Univerzitet u Beogradu
Mašinski fakultet u Beogradu

doktorska disertacija

PRILOG DINAMIČKOJ ANALIZI VIŠESLOJNIH ANIZOTROPNIH PLOČA

Lela Vuković

Beograd 1991.

Mentor : *doc. dr* Zoran Bojanić
Mašinski fakultet - Beograd

Članovi komisije :

prof. dr Tomislav Dragović
Mašinski fakultet - Beograd

prof. dr Ilija Krivošić
Mašinski fakultet - Beograd

prof. dr Velimir Simonović
Mašinski fakultet - Beograd

doc. dr Zlatko Petrović
Mašinski fakultet - Beograd

Datum odbrane :

Datum promocije :

PRILOG DINAMIČKOJ ANALIZI VIŠESLOJNIH ANIZOTROPNIH PLOČA

Razmatranjem nelinearne ploče višeg reda istaknute su velike prednosti ovakve analize za višeslojne anizotropne strukture tipa ploče. Rešenja pomeranja ukazuju na prednosti analize višeg reda, jer dobijena pomeranja opisuju kretanje ploče kao deformabilnog tela. Nelinearnim kinematskim relacijama odredjene su deformacije i na osnovu linearnih konstitutivnih veza naponi. Naponi sa uvedenim "medjuslojevima" otvaraju mogućnost potpunijeg poznavanja naponskog stanja u višeslojnom laminatu. Posmatrano je slobodno oscilovanje ploče i kretanje ploče pod dejstvom transverzalne harmonijske prinude. Za uspostavljen režim oscilovanja odredjene su sve karakteristike neophodne za dimenzionisanje struktura ovog tipa.

Konstrukcija višeslojnih anizotropnih struktura zahteva analiziranje velikog broja projektnih promenljivih. Broj uslova, sa stanovišta teorije elastičnosti, iz kojih se odredjuju promenljive u klasičnom projektovanju, nije dovoljan. Način da se problem ograniči je formiranje dodatnih uslova. Uvodjenjem metoda optimalnog projektovanja za zahtev minimalne mase izvedene su konstrukcije laminata sa uslovima maksimalne nosivosti i nezavisno sa uslovima koji ograničavaju dinamičke karakteristike. Rešavanjem problema ovim metodama, dobijene su optimalne projektne veličine laminata.

Ključne reči : višeslojna anizotropna ploča, nelinearna teorija ploča višeg reda, "medjuslojevi" u laminatu, slobodno oscilovanje višeslojne ploče, prinudno oscilovanje višeslojne ploče, projektne promenljive, optimalno projektovanje višeslojne strukture

MULTILAYERED ANISOTROPIC PLATE DYNAMIC ANALYSES

Nonlinear higher order theory of plate are accepted to describe the advantage of this theory for multilayered anisotropic structures. Displacement solutions, as for three-dimensional body, are determinate via higher order theory. With nonlinear kinematics relations the strains are solved and the stresses with linear constitutive relations. Stacking sequence with "interface" has spacial purpose in delamination identification, because it gives more informations about stress field in laminate. Free vibrations and forced transversal steady state oscillations without damping for annular plate are presented with displacements, strains and stresses which are prescribed as function of time. Amplitude stresses are very important for structure failure improvements.

Multilayered anisotropic structure design requires the analysis of many design variables. Number of classical contributions for the failure hypothesis in the theory of elasticity aren't sufficient. The problem is how to form some more contributions. The optimal design method is included for required minimum mass with restrains for both failure criteria and for some dynamic behaviours. The solutions with these methods are optimal design values for that laminate.

Key words : multilayered anisotropic plate, nonlinear higher order plate theory, "interface" in laminate, undamped free vibration of multilayered plate, transversal forced vibration of multilayered plate, design variables, optimal multilayered structure design

SADRŽAJ

1. UVOD

U projektovanju lakih konstrukcija, posebno vazduhoplovnih struktura, deformabilno telo oblika ploče zauzima posebno mesto. Jedan je od osnovnih teorijskih modela široko primenjen u savremenoj inženjerskoj praksi. Razmatranje elemenata lakih struktura od anizotropnog materijala pod transverzalnim dinamičkim opterećenjem u savremenim istraživanjima zahteva povratak osnovnim modelima i njihovom rešavanju.

Prva rešenja vezana za ovu oblast su razmatranje savijanja ploče i javljaju se u prvoj polovini prošlog veka. Pomeranje prosto oslonjene četvorougaone ploče pod konstantnim transverzalnim opterećenjem po celoj ploči, pretpostavljeno je kao dvostruki beskonačan red. Prezentirao ga je L. NAVIER 1820. godine. Savijanje kružne ploče pod transverzalnim opterećenjem rešio je POISSON 1829. godine.

Upotreba varijacionog pristupa rešavanju problema teorije ploča može se vezati za drugu polovinu XIX veka. Formiranje jednačina kretanja i uočavanje uslova na granicama ploče u deformacionoj potencijalnoj energiji ploče javlja se u radovima KIRCHHOFF-a 1877. godine. Njegovi savremenici *lord* KELVIN i P. G. TAIT objavljuju 1883. god. rad u kome razmatraju konkretne uslove na granicama analiziranjem sila, momenata, pomeranja i rotacija. Ovakav pristup se može smatrati početkom savremene teorije ploča, koja se do tada isključivo tretirala u okvirima teorije elastičnosti.

Pretpostavljanjem odredjenih veza pomeranja i deformacija, tj. kinematskih relacija, postavljane su hipoteze i iz njih su razvijane različite teorije ploča. Ovom problemu poseban doprinos dao je *von* KARMAN 1910. god. On je predlagao relativno poredjenje veličina članova u kinematskim relacijama i poredjenje veličina članova sa nulom na osnovu geometrijskih pretpostavki o ponašanju ploče. Ovim načinom se razdvaja teorija ploča na linearnu i nelinearnu teoriju. Jednačine ravnoteže izotropne pravougaone ploče sa velikim ugibima u ovom smislu izveo je H. HENCKY 1936. god. iz potencijalne energije ploče. Kinematske relacije nelinearne teorije u poredjenju sa kinematskim relacijama linearne teorije obično se geometrijski interpretiraju poredjenjem veličine ugiba ploče sa debljinom ploče. Vrlo afirmisana hipoteza KIRCHHOFF-LOVE, koja je zasnovana na analogiji sa teorijom savijanja greda, razmatrana sa stanovišta *von* KARMAN-a, pripada nelinearnoj teoriji ploča i danas je široko primenjena u proračunima tankozidnih struktura.

U ovom periodu nije razmatran uticaj deformacija transverzalnog smicanja, a to se može objasniti upotrebom izotropnih materijala u konstrukcijama toga doba. Upotreba višeslojnih materijala za noseće elemente struktura sledećih generacija uslovila je uvodjenje smičućih unutrašnjih sila u razmatranje u periodu 1945.-1950. godine. U tom periodu transverzalno smicanje ploče razmatra se analogno ponašanju poprečnog preseka greda uvodjenjem faktora neravnomernog "streching"-a po poprečnom preseku i ova teorija poznata je kao teorija prvog reda. E. REISSNER 1945. god. uvodi ovaj faktor $k = \frac{5}{6}$, a MINDLIN 1951. god. $k = \frac{\pi^2}{12}$. Treba naglasiti da rešenja ovih ploča prvog reda nisu zadovoljavala uslove na granicama graničnih površi ploče. Ovo nije bila posebna prepreka da se rešenja ove teorije prvog reda i do danas koriste u inženjerskoj primeni.

U poslednje dve decenije u istraživanjima struktura poseban akcenat je na primeni anizotropnih materijala. Posebno se insistira na zahtevima visoke nosivosti uz što veću uštedu u masi strukture. Zbog toga se pojavljuje dodatni specifičan zadatak projektovanja materijala od osnovnih anizotropnih tehnoloških celina. Ideja projektovanja takvih struktura uzrokovala je dalji razvoj teorije ploča. Pretpostavlja se da su rešenja pomeranja promenljiva po debljini ploče i traži se njihova što tačnija raspodela u celoj ploči. Problemi u kojima su pomeranja ovako pretpostavljena, pripadaju teoriji ploča višeg reda. Analitička rešenja teorije višeg reda u linearnoj teoriji ploča prikazana su radovima J.N. REDDY-ja u periodu oko 1984. godine, odakle je i razvijen "novi konačni element" sa uključenim transverzalnim smicanjem. U svojoj početnoj postavci oformljen je sa osrednjenim silama po debljini ploče, što se svodilo na postavku teorije prvog reda. Ubrzo se razvija i teorija višeg reda nelinearne ploče i A. BHIMARADDI objavljuje svoju doktorsku tezu u kojoj rešava ovakvu prosto oslonjenu ploču sa opterećenjem u ravni ploče. Sve ove teorije razvijene su u oblasti HOOK-ovog ponašanja materijala, ili sa linearnim konstitutivnim relacijama.

Analiza kretanja i odredjivanje dinamičkih karakteristika ploče datiraju sa kraja prošlog veka, tj. pojavom "THE THEORY OF SOUND AND VIBRATION" 1877. godine od *lord* REYLEIGH-ja. Inače, pojam sopstvene frekvencije i modova oscilovanja poznat je iz antičkog doba, ali matematički model se formira tek u periodu "energetskog" pristupa razmatranju kretanja. W. RITZ rešava 1909. godine oscilovanje linearne izotropne ploče sa slobodnim ivicama, a tek 1950. god. D. YOUNG proširuje ovo rešenje i na druge uslove oslanjanja. Ovde treba istaći da W. RITZ zasniva svoje rešenje na primeni varijacionih metoda, ali kao aproksimacije rešenja. Varijacione metode su do tada korišćene za izvodjenje jednačina problema, a od tada se razvijaju posebni matematički koncepti kao što su linearna nezavisnost, ortogonalnost, linearne i bilinearne forme funkcija. B.G. GALERKIN 1933. god. generalizuje RITZ-ov metod uvodjenjem težinskih funkcija. Od tada ove metode ulaze u sva rešenja problema teorije ploča i ljuski.

Odredjivanje sopstvenih frekvencija anizotropnih višeslojnih ploča može se vezati za sedamdesete godine. Moraju se istaći radovi sa The Ohio State University, J.M. WHITNEY i A.W. LEISSA u okviru Air Force Materials Laboratory, Wright-Patterson AFB. Sopstvene frekvencije su dobijene za heterogene anizotropne pravougaone ploče u okviru linearne teorije "tankih" ploča. Pod "tankom" pločom u smislu *von* KARMAN-a podrazumevaju se ploče gde su veze pomeranje-deformacija po KIRCHHOFF- LOVE hipotezi.

Razmatranje prinudnog oscilovanja sistema sa jednim i više stepeni slobode vezano je za dvadesete godine ovog veka. Rešenje oscilovanja izotropne ploče, kao sistema sa beskonačno stepeni slobode, pod dejstvom prinude datira iz 1932. god. od W. FLUGGE-a. Razmatrana je kružna uklještena ploča. Razvojem lakih legura otvara se velika mogućnost za razvoj letelica, čime ova oblast doživljava nagli i obiman razvoj, naročito iza II svetskog rata. Ovim istraživanjima utemeljena je nova naučna disciplina *aeroelastičnost.* Opterećenja su kontinualna, promenljiva po intenzitetu i po vremenu, pa se dalje formiraju posebni modeli i njihova rešenja. Razvojem numeričkih metoda, posebno metode konačnih elemenata i njene primene u dinamičkim analizama, u poslednje vreme, istraživanja se vraćaju osnovnim modelima. Razlog je usavršavanje osnovnih "elemenata" i traženje rešenja sa sklopovima "super-elemenata".

U ovom radu analizirana je višeslojna anizotropna ploča nelinearnom teorijom višeg reda pod dejstvom transverzalne harmonijske prinude. Razmatranje je podeljeno po glavama, tako da se odredjene tematske celine tretiraju u svakoj od njih. U drugoj glavi prikazan je opšti metod formiranja jednačina kretanja čvrstog tela, kao tela sa beskonačno stepeni slobode. Korišćen je HAMILTON -ov princip i dat je način uvodjenja konstitutivnih relacija i graničnih uslova u potencijalnu energiju čvrstog tela. Razmatranje je u ovom radu ograničeno na tela sa linearnim vezama napon - deformacija, pa je i funkcija napona korišćena u ovoj glavi linearna. Uvedeni uslovi na granicama pri tretiranju čvrstog tela poštovani su u daljem radu bez posebnog naglašavanja, tako što je razmatranje ograničeno na vezana tela. Iz iznetog postupka sledi i obim primene varijacionog računa i sve potrebne matematičke transformacije koje se u daljem radu koriste.

U trećoj glavi formirane su jednačine kretanja ploče sa potpuno odredjenim graničnim uslovima, zadržavajući se na Dekartovom koordinatnom sistemu. U četvrtoj glavi izvedena su analitička rešenja, tj. pomeranja ploče pod transverzalnim opterećenjem i problem je tretiran kao petoparametarski. Testiran je uticaj pojedinih krutosti ploče na rešenja i tako dobijena rešenja poredjena su sa već poznatim. Pored toga, razmatrana su i nepotpuna rešenja ploče, tj. troparametarski problem. Dobijeno je i analitičko rešenje za simetrično složen laminat, a rešenja su poredjena sa rešenjima iz metode konačnih elemenata. U petoj glavi izvedene su sopstvene frekvencije i takodje poredjene sa poznatim rešenjima prosto oslonjenih ploča. U šestoj glavi tretirano je oscilovanje pod dejstvom harmonijske prinude. Za odredjeni intenzitet i frekvenciju prinudnog dejstva, dobijene su deformacije i naponi u ploči. Na primeru je ilustrovana promena deformacija i napona u jednoj tački ploče na izabranom intervalu za usvojen režim oscilovanja. U sedmoj glavi, uvodjenjem uslova ekstremuma prikazana je mogućnost konstrukcije ove ploče, tj. odredjivanje usvojenih projektnih promenljivih. Postavljena su ograničenja maksimalne nosivosti, nadjena rešenja i ograničenja dinamičkih karakteristika i nadjena rešenja.

Na kraju rada dati su literatura i prilog sa razvijenim programima.

Ovom prilikom želim da zahvalim svojim najbližim kolegama Vazduhoplovnotehničkog instituta u Žarkovu na velikoj podršci, pomoći i razumevanju. Posebnu zahvalnost na stručnoj podršci i korisnim savetima dugujem mentoru Z. Bojaniću, docentu Mašinskog fakultetu u Beogradu, moje matične škole.

AUTOR

2. JEDNAČINE KRETANJA DEFORMABILNOG TELA

Posmatrajmo deformabilno telo proizvoljnog oblika zapremine V ograničeno konturnom površi S. Neka je telo pod dejstvom spoljnih sila, koje se u opštem slučaju mogu podeliti na one koje deluju po jedinici zapremine tela V i na one koje deluju po konturi S i taj deo površi S označimo S_2. Pored toga, smatraće se da se svi procesi odvijaju bez gubitaka, ili da su adijabatski, čime je razmatranje ograničeno na probleme idealnih sistema.

Jednačine kretanja deformabilnog tela odrediće se primenom Hamiltonovog principa za neprekidne sisteme.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{L} dt = 0,$$

gde je L Lagranžova funkcija, koja je jednaka razlici kinetičke i totalne potencijalne energije tela, tj.

$$\mathrm{L} \equiv K - \Pi.$$

Totalna potencijalna energija tela Π je zbir deformacione energije U i potencijalne energije spoljnih sila U_1. Hamiltonov princip se može sada prikazati u obliku

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta[K - (U + U_1)] dt = 0. \tag{2.1}$$

Deformaciona energija izražena funkcijom gustine deformacione energije A je

$$U = \int_V A(u_i^*) dV \qquad \text{za} \qquad i = 1, ...3 \tag{2.2}$$

gde su u_i^* pomeranja pri deformaciji tela i u_i komponente pomeranja $(u,\ v,\ w)$, a V zapremina elastičnog tela. Funkcija gustine deformacione energije A je

$$A = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij}(\varepsilon_{ij}) d\varepsilon_{ij} \qquad \text{za} \qquad i, j = 1, .., 6$$

ako su σ_{ij} i ε_{ij} komponente tenzora napona i tenzora deformacija. Ograničavajući razmatranje na elastično telo za koje je deformaciona energija jednaka komplementarnoj deformacionoj energiji, funkcija gustine deformacione energije može se prikazati kao

$$A = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij},$$

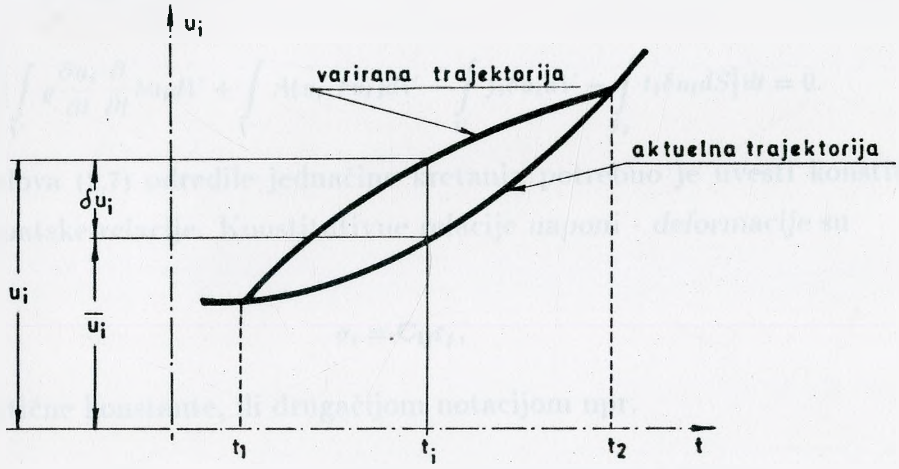
a pri uvodjenju konstitutivnih relacija, ova funkcija biće potpunije diskutovana.
Potencijalna energija spoljnih sila koje deluju na telo je

$$U_1 = -\int_V f_i u_i dV - \int_{S_2} t_i u_i dS \qquad \text{za} \qquad i = 1,...3 \tag{2.3}$$

gde su f_i komponente zapreminskih sila, a t_i komponente površinskih sila na domenu S_2, po jedinici površine tela.
Kinetička energija deformabilnog tela je

$$K = \int_V \frac{1}{2}\varrho \frac{\partial u_i}{\partial t}\frac{\partial u_i}{\partial t} dV, \qquad \text{za i=1,...3} \tag{2.4}$$

gde je ϱ specifična masa tvrdog tela.
Iz Hamiltonovog principa sledi da od mogućih trajektorija delića deformabilnog tela po kojima on može da ide iz položaja t_1 do t_2, aktuelna je ona za koju je ispunjen uslov ekstremuma (2.1). Moguća varirana trajektorija delića prikazana je na (sl. 2.1).



sl. 2.1

Trajektorija materijalnog delića je promenljiva i može se prikazati kao funkcija položaja x_j (tj. x, y, z za $j = 1,2,3$) i vremena t

$$u_i = u_i(x_j,t). \tag{2.5}$$

Komponente variranih pomeranja za $i = 1,2,3$ su

$$u_i(t) = \bar{u}_i(t) + \delta u_i(t) \tag{2.6}$$

pri čemu se varirana trajektorija razlikuje od aktuelne u intervalu $[t_1, t_2]$, osim u početnom trenutku t_1 i krajnjem t_2. Prema tome, uvedene varijacije δu_i zadovoljavaju uslove

i) $\delta u_i(x_i, t_1) = \delta u_i(x_i, t_2) = 0$ za svako x_i i

ii) $\delta u_i = 0$ za svako t na domenu S_1,

pri čemu se podrazumeva da u početnom trenutku t_1 pomeranja $\bar{u}_i$ ne postoje, pa su i $u_i^* = u_i$ u posmatranom intervalu. Uočava se da su domeni S_1 i S_2 poddomeni domenu S i to takvi da je zadovoljen identitet

$$S_1 \equiv S - S_2.$$

Uslovi i) na domenu S_1 su geometrijski granični uslovi, a uslovi koji su uvedeni u (2.3) na domenu S_2 su mehanički granični uslovi.
Variranjem energija odredjenih izrazima (2.2),(2.3),(2.4) , Hamiltonov princip se može prikazati na sledeći način

$$\int_{t_1}^{t_2} \Big[\int_V \varrho \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \delta u_i dV + \int_V A(u_i, \delta u_i) dV - \int_V f_i \delta u_i dV - \int_{S_2} t_i \delta u_i dS \Big] dt = 0. \tag{2.7}$$

Da bi se iz uslova (2.7) odredile jednačine kretanja potrebno je uvesti konstitutivne relacije i kinematske relacije. Konstitutivne relacije *naponi - deformacije* su

$$\sigma_i = \mathbf{C_{ij}} \varepsilon_j. \tag{2.8}$$

gde su $\mathbf{C_{ij}}$ elastične konstante, ili drugačijom notacijom npr.

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= C_{11}\varepsilon_{xx} + C_{12}\varepsilon_{yy} + C_{13}\varepsilon_{zz} + C_{14}\varepsilon_{yz} + C_{15}\varepsilon_{xz} + C_{16}\varepsilon_{xy} \\
\sigma_{yy} &= C_{12}\varepsilon_{xx} + C_{2}2\varepsilon_{yy} + C_{23}\varepsilon_{zz} + C_{24}\varepsilon_{yz} + \dots \\
\sigma_{zz} &= C_{13}\varepsilon_{xx} + C_{23}\varepsilon_{yy} + \dots \\
&\dots \\
\sigma_{xy} &= C_{16}\varepsilon_{xx} + C_{26}\varepsilon_{yy} + C_{36}\varepsilon_{zz} + C_{46}\varepsilon_{yz} + C_{56}\varepsilon_{xz} + C_{66}\varepsilon_{xy}
\end{aligned}$$

i kinematske relacije *deformacije-pomeranja* su

$$\varepsilon_j = f(u_i) \qquad \text{za} \qquad i = 1, \dots, 3 \qquad j = 1, \dots, 6. \tag{2.9}$$

Zamenom uslova (2.8) i (2.9) u (2.7), Hamiltonov princip za deformabilno telo i uvedene uslove i) i ii) može se prikazati u konačnom obliku

$$\int_{t_1}^{t_2} [\int_V \varrho \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \delta u_i dV + \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV - \int_V f_i \delta u_i dV - \int_{S_2} t_i \delta u_i dS] dt = 0. \qquad (2.10).$$

Grupisanjem članova izraza (2.10) uz δu_i i njihovim izjednačavanjem sa nulom uz uslove na S_1, formirane su jednačine kretanja deformabilnog tela. Ovako formirane jednačine kretanja izvedene su za probleme kod kojih su sva pomeranja takva da opisuju kretanje posmatranog tela usled elastičnog deformisanja.

3. JEDNAČINE KRETANJA PLOČE

U prethodnom poglavlju prikazan je postupak odredjivanja jednačina kretanja čvrstog tela zapremine V ograničenog konturnom površi S. Da bi se prešlo na analizu anizotropne višeslojne ploče, uvešće se odredjene pretpostavke i ograničenja. Ova diskusija biće podeljena po sledećim poglavljima:

3.1 Geometrija ploče

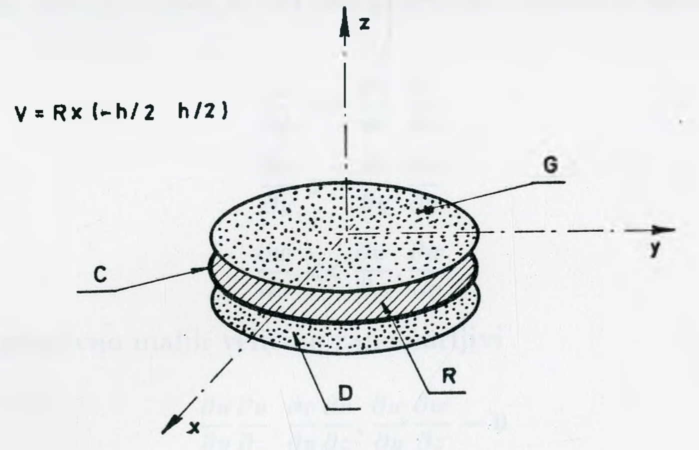
3.2 Nelinearna teorija ploča višeg reda

3.3 Konstitutivne relacije - slojić,sloj,laminat

3.4 Jednačine kretanja.

3.1 Geometrija ploče

Geometrija ploče, kao čvrstog tela, odredjena je srednjom ravni R, konturnom ivicom C ravni R i gornjom i donjom površi $G : z = h/2$ i $D : z = -h/2$ (sl.3.1.1). Ograničavajući se na analizu



sl. 3.1.1

tankih ploča proizvoljne debljine h, razmatranje će se vezati za srednju ravan R.

U prethodnoj glavi **2.** uvedena su pomeranja u_i, ili u, v, w i izdiskutovano je uvodjenje kinematskih relacija radi izvodjenja jednačina kretanja čvrstog tela. Kinematski uslovi za *tanku ploču* izvešće se iz opštih relacija deformacija i pomeranja. Smatrajući da su deformacije samo male veličine u smislu konstitutivnih relacija, komponente deformacija su †

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial v}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial w}{\partial x}\Big)^2\Big] \\
\varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial v}{\partial y}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial w}{\partial y}\Big)^2\Big] \\
\varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2}\Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial z}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial v}{\partial z}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial w}{\partial z}\Big)^2\Big] \\
\varepsilon_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z} \\
\varepsilon_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial z} \\
\varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}.
\end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Na osnovu geometrijskih karakteristika, koje su uvedene u poglavlju *3.1*, mogu se uspostaviti odredjene relacije izmedju veličina pojedinih članova u izrazima (3.2.1). Smatraće se da su

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial w}{\partial x} >> \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} \\
&\frac{\partial w}{\partial y} >> \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} \\
&\frac{\partial w}{\partial z} << \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}
\end{aligned}$$

pa su i proizvodi relativno malih veličina zanemarljivi

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z} \to 0 \\
&\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial z} \to 0 \\
&\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} \to 0.
\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

† iz [6] i [8] razmatranje von Karman

Ako se u izraze (3.2.1) uvedu relacije (3.2.2), veze deformacija i pomeranja mogu se prikazati

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \\
\varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \\
\varepsilon_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\
\varepsilon_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\
\varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.
\end{aligned} \tag{3.2.3}
$$

Ove deformacije nisu dobijene aproksimacijom pomoću redova, već analizom uzajamnih veličina nagiba i rotacija za uvedene geometrijske karakteristike, pri prelasku sa analize čvrstog tela na telo oblika ploče. Na osnovu toga sledi da će ova analiza biti nelinearna. Opredeljujući se za analizu ploča višeg reda [37], u izraze za pretpostavljena pomeranja uvode se i članovi koji zavise od z, pa se pomeranja u opštem slučaju mogu predstaviti kao funkcije

$$
\begin{aligned}
u(x,y,z,t) &= u_0(x,y,t) + \xi u_1(x,y,t) - z\frac{\partial w_0}{\partial x} \\
v(x,y,z,t) &= v_0(x,y,t) + \xi v_1(x,y,t) - z\frac{\partial w_0}{\partial y} \\
w(x,y,z,t) &= w_0(x,y,t)
\end{aligned} \tag{3.2.4}
$$

gde je $\qquad \xi = z(1 - \frac{4}{3}\frac{z^2}{h^2})$.

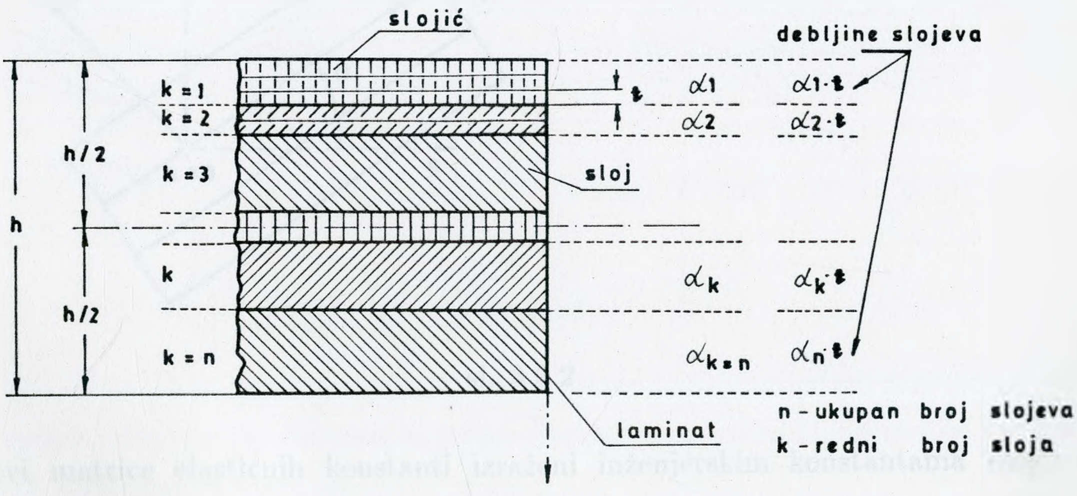
Uvodjenjem nezavisnih funkcija u_0, u_1, v_0, v_1 i w_0 analiza se svodi na petodimenzioni problem, gde će se veličine koje eksplicitno zavise od z javljati kao parametarske u izrazima za pomeranja i deformacije. Ako se izrazi (3.2.4) uvedu u (3.2.3), konačni oblik kinematskih relacija je

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \xi\frac{\partial u_1}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 \\
\varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + \xi\frac{\partial v_1}{\partial y} - z\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2 \\
\varepsilon_{yz} &= \xi^* v_1 \qquad \text{gde je} \qquad \xi^* = \frac{\partial \xi}{\partial z} \\
\varepsilon_{xz} &= \xi^* u_1 \\
\varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \xi\left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x}\right) - 2z\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial y}.
\end{aligned} \tag{3.2.5}
$$

S obzirom da su komponente deformacija izvedene iz pretpostavljenih funkcija pomeranja, treba naglasiti da su samim tim zadovoljeni i uslovi kompatibilnosti deformacija. U daljem radu koristiće se oznake za pisanje deformacija ε_{ij}, pri čemu se podrazumeva da su to komponente vektora deformacije $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{xy}$ i odredjene su izrazima (3.2.5).

3.3 Konstitutivne relacije - slojić, sloj, laminat

U prethodnom poglavlju *3.2* uspostavljene su relacije izmedju pomeranja i deformacija za proizvoljnu ploču. Elastične karakteristike, pomoću kojih se uspostavljaju relacije izmedju napona i deformacija, ili konstitutivne relacije, izdiskutovaće se uvodjenjem odredjenih pretpostavki. Smatraće se da posmatrana ploča sledi Hukov zakon, što podrazumeva da su komponente napona linearne funkcije komponenata deformacija. Pored toga, ploča se smatra diskretno homogenom, sastavljenom od slojeva različitih elastičnih osobina. Slojevi su formirani slaganjem slojića istih elastičnih osobina (sl. 3.3.1). Usvojiće se da su slojići ortotropni, što znači da kroz svaku tačku slojića prolaze tri medjusobno normalne ravni elastične simetrije.



sl. 3.3.1

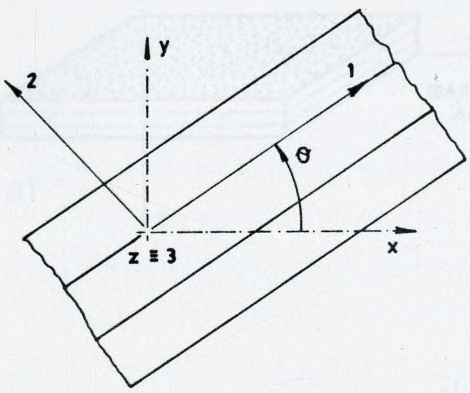
U teoriji kompozitnih materijala slojići sa ovakvim karakteristikama nazivaju se unidirekcioni.
Na osnovu uvedenih pretpostavki matrica elastičnih konstanti za slojić u koordinatnom sistemu (1,2) sa (sl. 3.3.2) svodi se na

$$Q_{ij} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & Q_{44} & 0 & 0 \\ & & & & Q_{55} & 0 \\ & & & & & Q_{66} \end{pmatrix},$$

ali se u konstitutivnim relacijama $\sigma_i = Q_{ij}\varepsilon_j$, zbog $\varepsilon_{zz} = 0$, može razdvojiti. Veze *napon - deformacija* u koordinatnom sistemu (1,2) za jedan slojić su

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \sigma_{44} \\ \sigma_{55} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{44} \\ \varepsilon_{55} \end{pmatrix}, \tag{3.3.1}$$

$$\text{ili} \qquad \sigma_i^1 = Q_{ij}^1 \varepsilon_j^1 \qquad \text{i} \qquad \sigma_i^2 = Q_{ij}^2 \varepsilon_j^2. \tag{3.3.2}$$



(1,2,3) Glavni pravci slojića
(x,y,z) Koordinatni sistem ploče

sl. 3.3.2

Članovi matrice elastičnih konstanti izraženi inženjerskim konstantama mogu se prikazati kao

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \qquad Q_{44} = G_{23}$$

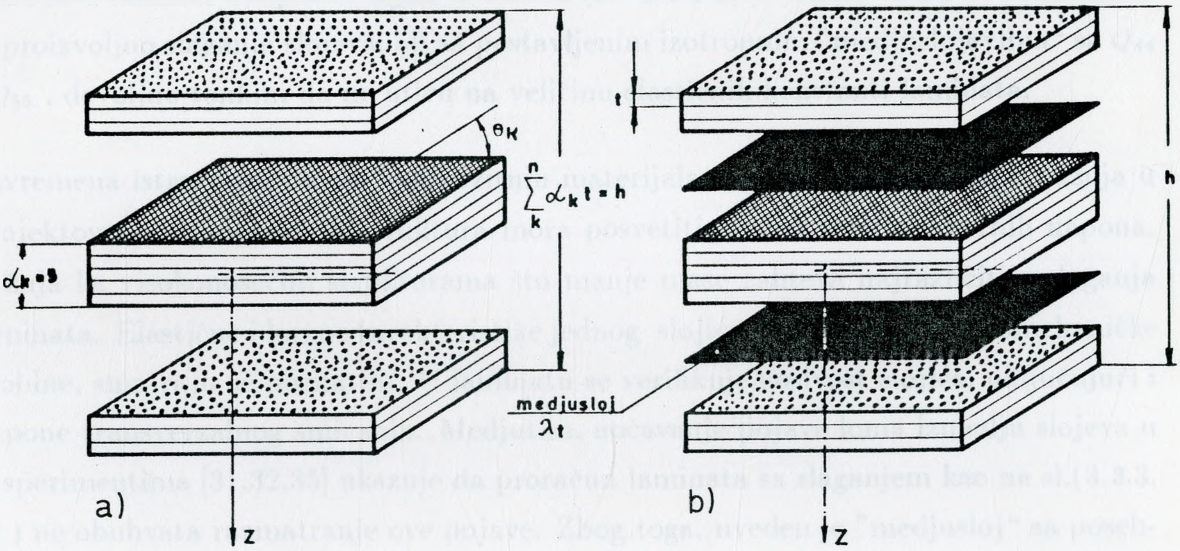
$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \qquad Q_{55} = G_{13}$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \qquad Q_{66} = G_{12}$$

uz dopunske veze $E_2\nu_{12} = E_1\nu_{21}$. Uočava se da se za definisanje ortotropnog slojića mora poznavati šest inženjerskih konstanti. U slučaju da je slojić izotropan, matrica elastičnih konstanti je ista kao i za ortotropan, a članovi matrice elastičnih konstanti su

$$Q_{11} = \frac{E}{1-\nu^2} \qquad Q_{44} = G$$
$$Q_{22} = Q_{11} \qquad Q_{55} = G \qquad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$
$$Q_{12} = \frac{\nu E}{1-\nu^2} \qquad Q_{66} = G$$

i potrebno je poznavati dve inženjerske konstante.



sl. 3.3.3

Pored ovih elastičnih karakteristika slojića i njegove debljine t, ostale unutrašnje karakteristike pripadaju mikromehaničkim osobinama. U ovoj analizi koriste se samo uvedene makromehaničke osobine.

Sve usvojene elastične karakteristike odredjene su u koordinatnom sistemu (1,2) i treba ih prevesti u koordinatni sistem ploče (x,y) (sl. 3.3.2). Nakon transformacija konstitutivnih relacija iz sistema (1,2) u sistem (x,y), izrazi (3.3.2) mogu se prikazati kao

$$\sigma_i = \bar{Q}_{ij}\varepsilon_j$$

gde se Q_{ij} može razdvojiti na Q^1_{ij} i Q^2_{ij}. Transformacija Q^1_{ij} u Q^1_{ij} data je u [10], a veza izmedju Q^2_{ij} i Q^2_{ij} je

$$Q^2_{ij} = \begin{pmatrix} Q_{44}\cos^2\theta + Q_{55}\sin^2\theta & Q_{44}\cos\theta\sin\theta - Q_{55}\cos\theta\sin\theta \\ Q_{44}\cos\theta\sin\theta - Q_{55}\cos\theta\sin\theta & Q_{44}\sin^2\theta + Q_{55}\cos^2\theta \end{pmatrix},$$

dok za izotropne slojiće važi $Q_{ij} = Q_{ij}$. Pošto su do sada potpuno odredjene sve karakteristike slojića, može se pristupiti njihovom slaganju u slojeve. Broj slojića u jednom sloju je $a(k)$, pri čemu je k redni broj sloja (sl. 3.3.1).

U jednom sloju ugao orijentacije svih slojića je isti $\theta(k)$. Slojevi različitih orijentacija slažu se u laminat ukupne debljine h, kao na (sl. 3.3.3 a)). Na (sl. 3.3.3 b)) prikazano je proizvoljno slaganje slojeva, ali sa postavljenim izotropnim "medjuslojevima" sa Q_{44} i Q_{55}, dovoljno tankim da ne utiču na veličinu elastičnih konstanti laminata.

Savremena istraživanja loma kompozitnih materijala ukazuju da se posebna pažnja u projektovanju kompozitnih struktura mora posvetiti analizi interlaminarnih napona. Težnja ka visokonosećim strukturama što manje mase zahteva najrazličitija slaganja laminata. Elastične i lomne karakteristike jednog slojića za definisane mikromehaničke osobine, smatraju se poznatim. U laminatu se verifikuje nosivost slojića, uključujući i napone transverzalnog smicanja. Medjutim, uočavanje pojave loma izmedju slojeva u eksperimentima [31,32,35] ukazuje da proračun laminata sa slaganjem kao na sl.(3.3.3. a)) ne obuhvata razmatranje ove pojave. Zbog toga, uveden je "medjusloj" sa posebnim elastičnim karakteristikama. Iz radova [31,35] zaključuje se da to mogu biti osobine smole, ali i da zavise od uglova orijentacije sloja prethodnika $\theta(k-1)$ i sloja sledbenika $\theta(k)$. Uticaj ovih osobina izdiskutovaće se u poglavlju *7.1.*
Konstitutivna relacija za proizvoljno složeni laminat je

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & 0 & 0 & C_{16} \\ 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix} \qquad (3.3.3)$$

Ovako dobijene relacije koristiće se za izvodjenje jednačina kretanja, a veze izmedju elastičnih konstanti slojića i laminata odrediće se tokom izvodjenja jednačina kretanja.

Hamiltonov princip za čvrsto telo prikazan je izrazom (2.10). Da bi se odredile jednačine kretanja ploče iz ovog principa, koristiće se izvedene relacije u poglavljima *3.2* i *3.3*. U (3.2.4) uvedene su funkcije pomeranja, koje će na variranoj trajektoriji biti

$$
\begin{aligned}
u_0 &= \bar{u}_0 + \delta u_0 \\
u_1 &= \bar{u}_1 + \delta u_1 \\
v_0 &= \bar{v}_0 + \delta v_0 \\
v_1 &= \bar{v}_1 + \delta v_1 \\
w_0 &= \bar{w}_0 + \delta w_0
\end{aligned}
\tag{3.4.1}
$$

pri čemu uvedene varijacije zadovoljavaju uslove *i)* i *ii)* iz **2.**. Varijacije deformacija (3.2.5) su

$$
\begin{aligned}
\delta\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}\delta u_0 + \xi\frac{\partial}{\partial x}\delta u_1 - z\frac{\partial}{\partial x}\delta(\frac{\partial w_0}{\partial x}) + \frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\delta w_0 \\
\delta\varepsilon_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y}\delta v_0 + \xi\frac{\partial}{\partial y}\delta v_1 - z\frac{\partial}{\partial y}\delta(\frac{\partial w_0}{\partial y}) + \frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\delta w_0 \\
\delta\varepsilon_{yz} &= \xi^{*}\delta v_1 \\
\delta\varepsilon_{xz} &= \xi^{*}\delta u_1 \\
\delta\varepsilon_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y}\delta u_0 + \xi\frac{\partial}{\partial y}\delta u_1 - z\frac{\partial}{\partial y}\delta(\frac{\partial w_0}{\partial x}) + \frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\delta w_0 + \\
&+ \frac{\partial}{\partial x}\delta v_0 + \xi\frac{\partial}{\partial x}\delta v_1 - z\frac{\partial}{\partial x}\delta(\frac{\partial w_0}{\partial y}) + \frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\delta w_0
\end{aligned}
\tag{3.4.2}
$$

S obzirom da se u ovom radu razmatra ploča na koju deluje samo transverzalno opterećenje po celoj površini, relacija (2.1) se može prikazati kao

$$
\int_{t_1}^{t_2}[\int_V(\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} - f_i\delta u_i + \varrho\frac{\partial u_i}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\delta u_i)dV\,]dt \quad = \quad 0 \tag{3.4.3}
$$

gde su δu_i komponente uvedenih varijacija pomeranja (3.4.1), a $\delta\varepsilon_{ij}$ komponente variranih deformacija (3.4.2).

Uvodjenje varijacija pomeranja i variranih deformacija u (3.4.3) prikazaće se po delovima radi boljeg uvida u postupak izvodjenja

3.4.a) Variranje potencijalne energije

3.4.b) Variranje kinetičke energije

3.4.a) Uvodjenjem relacija (3.3.3) i (3.4.2) u deo (3.4.3) koji predstavlja totalnu potencijalnu energiju dolazi se do †

$$\int_V (\sigma_{xx}\delta\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\delta\varepsilon_{yy} + \sigma_{yz}\delta\varepsilon_{yz} + \sigma_{xz}\delta\varepsilon_{xz} + \sigma_{xy}\delta\varepsilon_{xy})dV \tag{3.4.5}$$

i ovaj izraz će se grupisati na sledeći način

$$\int_V [\frac{\partial}{\partial x}(\ldots) + \frac{\partial}{\partial y}(\ldots) + (\ldots)]dV. \tag{3.4.6}$$

gde se podrazumeva da važi sinhrono variranje.

$$
\begin{aligned}
\int_V \frac{\partial}{\partial x}[\; & C_{11}(\varepsilon_{xx}\delta u_0 + \xi\varepsilon_{xx}\delta u_1 - z\varepsilon_{xx}\delta(\tfrac{\partial w_0}{\partial x}) + z\tfrac{\partial\varepsilon_{xx}}{\partial x}\delta w_0 + \varepsilon_{xx}\tfrac{\partial w_0}{\partial x}\delta w_0) + \\
& C_{12}(\varepsilon_{yy}\delta u_0 + \xi\varepsilon_{yy}\delta u_1 - z\varepsilon_{yy}\delta(\tfrac{\partial w_0}{\partial x}) + z\tfrac{\partial\varepsilon_{yy}}{\partial x}\delta w_0 + \varepsilon_{yy}\tfrac{\partial w_0}{\partial x}\delta w_0) + \\
& C_{16}(\varepsilon_{xy}\delta u_0 + \xi\varepsilon_{xy}\delta u_1 - z\varepsilon_{xy}\delta(\tfrac{\partial w_0}{\partial x}) + z\tfrac{\partial\varepsilon_{xy}}{\partial x}\delta w_0 + \varepsilon_{xy}\tfrac{\partial w_0}{\partial x}\delta w_0) + \\
& C_{16}(\varepsilon_{xx}\delta v_0 + \xi\varepsilon_{xx}\delta v_1 - z\varepsilon_{xx}\delta(\tfrac{\partial w_0}{\partial y}) + z\tfrac{\partial\varepsilon_{xx}}{\partial y}\delta w_0 + \varepsilon_{xx}\tfrac{\partial w_0}{\partial y}\delta w_0) + \\
& C_{26}(\varepsilon_{yy}\delta v_0 + \xi\varepsilon_{yy}\delta v_1 - z\varepsilon_{yy}\delta(\tfrac{\partial w_0}{\partial y}) + z\tfrac{\partial\varepsilon_{yy}}{\partial y}\delta w_0 + \varepsilon_{yy}\tfrac{\partial w_0}{\partial y}\delta w_0) + \\
& C_{16}(\varepsilon_{xy}\delta v_0 + \xi\varepsilon_{xy}\delta v_1 - z\varepsilon_{xy}\delta(\tfrac{\partial w_0}{\partial y}) + z\tfrac{\partial\varepsilon_{xy}}{\partial y}\delta w_0 + \varepsilon_{xy}\tfrac{\partial w_0}{\partial y}\delta w_0) \quad] + \\
\frac{\partial}{\partial y}[\; & C_{12}(\varepsilon_{xx}\delta v_0 + \xi\varepsilon_{xx}\delta v_1 - z\varepsilon_{xx}\delta(\tfrac{\partial w_0}{\partial y}) + z\tfrac{\partial\varepsilon_{xx}}{\partial y}\delta w_0 + \varepsilon_{xx}\tfrac{\partial w_0}{\partial y}\delta w_0) + \\
& C_{22}(\varepsilon_{yy}\delta v_0 + \xi\varepsilon_{yy}\delta v_1 - z\varepsilon_{yy}\delta(\tfrac{\partial w_0}{\partial y}) + z\tfrac{\partial\varepsilon_{yy}}{\partial y}\delta w_0 + \varepsilon_{yy}\tfrac{\partial w_0}{\partial y}\delta w_0) + \\
& C_{26}(\varepsilon_{xy}\delta v_0 + \xi\varepsilon_{xy}\delta v_1 - z\varepsilon_{xy}\delta(\tfrac{\partial w_0}{\partial y}) + z\tfrac{\partial\varepsilon_{xy}}{\partial y}\delta w_0 + \varepsilon_{xy}\tfrac{\partial w_0}{\partial y}\delta w_0) + \\
& C_{16}(\varepsilon_{xx}\delta u_0 + \xi\varepsilon_{xx}\delta u_1 - z\varepsilon_{xx}\delta(\tfrac{\partial w_0}{\partial x}) + z\tfrac{\partial\varepsilon_{xx}}{\partial x}\delta w_0 + \varepsilon_{xx}\tfrac{\partial w_0}{\partial x}\delta w_0) + \\
& C_{26}(\varepsilon_{yy}\delta u_0 + \xi\varepsilon_{yy}\delta u_1 - z\varepsilon_{yy}\delta(\tfrac{\partial w_0}{\partial x}) + z\tfrac{\partial\varepsilon_{yy}}{\partial x}\delta w_0 + \varepsilon_{yy}\tfrac{\partial w_0}{\partial x}\delta w_0) + \\
& C_{66}(\varepsilon_{xy}\delta u_0 + \xi\varepsilon_{xy}\delta u_1 - z\varepsilon_{xy}\delta(\tfrac{\partial w_0}{\partial x}) + z\tfrac{\partial\varepsilon_{xy}}{\partial x}\delta w_0 + \varepsilon_{xy}\tfrac{\partial w_0}{\partial x}\delta w_0) \quad] -
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\{\; & C_{11}(\tfrac{\partial\varepsilon_{xx}}{\partial x}\delta u_0 + \xi\tfrac{\partial\varepsilon_{xx}}{\partial x}\delta u_1 + (z\tfrac{\partial^2\varepsilon_{xx}}{\partial x^2} + \tfrac{\partial\varepsilon_{xx}}{\partial x}\tfrac{\partial w_0}{\partial x} + \varepsilon_{xx}\tfrac{\partial^2 w_0}{\partial x^2})\delta w_0) + \\
& C_{12}(\tfrac{\partial\varepsilon_{yy}}{\partial x}\delta u_0 + \xi\tfrac{\partial\varepsilon_{yy}}{\partial x}\delta u_1 + (z\tfrac{\partial^2\varepsilon_{yy}}{\partial x^2} + \tfrac{\partial\varepsilon_{yy}}{\partial x}\tfrac{\partial w_0}{\partial x} + \varepsilon_{yy}\tfrac{\partial^2 w_0}{\partial x^2})\delta w_0) + \\
& C_{16}(\tfrac{\partial\varepsilon_{xy}}{\partial x}\delta u_0 + \xi\tfrac{\partial\varepsilon_{xy}}{\partial x}\delta u_1 + (z\tfrac{\partial^2\varepsilon_{xy}}{\partial x^2} + \tfrac{\partial\varepsilon_{xy}}{\partial x}\tfrac{\partial w_0}{\partial x} + \varepsilon_{xy}\tfrac{\partial^2 w_0}{\partial x^2})\delta w_0) + \\
& C_{16}(\tfrac{\partial\varepsilon_{xx}}{\partial y}\delta u_0 + \xi\tfrac{\partial\varepsilon_{xx}}{\partial y}\delta u_1 + (z\tfrac{\partial^2\varepsilon_{xx}}{\partial x\partial y} + \tfrac{\partial\varepsilon_{xx}}{\partial y}\tfrac{\partial w_0}{\partial x} + \varepsilon_{xx}\tfrac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y})\delta w_0) + \\
& C_{26}(\tfrac{\partial\varepsilon_{yy}}{\partial y}\delta u_0 + \xi\tfrac{\partial\varepsilon_{yy}}{\partial y}\delta u_1 + (z\tfrac{\partial^2\varepsilon_{yy}}{\partial x\partial y} + \tfrac{\partial\varepsilon_{yy}}{\partial y}\tfrac{\partial w_0}{\partial x} + \varepsilon_{yy}\tfrac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y})\delta w_0) + \\
& C_{66}(\tfrac{\partial\varepsilon_{xy}}{\partial y}\delta u_0 + \xi\tfrac{\partial\varepsilon_{xy}}{\partial y}\delta u_1 + (z\tfrac{\partial^2\varepsilon_{xy}}{\partial x\partial y} + \tfrac{\partial\varepsilon_{xy}}{\partial y}\tfrac{\partial w_0}{\partial x} + \varepsilon_{xy}\tfrac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y})\delta w_0) - \\
& (C_{45}\varepsilon_{yz} + C_{55}\varepsilon_{xz})\xi^*\delta u_1 +
\end{aligned}
$$

† za linearne ploče u [11] i [19]

$$
\begin{aligned}
&C_{12}(\frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y}\delta v_0 + \xi \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y}\delta v_1 + (z\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y}\frac{\partial w_0}{\partial y} + \varepsilon_{xx}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2})\delta w_0) + \\
&C_{22}(\frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial y}\delta v_0 + \xi \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial y}\delta v_1 + (z\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial y^2} + \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial y}\frac{\partial w_0}{\partial y} + \varepsilon_{yy}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2})\delta w_0) + \\
&C_{26}(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial y}\delta v_0 + \xi \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial y}\delta v_1 + (z\frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial y^2} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial y}\frac{\partial w_0}{\partial y} + \varepsilon_{xy}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2})\delta w_0) + \\
&C_{16}(\frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial x}\delta v_0 + \xi \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial x}\delta v_1 + (z\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial y} + \varepsilon_{xx}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y})\delta w_0) + \\
&C_{26}(\frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial x}\delta v_0 + \xi \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial x}\delta v_1 + (z\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial y} + \varepsilon_{yy}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y})\delta w_0) + \\
&C_{66}(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x}\delta v_0 + \xi \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x}\delta v_1 + (z\frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial y} + \varepsilon_{xy}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y})\delta w_0) - \\
&(C_{44}\varepsilon_{yz} + C_{45}\varepsilon_{xz})\xi^* \delta v_1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \} dV
\end{aligned}
$$

Sledeći uobičajen postupak u teoriji ploča, potrebno je definisati unutrašnje sile i momente u smislu gornjeg izraza. Unutrašnje sile su

$$
N_{xx} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} dz, \quad N_{yy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} dz, \quad \text{i} \quad N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} dz. \tag{3.4.7}
$$

Prikažimo (3.2.5) tako da članovi uz z i $f(z)$ budu razdvojeni npr.

$$
\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{x_1} + z\varepsilon_{x_2} - \frac{4}{3}\frac{z^3}{h^2}\varepsilon_{x_3}. \tag{3.4.8}
$$

Uvodjenjem (3.3.3) i (3.2.5) na način (3.4.8) i podrazumevajući da su deformacije u laminatu neprekidne, unutrašnje sile su npr.

$$
\begin{aligned}
N_{xx} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} dz \\
&= \sum_{k=1}^{n} C_{ij} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \varepsilon_j dz
\end{aligned}
$$

i inegraljenjem po z prema (sl. 3.3.3)

$$
N_{xx} = \sum_{k=1}^{n} C_{1i} [\begin{pmatrix} \varepsilon_{x_1} \\ \varepsilon_{y_1} \\ \varepsilon_{xy_1} \end{pmatrix} (z_k - z_{k+1}) + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \varepsilon_{x_2} \\ \varepsilon_{y_2} \\ \varepsilon_{xy_2} \end{pmatrix} (z_k^2 - z_{k+1}^2) - \begin{pmatrix} \varepsilon_{x_3} \\ \varepsilon_{y_3} \\ \varepsilon_{xy_3} \end{pmatrix} \frac{z_k^4 - z_{k+1}^4}{3h^2}]
$$

mogu se prikazati za $i = 1, 2, 6$

$$
\begin{aligned}
N_{xx} &= A_{1i}(*) + B_{1i}(*_1) - \frac{1}{h^2} D_{1i}(*_2) \\
N_{yy} &= A_{2i}(*) + B_{2i}(*_1) - \frac{1}{h^2} D_{2i}(*_2) \\
N_{xy} &= A_{6i}(*) + B_{6i}(*_1) - \frac{1}{h^2} D_{6i}(*_2).
\end{aligned} \tag{3.4.9}
$$

Unutrašnji momenti uvešće se kao npr.

$$
\begin{aligned}
M''_{xx} &= \int_{-h/2}^{h/2} \xi \sigma_{xx} dz \\
&= \int_{-h/2}^{h/2} (z - \frac{4}{3}\frac{z^3}{h^2})\sigma_{xx} dz \\
&= \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_{xx} dz - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{4}{3}\frac{z^3}{h^2}\sigma_{xx} dz \\
&= M_{xx} - M'_{xx}
\end{aligned}
$$

i istim postupkom kao pri izvodjenju (3.4.7) mogu se predstaviti sledećim izrazima †

$$
\begin{aligned}
M_{xx} &= B_{1i}(*) + E_{1i}(*_1) - \frac{4}{h^2}F_{1i}(*_2) \\
M_{yy} &= B_{2i}(*) + E_{2i}(*_1) - \frac{4}{h^2}F_{2i}(*_2) \\
M_{xy} &= B_{6i}(*) + E_{6i}(*_1) - \frac{4}{h^2}F_{6i}(*_2) \\
M_{yz} &= (A_{44} - \frac{4}{h^2}E_{44})v_1 + (A_{45} - \frac{4}{h^2}E_{45})u_1 \\
M_{xz} &= (A_{45} - \frac{4}{h^2}E_{45})v_1 + (A_{55} - \frac{4}{h^2}E_{55})u_1 \\
M'_{xx} &= \frac{1}{h^2}D_{1i}(*) + \frac{4}{h^2}F_{1i}(*_1) - \frac{16}{h^4}G_{1i}(*_2) \\
M'_{yy} &= \frac{1}{h^2}D_{2i}(*) + \frac{4}{h^2}F_{2i}(*_1) - \frac{16}{h^4}G_{2i}(*_2) \\
M'_{xy} &= \frac{1}{h^2}D_{6i}(*) + \frac{4}{h^2}F_{6i}(*_1) - \frac{16}{h^4}G_{6i}(*_2) \\
M''_{xx} &= (B_{1i} - \frac{1}{h^2}D_{1i})(*) + (E_{1i} - \frac{4}{h^2}F_{1i})(*_1) - (\frac{4}{h^2}F_{1i} - \frac{16}{h^4}G_{1i})(*_2) \\
M''_{yy} &= (B_{2i} - \frac{1}{h^2}D_{2i})(*) + (E_{2i} - \frac{4}{h^2}F_{2i})(*_1) - (\frac{4}{h^2}F_{2i} - \frac{16}{h^4}G_{2i})(*_2) \\
M''_{xy} &= (B_{6i} - \frac{1}{h^2}D_{6i})(*) + (E_{6i} - \frac{4}{h^2}F_{6i})(*_1) - (\frac{4}{h^2}F_{6i} - \frac{16}{h^4}G_{6i})(*_2)
\end{aligned}
\tag{3.4.10}
$$

gde su s obzirom na (3.4.8)

$$
(*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial w_0}{\partial x}^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial w_0}{\partial y}^2 \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial y} \end{pmatrix}
\qquad
(*_1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} - 2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{pmatrix}
\qquad
(*_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} \\ \frac{\partial v_1}{\partial y} \\ \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \end{pmatrix}
$$

Uvedene veličine A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij} i G_{ij} su krutosti laminata i definisaće se na osnovu diskusije u poglavlju *3.3* i sa (sl. 3.3.1) i (sl.3.3.3).

$$
A_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \bar{Q}_{ij}^k (z_k - z_{k+1}) \qquad B_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \bar{Q}_{ij}^k (z_k^2 - z_{k+1}^2) \qquad D_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \bar{Q}_{ij}^k (z_k^4 - z_{k+1}^4)
$$

$$
E_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \bar{Q}_{ij}^k (z_k^3 - z_{k+1}^3) \qquad F_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \bar{Q}_{ij}^k (z_k^5 - z_{k+1}^5) \qquad G_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \bar{Q}_{ij}^k (z_k^7 - z_{k+1}^7) \tag{3.4.11}
$$

† u [37] su drugačije odredjeni ovi momenti

Uvodjenjem relacija (3.4.9) i (3.4.10) u izraz (3.4.6) i uzimajući u obzir geometrijski uslov sa (sl. 3.1.1) $V = R \times (-h/2, h/2)$, treći član relacije (3.4.6) može se predstaviti

$$
\begin{aligned}
-\int_R \{ \quad & \delta u_0[\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y}]+ \\
& +\delta v_0[\frac{\partial N_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x}]+ \\
& +\delta u_1[\frac{\partial M''_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M''_{xy}}{\partial y} - M_{xz}]+ \\
& +\delta v_1[\frac{\partial M''_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial M''_{xy}}{\partial x} - M_{yz}]+ \\
& +\delta w_0[\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M''_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M''_{yy}}{\partial y^2}+ \\
& + \frac{\partial w_0}{\partial x}(\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y}) + \frac{\partial w_0}{\partial y}(\frac{\partial N_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x})+ \\
& + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} N_{xx} + 2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} N_{xy} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} N_{yy}]\} dxdy
\end{aligned}
\tag{3.4.12}
$$

gde su članovi uz $\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}$ i $\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}$ definisani uslovima na granici S_2 iz glave **2**. Uslovi na granici S_1 odrediće se iz prva dva člana izraza (3.4.6). Opredeljujući se za pravougaonu ploču, zadržava se koordinatni sistem (x,y) i nakon uvodjenja relacija (3.4.9) i (3.4.10)

$$
\begin{aligned}
\int_{x,y} \quad & [\frac{\partial}{\partial x}(N_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(N_{xy})]\delta u_0 + \\
& +[\frac{\partial}{\partial x}(N_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(N_{yy})]\delta v_0 + \\
& +[\frac{\partial}{\partial x}(M_{xx} - M'_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(M_{xy} - M'_{xy})]\delta u_1 + \\
& +[\frac{\partial}{\partial x}(M_{xy} - M'_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(M_{yy} - M'_{yy})]\delta v_1 + \\
& +[\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial M_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x})]\delta w_0 + \\
& +[\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial w_0}{\partial x} N_{xx} + \frac{\partial w_0}{\partial y} N_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial w_0}{\partial y} N_{yy} + \frac{\partial w_0}{\partial x} N_{xy}]\delta w_0 + \\
& +[\frac{\partial}{\partial x}(M_{xx}\delta(\frac{\partial w_0}{\partial x}) + M_{xy}\delta(\frac{\partial w_0}{\partial y}))]+ \\
& +[\frac{\partial}{\partial y}(M_{yy}\delta(\frac{\partial w_0}{\partial y}) + M_{xy}\delta(\frac{\partial w_0}{\partial x}))] \; dxdy,
\end{aligned}
$$

mogu se definisati i transverzalne sile

$$
\begin{aligned}
Q_x &= \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + 2\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} N_{xx} + \frac{\partial w_0}{\partial y} N_{xy} \\
Q_y &= \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} + 2\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial y} N_{yy} + \frac{\partial w_0}{\partial x} N_{xy},
\end{aligned}
$$

pa su uslovi na granici duž stranica pravougaone ploče za $x = 0, a$ i $y = 0, b$

$$
\begin{aligned}
x = 0, a \quad & : N_{xx}, u_0; N_{xy}, v_0; M''_{xx}, u_1; M''_{xy}, v_1; Q_x, w_0; M_{xx}, \frac{\partial w_0}{\partial x} \\
y = 0, b \quad & : N_{xy}, u_0; N_{yy}, v_0; M''_{yy}, v_1; M''_{xy}, u_1; Q_y, w_0; M_{yy}, \frac{\partial w_0}{\partial y}.
\end{aligned}
\tag{3.4.13}
$$

3.4 b) Uvodjenjem varijacija pomeranja u, v, w u deo (3.4.3) koji se odnosi na kinetičku energiju, varirana kinetička energija može se prikazati kao

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\delta K = & \int_V \varrho\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial}{\partial t}[\frac{\partial u}{\partial t}\delta u + \frac{\partial v}{\partial t}\delta v + \frac{\partial w}{\partial t}\delta w]dt dV - \\ & - \int_{t_1}^{t_2}\int_V \varrho[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\delta u + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\delta v + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\delta w]dV dt\end{aligned} \tag{3.4.14}$$

pri čemu je prvi integral u gornjem izrazu $= 0$ na granicama t_1 i t_2, što sledi direktno iz Hamiltonovog principa. Ako se relacije (3.2.4) prikažu u razdvojenom obliku po z i $f(z)$ i diferenciraju po vremenu biće

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + z(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^3 w_0}{\partial x\partial t^2}) - \frac{4}{3}\frac{z^3}{h^2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + z(\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^3 w_0}{\partial y\partial t^2}) - \frac{4}{3}\frac{z^3}{h^2}\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}\end{aligned}, \tag{3.4.15}$$

i ako se uvedu u relacije (3.4.14) uzimajući u obzir (3.4.1), varirana kinetička energija je potpuno odredjena preko varijacija pomeranja. Sve varijacije su sinhrone, a posebno će se prodiskutovati i članovi na kojima su uvedene granice npr.

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_V z\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\delta\frac{\partial w_0}{\partial x}dV dt = \int_{t_1}^{t_2}\int_V [z\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\delta w) - z\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial t^2}\delta w_0]dV dt = -\int_{t_1}^{t_2}\int_V z\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial t^2}\delta w dV dt$$

gde se podrazumeva da važe relacije na osnovu osobina veza

$$x = 0, a \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad \text{i} \quad y = 0, b \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0. \tag{3.4.16}$$

Integracijom po z, uvode se specifične mase za diskretno anizotropne laminate

$$\begin{aligned}P_1 &= \sum_{k=1}^{n}\varrho_k z_k \qquad P_2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\varrho_k z_k^2 \qquad P_3 = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\varrho_k z_n^3 \\ P_4 &= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\varrho_k z_k^4 \qquad P_5 = \frac{1}{15}\sum_{k=1}^{n}\varrho_k z_k^5 \qquad P_6 = \frac{1}{63}\sum_{k=1}^{n}\varrho_k z_k^7.\end{aligned} \tag{3.4.17}$$

Iz razmatranja u glavi **2.** o uslovima i) i ii) i uslovu u t_1 varirana kinetička energija može se prikazati po razdvojenim varijacijama komponenata glavnih koordinata. Uvodjenjem (3.4.17) u (3.4.14) sledi

$$\delta K = -\int_R \{ \quad [P_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + P_2(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2}) - \frac{1}{h^2} P_4 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}]\delta u_0 +$$
$$+[(P_2 - \frac{1}{h^2}P_4)\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + (P_3 - \frac{4}{h^2}P_5)(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2}) + (\frac{16}{h^4}P_6 - \frac{4}{h^2}P_5)\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}]\delta u_1 +$$
$$+[P_1 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + P_2(\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^3 w_0}{\partial y \partial t^2}) - \frac{1}{h^2} P_4 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}]\delta v_0 +$$
$$+[(P_2 - \frac{1}{h^2}P_4)\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + (P_3 - \frac{4}{h^2}P_5)(\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^3 w_0}{\partial y \partial t^2}) + (\frac{16}{h^4}P_6 - \frac{4}{h^2}P_5)\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}]\delta v_1 +$$
$$+[\frac{\partial}{\partial x}[P_2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + P_3(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2}) - \frac{4}{h^2} P_5 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}] +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial y}[P_2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + P_3(\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^3 w_0}{\partial y \partial t^2}) - \frac{4}{h^2} P_5 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}] +$$
$$+ P_1 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}]\delta w_0\} dx dy. \tag{3.4.18}$$

Grupisanjem članova varirane potencijalne energije *3.4 a)* i varirane kinetičke energije *3.4 b)* uz δu_0, δu_1, δv_0, δv_1 i δw_0 iz relacija (3.4.12) i (3.4.18) i izjednačavanjem tih članova sa nulom, jednačine kretanja višeslojne anizotropne ploče su

$$\delta u_0 : \quad \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = P_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + P_2(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2}) - \frac{1}{h^2} P_4 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}$$
$$\delta v_0 : \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} = P_1 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + P_2(\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^3 w_0}{\partial y \partial t^2}) - \frac{1}{h^2} P_4 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}$$
$$\delta u_1 : \quad \frac{\partial M''_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M''_{xy}}{\partial y} - M_{xz} = (P_2 - \frac{1}{h^2}P_4)\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + (P_3 - \frac{4}{h^2}P_5)(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2}) +$$
$$+ (\frac{16}{h^4}P_6 - \frac{4}{h^2}P_5)\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \tag{3.4.19}$$
$$\delta v_1 : \quad \frac{\partial M''_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M''_{yy}}{\partial y} - M_{yz} = (P_2 - \frac{1}{h^2}P_4)\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + (P_3 - \frac{4}{h^2}P_5)(\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^3 w_0}{\partial y \partial t^2}) +$$
$$+ (\frac{16}{h^4}P_6 - \frac{4}{h^2}P_5)\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}$$
$$\delta w_0 : \quad \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} N_{xx} + 2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} N_{xy} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} N_{yy} + p(x,y,t) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}[P_2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + P_3(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2}) - \frac{4}{h^2} P_5 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}] + \frac{\partial}{\partial y}[P_2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + P_3(\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^3 w_0}{\partial y \partial t^2}) -$$
$$- \frac{4}{h^2} P_5 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}] + P_1 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}.$$

Dobijene jednačine kretanja (3.4.19) izvedene su za višeslojnu anizotropnu ploču, ili kao za čvrsto telo sa pet parametara kretanja. Kretanje ploče potpuno je odredjeno ovim jednačinama, uz uslove (3.4.13) i (3.4.16) na ivicama ploče.

4. PROSTO OSLONJENA PRAVOUGAONA PLOČA OPTEREĆENA KONSTANTNIM TRANSVERZALNIM PRITISKOM

Rešavanje jednačina kretanja (3.4.19) pripada problemima rešavanja sistema parcijalnih diferencijalnih jednačina. U problemima teorije ploča rešenja se traže numeričnim metodama. Najrasprostranjenija je metoda konačnih elemenata, koja je i dobila ime po rešavanju problema čvrstih tela diskretizacijom na elemente, a danas je i potpuno usvojena u inženjerskoj primeni.

U ovom radu, s obzirom na razmatranje nelinearne ploče višeg reda, rešenja će se naći "analitičkim metodama" i biće poredjena sa rešenjima klasične ploče, da bi se utvrdile prednosti ove ploče i njene osobine. Pod "analitičkim metodama" podrazumeva se postupak u kome se pretpostavljaju funkcije rešenja u obliku beskonačnih redova, pa se rešavanjem odredjenih koeficijenata nalaze pomeranja. Ovakav pristup odgovara pristupu rešavanju konačnim elementima metodom pomeranja, uz uključivanje interpolacionih polinoma [11,19].

4.1 Rešenja jednačina kretanja - POMERANJA

U ovoj glavi razmatranje je ograničeno na traženje rešenja za ploču pod transverzalnim konstantnim pritiskom $p = p_{const}$. Ograničavajući se na simetrične laminate, iz relacija (3.4.11) sledi da su $B_{ij}, D_{ij} = 0$, pa se izrazi (3.4.9) i (3.4.10) mogu prikazati

$$\begin{aligned} N_{xx} &= A_{1i}(*) & M_{xx} &= E_{1i}(*_1) - \frac{4}{h^2}F_{1i}(*_2) \\ N_{yy} &= A_{2i}(*) & M_{yy} &= E_{2i}(*_1) - \frac{4}{h^2}F_{2i}(*_2) \\ N_{xy} &= A_{6i}(*) & M_{xx} &= E_{6i}(*_1) - \frac{4}{h^2}F_{6i} * *_2) \\ & & M_{yz}, M_{yz} & \quad \textit{nepromenjeni} \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

$$\begin{aligned} M''_{xx} &= (E_{1i} - \frac{4}{h^2}F_{1i})(*_1) - (\frac{4}{h^2}F_{1i} - \frac{16}{h^4}G_{1i})(*_2) \\ M''_{yy} &= (E_{2i} - \frac{4}{h^2}F_{2i})(*_1) - (\frac{4}{h^2}F_{2i} - \frac{16}{h^4}G_{2i})(*_2) \\ M''_{xy} &= (E_{6i} - \frac{4}{h^2}F_{6i})(*_1) - (\frac{4}{h^2}F_{6i} - \frac{16}{h^4}G_{6i})(*_2). \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

Postupak "analitičkog" rešavanja prvo će se ograničiti na specijalno ortotropne višeslojne laminate, što podrazumeva dalje pojednostavljenje izraza u relacijama (3.4.11), tj. $A_{16}, A_{26}, E_{16}, E_{26}, F_{16}, F_{26}, G_{16}, G_{26} = 0$. Medjutim, zbog pokušaja nalaženja "analitičkog" rešenja i za opšte simetrične laminate ovo razmatranje će se podeliti na

4.1.1 Laminat - specijalno ortotropan

4.1.2 Laminat - simetričan.

4.1.1 Laminat - specijalno ortotropan

Jednačine kretanja (3.4.19) mogu se prikazati uvodjenjem (4.1.1) i (4.1.2) uz konstitutivne relacije za specijalnu ortotropiju, u ovom obliku

$$
\begin{aligned}
\delta u_0 : \quad & \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} A_{11} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} A_{66} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y}(A_{12} + A_{66}) + \frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} A_{11} + \frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 w_0}{y^2} A_{66} + \\
& + \frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}(A_{12} + A_{66}) = 0 \\[2ex]
\delta v_0 : \quad & \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y}(A_{12} + A_{66}) + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} A_{66} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} A_{22} + \frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}(A_{12} + A_{66}) + \frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} A_{66} + \\
& + \frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} A_{22} = 0 \\[2ex]
\delta u_1 : \quad & \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}(E_{11} - \frac{8}{h^2}F_{11} + \frac{16}{h^4}G_{11}) + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}(E_{66} - \frac{8}{h^2}F_{66} + \frac{16}{h^4}G_{66}) + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial y}(E_{12} - \frac{8}{h^2}F_{12} + \\
& + \frac{16}{h^4}G_{12} + E_{66} - \frac{8}{h^2}F_{66} + \frac{16}{h^4}G_{66}) - u_1(A_{55} - \frac{4}{h^2}E_{55}) - v_1(A_{45} - \frac{4}{h^2}E_{45}) - \\
& - \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}(E_{11} - \frac{4}{h^2}F_{11}) - \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial^2 y}(E_{12} - \frac{4}{h^2}F_{12} + 2(E_{66} - \frac{4}{h^2}F_{66})) = 0 \\[2ex]
\delta v_1 : \quad & \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y}(E_{12} - \frac{8}{h^2}F_{12} + \frac{16}{h^4}G_{12} + E_{66} - \frac{8}{h^2}F_{66} + \frac{16}{h^4}G_{66}) + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}(E_{66} - \frac{8}{h^2}F_{66} + \\
& + \frac{16}{h^4}G_{66}) + \frac{\partial v_1}{\partial y^2}(E_{22} - \frac{8}{h^2}F_{22} + \frac{16}{h^4}G_{22}) - u_1(A_{45} - \frac{4}{h^2}E_{45}) - v_1(A_{44} - \frac{4}{h^2}E_{44}) - \\
& - \frac{\partial^3 w_0}{\partial^2 x \partial y}(E_{12} - \frac{4}{h^2}F_{12} + 2(E_{66} - \frac{4}{h^2}F_{66})) - \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3}(E_{22} - \frac{4}{h^2}F_{22}) = 0
\end{aligned}
\tag{4.1.1.1}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta w_0 : \quad & \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3}(E_{11} - \frac{4}{h^2}F_{11}) + \frac{\partial^3 u_1}{\partial x \partial y^2}(2(E_{66} - \frac{4}{h^2}F_{66}) + E_{12} - \frac{4}{h^2}F_{12}) + \frac{\partial^3 v_1}{\partial x^2 \partial y}(E_{12} - \\
& - \frac{4}{h^2}F_{12} + 2(E_{66} - \frac{4}{h^2}F_{66})) + \frac{\partial^3 v_1}{\partial y^3}(E_{22} - \frac{4}{h^2}F_{22}) - \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4}E_{11} - 2\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2}(E_{12} + 2E_{66}) - \\
& - \frac{\partial^4 w_0}{y^4}E_{22} + p = 0
\end{aligned}
$$

Ako se rešenja sistema (3.4.19) pretpostave u obliku †

$$
\begin{aligned}
u_0 &= a_1 f \cos\alpha \sin\beta + a_2 f^2 \sin 2\alpha + a_3 f^2 \sin 2\alpha \cos 2\beta \\
u_1 &= a_4 f \sin\alpha \cos\beta + a_5 f^2 \sin 2\beta + a_6 f^2 \cos 2\alpha \sin 2\beta \\
v_0 &= a_7 f \cos\alpha \sin\beta + a_8 f^2 \sin 2\alpha + a_9 f^2 \sin 2\alpha \cos 2\beta \\
v_1 &= a_{10} f \sin\alpha \cos\beta + a_{11} f^2 \sin 2\beta + a_{12} f^2 \sin 2\alpha \cos 2\beta \\
w_0 &= f \sin\alpha \sin\beta
\end{aligned}
\qquad (4.1.1.2)
$$

gde su $\alpha = \frac{m\pi x}{a}$ i $\beta = \frac{n\pi y}{b}$ i gde su a i b dužine stranica ploče, a $m, n = 1, 2, 3, \cdots$, rešenje sistema se svodi na odredjivanje nepoznatih koeficijenata $a_1, \ldots, a_{12}$. Pored toga, smatraće se da pretpostavljena pomeranja zadovoljavaju uslove (3.4.13). Uslovi (3.4.16) se neće razmatrati u ovom poglavlju, jer su u_0, u_1, v_0, v_1 i w_0 uvedeni samo kao $f(x, y)$. Ako se preko relacije (4.1.1.2) izraze deformacije (3.2.5) i sa (4.1.2) i (4.1.3) uvedu u (4.1.1.1) dolazi se do sistema algebarskih jednačina grupisanjem uz $\delta u_0, \delta v_0, \delta u_1$, δv_1 i δw_0, pa po svakom od ovih i uz trigonometrijske članove $\cos\alpha\sin\beta$, $\sin 2\alpha$, $\sin\alpha\cos\beta$, $\sin 2\beta$, $\sin^2\alpha$, $\cos^2\beta$ itd. Koeficijenti $a_1, \ldots, a_{12}$ i f odrediće se iz sistema jednačina dobijenih grupisanjem uz δu_0, $\delta v_0, \delta u_1$ i δv_1.

Ako se uvedu sledeća označavanja za pojedine članove u sistemu algebarskih jednačina

$$
\begin{aligned}
(E_{11} - \frac{8}{h^2}F_{11} + \frac{16}{h^4}G_{11}) &= P_{11} \\
(E_{12} - \frac{8}{h^2}F_{12} + \frac{16}{h^4}G_{12}) &= P_{12} \\
(E_{22} - \frac{8}{h^2}F_{22} + \frac{16}{h^4}G_{22}) &= P_{22} \\
(E_{66} - \frac{8}{h^2}F_{66} + \frac{16}{h^4}G_{66}) &= P_{66}
\end{aligned}
\quad \text{i} \quad
\begin{aligned}
(E_{11} - \frac{8}{h^2}F_{11}) &= Q_{11} \\
(E_{12} - \frac{8}{h^2}F_{12}) &= Q_{12} \\
(E_{22} - \frac{8}{h^2}F_{22}) &= Q_{22} \\
(E_{66} - \frac{8}{h^2}F_{66}) &= Q_{66}
\end{aligned}
, \qquad (4.1.1.3)
$$

$$
\begin{aligned}
A_{11} + A_{66}s^2 &= X_1 \\
s(A_{12} + A_{66}) &= X_2 \\
A_{66} + A_{22}s^2 &= X_3
\end{aligned}
\quad \text{i} \quad
\begin{aligned}
\frac{1}{16}\frac{\pi}{a}[A_{11} + (A_{12} + 2A_{66})s^2] &= Y_1 \\
\frac{1}{16}\frac{\pi}{b}[(A_{12} + 2A_{66}) + A_{22}s^2] &= Y_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_{11} + P_{66}s^2 + \frac{a^2}{\pi^2}(A_{55} - \frac{4}{h^2}E_{55}) &= XX_1 \\
s(P_{12} + P_{66} = XX_2 P_{66} + s^2 P_{22} + \frac{a^2}{\pi^2}(A_{44} - \frac{4}{h^2}E_{44} &= XX_3
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\frac{\pi}{a}(Q_{11} + 2Q_{66}s^2 + Q_{12}s^2) &= YY_1 \\
\frac{\pi}{b}(Q_{12} + 2Q_{66} + Q_{22}s^2) &= YY_2
\end{aligned}
$$

rešenja tako formiranog sistema su:

† iz [38]

$$
\begin{aligned}
a_1 &= a_4 = 0 \\
a_2 &= \frac{1}{16}\frac{\pi}{a}\left(\frac{A_{12}}{A_{11}}s^2 - 1\right) \\
a_5 &= \frac{1}{16}\frac{\pi}{b}\left(\frac{A_{12}}{A_{22}}\frac{1}{s^2} - 1\right) \\
a_6 &= (Y_2X_1 - Y_1X_2)/(X_3X_1 - X_2^2) \\
a_3 &= Y_1/X_1 - (X_2/X_1)a_6 \\
a_8 &= a_{11} = 0 \\
a_{10} &= (YY_2XX_1 - YY_1XX_2)/(XX_3XX_1 - XX_2^2) \\
a_7 &= YY_1/XX_1 - (XX_2/XX_1)a_{10}
\end{aligned} \tag{4.1.1.4}
$$

Iz relacija dobijenih grupisanjem uz δw_0 odredjuje se i koeficijent, tj. amplituda f u smislu jednačina (4.1.1.1)

$$
\begin{aligned}
f\frac{\pi^3}{a^3}[(Q_{11} + (Q_{12} + 2Q_{66})s^2)a_7 + ((Q_{12} + 2Q_{66})s + Q_{22}s^3)a_{10} - \\
- \frac{\pi}{a}(E_{11} + 2(E12 + 2E_{66})s^2 + E_{22}s^4)] + p/(\sin\alpha\sin\beta) \quad &= \quad 0.
\end{aligned}
$$

Radi jednostavnijeg pisanja uvode se i relacije

$$
V_1 = Q_{11} + (Q_{12} + 2Q_{66})s^2 \qquad V_2 = (Q_{12} + 2Q_{66})s + Q_{22}s^3 \qquad V_3 = E_{11} + 2(E_{12} + 2E_{66})s^2 + E_{22}s^4
$$

$$
VF = \frac{\pi}{a}V_3 - a_7V_1 - a_{10}V_2.
$$

U gornjim izrazima a i b su stranice ploče, a $s = a/b$ je odnos stranica ploče. Oslanjajući se na Navijeovo rešenje [2], konstantni transverzalni pritisak će se uvesti kao

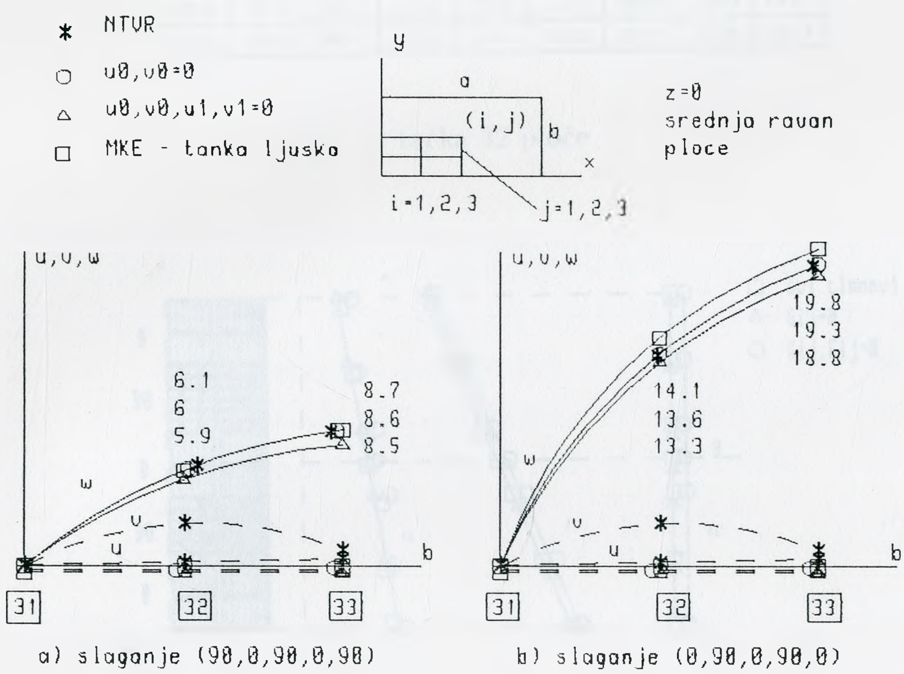
$$
p = p_0 \sin\alpha \sin\beta \qquad \text{gde je} \qquad p_0 = \frac{16q_0}{\pi^2}
$$

gde je q_0 intenzitet transverzalnog pritiska, pa se funkcije pomeranja (4.1.1.2) mogu prikazati sledećim relacijama

$$
\begin{aligned}
u_0 &= a_2f^2\sin 2\alpha + a_3f^2\sin 2\alpha\cos 2\beta \\
v_0 &= a_5f^2\sin 2\beta + a_6f^2\cos 2\alpha\sin 2\beta \\
u_1 &= a_7f\cos\alpha\sin\beta \qquad\qquad \text{gde je} \qquad f = \frac{16a^3}{\pi^5 VF}q_0. \\
v_1 &= a_{10}f\sin\alpha\cos\beta \\
w_0 &= f\sin\alpha\sin\beta
\end{aligned} \tag{4.1.1.5}
$$

Sada su svi nepoznati koeficijenti odredjeni i svih pet funkcija pomeranja su poznate veličine. Analiza će se sprovesti zadržavajući se na prvim članovima beskonačnog reda $m, n = 1$.

Da bi se stekao uvid u ponašanje ovakve ploče, izvršiće se testiranje veličina pomeranja u, v i w na ploči dimenzija 200 × 100, specijalno ortotropnoj i različitog slaganja. Uporediće se veličine pomeranja dobijene ovom analizom NTVR (nelinearna teorija višeg reda), pomeranja dobijena za $u_0, v_0 = 0$, pomeranja dobijena za $u_0, v_0, u_1, v_1 = 0$ i pomeranja dobijena elementima tipa "tanka ljuska", što je prikazano na slici 4.1.1.1*a*)*ib*). Testiranje je uradjeno programom u Prilogu P.1.



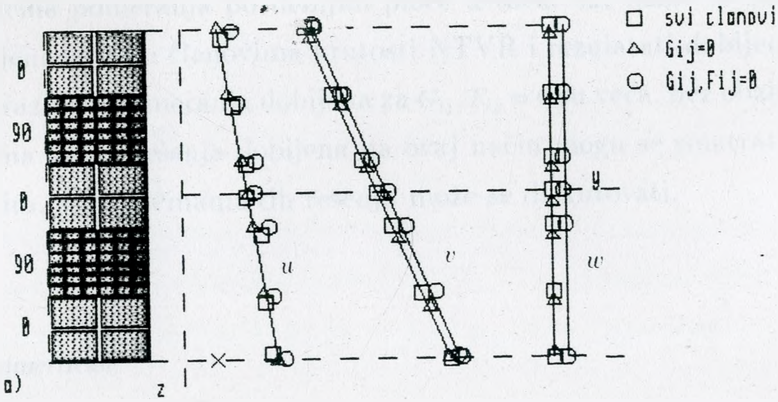
sl. 4.1.1.1

Pomeranja su prikazana u karakterističnim tačkama, tako da se može zaključiti da se pomeranja u i v mogu dobiti samo NTVR i njenom prvom aproksimacijom, tj. kada su $u_0, v_0 = 0$. Poklapanje ili razlike u veličini pomeranja w dobijene NTVR i "tankom ljuskom" su posledica slaganja, ali pomeranja dobijena zanemarivanjem u_0, v_0, u_1, v_1 uvek daju manja pomeranja w. Zbog toga se ovakvi modeli ploča i nazivaju "tanka ploča". Veličine pomeranja poredjene su samo za srednju ravan.

Pored prikazanih poredjenja, prikazaće se i poredjenje veličina pomeranja u okviru nelinearne analize višeg reda u zavisnosti od pojedinih krutosti. Na slici 4.1.1.2 a)i b), za različito slaganje specijalno ortotropnog laminata, biće izvršeno poredjenje veličina pomeranja, da bi se odredio udeo pojedinih krutosti u ovoj metodi. Korišćen je isti primer kao i na (sl. 4.1.1.1). Testovi su uradjeni programom iz Priloga P.1.

u			v			w		
□	△	○	□	△	○	□	△	○
6E-5	6E-5	7E-5	-0.36	-0.36	-0.40	13.63	13.63	13.91
2E-4	2E-4	2E-4	-0.78	-0.78	-0.84	13.63	13.63	13.91
4E-4	4E-4	4E-4	-1.20	-1.20	-1.26	13.63	13.63	13.91
5E-4	5E-4	5E-4	-1.41	-1.41	-1.47	13.63	13.63	13.91
6E-4	6E-4	6E-4	-1.62	-1.62	-1.68	13.63	13.63	13.91
7E-4	7E-4	7E-4	-2.03	-2.03	-2.10	13.63	13.63	13.91
9E-4	9E-4	9E-4	-2.46	-2.46	-2.53	13.63	13.63	13.91

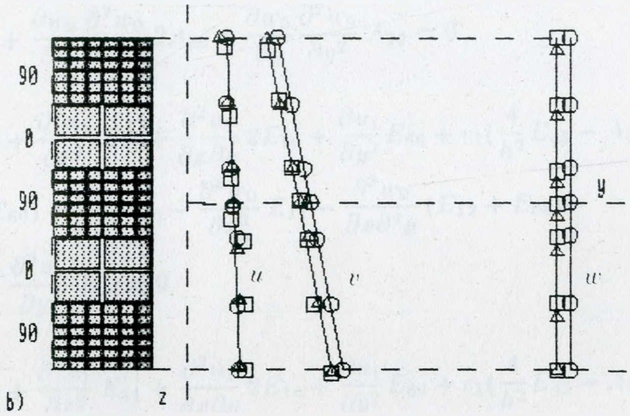
tačka 32 ploče



sl. 4.1.1.2 a)

u			v			w		
□	△	○	□	△	○	□	△	○
1.E-4	1.E-4	1 E-4	+0.17	+0.17	+0.15	6.16	6.16	6.61
2.E-5	2.E-5	2.E-5	- 0.01	- 0.01	- 0.05	6.16	6.16	6.61
5.E-5	5 E-5	6.E-5	-0.20	-0.20	-0.24	6.16	6.16	6.61
9 E-5	9.E-5	1 E-4	-0.30	-0.30	-0.33	6.16	6.16	6.61
1 E-4	1 E-4	1.E-4	-0.40	-0.40	-0.43	6.16	6.16	6.61
2.E-4	2 E-4	2.E-4	-0.60	-0.60	-0.62	6.16	6.16	6.61
3.E-4	3 E-4	3.E-4	-0.75	-0.75	-0.82	6.16	6.16	6.61

tačka 32 ploče



sl. 4.1.1.2 b)

Pregledom veličina pomeranja po debljini ploče u tački 32, može se zaključiti da su rezultati dobijeni sa svim članovima krutosti NTVR i rezulatati dobijeni bez članova G_{ij} bez uočene razlike. Pomeranja dobijena za $G_{ij}, F_{ij} = 0$ su veća, bez obzira na slaganje laminata. Prema tome, rešenja dobijena na ovaj način mogu se smatrati kvalitativno zadovoljavajućim, a o veličinama tih rešenja može se diskutovati.

4.1.2 Laminat - simetričan

Na osnovu poredjenja veličina pomeranja sa sl.(4.1.1.2), pomeranja dobijena zanemarivanjem krutosti G_{ij} i F_{ij} su bliska onima sa udelom svih krutosti. Zbog toga, može se potražiti i rešenje za opšte simetrične laminate.

Iz jednačina kretanja (3.4.19), relacija (3.4.11) i uz uslov da su krutosti G_{ij}, F_{ij} zanemarene, jednačine kretanja simetričnog laminata su

$$\begin{aligned} \delta u_0 : \quad & \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} A_{11} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} 2A_{16} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} A_{66} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} A_{16} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y}(A_{12} + A_{66}) + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} A_{26} + \\ & + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} A_{11} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} 2A_{16} \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{y^2} A_{66} + \\ & + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} A_{16} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} (A_{12} + A_{66}) + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} A_{26} = 0 \end{aligned}$$

$$\delta v_0: \quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} A_{16} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} (A_{12} + A_{66}) + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} A_{26} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} A_{66} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} 2A_{26} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} A_{22} +$$

$$+ \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} A_{16} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} (A_{12} + A_{66}) + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{y^2} A_{26} +$$

$$+ \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} A_{66} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} 2A_{26} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} A_{22} = 0$$

$$\delta u_1: \quad u_1 (\frac{4}{h^2} E_{55} - A_{55}) + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} E_{11} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} 2E_{16} + \frac{\partial u_1}{\partial y^2} E_{66} + v_1 (\frac{4}{h^2} E_{45} - A_{45}) + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} E_{16} +$$

$$+ \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial y} (E_{12} + E_{66}) + \frac{\partial v_1}{\partial y^2} E_{26} - \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} E_{11} - \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial^2 y} (E_{12} + E_{66}) -$$

$$- \frac{\partial^3 w_0}{\partial^2 x \partial y} 3E_{16} - \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} E_{26} = 0$$

$$\delta v_1: \quad u_1 (\frac{4}{h^2} E_{55} - A_{55}) + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} E_{11} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} 2E_{16} + \frac{\partial u_1}{\partial y^2} E_{66} + v_1 (\frac{4}{h^2} E_{45} - A_{45}) + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} E_{16} +$$

$$+ \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial y} (E_{12} + E_{66}) + \frac{\partial v_1}{\partial y^2} E_{26} - \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} E_{11} - \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial^2 y} (E_{12} + E_{66}) -$$

$$- \frac{\partial^3 w_0}{\partial^2 x \partial y} 3E_{16} - \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} E_{26} = 0$$

$$\delta w_0: \quad \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} E_{11} + 3 \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^2 \partial y} E_{16} + \frac{\partial^3 u_1}{\partial x \partial y^2} (E_{12} + 2E_{66}) + \frac{\partial^3 u_1}{\partial y^3} E_{26} + \frac{\partial^3 v_1}{\partial x^3} E_{16} +$$

$$+ \frac{\partial^3 v_1}{\partial x^2 \partial y} (E_{12} + 2E_{66}) + 3 \frac{\partial^3 v_1}{\partial x \partial y^2} E_{26} + \frac{\partial^3 v_1}{\partial y^3} E_{22} - [\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} E_{11} +$$

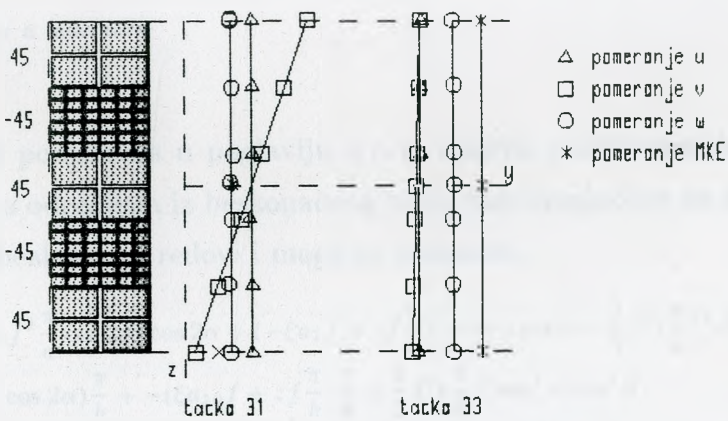
$$+ \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} (2E_{12} + 4E_{66}) + 4 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3 \partial y} E_{16} + 4 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x \partial y^3} E_{26} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} E_{22}] + p = 0$$

Koristeći isti postupak rešavanja ovog sistema parcijalnih diferencijalnih jednačina kao i u prethodnoj tački *4.1.1.* nepoznati koeficijenti $a_1, \ldots, a_{12}$ mogu se prikazati relacijama (4.1.1.4). Uz već uvedene pretpostavke da se F_{ij} i G_{ij} mogu zanemariti, relacije (4.1.1.3) se pojednostavljuju

$$E_{11} = P_{11} \quad E_{12} = P_{12} \quad E_{22} = P_{22} \quad E_{66} = P_{66}$$
$$E_{11} = Q_{11} \quad E_{12} = Q_{12} \quad E_{22} = Q_{22} \quad E_{66} = Q_{66}.$$

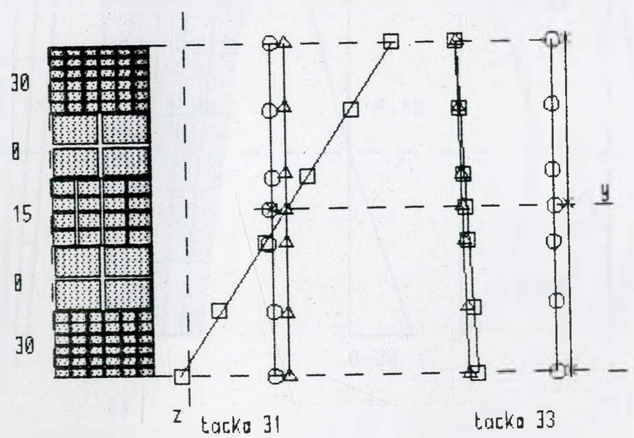
I za funkcije pomeranja važe izvedene relacije (4.1.1.5), tako da se mogu dobiti i pomeranja za simetrične laminate. Radi uvida u dobijena rešenja ovom metodom, prikazaće se dobijena pomeranja za dva različito složena laminata i porediće se sa rešenjima dobijenim elementom "tanka ljuska" za usvojenu ploču sa (sl. 4.1.1.1) i prikazaće se na (sl. 4.1.2.1).

pomeranja-31				pomeranja-33			
□	△	○	*	□	△	○	*
7 E-4	0.84	-	-	4.E-4	1 E-4	11.4	12.25
7 E-4	0.50	-	-	2 E-4	-1 E-4	11.4	12.25
7 E-4	0.16	-	-	1 E-4	-4 E-4	11.4	12.25
7 E-4	0.00	-	-	7 E-5	-5.E-4	11.4	12.25
7 E-4	-0.16	-	-	1 E-5	-7 E-4	11.4	12.25
7 E-4	-0.50	-	-	-1 E-4	-1.E-3	11.4	12.25
7 E-4	-0.84	-	-	-2 E-4	-1 E-3	11.4	12.25



sl. 4.1.2.1 a)

pomeranja-31				pomeranja-33			
□	△	○	*	□	△	○	*
6.E-4	1.60	-	-	-6 E-4	-3.E-4	21.23	22.0
6.E-4	0.98	-	-	-8 E-4	-8 E-4	21.23	22.0
6.E-4	0.33	-	-	-0.010	-0.013	21.23	22.0
6.E-4	0.00	-	-	-0.012	-0.016	21.23	22.0
6.E-4	-0.33	-	-	-0.013	-0.019	21.23	22.0
6.E-4	-0.98	-	-	-0.016	-0.024	21.23	22.0
6.E-4	-1.60	-	-	-0.018	-0.030	21.23	22.0



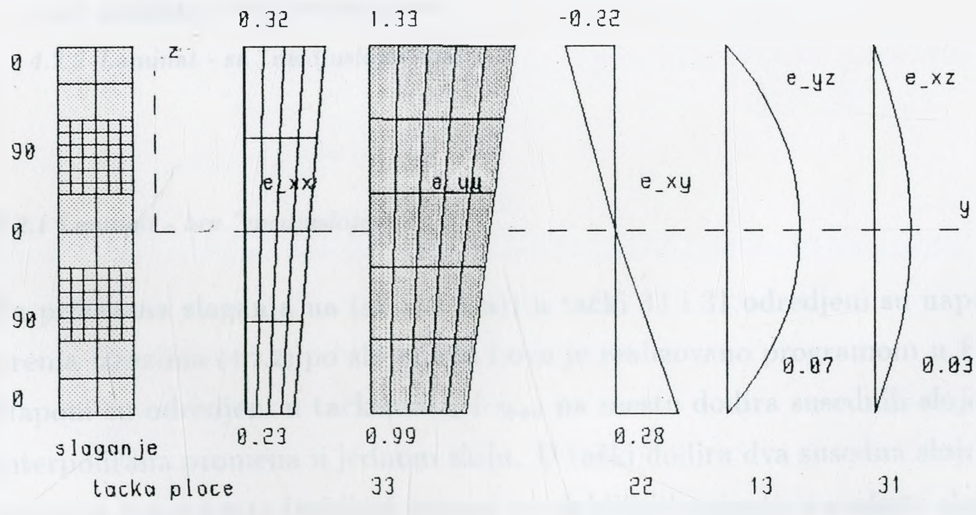
sl. 4.1.2.1 b)

Prikazana pomeranja za različita slaganja ne mogu se porediti sa "analitičkim rešenjima". Zato je prikazano poredjenje sa rešenjima koja su dobijena elementom "tanka ljuska". Ovaj element rešava pomeranje srednje ravni, pa se zato mogu porediti samo veličine pomeranja w. Prema prikazanim testovima, rešenja dobijena ovim načinom daju pomeranja w, koja su manja i ne zavise od slaganja. Prema tome, dobijeno rešenje NTVR sa uvedenim pretpostavkama može se smatrati prihvatljivim.

4.2 Deformacije i naponi u laminatu

Na osnovu dobijenih pomeranja u poglavlju *4.1*, iz relacija (3.2.3) odredjuju se deformacije. Pomeranja su odredjena iz beskonačnog reda, zadržavajući se na prvom članu. Deformacije su isto beskonačni redovi i mogu se prikazati

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= (2a_2 f^2 \frac{\pi}{a} + 2a_3 f^2 \frac{\pi}{a} \cos 2\beta) \cos 2\alpha + (-\xi a_7 f + z f \frac{\pi}{a}) \frac{\pi}{a} \sin\alpha \sin\beta + \frac{1}{2} f^2 (\frac{\pi}{a})^2 \cos^2\alpha \sin^2\beta \\
\varepsilon_{yy} &= 2(a_5 f^2 + a_6 f^2 \cos 2\alpha) \frac{\pi}{b} + -(\xi a_{10} f + z f \frac{\pi}{b}) \frac{\pi}{b} + \frac{1}{2} f^2 (\frac{\pi}{b})^2 \sin^2\alpha \cos^2\beta \\
\varepsilon_{xy} &= 2(-a_3 f^2 \frac{\pi}{b} - a_6 f^2 \frac{\pi}{a}) + (\xi a_7 f \frac{\pi}{b} + \xi a_{10} f \frac{\pi}{a} - 2 z f \frac{\pi^2}{ab}) + \frac{1}{4} f^2 \frac{\pi^2}{ab} \sin 2\alpha \sin 2\beta \\
\varepsilon_{xz} &= \xi^* a_7 f \cos\alpha \sin\beta \\
\varepsilon_{yz} &= \xi^* a_{10} f \sin\alpha \cos\beta
\end{aligned} \tag{4.2.1}$$



sl. 4.2.1

a u ovoj analizi uzeće se u obzir samo prvi član, tj. $m, n = 1$. Za prikazane test primere u poglavlju *4.1* na (sl. 4.1.1.1) i (sl. 4.1.2.1) u izabranim tačkama na ploči, prikazaće se i deformacije dobijene ovom analizom, na osnovu realizovanog programa u Prilogu P.2. Deformacije su prikazane po debljini ploče na (sl. 4.2.1).
Deformacije su neprekidne po debljini ploče, a prikazane su samo na osnovu dobijenih podataka u tačkama na mestu dodira slojeva, gornjoj površi i donjoj površi ploče. Pomoću tih tačaka izvršena je aproksimacija promene deformacija krivama drugog i trećeg reda. Na taj način moguće je prikazati stvarne promene deformacija po debljini laminata h neprekidnim krivama.

Da bi se odredili naponi prema relacijama (3.3.3), a na osnovu veza (3.4.7) i (3.4.10), neće se vršiti sumiranje kao za (3.4.11), već se pristupa odredjivanju napona u svakom sloju pojedinačno. Ovakav postupak je uobičajen u teoriji višeslojnih ploča [16,5,10,14]. Za ploču ovog tipa naponi u jednom sloju k su

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix}_k = [\bar{Q}]_k(*) + z_k[\bar{Q}]_k(*_1) - \frac{4}{3}\frac{z_k^3}{h^2}[\bar{Q}]_k(*_2),$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \end{pmatrix} \tag{4.2.2}$$

gde su $(*)$,$(*_1)$ i $(*_2)$ odredjeni izrazima (3.4.8). Na (sl. 3.3.3) prikazana su slaganja laminata bez "medjuslojeva" i sa "medjuslojevima". Za odredjivanje napona u laminatu, s obzirom na ova dva tipa slaganja, razmatranje će se podeliti na

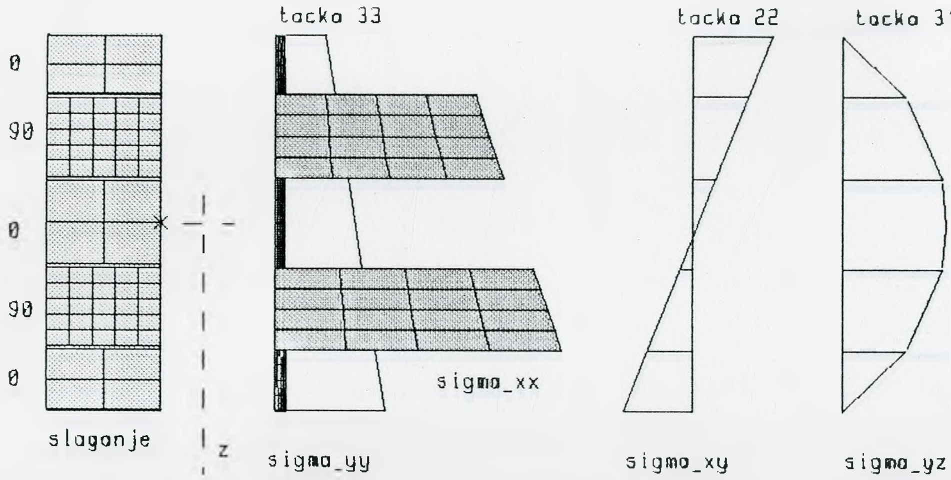
4.2.1 Laminat - bez "medjuslojeva"

4.2.2 Laminat - sa "medjuslojevima"

4.2.1 Laminat - bez "medjuslojeva"

Za prikazana slaganja na (sl. 4.1.1 a)) u tački 33 i 31 odredjeni su naponi u laminatu prema izrazima (4.2.2) po slojevima i ovo je realizovano programom u Prilogu P.3.
Naponi su odredjeni u tačkama z_k i z_{k+1} na mestu dodira susednih slojeva i pravom je interpolirana promena u jednom sloju. U tački dodira dva susedna sloja postoji napon za sloj k i sloj $k+1$. Dobijeni naponi po debljini laminata u svakom sloju prikazani su na (sl. 4.2.2).

Naponi su prikazani u karakterističnim tačkama x, y ploče. Tačke su izabrane tako da su date najveće vrednosti napona i njihova promena po debljini h



sl. 4.2.2

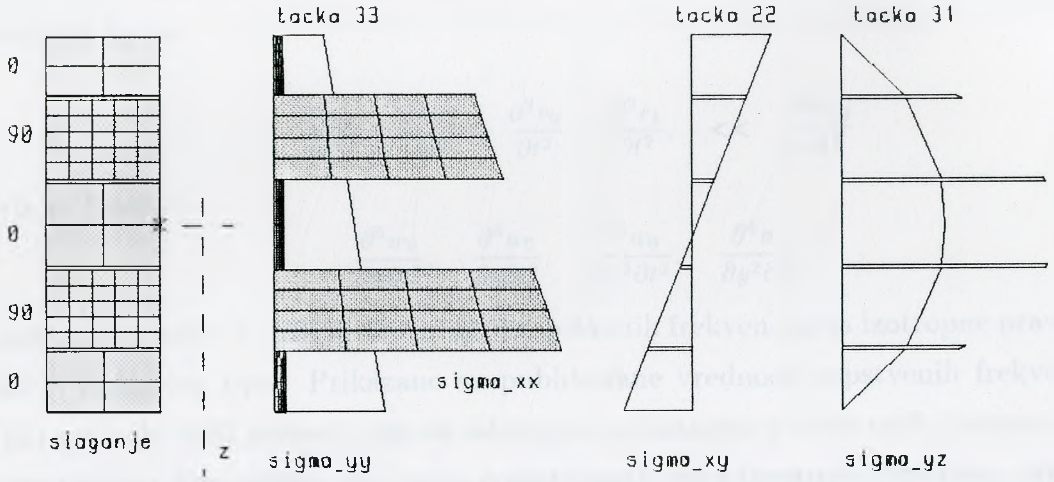
4.2.2 Laminat - sa "medjuslojevima"

Na (sl. 3.3.3 b) prikazano je slaganje sa "medjuslojem". Debljina "medjusloja" je λt gde je $\lambda << 1$ i u poredjenju sa debljinom slojića t je $\lambda t << t$. Da bi se odredili naponi u "medjusloju", moraju se poznavati inženjerske konstante "medjusloja". Usvojiće se da su njegove karakteristike izotropne, što je prodiskutovano u poglavlju *3.3.* Uvedene su inženjerske konstante $E_{12}/E = 4$, $G/G_{13} = 2$, $E_{11}/E_{22} = 10$, $G_{12}/G_{13} = 2$ i $G_{13} = G_{23}$, što isto važi i za primer na (sl. 4.2.2).

Uz ove karakteristike, preostaje da se analizira veličina λ. Posmatrajući veličine krutosti laminata A_{ij}, E_{ij}, F_{ij} i G_{ij} bez "medjuslojeva" i poredeći ih sa veličinama krutosti sa "medjuslojevima", ne bi trebalo da postoje razlike. Na ovaj način eliminiše se uticaj krutosti "medjusloja" na krutost laminata i vodeći se ovim kriterijumom, numeričkim testiranjem usvojen je $\lambda = 0.01$ (Prilog P.3). Na ovaj način direktno se utiče na ponašanje laminata na dodirnim površima dva susedna sloja. Uvodeći "medjusloj" sa odredjenim osobinama i smatrajući da je "medjusloj" površ beskonačno male debljine

λt, laminat se može realnije modelirati i tačnije dimenzionisati.

Veličine napona odredjuju se na gornjoj i donjoj površi sloja i "medjusloja", pa se linearnom aproksimacijom prikazuju veličine napona po debljini sloja i "medjusloja".



sl. 4.2.3

Naponi dobijeni ovim postupkom, sa uvedenim "medjuslojevima", a za već korišćene test primere na (sl.4.1.1.1), prikazani su na (sl. 4.2.3) za tačku 33 i 31. Pri dimenzionisanju višeslojnih struktura potrebno je proveravati naponsko stanje u svakoj tački. Provera napona u slojevima se vrši po odredjenim hipotezama loma [9], ali takav pristup zadovoljava sa stanovišta anizotropnosti materijala. Višeslojni materijali zahtevaju i dopunske provere, radi odredjivanja uticaja slaganja. Izloženim pristupom, a u skladu sa istraživanjima u oblasti mehanike loma [35], mogu se izvršiti i provere naponskog stanja izmedju slojeva.

5. SLOBODNO OSCILOVANJE PROSTO OSLONJENE PRAVOUGAONE PLOČE

Jednačine kretanja višeslojne anizotropne ploče (3.4.19), uz uslove na granicama (3.4.13) i (3.4.16), mogu se analizirati u smislu odnosa veličina izvoda funkcija pomeranja, usvajajući da su

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}, \quad << \quad \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}$$

i da se članovi

$$\frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2}, \quad \frac{\partial^3 w_0}{\partial y \partial t^2}, \quad \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial t^2}, \quad \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2 \partial t^2} \tag{5.1.1}$$

mogu zanemariti. U [26] je dat pregled sopstvenih frekvencija za izotropne pravougaone ploče, različitog tipa. Prikazane su publikovane vrednosti sopstvenih frekvencija od 1921.god. do 1987.godine, koje su odredjene uzimanjem u obzir ovih članova (5.1.1). U dosadašnjim dinamičkim analizama anizotropnih ploča linearnom teorijom, zanemareni su članovi (5.1.1). Ovo se poštovalo i pri traženju sopstvenih frekvencija razmatrane nelinearne ploče višeg reda. Jednačine kretanja su na osnovu uvedenih pretpostavki

$$\begin{aligned}
\delta u_0: &\quad \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \\
\delta v_0: &\quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} = 0 \\
\delta u_1: &\quad \frac{\partial M''_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M''_{xy}}{\partial y} - M_{x^*} = 0 \\
\delta v_1: &\quad \frac{\partial M''_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M''_{yy}}{\partial y} - M_{y^*} = 0 \\
\delta w_0: &\quad \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} = P_1 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}.
\end{aligned} \tag{5.1.2}$$

Pretpostavljajući rešenja funkcija pomeranja kao i (4.1.1.2), pod uslovom da je amplituda $f(x,y,t)$ pomeranja w_0 za slučaj harmonijskog oscilovanja data izrazom

$$f = f_0 e^{i\omega_0 t},$$

gde su $m, n = 1, \ldots$ brojevi polutalasa po pravcima x i y ploče, mogu se odrediti i nepoznati koeficijenti funkcija pomeranja. Veličine ovih koeficijenata, s obzirom na rešenja izvedena u glavi **4.**, prikazane su izrazima (4.1.1.5) za specijalno ortotropne i simetrične laminate.

U razmatranju slobodnog oscilovanja čvrstih tela uopšte, cilj je odredjivanje sopstvenih frekvencija. Iz pretpostavljenih rešenja sledi da je broj sopstvenih frekvencija beskonačan, za uvedene m i n. Uvedene veličine V_1, V_2, V_3 i VF u glavi **4.** su sada

$$
\begin{aligned}
V_1 &= Q_{11}m^3 + (Q_{12} + 2Q_{66})s^2mn^2 \\
V_2 &= (Q_{12} + 2Q_{66})sm^2n + Q_{22}s^3n^3 \\
V_3 &= E_{11}m^4 + 2(E_{12} + 2E_{66})s^2m^2n^2 + E_{22}s^4n^4 \\
VF &= \frac{\pi}{a}V_3 - a_7V_1 - a_{10}V_2.
\end{aligned}
\tag{5.1.3}
$$

Sopstvene frekvencije razmatrane višeslojne ploče su

$$\omega_0 = (\frac{\pi^3}{a^3}\frac{VF}{\varrho_{sr}})^{\frac{1}{2}}.$$

i funkcije su veličina m, $n = 1, 2, \ldots$. Frekvencije ovakve ploče manje su od frekvencija dobijenih teorijom klasičnih ploča, što se može uočiti iz relacija (5.1.3) na osnovu veličine VF. Ovakav zaključak je veoma važan, pre svega za razmatranje nosivosti u prisustvu prinude. Prinudno oscilovanje biće razmatrano posebno u glavi **6.**, gde će se dalje analizirati nalaženje dinamičkog faktora pojačanja na osnovu ovde odredjene najniže sopstvene frekvencije.

Da bi se stekao uvid u veličine ovako dobijenih sopstvenih frekvencija ploče, biće prikazane dobijene uporedne veličine za različite oblike ploče, slaganje, debljine slojeva i broj slojeva. †

Poredjenje veličina sopstvenih frekvencija izvršiće se za sledeće primere programom iz Priloga P.4.:

5.a - kvadratna ploča istog slaganja NTVR (nelinearna teorija višeg reda) i Kirchhoff-ova ploča (sl. 5.1.a)

5.b - pravougaona ploča istog slaganja NTVR i Kirchhoff-ova ploča (sl. 5.1.b)

5.c - pravougaona ploča različitog slaganja NTVR (sl. 5.1.c)

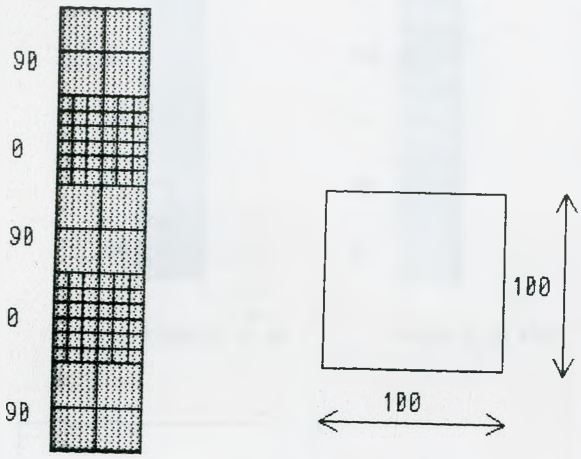
5.d - pravougaona ploča istog slaganja različitih debljina slojeva (sl. 5.1.c)

5.e - pravougaona ploča istog slaganja različitog broja slojeva (sl. 5.1.e),

pri čemu su sopstvene frekvencije date po modovima, od prvog do petnaestog, za odgovarajuće brojeve polutalasa m, n duž x i y ose.

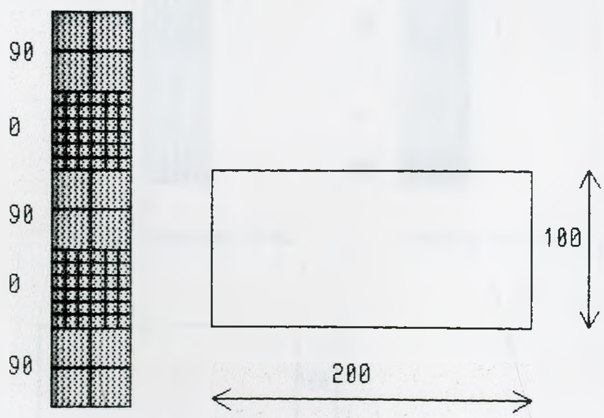
† iz [10],[15],[20],[21],[22],[23] i [24]

sl. 5.1.a)



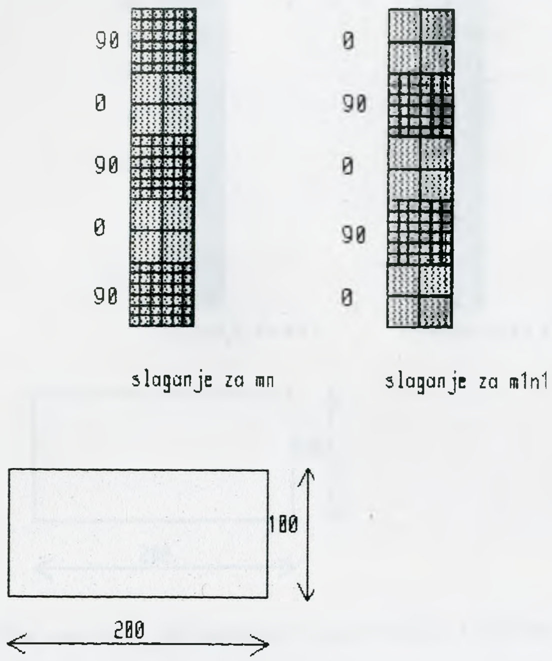
mod	mn	$\omega_{0\,NTVR}$	ωKirc.
1	11	0.4315E+03	0.2475E+04
2	21	0.9438E+03	0.5376E+04
3	12	0.1418E+04	0.8073E+04
4	22	0.1740E+04	0.9901E+04
5	31	0.1919E+04	0.1089E+05
6	32	0.2519E+04	0.1430E+05
7	13	0.3112E+04	0.1767E+05
8	41	0.3315E+04	0.1878E+05
9	23	0.3351E+04	0.1902E+05
10	42	0.3793E+04	0.2150E+05
11	33	0.3927E+04	0.2228E+05
12	43	0.4968E+04	0.2817E+05
13	51	0.5121E+04	0.2899E+05
14	14	0.5494E+04	0.3114E+05
15	52	0.5528E+04	0.3131E+05

sl. 5.1.b)



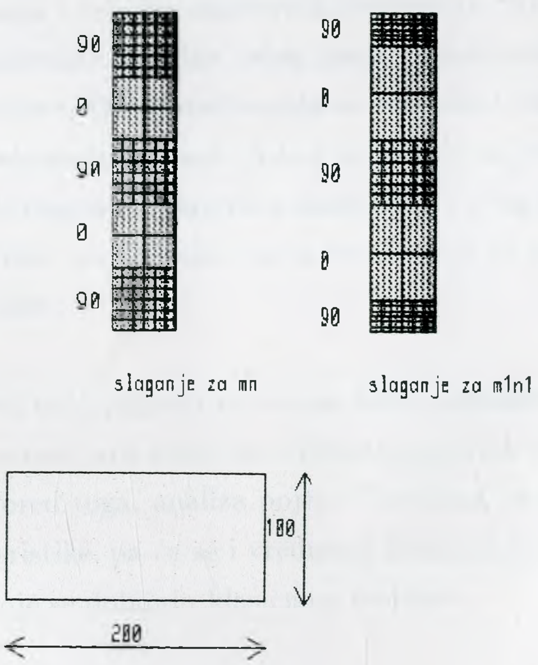
mod	mn	$\omega_{0\,NTVR}$	ωKirc
1	11	0.3523E+03	0.2854E+04
2	21	0.4335E+03	0.3501E+04
3	31	0.6289E+03	0.5057E+04
4	41	0.9483E+03	0.7602E+04
5	12	0.1369E+04	0.1101E+05
6	51	0.1383E+04	0.1107E+05
7	22	0.1420E+04	0.1142E+05
8	32	0.1535E+04	0.1233E+05
9	42	0.1744E+04	0.1400E+05
10	61	0.1926E+04	0.1540E+05
11	52	0.2072E+04	0.1661E+05
12	62	0.2525E+04	0.2023E+05
13	13	0.3070E+04	0.2463E+05
14	23	0.3114E+04	0.2498E+05
15	33	0.3203E+04	0.2569E+05

sl. 5.1.c)



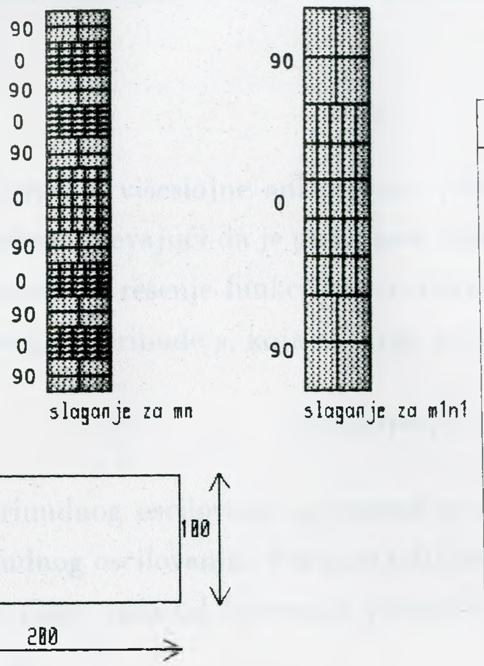
mod	mn	m_1n_1	ω_{NTVR}	ω_{1NTVR}
1	11	11	0.3523E+03	0.2357E+03
2	21	21	0.4335E+03	0.4362E+03
3	31	12	0.6289E+03	0.8273E+03
4	41	31	0.9483E+03	0.8400E+03
5	12	22	0.1369E+04	0.9476E+03
6	51	32	0.1383E+04	0.1243E+04
7	22	41	0.1420E+04	0.1428E+04
8	32	42	0.1535E+04	0.1750E+04
9	42	13	0.1744E+04	0.1831E+04
10	61	23	0.1926E+04	0.1922E+04
11	52	33	0.2072E+04	0.2136E+04
12	62	51	0.2525E+04	0.2191E+04
13	13	52	0.3070E+04	0.2462E+04
14	23	43	0.3114E+04	0.2527E+04
15	33	61	0.3203E+04	0.3126E+04

sl. 5.1.d)



mod	mn	m_1n_1	ω_{NTVR}	ω_{1NTVR}
1	11	11	0.3523E+03	0.4312E+03
2	21	21	0.4335E+03	0.1201E+04
3	31	12	0.6289E+03	0.1205E+04
4	41	22	0.9483E+03	0.1738E+04
5	12	31	0.1369E+04	0.2579E+04
6	51	13	0.1383E+04	0.2585E+04
7	22	32	0.1420E+04	0.2958E+04
8	32	23	0.1535E+04	0.2962E+04
9	42	33	0.1744E+04	0.3921E+04
10	61	41	0.1926E+04	0.4527E+04
11	52	14	0.2072E+04	0.4535E+04
12	62	42	0.2525E+04	0.4829E+04
13	13	24	0.3070E+04	0.4836E+04
14	23	43	0.3114E+04	0.5583E+04
15	33	34	0.3203E+04	0.5587E+04

sl. 5.1.e)



mod	mn	$m_1 n_1$	ω_{NTVR}	$\omega_{1\,NTVR}$
1	11	11	0.4217E+03	0.4766E+03
2	21	21	0.5662E+03	0.5657E+03
3	31	31	0.9072E+03	0.7778E+03
4	41	41	0.1443E+04	0.1130E+04
5	12	51	0.1619E+04	0.1615E+04
6	22	12	0.1703E+04	0.1870E+04
7	32	22	0.1904E+04	0.1930E+04
8	51	32	0.2157E+04	0.2058E+04
9	42	61	0.2280E+04	0.2226E+04
10	52	42	0.2859E+04	0.2286E+04
11	61	52	0.3042E+04	0.2639E+04
12	13	62	0.3628E+04	0.3132E+04
13	62	13	0.3642E+04	0.4204E+04
14	33	23	0.3696E+04	0.4258E+04
15	43	33	0.3842E+04	0.4361E+04

Na osnovu prikazanih uporednih veličina frekvencija sa sl. 5.1.a) za kvadratnu i sl. 5.1.b) za pravougaonu ploču uočava se da su frekvencije dobijene NTVR niže od onih koje su dobijene klasičnom teorijom, za iste oblike oscilovanja i dobijene iste odgovarajuće modove. Na sl. 5.1.c) prikazane su dobijene sopstvene frekvencije za isti broj slojeva, iste debljine ploče, ali za različito slaganje. Dobijeni su različiti oblici oscilovanja i veličine sopstvenih frekvencija. Na sl. 5.1.d) prikazane su sopstvene frevencije ploče iste debljine, istog broja slojeva, istih uglova orijentacije, ali različitih debljina slojeva. Oblici oscilovanja se razlikuju i treba uočiti razliku u rastu veličina sopstvenih frekvencija. Na sl. 5.1.e) prikazane su veličine frekvencija za ploču iste debljine, različitog broja slojeva, a može se reći istog slaganja, s obzirom da je laminat simetričan. Oblici oscilovanja u prva četiri moda se ne razlikuju, a i veličine frekvencija su dosta bliske.

Svi ovi zaključci su veoma bitni u dinamičkoj analizi, s obzirom na veliki broj parametara koji utiču na veličine sopstvenih frekvencija, što je pokazano ovim primerima. Pored toga, analiza pojave "buckling"-a ploča direktno se može vezati za ove karakteristike, pa će se i vrednosti kritičnih sila za ploču NTVR znatno razlikovati od onih koje se dobijaju klasičnom teorijom.

6. PRINUDNO OSCILOVANJE PROSTO OSLONJENE PRAVOUGAONE PLOČE

Jednačine kretanja višeslojne anizotropne ploče (3.4.19) izvedene su iz Hamiltonovog principa, podrazumevajući da je ploča pod dejstvom sila koje imaju potencijal. U ovoj glavi razmatraće se rešenje funkcija pomeranja u_0, u_1, v_0, v_1 i w u prisustvu konzervativne harmonijske prinude p, koja se može prikazati

$$p(x,y,t) = p_0(x,y)e^{i\omega t}. \tag{6.1}$$

U analizi prinudnog oscilovanja posmatra se prelazni proces i proces uspostavljenog režima prinudnog oscilovanja. Pretpostavljajući da je najniža sopstvena frekvencija ω_0 posmatrane ploče veća od frevencije prinude ω, ali da frekvencija prinude nije mala veličina, tj. †

$$\omega_0 \neq \omega \quad \text{i} \quad \omega_0 > \omega \quad \text{ali nije} \quad \omega_0 >> \omega$$

partikularno rešenje funkcija pomeranja (4.1.1.5) se može pretpostaviti u istom obliku, ali tako da je amplituda funkcija pomeranja f_{mn}

$$f_p(x,y,t) = f_{mn}(x,y)e^{i\omega t}$$

pri čemu funkcija $w_0(x,y)$ zadovoljava jednačine slobodnog oscilovanja (5.1.2). Opredeljujući se za oscilovanje u oblasti uspostavljenog režima prinudnog oscilovanja "steady state", jednačine prinudnog oscilovanja su

$$\begin{aligned}
\delta u_0 &: \quad \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \\
\delta v_0 &: \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} = 0 \\
\delta u_1 &: \quad \frac{\partial M''_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M''_{xy}}{\partial y} - M_{xz} = 0 \\
\delta v_1 &: \quad \frac{\partial M''_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M''_{yy}}{\partial y} - M_{yz} = 0 \\
\delta w &: \quad \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + p(x,y,t) = P_1 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \, .
\end{aligned} \tag{6.1}$$

† razmatranje prelaznog i ustaljenog režima [15]

Sledeći postupak u [3], gde je izveden faktor dinamičkog pojačanja za izotropnu klasičnu ploču, i u [43], gde je to uradjeno za anizotropnu klasičnu ploču, relacije izmedju amplituda prinude i amplitude funkcija pomeranja za nelinearnu ploču višeg reda mogu se prikazati

$$f_{mn}(x,y) = \sum_{m,n}^{\infty} A_{mn} w_{mn} \qquad \text{i} \qquad p_0(x,y) = \sum_{m,n}^{\infty} P_{mn} w_{mn}$$

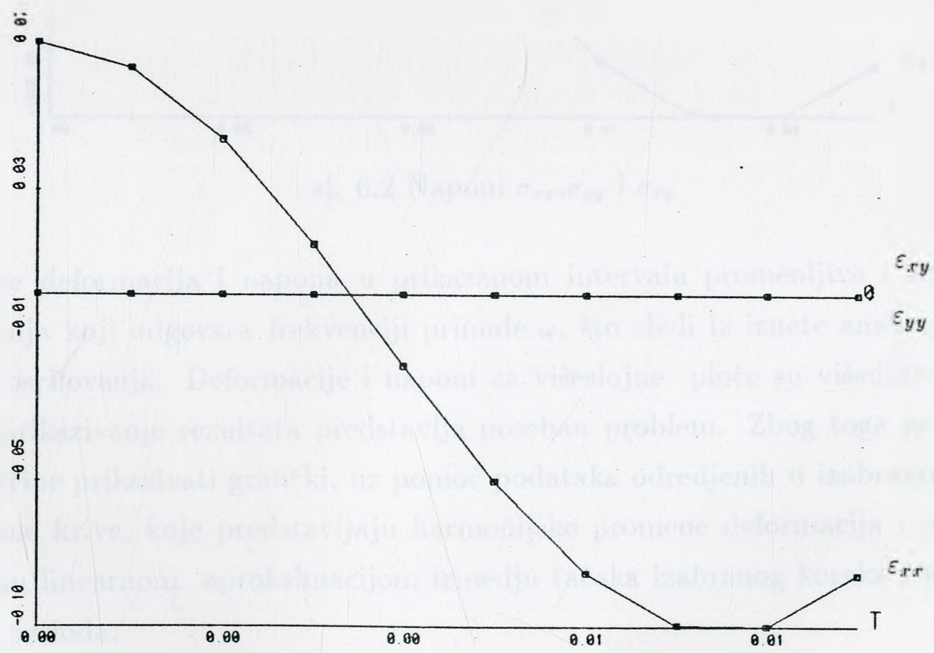
pa je

$$A_{mn} = P_{mn} / (\varrho \omega_{mn}^2 (1 - \frac{\omega^2}{\omega_{mn}^2})) \quad \text{gde je} \quad m, n = 1, ..., \infty.$$

Ograničavajući se na simetrične oblike oscilovanja, što je prirodno pretpostaviti za uvedenu prinudu i uspostavljen režim oscilovanja, amplituda f_p može se prikazati

$$f_p = \frac{f_{mn}}{\varrho \omega_{mn}^2 (1 - \frac{\omega^2}{\omega_{mn}^2})}$$

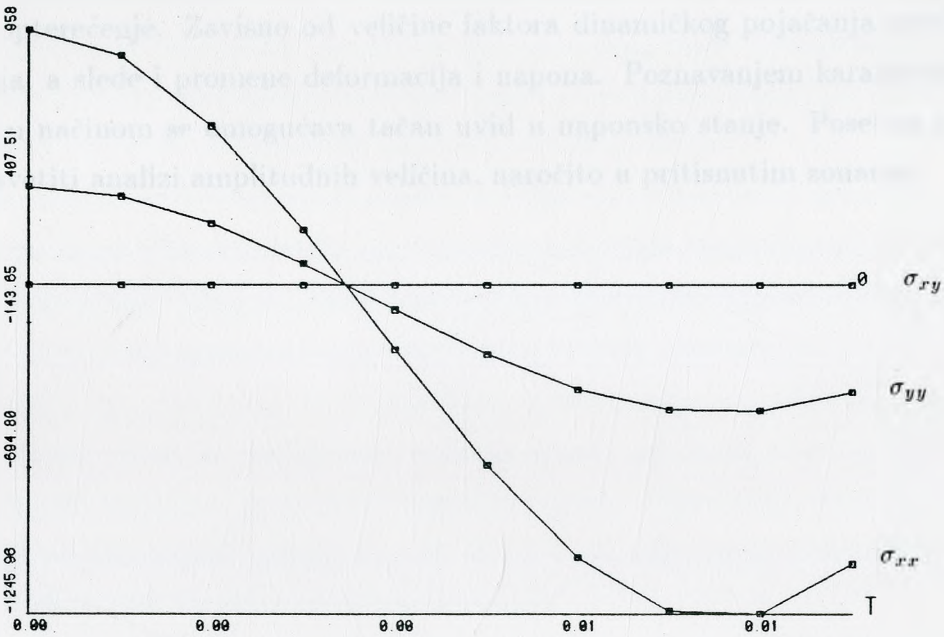
$$\text{uz ograničenje} \quad m, n = 1, 3, 5, ...$$



sl. 6.1 Deformacije ε_{xx}, ε_{yy} i ε_{xy}

Sledeći postupak rešavanja u glavi **4.** odredjuju se funkcije pomeranja u zavisnosti od (x, y, t), pa dalje deformacije i naponi.

Ovaj postupak je realizovan programom u Prilogu P.5 i na usvojenom primeru laminata složenog prema (sl. 5.1.a)), za dimenzije pravougaone ploče iz prethodnih primera i pod dejstvom prinude $p_0 = 1$ i frekvencije $\omega = 200$, prikazane su promene deformacija na (sl. 6.1) za tačku ploče (x, y) 33 sa (sl. 4.1.1.1) i $z = h/2$.
Naponi za istu tačku prikazani su na (sl. 6.2).



sl. 6.2 Naponi σ_{xx},σ_{yy} i σ_{xy}

Promene deformacija i napona u prikazanom intervalu promenljive t su za period oscilovanja koji odgovara frekvenciji prinude ω, što sledi iz iznete analize ustaljenog režima oscilovanja. Deformacije i naponi za višeslojne ploče su višedimenzione matrice i prikazivanje rezultata predstavlja poseban problem. Zbog toga je uobičajeno ove veličine prikazivati grafički, uz pomoć podataka odredjenih u izabranim tačkama. Prikazane krive, koje predstavljaju harmonijske promene deformacija i napona, dobijene su linearnom aproksimacijom izmedju tačaka izabranog koraka t na intervalu jednog perioda.

U strukturama koje se tretiraju u okviru aeroelastičnosti, veliki praktični problemi se javljaju i pri odredjivanju karakteristika prinude. Obično se parametri prinude procenjuju iz eksperimenata ili empirijskim putem, ograničavanjem na moguće oblasti veličina prinude. Pored aerodinamičkih opterećenja, na letelicama se javljaju i drugi tipovi promenljivih opterećenja, koji na pojedinim zonama deluju u kombinaciji sa aerodinamičkim opterećenjima. Takve zone je veoma teško dimenzionisati bez dopunskih dinamičkih analiza. Strukture u tim zonama obično pripadaju tipu tankozidnih struktura, pa je neophodno poznavanje naponskog stanja i pri dejstvu promenljivog opterećenja, s obzirom na njihove kriterijume dimenzionisanja.

Najveće (amplitudne) veličine pomeranja, deformacija i napona su veće od onih za statičko opterećenje. Zavisno od veličine faktora dinamičkog pojačanja uvećavaju se pomeranja, a slede i promene deformacija i napona. Poznavanjem karakteristika prinude,ovim načinom se omogućava tačan uvid u naponsko stanje. Posebna pažnja se mora posvetiti analizi amplitudnih veličina, naročito u pritisnutim zonama.

7. DIMENZIONISANJE PROSTO OSLONJENE PLOČE

U prethodnom glavama **4.**, **5.** i **6.** prezentirane su karakteristike ploče dobijene nelinearnom teorijom višeg reda (NTVR). Priloženi su mnogi primeri iz kojih se uočava kompleksnost problema projektovanja višeslojnih anizotropnih ploča. U ovoj glavi formiraće se veza izmedju dobijenih karakteristika ovom metodom i karakteristika nosivosti analiziranjem uvedenih konstitutivnih relacija. Pored toga, prisustvo prinude u konstrukcijama sa promenljivim opterećenjima, nameće razmišljanje o mogućnosti dostizanja odredjenih dinamičkih karakteristika ploče pogodnim dimenzionisanjem. Pri postavljanju zahteva maksimalne nosivosti koristiće se lomni napon, pri čemu posebnu pažnju treba posvetiti maksimalnoj nosivosti na delaminaciju.

Sve lomne karakteristike materijala uopšte, rezultat su velikog broja eksperimenata. Za odredjivanje lomnih karakteristika anizotropnih materijala, eksperimenti su bazirani na uniaksijalnom stanju napona. Tako izmerene karakteristike, uz pomoć hipoteza loma, koriste se za proveru maksimalne nosivosti za svaki sloj posebno.

U savremenim istraživanjima mehanike loma velika pažnja se poklanja delaminaciji. U [30,31,32,33] izneti su mehanizmi ovakvog loma, pri čemu je uočeno da se ona, kod višeslojnih laminata, prvo javlja izmedju slojeva. Pored toga, zavisi od položaja medjusloja po koordinati z laminata (sl. 3.3.3), od orijentacije susednih slojeva θ_i i θ_{i+1} i od mehaničkih karakteristika "medjusloja".

Nelinearna teorija višeg reda daje mogućnost razmatranja napona transverzalnog smicanja po debljini laminata u svakom sloju. Time je jedan deo ovog problema rešen. Medjutim, uticaj slaganja s obzirom na θ_i i θ_{i+1} ovakvim analizama se ne može pokazati. Zbog toga, u glavi **3.** uveden je izotropan "medjusloj", tako da se u njemu poznaje realno stanje napona, koji se direktno poredi sa lomnim naponom delaminacije. Naponi transverzalnog smicanja najveći su po ivicama ploče, pa će se na tim mestima uvoditi i ograničenja u smislu maksimalnog napona delaminacije.

Dimenzionisanjem višeslojne anizotropne ploče, za usvojene dimenzije stranica a i b pod odredjenim transverzalnim opterećenjem, smatraće se odredjivanje potrebnog broja slojeva n, brojeva slojića u jednom sloju α_k i orijentacije slojeva θ_k.

U postupku klasičnog dimenzionisanja pretpostave se ove veličine, pa se vrši njihova provera, ili se uspostavljanjem odredjenih relacija na osnovu praktičnog iskustva nalaze

odgovarajuća rešenja. U projektovanju novih višeslojnih konstrukcija, manipuliše se velikim brojem promenljivih. Zbog toga je uobičajeno da se odredjen broj promenljivih eliminiše a priori i broj promenljivih svede na razumnu meru.
Jedan od načina da se dimenzioniše ovakva ploča je da se postave odredjeni uslovi ekstremalnosti, pa da rešenja tako postavljenog problema budu tražene projektne promenljive.

7.1 Formiranje Lagranžove funkcije sa ograničenjima nosivosti

Ukupna debljina višeslojne anizotropne ploče može se prikazati kao

$$h = N\bar{t}, \tag{7.1.1}$$

pri čemu je $\bar{t}$ debljina slojića i predstavlja tehnološku konstantu , a

$$N = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \tag{7.1.2}$$

za n ukupan broj slojeva u laminatu i α_k broj slojića u jednom sloju. Zahtev koji će se ovde postaviti je

$$(N = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k)_{min} \tag{7.1.3}$$

i predstavlja zahtev minimalne mase ploče [42,43].
Potrebno je formirati i uslove pod kojima će se minimizirati (7.1.3). Pretpostavljajući da u svakom sloju postoji ravansko stanje napona, a prema onome čime se raspolaže iz poglavlja *4.2*, tj. naponima σ_{xx}, σ_{xy}, σ_{yy}, σ_{yz} i σ_{xz}, uslovi se mogu prikazati kao

$$\left(\frac{\sigma_{xx}^2}{X_{i,p}^2} - \frac{\sigma_{xx}\sigma_{yy}}{X_{i,p}^2} + \frac{\sigma_{yy}^2}{Y_{i,p}^2} + \frac{\sigma_{xy}}{S} \right)_k \leq 1$$

$$\text{ili} \quad \Phi_k - 1 = 0 \tag{7.1.4}$$

gde su $X_{i,p}$, $Y_{i,p}$ i S lomni naponi u sloju k dobijeni za x, y pravce laminata, a i,p su indeksi koji označavaju da je lomna nosivost od i istezanja, odnosno p pritiska. Pored ovih uslova formiraće se i uslovi

$$\left(\frac{\sigma_{yz}}{T} \leq 1\right)_{k,k^*} \quad \text{i} \quad \left(\frac{\sigma_{yz}}{T} \leq 1\right)_{k,k^*}$$

$$\text{ili} \quad \Psi_{k,k^*} - 1 = 0, \tag{7.1.5}$$

koji ograničavaju najveće napone transverzalnog smicanja. Opredeljujući se za ograničenja maksimalne nosivosti, razmatraće se stanje napona po slojevima k i "medjuslojevima" k^*, a to bi trebalo sprovesti za svaku tačku (x, y) ploče. Medjutim, naponi transverzalnog smicanja najveći su na ivicama ploče (sl. 4.2.2), pa će se uslovi ograničenja maksimalnog transverzalnog smicanja i postaviti samo za ivice ploče.
Konstatovano je da su veličine koje treba odrediti u ovom postupku n, α_k i θ_k. Ali, problem će se postaviti tako da će se usvojiti da projektne promenljive budu α_k i θ_k, a da se rešavanje sprovodi za različito n i dopunskim uporedjivanjem dolazi se do rešenja.
Lagranžova funkcija za neki n broj slojeva može se predstaviti na sledeći način

$$\mathcal{L}_n = N + \sum_{j=1}^{a} \lambda_j(\Phi_j - 1) + \sum_{j,j^*=1}^{a,a/2} \lambda_{j,j^*}(\Psi_{j,j^*} - 1)$$

$$\text{za} \quad j = 1, 2, \ldots, a \quad \text{i} \quad j^* = 1, 2, \ldots, a/2 \qquad \text{gde je} \quad a = \ldots, n \tag{7.1.6}$$

što znači da se može diktirati ispunjenje uslova (7.1.4) i (7.1.5) na jednom, dva ili više slojeva j istovremeno i u "medjuslojevima" j^*, pri čemu je uzeto u obzir razmatranje samo simetričnih laminata, tako da na $z = 0$, tj. u ravni simetrije laminata, ne postoji "medjusloj".
Uslovi ekstremuma Lagranžove funkcije su

$$\frac{\partial \mathcal{L}_n}{\partial \alpha_j} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial \mathcal{L}_n}{\partial \theta_j} = 0,$$

koji sa uvedenim ograničenjima

$$\Phi_j - 1 = 0 \quad \text{i} \quad \Psi_{j,j^*} - 1 = 0 \tag{7.1.7}$$

formiraju dovoljan broj algebarskih jednačina za odredjivanje rešenja projektnih promenljivih α_k i θ_k. Ove jednačine su nelinearne i rešavanje ovakvog sistema predstavlja veliki problem [41]. Postupak traženja optimalnih vrednosti projektnih promenljivih može se sprovesti i numeričkim metodama, zadovoljavanjem uslova (7.1.6) u predvidjenom konačnom rasponu projektnih promenljivih. S obzirom da su veličine α_k i θ_k celobrojne, ovakvo traženje ekstremuma i jeste rešenje nelinearnog sistema (7.1.7).
Na osnovu prikazane metode, prezentiraće se rešenja projektnih promenljivih α_k i θ_k za ploču istih dimenzija a i b, tako što će se u jednom primeru usvojiti $n = 4$, a u drugom $n = 8$, a zahtevaće se da do loma ne dodje ni u jednom sloju $j = n$. Rešenja su dobijena programom iz Priloga P.6.

Za odredjivanje rešenja projektnih promenljivih realne ploče dimenzija $a = 200$, $b = 100$ usvojene su sledeće karakteristike slojića debljine $t = 0.1$: $E_1/E_2 = 10$, $G_{31} = G_{32}$, $G_{12} = 2G_{31}$. Opterećenje je $q_0 = 0.5$ i $\omega = 10$. Karakteristike "medjusloja" su $E = 500$, $G = 100$. Karakteristike nosivosti u sistemu glavnih osa materijala su $X_t/X_p = 1.08$, $Y_t/Y_p = 1.17$ i $S = 10T$, ali tako da se $T(\theta_k)$ menja zavisno od θ_k i θ_{k+1} i manji je što je veća razlika $(\theta_k - \theta_{k+1})$.

7.1. a) Veličine α_k i θ_k za $j = n = 4$ prikazane su sledećom tabelom

slaganje	$0,90_s$	$90,0_s$	$30,15_s$	$15,30_s$	$15,60_s$	$30,60_s$	$45,-45_s$	$-45,45_s$
α_1	1	3	10	1	1	1	1	1
α_2	11	10	3	12	13	13	12	11
α_3	11	10	3	12	13	13	12	11
α_4	1	3	10	1	1	1	1	1
n_{min}	24	26	26	26	28	28	26	24

7.1. b) Veličine α_k i θ_k za $j = n = 8$ prikazane su sledećom tabelom

slaganje	$0,90/_s$	$90,0/_s$	$30,15/_s$	$15,30/_s$	$15,60/_s$	$30,60/_s$	$45,-45/_s$	$-45,45/_s$
α_1	1	1	2	1	1	1	1	1
α_2	4	1	2	4	5	3	2	2
α_3	3	5	5	4	3	5	5	5
α_4	5	5	5	5	5	5	5	5
α_5	5	5	5	5	5	5	5	5
α_6	3	5	5	4	3	5	5	5
α_7	4	1	2	4	5	3	2	2
α_8	1	1	2	1	1	1	1	1
n_{min}	26	24	38	28	28	28	26	26

Iz prikazanih rezultata dobijeno je $n_{min} = 24$ i debljina ploče je $24t$. Rešenje se pojavljuje za različita slaganja i dalja analiza je neophodna. Ona se može sprovesti pregledom rezervnih faktora slojeva i postavljenih ograničenja. Može se dozvoliti proračunski lom nekim slojevima, pa se celokupna analiza ponavlja sa izmenjenim karakteristikama krutosti celog laminata. Ova ideja je tretirana u [32], ali za laminate sa većim brojem slojeva, bez uticaja promene krutosti.

Postavljen zahtev (7.1.3) minimiziraće se za uslov

$$\omega_{11} \leq \Omega \quad \text{ili} \quad \omega_{11} - \Omega \leq 0, \tag{7.2.1}$$

gde je ω_{11} najniža soptvena frekvencija, ili frekvencija prvog moda oscilovanja. Uslov da sopstvene frekvencije za dva susedna moda oscilovanja nisu bliske veličine, može se prikazati

$$\frac{\omega_{mod=i}}{\omega_{mod=i+1}} \geq R \quad \text{ili} \quad \frac{\omega_{mod=i}}{\omega_{mod=i+1}} - R \geq 0. \tag{7.2.2}$$

Ovakvi uslovi su česti u praksi i postavljaju se za strukture pod dejstvom prinude, a razdvajaju sopstvene frekvencije, pri čemu se pretpostavlja da se frekvencija spoljnih opterećenja poznaju. U razmatranje će se uzeti gornji uslovi kao uslovi tipa jednakosti. Lagranžova funkcija za neki n broj slojeva može se predstaviti na sledeći način

$$\mathcal{L}_n = N + \lambda_1(\omega_{11} - \Omega) + \lambda_2\left(\frac{\omega_{mod=i}}{\omega_{mod=i+1}} - R\right). \tag{7.2.3}$$

Uslovi ekstremuma Lagranžove funkcije su

$$\frac{\partial \mathcal{L}_n}{\partial \alpha_j} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial \mathcal{L}_n}{\partial \theta_j} = 0,$$

koji sa uvedenim ograničenjima tipa jednakosti

$$\omega_{11} - \Omega = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\omega_{mod=i}}{\omega_{mod=i+1}} - R = 0 \tag{7.2.4}$$

formiraju dovoljan broj algebarskih jednačina za odredjivanje rešenja projektnih promenljivih α_k i θ_k. Ove jednačine su nelinearne i rešavanje ovakvog sistema diskutovano je u [43]. Postupak traženja optimalnih vrednosti projektnih promenljivih može se sprovesti i numeričkim metodama, zadovoljavanjem uslova (7.2.4) u predvidjenom konačnom rasponu projektnih promenljivih. U ovom slučaju postoji mogućnost uvodjenja uslova tipa nejednakosti uz odgovarajući smer traženja rešenja. Kao ilustracija ove metode biće prikazano rešenje projektnih promenljivih α_k i θ_k za različite brojeve slojeva simetričnog laminata. Izneti postupak realizovan je programom u Prilogu P.6.

Na istom primeru kao i u tačkama *7.1.a)* i *7.1.b)* za $n = 4$ sloja i $n = 8$ slojeva, rešenja će se prikazati tabelama. Karakteristike ploče su iste kao i za testove u *7.1.* a traženi uslovi su $\Omega \geq 190.$ i $\omega_{mod=1}/\omega_{mod=2} \geq 2.0$.

7.2. *a)* Veličine α_k i θ_k za $n = 4$ sloja

slaganje	$0,90_s$	$90,0_s$	$30,15_s$	$15,30_s$	$15,60_s$	$30,60_s$	$45,-45_s$	$-45,45_s$
α_1	3	9	7	8	4	3	3	3
α_2	15	7	14	15	15	15	15	15
α_3	15	7	14	15	15	15	15	15
α_4	3	9	7	8	4	3	3	3
n_{min}	36	32	42	46	38	36	36	36

7.2. *b)* Veličine α_k i θ_k za $n = 8$ slojeva

slaganje	$0,90/_s$	$90,0/_s$	$30,15/_s$	$15,30/_s$	$15,60/_s$	$30,60/_s$	$45,-45/_s$	$-45,45/_s$
α_1	-	4	-	-	-	4	3	3
α_2	-	3	-	-	-	5	5	5
α_3	-	5	-	-	-	5	5	5
α_4	-	5	-	-	-	5	5	5
α_5	-	5	-	-	-	5	5	5
α_6	-	5	-	-	-	5	5	5
α_7	-	3	-	-	-	5	5	5
α_8	-	4	-	-	-	4	3	3
n_{min}	-	34	-	-	-	38	36	36

Iz prikazanih rešenja se vidi da za odredjene kombinacije uglova orijentacije θ_k slojeva u razmatranom intervalu α_k nema rešenja za postavljene uslove. Ovo znači i da se odredjene osobine ne mogu dostići usvajanjem veličina jedne vrste, a promenom veličina druge vrste.

Ovakve analize pripadaju problemima optimalnog projektovanja i ovde je razmatran zahtev minimalne mase. Medjutim, primenom metoda optimizacije ne moraju se samo donositi zaključci o dostignutoj masi ili ispunjenom postavljenom zahtevu, već one mogu poslužiti za odredjivanje pojedinih osobina. S obzirom da su kod višeslojnih materijala karakteristike krutosti zavisne od velikog broja veličina, mnoge osobine se unapred ne mogu predvideti. Zbog toga je pogodno koristiti metode optimizacije u samom projektovanju ovih materijala, nametanjem uslova koje zahteva eksploatacija te strukture.

8. ZAKLJUČAK

Razvoj teorije ploča uslovljen je razvojem i primenom višeslojnih anizotropnih materijala za noseće elemente strukture, posebno u savremenim vazduhoplovnim strukturama. Prednost ovih materijala ogleda se u mogućnosti dostizanja traženih osobina, visoke nosivosti i "dobrih" dinamičkih karakteristika. Drugim rečima, postoji mogućnost konstrukcije željenog materijala. U savremenim vazduhoplovnim konstrukcijama takvi materijali se posebno primenjuju za projektovanje zona sa promenljivim opterećenjima, gde spadaju uzgonske površine i uopšte opstrujavane površine (spoljašnje i unutrašnje obloge uvodnika, naročito sekcije kombinovanih opterećenja gde se javljaju i različiti promenljivi unutrašnji nadpritisci, npr. zone integralnih rezervoara itd.).

Primamljiva upotreba ovakvih materijala donela je i mnoge teškoće projektantu. Klasični metodi provera nosivosti zasnovani na osobinama izotropnih materijala nisu davali zadovoljavajuće rezultate. Često su u strukturama uočavane neregularnosti, a one se nisu mogle otkloniti pogodnijim konstruktivnim rešenjima, jer se nisu mogli predvideti mehanizmi pojave tih neregularnosti. Zbog toga, pristupilo se traženju novih teorijskih modela ploča, da bi se opisalo što realnije naponsko stanje u svakoj tački ploče. Broj poznatih rešenja u klasičnoj teoriji za ploče od izotropnog materijala je ograničen na odredjenu klasu problema. Traženje rešenja za anizotropnu višeslojnu ploču nelinearnom teorijom višeg reda je veliki korak u razvoju teorije ploča. Uvodjenje varijacionih metoda u postupak rešavanja otvara nove mogućnosti, pa se ovim pristupom i dolazi do rešenja u savremenim analizama ploča prvog i višeg reda. Dimenzionisanje struktura pod dejstvom promenljivih opterećenja zahteva posmatranje kretanja ploče kao deformabilnog tela, tj. razmatranje modela deformabilnih tela u području elastodinamike.

U drugoj glavi razmatrano je deformabilno telo za koje su odredjeni granični uslovi u smislu spoljnih sila i za koje su postavljena ograničenja pomeranja. Jednačine kretanja su izvedene primenom Hamilton-ovog principa. Ograničenja pomeranja su uvedena kao geometrijski uslovi. Poštovanje uvedenih početnih uslova svodi razmatranje na kretanje vezanog deformabilnog tela. Pored toga, razmatranje je ograničeno na tela koja pri deformisanju poštuju generalisani Hukov zakon, tj. na tela za koja važe linearne konstitutivne relacije.

U trećoj glavi analiza je geometrijski ograničena na telo oblika ploče. Uvedena su pretpostavljena rešenja pomeranja u vidu kombinacije pet funkcija pomeranja i na taj način problem kretanja tela sa beskonačno stepeni slobode razmatran je kao petoparametarski problem. Kinematske relacije su zadržane nelinearne. Konstitutivne relacije su formirane na osnovu elementarne tehnološke celine slojića, a njihovim proizvoljnim slaganjem formirane su konstitutivne relacije višeslojnog anizotropnog materijala ploče - laminata. Sprovedene su i neophodne ravanske transformacije iz koordinatnog sistema slojića u koordinatni sistem laminata. Postupak slaganja je izveden na dva načina, uobičajenim redjanjem slojića istog ugla orijentacije u slojeve i slojeva u laminat, ali tako što je za drugi način uveden beskonačno tanak "medjusloj" izotropnih karakteristika izmedju slojeva. Ovako postavljen "medjusloj" daje mogućnost odredjivanja napona transverzalnog smicanja u dodirnim površima slojeva. Uvodjenjem kinematskih i konstitutivnih relacija i variranjem potencijalne i kinetičke energije ploče, izvedene su jednačine kretanja. Pored toga, formirani su i svi potrebni uslovi na granicama i ivicama ploče, zadržavajući se u Dekartovom koordinatnom sistemu.

U četvrtoj glavi pristupilo se traženju rešenja jednačina kretanja. Rešenje je traženo za pravougaonu prosto oslonjenu ploču opterećenu konstantnim transverzalnim pritiskom. Razmatranje se ograničava samo na simetrične laminate, čime se uvode izvesna uprošćenja jednačina kretanja. Prvo se pristupa traženju rešenja za specijalno ortotropne laminate. Funkcije pomeranja se pretpostavljaju u obliku linearnih kombinacija dvostrukih beskonačnih redova. Rešenja se nalaze odredjivanjem dvanaest nezavisnih koeficijenata i amplitude. Da bi se moglo suditi o kvalitetu ovako dobijenih rešenja izvršeni su odredjeni testovi. Formiran je program kojim se sračunavaju pomeranja u odredjenim tačkama ploče za zadato opterećenje, slaganje i debljinu slojića. Pomeranja su računata za izvedena rešenja nelinearnom teorijom višeg reda (NTVR), za rešenja gde su pomeranja aproksimirana sa tri funkcije pomeranja i za ploču koja nema "streching". Ovako dobijena rešenja pomeranja poredjena su sa rešenjima dobijenim konačnim elementima tipa "tanka ljuska". Poredjenja su prikazana u izabranim tačkama u srednjoj ravni ploče. Konstatovano je da su pomeranja w dobijena NTVR blizu rešenja MKE. S obzirom da su testovi radjeni na "tankim" pločama, nisu uočene znatne razlike izmedju pomeranja NTVR i pomeranja koja su dobijena kada je rešenje pretpostavljeno sa tri funkcije pomeranja. Pomeranja u i v dobijena su NTVR i njenom prvom aproksimacijom, ali se na osnovu ovih testova ne mogu diskutovati dobijene vrednosti ovih pomeranja.

Nelinearnom teorijom višeg reda uključeni su i dodatni koeficijenti krutosti ploče. Pošto su to veličine višeg reda od onih u klasičnoj teoriji, istim programom je ispitan i udeo pojedinih krutosti na dobijena rešenja pomeranja. Ovim testovima je konstatovano da se rešenja dobijena zanemarivanjem krutosti G_{ij} ne razlikuju od kompletnih rešenja. Pored toga, uočeno je i da se rešenja dobijena zanemarivanjem krutosti G_{ij} i F_{ij}, bez obzira na izvesna odstupanja, takodje mogu smatrati prihvatljivim. Na osnovu ovog zaključka otvorena je mogućnost za traženje "analitičkog" rešenja i za simetrične laminate. Na osnovu izvedenih rešenja formiran je program kojim su odredjena pomeranja za simetrične laminate. Dobijena pomeranja w u izabranim tačkama ploče poredjena su sa pomeranjima dobijenim elementom "tanka ljiska" i zaključeno je da se ovako dobijena rešenja mogu smatrati zadovoljavajućim. U ovoj glavi su odredjene i deformacije poštovanjem kinematskih veza, a sračunate veličine deformacija, iz realizovanog programa, prikazane su za konkretan laminat. Odredjivanje napona tretirano je na dva načina, tj. za slaganje laminata bez "medjuslojeva" i sa "medjuslojevima". Uključivanje "medjuslojeva" otvara mogućnost odredjivanja napona u njima, što je od posebnog značaja u razmatranju naponskog stanja laminata po ivicama struktura oblika ploče.

U petoj glavi razmatrano je slobodno oscilovanje prosto oslonjene ploče. Formirane su jednačine kretanja iz opštih jednačina kretanja. Pretpostavljena su harmonijska rešenja i odredjene su sopstvene frekvencije. Programskim testiranjem odredjene su frekvencije za laminat iste debljine, ali sa različitim parametrima slaganja. Testovi su uradjeni za specijalno ortotropan laminat. Uočeno je da se najniža sopstvena frekvencija razlikuje od najniže frekvencije dobijene klasičnom teorijom i da je uvek manja. Ovakav zaključak je veoma bitan za analizu kretanja u prisustvu prinude i posebno za analizu pojave "buckling"-a prosto oslonjenih višeslojnih ploča.

U šestoj glavi razmatrano je kretanje prosto oslonjene ploče u prisustvu harmonijske prinude. Formirane su jednačine kretanja ploče koja je pod dejstvom transverzalnog opterećenja. Razmatrano je stanje uspostavljenog režima oscilovanja ili "steady state". Ograničavanjem na odredjenu oblast mogućih veličina faktora dinamičkog pojačanja, nadjena su rešenja pomeranja. Iz ovako odredjenih pomeranja odredjene su deformacije i naponi. Programskom realizacijom ovog postupka sračunate su deformacije i naponi u laminatu. Zbog obimnosti podataka iz ove analize, promene deformacija i napona po vremenu prikazane su za jednu tačku laminata. Dobijene amplitudne vrednosti deformacija i napona su veće od onih pri statičkom opterećenju.

U sedmoj glavi pristupilo se konstrukciji višeslojne anizotropne ploče primenom uslova ekstremalnosti. Zahtevana je minimalna masa ploče pod uslovom da su dimenzije ploče poznate. Tako je problem sveden na zahtev minimalne debljine ploče. Uslovi su za ovaj problem ekstremalnosti postavljeni u smislu ograničavanja maksimalnih napona i u smislu ograničavanja dinamičkih karakteristika ploče. Problemi sa ovako postavljenim uslovima odvojeno su posmatrani. Rešenja su odredjena numeričkim putem i za odredjene uvedene uslove prikazana su u radu tabelama. Zbog velikog broja projektnih promenljih koje se mogu tretirati u ovoj analizi, traženje rešenja je ograničeno na odredjivanje samo broja slojića u jednom sloju, tj. u svim slojevima laminata. Uslovi kojima su uvedena dinamička ograničenja u rešavanju problema ekstremalnosti nisu dali rešenja za izabrane uglove orijentacije. Ovakvim testovima je pokazano da se pri konstrukciji anizotropnih višeslojnih ploča neke karakteristike ne mogu dostići posmatranjem samo veličina jedne vrste, već da se problem mora rešavati kompleksnijim analizama. Jedan od načina je i uvodjenje uslova ekstremalnosti, kao dodatnih uslova, pri konstrukciji višeslojnih anizotropnih nosača.

U analizi realnih struktura nelinearnom teorijom višeg reda moraju se dobro poznavati uslovi pod kojima su izvedena rešenja u ovom radu. Modeliranje realnih laminata u nosače tipa ploče, naročito opštih simetričnih laminata, zahteva ispitivanja kojima se mora ustanoviti da li se izvedena rešenja mogu primeniti i sa kakvim ograničenjima.

U dinamičkoj analizi istraživanja se mogu nastaviti razmatranjem prelaznog režima oscilovanja u istim područjima odnosa frekvencije prinude i sopstvene frekvencije. Razmatranje ovog stanja u fazi dimenzionisanja u okolini loma može uvesti odredjena ograničenja, jer se do stanja uspostavljenog režima oscilovanja mogu javiti i veća amplitudna opterećenja.

Korišćenje uslova ekstremalnosti u konstrukciji višeslojnih nosača predstavlja poseban doprinos u smislu uvodjenja dodatnih relacija, neophodnih za odredjivanje velikog broja projektnih promenljivih. Uslovi u ovakvim metodama mogu se postaviti prema projektnim karakteristikama, ali tako da se u cilju dostizanja postavljenog zahteva mogu dozvoliti i neki otkazi u strukturi. Pored toga, uslovi kojima se ograničavaju dinamičke karakteristike obično nisu saglasne sa postavljenim zahtevom, tako da je i pri rešavanju ovakvih problema ispravno uključivati metode optimalnog projektovanja.

9. LITERATURA

1. *S. G. Lekhnitski,* Theory of Elasticity of an Anisotropic Body, English Translation, Mir Publishers, 1981.
2. *S.P. Timoshenko, S. Woinowski - Krieger,* Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill, Second Edition
3. *V. Novacki,* Dinamika elastičnih sistema, Gradjevinska knjiga, Beograd 1966.
4. *J. N. Reddy,* Energy and Variational Methods in Applied Mechanics, ISBN 0-471-89673-X, 1984.
5. *J. E. Ashton, J. M. Whitney,* Theory of Laminated Plates, Standard Book N^0 87762-006-7, 1970.
6. *A. E. H. Love,* A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Fourth Edition, Cambridge 1952.
7. *С.А.АМБАРЦУМЯН,* *ТЕОРИЯ АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН, НАУКА·МОСКВА*1967.
8. *V. V. Novozhilov,* Foundations of the Nonlinear Theory of Elasticity, Graylock Press 1953.
9. *J. J. Barrau,* Calcul de Structures en Materiaux Composites, Ecole Nationale Superieure de l'Aeronautique et de l'Espace 1983.
10. *R. M. Jones,* Mechanics of Composite Materials, ISBN 0-7-032790-4
11. *K. Washizu,* Variational Methods in Elasticity and Plasticity, ISBN 0-08-026723-8
12. *J. W. S. Rayleigh,* The Theory of Sound, vol I First Edition 1877.,New York 1945.
13. *C. Y. Chia,* Nonlinear analysis of plates, McGraw-Hill Book Co., New York 1980.
14. *J. S. Halpin,* Primer of Composite Materials, Analysis, ISBN -87762-349X 1984.
15. *S. P. Timoshenko,* Vibrations of Plates and Shells, McGraww-Hill 1976.
16. *E. Reissner, Y. Stavsky,* Bending and Streching of Certain Types of Heterogeneous Æolotropic Elastic Plates, Journal of Applied Mechanics, Sep. 1961.
17. *J. M. Whitney, A. W. Leissa,* Analysis of Heterogeneous Anisotropic Plates, Journal of Applied Mechanics, June 1969.
18. *A. W. Leissa,* Buckling of Composite Plates, Composite Structures 1983(51-56)
19. *J. N. Reddy,* A Refined Nonlinear Theory of Plates with Transverse Shear Deformation, J. Solid Structures, vol 20,1984. pp 881-896
20. *K. M. Liew,K.Y. Lam,* A Rayleigh-Ritz Approach to Transverse Vibration of

Isotropic and Anisotropic Trapezoidal Plates Using Ortogonal Plate Functions, J. Solid Structures, vol. 27,1988. pp 189-203

21. *S. L. Lau, Y.K. Cheung, S.Y. Wu,* Nonlinear Vibration of Thin Elastic Plates, Part I,II, Journal of Applied Mechanics, vol 51 1984.

22. *A. Bhimaraddi,* Nonlinear Vibration of In -Plane Loaded, Imperfect, Ortotropic Plates Using the Perturbation Techinique, J. Solid Structures, vol 25 1989. pp 563-575

23. *B. Baharlou, A.W. Leissa,* Vibration and Buckling of Generally Laminated Composite Plates with Arbitrary Edge Condition, vol 29 1986.

24. *H. Hguyen, G.L. Ostiguy,* Effect of Boundary Conditions on the Dynamic Instability and Non-Linear Responce of Rectangular Plates, part I,II Journal of Sound and Vibration, 133(3) 1989.

25. *S. F. Ng, Y. Araar,* Free Vibration and Buckling Analysis of Clamped Rectangular Plates of Variable Thickness by the Galerkin Method, Journal of Sound and Vibration 135(2) 1989.

26. *G. N. Weisensel,* Natural Frequency Information for Circular and Annular Plates, Journal of Sound and Vibration 133(1) 1989.

27. *V. Birman, L. Librescu,* Supersonic Flutter of Shear Deformable Laminated Composite Flat Panels, Journal of Sound and Vibration 139(2), 1990.

28. *J. M. Whitney,* The Effects of Boundary Conditions on the Responce of Laminated Composites, J. Composite Materials, vol 4 1970.

29. *P. Crosta, M. Farioli, M. Mattaini, V. Wagner.* Mechanical Modelling and Non Destructive Inspection of Composite "Fatigue" and "Static" Damages 13. European Rotocraft Forum, Arles - France 1987.

30. *S. Birger, A. Moshonov, S. Kenig,* Failure mechanisms of graphite-fabric epoxy composites subjected to flexural loading, Composites vol 20, Number 2, March 1989.

31. *Ye Lin,* Characterization of delamination resistance in composite laminates, Composites vol 20, Number 3, May 1989.

32. *C. L. Chow, X. J. Xian,* Fracture Behavior of Carbon/Epoxy Composites with Damage Consideration, Journal of Reinforced Plastics and Composites vol 8 1989.

33. *S.S Wang,* Edge Delamination in Angle-Ply Composite Laminates, AIAA Journal vol 22, Feb. 1984.

34. *C. Bert, P. Francis,* Composite Material Mechanics: Structural Mechanics, AIAA

Journal vol 12, Number 9, Sep. 1974.

35. *D. H. Morris, H. T. Hahn,* Fracture Resistance Characterization of Graphite/Epoxy Composites, Composite Materials, Testing and Design Fourth Conference ASTM STP 017, American Society for Testing and Materials 1977.

36. *M.B. Snell,* Strenght and elastic responce of symmetric angly-ply cfrp, Composites July 1978.

37. *A. Bhimaraddi,* Static and Transient Responce of Rectangular Plates, Thin-Walled Structures 5, 1987. pp 125-143

38. *A. Bhimaraddi,* Nonlinear Flexural Vibration of Rectangular Plates Subjected to In-Plane Forces Using a New Shear Deformation Theory, Thin-Walled Structures 5, 1987. pp 309-327

39. *A.D. Dimarogous,* The Origins Of Vibration Theory, Journal of Sound and Vibration 1990. (140) pp 181-189

40. *N.J. Pagano,* Stress Fields in Composite Laminates, AFML-TR-7-114

41. *L.M. Vuković,* Analitička konstrukcija regulatira leta, Magistarski rad, Mašinski fakultet Beograd, 1984.

42. *L.M. Vuković,* Konstrukcija višeslojnih kompozitnih ploča, JDM C1-10 1988.

43. *L.M. Vuković,* Konstrukcija dinamički opterećene višeslojne ploče, JDM C1-29, 1990.

P R I L O G

VAX FORTRAN V5.5-98

```
      PROGRAM pomeranja

c     definisanje REAL, PARAMETAR,CHARACTER itd.
c     S  - odnos stranica ploce
c     a  - duza stranica ploce
c     b  - kraca stranica ploce
c     T  - debljina slojica (tehnolosa const.)
c     NN - ukupan broj slojica u lamiatu
c     ALFA(K) - broj slojica u K - tom sloju
c     TETA(K) - ugao izmedu sistema (x,y) i (1,2)j-sloja
c     Aij          - clanovi matrice istezuce krutosti
c     Eij,Fij,Gij - clanovi matrice savojne krutosti
c     Qij          - clanovi matrice Qij sloja u (1,2)j
c     QQ11(K)      - clanovi matrice Qij nad = f(teta(k))
c     Q11PR        - clanovi matrice Qij - interface

c     ucitavanje podataka

c     E1,E2                - moduli elasticnosti slojica u (1,2)
c     G12,G23,G31          - moduli smicanja slojica u (1,2)
c     NI12,NI23,NI31       - Poasonovi koeficijenti slojica u (1,2)
c     EEE,NI               - moduo elasticnosti "medjusloja" i P.koef.
c     G12PR,G23PR,G31PR - moduli klizanja "medjusloja"
c     GGK,GK               - interval t1,t2 i korak

      READ(1,'(I5)')N
      READ(1,'(5E15.5)')E1,E2,G12,NI12,NI21
      READ(1,'(2E15.5)')G31,G23
      READ(1,'(5E15.5)')EEE,NI,G12PR,G23PR,G31PR
      READ(1,'(5E15.5)')T,AVEL,BVEL,Q0,O
      READ(1,'(5E15.5)')shear,xi,xp,yi,yp
      READ(1,'(E15.5)')delm
      DO I=1,N
          READ(1,'(2I5,E15.5)') ALFA(I),TETA(I)
          TETA(I) = (4.*DATAN(1.D0)/180.)*TETA(I)
      ENDDO
      READ(*,'(F10.0)')GGK
      READ(*,'(F10.0)')GK
      MMM=GGK/GK
c     odredivanje clanova Qij
      NI  = 1. - NI12*NI21
      Q11 = E1 / NI
      Q12 = (NI12 * E2)/NI
      Q22 = E2 / NI
      Q66 = G12
      Q44 = G23
      Q55 = G31
c     odredjivanje clanova Qij - "medjusloj" Qijpr
      DO K=1,2
         DO I=1,6
            DO J=1,6
               Q(I,J,K)=0.
            ENDDO
         ENDDO
      ENDDO
      Q(1,1,1) = EEE / (1. - NII*NII)
      Q(1,2,1) = NII*EEE / (1. - NII*NII)
      Q(2,1,1) = Q(1,2,1)
      Q(2,2,1) = Q(1,1,1)
      Q(4,4,2) = G23PR
      Q(5,5,2) = G31PR
      Q(6,6,1) = G12PR
```

```
c     odredjivanje koeficijenata krutosti u sistemu (x,y)
         DO  K=1,N
            S  = SIN (TETA(K))
            C  = COS (TETA(K))
            SS = S*S
            CC = C*C
            SSSS=SS*SS
            CCCC=CC*CC
            SC = S*C
            SCCC= S*CC*C
            CSSS= C*SS*S
            SCSC=SS*CC
            DO I=1,6
               DO  J=1,6
                  QQ(I,J,K) =0.
                  QQQ(I,J,K)=0.
               ENDDO
            ENDDO
            QQ(1,1,K) = Q11*CCCC +2.*(Q12+2.*Q66)*SCSC + Q22*SSSS
            QQ(1,2,K) = (Q11+Q22-4.*Q66)*SCSC + Q12*(SSSS+CCCC)
            QQ(2,2,K) = Q11*SSSS + 2.*(Q12+2.*Q66)*SCSC + Q22*CCCC
            QQ(1,6,K) = (Q11-Q12-2.*Q66)*SCCC+(Q12-Q22+2.*Q66)*CSSS
            QQ(2,6,K) = (Q11-Q12-2.*Q66)*CSSS+(Q12-Q22+2.*Q66)*SCCC
            QQ(6,6,K) = (Q11+Q22-2.*Q12-2.*Q66)*SCSC+Q66*(SSSS+CCCC)
            QQ(2,1,K)=QQ(1,2,K)
            QQ(6,1,K)=QQ(1,6,K)
            QQ(6,2,K)=QQ(2,6,K)

            QQQ(4,4,K) = Q44*CC + Q55*SS
            QQQ(4,5,K) = (Q44 - Q55) *SC
            QQQ(5,5,K) = Q44*SS + Q55*CC
            QQQ(5,4,K) = QQQ(1,2,K)
         ENDDO
          DO  K=1,N
             DO I=1,6
                DO  J=1,6
                    IF (QQ(I,J,K) .LT. 1.) QQ(I,J,K)=0.
                    IF (Q(I,J,K) .LT. 1.) Q(I,J,K)=0.
                ENDDO
             ENDDO
          ENDDO
c     odredjivanje debljine laminata h
         NN = 0
         DO   K=1,N
           NN =NN + ALFA(K)
         ENDDO
         H = NN*T
c     dimenzije clanova matrice krutosti
         ECON = 2.*(1./3.)*T**3.
         FCON = 2.*(1./15.)*T**5.
         GCON = 2.*(1./63.)*T**7.
         ACONST =2.*T
c     koordinate polozaja slojeva u laminatu za slaganje a) i b)
c     a)  bez "medjuslojeva"
         DO K=1,N
           ZZ(K)=-NN/2.
           IF(K .GT. 1) THEN
             DO J=1,K/2
               ZZ(K)=ZZ(K)+ALFA(J)
             ENDDO
           ENDIF
         DO J=1,N-1
            ZZ(N+J)=-ZZ(N-J)
         ENDDO
```

```
c    b) sa "medjuslojevima"
        DO K=1,N
           ZZ(K)= -NN/2.
           IF( K .GT. 1) THEN
              DO  J=1,K/2
                 ZZ(K) = ZZ(K) + ALFA(J)
              ENDDO
              ZZ(K)=ZZ(K)+LAMBDA*JMOD(K,2)
           ENDIF
        ENDDO
        DO J=1,N-1
           ZZ(N+J)=-ZZ(N-J)
        ENDDO
        DO L=1,6
           DO M=1,6
              AA(L,M,1)=0.
              AA(L,M,2)=0.
              EE(L,M,1)=0.
              EE(L,M,2)=0.
              GG(L,M)  =0.
              FF(L,M)  =0.
              DO K=1,N/2
                 KK=2*K-1
                 AA(L,M,1)=AA(L,M,1)+ACONST*QQ(L,M,K)*(ZZ(KK)-ZZ(KK+1))
                 AA(L,M,2)=AA(L,M,2)+ACONST*QQQ(L,M,K)*(ZZ(KK)-ZZ(KK+1))
                 EE(L,M,1)=EE(L,M,1)+ECON*QQ(L,M,K)*(ZZ(KK)**3-ZZ(KK+1)**3)
                 EE(L,M,2)=EE(L,M,2)+ECON*QQQ(L,M,K)*(ZZ(KK)**3-ZZ(KK+1)**3)
                 FF(L,M)=FF(L,M)+FCON*QQ(L,M,K)*(ZZ(KK)**5-ZZ(KK+1)**5)
                 GG(L,M)=GG(L,M)+GCON*QQ(L,M,K)*(ZZ(KK)**7-ZZ(KK+1)**7)
              ENDDO
              DO K=2,N-1,2
                 AA(L,M,1)=AA(L,M,1)+ACONST* Q(L,M,1)*(ZZ(K)-ZZ(K+1))
                 AA(L,M,2)=AA(L,M,2)+ACONST* Q(L,M,2)*(ZZ(K)-ZZ(K+1))
                 EE(L,M,1)=EE(L,M,1)+ECON*Q(L,M,1)*(ZZ(K)**3-ZZ(K+1)**3)
                 EE(L,M,2)=EE(L,M,2)+ECON*Q(L,M,2)*(ZZ(K)**3-ZZ(K+1)**3)
                 FF(L,M)=FF(L,M)+ FCON*Q(L,M,1)*(ZZ(K)**5-ZZ(K+1)**5)
                 GG(L,M)=GG(L,M)+ GCON*Q(L,M,1)*(ZZ(K)**7-ZZ(K+1)**7)
              ENDDO
           ENDDO
        ENDDO
c    uskladjivanje dimenzija koeficijenata krutosti
        DO L=1,6
           DO M=1,6
              FFD(L,M) = (8./H/H)*FF(L,M)
              GGD(L,M) = (16./(H**4))*GG(L,M)
              EED(L,M,2)= (4./(H*H))*EE(L,M,2)
            ENDDO
        ENDDO
c    velicine iz jednacina ravnoteze
        E11 = EE(1,1,1)
        E12 = EE(1,2,1)
        E22 = EE(2,2,1)
        E66 = EE(6,6,1)
        P11 = E11 - FFD(1,1) + GGD(1,1)          ! 4. Gij=0
        P12 = E12 - FFD(1,2) + GGD(1,2)          ! 5. Fij=0 i Gij=0
        P22 = E22 - FFD(2,2) + GGD(2,2)          ! za i,j =1,2,6
        P66 = E66 - FFD(6,6) + GGD(6,6)          !
        PQ11 = E11 - FFD(1,1)                    ! slucajevi 4. i  5.
        PQ12 = E12 - FFD(1,2)                    ! za testiranje udela
        PQ22 = E22 - FFD(2,2)                    ! krutosti u
        PQ66 = E66 - FFD(6,6)                    ! pomeranjima
c    koeficijenti  resenja pomeranja a2,a5,a3,a6
        A2CONST = (1./16.)*(3.14/AVEL)
        A5CONST = (1./16.)*(3.14/BVEL)
        S = AVEL/BVEL
```

```
      AP1 = AVEL/3.14
      AP2 = BVEL/3.14
      AP  = AP1*AP1
      AA12  = AA(1,2,1) + AA(2,6,1)
      AA11  = AA(1,1,1) + AA(1,6,1)
      AA126 = AA(1,2,1) + AA(1,6,1)
      AA22  = AA(2,2,1) + AA(2,6,1)
      EA44  = AP*(AA(4,4,2)-EED(4,4,2))
      EA45  = AP*(AA(4,5,2)-EED(4,5,2))
      EA55  = AP*(AA(5,5,2)-EED(5,5,2))
      E16   = EE(1,6,1)
      E26   = EE(2,6,1)
      PA = AA12/AA11
      PB = AA126/AA22
      AAA2 = A2CONST * (S*S*PA - 1.)
      AAA5 = A5CONST * ((1./S/S)*PB - 1.)
      AX1 = AA(1,1,1)+AA(1,6,1)+S*S*(AA(6,6,1)+AA(2,6,1))
      AX2 = S*(AA(1,2,1)+AA(6,6,1)+2.*AA(2,6,1))
      AX3 = S*(AA(1,2,1)+AA(6,6,1)+2.*AA(1,6,1))
      AX4 = AA(6,6,1)+AA(1,6,1)+S*S*(AA(2,2,1)+AA(2,6,1))

      AY1 = A2CONST*(AA(1,1,1)+AA(1,6,1)+S*S*(AA(1,2,1)+2.*AA(6,6,1)+3.*AA(2,6,1)))
      AY2 = A5CONST*(S*S*(AA(2,2,1)+AA(2,6,1))+AA(1,2,1)+2.*AA(2,6,1)+3.*AA(1,6,1))

      AAA6 = (AY2*AX1-AX3*AY1)/(AX4*AX1-AX3*AX2)
      AAA3 = (AY1/AX1)-(AX2/AX1)*AAA6

      AXX1 = EA55+P11+S*S*P66+2.*S*E16
      AXX2 = EA45+S*(P12+P66)+E16+S*S*E26
      AXX3 = EA44+P66+S*S*P22+2.*S*E26

      AYY1 = (1./AP1)*(PQ11+S*S*(PQ12+2.*PQ66))+(1./AP2)*(S*S*E26+3.*E16)
      AYY2 = (1./AP2)*(PQ12+2.*PQ66+S*S*PQ22)+(1./AP1)*(E16+3.*S*S*E26)

      AAA10 = (AYY2*AXX1-AYY1*AXX2)/(AXX3*AXX1-AXX2*AXX2)
      AAA7  = (AYY1/AXX1)-(AXX2/AXX1)*AAA10
c    Koeficijent amplitude w   - f -
      V1 = PQ11 + S*S*(PQ12+2.*PQ66)
      V2 = S*(PQ12+2.*PQ66) + PQ22*S*S*S
      V3 = E11+2.*(E12+2.*E66)*S*S+E22*(S**4)
      VF = (1./AP1)*V3 - AAA7*V1 - AAA10*V2
      FCONST = (16.*AVEL**3)/(3.14**5)
      FW1 = (FCONST/VF)*Q0
c    Amplita f pod dejstvom promenljivog opterecenja za OLAM odredjeno u prilog - P.5
c    Funkcije pomeranja uo,vo,u1,v1,wo
c    X(I) Y(I)   ulaz - koordinate tacaka ploce
         DO I=1,3
            DO J=1,3
               X = AVEL*X1(I)
               Y = BVEL*Y1(J)
               AL = X/AP1
               BE = Y/AP2
               SAL = SIN(AL)
               SBE = SIN(BE)
               CAL = COS(AL)
               CBE = COS(BE)
               SAL2 = SIN(2.*AL)
               CAL2 = COS(2.*AL)
               SBE2 = SIN(2.*BE)
               CBE2 = COS(2.*BE)

               U01 = FWW*(AAA2*SAL2+AAA3*SAL2*CBE2)
               V01 = FWW*(AAA5*SBE2+AAA6*CAL2*SBE2)
               U11(I,J) = FW*AAA7*CAL*SBE
               V11(I,J) = FW*AAA10*SAL*CBE
```

```
                WOX = (FWO/AP1)*CAL*SBE
                WOY = (FWO/AP2)*SAL*CBE
                U01X = 2.*(FWW/AP1)*CAL2*(AAA2+AAA3*CBE2)
                U11X = -AAA7*(FW/AP1)*SAL*SBE
                WOXX = -(FW/AP1/AP1)*SAL*SBE
                V01Y = 2.*(FWW/AP2)*CBE2*(AAA5+AAA6*CAL2)
                V11Y = -AAA10*(FW/AP2)*SAL*SBE
                WOYY = -(FW/AP2/AP2)*SAL*SBE

                U01Y = -2.*AAA3*(FWW/AP2)*SAL2*SBE2
                V01X = -2.*AAA6*(FWW/AP1)*SAL2*SBE2
                U11Y = AAA7*(FW/AP2)*CAL*CBE
                V11X = AAA10*(FW/AP1)*CAL*CBE
                WOXY = (FW/AP1/AP2)*CAL*CBE
                DO K=1,2*N-1
                   SKSI  = (4./H/H)*ZZ(K)*ZZ(K)*T*T
                   DKSI(K) = SKSI*(ZZ(K)*T/3.)
c   1.    Pomeranja
                   U0 = U01+ZZ(K)*T*(U11(I,J)-W0X*COS(O*TT))-DKSI(K)*U11(I,J)
                   V0 = V01+ZZ(K)*T*(V11(I,J)-W0Y*COS(O*TT))-DKSI(K)*V11(I,J)
                   W0 = FW*SAL*SBE
                ENDDO
              ENDDO
            ENDDO
            ENNDO
c   2.    Pomeranja za  U01,V01=0

c   3.    Pomeranja za  U01,V01,U11,V11=0

c   Izlaz    U0,V0,W0
```

```
      PROGRAM deformacije

c    - iz PROGRAMa pomeranja koriste se sve izracunate  velicine
c    i zadrzavaju se u istim petljama

              EXX0(I,J)  = U01X+(1./2.)*W0X*W0X*COS(2.*O*TT)
              EXX01(I,J) = U11X-W0XX
              EXX02(I,J) = U11X

              EYY0(I,J)  = V01Y+(1./2.)*W0Y*W0Y*COS(2.*O*TT)
              EYY01(I,J) = V11Y-W0YY
              EYY02(I,J) = V11Y

              EXY0(I,J)  = U01Y+V01X+W0X*W0Y*COS(2.*O*TT)
              EXY01(I,J) = U11Y+V11X-2.*W0XY
              EXY02(I,J) = U11Y+V11X

              DO K=1,2*N-1

c    Deformacija exx

              EXX1 = ZZ(K)*T*EXX01(I,J)
              EXX2 = -DKSI(K)*EXX02(I,J)
              EXX(I,J,K,MM_1)  = EXX0(I,J)+EXX1+EXX2

c    Deformacija eyy

              EYY1 = ZZ(K)*T*EYY01(I,J)
              EYY2 = -DKSI(K)*EYY02(I,J)
              EYY(I,J,K,MM_1)  = EYY0(I,J)+EYY1+EYY2

c    Deformacija exy

              EXY1 = ZZ(K)*T*EXY01(I,J)
              EXY2 = -DKSI(K)*EXY02(I,J)
              EXY(I,J,K,MM_1)  = EXY0(I,J)+EXY1+EXY2

c    Deformacija exz,eyz

              ZSKSI(K) = 1. - SKSI
              EXZ(I,J,K,MM_1)  = ZSKSI(K)*U11(I,J)
              EYZ(I,J,K,MM_1)  = ZSKSI(K)*V11(I,J)


c    Izlaz


c    Prikazivanje deformacija u vidu liste sracunatih velicina
c    je nepregledno, pa se uvodi grafika.
```

```
      PROGRAM naponi

c    - iz PROGRAMa deformacije koriste se vec sracunate velicine
c    transformacije matrice deformacija
          DO I=1,6
             DO M=1,3
                DO M1=1,3
                   E0(1,I,M,M1) =0.   ! epsilon(*)
                   E01(1,I,M,M1)=0.   ! epsilon(*1)
                   E02(1,I,M,M1)=0.   ! epsilon(*2)
                   E0T(1,I,M,M1)=0.
                ENDDO
             ENDDO
          ENDDO
          DO M=1,3
             DO M1=1,3
               E0(1,1,M,M1)=EXX0(M,M1)
               E0(1,2,M,M1)=EYY0(M,M1)
               E0(1,6,M,M1)=EXY0(M,M1)
               E01(1,1,M,M1)=EXX01(M,M1)
               E01(1,2,M,M1)=EYY01(M,M1)
               E01(1,6,M,M1)=EXY01(M,M1)
               E02(1,1,M,M1)=EXX02(M,M1)
               E02(1,2,M,M1)=EYY02(M,M1)
               E02(1,6,M,M1)=EXY02(M,M1)
               E0T(1,4,M,M1)=V11(M,M1)
               E0T(1,5,M,M1)=U11(M,M1)
            ENDDO
         ENDDO
c     Naponi u k_tom sloju
         DO M=1,3
           DO M1=1,3
             DO J=1,6
                DO K=1,2*N-2
                   DO L=1,2
                      SIGMA0(MM_1,J,K,L,M,M1)=0.
                      SIGMA1(MM_1,J,K,L,M,M1)=0.
                      SIGMA2(MM_1,J,K,L,M,M1)=0.
                      SIGMAT(MM_1,J,K,L,M,M1)=0.
                      SIGMA(MM_1,J,K,L,M,M1) =0.
                   ENDDO
                ENDDO
             ENDDO
          ENDDO
      ENDDO
      DO M=1,3
         DO M1=1,3
            DO K=1,N-1,2
               DO L=1,2
                  DO J=1,6
                     DO I=1,6
                        KK=K+L-1
                        KKK=(K+1)/2
                 SIGMA0(MM_1,J,K,L,M,M1)=SIGMA0(MM_1,J,K,L,M,M1)+
     *                                   QQ(J,I,KKK)*E0(1,I,M,M1)
                 SIGMA1(MM_1,J,K,L,M,M1)=SIGMA1(MM_1,J,K,L,M,M1)+
     *                                   ZZ(KK)*T*QQ(J,I,KKK)*E01(1,I,M,M1)
                 SIGMA2(MM_1,J,K,L,M,M1)=SIGMA2(MM_1,J,K,L,M,M1)
     *                                   -DKSI(KK)*QQ(J,I,KKK)*E02(1,I,M,M1)
                 SIGMAT(MM_1,J,K,L,M,M1)=SIGMAT(MM_1,J,K,L,M,M1)+
     *                                   ZSKSI(KK)*QQQ(J,I,KKK)*E0T(1,I,M,M1)
                 ENDDO
                 SIGMA(MM_1,J,K,L,M,M1) =SIGMA(MM_1,J,K,L,M,M1)+ SIGMA0(MM_1,J,K,L,M,M1)+
     *                                   SIGMA1(MM_1,J,K,L,M,M1)+SIGMA2(MM_1,J,K,L,M,M1)
                ENDDO
             ENDDO
          ENDDO
```

```
            DO K=N,2*N-2,2
               DO L=1,2
                  DO J=1,6
                     DO I=1,6
                        KK=K+L-1
                        KKK=(K+2)/2
                    SIGMA0(MM_1,J,K,L,M,M1)=SIGMA0(MM_1,J,K,L,M,M1)+
     *                                      QQ(J,I,KKK)*E0(1,I,M,M1)
                    SIGMA1(MM_1,J,K,L,M,M1)=SIGMA1(MM_1,J,K,L,M,M1)+
     *                                      ZZ(KK)*T*QQ(J,I,KKK)*E01(1,I,M,M1)
                    SIGMA2(MM_1,J,K,L,M,M1)=SIGMA2(MM_1,J,K,L,M,M1)
     *                                      -DKSI(KK)*QQ(J,I,KKK)*E02(1,I,M,M1)
                    SIGMAT(MM_1,J,K,L,M,M1)=SIGMAT(MM_1,J,K,L,M,M1)+
     *                                      ZSKSI(KK)*QQQ(J,I,KKK)*E0T(1,I,M,M1)
                    ENDDO
                    SIGMA(MM_1,J,K,L,M,M1) =SIGMA(MM_1,J,K,L,M,M1)+SIGMA0(MM_1,J,K,L,M,M1)+
     *                                      SIGMA1(MM_1,J,K,L,M,M1)+SIGMA2(MM_1,J,K,L,M,M1)
                  ENDDO
               ENDDO
            ENDDO
            DO K=2,N-1,2
               DO L=1,2
                  DO J=1,6
                     DO I=1,6
                        KK=K+L-1
                    SIGMA0(MM_1,J,K,L,M,M1)=SIGMA0(MM_1,J,K,L,M,M1)+
     *                                      Q(J,I,1)*E0(1,I,M,M1)
                    SIGMA1(MM_1,J,K,L,M,M1)=SIGMA1(MM_1,J,K,L,M,M1)+
     *                                      ZZ(KK)*T*Q(J,I,1)*E01(1,I,M,M1)
                    SIGMA2(MM_1,J,K,L,M,M1)=SIGMA2(MM_1,J,K,L,M,M1)
     *                                      -DKSI(KK)*Q(J,I,1)*E02(1,I,M,M1)
                    SIGMAT(MM_1,J,K,L,M,M1)=SIGMAT(MM_1,J,K,L,M,M1)+
     *                                      ZSKSI(KK)*Q(J,I,2)*E0T(1,I,M,M1)
                    ENDDO
                    SIGMA(MM_1,J,K,L,M,M1) =SIGMA(MM_1,J,K,L,M,M1)+SIGMA0(MM_1,J,K,L,M,M1)+
     *                                      SIGMA1(MM_1,J,K,L,M,M1)+SIGMA2(MM_1,J,K,L,M,M1)
                  ENDDO
               ENDDO
            ENDDO
            DO K=N+1,2*N-2,2
               DO L=1,2
                  DO J=1,6
                     DO I=1,6
                        KK=K+L-1
                    SIGMA0(MM_1,J,K,L,M,M1)=SIGMA0(MM_1,J,K,L,M,M1)+
     *                                      Q(J,I,1)*E0(1,I,M,M1)
                    SIGMA1(MM_1,J,K,L,M,M1)=SIGMA1(MM_1,J,K,L,M,M1)+
     *                                      ZZ(KK)*T*Q(J,I,1)*E01(1,I,M,M1)
                    SIGMA2(MM_1,J,K,L,M,M1)=SIGMA2(MM_1,J,K,L,M,M1)
     *                                      -DKSI(KK)*Q(J,I,1)*E02(1,I,M,M1)
                    SIGMAT(MM_1,J,K,L,M,M1)=SIGMAT(MM_1,J,K,L,M,M1)+
     *                                      ZSKSI(KK)*Q(J,I,2)*E0T(1,I,M,M1)
                    ENDDO
                    SIGMA(MM_1,J,K,L,M,M1) =SIGMA(MM_1,J,K,L,M,M1)+SIGMA0(MM_1,J,K,L,M,M1)+
     *                                      SIGMA1(MM_1,J,K,L,M,M1)+SIGMA2(MM_1,J,K,L,M,M1)
                  ENDDO
               ENDDO
            ENDDO
         ENDDO
      ENDDO
c     Izlaz
c     Prikazivanje napona u listi je nepregledno, pa se rezultati prikazuju za tacku
c     ploce (x,y) po z-koordinati laminata graficki.
```

```
c    UVODJENJE "MEDJUSLOJA" da bi se eliminisao utical "medjusloja", testirane su velicine
c                         clanova matr. krutosti sa i bez "medjusloja".
c    porediti velicine Aij,Eij,Fij i Gij
c    a) ---   bez "medjuslojeva"   ---
        DO K=1,N
          ZZ(K)=-NN/2.
          IF(K .GT. 1) THEN
            DO J=1,K/2
             ZZ(K)=ZZ(K)+ALFA(J)
            ENDDO
          ENDIF
        DO J=1,N-1
           ZZ(N+J)=-ZZ(N-J)
        ENDDO
c    b) --- sa "medjuslojevima" ---
        DO K=1,N
           ZZ(K)= -NN/2.
           IF( K .GT. 1) THEN
              DO    J=1,K/2
                ZZ(K) = ZZ(K) + ALFA(J)
              ENDDO
              ZZ(K)=ZZ(K)+LAMBDA*JMOD(K,2)
           ENDIF
        ENDDO
        DO J=1,N-1
           ZZ(N+J)=-ZZ(N-J)
        ENDDO
        DO L=1,6
           DO M=1,6
              AA(L,M,1)=0.
              AA(L,M,2)=0.
              EE(L,M,1)=0.
              EE(L,M,2)=0.
              GG(L,M)=0.
              FF(L,M)=0.
              DO K=1,N/2
                 KK=2*K-1
                 AA(L,M,1)=AA(L,M,1)+ACONST*QQ(L,M,K)*(ZZ(KK)-ZZ(KK+1))
                 AA(L,M,2)=AA(L,M,2)+ACONST*QQQ(L,M,K)*(ZZ(KK)-ZZ(KK+1))
                 EE(L,M,1)=EE(L,M,1)+ECON*QQ(L,M,K)*(ZZ(KK)**3-ZZ(KK+1)**3)
                 EE(L,M,2)=EE(L,M,2)+ECON*QQQ(L,M,K)*(ZZ(KK)**3-ZZ(KK+1)**3)
                 FF(L,M)=FF(L,M)+FCON*QQ(L,M,K)*(ZZ(KK)**5-ZZ(KK+1)**5)
                 GG(L,M)=GG(L,M)+GCON*QQ(L,M,K)*(ZZ(KK)**7-ZZ(KK+1)**7)
              ENDDO
              DO K=2,N-1,2
                 AA(L,M,1)=AA(L,M,1)+ACONST* Q(L,M,1)*(ZZ(K)-ZZ(K+1))
                 AA(L,M,2)=AA(L,M,2)+ACONST* Q(L,M,2)*(ZZ(K)-ZZ(K+1))
                 EE(L,M,1)=EE(L,M,1)+ECON*Q(L,M,1)*(ZZ(K)**3-ZZ(K+1)**3)
                 EE(L,M,2)=EE(L,M,2)+ECON*Q(L,M,2)*(ZZ(K)**3-ZZ(K+1)**3)
                 FF(L,M)=FF(L,M)+ FCON*Q(L,M,1)*(ZZ(K)**5-ZZ(K+1)**5)
                 GG(L,M)=GG(L,M)+ GCON*Q(L,M,1)*(ZZ(K)**7-ZZ(K+1)**7)
              ENDDO
           ENDDO
        ENDDO
c   Uskladjivanje dimenzija koeficijenata krutosti
        DO L=1,6
           DO M=1,6
              FFD(L,M) = (8./H/H)*FF(L,M)
              GGD(L,M) = (16./(H**4))*GG(L,M)
              EED(L,M,2)= (4./(H*H))*EE(L,M,2)
            ENDDO
        ENDDO
c     izlaz Aij, Eij,Fij,Gij
c     poredjenjem dobijenih velicina odredjeno je lambda=0.01t
```

```
      PROGRAM slob_osc

c    u P.1 resene su amplitude na osnovu prvog clana m=1,n=1

c    koeficijent amplitude w   —f—

      V1 = PQ11 + S*S*(PQ12+2.*PQ66)
      V2 = S*(PQ12+2.*PQ66) + PQ22*S*S*S
      V3 = E11+2.*(E12+2.*E66)*S*S+E22*(S**4)

      VF = (1./AP1)*V3 - AAA7*V1 - AAA10*V2
      FCONST = (16.*AVEL**3)/(3.14**5)
      FW1 = (FCONST/VF)*Q0

c    resenja u potpunom obliku su

      DO M=1,6
         DO N1=1,6
            VR1(M,N1)=0
            VR2(M,N1)=0
            VR3(M,N1)=0
         ENDDO
      ENDDO

      DO M=1,6
         DO N1=1,6
           VR1(M,N1) = PQ11*M**3 + S*S*(PQ12+2.*PQ66)*M*N1*N1
           VR2(M,N1) = S*(PQ12+2.*PQ66)*M*M*N1 + PQ22*S*S*S*N1**3
           VR3(M,N1) = E11*M**4+2.*(E12+2.*E66)*S*S*M*M*N1*N1+E22*S**4*N1**4
           VRF = (1./AP1)*VR3(M,N1) - AAA7*VR1(M,N1) - AAA10*VR2(M,N1)

c    frekvencija dobijena NTVR

           OM2 = OMCONST*VRF

c    frekvencija K. ploce

           OM2K=OMCONST*VR3(M,N1)

           ORM(M,N1)  = SQRT(OM2)
           ORK(M,N1)  = SQRT(OM2K)
      ENDDO
        ENDDO

c    na osnovu odredjenih frekvencija odredjeni su modovi i izabrano je prvih petnaest.

c    izlaz ORK (mod=1,15)
```

```
      PROGRAM prinuda

c     ulaz O - frekvencija prinude
      O2 = O*O
      CON = (4.*ATAN(1.)/AVEL)**3
      RO = const.                  ! gustina laminata
      OMCONST = CON/RO
      OM2 = OMCONST*VF
      OM  = SQRT(OM2)

c     faktor dinamickog pojacanja
      OLAM = 1.-(O2/OM2)

c     promenjiva vreme TT na intervalu t1,t2
      MMM=GGK/GK
      DO MM_1=1,MMM
         TT=GK*(MM_1-1)
         FWO = FW1/OLAM
         FW = FWO*(COS(O*TT))
         FWW= FWO*FWO*COS(2.*O*TT)

c     odredjivanje pomeranja prema Programu - pomeranja

c     odredjivanje deformacija prema Programu - deformacije

c     odredjivanje napona prema Programu - naponi

c     graficki izlaz  EXX,EYY,EXY,EYZ,EXZ  i  SIGMA , SIGMAT kao f(vreme)
```

```
      PROGRAM masa

c   ulaz - interval ALFA(k), BETA(k)
c   shear - maks. nosivost na smicanje
c   xi    - maks. nosivost u pravcu 1 istezanje
c   xp    - maks. nosivost u pravcu 1 pritisak
c   yi    - maks. nosivost u pravcu 2 istezanje
c   yp    - maks. nosivost u pravcu 2 pritisak
c   delm  - referentna delaminacija
      READ(1,'(5E15.5)')SHEAR,XI,XP,YI,YP
      READ(1,'(E15.5)')DELM
      DO I=1,N
          READ(1,'(2I5,E15.5)') n_ALFA1(I),n_ALFA2(I),TETA(I)
          WRITE(*,'(2I5,E15.5)')n_ALFA1(I),n_ALFA2(I),TETA(I)
          TETA(I) = (4.*DATAN(1.D0)/180.)*TETA(I)
      ENDDO
c   odredjivanje krutosti slojeva i "medjuslojeva" u (x,y)
c   ukupan broj slojica u laminatu     - NN
      NNMIN= "VELIKO"
      DO I1=N_ALFA1(1),N_ALFA2(1)
         ALFA(1)=I1
         DO I2=N_ALFA1(2),N_ALFA2(2)
             ALFA(2)=I2
             DO I3=N_ALFA1(3),N_ALFA2(3)
                ALFA(3)=I3
                DO I4=N_ALFA1(4),N_ALFA2(4)
                   ALFA(4)=I4
                      ALFA(5)=I4
                      ALFA(6)=I3
                      ALFA(7)=I2
                      ALFA(8)=I1
      NN = 0
      DO   K=1,N
        NN =NN + ALFA(K)
      ENDDO
      H = NN*T
c   odredjivanje istezucih i savojnih krutosti laminata
c   ---------|------------------------|
c            v                        |
c                                     v
c   resenje pomeranja              dinamicka
c   odredjivanje deformacija           ogranicenja
c   odredjivanje napona
      IF( MM_1 .EQ. 1) THEN
      DO M=1,3
         DO M1=1,3
            DO K=1,N-1,2
               DO L=1,2
                  DO J=1,6
                  SLOJT=SIGMAT(MM_1,J,K,L,M,M1)
                  IF( SLOJT .NE. 0.) THEN
                  IF (SLOJT .GT. SHEAR) GO TO 105
                  RFS(J,K,L,M,M1)=SHEAR/SLOJT
                  ENDIF
                  IF( J .EQ. 1 .OR. J .EQ. 2 .OR. J .EQ. 6) THEN
                     IF (J .EQ. 1 ) XSIGMA=SIGMA(MM_1,J,K,L,M,M1)
                     IF (J .EQ. 2 ) YSIGMA=SIGMA(MM_1,J,K,L,M,M1)
                     IF (J .EQ. 6 ) XYSIGMA=SIGMA(MM_1,J,K,L,M,M1)
                  ENDIF
                  ENDDO
```

```
c     Naponi za (1,2) u svakom sloju i "medjusloju"
        XSIGMAPR=XSIGMA*COS(TETA(K))*COS(TETA(K))+YSIGMA*SIN(TETA(K))*SIN(TETA(K))+
     *          XYSIGMA*2.*SIN(TETA(K))*COS(TETA(K))
        YSIGMAPR=XSIGMA*SIN(TETA(K))*SIN(TETA(K))+YSIGMA*COS(TETA(K))*COS(TETA(K))-
     *          XYSIGMA*2.*SIN(TETA(K))*COS(TETA(K))
        XYSIGMAPR=-XSIGMA*SIN(TETA(K))*COS(TETA(K))+YSIGMA*SIN(TETA(K))*COS(TETA(K))+
     *           XYSIGMA*(COS(TETA(K))*COS(TETA(K))-SIN(TETA(K))*SIN(TETA(K)))
        XYSIGMAPR=ABS(XYSIGMAPR)
                       X=XP
                       IF (XSIGMAPR .GT. 0.) X=XI
                       Y=YP
                       IF (YSIGMAPR .GT. 0.) Y=YI
                       X_1=XSIGMAPR*XSIGMAPR
                       Y_1=YSIGMAPR*YSIGMAPR
                       SXY=XSIGMAPR*YSIGMAPR
                       R1=X_1/(X**2)
                       R2=SXY/(X**2)
                       R3=Y_1/(Y**2)
                       R4=(XYSIGMAPR/SHEAR)**2
                       RFF(K,L,M,M1)= R1-R2+R3+R4
                       IF (RFF(K,L,M,M1) .GT. 1.02) THEN
                            GO TO 105
                       ENDIF
c     rff izabrano
                 ENDDO
              ENDDO
              DO K=N,2*N-2,2
                 DO L=1,2
c                   KK=K+L-1
                    DO J=1,6
                        SLOJT=SIGMAT(MM_1,J,K,L,M,M1)
                        IF( SLOJT .NE. 0.) THEN
                        IF (SLOJT .GT. SHEAR) GO TO 105
                        RFS(J,K,L,M,M1)=SHEAR/SLOJT
c     rfs izabrano
                        ENDIF
                    IF( J .EQ. 1 .OR. J .EQ. 2 .OR. J .EQ. 6) THEN
                       IF (J .EQ. 1 ) XSIGMA=SIGMA(MM_1,J,K,L,M,M1)
                       IF (J .EQ. 2 ) YSIGMA=SIGMA(MM_1,J,K,L,M,M1)
                       IF (J .EQ. 6 ) XYSIGMA=SIGMA(MM_1,J,K,L,M,M1)
                    ENDIF
                    ENDDO
        XSIGMAPR=XSIGMA*COS(TETA(K))*COS(TETA(K))+YSIGMA*SIN(TETA(K))*
     *          SIN(TETA(K))+XYSIGMA*2.*SIN(TETA(K))*COS(TETA(K))
        YSIGMAPR=XSIGMA*SIN(TETA(K))*SIN(TETA(K))+YSIGMA*COS(TETA(K))*COS(TETA(K))-
     *          XYSIGMA*2.*SIN(TETA(K))*COS(TETA(K))
        XYSIGMAPR=-XSIGMA*SIN(TETA(K))*COS(TETA(K))+YSIGMA*SIN(TETA(K))*COS(TETA(K))+
     *           XYSIGMA*(COS(TETA(K))*COS(TETA(K))-SIN(TETA(K))*SIN(TETA(K)))
        XYSIGMAPR=ABS(XYSIGMAPR)
                       X=XP
                       IF (XSIGMAPR .GT. 0.) X=XI
                       Y=YP
                       IF (YSIGMAPR .GT. 0.) Y=YI
                       X_1=XSIGMAPR*XSIGMAPR
                       Y_1=YSIGMAPR*YSIGMAPR
                       SXY=XSIGMAPR*YSIGMAPR
                       R1=X_1/(X**2)
                       R2=SXY/(X**2)
                       R3=Y_1/(Y**2)
                       R4=(XYSIGMAPR/SHEAR)**2
                       RFF(K,L,M,M1)= R1-R2+R3+R4
                       IF (RFF(K,L,M,M1) .GT. 1.02) THEN
                            GO TO 105
                       ENDIF
c     rff izabrano
                 ENDDO
              ENDDO
```

```
            DO K=2,N-1,2
               DO L=1,2
                  DO J=1,6
                        IF ((M .EQ. 3 .AND. M1 .EQ. 1) .OR.
     *                     ( M .EQ. 1 .AND. M1 .EQ. 3) ) THEN
           KK=(K+2)/2
           IF (ABS(TETA(KK-1)-TETA(KK)) .GE. 1.5708) SHEAR1=DELM
           IF (ABS(TETA(KK-1)-TETA(KK)) .LT. 1.5708) SHEAR1=1.05*DELM
           IF (ABS(TETA(KK-1)-TETA(KK)) .LT. 1.0472) SHEAR1=1.2*DELM
           IF (ABS(TETA(KK-1)-TETA(KK)) .LT. 0.5236) SHEAR1=1.5*DELM
           IF (ABS(TETA(KK-1)-TETA(KK)) .LT. 0.2618) SHEAR1=2.*DELM
           MSLOJ=SIGMAT(MM_1,J,K,L,M,M1)
           IF (MSLOJ .GT. SHEAR1) GO TO 105
           RFMS(J,K,L,M,M1)=MSLOJ/SHEAR1
           ENDIF
c    rfms izabrano
                  ENDDO
               ENDDO
            ENDDO
            DO K=N+1,2*N-2,2
               DO L=1,2
                  DO J=1,6
                        IF ((M .EQ. 3 .AND. M1 .EQ. 1) .OR.
     *                    ( M .EQ. 1 .AND. M1 .EQ. 3) ) THEN
           KK=(K+2)/2
           IF (ABS(TETA(KK)-TETA(KK+1)) .GE. 1.5708) SHEAR1=DELM
           IF (ABS(TETA(KK)-TETA(KK+1)) .LT. 1.5708) SHEAR1=1.05*DELM
           IF (ABS(TETA(KK)-TETA(KK+1)) .LT. 1.0472) SHEAR1=1.2*DELM
           IF (ABS(TETA(KK)-TETA(KK+1)) .LT. 0.5236) SHEAR1=1.5*DELM
           IF (ABS(TETA(KK)-TETA(KK+1)) .LT. 0.2618) SHEAR1=2.*DELM
           MSLOJ=SIGMAT(MM_1,J,K,L,M,M1)
           IF (MSLOJ .GT. SHEAR1) GO TO 105
           RFMS(J,K,L,M,M1)=MSLOJ/SHEAR1
                        ENDIF
c    rfms izabrano
                  ENDDO
               ENDDO
            ENDDO
         ENDDO
      ENDDO
      IF( NN .LT. NNMIN) THEN
         NNMIN=NN
         DO I_ANA7=1,N
            ALFAMIN(I_ANA7)=ALFA(I_ANA7)
         ENDDO
         DO M=1,3
            DO M1=1,3
               DO K=1,2*N-2
                  DO L=1,2
                     RFFMIN(K,L,M,M1)=RFF(K,L,M,M1)
                     DO J=1,6
                        RFSMIN(J,K,L,M,M1)=RFS(J,K,L,M,M1)
                        RFMSMIN(J,K,L,M,M1)=RFMS(J,K,L,M,M1)
                     ENDDO
                  ENDDO
               ENDDO
            ENDDO
         ENDDO
      ENDIF
      ENDIF
      ENDDO
105   CONTINUE
      ENDDO
      ENDDO
      ENDDO
      ENDDO
c    izlaz - dobijene vrednosti alfamin(i_ana7)
```

```
c     sopstvena frekvencija m,n =1,2,3,4                    <---|
         DO M=1,6
            DO N1=1,6
               VR1(M,N1)=0.
               VR2(M,N1)=0.
               VR3(M,N1)=0.
            ENDDO
         ENDDO
         DO M=1,6
            DO N1=1,6
          VR2(M,N1) = S*(PQ12+2.*PQ66)*M*M*N1 + PQ22*S*S*S*(N1**3)
          VR3(M,N1) = E11*M**4+2.*(E12+2.*E66)*S*S*M*M*N1*N1+E22*(S**4)*(N1**4)
          VRF = (1./AP1)*VR3(M,N1) - AAA7*VR1(M,N1) - AAA10*VR2(M,N1)
          OM2 = OMCONST*VRF
c         OM2K=OMCONST*VR3(M,N1)
          ORM(M,N1)  = SQRT(OM2)
          ORM1=ORM(1,1)
          IF(M .GT. 1 .OR. N .GT. 1) THEN
          IF( ORM(M,N1) .GT. ORM3) ORM3=ORM(M,N1)
          ENDIF
          ENDDO
           ENDDO
          OPSI = ORM3/ORM1
          IF(ORM1 .GT.  190.) THEN
          IF(OPSI .GT. 2.0) THEN
          IF( NN .LT. NNMIN) THEN
          NNMIN=NN
            DO I_ANA7=1,N
               ALFAMIN(I_ANA7)=ALFA(I_ANA7)
            ENDDO
            OPSIMIN=OPSI
                 ENDIF
             ENDIF
          ENDIF
          CONTINUE
                 ENDDO
              ENDDO
            ENDDO
          ENDDO
c     izlaz - dobijene vrednosti alfamin(i_ana7)
```

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Изјављујем да је докторска дисертација под насловом

Прилог динамичкој анализи вишеслојних анизотропних плоча

- □ резултат сопственог истраживачког рада,
- □ да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис

У Београду, 30.03.2015.

____

Прилог 2.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Прилог динамичкој анализи вишеслојних анизотропних плоча

која је моје ауторско дело.

Сагласан/на сам да електронска верзија моје дисертације буде доступна у отвореном приступу.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

5. Ауторство – без прераде

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци. Кратак опис лиценци дат је на следећој страници.)

Потпис

Леке Бујашевић

У Београду, 30.03.2015.