

Наставно-научном већу Математичког факултета

Универзитета у Београду

На седници Наставно-научног већа Математичког факултета одржаној 24.09.2021. године у Београду одређени смо за чланове комисије за преглед и оцену докторске дисертације под насловом

*“Полу-Фредхолмови оператори на Хилбертовим  $C^*$ -модулима”*

кандидата Стефана Ивковића. Након прегледа рукописа који је Стефан Ивковић предао комисији, подносимо Наставно-научном већу Математичког факултета следећи

## ИЗВЕШТАЈ

### 1 Биографија кандидата

Стефан Ивковић је рођен 03.08.1989. године у Јагодини. Са 12 година се преселио у Норвешку заједно са својим родитељима. Студирао је математику на Природно-математичком факултету Универзитета у Ослу где је завршио мастер студије 2016. године. Након завршетка својих студија на Универзитету у Ослу, конкурисао је и био примљен на докторске студије математике на Математичком факултету Универзитета у Београду. Био је рангиран као кандидат број 5 са просечном оценом 9,89 ( по српском систему оцењивања) оствареном на његовим студијама на Универзитету у Ослу. До сада је положио свих 8 обавезних испита на докторским студијама са оценом 10. Осим тога, објавио је 7 радова на SCI листи, од којих су 5 његови самостални радови. Одржао је предавања на 4 међународне конференције, 3 пута по позиву. Презентовао је такође резултате из своје тезе на семинарима на Ломоносов Универзитету у Москви, на Департману за математику и информатику Универзитета у Палерму и на Математичком Институту САНУ у Београду. Био је ангажован као рецензент за престижне часописе “Banach Journal of Mathematical Analysis” и “Linear and Multilinear Algebra”. Од маја 2018. године је запослен на Математичком Институту САНУ, прво у звању истраживача приправника, а касније у звању истраживача сарадника.

### 2 Научни и стручни рад кандидата

1. Ivković, S. *Semi-Fredholm theory on Hilbert  $C^*$ -modules*, Banach J. Math. Anal., **13** (2019), no. 4, 989-1016.
2. Ivković, S. *On operators with closed range and semi-Fredholm operators over  $W^*$ -algebras*, Russ. J. Math. Phys. **27** (2020), 48–60
3. Ivković, S. *On compressions and generalized spectra of operators over  $C^*$ -algebras*. Ann. Funct. Anal. **11** (2020), 505–522.
4. Ivković, S. *On various generalizations of semi- $A$ -Fredholm operators*. Complex Anal. Oper. Theory **14** (2020), 41.
5. Ivković, S. *On Upper Triangular Operator  $2 \times 2$  Matrices Over  $C^*$ -Algebras*, FILOMAT, **34** (2020), no. 3, 691-706.
6. Tabatabaie, S.M., Ivković, S. *Linear dynamics of discrete cosine functions on solid Banach function spaces*. Positivity **25** (2021), 1437–1448.
7. Ivković, S., Tabatabaie, S.M. *Hypercyclic Translation Operators on the Algebra of Compact Operators*. Iran J. Sci. Technol. Trans. Sci. **45** (2021), 1765–1775.

## Саопштења на научним скуповима

1. "Semi-Fredholm theory on Hilbert  $C^*$ -modules". WHO 19 International Workshop on Harmonic Analysis and Operator Theory 26–29 August 2019, Istanbul University, Istanbul, Turkey
2. "The generalized spectra of operators over  $C^*$ -algebras". HARMONIC AND SPECTRAL ANALYSIS. International Zoom Conference, Debrecen, Hungary, 8-10 June 2020
3. "Semi-Fredholm theory on Hilbert  $C^*$ -modules". International Workshop Hilbert  $C^*$  - Modules Online Weekend in memory of William L. Paschke, Lomonosov University, Moscow, Russia, December 5-6, 2020
4. "Semi-Fredholm operators on Hilbert  $C^*$ -modules". HARMONIC AND SPECTRAL ANALYSIS. International Zoom Conference, Debrecen, Hungary, 31 May-2 June 2021

### 3 Предмет докторске дисертације

Хилбертови  $C^*$ -модули представљају природно уопштење Хилбертових простора које настаје када се поље комплексних бројева замени произвољном  $C^*$ -алгебром. Ово уопштење, у случају комутативних  $C^*$ -алгебри, је предложио И. Каплански, и генерална теорија Хилбертових  $C^*$ -модула (над општим  $C^*$ -алгебрама у улози " скалара ") се појавила у пионирским радовима Пашкеа. Ова теорија се показала као ефикасан алат у теорији алгебре оператора омогућавајући да се добију информације о  $C^*$ -алгебрама изучавањем Хилбертових  $C^*$ -модула над њима, на пример, важан појам Морита еквиваленције за  $C^*$ -алгебре је формулисан у терминима Хилбертових  $C^*$ -модула. С друге стране, Хилбертови  $C^*$ -модули се природно појављују у проучавању (псеудо) диференцијалних оператора на слојевима векторских раслојавања на многострукостима са неким додатним структурама. На пример, оператори компатибилни са ко-компактним дејством групе на некомпатној многострукости могу да се посматрају као оператори на Хилбертовим  $C^*$ -модулима над групном  $C^*$ -алгебром. Овај приступ је веома користан јер многи елиптички оператори на некомпатним многострукостима нису Фредхолмови оператори у класичном смислу, али ако се посматрају као оператори на Хилбертовим  $C^*$ -модулима, онда они постају Фредхолмови оператори. Општу теорију Фредхолмових оператора на Хилбертовим  $C^*$ -модулима су развили Мишченко и Фоменко. Језгра и којезгра ових оператора нису нужно слободни коначно генерисани модули, али могу да се утопе у њих и још увек је могуће дефинисати индекс и показати да се тај индекс поклапа са тополошким индексом.

Полу-Фредхолмови оператори представљају интересантну класу оператора: док су Фредхолмови оператори инвертибилни модуло компактни оператори, полу-Фредхолмови оператори на Хилбертовом простору су једнострано инвертибилни модуло компактни оператори. Они још увек имају индекс који може да буде бесконачан, дакле мање информативан, и иако не постоји нека повезаност са елиптичношћу, стабилност при компактним пертурбацијама чини класу полу-Фредхолмових оператора још увек интересантном.

Циљ Ивковићеве тезе је да се развије теорија полу-Фредхолмових оператора на Хилбертовим  $C^*$ -модулима. Као што је напоменуто, језгра и којезгра ових оператора не морају да буду коначно-димензионални на било који стандардан начин - могу само да се утопе у коначно генерисане слободне подмодуле, тако да је аутор морао да превазиђе озбиљне техничке потешкоће на свом путу. Осим давања дефиниције полу-Фредхолмових и полу-Вајлових оператора, аутор је добио више резултата уопштавајући пандане из класичне полу-Фредхолм теорије на Хилбертовим просторима. Други аспект Ивковићевог истраживања је уопштење појма спектра за операторе на Хилбертовим  $C^*$ -модулима. Идеја је да се скалари

замене елементима центра одговарајуће  $C^*$ -алгебре. У овом контексту, добијена су уопштења неких резултата из класичне спектралне полу-Фредхолм теорије, на пример уопштења резултата Ј. Земанека у вези релација између спектра оператора и спектра његових компресија.

#### **4 Садржај дисертације**

Дисертација се састоји од Увода (глава 1, 5 страна), Основних појмова и тврђења (глава 2), седам глава (главе 3-9), завршних напомена (глава 10) -укупно 145 страна, након чега следи списак литературе од 56 библиографских јединица и индекс појмова.

Глава 3, Полу- $C^*$ -Фредхолмови оператори, је централни део тезе и састоји се од 7 поглавља. У поглављу 3.1 је дата дефиниција полу-Фредхолмовог оператора (који допуштају адјуговање) на стандардном Хилбертовом  $C^*$ -модулу и доказане су неке од основних карактеристика ових оператора. У поглављу 3.2. дата је карактеризација горњих полу- $C^*$ -Фредхолмових оператора у смислу извесних еквивалентних услова који уопштавају Шехтерову карактеризацију. У поглављу 3.3 је показано да је скуп полу- $C^*$ -Фредхолмових оператора отворен у топологији индукованом нормом. У поглављу 3.4 конструисане су и проучаване одређене класе оператора на стандардном Хилбертовом  $C^*$ -модулу, као уопштења полу-Вајлових оператора на Хилбертовим просторима. У поглављу 3.5 претходни резултати су проширени на класу ограничених оператора који не морају нужно да допуштају адјунговане (подсећамо да сваки ограничен оператор на Хилбертовом простору има адјунговани оператор, док на Хилбертовим  $C^*$ -модулима то није случај). У поглављу 3.6 исто је урађено за полу- $C^*$ -Вајлове операторе. Коначно, поглавље 3.7 садржи неке примере који илуструју наведене резултате.

Глава 4 се бави случајем када је  $C^*$ -алгебра  $W^*$ -алгебра. Хилбертови  $C^*$ -модули имају више заједничких особина са Хилбертовим просторима него генерални Хилбертови  $C^*$ -модули. Сходно томе, полу-Фредхолмови оператори у овом случају имају више заједничких особина са њиховим панданима на Хилбертовим просторима. Конкретно, добијено је уопштење Шехтер-Лебове карактеризације полу-Фредхолмових оператора и добијена је теорема о прободеној околини. Глава 5 је посвећена различитим уопштењима полу- $C^*$ -Фредхолмових оператора. У глави 6 проучавани су оператори са затвореном сликом и њихова својства. Полу-Фредхолмови оператори на Хилбертовим просторима увек имају затворену слику, док случај Хилбертових  $C^*$ -модула захтева више пажње. Конкретно, дати су неопходни и довољни услови да композиција два оператора са затвореном сликом има затворену слику.

Остале главе се баве уопштавањем појма спектра. У глави 7 дат је опис уопштеног спектра оператора помака, унитарних, самоадјунгованих, нормалних, Фредхолмових и полу-Фредхолмових оператора на стандардном Хилбертовом  $C^*$ -модулу. Глава 8 садржи резултате о пертурбацији уопштеног спектра. Нарочита пажња је посвећена случају кад је оператор задат као горња троугаона  $2 \times 2$  матрица, са операторима као елементима. Глава 9 је посвећена проучавању релација између уопштених спектра оператора и његових компресија. Завршне напомене указују да поједини резултати из тезе важе само у случају стандардног Хилбертовог  $C^*$ -модула чиме се истиче разлика између стандардног Хилбертовог  $C^*$ -модула и општих Хилбертових  $C^*$ -модула.

#### **5 Закључак и предлог**

Теза Стефана Ивковића развија теорију полу-Фредхолмових оператора на Хилбертовим  $C^*$ -модулима и даје алат за проучавање оператора који нису полу-Фредхолмови у било ком стандардном смислу, али постају полу-Фредхолмови над одговарајућом  $C^*$ -алгебром. Резултати су веома импресивни и сигурно ће имати примене. Теза је написана прегледно, садржи све доказе и пуно интересантних примера. Аутор је морао да превазиђе пуно техничких потешкоћа у свом раду, потврђујући се као специјалиста у области Хилбертових  $C^*$ -модула и полу-Фредхолмових оператора.

Због свега наведеног, предлагемо Наставно-научном већу Математичког факултета да прихвати приложени текст као докторску дисертацију Стефана Ивковића и именује комисију за њену одбрану.

Москва 07.11.2021.

#### ЧЛАНОВИ КОМИСИЈЕ

---

**Michael Frank**, Full Professor,

University of Applied Sciences of Technic, Economy and Culture (HTWK),  
Leipzig, Faculty of Computer Science and Media

---

**Vladimir M. Manuilov**, Full Professor,

Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics

---

**Camillo Trapani**, Full Professor,

University of Palermo, Department of Mathematics and Computer Science

---

**Evgenij V. Troitsky**, Full Professor,

Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics

---

**Снежана Живковић-Златановић**, редовни професор,

Универзитету Нишу, Природно-математички факултет