

Извештај Комисије за оцену докторске дисертације кандидата Ивана Лазаревића

Одлуком Наставно-научног већа Математичког факултета универзитета у Београду из јула 2020. године одређени смо у комисију за преглед и оцену докторске дисертације Ивана Лазаревића под насловом «Уопштења Шатенових норми графова и комбинаторне примене». После прегледа рукописа, подносимо овај извештај.

Основни подаци о кандидату и дисертацији

Иван Лазаревић је рођен 29. фебруара 1988. године у Београду. Основну школу и гимназију завшио је у Аранђеловцу, основне студије уписао је на Математичком факултету Универзитета у Београду 2007. године и дипломирао на смеру статистика, актуарска и финансијска математика 2011. године. Мастер студије завршио је на студијском програму Математика 2012. године, после чега је уписао докторске студије на Математичком факулту. До 2014. био је запослен у Земунској гимназији као професор математике и рачунарства и информатике. Од марта 2014. године је запослен као асистент - студент докторских студија на Грађевинском факултету Универзитета у Београду, на катедри за математику, физику и нацртну геометрију.

У дисертацији "Уопштења Шатенових норми графова и комбинаторне примене" разматра се проблем максималних Шатенових норми, норме случајних графова, проблем максималне енергије графа као и везе са комбинаторним конструкцијама Хадамарових матрица и оптималног дизајна. Дају се скоро сигурне оцене вредности детерминанте и Шатенових норми случајног графа. Од комбинаторних примена кандидат је разматрао и примене у теорији H -бојења графова.

Рукопис има $x+92$ странице, 3 прилога, као и 8 слика. Теза је подељена у следећа поглавља 1. Основи теорије графова, 2. Максимална детерминанта и оптимални дизајн, 3. Енергија графа и њена уопштења, 4. Неке комбинаторне примене. Литература на крају рада садржи 65 библиографских јединица.

Садржај и научни допринос дисертације

Прва глава је подељена на три дела. У првом делу дате су дефиниције основних појмова из комбинаторне теорије графова као и неке најважније теореме. У другом делу је дат увод у спектралну теорију графова, грану математике која повезује структуру графа са одређеним својствима њему придружене матрице. На почетку су набројане матрице које се могу придружити графу, а онда посебно место заузимају матрица суседства графа и својства њеног спектра. Наведени су познати спектри за неке графове. На крају поглавља је дата теорема која је позната као мин-макс карактеризација сопствених вредности матрице и њене последице које имају значајну примену у тези, Кошијева интерлацинг теорема, Вејлова теорема, и новији резултат до ког су дошли Ван Ву и Теренс Тао. Наведене су и две теореме Перон- Фробенијуса које дају нека својства спектра матрица које имају примену у теорији графова.

Трећи део прве главе је посвећен случајним графовима и случајним матрицама, теми која није била много обрађивана у домаћој литератури. Уведен је појам случајне матрице и расподеле њених сопствених вредности. Уведена Вигнерова расподела

сопствених вредности случајне матрице и дат је доказ Вигнерове теореме методом момената. За тај доказ је потребан низ помоћних тврема, већина је дата са доказима. У последњем делу поглавља наведени су резултати који унапређују овај Вигнеров резултат тј. теореме које доказују конвергенцију у вероватноћи и скоро сигурну конвергенцију.

Друга глава се састоји из два одељка, први је посвећен Адамаровим матрицама, а други теорији оптималних дизајна. Обе ове теме тичу се достизања максималних вредности детерминанте. У одељку 2.1 је дат преглед основних појмова и теорема о Адамаровим матрицама које имају везу са проблемом израчунавања максималних норми графа. Наведена је и позната Адамарова хипотеза. Један део одељка посвећен је и одређивању максималне детерминанте. Један од доприноса овог рада је и оригиналан резултат у коме је израчуната горња оцена геометријске средине сингуларних вредности случајног графа, то је теорема из самосталног рада аутора [1]. У овом одељку је формулисана теорема која даје горњу оцену детерминанте матрице случајног графа, која је директна последица поменутог резултата. У одељку 2.2 о оптималним дизајнима дат је опис линеарног регресионог модела и теорема Гаус-Маркова. Касније су уведени појмови дизајна, дате су неке помоћне леме из линеарне алгебре, а централно место поглавља је теорема еквиваленције која је дата са доказом. На крају је наведен пример који показује везу између оптималних дизајна и Адамарових матрица.

Трећа глава садржи највише оригиналних резултата кандидата и научних доприноса ове тезе. Поменути оригинални резултати су из радова [1], [4], [5], при чему је први рад самосталан рад аутора ове дисертације, а на друга два је коаутор са ментором. Први део треће главе посвећен је проблему енергије графа, појам који је увео академик Иван Гутман. Енергија графа представља збир апсолутних вредности сопствених вредности графа. Дата је веза са Хукеловом теоријом у хемији. Наведени су неки резултати који представљају доња и горња ограничења за енергију графа. Дата је веза матрице суседства графа који има максималну енергију и Адамарове матрице. Изведена је и објашњена и Кулсонова интегрална формула из комплексне анализе за израчунавање енергије графа.

Одељак посвећен нормама матрице, а посебно Шатеновим нормама је 3.2. На почетку је дат преглед основних појмова и набројана су најважнија својства матричних норми. Затим су наведени познати резултати о својствима Шатенових норми графа, велики број тих резултата су од Владимира Никифорова. Шатенове норме представљају уопштење енергије графа. Наведена је и хипотеза коју је поставио Никифоров за Шатенове норме, та хипотеза је овде решена у потпуности и дато је њено појачање и то је један од највећих доприноса ове тезе. Ова хипотеза каже да од свих неоријентисаних графова без петљи, највећу вредност Шатенове норме за степен већи од 2 има комплетан граф. Пре него што је доказана у општем случају показано је да важи када је степен паран број, као и за јако регуларне графове, и за стабла, што су све оригинални резултати аутора тезе из самосталног рада [1]. Потом је доказано да хипотеза важи у општем случају.

У одељку 3.3 дата је још једна оригиналана теорема, из рада аутора ове тезе са ментором [4], која приказује асимптотско понашање енергије комплементног графа за велик број чворова, у чијем се доказу користи споменута Вејлова теорема.

У одељку 3.4 наведени су оригинални резултати о особинама случајних графова, а то су израчуната вредност степених средина сингуларних вредности случајног графа и дата горња оцена вредности геометријске средине случајног графа. Обе ове теореме су у оригиналу формулисане и доказане у самосталном раду аутора тезе.

У четвртој глави су дате неке комбинаторне примене теорије графова. Ова глава се састоји од два одељка. У првом одељку приказан је увод у проблем задовољења услова, скраћено ЦСП, дате су све три дефиниције овог проблема. Затим је наведена хипотеза дихотомије која је више од 20 година била отворена а која је решена 2017. године. Разматран је приступ проблему задовољења услова преко неоријентисаних графова, који су фокус ове дисертације.

У одељку 4.1 дефинисано је Н-бојење неоријентисаног графа и објашњено да је то еквивалент ЦСП проблема. Наведено је решење хипотезе дихотомије за неоријентисане

графове, што је познат резултат Хела и Нешетрила из 1990. године. Поменута теорема каже да је проблем H -бојења за бипартитне графове решив у полиномијалном времену, а за небипартитне NP -комплетан.

Главни научни допринос четвртог поглавља је знатно једноставнији, нови доказ од овог резултата. Поменути доказ је из рада [2], где је аутор ове тезе коаутор са ментором. На крају су дата и два оригинална примера, који служе да илуструју неопходност неких корака у доказу, први граф има 19, а други 27 темена. Оба графа из примера имају четири битна својства која се постижу у једном помоћном твђењу пре саме теореме, а нису 3-обојиви, тј. немају својство на које се иде у конструкцији из доказа.

Најзад, на крају рада дат је преглед литературе, који садржи 65 библиографских јединица.

У дисертацији се користе класичне методе спектралне и комбинаторне теорије графова, теорија случајних графова, Кошијева теорема за косете матрица, Вигнеров закон за дистрибуцију сопствених вредности случајних матрица и аналитичке методе. Добијени резултати су основа неколико научних радова кандидата.

1. I. Lazarević: Extended Schatten norms of random graphs and Nikiforov conjecture, (Hacetatepe Journal of Mathematics and Statistics), 2022, Volume 1-6, (2022)
<https://doi.org/10.15672/hujms.914884>
2. V. Božin, I. Lazarević: H -coloring revisited, (Filomat)
3. I. Lazarević, Using ELECTRE MLO multicriteria decision making method in stepwise benchmarking - application in higher education, (ORESTA) 2019,
<https://doi.org/10.31181/oresta19030771>
4. I. Lazarević, V. Božin: Asymptotic energy of complement graphs (na recenziji)
5. V. Božin, I. Lazarević: Maximal Schatten p -norms of graphs for $p > 2$ (na recenziji)

Закључак

Предложена теза је занимљива, разноврсна и актуелна. Међу научним доприносима налази се разрешење хипотезе Никифорова у вези Шатенових норми графа степена већег од два, а дато је и њено уопштење за p модификоване Ку Фан норме графа. Дати су и нови резултати који описују асимптотско понашање енергије комплементарних графова. Енергија графа и њена уопштења су предмет актуелних истраживања. Указано је и на везу максималних норми графова, као и проблема максималне детерминанте графа, са теоријом оптималног дизајна, и класичном Адамаровом хипотезом. Такође, приказана је детаљно теорија случајних графова, и дате су оцене Шатенових норми и детерминанти случајних графова. Ово је такође активна област истраживања, где постоје отворена питања у вези оцена асимптотике детерминанти и норми случајних графова, којим су се бавили и радови Ван Ву-а и Теренс Тао-а, хипотезе које се надовезују на тај део тезе. Најзад, у последњој глави дат је оригинални једноставнији доказ хипотезе дихотомије проблема задовољења услова у специјалном случају за графове, што је такође веома актуелно обзиром да је хипотеза дихотомије недавно доказана у потпуности и поједностављење тог доказа је од великог интереса.

Обзиром на изложено у овом Извештају, Комисија предлаже Наставно-научном већу да прихвати овај извештај, одобри одбрану докторске дисертације и одреди комисију за одбрану кандидата Ивана Лазаревића.

У Београду, 19. априла 2022.

академик Миодраг Матељевић, редовни професор у пензији

др Зоран Станић, редовни професор

др Данко Јоцић, редовни професор

др Александра Ерић, ванредни професор,
Грађевински факултет, Београд

др Владимир Божин, доцент, ментор