

Наставно-научном већу
Математичког факултета
Универзитета у Београду

Одлуком Наставно-научног већа Математичког факултета Универзитета у Београду на 370. седници одржаној 24.04.2020. именовани смо у Комисију за преглед и оцену докторске дисертације Младена Зекића

Бипроизводи у моноидалним категоријама

Комисија је прегледала дисертацију и подноси следећи

ИЗВЕШТАЈ

1 Биографија кандидата

Младен Зекић је рођен 5. новембра 1987. године у Власеници (СФР Југославија). Основну школу „Јован Дучић” је завршио у Шековићима, а Гимназију „Милорад Влачић” у Власеници. Као средњошколац је посећивао семинаре математике у Истраживачкој станици Петница код Ваљева, што је имало доста утицаја на његово образовање. Математички факултет Универзитета у Београду је завршио 2011. године, са просечном оценом 8.78. Мастер рад под насловом *Риманова хипотеза за елиптичке криве над коначним пољима* одбранио је 2014. године на истом факултету.

Радио је као наставник у Гимназији и средњим стручним школама у Власеници, затим као наставник у Основној школи „Никола Тесла” у Скели код Обреновца и као сарадник у настави на Математичком факултету у Београду. Тренутно је запослен на Математичком институту САНУ.

2 Научни и стручни рад

2.1 Објављени радови

- Š. Dautović, M. Zekić, *Intuitionistic unprovability*, *Matematički Vesnik*, 71, 1-2 (2019), 180-189.
- Dj. Baralić, P-L. Curien, M. Milićević, J. Obradović, Z. Petrić, M. Zekić and R.T. Živaljević, *Proofs and surfaces*, *Annals of Pure and Applied Logic* 171 (2020), 1-42.

- Z. Petrić, M. Zekić, *Coherence for closed categories with biproducts*, Journal of Pure and Applied Algebra 225 (2021), 1-17.
- Š. Dautović, M. Zekić, *Fuzzy logic and enriched categories*, Iranian Journal of Fuzzy Systems 18 (2021), 1-11.
- M. Zekić, *Biproducts in monoidal categories*, Publications de l'Institut Mathématique 110 (124) (2021), 1-9.

2.2 Учесћа на научним и стручним скуповима

- Contemporary mathematical problems, Trebinje, Bosnia and Herzegovina, 2018.
- Conference dedicated to the celebration of the 85th birthday of Prof. Slaviša Prešić, Belgrade, Serbia, 2018.
- IMS Graduate Summer School in Logic, National University of Singapore, 2019.
- Mathematical meeting of Serbia and Montenegro, 2019.

3 Предмет дисертације

Предложена тема се налази у области истраживања теорије категорија и категоријалне теорије доказа. Она је такође уско везана за (ниско-димензионалну) топологију и алгебру.

Централно место у дисертацији заузимају теореме кохеренције за одређене типове (затворених) категорија. У најширем смислу, резултати кохеренције се баве питањем комутирања дијаграма у одређеном типу категорија. Као појам теорије категорија, кохеренција се први пут помиње 1963. године у Меклејновом раду *Natural associativity and commutativity*. Резултат кохеренције у том раду каже да *сви* дијаграми састављени од канонских стрелица у моноидалној категорији комутирају. Међутим, ово није случај у категоријама са богатијом структуром, где резултати кохеренције обично служе да (ефикасно) опишу *који* дијаграми у тим категоријама комутирају.

Од појаве првобитног Меклејновог рада је доказано много резултата кохеренције, од којих су за потребе ове дисертације посебно значајна следећа два – кохеренција за симетричне моноидално затворене категорије (Кели-Меклејн, 1971) и кохеренција за компактно затворене категорије (Кели-Лаплаза, 1980). Такође, могуће примене резултата кохеренције су пронађене у разним областима математике. Примера ради, можемо их наћи у теорији категорија, логици, теорији хомотопије, комбинаторици, ниско-димензионалној топологији и математичкој физици.

Поред кохеренције, други најважнији појам који се појављује у дисертацији је појам бипроизвода. Бипроизвод у категорији обједињује својства копроизвода и производа. Основни примери бипроизвода су дисјунктна унија скупова у категорији чији су објекти скупови, а стрелице релације, као и

директна сума у категорији векторских простора над неким пољем, или општије, у категорији модула над неким прстеном. Са логичке тачке гледишта, бипроизводи представљају сажимање везника конјункције и дисјункције што има много нежељених последица ако се изучава само релација изводивости, али и даље категорије са бипроизводима могу бити веома интересантне приликом интерпретације извођења у конкретним математичким структурама.

Бипроизводи у категорији долазе у интеракцију са остатком структуре коју она поседује. Најпростији случај је када се чиста моноидална структура комбинује са бипроизводима. На примјер, у хомолошкој алгебри, Абелове групе (посматране као модули над прстеном \mathbb{Z}) заједно са тензорским производом и директном сумом представљају једну моноидалну категорију са бипроизводима. Додатак симетрије, затворења, инволуције или компактно затворене структуре отвара могућност истраживања различитих понашања бипроизвода у таквом амбијенту. У дисертацији се управо разматра интеракција бипроизвода са разним облицима моноидалних категорија. Главни резултат дисертације су теореме кохеренције за три типа затворених категорија са бипроизводима – симетричне моноидално затворене категорије са бипроизводима, компактно затворене категорије са бипроизводима и компактно затворене категорије са инволуцијом и \dagger -бипроизводима.

4 Приказ дисертације

Дисертација *Бипроизводи у моноидалним категоријама* обухвата X + 101 + III страна текста. Главни садржај текста је подељен у четири главе. Осим тога, текст садржи увод, литературу са 40 библиографских јединица, биографију аутора и три прилога у којима је наведен списак најважнијих једнакости, списак категорија, као и хијерархија категорија које се помињу у тези.

Прва глава *Основни појмови* служи да се уведу неки појмови теорије категорија неопходни за даље излагање. Дате су дефиниције симетричних моноидално затворених категорија, компактно затворених категорија, категорија са бипроизводима, као и категорија са инволуцијом. Посебна пажња је посвећена категорији 1-кобордизама, који одговарају Кели-Меклејновим графовима коришћеним као графички језик у раду *Coherence in closed categories* у коме је доказана теорема кохеренције за симетричне моноидално затворене категорије.

У другој глави изложен је нови доказ теореме кохеренције за симетричне моноидално затворене категорије. Доказ је изведен по узору на доказе резултата кохеренције из књиге *Proof-Theoretical Coherence* аутора К. Дошена и З. Петрића. Полази се од једнакосно дефинисане слободне симетричне моноидално затворене категорије, а затим се уводи њена *генциенизација* – промена језика која омогућава да се докаже теорема о елиминацији сечења у тој категорији. Елиминација сечења (која је присутна и у оригиналном Кели-Меклејновом доказу) представља кључни елемент у новом доказу теореме кохеренције за симетричне моноидално затворене категорије. И сама форму-

лација теореме кохеренције која је дата у другој глави дисертације се мало разликује од формулације из оригиналног Кели-Меклејновог рада. Наиме, теорема из дисертације је формулисана у контексту стрелица слободне симетричне моноидално затворене категорије, а не у контексту природних трансформација, као што је случај у оригиналном доказу. Осим тога, уместо Кели-Меклејнових графова, користи се категорија 1-кобордизама.

Трећа глава је базирана на наведеном раду *Coherence for closed categories with biproducts* и у њој је доказано да категорија 1-кобордизама, слободно обогаћена над категоријом комутативних моноида и комплетирана у односу на бипроизоде представља погодан графички језик за затворене категорије са бипроизводима. Конкретно, у трећој глави су доказани резултати кохеренције за симетричне моноидално затворене категорије са бипроизводима, компактно затворене категорије са бипроизводима и компактно затворене категорије са инволуцијом и \dagger -бипроизводима. Традиционално, графови придружени стрелицама затворених категорија су засновани на једнодимензионалним многострукостима, док графови погодни за стрелице категорија са производима, копроизводима и бипроизводима садрже гранања (сингуларитете) и стога нису многострукости. Ова два графичка језика немају добру интеракцију. Са друге стране, посматрано из угла теорије категорија, затворена структура се одлично слаже са бипроизводима – прва структура се дистрибуира над другом. Такође, постоји много примера који поседују обе структуре. Затворене структуре са бипроизводима које се разматрају у трећој глави дисертације су од посебног значаја за истраживаче који се баве квантним рачунарством, што отвара нове могућности примене истраживања остварених у овој тези.

Резултати неких скоријих истраживања дају одређене критеријуме постојања (коначних) бипроизвода у моноидалним категоријама. Конкретно у раду Гарнера и Шепија *When coproducts are biproducts* аутори карактеришу извесне моноидалне категорије са коначним бипроизводима као категорије у којима постоје десни дуали одређених истакнутих објеката. Четврта глава, која је базирана на наведеном раду *Biproducts in monoidal categories* посвећена је давању нових, ослабљених критеријума. Наиме, показано је да претпоставка која се тиче десних дуала може бити ослабљена, то јест, за постојање коначних бипроизвода довољно је да поменути истакнути објекти имају само десне *семи-дуале*. Један од критеријума у четвртој глави се бави постојањем произвољних (не нужно коначних) бипроизвода. Испоставља се да моноидалне категорије са бесконачним бипроизводима имају значајну улогу у *квантитативним моделима израчунавања*. Ови модели се односе на семантику линеарне логике у којој се докази интерпретирају као линеарна пресликавања између векторских простора (или општије модула над неким прстеном). Бесконачни бипроизводи у овим моделима су потребни за конструкцију линеарног експоненцијала $!A$. Пошто квантитативна семантика има примену у квантном рачунарству, бесконачни бипроизводи налазе своју примену и у овој области.

5 Закључак

Докторска дисертација *Бипроизводи у моноидалним категоријама* кандидата Младена Зекића даје озбиљан допринос како самој теорији категорија тако и категоријалној теорији доказа—једној посебној грани опште теорије доказа која има јако упориште у нашој математичкој заједници. Главни део резултата представљених у дисертацији је оригиналан и очекује се њихов одјек у овој области. Добијени су нови резултати кохеренције за затворене категорије са бипроизводима. Такође, доказани су одређени критеријуми постојања бипроизвода у моноидалним категоријама. Осим наведених оригиналних резултата вреди напоменути да је у тези представљен нови доказ теореме кохеренције за симетричне моноидално затворене категорије. Било је за очекивати да тај резултат својевремено изазове много јачи утицај у логичкој заједници, али његов први доказ је због неприлагођеног језика утицао на то да он ту остане прилично занемарен. Нови доказ из тезе је превазишао те потешкоће разумевања међу математичким дисциплинама и требало би да допринесе да овај резултат постане широм прихваћен међу онима који се баве теоријом доказа.

Комисија предлаже Наставно-научном већу Математичког факултета Универзитета у Београду да прихвати овај рад као докторску дисертацију и одреди комисију за њену јавну одбрану.

Београд, 2. XI 2021.

Чланови комисије:

др Ђорђе Баралић,
виши научни сарадник, Математички институт САНУ

др Раде Живаљевић,
научни саветник, Математички институт САНУ

проф. др Александар Липковски, редовни професор,
Математички факултет, Универзитет у Београду

др Зоран Петрић (ментор),
научни саветник, Математички институт САНУ

др Тања Стојадиновић, доцент,
Математички факултет, Универзитет у Београду