УНИВЕРЗИТЕТ У НИШУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
ДЕПАРТМАН ЗА МАТЕМАТИКУ

Надица М. Михајловић

ПЕРТУРБАЦИЈЕ УОПШТЕНИХ ИНВЕРЗА ЕЛЕМЕНАТА У ПРСТЕНИМА

ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА

Ниш, 2023.

UNIVERSITY OF NIŠ
FACULTY OF SCIENCES AND MATHEMATICS
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Nadica M. Mihajlović

PERTURBATIONS OF GENERALIZED INVERSES OF THE ELEMENTS IN RINGS

DOCTORAL DISSERTATION

Niš, 2023.

Подаци о докторској дисертацији

Ментор:	др Драган С. Ђорђевић, редовни професор, Природно – математички факултет Универзитет у Нишу
Наслов:	Пертурбације уопштених инверза елемената у прстенима
Резиме:	Тема ове докторске дисертације је проучавање пертурбационих особина уопштених инверза елемената у прстенима са или без инволуције, као и у Банаховим и C*-алгебрама. До сада су проблеми у највећој мери истраживани у случају матрица, тј. оператора на коначно димензионалним векторским просторима. Идеја је била да се уместо матричних декомпозиција искористе декомпозиције елемената у прстенима индуковане идемпо-тентима. На овај начин рачун у прстенима се приближава рачуну у скупу 2x2 матрица над поменутим прстеном. Додатну тежину чини коришћење идемпотената у Банаховим и C*-алгебрама. Полазећи од матричне форме произвољног елемента прстена у односу на одговарајуће идемпотенте, конструишу се матричне форме групног и језгарног инверза у односу на исте идемпотенте. Добијени су нови резултати у вези пертурбација Мур-Пенроузовог инверза, пре свега о немењању редоследа инверзије производа елемената у прстенима са инволуцијом. Проширени су резултати који важе за матрице на елементе произвољне Банахове алгебре. Осим тога, уводи се појам акутне пертурбације за групни инверз у Банаховој алгебри у односу на спектрални радијус уместо у односу на норму елемента. На тај начин долази се до експлицитног израза који повезује групне инверзе полазног и пертурбованог елемента. Штавише, добијају се једноставнији изрази за пертурбацију уопштених инверза, представљене су оптималне пертурбационе границе за језгарни инверз када пертурбација испуњава одређене услове.
Научна област:	Математичке науке
Научна дисциплина:	Теорија оператора, Функционална анализа
Кључне речи:	групни инверз, Мур-Пенроузов инверз, језгарни инверз, прстен са инволуцијом, Банахова алгебра, C*-алгебра, пертурбације, закон непромењеног редоследа
УДК:	517.983/.986(043.3)
CERIF класификација:	P 140 Класе, Фуријерова анализа, функционална анализа
Тип лиценце Креативне заједнице:	**CC BY-NC-ND**

Data on Doctoral Dissertation

Doctoral Supervisor:	Dragan S.Đorđević, PhD, full professor at Faculty of Sciences and Mathematics, University of Niš
Title:	Perturbations of generalized inverses of the elements in rings
Abstract:	The topic of this doctoral dissertation is the study of some perturbation properties of generalized inverses of the elements in rings with or without involution, as well as in Banach algebra and C*-algebra. So far, the problems are mostly investigated in the case of the matrices, i.e. operators on finite dimensional vector spaces. The idea was to use decompositions of elements in rings induced by idempotents, instead of matrix decompositions. In this way, the calculus in rings approaches to the calculus in the set of 2x2 matrices over mentioned ring. The additional difficulty appears in using idempotents in Banach and C*-algebras. Starting from the matrix form of an arbitrary ring element regarding to a corresponding idempotents, the matrix forms of the group and core inverse with respect to the same idempotents are constructed. Several characterizations are established for the forward order law for the Moore-Penrose inverse to hold. The results valid for matrices have been extended to elements of arbitrary Banach algebras. Further, we introduced the acute perturbation for the group inverse in Banach algebra with the respect to the spectral radius instead of the spectral the norm. In this way, we described an explicit expression that connects the group inverses of the initial and the perturbed elements. Moreover, more simple expressions for the perturbation of the generalized inverses are obtained and the optimal perturbation bounds for the core inverse presented when the perturbation satisfies certain conditions.
Scientific Field:	Mathematics
Scientific Discipline:	Theory of operators, Functional analysis
Key Words:	group inverse, Moore-Penrose inverse, core inverse, ring with involution, Banach algebra, C*-algebra, perturbations, forward order law
UDC:	517.983/.986(043.3)
CERIF Classification:	P140 Series, Fourier analysis, functional analysis
Creative Commons License Type:	**CC BY-NC-ND**

Прилог 4/1

	ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ **НИШ**
	КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, **РБР**:	
Идентификациони број, **ИБР**:	
Тип документације, **ТД**:	Монографска
Тип записа, **ТЗ**:	Текстуални
Врста рада, **ВР**:	Докторска дисертација
Аутор, **АУ**:	Надица М. Михајловић
Ментор, **МН**:	Драган С. Ђорђевић
Наслов рада, **НР**:	Пертурбације уопштених инверза елемената у прстенима
Језик публикације, **ЈП**:	Српски
Језик извода, **ЈИ**:	Енглески
Земља публиковања, **ЗП**:	Србија
Уже географско подручје, **УГП**:	Србија
Година, **ГО**:	2023.
Издавач, **ИЗ**:	Ауторски репринт
Место и адреса, **МА**:	Ниш, Вишеградска 33.
Физички опис рада, **ФО**: (поглавља/страна/цитата/табела/слика/графика/прилог)	115 стр.
Научна област, **НО**:	Математичке науке
Научна дисциплина, **НД**:	Теорија оператора. Функционална анализа
Предметна одредница/Кључне речи, **ПО**:	групни инверз, Мур-Пенроузов инверз, језгарни инверз, прстен са инволуцијом, Банахова алгебра, C*-алгебра, пертурбације, закон непромењеног редоследа
УДК	517.983/.986(043.3)
Чува се, **ЧУ**:	Библиотека
Важна напомена, **ВН**:	

Извод, **ИЗ**:	Тема ове докторске дисертације је проучавање пертурбационих особина уопштених инверза елемената у прстенима са или без инволуције, као и у Банаховим и C*-алгебрама. До сада су проблеми у највећој мери истраживани у случају матрица, тј. оператора на коначно димензионалним векторским просторима. Идеја је била да се уместо матричних декомпозиција искористе декомпозиције елемената у прстенима индуковане идемпотентима. На овај начин рачун у прстенима се приближава рачуну у скупу 2x2 матрица над поменутим прстеном. Додатну тежину чини коришћење идемпотената у Банаховим и C*-алгебрама. Полазећи од матричне форме произвољног елемента прстена у односу на одговарајуће идемпотенте, конструишу се матричне форме групног и језгарног инверза у односу на исте идемпотенте. Добијени су нови резултати у вези пертурбација Мур-Пенроузовог инверза, пре свега о немењању редоследа инверзије производа елемената у прстенима са инволуцијом. Проширени су резултати који важе за матрице на елементе произвољне Банахове алгебре. Осим тога, уводи се појам акутне пертурбације за групни инверз у Банаховој алгебри у односу на спектрални радијус уместо у односу на норму елемента. На тај начин долази се до експлицитног израза који повезује групне инверзе полазног и пертурбованог елемента. Штавише, добијају се једноставнији изрази за пертурбацију уопштених инверза, представљене су оптималне пертурбационе границе за језгарни инверз када пертурбација испуњава одређене услове.
Датум прихватања теме, **ДП**:	13.06.2023.
Датум одбране, **ДО**:	
Чланови комисије, Председник:	уписује се накнадно руком
Члан:	
Члан, ментор:	

Образац Q4.09.13 - Издање 1

Прилог 4/2

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, **ANO**:	
Identification number, **INO**:	
Document type, **DT**:	monograph
Type of record, **TR**:	textual
Contents code, **CC**:	doctoral dissertation
Author, **AU**:	Nadica M. Mihajlović
Mentor, **MN**:	Dragan S. Đorđević
Title, **TI**:	PERTURBATIONS OF GENERALIZED INVERSES OF THE ELEMENTS IN RINGS
Language of text, **LT**:	Serbian
Language of abstract, **LA**:	English
Country of publication, **CP**:	Serbia
Locality of publication, **LP**:	Serbia
Publication year, **PY**:	2023
Publisher, **PB**:	author's reprint
Publication place, **PP**:	Niš, Višegradska 33.
Physical description, **PD**: (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)	115 p.
Scientific field, **SF**:	mathematics
Scientific discipline, **SD**:	theory of operators, functional analysis
Subject/Key words, **S/KW**:	group inverse, Moore-Penrose inverse, core inverse, ring with involution, Banach algebra, C*-algebra, perturbations, forward order law
UC	517.983/.986(043.3)
Holding data, **HD**:	library
Note, **N**:	

Abstract, **AB**:	The topic of this doctoral dissertation is the study of some perturbation properties of generalized inverses of the elements in rings with or without involution, as well as in Banach algebra and C*-algebra. So far, the problems are mostly investigated in the case of the matrices, i.e. operators on finite dimensional vector spaces. The idea was to use decompositions of elements in rings induced by idempotents, instead of matrix decompositions. In this way, the calculus in rings approaches to the calculus in the set of 2x2 matrices over mentioned ring. The additional difficulty appears in using idempotents in Banach and C*- algebras. Starting from the matrix form of an arbitrary ring element regarding to a corresponding idempotents, the matrix forms of the group and core inverse with respect to the same idempotents are constructed. Several characteriza-tions are established for the forward order law for the Moore-Penrose inverse to hold. The results valid for matrices have been extended to elements of arbitrary Banach algebras. Further, we introduced the acute perturbation for the group inverse in Banach algebra with the respect to the spectral radius instead of the spectral the norm. In this way, we described an explicit expression that connects the group inverses of the initial and the perturbed elements. Moreover, more simple expressions for the perturbation of the generalized inverses are obtained and the optimal perturbation bounds for the core inverse presented when the perturbation satisfies certain conditions.
Accepted by the Scientific Board on, **ASB**:	13.06.2023.
Defended on, **DE**:	
Defended Board, **DB**: President:	
Member:	
Member, Mentor:	

Образац Q4.09.13 - Издање 1

Садржај

Предговор

Теорија уопштених инверза почела је да се изучава у првим годинама XX века. Први пут појам "псеудоинверза" интегралног оператора појавио се у раду [27] шведског математичара Фредхолма (Fredholm) из 1903.године. Немачки математичар Хилберт (Hilbert), један од оснивача функционалне анализе, први је увео концепт уопштеног инверза диференцијалних оператора [15]. Наиме, уопштени инверзи представљају део функционалне анализе и линеарне алгебре који је произашао из практичних проблема везаних за интегралне и диференцијалне једначине, да би се касније прешло на комплексне матрице, операторе на Банаховим (Banach) и Хилбертовим просторима, односно елементе прстена с инволуцијом, Банахових и C^*-алгебри.

1920.године амерички математичар Мур (Moore) први је указао на постојање уопштеног инверза коначних матрица. У раду [26], на ову тему, Мур овај инверз назива *"general reciprocal"*. Наредних тридесетак година овај Муров рад је остао незапажен. Тек 1951.године шведски геодета Бјерхамар (Bjerhammar) је уочио везу између Муровог инверза и решења система линеарних једначина ([2], [3], [4]). О његовом академском раду може се прочитати у [41]. Резултате до којих је дошао Бјерхамар, проширио је енглески математичар и физичар Пенроуз (Penrose). Он је 1955.године доказао јединственост уопштеног инверза матрица [67] који је увео Мур. У њихову част овај инверз се назива Мур-Пенроузов инверз. 1958.године амерички математичар Дразин (Drazin) објавио је рад [42], у коме је дефинисао нови уопштени инверз у асоцијативним прстенима (класи широј од класе матрица) и назвао га је псеудо-инверз. У поменутом раду Дразин је доказао јединственост псеудоинверза и указао да је овако дефинисан инверз примењив и на матрице. Од тада је овај инверз познат као Дразинов инверз. У раду [70] из 1979.године Кемпбел (Campbell) и Мејер (Meyer) истраживали су Дразинов инверз комплексних квадратних матрица. Дефинисањем тежинског Дразиновог инверза 1980.године, Клајн (Cline) и Гревил (Greville) у раду [55] проширили су појам Дразиновог инверза на правоугаоне матрице. 1981.године Киао (Qiao)) је у раду [75] проширио појам тежинског Дразиновог инверза у теорији ограничених линеарних оператора између Банахових простора. Појам обичног Дразиновог инверза на затворене линеарне операторе проширили су Нашид (Nashed) и Жао (Zhao) у раду [43] из 1992.године. Уопштени (генералисани) Дразинов инверз у Банаховој алгебри дефинисао је и изучавао Колиха (Koliha) [33]. Ракочевић и Веи (Wei), уопштавањем резултата који су доказани у раду [55], дефинисали су и истраживали тежински Дразинов инверз ограничених линеарних оператора између Банахових и Хилбертових простора [76]. Осим набројаних, недавно су Баксалари (Baksalari) и Тренклер (Trenkler) [51], увели још два уопштена инверза комплексне матрице, језгарни и дуални језгарни инверз.

У другој половини двадесетог века дошло је до експанзије истраживања уопштених инверза, тако да је објављен велики број научних радова на ову тему.

Предмет изучавања ове дисертације су пертурбације уопштених инверза елемената у произвољним прстенима са или без инволуције, Банаховим и C^*-алгебрама. Приказани су нови и оригинални резултати који су објављени у радовима [47],[48] и [49].

Следи детаљно излагање садржаја.

Докторска дисертација је подељена на две главе, а свака глава има своје одељке.

Прва глава је уводног карактера. У одељку (1.1) наведени су основни појмови и ознаке у Банаховим алгебрама и прстенима. Одељак (1.2) посвећен је проучавању уопштених инверза у прстенима. Наведене су дефиниције и теореме из познате и богате литературе која се бави овом проблематиком. У секцијама (1.3), (1.4) и (1.5), редом, дати су основни појмови и ставови о уопштеним инверзима у Банаховим алгебрама, C^*- алгебрама и теорији оператора, који се користе у овој дисертацији.

Друга глава је заснована на оригиналним резултатима радова [47], [48] и [49].

У одељку (2.1) разматран је проблем групне инвертибилности за линеарне операторе на Хилбертовим просторима. Резултати везано за ову проблематику могу се наћи у раду [12]. Осим тога, у раду [12] проучаван је закон обрнутог редоследа ("reverse order law"-ROL) за групни инверз оператора, тј. услови под којима важи $(AB)^\# = B^\# A^\#$.

У одељку (2.2) изложени су оригинални резултати о групном инверзу елемената у јединичном прстену $\mathcal{R}$ [48]. Они представљају уопштење резултата до којих је дошао Денг (Deng) [12] за линеарне операторе. Неки резултати из [12] су проширени на општије структуре. Полазећи од претпоставке да за произвољно изабране елементе a, b прстена $\mathcal{R}$ је ba групно инвертибилан, показано је да је ab Дразин инвертибилан са $ind(ab) \leq 2$ и да је $(ab)^D = a[(ba)^\#]^2 b$. Осим тога, ако су ab и ba групно инвертибилни, показано је да важи $(ab)^\# = a[(ba)^\#]^2, (ab)^\# a = a(ba)^\#$ и $b(ab)^\# = (ba)^\# b$. Затим, за произвољан елемент $x = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}_{p,p}$ прстена $\mathcal{R}$, (p је идемпотент), уз одређене претпоставке, може се израчунати групни инверз $x^\# = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}_{p,p}^\# = \begin{pmatrix} a^\# & y \\ 0 & d^\# \end{pmatrix}_{p,p}$, где $y = (a^\sharp)^2bd^\pi + a^\pi b(d^\sharp)^2 - a^\sharp bd^\sharp$. У овом одељку проучавани су и еквивалентни услови везано за закон обрнутог редоследа за групни инверз производа елемената прстена, тј. услови под којима важи $(ab)^\sharp = b^\sharp a^\sharp, \quad a, b \in \mathcal{R}$.

Одељак (2.3) посвећен је проучавању акутне пертурбације групног инверза елемената Банахове алгебре у односу на спектрални радијус [49]. Реч је о уопштавању резултата до којих је дошао Веи [77] за комплексне матрице. Наиме, проширени су резултати који важе за матрице на елементе произвољне Банахове алгебре. Добијен је експлицитан израз који повезује групне инверзе полазног и пертурбованог елемента. Полази се од матричне форме произвољног елемента Банахове алгебре у односу на одговарајуће идемпотенте, а затим се конструише матрична форма групног инверза у односу на исти идемпотент. Користећи наведене форме доказана је процена спектралних радијуса $\rho[bb^\sharp(1 - aa^\sharp), \quad \rho[aa^\sharp(1 - bb^\sharp)], \quad [\rho(bb^\sharp - aa^\sharp)]^2$.

У одељку (2.4) изложена је пертурбациона анализа за језгарни инверз у C^*-алгебри. Презентовани су ориганални резултати из рада [49]. Реч је о уопштењу резултата до којих је дошла Ма (H.Ma) [29]. Полази се од матричне форме произвољног елемента a C^*- алгебре у односу на одговарајући самоадјунговани идемпотент, долази се до матричне форме за језгарни инверз тог елемента, пертурбацију e и $b = a + e$. Када пертурбација e задовољава одређене услове онда језгарни инверз од $b = a + e$ постоји и добијене су оптималне границе за језгарни инверз.

Оригинални резултати из рада [47] чине одељке (2.5) и (2.6).

У одељку (2.5) показано је на оригиналан начин, рад [47], да неки од резултата добијени за комплексне матрице у раду [46] важе у прстенима са инволуцијом. Доказане су пертурбационе формуле за Мур-Пенроузов инверз производа, тј. $(ab)^\dagger = b^\dagger r^\dagger + \rho$ и $(ab)^\dagger = k^\dagger a^\dagger + \theta$, где изрази за ρ и θ садрже инверзе $b^\dagger, r^\dagger$ и $a^\dagger, k^\dagger$, респективно. Формуле пертурбације су примењене да се испитају потребни и довољни услови да $(ab)^\dagger$ буде једнако y, где y представља било који погодан избор израза за МП-инверз производа ab.

Коначно, у одељку (2.6) могу се наћи резултати везани за закон директног редоследа ("forward order law" - FOL) за Мур-Пенроузов инверз, тј. немењање редоследа инверзије производа елемената у прстенима са инволуцијом $(ab)^\dagger = a^\dagger b^\dagger, a, b \in \mathcal{R}$, који представљају оригинална уопштења резултата до којих су дошли Кастро-Гонзалес (Castro-Gonzalez) и Хартвиг (Hartwig)[46]. Идеја је била да се применом резултата пертурбације добије карактеризација закона директног редоследа за МП-инверз у односу на a и b.

Користим прилику да изразим искрену захвалност ментору, др Драгану Ђорђевићу, редовном професору Природно-математичког факултета у Нишу, на великој и несебичној помоћи коју ми је пружио у научном раду, процењујући резултате до којих смо долазили, као и на бројним корисним саветима, примедбама, стрпљењу и издвојеном времену током израде ове дисертације.

Посебно желим да се захвалим свом супругу Горану, породици, куми Драгани, пријатељима, свим мени драгим људима који су ме подржавали, на неизмерној љубави, стрпљењу, свим тренуцима које су издвојили за мене у жељи да ми помогну да истрајем у изради дисертације.

Још једном велико хвала !

Глава 1

1 Уопштени инверзи

У овој дисертацији биће представљени резултати који се односе на пертурбације уопштених инверза елемената у произвољним прстенима са или без инволуције, у Банаховим и C^*-алгебрама. Користили смо идемпотенте за добијање матричне форме елемената прстена, Банахове или C^*-алгебре. Уведимо најпре појмове и ознаке који ће бити корисни за излагање тих резултата.

1.1 Појмови у Банаховим алгебрама и прстенима

Нека је $\mathcal{A}$ комплексна Банахова алгебра са јединицом 1 и нека $a \in \mathcal{A}$.

Елемент $a \in \mathcal{A}$ је инвертибилан ако постоји елемент $b \in \mathcal{A}$ такав да је $ab = ba = 1$. Такав елемент b је јединствен и назива се инверз елемента a, означава се са a^{-1}. Скуп свих инвертибилних елемената Банахове алгебре $\mathcal{A}$ означавамо са $\mathcal{A}^{-1}$.

Елемент $a \in \mathcal{A}$ је идемпотент ако важи $a^2 = a$. Скуп свих идемпотената у $\mathcal{A}$ означавамо са $\mathcal{A}^{\bullet}$.

За $a \in \mathcal{A}$ симболи $\sigma(a)$ i $r(a)$ означавају спектар и спектрални полупречник од a, респективно. Иако се многе особине спектра изучавају методама анализе сам појам спектра је алгебарски.

Дефиниција 1.1.1 *Нека је $a \in \mathcal{A}$. Спектар елемента a, у ознаци $\sigma(a)$, је скуп свих комплексних бројева λ са својством да $\lambda - a$ није инвертибилан елемент у $\mathcal{A}$, то јест*

$$\sigma(a) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \colon \lambda - a \notin \mathcal{A}^{-1}\right\}.$$

Леви спектар елемента a, у ознаци $\sigma_l(a)$, дефинише се

$$\sigma_l(a) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \colon \lambda - a \notin \mathcal{A}_l^{-1}\right\}.$$

Десни спектар елемента a, у ознаци $\sigma_r(a)$, дефинише се

$$\sigma_r(a) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \colon \lambda - a \notin \mathcal{A}_r^{-1}\right\}.$$

Комплемент скупа $\sigma(a)$, у ознаци $\rho(a)$, назива се резолвентни скуп елемента a. Дакле,

$$\rho(a) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \colon \lambda - a \in \mathcal{A}^{-1}\right\} = \mathbb{C} \setminus \sigma(a).$$

Како је $\lambda - a = -(a - \lambda)$, то се услов $\lambda - a \notin \mathcal{A}^{-1}$ у дефиницији спектра елемента a може заменити условом $a - \lambda \notin \mathcal{A}^{-1}$. Ова примедба се односи и на леви (десни) спектар елемента a, резолвентни скуп елемента a, и тако даље.

Како је за свако $a \in \mathcal{A}$ спектар елемента a, то јест $\sigma(a)$, непразан и компактан подскуп скупа комплексних бројева $\mathbb{C}$, треба одредити затворену куглу најмањег полупречника са центром у координатном почетку која је надскуп скупа $\sigma(a)$. Са тим у вези је следећа дефиниција.

Дефиниција 1.1.2 *Нека је $a \in \mathcal{A}$. Спектрални полупречник елемента a, у ознаци $r(a)$, дефинише се*

$$r(a) = \sup\left\{|\lambda| \colon \lambda \in \sigma(a)\right\}.$$

Напоменимо да важи: $0 \leq r(a) \leq \|a\|$.

Спектрални полупречник се може рачунати и као
$r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$ (Теорема о спектралном полупречнку.)

Дефиниција 1.1.3 *Ако је $a \in \mathcal{A}$ i $r(a) = 0$, тада је a квазинилпотентан елемент.*

Спектар квазинилпотентног елемента садржи само 0, то јест $\sigma(a) = \{0\}$.

Елемент $a \in \mathcal{A}$ је нилпотентан ако постоји природан број n такав да је $a^n = 0$. Степен нилпотентности елемента a је најмањи такав природан број n.

Скуп свих квазинилпотентних и нилпотентних елемената у $\mathcal{A}$ означавамо редом са $\mathcal{A}^{qnil}$ і $\mathcal{A}^{nil}$.

Сваки нилпотентан елеменат је и квазинилпотентан. Обрнуто у општем случају не важи.

У Банаховим алгебрама могу се користити идемпотенти како би представили елементе у матричном облику. Нека $p, q \in \mathcal{A}^{\bullet}$. Тада произвољан елемент $a \in \mathcal{A}$ можемо записати у облику суме:

$$a = paq + pa(1-q) + (1-p)aq + (1-p)a(1-q).$$

Уводимо следеће ознаке: $a_{11} = paq$, $a_{12} = pa(1-q)$, $a_{21} = (1-p)aq$, $a_{22} = (1-p)a(1-q)$. Дакле, матрична репрезентација елемента $a \in \mathcal{A}$ у односу на произвољне идемпотенте $p, q \in \mathcal{A}^{\bullet}$ изгледа:

$$a = \begin{pmatrix} paq & pa(1-q) \\ (1-p)aq & (1-p)a(1-q) \end{pmatrix}_{p,q} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}_{p,q}.$$

Нека су сада идемпотенти p и q једнаки. Онда $a \in \mathcal{A}$ има следећу матричну репрезентацију у односу на идемпотент p:

$$a = \begin{pmatrix} pap & pa(1-p) \\ (1-p)ap & (1-p)a(1-p) \end{pmatrix}_{p,p} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}_{p,p},$$

где $a_{11} \in p\mathcal{A}p$, $a_{12} \in p\mathcal{A}(1-p)$, $a_{21} \in (1-p)\mathcal{A}p$, $a_{22} \in (1-p)\mathcal{A}(1-p)$.

$p\mathcal{A}p$ и $(1-p)\mathcal{A}(1-p)$ су Банахове алгебре са јединицом. У Банаховој алгебри $p\mathcal{A}p$ јединица је идемпотент p, док у Банаховој алгебри $(1-p)\mathcal{A}(1-p)$ јединица је идемпотент $1-p$.

1.2 Уопштени инверзи у прстенима

Нека је $\mathcal{R}$ прстен са јединицом 1. За елемент $a \in \mathcal{R}$ кажемо да је инвертибилан ако постоји елемент $x \in \mathcal{R}$ тако да је $ax = xa = 1$. Елемент x је инверз елемента a и означавамо га са a^{-1}. Скуп свих инвертибилних елемената прстена $\mathcal{R}$ означавамо са $\mathcal{R}^{-1}$.

Елемент $a \in \mathcal{R}$ је нилпотентан ако је $a^n = 0$ за неко $n \in N$. Најмање такво n је индекс нилпотентности елемента a. Скуп свих нилпотентних елемената у прстену $\mathcal{R}$ означен је са $\mathcal{R}^{nil}$. Елемент $p \in \mathcal{R}$ је идемпотент ако је $p^2 = p$. Скуп свих идемпотената у $\mathcal{R}$ означавамо са $\mathcal{R}^{\bullet}$.

Дефиниција 1.2.1 *Елемент $a \in \mathcal{R}$ је регуларан ако има унутрашњи инверз, тј. ако постоји $x \in \mathcal{R}$ тако да је $axa = a$.*

Ако постоји, унутрашњи инверз елемента a означавамо са a^{-}.

Скуп свих регуларних елемената у прстену $\mathcal{R}$ означавамо са $\mathcal{R}^{-}$. Очигледно је $\mathcal{R}^{-1} \subseteq \mathcal{R}^{-}$.

Дефиниција 1.2.2 *Елемент $x \in \mathcal{R}$ је спољашњи инверз $a \in \mathcal{R}$ ако је $xax = x$.*

Дефиниција 1.2.3 *Елемент $x \in \mathcal{R}$ је рефлексивни генералисани инверз од $a \in \mathcal{R}$ ако је x унутрашњи и спољашњи инверз од a.*

Ако је x унутрашњи инверз елемента $a \in \mathcal{R}$, тада је xax рефлексивни генералисани инверз од a. Ово се може лако проверити.

Дакле, регуларни елемент у прстену увек има рефлексивни генералисани инверз.

Дефиниција 1.2.4 *Нека је $a \in \mathcal{R}$. Дразинов инверз од a је елемент $x \in \mathcal{R}$ који задовољава следеће услове:*

$$ax = xa, \quad xax = x, \quad a(ax - 1) \in \mathcal{R}^{nil}.$$

Ако постоји Дразинов инверз x елемента a, онда је он јединствен и означава се са a^D. За елемент a тада кажемо да је Дразин инвертибилан. Скуп свих Дразин инвертибилних елемената у прстену $\mathcal{R}$ означавамо са $\mathcal{R}^D$. Приметимо да је услов $a(ax-1) \in \mathcal{R}^{nil}$ из Дефиниције (1.2.4) еквивалентан услову $a^{n+1}x = a^n$ за неки ненегативан цео број n.

Дразинов индекс елемента a је најмањи ненегативан цео број n који задовољава претходни услов.

Нека је a произвољан елемент у $\mathcal{R}$. Дефинишимо сада скуп комутативних и скуп двоструко комутативних елемената са a, респективно

$$comm(a) = \{x \in \mathcal{R} \colon ax = xa\},$$

$$comm^2(a) = \{x \in \mathcal{R} \colon xy = yx, \text{ за свако } y \in comm(a)\}.$$

Харте (Harte) је у раду [61] дефинисао квазинилпотентне елементе у прстену $\mathcal{R}$.

Дефиниција 1.2.5 *[61] Елемент $a \in \mathcal{R}$ је квазинилпотентан, ако је $1 + xa \in \mathcal{R}^{-1}$, за свако $x \in comm(a)$.*

Скуп свих квазинилпотентних елемената у $\mathcal{R}$ означавамо са $\mathcal{R}^{qnil}$.

Сада наводимо дефиницију квазиполарних елемената у прстену.

Дефиниција 1.2.6 *[32] Елемент $a \in \mathcal{R}$ је квазиполаран ако постоји елемент $p \in \mathcal{R}$ такав да је*

$$p^2 = p, \quad p \in comm^2(a), \quad ap \in \mathcal{R}^{qnil}, \quad a + p \in \mathcal{R}^{-1}.$$

Елемент $a \in \mathcal{R}$ је поларан елемент реда k, ако је a квазиполаран елемент и $ap \in \mathcal{R}^{nil}$ са индексом нилпотентности k.

Елемент p, одређен условима у претходној дефиницији, назива се спектрални идемпотент елемента a и означава се са a^π.

Дефиниција 1.2.7 *[32] Нека је $a \in \mathcal{R}$. Уопштени (генералисани) Дразинов инверз или g-Дразинов инверз од a је елемент $x \in \mathcal{R}$ који задовољава следеће услове:*

$$x \in comm^2(a), \quad xax = x, \quad a(ax-1) \in \mathcal{R}^{qnil}.$$

Ако уопштени Дразинов инверз од a постоји, онда је он јединствен и означава се са a^d. Тада за елемент a кажемо да је уопштено Дразин инвертибилан (или g-Дразин инвертибилан).

Скуп свих уопштено Дразин инвертибилних елемената у $\mathcal{R}$ означавамо са $\mathcal{R}^d$.

Ако је $a(ax-1) \in \mathcal{R}$ нилпотентан, онда је a Дразин инвертибилан елемент и $a^d = a^D$. Ако је a поларан елемент у прстену или је елемент у Банаховој алгебри, онда је довољно претпоставити да је $x \in comm(a)$ уместо да је $x \in comm^2(a)$.

Теорема 1.2.1 *[32] Елемент $a \in \mathcal{R}$ је уопштено Дразин инвертибилан ако и само ако је елемент a квазиполаран. У овом случају $a \in \mathcal{R}$ има јединствени уопштени Дразинов инверз a^d дат помоћу једнакости:*

$$a^d = (a + a^\pi)^{-1}(1 - a^\pi).$$

У теореми коју смо навели дата је еквиваленција између квазиполарних елемената и уопштено Дразин инвертибилних елемената у прстену $\mathcal{R}$. Елемент a^π је јединствени спектрални идемпотент од a и $a^\pi = 1 - aa^d$.

Означимо са $ind(a)$ g-Дразинов индекс квазиполарног елемента $a \in \mathcal{R}$. Овај индекс је дефинисан на следећи начин:

$$ind(a) = \begin{cases} 0, & \text{ако је } a \in \mathcal{R}^{-1}, \\ k, & \text{ако је } a(ax-1) \text{ нилпотент индекса } k \in \mathbb{N}, \\ \infty, & \text{у осталим случајевима.} \end{cases}$$

Дефиниција 1.2.8 *Елемент $b \in \mathcal{R}$ је групни инверз од $a \in \mathcal{R}$, ако је*

$$aba = a, \quad bab = b, \quad ab = ba.$$

Ако постоји, групни инверз од a означава се са $a^\sharp$. Скуп свих елемената који имају групни инверз у $\mathcal{R}$ је означен са $\mathcal{R}^\sharp$.

Лема 1.2.1 *[20] Групни инверз од $a \in \mathcal{R}$ је јединствен, у случају када постоји. И више, групни инверз $a^\sharp$ двоструко комутира са a, тј. $[a,x]=0$ $\Rightarrow [a^\sharp, x]=0$.*

Доказ: Нека су c, d два кандидата за групни инверз од a, тада $c = c^2a = c^2a^2d = cad = ca^2d^2 = ad^2 = d$. Дакле, ако постоји групни инверз од a је јединствен.

Нека је $[a,x]=0$, где $[a,x] = ax - xa$. Тада,

$$a^\sharp x = (a^\sharp)^2 ax = (a^\sharp)^2 xa = (a^\sharp)^2 xa^2 a^\sharp = (a^\sharp)^2 axaa^\sharp = a^\sharp xaa^\sharp.$$

Слично, $xa^\sharp = a^\sharp axa^\sharp$, и $a^\sharp x = xa^\sharp$. □

Приметимо да g-Дразинов индекс од $a \in \mathcal{R}$ је коначан ако и само ако је елемент a поларан. Сваки поларан елемент је g-Дразин инвертибилан. Квазиполаран елемент има Дразинов инверз ако и само ако је његов индекс коначан. Дакле,

$$\mathcal{R}^{-1} \subseteq \mathcal{R}^\sharp \subseteq \mathcal{R}^D \subseteq \mathcal{R}^d.$$

У прстенима се могу користити идемпотенти да би представили елементе у матричном облику. Нека су $a \in \mathcal{R}$ и $p, q \in \mathcal{R}^\bullet$. Тада:

$$a = \begin{pmatrix} paq & pa(1-q) \\ (1-p)aq & (1-p)a(1-q) \end{pmatrix}_{p,q} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}_{p,q}.$$

где је:

$a_{11} = paq, \quad a_{12} = pa(1-q), \quad a_{21} = (1-p)aq, \quad a_{22} = (1-p)a(1-q).$

Ако је $a \in \mathcal{R}^d$ онда се он може представити помоћу матрица на следећи начин:

$$a = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}_{p,p},$$

у односу на идемпотент $p = aa^d = 1 - a^\pi$, где је a^π спектрални идемпотент од a. Тада је a_1 инвертибилан у $p\mathcal{R}p$ и a_2 је квазинилпотентан у $(1-p)\mathcal{R}(1-p)$. Сада је уопштени Дразинов инверз од a дат са

$$a^d = \begin{pmatrix} a_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p}.$$

Нека је $\mathcal{R}$ прстен са нулом 0 и јединицом 1. Претпоставимо да је на прстену $\mathcal{R}$ дефинисана инволуција $a \mapsto a^*$, односно да за све $a, b \in \mathcal{R}$ важи

$$(a)^*)^* = a, \quad (a+b)^* = a^* + b^*, \quad (ab)^* = b^*a^*, \quad 0^* = 0, \quad 1^* = 1.$$

Елемент $a \in \mathcal{R}$ је нормалан ако $aa^* = a^*a$.

Елемент $a \in \mathcal{R}$ је самоадјунгован (хермитски или симетричан) ако $a^* = a$.

Дефиниција 1.2.9 *[67] Елемент $a \in \mathcal{R}$ је Мур-Пенроуз инвертибилан (или МП-инвертибилан), ако постоји $b \in \mathcal{R}$ тако да важи :*

$$aba = a, \quad bab = b, \quad (ab)^* = ab, \quad (ba)^* = ba.$$

Елемент b за који важе претходне једнакости назива се Мур-Пенроузов инверз од a.

Ако постоји МП-инверз он је јединствен, и означава се са $a^\dagger$. Ево кратког образложења заснованог на запажању $[xa, ya] = [ax, ay] = 0$.

Претпоставимо да су x, y два кандидата за МП-инверз од a. Тада

$$x = xax = (xa)(ya)x = (ya)(xa)x = yax = y(ay)(ax) = y(ax)(ay) = yay = y.$$

Скуп свих Мур-Пенроуз инвертибилних елемената у $\mathcal{R}$ означавамо са $\mathcal{R}^\dagger$.

Дефиниција 1.2.10 *[31] Елемент $a \in \mathcal{R}$ је лево $*$-скратив ако $a^*ax = a^*ay$ повлачи да је $ax = ay$. Елемент $a \in \mathcal{R}$ је десно $*$-скратив ако $xaa^* = yaa^*$ повлачи да је $xa = ya$. Ако је елемент a лево $*$-скратив и десно $*$-скратив онда је $*$-скратив.*

Очигледно, a је лево $*$-скратив ако и само ако је a^* десно $*$-скратив.

Напоменимо да у C^*-алгебри сваки елемент је $*$-скратив, јер ако је $a^*az = 0$, тада је $\|az\|^2 = \|(az)^*az\| = \|z^*a^*az\| = 0$. Ако је $zaa^* = 0$, на сличан начин следи да је $za = 0$.

Прстен $\mathcal{R}$ је $*$-редукован, ако је сваки елемент из $\mathcal{R}$ $*$-скратив, што је еквивалентно са импликацијом $a^*a = 0 \Rightarrow a = 0$, за свако $a \in \mathcal{R}$.

Доказ следеће теореме, која представља један од основних резултата у вези егзистенције Мур-Пенроузовог инверза у прстену са инволуцијом, може се видети у ([32],[38]).

Теорема 1.2.2 *[32] Нека је $\mathcal{R}$ прстен са инволуцијом и $a \in \mathcal{R}$. Следећи искази су еквивалентни:*

(i) a је МП-инвертабилан.

(ii) a је лево $*$-скратив и a^*a има групни инверз.

(iii) a је десно $*$-скратив и aa^* има групни инверз.

(iv) a је $*$-скратив и a^*a и aa^* имају групне инверзе.

Уколико важи неки од претходних услова, тада је МП-инверз од a дат са

$$a^\dagger = (a^*a)^\sharp a^* = a^*(aa^*)^\sharp.$$

Дефиниција 1.2.11 *[31] Прстен $\mathcal{R}$ са инволуцијом има Гељфанд-Наимаркову (Gelfand-Naimark) особину (GN-особину) ако је:*

$$1 + x^*x \in \mathcal{R}^{-1} \text{ за свако } x \in \mathcal{R}.$$

Напоменимо да C^*- алгебре имају GN-особину.

Дефиниција 1.2.12 *[31] Елемент $a \in \mathcal{R}$ је добро-подржан ако постоји самоадјунговани идемпотент p тако да је*

$$ap = a, \quad a^*a + 1 - p \in \mathcal{R}^{-1}.$$

У том случају идемпотент p се назива носач од a.

Теорема 1.2.3 *[31] Нека је $\mathcal{R}$ прстен са инволуцијом. Елемент $a \in \mathcal{R}$ је МП-инвертибилан ако и само ако је a лево $*$-скратив и добро подржан. Тада је носач p од a дат са $p = a^\dagger a$.*

Аналогно појму носача у [31] дефинисан је појам ко-носача елемента a, као пројекција $q \in \mathcal{R}$ за коју важи

$$qa = a, \quad aa^* + 1 - q \in \mathcal{R}^{-1}.$$

Осим тога, изведен је закључак да елемент $a \in \mathcal{R}$ је МП-инвертибилан ако и само ако има ко-носач q и ако је десно $*$-скратив. У том случају је $q = aa^\dagger$.

Теорема 1.2.4 *[31] Нека прстен $\mathcal{R}$ са инволуцијом има GN-особину. Елемент $a \in \mathcal{R}$ је МП-инвертибилан ако и само ако је a регуларан.*

Теорема 1.2.5 *[32] Нека је $a \in \mathcal{R}$. Тада је $a \in \mathcal{R}^\dagger$ ако и само ако је $a*$-скратив и a^*a је групно инвертибилан. Такође, aa^* је групно инвертибилан и $a^\dagger = (a^*a)^\sharp a^* = a^*(aa^*)^\sharp$.*

Теорема 1.2.6 *[32] Нека је R прстен са инволуцијом. Тада је a уопштено Дразин инвертибилан елемент ако и само ако је a^* уопштено Дразин инвертибилан елемент. У овом случају је $(a^*)^D = (a^D)^*$.*

Теорема 1.2.7 *[20] За $a \in \mathcal{R}^\dagger$ и $\lambda \in \mathbb{C}$ важе следеће једнакости:*

(i) $(a^\dagger)^\dagger = a$;

(ii) $(a^*)^\dagger = (a^\dagger)^*$;

(iii) $(\lambda a)^\dagger = \lambda^\dagger a^\dagger$, *где је* $\lambda^\dagger = \begin{cases} \lambda^{-1}, & \lambda \neq 0, \\ 0, & \lambda = 0; \end{cases}$

(iv) $(a^* a)^\dagger = a^\dagger (a^\dagger)^*$;

(v) $(aa^*)^\dagger = (a^*)^\dagger a^\dagger$;

(vi) $a^* = a^\dagger a a^* = a^* a a^\dagger$;

(vii) $a^\dagger = (a^* a)^\dagger a^* = a^* (aa^*)^\dagger$;

(viii) $(a^*)^\dagger = a(a^* a)^\dagger = (aa^*)^\dagger a$;

Дефиниција 1.2.13 *[32] Елемент a у прстену са инволуцијом $\mathcal{R}$ је EP ("equal power") ако $a \in \mathcal{R}^\sharp \cap \mathcal{R}^\dagger$ и $a^\sharp = a^\dagger$.*

Лема 1.2.2 *[16] Елемент $a \in \mathcal{R}$ је EP ако и само ако $a \in \mathcal{R}^\dagger$ и $aa^\dagger = a^\dagger a$.*

Елемент $a \in \mathcal{R}$ који задовољава $a^* = a$ назива симетричан.

Теорема 1.2.8 *[32] Елемент $a \in \mathcal{R}$ је EP ако и само ако за a постоји групни инверз и један од следећих еквивалентних услова важи:*

(i) $a^\sharp a$ *је симетричан елемент;*

(ii) $(a^\sharp)^* = aa^\sharp (a^\sharp)^*$;

(iii) $(a^\sharp)^* = (a^\sharp)^* a^\sharp a$;

(iv) $a^\sharp (a^\pi)^* = a^\pi (a^\sharp)^*$, *где је a^π спектрални идемпотент елемента a.*

Боасо (Boasso) је учинио корак даље, дао је дефиницију EP елемената Банахове алгебре у одсуству инволуције [24]. Међутим, не постоје очигледни кандидати за хермитске елементе у прстену без инволуције. Према томе овај начин не изгледа приступачно са алгебарске тачке гледишта.

ЕП елементи су важни јер њих карактерише комутативност са Мур-Пенроузовим инверзом. У раду [16] је дата карактеризација ЕП елемената у прстену са инволуцијом помоћу услова који садрже њихов групни и Мур-Пенроузов инверз.

Напоменимо да су неки од ових резултата доказани за комплексне матрице, коришћењем ранга матрице или друге коначно димензионалне методе, у раду Ченг, Тиан (Cheng,Tian) [68] или у раду Баксалари, Тренклер [50]. Аналогни резултати за ограничене линеарне операторе на Хилбертовим просторима доказани су коришћењем операторских матрица Ђорђевић [22], Ђорђевић и Колиха [19].

За матрицу $A \in M_n$, ind$A \leq 1$, Рао, Митра (Rao, Mitra) дефинисали су јединствен уопштени инверз $A^{-}_{\rho^*,\chi}$, који је једнак $A^{\sharp}AA^{\dagger}$ [13]. Већ смо рекли, Баксалари и Тренклер дефинисали су језгарни инверз за који се доказује да је идентичан са $A^{-}_{\rho^*,\chi}$ [51]. Аналогно, они су у [51] дали дефиницију и дуалног језгарног инверза. Такође, у [51] је показано да се језгарни инверз поклапа са Бот-Дафиновим (Bot-Dafin) инверзом

$$P_A[(A-I)P_A+I]^{-1}.$$

Напоменимо, језгарни и дуални језгарни инверз су специјални случајеви језгарног-ЕП инверза којег су испитивали Маџуната Прасад и Мохана (Manjunatha Prasad, Mohana) [37]. Они у свом раду уместо термина језгарни инверз користе термин језгарни-ЕП уопштени инверз, а за дуални језгарни инверз користе термин *језгарни-ЕП уопштени инверз.

Дефиниције језгарног и дуалног језгарног инверза дате у [51] немају смисла за елементе прстена. Међутим, у раду [23] дате су еквивалентне, алгебарске дефиниције ових инверза и у случају прстена $\mathcal{R}$ ($\mathcal{R}$ је прстен са инволуцијом $*$ и јединицом 1 или скраћено $*$-прстен.)

Дефиниција 1.2.14 *[23] Нека је $a \in \mathcal{R}$. Елемент $a^{\textcircled{\#}} \in \mathcal{R}$ који задовољава услове:*

$$aa^{\textcircled{\#}}a = a, \quad a^{\textcircled{\#}}\mathcal{R} = a\mathcal{R}, \quad \mathcal{R}a^{\textcircled{\#}} = \mathcal{R}a^*$$

је језгарни инверз од a.

Дефиниција 1.2.15 *[23] Нека је $a \in \mathcal{R}$. Елемент $a_{\textcircled{\#}} \in \mathcal{R}$ који задовољава услове:*

$$aa_{\textcircled{\#}}a = a, \quad a_{\textcircled{\#}}\mathcal{R} = a^*\mathcal{R}, \quad \mathcal{R}a_{\textcircled{\#}} = \mathcal{R}a$$

је дуални језгарни инверз од a.

Скуп свих језгарно, односно дуално језгарно, инвертибилних елемената прстена $\mathcal{R}$ означавамо са $\mathcal{R}^{\textcircled{\#}}$, односно са $\mathcal{R}_{\textcircled{\#}}$.

Даље, за $a \in \mathcal{R}$ нека је

$$a^0 = \{x \in \mathcal{R} : ax = 0\} \text{ и } {}^0a = \{x \in \mathcal{R} : xa = 0\},$$

десни, односно леви анулатор.

Лема 1.2.3 *[23] Нека су $a, b \in \mathcal{R}$. Тада:*

(i) *ако је $a\mathcal{R} \subseteq b\mathcal{R}$, онда је ${}^0b \subseteq {}^0a$;*

(ii) *ако је $b \in \mathcal{R}^{(1)}$ и ${}^0b \subseteq {}^0a$, онда је $a\mathcal{R} \subseteq b\mathcal{R}$.*

Лема 1.2.4 *[23] Нека су $a, b \in \mathcal{R}$. Тада:*

(i) *ако је $\mathcal{R}a \subseteq \mathcal{R}b$, онда је $b^0 \subseteq a^0$;*

(ii) *ако је $b \in \mathcal{R}^{(1)}$ и $b^0 \subseteq a^0$, онда је $\mathcal{R}a \subseteq \mathcal{R}b$.*

Теорема 1.2.9 *[23] Нека су $a, x \in \mathcal{R}$. Следећа тврђења су еквивалентна:*

(i) *a је групно инвертибилан и $x = a^\#$;*

(ii) $axa = a$, $x\mathcal{R} = a\mathcal{R}$ *и* $\mathcal{R}x = \mathcal{R}a$;

(iii) $axa = a$, ${}^0x = {}^0a$ *и* $x^0 = a^0$;

(iv) $axa = a$, $x\mathcal{R} \subseteq a\mathcal{R}$ *и* $\mathcal{R}x \subseteq \mathcal{R}a$;

(v) $axa = a$, ${}^0a \subseteq {}^0x$ *и* $a^0 \subseteq x^0$.

Теорема 1.2.10 *[23] Нека су $a, x \in \mathcal{R}$. Следећа тврђења су еквивалентна:*

(i) *a је MP инвертибилан и $x = a^\dagger$;*

(ii) $axa = a$, $x\mathcal{R} = a^*\mathcal{R}$ *и* $\mathcal{R}x = \mathcal{R}a^*$;

(iii) $axa = a$, ${}^0x = {}^0(a^*)$ *и* $x^0 = (a^*)^0$;

(iv) $axa = a$, $x\mathcal{R} \subseteq a^*\mathcal{R}$ *и* $\mathcal{R}x \subseteq \mathcal{R}a^*$;

(v) $axa = a$, ${}^0(a^*) \subseteq {}^0x$ *и* $(a^*)^0 \subseteq x^0$.

Штавише, у раду [23] је истакнуто да Дефиниције (1.2.14), (1.2.15) и Теореме (1.2.9 (ii)), (1.2.10 (ii)) показују да се групни, Мур-Пенроузов, језгарни и дуални језгарни инверз могу дефинисати аналогно:

$x \in \mathcal{R}$ је групни инверз од a ако и само ако је $axa = a, x\mathcal{R} = a\mathcal{R}$, $\mathcal{R}x = \mathcal{R}a$,

$x \in \mathcal{R}$ је МП-инверз од a ако и само ако је $axa = a$, $x\mathcal{R} = a^*\mathcal{R}$, $\mathcal{R}x = \mathcal{R}a^*$,

$x \in \mathcal{R}$ је језгарни инверз од a ако и само ако је $axa = a$, $x\mathcal{R} = a\mathcal{R}$, $\mathcal{R}x = \mathcal{R}a^*$,

$x \in \mathcal{R}$ је дуални језгарни инверз од a ако и само ако је $axa = a$, $x\mathcal{R} = a^*\mathcal{R}$, $\mathcal{R}x = \mathcal{R}a$.

Оно што можемо приметити је да су ова четири инверза блиско повезана и да образују одређену подкласу класе свих унутрашњих инверза.

1.3 Уопштени инверзи у Банаховим алгебрама

Нека је $\mathcal{A}$ Банахова алгебра. Унутрашњи, спољашњи и рефлексивни уопштени инверз елемента $a \in \mathcal{A}$ дефинишу се на исти начин као и у прстену $\mathcal{R}$.

Дефиниција 1.3.1 *Елемент $a \in \mathcal{A}$ је регуларан (или унутрашње регуларан) ако постоји елемент $b \in \mathcal{A}$ takav da je $aba = a$. Елемент b назива се унутрашњи инверз елемента a.*

Дефиниција 1.3.2 *Елемент $a \in \mathcal{A}$ има спољашњи инверз ако постоји елемент $b \in \mathcal{A}$, $b \neq 0$, такав да је $bab = b$. За елемент a кажемо да је спољашње регуларан.*

Дефиниција 1.3.3 *Елемент $b \in \mathcal{A}$ који је и спољашњи и унутрашњи инверз елемента $a \in \mathcal{A}$ назива се рефлексивни уопштени инверз елемента a. За елемент a кажемо да је рефлексивно регуларан.*

Ако је елемент Банахове алгебре инвертибилан тада је он и регуларан. Дакле, скуп свих инвертибилних елемената је подскуп скупа свих регуларних елемената Банахове алгебре.

Приметимо да унутрашња регуларност у Банаховој алгебри повлачи рефлексивну регуларност.

Скуп свих спољашње регуларних елемената означавамо са $\mathcal{A}^{(2)}$.

Ако је елемент $a \in \mathcal{A}$ инвертибилан, тада је он и спољашње и унутрашње регуларан. Инверз елемента a је и спољашњи и унутрашњи инверз тог елемента и важи $a^{-1} = a^{(2)}_{1,0}$.

Ако је $b \in \mathcal{A}$ унутрашњи или спољашњи инверз елемента $a \in \mathcal{A}$, тада су елементи b i $1 - ab$ идемпотенти.

Дефиниција 1.3.4 *[21] Нека је $a \in \mathcal{A}$ i $p, q \in \mathcal{A}^{\bullet}$. Елемент $b \in \mathcal{A}$ који задовољава једнакости*

$$aba = a, \quad ba = p, \quad 1 - ab = q$$

називамо (p, q)-унутрашњи инверз елемента a.

Ако постоји (p, q)-унутрашњи инверз елемента a, он не мора бити јединствен ([8], [9]).

Појам спољашњег инверза у односу на дате идемпотенте у раду [21] увели су Ђорђевић и Веи.

Дефиниција 1.3.5 *[21] Нека је $a \in \mathcal{A}$ i $p, q \in \mathcal{A}^{\bullet}$. Елемент $b \in \mathcal{A}$ који задовољава једнакости*

$$bab = b, \quad ba = p, \quad 1 - ab = q$$

називамо (p, q)-спољашњи инверз елемента a.

Приметимо да је (p, q)-спољашњи инверз јединствен, док спољашњи инверз не мора бити јединствен. Ознака за (p, q)-спољашњи инверз елемента a је $a^{(2)}_{p,q}$.

У наредној теореми доказана је јединственост $a^{(2)}_{p,q}$ под одређеним условима.

Теорема 1.3.1 *[21] Нека је $a \in \mathcal{A}$ i $p, q \in \mathcal{A}^{\bullet}$. Тада су следећа тврђења еквивалентна:*

(i) постоји $a^{(2)}_{p,q}$;

(ii) $(1-q)a = (1-q)ap$ и постоји неко $b \in \mathcal{A}$ такво да је $pb = b, \quad bq = 0$ и $ab = 1 - q$.

Штавише, ако постоји $a^{(2)}_{p,q}$ тада је он и јединствен.

Скуп свих елемената из $\mathcal{A}$ који имају спољашњи уопштени инверз са датим идемпотентима $p, q \in \mathcal{A}^\bullet$ означићемо са $\mathcal{A}_{p,q}^{(2)}$.

Ако је $a \in \mathcal{A}$ произвољан елемент, a не мора имати ни унутрашњи ни спољашњи инверз [72]. Међутим, важно је нагласити да у Банаховој алгебри линеарних ограничених оператора увек постоји спољашњи инверз линеарног ограниченог оператора.

Ако је елемент $a \in \mathcal{A}$ инвертибилан, тада је он и спољашње и унутрашње регуларан. Инверз елемента a је и спољашњи и унутрашњи инверз тог елемента и важи $a^{-1} = a_{1,0}^{(2)}$.

Нека елемент $a \in \mathcal{A}$ има спољашњи уопштени инверз у односу на дате идемпотенте $p, q \in \mathcal{A}^\bullet$. Ако је a и унутрашње регуларан, тада он има рефлексивни уопштени инверз у односу на дате идемпотенте p і q и означавамо га са $a_{p,q}^{(1,2)}$. Када постоји, јединственост овог елемента је очигледна.

Дразинов, групни и уопштени Дразинов инверз елемента $a \in \mathcal{A}$ дефинишу се аналогно као у прстену $\mathcal{R}$.

Уколико постоји, Дразинов инверз елемента $a \in \mathcal{A}$ он је јединствен и означавамо га са a^D. Тада за елемент a кажемо да је Дразин инвертибилан. Скуп свих Дразин инвертибилних елемената означавамо са $\mathcal{A}^D$. Дразинов индекс елемента a означавамо са $ind(a)$.

Елемент a је инвертибилан ако и само ако је $ind(a) = 0$.

Ако за елемент $a \in \mathcal{A}$ је $ind(a) = 1$ кажемо да a има групни инверз и означавамо га са $a^\sharp$. Скуп $\mathcal{A}^\sharp$ је скуп свих елемената Банахове алгебре $\mathcal{A}$ који имају групни инверз.

Јасно је да важи $\mathcal{A}^\sharp \subset \mathcal{A}^D$.

Ако постоји уопштени Дразинов инверз елемента $a \in \mathcal{A}$, тада је он јединствен и означавамо га са a^d. Скуп $\mathcal{A}^d$ је скуп свих елемената

Банахове алгебре $\mathcal{A}$ који имају уопштени Дразинов инверз.

Дразинов индекс елемента a је степен нилпотентности елемента $a(1-ab)$. До уопштења Дразиновог инверза долазимо ако нилпотентност елемента $a(1-ab)$ заменимо са његовом квазинилпотентношћу. Како је $\mathcal{A}^{nil} \subset \mathcal{A}^{qnil}$, јасно је да ако елемент a има Дразинов инверз, онда он има и уопштени Дразинов инверз, то јест важи $\mathcal{A}^D \subset \mathcal{A}^d$.

Ако $a \in \mathcal{A}^d \setminus \mathcal{A}^D$, онда пишемо $ind(a) = \infty$.

У Банаховим алгебрама уопштени Дразинов инверз је изучавао Колиха [33]. Зато се овај инверз назива и Колиха-Дразинов инверз.

Приметимо да је $\mathcal{A}^{-1} \subset \mathcal{A}^{\sharp} \subset \mathcal{A}^D \subset \mathcal{A}^d$.

Следећа теорема даје услове за егзистенцију и јединственост уопштеног Дразиновог инверза.

Теорема 1.3.2 *[20] Нека је $a \in \mathcal{A}$. Тада су следећи услови еквивалентни:*

(i) a има уопштени Дразинов инверз,

(ii) $0 \notin acc\ \sigma(a)$,

(iii) Постоји идемпотент $p \in \mathcal{A}$ који комутира са a такав да је елемент ap квазинилпотентан и елемент $a+p$ инвертибилан.

Ако важи (i),(ii) или (iii) тада је $p = 1 - aa^d$ и

$$a^d = (a+p)^{-1}(1-p).$$

Дакле, a^d је јединствен.

Идемпотент $p \in \mathcal{A}$ из претходне теореме назива се спектрални идемпотент елемента a. Овај идемпотент има особину $ap = pa \in \mathcal{A}^{qnil}$, $a + p \in \mathcal{A}^{-1}$. Ако постоји, такав елемент је јединствен и означавамо га са a^{π} ([33], [35], [62], [63]).

Ако је елемент $a \in \mathcal{A}$ уопштено Дразин инвертибилан и $a^\pi = 1 - aa^d$ његов спектрални идемпотент, тада је a^d спољашњи инверз у односу на идемпотенте $1 - a^\pi$ и a^π, то јест $a^d = a^{(2)}_{1-a^\pi, a^\pi}$.

Матрична форма елемента $a \in \mathcal{A}$, који је уопштено Дразин инвертибилан, у односу на идемпотент $p = aa^d$ је:

$$a = \begin{pmatrix} pap & pa(1-p) \\ (1-p)ap & (1-p)a(1-p) \end{pmatrix}_p = \begin{pmatrix} a^2a^d & 0 \\ 0 & a(1-aa^d) \end{pmatrix}_{aa^d} = \begin{pmatrix} a^2a^d & 0 \\ 0 & aa^\pi \end{pmatrix}_{aa^d}.$$

Сада уводимо следеће ознаке:

$a_1 = a^2a^d, \quad a_2 = aa^\pi, \quad \mathcal{B} = aa^d\mathcal{A}aa^d, \quad \mathcal{C} = (1-aa^d)\mathcal{A}(1-aa^d),$

Напоменимо да су и $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ Банахове алгебре.

Елемент a_1 је групно инвертибилан у $\mathcal{A}$ и важи $(a^2a^d)^\sharp = a^d$, док је елемент a_2 квазинилпотентан у Банаховој алгебри $\mathcal{A}$, па је онда квазинилпотентан и у Банаховој алгебри $\mathcal{C}$. Како је $a^d = a^daa^d = (aa^d)a^d(aa^d)$ то $a^d \in \mathcal{B}$. Важи и $a^da_1 = a_1a^d = a^2a^da^d = aa^d$. Приметимо да је aa^d јединица у $\mathcal{B}$. Зато је елемент a_1 инвертибилан у $\mathcal{B}$ и његов инверз је $a_1|_{\mathcal{B}}^{-1} = a^d$.

На овај начин долазимо до следеће декомпозиције уопштеног Дразиновог инверза a^d елемента a:

$$a^d = \begin{pmatrix} a^d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{aa^d} = \begin{pmatrix} a_1|_{\mathcal{B}}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{aa^d} = (a^2a^d)^\sharp.$$

Специјално, ако је a Дразин инвертибилан онда је елемент a_2 нилпотентан. Осим тога, ако је a групно инвертибилан, тада је $a_2 = 0$.

Нека је

$$x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_p$$

матрична репрезентација елемента $x \in \mathcal{A}$ у односу на идемпотент $p \in \mathcal{A}$, и нека је $s = d - ca^{-1}b$ Шуров (Schur) комплемент елемента a. Приметимо да је елемент a инвертибилан у Банаховој алгебри $p\mathcal{A}p$, док је Шуров комплемент s инвертибилан у Банаховој алгебри $(1-p)\mathcal{A}(1-p)$. Тада инверз елемента x има Банахиевич-Шурову форму:

$$x^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} + a^{-1}bs^{-1}ca^{-1} & -a^{-1}bs^{-1} \\ -s^{-1}ca^{-1} & s^{-1} \end{pmatrix}_p .$$

У случају да елемент $a \in \mathcal{A}$ није инвертибилан, онда уместо Шуровог посматрамо уопштени Шуров комплемент.

Ако постоји $a^{(2)}_{p,q}$ спољашњи инверз елемента $a \in \mathcal{A}$ у односу на дате идемпотенте $p, q \in \mathcal{A}$, онда можемо посматрати уопштени Шуров комплемент $s = d - ca^{(2)}_{p,q}b$ елемента a у x. Ово је могуће због јединствености инверза $a^{(2)}_{p,q}$.

На исти начин, ако је a уопштено Дразин инвертибилан, тада за уопштени Шуров комплемент елемента a у x можемо узети $s = d - ca^d b$.

1.4 Уопштени инверзи у C^*-алгебрама

Уопштене инверзе у C^*- алгебрама изучавали су Харте, Мбекта (Harte, Mbekhta) ([58], [59]). О Мур-Пенроузовом инверзу у C^*- алгебрама значајни резултати се могу наћи у радовима Колихе ([34], [36]).

Нека је $\mathcal{A}$ C^*-алгебра са јединицом 1.

Елемент $a \in \mathcal{A}$ је уопштено инвертибилан (регуларан) ако постоји елемент $b \in \mathcal{A}$ тако да је $aba = a$. Тада за елемент b кажемо да је унутрашњи инверз елемента a.

Елемент $x \in \mathcal{A}$ који задовољава четири Пенроузове једначине [67]:

$$axa = a, \quad xax = x, \quad (ax)^* = ax \quad (xa)^* = xa,$$

назива се Мур-Пенроузов инверз елемента $a \in \mathcal{A}$ и означавмо га $a^\dagger$.

Скуп свих Мур-Пенроуз инвертибилних елемената $\mathcal{A}$ означавамо са $\mathcal{A}^\dagger$.

Егзистенцију Мур-Пенроузовог инверза за све регуларне елементе у C^*- алгебри $\mathcal{A}$ доказали су Харте и Мбекта [59] применом резултата који су добијени у ([39], [60], [62]).

Теорема 1.4.1 *[59] Нека је $\mathcal{A}$ C^*- алгебра. Ако је елемент $a \in \mathcal{A}$ регуларан онда он има Мур-Пенроузов инверз $a^\dagger \in \mathcal{A}$.*

Наводимо још неке теореме из поменутих радова.

Теорема 1.4.2 *[59] Нека је $\mathcal{A}$ C^*- алгебра. Ако је $a \in \mathcal{A}$, тада важи:*

a је регуларан $\Leftrightarrow$ a^*a је регуларан $\Leftrightarrow$ aa^* је регуларан.

У ствари,

$$(a^*a)^\dagger = a^\dagger(a^\dagger)^* \text{ и } (aa^*)^\dagger = (a^\dagger)^*a^\dagger.$$

Теорема 1.4.3 *[59] Нека је $\mathcal{A}$ C^*- алгебра. Ако је $a \in \mathcal{A}$, тада:*

$a\mathcal{A}$ је затворен $\Rightarrow$ a је регуларан,

а самим тим и:

$a\mathcal{A} = cl\ a\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A}a = cl\ \mathcal{A}a$.

У раду [25] могу се наћи интересантне еквивалентне формулације једначина које дефинишу Мур-Пенроузов инверз елемената a.

Пропозиција 1.4.1 *[25] Нека је $\mathcal{A}$ C^*- алгебра и нека су a и x два произвољна елемента у $\mathcal{A}$. Онда,*

(i) једначине $a = axa$ и $(ax)^* = ax$ су еквивалентне са $a = x^*a^*a$.

(ii) једначине $a = axa$ и $(xa)^* = xa$ су еквивалентне са $a = aa^*x^*$.

(iii) једначине $x = xax$ и $(ax)^* = ax$ су еквивалентне са $x = xx^*a^*$.

(iv) једначине $x = xax$ и $(xa)^* = xa$ су еквивалентне са $x = a^*x^*x$.

У доказу Пропозиције 1.4.1 Боасо следи идеје Теореме 1 у [67].

Пропозиција 1.4.2 *[25] Нека је $\mathcal{A}$ C^*- алгебра и нека је $a \in \mathcal{A}$. Тада су следећи искази еквивалентни:*

(i) $x \in \mathcal{A}$ *је Мур-Пенроузов инверз елемента* a,

(ii) $a = x^*a^*a$ *и* $x = a^*x^*x$,

(iii) $a = aa^*x^*$ *и* $x = xx^*a^*$.

Примедба 1.4.1 *[25] Нека је $\mathcal{A}$ C^*-алгебра, елемент $a \in \mathcal{A}$ регуларан и $x = a^\dagger$. Тада према Пропозицији(1.4.2) и чињеници да је a^* такође регуларан и $(a^*)^\dagger = (a^\dagger)^*$, следећи искази су еквивалентни:*

(i) $x \in \mathcal{A}$ *је Мур-Пенроузов инверз елемента* a,

(ii) $a^* = a^*ax$ *и* $x^* = x^*xa$,

(iii) $a^* = xaa^*$ *и* $x^* = axx^*$.

Пропозиција 1.4.3 *[25] Нека је $\mathcal{A}$ C^*- алгебра и нека је $a \in \mathcal{A}$. Тада су следећи искази еквивалентни:*

(i) $x \in \mathcal{A}$ *је Мур-Пенроузов инверз елемента* a,

(ii) $a^* = xaa^*$ *и* $x = xx^*a^*$,

(iii) $a = aa^*x^*$ *и* $x^* = axx^*$,

(iv) $a^* = a^*ax$ *и* $x = a^*x^*x$,

(v) $a = x^*a^*a$ *и* $x^* = x^*xa$.

Закон обрнутог редоследа (reverse order law-ROL) је једна од најважнијих особина Мур Пенроузовог инверза, тј. под којим условима једнакост $(ab)^\dagger = b^\dagger a^\dagger$ важи.

У раду [25] Боасо је изучавао релације између производа и Мур-Пенроузовог инверза. У ствари, он је доказао четири еквивалентне карактеризације закона обрнутог редоследа за Мур-Пенроузов инверз.

Теорема 1.4.4 *[25] Нека је $\mathcal{A}$ C^*-алгебра и нека су $a, b \in \mathcal{A}$ регуларни елементи тако да је ab, такође, регуларан елемент. Дефинишимо $p = bb^\dagger$, $q = a^\dagger a^{\dagger *}$, $r = bb^*$ и $s = a^\dagger a$. Тада су следећи искази еквивалентни:*

(*i*) $(ab)^\dagger = b^\dagger a^\dagger$,

(*ii*) $a(pq - qp)b^{\dagger *} = 0$ *и* $a(rs - sr)b^{\dagger *} = 0$,

(*iii*) $spqp = qp$ *и* $srsp = sr$.

Теорема 1.4.5 *[25] Претпоставимо да важе исти услови и ознаке као у Теореми(1.4.4), тада су следећи искази еквивалентни:*

(*i*) $(ab)^\dagger = b^\dagger a^\dagger$,

(*ii*) $b^\dagger(qp - pq)a^* = 0$ *и* $b^\dagger(sr - rs)a^* = 0$,

(*iii*) $pqps = pq$ *и* $psrs = rs$.

Теорема 1.4.6 *[25] Претпоставимо да важе исти услови и ознаке као у Теореми(1.4.4),тада су следећи искази еквивалентни:*

(*i*) $(ab)^\dagger = b^\dagger a^\dagger$,

(*ii*) $b^*(q^\dagger p - pq^\dagger)a^\dagger = 0$ *и* $b^*(sr^\dagger - r^\dagger s)a^\dagger = 0$,

(*iii*) $pq^\dagger ps = pq^\dagger$ *и* $psr^\dagger s = r^\dagger s$.

Теорема 1.4.7 *[25] Претпоставимо да важе исти услови и ознаке као у Теореми(1.4.4),тада су следећи искази еквивалентни:*

(*i*) $(ab)^\dagger = b^\dagger a^\dagger$,

(*ii*) $a^{\dagger *}(pq^\dagger - q^\dagger p)b = 0$ *и* $a^{\dagger *}(r^\dagger s - sr^\dagger)b = 0$,

(*iii*) $spq^\dagger p = q^\dagger p$ *и* $sr^\dagger sp = sr^\dagger$.

Дефиниција 1.4.1 *[7] Нека је $\mathcal{A}$ C^*-алгебра. Елемент $a \in \mathcal{A}$ има добар носач ако постоји пројекција $p \in \mathcal{A}$ тако да је $a = ap$ и a^*a инвертибилан у $p\mathcal{A}p$.*

У том случају пројекција p је носач од a.

Напоменимо и овде да C^*- алгебре имају GN-особину.

Како C^*-алгебра $\mathcal{A}$ је $*$-редуковани прстен са GN-особином то важе претходно наведени резултати у одељку(1.2).

У C^*-алгебрама МП-инвертибилност се карактерише на следећи начин.

Теорема 1.4.8 *[31] У C^*-алгебри $\mathcal{A}$ са јединицом, следећи услови за $a \in \mathcal{A}$ су еквивалентни:*

(*i*) *a је добро подржан (well-supported) ;*

(*ii*) *a је Мур-Пенроуз инвертибилан;*

(*iii*) *a је регуларан.*

Резултати везано за Шуров комплемент у C^*-алгебри могу се наћи у раду [17].

1.5 Уопштени инверзи оператора

Нека су X и Y произвољни Банахови простори. Означимо са $\mathcal{L}(X,Y)$ скуп свих ограничених линеарних оператора из X у Y. Ако је X=Y, тада са $\mathcal{L}(X)$ означимо скуп свих ограничених линеарних оператора из X у X.

Дефинишимо унутрашњи, спољашњи и рефлексивни уопштени инверз ограниченог линеарног оператора.

Дефиниција 1.5.1 *Нека су X и Y Банахови простори и нека је $A \in \mathcal{L}(X,Y)$.*

Ако постоји оператор $B \in \mathcal{L}(Y,X)$ такав да је $ABA = A$, тада је оператор B унутрашњи инверз оператора A. Оператор A је регуларан или унутрашње инвертибилан.

Ако постоји оператор $C \in \mathcal{L}(Y,X)$, $C \neq 0$ такав да је $CAC = C$, тада је оператор C спољашњи инверз оператора A. Оператор A је спољашње инвертибилан.

Ако је оператор $D \in \mathcal{L}(X,Y)$ и унутрашњи и спољашњи инверз оператора A, тада је операторD рефлексиван уопштени инверз оператора A.

Нека је A произвољан оператор, $A \in \mathcal{L}(X,Y)$.

Нула простор или језгро оператора A означава се са $\mathcal{N}(A)$ и јесте

$$\mathcal{N}(A) = \{x \in X : Ax = 0\}.$$

Слика оператора A означава се са $\mathcal{R}(A)$ и то је скуп:

$$\mathcal{R}(A) = \{Ax : x \in X\}.$$

Оператор $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ је регуларан ако и само ако су му језгро $\mathcal{N}(A)$ и слика $\mathcal{R}(A)$ затворени и комплементарни потпростори, редом, у просторима X и Y.

Теорема 1.5.1 *[72] Нека су X и Y Банахови простори и нека оператор $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ има унутрашњи инверз $B \in \mathcal{L}(Y,X)$. Тада важи:*

(i) $\mathcal{R}(AB) = \mathcal{R}(A)$ и $\mathcal{N}(BA) = \mathcal{N}(A)$.

(ii) $X = \mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(BA)$, где је $I - BA$ пројектор простора X на $\mathcal{N}(A)$ паралелно са $\mathcal{R}(BA)$.

(iii) $Y = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(AB)$, где је AB пројектор простора Y на $\mathcal{R}(A)$ паралелно са $\mathcal{N}(AB)$.

Теорема 1.5.2 *[72] Нека су X и Y Банахови простори и нека оператор $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Ако су $\mathcal{R}(A)$ и $\mathcal{N}(A)$ затворени и комплементарни потпростори простора Y и X, редом, тада је оператор A регуларан.*

Последица 1.5.1 *[72] Нека су X и Y Банахови простори. Оператор $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ је регуларан ако и само ако су простори $\mathcal{N}(A)$ и $\mathcal{R}(A)$ затворени и комплементарни потпростори простора X и Y, редом.*

Последица 1.5.1 у случају када су X и Y Хилбертови простори гласи: Оператор $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ је регуларан ако и само ако је $\mathcal{R}(A)$ затворен.

Теорема 1.5.3 *[72] Нека су X и Y Банахови простори и нека оператор $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ има спољашњи инверз $B \in \mathcal{L}(Y,X)$. Тада важи:*

(i) $\mathcal{R}(BA) = \mathcal{R}(B)$ и $\mathcal{N}(AB) = \mathcal{N}(B)$.

(ii) $Y = \mathcal{N}(B) \oplus \mathcal{R}(AB)$, где је $I - AB$ пројектор простора Y на $\mathcal{N}(B)$ паралелно са $\mathcal{R}(AB)$.

(iii) $X = \mathcal{R}(B) \oplus \mathcal{N}(BA)$, где је BA пројектор X на $\mathcal{R}(B)$ паралелно са $\mathcal{N}(BA)$.

Теорема 1.5.4 *[72] Нека су X и Y Банахови простори и нека оператор $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Тада постоји спољашњи инверз $B \in \mathcal{L}(Y,X)$, $B \neq 0$ оператора A ако и само ако је $A \neq 0$.*

Дакле, сваки ненула оператор A има спољашњи инверз. У Банаховим алгебрама ово не важи.

Унутрашња регуларност повлачи рефлексивну регуларност, тј. ако је $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ регуларан са унутрашњим инверзом $B \in \mathcal{L}(Y,X)$, тада је оператор BAB рефлексивни уопштени инверз оператора A.

Унутрашњи инверз оператора није јединствен ако фиксирамо слику и језгро код унутрашњег инверза. Како је спољашњи инверз јединствено одређен својом сликом и језгром, тада је и рефлексивни уопштени инверз јединствено одређен својом сликом и језгром.

Следећа теорема показује да унутрашњи инверз са унапред задатом сликом и језгром није јединствен.

Теорема 1.5.5 *[72] Нека су X и Y Банахови простори и нека оператор $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ има унутрашњи инверз и нека су T и S затворени потпросто-ри X и Y, редом, такви да је $X = T \oplus \mathcal{N}(A)$ и $Y = \mathcal{R}(A) \oplus S$. Тада A има следећу матричну форму:*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} T \\ \mathcal{N}(A) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathcal{R}(A) \\ S \end{pmatrix},$$

где је A_1 инвертибилан оператор.

И више, нека је оператор $B \in \mathcal{L}(Y,X)$ унутрашњи инверз оператора $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ такав да је $\mathcal{R}(BA) = T$ и $\mathcal{N}(AB) = S$. Тада оператор B има матричну форму:

$$B = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \mathcal{R}(A) \\ S \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} T \\ \mathcal{N}(A) \end{pmatrix},$$

где је $W \in \mathcal{L}(S, \mathcal{N}(A))$ произвољан ограничен оператор.

Теорема 1.5.6 *[72] Нека су X и Y Банахови простори и нека оператор $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, $A \neq 0$. Нека је T потпростор простора X и S потпростор простора Y. Тада су следећа тврђења еквивалентна:*

(i) Постоји ненула оператор $B \in \mathcal{L}(Y,X)$ такав да важи $BAB = B$, $\mathcal{R}(B) = T$ и $\mathcal{N}(B) = S$.

(ii) T и S су затворени и комплементарни потростори простора X и Y, редом, $A(T) \oplus S = Y$ и рестрикција $A|_T : T \mapsto A(T)$ је инвертибилни оператор.

Када је задовољено једно од тврђења (i) или (ii), тада је оператор B из (i) јединствен.

Претходна теорема тврди да постоји јединствен спољашњи инверз оператора A који има унапред задату слику T и језгро S. Овај инверз означавамо са $A^{(2)}_{T,S}$.

Наводимо следећу последицу Теореме(1.5.6).

Последица 1.5.2 *[72] Нека је $B = A^{(2)}_{T,S}$ спољашњи инверз оператора A са унапред задатом сликом и језгром, и претпоставимо да важе услови Теореме(1.5.6). Тада оператор A има следећу матричну форму:*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} T \\ \mathcal{N}(BA) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A(T) \\ S \end{pmatrix},$$

где је A_1 инвертибилан.

И више, $A^{(2)}_{T,S}$ има следећу матричну форму:

$$A^{(2)}_{T,S} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} A(T) \\ S \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} T \\ \mathcal{N}(BA) \end{pmatrix}.$$

Нека су сада $\mathcal{H}$ и $\mathcal{K}$ Хилбертови простори.

Оператор $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ је регуларан ако и само ако му је слика затворена.

Како је спољашњи инверз јединствено одређен својом сликом и језгром, тада је и рефлексивни уопштени инверз јединствено одређен својом сликом и језгром.

Нека је оператор $B \in \mathcal{L}(\mathcal{K},\mathcal{H})$ такав да важи $ABA = A$ и $BAB = B$. Можемо захтевати да су слика и језгро оператора B одређени са $\mathcal{R}(B) = \mathcal{N}(A)^{\perp} = \mathcal{R}(A^*)$ и $\mathcal{N}(B) = \mathcal{R}(A)^{\perp} = \mathcal{N}(A^*)$. Овако дефинисан B је јединствено одређен и назива се Мур-Пенроузов инверз оператора A.

Мур-Пенроузов инверз оператора A означава се са $A^{\dagger}$.

Како су оператори AB и BA само-конјуговани, то се Мур-Пенроузов инверз може описати и Пенроузовим једначинама.

Теорема 1.5.7 *[20] Нека су $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ Хилбертови простори и оператор $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ са затвореном сликом. Тада постоји јединствен оператор $A^{\dagger} \in \mathcal{L}(\mathcal{K},\mathcal{H})$ који задовољава следеће једнакости:*

(1) $AA^{\dagger}A = A$, *(2)* $A^{\dagger}AA^{\dagger} = A^{\dagger}$, *(3)* $(AA^{\dagger})^* = AA^{\dagger}$, *(4)* $(A^{\dagger}A)^* = A^{\dagger}A$.

Глава 2

2 Пертурбације

Теорија пертурбације разматра решење неког проблема ако се полазне претпоставке промене за адитивну константу.

2.1 Групна инвертибилност

У овом одељку биће изложени оригинални резултати о групном инверзу у јединичном прстену добијени у раду [48] Михајловић, Ђорђевић .

Проблем групне инвертибилности за линеарне операторе на Хилбертовим просторима изучаван је у раду [12].

Нека је $\mathcal{H}$ бесконачно-димензионалан Хилбертов простор. Са $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ означена је Банахова алгебра свих ограничених линеарних оператора на $\mathcal{H}$. Нула простор (нулти простор или језгро оператора) и домет оператора $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ означава се са $\mathcal{N}(T)$ и $\mathcal{R}(T)$, редом. Адјунгован оператор T^* линеарног оператора T, на Хилбертовом простору $\mathcal{H}$, дефинисан је као линеаран оператор који задовољава услов: $(Tx, y) = (x, T^*y)$, за све $x, y \in \mathcal{H}$. Када за оператор T на Хилбертовом простору $\mathcal{H}$ важи $T = T^*$, овај оператор се назива самоадјунгован. Нека је U затворен потпростор простора $\mathcal{H}$. Означимо са P_U ортогонални пројектор на U, и нека је $P_{U,V}$ идемпотент тако да $\mathcal{R}(P_{U,V}) = U$ и $\mathcal{N}(P_{U,V}) = V$. Директну суму и ортогоналну директну суму означавамо са $U \oplus V$ и $U \oplus^{\perp} V$, редом. Приметимо да је $\mathcal{R}(P_U) + \mathcal{N}(P_U) = U \oplus^{\perp} U^{\perp} = \mathcal{H}$ и $\mathcal{R}(P_{U,V}) + \mathcal{N}(P_{U,V}) = U \oplus V = \mathcal{H}$. Оператор $T \in \mathcal{H}$ је уопштено инвертибилан ако постоји оператор $S \in \mathcal{H}$ тако да је (1) $TST = T$. У општем случају оператор S није јединствен. У намери да се докаже његова јединственост неопходно је наметнути и додатне услове:

$(2) STS = S$, $(3)(TS)^* = TS$, $(4)(ST)^* = ST$, $(5) TS = ST$.

Такође, узима се у обзир и услов (1_k) $T^kST = T^k$, где је k фиксиран позитиван цео број. Јасно је да $(1) = (1_1)$. Елементе $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ који задовољавају (1) називамо $\{1\}$-инверзи од T и означавамо их $S = T^-$. Слично, (1, 2, 5)-инверз се назива групни инверз и означава се $S = T^\sharp$. (1, 2, 3, 4)-инверз је Мур-Пенроузов инверз и означава се $S = T^\dagger$. $(1_k, 2, 5)$-инверз је Дразинов инверз и означава се $S = T^D$, где k=ind(T) називамо Дразинов индекс од T и то је најмањи ненегативан цео број за који је $\mathcal{R}(T^{k+1}) = \mathcal{R}(T^k)$ и $\mathcal{N}(T^{k+1}) = \mathcal{N}(T^k)$ [5]. У случају када је ind(T)=1, оператор T^D се назива групни инверз од T и означава се са $T^\sharp$. Када је ind$(T) = 0$, групни инверз је обичан инверз, тј. $T^\sharp = T^{-1}$. Оператор $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ има Мур-Пенроузов инверз ако и само ако је $R(T)$ затворен. Мур-Пенроузов инверз $T^\dagger$ је јединствен и $TT^\dagger = P_{\mathcal{R}}(T)$ и $T^\dagger T = P_{\mathcal{R}}(T^*)$ [70]. Даље, ако је $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ позитиван, онда $TT^\dagger = (TT^\dagger)^* = (T^\dagger)^*T^* = T^\dagger T$. За елемент $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ кажемо да је EP ако је $T^\sharp = T^\dagger$ [16]. За $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ групни инверз је јединствен, ако постоји ([14], [70]). Елемент $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ је групно инвертибилан ако и само ако постоји идемпотент $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ тако да је $T + P$ инвертибилан, $TP = 0$ и $TP = PT$. Ако су ови услови задовољени, групни инверз $T^\sharp$ оператора T дат је са $T^\sharp = (T + P)^{-1}(I - P)$, при чему је $P = T^\pi = I - TT^\sharp$ [73]. У раду [12] Денг је дао потребне и довољне услове да производ два оператора буде групно инвертибилан.

За ограничен линеаран оператор T и идемпотент $P_{\mathcal{L},\mathcal{M}}$ важе особине које су за Хилберт C^*-модуле изучаване у раду [54].

Лема 2.1.1 *[54] Нека су $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ затворени потпростори од $\mathcal{H}$, и нека је $P_{\mathcal{L},\mathcal{M}}$ идемпотент на $\mathcal{L}$ дуж $\mathcal{M}$.*

(i) $P_{\mathcal{L},\mathcal{M}}T = T$ ако и само ако $\mathcal{R}(T) \subset \mathcal{L}$.

(ii) *$TP_{\mathcal{L},\mathcal{M}} = T$ако и само ако $\mathcal{N}(T) \supset \mathcal{L}$.*

Ако су $A, B \in \mathbb{C}^{nxn}$ тада важи $(AB)^D = A[(BA)^D]^2 B$, [56]. Денг[12] је доказао следећи резултат за ограничене линеарне операторе $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Лема 2.1.2 *[12] Нека су $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Ако је BA групно инвертибилан, онда је AB Дразин инвертибилан са $ind(AB) \leq 2$ и $(AB)^D = A[(BA)^\sharp]^2 B$. Ако су и AB и BA групно инвертибилни онда важи:*

$$(AB)^\sharp = A[(BA)^\sharp]^2 B, \quad (AB)^\sharp A = A(BA)^\sharp \text{ и } B(AB)^\sharp = (BA)^\sharp = (BA)^\sharp B.$$

У ([10], [11]) дати су неки потребни и довољни услови за егзистенцију групног инверза квадратне матрице. Међутим, неки од тих резултата не важе за операторе у Хилбертовом простору. Што се тиче групног инверза горње троугаоне матрице оператора добијен је следећи резултат.

Теорема 2.1.1 *[12] Нека су $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ Хилбертови простори, и нека је $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ оператор на $\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$. Тада важе следећа тврђења:*

(i) *Претпоставимо да групни инверз $D^\sharp$ постоји (односно, $A^\sharp$ постоји). Тада $M^\sharp$ постоји ако и само ако $A^\sharp$ постоји (односно, $D^\sharp$ постоји) и $A^\pi B D^\pi = 0$.*

(ii) *Претпоставимо да $A^\sharp$ и $D^\sharp$ постоје. Тада постоји $M^\sharp$ ако и само ако је $A^\pi B D^\pi = 0$. У овом случају је,*

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}^\sharp = \begin{pmatrix} A^\sharp & Y \\ 0 & D^\sharp \end{pmatrix}, \text{ где је } Y = (A^\sharp)^2 B D^\pi + A^\pi B (D^\sharp)^2 - A^\sharp B D^\sharp.$$

(iii) *Претпоставимо да је $\mathcal{H}$ (односно, $\mathcal{K}$) коначно димензионалан. Тада $M^\sharp$ постоји ако и само ако $A^\sharp, B^\sharp$ постоје и ако је $A^\pi B D^\pi = 0$.*

Осим тога, у раду [12] добијени су и неки еквивалентни услови за закон обрнутог редоследа оператора (Reverse order law, скраћено ROL).

У теорији уопштених инверза закон обрнутог редоследа за уопштене инверзе производа представља занимљиву класу основних проблема.

У следећој теореми проучаван је закон обрнутог редоследа за групни инверз производа оператора, тј. под којим условима важи $(AB)^\sharp = B^\sharp A^\sharp$.

Теорема 2.1.2 *[12] Нека су $A, B, AB \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ групно инвертибилни. Тада $(AB)^\sharp = B^\sharp A^\sharp$ ако и само ако је $(I - A^\pi)BA^\pi = 0, B^\sharp(I - A^\pi) = (AB)^\sharp A$.*

Додатно, ако су A, B, BA^π групно инвертибилни, тада су следећи искази еквивалентни:

(i) $(AB)^\sharp = B^\sharp A^\sharp$;

(ii) $(BA)^\sharp = A^\sharp B^\sharp$;

(iii) $A = A_1 \oplus 0$, $B = B_1 \oplus B_2$ *и* $B_1^\sharp = (A_1 B_1)^\sharp A_1$ *у односу на декомпозицију простора* $\mathcal{H} = \mathcal{N}(A^\pi) \oplus \mathcal{R}(A^\pi)$, *где је* A_1 *инвертибилно.*

(iv) $A = A_1 \oplus 0$, $B = B_1 \oplus B_2$ *и* $B_1^\sharp = A_1(B_1 A_1)^\sharp$ *у односу на декомпозицију простора* $\mathcal{H} = \mathcal{N}(A^\pi) \oplus \mathcal{R}(A^\pi)$, *где је* A_1 *инвертибилно.*

2.2 Групна инвертибилност у прстенима

Резултати дати у овој секцији су оригинални и објављени су у раду [48].

Нека је $M \subset \mathcal{R}$, тада

$$M^\circ = \{x \in \mathcal{R} \colon Mx = \{0\}\} \text{ и } {}^\circ M = \{x \in \mathcal{R} \colon xM = \{0\}\}.$$

Важи следећа лема.

Лема 2.2.1 *Нека је $\mathcal{R}$ прстен са јединицом. Ако $t \in \mathcal{R}$ произвољан елемент и $p \in \mathcal{R}^\bullet$ идемпотент, тада важи:*

(i) $pt = t$ *ако и само ако је* $t\mathcal{R} \subset p\mathcal{R}$;

(ii) $tp = t$ *ако и само ако је* $t^0 \supset p^0$.

Доказ: (i) Нека $pt = t$, и $tr \in t\mathcal{R}$ за неко $r \in \mathcal{R}$. Тада $tr = ptr \in p\mathcal{R}$, тако да $t\mathcal{R} \subset p\mathcal{R}$.

С'друге стране, нека $t\mathcal{R} \subset p\mathcal{R}$. Како $t \in t\mathcal{R}$, имамо $t \in p\mathcal{R}$, тако $t = pr$, за неко $r \in \mathcal{R}$. Тада $pt = ppr = pr = t$.

(ii) Нека $tp = t$ и $x \in p^0$. Тада $px = 0, tpx = 0, tx = 0$ и $x \in t^0$. Отуда, $t^0 \supset p^0$.

С'друге стране, нека $t^0 \supset p^0$. Како $1 \in \mathcal{R}$, добијамо $1-p \in p^0$ и $1-p \in t^0$. Сада, $t(1-p) = 0$ повлачи $t = tp$. □

Ако $t \in \mathcal{R}^d$, тада је $t^\pi = 1 - tt^d$ спектрални идемпотент од t.

Нека је $\mathcal{R}$ Банахова алгебра. Тада се p може добити помоћу функционалног рачуна.

Сличност у прстенима се дефинише на стандардан начин.

Два елемента $t, b \in \mathcal{R}$ су слична, у ознаци $t \sim b$, ако постоји инвертибилан елемент $s \in \mathcal{R}$ тако да је $t = s^{-1}bs$.

Лема 2.2.2 *Нека су $a, b \in \mathcal{R}$.*

Ако је ba групно инвертибилан, онда је ab Дразин инвертибилан са $ind(ab) \leq 2$ и $(ab)^D = a[(ba)^\sharp]^2 b$.

Ако су оба, ab и ba групно инвертибилни, онда $(ab)^\sharp = a[(ba)^\sharp]^2 b, (ab)^\sharp a = a(ba)^\sharp$ и $b(ab)^\sharp = (ba)^\sharp b$.

Доказ: Нека је $x = a[(ba)^\sharp]^2 b$. Јасно,

$$xabx = a[(ba)^\sharp]^2 baba[(ba)^\sharp]^2 b = a(ba)^\sharp(ba)^\sharp b = a[(ba)^\sharp]^2 b = x,$$

$$abx = aba[(ba)^\sharp]^2 b = a(ba)^\sharp b,$$

$$xab = a[(ba)^\sharp]^2 bab = a(ba)^\sharp b,$$

$$(ab)^3 x = (ab)^3 a[(ba)^\sharp]^2 b = (ab)^2 a(ba)^\sharp b = ababa(ba)^\sharp b = abab = (ab)^2.$$

Дакле, $x = (ab)^D$ и $\mathrm{ind}(ab) \leq 2$.

И више, ако су ab и ba групно инвертибилни, онда

$(ab)^\sharp = (ab)^D = a[(ba)^\sharp]^2 b,$

$(ab)^\sharp a = a[(ba)^\sharp]^2 ba = a(ba)^\sharp,$

$b(ab)^\sharp = ba[(ba)^\sharp]^2 b = (ba)^\sharp b.$ □

Сада доказујемо теорему која представља главни резултат у раду [48].

Теорема 2.2.1 *Нека је* $\mathcal{R}$ *прстен,* $x \in \mathcal{R}, p \in \mathcal{R}^\bullet$*, и*

$$x = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}_{p,p}.$$

Следећа тврђења важе:

(i) *Претпоставимо да* $d^\sharp$ *постоји (односно,* $a^\sharp$ *постоји). Тада* $x^\sharp$ *постоји ако и само ако* $a^\sharp$ *постоји (односно,* $d^\sharp$ *постоји) и* $a^\pi b d^\pi = 0$.

(ii) *Претпоставимо да* $a^\sharp$ *и* $d^\sharp$ *постоје. Онда* $x^\sharp$ *постоји ако и само ако* $a^\pi b d^\pi = 0$. *У овом случају важи:*

$$x^\sharp = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}_{p,p}^\sharp = \begin{pmatrix} a^\sharp & y \\ 0 & d^\sharp \end{pmatrix}_{p,p},$$

где

$$y = (a^\sharp)^2 b d^\pi + a^\pi b (d^\sharp)^2 - a^\sharp b d^\sharp.$$

Доказ: (i)

$\Rightarrow$: Претоставимо да $x^\sharp$ и $d^\sharp$ постоје. За

$$x = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}_{p,p}$$

нека је

$$x_1 = \begin{pmatrix} y & z \\ 0 & d^\sharp \end{pmatrix}_{p,p}.$$

Отуда,

$$xx_1x = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & z \\ 0 & d^\sharp \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ay & az+bd^\sharp \\ 0 & dd^\sharp \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} aya & ayb+azd+bd^\sharp d \\ 0 & dd^\sharp d \end{pmatrix}.$$

Имамо $xx_1x = x$ ако и само ако је

$$\begin{pmatrix} aya & ayb+azd+bd^\sharp d \\ 0 & dd^\sharp d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

Тако $aya = a$. И више,

$$x_1xx_1 = \begin{pmatrix} y & z \\ 0 & d^\sharp \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & z \\ 0 & d^\sharp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ya & yb+zd \\ 0 & d^\sharp d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & z \\ 0 & d^\sharp \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} yay & yaz+ybd^\sharp+zdd^\sharp \\ 0 & d^\sharp dd^\sharp \end{pmatrix}.$$

Имамо $x_1xx_1 = x_1$ ако и само ако је

$$\begin{pmatrix} yay & yaz+ybd^\sharp+zdd^\sharp \\ 0 & d^\sharp dd^\sharp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & z \\ 0 & d^\sharp \end{pmatrix}.$$

Дакле, $yay = y$. Такође, израчунавамо

$$xx_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & z \\ 0 & d^\sharp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ay & az+bd^\sharp \\ 0 & dd^\sharp \end{pmatrix}$$

и

$$x_1x = \begin{pmatrix} y & z \\ 0 & d^\sharp \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ya & yb+zd \\ 0 & d^\sharp d \end{pmatrix}.$$

Имамо $xx_1 = x_1x$ ако и само ако

$$\begin{pmatrix} ay & az+bd^\sharp \\ 0 & dd^\sharp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ya & yb+zd \\ 0 & d^\sharp d \end{pmatrix}.$$

Дакле, $ay = ya$. Како је $aya = a, yay = y$ и $ay = ya$, добијамо $y = a^\sharp$. Приметимо да је сада:

$$ayb + azd + bd^\sharp d = b, \quad yaz + ybd^\sharp + zdd^\sharp = z, \quad az + bd^\sharp = yb + zd.$$

Добијамо

$$a(yb + zd) = b - bd^\sharp d, \quad a(az + bd^\sharp) = b - bd^\sharp d,$$

$$a^\sharp aaz + a^\sharp abd^\sharp = a^\sharp b - a^\sharp bd^\sharp d, \quad az + a^\sharp abd^\sharp = a^\sharp b - a^\sharp bd^\sharp d,$$

$$a(az + bd^\sharp) = aa^\sharp b - aa^\sharp bd^\sharp d, \quad b - bd^\sharp d = aa^\sharp b - aa^\sharp bd^\sharp d.$$

Последња једнакост је еквивалентна са $a^\pi bd^\pi = 0$.

$\Leftarrow$: Претпоставимо да за елементе $a, b \in \mathcal{R}$ постоје групни инверзи $a^\sharp, d^\sharp$ и да је $a^\pi bd^\pi = 0$. Нека је

$$x = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} a^\sharp & y \\ 0 & d^\sharp \end{pmatrix}.$$

Тада,

$$xzx = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^\sharp & y \\ 0 & d^\sharp \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa^\sharp & ay + bd^\sharp \\ 0 & dd^\sharp \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} aa^\sharp a & aa^\sharp b + ayd + bd^\sharp d \\ 0 & dd^\sharp d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & aa^\sharp b + ayd + bd^\sharp d \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

Закључујемо $xzx = x$ ако и само ако је

$$\begin{pmatrix} a & aa^\sharp b + ayd + bd^\sharp d \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

тј.

$$aa^\sharp b + ayd + bd^\sharp d = b. \tag{2.2.1}$$

Такође, имамо

$$zxz = \begin{pmatrix} a^\sharp & y \\ 0 & d^\sharp \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^\sharp & y \\ 0 & d^\sharp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^\sharp a & a^\sharp b + yd \\ 0 & d^\sharp d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^\sharp & y \\ 0 & d^\sharp \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^\sharp a a^\sharp & a^\sharp a y + a^\sharp b d^\sharp + y d d^\sharp \\ 0 & d^\sharp d d^\sharp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^\sharp & a^\sharp a y + a^\sharp b d^\sharp + y d d^\sharp \\ 0 & d^\sharp \end{pmatrix}.$$

Закључујемо да је $zxz = z$ ако и само ако је

$$\begin{pmatrix} a^\sharp & a^\sharp a y + a^\sharp b d^\sharp + y d d^\sharp \\ 0 & d^\sharp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^\sharp & y \\ 0 & d^\sharp \end{pmatrix}$$

тј.

$$a^\sharp a y + a^\sharp b d^\sharp + y d d^\sharp = y. \tag{2.2.2}$$

Приметимо да је

$$xz = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^\sharp & y \\ 0 & d^\sharp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a a^\sharp & a y + b d^\sharp \\ 0 & d d^\sharp \end{pmatrix},$$

и

$$zx = \begin{pmatrix} a^\sharp & y \\ 0 & d^\sharp \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^\sharp a & a^\sharp b + yd \\ 0 & d^\sharp d \end{pmatrix}.$$

Имамо да је $xz = zx$ ако и само ако је

$$\begin{pmatrix} a a^\sharp & a y + b d^\sharp \\ 0 & d d^\sharp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^\sharp a & a^\sharp b + yd \\ 0 & d^\sharp d \end{pmatrix},$$

тј.

$$ay + bd^\sharp = a^\sharp b + yd. \tag{2.2.3}$$

Како је $a^\pi b d^\pi = 0$, добијамо

$$(1 - aa^\sharp) b (1 - dd^\sharp) = 0,$$

$$(b - aa^{\sharp}b)(1 - dd^{\sharp}) = 0,$$

$$b - bdd^{\sharp} - aa^{\sharp}b + aa^{\sharp}bdd^{\sharp} = 0, \tag{2.2.4}$$

$$b = aa^{\sharp}b + bdd^{\sharp} - aa^{\sharp}bdd^{\sharp}.$$

Множењем једнакости (2.2.2) са леве стране са a и са десне стране са d, добијамо

$$aa^{\sharp}ayd + aa^{\sharp}bd^{\sharp}d + aydd^{\sharp}d = ayd, \quad ayd + aa^{\sharp}bd^{\sharp}d + ayd = ayd,$$

$$ayd = -aa^{\sharp}bd^{\sharp}d.$$

Сада, једнакост (2.2.1) постаје

$$aa^{\sharp}b - aa^{\sharp}bd^{\sharp}d + bd^{\sharp}d = b.$$

На исти начин, множењем једнакости (2.2.1)са леве стране са $a^{\sharp}$ и са десне стране са $d^{\sharp}$, добијамо

$$a^{\sharp}aa^{\sharp}bd^{\sharp} + a^{\sharp}aydd^{\sharp} + a^{\sharp}bd^{\sharp}dd^{\sharp} = a^{\sharp}bd^{\sharp},$$

$$a^{\sharp}bd^{\sharp} + a^{\sharp}aydd^{\sharp} + a^{\sharp}bd^{\sharp} = a^{\sharp}bd^{\sharp}, \quad a^{\sharp}bd^{\sharp} = -a^{\sharp}aydd^{\sharp}.$$

Сада, једнакост (2.2.2) постаје

$$a^{\sharp}ay - a^{\sharp}aydd^{\sharp} + ydd^{\sharp} = y.$$

Слично, множењем једнакости (2.2.3) са леве стране са $a^{\sharp}$, добијамо

$$a^{\sharp}ay + a^{\sharp}bd^{\sharp} = (a^{\sharp})^2b + a^{\sharp}yd.$$

Последња једнакост и једнакост (2.2.2) дају

$$(a^{\sharp})^2b + a^{\sharp}yd + ydd^{\sharp} = y. \tag{2.2.5}$$

Сада, имамо $ay + bd^\sharp = a^\sharp b + yd$ (једнакост (2.2.3), па добијамо

$$a \cdot (2) + (1) \cdot d^\sharp = ay + bd^\sharp = a^\sharp b + yd = a^\sharp \cdot (1) + (2) \cdot d$$

$$= a(a^\sharp ay + a^\sharp bd^\sharp + ydd^\sharp) + (aa^\sharp b + ayd + bd^\sharp d)d^\sharp$$

$$= a^\sharp(aa^\sharp + ayd + bd^\sharp d) + (a^\sharp ay + a^\sharp bd^\sharp + ydd^\sharp)d,$$

$$aa^\sharp ay + aa^\sharp bd^\sharp + aydd^\sharp + aa^\sharp bd^\sharp + aydd^\sharp + bd^\sharp dd^\sharp$$

$$= a^\sharp aa^\sharp b + a^\sharp ayd + a^\sharp bd^\sharp d + a^\sharp ayd + a^\sharp bd^\sharp d + ydd^\sharp d,$$

и

$$ay + 2aydd^\sharp + 2aa^\sharp bd^\sharp + bd^\sharp = a^\sharp b + 2a^\sharp ayd + 2a^\sharp bd^\sharp d + yd.$$

Из једнакости (2.2.3) добијамо

$$2aa^\sharp bd^\sharp + 2aydd^\sharp = 2a^\sharp ayd + 2a^\sharp bd^\sharp d, \quad 2aa^\sharp(bd^\sharp - yd) = 2(a^\sharp b - ay)dd^\sharp,$$

$$2aa^\sharp(a^\sharp b - ay) = 2(a^\sharp b - ay)dd^\sharp, \quad 2a^\sharp b - 2ay = 2(bd^\sharp - yd)dd^\sharp,$$

$$2a^\sharp b - 2ay = 2bd^\sharp - 2yd, \quad a^\sharp b + yd = bd^\sharp + ay.$$

Множењем једнакости (2.2.3) са леве стране са $a^\sharp$, добијамо

$$a^\sharp ay + a^\sharp bd^\sharp = (a^\sharp)^2 b + a^\sharp yd,$$

и сада из (2.2.2) добијамо

$$y - ydd^\sharp = a^\sharp ay + a^\sharp bd^\sharp, \quad y - ydd^\sharp = (a^\sharp)^2 b + a^\sharp yd, \quad y = (a^\sharp)^2 b + a^\sharp yd + ydd^\sharp.$$

Множењем последње једнакости са десне стране са $(1 - dd^\sharp)$, добијамо

$$y(1 - dd^\sharp) = (a^\sharp)^2 b(1 - dd^\sharp) + a^\sharp yd(1 - dd^\sharp) + ydd^\sharp(1 - dd^\sharp),$$

$$y - ydd^\sharp = (a^\sharp)^2 bd^\pi + a^\sharp y(d - ddd^\sharp) + y(dd^\sharp - dd^\sharp dd^\sharp),$$

$$y - ydd^\sharp = (a^\sharp)^2 bd^\pi, \quad y = (a^\sharp)^2 bd^\pi + ydd^\sharp.$$

Сада множењем једнакости (2.2.3) са десне стране са $d^\sharp$ добијамо

$$ayd^\sharp + b(d^\sharp)^2 = a^\sharp bd^\sharp + ydd^\sharp.$$

Из једнакости (2.2.2) добијамо

$$a^\sharp bd^\sharp + ydd^\sharp = y - a^\sharp ay, \quad ayd^\sharp + b(d^\sharp)^2 = y - a^\sharp ay,$$

$$y = ayd^\sharp + b(d^\sharp)^2 + a^\sharp ay.$$

Множењем последње једнакости са $(1 - aa^\sharp)$ са леве стране, добијамо

$$(1 - aa^\sharp)y = (1 - aa^\sharp)ayd^\sharp + (1 - aa^\sharp)b(d^\sharp)^2 + (1 - aa^\sharp)a^\sharp ay,$$

$$a^\pi y = (a - aa^\sharp a)yd^\sharp + a^\pi b(d^\sharp)^2 + (a^\sharp a - aa^\sharp a^\sharp a)y,$$

$$a^\pi y = a^\pi b(d^\sharp)^2, \quad (1 - aa^\sharp)y = a^\pi b(d^\sharp)^2, \quad y - aa^\sharp y = a^\pi b(d^\sharp)^2,$$

$$y = a^\pi b(d^\sharp)^2 + aa^\sharp y. \tag{2.2.6}$$

Како је $(a^\sharp)^2 b + a^\sharp yd + ydd^\sharp = y$, добијамо

$$(a^\sharp)^2 b + a^\sharp yd = y(1 - dd^\sharp),$$

$$(a^\sharp)^2 b(1 - dd^\sharp) + a^\sharp yd(1 - dd^\sharp) = y(1 - dd^\sharp)(1 - dd^\sharp),$$

$$(a^\sharp)^2 bd^\pi = y(1 - dd^\sharp),$$

$$y = (a^\sharp)^2 bd^\pi + ydd^\sharp. \tag{2.2.7}$$

Из (2.2.6) и (2.2.7) добијамо

$$y = a^\pi b(d^\sharp)^2 + aa^\sharp[(a^\sharp)^2 bd^\pi + ydd^\sharp], \quad y = a^\pi b(d^\sharp)^2 + (a^\sharp)^2 bd^\pi + aa^\sharp ydd^\sharp,$$

$$y = a^\pi b(d^\sharp)^2 + (a^\sharp)^2 bd^\pi - a^\sharp bd^\sharp.$$

$(ii) \Rightarrow$: Претпоставимо да елементи $a, d \in \mathcal{R}$ имају групне инверзе $a^\sharp, d^\sharp$ и да је $a^\pi b d^\pi = 0$. Према томе, $x^\sharp$ постоји. Нека

$$z = \begin{pmatrix} a^\sharp & y \\ 0 & d^\sharp \end{pmatrix},$$

где је $y = (a^\sharp)^2 b d^\pi + a^\pi b (d^\sharp)^2 - a^\sharp b d^\sharp$. Имамо

$$xzx = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^\sharp & y \\ 0 & d^\sharp \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa^\sharp & ay + bd^\sharp \\ 0 & dd^\sharp \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} aa^\sharp a & aa^\sharp b + ayd + bd^\sharp d \\ 0 & dd^\sharp d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & aa^\sharp b + ayd + bd^\sharp d \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

Имамо $xzx = x$ ако и само ако је

$$\begin{pmatrix} a & aa^\sharp b + ayd + bd^\sharp d \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

тј. $aa^\sharp b + ayd + bd^\sharp d = b$. Рачунамо на следећи начин

$$aa^\sharp b + ayd + bd^\sharp d = aa^\sharp b + a[a^\pi b(d^\sharp)^2 + (a^\sharp)^2 b d^\pi - a^\sharp b d^\sharp]d + bdd^\sharp$$

$$= aa^\sharp b + a(1 - aa^\sharp)b(d^\sharp)^2 d + a^\sharp b(1 - dd^\sharp)d - aa^\sharp b d^\sharp d + bd^\sharp d$$

$$= aa^\sharp b - aa^\sharp b d^\sharp d + bd^\sharp d.$$

Сада, из претпоставке да је $a^\pi b d^\pi = (1 - aa^\sharp)b(1 - dd^\sharp) = 0$, добијамо

$$b - bdd^\sharp - aa^\sharp b + aa^\sharp bdd^\sharp = 0,$$

тј.

$$aa^\sharp b + bdd^\sharp - aa^\sharp bdd^\sharp = b.$$

Дакле, $xzx = x$.

Имамо

$$zxz = \begin{pmatrix} a^\sharp & y \\ 0 & d^\sharp \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^\sharp & y \\ 0 & d^\sharp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^\sharp a & a^\sharp b + yd \\ 0 & d^\sharp d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^\sharp & y \\ 0 & d^\sharp \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^\sharp a a^\sharp & a^\sharp a y + a^\sharp b d^\sharp + y d d^\sharp \\ 0 & d^\sharp d d^\sharp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^\sharp & a^\sharp a y + a^\sharp b d^\sharp + y d d^\sharp \\ 0 & d^\sharp \end{pmatrix}.$$

Зато, $zxz = z$ ако и само ако је

$$\begin{pmatrix} a^\sharp & a^\sharp a y + a^\sharp b d^\sharp + y d d^\sharp \\ 0 & d^\sharp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^\sharp & y \\ 0 & d^\sharp \end{pmatrix},$$

тј. $a^\sharp a y + a^\sharp b d^\sharp + y d d^\sharp = y$.

Рачунамо на следећи начин

$$a^\sharp a[(a^\sharp)^2 b d^\pi + a^\pi b (d^\sharp)^2 - a^\sharp b d^\sharp] + a^\sharp b d^\sharp + [(a^\sharp)^2 b d^\pi + a^\pi b (d^\sharp)^2 - a^\sharp b d^\sharp] d d^\sharp$$

$$= (a^\sharp)^2 b d^\pi + a^\sharp a(1 - a a^\sharp) b (d^\sharp)^2 - a^\sharp b d^\sharp + a^\sharp b d^\sharp + (a^\sharp)^2 b (1 - d d^\sharp) d d^\sharp$$

$$+ a^\pi b (d^\sharp)^2 - a^\sharp b d^\sharp = (a^\sharp)^2 b d^\pi + a^\pi b (d^\sharp)^2 - a^\sharp b d^\sharp.$$

Како је

$$y = (a^\sharp)^2 b d^\pi + a^\pi b (d^\sharp)^2 - a^\sharp b d^\sharp,$$

показали смо да је $zxz = z$.

У наставку доказа теореме показаћемо да важи $xz = zx$. Имамо,

$$xz = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^\sharp & y \\ 0 & d^\sharp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a a^\sharp & ay + b d^\sharp \\ 0 & d d^\sharp \end{pmatrix},$$

$$zx = \begin{pmatrix} a^\sharp & y \\ 0 & d^\sharp \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^\sharp a & a^\sharp b + yd \\ 0 & d^\sharp d \end{pmatrix}.$$

Сада, $xz = zx$ ако и само ако је

$$\begin{pmatrix} a a^\sharp & ay + b d^\sharp \\ 0 & d d^\sharp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^\sharp a & a^\sharp b + yd \\ 0 & d^\sharp d \end{pmatrix},$$

тј. $ay + bd^\sharp = a^\sharp b + yd$. Рачунамо на следећи начин

$$ay + bd^\sharp = a[(a^\sharp)^2 bd^\pi + a^\pi b(d^\sharp)^2 - a^\sharp bd^\sharp] + bd^\sharp$$

$$= a^\sharp bd^\pi + a(1 - aa^\sharp)b(d^\sharp)^2 - aa^\sharp bd^\sharp + bd^\sharp$$

$$= a^\sharp bd^\pi - aa^\sharp bd^\sharp + bd^\sharp = a^\sharp b(1 - dd^\sharp) - aa^\sharp bd^\sharp + bd^\sharp$$

$$= a^\sharp b - a^\sharp bdd^\sharp - aa^\sharp bd^\sharp + bd^\sharp$$

$$= a^\sharp b(1 - dd^\sharp) + bd^\sharp(1 - aa^\sharp) = a^\sharp bd^\pi + bd^\sharp a^\pi,$$

и

$$a^\sharp b + yd = a^\sharp b + [(a^\sharp)^2 bd^\pi + a^\pi b(d^\sharp)^2 - a^\sharp bd^\sharp]d$$

$$= a^\sharp b + (a^\sharp)^2 b(1 - dd^\sharp)d + (1 - aa^\sharp)bd^\sharp - a^\sharp bd^\sharp d$$

$$= a^\sharp b + (1 - aa^\sharp)bd^\sharp - a^\sharp bd^\sharp d$$

$$= a^\sharp b + bd^\sharp - aa^\sharp bd^\sharp - a^\sharp bd^\sharp d$$

$$= a^\sharp b(1 - d^\sharp d) + (1 - aa^\sharp)bd^\sharp = a^\sharp bd^\pi + a^\pi bd^\sharp.$$

Дакле, $xz = zx$ и

$$x^\sharp = z = \begin{pmatrix} a^\sharp & y \\ 0 & d^\sharp \end{pmatrix},$$

где $y = (a^\sharp)^2 bd^\pi + a^\pi b(d^\sharp)^2 - a^\sharp bd^\sharp$.

$\Leftarrow$: Претпоставимо да $a^\sharp, d^\sharp, x^\sharp$ постоје. Онда резултат следи из дела (i). □

Теорема 2.2.2 *Нека су $a, b, ab \in \mathcal{R}$ групно инвертибилни. Тада $(ab)^\sharp = b^\sharp a^\sharp$ ако и само ако $(1 - a^\pi)ba^\pi = 0$, $b^\sharp(1 - a^\pi) = (ab)^\sharp a$. И више, ако су a, b, ba^π групно инвертибилни, онда су следећи искази еквивалентни:*

(i) $(ab)^\sharp = b^\sharp a^\sharp$;

(ii) $(ba)^\sharp = a^\sharp b^\sharp$;

(iii) $a = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{1-p,1-p}, b = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix}_{1-p,1-p}$ *и* $b_{11}^{\sharp} = (a_{11}b_{11})^{\sharp}a_{11}$,
у односу на декомпозицију $1 = p+(1-p)$, *где* $p = 1-aa^{\sharp}$ *и* a_{11} *инвертибилан;*
(iv) $a = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{1-p,1-p}, b = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix}_{1-p,1-p}$ *и* $b_{11}^{\sharp} = a_{11}(b_{11}a_{11})^{\sharp}$,
у односу на декомпозицију $1 = p+(1-p)$, *где* $p = 1-aa^{\sharp}$ *и* a_{11} *инвертибилан.*

Доказ: Први део.

$\Rightarrow$ Како су a и b групно инвертибилни, то $a, a^{\sharp}, b$ и $b^{\sharp}$ имају следеће матричне форме:

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{1-p,1-p}, a^{\sharp} = \begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{1-p,1-p}, b = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}_{1-p,1-p}, b^{\sharp} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}_{1-p,1-p}.$$

Како је

$$ab = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{1-p,1-p}$$

групно инвертибилан, на основу Теореме(2.2.1 (i)) добијамо

$$(1 - a_{11}b_{11}(a_{11}b_{11})^{\sharp})a_{11}b_{12} = 0$$

и

$$(ab)^{\sharp} = \begin{pmatrix} (a_{11}b_{11})^{\sharp} & [(a_{11}b_{11})^{\sharp}]^2 a_{11}b_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из $(ab)^{\sharp} = b^{\sharp}a^{\sharp}$, добијамо

$$\begin{pmatrix} (a_{11}b_{11})^{\sharp} & [(a_{11}b_{11})^{\sharp}]^2 a_{11}b_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11}a_{11}^{-1} & 0 \\ c_{21}a_{11}^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Следи да је: $c_{21} = 0$, $c_{11}a_{11}^{-1} = (a_{11}b_{11})^{\sharp}$. Даље, $c_{11} = (a_{11}b_{11})^{\sharp}a_{11}$ и $[(a_{11}b_{11})^{\sharp}]^2 a_{11}b_{12} = 0$.

Како је $a_{11}b_{11}[(a_{11}b_{11})^{\sharp}]^2 a_{11}b_{12} = (a_{11}b_{11})^{\sharp}a_{11}b_{12} = 0$, добијамо

$$b_{12} = a_{11}^{-1}a_{11}b_{12} = a_{11}^{-1}[a_{11}b_{11}(a_{11}b_{11})^{\sharp}a_{11}b_{12})]$$

$$= a_{11}^{-1}(a_{11}b_{11})^2[(a_{11}b_{11})^{\sharp}]^2 a_{11}b_{12} = 0.$$

Напоменимо да је $a^{\pi} = 1 - aa^{\sharp} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}_{1-p,1-p}$.

У том случају је

$$(1-a^{\pi})ba^{\pi} = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{1-p,1-p} = 0,$$

$$b^{\sharp}(1-a^{\pi}) = \begin{pmatrix} (a_{11}b_{11})^{\sharp}a_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{1-p,1-p} = (ab)^{\sharp}a.$$

$\Leftarrow$ С'друге стране, ако је $(1-a^{\pi})ba^{\pi} = 0$, онда $b_{12} = 0$ и $(ab)^{\sharp} = \begin{pmatrix} (a_{11}b_{11})^{\sharp} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ако, $b^{\sharp}(1-a^{\pi}) = (ab)^{\sharp}a$, онда $c_{11} = (a_{11}b_{11})^{\sharp}$ и $c_{21} = 0$. Према томе, $(ab)^{\sharp} = b^{\sharp}a^{\sharp}$.

Други део.

Претпоставимо да су a, b, ab, ba^{π} групно инвертибилни.

(i) $\Rightarrow$ (iii): Приметимо да $(ab)^{\sharp} = b^{\sharp}a^{\sharp}$ ако и само ако $a, b, a^{\sharp}, b^{\sharp}$ имају матричне форме:

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, a^{\sharp} = \begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, b^{\sharp} = \begin{pmatrix} (a_{11}b_{11})^{\sharp}a_{11} & c_{12} \\ 0 & c_{22} \end{pmatrix}.$$

Како је ba^{π} групно инвертибилан, b_{22} је групно инвертибилан, зато и b_{11} групно инвертибилан и $b_{22}^{\pi}b_{21}b_{11}^{\pi} = 0$. Имамо

$$b^{\sharp} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}^{\sharp} = \begin{pmatrix} b_{11}^{\sharp} & 0 \\ y & b_{22}^{\sharp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_{11}b_{11})^{\sharp}a_{11} & c_{12} \\ 0 & c_{22} \end{pmatrix},$$

где $y = b_{22}^{\pi} b_{21} (b_{11}^{\sharp})^2 + (b_{22}^{\sharp})^2 b_{21} b_{11}^{\pi} - b_{22}^{\sharp} b_{21} b_{11}^{\sharp}$.

Следи да је $b_{11}^{\sharp} = (a_{11} b_{11})^{\sharp} a_{11}$ и $y = 0$. Сада, имамо

$b_{22} y b_{11}^{\pi} = 0, \quad b_{22} b_{22}^{\sharp} b_{21} b_{11}^{\pi} = 0, \quad b_{21} b_{11}^{\pi} = 0, \quad b_{22}^{\pi} y b_{11}^{2} = 0.$

Према томе, $b_{22}^{\pi} b_{21} b_{11}^{\sharp} b_{11} = 0$, тако да $b_{22}^{\pi} b_{21} = 0, \quad b_{22} y b_{11} = 0, \quad b_{22} b_{22}^{\sharp} b_{21} b_{11}^{\sharp} b_{11} = 0, \quad b_{22} b_{22}^{\sharp} b_{21} b_{11}^{\sharp} b_{11} = 0.$

Дакле, $b_{21} = 0$ и $b = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix}$.

$(iii) \Rightarrow (i)$: Очигледно.

$(ii) \Leftrightarrow (iv)$: Ово је слично доказу $(i) \Leftrightarrow (iii)$. □

2.3 Групни инверз у Банаховим алгебрама

У овој секцији биће приказани оригинални резултати из рада [49] који се односе на акутну пертурбацију групног инверза елемената Банахове алгебре у односу на спектрални радијус.

Мотивисани резултатима које је Веи презентовао у раду [77] поставили смо себи за циљ проширење ових резултата на случај Банахове алгебре. Ови резултати се могу пронаћи у раду [49].

Нека $\mathbb{C}^{nxn}$ означава скуп свих комплексних матрица одговарајуће димензије. Индекс матрице A означавамо са $ind(A)$. Нека $A \in \mathbb{C}^{nxn}$, $ind(A) = 1$ и нека је $B = A + E$ пертурбација матрице A са $ind(B) = 1$. Кемпбел (Campbell) и Мејер (Meyer) у раду [69] представили су потребан и довољан услов за непрекидност групног инверза квадратне матрице $A \in \mathbb{C}^{nxn}$. Нека $ind(B) = ind(A) = 1$,

$$B^{\sharp} \to A^{\sharp} \text{ ако и само ако } rang(B) = rang(A).$$

У општем случају анализе пертурбације групног инверза $B^{\sharp}$ и обичног пројектора B^{π}, не тако давно у раду [44] уведен је услов (C_1) који се односи на стабилну пертурбацију B

$$(C_1) \qquad \mathcal{R}(B) \cap \mathcal{N}(A) = \{0\} \text{ и } \mathcal{N}(B) \cap \mathcal{R}(A) = \{0\} \tag{2.3.1}$$

Такође, под претпоставком да пертурбациона матрица B задовољава услов (C_1), тада је у раду ([44], Теорема 2.3) дата формула за израчунавање B^{π}. Даље, ако је матрица $I_n + A^{\sharp}(B - A)$ несингуларна, у раду [44], дата је формула за израчунавање групног инверза $B^{\sharp}$. Осим тога, у ([44], Теорема 5.1),под претпоставком да је услов (C_1) задовољен, дата је горња граница за $\frac{\|B^{\sharp}-A^{\sharp}\|}{\|A^{\sharp}\|}$ и процена да је

$$max\left\{\left\|A^{\sharp}(B-A)\right\|, \left\|(B-A)A^{\sharp}\right\|\right\} < \frac{1}{1+\sqrt{\|A^{\pi}\|}}.$$

Акутну пертурбацију Мур-Пенроузовог инверза матрице $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ изучавали су Ведин (Wedin) [52] и Стјуарт (Stewart)[28] седамдесетих година прошлог века.

Нека је $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ и $B = A + E$, где $E \in \mathbb{C}^{mxn}$ означава пертурбацију матрице A. Домети $\mathcal{R}(A)$ и $\mathcal{R}(B)$ су акутни увек када

$$\left\|BB^{\dagger} - AA^{\dagger}\right\| < 1, B = A + E,$$

ако и само ако је

$$\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}^{\perp}(B) = \{0\} \text{ и } \mathcal{R}(B) \cap \mathcal{R}^{\perp}(A) = \{0\},$$

при чему је $\mathcal{R}^{\perp}(A)$ ортогонални комплемент од $\mathcal{R}(A)$.

Слично, домети $\mathcal{R}(A^*)$ и $\mathcal{R}(B^*)$ су акутни, ако

$$\left\|B^{\dagger}B - A^{\dagger}A\right\| < 1.$$

Матрице A и B су акутне ако су $\mathcal{R}(A)$ и $\mathcal{R}(B)$ акутни, и $\mathcal{R}(A^*)$ и $\mathcal{R}(B^*)$ акутни. У том случају кажемо да је матрица B акутна пертурбација матрице A.

Веи [77] је презентовао акутну пертурбацију групног инверза у односу на спектрални радијус уместо спектралне норме, јер групни инверз има лепа спектрална својства која су изучавали Ердељи (Erdélyi) и Енгфилд (Englefield) [1].

У овом одељку смо себи поставили за циљ да ове резултате проширимо на случај Банахове алгебре.

Дефиниција 2.3.1 *[77] За матрицу $B = A + E \in \mathbb{C}^{nxn}$ кажемо да је акутна пертурбација матрице A ако је норма $\|E\|$ пертурбационе матрице E мала и $\rho(BB^\sharp - AA^\sharp) < 1$.*

Дефиниција 2.3.2 *Нека је $\mathcal{A}$ јединична Банахова алгебра $a \in \mathcal{A}, b = a + e \in \mathcal{A}$. Кажемо да је $b = a + e$ акутна пертурбација од a ако је пертурбација $\|e\|$ мала и $\rho\left(bb^\sharp - aa^\sharp\right) < 1$.*

Следећи резултат важи за матрице [71] и ограничене линеарне операторе на Банаховим просторима [45], а у случају када је $\mathcal{A}$ Банахова алгебра резултат је добијен у [20].

Лема 2.3.1 *[20] Нека је $\mathcal{A}$ Банахова алгебра, $a \in \mathcal{A}$, $p = p^2 \in \mathcal{A}$ и a има матричну форму*

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}_{p,p} = \begin{pmatrix} p \\ s \end{pmatrix} a_{11} \begin{pmatrix} p & t \end{pmatrix}$$

где $a_{11} = pap \in (p\mathcal{A}p)^{-1}$, $\;t = a_{11}^{-1}a_{12}$, $\;s = a_{21}a_{11}^{-1}$ и $a_{22} = a_{22}a_{11}^{-1}a_{12}$.

Тада је a групно инвертибилан ако и само ако је $p+ts$ инвертибилан. У овом случају, $a^\sharp$ и a^π могу се изразити на следећи начин

$$a^\sharp = \begin{pmatrix} p \\ s \end{pmatrix} (p + ts)^{-1} a_{11}^{-1} (p + ts)^{-1} \begin{pmatrix} p & t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} [(p+ts)a_{11}(p+ts)]^{-1} & [(p+ts)a_{11}(p+ts)]^{-1}t \\ s[(p+ts)a_{11}(p+ts)]^{-1} & s[(p+ts)a_{11}(p+ts)]^{-1}t \end{pmatrix},$$

и

$$a^{\pi} = 1 - \begin{pmatrix} p \\ s \end{pmatrix} (p+ts)^{-1} \begin{pmatrix} p & t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} p-(p+ts)^{-1} & -(p+ts)^{-1}t \\ -s(p+ts)^{-1} & 1-p-s(p+ts]^{-1}t \end{pmatrix}.$$

Лема 2.3.2 *[20] Нека $b = a+e \in \mathcal{A}$ и нека је $a \in \mathcal{A}$ групно инвертибилан. Ако пертурбација $\|e\|$ задовољава $\left\|a^{\sharp}\right\| \|e\| < \dfrac{1}{1+\sqrt{2\left\|aa^{\sharp}\right\|}} (\leq \dfrac{1}{1+\sqrt{2}})$, онда је b групно инвертибилан и*

$$b^{\sharp} = (a+e)^{\sharp} = \begin{pmatrix} p \\ e_{21}(a_{11}+e_{11})^{-1} \end{pmatrix} x^{-1}(a_{11}+e_{11})^{-1}x^{-1} \begin{pmatrix} p & (a_{11}+e_{11})^{-1}e_{12} \end{pmatrix},$$

и

$$bb^{\sharp} = \begin{pmatrix} p \\ e_{21}(a_{11}+e_{11})^{-1} \end{pmatrix} x^{-1} \begin{pmatrix} p & (a_{11}+e_{11})^{-1}e_{12} \end{pmatrix},$$

где $x = p + (a_{11}+e_{11})^{-1}e_{12}e_{21}(a_{11}+e_{11})^{-1}$.

Процена спектралног радијуса од $\left\|BB^{\sharp} - AA^{\sharp}\right\|$ у случају матрица може се наћи у раду [77] (Теорема 2.1). Наш циљ је да проширимо добијени резултата на случај Банахове алгебре.

Теорема 2.3.1 *Нека је $\mathcal{A}$ Банахова алгебра, $a \in \mathcal{A}$ елемент који је групно инвертибилан и $a_{11} \in (p\mathcal{A}p)^{-1}$, где је p идемпотент и p јединица у $p\mathcal{A}p$. Нека је $b = a + e \in \mathcal{A}$. Ако петурбација e задовољава $\left\|a^{\sharp}\right\| \|e\| < \frac{1}{1+\sqrt{2\left\|aa^{\sharp}\right\|}} (\leq \dfrac{1}{2})$, онда је b групно инвертибилан и спектрални радијуси од $bb^{\sharp}(1-aa^{\sharp})$ и $aa^{\sharp}(1-bb^{\sharp})$ су исти, тако да*

(i) $\rho[bb^{\sharp}(1-aa^{\sharp})] = \rho[aa^{\sharp}(1-bb^{\sharp})] \leq \dfrac{\|y\|}{1-\|y\|}$,

(*ii*) $[\rho(bb^\sharp - aa^\sharp)]^2 = \rho[bb^\sharp(1 - aa^\sharp)] = \rho[aa^\sharp(1 - bb^\sharp)] < 1$,
где $y = a^\sharp e(1 + a^\sharp e)^{-1}(1 - aa^\sharp)(1 + ea^\sharp)^{-1}ea^\sharp$ *и* $\|y\| < \dfrac{1}{2}$.

Доказ: (*i*) Нека $a \in \mathcal{A}$ има матричну форму

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}_{p,p}$$

где $p = aa^\sharp$. Дакле, a има облик

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p},$$

и

$$a^\sharp = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}_{p,p}.$$

тј.

$$a^\sharp = \begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p}.$$

Нека је

$$b = a + e = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}_{p,p}.$$

Претпоставимо да пертурбација e има облик

$$e = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix}_{p,p}.$$

тј.

$$b = a + e = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p} + \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix}_{p,p}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} + e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix}_{p,p},$$

тј

$$b = a + e = \begin{pmatrix} a_{11}+e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix}_{p,p}$$

$$= \begin{pmatrix} p \\ e_{21}(a_{11}+e_{11})^{-1} \end{pmatrix} (a_{11}+e_{11}) \begin{pmatrix} p & (a_{11}+e_{11})^{-1}e_{12} \end{pmatrix}.$$

Из Леме(2.3.2) очигледно је да

$$b^{\sharp} = \begin{pmatrix} a_{11}+e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix}_{p,p}$$

$$= \begin{pmatrix} p \\ e_{21}(a_{11}+e_{11})^{-1} \end{pmatrix} (p+(a_{11}+e_{11})^{-1}e_{12}e_{21}(a_{11}+e_{11})^{-1})^{-1}(a_{11}+e_{11})^{-1}\,(p+ (a_{11}+e_{11})^{-1}e_{12}e_{21}(a_{11}+e_{11})^{-1})^{-1} \begin{pmatrix} p & (a_{11}+e_{11})^{-1}e_{12} \end{pmatrix},$$

тј.

$$b^{\sharp} = \begin{pmatrix} p \\ e_{21}(a_{11}+e_{11})^{-1} \end{pmatrix} x^{-1}(a_{11}+e_{11})^{-1}x^{-1} \begin{pmatrix} p & (a_{11}+e_{11})^{-1}e_{12} \end{pmatrix},$$

где $x = p + (a_{11}+e_{11})^{-1}e_{12}e_{21}(a_{11}+e_{11})^{-1}$,

и

$$bb^{\sharp} = \begin{pmatrix} p \\ e_{21}(a_{11}+e_{11})^{-1} \end{pmatrix} (a_{11}+e_{11}) \begin{pmatrix} p & (a_{11}+e_{11})^{-1}e_{12} \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} p \\ e_{21}(a_{11}+e_{11})^{-1} \end{pmatrix} x^{-1}(a_{11}+e_{11})^{-1}x^{-1} \begin{pmatrix} p & (a_{11}+e_{11})^{-1}e_{12} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} p \\ e_{21}(a_{11}+e_{11})^{-1} \end{pmatrix} (a_{11}+e_{11})(p+(a_{11}+e_{11})^{-1}e_{12}e_{21}(a_{11}+e_{11})^{-1})$$
$$x^{-1}(a_{11}+e_{11})^{-1}x^{-1} \begin{pmatrix} p & (a_{11}+e_{11})^{-1}e_{12} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} p \\ e_{21}(a_{11}+e_{11})^{-1} \end{pmatrix} (a_{11}+e_{11})\,(a_{11}+e_{11})^{-1}\,x^{-1} \begin{pmatrix} p & (a_{11}+e_{11})^{-1}e_{12} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} p \\ e_{21}(a_{11}+e_{11})^{-1} \end{pmatrix} x^{-1} \begin{pmatrix} p & (a_{11}+e_{11})^{-1}e_{12} \end{pmatrix}.$$

Дакле,

$bb^{\sharp}\left(1-aa^{\sharp}\right)$

$$= \begin{pmatrix} p \\ e_{21}(a_{11}+e_{11})^{-1} \end{pmatrix} x^{-1} \begin{pmatrix} p & (a_{11}+e_{11})^{-1}e_{12} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1-p \end{pmatrix}_{p,p} - \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} p \\ e_{21}(a_{11}+e_{11})^{-1} \end{pmatrix} x^{-1} \begin{pmatrix} p & (a_{11}+e_{11})^{-1}e_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1-p \end{pmatrix}_{p,p}$$

$$= \begin{pmatrix} px^{-1}p & px^{-1}(a_{11}+e_{11})^{-1}e_{12} \\ e_{21}(a_{11}+e_{11})^{-1}x^{-1}p & e_{21}(a_{11}+e_{11})^{-1}x^{-1}(a_{11}+e_{11})^{-1}e_{12} \end{pmatrix}_{p,p} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1-p \end{pmatrix}_{p,p}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & px^{-1}(a_{11}+e_{11})^{-1}e_{12}(1-p) \\ 0 & e_{21}(a_{11}+e_{11})^{-1}x^{-1}(a_{11}+e_{11})^{-1}e_{12}(1-p) \end{pmatrix}_{p,p}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & x^{-1}(a_{11}+e_{11})^{-1}e_{12} \\ 0 & e_{21}(a_{11}+e_{11})^{-1}x^{-1}(a_{11}+e_{11})^{-1}e_{12} \end{pmatrix}_{p,p}$$

и

$$aa^{\sharp}\left(1-bb^{\sharp}\right) = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p}$$

$$\left(\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1-p \end{pmatrix}_{p,p} - \begin{pmatrix} x^{-1} & x^{-1}(a_{11}+e_{11})^{-1}e_{12} \\ e_{21}(a_{11}+e_{11})^{-1}x^{-1} & e_{21}(a_{11}+e_{11})^{-1}x^{-1}(a_{11}+e_{11})^{-1}e_{12} \end{pmatrix}_{p,p} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p} \begin{pmatrix} p-x^{-1} & -x^{-1}(a_{11}+e_{11})^{-1}e_{12} \\ -e_{21}(a_{11}+e_{11})^{-1}x^{-1} & 1-p-e_{21}(a_{11}+e_{11})^{-1}x^{-1}(a_{11}+e_{11})^{-1}e_{12} \end{pmatrix}_{p,p}$$

$$= \begin{pmatrix} p\left(p-x^{-1}\right) & -px^{-1}(a_{11}+e_{11})^{-1}e_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p}$$

$$= \begin{pmatrix} p-x^{-1} & -x^{-1}(a_{11}+e_{11})^{-1}e_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p}.$$

Како је

$\left\|a^\sharp e\right\| \le \left\|a^\sharp\right\| \|e\| \le \frac{1}{2} < 1$, имамо да $\left(1 + a^\sharp e\right)^{-1}$ постоји.

Директним рачунањем добијамо

$p - x^{-1} = -(p - x)\, x^{-1} = (a_{11} + e_{11})^{-1}\, e_{12} e_{21}\, (a_{11} + e_{11})^{-1}\, x^{-1}$

$(a_{11} + e_{11})^{-1}\, e_{12} = \left(p + a_{11}^{-1} e_{11}\right)^{-1} a_{11}^{-1} e_{12} = a_{11}^{-1}\left(p + e_{11} a_{11}^{-1}\right)^{-1} e_{12} = \left(1 + a^\sharp e\right)^{-1} a^\sharp e\, (1 - p)$

$$\left(1 + a^\sharp e\right)^{-1} a^\sharp e\, (1 - p)$$

$$= \left(\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1-p \end{pmatrix}_{p,p} + \begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p} \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix}_{p,p}\right)^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p} \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix}_{p,p} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1-p \end{pmatrix}_{p,p}$$

$$= \left(\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1-p \end{pmatrix}_{p,p} + \begin{pmatrix} a_{11}^{-1} e_{11} & a_{11}^{-1} e_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p}\right)^{-1} \begin{pmatrix} a_{11}^{-1} e_{11} & a_{11}^{-1} e_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1-p \end{pmatrix}_{p,p}$$

$$= \begin{pmatrix} p + a_{11}^{-1} e_{11} & a_{11}^{-1} e_{12} \\ 0 & 1-p \end{pmatrix}_{p,p}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & a_{11}^{-1} e_{12}\, (1-p) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(p + a_{11}^{-1} e_{11}\right)^{-1} & \ldots \\ 0 & \ldots \end{pmatrix}_{p,p} \begin{pmatrix} 0 & a_{11}^{-1} e_{12}\, (1-p) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \left(p + a_{11}^{-1} e_{11}\right)^{-1} a_{11}^{-1} e_{11}\, (1-p) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \left(p + a_{11}^{-1} e_{11}\right)^{-1} a_{11}^{-1} e_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p}.$$

Дакле,

$(a_{11} + e_{11})^{-1}\, e_{12} = \left(1 + a^\sharp e\right)^{-1} a^\sharp e\, (1 - p)$

$$e_{21}\, (a_{11} + e_{11})^{-1} = (1 - p)\, ep\left(\left(p + e_{11} a_{11}^{-1}\right) a_{11}\right)^{-1}$$

$$= (1 - p)\, ep\left((a_{11})^{-1}\left(p + e_{11} a_{11}^{-1}\right)^{-1}\right)$$

$$= (1 - p)\, e a^\sharp \left(1 + e a^\sharp\right)^{-1}.$$

Имамо,

$$(1-p)\,ea^\sharp\left(1+ea^\sharp\right)^{-1}$$
$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1-p \end{pmatrix}_{p,p}\begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix}_{p,p}\begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p}$$
$$\left(\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1-p \end{pmatrix}_{p,p}+\begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix}_{p,p}\begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p}\right)^{-1}$$
$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (1-p)\,e_{21} & (1-p)\,e_{22} \end{pmatrix}_{p,p}\begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p}\left(\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1-p \end{pmatrix}_{p,p}+\begin{pmatrix} e_{11}a_{11}^{-1} & 0 \\ e_{21}a_{11}^{-1} & 0 \end{pmatrix}_{p,p}\right)^{-1}$$
$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (1-p)\,e_{21}a_{11}^{-1} & 0 \end{pmatrix}_{p,p}\begin{pmatrix} p+e_{11}a_{11}^{-1} & 0 \\ e_{21}a_{11}^{-1} & 1-p \end{pmatrix}_{p,p}^{-1}$$
$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (1-p)\,e_{21}a_{11}^{-1} & 0 \end{pmatrix}_{p,p}\begin{pmatrix} \left(p+e_{11}a_{11}^{-1}\right)^{-1} & 0 \\ \dots & \dots \end{pmatrix}_{p,p}$$
$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (1-p)\,e_{21}a_{11}^{-1}\left(p+e_{11}a_{11}^{-1}\right)^{-1} & 0 \end{pmatrix}_{p,p}$$
$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e_{21}\,(a_{11}+e_{11})^{-1} & 0 \end{pmatrix}_{p,p}$$

и,

$$e_{21}\,(a_{11}+e_{11})^{-1}=(1-p)\,ea^\sharp\left(1+ea^\sharp\right)^{-1}$$
$$(a_{11}+e_{11})^{-1}\,e_{12}e_{21}\,(a_{11}+e_{11})^{-1}=\left(1+a^\sharp e\right)^{-1}a^\sharp e\,(1-p)\,(1-p)\,ea^\sharp\left(1+ea^\sharp\right)^{-1}$$
$$=\left(1+a^\sharp e\right)^{-1}a^\sharp e\,(1-p)\,ea^\sharp\left(1+ea^\sharp\right)^{-1}$$
$$=\left(1+a^\sharp e\right)^{-1}a^\sharp e\left(1-aa^\sharp\right)ea^\sharp\left(1+ea^\sharp\right)^{-1}.$$

Даље,

$$\left(1+a^\sharp e\right)^{-1}a^\sharp e$$
$$=\left(\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1-p \end{pmatrix}_{p,p}+\begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p}\begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix}_{p,p}\right)^{-1}\begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p}\begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix}_{p,p}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1-p \end{pmatrix}_{p,p} + \begin{pmatrix} a_{11}^{-1}e_{11} & a_{11}^{-1}e_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p} \right)^{-1} \begin{pmatrix} a_{11}^{-1}e_{11} & a_{11}^{-1}e_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p} \\
&= \left(\begin{pmatrix} p + a_{11}^{-1}e_{11} & a_{11}^{-1}e_{12} \\ 0 & 1-p \end{pmatrix}_{p,p} \right)^{-1} \begin{pmatrix} a_{11}^{-1}e_{11} & a_{11}^{-1}e_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p} \\
&= \begin{pmatrix} \left(p + a_{11}^{-1}e_{11}\right)^{-1} a_{11}^{-1}e_{11} & \left(p + a_{11}^{-1}e_{11}\right)^{-1} a_{11}^{-1}e_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x &= aa^{\sharp} + \left(1 + a^{\sharp}e\right)^{-1} a^{\sharp}e\,(1-p)\,(1-p)\,ea^{\sharp}\left(1 + ea^{\sharp}\right)^{-1} \\
&= aa^{\sharp} + \left(1 + a^{\sharp}e\right)^{-1} a^{\sharp}e\,(1-p)\,ea^{\sharp}\left(1 + ea^{\sharp}\right)^{-1} \\
&= aa^{\sharp} + \left(1 + a^{\sharp}e\right)^{-1} a^{\sharp}e\left(1 - aa^{\sharp}\right)ea^{\sharp}\left(1 + ea^{\sharp}\right)^{-1} \\
&= aa^{\sharp} + a^{\sharp}e\left(1 + a^{\sharp}e\right)^{-1}\left(1 - aa^{\sharp}\right)\left(1 + ea^{\sharp}\right)^{-1} ea^{\sharp} \\
&= p + y,
\end{aligned}
$$

где

$$
y = a^{\sharp}e\left(1 + a^{\sharp}e\right)^{-1}\left(1 - aa^{\sharp}\right)\left(1 + ea^{\sharp}\right)^{-1} ea^{\sharp}.
$$

Имамо,

$$
yaa^{\sharp} = ya^{\sharp}a = y.
$$

Како је $x = 1 + y$ (p јединица у $p\mathcal{A}p$) имамо

$$
\begin{aligned}
x^{-1} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-y)^n = 1 - y + y^2 - y^3 + \dots \\
1 - x^{-1} &= y - y^2 + y^3 - \dots \\
&= y\left(1 - y + y^2 - \dots\right) \\
\left\|1 - x^{-1}\right\| &\leq \frac{\|y\|}{1 - \|y\|}
\end{aligned}
$$

и

$$
\rho(1 - x^{-1}) \leq \left\|1 - x^{-1}\right\| \leq \frac{\|y\|}{1 - \|y\|}.
$$

Ако $\left\|a^\sharp\right\| \|e\| < \dfrac{1}{1+\sqrt{2\left\|aa^\sharp\right\|}}$ и $\left\|1-aa^\sharp\right\| = \left\|aa^\sharp\right\|$, онда

$$\begin{aligned}
\|y\| &= \left\|a^\sharp e\left(1+a^\sharp e\right)^{-1}\left(1-aa^\sharp\right)\left(1+ea^\sharp\right)^{-1} ea^\sharp\right\| \\
&\leq \left(\frac{\left\|a^\sharp\right\| \|e\|}{1-\left\|a^\sharp\right\| \|e\|}\right)^2 \left\|1-aa^\sharp\right\| \\
&= \left(\frac{\left\|a^\sharp\right\| \|e\|}{1-\left\|a^\sharp\right\| \|e\|}\right)^2 \left\|aa^\sharp\right\| < \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

и процењујемо

$$\rho\left(bb^\sharp\left(1-aa^\sharp\right)\right) = \rho\left(aa^\sharp\left(1-bb^\sharp\right)\right)$$

$$\begin{aligned}
&\rho\left(e_{21}\left(a_{11}+e_{11}\right)^{-1} x^{-1}\left(a_{11}+e_{11}\right)^{-1} e_{12}\right) \\
&= \rho\left(\left(a_{11}+e_{11}\right)^{-1} e_{21} e_{12}\left(a_{11}+e_{11}\right)^{-1} x^{-1}\right) \\
&= \rho\left(p-x^{-1}\right) \\
&\leq \frac{\|y\|}{1-\|y\|} \\
&< 1.
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
&\left(bb^\sharp - aa^\sharp\right)^2 \\
&= \left(\begin{pmatrix} x^{-1} & x^{-1}\left(a_{11}+e_{11}\right)^{-1} e_{12} \\ e_{21}\left(a_{11}+e_{11}\right)^{-1} x^{-1} & e_{21}\left(a_{11}+e_{11}\right)^{-1} x^{-1}\left(a_{11}+e_{11}\right)^{-1} e_{12} \end{pmatrix}_{p,p} - \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p}\right)^2 \\
&= \begin{pmatrix} x^{-1}-p & x^{-1}\left(a_{11}+e_{11}\right)^{-1} e_{12} \\ e_{21}\left(a_{11}+e_{11}\right)^{-1} x^{-1} & e_{21}\left(a_{11}+e_{11}\right)^{-1} x^{-1}\left(a_{11}+e_{11}\right)^{-1} e_{12} \end{pmatrix}_{p,p}^2 \\
&= \begin{pmatrix} p-x^{-1} & 0 \\ 0 & e_{21}\left(a_{11}+e_{11}\right)^{-1} x^{-1}\left(a_{11}+e_{11}\right)^{-1} e_{12} \end{pmatrix}_{p,p}.
\end{aligned}$$

Спектрални радијус од $e_{21}\left(a_{11}+e_{11}\right)^{-1} x^{-1}\left(a_{11}+e_{11}\right)^{-1} e_{12}$ је исти као

$$\left(a_{11}+e_{11}\right)^{-1} e_{12} e_{21}\left(a_{11}+e_{11}\right)^{-1} x^{-1} = p - x^{-1},$$

и процењујемо

$$\left[\rho\left(bb^\sharp - aa^\sharp\right)\right]^2 = \rho\left(p - x^{-1}\right) = \rho\left[bb^\sharp\left(1 - aa^\sharp\right)\right] = \rho\left[aa^\sharp\left(1 - bb^\sharp\right)\right] < 1. \ \square$$

2.4 Језгарни инверз у C^*-алгебрама

У другом делу рада [49], мотивисани резултатима које је у раду [29] презентовала Ма, дата је пертурбациона анализа за језгарни инверз у C^*-алгебри и добијене су пертурбационе границе за језгарни инверз под одређеним условима.

Теорема 2.4.1 *[65] Нека је $A \in \mathbb{C}^{nxn}$ матрица ранга r. Тада се A може написати у облику*

$$A = U\begin{pmatrix} \sum K & \sum L \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix} U^* \tag{2.4.1}$$

где је $U \in \mathbb{C}^{nxn}$ унитарна, $\sum = diag\left(\sigma_1 I_{r_1}, \sigma_2 I_{r_2}, ..., \sigma_r I_{r_t}\right)$ је дијагонална матрица сингуларних вредности од A, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq ... \geq \sigma_t > 0$, $r_1 + r_2 + ... + r_t = r$, и матрице $K \in \mathbb{C}^{rxr}$ и $L \in \mathbb{C}^{rx(n-r)}$ задовољавају $KK^* + LL^* = I_r$.

Према Хартвиг (Hartwig) и Спинделбек (Spindelböck) декомпозицији, следи да се Мур-Пенроузов инверз матрице A може написати у облику:

$$A^\dagger = U\begin{pmatrix} K^* \sum^{-1} & \mathbf{O} \\ L^* \sum^{-1} & \mathbf{O} \end{pmatrix} U^*.$$

Осим тога, ако је ind(A) ≤1 и матрица K је инвертибилна, тада се групни инверз матрице A може написати у облику

$$A^\sharp = U\begin{pmatrix} K^{-1} \sum^{-1} & K^{-1} \sum^{-1} K^{-1} L \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix} U^*.$$

У испитивању језгарног инверза важно место узима следећа дефиниција.

Дефиниција 2.4.1 *[51] Нека је* $A \in \mathbb{C}^{nxn}$ *и* $ind(A) \leq 1$. *Матрица* $A^{\textcircled{\#}} \in \mathbb{C}^{nxn}$ *се назива језгарни инверз матрице* A *ако задовољава*

$$AA^{\textcircled{\#}} = P_A \text{ и } \mathcal{R}(A^{\textcircled{\#}}) \subseteq \mathcal{R}(A),$$

где је са P_A *означена ортогонална идемпотентска матрица за коју је* $\mathcal{R}(P_A) = \mathcal{R}(A)$.

Дуални језгарни инверз се дефинише аналогно.

Дефиниција 2.4.2 *[51] Нека је* $A \in \mathbb{C}^{nxn}$. *Матрица* $A_{\textcircled{\#}} \in \mathbb{C}^{nxn}$ *се назива дуални језгарни инверз матрице* A *ако задовољава*

$$A_{\textcircled{\#}}A = P_{A^*} \text{ и } \mathcal{R}(A_{\textcircled{\#}}) \subseteq \mathcal{R}(A^*).$$

У раду [30] представљена је друга карактеризација језгарног инверза матрице.

Дефиниција 2.4.3 *[30] Нека је* $A \in \mathbb{C}^{nxn}$ *и* $ind\,(A) \leq 1$. *Тада се јединствена матрица* $X \in \mathbb{C}^{nxn}$ *назива језгарни инверз матрице* A *ако задовољава следеће три једначине:*

$$AXA = A, \quad AX^2 = X, \quad (AX)^* = AX.$$

Лема 2.4.1 *[51], [65] Нека је* $A \in \mathbb{C}^{nxn}$ *има декомпозицију (2.4.1) и* $ind\,(A) \leq 1$. *Тада*

$$A^{\textcircled{\#}} = U \begin{pmatrix} (\sum K)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^*$$

и

$$AA^{\textcircled{\#}} = U \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* = AA^{\dagger}, \quad A^{\textcircled{\#}}A = U \begin{pmatrix} I_r & K^{-1}L \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* = A^{\#}A.$$

Зато из [77] следи да је $\left\|I - A^{\textcircled{\#}}A\right\| = \left\|I - A^{\sharp}A\right\| = \left\|A^{\sharp}A\right\| = \left\|A^{\textcircled{\#}}A\right\|$.

Нека је матрица A несингуларна и нека пертурбација E испуњава услов $\left\|A^{-1}E\right\| < 1$. Тада постоји инверз матрице $B = A + E$ и добија се [18]

$$B^{-1} = (I + A^{-1}E)^{-1}A^{-1} = A^{-1}(I + EA^{-1})^{-1},$$

и

$$\frac{\left\|A^{-1}\right\|}{1 + \left\|A^{-1}E\right\|} \leq \left\|B^{-1}\right\| \leq \frac{\left\|A^{-1}\right\|}{1 - \left\|A^{-1}E\right\|}.$$

У свом раду Ма проширује ове резултате на језгарни инверз под одређеним разумним условима.

Теорема 2.4.2 *[29] Нека је* $A \in \mathbb{C}^{nxn}$ *има декомпозицију(2.4.1) и* ind $(A) \leq 1$, $B = A + E \in \mathbb{C}^{nxn}$. *Ако пертурбација* E *задовољава* $AA^{\textcircled{\#}}E = EAA^{\textcircled{\#}} = E$ *и* $\left\|A^{\textcircled{\#}}E\right\| \leq 1$, *тада*

$$B^{\textcircled{\#}} = (I + A^{\textcircled{\#}}E)^{-1}A^{\textcircled{\#}} = A^{\textcircled{\#}}(I + EA^{\textcircled{\#}})^{-1},$$

и

$$BB^{\textcircled{\#}} = AA^{\textcircled{\#}}, B^{\textcircled{\#}}B = A^{\textcircled{\#}}A + (I + A^{\textcircled{\#}}E)^{-1}A^{\textcircled{\#}}E(I - A^{\textcircled{\#}}A).$$

Штавише,

$$\frac{\left\|A^{\textcircled{\#}}\right\|}{1 + \left\|A^{\textcircled{\#}}E\right\|} \leq \left\|B^{\textcircled{\#}}\right\| \leq \frac{\left\|A^{\textcircled{\#}}\right\|}{1 - \left\|A^{\textcircled{\#}}E\right\|},$$

и

$$\frac{\left\|B^{\textcircled{\#}}B - A^{\textcircled{\#}}A\right\|}{\left\|A^{\textcircled{\#}}A\right\|} \leq \frac{\left\|A^{\textcircled{\#}}E\right\|}{\left\|1 - A^{\textcircled{\#}}E\right\|}.$$

У наредној теореми има једна претпоставка мање него у Теореми(2.4.2). Наиме, пертурбација E задовољава $AA^{\textcircled{\#}}E = E$ уместо $AA^{\textcircled{\#}}E = EAA^{\textcircled{\#}} = E$.

Теорема 2.4.3 *[29] Нека је* $A \in \mathbb{C}^{nxn}$ *има декомпозицију (2.4.1) и ind* $(A) \leq 1$, $B = A + E \in \mathbb{C}^{nxn}$. *Ако пертурбација* E *задовољава* $AA^{\textcircled{\#}}E = E$ *и* $\left\|A^{\textcircled{\#}}E\right\| < 1$, *тада*

$$B^{\textcircled{\#}} = (I + A^{\textcircled{\#}}E)^{-1}A^{\textcircled{\#}} = A^{\textcircled{\#}}(I + EA^{\textcircled{\#}})^{-1},$$

и

$$BB^{\textcircled{\#}} = AA^{\textcircled{\#}}, \quad B^{\textcircled{\#}}B = A^{\textcircled{\#}}A + (I + A^{\textcircled{\#}}E)^{-1}A^{\textcircled{\#}}E(I - A^{\textcircled{\#}}A).$$

И више,

$$\frac{\left\|A^{\textcircled{\#}}\right\|}{1 + \left\|A^{\textcircled{\#}}E\right\|} \leq \left\|B^{\textcircled{\#}}\right\| \leq \frac{\left\|A^{\textcircled{\#}}\right\|}{1 - \left\|A^{\textcircled{\#}}E\right\|},$$

и

$$\frac{\left\|B^{\textcircled{\#}}B - A^{\textcircled{\#}}A\right\|}{\left\|A^{\textcircled{\#}}A\right\|} \leq \frac{\left\|A^{\textcircled{\#}}E\right\|}{\left\|1 - A^{\textcircled{\#}}E\right\|}.$$

Наш циљ је да резултате ових теорема проширимо на случај C^*- алгебре.

Лема 2.4.2 *([23], Теорема 2.14) Нека* $a \in \mathcal{A}$, *тада* $a \in \mathcal{A}^{\textcircled{\#}}$ *ако и само ако постоји* x *тако да* $axa = a, \quad xax = x, \quad (ax)^* = ax, \quad xa^2 = a, \quad ax^2 = x$.

Лема 2.4.3 *([23], Теорема 2.19) Нека* $a \in \mathcal{A}^{\textcircled{\#}}$. *Тада*

(i) $a \in \mathcal{A}^{\#}$ *и* $a^{\#} = (a^{\textcircled{\#}})^2 a$

(ii) *Ако је* $a \in \mathcal{A}^{\dagger}$ *онда је* $a^{\textcircled{\#}} = a^{\#}aa^{\dagger}$.

Ако су p и q пројекције у $\mathcal{A}$, онда елемент $a \in \mathcal{A}$ има следећу матричну репрезентацију у односу на p и q:

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}_{p,q},$$

где је $a_{11} = paq, \quad a_{12} = pa(1-q), \quad a_{21} = (1-p)aq, \quad a_{22} = (1-p)a(1-q)$. Приметимо да је $a = a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22}$.

Сада доказујемо теореме које су резултат оригиналног рада [49].

Теорема 2.4.4 *Нека је* $a \in \mathcal{A}$ *језгарно инвертибилан и* $b = a + e \in \mathcal{A}$. *Ако пертурбација* e *задовољава* $aa^{\textcircled{\#}}e = eaa^{\textcircled{\#}} = e$ *и* $\left\| a^{\textcircled{\#}}e \right\| < 1$, *тада*

$$b^{\textcircled{\#}} = \left(1 + a^{\textcircled{\#}}e\right)^{-1} a^{\textcircled{\#}} = a^{\textcircled{\#}} \left(1 + ea^{\textcircled{\#}}\right)^{-1}$$

и

$$bb^{\textcircled{\#}} = aa^{\textcircled{\#}}, \quad b^{\textcircled{\#}}b = a^{\textcircled{\#}}a + \left(1 + a^{\textcircled{\#}}e\right)^{-1} a^{\textcircled{\#}}e \left(1 - a^{\textcircled{\#}}a\right).$$

Осим тога,

$$\frac{\left\| a^{\textcircled{\#}} \right\|}{1 + \left\| a^{\textcircled{\#}}e \right\|} \le \left\| b^{\textcircled{\#}} \right\| \le \frac{\left\| a^{\textcircled{\#}} \right\|}{1 - \left\| a^{\textcircled{\#}}e \right\|},$$

и

$$\frac{\left\| b^{\textcircled{\#}}b - a^{\textcircled{\#}}a \right\|}{\left\| a^{\textcircled{\#}}a \right\|} \le \frac{\left\| a^{\textcircled{\#}}e \right\|}{1 - \left\| a^{\textcircled{\#}}e \right\|}.$$

Доказ: Нека $p = aa^{\textcircled{\#}}$.

Тада

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p}$$

и

$$a^{\textcircled{\#}} = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p}.$$

Претпоставимо да пертурбацију e можемо разложити на следећи начин

$$e = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix}_{p,p}$$

Како пертурбација e задовољава услове $aa^{\textcircled{\#}}e = eaa^{\textcircled{\#}} = e$, то из

$$aa^{\textcircled{\#}} = \begin{pmatrix} a_{11}x_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p}$$

следи да

$$e_{21} = 0, \quad e_{12} = 0, \quad e_{22} = 0.$$

Зато пертурбација e има облик

$$e = \begin{pmatrix} e_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p}$$

и

$$b = a + e = \begin{pmatrix} a_{11} + e_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p}.$$

Како је $\left\|a^{\textcircled{\sharp}}e\right\| < 1$, следи да $\left(1 + a^{\textcircled{\sharp}}e\right)^{-1}$ постоји и

$$\left\|\left(1 + a^{\textcircled{\sharp}}e\right)\right\| \leq \frac{1}{1 - \left\|a^{\textcircled{\sharp}}e\right\|}.$$

Ово повлачи да спектрални радијус

$$\rho\left(ea^{\textcircled{\sharp}}\right) = \rho\left(a^{\textcircled{\sharp}}e\right) \leq \left\|a^{\textcircled{\sharp}}e\right\| < 1$$

и да $\left(1 + ea^{\textcircled{\sharp}}\right)^{-1}$ такође постоји, то је $(a_{11} + e_{11})^{-1}$.
Како $\left(1 + a^{\textcircled{\sharp}}e\right)^{-1}$ постоји, имамо

$$1 + a^{\textcircled{\sharp}}e = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1-p \end{pmatrix}_{p,p} + \begin{pmatrix} x_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p} \begin{pmatrix} e_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p}$$

$$= \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1-p \end{pmatrix}_{p,p} + \begin{pmatrix} x_{11}e_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p} = \begin{pmatrix} p + x_{11}e_{11} & 0 \\ 0 & 1-p \end{pmatrix}_{p,p},$$

и

$$\left(1 + a^{\textcircled{\sharp}}e\right)^{-1} = \begin{pmatrix} (p + x_{11}e_{11})^{-1} & 0 \\ 0 & 1-p \end{pmatrix}_{p,p}.$$

Како је

$$a + e = a + aa^{\textcircled{\sharp}}e = a\left(1 + a^{\textcircled{\sharp}}e\right),$$

онда важи

$$(a+e)^{\textcircled{\#}} = \left(1+a^{\textcircled{\#}}e\right)^{-1}a^{\textcircled{\#}} = \begin{pmatrix} (p+x_{11}e_{11})^{-1} & 0 \\ 0 & 1-p \end{pmatrix}_{p,p} \begin{pmatrix} x_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p}$$

$$= \begin{pmatrix} (p+x_{11}e_{11})^{-1}x_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p} = \begin{pmatrix} (p+x_{11}e_{11})^{-1}x_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p}.$$

Према томе, језгарни инверз од b постоји и $b^{\textcircled{\#}}$, $b^{\textcircled{\#}}b$, $bb^{\textcircled{\#}}$ могу се представити на следећи начин

$$b^{\textcircled{\#}} = (a+e)^{\textcircled{\#}} = \begin{pmatrix} (p+x_{11}e_{11})^{-1}x_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p} = \left(1+a^{\textcircled{\#}}e\right)^{-1}a^{\textcircled{\#}},$$

$$\begin{aligned}
bb^{\textcircled{\#}} &= \begin{pmatrix} a_{11}+e_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p} \begin{pmatrix} (p+x_{11}e_{11})^{-1}x_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}(p+x_{11}e_{11}) & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p} \begin{pmatrix} (p+x_{11}e_{11})^{-1}x_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}x_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p}, \\
b^{\textcircled{\#}}b &= \begin{pmatrix} (p+x_{11}e_{11})^{-1}x_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p} \begin{pmatrix} a_{11}(p+x_{11}e_{11}) & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p} \\
&= \begin{pmatrix} (p+x_{11}e_{11})^{-1}x_{11}a_{11}(p+x_{11}e_{11}) & (p+x_{11}e_{11})^{-1}x_{11}a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p} \\
&= \begin{pmatrix} p & (p+x_{11}e_{11})^{-1}x_{11}a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p}.
\end{aligned}$$

Коначно,

$$b^{\textcircled{\#}}b - a^{\textcircled{\#}}a = \begin{pmatrix} p & (p+x_{11}e_{11})^{-1}x_{11}a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p} - \begin{pmatrix} x_{11}a_{11} & x_{11}a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p}$$

$$= \begin{pmatrix} p & (p + x_{11}e_{11})^{-1} x_{11}a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p} - \begin{pmatrix} p & x_{11}a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & (p + x_{11}e_{11})^{-1} x_{11}a_{12} - x_{11}a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p} = \begin{pmatrix} 0 & \left((p + x_{11}e_{11})^{-1} - p\right) x_{11}a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \left[(p + x_{11}e_{11})^{-1} - (p + x_{11}e_{11})^{-1} (p + x_{11}e_{11})\right] x_{11}a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & (p + x_{11}e_{11})^{-1} (p - (p + x_{11}e_{11})) x_{11}a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -(p + x_{11}e_{11})^{-1} x_{11}e_{11}x_{11}a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p}$$

$$= \begin{pmatrix} (p + x_{11}e_{11})^{-1} x_{11}e_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p} \begin{pmatrix} 0 & -x_{11}a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p}$$

$$= \left(1 + a^{\textcircled{\sharp}}e\right)^{-1} a^{\textcircled{\sharp}}e \left(aa^{\textcircled{\sharp}} - a^{\textcircled{\sharp}}a\right)$$

$$= \left(1 + a^{\textcircled{\sharp}}e\right)^{-1} a^{\textcircled{\sharp}} \left(e - ea^{\textcircled{\sharp}}a\right)$$

$$= \left(1 + a^{\textcircled{\sharp}}e\right)^{-1} a^{\textcircled{\sharp}}e \left(1 - a^{\textcircled{\sharp}}a\right).$$

Узимајући норме на обе стране, добија се

$$\left\|b^{\textcircled{\sharp}}b - a^{\textcircled{\sharp}}a\right\|$$

$$= \left\|\left(1 + a^{\textcircled{\sharp}}e\right)^{-1} a^{\textcircled{\sharp}}e \left(1 - a^{\textcircled{\sharp}}a\right)\right\|$$

$$| \leq \frac{\left\|a^{\textcircled{\sharp}}e\right\|}{1 - \left\|a^{\textcircled{\sharp}}e\right\|} \left\|1 - a^{\textcircled{\sharp}}a\right\|.$$

Али, како је

$$\left\|1 - a^{\textcircled{\sharp}}a\right\| = \left\|a^{\textcircled{\sharp}}a\right\|,$$

то важи
$$\frac{\left\|b^{\textcircled{\#}}b - a^{\textcircled{\#}}a\right\|}{\left\|a^{\textcircled{\#}}a\right\|} \leq \frac{\left\|a^{\textcircled{\#}}e\right\|}{1 - \left\|a^{\textcircled{\#}}e\right\|}.$$
На исти начин,
$$\left\|b^{\textcircled{\#}}\right\| = \left\|\left(1 + a^{\textcircled{\#}}e\right)^{-1} a^{\textcircled{\#}}\right\| \leq \frac{\left\|a^{\textcircled{\#}}\right\|}{1 - \left\|a^{\textcircled{\#}}e\right\|}. \qquad \square$$

Теорема 2.4.5 *Нека је* $a \in \mathcal{A}$ *језгарно инвертибилан и* $b = a + e \in \mathcal{A}$. *Ако пертурбација* e *задовољава услов* $aa^{\textcircled{\#}}e = e$ *и* $\left\|a^{\textcircled{\#}}e\right\| < 1$, *тада*
$$b^{\textcircled{\#}} = \left(1 + a^{\textcircled{\#}}e\right)^{-1} a^{\textcircled{\#}} = a^{\textcircled{\#}}\left(1 + ea^{\textcircled{\#}}\right)^{-1}$$
и
$$bb^{\textcircled{\#}} = aa^{\textcircled{\#}}, \quad b^{\textcircled{\#}}b = a^{\textcircled{\#}}a + \left(1 + a^{\textcircled{\#}}e\right)^{-1} a^{\textcircled{\#}}e\left(1 - a^{\textcircled{\#}}a\right).$$

Осим тога,
$$\frac{\left\|a^{\textcircled{\#}}\right\|}{1 + \left\|a^{\textcircled{\#}}e\right\|} \leq \left\|b^{\textcircled{\#}}\right\| \leq \frac{\left\|a^{\textcircled{\#}}\right\|}{1 - \left\|a^{\textcircled{\#}}e\right\|},$$
и
$$\frac{\left\|b^{\textcircled{\#}}b - a^{\textcircled{\#}}a\right\|}{\left\|a^{\textcircled{\#}}a\right\|} \leq \frac{\left\|a^{\textcircled{\#}}e\right\|}{1 - \left\|a^{\textcircled{\#}}e\right\|}.$$

Доказ: Нека је $p = aa^{\textcircled{\#}}$ самоадјунговани идемпотент. Тада елемент $a \in \mathcal{A}$ има матричну форму:
$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p}$$
и
$$a^{\textcircled{\#}} = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p}.$$

Претпоставимо да је пертурбација e разложена на следећи начин:

$$e = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix}_{p,p}.$$

Како пертурбација e задовољава услов $aa^{\textcircled{\sharp}}e = e$, то из $aa^{\textcircled{\sharp}} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p}$,

следи да је $e_{21} = 0, \quad e_{22} = 0$.

Дакле, пертурбација e има форму

$$e = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p},$$

и

$$b = a + e = \begin{pmatrix} a_{11} + e_{11} & a_{12} + e_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p}.$$

Како је $\left\|a^{\textcircled{\sharp}}e\right\| < 1$ и $aa^{\textcircled{\sharp}}$ пројекција, имамо

$$\left\|a^{\textcircled{\sharp}}eaa^{\textcircled{\sharp}}\right\| \leq \left\|a^{\textcircled{\sharp}}e\right\| \left\|aa^{\textcircled{\sharp}}\right\| < 1.$$

Тада $\left(1 + a^{\textcircled{\sharp}}eaa^{\textcircled{\sharp}}\right)^{-1}$ постоји и то је $(p + x_{11}e_{11})^{-1}$.

На основу реченог, $b^{\textcircled{\sharp}}, \quad b^{\textcircled{\sharp}}b, \quad bb^{\textcircled{\sharp}}$ могу се изразити на следећи начин:

$$b^{\textcircled{\sharp}} = (a + e)^{\textcircled{\sharp}} = \begin{pmatrix} a_{11} + e_{11} & a_{12} + e_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p},$$

$$b = a + e = a\left(1 + a^{\textcircled{\sharp}}e\right),$$

$$b^{\textcircled{\sharp}} = \left(1 + a^{\textcircled{\sharp}}e\right)^{-1} a^{\textcircled{\sharp}},$$

$$b^{\textcircled{\sharp}} = \begin{pmatrix} (p + x_{11}e_{11})^{-1} x_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p}$$

$$= \begin{pmatrix} [p(1+x_{11}e_{11})]^{-1} x_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p}$$

$$= \begin{pmatrix} (p+x_{11}e_{11})^{-1} x_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p}$$

$$= \left(1 + a^{\textcircled{\sharp}} e a a^{\textcircled{\sharp}}\right)^{-1} a^{\textcircled{\sharp}} = \left(1 + a^{\textcircled{\sharp}} e\right)^{-1} a^{\textcircled{\sharp}},$$

и

$$b = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p} \left(\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1-p \end{pmatrix}_{p,p} + \begin{pmatrix} x_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p} \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p} \left(\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1-p \end{pmatrix}_{p,p} + \begin{pmatrix} x_{11}e_{11} & x_{11}e_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p} \begin{pmatrix} p + x_{11}e_{11} & x_{11}e_{12} \\ 0 & 1-p \end{pmatrix}_{p,p}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}(p + x_{11}e_{11}) & a_{11}x_{11}e_{12} + a_{12}(1-p) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}(p + x_{11}e_{11}) & e_{12} + a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p},$$

$$bb^{\textcircled{\sharp}} = \begin{pmatrix} a_{11}(p + x_{11}e_{11}) & e_{12} + a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p} \begin{pmatrix} (p+x_{11}e_{11})^{-1} x_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}(p + x_{11}e_{11})(p+x_{11}e_{11})^{-1} x_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p} = aa^{\textcircled{\sharp}},$$

$$b^{\textcircled{\sharp}} b = \begin{pmatrix} (p + x_{11}e_{11})^{-1} x_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p} \begin{pmatrix} a_{11}(p + x_{11}e_{11}) & e_{12} + a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p}$$

$$= \begin{pmatrix} (p + x_{11}e_{11})^{-1} x_{11}a_{11}(p + x_{11}e_{11}) & (p + x_{11}e_{11})^{-1} x_{11}(e_{12} + a_{12}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p}$$

$$= \begin{pmatrix} p & (p + x_{11}e_{11})^{-1} x_{11}(e_{12} + a_{12}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p}.$$

Сада можемо ивршити процену:

$$b^{\textcircled{\sharp}} b - a^{\textcircled{\sharp}} a = \begin{pmatrix} p & (p + x_{11}e_{11})^{-1} x_{11}(e_{12} + a_{12}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p} - \begin{pmatrix} x_{11}a_{11} & x_{11}a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p}$$

$$= \begin{pmatrix} p & (p + x_{11}e_{11})^{-1} x_{11}(e_{12} + a_{12}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p} - \begin{pmatrix} p & x_{11}a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & (p + x_{11}e_{11})^{-1} x_{11}(e_{12} + a_{12}) - x_{11}a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \left[(p + x_{11}e_{11})^{-1} - p\right] x_{11}a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p} + \begin{pmatrix} 0 & (p + x_{11}e_{11})^{-1} x_{11}a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \left[(p + x_{11}e_{11})^{-1} - (p + x_{11}e_{11})^{-1}(p + x_{11}e_{11})\right] x_{11}a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p} + \begin{pmatrix} 0 & (p + x_{11}e_{11})^{-1} x_{11}a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & (p + x_{11}e_{11})^{-1}(p - (p + x_{11}e_{11})) x_{11}a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p} + \begin{pmatrix} 0 & (p + x_{11}e_{11})^{-1} x_{11}e_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -(p + x_{11}e_{11})^{-1} x_{11}e_{11}x_{11}a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p} + \begin{pmatrix} 0 & (p + x_{11}e_{11})^{-1} x_{11}e_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p}$$

$$= \begin{pmatrix} (p + x_{11}e_{11})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p} \begin{pmatrix} 0 & -x_{11}a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p} + \begin{pmatrix} 0 & (p + x_{11}e_{11})^{-1} x_{11}e_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p}$$

$$= \left(1 + a^{\textcircled{\#}}eaa^{\textcircled{\#}}\right)^{-1} a^{\textcircled{\#}}eaa^{\textcircled{\#}} \left(aa^{\textcircled{\#}} - a^{\textcircled{\#}}a\right) + \left(1 + a^{\textcircled{\#}}eaa^{\textcircled{\#}}\right)^{-1} a^{\textcircled{\#}}e \left(1 - aa^{\textcircled{\#}}\right)$$

$$= \left(1 + a^{\textcircled{\#}}eaa^{\textcircled{\#}}\right)^{-1} a^{\textcircled{\#}}e \left(aa^{\textcircled{\#}}aa^{\textcircled{\#}} - aa^{\textcircled{\#}}a^{\textcircled{\#}}a\right) + \left(1 + a^{\textcircled{\#}}eaa^{\textcircled{\#}}\right)^{-1} a^{\textcircled{\#}}e \left(1 - aa^{\textcircled{\#}}\right)$$

$$= \left(1 + a^{\textcircled{\#}}eaa^{\textcircled{\#}}\right)^{-1} a^{\textcircled{\#}}e \left(aa^{\textcircled{\#}} - a^{\textcircled{\#}}a\right) + \left(1 + a^{\textcircled{\#}}eaa^{\textcircled{\#}}\right)^{-1} a^{\textcircled{\#}}e \left(1 - aa^{\textcircled{\#}}\right)$$

$$= \left(1 + a^{\textcircled{\#}}eaa^{\textcircled{\#}}\right)^{-1} a^{\textcircled{\#}}e \left(aa^{\textcircled{\#}} - a^{\textcircled{\#}}a + 1 - aa^{\textcircled{\#}}\right)$$

$$= \left(1 + a^{\textcircled{\#}}eaa^{\textcircled{\#}}\right)^{-1} a^{\textcircled{\#}}e \left(1 - a^{\textcircled{\#}}a\right)$$

$$= a^{\textcircled{\#}}e \left(1 + a^{\textcircled{\#}}e\right)^{-1} \left(1 - a^{\textcircled{\#}}a\right)$$

$$= \left(1 + a^{\textcircled{\#}}e\right)^{-1} a^{\textcircled{\#}}e \left(1 - a^{\textcircled{\#}}a\right).$$

Узимајући норму са обе стране, добија се

$$\frac{\left\|b^{\textcircled{\#}}b - a^{\textcircled{\#}}a\right\|}{\left\|a^{\textcircled{\#}}a\right\|} \leq \frac{\left\|a^{\textcircled{\#}}e\right\|}{1 - \left\|a^{\textcircled{\#}}e\right\|}.$$

Овим је доказ комплетиран. □

2.5 Пертурбациони резултати за Мур-Пенроузов инверз у прстенима са инволуцијом

Резултати у овој секцији су оригинални резултати из рада [47], настали као резултат заједничког рада са Ђорђевићем. Наиме, мотивисани многим интересантним резултатима везано за Мур-Пенроузов инверз производа комплексних матрица које су доказали Кастро-Гонзалес и Хартвиг [46], показали смо да неки од ових резултата важе у прстенима са инволуцијом (понекад и у C^*-алгебрама) користећи углавном различите методе. Мур-Пенроузов инверз је широко проучаван у прстенима са инволуцијом и C^*-алгебрама (видети [20], [32], [36], [40], [53], [64], [74] и много других.)

У раду [46] са $\mathbb{C}^{mxn}$ означен је векторски простор комплексних матрица типа mxn. Затим, са $\mathcal{C}(A)$,$\mathcal{R}$(A),$\mathcal{N}$(A) означени су простор колона (домет), простор врста и нула простор матрице A. Мур-Пенроузов инверз матрице A је јединствена матрица која задовољава четири Пенроузове једначине:

$$(1)\ AXA = A, \quad (2)\ XAX = X, \quad (3)\ (AX)^* = AX, \quad (4)\ (XA)^* = XA,$$

означен са $A^\dagger$, и увек постоји за комплексне матрице.

На проблему одређивања израза за Мур-Пенроузов инверз производа матрица AB први је радио Клајн [57], који је установио формулу која омогућава да се проблем сведе на облик производа матрица, где је један од фактора ортогонални пројектор.

Лема 2.5.1 *[57] Нека су $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ и $B \in \mathbb{C}^{nxp}$. Тада је $(AB)^\dagger = K^\dagger R^\dagger$, где $R = ABB^\dagger$ и $K = A^\dagger AB$.*

Следећи резултат се може пронаћи у раду [46].

Лема 2.5.2 *Нека су $X,Y \in \mathbb{C}^{mxn}$ и нека су F,G идемпотентне матрице реда m и n, респективно. Тада важи следеће:*

(i) $(I - F)X = Y \Leftrightarrow FY = 0$ *и* $\mathcal{C}(X - Y) \subseteq \mathcal{C}(F)$.

(ii) $X(I - G) = Y \Leftrightarrow YG = 0$ *и* $\mathcal{R}(X - Y) \subseteq \mathcal{R}(G)$.

Лема 2.5.3 *[6] Нека је $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ и нека је $F \in \mathbb{C}^{nxn}$ идемпотент. Тада:*

$$\mathcal{N}(AF) = (\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{C}(F)) \oplus \mathcal{N}(F).$$

Почињемо са излагањем оригиналних резултата које смо показали у раду [47].

Нека је $\mathcal{R}$ семигрупа, најчешће прстен, специјално C^*-алгебра са јединицом 1 и инволуцијом $x \mapsto x^*$. Скуп свих идемпотената, самоадјунгованих и Мур-Пенроуз инвертибилних елемената у $\mathcal{R}$, означавамо са $\mathcal{R}^\bullet$, $\mathcal{R}^h$, $\mathcal{R}^\dagger$, респективно.

Ako je $\mathcal{M} \subset \mathcal{R}$, тада

$$\mathcal{M}^\circ = \{x \in \mathcal{R} : (\forall y \in \mathcal{M})\ yx = 0\}, \quad {}^\circ\mathcal{M} = \{x \in \mathcal{R} : (\forall y \in \mathcal{M})\ xy = 0\}.$$

Прво, докажимо неколико помоћних резултата. Иако се ови резултати могу наћи у литератури, дајемо њихов комплетан доказ да би се рад могао читати независно.

Лема 2.5.4 *Ако је $x \in \mathcal{R}$, тада важи:*

$$x \in \mathcal{R}^\dagger \iff x^* \in \mathcal{R}^\dagger \iff xx^* \in \mathcal{R}^\dagger \iff x^*x \in \mathcal{R}^\dagger.$$

Ако важи неки од претходних исказа, тада је $(x^*)^\dagger = (x^\dagger)^*$ *и*

$$(xx^*)^\dagger = (x^*)^\dagger x^\dagger, \quad (x^*x)^\dagger = x^\dagger (x^*)^\dagger, \quad x^\dagger = x^*(xx^*)^\dagger = (x^*x)^\dagger x^*.$$

Доказ: Доказ следи једноставном провером Мур-Пенроузових једначина. $\square$

Лема 2.5.5 *Ако је* $f \in \mathcal{R}^\bullet$, *тада* $(1-f)^\circ = f\mathcal{R}$.

Доказ: Ако је $z = fr \in f\mathcal{R}$, тада $(1-f)z = 0$, па је $f\mathcal{R} \subset (1-f)^\circ$.

Ако је $z \in (1-f)^\circ$, тада $z = fz \in f\mathcal{R}$, па је $(1-f)^\circ \subset f\mathcal{R}$. $\square$

Лема 2.5.6 *Ако су $x, y \in \mathcal{R}$ и $f, g \in \mathcal{R}^\bullet$, тада важи следеће:*

(i) $(1-f)x = y \iff fy = 0$ *и* $(x-y)\mathcal{R} \subset f\mathcal{R}$.

(ii) $x(1-g) = y \iff yg = 0$ *и* $\mathcal{R}(x-y) \subset \mathcal{R}g$.

Доказ: (i) $\Longrightarrow$: Множењем $(1-f)x = y$ са леве стране са f, имамо $0 = fy$. Множењем $(1-f)x = y$ са леве стране са $1-f$, добијамо $(1-f)x =$

$(1-f)y$, или $(1-f)(x-y) = 0$, што повлачи $(x-y) \in (1-f)^{\circ} = f\mathcal{R}$ (користимо Лему(2.5.5))

$\Longleftarrow$: Претпоставимо да је $fy = 0$ и $(x-y)\mathcal{R} \subset f\mathcal{R} = (1-f)^{\circ}$. Следи $(1-f)(x-y) = 0$, или $x-y-fx+fy = 0$. Како је $fy = 0$, имамо $(1-f)x = y$.

(ii) Следи из (i) адјунговањем. $\square$

Лема 2.5.7 *Ако су* $a, b, ab \in \mathcal{R}^{\dagger}$ *и* $(ab)^{\dagger} = b^{\dagger}a^{\dagger}$, *тада* $r = abb^{\dagger} \in \mathcal{R}^{\dagger}$ $r^{\dagger} = bb^{\dagger}a^{\dagger}$.

Доказ: Нека је $x = bb^{\dagger}a^{\dagger} = b(ab)^{\dagger}$.

Тада

$$rx = ab(ab)^{\dagger} \in \mathcal{R}^{h}, \quad xr = (bb^{\dagger})(a^{\dagger}a)(bb^{\dagger}) \in \mathcal{R}^{h}, \quad rxr = ab(ab)^{\dagger}abb^{\dagger} = r,$$
$$xrx = bb^{\dagger}a^{\dagger}abb^{\dagger}a^{\dagger} = b(ab)^{\dagger}ab(ab)^{\dagger} = x.$$

Према томе, $x = r^{\dagger}$. $\square$

Лема 2.5.8 *Ако је* $a \in \mathcal{R}$ *и* $f \in \mathcal{R}^{\bullet}$, *тада*

$$(af)^{\circ} = (a^{\circ} \cap f\mathcal{R}) \oplus f^{\circ}.$$

Доказ: Приметимо да $(af)^{\circ}$, a°, $f\mathcal{R}$, f° су десни идеали у $\mathcal{R}$. На основу Леме(2.5.4) знамо да је $f^{\circ} = (1-f)\mathcal{R}$. Према томе, $f\mathcal{R} \cap f^{\circ} = \{0\}$ и зато је $(a^{\circ} \cap f\mathcal{R}) \cap f^{\circ} = \{0\}$.

Нека је $x = y + z$, где $y \in a^{\circ} \cap f\mathcal{R}$ и $z \in f^{\circ}$. Тада, $ay = 0$ и $y = fs$, за неко $s \in \mathcal{R}$. Зато, $x = fs + z$ са $afs = 0$ и $fz = 0$.

Дакле, $afx = 0$, па $x \in (af)^{\circ}$.

С' друге стране, нека је $x \in (af)^{\circ}$. Тада, $x = fx+(1-f)x$ и $(1-f)x \in f^{\circ}$. Како је $afx = 0$, добијамо $fx \in a^{\circ} \cap f\mathcal{R}$. Према томе, $x \in (a^{\circ} \cap f\mathcal{R}) \oplus f^{\circ}$. $\square$

$C^{*}-$ алгебра је главни пример прстена са инволуцијом.

Ако $a \in \mathcal{R}$ и $p, q \in \mathcal{R}^\bullet$, тада имамо договорену декомпозицију:

$$a = paq + pa(1-q) + (1-p)aq + (1-p)a(1-q) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}_{p,q}$$

где је

$$paq = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,q}, pa(1-q) = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,q},$$

$$(1-p)aq = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix}_{p,q}, (1-p)a(1-q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}_{p,q}.$$

Ако $b \in \mathcal{R}$, тада је

$$b = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}_{p,q}$$

и

$$a + b = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}_{p,q}.$$

Ако $c \in \mathcal{R}$ и $s \in \mathcal{R}^\bullet$, где

$$c = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}_{q,s},$$

тада је

$$ac = \begin{pmatrix} a_{11}c_{11} + a_{12}c_{21} & a_{11}c_{12} + a_{12}c_{22} \\ a_{21}c_{11} + a_{22}c_{21} & a_{21}c_{12} + a_{22}c_{22} \end{pmatrix}_{p,s}.$$

И више, ако $p, q \in \mathcal{A}^h \cap \mathcal{A}^\bullet$, тада

$$a^* = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{21}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* \end{pmatrix}_{q,p}.$$

На пример, ако $b \in \mathcal{R}^\dagger, p = bb^\dagger, q = b^\dagger b,$, тада$p, q \in \mathcal{R}^h \cap \mathcal{R}^\bullet$ и

$$b = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,q}.$$

У овом случају је

$$bb^* = \begin{pmatrix} b_1 b_1^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p},$$

где $b_1 b_1^*$ инвертибилан у $p\mathcal{R}p$ (јединица је p)

$$(bb^*)^\dagger = \begin{pmatrix} (b_1 b_1^*)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p}$$

и

$$b^\dagger = b^*(bb^*)^\dagger = \begin{pmatrix} b_1^*(b_1 b_1^*)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{q,p}.$$

Тачније, ако су A, B комплексне матрице, онда важи тврђење $(ABB^\dagger)^\dagger = B(AB)^\dagger$. Међутим, ово није тачно у случају када је B инвертибилна матрица. Ово запажање илуструјемо следећим примером.

Пример 2.5.1 *Нека су* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *и* $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Тада је матрица B *инвертибилна и* $B^\dagger = B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Према томе, $(ABB^\dagger)^\dagger = A^\dagger = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 \\ \frac{2}{9} & 0 \end{pmatrix}$.

С' друге стране, $(AB)^\dagger = \begin{pmatrix} \frac{1}{65} & 0 \\ \frac{8}{65} & 0 \end{pmatrix}$ *и* $B(AB)^\dagger = \begin{pmatrix} \frac{17}{65} & 0 \\ \frac{24}{65} & 0 \end{pmatrix}$.

У раду [46] могу се наћи пертурбационе формуле за израчунавање Мур-Пенрузовог инверза производа две комплексне матрице $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ и $B \in \mathbb{C}^{nxp}$. Наиме, $(AB)^\dagger = B^\dagger R^\dagger + \rho$ и $(AB)^\dagger = K^\dagger A^\dagger + \theta$, при чему су у изразима за ρ и θ укључене матрице $B^\dagger, R^\dagger$ и $A^\dagger, K^\dagger$, респективно.Наводимо без доказа теореме и последице у којима су постигнути наведени резултати.

Теорема 2.5.1 *[46] Нека су* $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ *и* $B \in \mathbb{C}^{nxp}$.

(i) *Ако је* $R = ABB^\dagger$, *онда*

$$(AB)^\dagger = (I - \epsilon\epsilon^\dagger)B^\dagger R^\dagger = B^\dagger(I - \epsilon^\dagger B^\dagger)R^\dagger = B^\dagger(I - U^\dagger \epsilon^* B^\dagger)R^\dagger \tag{2.5.1}$$

$$AB(AB)^\dagger = RR^\dagger \text{ и } (AB)^\dagger AB = B^\dagger B - \epsilon\epsilon^\dagger \tag{2.5.2}$$

где је $\epsilon = B^\dagger(I - R^\dagger R)$ *и* $U = R^\dagger R + \epsilon^*\epsilon$.

(ii) *Ако је* $K = A^\dagger AB$, *онда*

$$(AB)^\dagger = K^\dagger A^\dagger(I - \delta^\dagger\delta) = K^\dagger(I - A^\dagger\delta^\dagger)A^\dagger = K^\dagger(I - A^\dagger\delta^* V^\dagger)A^\dagger \tag{2.5.3}$$

$$AB(AB)^\dagger = AA^\dagger - \delta^\dagger\delta \text{ и } (AB)^\dagger AB = K^\dagger K \tag{2.5.4}$$

где је $\delta = (I - KK^\dagger)A^\dagger$ *и* $V = KK^\dagger + \delta\delta^*$.

Последица 2.5.1 *[46] Нека су* $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ *и* $B \in \mathbb{C}^{nxp}$. *Онда важи следеће:*

(i) *Ако је* $BB^\dagger = I$, *онда*

$(AB)^\dagger = (I - \epsilon\epsilon^\dagger)B^\dagger A^\dagger = B^\dagger(I - U^{-1}\epsilon^* B^\dagger)A^\dagger$,

$AB(AB)^\dagger = AA^\dagger$ *и* $(AB)^\dagger AB = B^\dagger B - \epsilon\epsilon^\dagger$,

где је $\epsilon = B^\dagger(I - A^\dagger A)$ *и* $U = A^\dagger A + \epsilon^*\epsilon$.

(ii) *Ако је* $A^\dagger A = I$, *онда*

$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger(I - \delta\delta^\dagger) = B^\dagger(I - A^\dagger\delta^* V^{-1})A^\dagger$,

$AB(AB)^\dagger = AA^\dagger - \delta^\dagger\delta$ *и* $(AB)^\dagger AB = B^\dagger B$,

где је $\delta = (I - BB^\dagger)A^\dagger$ *и* $V = BB^\dagger + \delta\delta^*$.

Последица 2.5.2 *[46] Нека су* $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ *и* $B \in \mathbb{C}^{nxp}$. *Онда*

$(AB)^\dagger = (I - \epsilon\epsilon^\dagger)B^\dagger J^\dagger A^\dagger(I - \delta^\dagger\delta)$,

где је $J = A^\dagger ABB^\dagger, \epsilon = B^\dagger(I - J^\dagger J)$ *и* $\delta = (I - JJ^\dagger)A^\dagger$.

Теорема 2.5.2 *[46] Нека су $A \in \mathbb{C}^{mxn}, B \in \mathbb{C}^{nxk}, R = ABB^\dagger$ и $K = A^\dagger AB$. Следећи искази су еквивалентни:*

(i) $Y = (AB)^\dagger$.

(ii) $\mathcal{C}(BY) \subseteq \mathcal{C}(BB^*A^*)$ *и* $\mathcal{C}(B^\dagger R^\dagger - Y) \subseteq \mathcal{C}(B^\dagger(I - R^\dagger R))$.

(iii) $\mathcal{R}(YA) \subseteq \mathcal{R}(B^*A^*A)$ *и* $\mathcal{R}(K^\dagger A^\dagger - Y) \subseteq \mathcal{R}((I - KK^\dagger)A^\dagger)$.

У раду [47] доказујемо резултате који важе у прстенима са инволуцијом.

Теорема 2.5.3 *Нека је $\mathcal{R}$ јединични прстен са инволуцијом и $a, b \in \mathcal{R}^\dagger$, тако да $ab, abb^\dagger \in \mathcal{R}^\dagger$. Користимо следеће ознаке:*

$$r = abb^\dagger,\ \epsilon = b^\dagger\left(1 - r^\dagger r\right),\ u = r^\dagger r + \epsilon^*\epsilon.$$

Ако претпоставимо да важи:

$$r^\dagger = b(ab)^\dagger, \quad \epsilon, u \in \mathcal{R}^\dagger \tag{2.5.5}$$

онда имамо:

$$(ab)^\dagger = \left(1 - \epsilon\epsilon^\dagger\right) b^\dagger r^\dagger = b^\dagger\left(1 - \epsilon^\dagger b^\dagger\right) r^\dagger = b^\dagger\left(1 - u^\dagger\epsilon^* b^\dagger\right) r^\dagger \tag{2.5.6}$$

и

$$ab\,(ab)^\dagger = rr^\dagger \ \text{ и } \ (ab)^\dagger\, ab = bb^\dagger - \epsilon\epsilon^\dagger \tag{2.5.7}$$

Доказ:

Корак 1.

Нека је $p = bb^\dagger, q = b^\dagger b$ и $s = aa^\dagger$. Тада важи

$$b = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,q}, b^\dagger = \begin{pmatrix} b_1^*(b_1 b_1^*)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{q,p},$$

$$a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{s,p}, a^* = \begin{pmatrix} a_1^* & 0 \\ a_2^* & 0 \end{pmatrix}_{p,s},$$

$$aa^* = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{s,s}, a^\dagger = a^*(aa^*)^\dagger = \begin{pmatrix} a_1^* d^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,s},$$

где је $d = a_1a_1^* + a_2a_2^*$ инвертибилно у $s\mathcal{R}s$. Такође,

$$ab = \begin{pmatrix} a_1b_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{s,q}, (ab)^\dagger = (ab)^*(ab(ab)^*)^\dagger = \begin{pmatrix} (a_1b_1)^*(a_1b_1(a_1b_1)^*)^\dagger & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{q,s},$$

$$r = abb^\dagger = \begin{pmatrix} a_1b_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{s,q} \begin{pmatrix} b_1^*(b_1b_1^*)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{q,p} = \begin{pmatrix} a_1b_1b_1^*(b_1b_1^*)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{s,p}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{s,p},$$

$$r^\dagger = b(ab)^\dagger = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,q} \begin{pmatrix} (a_1b_1)^*(a_1b_1(a_1b_1)^*)^\dagger & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{q,s}$$

$$= \begin{pmatrix} b_1(a_1b_1)^*(a_1b_1(a_1b_1)^*)^\dagger & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,s}.$$

Из $rr^\dagger r = r$ и претпоставке(2.5.5) закључујемо следеће:

$$a_1b_1(a_1b_1)^*(a_1b_1(a_1b_1)^*)^\dagger a_1 = a_1 \tag{2.5.8}$$

Корак 2.

Нека је $x = (1 - \epsilon\epsilon^\dagger)b^\dagger r^\dagger$. Докажимо да је $x = (ab)^\dagger$.

Користећи наведене матричне облике, $\epsilon = b^\dagger(1-r^\dagger r)$ можемо представити на следећи начин:

$$\epsilon = b^\dagger(1-r^\dagger r) = \begin{pmatrix} b_1^*(b_1b_1^*)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{q,p} \left(\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1-p \end{pmatrix}_{p,p} - \begin{pmatrix} b_1(a_1b_1)^*(a_1b_1(a_1b_1)^*)^\dagger a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,p} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} b_1^*(b_1b_1^*)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{q,p} \begin{pmatrix} p - b_1(a_1b_1)^*(a_1b_1(a_1b_1)^*)^\dagger a^1 & 0 \\ 0 & 1-p \end{pmatrix}_{p,p}$$

$$= \begin{pmatrix} b_1^*(b_1b_1^*)^{-1}(p - b_1(a_1b_1)^*(a_1b_1(a_1b_1)^*)^\dagger a_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{q,p}.$$

Дакле, користећи (2.5.8), рачунамо

$$ab\epsilon = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{s,p} \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{p,q} \begin{pmatrix} b_1^*(b_1b_1^*)^{-1}(p - b_1(a_1b_1)^*(a_1b_1(a_1b_1)^*)^\dagger a_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{q,p}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1b_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{s,q} \begin{pmatrix} b_1^*(b_1b_1^*)^{-1}(p - b_1(a_1b_1)^*(a_1b_1(a_1b_1)^*)^\dagger a_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{q,p}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1b_1b_1^*(b_1b_1^*)^{-1}(p - b_1(a_1b_1)^*(a_1b_1(a_1b_1)^*)^\dagger a_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{s,p}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1(p - b_1(a_1b_1)^*(a_1b_1(a_1b_1)^*)^\dagger a_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{s,p}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 - a_1b_1(a_1b_1)^*(a_1b_1(a_1b_1)^*)^\dagger a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{s,p}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 - a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{s,p} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{s,p}.$$

Према томе, $ab\epsilon = 0$.

Сада, имамо

$$abx = ab(1 - \epsilon\epsilon^\dagger)b^\dagger r^\dagger = ab(1 - \epsilon\epsilon^\dagger)b^\dagger b(ab)^\dagger = abb^\dagger b(ab)^\dagger - ab\epsilon\epsilon^\dagger b^\dagger b(ab)^\dagger$$

$$= ab(ab)^\dagger = rr^\dagger \in \mathcal{R}^h,$$

$$abxab = ab(ab)^\dagger ab = ab,$$

$$xabx = (1 - \epsilon\epsilon^\dagger)b^\dagger r^\dagger rr^\dagger = (1 - \epsilon\epsilon^\dagger)b^\dagger r^\dagger = x,$$

и

$$xab = (1 - \epsilon\epsilon^\dagger)b^\dagger r^\dagger ab = (1 - \epsilon\epsilon^\dagger)b^\dagger r^\dagger abb^\dagger b = (1 - \epsilon\epsilon^\dagger)b^\dagger r^\dagger rb$$

$$= (1-\epsilon\epsilon^\dagger)b^\dagger(1-(1-r^\dagger r))b = (1-\epsilon\epsilon^\dagger)(b^\dagger b - b^\dagger(1-r^\dagger r)b)$$

$$= (1-\epsilon\epsilon^\dagger)(b^\dagger b - \epsilon b) = b^\dagger b - \epsilon b - \epsilon\epsilon^\dagger b^\dagger b + \epsilon\epsilon^\dagger \epsilon b = (1-\epsilon\epsilon^\dagger)b^\dagger b.$$

Како је

$$b^\dagger b\epsilon = b^\dagger b b^\dagger(1-r^\dagger r) = b^\dagger(1-r^\dagger r) = \epsilon,$$

то је

$$b^\dagger b\epsilon\epsilon^\dagger = \epsilon\epsilon^\dagger = \epsilon\epsilon^\dagger b^\dagger b.$$

Напоменимо да смо користили чињеницу да је производ два самоадјунгована елемента опет самоадјунгован ако и само ако задани самоадјунговани фактори међусобно комутирају. Коначно, имамо

$$xab = (1-\epsilon\epsilon^\dagger)b^\dagger b = b^\dagger b - \epsilon\epsilon^\dagger b^\dagger b = b^\dagger b - \epsilon\epsilon^\dagger \in \mathcal{R}^h.$$

Према томе, $x = (ab)^\dagger$ и прва једнакост у (2.5.6) је доказана.

Корак 3.

Нека је $z = (1-r^\dagger r)\epsilon^\dagger$. Докажимо да је $z = \epsilon^\dagger$.

Рачунамо на следећи начин:

$$\epsilon z\epsilon = \epsilon(1-r^\dagger r)\epsilon^\dagger\epsilon = b^\dagger(1-r^\dagger r)(1-r^\dagger r)\epsilon^\dagger\epsilon$$

$$= b^\dagger(1-r^\dagger r)\epsilon^\dagger\epsilon = \epsilon\epsilon^\dagger\epsilon = \epsilon,$$

$$z\epsilon z = (1-r^\dagger r)\epsilon^\dagger\epsilon(1-r^\dagger r)\epsilon^\dagger = (1-r^\dagger r)\epsilon^\dagger b^\dagger(1-r^\dagger r)(1-r^\dagger r)\epsilon^\dagger$$

$$= (1-r^\dagger r)\epsilon^\dagger b^\dagger(1-r^\dagger r)\epsilon^\dagger = (1-r^\dagger r)\epsilon^\dagger\epsilon\epsilon^\dagger = (1-r^\dagger r)\epsilon^\dagger = z,$$

$$\epsilon z = b^\dagger(1-r^\dagger r)(1-r^\dagger r)\epsilon^\dagger = b^\dagger(1-r^\dagger r)\epsilon^\dagger = \epsilon\epsilon^\dagger \in \mathcal{R}^h,$$

$$z\epsilon = (1-r^\dagger r)\epsilon^\dagger\epsilon = \epsilon^\dagger\epsilon - r^\dagger r\epsilon^\dagger\epsilon \in \mathcal{R}^h.$$

Последњи закључак следи из следећег запажања:

$$\epsilon r^\dagger r = b^\dagger(1 - r^\dagger r)r^\dagger r = 0,\ r^\dagger r\epsilon^* = (\epsilon r^\dagger r)^* = 0,\ r^\dagger r e^\dagger \epsilon = r^\dagger r\epsilon^*(\epsilon\epsilon^*)^\dagger \epsilon = 0.$$

Према томе,

$$r^\dagger r\epsilon^\dagger \epsilon = \epsilon^\dagger \epsilon r^\dagger r = 0 \in \mathcal{R}^h.$$

Дакле,

$$z = (1 - r^\dagger r)\epsilon^\dagger = \epsilon^\dagger.$$

Корак 4.

Из $r^\dagger r\epsilon^* = 0$, запажамо $rr^\dagger \epsilon^\dagger = rr^\dagger \epsilon^*(\epsilon\epsilon^*)^\dagger = 0$, тако да је

$$\epsilon\epsilon^\dagger b^\dagger = b^\dagger(1 - r^\dagger r)\epsilon^\dagger b^\dagger = b^\dagger \epsilon^\dagger b^\dagger.$$

Како је $u = r^\dagger r + \epsilon^*\epsilon \in \mathcal{R}^h \cap \mathcal{R}^\dagger$, добијамо $u^\dagger = u^\sharp$.

Корак 5.

Нека је $w = r^\dagger r + (\epsilon^*\epsilon)^\dagger$. Доказаћемо да је $w = u^\dagger$.

Дакле, рачунамо на следећи начин:

$$\begin{aligned}
&uwu = (r^\dagger r + r^\dagger r)(r^\dagger r + (\epsilon^*\epsilon)^\dagger)(r^\dagger r + \epsilon^*\epsilon)\\
&= (r^\dagger rr^\dagger r + r^\dagger r(\epsilon^*\epsilon)^\dagger + \epsilon^*\epsilon r^\dagger r + \epsilon^*\epsilon(\epsilon^*\epsilon)^\dagger)(r^\dagger r + \epsilon^*\epsilon)\\
&= (r^\dagger r + r^\dagger r(\epsilon^*\epsilon)^\dagger + \epsilon^*\epsilon(\epsilon^*\epsilon)^\dagger)(r^\dagger r + \epsilon^*\epsilon)\\
&= r^\dagger rr^\dagger r + r^\dagger r\epsilon^*\epsilon + r^\dagger r(\epsilon^*\epsilon)^\dagger r^\dagger r + r^\dagger r(\epsilon^*\epsilon)^\dagger \epsilon^*\epsilon + \epsilon^*\epsilon(\epsilon^*\epsilon)^\dagger r^\dagger r + \epsilon^*\epsilon(\epsilon^*\epsilon)^\dagger \epsilon^*\epsilon\\
&= r^\dagger r + r^\dagger r((\epsilon^*\epsilon)^*\epsilon^*\epsilon)^\dagger(\epsilon^*\epsilon)^* r^\dagger r + r^\dagger r\epsilon^*\epsilon(\epsilon^*\epsilon)^\dagger + (\epsilon^*\epsilon)^\dagger \epsilon^*\epsilon r^\dagger r + \epsilon^*\epsilon\\
&= r^\dagger r + \epsilon^*\epsilon\\
&= u,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&wuw = (r^\dagger r + (\epsilon^*\epsilon)^\dagger)(r^\dagger r + \epsilon^*\epsilon)(r^\dagger r + (\epsilon^*\epsilon)^\dagger)\\
&= (r^\dagger rr^\dagger r + r^\dagger r\epsilon^*\epsilon + (\epsilon^*\epsilon)^\dagger r^\dagger r + (\epsilon^*\epsilon)^\dagger \epsilon^*\epsilon)(r^\dagger r + (\epsilon^*\epsilon)^\dagger)\\
&= (r^\dagger r + (\epsilon^*\epsilon)^\dagger r^\dagger r + (\epsilon^*\epsilon)^\dagger \epsilon^*\epsilon)(r^\dagger r + (\epsilon^*\epsilon)^\dagger)
\end{aligned}$$

$= r^\dagger r r^\dagger r + r^\dagger r(\epsilon^*\epsilon)^\dagger + (\epsilon^*\epsilon)^\dagger r^\dagger r r^\dagger r + (\epsilon^*\epsilon)^\dagger r^\dagger r(\epsilon^*\epsilon)^\dagger + (\epsilon^*\epsilon)^\dagger \epsilon^*\epsilon r^\dagger r + (\epsilon^*\epsilon)^\dagger \epsilon^*\epsilon(\epsilon^*\epsilon)^\dagger$

$= r^\dagger r + r^\dagger r(\epsilon^*\epsilon)^\dagger + (\epsilon^*\epsilon)^\dagger r^\dagger r + (\epsilon^*\epsilon)^\dagger r^\dagger r(\epsilon^*\epsilon)^\dagger + (\epsilon^*\epsilon)^\dagger$

$= r^\dagger r + r^\dagger r(\epsilon^*\epsilon)^*(\epsilon^*\epsilon(\epsilon^*\epsilon)^*)^\dagger + ((\epsilon^*\epsilon)^*\epsilon^*\epsilon)^\dagger(\epsilon^*\epsilon)^* r^\dagger r$

$+((\epsilon^*\epsilon)^*\epsilon^*\epsilon)^\dagger(\epsilon^*\epsilon)^* r^\dagger r(\epsilon^*\epsilon)^\dagger + (\epsilon^*\epsilon)^\dagger$

$= r^\dagger r + r^\dagger r\epsilon^*\epsilon(\epsilon^*\epsilon(\epsilon^*\epsilon)^*)^\dagger + ((\epsilon^*\epsilon)^*\epsilon^*\epsilon)^\dagger \epsilon^*\epsilon r^\dagger r$

$+((\epsilon^*\epsilon)^*\epsilon^*\epsilon)^\dagger \epsilon^*\epsilon r^\dagger r(\epsilon^*\epsilon)^\dagger + (\epsilon^*\epsilon)^\dagger$

$= r^\dagger r + (\epsilon^*\epsilon)^\dagger$

$= w,$

$uw = (r^\dagger r + \epsilon^*\epsilon)(r^\dagger r + (\epsilon^*\epsilon)^\dagger)$

$= r^\dagger r r^\dagger r + r^\dagger r(\epsilon^*\epsilon)^\dagger + \epsilon^*\epsilon r^\dagger r + \epsilon^*\epsilon(\epsilon^*\epsilon)^\dagger$

$= r^\dagger r + r^\dagger r(\epsilon^*\epsilon)^*(\epsilon^*\epsilon(\epsilon^*\epsilon)^*)^\dagger + \epsilon^*\epsilon(\epsilon^*\epsilon)^\dagger$

$= r^\dagger r + r^\dagger r\epsilon^*\epsilon(\epsilon^*\epsilon(\epsilon^*\epsilon)^*)^\dagger + \epsilon^*\epsilon(\epsilon^*\epsilon)^\dagger$

$= r^\dagger r + \epsilon^*\epsilon(\epsilon^*\epsilon)^\dagger \in \mathcal{R}^h,$

$wu = (r^\dagger r + (\epsilon^*\epsilon)^\dagger)(r^\dagger r + \epsilon^*\epsilon)$

$= r^\dagger r r^\dagger r + r^\dagger r\epsilon^*\epsilon + (\epsilon^*\epsilon)^\dagger r^\dagger r + (\epsilon^*\epsilon)^\dagger \epsilon^*\epsilon$

$= r^\dagger r + ((\epsilon^*\epsilon)^*\epsilon^*\epsilon)^\dagger(\epsilon^*\epsilon)^* r^\dagger r + (\epsilon^*\epsilon)^\dagger \epsilon^*\epsilon$

$= r^\dagger r + ((\epsilon^*\epsilon)^*\epsilon^*\epsilon)^\dagger \epsilon^*\epsilon r^\dagger r + (\epsilon^*\epsilon)^\dagger \epsilon^*\epsilon$

$= r^\dagger r + (\epsilon^*\epsilon)^\dagger \epsilon^*\epsilon \in \mathcal{R}^h.$

Према томе, $w = u^\dagger$.

Корак 6.

Користећи $r^\dagger r\epsilon^* = 0$ и $(\epsilon^*\epsilon)^\dagger \epsilon^* = \epsilon^\dagger$, видимо да је

$$u^\dagger \epsilon^* b^\dagger r^\dagger = (r^\dagger r + (\epsilon^*\epsilon)^\dagger)\epsilon^* b^\dagger r^\dagger = \epsilon^\dagger b^\dagger r^\dagger,$$

и зато

$$b^\dagger(1-\epsilon^\dagger b^\dagger)r^\dagger = b^\dagger(r^\dagger - \epsilon^\dagger b^\dagger r^\dagger) = b^\dagger(r^\dagger - u^\dagger \epsilon^* b^\dagger r^\dagger) = b^\dagger(1-u^\dagger\epsilon^* b^\dagger)r^\dagger.$$

Дакле, доказали смо трећу једнакост у (2.5.6).

Прва једнакост у (2.5.6) је доказана у Кораку 4.

Једнакости у (2.5.7) доказују се елементарно. □

Теорема 2.5.4 *Нека је $\mathcal{R}$ јединични прстен са инволуцијом и нека $a, b \in \mathcal{R}^\dagger$ тако да $ab, abb^\dagger \in \mathcal{R}^\dagger$.*

Употребимо следеће ознаке:

$$k = a^\dagger ab, \delta = (1-kk^\dagger)a^\dagger, v = kk^\dagger + \delta\delta^*.$$

Ако претоставимо да важи

$$k^\dagger = (ab)^\dagger a, \quad \delta, v \in \mathcal{R}^\dagger \tag{2.5.9}$$

тада имамо:

$$(ab)^\dagger = k^\dagger a^\dagger(1-\delta^\dagger\delta) = k^\dagger(1-a^\dagger\delta^\dagger)a^\dagger = k^\dagger(1-a^\dagger\delta^\dagger v^\dagger)a^\dagger \tag{2.5.10}$$

$$ab(ab)^\dagger = aa^\dagger - \delta^\dagger\delta \text{ и } (ab)^\dagger ab = k^\dagger k \tag{2.5.11}$$

Последица 2.5.3 *Нека је $\mathcal{R}$ јединични прстен са инволуцијом. Ако $a, b \in \mathcal{R}$ тако да $a, b, ab \in \mathcal{R}^\dagger$, тада*

$$(ab)^\dagger = (1-\epsilon\epsilon^\dagger)b^\dagger j^\dagger a^\dagger(1-\delta^\dagger\delta),$$

где је $j = a^\dagger abb^\dagger, \epsilon = b^\dagger(1-j^\dagger j)$ и $\delta = (1-jj^\dagger)a^\dagger$.

Доказ: Нека је $p = bb^\dagger, q = b^\dagger b, s = aa^\dagger$. Тада доказ ове последице следи на основу идентитета

$$(ab)^\dagger = (1-\epsilon\epsilon^\dagger)b^\dagger r^\dagger$$

у Теореми(2.5.3), где је $r = abb^\dagger$ и $\epsilon = b^\dagger(1 - r^\dagger r)$.

Нека је затим $r = ac$, где је $c = bb^\dagger$. Сада доказ преосталог дела тврђења изводимо на основу идентитета

$$(ab)^\dagger = k^\dagger a^\dagger(1 - \delta^\dagger\delta)$$

у Теореми(2.5.4), где је $k = a^\dagger ab$ и $\delta = (1 - kk^\dagger)a^\dagger$.

Тако добијамо

$$r^\dagger = (ac)^\dagger = j^\dagger a^\dagger(1 - \delta^\dagger\delta)$$

где је $j = a^\dagger abb^\dagger = a^\dagger ac$ и $\delta = (1 - jj^\dagger)a^\dagger$. □

Настављамо са следећим резултатом.

Теорема 2.5.5 *Присетимо се услова и ознака из Теореме (2.5.3) и Теореме(2.5.4). Онда важе следећи искази:*

(*i*) $b(ab)^\dagger\mathcal{R} \subseteq bb^*a^*\mathcal{R}$ *и* $(b^\dagger r^\dagger - (ab)^\dagger)\mathcal{R} \subseteq b^\dagger(1 - r^\dagger r)\mathcal{R}$;

(*ii*) $((ab)^\dagger a)^*\mathcal{R} \subseteq (b^*a^*a)^*\mathcal{R}$ *и* $(k^\dagger a^\dagger - (ab)^\dagger)^*\mathcal{R} \subseteq ((1 - kk^\dagger)a^\dagger)^*\mathcal{R}$.

Доказ: (*i*) Нека је $y = (ab)^\dagger$. Позивајући се на Лему(2.5.6) и Теорему(2.5.3), имамо $y = (1 - \epsilon\epsilon^\dagger)b^\dagger r^\dagger$, где је $\epsilon = b^\dagger(1 - r^\dagger r)$, и ово је еквивалентно са $\epsilon\epsilon^\dagger y = 0$ и

$$(b^\dagger r^\dagger - y)\mathcal{R} \subseteq \epsilon\epsilon^\dagger\mathcal{R} = \epsilon\mathcal{R} = b^\dagger(1 - r^\dagger r)\mathcal{R}.$$

Множењем $\epsilon\epsilon^\dagger y = 0$ са ϵ^* са леве стране, и како је $\epsilon^*\epsilon\epsilon^\dagger = \epsilon^*(\epsilon\epsilon^\dagger)^* = \epsilon^*$, добијамо да је $\epsilon^* y = 0$.

Имамо

$$r^*\mathcal{R} = (rr^\dagger r)^*\mathcal{R} = r^\dagger rr^*\mathcal{R} \subset r^\dagger r\mathcal{R} = r^*(rr^*)^\dagger r \subset r^*\mathcal{R},$$

што повлачи да је

$$r^*\mathcal{R} = r^\dagger r\mathcal{R}.$$

Даље, $\epsilon\epsilon^\dagger\mathcal{R} \subseteq \epsilon\mathcal{R}$ је очигледно. Сада, имамо

$$\epsilon^* y = 0 \text{ и } (b^\dagger r^\dagger - y)\mathcal{R} \subseteq \epsilon\mathcal{R}. \tag{2.5.12}$$

У ствари, (2.5.12) се редукује на $(1 - r^\dagger r)(b^\dagger)^* y = 0$, или

$$(b^*)^\dagger y\mathcal{R} \subseteq r^\dagger r\mathcal{R} = r^*\mathcal{R} = bb^\dagger a^*\mathcal{R},$$

зато што је $\epsilon = b^\dagger(1 - r^\dagger r)$.

Сада добијамо

$$b^*(b^*)^\dagger y\mathcal{R} \subseteq b^* bb^\dagger a^*\mathcal{R} = b^*(bb^\dagger)^* a^*\mathcal{R} = (bb^\dagger b)^* a^*\mathcal{R} = b^* a^*\mathcal{R},$$

тј.,

$$b^*(b^*)^\dagger y\mathcal{R} \subseteq b^* a^*\mathcal{R},$$

$$(b^\dagger b)^* y\mathcal{R} \subseteq b^* a^*\mathcal{R},$$

$$b^\dagger by\mathcal{R} \subseteq b^* a^*\mathcal{R},$$

$$bb^\dagger by\mathcal{R} \subseteq bb^* a^*\mathcal{R},$$

$$by\mathcal{R} \subseteq bb^* a^*\mathcal{R},$$

$$\mathcal{R} \subseteq bb^* a^*\mathcal{R},$$

или

$$b^\dagger by\mathcal{R} \subseteq (ab)^*\mathcal{R},$$

што комплетира доказ.

(ii) Следи аналогно. □

Теорема 2.5.6 *Нека је $\mathcal{A}$ јединична C^*-алгебра. Ако $a, b \in \mathcal{A}$ тако да су a, b, ab регуларни, онда важи следеће:*

(i) *Ако је $bb^\dagger = 1$, онда*

$$(ab)^\dagger = (1 - \epsilon\epsilon^\dagger)b^\dagger a^\dagger = b^\dagger(1 - u^{-1}\epsilon^* b^\dagger)a^\dagger,$$

$$ab(ab)^{\dagger} = aa^{\dagger} \ \text{и} \ (ab)^{\dagger}ab = b^{\dagger}b - \epsilon\epsilon^{\dagger},$$

где је

$$\epsilon = b^{\dagger}(1 - a^{\dagger}a) \ \text{и} \ u = a^{\dagger}a + \epsilon.$$

(ii) *Ако је* $a^{\dagger}a = 1$*, онда*

$$(ab)^{\dagger} = b^{\dagger}a^{\dagger}(1 - \delta\delta^{\dagger}) = b^{\dagger}(1 - a^{\dagger}\delta^{*}v^{-1})a^{\dagger},$$

$$ab(ab)^{\dagger} = aa^{\dagger} - \delta^{\dagger}\delta \ \text{и} \ (ab)^{\dagger}ab = bb^{\dagger},$$

где је $\delta = (1 - bb^{\dagger})a^{\dagger}$ *и* $v = bb^{\dagger} + \delta\delta^{*}$.

Доказ: (i) Нека је $bb^{\dagger} = 1$, онда добијамо

$$1 = bb^{\dagger} = bb^{*}(bb^{*})^{\dagger} = bb^{*}(bb^{*})^{\#} = (bb^{*})^{\#}bb^{*} = (bb^{*})^{\dagger}bb^{*},$$

зато је bb^{*} инвертибилно и $(bb^{*})^{\dagger} = (bb^{*})^{-1}$.

Нека је

$$u = a^{\dagger}a + \epsilon^{*}\epsilon = a^{\dagger}a + (1 - a^{\dagger}a)(b^{\dagger})^{*}b^{\dagger}(1 - a^{\dagger}a)$$

$$= a^{\dagger}a + (1 - a^{\dagger}a)(bb^{*})^{-1}(1 - a^{\dagger}a).$$

За тренутак, претпоставимо да је $\mathcal{A} = \mathcal{L}(H)$ алгебра свих ограничених линеарних оператора на неком Хилбертовом простору H. Означимо са $c = (bb^{*})^{-1}$ елемент који је позитиван и инвертибилан у $\mathcal{A}$. Нека је $p = a^{\dagger}a$. Онда имамо ортогоналну суму $H = \mathcal{R}(p) \oplus \mathcal{R}(1 - p)$, и као последицу тога декомпозицију оператора:

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad 1 - p = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

Како је $c = c^{*}$, добијамо $c_{22} = c_{22}^{*}$. Узмимо $m(c) = \min \sigma(c)$ и знамо да $m(c) > 0$. Сада, нека је $x \in \mathcal{R}(1 - p)$ и рачунамо на следећи начин:

$$m(c) \leq \langle cx, x \rangle = \langle c_{22}x, x \rangle.$$

Следи да је c_{22} позитивно и инвертибилно. Добијамо да је

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c_{22} \end{pmatrix}$$

позитивно и инвертибилно.

Ако је $\mathcal{A}$ уопштена јединична C^*-алгебра, онда постоји Хилбертов простор H и $*$-изометријски изоморфизам $J : \mathcal{A} \to \mathcal{B} \subset L(H)$, где је $\mathcal{B}$ C^*-подалгебра од $\mathcal{L}(H)$. Не губећи општост, имамо $J(1) = 1 \in \mathcal{B}$. Размотримо $J(u)$ који је позитиван у $\mathcal{B}$ и инвертибилан у $\mathcal{L}(H)$. Коначно, спектар елемента у C^*-алгебри је непроменљив у односу на избор подалгебре све док подалгебра садржи јединицу. Дакле, $J(u)$ је позитиван и инвертибилан у $\mathcal{B}$, тако да u позитиван и инвертибилан у $\mathcal{A}$.

Сада, резултат следи из Теореме(2.5.3) знајући да је $r = 1$.

(ii) Следи на исти начин као (i). $\square$

2.6 Закон директног редоследа (forward order law-FOL) за Мур-Пенроузов инверз у прстенима са инволуцијом

У раду [46] Кастро-Гонзалес и Хартвиг су разматрали под којим условима за матрице важи закон директног редоследа (FOL) $(AB)^{\dagger} = A^{\dagger}B^{\dagger}$, где матрице $A, B \in \mathbb{C}^{nxn}$.

Подсетимо се следећег.

Релација $(ab)^{\dagger} = b^{\dagger}a^{\dagger}$ је закон обрнутог редоследа за Мур-Пенроузов инверз, и она у општем случају не важи.

Прстен $\mathcal{R}$ је $*$-редукован ако за свако $a \in \mathcal{R}$ важи импликација: $a^*a = 0 \Rightarrow a = 0$. Свака C^*-алгебра је $*$-редукован прстен. Формулишимо следећи резултат (види, на пример, [20]).

Лема 2.6.1 *Нека је $\mathcal{R}$ $*-$ редукован прстен, и нека су $a, b \in \mathcal{R}$ Мур-Пенроуз инвертибилни. Тада су следећи услови еквивалентни:*

(i) (ab) је Мур-Пенроуз инвертибилан и $(ab)^{\dagger} = b^{\dagger}a^{\dagger}$;

(ii) $a^{\dagger}a$ комутира са bb^*, и $bb^{\dagger}$ комутира са a^*a.

Следи приказ оригиналних резултата везано за закон директног редоследа Мур-Пенроузовог инверза у прстену са инволуцијом [47].

Теорема 2.6.1 *Нека су $a, b \in \mathcal{R}$ тако да $a, b, ab \in \mathcal{R}^{\dagger}$. Онда су следећи искази еквивалентни:*

(i) $(ab)^{\dagger} = a^{\dagger}b^{\dagger}$,

(ii) $(ba)^* = a^*a(ab)^{\dagger}bb^*, b^*a^*\mathcal{R} \subseteq a^*\mathcal{R}$ и $ab\mathcal{R} \subseteq b\mathcal{R}$.

Доказ: $(i) \Rightarrow (ii)$: Из $(ab)^{\dagger} = a^{\dagger}b^{\dagger}$, добијамо

$$a^*b^* = a^*aa^{\dagger}b^{\dagger}bb^* = a^*a(ab)^{\dagger}bb^*.$$

Ако

$$x = (ab)^* z = b^* a^* z \in b^* a^* \mathcal{R},$$

тада је

$$x = (ab)^\dagger ab (ab)^* z = a^\dagger b^\dagger ab (ab)^* z \in a^\dagger b^\dagger \mathcal{R}.$$

На овај начин добијамо

$$(ab)^* \mathcal{R} \subseteq (ab)^\dagger \mathcal{R}.$$

Ако је

$$y = a^\dagger b^\dagger u \in a^\dagger b^\dagger \mathcal{R},$$

тада

$$y = (ab)^\dagger u = (ab)^* (ab(ab)^*)^\dagger u = b^* a^* (ab(ab)^*)^\dagger u \in b^* a^* \mathcal{R},$$

па

$$(ab)^\dagger \mathcal{R} \subseteq (ab)^* \mathcal{R}.$$

Дакле,

$$(ab)^* \mathcal{R} = (ab)^\dagger \mathcal{R} = a^\dagger b^\dagger \mathcal{R} \subset a^\dagger \mathcal{R} = a^* (aa^*)^\dagger \mathcal{R} \subset a^* \mathcal{R}.$$

На исти начин

$$ab\mathcal{R} = ((ab)^\dagger)^* \mathcal{R} \subseteq (b^\dagger)^* \mathcal{R} = b\mathcal{R}.$$

$(ii) \Rightarrow (i)$: Ако $a^* b^* = a^* a (ab)^\dagger b b^*$ помножимо са леве стране са $(a^* a)^\dagger$ и са десне стране са$(bb^*)^\dagger$, добијамо

$$a^\dagger b^\dagger = a^\dagger a (ab)^\dagger b b^\dagger \tag{2.6.1}$$

Из $ab\mathcal{R} \subset b\mathcal{R}$ видимо да постоји неко $s \in \mathcal{R}$ тако да $ab = bs$. Множењем последње једнакости са леве стране са $bb^\dagger$, добијамо

$$bb^\dagger ab = bs = ab \text{ или } (ab)^* bb^\dagger = (ab)^*.$$

Сада помножимо последњу једнакост са $[(ab)^*(ab)]^\dagger$ са леве стране. Добијамо

$$(ab)^\dagger bb^\dagger = (ab)^\dagger \tag{2.6.2}$$

Из $b^*a^*\mathcal{R} \subset a^*\mathcal{R}$, на исти начин добијамо

$$(b^*a^*)^\dagger a^*(a^*)^\dagger = (b^*a^*)^\dagger,$$

или

$$a^\dagger a(ab)^\dagger = (ab)^\dagger \tag{2.6.3}$$

Из (2.6.1), (2.6.2) и (2.6.3) добијамо да је $(ab)^\dagger = a^\dagger b^\dagger$. □

Теорема 2.6.2 *Нека су $a, b \in \mathcal{R}^\dagger$. Онда, важи следеће:*

(*i*) $a^\dagger b^*\mathcal{R} = (ab)^*\mathcal{R} \Leftrightarrow \big((ab)^*\mathcal{R} \subseteq a^*\mathcal{R}$ *и* $(ba)^*\mathcal{R} = a^*a(ab)^*\mathcal{R}\big)$.

(*ii*) $(b^\dagger)^*a\mathcal{R} = ab\mathcal{R} \Leftrightarrow \big(ab\mathcal{R} \subseteq b\mathcal{R}$ *и* $ba\mathcal{R} = bb^*ab\mathcal{R}\big)$.

Доказ: (*i*) $\Rightarrow$: Претпоставимо да је $a^\dagger b^*\mathcal{R} = (ab)^*\mathcal{R} = b^*a^*\mathcal{R}$, и нека је $x \in b^*a^*\mathcal{R}$. Онда за неко $y, z \in \mathcal{R}$:

$$x = b^*a^*y = a^\dagger b^*z = a^*(aa^*)^\dagger b^*z \in a^*\mathcal{R}.$$

Зато, $(ab)^*\mathcal{R} \subseteq a^*\mathcal{R}$.

Слично, нека $w \in a^*b^*\mathcal{R}$. Онда за неко $u, v \in \mathcal{R}$:

$$y = a^*b^*u = a^*aa^\dagger b^*u = a^*ab^*a^*v \in a^*ab^*a^*\mathcal{R},$$

и зато $(ba)^*\mathcal{R} \subseteq a^*a(ab)^*\mathcal{R}$.

С' друге стране, ако $s \in a^*ab^*a^*\mathcal{R}$, тада за неко $t, l \in \mathcal{R}$ имамо:

$$s = a^*ab^*a^*t = a^*aa^\dagger b^*a^*l = a^*b^*a^*l \in a^*b^*\mathcal{R},$$

тј. $a^*a(ab)^*\mathcal{R} \subseteq (ba)^*\mathcal{R}$.

$\Leftarrow$: Имамо

$$a^\dagger b^*\mathcal{R} = (a^*a)^\dagger a^*b^*\mathcal{R} = (a^*a)^\dagger a^*a(ab)^*\mathcal{R} = a^\dagger a(ab)^*\mathcal{R}.$$

Нека $x \in \mathcal{R}$. Како је $(ab)^*\mathcal{R} \subset a^*\mathcal{R}$, следи да постоји неко $y \in \mathcal{R}$ тако да $(ab)^*x = a^*y$. Множећи последњу једнакост са леве стране са $a^\dagger a$, добијамо

$$a^\dagger a(ab)^*x = a^\dagger aa^*y = a^*y = (ab)^*x.$$

Зато,

$$a^\dagger a(ab)^*\mathcal{R} = (ab)^8\mathcal{R}$$

и на основу тога

$$a^\dagger b^*\mathcal{R} = (ab)^*\mathcal{R}.$$

(ii) Следи аналогно. □

Теорема 2.6.3 *Нека су* $a, b \in \mathcal{R}^\dagger$ *тако да* $ab, abb^\dagger \in \mathcal{R}^\dagger$. *Ако је* $r = abb^\dagger$, *онда су следећи искази еквивалентни:*

(i) $(ab)^\dagger = a^\dagger b^\dagger$.

(ii) $b^\dagger(r^\dagger - bab^\dagger)\mathcal{R} \subseteq b^\dagger(1 - r^\dagger r)\mathcal{R}$ *и* $a^\dagger b^*\mathcal{R} = (ab)^*\mathcal{R}$.

(ii) $r^{(1,3)} = ba^\dagger b^\dagger$ *и* $a^\dagger b^*\mathcal{R} = (ab)^*\mathcal{R}$.

(iv) $(ab)^* = (ab)^*aba^\dagger b^\dagger$ *и* $a^\dagger b^*\mathcal{R} = (ab)^*\mathcal{R}$.

(v) $(ab)^*bb^* = (ab)^*aba^\dagger b^*, (ab)\mathcal{R} \subseteq b\mathcal{R}$ *и* $a^\dagger b^*\mathcal{R} = (ab)^*\mathcal{R}$.

Доказ: $(i) \implies (ii)$ Нека је $y = a^\dagger b^\dagger$ у Теореми(2.5.5) $(i) \implies (ii)$. Ово даје $(ab)^\dagger = y$ ако и само ако је

$$ba^\dagger b^\dagger\mathcal{R} \subseteq bb^*a^*\mathcal{R} \text{ и } (b^\dagger r^\dagger - a^\dagger b^\dagger)\mathcal{R} \subseteq b^\dagger(1 - r^\dagger r)\mathcal{R} \tag{2.6.4}$$

Позивајући се на Теорему(2.5.3), $b^\dagger b\epsilon = \epsilon$, где је

$\epsilon = b^\dagger(1 - r^\dagger r), \quad (1 - b^\dagger b)\epsilon = 0 \quad , (1 - b^\dagger b)b^\dagger(1 - r^\dagger r) = 0,$

$(1-b^\dagger b)(b^\dagger r^\dagger - a^\dagger b^\dagger) = 0, \quad (1-b^\dagger b)a^\dagger b^\dagger = 0.$

Сада је јасно,

$$b^\dagger r^\dagger - a^\dagger b^\dagger = b^\dagger(r^\dagger - ba^\dagger b^\dagger).$$

Према томе,

$$(b^\dagger r^\dagger - a^\dagger b^\dagger)\mathcal{R} = b^\dagger(r^\dagger - ba^\dagger b^\dagger)\mathcal{R} \subseteq b^\dagger(1-r^\dagger r)\mathcal{R}.$$

Како је $(1-b^\dagger b)a^\dagger b^\dagger = 0$, онда први услов у (2.6.4) постаје

$$a^\dagger b^\dagger \mathcal{R} = b^\dagger ba^\dagger a\mathcal{R} \subseteq b^\dagger bb^*a^*\mathcal{R} = (b^\dagger b)^*b^*a^*\mathcal{R} = (bb^\dagger b)^*a^*\mathcal{R} = b^*a^*\mathcal{R}.$$

Дакле,

$$a^\dagger b^\dagger \mathcal{A} \subseteq b^*a^*\mathcal{A}.$$

$(ii) \implies (iii)$: Нека је $x = ba^\dagger b^\dagger$. Из првог услова у (ii) следи да је

$$b^\dagger(r^\dagger - ba^\dagger b^\dagger)\mathcal{A} \subseteq b^\dagger(1-r^\dagger r)\mathcal{A},$$

$$abb^\dagger(r^\dagger - ba^\dagger b^\dagger)\mathcal{A} \subseteq abb^\dagger(1-r^\dagger r)\mathcal{A},$$

$$r(r^\dagger - ba^\dagger b^\dagger)\mathcal{A} \subseteq r(1-r^\dagger r)\mathcal{A},$$

тј.

$$r(r^\dagger - ba^\dagger b^\dagger)\mathcal{A} = 0.$$

Сада, $rr^\dagger = rba^\dagger b^\dagger = rx$ је хермитски. Такође, $rxr = rr^\dagger r = r$.

$(iii) \implies (iv)$: Уобичајено, $r^{(1,3)}$ је било који елемент који задовољава $rr^{(1,3)}r = r$ и $(rr^{(1,3)})^* = rr^{(1,3)}$. Такође, $r^{(1,4)}$ је било који елемент који задовољава $rr^{(1,4)}r = r$ и $(r^{(1,4)}r)^* = r^{(1,4)}r$. Како је очигледно $r^\dagger = r^{(1,4)}rr^{(1,3)}$, на основу Теореме (2.5.3), имамо

$$ab(ab)^\dagger = rr^\dagger = rr^{(1,4)}rr^{(1,3)} = rr^{(1,3)}.$$

Користећи претпоставку $r^{(1,3)} = ba^\dagger b^\dagger$, добијамо

$$ab(ab)^\dagger = abb^\dagger ba^\dagger b^\dagger = aba^\dagger b^\dagger,$$

$$ab(ab)^\dagger = aba^\dagger b^\dagger.$$

Множећи са леве стране са $(ab)^*$, имамо

$$(ab)^* ab(ab)^\dagger = (ab)^* aba^\dagger b^\dagger,$$

$$(ab)^* = (ab)^* aba^\dagger b^\dagger.$$

$(iv) \implies (v)$: Множећи претпоставку

$$(ab)^* = (ab)^* aba^\dagger b^\dagger$$

са десне стране са bb^*, имамо

$$(ab)^* bb^* = (ab)^* aba^\dagger b^\dagger bb^*,$$

$$(ab)^* bb^* = (ab)^* aba^\dagger b^*.$$

Имамо

$$ab = (a^\dagger b^\dagger)^* (ab)^* ab = (b^*)^\dagger (a^\dagger)^* (ab)^* ab = b(b^* b)^\dagger (a^\dagger)^* (ab)^* ab.$$

Зато,

$$ab\mathcal{R} \subseteq b\mathcal{R}.$$

$(v) \implies (i)$: Показаћемо да су услови (ii) у Теореми (2.6.1), задовољени, тј.

$$(ba)^* = a^* a(ab)^\dagger bb^*, \quad (ab)^*\mathcal{R} \subseteq a^*\mathcal{R} \text{ и } ab\mathcal{R} \subseteq b\mathcal{R}.$$

Из $a^\dagger b^* \mathcal{R} = (ab)^* \mathcal{R}$, имамо $(ab)^* \mathcal{R} \subseteq a^* \mathcal{R}$ и

$$\begin{aligned} a^\dagger b^* &= (ab)^* = (ab)^\dagger (ab)(ab)^* = (ab)^\dagger aba^\dagger b^* \\ &= (ab)^\dagger (ab(ab)^\dagger)^* aba^\dagger b^* \\ &= (ab)^\dagger ((ab)^\dagger)^* (ab)^* aba^\dagger b^* = (ab)^\dagger ((ab)^\dagger)^* (ab)^* bb^* \\ &= (ab)^\dagger (ab(ab)^\dagger)^* bb^* = (ab)^\dagger ab(ab)^\dagger bb^* = (ab)^\dagger bb^*. \end{aligned}$$

Онда,

$$a^*b^* = a^*aa^\dagger b^* = a^*a(ab)^\dagger bb^*.$$

$\square$

Следеће еквиваленције следе на основу леве-десне симетрије.

Теорема 2.6.4 *Нека су* $a, b \in \mathcal{R}^\dagger$ *тако да* $ab, a^\dagger ab \in \mathcal{R}^\dagger$. *Ако је* $k = a^\dagger ab$, *онда су следећи искази еквивалентни:*

(*i*) $(ab)^\dagger = a^\dagger b^\dagger$.

(*ii*) $[(k^\dagger - a^\dagger b^\dagger a)a^\dagger]^*\mathcal{R} \subseteq [(1 - kk^\dagger)a^\dagger]^*\mathcal{R}$ *и* $(b^\dagger)^* a\mathcal{R} = ab\mathcal{R}$.

(*iii*) $k^{(1,4)} = a^\dagger b^\dagger a$ *и* $(b^\dagger)^* a\mathcal{R} = ab\mathcal{R}$.

(*iv*) $ab = ab(ab)^*(b^\dagger)^*(a^\dagger)^*$ *и* $(b^\dagger)^* a\mathcal{R} = ab\mathcal{R}$.

(*v*) $aba^*a = ab(ab)^*(b^\dagger)^*a$, $(b^\dagger)^* a\mathcal{R} = ab\mathcal{R}$ *и* $(ab)^*\mathcal{R} \subseteq a^*\mathcal{R}$.

Теорема 2.6.5 *Нека су* $a, b \in \mathcal{R}^\dagger$ *тако да* $ab \in \mathcal{R}^\dagger$ *и* $ab = ba$. *Ако важи* $(ab)^\dagger = a^\dagger b^\dagger$, *тада важе следећи искази:*

$(ab)^*\mathcal{R} \subseteq (aba^*a)^*\mathcal{R}$ *и* $b^*ab\mathcal{R} \subseteq (b^\circ \cap (a^*)^\circ) \oplus a\mathcal{R}$.

Доказ: Ако је $ab = ba$, тада се једнакост (v) у Теореми(2.6.3), $(ab)^*bb^* = (ab)^*aba^\dagger b^*$, редукује на

$$(ab)^*b(1 - aa^\dagger)b^* = 0,$$

или

$$b(1 - aa^\dagger)b^*ab = 0,$$

тј.

$$b^*ab\mathcal{R} \subseteq (b(1 - aa^\dagger))^\circ.$$

Сада, позовимо се на Лему(2.5.8). Нека је $a \in \mathcal{R}$ и $f \in \mathcal{R}^\bullet$. Тада

$$(af)^\circ = (a^\circ \cap f\mathcal{R}) \oplus f^\circ$$

показује да

$$b^*(ab)\mathcal{R} \subseteq (b^\circ \cap (1-aa^\dagger)\mathcal{R}) \oplus (1-aa^\dagger)^\circ,$$

тј.

$$b^*(ab)\mathcal{R} \subseteq (b^\circ \cap (a^*)^\circ) \oplus a\mathcal{R}.$$

Приметимо да

$$a\mathcal{R} = aa^\dagger\mathcal{R} = (1-aa^\dagger)^\circ.$$

Даље,

$$a^*(1-aa^\dagger) = a^* - a^*aa^\dagger = a^* - a^*(aa^\dagger)^* = a^* - (aa^\dagger a)^* = 0,$$

зато,

$$(1-aa^\dagger)\mathcal{R} \subseteq (a^*)^\circ.$$

□

Теорема 2.6.6 *Нека су* $a, b \in \mathcal{R}^\dagger$ *тако да* $ab \in \mathcal{R}^\dagger$ *и* $a^*b = ba^*$. *Тада су следећи искази еквивалентни:*

(i) $(ab)^\dagger = a^\dagger b^\dagger$,

(ii) $(ab)^*(ba-ab)(ab)^* = 0, (ab)^*\mathcal{R} \subseteq a\mathcal{R}, ab\mathcal{R} \subseteq b\mathcal{R}$ *и* $(ba)^*\mathcal{R} = a^*b^*a\mathcal{R}$,

(iii) $ab(ba)^* - (ab)^*ab = 0, (ab)^*\mathcal{R} \subseteq a^*\mathcal{R}, ab\mathcal{R} \subseteq b\mathcal{R}$ *и* $ba\mathcal{R} = bab^*\mathcal{R}$.

Доказ: $(i) \iff (ii)$ Користећи претпоставку $a^*b = ba^*$ и $a^* = a^*aa^\dagger$, једнакост (v)

$$(ab)^*bb^* = (ab)^*aba^\dagger b^*$$

у Теореми (2.6.3) редукује се на

$$b^*a^*bb^* - b^*a^*aba^\dagger b^* = 0,$$

$$b^*ba^*b^* - (ab)^*aba^\dagger b^* = 0,$$

$$b^*ba^*aa^\dagger b^* - (ab)^*aba^\dagger b^* = 0,$$

$$(b^* ba^* a - (ab)^* ab)a^\dagger b^* = 0,$$

која је на основу идентитета

$$a^\dagger b^* \mathcal{R} = (ab)^* \mathcal{R}$$

(Теорема (2.6.3(v)) еквивалентна са

$$(b^* ba^* a - (ab)^* ab)(ab)^* = 0,$$

$$(b^* a^* ba - (ab)^* ab)(ab)^* = 0,$$

$$((ab)^* ba - (ab)^* ab)(ab)^* = 0,$$

$$(ab)^*(ba - ab)(ab)^* = 0.$$

Такође, имамо $b^* a = ab^*$, што води до

$$a^* ab^* a^* \mathcal{R} = a^* b^* a \mathcal{R}. \tag{2.6.5}$$

Да докажемо (2.6.5), прво приметимо да важи

$$a^* ab^* a^* \mathcal{R} = a^* b^* aa^* \mathcal{R} \subset a^* b^* a \mathcal{R}.$$

С'друге стране,

$$a^* b^* a \mathcal{R} = a^* b^* aa^\dagger a \mathcal{R} = a^* b^* aa^* (aa^*)^\dagger a \mathcal{R} \subset a^* b^* aa^* \mathcal{R},$$

и овим је (2.6.5) доказано.

На основу Теореме (2.6.2 (i)) имамо

$$a^\dagger b^* \mathcal{R} = b^* a^* \mathcal{R} \Leftrightarrow b^* a^* \mathcal{R} \subseteq a^* \mathcal{R}$$

и

$$a^* b^* \mathcal{R} = a^* ab^* a^* \mathcal{R},$$

тако да

$$b^* a^* \mathcal{R} \subseteq a^* \mathcal{R}.$$

Сада имамо

$$a^*b^*\mathcal{R} = a^*ab^*a^*\mathcal{R} = a^*b^*a\mathcal{R}.$$

Зато,

$$a^*b^*\mathcal{R} = a^*b^*a\mathcal{R}.$$

$(i) \iff (iii)$: Како је $a^*b = ba^*$ и $a^* = a^*aa^\dagger = a^\dagger aa^*$,на основу Теореме(2.6.4 (v)), имамо

$$aba^*a = ab(ab)^*(b^\dagger)^*a, \quad (b^\dagger)^*a\mathcal{R} = ab\mathcal{R}$$

и

$$b^*a^*\mathcal{R} \subseteq a^*\mathcal{R}.$$

Такође, имамо

$$aa^*ba = ab(ab)^*(b^\dagger)^*a,$$

$$aa^*(b^*)^*a - ab(ab)^*(b^\dagger)^*a = 0,$$

$$aa^*bb^*(b^*)^\dagger a - abb^*a^*(b^\dagger)^*a = 0,$$

$$(aa^*bb^* - abb^*a^*)(b^*)^\dagger a = 0.$$

Како је $(b^\dagger)^*a\mathcal{R} = ab\mathcal{R}$, добијамо

$$(aa^*bb^* - abb^*a^*)ab = 0,$$

$$(aba^*b^* - ab(ab)^*)ab = 0,$$

$$ab((ba)^* - (ab)^*)ab = 0.$$

Из Теореме (2.6.2 (ii)) имамо

$$(b^\dagger)^*a\mathcal{R} = ab\mathcal{R} \Leftrightarrow ab\mathcal{R} \subseteq b\mathcal{R} \text{ и } ba\mathcal{R} = bb^*ab\mathcal{R}.$$

Следи да је

$$bab^*\mathcal{R} = bb^*ab\mathcal{R}.$$

Из $a^*b = ba^*$ и $b^*a = ab^*$, имамо

$$bab^*x = bab^*bb^\dagger x = bb^*abb^\dagger x \in bb^*ab\mathcal{R}.$$

С' друге стране

$$bb^*abx = bab^*bx \in bab^*\mathcal{R}.$$

Према томе,

$$bab^*\mathcal{R} = bb^*ab\mathcal{R} = ba\mathcal{R}.$$

□

Теорема 2.6.7 *Нека су $a, b \in \mathcal{R}$. Ако је a инвертибилно, $b \in \mathcal{R}^\dagger$ и $(ab)^\dagger = a^{-1}b^\dagger$, тада важе следећи искази:*

(i) $ab^* = b^\dagger(ab)b^*$ *и* $ab\mathcal{R} = b\mathcal{R}$.

(ii) $(ba)(ab)^* = ab(ab)^*, ab\mathcal{R} = b\mathcal{R}$ *и* $ab^*\mathcal{R} = b^*\mathcal{R}$.

(iii) $a^{-1}b = ba^{-1}b^\dagger b, ab\mathcal{R} = b\mathcal{R}$ *и* $ab^*\mathcal{R} = b^*\mathcal{R}$.

(iv) $bb^\dagger a^{-1}b = ba^{-1}b^\dagger b, ab\mathcal{R} = b\mathcal{R}$ *и* $ab^*\mathcal{R} = b^*\mathcal{R}$.

Доказ: (i) Ако је a инвертибилно онда $a\mathcal{R} = \mathcal{R}$ и $ab\mathcal{R} = b\mathcal{R}$. Такође,

$$(b^\dagger)^*a\mathcal{R} = (b^\dagger)^*\mathcal{R} = (b^*)^\dagger\mathcal{R} = b(b^*b)^\dagger\mathcal{R} \subset \mathcal{R},$$

и

$$b\mathcal{R} = (bb^\dagger b)^{**}\mathcal{R} = (b^*bb^\dagger)^*\mathcal{R} = (b^\dagger)^*b^*b\mathcal{R} \subset (b^\dagger)^*\mathcal{R} = (b^\dagger)^*a\mathcal{R}.$$

Коначно, добијамо

$$(b^\dagger)^*a\mathcal{R} = b\mathcal{R}.$$

Сада,

$$\begin{aligned} ab &= ((ab)^*)^* = ab(ab)^*((ab)^*)^\dagger = ab(ab)^*((ab)^\dagger)^* = ab(ab)^*(a^{-1}b^\dagger)^* \\ &= ab(ab)^*(b^\dagger)^*(a^{-1})^*, \end{aligned}$$

је еквивалентно са

$$a^{-1}ab = a^{-1}ab(ab)^*(b^\dagger)^*(a^{-1})^*,$$

тј.

$$b = b(ab)^*(b^\dagger)^*(a^{-1})^*,$$

$$ba^* = b(ab)^*(b^\dagger)^*(a^{-1})^*a^*,$$

$$ba^* = b(ab)^*(b^\dagger)^*(aa^{-1})^*,$$

$$ba^* = b(ab)^*(b^\dagger)^*,$$

или

$$ab^* = b^\dagger(ab)b^*.$$

(ii) Ако последицу

$$b^\dagger(ab)b^* = ab^*$$

помножимо са $b^\dagger b$ са леве стране, имамо

$$b^\dagger bb^\dagger(ab)b^* = b^\dagger bab^*,$$

$$b^\dagger(ab)b^* = b^\dagger bab^*,$$

$$ab^* = b^\dagger bab^*.$$

$$(1 - b^\dagger b)ab^* = 0.$$

Зато,

$$b^\dagger(ab)b^* = b^\dagger bab^* \quad \text{и} \quad (1 - b^\dagger b)ab^* = 0 \tag{2.6.6}$$

Сада наводимо једну примедбу. Ако $p \in \mathcal{R}^\bullet$ и $px\mathcal{R} = x\mathcal{R}$, онда за свако $y \in \mathcal{R}$ имамо $pxy = xy$. Да докажемо примедбу, претпоставимо да $px\mathcal{R} = x\mathcal{R}$ и $y \in \mathcal{R}$. Тада постоји неко $x \in \mathcal{R}$ тако да је $pxz = xy$. Одмах добијамо да је $pxy = pxz = xy$.

Сада, из $ab\mathcal{R} = b\mathcal{R}$ прва једнакост у (2.6.6) је еквивалентна са $abb^* = bab^*$. Множећи ово са десне стране са a^*, имамо $abb^*a^* = bab^*a^*$, $ab(ab)^* = ba(ab)^*$, као што смо желели.

Позивајући се на део (i) Леме (2.5.6), други услов у (2.6.6) је еквивалентан са $ab^*\mathcal{R} \subseteq b^*\mathcal{R}$. Дакле, услов (iii) је задовољен.

(iii) Последицу $(ba)(ab)^* = ab(ab)^*$ помножимо са десне стране са $(a^*)^{-1}$, имамо $bab^* = abb^*$, што је еквивалентно са $a^{-1}bab^* = a^{-1}abb^*$, тј. $a^{-1}bab^* = bb^*$.

Сада, $a^{-1}bab^* = ba^{-1}ab^*$, $(a^{-1}b - ba^{-1})ab^* = 0$.

Како је, $ab^*\mathcal{R} = b^*\mathcal{R}$, $b^*\mathcal{R} = b^*bb^\dagger\mathcal{R}$, имамо

$$(a^{-1}b - ba^{-1})b^* = 0,$$

$$(a^{-1}b - ba^{-1})b^\dagger bb^* = 0,$$

$$a^{-1}bb^\dagger bb^* - ba^{-1}b^\dagger bb^* = 0,$$

$$a^{-1}bb^* - ba^{-1}b^\dagger bb^* = 0,$$

$$(a^{-1}b - ba^{-1}b^\dagger b)b^* = 0,$$

тј.

$$a^{-1}b - ba^{-1}b^\dagger b = 0.$$

(iv) Ако помножимо последицу $a^{-1}b = ba^{-1}b^\dagger b$ са леве стране са $bb^\dagger$, имамо

$$bb^\dagger a^{-1}b = bb^\dagger ba^{-1}b^\dagger b,$$

$$bb^\dagger a^{-1}b = ba^{-1}b^\dagger b.$$

□

Литература

[1] A. Ben-Israel, T. N. E. Greville, *Generalized Inverses Theory and Applications,* Wiley, New York, 1974; 2nd edition, Springer, New York, 2003.

[2] A. Bjerhammar, *Rectangular reciprocal matrices, with special reference to geodetic calculations*, Bull. Geodesique (1951) 118-220.

[3] A. Bjerhammar, *A generalized matrix algebra*, Trans. Roy. Inst. Tech. Stockholm 124 (1958) 32.

[4] A. Bjerhammar, *Application of calculus of matrices to method of least squares with special reference to geodetic calculations,* Trans. Roy. Inst. Tech. Stockholm 49 (1951) 86.

[5] A. E. Taylor, D. C. Lay, *Introduction to Functional Analysis*, (second edition). John Wiley & Sons, New York, 1980.

[6] A. Korporal, G. Regensburger, *On the product of projectors and generalized inverses*, Linear Multilinear Algebra 62(12): 1567-1582, 2014

[7] B. Blackadar, *K-Theory for Operator Algebras*, 2nd edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[8] B. Načevska, D. S. Djordjević, *Inner generalized inverses with prescribed idempotents*, Comm. Algebra 39 (2011), 1-14.

[9] B. Načevska, D. S. Djordjević, *Outer generalized inverses in rings and related idempotents*, Publ. Math. Debrecen 73 (3-4) 2008.

[10] C. Cao, J. Li, *Group inverses for matrices over a Bezout Domain*, Electron. J. Linear Algebra, 18:600–612, 2009.

[11] C. Cao, *Some results of group inverses for partitioned matrices over skew felds*, Journal of Natural Science of Heilongjiang University, 18:5–7, 2001 (in Chinese).

[12] C. Deng, *On the group invertibility of operators*, Electronic J. Linear Algebra 31 (2016), 492-510.

[13] C. R. Rao, S. K. Mitra, *Generalized inverse of matrices and its applications*, John Wiley &Sons Inc, 1971.

[14] C. W. Groetsch, *Generalized Inverses of Linear Operators*, Marcel Dekker, New York, 1977.

[15] D. Hilbert, *Grundzuge einer algemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*, Teubner, Leipzig, 1912, (репринт шест чланака који се појављују оригинално у Gotingen Nachrichten (1904), 49-51; (1904), 213-215; (1905), 307-338; (1906), 157-227; (1906), 439-480; (1910), 355-417;)

[16] D. Mosić, D. S. Djordjević, J. J. Koliha, *EP elements in rings*, Linear Algebra Appl. 431 (2009) 527-535

[17] D. S. Cvetković Ilić, D. S. Djordjević, V. Rakočević, *Shur Complements in C*-algebras*, Mathematische Nachrichten, 278 (2005) 808-814

[18] D. S. Cvetković Ilić, Y. Wei, *Algebraic Properties of Generalized Inverses*, Springer, Singapore, 2017

[19] D. S. Djordjević, J. J. Koliha, *Characterizing hermitian, normal and EP operators*, Filomat 21:1 (2007) 39–54.

[20] D. S. Djordjević, V. Rakočević, *Lectures on generalized inverses*, Faculty of Sciences and Mathematics, University of Niš, 2008.

[21] D. S. DJordjević, Y. Wei, *Outer generalized inverses in rings*, Comm. Algebra 33 (2005) 3051-3060.

[22] D. S. Djordjević, *Characterization of normal, hyponormal and EP operators*, J. Math. Anal. Appl. 329 (2) (2007) 1181-1190.

[23] Dragan S. Rakić, Nebojša Ĉ. Dinĉić, Dragan S. Djordjević, *Group, Moore–Penrose, core and dual core inverse in rings with involution*, Linear Algebra Appl. 463 (2014) 115-133

[24] E. Boasso, *On the Moore–Penrose inverse, EP Banach space operators, and EP Banach algebra elements*, J. Math. Anal. Appl. 339 (2008) 1003–1014.

[25] E. Boasso, *On the Moore-Penrose inverse in C*-algebras*, Extracta Mathematicae, 21(2) (2006) 93-106.

[26] E. H. Moore, *On the reciprocal of the general algebraic matrix*, Bull. Amer. Math. Soc. 26 (1920) 394-395.

[27] E. I. Fredholm, *Sur une classe d'equations fonctionnelles*, Acta Mathematica, 27 (1903), 365-390.

[28] G. W. Stewart, *On the perturbation of pseudo-inverse, projections and linear least squares problems*, SIAM Rev. 19 (1977) 634–662.

[29] H. Ma, *Optimal perturbation bounds for the core inverse*, Appl. Math. Comput. (2018) 336:176–181.

[30] H. Wang, X. Liu, *Characterizations of the core inverse and the core partial ordering*, Linear Multilinear Algebra 63 (2015) 1829–1836

[31] J. J. Koliha, D. S. Djordjević, D. Cvetković, *Moore-Penrose inverse in rings with involution*, Linear Algebra Appl. 426 (2007) 371-381.

[32] J. J. Koliha, P. Patricio, *Elements of rings with equal spectral idempotents*, J. Australian Math. Soc. 72 (2002) 137–152.

[33] J. J. Koliha, *A generalized Drazin inverse*, Glasgow Math. J. 38 (1996) 367-381.

[34] J. J. Koliha, *Elements of C*-algebras commuting with their Moore-Penrose inverse*, Studia Math. 139 (2000), 81-90.

[35] J. J. Koliha, *Isolated spectral points*, Proc. Amer. Math. Soc. 124 (1996), 3417-3424.

[36] J. J. Koliha, *The Drazin and Moore-Penrose inverse in C*-algebras*, Math. Proc. R. Ir. Acad. 99A (1) (1999), 17–27.

[37] K. Manjunatha Prasad, K. S. Mohana, *Core-EP inverse*, Linear Multilinear Algebra, 62(6) (2014), 792-802

[38] K. P. S. B. Rao, *The Theory of Generalized Inverses Over Commutative Rings*, Taylor and Francis, London, 2002.

[39] K. R. Goodearl, *Notes on Real and Complex C*-Algebras*, Shiva, 1982

[40] L. Wang, D. Mosić, Y. F. Gao, *Right core inverse and the related generalized inverses*, Comm. Algebra 47 (2019), 4749-4762.

[41] Lars E. Sjöberg, *Arne Bjerhammar-a personal summary of his academic deeds*, Journal of Geodetic Science (2021) 11(1):1-6.

[42] M. P. Drazin, *Pseudoinverse in associative rings and semigroups*, Amer. Math. Monthly 65 (1958) 506-514.

[43] M. Z. Nashed, Y. Zhao, *The Drazin inverse for singular evolution equations and partial differential operators*, World Sci. Ser. Appl. Anal. 1 (1992) 441-456.

[44] N. Castro-González, J. Robles, J. Y. Vélez-Cerrada, *Characterizations of a class of matrices and perturbation of the Drazin inverse*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 30 (2008) 882–897.

[45] N. Castro-González, J. Y. Vélez-Cerrada, *On the perturbation of the group generalized inverse for a class of bounded operators in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. 34 (2008) 1213–1223

[46] N. Castro-Gonzalez, R. E. Hartwig, *Perturbation results and forward order law for the Moore-Penrose inverse of a product*, Electonic J. Linear Algebra 34 (2018) 514-525.

[47] N. Mihajlović, D. S. Djordjević, *Perturbation Results and Forward Order Law for the Moore-Penrose Inverse in Rings With Involution*

[48] N. Mihajlović, D. S. Djordjević, *On Group Invertibility in Rings*, Filomat 33:19 (2019), 6141–6150

[49] N. Mihajlović, *Group inverse and core inverse in Banach and C*-algebras*, Communications in Algebra

[50] O. M. Baksalary, G. Trenkler, *Characterizations of EP, normal and Hermitian matrices*, Linear Multilinear Algebra 56 (2006) 299–304.

[51] O. M. Baksalary, G. Trenkler, *Core inverse of matrices*, Linear Multilinear Algebra 58 (6)(2010), 681-697.

[52] P. Å. Wedin, *Perturbation theory for pseudo-inverses*, Perturbation theory for pseudo-inverses, BIT 13 (1973) 217–232

[53] P. Patricio, R. Puystjens, *Drazin-Moore-Penrose invertibility in rings*, Linear Algebra Appl. 389 (2004) 159-173.

[54] Q. Xu, *Common hermitian and positive solutions to the adjointable operator equations AX=C, XB=D*, Linear Algebra Appl., 429:1–11, 2008.

[55] R. E. Cline, T. N. E. Greville, *A Drazin inverse for rectangular matrices*, Linear Algebra Appl. 29 (1980) 53-62.

[56] R. E. Cline, *An application of representation of a matrix*, MRC Technical Report no. 592, 1965.

[57] R. E. Cline, *Note on the generalized inverse of the product of matrices*, SIAM Rev., 6 (1):57 58, 1964

[58] R. E. Harte, M. Mbekhta, *On generalized inverses in C*-algebras II*, Studia Math. 106 (1993), 129–138.

[59] R. E. Harte, M. Mbekhta, *On generalized inverses in C*-algebras*, Studia Math. 103 (1992) 71–77

[60] R. E. Harte, M. Ó Searcóid. *Positive elements and B* condition*, Math. Z. 193 (1986) 1-9

[61] R. E. Harte, *On quasinilpotents in rings*, Panamer. Math. J. 1 (1991) 10-16.

[62] R. E. Harte, *Invertibility and singularity for bounded linear operators*, Marcel Dekker, New York, 1988.

[63] R. E. Harte, *Spectral projections*, Irish Math. Soc. Newsletter 11 (1984) 10-15.

[64] R. E. Hartwig, J. Luh, *On finite regular rings*, Pacific J. Math. 69 (1) (1977) 73-95.

[65] R. E. Hartwig, K. Spindelböck, *Matrices for which A^* and $A^\dagger$ commute*, Linear Multilinear Algebra 14 (1984) 241–256

[66] R. Harte, *Invertibility and singularity for bounded linear operators*, Marcel Dekker, New York, 1988.

[67] R. Penrose, *A generalized inverse for matrices*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 51 (1955) 406-413.

[68] S. Cheng, Y. Tian, *Two sets of new characterizations for normal and EP matrices*, Linear Algebra Appl. 375 (2003) 181–195.

[69] S. L. Campbell, C. D. Meyer, *Continuity properties of the Drazin pseudoinverses*, Linear Algebra Appl. 10 (1975) 77–83.

[70] S. L. Campbell, C. D. Meyer Jr, *Generalized Inverse of Linear Transformations*, Pitman, London, 1979; Dover, New York, 1991.

[71] S. L. Campbell, C. D. Meyer, *Generalized Inverses of Linear Transformations*, Pitman, London, 1979; SIAM, Philadelphia, 2009.

[72] S. R. Caradus, *Generalized Inverses and Operator Theory*, Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics, 50, Queen's University, Kingston, 1978.

[73] S. Roch, B. Silbermann, *Continuity of generalized inverses in Banach algebras*, Studia Math., 136:197–227, 1999.

[74] S. Xu, J. Chen, D. Mosić, *On characterizations of special elements in rings with involution*, Chin. Ann. Math. Ser. B, (M20) vol. 40(1) (2019) 65-78.

[75] S. Z. Qiao, *The weighted Drazin inverse of a linear operator on a Banach space and its approximations*, (Chinese), Numer. Math. J. Chinese Univ. 3 (1981) 296-305.

[76] V. Rakočević, Y. Wei, *A weighted Drazin inverse and applications*, Linear Algebra Appl. 350 (2002) 25-39.

[77] Y. Wei, *Acute perturbation of the group inverse*, Linear Algebra Appl. (2017) 534:135–157.

Биографија

Надица М. Михајловић рођена је 17.04.1973. године у Косовској Митровици. Основну школу "Бранко Радичевић" и Гимназију, смер стручни сарадник у природним наукама, у Косовској Митровици завршила је као носилац Вукових диплома. Студије на Природно-математичком факултету у Приштини, на Одсеку за математику, уписала је школске 1991/1992. године и исте завршила 1995.године, оствaривши просечну оцену 8,27.

Школске 2022/2023. године реуписана је на Докторске академске студије, на Природно-математичком факултету у Нишу, на којима је положила све испите са просечном оценом 9,54.

У периоду од завршетка основних студија до 2018. године, радила је као асистент на Факултету техничких наука у Приштини са привременим седиштем у Косовској Митровици за предмете Математика 1, Математика 2, Математика 3, Вероватноћа и статистика и Нумеричка математика.

Сада ради као наставник математике у Гимназији у Косовској Митровици. Аутор је или коаутор три научна рада објављена у иностраним и домаћим часописима са импакт фактором.

Библиографија научних радова

1. N. Mihajlović, D. S. Djordjević, *Perturbation results and forward order law for the Moore-Penrose inverse in rings with involution,* Georgian Mathematical Journal, Vol.29 (2022), No.3, 425-439.(**M22**)

2. N. Mihajlović, D. S. Djordjević, *On Group Invertibility in Rings*, Filomat, Vol.33 (2019), No.19, 6141–6150. (**M22**)

3. N. Mihajlović, *Group inverse and core inverse in Banach and C*-algebras*, Communications in Algebra, Vol.48 (2020), No.4, 1803–1818. (**M23**)

4. N. Milenković, D. S. Djordjević, *On the core inverse*, Applied Mathematics and Computer Science, Vol.3 (2018), No.1, 1–4. (**M53**)

ИЗЈАВА О АУТОРСТВУ

Изјављујем да је докторска дисертација, под насловом

ПЕРТУРБАЦИЈЕ УОПШТЕНИХ ИНВЕРЗА ЕЛЕМЕНАТА У ПРСТЕНИМА

која је одбрањена на Природно - математичком факултету Универзитета у Нишу:

- резултат сопственог истраживачког рада;
- да ову дисертацију, ни у целини, нити у деловима, нисам пријављивао/ла на другим факултетима, нити универзитетима;
- да нисам повредио/ла ауторска права, нити злоупотребио/ла интелектуалну својину других лица.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци, који су у вези са ауторством и добијањем академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада, и то у каталогу Библиотеке, Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Нишу, као и у публикацијама Универзитета у Нишу.

У Нишу, 22.08.2023.

Потпис аутора дисертације:

Надица Михајловић

Надица М. Михајловић

ИЗЈАВА О ИСТОВЕТНОСТИ ШТАМПАНОГ И ЕЛЕКТРОНСКОГ ОБЛИКА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Наслов дисертације:

ПЕРТУРБАЦИЈЕ УОПШТЕНИХ ИНВЕРЗА ЕЛЕМЕНАТА У ПРСТЕНИМА

Изјављујем да је електронски облик моје докторске дисертације, коју сам предао/ла за уношење у **Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу,** истоветан штампаном облику.

У Нишу, 22.08.2023.

Потпис аутора дисертације:

Надица Михајловић

Надица М. Михајловић

ИЗЈАВА О КОРИШЋЕЊУ

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Никола Тесла“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу унесе моју докторску дисертацију, под насловом:

ПЕРТУРБАЦИЈЕ УОПШТЕНИХ ИНВЕРЗА ЕЛЕМЕНАТА У ПРСТЕНИМА

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском облику, погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију, унету у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу, могу користити сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons), за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство **(CC BY)**
2. Ауторство – некомерцијално **(CC BY-NC)**
3. **Ауторство – некомерцијално – без прераде (CC BY-NC-ND)**
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима **(CC BY-NC-SA)**
5. Ауторство – без прераде **(CC BY-ND)**
6. Ауторство – делити под истим условима **(CC BY-SA)**

У Нишу, 22.08.2023.

Потпис аутора дисертације:

Надица Михајловић

Надица М. Михајловић