UNIVERZITET U BEOGRADU
MATEMATIČKI FAKULTET

Nives Baranović

RAZVOJ VIZUELNO-PROSTORNIH VEŠTINA I GEOMETRIJSKOG MIŠLJENJA STUDENATA UČITELJSKIH FAKULTETA ZASNOVAN NA METODI USMERENOG OPAŽANJA I TEORIJI VAN HILA

Doktorska disertacija

Beograd, 2022.

UNIVERZITET U BEOGRADU
MATEMATIČKI FAKULTET

Nives Baranović

RAZVOJ VIZUALNO-PROSTORNIH VJEŠTINA I GEOMETRIJSKOG MIŠLJENJA STUDENATA UČITELJSKIH FAKULTETA ZASNOVAN NA METODI USMJERENOG OPAŽANJA I TEORIJI VAN HIELEA

Doktorska disertacija

Beograd, 2022.

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MATHEMATICS

Nives Baranović

DEVELOPMENT OF VISUAL-SPATIAL SKILLS AND GEOMETRIC THINKING OF PRE-SERVICE PRIMARY EDUCATION TEACHERS BASED ON THE DIRECTED OBSERVATION AND VAN HIELE'S THEORY

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2022.

Mentor:

Akademik Miodrag Mateljević,
Univerzitet u Beogradu - Matematički fakultet

Članovi komisije:

dr Aleksandar Lipkovski, redovni profesor
Univerzitet u Beogradu - Matematički fakultet

dr Miljan Knežević, docent
Univerzitet u Beogradu - Matematički fakultet

dr Jasmina Milinković, vanredni profesor
Univerzitet u Beogradu - Učiteljski fakultet

Datum odbrane: ______________

Mom suprugu Pjeru

Riječi zahvale

Na samom početku, zahvaljujem svom profesoru i mentoru, akademiku Miodragu Mateljeviću, koji me kroz cijeli period mog doktorskog rada usmjeravao u suptilnosti matematičkog znanja, istodobno dopuštajući i podržavajući moj osobni put profesionalne izgradnje.

Zahvalnost izražavam i svom prvom profesoru i mentoru, umirovljenom prof. dr Milanu Božiću, koji me srdačno uveo u društvo matematičara na Studentskom trgu broj 16. Njegovu bliskom suradniku, mom profesoru i članu komisije, prof. dr Aleksandru Lipkovskom, dugujem zahvalnost za iskaze dobrodošlice od prvog dana, strpljivo slušanje, poticanje i detaljno čitanje ovog djela. Posebna hvala članici komisije, prof. dr. Jasmini Milinković sa Učiteljskog fakulteta u Beogradu, na podršci i savjetima u završavanju ovog djela. Velika hvala prodekanu Matematičkog fakulteta i članu komisije, doc. dr Miljanu Kneževiću, na ljudskoj i profesionalnoj podršci, ponajviše u privođenju ovog djela kraju.

Na Studentskom trgu broj 16, još je mnogo imena kojima dugujem zahvalnost na toploj dobrodošlici, suradnji i podršci u različitim fazama mog doktorskog rada: mojim profesorima prof. dr Zoranu Luciću i prof. dr Milošu Arsenoviću, profesorici i bivšoj prodekanici Matematičkog fakulteta prof. dr Vesni Jevremović, zatim dekanu Matematičkog fakulteta prof. dr Zoranu Rakiću, bivšim prodekanima Matematičkog fakulteta prof. dr Vladimiru Filipoviću i prof. dr Zorici Stanimirović, ali i administrativnom osoblju. Posebno, neizmjernu zahvalnost dugujem kolegi, doc. dr Mareku Svetliku, na brojnim matematičkim razgovorima i refleksijama, usmjeravanjima i korekcijama, spremnosti da mi u svakom trenutku bude pri ruci, kao kolega i prijatelj. Hvala i njegovoj supruzi Marini koja je dijelila s nama mnoga matematička razmatranja i druženja, njihovim obiteljima, ali i njihovu malom Bratislavu na strpljivom čekanju.

Zahvalna sam profesoru Aleksandru Jakiru, mome bivšem dekanu, na odobrenju i financijskoj podršci istraživanja, kolegici doc. dr. sc. Maji Cindrić i psihologinji izv. prof. dr. sc. Slavici Šimić Šašić, s Odjela za izobrazbu učitelja Sveučilišta u Zadru, na suradnji u osmišljavanju i realizaciji istraživanja. U završnoj fazi stvaranja ovog djela, posebno sam zahvalna profesorici Ivani Batarelo Kokić, kolegici s Odsjeka za pedagogiju, na svesrdnoj ljudskoj i profesionalnoj pomoći.

Mnogima dugujem zahvalnost na podršci, poticajima i savjetima za ustrajan hod tijekom ovog kompleksnog putovanja punog nepoznanica: prije svega na silnoj ljubavi, strpljenju i razumijevanju suprugu Pjeru i svekru Tonču, mojim prijateljima, kolegama i suradnicima, a posebno mojim pokojnim roditeljima Ani i Luki, koji su me pripremili za životne borbe, mojoj braći i sestrama, a ponajviše sestri Anđeli.

Boravak u Beogradu bio bi manje ugodan da nije bilo uvijek dobro raspoloženih i raspoloživih: Buzija, Vilme i Vlade, njihovih pokojnih Ljube i Nadice, pokojnog barba Zdenka, poduzetne Olgice, Bojane, ali i mnogih drugih.

Na samom kraju, ali iznimno važno, želim reći hvala obitelji Mandić, sa Studentskog trga broj 8: pokojnom Ranku, njegovoj supruzi Milji i djeci Sari i Marku, na otvorenosti, dobrodošlici i toplini svog doma čija su vrata za mene, mog Pjera i Tonća u svako doba bila otvorena.

Hvala Ti, Svevišnji, što si me na ovaj put doveo, njime do kraja proveo i kroz duhovno vodstvo fra Ante osnaživao.

Naslov doktorske disertacije: Razvoj vizualno-prostornih vještina i geometrijskog mišljenja studenata učiteljskih fakulteta zasnovan na metodi usmjerenog opažanja i teoriji van Hiele-a

Sažetak:

Budući učitelji primarnog obrazovanja trebaju prvo sami steći odgovarajuća matematička znanja, vještine i umijeća, kako bi osigurali odgovarajuće okruženje za razvoj tih istih znanja, vještina i umijeća učenicima koje budu poučavali. Različita istraživanja u obrazovanju pokazuju da učenici svih uzrasta imaju teškoća u savladavanju geometrijskih koncepata i ostvarivanju funkcionalnih veza među njima, posebno na prijelazu sa školske na sveučilišnu razinu.

Stoga je provedeno kvazieksperimentalno istraživanje sa neekvivalentnim grupama budućih učitelja primarnog obrazovanja s ciljem utvrđivanja učinkovitosti posebnog načina poučavanja u svrhu razvoja vještina vizualizacije, geometrijskog mišljenja i optimiziranja ishoda učenja geometrije. Za prikupljanje podataka o karakteristikama sudionika istraživanja korištena su tri testa prije i poslije poučavanja: VH test radi mjerenja razina geometrijskog mišljenja, GEO test radi stjecanja uvida u geometrijska znanja i vizualne vještine te SPAC test radi mjerenja posebne vizualno-prostorne sposobnosti uspostavljanja veza između 3D figura i njihovih mreža. U eksperimentalnoj grupi primijenjeno je posebno poučavanje temeljeno na vizualno-analitičkoj metodi i usmjerenom opažanju te balansiranju triju načina izražavanja: jezičnog, vizualnog i simboličkog. Strukturiranje i odabir nastavnih aktivnosti planirano je prema van Hieleovim fazama učenja u pet faza.

Rezultati na pred testiranju potvrdili su prilično slaba predznanja, vještine vizualizacije i razine geometrijskog mišljenja svih sudionika, ali i posjedovanje odgovarajućih vizualno-prostornih sposobnosti kojima se predviđa mogući uspjeh. T-testom je potvrđeno da među sudionicima na početku poučavanja nema statistički značajne razlike, a Spearmanovim koeficijentom korelacije utvrđena je pozitivna statistički značajna korelacija između sva tri testa, što znači da se razmatrane vještine i znanja mogu uzajamno razvijati.

Rezultati na post testiranju potvrdili su učinkovitost primijenjenih strategija i metoda poučavanja u ostvarivanju boljih ishoda učenja geometrije, razvoju vizualne pismenosti te napredak u razinama geometrijskog mišljenja sudionika eksperimentalne grupe. Sudionici eksperimentalne grupe su na post testiranju imali statistički značajno bolje rezultate u odnosu na rezultate koje su ostvarili na pred testiranu, ali i u odnosu na rezultate koje su ostvarili sudionici kontrolne grupe, koji su poučavani više na tradicionalan način. Sudionici kontrolne grupe su također ostvarili napredak, ali ne statistički značajan.

Predstavljeni rezultati potvrđuju da se, kroz sustavno učenje i poučavanje, geometrija i vizualna pismenost mogu razvijati na različitim razinama obrazovnog sustava.

Ključne riječi: aksiomatska metoda, definiranje, dokazivanje, geometrijska konstrukcija, geometrijsko mišljenje, strategije poučavanja, van Hieleova teorija, vizualizacija, vizualno-prostorne sposobnosti, rješavanje problema

Naučna oblast: Matematika

Uža naučna oblast: Metodika nastave matematike

Dissertation title: Development of visual-spatial skills and geometric thinking of pre-service primary education teachers based on the directed observation method and van Hiele's theory

Abstract:

Future primary education teachers should acquire appropriate mathematical knowledge, skills, and abilities to provide a suitable environment for developing their prospective students' responding knowledge, skills, and abilities. Various studies in education show that students of all ages have difficulties mastering geometric concepts and making functional connections between them, especially at the transition from school to university level.

Therefore, a quasi-experimental study was conducted with non-equivalent groups of future primary education teachers. The study aimed to determine a particular teaching method's effectiveness for developing visualization skills, geometric thinking, and optimizing geometry learning outcomes. Three tests were used before and after teaching to collect data on the characteristics of the research participants. The tests were: the VH test to measure the level of geometric thinking, the GEO test to gain insight into geometric knowledge and visual skills, and the SPAC test to measure the unique visual-spatial ability to establish connections between 3D figures and their networks. In the experimental group, a specific teaching approach was applied. The teaching approach is based on the visual-analytical method and directed observation and balancing of three ways of expression: linguistic, visual, and symbolic. Van Hiele's five stages of learning were used in the structuring and selecting of teaching activities.

The pre-test results confirmed the relatively weak prior knowledge, visualization skills, and level of geometric thinking of all participants, and the possession of appropriate visual-spatial abilities that predict possible success. The t-test confirmed no statistically significant difference between the participants at the beginning of the teaching. The Spearman correlation coefficient determined a positive, statistically significant correlation between all three tests, indicating a possibility for mutual development.

The post-test results confirmed the effectiveness of the applied strategies and teaching methods in achieving better geometry learning outcomes, developing visual literacy, and progress in the levels of geometric thinking of the participants in the experimental group. The experimental group participants had statistically significantly better results on the post-test than the results they achieved on the pre-test compared to the results achieved by the control group participants who were taught more traditionally. Participants in the control group also improved, but these improvements were not statistically significant.

The above confirmed that it is possible to develop geometry and visual literacy through systematic learning and teaching at different levels of the educational system.

Keywords: axiomatic method, defining, proving, geometric construction, geometric thinking, teaching strategies, van Hiele theory, visualization, visual-spatial abilities, problem solving

Research area: Mathematics

Research sub-area: Teaching methods in mathematics

Sadržaj

Uvod

Neka ne ulazi onaj tko ne zna geometriju.

Prvi tragovi matematike, urezani u stijene pećina u obliku geometrijskih crteža neizbrisiv su znak geometrije kao privilegiranog sredstva razvoja apstraktnog mišljenja, ali i vizualnog oblika komuniciranja. Zahvaljujući Euklidu, geometrijska znanja prva su sistematizirana i aksiomatizirana i kao takva utjecala su na razvoj cjelokupne matematike kao znanosti. No, sam Euklid, još prije više od dvije tisuće godina, dao je naslutiti da učenje i poučavanje geometrije nije niti malo jednostavno jer *nema kraljevskih puteva u geometriji*. Zbog toga čini se, mnogi niti ne pokušaju, mnogi vrlo brzo odustanu, a tek odvažni, strpljivi i ustrajni napreduju.

Za savladavanje deduktivno ustrojene euklidske geometrije, izgrađene aksiomatskom metodom, potrebno je vješto „geometrijsko oko" koje se „oštri" sustavnim i svrhovitim razvojem vizualne pismenosti u strogo kontroliranom geometrijskom okruženju. Zbog dualne prirode geometrijskih figura, njezinih apstraktnih i konkretnih svojstava, u svrhu uspješnog stjecanja geometrijskih znanja s razumijevanjem i mogućnostima efikasne primjene, potrebno je uzajamno razvijati i vizualne i analitičke metode, bez dominacije jedne nad drugom, a posebno u radu sa složenim geometrijskim figurama koje treba vješto tumačiti ne „kako izgledaju" već „što predstavljaju". Fleksibilna misao razvija se pri korištenju različitih sustava izražavanja te uspostavljanjem funkcionalnih veza među njima, bez čega nema ni razvoja apstraktnog geometrijskog mišljenja.

Djeca svoje prve matematičke korake započinju u primarnom obrazovanju, a u prvim matematičkim poimanjima, argumentima i logičkim zaključcima trebaju pomoć svog učitelja. Zato učitelji primarnog obrazovanja imaju veliku odgovornost i izazov odgovoriti na potrebe svojih učenika tako da im osiguraju okruženje u kojem će matematička znanja učiti s razumijevanjem, kroz raznovrsne aktivnosti razvijati različite oblike mišljenja i vještine korištenja naučenog. Da bi u tome bili uspješni, prvo nastavnici sami trebaju imati izgrađena potrebna znanja, vještine i umijeća.

Istraživanja u matematičkom obrazovanju kontinuirano ukazuju na mnoge teškoće s kojima se učenici svih uzrasta suočavaju pri učenju matematike, pri čemu najviše problema imaju upravo pri stjecanju geometrijskih znanja, posebno na prijelazu sa školske na sveučilišnu razinu, kada se diskursi poučavanja znatno mijenjanju. Uz teškoće ukazuje se i na moguće uzroke te načine savladavanja,

Cilj istraživanja, koje se opisuje u ovom radu, bio je osmisliti način poučavanja geometrije koji će budućim učiteljima primarnog obrazovanja omogućiti nastavak obrazovanja, uz uvažavanje njihovih predznanja i razina mišljenja, a zatim utvrditi učinkovitost korištenih metoda i strategija poučavanja u svrhu razvoja njihovog geometrijskog mišljenja i vizualne pismenosti te optimiziranja ishoda učenja geometrije.

U svrhu planiranja poučavanja bilo je potrebno istražiti bitne karakteristike euklidske geometrije kao aksiomatski ustrojenog sustava, različite strategije učenja i poučavanja na svim razinama: od primarnog, preko sekundarnog do tercijarnog obrazovanja, istražiti teorijski okvir prikladan za razvoj geometrijskog mišljenja te konačno istražiti potencijal i ograničenja vizualizacije, kao i važnost vizualno-prostornih sposobnosti u predviđanju i ostvarivanju boljih postignuća pri učenju geometrije. Tek nakon toga bilo je moguće osmisliti i provesti planirano istraživanje. Stoga je ovaj rad podijeljen na teorijski i istraživački dio.

U teorijskom dijelu se kroz četiri poglavlja opisuju četiri različita pogleda na euklidsku geometriju, a u istraživačkom dijelu se kroz dva dijela opisuje metodologija istraživanja i daju rezultati uz raspravu zasnovanu na mješovitoj analizi podataka te se navode moguća ograničenja. Nakon svega izvedeni su zaključci cjelokupnog istraživanja te dani prijedlozi za daljnji rad. Konačno, daje se popis korištene literature i testovi te tablica korištenih pojmova (trojezično) za brže i lakše snalaženje pri čitanju ovog rada.

U prvom poglavlju, dan je kratki prikaz nastanka i razvoja euklidske geometrije te karakteristike njezina deduktivnog ustroja i aksiomatske metode. Posebno su opisani važni procesi aksiomatskog ustroja: definiranje i klasificiranje matematičkih pojmova, postavljanje tvrdnji, ispitivanje i utvrđivanje njihove istinitost kroz direktni i indirektni dokaz. Uz to su opisane specifičnosti geometrijskih figura, disekcija, konstrukcija i posebnosti geometrijskih dokaza.

U drugom poglavlju perspektiva se mijenja sa onoga „što" na „kako" poučavati, ali bez odmicanja od deduktivnog ustroja. U ovom dijelu se, prema rezultatima istraživanja matematičkog obrazovanja, predstavljaju teškoće s kojima se učenici svih uzrasta suočavaju pri učenju geometrije: teškoće oko usvajanja i definiranja geometrijskih pojmova, teškoće pri rješavanju zadataka različite kogmitivne zahtjevnosti, a posebno teškoće oko razvoja koncepata mjerenja i konačno ukazuje na različite uloge dokaza u nastavi matematike. Uz teškoće se opisuju mogući uzroci i obrazloženja te prijedlozi nadilaženja.

U trećem poglavlju euklidska geometrija sagledava se iz perspektive razvoja procesa geometrijskog mišljenja, u čemu sustavan pristup osigurava široko prihvaćeni van Hieleov teorijski okvir. U ovom dijelu opisuju se karakteristike petodijelnog van Hieleovog modela razvoja mišljenja, koji je hijerarhijski ustrojen, s primjenom na razvoj geometrijskog mišljenja te način strukturiranja učenja kroz pet faza.

U četvrtom poglavlju pogled na euklidsku geometriju ostvaruje se kroz okular vizualizacije i vizualno-prostornih sposobnosti koje su nerazdvojive od učenja geometrije. Kako još uvijek ne postoji izgrađen jedinstveni teorijski okvir za učenje i poučavanje vizualizacije, niti je dugogodišnje istraživanje kognitivnih znanstvenika prostornih sposobnosti dovelo do jedinstvene teorije, u ovom dijelu se najprije razlažu elementi vizualizacije i njihove karakteristike u kontekstu geometrije, a zatim se izdvajaju bitni procesi vizualno-prostornih sposobnosti koji su ključni pri učenju i poučavanju geometrije. Poglavlje se završava razmatranjem potencijala i ograničenja vizualizacije koji doprinose, odnosno onemogućavaju stjecanje vizualne pismenosti u korist učenja matematike.

Nakon ovih razmatranja nameće se misao kako bi svaki nastavnik trebao biti svjestan različitih pogleda na euklidsku geometriju te i sam imati izgrađena odgovarajuća znanja, razine mišljenja, vještine i umijeća, opisane kroz te poglede, prije nego uđe u „svoju" učionicu.

U petom poglavlju opisuje se metodologija pripreme i provedbe eksperimentalnog istraživanja. Posebno se opisuju karakteristike odabranih instrumenata koji su važni za tumačenje rezultata, a posebno nastavne strategije i aktivnosti korištene tijekom intervencije koje prate deduktivni ustroj geometrije. Poseban osvrt dan je na vizualno-analitičku metodu usmjerenog opažanja koja je prožimala sve aktivnosti, a razvijena je za potrebe ovog istraživanja u svrhu razvoja vizualne pismenosti i fleksibilne misli u kontekstu geometrije, a sve u svrhu stjecanja boljih ishoda učenja.

U šestom poglavlju predstavljaju se rezultati i vrši rasprava o karakteristikama sudionika prije i poslije poučavanja, zasnovana na analizi podataka kombiniranjem različitih kvalitativnih i kvantitativnih metoda. Na samom kraju raspravlja se o statistički značajnim promjenama koje su se dogodile kao posljedica odgovarajućeg poučavanja.

Teorijski dio

1. Euklidska geometrija

Za razumijevanje euklidske geometrije, koja se danas uči i poučava u nastavi matematike diljem svijeta, potrebno je ipak malo osvrnuti se i na njezin povijesni razvoj: kako je i gdje nastala te tko je sve zaslužan za njezino stvaranje i oblikovanje. Budući da se radi o periodu dugom preko 4000 godina, u ovom radu moguće je napraviti tek kraći osvrt kroz glavne točke preokreta tijekom povijesti. Kako mnogi izvorni tekstovi najčešće nisu sačuvani, uvid je moguće ostvariti kroz naknadne zapise i tumačenja, koja osim izvornih ideja i znanja često sadrže nadopune i osobna tumačenja autora.

Tako bi se, prema mnogim povijesnim zapisima, moglo reći da su prva geometrijska znanja nastala u staroj babilonskoj i egipatskoj civilizaciji prije više od 4. tisuće godina, u vrijeme kada su stari Egipćani rješavali probleme premjeravanja zemljišta nakon što su im nabujale rijeke prebrisale označene međe. Međutim, tek početkom 6. stoljeća prije Krista, stari Grci postavljaju temelje današnje geometrije kao deduktivne znanosti zahvaljujući novim spoznajama kojima se odmiču od praktičnih problema i kojima dodatno oblikuju babilonsko-egipatsko nasljeđe (Becker, 1998). Tako postavljena znanja dodatno se strukturiraju kroz 5. i 4. stoljeće prije Krista, pod utjecajem Platona i njegove škole strogog logičkog zaključivanja te Aristotelove formalne logike.

Zatim, krajem 4. stoljeća, Euklid svojim djelom *Elementi,* vjerojatno pod utjecajem Platonove škole i Aristotela, postavlja aksiomatsku metodu za strukturiranje i izgradnju dotada sakupljenih geometrijskih znanja. Euklidovi *Elementi* stoljećima nakon toga koriste se u tom obliku te služe kao model za izgradnju drugih deduktivnih matematičkih sustava (Courant et al, 1996). Tek krajem 19. stoljeća, zahvaljujući razvoju i drugih grana matematike, njemački matematičar Hilbert upotpunjuje aksiomatski sustav kojeg je postavio Euklid te oblikuje suvremeni aksiomatski sustav za geometriju, koji se koristi sve do današnjih dana, i dalje pod nazivom *Euklidska geometrija* (Slika 1).

Slika 1. Razvoj geometrije kroz povijest

I mnogi drugi matematičari tog razdoblja dali su značajan doprinos razvoju geometrije kao i cjelokupne matematike, poput Talesa iz Mileta, Pitagore i njegovih sljedbenika, Arhimeda, Apolonija i drugih, ali Euklidovi *Elementi* imali su prilično snažan utjecaj kroz dugi vremenski period, vjerojatno kao najcjelovitiji sačuvani matematički zapisi iz pretkršćanskog doba, pa se najveće zasluge za postavljanje geometrije kao aksiomatske znanosti pripisuju Euklidu i njegovom djelu *Elementi* (Lučić, 2009). Iz svega navedenog, rasprava o današnjoj geometriji zasigurno treba započeti s matematičarom Euklidom i njegovim *Elementima,* a tek onda o suvremenoj euklidskoj geometriji, njezinim karakteristikama i značaju, kako za matematiku tako i šire.

1.1. Euklid i njegovi *Elementi*

Grčki matematičar Euklid, živio je oko 340. do 287. godine prije Krista, u Aleksandriji, kulturnom i znanstvenom središtu antičkog svijeta. Kao učitelj na visokoj aleksandrijskoj matematičkoj školi *Museion* imao je snažan utjecaj na učenje i poučavanje, a kao sljedbenik Platonove filozofije te dijelom pod utjecajem Aristotelove formalne logike, uspio je sistematizirati i aksiomatizirati velika matematička znanja sakupljena do njegova doba.

Naime, preokret se dogodio kada je Euklid uočio da se izvođenje i dokazivanje matematičkih spoznaja treba sastojati od niza logičkih zaključaka, pri čemu istinitost svakog argumenta, korištenog u tom nizu, također treba biti izvedena nizom logičkih zaključaka. Kako taj proces utvrđivanja istinitosti ne može ići u nedogled, on mora imati svoj početak, tj. moraju postojati spoznaje koje se prihvaćaju kao istinite i za koje dokaz nije potreban. Poželjno je da takvih spoznaja bude što manje, da one budu jednostavne, jasne i vjerodostojne. Odabir polaznih tvrdnji, koje Euklid naziva postulatima i aksiomima, zapravo je u velikoj mjeri proizvoljan, ali je važno da ih je mali broj i da je njihova istinitost očigledna. Tada se, na temelju njih određenim logičkim slijedom mogu izvoditi sve ostale tvrdnje. Upravo taj postupak izgradnje svih činjenica nekog područja na temelju odabranog broja osnovnih tvrdnji (aksioma) naziva se aksiomatskom metodom, a za područje se kaže da je deduktivno izvedeno (Courant et al, 1996, str. 214).

Pri takvoj izgradnji nekog matematičkog područja, još se zahtijeva da odabrani aksiomi budu međusobno nezavisni, tj. da se niti jedan od aksioma ne može izvesti iz preostalih aksioma tog područja. Također, zahtijeva se i da sustav odabranih aksioma bude potpun, tj. da se sve tvrdnje izvedene iz njih unutar promatranog područja mogu dokazati ili opovrgnuti unutar tog područja. Konačno, zahtijeva se da odabrani aksiomi budu neproturječni (konzistentni), tj. da se iz njih ne mogu izvesti dvije kontradiktorne tvrdnje (na primjer, da istodobno vrijedi neka tvrdnja i njezina negacija).

Upravo na taj način Euklid je sabrao matematičko znanje toga doba u djelo pod nazivom *Elementi*, koje se sastoji od 13 knjiga. Prvih šest knjiga (od 1. do 6.) odnosi se na geometriju ravnine (planimetrija), sljedeće četiri knjige (od 7. do 10.) bave se aritmetikom i problemima teorije brojeva, a posljednje tri (od 11. do 13.) geometrijom prostora (stereometrija). Postoje 14. i 15. knjiga *Elemenata*, ali one „nisu nastale iz Euklidova pera”, već su dodane kasnije (Lučić, 2009, str. 34).

Za aksiomatsko zasnivanje geometrije najvažnija je prva knjiga u kojoj Euklid navodi definicije, postulate i aksiome, a zatim dokazuje propozicije. Postavljajući 23 definicije, Euklid uvodi prve elementarne geometrijske pojmove. Na primjer, prvih sedam Euklidovih definicija glasi (Gleizer, 2003, str. 221):

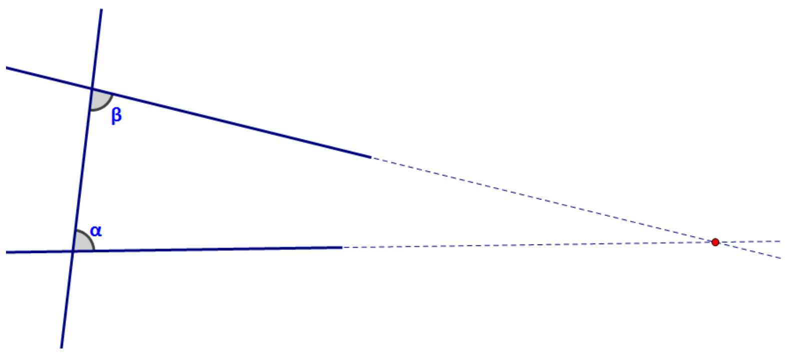
D1. *Točka* je ono što nema dijelova.
D2. Linija jest dužina bez širine.
D3. Krajevi linije su točke.
D4. *Pravac* jest takva linija koja je jednako raspoređena prema svim svojim točkama.
D5. Površina je ono što ima samo dužinu i širinu.
D6. Granice površine su linije.
D7. *Ravnina* je površina koja je jednako raspoređena prema svim svojim pravcima.

Prema danim definicijama vidljivo je da ideja osnovnih pojmova u današnjem smislu u Euklida nije prisutna, iako je on sličnim razmišljanjem kao i kod dokazivanja vjerojatno došao do zaključka da neki pojmovi trebaju biti osnovni, a da sve ostale pojmove treba izvoditi na temelju njih i precizno definirati. Drugim riječima, Euklid definicijama opisuje i osnove pojmove (npr. točka - D1, pravac - D4, ravnina - D7), pri tome su neke definicije prilično nejasne, a u njihovom opisu koristi pojmove (npr. dužina, granica) koje također trebaju biti definirani, a nisu (Gleizer, 2003). Zapravo, Euklidove definicije se ne mogu smatrati strogim matematičkim definicijama, već više kratkim objašnjenjima u svrhu stvaranja intuitivne slike opisanog pojma. Osim toga, opisivanjem osnovnih geometrijskih pojmova, Euklid zapravo ne ostavlja mogućnost različitih tumačenja tih pojmova, što bi u suprotnom bilo moguće (Lučić, 2009, str. 41).

Nakon definicija, Euklid uvodi osnovne tvrdnje geometrije, koje smatra očiglednim istinama te ih dijeli na postulate i aksiome, vjerojatno prema karakteru onoga što opisuju. Tako postulatima više opisuje neke geometrijske „istine”, a aksiomi nisu vezani isključivo za geometriju već se mogu koristiti i šire. U različitim prijepisima Euklidovih *Elemenata* navodi se različit broj postulata i aksioma, vjerojatno jer su neke dodavali sami komentatori (Lučić, 2009, str. 45). Ovdje se prikazuje pet postulata i osam aksioma.

Postulati (Gleizer, 2003, str. 222):

P1. Može se povući pravac od svake točke prema svakoj drugoj točki.
P2. Može se neograničeno produljiti svaki pravac (s obje njegove strane).
P3. Može se nacrtati kružnica sa svakom točkom kao središtem i svakim polumjerom.
P4. Svi pravi kutovi međusobno su jednaki.
P5. Dva pravca presječena trećim pravcem sijeku se (beskonačno produžena) s one strane trećeg pravca na kojoj je zbroj unutarnjih kutova koje oni čine s njim manji od dva prava kuta.



Slika 2. Prikaz petog Euklidova postulata (P5)

Aksiomi (Gleizer, 2003, str. 223):

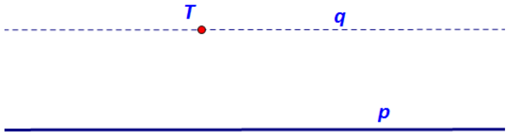
A1. Stvari jednake istoj stvari međusobno su jednake.
A2. Ako jednako dodamo jednakom, onda su i cjeline jednake.
A3. Ako jednako oduzmemo od jednakog, dobivamo jednako.
A4. Ako jednako dodamo nejednakom, dobivamo nejednako.
A5. Ako udvostručimo jednako, dobivamo jednako.
A6. Ako raspolovimo jednako, dobivamo jednako.
A7. Ono što se podudara međusobno je jednako.
A8. Cjelina je veća od svog dijela.

Posebnu pozornost mnogih matematičara privukao je peti Euklidov postulat (Slika 2) koji je svojom formulacijom odudarao od ostalih očiglednih tvrdnji (P5). Tim postulatom bavili su se mnogi matematičari, ali i ljubitelji geometrije gotovo dvadeset stoljeća, smatrajući ga ozbiljnim nedostatkom u sustavu aksioma i postulata. Postojali su brojni pokušaji utvrđivanja da se zapravo radi o tvrdnji koja je izvedena iz ostalih aksioma i postulata i koju treba dokazati. U pokušajima izvođenja dokaza najčešće indirektnim putem, krajem 19. st. naše ere, ruski matematičari Lobačevski[1] i mađarski

[1] Nikolaj Ivanović Lobačevski, 1793. – 1856.

matematičar Bolyai[2], neovisno jedan o drugome, pokazali su da peti postulat ipak ne ovisi o drugim aksiomima geometrije. Štoviše, u pokušajima opovrgavanja istinitosti postulata, odnosno u dokazivanju istinitosti negacije postulata, izgradila se potpuno nova matematička disciplina, poznata pod nazivom neeuklidska geometrija. Također, izvedene su i razne ekvivalentne forme postulata.

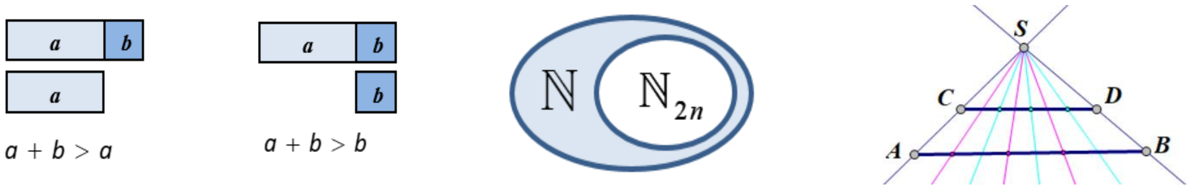
Danas se peti Euklidov postulat navodi najčešće pod nazivom Playfairov[3] aksiom u sljedećoj formi: *Za zadani pravac i točku izvan njega, u ravnini njima određenoj, postoji jedinstven pravac koji sadrži danu točku i disjunktan je s danim pravcem* (Slika 3).



Slika 3. Prikaz Playfairova aksioma

Svakako, postulate i aksiome treba razmatrati u vremenu u kojem su nastali kako bi se moglo govoriti o njihovoj smislenosti i očiglednosti.

Tako, na primjer, može se razmotriti osmi aksiom (A8) koji govori o odnosu cjeline i njezina dijela. Iskaz aksioma se na jednostavan način može vizualno prikazati i algebarski zapisati (Slika 4a). Međutim, kada bi se aksiom primijenio na skup svih parnih prirodnih brojeva ($\mathbb{N}_{2n}$) koji je dio (pravi podskup) skupa svih prirodnih brojeva ($\mathbb{N}$), onda ne samo da tvrdnja nije očita, već nije ni istinita (Slika 4b).



(a) (b) (c)

Slika 4. Odnos cjeline i njezina dijela

Naime, u vrijeme kada je Euklid postavio ovu tvrdnju, razmatrali su se najčešće konačni skupovi, a skupovi $\mathbb{N}$ i $\mathbb{N}_{2n}$ su beskonačni. Kako se između skupa svih prirodnih brojeva ($\mathbb{N}$) i skupa svih parnih prirodnih brojeva ($\mathbb{N}_{2n}$) može uspostaviti obostrano jednoznačno pridruživanje (svakom prirodnom broju može se pridružiti samo jedan parni broj i obratno) za njih se kaže da su jednakobrojni (ekvipotentni). U tom slučaju, ne može se reći da je skup svih prirodnih brojeva veći od svog dijela (Jozić, 2014). Ako bi promatrali dvije dužine različitih duljina (Slika 4c). One su jednakobrojne kao skupovi točaka, ali kako su različitih duljina, kraća bi se mogla „smjestiti" kao dio dulje tako da vizualno izgleda da je cjelina veća od dijela.

Nakon definicija, postulata i aksioma, Euklid izlaže i dokazuje tvrdnje (propozicije) po određenoj logičkoj zavisnosti tako da se svaka sljedeća tvrdnja može dokazati korištenjem prethodnih tvrdnji, postulata i aksioma. Posebno značajno za proces dokazivanja u Euklida je to što on uz sam proces dokazivanja izdvaja i ukazuje na ono što je zadano, ono što treba utvrditi te na kraju daje zaključak, kojim ponavlja što se trebalo dokazati. Sve završava skraćenicom Q.E.D. (lat. *Quod erat demonstrandum,* što je trebalo dokazati), umjesto koje se danas obično koristi oznaka ■.

[2] Jànos Bolyai, 1802. – 1860.
[3] John Playfair, 1748. – 1819.

Na opisani način, Euklid je u svom djelu *Elementi* aksiomatskom metodom izložio elementarnu geometriju toga doba i time postavio temelj današnje aksiomatske izgradnje matematičke teorije. Međutim, u svojim dokazima, Euklid se koristio vizualnim prikazima i oslanjao na intuiciju, što je imalo i pozitivnih i negativnih strana. Naime, kroz vizualne prikaza lakše se i brže moglo pratiti izlaganje dokaza, a oslanjanjem na prikaz mogli su se otkriti i neki novi rezultati. No, u tom procesu neke je tvrdnje Euklid temeljio samo na očitosti određenih tvrdnji i vizualnoj spoznaji što mu se najviše zamjeralo jer se na takav način istinitost svih tvrdnji koje je izložio ipak nije mogla utvrditi na temelju postavljenog sustava aksioma. Time je ukazano na nepotpunost njegove aksiomatike (Lučić, 2005).

Prema nekim izvorima, Euklidovo djelo je prvi put u Europu doneseno početkom 12. st. naše ere tako što je engleski matematičar Adelard[4] iz Batha, putujući po ondašnjem arapskom teritoriju, donio latinski prijevod *Elemenata* s arapskog jezika (Pauše, 2007). Konačno je njemački matematičar Hilbert[5], pod utjecajem formalne logike suvremene matematike, radio na preciznijoj aksiomatskoj nadogradnji euklidske geometrije te proveo iscrpno istraživanje o neovisnosti, konzistentnosti i potpunosti tako izgrađenog sustava. U svom djelu *Osnove geometrije*, čije je prvo izdanje bilo krajem 1899., Hilbert je dao cjeloviti sustav aksioma euklidske geometrije, koji je općeprihvaćen i koji se koristi i dandanas, nakon više od 100 godina (Lučić, 2005, str. 56).

1.2. Hilbertova nadogradnja aksiomatskog sustava

U novom aksiomatskom sustavu Hilbert polazi od šest osnovnih pojmova, koje dijeli na tri objekta: *točka*, *pravac* i *ravnina* te tri vrste relacija među njima: *pripadanje*, *poredak* i *podudarnost*. Osnovni apstraktni objekti se mogu povezati s objektima realnog svijeta, ali njihovo povezivanje s fizičkim objektima i njihovim svojstvima više služi da bi se steklo neko konkretno iskustvo o njima. Na primjer, *točka* se može predstaviti veoma malim objektom poput vrha olovke ili nekog oštrog predmeta, dok se *pravac* može predstaviti nekom tankom zategnutom niti ili zrakom svjetlosti, ali ta tumačenja su matematički nebitna. Naime, *točka, pravac i ravnina* su čisti apstraktni objekti čija su matematička svojstva u deduktivnom sustavu u potpunosti dana relacijama među njima i opisana aksiomima, koji služe kao indirektne definicije (Courant et al, 1996, str. 217; Gleizer, 2003. str. 224).

Aksiome euklidske geometrije Hilbert dijeli u pet grupa kojima se u potpunosti uređuju odnosi između osnovnih objekata u ravnini i prostoru:

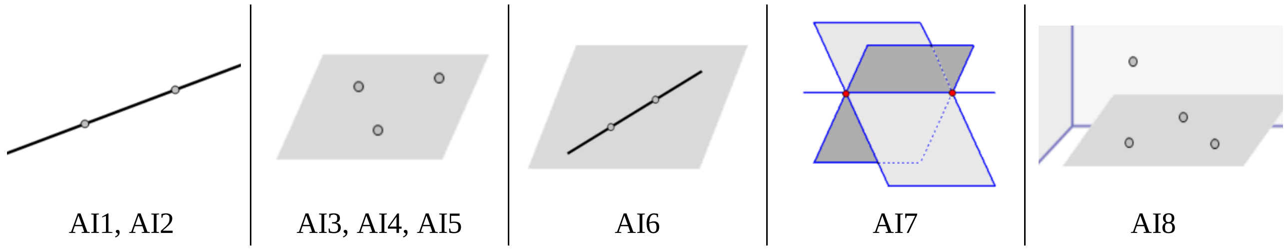
Grupa I. Aksiomi pripadanja (incidencije)
Grupa II. Aksiomi poretka (uređaja)
Grupa III. Aksiomi podudarnosti (kongruencije)
Grupa IV. Aksiom paralelnosti
Grupa V. Aksiom neprekidnosti.

Prvom grupom aksioma opisana su svojstva relacije pripadanja te se tvrdi da je pravac određen s dvije različite točke ravnine, a ravnina sa tri nekolinearne točke. Prva grupa sadrži osam aksioma (Slika 5):

AI1: Za svake dvije različite točke postoji točno jedan pravac koji ih sadrži.
AI2: Svaki pravac sadrži barem dvije točke.
AI3: Za svake tri točke postoji bar jedna ravnina koja ih sadrži.
AI4: Za svake tri nekolinearne točke postoji točno jedna ravnina koja ih sadrži.

[4] Adelard iz Batha, 1075. – 1160.
[5] David Hilbert, 1862. – 1943.

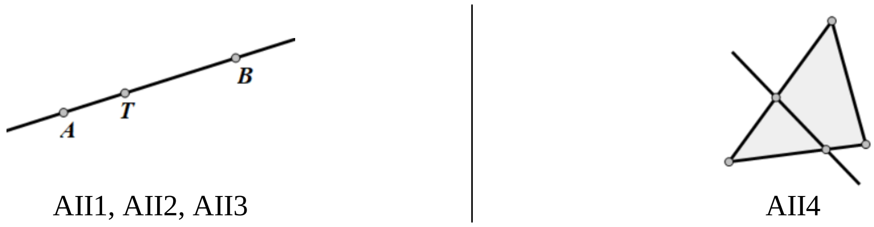
AI5: Svaka ravnina sadrži barem tri točke.
AI6: Ako dvije različite točke pravca pripadaju nekoj ravnini, onda sve točke tog pravca pripadaju toj ravnini.
AI7: Ako dvije različite ravnine imaju jednu zajedničku točku, onda one imaju još bar jednu zajedničku točku.
AI8: Postoje bar četiri točke koje ne pripadaju jednoj ravnini.



Slika 5. Aksiomi pripadanja

Drugom grupom aksioma opisana su svojstva relacije „biti između" te Paschov aksiom o tome da pravac koji ne prolazi vrhom trokuta može sjeći ne jednu ili sve tri, već točno dvije njegove stranice. Druga grupa sadrži četiri aksioma (Slika 6):

AII1: Ako kažemo da je točka *T* između točaka *A* i *B*, simbolički $A-T-B$, onda su *A*, *B* i *T* tri različite točke jednog pravca.
AII2: Za svake dvije različite točke *A* i *B* pravca *p*, postoji točka *T* takva da je $A-T-B$.
AII3: Od tri različite točke jednog pravca najviše je jedna između preostalih dviju, tj. vrijedi: $A-T-B$ ili $T-A-B$ ili $A-B-T$.
AII4 (Paschov aksiom): Ako pravac siječe jednu stranicu trokuta i ne prolazi niti jednim njegovim vrhom, onda on siječe još jednu od preostalih dviju stranica trokuta**.**



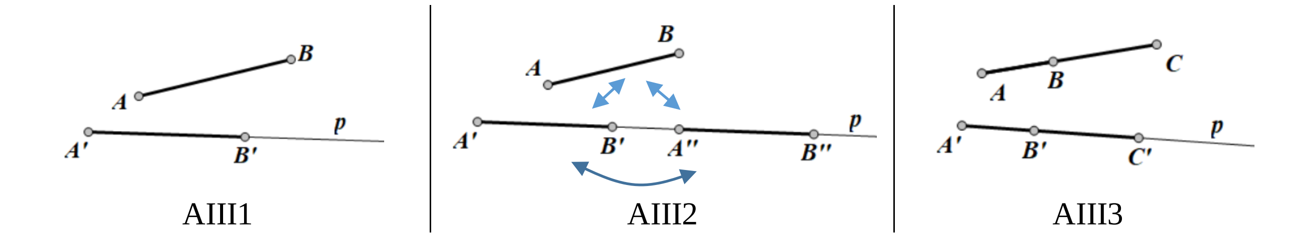
Slika 6. Aksiomi poretka

Trećom grupom aksioma opisana su svojstva relacije podudarnosti parova točaka na temelju kojih se zasnivaju konstrukcije podudarnih dužina (kraće: *prenošenje dužine*), podudarnih kutova (kraće: *prenošenje kuta*) te konstrukcija trokuta kojemu su poznate dvije njegove stranice i kut među njima (kraće: *osnovna konstrukcija trokuta SKS*). Treća grupa sadrži pet aksioma (Slika 7 i Slika 8):

AIII1 (Aksiom o *prenošenju dužine*): Neka je dana dužina $\overline{AB}$ i neka je *A'* početna točka polupravca *p*. Tada postoji jedinstvena točka *B'* polupravca *p* tako da je dužina $\overline{A'B'}$ podudarna dužini $\overline{AB}$.

AIII2: Ako je $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ i $\overline{AB} \cong \overline{A''B''}$, onda je $\overline{A'B'} \cong \overline{A''B''}$. Svaka dužina podudarna je sa samom sobom.

AIII3 (Aksiom o *zbrajanju* dužina): Ako je $A-B-C$ i $A'-B'-C'$ te ako je $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ i $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, onda je $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$.

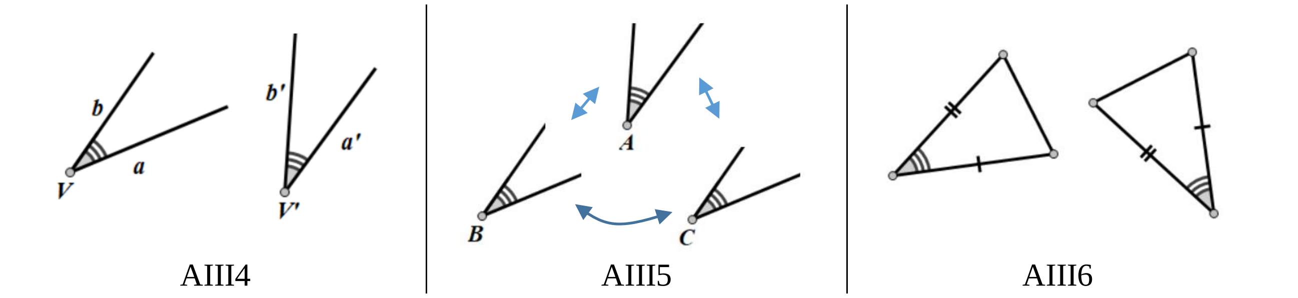


Slika 7. Aksiomi podudarnosti dužina

AIII4 (Aksiom o *prenošenju kuta*): Neka je dan kut $\angle aVb$ i neka je *V'* početna točka polupravca *a'*. Tada postoji jedinstveni polupravac *b'* s početkom u *V'* s odgovarajuće strane polupravca *a*' tako da je: $\angle a'V'b' \cong \angle aVb$.

AIII5: Ako je $\angle A \cong \angle B$ i $\angle A \cong \angle C$, onda je $\angle B \cong \angle C$.

AIII6 (Aksiom o podudarnosti *SKS*): Ako su dvije stranice nekog trokuta i kut među njima podudarne dvjema stranicama zadanog trokuta i kutu među njima, respektivno, onda su i ta dva trokuta podudarna.



Slika 8. Aksiomi podudarnosti kutova i trokuta

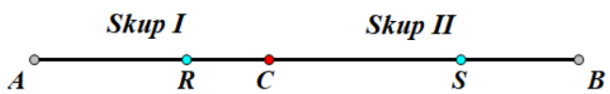
AIV (Playfairov postulat): Aksiom o paralelnosti predstavlja jednostavnu formu Euklidova petog postulata (Slika 3, str. 8).

Aksiom o neprekidnosti utvrđuje da je dužina (pravac) neprekidan i uređen skup točaka (Slika 9).

AV (Dedekindov[6] aksiom): Ako su sve točke dužine $\overline{AB}$, uključujući i njezine krajeve, raspoređene u dva skupa tako da:

1. svaka točka dužine pripada jednom i samo jednom od tih dvaju skupova, pri čemu točka *A* pripada prvom skupu, a točka *B* drugom skupu i
2. svaka točka prvog skupa, različita od *A*, nalazi se između *A* i svake točke drugog skupa,

onda postoji jedna i samo jedna točka *C* dužine $\overline{AB}$ takva da svaka točka koja se nalazi između točaka *A* i *C* pripada prvom skupu, a svaka točka koja se nalazi između točaka *C* i *B* pripada drugom skupu. Točka *C* granična je točka tih skupova, *točka prereza* ili Dedekindova točka.



Slika 9. Dedekindov aksiom

Hilbertov aksiomatski ustroj izgradnje euklidske geometrije koristi se i u drugim granama matematike: teoriji skupova, algebri, teoriji vjerojatnosti itd. Tako izgradanja svake suvremene

[6] Julius Wilhelm Richard Dedekind, 1831. – 1916.

matematičke teorije započinje od popisa osnovnih pojmova (objekata i relacija) te direktnih ili indirektnih aksioma, pri čemu je njihov izbor prilično slobodan i ovisi isključivo o „kreativnom duhu matematike" (Gleizer, 2003, str. 228). Upravo na predstavljenim aksiomima temeljilo se i poučavanje euklidske geometrije tijekom intervencije unutar eksperimentalnog istraživanja, koje se opisuje u ovom radu.

Nešto kasnije od Hilbertova postavljanja grupa aksioma za geometriju, austrijski matematičar Gödel[7] dokazao je da unutar dovoljno složene matematičke teorije ipak postoje tvrdnje koje se u danoj teoriji ne mogu ni dokazati niti opovrgnuti pa sustav aksioma tako aksiomatizirane teorije nije potpun i ne može se upotpuniti dodavanjem novih aksioma (Pauše, 2007, str. 90). U takvim situacijama, kada unutar nekog sustava postoje teoremi koji se unutar istog sustava ne mogu ni dokazati, ni opovrgnuti, njihova se istinitost može provjeravati u drugom sustavu (dobivenom izomorfnim preslikavanjem). Ako se teorem dokaže u drugom sustavu, onda se njegova istinitost prihvaća i u polaznom sustavu.

Za razumijevanje nekog deduktivnog sustava te razvijanje matematičkog mišljenja učenjem i poučavanjem tog sustava, osim samog principa aksiomatske izgradnje, potrebno je poznavanje i različitih vrsta procesa koji su bitni pri aksiomatskoj izgradnji neke matematičke teorije, pa se oni dodatno opisuju u nastavku, s primjerima iz euklidske geometrije.

1.3. Procesi aksiomatske izgradnje

Nakon odabira osnovnih pojmova i aksioma pri deduktivnoj izgradnji geometrije potrebno je uvesti nove pojmove i njih precizno definirati. U tu svrhu važno je poznavati različite načine definiranja, zahtjeve koje definicija treba ispunjavati te što je čini (ne)korektnom. Nadalje, kako bi se vješto postavljale tvrdnje o svojstvima izvedenih pojmova i vezama među njima potrebno je poznavati načine formuliranja tvrdnji, osnovne logičke principe i pravila za izgradnju novih tvrdnji iz već postojećih te procese ispitivanja njihove istinitosti. Konačno, istinitost izvedenih tvrdnji utvrđuje se dokazom pa je potrebno razumjeti važnost i smisao dokaza, znati različite procese dokazivanja i njihove karakteristike, a zatim kroz različite strategije i metode razvijati umijeće dokazivanja. Kada se stekne uvid u pozadinu procesa definiranja, postavljanja tvrdnji i dokazivanja, matematički sadržaji se uče s većim razumijevanjem, stječe se trajnije znanje, a na temelju takvog znanja i umijeće uspješnijeg rješavanja problemskih zadataka (Hemmi i Löfwall, 2009).

1.3.1. Definiranje matematičkih pojmova

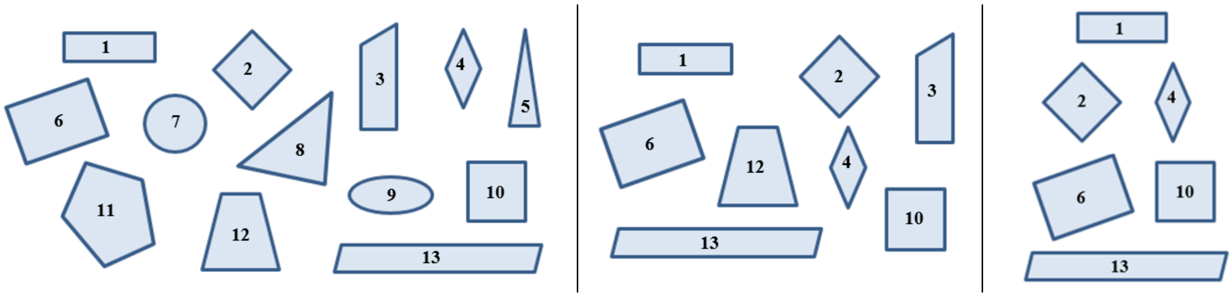
Pri definiranju pojmova postoji odgovarajući stupanj slobode, ali i različiti zahtjevi koji trebaju biti ispunjeni kako bi definicija bila korektna i poticala valjanu misao o pojmu koji se definira. Prije svega, važno je da opis pojma sadrži nužne i dovoljne karakteristike na temelju kojih se nedvosmisleno može utvrditi značenje novog pojma, pomoću već poznatih pojmova.

Jedan od načina definiranja je proces izdvajanja pojma iz neke šire grupe objekata koristeći upravo neko bitno obilježje po kojem se taj pojam razlikuje od ostalih. U tom procesu, krene se od šire grupe konkretnih objekata i njihovih karakteristika. Zatim se izdvajaju oni objekti u grupi koji imaju zajedničke karakteristike te se među njima izdvoji bitna karakteristika koja će obilježiti novi pojam i proces završava definicijom novog pojma (Jozić, 2014).

Na primjer, ako se promatraju geometrijski likovi, među njima se mogu izdvojiti samo četverokuti, zatim među četverokutima samo oni koji imaju nasuprotne stranice paralelne (Slika 10). Na kraju se

[7] Kurt Friedrich Gödel, 1906. – 1978.

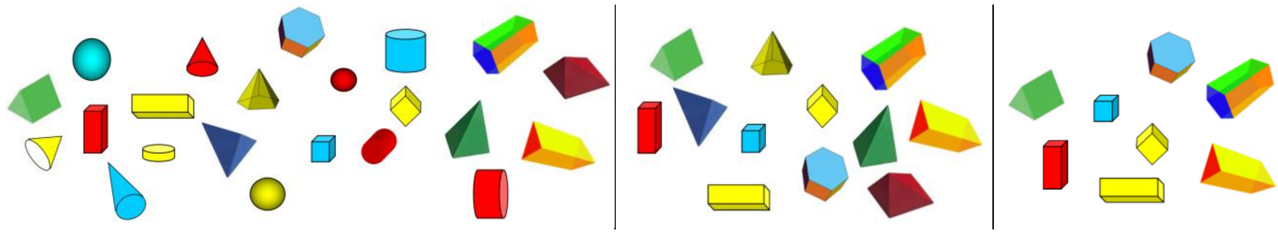
postavi definicija: *Paralelogram je četverokut kojemu su nasuprotne stranice paralelne (ili koji ima dva para paralelnih stranica).*



geometrijski likovi | četverokuti | paralelogrami

Slika 10. Proces definiranja pojma paralelogram

Ili na primjer, ako se promatraju geometrijska tijela, među njima se mogu izdvojiti samo tijela koja su omeđena ravnim plohama (*uglata tijela*), zatim među njima samo ona kojima su dvije plohe (*n*-terokuti) međusobno sukladne i paralelne, a ostale plohe paralelogrami (Slika 11). Na kraju se postavi definicija: *Prizma je uglato geometrijsko tijelo kojemu su dvije strane sukladni i međusobno paralelni n-terokuti, a ostale strane su paralelogrami*.

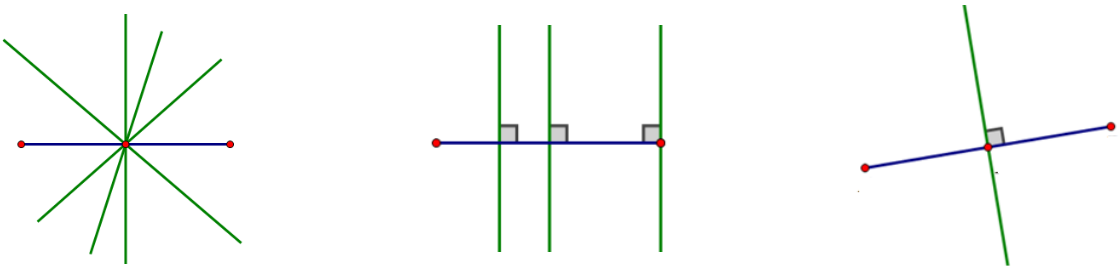


geometrijska tijela | uglata tijela | prizme

Slika 11. Proces definiranja pojma prizma

Kada se definicija pojma postavlja na opisani način, jasno je vidljivo u koju širu skupinu pojam pripada (lat. *genus proximum*, bliži rod; paralelogrami pripadaju skupu četverokuta), o kojoj vrsti je riječ (lat. *species*, vrsta; paralelogrami su jedna vrsta četverokuta) i koje su specifične odlike te vrste po kojima se razlikuju od drugih četverokuta (lat. *diferentia specifica*, specifična razlika; nasuprotne stranice su paralelne). U tom slučaju kaže se da je definicija postavljena pomoću roda i vrste. Ako se pri definiranju, rodni pojam ili neka bitna karakteristika koja određuje specifičnu razliku izostavi, definicija postaje nekorektna (Klašnja, 1974, str. 17).

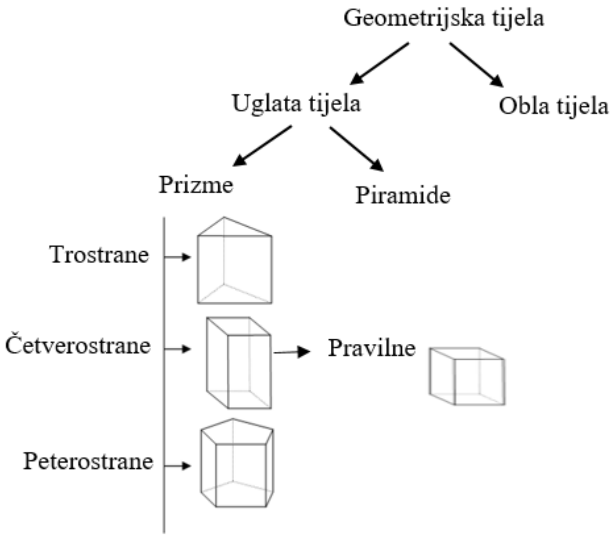
Na primjer (Jozić, 2014), iskaz *Simetrala dužine je okomita na dužinu i sadrži njezino polovište* nije korektna definicija jer je izostavljen rodni pojam (pravac). Iskaz *Simetrala dužine je pravac koji dijeli dužinu na dva jednaka dijela* nije korektna definicija jer je izostavljena nužna karakteristika (specifična razlika; svojstvo okomitosti na dužinu) pa se među beskonačno mnogo pravaca koji raspolavljaju dužinu (Slika 12a) ne može jednoznačno odrediti koji od njih je simetrala. Također, ni iskaz *Simetrala dužine je pravac okomit na tu dužinu* nije korektna definicija jer je izostavljena nužna karakteristika (specifična razlika; svojstvo raspolavljanja dužine) pa se među beskonačno mnogo pravaca koji su okomiti na dužinu (Slika 12b) ne može jednoznačno odrediti koji od njih je simetrala. Konačno, iskaz *Simetrala dužine je pravac koji je okomit na tu dužinu i sadrži njezino polovište* jest korektna definicija jer jednoznačno određuje promatrani pojam (Slika 12c).


(a) (b) (c)

Slika 12. Definiranje pojma simetrala dužine

Matematički pojmovi se često definiraju upravo isticanjem rodnog pojma i specifičnih razlika, pri čemu je dobro koristiti najbliži rodni pojam jer je onda potrebno minimalno karakteristika za opis specifičnih razlika vrste. No, koji rodni pojam će se koristiti može ovisiti i o tome za koga je definicija namijenjena (Jozić, 2014).

Na primjer, za pojam *kocka* mogu se postaviti sljedeće definicije (Slika 13): (1) *Kocka je (uglato) geometrijsko tijelo koje je omeđeno sa šest sukladnih kvadrata.* (2) *Kocka je uspravna prizma kojoj je baza kvadrat, a duljina visine jednaka duljini stranice baze.* (3) *Kocka je pravilna četverostrana prizma kojoj su svi bridovi jednakih duljina.* (4) *Kocka je kvadar kojemu su susjedni bridovi jednakih duljina.*

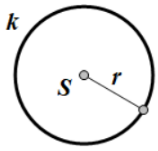


Slika 13. Definiranje pojma kocka pomoću roda i vrste

Sve definicije su korektne, ali u posljednjoj je korišteno najmanje bitnih karakteristika jer je *kvadar* najbliži rodni pojam za *kocku*. Također, sve definicije se vjerojatno i koriste u praksi, ovisno o kontekstu i uzrastu. Ali, na primjer, kada se radi s najmanjim uzrastom učenika, prirodno je i primjereno koristiti prvu definiciju.

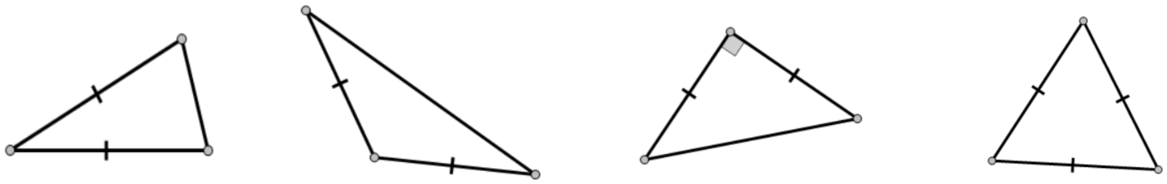
Osim formuliranja iskaza, pri definiranju matematičkih pojmova potrebno je voditi računa o riječima (jednom ili više njih) kojima se izražava pojam (ime ili nosioci pojma), o simboličkim oznakama kojima se definicija može dodatno sažeti te posebno o vizualnim prikazima koji se koriste za predstavljanje geometrijskih koncepata. Naime, jedna riječ ili simbolička oznaka može imati više značenja (homonimi), ali i različite riječi i simboličke oznake mogu imati isto značenje (sinonimi). Također, jedan te isti vizualni prikaz može stajati za različite objekte (npr. četverostrane prizme na slici 13), a različiti vizualni prikazi mogu predstavljati jednu vrstu objekta (npr. prizme na slici 13).

Posebno je korisno kada se svi elementi koji se koriste pri definiranju međusobno povežu: iskaz, vizualni prikaz i simbolički zapis. Na primjer, pri definiranju pojma *kružnica* (Slika 14).

Iskaz	Nosioci pojma	Vizualni prikaz	Simbolički zapis
Skup svih točaka ravnine koje su od zadane točke S te ravnine udaljene za pozitivan broj r.	Kružnica, obodnica		$k(S,r)$

Slika 14. Definiranje pojma kružnica

Pri definiranju nekih pojmova potrebno je uključiti više vizualnih prikaza kako bi se koncept pojma u potpunosti obuhvatio, odnosno kako bi se ispitalo na što se sve definirani pojam odnosi (Sierpinska, 1992, str. 30). Na primjer, pri definiranju pojma *jednakokračni trokut* potrebno je razmotriti različite oblike: šiljastokutni, pravokutni, tupokutni, jednakostranični, a njihove vizualne prikaze predstavljati u različitim položajima (Slika 15) i na taj način stvarati potpunu predodžbu o promatranom konceptu. Mnoge nejasnoće pri definiranju pojma mogu se izbjeći jasnim uvođenjem nosioca pojma, poznavanjem simboličkog načina označavanja i potpunog vizualnog predstavljanja.

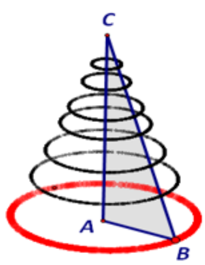


Slika 15. Vizualni prikazi jednakokračnog trokuta

Korektnost definicije postiže se ispunjavanjem različitih zahtjeva. Tako bi svaka definicija trebala biti iskazana jasno i precizno, jednoznačno i nedvosmisleno, ni preširoko ni preusko, bez navođenja ekvivalentnih svojstava i ukoliko je moguće bez negacije u iskazu. Pri tome bi trebalo voditi računa da se koriste suvremeni izrazi, da bude jezično korektna i prirodno prihvatljiva (Jozić, 2014).

Osim definiranja pojma pomoću roda i vrste, u matematici se ponekad koriste i definicije u kojima se novi pojam ne uvodi isticanjem bitnih karakteristika promatranog objekta, već opisivanjem procesa nastanka objekta tog pojma. Za te vrste definicija koristi se naziv *genetička* definicija. Iako se genetička definicije ne smatra matematičkom definicijom u pravom smislu riječi, ona se ipak koristi u određenim situacijama, posebno u nastavi matematike kada formalnu definiciju nije moguće uvesti.

Na primjer (Jozić, 2014), genetičkom se definicijom *Uspravni stožac je geometrijsko tijelo koje nastaje rotacijom pravokutnog trokuta oko jedne njegove katete za* $360°$ može stvoriti određena predodžba pojma, ali se ne saznaje ništa o bitnim karakteristikama samog pojma (Slika 16).



Slika 16. Rotacijom do predodžbe pojma uspravni stožac

U matematici postoje različite vrste dogovora pa tako postoje i *dogovorne* definicije, kojima se određeni pojam opisuje dogovorno te se pojmovi kao takvi prihvaćaju. Na primjer, za pojam *prazan skup* dogovorno je uzeto da to bude *skup koji nema niti jedan element*. Time je osigurano da prazan skup bude podskup svakog drugog skupa, kao i sebe samoga.

Jedna od grešaka koja se potkrada pri definiranju pojmova je postavljanje takozvane *cirkularne* definicije (lat. *circulus vitiosus*, začarani krug). To se događa kada se pojam *A* definira pomoću pojma *B*, koji još nije definiran pa se onda pojam *B* definira pomoću pojma *A* ili nekog drugog pojma izvedenog iz pojma *A* (Klašnja, 1974, str. 16).

Na primjer (Jozić, 2014), Ako se kaže: *Pravci koji zatvaraju pravi kut nazivaju se okomiti pravci*, a *Kut čiji su kraci okomiti naziva se pravi kut*, onda nije definirana ni okomitost pravaca ni pravi kut. Korektno bi bilo najprije definirati pravi kut, a zatim okomitost pravaca: *Pravi kut je kut koji je jednak svom sukutu* i *Okomiti pravci su pravci koji zatvaraju pravi kut*; ili najprije definirati okomitost dvaju pravaca, a zatim koristeći taj pojam, definirati pravi kut.

Prema svemu navedenom vidljivo je da proces definiranja matematičkog pojma zahtjeva određena znanja, uočavanje suptilnih razlika, ali i vještine preciznog i jasnog opisivanja, simboličkog zapisivanja i vizualnog predstavljanja. Svakako, pri definiranju izvedenih pojmova postoji određena sloboda: koje od njegovih svojstava uzeti za nužne i dovoljne karakteristike pojma, a koje iskazivati kroz tvrdnje te povezivati s drugim pojmovima. No, bez obzira na koji se način novi pojam uvede, njegova definicija će biti u potpunosti korektna ukoliko omogućava stvaranje potpune predodžbe o opisanom konceptu, na jednoznačan i nedvosmislen način.

1.3.2. Postavljanje tvrdnji i ispitivanje istinitosti

Nakon proučavanja različitih svojstava nekog pojma te izdvajanja određenih karakteristike pojma, po kojima se taj pojam bitno razlikuje od ostalih pojmova, radi postavljanja smislene definicije promatranog pojma, započinje proces uspostavljanja logičkih veza među svojstvima. Logičke veze se mogu stvarati između svojstava jednog pojma, ali i između svojstava različitih pojmova, a uočene veze iskazati tvrdnjama. Pod *tvrdnjom* se podrazumijeva smislena deklarativna rečenica ili matematički izraz koji je ili istinit ili lažan te nešto treće nije moguće (lat. *tertium non datur*, isključenje trećeg) (Baranović, 2015a, str. 3). To znači da postavljanje tvrdnji za sobom povlači i ispitivanje njezine istinitosti, a posebno kada se postavljaju izvedene tvrdnje koje nisu očite.

Ako se pri ispitivanju istinitosti tvrdnje pronađe barem jedan primjer koji pokazuje da tvrdnja ne vrijedi (kraće: *kontraprimjer*), onda se na temelju tog primjera može zaključiti da tvrdnja općenito nije istinita. Međutim, na temelju jednog ili više primjera za koje se ustanovi da tvrdnja vrijedi, može se stvoriti samo slutnja da je tvrdnja općenito istinita, ali se taj zaključak ne može izvesti bez utvrđivanja njezine istinitosti dokazom (Jozić, 2014).

Za izvedene tvrdnje u praksi se koriste i različiti nazivi, ovisno o njihovoj ulozi. Značajnije tvrdnje koje su istinite nazivaju se *teoremi* (lat. *theorein*, gledati). Naime, prve postavljene tvrdnje izvedene su na temelju proučavanja određenih geometrijskih slika te uočavanjem pravilnosti na njima pa su u skladu s tim dobile i ime (Lučić, 2009). Uz teoreme se koriste i nazivi: *propozicije*, *leme* i *korolari*. Naziv *propozicija* koristi se za tvrdnju za koju postoji kratki, jednostavni dokaz, a naziv *lema* za pomoćnu tvrdnju koja se najčešće koristi u dokazima drugih tvrdnji (npr. teorema). Naziv *korolar* (posljedica) koristi se za tvrdnju koja slijedi neposredno iz nekog teorema te se njegova istinitost jednostavno utvrđuje iz istinitosti tog teorema. U školskoj nastavi matematike, za tvrdnje se najčešće koristi naziv *poučak* (npr. Pitagorin poučak, Talesov poučak, Euklidov poučak itd.)

Formuliranje tvrdnji. Za razliku od definicija koje se iskazuju prirodnim govornim jezikom, za postavljanje matematičkih tvrdnji, uz govorni jezik, potrebno je dodatno poznavanje osnovnih logičkih principa i zaključivanja koji se nalaze u pozadini, a koji zapravo služe kao „ljepilo” da dijelove tvrdnje drže zajedno i osiguraju njezino točno značenje (Hammack, 2013, str. 62). Logički principi i zaključci su zapravo sistematičan način mišljenja koji omogućavaju izvođenje nove informacije iz danih informacija te raščlanjivanje značenja rečenice. Iako se ti isti principi koriste i u svakodnevnom životu, u matematici su oni formalizirani tako da se njihovim korištenjem osigurava ne samo izvođenje korektnog zaključka, već i korektno izvođenje potrebnog zaključaka (Hammack, 2013, str. 33).

Tako, logičke operacije *negacija*, *konjunkcija*, *disjunkcija*, *implikacija* i *ekvivalencija* osiguravaju izvođenje složenih tvrdnji kombiniranjem dviju ili više jednostavnih, čija se istinitost jednoznačno utvrđuje iz istinitost polaznih tvrdnji i svojstva primijenjene operacije. Zatim, logički principi poput *de Morganovih zakona*, *negacije implikacije* i dr., omogućavaju sagledavanje iste složene tvrdnje kroz dvije različite perspektive, što ponekad osigurava jednostavniji put do zaključka. Osim toga, uz tvrdnje se često koriste i kvantifikatori, *univerzalni* ($\forall$) i *egzistencijalni* ($\exists$), kako bi se istaknuo obim objekata za koje tvrdnja vrijedi (Baranović, 2015a, str. 12). Tek nakon savladavanja logičkih operacija, principa i pravila zaključivanja, moguće je upustiti se u efikasan rad s tvrdnjama o matematičkim objektima jer oni osiguravaju: (1) razumijevanje veznika „i”, „ili”, „ne”, „ako…, onda…” itd.; (2) efikasno mijenjanje formulacije tvrdnje u drugu tvrdnju s istim značenjem te (3) izvođenje novih informacija iz poznatih (Hammack, 2013, str. 62).

Iako se iskaz tvrdnje može formulirati na različite načine, u formulaciji iskaza gotovo svake tvrdnje uvijek se bitno razlikuju dva dijela: *pretpostavka* (kraća oznaka *P*) i *zaključak* (kraća oznaka *Q*). Pretpostavkom se iskazuju uvjeti koji vrijede za promatrani objekt, na temelju kojih posljedično slijedi zaključak o tom objektu te se svaka tvrdnja može iskazati u obliku: „**Ako** (vrijedi *P*), **onda** (vrijedi *Q*)”, simbolički $P \Rightarrow Q$. Međutim, nije uvijek jednostavno razlikovati pretpostavku od zaključka unutar dane tvrdnje, posebno kada se iskaz formulira u skladu s govornim jezikom, pri čemu pretpostavka niti ne mora biti na početku rečenice. No, vješto prepoznavanje i raščlanjivanje pretpostavke od zaključka unutar zadane tvrdnje nužan je preduvjet za daljnji rad s tvrdnjama (Jozić, 2014).

Na primjer, Talesov poučak o obodnim kutovima obično se iskazuje na sljedeći način: *Svaki obodni kut nad promjerom kružnice je pravi kut.* Unutar ove tvrdnje, pretpostavka (*P*) se odnosi na poseban obodni kut, a zaključak (*Q*) na mjeru tog kuta. Nakon raščlanjivanja, poučak se može iskazati u klasičnoj formi: *Ako je dan obodni kut nad promjerom kružnice (P), onda je taj kut pravi kut (Q).*

Postavljanje obrata tvrdnje. Kada se u tvrdnji pretpostavka (*P*) zamijeni zaključkom (*Q*), a zaključak (*Q*) pretpostavkom (*P*), dobiva se novi iskaz koji se naziva *obrat tvrdnje* (simbolički $Q \Rightarrow P$). Obrat tvrdnje je sasvim nova tvrdnja čija istinitost ne ovisi o istinitosti polazne tvrdnje te ona može, ali i ne mora biti istinita tvrdnja, stoga se njezina istinitost treba potvrditi ili odbaciti.

Na primjer, neka je dana tvrdnja: *Dijagonale romba su okomite*. Preformulirano, tvrdnja glasi: *Ako je četverokut romb, onda su njegove dijagonale okomite*. I ta tvrdnja je istinita. Obrat tvrdnje glasi: *Ako su dijagonale četverokuta okomite, onda je taj četverokut romb*. No, ova tvrdnja nije istinita jer na primjer i deltoid koji nije romb (kontraprimjer) ima okomite dijagonale.

U odabiru kontraprimjera treba biti oprezan, posebno kada postoji mogućnost odabira primjera koji je poseban slučaj promatrane klase objekata, koji u tom slučaju nije podloga za odbacivanje tvrdnje kao neistinite. Na primjer, ako bi se umjesto deltoida uzeo kvadrat, kojemu su dijagonale također okomite, tvrdnja se ne može korektno opovrgnuti jer je kvadrat posebna vrsta romba (Baranović, Baras i Blaževski, 2020, str. 19). S druge strane, postoje tvrdnje čiji je obrat istinita tvrdnja.

Na primjer, neka je dana tvrdnja (Jozić, 2014): *Ploština pravokutnog trokuta računa se po formuli* $P=\frac{a\cdot b}{2}$*, gdje su* a *i* b *duljine kateta tog trokuta.* Preformulirano, tvrdnja glasi: *Ako je trokut pravokutan, onda se njegova ploština računa po formuli* $P=\frac{a\cdot b}{2}$*, pri čemu su* a *i* b *duljine kateta tog trokuta.* I ta tvrdnja je istinita. Obrat tvrdnje glasi: *Ako se ploština trokuta može odrediti po formuli* $P=\frac{a\cdot b}{2}$*, gdje su* a *i* b *duljine dviju stranica tog trokuta, onda je taj trokut pravokutan, pri čemu su* a *i* b *duljine kateta tog trokuta.* Nova tvrdnja je također istinita, ali to nije očigledno na prvu. Njezina istinitost se može provjeriti kroz nekoliko konkretnih primjera, ali to stvara samo slutnju na temelju koje se ne može izvesti zaključak da je tvrdnja istinita.

Kada za tvrdnju vrijedi i njezin obrat, onda se kaže da tvrdnja „vrijedi u oba smjera" te se može postaviti tvrdnja u obliku *ekvivalencije*, koja najčešće koristi izraz „ako i samo ako" (skraćeno *akko*) ili „onda i samo onda". Tako se u prethodnom primjeru tvrdnja i njezin obrat mogu izreći u obliku ekvivalencije: *Trokut je pravokutan, s katetama duljine a i b akko se njegova ploština može odrediti po formuli* $P=\frac{a\cdot b}{2}$.

Korisno je steći naviku provjeravanja istinitosti obrata tvrdnje te razlikovanje tih dviju tvrdnji kako bi se one mogle valjano primijeniti u rješavanju problema ili dokazivanju drugih tvrdnji. Prije svega, ako je obrat tvrdnje istinit, onda je to još jedna tvrdnja koja se može koristiti u primjeni (Kurnik, 2013, str. 61). Također, iskustvom u radu s tvrdnjom i njezinim obratom izbjegava se brzopleto uzimanje obrata za istinitu tvrdnju samo zato što je tvrdnja istinita. Zatim, osim iskazivanja tvrdnje i njezina obrata u obliku *ekvivalencije* potrebno je znati raščlaniti iskaz zadan u obliku ekvivalencije na tvrdnju i njezin obrat, posebno u procesu dokazivanja jer je ta vještina nužan preduvjet za njezino dokazivanje.

Postavljanje negacije tvrdnje. S obzirom da svaka tvrdnja ima dva dijela (P i Q), može se razmatrati kako se mijenja istinitost tvrdnje pri negiranju nekog od njezinih dijelova ($\neg P$ ili $\neg Q$). Međutim, od posebnog je značaja postavljanje negacije cijele tvrdnje, koja se postiže primjenom formule $\neg(P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q$ jer su iskazi s lijeve i desne strane logički ekvivalentni. To znači da iskaz iz oblika *implikacije* „Ako…, onda…" negiranjem prelazi u novi iskaz u obliku *konjunkcije*, u kojem se veznikom „i" povezuje pretpostavka (P) i negacija zaključka ($\neg Q$). Novi iskaz se može postaviti i u obliku: „Neka vrijedi (P). Tada vrijedi ($\neg Q$)" ili „Neka vrijedi (P). Pretpostavimo suprotno ($\neg Q$)", što je praktično u procesu dokazivanja (Hammack, 2013). Ukoliko su u iskazu tvrdnje uključeni i kvantifikatori, pri negiranju univerzalni kvantifikator prelazi u egzistencijalni i obratno. Također, pri negiranju nekog iskaza ne mora se nužno dobiti iskaz koji koristi riječ „ne" (Jozić, 2014).

Postavljanje kontrapozicije. Kada se za iskaz u obliku implikacije ($P \Rightarrow Q$) postavi tvrdnja tako da se negira pretpostavka ($\neg P$) i zaključak ($\neg Q$), a zatim postavi obrat tih negacija ($\neg Q \Rightarrow \neg P$), dobiva se tvrdnja koja je logički ekvivalentna polaznoj tvrdnji i koja se naziva *kontrapozicija* polazne implikacije. Ove dvije tvrdnje zapravo na različit način iskazuju istu stvar, što je posebno korisno u procesu dokazivanja jer je ponekad puno jednostavnije dokazati tvrdnju iskazanu u obliku kontrapozicije nego u obliku polazne implikacije (Hammack, 2013, str. 102).

Poznavanje predstavljenih procesa u radu s tvrdnjama nužno je potrebno za efikasno savladavanje procesa utvrđivanje istinitosti postavljenih tvrdnji, a posljedično i razvoja matematičkog mišljenja.

1.3.3. Dokazivanje istinitosti tvrdnji

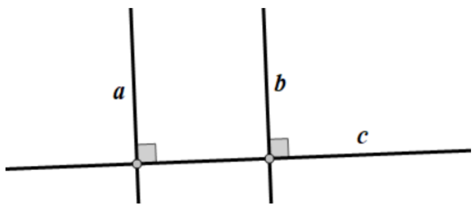
U radu s matematičkim konceptima do otkrivanja novih tvrdnji može se doći na različite načine: do nekih otkrića se može doći sasvim slučajno i neočekivano, neke tvrdnje se mogu izvesti induktivno, tj. promatranjem nekih posebnih slučajeva te izvođenjem općih zaključaka, dok se neke tvrdnje izvode ciljanim sustavnim istraživanjem i logičkim zaključivanjem. No, u svim slučajevima, izvedene tvrdnje se ne prihvaćaju izravno već je njihovu istinitost potrebno dodatno ispitati te odgovarajućim valjanim argumentom potvrditi ili odbaciti. Ukratko, izvedene tvrdnje potrebno je dokazati.

Većina matematičke literature pod *dokazom* podrazumijeva konačan niz neoborivih logičkih koraka kojima se na temelju aksioma, definicija ili ranije dokazanih tvrdnji, nepobitno utvrđuje istinitost postavljene tvrdnje ($P \Rightarrow Q$) te se takva vrsta dokaza obično naziva *formalnim dokazom*. U tom smislu, *dokazati tvrdnju* značilo bi pronaći konačan niz logičkih koraka kojima se nedvojbeno potvrđuje istinitost promatrane tvrdnje, a *proces dokazivanja* je sam postupak otkrivanja valjanog argumenta. Proces dokazivanja istinitosti tvrdnje može biti direktan i indirektan pa se govori o direktnom ili indirektnom dokazu.

Direktno (izravno) dokazati istinitost tvrdnje znači započeti od zadane pretpostavke (*P*) te primjenom aksioma, definicija ili ranije dokazanih tvrdnji, nizom korektnih logičkih zaključivanja izvesti zaključak (*Q*) postavljene tvrdnje.

Naime, svaka tvrdnja u obliku implikacije ($P \Rightarrow Q$) polazi od činjenice da je pretpostavka (*P*) istinita, Prema svojstvu operacije implikacije, ako je pretpostavka istinita, implikacija će biti istinita samo ako je i zaključak (*Q*) istinit. Dakle, ako se krene od istinitosti pretpostavke (*P*) te na temelju korektnog logičkog zaključivanja izvede istinitost zaključka (*Q*), onda će i promatrana tvrdnja kao implikacija ($P \Rightarrow Q$) biti istinita (Hammack, 2013, str. 92).

Na primjer, neka je dana sljedeća tvrdnja: *Ako su a i b dva pravca jedne ravnine koji su okomiti na neki pravac c, onda su a i b međusobno paralelni*. Pretpostavka (*P*) ove tvrdnje jest da su zadana dva pravca *a i b* te da su oni okomiti na treći pravac *c*, tj. $a \perp c$, $b \perp c$ (Slika 17), odnosno svaki od pravaca *a i b* s pravcem *c* zatvara kut od 90°, tj. $\measuredangle(c,a) = 90°$, $\measuredangle(c,b) = 90°$. Treba izvesti zaključak da su pravci *a i b* međusobno paralelni (*Q*).

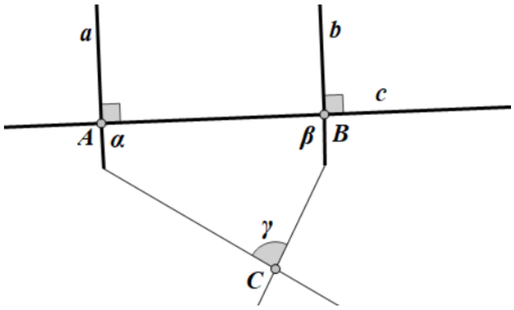


Slika 17. Direktni dokaz

Sada imamo sljedeće: (1) svi pravi kutovi međusobno su jednaki, (2) pravac *c* je presječnica pravaca *a i b* te s pravcima zatvara jednake kutove, (3) promatrani kutovi imaju jedan krak na istom pravcu, na pravcu *c*, (4) kutovi uz presječnicu koji su jednaki i imaju jedan par paralelnih krakova, moraju imati i drugi par krakova paralelan, a to su upravo krakovi koji pripadaju pravcima *a i b*. Dakle, pravci *a i b* su također paralelni jer sadrže paralelne krakove, tj. $a \parallel b$. To je upravo što je trebalo dokazati, tj. zaključak je istinit pa je istinita i polazna tvrdnja. ■

S druge strane, indirektno (neizravno) dokazati istinitost tvrdnje znači pokazati da je negacija tvrdnje neistina jer će u tom slučaju, prema svojstvu operacije negacije, polazna tvrdnja biti istina. Prema logičkom principu negacije implikacije vrijedi: $\neg(P \Rightarrow Q) = P \wedge \neg Q$, pa negacija tvrdnje podrazumijeva da se uz istinitost zadane pretpostavke (*P*) treba pretpostaviti i istinitost negacije zaključka ($\neg Q$), odnosno proces indirektnog dokazivanja treba započeti od istinitosti dviju pretpostavki ($P \wedge \neg Q$). Ako se dalje, nizom korektnih logičkih zaključivanja, izvede istinitost i neke tvrdnje (*T*) i njezine negacije ($\neg T$), onda je proces zaključivanja doveden u nemoguću situaciju (lat. *reductio ad absurdum*, svođenje na besmisao) ili kraće *kontradikciju*. Kada se proces zaključivanja svede na kontradikciju, negacija tvrdnje se mora odbaciti kao neistina, a to znači da je polazna tvrdnja istina (Hammack, 2013, str. 111). Ovaj postupak se još naziva i *dokaz kontradikcijom*.

Na primjer, prethodna tvrdnja se može dokazati kontradikcijom. Neka vrijedi pretpostavka (*P*), tj. neka su zadana dva pravca *a i b* koji su okomiti na treći pravac *c*, tj. $a \perp c$, $b \perp c$ (Slika 18). Neka pravac *a* siječe pravac *c* u točki *A*, a pravac *b* neka siječe pravac *c* u točki *B*, tj. $a \cap c = \{A\}$, $b \cap c = \{B\}$ i vrijedi $\alpha = \measuredangle aAc = 90°$, $\beta = \measuredangle cBb = 90°$. Sada pretpostavimo suprotno ($\neg Q$): pravci *a i b* nisu paralelni, odnosno, oni se sijeku u nekoj točki *C*, s jedne strane pravca *c*, tj. $a \cap b = \{C\}$ (Slika 18).



Slika 18. Dokaz kontradikcijom

Sada imamo sljedeće: (1) kut između pravaca *a i b* je veći od nul-kuta, tj. $\measuredangle bCa = \gamma, \gamma > 0°$, (2) pravci *a*, *b* i *c* zatvaraju trokut ΔACB, (3) zbroj kutova u trokuta ΔACB iznosi 180°, tj. $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, (4) uvrštavanjem vrijednosti za kutove α i β dobiva se $\gamma = 0°$, (5) zaključci u (1) i (4) su kontradiktorni, jer ne može kut γ biti istodobno nul-kut i biti veći od nul-kuta, (6) zbog kontradikcije se zaključuje da negacija tvrdnje nije istina, što znači da je polazna tvrdnja istina. ■

U procesu indirektnog dokazivanja moguće je u nekim situacijama izvesti i istinitost negacije polazne pretpostavke ($\neg P$), što je opet kontradikcija jer je polazište bila istinita pretpostavka (*P*). No, time se potvrđuje da je kontrapozicija implikacije ($\neg Q \Rightarrow \neg P$) istinita, a kako je ona logički ekvivalentna polaznoj tvrdnji ($P \Rightarrow Q$), onda se može zaključiti da je polazna tvrdnja istinita. U tom slučaju govori se o dokazu po *kontrapoziciji*, kao posebnom obliku dokaza kontradikcijom (Stefanowicz, 2014, str. 30).

1.3.4. Klasifikacija pojmova

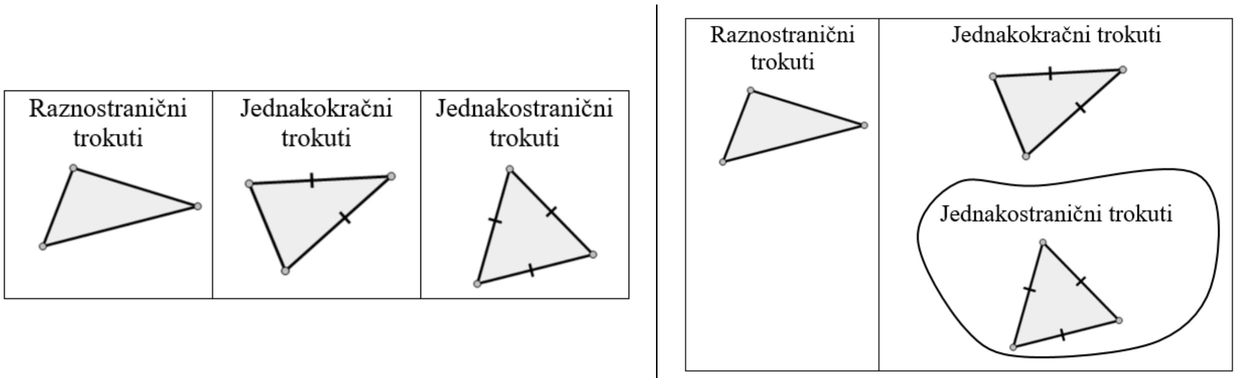
Kada se proučavaju pojmovi i njihova svojstva, može se govoriti o sadržaju pojma, opsegu i dosegu pojma. Za određivanje sadržaja pojma odgovara se na pitanje *kakav* je objekt, odnosno pod *sadržajem pojma* podrazumijevaju se sve bitne karakteristike na temelju kojih se može stvoriti jednoznačna predodžba o tom pojmu. Za određivanje opsega pojma odgovara se na pitanje *koji* su to objekti, odnosno pod *opsegom pojma* podrazumijevaju se svi konkretni objekti koji ispunjavaju bitne karakteristike pojma opisane sadržajem. Za određivanje *dosega pojma* odgovara se na pitanje *koliko* ima objekata u opsegu pojma (Jozić, 2014).

Iz procesa definiranja pojma, kojim se zapravo određuje sadržaj pojma, vidljivo je da odabir bitnih karakteristika pojma nije jednoznačan, tj. definicija pojma nije jedinstvena već je više stvar dogovora. No, kada se karakteristike odaberu i definicija pojma postavi, opseg i doseg pojma su jednoznačno određeni. Dalje se definirani pojmovi mogu razvrstavati u grupe prema određenom kriteriju i taj proces se naziva *klasifikacijom pojma*.

Pri klasifikaciji pojma trebaju biti ispunjeni određeni zahtjevi: (1) klasifikacija pojma se uvijek vrši prema jednom odabranom kriteriju koji je nepromijenjen tijekom klasifikacije; (2) objekti iz opsega pojma koji su razvrstani u različite grupe trebaju biti nezavisni, tj. među grupama ne smije biti preklapanja; (3) unija svih objekata koji su razvrstani u grupe treba biti jednaka opsegu polaznog pojma; (4) klasifikacija treba biti stupnjevita, tj. primjenjuje se uvijek na najbliži rodni pojam (Jakić, 2003, str. 171).

Na primjer, ako se želi klasificirati pojam trokut može se odabrati kriterij „duljina stranice”. Po tom kriteriju će se svi trokuti razvrstati u tri grupe: (1) sve tri stranice različitih duljina – raznostranični trokuti; (2) dvije stranice jednakih duljina – jednakokračni trokuti; (3) sve tri stranice jednakih duljina – jednakostranični trokuti.

Međutim, kako definicija pojma nije jedinstvena, već je više stvar dogovora, klasifikacija ovisi i o načinu kako se pojam definira (De Villiers, 2009; Kozakli Ulger & Tapan Broutin, 2017). Ovisno o načinu stvaranja veze među pojmovima pri definiranju pojma, definicija može biti ekskluzivna ili inkluzivna. Prema ekskluzivnoj definiciji, pojmovi se razvrstavaju u klase koje su međusobno disjunktne pa se u tom slučaju govori o *particijskim klasifikacijama*. Prema inkluzivnoj definiciji, pojmovi se razvrstavaju u klase koje nisu međusobno disjunktne te pojedine klase mogu imati i podklase (specijalni slučajevi) pa se u tom slučaju govori o *hijerarhijskim klasifikacijama* (Josefsson, 2016; De Villiers, 1994). U slučaju definicije predstavljenih trokuta, ako se *jednakokračni trokut* definira kao trokut koji ima *točno dvije stranice jednakih duljina* stvara se particijska klasifikacija (Slika 19a), a ako se definira kao trokut koji ima *barem dvije stranice jednakih duljina* stvara se hijerarhijska klasifikacija (Slika 19b).



(a) particijska (b) hijerarhijska

Slika 19. Klasifikacija pojma trokut

Na početku matematičkog obrazovanja ekskluzivne definicije su primjerenije od inkluzivnih zbog nedovoljno znanja i vještina učenika u radu sa svojstvima objekata. Međutim, kroz proces definiranja učenici se trebaju postupno uvoditi u inkluzivne odnose, na temelju kojih onda mogu razumjeti i hijerarhijsku klasifikaciju, koja je daleko funkcionalnija od particijske (De Villiers, 1994).

Naime, nakon što se određena svojstva odaberu za formuliranje definicije izvedenog pojma, sva ostala svojstva tog pojma se logički izvode, opisuju tvrdnjama, a istinitost tvrdnji potvrđuje dokazom (De Villiers, 2009). Inkluzivne su definicije u tom procesu kraće i ekonomičnije od ekskluzivnih, a hijerarhijska klasifikacija koja se na njima zasniva funkcionalnija je od particijske (De Villiers, 1994; Josefsson, 2016; Kozakli Ulger & Tapan Broutin, 2017). Naime, pri korištenju inkluzivnih definicija, tvrdnje koje se postave i dokažu za određeni pojam, one da vrijede i za sve specijalne slučajeve. Međutim, pri korištenju ekskluzivnih definicija, te tvrdnje treba formulirati i dokazati posebno za svaki pojam.

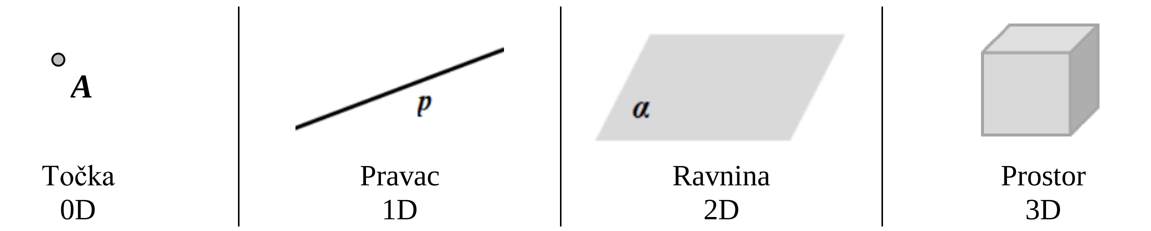
Na primjer, pri korištenju inkluzivnih definicija, ako se za paralelogram dokaže tvrdnja da se njegove dijagonale raspolavljaju, onda ta tvrdnja vrijedi nasljedno i za kvadrat, pravokutnik i romb kao posebne slučajeve paralelograma. No, pri korištenju ekskluzivnih definicija, tvrdnju bi trebalo dokazati za svaki od četverokuta.

1.4. Geometrijske figure

Geometrija se, kao grana matematike, bavi proučavanjem prostora, a osnovni elementi prostora su točke. Svaki neprazni podskup prostora je zapravo skup točaka, koji se naziva *geometrijskom figurom* (eng. *geometric figure*). Točka, pravac i ravnina, kao osnovni geometrijski objekti su geometrijske figure (Lučić, 1997, str. 9).

Uz geometrijske figure kao apstraktne entitete koriste se i vizualni prikazi, za koje se također kaže da su geometrijske figure. Drugim riječima, pod geometrijskom figurom podrazumijevaju se geometrijski objekti kao apstraktni entiteti, ali i vizualni prikazi koji predstavljaju te objekte. Uz vizualne prikaze koriste se razne oznake (slova, znakovi i simboli) kako bi se figure mogle imenovati te simbolički zapisati.

Tako se točke imenuju velikim tiskanim slovima *A, B, C*… te vizualno predstavljaju malim kružićem (ili križićem), pravci se imenuju malim pisanim slovima *a, b, c*… te vizualno predstavljaju ravnim crtama, a ravnine se imenuju malim grčkim slovima α, β, γ… te vizualno predstavljaju paralelogramom (ili pravokutnikom). Prostor se može vizualno predstaviti kockom ili kvadrom. Geometrijske figure se najčešće klasificiraju prema njihovoj dimenziji (lat. *dimensio*, mjerenje): objekti bez dimenzije (kraće 0D), jednodimenzionalni (kraće 1D), dvodimenzionalni (kraće 2D) i trodimenzionalni (kraće 3D) (Slika 20).



Slika 20. Osnovne geometrijske figure

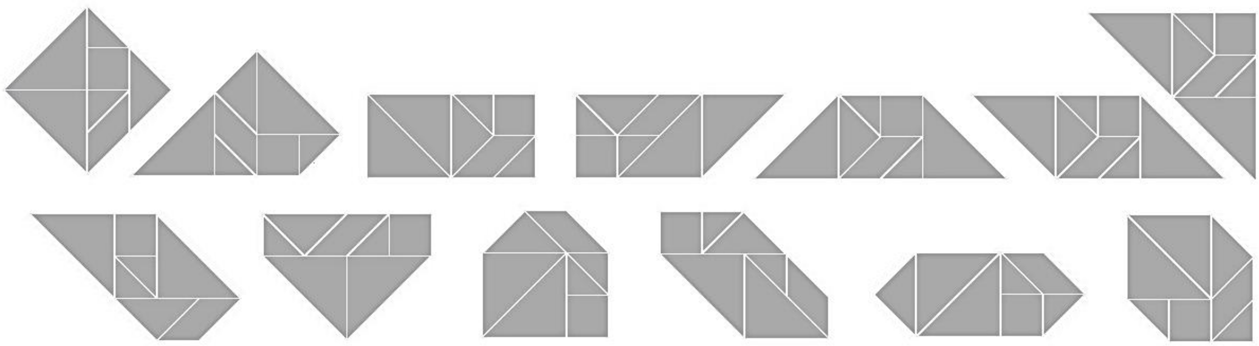
Ako neka figura pripada pravcu, onda se još naziva *linearna figura* (npr. dužina), ako pripada ravnini, naziva se *ravninska figura* (npr. trokut), a ako ne pripada ni jednoj ravnini, onda se naziva *prostorna figura* (npr. piramida). Omeđene ravninske figure se još nazivaju *geometrijskim likovima* (npr. trokut, mnogokut, krug itd.), a omeđene prostorne figure su *geometrijska tijela* (npr. kocka, piramida, valjak itd.). Nadalje, za dvije figure kaže se da su *istovjetne*, ako svaka točka koja pripada jednoj od tih figura pripada i drugoj figuri, u suprotnom su *različite*. Ako neka točka ne pripada geometrijskoj figuri, onda se kaže da je *izvan* te figure. Za figure čiji presjek nije prazan kaže se da se *sijeku* (Lučić, 1997, str. 10).

Geometrijska figura u pravilu ne predstavlja samo jedan objekt, već cijelu klasu objekata. Tako, na primjer, *trokut* u nekim situacijama može predstavlja sve vrste trokuta ili npr. sve jednakostranične trokute. O tome treba voditi računa kada se koriste njihovi vizualni predstavnici, posebno u koju svrhe se koriste: definiranje, tvrđenje, dokazivanje, rješavanje problema itd., o čemu će biti više riječi u cjelini o učenju i poučavanju geometrije.

1.5. Geometrijske disekcije

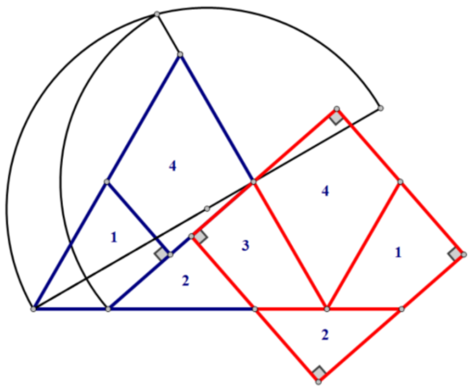
Pod *geometrijskom disekcijom* podrazumijeva se dijeljenje geometrijskog lika na konačan broj dijelova tako da se oni mogu presložiti u neki drugi geometrijski lik (Frederickson, 2002). Problemi geometrijske disekcije općenito se mogu podijeliti u dvije grupe.

Prva grupa obuhvaća dijeljenje geometrijskog lika na dijelove s namjerom da se od nastalih dijelova može oblikovati veći broj drugih geometrijskih likova. Primjer takve vrste disekcije je dijeljenje kvadrata na sedam dijelova od kojih se zatim može oblikovati još točno 12 različitih konveksnih likova (Slika 21), ali i na tisuće raznih drugih oblika (Kavajin i Baranović, 2019a, 2019b). Ova geometrijska disekcija poznata je pod imenom *tangram*, a koristi se više od 200 godina u različite svrhe.



Slika 21. Konveksni tangram likovi

Druga grupa obuhvaća samo dva geometrijska lika pri čemu je potrebno pronaći podjelu jednog lika s namjerom da se preslagivanjem tih dijelova oblikuje drugi lik, odnosno traži se jednaki rastav dvaju geometrijskih likova. Kada su dva lika jednako rastavljiva za njih se još kaže da su ekvivalentni po disekciji. Prema Bolyai-Gerwienovu teoremu, *dva su lika ekvivalentna po disekciji ako i samo ako su jednakih ploština* (Hartshorne, 2000, str. 215). Jedan posebno istaknut primjer druge grupe disekcije, poznat pod nazivom *Dudeneyjev Haberdasherov problem*, postavljen je 1902., a interes za njega traje sve do danas (Grubić i Baranović, 2021). Originalni problem glasi: *Koristeći se s tri reza podijelite jednakostranični trokut na četiri dijela, tako da se njihovim preslagivanjem može oblikovati kvadrat, bez preokretanja dijelova*. Unatoč raznim pokušajima, postavljeno je samo jedno točno i to konstruktivno rješenje (Slika 22).

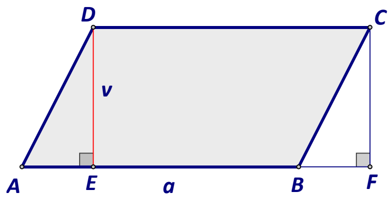


Slika 22. Konstruktivno rješenje problema

Disekcije druge grupe često se koriste u nastavi geometrije: za određivanje površine jednog lika poznavanjem površine drugog lika, za rješavanje problema ili dokazivanje tvrdnje primjenom metode površine[8] itd.

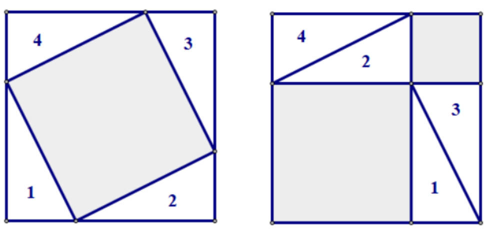
Na primjer, svaki paralelogram se može presložiti u pravokutnik (Slika 23) pa se formula za određivanje ploštine paralelograma može izvesti preko formule za određivanje ploštine pravokutnika. S obzirom da su trokuti ΔAED i ΔBFC sa slike sukladni po poučku $SSK^{>}$ (podudarnost stranica paralelograma, visina i pravih kutova), paralelogram $ABCD$ i pravokutnik $EFCD$ jednakih su ploština pa vrijedi:

$$P_{ABCD} = P_{AED} + P_{EBCD} = P_{BFC} + P_{EBCD} = P_{EFCD} = a \cdot v.$$



Slika 23. Reorganiziranje paralelograma u pravokutnik

Postoje brojni dokazi dobro poznatog Pitagorina poučka u kojima je primjenjena metoda geometrijske disekcije. Na primjer, u današnjim matematičkim udžbenicima, za dokaz Pitagorina poučka često se koristi geometrijska disekcija druge grupe i metoda površine (Slika 24). U ovom slučaju, dijelovi kvadrata se ne preslaguju u drugi lik već se premještaju unutar sukladnog kvadrata tako da formiraju novu figuru. Budući da su četiri pravokutna trokuta jednakih ploština kod obje figure, njihovim odbacivanjem i preostale figure će biti jednakih ploština, iz čega se onda izvodi tvrdnja iz poučka.



Slika 24. Disekcija za dokaz Pitagorina poučka

[8] *Metoda površine* sastoji se u tome da se, iz odnosa mjera površina (ploština) nekih likova, dobiju odnosi među drugim veličinama tih likova.

Svakako, uz samo preslagivanje potrebno je i matematički obrazložiti zašto je četverokut unutar prvog kvadrata također kvadrat, što nije očigledno. Naime, stranice upisanog četverokuta su podudarne jer su pravokutni trokuti podudarni po poučku o sukladnosti *SKS*. Nadalje, zbroj šiljastih kutova pravokutnog trokuta iznosi 90°, a kako oni nadopunjavaju kut unutarnjeg četverokuta do ispruženog kuta, to je mjera kuta unutarnjeg četverokuta 90°. Dakle, upisani četverokut ima sve stranice jednakih duljina i sve kutove prave pa je to kvadrat, nad hipotenuzom pravokutnog trokuta.

Povijest geometrijske disekcije izrazito je bogata, a proteže se od vremena starogrčkih matematičara Platona i Pitagore pa sve do današnjih dana. Geometrijska disekcija gotovo jednako zaokuplja i profesionalne matematičare i rekreativce amatere pa se osim kroz razvoj matematike, ona često promovira i kroz rekreacijsku matematiku (Grubić i Baranović, 2021, str. 75).

1.6. Geometrijske konstrukcije

Važan dio geometrijskih znanja su geometrijske konstrukcije, kojih u nastavi matematike posebno u primarnom i sekundarnom obrazovanju, sudeći prema sadržajima novih generacija udžbenika za matematiku, ima sve manje.

Pod *geometrijskom konstrukcijom* podrazumijeva se vizualni prikaz odgovarajuće geometrijske figure koji je kreiran korištenjem samo ravnala i šestara. U skladu s tim, za geometrijske konstrukcije se još kaže da su *konstrukcije ravnalom i šestarom*, a dalje u tekstu za njih se koristi samo naziv *konstrukcije*. Pri tome, *ravnalo* je alat pomoću kojeg se duž jednog njegova brida, na kojem nije istaknuta nikakva jedinica mjere, može crtati ravna crta, a *šestar* je alat pomoću kojeg se oko svake točke može crtati kružnica sa po volji zadanim polumjerom. Neke konstrukcije se mogu izvoditi samo ravnalom ili samo šestarom, za neke je potrebno koristiti ravnalo i šestar, a postoje geometrijske figure koje se ne mogu izvesti konstruktivno.

Konstrukcije koje se mogu izvesti samo ravnalom ili samo šestarom obično se nazivaju *osnovnim konstrukcijama*, a sve ostale konstrukcije se izvode ravnalom i šestarom, među kojima mogu biti jednostavne i složene. Jednostavne konstrukcije neki autori matematičkih udžbenika također nazivaju osnovnim konstrukcijama (npr. Kurnik, 2005), dok neki drugi za njih koriste naziv *elementarne konstrukcije* jer se izvode nizom od nekoliko osnovnih konstrukcija (npr. Mitrović i sur., 2006).

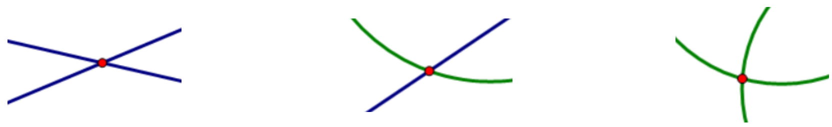
Prema Mitroviću i sur., osnovne konstrukcije koje se mogu izvesti samo ravnalom su:

1. Konstrukcija *pravca* koji sadrži dvije zadane točke.
2. Konstrukcija *polupravca* sa danom početnom točkom i još jednom svojom točkom.
3. Konstrukcija *dužine* čije su krajnje točke dvije zadane točke.

a osnovne konstrukcije koje se mogu izvesti samo šestarom su:

4. Konstrukcija *kružnice* (kruga) čije je središte zadana točka, a polumjer zadana dužina.
5. Konstrukcija *kružnog luka* kojemu su zadane četiri točke: središte, dvije krajnje točke i još jedna točka.

Prema Pavkoviću i Veljanu, korištenjem osnovnih konstrukcija može se konstruirati točka, tj. smatra se da je *točka* konstruirana ako se dobiva kao presjek dvaju pravaca (polupravaca, dužina), kao presjek pravca i kružnice te kao presjek dviju kružnica (Slika 25).



Slika 25. Konstrukcija točke

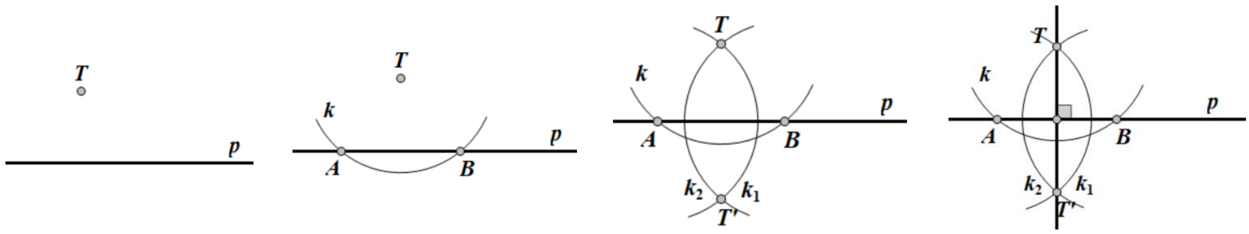
Također, pravac se smatra konstruiranim ako se znaju konstruirati bilo koje dvije njegove točke, kružnica se smatra konstruiranom ako se zna konstruirati njezino središte i bilo koja njezina točka. Trokut se smatra konstruiranim ako se znaju konstruirati njegova tri vrha itd. Ukratko, geometrijska figura se smatra konstruiranom ako je moguće konstruirati točke koje određuju tu figuru (Pavković i Veljan, 2004).

Najčešće korištene *elementarne konstrukcije* (jednostavne konstrukcije) koje se izvode ravnalom i šestarom su:

1. Konstrukcija dužine sukladne zadanoj dužini (naziva se još i *prenošenje dužine*)
2. Konstrukcija kuta sukladnog zadanom kutu (naziva se još i *prenošenje kuta*)
3. Konstrukcija simetrale dužine
4. Konstrukcija polovišta dužine
5. Konstrukcija simetrale kuta
6. Konstrukcija okomice na zadani pravac (polupravac, dužinu) zadanom točkom
7. Konstrukcija paralele zadanom pravcu (polupravcu, dužini) zadanom točkom
8. Konstruktivno dijeljenje dužine na jednake dijelove (ili u zadanom omjeru)
9. Četiri osnovne konstrukcije trokuta (poznate po skraćenicama: *SSS*, *SKS*, *KSK*, $SSK^{>}$).

Osim što su podjele konstrukcija u različitih autora različite, različiti su i načini izvođenja pojedinih elementarnih konstrukcija. Tako se na primjer u udžbenicima za konstrukciju okomice na zadani pravac p kroz zadanu točku T, izvan pravca p, obično daje sljedeći postupak (Slika 26):

- oko točke T kao središta opiše se bilo koja kružnica k koja siječe pravac p u točkama A i B
- oko točke A kao središta opiše se kružnica k_1 kroz T, a oko točke B kao središta opiše se kružnica k_2 kroz T
- kružnice k_1 i k_2 osim u točki T sijeku se i u točki T'
- pravac TT' je tražena okomica kroz točku T na pravac p.

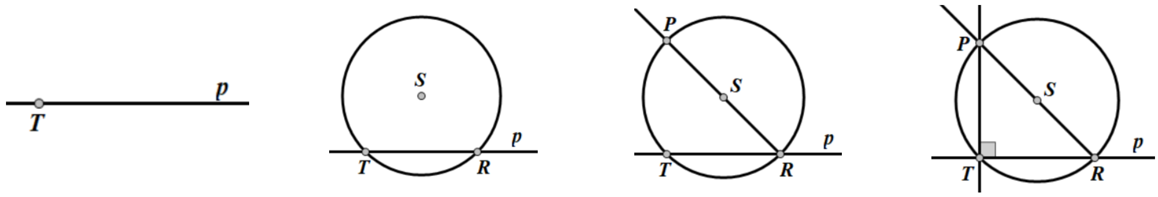


Slika 26. Konstrukcija okomice zadanom točkom izvan pravca

Opisani postupak je valjan i u slučaju kada točka T pripada pravcu p. U nekim udžbenicima dodatno se naglašava da je opisani postupak ujedno i elementarna konstrukcija simetrične slike T' točke T s obzirom na pravac p.

U sustavu vedske matematike može se pronaći i jedan sasvim drugačiji postupak konstrukcije okomice, za slučaj kada točka T pripada pravcu p. Konstrukcija se temelji na činjenici da je svaki obodni kut nad promjerom kružnice pravi kut (Glover, 2003, str.170):

- odabere se proizvoljna točka S izvan pravca p, tako da pravac ST nije okomit na p
- opiše se kružnica sa središtem S polumjera $\overline{ST}$, a druga točka u kojoj kružnica siječe pravac p neka je točka R
- nacrta se polupravac (promjer kružnice) iz točke R kroz S, koji siječe kružnicu u još jednoj točki, a druga krajnja točka promjera neka je točka P.
- pravac PT je tražena okomica (Slika 27).



Slika 27. Konstrukcija okomice kroz zadanu točku pravca

Zanimljivo je da se za elementarnu konstrukciju paralele sa zadanim pravcem kroz zadanu točku koristi više različitih konstrukcija, a najčešće su: (1) primjenom elementarne konstrukcije okomice, (2) konstrukcijom četvrtog vrha paralelograma sjecištem kružnica, (3) konstrukcijom četvrtog vrha paralelograma simetrično nasuprotnom vrhu s obzirom na polovište dijagonale, (4) konstrukcijom simetrične točke *S* točki *T* na kružnici *k*.

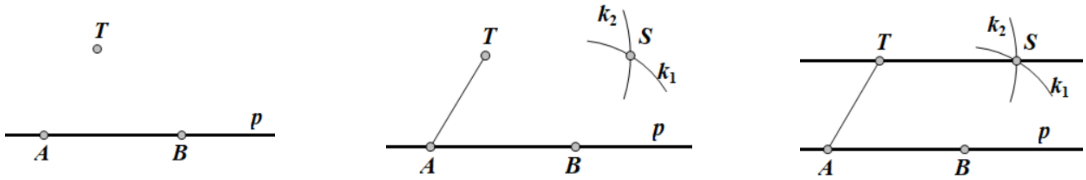
Opis konstrukcije paralele (1) primjenom konstrukcije okomice:

- kroz točku *T* konstruira se okomica *q* na pravac *p*
- kroz točku *T* konstruira se okomica *r* na pravac *q*
- pravac *r* je tražena paralela sa zadanim pravcem *p* kroz točku *T*.

Konstrukcija se temelji na činjenici da su dva pravca, koja su okomita na isti pravaca, međusobno paralelna (Slika 17, str. 25).

Opis konstrukcije (2) primjenom četvrtog vrha paralelograma (Kurnik, 2005, str. 150):

- na pravcu *p* odaberu su dvije različite točke *A* i *B*
- konstruira se četvrti vrh paralelograma *S* kojemu se *A*, *B* i *T* tri vrha: kao presjek kružnice k_1 sa središtem *B* polumjera $\overline{AT}$ i kružnice k_2 sa središtem *T* polumjera $\overline{AB}$
- pravac *TS* je tražena paralela sa zadanim pravcem *p* kroz točku *T* (Slika 28).

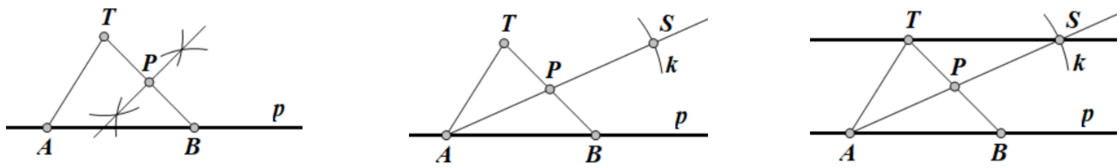


Slika 28. Konstrukcija paralele (2)

Pri ovoj konstrukciji treba naglasiti da se kružnice k_1 i k_2 sijeku u dvije točke, ali se promatra ona točka koja se nalazi s iste strane pravca *p* kao i točka *T* (Slika 28).

Opis konstrukcije (3) primjenom četvrtog vrha paralelograma simetričnog nasuprotnom vrhu s obzirom na polovište dijagonale (Malić, 2019, str. 193):

- na pravcu *p* odaberu su dvije različite točke *A* i *B*, a trokut ΔABT polovica je paralelograma
- konstruira se polovište stranice $\overline{BT}$ (dijagonala $\overline{BT}$) i neka je polovište točka *P*
- nacrta se polupravac *AP* te se opiše kružnica *k* iz *P* kao središta polumjera $\overline{AP}$, a presjek kružnice *k* i polupravca *AP* neka je točka *S*
- pravac *ST* je tražena paralela sa zadanim pravcem *p* kroz točku *T* (Slika 29).

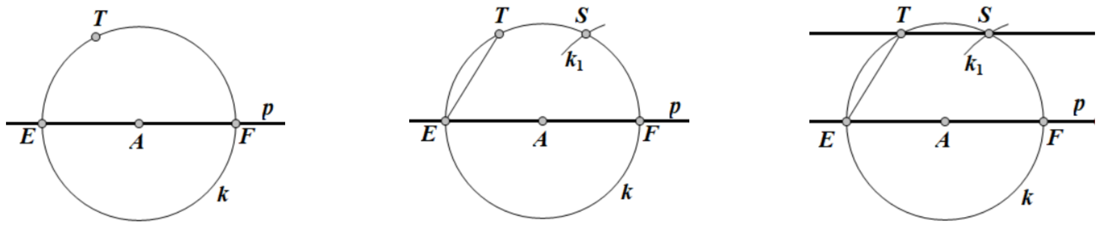


Slika 29. Konstrukcija paralele (3)

Pri ovoj konstrukciji točka S je jedinstvena prema aksiomu o prenošenju dužine (AIII1, str. 14).

Opis konstrukcije (4) primjenom simetrične točke na kružnici (Glover, 2003, str.177):

- na pravcu p odabere se proizvoljna točka A
- iz točke A kao središta opiše se kružnica k polumjera $\overline{AT}$, a točke u kojoj kružnica k siječe pravac p neka su točke E i F
- iz točke F kao središta opiše se kružnica k_1 polumjera $\overline{ET}$, a sjecišta kružnica k i k_1 (s one strane pravca p gdje je točka T neka je S točka
- pravac ST je tražena paralela sa zadanim pravcem p kroz točku T (Slika 30).



Slika 30. Konstrukcija paralele (4)

Nakon što se predstave osnovne i elementarne konstrukcije, sve ostale konstrukcije smatraju se *složenim konstrukcijama*, a one se mogu svesti na konačan niz elementarnih konstrukcija. Pri izvođenju složenih konstrukcija, elementarne konstrukcije se smatraju poznatima te se dodatno ne objašnjavaju.

1.7. Geometrijski dokazi

Geometrijski dokazi su prava riznica primjera pravilnog dokazivanja i najbolja prilika da se stekne iskustvo strogog zaključivanja (Polya, 1966). Zbog dualnosti geometrijskih figura, prirodno je u procesu dokazivanja koristi odgovarajući vizualni prikaz koji predstavlja situaciju opisanu tvrdnjom: uvjete zadane pretpostavkom, elemente koje treba utvrditi te moguće veze (npr. Slika 17., str. 19). Vizualni prikazi mogu biti bez ikakvih oznaka, ali su najčešće osnovni objekti označeni (točke, pravci, kutovi itd.) u svrhu uspostavljanja veze sa simboličkim zapisom.

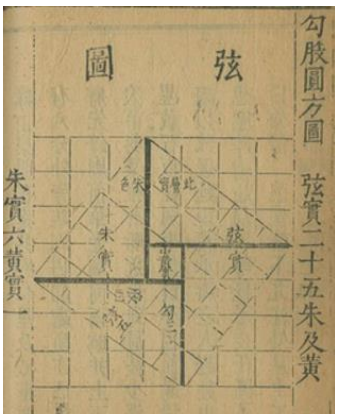
Tako su i Euklidovi *Elementi* obilovali raznim vrstama vizualnih prikaza, posebno u procesu dokazivanja, jer je on smatrao da vizualni prikaz može olakšati proces dokazivanja, a ponekad otkriti i nove odnose među elementima figure, koji nisu opisani i koji bez prikaza ne bi bili vidljivi. No, s druge strane, upravo zbog svoje konkretnosti, vizualni prikazi mogu biti izvor mnogih zaključaka za koje se smatra da su očiti, iako to nisu, a mogu biti i pogrešni. Zbog toga se Euklidu prigovaralo da mu dokazi obiluju nepreciznostima te da zato nisu korektni.

Kada se za utvrđivanje istinitosti neke tvrdnje koriste isključivo odgovarajuće vrste vizualnih prikaza bez dodatnih objašnjenja, onda se dokaz postavljen na taj način naziva *vizualni dokaz* ili *dokaz bez* *riječi* (eng. *proofs without words*; Nelson, 1993). Među brojnim dokazima Pitagorina poučka, a danas ih je poznato preko 300, nalaze se razni dokazi bez riječi.

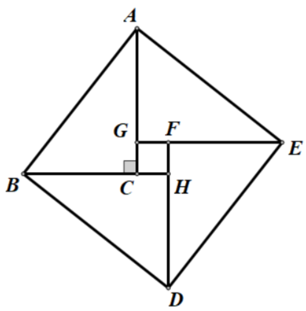
Smatra se da su svojstvo Pitagorina poučka za pravokutni trokut sa stranicama duljina 3, 4 i 5 poznavali i stari Egipćani 2000 godina prije Krista, jer su tu činjenicu koristili za konstrukciju pravog kuta. Naime, ako se na užetu napravi 13 čvorova jednako udaljenih, prvi i zadnji spoje te uže zategne tako da formira trokut stranica duljina 3, 4 i 5, trokut će biti pravokutan. U matematičkoj literaturi se ta vrsta trokuta naziva *egipatski trokut*. Nadalje, Pitagorin poučak bio je poznat u Kini barem 500 godina prije Pitagore, a poznavali su ga i u staroj Indiji. Prema jednom sačuvanom izvoru iz 17. stoljeća, kineski dokaz se odnosi na poseban *egipatski* trokut, a prema djelu Bhaskare, indijski dokaz je zapravo poopćenje kineskog vizualnog dokaza (Gleizer, 2003, str. 200). U literaturi se spominje i poseban *indijski trokut* sa stranicama duljine 5, 12 i 13.

Kod kineskog vizualnog dokaza (Slika 31a), u kojem je pravokutni trokut sa stranicama duljina 3, 4 i 5 smješten u kvadratnu mrežu, jednostavnim se prebrojavanjem može odrediti ploština kvadrata nad katetama i nad hipotenuzom te izvesti zaključak da je $3^2+4^2=5^2$. Međutim, za stranice trokuta se mogu uzeti proizvoljne veličine te analognim postupkom izvesti zaključak, što su napravili Indijci (Slika 31b). Ako se u pravokutnom trokutu ΔABC za duljine stranica uzme da je: $a=|BC|$, $b=|AC|$ i $c=|AB|$, sa vizualnog prikaza se izvodi zaključak da je četverokut *CHFG* kvadrat stranice duljine $b-a$ te da je četverokut *ABDE* kvadrat nad hipotenuzom polaznog trokuta. Dalje se, metodom površine izvodi jednakost Pitagorina poučka:

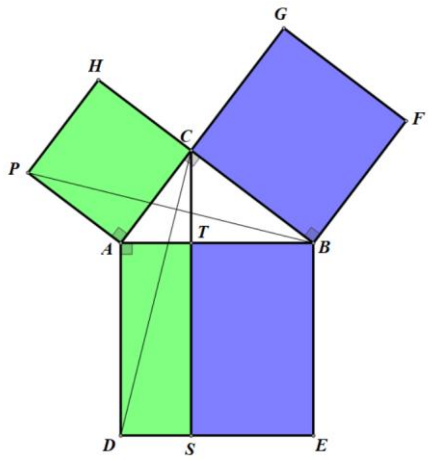
$$c^2 = P_{ABDE} = 4\cdot P_{ABC} + P_{CHFG} = 4\cdot\frac{ab}{2} + (b-a)^2 = a^2+b^2 .$$



(a) Kineski dokaz[9]



(b) Indijski dokaz



(c) Euklidov dokaz

Slika 31. Vizualni dokazi Pitagorina poučka

Euklidov dokaz koji se nalazi u *Elementima* također se temelj na metodi površine (Slika 31c; Lučić, 2009, str. 75). Naime, trokuti ΔADC i ΔABP su sukladni po poučku *SKS*. Ploština trokuta ΔADC je dvostruko manja od ploštine pravokutnika *ADST*, a ploština trokuta ΔABP dvostruko manja od ploštine kvadrata *ACHP*, jer imaju zajedničku stranicu i visinu na tu stranicu. Iz toga slijedi da su ploštine pravokutnika *ADST* i kvadrata *ACHP* jednake, jer ako su im polovice jednake, onda su i cjeline jednake. Analogno se zaključuje da su ploštine pravokutnika *SEBT* i kvadrata *BFGC* jednake.

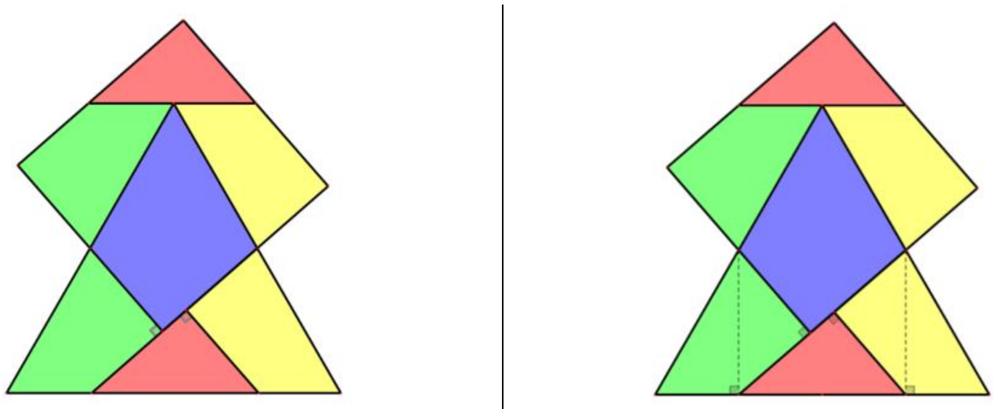
[9] Slika kineskog dokaza, poznatog pod nazivom *Gougu teorem* (za slučaj pravokutnog trokuta duljina stranica 3, 4 i 5). Preuzeto sa: http://www.maa.org/press/periodicals/convergence/mathematical-treasures-zhoubi-suanjing.

Konačno, zbroj ploština kvadrata nad katetama pravokutnog trokuta, jednak je ploštini kvadrata nad hipotenuzom.

No, unutar matematičke zajednice još se uvijek vodi rasprava o tome: je li vizualni prikaz samo pomoćno sredstvo koje služi za otkrivanje glavne ideje dokaza, sastavni dio dokaza ili je sam za sebe dokaz. Naime, formalni dokaz ima svoj početak, logički slijed konačnog niza zaključaka te svoj završetak kada se dolazi do potrebnog zaključka, dok kod vizualnog dokaza čitatelj treba sam otkriti taj slijed, verbalizirati ga i simbolički zapisati, vodeći računa pri tome da svaki korak ima teorijsko uporište. Pri tome, neki vizualni dokazi budu nepotpuni pa čak i pogrešni, neki zbog suptilnih nepreciznosti autora, neki zbog slučajnog propusta ili neznanja, a neki možda i namjerno zadani pogrešno s određenom svrhom.

Tako, na primjer, prema Dudeneyjevu konstruktivnom rješenju *Haberdasherova problema* (Slika 22, str. 29), na osnovici jednakostraničnog trokuta odrede se dvije točke, koje zatim omogućavaju podjelu trokuta na četiri dijela pomoću tri reza. Preslagivanjem dobivenih dijelova, bez preokretanja, oblikuje se traženi kvadrat (Slika 32a). Prema Dudeneyjevu rješenju, pokaže se da te dvije ključne točke osnovicu trokuta dijele u omjeru $1.018:2:0.982$ (približne vrijednosti iracionalnih brojeva).

Međutim, u rješenju *Haberdasherova problema* kojeg je Steinhaus predložio u svojoj knjizi *Mathematical Snapshots* kao vizualni dokaz bez puno riječi, ključne točke postavljene su tako da osnovicu trokuta dijele u omjeru $1:2:1$. Time se konstrukcija ključnih točaka pojednostavljuje, a preslagivanje je analogno kao u prethodnom slučaju. I zaista vizualni prikazi izgledaju gotovo identično, s bitnom razlikom što je Dudeneyjevo rješenje točno, a Steinhausovo pogrešno. Naime, u Dudeneyjevu rješenju pokaže se da je četverokut dobiven preslagivanjem nastalih dijelova kvadrat, a u Steinhausa nije kvadrat, već pravokutnik (Grubić i Baranović, 2021, str. 75).



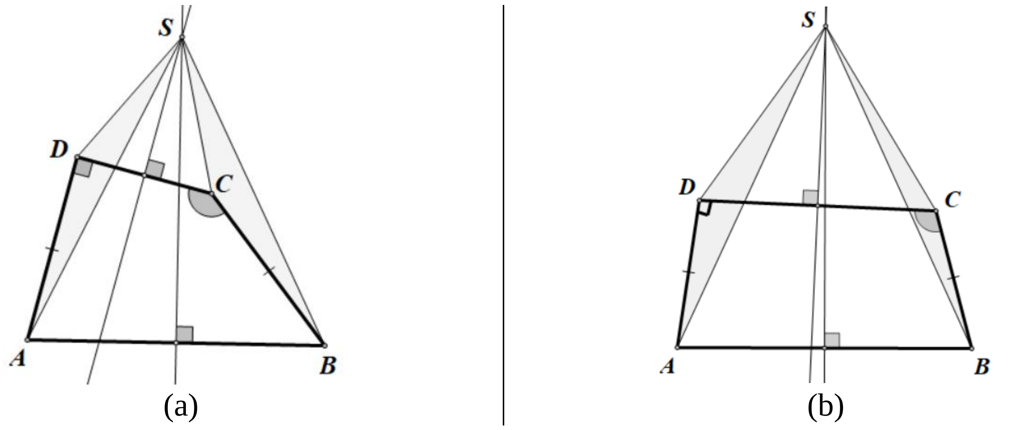
(a) Dudeneyjevo rješenje

(b) Steinhausovo rješenje

Slika 32. Dva rješenja Haberdasherova problema

No, nije uvijek jednostavno napraviti dobar vizualni prikaz za tvrdnju koja je dana riječima, a koji će biti pouzdan temelj za otkrivanje ključne ideje dokaza, odnosno puta do rješenja. U slučajevima izrade pogrešnog prikaza, korektno izvesti niz zaključivanja do kraja zahtijeva prilično znanja, ali i umijeća, kako je Euklid običavao reći: *Geometrija je umijeće ispravnog zaključivanja na pogrešnim slikama.*

Na primjer, neka je zadan četverokut $ABCD$ kojemu je $|AD|=|BC|$, $\angle ADC$ pravi kut, a $\angle DCB$ tupi kut i treba dokazati da sjecište simetrala S preostalih dviju stranica tog četverokuta, zajedno sa sukladnim stranicama četverokuta, određuju sukladne trokute. Opisano je moguće prikazati kroz različite vizualne prikaze. Na primjer, dva su vizualna prikaza dana na Slici 33.



Slika 33. Različiti vizualni prikazi iste situacije

U oba slučaja, kroz nekoliko koraka se izvodi zaključak o sukladnosti trokuta. Naime, prema svojstvu simetrale dužine, točka S jednako je udaljena od krajnjih točaka te dužine pa se zaključuje da je $|SD| = |SC|$ i $|SA| = |SB|$, a kako je treći par stranica trokuta podudaran prema zadanom uvjetu, trokuti ΔASC i ΔBSC sukladni su po poučku *SSS* (Slika 33a). Međutim, drugi slučaj (Slika 33b) nije moguć jer bi se iz dobivene sukladnosti i svojstva jednakokračnog trokuta ΔDCS moglo zaključiti da je tupi kut pri vrhu C jednak pravom kutu pri vrhu D: $\measuredangle ADC = \measuredangle ADS - \measuredangle CDS = \measuredangle SCB - \measuredangle SCD = \measuredangle DCB$ što je nemoguće.

Ukratko, lijepe slike su privlačne, mogu biti korisno pedagoško sredstvo, poticati razvoj dobrih i kreativnih ideja, ali i zabluda. No, na čitatelju je da svu tu ljepotu i korisnost otkrije i interpretira. U suprotnom, slika za čitatelja ostaje bezvrijedna, jednako kao i simbolički zapis formalnog dokaza kojeg ne zna dosljedno slijediti i pravilno tumačiti. Nepobitno je da se vizualni prikazi lakše pamte, stimuliraju matematičke misli i znatiželju te doprinose boljem razumijevanju koncepata, a u geometriji su i gotovo nezaobilazni. Stoga bi se odgovor na otvorene dileme mogao potražiti u uzajamnosti te istodobnom razvijanju vizualno-prostornih sposobnosti i umijeća interpretiranja geometrijskih figura, vještina simboličkog zapisivanja te izvođenja deduktivnog slijeda logičkih koraka utemeljenog na aksiomima, definicijama i dokazanim tvrdnjama.

Nakon svega može se zaključiti da je euklidska geometrija zaista nepobitno važna grana matematike. Prije svega, zaslužna je za izgradnju aksiomatskog sustava, a time i za razvoj cjelokupne matematike. Aksiomatski pristup u matematici postao je prirodan način stvaranja mreže poveznica između različitih činjenica, a formalna struktura prilično olakšava pronalaženje generalizacija i primjena, puno više nego primjena intuitivnog pristupa. No svakako, ne treba zaboraviti ni da su značajna otkrića i uvide u matematičke istine tijekom povijesti matematičari obično postizali konstruktivnom intuicijom (Courant et al, 1996, str. 216).

S druge strane, geometrija je od vitalne je važnosti za svakog od nas jer se svakodnevno služimo geometrijskim znanjima i vještinama pri snalaženju u prostoru, obavljanju raznih poslova, profesionalnom radu itd. U vrijeme brzog tehnološkog napretka i razvoja računala, potreba za geometrijskim znanjima stalno je u porastu i s teorijskog aspekta i s aspekta primjene. Zato je geometrija važna jezgra matematičkih kurikuluma diljem svijeta.

Ukratko, geometrija je moćno sredstvo intelektualnog razvoja čovjeka i njegovih umnih sposobnosti, pomaže oblikovanju valjane predodžbe o realnom prostoru u kojem živimo te doprinosi kvalitetnom i funkcionalnom savladavanju mnogih zanimanja. Ali, geometrija spada pod zahtjevniji dio nastavnih sadržaja matematike, što se dalo naslutiti još iz Euklidove rečenice *Nema kraljevskih putova u geometriji.*, kojom odgovara na upit *Postoji li neki lakši put za učenje geometrije*?.

Euklidska geometrija je zapravo „mač s dvije oštrice”: neophodna je za stjecanje znanja i razvoja vještina potrebnih za snalaženje i funkcioniranje u profesionalnom životu i radu, a zbog svog deduktivnog karaktera i apstraktnosti, geometrijskim „morem” teško brode i učenici i nastavnici.

Sve navedeno daje opravdane razloge za nova istraživanja geometrijskog obrazovanja u svrhu ostvarivanja boljih ishoda učenja, o čemu se raspravlja u nastavku ovog rada.

2. Učenje i poučavanje Euklidske geometrije

Nema kraljevskih puteva u geometriji.

Iz teorijske perspektive, nastava geometrije bi se trebala baviti pojmovima, njihovim svojstvima i međusobnim vezama, na način da osigura okruženje unutar kojeg će sudionici moći učiti geometrijske koncepte s razumijevanjem i razvijati geometrijsko mišljenje, ali i druge sposobnosti u kontekstu geometrije, poput vizualizacije, a zatim ta znanja moći i primijeniti.

Iz perspektive prakse, geometrija je vrlo kompleksna i za učenje i za poučavanje zbog čega je moguće mnogi učenici ne vole učiti, a ima i nastavnika koji je ne vole poučavati pa se ponekad „šutke" zanemaruje u školskom kurikulumu i marginalizira kroz nastavu matematike.

Uvažavajući teorijske aspekte aksiomatskog ustroja i aspekte kompleksnosti učenja geometrije, u nastavku se daje pregled važnijih spoznaja, a prema rezultatima istraživanja u obrazovanju, o teškoćama s kojima se suočavaju učenici pri učenju, njihovim mogućim uzrocima te načinima nadilaženja. U skladu s tim spoznajama planirano je i provedeno eksperimentalno istraživanje koje se opisuje u ovom radu kao i tumačenje rezultata dobivenih istraživanjem. Iako su eksperimentalnim istraživanjem obuhvaćeni budući nastavnici koji se pripremaju za rad u primarnom obrazovanju, rezultati obrazovnih istraživanja razmatrani su za različite uzraste u svrhu stjecanja uvida u cjeloviti proces učenja i poučavanja geometrije, od primarnog obrazovanja do tercijarne razine.

2.1. Usvajanje geometrijskih pojmova

Usvajanje geometrijskih pojmova prilično je kompleksno zbog dualnosti prirode figure, procesa definiranja, kumulativne prirode učenja itd. Tako, zbog nemogućnosti uspostavljanja balansa između apstraktnih i konkretnih svojstva nastaju problemi s razumijevanjem samog koncepta. Zatim, proces definiranja pojma ima svoje zakonitosti, a proces usvajanja potpune predodžbe o pojmu i formalne definicije s razumijevanjem jest kumulativan proces koji u pravilu traje cijelo obrazovno razdoblje. A bez razumijevanja koncepta te potpune predodžbe o njemu nema ni efikasne primjene, ni u rješavanju problema, ni u dokazivanju. Ukratko, ključ mnogih teškoća i nerazumijevanja jest nerazumijevanje dualne svojstvenosti geometrijskih figura.

2.1.1. Teškoće zbog dualne prirode figure

Kako je već opisano u prvom dijelu (str. 22), geometrijski pojmovi (eng. *geometric concept*), imaju i apstraktna i konkretna svojstva. S jedne strane, geometrijski pojmovi apstraktni su misaoni entiteti koji se opisuju definicijama, isticanjem bitnih, nužnih i dovoljnih, karakteristika svojstvenih tom pojmu (svojstva apstraktnog prostora). S druge stane, geometrijski pojmovi mogu se predstaviti vizualnim prikazima, različitim modelima, realnim ili artefaktima, koji se jednim imenom nazivaju *oblici* (eng. *shapes*) i koji su konkretni. Konkretni oblici stimuliraju predodžbu o apstraktnom objektu, zbog čega geometrijski pojmovi podliježu i karakteristikama koje su svojstvene oblicima: oblik, veličina, položaj itd. (svojstva realnog prostora).

Za objekte koji posjeduju ovu vrstu dualnosti, Fischbein (1993) uvodi naziv *koncept figure* (eng. *figural concept*) ističući time da se pri radu s geometrijskim pojmovima treba voditi računa o karakteristikama koje su svojstvene i apstraktnoj i konkretnoj figuri, ali i njihovoj uzajamnosti (Fischbein i Nachlieli, 1998).

Naime, konkretna figura, odnosno vizualni prikazi i modeli, omogućavaju operiranje u perceptivnom smislu: mijenjanje oblika, položaja, veličine, mjerenje, rezanje, stavljanje ispred/iza itd., dok apstraktna figura osigurava logičko operiranje i zaključivanje te strogu kontrolu i postojanost operacija s konkretnim figurama. Najviši oblik mišljenja postiže se kada su oba aspekta geometrijskog pojma u međusobnoj interakciji i harmoniji. Međutim, savršena harmonija ne postoji, a često je narušena konkretnim svojstvima figure koja su podložna zakonima stvaranja vizualnog prikaza (onome „kako izgleda”).

Istraživanja potvrđuju da se balans uspostavlja razvijanjem matematičkih sposobnosti i to bez obzira na dob, u suprotnom vještine s godinama opadaju (Fischbein i Nachlieli, 1998, str. 1210). Iz opisanih razloga, trebalo bi osigurati takvu nastavu na kojoj će učenici, kroz sustavnu i kontroliranu obradu figura, stvarati balans između apstraktne zahtjevnosti geometrijskog pojma te konkretnosti oblika kojima su predstavljeni.

2.1.2. Teškoće u radu s konkretnim figurama

Vizualni prikazi i modeli, kojima se predstavljaju geometrijski pojmovi, upravo zbog svoje konkretnosti, mogu prilično olakšati usvajanje apstraktnih koncepata i ideja. No, s druge strane, slabe vještine vizualizacije mogu biti uzrok mnogih teškoća i pogrešnih shvaćanja.

Proučavajući rad srednjoškolskih učenika pri učenju geometrije, Yerushalmy i Chazan (1990) opisuju tri vrste teškoća u radu s vizualnim prikazima geometrijskih pojmova: (1) posebnosti prikaza; (2) standardni prikazi kao modeli (eng. *prototypes,* prototipovi); (3) nemogućnost „viđenja” prikaza na različite načine (Yerushalmy i Chazan, 1990).

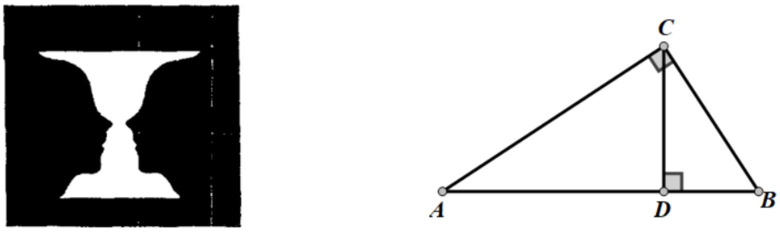
Posebnost prikaza: Geometrijske figure kao vizualni prikazi služe kao modeli koji predstavljaju cijelu klasu objekata i sadrže bitne karakteristike tih objekata. Međutim, vizualni prikaz ima i svoje perceptivne karakteristike koje nisu reprezentativne za klasu objekata koju predstavljaju. Onaj tko nema vještinu rada s vizualnim prikazima može lako pasti pod utjecaj pojedinačnih perceptivnih karakteristika ili nebitnih detalja (koji mogu biti i pogrešni) te posljedično izvesti pogrešne zaključke ili uopće ne moći izvesti zaključak. Na primjer, ako netko na vizualnom prikazu vidi da su linije paralelne, on može zaključiti da te linije zaista jesu paralelne te nastavak zaključivanja temeljiti na toj pretpostavci (Yerushalmy i Chazan, 1990, str. 199).

Standardni prikazi kao modeli: Ako se neki geometrijski pojam uvodi korištenjem nekog standardnog vizualnog prikaza kao modela, taj prikaz postaje prototipski prikaz za taj koncept što stvara drugu vrstu teškoće. Naime, prototipski prikaz može izazvati nefleksibilno mišljenje te onemogućiti prepoznavanje tog istog koncepta kada je predstavljen prikazom koji odskače od standarda. Na primjer, prototip za pravokutni trokut najčešće je prikaz trokuta s katetama u horizontalnom i vertikalnom položaju. Ukoliko se taj prototip učestalo koristi, kada se pravokutni trokut prikaže s hipotenuzom u horizontalnom položaju, učenici ga prilično teško identificiraju (Fischbein i Nachlieli, 1998, str. 1200).

Kroz rezultate istraživanja obrazovanja prepoznati su i opisani razni prototipovi geometrijskih koncepata: uvođenje pojma jednakokračnog trokuta crtanjem šiljastokutnog trokuta s osnovicom u horizontalnom položaju, uvođenje visine trokuta njezinim crtanjem na stranicu šiljastokutnog trokuta u horizontalnom položaju, uvođenje pojma pravokutnika i paralelograma koji su duži i uži s parom paralelnih stranica u horizontalnom položaju, uvođenje pojma trapeza s paralelnim stranicama u horizontalnom položaju, obrada pojmova četverokuta samo na konveksnim oblicima itd.

Nemogućnost „viđenja” prikaza na različite načine: Ono što vidimo na vizualnom prikazu nije određeno samo količinom prethodnog znanja koje usmjerava naše oči, već i kontekstom unutar kojeg se vrši opažanje, jer u različitim kontekstima isti vizualni prikaz može imati različito značenje čak i za stručnjake” (Arcavi, 2003, str. 232).

Često isticani primjer za ovu vrstu teškoće je „grčka vaza” (Slika 34a). Naime, kada se fokus stavi na bijelu figuru koja se nalazi na crnoj podlozi, onda se uočava vaza, ali ako se fokus stavi na ono što je prikazanom crnom bojom s bijelom bojom u podlozi, onda se vide dva lica okrenuta jedan prema drugome. U prikazu geometrijski pojmova ta pojavnost je gotovo stalna i nezaobilazna. Na primjer, u pravokutnom trokutu ΔABC (Slika 34b), ako je trokut ΔABC u fokusu, onda se dužina $\overline{CD}$ jasno vidi kao njegova visina na hipotenuzu, ali ako se dužina $\overline{CD}$ stavi u fokus, onda se ona može vidjeti kao zajednička stranica pravokutnih trokuta ΔADC i ΔBCD.



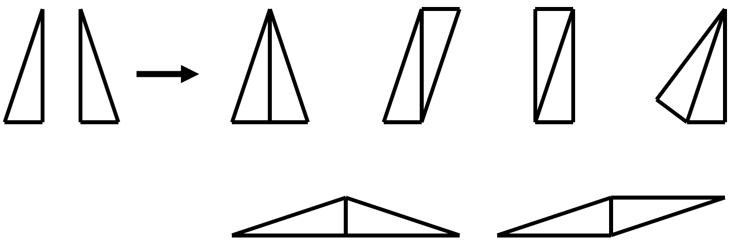
(a) (b)

Slika 34. Gledanje prikaza na različite načine

Vještina naizmjenične promjene pozornosti s različitih dijelova vizualnog prikaza na cjelinu i obratno mnogim učenicima može predstavljati priličnu teškoću, što posljedično znači i nemogućnost efikasnog rada s geometrijskim figurama. Jer, u prethodnom primjeru (Slika 34b), tek kada se uoče sva tri trokuta, mogu se razmatrati karakteristike svakog od njih, a potom ih i međusobno uspoređivati. Tek nakon toga može se izvesti zaključak o njihovoj sličnost, a na temelju sličnosti izvesti proporcije koje će dovesti do Euklidova poučka. Onaj tko vidi samo pravokutni trokut i njegovu visinu, zapeo je već na pragu otkrivanja.

Još prije više od 100 godina ovu vještinu mijenjanja pozornosti s cjeline na dijelove radi uočavanja geometrijskih svojstava Godfey (1903) naziva *geometrijskim okom* (eng. *geometrical eye*), pod čim podrazumijeva sposobnost uočavanja, identificiranja te uspoređivanja smislenih dijelova unutar složene cjeline. Također, on je smatrao da se *geometrijsko oko* može i treba trenirati kako bi se razvila geometrijska snaga pojedinca, koju će potom moći primijeniti pri rješavanju problema ili pri dokazivanju. Za razvoj *geometrijskog oka* Godfey predlaže i različite vrste zadataka eksperimentalne prirode, ali nužno povezanih s deduktivnim karakteristikama geometrije. Naime, on je zastupao važnost zadataka u kojima treba najprije steći određena praktična iskustva: eksperimentiranjem, mjerenjem, crtanjem itd., a zatim postavljati tvrdnje na temelju uočenog i konačno dokazati postavljene tvrdnje, povezivanjem s već poznatim definicijama, aksiomima i teoremima (Fujita i Jones, 2002).

U tu grupu zadataka spadaju i zadaci slaganja novih figura od figura koje su zadane. Na primjer, zadatak (Fujita, Jones and Yammamoto, 2004): *Ako su dana dva sukladna raznostranična pravokutna trokuta, ispitati koje se sve nove figure mogu oblikovati njihovim spajanjem duž podudarnih stranica* (Slika 35).



Slika 35. Oblikovanje novih figura

U zadacima ovog tipa, kroz aktivnosti slaganja, potrebno je unaprijed zamišljati figure koje treba oblikovati, a za to je potrebno raditi određene transformacije u umu (pomicanje, okretanje i preokretanje) što utječe na razvoj prostornog zamišljanja. Osim toga, važno je slaganje vršiti strateški kako bi se ispitale sve mogućnosti slaganja: npr. kreirati najprije sve moguće trokute, zatim četverokute itd., ili slaganje vršiti po stranicama, najprije sve figure duž jedne stranice, zatim duž druge stranice itd. Ako se u zadatak uključi i zahtjev imenovanja nastalih figura, onda je potrebno uočiti svojstva nastalih oblika i povezati ih s odgovarajućom definicijom čime se uspostavlja čvrsta veza između praktičnog i deduktivnog aspekta.

Neizmjerne mogućnosti ovih vrsta zadataka mogu se osmišljavati korištenjem spomenute slagalice tangram, jer se od njezinih sedam dijelova (5 trokuta i 2 četverokuta) može oblikovati na tisuće novih figura, a za geometriju su posebno korisne konveksne figure, kojih je samo trinaest (str. 23). Neke od njih se mogu oblikovati na više različitih načina, a istraživanjem njihovih svojstava međusobnim uspoređivanjem tangram figura mogu se postavljati razne tvrdnje i dokazivati ih (Baranović i Lehman, 2017 i 2018; Kavajin i Baranović, 2019a i 2019b).

2.1.3. Teškoće usvajanja formalnih definicija

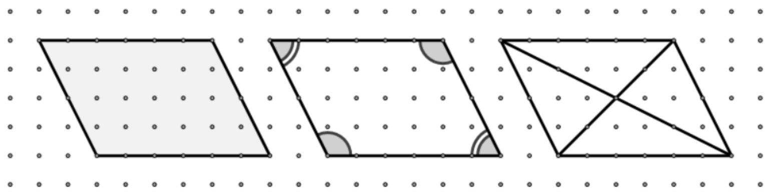
Mnoga obrazovna istraživanja potvrđuju da učenici svih uzrasta imaju problema upravo s razumijevanjem definicija geometrijskih pojmova, a posljedično i njihovom efikasnom primjenom.

Naime, učenje o geometrijskim pojmovima ne može se svesti samo na učenje formalnih definicija, koje su pri tome dane u „gotovoj" formi, jer takav način učenja ne podrazumijeva i razumijevanje, a tako naučene definicije se brzo zaborave i ne znaju efikasno primijeniti. Štoviše, stvaranje definicija bilo je polazište aksiomatske izgradnje euklidske geometrije pa je prirodno da taj proces bude i u naporima učenja i stjecanja geometrijskih znanja, na svim razinama obrazovanja (npr. Vinner, 1991; de Villiers, 1994; Usiskin i Griffin, 2008; Alonso, 2009; Ndlovu, 2014).

Tako, de Villiers (2009) naglašava da učenicima treba dopustiti da najprije kreiraju vlastite definicije pa makar i pogrešne, služeći se svojim jezikom, primjereno razini mišljenja koju su dosegli. Nakon toga, proces definiranja u kojem su sudjelovali treba dogovorno završiti jedinstvenom definicijom, koju će u daljnjem radu koristiti svi, a ostala svojstva pojma opisati teoremima i dokazati (De Villiers, 2009). Osim odabira jedinstvene definicije nekog pojma, važno je dosljedno koristiti istu vrstu definicije, npr. ili ekskluzivne ili inkluzivne, nikako malo jednu, malo drugu. Jer, ako se *kvadrat* uvede kao poseban slučaj *pravokutnika*, onda se ne može *trapez* definirati ekskluzivno, što je čest slučaj u matematičkoj praksi (Josefsson, 2016). Naime, ni za jednu definiciju koja nije u kontradikciji sa nekom drugom definicijom ili teoremom, ne može se reći da je loša, ali neke su ipak bolje od drugih. Na primjer, inkluzivne definicije su kraće i ekonomičnije od ekskluzivnih (De Villiers, 1994; Kozakli Ulger & Tapan Broutin, 2017).

Učenike bi posebno trebalo naučiti razlikovati definiciju od tvrdnje, a to je moguće jedino iskustveno i vježbom (Kurnik, 2009). Na primjer, ako se razmatraju paralelogrami i opisuju njihova svojstva i ako se pri tome koriste vizualni prikazi dan u kvadratnoj točkastoj mreži (Slika 36), moguće je lako uočiti sljedeće:

- Nasuprotne stranice su paralelne.
- Nasuprotne stranice su sukladne.
- Nasuprotni kutovi su sukladni.
- Kutovi uz istu stranicu su suplementarni.
- Dijagonale se raspolavljaju. Itd.

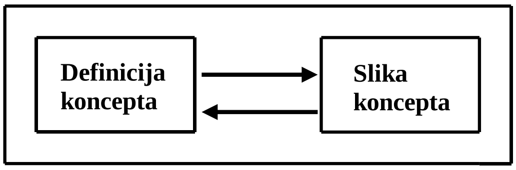


Slika 36. Prepoznavanje svojstava paralelograma

Nakon toga slijedi formuliranje definicije i iskaza tvrdnji. Odabirom primjerene formulacije može se dodatno poboljšati razumijevanje razlike između definicije i tvrdnje: u iskazu definicije može se koristiti izraz „kažemo da je” ili „naziva se”, a tvrdnju najprije iskazivati u standardnom obliku „ako…, onda…”, a potom i u duhu jezika. Na primjer, definicija paralelograma, koja je najprimjerenija u skladu s nosiocem pojma, može glasiti: *Četverokut kojemu su nasuprotne stranice paralelne naziva se paralelogram*, a tvrdnja u standardnom obliku glasi: *Ako je četverokut paralelogram, onda se njegove dijagonale raspolavljaju* (Kurnik, 2009) te u duhu jezika: *Dijagonale paralelograma se međusobno raspolavljaju*.

2.1.4. Teškoće zbog dualnosti i akumulativnosti procesa usvajanja

Proučavajući kognitivni proces izgradnje koncepta funkcije te korisnost izgrađenog, Vinner (1983) je došao do zaključka da se matematički koncepti usvajaju uzajamnim djelovanjem dvaju paralelnih procesa, tijekom cijelog obrazovnog razdoblja, što opisuje jednostavnim modelom koji se može primijeniti i na geometrijske koncepte (Vinner, 1983; Slika 37).



Slika 37. Model procesa usvajanja koncepta

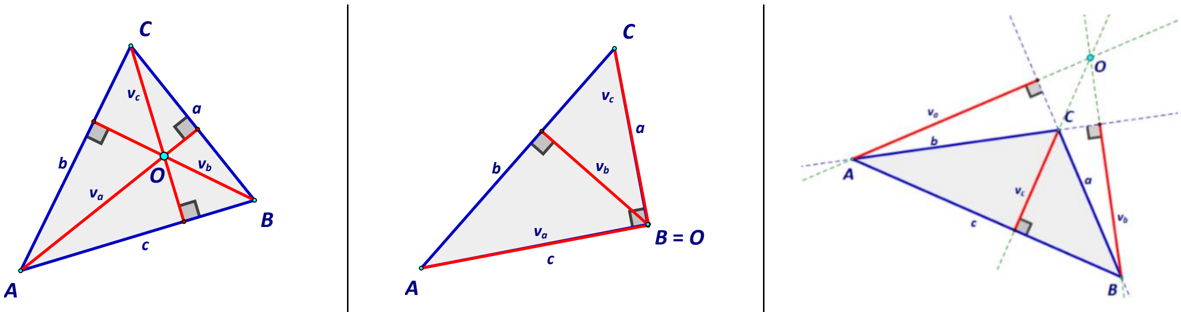
Prema Vinner, pri učenju i poučavanju matematičkog koncepta trebalo bi razlikovati *sliku koncepta* (egl. *concept image*) te *definiciju koncepta* (eng. *concept definition*). Pod *slikom koncepta* podrazumijeva se sve što je neka osoba saznala učenjem o tom konceptu: svi vizualni prikazi, simbolički zapisi, razna svojstva koncepta, sva iskustva u radu s tim konceptom itd. Ukratko, to je neka vrsta predodžbe koju je osoba izgradila o tom konceptu direktnim opažanjem, učenjem te iskustvenim radom. Pod *definicijom koncepta* podrazumijeva se formalna definiciju, tj. korektna definicija, kojom se kroz nužne i dovoljne uvjete jednoznačno opisuje promatrani koncept (Vinner, 1983, str. 293). U pravilu, da bi se neki koncept usvojio s razumijevanjem te mogao efikasno primijeniti, osoba bi trebala imati izgrađene obje forme koncepta, koje su potpune i međusobno povezane (Slika 37).

Nadalje, Vinner zaključuje: *slika koncepta* u pravilu se gradi kontinuirano kroz cijeli period matematičkog obrazovanja i to prirodnim putem tijekom učenja o konceptu i radu s njim, trajnije se pamti, a pri rješavanju problema ili dokazivanju, brže se doziva u sjećanje od *definicije koncepta*. Za *definiciju koncepta* prirodno bi bilo da se gradi na temeljima i u suodnosu sa *slikom koncepta* jer u suprotnom, ako se nametne kao gotovo rješenje ili uvede prije izgradnje bilo kakve *slike koncepta,* ona nije učinkovita u primjeni i brzo se zaboravlja, a *slika koncepta* se gradi pod kontrolom formalne definicije, što nije prirodan proces.

Također, ako je *definicija koncepta* previše složena za primjenu ili se koristi premalo konkretnih primjera koji predstavljaju na što se sve definicija odnosi, ona postaje beskorisna, a *slika koncepta* nepotpuna i kao takva neefikasna za primjenu. Osim toga, postoje koncepti za koje se *definicija koncepta* uvodi s odgodom (npr. formalna definicija *obodnog kuta*), a za neke se uopće ne uvede tijekom primarnog i sekundarnog obrazovanja (npr. formalna definicija *funkcije*) pa u tim slučajevima razumijevanje koncepta ovisi isključivo o načinu izgradnje *slike koncepta*.

No, bez obzira hoće li se na određenoj razini poučavanja *definicija koncepta* uopće uvesti ili ne, nastavnik je taj koji bi trebao znati formalnu definiciju koncepta, kada i kako se uvodi, kako stvarati što potpuniju *sliku koncepta*, otkriti kakve su *slike koncepata* učenika te u skladu sa svim saznanjima, osigurati okruženje unutar kojeg će učenici postupno i primjereno graditi bogatu *sliku koncepta*, koju će moći povezati s definicijom koncepta, u trenutku kad se uvede. Ako je nastavnik svjestan ove dualne prirode usvajanja koncepta kao preduvjeta za njegovo razumijevanje, onda zasigurno može poboljšati poučavanje tako da na svojoj „dionici" vertikale obrazovanja svjesno doprinosi izgradnji bogate *slike koncepata* te istodobno spriječi izgradnju nepotpune ili pogrešne *slike* istog (Vinner, 1983, str. 297).

Pogrešna izgradnja *slike koncepta* događa se npr. u situacijama kada se geometrijski koncept vizualno predstavlja samo jednim vizualnim prikazom, a potrebno je više različitih kako bi se koncept obuhvatio u potpunosti. Na primjer, da bi se stvorila korektna misao o bitnim karakteristikama pojma *ortocentar trokuta* (Točka *O*, Slika 38) potrebno je koristiti više različitih vizualnih prikaza jer se položaj ortocentra mijenja ovisno o vrsti trokuta (Jozić, 2011, str. 4). Ukoliko se ortocentar prikaže samo na šiljastokutnom trokutu (Slika 38a), stvara se kriva predodžba da je ortocentar uvijek unutar trokuta i da nastaje u sjecištu visina tog trokuta. Međutim, kod pravokutnog trokuta, ortocentar jest sjecište visina, ali točka nije unutar trokuta, već u vrhu pravog kuta (Slika 38b). Također, kod tupokutnog trokuta, ortocentar nije ni sjecište visina, niti se nalazi unutar trokuta, već je izvan trokuta u sjecištu pravaca visina (Slika 38c).



(a) Šiljastokutni trokut (b) Pravokutni trokut (c) Tupokutni trokut

Slika 38. Usvajanje koncepta *ortocentar* trokuta

Ukratko, ako se pri uvođenju pojma *ortocentar* koristi samo šiljastokutni trokut, stvara se pogrešna *slika koncepta* da se visine uvijek sijeku u jednoj točki i to unutar trokuta, pa će vjerojatno i definicija koncepta biti nekorektna: *Ortocentar trokuta je točka u kojoj se sijeku visine tog trokuta*. No, ukoliko se na primjeren način koriste različiti vizualni prikazi, onda će slika koncepta biti potpuna, a definicija koncepta se može izvesti korektno: *Ortocentar trokuta je točka u kojoj se sijeku pravci visina tog trokuta.*

Izgradnja nepotpune *slike koncepta* može se pojaviti npr. pri uvođenju koncepta jednakokračnog trokuta korištenjem samo trokuta s osnovicom u horizontalnom položaju, koji je najčešće šiljastokutni. To nije pogrešno, jer objašnjava formalnu definiciju: *Jednakokračni trokut je trokut kojemu su dvije stranice jednakih duljina*, ali *slika koncepta* ostaje sužena, a vizualni prikaz postaje standard za prikazivanje jednakokračnog trokuta (prototip) te onemogućava prepoznavanje jednakokračnog trokuta u drugim položajima ili pri korištenju druge vrste trokuta (str. 15).

2.2. Mjerenje u geometriji

Koncept *mjerenja* (eng. *measurement*) od vitalne je važnosti ne samo za matematiku već i za znanost, tehnološku praksu, ali i za život općenito, zbog čega bi svaki učenik trebao naučiti ne samo „kako mjeriti" već i „što znači mjeriti". Međutim, kroz rezultate istraživanja u obrazovanju dokumentirane su brojne teškoće na koje učenici nailaze pri mjerenju u geometriji (npr. Tan Sisman i Aksu, 2015).

Naime, u nastavi geometrije obrađuje se koncept *duljine* (eng. *length*), *ploštine* (eng. *area*) i *volumena* (eng. *volumen*), odnosno mjerenje duljina linearnih objekata, mjerenje ploština ravninskih likova te mjerenje volumena prostornih tijela. Pri usvajanju ovih koncepata također bi trebalo raditi balans između apstraktnih i konkretnih svojstva. Međutim, nastavna praksa pokazuje da se duljina, ploština i volumen zadanih geometrijskih figura najčešće određuje korištenjem odgovarajućih formula, više numerički nego algebarski, dok rad na razumijevanju samog koncepta pada u drugi plan.

Naime, koncepti *duljina*, *ploština* i *volumen* spadaju u koncept *funkcije* (apstraktno svojstvo) po kojoj se svakom objektu iz odgovarajućeg skupa objekata pridružuje jedinstveni nenegativni realni broj, pa se može govoriti o *duljini dužine* ili duljini granice nekog lika, *ploštini površine* ili ploštini granice nekog tijela te o *volumenu tijela* ili *zapremini tijela*. Te funkcije imaju i svoja svojstva, a nenegativni realni brojevi u tom kontekstu zapravo su vrijednosti promatranih funkcija. No, usvajanje koncepta funkcije u primarnom i sekundarnom obrazovanju uglavnom se temelji na *slici koncepta*, koja je najčešće nepotpuna, pa uvođenje ovih koncepata preko koncepta funkcije lako može uvesti dodatnu zbrku.

S druge strane, geometrijski se pojmovi predstavljaju konkretnim geometrijskim figurama, pa se usvajanje koncepta *mjerenja* svodi na određivanje odgovarajuće veličine (mjere) tih figura (konkretno svojstvo). Mjerenje se vrši mjernim instrumentom, a izmjerena veličina iskazuje nenegativnim realnim brojem i mjernom jedinicom, pri čemu mjerna jedinica može biti standardna, ali i proizvoljno odabrana. Nakon što se mjerenje svede na numeričku vrijednost, do izražaja dolazi proceduralno izračunavanje, pa rad s apstraktnim konceptom brzo pada u drugi plan.

2.2.1. Teškoće pri mjerenju 1D i 2D figura

Mnoge teškoće pri mjerenju proizlaze iz nerazumijevanja samog apstraktnog koncepta, slabe vještine mjerenja ili nerazumijevanja formule za izračunavanje mjere te nemogućnosti uspostavljanja odnosa između formule i objekta, što je najčešće posljedica određenog načina poučavanja (Tan Sisman i Aksu, 2015; Milinkovic i Ševa, 2021).

Učenje koncepta mjerenja započinje s mjerenjem duljine nekog objekta, tj. linearnim mjerenjem (eng. linear *measurement*), a ta vještina predstavlja temelj za razumijevanje mjerenja *ploštine* i *volumena* geometrijskih objekata. Standardna (dogovorena) mjerna jedinica za duljinu je *metar* (oznaka *m*), a mjerni instrument *ravnalo* (ili neka druga inačica) s mjernom skalom. Najprije se duljina mjeri linearnim objektima: dužini, visini, težišnici, dijagonali, bridu tijela itd., a zatim izlomljenim i zakrivljenim linijama koje su obično granice nekih geometrijskih likova.

Rezultati istraživanja pokazuju da učenici primarnog obrazovanja imaju priličan broj teškoća u savladavanju koncepta linearnog mjerenja: nepravilno prislanjanje ravnala duž objekta koji se mjeri, određivanje točke od koje započinje mjerenje (eng. *zero-point*, ishodište), očitavanje veličine na temelju mjerne strukture ravnala i dr. Poseban problem nastaje kad trebaju odrediti duljinu granice nekog ravninskog lika, a dodatne teškoće se javljaju pri uspoređivanju granica dvaju likova.

Razumijevanje koncepta linearnog mjerenja preduvjet je za usvajanje koncepta mjerenja ploštine ravninskih likova, jer je *ploština* izvedena mjerna veličina, a metar kvadratni (oznaka m^2) standardna mjerna jedinica. Najčešće se ističu sljedeće teškoće: nerazumijevanje kako jedinica za mjerenje *duljine* određuje jedinicu za mjerenje *ploštine*, nemogućnost prepoznavanja ploštine koja ostaje očuvana (eng. *conservation*) pri rekonstruiranju figure, strukturiranje površine koju zauzima 2D figura, a najveći problem je brkanje (eng. *confusing*) koncepta ploštine s opsegom ravninskog lika kao i njihovih formula.

Tako su, na primjer, Tan Sisman i Aksu utvrdili da tek oko 35% učenika šestog razreda uspješno uspoređuje opsege i ploštine figura zadanih u kvadratnoj točkastoj mreži (Slika 39), dok ostali imaju brojnih teškoća u radu: jedni su za opseg prebrojavali jedinične kvadrate, a za ploštinu linije kojima je lik omeđen, drugi su prebrojavali točke, a bilo je i onih koji su korektno odredili opsege, a zatim zaključili da i ploštine trebaju biti jednake jer su opsezi jednaki (Tan Sisman i Aksu, 2015, str. 11).

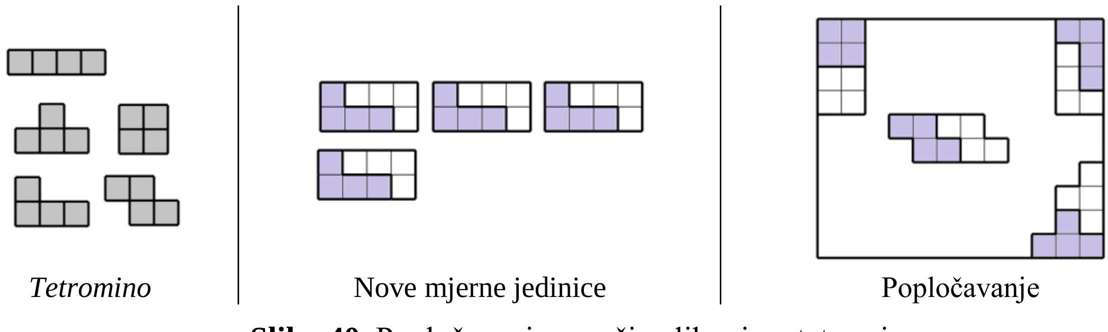
Zadatak: Betty je nacrtala dva oblika u kvadratnu točkastu mrežu kako je prikazano na slici.
(a) Ona misli da oba oblika imaju jednak opseg. Da li i ti tako misliš? Objasni svoj odgovor
(b) Ona misli da oba oblika imaju jednaku ploštinu. Da li i ti tako misliš? Objasni svoj odgovor

Slika 39. Uspoređivanje opsega i ploština zadanih figura

Neka eksperimentalna istraživanja pokazuju da se teškoće pri mjerenju ploštine mogu nadići kroz razne vrste popločavanja zadanih površina. Tako su Clement i sur. (1997), provodeći eksperimentalno istraživanje s učenicima trećeg razreda osnovne škole sa zadacima popločavanja, na papiru i na računalu, pokazali da učenici kroz ciljane aktivnosti nakon nekog vremena obogate vokabular, razviju vizualne i analitičke strategije, stvore osjećaj za sukladnost i očuvanje ploštine, poboljšaju sposobnost prostornog zamišljanja i dr.

Naime, tijekom istraživanja učenici su trebali najprije od sukladnih kvadrata izgraditi pločice *tetromina* (lik sastavljen od četiri sukladna kvadrata), a zatim njima popločati površinu pravokutnog oblika duljine 12 i širine 10, nakon toga oblikovati pravokutnik drugog oblika, ali iste ploštine te ponoviti popločavanje novog oblika (Slika 40). U svim aktivnostima tražilo se objašnjavanje postupaka, uspoređivanje rješenja i strategija te izvođenje zaključaka.

Kroz opisane aktivnosti učenici su nakon nekog vremena prešli s neformalnog jezika („stavi preko", „složi ovdje", „stavi naopako", …) na precizniji opis („pomakni", „okreni", „preokreni"), postupno su razvijali različite strategije popločavanja koje su rezultirale izgradnjom i novih jedinica popločavanja te različitim načinima množenja, čime su na prirodan način razvili koncept mjerenja ploštine uz određivanje prikladne mjerne jedinice (Slika 40). Povezivanjem koncepta površine s konceptom broja povezali su prostorne i numeričke domene te vizualne i analitičke metode, čija isprepletenost je dovela do napredovanja i vizualnog i analitičkog zaključivanja.



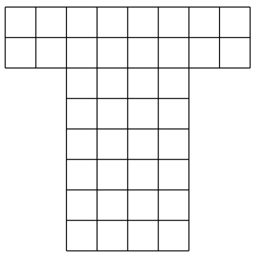
Slika 40. Popločavanje površine likovima tetromina

2.2.2. Teškoće pri mjerenju 3D figura

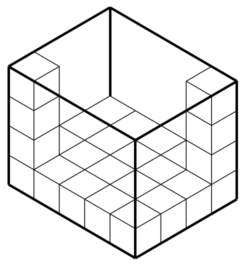
Razumijevanje koncepta mjerenja duljine i ploštine preduvjet je za usvajanje koncepta mjerenja volumena i oplošja trodimenzionalnih geometrijskih objekata, jer je *volumen* izvedena mjerna veličina, a metar kubni (oznaka m^3) standardna mjerna jedinica. Učenici koji imaju teškoća u prethodnim mjerenjima, prelaskom na mjerenje *volumena* i *oplošja* 3D figura, teškoće se dodatno nagomilavaju. Najčešće se ističe: problem zamišljanja 3D figura na temelju njihove mreže i obratno, uočavanje samo vidljivih ploha koje omeđuju 3D figuru, slabe vještine strukturiranja unutar 3D figure, nemogućnost prepoznavanja očuvanja volumena pri rekonstruiranu 3D figure te posebno brkanje koncepta *volumena* s konceptom *oplošja*, kao i njihovih formula.

Tako su, na primjer, Tan Sisman i Aksu utvrdili da tek oko 28% učenika šestog razreda uspješno određuje volumen prizme zadane mrežom, odnosno volumen prizme koja se popunjava jediničnim kockama (Slika 41), dok su ostali imali brojnih teškoća u radu: služili su se raznim vrstama formula koje su uglavnom bile orijentirane na ploštinu, a ne volumen (Tan Sisman i Aksu, 2015, str. 16).

Odredi volumen pravokutne prizme zadane mrežom sa slike. Obrazloži svoj postupak.



Na slici je prikazano kako se pravokutna prizna popunjava jedničnim kockama. Odredite volumen prizme. Obrazložiti svoj postupak.



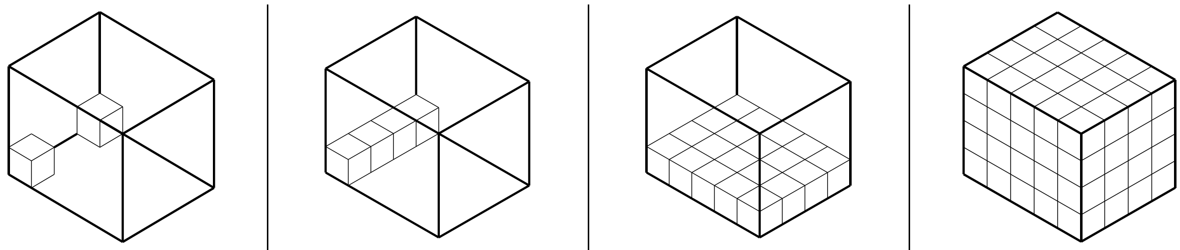
Slika 41. Određivanje volumena pravokutne prizme

Istražujući kako učenici od 5. do 9. razreda rješavaju zadatke s 3D objektima, Pittalis i Christou (2010) zaključili su da je za uspješan rad s 3D figurama potrebno razvijati četiri vrste aktivnosti, a posljedično i četiri vrste geometrijskog mišljenja: (1) predstavljanje, prepoznavanje i manipulacija; (2) prostorno strukturiranje; (3) prepoznavanje svojstava i uspoređivanje s drugim objektima; (4) određivanje volumena i oplošja.

Naime, predstavljanje 3D figura je posebna vještina jer se crtaju ravninski likovi, koji se u mislima trebaju zamišljati kao prostorni. Proces vizualnog prikazivanja 3D figura pomoću 2D figure zahtijeva i posebnu konvenciju, koja nije trivijalna i koju bi u školi trebalo učiti i poučavati. Na primjer, paralelne i okomite linije 3D figure „ne izgledaju” tako u 2D prikazu (Duval, 1998).

U radu s 3D figurama poseban izazov su njihove mreže, bilo da se iz mreže treba formirati 3D figura ili se 3D figura treba razložiti u mrežu. Osim sposobnosti zamišljanja, potrebna je i sposobnost fokusiranja na sastavne dijelove i mreže i 3D objekta te uspostavljanje veza između odgovarajućih elemenata, pri čemu je ključna vještina prelaska s dijelova na cjelinu i obratno (Saads i Davis, 1997). Među 3D figurama posebnu teškoću čine obla tijela. Naime, procesi zamišljanja mreže oblih tijela razlikuje se od procesa zamišljanja mreže poliedara jer se u mrežama poliedara plohe pojavljuju u istom obliku kakve su bile i kao granice 3D objekta, dok su kod oblih tijela (npr. kod valjka i stošca), zakrivljene plohe 3D objekta potpuno drugačije kada se polegnu u ravninu. Zamka se krije i u stalnom korištenju standardnih oblika jer učenici njihove mreže mogu naučiti napamet, a da pri tome stvarni proces savijanja ili razlaganje nisu u mogućnosti zamisliti. Rješenje se nameće u brojnim aktivnostima s različitim vrstama 3D figura (Cohen, 2003).

Proces strukturiranja 3D figure preduvjet je za razumijevanje koncepta mjerenja volumena, pri čemu se pod prostornim *strukturiranjem* geometrijske figure (Slika 42) podrazumijeva identificiranje osnovnih jedinica, njihovo kombiniranje u nove jedinice te uspostavljanje veza između jedinica i figure (Pittalis i Christou, 210, str. 193).



Osnovna jedinica	Nova jedinica	Nova jedinica	Nova jedinica
Jedinična kocka	*Niz kocaka*	*Ploha kocaka*	*Tijelo kocaka*

Slika 42. Proces strukturiranja 3D figure

Rezultati istraživanja pokazuju da su učenici pri određivanju volumena više fokusirani na korištenje gotovih formula i numeričko izračunavanje vrijednosti, ali ni u tome nisu uspješni ukoliko su formulu dobili kao gotovo pravilo. No, kada se formula izvodi kroz proces strukturiranja, učenicima se osigurava usvajanje koncepta mjerenja volumena 3D figure s razumijevanjem. Za uspješan rad s 3D figurama potrebno je razvijati vizualno-prostorne sposobnosti i to u kontekstu geometrije jer se time uzajamno razvija i geometrijsko mišljenje za 3D figure (Pittalis i Christou, 210, str. 193).

2.3. Rješavanje geometrijskih problema

Najčešća aktivnost koju učenici provode u nastavi matematike je rješavanje zadataka pa su zadaci zapravo glavni „nositelji znanja”. Razvijanjem umijeća rješavanja različitih vrsta zadataka i zadataka različite složenosti učenici imaju priliku stjecati određena znanja i razvijati određene vještine i umijeća. Suvremena nastava matematike zadnjih nekoliko dekada kao poseban proces ističe proces rješavanja problemskih zadataka. Pod izrazom „problem” podrazumijeva se svaki zadatak u kojem se ne može odmah odrediti rješenje ili metoda kojom bi se došlo do rješenja (Erickson, 1999), a koristi se i izraz „problemski zadatak”. Problem je geometrijski ako se bavi geometrijskim sadržajima.

Nadalje, „rješenje zadatka” podrazumijeva skup svih matematičkih objekata koji ispunjavaju uvjete zadatka. S obzirom da broj elemenata skupa može varirati, razlikuju se: (1) zadaci bez rješenja, kada nijedan objekt ne udovoljava uvjetima zadatka; (2) zadaci s jednim rješenjem (*jedinstveno rješenje*), kada točno jedan objekt udovoljava uvjetima zadatka; (3) zadaci s dva ili više, ali konačno mnogo rješenja (kraće, *zadatak s više rješenja*); (4) zadaci s beskonačno rješenja, kada je skup rješenja beskonačan. Za proces traženja odgovarajućeg objekta koji udovoljava uvjetima zadatka, odnosno proces određivanja skupa rješenja, u radu se koristi naziv „način rješavanja” ili „proces rješavanja”. Konačno, „riješiti zadatak” znači odrediti sve matematičke objekte koji udovoljavaju uvjetima zadatka (ili reći da takvih objekata nema), tj. odrediti skup rješenja.

S obzirom da je nastavnik izbornik, kreator i realizator nastavnih aktivnosti, pred njim je zapravo izazov da primjerenim odabirom različitih vrsta zadataka osigura učenicima prikladno okruženje unutar kojeg će svatko prema svojim mogućnostima razviti potrebna znanja, vještine i umijeća (Antunović-Piton i Baranović, 2019). Stoga bi svaki nastavnik trebao poznavati karakteristike različitih vrsta zadataka, različite strategije i vještine rješavanja kako bi tome mogao poučiti i svoje učenike.

2.3.1. Vrste zadataka

Ovisno o odabranom kriteriju, zadaci se mogu razvrstavati na različite načine, a među različitim klasifikacijama zasigurno ima razlika, ali i preklapanja (Foster, 2013; Jones & Pepin, 2016). U ovom radu navode se one klasifikacije koje su motivirale i usmjeravale odabir i način realizacije nastave geometrije, posebno tijekom eksperimentalnog istraživanja.

Prema cilju: Jedna od najpoznatijih klasifikacija, koja se u poučavanju matematike koristi više od 70 godina je klasifikacija koju je postavio mađarski matematičar Polya[10]. Polya sve zadatke razvrstava na *odredbene* i *dokazne*, s obzirom na glavne dijelove od kojih su sastavljeni i cilj koji treba postići, a kao posebnu vrstu izdvaja *konstruktivne* zadatke. *Odredbeni se zadaci* sastoje od poznatih elemenata, nepoznatih elemenata i uvjeta te je potrebno odrediti nepoznati element uz korištenje zadanih elemenata i ispunjavanje postavljenog uvjeta. *Dokazni se zadaci* sastoje od pretpostavke i tvrdnje te je potrebno utvrditi istinitost tvrdnje uz danu pretpostavku (Polya, 1966). U *konstruktivnim zadacima* zahtijeva se konstrukcija geometrijske figure koja ispunja sve zadane elemente i postavljene uvjete, što je odlika odredbenih zadataka. Ali, u konstruktivnim zadacima se zahtjeva i provjera korektnost konstrukcije, što znači da ima odlike i dokaznog zadatka, što svakako ovisi o uzrastu s kojim se radi.

Prema zahtjevnosti: Prema kognitivnim zahtjevima koji se stavljaju pred učenika, zadaci se klasificiraju na zadatke s *nižim kognitivnim zahtjevima* i na zadatke s *višim kognitivnim zahtjevima* (Smit & Stein, 1998; Hsu, 2013).

Zadaci s nižim kognitivnim zahtjevima su oni zadaci u kojima učenik reproducira prethodno naučene činjenice, pravila, formule ili definicije (zadaci memoriranja) te zadaci koji se rješavaju algoritamski, primjenom točno određenih postupaka (zadaci s procedurama bez veza). U njima nije potrebno uložiti veći kognitivni napor jer se ne traže nikakva objašnjenja niti razumijevanje pojmova i značenja koja se nalaze u pozadini provedenih postupaka, cilj je brzo i točno doći do konačnog rješenja. Obično se kaže da oni služe razvijanju odgovarajućih proceduralnih znanja i vještina, pri čemu se pod *proceduralnim znanjem* (eng. *procedural knowledge*) podrazumijeva sposobnost izvršavanja niza radnji u svrhu postizanja cilja (tj. „znati kako") (Rittle-Johnson i Schneider, 2015, str. 1119).

Proceduralne vještine koje se stječu rješavanjem ovih vrsta zadataka korisne su i učenici ih rado rješavaju jer im je jasno što trebaju činiti, ali u njima se krije i jedna zamka. Naime, pri njihovom vrednovanju od učenika se obično traži samo točno rješenje, čime se daje poruka da je važnije otkriti rješenje nego sam procesa rješavanja. No, kako su ovi zadaci prilično zastupljeni u nastavi matematike i nastavnom materijalu, učenici vrlo brzo razviju naviku da je otkrivanje rješenja jedini i konačan cilj pa za njih proces rješavanja završava kada do dođu rješenja. U takvim okolnostima nemaju potrebu provjeravati točnost i smislenost dobivenog rješenja, a još manje korektnost provedenog postupka.

Zadaci s višim kognitivnim zahtjevima su oni zadaci u kojima treba otkriti i uspostaviti veze među temeljnim matematičkim idejama i konceptima te steći određeno konceptualno razumijevanje. Obično su predstavljeni na različite načine: vizualno, simbolički, kontekstualno te je potrebno uspostaviti i veze među različitim prikazima. Takav proces zahtijeva priličan kognitivni napor. Kod njih je puno važniji proces rješavanja od konačnog rješenja i za njih se kaže da služe za razvijanje konceptualnih znanja. Pod *konceptualnim znanjem* (eng. *conceptual knowledge*) podrazumijeva se znanje o konceptima (Rittle-Johnson i Schneider, 2015, str. 1119), a posljedično i o stvaranju bogatih veza među njima.

I u ovim zadacima su ponekad potrebna proceduralne znanja i vještine, ali u svrhu razumijevanja i izgradnje konceptualnih znanja koja se nalaze u pozadini procedura, pravila i algoritama (zadaci s procedurama i vezama), a postoje i zadaci u kojima nije potrebno ništa izračunati već izvesti određene logičke veze primjenom odgovarajućih definicija, aksioma i teorema (zadaci s čistim deduktivnim zaključivanjem). Najčešće se mogu rješavati različitim metodama i strategijama pa su korisni u svrhu razvijanja umijeća rješavanja problema, za primjenu i funkcionalno povezivanje znanja te stjecanje

[10] George Polya, 1887. – 1985.

potrebnog razumijevanja i matematičkog promišljanja (npr. Schoenfeld 1992; Smit & Stein, 1998, str. 348; Boonen et al., 2013), a ponekad je moguće otkriti i neka nova znanja i koncepte.

Između proceduralnog i konceptualnog znanja postoji snažan dvosmjerno uzročan odnos, koji opstaje tijekom vremena pa poboljšavanje jedne vrste znanja dovodi do poboljšanja i druge vrste znanja. Taj odnos je i iterativan, što znači da konceptualno znanje može pomoći u stvaranju, odabiru i prikladnom izvođenju postupaka pri rješavanju problema, te istodobno, uvježbavanjem procedura može se doprinijeti razvijanju i dubljem razumijevanju koncepata, posebno ako se u tom postupku koncepti čine očitim. No, odnos nije uvijek simetričan, jer ponekad konceptualno znanje dosljednije i snažnije podupire proceduralno znanje, nego obratno. Zapravo, provođenje postupaka ne bi smjelo biti svrha sama sebi (puko uvježbavanje) već ciljano osmišljeno da razvija određena konceptualna znanja, na primjer, argumentiranjem provedenog postupka, izvođenjem formule itd. (Rittle-Johnson i Schneider, 2015).

Prema svrhovitosti: Među svim vrstama zadataka važno je odabrati zadatke koji služe određenoj svrsi. Tako, na primjer, postoje teškoće prijelaza učenika sa školske na sveučilišnu razinu te nemogućnosti savladavanja matematičkih kolegija, posebno na prvoj godini studija, a jedan od mogućih uzroka su i bitne razlike u vrstama zadatka koje se koriste.

Na školskoj razini naglasak se više stavlja na instrumentalno razumijevanje (uči se samo postupak, ne i zašto se radi ono što se radi) i od njih se najčešće traži proceduralna fluentnost (vještina rada s formulama, memoriranje, brzo izračunavanje, sređivanje i sl.), pojmovi se obrađuju odvojeno jedni od drugih te različita područja ostaju nepovezana, učenje usmjerava nastavnik, zadatke na satu rješava nastavnik, domaću zadaću zadaje nastavnik itd. Za razliku od toga, na sveučilišnoj razini više se zahtijeva racionalno razumijevanje (znati što treba raditi i zašto baš to) te konceptualno razumijevanje (razumijevanje koncepata, principa i procesa, te uočavanje i argumentiranje veza i odnosa između njih), način učenja i vrijeme organizira sam student, sam osmišljava i rješava zadatke, sam pronalazi potrebne informacije itd. Upravo iz tih razloga, potreban je period prilagodbe sa školskog diskursa na novi, sveučilišni diskurs učenja matematike (Liston i O'Donoghue, 2007; Witzke, 2016; Thoma i Nardi, 2018).

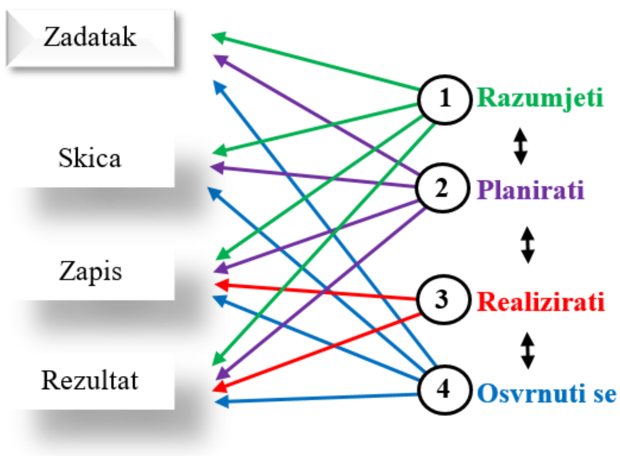
Za olakšavanje prijelaza sa školske razine na sveučilišnu razinu matematičkog obrazovanja istraživači predlažu korištenje „neuobičajenih zadataka” (Breen, O'Shea, Pfeiffer, 2013, str. 2317), koji su prema definiciji zapravo vrsta zadataka s višim kognitivnim zahtjevima, odnosno problemski zadaci.

Naime, s jedne strane, rješavanje neuobičajenih zadataka zahtijeva oslanjanje na prethodno iskustvo, traženje i uspostavljanje odnosa između prethodno naučenih koncepata, viši umni rad, više strpljivosti i ustrajnost, što za posljedica daje fleksibilnost u procesu mišljenja te razvoj matematičkog razmišljanja i zaključivanja. S druge strane, neuobičajeni zadaci mogu poslužiti kao pravi detektor teškoća i nerazumijevanja jer pri njihovom rješavanju, a posebno kada ne razumiju što se u zadatku traži, do izražaja dolaze tipične sklonosti učenika: što prije posegnuti za formulom, izračunati sve što se može iz zadanih podataka, rezultat nemaju potrebe provjeravati itd. (Breen, O'Shea, Pfeiffer, 2013).

2.3.2. Proces rješavanja zadataka

Kako bi se osigurao učinkovit proces otkrivanja puta do rješenja, Polya predlaže rješavanje odredbenih zadataka, s višim kognitivnim zahtjevima, u četiri faze (Slika 43): (1) razumijevanje zadatka, (2) stvaranje plana rješavanja, (3) realizacija plana i (4) osvrt na provedeno (Polya, 1966).

Proces rješavanja zadataka s višim kognitivnim zahtjevima najčešće nije linearan proces jer je potrebna stalna izmjena aktivnosti: čitanje, izrada skice (posebno u geometrijskom zadatku), planiranje, zapisivanje, računanje, ponovno vraćanje na zadatak i skicu, ponovno planiranje i pokušavanje, sve dok se ne ostvari jasan put do traženog rješenja.



Slika 43. Proces rješavanja zadatka

Faza razumijevanja započinje čitanjem zadatka, koji može biti zadan tekstom, vizualnim prikazom, simboličkim zapisom, a obično je kombinacija različitih zapisa, u svrhu prepoznavanja zadanih elemenata. Paralelno čitanjem gradi se skica u kojoj se predstavljaju glavni elementi i uočene veze, uvode se oznake radi lakšeg zapisivanja uočenih veza, a sve treba biti praćeno razumijevanjem onoga što se radi. Paralelnim proučavanjem zadatka i skice važno je stvoriti određenu putanju prema traženom rješenju i zapisati u formalnom obliku kroz jednadžbu, formulu i dr., u skladu sa oznakama na skici, ali opet praćeno razumijevanjem svih veza koje se uspostavljaju. Pri realizaciji plana, svaki korak bi trebalo provoditi s razumijevanjem i konačno razumjeti što dobiveni rezultat znači. Drugim riječima, faza razumijevanja bi trebala trajati cijelo vrijeme dok se bavimo zadatkom, pa i nakon toga, kada se dođe u priliku da se taj isti zadatak iskoristi u nekoj drugoj situaciji. Konačno, za razumijevanje svega navedenog potrebna je čitalačka pismenost učenika za sve oblike zapisa: tekstualni opis, vizualni prikaz, simbolički zapis (Polya, 1966; Gal & Linchevski, 2010; Yang & Li, 2016), ali i različiti oblici mišljenja: vizualno, geometrijsko itd. (Duval, 1999; Boonen et al, 2014).

Faza planiranja također započinje čitanjem, jer se odmah započinje s analiziranjem zadane situacije i povezivanjem s odgovarajućim definicijama, tvrdnjama, pravilima, nekim sličnim zadatkom itd. Pri izradi skice trebalo bi planirati efikasnu organizaciju zadanih elemenata i oznake koje se uvode kako bi se lakše uočile veze i sve jasno zapisalo. Pri zapisivanju bi trebalo planirati da oznake na skici i zapisu budu usklađene kako bi se dobiveni rezultat mogao interpretirati u skladu sa polaznim elementima zadatka. Pri realizaciji plana trebalo bi voditi računa o jasnom i sistematičnom zapisivanju svih koraka kako bi se proces mogao kontrolirati. Konačno, treba imati na umu da se i konačni rezultat provjeri što je također dio procesa planiranja. Sukladno tome, i faza planiranja bi trebala trajati cijelo vrijeme dok se bavimo zadatkom, pa i nakon toga.

Faza realizacije plana prilično je jednostavna nakon dobrog razumijevanja problemske situacije, izrađene skice sa svim oznakama, mudro odabranih procedura te osmišljenog plana rješavanja jer još preostaje samo oboružati se strpljenjem te provesti planirani postupak i račun do kraja.

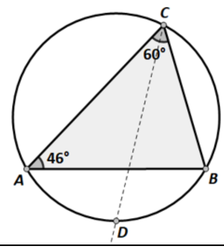
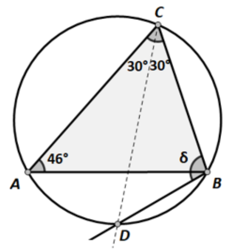
Faza osvrta također traje cijelo vrijeme ako se prve dvije faze provode na opisani način jer je proces rješavanja vidljivo naprijed-nazad proces. Kada se npr. pri realizaciji plana negdje zapne ili se uoči greška, uvijek se može vratiti korak-dva natrag i ponovno pokušati. No, proces rješavanja zadatka ne završava određivanjem rješenja već upravo osvrtom na sve provedeno: ima li rješenje smisla, je li rješenje u skladu sa zadanim elementima i postavljenim uvjetima, može li zadatak imati još neko rješenje, jesu li svi koraci procesa korektni, bi li neka druga metoda optimizirala proces itd. Osvrtom na cijeli postupak rješavanja te raspravom i uspoređivanjem različitih pristupa rješavanja istog zadatka stvaraju se preduvjeti prepoznavanja i razvoja odgovarajućih strategija rješavanja, a moguće je i usvajanje novog znanja. Puno je korisnije jedan te isti zadatak riješiti na više različitih načina i međusobno ih usporediti nego rješavati slične zadatke istom metodom.

Polya ističe da učenici obično krenu odmah računati, bez potrebnog razumijevanja i bez stvaranja ikakvog plana ili ideje, rezultat obično ne kontroliraju, a na vlastiti proces se rijetko vraćaju, pa ne čudi da je njihova uspješnost rješavanja zahtjevnijih zadataka obično niska (Polya, 1966, str. 58).

2.3.3. Teškoće u procesu rješavanja

Teškoće u procesu rješavanja zadataka s višim kognitivnim zahtjevima obično nastaju kada se izostavi neki od prethodno opisanih dijelova procesa.

U svrhu ispitivanja kako učenici primarnog obrazovanja pristupaju rješavanju geometrijskih zadataka, Baranović i Antunović-Piton dali su učenicima 7. i 8. razreda jedan geometrijski zadatak u tri varijante (Slika 44, prva varijanta preuzeta iz DM 2012), koji spada u kategoriju zadatka s višim kognitivnim zahtjevima (Baranović i Antunović-Piton, 2021 i 2022):

Z1 (66)	Zadan je trokut ΔABC. Mjera kuta u vrhu *A* je 46°, a mjera kuta u vrhu *C* je 60°. Simetrala kuta u vrhu *C* siječe trokutu opisanu kružnicu u točkama *C* i *D*. Kolika je mjera kuta $\angle CBD$? Odgovori: (a) 104° (b) 120° (c) 134° (d) 150°	
Z2 (63)	Zadan je trokut ΔABC. Mjera kuta u vrhu *A* je 46°, a mjera kuta u vrhu *C* je 60°. Simetrala kuta u vrhu *C* siječe trokutu opisanu kružnicu u točkama *C* i *D*. Kolika je mjera kuta $\angle CBD$?	
Z3 (53)	Mladi astronom i planinar Sanjin (označen točkom *S*) promatra 4 planinska vrha (označena točkama *A*, *B*, *C* i *D*), koja se nalaze na rubu njegova obzora kako je prikazano na slici. Popevši se na vrh *A*, pomoću astronomskih grablji izmjerio je da se iz točke *A*, zamišljena dužina $\overline{BC}$ vidi pod kutom od 46°. Popeo se i na vrh *C*. Izmjerio je da se iz vrha *C* zamišljena dužina $\overline{AB}$ vidi pod kutom od 60°, a zamišljena dužina $\overline{BD}$ pod kutom od 30°. Sanjin više nije provodio mjerenja nego je nacrtao skicu (kako je prikazano na slici) te primijenio znanja iz matematike i odredio pod kojim kutom se iz točke *B* vidi zamišljena dužina $\overline{CD}$. Objasnite kako je Sanjin odredio pod kojim kutom se iz točke *B* vidi dužina $\overline{CD}$ te koliko iznosi veličina tog kuta, tj. kuta δ sa slike.	

Slika 44. Geometrijski problem u tri varijante

Prema korektnosti cijelog procesa rješavanja i točnog odgovora, najuspješniji su bili oni koji su rješavali treću varijantu (Z3; 28,3 %). Moguće da je realni kontekst u Z3 pridonio većoj motivaciji, a dana slika koja je bila potpuna, usmjerila njihovu pozornost u pravom smjeru. Najneuspješniji su bili oni koji su rješavali drugu varijantu (Z2; 12,7 %), u kojem nije bilo ni ponuđenih odgovora kao putokaza, ni zanimljivoga konteksta koji bi ih motivirao, a ni slika nije pomogla jer na njoj nije bio istaknut traženi kut. Od onih koji su rješavali prvu varijantu zadatka (Z1), tek petina njih (21,21 %) je imalo korektno opravdanje svoga točnog odgovora, dok je 28,79 % njih svoj odgovor temeljilo na procjeni ili pogađanju. Iz predstavljenih rezultata vidljivo je da način postavljanja zadatka usmjerava proces rješavanja (Boonen, 2014).

Analizom učeničkih radova uočene su sljedeće teškoće tijekom procesa:

- U nedostatku odgovarajućeg znanja skloni su pisanju bilo čega, oslanjaju se na to „kako nešto izgleda” na slici, „štimaju” račun, posebno kada imaju ponuđene odgovore.

- Imaju velikih teškoća u izradi valjanog vizualnog prikaza te rijetko uvode oznake.
- Imaju slabe vještine uspostavljanja veza koje treba temeljiti na matematičkim svojstvima.
    - Mnogi za polazni trokut uzimaju jednakostranični ili jednakokračni, čime se problemska situacija značajno olakšava.
    - Mnogi nisu u mogućnosti prepoznati kut na slici koji predstavlja traženi kut.
    - Brkaju pojam simetrale kuta sa simetralom stranice.
    - Koncept obodnog kuta im nije blizak.
- Brzo prelaze na račun, kojeg često svode samo na numerički zapis i najčešće nije usklađen sa oznakama na slici, ukoliko ih ima.
- Zapis je u mnogih neuredan, nesistematičan, „zbrda-zdola”, s dosta grešaka i nekorektnih procedura pa nemaju mogućnost kontrole nad procesom.
- Nema pisanog traga po kojem bi se moglo zaključiti da rade osvrt na bilo što u svom procesu.

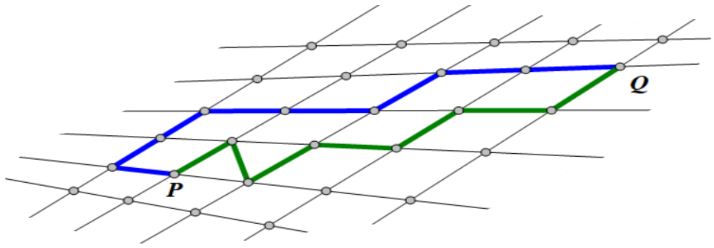
Iz svega navedenog vidljivo je nekoliko ključnih faktora slabe uspješnosti rješavanja. Prije svega, neki elementarni geometrijski koncepti nisu usvojeni s razumijevanjem bez čega nema ni uspješnog rješavanja geometrijskih zadataka (Milinković i Ševa, 2021). Drugo, učenici nemaju naviku sustavnog otkrivanja puta do rješenja te sustavnog povezivanja elemenata procesa rješavanja. Drugim riječima, nisu razvili kulturu sustavnog rješavanja problemskih zadataka, a uzrok vjerojatno leži u vremenu i načinu posvećenom provođenju njihovog procesa rješavanja. Kada bi pri vrednovanju znanja nastavnici više vrednovali proces rješavanja, a ne samo konačno rješenje, učenicima bi se poslala jasna poruka što je važno pa bi i oni više cijenili i više pozornost posvetili procesu rješavanja (Antunović-Piton i Baranović, 2019). Treće, učenici nemaju razvijene vještine vizualizacije, niti u stvaranju vizualnog prikaza, niti u čitanju matematičkih svojstava s prikaza, bilo da ga sami rade ili je zadan. Drugim riječima, nemaju razvijeno „geometrijsko oko”. Itd.

Obrazovna istraživanja potvrđuju da je rješavanje zadataka s višim kognitivnim zahtjevima od višestruke koristi: razvija se matematičko mišljenje učenika (Foong, 2002; Leikin i Lev 2007), potiče se i razvija kreativnost (Klavir i Gorodetsky, 2011), osigurava se mogućnost angažmana većine učenika tijekom nastave (Klavir i Herskovitz, 2014) te na njima primjerenim razinama (Sullivan, 2009), omogućava se identificiranje darovitosti učenika za matematiku (Leikin i Lev, 2007), razvija se komunikacija i pozitivno matematičko/razredno ozračje (Schukajlow, Leiss, Pekrun, Blum, Müller i Messner, 2012) itd. Ali, vrednovanje ovih zadataka, posebno kada se rješavaju na različite načine je vrlo kompleksno (Bingolbali, 2011). Ipak, na svakom nastavniku je da odabere i procjeni u kojoj mjeri i kako može provoditi problemske geometrijske zadatke u korist svojih učenika.

2.4. Smisao dokaza u nastavi

Prema općeprihvaćenom mišljenju, dokaz služi za utvrđivanje istinitosti postavljene tvrdnje. Naime, kada matematičar u procesu razvijanja matematičkih znanja otkrije neku novu tvrdnju, on ima obvezu tu tvrdnju opravdati valjanim argumentom kako bi se ona prihvatila kao istinita. No, u nastavi se najčešće koriste samo one tvrdnje čija je istinitost već opravdana dokazom pa nema smisla ponovno utvrđivati njihovu istinitost. Upravo je to jedan od razloga zašto učenici nisu motivirani izvoditi dokaz za tvrdnje koje su već dokazane, jer njima to izgleda besmisleno. Posljedica toga je da učenici najčešće pribjegavaju učenju danih dokaza napamet, od čega tek nemaju nikakve koristi. Zasigurno smisao dokaza u nastavi mora biti nešto drugo.

Kroz različite rasprave o ulozi dokaza u matematici i matematičkom obrazovanja razvija se novo mišljenje da su dokazi prije svega nositelji matematičkog znanja. Naime, u dokaz je utkan cijeli niz matematičkih koncepata, strategija i metoda rješavanja, uspostavljenih veza, sistematizacija rezultata itd. dok je sama tvrdnja tek jedan kratki sažetak svih tih informacija. Ukratko, dokazi su kao „mreže cesta u sustavu javnog prijevoza, a tvrdnje su autobusne stanice (Slika 45), mjesto prikladnog zaustavljanja” (de Villiers, 2003, str. 1).



Slika 45. Dokaz kao mreža povezanih znanja

Taj pristup je puno bliži smislu dokaza u nastavi matematike. Jer, proučavanjem dokaza za tvrdnje koje su već dokazane, prije svega uči se proces i koraci dokazivanja. Posebno, proučavanjem različitih načina dokazivanja iste tvrdnje mogu se usvajati različite strategije i metode dokazivanja, a matematička znanja se povezuju u funkcionalnu mrežu koncepata i njihovih veza. Takva znanja su zasigurno trajnija i primjenjivija što je prilično smisleno za učenje.

Prema opisanom, vidljivo je da vrijednost dokaza nadilazi samu provjeru rezultata. Tako de Villiers, koristeći program dinamičke geometrije pri istraživanju raznih aspekata poučavanja geometrije, razmatra, uz odgovarajuće primjere, šest različitih uloga koje dokaz može imati posebno za nastavu matematike (de Villiers, 2003, str. 8):

I. Dokaz kao *uvjerenje*: utvrđivanje istinitosti tvrdnje
II. Dokaz kao *objašnjenje*: stjecanje uvida zašto je nešto istina
III. Dokaz kao *otkriće*: stvaranje novih rezultata
IV. Dokaz kao *sistematizacija*: organiziranje različitih rezultata u deduktivni sustav aksioma, teorema i definicija
V. Dokaz kao *komunikacija*: razmjena matematičkog znanja
VI. Dokaz kao *intelektualni izazov*: ispunjenje kao posljedica samostalnog izvođenja dokaza.

Nekoliko godina kasnije, Hemmi i Löfwall, kroz pilot-istraživanje s deset sveučilišnih nastavnika matematike izvode zaključak o važnoj ulozi dokaza kao *transfera znanja*. Naime, kroz proces dokazivanja studenti mogu razvijati: logičko zaključivanje, matematički vokabular, način argumentiranja, razne metode i strategije, otkrivati nove koncepte itd., a zatim sva ta znanja i vještine mogu prenijeti na proces rješavanja različitih vrsta problema, jer su u pravilu to vrlo slični procesi (Hemmi i Löfwall, 2009).

Naime, slično kao i kod procesa rješavanja problema i proces dokazivanja se može razmatrati kroz etape.

Prva etapa dokazivanja zasigurno podrazumijeva razumjeti o čemu tvrdnja govori te moći razlučiti glavne dijelove: pretpostavku (P) i zaključak (Q). Ukoliko se radi o geometrijskom dokazu korisno je kreirati vizualni prikaz, na kojem će biti istaknuti svi zadani elementi pretpostavke, ono što treba dokazati te potrebne veze. Zatim treba osvijestiti, primjenom definicija, aksioma ili teorema, na koji način se može dokazati zaključak, odnosno koji bi trebao biti predzadnji zaključak (Q') iz kojeg bi se mogao izvesti posljednji zaključak (Q). Na primjer, ako treba dokazati da je neki četverokut kvadrat, onda treba utvrditi ima sve četiri stranice podudarne i sva četiri kuta prava. Tek nakon toga započinje proces izvođenja niza logičkih zaključivanja od pretpostavke (P) do predzadnjeg zaključka (Q'). I na kraju, još je potrebno dati konačan zaključak o tome što je provedenim procesom dokazano.

Opisani proces dokazivanja zasigurno nije nešto što se spontano uči već zahtijeva vještinu i vodstvo nastavnika.

3. Razvoj geometrijskog mišljenja prema teoriji Van Hielea [11]

Van Hieleova teorija široko je prihvaćena kao teorijski okvir unutar kojeg se može pratiti razvoj mišljenja kroz hijerarhijske razine te način napredovanja s jedne razine na drugu. U tu svrhu koristi se i u eksperimentalnom istraživanju koje se opisuje u ovom radu, s primjenom na praćenje razvoja geometrijskog mišljenja sudionika istraživanja. S obzirom da se van Hieleova teorija koristi kao alat za istraživanje, u ovom se radu neće obrazlagati njezin nastanak i razvoj, već se izdvajaju i opisuju samo one karakteristike teorije koje su korištene u pripremi alternativnog poučavanja tijekom eksperimentalnog istraživanja te u analizi prikupljenih podataka.

Prije daljnjeg opisa karakteristika van Hieleove teorije daje se pregled neke terminologije koja se koristi u radu, a vezana je za geometrijsko mišljenje. Cilj je pojasniti što se pod kojim pojmom podrazumijeva, posebno jer se u literaturi o matematičkom obrazovanju mogu pronaći isti pojmovi s različitim značenjima ili isti procesi pod različitim nazivima.

Prvo, u cilju stjecanja znanja potrebno je proći kroz različite procese i oblike mišljenja. Pod *mišljenjem* (eng. *thinking*) ovdje se podrazumijevaju umne aktivnosti kojima se otkriva i spoznaje ono što do tada nije bilo poznato, na temelju čega se procjenjuje ispravnost onoga što se uočava ili je dio iskustva te se stvara sud o pojavama i objektima te njihovim svojstvima (Kurnik 2013).

Drugo, kako procese mišljenja potiču razni faktori i oni na različite načine stimuliraju različite misaone aktivnosti i procese, uobičajeno je kroz naziv oblika mišljenja istaknuti čime je mišljenje stimulirano. Tako se pri učenju geometrije i stjecanju geometrijskih znanja razvija *geometrijsko mišljenje* (eng. *geometric thinking*). Mišljenje koje je potaknuto vizualnim podražajima pri korištenju vizualnih zapisa i umnih slika obično se naziva *vizualno mišljenje* (Giaquinto, 2015; Van Hiele, 1986, str. 1). Itd.

Treće, različita znanja podrazumijevaju i različite oblike mišljenja, a među važnijim oblicima geometrijskog mišljenja ističu se: (1) *poimanje* (eng. *conceptualization*) - stjecanje znanja o pojmovima kroz proces stvaranja i formiranja predodžbe o pojmu; (2) *prosuđivanje* (eng. *judgment)* - otkrivanje svojstava pojmova kroz proces analize i prosudbe te donošenje suda o uočenom svojstvu; (3) *zaključivanje* (eng. *reasoning*) - uspostavljanje veza među pojmovima i njihovim svojstvima korištenjem različitih procesa logičkog zaključivanja (Kurnik 2013); (4) *razumijevanje* (eng. *comprehension, understanding*) - stjecanje dubljeg uvida i razumijevanje koncepta kroz procese identifikacije, razlikovanja, poopćavanja te povezivanja svih izoliranih činjenica u funkcionalnu cjelinu (Sierpinska, 1992, str. 28). Postoje i drugi procesi i njihove inačice naziva, ali nisu u fokusu ovog rada.

Karakteristike Van Hieleove teorije, koje su se koristile u eksperimentalnom istraživanju, odnose se na tri aspekta teorije: (a) proces razvoja apstraktnog mišljenja, hijerarhijski kroz pet razina; (b) karakteristike petodijelnog modela; (c) proces učenja u pet faza koje doprinose napredovanju s jedne na drugu razinu mišljenja (Van Hiele, 1986; Crowley, 1987). U nastavku se detaljnije opisuje svaki od tih aspekata, s primjenom na razvoj geometrijskog mišljenja[12].

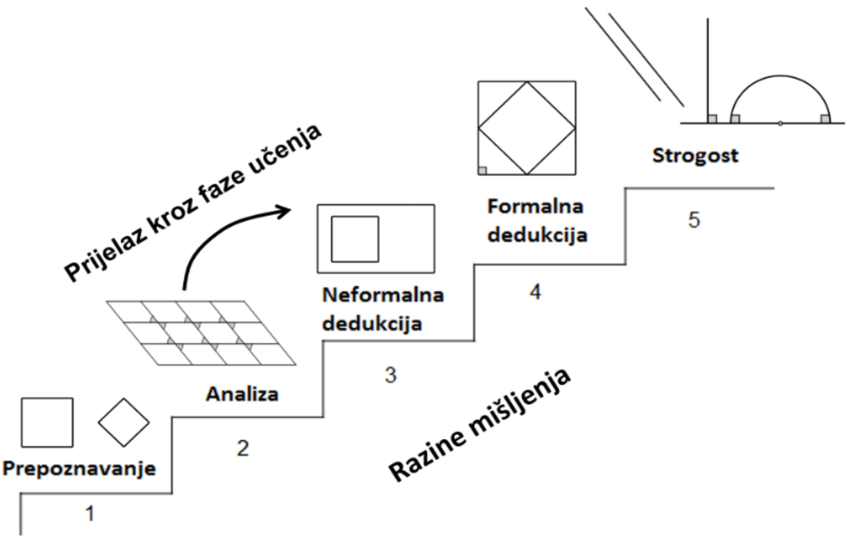
[11] Važno je istaknuti da se van Hieleova teorija ne odnosi samo na razvoj geometrijskog mišljenja, iako se taj „dojam“ lako može steći jer je najviše istraživanja usmjereno upravo u tom smjeru. Međutim, sam van Hiele na nekoliko mjesta u svom originalnom djelu naglašava da je teorija primjenjiva, ne samo na geometriju, već na sve znanosti, pa čak i na poučavanje (Van Hiele, 1986, str. 86). Na primjer, postoje značajni napori u primjeni van Hiele-ove teorije na proučavanje razvoja funkcijskog mišljenja (npr. Nisawa, 2018, Baranović, 2019c).

[12] Prikaz karakteristika van Hieleove teorije u ovom radu nastao je integracijom dvaju objavljenih radova: *O razvoju geometrijskog mišljenja prema van Hieleovoj teoriji* (Baranović, 2016) i *O učenju i poučavanju geometrije prema van Hieleovoj teoriji* (Baranović, 2019a).

3.1. Van Hieleov model razvoja mišljenja

Proces razvoja mišljenja Van Hiele razmatra hijerarhijski kroz pet razina, a razine imenuje prema aktivnostima koje su karakteristične za tu razinu. Uz svaku razinu daje se njezin originalni naziv po van Hieleu (Van Hiele, 1986, str. 53) te naziv koji se danas najčešće koristi:

(1) Razina 1 se naziva vizualna razina ili razina prepoznavanja (eng. *visual level* ili *recognition*) jer se objekti prepoznaju na temelju izvanjskog izgleda, a ne na temelju njihovih svojstava;
(2) Razina 2 se naziva opisna razina ili razina analize (eng. *descriptive level* ili *analysis*) jer se objekti proučavaju, analiziraju i opisuju na temelju njihovih svojstava;
(3) Razina 3 se naziva teorijska razina s logičkim vezama ili razina neformalne dedukcije (eng. *theoretical level with logical relations* ili *informal deduction*) jer se na toj razini uspostavljaju logički odnosi između svojstava određenog objekta ili između svojstva različitih objekata;
(4) Razina 4 se naziva razina formalne logike ili formalne dedukcije (eng. *formal logic* ili *formal deduction*) jer se na toj razini proučavaju logički zakoni i principi, uloga definicija, aksioma, teorema i dokaza unutar deduktivnog aksiomatskog sustava kao cjeline;
(5) Razina 5 se naziva razina prirode logičkih zakona ili razina strogosti (eng. *nature of logical laws* ili *rigor*) jer se na toj razini proučavaju i međusobno uspoređuju različiti aksiomatski sustavi, služeći se čistim matematičkim jezikom (Slika 46).



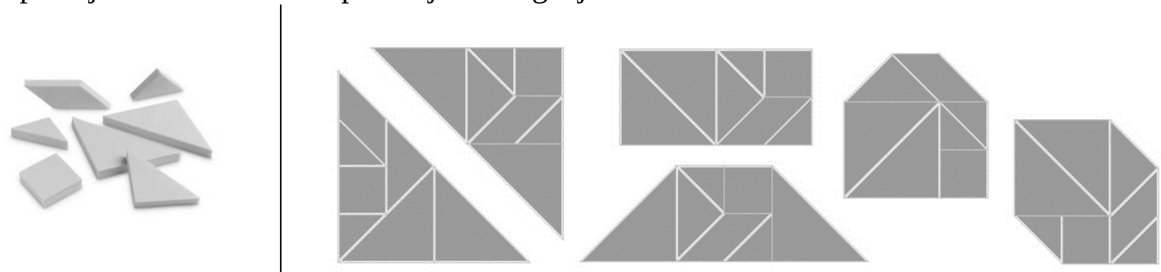
Slika 46. Van Hieleov model razvoja mišljenja

Van Hieleove razine u početku označava brojevima od 0 do 4, ali se pokazalo praktičnije korištenje brojeva od 1 do 5, što se koristi i u ovom radu, jer kad se priča o razini, a pri tome se koristi broj može doći do nesporazuma. Na primjer, razina broj 2 pri numeraciji od 0 do 4 znači treću razinu mišljenja, što u kontekstu analize podataka može biti zbunjujuće.

Neki istraživači Razinu 1 nazivaju *razina vizualizacije* upravo zbog vizualnog prepoznavanja geometrijskih objekata, ali taj naziv nije korektan. Naime, *vizualizacija* je pojam koji se odnosi na puno više aktivnosti od pukog prepoznavanja objekata, što će biti opisano u sljedećem poglavlju. No, ako se baš želi istaknuti karakteristika prepoznavanja onda bi se mogao koristiti naziv *razina percepcije* jer se radi o prepoznavanju objekta „na prvu" (vidjeti str. 85).

Razina 1: *Prepoznavanje geometrijskih objekata*. Prema van Hieleu, proces učenja euklidske geometrije trebao bi započeti neverbalnim razmišljanjem na vizualnoj razini, što podrazumijeva da se geometrijski objekti prepoznaju na temelju njihovog izvanjskog izgleda i na taj način se imenuju. Onaj tko je savladao prvu razinu, svaki će geometrijski lik prepoznati prema obliku bez obzira na položaj, a nakon prepoznavanja objekte će moći razvrstati u grupe, također na temelju izvanjskog izgleda. Na primjer, na Slici 46, Razina 1, prikazana su dva kvadrata. Ako učenici za prvi kažu da je kvadrat, a za drugi da nije (ili kažu da je dijamant), onda je to pokazatelj da prvu razinu nisu savladali.

Za uspješno savladavanje prve razine mišljenja, učenicima treba omogućiti rad s didaktičkim sredstvima (razni modeli, realni ili artefakti): slaganje, bojanje, prebrojavanje, crtanje na papiru ili u mrežama, prepoznavanje/identificiranje određenih likova unutar složenijeg lika, opisivanje, rješavanje problema itd. Na primjer, u radu s tangram slagalicom (Slika 47), učenici mogu slagati odgovarajuće likove (trokute, četverokute, peterokute, šesterokute i sl.), a zatim ih crtati u kvadratnoj točkastoj mreži. Baveći se tim aktivnostima, mogu uočiti da se mijenjanjem položaja oblik lika nije promijenio ili da se isti lik može dobiti slaganjem različitih dijelova itd. Kada lik smjeste u mrežu, mogu prebrojavati sve moguće likove unutar jednog lika (trokute, četverokute itd.), određivati im ploštine prebrojavanjem mjernih jedinica (bez uporabe formule) itd. Sve ove aktivnosti mogu se provoditi i na računalu u nekom od programa dinamičke geometrije (GeoGebra, Skethpad, Cabri i sl.), a postoje i razne mobilne aplikacije za slaganje.



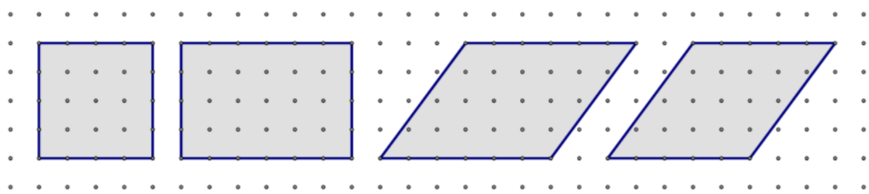
Tangram slagalica | Tangram likovi

Slika 47. Rad s tangram slagalicom na perceptivnoj razini

Opisivanjem onoga što rade, učenici postupno razvijaju geometrijski rječnik i imena pojedinih likova koja do tada nisu poznavali, a jačanjem geometrijskog vokabulara olakšava se daljnja komunikacija, a posljedično i učenje geometrije (Siew, Chong i Abdullah, 2013).

Razina 2: *Analiza i opisivanje svojstava.* Prema van Hieleu, nakon prepoznavanja i grupiranja objekata, potrebno je analizirati promatrane objekte (pojedinačno ili cijelu grupu) te postupno uočavati i opisivati njihova svojstava i u skladu s tim ih imenovati, još uvijek bez uspostavljanja veza među njima. Tako, na primjer učenici mogu uočiti da jednakokračni trokut ima dvije stranice jednakih duljina i dva kuta jednakih veličina, ali još uvijek ne stvaraju vezu da se nasuprot podudarnih stranica nalaze podudarni kutovi.

Za uspješno savladavanje druge razine mišljenja učenicima treba omogućiti da svojstva likova ili klasa otkrivaju mjerenjem (ili očitavanjem iz mreže), bojanjem, savijanjem papira, slaganjem i sl., zatim da ta svojstva opisuju i na temelju svojstva da identificiraju likove. Tako, na primjer, služeći se likovima u mreži (Slika 48), učenici mogu uočiti da prvi lik ima sve četiri stranice jednakih duljina, sva četiri kuta prava, dijagonale jednakih duljina itd. Na taj način se učenicima omogućava da postupno stvaraju svoje definicije promatranih objekata nabrajanjem uočenih svojstava, ne razlikujući još uvijek među njima ona koja su nužna i dovoljna (De Villers, 2010).



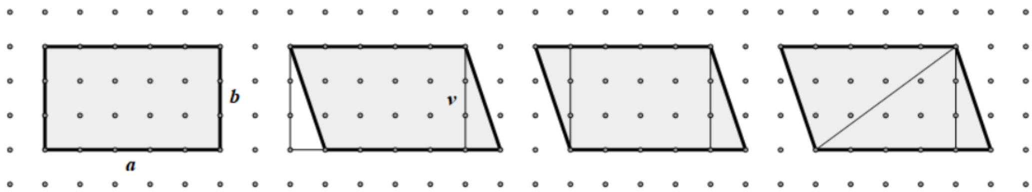
Slika 48. Uočavanje svojstava likova danih u kvadratnoj mreži

Nakon dovoljno iskustva sa svojstvima, učenici mogu postupno uspoređivati likove prema uočenim svojstvima te ih klasificirati na temelju odabranog kriterija, empirijski izvoditi pravila i stvarati generalizacije za konkretne slučajeve, unutar određene grupe objekata. Na primjer, ako bi učenicima dali mrežu paralelograma (Slika 46, Razina 2), oni bi nakon isticanja vršnih kutova (koji su jednake veličine) mogli uspješno utvrditi da su i nasuprotni kutovi paralelograma jednake veličine. No, to se još uvijek odnosi na tu grupu koju promatraju, a ne općenito za sve paralelograme (De Villers, 2010).

Rad s raznim vrstama mreža omogućava korištenje pojma paralelnosti i uvođenje pojma kutova s paralelnim kracima, susjednih i suplementarnih kutova itd. Važno je učenike stalno poticati da ono što „vide" opisuju svojim riječima, a učitelj ih pri tome može korigirati te njihov vokabular postupno nadopunjavati stručnim izrazima. Učenici su savladali drugu razinu kada vješto i precizno uočavaju i iskazuju svojstva objekata.

Razina 3: *Neformalna dedukcija.* Prema van Hieleu, tek nakon što se savladaju vještine prepoznavanja objekata, uočavanja i opisivanja njihovih svojstava, moguće je započeti stvarati logičke veze među svojstvima jednog objekta ili između svojstava različitih objekata, oblikovati smislene definicije, postavljati tvrdnje te argumentirano opravdavati svoja zaključivanja, uočavajući postupno nužne i dovoljne uvjete postojanja određenog koncepta. Uvođenjem definicija i postavljanjem tvrdnji, potrebno je postupno uvoditi i simbolički zapis te razvijati vještine vizualizacije uspostavljanjem kvalitetnih veza između govornog jezika, vizualnog prikaza i simboličkog zapisa jer je to preduvjet razumijevanja geometrijskih koncepata i veza.

Tako, na primjer, proučavanjem koja svojstava imaju kvadrat, pravokutnik, paralelogram i romb, koji su prikazani u nekoj točkastoj mreži (Slika 48), učenici mogu uočiti da kvadrat ima sva svojstva koja ima pravokutnik, paralelogram i romb te zaključiti da je *svaki kvadrat pravokutnik*, *svaki kvadrat je paralelogram* i *svaki kvadrat je romb*. Daljnjim proučavanjem svih obostranih odnosa među njima može se postaviti klasifikacija paralelograma, pri čemu je vrlo koristan i vizualni prikaz, jer na njemu dolaze do izražaja uspostavljene veze. Isti vizualni prikaz može se koristiti i za „brušenje" do formalne definicije, a mogu se postupno uvoditi i obrati tvrdnji. Vizualni prikazi objekata i preslagivanje njihovih dijelova radi formiranja novog objekta mogu se koristiti za izvođenje odgovarajućih formula za ploštinu. Ako su likovi prikazani u nekoj točkastoj mreži, rad može započeti s konkretnim veličinama i strukturiranjem, a završiti izvođenjem općeg izraza (Slika 49).



$P = 5 \cdot 3$ $\quad v = b \quad P = 2 \cdot \frac{a \cdot v}{2}$

$P = a \cdot b$ $\quad P = a \cdot v$

Slika 49. Izvođenje formule za ploštinu paralelograma

Za uspješno savladavanje treće razine mišljenja učenicima treba omogućiti da sami stvaraju vlastite definicije objekata (*Paralelogram je*…), a zatim određuju minimalni broj svojstava za opis tog objekta i tako postupno grade formalne definicije. Treba im omogućiti da sami stvaraju inkluzivne odnose među likovima služeći se uočenim svojstvima i definicijama, da samostalno izvode formule za ploštinu, odnos kutova i sl., a svoja objašnjenja da potkrepljuju argumentima, služeći se pritom i raznim vizualnim prikazima te simboličkim zapisima. Treba im omogućiti da određene zakonitosti objašnjavaju na različite načine, da postavljaju obrate tvrdnji i konačno da rješavaju probleme u kojima mogu primijeniti svojstva koja su proučavali i tvrdnje koje su izveli (Crowley, 1987).

Prema van Hieleu, izravno poučavanje formalnih definicija prije 3. razine, a da nisu izvedene kao rezultat nekih prethodnih aktivnosti, unaprijed je osuđeno na neuspjeh, što potvrđuje i de Villiers na temelju svog istraživanja (Van Hiele, 1986; De Villers, 2010). Proces definiranja pojma nije jednostavan te je nerazumno od učenika očekivati da će pukim zapamćivanjem usvojiti formalne definicije. Osim toga, samo poznavanje definicija pojmova ne garantira i razumijevanje koncepata i veza, a bez razumijevanja nije moguća ni primjena. Na primjer, ako učenik zna reći da su paralelogrami četverokuti kojima su nasuprotne stranice paralelne, to ne znači da će pod njima razmatrati pravokutnike, kvadrate i rombove (De Villiers, 1998).

Konačno, učenici su savladali treću razinu ako samostalno definiraju pojmove, na temelju njih rade hijerarhijske klasifikacije, postavljaju opće tvrdnje i odnose sa drugim svojstvima. Na ovoj razini, učenici mogu pratiti proces dokazivanja, ali još uvijek nisu dovoljno samostalni da bi sami gradili svoj dokaz. Uočavaju postojanje sustava definicija, aksioma, teorema i dokaza, ali još uvijek ne mogu razumjeti njihovu ulogu i funkcionalnost.

Razina 4: *Formalna dedukcija.* Prema van Hieleu, tek nakon što su savladane prve tri razine, može se napredovati do samostalnog izvođenja formalnih dokaza te razumjeti potreba i opravdanost aksiomatske izgradnje matematičke teorije.

Za uspješno savladavanje četvrte razine mišljenja, učenicima treba omogućiti da na temelju vizualnih prikaza postavljaju vlastite tvrdnje u obliku „ako…, onda…”, da prepoznaju što je u nekoj tvrdnji zadano (pretpostavka P), a što se izvodi (zaključak Q), da postavljaju obrate tvrdnji, da uočavaju razlike između osnovnih i izvedenih pojmova te između osnovnih (aksioma) i izvedenih tvrdnji (teoremi, leme, korolari), da naslućuju istinitost postavljenih tvrdnji i dokazuju istu tvrdnju na različite načine ili da je opovrgavaju postavljanjem kontra primjera itd. (Crowley, 1987).

Na primjer, ako za četverokut upisan u kvadrat (Slika 46, Razina 4) treba dokazati da je kvadrat, onda učenici koji su savladali četvrtu razinu znaju da treba dokazati da su sve četiri stranice jednakih duljina i da su sva četiri kuta prava. Oni bi bili u mogućnosti izvesti taj dokaz služeći se različitim teoremima (o sukladnosti trokuta, o srednjici trokuta, koristeći Pitagorin poučak itd.). Ako vrhovi upisanog kvadrata nisu u polovištu stranice već dijele stranicu u nekom drugom omjeru, mogli bi dokazati da upisani kvadrat s vrhovima u polovištu ima najmanju ploštinu jer pravokutni trokuti izvan njega imaju najveću ploštinu. Oni koji su savladali četvrtu razinu mišljenja, u procesu dokazivanja uspješno uspostavljaju vezu između govornog jezika, vizualnog prikaza i simboličkog zapisa.

Razina 5: *Apstrakcija i strogost.* Prema van Hieleu, najviši oblik apstraktnog mišljenja je mogućnost razumijevanja i uspoređivanja različitih aksiomatskih sustava te razmatranje definicija, teorema i dokaza za isti objekt u različitim sustavima. Tek na ovoj razini učenici uspješnoj razvijaju vještinu indirektnog dokazivanja po kontradikciji i po kontrapoziciji te mogu jasnije razumjeti značenje konzistentnosti, nezavisnosti i potpunosti određenog aksiomatskog sustava.

Učenici koji funkcioniraju na ovoj razini u stanju su shvatiti da postoje i drugi geometrijski sustavi osim euklidskog, mogu vidjeti sličnosti i razlike tih sustava i međusobno ih uspoređivati. Na primjer, iako vizualni prikaz paralelnih pravaca u euklidskoj i neeuklidskoj ravnini (Slika 46, Razina 5) može izgledati kao da se radi o različitim objektima, na ovoj razini učenici pojam *pravac* mogu tumačiti s razumijevanjem u različitim geometrijskim sustavima te izvoditi odgovarajuće jednadžbe i odnose.

Nastava matematike na sveučilišnoj razini u većini slučajeva provodi se na razini koju mogu uspješno pratiti oni koji su savladali prve četiri razine mišljenja prema van Hieleovu modelu, a bilo bi poželjno da imaju izgrađene neke elemente i pete razine. Međutim, sustav obrazovanja na primarnoj i sekundarnoj razini to uglavnom ne osigurava, osim u nekim iznimnim situacijama (npr. učenici matematičke gimnazije s većim brojem sati matematike), što znači da između ta dva matematička diskursa, na sekundarnoj i tercijarnoj razini, postoji jaz koji netko mora popuniti kako bi se matematičko obrazovanje učenika uspješno nastavilo. Idealno bi bilo da jaz ne postoji, ali ako već postoji, onda ga nekako trebalo premosti. Prvi korak bi, zasigurno, bio steći uvid u razine mišljenja studenata upisanih na matematički kolegij, a zatim, uzajamnim nastojanjem učenika i nastavnika, potražiti neko efikasno rješenje.

3.2. Karakteristike van Hieleova modela

Van Hieleov model razvoja mišljenja, koji je postavljen na opisani način, ima nekoliko ključnih karakteristika: (1) hijerarhijski i sekvencijalan ustroj; (2) specifičnost komuniciranja po razinama; (3) međusobno (ne)razumijevanje; (4) princip dualnosti objekta i metode mišljenja; (5) starosna dob.

(1) Hijerarhijski i sekvencijalan ustroj. Opisani model razvoja mišljenja je hijerarhijski niz razina redoslijednog karaktera, što znači da se razine moraju savladavati od prve pa nadalje bez preskakanja (osim iznimno talentiranih učenika). Da bi netko uspješno funkcionirao na određenoj razini, osnovni preduvjet je steći znanja, vještine i jezik prethodnih razina. Razine nisu diskretne, kako ih je razmatrao van Hiele na samom početku, već je moguće biti na prijelazu između razina (De Villers, 2010, Usiskin, 1982). Osim toga, razine mišljenja iste osobe mogu biti različite za različite sadržaje, ako se nekim sadržajima bave više i detaljnije nego drugima (De Villers, 2010; Van Hiele, 1986). Tako, na primjer, učenici jako dobro znaju klasificirati trokute, ali obično ne znaju klasificirati četverokute.

(2) Specifičnost komuniciranja po razinama. Svaka razina podrazumijeva određena znanja i ima svoj vlastiti način izražavanja i jezik komuniciranja, verbalno, vizualno i simbolički. Na nižim razinama jezik je više neformalan jer je i vokabular siromašniji, a prema višim razinama više se razvija formalni jezik i bogatiji vokabular. Da bi netko uspješno funkcionirao na određenoj razini, osnovni preduvjet je steći znanja, vještine i jezik prethodnih razina.

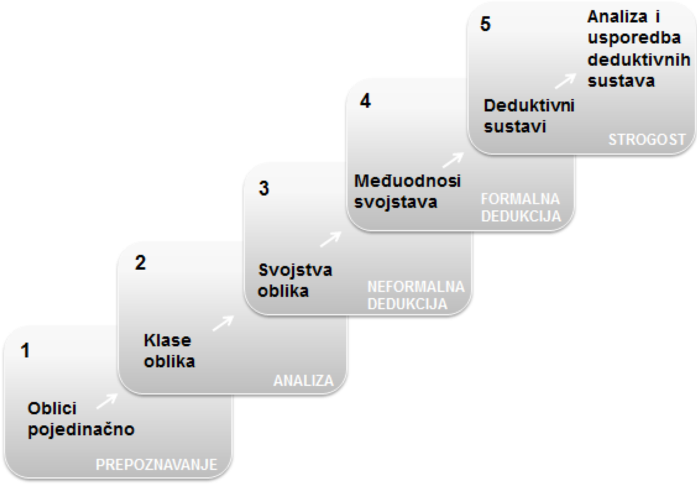
Tako, na primjer, na 2. razini dopušteno je razlikovati kvadrate i pravokutnike, ali na 3. razini za kvadrat se može koristiti i naziv pravokutnik, romb, paralelogram, trapez ili deltoid jer je kvadrat specijalni slučaj svih tih vrsta četverokuta.

(3) Međusobno (ne)razumijevanje. Učenici koji se nalaze na različitim razinama razmišljanja ne mogu se razumjeti jer se koriste različitim jezikom i različitim načinima rješavanja problema te različito tumače iste riječi ili situacije. Isto tako, ako učitelj poučava na razini koju učenici nisu dosegli, oni se ne mogu razumjeti te se željeni napredak u učenju neće pojavit. Kada se učitelj služi jezikom (govornim, vizualnim ili simboličkim), primjerima i sadržajem koji nadilazi razinu mišljenja njegovih učenika, njegovi učenici ne mogu uspješno pratiti takav proces poučavanja te pribjegavaju učenju napamet, a takve sadržaje brzo zaboravljaju i nisu ih u stanju primijeniti, što može biti prilično frustrirajuće i obeshrabrujuće.

Stoga Van Hiele posebno naglašava odnos: učitelj – učenik – tema, odnosno da je nužno potrebno sadržaje i način poučavanja uskladiti s razinama mišljenja koja su učenici dosegli te da se odabirom prikladnih vježbi i prilagođavanjem materije razini mišljenja učenika mogu otkloniti sve teškoće pri učenju i poučavanju geometrije. Naime, jednom kad učenik postigne određenu razinu, on savladava i sadržaje koji su bili potrebni za postizanje te razine, a ako nakon nekog vremena sadržaje i zaboravi, ostvarena razina mišljenja ne opada (Van Hiele, 1986, str. 37 – 40).

(4) Princip dualnosti objekta i metode mišljenja. Napredovanje sa jedne razine mišljenja na drugu razinu zasniva se na principu dualnosti objekta i metode mišljenja. Naime, svaka razina ima svoj objekt (ono o čemu mislimo) i metodu (način na koji mislimo) te ishodi metode mišljenja (proizvod mišljenja) tekuće razine postaju objekt mišljenja (predmet proučavanja) sljedeće razine, a napredak se očituje u sposobnosti prelaska s metode na objekt (Slika 50).

Učenici najprije prepoznaju određene oblike (predmet mišljenja Razine 1) te ih na temelju globalnog izgleda razvrstavaju u grupe (proizvod mišljenja Razine 1). Zatim formirane grupe (predmet mišljenja Razine 2) analiziraju i uočavaju njihova svojstva (proizvod mišljenja Razine 2), a tek onda među tim svojstvima (predmet mišljenja Razine 3) stvaraju veze (proizvod mišljenja Razine 3). Opisane veze među svojstvima (predmet mišljenja Razine 4) istog objekta ili veze između objekata strukturiraju u dobro uređen sustav (proizvod mišljenja Razine 4), a zatim taj sustav (predmet mišljenja Razine 5) uspoređuju sa sličnim sustavima (proizvod mišljenja Razine 5).



Slika 50. Prikaz razina prema predmetima i proizvodima mišljenja

(5) Starosna dob. Napredovanje (ili izostanak napredovanja) s jedne razine mišljenja na drugu razinu ne ovisi o starosnoj dobi niti sazrijevanju već više o načinu učenja, o sadržaju i metodama poučavanja. Neke metode ubrzavaju napredak, a neke ga koče ili sprečavaju. Na primjer, ako se od učenika traži da memoriraju gotove formulu ili odnose („Svaki kvadrat je trapez”), oni će to napraviti bez razumijevanja i brzo zaboraviti (Abdullah i Zakaria, 2013; Usiskin, 1982; Van Hiele, 1986). Ova karakteristika, osim što daje obrazloženje slabijih ishoda učenja, istodobno je i ohrabrujuća jer znači da za učenje nikada nije kasno.

3.3. Van Hieleove faze učenja i poučavanja

Za uspješno napredovanje s jedne razine mišljenja na drugu razinu, van Hieleova teorija predlaže proces učenja u pet faza: (1) faza informiranja, (2) faza usmjerenog vođenja, (3) faza objašnjavanja, (4) faza aktivnosti otvorenog tipa, (5) faza povezivanja (Van Hiele, 1986 i 1999).

Iako se opis karakteristika pojedine faze učenja u nastavku daje sekvencijalno, samo provođenje faza nije linearan proces već se prolaženje kroz faze i ponovno vraćanje na neku od prijeđenih faza treba prilagoditi dinamici rada učenika i njihovim (pred)znanjima. Bolje je zastati i vratiti se na pojam ili neki nejasan odnos, nego „šutke” preći nadajući se da će to oni ipak naučiti sami.

Faza 1: *Informiranje* (eng. *inquiry/information*). Prirodno je nastavni sat započeti pitanjima, kraćim istraživanjem ili raspravom, a vezano za temu koja se želi obraditi. U tu svrhu se može pripremiti kratki upitnik (u pisanom obliku ili kao on-line kviz) za brzo prikupljanje informacija o znanjima učenika, neka složenija geometrijska figura sa koje treba pročitati određenu poruku ili prepoznati neke podfigure, i koja će biti podloga za raspravu itd.

I dok učitelj kroz uvodnu raspravu saznaje što učenici o temi već znaju te na koji način koriste svoja znanja i jezik, učenici se uvode u raspravu i aktivnosti te se postupno zbližavaju s odabranom temom i otkrivaju smjer daljnjeg rada. Na taj način, daljnje učenje i poučavanje učitelj može oslanjati na uočeno predznanje i tako izbjeći ponavljanje onoga što učenici već znaju ili popuniti pokoju uočenu prazninu, a rječnik učenika korigirati ili nadopuniti.

Faza 2: *Usmjereno vođenje* (eng. *directed orientation*). Nakon uvodne rasprave korisno je da učenici samostalno istražuju kroz pažljivo strukturirane zadatke: sami crtaju, mjere, izračunavaju, povezuju itd. kako bi otkrili ili razjasnili određene odnose koji im do tada nisu bili poznati ili su im bili nejasni. Cilj je uvesti neki novi pojam, postaviti neku novu tvrdnju ili pripremiti podlogu za dokazivanje, ovisno o temi koja se obrađuje.

Za ovu fazu korisno je pripremiti kraće, jednostavnije zadatke tako da se dobiju točno određeni odgovori. Zadaci mogu biti pripremljeni u obliku programiranog materijala, ali tako da učenici trebaju izvesti i neke svoje zaključke. Ako tijekom samostalnog rada učenici zapnu, može ih se potaknuti potpitanjem, na koje bi mogli dati odgovor.

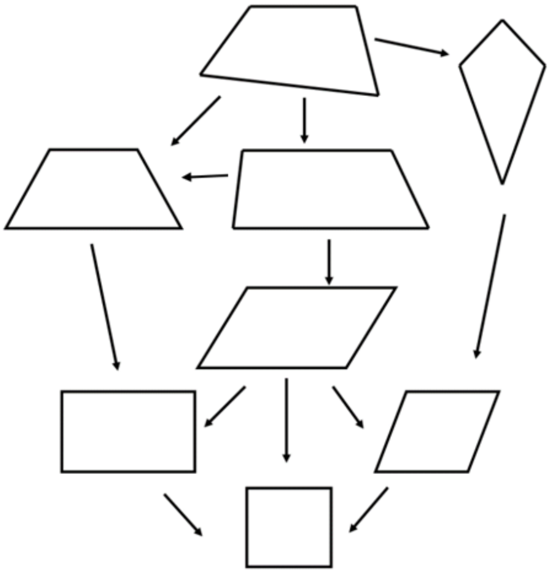
Faza 3: *Objašnjavanje* (eng. *explicitation*). Nakon svakog samostalnog rada učenika jako je važno da učenici svojim riječima opišu ono što su radili i do kojih su zaključaka došli te da međusobno razmijene i argumentiraju svoje zaključke, bez utjecaja učitelja. Učitelj bi trebao pozorno pratiti komunikaciju učenika te ih usmjeravati na korištenje točnog i primjerenog načina izražavanja, bilo da se radi o verbalnom opisu, vizualnom prikazu i simboličkom zapisu. Na taj način, učenici prirodnim putem razvijaju matematički rječnik, a učitelj ih ima priliku korigirati i unaprijediti njihov rječnik.

Faza 4: *Aktivnosti otvorenog tipa* (eng. *free orientation*). Nakon prve tri faze ili nekoliko ciklusa njihovih izmjena, učenici bi trebali rješavati složenije zadatke, s višim kognitivnim zahtjevima od onih koji su bili u prethodnim fazama, a posebno bi bili korisni zadaci s više ključnih koraka, zadaci koji se mogu riješiti na više različitih načina ili koji imaju više rješenja. Način snalaženja u novim i složenijim situacijama, u kojima treba primijeniti ono što se neposredno prije obrađivalo, pokazuje u kojoj mjeri se uvedeno razumjelo.

Korisnije je kada učenici sami rješavaju zadatak, bez pomoći učitelja, na način koji je njima najprimjereniji. Dok su učenici okupirani samostalnim istraživanjem i rješavanjem, učitelj ih dodatno upoznaje praćenjem njihovog procesa rješavanja, otkriva ima li još kakvih nejasnoća i prema potrebi ih usmjerava.

Faza 5: *Povezivanje* (eng. *integration*). Korisno je povremeno se osvrnuti na ono što se radilo, ukratko opisati provedene aktivnosti, istaknuti najvažnije zaključke, a zatim sve objediniti u jednu funkcionalnu cjelinu objekata i relacija i sažeti koliko je moguće. Sistematizacija i strukturiranje obrađenih sadržaja mogu se provoditi na različite načine, što svakako ovisi i o temi koja se obrađuje, a bilo bi dobro da to naprave najprije učenici sami. Uloga učitelja je da prati preciznost i točnost izražavanja učenika te način strukturiranja, a prema potrebi da intervenira ukoliko su nešto zaboravili istaknuti ili su istaknuli pogrešno.

Na primjer, ako su se kroz ove aktivnosti učenici bavili istraživanjem svojstava četverokuta, cilj je mogao biti uspostavljanje inkluzivnih odnosa i izgradnja hijerarhijske klasifikacije. Izgradnjom mreža odnosa među svojstvima četverokuta učenici su mogli postupno razvijati neformalno deduktivno zaključivanje, korištenjem obrazloženja oblika „to vrijedi jer je…" ili „ako…, onda…" njihov jezik postupno poprima apstraktni karakter. Ako bi pri tome koristili i vizualni prikazi (Slika 51) strukturiranje svih odnosa bi bilo pregledno, a odgovarajuće veze lako uočljive.



Slika 51. Klasifikacija četverokuta

Završavanjem svih faza u radu s četverokutima na opisani način učenici zasigurno mogu doseći novu razinu mišljenja koja se temelji na konceptima i vezama među četverokutima. Drugim riječima, kroz te aktivnosti imali bi mogućnost napredovanja s druge na treću razinu mišljenja. Ovisno o temi koja se obrađuje i pripremljenom materijalu, sve faze ne moraju nužno biti provedene na jednom nastavnom satu.

Prema van Hieleu, najveći doprinos u poučavanju geometrije su pažljivo osmišljeni materijali i niz aktivnosti, koje trebaju započeti „istraživačkom fazom, postupno gradeći koncepte i odgovarajući jezik te završiti sažimanjem koje učenicima pomaže integrirati ono što su naučili u ono što već znaju" (Van Hiele, 1999, str. 311).

Brojna istraživanja nastave geometrije potvrđuju da strategija poučavanja koja se temelji na van Hieleovim fazama učenja poboljšava geometrijsko mišljenje učenika, kao i razumijevanje geometrijskih koncepata zbog čega se ostvaruje pozitivan učinak na postignuća u geometriji (Crowley, 1987; Teppo, 1991; Van Hiele, 1999; Abdullah i Zakaria, 2011, 2012 i 2013; Siew, Chong i Abdullah, 2013; Dongawi, 2014). Također, smatra se da van Hieleove faze učenja osiguravaju djelotvoran okvir za jasno strukturiranje nastavnih jedinica i daju jasna objašnjenja kako učitelj može voditi učenike s jedne na drugu razinu (npr. Abdullah i Zakaria, 2013, Dongawi, 2014).

Učenjem geometrijskih sadržaja kroz pet ključnih aktivnosti: raspravu, rješavanje programiranog materijala, objašnjavanje dobivenih rezultata, rješavanje zadataka otvorenog tipa te integraciju rezultata u funkcionalnu cjelinu, učenici su kontinuirano aktivni, istražuju, izvode zaključke, objašnjavaju, primjenjuju, sistematiziraju itd. Opisanom strategijom učenici se stavljaju u centar procesa učenja, a učitelji taj proces koordiniraju i vode. Stalni suradnički angažman dovodi do poboljšanja jezika učenika od neformalnog do formalnog, podiže razinu njihovog mišljenja, povećava razumijevanje geometrijskih koncepata i konačno pospješuje postizanje ishoda učenja. Sve to dovodi i do jačanja samopouzdanja i vjere u vlastite matematičke sposobnosti, što dodatno motivira na učenje (Van Hiele, 1999; Siew, Chong i Abdullah, 2013; Armah, Cofie i Okpoti, 2018).

Ukratko, opisana strategija poučavanja u pet faza predstavlja dobar pedagoški alat, odnosno predložak za planiranje i predstavljanje nastavnih jedinica, a učenici, slijedeći tako organizirani niz aktivnosti, do očekivanog dolaze brže nego inače (npr. Abdullah i Zakaria, 2011, 2012 i 2013; Dongawi, 2014).

Neosporno je da učenju i poučavanju geometrije te razvoju geometrijskog mišljenja treba pridati posebnu pozornost jer je geometrija važna kako za razvoj i razumijevanje cjelokupne matematike tako i za primjenu u životu i radu svakog pojedinca. No, s druge strane, nastavna praksa pokazuje da učenici diljem svijeta imaju dosta teškoća pri učenju geometrije: mnogi se bore s osnovnim konceptima i terminologijom, mnogi imaju problema s definiranjem pojmova te uspostavljanjem veza među pojmovima, ali i u provođenju jednostavnijih dokaza (Dongawi, 2014). Jedno je sigurno: učitelj je taj koji odabire nastavni materijal i plan izvođenja te on ponajviše može doprinijeti uspješnom ostvarivanju ishoda učenja (Van Hiele, 1999).

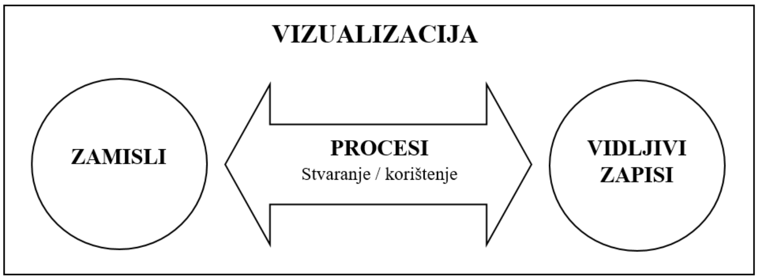
No, osigurati učenicima da kroz opširan i zahtjevan nastavni plan i program razvijaju i geometrijsko mišljenje, nije nimalo jednostavan posao, ali jest obveza i odgovornost svakog nastavnika matematike. Da je to moguće uspješno provesti potvrđuju razna obrazovna istraživanja utemeljena na van Hieleovoj teoriji, koja zasigurno u tom smislu ohrabruju i olakšavaju. Prema riječima van Hielea: „Kada pažljivo njegujete geometrijsko mišljenje učenika, oni će biti uspješniji u savladavanju i Euklidove matematike” (Van Hiele, 1999, str. 316).

4. Razvoj vještina vizualizacije i vizualno-prostornih sposobnosti

Jedna od bitnih osobina čovjeka je „vidjeti”, vidjeti očima, ali vidjeti i mislima. Na temelju onoga što gleda očima, promatrač u svojim mislima stvara zamisli, koje u većoj ili manjoj mjeri odgovaraju onome što promatra. Isto tako, prema onome što stvara u mislima, osoba ima potrebu svoju kreaciju učiniti vidljivom i drugima pa je opisuje verbalno ili prikazuje odgovarajućim prikazom ili simbolom na papiru ili nekom drugom mediju.

Mnoge matematičke ideje stvarane su upravo na opisani način: gledanjem i proučavanjem određenih situacija, njihovim zamišljanjem te predstavljanjem konkretnim vidljivim prikazom na odgovarajući način i putem odgovarajućeg medija. I pri učenju postojećih matematičkih ideja prolazi se sličan put: gledanjem i proučavanjem vidljivog zapisa (jezičnog, 2D ili 3D prikaza, simboličkog) stvaraju se odgovarajuće zamisli na temelju kojih se promatrana ideja razumije i postaje bliska. Također, pri poučavanju tih istih matematički ideja, poučavatelj na temelju svojih zamisli stvara zapis (jezični, 2D ili 3D prikaz, simbolički) kako bi svojim učenicima približio promatranu ideju da i oni stvore zamisli koje će ih dovesti do razumijevanja promatranog.

U pozadini opisanog je proces prenošenja informacija i komuniciranja raznih ideja posredstvom odgovarajućih zamisli ili vidljivih zapisa. Upravo taj proces kao i ono što se tijekom procesa stvara ili koristi, bilo kroz zamisli ili kroz vidljivi zapis naziva se *vizualizacijom* (Slika 52).



Slika 52. Pojam *vizualizacija*

S obzirom na čovjekove biološke karakteristike, jasno je da se vizualizacija koristi od kada je svijeta i čovjeka te ona nikako nije nedavni izum (Zimmermann & Cunningham, 1990, str. 2). No, s obzirom na njezin potencijal i mogućnosti raznovrsne primjene, pojam vizualizacije se ne koristi na jedinstven način. Definicija pojma obično se prilagođava kontekstu unutar kojeg se pojam koristi kao i prema namijeni s kojom se koristi. I ne samo da se u različitim područjima koriste različite definicije pojma vizualizacija, već je to prisutno i unutar istog područja. Tako se i unutar matematike i matematičkog obrazovanja pod tim pojmom podrazumijevaju različite stvari, među kojima postoje sličnosti, ali i razlike.

Osim samog pojma vizualizacije, u njezinoj primjeni nastali su i razni drugi pojmovi iz potrebe prenošenja i komuniciranja odgovarajućih poruka i ideja. Kako se novi pojmovi vezuju uz isti pojam čije značenje nije jedinstveno definirano, i novi pojmovi se po svojim značenjima razlikuju. Zato je važno, radi jasnoće čitanja i razumijevanja, prije same upotrebe bilo kojeg od tih pojmova, objasniti što se pod kojim pojmom podrazumijeva.

U tu svrhu, u ovom dijelu rada detaljnije će se razmotrit različiti opisi pojma vizualizacije i njegovo značenje u kontekstu matematike kao i pojmovi koji se uz njega vezuju, a koji su potrebni za praćenje i razumijevanje daljnjeg rada. Gdje to bude potrebno, a radi jasnoće i razumijevanja, istaknut će se sličnosti i razlike različitih tumačenja istog pojma. Također, za svaki pojam koji se koristi, istaknut će se definicija pod kojom se taj pojam koristi u daljnjem radu i na što se sve ta definicija odnosi.

Konačno, prirodno je zapitati se: *Čemu služi vizualizacija u matematici i matematičkom obrazovanju*?

Mogući i prihvatljivo dobar odgovor na to pitanje daju razna eksperimentalna istraživanja o vizualizaciji u matematičkom obrazovanju, koja se intenzivno provode zadnjih tridesetak godina. Rezultati tih istraživanja ukazuju na pozitivan učinak pri učenju i poučavanju matematike koje je prožeto vizualizacijom na odgovarajući način te na moguću štetu kada se vizualizacija koristi neprimjereno ili se uopće ne koristi. Naime, vizualizacija je moćna zbog svoje konkretnosti pa pogoduje biološkim karakteristikama čovjeka da se dobro snalazi u sustavu apstraktnih matematičkih koncepata te apstraktnom jezičnom i simboličkom sustavu, kojima se ti koncepti predstavljaju, posebno u eri naprednog razvoja računalne tehnologije. Kao takva, vizualizacija i sustav znakova kojemu ona pripada ima veliki potencijal ako se ciljano i spretno koristi u međuigri spomenutih apstraktnih sustava. Stoga je prirodno zapitati se: *Kako iskoristiti potencijal vizualizacije za učinkovito učenje i poučavanje matematike*? te *Može li sustav vizualnih znakova biti punopravni član matematičkog obrazovanja uz apstraktni jezični i simbolički sustav*?

Doprinos odgovorima na postavljena pitanja daju i rezultati provedenog eksperimentalnog istraživanja koje će biti opisano u ovom radu.

4.1. Općenito o pojmu *vizualizacija*

Pojam *vizualizacija* znači različite stvari različitim skupinama stručnjaka. U najširem smislu, pojam *vizualizacija* podrazumijeva *stvaranje određene slike u svrhu prenošenja ili komuniciranja poruke*.

Vizualizacijom se, kroz razne zapise i zamisli na učinkovit način prenose i komuniciraju i apstraktne i konkretne ideje od samih početaka čovječanstva. Tako se već u pećinama prapovijesnog doba mogu pronaći prve slike sa svrhom prenošenja određenih poruka. Neka od prvih pisama koja su služila u komunikacijske svrhe bila su slikovna pisma poput egipatskih hijeroglifa. Prva matematička znanja čuvala su se i prenosila slikovnim porukama. Najstariji poznati slikovni natpis, pronađen u Kišu, drevnom gradu u Mezopotamiji, današnjem centralnom Iraku, oko 3500 godine prije naše ere, sadržavao je znakove za brojeve prikazane rukom i prstima (Slika 53). Zahvaljujući upravo vizualizaciji, odnosno učinkovitom komuniciranju raznih ideja i prenošenju poruka kroz slike i razne druge zapise, narodi diljem svijeta uspjeli su sačuvati veliki dio svoje kulturne baštine te prenositi svoja znanja iz generacije u generaciju.

Slika 53. Najstariji poznati slikovni natpis[13]

Vizualizacija se u tom smislu kontinuirano koristi od samih svojih početaka pa sve do današnjih dana. No, da bi se razumjelo što određeni pojam znači, potrebno je znati definiciju tog pojma, a zatim i na što se sve ta definicija odnosi (Sierpinska, 1992, str. 30). Osim toga, s obzirom da se vizualizacija danas naširoko koristi u različitim područjima društvenog i profesionalnog života i djelovanja

[13] Slika preuzeta iz Dadić (1992).

čovjeka, definicija tog pojma nije i ne može biti jedinstvena. Stoga je korisno razmatrati različite vrste definicija te ono što im je zajedničko kao i ono po čemu se razlikuju.

Iako ne postoji jedinstvena „opća" definicija pojma *vizualizacija*, većina njih pod tim pojmom podrazumijeva *prikaz nekog objekta ili situacije,* ali i *proces stvaranja tog prikaza*. Neke definicije naglasak stavljaju na proces kao što je npr. definicija prema Cambridge rječniku, po kojem je *vizualizacija* „čin stvaranja slike u našem umu o nečemu ili nekomu". Neke druge definicije, pored procesa razmatraju i rezultat procesa, kao npr. definicija u Merriam Webster rječniku, po kojem je *vizualizacija*: (1) „formiranje umnih vizualnih slika"; (2) „ čin ili postupak interpretacije vizualnog ili stavljanje u vidljivi oblik" itd.

Prema Duvalu, francuskom filozofu i psihologu, koji se od 1970. godine bavi matematičkim obrazovanjem i daje veliki doprinos tumačenju pojma vizualizacije, *vizualizacija* je „prije svega jedan od temeljnih kognitivnih procesa uma" (Duval, 2014, str. 168.). To je u skladu i s prethodnim dvjema definicijama koje govore o *umnim procesima/slikama,* ali ide i korak dalje, naglašavajući spoznajnu važnost tog pojma. Drugim riječima, pod pojmom *vizualizacija* on podrazumijeva određenu sposobnost koju pojedinac može koristiti u svrhu učenja. Time se značaj vizualizacije pomiče s osnovnog prenošenja poruke i komunikacije neke ideje na važan segment svakog pojedinca, a to je obrazovanje.

Kako bi znali na što se točno taj kognitivni proces odnosi i na koji način ga koristiti u svrhu učenja potrebno je obuhvatiti puno značenje pojma. Prema Sierpinskoj (1992, str. 29), definicija pojma može imati mnogo različitih značenja, ovisno o kontekstu, pa se očekivano značenje pojma *vizualizacija* u matematici razlikuje od uobičajene upotrebe u svakodnevnom govoru ili psihologiji. Zapravo, značenje pojma *vizualizacija* u kontekstu matematike puno je šire od osnovnog značenja „formiranja i manipuliranja umnim slikama". Da bi tu razliku posebno naglasili, neki autori se služe i novim pojmom: *matematička vizualizacija*.

S obzirom da se daljnji rad bavi tumačenjem pojma i njegovom primjenom unutar konteksta matematike, nije nužno potrebno isticati da se radi o matematičkoj vizualizaciji te će se taj pojam koristiti samo u svrhu preuzimanja opisa i tumačenja drugih autora, kada se oni služe tim nazivom.

4.2. Značenje pojma *vizualizacija* u kontekstu matematike

Kao što je već rečeno, ne samo da se pojam vizualizacije različito definira u različitim područjima, već niti u kontekstu matematike ne postoji njegova jedinstvena definicija, unatoč naporima brojnih istraživača matematičkog obrazovanja zadnjih nekoliko desetljeća (Nardi, 2014). Ipak, unutar jednog područja kao što je matematika, definicije postavljaju matematičari pa su razlike među definicijama manje nego razlike među definicijama koje postavljaju različiti stručnjaci iz različitih područja (Dreyfus, 2014, str. 179). Dalje se bavimo tumačenjem pojma vizualizacije samo unutar konteksta matematike te sličnostima i razlikama postojećih definicija koje se učestalije koriste. Na kraju se izdvaja ona koja će se koristiti u daljnjem radu.

U raspravi o pitanju „Što je matematička vizualizacija?", urednici Zimermann i Cunningham (1990) u uvodnom dijelu knjige *Visualization in teaching and learning mathematics,* u kojoj sabiru značajnije radove o vizualizaciji u matematici na dodiplomskoj razini, navode kako oni pod tim pojmom podrazumijevaju „proces stvaranja ili korištenja geometrijskih ili grafičkih reprezentacija matematičkih koncepata, principa ili problema, bez obzira jesu li nacrtani ručno ili su stvoreni pomoću računala." (Zimermann i Cunningham, 1991, str. 1). Također, oni imaju potrebu posebno istaknuti da se taj pogled na vizualizaciju razlikuje od uobičajene upotrebe i značenja tog pojma u psihologiji, gdje je značenje „bliže svom temeljnom značenju – oblikovati mentalnu sliku" (Zimermann i Cunningham, 1991, str. 3). Dakle, oni se udaljavaju od značenja koje se odnosi samo na stvaranje umnih slika te naglasak stavljaju na vanjske zapise pri čemu rade razliku između čistih geometrijskih prikaza i drugih prikaza koji predstavljaju osim geometrijskih i neke druge koncepte, principe ili probleme. Osim toga, jasno naznačuju da taj prikaz može biti napravljen primjenom različitih medija, u slučaju matematike: ručno ili računalom. Unutar definicije, oni uvode i novi pojam „reprezentacija", misleći pri tome na ono što je prikazano na vidljiv način.

Proučavajući ulogu i različite vrste vizualizacije u kontekstu matematičke analize, Guzman (2002) vizualizaciju vidi kao korisno sredstvo u konkretnom prikazivanju apstraktnih matematičkih objekata te navodi da se pod matematičkom vizualizacijom podrazumijeva „način djelovanja s eksplicitnom pozornošću na moguće konkretne prikaze objekata kojima se manipulira kako bi se postigao učinkovitiji pristup apstraktnim odnosima koji se obrađuju" (Guzman, 2002, str. 1).

Iz danog opisa vidljivo je da se naglasak stavlja više na opis uloge nego samih bitnih karakteristika vizualizacije, opisujući vizualizaciju kao sredstvo međuigre između apstraktnog i konkretnog u svrhu boljeg razumijevanja „objekata kojima se manipulira". Dakle, za Guzmana, vizualizacija nije samo proces stvaranja već se u tom procesu stvaranja između ostalog koristi i konkretni prikaz kao sredstvo vizualizacije. Ukazivanjem na važnost konkretiziranja apstraktnih ideja ili objekata u svrhu boljeg razumijevanja, za njega su zapravo važni konkretni prikazi, čime vizualizaciju kao proces indirektno stavlja u drugi plan.

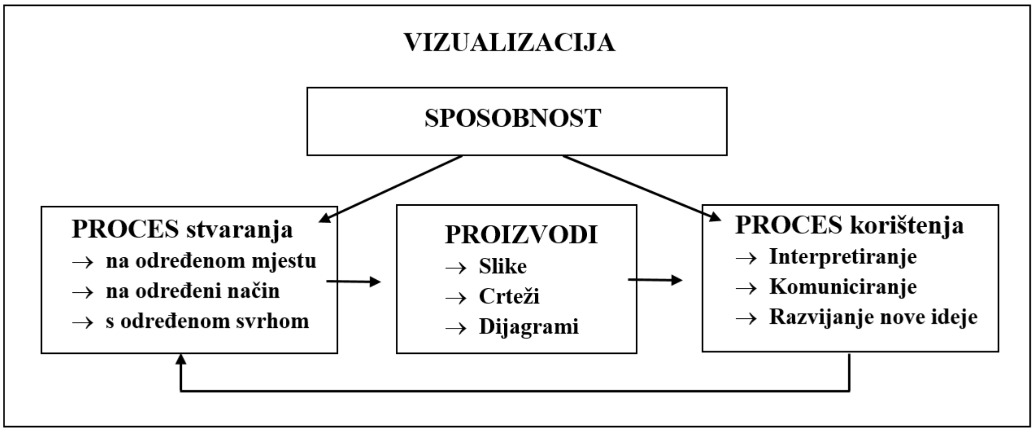
Proučavajući različite aspekte pojma vizualizacije kroz obrazovna istraživanja u vremenskom periodu od 1988. do 2006., Presmeg (2006) ukazuje na važnost potrebe da se terminologija oko vizualizacije i srodnih pojmova pojasni barem na nivou rada koji se piše jer ne postoji jedinstveni pristup te pod pojmom vizualizacije podrazumijeva „procese stvaranja i transformiranja i umnih vizualnih slika i svih zapisa prostorne prirode, koji se mogu uključiti u rad matematike" (Presmeg, 2006, str. 3).

Iz danog opisa, vidljivo je da Presmeg razmatra i proces stvaranja, ali i proces korištenja stvorenog. Za nju su ti procesi neizostavni temelji međuigre između umnih slika i vanjskih zapisa, vođeni upravo umnim slikama koje osoba zamišlja dok stvara svoju vidljivu kreaciju. Zalažući se za sistematiziranje teorije koja se stvara oko pojma vizualizacije, Presmeg uvodi i detaljno razmatra srodne pojmove te različite vrste umnih slika koje sudjeluju u procesu vizualizacije, o čemu će biti više riječi kasnije.

Nekoliko godina kasnije, promišljajući o vizualizaciji kao epistemološkom alatu za učenje matematike, u istoimenom radu Presmeg (2014) izdvaja definiciju koju daje Arcavi te ističe kako „mnogi autori prihvaćaju upravo tu definiciju […] jer je dovoljno široka da uključi i proizvod i proces, vizualizaciju kao artefakt (npr. brojevna crta kao alat za učenje), ali i kao značenje koje konstruira svaki pojedini učenik." (Presmeg, 2014. str. 152). Zapravo, Arcavi ne daje „svoju" definiciju, već predlaže definiciju koja objedinjuje više različitih definicija:

„Vizualizacija je sposobnost, proces i proizvod stvaranja, interpretiranja, korištenja i promišljanja o slikama, crtežima, dijagramima, u našim mislima, na papiru ili s tehnološkim alatima, s ciljem prikazivanja i komuniciranja informacija, razmišljanja o idejama te razvijanja do tada nepoznatih ideja i unapređivanje razumijevanja." (Arcavi 1999, str. 56; Arcavi, 2003, str. 26).

Na temelju dane definicije vidljivo je da se pojam vizualizacija prije svega odnosi na **sposobnost** stvaranja i korištenja proizvoda, što znači da se ta sposobnost može razvijati ako se koristi na odgovarajući način. Razvijanjem sposobnosti vizualizacije stječu se odgovarajuće vizualno-prostorne vještine. Nadalje, pojam vizualizacija odnosi se na **proces stvaranja** određenog proizvoda na određenom mjestu (u mislima, na vanjskim medijima), na određeni način (ručno ili pomoću tehnoloških alata) i s određenom svrhom (prikazivanje, unapređivanje znanja, komuniciranje). Također, pojam vizualizacija odnosi se na **proces korištenja** određenog proizvoda bilo u svrhu s kojom je nastao (interpretiranje prikazanog i unapređivanje razumijevanja ili uzajamna komunikacija), bilo u svrhu dubljeg promišljanja te razvijanja do tada nepoznatih matematičkih ideja. Konačno, pojam vizualizacija odnosi se i na **sam proizvod** koji nastaje u procesu stvaranja ili je nositelj procesa korištenja (Slika 54).



Slika 54. Pojam *vizualizacija* prema Arcaviju

S obzirom da se u ovom radu bavimo učenjem i poučavanjem matematike, posebno geometrije, razvojem vizualno-prostornih sposobnosti te primjenom procesa vizualizacije i u smislu stvaranja određenog vizualnog prikaza i u smislu efikasnog korištenja tog prikaza, a definicija koju daje Arcavi pokriva sve potrebne aspekte, upravo se ova definicija pojma vizualizacije koristi i u ovom radu.

Kako bi se stekao dublji uvid u pojam *vizualizacije* i razumjelo njegovo puno značenje u kontekstu matematike, potrebno je detaljnije razmotriti elemente vizualizacije i njihove karakteristike. Drugim riječima, potrebno je razmotriti na što se sve odnose procesi i proizvodi vizualizacije.

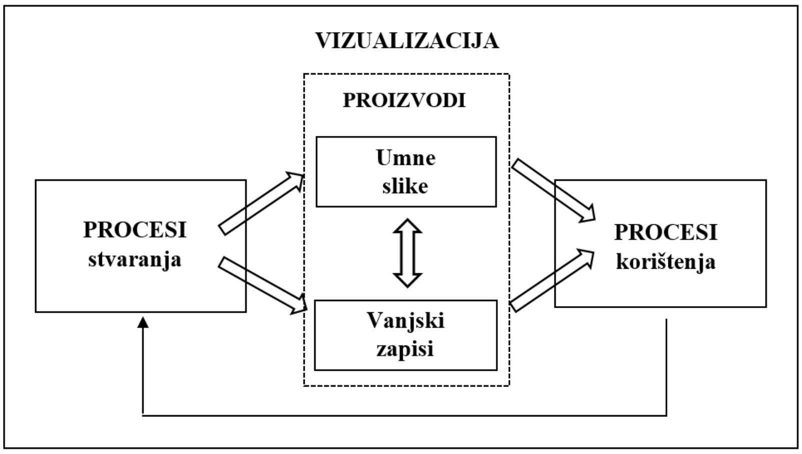
4.3. Elementi vizualizacije i njihove karakteristike

Kada se stvara neki vanjski zapis koji uključuje i prostorne odnose, tada se u umu osobe stvara odgovarajuća vizualna slika. Presmeg (2006) predlaže da se slike, koje osoba zamišlja u umu tijekom procesa vizualizacije, jednostavno nazivaju *vizualne slike* (eng. *visual images* ili *mental images*), a sve ostalo (posredstvom čega vizualne slike postaju vidljive drugima) da se naziva jednim imenom *zapis* (eng. *inscription*). U tom kontekstu, vizualne slike su unutarnji prikazi (eng. *internal representations*), a vidljivi zapisi su vanjski prikazi (eng. *external representation*), pod kojima Presmeg podrazumijeva „grafički prikaz" (eng. *graphical representation*) (Presmeg, 2006, str. 207).

Iako mnogi autori, za sve ono posredstvom čega vizualne umne slike postaju vidljive, radije koriste izraz *reprezentacija* (eng. *representation*), odnosno *prikaz*, Presmeg smatra da izraz „reprezentacija" nije dobar jer se koristi naširoko i prožet je različitim značenjima pa može dovesti do različitih tumačenja, a time i do međusobnog nerazumijevanja.

U ovom radu, za sve vrste (unutarnjih) prikaza koje netko zamišlja u svom umu koristit će se naziv *umna slika*, ili *umna vizualna slika*, a za sve vrste vanjskih prikaza koristit će se naziv *zapis* ili *vanjski zapis*. Riječ „reprezentacija" koristit će se u slučaju kada se određena misao preuzima od autora koji se služe tim nazivom.

Dakle, elementi vizualizacije, koji će se razmatrati u kontekstu matematike, su umne slike i vanjski zapisi kao proizvodi vizualizacije te procesi stvaranja i korištenja tih proizvoda (Slika 55).



Slika 55. Elementi vizualizacije

Iako je procese teško odvojiti od samih proizvoda koji su rezultat tih procesa, kako bi se razmotrile njihove karakteristike ipak ih je potrebno proučavati i odvojeno. U tu svrhu, najprije će se razmotriti proizvodi vizualizacije jer su oni temeljni nositelji procesa, a zatim i sami procesi koji sudjeluju u međuigri stvaranja i efikasnog korištenja proizvoda pri učenju i poučavanju matematike, posebno geometrije.

4.3.1. Proizvodi vizualizacije

Kako je već opisano, proizvodi vizualizacije su različite vrste slika koje nastaju u umu, a stimulirane su vanjskim zapisima, kao i različite vrste zapisa koji se koriste u radu s matematikom, a putem kojih i umne slike postaju dijelom vidljive. Nedvojbeno je da postoji stalna uzajamna veza između vanjskih zapisa i stimuliranih umnih slika te se niti umne slike mogu promatrati odvojeno od vanjskih zapisa, niti se vanjski zapisi mogu izolirati od umnih slika. No, upravo radi te uzajamnosti potrebno je sagledati posebno karakteristike i umnih slika i vanjskih zapisa jer karakteristike vanjskih zapisa utječu na karakteristike umnih slika i obratno (Pape i Tchoshanov, 2001, str. 120).

4.3.1.1. Umne slike

Prema Presmeg (1986), *umna slika* je „svaka umna tvorevina (shema) koja oslikava vizualne ili neke druge prostorne informacije" (Presmeg, 1986, str. 42). Uz definiciju je naglašeno da se ta umna slika stvara i bez prisustva opažajnog objekta jer je sasvim jasno da je uz prisustvo opažajnog objekta moguće imati i analognu sliku u umu.

Dana definicija je dovoljno široka da može uključivati različite vrste slika koje oslikavaju razne oblike (eng. *shapes*), obrasce (eng. *patterns*), forme bez „slike u umu" (eng. *forms*), ali i razne „brojevne forme" (eng. *number forms*) pod kojim Paivio (1971) podrazumijeva prostorno organizirane jezične, numeričke i matematičke simbole koji oblikuju neku vrstu slike. Također, definicija podrazumijeva da su te slike, pri oslikavanju određenih vizualnih informacija, žive i jasne.

Provodeći trogodišnje empirijsko istraživanje, u kojem sudjeluje 13 srednjoškolskih nastavnika i njihovih 54 učenika, Presmeg (1986) uočava korištenje pet vrsta umnih slika: (1) konkretne slike („slike u umu"); (2) obrasci/uzorci (slike koje prikazuju čiste odnose, očišćene od konkretnih detalja, shematske slike); (3) slike zapamćenih formula (netko „vidi" formulu u svom umu na način kako je prethodno bila negdje zapisana); (4) kinestetičke slike (slike evocirane fizičkim pokretima tijela); (5) dinamičke slike (slike kretanja ili transformiranja) (Presmeg, 1986, str. 43-44).

(1) Konkretne slike (eng. *concrete imagery*). Kada se razmatraju realistične situacije, onaj tko o njima razmišlja, u svom umu stvara odgovarajuću konkretnu sliku koja odgovara opisanoj situaciji pa i onda kada ta situacija nije dostupna oku te osobe. Tu sliku Presmeg naziva konkretna slika uma (eng. *picture in the mind*).

(a)

(b)

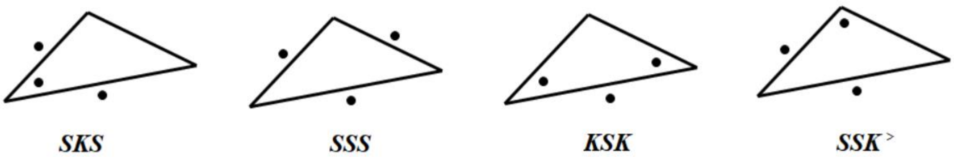
Slika 56. Realistične situacije prikazane fotografijom

Na primjer, može se razmatrati neka površina u obliku trokuta zasađena cvijećem (Slika 56a), kojoj treba odrediti koliku površinu zauzima ili neka kuća za stanovanje u obliku trokutaste prizme (Slika 56b), kojoj treba odrediti veličinu prostora kojeg zauzima. Osoba koja se bavi time, u svom umu zaista može zamisliti konkretne slike površine s cvijećem, odnosno kuće za stanovanje pa i kad stvarnu realnu situaciju ne može vidjeti. Na temelju umnih slika, osoba će oblikovati vanjski zapis koji će predstaviti opisanu situaciju, sa svim elementima potrebnima za određivanje traženih mjera.

Dakle, konkretne umne slike su slike koje nastaju u umu, a nalikuju stvarnim životnim objektima ili situacijama.

(2) Obrasci/uzorci (eng. *pattern imagery*). Pod obrascima ili uzorcima podrazumijevaju se one slike koje prikazuju vizualno-prostorne odnose odgovarajućih elemenata. Za razliku od konkretnih slika, u obrascima, odnosno uzorcima, izuzeti su nepotrebni konkretni detalji.

Na primjer, pri obradi teorema o sukladnosti trokuta mogu se koristiti slike trokuta te na njima istaknuti elementi trokuta koji se uzimaju u obzir, a sve ostalo su nevažni detalji (Slika 57). Ovako oblikovane slike mogu služiti kao obrasci za pamćenje odgovarajućih teorema o sukladnosti trokuta.



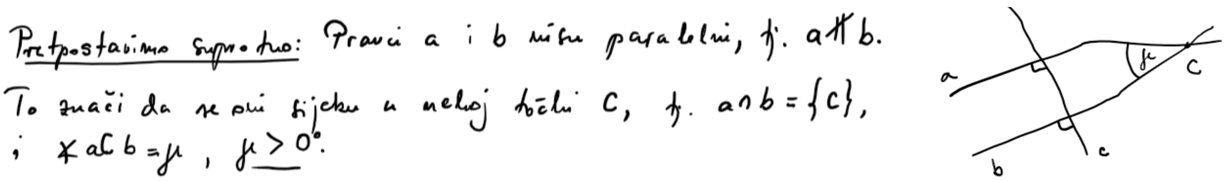
Slika 57. Obrasci za teoreme o sukladnosti trokuta

Ili, na primjer, uzorak može biti slika koja se sastoji od više figura koje prikazuju neki rastući niz (Slika 58). Na temelju tog uzorka može se vršiti poopćavanje te otkrivanje općeg pravila odgovarajućeg niza. Tako se na primjer, prema uzorku sa slike može odrediti da je n-ta figura sastavljena od $4n-1$ dužina ili od $2n-1$ malih trokuta.

Slika 58. Uzorak niza zadan s prve tri figure

(3) Slike zapamćenih formula (eng. *memory images of formula*). Za osobu koja s lakoćom pamti u obliku slika ono što je bilo zapisano na ploči, u bilježnici ili knjizi i sl. kažemo da ima „fotografsko pamćenje”. U matematici, takve osobe s lakoćom pamte formule u obliku slika te ih se brzo mogu prisjetiti kroz slike u umu i reproducirati ih gotovo u identičnom obliku, iako možda uopće ne razumiju stvarno značenje formule ili oznaka i simbola od kojih je formula izgrađena. Osim formule, takve osobe u obliku slika mogu pamtiti i razna pravila, procedure pa čak i procese rješavanja problema ili procese dokazivanja te ih se prisjetiti kada se nađu u sličnim situacijama.

Tako, na primjer, pri dokazivanju neke tvrdnje kontradikcijom, osoba možda uopće ne razumije proces dokazivanja kontradikcijom, ali može zapamtiti sliku s ploče (Slika 59) na kojoj je jedan sličan dokaz započeo s „Pretpostavimo suprotno” kada se dokazivalo kontradikcijom i onda to sjećanje iskoristiti kao početak novog dokaza kojeg treba provesti, a da uopće ne razumije zašto tako treba.



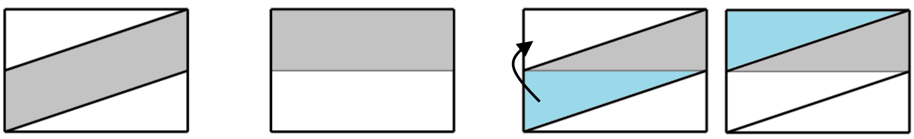
Slika 59. Dio zapisa procesa dokazivanja kontradikcijom

Umne slike koje nastaju na ovaj način mogu biti prednost zbog brzog prisjećanja odgovarajućih znanja, ali i prepreka ukoliko se zapamćeni sadržaji ne razumiju ili se pogrešno reproduciraju, o čemu će biti riječi kasnije.

(4) Kinestetičke slike (eng. kinaesthetic imagery). Mnogi učenici dok zamišljaju određene situacije, pokretima svojih ruku ili drugim dijelovima tijela oblikuju ono što zamišljaju i time dodatno evociraju u svom umu slike koje odgovaraju situaciji koja se razmatra. Ponekad učenici, dok čitaju određeni tekst ili sliku, prstom prelaze po dijelu slike ili po zraku i na taj način identificiraju ključne elemente, koje potom evociraju i slike u umu.

(5) Dinamičke slike (eng. *dynamic (moving) imagery*). Primjenom karakteristika različitih vrsta računalnih programa mogu se kreirati dinamičke slike koje prikazuju određeno kretanje, a koje svojom dinamikom potiču i slike kretanja u umu osobe koja ih promatra. Ali, određeno kretanje osoba može zamisliti u svome umu i primjenom statičnih slika.

Na primjer, ako je potrebno odrediti veličinu površine zadane unutar pravokutnika (Slika 60a), prvo se povezivanjem dvaju istaknutih polovišta, može uočiti da je pravokutnik podijeljen na dva jednaka dijela (Slika 60b). Zatim, isticanjem dužine određene točkama polovišta unutar dane slike, može se uočiti da je obojani dio podijeljen na dva sukladna pravokutna trokuta te da su preostali dijelovi pravokutnika njima sukladni trokuti. Dalje se može zamisliti premještanje jednog obojanog trokuta na mjesto neobojanog trokuta čime se prekriva točno polovica pravokutnika (Slika 60c). Kako su polazni i dobiveni obojani dijelovi pravokutnika sastavljeni od jednakih dijelova, oni zauzimaju jednake površine. Dakle, na temelju izvršenog kretanja (u umu) može se zaključiti da obojena površina zauzima polovicu površine polaznog pravokutnika.



(a) (b) (c)

Slika 60. Slike kretanja i transformiranja

Prema Dorfleru (1991), u procesu vizualizacije značenje se postiže posredstvom umnih slika, koje imaju svoje konkretne vanjske nositelje (npr. dijagrame) i među kojima postoje protokoli djelovanja. No, za razliku od Presmeg, Dorfler (1991) razmatra četiri vrste umnih slika koje sudjeluju u procesu vizualizacije, a koje naziva *umnim shematskim slikama* (eng. *mental image shemata*; kraće umne sheme): (1) *figurativne slike* (slike koja nastaju čisto perceptivno); (2) *operativne slike* (slike koje nastaju pri operiranju na/sa nosiocima); (3) *relacijske slike* (slike koje nastaju pri transformaciji konkretnog nosioca); (4) *simboličke slike* (slike koje sadrže simbole i prostorne odnose, npr. formula). Ovaj način interpretiranja vizualizacije temelji se na konstruktivističkom pristupu koji u drugoj polovici 20. stoljeća potiskuje eru biheviorizma (opisano u Presmeg 2006, str. 209).

Iako Dorfler razmatra i podjelu koju daje Presmeg, on među danim podjelama umnih slika ne uspostavlja odnos jer na primjer uzorci koje opisuje Presmeg, a koji su snažan temelj za stvaranje generalizacija, mogu biti slike koje imaju i karakteristike figurativne slike (čisto opažajno, bez transformiranja) i elemente relacijske slike (uzorak sam po svojoj prirodi oslikava odnose), ali mogu biti i dinamičke slike (transformiranjem slike može se lakše uočiti obrazac ponavljanja).

U ovom radu pod *umnim slikama* podrazumijevaju se slike koje opisuje Presmeg, ali se one dalje ne razmatraju zasebno, odvojeno od vanjskih zapisa. Naime, ovdje se više bavimo vanjskim zapisima koji se stvaraju ili koriste u procesu vizualizacije i njihovim karakteristikama, svjesni toga da svaki zapis u tom procesu evocira i odgovarajuću sliku u umu onoga tko provodi proces vizualizacije (Bishop 1980; Presmeg, 1986).

Vanjski zapisi, pomoću kojih osoba svoje mišljenje može učiniti vidljivim drugim osobama, u literaturi o matematičkom obrazovanju opisani su vrlo široko i šaroliko. U nastavku se izdvajaju samo neke značajnije i češće korištene vrste te njihov sustav korištenja.

4.3.1.2. Vanjski zapisi

Općenito, vanjski zapisi su „nešto što stoji za nešto drugo” (Duval, 1995, str. 143) i oni mogu biti znak, ali i kombinacija znakova, simbola, slika, dijagrama, grafova, kao i fizički objekti, prirodni ili umjetno stvoreni.

Kako je već spomenuto (str. 63), u literaturi se za vanjske zapise najčešće koristi riječ „reprezentacija”, a značenje te riječi nije jedinstveno jer prije svega ovisi o kontekstu unutar kojeg se koristi (Presmeg, 2006; Nakahara, 2007; Mainali, 2021). Za neke autore, riječ „reprezentacija” obuhvaća različite vrste vanjskih prikaza, a za neke i vanjske prikaze i umne slike jer su oni međusobno isprepleteni, zato što umne slike nastaju u radu s vanjskim prikazima, a vanjski prikazi omogućuju da umne slike postanu vidljive. No, kako vanjski prikazi nikada nisu puke kopije umnih slika, a umne slike je vrlo teško identificirati, najčešća rasprava se vodi upravo oko vanjskih prikaza (Mainali, 2021, str. 4-5).

S obzirom da različite vrste vanjskih zapisa nisu međusobno odvojive, jer se na primjer unutar slike mogu nalaziti i simboli i riječi, pod načinom prikazivanja podrazumijeva se ona vrsta prikaza koja je dominantna. U nastavku će se prvo razmotrit nekoliko značajnijih klasifikacija vanjskih načina predstavljanja koji su opisani u literaturi o matematičkom obrazovanju, a zatim će se opisati klasifikacija koja se koristi u daljnjem radu.

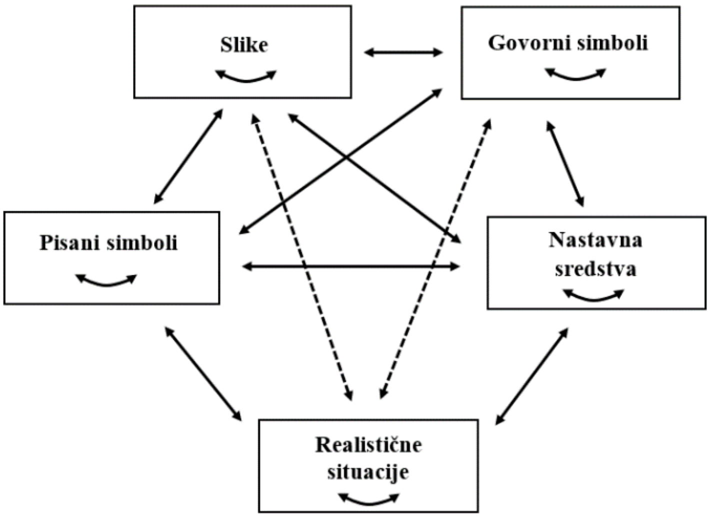
Američki kognitivni psiholog Bruner, baveći se proučavanjem kako djeca spoznaju matematiku pri rješavanju problema (ali i šire) i kako svoje mišljenje prikazuju drugima, postavlja EIS princip (Slika 61). Naziv EIS dolazi kao kratica od prvih slova triju vrsta reprezentacija: (E)nactive representation; (I)conic (pictorial) representation te (S)ymbolic representation. Pod E-reprezentacijom (aktivna reprezentacija) Bruner podrazumijeva aktivno djelovanje, odnosno on smatra da djeca kroz određeni postupak s fizičkim objektima dolaze do zaključka o rješenju problema. Pod I-reprezentacijom (slikovna reprezentacija) podrazumijeva sve vrste slika koje vjerno oslikavaju zadanu situaciju ili objekt. Tu posebno dolazi do izražaja prikazana struktura koja je analogna opisanoj situaciji ili objektu. Konačno, pod S-reprezentacijom (simbolička reprezentacija) podrazumijeva korištenje apstraktnih oblika i simbola koji nastaju dogovorno te oni zadanu situaciju ili objekt ne opisuju izravno (Bruner, 1996).

Slika 61. Brunerov reprezentacijski sustav

Bruner je smatrao da se učenje treba razvijati od konkretnog (aktivno djelovanje), preko slikovnog do apstraktnog (odozdo prema gore; „from bottom to top”). Za njega je to (u početku) bio linearan proces kojeg je smatrao izuzetno korisnim u primarnom obrazovanju posebno pri uvođenju matematičkih koncepata, ali i kao dopuna učenicima koji „zaglave”, odnosno pomoć onim učenicima koji imaju teškoća pri učenju matematike (Nakahara, 2007, str. 5).

Američki matematičar Lesh, baveći se racionalnim brojevima kroz nastavu matematike, postavlja reprezentacijski sustav koji se sastoji od pet različitih načina predstavljanja: realistične situacije (eng. *real world situations*), nastavna sredstva (eng. *manipulative aids*), govorni simboli (eng. *spoken symbols*), pisani simboli (eng. *written symbols*) i slike (eng. *pictures*) (Slika 62). Pod realnim situacijama podrazumijeva primjere iz realnog svijeta koji služe kao opći kontekst za interpretiranje i rješavanje nekog drugog problema. Manipulativna sredstva su sva dostupna nastavna sredstva pomoću koji se mogu stvarati odnosi i provoditi operacije koje odgovaraju određenoj situaciji. Pod slikama podrazumijeva sve vrste slikovnih prikaza, dijagrame, grafove i sl. Govorni simboli uključuju verbalni opis, ali i logično zaključivanje, dok pisani simboli, pored matematičkih simbola, jednadžbi i formula uključuje i pisani oblik govornog jezika (Behr, Lesh, Post & Silver, 1983, str. 13).

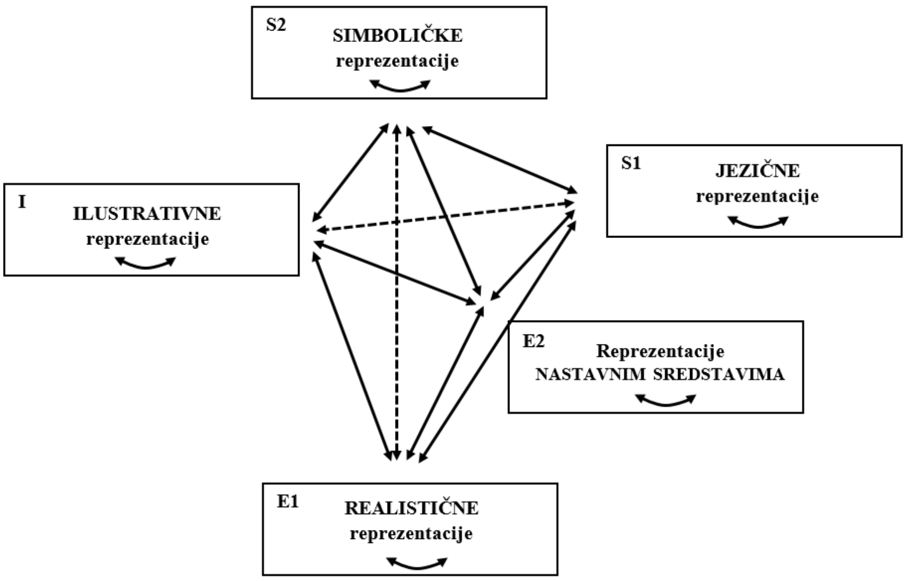
Glavna karakteristika ovog reprezentacijskog sustava je u tome što rad s vanjskim načinima predstavljanja ni u kom slučaju nije linearan već naprotiv, za učenje i poučavanje matematike ključan je istodoban rad s različitim prikazima i njihovim međusobnim vezama. Jer, na primjer, kada se razmatra neka realistična situacija, ona se može opisati riječima, prikazati slikom i zapisati na odgovarajući način itd. Korištenjem različitih načina prikazivanja jedne te iste situacije te prevođenjem iz jednog oblika prikaza u drugi, utječe se na stvaranje jasnijih umnih slika o promatranoj situaciji, što povratno može utjecati na poboljšanje vanjskih prikaza i u konačnici do rješenja problema (Behr, Lesh, Post & Silver, 1983, str. 15).



Slika 62. Leshov reprezentacijski sustav

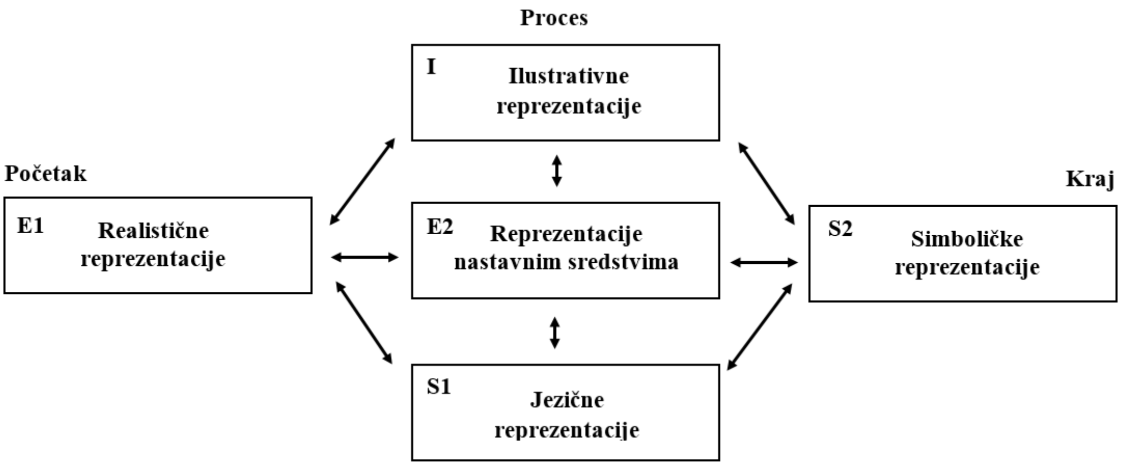
Proučavajući različite vrste i načine korištenja vanjskih zapisa, nakon opširnog proučavanja literature Nakahara (2007) izdvaja upravo Brunerov i Leshov reprezentacijski sustav te predlaže novi sustav i njegove karakteristike, pri čemu zadržava neke karakteristike prethodno opisanih sustava, ali načine prikazivanja više usklađuje s karakteristikama matematičkog obrazovanja. On pod pojmom „**reprezentacija**" (eng. *reprezentation*) podrazumijeva razne vrste simbola i izraza, figure i grafove, jezične izraze, nastavna sredstva i fizičke objekte. Odnosno, za njega su vanjski zapisi sve „vizualne reprezentacije koje su povezane s matematikom" („visual representations related to mathematics"), tj. iz svog sustava reprezentacija isključuje glas (Nakahara, 2007, str. 1-2).

Nakaharin reprezentacijski sustav sastoji od pet različitih vrsta reprezentacija: realistična reprezentacija (eng. *realistic representation*), reprezentacija nastavnim sredstvima (eng. *manipulative representation*), ilustrativna reprezentacija (eng. *illustrative representation*), jezična reprezentacija (eng. *linguistic representation*) i simbolička reprezentacija (eng. *symbolic representation*), kao i uzajamni odnosi među različitim reprezentacijama te odnosi unutar iste reprezentacije (Slika 63; Nakahara, 2007, str. 5).



Slika 63. Nakaharin reprezentacijski sustav

Gledajući iz perspektive reprezentacijskog sustava, pri učenju i poučavanju matematike trebalo bi, smatra Nakahara, započeti primjenom realističnih prikaza i završiti primjenom simboličkih prikaza, a za posrednike između ta dva prikaza koristiti manipulativne, ilustrativne i jezične prikaze (Slika 64).



Slika 64. Korištenje Nakaharinog reprezentacijskog sustava

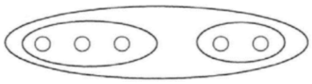
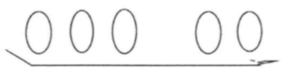
Naime, mnogi matematički pojmovi i metode proizišli su upravo zahvaljujući proučavanju i rješavanju raznih realnih problema. Kada se neka realna situacija prikaže primjenom manipulativnih sredstava, odgovarajućim ilustracijama i jezičnim opisom, doprinosi se boljem razumijevanju određenog matematičkog koncepta, ideje ili metode. Nakon toga, za naučene matematičke pojmove ili metode mogu se s lakoćom uvesti odgovarajući matematički simboli i tako proces zaključiti simboličkim zapisom.

Posebno je važno korištenje što više različitih vrsta reprezentacija kao i međusobno povezivanje tih reprezentacija. Naime, kroz različite reprezentacije učenici bolje prikazuju svoje ideje i na taj ih način prenose („čine vidljivim”) drugima, a međusobnim povezivanjem različitih reprezentacija produbljuju razumijevanje matematičkih koncepata i ideja te njeguju sposobnost primjene naučenog. I upravu se tu, prema riječima Nakahare, rađa matematičko mišljenje (Nakahara, 2007, str. 8).

Osnovne karakteristike pojedinih reprezentacija Nakahara opisuje kroz artmetičke operacije te daje odgovarajuće primjere za zbrajanje dvaju prirodnih brojeva (Tablica 1).

Prema danoj tablici (Tablica 1), može se uočiti da je i dalje prisutan Brunerov EIS princip, pri čemu Brunerovu E-reprezentaciju dijeli na realističnu reprezentaciju (E1) i reprezentaciju nastavnim sredstvima (E2), a S-reprezentaciju na simboličku reprezentaciju (S1) i jezičnu reprezentaciju (S2), pri čemu za razliku od Behr i dr., Nakahara razmatra samo pisani oblik govornog jezika (Nakahara, 2007, str. 3).

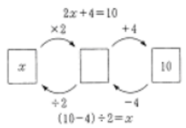
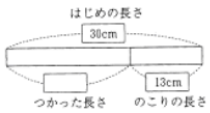
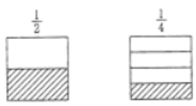
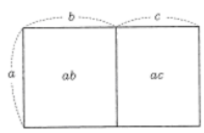
Tablica 1. Karakteristike pojedinih reprezentacija prema Nakahara (str. 3-4)

Reprezentacije (vanjski zapisi)		
Vrsta	**Od čega se sastoji i primjer**	**Karakteristike zapisa**
S2 Simbolička	Koriste se brojevi, slova, simboli i razni posebni znakovi. Primjer: 3 + 2 = 5	- regulirani su pravilima - ekstremno su sažeti - nedvosmisleni
S1 Jezična	Koristi se govorni jezik (poput hrvatskog, engleskog i sl.): slova i brojke te interpunkcijski znakovi. Primjer: Zbrajanjem 3 i 2 dobiva se 5.	- regulirani su pravilima - nisu sažeti - kroz opis govornim jezikom stvara se osjećaj bliskosti s onim što se razmatra
I Ilustrativna	Koriste se razne slike, grafovi, ilustracije (dijagrami). Primjer: 	- vizualno i intuitivno bogati - prikazuju analogan odnos s onim na što se odnose - prikazuju cjelovitost situacije, odnosa ili strukture
E2 Manipulativna	Koriste se razna nastavna sredstava te dinamičko operiranje objektima. Primjer: 	- dinamični - donekle konkretni - umjetno stvoreni (artefakti)
E1 Realistična	Koriste se stvarna stanja, pojave i predmeti. Primjer: 	- dinamični - ekstremno konkretni - prirodni

Posebnu pozornost Nakahara pridaje ilustrativnim reprezentacijama jer ih smatra važnima za učenje i poučavanje matematike zato što one prikazuju cjelovitost situacije i odnosa, odnosno potpunu strukturu situacije koja se razmatra. Vrste, karakteristike i primjena ilustrativnih reprezentacija uz odgovarajuće primjere iz aritmetike dane su u Tablici 2. Iz klasifikacije opisane u Tablici 2 vidljivo je da se Nakahara služi izrazom „dijagram", ali nigdje ne navodi definiciju tog pojma već se iz priloženog može zaključiti da su to različite vrste ilustracija s određenim karakteristikama i ulogama.

Iako Nakahara u svom radu ne govori direktno o procesu vizualizacije, on taj proces ipak indirektno opisuje govoreći upravo o načinu korištenja reprezentacijskog sustava, posebno ističući da se svaka vrsta ilustrativne reprezentacije treba koristiti tako da potpuno odgovara njezinoj ulozi. Time se sugerira da je potrebno poznavati različite vrste ilustracija i njihove uloge kako bi se efikasno mogle koristiti u procesu vizualizacije.

Tablica 2. Vrste, karakteristike i primjena ilustrativnih reprezentacija prema Nakahari (str. 6-8)

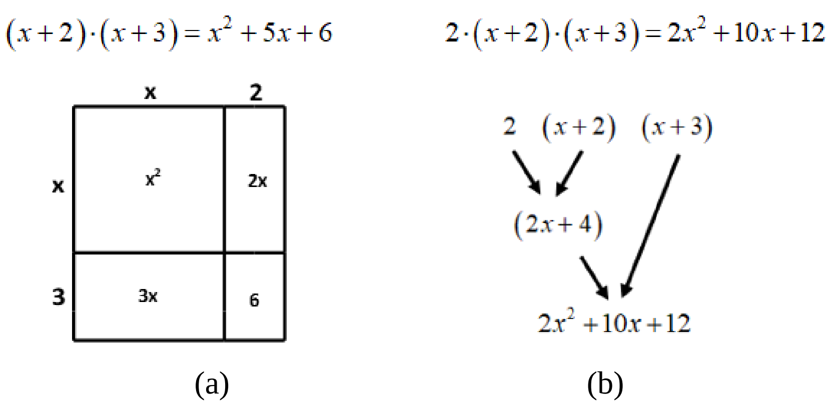
Ilustrativne reprezentacije		
Vrsta	**Opis i primjer**	**Uloga**
Situacijski dijagram	Dijagram neke realistične situacije ili stanja koje je na neki način povezano s matematikom.  (情景図) 図4-2-1	Situacijski i scenski dijagrami povezuju realistične situacije s određenim sadržajima koji se poučavaju.
Scenski dijagram	Dijagram koji prikazuje određenu scenu koja se temelji na određenim matematičkim zakonitostima (npr. aritmetika).  (場面図) 図4-2-2	
Proceduralni dijagram	Dijagram koji prikazuje određenu proceduru za računanje, operiranje i sl.  (手続き図) 図4-2-3	Proceduralni i strukturni dijagrami ističu ključne elemente i njihove veze ili određenu metodu pri rješavanju problema.
Strukturni dijagram	Dijagram koji prikazuje strukturu nekog problema.  (手続き図) 図4-2-4	
Konceptualni dijagram	Dijagram koji prikazuje odgovarajući matematički koncept.  (構造図) 図4-2-5	Služe za oblikovanje slike koja odgovara određenom konceptu, principu ili odnosu pri obradi nekog matematičkog sadržaja.
Dijagram principa ili odnosa	Dijagram koji prikazuje odgovarajući matematički princip ili promatrani odnos.  (概念図) 図4-2-6	
Graf	Dijagram koji koristi bilo koju vrstu grafa.	Služe za prikaz određenog objekta (funkcije, lika, tijela...).
Figura	Dijagram koji koristi bilo koju vrstu figure (npr. geometrijski lik).  (法則・関係図) 図4-2-7	

Razvojem računalne tehnologije 90-tih godina 20. stoljeća dolazi do sve većeg korištenja vanjskih zapisa koji su grafičke prirode pa se i u matematičkom obrazovanju sve više pozornosti posvećuje upravo tim načinima prikazivanja. Za njih se pored naziva „reprezentacija” sve više koristi naziv „grafička reprezentacija” kako bi se naglasila upravo grafička priroda zapisa, a neki autori koriste i naziv „dijagram”. No, i pod tim pojmovima se u različitih autora javljaju različita značenja (Winn, 1990, str. 553).

Razmatrajući teorijski okvir za učenje iz grafičkih prikaza, Winn (1990) pod pojmom „grafički” (eng. *graphic*) podrazumijeva sve one zapise koji informaciju prikazuju kroz prostornu povezanost pojedinih elemenata, tj. sve prikaze koji opisuju cjelokupan proces ili strukturu. Za njega su to karte (crteži), grafovi i dijagrami (eng. *charts*, *graphs* and *diagrams*), ali ne i slike eng. (*pictures*), niti tekst (eng. *text*), iako grafički prikazi mogu sadržavati i slike i tekst (Winn, 1990, str. 553). Naime, Winn smatra da je komunikacija pomoću grafičkih prikaza drugačija od one koja se vrši jezično jer jezik podliježe gramatičkim pravilima, dok se grafička komunikacija umjesto na pravila više svodi na smislenu povezanost sličnih simbola. Upravo zbog te karakteristike, komunikacija pomoću grafičkih prikaza omogućava veću fleksibilnost nego komunikacija pomoću jezika.

Ilustrativne reprezentacije koje opisuje Nakahara (2007) donekle odgovaraju vanjskim zapisima koje Winn (1990) naziva grafičkim prikazima, uz određene razlike. Tako, i jedan i drugi „graf” opisuju kao grafički prikaz funkcije, ali Winn radi razliku između grafova (grafički prikaz funkcije za cilj ima prikazati odnos dviju promjenjivih veličina) i dijagrama (grafički opisuje cjelokupan proces i strukturu), dok Nakahara graf promatra kao posebnu vrstu dijagrama. Nadalje, za razliku od Winna koji ne razmatra slike unutar grafičkih prikaza, Nakahara slike uvrštava u ilustracije kroz situacijske i scenske dijagrame jer je vidljiv odnos među ključnim elementima, zato što ti dijagrami oslikavaju realistične situacije (Nakahara, 2007, str. 6-8; Winn 1990, str. 553).

Proučavajući vizualizaciju kao epistemološki alat za učenje i poučavanje matematike, posebno geometrije, Duval sve vanjske zapise naziva „vizualnim reprezentacijama” (eng. *visual represenations*) te pod tim pojmom podrazumijeva „sve vrste prikaza koji se koriste u matematici i matematičkom obrazovanju s određenom funkcijom: za matematičku obradu, za heurističko istraživanje pri rješavanju problema, kao obrazovni alat koji pomaže pri usvajanju matematičkih koncepata” (Duval, 2014, str. 159). S obzirom da ih smatra „alatima” vizualizacije, on ih naziva i „dijagramima” te ističe da među njima treba raditi razliku samo po tome je li neki dijagram matematički ili ne. Pod „matematičkim dijagramom” (Slika 65a) Duval podrazumijeva sve vizualne reprezentacije koje su direktno povezane s nekim matematičkim konceptom ili algoritmom pa kao takvi ovise o svojstvima matematičkog koncepta ili algoritma koji se prikazuje. S druge strane, „ne-matematički dijagrami” (Slika 65b) ne moraju nužno biti povezani s matematičkim konceptom ili algoritmom, oni nastaju spontanim organiziranjem prostornih rasporeda među elementima koji se prikazuju te ne podliježu nikakvim ograničenjima koja se odnose na matematička svojstva (Duval, 2014, str. 162).



Slika 65. Primjer matematičkog i ne-matematičkog dijagrama

Iz svega prethodno rečenog vidljivo je da se misao čovjeka može izraziti, odnosno „učiniti vidljivom” na dosta različitih načina (zapisa ili reprezentacija). Također, vidljivo je da svaki autor, u nedostatku teorijskog okvira, klasifikaciju vanjskih zapisa radi onako kako mu najviše odgovara u kontekstu onoga čime se bavi. Iz istih razloga, u ovom radu vrši se klasifikacija svih vanjskih zapisa u tri kategorije. Naime, gledajući što je dominantno kod određenog oblika izražavanja matematičkog mišljenja, mogu se promatrati tri različita znakovna sustava: jezični, grafički i simbolički. S obzirom da se ta klasifikacija koristi u daljnjem radu, slijedi njezin opis.

4.3.1.3. Tri sustava znakova vanjskih zapisa

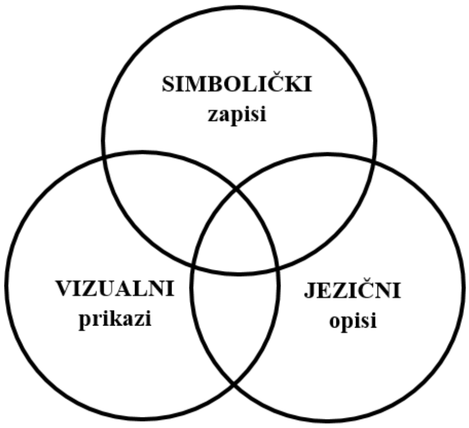
Budući da kao ljudska bića živimo u realnom svijetu, okruženi raznim vrstama prizora, promišljanje o njima oblikuje analogne misaone strukture pa je prirodno koristiti grafički oblik prikazivanja matematičkog mišljenja koji nastaje u tom kontekstu. Zbog prirode same matematike, jasno je da grafički oblik izražavanja ne može uvijek biti realistična slika, niti se sve može doslovno pretočiti u analognu sliku, niti se situacija uvijek može prikazati korištenjem nastavnih sredstava.

Grafički oblik izražavanja imat će svoje vlastite znakove i načine zapisivanja: razne vrste slika (realističnih situacija), crteža (koji vjerno predočavaju određenu situaciju), dijagrama (koji prenose cjelovitost određene strukture, sa svim elementima i njihovim vezama), kao i razna druga sredstva kojima se oslikava određena ideja. Za ovaj oblik izražavanja dalje se koristiti naziv *vizualni prikaz*. Riječ „vizualni” uzeta je više kao asocijacija na sliku, a ne na ono što se može „vidjeti” jer je jasno da se mogu „vidjeti” i zapisi koji nisu slikovni. Riječ „prikaz” uzeta je jer se ovim oblikom na slikovit način prikazuje kompletna struktura: svi ključni elementi i njihove veze, bez obzira jesmo li ih u mogućnosti prepoznati i kao takve „vidjeti” ili ne. Dakle, pod *vizualnim prikazima* podrazumijevaju se svi oni načini predstavljanja koji na bilo koji način oslikavaju cjelovitu strukturu, bilo da prikazuju prostornu povezanost elemenata neke cjeline, kako Winn opisuje grafičke prikaze (1990, str. 553), a Nakahara ilustrativne reprezentacije, bilo da se kroz analogni prikaz oslikava neka realistična situacija ili ona oblikovana nastavnim sredstvima kao što su Nakaharine realistične i manipulativne reprezentacije, ili su to jednostavno stvarne realistične situacije ili nastavna sredstva u kojima aktivno sudjelujemo kako opisuje Bruner.

Nadalje, kao ljudi međusobno komuniciramo govornim jezikom (izgovorena i pisana riječ), koji ima svoja gramatička pravila i strukturu, pa je prirodno na taj način razmjenjivati i matematičko mišljenje. Kako jezični oblik izražavanja nije sažet već je prilično deskriptivan, bilo da se radi o govoru ili pisanom obliku, za ovaj oblik izražavanja dalje se koristiti naziv *jezični opis*.

Konačno, s obzirom na specifičnosti matematike kao predmeta u kojem se po prirodi stvari njezini sadržaji opisuju sažetim simboličkim jezikom, prirodno je posebno razmatrati i simbolički oblik izražavanja matematičkog mišljenja. Za ovaj oblik izražavanja dalje se koristi naziv *simbolički zapis* jer je prilično sažet (pa time i kratak) te se prvenstveno koristi u pisanom obliku.

Prema opisanome, pri učenju i poučavanju matematike, mišljenje bi trebalo moći predstaviti kroz sva tri oblika izražavanja: *vizualno* (koristeći različite vizualne prikaze), *opisno* (služeći se jezikom u govoru i pismu) te *simbolički* (koristeći simboličke zapise); skraćeno ***VOS sustavi*** (Slika 66). Pri tome, jezični opisi i simbolički zapisi imaju jednu zajedničku suštinsku karakteristiku, koju nemaju vizualni prikazi: *linearnost* stvaranja i interpretiranja. Naime, jezični i simbolički zapisi čitaju se slijeva na desno ili s desna na lijevo (npr. u Arapa) ili od gore prema dolje (npr. u Kineza), dok vizualni prikazi tvore sustav sa sasvim drugim karakteristikama stvaranja i interpretiranja, o čemu se više govori u nastavku.



Slika 66. Tri znakovna sustava vanjskih zapisa – VOS sustavi

Ukratko, *vizualni prikaz* znači učiniti „vidljivim" određenu misao kroz sliku, bilo da je ona realna, oblikovana artefaktima ili umjetno stvorena, pri čemu se podrazumijeva da je prikaz moguće nedvosmisleno „čitati" u kontekstu u kojem se koristi. Pri tome, vizualni prikazi uključuju:

(a) Realistične situacije (direktno promatranje ili aktivno sudjelovanje)
(b) Nastavna sredstva (aktivan rad s manipulativima)
(c) Slikovni prikazi na bilo kojem mediju (na papiru ili ekranu, statički ili dinamički)
  - slike (fotografije, video zapisi i sl.)
  - crteži i dijagrami (situacijski, scenski, proceduralni, strukturni, konceptualni i dr.)
  - grafovi (grafički prikaz funkcija)
  - grafikoni (grafički prikaz statističkih podataka)
  - karte (prikaz stvarnog stanja u određenom omjeru bez konkretnih detalja) itd.

Pod *jezičnim opisom* podrazumijeva se korištenje govornog jezika, bilo u govoru (koji je slobodniji) ili pismu (koji je formalniji), u svrhu detaljnijeg opisa određenog matematičkog koncepta, ideje ili situacije. Pri tome se podrazumijeva da je opis jasan, korektan i nedvosmislen u kontekstu u kojem se koristi.

Pod *simboličkim zapisom* podrazumijevaju se svi zapisi koji koriste slova, brojke, simbole i razne vrste znakova u cilju sažetog zapisa određenog matematičkog koncepta, ideje ili situacije prema utvrđenim značenjima pojedinog znaka u zapisu. Pri tome se podrazumijeva da je zapis korektan i jednoznačan u kontekstu u kojem se koristi.

Jasno je da svaki opisani oblik izražavanja ima svoj vlastiti sustav znakova, kao i da se oni ne mogu promatrati izolirano jedno od drugoga jer se svaki od njih oslanja na preostala dva (Slika 66). Iako se ponekad ima smisla tim načinima služiti linearno: na primjer od slike, preko jezičnog opisa do simboličkog zapisa, stvarno matematičko mišljenje, njegova dubina i razumijevanje ostvaruju se tek u stalnoj isprepletenosti i međusobnom prožimanju svih triju načina (Duval, 1998). Upravo kada se jedna misao može izraziti na više različitih načina i pri tome fleksibilno prelaziti iz jednog oblika u drugi može se govoriti o vještini (fluentnosti) izražavanja (Duval, 2014).

Naime, iako izražavanje govornim jezikom stvara osjećaj bliskosti s realnim životom (Nakahara, 2007, str. 4), jezik je po svojoj prirodi bogat sinonimima i homonimima, što pri predstavljanju matematičkog mišljenja, može dovesti do različitih tumačenja, a time i do međusobnog nerazumijevanja, posebno ako se koristi izolirano od slike i simboličkog zapisa. Jer, za nosioce pojmova obično se biraju riječi koje više odgovaraju određenom kontekstu, što može izazvati zbrku kada se koriste različiti konteksti, a posebno kada značenja pojmova nisu eksplicitno dana.

Slično, često se čuje da slika „govori više od tisuću riječi", ali ako vizualni prikaz nije prožet pokojim simbolom ili znakom te se ne može suvislo opisati riječima u određenom kontekstu, on ostaje nedorečen pored sve svoje ljepote ili potencijala.

Konačno, simbolički zapis, unatoč tome što je reguliran pravilima i zbog toga nedvosmislen, može biti nerazumljiv i nečitak zbog svoje sažetosti. Stvaranje i korištenje simboličkih zapisa uvelike mogu olakšati jezični opisi i vizualni prikazi: vizualna podrška će ga intuitivno obogatiti, a opis govornim jezikom približiti odgovarajućoj situaciji.

Preostali elementi vizualizacije, odnosno procesi stvaranja i korištenja proizvoda te njihove karakteristike, razmatraju se kroz tri opisana oblika izražavanja (vizualni, jezični i simbolički), s naglaskom na vizualne prikaze jer su oni izuzetno važni u procesu učenja i poučavanja geometrije.

4.3.2. Procesi vizualizacije

Kako je već navedeno (str. 62), prema definiciji pojma, dva su bitna procesa vizualizacije: (1) proces stvaranja proizvoda i (2) proces korištenja proizvoda. Ti procesi se mogu se razmatrati s obzirom na: (1) mjesto; (2) način te (3) svrhu stvaranja ili korištenja proizvoda vizualizacije.

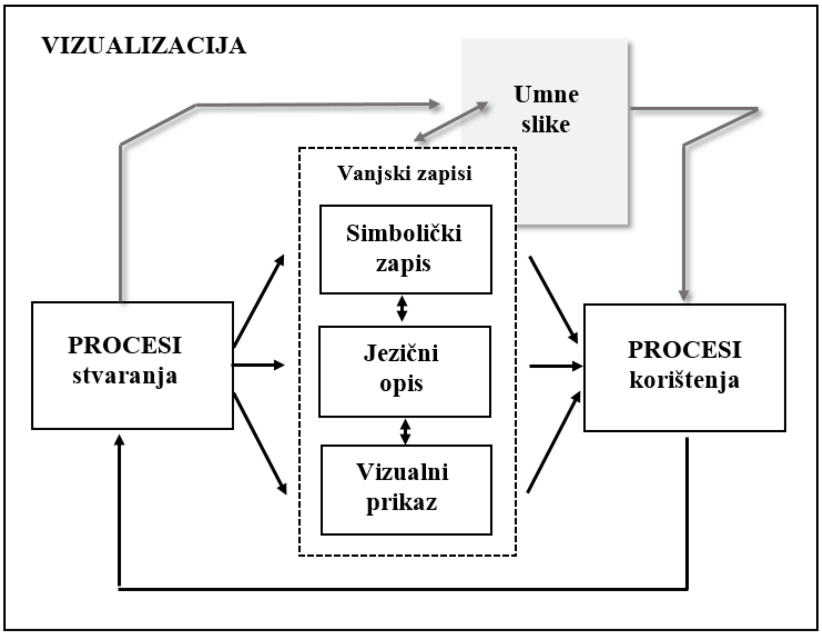
S obzirom na *mjesto* stvaranja ili korištenja proizvoda, procesi se mogu odvijati u našim mislima kroz umne slike ili na nekom od vanjskih medija kroz vanjske zapise: na papiru, ploči ili ekranu, kroz realistične situacije ili korištenjem manipulativnih sredstava. U procesu učenja i poučavanja matematike najčešće se ističe važnost te stvaranje i korištenje vanjskih zapisa i to je prilično široko rasprostranjena ideja (npr. Arcavi, 2003; Duval, 2000), dok je istraživanje rada s umnim slikama manje zastupljeno jer nikada nismo sigurni kakve su one zaista (Krutetski, 1976; Clement, 1982; Presmeg, 2006). No, procese s vanjskim zapisima trebalo bi razlikovati od onih s umnim slikama jer nije isto koristiti neku reprezentaciju na papiru ili u mislima (Duval, 1995, str. 142), i treba biti svjestan da rad s vanjskim zapisima postaje u potpunosti funkcionalan tek u koordinaciji i skladu s umnim shemama (Dorfler, 1991).

Nadalje, procesi vizualizacije mogu se razlikovati i s obzirom na *način* stvaranja te način korištenja proizvoda. Tako, na primjer, istraživanja pokazuju da postoje značajne razlike u djece pri stvaranju crteža te pri njihovom interpretiranju jer se radi o različitim kognitivnim procesima (Duval, 2014, str. 163). Naime, vanjski zapisi mogu se stvarati ručno ili pomoću tehnoloških alata (geometrijski pribor, razni računalni programi, kamere i sl.), a svi oni na svoj način evociraju i umne slike. Pri tome, ručno crtanje nema nikakvih instrumentalnih ograničenja, dok crtanje pomoću geometrijskog pribora ili na računalu ima svoje zakonitosti i ograničenja koja ovise o matematičkim svojstvima (Duval, 1995, str. 146). Također, ovisno o načinu stvaranja, može se razlikovati i njihovo korištenje pri opisivanju, interpretiranju i sl. Na primjer, nije isto koristiti statički dijagram i njegovu transformaciju vršiti u mislima kao i proučavati odgovarajući dinamički dijagram ili koristiti interaktivni dijagram na računalu.

Procesi vizualizacije mogu se razmatrati i s obzirom na *svrhu* stvaranja ili korištenja proizvoda. Neki proizvodi se mogu stvarati radi prikazivanja određenog matematičkog koncepta, algoritma, ideje i sl., čime se umanjuje njihova apstraktnosti te olakšava razumijevanje, a posljedično se unapređuje samo matematičko znanje. Zatim, procesi stvaranja određenog proizvoda mogu biti u svrhu istraživanja te otkrivanja puta do rješenja problema ili otkrivanja ključnog elementa u procesu dokazivanja neke matematičke tvrdnje i sl. Tako, na primjer, ne koriste se isti procesi ako se crta geometrijska figura (kvadrat, krug, trokut… i njihove kombinacije) koja će služiti u svrhu rješavanja geometrijskog problema ili se neki fizički objekt želi predstaviti nekom geometrijskom figurom u svrhu određivanja neke veličine (npr. kuća se može predstaviti kvadratom i trokutom nad njim, pomoću kojih će se odrediti ploština fasade). Jer, geometrijska figura, koja će služiti u istraživačke svrhe ima svoja unutarnja ograničenja koja utječu i na njezino stvaranje i na njezino korištenje, a ta ograničenja ne postoje kada geometrijska figura samo predstavlja neki fizički objekt (Duval, 1995, str. 142). Procesi korištenja određenog proizvoda mogu se provoditi u svrhu s kojom je taj proizvod i nastao (bolje razumijevanje, istraživanje, dokazivanje i sl.), ali i u svrhu dubljeg promišljanja te razvijanja do tada nepoznatih matematičkih ideja.

Također, procesi vizualizacije mogu služiti i u svrhu komuniciranja određenih matematičkih ideja i zakonitosti. Kao takvi biti će usmjereni na isticanje ključnih elemenata situacije koja se želi predstaviti i njihovih međusobnih veza, dok će se konkretni detalji nastojati isključiti kako ne bi odvlačili pozornost ili komunikaciju nepotrebno preusmjeravali u pogrešnom smjeru.

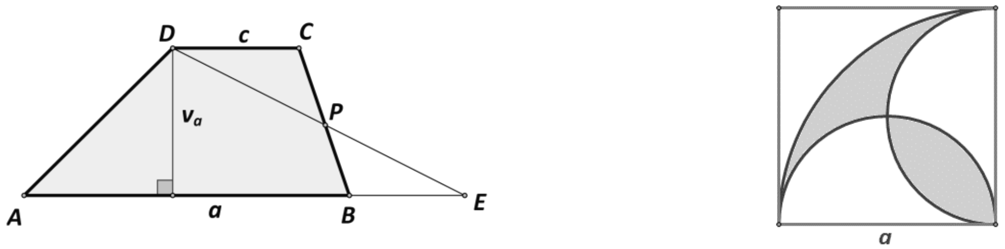
S obzirom da se u ovom radu posebno bavimo učenjem i poučavanjem geometrije, naša pozornost će više biti usmjerena na proučavanje procesa stvaranja i korištenja vizualnih prikaza u geometriji te njihovu koordinaciju s odgovarajućim jezičnim opisom i simboličkim zapisom (Slika 67).



Slika 67. Procesi vizualizacije, vanjski zapisi i umne slike

Matematička aktivnost uvijek uključuje paralelan rad, implicitno ili eksplicitno, s dva ili više različitih reprezentacija, među kojima postoji stalno kretanje naprijed - nazad (Duval, 2014, str. 164) i upravo su procesi prevođenja jednog oblika proizvoda u drugi, bilo unutarnjih bilo vanjskih, ključni za stvaranje i razvoj matematičkog mišljenja (Nakahara, 2007, str. 8). No, iako su procesi stvaranja i korištenja proizvoda vizualizacije u stalnoj međusobnoj interakciji, potrebno ih je razmatrati i odvojeno kako bi se uočile i izdvojile njihove bitne karakteristike. Tako je i kroz obrazovna istraživanja proučavanje procesa vizualizacije najčešće usmjereno na stvaranje ili korištenje točno određenog proizvoda, ovisno o kontekstu unutar kojeg se koristi.

Prema Duvalu, kroz procese vizualizacije zapravo je ključno, spontano i brzo, prepoznati ono što je matematički važno bez obzira o kojem proizvodu vizualizacije se radilo. Različite elemente koje pojedinac može brzo prepoznati na proizvodima vizualizacije, Duval naziva *jedinicama figure* (eng. *figural units*) te smatra da se maksimalna iskorištenost vizualizacije postiže upravo kada se prepoznaju sve jedinice figure koje su matematički značajne za dani problem u određenom vizualnom prikazu, unutar određenog konteksta (Duval, 2014, str. 160). U skladu s tim, on posebno razmatra procese vizualizacije koji su važni u radu s *geometrijskim figurama* (eng. *geometrical figures*; Slika 68), pod kojima podrazumijeva posebne vrste vizualnih prikaza u geometriji koje imaju heurističku ulogu, odnosno koje su ključne u procesu rješavanja problema ili u procesu dokazivanja (Duval, 1995, str.143).



(a) (b)

Slika 68. Geometrijske figure

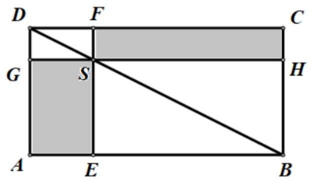
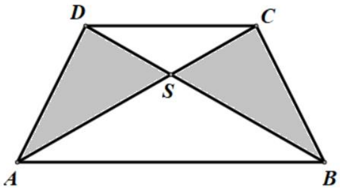
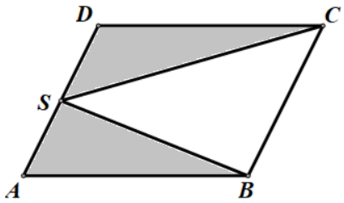
Tako su, na primjer, na Slici 68. dane dvije geometrijske figure s različitim heurističkim ulogama. Prva figura se može koristiti u izvođenju formule za površinu trapeza na temelju poznavanja formule za površinu trokuta, a druga figura se može koristiti za primjenu formule za opseg ili ploštinu kruga i kvadrata pri određivanju opsega ili ploštine obojanog lika.

Upravo ove vrste vizualnih prikaza u geometriji mnogim učenicima predstavljaju teškoće jer su u spoznajnom smislu vrlo složene zato što nije dovoljno samo vidjeti što one prikazuju (perceptivna obrada figure) već i što predstavljaju (matematička obrada figure). Mnogi učenici su u nemogućnosti steći dublji uvid koji vodi prema rješenju (Duval, 1995, str. 143), a ta sposobnost se može razvijati učenjem i poučavanjem. Zbog toga se u ovom radu posebna pozornost pridaje upravo tim procesima vizualizacije i njihovim karakteristikama.

4.3.2.1. Procesi vizualizacije u radu s geometrijskim figurama

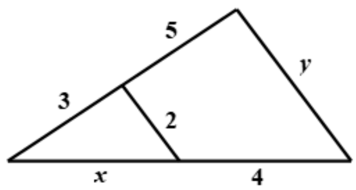
Kroz svoja istraživanja o učenju i poučavanju matematike, posebno geometrije, Duval pokazuje kako učenici za istu matematičku situaciju koja je predstavljena različitim geometrijskim figurama ostvaruju različite rezultate, ali različite rezultate ostvaruju i kada primjenjuju isti matematički proces na istoj figuri za različite elemente te figure. Također, rezultati su slabiji kada trebaju izvesti opće zaključke u odnosu na one koje izvode u radu s konkretnim geometrijskim figurama ili s konkretnim veličinama. Na primjer, Duval raspravlja o rezultatima rješavanja zadataka danih na Slici 69. i 70. (Duval, 1995, str. 144).

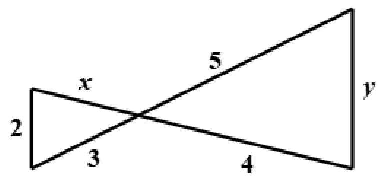
Dakle, pri određivanju da su obojane površine unutar danog lika međusobno jednake, pokazalo se da su učenici u dobi do 15-16 godina uspješniji u radu s pravokutnikom (60% učenika; Slika 69a) nego s trapezom (11% učenika; Slika 69b). Rezultati su daleko slabiji kada problem trebaju razmatrati poopćeno: uspješnost u slušaju pravokutnika je bila 34%, a u slučaju trapeza 0%. Slično tome, pri izvođenju zaključka da obojana površina unutar paralelograma zauzima polovicu njegove površine, učenici su bili uspješniji u slučaju kada je ključna točka postavljena u polovištu stranice (56% učenika; Slika 69c) nego kada se njezin položaj mijenjao duž stranice paralelograma (34% učenika).

	U pravokutniku *ABCD* istaknuta je dijagonala $\overline{BD}$. Usporedi ploštine osjenčanih pravokutnika *AESG* i *CFSH*.	Ako se točka *S* kreće duž dijagonale $\overline{BD}$, hoće li odgovor biti jednak kao i u prethodnom pitanju?
Uspješnost (a)	60%	24%
	U trapezu *ABCD* točka *S* je sjecište dijagonala $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$. Usporedi ploštine osjenčanih trokuta ΔASD i ΔBCS.	Ako u proizvoljnom trapezu sa nepoznatim duljinama stranica istakneš osjenčane trokute, hoće li odgovor biti jednak kao i u prethodnom pitanju?
Uspješnost (b)	11%	0%
	U paralelogramu ABCD, točka S je polovište stranice $\overline{AD}$. Usporedi ploštine dvaju osjenčanih dijelova sa neosjenčanim dijelom.	Ako se točka *S* kreće duž stranice $\overline{AD}$, hoće li odgovor biti jednak kao i u prethodnom pitanju?
Uspješnost (c)	56%	34%

Slika 69. Variranje figure i uspješnost rješavanja

Slično, u primjeni Talesova poučka o proporcionalnim dužinama na stranice trokuta (Slika 70a), učenici su bili uspješniji kada su koristili dužine duž iste stranice trokuta (70.5% učenika), nego kada su koristili paralelne stranice trokuta (49% učenika). Rezultat je bio još slabiji kad se promijenila polazna slika, kako je prikazano na Slici 70b: pri korištenju dužina duž istog pravca uspješno je bilo 60.5% učenika, a pri korištenju paralelnih dužina uspješno je bilo 35% učenika.





Odredite duljinu *x*.	70.5%	60.5%
Odredite duljinu *y*.	49%	35%
	(a)	(b)

Slika 70. Primjena Talesova poučka o proporcionalnim dužinama

Uzrok različite uspješnosti Duval (1995) vidi upravo u procesima vizualizacije koje učenici koriste pri radu s vizualnim prikazima, posebno pri radu s geometrijskim figurama, koje imaju heurističku ulogu.

Naime, na vizualne prikaze svatko gleda na svoj način jer vizualne stimulanse svatko slijedi i obrađuje na svoj način. No, dva su bitno različita načina, odnosno kognitivna procesa koja se pri tome koriste: (1) čisto perceptivno prepoznavanje elemenata figure te (2) uočavanje elemenata figure koji su matematički važni kao i njihova interpretacija kroz matematička svojstva, za danu situaciju. Pri tome je jako važan verbalni opis: u prvom slučaju više se koristi svakodnevni jezik, a u drugom slučaju formalni matematički jezik. No, prvi proces i pripadni verbalni opis preduvjet je drugoga i tek u zajedničkoj koordinaciji ova dva procesa dovode do očekivanog rezultata. Naime, kada se vrši deskriptivan opis onda se mogu koristiti razni tehnički izrazi i pri tome nije nužno osvrtati se na njihovu definiciju, ali kada se izvode formalni zaključci ili opravdanja, onda je jako važno znati definicije svih korištenih pojmova kao i njihove karakteristike koje su ključne za primjenu (Duval, 2014, str. 166).

4.3.2.2. Čisto perceptivno prepoznavanje elemenata figure

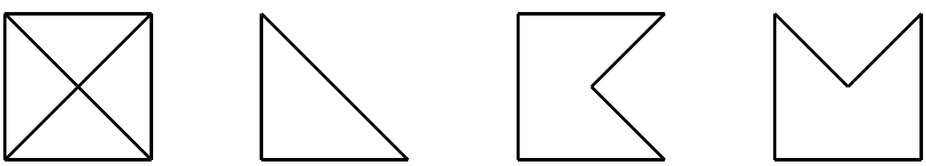
Pri radu s vizualnim prikazima, svatko od nas nešto vidi „na prvu", bez svjesne analize uočenoga. Ono što se vidi „na prvu" određeno je organizacijskim pravilima vizualnog prikaza („kako izgleda"), ali i svim korištenim slikovnim znakovima od kojih je vizualni prikaz sastavljen („sastoji se od"). Pod *organizacijskim pravilima figure* (eng. *figural organisation lows*) podrazumijeva se je li kontura figure otvorena ili zatvorena, jesu li njezine linije pune ili isprekidane, tanje ili deblje, u različitim bojama ili jednobojne, jesu li pojedini dijelovi figure u blizini jedan drugoga ili su udaljeni itd. Pod *slikovnim znakovima* (eng. *pictorial cues*) podrazumijeva se njihov oblik (točka, dužina, trokut, krug itd.), veličina, nagib (horizontalno, koso, vertikalno), preklapanja (točke dodira, točke presjeka), odvojenost (jedno izvan drugog ili unutar drugog), postoji li linearnost ili ne, jesu li konveksni ili ne, njihova dimenzija (0D – točke, 1D – dužine, polupravci, pravci, 2D – geometrijski likovi, 3D – geometrijska tijela) itd.

Ono što se opaža „na prvu" može se imenovati (točka, dužina, …) i može se mijenjati (oblik, veličina, položaj, …). Također, sve što se uočava „na prvu" rezultat je nesvjesne aktivnosti kao i međusobna integracija uočenog pa je zato najčešće „prvo" opažanje vizualnog prikaza u različitih osoba različito. Sve opisano Duval naziva *perceptivno shvaćanje figure* (eng. *perceptual apprehension*[14]), odnosno opažanje elemenata figure „na prvu" (Duval, 1995, str. 145).

Međutim, da bi geometrijska figura ostvarila svoju heurističku ulogu, samo perceptivno shvaćanje figure nije dovoljno. Potrebno je steći dublji uvid, a za to su potrebni drugi procesi kojima se ostvaruje odgovarajuće zaključivanje te interpretacija u skladu s matematičkim svojstvima.

Naime, „na prvu" se najčešće uočavaju samo osnovni oblici i jedinice figure, a pored njih geometrijska figura može sadržavati i podfigure, koje se ne mogu uočiti bez svjesne obrade dane figure. Jer, geometrijska figura obično ima više jedinica figure i podfigura nego što je korišteno pri njezinom oblikovanju.

Na primjer, geometrijska figura na Slici 71(a), oblikovana je od kvadrata i dviju dijagonala, koje su kvadrat podijelile na četiri manja trokuta. Polazni kvadrat i dijagonale te nastali trokuti su oblici i jedinice figure koje se obično vide „na prvu". Pored njih se mogu uočiti i četiri podfigure u obliku pravokutnog trokuta, koji su sastavljeni od dva manja trokuta (Slika 71b), ali i nekonveksne podfigure (Slika 71c).



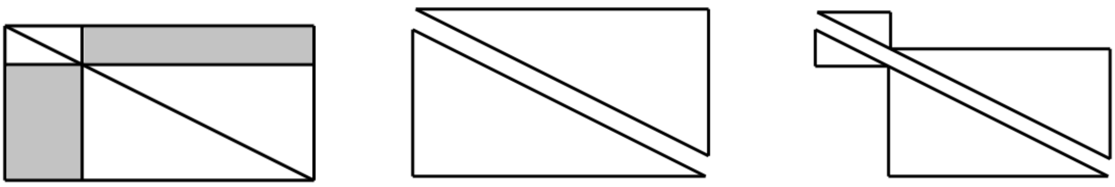
(a) (b) (c)

Slika 71. Geometrijska figura i neke podfigure

[14] Prema Marriam Webster rječniku, pod *apprehension* se između ostalog podrazumijeva 'čin ili moć opažanja ili shvaćanja nečega', https://www.merriam-webster.com/dictionary/apprehension

Pri rješavanju problema važno je znati prepoznati podfigure te među njima odabrati onu koja vodi do rješenja. Međutim, postoje odgovarajući faktori koji otežavaju prepoznavanje i izdvajanje odgovarajućih podfigura, a najčešće su to: dominantnost osnovnih oblika i jedinica figure koje se prepoznaju „na prvu", nekonveksnost podfigure te ne komplementarnost dijelova podfigure (Duval, 1998, str. 42).

Na primjer, Duval razmatra sljedeći problem (Duval, 1995, str. 150): Usporedite površine dvaju obojanih dijelova pravokutnika sa slike (Slika 72a).



(a) (b) (c)

Slika 72. Pravokutnik i neke podfigure

Zadani problem je moguće brzo riješiti ukoliko se mogu uočiti odgovarajuće podfigure: dva pravokutna trokuta (Slika 72b) i dva nekonveksna dijela (Slika 72c). S obzirom da se podfigure mogu dovesti do preklapanja, oduzimanjem jedne od druge, preostali dijelovi će biti jednakih ploština. Međutim, prepoznavanje ovih podfigura je otežano zbog dominacije obojanih dijelova, ali i zbog nekonveksnosti figura, tim više što su nekonveksne figure sastavljene od nejednakih dijelova. Osim toga, potrebno je znati i odgovarajuća svojstva da bi se rješenje korektno argumentiralo (npr. dijagonala dijeli pravokutnik na dva sukladna trokuta, trokuti u nekonveksnom dijelu su sukladni), a to dalje zahtijeva matematičku obradu figure (Duval, 1998, str. 46).

Prepoznavanje upravo onih elemenata figure, odnosno podfigura, koje se ne vide „na prvu" te njihova interpretacija u skladu s matematičkim svojstvima, ključno je za efikasno korištenje vizualizacije pri učenju i poučavanju matematike, posebno geometrije. Ti procesi zahtijevaju svjesnu matematičku obradu, koja se može i treba učiti i razvijati (Duval, 2014).

4.3.2.3.Matematičko prepoznavanje i obrada elemenata figure

Pod *matematičkim prepoznavanjem* podrazumijeva se uočavanje elemenata figure koji su matematički važni te njihova interpretacija u skladu s odgovarajućim matematičkim svojstvima u svrhu određivanja rješenja problema, unutar zadanog konteksta. Kako bi se ostvarilo matematičko prepoznavanje figure, potrebno je poznavati i spretno koristiti definicije korištenih pojmova i njihova svojstva jer bez njih nije moguće izvesti formalne zaključke ili opravdanja. Ukratko, može se reći da nakon čistog perceptivnog shvaćanja figure treba preći na matematičku obradu te figure kako bi se prepoznala i ostvarila njezina heuristička uloga, bilo u svrhu rješavanja problema ili dokazivanja tvrdnje.

Duval (1995) razlikuje tri vrste matematičkog prepoznavanja i heurističke obrade figure: sekvencijalno, diskurzivno te operativno prepoznavanje i obrada figure. Prema načinu obrade, za diskurzivno bi se još moglo reći da je analitičko-deduktivna obrada figure.

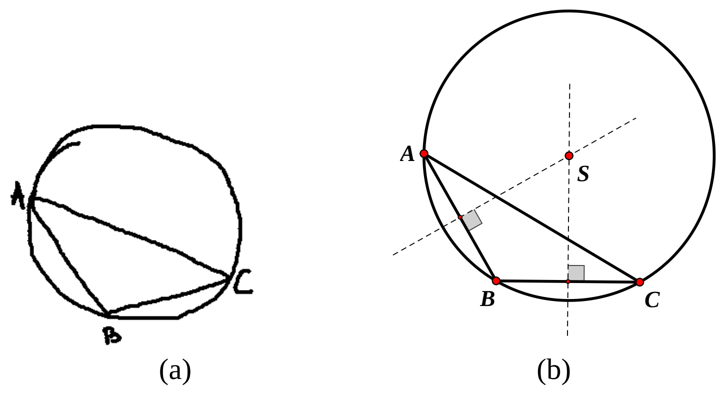
Sekvencijalno prepoznavanje i obrada figure. Među jako važne procese u radu s geometrijskim figurama spadaju crtanje i konstruiranje te prepoznavanje i opisivanje postupaka crtanja i konstruiranja zadanih figura. U tim procesima posebno je važno prepoznavanje jedinica od kojih je figura sastavljena te shvaćanje slijeda stvaranja figure.

Crtanje geometrijske figure može biti ručno, sa ili bez geometrijskog pribora, ali i pomoću raznih računalnih softvera. Za nacrtane geometrijske figure koriste se različiti nazivi, ovisno o kontekstu korištenja: obično se koristi naziv *crtež* (eng. *drawing*) ili *skica* (eng. *sketch*), ali i *dijagram* (eng. *diagram*). Glavna karakteristika *crteža* je u prikazivanju ključnih elemenata i njihovih odnosa, ali ne nužno u stvarnoj ili proporcionalnoj veličini. Upravo zbog te karakteristike, ručno crtanje nema nikakvih instrumentalnih ograničenja (Duval, 1995, str. 146). S obzirom da odnosi među jedinicama figure unutar crteža ne moraju nužno odgovarati stvarnim veličinama zadane situacije koju prikazuju, niti biti proporcionalne s njima, opisivanje postupka stvaranja crteža ne mora nužno pratiti slijed njegova stvaranja.

Pri *konstruiranju* odgovarajućeg vizualnog prikaza situacija se mijenja jer treba poštivati i tehnička ograničenja alata kojima se provodi konstrukcija, ali i zadana matematička svojstva te njihove odnose. U suprotnom, željena se figura neće moći realizirati (Duval, 1995, str. 146). Naime, konstruiranje geometrijske figure može se provoditi geometrijskim priborom i to jednim ravnalom i šestarom (vidjeti str. 25) ili nekim računalnim softverom koji pruža te mogućnosti (Poput Cabri, Cindarela, Geogebre, Sketchpada i dr.). Glavna karakteristika *konstrukcije* (eng. *construction*) je u poštivanju zadanih veličina (bilo da se prikazuju u stvarnoj ili proporcionalnoj veličini), kao i primjena matematičkih svojstava, posebno pri uspostavljanju odnosa među pojedinim elementima figure. Pri konstruiranju neke zadane situacije, za razliku od crtanja, važno je pratiti slijed izvođenja, uz poštivanje tehničkih ograničenja i matematičkih svojstava.

Opisano promotrimo na sljedećem primjeru: Zadan je tupokutni trokut ΔABC sa stranicama duljine $a = 4cm$ i $b = 7cm$ i kutom pri vrhu *B* veličine 120°. Zadanom trokutu treba opisati kružnicu.

Pri stvaranju vizualnog prikaza dane situacije *crtanjem ručno*, može se nacrtati tupokutni trokut ΔABC s tupim kutom pri vrhu *B* te kružnica koja prolazi njegovim vrhovima. Ali, može se i prvo nacrtati kružnica pa tupokutni trokut ΔABC s vrhovima na kružnici (Slika 73a).



Slika 73. Crtanje i konstruiranje geometrijske figure

Pri opisivanju crteža sa Slike 73(a), može se reći da je nacrtan tupokutni trokut ΔABC s tupim kutom pri vrhu *B* te kružnica kroz njegove vrhove ili da je nacrtana kružnica te tupokutni trokut ΔABC, s tupim kutom pri vrhu *B*, tako da njegovi vrhovi pripadaju kružnici. Drugim riječima, redoslijed opisivanja danog crteža ne mora nužno odgovarati redoslijedu njegova stvaranja.

Osim toga, crtanje ručno nije ni sasvim precizno jer se odnosi pojedinih elemenata figure ne mogu u potpunosti uskladiti s matematičkim svojstvima. Tako, na Slici 73(a) nije istaknuto središte kružnice, a ne može se ni razaznati gdje se nalazi u odnosu na trokut (u ovom slučaju središte treba biti izvan trokuta, nasuprot tupog kuta).

Ako bi se opisana situacija *konstruirala* (Slika 73b), onda se prvo nacrtaju dvije dužine zadanih duljina i kut zadane veličine. Zatim se konstruira trokut poštujući osnovnu konstrukciju SSK$^{>}$, a potom tom trokutu opisanu kružnicu, uz prethodno određivanje njezina središta, konstruiranjem simetrala stranica tog trokuta te polumjera. Pri izvođenju složene konstrukcije, važno je poznavati osnovne konstrukcije (str. 25) jer se na temelju njih izvode složene konstrukcije (Kurnik, 2007). Međutim, pri opisivanju složenih konstrukcija, osnovne konstrukcije se samo navode (a ne opisuju) unutar slijeda izvođenja. Uvijek je korisno napomenuti da tijekom konstruiranja nema mjerenja jer se pod *ravnalom* podrazumijeva alat za povlačenje ravnih crta na kojem nije istaknuta mjerna skala.

Tako bi pri opisivanju *konstrukcije* sa Slike 73(b) naveli da se prvo konstruira trokut ΔABC korištenjem zadanih elemenata, zatim kružnica koja prolazi kroz sva tri vrha trokuta. Konstrukcija trokuta ΔABC spada pod elementarnu konstrukciju pa nju nije potrebno opisivati, ali je potrebno znati njezi tijek izvođenja. Za konstrukciju kružnice treba opisati kako se određuje njezino središte i njezi polumjer: središte kružnice je točka sjecišta simetrala stranica pa treba konstruirati simetrale stranica trokuta (barem dvije), a polumjer je određen točkom središta i jednim vrhom trokuta. Pri tome, simetrala dužine spada pod osnovnu konstrukciju i ona se ne opisuje unutar složene konstrukcije. Kružnica konstruirana sa tako dobivenim središtem i polumjerom prolazit će i kroz preostala dva vrha trokuta prema svojstvu simetrale dužine. U tom slučaju, kružnica je opisana trokutu.

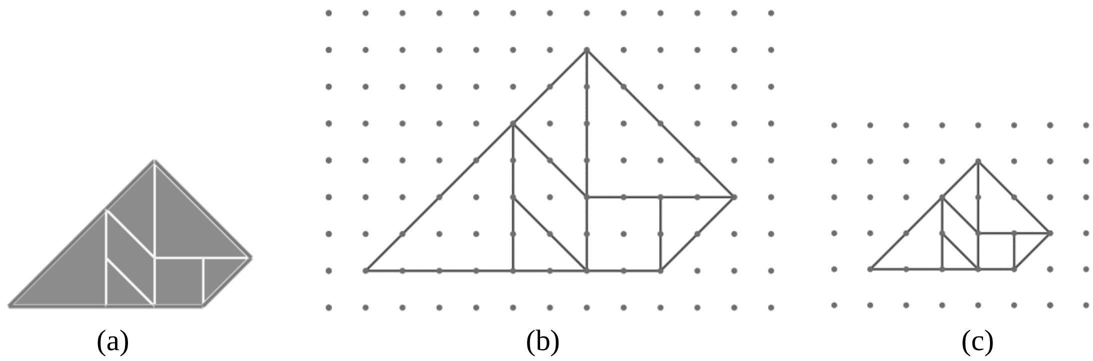
Ako bi se opisivala konstrukcija ΔABC u nekom izdvojenom dijelu, onda se opisuje tijek izvođenja konstrukcije trokuta SSK$^{>}$, ali se ne opisuju elementarne konstrukcije: prenošenje dužine, prenošenje kuta ili konstrukcija kuta od 120°. Na primjer, konstrukciju trokuta ΔABC, sa zadanim elementima, mogli bi opisati na sljedeći način: (1) na proizvoljni polupravac p prenese se dužina $\overline{BC}$ duljine $4cm$; (2) iz vrha B se konstruira (ili prenese) kut veličine 120°; (3) opiše se kružnica k sa središtem C radijusa $7cm$ (radijus odgovara duljini stranice $\overline{AC}$); (4) u presjeku kružnice k i drugog kraka konstruiranog kuta dobiva se treći vrh A trokuta ΔABC; (5) Točke A, B i C su vrhovi traženog ΔABC

Upravo pri opisivanju koraka konstruiranja dolazi do izražaja važnost i nužnost međusobnog povezivanja različitih zapisa: od vizualnog prikaza do jezičnog opisa, prožetog simboličkim zapisima (u većoj ili manjoj mjeri).

Iz svega opisanog vidljivo je da se procesi stvaranja i opisivanja crteža i konstrukcija temelje na prepoznavanju odgovarajućih jedinica figure koje su matematički važne te njihovim povezivanjem u odgovarajući funkcionalni slijed izvođenja. Prepoznavanje i razumijevanje procesa stvaranja geometrijske figure, kao i opisivanje slijeda njezina stvaranja, Duval naziva *sekvencijalnim shvaćanjem figure* (eng. *sequential apprehension*), odnosno shvaćanjem slijeda izvođenja geometrijske figure (Duval, 1995, str. 146).

Osim crtanja na bijelom papiru ili praznoj podlozi ekrana, crtanje se može vršiti i unutar određene vrste mreže ili koordinatnog sustava, koji imaju svoj slijed izvođenja, čime se dodatno razvijaju procesi vizualizacije. Za crtanje geometrijskih likova i figura mogu se koristiti razne kvadratne točkaste mreže te (pravokutni) koordinatni sustav u ravnini, a mreža se odabire ovisno o uzrastu, njihovim predznanjima i svrsi korištenja.

Tako, na primjer, ukoliko se oblikuje konveksna figura od tangram slagalice (Slika 74a), ona se može prikazati u kvadratnoj točkastoj mreži tako da vrhovi svih likova, od kojih je figura oblikovana, padnu u točke mreže. Pri crtanju u mreži, likovi se mogu proporcionalno uvećavati (Slika 74b) ili umanjivati (Slika 74c), a samo crtanje se može provoditi nasumično, što obično nije uspješno, ali i strateški. Na primjer, početnici obično započnu crtati od vanjskog ruba figure („kontura"), a zatim crtaju likove unutar konture ili započnu s bilo kojim likom proizvoljne veličine pa na njega dodaju ostale likove. Ni jedan ni drugi način se ne preporučuju jer ako se ne vodi računa o odnosima među likovima, onda crtež tangram lika obično ne bude uspješno završen. Strateški bi se npr. moglo krenuti od najmanjeg lika ili od kvadrata pa do njega dodavati u odgovarajućem odnosu jedan po jedan lik (Kavajin & Baranović, 2019b. str. 24).



Slika 74. Slaganje i crtanje tangram likova

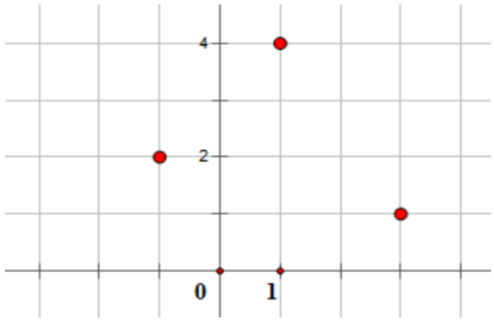
Opis se u ovom slučaju može provoditi za izgradnju („konstrukciju") same figure, kao i za crtanje oblikovane figure u kvadratnoj točkastoj mreži. Pri tome se opis može prilično olakšati ako se poznaju karakteristike pojedinih likova slagalice (dva para sukladnih jednakokračnih pravokutnih trokuta i jedan njima sličan trokut (srednje veličine) te kvadrat i paralelogram). Izazov je opisati oblikovanu figuru tako da netko drugi može na isti način složiti figuru samo na temelju opisa, bez da vidi način slaganja. Ovisno o uzrastu, prilagođava se i vokabular opisa.

Na primjer, oblikovanje pravokutnog tangram trapeza (Slika 74a), slijeva nadesno, mogli bi opisati na sljedeći način: (1) Prvo se polegne najveći trokut, s katetama horizontalno i vertikalno, s pravim kutom s desne strane. (2) Do njega se položi najmanji trokut, zrcalno u odnosu na postavljeni trokut. (3) Dodaje se paralelogram tako da se dulja stranica paralelograma položi duž hipotenuze manjeg trokuta, a kraća stranica paralelograma duž katete većeg trokuta. (4) Dodaje se srednji trokut po veličini tako da se kateta položi duž stranice paralelograma, a hipotenuza vertikalno, u produžetku druge stranice paralelograma. (5) Duž slobodne stranice paralelograma dodaje se kvadrat. (6) Do kvadrata se dodaje najmanji trokut s jednom katetom duž stranice kvadrata, a drugom katetom u produžetku gornje stranice kvadrata. (7) Konačno, dodaje se najveći trokut s jednom katetom duž kvadrata i manjeg trokuta, a drugom katetom duž hipotenuze srednjeg trokuta (Kavajin, 2016).

Pri opisivanju crtanja oblikovane figure u kvadratnoj točkastoj mreži, korisno je poznavati i odnose među likovima: katete malog trokuta, stranica kvadrata i kraća stranica paralelograma zauzimaju pola katete največeg trokuta, kateta srednjeg trokuta podudara se s duljom stranicom paralelograma, a hipotenuza srednjeg trokuta s katetom največeg trokuta itd. (Kavajin i Baranović, 2019a. str. 6). Na temelju ovih opisa važno je uočiti da kateta največeg trokuta treba zauzeti paran broj kvadrata mreže kako bi svi vrhovi svih likova slagalice pali u točke mreže. Crtanje može započeti od največeg trokuta ili od kvadrata tako da se najprije njegovi vrhovi smjeste u točke mreže, a zatim se crtaju preostali likovi, pazeći na odnose među njima. Crtanjem na taj način, likovi se po želji mogu proporcionalno uvećavati ili umanjivati (Slike 74b i 74c).

Za razliku od kvadratnih točkastih mreža, korištenje pravokutnog koordinatnog sustava u ravnini zahtijeva poznavanje pravila crtanja točaka prema njihovim koordinatama, ali i određivanje koordinata točaka prema poziciji točke u koordinatnom sustavu. Koordinatni sustav u ravnini može se koristiti u razne svrhe: rješavanje algebarskih problema primjenom geometrijskih koncepata, ali i rješavanje geometrijskih problema primjenom analitičkih procesa. U oba slučaja, važan je slijed crtanja u koordinatnom sustavu, kao i rekonstrukcija slijeda nacrtanog.

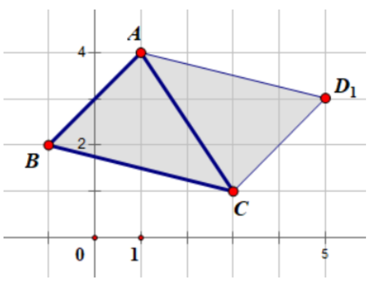
Na primjer, promotrimo problem u kojem su zadane tri točke, bilo vizualnim prikazom u koordinatnom sustavu, bez ili sa istaknutom mrežom (Slika 75), bilo njihovim koordinatama $(3,1)$, $(1,4)$, $(-1,2)$, te treba odrediti poziciju četvrte točke i njezine koordinate, tako da te četiri točke određuju vrhove paralelograma.



Slika 75. Točke paralelograma u koordinatnom sustavu

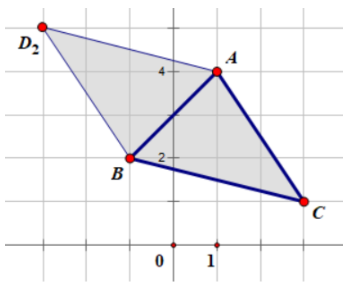
Problem se može rješavati na više načina. Koristi prisjetiti se da dijagonala paralelograma dijeli taj paralelogram na dva sukladna trokuta, kao i da su dva nasuprotna vrha paralelograma centralno simetrična s obzirom na polovište njegove dijagonale. Kako tri zadane točke određuju trokut, koji čini jednu polovicu paralelograma, preostaje naći četvrti vrh paralelograma centralnom simetrijom. No, svaka stranica trokuta može potencijalno biti dijagonala paralelograma, što znači da treba razmatrati tri slučaja.

Ako se uzme da je stranica $\overline{AC}$ dijagonala (Slika 76a), onda je četvrti vrh D_1 centralno simetričan vrhu B s obzirom na polovište promatrane dijagonale. Analogno, četvrti vrh D_2 centralno je simetričan vrhu C s obzirom na polovište dijagonale $\overline{AB}$ (Slika 76b) te četvrti vrh D_3 centralno je simetričan vrhu A s obzirom na polovište dijagonale $\overline{BC}$ (Slika 76c). Četvrti vrh paralelograma se može odrediti konstruktivno, ali i na druge način, npr. prepoznati putanju od jedne do druge zadane točke, a zatim na temelju toga rekonstruirati moguću poziciju četvrte točke. I na kraju preostaje očitati koordinate četvrtog vrha, u sva tri slučaja.



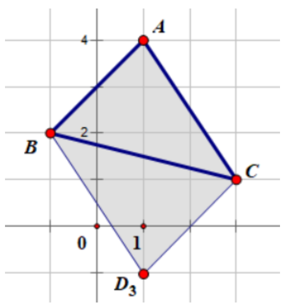
Paralelogram $ABCD_1$

(a)



Paralelogram AD_2BC

(b)

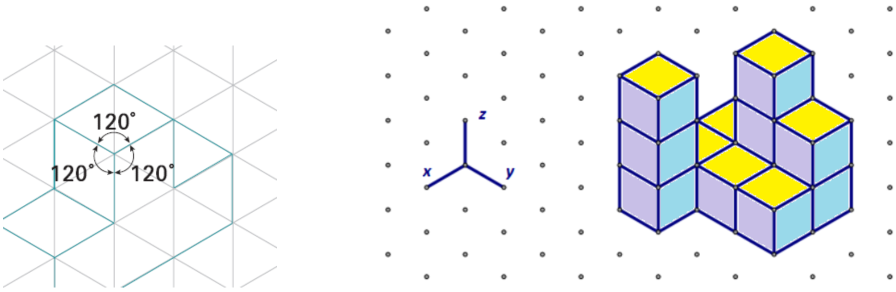


Paralelogram ABD_3C

(c)

Slika 76. Rješenja problema s paralelogramom

Pri radu s geometrijskim tijelima prikladne su *izometrične mreže* (eng. *isometric grid* ili ISO mreže), koje se sastoje od tri skupa paralelnih pravaca (ili točaka duž paralelnih pravaca), tako da je svaki skup pravaca pod kutom od 120° sa drugim skupom pravaca, a koji u trodimenzionalnom prostoru predstavljaju okomite pravce (De Klerk, 2007). Korištenjem ISO mreža olakšava se crtanje nekih geometrijskih tijela u ravnini te stvaranje efekta trodimenzionalnosti (Slika 77). Zbog jednostavnosti u prikazivanju 3D objekata, izometrijsko crtanje dosta koriste inženjeri i dizajneri, a posebno se koristi pri kreiranju testova za provjeru vizualno-prostornih sposobnosti. Najpoznatiji takav test je *The Purdue Visualization of Rotations test*, skraćeno PSVT test (Yue, 2006, str. 3).

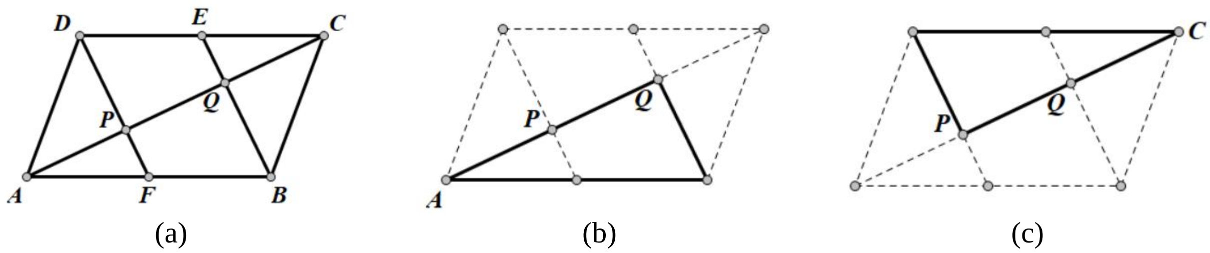


Slika 77. ISO mreže i izometrično crtanje

Crtanjem geometrijskih tijela u izometrijskoj mreži dodatno se razvijaju vizualno-prostorne sposobnosti kroz različite poglede na tijela, posebno crtanjem zadanog tijela nakon određene rotacije (Yue, 2006). Za rad u ISO mreži važno je razviti vještine izometričnih pogleda na 3D objekte iz različitih perspektiva te vještinu rekonstrukcije objekta na temelju zadanih različitih pogleda.

Diskurzivno (analitički – deduktivno) prepoznavanje i obrada figure. Za ono što se vidi „na prvu" kod nekog vizualnog prikaza, bez svjesne analize, može se reći da je to ono što vizualni prikaz *pokazuje* (eng. *shows*). U tom slučaju, značenje uočenih jedinica promatranog vizualnog prikaza izvodi se na temelju čiste percepcije. Međutim, vizualni prikaz se u matematičkom kontekstu obično stvara s određenom svrhom, kako bi predstavljao određeni matematički koncept, algoritam, ideju i sl. odnosno, vizualni prikaz je „nešto što stoji za nešto drugo" (Duval, 1995, str. 143). Kako bi se odredilo što određeni vizualni prikaz *predstavlja* (eng. *represent*), značenje uočenih jedinica i podjedinica vizualnog prikaza potrebno je tumačiti kroz matematička svojstva opisana definicijama i tvrdnjama (aksiomima i teoremima).

Promotrimo sljedeći problem (Duval, 1998, str. 41; Slika 78a): Zadan je paralelogram *ABCD* te su točke *E* i *F* polovišta stranica $\overline{CD}$ i $\overline{AB}$ redom. Dokazati da je $|AP| = |PQ| = |QC|$.



Slika 78. Paralelogram i neke podfigure

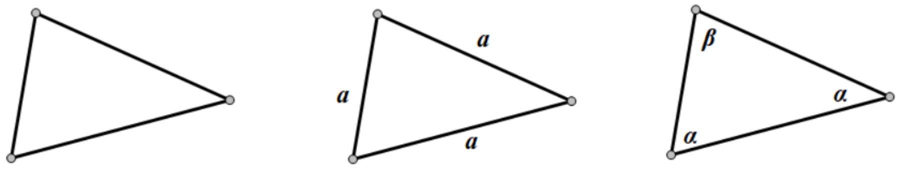
U polaznoj figuri mogu se uočiti razne podfigure, ali neke su ključne koje vode do rješenja (Slika 78b i 78c). No, samo uočavanje podfigura nije dovoljno za određivanje rješenja već je na figuru potrebno primijeniti odgovarajuća matematička svojstva. Prije svega, treba uočiti četverokut *FBED*, a kako on ima dvije nasuprotne stranice paralelne i jednakih duljina, $FB \parallel ED$ i $|FB| = |ED|$, radi se o paralelogramu. Dalje se, kod istaknutih podfigura (Slika 78b i 78c) može primijeniti obrat teorema o srednjici trokuta (jer su pravci koji sadrže odgovarajuće stranice promatranog paralelograma paralelni) te izvesti jednakost duljina dužina: $|AP|=|PQ|$ i $|PQ|=|QC|$, a zatim primjenom aksioma o realnim brojevima (ako su dva objekta jednaka trećem objektu, onda su i oni međusobno jednaki) zaključiti da su sve tri dužine jednakih duljina.

Promišljanje o vizualnom prikazu na način da se na uočene jedinica i podjedinice primjene odgovarajuća matematička svojstva (definicije, aksiomi ili teoremi), u skladu sa zadanim elementima i uvjetima, Duval naziva *diskurzivnim*, odnosno *analitičko-deduktivnim shvaćanjem figure* (eng. *discursive apprehension*) (Duval, 1995, str. 146).

Ukratko, da bi se odredilo što vizualni prikaz predstavlja, a ne samo što on pokazuje, potrebno je čisto perceptivno uočavanje jedinica figure staviti pod kontrolu deduktivnog promišljanja, odnosno povezati i tumačiti s odgovarajućim matematičkim svojstvima koja proizlaze iz definicija i tvrdnji svakog uočenog elementa.

Duval (1998) razlikuje dvije vrste diskurzivnih procesa: prirodne i teorijske. Pod *prirodnim* diskurzivnim procesom podrazumijeva opisivanje uočenih elemenata figure govornim jezikom u svrhu objašnjavanja ili argumentiranja rješenja, a pod *teorijskim* diskurzivnim procesom podrazumijeva čisti deduktivni slijed zaključivanja, koji se oslanja i na simbolički zapis (Duval, 1998, str. 46). Naime, teorijski diskurzivni proces se bitno razlikuje od argumentacije govornim jezikom jer je u deduktivnom procesu nužno potrebno uočiti što je pretpostavka, a što zaključak koji treba utvrditi, a zatim graditi logički slijed iskaza od pretpostavke prema zaključku, dok se u prirodnom diskurzivnom procesu govornim jezikom na prirodan način opisuje ono što se gleda i uočava. Prema Duvalu, upravo taj prijelaz s prirodnog na teorijski diskurzivni proces mnogi učenici nikada ne savladaju (Duval, 1998, str. 47).

Što određeni vizualni prikaz predstavlja može se mijenjati kroz razna jezična obilježja i odgovarajući kontekst, a da pri tome njegov izgled ostane nepromijenjen. Na primjer, sva tri trokuta na Slici 79 jednakog su oblika, ali oznake duljina stranica i veličina kutova mijenjaju ono što on predstavlja. Tako, na Slici 79(a) vizualni prikaz može predstavljati bilo koju vrstu trokuta, npr. raznostranični šiljastokutni trokut - jer „tako izgleda”, dok je na Slici 79(b) jednoznačno predstavljen jednakostranični trokut jer su slovima istaknute stranice jednakih duljina, a na Slici 79(c) jednoznačno predstavlja jednakokračni trokut jer su slovima istaknuti kutovi jednakih veličina.



(a) (b) (c)

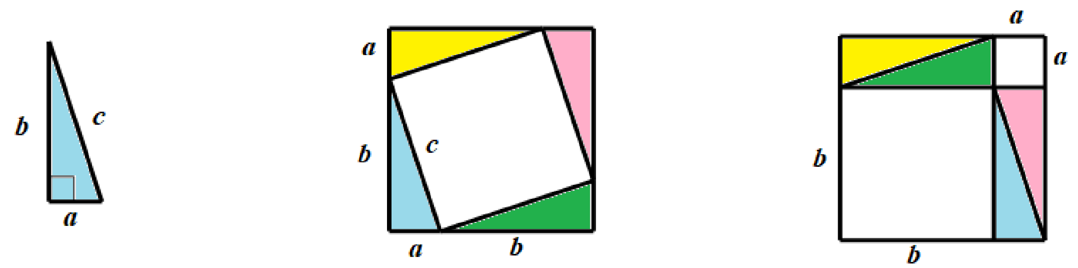
Slika 79. Različita značenja vizualnog prikaza jednakog izgleda

Drugim riječima, ako je vizualni prikaz dan bez ikakvih jezičnih obilježja i dodatnih objašnjenja ili tvrdnji, različite osobe na njemu mogu vidjeti različite stvari ili različita matematička svojstva. No, kada se vizualni prikaz upotpuni jezičnim obilježjima ili dodatnim tvrdnjama, onda to jednoznačno određuje što taj vizualni prikaz predstavlja u određenom kontekstu.

Operativno prepoznavanje i obrada figure. U prethodno opisanom procesu nisu vršene nikakve promjene nad geometrijskom figurom, već su samo izdvojene odgovarajuće podfigure na koje se moglo primijeniti neko matematičko svojstvo (definicija, aksiom, teorem) u svrhu određivanja rješenja. No, nije uvijek moguće uočiti sve jedinice figure i podfigure, koje su matematički važne, kako bi se odredilo što određena figura predstavlja, odnosno kako bi se odredilo rješenje problema ili pronašao ključni korak za tvrdnju koja se dokazuje. U tom slučaju, vizualni prikaz je potrebno dodatno preoblikovati (bilo u mislima, bilo stvarno, fizički).

Promjene nad geometrijskom figurom, u svrhu dobivanja nove figure koja vodi do rješenja, mogu se vršiti na različite načine: (1) cijepanjem figure na dijelove te njihovim premještanjem (rotacijom, translacijom i dr.) poput dijelova slagalice (*metoda rekonfiguriranja*); (2) dodavanjem novih elemenata (*metoda nadopune*); (3) mijenjanjem oblika (sužavanjem, izduživanjem), veličine (proporcionalno umanjivanje, uvećavanje; homotetija), položaja (translacija, rotacija) ili orijentacije (zrcaljenje). U kompleksnijim situacijama obično je potrebno kombinirati različite vrste promjena.

Na primjer, neke od tih metoda mogu se vidjeti pri dokazu Pitagorina poučka: U pravokutnom trokutu vrijedi $a^2 + b^2 = c^2$, gdje su a i b duljine kateta, a c duljina hipotenuze pravokutnog trokuta.



Polazna figura (a) | Nadopuna figure (b) | Rekonfiguriranje (c)

Slika 80. Promjene nad figurom

U svrhu utvrđivanja istinitosti dane jednakosti, najprije je pravokutni trokut (Slika 80a) nadopunjen do kvadrata stranice duljine $a+b$, s unutarnjim kvadratom stranice duljine c (Slika 80b), a zatim su unutrašnji dijelovi razmješteni (translatirani) tako da su formirana dva manja kvadrata stranice duljine a i b (Slika 80c). Tražena jednakost izvodi se uspoređivanjem površina (metoda površine) unutar dvaju kvadrata stranice duljine $a+b$ (Duval, 1998, str. 43).

Uočavanje i provođenje opisanih promjena nad geometrijskom figurom u svrhu ostvarivanja njezine heurističke uloge, Duval naziva *operativnim shvaćanjem figure* (eng. *operative apprehension*) (Duval, 1995, str. 147).

Operativno shvaćanje geometrijske figure je najkompleksniji, ali i nužan proces kojim se ostvaruje matematičko prepoznavanje i obrada jer se upravo kroz izvođenje promjena nad geometrijskom figurom osigurava dublji uvid, a time i odgovarajući put do rješenja ili do ključnog koraka u dokazu. No, s obzirom da se vizualni prikaz može transformirati na različite načine, pitanje je kako odabrati odgovarajuću promjenu da bi se došlo do traženog, a to je zapravo vještina koja se uči i razvija (Duval, 1995, str. 154).

Ukratko, kako bi se odredilo što određen vizualni prikaz predstavlja, odnosno koju matematičku poruku prikazuje, potrebna je interakcija različitih procesa koji se oslanjaju na matematička svojstva (sekvencijalno, analitičko-deduktivno i operativno shvaćanje figure), ovisno o vrsti problema koji se rješava te ovisno o kontekstu unutar kojeg se problem razmatra. Preduvjet, odnosno nužno polazište za tumačenje matematičke poruke danog vizualnog prikaza je čisto perceptivno prepoznavanje njegovih jedinica i podjedinica „na prvu” (Slika 81).

Slika 81. Prepoznavanje poruke koju predstavlja vizualni prikaz

Mogući potencijalni konflikt u učenika može nastati upravo između onoga što vidi „na prvu” i matematičkog tumačenja uočenog. Učenici zapravo imaju teškoća u prelasku s čistog perceptivnog prepoznavanja na prepoznavanje onoga što je matematički važno, a time i na određivanje matematičke poruke koju određeni vizualni prikaz predstavlja.

Kako bi savladali prijelaz s perceptivnog na matematičko tumačenje vizualnog prikaza, učenici trebaju poznavati i razvijati različite procese vizualizacije, najprije odvojeno, a zatim i u međusobnoj koordinaciji (Duval, 1995, str. 154-155). Pri tome su posebno važni procesi dekonstruiranja i rekonstruiranja figure (operativno shvaćanje), koji nisu neovisni već ovise o svim drugim procesima.

Iako opisani procesi u radu s geometrijskim figurama daju korisne smjernice za učinkovito korištenje vizualizacije pri učenju i poučavanju geometrije, oni se ne bi trebali shvatiti poput gotovih recepata koji su spremni za upotrebu. Jer, učitelj je taj pred kojim je izazov i odgovornost povezati teoriju i praksu na učinkovit i produktivan način, a osnovno polazište je osvještavanje i samostalno ovladavanje vještinama vizualizacije te poznavanje predznanja i razina mišljenja svojih učenika (Gagatsis et al, 2015).

4.4. Vizualno-prostorne sposobnosti

Istraživanje matematičkog obrazovanja i istraživanje razvoja prostornih sposobnosti dva su bitno različita smjera sa potpuno različitim metodologijama i teorijskim pristupom, ali i snažnom uzajamnom vezom (Pittalis i Christou, 2010). Naime, više nitko ne postavlja pitanje jesu li prostorne sposobnosti i matematika povezani jer su kroz svoja istraživanja kognitivni znanstvenici pokazali da viša razina prostornih sposobnosti predviđa uspješnije učenje i bolja postignuća u svim područjima matematike, također predviđa odabir i uspjeh u svim STEM područjima, ali i uspjeh u profesionalnom radu (Wai i sur., 2009; Mix i Cheng, 2012; Tosto i sur., 2014). Snažnu vezu prostornih sposobnosti i matematičkih postignuća sve više potvrđuju i rezultati istraživanja matematičkog obrazovanja (npr. Bishop, 1980; Clements i sur, 1997; Saads i Davis, 1997; Cohen, 2003; Bruce i Hawes, 2015; Gagatsis i sur. 2022).

U novije vrijeme naglasak se više stavlja na istraživanja o načinu na koji su povezana ta dva područja te koje točno vrste prostornih sposobnosti su povezane s kojom matematičkom vještinom. Ali, korištenje rezultata istraživanja kognitivnih znanstvenika prilično je kompleksno jer, nakon gotovo stoljeća širokog spektra istraživanja prostornih sposobnosti, nije došlo do stvaranja jedne sveobuhvatne teorije, već naprotiv do različitih vrsta raslojavanja.

Kognitivni znanstvenik Gardner, prvi je postavio teoriju višestrukih inteligencija, smatrajući da je ljudski um prilično modularno dizajniran te da različiti umni procesi koriste različite sustave obrade informacija. Prema Gardnerovoj teoriji, svaka inteligencija ima svoje podvrste i svaka od njih vlastite procese, nešto poput različitih mentalnih „organa" s vlastitim kognitivnim sposobnostima. Također, svaki čovjek ima svoj vlastiti profil inteligencije te ne postoje dva čovjeka s jednakim profilom, a različita zanimanja obično zahtijevaju više vrsta inteligencija. Upravo zbog toga, smatra Gardner, u obrazovnom bi sustavu trebalo koristiti različite pristupe, metode poučavanja i načine ocjenjivanja kako bi se osiguralo okruženje u kojem će svaki pojedini učenik imati mogućnost razviti svoje vlastite kapacitete te biti pripremljen za svijet rada (Gardner i Hatch, 1989).

Među istaknutim vrstama inteligencije, Gardner navodi i prostornu sposobnost (eng. *spatial ability*), pod čim podrazumijeva „sposobnost opažanja vizualnih ili prostornih informacija (u većoj ili manjoj mjeri), njihovo transformiranje i mijenjanje te ponovno korištenje vizualnih slika čak i bez stvarnih izvornih podražaja" (Gardner, 1999, str. 143.). Ili u kraćoj varijanti „sposobnost preciznog opažanja vizualno-prostornog svijeta te izvođenje transformacija na početnim opažanjima" (1989, str. 6) te koristi i naziv vizualno-prostorna sposobnost.

Iako je Grdnerova teorija višestrukih inteligencija još uvijek aktuelna, zadnjih godina se sve više koristi Cattell-Horn-Carroll-ova (CHC) teorija kognitivnih sposobnosti, koja trenutno predstavlja najopsežniji strukturni model inteligencije. Za razliku od Gardnerovog modela od osam (8), odnosno devet (9) vrsta inteligencija, CHC teorija predstavlja model od šesnaest (16) različitih kognitivnih sposobnosti, koje su raslojene na preko osamdeset (80) različitih komponenti. Najvažnija značajka CHC teorija je u dinamičnosti modela koji se kontinuirano reorganizira i restrukturira na temelju provedenih empirijskih istraživanja te predstavlja „kulminaciju preko 60 godina istraživanja faktorske analize u psihometrijskoj tradiciji" (Flanagan i Shauna, 2014., str. 3).

Prema CHC modelu inteligencije, prostorna sposobnost se navodi pod imenom *vizualna obrada* (eng. *visual processing*, s oznakom Gv), pod čim se podrazumijeva „sposobnost stvaranja, opažanja, analize, sinteze, pohranjivanja, ponovnog dohvaćanja, manipulacije, transformacije i razmišljanja s vizualnim obrascima i podražajima" (Flanagan i Shauna, 2014., str. 7), odnosno skraćeno, „sposobnost korištenja simuliranih umnih slika za rješavanje problema" (Schneidera i McGrewa (2012, str. 129). Unutar CHC modela, prostorna sposobnost, odnosno vizualna obrada raslojava se na jedanaest (11) različitih vrsta uskih sposobnosti (Flanagan i Shauna, 2014., str. 8). Među svim vrstama kognitivnih procesa, prostorna sposobnost se najviše istražuje.

S obzirom da je geometrija po svojoj prirodi vizualne naravi jer se njezini koncepti i ideje u većini slučajeva predstavljaju kroz različite vizualne prikaze, a dio geometrije se bavi i trodimenzionalnim oblicima, geometrija je neosporno povezana s različitim faktorima prostornih sposobnosti i vrlo je plodno tlo za istraživanje tih povezanosti. Štoviše, mnoga istraživanja u obrazovanju potvrđuju da efikasno učenje geometrije treba podršku prostornih sposobnosti, ali i obratno, prostorne sposobnosti se efikasno mogu razvijati kroz odgovarajuće aktivnosti u kontekstu geometrije (Pittalis i Christou, 2010; Bruce i Hawes, 2015).

Daljnje razmatranje različitih definicija kao i različitih klasifikacija prostornih sposobnosti nije u fokusu ovog rada, jer bi se time pozornost mogla raspršiti na mnoge detalje koji nisu relevantni za sam rad, posebno što ne postoji usuglašenost niti oko raslojavanja niti oko njihovih definicija. Kratki pogled iz perspektive prostornih sposobnosti uzet je više radi cjelovitosti sagledavanja vizualizacije u svrhu učenja i poučavanja geometrije. Naime, strategije i metode poučavanja tijekom intervencije zasnivale su se velikim dijelom na vizualno-analitičkoj metodi usmjerenog opažanja, koja se opisuje kasnije, a kako se dio kolegija bavi geometrijom prostora odnosno proučavanjem svojstava i odnosa 3D figura, bilo je korisno „zaviriti” i u svijet prostornih sposobnosti.

4.4.1. Procesi obuhvaćeni prostornim sposobnostima

Imati osjećaj za prostor, grubo govoreći, značilo bi imati intuitivni osjećaj za svoje okruženje i objekte koji se u njemu nalaze. U kontekstu matematike, to bi značilo imati intuitivni osjećaj za prostornu orijentaciju i prostornu vizualizaciju (McGee, 1979).

Pod *prostornom orijentacijom* (eng. *spatial perception*) podrazumijeva se razvijanje intuitivnog osjećaja za objekte u prostoru, njihove karakteristike i odnose s drugim objektima. U kontekstu geometrije, to podrazumijeva rad s geometrijskim figurama, njihovim svojstvima i vezama. Pod *prostornom vizualizacijom* (eng. *spatial visualisation*) podrazumijeva se manipuliranje objektima u prostoru prije svega kroz umne aktivnosti: pomicanje, okretanje, preokretanje, povećavanje, smanjivanje, reorganiziranje, kao i uočavanje invarijanti unutar promjenjive situacije. U kontekstu geometrije, to su razne vrste preslikavanja i njihova svojstva: translacija, rotacija, zrcaljenje, homotetija i dr. te uočavanje svojstava koja ostaju sačuvana pri tim transformacijama.

Dakle, i dalje je vidljiva dualnost geometrijskih figura, s tim da je ovdje veći naglasak na umnim aktivnostima kojima se potiče razvoj vizualno-prostornih sposobnosti, a vanjski prikazi više služe za stimulaciju tih aktivnosti. Naime, oblike, uzorke, strukturu, položaj i kretanje objekata opažamo očima, ali sve se procesuira u mislima, pri čemu se koriste i sva dotadašnja iskustva i stečena znanja (Del Grande, 1990). Upravo je zato važna uzajamnost korištenja i razvoja različitih vizualno-prostornih sposobnosti u kontekstu geometrije i stjecanja odgovarajućeg znanja (Clements i sur., 1997).

Dakle, pod prostornim sposobnostima podrazumijevaju se procesi koji se provode s vizualnim informacijama u prostornom kontekstu, pri čemu se češće misli na procese koje osoba provodi u umu na temelju vizualnih podražaja, a manje na vizualne prikaze koji se na temelju tih procesa stvaraju. Među tim procesima najčešće se ističu sljedeći: stvaranje (eng. *generation*), opažanje (eng. *perception*), identificiranje (eng. *identification*), zadržavanje (eng. *retention*), manipulacija (eng. *manipulation*), transformacija (eng. *transformation*), pohranjivanje (eng. *store*), ponovno dohvaćanje (eng. *retrieval*). Neki od tih procesa stimulirani su statičnim vizualnim prikazima, dok se drugi stvaraju pri izvođenju različitih manipulacija i transformacija s vizualnim objektima, bilo u umu ili pri radu s fizičkim objektima ili oboje.

Veći dio tih procesa već je opisan kroz prethodna poglavlja. Međutim, kada se gleda iz perspektive prostornih sposobnosti, javljaju se teškoće u razumijevanju i povezivanju jer se različita imena koriste za iste procese, ali i ista imena za različite skupove procesa.

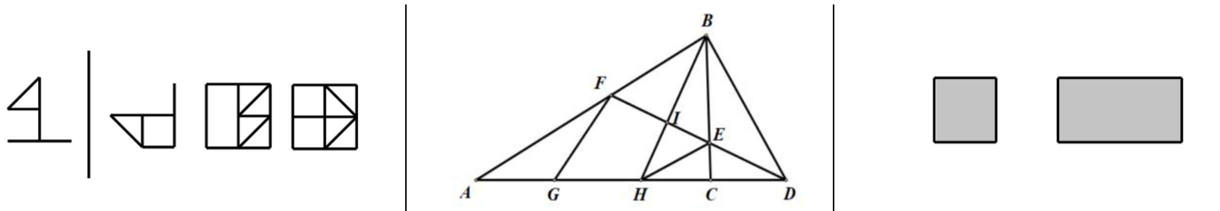
4.4.1.1.Otkrivanje figura

Usporedbe radi, jedna od važnih vještina u radu s konkretnim geometrijskim figurama jest prepoznavanje ključnih podfigura u složenoj figuri te daljnja matematička obrada.

U kontekstu vizualizacije, Duval tu aktivnost razmatra kroz četiri vrste obrade figure (str. 78), u kontekstu geometrije Godfey je razmatra pod pojmom *geometrijsko oko*. No, u teoriji prostornih sposobnosti, ta se sposobnost promatra s više aspekata, ovisno o tome je li vizualni uzorak koji se traži zadan ili ne te kojom brzinom se uočava i identificira, ali i koliko je percepcija koja se koristi postojana. Koristeći upravo te suptilne razlike, neki autori im daju i posebna imena te ih razmatraju kao posebne prostorne sposobnosti.

Na primjer, unutar vizualne obrade CHC teorije, ova sposobnost se naziva „flexibility of closure” (Schneidera i McGrewa; 2012), a u drugih autora se javlja „figure-ground perception” (Del Grande, 1990, str. 15), „disembedding” (Kimura, 1999), „field dependence/indenpendence” (Idris, 1998). Slično tome, sposobnost vizualnog identificiranja određene figure ili uzorka, koji je na neki način sakriven unutar složenog vizualnog konteksta, a da se unaprijed ne zna kakav uzorak se traži, obično se izdvaja pod imenom „closure speed” (Lochman, 1993; Schneidera i McGrewa, 2012).

Sposobnost izdvajanja određenih elemenata iz složene geometrijske figure, koji su matematički važni i smisleni, jedan je od faktora koji značajno utječu na savladavanje geometrije. Na primjer, na Slici 82(a) figuru koja se nalazi slijeva treba pronaći i istaknuti (podebljati) unutar složenih figura, koje se nalaze s desna (Del Grande, 1990, str. 16). Na Slici 82(b) treba prepoznati sve trokute. Učenici koji brzo i vješto mogu izdvojiti određene komponente iz složene figure te nisu pod utjecajem okruženja nazivaju se „field independent learners” i oni su uspješniji u učenju geometrije. S druge strane, oni koji nisu vješti u izdvajanju smislenih komponenti iz složene figure jer na njih snažno utječe okruženje, odnosno složenost figure, nazivaju se „field dependent learners” i oni obično imaju dosta teškoća pri učenju i razumijevanju geometrije (Idris, 1998, str. 19). Na Slici 82(c) treba odrediti koje su sve mogućnosti oblikovanja 3D objekata korištenjem lista u obliku kvadrata, odnosno lista u obliku pravokutnika (umno i fizički) te opisati svojstva oblikovanih tijela. Kako bi se opisala svojstva tijela nastalih savijanjem zadanih likova, treba uočiti duljine rubova danih listova papira (zadane figure) te elemente oblikovanih tijela (oblikovane figure), a zatim elemente tijela povezati s točno određenim elementima lika (Saads & Davis, 1997, str. 3).



(a) Otkrivanje zadane figura | (b) Prebrojavanje trokuta | (c) Savijanje lista u mislima

Slika 82. Otkrivanje figura

Postoje mnogi geometrijski koncepti i njihove veze koji se ne mogu prepoznati ili razumjeti, ako ova sposobnost nije razvijena: vrste kutova, sukladni/slični trokuti, poliedri, rotacijska tijela itd.

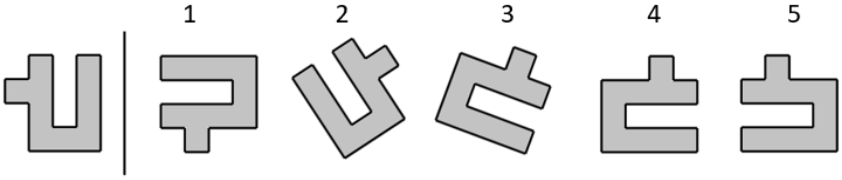
4.4.1.2.Umna rotacija

Sposobnost umnog rotiranja kognitivni znanstvenici izdvajaju kao centralnu mjeru prostornih sposobnosti, odnosno prostornog mišljenja i zaključivanja. No, u matematičkim kurikulumima to još uvijek ne zauzima posebno mjesto (Bruce i Hawes, 2015).

Bruce i Hawes, na temelju interventnog istraživanja s učenicima od 4 do 8 godina, u periodu od četiri mjeseca, pokazali su da je umna rotacija sposobnost koja se može učiti i razvijati treniranjem kroz ciljano odabrane aktivnosti.

Prije svega, predlažu aktivnosti u kojima učenici trebaju slagati i rekonstruirati razne vrste 2D i 3D figura, korištenjem raznih didaktički sredstava, ali i raznih računalnih programa koji omogućavaju te vrste aktivnosti. U tim aktivnostima važna je rasprava i obrazlaganje provedenih aktivnosti radi obogaćivanja matematičkog vokabulara i razvijanja formalnog matematičkog jezika. Također, važno je strateško slaganje, ali i razvijanje različitih strategija slaganja. Nakon slaganja važno je i prikazivanje oblikovanih figura na papiru ili nekoj mreži, a može biti i obratno, tj. da se na temelju nekog prikaza oblikuje odgovarajuća figura od likova ili blokova za slaganje. Posebno, u radu s 3D figurama korisna vježba je gledanje tijela iz različitih perspektiva te prikazivanje različitih pogleda na tijelo, ali i obratno, izgradnja 3D figure na temelju prikaza iz različitih perspektiva.

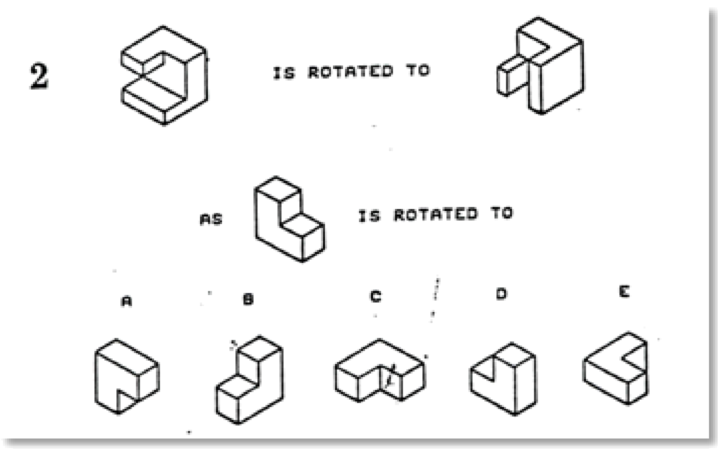
Za razvoj prostornog zamišljanja posebno su važni zadaci u kojima se trebaju odrediti sličnosti i razlike među danim figurama. Takvim zadacima se često i testiraju vizualno-prostorne sposobnosti. Tako, na primjer u WSAT testu (eng. *Wheatley spatial ability test,* Wheatley, 1997) ispituje se sposobnost prepoznavanja figura koje se mogu dobiti od zadane figure samo okretom, ali ne i preokretom (Slika 83). Dakle, među pet figura s desne strane vertikalne crte treba odabrati one koje nastaju odgovarajućom rotacijom figure s lijeve strane, a isključiti one koje nastaju rotacijom i zrcaljenjem.



Slika 83. Primjer iz WSAT testa

Osim dvodimenzionalnih figura mogu se koristiti i trodimenzionalne figure, što je karakteristično za PSVT testove (str. 86). Naime, jedan od složenijih oblika umne rotacije je aktivnost u kojoj treba neku 3D figuru misaono zarotirati na određeni način, a zatim na analogan način ponoviti rotiranje za neko drugo tijelo te izvesti zaključak.

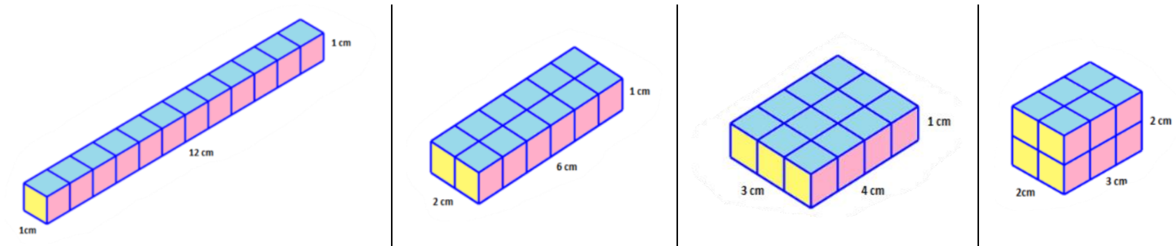
Na primjer, u PSVT testu zadaci (Slika 84) su postavljeni tako da najprije treba prepoznati na koji način je zarotirana 3D figura, zatim analogan postupak rotacije treba ponoviti za drugo tijelo te među ponuđenim tijelima prepoznati ono koje je nastalo upravo tom rotacijom. Ovdje se može uočiti neprestana izmjena vizualnih podražaja koji dolaze s papira, zatim zamišljanje slike u umu i njezino rotiranje, pa ponovno čitanje prikaza s papira i tako naizmjenično dok se ne odredi točan odgovor. Na taj način se koriste razni procesi prostornih sposobnosti: uočavanje, identificiranje, zadržavanje, transformacija, ponovno prisjećanje itd.



Slika 84. Zadatak za vizualizaciju rotacije

Ovakvih i sličnih primjera ima priličan broj u geometriji prostora, posebno pri izgradnji različitih vrsta geometrijskih tijela iz mreže i obratno. Važno ih je pažljivo birati te vješto i svrhovito koristiti.

Na primjer, ako se gradi tijelo od 12 jednakih kocki, može se ispitivati koliko različitih kvadara se može oblikovati (Slika 85), kako izgledaju njihove mreže, kojih su veličina njihovi bridovi. Zatim se mogu međusobno uspoređivati po volumenu i oplošju te zaključke postaviti u obliku tvrdnji, najprije za promatrani slučaj, a zatim i općenito. Konačno, ovisno o uzrastu, tvrdnja se može i dokazati.



$O_1 = 50$ $O_2 = 40$ $O_3 = 38$ $O_4 = 32$

Slika 85. Slaganje 3D figura i njihova oplošja

Kroz ove vrste aktivnosti razvija se umijeće prepoznavanja svojstava koja ostaju sačuvana i onih koja se mijenjaju. Raspravom o dobivenim figurama izdvajaju se one figure koje su međusobno podudarne, na temelju čega se otkriva da podudarnost figura ne ovisi o položaju. Usporedba se može temeljiti na konkretnim brojevima bez korištenja formula, a zatim argumentiranje temeljiti i na općim zapisima veličina te poopćavanjem opisane situacije.

4.4.2. Individualne razlike i mjerenje prostornih sposobnosti

Prema Lohmanu, individualne razlike u prostornim sposobnostima ostvaruju se u brzini izvođenja transformacija, posebno rotacije, zatim u vještini stvaranja i zadržavanja umnih slika, količini vizualno-prostornih informacija koje osoba može održati u aktivnom stanju i konačno u sofisticiranosti i fleksibilnosti dostupnih strategija za rješavanje određenih zadataka (Lohman, 1993, str. 9).

U pravilu, zadaci koji se koriste za vježbu i razvoj prostornih sposobnosti ujedno mogu biti i zadaci za mjerenje određenih faktora prostornih sposobnosti. Tako se sposobnosti mogu razvijati i mjeriti kroz različite praktične zadatke (eng. *performance test*): popločavanjem površine ili oblikovanjem nove 2D figure nekim zadanim figurama, izgradnjom 3D figure korištenjem zadanih blokova, savijanjem papira (Golan, 2011) i dr.

Nadalje, kroz različite vizualne prikaze mogu se razvijati vještine prepoznavanja određene figure ili prebrojavanja nekih zadanih figura, zatim otkrivanje sličnosti i razlika među figurama te izdvajanje sukladnih ili sličnih figura itd. S druge strane, slični zadaci se mogu koristiti kroz testove u pisanom obliku (eng. *paper and pencil test*) za mjerenje raznih sposobnosti uočavanja, identificiranja, uspoređivanja itd. Za faktorsko istraživanje prostornih sposobnosti danas postoji na stotine testova u pisanom obliku, među kojima su i 392 prostorna testa koje su pripremili Eliot i Smith (Lohman, 1993).

Prostorne sposobnosti se mogu razvijati i mjeriti kroz verbalne testove (eng. *verbal test*), u kojima ispitanici slušaju problem, zatim na temelju jezičnih uputa grade umnu sliku te u skladu s tim odgovaraju na pitanje.

Konačno, prostorne sposobnosti se mogu razvijati i testirati kroz računalne testove u dinamičkom okruženju (eng. *dynamic computer – based test*). Naime, uočavanje dinamičkih prostornih odnosa zahtijeva drugačiju sposobnost od umne rotacije i transformacije statičnih objekata jer se u dinamičkom okruženju dodatno treba predviđati i putanja objekta (Lohman, 1993).

Osim navedenog, pri mjerenju prostornih sposobnosti preporuča se za isti faktor koristiti više testova, koji se osim po obliku mogu razlikovati i prema načinu davanja odgovora. Na primjer, kod testova pisanog oblika, zadaci mogu biti takvi da se odgovor bira između više ponuđenih odgovora ili se treba prikazati cijeli proces rješavanja. I jedni i drugi imaju svojih prednosti i nedostataka.

Rezimirajući izneseno, može se zaključiti da su vizualno-prostorne sposobnosti brojne i da se mogu razvijati učenjem i poučavanjem, a posebno je korisno kada se razvijaju uzajamno u odgovarajućem kontekstu. Tako se vizualno-prostorne sposobnosti mogu razvijati kroz ciljano odabrane geometrijske zadatke i obratno, oni koji postignu višu razinu vizualno-prostornih sposobnosti biti će uspješniji u stjecanju i primjeni geometrijskih znanja.

4.5. Potencijal i ograničenja rada s vizualizacijom

Unatoč dominantnom analitičkom pristupu učenja i poučavanja matematike, zahvaljujući tehnološkom napretku, sve većim potrebama za matematičkom pismenošću, ali i rezultatima istraživanja u obrazovanju koji ukazuju na pozitivan utjecaj vizualizacije na učenje i poučavanje matematike, primjena vizualizacije u matematici i matematičkom obrazovanju intenzivno se povećava zadnjih 20-ak godina. Kako korištenje elemenata vizualizacije može osigurati prednost u učenju i poučavanju kada se ispravno koristi, jednako tako može biti uzrok i mnogih teškoća, posebno kada se koristi neprimjereno.

4.5.1. Potencijal vizualizacije

Potencijal vizualizacije u radu s matematikom je velik i raznovrstan (Giaquinto, 2015), a može se razmatrati s obzirom na određeno matematičko područje te pojedine teme i koncepte, ali i na važne matematičke procese koji bi se trebali njegovati učenjem i poučavanjem matematike.

Vizualni prikazi mogu privući pozornost učenika te potaknuti mnoštvo umnih slika i ideja te ih motivirati na aktivan rad i sudjelovanje u raspravi. Kroz neke vizualne prikaze, npr. fotografije, videozapise i sl., može se omogućiti uvid u primjenjivost matematičkih sadržaja i na taj način osigurati smislenost onoga što se uči, a time i veći interes za učenje matematike. Ciljanim korištenjem odgovarajućih vizualnih prikaza iz realnog života može se osigurati dobra podloga za istraživanje nekih matematičkih ideja: od samostalnog uočavanja pravilnosti, preko postavljanja tvrdnji do izvođenja općih zaključaka, odnosno od realnog problema do „čiste" matematike (Mateljević, Jozić, Svetlik, 2013). Također, odgovarajući vizualni prikazi mogu biti podloga za funkcionalno povezivanje različitih matematičkih sadržaja, ali i rješavanje nezaobilaznih suhoparnih procedura (npr. Jozić, 2012a i 2012b), a ciljano odabrana slika može prenijeti neke poruke učinkovitije od pisane ili izgovorene riječi (Hill i Roberts, 2002).

Korištenjem višestrukih reprezentacija u učenju i poučavanju matematike postiže se dublji uvid te bolje razumijevanje matematičkih koncepata, a posebno fleksibilnost misli, čime se osigurava stvarni razvoj matematičkog mišljenja (npr. Pape i Tchoshanov, 2001; Nakahara, 2007; Duval, 2014, 2017), a samo jedan geometrijski zadatak s višim kognitivnim zahtjevima, ili postavljen vizualno, može osigurati razvoj različitih strategija i procesa rješavanja problema te izgradnju bogate mreže matematičkih koncepata i funkcionalnih veza (Hershkowitz, Arcavi i Brucheimer, 2001; Baranović, Antunović-Piton, 2021).

Konačno, vizualni prikazi zbog svoje konkretnosti pospješuju intuitivni uvid i bolje razumijevanje, pa potiču razvoj vještina zaključivanja te naprednih vještina rješavanja problema (npr. Krutetskii, 1976; Yakimanskaya 1991; Presmeg 2001).

Ukratko, vizualizacija može biti vrlo moćan „alat" u rukama matematičara i nastavnika matematike, posebno ako se ciljano i svrhovito koristi jer doprinosi lakšem i kvalitetnijem usvajanju i izgradnji matematičkog znanja te razvoju matematičkih procesa i oblika mišljenja. No, primjenom vizualizacije puno toga se u pristupu poučavanju mijenja: pitanja koja se postavljaju, način komunikacije, metode rješavanja problema itd. (Whiteley, 2005).

Mnogi suvremeni matematički kurikulumi diljem svijeta, prepoznajući važnost i potencijal vizualizacije, postupno ju uključuju kao standard koji treba doseći. Tako, na primjer, dokument NCTM (2000) ističe da bi svi učenici trebali moći: (1) kreirati i koristiti reprezentacije u svrhu organiziranja, zapisivanja i komuniciranja matematičkih ideja, (2) odabrati, primijeniti i međusobno povezati reprezentacije radi rješavanja problema, (3) koristiti reprezentaciju u svrhu modeliranja i interpretiranja fizikalnih društvenih i matematičkih fenomena. (NCTM, 2000, str 67), a na sličan način to rade i mnogi drugi (npr. Odluka, 2019).

Međutim, „slika vrijedi više od tisuću riječi" ako se svrhovito i učinkovito koristi, u suprotnom može vrijediti malo ili ništa. Zapravo, vizualizacija se ne bi smjela shvatiti kao lijek za sve probleme. Ona je jednostavno „stvar s mnogo lica": u nekim situacijama može biti od koristi i osigurati prednost, dok će u drugima stvoriti teškoće i usmjeriti mišljenje u pogrešnom smjeru (Arcavi 1999, str. 77).

4.5.2. Ograničenja vizualizacije

Postoje mnogi faktori koji mogu biti prepreka i ograničenje te mogući izvor teškoća pri vizualnoj obradi: neke teškoće mogu nastati uvođenjem vizualnih prikaza te njihovom neučinkovitom obradom, dok druge mogu proizići upravo zbog izbjegavanja vizualnih elemenata, posebno kada su potrebni.

Svaki bi nastavnik matematike, nakon nekoliko godina poučavanja određenog predmeta, mogao napraviti listu problema ili grupe problema u kojima njegovi učenici ili studenti imaju značajnih teškoća, posebno kada je u pitanju primjena vizualizacije. Međutim, malo je onih koji analiziraju zašto se te teškoće javljaju, a još manje je onih koji traže prikladan put za njihovo savladavanje (Eisenberg i Dreyfus, 1991, str. 27).

Analizirajući moguće razloge zašto studenti, koji upišu matematičke kolegije na prvoj godini fakulteta, odbijaju koristiti metodu vizualizacije pa i kada se ona prirodno nameće, Eisenberg i Dreyfus uočavaju tri moguća uzroka: uvjerenje o prirodi matematike, prirodu procesa poučavanja i teškoće povezane sa samom vizualnom obradom (Eisenberg i Dreyfus, 1991, str. 29).

4.5.2.1. Teškoće koje proizlaze iz uvjerenja

Teškoće u radu s vizualizacijom koje proizlaze iz uvjerenja posljedica su uvjerenja i vrednovanja pojedinca o tome što je matematika i što znači raditi matematiku, što je legitimno i prihvatljivo za matematiku, a što nije. Arcavi ove teškoće još naziva i „kulturološke" teškoće (Arcavi, 1999, str. 74).

Naime, sklonost studenata da misle analitički i algebarski, radije nego vizualno, te da najčešće posežu za ne-vizualnim argumentima, čak i kada su usmjereni na vizualnu obradu, prema rezultatima istraživanja Eisenberg i Dreyfus (1991), nije slučajna već je posljedica stavova koje su razvili u radu sa svojim nastavnicima. Jer, uvriježena je praksa da se matematičke ideje komuniciraju unutar ne vizualnih okvira bez obzira na prisutnost vizualnog argumenta u osnovi neke ideje.

Među matematičarima ima onih koji za vizualizaciju jednostavno kažu: „to nije matematika" (Sfard, 1998, str. 454, prema Arcavi, 1999, str. 74), dok će većina reći da je vizualizacija samo pomoć na putu do „prave" matematike iako svi oni u svom radu koriste vizualizaciju kao koristan oslonac pri otkrivanju puta do rješenja. Posebno su nepokolebljivi u svom stavu da vizualni argumenti nisu dovoljni da bi bili dokaz, iako ne skrivaju da ih često koriste u procesu dokazivanja (Eisenberg i Dreyfus, 1991, str. 30). Unutar takvog okruženja, u kojem prevladava strogi formalizam, stvoreno je uvjerenje da je i sama matematika po svojoj prirodi ne vizualna te iako postoje mnogi zagovornici vizualizacije u radu s matematikom, mnogi je smatraju drugorazrednom aktivnošću te se kao takva nerado koristi i u matematičkom obrazovanju.

Ako nastavnici matematike smatraju da su vizualne metode manje vrijedne, u najboljem slučaju da mogu poslužiti samo kao usputna pomoć, ali ne i kao punopravni argument, oni neće njegovati vizualne aspekte u nastavi, niti kroz poučavanje niti kroz nastavne materijale. U takvom okruženju, u kojem nemaju mogućnost iskusiti potencijal vizualizacije, i sami učenici razvijaju uvjerenje da vizualne metode nisu dovoljno vrijedne te da oni koji se njima služe nisu dovoljno uspješni. Posljedično tome, učenici izbjegavaju koristiti vizualne metode pa čak i kada su one nužno potrebne, a posebno u onih nastavnika koji ih ne vrednuju (Eisenberg i Dreyfus, 1991, Presmeg, 2006).

No, još uvijek ostaje otvoreno pitanje: ako matematičari koriste vizualno istraživanje i argumentaciju u svom radu, zašto vizualne metode ne prenose na svoje učenike i ne vrednuju ih unutar nastavnog rada? Posebno što rezultati raznih istraživanja u matematičkom obrazovanju, već neko vrijeme, ukazuju da pretjerani naglasak na apstraktnim i analitičkim mislima kroz učenje i poučavanje matematike može imati štetan učinak na ishode učenja, a posljedično i na samu profesiju (Eisenberg i Dreyfus, 1991, str. 32).

Ukratko, stav o tom da je matematika po svojoj prirodi ne vizualna te da se ona kao takva treba komunicirati unutar ne vizualnih okvira duboko je ukorijenjeno uvjerenje koje je razvila sama matematička zajednica, unatoč postojanju zagovornika vizualizacije. Zbog tih uvjerenja, vizualni aspekti u nastavi imaju slab status, a posljedično tome učenici imaju slab uspjeh u učenju matematike, posebno kada je pomoć vizualizacije nužno potrebna. Jer, neuključivanjem vizualizacije u matematički rad, njezin potencijal ne može ni doći do izražaja te se vrši „devalvacija" vizualizacije na štetu same matematike (Presmeg, 1997, str. 310).

Dakle, matematičari su sami krivi što učenici odbijaju koristiti vizualne elemente, zbog čega izostaje i njihov uspjeh u učenju matematike (Eisenberg i Dreyfus, 1991, str. 30). Ostvarivanje boljih ishoda učenja leži, ne samo u uključivanju vizualizacije u nastavu matematike, već i u poučavanju učenika njezinom učinkovitom korištenju (Gal & Linchevski, 2010; Rellensmann, Schukajlow & Leopold, 2017; Sinclair, Moss, Hawes & Stephenson, 2018).

4.5.2.2. Teškoće koje nastaju zbog prirode procesa poučavanja

Ne samo da matematičari vizualizaciju ne koriste često u svom poučavanju, već postoji razlika između vizualne obrade koju koriste u svom profesionalnom radu od one koju koriste u poučavanju, (kada je koriste), a uzrok te razlike nalazi se u teoriji didaktike matematike (Eisenberg i Dreyfus, 1991, str. 32).

S jedne strane, akademsko znanje je prilično kompleksno i zamršeno te sadrži mnoštvo unutarnjih veza i vanjskih poveznica. S druge strane, „didaktičko oblikovanje znanja", podrazumijeva preobrazbu akademskog znanja od znanstvenog karaktera na znanje koje je linearno strukturirano i najčešće odvojeno od konteksta kako bi se moglo poučavati u školi. U tom procesu didaktičke pripreme znanja u svrhu poučavanja, mnoge poveznice među konceptima i procedurama budu uništene ili ispuštene pa to nije više ono isto znanje koje „sjedi u umu matematičara". Osim toga, znanje koje se želi prezentirati treba biti što sličnije znanju koje učenici već imaju, a stupanj novog znanja koje se prezentira ne smije biti visok. Kako bi se svi postavljeni uvjeti zadovoljili, novo znanje se obično postiže kroz izgradnju algoritama i procedura jer one na prirodan način dopuštaju sekvencijalno uvođenje.

Ukratko, školsko znanje je nužno sekvencijalno, ima svoj početak i kraj i kao takvo više mu odgovara analitička obrada koja koristi jezično predstavljanje (jezični opis i simbolički zapis) kroz niz odgovarajućih izraza, a ne vizualna obrada kojoj nije svojstvena linearna šablona, već više kompleksna struktura raznih elemenata i njihovih međusobnih veza. Na taj način se akademsko znanje, koje je kompleksno znanje s mnoštvom veza, pojednostavnjuje radi linearnosti samog procesa poučavanja, ali i načina obrade koji tu linearnost podržava. Sasvim je jasno da će u sekvencijalnoj nastavnoj situaciji i učenici radije odabrati analitički pristup, posebno ako žele ostvariti veći matematički uspjeh, u što kraćem vremenskom periodu. Uzroke opisanih teškoća, Eisenberg i Dreyfus nazivaju još i *sociološkim razlozima* (1991, str. 32).

Međutim, s druge strane, učenici u razredu obično dolaze iz različitih kulturoloških sredina, među kojima ima i onih s bogatom vizualnom kulturom. Ukoliko nastavnik primjenjuje analitički pristup, a učenik dolazi iz vizualno bogate kulture, on će biti zakinut za vizualni pristup koji njemu više odgovara, odnosno za takve učenike vizualizacija će biti „deficit” pa će postizati još slabiji rezultat od mogućeg (Arcavi, 1999).

Rješenje prilagodbe kompleksnog akademskog znanja za potrebe sekvencijalnog poučavanja, a da pri tome ostane sačuvano što više veza svojstvenih samom znanju nalazi se u neprestanom kombiniranju analitičkih i vizualnih metoda. Jer, kroz vizualne metode do izražaja dolaze konceptualne veze, a snaga matematičke vizualizacije ostvaruje se samo kada je povezana s logičkim zaključivanjem i simboličkim zapisima (Presmeg, 2006).

4.5.2.3. Teškoće koje nastaju pri vizualnoj obradi

U radu s vizualnim prikazima, pored opisanih faktora koji potiču učinkovitost vizualne obrade, postoje razna ograničenja koja je potrebno osvijestiti i poznavati kako ne bi izazvala niz različitih teškoća i tako bila prepreka učinkovitosti. Teškoće koje nastaju pri korištenju vizualizacije Arcavi naziva *spoznajnim teškoćama* (Arcavi, 1991, str. 74), a one mogu nastati i u procesu stvaranja i u procesu korištenja vizualnih prikaza.

Teškoće u radu sa složenim strukturama. Ako vizualni prikaz predstavlja neku složenu konceptualnu strukturu, njegova obrada počiva na visokim kognitivnim zahtjevima. Jer, interpretiranje bogate konceptualne slike zahtijeva stalno naprijed-nazad preusmjeravanje pozornosti, a za to ne postoje „sigurne” proceduralne rutine, kao što postoje u radu s formalnim simboličkim zapisima pa takve situacije mogu djelovati previše „skliske” ili „rizične” čime odbijaju učenike, a možda i nastavnike, da ih koriste (Arcavi, 1999, str. 74).

Nadalje, unutar vizualnih prikaza određene situacije neki konkretni detalji mogu stvoriti lažne pretpostavke te proces rješavanja ili dokazivanja odvesti u pogrešnom smjeru ili ga potpuno onemogućiti (vidjeti str. 34). Posebno, ako se koriste konkretne slike realističnih situacija ili se stvaraju vizualni prikazi realističnih situacija, konkretni detalji na njima mogu odvlačiti pozornost ili misao usmjeriti u pogrešnom smjeru. Na primjer, ako se želi odrediti kapacitet cisterne za gorivo koja je valjkastog oblika, onda pri crtanju nije potrebno prikazivati cisternu već valjak koji će predstavljati cisternu. Svi ostali nepotrebni detalji odvlače pozornost i oduzimaju vrijeme (Presmeg, 1986, str. 44).

Teškoće u radu s različitim prikazima iste situacije. Rad s različitim prikazima iste situacije počiva na visokim kognitivnim zahtjevima jer, ako se želi uspostaviti veza između tekstualnog opisa neke situacije, vizualnog prikaza i simboličkog zapisa te iste situacije, onda je potreban stalan i vješt naprijed – nazad prijelaz među njima, što je prilično krivudav proces za učenike, koji zahtijeva dosta vremena, a može biti i kontekstualno ovisan (Arcavi, 1999, str. 74).

Osim uspostavljanja veza među različitim prikazima iste situacije, potrebna je vještina odabira onog prikaza koji u određenoj situaciji više odgovara. Jer, iako različiti prikazi sadrže iste informacije nekog matematičkog koncepta ili ideje, u jednom prikazu informacija može biti eksplicitno vidljiva, dok je u drugom sadržana implicitno. Zatim, ako je potrebno potvrditi i argumentirati u jezičnoj formi ono što se na vizualnom prikazu vidi „na prvu”, to može biti dugotrajan proces, koji zahtijeva druga znanja, a koja treba znati „iskopati” (Eisenberg i Dreyfus, 1991, str. 33).

Različite osobe vide različito. Jedna značajna teškoća u radu s vizualizacijom u matematičkom obrazovanju jest i to što nastavnici i učenici najčešće ne vide isto na istom vizualnom prikazu. Naime, prema Duvalu mnogi nastavnici nisu svjesni da učenici najčešće ne vide isto ono što vide oni ili što misle da bi učenici trebali vidjeti (Duval, 2014, str. 160), a to može biti uzrok mnogih nerazumijevanja i pogrešnih shvaćanja.

Prototipne slike. Učestalo korištenje istih vizualnih prikaza za odgovarajuće koncepte u ustaljenom, standardnom položaju, onemogućava fleksibilnost mišljenja što stvara teškoću prepoznavanja predstavljenog koncepta kroz vizualni prikaz u nekom drugom položaju (vidjeti str. 34). Tako, na primjer, ako se za kvadrat učestalo koristi prikaz sa stranicama u horizontalnom i vertikalnom položaju, onda je vrlo vjerojatno da učenici neće prepoznati kvadrat ukoliko su dva nasuprotna vrha postavljena vertikalno.

Konačno, svako nekritičko vizualno zaključivanje bez argumentirane podloge može dovesti do pogrešnih zaključaka.

Ako nastavnici nisu svjesni ograničenja i teškoća pri korištenju elemenata vizualizacije, onda ni svoje učenike ne mogu poučiti kako te teškoće nadići, što znači da ne mogu optimalno iskoristiti široki spektar potencijala vizualizacije pri učenju i poučavanju geometrije (Presmeg, 1986a, 1986b, 2006).

4.6. Vizualna pismenost

Prirodno je da se osoba u svom svakodnevnom radu i djelovanju služi vizualizacijom, zbog svojih bioloških karakteristika pa bi prirodno bilo da se elementima vizualizacije potpomaže i pri učenju geometrijskih koncepata i ideja, zbog njihovih svojstvenih karakteristika. Jer, kako je već opisano, učenje i poučavanje apstraktnih i kompleksnih geometrijskih koncepata i ideja, može se prilično olakšati i pospješiti intuitivni uvid uzajamnim korištenjem i balansiranjem konkretnih elemenata vizualizacije s apstraktnim jezičnim opisima i simboličkim zapisima, pri njihovom predstavljanju (npr. Krutetskii, 1976, Usiskin, 1987; Kundema, 2016).

Osim toga, eksperimentalna istraživanja potvrđuju da je nastava matematike učinkovitija kada je prožeta elementima vizualizacije nego kada se vizualni prikazi uopće ne koriste ili se koriste nevješto i u maloj mjeri (npr. Presmeg, 1986, 2006; Pape i Tchoshanov, 2001). No, primjena vizualizacije u učenju i poučavanju matematike može, ali i ne mora biti učinkovita jer to ovisi o brojnim faktorima: o poznavanju opisanih karakteristika proizvoda i procesa vizualizacije, njihovih prednosti i ograničenja, o cilju s kojim se koristi, o kontekstu unutar kojeg se koristi, ali i o vještini i spretnosti korištenja elementa vizualizacije itd.

Prema Duvalu, netko je matematički spretan (eng. *mathematically proficiency*), ako vješto koristi matematičke procese s određenom svrhom. Nadalje, netko „spretno koristi dijagrame” (eng. *diagram proficiency*) ako vješto koristi vizualne prikaze kao „alate vizualizacije” (Duval, 2014, str. 162), odnosno ako vješto stvara i koristi elemente vizualizacije u određenom kontekstu s određenom svrhom, na ispravan način. S obzirom da spretnost nije urođena sposobnost, već vještina koja se uči i razvija, učinkovito korištenje elemenata vizualizacije treba biti uključeno u učenje i poučavanje matematike. Konačno, o spretnost i vještinama korištenja elemenata vizualizacije, odnosno o mjeri vizualne pismenosti neke osobe može se govoriti tek iz perspektive procjene (Duval, 2014, str. 147).

U literaturi postoje različite definicije vizualne pismenosti, što najčešće ovisi o namjeni i kontekstu primjene, ali one se uvijek odnose na način korištenja elemenata vizualizacije. Naime, svaki vizualni prikaz nosi određenu poruku, a na svakom pojedincu je da tu poruku korektno interpretira, analizira, razumije i tumači te se njom dalje služi. Način, razina i lakoća kojom osoba određuje značenje vizualnog prikaza u nekom kontekstu predstavlja njezinu vještinu i spretnost u radu s vizualnim prikazima, odnosno, mjeru njezine vizualne pismenosti. Prema svemu navedenom, *vizualna pismenost* u kontekstu matematike predstavlja skup kompetencija koje pojedincu omogućuju da razumije, koristi, stvara i vrednuje elemente vizualizacije, koji nose određenu matematičku poruku (Stokes, 2002; Kundema, 2016).

Stoga je na svakom nastavniku matematike izazov i odgovornost da ciljanim odabirom različitih metoda i aktivnosti razvija vizualno-prostorne sposobnosti svojih učenika, uzajamno i u harmoniji sa stjecanjem geometrijskog znanja, kako bi oni u što većoj mjeri postali vizualno pismeni. Kako bi u tome bili učinkoviti, nastavnici sami u određenoj mjeri trebaju biti vizualno pismeni.

Zadnjih desetljeća nastavnici su zaista „bombardirani" s mnogim različitim pristupima učenja i poučavanja. Ali, ništa se neće promijeniti dok sve to ne zaživi u učionici na način da se svrhovito i učinkovito koriste različiti stilovi učenja, među kojima je i vizualizacija (Hill i Roberts, 2002). A kada se koristi interdisciplinarni pristup te se na jednom mjestu okupe različite teme, metode i strategije poučavanja, onda se mogu postići i estetski i obrazovni ishodi učenja (Bruckheimer i Arcavi, 1995, str. 472).

Istraživački dio

5. Metodologija istraživanja

Istraživanje, koje se opisuje u ovom radu, provedeno je u okviru institucijskog projekta KRIUGS 2015[15] sa studentima Integriranog diplomskog studija primarnog obrazovanja (kraće Učiteljski studij). Kratica projekta KRIUGS dolazi od naziva *Kognitivni razvoj i ishodi učenja geometrije studenata primarnog obrazovanja*, što u kratkim crtama opisuje čime se projekt, odnosno ovaj rad bavi: istraživanjem znanja studenata učiteljskog studija o geometrijskim konceptima, o razumijevanju i načinu povezivanja tih koncepata te utjecaju vizualno-prostornih vještina na ishode učenja geometrije. Samo interventno istraživanje, kao sastavni dio istraživanja, posebno se bavi razvojem vizualno-prostornih vještina i geometrijskog mišljenja studenta zasnovanog na metodi usmjerenog opažanja i teoriji van Hielea u svrhu postizanja boljih ishoda učenja geometrije.

5.1. Predmet istraživanja

Studenti, koji se pripremaju za rad u primarnom obrazovanju, unutar planiranog programa (kurikuluma) na integriranom diplomskom studiju, trebaju savladati i znanja iz euklidske geometrije: geometrije ravnine i geometrije prostora (dalje se u tekstu koristi samo izraz *geometrija*). Primarno obrazovanje (ili razredna nastava) podrazumijeva obrazovanje učenika od 1. do 4. razreda osnovne škole, a učitelji koji rade na toj razini nazivaju se učitelji primarnog obrazovanja (ili učitelji razredne nastave jer jedan učitelj predaje većinu predmeta u jednom razrednom odjeljenju). Kako bi učitelji razredne nastave uspješno poučavali geometriju, prvo oni sami trebaju imati odgovarajuća znanja i razinu geometrijskog mišljenja, ali i razvijene vizualno-prostorne vještine potrebne u radu s geometrijskim konceptima. Međutim, studenti koji upisuju Učiteljski studij imaju problema s nastavkom učenja matematike, a posebno geometrije.

Štoviše, brojna obrazovna istraživanja diljem svijeta ukazuju da učenici na svim razinama matematičkog obrazovanja najviše teškoća imaju upravo pri učenju geometrije (npr. PISA, 2012; Gűnhan, 2014; TIMMS 2017; Milinković i Ševa, 2021), posebno pri uspostavljanju veza među geometrijskim konceptima (npr. de Villiers, 1994; Erez & Yerushalmy, 2006; Fujita & Jones, 2007; Kozakli Ulger & Tapan Broutin; 2017). Taj problem posebno do izražaja dolazi pri prijelazu učenika sa sekundarne na tercijarnu razinu (npr. Žilková, 2015; Baranović, 2019b), odnosno pri prijelazu sa školske na visokoškolsku nastavu matematike. Naime, diskursi učenja matematike u školi i na sveučilišnoj razini prilično se razlikuju: od empirijskog pristupa, instrumentalnog razumijevanja, proceduralne fluentnosti i zadataka nižih kognitivnih razina koji prevladavaju u školi, do čistog formalističkog i apstraktnog pristupa, racionalnog i konceptualnog razumijevanja te zadataka viših kognitivnih razina, koji dominiraju na sveučilišnoj razini (npr. Liston & O'Donoghue, 2007; Witzke, 2016; Thoma & Nardi, 2018; Baranović i sur., 2020). Pri učenju matematike na sveučilišnoj razini, studentima posebnu teškoću čine „nerazriješeni kognitivni konflikti koje razvijaju tijekom osnovnoškolskog i srednjoškolskog obrazovanja, a kojih nisu niti svjesni" (Baranović i sur., 2020, str. 15).

S aspekta Van Hieleove teorije, da bi studenti uspješno pratili i savladali planirani program iz geometrije na sveučilišnoj razini, koji zahtijeva deduktivni pristup, oni bi trebali biti barem na četvrtoj razini geometrijskog mišljenja. No, nastavna praksa i razna obrazovna istraživanja pokazuju da to nije tako (npr. Usiskin; 1982; Crowley 1987; De Villiers, 2010; Baranović i sur., 2020).

[15] Šifra projekta: ID: FFST-INST-2015; Opis projekta: https://pdb.irb.hr/project/irb:006654. Projekt je dijelom financiran iz programskih sredstava Filozofskog fakulteta u Splitu, a dijelom iz sredstava Sveučilišta u Zadru, koje je bilo partner na projektu.

Nadalje, za učenje geometrijskih koncepata i ideja s razumijevanjem te njihovu efikasnu primjenu u rješavanju problema i dokazivanju tvrdnji, studenti trebaju biti vješti u vizualizaciji potrebnoj u radu s geometrijski objektima, tj. u vizualno-prostornom prikazivanju i tumačenju prikazanog, manipuliranju, zadržavanju te transformiranju geometrijskih objekata u svrhu matematičke obrade (Bishop, 1986; Idris, 1998; Duval, 2014), jer sama percepcija vizualnih prikaza nije dovoljna (Duval 1995, 1998, 2002, 2014). No, vizualizaciji se u matematičkom obrazovanju nije pridavala važnost niti se ona sustavno razvijala jer veći dio matematičke zajednice smatra da ona služi samo kao početni intuitivni uvid u matematičke ideje i koncepte, koje što prije treba zamijeniti simboličkim jezikom matematičkog formalizma (Drayfus, 1990; Whetley, 2005). Tek se zadnjih nekoliko desetljeća, zahvaljujući upravo obrazovnim istraživanjima i raznim intervencijama u nastavi matematike, vizualizacija i vizualno-prostorne sposobnosti počinju smatrati važnima u tolikoj mjeri da se stvaraju zahtjevi za kontinuiranim prožimanjem cjelokupnog matematičkog kurikuluma. Naime, sve se više prepoznaje potreba za kontinuiranim i sustavnim razvijanjem i korištenjem vizualno-prostornih sposobnosti, kroz cijelu obrazovnu vertikalu (npr. Presmeg 2006, 2014). No, još uvijek ne postoji sveobuhvatni teorijski okvir za učenje i poučavanje vizualizacije, a stogodišnje istraživanje vizualno-prostornih sposobnosti nije dovelo do kohezivnog faktora (Lohman, 1993) iako se ulažu veliki napori u tom smjeru (Shneider i McGew 2012).

Ukratko, za učenje i poučavanje geometrije, osim rada na geometrijskim konceptima i idejama, potrebne su jake vizualno-prostorne vještine i to na svim razinama razvoja geometrijskog mišljenja, a ne samo na razini prepoznavanja (prva razina prema van Hieleu), što postojeći matematički kurikulumi obično ne osiguravaju. Posljedično tome, geometrijski koncepti se kroz školsku matematiku u velikoj mjeri savladavaju proceduralno, zapamćivanjem odgovarajućih definicija, pravila i formula bez konceptualnog razumijevanja (npr. Hoffer, 1981; Bishop, 1986; Idris, 1998) pa učenici najčešće nisu spremni za nastavak učenja geometrije na sveučilišnoj razini.

5.2. Problem istraživanja

Sagledavajući sve prethodno rečeno, prirodno je zapitati se: kako studente poučavati geometriju kada nisu spremni za deduktivni pristup? Drugim riječima, kako pripremiti studente za efikasno poučavanje geometrije u primarnom obrazovanju, ako oni sami nisu spremni za nastavak učenja prema planiranom planu i programu rada, tj. prema sveučilišnom diskursu? Ima li smisla ustrajati na deduktivnom pristupu, ako ga studenti nisu u stanju pratiti i razumjeti? A, ako treba mijenjati pristup, koja je alternativa?

Posebno, ako studenti nemaju razvijene vizualno-prostorne sposobnosti, bi li oni napredovali u učenju geometrije kada bi im se omogućilo da ih razvijaju tijekom učenja? No, je li kasno za razvijanje vizualno-prostornih sposobnosti na tercijarnoj razini? Ako nije kasno, na koji način osigurati okruženje unutar kojeg će studenti razviti svoje vizualno-prostorne sposobnosti?

S obzirom da se geometrija ne može savladati samo pukim učenjem pojmova, pravila i procedura već je nužno potrebno razvijati i različite procese mišljenja koji osiguravaju poimanje (De Villiers, 2009) te objašnjavaju konceptualnu pozadinu pravila i procedura (Clement i sur, 1997), postavlja se pitanje je li kasno za razvijanje geometrijskog mišljenja na tercijarnoj razini? Ako nije kasno, na koji način omogućiti studentima da na tercijarnoj razini razviju svoje geometrijsko mišljenje?

Dakle, glavni problem istraživanja jest pripremiti i provesti alternativni pristup poučavanja kako bi se dali odgovori na postavljena pitanja. Budući da su geometrijski koncepti usko povezani s vizualnim prikazivanjem, u procesu pripreme alternativnog pristupa poučavanja poseban naglasak stavljen je na razvoj vizualno-prostornih sposobnosti studenata kroz metodu usmjerenog opažanja. Kako je geometrijsko mišljenje važan faktor u postizanju boljih ishoda učenja geometrije, u skladu s tim planirano je da nastavne aktivnosti budu usklađene s procesom razvoja mišljenja prema teoriji van Hielea.

5.3. Ciljevi i zadaci istraživanja

Svrha ovog istraživanja jest vrednovati odabrani alternativni pristup učenja i poučavanja matematike, posebno geometrije, kojim bi se omogućilo studentima da kroz razvoj svojih vizualno-prostornih sposobnosti i geometrijskog mišljenja postupno premoste jaz između školske i visokoškolske nastave matematike te posljedično ostvare bolje ishode učenja geometrije na tercijarnoj razini. Na taj način bi se bolje pripremili za rad u primarnom obrazovanju.

Kako bi se intervencija provela bez dodatnog angažmana studenata izvan redovitih obveza, cilj je bio interventno istraživanje provesti unutar obveznog kolegija, u realnom vremenu tijekom redovite nastave. U skladu s tim, odabrane su dvije grupe sudionika koji su upisani na redoviti kolegij učenja geometrije sličnog nastavnog plana i programa s ciljem da se u jednoj od tih grupa primjeni alternativni pristup poučavanja u svrhu ispitivanja njegove učinkovitosti naspram druge grupe s kojom se radi na uobičajeni način.

U svrhu provođenja intervencije primjerene sudionicima, nužno je ispitati razine geometrijskog mišljenja koje su sudionici razvili tijekom prethodnog (primarnog i sekundarnog) obrazovnog razdoblja kako bi se poučavanje prilagodilo njihovoj razini mišljenja. Također, važno je ispitati i geometrijska predznanja sudionika te kroz njih identificirati i osvijestiti njihove teškoće u radu s geometrijskim konceptima, moguće konflikte te vizualizacijske sklonosti i vještine. Posebno, prije same intervencije važno je znati u kakvoj su međusobnoj vezi razine geometrijskog mišljenja i geometrijska predznanja sudionika te njihove vizualno-prostorne sposobnosti.

Konačno, glavni cilj je ispitati je li alternativni pristup doveo do poboljšanja vizualno-prostornih sposobnosti i napretka u geometrijskom mišljenu, većoj sklonosti vizualizaciji, a posljedično i boljim ishodima učenja geometrije. U skladu s opisanim problemom i glavnim ciljem, postavljeni su sljedeći istraživački zadaci:

1. Utvrditi *na kojoj se razini geometrijskog mišljenja* prema van Hieleovu modelu nalaze sudionici neposredno prije učenja geometrije.

2. Utvrditi *koja znanja* sudionici već imaju o temeljnim geometrijskim konceptima te *u kojoj se mjeri i koliko uspješno* koriste *vizualno-prostornim vještinama* pri rješavanju geometrijskih problema neposredno prije učenja geometrije.

3. Utvrditi *u kakvom su odnosu* vizualno-prostorne sposobnosti, razine geometrijskog mišljenja i geometrijska predznanja sudionika, posebno u smislu mogućeg prediktora napretka.

4. Nakon semestra poučavanja utvrditi jesu li sudionici unutar svake grupe *značajno napredovali* u geometrijskom mišljenju, akumuliranom geometrijskom znanju i vještinama vizualizacije te vizualno-prostornim sposobnostima.

5. Nakon semestra poučavanja utvrditi jesu li sudionici, koji su poučavani alternativnim pristupom, *značajno napredovali* u akumuliranom geometrijskom znanju i vještinama vizualizacije te vizualno-prostornim sposobnostima u odnosu na sudionike koji su poučavani na tradicionalan način.

5.4. Nacrt istraživanja

Ovo istraživanje metodološki spada u kategoriju kvazieksperimentalnog istraživanja s ne ekvivalentnom skupinom (Cohen, Manion i Morrison, 2007, str. 214). Naime, u obrazovanju nije moguće provesti pravi eksperiment u smislu kontrole nad svim varijablama, posebno kada se intervencija obavlja u realnom vremenu, tijekom redovite nastave. Drugim riječima, uzorak se ne može odabrati nasumično, niti se nastavni sat može odabrati nasumično, jer je to zadano realnim okolnostima, a to znači da se ne može imati kontrola nad tim „kada i kome poučavati". Nacrt istraživanja dan je shematskim prikazom (Slika 86), pri čemu isprekidana crta između grupa ističe da grupe nisu ekvivalentne (Cohen i sur., 2007, str. 215).

	Pred testiranje (1)	Nastava	Post testiranje (2)
Eksperimentalna grupa (E)	Testiranje 1E	Alternativni pristup	Testiranje 2E
Kontrolna grupa (K)	Testiranje 1K	Klasično poučavanje	Testiranje 2K

Slika 86. Nacrt istraživanja

Grupe obuhvaćaju sve studente koji su upisani na kolegij iz geometrije na dva različita sveučilišta, a zbog različitog broja upisanih grupe nisu ekvivalentne. Eksperimentalnu grupu čine studenti jednog sveučilišta i oni su poučavani odabranim alternativnim pristupom, a kontrolnu grupu čine studenti drugog sveučilišta, koji su poučavani na uobičajeni način.

Pred i post testiranje podrazumijeva mjerenje istim testovima u svrhu prikupljanja podataka o sudionicima prije početka poučavanja te u svrhu ispitivanja promjena nakon semestra poučavanja. Mjerenje se vrši kroz tri testa: test razina geometrijskog mišljenja, pisana provjera znanja iz geometrije i vizualizacijskih vještina te test vizualno-prostornih sposobnosti. Na primjer, „Testiranje 1E" podrazumijeva pred testiranje (1) sudionika eksperimentalne grupe (E) sa sva tri testa, dok „Testiranje 2K" podrazumijeva post testiranje (2) sudionika kontrolne grupe (K) sa sva tri testa.

Alternativni pristup se razlikuje od tradicionalnog poučavanja utoliko što se više pozornosti stavlja na sustavno korištenje elemenata vizualizacije te razvoj vizualno-prostornih sposobnosti, a poučavanje se prilagođava predznanjima sudionika i njihovim razinama geometrijskog mišljenja prema van Hieleovu modelu.

5.5. Metoda istraživanja

U svrhu dobivanja odgovora na postavljena pitanja, prikupljeni podaci obrađeni su integriranjem kvantitativnih i kvalitativnih metoda. Naime, mnogi autori podupiru korištenje mješovite metodologije u istraživanju obrazovanja jer se na složena istraživačka pitanja može potpunije odgovoriti integriranjem metoda nego kada se kvalitativne i kvantitativne analize koriste odvojeno (Lund, 2012).

S ciljem opisa distribucije prikupljenih podataka, u istraživanju su korišteni postupci deskriptivne statistike: (relativne) frekvencije, postotci, srednje vrijednosti, standardne devijacije, izgled distribucije. Dio deskriptivne statistike korišten je u svrhu upotpunjavanja kvalitativne analize radova sudionika na pisanoj provjeri znanja iz geometrije te analizi vizualizacijskih vještina. Postupci inferencijalne statistike (t-test, Spearmanov koeficijent korelacije) korišteni su kako bi se utvrdila statistička značajnost povezanosti i ispitala statistička značajnost razlika među varijablama. Statistička analiza provedena je korištenjem programa za statističku obradu podataka SPSS 24.0.

5.5.1. Sudionici

Istraživanjem su obuhvaćeni svi studenti učiteljskog studija na Sveučilištu u Splitu i Sveučilištu u Zadru, koji su u ljetnom semestru 2015/2016. godine pohađali nastavu geometrije. Ukupno je sudjelovalo 90 studenata: 52 studenta koji su pohađali nastavu geometrije u Splitu činili su eksperimentalnu grupu, a 38 studenata koji su pohađali nastavu geometrije u Zadru činili su kontrolnu grupu. Razlika u broju ovih dviju grupa bila je neizbježna jer se interventno istraživanje provodilo u realnoj situaciji, tijekom nastave redovitog kolegija. Ove dvije grupe odabrane su zbog najveće podudarnosti nastavnih planova i programa za učenje euklidske geometrije, što se kasnije detaljno prikazuje (str. 121).

O sudionicima istraživanja evidentirani su i neki opći podaci, ali se oni nisu koristili u statističkoj obradi jer je naglasak bio na samoj intervenciji i postignućima po grupama. Opći podaci su služili više kao spoznaja o karakteristikama grupe. Tako, starosna dob sudionika u Splitu kreće se između 20 i 23 godine (srednja vrijednost je 21.8), a u Zadru između 19 i 23 godine (srednja vrijednost je 19.4). Dobna razlika između eksperimentalne i kontrolne grupe bila je neizbježna jer se u Splitu nastava geometrije održavala u 6. semestru, a u Zadru u 2. semestru učiteljskog studija. Nadalje, sudionici dolaze iz 10 različitih županija (od 21 županije) Republike Hrvatske od koji je očekivano većina iz južne Hrvatske (89%), a preostali (11%) su iz ostalih regija. S obzirom na geografsku raspršenost i brojčanu neujednačenost, rezultate nema smisla razmatrati s obzirom na kulturološke razlike pojedinih sredina. Posebna karakteristika je da su svi sudionici žene pa se ostvarena postignuća ne mogu razmatrati s obzirom na spol.

U fazi planiranja i pripreme istraživanja, sudionici su upoznati s ciljevima i planom istraživanja te su pristali na sudjelovanje, a samo istraživanje provodilo se uz suglasnost aktualnog dekana Filozofskog fakulteta u Splitu te pročelnika Odjela za izobrazbu učitelja i odgojitelja u Zadru.

Na početku istraživanja svaki sudionik je odabrao šifru prema dogovorenom pravilu te je istu šifru koristio u svim pisanim oblicima prikupljanja podataka, kako bi se rezultati različitih testiranja mogli udružiti za svakog sudionika i međusobno uspoređivati. Na taj način je svakom sudioniku dodijeljen jedinstveni kod, a istraživač nije imao uvid u stvarni identitet ispitanika, čime su zadovoljeni etički aspekti anonimnosti obrazovnog istraživanja (Cohen i sur, 2007, str. 61).

5.5.2. Priprema instrumenta i alternativnog poučavanja

Kako bi se odabrali odgovarajući testovi za dobivanje odgovora na postavljena pitanja te osmislilo alternativno poučavanje u svrhu što efikasnijeg učenja geometrije u skladu s postavljenim ciljevima istraživanja, u akademskoj godini 2014./2015. proučavala se literatura o teškoćama s kojima se susreću učenici i studenti različitih uzrasta diljem svijeta pri učenju geometrije, o načinima testiranja njihovih znanja te različitim strategijama poučavanja. Usporedno s tim, tijekom nastave geometrije pratilo se koje od opisanih teškoća imaju studenti učiteljskog studija, kao i prepreke te moguće kognitivne konflikte koje ne mogu samostalno nadići u procesu učenja geometrije. U tom procesu istraživanja teškoća s kojima se studenti suočavaju pri savladavanju geometrijskih koncepata i veza među njima, posebno su do izražaja došle njihove teškoće u stvaranju i korištenju vizualnih prikaza 2D i 3D geometrijskih objekata zbog nedovoljno razvijenih vizualno-prostornih sposobnosti te slabih vještina vizualizacije.

Prema prikupljenim podacima o teškoćama učenika i studenata pri učenju geometrije odabrana su tri testa, od kojih je jedan posebno oblikovan za potrebe ovog istraživanja. Sva tri testa su planirana za korištenje kao pred test, kako bi se u skladu s dobivenim podacima organiziralo poučavanje, te kao post test, kako bi se ispitalo je li i u kojoj mjeri poučavanje dovelo do napretka u razvoju geometrijskog mišljenja, učenju geometrije i stjecanju vještina vizualizacije.

Također, s obzirom na uočene teškoće, planirano je da se u procesu učenja i poučavanja geometrije sudionika eksperimentalne grupe posebna pozornost posveti razvoju vizualno-prostornih sposobnosti te sjecanju vještina vizualizacija, koje su potrebne u procesu učenja i poučavanja geometrije. U tu svrhu osmišljena je metoda usmjerenog opažanja koja se temelji na VOS sustavu (Slika 66, str. 75). Kako bi se metodom obuhvatili različiti aspekti vizualizacije, planirane su aktivnosti s didaktičkim sredstvom tangram, aktivnosti crtanja na papiru bez crta te unutar mreža (kvadratne i izometrične) sa i bez pribora, aktivnosti konstruiranja te korištenja radova unutar programa dinamičke geometrije (kraće *učila*).

Glavna svrha metode usmjerenog opažanja je da sudionici eksperimentalne grupe sustavno razvijaju sposobnost vizualizacije u kontekstu geometrije i na taj način geometrijske koncepte i ideje uče s razumijevanjem te napreduju u geometrijskom mišljenju. U tu svrhu, planirano je da se metoda koristi u svim nastavnim fazama: u procesu uvođenja pojmova te pri opisivanju njihovih svojstava i veza, u procesu rješavanja geometrijskih problema kao i u procesu argumentiranja i dokazivanja postavljenih tvrdnji.

Osim toga, planirano je da se poučavanje prilagodi razinama geometrijskog mišljenja sudionika, a za napredovanje na više razine da se nastavni sati strukturiraju prema fazama učenja u skladu s teorijom van Hielea. Drugim riječima, planirani nastavni plan i program bi se realizirao prolaženjem kroz različite razine geometrijskog mišljenja, od prve nadalje, koliko je to moguće ostvariti sa sudionicima eksperimentalne grupe. U nastavku će se detaljnije opisati odabrani testovi te alternativno poučavanje tijekom intervencije.

5.5.3. Instrument testiranja

U svrhu prikupljanja podataka o znanjima i vještinama sudionika neposredno prije učenja geometrije i nakon semestra učenja geometrije korištena su tri testa: test za mjerenje razina geometrijskog mišljenja, pisani ispit za provjeru znanja iz geometrije i vizualizacijskih vještina te test za mjerenje posebnog faktora prostornih sposobnosti. Pod pojmom „test" podrazumijeva se kratki način ispitivanja, u pisanoj formi, kroz koje se otkrivaju skriveni fenomeni i principi tako da se rezultati mogu izraziti kvantitativno i na taj način statistički obrađivati (Krutetskii, 1976, str. 99).

5.5.3.1. Mjerenje razina geometrijskog mišljenja - VH test

Za mjerenje razina geometrijskog mišljenja korišten je Van Hieleov test (kraće VH test) koji je dizajniran unutar CDASSG Project na Sveučilištu u Chicagu, a objavljen u radu profesora Usiskina, 1982. pod nazivom Van Hiele Levels and Achievemnt in Secondary School Geometry. VH test je dizajniran prema van Hieleovu modelu razvoja mišljenja u svrhu utvrđivanja razina geometrijskog mišljenja srednjoškolskih učenika, a proveden je na uzorku od 2361 učenika (Usiskin, 1982, str. 18).

Od tada pa sve do danas, VH test se koristi u raznim obrazovnim istraživanjima te je gotovo općeprihvaćen u svrhu brze „snimke stanja", a postoje i njegove prilagodbe. S obzirom da VH test u potpunosti odgovara potrebama ovog istraživanja, preuzet je iz rada profesora Usiskina i korišten uz njegovo dopuštenje. Radi pune funkcionalnosti korištenja, VH test je preveden s engleskog na hrvatski jezik, pri čemu su nastale manje izmjene teksta zbog usklađivanja s pojmovima hrvatskog jezika (Prilog D).

Karakteristike VH testa: VH test sastoji se od 25 pitanja objektivnog tipa s jednim točnim odgovorom među ponuđenih pet. Pitanja su raspoređena po razinama u skladu s van Hieleovom teorijom, a zadaci svake razine su različite složenosti, tj. među zadacima za svaku razinu nalazi se bar neko jednostavno pitanje. Sva pitanja su konceptualnog tipa, što znači da se odgovor ne može dati pukim reproduciranjem naučenog već je potrebna određena analiza, čak i na nižim razinama (Usiskin, 1982, str. 19). VH test se piše u zadanom vremenu od 35 minuta prema strogo određenim pravilima autora testa, što je vidljivo u prilogu testa (Prilog D).

Prvih pet pitanja odgovara prvoj razini geometrijskog mišljenja. U njima je potrebno na crtežu prepoznati likove (trokuti, kvadrati, pravokutnici i paralelogrami) koji pripadaju određenoj klasi. Sljedećih pet pitanja (od 6. do 10.) temelji se na jednostavnim tvrdnjama o svojstvima trokuta i četverokuta (kvadrat, pravokutnik, romb i deltoid) i kroz njih se testira druga razina geometrijskog mišljenja. Treća grupa od pet pitanja (od 11. do 15.) zahtijeva uspostavljanje jednostavnih veza među zadanim tvrdnjama o trokutima i četverokutima (kvadrat, pravokutnik i paralelogram) pri čemu se dijelom koristi i formalni jezik logičkih operacija. Ova grupa zadataka odgovara trećoj razini geometrijskog mišljenja. Četvrta grupa od pet pitanja (od 16. do 20.) testira četvrtu razinu geometrijskog mišljenja kroz složenije tvrdnje, koje uključuju svojstva trokuta i četverokuta (dijagonale kvadrata i pravokutnika), paralelnost i okomitost, značenje aksiomatske izgradnje te formalni jezik logičkih operacija. Posljednjih pet pitanja (od 21. do 25.) odnosi se na petu razinu geometrijskog mišljenja. Njima se ispituje znanje o smislu tvrdnji i dokaza te različitim definicijama istog pojma, snalaženje u okruženju drugačijem od euklidske geometrije te čistom logičkom zaključivanju koje uključuje implikacije i njihove negacije.

Vrednovanje VH testa: Svaki točan odgovor na pitanja prve razine vrednuje s 1 bodom, za pitanja druge razine svaki točan odgovor vrednuje se po 2 boda, za pitanja iz treće razine po 4 boda, za pitanja četvrte razine po 8 bodova te za pitanja pete razine po 16 bodova. Za vrednovanje cijelog testa koriste se dva kriterija: blaži i stroži. Prema blažem kriteriju, osoba je savladala određenu razinu ukoliko je odgovorila točno na barem 3 od 5 pitanja koji se odnose na tu razinu i u tom slučaju dobiva bodove te razine. Prema strožem kriteriju, osoba je savladala određenu razinu ukoliko je odgovorila točno na barem 4 od 5 pitanja koji se odnose na tu razinu i u tom slučaju dobiva bodove te razine. Ukupan broj bodova dobiva se zbrajanjem bodova ostvarenih po razinama (Tablica 3).

Na temelju ukupnog broja bodova određuje se razina mišljenja osobe, pri čemu treba biti zadovoljen *kriterij uzastopnosti*: osoba se nalazi na razini *n* ako je ostvarila kriterij za sve prethodne razine. Na primjer, ako osoba ima ukupno 15 bodova ona se nalazi na razini 4 jer je zadovoljila kriterij za sve četiri razine, redom (1 + 2 + 4 + 8 = 15). Međutim, ako osoba ima npr. 19 bodova znači da je ispunjen kriterij za 1., 2. i 5. razinu, ali ne i za 3. i 4. (1 + 2 + 0 + 0 + 16 = 19). U tom slučaju, njezina razina nije u potpunosti određena jer nije ispunjen kriterij uzastopnosti. To je moguće jer se osoba može nalaziti na prijelazu među razinama (Usiskin, 1982, str. 25). Ovaj način vrednovanja naziva se još i klasična skala prema van Hieleovu modelu, odnosno kraće *klasičan model* van Hieleovih razina mišljenja (kraće C model). U statističkoj obradi, bodovi ostvareni po blažem kriteriju klasičnog modela koriste se pod oznakom C3, a ako su ostvareni po strožem kriteriju, pod oznakom su C4.

Tablica 3. Ostvareni bodovi i VH razine

<table>
<tr><th>Razina mišljenja</th><th>Bodovi po razini</th><th>Bodovi za C3 i C4</th><th>Bodovi za C model bez određivanja razine</th><th>Bodovi za M3 i M4</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td rowspan="6">2 (0 + 2)
4 (0 + 0 + 4)
5 (1 + 0 + 4)
9 (1 + 0 + 0 + 8)
11 (1 + 2 + 0 + 8)
13 (1 + 0 + 4 + 8) Itd.</td><td>0 ili 16</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1 ili 17</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2</td><td>3 (1 + 2)</td><td>3 ili 19</td></tr>
<tr><td>3</td><td>4</td><td>7 (1 + 2 + 4)</td><td>7 ili 23</td></tr>
<tr><td>4</td><td>8</td><td>15 (1 + 2 + 4 + 8)</td><td>15 ili 31</td></tr>
<tr><td>5</td><td>16</td><td>31 (1 + 2 + 4 + 8 + 16)</td><td>-</td></tr>
</table>

Ukoliko mali broj sudionika ostvari bodove 5. razine, vrednovanje se može modificirati uklanjanjem te razine tako da se bodovi 5. razine pribroje prethodnim razinama. To znači da je netko ostvario 1.

razinu ukoliko ima 1 ili 17 bodova, 2. razinu sa 3 ili 19 bodova, 3. razinu sa 7 ili 23 boda i 4. razinu sa 15 ili 31 bodom. U tom slučaju može se govoriti o *modificiranom modelu* van Hieleovih razina mišljenja (kraće M model), pa se bodovi ostvareni po blažem kriteriju koriste pod oznakom M3, a bodovi ostvareni po strožem kriteriju, pod oznakom M4.

Analogno, za ukupan broj bodova ostvarenih na VH testu ovisno o kriteriju koristi se oznaka VH3 ili VH4. Ukoliko je testiranje provedeno na početku semestra oznaka je 1VH3 ili 1VH4, a za testiranje provedeno na kraju semestra oznaka je 2VH3 ili 2VH4. VH test na početku semestra (1VH) provodi se u svrhu određivanja razina geometrijskog mišljenja sudionika istraživanja kako bi se (1) usporedile razine sudionika eksperimentalne i kontrolne grupe na početku semestra te (2) u skladu s dobivenim rezultatima dodatno prilagodilo poučavanje geometrije u eksperimentalnoj grupi. VH test na kraju semestra (2VH) provodi se u svrhu određivanja je li i u kojoj mjeri provedeno učenje i poučavanje dovelo do napretka geometrijskog mišljenja u svakoj od skupina te među skupinama.

5.5.3.2. Pisana provjera znanja iz geometrije – GEO test

Radi prikupljanja podataka o geometrijskim znanjima sudionika te vizualizacijskim vještinama koje koriste u radu s geometrijskim objektima, dizajnirana je posebna pisana provjera (kraće GEO test). Pri oblikovanju ovog testa, vodilo se računa s jedne strane da zadaci budu slični zadacima koji se koriste u školskim ispitima znanja iz geometrije i da obuhvati temeljne sadržaje obrađene kroz školsku nastavu geometrije. S druge strane, vodilo se računa da zadaci ne budu (vrlo) složeni zbog mogućeg dužeg vremenskog razdoblja u kojem se sudionici nisu bavili geometrijom, posebno da oni sa slabijim predznanjem ne budu obeshrabreni. Također, s obzirom da sudionici čine heterogenu grupu prema njihovom srednjoškolskom matematičkom obrazovanju (različite vrste umjetničkih i strukovnih škola i gimnazije), pitanjima su obuhvaćeni sadržaji iz geometrije koji bi svim sudionicima istraživanja trebali biti poznati iz prethodnog matematičkog obrazovanja (osnovne i srednje škole).

Opće karakteristike GEO testa: GEO test se sastoji od 28 pitanja različitih vrsta, od kojih su neka formirana u grupe prema načinu postavljanja i mjerenja određenih ishoda. Pitanja su oblikovana tako da ispituju različite aspekte geometrijskog znanja kao i različite aspekte vizualizacije. U svrhu ispitivanja sklonosti i vještina korištenja vizualizacije, u jednom dijelu zadataka sudionici su trebali sami crtati skice, a u drugom dijelu zadataka trebali su čitati i tumačiti dane slike u svrhu njihovog rješavanja. S obzirom da je GEO test oblikovan za potrebe ovog istraživanja, obuhvaćeni geometrijski sadržaji i tražene vještine vizualizacije biti će detaljno opisani u nastavku kroz prikaz pojedinih pitanja.

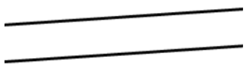
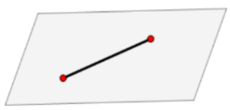
S prvom varijantom GEO testa provedeno je pilot-testiranje na grupi studenata zadnje (5.) godine učiteljskog studija, odnosno 2. godine diplomskog studija. Svi studenti koji su sudjelovali u probnom testiranju, redovni ispit iz geometrije položili su godinu dana prije ili više i sa različitim uspjehom (ocjene od 2 do 5). Nakon probnog testiranja, prema zapažanjima i primjedbama studenata, neki zadaci su ispušteni ili dodatno oblikovani. Studenti su ispit ocijenili zanimljivim što ih je dodatno motiviralo na rješavanje. Također, u procesu izrade testa i nakon probnog testiranja konzultacije su izvršene i sa stručnjakom na partnerskoj ustanovi. Nakon svega, formirana je konačna verzija testa i utvrđeno je da vrijeme potrebno za pisanje GEO testa bude maksimalno 35 minuta. Naime, iako na prvu može izgledati da je to malo vremena za 16 (odnosno 28) pitanja, prema Lohmanu (1993), kada prevladavaju jednostavnija pitanja, vrijeme pisanja treba biti kraće (Lohman, 1993).

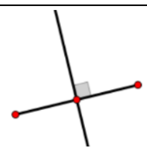
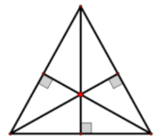
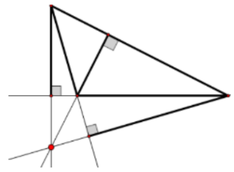
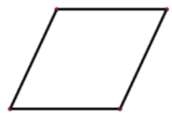
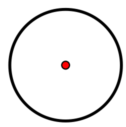
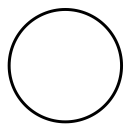
Konstrukcija GEO testa: GEO test se sastoji od četiri različita dijela: (a) prvi dio ispituje (pre)poznavanje definicija odabranih geometrijskih pojmova; (b) drugi dio ispituje vještine otkrivanja matematičke poruke prikazane na slici; (c) treći dio ispituje u kojoj mjeri ponuđena rješenja utječu na rješavanje jednostavnijih zadataka, uglavnom zadanih vizualno te (d) četvrti dio ispituje proces rješavanja različitih vrsta zadataka, posebno koriste li sudionici i na koji način vizualne prikaze (bilo da ih sami stvaraju ili su zadane) u tom procesu. U pravilu, grupe zadataka nisu disjunktne jer se njima propituju raznoliki aspekti isprepletenih mentalnih procesa, znanja i vještina, ali svaka grupa ima svoju posebnu svrhu pa su zadaci unutar grupe kreirani upravo vođeni tom svrhom.

(a) Definicije geometrijskih pojmova. U prvom dijelu testa dano je osam iskaza za koje treba utvrditi jesu li korektne definicije navedenih pojmova te ih vizualno prikazati: pravac i paralelni pravci, dužina i simetrala dužine, kut, ortocentar trokuta, romb i kružnica. Svi iskazi su oblikovani tako da uključuju tipične greške koje učenici rade pri definiranju geometrijskih pojmova te nijedan iskaz ne predstavlja korektnu definiciju navedenog pojma (Tablica 4). Glavna svrha ovih pitanja je ispitati u kojoj mjeri i koliko uspješno sudionici (pre)poznaju definicije odabranih pojmova te na koji način usvajaju geometrijske koncepte: samo opisno ili uz njih vežu i vizualne prikaze.

Svi odabrani geometrijski koncepti uče se u primarnom obrazovanju, ali se koriste i nadograđuju kroz srednjoškolsko obrazovanje pa je očekivano da sudionici imaju dobra predznanja o njima. Zahtjevi za vizualnim prikazima imaju dvostruku ulogu: prvo, crtanjem zadanog pojma sudionici mogu, neovisno o danom iskazu, osvijestiti koncept, a zatim na temelju prikaza i onoga što znaju ispitati istinitost iskaza. Osim toga, radi primjene vizualno-analitičke metode, važno je saznati jesu li vizualni prikazi za sudionike sastavni dio definicija geometrijskih koncepata ili ne.

Tablica 4. Tipične greške u definiranju pojmova i očekivani vizualni prikaz

Zadano	Tipične greške u definiranju	Očekivani vizualni prikaz
G1.1 Pravac je ravna crta.	U kontekstu definiranja pojmova često se potkrade greška definiranja i osnovnih pojmova. Tako, iako je **pravac** osnovni geometrijski pojam koji se **ne definira**, učenici (pa i neki udžbenici) obično iskazuju definiciju: *Pravac je ravna neomeđena crta*. No, pravac se može intuitivno **poimati** i **zamišljati** kao ravna crta koja se beskonačno proteže te **predstaviti** tankom napetom niti. Ali, ravna crta ili napeta nit vizualno predstavljaju samo dio pravca.	 Učenici obično crtaju ravnu crtu, horizontalno.
G1.2 Paralelni pravci su pravci koji se ne sijeku.	Pri obradi geometrije ravnine za paralelne pravce se obično kaže da su to *pravci koji se ne sijeku (ili se preklapaju)*, pri čemu se obično ne ističe da se radi o pravcima *iste ravnine*, ali ta praksa često ostaje i kada se kontekst proširi. Međutim, dani iskaz u prostoru nije korektan jer postoje mimoilazni pravci koji se ne sijeku, ali oni nisu paralelni.	 Učenici obično paralelne pravce crtaju horizontalno.
G1.3 Dužina je dio ravnine omeđen s dvije točke.	Dužina se kao izvedeni pojam najčešće opisuje kao *dio pravca omeđen dvjema njegovim točkama*, ali koristi se i opis unutar ravnine kao *najkraća spojnica dviju točaka ravnine*. U praksi se događa da učenici 'stope' ta dva iskaza u jednu definiciju pa se dobije iskaz sličan ovom pitanju. Iako učenici korektno poimaju dužinu kao *ravnu crtu koja je omeđena dvjema točkama* (bez obzira izvodi li se iz pravca ili ravnine), zadani iskaz je preširok jer u ravnini postoje različite vrste crta koje su omeđene dvjema točkama: dužina, izlomljena crta, zakrivljena crta i dr.	 ili   ili Treći slučaj je manje očekivan iako je u pitanju korišten pojam ravnine.

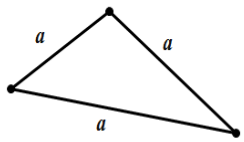
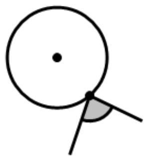
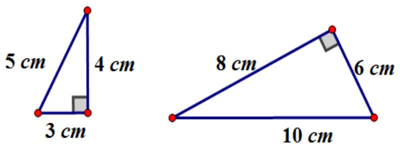
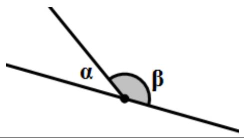
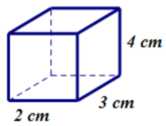
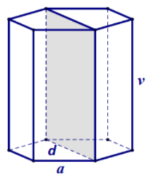
G1.4 Simetrala dužine raspolavlja dužinu pod pravim kutom.	Pri definiranju simetrale dužine učenici obično ispuste glavni rodni pojam (simetrala dužine je *pravac*) ili ispuste jedno od dva bitna svojstva (… koji *raspolavlja* dužinu, … koji je *okomit* na dužinu).	 Dužina obično bude nacrtana horizontalno.
G1.5 Kut je dio ravnine omeđen dvama polupravcima.	Učenici uglavnom korektno poimaju kut kao dio ravnine *koji se nalazi između* istaknutih polupravaca, ali to često iskazuju kao *omeđeni dio ravnine*, iako je kut neomeđen. Osim toga, učenici često ispuste i svojstvo da kut određuju polupravci sa *zajedničkom početnom točkom.*	 Obično se crta šiljasti kut u prikazanom položaju.
G1.6 Ortocentar trokuta je točka sjecišta visina tog trokuta.	Najčešća greška u definiranju poima *ortocentra* trokuta je u razmatranju samo šiljastokutnih trokuta, unutar kojih se visine zaista sijeku u jednoj točki – ortocentru trokuta. Problem korektnosti zadanog iskaza nastupa kod tupokutnog trokuta jer se njegove visine ne sijeku, ali se sijeku pravci koji sadrže visine (kraće *pravci visina*). Za ispravno poimanje i definiranje pojma ortocentra, potrebno je razmatrati sve vrste trokuta s obzirom na kutove.	 ili  Obično se crta samo šiljastokutni trokut.
G1.7 Romb je četverokut kojemu su nasuprotne stranice paralelne i jednakih duljina.	Dani iskaz korektno opisuje svojstva romba, ali to *nisu njegove bitne karakteristike* koje se koriste u definiranju i to učenici obično ne razlikuju. Osim toga, jedno navedeno svojstvo povlači drugo, a korektna definicija ne sadrži ekvivalentna svojstva.	 Obično se crta paralelogram ili zarotirani kvadrat.
G1.8 Kružnica je skup točaka ravnine jednako udaljenih od neke točke te ravnine.	Učenici obično ne uočavaju dijelove definicije koji su ispušteni kada je sve ostalo korektno napisano. U ovom slučaju ispuštena je riječ *svih*: …skup *svih* točaka… Bez riječi 'svih' mogu se razmatrati samo dijelovi kružnice ili samo konačan skup točaka kružnice. Svakako, razina strogosti ovisi i o uzrastu s kojim se radi.	 ili 

U svrhu statističke obrade, svako pitanje vrednovano je s 1 bodom za prepoznavanje nekorektnosti iskaza i s 1 bodom za vrednovanje korektno nacrtanog vizualnog prikaza. Pogrešan odgovor vrednovao se s 0 bodova, a ako odgovora nije bilo stavljao se minus (–) ili prazno. Maksimalan broj bodova u prvom dijelu testa je 16 (8 za iskaze i 8 za prikaze).

(b) Matematička poruka vizualnog prikaza. U drugom dijelu testa dano je šest vizualnih prikaza koje nose odgovarajuću matematičku poruku. Neke poruke mogu se prepoznati „na prvu”, dok je za otkrivanje drugih poruka potrebno uspostaviti funkcionalnu vezu među elementima prikaza (Tablica 5).

Glavna svrha ovih pitanja je ispitati u kojoj mjeri i koliko uspješno sudionici prepoznaju matematičku poruku sa zadanog vizualnog prikaza. Odnosno, ispitati na koji način sudionici tumače prikaz (tj. „čitaju sliku”): koje sve detalje uočavaju te kako ih povezuju u svrhu otkrivanja matematičke poruke koja je predstavljena. U procesu čitanja slike željelo se ispitati što je dominantno: čisto perceptivno uočavanje (ono što je prikazano) ili matematička svojstava važna za taj prikaz (ono što je predstavljeno).

Tablica 5. Otkrivanje matematičke poruke sa vizualnog prikaza

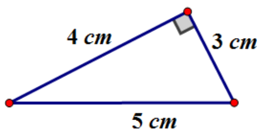
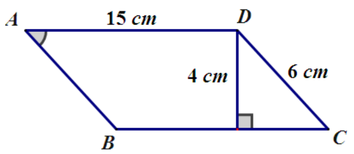
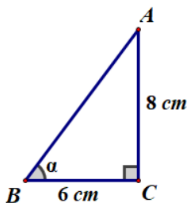
Zadano	Matematička poruka	Očekivano prepoznavanje
G2.1. 	Jednakostranični trokut stranice duljine *a*	Perceptivno: raznostraničan (tupokutan) trokut Diskurzivno: jednakostraničan trokut, stranice duljine *a*
G2.2 	Presjek kružnice i šiljastog kuta u vrhu kuta	Perceptivno: kružnica i šiljasti kut (s jednom zajedničkom točkom) Diskurzivno: kružnica i šiljasti kut kojima je jedna zajednička točka (presjek) vrh kuta
G2.3 	Slični pravokutni raznostranični trokuti s koeficijentom 2 (ili 0.5)	Perceptivno: dva pravokutna raznostranična trokuta Diskurzivno: dva slična pravokutna raznostranična trokuta, stranica jednog dvostruko je veća (manja) od drugog
G2.4. 	Tupi kut β je sukut šiljastom kutu α	Perceptivno: tupi i šiljasti kut Diskurzivno: tupi kut β nadopunjava šiljasti kut α do ispruženog kuta (susjedni kutovi)
G2.5 	Kvadar duljine 2 cm, širine 3 cm i visine 4 cm	Perceptivno: kocka Diskurzivno: kvadar s poznatim bridovima, duljine 2 *cm*, širine 3 *cm* i visine 4 *cm*
G2.6 	Dijagonalni presjek (duž dijagonale duljine *d*) pravilne šesterostrane prizme brida duljine *a* i visine *v*	Perceptivno: pravokutnik (2D objekt) unutar prizme (3D objekt) Diskurzivno: pravokutnik duljine *d* (duljina najdulje dijagonale baze) i širine *v* (duljina visine prizme) kao dijagonalni presjek pravilne šesterostrane prizme i ravnine

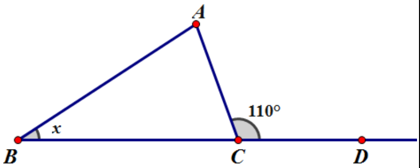
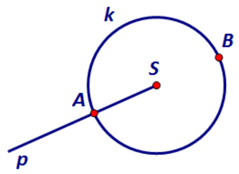
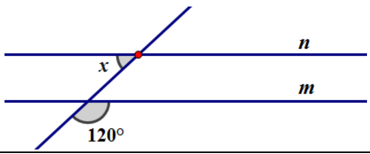
U svrhu statističke obrade, za slike koje su se čitale jednoznačno „na prvu" (prva i peta), točan odgovor se vrednovao s 1 bodom bez obzira na način opisa, a s 0 bodova ako je opis bio pogrešan. Na preostalim slikama trebalo je uspostaviti vezu među elementima vizualnog prikaza. Ako je veza korektno uspostavljena, vrednovalo se s 2 boda, bez obzira na način opisa. Ukoliko su elementi korektno prepoznati, ali veza nije uspostavljena vrednovalo se s 1 bodom, a u slučaju djelomičnog ili pogrešnog opisa elemenata slike vrednovalo se s 0 bodova. Za ne davanje odgovora, u oba slučaja, stavljao se minus (–) ili prazno. Maksimalan broj bodova u drugom dijelu testa je 10.

(c) Zadaci objektivnog tipa. U trećem dijelu testa dano je šest zadataka objektivnog tipa u kojima su pitanja većim dijelom dana kroz vizualni prikaz, a od ponuđenih pet odgovora samo je jedan točan. Među odgovorima postavljeni su distraktori (gdje je to bilo moguće) na način da se određeni odgovor dobiva kada se napravi tipična učenička greška (Tablica 6).

Zadacima objektivnog tipa ispituje se u kojoj mjeri ponuđeni odgovori potiču sudionike da odaberu odgovarajuće rješenje te je li postotak neodgovorenih pitanja manji u odnosu na pitanja iz drugih dijelova testa.

Tablica 6. Zadaci objektivnog tipa i njihove karakteristike

Zadano	Karakteristike pitanja	Distraktori u odgovorima
G3.1 Površina trokuta prikazanog na slici iznosi: (a) $6\,cm^2$ (b) $12\,cm^2$ (c) $15\,cm^2$ (d) $20\,cm^2$ (e) $60\,cm^2$ 	Duljina hipotenuze trokuta sa slike je element viška ukoliko se mjera njegove površine određuje po formuli $P = \frac{a \cdot b}{2}$. Prema rezultatima PISA testiranja, učenici obično koriste sve zadane elemente bez obzira jesu li oni potrebni za određivanje rješenja ili ne. Množenje duljina svih stranica trokuta ($P = a \cdot b \cdot c$) ukazuje na nerazumijevanje koncepta površine, što se može vidjeti i po mjernoj jedinici površine.	Za one koji pri određivanju površine trokuta zaborave dijeliti s 2: $P = 4 \cdot 3 = 12$ $P = 5 \cdot 3 = 15$ $P = 4 \cdot 5 = 20$. Za one koji množe sve zadane elemente: $P = 4 \cdot 5 \cdot 3 = 60$. Za one koji brkaju koncept površine i opsega te površinu određuju zbrajanjem duljina stranica: $P = 4 + 5 + 3 = 12$.
G3.2 Opseg paralelograma *ABCD* iznosi: (a) 21 *cm*. (b) 25 *cm*. (c) 36 *cm*. (d) 42 *cm*. (e) 46 *cm*. 	Visina i njezina duljina te istaknuti šiljasti kut elementi su viška jer nisu potrebni za određivanje opsega paralelograma sa slike. Korištenje duljine visine pri računanju opsega ukazuje na brkanje pojma opsega i površine zadanog lika.	Za one koji zbrajaju zadane veličina bez razumijevanja: $o = 15 + 6 = 21$ $o = 15 + 6 + 4 = 25$ $o = 2 \cdot 15 + 6 = 36$ $o = 2 \cdot 15 + 2 \cdot 6 + 4 = 46$.
G3.3 Na slici je dan pravokutni trokut te je $\alpha \approx 53°13'$. Duljina stranice $\overline{AB}$ iznosi: (a) 8 *cm*. (b) 10 *cm*. (c) 12 *cm*. (d) 14 *cm*. (e) 18 *cm*. 	Ako se duljina hipotenuze određuje primjenom Pitagorina poučka, istaknuti šiljasti kut i njegova veličina su elementi viška. Ako se duljina određuje primjenom trigonometrije pravokutnog trokuta, onda je duljina jedne katete element viška. Očekivano je da sudionici koriste Pitagorin poučak, ali moguće je da element viška ometa njegovu primjenu.	Mjere su zadane redom, s razlikom po 2 cm za one koji na temelju slike (umjesto računanjem) procjenjuju moguću duljinu.

G3.4 Na slici, točke B, C i D pripadaju istom pravcu te je $\lvert AB\rvert = \lvert BC\rvert$. Veličina kuta x iznosi: (a) 40° (b) 45° (c) 60° (d) 70° (e) 80°.  	Jednakokračni trokut je prikazan u nestandardnom položaju pa je moguće da dio učenika ne uvaži karakteristike jednakokračnog trokuta, jer trokut tako 'ne izgleda', unatoč zadanim elementima u tekstu.	Za one koji procjenjuju sa slike: veličine 45° i 60° Za one koji brzopleto čitaju pa uzimaju da su kutovi pri vrhu B i C jednakih veličina ili veličinu x računaju kao suplementarni kut kutu od 110°: veličina 70° Veličina 80° je dana kao prirodan slijed prethodnih veličina.
G3.5 Na slici je dana kružnica k i pravac p. Njihov presjek je: (a) točka A. (b) točke A i S. (c) točke A i B. (d) točke A, S i B. (e) dužina $\overline{AS}$.  	Ispitivanje razumijevanja pojmova kroz vizualni prikaz: pravac, kružnica i njihov presjek. Uključivanje točke S u odgovor ukazuje na nerazumijevanje koncepta kružnice, dok isključivanje točke B iz razmatranja ukazuje da prikaz kraće crte ometa zamisao pravca kao beskonačne crte. Odabir dužine kao presjeka ukazuje na nerazumijevanje koncepte i pravca i kružnice.	Za odgovor su ponuđene sve mogućnosti koje se mogu čitati sa slike, pri čemu je točka A uključena u sve mogućnosti jer 'vidljivo' pripada i pravcu i kružnici.
G3.6 Pravci n i m su paralelni. Veličina kuta x je: (a) 30°. (b) 40°. (c) 50°. (d) 60°. (e) 120°.  	Primjeri s kutovima uz presječnicu dvaju paralelnih pravaca često se koriste za prepoznavanje jednakih kutova. U ovom slučaju istaknuti su šiljasti i tupi kut pa oni nisu jednaki već suplementarni.	Za one koji procjenu vrše sa slike: veličine 30°, 40° i 50°. Za one koji brzopleto zaključe da su kutovi uz presječnicu jednaki: veličina 120°.

U svrhu statističke obrade, svi točni odgovori vrednovani su s 1 bodom, netočni s 0 bodova, a za ne odgovaranje se stavljao minus (-) ili prazno. Maksimalan broj bodova u trećem dijelu testa je 6.

(d) Proces rješavanja. U zadnjem dijelu testa dano je osam različitih vrsta zadataka u kojima treba prikazati proces rješavanja. Način na koji učenici odabiru strategiju i rješavaju zadatke ovisi i o razini vizualno-prostornih sposobnosti (Tillotson, 1985; Pittalis i Christou, 2010; Lohman, 1997). Stoga je glavna svrha prikazivanja procesa rješavanja stjecanje uvida u način povezivanja zadanih elemenata i odabir strategije sudionika u svrhu određivanja rješenja.

Naime, u jednom zadatku zahtijeva se crtanje opisane situacije, u četiri zadatka vizualni prikaz se može koristiti prema sklonostima sudionika, ali nije uvjet, a u tri zadatka zadani vizualni prikaz je neizbježan u procesu rješavanja. Zato se kroz ove vrste zadataka može ispitati u kojoj mjeri i koliko uspješno sudionici sami ostvaraju vizualne prikaze, odnosno zaključuju sa zadane slike u svrhu određivanja rješenja. No, prije svega, cilj je ispitati u kojoj mjeri i koliko uspješno sudionici rješavaju odabrane geometrijske probleme. U nastavku se detaljnije opisuje svaki od osam zadataka.

G4.1 (Zadatak 9.) Nacrtajte tupokutan trokut ΔEFG s tupim kutom pri vrhu *G*. Zatim nacrtajte visine v_e, v_f i v_g tog trokuta.

Ovim se zadatkom ispituje u kojoj mjeri sudionici vode računa o zadanom označavanju vrhova trokuta, poštujući pri tome orijentaciju (smjer suprotan gibanju kazaljki sata), a zatim na koji način i koliko uspješno crtaju okomicu. Način crtanja nije uvjetovan, što znači da se može provesti sa ili bez geometrijskog pribora. Ukoliko je netko pogrešno usvojio koncept visine (npr. da se visina uvijek nalazi unutar trokuta), pri crtanju, vođen time, obično okomicu crta ukoso na stranicu tako da visina 'padne' unutar trokuta, iako se vizualno može uočiti da visina nije okomita na stranicu.

U svrhu statističke obrade, korektno nacrtan trokut vrednuje se s 1 bodom i korektno nacrtane visine s 1 bodom. Pogrešno crtanje vrednuje se s 0 bodova, a za ne-odgovor se koristi minus (-) ili prazno.

G4.2 (Zadatak 10.) Opseg jednakokračnog trokuta iznosi $44\,cm$. Odredite duljine stranica tog trokuta, ako je duljina jedne stranice $14\,cm$.
G4.3 (Zadatak 11.) Jedan unutrašnji kut jednakokračnog trokuta je 4 puta veći od jednog od preostala dva kuta. Odredite veličine unutrašnjih kutova tog trokuta.

Ovim zadacima se ispituje hoće li sudionici ispitivati sve mogućnosti, jer oba zadatka imaju po dva rješenja, ili će proces sudionika završiti kada odrede jedno rješenje. Osim toga, zadaci se mogu riješiti čisto analitički, bez korištenja vizualnih prikaza, ali i crtanjem trokuta u procesu analize. U skladu s tim, ovim zadacima se ispituje koju strategiju sudionici više koriste: čisto analitički pristup ili vizualno-analitički pristup. Također, s obzirom da zadaci imaju dva rješenja, za one koji koriste vizualno-analitički pristup, zadatkom se ispituje i koju vrstu jednakokračnog trokuta sudionici koriste: samo šiljastokutni (što je uobičajena praksa) ili razmatraju i tupokutne jednakokračne trokute (pa i jednakostranične). Konačno, oba zadatka uključuju jednakokračni trokut s namjerom kako bi se ispitalo utječe li sadržaj zadatka na razmatranje različitih jednakokračnih trokuta ili se sudionici koriste nekom uhodanom rutinom.

U svrhu statističke obrade, svako točno rješenje vrednuje se s 1 bodom, a svako pogrešno s 0 bodova. Za ne-odgovor se koristi minus (-) ili prazno.

G4.4 (Zadatak 12.) Površina kvadrata *A* iznosi $4\,cm^2$. Stranica kvadrata *B* je dvostruko veća od stranice kvadrata *A*. Odredite površinu kvadrata *B*.

Zadatak se može riješiti čisto analitički, čisto vizualno, ali i kombinirano, vizualno-analitički. Stoga se ovim zadatkom ispituje u kojoj se mjeri sudionici služe vizualnim prikazom kada imaju mogućnost izbora te na koji način koriste prikaz: uspostavljaju li veze između površina crtanjem kvadrata unutar kvadrata ili crtaju dva odvojena kvadrata. S obzirom da se do rješenja može doći računski, određivanjem duljina stranica kvadrata, ali i algebarski, bez znanja duljina stranica kvadrata, zadatkom se ispituje i u kojoj mjeri sudionici ovise o konkretnim veličinama polaznih elemenata (imaju potrebu znati duljine stranica kvadrata kako bi odredili njihove površine) ili su u mogućnosti uspostavljati veze među površinama i bez toga. Osim toga, učenici često brkaju koncept opsega i površine pa prema načinu mijenjanja duljina stranica nekog lika brzopleto zaključuju da se jednako tako mijenja i veličina njegove površine. U skladu s tim, ovim zadatkom se može ispitati jesu li sudionici skloni brkanju opsega i površine na takav način.

U svrhu statističke obrade, vrednovanje se vrši na sljedeći način: pogrešan proces s 0 bodova, korektno računanje stranice s 1 bodom i korektno računanje površine 1 bodom ili korektno određivanje površine bez računanja stranice s 2 boda. Za ne-odgovor se koristi minus (-) ili prazno.

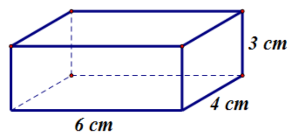
G4.5 (Zadatak 13.) Pod hodnika je oblika pravokutnika dužine $6\,m$ i širine $1.5\,m$. Pločice su oblika kvadrata duljine stranice $15\,cm$. Koliko je pločica potrebno da bi se popločao cijeli pod?

Iako je ovaj zadatak stavljen u realan kontekst, ne može se smatrati pravim realističnim problemom jer je situacija opisana idealno: dimenzije hodnika i pločica su takve da pri popločavanju hodnika nema ni viška ni manjka. Jedina ne-olakotna okolnost su različite mjerne jedinice koje treba uskladiti. Problemi ovog tipa su zapravo 'obučeni problemi' jer se kroz opisanu situaciju nameće rješavanje određenog matematičkog problema, a realistična situacija je određeni faktor motivacije da se aktivnije prione rješavanju problema (Schukajlow i sur., 2012; Baranović i Antunović-Piton, 2021).

Očekivano je da se pri rješavanju ovog zadatka sudionici koriste i vizualnim prikazom pa se zadatkom ispituje u kojoj mjeri i na koji način sudionici koriste vizualni prikaz u procesu određivanja rješenja: uspostavljaju li veze između površina crtanjem 'pločice' unutar 'hodnika' ili ih crtaju odvojeno. Osim toga, problem popločavanja postavljen je bez 'viškova i rezanja pločica' jer je namjera bila olakšati proces rješavanja te zadatkom ispitati koriste li sudionici vizualni prikaz u svrhu prebrojavanja ukupnog broja pločica i na koji način vrše strukturiranje u procesu prebrojavanja: jednu po jednu pločicu (jedinica mjerenja), red po red pločica (nova jedinica mjerenja) ili umnožak broja pločica po duljini i po širini (koncept množenja). Također, s obzirom da se popločavanje u opisanoj situaciji može izvesti bez praznina, bez viškova i manjaka, broj potrebnih pločica može se odrediti i dijeljenjem ploština hodnika i pločice, dok u drugim situacijama ta metoda nije korektna.

U svrhu statističke obrade, ovisno o korektnosti etapa unutar cjelokupnog procesa, vrednovanje se vrši od 0 do 3 boda: pogrešan proces s 0 bodova, korektno pretvaranje mjernih jedinica s 1 bodom, djelomično korektan račun s 1 bodom, korektan račun s 2 boda, a ne-odgovor s minus (-) ili prazno.

G4.6 (Zadatak 14.) Odredite volumen i oplošje tijela sa slike.



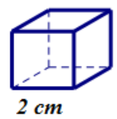
Crtanje 3D objekata pomoću 2D prikaza zahtijeva poznavanje i određenih konvencija (Duval, 1998). Na primjer, bridovi koji se vide iz perspektive gledanja crtaju se punom linijom, a ostali isprekidanom; kvadrati i pravokutnici se crtaju u projekciji kao paralelogrami itd. Sve to zapravo omogućava da se nacrtani objekt zaista vidi kao 3D objekt. Nadalje, pri rješavanju ovog zadatka do izražaja dolaze i različite vizualno-prostorne sposobnosti jer je zadatak zadan vizualnim prikazom. Prije svega, potrebna je *sposobnost izdvajanja odgovarajućih elemenata* i veličina potrebnih za određivanje površine: najprije u prikazanom tijelu (3D objekt) treba izdvojiti plohe (2D objekti), a zatim duljine odgovarajućih stranica (1D objekti) i to činiti naizmjenično. Uz to, potrebna je i *sposobnost postojanosti percepcije*, jer iako su na slici četiri plohe nacrtane kao paralelogrami, treba ih prepoznati („vidjeti”) kao pravokutnike. Konačno, uz sve to, potrebno je i određeno geometrijsko znanje o oplošju, volumenu i pripadnim mjernim jedinicama u svrhu određivanja rješenja.

Za određivanje oplošja, nije potrebno koristiti formulu jer se sve plohe i njihove dimenzije mogu prepoznati sa slike pa je dovoljno odrediti duljinu i širinu ploha (pravokutnika), izračunati njihove površine i zbrojiti. Ukoliko se koristi formula $O = ab + ac + bc$, potrebno je odgovarajuće veličine korektno uvrstiti u formulu s obzirom da na slici ne postoje oznake koje se koriste u formuli. Za određivanje volumena, može se koristiti formula $V = abc$, ali i ne mora jer je dovoljno pomnožiti sve tri istaknute veličine bez pozivanja na bilo kakvu formulu. Međutim, slično kao u zadatku određivanja površine pravokutnog trokuta (G3.1), ne znači da sudionici koji samo pomnože istaknute veličine zapravo i razumiju da se radi o formuli za volumen prikazanog tijela. S obzirom da su na danoj slici veličine istaknute s mjernim jedinicama, od sudionika se očekuje da istaknu i mjerne jedinice izračunatog oplošja i volumena, što je dodatni pokazatelj razumijevanja koncepta oplošja i volumena.

Prema svemu navedenom, zadatkom se ispituje u kojoj se mjeri i koliko uspješno sudionici služe slikom pri određivanju oplošja i volumena, posežu li za formulom pod svaku cijenu te vode li računa o mjernim jedinicama.

U svrhu statističke obrade, točno određivanje oplošja i volumena vrednuje se sa po 1 bodom, a korektno isticanje mjernih jedinica s još 1 bodom. Pogrešan račun ili mjerna jedinica vrednuje s 0 bodova, a ne-odgovor s minus (-) ili prazno. U ovom zadatku moguće je ostvariti maksimalno 3 boda.

G4.7 (Zadatak 15.) Od 12 kocaka, jednakih kocki prikazanoj na slici, sastavljen je kvadar. Bridovi kvadra koji se sastaju u jednom vrhu su različite duljine. Odredite volumen tako nastalog kvadra.



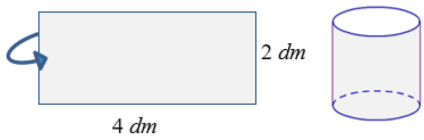
Dio teksta zadatka, koji nije potreban za određivanje traženog volumena (*Bridovi kvadra koji se sastaju u jednom vrhu su različite duljine*.), ali se može koristiti, ima dvojaku ulogu. Ukoliko se umetnuti dio koristi, sudionici se usmjeravaju na crtanje odgovarajućeg kvadra i određivanje njegovih dimenzija potrebnih za računanje traženog volumena, ali i razmatranje različitih mogućnosti. U tom procesu do izražaja dolazi *sposobnost strukturiranja* i analize.

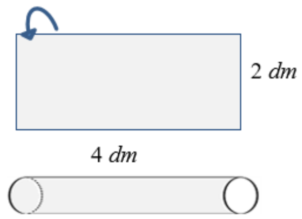
No, onaj tko ima potrebno geometrijsko znanje, umetnuti dio može zanemariti jer su volumeni 3D objekata jednaki bez obzira na oblik (postojanost volumena) kada su izgrađeni od jednakih strukturnih elemenata. U tom slučaju, za određivanje traženog volumena, potrebno je odrediti volumen kocke (strukturni element) te rezultat pomnožiti s 12.

Ovim zadatkom se ispituje koju od opisanih strategija sudionici koriste i koliko uspješno, odnosno da li sudionici pod svaku cijenu koriste sve što je tekstom zadatka opisano ili su u mogućnosti izdvojiti samo one elemente koji su potrebni za određivanje rješenja.

U svrhu statističke obrade, točno određivanje volumena kocke vrednuje se s 1 bodom i točno određivanje volumena kvadra s još 1 bodom. Ako se kvadar crta i pri tome volumen računa na temelju njegovih dimenzija, onda se djelomično točan račun vrednuje s 1 bodom, a u potpunosti korektan račun s 2 boda. Pogrešan se račun vrednuje s 0 bodova, a ne-odgovor s minus (-) ili prazno.

G4.8 (Zadatak 16.) Imate na raspolaganju dva lista papira jednakih dimenzija te od njih oblikujete šuplji valjak kako je prikazano na slici. Kakvi su volumeni tih valjaka, jednaki ili različiti? Argumentirajte svoj odgovor.





Iako je zadatak mogao biti zadan samo tekstom, uz tekst su dani vizualni prikazi, ali i konkretne veličine lista papira iz nekoliko razloga. Prije svega, slično kao i kod uspostavljanja odnosa između opsega i površine nekog lika (2D objekta), događa se zbrka i pri uspostavljanju odnosa između oplošja i volumena nekog tijela (3D objekta): netko brzopleto može zaključiti da su volumeni nastalih valjaka jednaki jer su plohe, od kojih su tijela izvedena, jednakih površina. Nadalje, do odgovora se elegantno može doći određivanjem volumena nastalih tijela te izvođenjem zaključka uspoređivanjem dobivenih volumena. U tom slučaju, treba provesti algebarsku proceduru i uspoređivanje. Kako bi se taj proces olakšao, na slici su ipak istaknute konkretne veličine lista papira, unatoč teksta zadatka koji ističe samo uvjet jednakih dimenzija listova, ali ne i veličine. No, unatoč namjernom olakšavanju procesa, za korektan račun treba prepoznati odgovarajuće mjere valjka (radijus i visina) na temelju zadanih mjera papira. Pri tome do izražaja dolaze različite prostorne sposobnosti: potrebno je dodatno koristiti *sposobnost mentalne rotacije* te *sposobnost izdvajanja* opsega baze valjka kao elementa koji se podudara s jednom duljinom lista papira.

Kako bi se izbjeglo da sudionici daju samo kratki odgovor o odnosima volumena (jednaki su ili prvi ima veći volumen od drugog), postavljen je dodatni zahtjev da se odgovor argumentira. Naime, kada se na temelju procesa rješavanja izvedu zaključci i opišu riječima, do izražaja dolazi što sudionik u tom procesu smatra važnim te na koji način izdvaja bitne karakteristike, pomoću kojih oblikuje svoj argument. Osim toga, netko argumentom može smatrati prikazani proces određivanja i uspoređivanja volumena, a drugi argumentom mogu smatrati konačni zaključak koji se izvodi nakon provedenog procesa.

Konačno, ovim zadatkom se ispituje na koji način sudionici uspostavljaju odnos između površine plohe koja se rotira i volumena nastalog tijela: zaključuju li na prečac ili uporište traže u elementima na temelju kojih određuju volumene i izvode zaključak, bilo algebarski ili računski. Također, ispituje se što za sudionike znači 'argumentirati odgovor': prikazani proces rješavanja ili zaključak o odnosima opisan riječima, koji se temelji na provedenom procesu.

U svrhu statističke obrade, točan odgovor se vrednuje s 1 bodom, a korektno izveden argument s 2 boda. Djelomično korektan argument vrednuje se s 1 bodom, a pogrešan odgovor kao i nekorektan argument s 0 bodova. U slučaju ne-odgovora koristi se minus (-) ili prazno. U četvrtom dijelu GEO testa maksimalan broj bodova je 19.

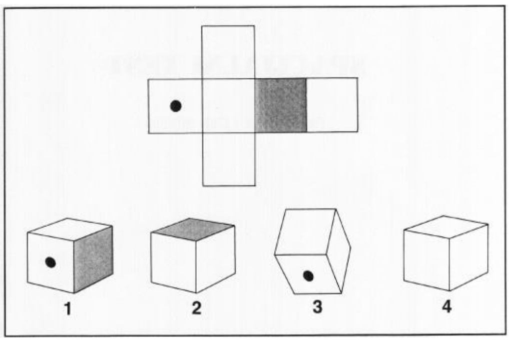
Prema opisanom, GEO test u ovom istraživanju ima dvojaku ulogu: (1) na početku semestra (oznaka 1GEO) služi za prikupljanje podataka o predznanju sudionika o temeljnim geometrijskim pojmovima te odgovarajućim vizualno-prostornim vještinama; (2) na kraju semestra (oznaka 2GEO) služi za utvrđivanje postoji li i u kojoj mjeri napredak u znanju iz geometrije te odgovarajućim vizualno-prostornim vještinama unutar svake grupe te među grupama. Maksimalan broj bodova na cijelom GEO testu je 51.

5.5.3.3. Test mjerenja prostornih sposobnosti – SPAC test

Za mjerenje prostornih sposobnosti odabran je spacijalni test (kraće SPAC test) autora P. Smith i C. Whetton, u prijevodu Naklade Slap, Jastrebarsko 1998, naručen za potrebe ovog istraživanja. Test je odabran u svrhu testiranja prostorne vizualizacije kao posebnog faktora prostornih sposobnosti, koji je važan prediktor za uspješno savladavanje geometrije, posebno prostorne geometrije. Testiranje je proveo psiholog prema strogo određenim pravilima psihološkog testiranja.

Karakteristike SPAC testa: SPAC test sastoji se od 20 pitanja. Neposredno prije samostalnog pisanja sudionici rješavaju dva zadatka za vježbu, koji se nalaze u sklopu testa, kako bi se utvrdilo jesu li dobro razumjeli pitanja. Nakon toga, test se rješava maksimalno 20 minuta, a svoje odgovore sudionici daju na poseban list za odgovore.

U svakom pitanju zadana je mreža nekog geometrijskog tijela i četiri geometrijska tijela u različitim položajima (Slika 87). Potrebno je zamisliti geometrijsko tijelo nastalo savijanjem zadane mreže, a zatim za svako od četiri ponuđena geometrijska tijela utvrditi mogu li nastati savijanjem zadane mreže ili ne. Složenost pitanja je utoliko veća što za svako tijelo treba utvrditi može li nastati savijanjem zadane mreže, a ne samo među četiri ponuđena tijela odabrati jedno koje odgovara mreži. Naime, u drugom slučaju može se koristiti i metoda eliminacije, dok u prvom slučaju proces savijanja i rotiranja treba provesti za svako ponuđeno tijelo. Nadalje, u pitanjima su korištene različite vrste geometrijskih tijela što dodatno otežava proces savijanja jer postoji stalna potreba za stvaranjem predodžbi, za razliku od testova u kojima se koristi samo jedna vrsta tijela (npr. kocka). Osim toga, test je konstruiran tako da je među pitanjima polovina prosječno teških zadataka, a po četvrtina otpada na vrlo lagane, odnosno vrlo teške zadatke.



Slika 87. Primjer testnog pitanja

Ovaj test je odabran iz više razloga. Prije svega, pitanjima ovog testa obuhvaćene su različite vrste uglatih tijela (od trostranih do osmerostranih prizmi te četverostrana i peterostrana piramida) kao i rotacijska tijela (valjkasta i stožasta), što odgovara dijelu kolegija koji se bavi geometrijom prostora. Nadalje, s obzirom da su u GEO testu većim dijelom zadaci koji obuhvaćaju sadržaje geometrije ravnine, cilj je bio dodatno ispitati vizualno-prostorne sposobnosti sudionika vezano uz geometriju prostora.

SPAC test u ovom istraživanju ima dvojaku ulogu: (1) na početku semestra (oznaka 1SPAC) koristi se kao mogući prediktor uspješnosti učenja geometrije, tj. ispituje u kojoj mjeri vizualno-prostorne sposobnosti sudionika mogu predvidjeti uspješnost savladavanja geometrije obuhvaćene kolegijem; (2) na kraju semestra (oznaka 2SPAC) koristi se za mjerenje napretka u vizualno-prostornim vještinama, tj. ispituje u kojoj mjeri učenje geometrije i razvijanje osnovnih vještina vizualizacije utječe na razvoj vizualno-prostornih sposobnosti sudionika, unutar svake grupe i među grupama.

U svrhu statističke obrade, točan odgovor vrednuje se s 1 bodom, a netočan odgovor s 0 bodova. U slučaju ne-odgovora stavlja se minus (-) ili prazno. Maksimalan broj bodova na SPAC testu je 80.

5.5.4. Poučavanje geometrije tijekom intervencije

Nastava na visokoškolskim ustanovama odvija se kroz zimski i ljetni semestar unutar 15 tjedana, što se regulira Kalendarom nastave na početku svake akademske godine. Prema programima učiteljskih studija Sveučilišta u Splitu i Zadru, Euklidska geometrija obrađuje se u okviru kolegija Matematika 2 u ljetnom semestru, koji traje od ožujka do lipnja. Prema redu predavanja, nastava se izvodi kroz 2 sata predavanja i 2 sata vježbi po svakom tjednu, pri čemu predavanja prate svi studenti zajedno, a za vježbe se dijele u dvije grupe. Obveze prema kolegiju propisane su nastavnim planom i programom.

U skladu s organizacijom nastave na visokoškolskim ustanovama, intervencija se odvijala unutar redovne nastave geometrije u realnom vremenu i prema zadanom rasporedu sati, sa svim studentima koji su u ljetnom semestru 2015./2016. godine bili upisani na kolegij Matematika 2 učiteljskog studija u Splitu, koji su činili eksperimentalnu grupu (52 studenata). Sudionici eksperimentalne grupe nisu imali nikakvih posebnih obveza prema kolegiju osim redovnih, koje su propisane nastavnim planom i programom: redovito pohađanje nastave i izvršavanje postavljenih zadaća.

S obzirom da se intervencija odvijala unutra redovite nastave u realnom vremenu, moguće je da alternativni pristup poučavanja na sve sudionike eksperimentalne grupe nije imao jednak utjecaj, jer to dijelom ovisi i o redovitosti njihovog pohađanja nastave te izvršavanja domaćih zadaća. Iako se moglo pratiti koliko oni redovito sudjeluju na nastavi te u kojoj mjeri i koliko uspješno izvršavaju domaće zadaće, ti rezultati se nisu mogli uspoređivati s rezultatima testiranja, jer su sudionici pred i post testove pisali pod kodom koji je u svrhu identifikacije bio poznat samo njima. Ipak, taj pristup je odabran kako bi podaci prikupljeni testiranjem bili neutralni u odnosu na intervenciju.

Zbog svega opisanog, tijekom intervencije sudionici se nisu promatrali pojedinačno već kao grupa s određenim karakteristikama. O neposrednom radu sa sudionicima eksperimentalne grupe vodila se evidencija, a uočene teškoće sudionika, njihova nerazumijevanja i pogrešna shvaćanja geometrijskih koncepata koristila su se kao podloga za raspravu unutar odgovarajuće teme. U nastavku se detaljnije opisuju nastavni planovi i programi rada, strategija poučavanja i nastavne aktivnosti korištene tijekom intervencije.

5.5.4.1. Nastavni planovi i programi za geometriju

Uvidom u nastavne planove i programe za matematiku na učiteljskim studijima, posebno one kojima su obuhvaćeni sadržaji euklidske geometrije ravnine i prostora, utvrđeno je da program na Sveučilištu u Zadru najbliže odgovara programu na Sveučilištu u Splitu. Osim toga, oba su se programa izvodila u ljetnom semestru pod nazivom Matematika 2. Stoga je dogovoreno da svi studenti koji su u ljetnom semestru 2015./2016. godine bili upisani na kolegij Matematika 2 učiteljskog studija u Zadru čine kontrolnu grupu (38 studenata). Jedino je postojala razlika izvođenja po godinama: u Splitu se kolegij izvodio na 3. godini učiteljskog studija, a u Zadru na 2. godini. Iz toga je vidljivo da je kontrolna grupa imala manju stanku u kontinuitetu matematičkog obrazovanja od sudionika eksperimentalne grupe. U nastavku se detaljnije predstavljaju i uspoređuju oba programa.

Nastavni plan i program rada po kojemu su radili sudionici iz eksperimentalne grupe (Tablica 7) razrađen je detaljno po temama koje su se obrađivale unutar 15 tjedana, pri čemu je u prvom i posljednjem tjednu planirano i testiranje opisanim testovima. Nastavni plan i program rada po kojemu su radili sudionici iz kontrolne grupe (Tablica 8) preuzet je iz Elaborata o studijskom programu, koji je bio dostupan on line na početku akademske godine 2015/2016. Sadržaj je predmeta i u ovom slučaju detaljno razrađen po temama, ali nije naznačeno koje teme se rade u kojem tjednu, već je navedeno 20 tematskih cjelina redom njihovog izvođenja. Sa sudionicima kontrolne grupe planirano je testiranje opisanim testovima u prvom i posljednjem tjednu, ali bez zadiranja u njihov redovni plan i program. Uspoređivanjem predstavljenih programa (Tablica 7 i 8) vidljivo je da su sve teme programa eksperimentalne grupe sadržane i u programu kontrolne grupe te da u programu kontrolne grupe postoje dvije teme više: izometrije i vektori.

Tablica 7. Okvirni plan i program rada u eksperimentalnoj grupi

Tjedan	Plan i program rada
1	Testiranje prije učenja geometrije: VH, SPAC i GEO test Uvodno upoznavanja: - plan i program rada, vrednovanje, obveze prema predmetu, potreban pribor - izrada i osnovne karakteristike tangram slagalice: slaganje i crtanje tangram likova na praznom papiru i u kvadratnoj točkastoj mreži
2	Osnovni geometrijski pojmovi: točka, pravac, ravnina i prostor Odnosi među osnovnim pojmovima: pripadnost i poredak Aksiomi: pripadanja, uređaja, podudarnosti, neprekidnosti i paralelnosti Osnovne geometrijske konstrukcije: prenošenje dužine i kuta, simetrala dužine i kuta, konstrukcija okomice i paralele, dijeljenje dužine u omjeru, osnovne konstrukcije trokuta: SSS, SKS, KSK, SSK$^{>}$
3	Dužina: definicija, duljina dužine i udaljenost točaka, uspoređivanje dužina, polovište dužine, sukladne dužine, simetrala dužine, konveksni skup Površina: određivanje veličine, popločavanje, crtanje u kvadratnoj točkastoj mreži Opsezi i površine odabranih likova: mjerenje, uspoređivanje
4	Polupravac, poluravnina Kut: definicija, vrste kutova i njihove mjere (u stupnjevima i radijanima), sukladni kutovi, susjedni i suplementarni kutovi, komplementarni kutovi, vršni kutovi, kutovi s paralelnim i okomitim kracima, kutovi uz presječnicu
5	Trokut: definicija, osnovni elementi i odnosi (stranica, kutova), vrste trokuta i njihova svojstva, Pitagorin poučak, četiri karakteristične točke trokuta i njihova svojstva, opseg i ploština trokuta
6	Sukladni trokuti i teoremi o sukladnim trokutima: SSS, SKS, KSK, SSK$^{>}$ Primjena teorema o sukladnosti u dokazivanju izvedenih tvrdnji
7	Talesov poučak o proporcionalnim dužinama (četiri proporcije) i njegov obrat Slični trokuti i teoremi o sličnim trokutima: KK, SSS, SKS, SSK$^{>}$ Opsezi, visine i ploštine sličnih trokuta, Euklidov teorem
8	Četverokut: definicija, osnovni elementi i odnosi, vrste četverokuta i njihova svojstva (trapezoidi, trapezi i paralelogrami), odnosi među četverokutima, opsezi i površine četverokuta, sukladni i slični četverokuti. Mnogokuti: dijagonale i kutovi, pravilni mnogokuti, opsezi i površine
9	Kružnica: definicija, osnovni elementi i dijelovi (polumjer, promjer, tetiva, kružni luk), odnos pravca i kružnice, odnos dviju kružnica Krug: definicija, osnovni elementi i dijelovi (polukrug, kružni isječak, kružni odsječak, kružni vijenac), opseg i površina kruga te dijelova kruga, obodni i središnji kut, tetivni i tangencijalni četverokuti
10	Uvod u geometriju prostora: pravci i ravnine u prostoru, klasifikacija geometrijskih tijela, izgradnja geometrijskih tijela od kocaka te njihovo oplošje i volumen, crtanje tijela u izometričnoj mreži, različite perspektive
11	Prizme (četverostrane, trostrane, šesterostrane) i njihove mreže: osnovni elementi, vrste (kose, uspravne, pravilne), crtanje, dijagonalni presjeci, oplošje i volumen, odnosi među tijelima
12	Piramide (četverostrane, trostrane, šesterostrane) i njihove mreže: osnovni elementi, vrste (kose, uspravne, pravilne), crtanje, dijagonalni presjeci, oplošje i volumen, odnosi među tijelima
13	Obla tijela (valjak, stožac, kugla) i njihove mreže: osnovni elementi, vrste (kosi, uspravni, jednakostranični), crtanje, osni presjeci, oplošje i volumen, odnosi među tijelima
14	Rotacijska tijela: crtanje, opisivanje, određivanje oplošja i volumena nastalih tijela
15	Završni sat: utvrđivanje uspjeha i zaključivanje Testiranje nakon učenja geometrije: VH, SPAC i GEO test

Tablica 8. Okvirni plan i program rada u kontrolnoj grupi

Tema	Sadržaj predmeta detaljno razrađen prema satnici nastave
1	Aksiomi o pripadnosti - incidenciji (iskazi; ilustracija: posljedice).
2	Aksiomi o poredku - uređaju (linearni uređaj na pravcu; ilustracija; konveksan skup; konveksna ljuska; trokut; Paschov aksiom)
3	Aksiomi o mjerenju (metrika; posljedice).
4	Aksiomi o simetričnosti (osna simetrija).
5	Temeljni poučci (posljedice prihvaćenih aksioma).
6	Izometrije (osnovna svojstva; fiksne točke; simetrala; okomitost; osnovni poučak o izometrijama; rotacija; centralna simetrija).
7	Kut (definicija; uređaj; mjerenje; kutovi u trokutu).
8	Likovi (trokut; trokutna nejednakost; mnogokut; udaljenost točke od pravca; kružnica; presjek pravca i kružnicom; presjek dviju kružnica).
9	Aksiom o usporednicama - paralelama (Euklidov peti postulat; aksiom o paralelama; ekvivalenti petoga postulata; hiperbolička i eliptička geometrija; realizacijski modeli).
10	Poučci o sukladnosti (S-S-S; S-K-S; K-S-K; S-K-S; izometričnost; konstrukcije).
11	Četiri osobite trokutove točke (paralelogram; srednjica; težišnice i težište; sjecište straničnih simetrala; sjecište kutnih simetrala; visine i orto-centar)
12	Poučci o sličnosti (paralelna projekcija; Talesov poučak o proporcionalnosti; poučci o kutovima; poučci o sličnim trokutima; homotetija).
13	Pitagorin poučak (Pitagorin poučak; ekvivalenti Pitagorina poučka; obrat Pitagorina poučka).
14	Obodni i središnji kut (tetiva; promjer; luk; poučak o obodnomu i središnjemu kutu; Talesov poučak).
15	Tangencijalni i tetivni četverokut (tangencijalni četverokut; tetivni četverokut; Ptolomejev poučak; potencija s obzirom na kružnicu).
16	Vektori (usmjerena dužina; vektor; zbrajanje i množenje skalarom).
17	Algebarski prikaz (pravokutni koordinatni sustav; algebarski zapis ravninskoga vektora; algebarske operacije na vektorima).
18	Translacija (definicija; svojstva; izometrija kao kompozicija rotacije i translacije).
19	Stereometrijski aksiomi i posljedice (iskaz; ilustracija; osnovni odnosi među točkama, pravcima i ravninama u prostoru.
20	Geometrijska tijela (prizme; kvadar; kocka; piramide; valjak; stožac; kugla).

Prema stilu navođenja tema, može se uočiti da se u programu eksperimentalne grupe više ističu pojmovi koji će se obrađivati, a aksiomatska struktura je „skrivena" u pozadini, dok je u programu kontrolne grupe naglašena upravo aksiomatska struktura. Također, kroz tematski opis uočava se da je u programu eksperimentalne grupe planiran rad s didaktičkim sredstvom (u ovom slučaju tangram, iako može biti i neko drugo), crtanje u različitim mrežama te konstruiranje, što se ne može reći i za program kontrolne skupine. No, iako se kroz tematski opis ne može vidjeti je li u poučavanju planirano korištenje programa dinamičke geometrije (Sketchpad i Geogebra), on se ipak koristio u radu sa sudionicima iz obje grupe.

5.5.4.2. Nastavne strategije tijekom intervencije

Tijekom intervencije dominirale su dvije glavne nastavne strategije: (1) strukturiranje nastavnih tema prema van Hieleovima fazama učenja te (2) poučavanje temeljeno na vizualno-analitičkoj metodi usmjerenog opažanja.

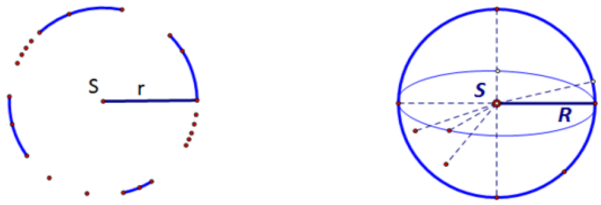
U okviru predavanja, nastavne teme najčešće su strukturirane kroz pet ključnih aktivnosti prema van Hieleovim fazama učenja: uvodna rasprava (F1), samostalni rad sudionika uz usmjereno vođenje (F2), objašnjavanje dobivenih rezultata (F3), primjena obrađenog kroz različite primjere (F4) te integracija rezultata u funkcionalnu cjelinu (F5). Opisane se aktivnosti nisu provodile linearno niti jednakog obima, već naizmjenično i u obimu koji je zahtijevala određena tema, uz prilagođavanje (pred)znanjima sudionika. Upravo je zbog toga ponekad moguće sve aktivnosti realizirati tijekom samo jednog sata, a neke od njih i više puta, dok se ponekad realizacija svih aktivnosti proteže na više sati. U okviru vježbi, koristili su se zadaci različitih kognitivnih zahtjeva, s različitom svrhom:

za ponavljanje, provjeru razumijevanja i primjenu obrađenih sadržaji, za istraživanje, otkrivanje i uspostavljanje funkcionalne mreže različitih koncepata. Prema cilju rješavanja, unutar svake tematske cjeline svi zadaci su razvrstani u tri kategorije: odredbeni, konstruktivni i dokazni.

Strukturne aktivnosti planirane su tako da se kroz sve navedene faze učenja može što više koristiti vizualno-analitička metoda usmjerenog opažanja: od uvodne rasprave, preko samostalnog rada unutar strukturiranog materijala i objašnjavanja do primjera primjene i završne integracije. Time se cjelokupno poučavanje prožimalo elementima vizualizacije te osiguravalo okruženje unutar kojeg su sudionici mogli razvijati vještine vizualizacije u kontekstu geometrije, ali i geometrijske sadržaje učiti s većim razumijevanjem uz podršku vizualizacije. U nastavku se detaljnije opisuje način strukturiranja tematskih cjelina (nastavnih tema) te primjena metode usmjerenog opažanja tijekom intervencije.

(1) Strukturiranje nastavnih tema prema van Hieleovim fazama učenja. Tijekom intervencije, nastavni je sat najčešće započinjao fazom pitanja i raspravom (F1), kako bi se ispitalo što sudionici već znaju o temi koja se želi obraditi. Uvođenjem sudionika u raspravu do izražaja dolaze razne teškoće, nerazumijevanja i pogrešna shvaćanja koja oni imaju o geometrijskim konceptima. U svrhu osvještavanja sudionika o nepotpunom razumijevanju ili pogrešnom shvaćanju koristila se metoda kognitivnog konflikta: prema njihovom opisu postavljao se kontra primjer kako bi im se ukazalo u čemu griješe ili gdje su manjkavosti.

Na primjer, u tematskoj cjelini o kružnici i krugu prirodno je započeti definicijama tih pojmova, njihovim osnovnim elementima i dijelovima (polumjer, promjer, tetiva itd.). Iako je svim sudionicima pojam kružnice prilično poznat, njihov opis obično je nepotpun. Ukoliko kažu da je *Kružnica skup točaka ravnine jednako udaljenih od jedne točke*, onda im se može ponuditi Slika 88(a) jer nedostaje riječ *svih*. Ukoliko kažu da je *Kružnica skup svih točaka jednako udaljenih od jedne točke*, onda im se može ponuditi Slika 88(b) jer nedostaje riječ *ravnine*. Ukoliko kažu da je *Kružnica skup svih točaka ravnine jednako udaljenih od središta kružnice,* onda se s njima može razmotriti nekorektnost cirkularne definicije (Jozić, 2014). Itd.

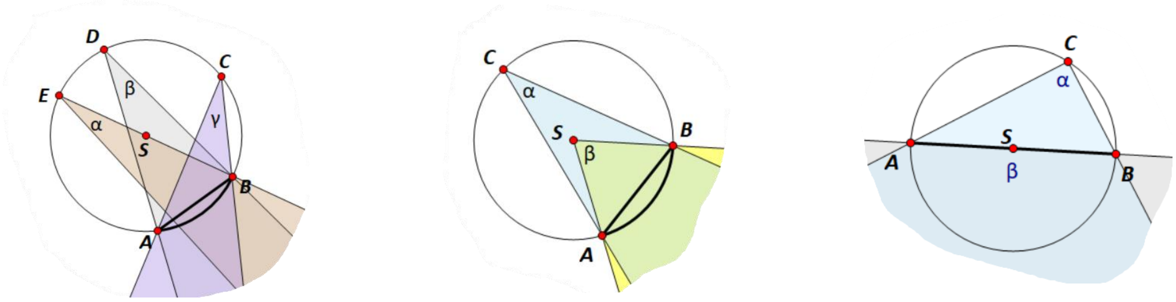


(a) (b)

Slika 88. Nepotpuna kružnica i sfera

Nakon uvodne rasprave o pojmovima, sudionici se usmjerenim vođenjem (F2) provode kroz različite aktivnosti crtanja, mjerenja, prebrojavanja, izračunavanja, povezivanja, zaključivanja itd. (ovisno o temi koja se obrađuje), a aktivnosti se pažljivo strukturiraju u svrhu otkrivanja svojstava pojmova i njihovih odnosa, posebno onih koji su im do tada bili nepoznati ili nedovoljno jasni. Usmjereno vođenje se može koordinirati kroz direktnu interakciju sa sudionicima, a mogu biti pripremljeni i programirani materijali za samostalni rad sudionika (individualno, u paru ili grupi).

Na primjer, nakon rasprave o pojmovima *obodni* i *središnji kut,* sudionici se mogu usmjeriti da crtanjem i mjerenjem više obodnih kutova nad istim lukom (Slika 89a) ili sukladnim lukovima iste kružnice (ili sukladnih kružnica) izvedu zaključak o jednakosti tih kutova. Također, mogu se usmjeriti da nacrtaju obodni kut nad lukom (tetivom) odabranog središnjeg kuta (Slika 89b i 89c) te mjerenjem i uspoređivanjem njihovih veličina izvedu zaključak da je obodni kut dvostruko manji od pripadnog središnjeg kuta.



(a) (b) (c)

Slika 89. Obodni i središnji kutovi

Nakon provedbe aktivnosti vođenog istraživanja potrebno je napraviti kratki osvrt te izdvojiti važnije zaključke (F3). Ukoliko se usmjereno vođenje odvija kroz direktnu interakciju nastavnika i sudionika, onda se aktivnosti F2 i F3 zapravo isprepleću i nadopunjuju. Na primjer, prethodne aktivnosti se mogu provesti korištenjem gotovih dinamičkih *učila*, raspravom o promjena koje se događaju tijekom rada na njima te postavljanjem zaključaka koji proizlaze direktno iz uočenog. Ukoliko sudionici rade samostalno kroz programirani materijal, onda je korisno da najprije oni opišu svoje rezultate, a zatim da usmjerenim vođenjem nastavnika izvedu najvažnije rezultate provedenih aktivnosti: novu terminologiju, nove pojmove i njihove definicije, tvrdnje i njihove obrate itd.

Na primjer, kao rezultat prethodnih aktivnosti važno je uvesti pojam *pripadnosti* te zaključiti da se nad jednim kružnim lukom i *pripadnom* tetivom može promatrati beskonačno mnogo *pripadnih* obodnih kutova, ali samo jedan *pripadni* središnji kut. Također, da svakom obodnom i središnjem kutu *pripada* samo jedan kružni luk (tetiva). Nakon tih razmatranja mogu se postaviti tvrdnje:

Tvrdnja 1: Svi obodni kutovi nad istim lukom (tetivom) iste kružnice jednakih su veličina.

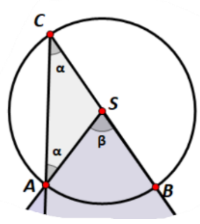
Tvrdnja 2: Svi obodni kutovi nad sukladnim lukovima (sukladnim tetivama) iste kružnice (sukladnih kružnica) jednakih su veličina.

Tvrdnja 3: Središnji kut je dvostruko veći od pripadnog obodnog kuta.

Tvrdnja 4. Svaki obodni kut nad promjerom kružnice je pravi kut.

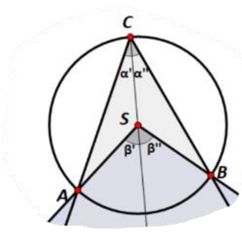
Nakon postavljanja tvrdnji prikladno je povesti raspravu (F1) o istinitosti, razlozima i načinima opravdavanja istinitosti: svaka je tvrdnja istinita ili lažna (lat. *tertium non datur*, nema trećeg), istinitost tvrdnje se može opovrgnuti na temelju jednog kontra primjera koji pokazuje da tvrdnja ne vrijedi, ali se njezina istinitost ne može opravdati na temelju nekoliko primjera koji pokazuju da ona vrijedi, već je potrebno provesti dokaz. Prije procesa dokazivanja korisno je povremeno povesti raspravu o vrstama dokazivanja: direktno te indirektno, kontrapozicijom ili kontradikcijom, ali i o strategijama dokazivanja. Na primjer, opravdavanje istinitost tvrdnje 3 može se izvesti direktno, razmatranjem triju slučajeva (Slika 90).

Slučaj 1:



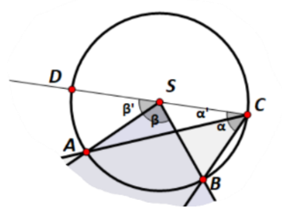
$\beta = 2\alpha$ vanjski kut ΔASC

Slučaj 2:



$\beta = \beta' + \beta'' = 2\alpha' + 2\alpha'' = 2\alpha$

Slučaj 3:



$\beta = (\beta + \beta') - \beta' = 2(\alpha + \alpha') - 2\alpha' = 2\alpha$

Slika 90. Dokazivanje tvrdnje 3 kroz tri slučaja

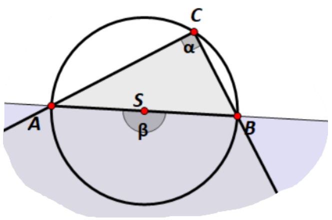
Umjesto da se sudionicima postave gotovi slučajevi bez njihovog promišljanja, korisno bi bilo da sami otkriju put dokazivanja (F2), odnosno potrebu razmatranja triju slučajeva. U tu svrhu korisno ih je uputiti na razmatranje obodnih kutova na Slici 89. te tražiti da opišu njihov odnos sa središtem kružnice *S* (F3). Dalje, mogu razmatrati predstavljaju li ta tri oboda kuta sve moguće obodne kutove pripadnog središnjeg kuta ili postoji još neki slučaj koji nije prikazan (F2 i F3). Zatim, može li se istinitost opravdati na isti način za svaki prikazani obodni kut ili su to ipak tri različita slučaja te je istinitost potrebno opravdati za svaki slučaj posebno (F2 i F3). Također, kroz raspravu (F1) treba ispitati je li svima jasno da je potrebno opravdati istinitost za svaki od tri slučaja (Slika 90), kako bi se izveo zaključak o istinitosti tvrdnje 3 općenito. Konačno, provodi se i dokaz kroz odgovarajuće aktivnosti, kombiniranjem F1 (ponavljanje), F2 (uočavanje) i F3 (zaključivanje).

Na primjer, za slučaj 1, prvo se uoči trokut ΔASC te da su njegove dvije stranice polumjeri pa se zaključi da je trokut jednakokračan te posljedično da su kutovi nasuprot krakova jednaki, veličine α. Zatim se uoči da je kut veličine β vanjski kut promatranog trokuta, a zatim se ponovi odnos vanjskog kuta i unutrašnjih kutova u trokutu te odabere onaj koji je povoljniji. Konačno se, na temelju svega prethodnog, zaključi da je $\beta = 2\alpha$. Preostala dva slučaja su povezana s prvim slučajem, ali kako bi se to uočilo potrebno je istaknuti dodatni element – polupravac CS jer se tek onda može uočiti da se radi o zbroju, odnosno razlici dvaju kutova, na koje se može primijeniti zaključak iz prvog slučaja. I konačno, kako za sva tri slučaja tvrdnja vrijedi, može se zaključiti da je tvrdnja 3 istinita.

Kroz prethodno opisano dan je ujedno i primjer kako se kroz usmjereno opažanje može koristi vizualno-analitička metoda u svrhu otkivanja puta dokazivanja postavljene tvrdnje, ali i sam proces dokazivanja. Zahtjev za dokazom se može ponekad dati i kao zadatak pa kao takav može služiti u svrhu primjene i provjere razumijevanja (F4).

Na primjer, nakon što se ustanovi da istinitost tvrdnje 4 proizlazi neposredno iz istinitosti tvrdnje 3, korisno je razmotriti može li se istinitost tvrdnje 4 opravdati bez korištenja tvrdnje 3 (Slika 91). U tom se slučaju novi sadržaji povezuju u funkcionalnu cjelinu sa prethodno obrađenim sadržajima te se uspostavlja mreža pojmova i njihovih veza (F5) koja osigurava prijelaz na višu razinu geometrijskog mišljenja.

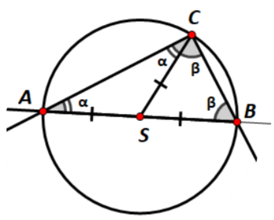
Način 1:



β - središnji kut nad AB
α - pripadni obodni kut

$$\alpha = \frac{\beta}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

Način 2:

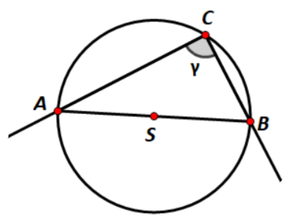


$\alpha+\beta$ - obodni kut nad AB
Zbroj kutova u trokutu ΔABC

$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

Način 3:

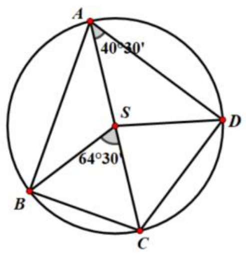
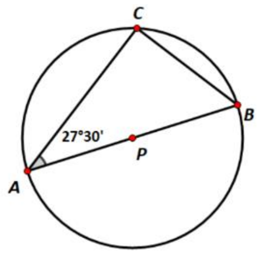
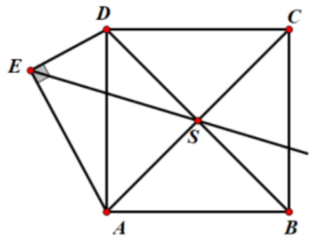


γ - obodni kut nad promjerom $\overline{AB}$
$\Rightarrow$ trokutu ΔABC opisana kružnica i središte S u polovištu stranice trokuta
$\Rightarrow$ trokut ΔABC pravokutan
$\Rightarrow$ $\gamma = 90^\circ$

Slika 91. Dokazivanje tvrdnje 4 na tri načina

Nakon osvrta o provedenim aktivnostima i izvedenim zaključcima te njihovim dokazima važno je osigurati primjere kroz koje se može provjeriti razumijevanje obrađenog (F4). Primjeri bi u pravilu trebali biti kognitivno zahtjevniji od onih koji su se koristili kroz aktivnosti, jer se kroz snalaženje u složenijem kontekstu uočava (ne)razumijevanje. Primjeri ne moraju nužno slijediti nakon svih izvedenih tvrdnji i njihovih dokaza, već naprotiv, korisno je naizmjenično isprepletati aktivnosti istraživanja, otkrivanja i postavljanja tvrdnji (F2) s primjerima primjene i dokazivanjem tvrdnji (F4), uz barem kratki osvrt o provedenom, uvođenjem nove terminologije, novih zaključaka (F3) itd.

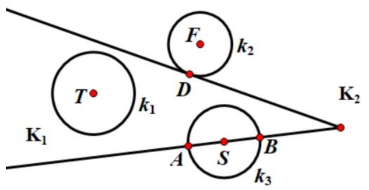
Upravo, kombiniranjem različitih aktivnosti, tj. kroz nelinearno strukturiranje nastavne teme, postiže se izgradnja funkcionalne mreže (F5) različitih geometrijskih pojmova. Primjere je korisno postavljati na različite načine: tekstom, vizualnim prikazom, simboličkim zapisom, odnosno kombinirano, korištenjem sva tri oblika (Slika 92).

<table>
<tr>
<td>Primjer 1:

Dužina $\overline{AC}$ je promjer kružnice.
$|\angle SBA|, |\angle CSD| = ?$</td>
<td>Primjer 2:

Stranica $\overline{AB}$ je promjer kružnice, a točak P polovišta stranice. Odrediti središnje kutove nad stranicama trokuta $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$.</td>
<td>Primjer 3:

Argumentirati zašto je ES simetrala kuta pri vrhu E, kada je *ABCD* kvadrat.</td>
</tr>
</table>

Slika 92. Primjeri za provjeru obrađenih sadržaja

Ponekad je dobro isti zadatak zadati na više različitih načina kako bi sudionici razvijali različite vještine pri rješavanju zadataka te povezivali različite sadržaje i terminologiju. Na primjer, zadatak iz primjera 2 (Slika 92) umjesto kroz vizualni prikaz može se zadati tekstom: *Jedan šiljasti kut pravokutnog trokuta iznosi 27°30'. Odredite veličine kutova pod kojim se katete tog trokuta vide iz polovišta hipotenuze.* Ili, zadatak iz primjera 3 (Slika 92) može se postaviti kao tvrdnja koju treba dokazati: *Nad stranicom* $\overline{AD}$ *kvadrata ABCD, prema vani konstruiran je pravokutni trokut* ΔADE. *Ako je točka S središte dijagonala kvadrata, onda je pravac ES simetrala kuta* $\angle AED$. *Dokazati*. Ponekad sudionici budu iznenađeni koliko isti zadatak može izgledati sasvim drugačije kada se zada u drugom *ruhu*, a raspravom o tome umanjuje se mogućnost njihovih komentara: *Ovu vrstu zadatka nismo nikada radili*.

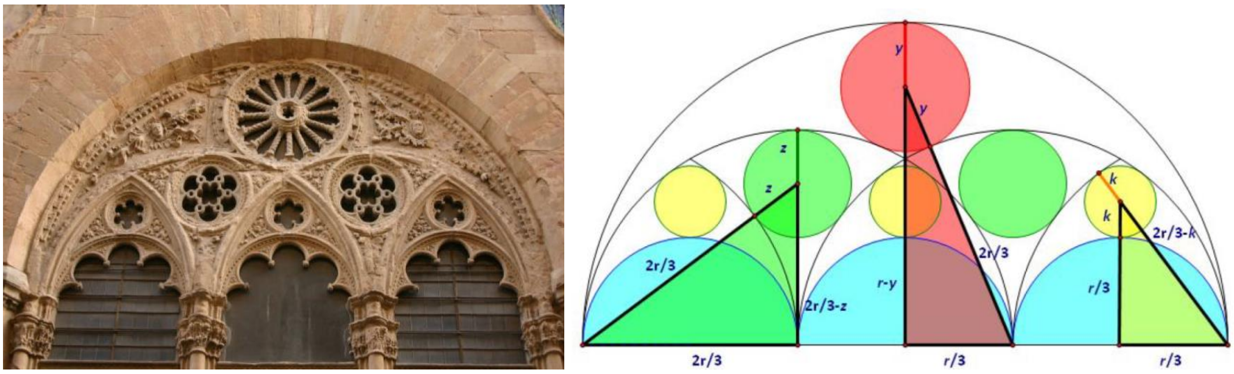
Provjera razumijevanja obrađenih pojmova (F4) te njihovo povezivanje s drugim pojmovima u funkcionalnu mrežu pojmova (F5), najbolje se ostvaruje istodobnom primjenom VOS sustava. Na primjer, na Slici 93. prikazano je kako se unutar istog primjera mogu koristiti sva tri sustava u svrhu provjere razumijevanja koncepta kružnice unutar konteksta kuta te njihovog presjeka.

<table>
<tr>
<td>Odnos kružnice k i kuta K sa slike opisati riječima i zapisati simbolički:
</td>
<td>Nacrtati kružnicu k i kut K u opisanom odnosu, a zatim odnos zapisati simbolički:
(a) Kružnica k dira kut K u jednoj točki kraka tog kuta.
(b) Jedna polukružnica kružnice k pripada kutu K.
(c) Kružnica k (ne)pripada kutu K.</td>
<td>Nacrtati kružnicu k i kut K u odnosu koji je dan zapisom, a zatim odnos opisati riječima:
(a) $k \cap K = \{D\}$
(b) $k \cap K = AB$
(c) $k \cap K = k$ ili $k \cap K = \emptyset$</td>
</tr>
<tr>
<td>Iz V u OS</td>
<td>Iz O u VS</td>
<td>Iz S u VO</td>
</tr>
</table>

Slika 93. Razumijevanje i povezivanje koncepata kroz VOS sustav

Također, korisno je stečena znanja primjenjivati (F4) i na probleme iz realnog konteksta jer njihovim rješavanjem sudionici imaju priliku povezivati različite matematičke sadržaje u funkcionalnu cjelinu (F5), ali istodobno prepoznati i svrhovitost učenja određenih sadržaja.

Na primjer, umjesto da se sudionicima zadaje geometrijska figura koju trebaju konstruirati, može se iskoristiti fotografija npr. dijela pročelja Crkve iz 13. stoljeća u Orsanmichele u Firenci i tražiti da rekonstruiraju nacrt koji su arhitekti trebali imati prije izgradnje (Slika 94). Osim što ljepota pročelja može biti motivirajuća za konstruiranje geometrijske figure pomoću kružnica i kružnih lukova, rješavanje problem zahtijeva povezivanje mnoštva definicija i pravila. Za određivanje radijusa i središta ključnih kružnica potrebno je iskoristiti uvjet dodira dviju kružnica, dijeljenje dužine na jednake dijelove, Pitagorin poučak, kvadriranje razlomaka i binoma, rješavanje jednadžbi, svojstva jednakosti, procese konstruiranja, opisivanje itd. Detaljna obrada primjera sa Slike 94 predstavljena je u radu *Učenje usmjerenim opažanjem* (Jozić, 2012b).



Slika 94. Rekonstrukcija dijela pročelja

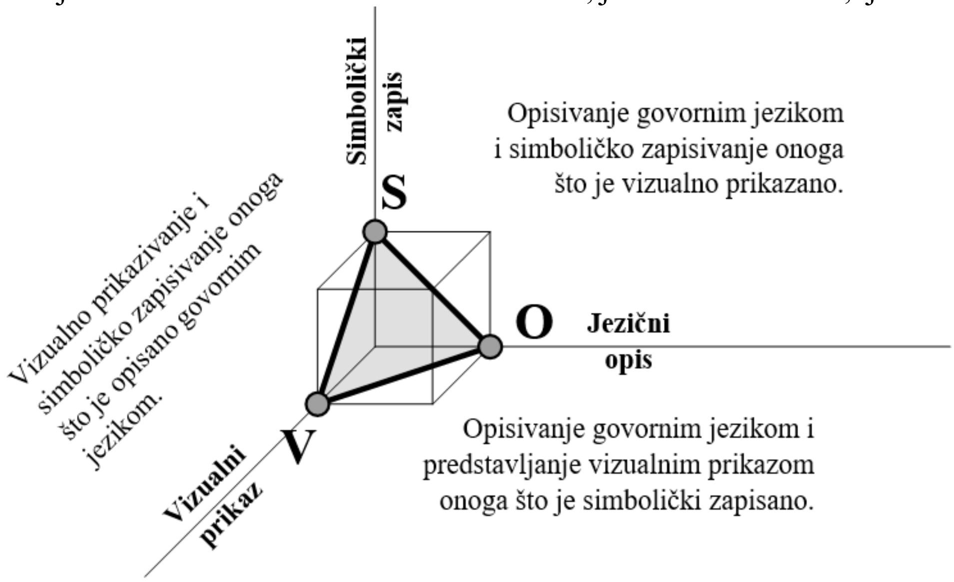
No, problemi iz realnog života mogu služiti i kao podloga za uvodnu raspravu (F1), ali i kao prilika za istraživanje, uočavanje zakonitosti i postavljanje tvrdnje (F2) te kao podloga za raspravu o postignutom (F3). Također, praktični problemi se mogu provlačiti kroz više tematskih cjelina, na različite načine i tako povezivati različiti geometrijski koncepti.

Na primjer, može se postaviti problem savijanja žice zadane duljine. Unutar tematske cjeline trokut, istraživanje može započeti oblikovanjem različitih vrsta trokuta, a zatim određivanjem trokuta najveće površine. Slično istraživanje se može ponoviti u radu s četverokutima itd. te na kraju u cjelini o kružnici i krugu. Konačno se, na temelju svih postavljenih tvrdnji može izvesti zaključak da *od svih likova jednakog opsega najveću površinu zauzima krug*. Detaljan opis i razrada ove vrste istraživanja predstavljeno je u radu *Istraživanjem do minimuma ili maksimuma*, primjenom metode usmjerenog opažanja (Mateljević, Jozić, Svetlik, 2013). Istraživanje se može nastaviti i u geometriji prostora.

Konačno, na kraju svake tematske cjeline korisno je ukratko sistematizirati obrađene pojmove i uvedenu terminologiju, značajnije izvedene zaključke te uspostavljene veze (F5). U ovoj fazi dodatno se može brusiti preciznost izražavanja, iskazivanje formalnih definicija, vršiti razna strukturiranja, opisivati izvedene formule, klasificirati pojmove itd., ovisno o temi koja se obrađuje. Na primjer, kroz vizualne prikaze mogu se obuhvatiti svi pojmovi vezani uz kružnicu i krug, a zatim korištenjem tih prikaza ponoviti njihove definicije i svojstva.

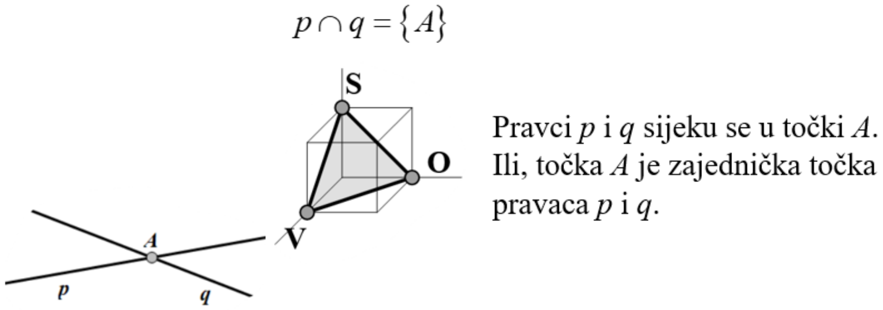
U radu *O učenju i poučavanju geometrije prema van Hieleovoj teoriji* detaljno je predstavljen još jedan primjer strukturiranja nastavne teme kroz pet van Hieleovih faza učenja kako se koristilo tijekom intervencije, a vezano je za klasifikaciju četverokuta (Baranović, 2019a).

(2) Poučavanje geometrije primjenom vizualno-analitičke metode usmjerenog opažanja. Glavno uporište vizualno-analitičke metode usmjerenog opažanja je u VOS sustavu (Slika 95). Ukoliko je polazište vizualni prikaz (V), on se opisuje govornim jezikom (verbalno ili u pisanom obliku) te sažima kroz odgovarajući simbolički zapis. Ukoliko je polazište situacija opisana govornim jezikom (O), ona se predstavlja odgovarajućim vizualnim prikazom te dodatno apstrahira simboličkim zapisom. Ukoliko je polazište simbolički zapis (S), on se interpretira i opisuje govornim jezikom te dodatno pojašnjava vizualnim prikazom. Na taj se način, ista matematička situacija, ideja, koncept itd. prikazuju istodobno kroz sva tri sustava: vizualni, jezični i simbolički, tj. u VOS sustavu.



Slika 95. VOS sustav

Opis korištenja VOS sustava i metode usmjerenog opažanja daje se na primjeru ukrštenih pravaca u ravnini (Slika 96). Cilj je unutar jednog koncepta funkcionalno povezati sva tri sustava izražavanja.



Slika 96. Ukršteni pravci u VOS sustavu

Iz V u OS: Ako se kreće od vizualnog prikaza (V) ukrštenih pravaca, onda prikaz treba znati opisati govornim jezikom (O) i simbolički zapisati (S).

Vizualni prikaz se čita metodom usmjerenog opažanja kroz četiri koraka:

K1 (globalno): Na slici su prikazani pravci i točka.
K2 (lokalno): Na slici su prikazana dva pravca p i q te jedna točka A.
K3 (veza): Točka A pripada i pravcu p i pravcu q.
K4 (poruka): Na slici su prikazani pravci p i q koji se sijeku u točki A, tj. prikazana su dva ukrštena pravca.

Kroz postupni govorni opis dolazi do izražaja što sudionici zaista *vide* kada gledaju vizualni prikaz i kako to interpretiraju te znaju li se kretati od osnovnih elemenata na globalni prikaz i obratno. Nakon što je vizualni prikaz precizno opisan, simbolički prikaz se postavlja na prirodan način, pod uvjetom da se znaju odgovarajući simboli (u ovom slučaju simbol za presjek i skup). U trenutku simboličkog zapisivanja korisno je ponuditi različite zapise kako bi se provjerilo jesu li studenti usvojili pojam presjeka dvaju skupova. Naime, važno je raspraviti u čemu je razlika između simboličkih zapisa $p \cap q = A$ i $p \cap q = \{A\}$ te zašto prvi zapis nije korektan.

Iz O u VS: Ako bi krenuli od pojma ukrštenih pravaca (O): *Za dva pravca jedne ravnine kažemo da su ukrštena (ili da se sijeku) ako imaju samo jednu zajedničku točku,* onda treba znati kako to vizualno prikazati (V) te kako sažeto simbolički zapisati (S).

U ovom slučaju, potrebno je znati da se pravci predstavljaju ravnom crtom (bez istaknutih krajeva) i da se imenuju malim pisanim slovima te da se vizualno prikazuje samo dio pravca. Nadalje, točka se predstavlja malim kružićem i imenuje velikim tiskanim slovima. Nakon određivanja i imenovanja elemenata vizualnog prikaza, uvodi se simbolički zapis, analogno kao u prethodnom slučaju.

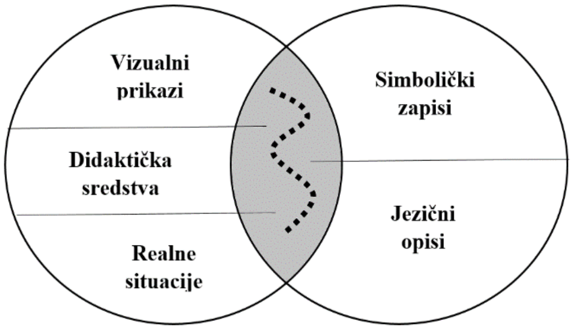
Iz S u OV: Ako bi krenuli od (S) simboličkog zapisa $p \cap q = \{A\}$, onda je važno znati interpretirati sve što je zapisano i glavnu poruku (O), a zatim tu poruku i vizualno predstaviti (V).

U ovom slučaju, treba prepoznati jednakost (=), znak za presjek skupova ($\cap$), vitičaste zagrade za skup ($\{\ \}$), mala pisana slova za pravce (*p* i *q*), veliko tiskano slovo za točku (A). Nadalje, značenje uočenog interpretira se u kontekstu: na lijevoj strani je presjek skupova točaka (presjek pravaca), a na desnoj strani je jednočlan skup koji se sastoji od točke *A*. Kako je među njima znak jednakosti može se zaključiti da skupovi s lijeve strane jednakosti imaju samo jednu zajedničku točku, točku *A*. S obzirom da se simbolički zapisi obično mogu čitati na više načina, korisno je razmotriti različite mogućnosti te istaknuti onu koja je najpovoljnija u danom kontekstu. U ovom slučaju može se reći da je *presjek dvaju pravaca jednočlan skup*, odnosno da se *pravci sijeku u jednoj točki* ili da *pravci p i q imaju zajedničku jednu točku, točku A.* Zatim se može uvesti i pojam *ukrštenih pravaca* za opisani odnos dvaju pravaca u ravnini. Nakon interpretacije simboličkog zapisa, stvara se vizualni prikaz, analogno kao u prethodnom slučaju.

Iako na prvu simbolički zapis presjeka dvaju pravaca nastavniku može izgledati banalno i jasno čitljiv, za one koji ne poznaju sve elemente ili nisu vješti u povezivanju tih elemenata, simbolički zapis neće moći interpretirati niti opisno, niti vizualno. Za njih će to biti samo *hrpa čudnih znakova bez značenja*. Stoga je važno ne zanemariti početničke teškoće u savladavanju bilo kojeg od opisana tri sustava znakova (Van Hiele, 1986).

Upravo primjenom troslojnog načina poučavanja geometrije, sudionici istodobno razvijaju sposobnost vizualizacije, stječu znanja i vještine simboličkog zapisivanja te obogaćuju matematički (geometrijski) vokabular. I ono što je najvažnije, razvijaju vještinu fleksibilnog prijelaza iz jednog sustava u drugi te geometrijske sadržaje uče s većim razumijevanjem (Duval, 2014), što je osnova za razvoj matematičkog mišljenja i zaključivanja (Nakahara, 2007). A jedan od ciljeva matematičkog obrazovanja jest razviti matematičku pismenost te apstraktno mišljenje i zaključivanje učenika i studenata. No, činjenica je da se profesionalni matematičari u svom privatnom radu i stvaranju matematike koriste elementima vizualizacije, ali oni izostaju u službenoj komunikaciji (Dreyfus, 1991; Whiteley, 2005). Drugim riječima, u matematičkom obrazovanju, gotovo kroz cijelu vertikalu, u većoj mjeri zastupljen je samo OS sustav, pri čemu je jezično izražavanje više u pisanom obliku, a manje verbalno.

Upravo zbog takve nastavne prakse, u kojoj je u većoj mjeri zastupljen OS sustav (jezični opis i simbolički zapis), vizualno-analitička metoda se razvijala u svrhu nadopunjavanja OS sustava elementima vizualizacije te radi stvaranja balansa kroz sva tri sustava (Slika 97). Osim toga, kako je više zastupljen pisani oblik izražavanja, a manje usmeni, kad god je bilo moguće korištena je metoda *think aloud* po preporuci Krutetskog (Krutetskii, 1976). Naime, u radu s vanjskim zapisima evociraju se odgovarajuće umne slike te je važno verbalizirati ono što se radi kako bi se umne slike sudionika mogle upoznati/osvijestiti i do neke mjere kontrolirati.



Slika 97. VOS poučavanje

U skladu s opisanim, polazište vizualno-analitičke metode usmjerenog opažanja najčešće su bili vizualni prikazi (didaktička sredstva, realne situacije) na kojima se otkrivala određena matematička poruka: koncept, svojstvo, odnos, ideja itd. I bez obzira je li se vizualni prikaz analizirao i interpretirao ili se stvarao, proces vizualizacije se verbalizirao.

Pri čitanju vizualnog prikaza, vizualno-analitička metoda usmjerenog opažanja koristi se u četiri koraka:

Korak 1 (globalno): Globalno opisati skupove točaka prikazanih na slici.
Korak 2 (lokalno): Precizno opisati sve elemente (jedinice) prikaza.
Korak 3 (veze): Uspostaviti veze među elementima.
Korak 4 (poruka): Prema uočenim vezama odrediti što slika predstavlja u danom kontekstu.

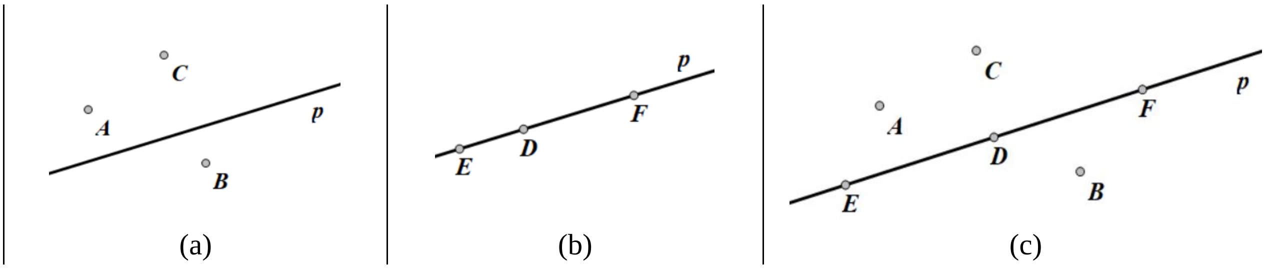
Pri stvaranju vizualnih prikaza radi predstavljanja određene (geometrijske) situacije, strukture ili ideje, vizualno-analitička metoda usmjerenog opažanja koristi se gotovo analogno:

Korak 1 (elementi): Izdvojiti elemente koje treba vizualno prikazati.
Korak 2 (prikaz i imenovanje): Za svaki element (jedinicu) odabrati prikaz i imenovanje.
Korak 3 (veze): Uspostaviti odgovarajuće veze među elementima.
Korak 4 (poruka): Isticanjem svih veza među elementima prikazati poruku u zadanom kontekstu.

Vizualno-analitička metoda usmjerenog opažanja tijekom intervencije prožimala je sve opisane faze učenja (F1 do F5) i sve nastavne aktivnosti: opisivanje osnovnih pojmova i odnosa među njima, definiranje izvedenih pojmova, iskazivanje osnovnih i izvedenih tvrdnji, dokazivanje, rješavanje problema. S obzirom da u ovom radu nije moguće obuhvatiti sve aktivnosti, u nastavku se opisana metoda demonstrira kroz nekoliko primjera.

Nastava geometrije tijekom intervencije započela je uvođenjem osnovnih pojmova (točka, pravac, ravnina, prostor) i opisom odnosa među njima te iskazivanjem pet grupa aksioma euklidske geometrije (aksiomi pripadnosti, poretka, kongruencije, neprekidnosti, paralelnosti). Polazište su (gotovo) uvijek vizualni prikazi, no prije korištenja važno je istaknuti kontekst unutar kojeg se prikaz koristi, u ovom slučaju: opisivanje odnosa i postavljanje aksioma. Pri jezičnom opisu odnosa koristi se bogatstvo jezika i uvode različite terminologije, a odnosi se razmatraju iz različitih perspektiva.

Vizualni prikazi se obično mogu višestruko koristiti, što svakako ovisi o složenosti prikaza, ali i o kontekstu u kojem se koristi te s kojom svrhom se koristi. Tako, na primjer, na samom početku za opis odnosa i uvođenje terminologije mogu se koristiti jednostavniji vizualni prikazi (Slika 98a i 98b), dok se u svrhu ponavljanja ili provjere znanja mogu koristiti složeniji prikazi (Slika 98c).



Slika 98. Opisivanje odnosa između točaka i pravca

Primjenom metode usmjerenog opažanja, vizualni prikaz sa Slike 98c, može se čitati na sljedeći način:

Korak 1 (globalno): Na slici su prikazane točke i pravac.
Korak 2 (lokalno): Na slici je istaknuto šest točaka: *A*, *B*, *C*, *D*, *E* i *F* te pravac *p*.
Korak 3 (veze): Neke točke pripadaju pravcu, neke ne.

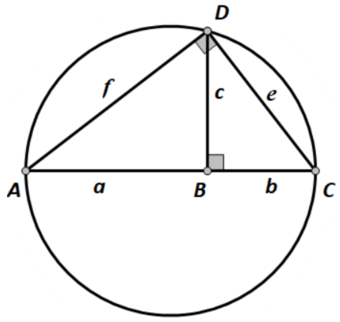
- Točke *E*, *D* i *F* pripadaju (su elementi) pravcu *p*, simbolički $E, D, F \in p$; ili pravac *p* sadrži točke (prolazi točkama) *E*, *D* i *F*.
- Točke *A*, *B* i *C* ne pripadaju (nisu elementi) pravcu *p*, simbolički $A, B, C \notin p$; ili pravac *p* ne sadrži točke (ne prolazi točkama) *A*, *B* i *C*.
- Točke *A* i *C* su sa iste strane pravca *p*, a točke *A* i *B* su sa različitih strana pravca *p*.
- Točke *E* i *F* nalaze se različitih strana točke *D* pravca *p*.
- Točke *E* i *D* nalaze se s iste strane u odnosu na točku *F*.
- Točke *D* i *F* nalaze se s iste strane u odnosu na točku *E*.

Korak 4 (poruke): Ovisno o kontekstu mogu se čitati različite poruke.

- Točke *E*, *D* i *F* su kolinearne točke (uvodi se definicija *kolinearnosti*).
- Točka *D* nalazi se između točaka *E* i *F*, simbolički $E-D-F$ (uvodi se relacija *biti između*).
- Aksiom 1**:** Ako kažemo da je točka *D* između točaka *E* i *F*, te pišemo $E-D-F$, onda su *E*, *D* i *F* tri različite točke jednog pravca.
- Aksiom 2**:** Za svake dvije različite točke *E* i *F* pravca *p*, postoji točka *D* takva da je $E-D-F$.
- Aksiom 3: Od tri različite točke jednog pravca najviše je jedna između preostalih dviju, tj. vrijedi: $E-D-F$ ili $D-F-E$ ili $F-E-D$.
- Aksiom 4: Ako su *A* i *B* s različitih strana pravca *p* te točke *B* i *C* s različitih strana pravca *p*, onda su točke *A* i *C* s iste strane pravca *p*.

Ali isto tako, pri čitanju vizualnog prikaza sa Slike 98c, koraci K3 (opis odnosa) i K4 (predstavljena poruka) mogu se koristiti naizmjenično, što je zapravo prirodnije.

U poglavlju o vizualizaciji (početak na str. 59) opisana je važnost i mogućnost korištenja složenih geometrijskih figura, a najčešće se mogu višestruko koristiti. Odabir konteksta daleko olakšava čitanje prikaza jer usmjerava fokus na traženje odgovarajućih elemenata i njihovih veza, ali kada prikaz služi u svrhu ponavljanja ili otkrivanja svih mogućih poruka, onda je korisno krenuti od globalnih elemenata (ono što se vidi na prvu), pa postupnim otkrivanjem lokalnih elemenata i njihovih veza čitati odgovarajuće poruke koje su tim vizualnim prikazom predstavljene. Tako se, primjenom metode usmjerenog opažanja, čitanje i stvaranje složenih geometrijskih figura može prilično olakšati. Na primjer, vizualni prikaz (geometrijska figura) na Slici 99 može se višestruko koristiti, ovisno o kontekstu u kojem se koristi i s kojom svrhom se koristi: pri izvođenju ili dokazivanju Euklidova poučka, postavljanju ili dokazivanju tvrdnje koja pripada izoperimetrijskom problemu, pri uspostavljanju veze među likovima, bilo konstruktivno, bilo računski, odnos aritmetičke i geometrijske sredine itd. Oznake nisu postavljene uobičajeno kako bi se fokus usmjerio na čitanje odnosa sa slike, a ne na prisjećanje nekih zapamćenih činjenica i pravila.



Slika 99. Čitanje matematičkih poruka sa slike

Korak 1 (globalno): Na slici je prikazana kružnica, trokut i visina trokuta.

Korak 2 (lokalno): Na slici je prikazan pravokutni trokut ΔACD s katetama duljina e i f, visina trokuta $\overline{BD}$ duljine c, dužina $\overline{AC}$ podijeljena na dva dijela duljine $|AB| = a$ i $|BC| = b$ te kružnica koja je opisana trokutu.

Korak 3 (veze):

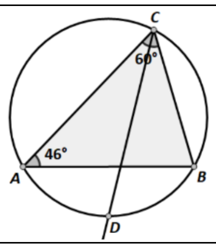
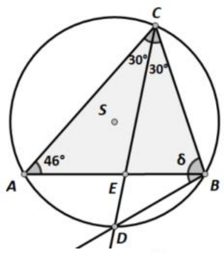
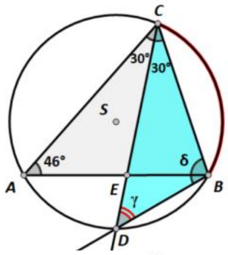
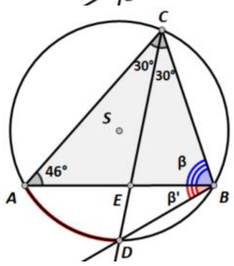
- Nožište B visine $\overline{BD}$ dijeli hipotenuzu $\overline{AC}$ trokuta ΔACD na dva dijela zadanih duljina: $|AB| = a$, $|BC| = b$, pa je hipotenuza polaznog trokuta duljine $a+b$, $|AC| = a+b$.
- Ista visina dijeli trokut ΔACD na dva manja pravokutna trokuta: ΔABD s katetama duljine a i c te hipotenuzom duljine f, ΔBCD s katetama duljine b i c te hipotenuzom duljine e.
- Manji trokuti imaju jedan šiljasti kut zajednički s polaznim trokutom pa sva tri trokuta imaju i drugi šiljasti kut jednake veličine.
- Kružnica je opisana trokutu pa je središte kružnice u polovištu hipotenuze $\overline{AC}$ i radijus kružnice je $r = \frac{|AC|}{2} = \frac{a+b}{2}$.
- Visina $\overline{BD}$ može biti najviše duljine r pa vrijedi: $c \leq r$, pri čemu jednakost vrijedi kada je trokut ΔACD jednakokračan, odnosno kada je $e = f$. Itd.

Korak 4 (poruke u kontekstu): Postavljanje tvrdnje ili dokazivanje, rješavanje problema.

- Sva tri pravokutna trokuta se podudaraju u paru šiljastih kutova pa su oni međusobno slični i njihove stranice su proporcionalne.
- Prema proporcionalnosti stranica izvodi se Euklidov poučak: $c^2 = ab$, $e^2 = bc$ i $f^2 = ac$.
- Ako je dan pravokutnik ploštine $P_{pravokutnika} = ab$, na temelju dane slike može se konstruirati kvadrat jednake ploštine, a njegova stranica će biti duljine $c = \sqrt{ab}$.
- Na temelju dane slike može se konstruirati kvadrat ploštine npr. 21 jer je $c = \sqrt{21} = \sqrt{7 \cdot 3}$.
- Među pravokutnicima jednakih ploština najmanji opseg zauzima kvadrat (jedna tvrdnja izoperimetrijskog problema) jer iz $c \leq r$ slijedi $4c \leq 2a + 2b$.

- Nije moguće konstruirati pravokutni trokut hipotenuze duljine 10cm i visine na hipotenuzu duljine 6 cm jer u tom slučaju nije istina $6 \le \frac{10}{2}$. Itd.

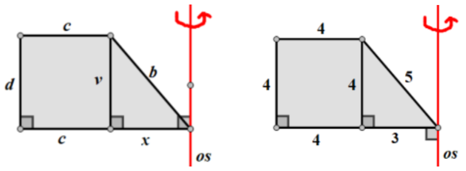
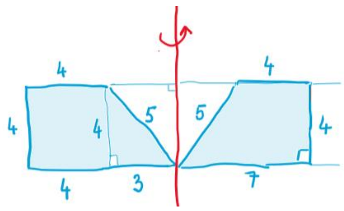
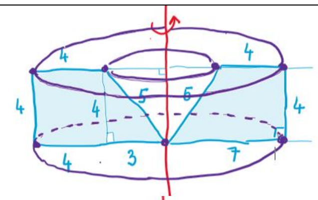
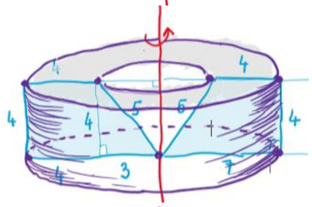
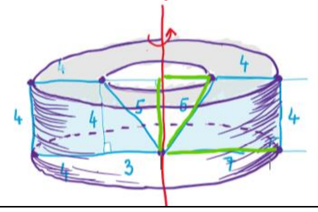
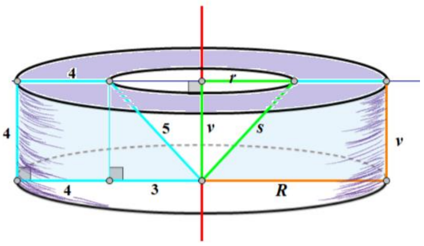
Vješt rad s geometrijskim figurama posebno je važan pri rješavanju geometrijskih problema, u kojima su one obično nužno potrebne, a primjena metode usmjerenog opažanja je pri tome prilično korisna. Na primjer, pri rješavanju problema: *U trokutu ΔABC mjera kuta pri vrhu A je 46°, a mjera kuta pri vrhu C je 60°. Simetrala kuta pri vrhu C siječe kružnicu opisanu trokutu u točki D. Odredite veličinu kuta $\angle CBD$?* potrebno je najprije izgraditi geometrijsku figuru koja objedinjuje sve zadane elemente, a zatim postupnim uočavanjem veza među elementima odrediti onu koja je ključna za određivanje nepoznatog elementa (Slika 100).

Skica	Opis
	K1(elementi): Prije samog crtanja potrebno je izdvojiti elemente te osvijestiti na koji ih način prikazati: trokut je raznostraničan, kružnica prolazi njegovim vrhovima, simetrala dijeli kut na dva jednaka dijela. K2 (prikaz i imenovanje): Pri crtanju zadanih elemenata korisno je odmah istaknuti zadane oznake i veličine, kako je dano u tekstu zadatka.
	K3 (veze, otkrivanje puta do rješenja): - simetrala je podijelila kut pri vrhu *C* na dva jednaka dijela, pa se umjesto veličine 60° može pisati dva puta po 30° - kružnica je opisana pa je njezino središte S u sjecištu simetrala stranica, vjerojatno izvan simetrale kuta - simetrala kuta siječe i stranicu trokuta $\overline{AB}$, točka E - za traženi kut $\angle CBD$ treba dodati krak *BD* te lukom istaknuti koji kut se traži (kut s vrhom *B* te krakovima *BC* i *BD*); $\lvert\angle CBD\rvert = \delta$ - traženi kut se nalazi unutar trokuta ΔBCD pa se veličina δ može odrediti iz zbroja kutova u trokutu, $\delta = 180° - (30° + \gamma)$ - u trokuta ΔBCD treba odrediti i veličinu kuta pri vrhu *D*, $\lvert\angle BDC\rvert = \gamma$, a ona se može odrediti iz jednakosti obodnih kutova $\angle BDC$ i $\angle BAC$ nad istim lukom BC, $\gamma = 46°$ ili - traženi kut δ sastoji se od dva kuta veličine: $\beta = \lvert\angle CBD\rvert$ i $\beta' = \lvert\angle ABD\rvert$ pa se veličina δ može odrediti zbrajanjem tih veličina: $\delta = \beta + \beta'$ - veličina β se može odrediti iz zbroja kutova u trokutu ΔABC, $\beta = 74°$ - veličina β' se može odrediti iz jednakosti obodnih kutova $\angle ACD$ i $\angle ABD$ nad istim lukom AD, $\beta' = 30°$.
Veličina nepoznatog kuta: $\delta = \lvert\angle CBD\rvert$	K4 (poruka, određivanje rješenja): Prvi način: $\delta = 180° - (30° + \gamma) = 180° - (30° + 46°) = 104°$. Drugi način: $\delta = \beta + \beta' = 74° + 30° = 104°$.

Slika 100. Primjena metode usmjerenog opažanja u radu s 2D figurom

Iako su u procesu rješavanja problema važne sve četiri faze: (razumijevanje problema, planiranje, realizacija plana, osvrt; Polya, 1966), na temelju prikazanog (Slika 100) uočava se da proces uspostavljanja veza zapravo dominira pri rješavanju problema, odnosno, faza planiranja i otkrivanja puta do rješenja je ključna pa je tijekom interventnog poučavanja njoj posvećena posebnu pozornost.

Pri obradi geometrije prostora tijekom intervencije, dijelom je pozornost bila usmjerena i na crtanje rotacijskih tijela koja nastaju rotiranjem zadanog lika u ravnini, što se prilično olakšava primjenom metode usmjerenog opažanja pri stvaranju vizualnog prikaza. Na primjer, neka je dan sljedeći zadatak: *Zadan je pravokutni trapez duljina osnovica 7cm i 4cm te duljine kraka koji nije okomit na osnovicu 5cm. Trapez se rotira za 360° oko pravca koji prolazi vrhom šiljastog kuta i okomit je na osnovice. Odrediti oplošje i obujam nastalog tijela*. Njegovo rješenje dano je na Slici 101, primjenom metode usmjerenog opažanja.

Skica	Opis
	K1(elementi): Crtanje započinje skicom trapeza i osi rotacije te analizom elemenata trapeza: Osnovice trapeza: $a = 7\,\text{cm}, c = 4\,\text{cm}$ Visina trapeza: $v = 4\,\text{cm}$ Dijelovi na osnovici: $c = 4\,\text{cm}, x = 3\,\text{cm}$ Krakovi trapeza: $b = 5\,\text{cm}, d = v = 4\,\text{cm}$
	K2 (prikaz i imenovanje): Nakon analize crta se nova skica i zrcaljenje trapeza s obzirom na dani pravac te isticanjem ključnih elemenata na zrcalnoj slici trapeza. Ovisno o etapi poučavanja, na skici se mogu isticati samo zadane veličine, ali svakako je potrebno analizirati situaciju i s općim oznakama elemenata. Ovdje se na slici koriste zadane veličine, a u opisu i opće oznake.
	K3 (veze): Najprije se istaknu ključne točke koje se preslikavaju jedna u drugu tijekom rotacije za 180°, a zatim se crtaju polukružnice u kosoj projekciji: između unutarnjih gornjih točaka, između vanjskih gornjih točaka te između donjih vanjskih točaka. Polukružnica koja se ne vidi iz točke gledanja crta se isprekidano. Zatim se vrši sjenčanje ploha (ne nužno svih) koje nastaju rotacijom dužina: rotacijom duže osnovice nastaje donji krug (donja baza valjka), rotacijom kraće osnovice nastaje kružni vijenac (gornja baza valjka bez baze stošca), rotacijom kraka okomitog na osnovice nastaje vanjska zakrivljena ploha (valjkasta ploha) te rotacijom drugog kraka nastaje unutarnja zakrivljena ploha (stožasta ploha). Isticanjem osnovnih elemenata nastalog tijela (polumjeri, visine, izvodnice) olakšava se čitanje njihovih veličina sa slike u svrhu određivanja oplošja i volumena.
 $O_{tijela} = P_{valjka} + P_{stošca} + 2B_{valjka} - B_{stošca}$ $V_{tijela} = V_{valjka} - V_{stošca}$	K4 (poruka): Opisanom rotacijom nastalo je trodimenzionalno tijelo: valjak s unutarnjim otvorom u obliku stošca. - visina valjka i stošca: $v = d = 4\,\text{cm}$ - polumjer valjka: $R = a = 7\,\text{cm}$ - polumjer stošca: $r = x = 3\,\text{cm}$ - izvodnica stošca: $s = b = 5\,\text{cm}$. **Oplošje** nastalog tijela je veličina površine koja omeđuje nastalo tijelo; određuje se zbrajanjem ploština svih ploha koje ga omeđuju. **Volumen** nastalog tijela je veličina prostora koje to tijelo zauzima; određuje se oduzimanjem volumena stošca od volumena valjka.

Slika 101. Primjena metode usmjerenog opažanja u 3D

Uspostavljanje odnosa između objekta različitih dimenzija prilično je složena aktivnost koja zahtijeva posebnu pozornost u nastavi geometrije. To posebno do izražaja dolazi pri oblikovanju geometrijskih tijela (3D) iz zadane mreže tijela (2D) i obratno, otkrivanje mreže tijela (2D) na temelju zadanog geometrijskog tijela (3D). Koraci čitanja ili stvaranja vizualnog prikaza u pravilu nisu linearni (od K1 do K4) već se stalno isprepliću, posebno u interakciji sa sudionicima.

U nastavku se detaljnije opisuju nastavne aktivnosti, koje su korištene u poučavanju geometrije tijekom intervencije, a kroz njih se dodatno objašnjava korištena strategija strukturiranja i vizualno-analitička metoda usmjerenog opažanja.

5.5.4.3. Nastavne aktivnosti tijekom intervencije

Kako je opisano u dijelu o učenju i poučavanju geometrije, nastava geometrije bavi se pojmovima, njihovim svojstvima i međusobnim vezama. Geometrijski pojmovi se predstavljaju vizualno (različite vrste vizualnih prikaza i modela; oblici različitih dimenzija), njihova mjerljiva svojstva opisuju se veličinama (duljine, opsezi, ploštine, volumeni), a veze među oblicima i njihovim svojstvima opisuju se aksiomima i teoremima, pri čemu se istinitost teorema utvrđuje dokazom. Ukratko, nastava geometrije bavi se oblicima, njihovim veličinama i međusobnim odnosima.

Oblike (različitih dimenzija) koji predstavljaju odgovarajuće geometrijske koncepte treba znati predstaviti vizualnim prikazom ili modelom (realnim, artefaktom), ali i kroz dane oblike treba znati prepoznati predstavljeni geometrijski koncept. Za opisane aktivnosti potrebne su sposobnosti vizualizacije, a posebno vizualno-prostorne sposobnosti u radu s 3D oblicima.

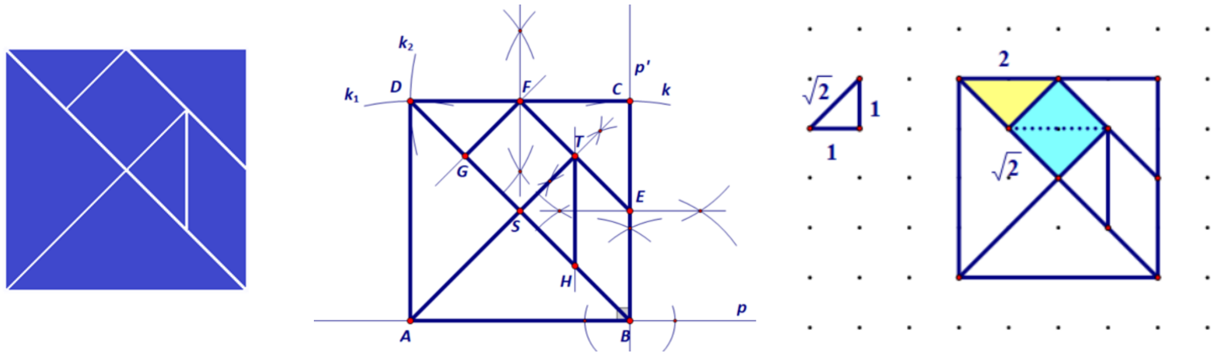
Mjerljiva svojstva određuju se različitim mjernim instrumentima, a izmjerene veličine iskazuju brojčanom vrijednošću i mjernom jedinicom. Mjerna jedinica može biti standardna (npr. metar za duljinu), ali i proizvoljno odabrana (npr. pravokutnici umjesto jediničnih kvadrata za ploštinu). Ukoliko su osnovne veličine nekih oblika zadane, njihova ostala mjerljiva svojstva mogu se određivati izračunavanjem prema općim pravilima (npr. umjesto prebrojavanjem jediničnih kvadrata, ploština pravokutnika se izračunava množenjem duljina njegovih stranica). Za opisane aktivnosti potrebno je savladati vještine mjerenja strukturiranjem, ali i korištenjem odgovarajućih formula, gdje opet do izražaja dolaze vizualno-prostorne vještine, ali i različite razine geometrijskog mišljenja.

Za uspostavljanje odnosa među oblicima potrebno je dobro poznavanje njihovih svojstava, kako bitnih karakteristika tako i odgovarajućih veličina, te vješto uspoređivanje prema sličnostima i razlikama. Različiti odnosi zahtijevaju različita znanja i vještine. Tako za identificiranje sukladnih i sličnih oblika korisno je poznavanje teorema o sličnosti i sukladnosti, ali i vješto misaono transformiranje (translacija, rotacija, zrcaljenje) jer su oblici najčešće u različitim položajima. Za uspostavljanje inkluzivnih odnosa potrebno je poznavanje značenja podskupa i nad-skupa te postavljanja logičkih odnosa. Kroz sve opisane aktivnosti do izražaja dolaze različite vrste vizualno-prostornih sposobnosti te odgovarajuće razine geometrijskog mišljenja.

Nastavne aktivnosti birane su tako da kroz njih sudionici mogu razvijati sposobnosti vizualizacije, procese mišljenja, a geometrijske koncepte i ideje učiti s razumijevanjem. Aktivnosti nisu bile izolirane već su se međusobno isprepletale i nadograđivale kroz različite teme.

Tangram aktivnosti. Aktivnosti s didaktičkim sredstvom tangram provodile su se od prvog nastavnog sata i provlačile kroz većinu tema geometrije ravnine. One su uključivale slaganje figure prema danoj slici ili popločavanje figure zadane konturom, crtanje figure u kvadratnoj točkastoj mreži, opisivanje načina slaganja i načina crtanja, konstruiranje figure i opisivanje konstrukcije po koracima, prebrojavanje različitih podfigura unutar dane figure, mjerenje opsega i površine figure i podfigura korištenjem mreže, prepoznavanje sukladnih i sličnih podfigura, bojanje figure na zadani način, argumentiranje uočenog itd.

Tangram aktivnosti provodile su se tako da razvijaju i perceptivni i matematički način obrade figure (str. 80). Na primjer: Od tanova se mogu slagati kvadrati različitih veličina i na različite načine, a tangram kvadrat nastaje od svih sedam dijelova (Slika 102a). Kada se oblikuje tangram kvadrat, on se može konstruirati, a konstrukcija po koracima opisati jezično i simbolički (Slika 102b). Također, tangram kvadrat se može nacrtati proporcionalno u kvadratnoj mreži tako da vrhovi svih tanova budu u točkama mreže (Slika 102c). Zatim se, unutar mreže, mogu zadavati različite mjere (numerički i algebarski) te na temelju njih izvoditi zaključci o karakteristikama podfigura (sukladni i slični likovi). Itd.



(a) (b) (c)

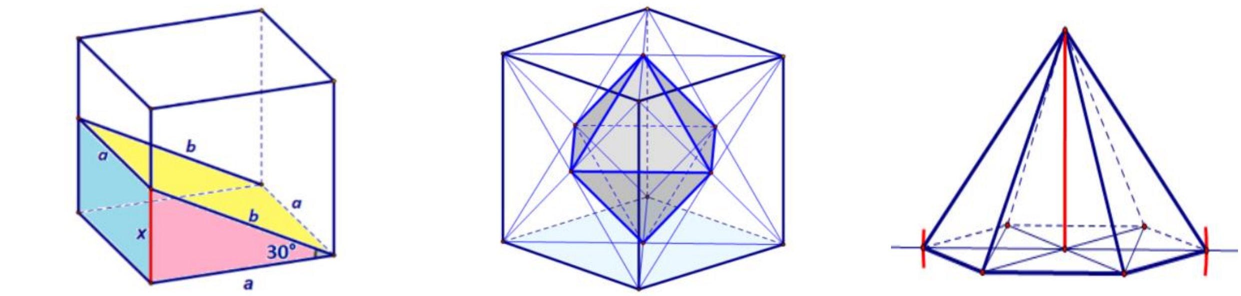
Slika 102. Tangram aktivnosti

Detaljan prikaz različitih vrsta tangram aktivnosti koje se mogu provoditi u nastavi matematike s različitim uzrastima, a koje su razvijene tijekom intervencije i nadograđene kroz narednih nekoliko godina, predstavljen je u četiri rada. Strukturirani način korištenja tangram aktivnosti, od neformalnog slaganja do otkrivanja i dokazivanja različitih geometrijskih koncepata predstavljeno je u radovima: *Tangram u nastavi matematike 1. dio i 2. dio* (Kavajin i Baranović, 2019a, 2019b). U radu *Razvoj geometrijskog mišljenja kroz tangram aktivnosti* (Baranović, 2017) predstavljen je način otkrivanja svih 13 konveksnih tangram likova primjenom vizualno-analitičke metode usmjerenog opažanja. U radu *Matematika u tangramu, tangram u matematici* (Baranović i Lehman, 2020) dana je rekonstrukcija i detaljna razrada starog problema o konveksnim tangram likovima, koji je bio osnova za primjenu metode usmjerenog opažanja pri otkrivanju konveksnih tangram likova.

Tangram aktivnosti pokazale su se posebno korisne za učenje s više jasnoće i razumijevanja odgovarajućih geometrijskih koncepata: trokuti i četverokuti, sukladnost i sličnost, opsezi i površine, strukturiranje prije izvođenja formula itd., a posebno su se bile učinkovite u razvoju geometrijskog vokabulara tijekom opisivanja provedenih aktivnosti. Rad s fizičkim modelom tangram slagalice osigurao je okruženje u kojem su sudionici bili glavi akteri aktivnosti što ih je motiviralo na dodatni angažman, a povezivanje s odgovarajućim geometrijskim konceptima osiguralo im je smislenost onoga što uče. No, tangram nije univerzalno sredstvo, već jedno od mnogo drugih koji su dostupni.

Crtanje. Kroz većinu aktivnosti posebna pozornost bila je usmjerena na poučavanje vizualnog prikazivanja geometrijskih objekata i složenih figura, vodeći pri tome računa da se ne koriste samo prototipni vizualni prikazi, standardni položaji te uobičajene oznake. Crtanje se provodilo sa i bez geometrijskog pribora, na papiru bez pomoćnih crta te unutar različitih vrsta mreža, ovisno o odabranoj temi.

Na primjer, u radu s 3D objektima: crtanje trostrane prizme unutar kocke (Slika 103a); crtanje dviju piramida unutar kocke (Slika 103b); crtanje pravile šesterostrane piramide (Slika 103c). Pri crtanju se vodilo računa o vidljivosti bridova iz perspektive gledanja: pune crte su bridovi koji se vide, tanke crte su pomoćne crte, isprekidane crte su bridovi koji se ne vide.



(1) crtanje kocke
(2) crtanje bridova pod kutom od 30°
(3) sjenčanje ploha
(4) isticanje veličina bridova
(a)

(1) crtanje kocke,
(2) crtanje sjecišta plošnih dijagonala
(3) crtanje baze piramida
(4) crtanje pobočnih bridova
(b)

(1) crtanje pravilnog šesterokuta baze u projekciji
(2) visina iz sjecišta dijagonala
(3) crtanje pobočnih bridova
(c)

Slika 103. Crtanje 3D objekata

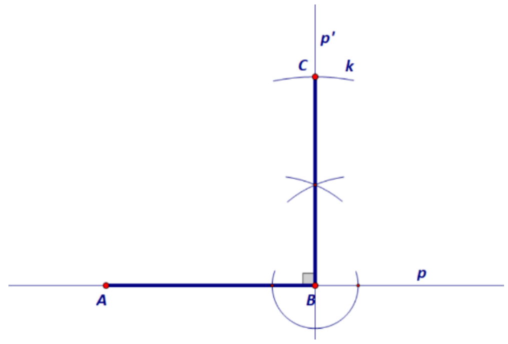
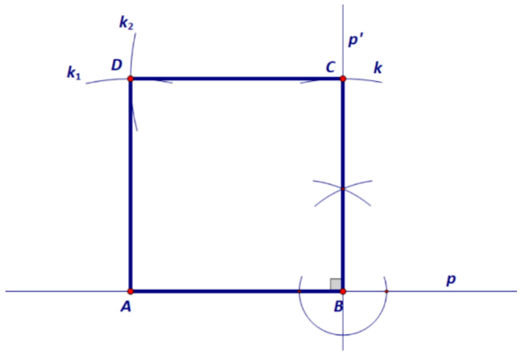
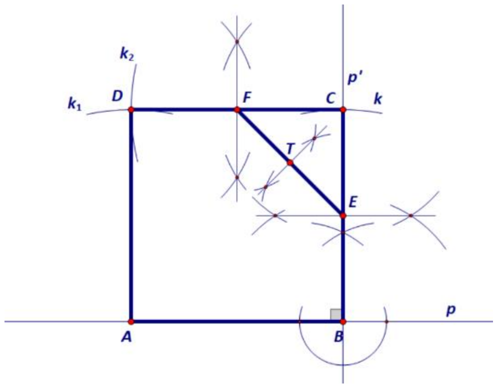
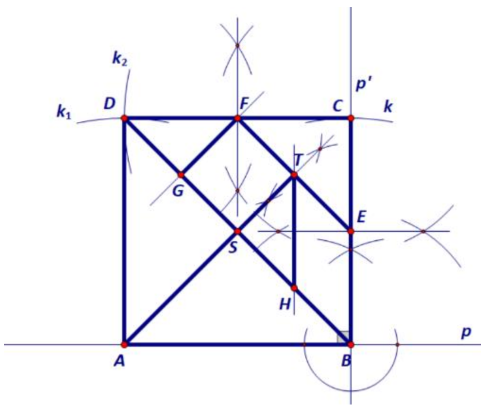
Aktivnosti crtanja koje su bile stalne tijekom intervencije, omogućilo je sudionicima stvaranje kvalitetnih vizualnih prikaza, što se posebno pokazalo korisnim pri rješavanju problemskih zadataka za čije rješavanje je vizualni prikaz bio nužno potreban. Bolje vještine crtanja rezultirale su većim samopouzdanjem sudionika te u konačnici i većom uspješnošću pri samostalnom rješavanju postavljenih zadaća.

Konstruiranje. Kroz sve teme geometrije ravnine koristile su se aktivnosti konstruiranja geometrijskih figura ravnalom i šestarom te opisivanje konstruiranih figura po koracima, jezično i simbolički. Na početku je trebalo savladati osnovne konstrukcije, a zatim i složene konstrukcije u različitim situacijama: od samog stvaranja i opisivanja složene konstrukcije do konstrukcije koja je sastavni dio rješavanja problem.

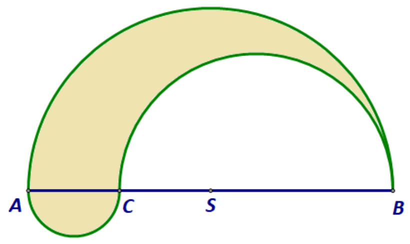
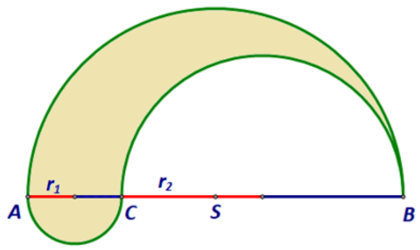
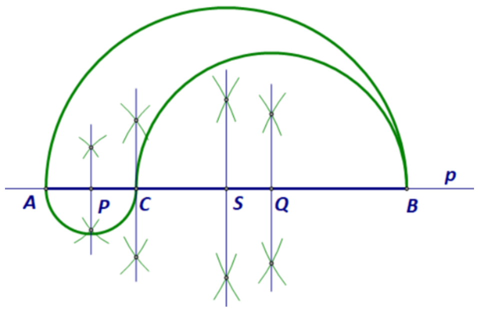
Na primjer, kroz tangram aktivnosti se može tražiti da se neka tangram figura nakon slaganja i konstruira (Slika 102). Pri tome je važno raditi usporedno sa sudionicima te svaki korak opisati jezično i simbolički (Slika 104). Također je važno napomenuti da se pri opisivanju složenih konstrukcija, osnovne konstrukcije ne opisuju. U ovom slučaju, ne opisuje se način prenošenja dužine, konstrukcija simetrale dužine, okomice i paralele. Izvođenjem složenih konstrukcija geometrijskim priborom (ravnalom i šestarom) i njezinim opisivanjem po ključnim koracima tijekom intervencije doprinijelo je razvoju sekvencijalnog i diskurzivnog razumijevanja geometrijskih figura, ali i obogaćivanju geometrijskog vokabulara i matematičke preciznosti izražavanja sudionika.

Također, konstrukcija može biti sastavni dio nekog problemskog zadatka. Na primjer, na Slici 105 dan je primjer u kojem se, umjesto običnog numeričkog izračunavanja opsega i ploštine osjenčanog lika, najprije treba izvesti konstrukciju lika sa slike, a zatim odrediti njegov opseg i ploštinu. U radu s ovim vrstama zadataka, korisno je raditi s konkretnim veličinama, ali i s općim oznakama. S obzirom da su i u zadacima konstruiranja sudionici skloni izračunavanju duljina pojedinih dužina umjesto da ih odrede konstruiranjem, korisno je da veličine objekata ne budu uvijek cijeli brojevi (npr. dužina duljine $7.3cm$ umjesto $8cm$). Upravo u tim situacijama, kada je potrebno podijeliti dužinu na jednake dijelove ili u zadanom omjeru, vrijednost konstrukcije dolazi do izražaja.

Također, vrijednost konstrukcije vidljiva je i pri korištenju *učila* pripremljenih u programu dinamičke geometrije *Sketchpad*, jer se nakon crtanja i konstruiranja iste figure, običnim povlačenjem figure može uočiti razlika između crteža i konstrukcije.

Koraci konstrukcije	Opis koraka
	1) Na pravcu *p* se istakne (ili prenese) dužina $\overline{AB}$.
	2) Kroz točku *B* se konstruira okomica *p*' na pravac *p*, $p' \perp p$, ili se pri vrhu *B* konstruira pravi kut. 3) Od točke *B* na pravac *p*' prenese se dužina $\overline{AB}$, $k\left(B, r=\lvert AB\rvert\right)$. Druga krajnja točka dužine na pravcu *p*' je točka C, tj. $k \cap p' = \{C\}$. Nacrtamo dužinu $\overline{BC}$. Vrijedi: $\lvert BC\rvert = \lvert AB\rvert$.
	4) Iz točaka *A* i *C* opišu se kružnice k_1 i k_2 radijusa $r = \lvert AB\rvert$, tako da se njihovim presjekom dobije četvrti vrh *D*, $k_1 \cap k_2 = \{D\}$. Ili, točka *D* se može konstruirati analogno kao i točka *C*. 5) Istaknu se dužine $\overline{AD}$ i $\overline{CD}$. Četverokut *ABCD* je kvadrat.
	6) Simetralama dužina $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$ konstruiraju se polovišta *E* i *F* redom, $s_1 \cap \overline{BC} = \{E\}$, $s_2 \cap \overline{CD} = \{F\}$. Istakne se dužina $\overline{EF}$. 7) Simetralom dužine $\overline{EF}$ konstruira se polovište *T*, $s_3 \cap \overline{EF} = \{T\}$. Napomena: pri konstrukciji polovišta nije potrebno crtati simetralu već samo mali dio koji siječe dužinu.
	8) Istaknu se dužine $\overline{AT}$ i $\overline{BD}$ te točka *S* kao presjek tih dužina, $\overline{AT} \cap \overline{BD} = \{S\}$. 9) Točka *G* se konstruira kao polovište dužine $\overline{DS}$ ili kao presjek pravca kroz točku *F* paralelnog s pravcem *AT*. Istakne se dužina $\overline{GF}$. 10) Točka *H* se konstruira kao polovište dužine $\overline{SB}$ ili kao presjek pravca kroz točku *T* paralelnog s pravcem *BC*. Istakne se dužina $\overline{TH}$. Time je završena konstrukcija tangram kvadrata *ABCD*.

Slika 104. Konstrukcija tangram kvadrata po koracima

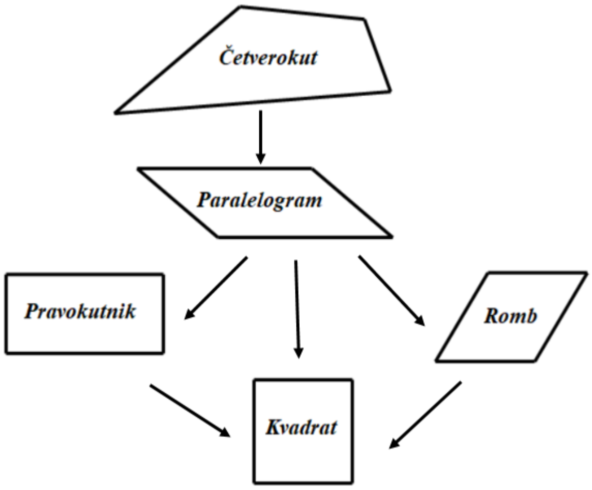
Prikaz	Opis
	Zadatak: *Točka S polovište je dužine* $\overline{AB}$, *a točka C polovište dužine* $\overline{AS}$, *pri čemu je* $\lvert AB\rvert = 8\,\text{cm}$. *Nad dobivenim dijelovima konstruirane su polukružnice kao na slici. Konstruirajte danu sliku, opišite proces konstruiranja, izvedite izraz za određivanje opsega i ploštine osjenčanog lika i na kraju odredite vrijednost za opseg i ploštinu.*
	Analiza slike: Neka je $\lvert AB\rvert = a = 8\,\text{cm}$. Radijus kružnice nad $\overline{AB}$ je: $R = \frac{\lvert AB\rvert}{2} = \frac{a}{2} = 4\,\text{cm}$ Radijus kružnice nad $\overline{AC}$ je: $r_1 = \frac{\lvert AC\rvert}{2} = \frac{\lvert AB\rvert}{8} = \frac{a}{8} = 1\,\text{cm}$. Radijus kružnice nad $\overline{CB}$ je: $r_2 = \frac{\lvert BC\rvert}{2} = \frac{3}{8}\lvert AB\rvert = \frac{3}{8}a = 3\,\text{cm}$.
	Opis konstrukcije: 1) Na proizvoljni pravac *p* prenese se dužina $\overline{AB}$; 2) Simetralom dužine $\overline{AB}$ odredi se polovište *S*, te se nacrta polukružnica $\overset{\frown}{BA}$, sa središtem *S* radijusa R; 3) Simetralom dužine $\overline{AS}$ odredi se polovište *C*; 4) Simetralom dužine $\overline{AC}$ odredi se polovište *P*, te se nacrta polukružnica $\overset{\frown}{AC}$, sa središtem *P* radijusa r_1; 5) Simetralom dužine $\overline{CB}$ odredi se polovište *Q* te se nacrta polukružnica $\overset{\frown}{BC}$, sa središtem *Q* radijusa r_2; 6) Sjenčanjem se dobiva lik sa slike.
$O_{lika} = \frac{1}{2}O_{r_1} + \frac{1}{2}O_{r_2} + \frac{1}{2}O_R = a\pi = 8\pi\,\text{cm}$ $P_{lika} = \frac{1}{2}P_R - \frac{1}{2}P_{r_2} + \frac{1}{2}P_{r_1} = \frac{1}{16}a^2\pi = 4\pi\,\text{cm}^2$	Osjenčani lik omeđen je polukružnicom radijusa *R*, polukružnicom radijusa r_1 te polukružnicom radijusa r_2. Opseg osjenčanog lika dobiva se zbrajanjem duljina tih polukružnica. Osjenčana površina sastoji se od površine velikog i malog polukruga, a unutar velikog polukruga nedostaje površina srednjeg polukruga. Ploština lika se dobiva zbrajanjem ploština velikog i malog polukruga te oduzimanjem ploštine srednjeg polukruga.

Slika 105. Konstrukcija kao sastavni dio rješavanja problema

Iz predstavljenih primjera vidljivo je da konstrukcije imaju veliki potencijal u nastavi geometrije te bi bilo korisno koristiti ih od primarnog obrazovanja nadalje, a to znači i u procesu obrazovanja budućih učitelja razredne i predmetne nastave.

Definiranje. Iako je pretpostavka da mnoge definicije pojmova, koji su obuhvaćeni programom kolegija, sudionici već znaju iz prethodnog obrazovnog razdoblja (barem na razini prepoznavanja), kroz različite vrste aktivnosti tijekom intervencije sudionicima je ipak omogućeno da sudjeluju u procesu izvođenja formalnih definicija pojmova, u skladu s VOS sustavom. Polazište su bile definicije pojmova koje su sudionici poznavali, odnosno njihove do tada izgrađene konceptualne slike pojmova, koje su se zatim *brusile* i nadopunjavale različitim primjerima i kontra-primjerima u slučaju nepotpunosti ili pogrešnih shvaćanja. Različite definicije istog pojma bile su polazište za raspravu o korektnosti definicija, različitim vrstama definicija i njihovoj primjenjivosti. Poseban naglasak bio je na postavljanju formalnih definicija korištenjem glavnog rodnog pojma i specifičnih razlika te što se događa s opisom kada je rodni pojam bliži ili dalji.

Na primjer, korištenjem Slike 106, postavljene su sljedeće četiri definicije kvadrata: (1) *Kvadrat je četverokut kojemu su sve stranice jednakih duljina i svi unutarnji kutovi pravi.* (2) *Kvadrat je paralelogram kojemu su susjedne stranice jednakih duljina, a jedan unutarnji kut pravi.* (3) *Kvadrat je romb, kojemu je jedan unutarnji kut pravi.* (4) *Kvadrat je pravokutnik kojemu su susjedne stranice jednakih duljina.*



Slika 106. Definiranje pojma kvadrat

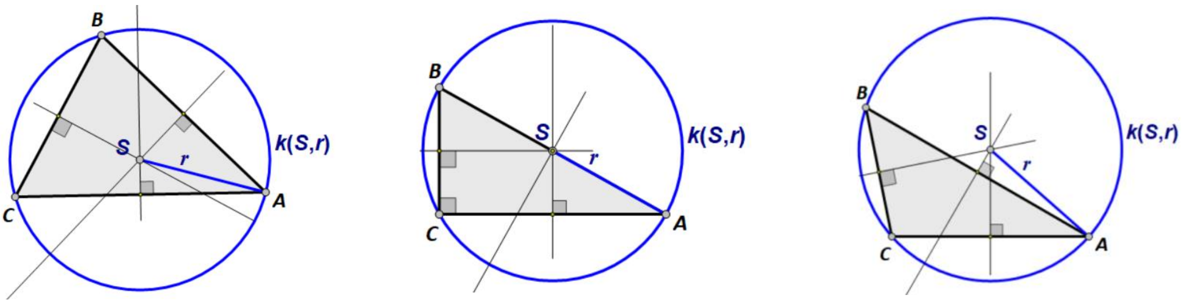
Sve četiri definicije su korektne, ali u posljednje dvije je korišteno manje bitnih karakteristika od ostalih dviju definicija jer su *pravokutnik* i *romb* bliži rodni pojmovi za kvadrat od pojma *paralelogram* i *četverokut*. Ipak, zadnja definicija je prihvatljivija od predzadnje jer je *pravokutnik* prirodniji pojam za uvođenje pojma *kvadrat* od pojma *romb*. No, kada se radi s najmanjim uzrastom učenika, prirodno je koristiti prvu definiciju.

Uvođenjem pojmova na ovaj način i mogućnost sudjelovanja sudionika u izgradnji formalnih definicija imalo je višestruku korist. Prije svega, aktivnim sudjelovanjem i raspravom o različitim mogućnostima definiranja istog pojma, sudionici su razbili predrasudu da je definicija pojma nešto unaprijed zadano te je oni samo trebaju uspješno zapamtiti napamet i u potrebnom trenutku reproducirati. Također, sudjelovanjem u procesu definiranja i izvođenju formalne definicije, sudionici su postupno gradili svoju konceptualnu sliku pojma te je povezivali s formalnom definicijom, što je dovelo do razumijevanja opisanog, a time i lakšeg pamćenja definicije. Posebno iznenađenje bila je mogućnost slobodnog opisa pojma ukoliko vode računa o navođenju glavnog rodnog pojma i bitnih karakteristika. U takvom su se okruženju sudionici više fokusirali na sam pojam koji opisuju i njegove karakteristike, a manje na definiciju koju su pokušavali zapamtiti napamet. Korištenjem različitih definicija istog pojma, kako je opisano prema Slici 106, sudionici su imali mogućnost uspostavljanja inkluzivnih veza među pojmovima, što je omogućilo kvalitetnije savladavanje treće razine geometrijskog mišljenja.

Nadalje, uočavanjem različitih karakteristika pojmova te izdvajanjem samo onih koji su nužni i dovoljni za definiranje pojma, omogućilo je postavljanje tvrdnji o razmatranim pojmovima (što se opisuje u nastavku) te pripremu za savladavanje četvrte razine geometrijskog mišljenja. Cjelokupan proces definiranja pojmova koji je korišten tijekom intervencije predstavljen je u radu *Formuliranje matematičkih definicija i iskaza teorema u svrhu kritičkog promišljanja i zaključivanja* (Jozić, 2014).

Postavljanje tvrdnji. Tijekom intervencije posebna pozornost bila je posvećena radu s tvrdnjama: postavljanje tvrdnji kroz istraživanje, ispitivanje njihove istinitost te argumentiranje uočenog, postavljanje obrata, kontrapozicije i negacije polazne tvrdnje te ispitivanje istinitosti tako postavljenih tvrdnji. Pri istraživanju i uočavanju pravilnosti te formuliranju iskaza, posebno su učinkovite *učilice* pripremljene u programu dinamičke geometrije. Sve te aktivnosti su osnova za uvođenje formalnog dokaza.

Na primjer, pri konstruiranju trokutu opisane kružnice, može se postaviti nekoliko tvrdnji: *Simetrale svih stranica trokuta sijeku se u jednoj točka*; *Sjecište simetrala je središte trokutu opisane kružnice*; *Središte opisane kružnice mijenja položaj u odnosu na trokut: unutar je šiljastokutnog trokuta, u polovištu hipotenuze je pravokutnog trokuta i izvan je tupokutnog trokuta.* Do posljednje tvrdnje se jednostavno dolazi interaktivnim povlačenjem jednog vrha trokuta unutar *učilice* (Slika 107).



Središte opisane kružnice šiljastokutnog trokuta je unutar trokuta.

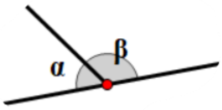
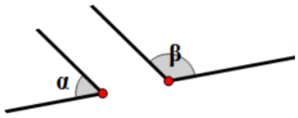
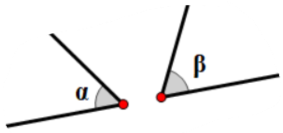
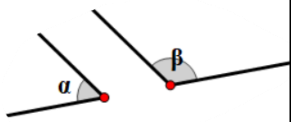
Središte opisane kružnice pravokutnog trokuta je polovište hipotenuze.

Središte opisane kružnice tupokutnog trokuta je izvan trokuta.

Slika 107. Kružnica opisana trokutu

S obzirom da se tvrdnje obično iskazuju u duhu jezika (Slika 107), tijekom intervencije dodatno se radilo na postavljanju tvrdnji u obliku „*Ako*…, *onda*…” ($P \Rightarrow Q$, P pretpostavka, Q zaključak) jer je iz tog oblika jednostavnije postavljanje obrata ($Q \Rightarrow P$), kontrapozicije ($\neg Q \Rightarrow \neg P$) i obrata kontrapozicije ($\neg P \Rightarrow \neg Q$), kao i negacije polazne tvrdnje ($P \wedge \neg Q$). Tako se tvrdnja *Središte opisane kružnice pravokutnog trokuta je u polovištu hipotenuze* može iskazati u drugom obliku: *Ako je trokut pravokutan, onda je središte opisane kružnice u polovištu hipotenuze,* a zatim njezin obrat: *Ako je središte kružnice opisane trokutu u polovištu njegove najdulje stranice, onda je trokut pravokutan, a ta stranica je hipotenuza trokuta*, kao i negacija: *Postoji pravokutni trokut kojemu središte opisane kružnice nije u središtu hipotenuze*.

Rad s tvrdnjama posebno se pokazao korisnim u stvaranju i razumijevanju iskaza u obliku ekvivalencije te ekvivalentnosti tvrdnje i kontrapozicije. Također, sudionici su kroz takav rad iskustveno učili da istinitost obrata tvrdnje ne ovisi o istinitosti polazne tvrdnje te stvarali osjećaj za potrebu ispitivanja istinitosti, a posljedično i potrebu dokazivanja. Na primjer, u primjeru o kružnici opisanoj pravokutnom trokutu može se postaviti ekvivalencija jer su tvrdnja i obrat istinit: *Središte kružnice opisane trokutu je u polovištu njegove najdulje stranice akko je trokut pravokutan,* ali u slučaju veze susjednih i suplementarnih kutova to nije moguće jer obrat tvrdnje nije istinit (Slika 108). Rad s obratima koji nisu istiniti imaju posebnu važnost zbog pronalaženja prikladnog kontra primjera.

Susjedni kutovi 	Suplementarni kutovi 	Kutovi koji nisu suplementarni 	Kutovi koji nisu susjedni 
$P \Rightarrow Q$ *Ako su kutovi susjedni, onda su i suplementarni.* Istina	$Q \Rightarrow P$ *Ako su kutovi suplementarni, onda su i susjedni.* Nije istina	$\neg Q \Rightarrow \neg P$ *Ako kutovi nisu suplementarni, onda nisu ni susjedni.* Istina	$\neg P \Rightarrow \neg Q$ *Ako kutovi nisu susjedni, onda nisu ni suplementarni.* Nije istina

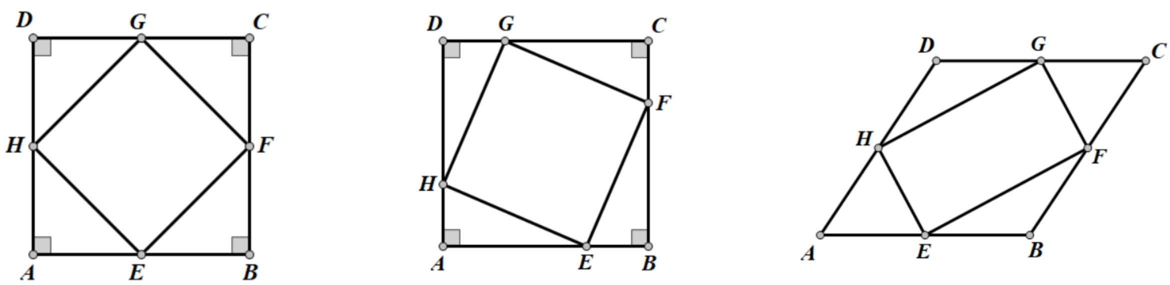
Slika 108. Tvrdnje o susjednim i suplementarnim kutovima

Aktivnosti vezane uz postavljanje tvrdnji nužan su preduvjet za izgradnju i razumijevanje aksiomatskog sustava te savladavanje četvrte razine geometrijskog mišljenja. Detaljniji prikaz rada s tvrdnjama predstavljen je u radu *Formuliranje matematičkih definicija i iskaza teorema u svrhu kritičkog promišljanja i zaključivanja* (Jozić, 2014), a neke teškoće sudionika u radu s tvrdnjama tijekom intervencije predstavljene su u radu *Kako premostiti razliku između onoga što studenti prve godine znaju i onoga što mi mislimo da bi trebali znati* (Baranović i sur., 2020).

Dokazivanje. S obzirom na uočeni problem da sudionici koji upisuju Učiteljski studij dolaze sa slabim znanjima i vještinama dokazivanja, tijekom intervencije, formalni dokaz se uvodio postupno i kroz različite oblike: od neformalnog obrazlaganja uočenih pravilnosti koje su iskazane tvrdnjama, kroz argumentirano opravdavanje i simboličko zapisivanje uočenog do proučavanja formalnih oblika dokazivanja. Većina tvrdnji dokazivala se direktnim dokazima jer je za indirektno dokazivanje potrebno savladati četvrtu razinu geometrijskog mišljenja, odnosno razumjeti način i važnost aksiomatskog strukturiranja. Ali, i indirektan dokaz se uključivao povremeno.

U svrhu povezivanja različitih geometrijskih sadržaja, kad god je bilo moguće, tvrdnje su dokazivane na više različitih načina (Slika 91), a ponekad je iskaz tvrdnje variran u svrhu otkrivanja i postavljanja novih tvrdnji, a time i novih načina dokazivanja.

Na primjer, neka je zadana sljedeća tvrdnja: *Neka je ABCD kvadrat, a točke E, F, G i H polovišta njegovih stranica redom. Dokazati da je četverokut EFGH kvadrat* (Slika 109a). Iskaz tvrdnje se može varirati tako da se varira omjer u kojem točke *E, F, G* i *H* dijele stranice kvadrata (Slika 109b), ali može se varirati i polazni četverokut tako da se umjesto kvadrata, za *ABCD* uzme pravokutnik, paralelogram, romb (Slika 109c) itd., a može se varirati i omjer (položaj vrhova) i vrsta polaznog četverokuta. U svakom slučaju, dobiva se nova tvrdnja koja se posebno dokazuje.



(a) (b) (c)

Slika 109. Variranje iskaza tvrdnje

U procesu dokazivanja, prvo bi trebalo osvijestiti što je pretpostavka (P), što zaključak (Q) te što treba dokazati da bi se dokazao zaključak Q. U danom primjeru, polazi se od kvadrata *ABCD* (P) i treba dokazati da je četverokut *EFGH* kvadrat (Q), a to znači da treba utvrditi da su sve četiri stranice jednakih duljina i svi kutovi pravi. Nakon variranja četverokuta, polazi se od romba *ABCD* (P), koji ima razna svojstva i treba dokazati da je četverokut *EFGH* pravokutnik (Q), odnosno treba utvrditi da su nasuprotne stranice jednakih duljina, a susjedne okomite.

Nakon variranja nije uvijek moguće koristiti jednak način dokazivanja. Na primjer, polazna tvrdnja se može dokazati korištenjem Pitagorina poučka (za duljine stranica) i svojstva jednakokračnih pravokutnih trokuta (za veličine kutova) ili korištenjem sukladnosti trokuta pri vrhovima polaznog kvadrata (za duljine stranica i veličine kutova), ali i svojstvo srednjice trokuta koji nastaju povlačenjem dijagonale kvadrata (za duljine stranica i okomitost). U drugom slučaju (Slika 109b), svojstvo srednjice trokuta se ne može koristiti, a najprikladnije je korištenje sukladnosti trokuta. U trećem slučaju (Slika 109c), Pitagorin poučak se ne može koristiti, a najprikladnije je korištenje svojstva srednjice trokuta.

Polazna tvrdnja se može varirati i na način da se ne kaže koje je vrste četverokut *EFGH*. U tom slučaju, prvo treba istražiti kojoj vrsti pripada, postaviti tvrdnju i onda je dokazati, što je složeniji proces i zahtijeva više vještine u radu s tvrdnjama i dokazima.

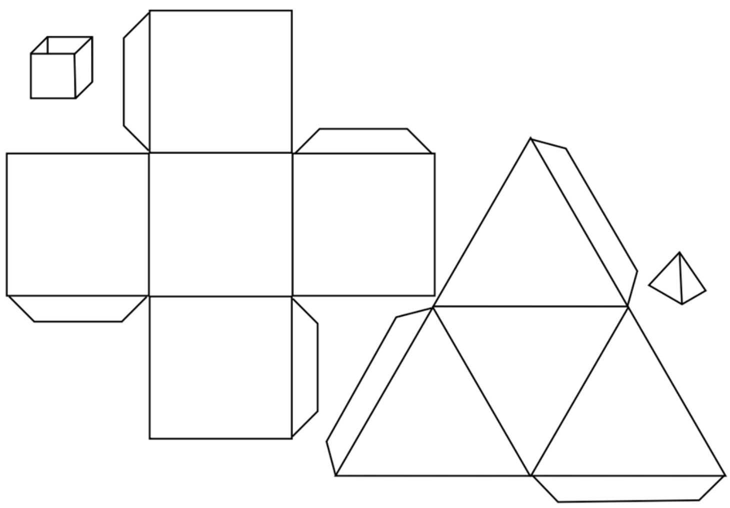
Rješavanje problema. Iako je rješavanje zadataka najčešća aktivnost, posebno kroz školsku nastavu matematike, nastavno iskustvo pokazuje da se u nastavi koriste međusobno vrlo slični zadaci kroz koje se razvijaju najčešće samo proceduralna znanja i vještine računanja te primjena formula. Stoga su za rad tijekom intervencije birani različiti konceptualni zadaci s višim kognitivnim zahtjevima i koji su postavljani na različite načine: tekstom, vizualnim prikazom, modelom ili kombinirano, vodeći računa da među njima ima onih koji se mogu riješiti na više različitih načina, ali i onih koji imaju više rješenja. Kad je bilo moguće, birani su i zadaci iz realnog konteksta, poput problema popločavanja, smještanja, pakiranja, omatanja itd.

S obzirom da je kroz prethodnih nekoliko cjelina obuhvaćeno dijelom i rješavanje problema, ovdje se daje još jedan primjer iz geometrije prostora (Slika 110), koji su sudionici trebali riješiti samostalno za domaću zadaću.

Sliku isprintajte, izrežite i zalijepite u otvorenu kocku i piramidu.

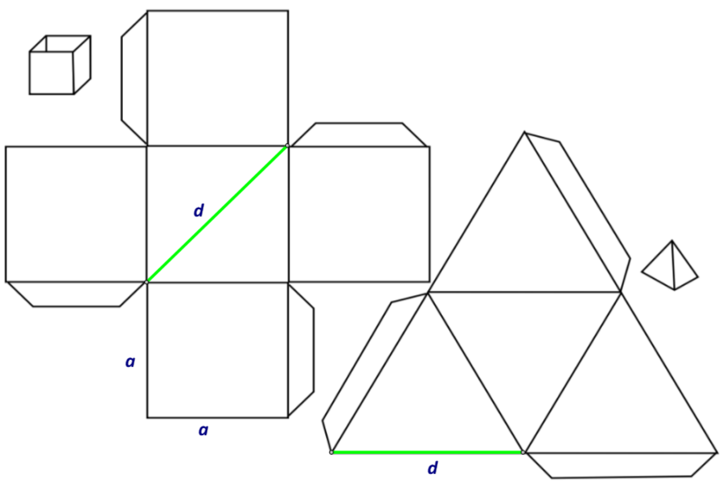
(a) Koju vrstu piramide ste dobili?
(b) Može li se dobivena piramida smjestiti u kocku? Objasnite svoje rješenje.
(c) Ako je odgovor pod (b) da, rješenje vizualno prikažite te odredite koliki dio kocke piramida zauzima?

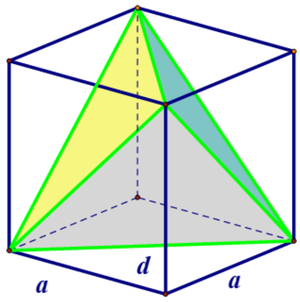
Slika je na raspolaganju u pdf formatu.



Slika 110. Problem smještanja piramide u kocku

Iako je samo troje sudionika iz eksperimentalne grupe uspjelo samostalno riješiti sve dijelove problema (Slika 111), zadatak se pokazao vrlo intrigantnim i korisnim za raspravu na satu.





Tetraedar se može smjestiti u kocku i pri tome zauzima trećinu kocke.

Slika 111. Rješenje problema smještanja

Dio problemskih zadataka korištenih tijekom intervencije, posebno način obrade i primjene u nastavi, predstavljen je u nekoliko radova: *Učenje usmjerenim opažanjem* (Jozić, 2012a), *Fotografija kao inovativno nastavno sredstvo* (Jozić, 2012b). *Istraživanjem do minimuma ili maksimuma* (Mateljević, Jozić i Svetlik 2012), *Učenje temeljeno na čitanju s razumijevanjem* (2014), *Potencijal jednog zadatka izveden na temelju Talesovog teorema o proporcionalnim dužinama* (Jozić, 2015b), *Kako premostiti razliku između onoga što studenti prve godine znaju i onoga što mi mislimo da bi trebali znati* (Baranović, Baras i Kožul Blaževski, 2020).

O teškoćama u procesu rješavanja problema i faktorima koji utječu na (ne)uspješnost rješavanja problema provedeno je posebno istraživanje sa zadatkom predstavljenim na Slici 100, Rezultati istraživanja predstavljeni su u dva rada: *Different Perspectives On Success In Solving Stand-alone Problems by 14 to 15-year-old Students* (Baranović i Antunović-Piton, 2021) te *Factors Affecting Success in Solving a Stand-Alone Geometrical Problem by Students aged 14 to 15* (Antunović-Piton i Baranović, 2021).

Prema vrstama opisanih nastavnih aktivnosti, načinom strukturiranja tema i načinom poučavanja vidljivo je na koji način se tijekom intervencije u nastavi geometrije poticalo sudionike u razvoju vizualno-prostornih sposobnosti, akumuliranju i izgradnji matematičkog (posebno geometrijskog) vokabulara, definicija, tvrdnji, iskustva dokazivanja te razvoju geometrijskog mišljenja.

Ukratko, sudionici su poučavani tako da im se omogući aktivno sudjelovanje u raspravi, stvaranju i čitanju vizualnih prikaza, argumentiranju uočenog, zaključivanju, tvrđenju, dokazivanju itd. U takvom okruženju sadržaji se ne uče napamet, zapamćivanjem činjenica bez razumijevanja, već se znanje kumulativno izgrađuje kroz iskustvo.

U kratkom osvrtu na učenje geometrije tijekom intervencije jedna sudionica eksperimentalnog poučavanja istaknula je srž poučavanja geometrije:

> *[…] na fakultetu sam naučila sama 'stvarat' složenije formule na temelju poznavanja samo osnovnih. Taj pristup inzistira razmišljanje i učenje s razumijevanjem […] Posebno mi se svidjelo što se sve predočavalo vizualno, što se koristila mreža […] Priznajem, dok smo radili tangram, nije mi bilo jasno zašto toliko vremena provodimo za rješavanje takoreći istog zadatka. No, međutim, sav ostatak rada do kraja kolegija bazirao se na tom tangramu, pregrštu pravokutnih, jednakokračnih trokuta, koji su posvuda. […] Što se bližio kraj kolegija sve manje vremena mi je trebalo za rješavanje zadataka jer je sve bilo logično i moglo se iščitati unutar samog zadatka.*

6. Rezultati i rasprava

S obzirom da su se podaci o sudionicima istraživanja prikupljali kroz tri testa različitog oblika i namjene, u ovom radu vrši se mješovita obrada podataka te se analiza rezultata i rasprava vrši kroz različite aspekte.

Na samom početku, analiza rezultata početnog testiranja i rasprava vrši se odvojeno za svaki provedeni test u svrhu stjecanja uvida u karakteristike sudionika prije početka učenja geometrije: (1) analizom rezultata VH testa otkriva se doseg razina geometrijskog mišljenja sudionika; (2) analizom rezultata GEO testa stječe se uvid u geometrijsko predznanje, sklonosti i vještine korištenja vizualizacije te (3) analizom SPAC testa stječe se uvid u razvijenost vizualno-prostornih sposobnosti u trodimenzionalnom okruženju. Nadalje, unutar svakog testa, analiza rezultata i rasprava ne razmatra se za sve sudionike zajedno, već usporedno po grupama kako bi se u skladu s uočenim karakteristikama prilagodilo poučavanje geometrije tijekom intervenciji u eksperimentalnoj grupi, ali i vidjelo postoji li neka razlika među grupama prije učenja geometrije. Postojanje statističke značajnosti razlike među grupama ispituje se t-testom, a s obzirom da se koriste tri različita testa, Spearmanovim testom korelacije ispituje se i postojanje korelacija među njima. Također, primjenom Chronbahovog alfa koeficijenta ispituje se pouzdanost korištenih testova.

Nakon toga, analiza rezultata završnog testiranja i rasprava vrši se po svim testovima u svrhu stjecanja uvida u eventualne promjene nakon 15 tjedana poučavanja geometrije, po grupama i među grupama: (1) analizom rezultata VH testa stječe se uvid u eventualni napredak geometrijskog mišljenja sudionika; (2) analizom rezultata GEO testa stječe se uvid u eventualno bolje razumijevanje i primjenu geometrijskih koncepata te veće sklonosti i vještine korištenja vizualizacije te (3) analizom SPAC testa stječe se uvid u mogući napredak vizualno-prostornih sposobnosti sudionika u trodimenzionalnom geometrijskom okruženju. Utvrđivanje statističke značajnosti razlika unutar svake grupe i među grupama vrši se t-testom, a dodatna objašnjenja rezultata potkrepljuju se kvalitativnim uvidom u radove sudionika. Posebno, vrši se usporedna analiza po razinama kod VH testa, t-testom po svakom zadatku na GEO testu uzajamno s kvalitativnom analizom te grafički prikaz distribucija i usporedna analiza napretka kod SPAC testa. Nacrt obrade podataka dan je shematskim prikazom (Slika 112).

Rezultati i rasprava

Početno testiranje u E i K 1VH, 1GEO, 1SPAC	Završno testiranje u E i K 2VH, 2GEO, 2SPAC
1. Karakteristike sudionika Obrada: deskriptivna statistika uzajamno s kvalitativnom analizom radova, usporedno po grupama 2. Značajnost razlike među grupama Obrada: t-test 3. Korelacija među testovima Obrada: Spearmanov koeficijent korelacije 4. Pouzdanost testova Obrada: Chronbachov alfa koeficijent	1. Značajnost razlike unutar svake grupe Obrada: t-test 2. Usporedba postignuća na VH testu Obrada: usporedna analiza raspodjele po razinama na VH testu; 3. Usporedba postignuća na GEO testu Obrada: t-test za svaki zadatak, uzajamno s kvalitativnom analizom radova 4. Usporedba postignuća na SPAC testu Obrada: grafički prikaz distribucije po razredima 5. Značajnost razlike među grupama Obrada: t-test, usporedna analiza napretka na SPAC testu

Slika 112. Nacrt obrade podataka

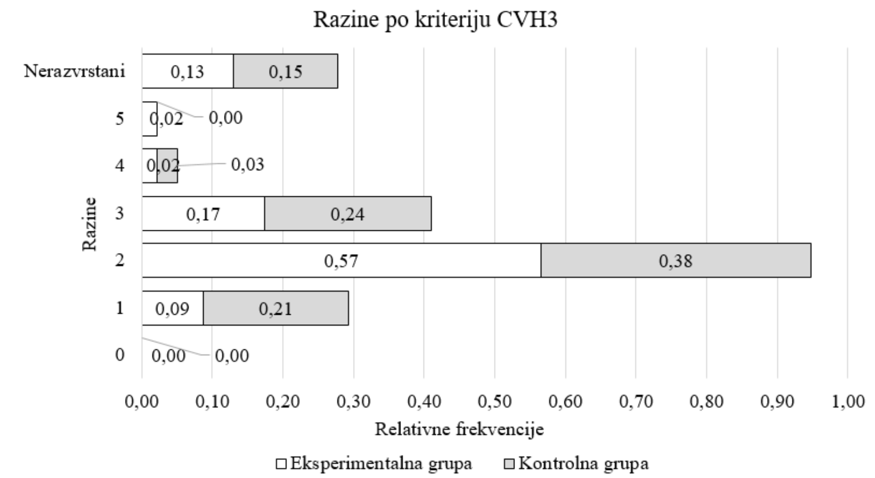
6.1.Karakteristike sudionika na početku prema VH testu

Prema van Hieleu, poučavanje geometrije nužno je potrebno prilagoditi razinama geometrijskog mišljenja sudionika, jer u protivnom napredak može izostati (Van Hiele, 1986). Stoga je prije početka učenja geometrije proveden VH test sa svim sudionicima kako bi se ispitale njihove razine geometrijskog mišljenja koje su ostvarili kroz matematičko obrazovanje prije tercijarne razine te se u skladu s tim tijekom intervencije poučavanje prilagodilo njihovim razinama.

Prikaz i analiza rezultata dobivenih VH testom vrši se prema oba opisana kriterija (blaži i stroži), koja se primjenjuju na oba VH modela (klasični i modificirani). U skladu s tim, podaci o ostvarenim razinama prikazuju se grafički prema četiri kriterija: CVH3 – klasični VH model po blažem kriteriju, CVH4 – klasični VH model po strožem kriteriju, MVH3 – modificirani VH model po blažem kriteriju i MVH4 – modificirani VH model po strožem kriteriju. Usporednom analizom po različitim kriterijima otkrivaju se dodatne karakteristike geometrijskog mišljenja sudionika. Osim toga, na svakom grafičkom prikazu, usporedno se prikazuju relativne frekvencije ostvarenih razina sudionika po grupama (E – eksperimentalna grupa; K – kontrolna grupa) kako bi se dodatno ispitalo jesu li njihove razine mišljenja ujednačene prije početka nastave ili već na početku postoji neka (značajnija) razlika među njima.

Na grafičkom prikazu u obliku histograma, vertikalna os sadrži informaciju o ostvarenim razinama, a horizontalna os prikazuje udio (postotak zapisan u decimalnom obliku s dvije decimale) sudionika na svakoj od istaknutih razina. Osim oznaka za razine od 1 do 5, na vertikalnoj osi nalazi se i oznaka 0 za one koji nisu ostvarili niti jednu razinu te oznaka 'nerazvrstani' za one koji su ostvarili barem jednu razinu, ali nisu ispunili kriterij uzastopnosti pa se ne mogu svrstati po razinama. Ovom analizom ukupno je obuhvaćeno 80 sudionika (46 eksperimentalne i 34 kontrolne grupe) jer prvi VH test nije pisalo 6 od 52 (11.54%) sudionika eksperimentalne grupe te 4 od 38 (10.53%) sudionika kontrolne grupe.

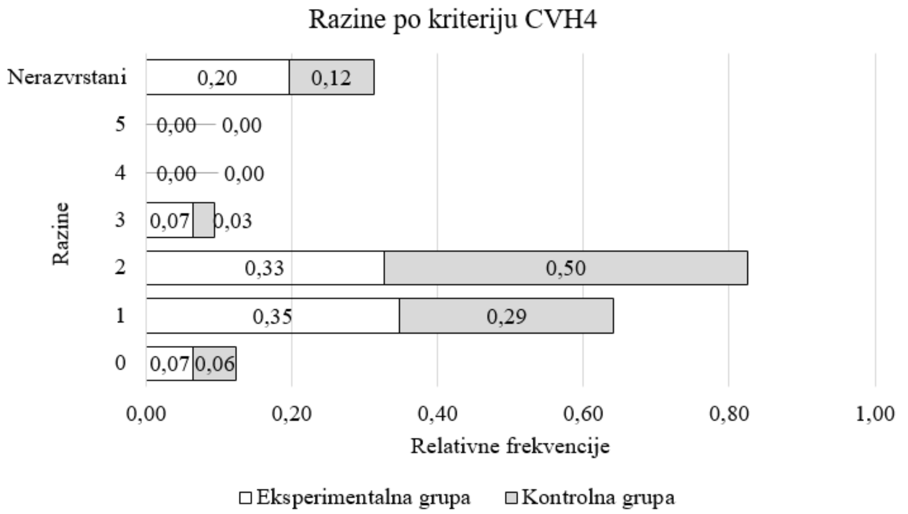
Kroz usporedni grafički prikaz (Slika 113) distribucija relativnih frekvencija prema blažem kriteriju, (točno odgovoreno 3 od 5 pitanja po razinama) za klasični van Hieleov model razvoja mišljenja (CVH3 kriterij) dobiva se grublja snimka stanja o razinama geometrijskog mišljenja sudionika u obje grupe. Prema podacima prikazanima na ovom grafu (Slika 113) vidljivo je da se više od 50% sudionika nalazi na prve dvije razine: 11 sudionika na prvoj (4 u E; 7 u K) i 39 sudionika na drugoj razini (26 u E; 13 u K), odnosno 50 od 80 sudionika (62.5%) koji su pisali 1VH test. Na trećoj (srednjoj) razini nalazi se tek petina sudionika (8 u E; 8 u K), a napredne razine ostvarila su samo 3 sudionika (po 1 na četvrtoj razini i 1 u E na petoj razini; 3.75%). Nerazvrstanih je 11 (6 u E; 5 u K), odnosno 13.75% od onih koji su pisali 1VH test.



Slika 113. Distribucija po kriteriju CVH3

Prema ovoj prvoj snimci stanja, može se reći da više od polovice sudionika nije ostvarilo niti treću razinu geometrijskog mišljenja, a što je neophodno za nastavak učenja geometrije na tercijarnoj razini.

Kada se na klasični van Hieleov model razvoja mišljenja (C model) primijeni malo stroži kriterij (točno odgovoreno 4 od 5 pitanja po razinama), distribucija relativnih frekvencija se prilično mijenja (Slika 114). Naime, po strožem kriteriju na nekim razinama sudionici ne ostvaruju odgovarajuće bodove što može rezultirati različitim ishodima. Prvo, ako otpadne zadnja razina u nizu, sudionik prelazi u grupu niže razine (na primjer s 3. na 2. razinu). Drugo, moguće je da se anuliraju praznine pa sudionik iz grupe nerazvrstanih prelazi u grupu neke razine (na primjer ako otpadne 4. razina u ostvarenju 1 + 2 + 0 + 8, sudionik prelazi u grupu 2. razine). Treće, ako otpadne neka razina prije zadnje ostvarene u nizu, narušava se kriterij uzastopnosti pa sudionik prelazi u grupu nerazvrstanih. U svakom slučaju, isključuju se razine koje nisu dovoljno stabilne pa slika o sudionicima postaje jasnija, odnosno realnija.

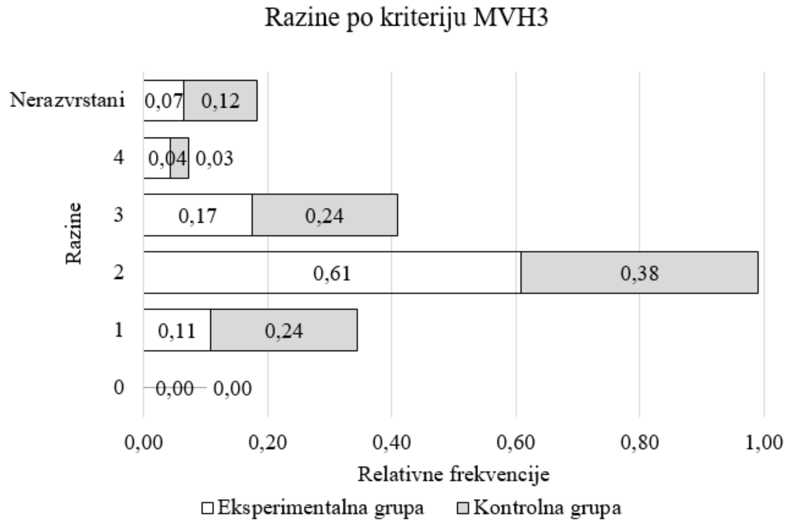


Slika 114. Distribucija po kriteriju CVH4

Kroz usporedni grafički prikaz (Slika 114) distribucija relativnih frekvencija prema strožem kriteriju za klasični van Hieleov model razvoja mišljenja (CVH4 kriterij) uočava da su karakteristike sudionika u obje grupe zapravo prilično slabije u odnosu na blaži kriterij. Sada je vidljivo da nitko od sudionika realno ne pripada naprednim razinama, da se povećao broj nerazvrstanih (s 11 na 13 sudionika, 9 u E; 4 u K; ukupno 16.25%), ali i onih koji nisu u potpunosti savladali niti jednu razinu (5 sudionika, 3 u E; 2 u K; ukupno 6.25%). Također, može se uočiti da je veliki broj onih koji su bili na 3. razini zapravo vrlo nestabilni jer ih je sada samo četvero (3 u E; 1 u K; ukupno 5%), dok je preko 70% sudionika (59 od 80) realno na 1. razini (26 sudionika, 16 u E; 10 u K; ukupno 32.5%) i 2. razini (33 sudionika, 15 u E; 17 u K; ukupno 41.25%). Prema ovim podacima prilično je jasno da sudionici nisu spremni za nastavak učenja geometrije na sveučilišnoj razini.

S obzirom da je vrlo mali broj sudionika ostvario naprednu razinu, skupina se može sagledavati i prema modificiranom van Hieleovu modelu (M model), uz blaži i stroži kriterij (Usiskin, 1982., str. 25). Ukoliko se koristi M model, moguće su različite vrste promjena zbog uklanjanja 5. razine: nerazvrstani prelaze na odgovarajuću razinu ili su i dalje među nerazvrstanima, a oni koji su na 5. razini prelaze u grupu 4. razine.

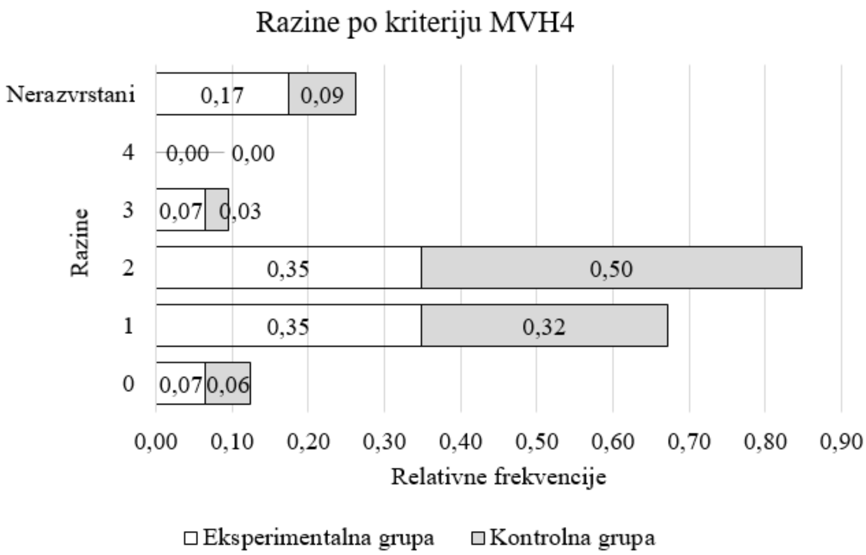
Na Slici 115. dan je usporedni grafički prikaz distribucija relativnih frekvencija prema blažem kriteriju za modificirani van Hieleov model razvoja mišljenja (MVH3 kriterij). Prema rezultatima s ovog grafa (Slika 115) vidljivo je da se više promjena događa unutar eksperimentalne grupe (povećao se broj na 1., 2. i 4. razini u odnosu na CVH3 kriterij) jer je više sudionika ostvarilo bodove na 5. razini, a oni se sada preraspodjeljuju, ovisno o bodovima prethodnih razina. Drugim riječima, geometrijsko mišljenje sudionika eksperimentalne grupe je nestabilnije od onog u kontrolnoj grupi. I upravo zbog onih koji su dijelom dosegli i petu razinu, nakon preraspodjele zbog uklanjanja 5. razine, ostaje manje nerazvrstanih. No, to su oni sudionici s kojima treba još malo poraditi na učvršćivanju konceptualnih veza u svrhu kvalitetnijeg i stabilnijeg logičkog zaključivanja.



Slika 115. Distribucija po kriteriju MVH3

Zanimljivo je uočiti da je broj sudionika koji su na 3. razini po kriteriju MVH3 ostao jednak broju kao i po kriteriju CVH3, što znači da među njima nema onih koji su dosegli petu razinu. Drugim riječima, svi oni koji su bili neraspodijeljeni i dosegli 5. razinu, imaju nestabilnu 3. razinu, a to je upravo razina uspostavljanja mreža konceptualnih veza.

Konačno, ako se sudionici sagledaju po MVH4 kriteriju, tj. prema strožem kriteriju primijenjenom na modificirani VH model razvoja mišljenja (Slika 116), dobiva se distribucija vrlo slična onoj po CVH4 kriteriju (Slika 114). To pokazuje da se više promjena događa zbog kriterija 4 od 5 nego zbog uklanjanja 5. razine, odnosno, postoje sudionici koji ostvare prve razine mišljenja, ali još uvijek nisu sigurni u svom promišljanju. Posljedično, veze koje oni uspostavljaju među konceptima i zaključivanja koja se oslanjaju na te veze prilično su slabe, a mogu ih ometati i percepcijski procesi.



Slika 116. Distribucija po kriteriju MVH4

Zanimljivo je vidjeti da među sudionicima ima čak 12 (9 u E; 3 u K; ukupno 15%) onih kojima je prva razina nestabilnija od drugih razina pa su, nakon uklanjanja 5. razine, prešli u nerazvrstane ili su ostali bez te jedine razine. I što je prilično iznenađujuće, jedan sudionik iz kontrolne grupe po svim kriterijima ima stabilnu 2, 3, i 5. razinu iako 1. nije zadovoljio, što znači da percepcija može omesti njegovo geometrijsko mišljenje, unatoč znanju koje ima. To potencijalno znači da jačanjem vizualizacijskih vještina u kontekstu geometrije može pomoći sudionicima da percepcijsku obradu koriste uzajamno s matematičkom obradom vizualnih prikaza.

Odgovor na 1. pitanje: Kroz prethodna četiri grafička prikaza, analizu rezultata i raspravu dan je odgovor na prvo istraživačko pitanje: *na kojoj se razini geometrijskog mišljenja* prema van Hieleovu modelu nalaze sudionici neposredno prije učenja geometrije. Generalno gledano, geometrijsko mišljenje sudionika ovog istraživanja, koje su ostvarili kumulativno tijekom matematičkog obrazovanja prije tercijarne razine, nije dostatno za nastavak učenja geometrije na sveučilišnoj razini. Ostvarene razine geometrijskog mišljenja po grupama gotovo su ujednačene, tek nešto bolje karakteristike idu u korist sudionika kontrolne skupine.

Iako bi se na prvu moglo reći da među četiri dana grafička prikaza nema neke veće razlike, pa je nepotrebno proučavati sva četiri prikaza, u kvalitativnom smislu razlika ipak postoji. Korisnost uspoređivanja rezultata po različitim kriterijima ostvaruje se upravo u čitanju promjena koje se događaju izmjenom kriterija jer do izražaja dolaze 'slabe točke' grupe, odnosno mjesta nestabilnosti geometrijskog mišljenja sudionika, što je ključno za prilagodbu poučavanja karakteristikama grupe.

Rezultati dobiveni prethodnom analizom ukazuju da se za vrijeme intervencije treba baviti elementima svih razina prema van Hieleovu modelu razvoja mišljenja, a posebno prvih triju razina, kako bi se sudionicima omogućilo da napreduju prema višim razinama. Drugim riječima, isključivo deduktivni pristup nema smisla jer ovi sudionici za njega nisu spremni.

6.2. Karakteristike sudionika na početku prema GEO testu

Prije svakog poučavanja korisno je znati koja znanja sudionici već imaju o tome, posebno kada se zna studenti učiteljskog studija dolaze s različitim predznanjima koje akumuliraju kroz različito matematičko obrazovanje. Naime, svi se oni obrazuju prema istim kurikulumu tijekom primarnog obrazovanja (prvih osam godina), ali na sekundarnoj razini, matematički kurikulum se prilično razlikuje i po sadržaju i po broju sati izvođenja, a u nekim strukovnim školama, matematičko obrazovanje prestaje nakon 2. razreda srednje škole. Stoga su podaci koji se prikupljaju GEO testom o geometrijskom predznanju sudionika i njihovim sklonostima i vještinama vizualizacije od iznimne važnosti prije početka učenja radi planiranja i prilagodbe poučavanja tijekom intervencije.

Analiza rezultata i rasprava o podacima koji su prikupljeni GEO testom prije početka učenja geometrije vrši se najprije odvojeno kroz četiri segmenta prema četiri grupe zadataka: (1) predznanja o definicijama odabranih geometrijskih pojmova; (2) uspješnost čitanja matematičke poruke sa slike; (3) uspješnost rješavanja zadataka objektivnog tipa te (4) uspješnost rješavanja problemskih zadataka. Nakon toga se da je zbirni odgovor na 2. pitanje. Podaci se obrađuju uzajamno kvalitativnom i kvantitativnom analizom: deskriptivna statistička analiza obično ukazuje na moguća raslojavanja i potencijalne (tipične) teškoće, a kvalitativno proučavanje njihovih radova omogućava uvid u stvarne (ne)mogućnosti i (ne)znanja.

Ovom analizom ukupno je obuhvaćeno 86 od 90 sudionika (95,56%) jer je svih 52 sudionika (100%) eksperimentalne grupe pisalo prvi GEO test, ali 4 od 38 (10,53%) sudionika kontrolne grupe nije pisalo. U opisu rezultata, iz praktičnih razloga, ponekad se za eksperimentalnu grupu koristi samo oznaka E, a za kontrolnu grupu samo K.

6.2.1. Predznanja o definicijama odabranih geometrijskih pojmova

Prema van Hieleovoj teoriji, razumijevanje formalnih definicija moguće je tek kada se savladaju prve tri razine geometrijskog mišljenja. S obzirom na rezultate predstavljene u prethodnoj cjelini očekivano je da rezultati i u ovoj grupi zadataka budu slabiji.

U Tablici 9 dane su distribucije frekvencija i relativnih frekvencija u određivanju korektnosti iskaza za definicije odabranih geometrijskih pojmova. U stupcu 'Točno (1)' nalaze se sudionici koji su prepoznali da iskaz ne predstavlja korektnu definiciju; u stupcu 'Pogrešno (0)' su sudionici koji smatraju da je ponuđeni iskaz korektna definicija istaknutog geometrijskog pojma, a u stupcu 'Prazno (-)' su sudionici koji nisu dali odgovor na ponuđeno pitanje. Kako je već istaknuto u opisu GEO testa, nijedan iskaz ne predstavlja korektnu definiciju odabranog geometrijskog pojma.

Tablica 9. Prepoznavanje (ne)korektnosti definicije

		Eksperimentalna grupa (N = 52)						Kontrolna grupa (N = 34)					
	Korektnost definicije	Točno (1)		Pogrešno (0)		Prazno (-)		Točno (1)		Pogrešno (0)		Prazno (-)	
		N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%
G1.1	Pravac	13	25,00	36	69,23	3	5,77	5	14,71	27	79,41	2	5,88
G1.2	Paralelni pravci	9	17,31	43	82,69	0	0,00	3	8,82	29	85,29	2	5,88
G1.3	Dužina	6	11,54	46	88,46	0	0,00	2	5,88	30	88,24	2	5,88
G1.4	Simetrala dužine	13	25,00	38	73,08	1	1,92	5	14,71	25	73,53	4	11,76
G1.5	Kut	7	13,46	43	82,69	2	3,85	8	23,53	23	67,65	3	8,82
G1.6	Ortocentar	11	21,15	33	63,46	8	15,38	5	14,71	19	55,88	10	29,41
G1.7	Romb	13	25,00	39	75,00	0	0,00	9	26,47	22	64,71	3	8,82
G1.8	Kružnica	20	38,46	30	57,69	2	3,85	7	20,59	21	61,76	6	17,65

Na temelju prikazanih podataka (Tablica 9) može se uočiti da su sudionici nastojali odgovoriti gotovo na sva postavljena pitanja, tj. vrlo je mali postotak onih koji nisu dali nikakav odgovor (kolona 'Prazno'). Pri tome se može uočiti da je u kontrolnoj grupi bilo nešto više onih bez odgovora, što može biti zbog ne znanja, ali i iz opreza kada nisu sigurni. Među onima koji nisu dali odgovor, jedino odskače frekvencija odgovora na šesto pitanje o ortocentru trokuta (15,38% u E i 29,41% u K). Moguće je da oni uopće ne poznaju definiciju tog pojma.

Prema frekvencijama točnih odgovora (kolona 'Točno') vidljivo je da su nešto uspješniji bili sudionici eksperimentalne grupe u šest od osam pitanja (pojmovi: pravac, paralelni pravci, dužina, simetrala dužine, ortocentar i kružnica), dok su na preostala dva pitanja nešto uspješniji bili sudionici kontrolne grupe (pojmovi: kut i romb). Međutim, u obje grupe manji postotak je onih koji su prepoznali nekorektnost definicije, odnosno puno veći postotak je onih koji smatraju da ponuđeni iskazi predstavljaju korektne definicije odabranih geometrijskih pojmova (kolona 'Pogrešno'). Ovi rezultati mogu ukazivati na više stvari: (1) nepoznavanje ili nedovoljno razumijevanje formalnih definicija; (2) dominantnost osobnih konceptualnih slika, među kojima ima nepotpunih, a moguće i pogrešnih; (3) brzopleto i nekritičko čitanje ponuđenih iskaza.

Ukratko, na temelju prikazanih podataka moglo bi se reći da sudionici imaju vrlo slaba znanja o definicijama odabranih pojmova te slabu kritičnost pri čitanju postavljenih iskaza. Međutim, razmatranjem vizualnih prikaza koje su sudionici stvarali uz opisane geometrijske pojmove dobiva se drugačija slika o njihovom (pred)znanju. S tom svrhom, u Tablici 10. dane su distribucije frekvencija i relativnih frekvencija sudionika pri stvaranju odgovarajućih vizualnih prikaza prema iskazima o odabranim geometrijskim pojmovima.

Na temelju rezultata prikazanih u Tablici 10. može se uočiti da je broj onih koji nisu dali svoj odgovor (tj. vizualni prikaz) puno veći nego što je bio u slučaju prepoznavanja (ne)korektnosti definicije (kolona 'Prazno') te je opet bez odgovora bilo više među sudionicima kontrolne grupe. Uvidom u radove sudionika uočava se da većina njih uopće nije ništa crtala, moguće zato što je površno pročitala zahtjeve zadatka, dok je tek manji dio njih započeo crtati te stao nakon prvih nekoliko pitanja. Broj koji odskače opet je frekvencija vizualnih prikaza na šesto pitanje (G1.6) o ortocentru trokuta (36,54% u E i 58,82% u K). No, ono što posebno iznenađuje je to što 52,94% sudionika kontrolne skupine u osmom pitanju (G1.8) nije vizualno prikazalo kružnicu, a što je elementarni pojam koji se kontinuirano koristi u nastavi geometrije prije tercijarne razine.

Tablica 10. Stvaranje vizualnog prikaza opisanog pojma

		Eksperimentalna grupa (N = 52)						Kontrolna grupa (N = 34)					
	Vizualni prikaz	Točno (1)		Pogrešno (0)		Prazno (-)		Točno (1)		Pogrešno (0)		Prazno (-)	
		N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%
G1.1	Pravac	41	78,85	0	0,00	11	21,15	21	61,76	0	0,00	13	38,24
G1.2	Paralelni pravci	39	75,00	2	3,85	11	21,15	22	64,71	0	0,00	12	35,29
G1.3	Dužina	35	67,31	5	9,62	12	23,08	19	55,88	3	8,82	12	35,29
G1.4	Simetrala dužine	25	48,08	14	26,92	13	25,00	8	23,53	10	29,41	16	47,06
G1.5	Kut	35	67,31	5	9,62	12	23,08	18	52,94	1	2,94	15	44,12
G1.6	Ortocentar	2	3,85	31	59,62	19	36,54	1	2,94	13	38,24	20	58,82
G1.7	Romb	24	46,15	17	32,69	11	21,15	16	47,06	3	8,82	15	44,12
G1.8	Kružnica	38	73,08	1	1,92	13	25,00	16	47,06	0	0,00	18	52,94

Prema frekvencijama točnih odgovora (kolona 'Točno') vidljivo je da su uspješniji bili sudionici eksperimentalne grupe u svim pitanjima osim jednog (za pojam romba), ali su oni istodobno dali i više pogrešnih odgovora u svim pitanjima osim u jednom (pojam simetrale dužine), što je dijelom posljedica i većeg broja ne-odgovora među sudionicima kontrolne grupe. Međutim, za razliku od raspodjele odgovora u prvom dijelu pitanja (korektnost definicije), u drugom dijelu pitanja u obje grupe je daleko veći postotak onih čiji je vizualni prikaz istaknutih geometrijskih pojmova korektan (kolona 'Točno'), dok je manji postotak onih čiji vizualni prikazi nisu korektni (kolona 'Pogrešno'). Odnos je obratan u obje grupe u slučaju crtanja ortocentra trokuta, te u kontrolnoj grupi u slučaju crtanja simetrale dužine. Opisani rezultati mogu ukazivati na više stvari: (1) vizualni prikazi pojma trajnije se pamte od opisa pojma riječima; (2) sudionici se više služe osobnom slikom koncepta, a manje formalnom definicijom koncepta; (3) dio njih, unatoč zahtjevu ne koristi vizualni prikaz.

Međutim, kada se odgovori sudionika u oba dijela pitanja razmatraju zajedno, postiže se finije i suptilnije tumačenje njihovih odgovora. U Tablici 11. prikazana je distribucija triju kombinacija od mogućih devet: (točno, točno), (pogrešno, točno) i (prazno, prazno), odnosno (1, 1), (0, 1) i (-, -), pri čemu se prvi član uređenog para odnosi na prepoznavanje korektnosti definicije, a drugi član na stvaranje vizualnog prikaza.

Tablica 11. Distribucija odgovora za prvu grupu pitanja u cijelosti

		Eksperimentalna grupa (N = 52)						Kontrolna grupa (N = 34)					
(Korektnost definicije, vizualni prikaz)		(1, 1)		(0, 1)		(-, -)		(1, 1)		(0, 1)		(-, -)	
		N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%
G1.1	Pravac	11	21,15	28	53,85	1	1,92	2	5,88	19	55,88	2	5,88
G1.2	Paralelni pravci	4	7,69	35	67,31	0	0,00	0	0,00	22	64,71	2	5,88
G1.3	Dužina	4	7,69	31	59,62	0	0,00	1	2,94	18	52,94	2	5,88
G1.4	Simetrala dužine	2	3,85	23	44,23	1	1,92	0	0,00	8	23,53	4	11,76
G1.5	Kut	3	5,77	31	59,62	1	1,92	3	8,82	15	44,12	3	8,82
G1.6	Ortocentar	0	0,00	2	3,85	7	13,46	0	0,00	1	2,94	9	26,47
G1.7	Romb	4	7,69	20	38,46	0	0,00	3	8,82	12	35,29	2	5,88
G1.8	Kružnica	14	26,92	23	44,23	1	1,92	4	11,76	11	32,35	5	14,71

Konačno, na temelju rezultata prikazanih u Tablici 11, može se reći da sudionici nemaju dovoljno kvalitetna predznanja o istaknutim geometrijskim pojmovima (kolona (1, 1)) te uz njih bolje vežu vizualne prikaze nego formalne opise (kolona (0, 1)), a samo manji postotak sudionika nije dao nikakav odgovor, posebno u kontrolnoj grupi (kolona (-, -)). U svemu odskaču rezultati o ortocentru trokuta te je moguće da se taj pojma vrlo malo koristio. Ova opća zapažanja u nastavku se detaljnije razmatraju i nadopunjuju na temelju kvalitativne analize njihovih radova.

Pravac (G1.1): Visoki postotak (69,23% u E; 79,41% u K; Tablica 9) pogrešnih odgovora, tj. onih koji smatraju da je iskaz *Pravac je ravna crta* korektna definicija, ukazuje na nerazumijevanje aksiomatskog sustava u kojem se osnovni pojmovi ne definiraju, već se samo zamišljaju na odgovarajući način. S druge strane, visoki postotak (78,85% u E; 61,76% u K; Tablica 10) korektnih vizualnih prikaza potvrđuje da sudionici korektno zamišljaju pravac kao ravnu crtu. Većina ravnih crta prikazana je horizontalno.

Paralelni pravci (G1.2): Prilično visok postotak (82,69% u E; 85,29% u K; Tablica 9) je onih koji smatraju da je iskaz *Paralelni pravci su pravci koji se ne sijeku* korektna definicija. Taj rezultat ukazuje na suženo polje razmatranja koncepata paralelnih pravaca. Naime, sudionici pojam 'paralelni pravci' vezuju uz ravninu te ne razmatraju je li ponuđeni iskaz korektan kada se dva pravca promatraju unutra prostora. To potvrđuju i visoki postoci (75,00% u E; 64,71% u K; Tablica 10) korektnog crtanja paralelnih pravaca u ravnini. Samo dva sudionika iz eksperimentalne grupe vizualno prikazuju mimosmjerne pravce kao kontra-primjer za nekorektnost definicije. Većina paralelnih pravaca prikazana je u horizontalnom položaju.

Dužina (G1.3): Najveći postotak (88,46% u E; 88,24% u K; Tablica 9) pogrešnih odgovora bio je upravo kod iskaza *Dužina je dio ravnine omeđen s dvije* točke, što je prilično iznenađujuće loš rezultat s obzirom da se pojam dužine u nastavi matematike kontinuirano koristi od prvih razreda primarnog obrazovanja pa sve do tercijarne razine. Mogući razlog vjerojatno je u čitanju samo ključnih riječi iskaza ('dio ravnine' i 'omeđen s dvije točke'), te suženog razmatranja koncepta. Naime, više od polovice sudionika u obje grupe (67,31% u E; 55,88% u K; Tablica 10) korektno crta dužinu i to kao dio pravca između njegovih dviju točaka, a ne kao dio ravnine. Samo dva sudionika kontrolne grupe crtaju dužinu korektno unutar ravnine, ali oni i iskaz smatraju korektnim. Dakle, njihove konceptualne slike dužine prilično su sužene jer ne razmatraju druge mogućnost, npr. da zakrivljena ili izlomljena crta u ravnini također ispunjavaju uvjete iskaza. Većina prikazanih dužina je u horizontalnom položaju.

Simetrala dužine (G1.4): U ovom pitanju korištena je tipična greška pri definiranju pojmova: ispuštanje glavnog rodnog pojma (simetrala je 'pravac'). Iako je većina sudionika u vizualnom prikazu simetralu prikazala kao pravac, ipak pri čitanju iskaza mnogi nisu prepoznali da upravo riječ 'pravac' nedostaje. Moguće je da su pri čitanju iskaza bili više fokusirani na ključne riječi 'raspolavlja' i 'pod pravim kutom' pa su iz vida izgubili ono što nije navedeno. To je rezultiralo velikim postotkom pogrešnih odgovora (73,08% u E; 73,53% u K; Tablica 9), odnosno onih koji smatraju da je iskaz *Simetrala dužine raspolavlja dužinu pod pravim kutom* korektna definicija. Samo dvoje sudionika (3,85%) iz eksperimentalne grupe je prepoznalo nekorektnost definicije i dalo korektan vizualni prikaz (kolona (1, 1), Tablica 11), što je zapravo vrlo loš rezultat. Naime, oni koji su crtali simetralu dužine činili su brojne greške pa su tako neki crtali dva okomita pravca ili dva ukrštena pravca ili pravac okomit na dužinu izvan polovišta ili pravac kroz polovište koji nije okomit ili pravac koji siječe stranicu trokuta ili samo polovište dužine i dr. Kod većine prikaza dužina je bila u horizontalnom položaju.

Kut (G1.5): Slično kao i kod prethodnog pojma, visok postotak pogrešnih odgovora (82,69% u E; 67,65% u K; Tablica 9), vjerojatno je posljedica fokusiranost na čitanje ključnih riječi 'dio ravnine' i 'među dvama polupravcima' pa su brzopleto zaključili da je iskaz *Kut je dio ravnine omeđen dvama polupravcima* korektna definicija. Međutim, u iskazu je tipična pogreška koja se potkrada u raznim varijantama definicije kuta ('omeđen' dio), a kako mnogi na to nisu reagirali, moguće je da su koncept kuta mnogi pogrešno i usvojili. S druge strane, iz vizualnih prikaza sudionika uočava se da većina njih koncept kuta zamišlja kao dio između dvaju polupravaca s početnom točkom (iako to u iskazu ne stoji), ali bilo je i onih koji su kut isticali kružnim lukom među ukrštenim ili okomitim pravcima. Većina sudionika crtala je šiljasti kut s jednim krakom u horizontalnom položaju.

Ortocentar trokuta (G1.6): Dani iskaz *Ortocentar trokuta je točka sjecišta visina tog trokuta* bio je pravi 'kamen spoticanja': najmanje točnih odgovora za iskaz (21,25% u E; 14,17% u K; Tablica 9), najmanje točnih vizualnih prikaza (3,85% u E; 2,94% u K; Tablica 10), najviše bez odgovora u obje grupe i niti jedan odgovor u potpunosti korektan (Tablica 11). Od manjeg broja onih koji su prepoznali nekorektnost iskaza, nitko nije dao korektan vizualni prikaz, a tri sudionika (2 u E; 1 u K) koji su smatrali da je iskaz korektan (Tablica 11), vizualno su prikazali upravo sjecište visina u šiljastokutnom trokutu. Svi ostali koji su crtali koncept ortocentra imali su prilično muke oko toga da dođu do točke unutar šiljastokutnog trokuta koja je sjecište raznih vrsta pravaca ili dužina. Najčešće su crtali simetrale kutova ili samo dio simetrala kutova, a bilo je i raznih okomica na stranice, ali ne iz vrha trokuta. Može se zaključiti da sudionici imaju površnu i nepotpunu sliku koncepta usmjerenu samo na šiljastokutne trokute, što je moguće posljedica i rada s nepotpunom formalnom definicijom koncepta.

Romb (G1.7): U ovom pitanju korištena je tipična greška pri definiranju pojmova: opisivanje svih svojstava toga pojma, bez razmatranja samo nužnih i dovoljnih te bez isključivanja međusobno ekvivalentnih svojstava među njima. Moguće da je upravo to razlog visokog postotka pogrešnih odgovora (75,0% u E; 64,71% u K; Tablica 9), tj. onih koji smatraju iskaz *Romb je četverokut kojemu su nasuprotne stranice paralelne i jednakih duljina* predstavlja korektnu definiciju pa su u skladu s tim velikim dijelom crtali opći paralelogram umjesto romba. Naime, među onima koji su smatrali da je iskaz korektna definicija, dio njihovih vizualnih prikaza je korektan (38,46% u E; 35,29% u K; Tablica 11). Još veći problem pri crtanju je bio u onih koji su prepoznali da iskaz nije korektan (25,00% u E; 26,47 u K; Tablica 9), jer ih je samo sedmero korektno nacrtalo romb (7,69% u E; 8,82% u K; Tablica 11).

Kružnica (G1.8): Slab rezultat u ovom pitanju zaista začuđuje jer se radi o elementarnom pojmu koji se kontinuirano koristi u nastavi geometrije kroz cijelu vertikalu. Naime, većina sudionika koji su smatrali da iskaz *Kružnica je skup točaka ravnine jednako udaljenih od neke točke ravnine* nije korektna definicija (38,46% u E; 20,59% u K; Tablica 9), vizualni prikaz nisu dali pa je vrlo mali postotak točnih odgovora u potpunosti (26,92% u E; 11,76% u K; Tablica 11). Osim toga, njima nije bilo sporno što je ispuštena riječ 'svih' (skup *svih* točaka), već im je bio sporan dio iskaza 'udaljenih od neke točke ravnine', pa su taj dio neki prekrižili i dopisali 'od središta'. To ukazuje na nemogućnosti uočavanja suptilnosti koje definiciju čine nekorektnom (nepotpunom), ali i na korištenje cirkularne definicije.

Konačno, na temelju svega opisanog može se zaključiti da sudionici poznaju određene definicije pojmova, ali su prilično nesigurni oko njih i nisu ih u mogućnosti kritički čitati. Moguće je da su formalne definicije pojmova učili napamet kao gotove formulacije. Nadalje, uz svaki istaknuti geometrijski pojam sudionici vezuju vizualni prikaz, ali to je više rezultat njihovih osobnih slika koncepata, ne kao sastavni dio formalnih definicija jer se slika ipak pamti trajnije od riječi. Zapravo, u sudionika prilično dominira slika koncepta, koja je nepotpuna i neadekvatno povezana s formalnom definicijom.

Također, sudionici ne poznaju pravilnosti koje definiciju čine korektnom, kao ni različite mogućnosti definiranja istog pojma te ne poznaju različite vrste definicija. Ne snalaze se u prepoznavanju: glavnog roda i specifičnih razlika vrste u iskazu, elemenata viška koji definiciju čine preopširnom te elemenata manjka koji definiciju čine preuskom, niti u prepoznavanju ne-ekvivalentnih svojstva, odnosno nemaju *osjećaj* za nužne i dovoljne karakteristike koji osiguravaju jednoznačnost definicije. Ne razlikuju osnovne i izvedene pojmove. Svi navedene karakteristike ukazuje na to da se tijekom intervencije sudionici trebaju baviti i procesom definiranja geometrijskih pojmova te povezivanjem formalnih definicija s njihovom konceptualnom slikom.

6.2.2. Uspješnost čitanja matematičke poruke sa slike

Prema Duvalu, za uspješno čitanje matematičke poruke na danom vizualnom prikazu potrebna je perceptivna i matematička obrada. Kroz perceptivnu (nesvjesno) obradu zapažaju se određeni detalji prikaza „na prvu" i time se opaža što slika prikazuje, a daljnjom matematičkom obradom uspostavlja se veza među detaljima u svrhu otkrivanja što dani vizualni prikaz predstavlja (Duval, 1995).

Druga grupa pitanja sastoji se od šest vizualnih prikaza od kojih prvi i peti predstavljaju jedan objekt, dok na preostala četiri ima više objekata među kojima treba uspostaviti vezu, što se vrednuje dodatnim bodom. Stoga se ove dvije vrste pitanja razmatraju odvojeno. U Tablici 12. prikazuje se distribucija odgovora na prvo i peto pitanje (G2.1 i G2.5), a u Tablici 13. distribucija odgovora na preostala četiri pitanja (G2.2, G2.3, G2.4 i G2.6), na temelju čega se može vidjeti u kojoj mjeri su sudionici bili uspješni u čitanju matematičke poruke.

Tablica 12. Distribucija odgovora u čitanju poruke prvog i petog pitanja

		Eksperimentalna grupa (N = 52)						Kontrolna grupa (N = 34)					
	Poruka	Točno (1)		Pogrešno (0)		Prazno (-)		Točno (1)		Pogrešno (0)		Prazno (-)	
		N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%
G2.1	Trokut	28	53,85	23	44,23	1	1,92	14	41,18	19	55,88	1	2,94
G2.5	Kvadar	19	36,54	31	59,62	2	3,85	10	29,41	22	64,71	2	5,88

Prema rezultatima prikazanima u Tablici 12, vidljivo je da su sudionici eksperimentalne grupi bili nešto uspješniji u čitanju poruke u 1. i 5. pitanju, ali ne značajno. Također, u obje grupe su bili uspješniji u čitanju poruke za ravninski objekt (trokut), a manje za prostorni objekt (kvadar).

Jednakostranični trokut, stranice duljine *a* (G2.1): Pri otkrivanju kakav je lik prikazan na slici u pitanju G2.1, bilo je dosta različitih vrsta odgovora. Odgovori vrednovani jednim bodom bili su jasni: jednakostraničan trokut (53,85% u E; 41,18% u K). Međutim, među preostalim odgovorima koji su vrednovani s 0 bodova (44,23% u E; 55,88% u K) bilo je raznih ideja: *trokut, raznostraničan trokut, raznostraničan trokut pogrešno označenih stranica, raznostranični trokut iako su sve stranice označene slovom a, prema oznakama jednakostraničan iako prema izgledu raznostraničan, raznostraničan šiljastokutan trokut, pravokutni trokut, pravokutan raznostraničan trokut, jednakostranični pravokutni trokut, tupokutan trokut jednakih stranica (i slične varijante).*

Kvadar duljine 2cm, širine 3cm i visine 4cm (G2.5): Pri otkrivanju kakvo je tijelo prikazano na slici u pitanju G2.5, tek oko trećine sudionika bilo je bez dileme: kvadar (36,54% u E; 29,41% u K). Međutim, među preostalim odgovorima (59,62% u E; 64,71% u K) bilo je raznih ideja: *kocka, kockica, kocka sa stranicama duljine 2cm, 3cm i 4cm, kocka s različitim duljinama stranica, kvadrat, raznostraničan kvadrat, pravokutnik, projekcija pravokutnika, trodimenzionalna slika pravokutnika, volumen tijela, geometrijsko tijelo, trapezoid.*

Već na temelju odgovora u ova dva pitanja može se uočiti da je u sudionika dominantno perceptivno čitanje vizualnih prikaza, koje je izraženije pri čitanju prostornih (3D) prikaza.

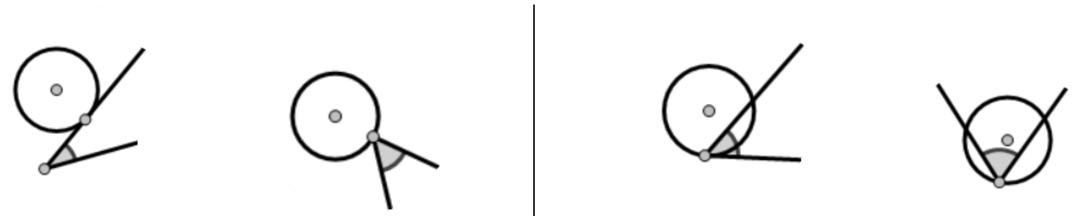
Prema rezultatima prikazanima u Tablici 13, za drugu grupu zadataka (G2.2, G2.3, G2.4, G2.6) može se uočiti da sudionici nisu bili uspješni pri uspostavljanju funkcionalnih veza među elementima slike u svrhu otkrivanja predstavljene matematičke poruke, ni u jednoj grupi. Naime, uglavnom oko polovice sudionika uočava elemente slike (kolona 'Dijelom'), ali samo manji broj njih među njima uspješno uspostavlja vezu (kolona 'Točno'). Također, kod čitanja složenije slike više je onih koji uopće ne daju odgovor (presjek, prizma) što dijelom može proizlaziti i iz nemogućnosti uspostavljanja veza među elementima.

Tablica 13. Distribucija odgovora u čitanju poruke u preostala četiri pitanja

		Eksperimentalna grupa (N = 52)								Kontrolna grupa (N = 34)							
	Poruka	Točno (2)		Djelom (1)		Pogrešno (0)		Prazno (-)		Točno (2)		Djelom (1)		Pogrešno (0)		Prazno (-)	
		N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%
G2.2	Presjek	0	0,00	29	55,77	17	32,69	6	11,54	0	0,00	22	64,71	7	20,59	5	14,71
G2.3	Sličnost	3	5,77	37	71,15	12	23,08	0	0,00	5	14,71	18	52,94	10	29,41	1	2,94
G2.4	Sukuti	4	7,69	24	46,15	21	40,38	3	5,77	6	17,65	20	58,82	4	11,76	4	11,76
G2.6	Prizma	3	5,77	7	13,46	31	59,62	11	21,15	1	2,94	4	11,76	16	47,06	13	38,24

I u ovoj grupi zadataka vidljivo je da su sudionici najviše teškoća imali pri čitanju prostornog (3D) prikaza. Prethodna opća zapažanja u nastavku se detaljnije razmatraju i nadopunjuju na temelju kvalitativne analize njihovih radova.

Presjek kružnice i šiljastog kuta u vrhu kuta (G2.2): U odgovoru na ovo pitanje nitko od sudionika nije uspostavio korektnu vezu među elementima slike, tj. između kružnice i kuta (kolona 'Točno'). Međutim, više od polovice sudionika u obje grupe prepoznalo je kružnicu i (šiljasti) kut te pokušalo uspostaviti vezu, ali im je nedostajao odgovarajući vokabular te prepoznavanje suptilnih razlika između prikazanog i opisanog (kolona 'Dijelom'). Tako, na primjer, mnogi od njih na različite načine opisuju da se radi o kružnici i kutu koji se dodiruju u jednoj točki, ili koji imaju jednu točku zajedničku, ne uviđajući da je taj slučaj moguć s vrhom kuta, ali i s krakom kuta (Slika 117a); ili da se radi o kutu kojemu je vrh na kružnici, ne uviđajući da u tom slučaju krakovi mogu i ne moraju sjeći kružnicu (Slika 117). No, među preostalim odgovorima (kolona 'Pogrešno') ima i konceptualnih nerazumijevanja. Tako, na primjer, neki opisuju *obodni kut koji se nalazi na kružnici, odsječak na kružnici, kut koji (ne)pripada kružnici, kut nad polumjerom* i sl.



(a) (b)

Slika 117. Kružnica i kut

Dva slična pravokutna trokuta, drugi s koeficijentom 2 (G2.3): U ovom pitanju ipak je bilo točnih odgovora, iako vrlo malo (5,77% u E; 14,71% u K), ali također i puno manje pogrešnih odgovora te gotovo nije bilo onih bez odgovora. Visok je postotak (71,15% u E; 52,94% u K) onih koji su uočili dva pravokutna raznostranična trokuta, ali nisu uspostavili vezu, tj. da su stranice drugog trokuta dva puta veće od odgovarajućih stranica prvog trokuta. Međutim, među onima koji su pokušali uspostaviti vezu uočljiva je i jedna tipična greška pri opisivanju sličnih trokuta. Oni ističu da je *drugi trokut dvostruko veći od prvog*, što nije korektno jer njegove stranice i visina jesu dvostruko veće, ali površina je veća četiri puta.

Tupi kut β i šiljasti kut α nadopunjavaju se do ispruženog kuta (G2.4): U ovom je pitanju bilo najviše točnih odgovora iako je postotak vrlo slab (7,69% u E; 17,65% u K). Svoje opise sudionici su temeljili uglavnom na *šiljastom i tupom kutu koji čine ispruženi kut* ili je *ispruženi kut podijeljen na šiljasti i tupi kut*, dok su pojam susjedni kutovi koristila samo tri sudionika eksperimentalne grupe. Među onima koji su pokušali uspostaviti vezu uočava se jedna tipična greška: oni uočavaju da se radi o šiljastom kutu α i tupom kutu β, ali dodaju da se radi o suplementarnim kutovima, odnosno da im je zbroj 180°. Iako u ovom slučaju to jest istina jer se radi o sukutima, ali suplementarni kutovi ne moraju biti sukuti. Nadalje, među onima koji se nalaze u koloni 'Pogrešno' uočavaju se razna konceptualna nerazumijevanja te pogrešna shvaćanja. Tako, na primjer, neki navode da se radi o *komplementarnim kutovima, vanjskom i unutarnjem kutu, obodnim kutovima, sukladnim kutovima, da simetrala raspolavlja dužinu pod tupim kutom* i dr.

Najveći dijagonalni presjek šesterostrane prizme brida duljine *a* i visine *v* (G2.6): Ovo se pitanje odnosi se na tijelo u prostoru unutar kojeg treba uspostaviti vezu među istaknutim elementima. Generalno gledano, u čitanju poruke sa ove slike bili su najneuspješniji: slab postotak točnih, najniži postotak djelomično točnih te najveći postotak bez odgovora (Tablica 13). Među pogrešnim odgovorima mnoštvo nerazumijevanja i pogrešnih shvaćanja: *plošna stranica, šesterokut, visina šesterokuta, ravnina koja raspolavlja šesterokut na dva jednaka dijela, mnogokut podijeljen na dva jednaka dijela, geometrijsko tijelo podijeljeno na dva jednaka trapeza, valjak sa središnjom plohom, osni presjek tetraedra, kvadar* i dr. Ukratko, sudionici imaju slaba znanja o 3D geometrijskim objektima.

Konačno, na temelju svega opisanog za drugu grupu zadataka, može se zaključiti da sudionici imaju vrlo slabe vještine čitanja matematičke poruke sa slike, pri čemu dominira perceptivna obrada slike, posebno kada se radi o prikazu 3D objekta. Kod složenijih prikaza ne pridaju pozornost svim detaljima, a poseban problem imaju pri uspostavljanju funkcionalnih veza među uočenim elementima slike. Odgovarajuće pojmove kao da su koristili u manjoj mjeri, površno ili uopće nisu koristili: obodni kut, sličnost trokuta, susjedni kutovi, šesterostrana prizma, dijagonalni presjek.

Ukratko, pri čitanju vizualnih prikaza sudionici su se snalazili svatko na svoj način, pa bi se moglo zaključiti da oni nisu sustavno poučavani kako čitati matematičku poruku sa slike. Predstavljeni rezultati upućuju na to da se za vrijeme intervencije treba baviti, detaljno i sustavno, različitim procesima vizualizacije.

6.2.3. Uspješnost rješavanja zadataka objektivnog tipa

Razna obrazovna istraživanja potvrđuju da ponuđeni odgovori ipak potiču učenike da daju odgovor, a ciljano odabrani distraktori ih usmjeravaju na odabir odgovarajućeg rješenja (PISA 2012; Državna matura, 2012; Baranović i Antunović-Piton, 2021).

U svrhu prepoznavanja u kojoj mjeri su sudionici bili uspješni pri rješavanju šest zadataka objektivnog tipa (G3.1 – G3.6), u Tablici 14. prikazana je distribucija njihovih odgovora u skladu s kriterijima vrednovanja (Točno, Pogrešno, Prazno).

Tablica 14. Distribucija odgovora u zadacima objektivnog tipa (ZOT)

		Eksperimentalna grupa (N = 52)						Kontrolna grupa (N = 34)					
ZOT		Točno (1)		Pogrešno (0)		Prazno (-)		Točno (1)		Pogrešno (0)		Prazno (-)	
		N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%
G3.1	Površina	12	23,08	40	76,92	0	0,00	14	41,18	17	50,00	3	8,82
G3.2	Opseg	40	76,92	12	23,08	0	0,00	24	70,59	7	20,59	3	8,82
G3.3	Duljina stranice	33	63,46	18	34,62	1	1,92	26	76,47	7	20,59	1	2,94
G3.4	Kut trokuta	25	48,08	24	46,15	3	5,77	18	52,94	15	44,12	1	2,94
G3.5	Presjek	5	9,62	46	88,46	1	1,92	7	20,59	27	79,41	0	0,00
G3.6	Kut uz presječnicu	47	90,38	5	9,62	0	0,00	26	76,47	7	20,59	1	2,94

Prema rezultatima prikazanima u Tablici 14. vidljiv je mali postotak sudionika bez odgovora, za razliku od većine prethodno razmatranih pitanja. To znači da su ponuđeni odgovori ipak potakli sudionike da odgovore na pitanje, što je u skladu s rezultatima drugih istraživanja. Prema distribuciji točnih i pogrešnih odgovora uočava se da su sudionici najslabije riješili prvi i peti zadatak (G3.1 i G3.5) u obje grupe, moguće zato jer se radi o konceptima (površina trokuta, presjek pravca i kružnice) koje su usvojili površno i bez razumijevanja. U situacijama kada su nesigurni, distraktori koji uključuju njihove tipične greške, usmjeravaju njihove odgovore. U ostalim pitanjima (G3.2, G3.3., G3.4 i G3.6) bili su daleko uspješniji u obje grupe, moguće zato jer su se tim konceptima više bavili pa su ih bolje i savladali (opseg paralelograma, duljina stranice trokuta, unutarnji kut trokuta te kut uz presječnicu). Generalno gledano, u četiri pitanja (G3.1, G3.3, G3.4 i G3.5), koja obuhvaćaju i bolje i slabije riješene zadatke, uspješniji su bili sudionici kontrolne grupe, čak i uz veći postotak ne-odgovora, dok su sudionici eksperimentalne grupe bili su uspješniji u dva pitanja (G3.2 i G3.6), posebno u zadnjem. U nastavku se, uz kvalitativnu analizu njihovih radova, detaljnije razmatra utjecaj ponuđenih odgovora po svakom zadatku.

Površina pravokutnog trokuta (G3.1): Prema zapisima koje su sudionici radili uz sliku, uočava se da su površinu računali prema sljedećim formulama: $P = \frac{a \cdot b}{2}$ (korektno, u (a) odgovoru), $P = a \cdot b$ (distraktor u (b) odgovoru), $P = a \cdot b \cdot c$ (distraktor u (e) odgovoru) te nitko nije koristio Heronovu formulu. Među pogrešnim odgovorima, kojih je visok postotak, sudionici eksperimentalne grupe najučestalije su birali odgovor pod (e), čak njih 67,31%, što znači da ih je 'zaveo' element viška pa su koristili formulu $P = a \cdot b \cdot c$. Za njih se može reći da koncept površine ne razumiju, a svoj rezultat ne provjeravaju niti kroz mjernu jedinicu, što su mogli jer je u rješenju istaknuta kvadratna mjerna jedinica, koja se ne dobiva množenjem triju veličina. Sudionici kontrolne grupe među pogrešnim odgovorima učestalije su birali dva odgovora: pod (b) njih 14,71% koristeći formulu $P = a \cdot b$, a pod (e) njih 32,35% koristeći formulu $P = a \cdot b \cdot c$.

Opseg paralelograma (G3.2): Prema zapisima uz sliku, sudionici su opseg računali korištenjem formule $O = 2a + 2b$ (korektno u (d) odgovoru), $O = a + b$ (distraktor u (a) odgovoru) i $O = a + b + v$ (distraktor u (b) odgovoru). Za trećinu sudionika (čiji je odgovor bio pogrešan) može se reći da ipak nisu u potpunosti razumjeli koncept opsega. Pogrešni odgovori sudionika bili su raspršeni po svim odgovorima. Ipak, u eksperimentalnoj grupi najučestaliji odgovor bio je (b), što je biralo njih 9,62%, a u kontrolnoj grupi odgovor (a), što je biralo njih 14,71%. To znači da je manji dio njih ipak 'zaveo' element viška.

Duljina stranice pravokutnog trokuta (G3.3). Prema zapisima uz sliku, sudionici su duljinu stranice računali primjenom identiteta Pitagorina poučka: $c^2 = a^2 + b^2$. Nitko nije koristio trigonometriju pravokutnog trokuta, što znači da sudionici ipak pravokutni trokut dominantno vezuju uz Pitagorin poučak. Iako su pogrešni odgovori bili raspršeni u obje grupe, ipak je 23,08% sudionika eksperimentalne grupe najučestalije birao odgovor pod (d), bez vidljivo jasnog razloga.

Unutarnji kut jednakokračnog trokuta (G3.4): Prema zapisima uz sliku, sudionici su najprije odredili veličinu unutarnjeg susjednog trokuta, a zatim su po formuli za zbroj unutarnjih kutova u trokutu odredili veličinu nepoznatog kuta, što je uobičajena školska procedura. Međutim, nije vidljivo je li netko ipak koristio činjenicu da je vanjski kut trokuta jednak zbroju unutarnja dva koja mu nisu susjedna. Zanimljivo je da su obje grupe u ovom zadatku bile gotovo ujednačene i u točnosti i u raspršenosti po pogrešnim odgovorima. Među pogrešnim odgovorima, najučestalije su birali odgovori pod (b) vjerojatno jer je 'izgledao' kao kut od 45° (17,31% u E; 17,65% u K) te odgovor pod (d) jer su kut od 70° izjednačili s kutom x, tj. za osnovicu jednakokračnog trokuta uzeli su stranicu $\overline{BC}$ koja je u horizontalnom položaju (što je uobičajena školska praksa), a ne stranicu $\overline{AC}$ prema uvjetima zadatka (23,08% u E; 17,65% u K).

Presjek pravca i kružnice (G3.5): Ovo pitanje unijelo je najviše pomutnje, pomalo i očekivano jer je u ovoj grupi ovo jedini zadatak koji nije računski, već konceptualni. Odgovor zahtijeva razumijevanje koncepta pravca i kružnice, ali i razumijevanje koncepta presjeka. Osim toga, pravac je s namjerom nacrtan tako da siječe kružnicu samo u jednoj točki kako bi se vidjelo na koji način sudionici percipiraju vizualni prikaz pravca. S obzirom na sve rečeno, ovaj zadatak zahtijeva posebnu analizu pa se u tu svrhu u Tablici 15. daje distribucija svih odgovora na ovo pitanje.

Tablica 15. Distribucija svih odgovora u pitanju G3.5

Presjek pravca i kružnice	E grupa (N = 52)		K grupa (N = 34)	
	N	%	N	%
(a) točka *A*	15	28,85	17	50,00
(b) točke *A* i *S*	4	7,69	2	5,88
(c) točke *A* i *B*	5	9,62	7	20,59
(d) točke *A*, *S* i *B*	7	13,46	4	11,76
(e) dužina *AS*	20	38,46	4	11,76
prazno (-)	1	1,92	0	0,00

Sudionici koji u svoj odgovor nisu uključili točku *B* znači da ne razumiju koncept pravca iako će svi vrlo spremno izgovoriti da je to ravna crta koja se proteže beskonačno. Međutim vizualni prikaz je omeo njihovu zamisao beskonačnog pravca. Takvih je vrlo visok postotak: 75% u E i 67,65% u K. Sudionici koji u svoj odgovor uključuju točku *S* ne razumiju koncept kružnice jer je ona potrebna za definiranje kružnice, ali nije točka kružnice. I takvih je priličan postotak: 59,62% u E i 29,41% u K. Oni koji isključuju točku *B* i uključuju točku *S* zapravo ne razumiju ni koncept pravca, ni koncept kružnice: 46,15% u E i 17,65% u K. Konačno, oni koji biraju odgovor pod (e) ne samo da ne razumiju koncept pravca i kružnice, već ne razumiju ni koncept presjeka: 38% u E i 11,76% u K ili eventualno pod kružnicom razmatraju krug.

Rezultati dobiveni kroz odgovore u ovom pitanju vrlo jasno pokazuju da su sudionici ove elementarne pojmove koristili zapravo vrlo površno i bez razumijevanja, a moguće i konceptualno pogrešno.

Kut uz presječnicu (G3.6): Prema zapisima na slici, sudionici vrlo vješto računaju veličine kutova koji se nadopunjavaju do ispruženog kuta te prepoznaju kutove jednakih veličina uz presječnicu. Mnogi su to napravili u mislima, napamet, ističući samo rješenje (90,38% u E; 76,47% u K). Manji postotak onih koji su birali pogrešne odgovore (kutovi od 30°, 40° ili 50°) vjerojatno nisu provodili račun već su procjenu vršili sa slike.

Konačno, nakon razmatranja rezultata u trećoj grupi zadataka, može se zaključiti sljedeće: sudionici slabije rješavaju konceptualni zadatak od proceduralnih, pri rješavanju proceduralnih (računskih) zadataka dominira formula, čiju korektnu primjenu ometaju elementi viška i vezuju se uz standardni položaj prikaza jednakokračnog trokuta. Nadalje, ponuđeni ih odgovori dodatno motiviraju da odgovore na pitanje, kada nisu sigurni u rješenje pribjegavaju procjeni sa slike, a namjerno postavljeni distraktori ometaju one koji koncepte koriste samo površno, bez razumijevanja. Opisani rezultati su u skladu sa dodatnim istraživanjem jednog geometrijskog zadatka s ponuđenim odgovorima, čiji rezultati su predstavljeni u radu *Different Perspectives on Success in Solving Stand-Alone Problems by 14 to 15-Year-Old Students* (Baranović i Antunović-Piton, 2021). Predstavljeni rezultati upućuju na to da se za vrijeme intervencije treba baviti i zadacima viših kognitivnih zahtjeva koji uključuju promatrane koncepte.

6.2.4. Uspješnost rješavanja problemskih zadataka

Prema Polya, problemski zadaci se rješavaju u četiri faze, te su prve dvije (razumijevanje i planiranje) posebno važne kako bi se provela treća faza (provedba plana), a zadnja (osvrt) služi kao određena vrsta kontrole provedenog. No, razna obrazovna istraživanja pokazuju da učenici najčešće rješavaju samo treću fazu (Polya, 1966; Antunović-Piton i Baranović, 2021b).

U skladu s tim razmatra se četvrta grupa od osam zadataka (G4.1 – G4.8), koja se sastoji od standardnih geometrijskih zadataka iz nastave geometrije u kojima treba prikazati proces rješavanja, kako bi se ispitalo na koji način sudionici provode taj proces te u kojoj mjeri i koliko uspješno se pri tome služe vizualnim prikazom. Prvih pet zadataka zadano je tekstualno, a u posljednja tri su uz tekst dane i slike. Prvi zadatak odstupa od drugih jer ima zahtjev crtanja, dok se sljedeća četiri zadatka mogu riješiti i crtanjem i bez crtanja slike. U posljednja tri zadatka dana slika je zadana pa je kao takva sastavni dio procesa rješavanja.

U Tablici 16. dane su distribucije odgovora sudionika u pitanju G4.1 i to posebno za crtanje tupokutnog trokut, a posebno za crtanje njegovih triju visina, posebno za crtanje trokuta i posebno za crtanje visina. Iz praktičnih razloga, ne daje se distribucija raznih kombinacija, ali se one razmatraju kroz dodatnu kvalitativnu analizu.

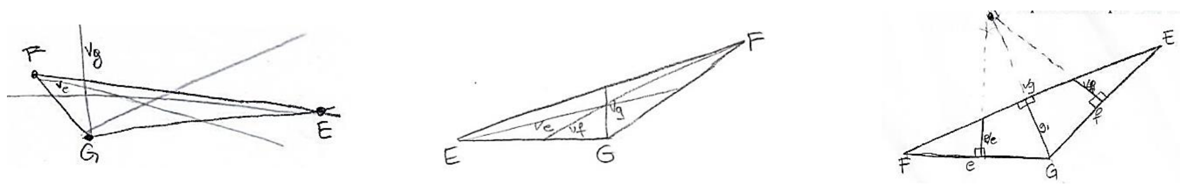
Tablica 16. Distribucija odgovora pri crtanju tupokutnog trokuta i visina

G4.1	Eksperimentalna grupa (N = 52)						Kontrolna grupa (N = 34)					
	Točno (1)		Pogrešno (0)		Prazno (-)		Točno (1)		Pogrešno (0)		Prazno (-)	
	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%
Trokut	39	75,00	11	21,15	2	3,85	22	64,71	7	20,59	5	14,71
Visine	5	9,62	43	82,69	4	7,69	2	5,88	27	79,41	5	14,71

Crtanje tupokutnog trokuta i njegovih visina (G4.1): Prema prikazanim rezultatima vidljivo je da su sudionici puno uspješniji bili u crtanju tupokutnog trokuta (75% u E; 64,71% u K), nego u crtanju njegovih visina (9,62% u E; 5,88% u K). Problem sa crtanjem visina je već prepoznat i opisan u literaturi o matematičkom obrazovanju, ali nije bilo očekivano da bi crtanje tupokutnog trokuta mogao biti problem za više od četvrtine sudionika. Posebno iznenađenje su oni koji nisu nacrtali ništa (3.85% u E; 14,71% u K).

Pri crtanju tupokutnog trokuta trebalo je ispuniti tri uvjeta: nacrtati trokut s tupim kutom, vrh tupog kuta imenovati s G, a preostale vrhove E i F imenovati u smjeru suprotnom gibanju kazaljki sata. Prema rezultatima u Tablici 16 (kolona 'Pogrešno') vidljivo je da više od petine sudionika nije ispunilo sve te zahtjeve: neki od njih nisu nacrtali trokut s tupim kutom, neki nisu vrh pri tupom kutu imenovali s G, a neki nisu vodili računa o orijentaciji prilikom imenovanja vrhova (Slika 118).

Pri crtanju visina potrebno je znati da se radi o dužini koja povezuje vrh i nasuprotnu stranicu (pravac nasuprotne stranice) pod pravim kutom. Također, potrebno je znati da se u tupokutnom trokutu samo jedna visina nalazi unutar trokuta, a preostale dvije su izvan trokuta pa je za njihovo crtanje potrebno produljiti odgovarajuće stranice trokuta. Među onima koji su nacrtali trokut, sve ove zahtjeve ispunio je jako mali postotak sudionika (7.69% u E; 5.88% u K). Kod radova preostalih sudionika, pri crtanju visina uočeno je nekoliko problema: nerazumijevanje koncepta visine, slaba vještina crtanja okomice, pogrešno usvojen koncept sjecišta visina unutar trokuta i dr. Naime, mnogi su sudionici za visine crtali pravce (umjesto dužina) iz vrhova trokuta (Slika 118a), mnogi su uporno crtali visine unutar trokuta ne vodeći računa o okomitosti na nasuprotnu stranicu (na pravac nasuprotne stranice; Slika 118b), a bilo je i onih koji su pokušavali postići okomitost, ali nisu mogli odrediti referentne objekte okomitosti (Slika 118c) itd.



(a) (b) (c)

Slika 118. Crtanje tupokutnog trokuta i njegovih visina

Iako na prvu ovaj zadatak može izgledati banalno, kroz proces rješavanja otkrivaju su mnoge teškoće i pogrešna shvaćanja, koje su dovele do slabe uspješnosti rješavanja. Zbog krivo usvojenog koncepta da se visine sijeku unutar trokuta (što vrijedi samo za šiljastokutni trokut), mnogi nisu uspjeli nacrtati okomite visine jer su pod svaku cijenu htjeli postići sjecište visina unutar trokuta. Zapravo, mnogima je bio problem ispuniti sve zahtjeve zadatka unutar jednog vizualnog prikaza.

Sljedeća dva zadatka prema procesu rješavanja spadaju u istu grupu po tome što se mogu riješiti i čisto analitički i vizualno-analitički. Također, oba zadatka imaju dva rješenja, što se ne vidi na prvu, već je u procesu rješavanja potrebno razmatrati različite mogućnosti. U Tablici 17. prikazana je distribucija odgovora za određivanje duljina stranica jednakokračnog trokuta, a u Tablici 18. distribucija odgovora za određivanje veličina kutova jednakokračnog trokuta, za svako rješenje posebno. U kvalitativnoj analizi njihovih radova dodatno se analiziraju i kombinacije odgovora.

Tablica 17. Distribucija odgovora pri određivanju duljina stranica

G4.2	Eksperimentalna grupa (N = 52)						Kontrolna grupa (N = 34)					
	Točno (1)		Pogrešno (0)		Prazno (-)		Točno (1)		Pogrešno (0)		Prazno (-)	
	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%
(14, 15, 15)	30	57,69	2	3,85	20	38,46	20	58,82	0	0,00	14	41,18
(16, 14, 14)	18	34,62	1	1,92	33	63,46	11	32,35	3	8,82	20	58,82
Slika	39	75,00	0	0,00	13	25,00	30	88,24	1	2,94	13	38,24

Određivanje duljina stranica jednakokračnog trokuta (G4.2): Prema podacima u Tablici 17. vidljivo je da su sudionici bili uspješniji u određivanju duljina stranica šiljastokutnog trokuta (57,69% u E; 58,82% u K), nego pri određivanju duljina stranica tupokutnog trokuta (34,62% u E; 32,35% u K). Među njima je bilo više onih koji su se služili skicom jednakokračnog trokuta (71,15% u E; 52,94% u K), ali svi su crtali šiljastokutni jednakokračni trokut sa stranicama *a*, *b* i *b*. Međutim, nekima je skica služila za postavljanje formule $O = a + 2b$ i dalje je nisu koristili, dok je drugima služila za provjeru rješenja. Oni koji su do rješenja došli čisto analitički (21,15% u E; 38,24% u K), račun su započeli formulom $O = a + 2b$, pri čemu su neki vrijednost 14 uvrstili umjesto *a*, a drugi umjesto *b*. Prvi su očito bili vođeni tekstom zadatka da je *jedna stranica duljine 14 cm*, ali nije jasno zašto su drugi baš za krakove trokuta uzeli po 14cm. No, među njima je mali postotak onih koji su odredili oba rješenja (5.77% u E; 14,71% u K): oni su jednostavno broj 14 uvrstili najprije umjesto *a*, a zatim umjesto *b*, dok su svi ostali proces rješavanja završili nakon određivanja jednog rješenja (što je vidljivo iz kolone 'Prazno'). S obzirom da se radi o elementarnom konceptu i uobičajenom zadatku određivanja opsega, onih koji nisu dali odgovor ili nisu odredili niti jedno rješenje ipak je manji postotak (13,46% u E; 23,53% u K).

Gotovo analognu strategiju sudionici su koristili pri određivanju veličine kutova jednakokračnog trokuta, ali u ovom zadatku su bili još manje uspješni (Tablica 18).

Tablica 18. Distribucija odgovora pri određivanju veličina kutova

G4.3	Eksperimentalna grupa (N = 52)						Kontrolna grupa (N = 34)					
	Točno (1)		Pogrešno (0)		Prazno (-)		Točno (1)		Pogrešno (0)		Prazno (-)	
	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%
(80°, 80°, 20°)	6	11,54	11	21,15	35	67,31	2	5,88	1	2,94	31	91,18
(30°, 30°, 120°)	14	26,92	7	13,46	31	59,62	8	23,53	0	0,00	26	76,47
Slika	26	50,00	18	34,62	8	15,38	14	41,18	5	14,71	15	44,12

Određivanje veličina kutova jednakokračnog trokuta (G4.3): U ovom slučaju, uspješniji su bili u određivanju veličine kutova tupokutnog trokuta (26,92% u E; 23,53% u K), nego pri određivanju veličine kutova šiljastokutnog trokuta (11,54% u E; 5,88% u K), opet iz istog razloga: vođeni tekstom zadatka da je *jedan kut četiri puta veći od jednog od preostala dva*. U procesu rješavanja, opet je bilo više onih koji su posegnuli za slikom, ali najčešće su (opet) crtali šiljastokutne jednakokračne trokute pa im je ona unijela više pomutnje nego koristi. Korištenjem slike uspješno je došlo do rješenja 26,92% sudionika u E i 23,53% sudionika u K, a bez slike, čisto analitički 13,46% sudionika u E i 5,88% sudionika u K. Većina koji su rješavali zadatak krenuli su od izraza $\alpha+\alpha+\beta=180°$ ističući da postoje dva jednaka kuta, ali mnogi su se nakon toga pogubili ne znajući kako da iskoriste zahtjev da je *jedan kut četiri puta veći od jednog od preostala dva*. S obzirom da se radi o elementarnom konceptu i uobičajenom zadatku određivanja kutova jednakokračnog trokuta, iznenađujuće je visok postotak pogrešnih rješenja kao i onih bez odgovora (42,31% u E; 67,65% u K), dok je samo jedan sudionik u eksperimentalnoj grupi odredio oba rješenja (imao je oba rješenja i u prethodnom zadatku).

Konačno, na temelju ova dva zadatka može se zaključiti da sudionici uglavnom nemaju iskustva u rješavanju zadataka s više od jednog rješenja, u radu s jednakokračnim trokutom crtaju standardni oblik šiljastokutnog trokuta s osnovicom u horizontalnom položaju, što prilično sužava njihovu konceptualnu sliku, a time i uspješnost rješavanja problemskih zadataka, posebno onih koji uključuju druge mogućnosti. Neosporno je da se tijekom intervencije treba posvetiti pozornost zadacima s više rješenja te pri ispitivanju slučajeva koristiti različite vrste i položaje vizualnih prikaza kako bi se osobna slika koncepata sudionika i njihovo iskustvo rješavanja problema upotpunili.

U tablici 19 dana je distribucija odgovora pri određivanju ploštine sličnog kvadrata (G4.4). Posebno su izdvojeni rezultati pri određivanju duljine stranice zadanog kvadrata ('Stranica od A'), posebno pri računanju ploštine sličnog kvadrata ('Ploština od B') te posebno za korištenje vizualnog prikaza u procesu rješavanja ('Slika'). Kroz dodatnu kvalitativnu analizu uključene su i njihove kombinacije.

Tablica 19. Distribucija odgovora pri određivanju ploštine sličnog kvadrata

G4.4	Eksperimentalna grupa (N = 52)						Kontrolna grupa (N = 34)					
	Točno (1)		Pogrešno (0)		Prazno (-)		Točno (1)		Pogrešno (0)		Prazno (-)	
	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%
Stranica od A	31	59,62	10	19,23	11	21,15	17	50,00	2	5,88	15	44,12
Ploština od B	33	63,46	15	28,85	4	7,69	18	52,94	6	17,65	10	29,41
Slika	9	17,31	19	36,54	24	46,15	4	11,76	7	20,59	23	67,65

Određivanju ploštine sličnog kvadrata (G4.4): Prema rezultatima iz Tablice 19, može se uočiti da je nešto više od polovine sudionika (63,46% u E; 52,94% u K) korektno odredilo ploštinu sličnog kvadrata B. U procesu određivanja tražene ploštine, sudionici su koristili ili čisto analitički pristup (40,38% u E; 41,18% u K) ili vizualno-analitički (53,85% u E; 32,35% u K) u obje grupe. Međutim, u oba pristupa bilo je raznih teškoća. Nitko nije koristio mogućnost samo vizualnog zaključivanja.

Od onih koji su koristili čisto analitički pristup, oko tri četvrtine njih uspješno je došlo do točnog rješenja (14 od 21 ili 66,67% u E; 11 od 14 ili 78,57% u K), provodeći čisto školsku proceduru. Ostala četvrtina uglavnom je koristila krive formule za ploštinu kvadrata ($P_A=2a$, $P_A=4a$, $P_A=a^4$, $P_A=\frac{a\cdot b}{2}$, $P_B=a^2\cdot a^2$) ili krivi zaključak da je ploština kvadrata *B* dvostruko veća od ploštine kvadrata *A*. U prvih je vidljivo konceptualno nerazumijevanje površine, a u drugih pogrešno uspostavljanje veze između ploština sličnih kvadrata.

Oni koji su koristili vizualno-analitički pristup, iskoristivost vizualnog prikaza za dobivanje točnog rješenja bio je vrlo mali, u obje grupe. U eksperimentalnoj grupi, od onih koji su koristili vizualni prikaz (28 od 52 ili 53,85%), do točnog rješenja je došlo 19 od 28 ili 67,86% sudionika, ali korist od slike imalo je samo 6 od 19 ili 31,58% sudionika. Drugim riječima, tek otprilike trećina od polovine sudionika uspješno se služi vizualnim prikazom, odnosno 17,31% svih sudionika u grupi. Slično tome, u kontrolnoj grupi, od onih koji su koristili vizualni prikaz (11 od 34 ili 32,35%), do točnog rješenja je došlo 7 od 11 ili 63,64% sudionika, ali korist od slike imalo je samo 4 od 7 ili 57,14% sudionika. Drugim riječima, otprilike polovina od trećine sudionika uspješno se služi vizualnim prikazom, odnosno 11,76% svih sudionika u grupi. Uvidom u proces rješavanja ovog zadatka, uočava se kako sudionici zapravo crtaju dva odvojena kvadrata, gotovo jednakih veličina te naznačuju duljine njihovih stranica sa a i b, a zatim ulaze u račun neovisno o njima. Oni koji su uspješno koristili slike, za duljine stranica nacrtanih kvadrata naznačili su 2cm i 4cm pa je račun direktno slijedio sliku.

Konačno, sudionici su skloni korištenju formula i numeričkog izračunavanja svih elemenata, ali mnogi od njih nemaju konceptualno razumijevanje korištenih formula zbog čega nisu u mogućnosti uspostaviti vezu među objektima. Dio njih služi se vizualnim prikazom, ali vrlo površno i bez uspostavljanja veze među slikama. Predstavljeni rezultati ukazuju na potrebu da tijekom intervencije sudionici iskuse izgradnju odgovarajućih formula radi jačanja konceptualnog razumijevanja te dodatno porade na uspostavljanju veze među sličnim likovima: vizualno, analitički i algebarski.

U Tablici 20 prikazana je distribucija odgovora pri rješavanju problemskog zadatka vezanog za popločavanje površine (G4.5). Odgovori sudionika razmatrani su kroz četiri kategorije: korištenje mjernih jedinica ('M. jedinice'), izračunavanje međurezultata ('Međurezultati'), određivanje ukupnog broja pločica potrebnih za popločavanje ('Broj pločica') te korištenje vizualnog prikaza u procesu rješavanja (Tablica 20), a kroz dodatnu kvalitativnu analizu razmatraju se i njihove veze.

Tablica 20. Distribucija odgovora pri popločavanju površine hodnika

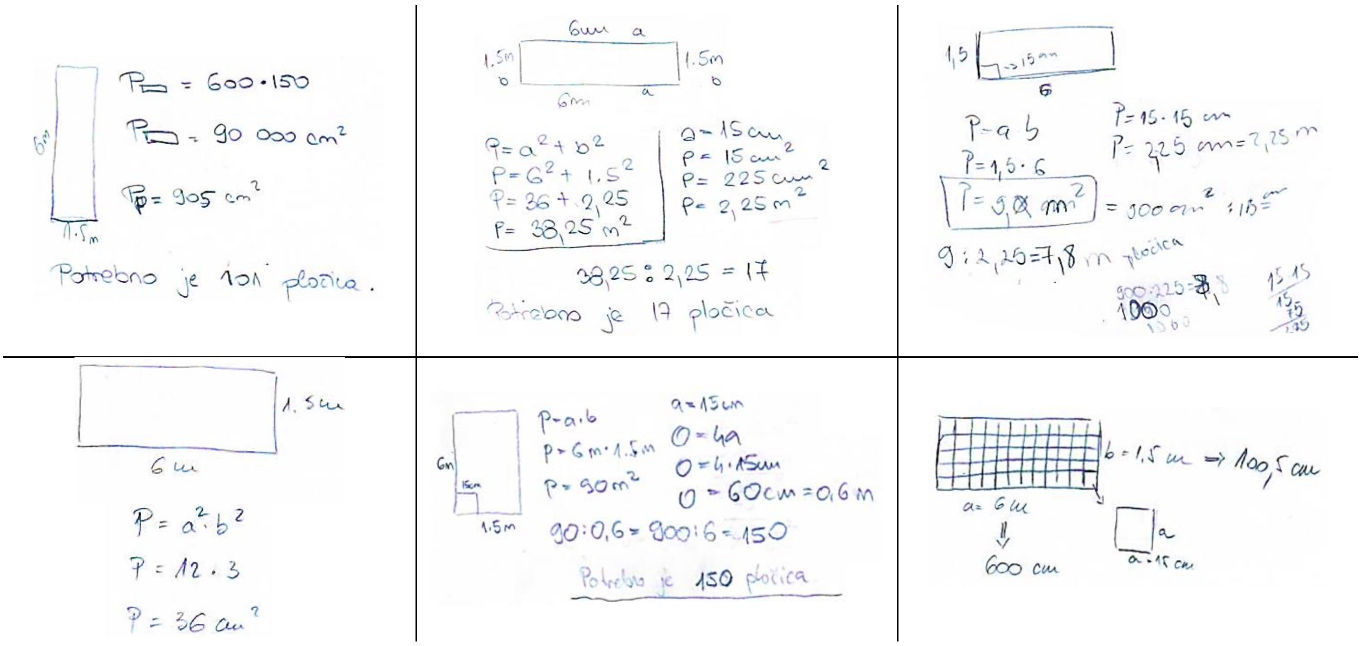
G4.5	Eksperimentalna grupa (N = 52)						Kontrolna grupa (N = 34)					
	Točno (1)		Pogrešno (0)		Prazno (-)		Točno (1)		Pogrešno (0)		Prazno (-)	
	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%
Slika	28	53,85	17	32,69	7	13,46	15	44,12	10	29,41	9	26,47
M. jedinice	22	42,31	15	28,85	15	28,85	7	20,59	14	41,18	13	38,24
Međurezultati	17	32,69	19	36,54	16	30,77	7	20,59	10	29,41	17	50,00
Broj pločica	6	11,54	20	38,46	26	50,00	3	8,82	8	23,53	23	67,65

Popločavanje površine hodnika (G4.5): Sudionici obiju grupa bili su prilično neuspješni u određivanju ukupnog broja pločica potrebnih za popločavanje hodnika pravokutnog oblika (kolona 'Broj pločica'). U eksperimentalnoj grupi, od 90,38% (47 od 52) sudionika koji su se bavili ovim problemom, uspješno je bilo 12,77% (6 od 47), odnosno na razini grupe tek je 11,54% (6 od 52) odredilo točan broj pločica. U kontrolnoj grupi, od 79,41% (27 od 34) sudionika koji su se bavili ovim problemom, uspješno je bilo 11,11% (3 od 27), odnosno na razini grupe samo je 8,82% (3 od 34) odredilo točan broj pločica. Analizom procesa rješavanja sudionika otkrivaju su brojni uzroci tako slabe riješenosti ove vrste problema: (1) u fazi razumijevanja problema uočavaju su slabe vještine vizualizacije ('Slika') te problem operiranja s mjernim jedinicama ('M. jedinice'); (2) faza planiranja kao da ne postoji s obzirom da većina odmah poseže za formulama; (3) u fazi računanja do izražaja dolaze brojni problemi operiranja s decimalnim brojevima ('Međurezultati'); (4) a faza osvrta gotovo kao i da ne postoji jer oni prihvaćaju sve moguće (među)rezultate dobivene računom.

(1) Faza razumijevanja problema: Visok postotak sudionika proces rješavanja započeo je skicom (45 od 52, 86,54% u E; 25 od 34, 73,53% u K) te isticanjem zadanih mjera, ali nisu sve skice bile svrhovite (kolona 'Pogrešno') niti su sve dobro oblikovane skice (kolona 'Točno') vodile prema rješenju. Naime, u nekih je skica bila jedina ili svrha sama sebi. U onih koji su na skici uspostavili vezu između slike hodnika i slike pločice (28 od 45, 62,22% u E; 15 od 25, 60% u K), tek desetak posto ih je uspješno došlo do krajnjeg rezultata (6 od 45, 13,33% u E; 3 od 25, 12% u K). Dio njih je stao odmah nakon crtanja skice, dio ih je imalo problema s pretvaranjem mjernih jedinica (Npr. $15cm = 1{,}5m$; $15cm = 0{,}015m$; $1{,}5m = 100{,}5cm$ i dr.), a veći dio njih je posegnuo za formulom za površinu pravokutnika i kvadrata, među kojima je bilo dosta pogrešnih (Npr. $P = (a \cdot b) : 2$; $P = 2ab$; $P = a^2 \cdot b^2$; $P = a^2 + b^2$; $P = 4a^2$ i dr.).

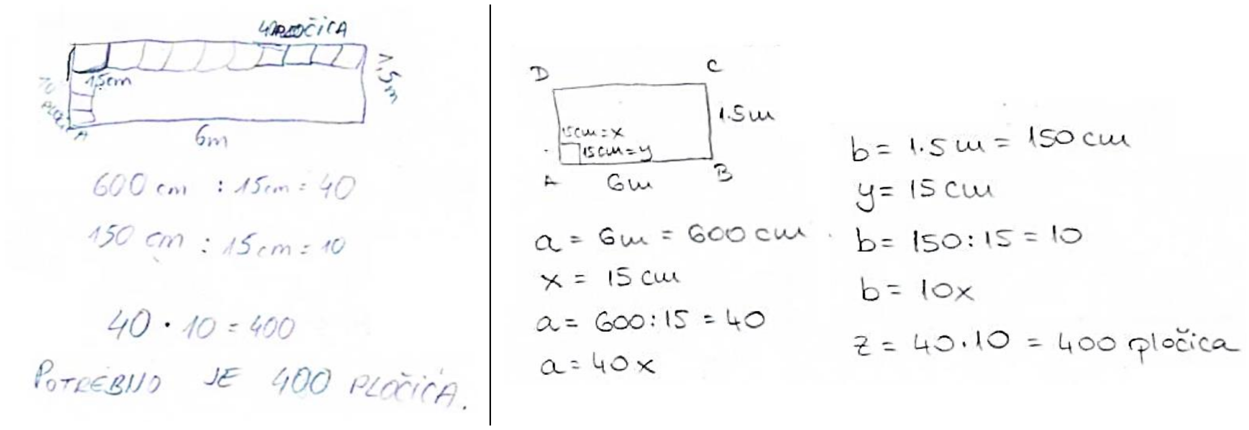
(2) Faza planiranja: Prema načinu rješavanja ovog problema, sudionici vjerojatno nemaju većeg iskustva s problemima popločavanja, jer je većina odmah posegnula za formulom, vjerojatno s idejom da broj pločica potrebnih za popločavanje odrede dijeljenjem ploštine hodnika s ploštinom pločice. Naime, pri popločavanju površine ključno je strukturiranje površine te prebrojavanje ukupnog broja strukturnih elemenata unutar cjeline. Ali, u ovom slučaju, do točnog rješenja se može doći i dijeljenjem ploština hodnika i pločice ($P_{hodnika} : P_{pločice} = 90000cm^2 : 225cm^2 = 400$) jer se popločavanjem zadanog hodnika pločicama zadanog oblika ne stvara ni manjak ni višak, niti praznine među njima. Međutim, metoda dijeljenjem ploština nije korektna u slučajevima kada ti uvjeti nisu ispunjeni.

(3) Faza računanja: Kroz operiranje s formulama i brojevima uočavaju su brojni problemi sudionika: i proceduralni i konceptualni. Naime, dio sudionika je korektno odredilo ploštinu hodnika i/ili pločice, ali su imali problema s usklađivanjem mjernih jedinica (npr. $P_{hodnika} = 9m^2 = 900cm^2$; $P_{pločice} = 225cm^2 = 22500m^2$ i dr.), posebno što su neki za mjernu jedinicu ploštine koristili mjernu jedinicu duljine (npr. $P_{pločice} = 225cm = 0,225m$ i dr.). No, dio sudionika nije uspješno odredilo ploštine zbog problema s množenjem brojeva (npr. $6 \cdot 1.5 = 6.5$; $6 \cdot 1.5 = 8$, $15 \cdot 15 = 905$ i dr.), a problem se povećavao i pri dijeljenju brojeva u svrhu određivanja broja pločica (npr. $90000 : 905 = 101$ pločica; $900 : 125 = 8$ pločica; $9 : 2.25 = 7.8$ pločica i dr.). Osim navedenih proceduralnih problem, mogu se uočiti i mnogi konceptualni problemi sudionika. Prije svega, odabir krive formule govori o nerazumijevanju koncepta površine i pravokutnika i kvadrata. Pored toga, dio sudionika je umjesto formule za ploštinu koristio formulu za opseg (npr. $P = 2a + 2b$) što ukazuje i na problem brkanja tih dvaju koncepata, a neki su ploštine oduzeli umjesto dijelili. Nadalje, uočava se nerazumijevanje koncepta dijeljenja (npr. ploštinu hodnika dijeli duljinom pločice, $9m^2 : 0,15cm = 60\,pločica$; ili ploštinu hodnika dijeli opsegom pločice, $90m^2 : 0,6m = 150\,pločica$ i dr.; Slika 119). Među onima koji su računali međurezultate (36 od 52, 69,23% u E; 17 od 34, 50% u K) tek manji broj je korektno odredio ploštinu hodnika (10 od 36, 27,78% u E i 3 od 17, 17,65% u K), ali nitko od njih nije dijeljenjem ploština korektno odredio traženi broj pločica, upravo zbog prethodno opisanih problema.



Slika 119. Primjeri nekorektnog procesa rješavanja

Bilo je i sudionika koji su broj pločica određivali strukturiranjem i prebrojavanjem pločica po duljini i širini hodnika (9 od 52, 17,31% u E; 14 od 34, 41,18% u K), ali su i oni do konačnog rezultata imali raznih prepreka. Naime, neki su međurezultate zbrojili (npr. $40 + 10 = 50\,pločica$), neki su zbrojili duljinu i širinu hodnika pa dijelili s duljinom stranice pločice (npr. $750cm:15cm = 50\,pločica$), neki su odredili broj pločica po duljini, ali su međurezultat uzeli kao konačan rezultat (npr. $600cm:15cm = 40\,pločica$), neki su analognim zaključivanja došli do pogrešnog odgovora zbog pogrešne pretpostavke (npr. za 1m treba 10 pločica, pa za 6m treba 60 pločica) itd. Ipak, jedina korektna rješenja ('Broj pločica') dobivena su isključivo strukturiranjem, prebrojavanjem broja pločica po duljini i po širini te njihovim množenjem: $40 \cdot 10 = 400\,pločica$ (Slika 120).



Slika 120. Primjeri korektnog rješenja strukturiranjem

(4) Osvrt: Opisani problemi u prethodnim fazama doveli su do raznih rješenja za ukupan broj pločica, ali njima dobiveni broj nije predstavljao nikakav problem. Na primjer, nisu se pitali mogu li zaista 4 kvadratne pločice duljine 15cm prekriti površinu duljine 6m i širine 1,5m, jednako kao ni oni koji su za rezultat dobili 7.8 pločica ili 8 pločica ili 400 000 pločica. Uočava se da je većini sudionika bitno doći do nekog konkretnog broja, nakon čega njihov proces rješavanja završava, a dobiveni broj prihvaćaju kao konačno rješenje, bez obzira radi li se o međurezultatu ili nesuvislom rezultatu. Iako se radi o problemu popločavanja u svakodnevnom životu, njima nije sporno napisati bilo koji broj za rezultat jer ne vrše procjenu niti koriste životno iskustvo.

Konačno, kroz opisani problem uočava se da sudionici nemaju vještinu strukturiranja, da su slabi u operiranju s različitim mjernim jedinicama (bilo za istu veličinu ili za različite veličine), ali i u operiranju s decimalnim brojevima, da slabo razumiju koncept dijeljenja dviju veličina te koncept ploštine, kojeg brkaju s konceptom opsega. Neosporno je da se tijekom intervencije treba baviti i problemom strukturiranja u svrhu mjerenja (duljina, ploština) te raditi na razvijanju konceptualnog razumijevanja formula za određivanje opsega i ploštine geometrijskih objekata različitih dimenzija (1D, 2D, 3D).

Preostala tri problema spadaju u geometriju prostora i među najslabije riješene probleme, što zajedno s prethodno opisanim prostornim problemima ukazuje na slabije razvijene prostorne sposobnosti, ali i trodimenzionalno geometrijsko mišljenje.

U Tablici 21. dana je distribucija odgovora pri određivanju oplošja i volumena kvadra prikazanog na slici te korektno određivanje mjernih jedinica na temelju istaknutih jedinica za duljinu, širinu i visinu kvadra (zadatak G4.6).

Tablica 21. Distribucija odgovora pri određivanju oplošja i volumena kvadra

G4.6	Eksperimentalna grupa (N = 52)						Kontrolna grupa (N = 34)					
	Točno (1)		Pogrešno (0)		Prazno (-)		Točno (1)		Pogrešno (0)		Prazno (-)	
	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%
Volumen	20	38,46	8	15,38	24	46,15	8	23,53	2	5,88	24	70,59
Oplošje	1	1,92	13	25,00	38	73,08	2	5,88	7	20,59	25	73,53
M. jedinica	6	11,54	19	36,54	27	51,92	4	11,76	5	14,71	25	73,53

Oplošje i volumen kvadra (G4.6): Prema prikazanim rezultatima u Tablici 21, uz vrlo slabu riješenost (kolona 'Točno'), uočava se da je puno veći postotak onih koji nisu dali odgovor na pitanje (kolona 'Prazno') od onih koji imaju pogrešan rezultat (kolona 'Pogrešno'), što posebno iznenađuje s obzirom da se radi o elementarnom konceptu geometrije prostora (oplošje i volumen kvadra). Također, iznenađuje pogrešno i slabo isticanje mjernih jedinica jer je prirodno istaknuti mjernu jedinicu oplošja i volumena kada je istaknuta mjerna jedinica duljina bridova. Sva tri korektna elementa imao je samo jedan sudionik u kontrolnoj grupi te korektno oplošje i volumen bez mjerne jedinice samo jedan sudionik u eksperimentalnoj grupi.

Za one sudionike koji su volumen određivali množenjem istaknutih veličina na slici (38,46% u E; 23,53% u K), prema mjernim jedinicama koje su pisali (72, $72cm$, $72cm^2$, $72cm^3$) ne može se sa sigurnošću reći da svi oni razumiju koncept volumena. No, bilo je i nekoliko pogrešnih formula ($V=\frac{abc}{2}$, $V=\frac{ab}{c}$). U određivanju oplošja bili su prilično neuspješni (1,92% u E; 5,88% u K), uz puno više konceptualnog nerazumijevanja: brkanje oplošja i volumena ($O=B\cdot v$), brkanje oplošja i opsega ($O=2(2a+2b)+2(2a+2c)+2(2b+2c)$; $O=a+b+c$), nepotpuno računanje ploština ploha i dr. Mjerne jedinice uglavnom nisu pisali, a ako i jesu, onda o njima nisu puno vodili računa, kao da su ih samo automatski pridružili na kraju.

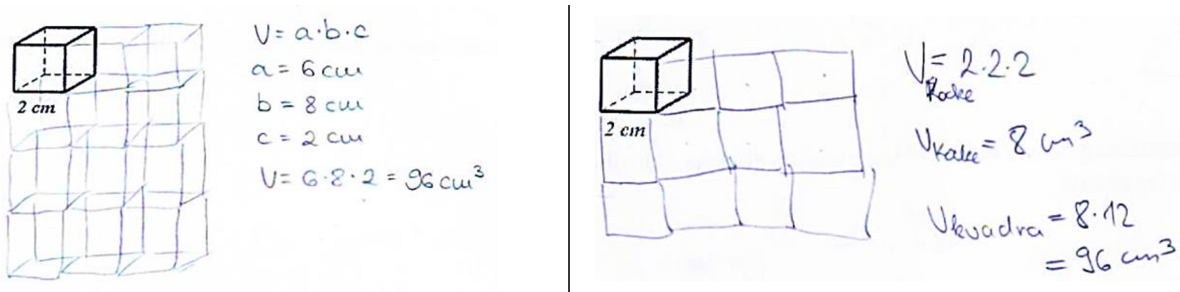
Konačno, sudionici se prilično slabo služe slikom pri određivanju volumena, a još slabije pri određivanju oplošja kvadra te su jako vezani uz formulu. Izuzetno slabo vladaju konceptom volumena i oplošja, kao i njihovim mjernim jedinicama pa tome potrebno posvetiti više pozornosti tijekom intervencije.

U Tablici 22. dana je distribucija odgovora pri određivanju volumena kvadra izgrađenog od 12 jednakih kocaka (G4.7). S obzirom da se volumen mogao odrediti posredno preko volumena kocke, direktno množenjem duljina bridova kvadra te crtanjem vizualnog prikaza, razmatraju se sve tri kategorije.

Tablica 22. Distribucija odgovora pri određivanju volumena kvadra

G4.7	Eksperimentalna grupa (N = 52)						Kontrolna grupa (N = 34)					
	Točno (1)		Pogrešno (0)		Prazno (-)		Točno (1)		Pogrešno (0)		Prazno (-)	
	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%
V (kocke)	3	5,77	3	5,77	46	88,46	2	5,88	2	5,88	30	88,24
V (kvadra)	2	3,85	7	13,46	43	82,69	2	5,88	1	2,94	31	91,18
Slika	1	1,92	3	5,77	48	92,31	0	0,00	1	2,94	33	97,06

Volumen kvadra izgrađenog od kocaka (G4.7): Prema rezultatima u Tablici 22. uočava se veliki postotak neodgovaranja na ovo pitanje: bez ikakvog odgovora bilo je 39 od 52 (75%) sudionika u eksperimentalnoj grupi i 29 od 34 (85,29%) sudionika u kontrolnoj grupi. Dio tog postotka zasigurno je zbog neznanja, a moguće i nedostatka vremena, ali dio njih je volumen u prethodnom zadatku korektno odredilo, dio ih je odgovaralo i na posljednje pitanje pa je teško utvrditi stvarni uzrok njihovog neodgovaranja. Među onima koji su rješavali problem, više ih je radilo na izgradnji kvadra različitih dimenzija, većim dijelom uz vizualni prikaz, međutim samo jedan sudionik je iz eksperimentalne grupe na takav način došao do korektnog rješenja (Slika 121). U kontrolnoj je grupi dvoje sudionika korektno odredilo volumen kvadra direktnim množenjem volumena kocke s 12, a jednom je slika služila kao jedna vrsta provjere da se 12 kocaka može posložiti tako da dimenzije kvadra budu različite (Slika 121).



Rad iz E | Rad iz K

Slika 121. Korektno određivanje volumena kvadra

Konačno, uz prethodno uočene probleme oko nerazumijevanja koncepta volumena, sudionici u ovom zadatku nisu uočili postojanost volumena pri izgradnji kvadra jednakim kockama. Osim toga, sudionici najčešće nastoje iskoristi sve zadane elemente u procesu rješavanja problema. Prema opisanim rezultatima vidljivo je da se tijekom intervencije pozornost treba dati i primjerima u kojima do izražaja dolazi postojanost volumena, ali i zadacima s viškom elemenata kako bi sudionici stekli iskustvo izdvajanja onih elemenata koji su potrebni za određivanje rješenja.

U Tablici 23. dana je distribucija odgovora posljednjeg problemskog zadatka (G4.8), u kojem je trebalo usporediti volumene dvaju valjaka nastalih rotacijom listova papira jednakih dimenzija. Posebno se razmatra samo odgovor sudionika (volumeni su različiti u koloni 'Točno' i volumeni su jednaki u koloni 'Pogrešno'), a posebno argument kojim opravdavaju svoj odgovor. S obzirom da su svi argumenti bili pogrešni, kolona 'Djelomično' je izostavljena iz razmatranja.

Tablica 23. Distribucija odgovora pri uspoređivanju volumena valjaka

G4.8	Eksperimentalna grupa (N = 52)						Kontrolna grupa (N = 34)					
	Točno (1)		Pogrešno (0)		Prazno (-)		Točno (1)		Pogrešno (0)		Prazno (-)	
	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%
Odgovor	4	7,69	36	69,23	12	23,08	2	5,88	13	38,24	19	55,88
Argument	0	0,00	38	73,08	14	26,92	0	0,00	10	29,41	24	70,59

Volumeni šupljih valjaka (G4.8): Prema rezultatima u Tablici 23. vidljivo je da preko 55,88% (19 od 34) sudionika u kontrolnoj grupi nije dalo nikakav odgovor, dok je u eksperimentalnoj grupi njih 76,92% (40 od 52) ipak pokušalo dati odgovor. Međutim, oni u manjini (7,69% u E i 5,88% u K) koji su smatrali da su volumeni različiti imali su gotovo jednak argument kao i dio onih koji su smatrali da su volumeni jednaki. Naime, prvi zaključuju: *Volumeni su različiti jer se volumen mijenja kad se promijeni oblik*, dok drugi smatraju: *Volumeni su jednaki iako su drugog oblika jer je jedan valjak širi i niži, a drugi je uži i viši*. Ipak, većina onih koji smatraju da su volumeni jednaki svoj argument temelje na dimenzijama papira: *Volumeni su jednaki jer su papiri jednakih dimenzija* (28 od 38, 73,68% u E; 9 od 10, 90% u K). Nitko od sudionika nije posegnuo za formulom radi numeričkog određivanja volumena nastalih valjaka, vjerojatno jer im je njihov zaključak izgledao prilično suvislo, a svoj sud kao da su donijeli odmah, bez okolišanja.

Konačno, ovaj rezultat pokazuje da sudionici nemaju iskustva s rotacijskim tijelima niti su u mogućnosti uspostaviti kvalitetnu vezu između dvodimenzionalnog lika i trodimenzionalnog tijela koje nastaje njegovim savijanjem. S obzirom na uočeni problem, dio vremena tijekom intervencije zasigurno treba posvetiti stvaranju i opisivanju rotacijskih tijela.

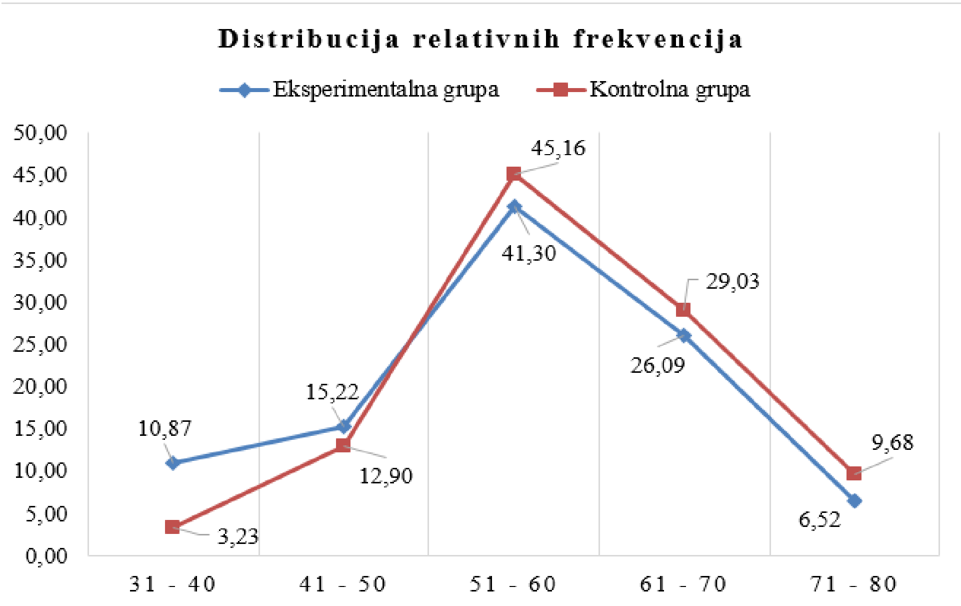
Odgovor na 2. pitanje: Na temelju svih rezultata dobivenih na GEO testu prije početka učenja geometrije može se zaključiti da svi sudionici (i u eksperimentalnoj i u kontrolnoj grupi) imaju vrlo slaba predznanja o odabranim geometrijskih pojmovima. U radu se koriste vizualizacijom, iako su njihove vještine stvaranja i čitanja vizualnih prikaza prilično nerazvijene. U radu s pojmovima, nad formalnim definicijama dominiraju njihove konceptualne slike, koje su sužene i nepotpune te većim dijelom vezane za prototipne vizualne prikaze. U procesu rješavanja problema, uglavnom bez potpunog razumijevanja i plana rješavanja, teže što prije doći do rezultata, kojeg najčešće ne provjeravaju.

Zbog svega uočenog, postavlja se zahtjev da se tijekom intervencije sudionici uključe u proces definiranja geometrijskih pojmova, postavljanja tvrdnji i argumentiranja u VOS sustavu: opisivanjem (u govoru i pismu), vizualnim prikazivanjem (crtežima, artefaktima i realnim objektima) te simboličkim zapisivanjem. Također, sudionike treba upoznati s procesom rješavanja problema kroz četiri faze prema Polya te omogućiti rješavanje različitih vrsta problema: s više rješenja i načina rješavanja, te posebnu pozornost posvetiti konceptualnim zadacima i zadacima s višim kognitivnim zahtjevima.

U Geo testu nisu bili zadaci s dokazivanjem tvrdnji, ali prema rezultatima VH testa jasno je da sudionici još nisu spremni za proces dokazivanja na formalnoj razini, što znači da u početnoj fazi intervencije tom procesu treba pristupiti najprije kroz druge oblike: uočavanjem, otkrivanjem, opisivanjem i argumentiranjem uočenog te postupnim uvođenjem u formalno dokazivanje, sve temeljeno na VOS sustavu.

6.3. Karakteristike sudionika na početku prema SPAC testu

SPAC test u eksperimentalnoj grupi ukupno je pisalo 46 od 52 sudionika (88,46%), a u kontrolnoj grupi 31 od 38 sudionika (81,58%). S obzirom da je maksimalan broj bodova na testu 80, a ukupan broj sudionika koji su pisali test je 77, distribucija relativnih frekvencija napravljena je po razredima jednakih duljina. Kako nitko od sudionika nije ima manje od 30 bodova na SPAC testu, ukupno je formirano pet razreda jednakih duljina: 31 – 40, 41 – 50, 51 – 60, 61 – 70, 71 – 80. Na Slici 122 prikazana je distribucija relativnih frekvencija po grupama. Na horizontalnoj osi nalaze se razredi relativnih frekvencija, a na vertikalnoj osi su postignuća iskazana relativnim frekvencijama.



Slika 122. Distribucija relativnih frekvencija SPAC testa

Prema danim grafovima distribucije vidljivo je da su grupe i po vizualno-prostornim sposobnostima vezanima za zamišljanje savijanja mreža u svrhu dobivanja odgovarajućeg geometrijskog tijela prilično ujednačene te da su sudionici kontrolne grupe bili nešto uspješniji u odnosu na sudionike eksperimentalne grupe. Također, njihova raspodjela gotovo prati normalnu raspodjelu s pomakom udesno jer se 89,13% (41 od 46) sudionika eksperimentalne grupe i 96,77% (30 od 31) sudionika kontrolne grupe nalazi u gornjoj polovici postignuća.

Prema prikazanim rezultatima može se zaključiti da većina sudionika obiju grupa posjeduju vizualno-prostorne sposobnosti kojima bez teškoća mogu savladati geometrijske sadržaje, koji se oslanjaju na te sposobnosti. Ipak, tijekom intervencije treba osigurati okruženje za razvoj vizualno-prostornih sposobnosti u kontekstu geometrije. Ovim se upotpunjuje odgovor na 2. pitanje.

6.4. Razlike između eksperimentalne i kontrolne grupe prije intervencije

Nakon što su utvrđene karakteristike sudionika eksperimentalne i kontrolne skupine analizom rezultata triju testova: VH testa o razinama geometrijskog mišljenja, GEO testa o geometrijskom predznanju i vještinama vizualizacije te SAPC testa o vizualno-prostornim sposobnostima, proveden je t-test s ciljem utvrđivanja statističke značajnosti razlike između ovih dviju skupina prije intervencije. Zbog specifičnosti vrednovanja VH testa (VH3 - ukupno ostvareni bodovi; CVH3, MVH3, CVH4, MVH4 – bodovi raspodjele po razinama prema različitim kriterijima), statistička značajnost razlike t-testom razmatra se za svaki od tih načina vrednovanja VH testa. Rezultati t-testa prikazani su u Tablici 24.

Tablica 24. Rezultati t-testa za eksperimentalnu i kontrolnu skupinu prije intervencije

	Eksperimentalna grupa			Kontrolna grupa			t-test		
Mjerenje	N	M	SD	N	M	SD	t	df	p
1VH3	46	5,870	5,898	34	5,559	5,004	,248	78	,805
1CVH3	40	2,225	,768	29	2,103	,817	,632	67	,530
1CVH4	37	1,486	,768	30	1,567	,679	-,447	65	,656
1MVH3	43	2,163	,688	30	2,067	,828	,540	71	,591
1MVH4	38	1,500	,762	31	1,548	,675	-,276	67	,783
1GEO	52	5,962	2,368	34	5,676	2,889	,500	84	,618
1SPAC	46	55,609	10,697	31	58,419	9,113	-1,198	75	,235

Prema podacima prikazanima u Tablici 24, vidljivo je da ne postoji statistički značajna razlika između grupa ($p > 0,05$), niti u raspodjeli po van Hieleovim razinama, niti u predznanju iz geometrije te vještinama vizualizacije, niti u vizualno-prostornim sposobnostima. Također, može se uočiti da su po nekim parametrima srednje vrijednosti kontrolne grupe nešto bolje u odnosu na srednje vrijednosti eksperimentalne grupe: za 1CVH4, 1MVH4 i 1SPAC.

Rezultati navedeni u Tablici 6.25 ukazuju da su grupe prilično ujednačene prije početka poučavanja te su usporedive po svim parametrima. Stoga su na početku istraživanja ove dvije grupe uzete kao homogena cjelina u svrhu ispitivanja korelacija između testova. Provedena su dva testa korelacije (Spearman i Pearson) i oba su ukazala na postojanje statistički značajnih korelacija. S obzirom da je uzorak manji (N < 100), u Tablici 25. prikazuju se rezultati Spearmanovog testa korelacije među tri opisana testa (VH, GEO i SPAC). I pri ispitivanju korelacija među testovima također su uzete u obzir specifičnosti vrednovanja VH testa te je korelacija promatrana za sve načine vrednovanja VH testa: VH3 i VH4 - ukupni bodovi po blažem i strižem kriteriju te CVH3, MVH3, CVH4, MVH4 - bodovi raspodjele po razinama prema različitim kriterijima (str. 108).

Tablica 25. Spearmanov koeficijent korelacije među tri opisana testa

	1VH3	1CVH3	1MVH3	1VH4	1CVH4	1MVH4	1GEO	1SPAC
1VH3	-	$1{,}000^{**}$	$,788^{**}$	$,599^{**}$	$,487^{**}$	$,459^{**}$	$,384^{**}$	$,235^{*}$
1CVH3		-	$1{,}000^{**}$	$,591^{**}$	$,572^{**}$	$,572^{**}$	$,566^{**}$	$,414^{**}$
1MVH3			-	$,514^{**}$	$,574^{**}$	$,578^{**}$	$,579^{**}$	$,425^{**}$
1VH4				-	$1{,}000^{**}$	$,937^{**}$	$,242^{*}$	$,299^{**}$
1CVH4					-	$1{,}000^{**}$	$,345^{**}$	$,353^{**}$
1MVH4						-	$,339^{**}$	$,369^{**}$
1GEO							-	$,420^{**}$
1SPAC								-

Oznaka * uz vrijednost relativne frekvencije podrazumijeva razinu signifikantnosti od 5%, tj. da je korelacija statistički značajna za p < 0,05. Oznaka ** podrazumijeva razinu signifikantnosti od 1%, odnosno korelaciju koja je statistički značajna za p < 0,01.

Prema podacima prikazanima u Tablici 25. vidljivo je da su svi testovi u pozitivnoj korelaciji koja je statistički značajna. Pozitivna korelacija između GEO testa i SPAC testa (0,420**, $p < 0{,}01$) ukazuje na to da se razvojem vizualno-prostornih sposobnosti potencijalno može poboljšati i geometrijsko znanje, ali i odgovarajućim načinom učenja geometrije mogu se razviti i vizualno-prostorne sposobnosti. Slično tome, pozitivna korelacija između VH testa i SPAC testa, posebno za raspodjelu razina (1CVH3: 0,414**, $p < 0{,}01$; 1MVH3: 0,425**, $p < 0{,}01$) ukazuje na važnost vizualno-prostornih sposobnosti u procesu razvoja geometrijskog mišljenja i obratno. Postoji potencijalna mogućnost da se u odgovarajućem okruženju i procesu razvoja geometrijskog mišljenja mogu razvijati i vizualno-prostorne sposobnosti. Ovim se dodatno ostvaruje uporište u potencijal planiranog alternativnog pristupa poučavanja tijekom intervencije, u kojem je naglasak stavljen upravo na razvoju vještina vizualizacije kroz vizualno-analitičku metodu usmjerenog opažanja.

Konačno, pozitivna korelacija između GEO testa i VH testa, posebno za raspodjelu razina (1CVH3: 0,566**, $p < 0{,}01$; 1MVH3: 0,579**, $p < 0{,}01$) ukazuje na važnost razvoja geometrijskog mišljenja pri učenju geometrijskih ideja i koncepata, ali i da učenje geometrijskih koncepta i ideja s većom jasnoćom i razumijevanjem može doprinijeti i razvoju geometrijskog mišljenja. Ovo je jasan pokazatelj da se učenje i poučavanje geometrije treba ostvarivati kroz razvoj za geometriju važnih procesa, među kojima se posebno ističu: strukturiranje, crtanje, konstruiranje, definiranje, tvrđenje, argumentiranje i dokazivanje te postupno rješavanje problema.

Također, iz prvog dijela Tablice 25. i korelacija među pojedinim oblicima prikazivanja VH testa, zanimljivo je uočiti da je slabija korelacija između blažeg i strožeg kriterija nego između istih kriterija (između dva blaža ili između dva stroža). Na primjer, korelacija između 1VH3 i 1MVH4 je 0,459**, $p < 0{,}01$, dok je korelacija između 1VH3 i 1MVH3 je 0,788**, $p < 0{,}01$. To je u skladu sa zapažanjima koja su opisana u prvom dijelu analize VH testa po različitim kriterijima (str. 147): stroži kriterij isključi one koji su nestabilni u mišljenju te se slika o grupi prilično promijeni.

Odgovor na 3. pitanje: Prema svim pokazateljima vidljivo je da postoji uzajamnost između razina geometrijskog mišljenja sudionika, njihovog geometrijskog predznanja i vještina vizualizacije te posebno vizualno-prostornih sposobnosti. To znači da se učenje geometrije i razvoj geometrijskog mišljenja može potpomoći jačanjem vještina vizualizacije u kontekstu geometrije, posebno vizualno-prostornih sposobnosti koje su važne u prostornoj geometriji. Također, učenjem geometrije na odgovarajući način može se utjecati na razvoj geometrijskog mišljenja, ali i razvoj vještina vizualizacije. Konačno, ostvarivanjem viših razina geometrijskog mišljenja osigurava se kvalitetnije i trajnije učenje geometrijskih koncepata, ali i veća iskoristivost vizualno-prostornih sposobnosti u kontekstu geometrije.

Odgovorima na prva tri pitanja osigurava se snažno uporište da planirani alternativni pristup poučavanja tijekom intervencije, uz razvoj vizualizacijskih sposobnosti i vještina može osigurati bolje ishode učenja geometrije i razvoj geometrijskog mišljenja, a time i bolju pripremljenost budućih učitelja za rad u razrednoj nastavi.

6.5. Pouzdanost korištenih testova

Pouzdanost korištenih testova ispitana je preko Cronbachovog alfa koeficijenta, koji mjeri unutarnju dosljednost (konzistentnost) mjernog instrumenta. S obzirom da je t-test pokazao da među sudionicima istraživanja prije intervencije ne postoji statistička značajna razlika, pouzdanost je ispitivana za svaki test na udruženim podacima za obje grupe (eksperimentalnu i kontrolnu).

Iako je VH test dizajniran za ispitivanje razina geometrijskog mišljenja srednjoškolskih učenika još 1982. (Usiskin, 1982), on se naširoko koristi za brzu snimku stanja na različitim populacijama te je procijenjeno da bi u tu svrhu bio prikladan i za uzorak obuhvaćen ovim istraživanjem. Statističkom analizom utvrđeno je da Cronbachov alfa koeficijent za korišteni VH test na promatranom uzorku iznosi 0,576. Iako je u novije vrijeme uvriježeno da se prihvatljivom pouzdanošću mjernog instrumenta smatraju rezultati Cronbachove alfe veće od 0,7, u skladu s tumačenjem Nunnally, ovaj koeficijent može biti pokazatelj zadovoljavajuće unutarnje konzistentnost, kada se uzmu u obzir karakteristike sudionika koje su opisane u analizi VH testa (str. 147), odnosno korišteni VH test se može smatrati pouzdanim mjernim instrumentom u ranim fazama istraživanja (Nunnally, 1967, 1978 prema Novak, 2020).

SPAC test je validirani psihologijski instrument koji se naširoko koristi za ispitivanje stupnja razvoja posebnog faktora vizualno-prostornih sposobnosti (Smith i Whetton, 1998). Naime, ako netko brzo i točno može stvoriti umnu sliku na temelju podražaja, onda će zasigurno brže i točnije moći provesti procese transformacije (obrade) i usporedbe u odnosu na one koji su manje sposobni u stvaranju umnih predodžbi. U skladu s tim, procijenjeno je da bi odabrani SPAC test bio prikladan instrument predviđanja za uzorak obuhvaćen ovim istraživanjem, s obzirom da se dio kolegija bavi prostornom geometrijom. Statističkom analizom utvrđeno je da Cronbachov alfa koeficijent za korišteni SPAC test iznosi 0,754, što znači da može biti prilično visoko pouzdan (Taber, 2018 prema Novak, 2020) u predviđanju uspjeha učenja, posebno geometrije prostora.

Konačno, na uzorku obuhvaćenim ovim istraživanjem ispitana je pouzdanost i GEO testa, koji je u skladu s potrebama ovog istraživanja konstruiran za utvrđivanje posebnih geometrijskih predznanja i vještina vizualizacije u radu s geometrijskim konceptima. Statističkom analizom utvrđeno je da Cronbachov alfa koeficijent za korišteni GEO test iznosi 0,921, što znači da se ovim testom zaista pouzdano može mjeriti ono za što je namijenjen (Taber, 2018 prema Novak, 2020).

Prema svim predstavljenim rezultatima o provedenim testovima (VH, GEO i SPAC): ne postojanje statistički značajne razlike u postignućima među sudionicima neposredno prije intervencije, određena razina pouzdanosti korištenih testova te uvid u karakteristike sudionika kroz analizu podataka prikupljenih testovima, može se reći da oni jasno i pouzdano ukazuju na koji način bi trebalo prilagoditi poučavanje geometrije tijekom intervencije. Na temelju opisanih strategija i metoda poučavanja te planiranih nastavnih aktivnosti (str. 123) vidljivo je da se prilagodba poučavanja može provoditi kontinuirano tijekom cijelog obrazovnog razdoblja.

Ukratko, korišteni testovi se mogu smatrati pouzdanim mjernim instrumentima za uzorak obuhvaćen ovim istraživanjem: VH test je zadovoljavajuće unutarnje konzistentnosti, GEO test je zaista pouzdan i SPAC test je visoko pouzdan instrument (Novak, 2020).

6.6. Uspješnost poučavanja

Nakon 15 tjedana nastave (u što je uključeno i pred i post testiranje) unutar kojih je primijenjeno alternativno poučavanje u eksperimentalnoj grupi te uobičajeni način poučavanja u kontrolnoj grupi, ponovno su provedena sva tri testa kako bi se utvrdilo jesu li i u kojoj mjeri sudionici istraživanja napredovali u geometrijskom mišljenju, akumuliranom geometrijskom znanju i vještinama vizualizacije te u vizualno-prostornim sposobnostima. Posebno se ispitalo je li napredak statistički značajan unutar svake grupe, a zatim i među grupama (eksperimentalne i kontrolne).

Prirodno je očekivati da se nakon određenog obrazovnog razdoblja ostvari odgovarajući napredak, ako je uložen barem minimalan trud onih koji uče i onih koji poučavaju. No, ako se pri tome posebna pozornost posveti karakteristikama sudionika te poučavanje prilagodi njihovima predznanjima i vještinama, također je očekivano da napredak bude uočljiv. Međutim, osim očekivanog, nakon poučavanja željelo se ispitati je li razlika u postignućima na kraju i na početku zaista statistički značajna, kako unutar grupa tako i među grupama. U nastavku se prikazuju rezultati i vrši rasprava.

6.6.1. Usporedba postignuća unutar grupa prije i poslije poučavanja

U svrhu utvrđivanja statistički značajne razlike u postignućima unutar grupa prije i poslije poučavanja proveden je t-test. U Tablici 26. prikazani su rezultati usporedbe srednjih vrijednosti i standardne devijacije dobivenih t-testom za sva tri testa. S obzirom da se VH test vrednovao prema različitim kriterijima (str. 108), t-test je proveden za svakog od njih.

Tablica 26. Usporedba postignuća unutar grupa, prije i poslije

	Eksperimentalna grupa					Kontrolna grupa				
Mjerenja	M	SD	t	df	p	M	SD	t	df	p
2VH3 - 1VH3	3,976	7,914	-3,217	40	,003	-,194	8,154	,132	30	,896
2CVH3 - 1CVH3	,727	,876	-4,770	32	,000	-,381	,805	2,169	20	,042
2MVH3 - 1MVH3	,737	,795	-5,715	37	,000	-,348	,832	2,006	22	,057
2VH4 - 1VH4	1,951	3,794	-3,293	40	,002	-2,129	5,012	2,365	30	,025
2CVH4 - 1CVH4	,586	,983	-3,213	28	,003	-,375	,770	2,387	23	,026
2MVH4 - 1MVH4	,600	,969	-3,393	29	,002	-,400	,764	2,619	24	,015
2GEO - 1GEO	11,044	6,105	-12,136	44	,000	,548	5,078	-,601	30	,552
2SPAC - 1SPAC	4,415	7,253	-3,898	40	,000	1,192	8,203	,741	25	,465

Na temelju prikazanih rezultata može se uočiti da su u tretiranoj grupi rezultati po svim parametrima statistički značajno bolji uz signifikantnost od 1% ($p < .001$), dok se u kontrolnoj grupi rezultati nisu značajno promijenili. Naprotiv, manji napredak sudionici kontrolne grupe ostvarili su na GEO testu i SPAC testu, ali ne statistički značajno ($p = 0,552$ za GEO, $p = 0,465$ za SPAC), dok su po svim parametrima na VH testu rezultati na završnom testiranju slabiji (negativne vrijednosti u koloni M), čak neke i značajno slabije uz signifikantnost od 5% kada se primjeni stroži kriterij ($p = 0,025$ za VH4, $p = 0,026$ za CVH4, $p = 0,015$ za MVH4). Drugim riječima, neprilagođeno poučavanje može dovesti i do nazadovanja što je u skladu s teorijom van Hielea (Van Hiele, 1986).

Gledajući uzajamno rezultate prikazane u Tablici 26, može se uočiti da statistički značajan napredak nije moguć ni u znanjima ni u vještinama, ako se ne razvijaju različiti procesi mišljenja i zaključivanja. Ipak, treba naglasiti da, osim što neprilagođeno poučavanje može ne voditi do napretka, ovi slabiji rezultati u kontrolnoj grupi mogu se objasniti i nedovoljnom motivacijom sudionika da ponovno pišu iste testove, a da od toga oni osobno nemaju nikakve (trenutne) koristi.

Usporedba postignuća na VH testu: Kako bi se usporedio napredak po pojedinim razinama geometrijskog mišljenja, distribucija sudionika po razinama prikazana je istodobno i na pred testu i na post testu na način da se za svaku razinu na pred testu (1CVH3) vrši raspodjela tih sudionika po razinama na post testu (2CVH3) (Usiskin, 1982, str. 99). Na taj način je odmah vidljivo koliki broj sudionika je ostao na istoj razini, koliko ih je napredovalo na višu razinu, a koliko ih je nazadovalo. Raspodjela se vrši prema sva četiri kriterija (blaži i stroži kriterij te klasični i modificirani VH model). Također, razmatranje se vrši paralelno za obje grupe pa se radi razlikovanja grupa ispred svakog kriterija koristi oznaka koja to naznačuje: E1 i E2 označava pred i post testiranje u eksperimentalnoj grupi, a K1 i K2 pred i post testiranje u kontrolnoj grupi. Iz praktičnih razloga, u Tablici 27. se koristi kraća oznaka za nerazvrstane – 'Ne'. U razmatranje se uzimaju samo oni sudionici koji su pisali i pred i post VH test: u eksperimentalnoj grupi njih 41 od 52 (78,85%), a u kontrolnoj grupi njih 31 od 38 (81,58%). Distribucija sudionika po razinama daje se kroz frekvencije jer se to čini primjerenijim za opis ovih rezultata, ali iz danih podataka se jednostavno mogu odrediti i relativne frekvencije.

U Tablici 27. prikazuje se distribucija frekvencija po blažem kriteriju za klasični van Hieleov model razvoja mišljenja (CVH3 kriterij) unutar svake grupe.

Tablica 27. Distribucija frekvencija po kriteriju CVH3

	N = 41	E2CVH3							N = 31	K2CVH3						
Razina	E1CVH3	0	1	2	3	4	5	Ne	K1CVH3	0	1	2	3	4	5	Ne
0	0								0							
1	4			1	3				5			1				4
2	24			**8**	9	3		4	13		4	**7**	1			1
3	7				**4**	2	1		7		1	2	**4**			
4	1				1				1			1				
5	1					1			0							
Ne	4			1	2			1	5	1	1	2				1

Već iz podataka prikazanih u Tablici 27. vidljivo je da se u eksperimentalnoj grupi događa uglavnom napredak ili zadržavanje iste razine (podebljano), dok je u kontrolnoj grupi vrlo malo napredovanja, a više je zadržavanja iste razine i čak nazadovanje. Ovi pokazatelji dodatno obrazlažu rezultate prikazane u prethodnoj tablici (Tablica 26).

U Tablici 28. prikazuje se distribucija frekvencija po strožem kriteriju za klasični van Hieleov model razvoja mišljenja (CVH4 kriterij) unutar svake grupe.

Tablica 28. Distribucija frekvencija po kriteriju CVH4

	N = 41	E2CVH4							N = 31	K2CVH4						
Razina	E1CVH4	0	1	2	3	4	5	Ne	K1CVH4	0	1	2	3	4	5	Ne
0	3	**2**	1						1							1
1	15	1	**2**	4	6			2	9	1	**5**	2				1
2	13	1		**8**	2			2	16	1	6	**8**				1
3	2				**1**	1			1		1					
4	0								0							
5	0								0							
Ne	8		1	1	2	1		3	4	1	2	1				

Na temelju podataka prikazanih u Tablici 28. vidljivo je da se podaci više grupiraju uz prve razine (0, 1 i 2), a razlozi takve preraspodjele već su opisani u prvoj analizi podataka prikupljenih VH testom (str. 147). Međutim, ovdje je vidljivo još nešto: u eksperimentalnoj grupi sudionici su napredovali i u stabilnosti jer ima onih koji su zadržali višu razinu i po strožem kriteriju, za razliku od kontrolne grupe, u kojoj takvih nema.

U sljedeće dvije tablice (Tablica 29 i 30) prikazuju se distribucije frekvencija po razinama prema blažem i strožem kriteriju nakon uklanjanja 5. razine, tj. za modificirani VH model mišljenja, što je opravdano uzeti u razmatranje s obzirom da je na 5. razini samo jedan sudionik i to po blažem kriteriju (Usiskin, 1982, str. 32).

Tablica 29. Distribucija frekvencija po kriteriju MVH3

	N = 41	E2MVH3						N = 31	K2MVH3					
Razina	E1MVH3	0	1	2	3	4	Ne	K1MVH3	0	1	2	3	4	Ne
0	0							0						
1	5			1	4			6	1		1			4
2	25			**10**	11	3	1	13		4	**7**	2		
3	7				**4**	3		7		1	2	**4**		
4	2				1	**1**		1			1			
Ne	2			1	1			4		1	3			

Tablica 30. Distribucija frekvencija po kriteriju MVH4

	N = 41	E2MVH3						N = 31	K2MVH3					
Razina	E1MVH3	0	1	2	3	4	Ne	K1MVH3	0	1	2	3	4	Ne
0	3	**2**	1					1						1
1	15	1	**2**	4	6		2	10	2	**5**	2			1
2	14	1		**8**	3		2	16	1	6	**8**			1
3	2				**1**	1		1		1				
4	0							0						
Ne	7		1	1	1	1	3	3		2	1			

Podaci prikazani u posljednjoj tablici (Tablica 30), s obzirom da se radi o strožem kriteriju, mogu se uzeti kao realan pokazatelj stvarnog napretka sudionika prema razinama geometrijskog mišljenja unutar svake grupe.

Uz prikaz kvantitativnih podataka, uvidom u njihove radove i sagledavanjem postignuća za svakog sudionika na cijelom radu može se steći dodatni uvid u realno stanje njihove (ne)stabilnosti. Naime, u eksperimentalnoj grupi, svi sudionici su ostvarili odgovarajući napredak unutar svake razine pa čak i oni sudionici koji su u prethodnim tablicama prikazani kao da su ostali na istoj razini, kao i nekolicina onih koji su prikazani kao da su nazadovali. Tako se u prvoj tablici (Tablica 27) za eksperimentalnu grupu može vidjeti da je jedan sudionik sa 5. razine nazadovao na 4. razinu, a jedan s 4. razine na 3. razinu. Međutim, uvidom u njihove radove uočava se da su oni prilično napredovali u prve tri razine, a ona koja je bila posljednja je zapravo nestabilna.

S druge strane, uvidom u radove sudionika kontrolne grupe situacija je prilično drugačija. Njihova postignuća u post testiranju su dosta šarolika u odnosu na rezultate pred testiranja: unutar nekih razina su bili uspješniji, a unutar drugih slabiji, vrlo malo je stvarnog napretka pa čak i u nekolicine onih koji su u tablici prikazani da su ostvarili napredak.

Ukratko, na temelju rezultata kvantitativne analize prikazanih u prethodnim tablicama vidljiv je značajan napredak u razvoju mišljenja sudionika eksperimentalne grupe, dok su se u sudionika kontrolne grupe dogodile tek neznatne promjene na bolje, a većina je ili ostala na istoj razini ili čak nazadovala. Dodatnom kvalitativnom analizom njihovih radova uviđa se realno stanje (ne)stabilnosti: sudionici eksperimentalne grupe su prilično učvrstili svoje mišljenje na pojedinim (posebno prvim) razinama, dok je u sudionika kontrolne grupe stabilnost vrlo promjenjiva po razinama. Posebno, vrlo mali broj sudionika je dosegao 4. i 5. razinu (posebno po strožem kriteriju) iz jednostavnog razloga što su njihova predznanja i vještine zahtijevale poučavanje od početne razine nadalje te unutar 15 tjedana nastave, unatoč korištenja elemenata viših razina (formalno tvrđenje, argumentiranje i dokazivanje) nije bilo moguće kvalitativno dosegnuti više razine u mnogih sudionika.

Usporedba postignuća na GEO testu: U svrhu utvrđivanja statističke značajnosti razlike u postignućima na GEO testu prije i poslije nastave geometrije, osim na globalnoj razini, t-test je proveden i za svaki zadatak unutar svake grupe. Rezultati t-testa se prikazuju u četiri tablice prema četiri grupe zadataka (str. 110), analogno prikazivanju rezultata dobivenih na početnom testiranju (str. 150). Na završnom testiranju u eksperimentalnoj grupi GEO test je pisalo 45 od 52 sudionika (86,54%), a u kontrolnoj grupi 33 od 38 sudionika (86,84%).

U Tablici 31. prikazuju se rezultati t-testa za prvu grupu zadataka (G1.1 – G1.8), usporedno za eksperimentalnu i kontrolnu grupu. U ovoj grupi zadataka ispitivalo se kritičko čitanje definicija odabranih pojmova te vizualno prikazivanje opisanih pojmova.

Tablica 31. Usporedba postignuća G1 zadataka unutar grupa, prije i poslije poučavanja

	Eksperimentalna grupa (N = 45)					Kontrolna grupa (N = 33)				
Mjerenja	M	SD	t	df	p	M	SD	t	df	p
1G1.1 - 2G1.1	-0,289	0,869	-2,229	44	0,031	0,161	0,688	1,306	30	0,202
1G1.2 - 2G1.2	-0,133	0,661	-1,354	44	0,183	0,161	0,688	1,306	30	0,202
1G1.3 - 2G1.3	-0,133	0,726	-1,232	44	0,225	0,161	0,638	1,409	30	0,169
1G1.4 - 2G1.4	0,067	0,837	0,535	44	0,596	-0,032	0,706	-0,254	30	0,801
1G1.5 - 2G1.5	0,000	0,603	0,000	44	1,000	0,032	0,752	0,239	30	0,813
1G1.6 - 2G1.6	-0,091	0,676	-0,892	43	0,377	-0,226	0,669	-1,880	30	0,070
1G1.7 - 2G1.7	-0,022	0,839	-0,178	44	0,860	0,258	0,773	1,858	30	0,073
1G1.8 - 2G1.8	0,156	0,767	1,360	44	0,181	-0,097	0,746	-0,722	30	0,476

Prema rezultatima prikazanim u Tablici 31. vidljivo je da se jedini statistički značajan napredak uz signifikantnost od 5% ($p = 0,031$) dogodio u eksperimentalnoj grupi kod pojma *pravca*, dok ostale promjene, među kojima ima i nazadovanja, nisu statistički značajne. Tako se u eksperimentalnoj grupi, pored pojma pravca, uočava napredak i kod pojmova *paralelni pravci* (G1.2), *dužina* (G1.3), *ortocentar* (G1,6) i *romb* (G1,7), dok je kod pojmova *simetrala dužine* (G1.4) i *kružnica* (G1.8) vidljivo nazadovanje, a kod pojma *kut* (G1.5) nema promjena. S druge strane, u kontrolnoj grupi se uočava više nazadovanja i to kod pojmova *pravac* (G1,1), *paralelni pravci* (G1.2), *dužina* (G1.3), *kut* (G1.5) i *romb* (G1,7), a napredak kod pojmova *simetrala dužine* (G1.4), *ortocentar* (G1,6) i *kružnica* (G1.8), iako ne statistički značajan.

Uvidom u njihove radove uočava se, posebno u sudionika eksperimentalne grupe učestaliji i kvalitetniji vizualni prikaz pojmova, dok se u kontrolnoj grupi to nije promijenilo u odnosu na rezultate početnog testiranja. Osim toga, u eksperimentalnoj grupi dio sudionika vizualno je prikazivao opisane pojmove kao da su valjano opisani, dok je dio njih umjesto toga crtao kontra primjere te zadani iskaz pokušavao korigirati do korektne definicije. To dijelom objašnjava i slabija postignuća u ovoj grupi zadataka jer su bili manje fokusirani da odgovore na postavljeno pitanje, a više na korekciju uočenih manjkavosti, ali moguće je i da za neke sudionike zahtjev zadatka nije bio u potpunosti jasan (npr. upitnik sudionika pored 'vizualno prikažite').

Prikazani rezultati su u skladu s rezultatima na završnom testiranju VH testom: kritičnije pristupaju tumačenju iskaza kojima se opisuju pojmovi, ali još uvijek nisu dosegli 4. razinu geometrijskog mišljenja, tj. još uvijek ne prepoznaju nužne i dovoljne karakteristike koje jednoznačno opisuju pojam. Osim toga, u procesu prelaska na višu razinu mišljenja uočava se njihova zbunjenost i nesigurnost jer su suočeni s potrebom mijenjanja nečega što su već usvojili kao korektno, a sada im se ukazuje na nekorektnost.

Ukratko, u prvoj grupi zadataka napredak je uočljiv s aspekta kritičkog čitanja definicija i vizualnog prikazivanja, posebno u eksperimentalnoj grupi, ali još uvijek nije statistički značajan. Također, napredak je veći kod pojmova koji su na početku bili slabije naučeni (npr. ortocentar), a manji ili čak nazadovanje kod pojmova koji su pogrešno usvojeni (npr. kut) što je pokazatelj da je duboko ukorijenjena pogrešna shvaćanja vrlo teško mijenjati (De Villiers, 2010, str. 572).

U Tablici 32. prikazuju se rezultati t-testa za drugu grupu zadataka (G2.1 – G2.6), usporedno za obje grupe. U ovoj grupi zadataka ispitivala se vještina čitanja matematičke poruke prikazane na slici.

Tablica 32. Usporedba postignuća G2 zadataka unutar grupa, prije i poslije poučavanja

	Eksperimentalna grupa					Kontrolna grupa				
Mjerenja	M	SD	t	df	p	M	SD	t	df	p
1G2.1 - 2G2.1	-0,432	0,545	-5,251	43	0,000	-0,333	0,547	-3,34	29	0,002
1G2.2 - 2G2.2	-0,171	0,629	-1,739	40	0,090	-0,087	0,515	-0,81	22	0,426
1G2.3 - 2G2.3	-0,267	0,495	-3,611	44	0,001	-0,200	0,664	-1,649	29	0,110
1G2.4 - 2G2.4	-0,286	0,708	-2,614	41	0,012	0,500	0,648	3,934	25	0,001
1G2.5 - 2G2.5	-0,209	0,675	-2,034	42	0,048	-0,034	0,680	-0,273	28	0,787
1G2.6 - 2G2.6	-0,649	0,824	-4,789	36	0,000	0,000	0,392	0,000	13	1,000

Prema prikazanim rezultatima, eksperimentalna grupa je uočljivo napredovala u vještinama vizualizacije pri čitanju matematičkih poruka sa slike i to statistički značajno uz signifikantnost od 1%, osim za dva vizualna prikaza: čitanje poruke za *kvadar* (G2.5, $p = 0,048$) uz signifikantnost od 5% te čitanje poruke za *presjek kružnice i kuta* (G2.2, $p = 0,090$) bez statistički značajne razlike. Uvidom u njihove radove može se uočiti da sudionici velikim dijelom nadilaze perceptivnu obradu i prelaze na matematičku obradu slike, ali dio njih još uvijek ne uspijeva uspostaviti kvalitetne veze među elementima. Na primjer, iako izgleda da nema statistički značajne razlike u čitanju matematičke poruke vezane za *presjek kružnice i kuta* (G2.2), uvidom u radove sudionika može se uočiti njihov stvarni kvalitativni napredak: preciznije i jasnije opisuju elemente slike, bez velikog okolišanja koje je postojalo na pred testiranju, ali ipak dio njih još uvijek ne uspostavlja konačnu vezu: presjek u vrhu kuta. S druge strane, najveći napredak ostvaren je u čitanju poruke za *prizmu* (G2.6) i kvantitativno i kvalitativno što je opravdano jer je u tom dijelu bilo najviše prostora za napredak u odnosu na rezultate pred testiranja.

Za razliku od njih, u kontrolnoj grupi statistički značajan napredak pokazao se samo pri čitanju poruke za *trokut* (G2.1, $p < 0,01$), a pri čitanju poruke za *šesterostranu prizmu* (G2.6, $p = 0$) stanje je ostalo nepromijenjeno. Iznimno, pri čitanju poruke za *sukute* (G2.4, $p < 0,01$) u kontrolnoj grupi uočava se statistički značajno nazadovanje. Naime, uvidom u njihove radove uočava se da je dio sudionika, koji su na pred testiranju korektno pročitali da se radi o kvadru, na post testiranju su napisali da se radi o kocki. Također, dio sudionika je uz sliku na post testiranju pisalo i neka nepotrebna svojstva, npr. uz trokut (G2.1) da je zbroj kutova 180°, što je pokazatelj zapravo njihovog napredovanja u znanju, ali ne i u vještinama čitanja poruke sa slike. Nadalje, kvalitativnom analizom opisa sukuta (G2.4) uočava se da su sudionici u većoj mjeri prepoznavali kutove (šiljati i tupi) na slici u odnosu na pred testiranje, ali nisu uspostavljali vezu među njima, što je dovelo do statističkog nazadovanja. Također, bilo je manje je onih koji uopće ne daju nikakav odgovor u odnosu na rezultate pred testiranja, što je također odgovarajući napredak, ali još uvijek nedovoljan.

Prema opisanom, ovi rezultati ukazuju na to da se sustavnim poučavanjem različitih procesa vizualizacije, posebno perceptivne i matematičke obrade vizualnih prikaza, može značajno razviti vještina čitanja matematičke poruke, dok se bez sustavnog poučavanja sudionici snalaze svatko na svoj način pa se napredak može, ali i ne mora dogoditi. S obzirom da je matematička obrada vizualnih prikaza važna za različite segmente geometrije, npr. rješavanje geometrijskih problema, u nastavi geometrije se ne bi se smjelo prepustiti slučaju razvoj vještina čitanja matematičke poruke, već bi ih trebalo sustavno planirati i poučavati, u odgovarajućem geometrijskom kontekstu.

U Tablici 33. prikazuju se rezultati t-testa za treću grupu zadataka (G3.1 – G3.6), usporedno za obje grupe. U ovoj grupi zadataka ispitivala se uspješnost rješavanja zadataka objektivnog tipa, u kojima specifičnosti svakog zadatka (npr. element viška ili nestandardni položaj slike) te distraktori u odgovorima koji uključuju tipične greške usmjeravaju odgovore onih koji su nesigurni.

Tablica 33. Usporedba postignuća G3 zadataka unutar grupa, prije i poslije poučavanja

	Eksperimentalna grupa					Kontrolna grupa				
Mjerenja	M	SD	t	df	p	M	SD	t	df	p
1G3.1 - 2G3.1	-0,489	0,549	-5,978	44	0,000	0,034	0,499	0,372	28	0,712
1G3.2 - 2G3.2	-0,178	0,387	-3,084	44	0,004	0,042	0,550	0,371	23	0,714
1G3.3 - 2G3.3	-0,295	0,509	-3,847	43	0,000	0,033	0,320	0,571	29	0,573
1G3.4 - 2G3.4	-0,310	0,563	-3,566	41	0,001	-0,034	0,499	-0,372	28	0,712
1G3.5 - 2G3.5	-0,023	0,34	-0,443	43	0,660	0,065	0,359	1,000	30	0,325
1G3.6 - 2G3.6	-0,022	0,26	-0,573	44	0,570	0,000	0,371	0,000	29	1,000

Prema prikazanim rezultatima (Tablica 33) za postignuća sudionika na post testiranju uočava se statistički značajan napredak u eksperimentalnoj grupi u prva četiri zadatka (površina pravokutnog trokuta, opseg paralelograma, duljina stranice pravokutnog trokuta i unutarnji kut jednakokračnog trokuta, $p < 0.01$), dok u preostala dva zadatka (presjek pravca i kružnice, kut uz presječnicu, $p > 0.05$) napredak nije statistički značajan. U zadnjem zadatku to je zapravo i realno jer je u tom zadatku na pred testiranju točnih rješenja bilo 90.38% (47 od 52 sudionika). No, iako u petom zadatku (presjek pravca i kružnice) nema statistički značajnog napretka, uvidom u radove sudionika uočava se kvalitativni napredak: npr. na post testiranju na točan odgovor više sudionika je *odvukla* točka S (središte kružnice), a manje dužina $\overline{AS}$, što je bilo gotovo obratno na pred testiranju. Ipak, još uvijek je dio sudionika nesiguran: je li središte kružnice točka kružnice ili ne.

S druge strane, postignuća na post testiranju u kontrolnoj grupi uglavnom su slabija nego nad pred testiranju (iako ne statistički značajno), osim u četvrtom zadatku (unutarnji kut jednakokračnog trokuta) gdje je vidljiv manji napredak, dok u zadnjem zadatku nema promjena. Uvidom u njihove radove ne može se uočiti nikakva kvalitativni pomak. Pri određivanju površine pravokutnog trokuta (G3.1) i dalje je najučestaliji pogrešan odgovor bio pod (e) jer ih je zaveo element viška (korištenje formule $P = a \cdot b \cdot c$), pri određivanju opsega paralelograma (G3.2) češće su birali pogrešan odgovor pod (c), a pri određivanju duljine stranice pravokutnog trokuta (G3.3) pogrešni odgovori su raspršeni na (a), (c) i (d) bez vidljivo jasnog razloga, pri određivanju kuta jednakokračnog trokuta (G3.4) pogrešni odgovori su bili među (b) i (d) kao i na pred testiranju, pri određivanju presjeka pravca i kružnice (G3.5) najučestaliji odgovor bio je (a) gotovo kao i na pred testiranju te pri određivanju kuta uz presječnicu (G3.6) nešto više pogrešnih odgovora je bilo pod (a) vjerojatno jer su vršili procjenu sa slike.

Predstavljeni rezultati o postignućima sudionika pri rješavanju zadataka objektivnog tipa unutar kojih su uključene razne specifičnosti (elementi viška, nestandardni položaj figure, neočekivani vizualni prikaz pravca, distraktori koji uključuju tipične greške) ukazuju na to da se pojedine specifičnosti zadataka objektivnog tipa ipak mogu nadići sustavnim provođenjem različitih aktivnosti kroz zadatke različitih kognitivnih zahtjeva, a koji su korišteni tijekom intervencije. S druge strane, ne korištenje opisanih specifičnosti u zadacima ili ne obraćanje dovoljno pozornosti na njih unutar korištenih zadataka može dovesti i do nazadovanja, a pri rješavanju zadatak objektivnog tipa nesigurnosti sudionika očituju se kroz odgovore s distraktorima. Također, gotovo svi sudionici su dali odgovore na postavljena pitanja što još jednom potvrđuje da zadaci s ponuđenim odgovorima ipak motiviraju sudionike da odgovore, bez obzira na vrijednost njihovog znanja.

Konačno, u Tablici 34. prikazuju se rezultati t-testa posljednje grupe zadataka (G4.1 – G4.8), usporedno za obje grupe. U ovoj grupi zadataka ispitivala se uspješnost rješavanja uobičajenih zadataka iz nastave geometrije s određenim specifičnostima (crtanje, zadaci s više rješenja, povezivanje površina, strukturiranje kvadra, savijanje iz 2D do 3D).

Tablica 34. Usporedba postignuća G4 zadataka unutar grupa, prije i poslije poučavanja

	Eksperimentalna grupa					Kontrolna grupa				
Mjerenja	M	SD	t	df	p	M	SD	t	df	p
1G4.1 - 2G4.1	-0,302	0,773	-2,566	42	0,014	-0,115	0,711	-0,827	25	0,416
1G4.2 - 2G4.2	-0,372	0,655	-3,722	42	0,001	0,160	0,554	1,445	24	0,161
1G4.3 - 2G4.3	-0,561	0,776	-4,628	40	0,000	-0,067	0,458	-0,564	14	0,582
1G4.4 - 2G4.4	-0,476	0,890	-3,467	41	0,001	-0,182	0,853	-1,000	21	0,329
1G4.5 - 2G4.5	-0,974	1,423	-4,275	38	0,000	-0,333	1,328	-1,065	17	0,302
1G4.6 - 2G4.6	-1,375	1,013	-6,646	23	0,000	-0,200	0,837	-0,535	4	0,621
1G4.7 - 2G4.7	-1,364	0,809	-5,590	10	0,000	-1,000	1,414	-1,000	1	0,500
1G4.8 - 2G4.8	-1,029	1,087	-5,524	33	0,000					

Prema predstavljenim rezultatima u Tablici 34. nedvojbeno je da je alternativni pristup poučavanja doveo do statistički značajnog napretka ($p < 0,01$) u rješavanju ove grupe zadataka u sudionika eksperimentalne grupe, dok uobičajeno poučavanje sudionika u kontrolnoj grupi nije dovelo do statistički značajnog napretka ($p > 0,05$), a bilo je i manjeg nazadovanja.

Uvidom u radove sudionika eksperimentalne grupe uočava se da ni oni nisu svi kvalitativno napredovali, ali je puno veći udio onih koji jesu. Tako su pri crtanja visina tupokutnog trokuta (G4.1) više vodili računa o orijentaciji, ali u nekih je još uvijek vidljiv problem crtanja okomice, kao i ukorijenjeno pogrešno shvaćanje da se sjecište visina nalazi unutar trokuta. U radu sa jednakokračnim trokutima (G4.2, G4.3) koriste prikaze i tupokutnih jednakokračnih trokuta, više ispituju oba rješenja te više povezuju račun sa slikom, što znači da im vizualni prikaz ipak koristi u procesu rješavanja problema. Zanimljivo je da su neki sudionici, koji su imali točno određeno jedno rješenje, na pred testiranju odredili jedno rješenje, a na post testiranju drugo rješenje od moguća dva, što je pokazatelj da je između dvaju testiranja proteklo dovoljno vremena da pred testiranje nije imalo utjecaj na post testiranje. Nadalje, iako je uspjeh u određivanju ploštine sličnog kvadrata (G4.4) bio znatno bolji, u vizualnim prikazima se još uvijek najčešće služe odvojenim slikama kvadrata. U zadatku s popločavanjem hodnika (G4.5) u dijelu sudionika uočava se kvalitetniji vizualni prikaz i više strukturiranja te vješt rad s mjernim jedinicama, dok neki sudionici još uvijek imaju problema s pretvaranjem mjernih jedinica i računom što ih je onemogućilo u određivanju konačnog rješenja. U oba zadatka s površinom (G4.4, G4.5) uočava se daleko manji broj korištenja pogrešnih formula pri određivanu ploštine kvadrata i pravokutnika, kvalitetniji i sistematičniji zapis procesa rješavanja te više uspostavljenih veza između slike i zapisa.

U preostala tri zadatka vezana za geometriju prostora (G4.6, G4.7 i G4.8) vidljiv je prilično velik napredak u odnosu na pred testiranje, posebno što je na post testiranju bilo vrlo malo sudionika brz odgovora. Pri određivanju oplošja i volumena kvadra zadanog slikom (G4.6) uočava se korektno korištenje mjernih jedinica te proces najčešće započinju formulom, pri čemu još uvijek ima nekolicina onih koji brkaju oplošje i opseg. Pri određivanju volumena kvadra izgrađenog od kocaka (G4.7) najučestalije su računali preko volumena kocke, ali bilo je i onih koji su kreirali kvadar te volumen odredili direktno množenjem veličina njegovih bridova. Također, manji broj sudionika, koji su volumen kvadra računali preko volumena kocke, vizualno su prikazali strukturiranje kvadra od kocaka, više u svrhu provjere da je problem moguće riješiti, što s druge strane znači da ipak nastoje iskoristiti sve elemente zadane tekstom zadatka. Najznačajniji kvalitativni napredak sudionici eksperimentalne grupe ostvarili su u zadatku uspoređivanja volumena šupljih valjaka (G4.8) što je realno i prirodno jer je to bio najslabije riješen zadataka na pred testiranju. Prije svega, mali broj je onih koji nisu ništa odgovorili, a većina koja je odgovarala nastojala je do obrazloženja doći računanjem volumena nastalih valjaka te izvođenjem zaključaka na temelju dobivenih numeričkih vrijednosti za volumen. U tom procesu su najčešće griješili pri određivanju radijusa nastalih valjaka (uzimajući da je promjer baze valjka duljina stranice papira), ali kako su analogan proces proveli za oba valjka, rezultati su bili usporedivi te su na pogrešnom računu volumena izveli korektan zaključak.

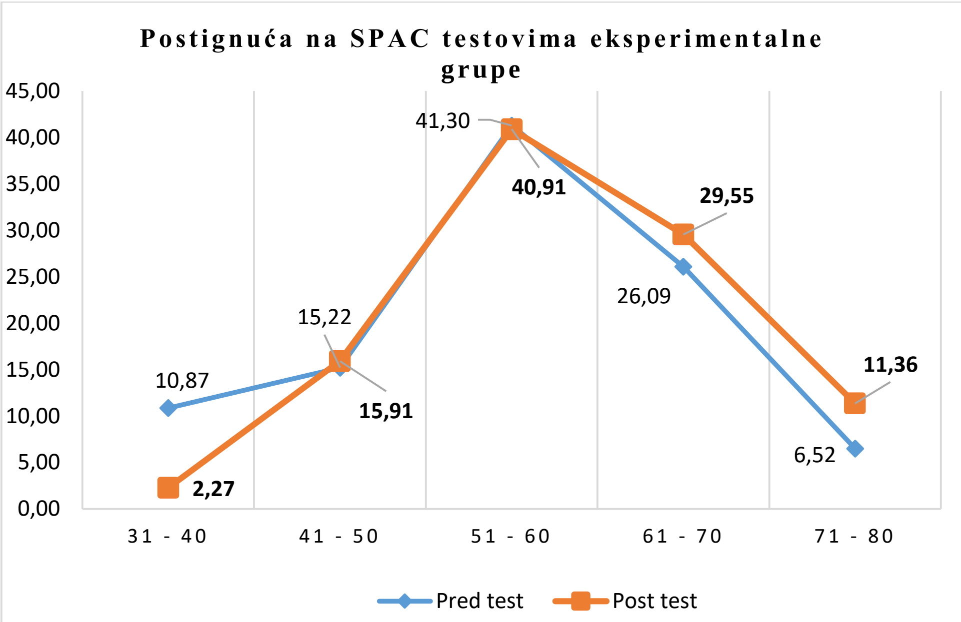
Uvidom u radove sudionika kontrolne grupe uočava se manji napredak, ali i nazadovanje. Tako je pri crtanja visina tupokutnog trokuta (G4.1) još uvijek vidljiv problem crtanja okomice, kao i ukorijenjeno pogrešno shvaćanje o sjecištu visina unutar trokuta. U radu sa jednakokračnim trokutima (G4.2, G4.3) samo je dvoje sudionika odredilo oba rješenja pri čemu nema značajnije promjene u korištenju vizualnih prikaza. No, slično kao u sudionika eksperimentalne grupe, neki su odredili jedno rješenje na pred testiranju, a drugo rješenje na post testiranju. Pri određivanju ploštine sličnog kvadrata (G4.4) nema značajnih odstupanja ni u računu ni u korištenju vizualnih prikaza. U zadatku s popločavanjem hodnika (G4.5), slično kao i u sudionika eksperimentalne grupe, više je kvalitetnijih vizualnih prikaza i strukturiranja, ali zbog problema u radu s mjernim jedinicama i računom, dio njih nije u mogućnosti odrediti konačno rješenje. U procesu rješavanja problema i zapisu nema značajnijih odstupanja u odnosu na rezultate pred testiranja, ali dio sudionika koji su dali odgovor među ovih pet zadataka na pred testiranju, ostavili su neka pitanja bez odgovora na post testiranju i nastavili rješavati zadnja tri pitanja, pa nije jasno što je pravi razlog neodgovaranja.

U preostala tri zadatka vezana za geometriju prostora (G4.6, G4.7 i G4.8) i dalje je prilično visok postotak sudionika koji nisu dali nikakav odgovor (na neka od njih ili na sva tri pitanja, zbog čega je isključen iz statističke analize, Tablica 34) što zasigurno nije odraz njihovog neznanja već više pitanje motivacije i odgovornosti da kao sudionici istraživanja izvedu sve do kraja. Tako ima i onih koji su na pred testiranju dali odgovor, a na post testiranju nisu, što zasigurno nije realno da neposredno nakon učenja geometrije prostora ne odrede barem oplošje i volumen kvadra. Oni koji su rješavali zadnja tri zadatka učestalije su određivali volumen kvadra (G4.6), ali ne i oplošje i pri tome su korektno koristili mjerne jedinice. Pri određivanju volumena kvadra strukturiranog od kocaka (G4.7) uglavnom su se koristili volumenom kocke bez ikakvog vizualnog prikaza strukturiranja. Oni koji su uspoređivali volumene šupljih valjaka nastalih rotacijom lista papira (G4.8) bili su kratki i jasni: *Volumeni su jednaki jer su papiri jednakih dimenzija*, dok je samo jedan sudionik zaključak temeljio na izračunu volumena, ali pogrešnog. Samo je jedan sudionik smatrao da su volumeni različiti uz obrazloženje: *jer su dobiveni krugovi različiti*.

Prema opisanom, predstavljeni rezultati nedvojbeno pokazuju da kroz sustavno razvijanje vještina vizualizacije (posebno stvaranje i korištenje vizualnih prikaza u procesu rješavanja problema), ukazivanje na proces rješavanja problema kroz četiri faze, rad sa zadacima viših kognitivnih zahtjeva te rješavanje različitih vrsta problema (s više rješenja i načina rješavanja) može dovesti do kvalitativnog pomaka u znanju i vještinama i to statistički značajnog. S druge strane, bez sustavne brige oko važnih procesa u savladavanju geometrijskih koncepata napredak je također moguć, ali vjerojatno ne statistički značajno, a moguće je i nazadovanje.

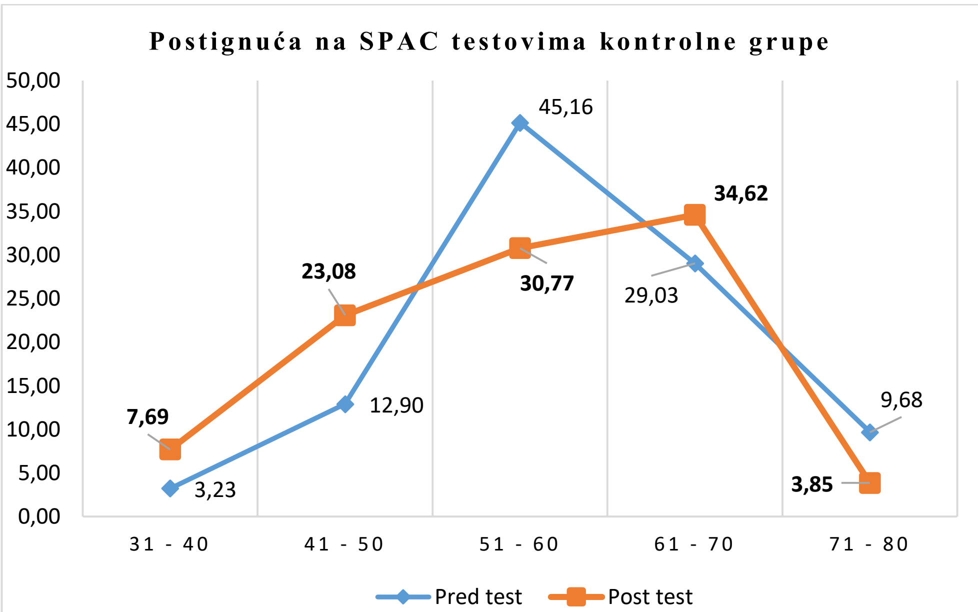
Usporedba postignuća na SPAC testu: Radi boljeg uvida u promjene koje su se dogodile u postignućima na SPAC testu unutar grupa, pored t-testa koji je prikazan u Tablici 26, prikazuju se i distribucije relativnih frekvencija po razredima na analogan način kao i za rezultate na početnom testiranju, posebno za eksperimentalnu (Slika 123) i posebno za kontrolnu grupu (Slika 124). SPAC test na završnom testiranju u eksperimentalnoj grupi ukupno je pisalo 44 od 52 sudionika (84,62%), a u kontrolnoj grupi 26 od 38 sudionika (68,42%).

Na grafu sa Slika 123. prikazana je distribucija relativnih frekvencija raspoređena po razredima jednakih duljina za postignuća ostvarena na početnom i završnom testiranju SPAC testom za eksperimentalnu grupu. Rezultati ostvareni na post testiranju na grafu su podebljani kako bi se razlikovali, posebno u dijelovima preklapanja. od rezultata na pred testiranju,



Slika 123. Distribucija relativnih frekvencija na SPAC testovima za E

Analogno prethodnom grafu, na Slici 124. dan je graf distribucija za sudionike kontrolne grupe.



Slika 124. Distribucija relativnih frekvencija na SPAC testovima za K

Uspoređivanjem rezultata prema napredovanju onih sudionika koji su pisali oba testa (Tablica 35) može se uočiti da je u obje grupe bilo onih koji su napredovali, ali i onih koji su nazadovali, kao i onih čiji je ishod bio nepromijenjen. Međutim, distribucija njihovih relativnih frekvencija razlikuje se unutar svake grupe što dodatno objašnjava zašto je napredak u eksperimentalnoj grupi ipak statistički značajan, a u kontrolnoj ne.

Tablica 35. Distribucija postignuća prema napretku u obje grupe

SPAC test	Eksperimentalna grupa		Kontrolna grupa	
	N	%	N	%
Napredak	32	78,05	12	46,15
Bez promjene	4	9,76	2	7,69
Nazadovanje	5	12,20	12	46,15
Ukupno	41	100,00	26	100,00

Konačno, učenje geometrije utječe na razvoj vizualno-prostornih sposobnosti, odnosno vizualno-prostorne sposobnosti se mogu razvijati u kontekstu geometrije. Međutim, ciljanim, sustavnim i kontinuiranim razvojem vještina vizualizacije u kontekstu geometrije može se statistički značajno utjecati na razvoj posebnih vizualno-prostornih sposobnosti. Ipak, grupe obuhvaćene ovim istraživanjem su različite veličine i specifične po odabiru zanimanja pa se ovaj rezultat ne može generalizirati na svu populaciju koja uči geometriju te bi bilo potrebno provesti dodatna istraživanja.

Odgovor na 4. pitanje: Prema svim predstavljenim podacima, rezultatima i provedenom analizom vidljivo je da su sudionici eksperimentalne grupe, nakon 15 tjedana poučavanja posebnim pristupom prilagođenim njihovim predznanjima i vještinama, statistički značajno napredovali u geometrijskom mišljenju, akumuliranom geometrijskom znanju i vještinama vizualizacije te u vizualno-prostornim sposobnostima. S druge strane, statistički značajan napredak se nije dogodio u sudionika kontrolne grupe, koji su poučavani na uobičajeni način u skladu s planom i programom. Ono što je posebno uočljivo, ne samo da napredak nije bio statistički značajan u kontrolnoj grupi već je u nekim segmentima bilo i nazadovanja, iako ne statistički značajnog.

Međutim, uvidom u radove sudionika i kvalitativnom analizom napisanog uočava se da je u obje grupe bilo i napredovanja i nazadovanja i stagnacije, jedino je razlika u njihovim udjelima.

6.6.2. Usporedba postignuća među grupama prije i poslije poučavanja

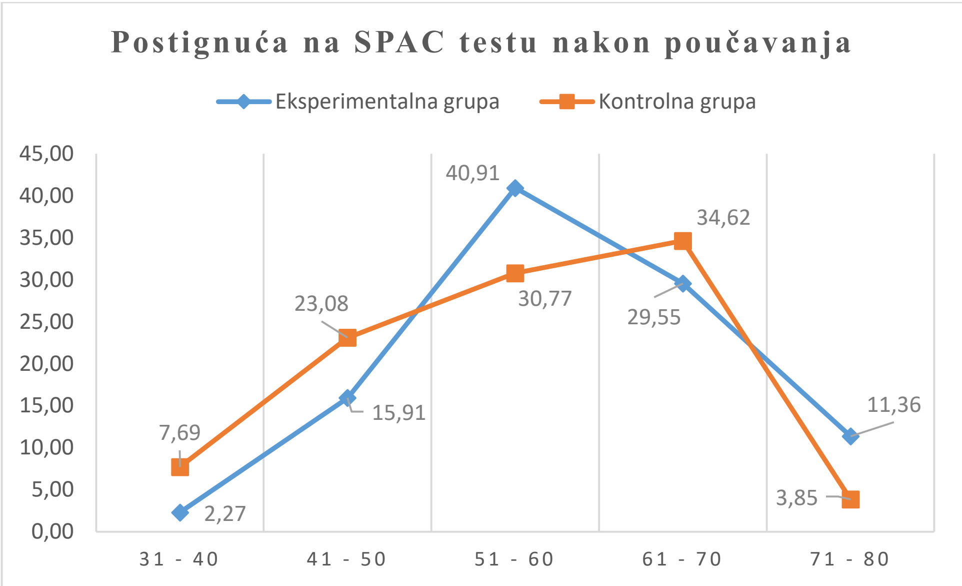
Na samom kraju, proveden je t-test kako bi se ispitala statistička značajnost razlike u postignućima između eksperimentalne i kontrolne grupe nakon 15 tjedana poučavanja, za sva tri testa. S obzirom da se VH test vrednovao prema različitim kriterijima (str. 108), kao i u prethodno provedenim analizama, t-test je proveden za svakog od njih, a rezultati su prikazani u Tablici 36.

Tablica 36. Usporedba postignuća u sva tri testa među grupama, prije i poslije

	Eksperimentalna grupa			Kontrolna grupa			t-test		
Test	N	M	SD	N	M	SD	t	df	p
2VH3	46	9,500	6,931	33	6,424	6,937	1,945	77	,055
2CVH3	39	2,897	,754	25	1,880	,781	5,195	62	,000
2CVH4	38	2,026	1,078	30	1,267	,640	3,412	66	,001
2MVH3	44	2,841	,680	29	1,931	,753	5,361	71	,000
2MVH4	38	2,026	1,078	30	1,267	,640	3,412	66	,001
2GEO	45	29,378	6,994	33	16,485	6,690	8,191	76	,000
2SPAC	44	59,659	9,906	26	57,077	9,398	1,074	68	,287

Na temelju rezultata prikazanih u Tablici 36 može se uočiti da je eksperimentalna grupa tijekom intervencije statistički značajno napredovala u odnosu na kontrolnu grupu uz signifikantnost od 1% na GEO testu ($p<0,01$) te po svim parametrima na VH testu, osim po kriteriju VH3 gdje je statistička značajnost od 5%, dok razlika u postignućima na SPAC testu nije statistički značajna ($p=0,287$). Moguće je da vremenski period od pet tjedana unutar kojih se obrađivala cjelokupna geometrija prostora ipak nije dostatan za statistički značajan napredak u vizualno-prostornim sposobnostima, iako je iz analize po grupama vidljivo da je napredak ostvaren u obje grupe, a u eksperimentalnoj grupi i statistički značajno (Tablica 26).

Kada se usporede grafovi distribucija relativnih frekvencija za postignuća sudionika na SPAC testu za obje grupe nakon poučavanja (Slika 125), uočava se da su oba grafa pomaknuta udesno, pri čemu graf kontrolne grupe slabije prati normalnu razdiobu i više je pomaknut prema gore (postojanje i napredovanja i nazadovanja) u odnosu na graf eksperimentalne grupe.



Slika 125. Distribucija relativnih frekvencija 2SPAC testa za E i K

S obzirom da je prije početka poučavanja kontrolna grupa bila nešto bolja na SPAC testu u odnosu na eksperimentalnu grupu, a primjenom posebnog pristupa poučavanja tijekom intervencije eksperimentalna grupa je značajno napredovala, nakon poučavanja odnos u postignućima na SPAC testu se promijenio: eksperimentalna grupa je bolje u odnosu na kontrolnu grupu, ali ne statistički značajno.

Odgovor na 5. pitanje: Prema svim predstavljenim podacima, rezultatima i provedenom analizom vidljivo je da su sudionici eksperimentalne grupe, nakon 15 tjedana poučavanja posebnim pristupom prilagođenim njihovim predznanjima i vještinama, statistički značajno napredovali u geometrijskom mišljenju, akumuliranom geometrijskom znanju i vještinama vizualizacije u odnosu na sudionike kontrolne grupe, koji su poučavani na tradicionalan način. Napredak postoji u sudionika eksperimentalne grupe i u razvoja vizualno-prostornih sposobnosti, ali on nije statistička značajan u odnosu na sudionike kontrolne grupe.

Ovim se nedvojbeno može potvrditi da ishodi učenja geometrije, a time i bolja pripremljenost budućih učitelja za rad u razrednoj nastavi zasigurno mogu biti bolji kada se poučavanje prilagodi njihovim predznanjima te geometrija sustavno poučava u okviru VOS sustava. To znači da je potrebno sustavno i uzajamno razvijati geometrijska znanja, mišljenje i vještine na način da se svaki koncept obrazlaže govornim jezikom (verbalno i pisano), vizualno prikazuje i simbolički zapisuje u sažetom obliku.

6.7.Ograničenja u istraživanju

Načina odabira i karakteristike sudionika istraživanja te način realizacije poučavanja utječu na stvaranje određenih ograničenja za izvođenje općih zaključaka istraživanja koja bi se mogla primijeniti na druge grupe, situacije i moguće realizacije.

Prije svega, grupe nisu birane nasumično i nisu bile jednakobrojne već su uzeti svi studenti koji su u tekućem semestru bili upisani na kolegij euklidske geometrije, zbog čega se nije mogla u cijelosti kontrolirati varijabla „kome” se poučava. Osim toga, istraživanje se provodilo unutar redovite nastave, u realnom vremenu, unutar zadanog plana i programa, što znači da se nisu mogle u cijelosti kontrolirati varijable „što” predavati i „kada” predavati. Osim toga, sudionici nisu imali nikakvu obvezu pohađanja nastave osim redovnih obveza propisanih nastavnim planom i programom pa nije bilo moguće pratiti koliko oni svojim angažmanom i redovitošću doprinose boljim ishodima učenja, a koliko tome doprinosi sama nastava.

Također, sudionici istraživanja odabrani su sa učiteljskog studija i svi sudionici su žene, što je u skladu s trendom upisa na Učiteljski studiji na kojem se studenti pripremaju za rad u razrednoj nastavi. Stoga se ovi rezultati mogu poopćiti samo na grupe sličnih karakteristika.

Kada bi se slično istraživanje provodilo za točno određene teme, npr. rotacijska tijela, te u duljem vremenskom razdoblju i u kontroliranim uvjetima rada, s ciljano biranim sudionicima, zasigurno bi se moglo govoriti i o drugim aspektima ishoda učenja.

Konačno, svi instrumenti su korišteni u pisanom obliku što je samo jedan aspekt uvida u nečije znanje i mišljenje. Korištenjem npr. strukturiranog intervjua sa sudionicima, snimanjem nastavnih sati, praćenjem nastave od strane drugog sustručnjaka itd. zasigurno bi se mogao ostvariti dublji uvid u njihova znanja, ali i strategije poučavanja, a sve u svrhu optimiziranja procesa učenja i ostvarivanja još boljih ishoda učenja.

Zaključak

U ovom radu opisuje se euklidska geometrija kroz četiri različite perspektive. Prvo, iz teorijske perspektive deduktivnog sustava te karakteristika aksiomatske izgradnje, opisuju se procesi definiranja i klasificiranja pojmova, procesi postavljanja tvrdnji, ispitivanje i utvrđivanje njihove istinitost direktnim i indirektnim dokazom. Zatim se opisuju karakteristike geometrijskih pojmova, disekcije, konstrukcije i posebnosti geometrijskog dokaza. Drugo, iz perspektive učenja i poučavanja opisuju se teškoće s kojima se učenici svih uzrasta suočavaju pri učenju geometrije, moguće uzroke i načine nadilaženja, ali sve unutar okvira deduktivnog sustava. Treće, opisuju se karakteristike teorijskog okvira van Hielea koji predlaže sustavan način razvoja mišljenja prema karakteristikama aksiomatske metode te način strukturiranja učenja kroz pet faza kao model prelaza s jedne razine mišljenja na drugu. Četvrto, euklidska geometrija se sagledava iz perspektive kognitivnih procesa koji su neodvojivi od učenja geometrije te se opisuju karakteristike elemenata vizualizacije i vizualno-prostornih sposobnosti, kao i mogućih teškoća koji ometaju maksimalno korištenje potencijala vizualizacije.

Na temelju različitih pogleda na geometriju i uočenih teškoća s kojima se budući učitelji primarnog obrazovanja suočavaju na prijelazu sa školske na sveučilišnu razinu, osmišljeno je i provedeno kvazi eksperimentalno istraživanje s neekvivalnetnim skupinama kako bi se ispitalo je li moguće poboljšati njihove ishode učenja te ih bolje pripremiti za rad u razrednoj nastavi.

Strategija poučavanja u eksperimentalnoj grupi temeljila se na vizualno-analitičkoj metodi usmjerenog opažanja te osiguravanju okruženja u kojem će sudionici imati priliku, kroz raznovrsne nastavne aktivnosti i nastavna sredstava, služeći se sustavno i svrhovito elementima vizualizacije stjecati geometrijska znanja te uzajamno i u harmoniji razvijati geometrijsko mišljenje i vizualno-prostorne sposobnosti. Strukturiranje nastavnih sadržaja planirano je prema van Hieleovim fazama učenja kako bi svi sudionici imali priliku opisivati svoja zapažanja, raspravljati o svojim ostvarenjima te se kroz zadatke različitih kognitivnih zahtjeva okušati u njihovoj primjeni.

Za prikupljanje podataka o znanjima i vještinama sudionika korištena su tri testa: VH test za mjerenje razina geometrijskog mišljenja prema van Hieleovu modelu razvoja mišljenja, GEO test za provjeru znanja iz geometrije i vizualizacijskih vještina koja se koriste u radu s geometrijskim figurama, dizajniran posebno za potrebe ovog istraživanja te standardizirani SPAC test za mjerenje vizualno-prostornih sposobnosti pri uspostavljanju veza između 3D figura i njihovih mreža. Sva tri testa provedena su prije i poslije poučavanja, u pisanom obliku.

Prema rezultatima pred testiranja, utvrđeno je da razina mišljenja sudionika nije odgovarajuća za nastavak učenja geometrije na sveučilišnoj razini, ali i da sudionici obiju grupa posjeduju odgovarajuće vizualno-prostorne sposobnosti, koje im daju mogućnost da uz primjeren rad savladaju geometrijske sadržaje. Također, utvrđeno je i da su njihova predznanja o odabranim geometrijskim pojmovima prilično slaba: u radu se koriste elementima vizualizacije iako prilično nesustavno i neefikasno, pri tumačenju formalnih definicija više se oslanjaju na osobne slike koncepata koje su sužene i nepotpune te vezane za prototipne vizualne prikaze, u procesu rješavanja problema dominira faza računanja bez dubljeg razumijevanja postupaka, bez plana rješavanja i bez provjere smislenosti rezultata.

Prema rezultatima t-testa utvrđeno je da među grupama nema statistički značajne razlike ni u ostvarenim razinama geometrijskog mišljenja, niti u predznanju o geometrijskim pojmovima i vizualizacijskim vještinama, niti u vizualno-prostornim sposobnostima. Prema Spearmanovom koeficijentu korelacije utvrđeno je da između sva tri testa postoji statistički značajna korelacija.

Značajan doprinos ovog istraživanja vidljiv je u rezultatima post testiranja kojima je potvrđeno da su korištena vizualno-analitička metoda usmjerenog opažanja, način strukturiranja nastavnih sati i sadržaja, svrhoviti odabir različitih nastavnih aktivnosti i zadataka različite kognitivne zahtjevnosti doprinijele značajno boljim ishodima učenja geometrije u eksperimentalnoj grupi u odnosu na ishode poučavanje u kontrolnoj grupi. Također, potvrđeno je da primjena korištene metode u kontekstu geometrije, zasnovane na VOS sustavu, značajno doprinosi i razvoju geometrijskog mišljenja i vizualno-prostornih sposobnosti, što u konačnici i dovodi do boljih postignuća u geometriji. Značajne razlike nije bilo jedino u razvoju vizualno-prostornih sposobnosti između grupa, moguće zbog manje vremena odvojenog za aktivnosti s 3D figurama.

Ovim istraživanjem pokazalo se da u tercijarnom obrazovanju postoji mogućnost savladavanja geometrijskih znanja, vještina i umijeća, bez obzira na nivo znanja upisanih studenata. Nastava geometrije se i na sveučilišnoj razini može ustrojiti tako da se iskoristi potencijal svakog geometrijskog zadatka, uz poznavanje karakteristika, potencijala i ograničenja vizualizacije, ne gubeći pri tome iz vida deduktivnu strukturu aksiomatski zasnovane euklidske geometrije.

Jer, sudionici eksperimentalne grupe, koji su poučavani vizualno-analitičkom metodom usmjerenog opažanja i imali priliku uspostavljati funkcionalne veze između jezičnog, vizualnog i simboličkog načina izražavanja, ostvarili su statistički značajan napredak u znanju, razinama mišljenja i vizualnoj pismenosti, za razliku od sudionika kontrolne grupe, koji su poučavani više tradicionalno, s većim naglaskom na analitičko mišljenje te nisu ostvarili značajan napredak.

Na taj način se budućim učiteljima primarnog obrazovanja osigurava okruženje unutar kojeg će, kroz pažljivo strukturiranje i odabir nastavnih aktivnosti i nastavnih sredstava te korištenje zadataka različite kognitivne zahtjevnosti, steći bogata iskustva, vještine i spretnost korištenja vizualizacije u korist razvoja geometrijske pismenosti, najprije svoje, a potom i učenika koje budu poučavali.

S obzirom na specifičnosti biranja grupa i njihovih karakteristika, bilo bi zanimljivo primijeniti opisane strategije poučavanja s različitim uzrastima te longitudinalno pratiti napredovanje kako bi se utvrdilo da balansiranje vizualnih i analitičkih metoda zasnovano na usmjerenom opažanju i VOS sustavu zaista osigurava učenje geometrije s razumijevanjem i efikasnom primjenom. Također, ostvareni rezultati te opisani način strukturiranja nastavnih sati i kombiniranja nastavnih aktivnosti i sredstava, ne gubeći iz vida deduktivni karakter geometrije, mogu biti poticaj i drugim nastavnicima na svim razinama obrazovanja da više pozornosti posvete troslojnom načinu poučavanja, uzajamno i u harmoniji, bez dominacije ijednog od njih.

U konačnici, nastavnik je izbornik, kreator i realizator nastavnih aktivnosti pa je pred njim i izazov i odgovornost da svojim učenicima osigura okruženje za optimalno ostvarivanje ishoda učenja na onoj dionici vertikale obrazovanja gdje se nalazi, ne gubeći iz vida mozaik koji svi zajedno izgrađujemo kroz različite učionice.

Literatura

1 Abdullah, A. H. & Zakaria, E. (2011). Student's Perceptions Towards the Van Hiele's Phases of Learning Geomtry Using Geometer's Sketchpad Software. *Australian Journal of Basic and Applied Sciences*, 5(7): 787-792.

2 Abdullah, A. H. & Zakaria, E. (2012). The Activities Based on Van Hiele's Phae-Based Learning: Expert's and Preservice Teachers' Views. *Journa of Mathematics and Statistics* 8(3): 385-395.

3 Abdullah, A. H. & Zakaria E (2013). The effects of Van Hiele's phase-based instruction using the Geometer's Sketchpad (GSP) on students' levels of geometric thinking. *Research Journal of Applied Sciences, Engineering and Technolog,* Vol 5(5), 1652–1660.

4 Alonso, O.B. (2009). Making sense of definitions in geometry: metric-combinatorial approaches to classifying triangles and quadrilaterals. New York: Columbia University. Ankara: ERME.

5 Antunović-Piton, B., & Baranović, N. (2022). Factors Affecting Success in Solving a Stand-Alone Geometrical Problem by Students aged 14 to 15. CEPS - *Center for Educational Policy Studies, Journal*. Vol 12, 4-25. DOI:10.26529/cepsj.889.

6 Arcavi, A. (1999). The role of visual representations in the learning of mathematics. In F. Hitt & M. Santos (Eds.). *Proceedings of the 21st North American PME Conference*, 1, 55-80.

7 Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), 215-241. DOI: 10.1023/A:1024312321077.

8 Armah, R.B., Cofie, P.O., & Okpoti, C.A. (2018). Investigating the effect of van Hiele Phase based instruction on pre-service teachers' geometric thinking. *International Journal of Research in Education and Science* (IJRES), 4(1), 314-330. DOI:10.21890/ijres.383201.

9 Baranović, N. (2014.) Učenje temeljeno na čitanju s razumijevanjem, U e-zborniku povzetkov 2. mednarodne *Konference o učenju in poučevanju matematike* (KUPM 2014), dostupno na: http://www.zrss.si/kupm2014/files/povzetki-cetrtek-SLO/#/8/.

11 Baranović, N. (2015a). *Osnove matematičke logike*. Web predavanje. Dostupno na: https://www.ffst.unist.hr/izdavastvo/predavanja

12 Baranović, N. (2015b). Potencijal jednog zadatka izveden na temelju Talesovog teorema o proporcionalnim dužinama. U Stanimirović, Z., Marić, M., Knežević, M. & Svetlik, M. (ur.) Zborniku radova *Peti simpozijum „Matematika i primene"*, Beograd: Matematički fakultet, 86-98.

13 Baranović, N. (2016.) O razvoju geometrijskog mišljenja u nastavi matematike prema van Hieleovoj teoriji, *Šesti simpozijum „Matematika i primene"*, Knežević, Milan (ur.). Beograd: Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet, Vol VI (1), 100-109.

14 Baranović, N. (2019a). O učenju i poučavanju geometrije prema van Hieleovoj teoriji. Zbornik radova: *Geometrija u nastavi matematike*, Gortan, Robert (ur.). Pula: Matematičko društvo Istra, str. 19-42.

15 Baranović, N. (2019b). Pre-service primary education teachers' knowledge of relationships among quadrilaterals, In J. Milinković & Z. Kadelburg (Eds.), *Research in Mathematics Education* (pp. 112–127). Mathematical Society of Serbia.

16 Baranović, N. (2019c). Razumijevanje koncepta funkcije zadane geometrijskim uzorkom prema teoriji van Hielea. Predavanje na Znanstveno-stručnom skupu s međunarodnim sudjelovanjem: *Van Hieleova teorija u matematičkom obrazovanju*, Zadar 25. – 26. 4. 2019.

17 Baranović, N., Antunović-Piton, B. (2019). Refleksija na uspješnost rješavanja izoliranog geometrijskog problema i njegov potencijal u nastavi. Zbornik radova: *Geometrija u nastavi matematike*. Gortan, Robert (ur.). Pula: Matematičko društvo Istra, str. 68-83.

18 Baranović, N., Antunović-Piton, B. (2021). Different Perspectives on Success in Solving Stand-Alone Problems by 14 to 15-Year-Old Students. *Croatian Journal of Education-Hrvatski Casopis za Odgoj i obrazovanje*, 23 (2021), 1; DOI:10.15516/cje.v23i1.3863.

19 Baranović, N., Baras, I. i Kožul Blaževski, R. (2020). Kako premostiti razliku između onoga što studenti prve godine znaju i onoga što mi mislimo da bi trebali znati. *Poučak: časopis za metodiku i nastavu matematike*, 21 (81), 13-33.

20 Baranović, N., Lehman, S. (2017). Razvoj geometrijskog mišljenja kroz tangram aktivnosti. Zbornik radova: *Sedmi simpozijum „Matematika i primene"* Knežević, Milan (ur.). Beograd: Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet, 81-92.

21 Baranović, N., Lehman, S. (2018). Matematika u tangramu, tangram u matematici. *Poučak: časopis za metodiku i nastavu matematike*, 19, 76; 20-37

22 Battista , M. T. (2007). The development of Geometric and Spatial Thinking. In F. K. Lester (Eds.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning : A Project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 843-908). National Council of Teachers of Mathematics. Information Age Publishing.

23 Battista, M. T., Fey, J. T., King, K. D., Larson, M., Reed, J., Smith, M. S., Strutchens, M.E. & Sutton, J.T (2007). Connecting Research and Practice at NCTM, *Journal for Research in Mathematical Education, Vol 38* (2), 108-114.

24 Becker, O. (1998). Veličina i granica matematičkog načina mišljenja. Demetra: Zagreb

25 Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. R., i Silver, E. A. (1983). Rational-Number Concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 91-126). New York, NY: Academic Press.

26 Bingolbali, E. (2011). Multiple solutions to problems in mathematics teaching: Do teachers really value them? *Australian Journal of Teacher Education*, 36(1), 18–31. https://doi.org/10.14221/ajte.2011v36n1.2

27 Bishop, A. J. (1980). Spatial abilities and mathematics education: A review. *Educational Studies in Mathematics*, 11, 257-269.

28 Bishop, A. J. (1986). What are some obstacles to learning geometry? *Studies in mathematics education*, UNESCO, 5, 141-159.

29 Boonen, A. J. H., van der Schoot, M., van Wesel, F., de Vries, M. H., & Jolles, J. (2013). What underlies successful word problem solving? A path analysis in sixth grade students. *Contemporary Educational Psychology*, 38(3), 271–279. https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2013.05.001

30 Boonen, A. J. H., Van Wesel, F., Jolles, J., & Van der Schoot, M. (2014). The role of visual representation type, spatial ability, and reading comprehension in word problem solving: An item-level analysis in elementary school children. *International Journal of Educational Research*, 68, 15–26. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2014.08.001

31 Breen, S., O'Shea, A., & Pfeiffer, K. (2013). The use of unfamiliar tasks in first year calculus courses to aid the transition from school to university mathematics. *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2316–2325). Ankara: ERME.

32 Bruce, C., Hawes. Z. (2014). The role of 2D and 3D mental rotation in mathematics for young children? What is it? Why is it important? And what can we do about it? ZDM: *The international journal on mathematics education*. DOI: 10.1007/s11858-014-0637-4

33 Bruckheimer, M., & Arcavi, A. (1995). A Visual Approach to Some Elementary Number Theory. *The Mathematical Gazette*, 79(486), 471. https://doi.org/10.2307/3618072

34 Bruner, J. (1996). *The Culture of Education*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

35 Cambridge dictionary. Dostupno na: https://dictionary.cambridge.org/dictionary/english/visualization?q=visualisation

36 Cavanagh, M. (2008). One secondary teacher's use of problem-solving teaching approaches. In M. Goos, R. Brown & K. Makar (Eds.), *Proceedings of the 31st Annual Conference of the*

Mathematics Education Research Group of Australasia (Vol. 1, pp. 117–124). MERGA http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.507.6272

37 Clements, D.H., Battista, M.T., Sarama, J., Swaminathan, S. (1997). Development Students' Spatial Thinking in a Unit on Geometric Motions and Area. *The elementary School Journal*. Vol. 98 (2).

38 Clements, M. A. (1982). Visual imagery and school mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 2, 2-9, & 3, 33-39.

39 Cohen, L., Manion, L., Morrison, K. (2007). *Metode istraživanja u obrazovanju* [Research methods in education]. NAKLADA SLAP.

40 Cohen, N. (2003). Curved Solid Nets. In N. Paterman, B. J. Doughery, & J. Zillox (Eds.), *Proceedings of the 27th International Conference of Psychology in Mathematics Education*, Vol. 2, 229-236.

41 Courant, R., Robbins, H. & Stewart, I. (1996). *What is Mathematics? An elementary approach to ideas and metods*. New York: Oxford University press.

42 Crowley, M. L. (1987). The van Hiele model of development of geometric thought. In Learning and teaching geometry, K-12, 1–16, *Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics*. Edited by Mary Montgomery Lindquist, 1-16, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

43 Dadić, Ž (1992). *Povijest ideja i metoda u matematici i fizici*. Školska knjiga: Zagreb

44 De Klerk, J. (2007). Illustrated maths dictionary (4th edition). Pearson Education Australian: Melbourne, Australia.

45 De Villers, M. (1994). The Role and Function of a Hierarchical Classification of Quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics*. 14(1), 11-18.

46 De Villers, M. (2009). To teach definitions in geometry or teach to define. Dostupno na: https://www.researchgate.net/publication/255605686 (13.05.2017.).

47 De Villiers, M. (1987). Research evidence on hierarchical thinking, strategies and the van Hiele theory: Some teaching critical comments (Internal RUMEUS report, no 10), University of Stellenbosch, South Africa.

48 De Villiers, M. (1998). To teach definitions in geometry or teach to define? In A. Olivier & K. Newstead (Eds) *Proceedings of the 22nd International Conference for the Psychology of Mathematics Education Vol. 2*, (pp. 248–255). University of Stellenbosch: Stellenbosch.

49 De Villiers, M. (2003). *Rethinking proof with The Geometer's Sketchpad*. Key Curriculum Press: Emeryville, CA.

50 De Villiers, M. (2010). Some Reflections on the Van Hiele theory. Invited plenary from *4th Congress of teachers of mathematics of the Croatian Mathematical Society*, 30th June – 2th July 2010. Zagreb, Croatia, str. 559-588.

51 Del Grande, J. (1990). Spatial Sense. *The Arithmetic Teacher*. Vol 37(6), 14-20. https://doi.org/10.5951/AT.37.6.0014

52 Dongawi, B. L. (2014). Using the van Hiele phases of instruction to design and implement a circle geometry teaching programme in a secondary school in Oshikoto region: A Namibian Case Study. Dostupno na: http://repository.unam.na/bitstream/handle/11070/2174/dongwi_van%20hiele_2014.pdf?sequence=1&isAllowed=y (preuzeto 28.08.2019.)

53 Dörfler, W. (1991). Meaning: Image schemata and protocols. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th PME International Conference*, 1, 17-32.

54 Dreyfus, T. (1991). On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th PME International Conference*, 1, 33-48.

55 Dreyfus, T. (2014). Mutual Expectations Between Mathematicians and Mathematics Educators. *Mathematics i Mathematics Education: Searching for Common Ground*. Pp 57-74.

56 Državna matura 2011/2012 – ljetni rok [State Matura 2011/2012 - Summer Assessment Term] (DM ljeto 2012) (2012). Nacionalni centar za vanjsko vrednovanje. https://www.ncvvo.hr/dm-2011-2012-ljetni-rok/

57 Duval, R. (1995). Geometrical Pictures: Kinds of representation and specific processes. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematical education* (pp. 142-157). Berlin: Springer

58 Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st century An ICMI Study* (pp.37-52). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

59 Duval, R. (1999). Representation, vision and visualisation: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning, In F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st annual Meeting of the North American*, Chapter of the international group for the psychology of mathematics education (pp. 3–26). PME.

60 Duval, R. (2000). Basic issues for research in mathematics education, Plenary. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th international conference for the psychology of mathematics education*, 1 (pp. 55–69). PME, Hiroshima University.

61 Duval, R. (2002). Representation, vision, and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking (basic issues for learning). In F. Hitt (Ed.), *Representations and mathematics visualization* (pp. 311-335). Mexico: Cinvestav-IPN.

62 Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1–2), 103–131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

63 Duval, R. (2014). Commentary: Linking epistemology and semi-cognitive modelling in visualization. ZDM - *International Journal on Mathematics Education*, 46(1), 159–170. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0565-8

64 Duval, R. (2017). Understanding the mathematical way of thinking-The registers of semiotic representations. Cham: Springer International Publishing.

65 Eisenberg, T., Dreyfus, T. (1990). On the reluctance to Visualize in Mathematics. In Zimmermann, W., i Cunningham, S. (Eds.). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*. Mathematical Association of America: Washington DC, 25-37.

66 Finding Parallelogram Vertices (2016). Education Development Center. Preuzeto sa: http://mathpractices.edc.org/pdf/Finding_Parallelogram_Vertices.pdf

67 Fischbein, E. & Nachlieli, T. (1998). Concepts and figures in geometrical reasoning. *International Journal of Science Education*, 20(10), 1193-1211. http://dx.doi.org/10.1080/0950069980201003

68 Flanagan, D. P., Shauna, G. D. (2014). The Cattell-Horn-Carroll Theory of Cognitive Abilities. *Wiley Online Library*. Dostupno na: https://doi.org/10.1002/9781118660584.ese0431

69 Foong, P. Y. (2002). Using short open-ended mathematics questions to promote thinking and understanding. *National Institute of Education*, Singapore. http://math.unipa.it/~grim/SiFoong.PDF

70 Foster, C. (2013) Teaching with tasks for effective mathematics learning, *Research in Mathematics Education*, 15(3), 309-313. https://doi.org/10.1080/14794802.2013.830357

71 Fried, M. N. i Dreyfus, T. (Eds.). (2014). Mathematics & Mathematics Education: Searching for Common Ground. *Springer Netherlands*. https://doi.org/10.1007/978-94-007-7473-5

72 Fujita, T. and Jones, K. (2002), The Bridge between Practical and Deductive Geometry: developing the „geometrical eye". In: A. D. Cockburn and E. Nardi (Eds), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol 2, 384-391, UEA, UK.

73 Fujita, T., & Jones, K. (2007). Learners' understanding of the definitions and hierarchical classification of quadrilaterals: Towards a theoretical framing. *Research in Mathematics Education*, 9(1), 3–20. https://doi.org/10.1080/14794800008520167

74 Fujita, T., Jones, K. i Yammamoto, S. (2004). Geometrical intuition and the learning and teaching geometry. Paper presented to Topic Study Group 10 (TSG10) at the *10th International Congress on Mathematical Education* (ICME-10). Copenhagen, Denmark; 4-11 July 2004.

75 Gagatsis, A., & Geitona, Z. (2021). A multidimensional approach to students' creativity in geometry: spatial ability, geometrical figure apprehension and multiple solutions in geometrical problems. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 18, 5-16.

76 Gagatsis, A., Elia, I., Geitona, Z., Deliyianni, E., Gridos, P. (2022). How could the Presentation of a Geometrical Task Influence Student Creativity? *Journal of Research in Science Mathematics and Technology Education*. DOI: 10.31756/jrsmte.514

77 Gagatsis, A., Paraskevi, M.C., Deliyianni, E., Panaoura, A. and Papagiannis, A. (2015). An insight to the students' geometrical figure apprehension through the context of the fundamental educational thought. Preprint of the paper published in: Communication & Cognition Vol. 48, No. 3 - 4 (2015), pp. 89 – 128. It constitutes a part of the medium research project MED19, funded by the University of Cyprus.

78 Gal, H., & Linchevski, L. (2010). To see or not to see: Analysing difficulties in geometry from the oerspective of visual perception. *Educational Studies in Mathematics*, 74(2), 163–183. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9232-y

79 Gardner, H. (1999). *Intelligence reframed: Multiple intelligences for the 21st century*. Basic Books.

80 Gardner, M., Hatch, T. (1989). Multiple Intelligences Go to School: Educational Implications of the Theory of Multiple Intelligences Educational Researcher, Vol. 18, No. 8 (Nov., 1989), pp. 4-10. *American Educational Research Association*. Dostupno na: http://www.jstor.org/stable/1176460

81 Giaquinto, M. (2015). The Epistemology of Visual Thinking in Mathematics. Dostupno na https://plato.stanford.edu/archives/spr2020/entries/epistemology-visual-thinking/

82 Gleizer, G. I. (2003). *Povijest matematike za školu*. Školske novine i HMD: Zagreb.

83 Glover, J.T. (2003). *Vedic mathematics for schools*. Book 2. Motilal Banarsidass Pubishers: Delhi

84 Golan (2011). Origametria and van Hiele Theory, str. 141-150

85 Gridos, P., Avgerinos, E., Mamona-Downs, J., & Vlachou, R. (2022). Geometrical figure apprehension, construction of auxiliary lines, and multiple solutions in problem solving: aspects of mathematical creativity in school geometry. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 20(3), 619-636.

86 Grubić, M., Baranović, N. (2021). Dudeneyjev Haberdasherov problem. *Acta mathematica Spalatensia. Series didactica*, 4, 73-87.

87 Guay, R.B. (1976). Purdue Spatial Visualization Tests: Visualization of rotations, *Purdue research foundation*. West Lafayette, IN

88 Gűnham, B. C. (2014). An Investıgatıon of Pre-Servıce Elementary School Teachers' Knowledge Concernıng Quadrilaterals. *Cukurova University Faculty of Education Journal*. 43. 10.14812/cufej.2014.017.

89 Guzmán, M. (2002). The role of visualization. In: *Proceedings of the International Conference on the Teaching of Mathematics* (at the Undergraduate Level) (2nd, Hersonissos, Crete, Greece, July 1-6, 2002); see SE 066 909. Dostupno na: http://www.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/invGuz.pdf

90 Halpern, D.F. (2000). Sex differences and cognitive abilities. Mahwah, NJ: Erlbaum.

91 Hammack, R. (2013). *Book of proof*. Virginia Commonwealth University: Virginia.

92 Hemmi, K., Löfwall, C. (2009). Why do we need proof. *Proceedings of CERME 6*, January 28th-February 1st. Dostupno na http://ife.ens-lyon.fr/publications/edition-electronique/cerme6/wg2-03-hemmi-lofwall.pdf

93 Hershkowitz, R., Arcavi, A. i Bruckheimer, M. (2001). Reflections on the status and nature of visual reasoning - The case of the matches. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. Vol 32(2), 255-265. Doi: 10.1080/00207390010010917

94 Hill, D.R., Roberts, L.F. (2002). Let the Pictures Tell the Story: Visualizations for Mathematics Instruction. Conference paper.

95 Hoffer, A. (1981). Geometry is more than proof. *The Mathematics Teacher*, Vol. 74, No. 1, pp. 11-18

96 Hsu, W.-M. (2013). Examining the types of mathematical tasks used to explore the mathematics instruction by elementary school teachers. *Creative Education*, 4(6), 396-404. http://dx.doi.org/10.4236/ce.2013.46056

97 Idris, N. (1998). Spatial visualization, field dependence/independence, van Hiele level and achievement in geometry: the influence of selected activities for middle school students. *Dissertation*: The Ohio State University

98 Jakić, M. (2003). *Logika*. Školska knjiga: Zagreb.

99 Jones, K. (1998). Theoretical Frameworks for the Learning of Geometrical Reasoning, *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 18(1-2), 29-34. Retrieved from http://eprints.soton.ac.uk/41308/ (2.9.2019.)

100 Jones, K., & Pepin, B. (2016). Research on mathematics teachers as partners in task design. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 19(2–3), 105–121. https://doi.org/10.1007/s10857-016-9345-z

101 Jones, K., & Tzekaki, M. (2016). Research on the teaching and learning of geometry. In A. Gutiérrez, G. Leder & P. Boero (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: The Journey Continues* (pp. 109-149). Rotterdam: Sense. https://doi.org/10.1007/978-94-6300-561-6_4

102 Jones, K., Maschietto, Michela and Mithalal-Le Doze, Joris (2017) Introduction to the papers of WG4: Geometry Education. In T. Dooley & G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the 10th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME10)* (pp. 560-563). Dublin, Ireland: ERME.

103 Josefsson, M. (2016). On the classification of convex quadrilaterals. *The Mathematical Gazette*, 100(547), 68-85. doi:10.1017/mag.2016.9

104 Jozić, N. (2011). Računalo u nastavi matematike: zašto, kada i kako?, U zborniku radova *Drugi simpozijum „Matematika i primene"* (2), uredio Protić, Lj. 17 – 27. Beograd: Matematički fakultet.

105 Jozić, N. (2012a). Fotografija kao inovativno nastavno sredstvo, U zborniku radova *Peti kongres nastavnika matematike RH*, uredili Ivanšić, I.; Mladinić, P.; Svedrec, R., 257 – 270. Zagreb: Profil.

106 Jozić, N. (2012b). Učenje usmjerenim opažanjem, U zborniku prispevkov 1. *mednarodna Konferenca o učenju in poučevanju matematike* (KUPM 2012), uredili Kmetič, S., Bone J., Rajh S., Sambolić Beganović A., Sirnik, M. i Suban Ambrož, M., 58 - 66. Maribor, dostupno na: http://www.zrss.si/pdf/zbornikprispevkovkupm2012.pdf.

107 Jozić, N. (2014). Formuliranje matematičkih definicija i iskaza teorema u svrhu kritičkog promišljanja i zaključivanja, U zborniku radova *Četvrti simpozijum „Matematika i primene"*, Beograd: Matematički fakultet, str. 54-67

108 Kavajin, A. (2016). Tangram i njegova primjena. *Diplomski rad*. Filozofski fakultet u Splitu

109 Kavajin, A., Baranović, N. (2019a). Tangram u nastavi matematike, 1. dio. *Matematika i škola*, 21, 101; 18-26

100 Kavajin, A., Baranović, N. (2019b). Tangram u nastavi matematike, 2. dio. *Matematika i škola*, 21, 102; 69-74.

111 Kimura, D. (1999). Sex and cognition. Cambridge, MA: MIT Press.

112 Klašnja, S. (1974). *Geometrija za prvi razred gimnazije*. Zavod za udžbenike: Sarajevo.

113 Klavir, R., & Gorodetsky, K. (2011). Features of creativity as expressed in the construction of new analogical problems by intellectually gifted students. *Creative Education*, 02(03), 164–173. https://doi.org/10.4236/ce.2011.23023

114 Klavir, R., & Hershkovitz, S. (2014). Teaching and evaluating ' open - ended ' problems. 1–24. http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.459.7430

115 Kozakli Ulger, T., & Tapan Broutin, M. S. (2017). Pre-Service Mathematics Teachers' Understanding of Quadrilaterals and the Internal Relationships between Quadrilaterals: The Case of Parallelograms. *European Journal of Educational Research*, 6(3), 331-345. doi: 10.12973/eu-jer.6.3.331

116 Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Chicago: University of Chicago Press.

117 Kundema, I. B. (2016). Teaching for visual literacy by mathematics teachers in Tanzanian secondary schools. *Master of Education*: University of Pretoria

118 Kurnik, Z. (2000). Matematički zadatak [Mathematical task]. *Matematika i škola*, II(7), 51–58. https://mis.element.hr/fajli/545/07-02.pdf

119 Kurnik, Z. (2007). *13 metodičkih radionica* (Radni materijali). HMD: Zagreb

120 Kurnik, Z. (2013). *Oblici matematičkog mišljenja*. Element: Zagreb.

121 Leikin, R., & Lev, M. (2007). Multiple solution tasks as a magnifying glass for observation of mathematical creativity [Paper presentation].*In the Proceedings of the 3th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Seoul: PME, Vol. 3, 161-168.

122 Liston, M. & O'Donoghue, J. (2007). The Transition from Secondary School Mathematics to University Mathematics. British Educational Research Association Annual Conference, *Institute of Education, University of London*. Dostupno na: http://www.leeds.ac.uk/bei/Education-line/browse/all_items/167980.html (pristup veljača 2018.)

123 Lohman, D.F. (1993). Spatial ability and G. In I. Dennis, P. Tapsfield (Ed.), *Human Abilities: Their Nature and Measurement*, pp 97-116

124 Lučić, Z. (2009). *Ogledi iz istorije antičke geometrije*. Službeni glasnik: Beograd

125 Lund, T. (2012). Combining Qualitative and Quantitative Approaches: Some Arguments for Mixed Methods Research. *Scandinavian Journal of Educational Research - SCAND J EDUC RES*. Vol 56(2), 1-11. DOI: 10.1080/00313831.2011.568674

126 Mainali, B. (2021). Representation in Teaching and Learning Mathematics. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology,* v9 n1 p1-21 2021

127 Malić, T. (2019). *Matematika 6.* Udžbenik matematike za 6. razred osnovne škole. Novi Logos: Beograd

128 Mateljević M., Jozić, N., Svetlik, M. (2013). Istraživanjem do minimuma ili maksimuma, U zborniku radova *Treći simpozijum „Matematika i primene"*, uredili Stanimirović, Z., Marić M. i Svetlik, M., 35 – 54. Beograd: Matematički fakultet.

129 McGee, M. G. (1979). Human spatial abilities: Psychometric studies and environmental, genetic, hormonal, and neurological influences. *Psychological Bulletin*, 86(5), 889-918.

130 Merriam Webster dictionary. Dostupno na: https://www.merriam-webster.com/dictionary/visualization

131 Milinković, J. i Ševa, N. (2021). Tipologija grešaka u rješavanja zadataka iz geometrije. I. Đerić, N. Gutvajn, S. Jošić i N. Ševa (Ur.) *TIMSS 2019 u Srbiji*, str. 163-192. Beograd: Institut za pedagoška istraživanja

132 Mitrović, M., Ognjanović, S., Veljković, M., Petković, Lj., Lazarević, N. (2006). *Geometrija za prvi razred matematičke gimnazije*. Krug: Beograd.

133 Mix, K. S., Cheng, Y. L. (2012). The Relation Between Space and Math: Developmental and Educational Implications, Editor(s): Janette B. Benson, *Advances in Child Development and Behavior.* Vol 42, 197-243. https://doi.org/10.1016/B978-0-12-394388-0.00006-X.

134 Nakahara, T. (2007).Cultivating Mathematical Thinking through Representation-Utilizing the Representational. Plenary paper.

135 Nardi, E. (2014). Reflections on visualization in mathematics and in mathematics education. In M. Fried (Ed.), *Mathematics and mathematics education: Searching for common ground*. New York: Springer.

136 Ndlovu, M. (2014). Preservice teachers' understanding of geometrical definitions and class inclusion: an anlysis using the van Hiele model. *Proceedings of INTED2014 Conference,* 10th-12th March 2014, Valencia, Spain.

137 Nisawa, Y. (2018). Applying van Hiele’s Levels to Basic Research on the Difficulty Factors behind Understanding Functions. *International Electronic Journal of Mathematics Education*. Vol. 13, No. 2, 61-65. https://doi.org/10.12973/iejme/2696

138 Novak, J. (2020). Pouzdanost mjerenja u psihologiji: Razvoj metode, zaluđenost Cronbachovim alfa koeficijentom i preporuke za ispravnu procjenu pouzdanosti. *Psihologijske teme*, 29 (2), 427-457. https://doi.org/10.31820/pt.29.2.11

139 NCTM National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA

140 Odluka o donošenju kurikuluma za nastavni predmet Matematike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj [Decision on the adoption of the curriculum for the subject of Mathematics for elementary schools and gymnasiums in the Republic of Croatia]. (Odluka) (2019). Narodne novine 7/2019.

141 Paivio, A. (1991). Imagery and verbal processes. New York: Holt, Rinehart & Winston.

142 Pape, S., Tchoshanov, M (2001). The Role of Representation(s) in Developing Mathematical Understanding. *Theory Into Practice*. Vol 40(2), 118-127. DOI: 10.1207/s15430421tip4002_6

143 Pauše, Ž. (2007). *Matematika i zdrav razum*. Školska knjiga: Zagreb.

144 Pavković, B. i Veljlan, D. (2004). *Elementarna matematika* 1. Školska knjiga: Zagreb.

145 PISA 2012 Matematičke kompetencije za život [Mathematical Competencies for Life] (2013). Nacionalni centar za vanjsko vrednovanje.

146 Pittalis, M., & Christou, C. (2010). Types of Reasoning in 3D Geometry Thinking and Their Relations with Spatial Ability. *Educational Studies in Mathematics*, 75, 191-212. http://dx.doi.org/10.1007/s10649-010-9251-8

147 Polya, G. (1966). *Kako ću riješiti matematički zadatak* [How to solve it]. Školska knjiga.

148 Presmeg, N. C. (1986a). Visualization and mathematical giftedness. *Educational Studies in Mathematics*, 17, 297-311.

149 Presmeg, N. C. (1986b). Visualization in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 6(3), 42-46.

150 Presmeg, N. C. (1997). Generalization using imagery in mathematics. In L. D. English (Ed.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors and images* (pp. 299-312). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

151 Presmeg, N. C. (2006). Research on visualisation in learning and teaching mathematics. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 205-235). Sense Publishers.

152 Presmeg, N. C. (2014). Contemplating visualisation as an epistemological learning tool in mathematics. ZDM *Mathematics Education*, 46, 151–157. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0561-z

153 Presmeg, N. C. i Balderas-Cañas, P. E. (2001) Visualization and Affect in Nonroutine Problem Solving, *Mathematical Thinking and Learning*, 3:4, 289-313, DOI: 10.1207/S15327833MTL0304_03

154 Rellensmann, J., Schukajlow, S., & Leopold, C. (2017). Make a drawing. Effects of strategic knowledge, drawing accuracy, and type of drawing on students' mathematical modelling performance. *Educational Studies in Mathematics*, 95(1), 53–78. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9736-1

155 Rittle-Johnson, B., Schneider, M. (2015). Developing Conceptual and Procedural Knowledge of Mathematics. In R. Cohen Kadosh & A. Dowker (Eds.), *Oxford handbook of numerical cognition* (pp. 1102-1118). Oxford, UK: Oxford University Press. doi: 10.1093/oxfordhb/9780199642342.013.014

156 Roger B. Nelson (1993). *Proofs Without Words*, Mathematical Association of America.

157 Saads. S., Davis, G. (1997) Visual perception and image formation in three dimensional geometry. University of Southampton. Conference paper.

158 Schneider, W. J., & McGrew, K. S. (2012). The Cattell-Horn-Carroll model of intelligence. In D. P. Flanagan & P. L. Harrison (Eds.), *Contemporary intellectual assessment: Theories, tests, and issues* (pp. 99–144). The Guilford Press.

159 Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). MacMillan.

160 Schukajlow, S., Leiss, D., Pekrun, R., Blum, W., Müller, M., & Messner, R. (2012). Teaching methods for modelling problems and students' task-specific enjoyment, value, interest and self-efficacy expectations. *Educational Studies in Mathematics*, 79(2), 215–237. https://doi-org.nukweb.nuk.uni-lj.si/10.1007/s10649-011-9341-2

161 Sierpinska, A. (1992) . On understanding the notion on function. *The Mathematical Association of Amerika*: United States of America.

162 Siew, N. M., Chong. C. L. & Abdullah, M. R. (2013). Facilitating student's geometric thinking through van Hiele's phase-based learning using tangram. *Journal of Social Sciences*. 9 (3): 101-111.

163 Sinclair, N., Bartolini Bussi, M. G., de Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A. & Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. ZDM *Mathematics Education*, 48(5), 691–719. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0796-6

164 Smith, M. S., & Stein M. K. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School* 3, 344-350.

165 Stefanowicz, A. (2014). Proofs and Mathematical reasonig. University of Birmingham. Dostupno na: https://www.birmingham.ac.uk/Documents/college-eps/college/stem/Student-Summer-Education-Internships/Proof-and-Reasoning.pdf

166 Stokes, S. (2002). Visual literacy in teaching and learning: A literature perspective. Electronic *Journal for the Integration of Tehnology in Education*. 1(1), 10-19.

167 Sullivan, P. (2009). Constraints and opportunities when using content-specific open-ended tasks. In R. Hunter, B. Bicknell, & T. Burgess (Eds.), Crossing divides: *Proceedings of the 32nd annual conference of the mathematics education research group of Australasia*, 1, 726–729. MERGA. http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.544.9781&rep=rep1&type=pdf

168 Tan Sisman, G., & Aksu, M. (2015). A study on sixth grade students' misconceptions and errors in spatial measurement: Length, area, and volume. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 14(7), 1293-1319

169 Tillotson, M.L. (1985). The effect of instruction in spatial visualization on spatial abilities and mathematical problem solving. *Doctoral dissertation*, University of Florida.

170 Teppo, A. (1991). Van Hiele levels of geometric thought revisited. The Mathematics Teacher, Vol. 84, No. 3 (MARCH 1991), 210-221. *National Council of Teachers*. Dostupno na: http://www.jstor.org/stable/27967094 . (3.9.2013.)

171 Thoma, A. & Nardi, E. (2018). Transition from School to University Mathematics: Manifestations of Unresolved Commognitive Conflict in First Year Students' Examination Scripts. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education.* Vol: 4 No:1. (pp. 161 – 280).

172 TIMMS 2017 Priručnik za unapređivanje nastave matematike s primjerima zadataka iz međunarodnog istraživanja TIMSS 2015 [Handbook for the advancement of teaching mathematics with examples of tasks from TIMSS 2015] (2017) Nacionalni centar za vanjsko vrednovanje.

173 Tosto, M. G., Hanscombe, K. B., Haworth, C. M. A., Davis, O. S. P., Petrill, S. A., Dale, P. S., Malykh, S., Plomin, R. and Kovas, Y. (2014). Why do spatial abilities predict mathematical performance? *Developmental Science* .

174 Usiskin, Z. (1982). Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry. *Final Report of the Cognitive Development and Achievement in Secondary School Geometry Project*. Chicago, Illinois: University of Chicago

175 Usiskin, Z. (1987). Resolving the continuing dilemmas in school geometry. In M. M. Lindquist & A. P. Shulte (Eds.), *Learning and teaching geometry* K-12 (pp. 17-31). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

176 Usiskin, Z. i Griffin, J. (2008). The classification of quadrilaterals: A study of definition. Charlotte, NC: Information Age Publishing.

177 Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education*. London: Academic Press, Inc.

178 Van Hiele, P.M. (1999). Developing geometric thinking through activities that begin with play. *Teaching children mathematic*, 5(6), 310-316.

179 Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 14:3, 293-305, DOI: 10.1080/0020739830140305

180 Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall, *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwe Academic Publishers

181 Wai, J., Lubinski, D., & Benbow, C. P. (2009). Spatial ability for STEM domains: Aligning over 50 years of cumulative. *Journal of Educational Psychology*, 101(4) 817-835. https://doi.org/10.1037/a0016127

182 Wang, S. (2016), *Discourse Perspective of Geometric Thoughts*, Wiesbaden, Springer Spektrum,

183 Wheatley, G. H. (1997). Reasoning with images in mathematical activity. In L. D. English (Ed.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors and images* (pp. 281-297). Mahwah, NJ: Erlbaum.

184 Whiteley, W. (2005). Teaching to see like a mathematician. In Studies in Multidisciplinarity (Vol. 2, pp. 279–292). *Elsevier*. https://doi.org/10.1016/S1571-0831(04)80048-0

185 Winn, W. (1990). Some implications of cognitive theory for instructional design. *Instructional Science* Vol. 19, No. 1 (1990), pp. 53-69. Published By: Springer

186 Witzke, I. (2016). The problem of transition from school to university mathematics. Dostupno na: https://www.uni-siegen.de/fb6/didaktik/personen/ingo-witzke/ (pristup veljača 2018.)

187 Wu, D. & Ma, H.(2006). The Distributions Of Van Hiele Levels Of Geometric Thinking Among 1st Through 6th Graders. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N.Stehlíková (Eds.). *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Prague* (pp. 409-416). Praga:PME.

188 Yakimanskaya, I. (Ed.). (1991). The development of spatial thinking in schoolchildren. Reston, VA: *National Council of Teachers of Mathematics*

189 Yang, K. L., & Li, J. L. (2018). A framework for assessing reading comprehension of geometric construction texts. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 16(1), 109–124. https://doi.org/10.1007/s10763-016-9770-6

190 Yanhui, X. (2018). On „One Problem Multiple Change" in Chinese „Bianshi" mathematics teaching. *Teaching of Mathematics*, 21(2), 80. http://www.teaching.math.rs/vol/tm2123.pdf

191 Yerushalmy, M., & Chazan, D. (1990). Overcoming visual obstacles with the aid of the Supposer.

192 Yue, J. (2006). Spatial Visualization by Isometric Drawing. *Proceedings of the 2006 IJME - INTERTECH Conference*, Session IT 302-031, Newark, New Jersey

193 Zimmermann, W., Cunningham, S. (Ed.) (1990). Editors' Introduction: What Is Mathematical Visualization? *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*. Mathematical Association of America: Washington DC, 1-8.

194 Žilková, K. (2015). Misconceptions in Pre-service Primary Education Teachers about Quadrilaterals. *Journal of Education*, Psychology and Social Sciences, 3(1), 30-37.

Biografija autora

Nives Baranović, djevojačko Jozić, rođena je u Splitu, Republika Hrvatska, 24. svibnja 1973.

Osnovnu školu „Danica Čabo” završila je u Trilju 1987., a srednju školu CUO „10. kolovoz” Sinj, smjer prirodoslovno-matematički tehničar, 1991. Diplomirala je na Fakultetu prirodoslovno-matematičkih znanosti i odgojnih područja Sveučilišta u Splitu, smjer profesor matematike i informatike, 1998.

Od rujna 1998. do lipnja 1999. radila je kao nastavnik matematike i informatike u Srednjoj strukovnoj školi bana Josipa Jelačića Sinj, a od rujna 1999. do kolovoza 2006. kao učitelj matematike i informatike u Osnovnoj školi „Manuš” u Splitu te od 2004. do 2006. kao nastavnik informatike (vanjski suradnik) u općoj gimnaziji Gimnazijski kolegij „Kraljica Jelena” u Splitu.

Od rujna 2006. do siječnja 2011. radila je kao viši savjetnik za matematiku u Agenciji za odgoj i obrazovanje na poslovima praćenja, vrednovanja i unapređenja matematičkog obrazovanja za sve osnovne i srednje škole na području Dalmacije (sve četiri županije).

U naslovnom zvanju asistenta (vanjski suradnik) radila je na Fakultetu elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje u Splitu od 2007. do 2009. na kolegijima Matematika 1 i Primijenjena matematika, a od 2010. do 2012. na Pomorskom fakultetu u Splitu na kolegiju Matematika 1. U zvanju višeg predavača (vanjski suradnik) radila je na Kemijsko-tehnološkom fakultetu u Splitu od 2013. do 2017. na kolegiju Primijenjena matematika.

Od veljače 2011. do danas zaposlena je na Filozofskom fakultetu u Splitu na Odsjeku za učiteljski studij kao viši predavač na kolegijima: Matematika 1, Matematika 2, Matematike 3 (redovni kolegiji) te Odabrana područja početne nastave matematike (izborni kolegij).

Sudjelovala je u osnivanju Centra izvrsnosti za matematiku Splitsko-dalmatinske županije u listopadu 2016. u kojem je radila kao voditelj Centra (dvije godine) te kao mentor učenicima osnovnih i srednjih škola (četiri godine).

Sudjelovala je u pripremi, organiziranju i provedbi matematičkih natjecanja: regionalnih natjecanja za učenike četvrtih, petih i šestih razreda osnovne škole na području Dalmacije (četiri godine) kao savjetnica za matematiku, a školskih, županijskih i državnih natjecanja učenika osnovnih i srednjih škola Republike Hrvatske (sedam godina) kao član Državnog povjerenstva za provedbu Natjecanja iz matematike.

Kao nastavnik istraživač bila je voditelj dvaju institucijskih projekata: *Kognitivni razvoj i ishodi učenja geometrije studenata učiteljskog studija*, od 2015. do 2018. (ID: FFST-INST-2015) i *Izgradnja koncepta funkcije te razvoj funkcijskog mišljenja kroz učenje i poučavanje matematike*, od 2020. do 2021. (ID: Šifra projekta FFST-INST-2020-33) te sudionik dvaju projekata u organizaciji HUNI (Hrvatska udruga nastavnika istraživača): *Zajedničko akcijsko djelovanje nastavnika i učenika: Van Hieleove razine matematičkih postignuća učenika u Republici Hrvatskoj 2019.-2020.* i *Matematički edukator za osnovne i srednje škole* (u tijeku).

Održala je brojna stručna predavanja i radionice na županijskim, međužupanijskim i državnim stručnim skupovima za učitelje i nastavnike matematike Republike Hrvatske, a dio njih je i organizirala (tijekom pet godina) kao savjetnica za matematiku. Također, održala je na desetke predavanja na stručno-znanstvenim i znanstvenim konferencijama u zemlji i inozemstvu te sudjelovala u organizaciji dviju stručno-znanstvenih konferencija s međunarodnim učešćem.

Član je Hrvatskog matematičkog društva (HMD), Splitskog matematičkog društva (SMD) te počasni član Matematičkog društva Zadar. Aktivno sudjeluje u radu stručnih udruga za matematiku koje djeluju na području Republike Hrvatske. Član je uredništva časopisa *Acta Mathematica Spalatensia Series Didactica*, u izdavaštvu PMF-a Split i SMD-a od pokretanja 2018.

Objavljeni radovi autora:

1. Antunović-Piton, B., & Baranović, N. (2022). Factors Affecting Success in Solving a Stand-Alone Geometrical Problem by Students aged 14 to 15. *Center for Educational Policy Studies Journal*.

2. Baranović, N., Antunović-Piton, B. (2021). Different Perspectives on Success in Solving Stand-Alone Problems by 14 to 15-Year-Old Students. *Croatian Journal of Education-Hrvatski Casopis za Odgoj i obrazovanje*, 23 (2021), 1; DOI:10.15516/cje.v23i1.3863

3. Grubić, M., Baranović, N. (2021). Dudeneyjev Haberdasherov problem. *Acta mathematica Spalatensia. Series didactica*, 4, 73-87.

4. Baranović, N., Baras, I. & Kožul Blaževski, R. (2020). Kako premostiti razliku između onoga što studenti prve godine znaju i onoga što mi mislimo da bi trebali znati. *Poučak: časopis za metodiku i nastavu matematike,* 21 (81), 13-33.

5. Baranović, N. (2019). Pre-service primary education teachers' knowledge of relationships among quadrilaterals, In J. Milinković & Z. Kadelburg (Eds.), *Research in Mathematics Education* (pp. 112–127). Mathematical Society of Serbia.

6. Kavajin, A., Baranović, N. (2019). Tangram u nastavi matematike, 2. dio. *Matematika i škola*, 21, 102; 69-74.

7. Kavajin, A., Baranović, N. (2019). Tangram u nastavi matematike, 1. dio. *Matematika i škola*, 21, 101; 18-26

8. Baranović, N. (2019). O učenju i poučavanju geometrije prema van Hieleovoj teoriji. Zbornik radova: *Geometrija u nastavi matematike*, Gortan, Robert (ur.). Pula: Matematičko društvo Istra, str. 19-42.

9. Baranović, N., Antunović-Piton, B. (2019). Refleksija na uspješnost rješavanja izoliranog geometrijskog problema i njegov potencijal u nastavi. Zbornik radova: *Geometrija u nastavi matematike*. Gortan, Robert (ur.). Pula: Matematičko društvo Istra, str. 68-83.

10. Baranović, N., Lehman, S. (2018). Matematika u tangramu, tangram u matematici. *Poučak: časopis za metodiku i nastavu matematike*, 19, 76; 20-37.

11. Baranović, N., Lehman, S. (2017). Razvoj geometrijskog mišljenja kroz tangram aktivnosti. Zbornik radova: *Sedmi simpozijum „Matematika i primene"* Knežević, Miljan (ur.). Beograd: Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet, str. 81-92.

12. Baranović, N. (2016.) O razvoju geometrijskog mišljenja u nastavi matematike prema van Hieleovoj teoriji, *Šesti simpozijum „Matematika i primene"*, Knežević, Miljan (ur.). Beograd: Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet, str. 100-109.

13. Baranović, N. (2015.) Potencijal jednog zadatka izveden na temelju Talesovog teorema o proporcionalnim dužinama, U zborniku radova *Peti simpozijum „Matematika i primene”*, Beograd: Matematički fakultet, str. 86-98.

14. Baranović, N. (2014.) Učenje temeljeno na čitanju s razumijevanjem, U e-zborniku povzetkov 2. *mednarodne Konference o učenju in poučevanju matematike* (KUPM 2014), dostupno na: http://www.zrss.si/kupm2014/files/povzetki-cetrtek-SLO/#/8/.

15. Jozić, N. (2014.) Formuliranje matematičkih definicija i iskaza teorema u svrhu kritičkog promišljanja i zaključivanja, U zborniku radova *Četvrti simpozijum „Matematika i primene”*, Beograd: Matematički fakultet, str. 54-67.

16. Jozić, N. (2012.) Učenje usmjerenim opažanjem, U zborniku prispevkov 1. *mednarodna Konferenca o učenju in poučevanju matematike* (KUPM 2012), uredili Kmetič, S., Bone J., Rajh S., Sambolić Beganović A., Sirnik, M. i Suban Ambrož, M., 58 - 66. Maribor, dostupno na: http://www.zrss.si/pdf/zbornikprispevkovkupm2012.pdf.

17. Mateljević, M., Jozić, N., Svetlik, M. (2013.) Istraživanjem do minimuma ili maksimuma, U zborniku radova *Treći simpozijum „Matematika i primene”*, uredili Stanimirović, Z., Marić M. i Svetlik, M., 35 – 54. Beograd: Matematički fakultet.

18. Jozić, N. (2012.) Fotografija kao inovativno nastavno sredstvo, U zborniku radova *Peti kongres nastavnika matematike RH*, uredili Ivanšić, I.; Mladinić, P.; Svedrec, R., 257 – 270. Zagreb: Profil.

19. Jozić, N. (2011.) Računalo u nastavi matematike: zašto, kada i kako?, U zborniku radova *Drugi simpozijum „Matematika i primene”* (2), uredio Protić, Lj. 17 – 27. Beograd: Matematički fakultet.

20. Web predavanja na mrežnim stranicama Filozofskog fakulteta u Splitu (Baranović, 2015): *Osnove matematičke logike* i *Osnovno o skupovima*. Predavanja su dostupna na: https://www.ffst.unist.hr/izdavastvo/predavanja.

Prilog A: Popis korištenih geometrijskih pojmova

Hrvatski naziv	**Srpski naziv**	**Engleski naziv**
Točka	Tačka	Point
Pravac	Prava	Straight line / Line
Ravnina	Ravan	Plane
Prostor	Prostor	Space
Polupravac	Poluprava	Ray / Half-line
Poluravnina	Poluravan	Half-plane
Poluprostor	Poluprostor	Half-space
Dužina	Duž	Line segment
Duljina	Dužina	Length
Sukladnost	Podudarnost	Congruence
Simetrala dužine	Simetrala duži	Bisector of a line segment
Konveksan skup	Konveksan skup	Convex set
Kut	Ugao	Angle
Mjera (veličina) kuta	Mera ugla	Measure of angle
Simetrala kuta	Simetrala ugla	Bisector of an angle
Šiljasti kut	Oštar ugao	Acute angle
Pravi kut	Prav ugao	Right angle
Tupi kut	Tup ugao	Obtuse angle
Ispruženi kut	Opruženi ugao	Straight angle
Izbočeni kut	Nekonveksan ugao	Reflex angle
Puni kut	Pun ugao	Full angle / revolution
Sukuti	Naporedni uglovi	Adjacent angles
Suplementarni kutovi	Suplementni uglovi	Supplementary angles
Komplementarni kutovi	Komplementni uglovi	Complementary angles
Vršni kutovi	Unakrsni uglovi	Vertical angles
Geometrijski lik	Geometrijski lik	Geometric figure
Površina	Površ	Surface
Ploština	Površina	Area
Opseg	Obim	Perimeter
Trokut	Trougao	Triangle
Stranica	Stranica	Edge
Jednakostranični	Jednakostranični	Equilateral triangle
Jednakokračni	Jednakokraki	Isosceles triangle
Raznostranični	Raznostranični	Scalene triangle
Šiljastokutni	Oštrougli	Acute-angled triangle
Pravokutni	Pravougli	Right-angled triangle
Tupokutni	Tupougli	Obtuse-angled triangle
Vanjski kut	Vanjski ugao	Exterior angle of triangle
Visina	Visina	Altitude
Srednjica	Srednja linija	Midsegment
Težišnica	Težišna duž	Mediana
Težište	Težište	Centroid
Ortocentar	Ortocentar	Orthocenter
Opisana kružnica	Opisana kružnica	Circumscribed circle
Upisana kružnica	Upisana kružnica	Inscribed circle / Incircle
Četverokut	Četvorougao	Quadrilateral
Dijagonala	Dijagonala	Diagonal
Deltoid	Deltoid	Kite

Trapez	Trapez	Trapezoid / Trapezium
Paralelogram	Paralelogram	Parallelogram
Romb	Romb	Rhombus
Pravokutnik	Pravougaonik	Rectangle
Kvadrat	Kvadrat	Square
Tangencijalni	Tangentni	Tangential / Circumscribed
Tetivni	Tetivni	Cyclic / Inscribed
Mnogokut	Mnogougao	Polygon
Kružnica	Kružnica	Circle
Polumjer	Poluprečnik ili Radijus	Radius
Promjer	Prečnik	Diameter
Kružni luk	Kružni luk	Circular arc
Tetiva	Tetiva	Chord
Tangenta	Tangenta	Tangent
Sekanta	Sečica	Secant
Krug	Krug	Disk / Disc
Kružni isječak	Kružni isečak	Circular sector / Disk sector
Kružni odsječak	Kružni odsečak	Circular (Disk) segment
Kružni vijenac	Kružni prsten	Annulus
Obodni kut	Periferijski ugao	Inscribed angle
Središnji kut	Centralni ugao	Central angle
Geometrijsko tijelo	Geometrijsko telo	Solid figure
Mreža tijela	Mreža tela	Net of solid figure
Volumen	Zapremina	Volume
Oplošje	Površina	Surface area
Poliedri / uglata tijela	Poliedri	Polyhedron
Brid (osnovni, pobočni)	Ivica (osnovna, bočna)	Edge (base, lateral)
Plošna (prostorna) dijagonala	Dijagonala strane (3D figure)	Face (Space) diagonal
Ploha	Strana (ređe Pljosan)	Side
Baza	Osnova (ređe Baza)	Base
Pobočka	Bočna strana	Lateral face
Kocka	Kocka	Cube
Kvadar	Kvadar	Rectangular cuboid
Četverostrana prizma	Četvorostrana prizma	Cuboid
Pravilna prizma	Pravilna prizma	Regular prism
Piramida	Piramida	Pyramid
Tetraedar	Tetraedar	Tetrahedron
Pravilna piramida	Pravilna piramida	Regular pyramid
Krnja piramida	Zarubljena piramida	Frustum
Obla tijela	Obla tela	Round solid figures
Rotacijska tijela	Rotaciona tela	Solids of revolution
Os tijela	Osa tela	Axis of solid figure
Izvodnica	Izvodnica	Slant height
Plašt	Omotač	Mantle
Valjak	Valjak	Cylinder
Stožac	Kupa	Cone
Kugla	Lopta	Ball
Sfera	Sfera	Sphere

Prilog B: Popis slika

Prilog C: Popis tablica

Prilog D: VH test

Zaporka:____________________

Van Hiele test iz geometrije

Upute:

Ne započinjite s radom prije nego dobijete sve upute.

Ovaj test sadrži 25 pitanja. Ne očekuje se da znate sve iz testa.

U gornjem desnom uglu napišite svoju zaporku. Tu istu zaporku napišite na list s odgovorima.

Kada započnete odgovarati na pitanja postupite na sljedeći način:

1. Svako pitanje pročitajte pažljivo.
2. U svakom pitanju postoji samo jedan točan odgovor. Odlučite koji odgovor je točan po vašem mišljenju. Na listu za odgovore zaokružite slovo koje odgovora vašem odgovoru.
3. Na listu za odgovore nalazi se slobodan prostor za računanje i crtanje. Po testu s pitanjima ništa ne pišite.
4. Ako želite promijeniti odgovor, u potpunosti izbrišite prvi odgovor.
5. Ako trebate olovku, podignite ruku.
6. Test se piše 35 minuta.

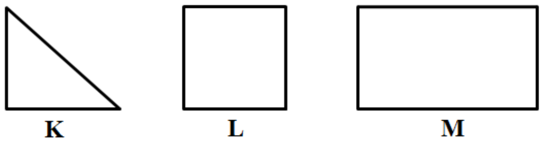
Pričekajte dok vam nastavnik ne kaže da možete početi.

[16] Preuzeto uz dopuštenje iz rada Usiskin Zalman, Van Hiele Levels and Achievemnt in Secondary School Geometry, CDASSG Project, 1982. by The University of Chicago. Manje izmjene teksta su nastale zbog usklađivanja s pojmovima hrvatskog jezika.

Van Hiele test iz geometrije

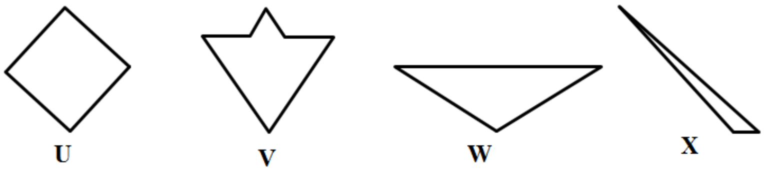
1. Koji su od prikazanih likova kvadrati?

   (A) Samo K.
   (B) Samo L.
   (C) Samo M.
   (D) Samo L i M.
   (E) Svi su kvadrati.



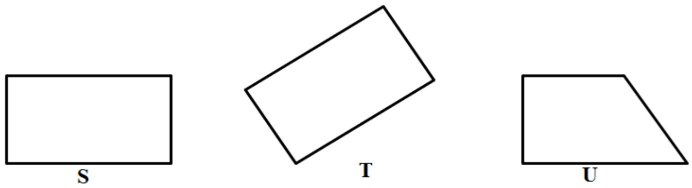
2. Koji su od prikazanih likova trokuti?

   (A) Nijedan nije trokut.
   (B) Samo V.
   (C) Samo W.
   (D) Samo W i X.
   (E) Samo V i W.



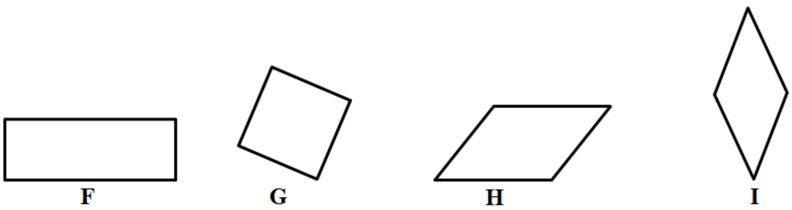
3. Koji su od prikazanih likova pravokutnici?

   (A) Samo S.
   (B) Samo T.
   (C) Samo S i T.
   (D) Samo S i U.
   (E) Svi su pravokutnici.



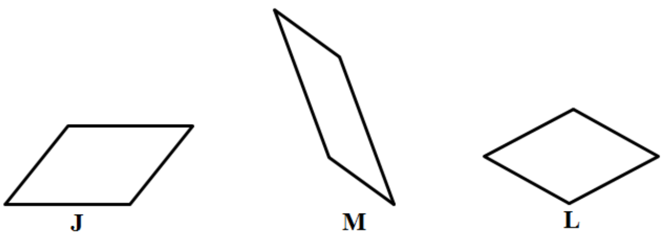
4. Koji su od prikazanih likova kvadrati?

   (A) Nijedan nije kvadrat.
   (B) Samo G.
   (C) Samo F i G.
   (D) Samo G i I.
   (E) Svi su kvadrati.



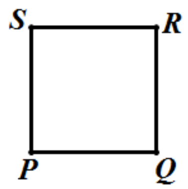
5. Koji su od prikazanih likova paralelogrami?

   (A) Samo J.
   (B) Samo L.
   (C) Samo J i M.
   (D) Nijedan nije paralelogram.
   (E) Svi su paralelogrami.



6. PQRS je kvadrat.

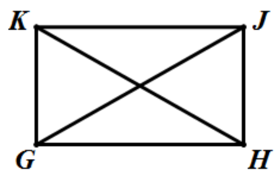
Koja od sljedećih tvrdnji vrijedi za sve kvadrate?



(A) $\overline{PR}$ i $\overline{RS}$ su jednakih duljina.
(B) $\overline{QS}$ i $\overline{PR}$ su okomite.
(C) $\overline{PS}$ i $\overline{QR}$ su okomite.
(D) $\overline{PS}$ i $\overline{QS}$ su jednakih duljina.
(E) Kut pri vrhu Q je veći od kuta pri vrhu R.

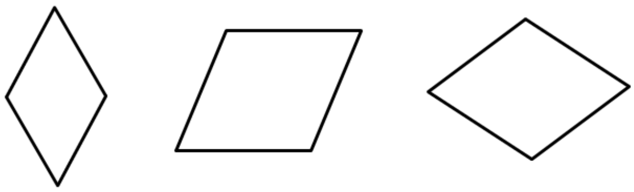
7. U pravokutniku GHJK, $\overline{GJ}$ i $\overline{HK}$ su <u>dijagonale</u>.

Koja od tvrdnji (A) – (D) <u>ne</u> vrijedi za <u>neke</u> pravokutnike?



(A) Pravokutnik ima četiri prava kuta.
(B) Pravokutnik ima četiri stranice.
(C) Dijagonale pravokutnika su jednakih duljina.
(D) Nasuprotne stranice pravokutnika su jednakih duljina.
(E) Sve tvrdnje (A) – (D) su istinite za sve pravokutnike.

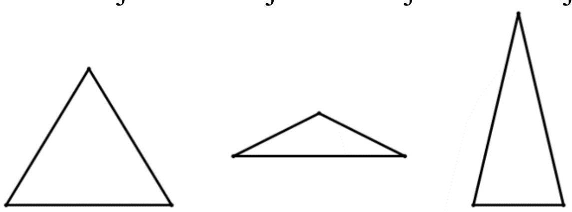
8. <u>Romb</u> je četverokut u kojem su sve stranice jednakih duljina. Dana su tri primjera:



Koja od tvrdnji (A) – (D) <u>ne</u> vrijedi za neke rombove?

(A) Dijagonale romba su jednakih duljina.
(B) Svaka dijagonala dijeli kutove romba na dva jednaka dijela.
(C) Dijagonale romba su okomite.
(D) Nasuprotni kutovi romba su jednake veličine.
(E) Sve tvrdnje (A) – (D) su istinite za sve rombove.

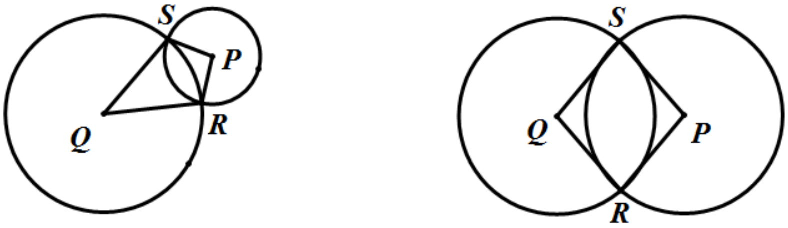
9. Jednakokračni trokut je trokut kojemu su dvije stranice jednakih duljina. Data su tri primjera:



Koja od tvrdnji (A) – (D) vrijedi za sve jednakokračne trokute?

(A) Tri stranice moraju imati jednake duljine.
(B) Jedna stranica mora biti dva puta dulja od druge.
(C) Moraju biti barem dva kuta jednakih veličina.
(D) Tri kuta moraju imati jednake veličine.
(E) Nijedna od tvrdnji (A) – (D) nije istinita za sve jednakokračne trokute.

10. Dvije kružnice sa središtima P i Q sijeku se u tačkama R i S te formiraju četverokut PSQR. Dana su dva primjera:



Koja od tvrdnji (A) – (D) nije uvijek istinita?

(A) PSQR će imati dva para stranica jednakih duljina.
(B) PSQR će ima barem dva kuta jednakih veličina.
(C) Dužine $\overline{PQ}$ i $\overline{RS}$ biti će okomite.
(D) Kutovi pri vrhovima P i Q imat će jednake veličine.
(E) Sve navedene tvrdnje (A) – (D) su istinite.

11. Dane su dvije tvrdnje:

Tvrdnja 1: Lik F je pravokutnik.
Tvrdnja 2: Lik F je trokut.

Koja je od sljedećih tvrdnji istinita?

(A) Ako je istinita tvrdnja 1, onda je istinita i tvrdnja 2.
(B) Ako je tvrdnja 1 lažna, onda je tvrdnja 2 istinita.
(C) Tvrdnje 1 i 2 ne mogu obje biti istinite.
(D) Tvrdnje 1 i 2 ne mogu obje biti lažne.
(E) Nijedna od tvrdnji (A) – (D) nije istinita.

12. Dane su dvije tvrdnje:

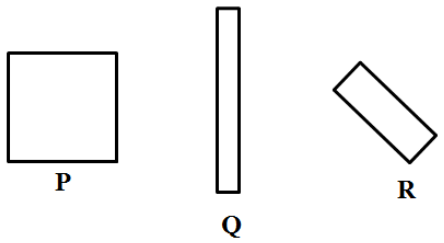
Tvrdnja S: Trokut $\triangle ABC$ ima tri stranice jednakih duljina.
Tvrdnja T: U trokutu $\triangle ABC$, kutovi $\angle B$ i $\angle C$ imaju jednake veličine.

Koja je od sljedećih tvrdnji istinita?

(A) Tvrdnje S i T ne mogu obje biti istinite.
(B) Ako je istinita tvrdnja S, onda je istinita i tvrdnja T.
(C) Ako je istinita tvrdnja T, onda je istinita i tvrdnja S.
(D) Ako je tvrdnja S lažna, onda je lažna i tvrdnja T.
(E) Nijedna od tvrdnji (A) – (D) nije istinita.

13. Koji se od prikazanih likova može nazvati pravokutnikom?

(A) Svi.
(B) Samo Q.
(C) Samo R.
(D) Samo P i Q.
(E) Samo Q i R.



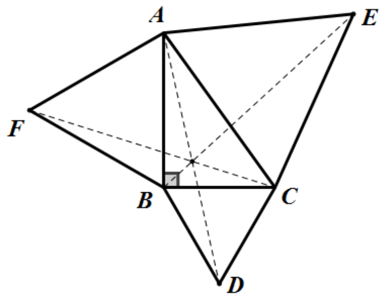
14. Koja je od sljedećih tvrdnji istinita?

(A) Sva svojstva pravokutnika su ujedno i svojstva svih kvadrata.
(B) Sva svojstva kvadrata su ujedno i svojstva svih pravokutnika.
(C) Sva svojstva pravokutnika su ujedno i svojstva svih paralelograma.
(D) Sva svojstva kvadrata su ujedno i svojstva svih paralelograma.
(E) Nijedna od tvrdnji (A) – (D) nije istinita.

15. Što svi pravokutnici imaju, a neki paralelogrami nemaju?

(A) Nasuprotne stranice jednakih duljina.
(B) Dijagonale jednakih duljina.
(C) Nasuprotne stranice paralelne.
(D) Nasuprotne kutove jednakih veličina.
(E) Ništa od navedenog (A) – (D).

16. Dan je pravokutni trokut $\triangle ABC$. Nad stranicama tog trokuta konstruirani su jednakostranični trokuti $\triangle ACE$, $\triangle AFB$ i $\triangle BDC$.



Na temelju tih informacija, može se dokazati da se dužine $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ i $\overline{CF}$ sijeku u jednoj točki (imaju jednu točku zajedničku). Što vam taj dokaz govori?

(A) Samo u nacrtanom trokutu možemo biti sigurni da se $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ i $\overline{CF}$ sijeku u jednoj točki.
(B) Za neke, ali ne za sve pravokutne trokute, $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ i $\overline{CF}$ imaju jednu zajedničku točku.
(C) Za bilo koji pravokutni trokut, $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ i $\overline{CF}$ imaju jednu zajedničku točku.
(D) Za bilo koji trokut, $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ i $\overline{CF}$ imaju jednu zajedničku točku.
(E) Za bilo koji jedankostranični trokut, $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ i $\overline{CF}$ imaju jednu zajedničku točku.

17. Dana su tri svojstva nekog lika.

Svojstvo D: Lik ima dijagonale jednakih duljina.
Svojstvo K: Lik je kvadrat.
Svojstvo P: Lik je pravokutnik.

Koja je od sljedećih tvrdnji istinita?

(A) D povlači K, a K povlači P.

(B) D povlači P, a P povlači K.

(C) K povlači P, a P povlači D.

(D) P povlači D, a D povlači K.

(E) P povlači K, a K povlači D.

18. Dane su dvije tvrdnje.

I: Ako je lik pravokutnik, onda se njegove dijagonale raspolavljaju.

II: Ako se dijagonale nekog lika raspolavljaju, onda je lik pravokutnik.

Koja je od sljedećih tvrdnji istinita?

(A) Da bi dokazali da je **I** istinita, dovoljno je dokazati da je **II** istinita.

(B) Da bi dokazali da je **II** istinita, dovoljno je dokazati da je **I** istinita.

(C) Da bi dokazali da je **II** istinita, dovoljno je pronaći jedan pravokutnik čije se dijagonale raspolavljaju.

(D) Da bi dokazali da je **II** lažna, dovoljno je pronaći jedan lik koji nije pravokutnik čije se dijagonale raspolavljaju.

(E) Nijedna od tvrdnji (A) – (D) nije istinita.

19. U geometriji:

(A) Svaki pojam se može definirati i svaka istinita tvrdnja se može dokazati.

(B) Svaki pojam se može definirati, ali je neophodno pretpostaviti da su neke tvrdnje istinite.

(C) Neki pojmovi moraju ostati nedefinirani, ali svaka istinita tvrdnja se može dokazati.

(D) Neki pojmovi moraju ostati nedefinirani i neophodno je imati neke tvrdnje za koje se pretpostavlja da su istinite.

(E) Nijedna od tvrdnji (A) – (D) nije istinita.

20. Proučite slijedeće tri tvrdnje.

(1) Dva pravca okomita na isti pravac su međusobno paralelna.

(2) Pravac koji je okomit na jedan od dva paralelna pravca, okomit je i na drugi pravac.

(3) Ako su dva pravca ekvidistantna (jednako udaljena), onda su oni paralelni.

Na slici ispod, pravci *m* i *p* su okomiti te su pravci *n* i *p* okomiti. Koja bi od gornjih rečenica mogla biti razlog da je pravac *m* paralelan s pravcem *n*?

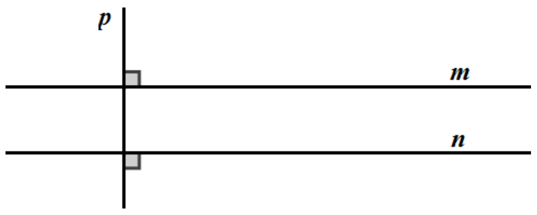
(A) Samo (1).

(B) Samo (2).

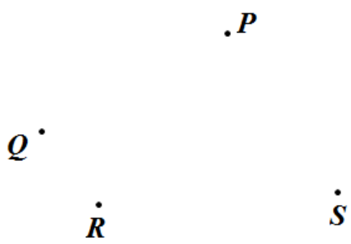
(C) Samo (3).

(D) (1) ili (2).

(E) (2) ili (3).



21. U F – geometriji, jedna od činjenica koja se razlikuje od geometrije koju mi koristimo je da postoje točno četiri točke i šest pravaca. Svaki pravac sadrži točno dvije točke. Ako su P, Q, R i S točke, onda su pravci {P,Q}, {P,R}, {P,S}, {Q,R}, {Q,S} i {R,S}.



U F – geometriji, pojmovi „sijeku se" i „paralelni su" koriste se na slijedeći način:

Pravci {P,Q} i {P,R} se sijeku u točki P jer {P,Q} i {P,R} imaju zajedničku točku P.

Pravci {P,Q} i {R,S} su paralelni jer nemaju zajedničkih točaka.

Na temelju tih informacija odredite koja je od sljedećih tvrdnji istinita?

(A) {P,R} i {Q,S} se sijeku.

(B) {P,R} i {Q,S} su paralelni.

(C) {Q,R} i {R,S} su paralelni.

(D) {P,S} i {Q,R}se sijeku.

(E) Nijedna od tvrdnji (A) – (D) nije istinita.

22. Bisekcija kuta znači podjela kuta na dva jednaka dijela, a trisekcija kuta znači podjela kuta na tri jednaka dijela. Godine 1847. P. L. Wantzel je dokazao da općenito nije moguće izvršiti trisekciju kuta koristeći samo šestar i neoznačeno ravnalo. Što možete zaključiti na temelju njegova dokaza?

(A) Općenito, nije moguće izvršiti bisekciju kuta koristeći samo šestar i neoznačeno ravnalo.
(B) Općenito, nije moguće izvršiti trisekciju kuta koristeći samo šestar i označeno ravnalo.
(C) Općenito, nije moguće izvršiti trisekciju kuta koristeći bilo koji pribor za crtanje.
(D) Još uvijek je moguće da u budućnosti netko pronađe opći način trisekcije kuta koristeći samo šestar i neoznačeno ravnalo.
(E) Nitko nikad neće moći pronaći opću metodu za trisekciju kuta koristeći samo šestar i neoznačeno ravnalo.

23. Matematičar J. je izmislio geometriju u kojoj vrijedi slijedeća tvrdnja: Zbroj unutrašnjih kutova trokuta je manji od 180°.

Koja je od sljedećih tvrdnji istinita?

(A) Matematičar J. je pogriješio u mjerenju kutova trokuta.
(B) Matematičar J. je pogriješio u logičkom zaključivanju.
(C) Matematičar J. je pogrešno shvatio značenje riječi „istina”.
(D) Matematičar J. je krenuo od drugih pretpostavki od onih iz geometrije koju koristimo.
(E) Nijedna od tvrdnji (A) – (D) nije istinita.

24. U dvije knjige iz geometrije riječ „pravokutnik” definira se na različite načine.

Koja je od sljedećih tvrdnji istinita?

(A) Jedna od knjiga sadrži grešku.
(B) Jedna od definicija je pogrešna. Ne mogu postojati dvije različite definicije za pravokutnik.
(C) Pravokutnik u jednoj od knjiga mora imati drugačija svojstva od onih iz druge knjige.
(D) Pravokutnik u jednoj od knjiga mora imati ista svojstva kao ona iz druge knjige.
(E) Svojstva pravokutnika u dvije knjige mogu biti različita.

25. Pretpostavimo da ste dokazali tvrdnje I i II.

I: Ako je p, onda je q.
II: Ako je s, onda nije q.

Koja tvrdnja slijedi iz tvrdnji I i II?

(A) Ako je p, onda je s.
(B) Ako nije p, onda nije q.
(C) Ako je p ili q, onda je s.
(D) Ako je s, onda nije p.
(E) Ako nije s, onda je p.

Zaporka: ______________________

Van Hiele test iz geometrije

List za odgovore

Zaokružite točan odgovor:

Prostor za crtanje i računanje.
(Možete koristiti i drugu stranu)

1.	A	B	C	D	E
2.	A	B	C	D	E
3.	A	B	C	D	E
4.	A	B	C	D	E
5.	A	B	C	D	E
6.	A	B	C	D	E
7.	A	B	C	D	E
8.	A	B	C	D	E
9.	A	B	C	D	E
10.	A	B	C	D	E
11.	A	B	C	D	E
12.	A	B	C	D	E
13.	A	B	C	D	E
14.	A	B	C	D	E
15.	A	B	C	D	E
16.	A	B	C	D	E
17.	A	B	C	D	E
18.	A	B	C	D	E
19.	A	B	C	D	E
20.	A	B	C	D	E
21.	A	B	C	D	E
22.	A	B	C	D	E
23.	A	B	C	D	E
24.	A	B	C	D	E
25.	A	B	C	D	E

Prilog E: GEO test

Zaporka: ___________________

Inicijalni (Završni) ispit iz geometrije

1. Sljedećim rečenicama definirani su neki geometrijski pojmovi. Ako je definicija korektna, pored nje napišite DA, a ako nije napišite NE. Zatim, do toga, vizualno prikažite pojam koji se opisuje.

    (a) Pravac je ravna crta.

    (b) Paralelni pravci su pravci koji se ne sijeku.

    (c) Dužina je dio ravnine omeđen s dvije točke.

    (d) Simetrala dužine raspolavlja dužinu pod pravim kutom.

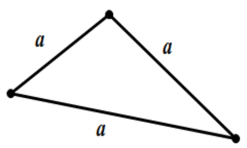
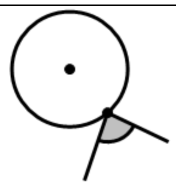
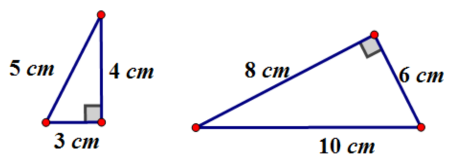
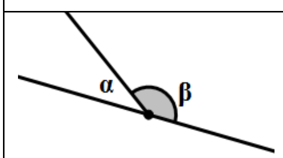
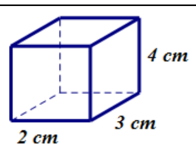
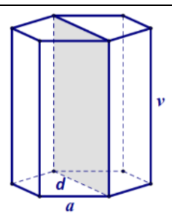
    (e) Kut je dio ravnine omeđen dvama polupravcima.

    (f) Ortocentar trokuta je točka sjecišta visina tog trokuta.

    (g) Romb je četverokut kojemu su nasuprotne stranice paralelne i jednakih duljina.

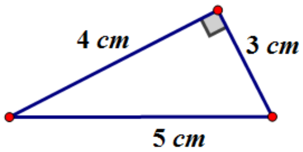
    (h) Kružnica je skup točaka ravnine jednako udaljenih od neke točke te ravnine.

2. Ispod svake slike kratko opišite što slika prikazuje.

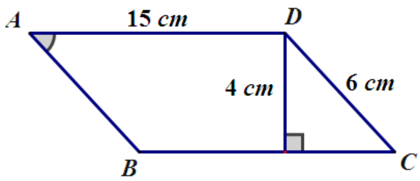
		
		

U zadacima od 3. do 8. odaberite jedan od ponuđenih odgovora kojeg smatrate točnim. U praznom prostoru možete dodatno crtati ili računati te nadopunjavati sliku, prema potrebi.

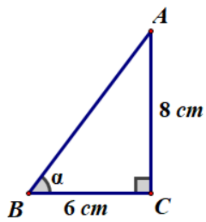
3. Površina trokuta prikazanog na slici iznosi
   (a) $6\,cm^2$
   (b) $12\,cm^2$
   (c) $15\,cm^2$
   (d) $20\,cm^2$
   (e) $60\,cm^2$



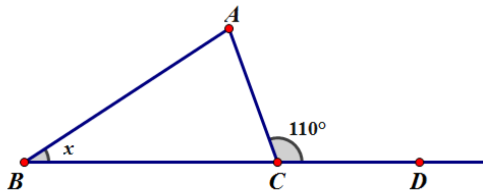
4. Opseg paralelograma *ABCD* iznosi
   (a) 21 *cm*.
   (b) 25 *cm*.
   (c) 36 *cm*.
   (d) 42 *cm*.
   (e) 46 *cm*.



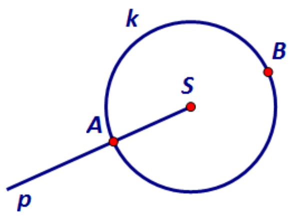
5. Na slici je dan pravokutni trokut te $\alpha \approx 53°13'$. Duljina stranice $\overline{AB}$ iznosi
   (a) 8 *cm*.
   (b) 10 *cm*.
   (c) 12 *cm*.
   (d) 14 *cm*.
   (e) 18 *cm*.



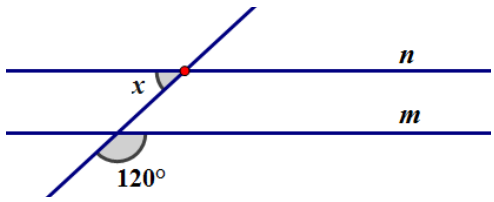
6. Na slici, točke B, C i D pripadaju istom pravcu te je $|AB| = |BC|$. Veličina kuta x iznosi
   (a) 40°
   (b) 45°
   (c) 60°
   (d) 70°
   (e) 80°.



7. Na slici je dana kružnica *k* i pravac *p*. Njihov presjek je
   (a) točka A.
   (b) točke A i S.
   (c) točke A i B.
   (d) točke A, S i B.
   (e) dužina $\overline{AS}$.



8. Pravci *n* i *m* su paralelni. Veličina kuta *x* je
   (a) 30°.
   (b) 40°.
   (c) 50°.
   (d) 60°.
   (e) 120°.



9. Nacrtajte tupokutan trokut ΔEFG, s tupim kutom pri vrhu G. Zatim nacrtajte visine v_e, v_f i v_g tog trokuta.

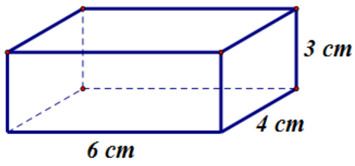
10. Opseg jednakokračnog trokuta iznosi $44\,cm$. Odredite duljine stranica tog trokuta, ako je duljina jedne stranice $14\,cm$.

11. Jedan unutrašnji kut jednakokračnog trokuta je 4 puta veći od jednog od preostala dva kuta. Odredite veličine unutrašnjih kutova tog trokuta.

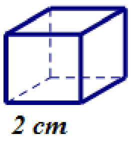
12. Površina kvadrata A iznosi $4\,cm^2$. Stranica kvadrata B je dvostruko veća od stranice kvadrata A. Odredite površinu kvadrata B.

13. Pod nekog hodnika je oblika pravokutnika dužine $6\,m$ i širine $1.5\,m$. Pločice su oblika kvadrata duljine stranice $15\,cm$. Koliko je pločica potrebno da bi se popločao cijeli pod?

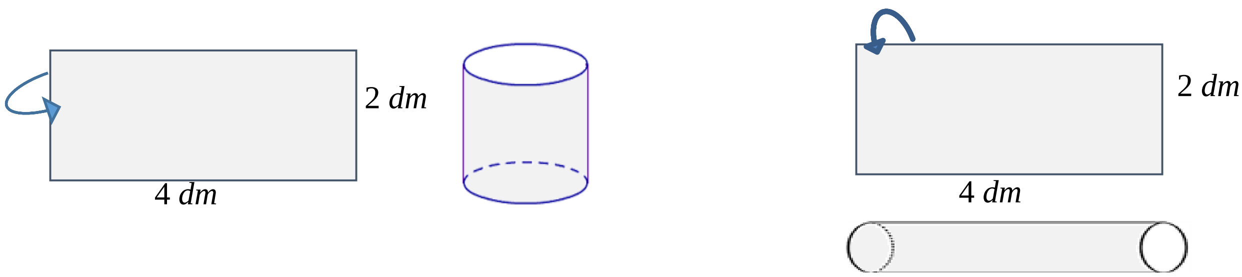
14. Odredite volumen i oplošje tijela (kvadra) sa slike.



15. Od 12 kocaka, jednakih kocki prikazanoj na slici, sastavljen je kvadar. Odredite volumen tako nastalog kvadra. Bridovi kvadra koji se sastaju u jednom vrhu su različite duljine.



16. Imate na raspolaganju dva lista papira jednakih dimenzija te od njih oblikujete šuplji valjak kako je prikazano na slici. Kakvi su volumeni tih valjaka, jednaki ili različiti? Obrazložite svoj odgovor.



Izjava 1

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а Nives Baranović

број индекса 2040/2010

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Razvoj vizuelno-prostornih veština i geometrijskog mišljenja studenata učiteljskih fakulteta zasnovan na metodi uhvaćenog opažanja i teoriji van Hila

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 9.9.2022.

N. Baranović

Izjava 2

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Nives Baranović

Број индекса 2040 / 2010

Студијски програм Doktorske akademske studije Matematike

Наслов рада Razvoj vizuelno-prostornih veština i geometrijskog mišljenja studenata učiteljskih fakulteta zasnovan na metodi upitnog otkrivanja i teoriji van Hila

Ментор Akademik Miodrag Mateljević

Потписани/а N. Baranović

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 9. 9. 2022.

N. Baranović

Izjava 3

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић" да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Razvoj vizuelno-prostornih veština i geometrijskog mišljenja studenata učiteljskih fakulteta zasnovan na metodi vođenog otkrivanja i koncepciji van Hilea

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

5. Ауторство – без прераде

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 9. 9. 2022.