доказујемо да је $\mathcal{C}\Gamma(R)$ повезан акко је R адитивно генерисан својим идемпотентним и инвертибилним елементима. Налазимо и доказујемо критеријум када је $\mathrm{diam}(\mathcal{C}\Gamma(R))$ коначан и специјално, када је једнак 2.

Између осталог, доказујемо да сви комутативни полуперфектни и чисти прстени имају повезан чисти граф дијаметра 2. У делу 4.3 бавимо се питањем рода графа $\mathcal{C}\Gamma(R)$, када је R коначан прстен. Доказујемо да је чисти граф планаран акко је R изоморфан једном од прстена: $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_3$, $\mathbb{F}_4$, $\mathbb{Z}_4$ или $\mathbb{F}_2[X]/(X^2)$, као и да је тороидалан акко је R изоморфан једном од прстена: $\mathbb{F}_5$, $\mathbb{F}_7$, $\mathbb{Z}_8$, $\mathbb{F}_2[X]/(X^3)$, $\mathbb{F}_2[X,Y]/(X,Y)^2$, $\mathbb{Z}_4[X]/(2X,X^2)$, $\mathbb{Z}_4[X]/(2X,X^2-2)$, $\mathbb{F}_2\times\mathbb{F}_3$, $\mathbb{F}_2\times\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{F}_2\times\mathbb{F}_4$ или $\mathbb{F}_2\times\mathbb{F}_2[X]/(X^2)$.

4.1 О структури графа $\mathcal{C}\Gamma(R)$

Главне тешкоће при опису структуре графа $\mathcal{C}\Gamma(R)$ потичу од неправилности збира идемпотентних и инвертибилних елемената. Чак и захтев да $\mathrm{UI}(R)$, или његови подскупови $\mathrm{U}(R)$ или $\mathrm{Id}(R)$, буду затворени за збир испоставља се као прејак. Ипак, у неким специјалним случајевима (на пример ако је прстен R квазилокалан), структура графа $\mathcal{C}\Gamma(R)$ може се прецизније описати. Погледајмо најпре када је $\mathcal{C}\Gamma(R)$ комплетан.

Теорема 49. *$\mathcal{C}\Gamma(R)$ је комплетан акко је R поље или Булов прстен.*

Доказ: Претпоставимо да је $\mathcal{C}\Gamma(R)$ комплетан и да R није ни поље ни Булов прстен. Важи: $R=\mathrm{U}(R)\cup\mathrm{Id}(R)$ ($\mathcal{C}\Gamma(R)$ је комплетан, па је свако теме суседно са 0), $\mathrm{Id}(R)\neq R$ (R није Булов прстен) и $R\setminus\{0\}\neq\mathrm{U}(R)$ (R није поље). Одавде видимо да постоје $x\in\mathrm{U}(R)\setminus\mathrm{Id}(R)$ и $y\in\mathrm{Id}(R)\setminus(\mathrm{U}(R)\cup\{0\})$. Ако је $xy\in\mathrm{U}(R)$, онда је $y\in\mathrm{U}(R)$, контрадикција. Дакле $xy\in\mathrm{Id}(R)$, па је $(xy)^2=xy$. Како је $x\in\mathrm{U}(R)$ и $y\in\mathrm{Id}(R)$, важи $xy=y$. Одавде $y(1-x)=0$, и како $y\neq 0$, $1-x\notin\mathrm{U}(R)$, мора да важи $1-x\in\mathrm{Id}(R)$. Тада $x=1-(1-x)\in\mathrm{Id}(R)$, што је у контрадикцији са избором елемента x.

Обратна импликација је тривијална. □

Тврђење 50. *Нека је R комутативан прстен. Ако је $\mathrm{char}(R)\neq 2$, онда $\mathcal{C}\Gamma(R)$ није комплетан бипартитан граф и није стабло.*

Доказ: Очигледно, јер $\mathcal{C}\Gamma(R)$ садржи троугао: $(-1) — 0 — 1 — (-1)$. $\square$

Теорема 49 показује да је за прстен R карактеристике 2, који није поље, $\mathcal{C}\Gamma(R)$ комплетан акко је R Булов прстен. С друге стране, ако је $\mathrm{char}(R) = 2$, $\mathcal{C}\Gamma(R)$ може (али не мора) бити комплетан бипартитан граф. Илуструјемо то следећим примерима.

Пример 51. $R = \mathbb{Z}_2[X_1, \ldots, X_n]/(X_1^2, \ldots, X_n^2)$. Означимо са x_i одговарајуће класе елемената X_i, и нека је $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, $\alpha_i \in \{0, 1\}$. Лако се може показати да је полином

$$f = a_0 + \sum_{\alpha \in \{0,1\}^n} a_\alpha x^\alpha, \qquad a_0, a_\alpha \in \{0, 1\},$$

инвертибилан акко је $a_0 = 1$. Прстен R је карактеристике 2 и његови једини идемпотенти су 0 и 1. Лако се проверава да за $f, g \in R$: $f + g \in \mathrm{U}(R)$ акко је тачно један од њих инвертибилан. Закључујемо да је $\mathcal{C}\Gamma(R) \cong K_{2^n, 2^n}$; два дела партиције образују инвертибилни и неинвертибилни елементи.

Напомена 52. Приметимо да овде можемо посматрати и прстен

$$S = \mathbb{Z}_2[X_1, X_2, \ldots]/(X_1^2, X_2^2, \ldots).$$

Тада је $\mathcal{C}\Gamma(S)$ бесконачан комплетан бипартитан граф $K_{\alpha,\alpha}$.

Пример 53. Нека је $R = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2[X]/(X^2)$. R је прстен карактеристике 2 код кога је $\mathrm{Id}(R) = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$ и $\mathrm{U}(R) = \{(1,1), (1, 1+x)\}$ (x је класа од X). $\mathcal{C}\Gamma(R)$ није комплетан ($x^2 = 0 \neq x$), а није ни комплетан бипартитан јер садржи троугао $(0, x) — (1, x) — (0, 1 + x) — (0, x)$.

Теорема 54. *$\mathcal{C}\Gamma(R)$ је стабло акко је $R \cong \mathbb{Z}_2$.*

Доказ: Ако је $\mathrm{char}(R) \neq 2$, $\mathcal{C}\Gamma(R)$ садржи троугао: $0 - 1 - (-1) - 0$.

Претпоставимо зато да је $\mathrm{char}(R) = 2$ и да је $\mathcal{C}\Gamma(R)$ стабло. Ако су $x, y \in R$ суседни, онда су $1+x$, $1+y$ такође суседни. Како је x суседно са $1+x$ и y суседно са $1+y$, добијамо цикл $1+x - x - y - 1+y - 1+x$. Ово је немогуће, па мора да важи $y = 1+x$. Дакле, x је суседно са y акко је $y = 1+x$. Како је $\mathcal{C}\Gamma(R)$ повезан, закључујемо да R садржи само 0 и 1. □

Теорема 55. *Нека је R комутативан прстен.*

1) *Ако је* $\mathrm{char}(R) \neq 2$, *онда је* $\mathrm{gr}(\mathcal{C}\Gamma(R)) = 3$.

2) *Ако је* $\mathrm{char}(R) = 2$, *онда је* $\mathrm{gr}(\mathcal{C}\Gamma(R)) = 3, 4$ *или* ∞.

Доказ:

1) Имамо претходно поменуту контуру $0 - 1 - (-1) - 0$.

2) Нека најпре $\mathrm{UI}(R) = \{0, 1\}$. У том случају једине ивице $\mathcal{C}\Gamma(R)$ су ивице које спајају темена a и $a+1$, за $a \in R$. Граф дакле нема контура, па је $\mathrm{gr}(\mathcal{C}\Gamma(R)) = \infty$.

Ако је $|\mathrm{UI}(R)| \geq 3$, постоји $a \in \mathrm{UI}(R) \setminus \{0, 1\}$. Тада имамо контуре $0 - 1 - 1{+}a - a - 0$ или $0 - 1 - a - 0$, у случају да $1{+}a \in \mathrm{UI}(R)$. Одавде је $\mathrm{gr}(\mathcal{C}\Gamma(R)) = 4$ или $\mathrm{gr}(\mathcal{C}\Gamma(R)) = 3$. □

Пример 56. Као илустрацију наводимо следеће примере:

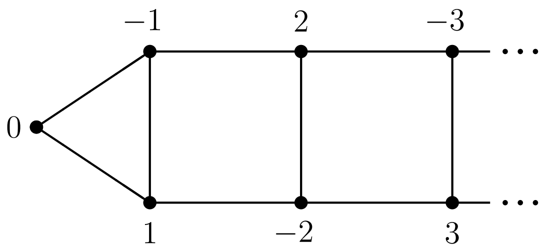
1) $\mathrm{gr}(\mathcal{C}\Gamma(R)) = 3$, ако је $R = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$;

2) $\mathrm{gr}(\mathcal{C}\Gamma(R)) = 4$, ако је $R = \mathbb{Z}_2[X]/(X^2)$;

3) $\mathrm{gr}(\mathcal{C}\Gamma(R)) = \infty$, ако је $R = \mathbb{Z}_2[X]$.

4.2 Повезаност и дијаметар графа $\mathcal{C}\Gamma(R)$

Питање које нас највише занима у овом делу је питање повезаности графа $\mathcal{C}\Gamma(R)$ и рачунање његовог дијаметра. Мада делује неочекивано, добија се да је граф $\mathcal{C}\Gamma(R)$ коначног прстена R увек повезан, дијаметра највише 2. Код прстена који нису коначни могућности су веће. Погледајмо као мотивацију најпростији пример, прстен целих бројева. $\mathbb{Z}$ је Σ-чист и није n-чист ни за једно n. Можемо рећи и да је $\mathbb{Z}$ добар прстен који није и n-добар. Овде је $\mathrm{UI}(\mathbb{Z}) = \{-1, 0, 1\}$. Дакле, једина темена суседна темену $m \in \mathbb{Z}$ су $-m, 1-m$ и $-1-m$. Растојање два темена $\mathrm{d}(m, n)$ биће дакле једнако $||m| - |n||$ или $||m| - |n|| + 1$. Тако је $\mathcal{C}\Gamma(\mathbb{Z})$ (Сл.1) повезан и нема коначан дијаметар.



Слика 1. $\mathcal{C}\Gamma(\mathbb{Z})$

Докажимо сада теорему о повезаности графа $\mathcal{C}\Gamma(R)$ за произвољан комутативан прстен R. У том циљу уводимо појам (k, m)-чистих елемената.

Дефиниција 57. Нека је m позитиван цео број. Елемент $x \in R$ је (k, m)-чист ако је $x = e_1 + \cdots + e_k + u_1 + \cdots + u_m$, где су $e_i \in \mathrm{Id}(R)$ и $u_j \in \mathrm{U}(R)$.

На тај начин чисти елементи су $(1, 1)$-чисти, n-чисти су $(1, n)$-чисти, док су n-добри $(0, n)$-чисти. Када то не доводи до забуне (k, m)-чист елемент x записиваћемо у облику $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$, где су $x_i \in \mathrm{UI}(R)$ и $n = k+m$. Нека је:

$$E_n(R) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} x_i \ : \ x_i \in \mathrm{UI}(R)\,,\ k \leq n \right\}, \quad E(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n(R).$$

Прстен R је E_n-прстен за неко n ако је $R = E_n(R)$; прстен R је E-прстен ако је $R = E(R)$. На тај начин E-прстени су управо они прстени који су адитивно генерисани својим идемпотентима и инвертибилним елементима. Прстен целих бројева $\mathbb{Z}$ је пример E-прстена који није E_n-прстен ни за једно n; дакле, класа E_n-прстена је права подкласа класе

E-прстена. Ови појмови у блиској су вези са питањем повезаности и питањем коначног дијаметра $\mathcal{C}\Gamma(R)$. Наиме $\mathcal{C}\Gamma(R)$ биће повезан акко је R E-прстен док ће његов дијаметар бити коначан акко R је E_n-прстен, за неко n.

Да би ово доказали биће нам потребно неколико лема. У доказима ових лема користимо чињеницу да су инвертибилни и идемпотентни елементи чисти. То је јасно за инвертибилне елементе, док ће за $e \in \mathrm{Id}(R)$ важити $e = (2e-1)+(1-e)$, где је $2e-1 \in \mathrm{U}(R)$. Ово представљање идемпотента је једнозначно, тј. ако је $e = u+f$, за неке $u \in \mathrm{U}(R)$ и $f \in \mathrm{Id}(R)$, онда је $u = 2e-1$ и $f = 1-e$. За доказ видети [4, лема 6].

Лема 58. *Нека је R комутативан прстен и $x = \sum_{i=1}^{m} e_i$, где су $e_i \in \mathrm{Id}(R)$. Тада постоји пут од x до 0 у $\mathcal{C}\Gamma(R)$.*

Доказ: Пут од x до 0 добијамо користећи познату особину идемпотената: $e \in R$ је идемпотентан акко је $1-e$ идемпотентан. Један пут је:

$$\sum_{i=1}^{m} e_i — \left(-\sum_{i=2}^{m} e_i\right) — \left(1+\sum_{i=3}^{m} e_i\right) — \left(-\sum_{i=3}^{m} e_i\right) — \left(1+\sum_{i=4}^{m} e_i\right) — \cdots$$

$$\cdots — (1+e_m) — (-e_m) — 1 — 0.$$

Приметимо да је $\mathrm{d}\left(\sum_{i=1}^{m} e_i, 0\right) \leq 2m-1$. □

Лема 59. *Нека је R комутативан прстен и $x, y \in R$. Ако је $\mathrm{d}(x+y, 0) = r$, онда је $\mathrm{d}(x, y) \leq r+1$.*

Доказ: Нека је $(x+y) — s_1 — s_2 — \cdots — s_{r-1} — 0$ пут дужине r у $\mathcal{C}\Gamma(R)$. Тада је

$$x — (y+s_1) — (-y+s_2) — \cdots — ((-1)^{r-1}y + s_{r-1}) — (-1)^r y — (-1)^{r+1} y,$$

такође пут у $\mathcal{C}\Gamma(R)$. Одавде је $\mathrm{d}(x, y) \leq r$ ако је r паран и $\mathrm{d}(x, y) \leq r+1$, ако је r непаран. □

Лема 60. *Нека је R комутативан прстен и нека је $x \in R$ такав да $\mathrm{d}(x,0) = n$ у $\mathcal{C}\Gamma(R)$. Тада постоје k и m такви да је x (k,m)-чист. Прецизније, тада је:*

$$x = \sum_{i=1}^{k+m} x_i, \text{ где су } x_i \in \mathrm{UI}(R) \quad \text{и} \quad k+m \leq \left[\frac{3n}{2}\right].$$

Доказ: Нека је $0 — s_1 — s_2 — \cdots — s_{n-1} — x$ пут дужине n у $\mathcal{C}\Gamma(R)$. Тада s_1, s_1+s_2, $\ldots$, $s_{n-1}+x$ припадају $\mathrm{UI}(R)$. Сам елемент x може се представити у облику:

$$x = (x+s_{n-1}) - (s_{n-1}+s_{n-2}) + \cdots + (-1)^{n-1}s_1.$$

Ово међутим није тражена репрезентација, јер у случају да је $s_{i-1}+s_i$ идемпотентан, то не мора бити и елемент $-(s_{i-1}+s_i)$. Таквих сабирака има највише $\left[\frac{n}{2}\right]$ и сваки од њих може се заменити са два сабирка жељеног облика стављајући $-(s_{i-1}+s_i) = 1-(s_{i-1}+s_i)+(-1)$. □

Теорема 61. *Нека је R комутативан прстен. Тада је $\mathcal{C}\Gamma(R)$ повезан акко је R E-прстен.*

Доказ: Претпоставимо најпре је R E-прстен, тј. да се сваки елемент прстена R може представити у облику суме елемената из $\mathrm{UI}(R)$ и нека су $x,y \in R$. Према леми 59, довољно је показати да постоји пут од $x+y$ до 0. Нека је $x+y$ (m,n)-чист, односно $x+y = \sum_{i=1}^{n} u_i + \sum_{j=1}^{m} e_j$, где су $u_i \in \mathrm{U}(R)$, $e_j \in \mathrm{Id}(R)$. Тада у $\mathcal{C}\Gamma(R)$ постоји следећи пут:

$$x+y = \sum_{i=1}^{n} u_i + \sum_{j=1}^{m} e_j \;—\; \left(-\sum_{i=2}^{n} u_i - \sum_{j=1}^{m} e_j\right) \;—\; \left(\sum_{i=3}^{n} u_i + \sum_{j=1}^{m} e_j\right) \;—\; \cdots$$

$$\cdots \;—\; (-1)^{n-1}\left(u_n + \sum_{j=1}^{m} e_j\right) \;—\; (-1)^n \sum_{j=1}^{m} e_j.$$

Ако је n паран, онда применом леме 58 овај пут можемо продужити до 0. Ако је n непаран, овај пут такође можемо продужити до 0 јер је $-\sum_{j=1}^{m} e_j$ суседно са $\sum_{j=1}^{m} e_j$.

Претпоставимо сада да је $\mathcal{C}\Gamma(R)$ повезан и нека је $x \neq 0$ произвољан елемент прстена R. Како је граф повезан, постоји пут од x до 0 у $\mathcal{C}\Gamma(R)$ и нека је дужина тог пута једнака n. Према леми 60, постоје k и m такви да је x (k, m)-чист. Дакле, произвољан елемент прстена R је збир коначно много инвертибилних и идемпотентних елемената, тј. R је E-прстен. $\square$

Теорема 62. *Нека је R комутативан прстен. Тада је* $\mathrm{diam}(\mathcal{C}\Gamma(R))$ *коначан акко R је E_n-прстен за неко n.*

Доказ: Претпоставимо да је $\mathrm{diam}(\mathcal{C}\Gamma(R)) = d$, и нека је $0 \neq x \in R$. Тада је $\mathrm{d}(x, 0) \leq d$. Према леми 60, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$, где су $x_i \in \mathrm{UI}(R)$ и $n \leq \left[\frac{3d}{2}\right]$.

Нека је сада R E_n-прстен, за неко n. Наравно, тада је R и E-прстен, па је $\mathcal{C}\Gamma(R)$ повезан према претходној теореми. Нека $x, y \in R$. Како је R E_n-прстен, елемент $x + y$ је (k, m)-чист за неке k и m такве да је $k + m \leq n$. Према леми 58 и према доказу теореме 61, дужина пута од $x + y = \sum_{j=1}^{k} e_j + \sum_{i=1}^{m} u_i$ до 0 је највише $2k + m$. Према леми 59, $\mathrm{d}(x, y) \leq 2k + m + 1$, одакле је $\mathrm{diam}(\mathcal{C}\Gamma(R))$ коначан. $\square$

Последица 63. *Нека је R комутативан прстен и $R[X]$ прстен полинома. Тада је $\mathcal{C}\Gamma(R[X])$ неповезан.*

Доказ: Елемент X очигледно се не може представити у облику суме идемпотената и инвертибилних елемената из $R[X]$. Тврђење непосредно следи применом теореме 61. $\square$

Теорема 64. *Нека је R комутативан прстен. Тада:* $\mathrm{diam}(\mathcal{C}\Gamma(R[[X]]))$ *је коначан акко је* $\mathrm{diam}(\mathcal{C}\Gamma(R))$ *коначан.*

Доказ: Нека је $\mathrm{diam}(\mathcal{C}\Gamma(R)) = n < \infty$, и нека су $f = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i X^i$ и $g = c_0 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i X^i \in R[[X]]$. Показаћемо да постоји пут од f до g у $\mathcal{C}\Gamma(R[[X]])$ дужине не веће од $2n + 2$. Како је $\mathcal{C}\Gamma(R)$ повезан, постоји неки пут $a_0 — b_1 — b_2 — \cdots — b_{n-1} — 0$ од a_0 до 0 у $\mathcal{C}\Gamma(R)$. Помоћу овог пута и користећи чињеницу да је формални ред инвертибилан акко је такав његов константни члан, налазимо пут од f до 1 дужине највише $n+1$ у $\mathcal{C}\Gamma(R[[X]])$:

$$a_0 + S — (b_1 - S) — (b_2 + S) — \cdots — \big(b_{n-1} + (-1)^{n-1}S\big) — (-1)^n S — 1,$$

где је $S = \sum_{i=1}^{\infty} a_i X^i$. Ако је $c_0 — d_1 — d_2 — \cdots — d_m — 0$ пут од c_0 до 0 у $\mathcal{C}\Gamma(R)$, на исти начин налазимо пут од g до 1 у $\mathcal{C}\Gamma(R[[X]])$, одакле следи тврђење. Обратна импликација је тривијална. $\square$

Теорема 65. *Нека је R комутативан прстен такав да је $\mathrm{diam}(\mathcal{C}\Gamma(R)) = n$. Ако је S хомоморфна слика прстена R, онда је $\mathrm{diam}(\mathcal{C}\Gamma(S)) \leq n$.*

Доказ: Очигледно, јер хомоморфизам инвертибилне елементе слика у инвертибилне а идемпотентне у идемпотентне. $\square$

Напомена 66. Обратно не мора да важи. Као контрапример можемо узети прстен полинома $R[X]$, где је R E_n-прстен.

Теорема 67. *Нека је R квазилокалан прстен и $x, y \in R$. Тада постоји $z \in R$ такав да је $x + z \in \{0, 1\}$ и $z + y \in \mathrm{U}(R)$.*

Доказ: Нека је M максимални идеал квазилокалног прстена R и $x, y \in R$. Испитајмо све могућности.

1) $x, y \in M$: $z = 1 - x$.

2) $x \in M$, $y \notin M$ (или $x \notin M$, $y \in M$): $z = -x$.

3) $x \notin M$, $y \notin M$: Овде имамо два случаја.

3.1) $y - x \notin M$: $z = -x$;

3.2) $y - x \in M$: $z = 1 - x$. $\square$

Последица 68. *Нека је $R = R_1 \times \cdots \times R_n$ производ квазилокалних прстена и $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in R$. Тада постоји $z = (z_1, \ldots, z_n) \in R$ такав да је $x + z \in \mathrm{Id}(R)$ и $z + y \in \mathrm{U}(R)$. Другим речима, $\mathcal{C}\Gamma(R)$ је повезан и $\mathrm{diam}(\mathcal{C}\Gamma(R)) = 2$.*

Доказ: Директна последица теореме 67. $\square$

Теорема 67 и њена последица 68 дају нам могућност за опис чистог графа широке класе полуперфектних прстена. Комутативни полуперфектни прстени су тачно они прстени који су изоморфни директним производима квазилокалних прстена [34, теорема 23.11]. Класи полуперфектних прстена специјално припадају Артинови, дакле и сви коначни прстени. Код свих њих, чисти граф је дакле повезан и има дијаметар 2. Истакнимо ово у облику следеће теореме.

Теорема 69. *Нека је R полуперфектан комутативан прстен. Тада је $\mathcal{C}\Gamma(R)$ повезан и $\operatorname{diam}(\mathcal{C}\Gamma(R)) = 2$. Специјално, ово важи за Артинове, дакле и за све коначне прстене.*

Полуперфектни и чисти прстени имају занимљиву везу. Камило и Ју [17, теорема 9], дали су следећу карактеризацију полуперфектних прстена: прстен је полуперфектан акко је чист и нема бесконачан скуп ортогоналних идемпотената. То значи да је $\operatorname{diam}(\mathcal{C}\Gamma(R)) = 2$, ако је R чист прстен са коначно много идемпотената. Овај резултат може се међутим проширити на све чисте, као и на све 2-добре прстене. Да би то доказали, потребна нам је следећа лема.

Лема 70. *Нека је R комутативан прстен који задовољава услов:*

$$(\gamma) \qquad (\forall x \in R)(\exists y \in \mathrm{UI}(R))\ x + y \in \mathrm{UI}(R).$$

Тада је $\mathcal{C}\Gamma(R)$ повезан и $\operatorname{diam}(\mathcal{C}\Gamma(R)) \leq 2$.

Доказ: Нека су $x, z \in R$ и $x \neq z$. Доказујемо да је $\mathrm{d}(x, z) \leq 2$. Услов (γ) важи и за $x - z$; дакле постоји $y \in \mathrm{UI}(R)$ такав да је

$$(x - z) — y — 0$$

пут у $\mathcal{C}\Gamma(R)$. Тада је:

$$x — (y - z) — z$$

тражени пут. $\square$

Напомена 71. У леми 70 важи и обратно. Ако је $\mathrm{diam}(\mathcal{C}\Gamma(R)) \leq 2$, онда је јасно да у прстену R важи услов (γ). Наиме за $x \in R$ је $\mathrm{d}(x, 0) \leq 2$, па мора постојати $y \in \mathrm{UI}(R)$ такав да је $x + y \in \mathrm{UI}(R)$.

Теорема 72. *Нека је R комутативан прстен. Тада је* $\mathrm{diam}(\mathcal{C}\Gamma(R)) \leq 2$ *ако је R чист или 2-добар прстен.*

Доказ: Само треба проверити да је испуњен услов (γ).

Ако је R чист и $x \in R$, онда $x = e + u$, где је $e \in \mathrm{Id}(R)$ и $u \in \mathrm{U}(R)$. Ако одаберемо елемент $y = -u$, видимо да је услов (γ) задовољен.

Слично, ако је R 2-добар и $x \in R$, имамо да је $x = u + v$, где су $u, v \in \mathrm{U}(R)$. Тада бирамо $y = -u$. $\square$

Познато је да класа комутативних чистих прстена садржи прстене димензије 0, квазилокалне прстене, као и све комутативне Фон Нојманове регуларне прстене. Такође знамо да су хомоморфне слике и директни производи чистих прстена чисти прстени, као и да је прстен формалних редова $R[[X]]$ чист акко је R чист. Докази ових тврђења могу се наћи у [4]. Видимо да велика класа комутативних прстена има повезан чисти граф дијаметра највише 2. Остаје отворен проблем:

Да ли постоји комутативан E_n-прстен R такав да је $\mathrm{diam}(\mathcal{C}\Gamma(R)) > 2$ *?*

4.3 Род чистог графа

Испитаћемо најпре планарност чистог графа. Доказаћемо да је за коначан комутативан прстен са јединицом R граф $\mathcal{C}\Gamma(R)$ планаран акко је $|R| \leq 4$. У доказу користимо теорему 1 и теорему 4. Да би упростили означавање понекад ћемо писати $R = R_1 \times \cdots \times R_n$ уместо $R \cong R_1 \times \cdots \times R_n$.

Теорема 73. *Нека је R коначан комутативан прстен са јединицом и нека је $|R| \geq 5$. Тада $\mathcal{C}\Gamma(R)$ није планаран.*

Доказ: Као што смо напоменули, $R = R_1 \times \cdots \times R_n$, где је сваки R_i коначан локалан прстен.

1) $n \geq 3$: Уочимо у графу $\mathcal{C}\Gamma(R)$ подскуп темена $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, где је $a_1 = (1, 1, 0, 0, \ldots, 0)$, $a_2 = (0, 1, 1, 0, \ldots, 0)$ и $a_3 = (1, 1, 1, 0, \ldots, 0)$. Бирамо подскуп темена $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ на следећи начин:
$b_1 = (0, 0, 0, 0, \ldots, 0)$, $b_2 = (-1, 0, 0, 0, \ldots, 0)$ и $b_3 = (0, -1, 0, 0, \ldots, 0)$. Темена из B суседна су сваком темену из A, ако је $\mathrm{char}(R_1) = 2$. Ако $\mathrm{char}(R_1) \neq 2$, теме b_2 не мора бити суседно са a_2, док остала темена остају суседна. У том случају имамо пут $b_2 — c — a_2$, где је $c = (1, 0, 0, 0, \ldots, 0)$, па добијамо једну потподелу од $K_{3,3}$. Дакле $K_{3,3}$ или нека његова потподела садржана је у $\mathcal{C}\Gamma(R)$, па према теореми Куратовског он није планаран.

2) $R = R_1 \times R_2$. Овде имамо више могућности.

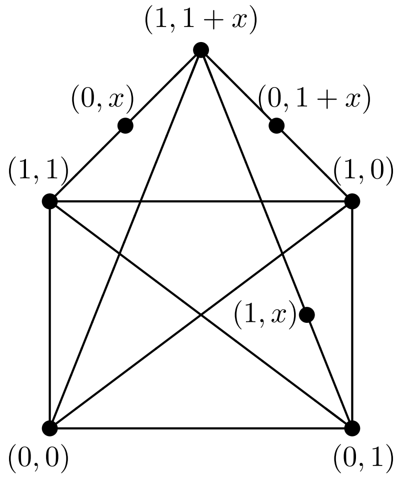
2.1) $R = R_1 \times R_2$, где је $\mathrm{char}(R_1) \neq 2$ и $\mathrm{char}(R_2) \neq 2$. Избором подскупова $A = \{(0, 0), (-1, 0), (0, -1)\}$ и $B = \{(0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ видимо да је $K_{3,3}$ садржан у $\mathcal{C}\Gamma(R)$.

2.2) $R = R_1 \times R_2$, где је један од прстена, на пример R_1, карактеристике 2, док други није. Темена $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ и $(1, 1)$ чине клику. Уочимо теме $(1, -1)$. Ово теме суседно је теменима $(0, 0)$, $(0, 1)$ и $(1, 1)$, док до темена $(1, 0)$ постоји пут $(1, -1) — (1, 2) — (0, -1) — (1, 0)$. На тај начин добијамо потподелу графа K^5 садржану у $\mathcal{C}\Gamma(R)$, па он није планаран.

2.3) $R = R_1 \times R_2$, где су оба прстена карактеристике 2. Због услова $|R| \geq 5$ бар један од њих, на пример R_2 има више од 2 елемента. Нека је M

максималан идеал у R_2. Ако је $M = \{0\}$, онда је R_2 поље карактеристике 2. Нека је $a \in R_2 \setminus \{0,1\}$. Подскупови темена $A = \{(0,0),(0,1),(0,a)\}$ и $B = \{(1,1),(1,a),(1,0)\}$ дају нам да је $K_{3,3}$ садржан у $\mathcal{C}\Gamma(R)$. Нека је зато $M \neq \{0\}$ и $x \in M$, $x \neq 0$. Елемент $1+x$ је инвертибилан у R_2, па је $(1,1+x)$ инвертибилан у R. Доказујемо да онда $C\Gamma(R)$ садржи као подграф потподелу од K^5 (Сл.2). Најпре, темена $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$ јасно чине клику. Теме $(1,1+x)$ суседно је са $(0,0)$ и имамо следеће путеве: $(1,1{+}x) — (1,x) — (0,1)$, $(1,1{+}x) — (0,1{+}x) — (1,0)$, $(1,1{+}x) — (0,x) — (1,1)$.

3) $n = 1$: R је коначан локалан прстен са максималним идеалом M. Према теореми 3, коначан комутативан прстен са n правих делитеља нуле има највише $(n+1)^2$ елемената, тј. $|R| \leq |Z(R)|^2$. Дакле, постоје $m_1, m_2 \in M$, $m_1 \neq 0$ и $m_2 \neq 0$ (у супротном $|R| \leq 4$). Подскупови $A = \{1, 1-m_1, 1-m_2\}$ и $B = \{0, m_1, m_2\}$ дају нам да је $K_{3,3} \subseteq \mathcal{C}\Gamma(R)$. $\square$



Слика 2

Лема 74. *Нека су R_1 и R_2 комутативни прстени. Ако је $K_{m,n} \subseteq \mathcal{C}\Gamma(R_1)$, онда је $K_{m,n} \subseteq \mathcal{C}\Gamma(R_1 \times R_2)$.*

Доказ: Нека је $K_{m,n}$ у $\mathcal{C}\Gamma(R_1)$ одређен скуповима темена $V_1 = \{a_1, \ldots, a_m\}$ и $V_2 = \{b_1, \ldots, b_n\}$. Тада је $K_{m,n}$ у $\mathcal{C}\Gamma(R_1 \times R_2)$ одређен скуповима темена $W_1 = \{(a_1,1), \ldots, (a_m,1)\}$ и $W_2 = \{(b_1,0), \ldots, (b_n,0)\}$. $\square$

Лема 75. *Нека је R квазилокалан комутативан прстен са максималним идеалом M. Тада је у $\mathcal{C}\Gamma(R)$ сваки елемент из $R \setminus M$ суседан сваком елементу из M. Елементи m_1, m_2 из M суседни су акко је $m_1 + m_2 = 0$.*

Доказ: Ово је очигледно јер су 0 и 1 једини идемпотенти у квазилокалном прстену R. $\square$

Лема 76. *Нека је R коначан локалан комутативан прстен са максималним идеалом M. Ако је $|M| \geq 5$, онда је $\gamma(\mathcal{C}\Gamma(R)) \geq 2$. Ово такође важи и у случају $|M| \geq 3$ и $|\mathrm{U}(R)| \geq 7$.*

Доказ: Можемо наћи бар 5 различитих инвертибилних елемената, јер за свако $a \in M$ важи $1 - a \in \mathrm{U}(R)$. Сваки од њих је према претходној леми суседан сваком темену из M. Одавде је $K_{5,5} \subseteq \mathcal{C}\Gamma(R)$, па је $\gamma(\mathcal{C}\Gamma(R)) \geq 2$, према тврђењу 5. Слично, у другом случају важи $K_{3,7} \subseteq \mathcal{C}\Gamma(R)$, па је $\gamma(\mathcal{C}\Gamma(R)) \geq 2$. $\square$

Лема 77. *Нека је R комутативан прстен. Ако је $|\mathrm{UI}(R)| \geq 8$, онда је $\gamma(\mathcal{C}\Gamma(R)) \geq 2$.*

Доказ: Нека су $u_1, \ldots, u_8$ различита темена из $\mathrm{UI}(R)$. Свако теме x суседно је онда теменима $u_i - x$, $i = 1, \ldots, 8$. У најгорем случају неки од u_i, нпр. u_1 једнак је 0 и $2x = 0$. Онда је x суседан са $u_2 - x, \ldots, u_8 - x$. У сваком случају је дакле $\deg(x) \geq 7$. Тврђење следи применом последице 7. $\square$

Нека је R коначан комутативан прстен са јединицом и $R = R_1 \times \cdots \times R_n$ његова репрезентација, где су R_i коначни локални прстени.

Теорема 78. *Нека је R коначан комутативан прстен са јединицом. Ако је $R = R_1 \times \cdots \times R_n$ и $n \geq 3$, онда је $\gamma(\mathcal{C}\Gamma(R)) \geq 2$.*

Доказ: Довољно је доказати за случај $n = 3$. Доказ је међутим директна последица леме 77, јер прстен $R = R_1 \times R_2 \times R_3$ има бар 8 идемпотената. $\square$

Довољно је дакле размотрити случајеве $n = 1$ и $n = 2$. Нека је најпре $n = 1$, тј. R је коначан локалан прстен са максималним идеалом M. Познато је да је у том случају $|R| = p^k$, за неки прост p и позитиван k, као и да $|M|$ дели $|R|$ (тврђење 2).

Теорема 79. *Нека је R коначан локалан комутативан прстен. Тада је $\gamma(\mathcal{C}\Gamma(R)) = 1$ акко је R изоморфан једном од следећих прстена: $\mathbb{F}_5$, $\mathbb{F}_7$, $\mathbb{Z}_8$, $\mathbb{F}_2[X]/(X^3)$, $\mathbb{F}_2[X,Y]/(X,Y)^2$, $\mathbb{Z}_4[X]/(2X, X^2)$ или $\mathbb{Z}_4[X]/(2X, X^2-2)$.*

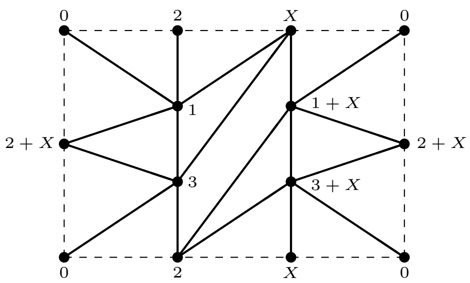
Доказ: Нека је најпре $k = 1$ (у горе споменутој нотацији), тј. $|R| = p$. Тада је $R \cong \mathbb{F}_p$. За $p > 7$, $\gamma(\mathcal{C}\Gamma(R)) \geq 2$ према леми 77, док су $\mathcal{C}\Gamma(\mathbb{F}_2)$ и $\mathcal{C}\Gamma(\mathbb{F}_3)$ очигледно планарни. Како је $\mathcal{C}\Gamma(\mathbb{F}_5) = K^5$ и $\mathcal{C}\Gamma(\mathbb{F}_7) = K^7$ то су и једини чисти графови рода 1 у овом случају.

Нека је сада $k = 2$, тј. $|R| = p^2$. Према [19], једине могућности за R су $\mathbb{F}_{p^2}$, $\mathbb{F}_p[X]/(X^2)$ или $\mathbb{Z}_{p^2}$. Докажимо да чисти графови ових прстена нису тороидални. Ако је $R = \mathbb{F}_{p^2}$ и $p > 2$, онда $\gamma(\mathcal{C}\Gamma(R)) \geq 2$ према леми 77. За $R = \mathbb{F}_{2^2}$, $\gamma(\mathcal{C}\Gamma(R)) = 0$. Ако је $R = \mathbb{F}_p[X]/(X^2)$, онда је $|M| = p$, па за $p \geq 5$ према леми 76, $\gamma(\mathcal{C}\Gamma(R)) \geq 2$. Како је $\mathcal{C}\Gamma(\mathbb{F}_2[X]/(X^2))$ планаран, остаје једино случај $R = \mathbb{F}_3[X]/(X^2)$. Једноставном провером видимо да је овде $\delta(\mathcal{C}\Gamma(R)) = 6$, као и да је $\deg(X) = 7$. Према последици 7, $\mathcal{C}\Gamma(R)$ није рода 1. Случај $R = \mathbb{Z}_{p^2}$ сличан је претходном; наиме и овде је $|M| = p$ и $\mathcal{C}\Gamma(\mathbb{Z}_{2^2})$ је планаран. Остаје једино случај $R = \mathbb{Z}_{3^2}$. Овде је $\delta(\mathcal{C}\Gamma(R)) = 6$ и $\deg(3) = 7$. Дакле, међу локалним прстенима кардиналности p^2, нема оних који имају тороидалан чисти граф.

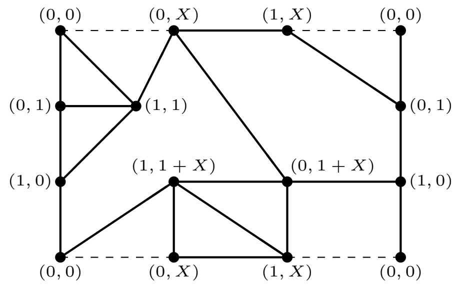
Размотримо случај $k = 3$, $|R| = p^3$. Како је $\mathcal{C}\Gamma(\mathbb{F}_{2^3}) = K^8$, он је рода 2. Чисти графови осталих коначних поља $\mathbb{F}_{p^3}$, за $p \geq 3$, очигледно нису рода 1 према леми 77. Даље, ако R није поље, онда M има бар p елемената. Ако је $p \geq 3$, онда будући да има довољно инвертибилних елемената, $\gamma(\mathcal{C}\Gamma(R)) \geq 2$, према леми 76. Остаје дакле да размотримо случај $|R| = 2^3$, где R није поље. Према [19, страна 687] могућности су: $\mathbb{Z}_{2^3}$, $\mathbb{F}_2[X]/(X^3)$, $\mathbb{F}_2[X,Y]/(X,Y)^2$, $\mathbb{Z}_4[X]/(2X, X^2)$ или $\mathbb{Z}_4[X]/(2X, X^2-2)$. Директном провером видимо да су чисти графови прва три прстена изоморфни са $K_{4,4}$, дакле тороидални, као и да су чисти графови преостала два прстена изоморфни и да се могу утопити у торус (Сл.3). Дакле, сви су рода 1.

У случају $|R| = p^k$, $k \geq 4$ лако се види да нема тороидалних графова.

$\square$



Сл.3. $\mathcal{C}\Gamma(\mathbb{Z}_4[X]/(2X, X^2))$



Сл.4. $\mathcal{C}\Gamma(\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2[X]/(X^2))$

Теорема 80. *Нека је $R = R_1 \times R_2$ производ коначних локалних комутативних прстена са јединицом. Нека бар један од прстена R_1, R_2 има више од 4 елемента. Тада је $\gamma(\mathcal{C}\Gamma(R_1 \times R_2)) \geq 2$.*

Доказ: Претпоставимо да је $|R_2| \geq 5$.

Ако је R_2 поље и 1, a, b, c његови различити инвертибилни елементи, онда $\mathcal{C}\Gamma(R)$ садржи $K_{4,5}$ као подграф, па је $\gamma(\mathcal{C}\Gamma(R)) \geq 2$. То се може видети нпр. ако уочимо подскупове темена $V_1 = \{(1,1),(1,a),(1,b),(1,c)\}$ и $V_2 = \{(0,0),(0,1),(0,a),(0,b),(0,c)\}$.

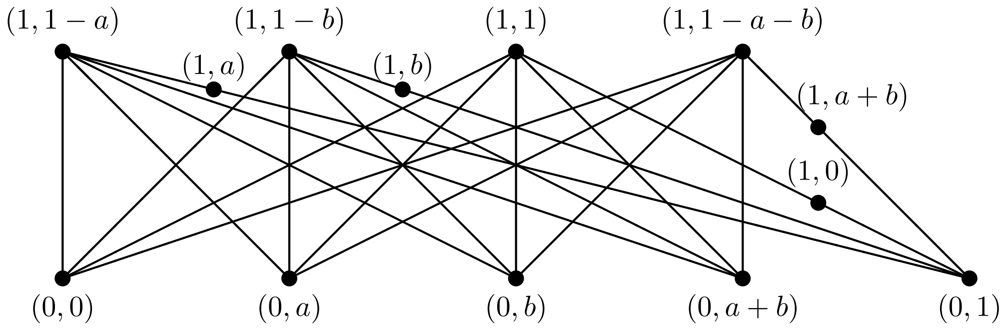
Ако R_2 није поље, онда је $|R_2| = p^n$ и $|M| \geq p$. Нека је најпре $|p| \geq 5$ и нека су 0, a, b, c, d различити елементи из M. За избор подскупова $V_1 = \{0,a,b,c\}$ и $V_2 = \{1, 1-a, 1-b, 1-c, 1-d\}$ добијамо да је $K_{4,5} \subseteq \mathcal{C}\Gamma(R_2)$. Према леми 74, биће и $K_{4,5} \subseteq \mathcal{C}\Gamma(R_1 \times R_2)$, па је $\gamma(\mathcal{C}\Gamma(R)) \geq 2$. Остају нам дакле једино случајеви $p = 2$ и $p = 3$.

Нека је $p = 3$, $|R_2| = 3^n$ и $|M| \geq 3$. Овде је довољно размотрити минималан случај, $M = \{0, a, -a\}$. Нека је $V_1 = \{(0,0),(0,a),(0,-a)\}$ и $V_2 = \{(1,1+a),(1,1-a),(1,-1-a),(1,a-1),(1,1),(1,-1),(1,0)\}$. Сва темена скупа V_2 суседна су теменима скупа V_1, осим темена $(1,0)$ које није суседно са $(0,a)$ и $(0,-a)$. Теме $(1,0)$ спојено је са $(0,a)$ преко темена $(0,1-a)$, док је са $(0,-a)$ спојено преко $(0,1+a)$. Тако добијамо да је потподела од $K_{3,7}$ садржана у $\mathcal{C}\Gamma(R)$, па он у овом случају не може бити рода 1.

Остаје нам случај $|R_2| = 2^n$. Очигледно $\gamma(\mathcal{C}\Gamma(R_1 \times R_2)) \geq 2$, за $n \geq 4$. За $n = 3$, могућности за R_2 према [19], су: $\mathbb{Z}_{2^3}$, $\mathbb{F}_2[X]/(X^3)$, $\mathbb{F}_2[X,Y]/(X,Y)^2$, $\mathbb{Z}_4[X]/(2X, X^2)$ или $\mathbb{Z}_4[X]/(2X, X^2-2)$. У свим случајевима је $|M| = 4$. Нека је зато $M = \{0, a, b, a+b\}$.

Ако $\mathrm{char}(R_1) \neq 2$, избором темена $V_1 = \{(0,a), (0,b), (0,a+b)\}$ и $V_2 = \{(-1,1-a), (-1,1-b), (1,1-a), (1,1-b), (1,1), (-1,1), (1,1-a-b)\}$, добијамо да је $K_{3,7} \subseteq \mathcal{C}\Gamma(R_1 \times R_2)$.

Ако је $\mathrm{char}(R_1) = 2$, бирамо $V_1 = \{(1,1-a), (1,1-b), (1,1-a-b), (1,1)\}$ и $V_2 = \{(0,0), (0,a), (0,b), (0,a+b), (0,1)\}$ (Сл.5). Сва темена скупа V_2 суседна су теменима из V_1, осим темена $(0,1)$. Теме $(0,1)$ повезано је међутим са осталим теменима из V_1 на следећи начин: са теменом $(1,1-a)$ преко $(1,a)$; са $(1,1-b)$ преко $(1,b)$; са $(1,1-a-b)$ преко $(1,a+b)$; са $(1,1)$ преко $(1,0)$. На тај начин добијамо потподелу од $K_{4,5}$ садржану у $\mathcal{C}\Gamma(R)$, па је и овде $\gamma(\mathcal{C}\Gamma(R_1 \times R_2)) \geq 2$. □



Слика 5

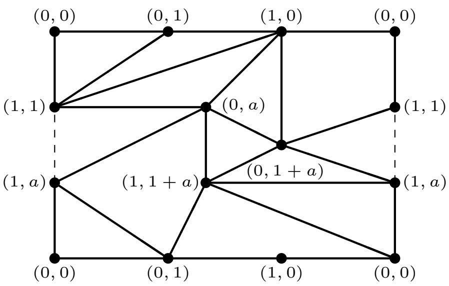
Теорема 81. *Нека је $R = R_1 \times R_2$, где су R_1 и R_2 коначни локални комутативни прстени са јединицом. Тада је $\gamma(\mathcal{C}\Gamma(R)) = 1$ акко је R изоморфан једном од следећих прстена: $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_3$, $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{Z}_4$, $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_4$ или $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2[X]/(X^2)$.*

Доказ: Према теореми 80 довољно је посматрати чисте графове следећих прстена: $\mathbb{F}_2\times\mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_2\times\mathbb{F}_3$, $\mathbb{F}_2\times\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{F}_2\times\mathbb{F}_4$, $\mathbb{F}_2\times\mathbb{F}_2[X]/(X^2)$, $\mathbb{F}_3\times\mathbb{F}_3$, $\mathbb{F}_3\times\mathbb{F}_4$, $\mathbb{F}_3\times\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{F}_3\times\mathbb{F}_2[X]/(X^2)$, $\mathbb{F}_4\times\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{F}_4\times\mathbb{F}_4$, $\mathbb{F}_4\times\mathbb{F}_2[X]/(X^2)$, $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{F}_2[X]/(X^2)$ или $\mathbb{F}_2[X]/(X^2)\times\mathbb{F}_2[X]/(X^2)$.

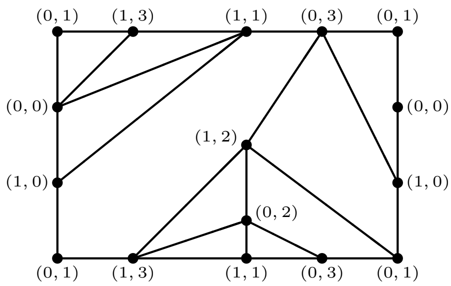
Ако је R један од прстена $\mathbb{F}_3\times\mathbb{F}_4$, $\mathbb{F}_4\times\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{F}_4\times\mathbb{F}_4$ или $\mathbb{F}_4\times\mathbb{F}_2[X]/(X^2)$, онда је $\gamma(\mathcal{C}\Gamma(R))\geq 2$ према леми 77, јер се директном провером види да је у сваком од ових прстена $|\mathrm{UI}(R)|=9$.

Ако је R један од прстена $\mathbb{F}_3\times\mathbb{F}_3$, $\mathbb{F}_3\times\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{F}_3\times\mathbb{F}_2[X]/(X^2)$, $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4$ или $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{F}_2[X]/(X^2)$, онда је $\gamma(\mathcal{C}\Gamma(R))\geq 2$ према последици 7, јер у сваком од ових прстена важи $\delta(\mathcal{C}\Gamma(R))=6$ и сваки од њих има бар једно теме степена 7. У $\mathbb{F}_3\times\mathbb{F}_3$ и $\mathbb{F}_3\times\mathbb{Z}_4$ је нпр. $\deg(0,1)=7$; у $\mathbb{F}_3\times\mathbb{F}_2[X]/(X^2)$, $\deg(1,x)=7$; у $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4$, $\deg(0,3)=7$; док је у $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{F}_2[X]/(X^2)$ $\deg(1,0)=7$.

За прстен $R=\mathbb{F}_2[X]/(X^2)\times\mathbb{F}_2[X]/(X^2)$ такође је $\delta(\mathcal{C}\Gamma(R))=6$, али овде свако теме има степен 6. Према последици 7, $\gamma(\mathcal{C}\Gamma(R))=1$ акко је $\mathcal{C}\Gamma(R)$ 1-скелетон 6-регуларне триангулације торуса. У овом случају немамо тражену триангулацију: на пример темена $(0,x)$ и $(1,1)$ су суседна, али ивица која их спаја није страница ниједног троугла јер у $\mathcal{C}\Gamma(R)$ не постоји теме суседно са оба.



Слика 6. $\mathcal{C}\Gamma(\mathbb{F}_2\times\mathbb{F}_4)$



Слика 7. $\mathcal{C}\Gamma(\mathbb{F}_2\times\mathbb{Z}_4)$

Због кардиналности скупа темена, $\gamma(\mathcal{C}\Gamma(\mathbb{F}_2\times\mathbb{F}_2))=0$ и $\gamma(\mathcal{C}\Gamma(\mathbb{F}_2\times\mathbb{F}_3))=1$. Коначно, чисти графови прстена $\mathbb{F}_2\times\mathbb{F}_2[X]/(X^2)$, $\mathbb{F}_2\times\mathbb{F}_4$ и $\mathbb{F}_2\times\mathbb{Z}_4$ могу се утопити у торус (слике 4, 6 и 7). $\square$

ГЛАВА 5

ЛИНИЈСКИ ГРАФ ТОТАЛНОГ ГРАФА

У теорији графова графу G придружује се његов линијски граф $\mathrm{L}(G)$, тако што се за темена графа $\mathrm{L}(G)$ узимају све ивице графа G. Два темена у $\mathrm{L}(G)$ су суседна акко одговарајуће ивице у G имају заједничко теме. Тако дефинисан граф омогућава нам да особине графа Γ које зависе само од његових ивица разматратамо као особине графа $\mathrm{L}(G)$ које зависе од његових темена. Ова особина веома је корисна за разне проблеме у теорији графова. На пример, за граф $G = (V, E)$, *упарење* (*matching*) у G је подскуп скупа ивица такав да никоје две ивице немају заједничко теме. Упарењу одговара независан скуп (подскуп скупа темена таквих да никоја два нису суседна) у $\mathrm{L}(G)$. Једну од најстаријих и најважнијих теорема о линијским графовима доказао је Витни (1932). Он је у [53] доказао да се повезан граф G може потпуно реконструисати из његовог линијског графа $\mathrm{L}(G)$, осим у случају $\mathrm{L}(G) = K^3$. У раду [30], аутори истражују утапања линијског графа $\mathrm{L}(\Gamma(R))$ и класификују до на изоморфизам све коначне комутативне прстене чији су линијски графови графова делитеља нуле планарни или тороидални.

Мотивисани овим резултатима и познајући структуру тоталног графа $T\Gamma(R)$, природно је поставити питање структуре његовог линијског графа и истражити везе међу њима. Овде ћемо истражити неке од особина овог графа. Показаћемо када је Ојлеров и колики је његов обим. Главни резултати везани су за проблем утапања линијског графа. Даћемо, до на изоморфизам, листу свих коначних комутативних прстена за које је линијски граф тоталног графа планаран или тороидалан. Занимљиво је да се листа коначних прстена за које је тотални граф планаран ([36]), поклапа са листом коначних прстена за који је асоцирани линијски граф планаран, док за тороидалне то не важи. Доказаћемо такође да за дати цео број $g \geq 0$, постоји само коначно много класа изоморфних коначних прстена чији линијски граф (тоталног графа) има род g.

5.1 Структура и особине графа $\mathrm{L}(\mathrm{T}\Gamma(R))$

Нека је R комутативан прстен са јединицом, $\mathrm{T}\Gamma(R)$ његов тотални граф и $\mathrm{L}(\mathrm{T}\Gamma(R))$ његов линијски граф. Ако за елементе $x, y \in R$ важи $x + y \in Z(R)$, онда је $\{x, y\}$ теме графа $\mathrm{L}(\mathrm{T}\Gamma(R))$. За ово теме користимо ознаку $[x, y]$. Из дефиниције графа $\mathrm{T}\Gamma(R)$ непосредно следи да степен сваког темена зависи од броја делитеља нуле, као и од тога да ли је $2 \in Z(R)$. Лако се може показати ([36, лема 1.1]) да важи следеће тврђење.

Лема 82. *Нека је R коначан комутативан прстен са јединицом и нека је x теме графа $\mathrm{T}\Gamma(R)$. Тада је*

$$\deg(x) = \begin{cases} |Z(R)| - 1 & \text{ако } 2 \in Z(R) \quad \text{или} \quad x \in Z(R), \\ |Z(R)| & \text{иначе.} \end{cases}$$

Теорема 83.

$$\mathrm{gr}(\mathrm{L}(\mathrm{T}\Gamma(R))) = \begin{cases} 3 & \text{ако је} \quad |Z(R)| \geq 3 \quad \text{и} \quad R \ncong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \\ 4 & \text{ако је} \quad R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \\ \infty & \text{ако је} \quad |Z(R)| \leq 2. \end{cases}$$

Доказ:

1. $|Z(R)| = 1$: Ако R нема правих делитеља нуле могућа су два случаја. Ако $\mathrm{char}(R) = 2$, онда је $\mathrm{L}(T\Gamma(R))= \emptyset$, јер је $T\Gamma(R)$ тотално неповезан. Ако $\mathrm{char}(R) \neq 2$, онда је $T\Gamma(R)$ дисјунктна унија $|R|/2$ графова K^2 и изолованог темена 0. Тада је $\mathrm{L}(T\Gamma(R))$ тотално неповезан граф са $|R|/2$ темена. Дакле, $\mathrm{gr}(\mathrm{L}(T\Gamma(R))) = \infty$.

2. $|Z(R)| = 2$: Познато је ([8]) да постоје само два неизоморфна комутативна прстена са једним правим делитељем нуле: $\mathbb{Z}_4$ и $\mathbb{Z}_2[X]/(X^2)$. Они имају изоморфне тоталне графове – дисјунктне уније два комплетна графа K^2. Одавде видимо да је $\mathrm{L}(T\Gamma(R))$ унија два изолована темена, па је и овде $\mathrm{gr}(\mathrm{L}(T\Gamma(R))) = \infty$.

3. $|Z(R)| \geq 3$:

   3.1) Нека је $Z(R)$ идеал и $x, y \in Z^*(R)$, $x \neq y$. Онда $T\Gamma(R)$ садржи троугао $0 — x — y — 0$. Одавде је $[0, x] — [x, y] — [y, 0] — [0, x]$ троугао у $\mathrm{L}(T\Gamma(R))$, тј. $\mathrm{gr}(\mathrm{L}(T\Gamma(R))) = 3$.

   3.2) Нека $Z(R)$ није идеал у R. Онда постоје $x, y \in Z^*(R)$ такви да $x + y \in \mathrm{Reg}(R)$. Ако је при том $|Z(R)| > 3$, тј. ако постоји $z \in Z^*(R)$ различит од x и y, онда у $T\Gamma(R)$ постоји звезда подграф $K_{1,3}$ (теме 0 суседно је теменима x, y и z). Како је $\mathrm{L}(K_{1,3}) = C_3$, то је $[0, x] — [0, y] — [0, z] — [0, x]$ троугао у $\mathrm{L}(T\Gamma(R))$ и $\mathrm{gr}(\mathrm{L}(T\Gamma(R))) = 3$. Остаје само да испитамо случај $|Z(R)| = 3$. Према [8] постоје три неизоморфна комутативна прстена са три делитеља нуле: $\mathbb{Z}_3[x]/(x^2)$, $\mathbb{Z}_9$ и $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Прва два прстена отпадају, јер је $Z(R)$ идеал, док је $T\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) = C_4$. Како је $\mathrm{L}(C_4) = C_4$, то је $\mathrm{gr}(\mathrm{L}(T\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2))) = 4$. □

Нека је R коначан комутативан прстен са јединицом. Ако је $R = \mathbb{Z}_2$, онда је $\mathrm{L}(T\Gamma(R)) = \emptyset$. Ако је $R = \mathbb{F}_q$ поље са $q \geq 3$ елемената, онда је $\mathrm{L}(T\Gamma(R))$ тотално неповезан граф са $(q-1)/2$ темена. У том случају је $\deg([u, v]) = 0$ за свако теме $[u, v]$ из $\mathrm{L}(T\Gamma(R))$, па је $\delta(\mathrm{L}(T\Gamma(R))) = 0$. Да би избегли тривијалне случајеве надаље ћемо обично претпостављати да R није поље, тј. да је $|Z(R)| \geq 2$.

Теорема 84. *Нека је R коначан комутативан прстен који није поље. Тада је* $\mathrm{L}(\mathrm{T}\Gamma(R))$ *регуларан акко* $2 \in Z(R)$. *Степен регуларности тада је једнак* $2|Z(R)| - 4$. *Ако са* $|V|$ *и* $|E|$ *означимо број темена и ивица* $\mathrm{L}(\mathrm{T}\Gamma(R))$, *онда је:*

$$|V| = \frac{|R|(|Z(R)| - 1)}{2}, \quad |E| = \frac{|R|(|Z(R)| - 1)(|Z(R)| - 2)}{2}.$$

Доказ: Нека је најпре $2 \in Z(R)$. Тада је према леми 82, $\mathrm{T}\Gamma(R)$ регуларан граф степена $|Z(R)|-1$ са $|R|(|Z(R)|-1)/2$ ивица. Нека је $[u,v]$ произвољно теме линијског графа. Тада је

$$\deg([u,v]) = \deg(u) + \deg(v) - 2 = 2|Z(R)| - 4,$$

одакле следи тражено тврђење.

Нека сада $2 \notin Z(R)$. Како R није поље, постоји $x \in Z(R)$, $x \neq 0$. Такође из претпоставки је $1 \neq -1$. Тада

$$\deg([0,x]) = 2|Z(R)| - 4 \neq \deg([1,-1]) = 2|Z(R)| - 2,$$

па $\mathrm{L}(\mathrm{T}\Gamma(R))$ није регуларан. □

Теорема 85. *Нека је R коначан комутативан прстен који није поље. Тада је*

$$\delta(\mathrm{L}(\mathrm{T}\Gamma(R))) = 2|Z(R)| - 4.$$

Доказ: Нека је $[u,v]$ теме графа $\mathrm{L}(\mathrm{T}\Gamma(R))$. Према леми 82, $\deg([u,v])$ је $2|Z(R)| - 2$, $2|Z(R)| - 3$ или $2|Z(R)| - 4$. Довољно је показати да бар једно теме графа $\mathrm{L}(\mathrm{T}\Gamma(R))$ има степен $2|Z(R)| - 4$. Можемо на пример узети теме $[0,x]$, где $x \in Z^*(R)$. □

Испитаћемо сада услове под којима је $\mathrm{L}(\mathrm{T}\Gamma(R))$ Ојлеров. Можемо се ограничити на случај када је R коначан прстен који није локалан (ако је R бесконачан нема смисла тражити Ојлерову контуру, а ако је R коначан и локалан, онда је $Z(R) = M$ његов максималан идеал, па је $\mathrm{T}\Gamma(R)$ неповезан). Може се дакле претпоставити да је $R \cong R_1 \times \cdots \times R_n$, где су R_i коначни локални прстени и $n \geq 2$. Као што већ знамо, за такав прстен R важи $\mathrm{diam}(\mathrm{T}\Gamma(R)) = 2$.

Теорема 86. *Нека је R коначан комутативан прстен који није локалан. Тада је* $\mathrm{L}(\mathrm{T}\Gamma(R))$ *Ојлеров акко* $2 \in Z(R)$.

Доказ: Претпоставимо да R задовољава услове теореме и да $2 \in Z(R)$. Тада према леми 82, свако теме графа $\mathrm{T}\Gamma(R)$ има степен $|Z(R)| - 1$, тј. $\mathrm{T}\Gamma(R)$ је регуларан степена $|Z(R)| - 1$. Нека је $[x, y]$ произвољно теме линијског графа $\mathrm{L}(\mathrm{T}\Gamma(R))$. Тада је

$$\deg([x, y]) = \deg(x) + \deg(y) - 2 = 2|Z(R)| - 4$$

паран, па је $\mathrm{L}(\mathrm{T}\Gamma(R))$ Ојлеров.

Нека сада $2 \notin Z(R)$. Према датим условима $Z(R)$ није идеал, па постоје $x, y \in Z(R)$ такви да $x + y \notin Z(R)$. Тада су темена $-x \in Z(R)$ и $x + y \in \mathrm{Reg}(R)$ суседна у $\mathrm{T}\Gamma(R)$. Према леми 82, $\deg(-x) = |Z(R)| - 1$ и $\deg(x + y) = |Z(R)|$. Уочимо теме $[-x, x + y]$ у линијском графу $\mathrm{L}(\mathrm{T}\Gamma(R))$. Тада је

$$\deg([-x, x + y]) = \deg(-x) + \deg(x + y) - 2 = 2|Z(R)| - 3.$$

Линијски граф $\mathrm{L}(\mathrm{T}\Gamma(R))$ садржи теме непарног степена па није Ојлеров.

$\square$

Напомена 87. Услов $2 \in Z(R)$ може се заменити условом $R \cong R_1 \times \cdots \times R_n$ и 2 је делитељ нуле у бар једном R_i, тј. бар један од њих има $\mathbb{Z}_2$ као поље остатака.

5.2 Утапања $\mathrm{L}(\mathrm{T}\Gamma(R))$

При испитивању рода неког графа битну улогу имају његови комплетни и комплетно бипартитни подграфови. Ово смо већ видели код испитивања рода чистог графа а исто ће важити и за род линијског графа. Подсетимо се да према једнакостима 1.1.2 и 1.1.3 важи:

$$\begin{aligned}
\gamma(K^n) &= 0, \text{ за } n = 1,2,3,4,\\
\gamma(K^n) &= 1, \text{ за } n = 5,6,7,\\
\gamma(K^n) &\geq 2, \text{ за } n \geq 8,\\
\gamma(K_{m,1}) &= \gamma(K_{m,2}) = 0, \text{ за свако } m,\\
\gamma(K_{m,3}) &= \gamma(K_{4,4}) = 1, \text{ за } 3 \leq m \leq 6,\\
\gamma(K_{m,n}) &\geq 2, \text{ иначе.}
\end{aligned}$$

Род графова $\mathrm{L}(K^n)$ и $\mathrm{L}(K_{m,n})$ разматран је у раду [30]. Мада за њихов род немамо експлицитну формулу (као у тврђењу 5), дате су неке корисне процене и одређен је њихов род у неким специјалним случајевима. Аутори су између осталог доказали да је $\gamma(\mathrm{L}(K_{2,n})) \geq 2$, за $n \geq 5$ и $\gamma(\mathrm{L}(K_{3,n})) \geq 2$, за $n \geq 4$. Овде нећемо детаљно наводити све процене, већ ћемо се по потреби позвати на неке од тих постојећих резултата.

Лема 88. *Нека је R коначан комутативан прстен такав да је $|Z(R)| \geq 5$. Тада је $\gamma(\mathrm{L}(\mathrm{T}\Gamma(R))) \geq 1$.*

Доказ: Према последици 7 и теореми 85, важи

$$\delta(\mathrm{L}(\mathrm{T}\Gamma(R))) = 2|Z(R)| - 4 \geq 6.$$

Одавде следи тражени резултат. □

Према леми 88, при испитивању планарности графа $\mathrm{L}(\mathrm{T}\Gamma(R))$ можемо се ограничити на прстене са малим бројем делитеља нуле. Испитаћемо најпре нелокалан случај.

Теорема 89. *Нека је R коначан комутативан прстен који није локалан. Тада је $\mathrm{L}(\mathrm{T}\Gamma(R))$ планаран акко је $R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ или $R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$.*

Доказ: Можемо претпоставити да је $R \cong R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_n$, где је $n \geq 2$, сваки R_i је локалан прстен и $|R_1| \leq |R_2| \leq \cdots \leq |R_n|$.

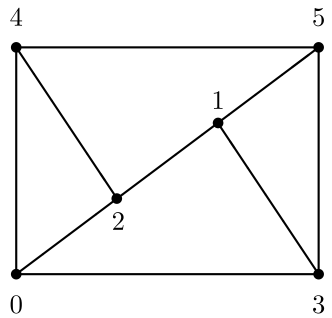
1) $n \geq 3$: Тада је $|Z(R)| \geq 7$, па $\mathrm{L}(\mathrm{T}\Gamma(R))$ не може бити планаран према леми 88 (минималан такав $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ има 7 делитеља нуле).

2) $R \cong R_1 \times R_2$ и за бар један од њих, на пример за R_2, важи $|R_2| \geq 5$. Тада $\gamma(\mathrm{L}(\mathrm{T}\Gamma(R))) \geq 1$ према леми 88, јер $(0, a_1), \ldots, (0, a_5) \in Z(R)$, $a_i \in R_2$.

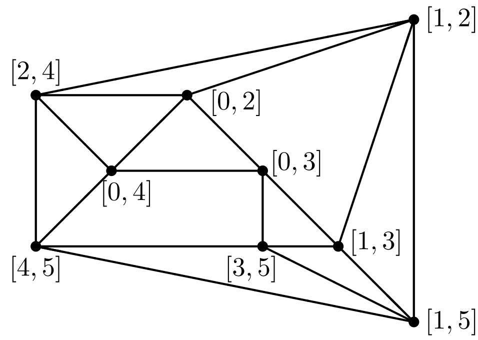
3) $R \cong R_1 \times R_2$ и $|R_1|, |R_2| \leq 4$. Испитајмо све могућности.

3.1) $R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Тада је $\mathrm{L}(\mathrm{T}\Gamma(R)) = C_4$ очигледно планаран.

3.2) $R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_6$. Тада је $\mathrm{L}(\mathrm{T}\Gamma(R))$ такође планаран (слике 8 и 9).



Слика 8. $\mathrm{T}\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3)$



Слика 9. $\mathrm{L}(\mathrm{T}\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3))$

3.3) $|R_1| = 2$, $|R_2| = 4$. Могућности су: $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{F}_4$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ и $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2[X]/(X^2)$. Случај $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{F}_4$ посебно је размотрен у теореми 92, где је доказано да $\mathrm{L}(\mathrm{T}\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{F}_4))$ није ни тороидалан. Лако је проверити да остала два прстена имају 6 делитеља нуле, па ни њихови линијски графови нису планарни према леми 88.

3.4) $R \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$. Овде је $|Z(R)| = 5$, па $\mathrm{L}(\mathrm{T}\Gamma(R))$ није планаран према леми 88.

3.5) У преосталим случајевима очигледно је $|Z(R)| \geq 7$, па $\mathrm{L}(\mathrm{T}\Gamma(R))$ није планаран према леми 88. $\square$

Даље разматрамо локалан случај. Нека је R коначан локалан прстен са максималним идеалом $M \neq \{0\}$. Тада је $Z(R) = M$, па делитељи нуле формирају идеал. Дакле $\mathrm{T}\Gamma(R)$ је неповезан и структура му је позната према теореми 8:

1) Ако $2 \in Z(R)$, онда је $\mathrm{T}\Gamma(R)$ дисјунктна унија $|R/M|$ копија $K^{|M|}$.

2) Ако $2 \notin Z(R)$, онда је $\mathrm{T}\Gamma(R)$ дисјунктна унија комплетног графа $K^{|M|}$ и $(|R/M|-1)/2$ комплетно бипартитних графова $K_{|M|,|M|}$.

Осим ове теореме у доказу користимо и познате резултате: Ако је R коначан локалан прстен са максималним идеалом M, онда је $|R| = p^k$ и $|M| \mid |R|$ (тврђење 2). Користимо листу коначних прстена до реда p^5 ([19, 20]) и теорему 3.

Теорема 90. *Нека је R коначан локалан комутативан прстен са јединицом који није поље. Тада је $\mathrm{L}(\mathrm{T}\Gamma(R))$ планаран акко је R изоморфан једном од следећих прстена: $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_2[X]/(X^2)$, $\mathbb{Z}_8$, $\mathbb{Z}_2[X]/(X^3)$, $\mathbb{Z}_2[X,Y]/(X,Y)^2$, $\mathbb{Z}_4[X]/(2X,X^2)$, $\mathbb{Z}_4[X]/(2X,X^2-2)$, $\mathbb{F}_4[X]/(X^2)$ или $\mathbb{Z}_4[X]/(X^2+X+1)$.*

Доказ: Нека је $|R| = p^k$. Приметимо најпре да је довољно размотрити случајеве $p \in \{2,3\}$. Наиме, ако је $p \geq 5$, онда с обзиром да R није поље и да $|M| \mid p^k$, мора да важи $|Z(R)| = |M| \geq 5$. Према леми 88, $\gamma(\mathrm{L}(\mathrm{T}\Gamma(R))) \geq 1$.

1) $k = 2$. Могућности су: $\mathbb{F}_p[X]/(X^2)$ и $\mathbb{Z}_{p^2}$.

Ако је $R = \mathbb{F}_2[X]/(X^2)$ или $R = \mathbb{Z}_{2^2}$, онда је $\mathrm{L}(\mathrm{T}\Gamma(R))$ тривијално планаран (има 2 темена). Ако је $R = \mathbb{F}_3[X]/(X^2)$ или $R = \mathbb{Z}_{3^2}$, онда $2 \notin Z(R)$, па је $\mathrm{T}\Gamma(R) = K^3 \cup K_{3,3}$. Може се показати (видети [30]) да је $\gamma(\mathrm{L}(K_{3,3})) = 1$, па ови линијски графови нису планарни.

2) $k = 3$. Ако је $p = 3$ (тј. $|R| = 27$), онда $2 \notin Z(R)$; одавде је $K_{3,3} \subseteq \mathrm{T}\Gamma(R)$. Дакле $\mathrm{L}(\mathrm{T}\Gamma(R))$ није планаран па је довољно размотрити случај $p = 2$. Како R није поље могућности су: $\mathbb{Z}_{2^3}$, $\mathbb{Z}_2[X]/(X^3)$, $\mathbb{Z}_2[X,Y]/(X,Y)^2$, $\mathbb{Z}_4[X]/(2X,X^2)$ или $\mathbb{Z}_4[X]/(2X,X^2-2)$. Лако је видети да сви прстени имају изоморфне тоталне графове, дисјунктне уније два комплетна графа K^4. Како је $\gamma(\mathrm{L}(K^4)) = 0$ (може се видети директним цртањем у равни), следи да су одговарајући линијски графови планарни.

3) $k = 4$. Посматрамо сада локалне прстене реда p^4. Довољно је размотрити случај $p = 2$, из истог разлога као и за $k = 3$. Дакле $|R| = 16$ и $|M| \mid 16$. Случај $|M| = 1$ отпада јер R није поље. Случај $|M| =$

2 отпада јер доводи до контрадикције, $16 = |R| \leq |Z(R)|^2 = |M|^2 = 4$. Случај $|M| = 8$ отпада јер онда има превише делитеља нуле, па према леми 88, линијски граф није планаран. Остаје дакле само случај $|M| = 4$. Постоји тачно 21 неизоморфних локалних комутативних прстена са јединицом реда 16 ([20]). Од свих њих само 2 задовољавају услов $|M| = 4$: $\mathbb{F}_4[X]/(X^2)$ и $\mathbb{Z}_4[X]/(X^2+X+1)$. Они имају изоморфне тоталне графове – дисјунктне уније 4 комплетна графа K^4. Како је $\mathrm{L}(K^4)$ планаран, као и у претходном случају долазимо до закључка да је за ова два прстена $\mathrm{L}(\mathrm{T}\Gamma(R))$ планаран.

4) $k \geq 5$. И овде се можемо ограничити на случај $p = 2$, $|R| = 2^k$. Случај $|M| = 4$ тада није могућ, јер је $|R| \leq |M|^2$. У свим осталим случајевима има превише делитеља нуле, па према леми 88 они нису планарни. □

Листа коначних комутативних прстена са јединицом за које је $\mathrm{L}(\mathrm{T}\Gamma(R))$ *планаран:*

$$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2,\quad \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3,\quad \mathbb{Z}_4,\quad \mathbb{Z}_2[X]/(X^2),\quad \mathbb{Z}_8,\quad \mathbb{Z}_2[X]/(X^3),\quad \mathbb{Z}_2[X,Y]/(X,Y)^2,$$
$$\mathbb{Z}_4[X]/(2X,X^2),\quad \mathbb{Z}_4[X]/(2X,X^2-2),\quad \mathbb{F}_4[X]/(X^2),\quad \mathbb{Z}_4[X]/(X^2+X+1).$$

Лема 91. *Нека је R коначан комутативан прстен. Важи:*

$$|Z(R)| > 5 \implies \gamma(\mathrm{L}(\mathrm{T}\Gamma(R))) > 1.$$

Доказ: Применом теореме 85, видимо да је $\delta(\mathrm{L}(\mathrm{T}\Gamma(R))) = 2|Z(R)| - 4 > 6$. Тада је према тврђењу 6, $\gamma(\mathrm{L}(\mathrm{T}\Gamma(R))) > 1$. □

Теорема 92. *Нека је R коначан комутативан прстен са јединицом који није локалан. Тада је $\gamma(\mathrm{L}(\mathrm{T}\Gamma(R))) \neq 1$.*

Доказ: Према леми 91 довољно је ограничити се на разлагање $R \cong R_1 \times R_2$, где је $|R_1| \leq |R_2|$. Доказ изводимо дискусијом кардиналности прстена R_2.

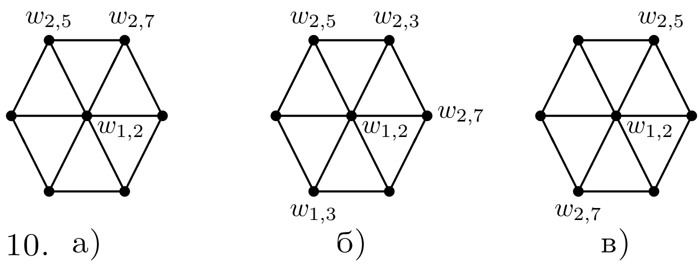
1) $|R_2| \geq 5$. Тада је $|Z(R)| \geq 6$, па је $\gamma(\mathrm{L}(\mathrm{T}\Gamma(R))) > 1$ према леми 91.

2) $|R_2| = 4$. Овде имамо 2 могућности.

2.1) $|Z(R_2)| = 2$. Тада $|Z(R)| = 6$, па је $\gamma(\mathrm{L}(\mathrm{T}\Gamma(R))) > 1$ према леми 91.

2.2) $|Z(R_2)| = 1$. Тада је $R_2 \cong \mathbb{F}_4$. Разматрамо минималан случај $R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{F}_4$. Имамо да је $\delta(\mathrm{T}\Gamma(R)) = 4$, па је $\delta(\mathrm{L}(\mathrm{T}\Gamma(R))) = 6$. Примењујући тврђење 6 видимо да је $\gamma(\mathrm{L}(\mathrm{T}\Gamma(R))) = 1$ акко је тај граф регуларна триангулација торуса. Докажимо да овај граф не остварује триангулацију торуса. Нека је $R = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{F}_4$, $\mathbb{F}_4 = \mathbb{Z}_2[X]/(X^2 + X + 1)$ и x одговарајућа класа. Тада је $Z(R) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ и $\mathrm{Reg}(R) = \{v_6, v_7, v_8\}$, где је $v_1 = (0, 0)$, $v_2 = (0, x)$, $v_3 = (0, x + 1)$, $v_4 = (0, 1)$, $v_5 = (1, 0)$, $v_6 = (1, x)$, $v_7 = (1, x + 1)$ и $v_8 = (1, 1)$.

Граф $\mathrm{T}\Gamma(R)$ је регуларан граф степена 4 са 8 темена и 16 ивица, па је $\mathrm{L}(\mathrm{T}\Gamma(R))$ регуларан степена 6 са 16 темена и 48 ивица (линијски граф регуларног графа степена r са n темена је такође регуларан степена $2r-2$ са $nr/2$ темена и $nr(r-1)/2$ ивица). Ради лакшег записа означимо теме $[v_i, v_j]$ графа $\mathrm{L}(\mathrm{T}\Gamma(R))$ са $w_{i,j}$. Граф $\mathrm{L}(\mathrm{T}\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{F}_4))$ има 16 темена: $w_{1,2}$, $w_{1,3}$, $w_{1,7}$, $w_{1,8}$, $w_{2,3}$, $w_{2,5}$, $w_{2,7}$, $w_{3,4}$, $w_{3,7}$, $w_{4,5}$, $w_{4,6}$, $w_{4,8}$, $w_{5,6}$, $w_{5,8}$, $w_{6,7}$ и $w_{6,8}$. Темена $w_{i,j}$ и $w_{k,l}$ су суседна акко $\{i, j\} \cap \{k, l\} \neq \emptyset$, па је број ивица 48. По броју темена, ивица и пљосни (Ојлерова теорема), $\mathrm{L}(\mathrm{T}\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{F}_4))$ триангулише торус. Свако теме графа дакле мора бити центар неког шестоугла (степен свих темена је 6). Како су темена равноправна, доказујемо да тако нешто није могуће, на пример за теме $w_{1,2}$.



Слика 10. а) б) в)

Претпоставимо да је $w_{1,2}$ центар неког шестоугла. На њему онда морају бити распоређена темена $w_{1,3}$, $w_{1,7}$, $w_{1,8}$, $w_{2,3}$, $w_{2,5}$ и $w_{2,7}$. Посматрамо темена $w_{2,5}$ и $w_{2,7}$ на шестоуглу. Могући су следећи случајеви:

а) Темена $w_{2,5}$ и $w_{2,7}$ су суседна на том шестоуглу (слика 10а). Триангулација се даље не може проширити јер једино теме из скупа свих темена суседно њима је теме $w_{2,3}$ које мора бити на шестоуглу.

б) Ако их раздваја једно теме то може бити само теме $w_{2,3}$ (слика 10б). Како $w_{1,3}$ није суседно ни са $w_{2,5}$ а ни са $w_{2,7}$, оно мора бити антиподално са $w_{2,3}$. Онда теме $w_{1,8}$ нема места на шестоуглу.

в) Ако су темена $w_{2,5}$ и $w_{2,7}$ антиподална (слика 10в), онда за теме $w_{1,3}$ нема места на шестоуглу.

3) $|R_2| = 3$. Овде имамо 2 могућности.

3.1) $|R_1| = 2$. Онда $R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$, па је $\gamma(\mathrm{L}(\mathrm{T}\Gamma(R))) = 0$ према теореми 89.

3.2) $|R_1| = 3$. Онда је $R \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ и $|Z(R)| = 5$. Одавде је $\delta(\mathrm{T}\Gamma(R)) = 4$ и $\delta(\mathrm{L}(\mathrm{T}\Gamma(R))) = 6$. Ако је утапање могуће, онда према тврђењу 6 сва темена морају имати степен 6. Ово није тачно, нпр. $\deg([(0,1),(2,2)]) = 7$. Како је $\mathrm{L}(\mathrm{T}\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2))$ планаран доказ је овим завршен. □

Остаје да се испита локалан случај.

Теорема 93. *Нека је R коначан локалан прстен који није поље. Тада је $\gamma(\mathrm{L}(\mathrm{T}\Gamma(R))) = 1$ акко је $R \cong \mathbb{Z}_9$ или $R \cong \mathbb{Z}_3[X]/(X^2)$.*

Доказ: Нека је $M = Z(R)$ максималан идеал прстена R. Према леми 91, довољно је ограничити се на случај $|M| \leq 5$. Најпре ћемо доказати да се овде може искључити и случај $|M| = 5$.

Нека је $|M| = |Z(R)| = 5$ и $x \in \mathrm{Reg}(R)$. Тада, $\deg(x) = 5$ према леми 82. Мора постојати $y \in \mathrm{Reg}(R)$ такав да је x суседан са y у $\mathrm{T}\Gamma(R)$, односно $x + y \in Z(R)$ (у супротном би теме x било суседно са 0). Ивица $x — y$ спаја два темена степена 5 у $\mathrm{T}\Gamma(R)$, па теме $[x, y]$ из $\mathrm{L}(\mathrm{T}\Gamma(R))$ има степен 8. Како је међутим $\delta(\mathrm{T}\Gamma(R)) = 4$, то је $\delta(\mathrm{L}(\mathrm{T}\Gamma(R))) = 6$. Према тврђењу 6, у случају тороидалности сва темена графа $\mathrm{L}(\mathrm{T}\Gamma(R))$ морају имати степен 6, што није случај јер је $\deg([x, y]) = 8$.

Нека је $|R| = p^k$. Разматрамо само случајеве $p = 2$ и $p = 3$.

1) $|R| = p^2$. Могућности су $\mathbb{F}_{p^2}$, $\mathbb{Z}_p[X]/(X^2)$ и $\mathbb{Z}_{p^2}$. Како R није поље и како су линијски графови за $\mathbb{Z}_2[X]/(X^2)$ и $\mathbb{Z}_{2^2}$ планарни, остају само могућности $\mathbb{Z}_3[X]/(X^2)$ и $\mathbb{Z}_{3^2}$. Лако се види да оба прстена имају тоталне графове изоморфне са $K^3 \cup K_{3,3}$. Како је $\gamma(\mathrm{L}(K_{3,3})) = 1$, то су њихови линијски графови тороидални као унија тороидалног и планарног графа.

2) $|R| = p^3$. Према [19] могућности су $\mathbb{F}_{p^3}$, $\mathbb{F}_p[X]/(X^3)$, $\mathbb{Z}_{p^2}[X]/(pX, X^2)$, $\mathbb{F}_p[X,Y]/(X,Y)^2$, $\mathbb{Z}_{p^3}$ и $\mathbb{Z}_{p^2}[X]/(pX, X^2 - \varepsilon p)$, где ε није квадрат у $\mathbb{F}_p^*$. Како је $\mathbb{F}_{p^3}$ поље и како су према теореми 90 линијски графови за $\mathbb{Z}_2[X]/(X^3)$, $\mathbb{Z}_4[X]/(2X, X^2)$, $\mathbb{F}_2[X,Y]/(X,Y)^2$, $\mathbb{Z}_{2^3}$ и $\mathbb{Z}_4[X]/(2X, X^2-2)$ планарни, остају нам $\mathbb{F}_3[X]/(X^3)$, $\mathbb{Z}_9[X]/(3X, X^2)$, $\mathbb{F}_3[X,Y]/(X,Y)^2$, $\mathbb{Z}_{27}$ и $\mathbb{Z}_9[X]/(3X, X^2-3)$. Лако је видети да је код њих $|M| = |Z(R)| = 9$, па према леми 91 овде нема линијских графова рода 1.

3) $|R| = p^4$.

3.1) $p = 3$ и $|R| = 81$, па $|M| \in \{1, 3, 9, 27\}$. Случај $|M| = 1$ отпада јер R није поље, док случај $|M| = 3$ отпада јер је онда $|R| \leq 9$. Остали случајеви отпадају јер има превише делитеља нуле.

3.2) $p = 2$ и $|R| = 16$, па $|M| \in \{1, 2, 4, 8\}$. Сличном анализом остаје нам само случај $|M| = 4$, односно прстени $\mathbb{F}_4[X]/(X^2)$ и $\mathbb{Z}_4[X]/(X^2+X+1)$. Њихови линијски графови су планарни према теореми 90.

4) $|R| = p^k$, $k \geq 5$. Овде јасно нема тороидалних линијских графова јер је $|M| = |Z(R)| \geq 8$. □

Листа коначних комутативних прстена са јединицом за које је $\mathrm{L}(\mathrm{T}\Gamma(R))$ *тороидалан:*

$$\mathbb{Z}_9, \quad \mathbb{Z}_3[X]/(X^2).$$

Теорема 94. *Нека је $g \geq 0$ цео број. Тада постоји само коначно много неизоморфних комутативних прстена R таквих да је $\gamma(\mathrm{L}(\mathrm{T}\Gamma(R))) = g$.*

Доказ: Доказали смо да за $g = 0$ постоји само 11 таквих прстена, док за $g = 1$ постоје само 2 таква прстена. Претпоставимо да је $g \geq 2$. Према теореми 85, неједнакост из тврђења 6 за граф L(TΓ(R)) своди се на:

$$2|Z(R)| - 4 \leq 6 + \frac{12g - 12}{n}.$$

Како је

$$n = |V(\mathrm{L}(T\Gamma(R)))| \geq \frac{1}{2}|R|(|Z(R)| - 1),$$

заменом у претходну неједнакост добијамо

$$|R|(|Z(R)| - 1)(|Z(R)| - 5) \leq 12g - 12.$$

Одавде, за $|Z(R)| \geq 6$ важи

$$|R| \leq 3g - 3.$$

С друге стране, како је $|R| \leq |Z(R)|^2$, има само коначно много случајева таквих да је $|Z(R)| < 6$. Овим је доказ завршен. □

Напомена 95. Користећи исте аргументе као у претходном доказу, занимљиво је истаћи да за $|Z(R)| \geq 6$ не постоји прстени чији линијски графови имају род 2 или 3.

ГЛАВА 6

ГРАФ ПРЕСЕКА ИДЕАЛА

Нека је R комутативан прстен са јединицом и $G(R)$ његов граф пресека идеала. У овој глави дајемо класификацију свих тороидалних графова који су графови пресека идеала. Такође дајемо једно побољшање постојећих резултата о планарности ових графова.

Нека је R комутативан прстен са јединицом и нека је $I^*(R)$ скуп његових нетривијалних идеала. *Граф пресека идеала* $G(R)$ дефинише се на следећи начин:

$$V(G(R)) := I^*(R), \quad E(G(R)) := \{\{I_1, I_2\} : I_1 \cap I_2 \neq 0\},$$

где $V(G(R))$ $(E(G(R)))$ означава скуп темена (ивица) графа $G(R)$. Овај граф дефинисан је у раду [18], за некомутативан прстен R и фамилију левих нетривијалних идеала у R. Аутори су дали потребне и довољне услове за повезаност овог графа. За комутативан прстен са јединицом R, $G(R)$ биће неповезан акко је R директан производ два поља ([18, последица 2.8]). Особине овог графа такође су испитиване у [3]. У овом раду карактеришу се сви прстени R за које је $\mathrm{cl}(G(R))$ коначан и доказује се да из $\mathrm{cl}(G(R)) < \infty$ следи $\chi(G(R)) < \infty$. Такође се доказује да важи $\mathrm{diam}(G(R)) \leq 2$ у случају када је $G(R)$ повезан.

У раду [31], аутори су окарактерисали оне планарне графове који могу бити графови пресека идеала за неке комутативне прстене. Ова класификација није дата у потпуности, јер се доказује да се могу појавити звезда графови, без детаља о томе који од њих могу бити графови пресека идеала. Допунићемо ову класификацију у теореми 97.

Како структура идеала одражава особине прстена природно је наставити даља истраживања овог графа. У овој глави бавимо се углавном питањем његове тороидалности (и у мањем обиму планарности). Циљ је да потпуно опишемо оне тороидалне графове који могу бити графови пресека идеала за неке комутативне прстене са јединицом. Главни резултат дат је у теореми 110 где је презентовано решење овог проблема.

6.1 О планарности графа $G(R)$

Тврђење 96. *Ако $G(R)$ има коначан род, онда је R Артинов прстен. Ако посматрамо R као један R-модул, онда је $l(R) \leq 5$ ако је $G(R)$ планаран и $l(R) \leq 8$ ако је $G(R)$ тороидалан.*

Доказ: Ово је очигледно. Ако R не би био Артинов, онда би $G(R)$ садржао K^n као подграф (за свако n). Како је R тада Нетерин, он има коначну дужину као R-модул и та дужина има наведене горње границе. □

Можемо се дакле концентрисати на Артинове прстене. Према теореми 1

$$R \cong R_1 \times \cdots \times R_n \tag{6.1.1}$$

где су R_i локални Артинови прстени са максималним идеалима M_i. У [31], аутори су описали планарне графове који могу бити графови пресека идеала за неке комутативне прстене. Међу њима, појављују се и звезда графови. Како није дата потпуна анализа о којим се звезда графовима ради, даћемо је овде.

Теорема 97. *Нека је R локалан комутативан прстен са максималним идеалом $M = \langle x, y\rangle$. Ако је $G(R)$ планаран, онда је $M^2 = 0$ и $G(R)$ је или бесконачан звезда граф или је изоморфан са K_{1,p^k+1}, за неки прост број p и позитиван цео број k.*

Доказ: Претпоставимо да је $x^2 \neq 0$. Лако је проверити да су у том случају идеали $\langle x\rangle$, $\langle x^2\rangle$, $\langle x^2, y\rangle$, $\langle x^2, x+y\rangle$ и M различити и да сви садрже x^2. Дакле, K^5 је подграф у $G(R)$. Исти закључак добија се ако је $y^2 \neq 0$. Из претпоставке да је $G(R)$ планаран, мора бити $x^2 = y^2 = 0$. Ако је $xy \neq 0$ а како је $x^2 = y^2 = 0$, добијамо $xy \in \langle x + y\rangle$. Тада идеали $\langle x\rangle$, $\langle y\rangle$, $\langle xy\rangle$, $\langle x + y\rangle$, $\langle x, y\rangle$ формирају K^5 унутар $G(R)$.

Одавде мора да важи $x^2 = y^2 = xy = 0$, тј. $M^2 = 0$. Дакле, сваки елемент у M је облика $\alpha x + \beta y$, где је $\alpha, \beta \in \mathrm{U}(R) \cup \{0\}$ (са $\mathrm{U}(R)$ означени су инвертибилни елементи у R). Није тешко описати структуру идеала у таквом прстену. Сви прави идеали различити од M морају бити главни, облика $\langle x\rangle$, $\langle y\rangle$ или $\langle x + \alpha y\rangle$, где је $\alpha \in \mathrm{U}(R)$. Ови идеали су очигледно минимални и тривијално се секу. У минималном случају $\mathrm{U}(R) = \{1\}$, постоје три таква идеала.

Докажимо да је $\langle x + \alpha y\rangle = \langle x + \beta y\rangle$ ако и само ако $\alpha - \beta \in M$.

Најпре, ако је $\alpha - \beta \in M$, онда је $x + \alpha y = x + (\alpha - \beta + \beta)y = x + \beta y$. С друге стране, ако је $\langle x + \alpha y\rangle = \langle x + \beta y\rangle$, онда $x + \alpha y = a(x + \beta y)$ за неко $a \in R$, па $(1 - a)x \in \langle y\rangle$ и $(a\beta - \alpha)y \in \langle x\rangle$. Како M није генерисан једним елементом, мора да важи $1 - a \in M$ и $a\beta - \alpha \in M$. Дакле, $\beta - \alpha = \beta(1 - a) + a\beta - \alpha \in M$.

Из ове анализе изводи се закључак да за такав прстен R мора да важи $|I^*(R)| = |R/M| + 2$ (један максималан идеал и сви различити главни идеали које смо претходно поменули). Ако је R/M бесконачно поље, онда има бесконачно много идеала. Сви идеали који нису максимални суседни су само са M (сви су минимални), па је $G(R)$ звезда граф. Ако поље није бесконачно, онда мора имати $p^k + 2$ темена (за неки прост број p и позитиван цео број k), па је $G(R) \cong K_{1,p^k+1}$. □

Напомена 98. Све ове графове можемо добити избором поља F у прстену $F[X,Y]/\langle X,Y\rangle^2$. Како је сваки звезда граф планаран, претходна теорема такође показује који звезда графови могу бити графови пресека идеала (звезда графови појављују се само у случају када је R локалан прстен чији максималан идеал има тачно два генератора).

6.2 Тороидалност графа $G(R)$

Почињемо ово поглавље представљањем графа Γ, који се може утопити у торус (Слика 11 на крају). Овај граф је од суштинске важности за нашу дискусију јер су сви тороидални графови $G(R)$ подграфови графа Γ. Приметимо да Γ настаје од комплетног графа K^7 додавањем неких темена и ивица.

Тврђење 99. *Ако у производу* (6.1.1) *важи* $n \geq 3$, *онда је* $\gamma(G(R)) \neq 1$.

Доказ: Треба само испитати случај када је $n = 3$ и бар један од R_i није поље (видети [31]).

Претпоставимо да је R_1 локалан прстен са максималним идеалом $M_1 \neq 0$. Идеали $I_1 = R_1 \times 0 \times 0$, $I_2 = R_1 \times R_2 \times 0$, $I_3 = R_1 \times 0 \times R_3$, $I_4 = M_1 \times R_2 \times R_3$, $I_5 = M_1 \times R_2 \times 0$, $I_6 = M_1 \times 0 \times R_3$, $I_7 = M_1 \times 0 \times 0$ и $I_8 = 0 \times R_2 \times R_3$ индукују подграф у $G(R)$. Степени од I_1 и I_7 су 6, степен I_8 је 5, док остала темена имају степен 7 (у овом подграфу). Закључујемо да је $e = 26$. Ако би се овај подграф могао утопити у торус, било би $f = 18$, али онда добијамо контрадикцију јер мора да важи $2e \geq 3f$. □

Тврђење 100. *Претпоставимо да је* $R \cong R_1 \times R_2$, *где су* R_1, R_2 *локални прстени. Тада је* $\gamma(G(R)) = 1$ *у тачно једном од следећих случајева:*

1) *Један од прстена је главноидеалски домен са максималним идеалом* M *таквим да је* $M^4 = 0$ *а други прстен је поље;*

2) *R_1 и R_2 су главноидеалски домени код којих су квадрати максималних идеала једнаки нули.*

Доказ: Ако су R_1 и R_2 поља, онда је $G(R)$ граф са два темена без ивица, па је $\gamma(G(R) = 0$.

Докажимо следеће: ако R_1 није поље, онда је главноидеалски домен. Претпоставимо да максимални идеал M_1 није главни. Нека је $x \in M_1$ и $y \in M_1 \setminus \langle x \rangle$. Погледајмо идеале $R_1 \times 0$, $M_1 \times 0$, $\langle x \rangle \times 0$, $\langle y \rangle \times 0$, $\langle x+y \rangle \times 0$, $M_1 \times R_2$, $\langle x \rangle \times R_2$, $\langle y \rangle \times R_2$, $\langle x+y \rangle \times R_2$ и $0 \times R_2$. Процењивањем њихових степена (на пример, степен од $\langle x \rangle \times 0$ је најмање 4), добијамо да у минималном случају имамо подграф од $G(R)$ са 10 темена и 31 ивицом. Ако би се овај подграф могао утопити у торус, добили би $f = 21$. Ово је контрадикција јер мора да важи $2e \geq 3f$.

Зато је R_1 локалан Артинов прстен са максималним идеалом $M_1 = \langle x \rangle$, $x \neq 0$. Дакле

$$I^*(R_1) = \{\langle x^k \rangle \mid 1 \leq k \leq r-1\},$$

где је r најмањи природан број за који је $x^r = 0$. У зависности од r и од прстена R_2 имамо неколико случајева.

1. $r = 2$ и R_2 је поље. Знамо да је тада $G(R)$ планаран (видети [31]).

2. $r = 3$ или $r = 4$ и R_2 је поље. За $r = 3$, граф пресека идеала $G(R)$ изоморфан је са $\Gamma[1, 2, 3, 4, 5, a]$, док је за $r = 4$ $G(R)$ изоморфан са $\Gamma[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, d]$, па је рода 1.

3. $r \geq 5$. Тада је $\gamma(G(R)) > 1$. Ово је очигледно, јер у том случају $\langle x \rangle \times 0$, $R_1 \times 0$, $\langle x^2 \rangle \times 0$, $\langle x^3 \rangle \times 0$, $\langle x^4 \rangle \times 0$, $\langle x \rangle \times R_2$, $\langle x^2 \rangle \times R_2$ и $\langle x^3 \rangle \times R_2$ дају K^8.

4. R_1 и R_2 су локални са максималним идеалима $M_1 = \langle x \rangle$, $M_2 = \langle y \rangle$, таквим да је $x^2 = y^2 = 0$. Тада је граф пресека идеала $G(R)$ изоморфан са $\Gamma[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7] - \{36, 37, 46, 47\}$ и $\gamma(G(R)) = 1$.

5. R_1 и R_2 су локални са максималним идеалима $M_1 = \langle x \rangle$, $M_2 = \langle y \rangle$, таквим да је $x^2 \neq 0$ или $y^2 \neq 0$. Тада је $\gamma(G(R)) > 1$. Наиме, ако је $x^2 \neq 0$, онда $\langle x \rangle \times 0$, $\langle x \rangle \times \langle y \rangle$, $\langle x \rangle \times R_2$, $R_1 \times 0$, $R_1 \times \langle y \rangle$, $\langle x^2 \rangle \times 0$, $\langle x^2 \rangle \times \langle y \rangle$ и $\langle x^2 \rangle \times R_2$ дају K^8. Слично за $y^2 \neq 0$. $\square$

Остаје да размотримо случај локалног Артиновог прстена R са максималним идеалом $M \neq 0$. Како је M коначно генерисан дискутоваћемо по минималном броју генератора (n).

Тврђење 101. *Ако је $n \geq 3$, онда је $\gamma(G(R)) > 1$.*

Доказ: Довољно је размотрити минималан случај $M = \langle x, y, z \rangle$. Идеали $\langle x \rangle$, $\langle x + y + z \rangle$, $\langle x, y \rangle$, $\langle x, z \rangle$, $\langle y, z \rangle$, $\langle x, y, z \rangle$, $\langle x, y + z \rangle$, $\langle y, x + z \rangle$ и $\langle z, x + y \rangle$ су различити. Рачунањем њихових (минималних) степена добијамо граф са 9 темена и 29 ивица. Ако би се могао утопити у торус добили би $f = 20$, али то није могуће јер је $3f = 60 > 58 = 2e$. $\square$

Надаље ћемо често морати да проверавамо да ли су извесни идеали једнаки. Да би упростили и скратили проверу, доказаћемо један резултат који нам омогућава да утврдимо да је максималан идеал различит од осталих идеала који се касније јављају у дискусији. Ово је познати резултат, али ћемо дати доказ због комплетности излагања. Истакнимо најпре једно познато тврђење које је последица леме Накајаме (подсећамо да је претпоставка услова да је прстен Нетерин укључена претпоставком да је локалан).

Тврђење 102. *Нека је (R, M) локалан прстен. Ако је I идеал у R такав да је $I + M^2 = M$, онда је $I = M$.*

Последица 103. *Нека је (R, M) локалан комутативан прстен. Ако је n минималан број генератора за M и ако је $\{x_1, \ldots, x_n\}$ било који генеришући скуп за M, тада ниједан од елемената x_i не припада M^2.*

Доказ: Ако на пример $x_n \in M^2$, онда применимо претходно тврђење на идеал $I = \langle x_1, \ldots, x_{n-1} \rangle$. $\square$

Напомена 104. Ово у суштини одговара чињеници да M/M^2 има димензију n као векторски простор над R/M.

Поред тога, приметимо да у локалном прстену R са максималним идеалом M, за свако $a, b \in R \setminus \{0\}$ важи: $\langle a \rangle = \langle b \rangle$ акко $a = rb$ за неко $r \in \mathrm{U}(R)$. Наиме ако $\langle a \rangle = \langle b \rangle$, онда $a = rb$ и $b = sa$, за неке $r, s \in R$. Дакле, $a = rsa$ и $(1 - rs)a = 0$. Како је $a \neq 0$, следи да $1 - rs \in M$, па $rs \in \mathrm{U}(R)$.

Сада се концентришемо на случај када M није главни, али је генерисан са два елемента. Како често радимо са пољем R/M, означићемо га са F.

Пре свега, ако је $M^2 = 0$, граф $G(R)$ је планаран (видети [31], или теорему 97), па надаље претпостављамо да је $M^2 \neq 0$.

Лема 105. *Ако је поље $F(= R/M)$ бесконачно, тада граф $G(R)$ нема коначан род.*

Доказ: Због услова за M, имамо да је димензија за M/M^2 као векторског простора над F једнака 2. Овај векторски простор је унија својих једнодимензионалних потпростора (и свака два од њих у пресеку имају само нула вектор). Како је поље F бесконачно, постоји бесконачно много таквих потпростора (векторски простор над бесконачним пољем не може бити унија коначно много правих потпростора). Сваки једнодимензиони потпростор W у M/M^2 је облика I/M^2 за неки идеал I који садржи $M^2 (\neq 0)$. Због тога постоји бесконачно много различитих идеала у R који садрже $M^2 (\neq 0)$, па се нетривијално секу. Закључујемо да за свако n, $G(R)$ садржи комплетан подграф са n темена. Дакле, он не може имати коначан род. $\square$

Надаље, претпостављамо да је F коначно поље.

Лема 106. *Ако је R локалан прстен са максималним идеалом M са два генератора и $G(R)$ је тороидалан, онда је M^2 главни идеал.*

Доказ: Претпоставимо супротно, нека $M^2 (\neq 0)$ није главни. Дакле постоје неки елементи $u, v \in M^2$, такви да $u \notin \langle v \rangle$ и $v \notin \langle u \rangle$. Јасно је да су идеали $\langle u \rangle$, $\langle v \rangle$, $\langle u + v \rangle$ и M^2 различити. Знамо да је M/M^2 унија једнодимензионих потпростора. Како је $|M/M^2| = |F|^2$, закључили смо да има $|F| + 1$ једнодимензионих потпростора у M/M^2, дакле најмање 3 таква. Добијамо три идеала I_1, I_2 и I_3 који садрже $M^2 (\neq 0)$. Тако имамо осам идеала: M, I_1, I_2, I_3, M^2, $\langle u \rangle$, $\langle v \rangle$, $\langle u + v \rangle$. Првих пет идеала имају степен 7 док последња три имају степен (најмање) 5. Посматрајући подграф у $G(R)$ индукован тим идеалима, закључујемо да је $e \geq 25$. Дакле, $2e - 3f = 2e - 3e + 24 = 24 - e < 0$, што је немогуће. $\square$

Теорема 107. *Нека је R локалан прстен са максималним идеалом M са два генератора и нека је $G(R)$ тороидалан. Тада је $M^3 = 0$ и могу се одабрати генератори u, v за M тако да је $M^2 = \langle uv \rangle$, где је $u^2 = v^2 = 0$, или $M^2 = \langle u^2 \rangle$, где је $uv = 0$.*

Доказ: Нека је $M = \langle x, y \rangle$. Према претходној леми, знамо да је M^2 главни идеал. Дакле, $M^2 = \langle ax^2 + bxy + cy^2 \rangle$. Како је $M^2 \neq M^3$, бар један од a, b, c мора бити инвертибилан. Нека је на пример $a \in \mathrm{U}(R)$. Може се претпоставити да је $a = 1$, па добијамо $M^2 = \langle x^2 + bxy + cy^2 \rangle$. Одавде, $x^2 = \alpha(x^2 + bxy + cy^2)$. Ако је $\alpha \in \mathrm{U}(R)$, добијамо $M^2 = \langle x^2 \rangle$. У супротном, $1 - \alpha \in \mathrm{U}(R)$ и $x^2 = (1 - \alpha)^{-1} \alpha (bxy + cy^2)$. Зато је $M^2 = \langle dxy + ey^2 \rangle$, за неке d, e. Настављамо на исти начин. Бар један од d, e је инвертибилан. Претпоставимо да је $d \in \mathrm{U}(R)$ и узмимо $d = 1$. На тај начин, $M^2 = \langle xy + ey^2 \rangle$. Добијамо $xy = \beta(xy + ey^2)$, за неко β. Ако је $\beta \in \mathrm{U}(R)$, онда је $M^2 = \langle xy \rangle$, а ако је $\beta \in M$, онда је $M^2 = \langle y^2 \rangle$.

Доказали смо да је један од x^2, xy, y^2 генератор за M^2.

1) $M^2 = \langle x^2 \rangle$. Онда је $xy = ax^2$, за неко $a \in R$. Дакле, $x(y - ax) = 0$. Ако одаберемо генераторе $u = x$ и $v = y - ax$ за M, добијамо да је $M^2 = \langle u^2 \rangle$ и $uv = 0$. Важи $v^2 = ru^2$, за неко $r \in R$. Како је $uv = 0$, добијамо $v^3 = uv^2 = u^2 v = 0$.

Претпоставимо да је $u^3 \neq 0$. Идеали: $\langle u \rangle$, $\langle u^2 \rangle$, $\langle u^3 \rangle$, $\langle u, v \rangle$, $\langle u + v \rangle$, $\langle u^2 + v \rangle$, $\langle u^2, v \rangle$, $\langle u^3, v \rangle$ садрже $u^3 \neq 0$ јер је $uv = 0$. Треба само проверити да су међусобно различити јер ће из тога следити да $G(R)$ није тороидалан будући да садржи K^8 као подграф.

Знамо да је максималан идеал различит од осталих. Такође, како $v \notin \langle u \rangle$, прва три идеала разликују се од осталих. Поред ових, треба још проверити следеће случајеве.

1. Ако је $\langle u + v \rangle \subseteq \langle u^2, v \rangle$, следи да је $u + v = r(u^2 + v)$ за неко $r \in R$, па је $u(1 - ru) = (r - 1)v$. Како је $1 - ru$ инвертибилан добијамо $u \in \langle v \rangle$, што је немогуће.

2. Ако је $\langle u^2, v \rangle \subseteq \langle u^2 + v \rangle$, онда је $u^2 = r(u^2 + v)$ за неко $r \in R$. Множећи са u и користећи особину $uv = 0$, добијамо $u^3 = ru^3$. Како је $u^3 \neq 0$, следи да је $1 - r \in M$ тј. $r \in \mathrm{U}(R)$, па је $v \in \langle u \rangle$.

3. Ако је $\langle u^2, v \rangle \subseteq \langle u^3, v \rangle$, онда је $u^2 = ru^3 + sv$ за неке $r, s \in R$. Множећи са u добијамо $u^3 = ru^4$, па је $u^3(1 - ru) = 0$. Како је $1 - ru \in \mathrm{U}(R)$, добијамо $u^3 = 0$.

Дакле $M^3 = 0$ и генератори за M могу се одабрати на жељени начин.

2) $M^2 = \langle xy \rangle$. Овде важи $x^2 = axy$ и $y^2 = bxy$ за неке $a, b \in R$. Ако је бар један од a, b инвертибилан, можемо одабрати нове генераторе $u = x$, $v = x - ay$ (или $v = x - by$), тако да је $M^2 = \langle u^2 \rangle$ и $uv = 0$. На тај начин овај случај своди се на претходни. Претпоставимо зато да су $a, b \in M$. Дакле $x^2, y^2 \in M^3$. Али како је $M^3 = \langle x^3, x^2y, xy^2, y^3 \rangle$, закључујемо да је $M^3 \subseteq M^4$, јер су му сви генератори из M^4. Одавде је $M^3 = M^4$. Према леми Накајаме $M^3 = 0$ и $x^2 = y^2 = 0$. $\square$

Теорема 108. *Нека је R локалан прстен и $M = \langle x, y \rangle$, где су x, y минимални генератори. Тада, $\gamma(G(R)) = 1$ ако и само ако је M^2 главни идеал и $|R/M| \leq 4$. Граф $G(R)$ тада је изоморфан једном од графова K^5, K^6, K^7, $\Gamma[1, 2, 3, 4, 5, a, b]$, $\Gamma[1, 2, 3, 4, 5, 6, a, b, c]$ или $\Gamma - \{3d\}$.*

Доказ: Према претходним резултатима довољно је размотрити следећа два случаја: $M^2 = \langle xy \rangle \neq 0$, где је $x^2 = y^2 = 0$ и $M^2 = \langle x^2 \rangle \neq 0$, где је $xy = 0$.

$\underline{M^2 = \langle xy \rangle,\ x^2 = y^2 = 0}$. Опишимо структуру правих идеала у прстену R.

Погледајмо најпре главне идеале. Ако је $I = \langle ax + by \rangle$ за неке $a, b \in R$, онда, ако је $a, b \in M$, имамо да је $I = \langle xy \rangle$ или $I = 0$. Претпоставимо зато да бар један од a, b није у M, на пример нека је $a \in \mathrm{U}(R)$. Тада $\langle ax + by \rangle = \langle x + \alpha y \rangle$. Ако је $\alpha \in M$, добијамо $\langle x + \alpha y \rangle = \langle x + cxy \rangle = \langle x(1 + cy) \rangle = \langle x \rangle$. Дакле добија се да су главни идеали следећи:

$$\langle xy \rangle,\ \langle y \rangle,\ \langle x + \alpha y \rangle, \text{ за неко } \alpha \in \mathrm{U}(R) \cup \{0\}.$$

Покажимо да је $\langle x + \alpha y \rangle = \langle x + \beta y \rangle$ ако и само ако $\alpha - \beta \in M$.

$\underline{\alpha - \beta \in M}$. Дакле, $\alpha - \beta = cx + dy$ за неке $c, d \in R$. Лако се проверава да је $x + \alpha y = (x + \beta y)(1 + cy)$, па $\langle x + \alpha y \rangle = \langle x + \beta y \rangle$.

$\underline{\langle x + \alpha y \rangle = \langle x + \beta y \rangle}$. Онда је $x + \alpha y = r(x + \beta y)$, па $(1 - r)x = (r\beta - \alpha)y$. Како су x и y минимални генератори за M, мора да важи $1 - r, r\beta - \alpha \in M$. Тада $\alpha - \beta = (-1)(r\beta - \alpha) - \beta(1 - r) \in M$.

Нека је I идеал који није главни. Он мора садржати бар један елемент облика $x + \alpha y$, где је $\alpha \in \mathrm{U}(R) \cup \{0\}$ (у супротном, сваки елемент из I је облика ay за неко $a \in R$, одакле следи да је $I = \langle y \rangle$ или $I = \langle xy \rangle$). Како I није главни, узмимо $ax + by \in I \backslash \langle x + \alpha y \rangle$. Тада је $\langle x + \alpha y, ax + by \rangle = \langle x + \alpha y, cy \rangle$ за неко $c \in R$. Како је $xy \in \langle x + \alpha y \rangle$ $(xy = y(x + \alpha y))$, мора постојати $c \in \mathrm{U}(R)$ такав да $\langle x + \alpha y, cy \rangle = \langle x, y \rangle = M$. Одавде једини идеал у R који није главни је максимални идеал.

Дакле сви прави идеали прстена R су:

$$\langle x, y \rangle,\ \langle y \rangle,\ \langle xy \rangle,\ \langle x + \alpha y \rangle\ (\alpha \in \mathrm{U}(R) \cup \{0\}).$$

Сви ови идеали садрже $xy (\neq 0)$ и има их $3 + |R/M|$. Ако је $|R/M| \geq 5$, онда $G(R)$ није тороидалан. Дакле мора да важи $|R/M| \leq 4$ и $G(R)$ је комплетан граф са $3 + |R/M|$ темена.

$\underline{M^2 = \langle x^2 \rangle, xy = 0, y^2 = ax^2, \text{ за неко } a \in \mathrm{U}(R)}$. Овај случај не разликује се од претходног. Добијамо да су сви прави идеали у R:

$$\langle x, y \rangle,\ \langle y \rangle,\ \langle x^2 \rangle,\ \langle x + \alpha y \rangle\ (\alpha \in \mathrm{U}(R) \cup \{0\}).$$

Као и раније $\langle x+\alpha y \rangle = \langle x+\beta y \rangle$ ако и само ако $\alpha - \beta \in M$. Сви ови идеали садрже $x^2 \neq 0$ и закључак је исти као и у претходном случају.

$\underline{M^2 = \langle x^2 \rangle, xy = 0, y^2 = 0}$. Овде је мало другачија ситуација. Наиме, осим идеала $\langle x, y \rangle, \langle x^2 \rangle, \langle x+\alpha y \rangle$, за $\alpha \in \mathrm{U}(R) \cup \{0\}$, имамо и идеале $\langle x^2, y \rangle$ и $\langle y+\beta x^2 \rangle$, за $\beta \in \mathrm{U}(R) \cup \{0\}$. Важи $\langle y+\beta x^2 \rangle = \langle y+\gamma x^2 \rangle$ ако и само ако $\beta - \gamma \in M$ (заправо $y + \beta x^2 = y + \gamma x^2$ ако и само ако $\beta - \gamma \in M$). Ови нови идеали имају нетривијалне пресеке са M и $\langle x^2, y \rangle$, док остали идеали садрже $x^2 \neq 0$. Сличном анализом као и у претходним случајевима добијамо тражено тврђење. $\square$

Тврђење 109. *Нека је R локалан прстен са максималним идеалом $M = \langle x \rangle$. Тада, $\gamma(G(R)) = 1$ акко $G(R)$ је изоморфан са K^5, K^6 или K^7.*

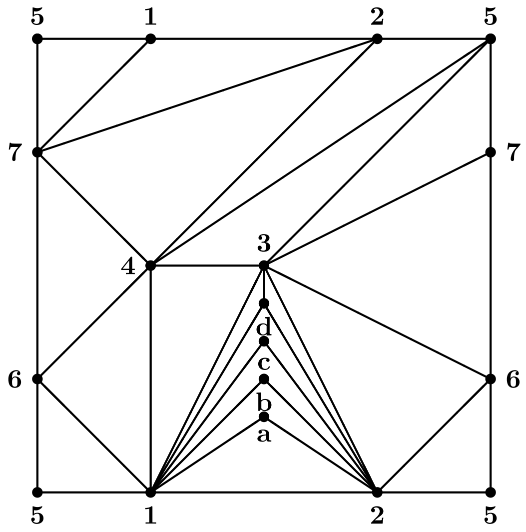
Доказ: R је главноидеалски домен и сви његови идеали су облика $\langle x^k \rangle$, за $k \geq 1$. Како је $G(R)$ тороидалан, мора да важи $x^8 = 0$ одакле следи тражени резултат. $\square$

Сумирајмо претходно добијене резултате у облику следеће теореме.

Теорема 110. *Нека је R комутативан прстен са јединицом. Тада важи $\gamma(G(R)) = 1$ ако и само ако је $G(R)$ изоморфан једном од следећих графова:*

$$K^5, \quad K^6, \quad K^7, \quad \Gamma[1,2,3,4,5,a], \quad \Gamma[1,2,3,4,5,6,7] - \{36,37,46,47\},$$

$$\Gamma[1,2,3,4,5,6,7,d], \quad \Gamma[1,2,3,4,5,a,b], \quad \Gamma[1,2,3,4,5,6,a,b,c], \quad \Gamma - \{3d\}.$$



Слика 11. Граф Г

ГЛАВА 7

ЗАКЉУЧАК

У овој глави даћемо неке завршне напомене. Сумираћемо главне резултате ове дисертације и систематизовати оно што је урађено. Како проблематика придруживања графова прстенима и модулима оставља много отворених и занимљивих питања, овде ћемо споменути и неке од тих проблема који могу бити интересантни за даља истраживања.

Главни резултати и отворена питања главе 2

У глави 2 одређен је радијус тоталног графа. За комутативан прстен R испитани су повезаност и дијаметар прстена полинома, прстена формалних редова, идеализације и прстена матрица над R.

Једно од отворених питања у вези са овом проблематиком је питање одређивања дубље везе између тоталног графа $T\Gamma(R)$ и графа делитеља нуле $\Gamma(R)$. Друга занимљива и још увек неистражена тема су тотални графови групних прстена.

Ипак, по ауторовом убеђењу, најзанимљивија отворена питања везана су за регуларне елементе комутативног прстена R таквог да $Z(R)$ није идеал у R. Ако је $\mathrm{Reg}(\Gamma(R))$ повезан, онда је $T\Gamma(R)$ повезан ([7, теорема 3.1]). Пример комутативног прстена $R = \mathbb{Q}[X](+)(\mathbb{Q}(X)/\mathbb{Q}[X])$ ([7, пример 3.2]) показује да обратно не мора да важи. У овом примеру је $\mathrm{diam}(\mathrm{T}\Gamma(R)) = 2$ и $\mathrm{diam}(\mathrm{Reg}(\Gamma(R))) = \infty$. Последица 13 даје следећу процену: ако је $\mathrm{diam}(\mathrm{T}\Gamma(R)) = n$, онда је $\mathrm{diam}(\mathrm{Reg}(\Gamma(R))) \geq n - 2$.

Прво питање које треба поставити овде је да ли се може десити случај

$$m = \mathrm{diam}(\mathrm{Reg}(\Gamma(R))) > \mathrm{diam}(\mathrm{T}\Gamma(R)) = n?$$

Одговор је вероватно негативан. Ако није, онда треба наћи пример таквог прстена R (који свакако није Нетерин).

Што се радијуса тиче, доказали смо да је $r(\mathrm{T}\Gamma(R)) = \mathrm{diam}(\mathrm{T}\Gamma(R))$ ако је $\mathrm{T}\Gamma(R)$ повезан. Може се поставити питање одређивања радијуса $r(\mathrm{Reg}(\Gamma(R)))$ када је $\mathrm{Reg}(\Gamma(R))$ повезан.

Ако је $\mathrm{diam}(\mathrm{T}\Gamma(R)) = n$, користећи додатну претпоставку да је R Нетерин, добија се следећа неједнакост ([1, последица 1]):

$$n - 2 \leq \mathrm{diam}(\mathrm{Reg}(\Gamma(R))) \leq n.$$

У вези са последњом неједнакошћу могу се поставити нека занимљива питања. Прво, да ли се услов да је R Нетерин може ослабити? Корисно би било и наћи примере где је $\mathrm{diam}(\mathrm{Reg}(\Gamma(R))) \in \{n-2, n-1, n\}$. У вези са радијусом поставићемо следећу хипотезу:

Нека је R комутативан Нетерин прстен. Ако је $\mathrm{T}\Gamma(R)$ повезан, коначног дијаметра, онда је $r(\mathrm{Reg}(\Gamma(R))) = \mathrm{diam}(\mathrm{Reg}(\Gamma(R)))$.

Главни резултати и отворена питања главе 3

У овој глави уведен је тотални граф $T\Gamma(M)$ R-модула M над комутативним прстеном R. Он представља генерализацију тоталног графа прстена $T\Gamma(R)$. Испитана је његова структура и неке од особина. Истражено је како се везе између графова $T\Gamma(M)$ и $T\Gamma(R)$ рефлектују на везе комутативног прстена R и модула M над њим. Теорема 38 из ове главе представља добар пример како испитивање својстава неког графа може довести до чисто алгебарских питања, као што је питање када торзиони елементи модула формирају подмодул.

У вези са тим истакнимо даље могућности за рад са графовима који су придружени модулима. Нека је R прстен са јединицом (R не мора бити комутативан) и M леви R-модул. Торзиона подгрупа $T(M)$ дефинише се са

$$T(M) = \{x \in M \mid \mathrm{Ann}_R(x) \text{ садржи регуларни елемент}\}.$$

Овде под регуларним елементом $r \in R$ подразумевамо елемент који није делитељ нуле (ни леви ни десни). Занимљиво је видети шта се добија ако се дефиниција графа базира на овој дефиницији. Главни циљ је наравно добити што више информација о структури торзионе подгрупе $T(M)$ и њеним везама са прстеном R. Добијање нових корисних информација оправдало би увођење таквог графа.

Главни резултати и отворена питања главе 4

Већ смо раније напоменули да је глава 4 централно место ове дисертације. Са циљем бољег сагледавања класе чистих прстена, у овој глави дефинисан је чисти граф $\mathcal{C}\Gamma(R)$. Детаљно је испитана његова структура и дати су услови под којима је он повезан, као и услови под којима је његов дијаметар коначан. Испитане су везе чистог графа како са чистим прстенима, тако и са другим класама прстена. Између осталог доказано је да је $\mathrm{diam}(\mathcal{C}\Gamma(R)) \leq 2$ ако је R чист или 2-добар прстен. До на изоморфизам су одређени сви коначни комутативни прстени за које је $\mathcal{C}\Gamma(R)$ планаран или тороидалан. Главно отворено питање већ је постављено при анализи дијаметра, али ћемо га овде поновити:

Да ли постоји комутативан E_n-прстен R такав да је $\mathrm{diam}(\mathcal{C}\Gamma(R)) > 2$?

Нажалост ми овде нисмо успели да конструишемо такав прстен нити да оповргнемо његово постојање. Осим овог, постоје и друга питања у вези са чистим графом која могу бити занимљива за даља истраживања. Једно од таквих питања може бити одређивање радијуса чистог графа. Ваљало би испитати и шта се дешава уколико на потпуно исти начин дефинишемо граф $\mathcal{C}\Gamma(R)$ за некомутативан прстен R. Посебну пажњу овде би требало обратити на прстене матрица чија богата структура даје доста простора за даљи рад.

Главни резултати и отворена питања главе 5

Глава 5 бави се линијским графом $\mathrm{L}(\mathrm{T}\Gamma(R))$ тоталног графа комутативног прстена. Главни резултати ове главе тичу се проблема утапања линијског графа. Комплетно су (до на изоморфизам) класификовани сви комутативни прстени такви да су њихови линијски графови планарни или тороидални. Осим тога, доказано је да за $g \geq 0$ постоји само коначно много комутативних прстена таквих да је $\gamma(\mathrm{L}(\mathrm{T}\Gamma(R))) = g$.

Природно је као једну од идеја за даљи рад, поставити питање да ли се слични резултати могу добити за $\mathrm{L}(\mathcal{C}\Gamma(R))$, где је $\mathcal{C}\Gamma(R)$ чисти граф комутативног прстена дефинисан у претходној глави?

Главни резултати и отворена питања главе 6

У глави 6 изложена је комплетна класификација тороидалних графова који су графови пресека идеала неког комутативног прстена. Анализом звезда графова дато је и једно побољшање постојећих резултата о планарности графа пресека идеала. Једна од занимљивих тема је уопштење ових резултата посматрањем графа пресека подмодула датог R-модула M. Овако дефинисан граф већ је постао тема неких истраживања.

Литература

[1] S. Akbari, D. Kiani, F. Mohammadi, S. Moradi, *The total graph and regular graph of a commutative ring*, J. Pure Appl. Algebra **213** (2009) 2224–2228.

[2] S. Akbari, H.R. Maimani, S. Yassemi, *When a zero-divisor graph is planar or a complete r-bipartite graph*, J. Algebra **270** (2003) 169–180.

[3] S. Akbari, R. Nikadish, M.J. Nikmehr, *Some results on the intersection graphs of ideals of rings*, ITCP, to appear.

[4] D.D. Anderson, V.P. Camilo, *Commutative rings whose elements are a sum of a unit and idempotent*, Comm. Algebra **30** (2002) 3327–3336.

[5] D.D. Anderson, M. Winders, *Idealization of a module*, J. Comm. Algebra **1/1** (2009) 3–56.

[6] D.F. Anderson, M.C. Axtell, J.A. Stickles, *Zero-divisor graphs in commutative rings*, Commutative Algebra, Noetherian and Non-Noetherian Perspectives, Springer (2010) 23–45.

[7] D.F. Anderson, A. Badawi, *The total graph of a commutative ring*, J. Algebra **320** (2008) 2706–2719.

[8] D.F. Anderson, P.S. Livingston, *The zero-divisor graph of a commutative ring*, J. Algebra **217** (1999) 434–447.

[9] D.F. Anderson, S.B. Mulay, *On the diameter and girth of a zero-divisor graph*, J. Pure Appl. Algebra **210** (2007) 543–550.

[10] M.F. Atiyah, I.G. Macdonald, *Introduction to commutative algebra*, Adison-Wesley Publishing Company, 1969.

[11] M. Axtel, J. Coykendall, J. Stickles, *Zero-divisor graphs of polynomials and power series over commutative rings*, Comm. Algebra **6** (2005) 2043–2050.

[12] M. Axtel, J. Stickles, *Zero-divisor graphs of idealizations*, J. Pure Appl. Algebra **204** (2006) 235–243.

[13] I. Beck, *Coloring of commutative rings*, J. Algebra **116** (1988) 208–226.

[14] I. Božić, Z. Petrović, *Zero-divisor graphs of matrices over commutative rings*, Comm. Algebra **37** (2009) 1186–1192.

[15] I. Božić, Z. Petrović, Z. Pucanović, *The clean graph of a commutative ring*, under review.

[16] W. Brown, *Matrices Over Commutative Rings*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1993.

[17] V.P. Camillo, H.P. Yu, *Exchange rings, units and idempotents*, Comm. Algebra **22** (1994) 4737–4749.

[18] I. Chakrabarty, S. Ghosh, T.K. Mukherjee, M.K. Sen, *Intersection graphs of ideals of rings*, Discrete Math. **309** (17) (2009) 5381–5392.

[19] B. Corbas, G.D. Williams, *Rings of order p^5. I. Nonlocal rings*, J. Algebra **231** (2) (2000) 677–690.

[20] B. Corbas, G.D. Williams, *Rings of order p^5. II. Local rings*, J. Algebra **231** (2) (2000) 691–704.

[21] J. Coykendall, J. Maney, *Irreducible divisor graphs*, Comm. Algebra **35** (3) (2007) 885–896.

[22] R. Diestel, *Graph Theory*, Third Edition, Graduate Texts in Mathematics 173, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.

[23] D.E. Fields, *Zero-divisors and nilpotents in power series rings*, Proc. Amer. Math. Soc. **27** (1971) 427–433.

[24] N. Ganesan, *Properties of rings with a finite number of zero divisors*, Math. Ann. **157** (1964) 215–218.

[25] R. Gilmer, A. Grams, T. Parker, *Zero divisors in power series rings*, J. Reine Angew. Math. **278/279** (1975) 145–164.

[26] J. Han, W.K. Nicholson, *Extensions of clean rings*, Comm. Algebra **29** (2001) 2589–2595.

[27] M. Henriksen, *Two classes of rings generated by their units*, J. Algebra **31** (1974) 182–193.

[28] J. Huckaba, J. Keller, *Annihilation of ideals in commutative rings*, Pacific J. Math. **83** (1979) 375–379.

[29] J. Huckaba, *Commutative rings with zero divisors*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics 117, Marcel Dekker, Inc., New York, 1988.

[30] Hung-Jen Chiang-Hsieh, Pei-Feng Lee, Hsin-Ju Wang, *The embedding of line graphs associated to the zero-divisor graphs of commutative rings*, Israel J. Math. **180** (2010) 193–222.

[31] S.H. Jafari, N.J. Rad, *Planarity of intersection graphs of ideals of rings*, Int. El. J. Algebra **8** (2010) 161–166.

[32] I. Kaplansky, *Commutative rings*, Revised Edition, University of Chicago Press, Chicago, 1974.

[33] K. Kuratowski, *Sur le problème des courbes gauches en topologie*, Fund Math. **15** (1930) 271–283.

[34] T.Y. Lam, *A First Course in Noncommutative rings*, Springer, New York, 2001.

[35] T.G. Lucas, *The diameter of a zero-divisor graph*, J.Algebra **301** (2006) 174–193.

[36] H.R. Maimani, C. Wickham, S. Yassemi, *Rings whose total graphs have genus at most one*, Rocky Mountain J. Math., to appear.

[37] S. Moconja, Z. Petrović, *On the structure of comaximal graphs of commutative rings with identity*, Bull. Aust. Math. Soc. **83** (2011) 11–21.

[38] W.K. Nicholson, *Lifting idempotents and exchange rings*, Trans. Amer. Math. Soc. **229** (1977) 269–278.

[39] W.K. Nicholson, Y. Zhou, *Clean general rings*, J. Algebra **291** (2005) 297–311.

[40] Z. Petrović, Z. Pucanović, *On the radius and the relation between the total graph of a commutative ring and its extensions*, Publ. Inst. Math. **89**(103) (2011) 1–9.

[41] Z. Petrović, Z. Pucanović, *The line graph associated to the total graph of a commutative ring*, Ars Combinatoria, to appear.

[42] Z. Petrović, Z. Pucanović, *Toroidality of intersection graphs of ideals of commutative rings*, under review.

[43] Z. Pucanović, *The total graph of a module*, Matematički vesnik, **63**(4) (2011) 305–312.

[44] R. Raphael, *Rings which are generated by their units*, J. Algebra **28** (1974) 199–205.

[45] S.P. Redmond, *Central sets and radii of the zero-divisor graphs of commutative rings*, Comm. Algebra **34** (2006) 2389–2401.

[46] S.P. Redmond, *On zero-divisor graphs of small finite commutative rings*, Discrete Math. **307** (2007) 1155–1166.

[47] S.P. Redmond, *The zero-divisor graph of a non-commutative ring*, Internat. J. Commutative Rings **1** (4) (2002) 203–211.

[48] G. Ringel, *Das gescblecht des vollstandigen paaren graphen*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **28** (1965) 139–150.

[49] G. Ringel, J. W. T. Youngs, *Solution of the Heawood map-coloring problem* Proc. Nat. Acad. Sei. USA **60** (1968) 438–445.

[50] P.K. Sharma, S.M. Bhatwadekar, *A note on graphical representation of rings* J. Algebra **176** (1995) 124–127.

[51] P. Vámos, *2-Good rings*, Quart. J. Math. (Oxford) **56** (2005) 417–430.

[52] D.B. West, *Introduction to graph theory*, Prantice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, 1996.

[53] H. Whitney, *Congruent graphs and connectivity of graphs*, American Journal of Math. **54** (1932) 150–168.

[54] C. Wickham, *Classification of rings with genus one zero-divisor graphs*, Comm. Algebra **36** (2) (2008) 1–21.

[55] T. White, *Graphs, Groups and Surfaces*, North-Holland Math. Studies **188**, Amsterdam, 1984.

[56] G.S. Xiao, W.T. Tong, *n-Clean rings and weakly unit stable rings*, Comm. Algebra **33** (2005) 1501–1517.

[57] Y.Q. Ye, *Semiclean rings*, Comm. Algebra **31** (2003) 5609–5625.

Биографија аутора

Зоран Пуцановић је рођен 16.06.1968. године у Зајечару. Дипломирао је на Математичком факултету у Београду (смер Теоријска математика и примене) у јуну 1995. године. Магистрирао је у децембру 2002. године, такође на Математичком факултету у Београду, смер Алгебра, одбранивши рад под насловом „Прстени са једнозначном факторизацијом". Од 1995. године ради као асистент на катедри за математику, физику и нацртну геометрију Грађевинског факултета у Београду.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а мр Зоран Пуцановић ______________________

број индекса ____

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

АНАЛИЗА ПРСТЕНА И МОДУЛА ПРИДРУЖИВАЊЕМ ГРАФОВА

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 21.11.2012

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора мр Зоран Пуцановић

Број индекса ______________________

Студијски програм ______________________

Наслов рада АНАЛИЗА ПРСТЕНА И МОДУЛА ПРИДРУЖИВАЊЕМ ГРАФОВА

Ментор др Зоран Петровић, ванредни професор

Потписани/а мр Зоран Пуцановић

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 21. 11. 2012.

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

АНАЛИЗА ПРСТЕНА И МОДУЛА ПРИДРУЖИВАЊЕМ ГРАФОВА

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 21. 11. 2012.

1. **Ауторство** - Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. **Ауторство – некомерцијално.** Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. **Ауторство - некомерцијално** – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. **Ауторство - некомерцијално** – делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. **Ауторство – без прераде.** Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. **Ауторство** - делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.