

UNIVERZITET U BEOGRADU
ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET

Igor D. Ilić

**TUNELOVANJE ELEKTROMAGNETSKIH TALASA
KROZ KOMPLEKSNE OPTIČKE SREDINE**

doktorska disertacija

Beograd, 2012.

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING

Igor D. Ilić

**TUNNELING OF ELECTROMAGNETIC WAVES
THROUGH COMPLEX OPTICAL MEDIA**

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2012

Mentor:

vanredni profesor, dr Jelena Radovanović, Univerzitet u Beogradu, Elektrotehnički fakultet

Članovi komisije:

1. naučni savetnik, dr Ljupčo Hadžievski, Univerzitet u Beogradu, Institut za nuklearne nauke "Vinča"
2. redovni profesor, dr Vitomir Milanović, Univerzitet u Beogradu, Elektrotehnički fakultet
3. naučni saradnik, dr Jovana Petrović, Univerzitet u Beogradu, Institut za nuklearne nauke "Vinča"
4. redovni profesor, dr Jovan Radunović, Univerzitet u Beogradu, Elektrotehnički fakultet

Datum odbrane: 15.03.2012.

Izrada ove disertacije ne bi bila moguća bez ogromne pomoći i podrške mojih mentora sa Elektrotehničkog fakulteta i Instituta za nuklearne nauke "Vinča": dr Vitomira Milanovića, dr Ljupča Hadžievskog i dr Jelene Radovanović. Imao sam zaista veliku sreću i čast da sarađujem sa tako, pre svega, kvalitetnim ljudima, a zatim i velikim stručnjacima, te im ovom prilikom iskazujem veliku zahvalnost na savetima, strpljenju i sveukupnoj saradnji tokom prethodne četiri godine. Zahvalio bih i dr Jovani Petrović iz Instituta za nuklearne nauke "Vinča" na, u odnosu na kratko vreme koje smo sarađivali, nesrazmerno velikoj pomoći koju mi je pružila pri izradi same teze.

Zahvalnost dugujem i dobrim kolegama i još boljim prijateljima dr Goranu Gligoriću, Mariji Petrović, Aleksandru Daničiću, Neveni Raičević (Institut za nuklearne nauke "Vinča") i Sabini Ramović (Elektrotehnički fakultet) na velikoj podršci koju su mi pružali sve vreme koje smo proveli radeći zajedno. Želeo bih da se zahvalim i dr Aleksandri Maluckov (Prirodno-matematički fakultet u Nišu) i dr Milutinu Stepiću (Institut za nuklearne nauke "Vinča") na kvalitetnoj saradnji.

Na kraju, posebnu zahvalnost dugujem (uskoro dr) Petri Beličev, koja je verovatno već mislila da je neću pomenuti, na svemu kroz šta smo prošli u prethodnih osam godina. Pored moje porodice, ona je najzaslužnija za sve što sam do sada postigao.

TUNELOVANJE ELEKTROMAGNETSKIH TALASA KROZ KOMPLEKSNE OPTIČKE SREDINE

Rezime

Predmet ove disertacije je analiza karakteristika tunelovanja elektromagnetskih talasa kroz različite kompleksne optičke sredine, sa posebnim osvrtom na metamaterijale sa negativnim indeksom prelamanja.

Teorijski su razmatrane različite strukture, te su za njih, korišćenjem brojnih matematičkih metoda, izvedeni izrazi za vremena tunelovanja u: (1) nelinearnim disperzivnim anizotropnim strukturama, (2) linearnim anizotropnim strukturama (poluprovodničkim metamaterijalima), a proračunat je i uticaj Gus-Henkenovog pomeraja na ova vremena. Vremena tunelovanja za različite, postojeće, strukture su izračunate korišćenjem numeričke metode pod nazivom metoda pogađanja (*shooting method*), koja je odgovarajuća za ovu problematiku.

Takođe, teorijski je razmatrana propagacija elektromagnetnog zračenja u anizotropnim strukturama sastavljenim od naizmenično postavljenih slojeva dva različita poluprovodnika, te je, na osnovu ove analize, dizajniran poluprovodnički metamaterijal sastavljen od naizmenično postavljenih slojeva različito dopiranih InGaAs. Mogućnost negativnog prelamanja u ovim materijalima potvrđena je primenom FDTD (*Finite-Difference Time-Domain*) numeričke metode, koja omogućava simulaciju realnog prostiranja elektromagnetnog zračenja kroz različite strukture.

Ključne reči: *elektromagnetno tunelovanje, nelinearna optika, metamaterijali*

Naučna oblast: Elektrotehnika

UDK: 621.3

TUNNELING OF ELECTROMAGNETIC WAVES THROUGH COMPLEX OPTICAL MEDIA

Summary

Subject of this dissertation is the analysis of electromagnetic waves tunneling properties through different complex optical media, with emphasis on metamaterials with negative index of refraction.

Different structures are theoretically considered, i.e., using numerous mathematical methods, expressions for tunneling times are derived for: (1) nonlinear dispersive anisotropic structures, (2) linear anisotropic structures (semiconductor metamaterials). Also, influence of Goos-Hänchen shift on these times is calculated. Tunneling times for existing structures are calculated by using suitable numerical method: shooting method.

Besides these, propagation of electromagnetic radiation through anisotropic structures composed of alternately placed layers of two different semiconductors is analyzed. On the grounds of this analysis, semiconductor metamaterial composed of alternately placed layers of differently doped InGaAs is designed. The possibility of obtaining negative refraction in these structures is confirmed by using FDTD (Finite-Difference-Time-Domain) numerical method, which enables simulation of electromagnetic radiation propagation through various structures.

Keywords: *electromagnetic tunneling, nonlinear optics, metamaterials*

Scientific field: Electrical engineering

UDC: 621.3

SADRŽAJ

1 UVOD	1
1.1 Efekat tunelovanja	1
Tunelovanje u kvantnoj mehanici	1
Tunelovanje u elektromagnetici	3
1.2 Vremena tunelovanja	6
1.3 Metamaterijali	10
Istorija razvoja metamaterijala	11
Karakteristike metamaterijala	14
Tipovi metamaterijala	18
2 TUNELOVANJE U NELINEARNIM DISPERZIVNIM APSORPTIVNIM SREDINAMA	24
2.1 Nelinearne sredine.....	24
Električna polarizacija	25
Kvadratna, kubna i saturaciona nelinearnost	27
2.2 Drude-Lorentz-ov model disperzije	29
2.3 Model nelinearne disperzivne apsorptivne barijere	32
2.4 Helmholtz-ova jednačina za nelinearnu disperzivnu sredinu.....	34
2.5 Srednja gustina elektromagnetne energije u barijeri.....	37
2.6 Srednja elektromagnetna energija u barijeri.....	43
2.7 Upadna snaga na barijeru	47
2.8 Vreme zadržavanja EM talasa u barijeri	49
2.9 Relacija između vremena zadržavanja i grupnog kašnjenja	50
2.10 Numerički pristup: <i>shooting</i> metoda.....	58

2.11	Numerički rezultati: linearna barijera	60
2.12	Numerički rezultati: nelinearna nedisperzivna i neapsorptivna barijera	64
2.13	Numerički rezultati: nelinearna disperzivna apsorptivna barijera	67
3	UTICAJ GOOS-HÄNCHEN-OVOG POMERAJA NA VREMENA TUNELOVANJA	72
3.1	Goos-Hänchen-ov pomeraj	72
3.2	Fizički model.....	74
3.3	Uticao Goos-Hänchen-ovog pomeraja na grupno kašnjenje.....	75
	Uticao Goos-Hänchen-ovog pomeraja na vreme zadržavanja	78
3.4	Numerički rezultati.....	78
4	KARAKTERISTIKE TUNELOVANJA U ANIZOTROPNIM MATERIJALIMA	81
4.1	Anizotropija	81
4.2	Poluprovodnički metamaterijali	82
	Teorija efektivne sredine	82
	Disperziona relacija	84
	Prostiranje svetlosti u poluprovodničkom metamaterijalu	86
	Efektivni grupni indeks prelamanja.....	89
4.3	Poluprovodnički metamaterijal od dva različito dopirana sloja InGaAs.....	92
	Model strukture	92
	<i>Finite-Difference Time-Domain: Total-Field/Scattered-Field</i> formalizam u disperzivnom materijalu	94
	Numerički rezultati.....	95
4.4	Helmholtz-ove jednačine za anizotropne materijale.....	99
4.5	Srednja gustina elektromagnetne energije: pristup ekvivalentnog kola.....	102
4.6	Vremena tunelovanja u poluprovodničkom metamaterijalu	106
4.7	Numerički rezultati za vremena tunelovanja.....	108

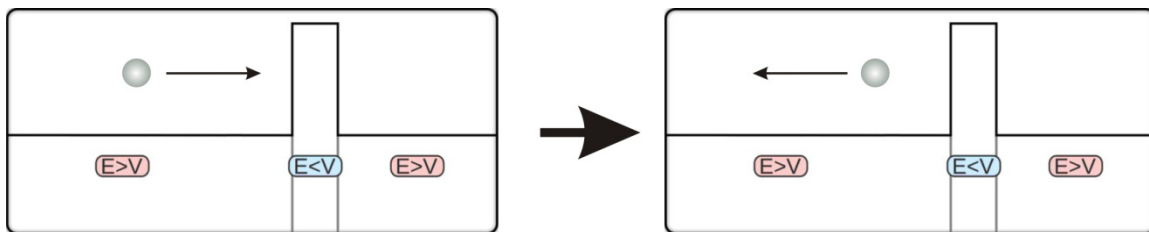
5 ZAKLJUČAK	111
DODACI	113
A. Usrednjavanje po vremenu.....	113
B. Koeficijent Q	114
C. Apsorpcija	115
D. Koeficijent P	117
LITERATURA	119

1 UVOD

1.1 Efekat tunelovanja

Tunelovanje u kvantnoj mehanici

Zamislimo situaciju u kojoj je jednom dečaku, prilikom igre, lopta otišla u komšijsko dvorište, opasano zidom visine dva metra. Sa druge strane zida nalazi se značajno mlađi dečak koji pokušava da vrati loptu prvom dečaku, ali nema dovoljno snage da je baci dva metra u visinu, te se ona, koliko god je puta bacao, uvek odbija o zid i vraća njemu. Na kraju, dečak poziva oca koji prebacuje loptu preko zida. Lopta, naravno, nije mogla da prođe kroz zid, te joj je bila potrebna dodatna energija, u vidu očevog izbačaja, kako bi prevazišla barijeru u vidu zida. Ukoliko prihvatimo analogiju između prostornih dimenzija u makroskopskom i energije u mikroskopskom svetu, možemo isto tako reći da elektron određene energije koji putuje prostranstvima nižeg potencijala, i zatim naiđe na potencijalnu barijeru čiji je vrh viši od njegove energije, može samo da se nada prilivu neke dodatne energije sa strane kako bi prešao barijeru. U slučaju da ne dođe do eksternog priliva energije, elektron zauvek ostaje zarobljen sa iste strane potencijalne barijere (Slika 1.1).



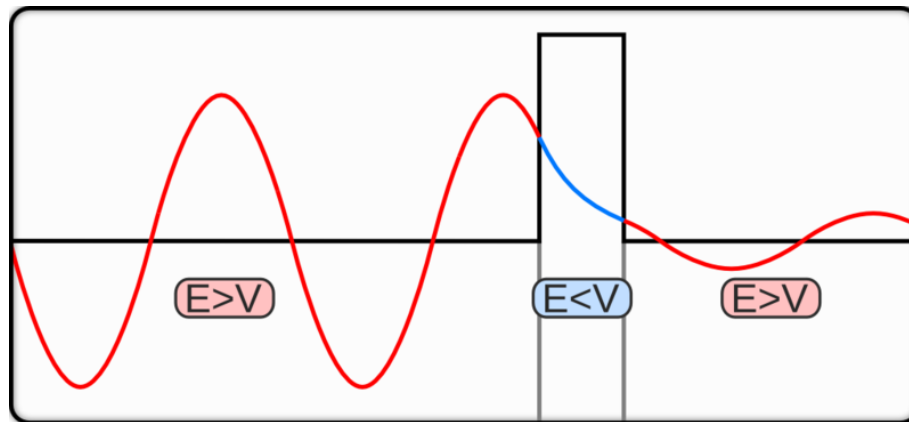
Slika 1.1: Interakcija čestice sa potencijalnom barijerom prema klasičnoj (Newton-ovoj) fizici, pri čemu E predstavlja energiju elektrona, a V potencijal sredine

Način razmišljanja vezan za kretanje čestica kroz potencijalne barijere prikazan u prethodnom pasusu, oslonjen na Newton-ovu fiziku, važio je sve do kraja XIX veka. Rušenje ove teorije počinje otkrivanjem prirodne radioaktivnosti, odnosno radioaktivnog raspada (spontane emisije čestica iz nestabilnih jezgara atoma) od strane Becquerel-a 1896. godine [1,2]*. Elster i Geitel su tri godine kasnije eksperimentalno pokazali da se radioaktivne supstance raspadaju po eksponencijalnoj stopi [2,3], dok je Rutherford 1900. godine definisao vreme poluraspada kao vreme za koje broj radioaktivnih jezgara dostigne polovinu svoje početne vrednosti [2,4]. Različiti naučnici (Schweidler, Kohlrausch, itd.) su, u narednim godinama, pokazali da vreme poluraspada ne zavisi ni od kakvih spoljašnjih faktora, kao što su temperatura, pritisak ili hemijska okolina, već da je ono isključivo statistička veličina. Ipak, tek je Gamow 1928. godine,

* Reference iz ovog pasusa vezane za radove sa početka XX veka su preuzete iz knjige [2]

rešavajući Schrödinger-ovu jednačinu radi objašnjavanja α -raspada, pokazao da je radioaktivnost, zapravo, posledica efekta tunelovanja [2,5,6]. Naime, α -raspad je radioaktivni raspad u kome jezgro atoma emituje α česticu. Ova čestica je, kada se nalazi u jezgru, zarobljena u potencijalnoj jami. Prema klasičnoj fizici, čestica nikada ne bi izašla iz jezgra, te postojanje α -raspada nije bilo u skladu sa ovom teorijom. Gamow je, rešavajući Schrödinger-ovu jednačinu za ovaj model, izveo zavisnost između vremena poluraspada i energije emisije α čestica, direktno povezane sa verovatnoćom tunelovanja čestice. Max Born je kasnije, oslanjajući se na rad Gamow-a, pokazao da tunelovanje nije ograničeno samo na procese u nuklearnoj fizici, već da je generalni rezultat kvantne mehanike, primenjiv na veliki broj različitih sistema [2,6,7]. Ovaj dokaz postojanja efekta tunelovanja je bio i ostao jedan od najvećih dostignuća kvantne mehanike.

Ali, šta je zapravo tunelovanje? Efekat tunelovanja u kvantnoj mehanici predstavlja pojavu u kojoj elementarna čestica može da savlada konačnu potencijalnu barijeru čak i kada je njena energija niža od visine (energije) barijere. Naime, ukoliko čestica iz prvog pasusa naiđe na barijeru, postoji izvesna, nenulta, verovatnoća da će čestica jednostavno proći kroz pomenutu barijeru. Analogon ovome na makroskopskom nivou bi bio događaj po kome bi lopta koju baca dečak, ukoliko je dovoljno puta bačena, u jednom trenutku prošla kroz zid, pri čemu bi zid ostao netaknut.



Slika 1.2: Efekat tunelovanja u kvantnoj mehanici (E predstavlja energiju elektrona, a V potencijal sredine)

Efekat tunelovanja u kvantnoj mehanici je posledica dualne prirode materije – čestične i talasne, odnosno, pri tunelovanju do izražaja dolazi njena talasna priroda. Ovo se vidi na Slici 1.2, na kojoj je šematski prikazano rešenje Schrödinger-ove jednačine u okolini potencijalne barijere za česticu čija je energija niža od visine te barijere. Ispred barijere čestica putuje u obliku propagirajućeg talasa, dok unutar barijere postoje eksponencijalna rešenja Schrödinger-ove jednačine. Sa druge strane barijere opet postoje rešenja u obliku propagirajućeg talasa, s tim što, u ovom slučaju, posmatrani talasi imaju daleko manju amplitudu. Za ovakvu pojavu se može dati sledeće

objašnjenje: Unutar barijere nema propagacije talasa, ali se čestica svejedno može naći sa druge strane barijere, pri čemu je verovatnoća nalaženja čestice u toj oblasti (verovatnoća tunelovanja) proporcionalna amplitudi rešenja (talasa). Verovatnoća tunelovanja je obično veoma mala, daleko manja od verovatnoće reflektovanja talasa (čestice) o potencijalnu barijeru, i zavisi od mase čestice, debljine barijere i relativnog odnosa energija čestice i barijere. Kako je verovatnoća tunelovanja obrnuto proporcionalna masi čestice, kao i širini barijere, tako je efekat tunelovanja moguće uočiti samo kod mikroskopskih objekata. [8]

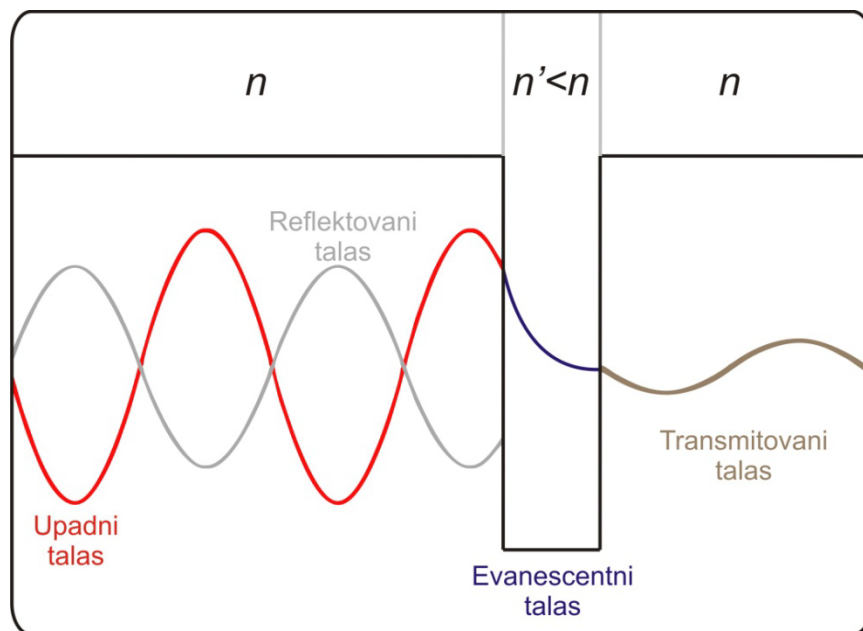
Iako se kvantno tunelovanje obično javlja kod barijera širine 1-3nm (ili užim) [9], ono često može biti uzrok nekih bitnih makroskopskih efekata. Takav primer je curenje (*leakage*) u VLSI (*Very-Large-Scale-Integration*) elektronici – integrisanim kolima veoma velike gustine (npr., CPU u kompjuterima). Ovo curenje izaziva gubitak snage i različite termalne efekte u ovakvim kolima, te se smatra da efekat kvantnog tunelovanja ograničava (sa donje strane) dimenzije kompjuterskih čipova. Ipak, tunelovanje je pronašlo i svoju primenu u razvoju različitih uređaja, pre svega tunnel diode i skenirajućeg tunnel mikroskopa [10].

Tunelovanje u elektromagnetici

Analogno tunelovanju u kvantnoj mehanici, u elektromagnetici se ovaj efekat javlja kada elektromagnetni talas, krećući se sredinom indeksa prelamanja n , naiđe na barijeru indeksa prelamanja $n' < n$ pod upadnim uglom θ većim od Brewster-ovog ugla (ugla totalne refleksije) $\theta_B = \arcsin(n'/n)$. Elektromagnetno (EM) tunelovanje (u literaturi nazivano i *frustrated total internal reflection* – FTIR [11]) je šematski prikazano na Slici 1.3, pri čemu je potrebno napomenuti da je ovo pojednostavljen prikaz na kome se ne vidi da upadni talas na prepreku nailazi pod određenim upadnim uglom. Kao što se može videti, tunelovanje u elektromagnetici je potpuno analogno kvantnom tunelovanju, pri čemu su elektromagnetni talas, indeks prelamanja i upadni ugao u elektromagnetici analogni talasu čestica, energiji okolne sredine i energiji čestice (amplitudi talasa) u kvantnoj mehanici, respektivno.

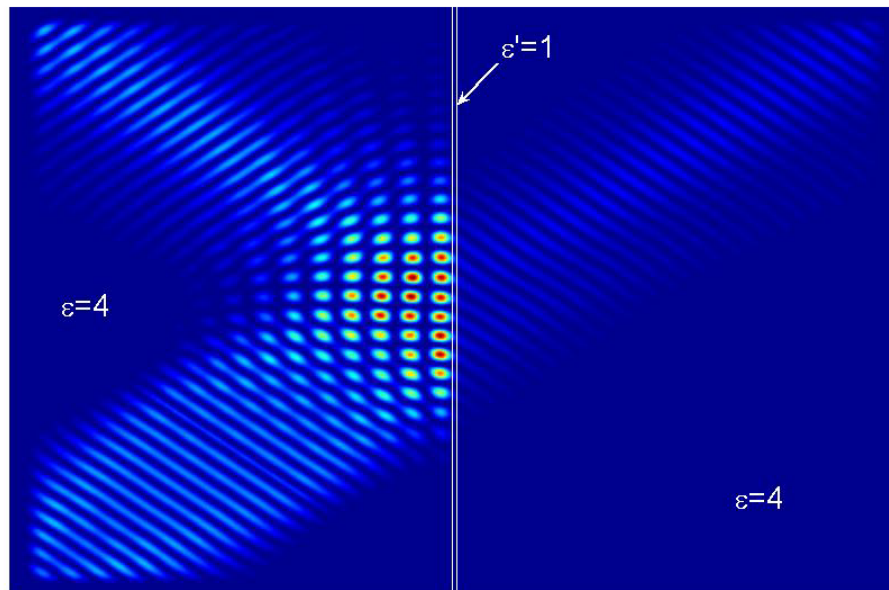
Dakle, prema Slici 1.3, propagirajući (upadni) talas, krećući se sredinom indeksa prelamanja n nailazi na prepreku u vidu sloja indeksa prelamanja $n' < n$. Pretpostavimo da je zadovoljen uslov totalne refleksije. Najveći deo upadnog talasa se reflektuje o površinu $n' - n$, pri čemu reflektovani talas ima ista svojstva (u smislu talasne dužine, konstante propagacije) kao i upadni, osim faze (pomerena za π), smeru propagacije (suprotan u odnosu na upadni) i amplitude. Manji deo upadnog talasa, ipak, prodire u barijeru stvarajući evanescentni talas – stojeći talas čija amplituda opada eksponencijalno sa rastojanjem od upadne površine $n' - n$. U prostoru iza barijere javlja se propagirajući transmitovani talas, uglavnom veoma male amplitude u odnosu na upadni. Transmitovani talas ima ista svojstva kao i upadni, osim faze (koja je pomerena za određeni stepen u zavisnosti od širine barijere i njenog indeksa prelamanja) i amplitude.

Ovakvo ponašanje elektromagnetnog talasa predstavlja rešenje Helmholtz-ove talasne jednačine – parcijalne diferencijalne jednačine drugog reda, izvedene iz Maxwell-ovih jednačina, koja služi za opis propagacije elektromagnetnih talasa u različitim sredinama, po formi slične Schrödinger-ovoj jednačini (preciznije, talasna jednačina je analogon Schrödinger-ove jednačine u elektromagnetici [12]).



Slika 1.3: Tunelovanje elektromagnetnog talasa

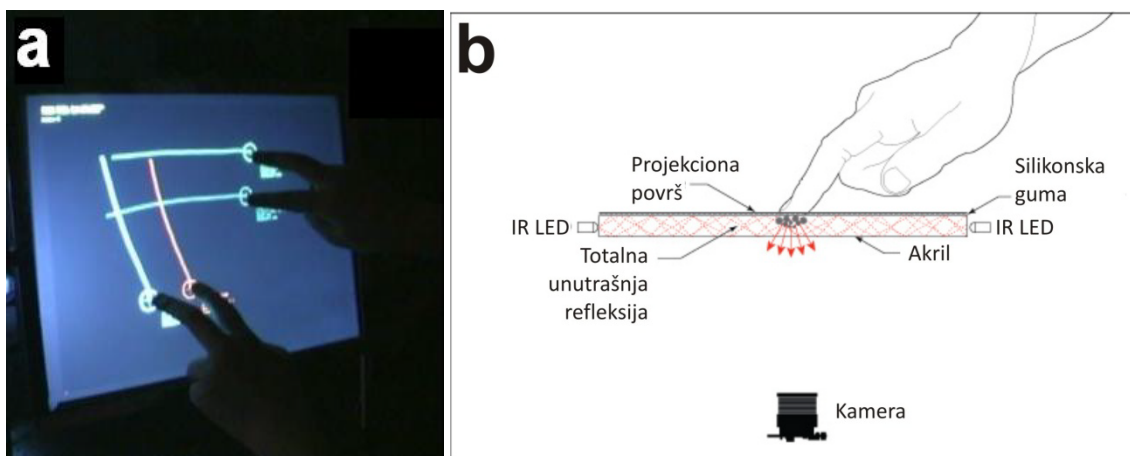
Na Slici 1.4 je dat realan prikaz tunelovanja elektromagnetnog talasa kroz barijeru sa pozitivnim indeksom prelamanja. Prikazana simulacija je urađena pomoću 2D FDTD (*Finite-Difference-Time-Domain*) metode u programskom paketu za tehničko programiranje MATLAB. Upadni elektromagnetni talas, koherentan i oblika *turkey* (tj. *tapered cosine* – ograničavajuće kosinusne) prozorske funkcije [13] dolazi (sa donje leve strane grafika) iz sredine indeksa prelamanja $n = 16$ i nailazi na tanku barijeru indeksa prelamanja $n = 1$. Ova barijera se nalazi na sredini grafika i oivičena je dvema belim vertikalnim linijama. U ovom primeru je Brewster-ov ugao veoma mali ($\theta_B \approx 3.6^\circ$), te je za upadni ugao $\theta = \pi/4$ ispunjen uslov totalne refleksije. Kao što se može videti, čak i za ovako usku barijeru ($L = 150\text{nm} = \lambda/20$, pri čemu je L širina barijere, a λ talasna dužina upadnog talasa) najveći deo upadnog talasa biva reflektovan o površinu dva materijala. Polje unutar barijere ima veoma oštar eksponencijalni pad, tako da se veoma mali deo upadnog EM talasa transmituje.



Slika 1.4: 2D FDTD simulacija elektromagnetnog tunelovanja, pri čemu su $\varepsilon = n^2$ i $\varepsilon' = n'^2$, relativna permitivnosti okolne sredine i barijere, respektivno

Elektromagnetno tunelovanje je karakterizovano sledećim fizičkim veličinama:

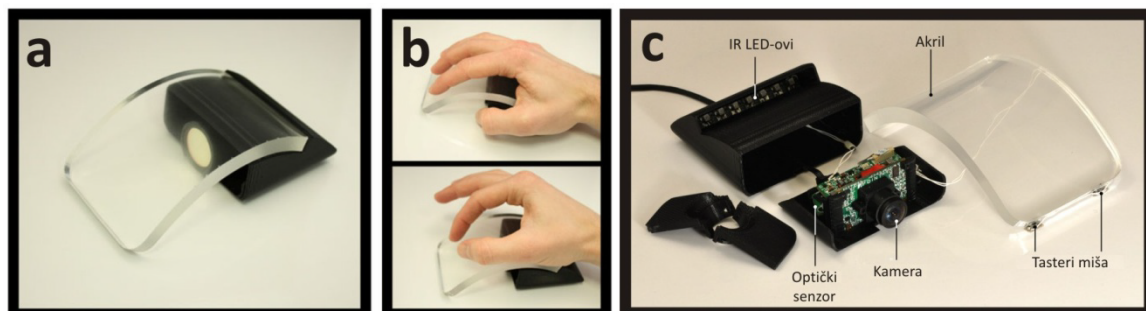
- Indeksima prelamanja okolne sredine i barijere
- Širinom barijere
- Upadnim uglom
- Talasnom dužinom upadnog EM talasa, ukoliko je barijera napravljena od disperzivnog materijala
- Jačinom upadnog polja, ukoliko se barijera sastoji od nelinearnog materijala



Slika 1.5: Multi-touch ekrani: (a) Izgled; (b) Princip rada

Elektromagnetno tunelovanje je prvo primenjeno u integrisanim optičkim uređajima koji se baziraju na sprezanju svetlosti između više blisko postavljenih talasovoda ili fibera [14,15,16,17]. Ipak, najrasprostranjenija praktična primena ovog efekta danas je u sensorima pritiska, pre svega u sistemima za registrovanje dodira, kakvi su, npr., *touch-screen* uređaji. Najveća perspektiva tunelovanja vezana je za tzv. *multi-touch* sisteme, senzore koji mogu da registruju više dodira odjednom (npr., *multi-touch* ekrani, Slika 1.5a). Princip rada ovih sistema prikazan je na Slici 1.5b [18]. LE (*Light Emitting*) diode emituju (najčešće infracrvenu) svetlost u materijal visokog indeksa prelamanja (najčešće akril), unutar kojeg deo svetlosti, koji ispunjava uslov totalne unutrašnje refleksije u odnosu na projekcionu površ nižeg indeksa prelamanja, ostaje zarobljen. Ipak, kada se na gornju (projekcionu) površ postavi prst, kako koža ima visok indeks prelamanja, dolazi do tunelovanja svetlosti kroz ovu površ, svetlost se reflektuje o prst i, deo reflektovane svetlosti koji ne ispunjava uslov totalne unutrašnje refleksije se transmituje do kamere koja beleži dodir ekrana [19,20]. Ovi sistemi imaju veliki potencijal, s obzirom na to da današnji *touch-screen*-ovi omogućavaju samo jedan dodir u jednom trenutku, dok je kod *multi-touch* ekrana moguće registrovanje više dodira odjednom, kao što je prikazano na Slici 1.5a [21].

Multi-touch ekrani opisani ovde postoje od 2005. godine, i predstavljaju prvu pravu praktičnu primenu elektromagnetnog tunelovanja. U poslednjih nekoliko godina pojavilo se još nekoliko uređaja baziranih na istom principu; jedan od njih je *Microsoft*-ov FTIR miš, prikazan na Slici 1.6 [22]. Ovaj miš je nastao 2009. godine, i predstavlja jedan iz serije od pet patenata miševa bez tastera izdatih uz, tada novi, operativni sistem *Windows 7*. Ovaj miš radi tako što prepoznaje poziciju prsta naslonjenog na akrilnu površinu, te šalje odgovarajući izlaz na kompjuter (levi taster, desni taster, *scroll*).



Slika 1.6: *Microsoft*-ov FTIR miš: (a) Izgled; (b) Način rada; (c) Sastavni delovi

1.2 Vremena tunelovanja

Jedno od osnovnih pitanja vezanih za efekat tunelovanja jeste: Koliko vremena je potrebno čestici (talasu) da protuneluje kroz barijeru? Naučnici su pokušavali da odgovore na ovo pitanje još od samog otkrivanja efekta kvantnog tunelovanja [23], pa

su tako prva ozbiljnija istraživanja na ovu temu obavljena već početkom 1930-ih godina [24,25]. Istraživanja su nastavljena i u narednim decenijama, no, što su ova vremena bila više ispitivana, to su donosila sve više kontroverzi, pre svega jer su mnoga istraživanja, kako eksperimentalna, tako i teorijska, ukazivala na to da elementarne čestice, pod određenim uslovima, mogu da tuneluju brzinama većim od brzine svetlosti u vakuumu (superluminarnim brzinama) [26,27,28,29,30,31,32,33,34]. Kako bi se razrešio ovaj problem, naučnici su tokom decenija predložili veliki broj različitih definicija vremena tunelovanja, od kojih su se neki odnosili na propagaciju faze, drugi na propagaciju energije, a bilo je i različitih definicija vezanih za količinu vremena koju reflektovani, odnosno transmitovani talas provede u barijeri [35,36,37,38,39,40,41,42,43]*. Ipak, kao najpogodnije i najsveobuhvatnije definicije vremena tunelovanja, tokom godina, su se izdvojili vreme zadržavanja, vezano za transfer energije čestice, i grupno kašnjenje, vezano za prostiranje faze kroz potencijalnu barijeru [23,44]. Ove dve definicije, kako je pokazano, nije moguće posmatrati zasebno, jer obe odslikavaju dualnu, talasno-čestičnu prirodu elementarnih čestica, te samo zajedno u potpunosti opisuju ovaj aspekt tunelovanja.

Istraživanje fenomena tunelovanja dovelo je i do otkrivanja Hartman-ovog efekta, prema kojem vreme tunelovanja čestice kroz barijeru saturira sa povećanjem širine barijere [45]. Ovaj efekat bio je jedan od glavnih uzroka uočavanja superluminarnih brzina od strane istraživača.

Ništa manje kontroverzi nije izazivao ni efekat tunelovanja u elektromagnetici. Tako su, npr., u eksperimentima tokom 1992., 1993. i 1994. god., Enders i Nimtz pokazali da se elektromagnetni impulsi, kada tuneluju kroz barijeru postavljenu unutar talasovoda, pri čemu se pod barijerom podrazumeva materijal sa nižim indeksom prelamanja, kreću grupnim brzinama većim od brzine svetlosti u vakuumu c [27,46,47]. U tim eksperimentima je dokazan Hartman-ov efekat, po kome vreme tunelovanja elektromagnetnog impulsa kroz ovakvu barijeru ne zavisi od širine barijere, tj. grupno kašnjenje ulazi u saturaciju nakon neke vrednosti širine barijere. Odatle proizilazi logičan zaključak da bi se, na ovaj način, mogle dobiti proizvoljno velike grupne brzine, pa čak i mnogo veće od c , što je u suprotnosti sa teorijom relativiteta.

Ipak, pokazano je da je problem bio u korišćenoj definiciji vremenskih intervala. Naime, grupne brzine veće od c dobijene su tako što se merilo vreme između pojavljivanja upadnog impulsa na ulazu u barijeru i transmitovanog dela impulsa na izlazu iz barijere. No, pokazano je da upadni impuls ni ne ulazi u barijeru, te stoga upadni i transmitovani impuls nisu povezani kauzalnom propagacijom [32]. Kako nisu povezani, tretiraju se kao događaji koji, praktično, nemaju veze jedan sa drugim, te je besmisleno meriti vreme između njihovih pojavljivanja. Dakle, bilo je potrebno naći vremensku skalu koja bi na odgovarajući način karakterizovala tunelovanje elektromagnetnog impulsa kroz barijeru postavljenu unutar talasovoda.

* Reference u ovom pasusu vezane za radove iz sredine XX veka preuzete su iz rada [43]

H. G. Winful je, prateći rad Hauge-a i Støvneng-a, predložio dva vremenska intervala: grupno kašnjenje (*group delay*) i vreme zadržavanja (*dwelt time*) [48]. No, veza između ove dve vremenske skale, pa čak i njihove same definicije, su vrlo kontroverzne, te bi bilo najbolje da se krene od početka.

Vreme zadržavanja je prvi put definisano u radu F. T. Smith-a iz 1960. godine [37]. Smith ga je nazvao srednje vreme kašnjenja, i definisao kao razliku vremena koje je potrebno skupu elektrona da protuneluje kroz potencijalnu barijeru i vremena koje bi tim elektronima trebalo da prođu kroz taj deo prostora da nema barijere. Dakle:

$$Q = \frac{\langle I \rangle}{F} \quad (1.1)$$

pri čemu je $\langle I \rangle$ srednji broj elektrona koji se javlja usled postojanja barijere, a F fluks elektrona (definisano u broju elektrona po sekundi). Smith je, takođe, podrazumevao da nema razlike između grupnog kašnjenja i vremena zadržavanja, tj. da je srednje vreme kašnjenja, kako ga je on definisao, jednako višku vremena koje elektroni provedu unutar same barijere. Dakle, kašnjenje Q je isključivo posledica rasejanja elektrona unutar barijere. No, pri usrednjavanju I , Smith je izgubio neke oscilatorne članove, koji će se kasnije pokazati kao izuzetno bitni.

M. Büttiker 1983. god. razdvaja grupno kašnjenje, koje je on nazvao fazno kašnjenje, τ_φ i vreme zadržavanja τ_d [49]. Fazno kašnjenje je definisao kao dodatno vreme koji elektroni potroše na tunelovanje usled postojanja barijere, a vreme zadržavanja kao vreme koje elektroni potroše unutar same barijere (posledica rasejanja). No, Büttiker, za razliku od svih ostalih naučnika tog doba, koji su tvrdili da je razlika između τ_φ i τ_d samo u malim oscilacijama koje je Smith zanemario, tvrdi da ne postoji generalna veza između ova dva vremena, već da je samo moguće tvrditi da su jednaki za visoku transparentnost barijere: $T = 1$, pri čemu je T koeficijent transmisije elektrona kroz barijeru.

Na kraju, Winful u svom radu iz 2003. godine [48], konačno pronalazi vezu između grupnog kašnjenja i vremena zadržavanja, ali ne za kvantnu strukturu, već za barijeru postavljenu unutar talasovoda (kasnije te godine objavio je analogne rezultate vezane za kvantne strukture [44]). Ovde se pod barijerom podrazumeva materijal sa različitim indeksom prelamanja od jezgra talasovoda (Slika 1.7). Ovaj slučaj iz elektromagnetike je analogan potencijalnoj barijeri iz kvantne mehanike, koju su koristili Smith i Büttiker. Tom logikom je Winful, definišući na identičan način grupno kašnjenje i vreme zadržavanja, došao do sledećeg izraza [48]:

$$\tau_g = \tau_d + \tau_i \quad (1.2)$$

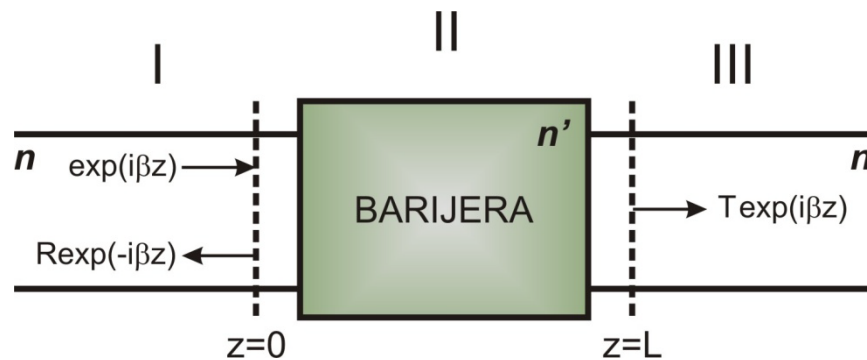
gde je τ_g grupno kašnjenje. Vreme zadržavanja je jednako:

$$\tau_d = \frac{\langle W \rangle}{P_{in}} \quad (1.3)$$

a vreme samointerferencije:

$$\tau_i = \frac{\text{Im}(R)}{\beta} \left(\frac{\beta}{\omega} - \frac{d\beta}{d\omega} \right) \quad (1.4)$$

pri čemu je $\langle W \rangle$ srednja elektromagnetna energija unutar barijere, P_{in} srednja upadna snaga elektromagnetnih impulsa na barijeru, R koeficijent refleksije barijere, $\text{Im}(R)$ njegov imaginarni deo, β propagaciona konstanta talasovoda i ω frekvencija oscilovanja elektromagnetnog polja koje se kreće kroz talasovod.



Slika 1.7: Šema procesa rasejanja o barijeru u talasovodu

Ovde su grupno kašnjenje i vreme zadržavanja definisani kao kod Büttiker-a, s tim što Winful tvrdi da je moguće povezati ova dva vremena, i to relacijom (1.2). Winful uvodi i novo vreme – vreme samointerferencije, koje je definisano kao vreme koje talas provede interferirajući sam sa sobom, tj. vreme koje upadni talas provede interferirajući sa reflektovanim talasom ispred barijere. Ovo vreme je, zapravo, oscilatorni član koji je Smith izgubio usrednjavajući višak elektrona u barijeri I . Sve do ovog Winful-ovog rada smatralo se da je nemoguće razdvojiti vreme zadržavanja od vremena samointerferencije, odnosno da je nemoguće naći eksplicitan izraz za τ_i .

Winful-ov rad, iako krucijalan iz oblasti elektromagnetnog tunelovanja, ipak ima određene manjkavosti koje se tiču opštosti izvedenih relacija. Naime, relacije (1.2) i (1.4) su izvedene za slučaj barijere od linearnog izotropnog neapsorptivnog nedisperzivnog materijala sa pozitivnim indeksom prelamanja. Naravno, nijedan materijal u prirodi u potpunosti ne ispunjava sve ove uslove, a retko koji se može i aproksimovati na ovaj način. Stoga je ovaj rad ostavio dosta prostora za dalje ispitivanje i nadograđivanje relacija između različitih vremena tunelovanja koje bi važile za daleko veći broj materijala u prirodi. Cilj ove teze je upravo popunjavanje ovog prostora, odnosno

dobijanje ovih relacija za disperzivne, apsorptivne, nelinearne i/ili anizotropne materijale.

Pored ignorisanja gore navedenih osobina materijala, Winful je uveo još jednu pretpostavku koja smanjuje opštost njegovih rezultata: da materijal, kroz koji svetlost tuneluje, ima pozitivan indeks prelamanja. Ovo je, naravno, primenjivo na sve materijale prisutne u prirodi; ipak, u poslednjih 10 godina došlo je do razvoja nove vrste veštačkih fotoničnih periodičnih struktura – metamaterijala – koje mogu imati negativan indeks prelamanja. S obzirom na to da je tunelovanje dominantan oblik „propagacije“ elektromagnetnih talasa u metamaterijalima, zatim da je oblast razvoja i ispitivanja različitih osobina metamaterijala u velikoj ekspanziji, kao i da do sada nisu izvršena istraživanja vezana za vremena tunelovanja u materijalima sa negativnim indeksom prelamanja, numerička ispitivanja prikazana u ovom radu se najvećim delom bave upravo ovim tipom materijala. Stoga će ovde, pre prelaska na drugu glavu, biti date definicije i opisi najpoznatijih tipova metamaterijala.

1.3 Metamaterijali

Jedna od osnovnih karakteristika elektromagnetnog tunelovanja vezana je za uslov pri kome uopšte može doći do tunelovanja – uslov totalne refleksije. Ukoliko uslov totalne refleksije nije ispunjen, u barijeri se nalaze propagirajući, a ne stojeći modovi, te dolazi do obične transmisije, a ne do tunelovanja. Kako bi došlo do totalne refleksije, upadni ugao mora zadovoljati uslov $\theta > \theta_B = \arcsin(n'/n)$. Očigledno, što je manji indeks prelamanja barijere, to su potrebni manji upadni uglovi da bi došlo do tunelovanja. Ukoliko je $n' \leq 0$, uslov totalne refleksije je zadovoljen za sve uglove, uključujući i $\theta = 0$. Materijali sa ovakvim indeksom prelamanja ne postoje u prirodi, ali su u skoroj prošlosti razvijeni novi materijali, pod nazivom metamaterijali, koji iskazuju ova svojstva.

Izraz metamaterijali, u svom najopštijem obliku, obuhvata sve veštačke, najčešće periodične, strukture dizajnirane tako da imaju osobine kakve nije moguće naći među prirodnim materijalima. Elektromagnetni metamaterijali su, tako, veštačke periodične strukture dizajnirane da na određeni način interaguju sa elektromagnetnim talasima i da ih kontrolišu. Kao ubedljivo najpopularnija vrsta u ovoj grupi materijala, elektromagnetni metamaterijali se u literaturi uglavnom nazivaju jednostavno metamaterijali, pa će ta terminologija biti usvojena i u ovom radu.

Jedna od najinteresantnijih i, u poslednje vreme, najviše ispitivanih osobina koju određeni metamaterijali mogu da poseduju je, kao što je već rečeno, negativan indeks prelamanja*. Ova podgrupa metamaterijala naziva se metamaterijali sa negativnim indeksom prelamanja, nastala je 2001. godine, i od tada je zabeležen veliki napredak u

* Ovde će se, i dalje u tezi, pod izrazom „negativni indeks prelamanja“ podrazumevati negativni *realni* deo indeksa prelamanja

razvoju ove grupe materijala. Ipak, početak priče o metamaterijalima sa negativnim indeksom prelamanja datira još sa početka XX veka, te je potrebno, radi punog razumevanja ove oblasti, prvo razumeti ceo proces nastanka ove grupe materijala.

Istorija razvoja metamaterijala

Mogućnost postojanja materijala sa negativnim indeksom prelamanja prvi put je pomenuta u radu Alberta Schuster-a [50], gde je pomenuti naučnik povezoao fenomen negativne grupne brzine propagirajućeg talasa sa negativnim indeksom prelamanja materijala kroz koji se talas prostire. Četiri decenije kasnije, L. I. Mandel'shtam objavljuje seriju radova iz ove oblasti [51,52,53], u kojima je objašnjavao moguće posledice postojanja fenomena negativnog indeksa prelamanja, kao što su suprotni smerovi vektora fazne i grupne brzine talasa bez ugrožavanja kauzalnosti, ili negativno prelamanje talasa usled istovremenih negativnih vrednosti konstitutivnih parametara materijala – permitivnosti i permeabilnosti – u određenom opsegu frekvencija. Ove strukture i njihove osobine su, zatim, teorijski bile izučavane i od strane Sivukhin-a [54] i Pafomov-a [55,56,57]; ipak, rad koji se danas smatra pionirskim u ovoj oblasti je rad koji je ruski fizičar Viktor Veselago objavio čak šest decenija nakon Schuster-ovog rada.

Dakle, prema danas uvreženom shvatanju, istorija metamaterijala počinje 1967. godine Veselago-vom vizijom o postojanju „supstance“ sa istovremeno negativnim vrednostima permitivnosti i permeabilnosti [58]. U ovom radu, Veselago naziva ove „supstance“ LH (*Left-Handed* – levoruke, koje prate pravilo levog zavrtnja), kako bi izrazio činjenicu da one „dopuštaju“ prostiranje talasa sa vektorima konstantne faze i električnog i magnetskog polja, gradeći tako „levoruku trojku“, u poređenju sa uobičajenim materijalima kod kojih je ova trojka „desnoruka“. Kod ovakvih sredina, objasnio je Veselago, fazna brzina talasa ima suprotan smer u odnosu na grupnu brzinu i brzinu toka energije, što upućuje na niz neobičnih efekata, kao što su inverzni Snell-ov zakon, inverzni Doppler-ov efekat, inverzni zakon Cherenk-ovog zračenja i mnogi drugi.

Veselago je završio svoj rad diskusijom o mogućem razvoju prirodnih „supstanci“ koje bi mogle ispoljiti *left-handed* (LH) osobine. Zato je predložio čiste feromagnetske metale ili poluprovodnike, kod kojih su oba konstitutivna parametra, permitivnost i permeabilnost, tenzori (anizotropne strukture) u cilju dobijanja osobina kakve poseduju LH strukture. „Ali,“ zaključio je, „nažalost (...) mi ne znamo ni za jednu supstancu koja bi mogla biti izotropna, a koja ima negativnu permeabilnost“, pokazujući kako se čini teškim napraviti praktičnu LH strukturu.

Iz prethodnog je lako zaključiti da materijal, kako bi imao LH svojstva, mora istovremeno posedovati negativne vrednosti permitivnosti i permeabilnosti. Poteškoća na koju se nailazi pri postizanju istovremeno negativnih vrednosti za ova dva parametra leži u činjenici da su rezonantne učestanosti pri kojima permitivnost postaje negativna najčešće mnogo veće od rezonantnih učestanosti za koje je permeabilnost negativna. Takođe, u oba slučaja, opsezi rezonantnih učestanosti su veoma uski.

Trideset godina nakon Veselago-vog rada, osmišljen je i eksperimentalno izveden prvi LH materijal. Ovaj materijal nije bio prirodna supstanca, kako je to očekivao Veselago, već veštačka struktura koju su predložili D. R. Smith i njegovi saradnici [59]. Smith je svoju strukturu bazirao na radovima Pendry-ja, objavljenim nekoliko godina ranije. Pendry je predstavio strukture plazmanskog tipa, tj. strukture koje su imale negativnu permitivnost i pozitivnu permeabilnost [60], odnosno pozitivnu permitivnost i negativnu permeabilnost [61], i koje su bile dizajnirane tako da je njihova plazmena frekvencija bila u mikrotalasnom domenu. Kako bi u potpunosti mogao da se razume princip rada metamaterijala sa negativnim indeksom prelamanja, neophodno je razumeti način rada Pendry-jevih struktura; stoga, pre objašnjenja dizajna i načina rada LH metamaterijala, sledi opis ovih struktura.

Jedna od bitnih osobina metamaterijala jeste da im je prosečna dimenzija jedinične ćelije p mnogo manja od talasne dužine upadnog zračenja λ_0 . U najgorem slučaju, ona može iznositi četvrtinu vrednosti talasne dužine upadnog zračenja. Stoga, ovaj odnos: $p = \lambda_0/4$, predstavlja uslov koji će osigurati da fenomen prelamanja talasa dominira nad fenomenima rasejanja i difrakcije, tokom propagacije istog kroz metamaterijal. Usled toga što je perioda ove strukture manja od talasne dužine EM polja koja se kroz nju prostire, ovo EM polje „vidi“ metamaterijal kao masivan (*bulk*) materijal, te se optičke karakteristike ove periodične strukture mogu predstaviti preko efektivnih konstitutivnih parametara: efektivne permitivnosti i efektivne permeabilnosti*. Izrazi pomoću kojih se izračunavaju efektivne vrednosti konstitutivnih parametara će biti detaljno izvedeni u glavi 2, a ovde će biti samo prikazani.

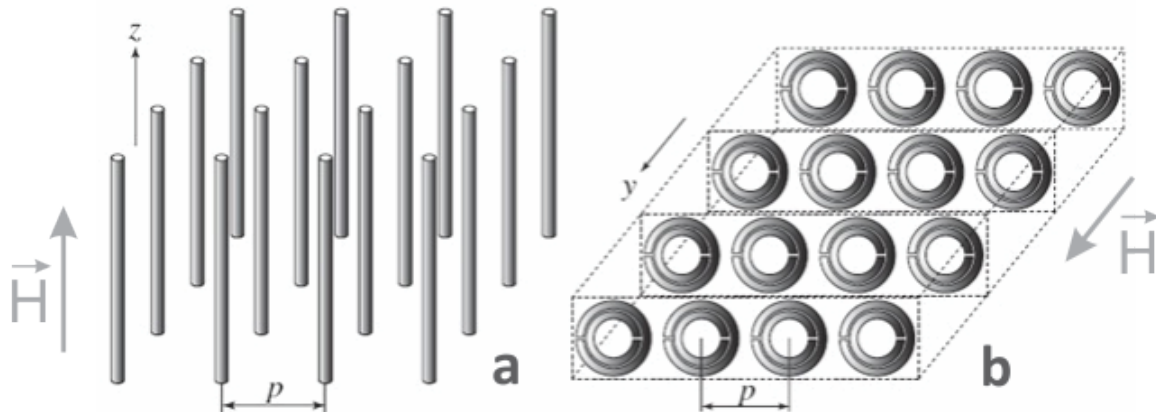
Za metamaterijal koji iskazuje osobine negativne permitivnosti i pozitivne permeabilnosti Pendry je predložio periodičnu strukturu sastavljenu od niza metalnih žica (Slika 1.8a) [60]. Ukoliko je, u ovakvoj strukturi, eksitirajuće električno polje \vec{E} paralelno osi žica ($\vec{E} \parallel \vec{z}$), duž njih će se indukovati struja, što će za posledicu imati stvaranje ekvivalentnih električnih dipolnih momenata. Ovakav metamaterijal pokazuje zavisnost relativne permitivnosti od frekvencije koja je plazmanskog tipa, tj.:

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 + j\omega\Gamma} \quad (1.5)$$

gde je $\omega_{pe} = (2\pi c^2 / (p^2 \ln(p/a)))^{1/2}$ elektronska plazma frekvencija, podesiva u GHz području, i $\Gamma = \varepsilon_0 (p\omega_{pe}/a)^2 / (\pi\sigma)$ faktor prigušenja usled gubitaka u metalu. Pored ovoga, c je brzina svetlosti, a poluprečnik žica, σ predstavlja električnu provodnost metala, dok je j imaginarna konstanta.

* Dalje u tekstu će se pod izrazima permitivnost i permeabilnost podrazumevati efektivne vrednosti ovih parametara

Iz formule (1.5) se jasno vidi da je realni deo permitivnosti negativan ukoliko frekvencija eksitujućeg električnog polja zadovoljava uslov $\omega^2 < \omega_{pe}^2 - \Gamma^2$. Sa druge strane, permeabilnost je prosto jednaka permeabilnosti vakuuma μ_0 , pošto nije generisan nijedan magnetski dipol. Treba primetiti da je u obzir uzeta pretpostavka da su žice mnogo duže od talasne dužine upadnog talasa (teorijski su beskonačne), što znači da su pobuđene na frekvencijama koje se nalaze daleko ispod njihove prve rezonance. Ovo je bio prvi put da je eksperimentalno verifikovan materijal sa negativnom permitivnošću, i predstavljao je prvi veliki korak ka dobijanju LH materijala. Ipak, za negativan indeks prelamanja je potrebno da i permitivnost i permeabilnost budu istovremeno negativni, a dobijanje negativne permeabilnosti je predstavljalo daleko kompleksniji problem.



Slika 1.8: Periodična struktura sastavljena od (a) niza tankih žica, koja iskazuje osobine negativne realne permitivnosti; (b) niza prekinutih metalnih prstenastih rezonatora, koja iskazuje osobine negativne realne permeabilnosti

Tri godine kasnije, Pendry objavljuje rad u kome predstavlja periodičnu strukturu, sastavljenu od niza prekinutih metalnih prstenastih rezonatora (*metal Split-Ring Resonator* – SRR) kružnog ili pravougaonog oblika, koja je karakterisana pozitivnom permitivnošću i negativnom permeabilnošću [61]. Jedna takva struktura, sastavljena od niza prstenastih rezonatora kružnog oblika, prikazana je na Slici 1.8b. Ukoliko je, u ovakvoj strukturi, eksitujuće magnetsko polje \vec{H} normalno na ravan prstenova ($\vec{H} \perp \vec{y}$), u petlji će se indukovati rezonantna struja, što ima za posledicu generisanje ekvivalentnih magnetskih dipolnih momenata. Zavisnost relativne permeabilnosti od frekvencije kod ovakvog metamaterijala je plazmanskog tipa (vidi izvođenje u poglavlju 2.2), tj.:

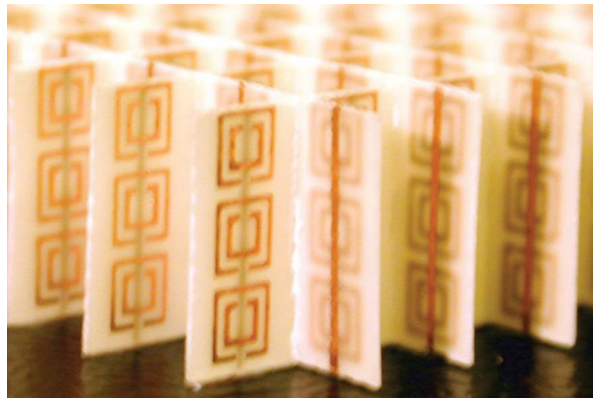
$$\mu_r(\omega) = 1 - \frac{F\omega_{0m}^2}{\omega^2 - \omega_{0m}^2 + j\omega\Gamma} \quad (1.6)$$

gde je $F = \pi(a_R/p)^2$ konstanta koja zavisi od unutrašnjeg poluprečnika manjeg prstena a_R , $\omega_{0m} = c(3p/(\pi \ln(2wa_R^3/\delta)))^{1/2}$ magnetna rezonantna učestanost podesiva u GHz području i $\Gamma = 2pR'/(a_R\mu_0)$ faktor prigušenja usled gubitaka u metalu.

Pri tome je w širina prstenova, δ radijalno rastojanje između prstenova i R' podužna električna otpornost žice.

Prikazana SRR struktura ima magnetski odziv uprkos činjenici da ne sadrži materijale koji provode magnetno polje. Ovo je posledica prisustva veštačkih magnetnih dipolnih momenata uzrokovanih prstenastim razonatorima. Izraz (1.6) pokazuje da može postojati opseg frekvencija u kome je realni deo permeabilnosti negativan. U slučaju kada nema gubitaka ($\Gamma = 0$) ovaj opseg frekvencija je $\omega_{0m} < \omega < \omega_{0m}/\sqrt{1-F}$, pri čemu se frekvencija $\omega_{0m}/\sqrt{1-F}$ često naziva magnetnom plazma frekvencijom.

Smith je došao na ideju da spoji Pendry-jeve strukture u jednu koja će predstavljati prvi eksperimentalni LH prototip (Slika 1.9) [59]. Nakon obavljenih eksperimenata pokazalo se da postoji propagacija talasa, kroz ovu strukturu, u opsegu frekvencija u kojem su oba konstitutivna parametra bila istovremeno negativna na frekvencijama između 10.2 GHz i 10.8 GHz. U narednih deset godina oblast metamaterijala doživela je veliku ekspanziju, te danas postoji veliki broj različitih tipova metamaterijala o kojima će više reči biti kasnije u tekstu. Pre opisa ovih tipova, potrebno je identifikovati osnovne karakteristike metamaterijala.



Slika 1.9: Fotografija prvog metamaterijala sa negativnim indeksom prelamanja

Karakteristike metamaterijala

Metamaterijali se, kao i svi drugi materijali, karakterišu velikim brojem različitih parametara. Ipak, njihove glavne optičke karakteristike se mogu smestiti u tri pojma: indeks prelamanja, disperzija i apsorpcija. Ono što metamaterijale razlikuje od prirodnih materijala je, pre svega, mogućnost dobijanja negativnog indeksa prelamanja. Drugo, permitivnost i permeabilnost svih metamaterijala se mogu izraziti preko neke varijacije Lorentz-ove disperzione relacije. Treće, svi do sada konstruisani metamaterijali imaju visoku apsorpciju. U ovom odeljku će najpre biti pokazano koje uslove metamaterijal mora da ispunjava da bi realni deo njegovog indeksa prelamanja imao vrednost manju od nule, a zatim će biti izvedene neke osnovne disperzione relacije koje važe za sve metamaterijale, a koje će koristiti pri analizi tunelovanja kroz ovu vrstu materijala.

Kasnije, u glavi 2 i Dodatku će biti prikazana i detaljna izvođenja Lorentz-ovih disperzionih relacija i apsorpcije u metamaterijalima.

- **Indeks prelamanja**

Poznato je da se, u prirodnim materijalima, indeks prelamanja računa prema formuli $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$, pri čemu je ε permitivnost, a μ permeabilnost materijala. Na prvi pogled, čini se da negativne vrednosti ε i μ ne bi trebalo da utiču na znak indeksa prelamanja, odnosno da je $n > 0$ za $\varepsilon, \mu > 0$ ili $\varepsilon, \mu < 0$, odnosno $n = j \cdot \text{Im}(n)$ za $\varepsilon < 0, \mu > 0$ ili $\varepsilon > 0, \mu < 0$. Međutim, ova tri parametra se mogu predstaviti kao kompleksne veličine na sledeći način:

$$\varepsilon = r_\varepsilon \exp(i\theta), \mu = r_\mu \exp(i\varphi) \Rightarrow \quad (1.7)$$

$$n = \sqrt{r_\varepsilon r_\mu} \exp(j(\theta + \varphi)/2) \quad (1.8)$$

Iz uslova da imaginarni deo indeksa prelamanja za apsorptivne sredine mora biti pozitivan, sledi da:

$$0 \leq \frac{1}{2}(\theta + \varphi) < \pi \quad (1.9)$$

Ukoliko važi da je $\text{Re}(\varepsilon) < 0$ i $\text{Re}(\mu) < 0$, tj. da je $\cos \theta < 0$ i $\cos \varphi < 0$, tada:

$$\frac{\pi}{2} < \frac{1}{2}(\theta + \varphi) < \frac{3\pi}{2} \quad (1.10)$$

Da bi oba uslova (1.9) i (1.10) bila zadovoljena, mora važiti:

$$\frac{\pi}{2} < \frac{1}{2}(\theta + \varphi) < \pi \quad (1.11)$$

pa sledi da za realni deo indeksa prelamanja važi:

$$\text{Re}(n) = \sqrt{r_\varepsilon r_\mu} \cos(\theta/2 + \varphi/2) < 0 \quad (1.12)$$

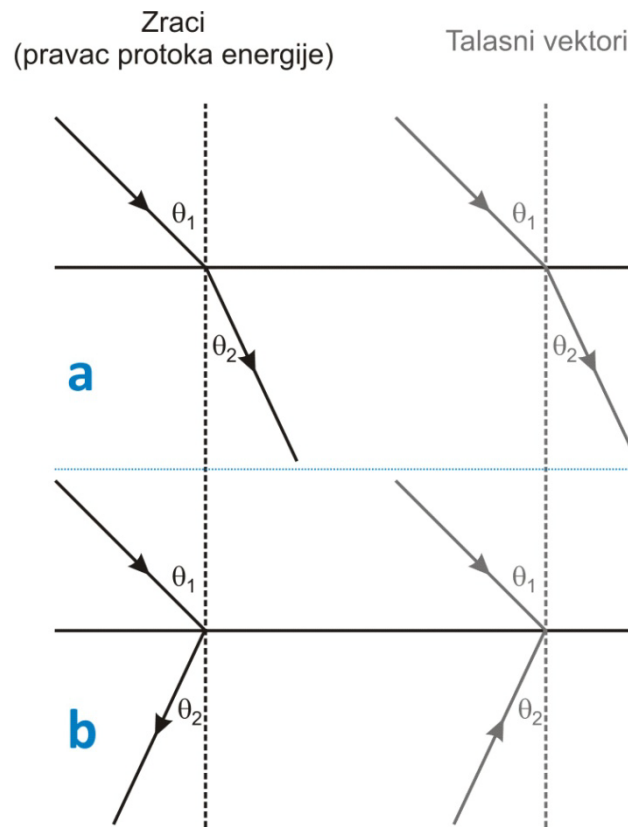
Na osnovu gore navedenog vidi se da je realni deo indeksa prelamanja negativan ukoliko su ispunjena dva uslova: (1) materijal je apsorptivan ($\text{Im}(n) > 0$) i (2) realni delovi permitivnosti i permeabilnosti su manji od nule.

Jedna od neposrednih posledica negativnog indeksa prelamanja može biti uočena u Snell-ovom zakonu. Posmatra se prostiranje ravanskog talasa iz sredine sa pozitivnim indeksom prelamanja ($n_p > 0$) u sredinu sa negativnim indeksom prelamanja ($n_n < 0$).

Neka je sredina iz koje ravanski talas dolazi vakuum. Ukoliko se sa θ_1 i θ_2 označe upadni ugao i ugao prelamanja, respektivno, prema Snell-ovom zakonu sledi:

$$n_p \sin \theta_1 = n_n \sin \theta_2 \quad (1.13)$$

pri čemu, $n_n < 0$ ukazuje na činjenicu da je $\sin \theta_2 < 0$, tj. da prelomljeni zrak zaklapa negativni ugao u odnosu na normalu na razdvojnu površ dve sredine. Drugim rečima, transmitovani zraci se prelamaju sa iste strane normale kao i upadni zraci – sa suprotne strane u odnosu na uobičajeni slučaj kada je u pitanju prelamanje zraka između dve sredine sa pozitivnim indeksom prelamanja.



Slika 1.10: Zraci i talasni vektori za slučaj kada se svetlost prostire iz vakuuma u izotropnu sredinu sa indeksom prelamanja koji je **(a)** pozitivan; **(b)** negativan. U slučaju pod (b) talasni vektor i pravac prostiranja talasa su suprotni, a samim tim i vektori fazne brzine i brzine protoka energije. U slučaju anizotropne sredine, talasni i Poynting-ov vektor imaju različite pravce, što je detaljnije diskutovano u glavi 4

Druga posledica negativnog indeksa prelamanja tiče se smera talasnog vektora u ovakvom materijalu. Neka je električno polje u metamaterijalu moguće opisati sledećim izrazom:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp[j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)] \quad (1.14)$$

gde je \vec{k} talasni vektor, \vec{r} prostorni vektor, ω frekvencija EM talasa i t vreme. Na sličan način se mogu opisati i električna indukcija, jačina magnetnog polja i magnetna indukcija: \vec{D} , \vec{B} i \vec{H} , respektivno. Iz I i II Maxwell-ove jednačine:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.15)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (1.16)$$

i konstitutivnih relacija $\vec{D} = \varepsilon(\omega)\vec{E}$ i $\vec{B} = \mu(\omega)\vec{H}$ za izotropnu sredinu, mogu se izvesti sledeći izrazi:

$$\vec{k} \times \vec{E}_0 = \omega\mu(\omega)\vec{H}_0 \quad (1.17)$$

$$\vec{k} \times \vec{H}_0 = -\omega\varepsilon(\omega)\vec{E}_0 \quad (1.18)$$

Stoga, ukoliko je $\varepsilon(\omega) > 0$ i $\mu(\omega) > 0$, vektori \vec{E} , \vec{H} i \vec{k} obrazuju desni koordinatni sistem i tada je Poynting-ov vektor $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ istog pravca i smera kao i talasni vektor \vec{k} . Ali, ukoliko je $\varepsilon(\omega) < 0$ i $\mu(\omega) < 0$, vektori \vec{E} , \vec{H} i \vec{k} obrazuju levi koordinatni sistem i tada je Poynting-ov vektor suprotnog smera u odnosu na smer talasnog vektora \vec{k} . Iz ovog razloga se EM talasi u materijalima sa negativnim indeksom prelamanja nazivaju „levorukim“ (*left-handed*).

- **Disperzija**

Kada u materijalu ne bi postojala frekvencijska disperzija niti apsorpcija, bilo bi nemoguće imati materijal sa negativnom permitivnošću i permeabilnošću, jer bi, u tom slučaju, ukupna energija imala negativnu vrednost, što, naravno, nije moguće. Izraz za gustinu energije EM polja bi tada glasio:

$$\varepsilon, \mu < 0 \Rightarrow w = \frac{1}{4} [\varepsilon |\vec{E}|^2 + \mu |\vec{H}|^2] < 0 \quad (1.19)$$

pod pretpostavkom su ε i μ realne veličine, odnosno da u posmatranom materijalu nema gubitaka. Ukoliko se u obzir uzme disperzivan materijal, prethodni izraz će imati oblik:

$$w = \frac{1}{4} \left[\frac{d}{d\omega} (\varepsilon\omega) |\vec{E}|^2 + \frac{d}{d\omega} (\mu\omega) |\vec{H}|^2 \right] \quad (1.20)$$

za sve frekvencije koje su daleko od apsorpcionih rezonanci. Kako bi gustina energije EM polja bila pozitivna, mora važiti:

$$\frac{d(\varepsilon\omega)}{d\omega} > 0, \quad \frac{d(\mu\omega)}{d\omega} > 0 \quad (1.21)$$

Ovi uslovi potiču iz zakona kauzalnosti, odakle je takođe moguće izvesti disperzionu relaciju koja povezuje realni i imaginarni deo permitivnosti (kao i permeabilnosti, a samim tim i indeksa prelamanja), te koja predstavlja varijantu Kramers-Kronig-ove relacije [62]:

$$\varepsilon_R(\omega) - 1 = \frac{2}{\pi} P \int_0^\infty \frac{\omega' \varepsilon_I(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \quad (1.22)$$

gde je $\varepsilon_R = \text{Re}(\varepsilon)$, $\varepsilon_I = \text{Im}(\varepsilon)$, dok operator P predstavlja Košijevu glavnu vrednost nesvojtvenog integrala sa desne strane operatora. Odavde sledi:

$$2\omega[\varepsilon_R(\omega) - 1] + \omega^2 \frac{d\varepsilon_R}{d\omega} = \frac{4\omega}{\pi} P \int_0^\infty \frac{\omega'^3 \varepsilon_I(\omega')}{(\omega'^2 - \omega^2)^2} d\omega' \quad (1.23)$$

Za pasivnu sredinu, $\varepsilon_I(\omega') \geq 0$ pri svim frekvencijama, pa je dati integral pozitivna veličina. Stoga [63]:

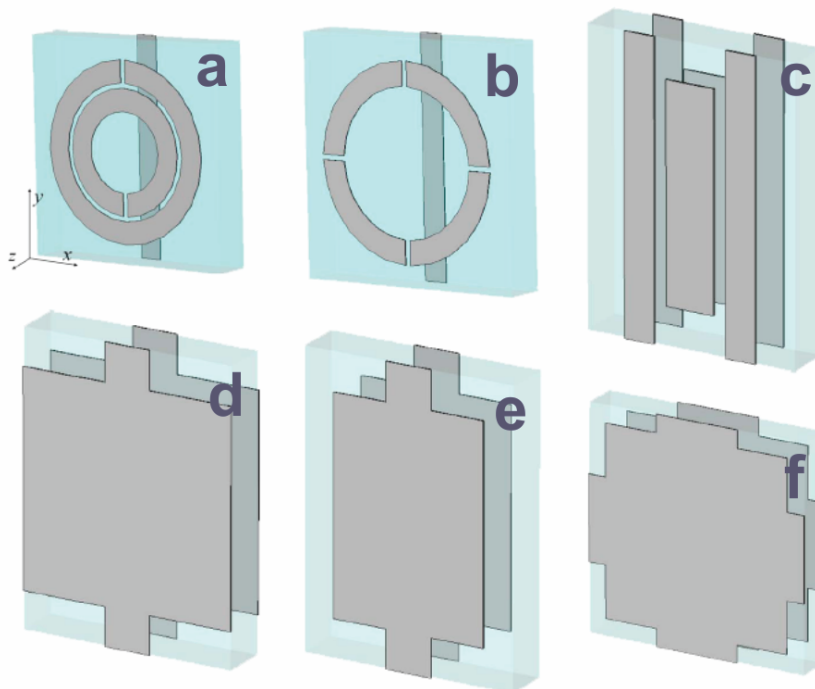
$$\omega \frac{d\varepsilon_R}{d\omega} > 2(1 - \varepsilon_R) \Rightarrow \quad (1.24)$$

$$\frac{d(\varepsilon_R\omega)}{d\omega} > 2 - \varepsilon_R \quad (1.25)$$

i $d(\varepsilon_R\omega)/d\omega > 0$ za $\varepsilon_R < 0$. Druga nejednakost u izrazu (1.21) se dokazuje analogno. Stoga, pokazuje se da je uslov (1.21) zadovoljen za sve frekvencije pri kojima je apsorpcija zanemarljiva.

Tipovi metamaterijala

Prvi metamaterijal nastao je 2001. godine, i iskazivao je svojstva negativnog indeksa prelamanja u mikrotalasnom domenu [59]. Od tada je ostvaren veliki napredak u dizajnu metamaterijala, te danas postoji veliki broj tipova metamaterijala, od kojih neki iskazuju negativnu vrednost indeksa prelamanja na talasnim dužinama vidljive svetlosti. Jedinične ćelije nekih od ovih tipova moguće je videti na Slici 1.11 [64]. Pored već pomenute TW-SRR strukture, čije će određene karakteristike sada biti detaljnije opisane, ovde će biti prikazane strukture u obliku ribarske mreže (*fishnet*), kao i metamaterijali napravljeni od poluprovodničkih materijala, kao najperspektivniji tipovi metamaterijala.



Slika 1.11:
Jedinične ćelije različitih tipova metamaterijala:

(a) TW-SRR struktura korišćena od strane Smith-a u prvom metamaterijalu [59]

(b) Modifikovana TW-SRR struktura

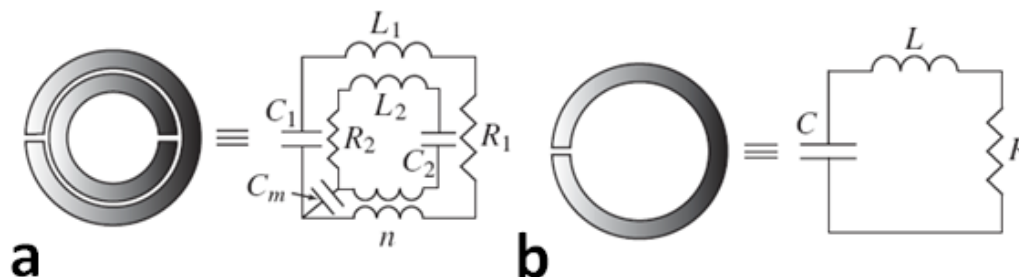
(c) Metalne pločice sa tankim žicama, preteča *fishnet* struktura

(d) Originalna *fishnet* struktura

(e), (f) Varijacije *fishnet* struktura

• TW-SRR strukture

TW-SRR (*Thin Wire – Split Ring Resonator*) strukture, opisane u delu o istoriji razvoja metamaterijala, iako nastale pre svega deset godina, danas se smatraju prevaziđenim u dizajniranju struktura sa negativnim indeksom prelamanja. Ipak, principi na kojima su ove strukture počivale predstavljaju osnovu rada aktuelnijih struktura, kao što su *fishnet* ili strukture U-oblika, te će ovde biti opisane određene karakteristike TW-SRR struktura koje će pomoći pri lakšem razumevanju načina funkcionisanja kompleksnijih struktura. Pre svega, ukratko će biti dat opis interakcije SRR-ova sa magnetnim talasima preko ekvivalentnih rezonantnih strujnih kola, a biće prokomentarisana i anizotropija u TW-SRR strukturama, koja se javlja i u ostalim tipovima metamaterijala, a koja je posebno značajna kod poluprovodničkih metamaterijala.



Slika 1.12: Ekvivalentna šema **(a)** dvostrukog i **(b)** jednostrukog prstenastog rezonatora

SRR struktura, odnosno njena jedinična ćelija sastavljena od dva prekinuta prstena prikazana na Slici 1.11a, može se predstaviti ekvivalentnim rezonantnim strujnim kolom.

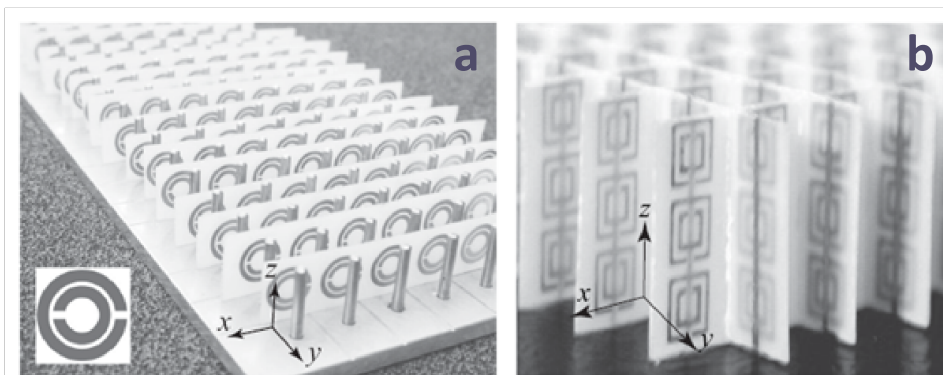
Ovo kolo prikazano je na Slici 1.12, pri čemu Slika 1.12a prikazuje konfiguraciju sa dvostrukim prstenom, dok je na Slici 1.12b data konfiguracija sa jednim prstenom.

U slučaju SRR strukture sa dvostrukim prstenom, spregnute kapacitivnosti, kao i spregnute induktivnosti, između većeg i manjeg prstena, modelovane su spregnutom kapacitivnošću (C_m) i transformatorom (koeficijenta sprege n), respektivno. Kod konfiguracije sa jednim prstenom, model predstavlja najprostije RLC kolo, sa rezonantnom učestanošću $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, pri čemu je R otpornost otpornika, L induktivnost kalema i C kapacitivnost kondenzatora iz Slike 1.12b. Ova rezonantna učestanost ekvivalentnog strujnog kola je magnetna rezonantna učestanost iz Lorentz-ove disperzione relacije za permeabilnost (1.6). Dvostruki SRR je u osnovi isti kao i jednostruki, ukoliko je međusobno sprezanje slabo, jer su dimenzije oba prstena veoma bliske, pa se može smatrati da je: $L_1 \approx L_2 \approx L$ i $C_1 \approx C_2 \approx C$. Ovo dovodi do bliskih vrednosti rezonantnih frekvencija jednostrukog i dvostrukog SRR-a istih dimenzija, ali i do većeg magnetnog momenta dvostrukog SRR-a, koji je posledica veće gustine struje, što dovodi i do boljeg odziva magnetnog polja, u smislu negativne permeabilnosti.

Ono što je takođe bitno napomenuti je da su one anizotropne, odnosno da ih karakterišu dijagonalni tenzori permitivnosti i permeabilnosti:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.27)$$



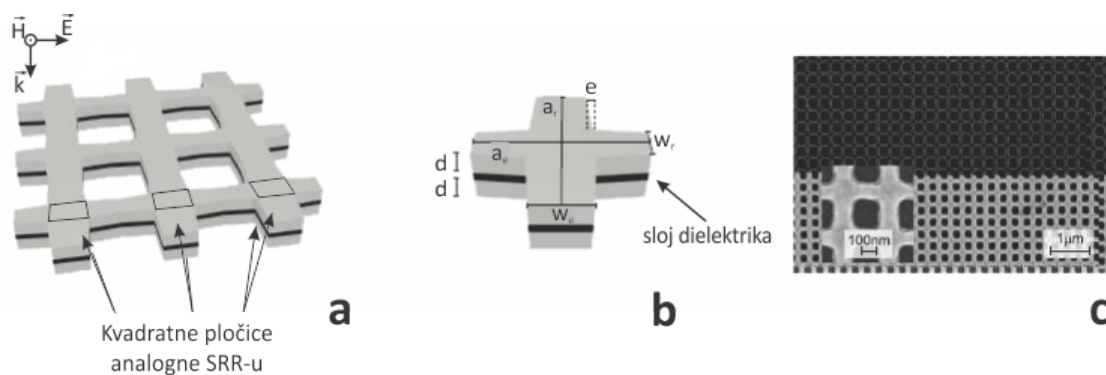
Slika 1.13: (a) Jednodimenziona i (b) dvodimenziona LH struktura

Na Slici 1.13a prikazan je jednodimenzioni LH, odnosno struktura u kojoj je dublet (\vec{E}, \vec{H}) dozvoljen samo u jednom pravcu. U ovom slučaju je $\varepsilon_{xx} > 0$ za $\omega < \omega_{pe}$, dok je za sve frekvencije $\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} > 0$. Isto tako, za permeabilnost važi da je $\mu_{xx} > 0$ za

$\omega_{0m} < \omega < \omega_{pm}$, pri čemu je ω_{pm} magnetna plazma frekvencija, dok je za sve frekvencije $\mu_{yy} = \mu_{zz} > 0$. Struktura prikazana na Slici 1.13b je dvodimenzioni LH, jer, iako vektor električnog polja \vec{E} mora biti u pravcu koji je duž ose žica, postoje dva moguća pravca za \vec{H} : x i y . Usled ovoga, permitivnost ostaje nepromenjena u odnosu na jednodimenzioni slučaj, kao i permitivnost u x i z pravcu, dok je $\mu_{xx} > 0$ za $\omega_{0m} < \omega < \omega_{pm}$.

- **Fishnet strukture**

Fishnet (ribarska mreža) metamaterijali su strukture koje, po optičkim osobinama, oponašaju TW-SRR strukture, s tom razlikom da imaju jednostavniji dizajn, te ih je lakše implementirati na manjim dimenzijama, odnosno omogućavaju negativan indeks prelamanja na kraćim talasnim dužinama. Ime su dobile na osnovu svog izgleda – šematski prikaz jedne *fishnet* strukture dat je na Slici 1.14a [65]. Kao što se može videti, ova struktura je sastavljena od dve, na velikom broju mesta ravnomerno izbušene, metalne ploče postavljene jedna uz drugu i razdvojene dielektrikom. Svaka od ovih ploča ima veliki broj ravnomerno raspoređenih otvora, a metalne ploče su postavljene tako da se svaki otvor na jednoj ploči podudara sa odgovarajućim otvorom na drugoj.



Slika 1.14: *Fishnet* strukture: **(a)** Šematski prikaz strukture; **(b)** Šematski prikaz jedinične ćelije; **(c)** Snimak prve *fishnet* strukture koja je imala negativnu vrednost indeksa prelamanja u vidljivom domenu (na 780nm) [65]

Na Slici 1.14b prikazana je jedinična ćelija ove strukture koja ima iste rezonantne karakteristike kao i jedinična TW-SRR ćelija [65]. Naime, pokazalo se da dve paralelne, blisko postavljene metalne pločice imaju iste magnetne (rezonantne) karakteristike kao SRR jedinična ćelija [66]. Na Slici 1.14b dve metalne pločice su, u stvari, kvadrati u centru ćelije [65]. Periodično postavljen veliki broj ovih kvadratnih metalnih ćelija daje magnetni odziv analogan onom kod SRR strukture (Slika 1.14a). Naravno, ove jedinične ćelije ne moraju da budu kvadratnog oblika, mogući su različiti dizajni u zavisnosti od željenih rezonantnih karakteristika [64]. Ove jedinične („kvadratne“) ćelije su povezane pločicama koje, kada se spoje, daju električni odziv analogan onom kod TW strukture (Slika 1.14a) [65]. Na Slici 1.14a je prikazan i pravac talasnog vektora pri kom *fishnet*

strukture imaju željena svojstva. Ovaj pravac je normalan na paralelno postavljene metalne ploče. Očigledno, *fishnet* strukture se uglavnom sastoje od velikog broja slojeva, pri čemu se pod slojem misli na dve paralelno postavljene metalne ploče [67].

Fishnet strukture su imale daleko brži razvoj od TW-SRR struktura, pa je tako od trenutka njihovog pojavljivanja do trenutka kada je nastala prva *fishnet* struktura sa negativnim indeksom prelamanja u vidljivom domenu prošlo svega dve godine [68,69,65]. Na Slici 1.14c moguće je videti prikaz ove, prve *fishnet* strukture koja iskazuje negativan indeks prelamanja u vidljivom domenu (konkretno, na 780nm) [65]. I pored velikog napretka u minijaturizaciji jediničnih ćelija, odnosno povećanju frekvencije na kojoj ove strukture imaju negativan indeks prelamanja, i dalje nije poznato zbog čega, zapravo, ove strukture iskazuju rezonantna svojstva analogna onima u TW-SRR strukturama. Stoga je u poslednje vreme veća pažnja posvećena objašnjavanju ovog fenomena, nego samom dizajnu i daljoj minijaturizaciji; pre svega, jer se smatra da će razumevanje načina funkcionisanja ovih struktura dovesti do jednostavnijih dizajna sa boljim karakteristikama i većom fleksibilnošću, u smislu podešavanja parametara [67,70,71].

- **Poluprovodnički metamaterijali**

Svi do sada opisani metamaterijali koriste rezonantne frekvencije metalnih struktura kako bi dobili simultano negativne vrednosti permitivnosti i permeabilnosti, odnosno negativni indeks prelamanja. Glavna mana ovih struktura bilo je korišćenje metala, koji su unosili velike gubitke u sistem (faktori prigušenja u jednačinama za električni i magnetni odziv materijala (1.5) i (1.6), respektivno). Iz tog razloga su 2005. godine Podolskiy i Narimanov razvili teorijski model za dobijanje negativnog indeksa prelamanja korišćenjem anizotropije materijala [72]. Ovaj model je grupa sa Univerziteta Princeton dve godine kasnije pretvorila u prvi eksperimentalno verifikovani poluprovodnički metamaterijal [73]. Prednosti ovih metamaterijala su to što ne zahtevaju nikakav magnetni odziv materijala od kojih su napravljeni, što je i bio glavni izazov pri izradi metamaterijala baziranih na metalima, zatim to što ih je moguće kompletno izraditi od naizmenično postavljenih slojeva dva različita dielektrika, odnosno laki su za izradu, i to što imaju nisku apsorpciju. Detaljnija analiza poluprovodničkih metamaterijala biće data u glavi 4, koja se bavi vremenima tunelovanja u anizotropnim linarnim apsorptivnim metamaterijalima.

Struktura teze

Teza je struktuirana na sledeći način: u drugoj glavi je razmatrano tunelovanje u nelinearnim disperzivnim apsorptivnim sredinama, čime se dobija opšti model koji predstavlja osnovu za ostatak teze. Unutar ove glave će, kroz primere, biti prikazani i neki jednostavniji modeli, koji razmatraju linearne ili nedisperzivne sredine. Treća glava proširuje ovaj model opisom korekcija nastalih računavanjem Goos-Hänchen-ovog pomeraja pri tunelovanju. Četvrta glava se sastoji iz dva dela, od kojih je jedan vezan za

vremena tunelovanja, a drugi za dizajn nove vrste poluprovodničkih metamaterijala. Što se tiče analize vremena tunelovanja, ovde su ove veličine razmatrane u anizotropnim nemagnetnim sredinama, čime se još više proširuje model iz glave 2. Na kraju teze su dati zaključak, u kome su ukratko opisani najvažniji rezultati i doprinosi teze, dodaci, u kojima se nalaze neka od izvođenja za koja nije bilo mesta u glavnom tekstu, i spisak literature korišćen pri izradi ove teze.

Svi teorijski i numerički rezultati prikazani u ovoj tezi, koji predstavljaju njen doprinos, rezultat su istraživanja koje sam obavio u saradnji sa dr Vitomirom Milanovićem i dr Jelenom Radovanović, profesorima Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Beogradu, kao i dr Ljupčom Hadžievskim i ms Petrom Beličev, istraživačima Instituta za Nuklearne Nauke „Vinča“. Teorijska izvođenja predstavljaju plod zajedničkog angažmana svih gore nabrojanih članova grupe, uključujući i mene. Razvijeni numerički modeli i simulacije, a time i svi numerički rezultati prikazani u ovoj tezi predstavljaju moj lični doprinos.

2 TUNELOVANJE U NELINEARNIM DISPERZIVNIM APSORPTIVNIM SREDINAMA

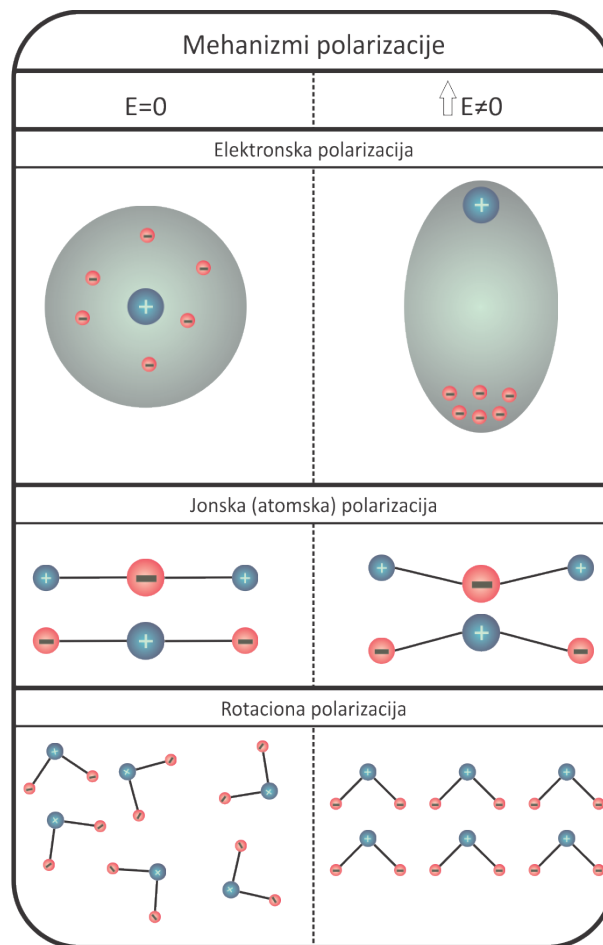
Kao što je već rečeno u Uvodu, Winful je u svom radu iz 2003. godine [48] pokazao vezu između vremena tunelovanja kroz disperzivnu linearnu neapsorptivnu barijeru. Cilj ovog rada je nadogradnja tog modela kako bi važio u što opštijem slučaju, te će, u ovoj glavi, biti izvedena relacija koja povezuje različite definicije vremena tunelovanja (grupno kašnjenje i vreme zadržavanja) kroz barijeru napravljenu od nelinearnog disperzivnog apsorptivnog materijala. U prvom delu ove glave će biti date osnovne karakteristike nelinearnih materijala, odnosno, pre svega, materijala sa Kerr-ovom i saturacionom nelinearnošću, koje su od najvećeg značaja za ovaj rad (jer se najveći broj optičkih materijala može opisati pomoću ovih modela nelinearnosti). U sledećem poglavlju će biti analizirane apsorpcija i disperzija, tj. biće prikazan Lorentz-Drude-ov model, kojim se, opet, može opisati odziv većine apsorptivnih disperzivnih optičkih materijala. Nakon toga slede izvođenja veličina potrebnih za izračunavanje vremena zadržavanja (srednje EM energije u barijeri i srednje upadne snage), kao i izvođenje relacije koja povezuje vreme zadržavanja i grupno kašnjenje. Na kraju glave su prikazani numerički rezultati za različite slučajeve, u smislu tipova materijala od kojih su sastavljeni barijera i okolni talasovod.

2.1 Nelinearne sredine

Odziv materijala na prisustvo spoljašnjeg elektromagnetnog polja izražava se preko indeksa prelamanja tog materijala. U prirodi ne postoje dva materijala koja imaju isti odziv na prisustvo spoljašnjeg elektromagnetnog polja. Ipak, ono što im je zajedničko, jeste da je svima ovaj odziv nelinearan, odnosno, svi materijali u prirodi imaju nelinearan indeks prelamanja, u smislu da ova veličina zavisi od jačine pobuđujućeg elektromagnetnog polja. Ovaj odziv materijala dovodi do mnogobrojnih nelinearnih efekata, kao što su, npr., stimulirano Raman-ovo i Brillouin-ovo rasejanje, generacija viših harmonika ili efekti samofokusiranja i generacija solitona. Svi ovi efekti imaju snažan uticaj na razvoj fiberoptičkih sistema, ali i uređaja iz oblasti nanooptike, odnosno u svim sistemima u kojima se koriste elektromagnetna polja velike snage, kao što je laserska svetlost. Cilj ove glave je opis uticaja nelinearnog odziva, u kombinaciji sa disperzijom i apsorpcijom, na tunelovanje elektromagnetnih talasa. Stoga je, pre početka ove analize, potrebno razumeti mehanizam nelinearnog odziva materijala, u čijoj osnovi stoji efekat električne polarizacije.

Električna polarizacija

Poznato je da se dielektrici pri dejstvu spoljašnjeg električnog polja polarišu. Naime, EM polje izaziva premeštanje težišta elektronskog omotača atoma u odnosu na jezgro, što dovodi do stvaranja električnog dipolnog momenta atoma. Ova pojava je poznata kao elektronska polarizacija dielektrika [74]. Osim elektronske, spoljašnje električno polje takođe može indukovati i druge tipove polarizacije. Tako, relativno premeštanje pozitivnih i negativnih jona pod dejstvom polja upravlja jonskom polarizacijom. Ako sredina sadrži konstantne dipole (dipolne molekule), može se javiti orijentaciona ili, drugačije, rotaciona, odnosno molekularna polarizacija, koja je posledica rotacije dipola koji teže da zauzmu pravac primenjenog polja [75,76,77]. Šematski prikaz različitih mehanizama polarizacije dat je na Slici 2.1.



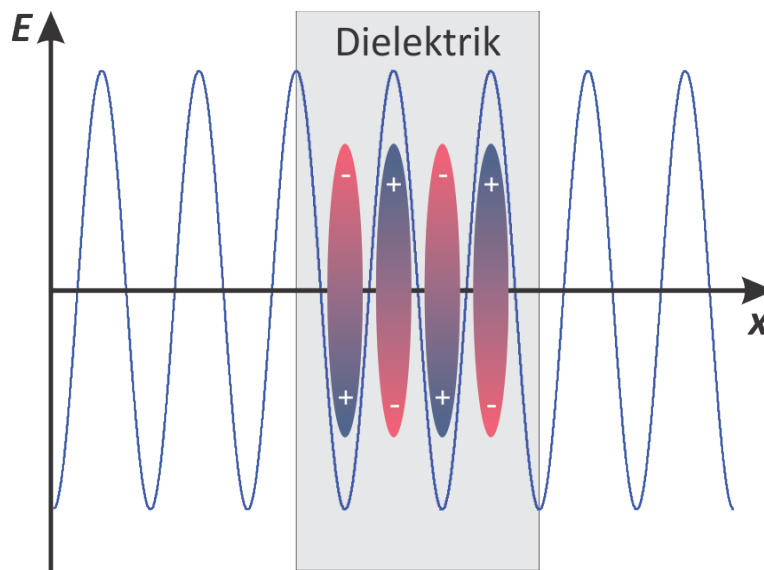
Slika 2.1: Prikaz elektronske, jonske (molekularne) i rotacione polarizacije.

Elektronska polarizacija se uspostavlja najbrže: premeštanje elektronskog omotača atoma se ostvaruje u vremenu od 10^{-15} s do 10^{-14} s. Uspostavljanje jonske polarizacije zahteva više vremena, jer je proces premeštanja težih objekata (jona) okarakterisan

većom inercijom. Jonska polarizacija se uspostavlja u vremenu reda od 10^{-13} s do 10^{-11} s. Proces rotacije dipolnih molekula je još sporiji, pa je orijentaciona polarizacija okarakterisana vremenom reda od 10^{-10} s i više [78].

Ukoliko je uzrok polarizacije svetlosni talas koji se prostire u dielektriku, orijentaciona polarizacija je zanemarljiva, jer je vreme njenog uspostavljanja mnogo veće od perioda oscilovanja polja svetlosnog talasa. U optičkom domenu (tačnije, u ultraljubičastom, vidljivom i bliskom infracrvenom spektru zračenja) najvažniju ulogu igra elektronska polarizacija. Za talasne dužine reda $10\mu\text{m}$ i više, pored elektronske polarizacije, dolazi i do pojave jonske polarizacije [78].

Odziv materijala na pobudu u vidu EM polja (refleksija, prelamanje, disperzija, rasejanje, dvojno prelamanje, nelinearni efekti) opisuje se preko veličine nazvane vektor električne polarizacije \vec{P} . Pojava polarizacije dielektrika se kvantitativno opisuje vektorom polarizacije, koji predstavlja zapreminsku gustinu električnih dipolnih momenata, a posledica je dejstva spoljašnjeg električnog polja.



Slika 2.2: Polarizacija dielektrika usled prostiranja EM talasa.

U linearnoj optici važi da vektor električne polarizacije ima linearnu zavisnost od jačine vektora električnog polja upadnog zračenja \vec{E} . Pod pretpostavkom (koja će važiti i u ostatku teze) da je odziv materijala na spoljašnje EM polje trenutno, veza između vektora električne polarizacije i električnog polja se kod linearnih dielektrika izražava na sledeći način:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} \quad (2.1)$$

gde je ε_0 permitivnost vakuumu, a χ susceptibilnost sredine u kojoj se talas prostire, pri čemu važi $\chi \neq \chi(\vec{E})$. Šematski prikaz polarizacije dielektrika usled prolaska svetlosnog talasa kroz dielektrik je dat na Slici 2.2.

Efekti nelinearne optike mogu biti objašnjeni preko promene susceptibilnosti ukoliko se vektor polarizacije razvije u red po jačini vektora električnog polja \vec{E} :

$$\vec{P} = \varepsilon_0(\chi^{(1)} + \chi^{(2)}\vec{E} + \chi^{(3)}\vec{E}^2 + \dots) \cdot \vec{E} = \vec{P}^{(1)} + \vec{P}^{(2)} + \vec{P}^{(3)} + \dots \quad (2.2)$$

Veličine $\chi^{(2)}$ i $\chi^{(3)}$ su poznate kao nelinearne optičke susceptibilnosti drugog i trećeg reda, respektivno, ali se mogu uzeti u obzir i članovi koji određuju susceptibilnosti višeg reda. Prvi član razvoja predstavlja linearni deo vektora električne polarizacije.

U prethodnim relacijama je, radi jednostavnosti, smatrano da je susceptibilnost dielektrika skalarna veličina. Međutim, u opštem slučaju, to je tenzorska veličina. Neka su $\alpha_{ij} = \varepsilon_0\chi_{ij}$, $i, j = \{1, 2, 3\}$ komponente tenzora dielektrične susceptibilnosti. Ovaj tenzor je simetričan (osim u slučaju optički aktivnih materijala, koji u ovoj tezi neće biti razmatrani), a odgovarajućim izborom koordinatnih osa, moguće ga je dovesti u dijagonalnu formu:

$$\alpha = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} \end{vmatrix} \quad (2.3)$$

Za izotropne sredine i kristale kubičnog sistema važi da je $\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = \alpha$, što odgovara slučaju linearne zavisnosti vektora električne polarizacije \vec{P} od vektora jačine električnog polja \vec{E} , tj. relaciji (2.1).

Slučaj kada je $\alpha_{11} = \alpha_{22} \neq \alpha_{33}$ odgovara jednoosnim kristalima koji imaju optičku osu usmerenu duž z -pravca. To su kristali tetragonalnog, heksagonalnog i trigonalnog tipa. Slučaj kada je $\alpha_{11} \neq \alpha_{22} \neq \alpha_{33}$ odgovara slučaju dvoosnih kristala, tj. kristalima rombičnog, monokliničnog i trikliničnog tipa [79]. Ova dva slučaja odgovaraju anizotropnim materijalima, o kojima će više reči biti u glavi 4.

Kvadratna, kubna i saturaciona nelinearnost

U izrazu (2.2) drugi i treći član u zagradi, $\chi^{(2)}$ i $\chi^{(3)}$, se nazivaju kvadratna i kubna nelinearna susceptibilnost, respektivno. Ukoliko je kvadratna susceptibilnost $\chi^{(2)}$ izraženija od ostalih, dolazi do Pockels-ovog efekta, nelinearnog efekta u kome je vektor električne polarizacije srazmeran kvadratu električnog polja, dok mu je indeks prelamanja linearno srazmeran. U ovom slučaju dolazi do pojave dvojnog prelamanja (birefringencije), odnosno izotropan materijal počinje da se ponaša kao anizotropan. Do ove pojave može doći u kristalima koji ne poseduju centar inverzione simetrije.

Kod kristala sa centralnom simetrijom, kao što su tečnosti i gasovi, češća je pojava Kerr-ovog efekta. Naime, u takvim sredinama, kao i kod mnogih kristala koji nemaju centar inverzione simetrije, član $\chi^{(2)}$ iščezava, te ovakve strukture ne mogu podržavati nelinearne interakcije prvog reda, kao što je Pockels-ov efekat [79]. Kako je kvadratna susceptibilnost jednaka nuli, dominantnu ulogu preuzima kubna susceptibilnost, koju karakteriše pojava Kerr-ovog efekta. Ovaj efekat se izražava preko promene indeksa prelamanja materijala kvadratom intenziteta pobuđujućeg EM polja [80]:

$$n = n_0 + \Delta n = n_0 + \alpha |\vec{E}|^2 \quad (2.4)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{d^2 n}{dE^2} \quad (2.5)$$

pri čemu je α Kerr-ov koeficijent, ponekad nazivan i kvadratni elektro-optički koeficijent. S obzirom na to da je kubna susceptibilnost različita od nule za sve materijale, bez obzira na postojanje centra inverzione simetrije, Kerr-ov efekat se, u manjoj ili većoj meri, javlja u svim materijalima u prirodi. Ovaj efekat se iskazuje na različite načine u različitim materijalima: od birefringencije (kod elektro-optičkog Kerr-ovog efekta), preko samofokusiranja i modulacione nestabilnosti (kod optičkog Kerr-ovog efekta) do Faraday-ovog efekta za reflektovanu svetlost (kod magneto-optičkog Kerr-ovog efekta).

Jedna od varijacija Kerr-ovog efekta koja u poslednje vreme dobija na značaju je saturaciona nelinearnost. Ovaj fenomen se pojavljuje u strukturama koje sadrže kubnu nelinearnost, odnosno, u onim strukturama kod kojih je najizraženija kubna nelinearna susceptibilnost; no, kod kojih, za razliku od klasičnog Kerr-ovog efekta, indeks prelamanja nije linearno proporcionalan kvadratu intenziteta pobuđujućeg EM polja:

$$\underbrace{n_{Kerr} \sim \alpha |\vec{E}|^2}_{\text{Kerr-ova nelinearnost}} \quad \underbrace{n_{saturable} \sim \alpha \frac{|\vec{E}|^2}{1 + \kappa_s |\vec{E}|^2}}_{\text{Saturaciona nelinearnost}} \quad (2.6)$$

pri čemu je κ_s koeficijent saturacije. Za male vrednosti jačine električnog polja važi $1 + \kappa_s |\vec{E}|^2 \approx 1$, te se saturaciona nelinearnost svodi na Kerr-ovu.

Jedna od značajnijih osobina materijala koji poseduju saturacionu nelinearnost jeste da se ovakve sredine ponašaju kao sočiva, sabirna ili rasipna [81,82,83]. Naime, samofokusiranje predstavlja nelinearni optički proces koji je posledica promene indeksa prelamanja sredine usled delovanja jakog elektromagnetskog zračenja. Sredina, čiji indeks prelamanja raste sa povećanjem intenziteta polja upadnog zračenja, će se ponašati kao sabirno sočivo za svetlost dovoljnog intenziteta. Pik intenziteta samofokusiranog talasa će rasti tokom prostiranja talasa kroz nelinearnu sredinu, sve

dok efekti defokusiranja ili oštećenja unutar materijala ne zaustave ovaj proces. U zavisnosti od vrste nelinearnog materijala, kao i od jačine upadnog zračenja, nekoliko mehanizama može izazvati promenu indeksa prelamanja, što će za posledicu imati samofokusiranje ili samodefokusiranje talasa. Da li će se materijal ponašati kao sabirno ili rasipno sočivo zavisi od parametra α . Ukoliko je $\alpha < 0$, sredina će imati samodefokusirajuća svojstva, dok će za $\alpha > 0$ biti samofokusirajuća.

Zbog svojih svojstava samofokusiranja i samodefokusiranja, ovi materijali se koriste u sistemima za održanje oblika impulsa (solitonskim sistemima, npr. talasovodnim rešetkama [15]). Jedan od najčešće korišćenih fotorefraktivnih materijala koji iskazuju svojstva saturacione nelinearnosti je LiNbO₃, kod koga je, kao i kod većine dielektrika sa sličnim svojstvima, relativna permitivnost iskazana jednačinom:

$$\varepsilon = \varepsilon_L + \alpha \frac{\frac{|\vec{E}|^2}{E_c^2}}{1 + \kappa \frac{|\vec{E}|^2}{E_c^2}} \quad (2.7)$$

dok je relativna permeabilnost $\mu = 1$. U gornjem izrazu, E_c je kritična vrednost intenziteta električnog polja pri kojoj relativna permitivnost ulazi u saturaciju.

2.2 Drude-Lorentz-ov model disperzije

S obzirom na to da je cilj ove glave prikaz modelovanja vremena tunelovanja u nelinearnim disperzivnim apsorptivnim sredinama, neophodno je još modelovati disperziju i apsorpciju kako bi bilo poznato ponašanje analiziranog materijala u prisustvu EM polja. U klasičnoj teoriji, disperzivna apsorpciona sredina je predstavljena kao skup neinteragujućih, prigušenih, harmonijskih oscilatora čiji je pomeraj iz ravnotežnog položaja \vec{r} , masa m , sopstvena frekvencija ω_r i naelektrisanje e . Ako se pretpostavi da je prigušenje proporcionalno $d\vec{r}/dt$, jednačina kretanja ovog oscilatora, u prisustvu oscilatornog električnog polja \vec{E} , iz II Newton-ovog zakona, je [84]:

$$m \left(\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \Gamma_e \frac{d\vec{r}}{dt} + \omega_r^2 \vec{r} \right) = e \vec{E} \quad (2.8)$$

gde je Γ_e frekvencija prigušenja oscilatora. Sada je potrebno definisati vektor polarizacije. On se sastoji iz dva dela: prvog dela koji potiče od oscilatora čija je

sopstvena frekvencija ω_r , i drugog koji potiče od frekvencija viših od sopstvene* :

$$\vec{P} = ne\vec{r} + (\varepsilon_\infty - 1)\varepsilon_0\vec{E} \quad (2.9)$$

gde je n koncentracija dipola (oscilatora), a ε_∞ je pozadinska dielektrična konstanta. Pozadinska dielektrična konstanta, u stvari, predstavlja efekte rezonanci učestanosti viših od sopstvene. Tako je, u slučaju da nema viših rezonantnih učestanosti, $\varepsilon_\infty = 1$.

Pošto se radi o oscilatorima, uzimajući u obzir da je zavisnost jačine električnog polja od vremena prostoperiodična funkcija, zavisnost pomeraja od vremena se takođe može predstaviti prostoperiodičnom funkcijom:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 \exp(-j\omega t) \quad (2.10)$$

Kada se u jednačinu (2.8) ubaci jednačina (2.10), dobija se:

$$m(-\omega^2 - j\Gamma_e\omega + \omega_r^2)\vec{r} = e\vec{E} \Rightarrow \quad (2.11)$$

$$\vec{r} = \frac{e\vec{E}}{m(-\omega^2 - j\Gamma_e\omega + \omega_r^2)} \quad (2.12)$$

Kada se jednačina (2.12) ubaci u izraz koji definiše vektor polarizacije (2.9), dobija se:

$$\vec{P} = \frac{ne^2\vec{E}}{m(-\omega^2 - j\Gamma_e\omega + \omega_r^2)} + (\varepsilon_\infty - 1)\varepsilon_0\vec{E} \quad (2.13)$$

Kako su vektori polarizacije i električnog polja povezani i na sledeći način:

$$\vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_\infty)\varepsilon_0\vec{E} \quad (2.14)$$

tako je, ubacivanjem jednačine (2.13) u jednačinu (2.14):

$$\varepsilon\varepsilon_0\vec{E} = \varepsilon_\infty\varepsilon_0\vec{E} + \frac{ne^2\vec{E}}{m(-\omega^2 - j\Gamma_e\omega + \omega_r^2)} \Rightarrow \quad (2.15)$$

$$\varepsilon\varepsilon_0 = \varepsilon_\infty\varepsilon_0 + \frac{ne^2}{m(-\omega^2 - j\Gamma_e\omega + \omega_r^2)} \Rightarrow \quad (2.16)$$

* Članovi u izrazima obeleženi crvenom bojom označavaju članove koji će biti analizirani u narednih nekoliko jednačina

$$\varepsilon\varepsilon_0 = \varepsilon_\infty\varepsilon_0 \left(1 + \frac{ne^2}{m\varepsilon_\infty\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{-\omega^2 - j\Gamma_e\omega + \omega_f^2} \right) \quad (2.17)$$

Na ovom mestu je pogodno definisati novu veličinu koja predstavlja frekvenciju plazma oscilacija skupa nosilaca naelektrisanja mase m , naelektrisanja e i koncentracije n u sredini sa pozadinskom dielektričnom konstantom ε_∞ :

$$\omega_p^2 = \frac{ne^2}{m\varepsilon_\infty\varepsilon_0} \quad (2.18)$$

Ova veličina, u stvari, predstavlja meru snage interakcije između oscilatora i elektromagnetnog polja. Kada se izraz (2.18) ubaci u jednačinu (2.17), dobija se izraz za relativnu dielektričnu konstantu u disperzivnoj sredini (Lorentz-ov model):

$$\varepsilon = \varepsilon_\infty \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + j\Gamma_e\omega - \omega_f^2} \right) \quad (2.19)$$

Gornjom jednačinom se može izraziti permitivnost svih disperzivnih materijala u prirodi. Ako je sopstvena učestanost jednaka nuli, dobija se Drude-ov model disperzije [85,86]:

$$\varepsilon = \varepsilon_\infty \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + j\Gamma_e\omega} \right) \quad (2.20)$$

a, ako je sredina i neapsorpciona, tj. ako je $\Gamma_e = 0$, dobija se plazma model disperzije:

$$\varepsilon = \varepsilon_\infty \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \quad (2.21)$$

Analogno, koristeći jednačinu kretanja za vektor magnetske polarizacije \vec{M} [87]:

$$\frac{d^2\vec{M}}{dt^2} + \Gamma_m \frac{d\vec{M}}{dt} + \omega_0^2\vec{M} = F\omega_0^2\vec{H} \quad (2.22)$$

može se dobiti izraz za magnetsku permeabilnost barijere od metamaterijala μ , koja iznosi:

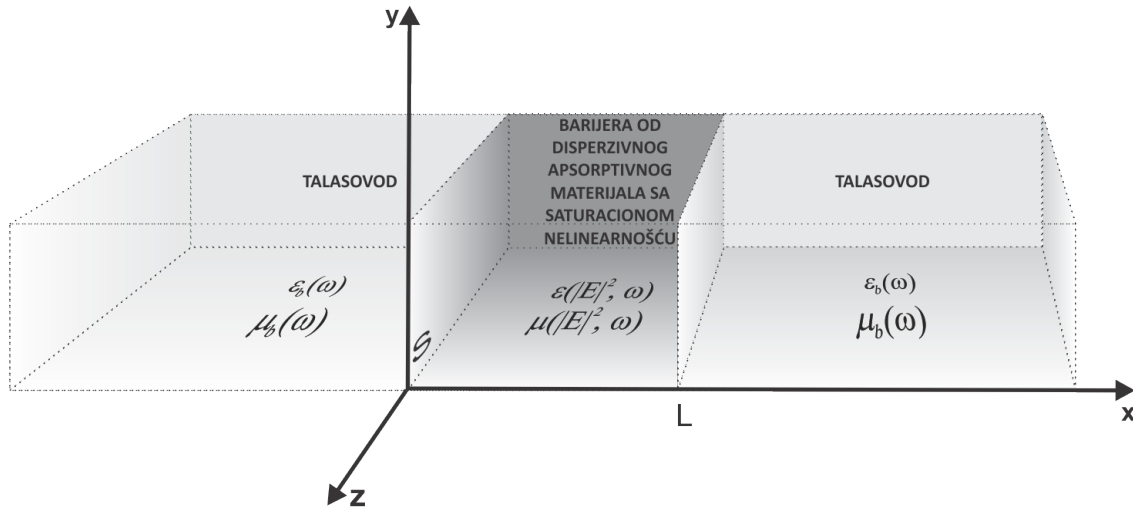
$$\mu = 1 - \frac{F\omega_0^2}{\omega^2 + j\Gamma_m\omega - \omega_0^2} \quad (2.23)$$

Ovde je Γ_m frekvencija prigušenja za magnetno polje, F mera jačine interakcije između oscilatora i magnetnog polja, dok je ω_0 rezonantna učestanost magnetskih dipola. Ovakav (Lorentz-ov) model nije validan u slučaju kada $\omega \rightarrow 0$, jer se u tom slučaju dobija

netačan izraz za relativnu permeabilnost ($\mu \rightarrow 1 + F$) [88]. No, u ovom radu neće biti razmatrani takvi, krajnji slučajevi, te će za permeabilnost biti korišćen goreopisani model.

2.3 Model nelinearne disperzivne apsorptivne barijere

Nakon definisanja modela kojim se opisuju nelinearne, disperzivne i apsorptivne sredine, možemo dati opis opšteg fizičkog modela (Slika 2.3) koji će biti korišćen za analizu vremena tunelovanja EM talasa. Kao što se može videti, analizirana struktura se sastoji od talasovoda, napravljenog od neapsorptivnog disperzivnog materijala, unutar koga se nalazi barijera sastavljena od nelinearnog disperzivnog apsorptivnog materijala. Materijal od koga je barijera sastavljena se, u najopštijem slučaju, može predstaviti preko metamaterijala, čiji se permitivnost i permeabilnost mogu predstaviti putem Lorentz-ovog modela, postavljenog unutar materijala koji iskazuje svojstva saturacione nelinearnosti. Prikazana struktura je neograničena u sve tri prostorne dimenzije, s tim što je sama barijera ograničena u x , a neograničena u y i z pravcu.



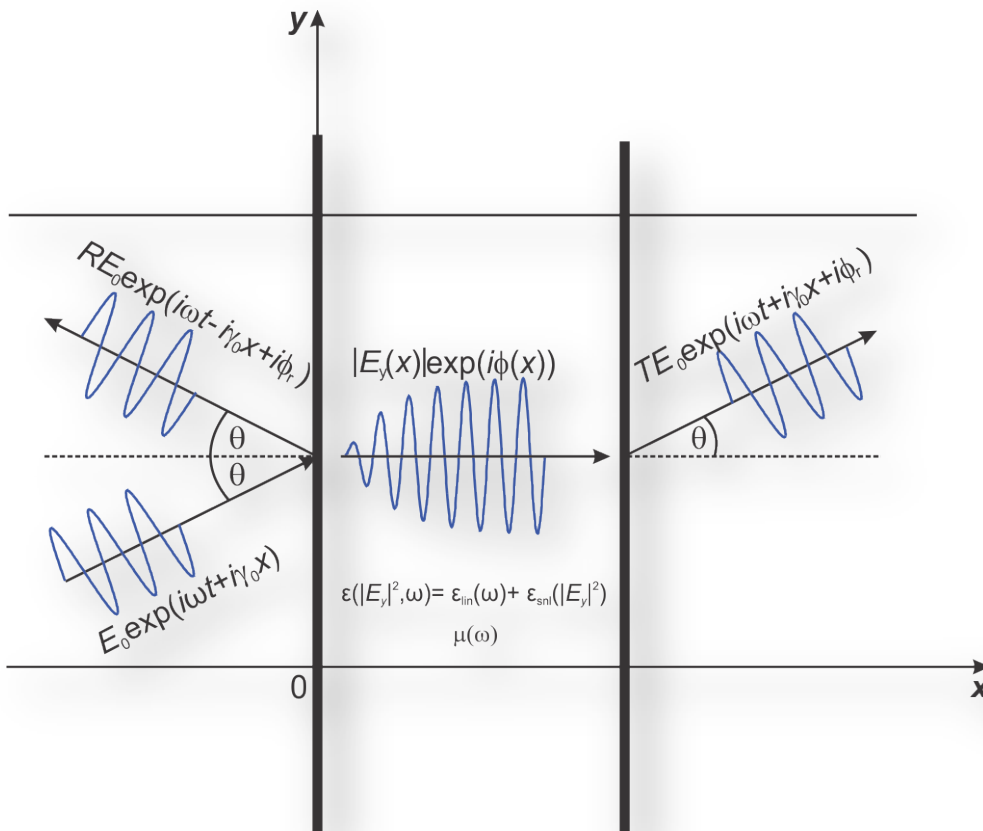
Slika 2.3: Model korišćen za analizu vremena tunelovanja kroz nelinearne disperzivne apsorptivne materijale

Prema onome što je pokazano u poglavljima 2.1 i 2.2, relativna permitivnost i permeabilnost ovakve barijere mogu se predstaviti sledećim jednačinama:

$$\varepsilon = \underbrace{\varepsilon_{\infty} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + j\Gamma_e \omega - \omega_r^2} \right)}_{\varepsilon_{lin}} + \underbrace{\varepsilon_L + \alpha \frac{\frac{|\vec{E}|^2}{E_c^2}}{1 + \kappa \frac{|\vec{E}|^2}{E_c^2}}}_{\varepsilon_{snl}} \quad (2.24)$$

$$\mu = 1 - \frac{F\omega_0^2}{\omega^2 + j\Gamma_m\omega - \omega_0^2} \quad (2.25)$$

Indeks prelamanja barijere je jednak $n = \sqrt{|\varepsilon||\mu|}\exp[j(\varphi_\varepsilon + \varphi_\mu)/2]$, odnosno realni deo indeksa je negativan u slučaju $\text{Re}(\varepsilon) < 0$ i $\text{Re}(\mu) < 0$, ili ukoliko je $\text{Re}(\varepsilon)\text{Im}(\mu) + \text{Im}(\varepsilon)\text{Re}(\mu) < 0$ [59,89]. S druge strane, permitivnost i permeabilnost okolne sredine (talasovoda) dati su proizvoljnim zavisnostima $\varepsilon_b(\omega)$ i $\mu_b(\omega)$. Ovde se pretpostavlja da je okolna sredina linearna i neapsorptivna, odnosno $n_b = \sqrt{\varepsilon_b\mu_b}$, pri čemu važi $n_b \in \mathbb{R}$, $n_b > 0$ i $n_b \neq n_b(\vec{E})$.



Slika 2.4: Ilustracija upadnog, reflektovanog i transmitovanog talasa

Princip prostiranja EM talasa kroz ovu strukturu šematski je prikazan na Slici 2.4. Kao što se vidi sa slike, kada EM talas naiđe na diskontinuitet unutar talasovoda, jedan deo se reflektuje, a drugi transmituje. Ovde će biti razmatrano prostiranje ravanskih talasa; za početak, biće analiziran TE_{10} mod, dok će rezultati za osnovni TM mod, za koji se dobijaju analogni rezultati, biti prikazani pri kraju teorijske analize.

Kao što se može videti sa Slike 2.4, upadni, reflektovani i transmitovani EM talas dati su sledećim izrazima:

$$E_{in}(x) = E_0 \exp(j\gamma_0 x) \quad (2.26)$$

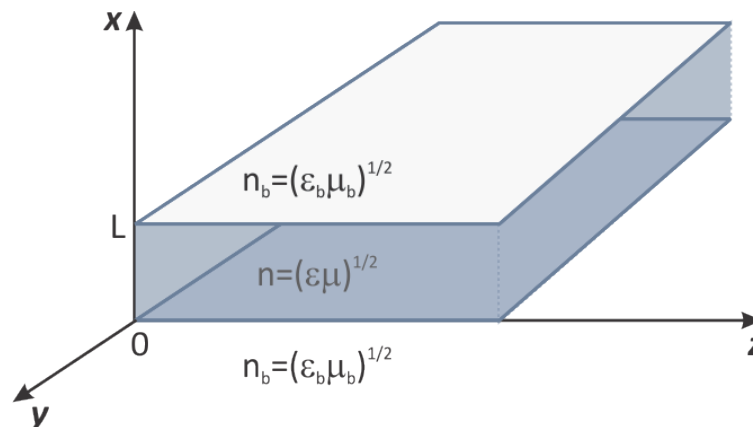
$$E_R(x) = R E_0 \exp(-j\gamma_0 x) \quad (2.27)$$

$$E_T(x) = T E_0 \exp(j\gamma_0 x) \quad (2.28)$$

respektivno. Ovde je E_0 amplituda upadnog EM talasa, $\gamma_0^2 = n_b^2 k_0^2 - \beta^2$, $\beta = \sqrt{\epsilon_b \mu_b} k_0 \sin \theta$ je konstanta propagacije, $k_0 = \omega/c$ je talasni vektor, θ je upadni ugao, dok su R i T koeficijenti refleksije i transmisije, respektivno.

2.4 Helmholtz-ova jednačina za nelinearnu disperzivnu sredinu

Barijera prikazana na Slici 2.3 se može posmatrati kao talasovod ograničen u jednoj (x) dimenziji, pri čemu je sredina koja okružuje barijeru, polubeskonačne širine sa obe strane barijere, omotač ovog talasovoda. Stoga je korisno, pre prelaska na proračun vremena tunelovanja, izvesti osnovne relacije između komponenti električnog i magnetnog polja kod TE modova, kao i osnovne jednačine za planarni talasovod – talasnu i Helmholtz-ovu jednačinu.



Slika 2.5: Planarni dielektrični talasovod

Planarni talasovod je struktura paralelopipednog oblika koja vodi elektromagnetno zračenje na željeni način. Smatraće se da su lateralne dimenzije ove strukture mnogo veće od njene visine L , tj. da su dimenzije koje se prostiru u y i z pravcu beskonačne, a da je u x pravcu struktura ograničena (Slika 2.5). Indeks prelamanja jezgra n jednak je indeksu prelamanja barijere sa Slike 2.3, dok je indeks prelamanja omotača jednak indeksu prelamanja sredine koja okružuje barijeru n_b . Pretpostavka je i da je talasna dužina upadnog zračenja istog reda veličine kao i širina talasovoda L .

Polazeći od Maxwell-ovih jednačina za linearnu izotropnu homogenu sredinu bez slobodnog prostornog naelektrisanja:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad (2.29)$$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \quad (2.30)$$

$$\operatorname{div}\vec{D} = 0 \quad (2.31)$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \quad (2.32)$$

dobijaju se talasne jednačine za električno i magnetno polje, respektivno:

$$\Delta\vec{E} - \mu\mu_0 \cdot \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.33)$$

$$\Delta\vec{H} - \mu\mu_0 \cdot \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.34)$$

$$\mu\mu_0 \cdot \varepsilon\varepsilon_0 = \frac{1}{v_f^2}, \quad v_f = \frac{\omega}{k} \quad (2.35)$$

pri čemu je v_f fazna brzina prostiranja EM talasa u talasovodu, dok je k talasni broj. Pretpostavljena rešenja za vektore električnog i magnetnog polja mogu se napisati na sledeći način:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(j\omega t - j\beta z) \quad (2.36)$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 \exp(j\omega t - j\beta z) \quad (2.37)$$

gde je β konstanta prostiranja talasa.

Iz I Maxwell-ove jednačine (2.29) ima se:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \quad (2.38)$$

Kako je:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i}_x & \vec{i}_y & \vec{i}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} \quad (2.39)$$

izjednačavajući gornji izraz sa desnom stranom jednačine (2.38) i prelazeći u kompleksni domen, pri čemu je $\partial/\partial t \equiv j\omega$, $\partial/\partial z \equiv -j\beta$ i $\partial/\partial y \equiv 0$ (usled pretpostavke da nema promene polja po y pravcu), dobija se:

$$\begin{aligned} \vec{i}_x \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) - \vec{i}_y \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) + \vec{i}_z \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \\ = -\vec{i}_x \mu \mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial z} - \vec{i}_y \mu \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial z} - \vec{i}_z \mu \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial z} \Rightarrow \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} \vec{i}_x j\beta E_y - \vec{i}_y \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} + j\beta E_x \right) + \vec{i}_z \frac{\partial E_y}{\partial x} \\ = -\vec{i}_x j\mu \mu_0 \omega H_x - \vec{i}_y j\mu \mu_0 \omega H_y - \vec{i}_z j\mu \mu_0 \omega H_z \end{aligned} \quad (2.41)$$

Balansiranjem jednačine (2.41) po odgovarajućim pravcima dobija se prvi set jednačina:

$$j\beta E_y = -j\mu \mu_0 \omega H_x \quad (2.42)$$

$$-\frac{\partial E_z}{\partial x} - j\beta E_x = -j\mu \mu_0 \omega H_y \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -j\mu \mu_0 \omega H_z \quad (2.44)$$

Iz II Maxwell-ove jednačine (2.30):

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.45)$$

analognim postupkom dobija se drugi set jednačina po pravcima x , y , z , respektivno:

$$j\beta H_y = j\varepsilon \varepsilon_0 \omega E_x \quad (2.46)$$

$$-\frac{\partial H_z}{\partial x} - j\beta H_x = j\varepsilon \varepsilon_0 \omega E_y \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = j\varepsilon\varepsilon_0\omega E_z \quad (2.48)$$

Kombinacijom jednačina (2.42), (2.44) i (2.47) dobija se set komponenti vektora (E_y, H_x, H_z) koji predstavljaju TE modove elektromagnetnog talasa, a kombinacijom jednačina (2.43), (2.46) i (2.48) drugi set komponenti vektora (H_y, E_x, E_z) koji predstavljaju TM modove elektromagnetnog talasa. Kako se, prema modelu koji se ispituje, u talasovodu prostire samo TE_{10} mod, rešavaće se samo set jednačina (2.42), (2.44) i (2.47) iz kojeg se dobija Helmholtz-ova jednačina za TE modove.

Iz jednačine (2.42) dobija se:

$$H_x = -\frac{\beta}{\mu\mu_0\omega} E_y \quad (2.49)$$

Nakon diferenciranja jednačine (2.44) po x se dobija:

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{j}{\mu\mu_0\omega} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \frac{j}{(\mu\mu_0)^2\omega} \frac{\partial(\mu\mu_0)}{\partial x} \frac{\partial E_y}{\partial x} \quad (2.50)$$

Zamenom jednačina (2.49) i (2.50) u jednačinu (2.47) dobija se sledeća jednačina:

$$-j\beta \left(-\frac{\beta}{\mu\mu_0\omega} \right) E_y - \frac{j}{\mu\mu_0\omega} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{j}{\mu_0\mu^2\omega} \frac{\partial\mu}{\partial x} \frac{\partial E_y}{\partial x} = j\varepsilon\varepsilon_0\omega E_y \quad (2.51)$$

čijim se sređivanjem dobija Helmholtz-ova jednačina za TE modove:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial\mu}{\partial x} \frac{\partial E_y}{\partial x} + (\mu\mu_0 \cdot \varepsilon\varepsilon_0\omega^2 - \beta^2) E_y = 0 \quad (2.52)$$

Analogno se, uz pomoć seta jednačina (2.43), (2.46) i (2.48), dobija Helmholtz-ova jednačina za TM modove:

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial\varepsilon}{\partial x} \frac{\partial H_y}{\partial x} + (\mu\mu_0 \cdot \varepsilon\varepsilon_0\omega^2 - \beta^2) H_y = 0 \quad (2.53)$$

2.5 Srednja gustina elektromagnetne energije u barijeri

Kako bi se dobila srednja elektromagnetna energija u barijeri, potrebna za izračunavanje vremena zadržavanja, iz jednačine (1.3), potrebno je prvo izračunati srednju gustinu ove energije čijim se integraljenjem zatim dobija tražena srednja EM energija.

U nedisperzivnoj sredini srednja gustina elektromagnetne energije je data izrazom [63]:

$$\langle w \rangle = \frac{1}{4} (\varepsilon \varepsilon_0 |E|^2 + \mu \mu_0 |H|^2) \quad (2.54)$$

pri čemu je ova formula primenljiva isključivo u sredini u kojoj su relativna dielektrična konstanta ε i relativna magnetna permeabilnost μ realne vrednosti.

Kada se radi o disperzivnoj sredini, gustina elektromagnetne energije je [63]:

$$\langle w \rangle = \frac{1}{4} \left(\frac{d(\omega \varepsilon)}{d\omega} \varepsilon_0 |E|^2 + \frac{d(\omega \mu)}{d\omega} \mu_0 |H|^2 \right) \quad (2.55)$$

pri čemu ovaj izraz važi isključivo kada su imaginarni delovi relativne permitivnosti i permeabilnosti vrlo mali u poređenju sa njihovim realnim delovima. U nedisperzivnoj sredini se izraz (2.55) svodi na izraz (2.54).

Izraz (2.55) važi za nelinearne materijale, odnosno za nelinearne članove konstitutivnih parametara. No, potrebno je izvesti izraz za gustinu energije u disperzivnom i apsorpcionom materijalu, bez ikakvih ograničenja, tj. naći izraz koji će važiti i za frekventne opsege u kojima su imaginarni delovi relativne permitivnosti i permeabilnosti uporedivi sa ili mnogo veći od njihovih realnih delova. Kako, prema modelu prikazanom u poglavlju 2.3, apsorpcija ne zavisi od jačine električnog polja u barijeri, gustina energije se može predstaviti kao zbir linearnog dela, koji predstavlja kontribuciju linearnih članova konstitutivnih parametara (ε_{lin} i μ), i nelinearnog dela, koji predstavlja kontribuciju nelinearnog člana permitivnosti (ε_{snl}). Nelinearan deo se dobija zanemarivanjem gustine magnetne energije u jednačini (2.55), dok je za linearan deo, usled postojanja apsorpcije, potrebno izvesti novi izraz koji bi uračunavao gubitke u materijalu. U ovom poglavlju će prvo biti izveden ovaj izraz, a zatim će se dodati član povezan sa gustinom energije nelinearnog materijala, iz jednačine (2.55).

Kreće se od I i II Maxwell-ove jednačine:

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.56)$$

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2.57)$$

Kada se prva jednačina pomnoži sa \vec{H} , a druga sa \vec{E} , a zatim se saberu, dobija se sledeći izraz:

$$\vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{E} \text{rot} \vec{H} - \vec{H} \text{rot} \vec{E} \quad (2.58)$$

Kako je:

$$\vec{E} \text{rot} \vec{H} - \vec{H} \text{rot} \vec{E} = -\text{div}(\vec{E} \times \vec{H}) \Rightarrow \quad (2.59)$$

$$\vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\text{div}(\vec{E} \times \vec{H}) \quad (2.60)$$

Kada se poslednji izraz integrali po zapremini, dobija se:

$$\int_V \left(\vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) dV = - \int_V \text{div}(\vec{E} \times \vec{H}) dV \quad (2.61)$$

Kako je, prema teoremi Gauss-Ostrogradsky-og:

$$\int_V \text{div}(\vec{E} \times \vec{H}) dV = \oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) d\vec{S} \quad (2.62)$$

pri čemu je S zatvorena površ unutar koje se nalazi zapremina V , tako je:

$$\int_V \left(\vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) dV = - \oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) d\vec{S} \quad (2.63)$$

S druge strane, vektori električne i magnetne indukcije su jednaki:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (2.64)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} \quad (2.65)$$

gde je \vec{M} vektor magnetske polarizacije. Zamenom poslednja dva izraza u jednačinu (2.63) dobija se:

$$\int_V \left(\varepsilon_0 \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{E} \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \mu_0 \vec{H} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \mu_0 \vec{H} \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} \right) dV = - \oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) d\vec{S} \quad (2.66)$$

Sada je potrebno analizirati drugi sabirak unutar zapreminskog integrala iz gornjeg izraza. Polarizacija je, prema jednačini (2.9), jednaka:

$$\vec{P} = ne\vec{r} + (\varepsilon_\infty - 1)\varepsilon_0\vec{E} \Rightarrow \quad (2.67)$$

$$\vec{E} \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \vec{E} \left[(\varepsilon_\infty - 1)\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + ne \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right] \Rightarrow \quad (2.68)$$

$$\vec{E} \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \vec{E}(\varepsilon_\infty - 1)\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + ne \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \vec{E} \quad (2.69)$$

Kada se jednačina (2.8) ubaci u jednačinu (2.69), dobija se:

$$\vec{E} \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \vec{E}(\varepsilon_\infty - 1)\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + ne \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \cdot \frac{M}{e} \left(\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \Gamma \frac{d\vec{r}}{dt} + \omega_0^2 \vec{r} \right) \Rightarrow \quad (2.70)$$

$$\vec{E} \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = (\varepsilon_\infty - 1)\varepsilon_0 \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{d}{dt} \left[\frac{nM}{2} \left(\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|^2 + \omega_0^2 |\vec{r}|^2 \right) \right] + nM\Gamma \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|^2 \quad (2.71)$$

Sada je potrebno analizirati četvrti sabirak sa leve strane znaka jednakosti jednačine (2.66). Kako je, iz jednačine (2.22):

$$\vec{H} \frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{1}{F\omega_0^2} \left(\frac{d^2 \vec{M}}{dt^2} + \Gamma_m \frac{d\vec{M}}{dt} + \omega_0^2 \vec{M} \right) \frac{d\vec{M}}{dt} \Rightarrow \quad (2.72)$$

$$\vec{H} \frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{1}{2F\omega_0^2} \frac{d}{dt} \left(\left| \frac{d\vec{M}}{dt} \right|^2 + \omega_0^2 |\vec{M}|^2 \right) + \frac{\Gamma_m}{F\omega_0^2} \left| \frac{d\vec{M}}{dt} \right|^2 \quad (2.73)$$

Kada se izrazi (2.71) i (2.73) zamene u jednačinu (2.66), dobija se:

$$\begin{aligned} & \int_V \left(\varepsilon_0 \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + (\varepsilon_\infty - 1)\varepsilon_0 \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{d}{dt} \left[\frac{nM}{2} \left(\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|^2 + \omega_0^2 |\vec{r}|^2 \right) \right] + nM\Gamma \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|^2 \right. \\ & \quad \left. + \mu_0 \vec{H} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \frac{\mu_0}{2F\omega_0^2} \frac{d}{dt} \left(\left| \frac{d\vec{M}}{dt} \right|^2 + \omega_0^2 |\vec{M}|^2 \right) + \frac{\mu_0 \Gamma_m}{F\omega_0^2} \left| \frac{d\vec{M}}{dt} \right|^2 \right) dV \quad (2.74) \\ & = - \oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) d\vec{S} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_V \left[\varepsilon_\infty \varepsilon_0 \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{d}{dt} \left[\frac{nM}{2} \left(\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|^2 + \omega_0^2 |\vec{r}|^2 \right) \right] + \mu_0 \vec{H} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right. \\
& \quad \left. + \frac{\mu_0}{2F\omega_0^2} \frac{d}{dt} \left(\left| \frac{d\vec{M}}{dt} \right|^2 + \omega_0^2 |\vec{M}|^2 \right) \right] dV \\
& = \oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) d\vec{S} + \int_V \left(nM\Gamma \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|^2 + \frac{\mu_0 \Gamma_m}{F\omega_0^2} \left| \frac{d\vec{M}}{dt} \right|^2 \right) dV
\end{aligned} \tag{2.75}$$

Prema Poynting-ovoj teoremi, gustina elektromagnetne energije i Poynting-ov vektor povezani su na sledeći način [90]:

$$\oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) d\vec{S} + gubici = - \int_V \frac{dw}{dt} dV \tag{2.76}$$

pri čemu je $\vec{E} \times \vec{H}$ Poynting-ov vektor, a w gustina elektromagnetne energije. Očigledno je, kako bi se dobio tačan izraz za gubitke u materijalu. Gubici u materijalu su okarakterisani veličinama Γ i Γ_m , te drugi integral sa desne strane jednačine (2.75) predstavlja tražene gubitke. Stoga se, upoređivanjem jednačina (2.75) i (2.76), za gustinu elektromagnetne energije dobija:

$$\begin{aligned}
w = \varepsilon_\infty \varepsilon_0 \frac{|\vec{E}(\vec{r}, t)|^2}{2} + \mu_0 \frac{|\vec{H}(\vec{r}, t)|^2}{2} + \frac{nM}{2} \left(\left| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right|^2 + \omega_0^2 |\vec{r}(t)|^2 \right) \\
+ \frac{\mu_0}{2F\omega_0^2} \frac{d}{dt} \left(\left| \frac{d\vec{M}(\vec{r}, t)}{dt} \right|^2 + \omega_0^2 |\vec{M}(\vec{r}, t)|^2 \right)
\end{aligned} \tag{2.77}$$

Kako je izvedeno u Dodatku A ovog rada, usrednjena vrednost po vremenu kvadrata vektora koji po prostoperiodičnoj funkciji zavisi od vremena je data izrazom:

$$\langle A^2(x, t) \rangle = \frac{1}{2} |A(x)|^2 \tag{2.78}$$

Kako se, u jednačini (2.77), zavisnost svih vektora sa desne strane od vremena može opisati prostoperiodičnom funkcijom, tako je usrednjena vrednost gustine elektromagnetne energije po vremenu:

$$\langle w \rangle = \varepsilon_\infty \varepsilon_0 \frac{|\vec{E}(\vec{r})|^2}{4} + \mu_0 \frac{|\vec{H}(\vec{r})|^2}{4} + \frac{nM}{4} (\omega^2 + \omega_r^2) |\vec{r}|^2 + \frac{\mu_0}{4F\omega_0^2} (\omega^2 + \omega_0^2) |\vec{M}|^2 \tag{2.79}$$

Kada se u prethodnu jednačinu zameni izraz za plazma frekvenciju (2.18), dobija se:

$$\langle w \rangle = \varepsilon_\infty \varepsilon_0 \frac{|\vec{E}|^2}{4} + \mu_0 \frac{|\vec{H}|^2}{4} + \frac{M^2}{4e^2 \varepsilon_\infty \varepsilon_0 \omega_p^2} (\omega^2 + \omega_r^2) |\vec{r}|^2 + \frac{\mu_0}{4F\omega_0^2} (\omega^2 + \omega_0^2) |\vec{M}|^2 \quad (2.80)$$

a, kada se u ovaj izraz zamene jednačine (2.12) i (2.22), dobija se:

$$\langle w \rangle = \varepsilon_\infty \varepsilon_0 \frac{|\vec{E}|^2}{4} + \mu_0 \frac{|\vec{H}|^2}{4} + \frac{1}{4\varepsilon_\infty \varepsilon_0 \omega_p^2} \frac{(\omega^2 + \omega_r^2)}{(\omega_r^2 - \omega^2)^2 + (\Gamma_e \omega)^2} |\vec{E}|^2 + \frac{\mu_0}{4} \left[1 + \frac{(\omega^2 + \omega_0^2) F \omega_0^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\Gamma_m \omega)^2} \right] |\vec{H}|^2 \quad (2.81)$$

Sređivanjem i zamenom jednačine (2.19) (ili zanemarivanjem sopstvene učestanosti i zamenom jednačine (2.20)), kao i jednačina (2.17) i (2.23) u gornji izraz, dobija se konačan izraz za usrednjenu gustinu elektromagnetne energije u metamaterijalu sa električnom i magnetnom disperzijom [87]:

$$\langle w \rangle = \frac{\varepsilon_0}{4} \left(\varepsilon_R + \frac{2\omega \varepsilon_I}{\Gamma_e} \right) |E|^2 + \frac{\mu_0}{4} \left(\mu_R + \frac{2\omega \mu_I}{\Gamma_m} \right) |H|^2 \quad (2.82)$$

gde su ε_R, μ_R i ε_I, μ_I realni i imaginarni delovi relativne permitivnosti, odnosno permeabilnosti, respektivno, tj.:

$$\varepsilon = \varepsilon_R + j\varepsilon_I, \quad \varepsilon_R = \varepsilon_\infty - \frac{\omega_p^2 \omega^2 \varepsilon_\infty}{(\omega^2)^2 + (\Gamma_e \omega)^2}, \quad \varepsilon_I = \frac{\Gamma_e \omega_p^2 \omega^2 \varepsilon_\infty}{(\omega^2)^2 + (\Gamma_e \omega)^2} \quad (2.83)$$

$$\mu = \mu_R + j\mu_I, \quad \mu_R = 1 - \frac{F \omega_0^2 \omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\Gamma_m \omega)^2}, \quad \mu_I = \frac{\Gamma_m F \omega_0^2 \omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\Gamma_m \omega)^2} \quad (2.84)$$

Jednačina za srednju gustinu EM energije (2.82) važi samo u slučaju kada su linearni članovi permitivnosti i permeabilnosti materijala date relacijama (2.20) i (2.23). U slučaju proizvoljnih kompleksnih funkcija $\varepsilon(\omega)$ i $\mu(\omega)$ nije moguće izvesti izraz za srednju gustinu EM energije, pre svega usled nemogućnosti odvajanja članova koji su vezani za gubitke i članova koji su vezani za izvod gustine EM energije po vremenu iz jednačine (2.76). Stoga, ovde prikazan ED (*Energy Density*) pristup izračunavanja srednje EM energije $\langle W \rangle$, iako ovde daje tačne rezultate, u opštem slučaju treba izbegavati, odnosno treba koristiti EC (*Equivalent Circuit*) metod prikazan u glavi 4 [91].

Izraz (2.82) predstavlja gustinu energije u disperzivnom apsorptivnom materijalu. Gustina energije u nemagnetskom nelinearnom materijalu data je, iz jednačine (2.55), sledećom formulom:

$$\langle w \rangle = \frac{1}{4} \frac{d(\omega \varepsilon_{snl})}{d\omega} \varepsilon_0 |E|^2 \quad (2.85)$$

Kako se nelinearni disperzivni apsorptivni materijal, koji je ovde analiziran, može posmatrati iz dva dela: kao disperzivan apsorptivan materijal postavljen unutar nelinearnog materijala, gustina energije u barijeri se može predstaviti kao kombinacija izraza (2.82) i (2.85):

$$\langle w \rangle = \frac{\varepsilon_0}{4} \varepsilon_{eff} |E|^2 + \frac{\mu_0}{4} \mu_{eff} |H|^2 \quad (2.86)$$

pri čemu su ε_{eff} i μ_{eff} efektivna permitivnost i permeabilnost materijala date izrazima:

$$\varepsilon_{eff} = \underbrace{\text{Re}(\varepsilon_{lin}) + \frac{2\omega \text{Re}(\varepsilon_{lin})}{\Gamma_e}}_{\varepsilon_{efflin}} + \frac{1}{4} \frac{d(\omega \varepsilon_{snl})}{d\omega} |E|^2 \quad (2.87)$$

$$\mu_{eff} = \text{Re}(\mu) + \frac{2\omega \text{Re}(\mu)}{\Gamma_e} \quad (2.88)$$

pri čemu su ε_{lin} , ε_{snl} i μ dati jednačinama (2.24) i (2.25), respektivno.

2.6 Srednja elektromagnetna energija u barijeri

Kada je izračunata gustina elektromagnetne energije, moguće je izračunati i samu elektromagnetnu energiju u barijeri. Za početak se razdvajaju magnetni i električni deo gustine elektromagnetne energije. Prema Maxwell-ovoj teoriji, ukupna energija elektromagnetnog polja jednaka je zbiru energija električnog i magnetnog polja, pa je moguće razdvojiti te dve energije i računati ih zasebno*. Na osnovu jednačine (2.86):

$$\langle w \rangle = \langle w_e \rangle + \langle w_m \rangle \quad (2.89)$$

$$\langle w_e \rangle = \frac{\varepsilon_0}{4} \varepsilon_{eff} |E|^2 \quad (2.90)$$

$$\langle w_m \rangle = \frac{\mu_0}{4} \mu_{eff} |H|^2 \quad (2.91)$$

* U daljem tekstu se pod energijom podrazumeva njena usrednjena vrednost po vremenu

Ukupna energija EM talasa unutar barijere je jednaka integralu gustine EM energije po celoj zapremini barijere:

$$\langle W \rangle = \int_V \langle w \rangle dV = \int_{0^+}^{L^-} \langle w_e \rangle S dx + \int_{0^+}^{L^-} \langle w_m \rangle S dx = \langle W_e \rangle + \langle W_m \rangle \Rightarrow \quad (2.92)$$

$$\langle W_e \rangle = \int_{0^+}^{L^-} \langle w_e \rangle S dx \quad (2.93)$$

$$\langle W_m \rangle = \int_{0^+}^{L^-} \langle w_m \rangle S dx \quad (2.94)$$

pri čemu je, kao što je prikazano na Slici 2.3, S površina poprečnog preseka barijere, L njena širina, a W_e i W_m predstavljaju električnu i magnetnu energiju EM talasa unutar barijere, respektivno.

Dakle, da bi se izračunala srednja elektromagnetna energija u barijeri, potrebno je izračunati zasebno srednju električnu i srednju magnetnu energiju. Kako se ovde posmatra samo TE_{10} mod, za koji važi da je $H_y, E_x, E_z = 0$, sledi da je električna energija unutar barijere, iz jednačina (2.90) i (2.93), jednaka:

$$\langle W_e \rangle = \frac{\epsilon_0 S}{4} \int_{0^+}^{L^-} \epsilon_{eff} |E_y|^2 dx \quad (2.95)$$

S druge strane, kod magnetne energije problem nije tako jednostavan. Iz jednačina (2.91) i (2.94) se dobija da je:

$$\langle W_m \rangle = \frac{\mu_0 \mu_{eff} S}{4} \int_{0^+}^{L^-} |H|^2 dx = \frac{\mu_0 \mu_{eff} S}{4} \left(\int_{0^+}^{L^-} |H_x|^2 dx + \int_{0^+}^{L^-} |H_z|^2 dx \right) \quad (2.96)$$

Da bi se dobila zavisnost magnetne energije od električnog polja unutar barijere, neophodno je izraziti komponente magnetnog polja preko y komponente električnog polja. U izvođenju Helmholtz-ove jednačine za električno polje dobijene su ove veze – jednačine (2.42) i (2.44). Ubacivanjem ovih jednačina u prethodni izraz dobija se:

$$\langle W_m \rangle = \frac{\mu_{eff} S}{4\omega^2 |\mu|^2 \mu_0} \left(\beta^2 \int_{0^+}^{L^-} |E_y|^2 dx + \int_{0^+}^{L^-} \left| \frac{dE_y}{dx} \right|^2 dx \right) \quad (2.97)$$

Kako su na granicama barijere i talasovoda električno polje, kao i njegov prvi izvod, neprekidni, sledi da se granice integrala u prethodnom, kao i u izrazu (2.95), koje sada

iznose 0^+ i L^- , mogu zameniti sa 0^- i L^+ , respektivno. Sada je potrebno na drugačiji način izraziti drugi integral u zagradi iz prethodnog izraza. Neka je:

$$I_1 = \int_{0^+}^{L^-} \left| \frac{dE_y}{dx} \right|^2 dx = \int_{0^-}^{L^+} \left| \frac{dE_y}{dx} \right|^2 dx = \int_{0^-}^{L^+} \frac{dE_y}{dx} \frac{dE_y^*}{dx} dx \Rightarrow \quad (2.98)$$

$$I_1 = E_y \frac{dE_y^*}{dx} \Big|_{0^-}^{L^+} - \int_{0^-}^{L^+} E_y \frac{d^2 E_y^*}{dx^2} dx \quad (2.99)$$

U Dodatku B je pokazano da je:

$$Q = E_y \frac{dE_y^*}{dx} \Big|_{0^-}^{L^+} = |E_0|^2 [i\gamma_0 A - 2\gamma_0 \text{Im}(R)] \quad (2.100)$$

gde je A apsorpcija unutar barijere, E_0 je upadno električno polje na barijeru, a R je koeficijent refleksije na površini barijera-talaso vod (Slika 2.4). Sada izraz (2.99) postaje:

$$I_1 = |E_0|^2 [i\gamma_0 A - 2\gamma_0 \text{Im}(R)] - \int_{0^-}^{L^+} E_y \frac{d^2 E_y^*}{dx^2} dx \quad (2.101)$$

Iz Helmholtz-ove jednačine (2.52) se dobija da je:

$$\frac{\partial^2 E_y^*}{\partial x^2} = \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial E_y}{\partial x} \right)^* - [(\mu \varepsilon)^* k_0^2 - \beta^2] E_y \quad (2.102)$$

Zamenom gornjeg izraza u izraz (2.101) dobija se:

$$I_1 = |E_0|^2 [i\gamma_0 A - 2\gamma_0 \text{Im}(R)] - \int_{0^-}^{L^+} [\beta^2 - (\mu \varepsilon)^* k_0^2] |E_y|^2 dx - \int_{0^-}^{L^+} E_y \left(\frac{\mu'}{\mu} \frac{\partial E_y}{\partial x} \right)^* dx \quad (2.103)$$

pri čemu operator $'$ predstavlja izvod po prostornoj koordinati x , tj. $\mu' = d\mu/dx$. Izraz za apsorpciju A je izveden u Dodatku C i glasi:

$$A = \frac{k_0^2}{\gamma_0 |E_0|^2} \int_{0^-}^{L^+} \text{Im}(\varepsilon \mu) |E_y|^2 dx - \frac{1}{\gamma_0 |E_0|^2} \int_{0^-}^{L^+} \text{Im} \left(\frac{\mu'}{\mu} E_y' E_y^* \right) dx \quad (2.104)$$

Ubacivanjem izraza (2.104) u izraz (2.103) dobija se da je $\text{Im}(I_1) = 0$, pa sledi:

$$I_1 = -2\gamma_0 \text{Im}(R) |E_0|^2 - \beta^2 \int_{0^-}^{L^+} |E_y|^2 dx + k_0^2 \int_{0^-}^{L^+} \text{Re}(\mu \varepsilon) |E_y|^2 dx - \int_{0^-}^{L^+} \text{Re} \left[E_y \left(\frac{\mu'}{\mu} \frac{\partial E_y}{\partial x} \right)^* \right] dx \quad (2.105)$$

Konačno, kada se ovaj izraz zameni u jednačinu (2.97), dobija se:

$$\langle W_m \rangle = \frac{\mu_{eff} S}{4\omega^2 |\mu|^2 \mu_0} \left(-2\gamma_0 \text{Im}(R) |E_0|^2 + k_0^2 \int_{0^-}^{L^+} \text{Re}(\mu \varepsilon) |E_y|^2 dx - \int_{0^-}^{L^+} \text{Re} \left[E_y \left(\frac{\mu'}{\mu} E_y' \right)^* \right] dx \right) \quad (2.106)$$

Sledi detaljnija analiza trećeg člana unutar zagrade iz gornjeg izraza. Kako je permeabilnost konstantna svuda osim na granicama barijera-talasonod, ovaj integral se može predstaviti na sledeći način:

$$\int_{0^-}^{L^+} \text{Re} \left[E_y \left(\frac{\mu'}{\mu} E_y' \right)^* \right] dx = \int_{0^-}^{0^+} \text{Re} \left[E_y \left(\frac{\mu'}{\mu} E_y' \right)^* \right] dx + \int_{L^-}^{L^+} \text{Re} \left[E_y \left(\frac{\mu'}{\mu} E_y' \right)^* \right] dx \quad (2.107)$$

Ovde je:

$$\begin{aligned} & \int_{0^-}^{0^+} \text{Re} \left[E_y \left(\frac{\mu'}{\mu} E_y' \right)^* \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_{0^-}^{0^+} E_y \left(\frac{E_y'}{\mu} \right)^* (\mu^* - \mu_b) \delta(x) dx + \int_{0^-}^{0^+} E_y^* \left(\frac{E_y'}{\mu} \right) (\mu - \mu_b) \delta(x) dx \right] \Rightarrow \end{aligned} \quad (2.108)$$

$$\begin{aligned} & \int_{0^-}^{0^+} \text{Re} \left[E_y \left(\frac{\mu'}{\mu} E_y' \right)^* \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left[E_y \left(\frac{E_y'}{\mu} \right)^* \right] \Big|_{x=0} (\mu^* - \mu_b) + \left[E_y^* \left(\frac{E_y'}{\mu} \right) \right] \Big|_{x=0} (\mu - \mu_b) \right\} \Rightarrow \end{aligned} \quad (2.109)$$

$$\int_{0^-}^{0^+} \text{Re} \left[E_y \left(\frac{\mu'}{\mu} E_y' \right)^* \right] dx = \text{Re} \left\{ \left[E_y^* \left(\frac{E_y'}{\mu} \right) \right] \Big|_{x=0} (\mu - \mu_b) \right\} \quad (2.110)$$

Isto tako je i:

$$\int_{L^-}^{L^+} \operatorname{Re} \left[E_y \left(\frac{\mu'}{\mu} E_y' \right)^* \right] dx = \operatorname{Re} \left\{ \left[E_y^* \left(\frac{E_y'}{\mu} \right) \right] \Big|_{x=L} (\mu - \mu_b) \right\} \quad (2.111)$$

Zamenom izraza (2.110) i (2.111) u (2.107), a zatim u (2.106), dobija se krajnji izraz za magnetnu energiju unutar barijere:

$$\begin{aligned} \langle W_m \rangle = & \frac{\mu_{eff} S}{4\omega^2 |\mu|^2 \mu_0} \left(-2\gamma_0 \operatorname{Im}(R) |E_0|^2 + k_0^2 \int_{0^-}^{L^+} \operatorname{Re}(\mu \varepsilon) |E_y|^2 dx \right. \\ & - \operatorname{Re} \left\{ \left[E_y^* \left(\frac{E_y'}{\mu} \right) \right] \Big|_{x=0} (\mu - \mu_b) \right\} \\ & \left. - \operatorname{Re} \left\{ \left[E_y^* \left(\frac{E_y'}{\mu} \right) \right] \Big|_{x=L} (\mu - \mu_b) \right\} \right) \end{aligned} \quad (2.112)$$

Na kraju, ubacivanjem jednačina (2.95) i (2.112) u jednačinu (2.92), dobija se konačni izraz za srednju energiju unutar barijere od nelinearnog disperzivnog apsorptivnog materijala:

$$\begin{aligned} \langle W \rangle = & \frac{\varepsilon_0 S}{4} \left(\int_{0^+}^{L^-} \varepsilon_{eff} |E_y|^2 dx + \frac{\mu_{eff}}{|\mu|^2} \int_{0^-}^{L^+} \operatorname{Re}(\mu \varepsilon) |E_y|^2 dx \right) \\ & - \frac{\mu_{eff} S \gamma_0}{2\omega^2 |\mu|^2 \mu_0} \operatorname{Im}(R) |E_0|^2 - \frac{\mu_{eff} S}{4\omega^2 |\mu|^2 \mu_0} S_1 \end{aligned} \quad (2.113)$$

pri čemu je:

$$S_1 = \operatorname{Re} \left\{ \left[E_y^* \left(\frac{E_y'}{\mu} \right) \right] \Big|_{x=0} (\mu - \mu_b) \right\} + \operatorname{Re} \left\{ \left[E_y^* \left(\frac{E_y'}{\mu} \right) \right] \Big|_{x=L} (\mu - \mu_b) \right\} \quad (2.114)$$

2.7 Upadna snaga na barijeru

Da bi se izračunalo vreme zadržavanja, pored srednje energije unutar barijere, neophodno je znati i upadnu snagu na barijeru. Kako bi se ova snaga izračunala, polazi se od kompleksnog Poynting-ovog vektora upadnog talasa, koji je jednak:

$$\vec{P} = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^* = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i}_x & \vec{i}_y & \vec{i}_z \\ 0 & E_y & 0 \\ H_x^* & 0 & H_z^* \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \vec{i}_x E_y H_z^* - \frac{1}{2} \vec{i}_z E_y H_x^* \Rightarrow \quad (2.115)$$

$$\vec{P}_x = \frac{1}{2} E_y H_z^* \vec{i}_x, \quad \vec{P}_y = 0, \quad \vec{P}_z = \frac{1}{2} E_y H_z^* \vec{i}_x \quad (2.116)$$

Usrednjena vrednost Poynting-ovog vektora po vremenu je jednaka realnom delu kompleksnog Poynting-ovog vektora:

$$\langle \vec{P} \rangle = \text{Re}(\vec{P}) = \text{Re}(\vec{P}_x) + \text{Re}(\vec{P}_y) + \text{Re}(\vec{P}_z) \quad (2.117)$$

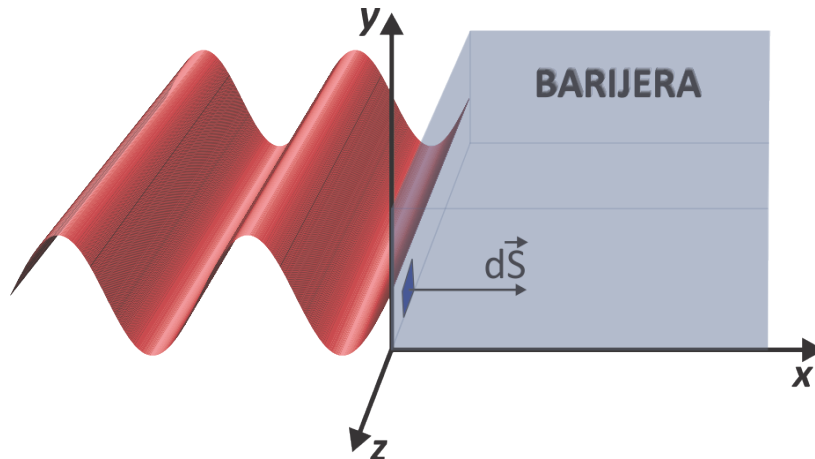
Srednja upadna snaga na barijeru je, po definiciji, jednaka:

$$P_{in} = \int \langle \vec{P} \rangle d\vec{S} = \int \text{Re}(\vec{P}_x) d\vec{S} + \int \text{Re}(\vec{P}_y) d\vec{S} + \int \text{Re}(\vec{P}_z) d\vec{S} \quad (2.118)$$

Kako je (Slika 2.6) $d\vec{S} \parallel \vec{k}$, tako je:

$$P_{in} = \int \text{Re}(\vec{P}_x) d\vec{S} \stackrel{(2.116)}{\Longrightarrow} \quad (2.119)$$

$$P_{in} = \frac{1}{2} \text{Re}(E_y H_z^*) \cdot S \quad (2.120)$$



Slika 2.6: Uz izvođenje srednje snage upadnog talasa

Prema jednačini (2.44) važiće:

$$H_z^* = -\frac{j}{\omega\mu_0} \frac{\partial E_y}{\partial x} \quad (2.121)$$

a, kako je ispred barijere, prema jednačini (2.26):

$$E_y = E_0 \exp(j\gamma_0 x) \Rightarrow \quad (2.122)$$

$$H_z^* = \frac{E_0 \gamma \cdot \exp(j\gamma x)}{\omega \mu_0} \Rightarrow \quad (2.123)$$

$$H_z^* = \frac{E_y \gamma}{\omega \mu_0} \quad (2.124)$$

Odavde je:

$$\operatorname{Re}(E_y H_z^*) = \operatorname{Re}\left(\frac{|E_y|^2 \gamma}{\omega \mu_0}\right) = \frac{|E_y|^2 \gamma}{\omega \mu_0} \quad (2.125)$$

Kada se prethodni izraz ubaci u jednačinu (2.120) dobija se srednja upadna snaga na barijeru:

$$P_{in} = \frac{\gamma_0 \varepsilon_0 c^2}{2\omega} S \cdot |E_0|^2 \quad (2.126)$$

2.8 Vreme zadržavanja EM talasa u barijeri

Nakon izvedenog izraza za srednju elektromagnetnu energiju u barijeri od nelinearnog disperzivnog apsorptivnog materijala, kao i za upadnu snagu na barijeru, moguće je izračunati vreme zadržavanja EM talasa u barijeri. Kao što je već rečeno, vreme zadržavanja definisano je kao količnik srednje elektromagnetne energije i upadne snage (jednačina (1.3)):

$$\tau_d = \frac{\langle W \rangle}{P_{in}} \quad (2.127)$$

te je, iz jednačina (2.113) i (2.126) [92]:

$$\tau_d = \frac{\omega}{2\gamma_0 c^2 |E_0|^2} \left(\int_0^L \varepsilon_{eff} |E_y|^2 dx + \frac{\mu_{eff}}{|\mu|^2} \int_0^L \operatorname{Re}(\mu \varepsilon) |E_y|^2 dx \right) - \frac{\mu_{eff}}{\omega |\mu|^2} \operatorname{Im}(R) - \frac{\mu_{eff}}{2\omega |\mu|^2 \gamma_0 |E_0|^2} S_1 \quad (2.128)$$

Odavde se jasno vidi da vreme zadržavanja ne zavisi od površine poprečnog preseka i apsorpcije unutar barijere. Karakteristike vremena zadržavanja će detaljnije biti analizirane u poglavlju o numeričkim rezultatima.

2.9 Relacija između vremena zadržavanja i grupnog kašnjenja

Kako bi se upotpunila analiza vremena tunelovanja, potrebno je naći vezu između dva najznačajnija vremenska intervala: grupnog kašnjenja i vremena zadržavanja. U prethodnom poglavlju je pokazano kako je moguće izračunati vreme zadržavanja. Izraz za izračunavanje grupnog kašnjenja je već poznat od ranije [44]:

$$\tau_g = |T|^2 \frac{d\varphi_0}{d\omega} + |R|^2 \frac{d\varphi_r}{d\omega} \quad (2.129)$$

$$T = |T|\exp(i\varphi_t), \quad R = |R|\exp(i\varphi_r) \quad (2.130)$$

pri čemu su T i R koeficijenti transmisije i refleksije, a φ_0 , φ_t i φ_r faze upadnog, transmitovanog i reflektovanog talasa, respektivno. Ovde će biti izveden izraz koji pokazuje na koji način su povezana ova dva vremena tunelovanja, data izrazima (2.128) i (2.129), kao i koje karakteristike barijere, i u kojoj meri, utiču na tunelovanje EM talasa kroz nelinearni disperzivni apsorptivni materijal.

Da bi se dobila ova veza, treba, za početak, izraziti integrale električnog polja iz jednačine (2.128) preko grupnog kašnjenja. Polazi se od Helmholtz-ove jednačine (2.52) koja se, zatim, diferencira po ω i množi sa konjugovanom vrednošću električnog polja:

$$E_y'' + \frac{\mu'}{\mu} E_y' + \gamma^2 E_y = 0 \quad / \cdot E_y^* \frac{d}{d\omega} \Rightarrow \quad (2.131)$$

$$E_y^* \frac{dE_y}{d\omega} - \frac{d}{d\omega} \left(\frac{\mu'}{\mu} E_y' \right) E_y^* + \frac{d(\gamma^2)}{d\omega} |E_y|^2 + \frac{dE_y}{d\omega} \gamma^2 E_y^* = 0 \quad (2.132)$$

pri čemu je $\gamma^2 = \mu\mu_0 \cdot \varepsilon\varepsilon_0\omega^2 - \beta^2$. Takođe, kada se Helmholtz-ova jednačina (2.131) konjuguje i, zatim, pomnoži sa $dE_y/d\omega$, dobija se:

$$E_y^{*''} \frac{dE_y}{d\omega} - \left(\frac{\mu'}{\mu} E_y' \right)^* \frac{dE_y}{d\omega} + \frac{dE_y}{d\omega} (\gamma^2)^* E_y^* = 0 \quad (2.133)$$

Kada se od jednačine (2.132) oduzme jednačina (2.133), dobija se:

$$\begin{aligned} E_y^* \frac{dE_y}{d\omega} - E_y^{*''} \frac{dE_y}{d\omega} - \frac{d}{d\omega} \left(\frac{\mu'}{\mu} E_y' \right) E_y^* + \left(\frac{\mu'}{\mu} E_y' \right)^* \frac{dE_y}{d\omega} + \frac{d(\gamma^2)}{d\omega} |E_y|^2 \\ + \frac{dE_y}{d\omega} \gamma^2 E_y^* - \frac{dE_y}{d\omega} (\gamma^2)^* E_y^* = 0 \end{aligned} \quad (2.134)$$

Integracijom ove jednačine od 0 do L se dobija:

$$\begin{aligned} & \left(E_y^* \frac{dE_y^*}{d\omega} - E_y^{*''} \frac{dE_y}{d\omega} \right) \Big|_0^L - \int_0^L \frac{d}{d\omega} \left(\frac{\mu'}{\mu} E_y' \right) E_y^* dx + \int_0^L \left(\frac{\mu'}{\mu} E_y' \right)^* \frac{dE_y}{d\omega} dx \\ & + \int_0^L \frac{d(\gamma^2)}{d\omega} |E_y|^2 dx + \int_0^L \frac{dE_y}{d\omega} \gamma^2 E_y^* dx - \int_0^L \frac{dE_y}{d\omega} (\gamma^2)^* E_y^* dx \\ & = 0 \end{aligned} \quad (2.135)$$

Zbir prva dva člana gornjeg izraza je, kao što je pokazano u Dodatku D, jednak:

$$\begin{aligned} & \left(E_y^* \frac{dE_y^*}{d\omega} - E_y^{*''} \frac{dE_y}{d\omega} \right) \Big|_0^L \\ & = \left\{ 2j\gamma_0 \left[\frac{1}{2} \frac{d}{d\omega} (|T|^2 + |R|^2) + j\tau_g + j \frac{\text{Im}(R)}{\gamma_0} \frac{d\gamma_0}{d\omega} \right] \right. \\ & \left. + j \frac{d\gamma_0}{d\omega} (|T|^2 + |R|^2 - 1) \right\} |E_0|^2 \xrightarrow{A=1-(|T|^2+|R|^2)} \end{aligned} \quad (2.136)$$

$$\left(E_y^* \frac{dE_y^*}{d\omega} - E_y^{*''} \frac{dE_y}{d\omega} \right) \Big|_0^L = \left[-j \frac{d(\gamma_0 A)}{d\omega} - 2\gamma_0 \tau_g - 2\text{Im}(R) \frac{d\gamma_0}{d\omega} \right] |E_0|^2 \quad (2.137)$$

gde je A apsorpcija EM talasa u barijeri. Zamenom jednačine (2.137) u jednačinu (2.135), dobija se:

$$\begin{aligned} & \left[-j \frac{d(\gamma_0 A)}{d\omega} - 2\gamma_0 \tau_g - 2\text{Im}(R) \frac{d\gamma_0}{d\omega} \right] |E_0|^2 - \int_0^L \frac{d}{d\omega} \left(\frac{\mu'}{\mu} E_y' \right) E_y^* dx \\ & + \int_0^L \left(\frac{\mu'}{\mu} E_y' \right)^* \frac{dE_y}{d\omega} dx + \int_0^L \frac{d(\gamma^2)}{d\omega} |E_y|^2 dx + \int_0^L \frac{dE_y}{d\omega} \gamma^2 E_y^* dx \\ & - \int_0^L \frac{dE_y}{d\omega} (\gamma^2)^* E_y^* dx = 0 \end{aligned} \quad (2.138)$$

Ovde je, iz izraza za apsorpciju (2.104) prvi član pod srednjom zagradom jednak:

$$-j \frac{d(\gamma_0 A)}{d\omega} |E_0|^2 = -j \frac{d}{d\omega} \left[k_0^2 \int_0^L \text{Im}(\varepsilon\mu) |E_y|^2 dx - \int_0^L \text{Im} \left(\frac{\mu'}{\mu} E_y' E_y^* \right) dx \right] \Rightarrow \quad (2.139)$$

$$\begin{aligned}
-j \frac{d(\gamma_0 A)}{d\omega} |E_0|^2 &= \\
&= -j \left\{ \frac{d(k_0^2)}{d\omega} \int_0^L \text{Im}(\varepsilon\mu) |E_y|^2 dx + k_0^2 \int_0^L \frac{d}{d\omega} [\text{Im}(\varepsilon\mu)] |E_y|^2 dx \right\} \\
&- j \left\{ k_0^2 \int_0^L \text{Im}(\varepsilon\mu) E_y \frac{dE_y^*}{d\omega} dx + k_0^2 \int_0^L \text{Im}(\varepsilon\mu) E_y^* \frac{dE_y}{d\omega} dx \right. \\
&\left. - \int_0^L \frac{d}{d\omega} \left[\text{Im} \left(\frac{\mu'}{\mu} E_y' E_y^* \right) \right] dx \right\} \quad (2.140)
\end{aligned}$$

Ubacivanjem izraza (2.140) u izraz (2.138) se dobija:

$$\begin{aligned}
\left[-2\gamma_0 \tau_g - 2\text{Im}(R) \frac{d\gamma_0}{d\omega} \right] |E_0|^2 &= \\
&- j \left\{ \frac{d(k_0^2)}{d\omega} \int_0^L \text{Im}(\varepsilon\mu) |E_y|^2 dx + k_0^2 \int_0^L \frac{d}{d\omega} [\text{Im}(\varepsilon\mu)] |E_y|^2 dx \right\} \\
&- j \left\{ k_0^2 \int_0^L \text{Im}(\varepsilon\mu) E_y \frac{dE_y^*}{d\omega} dx + k_0^2 \int_0^L \text{Im}(\varepsilon\mu) E_y^* \frac{dE_y}{d\omega} dx \right. \\
&\left. - \int_0^L \frac{d}{d\omega} \left[\text{Im} \left(\frac{\mu'}{\mu} E_y' E_y^* \right) \right] dx \right\} + \int_0^L \left(\frac{\mu'}{\mu} E_y' \right)^* \frac{dE_y}{d\omega} dx \\
&- \int_0^L \frac{d}{d\omega} \left(\frac{\mu'}{\mu} E_y' \right) E_y^* dx + \int_0^L \frac{d(\gamma^2)}{d\omega} |E_y|^2 dx + \int_0^L \frac{dE_y}{d\omega} \gamma^2 E_y^* dx \\
&- \int_0^L \frac{dE_y}{d\omega} (\gamma^2)^* E_y^* dx = 0 \quad (2.141)
\end{aligned}$$

Sledi zasebna analiza članova iz prethodnog izraza. Za početak se razmatraju tri člana u crvenoj boji iz prethodnog izraza, obeležena na sledeći način:

$$B = - \int_0^L \frac{d}{d\omega} \left(\frac{\mu'}{\mu} E_y' \right) E_y^* dx \quad (2.142)$$

$$C = \int_0^L \left(\frac{\mu'}{\mu} E_y' \right)^* \frac{dE_y}{d\omega} dx \quad (2.143)$$

$$D = j \int_0^L \frac{d}{d\omega} \left[\text{Im} \left(\frac{\mu'}{\mu} E_y' E_y^* \right) \right] dx \quad (2.144)$$

Zbir ova tri člana je jednak:

$$B + C + D = - \int_0^L \frac{d}{d\omega} \left(\frac{\mu'}{\mu} E_y' \right) E_y^* dx + \int_0^L \left(\frac{\mu'}{\mu} E_y' \right)^* \frac{dE_y}{d\omega} dx + \frac{1}{2} \int_0^L \frac{d}{d\omega} \left[\left(\frac{\mu'}{\mu} E_y' E_y^* \right) - \left(\frac{\mu'}{\mu} E_y' E_y^* \right)^* \right] dx \Rightarrow \quad (2.145)$$

$$B + C + D = - \int_0^L \frac{d}{d\omega} \left(\frac{\mu'}{\mu} E_y' \right) E_y^* dx + \int_0^L \left(\frac{\mu'}{\mu} E_y' \right)^* \frac{dE_y}{d\omega} dx + \frac{1}{2} \int_0^L \frac{d}{d\omega} \left(\frac{\mu'}{\mu} E_y' \right) E_y^* dx + \frac{1}{2} \int_0^L \frac{dE_y^*}{d\omega} \frac{\mu'}{\mu} E_y' dx - \frac{1}{2} \int_0^L \frac{d}{d\omega} \left(\frac{\mu'}{\mu} E_y' \right)^* E_y dx - \frac{1}{2} \int_0^L \frac{dE_y}{d\omega} \left(\frac{\mu'}{\mu} E_y' \right)^* dx \Rightarrow \quad (2.146)$$

$$B + C + D = - \frac{1}{2} \int_0^L \frac{d}{d\omega} \left(\frac{\mu'}{\mu} E_y' \right) E_y^* dx + \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{\mu'}{\mu} E_y' \right)^* \frac{dE_y}{d\omega} dx + \frac{1}{2} \int_0^L \frac{dE_y^*}{d\omega} \frac{\mu'}{\mu} E_y' dx - \frac{1}{2} \int_0^L \frac{d}{d\omega} \left(\frac{\mu'}{\mu} E_y' \right)^* E_y dx \Rightarrow \quad (2.147)$$

$$B + C + D = - \int_0^L \operatorname{Re} \left[\frac{d}{d\omega} \left(\frac{\mu'}{\mu} E_y' \right) E_y^* \right] dx + \int_0^L \operatorname{Re} \left[\frac{dE_y^*}{d\omega} \left(\frac{\mu'}{\mu} E_y' \right) \right] dx \Rightarrow \quad (2.148)$$

$$B + C + D = \int_0^L \operatorname{Re} \left[\frac{dE_y^*}{d\omega} \left(\frac{\mu'}{\mu} E_y' \right) - \frac{d}{d\omega} \left(\frac{\mu'}{\mu} E_y' \right) E_y^* \right] dx \quad (2.149)$$

Kada se gornji izraz zameni u jednačinu (2.141), dobija se:

$$\begin{aligned} & \left[-2\gamma_0 \tau_g - 2\operatorname{Im}(R) \frac{d\gamma_0}{d\omega} \right] |E_0|^2 \\ & - j \left\{ \frac{d(k_0^2)}{d\omega} \int_0^L \operatorname{Im}(\varepsilon\mu) |E_y|^2 dx + k_0^2 \int_0^L \frac{d}{d\omega} [\operatorname{Im}(\varepsilon\mu)] |E_y|^2 dx \right\} \\ & - j \left\{ k_0^2 \int_0^L \operatorname{Im}(\varepsilon\mu) E_y \frac{dE_y^*}{d\omega} dx + k_0^2 \int_0^L \operatorname{Im}(\varepsilon\mu) E_y^* \frac{dE_y}{d\omega} dx \right\} \\ & + \int_0^L \frac{d(\gamma^2)}{d\omega} |E_y|^2 dx + \int_0^L \frac{dE_y}{d\omega} \gamma^2 E_y^* dx - \int_0^L \frac{dE_y}{d\omega} (\gamma^2)^* E_y^* dx \\ & + \int_0^L \operatorname{Re} \left[\frac{dE_y^*}{d\omega} \left(\frac{\mu'}{\mu} E_y' \right) - \frac{d}{d\omega} \left(\frac{\mu'}{\mu} E_y' \right) E_y^* \right] dx = 0 \end{aligned} \quad (2.150)$$

Radi analiziranja svakog člana ponaosob, uvode se sledeće smene:

$$A_1 = -j \frac{d(k_0^2)}{d\omega} \int_0^L \text{Im}(\varepsilon\mu) |E_y|^2 dx \quad (2.151)$$

$$B_1 = -jk_0^2 \int_0^L \frac{d}{d\omega} [\text{Im}(\varepsilon\mu)] |E_y|^2 dx \quad (2.152)$$

$$C_1 = -jk_0^2 \int_0^L \text{Im}(\varepsilon\mu) E_y \frac{dE_y^*}{d\omega} dx \quad (2.153)$$

$$D_1 = -jk_0^2 \int_0^L \text{Im}(\varepsilon\mu) E_y^* \frac{dE_y}{d\omega} dx \quad (2.154)$$

$$E_1 = \int_0^L \frac{dE_y}{d\omega} \gamma^2 E_y^* dx \quad (2.155)$$

$$F_1 = \int_0^L \frac{dE_y}{d\omega} (\gamma^2)^* E_y^* dx \quad (2.156)$$

$$G_1 = \int_0^L \frac{d(\gamma^2)}{d\omega} |E_y|^2 dx \quad (2.157)$$

Kako je $\gamma^2 = \mu\varepsilon k_0^2 - \beta^2$, poslednji član (G_1) može da se razvije u:

$$G_1 = \underbrace{k_0^2 \int_0^L \frac{d(\mu\varepsilon)}{d\omega} |E_y|^2 dx}_X + \underbrace{\frac{dk_0^2}{d\omega} \int_0^L (\mu\varepsilon - \mu_b \varepsilon_b \sin^2 \theta) |E_y|^2 dx}_Y - \underbrace{k_0^2 \sin^2 \theta \int_0^L \frac{d(\mu_b \varepsilon_b)}{d\omega} |E_y|^2 dx}_Z \quad (2.158)$$

Kada se A_1 i B_1 saberu sa Y , odnosno $X - Z$, respektivno, dobija se:

$$A_1 + Y = \frac{dk_0^2}{d\omega} \int_0^L [\text{Re}(\mu\varepsilon) - \mu_b \varepsilon_b \sin^2 \theta] |E_y|^2 dx \quad (2.159)$$

$$B_1 + X - Z = k_0^2 \int_0^L \frac{d}{d\omega} [\text{Re}(\mu\varepsilon) - \mu_b \varepsilon_b \sin^2 \theta] |E_y|^2 dx \quad (2.160)$$

Kako je:

$$\begin{aligned} C_1 + D_1 + E_1 - F_1 &= -jk_0^2 \int_0^L \text{Im}(\varepsilon\mu) E_y \frac{dE_y^*}{d\omega} dx - jk_0^2 \int_0^L \text{Im}(\varepsilon\mu) E_y^* \frac{dE_y}{d\omega} dx \\ &+ 2jk_0^2 \int_0^L \text{Im}(\varepsilon\mu) E_y^* \frac{dE_y}{d\omega} dx \Rightarrow \end{aligned} \quad (2.161)$$

$$C_1 + D_1 + E_1 - F_1 = jk_0^2 \int_0^L \text{Im}(\varepsilon\mu) \left(E_y^* \frac{dE_y}{d\omega} - E_y \frac{dE_y^*}{d\omega} \right) dx \Rightarrow \quad (2.162)$$

$$C_1 + D_1 + E_1 - F_1 = 2k_0^2 \int_0^L \text{Im}(\varepsilon\mu) \text{Im} \left(E_y \frac{dE_y^*}{d\omega} \right) dx \quad (2.163)$$

Ubacivanjem izraza (2.159), (2.160) i (2.163) u jednačinu (2.150), dobija se:

$$\begin{aligned} &\left[-2\gamma_0 \tau_g - 2\text{Im}(R) \frac{d\gamma_0}{d\omega} \right] |E_0|^2 + \int_0^L \text{Re} \left[\frac{dE_y^*}{d\omega} \left(\frac{\mu'}{\mu} E_y' \right) - \frac{d}{d\omega} \left(\frac{\mu'}{\mu} E_y' \right) E_y^* \right] dx \\ &+ \frac{dk_0^2}{d\omega} \int_0^L \frac{\text{Re}(\gamma^2)}{k_0^2} |E_y|^2 dx + k_0^2 \int_0^L \frac{d \left[\text{Re} \left(\frac{\gamma^2}{k_0^2} \right) \right]}{d\omega} |E_y|^2 dx \\ &+ 2k_0^2 \int_0^L \text{Im}(\varepsilon\mu) \text{Im} \left(E_y \frac{dE_y^*}{d\omega} \right) dx = 0 \end{aligned} \quad (2.164)$$

Radi pojednostavljenja gornjeg izraza, uvode se sledeće smene:

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_0^L \text{Re} \left[\frac{dE_y^*}{d\omega} \left(\frac{\mu'}{\mu} E_y' \right) - \frac{d}{d\omega} \left(\frac{\mu'}{\mu} E_y' \right) E_y^* \right] dx \\ &= \text{Re} \left[(\mu - \mu_b) \frac{E_y'}{\mu} \frac{dE_y^*}{d\omega} - \frac{d}{d\omega} \left((\mu - \mu_b) \frac{E_y'}{\mu} \right) E_y^* \right] \Bigg|_0^L \end{aligned} \quad (2.165)$$

$$S_3 = 2k_0^2 \int_0^L \text{Im}(\varepsilon\mu) \text{Im} \left(E_y \frac{dE_y^*}{d\omega} \right) dx \quad (2.166)$$

pa izraz (2.164) postaje:

$$\begin{aligned} &\left[-2\gamma_0 \tau_g - 2\text{Im}(R) \frac{d\gamma_0}{d\omega} \right] |E_0|^2 + \frac{dk_0^2}{d\omega} \int_0^L \frac{\text{Re}(\gamma^2)}{k_0^2} |E_y|^2 dx \\ &+ k_0^2 \int_0^L \frac{d \left[\text{Re} \left(\frac{\gamma^2}{k_0^2} \right) \right]}{d\omega} |E_y|^2 dx + S_2 + S_3 = 0 \end{aligned} \quad (2.167)$$

Razvijanjem članova u crvenoj boji iz gornjeg izraza, lako je pokazati da je:

$$\begin{aligned} \frac{dk_0^2}{d\omega} \int_0^L \frac{\text{Re}(\gamma^2)}{k_0^2} |E_y|^2 dx + k_0^2 \int_0^L \frac{d \left[\frac{\text{Re}(\gamma^2)}{k_0^2} \right]}{d\omega} |E_y|^2 dx \\ = \frac{\omega^2}{c^2} \int_0^L \left(\frac{2 \text{Re}(\gamma^2)}{\omega k_0^2} + \frac{d \left[\frac{\text{Re}(\gamma^2)}{k_0^2} \right]}{d\omega} |E_y|^2 \right) dx \xrightarrow{\gamma = k_0 \sqrt{\mu\epsilon - \mu_b \epsilon_b \sin^2 \theta}} \end{aligned} \quad (2.168)$$

$$\begin{aligned} \frac{dk_0^2}{d\omega} \int_0^L \frac{\text{Re}(\gamma^2)}{k_0^2} |E_y|^2 dx + k_0^2 \int_0^L \frac{d \left[\frac{\text{Re}(\gamma^2)}{k_0^2} \right]}{d\omega} |E_y|^2 dx \\ = \left(\frac{2\omega}{c^2} [\text{Re}(\epsilon_{lin}\mu) - \epsilon_b \mu_b \sin^2 \theta] \right. \\ \left. + \frac{\omega^2 d[\text{Re}(\epsilon_{lin}\mu) - \epsilon_b \mu_b \sin^2 \theta]}{c^2 d\omega} \right) \int_0^L |E_y|^2 dx \\ + \frac{2\omega \text{Re}(\mu)}{c^2} \int_0^L \left(\epsilon_{snl} + \frac{\omega}{2} \frac{d\epsilon_{snl}}{d\omega} \right) |E_y|^2 dx \end{aligned} \quad (2.169)$$

pri čemu su realni (ϵ_{lin}) i imaginarni (ϵ_{snl}) deo permitivnosti definisani u jednačini (2.24). Ubacivanjem izraza (2.169) u izraz (2.167), dobija se:

$$\begin{aligned} \int_0^L |E_y|^2 dx \\ = \frac{\left[2\gamma_0 \tau_g + 2\text{Im}(R) \frac{d\gamma_0}{d\omega} \right] |E_0|^2 - S_2 - S_3}{\frac{2\omega}{c^2} [\text{Re}(\epsilon_{lin}\mu) - \epsilon_b \mu_b \sin^2 \theta] + \frac{\omega^2 d[\text{Re}(\epsilon_{lin}\mu) - \epsilon_b \mu_b \sin^2 \theta]}{c^2 d\omega}} \\ - \frac{\frac{2\omega \text{Re}(\mu)}{c^2} \int_0^L \left(\epsilon_{snl} + \frac{\omega}{2} \frac{d\epsilon_{snl}}{d\omega} \right) |E_y|^2 dx}{\frac{2\omega}{c^2} [\text{Re}(\epsilon_{lin}\mu) - \epsilon_b \mu_b \sin^2 \theta] + \frac{\omega^2 d[\text{Re}(\epsilon_{lin}\mu) - \epsilon_b \mu_b \sin^2 \theta]}{c^2 d\omega}} \end{aligned} \quad (2.170)$$

Na ovom mestu je korisno ponoviti izraz (2.128) za izračunavanje vremena zadržavanja:

$$\begin{aligned} \tau_d = \frac{\omega}{2\gamma_0 c^2 |E_0|^2} \left(\int_0^L \epsilon_{eff} |E_y|^2 dx + \frac{\mu_{eff}}{|\mu|^2} \int_0^L \text{Re}(\mu\epsilon) |E_y|^2 dx \right) - \frac{\mu_{eff}}{\omega |\mu|^2} \text{Im}(R) \\ - \frac{\mu_{eff}}{2\omega |\mu|^2 \gamma_0 |E_0|^2} S_1 \end{aligned} \quad (2.171)$$

Razdvajanjem permitivnosti na linearne i nelinearne članove ($\varepsilon = \varepsilon_{lin} + \varepsilon_{snl}$), te izbacivanjem linearnih članova ispred integrala dobija se:

$$\begin{aligned} \tau_d = \frac{\omega}{2\gamma_0 c^2 |E_0|^2} & \left((\varepsilon\mu)_{eff} \int_0^L |E_y|^2 dx \right. \\ & \left. + \int_0^L \left[\frac{d(\omega\varepsilon_{snl})}{d\omega} + \frac{\mu_{eff}}{|\mu|^2} \operatorname{Re}(\mu)\varepsilon_{snl} \right] |E_y|^2 dx \right) - \frac{\mu_{eff}}{\omega|\mu|^2} \operatorname{Im}(R) \quad (2.172) \\ & - \frac{\mu_{eff}}{2\omega|\mu|^2\gamma_0|E_0|^2} S_1 \end{aligned}$$

$$(\varepsilon\mu)_{eff} = \varepsilon_{efflin} + \mu_{eff} \frac{\operatorname{Re}(\varepsilon_{lin}\mu)}{|\mu|^2} \quad (2.173)$$

pri čemu su ε_{efflin} i μ_{eff} definisani u jednačinama (2.87) i (2.88), respektivno. Konačno, ubacivanjem relacije (2.170) u gornju formulu, dobija se krajnji izraz koji povezuje vreme zadržavanja i grupno kašnjenje [92,93]:

$$\tau_g = \tau_{def} + \tau_{ieff} + \tau_{nl} + \tau_{loss} + \tau_{interface} \quad (2.174)$$

pri čemu je:

$$\tau_{def} = \frac{\tilde{\varepsilon}_{lin}}{(\varepsilon\mu)_{eff}} \tau_d \quad (2.175)$$

$$\tau_{ieff} = \left(\frac{\tilde{\varepsilon}_{lin}}{(\varepsilon\mu)_{eff}} \frac{\mu_{eff}}{\omega|\mu|^2} - \frac{1}{\gamma_0} \frac{d\gamma_0}{d\omega} \right) \operatorname{Im}(R) \quad (2.176)$$

$$\begin{aligned} \tau_{nl} = \frac{\omega \operatorname{Re}(\mu)}{2\gamma_0 c^2} & \int_0^L \tilde{\varepsilon}_{snl} \frac{|E_y|^2}{|E_0|^2} dx \\ & - \frac{\tilde{\varepsilon}_{lin}}{(\varepsilon\mu)_{eff}} \frac{\omega}{2\gamma_0 c^2} \left[\int_0^L \frac{d(\omega\varepsilon_{snl})}{d\omega} \frac{|E_y|^2}{|E_0|^2} dx \right. \\ & \left. + \int_0^L \frac{\mu_{eff}}{|\mu|^2} \operatorname{Re}(\mu)\varepsilon_{snl} \frac{|E_y|^2}{|E_0|^2} dx \right] \quad (2.177) \end{aligned}$$

$$\tau_{loss} = \frac{S_3}{2\gamma_0 |E_0|^2} \quad (2.178)$$

$$\tau_{interface} = \frac{S_2}{2\gamma_0 |E_0|^2} + \frac{\tilde{\varepsilon}_{lin}}{(\varepsilon\mu)_{eff}} \frac{2\mu_{eff} S_1}{\omega|\mu|^2\gamma_0 |E_0|^2} \quad (2.179)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{lin/snl} = 2 \left(\varepsilon_{lin/snl} + \frac{\omega}{2} \frac{d\varepsilon_{lin/snl}}{d\omega} \right) \quad (2.180)$$

Ovde je oznakom τ_{def} obeleženo efektivno vreme zadržavanja, odnosno vreme prolaska EM energije kroz barijeru, τ_{ieff} je efektivno vreme samointerferencije – vreme koje EM talas provede interferirajući sa svojim reflektovanim delom ispred barijere, τ_{nl} je vreme tunelovanja koje je posledica nelinearnosti barijere, τ_{loss} je vreme koje EM talas izgubi usled apsorpcije u barijeri, dok je $\tau_{interface}$ vreme koje EM talas provede transmitujući kroz graničnu površinu između dva materijala različite permeabilnosti (u ovom slučaju, barijere permeabilnosti μ i okolnog talasovoda permeabilnosti μ_b).

Na osnovu izraza (2.174) lako se određuje povezanost između vremena zadržavanja i grupnog kašnjenja u slučaju različitih tipova materijala od kojih je napravljena barijera. Tako, u slučaju da se radi o čistom metamaterijalu, koji predstavlja linearnu disperzivnu apsorptivnu sredinu, važiće da je $\tau_{nl} = 0$, uz sve ostale članove nepromenjene [94,95,96]. Na član τ_{nl} presudno utiče i tip nelinearnosti, pa tako materijali sa, npr. Kerr-ovom nelinearnošću imaju značajno drugačija svojstva pri tunelovanju od materijala koji iskazuju svojstva saturacione nelinearnosti [97,98]. Isto tako, u slučaju neapsorptivnog materijala, važi $\tau_{loss} = 0$, uz napomenu da će sada drugačije vrednosti imati efektivne vrednosti permeabilnosti i permitivnosti, što znači da apsorpcija ima uticaj na sva vremena tunelovanja iz izraza (2.174), za razliku od nelinearnosti koja utiče samo na član τ_{nl} . U slučaju da su i barijera i okolni talasovod napravljeni od nemagnetnih materijala ($\mu = \mu_b = 1$), član $\tau_{interface}$ će biti jednak nuli.

Disperzija, kao i apsorpcija, utiče na vremena tunelovanja preko efektivnih vrednosti permitivnosti i permeabilnosti. Tako, u slučaju nedisperzivne neapsorptivne barijere važi $\tilde{\epsilon}_{lin} = (\epsilon\mu)_{eff} = 2\epsilon_{lin}$ i $\mu_{eff} = \mu$, pa je efektivno vreme zadržavanja jednako vremenu zadržavanja, dok je efektivno vreme samointerferencije jednako vremenu samointerferencije iz jednačine (1.4). U slučaju da se radi i o nemagnetnim linearnim materijalima, dobija se da je grupno kašnjenje jednako zbiru vremena zadržavanja i vremena samointerferencije ($\tau_g = \tau_d + \tau_i$), što je upravo izraz koji je Winful dobio u slučaju iste vrste materijala (jednačina (1.2)), čime se potvrđuje konzistentnost dobijenog modela (2.174).

U nastavku ove glave će biti prikazane zavisnosti različitih parametara vezanih za tunelovanje (vremena zadržavanja, grupnog kašnjenja, apsorpcije) za različite linearne i nelinearne strukture pomenute u prethodna dva pasusa.

2.10 Numerički pristup: *shooting* metoda

Kao što je moguće videti iz jednačina (2.172)–(2.180), ukoliko je poznato električno polje unutar barijere E_y , moguće je izračunati vremena tunelovanja, ali i druge parametre vezane za ovaj fenomen, kao što su apsorpcija, transmisija, refleksija i sl. Električno polje unutar barijere zavisi od parametara upadnog polja, kao što je, npr., njegova jačina E_0 ili ugao θ , kao i od parametara barijere, i izračunava se iz nelinearne diferencijalne

(Helmholtz-ove) jednačine (2.52). Ova jednačina, u opštem slučaju, nema analitičko rešenje, te ju je potrebno rešavati određenim metodama numeričke analize. U ovu svrhu, ovde će biti korišćena *shooting* metoda (metoda pogađanja), na način opisan u nastavku ovog poglavlja.

Pri izračunavanju električnog polja u barijeri *shooting* metodom kreće se od Helmholtz-ove jednačine:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial E_y}{\partial x} + (\mu \mu_0 \cdot \varepsilon \varepsilon_0 \omega^2 - \beta^2) E_y = 0 \quad (2.181)$$

Pod pretpostavkom da je permeabilnost homogena unutar barijere, kao što je i bila za sve analizirane slučajeve u dosadašnjem delu teze, možemo drugi član sa leve strane gornje jednačine izjednačiti sa nulom. Sada se, ubacivanjem izraza (2.24) u jednačinu (2.181), dobija:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + [\mu \cdot (\varepsilon_L + \varepsilon_{lin}) k_0^2 - \beta^2] E_y + k_0^2 \mu \alpha \frac{\frac{|\vec{E}_y|^2}{E_c^2}}{1 + \kappa \frac{|\vec{E}_y|^2}{E_c^2}} E_y = 0 \quad (2.182)$$

Kako bi gornja parcijalna diferencijalna jednačina mogla da bude rešena, potrebno je uzeti u obzir i određene granične uslove. Početni granični uslov predstavljaju vrednosti električnog polja i njegovog prvog izvoda po prostornoj dimenziji x na granici barijere i okolnog talasovoda, a koji proističu iz uslova neprekidnosti ove dve veličine na granici dve sredine sa različitim konsitativnim parametrima:

$$E_y(x=0) = E_0 + E_0(R_r + jR_i) \quad (2.183)$$

$$\left. \frac{dE_y}{dx} \right|_{x=0} = \frac{\mu}{\mu_b} [j\gamma_0 E_0 + j\gamma_0 E_0(R_r + jR_i)] \quad (2.184)$$

pri čemu je $R_r = \text{Re}(R)$ i $R_i = \text{Im}(R)$. Ove dve veličine, realni i imaginarni deo reflektivnosti, predstavljaju varijacione parametre pri rešavanju Helmholtz-ove jednačine. *Shooting* metoda počinje rešavanjem jednačine (2.182) korišćenjem Runge-Kutta metode petog reda za proizvoljne vrednosti R_r i R_i . Nakon ovoga se, za ove vrednosti reflektivnosti, izračunava vrednost električnog polja E_y i njegovog prvog izvoda dE_y/dx na desnom kraju barijere, odnosno u tački $x = L$. Pomoću dobijenih vrednosti polja se izračunava vrednost funkcije:

$$F(R_r, R_i) = \left(\frac{dE_y}{dx} - j\gamma_0 E_y \right) \Big|_{x=L} \quad (2.185)$$

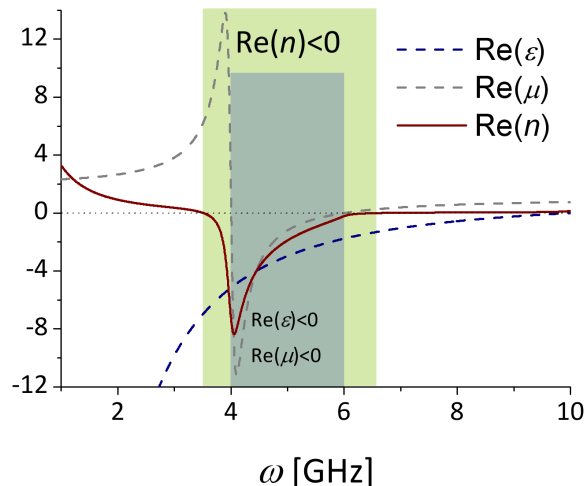
pri čemu je F funkcija realne i imaginarne vrednosti reflektivnosti. Suštinu *shooting* metode predstavlja minimizacija funkcije $F(R_r, R_i)$, varijacijom parametara R_r i R_i , kako bi bio zadovoljen Sommerfeld-ov uslov zračenja [99]:

$$\left(\frac{dE_y}{dx} - j\gamma_0 E_y \right) \Big|_{x=L} = 0 \quad (2.186)$$

Minimizacija funkcije $F(R_r, R_i)$ se vrši pomoću Broyden-ove metode, varijacije Newton-Gauss-ove metode za rešavanje problema minimizacije nelinearnih jednačina [100]. Prikazana kombinacija Broyden-ove i Runge-Kutta metode predstavlja *shooting* metodu, i na ovaj način je moguće izračunati raspodelu električnog polja u barijeri, a usput, pri rešavanju gornjih jednačina, i reflektivnost. Pomoću ove dve veličine lako se dobijaju vrednosti transmisije i apsorpcije i, dalje, vremena tunelovanja, čije izračunavanje i predstavlja cilj ove teze.

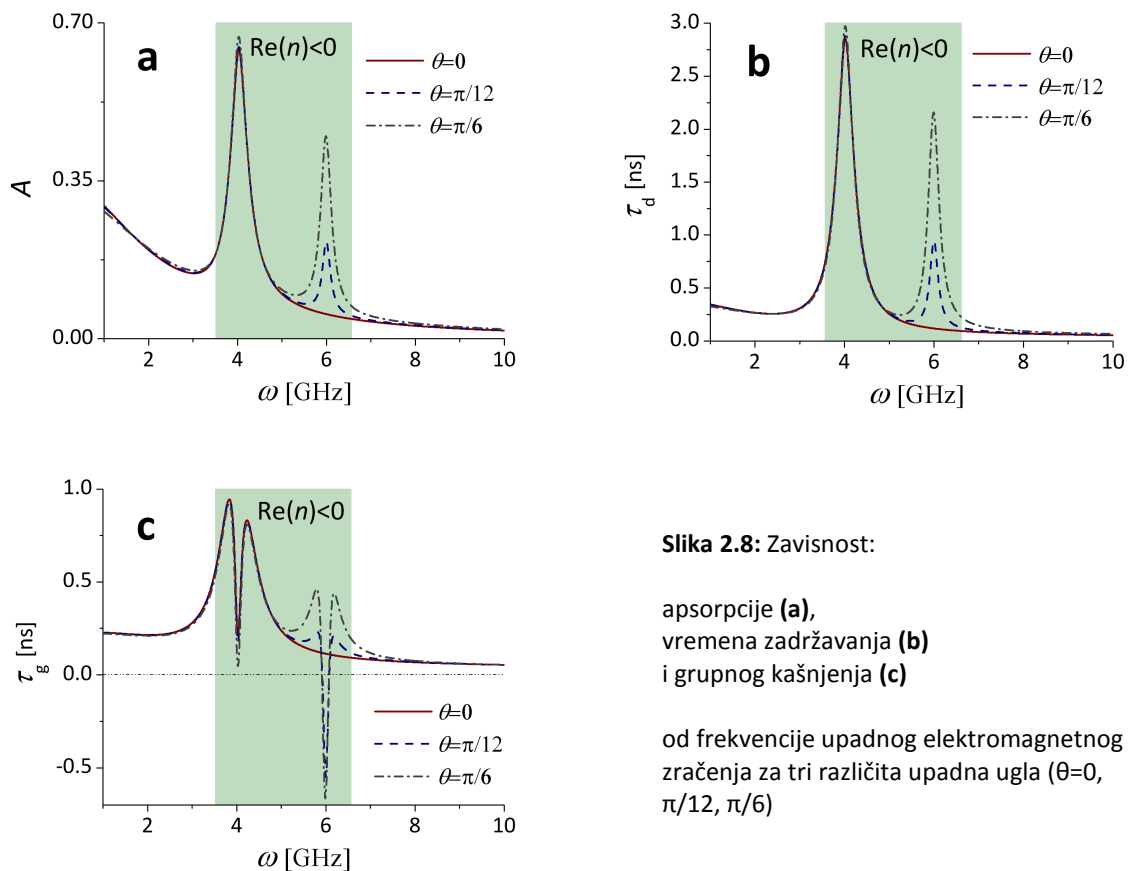
2.11 Numerički rezultati: linearna barijera

U ovom poglavlju će biti prikazani rezultati numeričkih proračuna vremena tunelovanja za različite strukture kojima je zajednička karakteristika linearan odziv materijala (indeks prelamanja ne zavisi od EM polja), kako u okolnom talasovodu, tako i u barijeri. Ispitivanja vremena tunelovanja, radi fenomenološke analize ovog efekta, će biti urađena za sledeće slučajeve: prostiranje ravanskog talasa kroz barijeru napravljenu od metamaterijala koji pokazuje LH osobine u GHz opsegu sa nedisperzivnim talasovodom, kao i u THz opsegu sa disperzivnim talasovodom. Takođe, posmatran je i neapsorptivni metamaterijal sa relativnom permeabilnošću μ jednakom 1 (nemagnetni metamaterijal).



Slika 2.7: Zavisnost realnog dela indeksa prelamanja, permitivnosti i permeabilnosti od frekvencije upadnog EM polja. Svetlozelena oblast predstavlja opseg frekvencija u kom je realni deo indeksa prelamanja negativan, dok oblast osenčena tamnozelenom bojom predstavlja opseg frekvencija u kojima su realni delovi i permitivnosti i permeabilnosti negativni (duplo-negativni metamaterijal)

U prvom slučaju, barijera se nalazi u vazduhu ($\varepsilon_b = \mu_b = 1$), i ima sledeće parametre [87]: $\omega_p = 10$ GHz, $\omega_r = 0$, $\omega_0 = 4$ GHz, $F = 1.25$, $\varepsilon_\infty = 1$, $\Gamma_e = 0.05\omega_p$, $\Gamma_m = 0.05\omega_0$ i $L = 1$ cm. Ovakva barijera ima LH osobine za frekvencije upadnog zračenja $3.52\text{GHz} \leq \omega \leq 6.57\text{GHz}$ (Slika 2.7). Na Slici 2.8 [94,95,96] su prikazane zavisnosti vremena zadržavanja, grupnog kašnjenja i apsorpcije od frekvencije upadnog zračenja za tri različita upadna ugla. Upadni uglovi veći od $\pi/6$ dovode do Goos-Hänchen-ov pomeraja [101], koji će biti razmatran u sledećoj glavi. Očigledno je da apsorpcija i vreme zadržavanja imaju slične profile, za razliku od grupnog kašnjenja. I vreme zadržavanja i apsorpcija imaju lokalne maksimume na graničnim frekvencijama opsega u kom je barijera duplo-negativna (ima negativne realne delove permitivnosti i permeabilnosti – Slika 2.7). S druge strane, grupno kašnjenje ima lokalne minimume na ovim frekvencijama, i čak postaje negativno u nekim slučajevima. Za nulti upadni ugao ($\theta = 0$), pik na frekvenciji $\omega = 6$ GHz nestaje za sve tri veličine, dok pik na frekvenciji ω_0 ostaje.



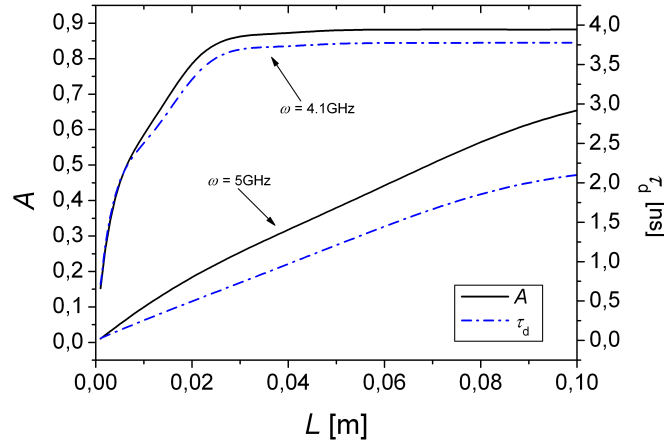
Slika 2.8: Zavisnost:

apsorpcije (a),
vremena zadržavanja (b)
i grupnog kašnjenja (c)

od frekvencije upadnog elektromagnetnog
zračenja za tri različita upadna ugla ($\theta=0$,
 $\pi/12$, $\pi/6$)

Slika 2.9 [95,96] prikazuje vreme zadržavanja i apsorpciju u funkciji širine barijere za dve različite frekvencije upadnog zračenja. Očigledno je da ove dve veličine saturiraju sa povećanjem L . Ovaj fenomen, nazvan Hartman-ov efekat [45,102] je objašnjen preko

saturacije elektromagnetne energije u barijeri sa povećanjem širine barijere [48]. Kako je vreme zadržavanja proporcionalno ovoj energiji, ono će, takođe, saturirati sa povećanjem L .

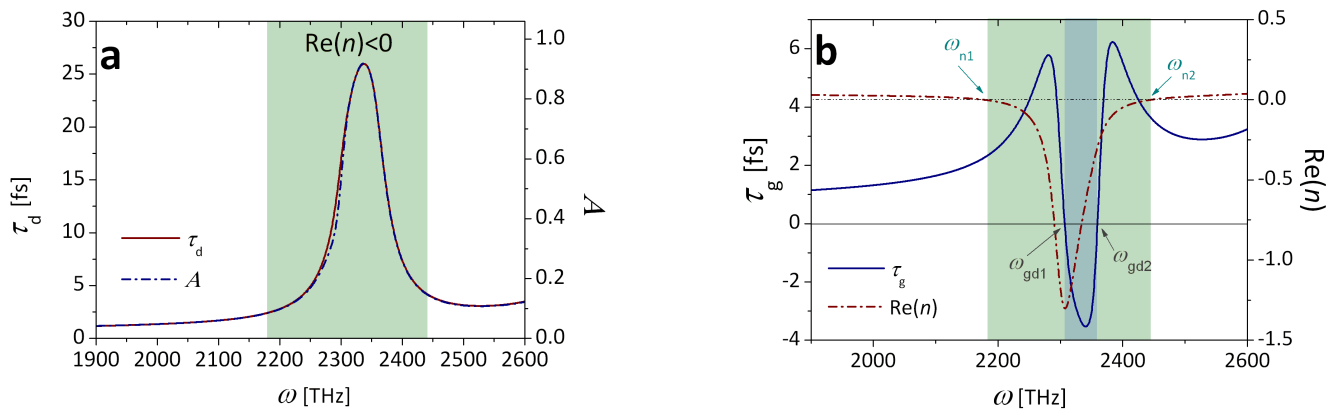


Slika 2.9: Zavisnost vremena zadržavanja i apsorpcije od širine barijere za dve različite frekvencije upadnog zračenja za koje barijera iskazuje LH svojstva ($\omega=4.1\text{GHz}$ and $\omega=5\text{GHz}$)

Sledeći slučaj se bavi propagacijom TE modova kroz barijeru napravljenu od materijala koji ima LH osobine u optičkom opsegu i okružen je disperzivnim talasovodom. Parametri ovog materijala su [103]: $\omega_p = 2700$ THz, $\omega_r = 0$, $\omega_0 = 2300$ THz, $F = 0.052$, $\epsilon_\infty = 3.1$, $\Gamma_e = 35$ THz, $\Gamma_m = 35$ THz i $L = 1$ μm . Jezgro talasovoda je napravljeno od SiO_2 , koji je, takođe, transparentan u ovom opsegu. Njegova relativna permitivnost data je Sellmeier-ovom formulom [104]:

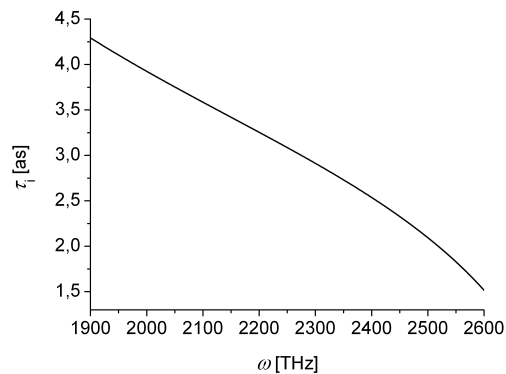
$$\epsilon_b = 1 + \frac{0.6961663 \cdot \lambda^2}{\lambda^2 - 0.0046791} + \frac{0.4079426 \cdot \lambda^2}{\lambda^2 - 0.0135121} + \frac{0.8974794 \cdot \lambda^2}{\lambda^2 - 97.9340025} \quad (2.187)$$

gde je λ talasna dužina upadnog zračenja u vakuumu izražena u mikrometrima, a relativna permeabilnost μ_b je jednaka 1. Barijera je dvostruko negativna za opseg talasnih dužina između 768nm i 864nm ($2180 \text{ THz} \leq \omega \leq 2450 \text{ THz}$). Sa Slike 2.10a [94,95,96] se vidi da vreme zadržavanja i apsorpcija imaju sličnu zavisnost od frekvencije upadnog zračenja u ovom opsegu. Zavisnosti grupnog kašnjenja i realnog dela indeksa prelamanja od frekvencije upadnog zračenja, prikazane su na Slici 2.10b [94,95,96]. Sa slike je očigledno da grupno kašnjenje ima negativnu vrednost u opsegu u kom je i indeks prelamanja materijala negativan. Odatle sledi da su i grupna brzina i fazna brzina negativne. Ovo znači da pik izlaznog EM talasa ima negativno kašnjenje takvo da će se on pojaviti pre pika ulaznog talasa.



Slika 2.10: Zavisnost apsorpcije, vremena zadržavanja (a), grupnog kašnjenja i realnog dela indeksa prelamanja (b) od frekvencije upadnog EM zračenja za barijeru koja ju karakteriše negativan realni deo indeksa prelamanja u vidljivom delu optičkog spektra. Oblast osenčena svetlozelenom bojom predstavlja opseg negativnog indeksa prelamanja, dok je oblast osenčena tamnozelenom bojom opseg negativnog grupnog kašnjenja

Takođe je očigledno da grupno kašnjenje menja svoj znak iz pozitivnog u negativan na frekvenciji ω_{gd1} , koja je viša od frekvencije ω_{n1} , pri kojoj realni deo indeksa prelamanja menja svoj znak iz pozitivnog u negativan. Slično, grupno kašnjenje menja svoj znak iz negativnog u pozitivan na frekvenciji ω_{gd2} , koja je niža od frekvencije ω_{n2} , pri kojoj realni deo indeksa prelamanja postaje ponovo pozitivan. Ovo dovodi do zaključka da u opsegu frekvencija $(\omega_{n1}, \omega_{gd1})$ i $(\omega_{gd2}, \omega_{n2})$ grupna brzina ima pozitivnu vrednost, dok fazna brzina ostaje negativna, tj. u ovim oblastima postoji propagacija talasa unazad. U ostalim oblastima obe brzine, i grupna i fazna, imaju pozitivnu vrednost.



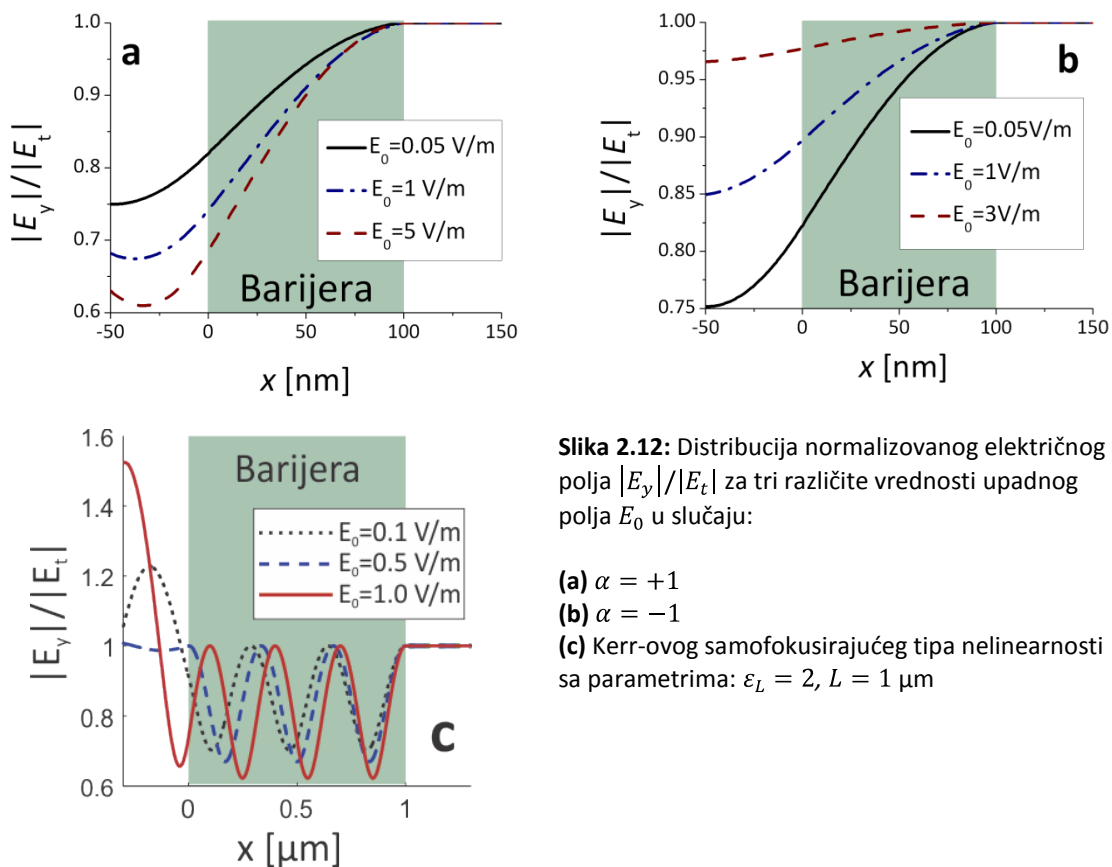
Slika 2.11: Zavisnost vremena samointerferencije od frekvencije upadnog zračenja

U poslednjem slučaju se posmatra barijera od nemagnetnog metamaterijala bez gubitaka ($\mu = 1, \Gamma_e = 0, \Gamma_m = 0$). Upadni EM talas i parametri barijere su isti kao u prethodnom slučaju, izuzev pozadinske dielektrične konstante, koja je u ovom slučaju jednaka jedinici. Barijera se takođe nalazi unutar disperzivnog talasovoda jezgra napravljenog od SiO_2 . Kao što je Winful napomenuo, u ovom slučaju će doći do pojave

vremena samointerferencije. Zavisnost ovog vremena od frekvencije upadnog zračenja je prikazana na Slici 2.11 [94,95,96]. U poređenju sa vremenom zadržavanja i grupnim kašnjenjem, vreme samointerferencije je relativno malo ($\tau_i \sim 10^{-3} \tau_d$), te se može zaključiti da interferencija EM talasa sa svojim reflektovanim delom ima mali uticaj na tunelovanje.

2.12 Numerički rezultati: nelinearna nedisperzivna i neapsorptivna barijera

U ovom poglavlju, razmatran je slučaj tunelovanja EM talasa kroz nedisperzivnu neapsorptivnu barijeru sa saturacionim tipom nelinearnosti postavljenu unutar vakuuma. Numerički su izračunate i prikazane vrednosti veličina τ_d , τ_g , E_y i $|T|$ za različite vrednosti upadnog polja E_0 , pri čemu je, u svim rezultatima, podrazumevan upadni ugao $\theta = 10^\circ$. Svi rezultati su upoređeni sa rezultatima dobijenim za materijal sa kubnom (Kerr-ovom) nelinearnošću [97]. Parametri materijala od kojeg je sačinjena barijera su: $E_c = 1 \text{ V/m}$, $\kappa = 1$ i $L = 100 \text{ nm}$.



Slika 2.12: Distribucija normalizovanog električnog polja $|E_y|/|E_t|$ za tri različite vrednosti upadnog polja E_0 u slučaju:

(a) $\alpha = +1$

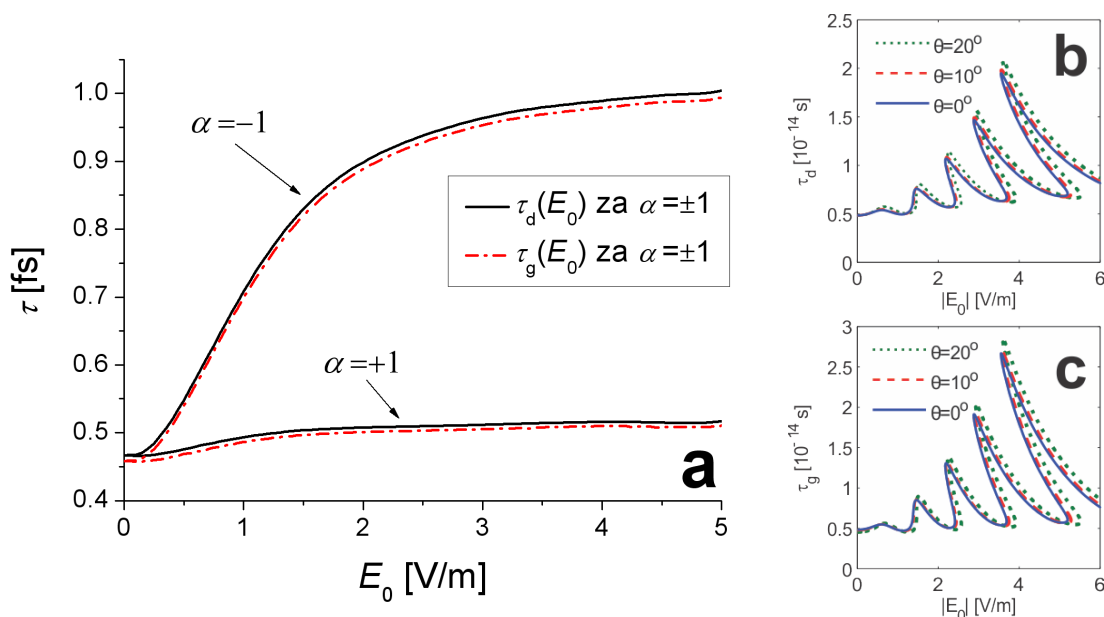
(b) $\alpha = -1$

(c) Kerr-ovog samofokusirajućeg tipa nelinearnosti sa parametrima: $\varepsilon_L = 2$, $L = 1 \mu\text{m}$

U prvom slučaju, posmatra se barijera sačinjena od samofokusirajućeg nelinearnog materijala, tj. $\alpha = 1$. Na Slici 2.12a prikazana je raspodela amplitude električnog polja $|E_y|/|E_t|$ (E_t je transmitovani deo električnog polja) malo ispred, duž cele i malo iza barijere za tri različite vrednosti upadnog polja E_0 , tj. za $E_0 = 0.05$ V/m, $E_0 = 1$ V/m i $E_0 = 5$ V/m. Očigledno je da polje unutar barijere saturira za sve vrednosti upadnog polja.

U sledećem slučaju, posmatra se veza između istih veličina kao u prethodnom, ali za barijeru napravljenu od samodefokusirajućeg nelinearnog materijala, tj. $\alpha = -1$. Kao što se vidi sa Slici 2.12b, dobijaju se slični oblici krivih, samo što se ovde vrednost veličine $|E_y|/|E_t|$ povećava sa povećanjem upadnog polja E_0 , obrnuto od slučaja sa samofokusirajućim nelinearnim materijalom.

Radi poređenja, prikazana je i raspodela polja unutar barijere napravljene od materijala sa Kerr-ovim samofokusirajućim tipom nelinearnosti (Slika 2.12c). Očigledno je da, u ovom slučaju, jačina polja ne saturira ka nekoj vrednosti, već je periodična funkcija rastojanja unutar barijere. [97]



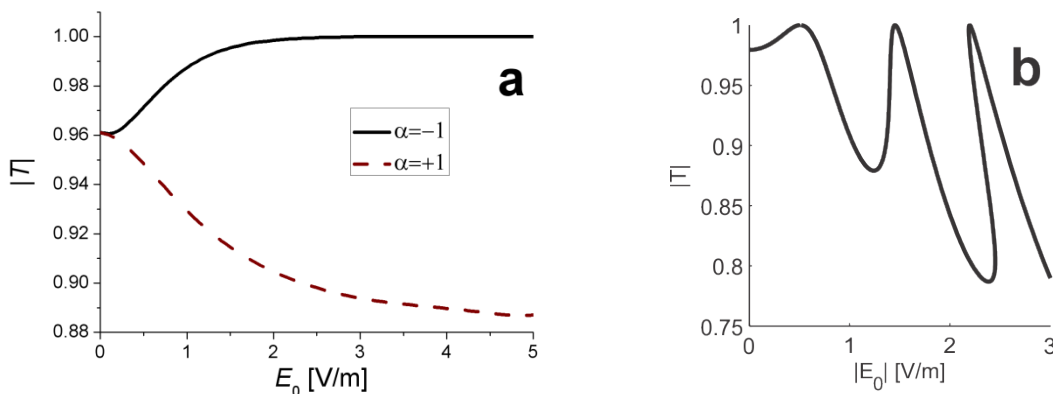
Slika 2.13: (a) Zavisnost vremena zadržavanja i grupnog kašnjenja od upadnog polja E_0 za $\alpha = \pm 1$. Zavisnost (b) vremena zadržavanja i (c) grupnog kašnjenja od upadnog polja E_0 za materijal sa Kerr-ovim tipom nelinearnosti sa parametrima: $\alpha = 1$, $\varepsilon_L = 2$, $L = 1$ μm . Očigledno je da je, pod uticajem Kerr-ove nelinearnosti, za jednu vrednost jačine upadnog polja moguće dobiti više (do tri) rešenja za vreme zadržavanja i grupno kašnjenje

Komparativne zavisnosti vremena zadržavanja i grupnog kašnjenja od upadnog polja E_0 , za samofokusirajuću i samodefokusirajuću sredinu, su prikazane na Slici 2.13a. Kao što se vidi sa slike, za isti tip sredine, ova dva vremena imaju različite, ali veoma bliske vrednosti. Razlika između njih je posledica postojanja vremena τ_{nl} , koje je direktna

posledica nelinearnosti unutar materijala. U našem slučaju, uticaj ovog vremena na vreme zadržavanja i grupno kašnjenje je relativno mali. Takođe, u slučaju normalne incidencije, tj. kada je $\theta = 0^\circ$, $\tau_{nl} = 0$, pa vreme zadržavanja postaje jednako grupnom kašnjenju. Takođe, kao što se vidi sa Slike 2.13a, vreme zadržavanja i grupno kašnjenje imaju manje vrednosti za samofokusirajuću nego za samodefokusirajuću sredinu.

Kada se ovi rezultati uporede sa onima dobijenim za kubnu (Kerr-ovu) nelinearnost (Slika 2.13b,c) [97], vidi se da se, za male upadne snage, vremena tunelovanja poklapaju za obe vrste materijala. Ovo je posledica toga da se, za male upadne snage, izraz za permitivnost materijala sa saturacionom nelinearnošću svodi na izraz za permitivnost materijala sa kubnom nelinearnošću.

Na kraju, izračunata je i zavisnost transmitivnosti kroz barijeru od upadnog polja (Slika 2.14a). U slučaju samofokusirajućeg materijala, kao što se vidi, $|T|$, sa povećanjem upadnog polja, saturira ka vrednosti bliskoj jedinici, pa barijera postaje praktično totalno transparentna za EM talase. U slučaju samodefokusirajuće sredine, transmitivnost kreće sa iste tačke, za veoma slabo upadno polje, ali dalje opada sa porastom jačine upadnog polja, te saturira ka vrednosti od oko 0.88. Ovi rezultati se, pogotovu oni za samodefokusirajuću sredinu, takođe mogu uporediti sa onima dobijenim za materijal sa kubnom nelinearnošću u [97], prikazanim na Slici 2.14b. Opet se poklapaju vrednosti za mala upadna polja, pri čemu, za veće jačine polja, kriva transmitivnosti za samodefokusirajuću sredinu prati oblik gornjih pikova sa krive transmitivnosti sredine sa kubnom nelinearnošću. Ovaj zaključak se može izvesti i za vremena tunelovanja, s tom razlikom da, kod njih, rezultati vezani za saturacionu nelinearnost prate donje pikove krivih vezanih za kubnu nelinearnost.



Slika 2.14: Zavisnost transmitivnosti od upadnog polja E_0 za materijal sa **(a)** saturacionim tipom nelinearnosti: $\alpha = \pm 1$; **(b)** Kerr-ovim tipom nelinearnosti sa parametrima $\alpha = 1$, $\epsilon_L = 2$, $L = 1 \mu\text{m}$. Kao i kod vremena tunelovanja, pod uticajem Kerr-ove nelinearnosti je, za jednu vrednost jačine upadnog polja moguće dobiti više (do tri) rešenja za transmitivnost

2.13 Numerički rezultati: nelinearna disperzivna apsorptivna barijera

U prethodna dva poglavlja je analizirano tunelovanje kroz barijere napravljene od linearnih disperzivnih apsorptivnih materijala, kao i od nelinearnih nedisperzivnih neapsorptivnih materijala. Sada se kombinuju ova dva slučaja kako bi se dobio opšti model izotropne sredine – nelinearna disperzivna apsorptivna barijera.

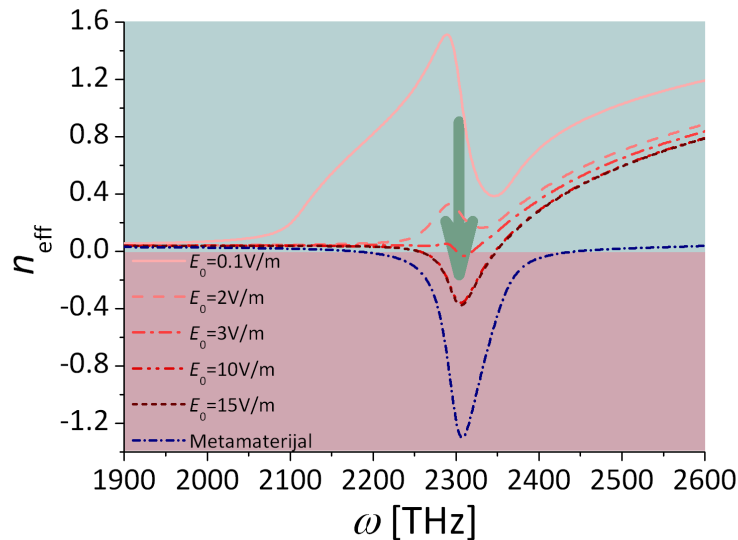
U celom poglavlju će važiti pretpostavka da se barijera nalazi u vakuumu ($\varepsilon_b, \mu_b = 1$). Takođe, za efektivni indeks prelamanja barijere uzima se vrednost:

$$n_{eff} = \frac{Re \left[\int_0^L n(x) dx \right]}{L} \quad (2.188)$$

Barijera je sastavljena od metamaterijala postavljenog unutar nelinearnog materijala, tako da su joj konstitutivni parametri definisani jednačinama (2.24) i (2.25). Parametri metamaterijala, ali i nelinearnog materijala, su odabirani tako da se izračunaju vrednosti vremena tunelovanja i efektivnog indeksa prelamanja barijere kada su svojstva nelinearnosti i LH ponašanja najizraženija, ali isto tako i da opisuju realistične, postojeće, materijale. Biće upoređena dva slučaja: kada je metamaterijal umočen u materijal koji iskazuje svojstva saturacione, i u materijal koji iskazuje svojstva Kerr-ove nelinearnosti. Kerr-ova nelinearnost je, kao što je već rečeno, opisana istim modelom kao i saturaciona, s tim što je kod nje koeficijent saturacije κ iz izraza (2.24) jednak nuli.

Parametri posmatrane strukture su [92]: $\omega_p = 2700$ THz, $\omega_r = 0$, $\omega_0 = 2300$ THz, $F = 0.052$, $\varepsilon_\infty = 3.1$, $\Gamma_e = 35$ THz, $\Gamma_m = 35$ THz, $E_c = 1$ V/m, $\varepsilon_L = 2$ i $L = 100$ nm. Upadni EM talas pada na barijeru pod uglom $\theta = \pi/6$. Metamaterijal u vakuumu (neumočen u nelinearni dielektrik) sa identičnim parametrima ima negativan indeks prelamanja u frekventnom domenu 2178 THz $\leq \omega \leq 2445$ THz (Slika 2.15). Ipak, uzimajući u obzir i vrednost ε_L , indeks prelamanja postaje pozitivan za sve frekvencije upadnog zračenja. Stavljanjem metamaterijala u sredinu sa defokusirajućom saturacionom nelinearnošću ($\alpha = -1$, $\kappa = 1$), moguće je menjati indeks prelamanja ove strukture promenom jačine upadnog EM zračenja. Za male vrednosti E_0 , promena indeksa prelamanja u odnosu na linearan slučaj je zanemarljiva, jer je nelinearni član permitivnosti pri slabim poljima daleko manji od njegovog linearnog člana (jednačina (2.24)). Ipak, rast jačine upadnog polja dovodi do naglog rasta nelinearnog dela dielektrične konstante, dovodeći do pada efektivnog indeksa prelamanja usled samodefokusirajućeg svojstva nelinearnog dielektrika. Ukoliko se nastavi sa povećanjem jačine upadnog zračenja, u jednom trenutku, kada E_0 dostigne vrednost od oko 3 V/m, efektivni indeks prelamanja postaje negativan za određeni opseg frekvencija. Dalje pojačanje upadnog zračenja dovodi do proširenja opsega frekvencija u kom efektivni indeks prelamanja ima negativnu vrednost. Kada upadno zračenje dostigne jačinu od

oko 10 V/m, nelinearni član permitivnosti ulazi u saturaciju, te dalje pojačanje upadnog polja ne dovodi do značajnije promene vrednosti efektivnog indeksa prelamanja. Stoga, ova struktura omogućava menjanje njenih bazičnih svojstava, kao što su “levorukost” ili “desnorukost”, samo promenom jačine upadnog zračenja.

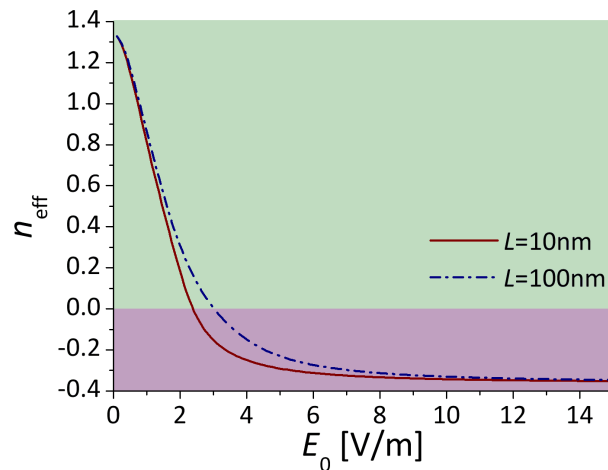


Slika 2.15: Zavisnost efektivnog indeksa prelamanja od frekvencije upadnog zračenja. Strela označava promenu indeksa prelamanja sa povećanjem snage upadnog zračenja u strukturi sastavljenoj od metamaterijala postavljenog u saturaciono nelinearni samodefokusirajući dielektrik

S druge strane, u analognom slučaju materijala sa samodefokusirajućom saturacionom nelinearnošću ($\alpha = 1$), efektivni indeks prelamanja raste sa povećanjem jačine upadnog zračenja do neke vrednosti, nakon čega ulazi u saturaciju. Drugim rečima, samodefokusirajuće sredine ne mogu iskazivati svojstva negativnog indeksa prelamanja, te nisu od interesovanja za ovu analizu.

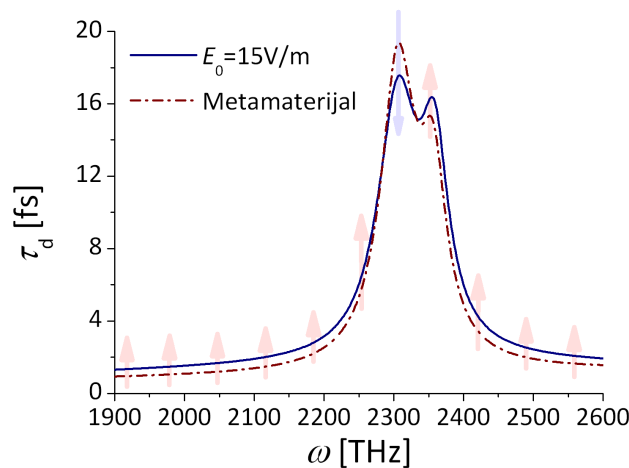
Efekat promene indeksa prelamanja sa promenom jačine upadnog zračenja je jasnije vidljiv na Slici 2.16. Na ovoj slici su prikazane zavisnosti efektivnih vrednosti indeksa prelamanja od jačine upadnog zračenja za dve različite širine barijere, pri frekvenciji upadnog talasa $\omega = 2300$ THz. Za male vrednosti upadnog polja, indeks prelamanja ne zavisi od vrednosti L , jer permitivnost i permeabilnost u ovom, linearnom, slučaju nisu funkcije električnog polja u barijeri $E_y(x)$, pa tako i ne zavise od koordinate x u barijeri. S druge strane, ukoliko upadno polje ima visoku vrednost ($E_0 \geq 10$ V/m), nelinearni član permitivnosti ne zavisi od jačine polja u barijeri $E_y(x)$ ($\epsilon_{snl} \approx \epsilon_L - 1$), te ni od prostorne koordinate x , odnosno širine barijere L . Iz ovoga se može zaključiti da indeks prelamanja ne zavisi od širine barijere za niske ili visoke vrednosti upadnog polja. Ipak, između ova dva ekstrema, odnosno kada je $2 \text{ V/m} \leq E_0 \leq 10 \text{ V/m}$, saturacioni deo dielektrične permitivnosti jako zavisi od $E_y(x)$, a time i od L . Zavisnost ϵ_{snl} od L utiče na to da efektivni indeks prelamanja poseduje zavisnost od širine barijere na način prikazan na

Slici 2.16, odnosno da je za niže vrednosti širine barijere potrebna manja upadna snaga da bi se postigao negativni indeks prelamanja.



Slika 2.16: Zavisnost efektivnog indeksa prelamanja od jačine upadnog polja

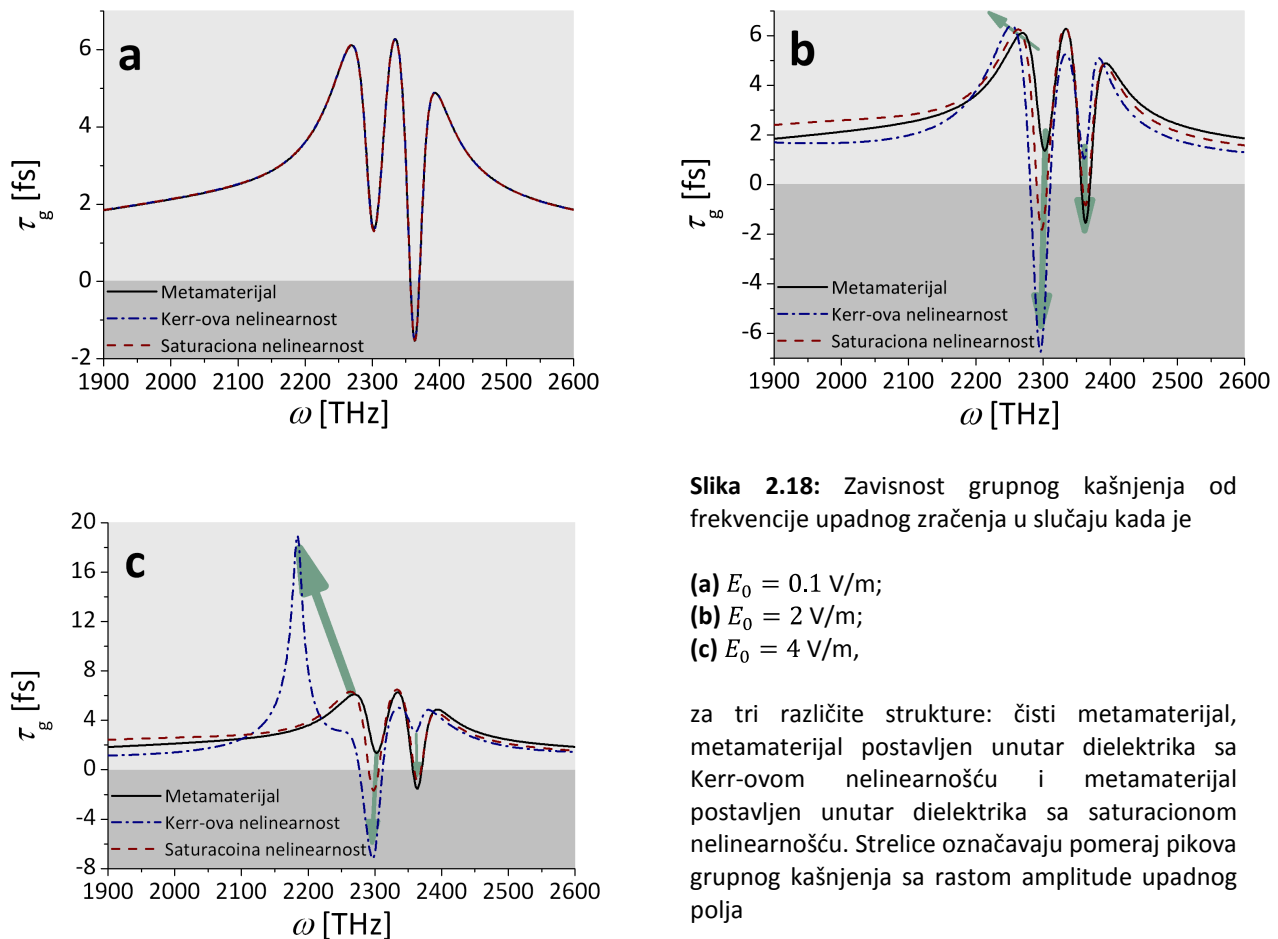
Što se tiče izgleda zavisnosti efektivnog indeksa prelamanja od E_0 , za navedeni opseg jačine upadnog polja ($2 \text{ V/m} \leq E_0 \leq 10 \text{ V/m}$), nelinearni član permitivnosti poseduje jaku zavisnost od E_0 , što se prenosi i na n_{eff} : u ovom opsegu, efektivni indeks opada sa vrednosti 0.4 za $E_0 = 2 \text{ V/m}$ na -0.35 za $E_0 = 10 \text{ V/m}$.



Slika 2.17: Vreme zadržavanja kao funkcija frekvencije upadnog zračenja za dve različite strukture: čisti metamaterijal i metamaterijal postavljen unutar dielektrika sa saturacionom nelinearnošću. Strelice označavaju smer kretanja (povećanje ili smanjenje) vremena zadržavanja sa uvođenjem nelinearnosti

Zavisnost vremena zadržavanja od frekvencije upadnog zračenja prikazan je na Slici 2.17. Na ovoj slici je dat uporedni prikaz vremena zadržavanja za slučaj čistog metamaterijala i slučaj metamaterijala postavljenog unutar nelinearnog dielektrika, za upadnu snagu veću od saturacione vrednosti ($E_0 > 10 \text{ V/m}$). Sa slike se vidi da se vreme zadržavanja,

za skoro sve frekvencije upadnog zračenja koje su od interesa, povećava postavljanjem metamaterijala u nelinearni dielektrik. Ipak, u okolini granične frekvencije u kojoj indeks prelamanja postaje negativan, vreme zadržavanja je smanjeno pod uticajem nelinearnosti. Isto tako, u okolini druge granične vrednosti frekventnog opsega negativnog indeksa prelamanja, moguće je uočiti lokalni maksimum vremena zadržavanja, koji je posledica nenultog upadnog ugla, te koji je povećan pod uticajem nelinearnog dielektrika. Apsorpciju karakteriše vrlo sličan oblik zavisnosti od ω kao i τ_d . Takođe, ponašanje ove dve veličine (vremena zadržavanja i apsorpcije) je u skladu sa Hartman-ovim efektom, tj. obe saturiraju sa povećanjem širine barijere.



Na Slici 2.18 su prikazane zavisnosti grupnog kašnjenja od frekvencije upadnog zračenja za različite upadne snage sledeće tri strukture: čist metamaterijal, metamaterijal postavljen u dielektrik sa Kerr-ovom nelinearnošću i metamaterijal postavljen u dielektrik sa saturacionom nelinearnošću. Za niske upadne snage ($E_0 = 0.1$ V/m, Slika 2.18a), grupno kašnjenje je jednako za sve tri strukture, jer je nelinearni član ϵ_{snl} , i za materijal sa Kerr-ovom i za materijal sa saturacionom nelinearnošću, zanemarljivo mali u poređenju sa linearnim članom ϵ_{lin} , koji je jednak permitivnosti čistog metamaterijala. Sa povećanjem amplitude upadnog polja ($E_0 = 2$ V/m, Slika 2.18b), grupno kašnjenje se

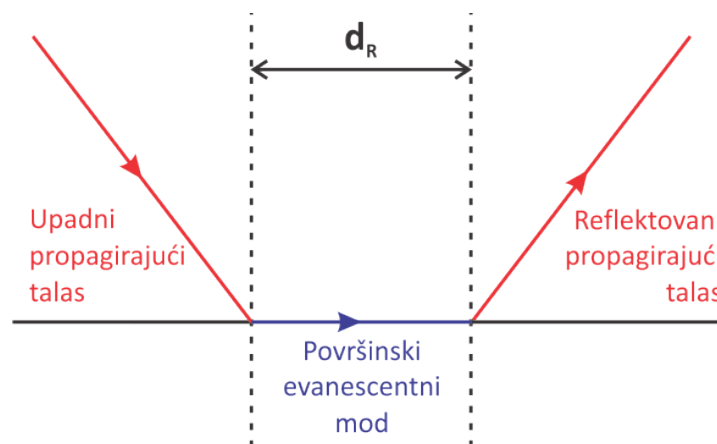
smanjuje, pa čak postaje i negativno na prvom lokalnom minimumu, koji korespondira sa rezonantnom frekvencijom magnetnih dipola ω_0 . Takođe, sa povećanjem upadne snage se povećava i prvi lokalni maksimum, koji, pored toga, doživljava i pomeraj ka nižim frekvencijama. Takođe, u nelinearnim materijalima se povećava i drugi lokalni minimum, koji je posledica nenultog upadnog ugla, i, za Kerr-ovu nelinearnost čak postaje pozitivan. Ovo implicira da je, u ovakvim strukturama, na određenim frekvencijama moguće manipulirati smerom propagacije talasa promenom amplitude upadnog zračenja. Daljim povećanjem upadnog polja ($E_0 = 4$ V/m, Slika 2.18c), kod strukture sa Kerr-ovom nelinearnošću prvi lokalni minimum grupnog kašnjenja se dodatno smanjuje, dok se prvi lokalni maksimum povećava do tri puta veće vrednosti u odnosu na slučaj kada je $E_0 = 2$ V/m i pomera na 100 THz nižu frekvenciju. S druge strane, struktura sa saturacionom nelinearnošću ulazi u saturaciju, te kod nje grupno kašnjenje nema bitno drugačije vrednosti u odnosu na $E_0 = 2$ V/m.

3 UTICAJ GOOS-HÄNCHEN-OVOG POMERAJA NA VREMENA TUNELOVANJA

U prethodnoj glavi izvedene su relacije za vremena tunelovanja u slučaju prolaska talasa kroz veoma kompleksnu strukturu, koju karakterišu nelinearnost, apsorpcija i disperzija. Ovo znači da se model prikazan u toj glavi može primeniti na veliku većinu, kako veštačkih, tako i materijala prisutnih u prirodi. Ipak, u prikazanoj analizi je izostavljen jedan značajan efekat koji se javlja kod svih linearno polarizovanih EM talasa – Goos-Hänchen-ov pomeraj, kao i njegov analogon u slučaju kružne ili eliptične polarizacije – Imbert-Fedorov-ov pomeraj. Kako su ova dva pomeraja analogna, a i kako je u ovoj tezi razmatrana samo linearna polarizacija, ovde će biti analiziran samo uticaj Goos-Hänchen-ovog pomeraja.

3.1 Goos-Hänchen-ov pomeraj

Još 1718. godine, Isaac Newton je pokazao da će reflektovani deo zraka svetlosti, koji, krećući se optički gušćom sredinom, nailazi na ravnu površinu sa optički ređom sredinom, biti pomeren “unapred” za distancu d_R u odnosu na upadni zrak, ukoliko je zadovoljen uslov totalne refleksije (Slika 3.1) [105]. Tek 230 godina kasnije, Herman Fritz Gustav Goos i Hilda Hänchen uspeli su prvi put da izmere ovaj pomeraj reflektovanog u odnosu na upadni zrak [106,107], dok su Artmann i Fragstein u narednim godinama uspeli da izvedu analitičke izraze za merenje ovog pomeraja [108,109,110]*, sada poznatijeg po nazivu Goos-Hänchen-ov pomeraj.



Slika 3.1: Šematski prikaz Goos-Hänchen-ovog pomeraja pri totalnoj unutrašnjoj refleksiji

* Reference na nemačkom jeziku su preuzete iz članka [110]

Goos-Hänchen-ov efekat (pomeraj) je optički fenomen po kome linearno polarizovana svetlost biva lateralno pomeren za veoma malu distancu, uporedivu sa talasnom dužinom svetlosti, kada je totalno reflektovana o površinu dva dielektrika. Ovaj pomeraj je, kao što je pokazano [111], posledica rešavanja Fresnel-ovih jednačina, i može najjednostavnije biti objašnjen preko površinskih modova koji se javljaju pri totalnoj unutrašnjoj refleksiji. Naime, kada elektromagnetni talas naiđe, iz optički gušće, na optički ređu sredinu, ceo talas se ne reflektuje o samu površinu, kao što je aproksimovano u geometrijskoj optici, već prodire u optički ređu sredinu. U tom trenutku, do tada propagirajući talas, postaje evanescentni, koji se kreće duž površine dva dielektrika. Nakon nekog, vrlo kratkog vremena, evanescentni talas se vraća u optički gušću sredinu, ponovo postaje propagirajući talas koji se kreće u pravcu i smeru reflektovanog talasa. Reflektovani talas je pomeren u odnosu na upadni talas za dužinu "propagacije" površinskih modova, a upravo taj pomeraj je Goos-Hänchen-ov pomeraj (Slika 3.1).

Goos-Hänchen-ov pomeraj je, kao što je prvi pokazao Artmann, proporcionalan promeni faze talasa prilikom kretanja u optički ređoj sredini, odnosno jednak [108,112]:

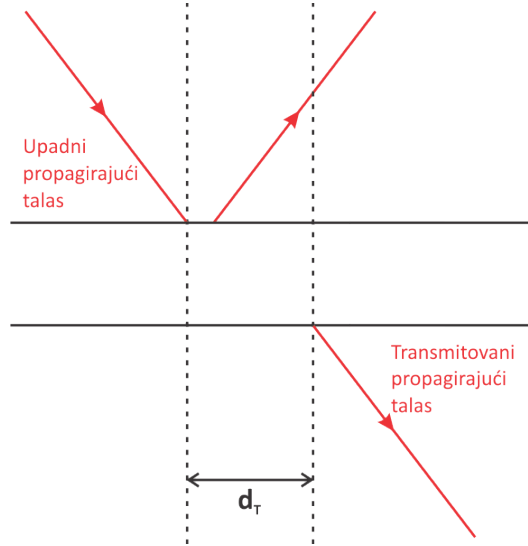
$$d_{R\parallel} = -\frac{d\varphi_{R\parallel}}{d\kappa} \quad d_{R\perp} = -\frac{d\varphi_{R\perp}}{d\kappa} \quad (3.1)$$

za paralelnu i normalnu polarizaciju, respektivno, pri čemu su $\varphi_{R\parallel}$ i $\varphi_{R\perp}$ faze koeficijenta refleksije za odgovarajuće polarizacije upadnog talasa, dok je $\kappa = k_0\sqrt{\varepsilon_{inc}\mu_{inc}} \sin\theta$, pri čemu su ε_{inc} i μ_{inc} konstitutivni parametri optički gušće (upadne) sredine.

Od tada do danas analizirano je postojanje i veličina Goos-Hänchen-ovog pomeraja u različitim sistemima, kao što su Otto-ve i Kretschmann-ove konfiguracije [113,114], metalne površine [115] i elektro-optički kristali [116]. Postojanje negativnog Goos-Hänchen-ovog pomeraja prvi put su utvrdili Tamir i Bertoni [117], dok skorašnji radovi ukazuju na mogućnost postojanja "gigantskih" Goos-Hänchen-ovih pomeraja u slojevitim strukturama koje podržavaju postojanje površinskih polaritona [118], kao i u Kretschmann-ovim konfiguracijama sa elektro-optičkim kristalima [119], u kojima je čak moguća i promena znaka Goos-Hänchen-ovog pomeraja variranjem upadnog ugla i primenjenog električnog polja.

Iako dosta manje izučavan, u sistemima koji se sastoje od tanke barijere unutar optički gušće sredine (tunelovanje), postoji i transmitovani pomeraj, koji je posledica čistog prelamanja (Snell-ovog zakona), ali i dodatnog pomeraja koji ima iste korene kao i Goos-Hänchen-ov pomeraj za reflektovani talas (Slika 3.2) [120,121,122,123]. Ukoliko sistem poseduje prostornu simetriju (kao što će je posedovati sve strukture koje budu analizirane u ovom radu), za ukupan lateralni pomeraj transmitovanog talasa se mogu koristiti jednačine (3.1), pri čemu se, umesto faza koeficijenta refleksije, koriste

odgovarajuće faze koeficijenta transmisije [123]. Kao i kod Goos-Hänchen-ovog pomeraja za reflektovani talas, i lateralni pomeraj transmitovanog talasa može biti pozitivan ili negativan, u zavisnosti od karakteristika barijere i okolne sredine [101,122,123].



Slika 3.2: Šematski prikaz lateralnog pomeraja transmitovanog talasa pri tunelovanju

3.2 Fizički model

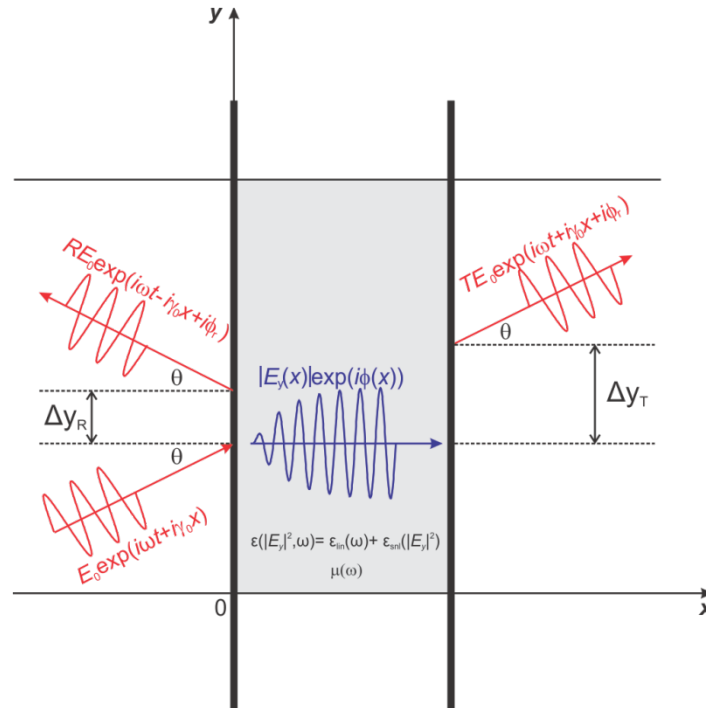
Fizički model koji će ovde biti analiziran analogan je opštem modelu nelinearne disperzivne apsorptivne barijere okružene disperzivnim talasovodom, korišćenom u prethodnoj glavi. Osnovne karakteristike analiziranih materijala date su u poglavlju 2.3, a ovde će biti ponovljeni izrazi koji opisuju konstitutivne parametre:

$$\varepsilon = \underbrace{\varepsilon_{\infty} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + j\Gamma_e \omega - \omega_r^2} \right)}_{\varepsilon_{lin}} + \underbrace{\varepsilon_L + \alpha \frac{\frac{|\vec{E}|^2}{E_c^2}}{1 + \kappa \frac{|\vec{E}|^2}{E_c^2}}}_{\varepsilon_{snl}} \quad (3.2)$$

$$\mu = 1 - \frac{F \omega_0^2}{\omega^2 + j\Gamma_m \omega - \omega_0^2} \quad (3.3)$$

Na Slici 3.3 dat je šematski prikaz modela korišćenog u svrhu analize uticaja Goos-Hänchen-ovog pomeraja na vremena tunelovanja; ovde je prikazana i osnovna razlika ovog modela u odnosu na model korišćen u prethodnoj glavi (Slika 2.4) – računanje Goos-Hänchen-ovog pomeraja reflektovanog talasa Δy_R , kao i ukupnog lateralnog

pomeraja transmitovanog talasa Δy_T . Ova dva pomeraja bi trebalo da dovedu do promene vremena tunelovanja, usled promene rastojanja koja EM talasi pređu tunelujući kroz barijeru (ali i reflektujući se o istu).



Slika 3.3: Šematski prikaz modela korišćenog za proračun uticaja Goos-Hänchen-ovog pomeraja na vremena tunelovanja

3.3 Uticaj Goos-Hänchen-ovog pomeraja na grupno kašnjenje

Analiza uticaja Goos-Hänchen-ovog pomeraja na vremena tunelovanja počće proračunom uticaja lateralnog pomeraja transmitovanog talasa na grupno kašnjenje, zatim će biti ukratko (usled analogije) prikazan uticaj pomeraja reflektovanog talasa na ovo vreme, dok će, na kraju ovog poglavlja, biti diskutovano i o nepostojanju uticaja Goos-Hänchen-ovog pomeraja na vreme zadržavanja.

Prema modelu prikazanom na Slici 3.3, a na osnovu rada Steinberg-a i Chiao-a [121], faza EM talasa na izlasku iz barijere (u tački $x = L$) jednaka je:

$$\varphi_{tot}(L) = \varphi_0 + k_y \Delta y_T - \omega t \quad (3.4)$$

pri čemu je $\varphi_0 = \varphi_T + k_x L$ faza transmitovanog talasa (bez uračunavanja lateralnog pomeraja), φ_T je faza koeficijenta transmisije, $k_x = (\omega/c) \sqrt{\epsilon_b \mu_b} \cos \theta$ je vrednost talasnog vektora u x pravcu, $k_y = (\omega/c) \sqrt{\epsilon_b \mu_b} \sin \theta$ je vrednost talasnog vektora u y

pravcu, dok su ostale veličine analogne onima iz prethodne glave. Prema paraksijalnoj aproksimaciji, kao i aproksimaciji stacionarne faze, važi da je pozicija pika talasnog impulsa definisana nultom vrednošću gradijenta faze u k -prostoru: $\partial\varphi_{tot}/\partial k = 0$. Kako je talasni vektor funkcija dve promenljive: frekvencije upadnog zračenja i upadnog ugla, važi [121]:

$$\left. \frac{\partial\varphi_{tot}}{\partial\omega} \right|_{\theta} = 0 \quad (3.5)$$

$$\left. \frac{\partial\varphi_{tot}}{\partial\theta} \right|_{\omega} = 0 \quad (3.6)$$

Kombinovanjem jednačina (3.4) i (3.5), dobija se:

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial\omega} + \left(\frac{\sqrt{\varepsilon_b\mu_b}}{c} \sin\theta + \frac{\omega}{c} \sin\theta \frac{\partial\sqrt{\varepsilon_b\mu_b}}{\partial\omega} \right) \Delta y_T - \tau_{gT} = 0 \quad (3.7)$$

Podsećanjem na izraz (2.129) koji definiše grupno kašnjenje bez uračunavanja analiziranih pomeraja:

$$\tau_{g0} = |T|^2 \frac{d\varphi_0}{d\omega} + |R|^2 \frac{d\varphi_r}{d\omega} \quad (3.8)$$

vidi se da se grupno kašnjenje može predstaviti preko dva člana: vremena τ_{gT0} vezanog za kašnjenje transmitovanog i vremena τ_{gR0} vezanog za kašnjenje reflektovanog talasa, odnosno:

$$\tau_{g0} = |T|^2 \tau_{gT0} + |R|^2 \tau_{gR0} \quad (3.9)$$

Kako je, očigledno, $\tau_{gT0} = d\varphi_0/d\omega$, izraz (3.7) sada postaje:

$$\tau_{gT} = \tau_{gT0} + \left(\frac{\sqrt{\varepsilon_b\mu_b}}{c} \sin\theta + \frac{\omega}{c} \sin\theta \frac{\partial\sqrt{\varepsilon_b\mu_b}}{\partial\omega} \right) \Delta y_T \quad (3.10)$$

pri čemu je τ_{gT0} grupno kašnjenje vezano za transmitovani talas bez uračunavanja lateralnog pomeraja, dok je drugi sabirak sa desne strane gornje jednačine korekcija usled ovog pomeraja. Očigledno, τ_{gT} predstavlja ukupno grupno kašnjenje vezano za transmitovani talas.

Kombinovanjem izraza (3.4) i (3.6) dobija se izraz za izračunavanje lateralnog pomeraja transmitovanog talasa:

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial\theta} + \frac{\omega}{c} \cos\theta \sqrt{\varepsilon_b\mu_b} \cdot \Delta y_T = 0 \Rightarrow \quad (3.11)$$

$$\Delta y_T = -\frac{1}{k_0 \cos \theta \sqrt{\varepsilon_b \mu_b}} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \theta} \quad (3.12)$$

Ubacivanjem izraza (3.12) u izraz (3.10), dobija se konačni izraz za izračunavanje grupnog kašnjenja transmitovanog talasa:

$$\tau_{gT} = \tau_{gT0} - \frac{\operatorname{tg} \theta}{\omega} \left(1 + \frac{\omega}{\sqrt{\varepsilon_b \mu_b}} \frac{\partial \sqrt{\varepsilon_b \mu_b}}{\partial \omega} \right) \frac{\partial \varphi_0}{\partial \theta} \quad (3.13)$$

Usled postojanja prostorne simetrije, kao što je već rečeno u poglavlju 3.1, za pomeraj reflektovanog talasa, a time i za vremena tunelovanja vezana za isti, važe jednačine analogne onima za pomeraj transmitovanog talasa. Stoga, ukupna faza reflektovanog talasa u tački $x = 0$ iznosi:

$$\varphi_{tot}(0) = \varphi_R + k_y \Delta y_R - \omega t \quad (3.14)$$

Iz paraksijalne i aproksimacije stacionarne faze važe, takođe, jednačine (3.5) i (3.6), te se, na analogan način kao kod analize za transmitovani talas, dobija izraz za izračunavanje člana grupnog kašnjenja povezanog sa reflektovanim talasom:

$$\tau_{gR} = \tau_{gR0} - \frac{\operatorname{tg} \theta}{\omega} \left(1 + \frac{\omega}{\sqrt{\varepsilon_b \mu_b}} \frac{\partial \sqrt{\varepsilon_b \mu_b}}{\partial \omega} \right) \frac{\partial \varphi_R}{\partial \theta} \quad (3.15)$$

U gornjim izrazima, φ_R predstavlja fazu koeficijenta refleksije, dok je $\tau_{gR0} = \partial \varphi_R / \partial \omega$ grupno kašnjenje vezano za refleksiju kada nije uračunat Goos-Hänchen-ov pomeraj, i dobija se poređenjem jednačina (3.8) i (3.9). Goos-Hänchen-ov pomeraj je, u ovom slučaju, jednak:

$$\Delta y_R = -\frac{1}{k_0 \cos \theta \sqrt{\varepsilon_b \mu_b}} \frac{\partial \varphi_R}{\partial \theta} \quad (3.16)$$

Ukupno grupno kašnjenje je, nakon uračunavanja korekcija vezanih za pomeraje transmitovanog i reflektovanog dela EM talasa, jednako:

$$\tau_g = |T|^2 \tau_{gT} + |R|^2 \tau_{gR} \Rightarrow \quad (3.17)$$

$$\tau_g = \tau_{g0} - \frac{\operatorname{tg} \theta}{\omega} \left(1 + \frac{\omega}{\sqrt{\varepsilon_b \mu_b}} \frac{\partial \sqrt{\varepsilon_b \mu_b}}{\partial \omega} \right) \left(|T|^2 \frac{\partial \varphi_0}{\partial \theta} + |R|^2 \frac{\partial \varphi_R}{\partial \theta} \right) \quad (3.18)$$

pri čemu drugi sabirak sa desne strane poslednjeg izraza predstavlja ukupnu korekciju grupnog kašnjenja vezanu za, kako Goos-Hänchen-ov pomeraj reflektovanog, tako i za lateralni pomeraj transmitovanog talasa.

Uticaj Goos-Hänchen-ovog pomeraja na vreme zadržavanja

Prema definiciji vremena zadržavanja (1.3), ono je jednako količniku usrednjene elektromagnetne energije u barijeri po vremenu i srednje upadne snage elektromagnetnog zračenja na barijeru. S druge strane, Goos-Hänchen-ov pomeraj je definisan kao promena faze upadnog elektromagnetnog talasa pri totalnoj unutrašnjoj refleksiji - izraz (3.1). Kod tunelovanja, ovo važi i za lateralni pomeraj transmitovanog talasa u slučaju prostorne simetrije. Dakle, kako je vreme zadržavanja funkcija usrednjenih veličina po vremenu, ono tako ne zavisi od faze, odnosno od promene faze uzrokovane Goos-Hänchen-ovim pomerajem. Stoga, Goos-Hänchen-ov pomeraj reflektovanog, kao ni lateralni pomeraj transmitovanog talasa, nemaju nikakav uticaj na vreme zadržavanja.

Od vremena prikazanih u jednačini (2.174), korekcija grupnog kašnjenja usled pomeraja prenosi se isključivo na efektivno vreme samointerferencije, koje jedino zavisi od faze talasa (preko imaginarnog dela koeficijenta refleksije). Ostala vremena su funkcije usrednjenih polja unutar barijere, te se i ne menjaju pod uticajem Goos-Hänchen-ovog ili lateralnog transmitovanog pomeraja.

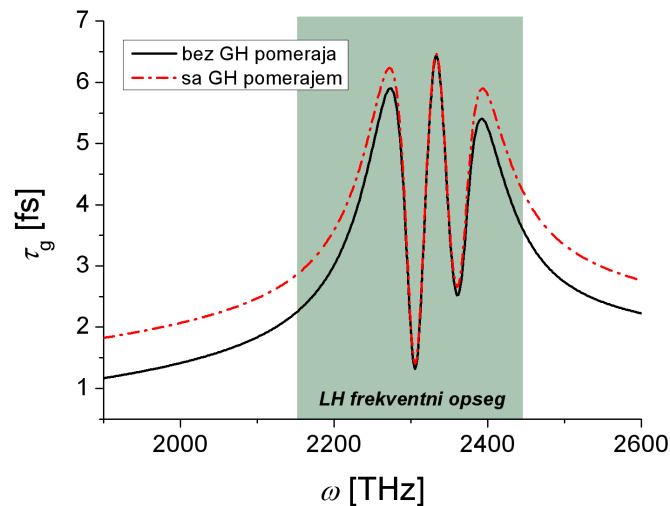
3.4 Numerički rezultati

Proračun uticaja Goos-Hänchen-ovog pomeraja* na grupno kašnjenje rađen je na strukturi identičnoj onoj korišćenoj u poglavlju 2.13, te i ovde važi Slika 2.15 koja prikazuje zavisnost efektivnog indeksa prelamanja od frekvencije i snage upadnog zračenja. Jedina razlika u odnosu na model iz poglavlja 2.13 je ta da je ovde korišćen upadni ugao $\theta = \pi/4$, pri kome se uticaj Goos-Hänchen-ovog pomeraja može lakše uočiti.

Na Slici 3.4 prikazana je zavisnost grupnog kašnjenja od frekvencije upadnog zračenja u analiziranoj strukturi u slučaju kada je amplituda upadnog EM talasa $E_0 = 15$ V/m. U ovom slučaju, struktura iskazuje osobine LH materijala za frekvencije $2254.3 \text{ THz} \leq \omega \leq 2347.7 \text{ THz}$. Na ovom grafiku, punom crnom linijom označena je zavisnost grupnog kašnjenja od frekvencije u slučaju kada se ne uzima u obzir uticaj Goos-Hänchen-ovog pomeraja, dok je isprekidanom crvenom linijom obeležena zavisnost grupnog kašnjenja u slučaju uračunavanja uticaja ovog pomeraja. Žuta

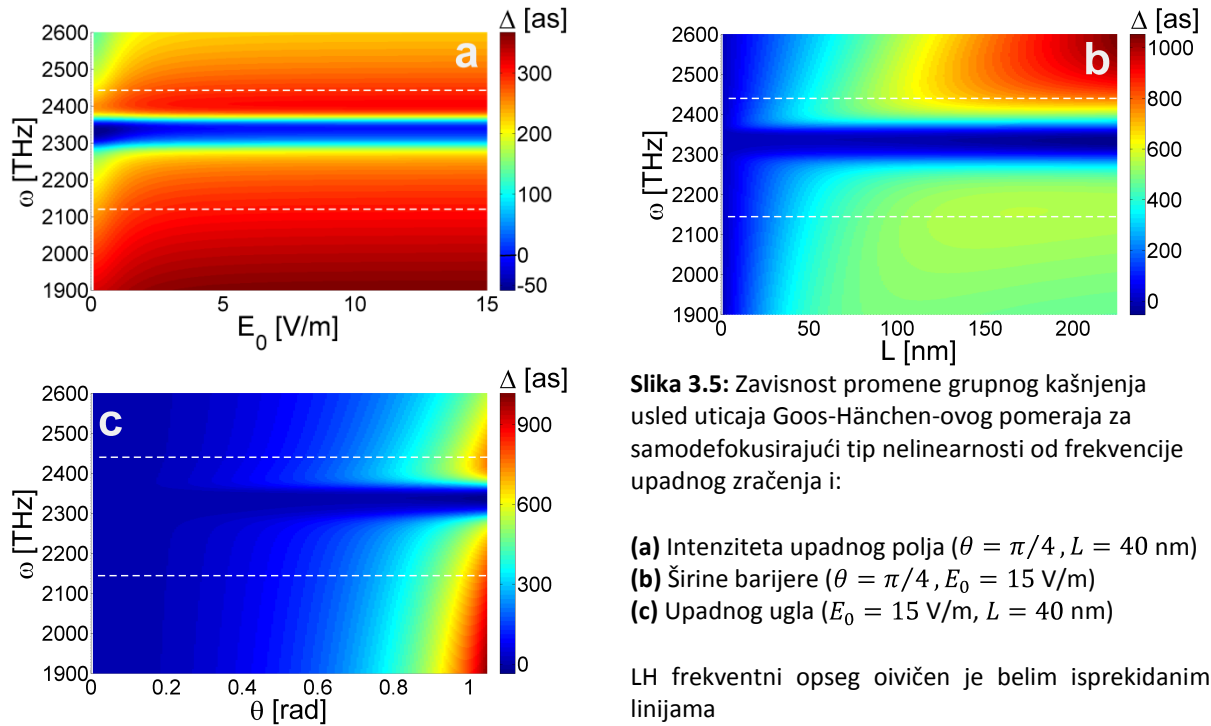
* U numeričkim rezultatima će se, radi jednostavnosti, Goos-Hänchen-ov pomeraj za reflektovane i lateralni pomeraj za transmitovane talase nazivati pod zbirnim nazivom **Goos-Hänchen-ov pomeraj**

površina predstavlja frekventni opseg u kome je efektivni indeks prelamanja negativan u čistom metamaterijalu (Slika 2.15), i on će od sada biti nazivan LH frekventni opseg. Očigledno je da je, van LH frekventnog opsega uticaj Goos-Hänchen-ovog pomeraja na grupno kašnjenje veoma veliki, pa je, tako, za frekvencije ispod 2000 THz i iznad 2500 THz, čak oko 40% grupnog kašnjenja direktna posledica Goos-Hänchen-ovog pomeraja. Isto tako, približavanjem LH frekventnom opsegu, uticaj Goos-Hänchen-ovog pomeraja se smanjuje, te je u ovom frekventnom opsegu uticaj pomeraja na grupno kašnjenje skoro zanemarljiv. Prikazani rezultati se odnose na sredinu sa samodefokusirajućom nelinearnošću, ali se za samofokusirajuću dobijaju analogni rezultati.



Slika 3.4: Zavisnost grupnog kašnjenja od frekvencije upadnog zračenja, sa i bez uračunavanja uticaja Goos-Hänchen-ovog pomeraja

Iako je uticaj Goos-Hänchen-ovog pomeraja na grupno kašnjenje u frekventnom opsegu negativnog indeksa prelamanja praktično zanemarljiv (Slika 3.4), on ipak nije jednak nuli, ali može biti neutralisan, što se može videti sa Slike 3.5. Radi jednostavnosti, uticaj Goos-Hänchen-ovog pomeraja na grupno kašnjenje je izražen preko razlike $\Delta = \tau_g - \tau_{g0}$, pri čemu su veličine τ_g i τ_{g0} definisane u poglavlju 3.3. Zavisnost veličine Δ od intenziteta upadnog polja, širine barijere, upadnog ugla, kao i od frekvencije upadnog zračenja prikazana je na Slici 3.5. Sa ovih grafika može se zaključiti da je, pravilnim odabirom parametara barijere i upadnog zračenja, moguće postići neutralizaciju uticaja Goos-Hänchen-ovog pomeraja ($\Delta \approx 0$) pri nenultom upadnom uglu. Očigledno je da je u LH frekventnom opsegu vrednost Goos-Hänchen-ovog pomeraja, kao što je bilo vidljivo i na Slici 3.4, bliska nuli za skoro sve vrednosti jačine upadnog zračenja (Slika 3.5a), širine barijere (Slika 3.5b) ili upadnog ugla (Slika 3.5c).



Značajno je i napomenuti da su rezultati sa Slike 3.5 dobijeni za samodefokusirajuću sredinu, ali da neutralizaciju nije moguće dobiti za slučaj nelinearnosti samofokusirajućeg tipa. Naime, kao što se vidi sa Slike 3.5, negativan uticaj Goos-Hänchen-ovog pomeraja je moguće dobiti samo za male vrednosti jačine upadnog polja (u LH frekventnom opsegu), pri čemu vrednost Δ saturira ka nuli sa povećanjem amplitude E_0 . S druge strane, u slučaju samofokusirajućeg tipa nelinearnosti, negativan uticaj pomeraja se dobija za sve vrednosti jačine upadnog polja, širine barijere i upadnog ugla unutar LH frekventnog opsega. Stoga nije moguće postići neutralizaciju uticaja Goos-Hänchen-ovog pomeraja u ovom tipu materijala promenom parametara materijala, već samo promenom frekvencije zračenja.

4 KARAKTERISTIKE TUNELOVANJA U ANIZOTROPNIM MATERIJALIMA

U dosadašnjem delu rada analizirani su samo izotropni materijali, koji u svim pravcima imaju jednake optičke karakteristike. Ova glava će se baviti analizom anizotropnih materijala, odnosno, konkretno, vrste periodičnih struktura pod nazivom poluprovodnički metamaterijali. Analiza ovih materijala, a time i sama glava, će biti podeljena na dva odvojena dela. Prvi deo će se baviti analizom osnovnih karakteristika poluprovodničkih metamaterijala, sa krajnjim ciljem prezentovanja nove vrste ovih struktura. U drugom delu će biti izvršena analiza vremena tunelovanja u poluprovodničkim metamaterijalima na način prikazan u glavi 2, pri čemu je rezultate koji će biti prikazani moguće jednostavno generalizovati tako da važe za sve anizotropne materijale.

4.1 Anizotropija

Anizotropija, nastala spajanjem grčkih reči *ánisos* (neravnomerno) i *trópos* (pravac), predstavlja pojam kojim se, u najopštijoj definiciji, označavaju nejednakosti fizičko-hemijskih svojstava određene sredine (elastičnosti, električne provodljivosti, toplotne provodljivosti, brzine zvuka, itd.) u različitim pravcima unutar te sredine. U optici, pojam anizotropije se vezuje za različit indeks prelamanja sredine u različitim pravcima prostiranja elektromagnetnog talasa kroz tu sredinu.

U prirodi, anizotropija je najčešće karakteristika kristala, te se i oblast koja izučava ponašanje anizotropnih materijala često naziva "optika kristala". Kod određenih materijala, koji nisu prirodno anizotropni, moguće je indukovati anizotropiju izlaganjem materijala spoljnom električnom ili magnetnom polju. Jedan od najpoznatijih efekata koji se javlja kod određenih anizotropnih materijala je dvostruko prelamanje (birefringencija), koje predstavlja fenomen dekompozicije zraka svetlosti na dva linearno polarizovana, prostorno razdvojena zraka. [124]

Polarizacija je, u linearnom izotropnom materijalu, kao što je pokazano u poglavlju 2.1, predstavljena formulom $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$, odnosno vektor polarizacije je kolinearan sa vektorom električnog polja. U anizotropnim sredinama ovo nije slučaj, odnosno indukovani dipoli u materijalu imaju određeni „poželjni“ pravac po kojem bi električno polje trebalo da osciluje, pri čemu je taj pravac određen fizičkim karakteristikama materijala, čime se narušava kolinearnost između vektora polarizacije i električnog polja.

U ovim sredinama veza između dva gorepomenuta vektora se može predstaviti na sledeći način [125]:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \vec{\chi} \times \vec{E} \Rightarrow \quad (4.1)$$

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & \chi_{xz} \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} & \chi_{yz} \\ \chi_{zx} & \chi_{zy} & \chi_{zz} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \Rightarrow \quad (4.2)$$

$$P_i = \sum_{j=x}^z \varepsilon_0 \chi_{ij} E_j, \quad i, j = (x, y, z) \quad (4.3)$$

Iz gornjih izraza je očigledno da je električna susceptibilnost tenzor ranga 2 koji opisuje kolinearnu vezu između vektora \vec{P} i \vec{E} . Kao što je poznato, tenzor susceptibilnosti mora biti simetričan, odnosno mora važiti $\chi_{ij} = \chi_{ji}$. Na osnovu spektralne teoreme, ovakav tenzor je moguće dijagonalizovati, odnosno važi [125]:

$$\vec{\chi} = \begin{bmatrix} \chi_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \chi_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{zz} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

pri čemu dijagonalni članovi iz gornje jednačine nisu jednaki dijagonalnim članovima tenzora električne susceptibilnosti iz jednačine (4.2). Ovi dijagonalni članovi karakterišu prelamanje EM talasa u odgovarajućim pravcima. Kako je relativna dielektrična permitivnost definisana izrazom $[\vec{\varepsilon}] = [I] + [\vec{\chi}]$, ($[I]$ je jedinični tenzor ranga 2) tako je i ona tenzor analogan onom iz izraza (4.4), što dovodi do zaključka da je i indeks prelamanja dijagonalni tenzor, preko koga se predstavlja prelamanje svetlosti u različitim pravcima.

4.2 Poluprovodnički metamaterijali

Teorija efektivne sredine

Poluprovodnički metamaterijali su, kao što je rečeno u poglavlju 1.3, strukture sastavljene od naizmenično postavljenih tankih slojeva dva poluprovodnička materijala, kojima anizotropna svojstva omogućavaju postojanje negativnog indeksa prelamanja. U ovom poglavlju će biti izveden tenzor efektivne permitivnosti kod ovakvih struktura, pri čemu će biti dokazano i da je permitivnost različita u različitim pravcima, odnosno da je struktura anizotropna.

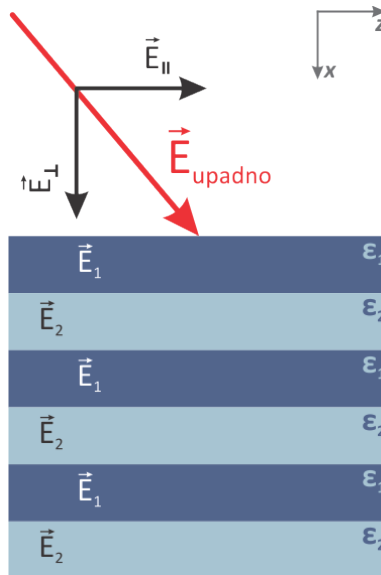
Kako važi uslov da je jedinična ćelija strukture (sloj) mnogo manja od talasne dužine upadne svetlosti u vakuumu, tenzor permitivnosti strukture se može izvesti pomoću

aproksimacije efektivne sredine. Prema ovoj aproksimaciji, prostorna varijacija električnog polja u susjednim slojevima se može zanemariti, te se električni odziv strukture može predstaviti preko srednje vrednosti električnog polja (Slika 4.1) [126,127]:

$$\langle \vec{E} \rangle = \frac{\vec{E}_1 + \vec{E}_2}{2} \quad (4.5)$$

$$\langle \vec{P} \rangle = \varepsilon_0 \vec{\chi}_{eff} \langle \vec{E} \rangle \quad (4.6)$$

pri čemu je $\langle \vec{P} \rangle$ srednja vrednost vektora polarizacije, dok je $\vec{\chi}_{eff}$ tenzor koji predstavlja efektivnu susceptibilnost strukture, dok su \vec{E}_1 i \vec{E}_2 vektori polja u susjednim slojevima.



Slika 4.1:

Šematski prikaz poluprovodničkog metamaterijala, upadnog polja na strukturu, kao i električnog polja u slojevima

Kao što se vidi sa Slike 4.1, upadno polje se može razdvojiti na dve komponente: električno polje paralelno sa upadnom površinom $\vec{E}_{paralelno}$ (vezano za y i z pravac) i polje normalno na upadnu površinu $\vec{E}_{normalno}$ (vezano za pravac propagacije x). Potrebno je izračunati permitivnost strukture za svaku od ovih komponenti.

U slučaju kada je upadno polje paralelno polarisano, iz jednakosti paralelnih komponenti polja na razdvojnoj površini dva dielektrika, očigledno je da je $\vec{E}_1 = \vec{E}_2$. Korišćenjem ove jednakosti, kao i činjenice da je $\vec{P}_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_1 \vec{E}_1$, $\vec{P}_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_2 \vec{E}_2$ i $\vec{P} = (\vec{P}_1 + \vec{P}_2)/2$, iz jednačina (4.5) i (4.6) se dobija da je paralelna komponenta efektivne permitivnosti jednaka:

$$\varepsilon_{||} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \quad (4.7)$$

pri čemu su ε_1 i ε_2 relativne permitivnosti slojeva (Slika 4.1), za koje će se nadalje podrazumevati da se mogu predstaviti Lorentz-ovim modelom. Za slučaj normalne polarizacije koristi se jednakost vektora dielektričnog pomeraja na granici dva dielektrika $\vec{D}_1 = \vec{D}_2$, te se, analogno kao kod paralelne polarizacije, dobija da je transverzalna komponenta efektivne permitivnosti jednaka:

$$\varepsilon_{\perp} = \frac{2\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \quad (4.8)$$

Za ukupnu efektivnu relativnu permitivnost strukture se sada dobija da je:

$$\varepsilon_{eff} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\parallel} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Efektivna permitivnost data u gornjem izrazu podleže određenim korekcijama usled greške zbog uzete aproksimacije efektivne sredine – korekcijama usled nelokalnosti polja. Ipak, u radu Hoffman-a [126] je pokazano da ova greška iznosi, u proseku, oko 1% apsolutne vrednosti efektivne permitivnosti, te može biti zanemarena.

Ovde se može izvući i prvi bitan zaključak vezan za potrebne karakteristike upadnog talasa. Naime, sa Slike 4.1 očigledno je da je, za TE polarizovano upadno zračenje, x komponenta električnog polja jednaka nuli, te je, u ovom slučaju, struktura izotropna sa efektivnom permitivnošću jednakom $\varepsilon_{eff,TE} = \varepsilon_{\parallel}$. Ovo ne važi za TM polarizaciju, koja može imati električno polje u sve tri dimenzije, te je efektivna permitivnost data izrazom (4.9). Dakle, kako bi materijal iskazivao anizotropna svojstva, odnosno kako bi struktura mogla da bude karakterisana negativnim indeksom prelamanja, potrebno je da upadno polje bude TM polarizovano.

Disperziona relacija

Nakon što je izveden tenzor efektivne permitivnosti, postavlja se pitanje: Koji uslovi moraju biti zadovoljeni kako bi struktura iskazivala LH osobine? Ovde se pod uslovima, naravno, misli na vrednosti elemenata tenzora ε_{eff} . Kako bi ovi uslovi mogli biti izvedeni, potrebno je odrediti smerove talasnog i Poynting-ovog vektora za različite parametre strukture, pri čemu je za ovu analizu ulazni parametar disperziona relacija. Stoga će ovo potpoglavlje biti posvećeno izvođenju disperzione relacije poluprovodničkog metamaterijala.

Kreće se od poznatih, više puta pominjanih u ovom radu, veza između vektora koji karakterišu električno i magnetno polje:

$$D_i = \varepsilon_{ii}E_i, \quad i = (x, y, z) \quad (4.10)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (4.11)$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.12)$$

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (4.13)$$

pri čemu poslednje dve jednačine predstavljaju I i II Maxwell-ovu jednačinu. Kako se i u ovoj glavi posmatraju samo ravanski talasi, proporcionalni faktoru $\exp[j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)]$, jednačine (4.12) i (4.13) postaju:

$$\vec{k} \times \vec{E} = \frac{\omega \vec{H}}{c} \quad (4.14)$$

$$-\vec{k} \times \vec{H} = \frac{\omega \vec{D}}{\varepsilon_0 c} \quad (4.15)$$

Potrebno je sada definisati vektor indeksa prelamanja \vec{n} na sledeći način:

$$\vec{k} = \frac{\omega \vec{n}}{c} \quad (4.16)$$

pri čemu je bitno napomenuti da za ovu veličinu ne važe određeni osnovni zakoni koji važe za izotropan indeks prelamanja (npr., Snell-ov zakon). Ubacivanjem gornjeg izraza u jednačine (4.14) i (4.15), lako se dobija:

$$\vec{D} = -\varepsilon_0 \cdot \vec{n} \times \vec{n} \times \vec{E} \Rightarrow \quad (4.17)$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 n^2 \vec{E} - \varepsilon_0 (\vec{n} \cdot \vec{E}) \vec{n} \quad (4.18)$$

Ubacivanjem izraza (4.10) u izraz (4.18) dobija se:

$$n^2 E_i - n_i (n_k E_k) - \varepsilon_{ik} E_k = 0, \quad i, k = (x, y, z) \quad (4.19)$$

U gornjem izrazu je, očigledno, poslednji član sa leve strane znaka jednakosti jednak nuli kada je $i \neq k$, dok je $n = |\vec{n}|$. Gornji sistem jednačina se sada može napisati u sledećem obliku:

$$(n^2 \delta_{ik} - n_i n_k - \varepsilon_{ik} \delta_{ik}) E_k = 0, \quad i, k = (x, y, z) \quad (4.20)$$

pri čemu je δ_{ik} Kronecker-ova delta funkcija. Kako bi gornji sistem jednačina imao rešenje, mora da važi:

$$\det|(n^2\delta_{ik} - n_i n_k - \varepsilon_{ik}\delta_{ik})E_k| = 0, \quad i, k = (x, y, z) \quad (4.21)$$

Rešavanjem ove determinante za tenzor (4.9) dobija se sledeća jednačina:

$$(n^2 - \varepsilon_{\parallel})[\varepsilon_{\perp}n_x^2 + \varepsilon_{\parallel}(n_y^2 + n_z^2) - \varepsilon_{\parallel}\varepsilon_{\perp}] = 0 \quad (4.22)$$

koja ima dva rešenja:

$$n^2 = \varepsilon_{\parallel} \quad (4.23)$$

$$\frac{n_x^2}{\varepsilon_{\parallel}} + \frac{n_y^2 + n_z^2}{\varepsilon_{\perp}} = 1 \quad (4.24)$$

Korišćenjem relacije (4.16) u kombinaciji sa prethodna dva izraza dobijaju se disperzione relacije za TE i TM modove [126]:

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{1}{\varepsilon_{\parallel}}(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2), \quad \text{za TE polarizaciju} \quad (4.25)$$

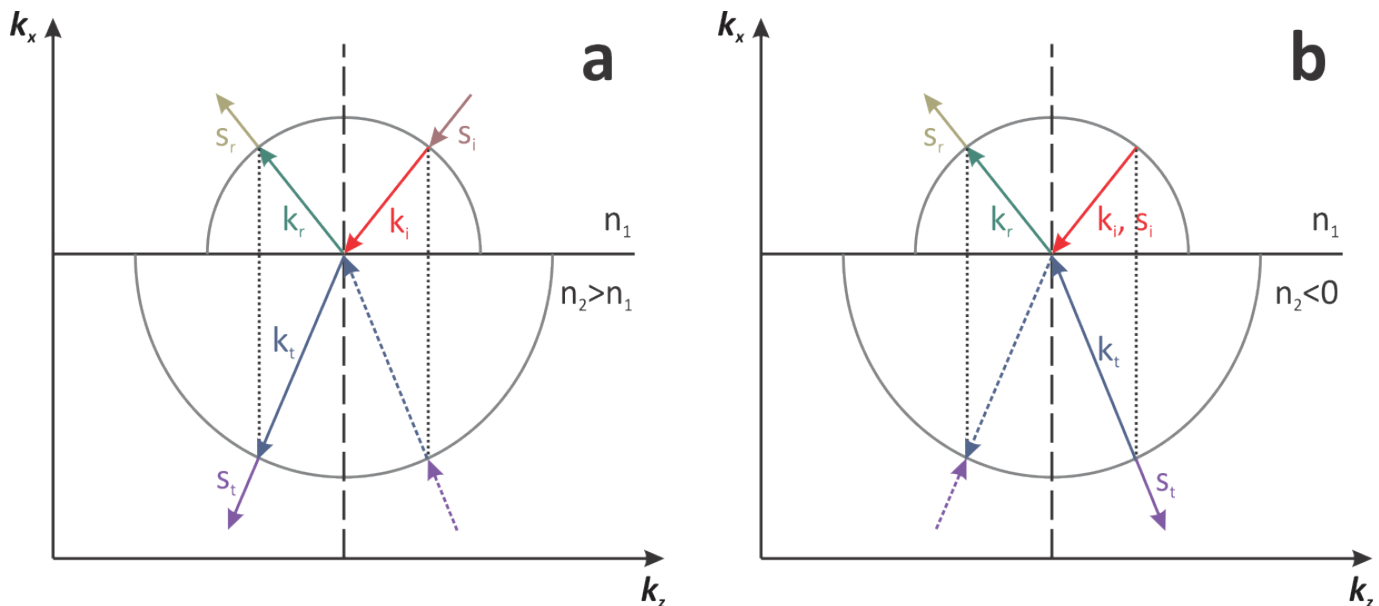
$$\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{k_x^2}{\varepsilon_{\parallel}} + \frac{k_y^2 + k_z^2}{\varepsilon_{\perp}}, \quad \text{za TM polarizaciju} \quad (4.26)$$

pri čemu će u ovoj glavi, iz ranije navedenih razloga, biti analiziran samo slučaj TM polarizacije.

Prostiranje svetlosti u poluprovodničkom metamaterijalu

Disperzione relacije, kakve su prikazane u jednačinama (4.25) i (4.26), pokazuju koje su dozvoljene vrednosti talasnog vektora u svakom pravcu, u zavisnosti od parametara materijala kroz koji se zračenje prostire i karakteristika samog talasa. Jednačina (4.25), mada predstavlja disperzionu relaciju izvedenu za konkretan slučaj, daje generalni oblik disperzione relacije u slučaju izotropnog linearnog nemagnetnog materijala (s tim što $\varepsilon_{\parallel} \rightarrow \varepsilon$). Dozvoljene vrednosti talasnog vektora najčešće se predstavljaju preko tzv. površine talasnog vektora, koja predstavlja vizualizaciju disperzione relacije u (k_x, k_y, k_z) prostoru. U slučaju linearnog izotropnog materijala, ova površina bi predstavljala sferu radijusa $\sqrt{\varepsilon}\omega/c = n\omega/c$, te bi se samo na tačkama ove površine nalazile dozvoljene vrednosti talasnog vektora, odnosno moguće kombinacije vrednosti komponenti talasnog vektora. Drugim rečima, dozvoljeni talasni vektori su samo oni koji počinju u centru, i završavaju se na nekoj tački sfere.

Iako su površine talasnih vektora, obično, trodimenzionalne, uobičajeno je posmatrati samo njihove poprečne preseke, posebno kod disperzionih relacija sa simetrijom (što ovde jeste slučaj). S obzirom na to da se ovde analizira prostiranje elektromagnetnog zračenja u xz ravni (Slika 4.1) prikazuju se projekcije površine talasnog vektora u ravni $k_y = 0$. Ove krive se koriste radi analize propagacije elektromagnetnih talasa kroz različite sredine.

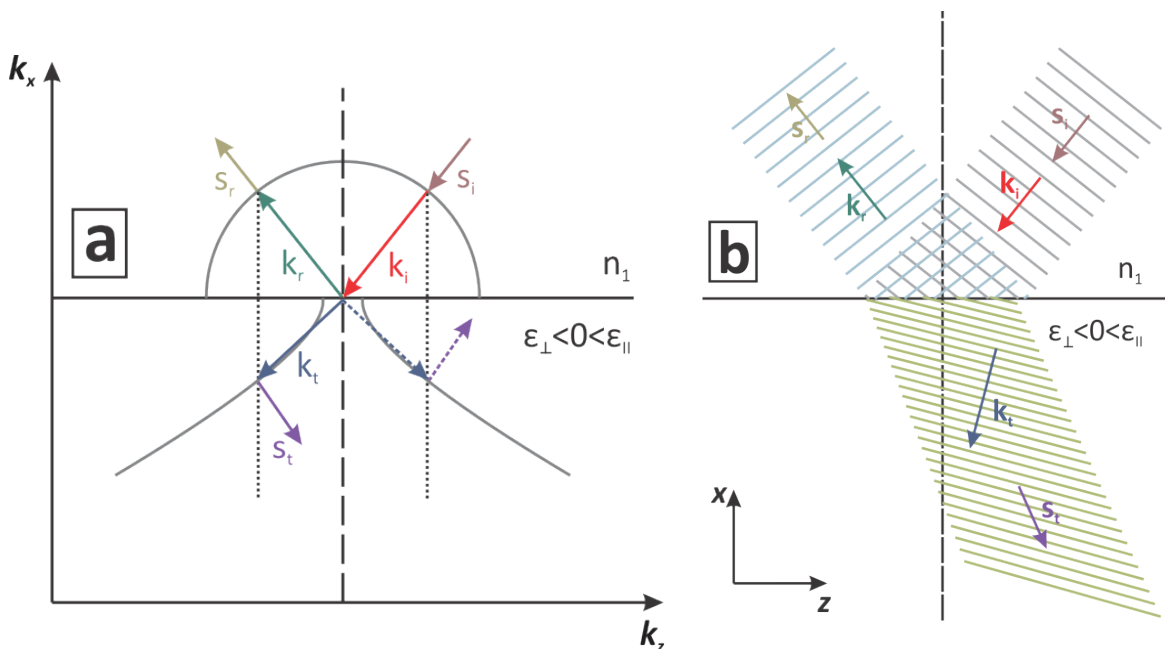


Slika 4.2: Talasni i Poynting-ovi vektori pri prelamanju ravanskog EM talasa iz sredine sa pozitivnim indeksom prelamanja u sredinu sa (a) većim indeksom prelamanja; (b) negativnim indeksom prelamanja. Pune sive linije (polukrugovi) predstavljaju krive talasnih vektora

Na Slici 4.2 su prikazane krive talasnih vektora na granici dva linearna izotropna dielektrika različitih indeksa prelamanja. U slučaju sa Slike 4.2a ravanski talas se prelama iz sredine sa pozitivnim indeksom prelamanja n_1 u sredinu sa većim, takođe pozitivnim, indeksom prelamanja n_2 . Na ovoj slici su prikazane krive talasnih vektora kao polukrugovi (iako se, zapravo, radi o krugovima, prikazana je samo polovina krive radi efektnijeg predstavljanja fenomena prelamanja iz ugla talasnog i Poynting-ovog vektora). Očigledno, kriva talasnog vektora sa većim indeksom prelamanja ima veći radijus. Talasni vektori, povezani sa kretanjem faze, predstavljaju vektore između centra krive talasnog vektora i neke tačke na toj krivoj. Poynting-ov vektor, povezan sa kretanjem elektromagnetne energije, predstavlja normalu na tangentu krive talasnog vektora u tački u kojoj se susreću talasni vektor i pomenuta kriva. Ovo se na Slici 4.2a najbolje vidi na reflektovanom i transmitovanom talasu, dok su vektori vezani za upadni talas, radi pojednostavljenja izgleda grafika, prikazani na drugačiji način. Dakle, elektromagnetni talas karakterisan talasnim vektorom \vec{k}_i i Poynting-ovim vektorom \vec{s}_i sa gornje desne strane grafika upada na razdvojnu površinu dva dielektrika, jedan deo talasa se reflektuje (\vec{k}_r, \vec{s}_r), dok se drugi deo transmituje. Talasni vektor transmitovanog

talasa mora zadovoljiti uslov jednakosti paralelnih (z) komponenti talasnog vektora na razdvojnoj površini dva dielektrika, odnosno $\vec{k}_{tz} = \vec{k}_{iz}$. Postoje dva moguća rešenja za transmitovani talas koja su u skladu sa ovim uslovom, i oba su prikazana na grafiku; ipak, rešenje sa donje desne strane ne zadovoljava uslov kauzalnosti, jer se energija kreće ka razdvojnoj površini. Stoga, očigledno je da će se prelomljeni talas kretati na način prikazan parom vektora (\vec{k}_t, \vec{s}_t) , što je u skladu sa Snell-ovim zakonom. [126]

Slika 4.2b prikazuje isti problem u slučaju kada je indeks prelamanja donjeg dielektrika manji od nule. Ista logika važi za reflektovani talas, dok će za transmitovani vektori \vec{k}_t i \vec{s}_t sada biti suprotnog smera. Uslovi jednakosti z komponenti talasnog vektora na razdvojnoj površini i kauzalnosti dovode do toga da su vektori koji karakterišu transmitovani talas takvi da dovode do negativnog prelamanja (puna linija), opet u skladu sa Snell-ovim zakonom.



Slika 4.3: (a) Prikaz talasnog i Poyntingovog vektora u poluprovodničkom metamaterijalu za slučaj jake anizotropije ($\epsilon_{\perp} < 0 < \epsilon_{\parallel}$); (b) Šematski prikaz propagacije talasa u gorepomenutoj strukturi (pune linije predstavljaju talasne frontove)

Ova analiza, konačno, dovodi do slučaja od interesa za ovu tezu, predstavljenog disperzionom relacijom (4.26). Površina talasnog vektora za ovu disperzionu relaciju može biti elipsoid, u slučaju $\epsilon_{\perp}, \epsilon_{\parallel} > 0$ (eliptična disperziona relacija) ili hiperboloida, u slučaju kad su ϵ_{\perp} i ϵ_{\parallel} različitih znakova (hiperbolična disperziona relacija). Očigledno, prvi slučaj dovodi do situacije slične onoj prikazanoj na Slici 4.2a, te ne može dovesti do negativne refrakcije. Što se tiče situacije različitih znakova ϵ_{\perp} i ϵ_{\parallel} , ovde će biti razmatran samo slučaj $\epsilon_{\perp} < 0 < \epsilon_{\parallel}$ (Slika 4.3a). Kao što se može videti, krive talasnog vektora su, u ovom slučaju, hiperbole. Uslov jednakosti paralelnih komponenti talasnih vektora

dovodi do dva moguća (prikazana) rešenja. Kako rešenje sa desne strane normale ne zadovoljava uslov kauzalnosti, EM talas se prelama na način prikazan punom linijom. Očigledno, talasni vektor i Poynting-ov vektor, usled hiperboličnog oblika disperzione relacije, više nisu kolinearni, te talasni vektor pokazuje pozitivnu, a Poynting-ov negativnu refrakciju. Ipak, kako je za prelamanje bitan tok energije, posmatraju se pravac i smer Poynting-ovog vektora, te se za ovaj materijal može reći da ispunjava uslove negativnog prelamanja [126]. Način propagacije EM talasa pod ovakvim uslovima šematski je prikazan na Slici 4.3b.

Efektivni grupni indeks prelamanja

Nakon definicije uslova potrebnih za dobijanje negativne refrakcije u poluprovodničkim slojevitim strukturama, neophodno je numerički izraziti veličinu te refrakcije preko efektivnog indeksa prelamanja Poynting-ovog vektora, radi stvaranja mogućnosti za dizajn novih poluprovodničkih metamaterijala. Ovaj izraz je, do sada, izveden samo za slučaj neapsorptivne sredine, odnosno za slučaj kada su ε_{\perp} i ε_{\parallel} čisto realne veličine (Slika 4.4) [126,128]:

$$n_s = \frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}} \sqrt{\varepsilon_{\parallel} + \varepsilon_b \sin^2 \theta_i \left(\frac{\varepsilon_{\parallel}^2}{\varepsilon_{\perp}^2} - \frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}} \right)} \quad (4.27)$$

pa je cilj ovog poglavlja izvođenje analognog izraza za apsorptivan materijal (ε_{\perp} i ε_{\parallel} kompleksne vrednosti).

Kao što je već pokazano u poglavlju 2.7, Poynting-ov vektor je jednak (Napomena: Poynting-ov vektor je u ovoj glavi obeležen na drugačiji način u odnosu na glavu 2, $\vec{P} \rightarrow \vec{S}$):

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^* = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i}_x & \vec{i}_y & \vec{i}_z \\ E_x & 0 & E_z \\ 0 & H_y^* & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \vec{i}_x E_z H_y^* + \frac{1}{2} \vec{i}_z E_x H_y^* \quad (4.28)$$

Iz jednačine (4.15) lako se dobija da je, za anizotropni materijal:

$$(-\vec{i}_x k_z + \vec{i}_z k_x) H_y = -\omega \varepsilon_0 (\vec{i}_x \varepsilon_{\perp} E_x + \vec{i}_z \varepsilon_{\parallel} E_z) \Rightarrow \quad (4.29)$$

$$E_x = \frac{k_z}{\varepsilon_0 \varepsilon_{\perp} \omega} H_y \quad (4.30)$$

$$E_z = -\frac{k_x}{\varepsilon_0 \varepsilon_{\parallel} \omega} H_y \quad (4.31)$$

Ubacivanjem jednačina (4.30) i (4.31) u crvene članove jednačine (4.28) dobija se:

$$\vec{S}_t = \frac{1}{2} \left(\vec{i}_x \frac{k_{xt}}{\varepsilon_0 \varepsilon_{\parallel} \omega} + \vec{i}_z \frac{k_z}{\varepsilon_0 \varepsilon_{\perp} \omega} \right) |H_0|^2 |T|^2 \quad (4.32)$$

pri čemu je T koeficijent transmisije pri prelamanju EM talasa iz izotropne u anizotropnu sredinu. Kako se pri računanju energije moraju zanemariti imaginarne veličine (jer je energija čisto realna veličina), gornja jednačina postaje:

$$\vec{S}_t = \left[\vec{i}_x \cdot \operatorname{Re} \left(\frac{k_{xt}}{\varepsilon_{\parallel}} \right) + \vec{i}_z \cdot \operatorname{Re} \left(\frac{k_z}{\varepsilon_{\perp}} \right) \right] \frac{|H_0|^2 |T|^2}{2 \varepsilon_0 \omega} \Rightarrow \quad (4.33)$$

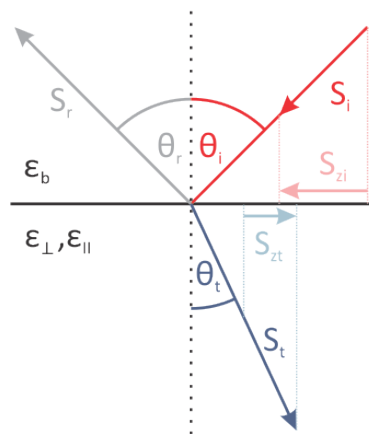
$$\vec{S}_t = \left[\vec{i}_x \cdot \operatorname{Re} \left(\frac{k_{xt}}{\varepsilon_{\parallel}} \right) + \vec{i}_z \cdot \frac{k_z}{\tilde{\varepsilon}'_{\perp}} \right] \frac{|H_0|^2 |T|^2}{2 \varepsilon_0 \omega} \quad (4.34)$$

$$\frac{1}{\tilde{\varepsilon}'_{\perp/\parallel}} = \frac{\operatorname{Re}(\varepsilon_{\perp/\parallel})}{|\varepsilon_{\perp/\parallel}|^2} \quad (4.35)$$

Analogno se za izotropnu sredinu dobija da je:

$$\vec{S}_i = (\vec{i}_x k_{xi} + \vec{i}_z k_z) \frac{|H_0|^2}{2 \varepsilon_0 \varepsilon_b \omega} \quad (4.36)$$

pri čemu je ε_b relativna dielektrična permitivnost ove sredine (Slika 4.4).



Slika 4.4: Prikaz Poynting-ovih vektora i njihovih z komponenti za potrebe izvođenja efektivnog indeksa prelamanja

Kako je, prema Snell-ovom zakonu, efektivni indeks prelamanja anizotropne sredine jednak:

$$n_s = \sqrt{\varepsilon_b} \frac{\sin \theta_i}{\underbrace{\sin \theta_t}_K} \quad (4.37)$$

da bismo mogli da ga izračunamo, potrebno je odrediti vrednost količnika K . Ovaj količnik je moguće dobiti iz poređenja z komponenti upadnog i transmitovanog Poynting-ovog vektora:

$$\left(\frac{S_{zt}}{S_{zi}}\right) \frac{S_t \sin \theta_t}{S_i \sin \theta_i} = \frac{\varepsilon_b}{\tilde{\varepsilon}'_{\perp}} |T|^2 \Rightarrow \quad (4.38)$$

$$\frac{S_t}{|T|^2} \tilde{\varepsilon}'_{\perp} \sin \theta_t = S_i \varepsilon_b \sin \theta_i \quad (4.39)$$

Ubacivanjem jednačina (4.34) i (4.36), kao i definicije veličine K iz jednačine (4.37), u prethodnu jednačinu dobija se:

$$K^2 = \frac{\tilde{\varepsilon}'_{\perp}{}^2 \left[\operatorname{Re} \left(\frac{k_{xt}}{\varepsilon_{\parallel}} \right) \right]^2 + k_z^2}{k_{xi}^2 + k_z^2} \quad (4.40)$$

Iz disperzione relacije za izotropnu (jednačina (4.25)) sredinu dobija se:

$$k_{xi}^2 + k_z^2 = \varepsilon_b k_0^2 \quad (4.41)$$

dok iz disperzione relacije za anizotropnu sredinu (jednačina (4.26)) sledi:

$$\left(\frac{k_{xt}}{\varepsilon_{\parallel}} \right)^2 = \left(\frac{1}{\varepsilon_{\parallel}} - \frac{\varepsilon_b \sin^2 \theta_i}{\varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp}} \right) k_0^2 \Rightarrow \quad (4.42)$$

$$\operatorname{Re} \left[\left(\frac{k_{xt}}{\varepsilon_{\parallel}} \right)^2 \right] = \left(\frac{1}{\tilde{\varepsilon}'_{\parallel}} - \frac{\varepsilon'_{\perp} \varepsilon'_{\parallel} - \varepsilon''_{\perp} \varepsilon''_{\parallel}}{|\varepsilon_{\parallel}|^2 |\varepsilon_{\perp}|^2} \varepsilon_b \sin^2 \theta_i \right) k_0^2, \quad (4.43)$$

$$\operatorname{Im} \left[\left(\frac{k_{xt}}{\varepsilon_{\parallel}} \right)^2 \right] = \left(-\frac{\varepsilon''_{\parallel}}{|\varepsilon_{\parallel}|^2} + \frac{\varepsilon'_{\perp} \varepsilon''_{\parallel} - \varepsilon''_{\perp} \varepsilon'_{\parallel}}{|\varepsilon_{\parallel}|^2 |\varepsilon_{\perp}|^2} \varepsilon_b \sin^2 \theta_i \right) k_0^2 \quad (4.44)$$

pri čemu je $\varepsilon'_{\perp/\parallel} = \text{Re}(\varepsilon_{\perp/\parallel})$ i $\varepsilon''_{\perp/\parallel} = \text{Im}(\varepsilon_{\perp/\parallel})$. Kako za kvadrat nekog imaginarnog broja oblika $d^2 = a + jb$ važi sledeća relacija: $[\text{Re}(d)]^2 = (a + \sqrt{a^2 + b^2})/2$, tako je:

$$\left[\text{Re} \left(\frac{k_{xt}}{\varepsilon_{\parallel}} \right) \right]^2 = \frac{\text{Re} \left[\left(\frac{k_{xt}}{\varepsilon_{\parallel}} \right)^2 \right] + \sqrt{\left\{ \text{Re} \left[\left(\frac{k_{xt}}{\varepsilon_{\parallel}} \right)^2 \right] \right\}^2 + \left\{ \text{Im} \left[\left(\frac{k_{xt}}{\varepsilon_{\parallel}} \right)^2 \right] \right\}^2}}{2} \quad (4.45)$$

Ubacivanjem izraza (4.41) i (4.45) u jednačinu (4.40) dobija se, nakon sređivanja:

$$K = \tilde{\varepsilon}'_{\perp}{}^2 \cdot \text{Re} \left[\left(\frac{k_{xt}}{\varepsilon_{\parallel}} \right)^2 \right] \cdot \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{\left\{ \text{Im} \left[\left(\frac{k_{xt}}{\varepsilon_{\parallel}} \right)^2 \right] \right\}^2}{\left\{ \text{Re} \left[\left(\frac{k_{xt}}{\varepsilon_{\parallel}} \right)^2 \right] \right\}^2}}}{2} + k_z^2 \quad (4.46)$$

Konačno se, ubacivanjem izraza (4.43) i (4.46) u relaciju (4.37), nakon sređivanja dobija izraz za efektivni indeks prelamanja Poynting-ovog vektora apsorptivne anizotropne sredine:

$$n_s = \pm \frac{\varepsilon'_{\parallel}}{\varepsilon'_{\perp}} \frac{|\varepsilon_{\perp}|^2}{|\varepsilon_{\parallel}|^2} \sqrt{\frac{|\varepsilon_{\parallel}|^2}{\varepsilon'_{\parallel}} \Omega - \varepsilon_b \sin^2 \theta_i \left[\frac{\varepsilon'_{\perp} |\varepsilon_{\parallel}|^2}{\varepsilon'_{\parallel} |\varepsilon_{\perp}|^2} \Omega - \left(\frac{\varepsilon'_{\perp} |\varepsilon_{\parallel}|^2}{\varepsilon'_{\parallel} |\varepsilon_{\perp}|^2} \right)^2 - \frac{\varepsilon''_{\parallel} \varepsilon'_{\perp} |\varepsilon_{\parallel}|^2}{(\varepsilon'_{\parallel})^2 |\varepsilon_{\perp}|^2} \Omega \right]} \quad (4.47)$$

pri čemu se znak “-“ uzima kada je $\varepsilon'_{\perp} < 0$ i $\varepsilon'_{\parallel} > 0$, jer je, kao što je pokazano u prethodnom potpoglavlju, samo u tom slučaju moguće dobiti negativnu refrakciju. U slučaju neapsorptivne sredine ($\varepsilon_{\perp} = \varepsilon'_{\perp}$ i $\varepsilon_{\parallel} = \varepsilon'_{\parallel}$) važi da je $\Omega = 1$, pa se izraz (4.47) svodi na izraz (4.27).

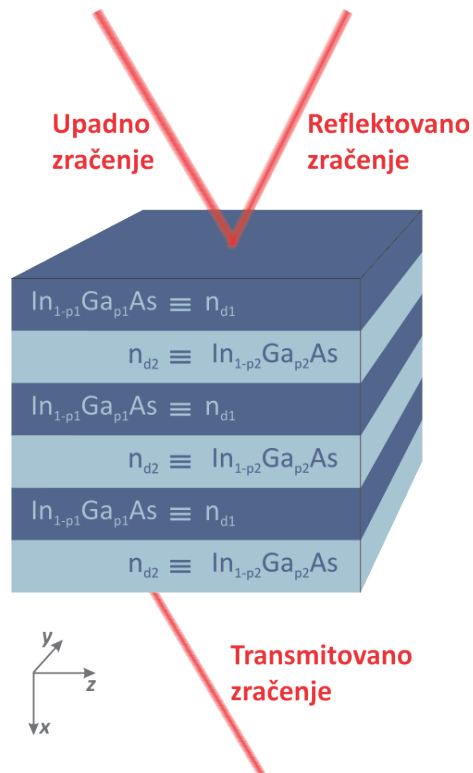
4.3 Poluprovodnički metamaterijal od dva različito dopirana sloja InGaAs

Model strukture

Cilj dobijanja izraza za efektivni indeks prelamanja Poynting-ovog vektora u anizotropnim disperzivnim apsorptivnim materijalima (4.47) je otvaranje mogućnosti za dizajniranje i analizu novih, jednostavnijih i fleksibilnijih, poluprovodničkih metamaterijala. Na osnovu gornjeg izraza, ovde je modelovan jedan takav metamaterijal, sastavljen od velikog broja naizmenično postavljenih slojeva različito

dopiranih InGaAs, pozicioniran unutar nemagnetnog materijala permitivnosti ε_b (Slika 4.5).

$\text{In}_{1-p}\text{Ga}_p\text{As}$ je poluprovodnički materijal sastavljen od InAs i GaAs, pri čemu je udeo GaAs u ovoj leguri jednak p , dok je udeo InAs $1 - p$. Ovaj poluprovodnik ima veoma široku primenu u HEMT (*High Electron Mobility Transistor*) uređajima, detektorima u infracrvenoj oblasti, kao i u laserima. Osnovne karakteristike InGaAs su niska cena usled poznate tehnologije izrade, široka rasprostranjenost i fleksibilnost parametara koja se dobija promenom udela GaAs p [129]. Sve ove karakteristike govore u prilog InGaAs kao povoljnog materijala za izradu poluprovodničkog metamaterijala.

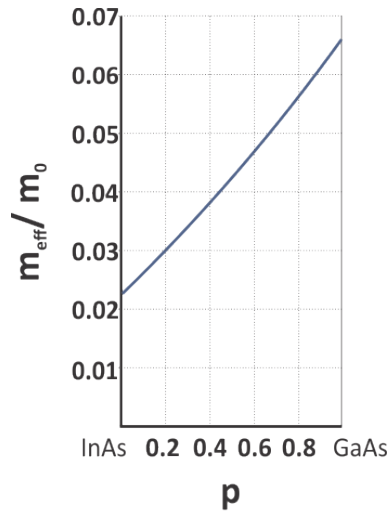


Slika 4.5:

Model poluprovodničkog metamaterijala sastavljenog od naizmenično postavljenih slojeva dva različito dopirana InGaAs. Na Slici su obeleženi i upadni, reflektovani i transmitovani zrak kada je efektivni indeks prelamanja Poynting-ovog vektora manji od nule. Slojevi su obeleženi tako kako bi se pokazala ekvivalencija između promene dopiranosti slojeva i promene udela GaAs u InGaAs

Osnovna osobina InGaAs koja omogućava njegovu primenu pri dizajniranju poluprovodničkog metamaterijala je fleksibilnost parametara, a pre svega plazma frekvencije promenom dopiranosti ili relativnih udela njegovih sastavnih delova (InAs i GaAs) u leguri. Naime, permitivnost InGaAs se može opisati Drude-ovim modelom (2.20), pri čemu je $\mu = 1$. Iz jednačine (2.18) poznato je da je plazma frekvencija srazmerna gustini slobodnih elektrona ($\omega_p \sim n_d$), te su i optičke osobine legure veoma zavisne od ove veličine. Plazma frekvencija, takođe, obrnuto proporcionalno zavisi od efektivne mase nosilaca ($\omega_p \sim m_{eff}^{-1}$) koju je moguće menjati, uz nepromenjenu dopiranost, promenom udela GaAs u InGaAs, kao što je prikazano na Slici 4.6 [129]. Stoga, iako će ovde konkretno biti razmatran samo pristup različite dopiranosti slojeva, očigledno je da promena veličine p dovodi do istih efekata kao i promena n_d (doduše, u ograničenom domenu, pošto je m_{eff} moguće varirati maksimalno za $\pm 50\%$, dok je

mogućnosti variranja n_d praktično neograničene), a oba pristupa omogućavaju dizajn poluprovodničkih metamaterijala u velikom opsegu frekvencija.



Slika 4.6:

Zavisnost količnika efektivne mase elektrona m_{eff} i mase elektrona m_0 od udela GaAs u leguri InGaAs. [129]

Finite-Difference Time-Domain: Total-Field/Scattered-Field formalizam u disperzivnom materijalu

Kao što je poznato, u svim oblastima fizike postoje dva načina verifikacije teorijski dobijenih rezultata: eksperimentalno ili numeričkim simulacijama. U svrhu provere valjanosti dobijene relacije za efektivni indeks prelamanja (4.47), korišćen je poslednje pomenuti metod. Najčešće korišćeni metodi numeričkog simuliranja prostiranja EM talasa kroz nano- i mikro-strukture su FEM (*Finite Element Method*) i FDTD (*Finite-Difference Time-Domain*) metoda. Za potrebe izrade ove teze korišćena je FDTD metoda.

FDTD je metoda koja simulira prostiranje EM talasa kroz različite strukture rešavanjem Maxwell-ovih jednačina u prostorno-vremenskom domenu. Ova metoda pretpostavlja prvobitnu podelu prostora i vremena na veliki broj malih elemenata koje zadovoljavaju relacije numeričke stabilnosti ($\Delta r \sim \lambda/10$, $\Delta t \sim \Delta r/(2c)$, pri čemu je Δr prostorni, a Δt vremenski jedinični element). Zatim se FDM-om (*Finite Difference Method* – Metoda konačnih razlika) aproksimiraju I i II Maxwell-ova diferencijalna jednačina, nakon čega se *split-step* metodom magnetno i električno polje prostorno i vremenski razdvajaju unutar svake prostorne i vremenske jedinične ćelije, te se rešavaju unutar svakog od ovih elemenata. FDTD metoda je veoma uspešna u predviđanju elektromagnetnog odziva različitih struktura, jer rešava fundamentalne (Maxwell-ove) jednačine bez ikakvih aproksimacija, te predstavlja zamenu za eksperiment na problemima malih dimenzija (metoda je ograničena jedino konačnim dimenzijama jediničnih elemenata), pri čemu se ovde pod malim dimenzijama podrazumevaju veličine dva do tri reda veće od talasnih dužina EM polja. [130,131]

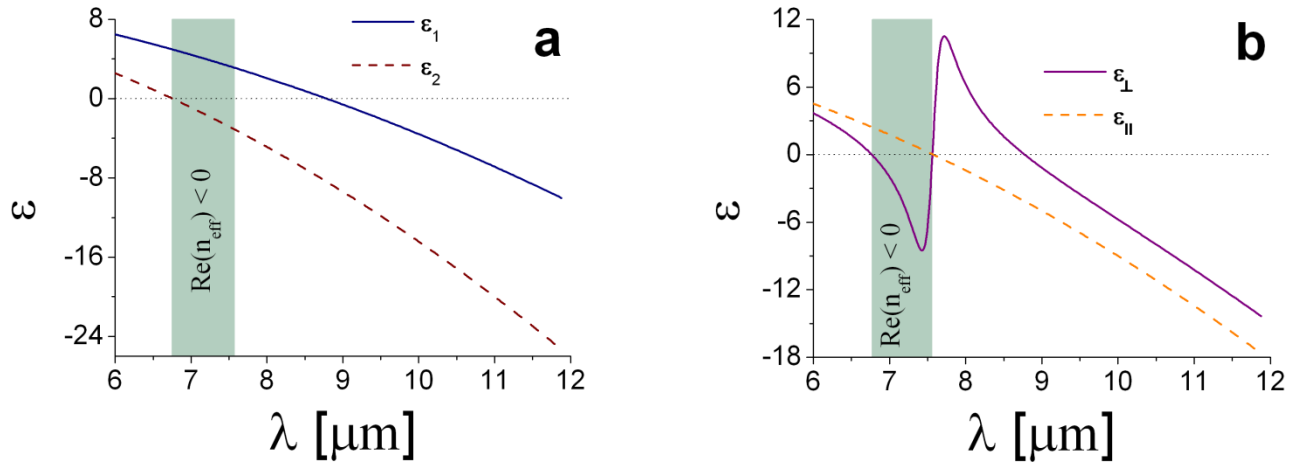
TF/SF (Total-Field/Scattered-Field) formalizam predstavlja FDTD metodu koja omogućava kreiranje upadnih ravanskih talasa na strukturu [130,131]. Kako je u ovoj tezi od suštinskog značaja korišćenje ravnih ekvifaznih površina, ovaj formalizam je korišćen radi dobijanja prostornog Gauss-ovog snopa kao upadnog zračenja na strukturu. Ovaj profil se koristi zbog manje interakcije sa granicama strukture i lakšeg izračunavanja efektivnog indeksa prelamanja. Takođe, kako je nemoguće koristiti klasičnu FDTD metodu za simuliranje propagacije EM talasa kroz materijale sa negativnim indeksom prelamanja, jer to dovodi do numeričke nestabilnosti, potrebno je koristiti posebnu FDTD metodu za simuliranje propagacije u materijalima sa Lorentz-ovim tipom disperzije [132]. U ovom radu korišćena je napredna tehnika kombinacije TF/SF formalizma sa FDTD metodom u disperzivnim materijalima [133]. Simulacije su razvijane u softveru za tehničko programiranje MATLAB, kao i u programskom jeziku za paralelno programiranje na grafičkim karticama CUDA C [134,135,136].

Numerički rezultati

U ispitivanom modelu korišćen je materijal $\text{In}_{0.53}\text{Ga}_{0.47}\text{As}$, što je najčešće korišćena legura InGaAs. Za ovu vrednost udela GaAs važi da je $m_{eff}(0.47) = 0.0425 \cdot m_0$, pri čemu je m_0 masa slobodnog elektrona. Poluprovodnički metamaterijal prikazan na Slici 4.5 sastavljen je od dva različito dopirana $\text{In}_{0.53}\text{Ga}_{0.47}\text{As}$ čije su karakteristike: $\epsilon_\infty = 12.15$, $\Gamma_e = 10^{13}$ Hz, $\omega_p(n_d) = n_d e^2 / [m_{eff} \epsilon_\infty \epsilon_0]$. Ukupna širina strukture je fiksirana i iznosi $L = 3.6 \mu\text{m}$, dok je upadni ugao, usled veoma slabe zavisnosti efektivnog indeksa prelamanja od ove veličine, takođe fiksiran i iznosi $\theta = \pi/3.2$. Broj slojeva u teorijskom modelu, prema teoriji efektivne sredine, teži beskonačnosti, dok se u FDTD modelu struktura sastoji od ukupno 15 slojeva (ovaj broj je bio ograničen dostupnim kompjuterskim resursima, no, bez obzira, dovoljan za dobijanje pouzdanih rezultata). Simulacije su rađene tako što je dopiranost jednog od dva korišćena materijala fiksirana na $n_{d1} = 7.5 \cdot 10^{24}$, odnosno $\omega_{p1} = \omega_p(n_{d1}) = 214.75$ THz. Dopiranost drugog materijala se varira u opsegu $n_{d2,min} = 4.7 \cdot 10^{24} \leq n_{d2} \leq 12 \cdot 10^{24} = n_{d2,max}$, pri čemu važi da je $1.6 \cdot \omega_p(n_{d2,min}) = \omega_{p1} = \omega_p(n_{d2,max})/1.6$, odnosno $\omega_{p2} \in (\omega_{p1}/1.6, \omega_{p1} \cdot 1.6)$, gde je ω_{p2} plazma frekvencija materijala dopiranosti n_{d2} .

Na Slici 4.7a prikazan je oblik zavisnosti permitivnosti slojeva $\text{In}_{0.53}\text{Ga}_{0.47}\text{As}$ dopiranosti n_{d1} i n_{d2} od talasne dužine upadne svetlosti za slučaj $\omega_{p2} = 1.3 \cdot \omega_{p1}$ (ovaj slučaj odgovara dopiranosti $n_{d2} = 9.75 \cdot 10^{24}$). Zelenom bojom je osenčena oblast u kojoj je realni deo efektivnog indeksa prelamanja, prema rešenju jednačine (4.47), manji od nule. Očigledno, ovaj opseg frekvencija je ograničen uslovima $\epsilon_2 = 0$ i $\epsilon_1 = -\epsilon_2$. Ovi uslovi važe za svaki poluprovodnički metamaterijal, s tim što je pravilan oblik prvog uslova $\min\{\epsilon_1, \epsilon_2\} = 0$. Na Slici 4.7b prikazani su oblici permitivnosti za paralelnu i normalnu polarizaciju. Kao što je i ranije pokazano, negativni indeks prelamanja je moguće dobiti samo u oblastima jake anizotropije, odnosno u slučaju $\text{Re}(\epsilon_\perp) < 0 < \text{Re}(\epsilon_\parallel)$. Iako su ovde dati primeri za jedan slučaj, prikazani grafici

predstavljaju karakteristične oblike zavisnosti permitivnosti od talasne dužine u poluprovodničkom metamaterijalu.



Slika 4.7: Relativne dielektrične permitivnosti **(a)** slojeva; **(b)** strukture za $\omega_{p2} = 1.3 \cdot \omega_{p1}$. Zelena osenčenja predstavljaju oblasti negativnog efektivnog indeksa prelamanja strukture, prema rešenju jednačine (4.47). Relativne permitivnosti slojeva InGaAs obeležene su sa ϵ_1 i ϵ_2 , dok ϵ_{\parallel} i ϵ_{\perp} predstavljaju paralelnu i transverzalnu komponentu efektivnog indeksa prelamanja, respektivno

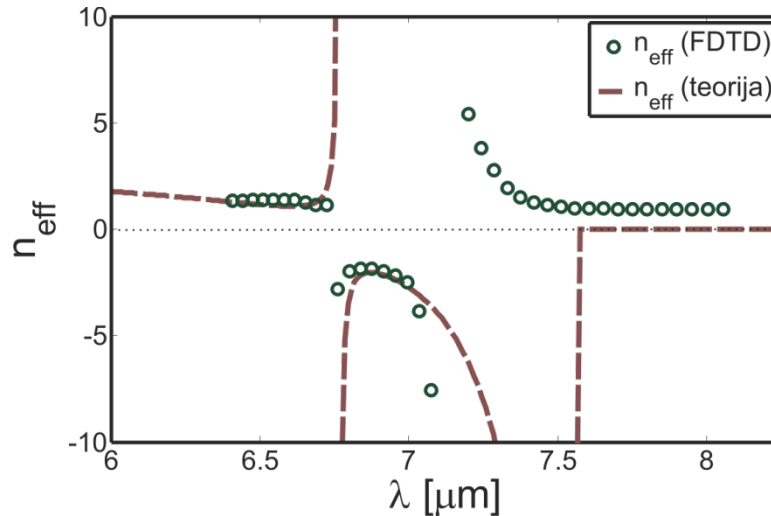
Na osnovu gore prikazanih veličina, pomoću jednačine (4.47) lako se dobija oblik zavisnosti realnog dela efektivnog indeksa prelamanja od upadne talasne dužine (Slika 4.8 – kako imaginarni deo indeksa prelamanja nije od interesa za analizu postojanja negativne refrakcije u ovom materijalu, realni deo efektivnog indeksa prelamanja će se obeležavati sa n_{eff} , pri čemu je, u teorijskoj analizi, $n_{\text{eff}} = n_s$). Na ovom grafiku prikazano je i poređenje teorijskog modela sa rezultatima dobijenim iz numeričkih simulacija. Indeks prelamanja u numeričkim simulacijama je izračunat iz sledeće formule, koja sledi iz Snell-ovog zakona:

$$n_{\text{eff},\text{FDTD}} = \frac{\sin \theta}{\sin \left[\arctg \left(\frac{z_t - z_i}{L} \right) \right]} \quad (4.48)$$

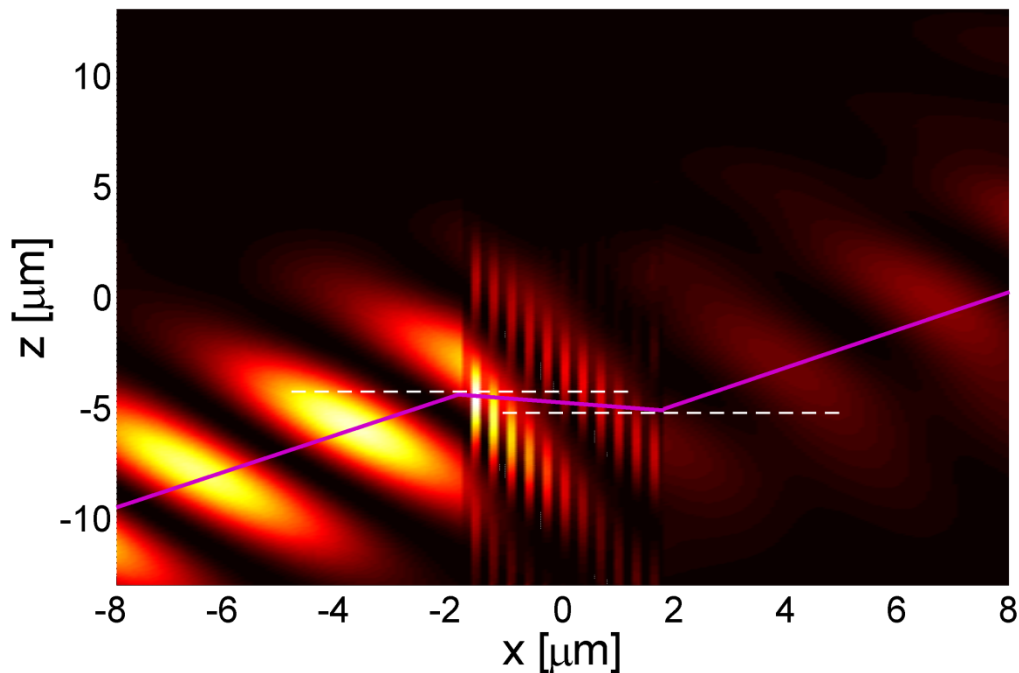
pri čemu je z_i pozicija maksimuma (u z pravcu) upadnog prostornog Gauss-ovog impulsa na ulazu u materijal, dok je z_t pozicija maksimuma (u z pravcu) transmitovanog impulsa na izlasku iz materijala (Slika 4.9).

Kao što se može videti iz teorijskih rezultata, unutar opsega u kome indeks prelamanja ima negativnu vrednost, ovaj indeks za kratke talasne dužine ima niske apsolutne vrednosti ($n_{\text{eff}} \approx -2$), no, sa rastom talasne dužine upadnog zračenja, indeks prelamanja počinje naglo da divergira ka $n_{\text{eff}} \rightarrow -\infty$, nakon čega postaje čisto imaginarna veličina (za $\lambda > 7.56$ μm). Rezultati numeričkih simulacija se u velikoj meri poklapaju sa teorijskim modelom, osim u opsegu talasnih dužina u kojem efektivni

indeks prelamanja počinje da divergira, kada FDTD rezultati pokazuju prelazak indeksa iz negativne u pozitivnu vrednost. S obzirom na veoma veliku apsolutnu vrednost indeksa prelamanja, koja onemogućava aplikativnost materijala u ovom opsegu, prikazano odstupanje ne umanjuje značajno validnost teorijskog modela (4.47).



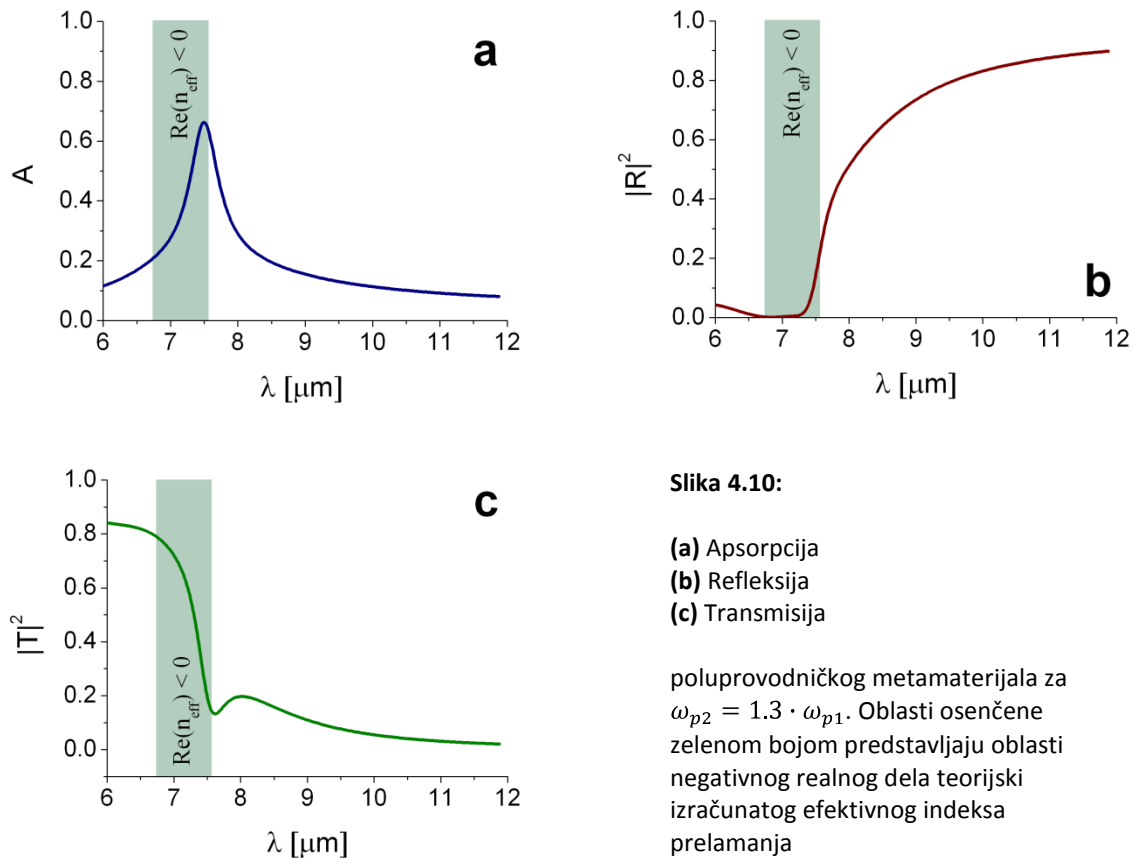
Slika 4.8: Zavisnost realnog dela efektivnog indeksa prelamanja strukture od talasne dužine upadnog zračenja za $\omega_{p2} = 1.3 \cdot \omega_{p1}$



Slika 4.9: FDTD simulacija prostiranja prostornog Gauss-ovog impulsa ($\lambda = 6.875 \mu\text{m}$) kroz poluprovodnički metamaterijal za $\omega_{p2} = 1.3 \cdot \omega_{p1}$. Puna linija pokazuje pravac protoka elektromagnetne energije. Izračunati efektivni indeks prelamanja iznosi -1.83

Slika 4.9 prikazuje jedan kadar iz FDTD simulacije prostiranja prostornog Gauss-ovog impulsa kroz analiziran poluprovodnički metamaterijal. Puna linija označava pravce kretanja elektromagnetne energije, odnosno Poynting-ovog vektora. Na osnovu ovih pravaca, i ugla pod kojim su okrenuti Gauss-ovi impulsi u poluprovodničkom metamaterijalu, očigledno je da ova slika odgovara predviđanju datom šematskim prikazom propagacije EM zračenja kroz ovakav materijal (Slika 4.3b).

Na Slici 4.10 prikazane su osnovne karakteristike EM talasa pri prostiranju kroz analizirani poluprovodnički metamaterijal. Očigledno je, u opsegu $6.75 \mu\text{m} \leq \lambda \leq 7 \mu\text{m}$, u kome su apsolutne vrednosti indeksa prelamanja niske, i u kome postoji slaganje između teorijskih i numeričkih rezultata, koeficijent transmisije visok ($|T|^2 \sim 0.7 - 0.8$), apsorpcija je niska, a refleksija zanemarljivo mala, što ovaj metamaterijal čini mogućim kandidatom za različite aplikacije u mikroelektronici. Za veće talasne dužine, dolazi do jakog rasta apsorpcije i refleksivnosti ovog materijala.



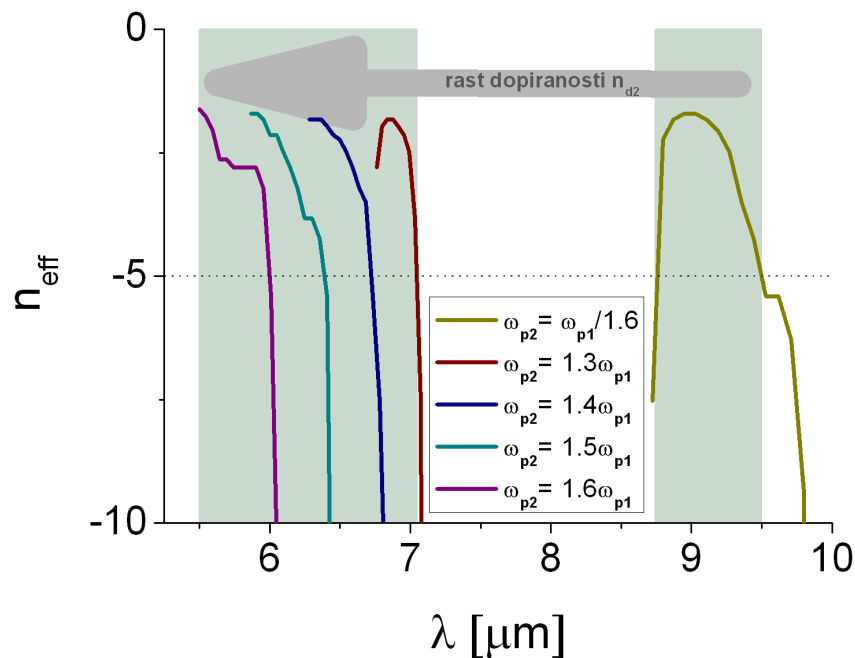
Slika 4.10:

- (a)** Apsorpcija
- (b)** Refleksija
- (c)** Transmisija

poluprovodničkog metamaterijala za $\omega_{p2} = 1.3 \cdot \omega_{p1}$. Oblasti osenčene zelenom bojom predstavljaju oblasti negativnog realnog dela teorijski izračunatog efektivnog indeksa prelamanja

Konačno, na Slici 4.11 prikazani su FDTD rezultati za oblik zavisnosti efektivnog indeksa prelamanja od talasne dužine upadnog zračenja za različite vrednosti dopiranosti n_{d2} . Na grafiku su, radi preglednosti, prikazani samo opsezi u kojima su efektivni indeksi prelamanja negativni. Očigledno, promenom veličine n_{d2} moguće je menjati opseg

frekvencija u kome je indeks prelamanja strukture negativan, te se, u ovakvoj strukturi, teorijski, može dobiti negativan indeks prelamanja za sve talasne dužine ispod $7 \mu\text{m}$, kao i za sve talasne dužine iznad $8.8 \mu\text{m}$. U praksi, opseg talasnih dužina u kom se može dobiti negativan indeks prelamanja ograničen je mogućnostima dopiranja slojeva; što je veća fleksibilnost u ovom smislu, veći je i željeni opseg. Bitno je napomenuti da se, ovde, pod negativnim indeksom prelamanja smatraju samo vrednosti u opsegu $-5 < n_{eff} < 0$ (za veće apsolutne vrednosti n_{eff} , upadni zrak se, koliki god da je upadni ugao, unutar strukture kreće, približno, po normali). U opsegu $7 \mu\text{m} < \lambda < 8.8 \mu\text{m}$, vrednost $n_{d2} \approx n_{d1} = 7.5 \cdot 10^{24}$, anizotropija je slaba, pa se struktura može aproksimirati jednim slojem $\text{In}_{0.53}\text{Ga}_{0.47}\text{As}$ dopiranosti n_{d1} i debljine L koji, naravno, ne može biti karakterizovan negativnim efektivnim indeksom prelamanja.

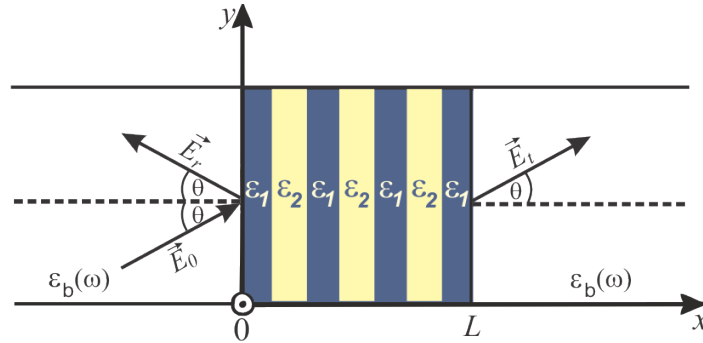


Slika 4.11: FDTD rezultati zavisnosti negativnog dela efektivnog indeksa prelamanja od talasne dužine upadne svetlosti, za različite količine dopiranosti n_{d2} . Oblasti osenčene zelenom bojom predstavljaju oblasti u kojima je moguće dobiti $0 > n_{eff} > -5$.

4.4 Helmholtz-ove jednačine za anizotropne materijale

Ovim poglavljem počinje drugi deo ove glave koji se tiče analize vremena tunelovanja u anizotropnim materijalima, odnosno, konkretno, u poluprovodničkim metamaterijalima opisanim u poglavlju 4.2. Model koji je ispitivan u ovu svrhu je prikazan na Slici 4.12. Dakle, model je analogan onom iz glave 2, s tom razlikom da se barijera sastoji od strukture sastavljene od naizmenično postavljenih slojeva dva materijala sa Drude-ovim tipom disperzije. Permitivnosti ovih materijala su ϵ_1 i ϵ_2 , pri čemu se efektivne

permitivnosti u različitim pravcima predstavljaju preko veličina ε_{\perp} i ε_{\parallel} , na način prikazan u prethodnom delu ove glave.



Slika 4.12: Model za ispitivanje vremena tunelovanja u poluprovodničkim metamaterijalima

Kao i u glavi 1, radi dobijanja vremena tunelovanja, potrebno je prvo izvesti odgovarajuće Helmholtz-ove jednačine. I i II Maxwell-ova jednačina za anizotropnu sredinu imaju sledeći oblik:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\|\mu\|\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \|\varepsilon\|\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \quad (4.49)$$

$$\|\mu\|\vec{\nabla} \times [\|\mu^{-1}\|(\vec{\nabla} \times \vec{E})] - \frac{\|\varepsilon\|\|\mu\|}{c^2} \omega^2 \vec{E} = 0 \quad (4.50)$$

pri čemu su $\|\varepsilon\|$ i $\|\mu\|$ tenzori permitivnosti i permeabilnosti, respektivno, opšteg oblika:

$$\|\varepsilon\| = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{vmatrix} \quad (4.51)$$

$$\|\mu\| = \begin{vmatrix} \mu_x & 0 & 0 \\ 0 & \mu_y & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{vmatrix} \quad (4.52)$$

Jednačina (4.50) je dobijena pod pretpostavkom da se u strukturi prostiru samo ravanski talasi. Neka važi i pretpostavka da u strukturi propagiraju samo TE modovi ($E_x, E_z, H_y = 0$). Jednačina (4.50) sada postaje:

$$\frac{\mu_x}{\mu_z} \frac{\partial^2 E_y}{\partial y \partial x} \vec{i}_x - \left\{ \mu_y \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu_z} \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \right] + \frac{\mu_y}{\mu_x} \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \right\} \vec{i}_y + \frac{\mu_z}{\mu_x} \frac{\partial^2 E_y}{\partial y \partial z} \vec{i}_z - \frac{\varepsilon_y \mu_y}{c^2} \omega^2 E_y \vec{i}_y = 0 \quad (4.53)$$

i može se napisati preko sledeće tri jednačine:

$$\frac{\mu_x}{\mu_z} \frac{\partial^2 E_y}{\partial y \partial x} = 0, \quad \frac{\mu_z}{\mu_x} \frac{\partial^2 E_y}{\partial y \partial z} = 0 \Rightarrow \quad (4.54)$$

$$\mu_y \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu_z} \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \right] + \frac{\mu_y}{\mu_x} \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + \frac{\varepsilon_y \mu_y}{c^2} \omega^2 E_y = 0 \quad (4.55)$$

Iz gornjih jednačina očigledno je da je $E_y = E_y(x, z)$, odnosno E_y je konstantno po y dimenziji. Stoga se električno polje može predstaviti na sledeći način: $E_y = E_y(x) \cdot E_y(z)$, te jednačina (4.55) dobija sledeći oblik:

$$\mu_y \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\mu_z} \frac{dE_y(x)}{dx} \right) \right] E_y(z) + \frac{\mu_y}{\mu_x} \frac{d^2 E_y(z)}{dz^2} E_y(x) + \varepsilon_y \mu_y k_0^2 E_y(x) E_y(z) = 0 \quad (4.56)$$

Deljenjem gornje jednačine sa $E_y(x)E_y(z)$ μ_y/μ_x dobija se:

$$\frac{\mu_x \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\mu_z} \frac{dE_y(x)}{dx} \right) + \varepsilon_y \mu_x k_0^2 E_y(x)}{E_y(x)} + \frac{\frac{d^2 E_y(z)}{dz^2}}{E_y(z)} = 0 \quad (4.57)$$

Kako je $E_y(z) \sim \exp(j\beta z)$, propagaciona konstanta je jednaka:

$$\beta^2 = - \frac{\frac{d^2 E_y(z)}{dz^2}}{E_y(z)} \Rightarrow \quad (4.58)$$

$$\frac{\mu_x \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\mu_z} \frac{dE_y(x)}{dx} \right) + \varepsilon_y \mu_x k_0^2 E_y(x)}{E_y(x)} = \beta^2 \quad (4.59)$$

Ubacivanjem jednačina (4.58) i (4.59), zasebno, u jednačinu (4.57) dobijaju se Helmholtz-ove jednačine za opšti slučaj anizotropne sredine:

$$\frac{d^2 E_y(z)}{dz^2} + \beta^2 E_y(z) = 0 \quad (4.60)$$

$$\mu_x \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\mu_z} \frac{dE_y(x)}{dx} \right) + (\varepsilon_y \mu_x k_0^2 - \beta^2) E_y(x) = 0 \quad (4.61)$$

U slučaju TM modova se, analogno, dobija:

$$\frac{d^2 H_y(z)}{dz^2} + \beta^2 H_y(z) = 0 \quad (4.62)$$

$$\varepsilon_x \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\varepsilon_z} \frac{dH_y(x)}{dx} \right) + (\mu_y \varepsilon_x k_0^2 - \beta^2) H_y(x) = 0 \quad (4.63)$$

U ovom delu će se, kao što je već rečeno, računati vremena tunelovanja za slučaj poluprovodničkih metamaterijala, te će biti posmatrani samo TM modovi. Za ove materijale efektivni tenzori permitivnosti i permeabilnosti iznose:

$$\|\varepsilon\| = \begin{vmatrix} \varepsilon_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\parallel} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel} \end{vmatrix} \quad (4.64)$$

$$\|\mu\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (4.65)$$

pa Helmholtz-ove jednačine za ovaj slučaj imaju sledeći oblik:

$$\frac{d^2 H_y(z)}{dz^2} + \beta^2 H_y(z) = 0 \quad (4.66)$$

$$\frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}} \frac{d^2 H_y(x)}{dx^2} + (\varepsilon_{\perp} k_0^2 - \beta^2) H_y(x) = 0 \quad (4.67)$$

4.5 Srednja gustina elektromagnetne energije: pristup ekvivalentnog kola

Prateći redosled prikazan u glavi 2, pre izvođenja izraza vremena tunelovanja, potrebno je izračunati vrednost srednje gustine EM energije u barijeri, odnosno, u ovom slučaju, u poluprovodničkom metamaterijalu. Ipak, za razliku od poglavlja 2.5, ovde će ova veličina biti izračunata implicitnom metodom pod nazivom EC pristup (Equivalent Circuit – pristup ekvivalentnog kola) [137]. Ovaj pristup se bazira na analogiji između gustine električne energije u nekom materijalu i rada odgovarajućeg električnog kola (kako se u ovoj glavi radi samo sa nemagnetnim materijalima, srednja gustina magnetne energije je $\langle w_m \rangle = \mu_0 |H|^2 / 4$, iz jednačine (2.54)). Najbitnija karakteristika EC pristupa je ta da sa sigurnošću u svim slučajevima daje tačan rezultat, za razliku od metoda prikazanog u poglavlju 2.5, u kome je potrebno tačno odrediti gubitke, što kod komplikovanijih struktura može biti veoma delikatan problem.

Kao što je poznato, rad po jedinici zapremine (odnosno, gustina energije) pri uspostavljanju električnog polja u nekoj izotropnoj sredini permitivnosti $\varepsilon(\omega)$ jednak je [137]:

$$w_e = \int_t E \frac{\partial D}{\partial t} dt \quad (4.68)$$

pri čemu su vektori kod gornjih polja izostavljeni usled njihovog jednakog pravca u izotropnim sredinama. Isto tako, rad električnog kola jednak je:

$$W_{ec} = \int_t VI dt = \int_t V \frac{\partial q}{\partial t} dt \quad (4.69)$$

pri čemu je V potencijalna razlika između krajeva kola, dok je $I = \partial q / \partial t$ struja u jednoj grani kola. Jednačine (4.68) i (4.69) se mogu izjednačiti ukoliko se usvoje analogije $V \leftrightarrow E$ i $q \leftrightarrow D$. Kako je, u slučaju linearnog kola:

$$\hat{q}(\omega) = \frac{1}{j\omega} \hat{I}(\omega) = \frac{1}{j\omega Z(\omega)} \hat{V}(\omega) \quad (4.70)$$

pri čemu su $\hat{I}(\omega)$, $\hat{V}(\omega)$ i $Z(\omega)$ struja, napon i impedansa kola u frekvencijskom domenu, respektivno, dok je $q(t) = \text{Re}[\hat{q}(\omega)\exp(j\omega t)]$. Kako važi da je $\hat{D}(\omega) = \varepsilon(\omega)\hat{E}(\omega)$, upoređivanjem ove relacije sa jednačinom (4.70) i usvojenim analogijama, dobija se analogija [137]:

$$\frac{1}{j\omega Z(\omega)} \leftrightarrow \varepsilon(\omega) \quad (4.71)$$

Prema ovoj relaciji, svaki disperzivan materijal permitivnosti $\varepsilon(\omega)$ odgovara linearnom kolu impedanse $Z(\omega)$. Stoga, izračunavanjem rada ovog linearnog kola (što predstavlja daleko lakši postupak nego eksplicitno izračunavanje srednje gustine EM energije), dobija se, prema gornjim analogijama, i srednja gustina elektromagnetne energije u materijalu.

Osnovni izraz za permitivnost korišćen u ovom radu je Lorentz-ov model:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_\infty \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + j\Gamma_e \omega - \omega_r^2} \right) \quad (4.72)$$

Korišćenjem analogije (4.71) dobija se, nakon sređivanja, da impedansa ekvivalentnog kola treba da iznosi:

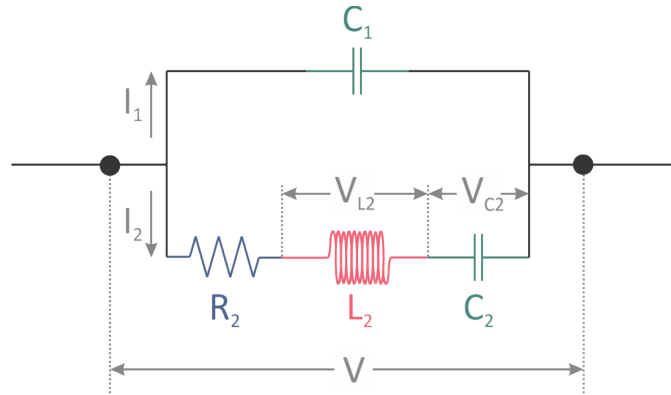
$$\frac{1}{Z(\omega)} = \frac{1}{j\omega\epsilon_0\epsilon_\infty} + \frac{\Gamma}{\epsilon_0\epsilon_\infty\omega_p^2 + j\omega\left(\frac{1}{\epsilon_0\epsilon_\infty\omega_p^2}\right) + \frac{1}{j\omega\epsilon_0\epsilon_\infty\frac{\omega_p^2}{\omega_r^2}}} \quad (4.73)$$

Kako je impedansa otpornika $Z_R(\omega) = R$, kondenzatora $Z_C(\omega) = 1/(j\omega C)$ i kalema $Z_L(\omega) = j\omega L$, gornji izraz se može napisati na sledeći način:

$$\frac{1}{Z(\omega)} = \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{R_2 + j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2}} = \frac{1}{Z_1(\omega)} + \frac{1}{Z_2(\omega)}, \quad (4.74)$$

$$C_1 = \epsilon_0\epsilon_\infty, \quad R_2 = \frac{\Gamma}{\epsilon_0\epsilon_\infty\omega_p^2}, \quad L_2 = \frac{1}{\epsilon_0\epsilon_\infty\omega_p^2}, \quad C_2 = \epsilon_0\epsilon_\infty\frac{\omega_p^2}{\omega_r^2} \quad (4.75)$$

Kako je, prema definiciji, impedansa serijske veze data relacijom $Z_s = Z_1 + Z_2 + \dots$, dok je impedansa paralelne veze $1/Z_s = 1/Z_1 + 1/Z_2 + \dots$, pri čemu je Z_i impedansa i -tog elementa, impedansa prikazana relacijom (4.74) može se predstaviti paralelnom vezom dve grane impedansi $Z_1(\omega)$ i $Z_2(\omega)$, pri čemu se impedansa $Z_2(\omega)$ dobija pomoću serijske veze elemenata R_2 , L_2 i C_2 (Slika 4.13). Iz jednačine (4.75) se vidi da element C_1 generiše nedisperzivni član permitivnosti metamaterijala, R_2 simulira gubitke, L_2 plazma frekvenciju, dok C_2 generiše rezonantnu učestanost metamaterijala.



Slika 4.13: Ekvivalentno kolo nemagnetnog materijala sa Lorentz-ovim tipom disperzije permitivnosti

Usrednjena vrednost rada ovog kola računa se na sledeći način:

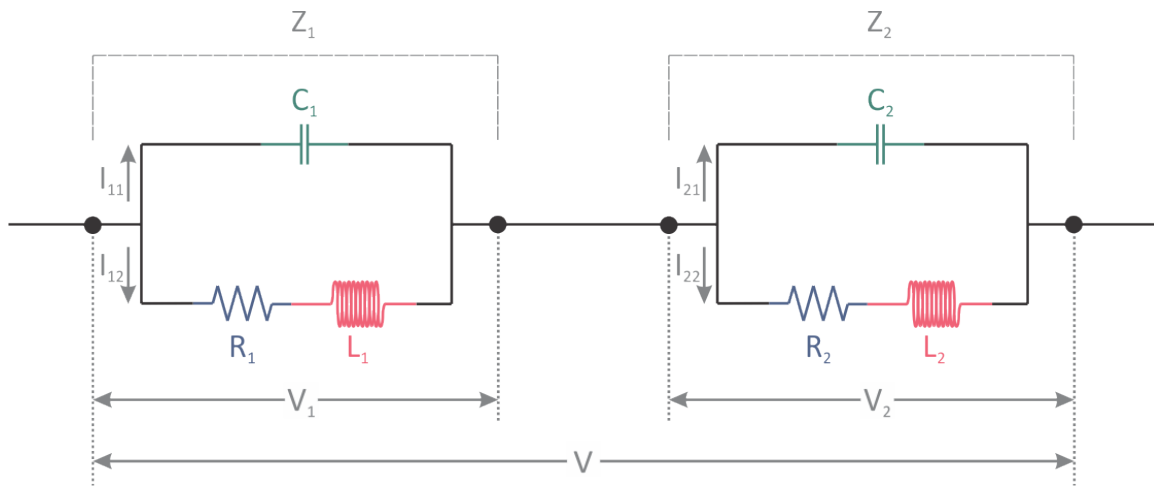
$$\langle W_{ec} \rangle = \frac{1}{2} C_1 |V|^2 + \frac{1}{2} C_2 |V_{C2}|^2 + \frac{1}{2\omega^2 L_1} |V_{L2}|^2 \quad (4.76)$$

$$\underline{V}_{C2} = \frac{V}{R_2 + j\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right)} \frac{1}{j\omega C_2}, \quad \underline{V}_{L2} = \frac{V}{R_2 + j\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right)} j\omega L_2 \quad (4.77)$$

te je, iz izraza (4.74), (4.75), (4.76) i (4.77) [137]:

$$\langle W_{ec} \rangle = \frac{\varepsilon_\infty \varepsilon_0}{2} \left(1 + \frac{\omega_p^2 (\omega^2 + \omega_r^2)}{(\omega^2 - \omega_r^2)^2 + \omega^2 \Gamma^2} \right) |V|^2 \xrightarrow{w_e \leftrightarrow W_{ec}, V \leftrightarrow E} \quad (4.78)$$

$$\langle w_e \rangle = \frac{\varepsilon_\infty \varepsilon_0}{2} \left(1 + \frac{\omega_p^2 (\omega^2 + \omega_r^2)}{(\omega^2 - \omega_r^2)^2 + \omega^2 \Gamma^2} \right) |E|^2 \quad (4.79)$$



Slika 4.14: Ekvivalentno kolo permitivnosti paralelne polarizacije u poluprovodničkom metamaterijalu

Sada je moguće izračunati srednju gustinu električne energije u poluprovodničkom metamaterijalu. Permitivnost strukture u pravu prostiranja EM polja je, iz jednačine (4.8):

$$\frac{1}{\frac{1}{2} \varepsilon_\perp} = \frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} \Rightarrow \quad (4.80)$$

$$Z(\omega) = \frac{1}{\underbrace{j\omega\varepsilon_1}_{Z_1(\omega)}} + \frac{1}{\underbrace{j\omega\varepsilon_2}_{Z_2(\omega)}}, \quad (4.81)$$

$$\varepsilon_{1/2} = \varepsilon_0 \varepsilon_{\infty 1/2} \left(1 - \frac{\omega_{p1/2}^2}{\omega^2 + j\Gamma_e \omega} \right) \quad (4.82)$$

Na osnovu prethodne analize lako se zaključuje da je ekvivalentno električno kolo ovog materijala serijska veza dva RLC kola prikazana na Slici 4.14.

Rad električnog kola prikazanog na slici jednak je zbiru radova kondenzatora $\langle W_{ec} \rangle_C$ i kalema $\langle W_{ec} \rangle_L$:

$$\langle W_{ec} \rangle = \langle W_{ec} \rangle_C + \langle W_{ec} \rangle_L \Rightarrow \quad (4.83)$$

$$\langle W_{ec} \rangle = \frac{1}{2} C_1 |V_1|^2 + \frac{1}{2} C_2 |V_2|^2 + \frac{1}{2\omega^2 L_1} |V_{L1}|^2 + \frac{1}{2\omega^2 L_2} |V_{L2}|^2 \quad (4.84)$$

pri čemu su V_{L1} i V_{L2} naponi na kalemovima. Kako je:

$$\underline{V}_1 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} V, \quad \underline{V}_2 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} V \quad (4.85)$$

$$V_{L1} = \frac{j\omega L_1}{R_1 + j\omega L_1} V_1, \quad V_{L2} = \frac{j\omega L_2}{R_2 + j\omega L_2} V_2 \quad (4.86)$$

sređivanjem jednačina (4.81)-(4.86) i uključivanjem analogija $V \leftrightarrow E$ i $W_{ec} \leftrightarrow w_e$ dobija se izraz za srednju gustinu električne energije u poluprovodničkom metamaterijalu:

$$\langle w_e \rangle = \frac{2\varepsilon_0 \varepsilon_{\infty 1} \varepsilon_{\infty 2}}{\varepsilon_{\infty 1} + \varepsilon_{\infty 2}} \frac{|\vec{E}|^2}{4} \left\{ 1 + \frac{\omega_s^2 (\omega^2 + \omega_s^2) (\omega^2 + \Gamma^2) + \omega_p^4 (\omega_s^2 - \Gamma^2 - 3\omega^2)}{[(\omega^2 - \omega_s^2)^2 + \omega^2 \Gamma^2] (\omega^2 + \Gamma^2)} \right\}, \quad (4.87)$$

pri čemu se, u slučaju propagacije TM modova, umesto vektora električnog polja \vec{E} koristi y komponenta magnetnog polja H_y pomoću relacija (2.43), (2.46) i (2.48), koje povezuju x i z komponentu električnog polja sa H_y .

4.6 Vremena tunelovanja u poluprovodničkom metamaterijalu

Nakon izračunavanja srednje gustine elektromagnetne energije u poluprovodničkom metamaterijalu, prostornim integraljenjem ove veličine se, kao u poglavlju 2.6 dobija srednja energija u ovom materijalu za slučaj propagacije TM modova:

$$\langle W \rangle = \frac{\varepsilon_0 S}{4} \left[(\varepsilon_{\perp})_{eff} \frac{\beta^2}{(\varepsilon_{\perp} \varepsilon_0 \omega)^2} + (\varepsilon_{\parallel})_{eff} \frac{\text{Re}(\gamma^2)}{(\varepsilon_{\parallel} \varepsilon_0 \omega)^2} \right] \int_0^L |H_y|^2 dx + \frac{\varepsilon_0 S}{4} (\varepsilon_{\parallel})_{eff} \frac{1}{(\varepsilon_{\parallel} \varepsilon_0 \omega)^2} (-2\gamma_0 \text{Im}(R) |H_0|^2 - S_1) \quad (4.88)$$

pri čemu je:

$$(\varepsilon_{\perp})_{eff} = \frac{2\varepsilon_{\infty 1} \varepsilon_{\infty 2}}{\varepsilon_{\infty 1} + \varepsilon_{\infty 2}} \left[1 + \frac{\omega_s^2 (\omega^2 + \omega_s^2)}{|\Omega^2 - \omega_s^2|^2} + \frac{\omega_p^4 (\omega_s^2 - \Gamma^2 - 3\omega^2) \omega^2}{|\Omega^2 - \omega_s^2|^2 \cdot (\omega^4 + \omega^2 \Gamma^2)} \right] \quad (4.89)$$

$$(\varepsilon_{\parallel})_{eff} = \frac{1}{2} \left[\text{Re}(\varepsilon_1) + \frac{2\omega \text{Im}(\varepsilon_1)}{\Gamma} \right] + \frac{1}{2} \left[\text{Re}(\varepsilon_2) + \frac{2\omega \text{Im}(\varepsilon_2)}{\Gamma} \right] \quad (4.90)$$

$$S_1 = \text{Re} \left\{ (\varepsilon_{\parallel}^* - \varepsilon_b) \left[H_y \left(\frac{dH_y}{dx} \right) \right]_{x=0}^L \right\} \quad (4.91)$$

$$\gamma^2 = k_0^2 \varepsilon_{\parallel} - \frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}} \beta^2 \quad (4.92)$$

$$\Omega^2 = \omega^2 + j\Gamma\omega \quad (4.93)$$

dok je ostatak notacije preuzet iz glave 2. Upadna snaga na barijeru od poluprovodničkog metamaterijala je, logično, ista kao i kod bilo koje druge barijere, i data je jednačinom (2.126), pa se deljenjem srednje EM energije i snage dobija izraz za vreme zadržavanja:

$$\tau_d = \frac{\varepsilon_b}{2\gamma_0\omega|H_0|^2} \left[(\varepsilon_{\perp})_{eff} \frac{\beta^2}{\varepsilon_{\perp}^2} + (\varepsilon_{\parallel})_{eff} \frac{\text{Re}(\gamma^2)}{\varepsilon_{\parallel}^2} + k_0^2 \right] \int_0^L |H_y|^2 dx - \frac{\varepsilon_b (\varepsilon_{\parallel})_{eff} \text{Im}(R)}{\varepsilon_{\parallel}^2 \omega} - \frac{\varepsilon_b (\varepsilon_{\parallel})_{eff}}{2\gamma_0|H_0|^2 \omega \varepsilon_{\parallel}^2} S_1 \quad (4.94)$$

Konačno, postupkom analognim onom prikazanom u poglavlju 2.9 dobija se relacija koja povezuje vreme zadržavanja i grupno kašnjenje u poluprovodničkom metamaterijalu:

$$\tau_g = \tau_{def} + \tau_{ieff} + \tau_{loss} + \tau_{interface}, \quad (4.95)$$

$$\tau_g = |T|^2 \frac{d\varphi_0}{d\omega} + |R|^2 \frac{d\varphi_r}{d\omega} \quad (4.96)$$

$$\tau_{def} = \frac{1}{f} \tau_d \quad (4.97)$$

$$\tau_{ieff} = \tilde{\varepsilon}_{\parallel} \frac{\text{Im}(R)}{\omega} \frac{1}{f} - \frac{1}{\gamma_0} \frac{d\gamma_0}{d\omega} \text{Im}(R) \quad (4.98)$$

$$\tau_{loss} = \frac{\text{Im}(\gamma) \int_0^L \text{Im} \left(H_y^* \frac{dH_y}{d\omega} \right) dx}{\gamma_0 |H_0|^2} \quad (4.99)$$

$$\tau_{interface} = \frac{1}{2\gamma_0|H_0|^2} \left(\text{Re} \left\{ (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_b) \left[\frac{H_y}{\varepsilon_{\parallel}} \frac{dH_y^*}{d\omega} - H_y^* \frac{d}{d\omega} \left(\frac{H_y}{\varepsilon_{\parallel}} \right) \right] - \left(\frac{d\varepsilon_{\parallel}}{d\omega} - \frac{d\varepsilon_b}{d\omega} \right) H_y^* \frac{H_y}{\varepsilon_{\parallel}} \right\} \Big|_0^L + \frac{\tilde{\varepsilon}_{\parallel}}{\omega} f \cdot S_1 \right) \quad (4.100)$$

pri čemu je:

$$f = \frac{\tilde{\varepsilon}_{\perp} \beta^2 + \tilde{\varepsilon}_{\parallel} \gamma_0^2 + \varepsilon_b k_0^2}{\omega \cdot \text{Re} \left(\frac{d\gamma^2}{d\omega} \right)} \quad (4.101)$$

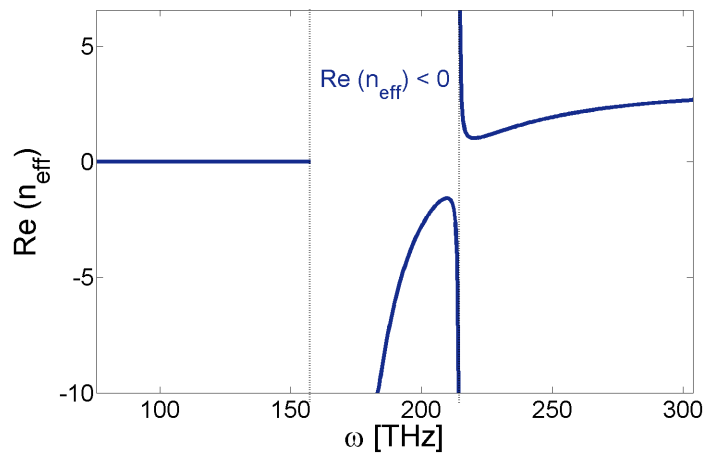
$$\tilde{\varepsilon}_{\perp} = \frac{\varepsilon_b (\varepsilon_{\perp})_{eff}}{|\varepsilon_{\perp}|^2}, \quad \tilde{\varepsilon}_{\parallel} = \frac{\varepsilon_b (\varepsilon_{\parallel})_{eff}}{|\varepsilon_{\parallel}|^2} \quad (4.102)$$

Prikazana vremena iz relacije (4.95) imaju ista značenja kao i odgovarajuća vremena iz jednačine (2.174): τ_{def} je efektivno vreme zadržavanja, τ_{ieff} predstavlja efektivno vreme samointerferencije, τ_{loss} je kašnjenje koje je posledica gubitaka u metamaterijalu, dok je $\tau_{interface}$ kašnjenje na razdvojnoj površini poluprovodničkog metamaterijala i okolnog talasovoda, koje je posledica razlike permitivnosti u smeru normalnom na propagaciju talasa (drugim rečima, $\tau_{interface} = 0$ kada je $\varepsilon_{\parallel} = \varepsilon_b$).

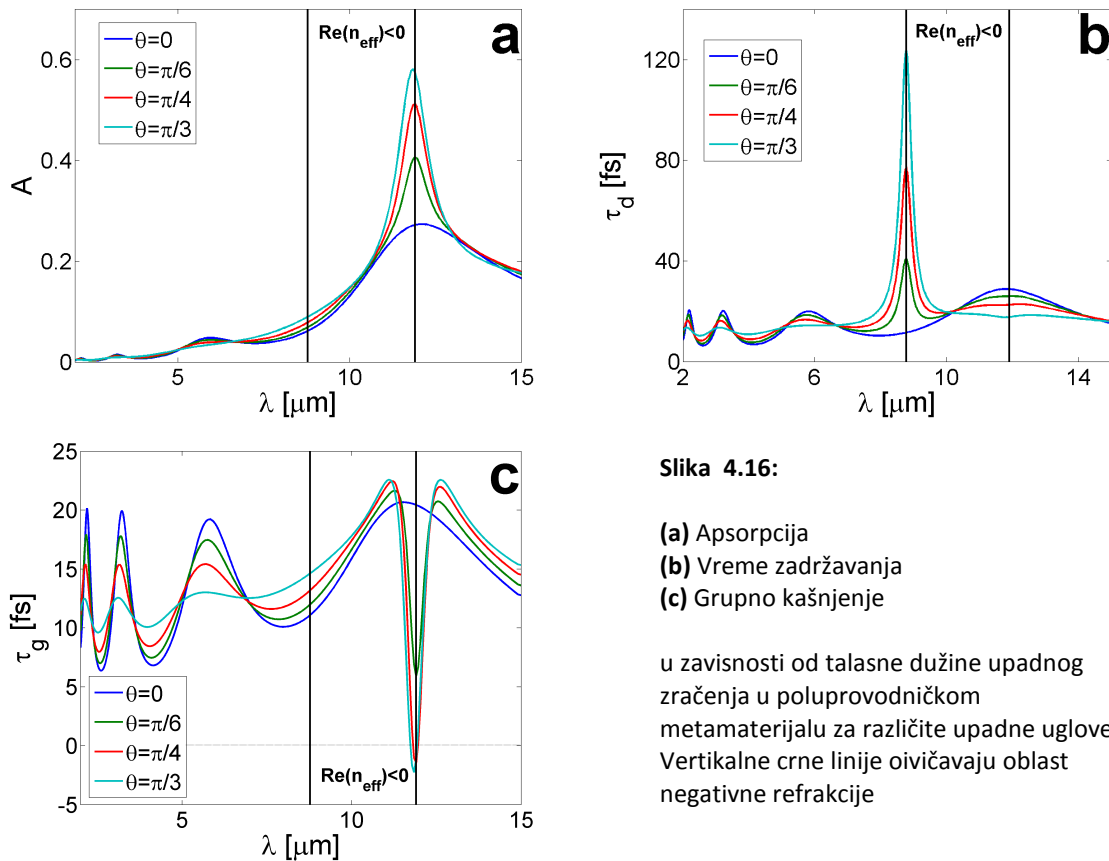
4.7 Numerički rezultati za vremena tunelovanja

Numerički deo istraživanja vremena tunelovanja je obavljen na poluprovodničkom metamaterijalu razvijenom od strane Hoffman-a i ostalih [73]. Ova struktura se sastoji od velikog broja naizmenično postavljenih slojeva poluprovodničkih materijala $\text{In}_{0.53}\text{Ga}_{0.47}\text{As}$ i $\text{Al}_{0.48}\text{In}_{0.52}\text{As}$. Slojevi $\text{In}_{0.53}\text{Ga}_{0.47}\text{As}$ su uniformno dopirani, tako da obezbeđuju rezonantnu plazma frekvenciju za slobodne nosioce ($\omega_{p,InGaAs} \neq 0$), dok su slojevi $\text{Al}_{0.48}\text{In}_{0.52}\text{As}$ nedopirani, što ih čini nedisperzivnim delom strukture ($\omega_{p,AlInAs} = 0$). Ovu strukturu karakteriše mogućnost dobijanja negativnog indeksa prelamanja u infracrvenom domenu.

Parametri ispitivanog poluprovodničkog metamaterijala su [138]: $\varepsilon_{\infty 1} = 12.15$, $\omega_{p1} = 214.75$ THz, $\Gamma = 10$ THz, $\varepsilon_{\infty 2} = 10.23$ i $\omega_{p2} = 0$, pri čemu je $\text{In}_{0.53}\text{Ga}_{0.47}\text{As}$ materijal obeležen brojem 1, dok je brojem 2 predstavljen $\text{Al}_{0.48}\text{In}_{0.52}\text{As}$. Širina barijere iznosi $L = 1$ μm , i okolna sredina je vazduh ($\varepsilon_b, \mu_b = 1$). Efektivni indeks prelamanja Poynting-ovog vektora ovog materijala ima negativnu vrednost u opsegu frekvencija 158.7 THz $< \omega < \omega_{lp} \approx \omega_{p1}$ (Slika 4.15). Za frekvencije $\omega \leq 158.7$ THz efektivni indeks je čisto imaginarna, dok je za $\omega > \omega_{lp}$ realna pozitivna veličina.



Slika 4.15: Zavisnost realnog dela efektivnog indeksa prelamanja ispitivanog poluprovodničkog metamaterijala od frekvencije upadnog EM talasa



Slika 4.16:

- (a) Apsorpcija
- (b) Vreme zadržavanja
- (c) Grupno kašnjenje

u zavisnosti od talasne dužine upadnog zračenja u poluprovodničkom metamaterijalu za različite upadne uglove. Vertikalne crne linije oivičavaju oblast negativne refrakcije

Na Slikama 4.16a, 4.16b i 4.16c prikazani su, respektivno, apsorpcija, vreme zadržavanja i grupno kašnjenje u zavisnosti od talasne dužine upadnog EM talasa za četiri različita upadna ugla. Sa Slika 4.16b i 4.16c se vidi da, za više frekvencije, vremena tunelovanja osciluju sa promenom frekvencije, što ukazuje na ponašanje u skladu sa Bragg-ovim

zakonom [124]. Ovakvo ponašanje je i logično, pošto je, u tom frekventnom domenu, perioda strukture uporediva sa talasnom dužinom upadnog zračenja, što dovodi do oscilatorne zavisnosti reflektivnosti, a time i vremena tunelovanja, od talasne dužine. [138]

Oblici prikazanih veličina u okolini domena talasnih dužina u kojima efektivni indeks prelamanja ima negativnu vrednost su veoma slični onima u izotropnom apsorptivnom disperzivnom linearnom materijalu. Ipak, postoji jedna bitna razlika koja se tiče pozicije pikova na granicama pomenutog domena. Naime, maksimum vremena zadržavanja se javlja na frekvenciji ω_{lp} , odnosno na jednoj granici frekventnog domena negativne vrednosti indeksa prelamanja. S druge strane, lokalni maksimumi apsorpcije i grupnog kašnjenja nalaze se na drugoj granici ovog frekventnog opsega: 158.7 THz. Ova neusklađenost u pozicijama pikova između vremena zadržavanja i grupnog kašnjenja, a pogotovu između vremena zadržavanja i apsorpcije, direktna je posledica anizotropije, te se, kao što je i viđeno u glavi 2, ne može dobiti u izotropnim materijalima. Ova osobina može biti korisna u linijama za kašnjenje, jer dovodi do visokog kašnjenja pri relativno niskoj apsorpciji. [138]

5 ZAKLJUČAK

Smanjivanjem mikrokomponenti na nanometarske dimenzije, kvantnomehanički efekti dobijaju sve više na značaju pri razvoju uređaja baziranim na ovim komponentama. Uporedo, prebacivanjem različitih tehnologija u optički domen, i razvijanjem sistema sastavljenih isključivo od optičkih komponenata, efekti u optici analogni kvantnomehaničkim efektima dolaze do izražaja, te se, u poslednje vreme, ubrzano radi na otkrivanju što većeg broja mogućnosti koje ovi efekti pružaju za unapređenje postojećih tehnologija. Jedan od efekata koji mogu da pruže veliku fleksibilnost pri razvoju različitih nanokomponenti u sveoptičkim sistemima je, svakako, elektromagnetno tunelovanje. U tom smislu, vremena tunelovanja su jedna od glavnih veličina na koje treba obratiti pažnju pri budućoj primeni ovog efekta u praksi. Kako su, do sada, vremena tunelovanja ispitivana samo u linearnim neapsorptivnim disperzivnim sredinama sa pozitivnim indeksom prelamanja, ostavljeno je dosta prostora za dalju analizu ovih veličina u različitim optičkim materijalima. Doprinos ove teze proučavanju ovog fenomena sastoji se u određivanju relacija vezanih za ova vremena u nelinearnim disperzivnim apsorptivnim materijalima sa pozitivnim i negativnim indeksom prelamanja, zatim u anizotropnim materijalima (konkretno, poluprovodničkim metamaterijalima) kao i u određivanju uticaja Goos-Hänchen-ovog pomeraja na ova vremena.

U vezi sa opštim slučajem nelinearne disperzivne apsorptivne sredine, doprinos teze ogleđa se u teorijskom i numeričkom izračunavanju vremena zadržavanja, koje je povezano sa propagacijom elektromagnetne energije kroz barijeru kroz koju talas tuneluje, grupnog kašnjenja, povezanog sa prostiranjem faze, i veze između ove dve veličine. Teorijski doprinos predstavljaju izvođenje i dobijanje gorepomenutih analitičkih izraza, dok se numerički doprinos ogleđa u razvoju numeričkih modela koji omogućavaju izračunavanje vremena tunelovanja u konkretnim materijalima, a na bazi izvedenih analitičkih relacija. Numerička izračunavanja prikazanog modela su urađena za metamaterijal, novu vrstu veštačkih periodičnih struktura, kako bi se pokazalo da model važi i za materijale sa negativnim indeksom prelamanja. Razvijen je numerički model za izračunavanje vremena zadržavanja u nelinearnim nedisperzivnim, kao i u metamaterijalima uronjenim u materijal sa saturacionom nelinearnošću. Rezultatima je pokazano da grupno kašnjenje, kao što je pokazano u brojnim ranijim eksperimentima, može biti negativno, ali to ne ugrožava kauzalnost, jer brzina kretanja elektromagnetne energije, izražena preko vremena zadržavanja, ne pokazuje superluminarne osobine.

Drugi doprinos teze vezan za vremena tunelovanja predstavlja nadograđivanje prikazanog teorijskog i numeričkog modela uračunavanjem Goos-Hänchen-ovog pomeraja. Ovde se pokazalo da Goos-Hänchen-ov pomeraj može značajno uticati na vremena tunelovanja (konkretno, može ih uvećati i za 100%), ali samo u frekventnim

opsezima u kojima je struktura karakterisana pozitivnim indeksom prelamanja. U slučaju negativnog indeksa prelamanja, pokazano je da dolazi do značajne redukcije uticaja Goos-Hänchen-ovog pomeraja na vremena tunelovanja, pa čak i do te mere da se, za određeni skup parametara koji karakterišu upadno elektromagnetno zračenje na strukturu, ovaj uticaj može neutralisati.

Kao još jedan doprinos, u poslednjoj glavi teze prikazan je teorijski model vremena tunelovanja u slučaju prostiranja elektromagnetnog talasa kroz poluprovodnički metamaterijal. Iako je ovaj model rađen za konkretnu vrstu materijala, može se generalizovati tako da važi za sve linearne disperzivne apsorptivne anizotropne strukture sa simetričnim tenzorom susceptibilnosti. Za poluprovodničke metamaterijale je pokazano da je moguće odvojiti pikove vremena zadržavanja, grupnog kašnjenja i apsorpcije unutar frekventnog opsega negativnog indeksa prelamanja, što omogućava dodatnu fleksibilnost pri dizajniranju komponenti (npr., linija za kašnjenje) baziranih na metamaterijalima.

Dalji istraživački rad vezan za vremena tunelovanja mogao bi ići u pravcu uopštavanja anizotropnog modela, tako da uzme u obzir i magnetne materijale. Takođe, moguća je kombinacija anizotropnih struktura sa nelinearnošću, što bi dovelo do još veće fleksibilnosti pri dizajniranju komponenti baziranih na efektu tunelovanja.

Druga grupa doprinosa ove teze vezana je za dizajn nove vrste poluprovodničkih metamaterijala baziranih isključivo na, veoma rasprostranjenom, poluprovodniku $\text{In}_{0.53}\text{Ga}_{0.47}\text{As}$. Poluprovodnički metamaterijali su strukture sastavljene od naizmenično postavljenih slojeva dva različita poluprovodnika. Ove strukture su nemagnetne, ali anizotropne, te koriste svoju anizotropiju radi dobijanja negativnog efektivnog indeksa prelamanja Poynting-ovog vektora. Ideja prezentovana u ovoj tezi bazira se na jednom poluprovodniku ($\text{In}_{0.53}\text{Ga}_{0.47}\text{As}$) sa naizmenično različito dopiranim slojevima. Time se dobijaju slojevi materijala sa različitim plazma rezonancama, a time i različitim disperzionim relacijama, te nailazeći elektromagnetni talas vidi anizotropnu strukturu koja, ukoliko su određeni uslovi zadovoljeni, može prelomiti ovaj talas pod negativnim uglom. Numeričke (FDTD) simulacije i razvijeni teorijski model su potvrdili da bi ovakav metamaterijal imao negativni indeks prelamanja u širokom opsegu talasnih dužina (bilo gde između, približno, 5 μm i 10 μm) i relativno nisku apsorpciju, što ga čini dobrim kandidatom za primenu u različitim mikro- i nano-optičkim sistemima, kao što su, npr., *cloaking* (nevidljivi) uređaji i savršena sočiva.

Dalji rad vezan za razvoj nove vrste poluprovodničkih metamaterijala baziranih na poluprovodniku $\text{In}_{0.53}\text{Ga}_{0.47}\text{As}$ uključivao bi eksperimentalnu potvrdu optičkih osobina ove strukture predviđenih teorijskim modelom. Takođe, otvaraju se i mogućnosti za dizajniranje i razvoj novih poluprovodničkih metamaterijala baziranih na istom teorijskom modelu, ali uz korišćenje drugih poluprovodnika, koji bi otvorili mogućnost dobijanja različitih frekventnih prozora sa negativnim indeksom prelamanja u telekomunikacionom domenu.

DODACI

A. Usrednjavanje po vremenu

Neka je $A(x, t)$ funkcija sa prostoperiodičnom zavisnošću od vremena:

$$A(x, t) = \frac{1}{2} [\underline{A}(x)\exp(j\omega t) + \underline{A}^*(x)\exp(-j\omega t)] \Rightarrow \quad (\text{A.1})$$

$$A^2(x, t) = \frac{1}{4}\underline{A}^2(x)\exp(2j\omega t) + \frac{1}{4}\underline{A}^{*2}(x)\exp(-2j\omega t) + \frac{1}{2}|A(x)|^2 \quad (\text{A.2})$$

Kako je srednja vrednost ove funkcije po vremenu jednaka:

$$\langle A^2(x, t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T A^2(x, t) dt \Rightarrow \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} \langle A^2(x, t) \rangle &= \frac{1}{4T} \int_0^T \underline{A}^2(x)\exp(2j\omega t) dt + \frac{1}{4T} \int_0^T \underline{A}^{*2}(x)\exp(-2j\omega t) dt \\ &\quad + \frac{1}{2T} \int_0^T |A(x)|^2 dt \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

pri čemu je $T = 2\pi/\omega$. Dalje je:

$$\begin{aligned} \langle A^2(x, t) \rangle &= \frac{\underline{A}^2(x)}{4T} \int_0^T \exp(2j\omega t) dt + \frac{\underline{A}^{*2}(x)}{4T} \int_0^T \exp(-2j\omega t) dt \\ &\quad + \frac{|A(x)|^2}{2T} \int_0^T dt \Rightarrow \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} \langle A^2(x, t) \rangle &= \frac{\underline{A}^2(x)}{4T} \frac{1}{2j\omega} \exp(2j\omega t) \Big|_{t=0}^T - \frac{\underline{A}^{*2}(x)}{4T} \frac{1}{2j\omega} \exp(-2j\omega t) \Big|_{t=0}^T \\ &\quad + \frac{|A(x)|^2}{2T} T \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Kako je $\exp(2j\omega t) \Big|_{t=0}^T = \exp(-2j\omega t) \Big|_{t=0}^T = 0$, konačno se dobija:

$$\langle A^2(x, t) \rangle = \frac{|A(x)|^2}{2} \quad (\text{A.7})$$

B. Koeficijent Q

Neka je:

$$Q = E_y \frac{dE_y^*}{dx} \Big|_0^L \quad (\text{B.1})$$

Ovde je:

$$E_y(x) = \begin{cases} E_0 \exp(j\gamma_0 x) + RE_0 \exp(-j\gamma_0 x); & x \leq 0 \\ TE_0 \exp(j\gamma_0 x); & x \geq L \end{cases} \Rightarrow \quad (\text{B.2})$$

$$Q(L) = [TE_0 \exp(j\gamma_0 x)][T^* E_0^* (-j\gamma_0) \exp(-j\gamma_0 x)] \Rightarrow \quad (\text{B.3})$$

$$Q(L) = -j\gamma_0 |T|^2 |E_0|^2; \quad (\text{B.4})$$

$$Q(0) = E_0(1+R)E_0^*(1-R^*)(-j\gamma_0) \Rightarrow \quad (\text{B.5})$$

$$Q(0) = j\gamma_0 |E_0|^2 (R^* - 1 - R + |R|^2) \quad (\text{B.6})$$

Kako je $Q = Q(L) - Q(0)$, sledi:

$$Q = j\gamma_0 |E_0|^2 (1 - |T|^2 - |R|^2 - R^* + R) \quad (\text{B.7})$$

Apsorpcija je jednaka:

$$A = 1 - |T|^2 - |R|^2 \quad (\text{B.8})$$

te je, konačno, koeficijent Q jednak:

$$Q = j\gamma_0 |E_0|^2 [A + 2j \cdot \text{Im}(R)] \quad (\text{B.9})$$

C. Apsorpcija

Snaga elektromagnetnog talasa, koja nije reflektovana niti transmitovana kroz barijeru, je apsorbovana unutar nje. Shodno tome, koeficijent apsorpcije, koji predstavlja procenat upadne snage koji je apsorbovan u barijeri, dat je izrazom [88]:

$$A = \frac{P_L}{P_{in}} = 1 - \frac{P_R}{P_{in}} - \frac{P_T}{P_{in}} \quad (\text{C.1})$$

gde su P_{in} , P_L , P_R i P_T srednja upadna, apsorbovana, reflektovana i transmitovana snaga, respektivno. Kako bi se proračunao koeficijent apsorpcije, krenuće se od Helmholtz-ove jednačine:

$$E_y'' - \frac{\mu'}{\mu} E_y' + \gamma^2 E_y = 0 \quad / \cdot E_y^* \Rightarrow \quad (\text{C.2})$$

$$E_y'' E_y^* - \frac{\mu'}{\mu} E_y' E_y^* + \gamma^2 |E_y|^2 = 0 \quad (\text{C.3})$$

pri čemu je ' operator izvoda po prostornoj dimenziji x . Takođe, kada se Helmholtz-ova jednačina (C.2) konjuguje, a zatim pomnoži sa E_y , dobija se:

$$E_y''^* E_y - E_y \left(\frac{\mu'}{\mu} E_y' \right)^* + (\gamma^2)^* |E_y|^2 = 0 \xrightarrow{(\text{C.3})-(\text{C.4})} \quad (\text{C.4})$$

$$E_y'' E_y^* - E_y''^* E_y - \frac{\mu'}{\mu} E_y' E_y^* + E_y \left(\frac{\mu'}{\mu} E_y' \right)^* + [\gamma^2 - (\gamma^2)^*] |E_y|^2 = 0 \quad / \int_{x=0}^L (\dots) dx \quad (\text{C.5})$$

$$E_y' E_y^* \Big|_0^L - E_y'^* E_y \Big|_0^L - 2j \int_0^L \text{Im} \left(\frac{\mu'}{\mu} E_y' E_y^* \right) dx + 2j \int_0^L \text{Im}(\gamma^2) \cdot |E_y|^2 dx = 0 \quad (\text{C.6})$$

Na analogan način kao u Dodatku B, ima se da je:

$$E_y' E_y^* \Big|_0^L - E_y'^* E_y \Big|_0^L = 2j\gamma_0 |E_0|^2 (|T|^2 + |R|^2 - 1) \quad (\text{C.7})$$

Zamenom izraza (C.7) u jednačinu (C.6), dobija se:

$$\begin{aligned} & 2j\gamma_0 |E_0|^2 |T|^2 + 2j\gamma_0 |E_0|^2 |R|^2 - 2j\gamma_0 |E_0|^2 \\ & = 2j \int_0^L \text{Im} \left(\frac{\mu'}{\mu} E_y' E_y^* \right) dx - 2j \int_0^L \text{Im}(\gamma^2) \cdot |E_y|^2 dx \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Iz izraza za srednju upadnu snagu (2.126), lako je zaključiti da su transmitovana i reflektovana snaga date sledećim izrazima:

$$P_T = |T|^2 \frac{\gamma_0 \varepsilon_0 c^2}{2\omega} S \cdot |E_0|^2 \quad (\text{C.9})$$

$$P_R = |R|^2 \frac{\gamma_0 \varepsilon_0 c^2}{2\omega} S \cdot |E_0|^2 \quad (\text{C.10})$$

Kada se jednačina (C.8) pomnoži sa faktorom $\varepsilon_0 c^2 S / (2\omega P_{in})$, dobija se:

$$\begin{aligned} \gamma_0 |E_0|^2 |T|^2 \frac{\varepsilon_0 c^2 S}{2\omega} \cdot \frac{1}{P_{in}} + \gamma_0 |E_0|^2 |R|^2 \frac{\varepsilon_0 c^2 S}{2\omega} \cdot \frac{1}{P_{in}} - \gamma_0 |E_0|^2 \frac{\varepsilon_0 c^2 S}{2\omega} \cdot \frac{1}{P_{in}} \\ = \frac{\varepsilon_0 c^2 S}{2\omega} \cdot \frac{1}{P_{in}} \int_0^L \text{Im} \left(\frac{\mu'}{\mu} E'_y E_y^* \right) dx - \frac{\varepsilon_0 c^2 S}{2\omega} \\ \cdot \frac{1}{P_{in}} \int_0^L \text{Im}(\gamma^2) \cdot |E_y|^2 dx \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Zamenom izraza (2.126), (C.9) i (C.10) u gornju jednačinu, dobija se:

$$\frac{P_T}{P_{in}} + \frac{P_R}{P_{in}} - 1 = \frac{1}{\gamma_0 |E_0|^2} \int_0^L \text{Im} \left(\frac{\mu'}{\mu} E'_y E_y^* \right) dx - \frac{1}{\gamma_0 |E_0|^2} \int_0^L \text{Im}(\gamma^2) \cdot |E_y|^2 dx \quad (\text{C.12})$$

Upoređivanjem ovog izraza sa izrazom (C.1), očigledno je da je:

$$A = \frac{1}{\gamma_0 |E_0|^2} \int_0^L \text{Im}(\gamma^2) \cdot |E_y|^2 dx - \frac{1}{\gamma_0 |E_0|^2} \int_0^L \text{Im} \left(\frac{\mu'}{\mu} E'_y E_y^* \right) dx \quad (\text{C.13})$$

Takođe, zamenom izraza (2.126) u jednačinu (C.11) i njegovim poređenjem sa prethodnom jednačinom, dobija se veza između koeficijenata apsorpcije, transmisije i refleksije:

$$A = 1 - |T|^2 - |R|^2 \quad (\text{C.14})$$

D. Koeficijent P

Potrebno je dokazati relaciju (2.136). Neka je:

$$P = \left(E_y^* \frac{dE'_y}{d\omega} - E'_y{}^* \frac{dE_y}{d\omega} \right) \Big|_0^L \quad (\text{D.1})$$

pri čemu je raspodela električnog polja $E_y(x)$ data jednačinom (B.2). Sada je, slično kao kod računanja parametra Q u Dodatku B:

$$\begin{aligned} \frac{P(L)}{|E_0|^2} &= T^* \exp(-j\gamma_0 x) \cdot \frac{d}{d\omega} [j\gamma_0 T \exp(j\gamma_0 x)] + j\gamma_0 T^* \exp(-j\gamma_0 x) \\ &\quad \cdot \frac{d}{d\omega} [T \exp(j\gamma_0 x)] \Rightarrow \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

$$\begin{aligned} \frac{P(L)}{|E_0|^2} &= T^* \exp(-j\gamma_0 x) \\ &\quad \cdot \left[j\gamma_0 \frac{dT}{d\omega} \exp(j\gamma_0 x) + jT \frac{d\gamma_0}{d\omega} \exp(j\gamma_0 x) + j\gamma_0 T \exp(j\gamma_0 x) \right. \\ &\quad \cdot \left. jL \frac{d\gamma_0}{d\omega} \right] + j\gamma_0 T^* \exp(-j\gamma_0 x) \\ &\quad \cdot \left[\frac{dT}{d\omega} \exp(j\gamma_0 x) + T \exp(j\gamma_0 x) \cdot jL \frac{d\gamma_0}{d\omega} \right] \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Kako je $T = |T| \exp(j\varphi_t)$, iz gornjeg izraza sledi:

$$\begin{aligned} \frac{P(L)}{|E_0|^2} &= -2L\gamma_0 |T|^2 \frac{d\gamma_0}{d\omega} + j \cdot |T|^2 \frac{d\gamma_0}{d\omega} + 2j\gamma_0 |T| \exp(-j\varphi_t) \\ &\quad \cdot \left[\exp(j\varphi_t) \frac{d|T|}{d\omega} + j|T| \exp(j\varphi_t) \frac{d\varphi_t}{d\omega} \right] \Rightarrow \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

$$\frac{P(L)}{|E_0|^2} = -2\gamma_0 |T|^2 \left(L \frac{d\gamma_0}{d\omega} + \frac{d\varphi_t}{d\omega} \right) + j \left(|T|^2 \frac{d\gamma_0}{d\omega} + 2\gamma_0 |T| \frac{d|T|}{d\omega} \right) \quad (\text{D.5})$$

Kako je faza incidentnog talasa jednaka $\varphi_0 = \varphi_t + \gamma_0 L$, tako je, ubacivanjem ove relacije u prethodni izraz:

$$\frac{P(L)}{|E_0|^2} = -2\gamma_0 |T|^2 \frac{d\varphi_0}{d\omega} + j \left(|T|^2 \frac{d\gamma_0}{d\omega} + 2\gamma_0 |T| \frac{d|T|}{d\omega} \right) \quad (\text{D.6})$$

Na analogan način se, preko izraza (B.2) i (D.1), dobija:

$$\begin{aligned} \frac{P(0)}{|E_0|^2} = & \left([\exp(-j\gamma_0 x) + R^* \exp(j\gamma_0 x)] \right. \\ & \cdot \frac{d}{d\omega} \{j\gamma_0 [\exp(j\gamma_0 x) - R \cdot \exp(-j\gamma_0 x)]\} \\ & + j\gamma_0 [R^* \exp(j\gamma_0 x) - \exp(-j\gamma_0 x)] \\ & \left. \cdot \frac{d}{d\omega} [\exp(j\gamma_0 x) + R \cdot \exp(-j\gamma_0 x)] \right) \Big|_{x=0} \Rightarrow \end{aligned} \quad (D.7)$$

$$\frac{P(0)}{|E_0|^2} = j \frac{d\gamma_0}{d\omega} (1 - |R|^2) + 2\text{Im}(R) \frac{d\gamma_0}{d\omega} - 2j\gamma_0 R^* \frac{dR}{d\omega} \quad (D.8)$$

Kako je $R = |R|\exp(j\varphi_r)$, sledi:

$$\frac{P(0)}{|E_0|^2} = j \frac{d\gamma_0}{d\omega} (1 - |R|^2) + 2\text{Im}(R) \frac{d\gamma_0}{d\omega} - 2j\gamma_0 |R| \frac{d|R|}{d\omega} + 2\gamma_0 |R|^2 \frac{d\varphi_r}{d\omega} \quad (D.9)$$

Pošto je $P = P(L) - P(0)$, iz jednačina (D.6) i (D.9) sledi:

$$\begin{aligned} \frac{P}{|E_0|^2} = & -2\gamma_0 |T|^2 \frac{d\varphi_0}{d\omega} + j|T|^2 \frac{d\gamma_0}{d\omega} + 2j\gamma_0 |T| \frac{d|T|}{d\omega} - j \frac{d\gamma_0}{d\omega} (1 - |R|^2) \\ & - 2\text{Im}(R) \frac{d\gamma_0}{d\omega} + 2j\gamma_0 |R| \frac{d|R|}{d\omega} - 2\gamma_0 |R|^2 \frac{d\varphi_r}{d\omega} \end{aligned} \quad (D.10)$$

Kako je grupno kašnjenje definisano na sledeći način (jednačina (2.129)):

$$\tau_g = |T|^2 \frac{d\varphi_0}{d\omega} + |R|^2 \frac{d\varphi_r}{d\omega} \quad (D.11)$$

nakon kraćeg sređivanja jednačine (D.10) se dobija da je:

$$\begin{aligned} P = & \left\{ 2j\gamma_0 \left[\frac{1}{2} \frac{d}{d\omega} (|T|^2 + |R|^2) + j\tau_g + j \frac{\text{Im}(R)}{\gamma_0} \frac{d\gamma_0}{d\omega} \right] \right. \\ & \left. + j \frac{d\gamma_0}{d\omega} (|T|^2 + |R|^2 - 1) \right\} |E_0|^2 \end{aligned} \quad (D.12)$$

što je i trebalo dokazati.

LITERATURA

- [1] H. Becquerel, "Sur les radiations émises par phosphorescence," *Comptes Rendus*, vol. 122, pp. 420-421, 1896.
- [2] M. Razavy, *Quantum theory of tunneling*.: World Scientific Publishing, 2003.
- [3] J. Elster and H. Geitel, "Über den Einfluß eines magnetischen Feldes auf die durch die Becquerelstrahlen bewirkte Leitfähigkeit der Luft," *Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft*, vol. 1, pp. 136-138, 1899.
- [4] E. Rutherford, "Radioactivity produced in Substances by the action of Thorium Compounds," *Philosophical Magazine*, vol. 49, pp. 161-192, 1900.
- [5] G. Gamow, ""Zur Quantentheorie des Atomkernes"," *Zeitschrift für Physik A: Hadrons and Nuclei*, vol. 51, pp. 204-212, 1928.
- [6] E. Merzbacher, "The Early History of Quantum Tunneling," *Physics Today*, pp. 44-49, August 2002.
- [7] M. Born, "Zur Theorie des Kernzerfalls," *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei*, vol. 58, pp. 306-321, 1929.
- [8] A. Levi, *Applied Quantum Mechanics*.: Cambridge University Press, 2003.
- [9] R. Lerner and G. Trigg, *Encyclopedia of Physics*.: VCH Publishers, 1991.
- [10] S. Connell. (2006) Introduction to Quantum Mechanics. [Online].
http://psi.phys.wits.ac.za/teaching/Connell/phys284/2005/lecture-02/lecture_02/node1.html
- [11] G. Bekefi and A. Barrett, *Electromagnetic Vibrations, Waves, and Radiation*.: MIT Press, 1987.
- [12] Th. Martin and R. Landauer, "Time delay of evanescent electromagnetic waves and the analogy to particle tunneling," *Physical Review A*, vol. 45, p. 2611, 1992.
- [13] J. W. Turkey, "An introduction to the calculations of numerical spectrum analysis," in *Spectral Analysis of Time Series*, B. Harris, Ed. New York: Wiley, 1967.
- [14] A. Kanshu, C. E. Rüter, D. Kip, P. P. Beličev, I. Ilić, M. Stepić and V. M. Shandarov, "Linear and nonlinear light propagation at the interface of two homogenous waveguide arrays," *Optics Express*, vol. 19, pp. 1158-1167, 2011.
- [15] P.P. Beličev, I. Ilić, M. Stepić, A. Maluckov, Y. Tan and F. Chen, "Observation of linear and nonlinear strongly localized modes at phase-slip defects in one-dimensional photonic lattices," *Optics Letters*, vol. 35, pp. 3099-3101, 2010.
- [16] D. Christodoulides and R. Joseph, "Discrete self-focusing in nonlinear arrays of coupled waveguides," *Optics Letters*, vol. 13, pp. 794-796, 1988.
- [17] V. S. C. Manga Rao and S. Dutta Gupta, "Subluminal and superluminal pulse propagation in a left-handed/right-handed periodic structure," *Journal of Optics A*, vol. 6, pp. 756-761, 2004.
- [18] T. Roth. (2008) DSI - Diffused Surface Illumination. [Online].
<http://iad.projects.zhdk.ch/multitouch/?p=90>

- [19] J. Y. Han, "Low-Cost Multi-Touch Sensing through Frustrated Total Internal Reflection," in *Proceedings of the 18th Annual ACM Symposium on User Interface Software and Technology*, 2005.
- [20] A. Holzammer, *Combining Diffuse Illumination and Frustrated Total Internal Reflection for touch detection*. Berlin: Technische Universität Berlin, 2009.
- [21] J. Y. Han. Multi-Touch Sensing through Frustrated Total Internal Reflection. [Online]. <http://cs.nyu.edu/~jhan/ftirsense/>
- [22] (2009) PCLaunches.com. [Online]. www.pclaunches.com
- [23] E. H. Hauge and J. A. Støvneng, "Tunneling times: a critical review," *Reviews of Modern Physics*, vol. 61, pp. 917-936, 1989.
- [24] E. U. Condon, "Quantum mechanics of collision processes," *Review of Modern Physics*, vol. 3, p. 43, 1931.
- [25] L. A. MacColl, "Note on the transmission and reflection of wave packets by potential barriers," *Physical Review*, vol. 40, p. 621, 1932.
- [26] R. Y. Chiao and A. M. Steinberg, "Tunneling times and superluminality," *Progress in Optics*, vol. XXXVII, pp. 347-406, 1997.
- [27] A. Enders and G. Nimtz, "On superluminal barrier traversal," *Journal of Physics I (France)*, vol. 2, p. 1963, 1992.
- [28] A.M. Steinberg, P.G. Kwiat, and R.Y. Chiao, "Measurement of the single-photon tunneling time," *Physical Review Letters*, vol. 71, p. 708, 1993.
- [29] Ch. Spielmann, R. Szipöcs, A. Stingl, and F. Krausz, "Tunneling of optical pulses through photonic band gaps," *Physical Review Letters*, vol. 73, p. 2308, 1994.
- [30] R. Y. Chiao, P. G. Kwiat, and A. M. Steinberg, "Faster than Light?," *Scientific American, Singapore*, p. 52, 1993.
- [31] R. Landauer, "Light faster than light?," *Nature (London)*, vol. 365, p. 692, 1993.
- [32] H. G. Winful, "The nature of 'superluminal' barrier tunneling," *Physical Review Letters*, vol. 90, p. 023901, 2003.
- [33] M. Büttiker and S. Washburn, "Ado about nothing much?," *Nature (London)*, vol. 422, p. 271, 2003.
- [34] H. G. Winful, "Mechanism for 'superluminal' tunneling," *Nature (London)*, vol. 424, p. 638, 2003.
- [35] D. Bohm, *Quantum Theory*. New York: Prentice-Hall, 1951.
- [36] E. P. Wigner, "Lower Limit for the Energy Derivative of the Scattering Phase Shift," *Physical Review*, vol. 98, pp. 145-147, 1955.
- [37] F. T. Smith, "Lifetime Matrix in Collision Theory," *Physical Review*, vol. 118, pp. 349-356, 1960.
- [38] A. J. Baz', *Soviet Journal of Nuclear Physics*, vol. 4, p. 182, 1967.
- [39] A. J. Baz', *Soviet Journal of Nuclear Physics*, vol. 5, p. 161, 1967.
- [40] V. F. Rybachenko, *Soviet Journal of Nuclear Physics*, vol. 5, p. 635, 1967.
- [41] L. Eisenbud, *dissertation (unpublished)*.: Princeton University, 1948.

- [42] M. Büttiker and R. Landauer, "Traversal time for tunneling," *Physical Review Letters*, vol. 49, p. 1739, 1982.
- [43] H. G. Winful, "Tunneling time, the Hartman effect, and superluminality: A proposed resolution of an old paradox," *Physics Reports*, vol. 436, pp. 1-69, 2006.
- [44] H. G. Winful, "Delay Time and the Hartman Effect in Quantum Tunneling," *Physical Review Letters*, vol. 91, p. 260401, 2003.
- [45] T. E. Hartman, "Tunneling of a wave packet," *Journal of Applied Physics*, vol. 33, p. 3427, 1962.
- [46] A. Enders and G. Nimtz, "Zero-time tunneling of evanescent mode packets," *Journal de Physique I*, vol. 3, p. 1089, 1993.
- [47] A. Enders, G. Nimtz, and H. Spieker, "Photonic tunneling times," *Journal de Physique I*, vol. 4, p. 565, 1994.
- [48] H. G. Winful, "Group delay, stored energy, and the tunneling of evanescent electromagnetic waves," *Physical Review E*, vol. 68, p. 016615, 2003.
- [49] M. Büttiker, "Larmor precession and the traversal time for tunneling," *Physical Review B*, vol. 27, pp. 6178-6188, 1983.
- [50] A. Schuster, *An Introduction to the Theory of Optics*. London: E. Arnold, 1909.
- [51] L. I. Mandel'shtam, *Polnoe Sobranie Trudov*, vol. 5. Moscow: Izd. AN SSSR, 1950.
- [52] L. I. Mandel'shtam, *Zhurnal Eksperimental'noi i Teoreticheskoi Fiziki*, vol. 15, p. 475, 1945.
- [53] L. I. Mandel'shtam, *Lektsii po Optike, Teorii Otnositel'nosti i Kvantovoi*. Moscow: Nauka, 1972.
- [54] D. V. Sivukhin, *Optika i Spektroskopiya*, vol. 3, p. 308, 1957.
- [55] V. E. Pafomov, *Zhurnal Eksperimental'noi i Teoreticheskoi Fiziki*, vol. 30, p. 761, 1956.
- [56] V. E. Pafomov, *Zhurnal Eksperimental'noi i Teoreticheskoi Fiziki*, vol. 33, p. 1074, 1957.
- [57] V. E. Pafomov, *Zhurnal Eksperimental'noi i Teoreticheskoi Fiziki*, vol. 36, p. 1853, 1959.
- [58] V. Veselago, "The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ϵ and μ ," *Soviet Physics Uspekhi*, vol. 92, p. 517, 1967.
- [59] R. A. Shelby, D. R. Smith, and S. Schultz, "Experimental Verification of a Negative Index of Refraction," *Science*, vol. 292, pp. 77-79, 2001.
- [60] J. B. Pendry, A. J. Holden, W. J. Stewart, and I. Youngs, "Extremely Low Frequency Plasmons in Metallic Mesostructures," *Physical Review Letters*, vol. 76, pp. 4773-4776, 1996.
- [61] J. B. Pendry, A. J. Holden, D. J. Robbins, and W. J. Stewart, "Magnetism from conductors and enhanced nonlinear phenomena," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Technology*, vol. 47, pp. 2075 - 2084, 1999.
- [62] P. W. Milonni, *Fast Light, Slow Light and Left-Handed Light*.: IOP Publishing, 2005.
- [63] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Electrodynamics of Continuous Media*.: Oxford: Pergamon, 1975.
- [64] M. Kafesaki, I. Tsiapa, N. Katsarakis, Th. Koschny, C. M. Soukoulis and E. N. Economou, "Left-handed metamaterials: The fishnet structure and its variations," *Physical Review B*, vol. 75, p. 235114, 2007.

- [65] G. Dolling, M. Wegener, C. M. Soukoulis, and S. Linden, "Negative-index metamaterial at 780 nm wavelength," *Optics Letters*, vol. 32, pp. 53-55, 2007.
- [66] V. M. Shalaev, W. Cai, U. K. Chettiar, H.-K. Yuan, A. K. Sarychev, V. P. Drachev and A. V. Kildishev, "Negative index of refraction in optical metamaterials," *Optics Letters*, vol. 30, pp. 3356-3358, 2005.
- [67] J. Yang, C. Sauvan, H. T. Liu, and P. Lalanne, "Theory of Fishnet Negative-Index Optical Metamaterials," *Physical Review Letters*, vol. 107, p. 043903, 2011.
- [68] S. Zhang, W. Fan, N. C. Panoiu, K. J. Malloy, R. M. Osgood and S. R. Brueck, "Experimental Demonstration of Near-Infrared Negative-Index Metamaterials," *Physical Review Letters*, vol. 95, p. 137404, 2005.
- [69] S. Zhang, W. Fan, K. J. Malloy, S. R. Brueck, N. C. Panoiu and R. M. Osgood, "Near-infrared double negative metamaterials," *Optics Express*, vol. 13, pp. 4922-4930, 2005.
- [70] J. Yang, C. Sauvan, T. Paul, C. Rockstuhl, F. Lederer and P. Lalanne, "Retrieving the effective parameters of metamaterials from the single interface scattering problem," *Applied Physics Letters*, vol. 97, p. 061102, 2010.
- [71] C. Rockstuhl, C. Menzel, T. Paul, T. Pertsch, and F. Lederer, "Light propagation in fishnet metamaterial," *Physical Review B*, vol. 78, p. 155102, 2008.
- [72] V. A. Podolskiy and E. E. Narimanov, "Strongly anisotropic waveguide as a nonmagnetic left-handed system," *Physical Review B*, vol. 71, p. 201101(R), 2005.
- [73] A. J. Hoffman, L. Alekseyev, S. S. Howard, K. J. Franz, D. Wasserman, V. A. Podolskiy, E. E. Narimanov, D. L. Sivco and C. Gmachl, "Negative refraction in semiconductor metamaterials," *Nature Materials*, vol. 6, pp. 946-950, 2007.
- [74] E. G. Sauter, *Nonlinear optics*.: Wiley-IEEE, 1996.
- [75] R. Botsco and R. McMaster, *Nondestructive testing handbook, vol. 4*.: ASNT, 1986.
- [76] A. Von Hippel, *Dielectric materials and applications*.: John Wiley & Sons, 1954.
- [77] P. Harrop, *Dielectrics*.: John Wiley & Sons, 1972.
- [78] M. Srečković, *Kvantna elektronika (skripta)*. Beograd: Elektrotehnički fakultet, 2006.
- [79] R. W. Boyd, *Nonlinear optics*.: Academic Press, 2003.
- [80] A. DaSilva, *The Kerr Effect*.: Penn State University, 2007.
- [81] R. Y. Chiao, E. Garmire, and C. H. Townes, "Self-trapping of optical beams," *Physical Review Letters*, vol. 13, pp. 479-482, 1964.
- [82] P. L. Kelley, "Self-focusing of optical beams," *Physical Review Letters*, vol. 15, pp. 1005-1008, 1965.
- [83] L. Berge, "Wave collapse in physics: principles and applications to light and plasma waves," *Physics Reports*, vol. 303, pp. 259-370, 1998.
- [84] R. Loudon, "The propagation of electromagnetic energy through an absorbing dielectric," *Journal of Physics A*, vol. 3, pp. 233-245, 1970.
- [85] T. J. Cui and J. A. Kong, "Time-domain electromagnetic energy in a frequency-dispersive left-handed medium," *Physical Review B*, vol. 70, p. 205106, 2004.

- [86] R. Ziolkowski and E. Heyman, "Wave propagation in media having negative permittivity and permeability," *Physical Review E*, vol. 64, p. 056625, 2001.
- [87] R. Ruppin, "Electromagnetic energy density in a dispersive and absorptive material," *Physics Letters A*, vol. 299, pp. 309-312, 2002.
- [88] A. D. Boardman and K. Marinov, "Electromagnetic energy in a dispersive metamaterial," *Physical Review B*, vol. 73, p. 165110, 2006.
- [89] B. Nistad and J. Skaar, "Causality and electromagnetic properties of active media," *Physical Review E*, vol. 78, p. 036603, 2008.
- [90] J. Surutka, *Elektromagnetika*. Beograd: Građevinska knjiga, 1978.
- [91] P.-G. Luan, "Power loss and electromagnetic energy density in a dispersive metamaterial medium," *Physical Review E*, vol. 80, p. 046601, 2009.
- [92] P. P. Beličev, I. Ilić, V. Milanović, J. Radovanović, and Lj. Hadžievski, "Tunneling times in metamaterials with saturable nonlinearity," *Physical Review A*, vol. 80, p. 023821, 2009.
- [93] J. V. Radovanović, I. Ilić, P. P. Beličev, Lj. Hadžievski, and V. B. Milanović, "Tunneling times in dispersive and third-order nonlinear optical metamaterials," *Journal of Nanophotonics*, vol. 5, p. 051802, 2011.
- [94] I. Ilić, P. P. Beličev, V. Milanović, and J. Radovanović, "Analysis of tunneling times in absorptive and dispersive media," *Journal of Optical Society of America B*, vol. 25, pp. 1800-1804, 2008.
- [95] I. Ilić, P. P. Beličev, V. Milanović, and J. Radovanović, "Modeling of dwell time and group delay in dispersive and absorptive media," *Physica Scripta*, vol. T135, p. 014040, 2009.
- [96] I. Ilić, P. P. Beličev, V. Milanović, J. Radovanović, "Vreme zadržavanja i grupno kašnjenje u metamaterijalima sa negativnim indeksom prelamanja," in *52. konferencija ETRAN, Zbornik radova*, 2008, pp. MO3. 2-1-4.
- [97] G. Isić, V. Milanović, J. Radovanović, Z. Ikonić, D. Indjin and P. Harrison, "Time delay in thin slabs with self-focusing Kerr-type nonlinearity," *Physical Review A*, vol. 77, p. 033821, 2008.
- [98] P. P. Beličev, I. Ilić, V. Milanović, J. Radovanović, and Lj. Hadžievski, "Time Delay in Thin Dielectric Slabs with Saturable Nonlinearity," *Acta Physica Polonica A*, vol. 115, pp. 834-837, 2009.
- [99] A. Sommerfeld, *Partial Differential Equations in Physics*. New York: Academic Press, 1949.
- [100] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes - The Art of Scientific Computing*. New York: Cambridge University Press, 2007.
- [101] C.-F. Li, "Negative lateral shift of a light beam transmitted through a dielectric slab and interaction of boundary effects," *Physical Review Letters*, vol. 91, p. 133903, 2003.
- [102] A. Enders and G. Nimtz, "Evanescent-mode propagation and quantum tunneling," *Physical Review E*, vol. 48, pp. 632-634, 1993.
- [103] U. K. Chettiar, A. V. Kildishev, Yuan, H.-K., W. Cai, S. Xiao, V. P. Drachev and V. M. Shalaev, "Dual-band negative index metamaterial: double-negative at 813 nm and single-negative at 772 nm," *Optics Letters*, vol. 32, pp. 1671-1673, 2007.
- [104] I. H. Malitson, "Interspecimen comparison of the refractive index of fused silica," *Journal of Optical Society of America*, vol. 55, pp. 1205-1209, 1965.

- [105] H. K. V Lotsch, "Beam displacement at total reflection: The Goos-Hänchen effect," *Optik*, vol. 32, pp. 116-137, 1970.
- [106] F. Goos and H. Hänchen, "Ein neuer und fundamentaler Versuch zur Totalreflexion," *Annalen der Physik (Leipzig)*, vol. 1, pp. 333-346, 1947.
- [107] F. Goos and H. Lindberg-Hänchen, "Neumessung des Strahlversetzungseffektes bei Totalreflexion," *Annalen der Physik (Leipzig)*, vol. 5, pp. 251-252, 1949.
- [108] K. Artmann, "Berechnung der seitenversetzung des total-reflektierten strahles," *Annalen der Physik (Leipzig)*, vol. 2, p. 87, 1948.
- [109] C. v. Fragstein, "Zur Seitenversetzung des totalreflektierten Lichtstrahles," *Annalen der Physik*, vol. 439, pp. 271-278, 1949.
- [110] P. R. Berman. (2011) Scholarpedia: Goos-Hänchen effect. [Online].
http://www.scholarpedia.org/article/Goos-H%C3%A4nchen_effect
- [111] A. W. Snyder and J. D. Love, "Goos-Hanchen shift," *Applied Optics*, vol. 15, pp. 236-238, 1976.
- [112] A. Lakhtakia, "Positive and Negative Goos-Hänchen Shifts and Negative Phase-Velocity Mediums (alias Left-Handed Materials)," *International Journal of Electronics and Communications*, vol. 58, pp. 229-231, 2004.
- [113] S. L. Chuang, "Lateral shift of an optical beam due to leaky surface-plasmon excitations," *Journal of Optical Society of America A*, vol. 3, pp. 593-599, 1986.
- [114] I. V. Shadrivov, A. A. Zharov, and Yu. S. Kivshar, "Giant Goos-Hanchen effect at the reflection from left-handed metamaterials," *Applied Physics Letters*, vol. 83, pp. 2713-2715, 2003.
- [115] P. T. Leung, C. W. Chen, and H. P. Chiang, "Large negative Goos Hanchen shift at metal surfaces," *Optics Communications*, vol. 276, pp. 206-208, 2007.
- [116] X. Chen, M. Shen, Z.F. Zhang, and C.F. Li, "Tunable Goos-Hänchen shift and polarization beam splitter in electro-optic crystals," *Journal of Applied Physics*, vol. 104, p. 123101, 2008.
- [117] T. Tamir and H. L. Bertoni, "Lateral Displacement of Optical Beams at Multilayered and Periodic Structures," *Journal of Optical Society of America*, vol. 61, pp. 1397-1413, 1971.
- [118] I. V. Shadrivov, R. Ziolkowski, and Yu. S. Kivshar, "Excitation of guided waves in layered structures with negative refraction," *Optics Express*, vol. 13, pp. 481-492, 2005.
- [119] H. F. Wang, Z. X. Zhou, H. Tian, D. J. Liu, and Y. Q. Shen, "Electric control of enhanced lateral shift owing to surface plasmon resonance in Kretschmann configuration with an electro-optic crystal," *Journal of Optics*, vol. 12, p. 045708, 2010.
- [120] Y. Guan-Xia, F. Yun-Tuan, and T. J. Cui, "Goos-Hänchen shift from an anisotropic metamaterial slab," *Central European Journal of Physics*, vol. 8, pp. 415-421, 2010.
- [121] A. M. Steinberg and R. Y. Chiao, "Tunneling delay times on one and two dimensions," *Physical Review A*, vol. 49, pp. 3283-3295, 1994.
- [122] H. Huang, Y. Fan, B. Wu, and J. Kong, "Positively and negatively large Goos-Hänchen lateral displacements from a symmetric gyrotropic slab," *Applied Physics A: Materials Science & Processing*, vol. 94, pp. 917-922, 2009.

- [123] X. Chen and C.-F. Li, "Lateral shift of the transmitted light beam through a left-handed slab," *Physical Review E*, vol. 69, p. 066617, 2004.
- [124] E. Hecht, *Optics*. San Francisco: Addison Wesley, 2002.
- [125] Quantum Control Group, *PHYS 3003 Light and Matter: Lectures*. Southampton: University of Southampton, School of Physics and Astronomy, 2006.
- [126] A. J. Hoffman, *Passive and active mid-infrared semiconductor nanostructures: three-dimensional metamaterials and high wall plug efficiency quantum cascade lasers.*: Princeton University, PhD thesis, 2009.
- [127] S. Thongrattanasiri, *Computational Nanooptics in Hyperbolic Metamaterials and Plasmonic Structures.*: Oregon State University, PhD thesis, 2010.
- [128] A. J. Hoffman, A. Sridhar, P. X. Braun, L. Alekseyev, S. S. Howard, K. J. Franz, L. Cheng, F.-S. Choa, D. L. Sivco, V. A. Podolskiy, E. E. Narimanov and C. Gmachl, "Midinfrared semiconductor optical metamaterials," *Journal of Applied Physics*, vol. 105, p. 122411, 2009.
- [129] S. Adachi, *Physical properties of III-V semiconductor compounds.*: John Wiley & Sons, 1992.
- [130] A. Taflove, *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method*. Boston: Arctech House, 1995.
- [131] K. S. Kunz and R. J. Luebbers, *The Finite Difference Time Domain Method for Electromagnetics*. Boca Raton: CRC Press, 1993.
- [132] Y. Hao and R. Mittra, *FDTD Modeling of Metamaterials: Theory and Applications*. Boston: Arctech House, 2009.
- [133] S.-C. Kong, J. J. Simpson, and V. Backman, "ADE-FDTD Scattered-Field Formulation for Dispersive Materials," *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, vol. 18, pp. 4-6, 2008.
- [134] nVIDIA, *NVIDIA CUDA: Programming Guide.*: nVIDIA, 2010.
- [135] D. B. Kirk and W.-m. W. Hwu, *Programming Massively Parallel Processors: A Hands-on Approach.*: Elsevier, 2010.
- [136] J. Sanders and E. Kandrot, *CUDA by Example: An Introduction to General-Purpose GPU Programming.*: Addison-Wesley, 2011.
- [137] P. C. W. Fung and K. Young, "Electric energy density in a dispersive medium by circuit analog," *American Journal of Physics*, vol. 46, pp. 57-59, 1978.
- [138] I. Ilić, P. P. Beličev, and V. Milanović, "Modelling of tunneling times in anisotropic nonmagnetic metamaterials," *Physica Scripta*, *accepted for publication*, 2012.

RADOVI U VEZI SA REZULTATIMA IZLOŽENIM U TEZI OBJAVLJENI U MEĐUNARODNIM ČASOPISIMA

1. I. Ilić, P.P. Beličev, V. Milanović, and J. Radovanović, *Analysis of tunneling times in absorptive and dispersive media*, Journal of Optical Society of America B, vol. 25, 1800-1804 (2008), IF: 2,181.
2. P.P. Beličev, I. Ilić, J. Radovanović, V. Milanović, and Lj. Hadžievski, *Time delay in thin dielectric slabs with saturable nonlinearity*, Acta Physica Polonica A, vol. 115, 834-837 (2009), IF: 0,433.
3. I. Ilić, P.P. Beličev, V. Milanović, and J. Radovanović, *Modeling of dwell time and group delay in dispersive and absorptive media*, Physica Scripta, T135, 014040-4 (2009), IF: 1,088.
4. P.P. Beličev, I. Ilić, V. Milanović, J. Radovanović, and Lj. Hadžievski, *Tunneling times in metamaterials with saturable nonlinearity*, Physical Review A, vol. 80, 023821-7 (2009), IF: 2,908.
5. I. Ilić, P.P. Beličev, V. Milanović, J. Radovanović, and Lj. Hadžievski, *Influence of the Goos-Hänchen shift on tunneling times in dispersive nonlinear media*, Acta Physica Polonica A, vol. 116, 638-641 (2009), IF: 0,433.
6. I. Ilić, P.P. Beličev, V. Milanović, J. Radovanović and Lj. Hadžievski, *Goos-Hänchen shift and time delay in dispersive nonlinear media*, Physics Letters A, vol. 375, 1357-1361 (2011), IF: 2,009.
7. J. Radovanović, I. Ilić, P. P. Beličev, Lj. Hadžievski and V. Milanović, *On tunneling times in dispersive and nonlinear metamaterials*, Journal of Nanophotonics, vol. 5, 051802(9) (2011), IF: 1,899.
8. I. Ilić, P. P. Beličev and V. Milanović, *Modelling of tunneling times in anisotropic nonmagnetic metamaterials*, Physica Scripta, accepted for publication (2012), IF: 0,985

BIOGRAFIJA

Igor Ilić je rođen 11.11.1984. godine u Beogradu. Osnovnu i srednju školu završio je u Beogradu. Nakon završene srednje škole upisao je Elektrotehnički fakultet Univerziteta u Beogradu 2003. godine, gde je diplomirao 2007. godine na Odseku za Fizičku elektroniku sa prosečnom ocenom 9.02 odbranom diplomskog rada sa temom "Karakteristična vremena pri tunelovanju u metamaterijalima". Iste godine upisao je diplomatske akademske (master) studije na Grupi za nanoelektroniku, optoelektroniku i lasersku tehniku, koje je završio 2008. godine sa prosečnom ocenom 10,00 odbranom master rada sa temom "Određivanje vremena tunelovanja u disperzivnim i apsorpcionim fotonskim heterostrukturama".

Od 2008. godine zaposlen je kao istraživač pripravnik u Institutu za nuklearne nauke "Vinča", u Laboratoriji za atomsku fiziku, gde je 2009. godine unapređen u zvanje istraživača saradnika. U svojoj naučnoj karijeri Igor Ilić je do trenutka pisanja ove disertacije objavio šest radova u vrhunskim međunarodnim naučnim časopisima sa SCI liste [M21], jedan u vodećim međunarodnim časopisima [M22], dva u međunarodnim časopisima [M23] i tri u zbornicima apstrakata i radova sa međunarodnih konferencija [M33], a jedan rad [M22] je neposredno pred završetak pisanja disertacije prihvaćen za objavljivanje u časopisu Physica Scripta.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а Игор Илић

број уписа 5044/08

Изјављујем


да је докторска дисертација под насловом

Тунеловање електромагнетских таласа кроз
комплексне оптичке средине

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 26.10.2012.



Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Игор Илић
Број уписа 5044/08
Студијски програм Наноелектроника и фотоника
Наслов рада Тунеловање електромагнетских таласа кроз комплексне оптичке средине
Ментор др Јелена Радовановић

Потписани Игор Илић

изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 26.10.2012.



Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Тунеловање електромагнетских таласа кроз
комплексне оптичке средине

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

5. Ауторство – без прераде

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

У Београду, 28.10.2012.

Потпис докторанда



1. Ауторство - Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.