Универзитет у Београду

Математички факултет

Александра Љ. Ерић

О P-теменима неких стабала

докторска дисертација

Београд, 2012.

University of Belgrade

Faculty of Mathematics

Aleksandra Lj. Erić

About P-vertices of some trees

Doctoral Dissertation

Beograd, 2012.

Ментор:

др Александар Липковски, редовни професор,
Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

др Carlos Martins da Fonseca, ванредни професор,
Department of Mathematics, University of Coimbra

др Гојко Калајџић, ванредни професор,
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Љубомир Чукић, ванредни професор,
Универзитет у Београду, Грађевински факултет

Датум одбране: ____________________

О P-теменима неких стабала

Сажетак

Ова докторска дисертација изучава P-темена и P-скупове неких несингуларних ацикличних матрица и такође неких сингуларних ацикличних матрица. Раније је показано да свака сингуларна ациклична матрица реда n има највише $n-2$ P-темена. Такође је показано да ово не важи за несингуларне ацикличне матрице, и то конструкцијом таквих матрица чији придружени граф T има $n-1$ или n P-темена (ове матрица и достижу максималну величину P-скупа међу ацикличним несингуларним матрицама чији је граф T).

У овој тези је дата класификација стабала за које постоји несингуларна матрица чије је свако теме P-теме. Посебно, показано је да ова стабла морају имати паран број темена. Оба резултата дају одговор на отворено питање које су поставили I.-J. Kim и B.L. Shader. На крају, извршена је и класификација стабала са ограниченим P-скупом.

Такође је показано да су двоструке звезде DS_n са n темена пример стабала таквих да свака несингуларна матрица A чији је граф DS_n има највише $n-2$ P-темена. Овај пример обезбеђује позитиван одговор на још једно питање које су недавно отворили Kim и Shader.

Недавно је извршена класификација стабала за које свака придружена ациклична матрица има различите сопствене вредности када су дијагонални елементи различити. У овом раду дата је анализа максималног броја различитих дијагоналних елемената и њихов положај који је неопходан да сачува тражену вишеструкост.

Вишеструкост сопствених вредности Ф-бинарних стабала је анализирана у неким ранијим радовима. Овај рад ту анализу наставља проширујући познате резултате на ширу фамилију стабала, такозване широке двоструке путеве, стабла која чине два пута повезана трећим. Дата су и нека уводна разматрања графова-окова у вези са максималном вишеструкости сопствених вредности.

Научна област: Математика

Ужа научна област: Алгебра

Кључне речи: граф, ациклична матрица, сопствена вредност, вишеструкост, дупле звезде, P-теме, P-скуп, стабла, двоструке звезде

УДК број: 512.643.5:519.172.1(043.3)

AMS класификација: 15A18, 15A48, 05C50

About P-vertices of some trees

Abstract

This thesis concerns P-vertices and P-set of non-singular acyclic matrices A and also singular acyclic matrices. It was shown that each singular matrix of order n has at most $n-2$ P-vertices. Also, it is shown that this does not hold for non-singular acyclic matrices by constructing non-singular acyclic matrices whose graphs are T having $n-1$ (or n) P-vertices. These matrices also achieve maximum size of P-set over non-singular acyclic matrices whose graphs are T.

In this thesis, there is classification of the trees for which there is non-singular matrix where each vertex is P-vertex. In particular, it is shown that such trees have an even number of vertices. Both results provide answer to questions proposed by I.-J. Kim and B. L. Shader. In the end, related classifications on non-singular trees with the size of a P-set bounded are addressed.

Also, it is shown that double star DS_n with n vertices, is an example of a tree such that, for each non-singular matrix A whose graph is DS_n the number of P-vertices of A is less than $n-2$. This example provides a positive answer to a question proposed recently by Kim and Shader.

A recent classification of those trees for which each of associated acyclic matrices has distinct eigenvalues whenever the diagonal entries are distinct was established. Here is analyze of maximum number of distinct diagonal entries, and corresponding location, in order to preserve that multiplicity characterization.

Recently, the multiplicities of eigenvalues of Φ-binary tree was analyzed. This paper carry this discussion forward extending their results to larger

family of trees, namely, the wide double path, a tree consisting of two paths that are joined by another path.

Some introductory considerations for dumbbell graphs are mentioned regarding the maximum multiplicity of the eigenvalues.

Scientific area: Mathematics

Scientific field: Algebra

Keywords: graph, acyclic matrix, eigenvalue, multiplicity, P-vertex, P-set, tree, double star.

UDC number: 512.643.5:519.172.1(043.3)
AMS Subject Classifications: 15A18, 15A48, 05Ц50

Садржај

0 Увод

Сопствене вредности матрица (и њихова вишеструкост) над разним прстенима је једна од важних тема којима се бави линеарна алгебра. Приступ решавању тог проблема је био чисто алгебарски све до друге половине прошлог века. Тада почиње да се као оруђе у проучавању матрица користи и теорија графова.

Произвољној матрици $A = (a_{ij})$ може се придружити граф на више различитих начина. Примећено је да се неке особине ових придружених графова могу прочитати као спектралне особине матрица од којих потичу. Некада су изучавања ових графова много лакша од алгебарских посматрања матрица.

Тако је настала алгебарска теорија графова као веза између алгебре и теорије графова. Алгебарски апарат се може користити у добијању елегантних и изненађујућих резултата теорије графова. На пример, карактеризација линијских графова помоћу сопствених вредности придружених матрица.

Са развојем рачунарства алгебарска теорија графова је постала још занимљивија. Веза између комбинаторике и рачунарства је веза изнеђу графа и матрице. Стабла су основни комбинаторни објекти а матрице чији су придружени графови стабла су важна и у рачунарству. Тако је изучавање спектралних особина ових матрица постало занимљиво за ширу академску заједницу.

Ево и неких основних појмова.

Под појмом графа у раду подразумевамо неорјентисан граф без петљи. Два дисјункна скупа темена U и V и ивице које спајају теме из U са теменом из V чине бипартитни граф. Ако је свако теме из U повезано ивицом са сваким теменом из V, то је комлетан бипартитни граф. Комплетан граф је граф у коме су свака два темена суседна.

Пут је врста графа који чине темена $\{1, \dots, n\}$ и ивице $i, i+1$, $i = 1, \dots, n-1$. Стабло је граф у коме су свака два темена повезана тачно једним путем. Унија дисјунктних стабала је граф који се зове шума. Цикл је граф који чине темена $\{1, \dots, n\}$ и ивице $i, i+1$ и $1, n,$, $i = 1, \dots, n-1$. Звезда је стабло чије је једно теме (центар) суседно са свим осталим. Степен темена је број темена графа суседних том темену. Дијаметар повезаног графа је највеће растојање између два темена.

У овом раду се графови придружују матрицама на следећи начин.

Нека је $A = (a_{ij})$ реална симетрична матрица димензије $n \times n$. Граф $G(A)$ матрице $A = (a_{ij})$ се састоји од темена $\{1, 2, \dots, n\}$ и скупа ивица је $\{ij \mid i \neq j,\ a_{ij} \neq 0\}$.

Са друге стране, за дати граф G дефинише се симетрична матрица $A(G) = (a_{ij})$ чији је граф $G(A)$ управо граф G.
На пример графу G који је пут са n темена и коме је 1 почетно а n крајње теме одговара тридиагонална матрица

$$A(G) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{23} & a_{33} & a_{34} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1n} & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ако је граф G звезда граф чији је центар теме 1, одгварајућа матрица је

$$A(G) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{13} & 0 & a_{33} & 0 & \dots & 0 \\ a_{14} & 0 & 0 & a_{44} & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ a_{1n} & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ако је граф G цикл са n темена, онда је

$$A(G) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{23} & a_{33} & a_{34} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ a_{1n} & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1n} & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Означимо са

$$\mathcal{S}(G) = \{A \in R^{n \times n} \ \mid A = A^T \ , \ G(A) = G\}$$

скуп свих симетричних матрица реда n које одговарају истом графу G са n темена.

Ако је G стабло, матрица $A(G)$ је ациклична. Брисањем темена v степена k из стабла G добија се k подграфова који су сви стабла и који се зову гране стабла G у темену v.

Нека је λ реалан број. Алгебарска вишеструост λ као сопствене вредности матрице A се означава са $m_A(\lambda)$.
Главна подматрица од A која се добија брисањем врста и колона индекса $\{i_1, \dots, i_k\}$ се означава са $A(i_1, \dots, i_k)$. Ако је $k = 1$, главна подматрица се означава са $A(i)$. То је еквива-

лентно брисању темена i из графа G.

Следи *Cauchy interlacing* теорема.

Теорема 0.1. Нека је A Хермитска матрица димензије $n \times n$ и нека је B главна подматрица од A димензије $n-1 \times n-1$. Ако су $\lambda_n \leq \lambda_{n-1} \leq \ldots \leq \lambda_2 \leq \lambda_1$ сопствене вредности матрице A и $\mu_n \leq \mu_{n-1} \leq \ldots \leq \mu_3 \leq \mu_2$ сопствене вредности матрице B, онда је

$$\lambda_n \leq \mu_n \leq \lambda_{n-1} \leq \mu_{n-1} \leq \ldots \leq \lambda_2 \leq \mu_2 \leq \lambda_1.$$

Примена ове теореме на симетричне реалне матрице даје неједнакост [12]

$$m_A(\lambda) - 1 \leq m_{A_i}(\lambda) \leq m_A(\lambda) + 1.$$

Дакле важи једна од следећих једнакости:

$$(1) \qquad m_{A_i} = m_A(\lambda) - 1$$

$$(2) \qquad m_{A_i} = m_A(\lambda)$$

$$(3) \qquad m_{A_i} = m_A(\lambda) + 1$$

Дефиниција 0.2. Индекс i матрице A се зове *Fiedler*-ово теме матрице A за сопствену вредност λ ако и само ако је

$$m_{A((i)} \geq m_A(\lambda).$$

Ако је $\lambda = 0$, i се зове F-теме.

Дефиниција 0.3. Индекс i матрице A се зове *Parter*-ово теме матрице A за сопствену вредност λ ако и само ако је

$$m_{A(i)} = m_A(\lambda) + 1.$$

Ако је $\lambda = 0$, i се зове P-теме.

Ова темена се помињу још као λ-позитивна темена [9, 10].

Дефиниција 0.4. Индекс i матрице A који је F-теме а није P-теме се зове неутрално теме. А индекс i који није F-теме се зове доње теме.

Нека је S непразни подскуп од скупа $\{1, \ldots, n\}$. Онда је $m_{A(S)}(\lambda) \leq m_A(\lambda) + |S|$.

Дефиниција 0.5. Нека је S непразни подскуп скупа $\{1, \ldots, n\}$. Скуп S се зове *Parter*-ов скуп матрице A за λ ако и само ако је $m_{A(S)}(\lambda) = m_A(\lambda) + |S|$.
Ако је $\lambda = 0$, онда је S P-скуп матрице A.

Са $P_\nu(A)$ се означава број P-темена дате матрице A. Максимална величина P-скупа матрице A се означава са $P_S(A)$. Parter-ова темена су добила назив по Saymour V. Parter јер су мотивисани његовим истраживањима [22], које су наставили M.Fiedler [4], Gerry M. Wiener [23]. Али тај појам је увео C.R. Johnson [14, 15, 16]. И у контексту *matching* полинома (који су за стабла карактеристични полиноми), C.D. Godsil [10, 11] уводи појам P-темена.

1 Број P-темена пута, звезде и цикла

Нека је матрица A из $S(T)$, где је T стабло са n темена. Број P-темена $n \times n$ ацикличне матрице A је ограничен.

Теорема 1.1. [15] Нека је A сингуларна ациклична матрица димензија $n \times n$ из $\mathrm{S}(T)$. Онда је $P_\nu(A) \leq n-2$.

За несингуларне матрице постоји друга процена. Према резултату [18] важи следећа теорема:

Теорема 1.2. Нека је A несингуларна ациклична матрица димензија $n \times n$ из $\mathrm{S}(T)$. Онда је $P_\nu(A) \leq n$.

Поставља се питање постојања несингуларне матрице A из $S(T)$ максималног броја P-темена, тј. $P_\nu(A) = n$. Показано је да за пут са парним бројем темена ова матрица постоји.

Теорема 1.3. [18] Нека је T пут са n темена. Онда:
(1) Ако је n парно, постоји несингуларна матрица A из $\mathrm{S}(T)$ таква да је $P_\nu(A) = n$.
(2) Ако је n непарно, постоји несингуларна матрица A из $\mathrm{S}(T)$ таква да је $P_\nu(A) = n-1$.

Штавише $P_\nu(A)$ је „непрекидно” у следећем смислу.

Теорема 1.4. [1] Нека је T пут са парним бројем темена. Онда

$$\{P_\nu(A) \mid \det A \neq 0,\ A \in \mathcal{S}(T)\} = \{0, 1, \ldots, n\}.$$

Ако је T пут са непарним бројем темена, онда је

$$\{P_\nu(A) \mid \det A \neq 0\,; A \in \mathcal{S}(T)\} = \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Нека је

$$B_n^{(2)} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ b_1 & a_2 & b_2 & & \\ & b_2 & a_1 & b_1 & \\ & & b_1 & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \end{pmatrix}_{n\times n}, \tag{1}$$

матрица која одговара путу T са n темена. То је тридијагонална симетрична матрица. Претпоставимо да је

$$b_1 = \cdots = b_n = 1.$$

Ову матрицу можемо идентификовати са њеном дијагоналом $(a_1, \ldots, a_n)$. Ако је n парно, онда је

$$A_n^{(n)} = (1, -1, \ldots, 1, -1).$$

Ова матрица има инерцију (број позитивних, негативних и нула сопствених вредности) $(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}, 0)$. Приметимо да из [1] важи

$$\det A_n^{(n)} = U_{\frac{n}{2}}\left(-\frac{3}{2}\right) + U_{\frac{n-2}{2}}\left(-\frac{3}{2}\right),$$

где су $U_k(x)_{k\geq 1}$ полиноми Чебишева.

Према [5], ако заменимо неке елементе дијагонале нулама инерција остаје иста, тј. $In(A_n^{(n)}) = (\frac{n}{2}, \frac{n}{2}, 0)$. Зато је ова матрица увек несингуларна.

Пошто је инерција било које главне матрице или $(\frac{n}{2}, \frac{n-2}{2}, 0)$ или $(\frac{n-2}{2}, \frac{n}{2}, 0)$, добија се $P_\nu(A_n^{(n)}) = 0$.
Нека је $A_{n-1}^{(n)} = (0, -1, \ldots, 1, -1)$. Њен једини главни минор једнак 0 је $A_{n-1}^{(n)}(2)$. Зато, $P_\nu(A_{n-1}^{(n)}) = 1$. Ако је $A_{n-2}^{(n)} = (0, -1, \ldots, 1, 0)$, њени главни 0 минори су $A_{n-2}^{(n)}(2)$ и $A_{n-2}^{(n)}(n-1)$, па је $P_\nu(A_{n-2}^{(n)}) = 2$. Наставимо овај процес замењујући у $A_{n-2}^{(n)}$ прва 3 елемента дијагонале (који су 1) са нула, и $(n-2)$-ти елемент (који је -1) добијене матрице са 0.

Ако је $n/2$ парно, после $n/2+2$ корака, добијамо несингуларну тридијагоналну матрицу

$$A^{(n)}_{n/2-1} = (\underbrace{0,-1,0,\ldots,-1,0}_{n/2},\underbrace{0,1,0,\ldots,1,0}_{n/2}) .$$

$$P_\nu(A^{(n)}_{n/2-1}) = \frac{n}{2}+1 .$$

Ако је $n/2$ парно, после $n/2+1$ корака добијамо несингуларну тридијагоналну матрицу

$$A^{(n)}_{n/2} = (\underbrace{0,-1,0,\ldots,-1}_{n/2},\underbrace{1,0,\ldots,1,0}_{n/2}) .$$

У оба случаја алгоритам се наставља заменом -1 и 1 нулама као претходно, и на крају добијамо матрицу

$$A^{(n)}_0 = (0,\ldots,0),$$

где је $P_\nu(A^{(n)}_0) = n$.

Дакле,

$$P_\nu(A^{(n)}_k) = n-k, \qquad k = n, n-1, \ldots, 1, 0 .$$

Пример 1.5. За $n=8$:

k	$A^{(8)}_k$	$P_\nu(A^{(8)}_k)$
8	$(1,-1,1,-1,1,-1,1,-1)$	0
7	$(0,-1,1,-1,1,-1,1,-1)$	1
6	$(0,-1,1,-1,1,-1,1,0)$	2
5	$(0,-1,0,-1,1,-1,1,0)$	3
4	$(0,-1,0,-1,1,0,1,0)$	4
3	$(0,-1,0,0,1,0,1,0)$	5
2	$(0,-1,0,0,0,0,1,0)$	6
1	$(0,0,0,0,0,0,1,0)$	7
0	$(0,0,0,0,0,0,0,0)$	8

Пример 1.6. *Za* $n = 10$*:*

k	$A_k^{(10)}$	$P_\nu(A_k^{(10)})$
10	$(1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1-1)$	0
9	$(0,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1-1)$	1
8	$(0,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,0)$	2
7	$(0,-1,0,-1,1,-1,1,-1,1,0)$	3
6	$(0,-1,0,-1,1,-1,1,0,1,0)$	4
5	$(0,-1,0,-1,0,-1,1,0,1,0)$	5
4	$(0,-1,0,-1,0,0,1,0,1,0)$	6
3	$(0,-1,0,0,0,0,1,0,1,0)$	7
2	$(0,-1,0,0,0,0,0,0,1,0)$	8
1	$(0,0,0,0,0,0,0,0,1,0)$	9
0	$(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)$	10

У случају да је n непарно, за $k = 1, \ldots, (n-1)/2$, дефинишемо матрицу

$$B_k^{(n)} = (\underbrace{0, \ldots, 0, 1, 1}_{2k}, 0, \ldots, 0)\,.$$

Онда $\det B_k^{(n)}(2\ell-1) \neq 0$, за $\ell = 1, \ldots, k$, а остали минори су нула.

Затим дефинишемо

$$B_k^{(n)} = (\underbrace{1, 0, \ldots, 0, 1}_{2k-n}, 0, \ldots, 0)\,,$$

за $k = (n+1)/2, \ldots, n$. Онда, $\det B_k^{(n)}(n+1-2\ell) = 0$, за $\ell = 1, \ldots, n-k$, а остали минори су нула.

Онда

$$P_\nu(B_k^{(n)}) = n - k \qquad k = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Пошто $In(B_k^{(n)}) = (\frac{n+1}{2}, \frac{n-1}{2}, 0)$, за свако $k \in \{1, \ldots, n\}$, добијамо примере матрица тражених особина.

Пример 1.7. За $n = 7$:

k	$B_k^{(7)}$	$P_\nu(B_k^{(7)})$
1	$(1,1,0,0,0,0,0)$	6
2	$(0,0,1,1,0,0,0)$	5
3	$(0,0,0,0,1,1,0)$	4
4	$(1,0,0,0,0,0,0)$	3
5	$(1,0,1,0,0,0,0)$	2
6	$(1,0,0,0,1,0,0)$	1
7	$(1,0,0,0,0,0,1)$	0

Ако је стабло T звезда S_n са n темена, матрица из $\mathcal{S}(S_n)$ је облика

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} \\ b_1 & a_2 & & & \\ b_2 & & a_3 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ b_{n-1} & & & & a_n \end{pmatrix}. \tag{2}$$

За свако $k \in \{1, \ldots, n\}$, дефинишемо

$$a_\ell = b_{\ell-1} = 1\,, \qquad \text{за} \;\; \ell = k+1, \ldots, n\,,$$

$$a_\ell = b_{\ell-1} = 2\,, \qquad \text{за} \;\; \ell = 2, \ldots, k\,,$$

и

$$a_1 = a_2 + \cdots + a_n - 1\,,$$

Онда добијамо матрице $S_k^{(n)}$ такве да је за $\ell = k+1, \ldots, n$,

$$\det S_k^{(n)}(\ell) = 0\,.$$

Остали минори ове детерминанте су различити од нуле, па је

$$P_\nu(S_k^{(n)}) = n - k\,.$$

Пошто $In(S_k^{(n)}) = (n-1, 1, 0)$, за свако $k \in \{1, \ldots, n\}$, добијамо:

Теорема 1.8. [1] Нека је T звезда са непарним бројем темена n. Онда за свако $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ постоји A из $\mathcal{S}(T)$, таква да је $P_\nu(A) = k$.

Ако је T цикл са n темена, n паран број, матрица из $\mathcal{S}(T)$ је облика

$$C = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & b_n \\ b_1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ b_n & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix} . \tag{3}$$

Претпоставимо да је

$$b_1 = \cdots = b_n = 1 \,,$$

$$a_{2\ell-1} = 1 \,, \qquad \text{и} \qquad a_{2\ell} = a \,,$$

за $\ell = 1, 2, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor$. Ако је i непарно, онда

$$\det C(i) = \det \begin{pmatrix} a & 1 & & & & & \\ 1 & 1 & 1 & & & & \\ & 1 & a & 1 & & & \\ & & 1 & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 & \\ & & & & 1 & 1 & 1 \\ & & & & & 1 & a \end{pmatrix} = a\, U_{(n-2)/2}\left(\frac{a-2}{2}\right).$$

Иначе

$$\det C(i) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & & \\ 1 & a & 1 & & & & \\ & 1 & 1 & 1 & & & \\ & & 1 & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 & \\ & & & & 1 & a & 1 \\ & & & & & 1 & 1 \end{pmatrix} = U_{(n-2)/2}\left(\frac{a-2}{2}\right).$$

Дакле, за свако n може се изабрати a тако да је $\det C(i) = 0$, а $\det C \neq 0$, па је $P_\nu(C) = n$.

Пример 1.9. Нека је $n = 12$ и $a = 3$. Онда $\det C = -4 \neq 0$ и $\det C(i) = 0$, за све $i \in \{1, \ldots, 12\}$.

У случају да је n непарно посматрајмо матрицу реда $2k$, облика

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc|cccc}
0 & 1 & & & & & & & & & \\
1 & \ddots & \ddots & & & & & & & & \\
 & \ddots & \ddots & 1 & & & & & & & \\
 & & 1 & 0 & 1 & & & & & & \\
\hline
 & & & 1 & a & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & a & 1 & & & & \\
 & & & & & 1 & a & 1 & & & \\
\hline
 & & & & & & 1 & 0 & 1 & & \\
 & & & & & & & 1 & \ddots & \ddots & \\
 & & & & & & & & \ddots & \ddots & 1 \\
 & & & & & & & & & 1 & 0
\end{array}\right) \tag{4}$$

или,

$$\left(\begin{array}{cccc|cc|cccc}
0 & 1 & & & & & & & & \\
1 & \ddots & \ddots & & & & & & & \\
 & \ddots & \ddots & 1 & & & & & & \\
 & & 1 & 0 & 1 & & & & & \\
\hline
 & & & 1 & a & 1 & & & & \\
 & & & & 1 & a & 1 & & & \\
\hline
 & & & & & 1 & 0 & 1 & & \\
 & & & & & & 1 & \ddots & \ddots & \\
 & & & & & & & \ddots & \ddots & 1 \\
 & & & & & & & & 1 & 0
\end{array}\right). \tag{5}$$

Детерминанта матрица (4) или (5) је $(-)^k(1-a^2)$.

Детерминанта матрице цикла [7] реда n

$$C^{(a)} = \begin{pmatrix} a & 1 & & & & & 1 \\ 1 & a & 1 & & & & \\ & 1 & a & 1 & & & \\ & & 1 & 0 & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 & \\ & & & & 1 & 0 & 1 \\ 1 & & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

је

$$\det C^{(a)} = \begin{cases} 2+3a-a^3, & \text{ако} \quad n = 4\ell+1 \\ 2-3a+a^3, & \text{ако} \quad n = 4\ell-1 \end{cases}.$$

Ако је $n = 4\ell+1$, онда $\det C^{(1)} \neq 0$ и $P_\nu(C^{(1)}) = n$; иначе, $n = 4\ell-1$, $\det C^{(-1)} \neq 0$ и $P_\nu(C^{(-1)}) = n$.

Теорема 1.10. [1] Нека је C_n цикл реда n. Онда постоји несингуларна матрица из $\mathcal{S}(C_n)$ таква да је њен број P-темена n.

Отворено је још питање „непрекидности” броја
P-темена цикла.

2 Стабла са максималним бројем P-темена

У претходном поглављу су детаљно проучени бројеви P-темена посебних врста стабала: путева и звезди. Отворено питање које су поставили I.J Kim и B.L Shader[20] је:

Питање 2.1. Ако је $n \geq 3$ непарно, да ли постоји стабло T са n темена за које постоји несингуларна матрица A из $\mathcal{S}(T)$ таква да је $P_\nu(A) = n$?

Може се приметити да би потврдан одговор на ово питање имплицирао постојање стабла са парним бројем темена за које постоји несингуларна матрица A таква да је $P_\nu(A) = n-2$. Други интересантан проблем је карактеризација свих стабала дате величине за које постоји несингуларна матрица са максималним бројем P-темена.

Питање 2.2. [20] Класификовати сва стабла са n темена за које постоји несингуларна матрица $A \in \mathcal{S}(T)$ таква да је $P_\nu(A) = n$.

Одговор на питање 2.1 је негативан. Могућа је класификација стабала према условима питања 2.2. Наравно, њихов ред мора бити паран.

Теорема 2.3. [20] Нека је T пут са n темена за $n \geq 2$ и нека је A несингуларана матрица из $\mathcal{S}(T)$ облика (1). Онда

(1) Ако је $P_\nu(A) = n$, онда је $a_{2k-1,2k-1} = 0$ за $k = 1, 2, \dots, [\frac{n}{2}]$.

(2) За n парно, $P_\nu(A) = n$ ако и само ако $a_{i,i} = 0$.

Нека је дата $n \times n$ тридијагонална матрица

$$B = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & \\ b_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}, \tag{7}$$

где су неозначени елементи нуле. Ако је A несингуларна а $P_\nu(A) = n$, онда $a_{2i-1} = 0$ за све $1 = 1, 2, \ldots, [\frac{n}{2}]$. Такође је познато да је за n парно $P_\nu(A) = n$ ако и само ако је главна дијагонала матрице A нула [20]. Онда за свако парно n матрица

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

има максималан број P-темена.

Ако је T стабло, имамо сличан критеријум.

Дефиниција 2.4. Теме v стабла T се зове привезак ако је суседно само једном темену.

Теорема 2.5. Нека је T стабло са n темена од којих је бар једно суседно са два привезак-темена. Ако је A несингуларна матрица из $\mathcal{S}(T)$, онда је $P_\nu(A) < n$.

Доказ: Можемо претпоставити, без губитка општости, да је $S = \{1, \ldots, k\}$ скуп темена стабла T која су суседна темену $k+1$. Претпоставимо да је $P_\nu(A) = n$. Онда је $\det A(\ell) = 0$, за $\ell = 1, \ldots, k+1$. Пошто је A несингуларна матрица, онда

$$0 \neq \det A = -a_{1,k+1}^2 a_{2,2} \cdots a_{k,k} \det A(1, \ldots, k+1).$$

Онда, из

$$0 = \det A(k+1) = a_{11}a_{2,2}\cdots a_{k,k}\,\det A(1,k)\,,$$

добијамо $a_{11}=0$. Али

$$0 \neq \det A = -a_{2,k+1}^2 a_{1,1}a_{3,3}\cdots a_{k,k}\det A(1,\ldots,k+1)\,,$$

што је немогуће. Дакле $P_\nu(A) < n$. $\square$

На пример, јасно је да за звезде S_n важи $P_\nu(A) < n$ за све несингуларне A из $\mathcal{S}(S_n)$.

Стабло T које се састоји из пута и звезде које су спојене преко темена привезка зове се метла. Јасно је да су и ово стабла таква да не постоје несингуларне матрице из $\mathcal{S}(T)$ са максималним бројем P-темена.

Теорема 2.6. [1] Нека је T' пут привезак у стаблу T. Претпоставимо да је $\{1,\ldots,k\}$ скуп темена T'. Ако је $A=(a_{ij})$ несингуларна матрица из $\mathcal{S}(T)$ таква да је $P_\nu(A)=n$, онда $a_{2\ell-1,2\ell-1}=0$, за $\ell = 1,\ldots,\lfloor k/2\rfloor$.

Може се доказати и више.

Теорема 2.7. Нека је $\{1,\ldots,k\}$ скуп темена пута привезка T' датог стабла T са n темена који је повезан са теменом $k+1$. Ако је $A=(a_{ij})$ несингуларна матрица из $\mathcal{S}(T)$ таква да је $P_\nu(A)=n$, онда је $a_{ii}=0$ за $i=1,2,\ldots,k$.
Доказ: Без губљења општости, можемо претпоставити да је k теме пута T' суседно центру $k+1$. Ако је $k=1$, пошто

$$0 \neq \det A = -a_{12}^2\det A(1,2)$$

и

$$0 = \det A(2) = a_{11}\det A(1,2),$$

добијамо $a_{11} = 0$.

Ако је $k = 2$,

$$0 = \det A(1) = a_{22} \det A(1,2) - a_{23}^2 \det A(1,2,3)$$

и

$$0 = \det A(3) = -a_{12}^2 \det A(1,2,3).$$

Зато је $a_{22} = 0$.

Претпоставимо да је $a_{11} = \cdots a_{2i,2i} = 0$ за $2i < k$.

Онда $\det A(1, 2i) \neq 0$ и

$$0 = \det A(2i+1) = \det A(1, 2i) \det A(2i+2, n).$$

Дакле $\det A(2i+2, n) = 0$. Сада

$$0 \neq \det A =$$

$$= \det A(1, 2i+1) \det A(2i+2, n) - a_{2i+1,2i+2}^2 \det A(1, 2i) \det A(2i+3, n) =$$

$$= -a_{2i+1,2i+2}^2 \det A(1, 2i) \det A(2i+3, n).$$

Зато је $0 \neq \det A(2i+3, n)$. Такође

$$0 = \det A(2i+2) = \det A(1, 2i+1) \det A(2i+3, n).$$

Закључујемо да је $\det A(1, 2i+1) = 0$, па следи $a_{2i+1,2i+1} = 0$.

Претпоставимо да је $2i+2 \leq k$. Онда $\det A(1, 2i+2) \neq 0$, и

$$0 = \det A(2i+3) = \det A(1, 2i+2) \det A(2i+4, n).$$

Зато је $\det A(2i+4, n) = 0$. Такође

$$0 = \det A(2i+2, n) =$$

$$= a_{2i+2,2i+2} \det A(2i+3, n) - a_{2i+2,2i+3}^2 \det A(2i+4, n)$$

$$= a_{2i+2,2i+2} \det A(2i+3, n)$$

Следи да је $a_{2i+2,2i+2} = 0$. $\square$

Последица ове теореме је да тежина сваког привезак темена(вредност одговарајућег елемента матрице) несингуларне матрице са максималним бројем P-темена увек нула.

Последица 2.8. Нека је T стабло са n темена и $\tilde{V}$ скуп привезак темена. Ако је $A = (a_{ij})$ несингуларна матрица из $\mathcal{S}(T)$ таква да је $P_\nu(A) = n$, онда је $a_{ii} = 0$ за све $i \in \tilde{V}$.

За дати број k, означимо са $\tilde{k} = k$ ако је k паран, односно $\tilde{k} = k - 1$ ако је k непаран.
Следећи резултат је важан за опис стабала са максималним бројем P-темена.

Последица 2.9. Нека је $\{1, \ldots, k\}$ скуп темена пута привезка P_k датог стабла T са n темена и $k \geq 2$. Онда постоји несингуларна матрица $A = (a_{ij})$ из $\mathcal{S}(T)$ таква да је $P_\nu(A) = n$ ако и само ако постоји несингуларна матрица $A' = (a'_{ij})$ у $\mathcal{S}(T \setminus P_{\tilde{k}})$ таква да је $P_\nu(A') = n - \tilde{k}$.
Доказ: Претпоставимо да је $A = (a_{ij})$ несингуларна матрица из $\mathcal{S}(T)$ таква да је $P_\nu(A) = n$. Према теореми 2.7, мора бити $a_{i,i} = 0$ за све $i = 1, \ldots, \tilde{k}$. Из теореме 2.7 се зна да је $\det A(1,2) \neq 0$. Из

$$0 = \det A(i) = -a_{12}^2 \det A(1,2,i),$$

следи да је $\det A(1,2,i) = 0$ за све $i = 3, \ldots, n$, па је $A(1,2)$ несингуларна матрица из $\mathcal{S}(T \setminus \{1,2\})$ таква да је $P_\nu(A(1,2)) = n - 2$. Овај алгоритам се може наставити док се не прођу свих $\tilde{k}$ темена пута P_k. На крају се добија тражена матрица A' која је у $\mathcal{S}(T \setminus P_{\tilde{k}})$ и за њу важи $P_\nu(A') = n - \tilde{k}$.

Обратно, претпоставимо да је $\tilde{T}$ стабло реда n и $\tilde{A}$ несингуларна матрица у $\mathcal{S}(\tilde{T})$ таква да је $P_\nu(A') = n$. Ако је n привезак теме стабла $\tilde{T}$, нека је T стабло добијено додавањем пута P_k (његове крајње тачке) на теме n.

Претпоставимо да је k парно. Ако је J_k матрица облика

$$J_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

придружена путу P_k онда је матрица

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \widetilde{A} & \\ & 1 \\ \hline 1 & \\ & J_k \end{array}\right)$$

несингуларна, јер је конгруентна са

$$\tilde{A} \oplus \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \ldots \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{k/2}$$

А матрица $A(\ell)$ конгруентна са

$$\tilde{A}(\ell) \oplus \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \ldots \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{k/2},$$

за $\ell = 1, \ldots, n$. Штавише $A(n+\ell)$ је конгруентна са

$$\tilde{A} \oplus \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \ldots \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{(k-2)/2} \oplus 0,$$

за $\ell = 1, 3, \ldots, k-1$ и са

$$\tilde{A}(n) \oplus \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \ldots \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{k/2},$$

за $\ell = 2, 4, \ldots, k$. Дакле, A је матрица за коју важи $P_\nu(A) = n+k$. $\square$

Ова последица 2.9. даје важан алгоритам за решавање постављених питања. Брисањем привезак путева парне дужине дато стабло T се може упростити и онда се питање максималног броја P-темена решава за то простије стабло. Ево и одговора на питање 2.1.

Теорема 2.10. Ако је T стабло са n темена и A несингуларна матрица из $\mathcal{S}(T)$ таква да је $P_\nu(A) = n$, онда је n парно.

Доказ: Претпоставимо да постоји матрица A која испуњава услове теореме. Нека је T' стабло настало брисањем привезак путева парне дужине. Онда је новодобијено стабло:

Случај 1. T' је пут. Ако је n непарно и овај пут је непарног броја темена, а из теореме 1.3. закључујемо да они не могу имати максималан број P-темена. Ако је n парно, то је могуће.

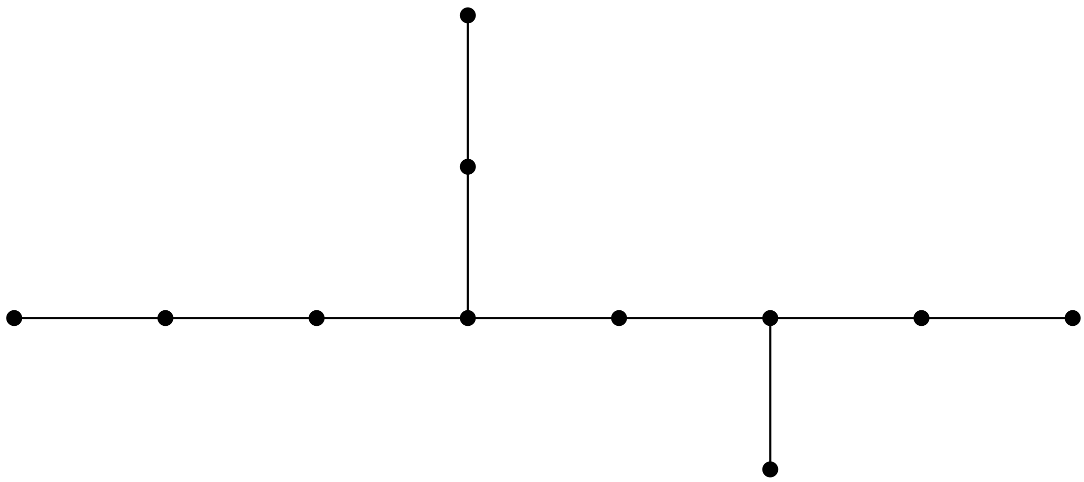
Случај 2. T' је стабло са више од једног темена које је суседно центру. Онда према теореми 2.5. ово стабло не може имати максималан број P-темена. $\square$

Коначно, ево и одговора на питање 2.2.

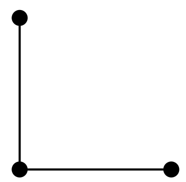
Теорема 2.11. Нека је T стабло са n темена и нека је T' стабло које се добија из T после брисања привезак путева у смислу последице 2.9. Онда постоји несингуларна матрица A из $\mathcal{S}(T)$ таква да је $P_\nu(A) = n$ ако и само ако је T' пут парног броја темена.

Јасно је из теореме 2.10. да стабло са максималним бројем P-темена мора имати паран број темена.

Пример 2.12. T_1 (Слика 2.1) је пример стабла са 11 темена и T_1' је стабло настало из њега брисањем привезак путева. T_1' (Слика 2.2) је пут са три темена, значи за T_1 не постоји несингуларна матрица са 11 P-темена. То је било јасно и због тога што је T непарног реда.

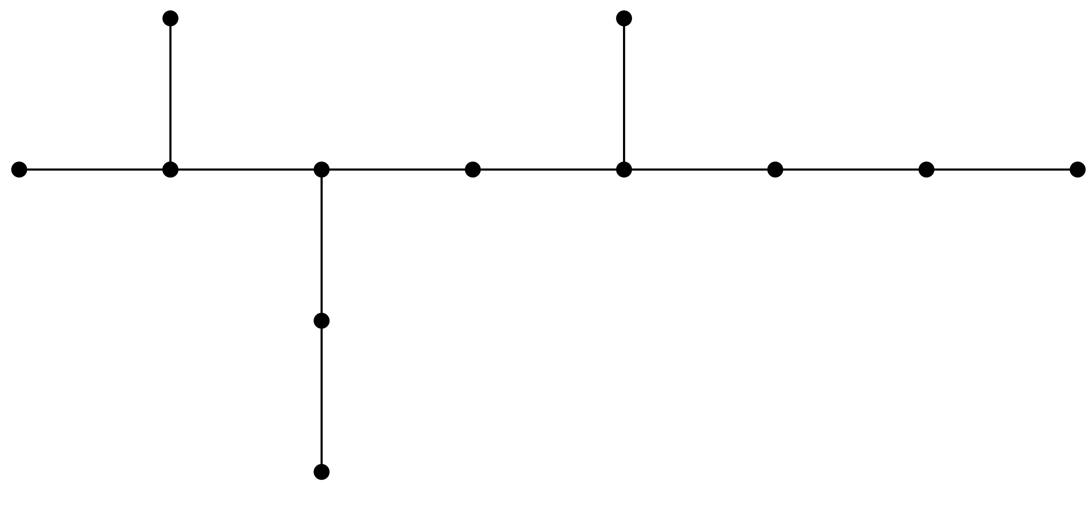


Слика 2.1: Стабло T_1

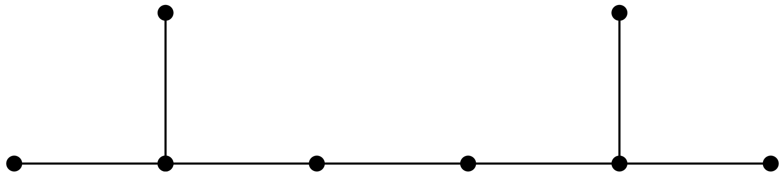


Слика 2.2: Стабло T_1'

Пример 2.13. T_2 (Слика 2.3) је стабло са 12 темена, али познатим алгоритмом добијамо стабло T_2' (Слика 2.4) за које према теореми 2.5. не постоји несингуларна матрица са максималним бројем P-темена.

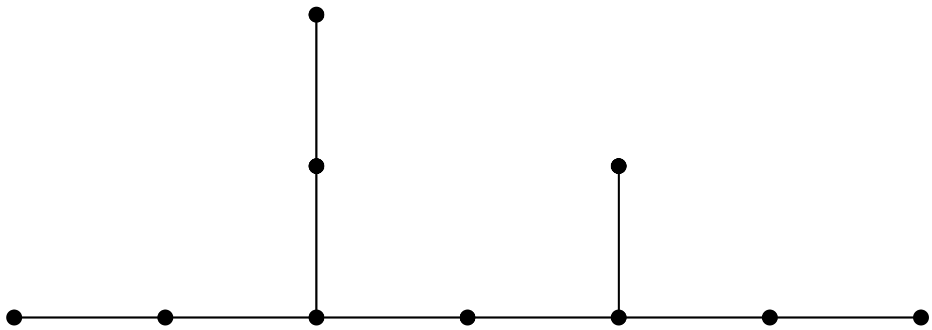


Слика 2.3: Стабло T_2

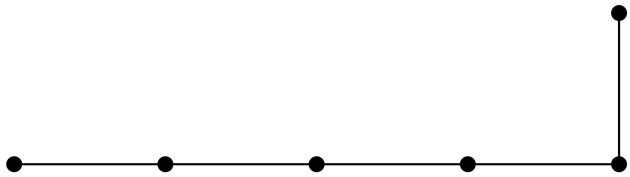


Слика 2.4: Стабло T_2'

Пример 2.14. T_3 (Слика 2.5) је пример стабла са 10 темена за које постоји несингуларна матрица са 10 P-темена. Познатим алгоритмом добијамо пут T_3' (Слика 2.6) са 6 темена. То је пут парног реда па за њега постоји несингуларна матрца максималног броја P-темена.



Слика 2.5: Стабло T_3



Слика 2.6: Стабло T_3'

3 Максимални број P-темена несингуларних двоструких звезди и величина P-скупа звезди

Још једно отворено питање које су поставили I.J.Kim и B.M. Shader [20] је:

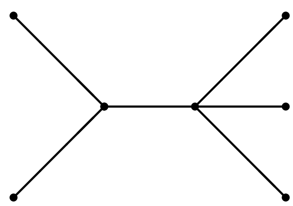
Питање 3.1. Да ли постоји стабло T са n темена такво да за сваку несингуларну матрицу A из $\mathcal{S}(T)$ важи $P_\nu(A) \leq n-2$?

Одговор на ово питање је потврдан. Таква стабла су такозване двоструке звезде.

Дефиниција 3.2. Двострука звезда је стабло које чине две дисјунктне звезде чија су централна темена повезана ивицом.

Нека је DS_n двострука звезда са n темена. Ако хоћемо да прецизирамо величину звезда можемо је означити са

S_{k_1,k_2}, $k_1 + k_2 = n$. Посебно, звезда је специјални случај двоструке звезде $S_{k,0}$.



Слика 3.1: Двострука звезда $DS_7 = S_{3,4}$

Посматрајмо за $n \geq 4$ матрицу

$$A_n = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & & & 1 & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & 1 & & & \\ 1 & \dots & 1 & n-5 & 1 & & \\ \hline & & & 1 & 0 & 1 & 1 \\ & & & & 1 & 1 & 0 \\ & & & & 1 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

где је горњи блок реда $n-3$. То је матрица дупле звезде $S_{n-3,n}$. Прво приметимо да је $\det A_n = 1$. Са друге стране, $\det A_n(\ell) = 0$ за све $\ell \in \{1, \dots, n\} \setminus \{n-3, n-1\}$ и

$$\det A_n(n-1) = -\det A_n(n-3) = 1,$$

тј.

$$P_\nu(A) = n-2.$$

Сада можемо одговорити на питање 3.1.

Теорема 3.3. За сваку несингуларну матрцу A из $\mathcal{S}(S_{n-3,n})$, $n \geq 4$ важи

$$P_\nu(A) \leq n-2.$$

Доказ: Претпоставимо да је $n-1 \leq P_\nu(A) \leq n$. Без губитка општости, можемо претпоставити да су темена 1, 2 и $n-3$ P-темена. Међу P-теменима је и један центар, претпоставимо да је то $n-3$. Онда

$$0 = \det A(n-3) = a_{11}a_{22}\dots a_{n-2,n-2}A(1,\dots,n-3)$$

и

$$0 \neq \det A = -a_{1,n-3}^2 a_{22}\dots a_{n-2,n-2} \det A(1,\dots,n-3).$$

Зато је

$$a_{11} = 0.$$

Пошто је и $\det A(2) = 0$, биће

$$\det A = -a_{2,n-3}^2 a_{11} a_{33} \cdots a_{n-2,n-2} \det A(1, \ldots, n-3) = 0$$

што је противречно чињеници да је A несингуларна. □

Приметимо да за $n = 3$ и матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

важи $P_\nu(A) \leq 1$. Граф матрице A је звезда са три темена. Остало је још питање о величини P-скупова.

Питање 3.4. Описати класу стабала T таквих да за сваку несингуларну матрицу из $\mathcal{S}(T)$ важи $P_S(A) \leq 1$.

Подсетимо се да за звезду S_n, матрица A из $\mathcal{S}(S_n)$ има облик

$$A(G) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \ldots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{13} & 0 & a_{33} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{14} & 0 & 0 & a_{44} & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ a_{1n} & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Подсетимо се најпре, неких познатих теорема [20].

Теорема 3.5. [20] Нека је A симетрична матрица. Онда је сваки непразни подскуп од P-скупа матрице A и сам P-скуп. Посебно, свако теме из P-скупа је P-теме матрице A.

Теорема 3.6. [18] Нека је T звезда а A из $\mathcal{S}(T)$. Онда:
(1) Ако је $n \geq 2$ и постоји тачно један индекс $i \in \{2, \ldots, n\}$ такав да је $a_{ii} = 0$, онда је A несингуларна.
(2) Ако је $n \geq 3$, A несингуларна и теме 1 је P-теме, онда

$$P_\nu(A) \leq 2 \text{ и } P_S(A) = 1.$$

Тврђење 3.7. Ако $n \geq 3$ и A несингуларна из $\mathcal{S}(S_n)$, онда $P_S(A) \leq 1$.
Доказ: Претпоставимо супротно, да постоји P-скуп $\mathcal{P}$ са два елемента из $\{2, \ldots, n\}$. Без губитка општости можемо претпоставити да је $\mathcal{P} = \{n-1, n\}$. Онда је $m_{A_{n-1,n}}(0) = 2$. Према Кошијевој теореми добијамо $m_{A_{1,n-1,n}}(0) \geq 1$. Пошто је матрица $A(1, n-1, n)$ конгруентна са $[a_{22}] \oplus \cdots \oplus [a_{n-2,n-2}]$, постоји бар један индекс k из $\{2, \ldots, n-2\}$ такав да је $a_{k,k} = 0$. Ако је $a_{k,k}$ једини елемент на главној дијагонали матрице $A(n)$ који је нула, према теореми 3.6. следи да је $A(n)$ несингуларна. Ово је супротно претпоставци да је n P-теме. Значи, постоји још неко теме $\ell \in \{2, \ldots, n\} \setminus \{k\}$ такво да је $a_{\ell,\ell} = 0$. Онда су колоне k и ℓ линеарно зависне што је супротно претпоставци да је A несингуларна. $\square$

Пример 3.8. Нека је $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Онда је $P_S(A_1) = 1$ а $P_S(A_2) = 0$.

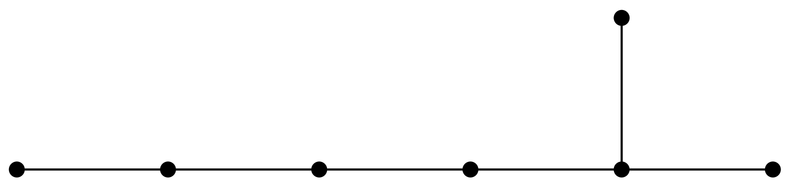
Иначе, звезде су јединa класа стабала која има највише једно теме које је степена већег од један. Претпоставимо да је T стабло са више темена степена већег од један. Онда имамо бар два темена i и j, који су суседни неким привезак теменима k и ℓ. Тада је $a_{k,k} = a_{\ell,\ell} = 0$ у матрици A из $\mathcal{S}(T)$ и сваки блок матрице $A(i,j,k,l)$ је несингуларан, па је $P_S(A) \geq 2$.

Теорема 3.9. За $n \geq 3$, једина стабла са n темена за које за сваку несингуларну матрицу A из $\mathcal{S}(T)$ важи $P_S(A) \leq 1$ су звезде S_n.

Пример 3.10. Матрица

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

је матрица стабла T (Слика 3.2)



Слика 3.2: Стабло T

Матрица A је несингуларна и 0 је сопствена вредност вишеструкости 3 матрице $A(2,4,5)$. Дакле, $\{2,4,5\}$ је P-скуп матрице

A. Иначе, ово је максимална величина P-скупа.
Јасно је да важи

$$P_S(A) \leq \left[\frac{n}{2}\right].$$

Онда се поставља следеће питање:

Питање 3.11. Наћи стабло T такво да за сваку несингуларну матрицу A из $\mathcal{S}(T)$ важи $1 < P_S(A) < [\frac{n}{2}]$.

У ствари не постоје овакве стабла. За дато стабло T посматрајмо матрицу $D + A + I$, где је D дијагонална матрица чији су елементи на дијагонали степени одговарајућег темена стабла, I јединична матрица и A стандардна придружена матрица стабла T. $D+A+I$ је симетрична и сви елементи на дијагонали су позитивни, па према [12] све сопствене вредности матрице су реалне и позитивне. Одатле добијамо следеће тврђење:

Тврђење 3.12. За свако стабло T постоји несингуларна матрица A из $\mathcal{S}(T)$ таква да је $P_S(A) = 0$.

4 Различите сопствене вредности фамилије ацикличних матрица

I.-J.Kim и B.L.Shader [19] су извршили класификацију стабала за које свака придружена матрица има различите сопствене вредности када су вредности на дијагонали различите. Подсетимо се неких познатих резултата. Први резултат је позната Parter-Wiener-ова теорема [16].

Теорема 4.1. Нека је A иредуцибилна ациклична матрица, и нека је λ сопствена вредност матрице A за коју важи $m_{A(G)}(\lambda) \geqslant 2$. Онда постоји *Pater*-ово теме i од A такво да је λ сопствена вредност најмање три различита директних суманда од $A(i)$.

I.-J.Kim и B.L Shader [20] су описали структуру ацикличне матрице у зависности од Parter-ових и Fiedler-ових темена.
Они су такође посматрали подскуп од $\mathcal{S}(G)$ свих симетричних матрица које одговарају истом графу G и које имају различите сопствене вредности.

$$\mathcal{SD}(G) = \{A = (a_{ij}) \in \mathcal{S}(G) \mid a_{kk} \neq a_{\ell\ell}\,, \text{ за } k \neq \ell\}.$$

Описали су и класу стабала T таквих да свака матрица из $\mathcal{SD}(G)$ има само просте сопствене вредности.

Теорема 4.2. [21] Нека је T стабло које није пут. Онда свака матрица из $\mathcal{SD}(T)$ има различите сопствене вредности ако и само ако свако теме степена бар три има бар једну грану која није привезак теме.

Применом теореме 4.1. се показује да је услов довољан а применом следеће леме 4.3. да је и потребан.

Лема 4.3. [19] Нека је T стабло. Онда постоји сингуларна матрица у $\mathcal{SD}(T)$ без нула елемената на главној дијагонали.

Дефиниција 4.4. Уопштена звезда је стабло које се састоји од више путева који имају једну заједничку крајњу тачку.
Уопштена двострука звезда је стабло које се добија ако централна темена двеју звезди повежемо путем.

И пут и звезда су специјални случајеви уопштене двоструке звезде. Ако су две звезде величине n_1 и n_2 и пут је величине p, онда ћемо уопштену двоструку звезду означавати са $S^p_{n_1 n_2}$. Значи $S^1_{n_1 n_2}$ је звезда са $n_1 + n_2 - 1$ темена а S^p_{00} пут дужине p. $S^p_{n_1 n_2}$ има $n_1 + n_2 - 2 + p$ темена.
Последица теореме 4.2. је:

Последица 4.5. Нека је T стабло. Онда свака матрица из $\mathcal{SD}(T)$ има различите сопствене вредности ако и само ако је T уопштена двострука звезда.

У [13] су описани сви графови G такви да свака реална симетрична матрица која има граф G нема сопствених вредности вишеструкости веће од 2.

Нека је G граф и нека $A = A(G) \in \mathcal{S}(G)$. Означићемо са $\varphi(A(G), x)$ карактеристичан полином матрице A,[10, 11, 7]. Ево неких резултата о карактеристичним полиномима.

Тврђење 4.6. Нека су i и j два суседна темена стабла T таква да $\phi(A(T \setminus i), x)$ и $\phi(A(T \setminus ij), x)$ немају заједничку нулу. Онда $\phi(A(T), x)$ и $\phi(A(T \setminus i), x)$ такође немају заједничку нулу.

Користећи Кошијеву теорему и претходно тврђење можемо закључити да су сопствене вредности од $A(T)$ (и $A(T \setminus i)$) све просте. Индукцијом долазимо до следећег резултата:

Тврђење 4.7. Нека је T је стабло добијено спајањем стабла H и пута преко једног привезак темена, на пример i. Ако $\phi(A(H), x)$ и $\phi(A(H \setminus i), x)$ немају заједничких нула, онда су све сопствене вредности $A(T)$ просте.

Лема 4.8. [8] Нека је P пут који не садржи ниједну ивицу цикла у графу G. Онда

$$m_{A(G \setminus P)}(\theta) \geqslant m_{A(G)}(\theta) - 1 \,.$$

Овај резултат има пуно занимљивих последица. Једна од њих је следећа лема:

Лема 4.9. [6] Нека је P пут у стаблу T и $A(T) \in \mathcal{S}(T)$. Ако је θ сопствена вредност матрице $A(T)$, онда

$$m_{A(T \setminus P)}(\theta) \geqslant m_{A(T)}(\theta) - 1 \,.$$

Познат је резултат који каже да су сопствене вредности иредуцибилне тридијагоналне матрице реалне и различите. Ово се може закључити применом тврђења 4.6 и тврђења 4.7. У овом поглављу ћемо доказати резулте који се односе на уопштене двоструке звезде. Почнимо са звездама.

Лема 4.10. Нека је T звезда и теме 1 је централно. Претпоставимо да матрица $A = (a_{ij})$ из $\in \mathcal{S}(T)$ има различите елементе на главној дијагонали, осим елемента a_{11}. Онда a_{ii}, за $i \geq 2$, нису сопствене вредности матрице A.

Доказ: Претпоставимо супротно, да је a_{ii}, за неко $i \geq 2$ сопствена вредност матрице A. Онда је матрица $A - a_{ii}I$ сингуларна. Али, i-та врста ове матрице је $(a_{1i}, 0, \ldots, 0)$ па би то

значило да је $a_{1i} = 0$, што је супротно чињеници да је $A \in \mathcal{S}(T)$.
□

Тврђење 4.11. Нека је T звезда и теме 1 је централно. Претпоставимо да је матрца $A \in \mathcal{S}(T)$ таква да се елементи a_{ii}, $i \geq 2$, не појављују више од два пута. Онда су све сопствене вредности матрице A просте.

Доказ: Нека је $A = (a_{ij}) \in \mathcal{S}(T)$ и претпоставимо да је $a_{i_1 i_1} = a_{i_k i_k}$, где је $1 < i_1 < i_k \leqslant n$ и $k = 2, \ldots, s$. Ако је $s \geqslant 3$, онда је $a_{i_1 i_1}$ сопствена вредност A вишестукости најмање 2. Ако је $s = 2$, онда је $a_{i_1 i_1}$ сопствена вредност за A ([8]). Пошто $a_{i_1 i_1}$ није сопствена вредност матрице $A(T \setminus \{1, i_1, j_2\})$, из леме 4.8. следи да је $a_{i_1 i_1}$ проста сопствена вредност A. Ако су сви нецентрални еленети на дијагонали различити, онда a_{ii} није сопствена вредност A, за $i \geqslant 2$, што следи из леме 4.9. Коначно максимална вишеструкост сопствених вредности од A је 1. □

Приметимо да нема посебних захтева у вези са a_{11}. У случају понављања нецентралних дијагоналних елемената више од два пута та вредност елемента је сопствена вредност вишеструкости веће од 1.

Сада ћемо видети шта се дешава у случају сопствених вредности уопштених двоструких звезди $S^p_{n_1 n_2}$.

Тврђење 4.12. Нека је A симетрична матрица чији је граф уопштена двострука звезда и нецентрални елементи са дијагонале обе звезде матрице A су различити. Онда су све сопствене вредности од A просте.

Доказ: Нека је $A \in \mathcal{S}(S^p_{n_1 n_2})$ и $p > 1$, и нека је P пут који спаја центре две звезде, рецимо, 1 и n_1+p-1. Нека је $V_{\bar{P}} = \{2,\ldots,n_1,n_1+p,\ldots,n_1+p+n_2-2\}$. За $V(S^p_{n_1n_2}\setminus P)$, имамо

$$\phi(A(S^p_{n_1n_2}\setminus P),x)=\prod_{k\in V_{\bar{P}}}(x-a_{kk})\,.$$

Из леме 4.8., ако је θ сопствена вредност од A, онда

$$m_{A(S^p_{n_1n_2}\setminus P)}(\theta)\geqslant m_{A(S^p_{n_1n_2})}(\theta)-1\,.$$

Онда, једине могуће сопствене вредности са могућом вишеструкости већом од 1 су a_{kk}, за $k\in V_{\bar{P}}$.

Претпоставимо да постоје два привезак темена, рецимо, k_1 и k_2, у две различите звезде, такви да је $a_{k_1k_1}=a_{k_2k_2}$. Нека је Q пут који спаја темена k_1 и k_2, и нека је $V_{\bar{Q}}=V_{\bar{P}}\setminus\{k_1,k_2\}$. Добијамо

$$\varphi(A(S^p_{n_1n_2}\setminus Q),x)=\prod_{k\in V_{\bar{Q}}}(x-a_{kk})\,.$$

Зато $a_{k_1k_1}$ није нула $\phi(A(S^p_{n_1n_2}\setminus Q),x)$, т.ј.,

$$m_{A(S^p_{n_1n_2}\setminus Q)}(a_{k_1k_1})=0\,.$$

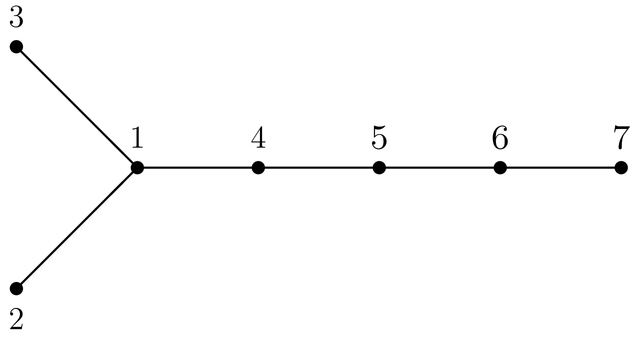
То значи да

$$m_{A(S^p_{n_1n_2})}(a_{k_1k_1})\leqslant 1\,.$$

Исти поступак се примени у случају када нецентрални елемент a_{kk} једне звезде није једнак ниједном елементу друге звезде. У том случају посматрамо пут Q који спаја k са привезак теменом друге звезде. $\square$

Приметимо да у случају када су два дијагонална елемента исте звезде једнака, тврђење не важи.

Пример 4.13. Посматрајмо уопштену двоструку звезду S^4_{32} (Слика 4.1) :



Слика 4.1: Граф S^4_{32} (или S^5_{31}).

И матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Елементи $(2,2)$ и $(3,3)$ су 1, што је и сопствена вредност вишеструкости 2 матрице A, и темена 2 и 3 припадају истој звезди.

За дато стабло T, нека је $\mathcal{SDP}(T)$ скуп свих матрица $A \in \mathcal{S}(T)$ чији је граф T, таквих да су дијагонални нецентрални елементи обе звезде различити.

Доказали смо да ако је $A \in \mathcal{SDP}(S^p_{n_1 n_2})$, све сопствене вредности A су просте. И обратно је тачно, т.ј., ако $A \in \mathcal{SDP}(T)$, за неко стабло T, онда $T = S^p_{n_1 n_2}$.

Доказ је исти као и теореме 1.2. [20]. Јединa разлика може бити у конструкцији матрице D.

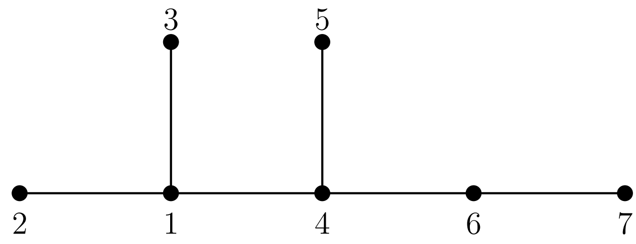
Лема 4.14. Нека је T нетривијално стабло. Онда постоји сингуларна матрица у $\mathcal{SDP}(T)$ са свим ненула елементима на дијагонали.

Теорема 4.15. Нека је T стабло. Онда свака матрица из $\mathcal{SDP}(T)$ има различите сопствене вредности ако и само ако је T уопштена двострука звезда.

Пример 4.16. Посматрајмо матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

чији граф је G



Слика 4.5: Граф G

G није уопштена двострука звезда и темена 2 и 3 припадају истој звезди. Елементи $(2,2)$ и $(3,3)$ су различити, али 2 је сопствена вредност вишеструкости 2.

5 Неуређени низ вишеструкости широких двоструких путева

Ово поглавље има за тему анализу вишеструкости сопствених вредности неких класа стабала.
Подсетимо се прво следећег тврђења [6]:

Теорема 5.1.

$$m_{A(G\setminus P)}(\theta) \geq m_{A(G)}(\theta) - 1$$

где је G било који граф а P пут који не садржи ивицу цикла из G.

Пошто стабла не садрже цикле, неједнакст важи са све путеве, што генерише резултат за ацикличне симетричне матрице.

Ова неједнакост може дати горњу границу вишеструкости сопствене вредности графа. За доњу границу можемо користити следећу лему (она је уопштење тврђења из [2]).

Лема 5.2. Нека су $H_1, \ldots, H_k$ графови и $v_1, \ldots, v_t$ темена која нису темена ових графова. Конструишимо граф H додавањем ивица које спајају неко теме v_i са теменом неког графа H_j. Ако је

$$A = \begin{pmatrix} B & C^T \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{S}(H)$$

блок матрица где је

$$B = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k \end{pmatrix},$$

матрице A_i су из $\mathcal{S}(H_i)$ за $i = 1, \ldots, k$, D је реална дијагонална матрица и C има t колона. Онда

$$m_A(\lambda) \geq \sum_{i=1}^{k} m_{A_i}(\lambda) - t.$$

Доказ: Нека је F матрица чије колоне чине базу простора сопствених вектора матрице B за сопствену вредност λ. Матрица F има $\sum_{i=1}^{k} m_{A_i}(\lambda)$ колона и $BF = \lambda F$. Направимо матрицу E додавањем t врста на врх матрице F. Колоне матрице E су линеарно независне. Показаћемо да је одређена линеарна комбинација колона матрице E сопствени вектор матрице A за сопставену вредност λ. Прво, посматрајмо хомоген систем једначина $(CF)X = 0$. Матрица система има t врста и $\sum_{i=1}^{k} m_{A_i}(\lambda)$ колона, па простор решења има димензију најмање $r = \sum_{i=1}^{k} m_{A_i}(\lambda) - t$. Ако је $r \leq 0$, лема је тачна. Зато претпоставимо да је $r > 0$. Нека су $X_1, \ldots, X_r$ линеарно независни вектори решења. Онда

$$A(EX_i) = \begin{pmatrix} B & C^T \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} X_i = \begin{pmatrix} BF \\ CF \end{pmatrix} X_i = \begin{pmatrix} \lambda D \\ CF \end{pmatrix} X_i =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda DX_i \\ CFX_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda DX_i \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix} X_i = \lambda(EX_i).$$

То значи да је EX_i сопствени вектор матрице A за сопствену вредност λ. Треба још показати да су EX_i линеарно независни. Претпоставимо да постоје ненула скалари a_i, $1 \leq i \leq r$

такви да $\sum_{i=1}^{r} a_i EX_i = 0$. Онда је $E(\sum_{i=1}^{r} a_i X_i) = 0$ што је контрадикција са чињеницом да су колоне матрице E линеарно независне. Коначно,

$$r = \sum_{i=1}^{r} m_{A_i}(\lambda) - t$$

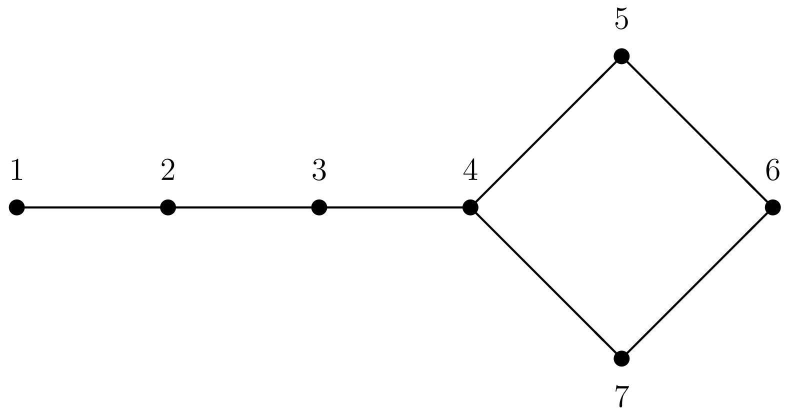
и EX_i су r линеарно независних сопствених вектора матрице A за λ. $\square$

Ова неједнакост је специјалан случај Кошијеве неједнакости за блок Хермитске матрице.

Лема 5.2. даје алгоритам за конструкцију матрица одређених графова где се постиже максимала вишеструкост.

Пример 5.3.

Нека је дат граф T (Слика 5.1)



Слика 5.1: Стабло T

Ако посматрамо пут који спаја темена 1 и 4, користећи Parter-ову неједнакост добијамо да је за сваку сопствену вреност λ матрице $A \in \mathcal{S}(T)$, $m_A(\lambda) \leq 2$ [8]. Из леме 5.1. ако је A_1 матрица чији је граф пут који спаја темена 1 и 2 и A_2 матрица чији је граф цикл који спаја темена 4, 5, 6 и 7, имамо да је

$$m_A(\lambda) \geq m_{A_1}(\lambda) + m_{A_2}(\lambda) - 1 \geq 1 + 2 - 1 = 2.$$

Зато, ако хоћемо да конструишемо матрицу у $\mathcal{S}(T)$ која има сопствену вредност на пример $\sqrt{2}$, максимелне вишеструкости, можемо узети да је

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

и

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

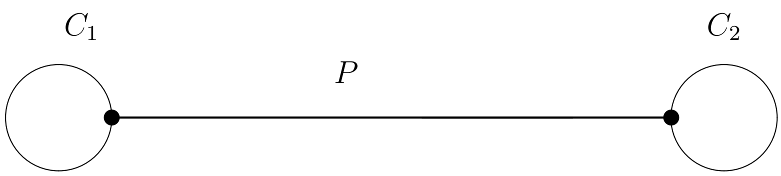
Онда свака матрица облика [3]

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 1 & & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

има $\sqrt{2}$ као сопствену вредност и то највеће могуће вишеструкости 2.

У општем случају, нека је$G_{m,n}$ граф који се састоји из пута са m темена и цикла са n темена који су повезани крајњом тачком пута (то су такозвани пуноглавци графови). Ако је λ сопствена вредност матрице A из $\mathcal{S}(G_{m,n})$ али није сопствена вредност матрице $A(C_n)$, онда је λ проста.

Дефиниција 5.4. Граф G је граф-оков (*dummbell*) ако се састоји од два цикла C_1 и C_2 који су повезани путем P. Означаваћемо га са D (Слика 5.2).



Слика 5.2: Граф D

Претпоставићемо да је пут дужине бар 2. (Сва тврђења важе и за остале). Ови графови су доста истраживани у радовима [24, 25]. Ово је подкласа такозваних бицикличних графова. То су повезани графови код којих је број ивица једнак број темена плус један.
Наћићемо горњу границу вишеструкости сопствених вредности ових графова.

Тврђење 5.5. Нека је D граф-оков. Највећа вишеструкост сопствене вредности графа D је 3.
Доказ: Нека је P пут који садржи ивице оба цикла графа D. Онда је $D \setminus P$ унија два дисјунктна пута. Из *Parterove*

неједнакости добијамо

$$m_{A(D)}(\lambda) \leq m_{A(D\setminus P)}(\lambda) + 1 \leq 2 + 1$$

за сваку сопствену вредност λ. $\square$

Тврђење 5.6. Нека је D граф-оков и P пут који сече оба цикла C_1 и C_2 у теменима v_1 и v_2 редом. Ако је λ сопствена вредност матрице $A \in \mathcal{S}(D)$ вишеструкости 3, онда је λ сопствена вредност матрица $A(C_1 \setminus v_1)$ и $A(C_2 \setminus v_2)$.

Доказ: Из *Parter*-ове неједнакости добијамо: ако $m_{A(D))}(\lambda) = 3$, онда $m_{A(D\setminus P))}(\lambda) \geq 3 - 1 = 2$. Пошто је $D \setminus P = (C_1 \setminus v_1) \cup (C_2 \setminus v_2)$ и $C_1 \setminus v_1$ и $C_2 \setminus v_2$ су оба путеви, λ мора бити сопствена вредност матрица $A(C_1 \setminus v_1)$ и $A(C_2 \setminus v_2)$. $\square$

Последица 5.7. Нека је D граф-оков и нека је $P = v_1 v_2 \cdots v_\ell$ пут који сече цикле C_1 и C_2 у теменима v_1 и v_ℓ редом. Ако је λ сопствена вредност матрице $A \in \mathcal{S}(D)$ вишеструкости 3, онда је λ сопствена вредност матрица $A(C_1)$ и $A(C_2)$.

Доказ: Посматрајмо пут $P' = v_2 \cdots v_\ell$. Онда је

$$m_{A(D\setminus P'}(\lambda) \geq 2.$$

Пошто је $D \setminus P' = C_1 \cup (C_2 \setminus v_\ell)$ и $m_{A(C_2 \setminus v_\ell)} = 1$, онда је $m_{A(C_1)} \geq 1$.$\square$

Приметимо да можемо добити резултат општији од 5.7. Неко λ може бити сопствена вредност графа пуноглавца добијеног, на пример, повезивањем пута $v_2 \cdots v_\ell$ и цикла C_2 у v_ℓ. Следећи резултат је последица Parter-ове неједнакости.

Тврђење 5.8. Нека је дат граф D и нека пут P сече цикле C_1 и C_2 у теменима v_1 и v_ℓ редом. Ако је λ сопствена вредност матрице $A \in \mathcal{S}(D)$, али није сопствена вредност ниједне од матрица $A(C_1 \setminus v_1)$ и $A(C_2 \setminus v_2)$ или ниједне од $A(C_1)$ и $A(C_2)$, онда је $m_A(\lambda) = 1$, то јест λ је проста сопствена вредност.

Лема 5.2. даје алгоритам за конструкцију матрица одређених графова са сопственим вредностима максималне вишеструкости. Нека је A_1 тридијагонална матрица пута са k_1 темена, λ њена сопствена вредност (тај алгоритам је описан у [26]). Користећи се алгоритмом који је описан у [3] могуће је конструисати матрице A_2 и A_3 које одговарају циклима реда k_2 и k_3 и имају исту сопствену вредност λ. Нека је

$$A = \begin{pmatrix} B & C^T \\ C & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}(H)$$

блок матрица, где је

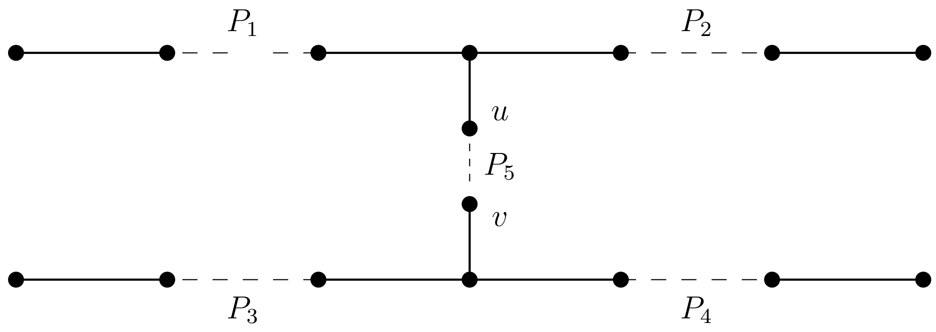
$$B = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & A_3 \end{pmatrix}.$$

$C = (x, y)$, где је x вектор са 1 на месту 1 и месту k_1+1, а остало нулама, а y вектор са 1 на местима k_1 и $k_1 + k_2 + 1$ и остало нулама. Онда је λ сопствена вредност A вишеструкости 3. Заиста

$$m_A(\lambda) \geq m_{A_1}(\lambda) + m_{A_2}(\lambda) + m_{A_3}(\lambda) - 2 \geq 1 + 2 + 2 - 2 = 3.$$

Дефиниција 5.9. Бинарно стабло је стабло такво да је степен сваког његовог темена највише три.

Дефиниција 5.10. Широки двоструки пут је стабло које се састоји од пет путева P_1,P_2,P_3,P_4 и P_5 и два темена u и v тако да су крајње тачке путева P_1,P_2 и P_5 спојене са u а друга крајња тачка пута P_5 и крајеви P_3 и P_4 спојени са v.



–

Слика 5.3: Широки двоструки пут

Ова стабла (Слика 5.3) се могу посматрати као два пута спојена трећим. Зато се зову широки двоструки путеви. Путеве P_1,P_2,P_3,P_4 ћемо звати ногама овог стабла.

Дефиниција 5.11. Ф-бинарно стабло је широки двоструки пут код кога је пут P_5 једно теме и најдуже ноге (путеви) су везане за различите u и v.

Ово је посебна класа бинарних стабала, и за њих су испитане неке спектралне особине.

Теорема 5.12. Нека је T широки двоструки пут и A из $\mathcal{S}(T)$. Онда је максимална вишеструкост сопствене вредности матрице A три.

Доказ: Теорема 5.1 се може применити на пут P : P_1 — u —P_5 — v — P_3. Комплемент овог пута у T су два дисјунктна пута, па је $m_{T \backslash P}(\lambda) \leq 2$. Онда је $m_{A(T)} \leq 3$.□

Теорема 5.13. Нека је T широки двоструки пут и A из $\mathcal{S}(T)$. λ је сопствена вредност матрице A максималне вишеструкости ако и само ако је λ сопствена вредност сваког пута $P_1, \ldots, P_5$.
Доказ: Нека је $A_i = A(P_i)$ за $i = 1, \ldots, 5$. Претпоставимо да

је $m_A(\lambda) = 3$. Ако посматрамо пут P_1—u—P_5—v—P_3 у T, из теореме 5.1. следи

$$m_{A_2}(\lambda) + m_{A_4}(\lambda) \geq 3 - 1 = 2.$$

Дакле добијамо да $m_{A_2}(\lambda) = m_{A_4}(\lambda) = 1$. Аналогно се показује да је $m_{A_1}(\lambda) = m_{A_3}(\lambda) = 1$. Остало је још да покажемо да је $m_{A_5}(\lambda) = 1$. Заиста, пут P_5 се може добити брисањем путева P_1—u—P_2 и P_3—u—P_4. Применом неједнакости 5.1. добијамо

$$1 \geq m_{A_5}(\lambda) \geq m_{\widetilde{A}} - 1 \geq m_A(\lambda) - 2 = 1,$$

где је $\widetilde{A} = A(H)$ и H уопштена звезда са центром u и крацима P_1, P_2 и P_5.
Обратно, ако је $m_{A_i}(\lambda) = 1$ за $i = 1, \dots, 5$, онда

$$3 \geq m_A(\lambda) \geq \sum_{i=1}^{5} m_{A_i}(\lambda) - 2 = 3,$$

из теореме 5.2. и теореме 5.12. $\square$

Нека је ℓ_i број темена пута P_i за $i = 1, \dots, 5$.

Последица 5.14. Број n_3 сопствених вредности вишеструкости 3 широког двоструког пута је највише

$$min\{\ell_1, \dots, \ell_5\}.$$

Ф-бинарно стабло је посебан пример широких двоструких путева, па тако добијамо следећи резултат ([21]).

Последица 5.15. Нека је T Ф-бинарно стабло и A из $\mathcal{S}(T)$. Онда нема сопствених вредности вишеструкости 4 или више и број n_3 сопствених вредност вишеструкости 3 је највише 1.

У [21] је доказано: ако $\lambda \in \sigma(A)$ и $m_A(\lambda) = 3$, онда је дијагонални елемент матрице A који одговара темену које повезује ноге баш λ.
Сада ћемо испитати сопствене вредности вишеструкости 2. Први резултат је последица леме 5.2 и теореме 5.13.

Лема 5.16. Нека је T широки двоструки пут и A из $\mathcal{S}(T)$. Ако је λ сопствена вредност матрице тачно једног пута P_i, $i = 1, \ldots, 5$, онда је $m_A(\lambda) = 2$.

Са n_2 ћемо означити број сопствених вредности вишеструкости 2 дате матрице A.

Теорема 5.17. Нека је W широки двоструки пут и

$$r = min\{\ell_i + \ell_j \mid \ i = 1, 2, \ j = 3, 4\}.$$

Онда је

$$n_2 \leq r - 2n_3.$$

Доказ: Из теореме 5.13 , ако су $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n_3}$ сопствене вредности вишеструкости 3, оне морају бити сопствене вредности матрица $A(P_2)$ и $A(P_4)$. Користећи лему 5.16. добијамо тражену границу. □

Приметимо да је теорема 5.13. много општија. На пример:

Лема 5.18. Нека је S уопштена звезда из $\mathcal{S}(S)$. Онда је $m_A(\lambda) = 2$ ако и само ако је λ сопствена вредност сваког крака.

Теорема 5.19. Нека је T широки двоструки и пут и A из $\mathcal{S}(T)$. Онда је $m_A(\lambda) = 2$ ако и само ако је λ проста сопствена вредност путева P_1, P_2 и уопштене звезде са центром v и крацима

P_3, P_4 и P_5 или проста сопствена вредност путева P_3, P_4 и уопштене звезде са центром u и крацима P_1, P_2 и P_5.
Доказ: Претпоставимо да је $m_A(\lambda) = 2$. Из теореме 5.1., за сваки пут P у T, $m(_{A(T\setminus P)}(\lambda) \geq 1$. Зато, ако λ није сопствена вредност од P_1 односно P_2, онда мора бити сопствена вредност од P_3 и P_4. Штавише, ако са S означимо уопштену звезду са центром u и крацима P_1, P_2, P_5, онда је $m_A(S) \geq 1$. Други случај се исто показује. □

Остало је питање броја n_1 простих сопствених вредности од $A \in \mathcal{S}(W)$. Пошто

$$n = n_1 + 2n_2 + 3n_3 = \ell_1 + \ldots + \ell_5 + 2,$$

добијамо

$$n_1 \leq n.$$

Једнакост се постиже када конструишемо $A(P_1)$,. . .,$A(P_5)$, са различитим сопственим вредностима. Са друге стране

$$\begin{aligned} n_1 &\geq \ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ell_4 + \ell_5 + 2 - 2n_2 - 3n_3 \\ &\geq \ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ell_4 + \ell_5 + 2 - 2r + n_3 \\ &\geq |\ell_1 - \ell_2| + |\ell_3 - \ell_4| + \ell_5 + 2. \end{aligned}$$

Из ове неједнакости закључујемо да свака матрица из $\mathcal{S}(W)$ (W је широки двоструки пут) мора имати бар $\ell_5 + 2$ простих сопствених вредности.

Дефиниција 5.20. Нека су $m_1 \geq \cdots + \geq m_k$ вишеструкости различитих сопствених вредности симетричне матрице A димензије $n \times n$ и $m_1 + \ldots m_k = n$. Онда низ $(m_1, \ldots, m_k)$ зовемо неуређени низ вишеструкости. Неуређени низ вишеструкости графа

G је скуп неуређених низова вишеструкости свих матрица у $\mathcal{S}$.

У даљем тексту за широке двоструке путеве, без губитка општости, можемо претпоставити да $\ell_1 \geq \ell_2$ и $\ell_3 \geq \ell_4$.

Теорема 5.21. Нека је W широки двоструки пут са n темена, и $\ell_1 \geq \ell_2$ и $\ell_3 \geq \ell_4$. Онда се скуп неуређених низова вишеструкости од W састоји од низова облика

$$(\underbrace{3,\ldots,3}_{n_3},\underbrace{2,\ldots,2}_{n_2},\underbrace{1,\ldots,1}_{n_1})$$

где је $0 \leq n_3 \leq min\{\ell_2,\ell_4,\ell_5\}$, $0 \leq n_2 \leq \ell_2+\ell_4-2n_3$ и $n_1 = n-2n_2-3n_3$.
Доказ: Јасно је из претходног да је низ баш овог облика.

Обратно, нека је S_1 односно S_2 уопштена звезда са центром u, односно v, и крацима L_1, L_2, L_5, односно L_3, L_4, L_5. За $k = 0,\ldots,min\{\ell_2,\ell_4,\ell_5\}$, затим $p = 0,\ldots,\ell_2-k$ и $q = 0,\ldots,\ell_4-k$, посматрајмо $\ell_1+\ell_5-k+p+1$ различитих реалних бројева

$$\beta_1,\ldots,\beta_{\ell_4-k-q},\theta_1,\ldots,\theta_{\ell_1-\ell_4+\ell_5+p+q+1}$$

који се преплићу са $\ell_1+\ell_5-k+p$ различитих реалних бројева

$$\lambda_1,\ldots,\lambda_{\ell_5},\alpha_1,\ldots,\alpha_{\ell_1-k},\widetilde{\alpha}_{\ell_2-p-k+1},\ldots,\widetilde{\alpha}_{\ell_2-k}$$

и $\ell_3+\ell_5-k+q+1$ различитих реалних бројева

$$\alpha_1,\ldots,\alpha_{\ell_2-k-p},\mu_1,\ldots,\mu_{\ell_3-\ell_2+\ell_5+p+q+1}$$

који се преплићу са $\ell_3+\ell_5-k+q$ различитих реалних бројева

$$\lambda_1,\ldots,\lambda_{\ell_5},\beta_1,\ldots,\beta_{\ell_3-k},\widetilde{\beta}_{\ell_4-q-k+1},\ldots,\widetilde{\beta}_{\ell_4-k}$$

Посматрајмо матрицу $A \in \mathcal{S}(W)$ такву да је

$\sigma(A(L_5)) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_{\ell_5}\}$

$\sigma(A(L_1)) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_{\ell_2-k-p}, \alpha_{\ell_2-k-p+1}, \ldots, \alpha_{\ell_1-k}\}$

$\sigma(A(L_2)) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_{\ell_2-k-p}, \widetilde{\alpha}_{\ell_2-k-p+1}, \ldots, \widetilde{\alpha}_{\ell_2-k}\}$

$\sigma(A(S_1)) =$

$\{\lambda_1, \lambda_1, \ldots, \lambda_k, \lambda_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_{\ell_2-k-p}, \beta_1, \ldots, \beta_{\ell_4-k-q}, \theta_1, \ldots, \theta_{\ell_1-\ell_4+\ell_5+p+q+1}\}$

$\sigma(A(L_3)) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \beta_1, \ldots, \beta_{\ell_4-k-q}, \beta_{\ell_4-k-q+1}, \ldots, \beta_{\ell_3-k}\}$

$\sigma(A(L_4)) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \beta_1, \ldots, \beta_{\ell_4-k-q}, \widetilde{\beta}_{\ell_4-k-q+1}, \ldots, \widetilde{\beta}_{\ell_4-k}\}$

$\sigma(A(S_2)) =$

$\{\lambda_1, \lambda_1, \ldots, \lambda_k, \lambda_k, \beta_1, \ldots, \beta_{\ell_4-k-p}, \alpha_1, \ldots, \alpha_{\ell_2-k-q}, \mu_1, \ldots, \mu_{\ell_3-\ell_2+\ell_5+p+q+1}\}$

Постојање матрица $A(L_i)$, $i = 1, \ldots, 5$ је показано у [26] и постојање матрица уопштених звезда $A(S_i)$, $i = 1, 2$ је показано у [17].

Јасно је да је неуређени низ вишеструкости матрице A низ

$$(\underbrace{3, \ldots, 3}_{t_3}, \underbrace{2, \ldots, 2}_{t_2}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{t_1}),$$

где је $t_3 = k$, $t_2 = \ell_2 + \ell_4 - 2k - q - p$ и $t_1 = (\ell_1 - \ell_2) + (\ell_3 - \ell_4) + \ell_5 + 2 + k + 2(p+q)$. Приметимо да је $0 \leq k + 2(p+q) \leq 2(\ell_2 + \ell_4)$. $\Box$

Приметимо да за $1 = \ell_5 \leq \ell_2, \ell_4 \leq \ell_1, \ell_3$ можемо добити резулатате за Ф-бинарна стабла. Теорема може бити примењена за $\ell_5 = 0$.

Стабло је минимално ако постоје матрица таква да је број различитих сопствених вредности једнак дијаметру стабла плус један. Из теореме 5.21. следи да су широки двоструки путеви минимални за $\ell_2, \ell_4 \leq \ell_1, \ell_3 \leq \ell_5$. Дијаметар стабла је $\ell_1 + \ell_3 + \ell_5 + 1$. Број различитих сопствених вредности је $\ell_1 + \ell_3 + \ell_5 + 2$ ако је $t_3 = 0$,$t_2 = \ell_2 + \ell_4$ и $t_1 = (\ell_1 - \ell_2) + (\ell_3 - \ell_4) + \ell_5 + 2$.

У овом одељку је дато решење за инверзни проблем сопствених вредности широких двоструких путева уопштавајући резултате из уже фамилије Ф-бинарних стабала. Овакав приступ је другачији и нуди општије резултате са краћим доказима.

Природно уопштење широких двоструких путева је када имамо више од две ноге везане за темена u и v. Таква стабла се могу звати широке уопштене двоструке звезде.

Проблем1. Опис неуређеног низа вишеструкости за широке уопштене двоструке звезде. Тежи проблем је опис ових низова за бинарна стабла.

Проблем2. Опис неуређеног низа вишеструкости за бинарна стабла.

Резултати из овог поглавља могу послужити и за одговор на питање:

Проблем3. Какви су неуређени низови вишеструкости стабала која имају темена вишеструкости највише 3.

6 Сингуларне ацикличне матрице максималног броја P-темена

Ово поглавље је посвећено сингуларним ацикличним матрицама и њиховим бројем P-темена. Познато је да је тај број ограничен, и то :

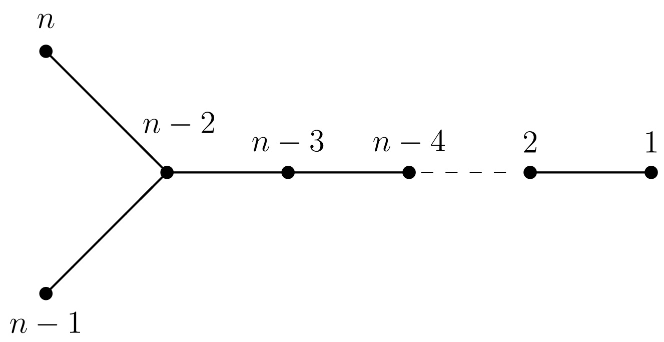
Теорема 6.1. [15] Нека је T стабло са n темена и A сингуларна матрица из $\mathcal{S}(T)$. Онда је $P_\nu(A) \leq n-2$.

Ево потребног и довољног услова да неко теме сингуларне матрице буде F-теме.

Теорема 6.2. [18] Нека је A сингуларна $n \times n$ сметрична матрица и $i \in \{1, \ldots, n\}$. Онда је i F-теме ако и само ако сваки вектор X такав да је $AX = 0$ има i-ту кординату једнаку нули.

Пошто је P-теме и F-теме, важи: Ако је i P-теме, онда је i-та координата вектора кога матрица A поништава једнака нули.

Поставља се питање сингуларних матрица максималног броја P-темена. У [20] је дат пример стабала са непарним бројем n темена. То су стабла T облика (Слика 6.1)



Слика 6.1: Стабло T

Сингуларна матрица A из $\mathcal{S}(T)$ је облика

$$A=\left(\begin{array}{c|c|c} A_{n-3} & \begin{matrix}0\\0\\1\end{matrix} & 0 \\ \hline \begin{matrix}0&0&1\end{matrix} & 1 & \begin{matrix}1&1\end{matrix} \\ \hline 0 & \begin{matrix}1\\1\end{matrix} & \begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix}\end{array}\right),$$

где је A_{n-3} несингуларна матрица пута са $n-3$ темена и максималног броја P-темена. То је матрица описана у поглављу 1. Јасно је да је A сингуларна матрица и да су темена $1, 2, \ldots, n-3$ P-темена. Из резултата рада [20] следи и да је $n-2$ P-теме. Пошто је $P_\mu(A) \leq n-2$, следи да је $P_\mu(A) = n-2$.
Такође је показано и да је $P_S(A) = \dfrac{n-1}{2}$.

Отворено питање које је постављено у [20] гласи:

Питање 6.3. Ако је $n \geq 4$ паран број, да ли постоји стабло T са n темена за које постоји сингуларна матрица A из $\mathcal{S}(T)$ таква да је $P_\nu(A) = n - 2$?

Одговор је негативан.

Подсетимо се неких познатих чињеница у вези са структуром сингуларних матрица A чији је граф стабло T. Нека је V скуп темена стабла T. Ако је U подскуп од V, са $T(U)$ ћемо означавати подграф од T чија су темена у U. Скуп V се може поделити на V_1, V_2 и V_3. V_3 је скуп темена која нису F-темена. Он је непразан. V_2 су F-темена која су суседна са неким теменом из V_3 и V_1 су F-темена која нису суседна ни са једним теменом из V_3.

Без губитка општости може се претпоставити да је сингуларана матрица A из $\mathcal{S}(T)$ облика

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} A_{11} & A_{12} & 0 \\ \hline A_{12}^T & A_{22} & A_{23} \\ \hline 0 & A_{23}^T & A_{33} \end{array}\right).$$

У даљем тексту ћемо претпоставити да је A сингуларана матрица која има овај облик. Ево неких резултата који описују структуру ових матрица.

Теорема 6.4. [18] Нека је A сингуларна матрица из $\mathcal{S}(T)$, где је T неко стабло. Ондаје свако теме из V_2 је P-теме. Такође, свака врста од A_{23} има бар два ненула елемента.

Приметимо да сваки елемент из V_2 мора бити суседан са бар два елемента из V_3.

Последица 6.5. [18] Нека је A иредуцибилна, сингуларана, ациклична матрица датог облика. Претпоставимо да је V_1 непразан. Онда је A_{11} несингуларана матрица.

Темена из V_1 су F-темена, али могу бити и P-темена. Ако је V_1 једночлан скуп, то теме није P-теме. Ако V_1 има више темена, следећа теорема даје потребан и довољан услов да би теме из V_1 било P-теме. Познато је да је подскуп P-скупа P-скуп, па је и сваки елемент P-скупа и сам P-теме.

Теорема 6.6. [18] Нека је A иредуцибилна, сингуларана, ациклична матрица датог облика. Претпоставимо да је $|V_1| \geq 2$, и нека је v теме из V_1. Онда је v P-теме ако и само ако је $A_{11}(v)$ сингуларна.

Нека је T стабло са n парним бројем темена за које постоји сингуларна матрица из $\mathcal{S}(T)$ таква да је $P_\nu(A) = n - 2$. Пошто је A сингуларна, $V_3 \neq \emptyset$. Постоје две могућности:

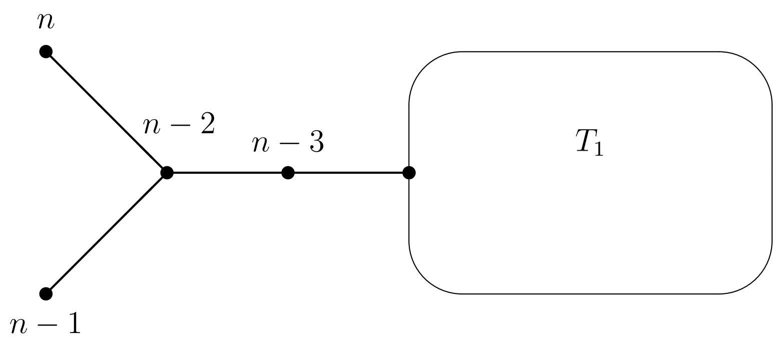
Случај 1. Скуп V_3 има један елемент. Онда је и V_1 једночлан скуп. Сви елемент из V_2 су суседни елементу који није F-теме. Не умањујући општост, можемо претпоставити да матрица A има облик:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Сва темена осим n-тог су F-темена. Али, из теореме 6.2

то је немогуће.

Случај 2. Значи V_3 има два елемента. Према теореми 6.4. свако теме из V_2 је суседно са оба елемента из V_3. Пошто је T стабло, V_2 има само један елемент. Значи стабло T (Слика 6.2) је облика



Слика 6.2: Стабло T

где је T_1 стабло са $n-3$ темена.

Сингуларна матрица са $n-2$ P-темена је облика

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} & 0 & \\ A_{n-3} & 0 & 0 \\ & 1 & \\ \hline 0 \;\; 0 \;\; 1 & 1 & 1 \;\; 1 \\ \hline 0 & \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} & A_{33} \end{array}\right)$$

где је A_{33} димензије 2×2, а матрица A_{n-3} димензије $(n-3)\times(n-3)$. Из теореме 6.6. и последице 6.5. следи да је A_{n-3} несингуларна и $A_{n-3}(i)$, за $i = 1, \ldots, n-3$ сингуларана. Значи A_{n-3} мора

бити несингуларна матрица стабла T_1 које има непаран број $(n-3)$ темена, са максималним бројем P-темена. У поглављу 2 је показано да таква матрица не постоји.
Због тога важи:

Теорема 6.7. Ако је $n \geq 4$ паран број, не постоји стабло T са n темена за које постоји сингуларна матрица A из $\mathcal{S}(T)$ таква да је $P_\nu(A) = n-2$.

Литература

[1] M. Andjelić, C.M. da Fonseca, R.Mamede, On the number of P-vertices of a path, Linear Algebra , 434 (2011), 514-525.

[2] R. A. Beezer, Trees with very few eigenvalues, J. Graph Theory 14 (1990),no. 4, 509-517.

[3] R. Fernandes, C.M. da Fonseca, The inverse eigenvalue problem for Hermitian matrices whose graphs are cycles, Linear Multilinear Algebra, 57 (2009), no.7, 673-682.

[4] M. Fiedler, Eigenvalues of acyclic matrices, Czechoslovak Math. J. 25 (1975) 607-618.

[5] C.M. da Fonseca, The inertia of certain Hermitian block matrices, Linear Algebra Appl. 274 (1998), 193-210.

[6] C.M. da Fonseca, A note on the multiplicites of graph, Linear Multilinear Algebra 53 (2005), no. 4, 303-307.

[7] C.M. da Fonseca, Interlacing properties for Hermitian matrices whose graph is a given tree, SIAM J. Matrix Anal. Appl., 27 (2005), no.1, 130-141.

[8] C.M. da Fonseca, A lower boumd for number of distinct eigenvalues for some symetric matrices, Electron. Journal lgebra 21 (2010), no. 11, 3-11.

[9] C.D. Godsil, Spectra of trees, Ann. Discret Math., 20 (1984),151-159.

[10] C.D. Godsil, Algebraic Combinatorics, Chapman and Hall, New York and London, 1993.

[11] C.D. Godsil, Algebraic matching theory, Electron. J. Combin. 2 (1995) #R8.

[12] R.A. Horn and C.R. Johnson, Matrix Analysis, Cambrige University Press, Cambrige, 1985.

[13] C.R. Johnson, R. Loewy, Duarte, P.. Smith, The graphs for wich the maximum multiplicity of an eigenvalue is two, Linear and Multilinear Alfebra, 57 (2009), no. 7, 713-736

[14] C.R. Johnson, A. Leal Duarte, C.M. Saiago, B.D. Sutton, A.J. Witt, On the relative position of multiple eigenvalues in the spectrum of an Hermitian matrix with a given graph, Linear Algebra Appl., 363 (2003), 147-159.

[15] C.R. Johnson, B.D. Sutton, Hermitian matrices, eigenvalue multiplicities, and eigenvector components, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 26 (2004/05), no. 2, 390-399.

[16] C.R. Johnson, A. Leal Duarte, C.M. Saiago, The Parter-Wiener theorem: refinement and generalization, Siam J Matrix Anal.Appl., 25 (2003), 352-361.

[17] C.R. Johnson, A. Leal Duarte, C.M. Saiago, Inverse eigevalue problems and lists of multiplicities of eigenvalues of matrices whose graphs s tree: The case of generalized stars and doble generalized stars, Linear Algebra Appl., 373 (2003), 311-330.

[18] I.-J. Kim, B.L. Shader, On Fiedler- and Parter-vertices of acyclic matrices, Linear Algebra Appl. 428 (2008), no. 11-12, 2601-2613.

[19] I.-J. Kim, B.L. Shader, Classification of trees each of whose associated acyclic matices with distinct diagonal entries has distinct eigenvalues, Bull. Korean Math.Soc. 45 (2008) no. 1, 95-99

[20] I.-J. Kim, B.L. Shader, Non-singular acyclic matrices, Linear Multilinear Algebra 57 (2009), no. 4, 399-407.

[21] I.-J. Kim, B.L. Shader, Unordered multiplicity lists of class of binary trees, Linear Algebra Appl. (2011) doi: 10.1016/j.laa.201107.006

[22] S. Parter, On the eigenvalues and eigenvectors of a class of matrices, J. Soc. Indust. Appl. Math. 8 (1960), 376-388.

[23] G. Wiener, Spectral multiplicity and splitting results for a class of qualitative matrices, Linear Algebra Appl. 61 (1984), 15-29.

[24] J.Wang, Q. Huange, F. Belrado, E.M. Li Marzi, Spectral characterazition of dummbell graphs, Electron J. Combin. 17 (2010), no. 1

[25] J.Wang, Q. Huange, F. Belrado, E.M. Li Marzi, A note on the spectral chatacerization of dummbell graphs, Linear Algebra Appl. 431 (2009) 1707-1714

[26] B.Wendorf, On ortogonal polynomials, Proc. Amer. Math. Soc. 12 (1061) 554-555

Биографија аутора

Александра Ерић рођена је 1967. године у Београду. Математички факултет, Универзитет у Београду, је завршила 1989. године. На истом факултету је магистрирала на смеру Алгебра, 1994. године и одбранила магистарски рад "Топологија решетки партиција и примена у сложености алгоритама". Од 1989. године ради као асистент на Грађевинском факултету, Универзитет у Београду.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а мр Александра Ерић

број индекса ____________________

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

О Р-теменима неких стабала

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 21.11.2012

Александра Ерић

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора __мр Александра Ерић__

Број индекса ____________________

Студијски програм ____________________

Наслов рада __О P-теменима неких стабала__

Ментор __др Александар Липковски, редовни професор__

Потписани/а __мр Александра Ерић__

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, __21.12.2012.__

Александра Ерић

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

О Р-теменима неких стабала

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 21.11.2012

1. **Ауторство** - Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. **Ауторство – некомерцијално.** Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. **Ауторство - некомерцијално** – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. **Ауторство - некомерцијално** – делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. **Ауторство – без прераде.** Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. **Ауторство** - делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.