

Univerzitet u Beogradu  
Elektrotehnički fakultet

Branko Lj. Mrdaković

# **Algoritmi za površinsku segmentaciju optimizovani za efikasnu elektromagnetsku analizu**

Doktorska disertacija

Beograd, 2022

University of Belgrade  
School of Electrical Engineering

Branko Lj. Mrdaković

**Surface Meshing Algorithms Optimized for  
Efficient Electromagnetic Analysis**

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2022

**Mentor:**

dr Branko M. Kolundžija, redovni profesor  
Univerzitet u Beogradu – Elektrotehnički fakultet

**Članovi komisije:**

dr Miodrag Tasić, docent  
Univerzitet u Beogradu – Elektrotehnički fakultet

dr Dragan Olćan, redovni profesor  
Univerzitet u Beogradu – Elektrotehnički fakultet

dr Nebojša Dončov, redovni profesor  
Univerzitet u Nišu – Elektronski fakultet

dr Marko Mišić, docent  
Univerzitet u Beogradu – Elektrotehnički fakultet

dr Nataša Ćirović, vanredni profesor  
Univerzitet u Beogradu – Elektrotehnički fakultet

Datum odbrane: \_\_\_\_\_

**Naslov:** Algoritmi za površinsku segmentaciju optimizovani za efikasnu elektromagnetsku analizu

## **Sažetak**

Jedna od najčešće korišćenih metoda za 3D elektromagnetsku (EM) analizu metalnih i dielektričnih struktura u frekvencijskom domenu jeste metoda momenata primenjena na rešavanje površinskih integralnih jednačina. Pokazuje se da korišćenje bilinearnih četvorougona umesto široko korišćenih trougaonih elemenata zajedno sa upotrebom funkcija bazisa višeg reda omogućava značajno povećanje efikasnosti ove metode. S obzirom da EM modelovanje najčešće počinje od odgovarajućeg CAD modela, nameće se potreba za razvojem metode za automatsku četvorougona segmentaciju CAD geometrije koja je pogodna za efikasnu EM analizu.

U ovom radu će biti detaljno opisana nova metoda za segmentaciju CAD geometrije proizvoljnih topoloških i geometrijskih osobina, koja je optimizovana za efikasnu EM analizu. Nova metoda se sastoji od sledećih, međusobno gotovo nezavisnih, celina:

- Podela CAD površina na kvazi-planarne delove primenom nove heurističke metode.
- Kreiranje optimalne poligonske aproksimacije ivica kvazi-planarnih površina.
- Preslikavanje kvazi-planarnih površina na poligone u osnovnom domenu uz dodatne korekcije kako podele površina tako i poligonske aproksimacije ivica, u cilju dobijanja kvalitetne i usaglašene mreže.
- Finalna četvorougona segmentacija ravnih poligona i njeno preslikavanje na odgovarajuće CAD površine.

Pokazuje se da se metoda odlikuje velikom robusnošću i brzinom, a da kreirana mreža pokazuje sve poželjne osobine: usaglašenost, adaptivnost i anizotropiju elemenata.

Tačnost geometrijskog, i posledično EM modelovanja, je potvrđena poređenjem rezultata simulacije sa analitičkim i merenim rezultatima. U radu je takođe pokazana superiornost nove metode nad široko korišćenom metodom baziranom na kreiranju kvalitetne mreže trouglova i njenoj konverziji u mrežu četvorouglova.

**Ključne reči:** elektromagnetsko modelovanje, metoda momenata, funkcije bazisa višeg reda, CAD model, mreža četvorouglova, automatska segmentacija

**Naučna oblast:** Elektrotehnika i računarstvo

**Uža naučna oblast:** Elektromagnetika, antene i mikrotalasi



**Title:** Surface meshing algorithms optimized for efficient electromagnetic analysis

## **Abstract**

Full-wave electromagnetic (EM) analysis of metallic and dielectric structures in the frequency domain is often performed using the method of moments (MoM) applied to surface integral equations (SIE). It is shown that using bilinear quads instead of widely used triangular mesh elements, together with higher order basis functions, significantly increases the efficiency of the method. Having in mind that EM modelling usually starts with an appropriate CAD model, there is a need for developing a fully automatic method for quadrilateral meshing of CAD geometry, which is optimized for efficient EM analysis.

A new method for quadrilateral meshing of a CAD geometry of arbitrary topological and geometrical properties, optimized for efficient EM analysis, is described in this dissertation. The new method consists of the following, mutually almost independent, parts:

- Subdivision of all CAD faces into quasi-planar sub-faces using a new heuristic method.
- Calculation of optimal polygonal approximation of all edges.
- Mapping of the quasi-planar faces to polygons in the base domain, with additional corrections in subdivisions of the faces and polygonal approximation of the edges, to increase mesh quality while maintaining conforming mesh.
- Final quadrilateral meshing in the base domain and mapping the mesh to the CAD geometry.

It is shown that the new method is very robust and fast, and that it creates conforming, adaptive, and anisotropic meshes.

The accuracy of geometrical and, consequently, EM modeling is proven by comparing simulation results with analytically calculated and measurement results. The superiority of the method when compared with a widely used method based on the creation of a high-quality triangular mesh and its conversion to a quadrilateral mesh is also presented in the dissertation.

**Key words:** electromagnetic modeling, method of moments, higher order basis functions, quadrilateral mesh

**Scientific area:** Electrical and Computer Engineering

**Scientific subarea:** Electromagnetics, antennas and microwaves

# Sadržaj

1. Uvod.....	1
1.1. Predmet i značaj istraživanja.....	1
1.2. Ciljevi disertacije.....	2
1.3. Polazne hipoteze.....	2
1.4. Očekivani naučni doprinos.....	3
1.5. Pregled disertacije po glavama.....	4
2. Elektromagnetsko modelovanje zasnovano na metodi momenata i površinskim integralnim jednačinama .....	5
2.1. Integralna jednačina električnog polja .....	5
2.2. Integralna jednačina PMCHWT .....	6
2.3. Metoda momenata .....	8
2.4. Geometrijsko modelovanje.....	10
2.4.1. Generalizovane žice .....	10
2.4.2. Generalizovani četvorouglovi .....	11
2.5. Aproksimacija struja.....	14
2.6. Četvorougaona segmentacija optimalna za efikasnu EM analizu .....	16
3. Terminologija i pregled metoda za četvorougaonu segmentaciju .....	19
3.1. Ulazna geometrija.....	19
3.2. Terminologija i klasifikacija četvorougaonih mreža.....	20
3.3. Pregled algoritama za poligonsku aproksimaciju krive .....	24
3.4. Pregled metoda za četvorougaonu segmentaciju proizvoljne geometrije .....	26
3.4.1. Konverzija trougaone u četvorougaonu mrežu .....	26
3.4.2. Metode zasnovane na podeli na makro-elemente .....	30
3.4.3. Metode zasnovane na parametrizaciji .....	34
3.5. Pregled metoda za četvorougaonu segmentaciju ravnog poligona .....	44
3.5.1. Indirektne metode .....	44
3.5.2. Direktne metode.....	45
3.6. Metode za obradu četvorougaone mreže.....	49
4. Kratak opis metode .....	52
4.1. Ulazni parametri .....	52
4.2. Kratak opis metode.....	53
5. Poligonska aproksimacija krive .....	56
5.1. Uniformna podela u parametarskom prostoru.....	59
5.2. Unapređenje algoritma zasnovanog na sekvencijalnoj pretrazi .....	61
5.3. Optimizacija parametara segmentacije.....	64
5.4. Metoda za kreiranje poligonske aproksimacije krive.....	67

5.5.	Ukрупnjavanje poligonske aproksimacije .....	68
5.6.	Umetanje dodatnih segmenata.....	70
6.	Podela na kvazi-planarne površine .....	71
6.1.	Ekstrakcija oblika površine .....	73
6.2.	Podela po mreži izoparametarskih linija .....	75
6.3.	Podela po pojedinačnim linijama .....	75
6.4.	Podela na osnovu normale na površ .....	78
6.5.	Relaksacija parametara podele .....	81
6.6.	Primeri podele na kvazi-planarne površine .....	84
7.	Preslikavanje površina u osnovni domen.....	88
7.1.	Kontrola regularnosti poligona.....	88
7.2.	Kontrola oblika poligona.....	90
7.3.	Eliminacija kratkih ivica i površina koje se svode na tačku ili liniju.....	92
7.4.	Dodatna podela kompleksnih površina .....	96
8.	Umetanje pomoćnih segmenata za parnost poligona.....	98
8.1.	Trivijalno rešenje.....	98
8.2.	Rešenja predložena u literaturi .....	99
8.3.	Nova metoda.....	101
8.3.1.	Lokalni algoritam .....	101
8.3.2.	Globalni algoritam .....	103
8.3.3.	Primeri primene nove metode .....	105
9.	Četvorougaona segmentacija CAD površina .....	110
9.1.	Segmentacija poligona .....	110
9.2.	Preslikavanje mreže iz osnovnog domena na CAD površinu .....	113
9.3.	Zakrivljeni krivolinijski četvorougaoni elementi .....	114
9.3.1.	Primeri mreža sa bikvadratnim i bikubnim četvorougaonim elementima .....	116
10.	Primeri primene nove metode za segmentaciju na elektromagnetskim problemima.....	119
10.1.	Rasejanje na savršeno provodnoj sferi .....	119
10.2.	Štampana invertovana-F antena.....	121
10.3.	Protivfazni hibrid sa paralelnim Langeovim sprežnicima .....	122
10.4.	Lokalna podešavanja i tolerancije za ukрупnjavanje .....	126
10.5.	Dipol na trupu aviona – poređenje sa metodom baziranom na MeshSim tehnologiji...	130
11.	Zaključak.....	133
12.	Literatura.....	136
	Prilozi.....	i
	Prilog A – Parametrizacija površi .....	i
	Prilog B – Tipovi krivih i površi u Parasolid tehnologiji.....	iv

# 1. Uvod

U širokom spektru aplikacija iz oblasti primenjene elektromagnetike postoji rastuća potreba za preciznim 3D elektromagnetskim (EM) analizama, koje se vrše primenom neke od numeričkih metoda. Jedna od najčešće korišćenih metoda za 3D elektromagnetsku analizu proizvoljnih metalnih i dielektričnih struktura u frekvencijskom domenu jeste metoda momenata (Method of Moments - MoM) primenjena na rešavanje površinskih integralnih jednačina (Surface Integral Equations - SIE) [1], [2].

Kako bi problem mogao biti rešen primenom ove metode, sam model mora biti predstavljen mrežom osnovnih gradivnih elemenata, koji su u praksi najčešće trouglovi ili četvorouglovi. Sa druge strane, u najvećem broju slučajeva, te u svim najšire korišćenim komercijalnim alatima, model čija se elektromagnetska analiza vrši zadat je kao CAD (Computer-Aided Design) model, čije su površine definisane analitičkim ili NURBS funkcijama. Kako bi se ovakav model prilagodio rešavanju primenom pomenute numeričke tehnike, mora se izvršiti njegova segmentacija<sup>1</sup> na osnovne elemente. Metode za trougaonu segmentaciju su daleko jednostavnije i bolje razvijene od metoda za četvorougonaonu segmentaciju [3]. Pokazuje se međutim da se primenom mreže četvorouglova broj nepoznatih koeficijenata smanjuje približno dva puta, što donosi značajno smanjenje računarskih i vremenskih resursa potrebnih za analizu [4]. Dodatno, upotreba funkcija bazisa višeg reda omogućava dodatno smanjenje broja nepoznatih koeficijenata, te posledično podizanje efikasnosti analize [4].

Na strani geometrijskog modelovanja ravni četvorouglovi nisu podesni za modelovanje zakrivljenih površina [5], [6]. U cilju prevazilaženja ovog problema, u praksi se umesto ravnih koriste bilinearni četvorouglovi. Osim navedene prednosti vezane za smanjenje broja nepoznatih koeficijenata u odnosu na trougaone elemente, bilinearni četvorouglovi pokazuju i značajne prednosti na strani modelovanja geometrije. Ukoliko se bilinearni četvorouglovi postavljaju paralelno glavnim pravcima zakrivljenosti površina, oni prirodno modeluju površinu sa manjom greškom modelovanja u odnosu na trougaone elemente [7]. Takođe, anizotropiju elemenata, koja je veoma pogodna kod modelovanja površina koje imaju veliku razliku u radijusu glavnih zakrivljenosti, moguće je postići bez smanjenja faktora kvaliteta pojedinih elemenata. Na drugoj strani u slučaju trougaone mreže, uvođenje anizotropije neminovno vodi smanjenju faktora kvaliteta elemenata mreže.

## 1.1. Predmet i značaj istraživanja

Predmet istraživanja ovog rada jesu tehnike za četvorougonaonu segmentaciju CAD geometrije. Zbog svega prethodno rečenog, poseban fokus je na tehnikama koje generišu mrežu koja je pogodna za primenu u elektromagnetskoj analizi baziranoj na metodi momenata koja koristi funkcije bazisa višeg reda. Kako bi mreža bila pogodna za navedenu primenu ona mora zadovoljiti sledeće zahteve:

- Usaglašenost, odnosno potpuna povezanost mreže.
- Minimalan broj elemenata za zadatu tačnost geometrijskog modelovanja.
- Visok faktor kvaliteta svih elemenata mreže.

---

<sup>1</sup> Pod pojmom segmentacije geometrije podrazumeva se kreiranje mreže koja se sastoji od elemenata određenog oblika (obično su to trouglovi ili četvorouglovi), a koja reprezentuje geometriju sa zadatom tačnošću.

Sama oblast tehnika za segmentaciju je veoma široka i veoma atraktivna u poslednjih nekoliko decenija [3], [8], [9]. U ovom istraživanju je primarni fokus na metodi koja je optimalna za oblast elektromagnetske analize, ali su tehnike segmentacije veoma značajne i za druge oblasti, kao što su geometrijsko modelovanje, kompjuterska grafika i animacija, kartografija, kao i numerička analiza u oblastima poput arhitekture ili dinamike fluida.

Značaj istraživanja se ogleda u razvoju nove metode za četvorougao nu segmentaciju koja će omogućiti značajno povećanje efikasnosti elektromagnetskih analiza zasnovanih na metodi momenata, a koje se pre svega ogleda u:

- Povećanju tačnosti analiza zahvaljujući visokoj tačnosti modelovanja geometrije i visokom faktoru kvaliteta elemenata mreže.
- Smanjenju zahtevanih računarskih i vremenskih resursa kroz minimizaciju broja elemenata mreže.

## 1.2. Ciljevi disertacije

Ciljevi disertacije jesu najpre izbor optimalne metode za segmentaciju, te zatim razvoj i implementacija algoritama za četvorougao nu segmentaciju koja zadovoljava sve gore navedene zahteve. Dodatno, kako bi bila praktično primenjiva, metoda treba da bude:

- Robusna, tako da kreira mrežu i za modele sa geometrijskim nekorektnostima.
- Efikasna, tako da trajanje segmentacije bude značajno kraće od trajanja elektromagnetske analize.

## 1.3. Polazne hipoteze

Kao što je već napomenuto algoritmi za trougaonu segmentaciju su značajno jednostavniji i bolje razvijeni od onih za četvorougao nu segmentaciju, te većina tehnika za četvorougao nu segmentaciju počiva na kreiranju trougaone mreže<sup>1</sup> kao međukoraka. Na drugoj strani, pokazuje se da metode koje počivaju na direktnoj konverziji trougaone u četvorougao nu mrežu pokazuju sledeća ograničenja: velika zavisnost kvaliteta finalne mreže od kvaliteta ulazne trougaone mreže, te veoma je teško dobijanje anizotropne mreže [10], [11].

Tehnike koje pokazuju značajno veći potencijal jesu one koje se zasnivaju na kreiranju makro-elemenata [12], [13] i tehnike koje se zasnivaju na globalnoj parametrizaciji [14]-[16]. Osnovni problemi ovih grupa tehnika odnose se na kompleksnost postupka, te činjenicu da je vreme segmentacije kompleksnih modela nepraktično dugo, pa da ne može zadovoljiti veoma značajan zahtev da je trajanje segmentacije značajno kraće od trajanja elektromagnetske analize.

Algoritmi za direktnu segmentaciju (bez trougaone segmentacije kao međukoraka) ravnih poligona, koji ispunjavaju uslove neophodne za efikasnu elektromagnetsku analizu dobro su poznati [17], [18]. Polazimo stoga od hipoteze da je kvalitetnu mrežu proizvoljne CAD geometrije moguće dobiti

---

<sup>1</sup> Korektniji termin bi bio “mreža trouglova”, jer se termin odnosi na mrežu proizvoljnih topoloških i geometrijskih osobina, čiji su gradivni elementi trouglovi. Međutim, kako je termin “trougaona mreža” široko korišćen i prihvaćen u ovom radu će ova dva termina biti korišćena kao sinonimi. Isto se odnosi na termine “mreža četvorouglova” i “četvorougao na mreža”, odnosno u opštem slučaju “mreža poligona” i “poligonska mreža”.

algoritmom koji ovu segmentaciju svodi na segmentaciju ravnih poligona, te primeni neke od poznatih tehnika za segmentaciju ravnih poligona.

Površine od kojih se CAD model sastoji potrebno je bijektivno preslikati na ravan poligon, a kako bi sam postupak preslikavanja bio vremenski efikasan preslikavanje bi trebalo da bude definisano jednostavnom funkcijom. Takvo jedno preslikavanje jeste ortogonalna projekcija tačaka kvazi-planarne površine na odgovarajuću ravan. Iz tog razloga je sve površine CAD modela potrebno najpre podeliti na kvazi-planarne površine.

Ovu podelu je moguće izvršiti na više načina, međutim kako se pokazuje da je optimalna orijentacija elemenata mreže ona koja odgovara glavnim pravcima zakrivljenosti površina [7], pretpostavka je da je i podelu površina na kvazi-planarne optimalno izvršiti na sličan način.

Metode koje su u literaturi predložene za identifikaciju glavnih pravaca zakrivljenosti CAD površine zasnivaju se na finoj trougaonoj segmentaciji, te računanju direkcionih polja po njoj [19], [20]. Pokazuje se da su ove metode vremenski veoma zahtevne kada je reč o veoma složenim površinama. Pretpostavka je međutim da je na osnovu analize izvesnog broja izoparametarskih linija i normala na površ u izvesnom broju tačaka moguće doći do značajno jednostavnije heurističke metode koja omogućava veoma brzo kreiranje kvalitetne podele proizvoljne površine.

## 1.4. Očekivani naučni doprinos

Polazeći od prethodno navedenih hipoteza izvršeno je kreiranje referentne baze elektromagnetskih modela na kojima je izvršeno poređenje različitih algoritama četvorougaoone segmentacije. Definisani su kriterijumi za poređenje kvaliteta četvorougaoonih mreža, koji obuhvataju poređenje: tačnosti elektomagnetske analize, efikasnosti analize u smislu zahtevanih računarskih i vremenskih resursa, te robusnosti i brzine samog postupka segmentacije.

Razvijena je metoda površinske segmentacije koja se sastoji iz više nezavisnih celina, te kao takva omogućava dekompoziciju početnog složenog problema na više jednostavnih pod-problema. Algoritam za rešavanje svakog od pod-problema optimizovan je na osnovu definisanih kriterijuma.

Imajući u vidu uspešnost koju je opisani postupak pokazao na referentnoj bazi elektromagnetskih modela, mogu se očekivati sledeći doprinosi:

- Razvoj nove metode za četvorougaoonu površinsku segmentaciju CAD geometrije, koja je optimizovana za efikasnu elektromagnetsku analizu primenom metode momenata i funkcija bazisa višeg reda.
- Razvoj efikasne heurističke metode za ekstrakciju oblika CAD površine i njenu podelu po glavnim linijama zakrivljenosti.
- Modifikacija algoritma za segmentaciju ravnog poligona kako bi se omogućila njegova primena na segmentaciju zakrivljenih poligona.
- Nova metoda za dodavanje tačaka za parnost poligona povezanih u proizvoljnu, manifoldnu<sup>1</sup> ili nemanifoldnu, geometriju.

---

<sup>1</sup> Za 3D geometriju se kaže da je manifoldna ukoliko se okolina svake tačke date geometrije može homeomorfno preslikati na topološki disk. Homeomorfim preslikavanjem nazivamo preslikavanje koje je neprekidno i bijektivno, a čije je inverzno preslikavanje takođe neprekidno.

Jednostavnije rečeno, geometrija je manifoldna ukoliko se u svakoj ivici date geometrije susište najviše dve površine. Ukoliko ovo nije zadovoljeno u makar jednoj ivici, geometrija je nemanifoldna.

- Ekstenzija razvijene metode za segmentaciju tako da se omogući kreiranje kvalitetnih mreža koje se sastoje od zakrivljenih krivolinijskih elemenata.

## 1.5. Pregled disertacije po glavama

U drugoj glavi je dat opis metode za elektromagnetsko modelovanje, za koju je optimizovana metoda za segmentaciju predložena u ovom radu. Radi se o metodi momenata primenjenoj na površinske integralne jednačine, a u kojoj se koriste specijalne tehnike za podizanje efikasnosti elektromagnetske analize: četvorougao ni površinski elementi i funkcije bazisa višeg reda.

U trećoj glavi je najpre dat pregled formata koji se koriste za opisivanje trodimenzionalne geometrije. Uvedena je zatim osnovna terminologija vezana za mreže četvorouglova, kao i klasifikacija mreža po više kriterijuma. Opisane su osnovne klase metoda za četvorougao nu segmentaciju, sa nešto detaljnijim opisom metoda koje se najčešće koriste u praksi ili su značajne za razumevanje metode predložene u ovom radu. Kako se metoda opisana u ovom radu zasniva na generalizaciji segmentacije ravnih poligona, u ovoj glavi je dat i pregled metoda za četvorougao nu segmentaciju ravnih poligona. Poseban fokus stavljen je na metodu koja se zasniva na dekompoziciji kompleksnih poligona na poligone jednostavne topologije i njihovoj segmentaciji primenom predefinisanih obrazaca. Konačno, na kraju treće glave dat je kratak osvrt na metode za obradu četvorougao ne mreže, od kojih su nama najznačajnije one koje se odnose na rafinaciju podele u cilju podizanja kvaliteta pojedinih elemenata.

Kratak opis metode za četvorougao nu segmentaciju predložene u ovom radu dat je u četvrtoj glavi. Detaljan opis algoritma za poligonsku aproksimaciju krive, koji se koristi u više faza predložene metode dat je u glavi 5. Glave 4 i 5 veoma su značajne za razumevanje pojedinih faza segmentacije, koje su detaljno opisane u narednim glavama, i to:

- U glavi 6 je opisana podela svih površina od kojih se razmatrana CAD geometrija sastoji na kvazi-planarne površine, koje je moguće jednoznačno projektovati na referentnu ravan.
- Preslikavanje površina u osnovni domen, koji predstavlja poligon u ravni, te dodatna obrada poligona odnosno odgovarajuće površine opisani su u sedmoj glavi.
- Umetanje pomoćnih segmenata za parnost, koje je neophodno za kreiranje čiste četvorougao ne mreže, opisano je u osmoj glavi.
- U devetoj glavi je opisana segmentacija u osnovnom domenu i kreiranje finalne mreže. U ovoj glavi je dat i osvrt na generalizaciju metode, tako da se umesto bilinearnih kreiraju zakrivljeni krivolinijski četvorouglovi.

Primeri primene nove metode za segmentaciju na realističnim elektromagnetskim modelima, te poređenje ove metode sa nekim drugim komercijalno dostupnim metodama, dati su u desetoj glavi ovog rada.

Konačno, u jedanaestoj glavi su dati zaključci, te navedeni uočeni nedostaci nove metode i date smernice za dalje istraživanje.

## 2. Elektromagnetsko modelovanje zasnovano na metodi momenata i površinskim integralnim jednačinama

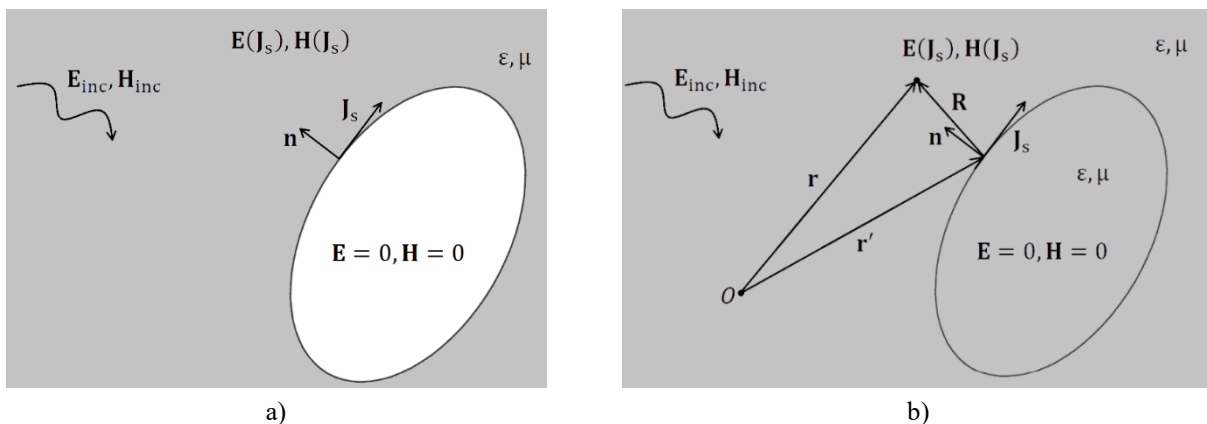
U ovoj glavi je opisano elektromagnetsko modelovanje proizvoljne metalne ili kompozitne (metalno-dielektrične) strukture primenom metode momenata primenjene na površinskim integralnim jednačinama. U prva dva poglavlja su date integralne jednačine korišćene za opisivanje metalnih odnosno dielektričnih struktura, da bi u trećem poglavlju bilo opisano njihovo rešavanje primenom metode momenata.

Posebna pažnja posvećena je tehnikama koje omogućavaju efikasnu elektromagnetsku analizu. U tom smislu, poglavlje 2.4 posvećeno je geometrijskom modelovanju, sa fokusom na generalizovanim četvorougaoim elementima. U poglavlju 2.5 je opisana aproksimacija struja, gde je posebna pažnja posvećena funkcijama bazisa višeg reda.

Konačno, u poslednjem poglavlju je data analiza osobina koje elementi mreže treba da zadovolje da bi mreža bila podesna za efikasnu elektromagnetsku analizu primenom prethodno opisane metode.

### 2.1. Integralna jednačina električnog polja

Posmatrajmo savršeno provodno telo u beskonačnom domenu ispunjenom homogenim, linearnim i izotropnim materijalom čije su permitivnost i permeabilnost date sa  $\epsilon$  i  $\mu$ . Pretpostavimo da je telo pobuđeno prosto-periodičnim elektromagnetskim poljem kružne učestanosti  $\omega$ , električnog polja  $\mathbf{E}_{inc}$  i magnetnog polja  $\mathbf{H}_{inc}$ , kao što je prikazano na slici 1. Pod uticajem ovog pobudnog polja na površini savršeno provodnog tela indukuju se struje površinske gustine  $\mathbf{J}_s$ .



Slika 1. Savršeno provodno telo u homogenoj, linearnoj i izotropnoj sredini (a), i ekvivalentni model (b).

Jednom kada se izračunaju indukovane struje na površini tela sve ostale veličine je moguće jednostavno izračunati. Naime, kako je polje u unutrašnjosti savršeno provodnog tela jednako nuli, polje unutar i van tela se neće promeniti ukoliko se savršeno provodni materijal zameni materijalom okolne sredine, uz zadržavanje površinskih struja  $\mathbf{J}_s$  po površi koja odgovara površi provodnog tela (slika 1b). U tako postavljenom ekvivalentnom problemu struje  $\mathbf{J}_s$  se nalaze u beskonačnoj homogenoj, linearnoj i izotropnoj sredini, te se polje ovih struja može izraziti u zatvorenoj formi u integralnom obliku. Ovo polje nazivamo rasejanim poljem, i označićemo ga kao  $\mathbf{E}(\mathbf{J}_s)$  i  $\mathbf{H}(\mathbf{J}_s)$ .

Na osnovu teoreme jedinstvenosti rešenja [4] rasejano polje je jednoznačno određeno pobudnim poljem i jednim od uslova na površini provodnika:

- Poznata raspodela tangencijalne komponente električnog polja, ili
- Poznata raspodela tangencijalne komponente magnetnog polja.



Polazeći od prvog uslova dobija se integralna jednačina električnog polja (Electric Field Integral Equation – EFIE) [21], a polazeći od drugog uslova dobija se integralna jednačina magnetnog polja (Magnetic Field Integral Equation – MFIE) [21]. Kombinovanjem ovih uslova može se dobiti kombinovana integralna jednačina polja (Combined Field Integral Equation – CFIE) [22], [23]. U nastavku poglavlja ćemo se fokusirati na integralnu jednačinu električnog polja (EFIE), jer se pokazuje da ona obezbeđuje veću tačnost u odnosu na druge dve jednačine [24], [25], a za razliku od njih se može primeniti i na otvorene PEC strukture. Takođe, EFIE jednačina je implementirana u programskom paketu WIPL-D [26], koji će biti korišćen za simulaciju svih modela prikazanih u ovom radu.

Totalna vrednost tangencijalne komponente električnog polja na granici savršeno provodnog tela jednaka je nuli, a kako je totalno polje dato zbirom incidentnog i rasejanog polja, važi sledeće:

$$[\mathbf{E}(\mathbf{J}_s) + \mathbf{E}_{inc}]_{tan} = 0 \quad (1)$$

gde indeks “tan” označava tangencijalnu komponentu, odnosno jednačina po nepoznatim stujama postaje:

$$[\mathbf{E}(\mathbf{J}_s)]_{tan} = -[\mathbf{E}_{inc}]_{tan} \quad (2)$$

Rasejano polje se može predstaviti u obliku:

$$\mathbf{E}(\mathbf{J}_s) = -Z\mathcal{L}\mathbf{J}_s. \quad (3)$$

Linearni operator  $\mathcal{L}$  definisan je sa:

$$\mathcal{L}\mathbf{J}_s = \int_s \left[ \mathbf{J}_s(\mathbf{r}')g(R) - \frac{1}{\gamma^2} \nabla'_s \cdot \mathbf{J}_s(\mathbf{r}') \nabla g(R) \right] dS'. \quad (4)$$

Gde je  $Z$  karakteristična impedansa sredine data sa  $Z = \sqrt{\mu/\epsilon}$ , dok je  $\gamma$  koeficijent prostiranja elektromagnetskog polja, dat sa  $\gamma = j\omega\sqrt{\epsilon\mu}$ . Vektor  $\mathbf{r}$  je vektor položaja tačke u kojoj se računa polje, a  $\mathbf{r}'$  je vektor položaja izvora polja. Simbolom  $R$  je označeno rastojanje između izvora polja i tačke u kojoj se računa polje, tj.  $R = |\mathbf{R}|$ ,  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ . Grinova funkcija  $g(R)$  data je sa:

$$g(R) = \frac{e^{-\gamma R}}{4\pi R}. \quad (5)$$

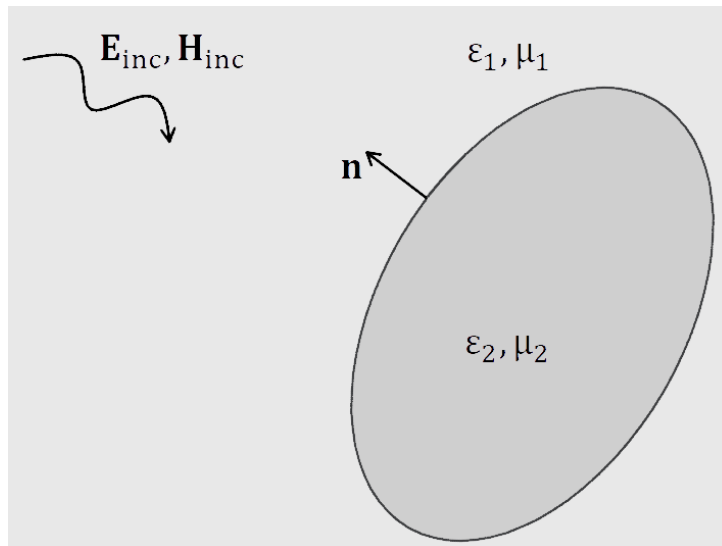
Nabla operator ( $\nabla$ ) predstavlja vektorski diferencijalni operator, dok je sa  $\nabla'$  označen ovaj operator koji deluje na koordinate izvora ( $\mathbf{r}'$ ).

Na osnovu jednačina (1) i (3) integralna jednačina električnog polja može se zapisati kao:

$$[Z\mathcal{L}\mathbf{J}_s]_{tan} = [\mathbf{E}_{inc}]_{tan}. \quad (6)$$

## 2.2. Integralna jednačina PMCHWT

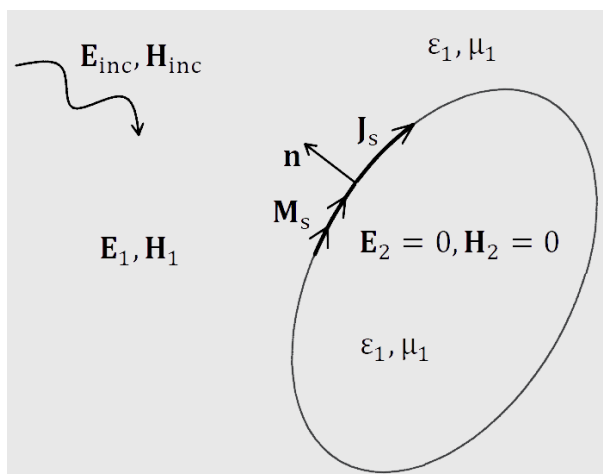
Posmatrajmo telo načinjeno od homogenog, linearnog i izotropnog materijala čije su permitivnost i permeabilnost date sa  $\epsilon_2$  i  $\mu_2$ , koje je postavljeno u beskonačni domen ispunjen homogenim, linearnim i izotropnim materijalom parametara  $\epsilon_1$  i  $\mu_1$ . Pretpostavimo da je telo pobuđeno prosto-periodičnim elektromagnetskim poljem kružne učestanosti  $\omega$ , električnog polja  $\mathbf{E}_{inc}$  i magnetskog polja  $\mathbf{H}_{inc}$ , kao što je prikazano na slici 2. Označimo sa  $S$  graničnu površinu posmatranog tela. Označimo takođe telo ispunjeno materijalom parametara  $\epsilon_2$  i  $\mu_2$  sredinom 2, a okolni prostor sredinom 1.



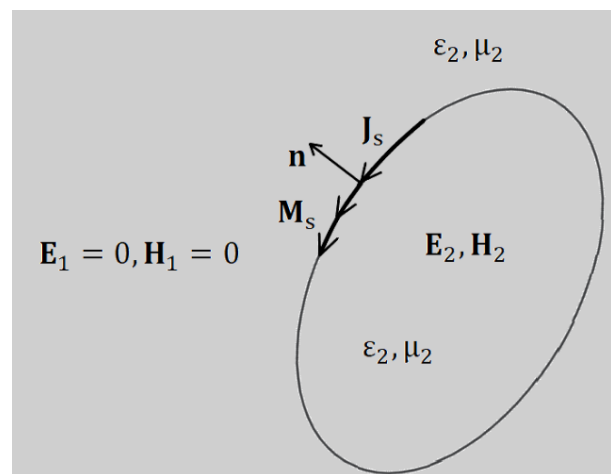
Slika 2. Dielektrično telo u homogenoj, linearnoj i izotropnoj sredini.

Na osnovu teoreme površinske ekvivalencije, polje je u svakoj tački posmatranog domena potpuno određeno izvorima koji se nalaze unutar datog domena i ekvivalentnim električnim i magnetskim strujama,  $\mathbf{J}_s$  i  $\mathbf{M}_s$ , na granicama domena [27]. U posmatranom primeru, originalni problem se dekomponuje na dva ekvivalentna problema (slika 3):

- U prvom problemu je uticaj sredine 2 ekvivalentiran površinskim strujama  $\mathbf{J}_s$  i  $\mathbf{M}_s$  na površini  $S$ . Polje u sredini 1 ima tačne vrednosti (određene ekvivalentnim strujama i incidentnim poljem), dok je polje u sredini 2 jednako nuli.
- U drugom problemu je uticaj sredine 1 i izvora unutar nje ekvivalentiran površinskim strujama  $-\mathbf{J}_s$  i  $-\mathbf{M}_s$  na površini  $S$ . Polje unutar sredine 2 ima tačne vrednosti (određene ekvivalentnim strujama), dok je polje unutar sredine 1 jednako nuli.



a) Ekvivalentni problem za sredinu 1.



b) Ekvivalentni problem za sredinu 2.

Slika 3. Površinska teorema ekvivalencije za pobudu u sredini 1.

Kako je polje unutar delova prostora koji se ekvivalentiraju plaštom površinskih struja jednako nuli, ovaj deo prostora se može ispuniti proizvoljnim materijalom, bez uticaja na polje u ma kojoj tački prostora. Zahvaljujući tome moguće je izvršiti homogenizaciju celog prostora u oba gore opisana problema, te se oni svode na probleme u jednom domenu. U opštem slučaju električno i magnetsko polje usled električnih i magnetskih struja u homogenom, izotropnom i linearnom domenu se može napisati u obliku:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{J}_s, \mathbf{M}_s) &= -Z\mathcal{L}\mathbf{J}_s + \mathcal{K}\mathbf{M}_s \\ \mathbf{H}(\mathbf{J}_s, \mathbf{M}_s) &= -\mathcal{K}\mathbf{J}_s - Y\mathcal{L}\mathbf{M}_s\end{aligned}\quad (7)$$

Gde je  $Y$  karakteristična admitansa odgovarajuće sredine, data sa  $Y = 1/Z$ . Operator  $\mathcal{L}$  definisan je jednačinom (4), dok je operator  $\mathcal{K}$  dat sa:

$$\mathcal{K}\mathbf{J}_s = \int_s \mathbf{J}_s(\mathbf{r}') \times \nabla g(R) dS'. \quad (8)$$

Jednačine na osnovu kojih se dobijaju ekvivalentne električne i magnetske struje dobijaju se na osnovu graničnih uslova za tangencijalne komponente električnog i magnetnog polja na granicama sredina 1 i 2:

$$\begin{aligned}[\mathbf{E}_1(\mathbf{J}_s, \mathbf{M}_s) + \mathbf{E}_{\text{inc}}]_{\text{tan}} &= [\mathbf{E}_2(-\mathbf{J}_s, -\mathbf{M}_s)]_{\text{tan}} \\ [\mathbf{H}_1(\mathbf{J}_s, \mathbf{M}_s) + \mathbf{H}_{\text{inc}}]_{\text{tan}} &= [\mathbf{H}_2(-\mathbf{J}_s, -\mathbf{M}_s)]_{\text{tan}}\end{aligned}\quad (9)$$

Ovako postavljeni granični uslovi predstavljaju PMCHWT formulaciju, koja je u praksi najčešće korišćena formulacija. Ovu formulaciju uveli su *Poggio i Miller* [28], dok su je *Chang i Harrington* primenili na cilindrična tela [29], a *Wu i Tsai* na tela sa rotacionom simetrijom [30]. Naziv formulacije su dali *Mautz i Harrington* [31] na osnovu početnih slova u prezimenima njenih autora. Uvrštavanjem izraza datih jednačinom (7) u jednačinu (9) dobijamo sledeći zapis PMCHWT formulacije:

$$\begin{aligned}[\mathcal{Z}_1\mathcal{L}_1\mathbf{J}_s + \mathcal{Z}_2\mathcal{L}_2\mathbf{J}_s - \mathcal{K}_1\mathbf{M}_s - \mathcal{K}_2\mathbf{M}_s]_{\text{tan}} &= [\mathbf{E}_{\text{inc}}]_{\text{tan}} \\ [\mathcal{K}_1\mathbf{J}_s + \mathcal{K}_2\mathbf{J}_s + Y_1\mathcal{L}_1\mathbf{M}_s + Y_2\mathcal{L}_2\mathbf{M}_s]_{\text{tan}} &= [\mathbf{H}_{\text{inc}}]_{\text{tan}}\end{aligned}\quad (10)$$

gde su  $Z_1$  i  $Z_2$  impedanse,  $Y_1$  i  $Y_2$  admitanse,  $\mathcal{L}_1$  i  $\mathcal{L}_2$  su  $\mathcal{L}$  operatori, a  $\mathcal{K}_1$  i  $\mathcal{K}_2$  su  $\mathcal{K}$  operatori u sredinama 1 i 2, respektivno.

U opštem slučaju problem koji se sastoji od  $N$  različitih sredina, dekomponuje se na  $N$  problema gde je u svakom od njih ceo prostor ispunjen homogenim materijalom. Jednačina (10) se u tom slučaju usložnjava, jer se u obzir moraju uzeti sve granične površine, ali sam oblik jednačine ostaje identičan onom za najjednostavniji slučaj dveju sredina.

## 2.3. Metoda momenata

Integralne jednačine elektromagnetskog polja opisane u prethodnim poglavljima predstavljaju poseban slučaj linearnih operatorskih jednačina. U opštem slučaju linearna operatorska jednačina se može napisati u obliku:

$$L\mathbf{f} = \mathbf{g} \quad (11)$$

gde je  $\mathbf{g}$  poznata funkcija (pobuda),  $\mathbf{f}$  je nepoznata funkcija (odziv), a  $L$  predstavlja linearni operator koji deluje po funkciji  $\mathbf{f}$ .

Metoda momenata je opšta numerička metoda za rešavanje linearnih operatorskih jednačina, integralnog ili diferencijalnog tipa. Međutim, kada govorimo o elektromagnetskoj analizi pojam metode momenata uglavnom vezuje za integralne jednačine. Sama primena metode momenata na rešavanje problema elektromagnetskog polja prvi put je sistematski istražena od strane *Harrington-a* [1].

Numeričko rešavanje linearne operatorske jednačine zasniva se na aproksimaciji nepoznate funkcije  $\mathbf{f}$  konačnom sumom:

$$\mathbf{f} \approx \mathbf{f}_a = \sum_{i=1}^N a_i \mathbf{f}_i \quad (12)$$

gde su  $\mathbf{f}_i$  poznate međusobno nezavisne funkcije, koje se nazivaju funkcijama bazisa,  $a_i$  su nepoznati koeficijenti, dok je  $N$  red aproksimacije. Na ovaj način se problem određivanja beskonačnog broja nepoznatih vrednosti funkcije  $\mathbf{f}$  svodi na problem određivanja  $N$  nepoznatih koeficijenata, koji definišu aproksimativnu funkciju  $\mathbf{f}_a$ .

Tačnost i efikasnost analize zavise od broja i tipa funkcija bazisa. Izbor funkcija bazisa podrazumeva dva koraka. Prvi predstavlja geometrijsko modelovanje, gde analiziranu strukturu treba predstaviti kombinacijom osnovnih gradivnih elemenata (linijskih, površinskih ili zapreminskih). Drugi korak predstavlja aproksimaciju nepoznate funkcije u užem smislu, i podrazumeva definisanje analitičkih izraza funkcija bazisa sa svaki od gradivnih elemenata strukture.

Funkcije bazisa mogu da pripadaju jednom ili većem broju elemenata, i mogu biti definisane samo najnižim redom aproksimacije ili razvojem koji uključuje i više redove. Iako su teže za implementaciju, funkcije bazisa višeg reda pokazuju značajno veći potencijal u pogledu tačnosti i brzine elektromagnetske analize [4].

Zamenom aproksimativne funkcije,  $\mathbf{f}_a$ , u jednačinu (11) dobija se aproksimativna linearna operatorska jednačina data sa:

$$L\mathbf{f}_a = L \sum_{i=1}^N a_i \mathbf{f}_i \approx \mathbf{g} \quad (13)$$

a kako je operator  $L$  linearan, onda je:

$$\sum_{i=1}^N a_i L\mathbf{f}_i \approx \mathbf{g} \quad (14)$$

Da bi se iz ove aproksimativne linearne operatorske jednačine odredilo  $N$  nepoznatih koeficijenata potrebno je ovu jednačinu transformisati u sistem od  $N$  nezavisnih linearnih jednačina. To se vrši formiranjem unutrašnjih proizvoda<sup>1</sup> težinskih funkcija  $\mathbf{w}_j$ ,  $j = 1, 2 \dots N$ , i aproksimativne jednačine (11), kao:

$$\sum_{i=1}^N a_i \langle \mathbf{w}_j, L\mathbf{f}_i \rangle = \langle \mathbf{w}_j, \mathbf{g} \rangle, \quad j = 1, 2, \dots N \quad (15)$$

U matricnom obliku ova jednačina se može zapisati kao:

$$\mathbf{Z}\mathbf{a} = \mathbf{v} \quad (16)$$

gde su elementi matrice  $\mathbf{Z}$  dati sa  $z_{ji} = \langle \mathbf{w}_j, L\mathbf{f}_i \rangle$ , dok su elementi nizova  $\mathbf{v}$  dati sa  $v_j = \langle \mathbf{w}_j, \mathbf{g} \rangle$ .

<sup>1</sup> Unutrašnji proizvod funkcija  $p$  i  $q$ , koji se označava kao  $\langle p, q \rangle$ , je skalarna veličina definisana sa:

$$\langle p, q \rangle = \int_{\Omega} (p^* \oplus q) d\Omega,$$

gde  $*$  označava operaciju konjugovanja, dok je  $\Omega$  presek oblasti definisanosti funkcija  $p$  i  $q$ . Operator  $\oplus$  predstavlja operator množenja ukoliko su funkcije  $p$  i  $q$  skalarne funkcije, odnosno skalarni proizvod u slučaju vektorskih funkcija.

Ovaj način transformisanja linearne operatorske jednačine u sistem linearnih jednačina naziva se testiranjem, a funkcije  $\mathbf{w}_j$  se nazivaju test funkcijama. Najšire korišćena test procedura u praksi je Galerkinova test procedura, kod koje se kao test funkcije koriste funkcije bazisa, tj.  $\mathbf{w}_j = \mathbf{f}_j$ . U poređenju sa drugim test procedurama ona po pravilu zahteva manji broj nepoznatih koeficijenata za istu tačnost analize i pokazuje veću robusnost [32], [33].

## 2.4. Geometrijsko modelovanje

Osnovni zadatak geometrijskog modelovanja jeste predstavljanje originalne, u opštem slučaju kompozitne metalno-dielektrične, strukture odgovarajućom kombinacijom osnovnih gradivnih elemenata (linearnih, površinskih i zapreminskih) na kojima je jednostavno definisati bazisne funkcije. Jasno je da ovakvo modelovanje zahteva definisanje bar dva koordinatna sistema. Prvi je globalni koordinatni sistem u kome je definisana originalna struktura, i u kome će biti definisane tačke za računanje bliskog ili pravci za računanje dalekog polja. Drugi koordinatni sistem je vezan za gradivne elemente i koristi se za definisanje funkcija bazisa. Zapravo, kada govorimo o ovom drugom koordinatnom sistemu najčešće se ne radi o jednom već o većem broju koordinatnih sistema, gde po jedan odgovara svakom gradivnom elementu ili grupi susednih elemenata.

Geometrijsko modelovanje može biti egzaktno ili aproksimativno. U slučaju egzaktnog modelovanja gradivni elementi su tako definisani da egzaktno modeluju geometriju analizirane strukture. U praksi se egzaktno modelovanje veoma retko koristi, jer bi u opštem slučaju zahtevalo definisanje velikog broja različitih gradivnih elemenata koji bi bili podesni za različite strukture ili za geometrijski različite delove jedne iste strukture. Aproksimativno modelovanje podrazumeva modelovanje date geometrije sa zadatom tačnošću, korišćenjem ograničenog skupa gradivnih elemenata. Jasno je da je aproksimativno modelovanje značajno jednostavnije, te je stoga praktično isključivo korišćeni način geometrijskog modelovanja u praksi.

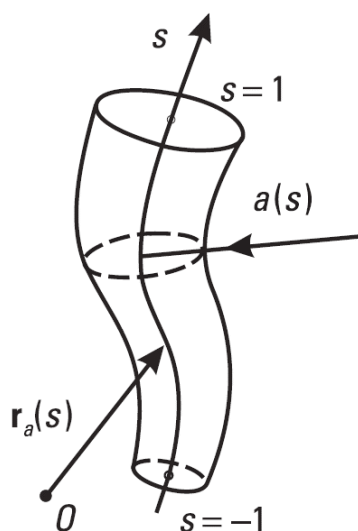
Kada je reč o gradivnim elementima, svi linijski, površinski i zapreminski gradivni elementi korišćeni u numeričkim metodama za elektromagnetsku analizu mogu se tretirati kao generalizovane žice, četvorouglovi (ili trouglovi) i heksaedri (ili tetraedri). Kako je u ovom radu fokus na površinskim integralnim jednačinama u narednom delu ovog poglavlja biće razmatrani elementi koji se baziraju na generalizovanim žicama i četvorouglovima.

### 2.4.1. Generalizovane žice

Generalizovana žica je metalno telo oblika krivolinijskog cilindra kružnog poprečnog preseka. Osa generalizovane žice je definisana neprekidnom glatkom krivom, a promena radijusa žice duž ose definisana je neprekidnom glatkom funkcijom. Geometrija generalizovane žice je potpuno određena parametarskim jednačinama za njenu osu i radijus:

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{r}_a(s), \quad a = a(s), \quad -1 \leq s \leq 1 \quad (17)$$

gde je  $s$  parametarska koordinata duž ose žice, pri čemu vrednosti  $s = -1$  i  $s = 1$  odgovaraju početku i kraju žice, respektivno, kao što je prikazano na slici 4.



Slika 4. Generalizovana žica. [4]

Generalizovane žice se najčešće koriste za opisivanje tankih žičanih antena i drugih struktura na koje se može primeniti aproksimacija tankih žica [34]. Međutim, koriste se i za neke druge strukture poput aksijalno simetričnih debelih antena [35], [36] ili modelovanje aksijalno simetričnih krajeva žica i uticaja nagle promene u radijusu žice [37].

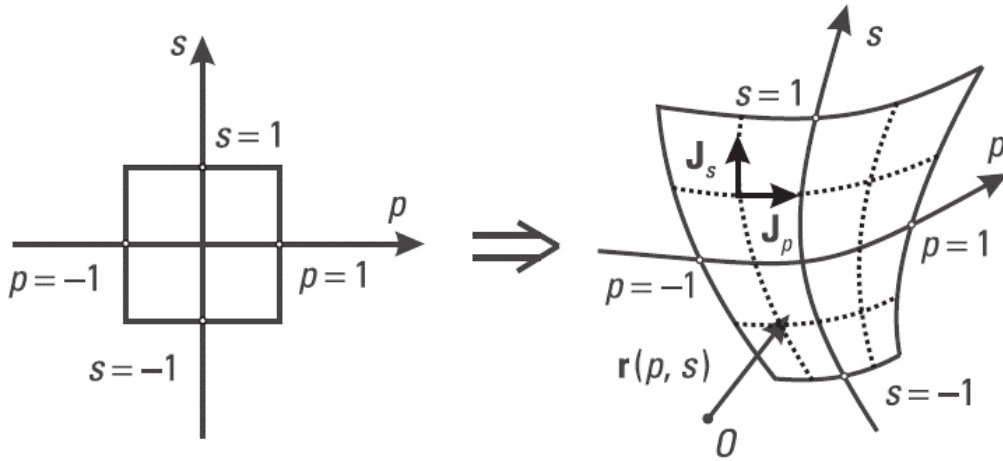
## 2.4.2. Generalizovani četvorouglovi

Za modelovanje metalnih i dielektričnih površina se veoma često koriste ravni trougaoni ili četvorougao elementi [2], [4]. Pokazuje se da se primenom četvorougaoih elemenata broj nepoznatih koeficijenata smanjuje približno dva puta, što donosi značajno smanjenje računarskih i vremenskih resursa potrebnih za analizu [22]. Iz tog razloga će fokus u ovom poglavlju biti na četvorougaoim elementima. Međutim, na strani geometrijskog modelovanja ravni četvorouglovi nisu podesni za modelovanje zakrivljenih površina [26], [27]. Iz tog razloga uvodimo pojam generalizovanog četvorougla koji nije nužno planaran.

Generalizovani četvorougao u širem smislu je zakrivljeni krivolinijski četvorougao. Parametarska jednačina za ovaj četvorougao je:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(p, s), \quad -1 \leq p, s \leq 1 \quad (18)$$

gde su  $p$  i  $s$  lokalne parametarske koordinate. Funkcija  $\mathbf{r}(p, s)$  predstavlja preslikavanje kvadrata čija je dužina stranice  $a = 2$  iz lokalnog  $ps$ -koordinatnog sistema na površ zakrivljenog četvorougla u 3D koordinatnom sistemu (slika 5). Kako parametri  $p$  i  $s$  uzimaju vrednosti između -1 i 1, jasno je da su stranice četvorougla određene parametrima  $p, s = \pm 1$ .



Slika 5. Generalizovani četvorougao definisan u lokalnom  $ps$ -koordinatnom sistemu. [4]

U slučaju aproksimativnog modelovanja geometrije veoma je pogodna parametarska jednačina generalizovanog četvorougla data u sledećem obliku:

$$\mathbf{r}(p, s) = \sum_{i=0}^{n_p} \sum_{j=0}^{n_s} \mathbf{B}_{ij} p^i s^j \quad (19)$$

gde su  $\mathbf{B}_{ij}$  vektorski koeficijenti koji se mogu izračunati na različite načine. Najjednostavniji način jeste da se krene od mreže  $p$ - i  $s$ -koordinatnih linija,  $p = p_i$ ,  $i = 1, 2 \dots (n_p + 1)$ , i  $s = s_j$ ,  $j = 1, 2 \dots (n_s + 1)$ . Ovo je ilustrovano na slici 6 gde je uzeto  $n_p = 4$  i  $n_s = 4$ . Ukoliko su poznate koordinate u čvorovima  $ps$ -mreže,  $\mathbf{r}_{ij}$ , dobija se sistem linearnih jednačina:

$$\mathbf{r}(p_i, s_j) = \mathbf{r}_{ij}, \quad i = 1, 2 \dots (n_p + 1), j = 1, 2 \dots (n_s + 1) \quad (20)$$

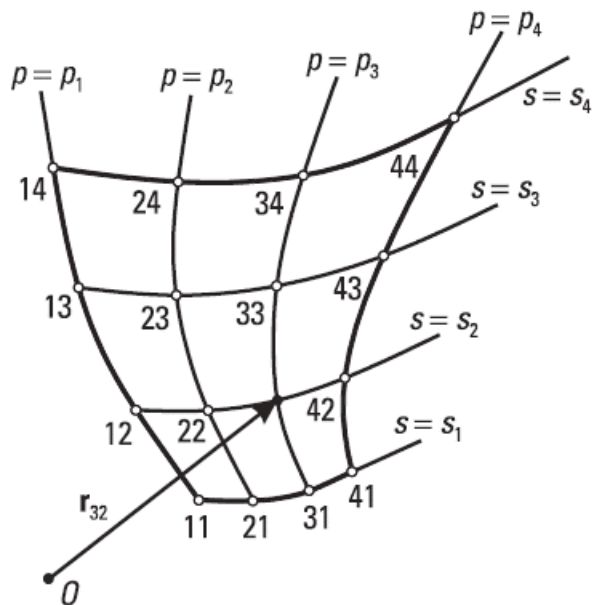
Koordinate čvorova  $\mathbf{r}_{ij}$  se određuju na osnovu analitičke jednačine za aproksimiranu površ ukoliko je ona poznata ili na neki drugi način. U poglavlju 9.3 će biti nešto više reči o načinu određivanja ovih koordinata u metodi predloženoj u ovom radu. Sistem jednačina (20) se rešava po nepoznatim vektorskim koeficijentima  $\mathbf{B}_{ij}$ . Konačno, polinom (19) se može zapisati u sledećoj formi:

$$\mathbf{r}(p, s) = \sum_{i=1}^{n_p+1} \sum_{j=1}^{n_s+1} L_i^{n_p}(p) L_j^{n_s}(s) \mathbf{r}_{ij} \quad (21)$$

gde su  $L_i^{n_p}(p)$  i  $L_j^{n_s}(s)$  Ležandrovi polinomi. Ležandrov polinom  $L_i^n(p)$  je definisan kao:

$$L_i^n(p) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n+1} \frac{p - p_k}{p_i - p_k} \quad (22)$$

Jasno je odavde da proizvod  $L_i^{n_p}(p) L_j^{n_s}(s)$  ima jediničnu vrednost u interpolacionom čvoru  $\mathbf{r}_{ij}$  i nultu vrednost u svim ostalim interpolacionim čvorovima.



Slika 6. Polinomska aproksimacija generalizovanog četvorougla. [4]

Red splajnova u ovoj aproksimaciji određuje oblik generalizovanog četvorougla. Ukoliko se koristi prvi red dobija se bilinearni četvorougao, drugi red daje bikvadratni, a treći red bikubni četvorougao. Da bi se zaista postigla veća tačnost elektromagnetskog modelovanja splajnovi višeg reda moraju biti korišćeni zajedno sa funkcijama bazisa višeg reda [4]. U praksi se najčešće koriste bilinearni četvorouglovi, pa ćemo im na ovom mestu posvetiti nešto više prostora.

### Bilinearni četvorougao

Parametarska definicija bilinearnog četvorougla u  $ps$ -koordinatnom sistemu data je sledećom jednačinom:

$$\mathbf{r}(p, s) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \mathbf{r}_{ij} [1 + (-1)^i p] [1 + (-1)^j s], \quad -1 \leq p, s \leq 1 \quad (23)$$

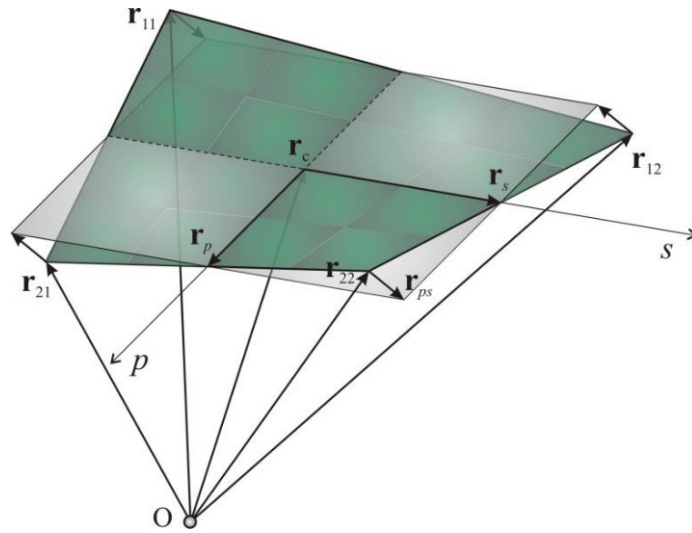
gde su  $\mathbf{r}_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$ , vektori položaja čvorova četvorougla. Primenom jednostavnih manipulacija jednačina (23) se svodi na sledeći oblik:

$$\mathbf{r}(p, s) = \mathbf{r}_c + \mathbf{r}_p p + \mathbf{r}_s s + \mathbf{r}_{ps} ps, \quad -1 \leq p, s \leq 1 \quad (24)$$

gde je  $\mathbf{r}_c$  vektor položaja lokalnog koordinatnog početka,  $\pm \mathbf{r}_p$  i  $\pm \mathbf{r}_s$  su vektori položaja središnjih tačaka stranica četvorougla u odnosu na lokalni koordinatni sistem, a  $\pm \mathbf{r}_{ps}$  vektori pomeraja čvorova četvorougla u odnosu na položaj koji bi imali u slučaju paralelograma, kao što je prikazano na slici 7. U posebnom slučaju, za ravan četvorougao,  $\mathbf{r}_{ps}$  se može predstaviti kao linearna kombinacija  $\mathbf{r}_p$  i  $\mathbf{r}_s$  u obliku:

$$\mathbf{r}_{ps} = \alpha \mathbf{r}_p + \beta \mathbf{r}_s, \quad \alpha = \frac{|\mathbf{r}_{ps} \times \mathbf{r}_s|}{|\mathbf{r}_p \times \mathbf{r}_s|}, \beta = \frac{|\mathbf{r}_{ps} \times \mathbf{r}_p|}{|\mathbf{r}_p \times \mathbf{r}_s|} \quad (25)$$





Slika 7. Bilinearni četvorougaoni element. [38]

### Važne geometrijske veličine generalizovanog četvorougla

Geometrijske veličine od interesa, poput elemenata dužine, površine, jediničnih vektora i slično se jednostavno mogu dobiti polazeći od parametarske jednačine (18). Pogodno je najpre uvesti pojam kovarijantnih unitarnih vektora  $\mathbf{a}_p$  i  $\mathbf{a}_s$  definisanih kao:

$$\mathbf{a}_p = \frac{d\mathbf{r}(p, s)}{dp}, \quad \mathbf{a}_s = \frac{d\mathbf{r}(p, s)}{ds}. \quad (26)$$

Dužine  $dl_p$  i  $dl_s$  duž odgovarajućih koordinatnih linija, koje odgovaraju inkrementima  $dp$  i  $ds$  u parametarskom prostoru po  $p$ - i  $s$ -koordinatama računamo kao:

$$dl_p = e_p dp, \quad dl_s = e_s ds, \quad e_p = |\mathbf{a}_p|, \quad e_s = |\mathbf{a}_s| \quad (27)$$

gde su  $e_p$  i  $e_s$  takozvani Lameovi koeficijenti. Jedinični vektori lokalnog koordinatnog sistema se u ma kojoj tački na površini četvorougaonog elementa računaju na sledeći način:

$$\mathbf{i}_p = \frac{\mathbf{a}_p}{e_p}, \quad \mathbf{i}_s = \frac{\mathbf{a}_s}{e_s}. \quad (28)$$

Konačno, površina elementa na površini četvorougla koja odgovara površini pravougaonika stranica  $dp$  i  $ds$  u  $ps$ -parametarskom prostoru računa se kao:

$$dS = dl_p dl_s \sin \alpha_{ps} = |\mathbf{a}_p \times \mathbf{a}_s| dp ds \quad (29)$$

gde je  $\alpha_{ps}$  lokalni ugao između  $p$ - i  $s$ -koordinatnih linija.

## 2.5. Aproksimacija struja

Kao što je rečeno na početku ove glave, nepoznate veličine u integralnim jednačinama su ekvivalentne električne i magnetske površinske struje. U slučaju generalizovanih (metalnih) žica postoji samo električna struja i to samo njena aksijalna komponenta, koja je data sa:

$$I(s) = \sum_{i=0}^n a_i f_i(s) \quad (30)$$

gde su  $f_i(s)$  bazisne funkcije,  $a_i$  su nepoznati koeficijenti, dok je  $n$  red aproksimacije.

Za razliku od žica koje su uvek metalne, površinskim elementima se mogu modelovati metalne ili dielektrične razdvojne površine, kojima odgovaraju električne i ekvivalentne električne i magnetske struje, respektivno. Električne i magnetske struje aproksimiraju na potpuno identičan način, pa će ovde biti dati izrazi samo za električne struje.

U ovom radu smo fokusirani na modelovanje površina generalizovanim četvorougaoim elementima. Kako su ovi elementi definisani u lokalnom  $ps$ -koordinatnom sistemu, nameće se i aproksimacija struja u istom koordinatnom sistemu preko  $p$ - i  $s$ -komponenta.  $s$ -komponenta površinske struje data je sa:

$$\mathbf{J}_s(p, s) = J_{sp}(p, s)\mathbf{i}_p(p, s) + J_{ss}(p, s)\mathbf{i}_s(p, s) \quad (31)$$

gde su  $\mathbf{i}_p$  i  $\mathbf{i}_s$  jedinični vektori duž  $p$ - i  $s$ - koordinatnih linija, respektivno. Izraz za  $p$ -komponentu se dobija prostom zamenom  $p$ - i  $s$ -koordinata u prethodnom izrazu.

Kada je reč o izboru funkcija bazisa koje će biti korišćene za aproksimaciju struja, pokazuje se da se korišćenjem funkcija bazisa višeg reda značajno smanjuje broj nepoznatih za istu tačnost analize [4], [34]. Iz tog razloga smo u ovom radu fokusirani na ove funkcije bazisa i četvorougaoine elemente koji su im prilagođeni. Celo-domenska aproksimacija  $s$ -komponente površinske struje usvaja se u obliku:

$$\mathbf{J}_s(p, s) = \sum_{i=0}^{n_p} \sum_{j=0}^{n_s} a_{ij} \mathbf{F}_{ij}(p, s) \quad (32)$$

gde su  $n_p$  i  $n_s$  redovi aproksimacije duž  $p$ - i  $s$ -koordinata,  $a_{ij}$  su nepoznati koeficijenti, dok je  $\mathbf{F}_{ij}(p, s)$  vektorska bazisna funkcija data sa:

$$\mathbf{F}_{ij}(p, s) = \frac{P_i(p)S_j(s)}{2|\mathbf{a}_p \times \mathbf{a}_s|} \mathbf{a}_s, \quad 1 \leq p, s \leq 1 \quad (33)$$

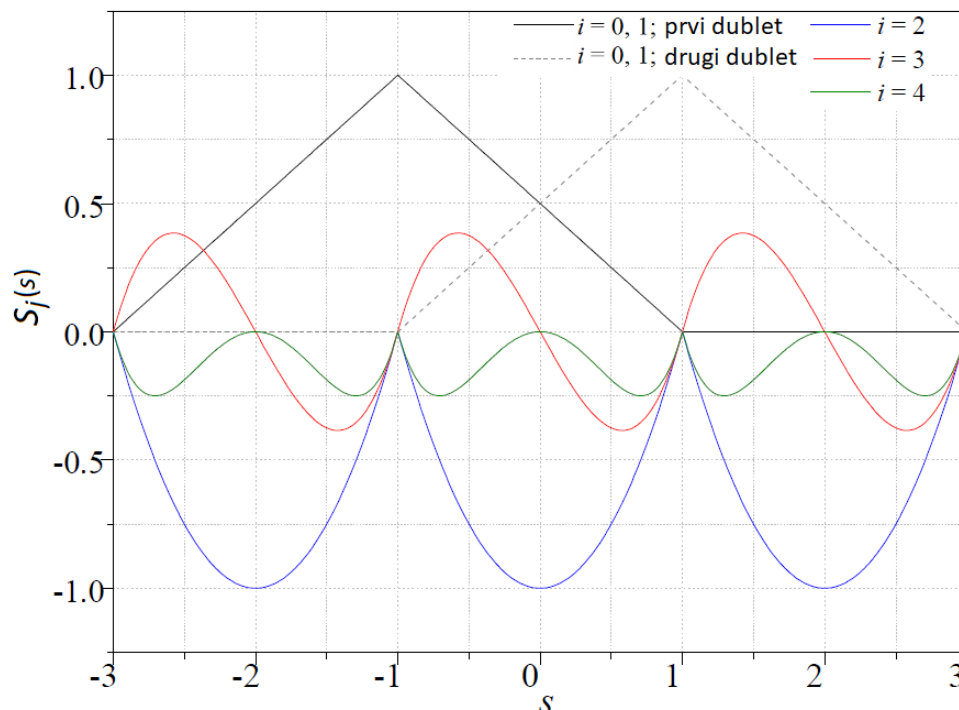
gde su  $P_i(p)$  i  $S_j(s)$  skalarne funkcije bazisa duž  $p$ - i  $s$ -koordinata, dok su  $\mathbf{a}_p$  i  $\mathbf{a}_s$  kovarijantni unitarni vektori.

Funkcije  $P_i(p), i = 1, 2, \dots, n_p$ , moraju biti međusobno nezavisne. Naravno, isto važi i za funkcije  $S_j(s), j = 1, 2, \dots, n_s$ . Kako su raspodele struja i naelektrisanja po generalizovanim četvorouglovima glatke funkcije, poželjno je da i bazisne funkcije budu kontinualne i da im bar prvi izvod bude kontinualna funkcija. Sa tačke gledišta implementacije i efikasnosti analize, poželjno je da bazisne funkcije budu jednostavne i da im se vrednosti brzo izračunavaju. Takozvane modifikovane funkcije bazisa implementirane u programskom paketu WIPL-D zadovoljavaju sve navedene uslove. Ove funkcije bazisa date su sa:

$$P_i(p) = p^i, \quad S_j(s) = \begin{cases} 1 - s, & j = 0 \\ 1 + s, & j = 1. \\ s^j - s^{j-2}, & j \geq 2 \end{cases} \quad (34)$$

Ovako definisane funkcije bazisa predstavljaju hijerarhijske funkcije, jer se izrazi za posmatrani red ne menjaju u zavisnosti od maksimalnog korišćenog reda aproksimacije. Očigledno je da funkcije bazisa za  $j \geq 2$  imaju nulte vrednosti na oba kraja elementa. Ove funkcije bazisa su definisane samo na jednom elementu, i nazivaju se singletima. Funkcije bazisa za  $j = 0$  i  $j = 1$  imaju nultu vrednost na jednom i jediničnu na drugom kraju elementa, te zajedno sa odgovarajućom funkcijom bazisa na susednom elementu formiraju novu funkciju bazisa koja se naziva dublet (ili *roof-top* funkcija bazisa). Ovako definisani dubleti automatski zadovoljavaju jednačinu kontinuiteta na spoju susednih elemenata.

Na slici 8 su prikazane modifikovane funkcije bazisa do reda 4, duž tri povezana linijska elementa (žice). Jasno je sa ove slike da funkcije bazisa reda 0 i 1 formiraju dublete sa odgovarajućim bazisnom funkcijama sa susednih elemenata. Sa druge strane, funkcije bazisa reda većeg od 1 imaju vrednost nula na krajevima elemenata.



Slika 8. Modifikovane funkcije bazisa do reda 4, na 3 susedna linijska elementa.

## 2.6. Četvorougona segmentacija optimalna za efikasnu EM analizu

Karakteristike koje mreža treba da zadovolji kako bi omogućila efikasnu elektromagnetsku analizu usko su povezane sa metodom koja je korišćena za analizu. Zato će pojam optimalne mreže biti razmatran u kontekstu metode momenata primenjene nad površinskim integralnim jednačinama i primene funkcija bazisa višeg reda. Poznato je da je matrica sistema koju daje ova metoda puna matrica, u opštem slučaju bez nultih elemenata. Ukoliko sa  $N$  označimo broj nepoznatih koeficijenata, vreme računanja matrice elemenata ima složenost  $O(N^2)$ , dok je složenost matrice inverzije u slučaju da je primenjena neka od direktnih metoda inverzije data sa  $O(N^3)$ . Zahtevani memorijski resursi proporcionalni su broju elemenata matrice, koji iznosi  $N^2$ .

Ukoliko se koristi najniži red funkcija bazisa, koje ne zadovoljavaju automatski jednačinu kontinuiteta sa susednim elementima, maksimalna dimenzija elementa ograničena je na  $\lambda/10$  [22]. To dalje znači da ćemo imati 100 elemenata i 200 nepoznatih koeficijenata na kvadratnoj metalnoj ploči dimenzija  $\lambda \times \lambda$ . Broj nepoznatih koeficijenata može biti značajno smanjen ukoliko se koriste funkcije bazisa koje automatski zadovoljavaju jednačinu kontinuiteta, kao što su *roof-top* bazisne funkcije. Sa ovakvim bazisnim funkcijama maksimalna dimenzija elementa se povećava na  $\lambda/6$ , a broj nepoznatih koeficijenata se smanjuje na oko 70 po metalnoj ploči dimenzija  $\lambda \times \lambda$ . Kada je četvorougona segmentacija u pitanju, odavde proizilazi zahtev da ona bude potpuno povezana, tj. da susedni elementi dele zajedničku ivicu.

Kada je reč o izboru bazisnih funkcija za dublete, poželjno je izabrati ih tako da oni automatski zadovoljavaju sledeće uslove:

- Globalna kontinualnost, odnosno da na posmatranoj ivici koja predstavlja granicu dva četvorougla ukupna struja koja izlazi iz prvog bude jednaka ukupnoj struji koja ulazi u drugi četvorougao.
- Lokalna kontinualnost, odnosno da u svakoj tački ivice koja predstavlja granicu dva četvorougla normalna komponenta struje koja izlazi iz prvog bude jednaka normalnoj komponenti struje koja ulazi u drugi četvorougao.
- Konstantna vrednost normalne komponente struje na graničnoj ivici između dva četvorougla.
- Konstantna raspodela struje po površi četvorougla.
- Konstantna raspodela naelektrisanja po površi četvorougla.

Pokazuje se da dubleti definisani modifikovanim funkcijama bazisa, opisanim u prethodnom poglavlju, zadovoljavaju sve navedene uslove izuzev poslednjeg [39]. Uslov vezan za modelovanje konstantne raspodele naelektrisanja po površi četvorougla nije zadovoljen, a raspodela naelektrisanja je data sa:

$$\rho_s(p, s) = \frac{j}{4\omega} \frac{1}{1 + \beta p + \alpha s} \frac{1}{|\mathbf{r}_p \times \mathbf{r}_s|}. \quad (35)$$

Iz ove jednačine možemo zaključiti da je konstantna raspodela naelektrisanja zadovoljena jedino u slučaju paralelograma ( $\alpha = \beta = 0$ ). U svim drugim slučajevima postoji neželjena varijacija gustine naelektrisanja po elementu. Faktor kvaliteta oblika četvorougla se zato definiše kao odnos minimalne i maksimalne vrednosti površinske gustine naelektrisanja [4], [39]:

$$Q' = \frac{1 - |\alpha| - |\beta|}{1 + |\alpha| + |\beta|}. \quad (36)$$

Ova definicija dodeljuje maksimalan faktor kvaliteta (jednak jedinici) paralelogramima, pozitivne vrednosti konveksnim četvorouglovima, vrednost 0 četvorouglovima koji imaju trougaoni oblik, tj. imaju jedan ugao od  $180^\circ$ , i negativne vrednosti konkavnim četvorouglovima.

Kao što je već napomenuto, efikasnost analize se dodatno povećava kada se pored *roof-top* funkcija bazisa uvedu i funkcije bazisa višeg reda. Ukoliko se radi sa modifikovanim funkcijama bazisa do reda 7, maksimalna dimenzija elementa iznosi oko  $2\lambda$ , a broj nepoznatih koeficijenata se smanjuje na 25 do 30 po  $\lambda^2$  za metalne površine [34], [40]. Pokazuje se da se korišćenjem maksimalno ortogonalizovanih bazisnih funkcija zasnovanih na Ležandrovim polinomima omogućava visoka tačnost analize sa redovima aproksimacije do 128 i elementima dimenzija do  $10\lambda$ , te dalje smanjenje broja nepoznatih koeficijenata [35], [36].

Red aproksimacije se određuje adaptivno, u zavisnosti od dimenzije elementa u datom pravcu, koja se računa kao  $l_s = 2|\mathbf{r}_s|$  i  $l_p = 2|\mathbf{r}_p|$ . Prema tome, jednaki redovi aproksimacije, a time i jednak broj nepoznatih biće korišćeni za pravougaonik i kosougli paralelogram koji imaju jednake vrednosti za  $|\mathbf{r}_p|$  i  $|\mathbf{r}_s|$ . Kako je površina kosouglog četvorougla manja, ukupan broj nepoznatih koeficijenata po  $\lambda^2$  biće veći u odnosu na slučaj kada su za segmentaciju korišćeni pravougaonici. Zato se ovde uvodi još jedan faktor kvaliteta, koji se odnosi na broj nepoznatih koeficijenata, a koji je dat sa:

$$Q'' = \frac{|\mathbf{r}_p \times \mathbf{r}_s|}{|\mathbf{r}_p||\mathbf{r}_s|} \quad (37)$$

Najvišu vrednost za ovako definisani faktor kvaliteta, 1, imaju kvadrati i pravougaonici, dok svi ostali četvorouglovi imaju vrednosti između 0 i 1.

S obzirom da se redovi aproksimacije računaju nezavisno po  $p$ - i  $s$ - koordinati, poželjno je korišćenje anizotropnih (izduženih) četvorouglova za modelovanje delova geometrije koji imaju veliku razliku između glavnih radijusa krivine.

Ukupan faktor kvaliteta četvorougla računa se na osnovu prethodno definisanih faktora, tj. faktora  $Q'$  koji se odnosi na tačnost i faktora  $Q''$  koji se odnosi na broj nepoznatih, kao:

$$Q = \begin{cases} Q', & Q' \leq 0 \\ \sqrt{Q'Q''}, & Q' > 0 \end{cases} \quad (38)$$

Ukupan faktor kvaliteta je maksimalan, ima vrednost 1, za kvadratne i pravougaone elemente, za ostale konveksne oblike ima vrednosti između 0 i 1, dok je za konkavne četvorouglove manji od nule i jednak faktoru  $Q'$ . Svi faktori kvaliteta o kojima budemo govorili nadalje u radu računati su u skladu sa ovom jednačinom, osim ako drugačije nije eksplicitno rečeno.

## 3. Terminologija i pregled metoda za četvorougao nu segmentaciju

U ovoj glavi je uvedena osnovna terminologija i dat je pregled metoda koje se koriste za četvorougao nu segmentaciju trodimenzionalne (3D) geometrije.

Najpre ćemo se u poglavlju 3.1 osvrnuti na formate koji se koriste za opis ulazne geometrije. U poglavlju 3.2 će biti uvedena osnovna terminologija vezana za četvorougao ne mreže.

U poglavlju 3.3 je dat kratak pregled metoda za aproksimaciju proizvoljne 3D krive poligonskom krivom. Ove metode su veoma značajne u procesu segmentacije, naročito ako je ulazna geometrija zadata kao CAD geometrija ili kao povezana poligonska mreža.

Detaljan pregled metoda za četvorougao nu segmentaciju 3D geometrije dat je u poglavlju 3.4. Dok su neke metode samo pomenute, dotle je o metodama koje se široko koriste u praksi ili je njihovo razumevanje važno za puno razumevanje metode predložene u ovom radu dato znatno više detalja.

Nakon prikaza metoda koje se koriste za segmentaciju proizvoljne geometrije, u poglavlju 3.5 je dat i pregled metoda za segmentaciju ravnog poligona. Ovo nam je veoma značajno za potpuno razumevanje metode predložene u ovom radu, jer ona svodi segmentaciju proizvoljne geometrije na segmentaciju ravnih poligona.

Jednom kada je mreža kreirana moguće je primenom odgovarajućih tehnika značajno popraviti njene osobine kako u smislu kvaliteta pojedinih elemenata, tako i u smislu povezanosti i broja elemenata. Kratak pregled metoda za obradu četvorougao ne mreže dat je u poglavlju 3.6.

### 3.1. Ulazna geometrija

Postoji veliki broj formata za opis površina trodimenzionalne geometrije. Neki od najčešće korišćenih u praksi su:

- Oblak tačaka, raspoređenih po površini strukture.
- “Supa” trouglova, koja predstavlja skup trouglova raspoređenih po površini modela. Ovi trouglovi se mogu međusobno preklapati ili seći.
- *Range image*, koja predstavlja funkciju udaljenosti površine od tačaka iz datog skupa fiksiranih tačaka.
- Povezana poligonska, najčešće trougaona, mreža.
- CAD geometrija.

Oblak tačaka i *range image* se obično dobijaju kao izlazni podaci iz laserskih ili ultrazvučnih skenera. Opisom oblakom tačaka geometrija se ne definiše u potpunosti ni u smislu povezanosti, ni u smislu normala na geometriju, te je za potpunu rekonstrukciju potrebna dalja obrada. “Supa” trouglova daje nešto bolji uvid u geometriju, jer sadrži informaciju o normalama na površi, mada povezanost još uvek nije definisana. Konačno *range image* omogućava rekonstrukciju geometrije, kako u smislu povezanosti, tako i u smislu normala na površi.

Veoma često korišćen format za opis geometrije jeste povezana trougaona mreža, obično data kao STL [41] ili neki sličan format. S obzirom da je mreža povezana i da su površine geometrije opisane elementima mreže, postoji potpuna definicija geometrije i u smislu povezanosti i u smislu normala. Razlog za veliku popularnost ovakve reprezentacije leži u širokoj upotrebi 3D skenera i štampača, koji koriste ovaj način definisanja geometrije.

Konačno, geometrijski modeli su najčešće dati kao CAD modeli, u kojima su površi opisane analitičkim ili NURBS funkcijama [42], [43]. Osnovni entiteti koji sačinjavaju CAD geometriju jesu:

- *Površina*, koja predstavlja deo površi, ograničen skupom zatvorenih *petlji*. Ukoliko je broj zatvorenih petlji jednak nuli, data površina nije ograničena, te je u geometrijskom smislu ekvivalentna odgovarajućoj površi (primer za ovakvu površinu jeste površina sfere). Deo ravni ograničen petljama koje su geometrijski izlomljene prave linije predstavlja poligon.
- *Petlja* se sastoji se od jedne ili više *ivica* međusobno razdvojenih *čvorovima*. Petlja može biti zatvorena (prvi i poslednji čvor su identični) ili otvorena. Zatvorena petlja uvek predstavlja granicu ili deo granice neke površine, dok otvorena petlja može da se nalazi i unutar površine.
- *Ivica* predstavlja segment krive, ograničen čvorovima. Ukoliko je broj čvorova jednak nuli ili jedinici, ivica je geometrijski ekvivalentna odgovarajućoj krivoj, primer je krug, odnosno krug sa jednim čvorom.
- *Čvor* predstavlja tačku u prostoru. On može biti izolovan ili pripadati jednoj ili većem broju ivica.

Kada je ulazna geometrija zadata kao CAD geometrija, svakom čvoru originalne CAD geometrije mora odgovarati čvor u četvorougonoj mreži. Takođe, duži nastale segmentacijom ivica CAD geometrije moraju predstavljati ivice četvorougaoe mreže. Od ovoga se može odstupiti jedino ukoliko je to eksplicitno definisano, na primer zadavanjem tolerancije za eliminaciju kratkih ivica ili malih i/ili uzanih površina, o čemu će više reči biti u glavi 7.

Za razliku od ivica CAD geometrije, čvorovi i ivice trougaone mreže mogu biti obrisani, na primer spajanjem susednih trouglova u četvorouglove brisanjem zajedničke ivice. Ivice originalne geometrije ostaju strogo nepomične ili se sekvenca ovih ivica zamenjuje kraćom sekvencom slične geometrije, u sledećim slučajevima:

- Ivice su granične ili nemanifoldne (pripadaju broju elemenata većem od 2).
- Ugao među trouglovima kojima posmatrana ivica pripada je takav da bi njihovo spajanje brisanjem ove ivice ugrozilo tačnost aproksimacije geometrije.
- Trouglovi susedni u posmatranoj ivici razlikuju se po materijalu ili nekoj drugoj osobini koja onemogućava njihovo međusobno spajanje.

Sa tačke gledišta ovog rada CAD geometrija je najvažniji tip ulazne geometrije. Trougaona mreža je takođe veoma važna, ne samo zbog njene široke primene, već i zbog činjenice da većina algoritama za četvorougao nu segmentaciju CAD geometrije podrazumeva kreiranje trougaone mreže kao međukoraka.

## 3.2. Terminologija i klasifikacija četvorougao nih mreža

Gradivni elementi površinske mreže jesu: *čvor*, *ivica* i *površina*, koja se češće naziva *elementom* mreže, te ćemo je tako nazivati i u ovom radu. Čvor predstavlja tačku u 3D prostoru. Ivica je linija koja spaja dva čvora. Ova linija je obično prava linija, ali u slučaju krivolinijske segmentacije ivice mogu uzimati i drugi oblik. Za sada će fokus biti na segmentacijama u kojima su ivice prve linije, a tek će u poglavlju 9.3 biti razmotrena generalizaciju predložene metode na slučaj zakrivljenih krivolinijskih elemenata. Kao što je u prethodnom poglavlju rečeno, površinske mreže su najčešće formirane od trougaonih ili četvorougao nih elemenata. U slučaju pravih ivica trougaoni elementi su uvek planarni, dok četvorougao ni elementi ne moraju biti planarni. Sama dužina ivice može biti zadata kao preferirana dužina ili kao maksimalna dozvoljena dužina, i ta se dužina naziva *dimenzijom elementa*. Zbog izvesnog preklapanja terminologije sa onom vezanom za CAD geometriju, u ovom radu će uvek, kada to iz konteksta nije očigledno, biti eksplicitno naglašeno da li se govori o entitetima mreže ili entitetima CAD geometrije.

Ukoliko su svi elementi mreže četvorouglovi, onda se za takvu mrežu kaže da je *čista* četvorougaona. Ukoliko osim četvorouglova u mreži postoje i elementi drugačijeg oblika, najčešće trouglovi, mreža nije čista četvorougaona. Ako je broj ne-četvorougaonih elemenata u mreži značajno manji od broja četvorougaonih elemenata, onda se takva mreža naziva *dominantno-četvorougaonom*.

Način na koji su elementi međusobno povezani određuje da li je mreža *usaglašena* ili *neusaglašena*. U slučaju usaglašene ili *potpuno povezane* mreže dva elementa mogu deliti: celu ivicu (u kom slučaju dele i dva čvora koji definišu datu ivicu) ili jedan čvor. Slučaj kada se elementi potpuno preklapaju takođe je dozvoljen, ali ne i poželjan, u usaglašenim mrežama. Ukoliko u mreži postoji makar i jedan par četvorouglova za koje gore navedeni uslovi ne važe, za mrežu kažemo da je neusaglašena. Posebnu klasu neusaglašenih mreža predstavljaju *T-mreže*, kod kojih se na ivici jednog elementa može naći jedan ili više čvorova koji pripadaju drugim elementima. Same ivice na kojima se nalaze čvorovi koji pripadaju drugim elementima nazivaju se *T-spojevima*. Ovakve mreže se često javljaju kod tehnika koje se zasnivaju na dekompoziciji originalne geometrije na više makro-elementata, koji se zatim segmentiraju nezavisno jedan od drugog, bez uslova koji bi obezbedio punu povezanost elemenata na spojevima makro-elementata [3].

Važna osobina čvora jeste broj ivica kojima dati čvor pripada. Ovaj broj se naziva *valenca* čvora. Skup svih ivica i elemenata kojima dati čvor pripada naziva se *zvezdom* datog čvora, dok se *zvezdom* ivice naziva skup svih elemenata kojima data ivica pripada. Ukoliko se u jednoj ivici stiču dva ili više elemenata, ta ivica predstavlja *unutrašnju ivicu* date mreže. Sa druge strane, ako ivica pripada samo jednom elementu, ona se naziva *graničnom ivicom* mreže. Čvorovi graničnih ivica su granični čvorovi, a svi ostali predstavljaju unutrašnje čvorove mreže. Ukoliko jedan čvor pripada samo graničnim ivicama i ni jednoj unutrašnjoj ivici, on predstavlja *ugaoni* čvor.

Za mrežu kažemo da je *manifoldna* ukoliko ni jedna ivica nema više od dva susedna elementa, u suprotnom kažemo da je mreža *ne-manifoldna*. Jasno je da je ovo pre svega karakteristika geometrije predstavljene datom mrežom. Drugim rečima, ukoliko je geometrija manifoldna, odnosno ne-manifoldna i njena reprezentacija odgovarajućom mrežom će biti manifoldna, odnosno ne-manifoldna, respektivno.

Mnoge tehnike za četvorougaonu segmentaciju [3] primenjive su samo na manifoldnu geometriju. Kada su u pitanju elektromagnetski problemi geometrija je najčešće ne-manifoldna. Na primer, svaka višeslojna štampana struktura je ne-manifoldna, dok su i jednoslojne štampe uglavnom ne-manifoldne bilo zbog modelovanja konačne debljine metalizacije ili modelovanja napajanja. Strogo manifoldni su praktično jedino metalni rasejači, te se navedene metode direktno mogu primeniti samo na njih. Indirektno se takve metode mogu primeniti i na ne-manifoldne geometrije, jer se svaka takva geometrija može dekomponovati na manifoldne pod-entitete, podelom po ne-manifoldnim ivicama. Na taj način se i segmentacija cele strukture svodi na segmentaciju njenih manifoldnih pod-entiteta. Uslov koji mora biti zadovoljen, kako bi mreža bila usaglašena jeste da ivice po kojima je struktura podeljena budu segmentirane na identičan način u svim manifoldnim pod-entitetima. Mogućnost generalizovanja metode inicijalno primenjive samo na manifoldnu geometriju, tako da ona bude primenjiva i na ne-manifoldnim geometrijama svodi se na mogućnost implementacije ovog uslova.

Unutrašnji čvor čija valenca ima vrednost 4 naziva se *regularnim čvorom*. Kada su u pitanju granični čvorovi situacija je nešto drugačija: ugaoni čvor je regularan ukoliko ima valencu 2, dok je granični čvor koji nije ugaoni regularan ukoliko mu je vrednost valence 3. Neki autori [44] predlažu nešto drugačije računanje valence za granične čvorove, te se ona za ugaone čvorove računa kao broj susednih ivica uvećan za 2, a za ostale kao broj susednih ivica uvećan za 1. Na taj način se dobija jednostavnija definicija regularnosti čvora, gde se kaže da su svi čvorovi valence 4 regularni, bez ulaženja u razmatranje da li je čvor granični ili ne. Čvorovi koji ne zadovoljavaju navedene uslove za regularnost nazivaju se *neregularnim* čvorovima. Linija koja počinje u jednom neregularnom čvoru



i završava se u drugom neregularnom čvoru, prolazeći pri tome isključivo kroz regularne čvorove naziva se *separatorskom linijom*.

Na osnovu klasifikacije čvorova na regularne i neregularne uvodi se i sledeća klasifikacija četvorougaoih mreža (klasifikacija je ilustrovana slikom 9):

- *Regularna mreža* predstavlja mrežu čiji su svi čvorovi regularni. Ovakve mreže su u praksi veoma retke, jer su teorijski moguće samo za veoma ograničen skup topologija. Kada je u pitanju zatvorena manifoldna geometrija, regularnu segmentaciju je moguće kreirati jedino na entitetima toroidalne topologije (topologija čiji je genus<sup>1</sup> jednak jedinici). Ovo se lako dokazuje, jer na osnovu Ojler-Poenkareove formule važi sledeće:

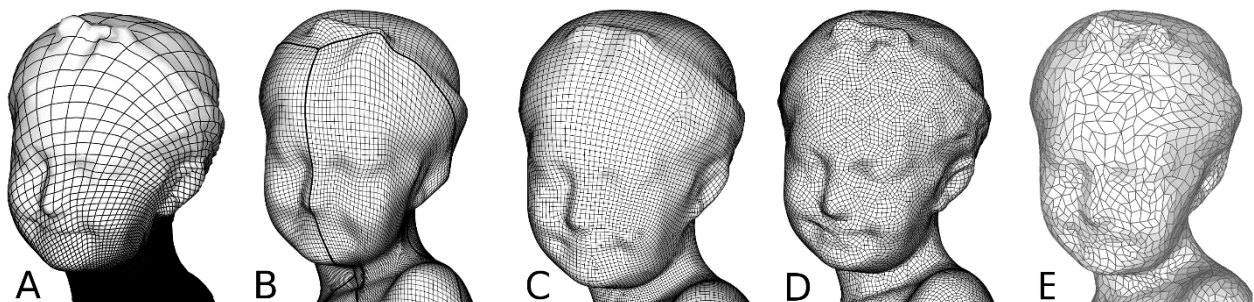
$$N_V - N_E + N_F = 2(1 - g) \quad (39)$$

gde je  $N_V$  broj čvorova,  $N_E$  broj ivica,  $N_F$  broj elemenata, dok je  $g$  označen genus mreže. Ukoliko su svi čvorovi regularni, onda je broj čvorova jednak broju elemenata, a oba su jednaka polovini broja ivica, tj.:

$$\frac{1}{2}N_E - N_E + \frac{1}{2}N_E = 0 = 2(1 - g). \quad (40)$$

Odakle proizilazi da je  $g = 1$ , odnosno da zatvorena manifoldna mreža može biti regularna samo ukoliko je genus geometrije jednak jedinici.

- *Semi-regularna mreža* jeste ona koja se može dekomponovati na izvestan broj regularnih domena, pri čemu je broj ovih domena značajno manji od ukupnog broja elemenata u mreži. Svi unutrašnji čvorovi pojedinih domena, kao i granični čvorovi koji nisu ugaoni čvorovi domena, jesu regularni. Jedino su ugaoni čvorovi domena potencijalno neregularni. Semi-regularne mreže predstavljaju veoma važnu i često korišćenu klasu.
- *Valentno semi-regularne* mreže su one kod kojih je mali procenat od ukupnog broja čvorova neregularan. Ove mreže su slične semi-regularnim po broju neregularnih čvorova, ali ne i po strukturi mreže, jer se kod njih ne mogu jasno identifikovati regularni domeni ili je broj takvih domena veliki.
- *Nestrukturirane* mreže su one mreže koje imaju veliki procenat neregularnih čvorova. Generalno, konverzijom trougaone mreže u četvorougao nu primenom Katmul-Klark postupka [45], tj. podele svakog trougla na tri četvorougla, dobija se nestrukturirana mreža.



Slika 9. Četiri vrste četvorougaoih mreža: regularna (A), semi-regularna, sa boldovanim separatorskim linijama (B), valentno semi-regularna (C) i nestrukturirana (D i E). [3]

<sup>1</sup> Genus površi predstavlja njenu topološku karakteristiku. Definisan je kao najveći broj zatvorenih krivih koje se međusobno ne seku, a koje je moguće nacrtati na površi bez da je podele na dve površi.

Neformalno govoreći genus predstavlja broj rupa na površi. Tako sfera predstavlja površ genusa 0, torus ima genus jednak jedinici, dok površ oblika osmice ima genus 2, itd.

Očigledno je da samo prva navedena klasa mreža ima striktnu definiciju, dok su ostale definisane opisno te se stoga u svaku od njih može svrstati neograničen broj mreža sa različitim brojem i pozicijom neregularnih čvorova. Tako na primer mreže date na slikama 9(D) i 9(E) spadaju u grupu nestrukturiranih, ali je očigledno da mreža data na slici 9(D) ima manji procenat neregularnih čvorova (ali isto tako i značajno više elemenata).

Ne postoje eksplicitni zahtevi za regularnost mreže, kada je efikasnost EM analize u pitanju. Zahtev za regularnošću tek implicitno proizilazi iz zahteva za maksimizacijom Q-faktora, za koju je potrebno da uglovi četvorougla budu što bliži pravim, što u tačkama u kojima površ nema veoma visoku apsolutnu vrednost Gausove zakrivljenosti implicira regularnost čvorova.

Na ovom mestu ćemo se kratko osvrnuti na još neke važne osobine, kako pojedinih elemenata tako i cele mreže, koje se obično uzimaju u obzir kada se govori o kvalitetu mreže ili se vrši poređenje dveju metoda segmentacije.

Kada je reč o kvalitetu pojedinih elemenata, zahtevi se značajno razlikuju u zavisnosti od aplikacije. Međutim, možemo generalno reći da se zahteva da element bude planaran, sa uglovima što sličnijim uglu od  $90^\circ$ , te međusobno jednakim naspramnim ivicama. Slično se u slučaju trougaone mreže može reći da je generalni zahtev da uglovi elementa budu što sličniji uglu od  $60^\circ$ , tj. da element bude što sličniji jednakostraničnom trouglu.

Veoma važna karakteristika mreže jeste kvalitet aproksimacije oblika originalne geometrije. Jedna od najčešće korišćenih veličina za opisivanje odstupanja mreže od originalne geometrije jeste Hausdorfovo rastojanje<sup>1</sup>, čijoj se minimizaciji teži. Očigledno je da se veoma dobra aproksimacija originalne geometrije uz postizanje proizvoljno male vrednosti za Hausdorfovo rastojanje postiže smanjivanjem dimenzija elemenata. Međutim, na taj način dolazi i do povećanja broja elemenata,

<sup>1</sup> Označimo sa  $X$  i  $Y$  dva neprazna skupa tačaka u metričkom prostoru  $(M, d)$ . Hausdorfovo rastojanje između  $X$  i  $Y$  definiše se kao:

$$d_H(X, Y) = \max \left\{ \sup_{x \in X} \left( \inf_{y \in Y} d(x, y) \right), \sup_{y \in Y} \left( \inf_{x \in X} d(y, x) \right) \right\}$$

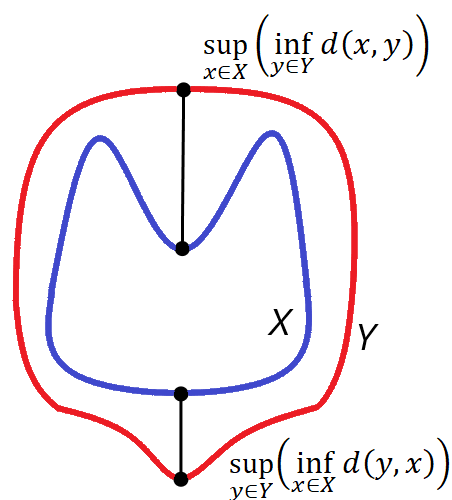
Gde funkcija *sup* označava supremum, a *inf* infimum. Definisaćemo na ovom mestu i ova dva termina. Posmatrajmo delimično uređen skup  $P$ , i njegov podskup  $S$ . Supremum podskupa  $S$  predstavlja najmanji element skupa  $P$  koji je veći ili jednak od svih elemenata podskupa  $S$ . Suprotno tome, infimum podskupa  $S$  jeste najveći element skupa  $P$  koji je manji ili jednak od svih elemenata podskupa  $S$ .

Kada govorimo o Hausdorfovom rastojanju dveju površi, rastojanja među njihovim tačkama predstavljaju realne vrednosti, gde su minimalno i maksimalno rastojanje jasno definisani. Iz tog razloga u ovom slučaju umesto supremuma i infimuma u definiciji Hausdorfovog rastojanja možemo koristiti intuitivnije termine maksimum i minimum, respektivno.

Neformalno govoreći, Hausdorfovo rastojanje između površi  $X$  i  $Y$  predstavlja duže od sledeća dva rastojanja:

- Najvećeg među najkraćim rastojanjima između površi  $X$  i površi  $Y$ .
- Najvećeg među najkraćim rastojanjima između površi  $Y$  i površi  $X$ .

Slika desno predstavlja ilustraciju ove definicije za slučaj dveju krivih.



čijoj se minimizaciji takođe teži. Kako bi se pomirili zahtevi za dobrom aproksimacijom geometrije i minimizovao broj elemenata, poželjno je da mreža bude:

- *Adaptivna*, tako da se koriste mali elementi u delovima geometrije koji su veoma zakrivljeni ili sadrže entitete malih dimenzija, a što je moguće veći elementi u delovima geometrije koji su ravni ili blago zakrivljeni. Prelaz sa elemenata malih na elemente velikih dimenzija zahteva dodavanje neregularnih čvorova (osim ukoliko nije dozvoljeno postojanje T-spojeva kao u [46]), pa je potrebno ostvariti dobar kompromis između regularnosti i adaptivnosti segmentacije.
- *Anizotropna*, odnosno da se na mestima gde je to potrebno koriste izduženi elementi. Pokazuje se da se za datu površ i dati broj tačaka segmentacije najbolja aproksimacija površi postiže ukoliko se elementi postavljaju paralelno glavnim pravcima zakrivljenosti i sa dimenzijama koje su proporcionalne radijusima krivina [7]. Tako na primer, u slučaju cilindričnih površi elemente treba postaviti paralelno sa aksijalnom osom cilindra, i izdužiti ih u pravcu te ose.

Važno je ovde primetiti da se izduživanjem četvorougaoih elemenata ne menjaju uglovi četvorougla (u slučaju da se element izdužuje u pravcu ose koja je paralelna dvema njegovim stranicama) ili se menjaju malo (u slučaju da osa u čijem smeru se izduživanje vrši zaklapa male uglove sa dvema naspramnim stranicama četvorougla). Suprotno tome, kod trougaonih elemenata izduživanje u pravcu neke ose uvek znači i nastanak uglova značajno različitih od  $60^\circ$ . Kako je za većinu primena faktor kvaliteta elementa definisan kao odstupanje njegovih uglova od poželjnog ugla ( $60^\circ$  za trougaone i  $90^\circ$  za četvorougaoone elemente), jasno je da je anizotropiju četvorougaoih elemenata moguće postići bez uticaja na njihov faktor kvaliteta, dok anizotropija trougaonih elemenata smanjuje njihov faktor kvaliteta.

Na osnovu rečenog kada je kvalitet mreže u pitanju, vidimo da ne postoji apsolutni optimum, već da kvalitet dominantno zavisi od konkretne primene za koju se mreža kreira. Optimalni oblik i dimenzije elemenata kada je u pitanju efikasna elektromagnetska analiza razmatrani su u poglavlju 2.6.

### 3.3. Pregled algoritama za poligonsku aproksimaciju krive

U poglavlju 3.1 u kom je bilo reči o tipovima ulazne geometrije naglašeno je da se ivice CAD geometrije, kao i nepomične ivice poligonske mreže, konvertuju u međusobno spojene pravolinijske segmente. Iz daljeg teksta će biti jasno da određivanje kvalitetne poligonske aproksimacije sa stanovišta kreiranja kvalitetne četvorougaoone mreže daleko prevazilazi ovu, u ovom trenutku očiglednu, primenu.

Problem poligonske aproksimacije krive se u literaturi obično formuliše na sledeći način: Za datu poligonsku krivu definisanu sa  $N$  čvorova, treba odrediti poligonsku krivu definisanu sa  $M$  čvorova ( $M < N$ ), koja originalnu krivu aproksimira sa zadatom tačnošću. Tačnost aproksimacije se definiše na različite načine, a najčešće se govori o odstupanju segmenata aproksimativne krive od originalne krive, koje je određeno  $L_2$  ili  $L_\infty$  normom.

Jasno je iz ove definicije da je u metodama za poligonsku aproksimaciju fokus na diskretnim krivama, a ne na krivama definisanim analitičkom funkcijom (kao što je slučaj u CAD modelima). Međutim, ova se formulacija lako može generalizovati, bilo tako što se aproksimacija računa direktno za analitičku krivu ili tako što se u prvom koraku aproksimacije analitička kriva predstavi kao poligonska kriva definisana sa jako velikim brojem segmenata, gde je dužina segmenta mnogo manja od definisane dimenzije elementa mreže, a greška aproksimacije mnogo manja od zahtevane greške finalne aproksimacije.

Postoje dve postavke problema poligonske aproksimacije [47], [48]:

- Problem minimalne greške (*min- $\epsilon$  problem*). Za dati broj čvorova,  $M$ , treba odrediti aproksimaciju tako da se minimizuje greška aproksimacije,  $\epsilon$ .
- Problem minimalnog broja čvorova (*min-# problem*). Za datu grešku aproksimacije,  $\epsilon$ , treba odrediti aproksimaciju sa minimalnim brojem čvorova,  $M$ .

Algoritmi za poligonsku aproksimaciju krive mogu se podeliti u dve velike grupe: optimalne i heurističke.

Optimalni algoritmi se zasnivaju na pretrazi polaznog skupa od  $N$  čvorova u cilju pronalaženja optimalnog podskupa od  $M$  čvorova, kako bi se rešio postavljeni *min- $\epsilon$*  ili *min-#* problem. Jasno je da je broj mogućnosti za izbor  $M$  čvorova dat sa  $\binom{N}{M}$ . Pokazuje se međutim da se primenom odgovarajućih optimizacionih algoritma i/ili algoritama zasnovanih na teoriji grafova složenost algoritma može redukovati na kubnu za slučaj 3D krivih [49], [50]. Iako ovo predstavlja značajno smanjenje složenosti algoritma u odnosu na inicijalnu, i ova složenost je nepraktično velika za primenu u metodama za površinsku segmentaciju, gde je poligonsku aproksimaciju potrebno izračunati za veoma veliki broj (potencijalno složenih) krivih. Iz ovog razloga se u praksi po pravilu koriste heuristički algoritmi.

Generalna karakteristika heurističkih algoritama jeste da daju sub-optimalnu poligonsku aproksimaciju krive, ali da isto tako imaju značajno manju složenost u odnosu na optimalne algoritme. Postoji jako veliki broj heurističkih algoritama, ali se praktično svi svode na direktnu primenu ili kombinaciju sledeća tri algoritma:

- **Algoritmi sekvencijalne pretrage.** Osnovna ideja kod ovih algoritama jeste da se pođe od početne tačke krive, te da se analiziraju duži koje ovu tačku spajaju sa sukcesivnim tačkama na krivoj, sve dok se ne pronađe tačka kojoj odgovara duž za koju definisani kriterijum greške aproksimacije nije zadovoljen. Tačka koja prethodi datoj se uzima za kraj segmenta i od nje kreće dalja pretraga po opisanom algoritmu. Proces se završava kada se dođe do kraja krive.  
Iako je jednostavan za implementaciju i ima linearnu složenost, ovaj algoritam ima neke očigledne nedostatke. To je najpre zavisnost od početne tačke, jer je greška na poslednjem segmentu poligonske krive po pravilu manja od greške na ostalim segmentima. Drugi nedostatak je što algoritam ne garantuje da će čvorovi aproksimacije biti u takozvanim dominantnim tačkama, odnosno tačkama u kojima je radijus krivine minimalan i koje nose najviše informacije o obliku krive [51].
- **Algoritmi zasnovani na podeli.** Često se svi algoritmi iz ove grupe nazivaju *Douglas-Peucker* algoritmom [52], i predstavljaju najčešće korišćene algoritme za poligonsku aproksimaciju krive. Posmatrana kriva se aproksimira duži koja spaja njene krajnje tačke, a zatim se određuje čvor krive koji je najudaljeniji od ove duži. Ukoliko je rastojanje ovog čvora od duži manje od definisane greške aproksimacije zadržava se inicijalna aproksimacija, a ukoliko je veće čvor se usvaja za čvor aproksimativne krive, a dve novonastale krive se dalje dele primenom istog postupka.  
Pokazalo se da ovaj algoritam daje veoma dobre poligonske aproksimacije krivih [53], [54]. Minimalna složenost algoritma je  $O(N)$ , maksimalna složenost je  $O(N^2)$ , dok je očekivana složenost  $O(N \log N)$ .
- **Algoritmi zasnovani na spajanju segmenata.** Za razliku od prethodno opisanih algoritama u kojima se određuju čvorovi inicijalne krive koje će predstavljati čvorove aproksimativne krive, algoritmi iz ove grupe zasnivaju se na detekciji i eliminaciji čvorova inicijalne krive koji neće predstavljati čvorove finalne aproksimacije. Ovo se radi u iterativnom postupku u kom se analiziraju čvorovi i eliminišu oni čija eliminacija izaziva minimalno povećanje

greške aproksimacije ili alternativno svi čvorovi čija eliminacija izaziva povećanje greške koje je manje od zadatog praga za datu iteraciju. Postupak se zaustavlja u trenutku kada je dosegnuta zadata greška aproksimacije ili zadati broj segmenata.

Složenost algoritma je tipično  $O(N \log N)$  [55].

Na kraju treba napomenuti da se kod računanja poligonske aproksimacije krive za potrebe površinske segmentacije, osim parametra koji definiše grešku aproksimacije, javlja i dimenzija elementa koja definiše maksimalnu dužinu pravolinijskog segmenta. Ovo dodatno ograničenje se ne uzima u razmatranje u generalnim algoritmima opisanim u ovom poglavlju.

### 3.4. Pregled metoda za četvorougao nu segmentaciju proizvoljne geometrije

U ovom poglavlju će biti data klasifikacija metoda za četvorougao nu segmentaciju, kao i detaljan opis nekoliko najčešće korišćenih metoda. Kako su metode za trougao nu segmentaciju daleko razvijenije od onih za četvorougao nu segmentaciju, bez obzira na to kako je ulazna geometrija opisana, četvorougao na segmentacija obično počinje od trougaone segmentacije [3].

U većini algoritama za četvorougao nu segmentaciju opisanih u literaturi pomoćna trougaona mreža kreira se primenom Delanijevog kriterijuma [56]. Ovaj kriterijum nalaže da se unutar sfere opisane oko datog trougla, čiji se centar podudara sa centrom kruga opisanog oko trougla, ne sme nalaziti čvor koji pripada nekom drugom trouglu. Jasno je iz navedenog da *Delaunay* kriterijum ne predstavlja zaokružen algoritam, već samo definiše način na koji se trougaona mreža kreira nad zadatim skupom čvorova ili način na koji se vrši odabiranje u slučaju segmentacije CAD geometrije. Obično se polazi od inicijalnog seta čvorova koji su sa izvesnom gustinom raspoređeni po površima od interesa i njima odgovarajuće trougaone mreže. Zatim se u oblastima u kojima geometrija nije modelovana sa zadovoljavajućom tačnošću umeću dodatni čvorovi [57], [58]. Umetanje čvorova se vrši tako da je *Delaunay* kriterijum zadovoljen u svakom čvoru.

Grubo gledano, metode za četvorougao nu segmentaciju se mogu podeliti u tri velike grupe:

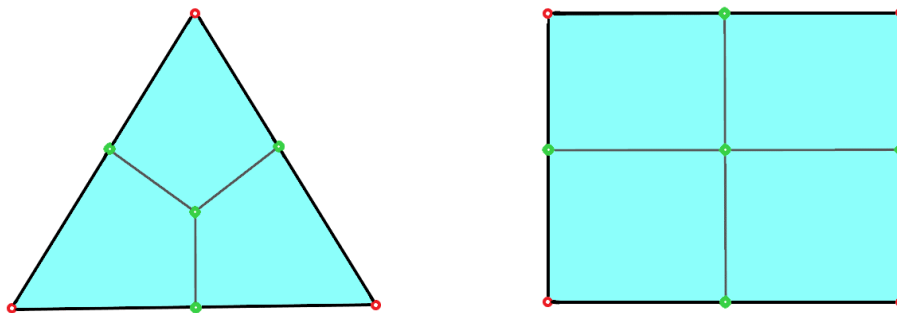
- Metode koje počivaju na direktnoj konverziji trougaone u četvorougao nu mrežu.
- Metode zasnovane na podeli na makro-elemente i njihovoj nezavisnoj segmentaciji.
- Metode zasnovane na parametrizaciji.

#### 3.4.1. Konverzija trougaone u četvorougao nu mrežu

Metode koje se baziraju na (direktnoj) konverziji trougaone u četvorougao nu mrežu su najranije metode četvorougao ne segmentacije. Metoda koja je predložena u [45] podrazumeva podelu svih trouglova originalne mreže na tri četvorougla, gde se tri čvora dodaju na ivicama trougla, a četvrti u njegovoj unutrašnjosti<sup>1</sup>, kao što je prikazano na slici 10. Ova metoda je jednostavna za implementaciju, garantovano daje čistu četvorougao nu mrežu i zadržava sve ivice originalne mreže, pa ne postoji potencijalni problem sa dobijanjem mreže koja ima slabiju aproksimaciju geometrije u odnosu na inicijalnu. Očigledan nedostatak metode je to što rezultuje mrežom sa velikim brojem elemenata, tj. broj četvorouglova u finalnoj 3 puta je veći od broja trouglova u inicijalnoj mreži.

---

<sup>1</sup> U generalnom slučaju ova metoda podrazumeva kreiranje četvorougao ne mreže konveksnog poligona dodavanjem po jednog čvora na svim stranicama poligona i jednog čvora u njegovoj unutrašnjosti. Četvorougao na mreža se zatim kreira tako da svaka duž koja spaja čvor dodat u unutrašnjosti poligona i čvor originalnog poligona predstavlja dijagonalu jednog elementa mreže.



Slika 10. Katmul-Klark podela trougla i četvorougla (crveni čvorovi su originalni, zeleni su dodatni).

Većina metoda za konverziju trougaone u četvorougao mrežu zasniva se na spajanju susednih trouglova u četvorouglove. Očigledno je da se brisanjem ivice između dva susedna trougla dobija četvorougao. Da bi dobijena mreža bila čista četvorougao, broj trouglova u inicijalnoj mreži mora biti paran. Za zatvorene manifoldne geometrije to je uvek slučaj, dok se u slučaju otvorenih koje se sastoje od neparnog broja trouglova parnost lako postiže podelom jedne granične ivice na dve i podelom odgovarajućeg trougaonog elementa na dva. Nemanifoldnu mrežu uvek možemo podeliti, podelom po nemanifoldnim ivicama, na više otvorenih i/ili zatvorenih manifoldnih mreža za koje važe gore navedene konstatacije, te se zaključak da se čista četvorougao mreža može dobiti za svaku ulaznu trougaonu mrežu lako generalizuje i na slučaj nemanifoldnih mreža (geometrija).

Osnovni problem kod ovih metoda predstavlja izbor redosleda spajanja trouglova u četvorouglove. U [59] je predloženo korišćenje *Blossom perfect-matching* algoritma, koji se primenjuje na celom modelu i daje globalni optimum kada je u pitanju kvalitet finalne mreže. Iako ovaj algoritam daje optimalnu sekvencu spajanja trouglova, njegova kompleksnost je velika,  $O(N^2)$ , gde je  $N$  broj trougaonih elemenata u mreži. Iz tog razloga je ovaj algoritam primenjiv samo na relativno jednostavnim modelima, dok je nepraktičan za velike modele.

Kao zamena za vremenski zahtevne algoritme koji se zasnivaju na određivanju globalno optimalne sekvence spajanja trouglova, razvijen je niz heurističkih metoda [10], [11], [60]. U [11] se određuje dužina svih ivica koje su deljene između dva trougaona elementa. Ivice se zatim rasporede po opadajućoj vrednosti dužine, pa se brisanje ivica, tj. spajanje susednih trouglova u četvorouglove, vrši po ovom redosledu. Pokazuje se međutim, da se na ovaj način ne postižu visoki faktori kvaliteta elemenata, a da se u oblastima velikog zakrivljenja geometrije često spajaju trouglovi koji zaklapaju veliku ugao. Iz tog razloga se umesto ovog kriterijuma uvode [60] kriterijumi bazirani na:

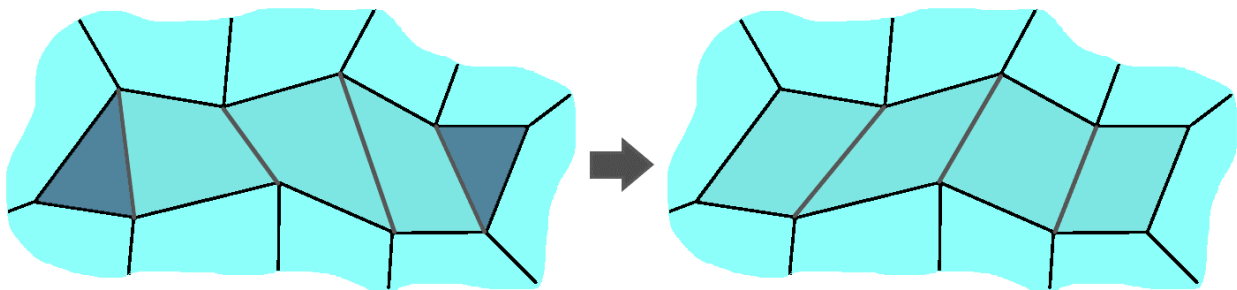
- Uglu između normala na susedne trouglove, gde se računaju uglovi između svaka dva suseda, a u spajanju trouglova prednost se daje onima koji zaklapaju manji ugao.
- Faktoru kvaliteta četvorouglova nastalih spajanjem susednih trouglova. Za svaki trougao se razmatra njegovo spajanje sa svakim susedom i računa se faktor kvaliteta tako dobijenog četvorougla. Na taj način se svakoj ivici dodeljuje faktor kvaliteta, koji predstavlja faktor kvaliteta četvorougla koji će nastati njenim brisanjem. Na osnovu ovoga se zatim vrši brisanje ivica po opadajućem faktoru kvaliteta. Sličan kriterijum predložen je u [10].

Alternativni pristup je da se za svaki trougao izračuna diferencijalni faktor kvaliteta, koji predstavlja razliku dva najbolja faktora kvaliteta za ivice datog trougla. Zatim se spajanje sa susedima najpre vrši za trouglove sa najvišim diferencijalnim faktorom kvaliteta, brisanjem njihovih ivica sa najvišim faktorom kvaliteta. Time se u spajanju trouglova prednost daje onim trouglovima koji imaju manji broj potencijalno dobrih suseda.

Pokazuje se da među navedenim kriterijumima, nešto bolji rezultat daju oni koji se zasnivaju na faktoru kvaliteta novonastalih četvorouglova.

Međutim, koji god kriterijum da je primenjen, dobijena mreža je samo u specijalnim slučajevima čista četvorougona, a najčešće sadrži veliki broj trougaonih elemenata. Različite metode se koriste za eliminaciju zaostalih trouglova. Očigledno je da se Katmul-Klark metoda [45] može primeniti i na ovom nivou. Problem, kao i u slučaju direktne primene Katmul-Klark metode nad inicijalnom trougaonom mrežom, predstavlja veliki broj elemenata u finalnoj mreži, jer se svaki četvorougao deli na 4, a svaki trougao na 3 elementa. Kako bi se broj elemenata u finalnoj mreži smanjio, umesto podele elemenata i ovde se uvodi spajanje, ovoga puta nesusednih, trouglova u četvorouglove. Algoritam predložen u [61] podrazumeva da se svi elementi dobijeni nakon spajanja susednih trouglova ponovo izdele na trouglove, ali podelom koja podrazumeva dodavanje tačke u unutrašnjost elementa i njeno spajanje sa čvorovima elementa. Nakon toga se ivice koje su postojale pre ove podele brišu, a novonastala mreža je čista četvorougona ukoliko je geometrija zatvorena manifoldna. U slučaju da geometrija sadrži granične ivice ili ivice koje ne smeju biti obrisane trougaoni elementi će biti prisutni duž ovih ivica. Algoritam kojim se u [61] eliminišu ovi elementi unosi veliki broj dodatnih elemenata, i praktično svodi podelu na ovom mestu na Katmul-Klark podelu. Očigledno je međutim da na ovom mestu možemo jednostavno dodati po jedan čvor na sve ivice koje su granične ili predstavljaju ivice koje se nisu smele brisati. Nedostatak drugog pristupa je činjenica da se na taj način dobijaju četvorouglovi niskog faktora kvaliteta, jer sadrže po jedan ugao od  $180^\circ$ . Takođe, čak i u slučaju zatvorene manifoldne geometrije bez oštih ivica algoritam donosi značajno povećanje broja elemenata.

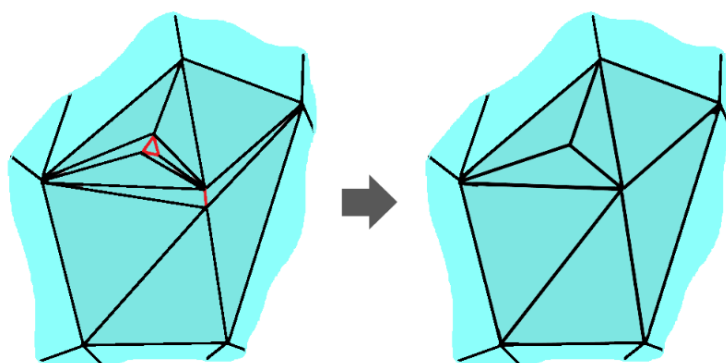
Algoritam predložen u [10] i [11] podrazumeva pronalaženje najkraćih putanja među parovima nesusednih trouglova, koji se zatim spajaju u četvorouglove nizom operacija rotacije i jednim brisanjem ivice, kao što je prikazano na slici 11. Pretraga mreže se vrši po *Breath First Search* principu [62]. U svakoj iteraciji se razmatra okolina trouglova, definisana dužinom putanje u broju četvorouglova, sve dok se ne pronađe drugi trougaoni element. Ukoliko svi trouglovi nisu upareni, u narednim iteracijama se maksimalna dužina putanje povećava. Na ovaj način se najpre eliminišu trougaoni elementi koji su međusobno bliski, a zatim udaljeniji elementi.



Slika 11. Spajanje nesusednih trougaonih u četvorougao element.

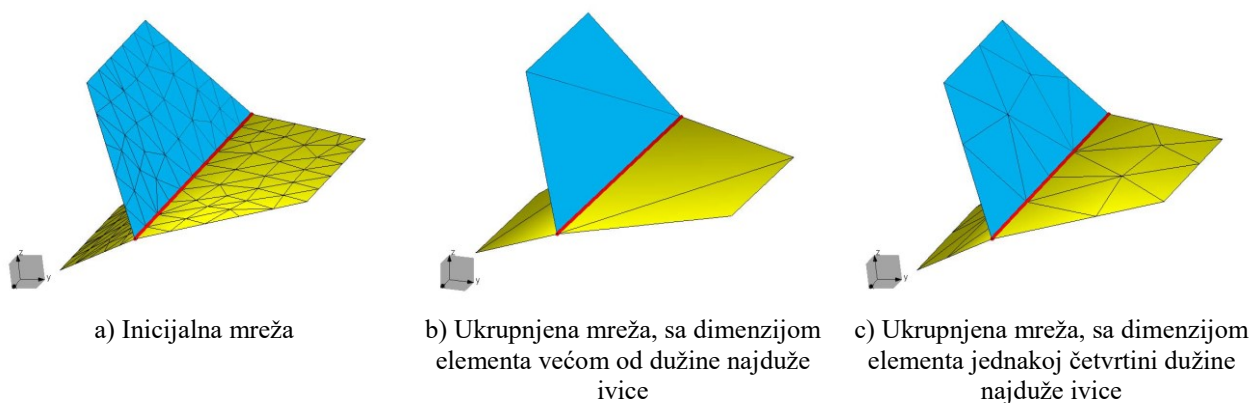
U do sada opisanim metodama čvorovi originalne mreže opstaju i u finalnoj mreži. Postoje međutim situacije kada je, osim puke konverzije trougaone u četvorougao mrežu, potrebno izvršiti i izvesno uprošćavanje originalne mreže. To se pre svega odnosi na eliminaciju veoma kratkih ivica i veoma malih elemenata. Obično se zadaje tolerancija u odnosu na maksimalnu dimenziju razmatrane strukture, pa se svi entiteti čije su dimenzije manje od zadate tolerancije pomnožene maksimalnom dimenzijom strukture eliminišu iz mreže [60]. Ovu eliminaciju je bolje izvršiti na nivou trougaone mreže, gde je moguće izvršiti prostu kompresiju ivice ili elementa u čvor, uz brisanje elemenata čija je bar jedna ivica komprimovana. Slika 12 ilustruje opisane operacije. U slučaju da se ovakve operacije ne izvrše pre konverzije, kratke ivice će postojati i u četvorougaoj mreži, gde je njihova eliminacija značajno složenija [3], o čemu će više reči biti u poglavlju 3.6.





Slika 12. Kompresija ivice i elementa u čvor u trougaonoj mreži.

Dodatno, ukoliko je trougaona mreža kreirana sa veoma malim dimenzijama elemenata ili sa malom vrednošću brzine rasta mreže, tj. malim gradijentom povećanja dimenzije elementa kada se ide od veoma sitnih prema krupnijim elementima, onda u toku konverzije treba izvršiti i ukрупnjavanje elemenata i povećanje brzine rasta. Prethodno opisane metode za uprošćavanje ovakvih mreža nude samo delimično rešenje. U algoritmu predloženom u [63] najpre se vrši ukрупnjavanje trougaone podele eliminacijom unutrašnjih ili graničnih čvorova u iterativnom postupku. U slučaju unutrašnjih čvorova, razmatrani čvor se eliminiše u slučaju da je ugao između normala na trouglove koji dele dati čvor manji od zadatog. Poligon koji je nastao brisanjem ovog čvora deli se zatim primenom *ear clipping* (odsecanje trouglova) algoritma [64] na trouglove. Ukoliko ma koji od novonastalih trouglova ima ivicu dužu od zadate dimenzije elementa, vraćamo se na originalnu podelu. Za granične čvorove se osim opisanog kriterijuma vezanog za ugao među trouglovima, primenjuje i kriterijum vezan za ugao koji zaklapaju granične ivice. Samo ukoliko su oba ugla manja od zadatih tolerancija, vrši se brisanje datog čvora. Primer ukрупnjavanja trougaone mreže za dve vrednosti dimenzije elementa dat je na slici 13. Kada je ukрупnjavanje trougaone mreže primenom ovog algoritma završeno, četvorougaona mreža se kreira spajanjem trouglova u četvorouglove, primenom neke od opisanih metoda.



Slika 13. Ukрупnjavanje trougaone mreže. [63]

Treba napomenuti da metode opisane u ovom poglavlju u opštem slučaju daju nestrukturiranu četvorougaonu mrežu. Veliki problem svih ovih metoda jeste činjenica da kvalitet finalne četvorougaone mreže u velikoj meri zavisi od kvaliteta inicijalne trougaone mreže. Kako se u algoritmima za trougaonu segmentaciju uglavnom teži dobijanju trouglova što sličnijih jednakostraničnom trouglu, očigledno je da primena metoda opisanih u ovom poglavlju nad takvom trougaonom mrežom neće rezultirati kreiranjem četvorougaonih elemenata visokog faktora kvaliteta.



### 3.4.2. Metode zasnovane na podeli na makro-elemente

Metode opisane u ovom poglavlju zasnivaju se na dekompoziciji inicijalne geometrije na makro-elemente i daljoj četvorougaonoj segmentaciji makro-elemenata. Na taj način se problem kreiranja četvorougaone mreže cele, potencijalno veoma složene, geometrije dekomponuje na niz jednostavnijih problema koji podrazumevaju segmentaciju makro-elemenata. U odnosu na oblik makro-elementa, metode se mogu podeliti na one koje zahtevaju striktno četvorougaone makro-elemente i one kod kojih je oblik makro-elementa proizvoljan.

U slučaju kada je makro-element četvorougaonog oblika, njegova segmentacija je veoma jednostavna i svodi se na kreiranje mreže zadate gustine na četvorougaonom makro-elementu i projektovanje date mreže na originalnu geometriju. Naravno, granice susednih makro-elemenata moraju biti podeljene na istovetan način, kako bi finalna mreža bila usaglašena. Ovako kreirana mreža je semi-regularna, sa separatorskim linijama koje odgovaraju granicama između makro-elemenata.

U slučaju da oblik makro-elementa nije četvorougaoni, sam se makro-element najpre deli na četvorougaone elemente. Ovi elementi predstavljaju ili finalnu mrežu ili se posmatraju kao novi makro-elementi, a dalja segmentacija se vrši na prethodno opisani način.

Kreiranje makro-elemenata vrši se direktno nad originalnom geometrijom, bez prethodne parametrizacije. U ovom poglavlju ćemo opisati metode koje su široko korišćene u praksi.

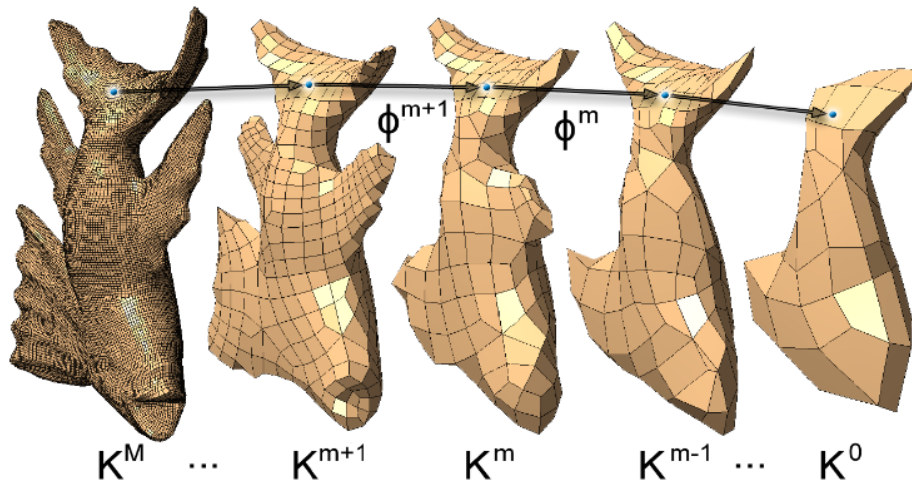
#### Hijerarhijsko mapiranje

Ova metoda je najpre razvijena za trougaonu segmentaciju [65], a zatim je njeno korišćenje prošireno na četvorougaonu segmentaciju [12].

U metodi opisanoj u [12] inicijalna trougaona mreža najpre se konvertuje u čistu četvorougaonu primenom Katmul-Klark postupka. Četvorougaonu mrežu dobijenu na ovaj način označavamo kao polaznu mrežu,  $M$ . Ova mreža se zatim uprošćava primenom metode za ukрупnjavanje opisane u [66], o kojoj će više reći biti u poglavlju 3.6. (Uprošćavanje mreže se može vršiti i primenom nekog drugog postupka.) Polazna mreža  $M$  se u nizu koraka ukрупnjavanja transformiše u mrežu  $M^0$ , koja se naziva osnovnim domenom. Finalnu mrežu dobijamo segmentacijom osnovnog domena i preslikavanjem ove segmentacije na polaznu mrežu.

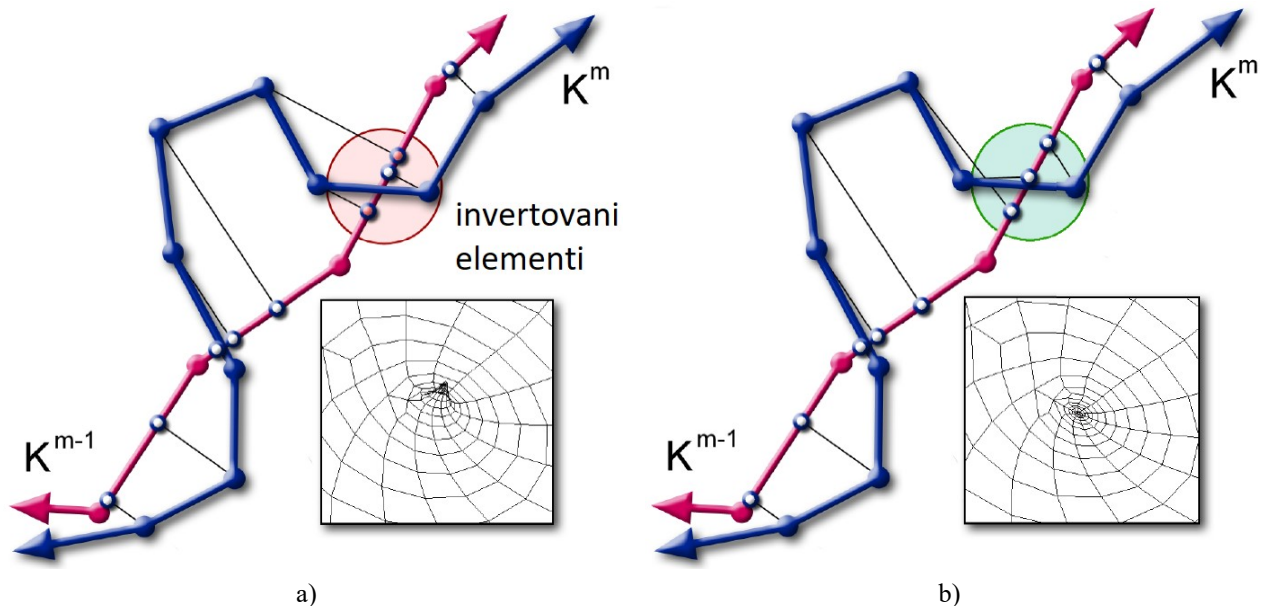
Potrebna nam je, dakle, bijektivna funkcija koja čvorove mreže  $M$  preslikava u osnovni domen  $M^0$ ,  $\Phi: M \rightarrow M^0$ . Ova funkcija se konstruiše hijerarhijski, tako što se pamti niz mreža kreiranih u postupku ukрупnjavanja od mreže  $M$  do mreže  $M^0$ , i njima odgovarajućih preslikavanja, te se preslikavanje  $\Phi$  konstruiše kao suma ovih preslikavanja (slika 14). Preslikavanje čvorova se vrši kao normalna projekcija čvorova jedne na elemente druge mreže. Ukoliko preslikavanje mreže  $M^k$  na mrežu  $M^{k-1}$  nije bijektivna funkcija dolazi do preklapanja slika pojedinih elemenata mreže  $M^k$  na mreži  $M^{k-1}$ . Elementi čije se slike delimično ili potpuno preklapaju nazivaju se invertovanim elementima.

Ne pamtite se sve mreže kreirane u opisanom hijerarhijskom postupku, već samo takozvane ključne mreže (*keyframe*), koje ćemo označavati kao  $K^m$ , gde  $m = 0$  odgovara osnovnom domenu. Pretpostavimo da smo ukрупnjavanjem od polazne mreže  $M$ , došli do ključne mreže  $K^m$ . Dalje ukрупnjavanje mreže  $K^m$  dalo je mrežu  $M^c$ . Mreža  $M^c$  se proglašava za ključnu i biva označena sa  $K^{m-1}$ , ukoliko je zadovoljen jedan od sledećih uslova: minimalno Hausdorfovo rastojanje između mreža  $K^m$  i  $M^c$  veće je od specificiranog praga, ili postoje invertovani elementi. Opisana provera se ne mora izvršiti za sve elemente posmatranih mreža, već samo za one na koje je postupak ukрупnjavanja imao uticaja.



Slika 14. Ključne mreže i odgovarajuća preslikavanja. [12]

Invertovani elementi se eliminišu u procesu relaksacije, u kom se pozicije susednih projekcija iterativno menjaju dok se ne eliminiše preklapanje elemenata. Ovaj postupak je ilustrovan na slici 15, gde je prikazan 2D dijagram procesa projekcije i relaksacije.



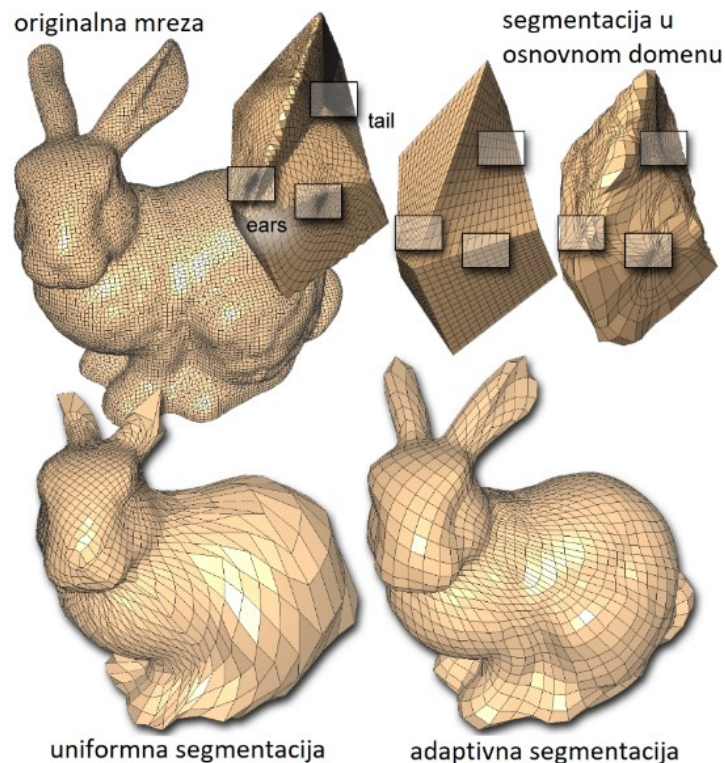
Slika 15. Konstruisanje preslikavanja  $\Phi^m$  kroz operacije projekcije (a) i relaksacije (b). [12]

Finalna mreža se kreira tako što se izvrši uniformna podela elemenata u osnovnom domenu, čiji se čvorovi kroz niz preslikavanja ( $\Phi^m, m = M, M - 1, \dots, 0$ ) preslikaju na originalnu mrežu,  $M$ . Problem sa uniformnom segmentacijom leži u činjenici da preslikavanje  $\Phi: M \rightarrow M^0$  u opštem slučaju nije ni konformalno ni ekvipovršinsko, jer sam način konstrukcije preslikavanja to ne obezbeđuje. Kako bi se smanjile distorzije po uglu i površini, potrebno je izvršiti adaptivnu segmentaciju u osnovnom domenu (slika 16), gde se pozicije čvorova iterativno menjaju dok se ne postigne željeni stepen distorzije po površini i uglu.

Smanjenje distorzije uglova i dobijanje elemenata većeg faktora kvaliteta može se postići i rafinacijom finalne mreže primenom postupaka opisanih u poglavlju 3.6.

Ova metoda se može primeniti za segmentaciju topologija proizvoljnog genusa, kao i za nemanifoldne topologije. Pokazuje se da daje čiste mreže sa visokim kvalitetom elemenata.

Glavni problem jeste veoma dugo trajanje, pre svega postupka relaksacije kod kreiranja preslikavanja  $\Phi^m$  i procesa adaptivne segmentacije radi smanjenja ugaonih i površinskih distorzija. Primera radi, segmentacija modela “Stenford zeka” [67] prikazanog na slici 16 traje oko 23 minuta na mašini sa procesorom sa 2 jezgra koja radi na 2.16 GHz. Takođe, metoda ne postavlja elemente paralelno glavnim linijama zakrivljenosti površi.

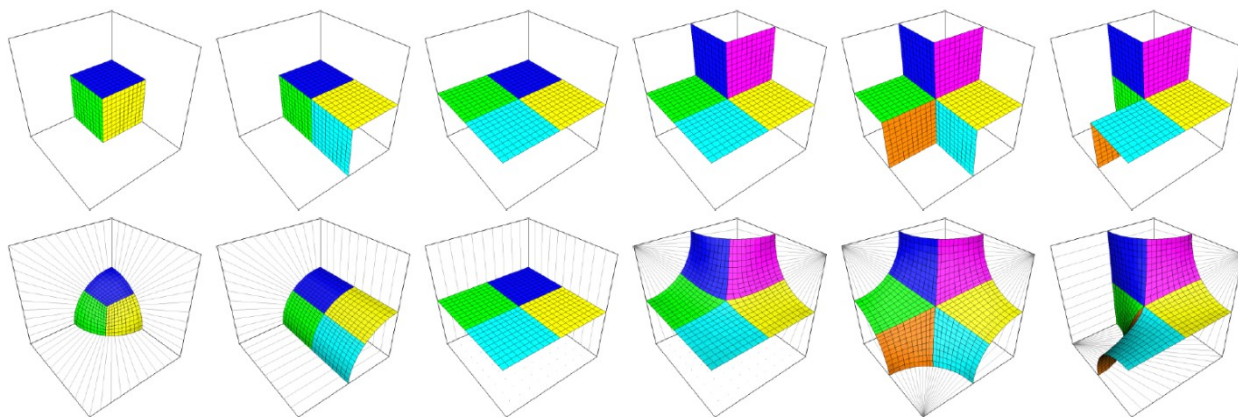


Slika 16. Poređenje uniformne i adaptivne segmentacije. [12]

### Preslikavanje na mrežu kocki (*Poly-cube maps*)

Posmatrajmo zatvoreno manifoldno telo, oko čijeg je težišta konstruisana kocka proizvoljne dužine ivice. Kreiranje uniformne četvorougaoe segmentacije kocke je trivijalno i svodi se na podelu svake od njenih ivica na zadati broj, označimo ga sa  $N$ , segmenata, te podelu strana kocke na  $N \times N$  elemenata. Svaki ovako kreirani element možemo preslikati na površ tela od interesa, prostim preslikavanjem u odnosu na centar kocke. Drugim rečima, svaki čvor na površi tela od interesa određen je presekom te površi sa polupravom koja polazi iz centra kocke i prolazi kroz odgovarajući čvor u mreži kocke. Opisani metod za segmentaciju možemo primeniti za svako telo za koje je ovo preslikavanje bijektivno.

Kako bi se metoda generalizovala tako da je njena primena moguća za proizvoljnu geometriju, umesto jedne kocke koristi se sistem od većeg boja kocki iste veličine koje se spajaju tako što im se strane “lepe” jedna za drugu [68]. Ovaj sistem kocki treba da ima oblik koji je sličan obliku geometrije koja se segmentira, tako da između strana sistema kocki i površi geometrije postoji bijektivno preslikavanje. Pokazuje se da postoje tačno 63 konfiguracije preseka manifoldne geometrije i pojedine kocke iz opisanog sistema, ali se sve ove konfiguracije svode na 6 elementarnih kada se u obzir uzmu rotacije i preslikavanja u ogledalu [68]. Ovi obrasci su ilustrovani na slici 17, gde je prikazano preslikavanja mreže iz osnovnog domena (gornji red) na geometriju od interesa (donji red).



Slika 17. Elementarne konfiguracije (gore) i preslikavanje mreže iz osnovnog domena na zakrivljene površine, sa naznačenim linijama projekcije (dole). [68]

Pokazuje se da je ugaona i površinska distorzija veoma mala, te da se dobijaju elementi visokog faktora kvaliteta. Međutim, postoji nekoliko problema koji značajno ograničavaju širinu primene ove metode. Automatsko ili polu-automatsko kreiranje sistema kocki koji dobro reprezentuje geometriju modela i omogućava konstrukciju bijektivnog preslikavanja veoma je komplikovano [68]-[70]. Kako su sve kocke u sistemu jednakih dimenzija, još veći problem predstavlja primena na geometrijama koje imaju delove veoma različitih dimenzija (primera radi stohastičko drvo sa velikom brojem grananja [71]), jer broj kocki postaje nepraktično veliki. Konačno, generalizacija metode na nemanifoldne geometrije i kreiranje neizotropne segmentacije veoma su problematični.

### Metode bazirane na centroidnoj Voronijevoj teselaciji

U literaturi se metode koje su bazirane na centroidnoj Voronijevoj teselaciji najčešće izdvajaju u posebnu grupu metoda [3]. Međutim, kako ove metode imaju za cilj podelu geometrije na makro-elemente, a kako se kreiranje makro-elemenata vrši direktno nad originalnom geometrijom, smatramo da je njihovo svrstavanje u grupu zasnovanu na dekompoziciji geometrije na makro-elemente sasvim opravdano.

Kao što je pokazano kod hijerarhijskog mapiranja, pojava invertovanih elemenata u projekcijama čvorova originalne mreže na osnovni domen značajno produžava vreme segmentacije, jer se invertovani elementi eliminišu u zahtevnom postupku relaksacije preslikavanja. Kako bi se ovo izbeglo, kreiraju se kvazi-planarni makro-elementi. Drugim rečima, susedni trougaoni elementi se grupišu tako da je ugao između normale na element i srednje normale na makro-element manji od zadatog praga. Problem koji se u generalnom slučaju javlja kada se makro elementi kreiraju na opisani način jeste njihov veoma složen i često nepravilan oblik [72]. Dodatni problem predstavlja izbor tačaka oko kojih će makro-elementi biti kreirani. Nazovimo ove tačke *semenskim* tačkama. Kao rešenje za oba navedena problema u literaturi se predlaže metoda zasnovana na centroidnoj Voronijevoj teselaciji [73].

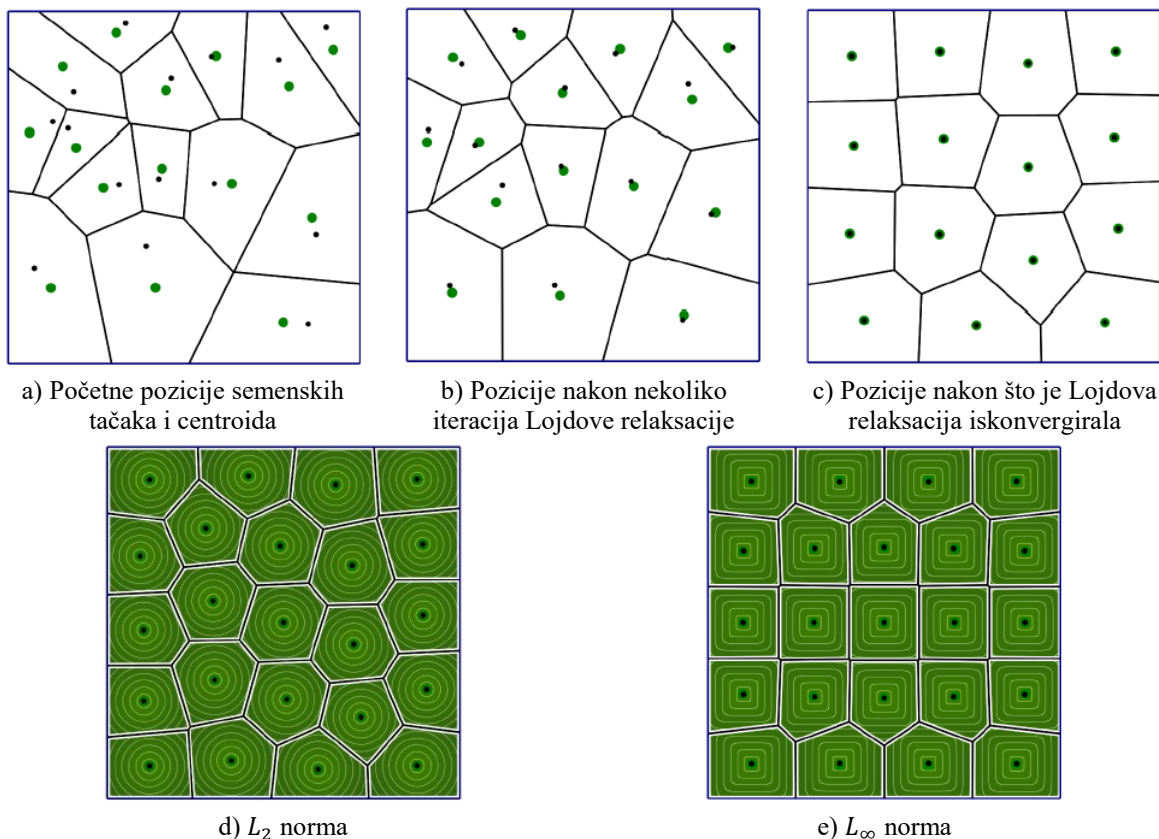
Osnovna ideja algoritma jeste da se semenske tačke uniformno ili slučajnim izborom rasporede po elementima polazne trougaone mreže. Nakon toga se u iterativnom postupku: najpre izračunaju Voronijeve ćelije oko ovih tačaka, zatim se odredi centroid za svaku ćeliju, te se konačno semenska tačka za sledeću iteraciju pomeri u centroid. Postupak se završava kada se sve semenske tačke poklope sa centroidima u okviru zadate tolerancije. Opisani algoritam se naziva Lojdomom relaksacijom [74], i ilustrovan je na slici 18.

Finalni oblik makro-elemenata zavisi od načina na koji su kreirane Voronijeve ćelije. Tako na primer, ukoliko je korišćena uobičajena  $L_2$  norma makro-elementi imaju dominantno šestougaoni oblik (slika 18d). Ukoliko se koristi norma  $L_\infty$  makro-elementi su dominantno četvorougaonog oblika (slika 18e).



U opštem slučaju će makro-elementi imati oblik prostog poligona sa parnim ili neparnim brojem stranica. U [13] se predlaže prosta podela ovih poligona bez dodavanja tačaka u unutrašnjosti, i to: poligon sa  $2k$  stranica deli se na  $k - 1$  četvorouglova, dok se poligon sa  $2k + 1$  stranica deli na  $k - 1$  četvorouglova i jedan trougao. Ovako dobijeni elementi se zatim dele primenom Katmul-Klark postupka, te se na taj način dobija čista četvorougaona mreža. Ova mreža može predstavljati finalnu nestrukturiranu mrežu ili osnovni domen za dalju rafinaciju u cilju kreiranja finije semi-regularne mreže.

Metoda je primenjiva na manifoldnu i nemanifoldnu geometriju, i omogućava kreiranje mreža sa visokim faktorom kvaliteta elemenata. Međutim, iako generalno poželjan, pravilan oblik makro-elementa onemogućava kreiranje anizotropne mreže i to predstavlja glavni nedostatak ove metode.



Slika 18. Kreiranje makro-elemenata zasnovano na centroidnoj Voronoijevoj teselaciji. [3]

### 3.4.3. Metode zasnovane na parametrizaciji

Metode opisane u ovom poglavlju predstavljaju najšire korišćenu klasu metoda za četvorougaonu segmentaciju. Za razliku od metoda opisanih u prethodnom poglavlju, parametrizacija se ovde eksplicitno računa, tako da budu zadovoljeni zadati kriterijumi, kao što su konformalnost ili orijentacija elemenata u skladu sa orijentacijom glavnih linija zakrivljenosti ili pozicijama i orijentacijom nepokretnih ivica geometrije. Osnovni pojmovi vezani za parametrizaciju površi dati su u Dodatku 1.

Metode bazirane na parametrizaciji počivaju na ideji preslikavanja površine definisane u trodimenzionalnom prostoru,  $S \subset R^3$ , u dvodimenzioni domen koji nazivamo parametraskim prostorom ili osnovnim domenom,  $S^* \subset R^2$ , u kome je četvorougaona segmentacija trivijalna. Jednom kada je četvorougaona mreža kreirana u osnovnom domenu, njeno preslikavanje na originalnu geometriju daje finalnu mrežu.

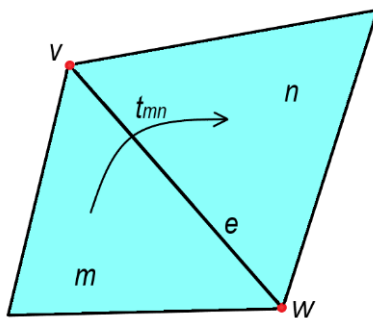
Zajedničko za praktično sve metode zasnovane na parametrizaciji jeste da bez obzira na način na koji je ulazna geometrija zadana, najpre kreira trougaona mreža date geometrije [3], [75], [76]. Podela originalne glatke površine,  $S$ , na trougaonu mrežu,  $S_T$ , svodi i kontinualno preslikavanje  $g: S \rightarrow S^*$  na deo po deo linearno preslikavanje  $f: S_T \rightarrow S_T^*$ , koje je linearno po svakom trougaonom elementu. Ovo preslikavanje potpuno je određeno slikama svih čvorova mreže  $S_T$ ,  $f(v) \in S_T^*$ .

Zahtevi koje preslikavanje (parametrizacija) treba da zadovolji određeni su zahtevanim osobinama same mreže. U nastavku ćemo navesti neke od zahteva, kao i načine na koje se oni zadovoljavaju.

Osnovni zahtev jeste kreiranje usaglašene (potpuno povezane) mreže. Postoje dva pristupa u konstruisanju parametrizacije koja obezbeđuje ispunjenje ovog zahteva. Prvi je da se cela geometrija razmatra kao jedna celina, te da se konstruiše globalna parametrizacija na nivou cele geometrije. Ovaj pristup je primenjiv samo na topologije koje su homeomorfne na osnovni domen. Tako se topologije homeomorfne na disk mogu preslikavati na ravan, kao što je prikazano u [77], topologije čiji je genus jednak nuli na sferu [78], a topologije genusa 1 na torus [79]. Drugi pristup podrazumeva podelu geometrije na veći broj makro-elemenata koji imaju topologiju diska, te određivanje parametrizacije za svaki od njih. Skup svih makro-elemenata jedne geometrije naziva se *atlasom* date geometrije. Ovaj pristup je generalno primenjiv na geometriju proizvoljne topologije, kao i na nemanifoldnu geometriju. Međutim, primena ovog pristupa unosi i sledeće probleme:

- Parametrizacija za jedan makro-element se ne može računati nezavisno od njegovih suseda, kako usaglašenost mreže ne bi bila ugrožena, tj. parametrizacija mora biti globalno kontinualna.
- Određivanje optimalne podele na makro-elemente je veoma složen problem.

Pozabavimo se najpre problemom konstrukcije globalno kontinualne parametrizacije. Posmatrajmo dva trougaona elementa,  $m$  i  $n$ , prikazana na slici 19. Pretpostavimo da ivica  $e$  predstavlja granicu ovih elemenata, ali i deo granice susednih makro-elemenata. S obzirom da elementi pripadaju različitim makro-elementima, čvorovi  $v$  i  $w$  koji pripadaju graničnoj ivici  $e$  u opštem slučaju nemaju istu parametrizaciju u dva makro-elementa,  $f_m(v) \neq f_n(v)$  i  $f_m(w) \neq f_n(w)$ . Prema tome, i podela ivice  $e$  u opštem slučaju nije identična u dva susedna makro-elementa. Uvodimo sada pojam tranzicionog preslikavanja  $t_{mn}: R^2 \rightarrow R^2$ , koje predstavlja preslikavanje između slika ivice  $e$  u slikama trouglova  $m$  i  $n$  u parametarskom prostoru.

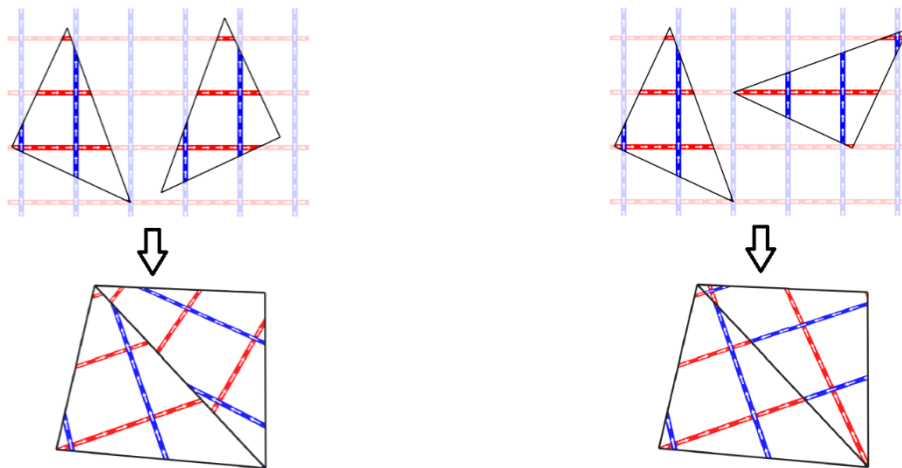


Slika 19. Susedni trougaoni elementi  $m$  i  $n$ , i tranziciono preslikavanje  $t_{mn}$ .

Jasno da će mreža na granici dva makro-elementa biti povezana ukoliko odgovarajuće tranziciono preslikavanje predstavlja identičko preslikavanje. Međutim, ovaj uslov svodi parametrizaciju na globalnu parametrizaciju čije smo ozbiljne nedostatke već naglasili. Pokazuje se da se globalno kontinualna parametrizacija dobija i sa nešto relaksiranim zahtevom za tranzicione funkcije [80], koji je dat sa:

$$\mathbf{r}'_p = t(\mathbf{r}_p) = \left(R_{\frac{\pi}{2}}\right)^l \mathbf{r}_p + \mathbf{d}. \quad (41)$$

Gde je  $\mathbf{r}_p$  slika tačke  $\mathbf{r} \in e$  koja odgovara prvom makro-elementu, dok je  $\mathbf{r}'_p = t(\mathbf{r}_p)$  slika iste tačke dobijena preslikavanjem njemu susednog makro-elementa.  $R_{\frac{\pi}{2}}$  je rotacija za  $\frac{\pi}{2}$  u parametarskom prostoru, a  $i$  je celobrojna konstanta. Drugim rečima dozvoljena je rotacija za celobrojni umnožak  $\frac{\pi}{2}$ . Vektor  $\mathbf{d}$  predstavlja celobrojnu translaciju, tj. pomeraj za ceo broj ćelija u četvorougaoanom gridu u parametarskom prostoru. Ovakva transformacija je ilustrovana slikom 20.



a) Nekontinualna parametrizacija - nije zadovoljen uslov dat jednačinom (41)

b) Kontinualna parametrizacija - zadovoljen uslov dat jednačinom (41)

Slika 20. Parametarska mreža susednih trougaonih elemenata.

Svaki unutrašnji čvor inicijalne trougaone mreže pripada izvesnom broju elemenata. Ukoliko tranziciona preslikavanja zadovoljavaju uslov dat jednačinom (41), suma unutrašnjih uglova slika trougaonih elemenata u parametarskim prostoru je u svakom unutrašnjem čvoru jednaka  $\frac{k\pi}{2}$ , gde je  $k$  ceo broj. Čvorove u kojima je ova suma različita od  $2\pi$  ( $k \neq 4$ ) nazivamo *singularnim* tačkama. Pokazuje se da je za direktno dobijanje čiste četvorougaoane mreže podelu u parametarskom prostoru potrebno izvršiti tako da se parametarske linije seku u singularnim tačkama [81]. U takvoj mreži će valenca čvora biti jednaka konstanti  $k$  iz prethodne jednačine. Ukoliko podela nije izvršena na ovaj način, u finalnoj mreži će se u okolini svake singularne tačke pojaviti element čiji je broj stranica jednak konstanti  $k$ .

Kao što je rečeno u poglavlju 3.2 regularnu mrežu je moguće kreirati samo za toroidalne topologije, a čak je i za takve topologije potrebno uvesti neregularne čvorove u oblastima promene dimenzije elemenata, tako da je izvestan broj singularnih tačaka neizbežan u ogromnoj većini mreža. Optimalna parametrizacija treba ne samo da minimizuje broj singularnih tačaka, već i da obezbedi njihovo dobro pozicioniranje.

Kako bismo imali dobru podelu na makro-elemente, te parametrizaciju koja garantuje kreiranje kvalitetne mreže, potrebno je na izvestan način izvršiti ekstrakciju oblika geometrije. U naredna dva poglavlja su opisane tehnike koje se najčešće koriste u praksi.

### Podela konstrukcijom Morse-Smale kompleksa

Metode iz ove grupe koriste osobinu Morse-Smale kompleksa da deli manifoldnu geometriju na makro-elemente koji imaju četvorougaoani oblik, te se zatim parametrizacija vrši po četvorougaoanim makro-elementima.

Polazna geometrija je zadata trougaonom mrežom. Ma koja skalarna funkcija definisana na svim čvorovima mreže, a koja omogućava kreiranje Morse-Smale kompleksa, može se iskoristiti za podelu. Međutim, neće svaka funkcija rezultirati Morse-Smale kompleksom koji obezbeđuje kvalitetnu

podelu na makro-elemente. U [14] se pokazuje da skalarna funkcija dobijena na osnovu Laplasovih sopstvenih funkcija daje veoma dobru podelu. Diskretni Laplasijan deo-po-deo linearnog preslikavanja,  $f$ , trougaone mreže je u čvoru  $i$  dat sa:

$$\Delta f_i = \sum_{j \in N_i} w_{ij}(f_j - f_i), \quad (42)$$

gde je  $N_i$  skup čvorova susednih čvoru  $i$ , dok je  $w_{ij}$  težinski koeficijent koji odgovara ivici  $(i, j)$ . Vrednost koeficijenta  $w_{ij}$  zavisi od tipa preslikavanja, a pokazuje se da se Dirhleova energija (videti Prilog A) minimizuje sa [82], [83]:

$$w_{ij} = \frac{\text{ctg } \alpha_{ij} + \text{ctg } \beta_{ij}}{2}, \quad (43)$$

gde su  $\alpha_{ij}$  i  $\beta_{ij}$  uglovi naspramni ivici  $(i, j)$ . Funkciju  $f$  možemo predstaviti kao vektor vrednosti funkcije u čvorovima mreže, koji ćemo označiti sa  $\mathbf{f}$ . Imajući u vidu linearnost Laplasijana, primenu ovog operatora na funkciju  $f$  možemo napisati u obliku matričnog proizvoda:

$$\Delta \mathbf{f} = \mathbf{L} \mathbf{f}, \quad (44)$$

gde je  $\mathbf{L}$  kvadratna matrica čiji je broj vrsta i kolona jednak broju čvorova, a vrednosti elemenata date sa:

$$L_{ij} = \begin{cases} \sum_{k \in N_i} w_{ik}, & i = j \\ -w_{ij}, & \text{čvorovi } i \text{ i } j \text{ pripadaju istoj ivici} \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \quad (45)$$

Za ovako definisanu matricu  $\mathbf{L}$ , izračunava se izvestan broj sopstvenih vrednosti ( $\lambda_1 = 0 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ ) i njima odgovarajućih sopstvenih vektora ( $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ ). Sopstveni vektori predstavljaju vrednosti deo-po-deo linearnih funkcija u čvorovima mreže. Ove funkcije nazivamo *Laplasovim sopstvenim funkcijama* mreže. One predstavljaju prirodne harmonike date mreže i prirodno opisuju oblik mreže.

S obzirom da se Laplasove sopstvene funkcije i njima odgovarajući *Morse-Smale* kompleks ne koriste za direktno kreiranje četvorougane mreže, već samo relativno skromnog broja makro-elementa, nije potrebno računati veoma veliki broj sopstvenih vrednosti/vektora. Pokazuje se da je za većinu geometrija dovoljno izračunati prvih 40 do 80 sopstvenih vrednosti/vektora [14]. Korisniku se omogućuje kontrola koja će funkcija biti iskorišćena za kreiranje *Morse-Smale* kompleksa. Jednom kada je funkcija izabrana, na osnovu njene vrednosti u čvorovima, čvorovi se klasifikuju na sledeći način:

- *Maksimum* je čvor u kome je vrednost funkcije veća nego u ma kom od njegovih suseda,
- *Minimum* je čvor u kome je vrednost funkcije manja nego u ma kom od njegovih suseda,
- *Regularni* čvor je onaj koji ne predstavlja ni minimum ni maksimum, a čiji susedi u kojima je vrednost funkcije veća, odnosno manja nego u datom čvoru formiraju neprekidni lanac,
- Ostali čvorovi predstavljaju *sedlaste* tačke.

Linije podele se kreiraju tako što se polazi od sedlastog čvora, a zatim se linija povlači kroz ivice po kojima postoji najbrži rast, odnosno opadanje Laplasove sopstvene funkcije sve dok se ne dođe do čvora koji predstavlja maksimum, odnosno minimum, respektivno. Na taj način se kreira podela na četvorougane makro-elemente, od kojih je svaki definisan sa dva naspramna sedlasta čvora, te po jednim minimumom i maksimumom. Ova podela se naziva *primarnim* kompleksom. Ovo je samo jedan iz familije kompleksa koji se mogu dobiti na osnovu vrednosti Laplasove sopstvene funkcije.



Primera radi, eliminacijom sedlastih tačaka i spajanjem minimuma i maksimuma po linijama najvećeg rasta funkcije, dobija se *kvazi-dualni* kompleks.

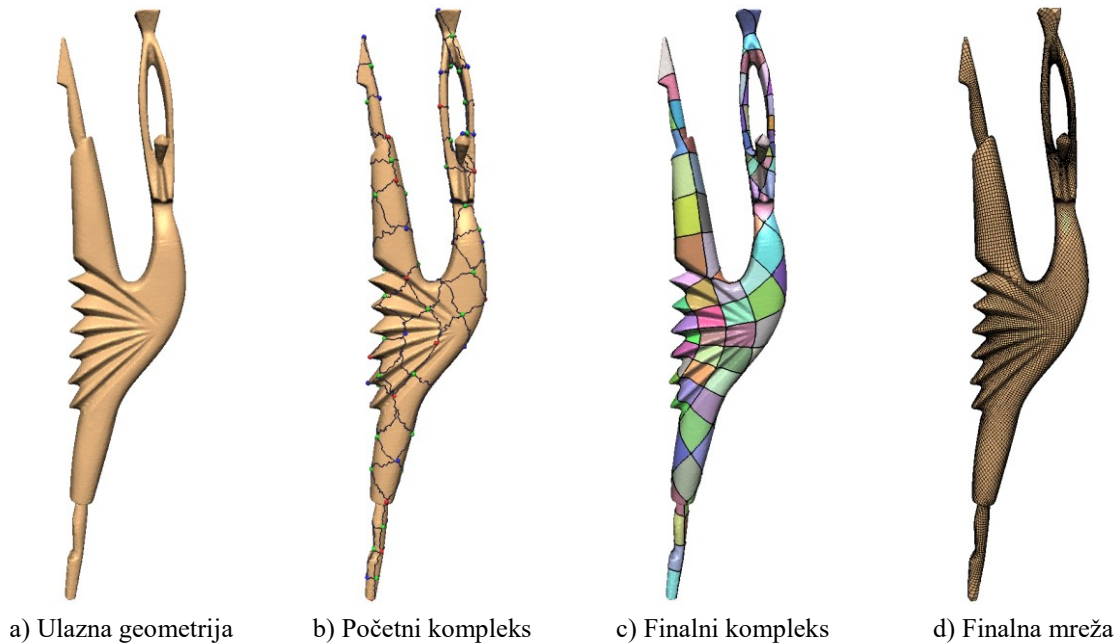
Nakon podele inicijalne mreže na makro-elemente, konstruiše se globalno kontinualna harmonijska parametrizacija, gde se makro-elementi preslikavaju u osnovni domen koji predstavlja kvadrat jedinične stranice u lokalnom  $uv$  koordinatnom sistemu,  $0 \leq u, v \leq 1$ . Samo su koordinate čvorova kompleksa unapred poznate, dok se koordinate za ostale čvorove, uključujući i granične čvorove makro-elemenata, naknadno određuju. Parametrizacija se dobija rešavanjem sistema linearnih jednačina, dimenzija  $2N_V \times 2N_V$ , gde je  $N_V$  broj čvorova. Jednačine sistema dobijaju se kao:

$$u_i^n - \sum_{(j,m) \in A_i} w_{ij} t_{nm}(u_j^m) = \sum_{j \in C_i} u_j^n. \quad (46)$$

Gde su  $u_i^n$  i  $u_i^m$   $u$ -koordinate čvora  $i$  u makro-elementima  $n$  i  $m$ .  $w_{ij}$  je težinski koeficijent dat jednačinom (43),  $t_{nm}$  je tranziciona funkcija između makro-elemenata  $n$  i  $m$ ,  $C_i$  su čvorovi kompleksa koji su susedni čvoru  $i$ , dok su čvorovi iz skupa  $A_i$  ostali susedi čvora  $i$ . Analogno se postavlja jednačina po  $v$  koordinati.

Kako samo čvorovi kompleksa imaju fiksirane koordinate u osnovnom domenu, rešenje sistema jednačina može podrazumevati pomeranje granice između elemenata. To se radi u iterativnom postupku, gde se nakon svake promene granica vrši ponovno rešavanje sistema jednačina. Pomeranje granica između makro-elemenata prikazano je na slikama 21b i 21c. Očigledno je da ovaj postupak može biti vremenski veoma zahtevan, naročito ukoliko se početna podela ne kreira na pravi način. Naime, suviše gruba inicijalna podela može onemogućiti kreiranje validne parametrizacije. U tim slučajevima se pribegava lokalnoj rafinaciji, koja podrazumeva dodatnu podelu kompleksa, bez podele njegovih granica, kako se ne bi ugrozila usaglašenost mreže.

Iako metoda počiva na spektralnoj analizi geometrije, granice kompleksa nisu uvek dobro usaglašene sa glavnim pravcima krivina površi. Unapređenje metode, gde se ovi pravci, kao i pozicije nepomičnih ivica uzimaju u obzir kod kreiranja *Morse-Smale* kompleksa predloženo je u [84]. Dodatno unapređenje, koje podrazumeva kreiranje anizotropne mreže, ali koje uključuje veoma zahtevan optimizacioni postupak, opisano je u [85]. Sve opisane metode se mogu primeniti samo na manifoldnoj geometriji.



Slika 21. Segmentacija geometrije primenom metode zasnovane na kreiranju Morse-Smale kompleksa. [14]

## Direkciona i Dimenziona polja

Ranije smo naglasili značaj pravilne orijentacije elemenata, gde je za optimalnu segmentaciju elemente potrebno orijentisati paralelno sa glavnim pravcima zakrivljenosti površi [7]. Osim toga, kako bi se dobila mreža koja aproksimira ulaznu geometriju sa malom greškom, ivice elemenata mreže treba da se poklapaju sa oštrim ivicama geometrije. Konačno, anizotropna segmentacija, gde je dužina elementa proporcionalna radijusu krivine u datom pravcu, je poželjna u cilju smanjenja broja elemenata za zadatau tačnost aproksimacije. Kao način da se odgovori svim ovim zahtevima, uvode se dva vektorska polja:

- *Direkciona polja*, koja određuju pravce izoparametarskih linija u osnovnom domenu, odnosno orijentaciju elemenata mreže.
- *Dimenziona polja*, koja sadrže informaciju o lokalnim dimenzijama elemenata mreže.

Navedena polja predstavljaju pomoćne entitete u segmentaciji, a sama segmentacija se kreira ili direktno na osnovu ovih polja ili na osnovu globalne parametrizacije, o čemu će više reči biti kasnije u ovom poglavlju.

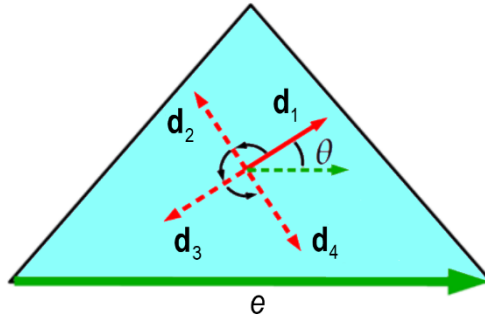
Treba napomenuti da je problem određivanja direkcioni i dimenzioni polja usko povezan sa problemom određivanja optimalnih linija podele površina na kvazi-planarne površine u metodi predloženoj u ovom radu. Za razliku od metoda predloženih u literaturi koje uvek podrazumevaju trougaonu segmentaciju ulazne geometrije, u ovom radu je predložena heuristička metoda koja se primenjuje direktno na ulaznoj CAD geometriji.

### *Direkciona polja*

Postoji više tipova direkcioni polja, sa različitim brojem vektora koji definišu polje u svakoj tački i sa različitim nivoom simetrije (dobar pregled je dat u [19]). Kada je u pitanju četvorougona segmentacija, najznačajnija su direkciona polja određena sa dva međusobno upravna vektorska polja, koja su u svakoj tački tangencijalna na površ geometrije, i u ovom radu ćemo govoriti isključivo o takvim direkcioni poljima.

Posmatrajmo geometriju zadatau trougaonom mrežom,  $M$ . Direkciono polje je konstantno na svakom elementu mreže i opisano je sa četiri međusobno normalna jedinična vektora,  $\mathbf{d}_1$ ,  $\mathbf{d}_2$ ,  $\mathbf{d}_3$  i  $\mathbf{d}_4$ , kao što je prikazano na slici 22. S obzirom da su vektori jednakog intenziteta i zaklapaju ugao od  $\frac{\pi}{2}$  jasno je da je definicijom jednog od njih definisan ceo sistem vektora. U literaturi je široko prihvaćeno definisanje ovog vektora preko ugla koji zaklapa sa ivicom koja je proglašena referentnom ivicom trougaonog elementa (ugao  $\theta$  na slici 22).

Direkciona polja se računaju tako što se polazi od zadatih ili automatski određenih početnih vektora, a zatim se određuju polja koja glatko ekstrapoliraju zadate vektore po celoj geometriji (slika 23). Početni vektori mogu biti određeni otvorenim ivicama geometrije ili unutrašnjim ivicama u kojima susedni elementi zaklapaju veliki ugao. Takođe, u paraboličnim oblastima je jednostavno identifikovati glavne pravce zakrivljenosti, pa oni predstavljaju direkciona polja u ovim oblastima modela. Pronalaženje polja koje na globalno optimalan način ekstrapolira početne vektore predstavlja složen optimizacioni problem. Način na koji se ovaj problem postavljen određuje i pripadnost metode jednoj od sledeće dve grupe: nelinearna formulacija je karakteristična za ranije radove iz ove oblasti [86], dok se danas najčešće koriste metode koje počivaju na linearnoj formulaciji problema [16], [87].



Slika 22. Četiri međusobno normalna direkciona vektora i njihovo predstavljanje preko ugla u odnosu na referentnu ivicu trougaonog elementa.

Kako bismo odredili polje koje glatko ekstrapolira zadate vektore, potrebno je najpre kvantifikovati samu glatkost polja. Glatkost polja se računa kao integral kvadrata zakrivljenosti datog polja. U slučaju diskretne definicije na trougaonoj mreži ovo se svodi na sumu datu sa:

$$E_s = \sum_{e_{ij} \in M} \omega_{ij} \Delta\theta_{ij}^2. \quad (47)$$

Gde su sa  $i$  i  $j$  označeni susedni trougaoni elementi, koji dele zajedničku ivicu  $e_{ij}$ . Koeficijent  $\omega_{ij}$  predstavlja težinski koeficijent, čija se vrednost najčešće postavlja na 1 [16], [88]. Pokazuje se međutim da je za neuniformne trougaone mreže ovaj koeficijent bolje postaviti na recipročnu vrednost koeficijenta datog jednačinom (43) [89].  $\Delta\theta_{ij}$  predstavlja ugaonu razliku između odgovarajućih direkcionih vektora u dva susedna trougla.

Treba primetiti da su uglovi  $\theta_i$  i  $\theta_j$  definisani u različitim elementima, pa ugaona razlika između vektora nije prosta razlika između uglova  $\theta_i$  i  $\theta_j$ . Kako bismo izračunali ugaonu razliku između vektora, potrebno je izraziti vektore iz tangentsnog prostora elementa  $i$  u tangentsnom prostoru elementa  $j$ . To se radi prostom rotacijom elementa  $i$  oko orijentisane zajedničke ivice  $e_{ij}$  tako da se elementi  $i$  i  $j$  dovedu u istu ravan. Označimo ovaj ugao rotacije sa  $\psi_{ij}$ .

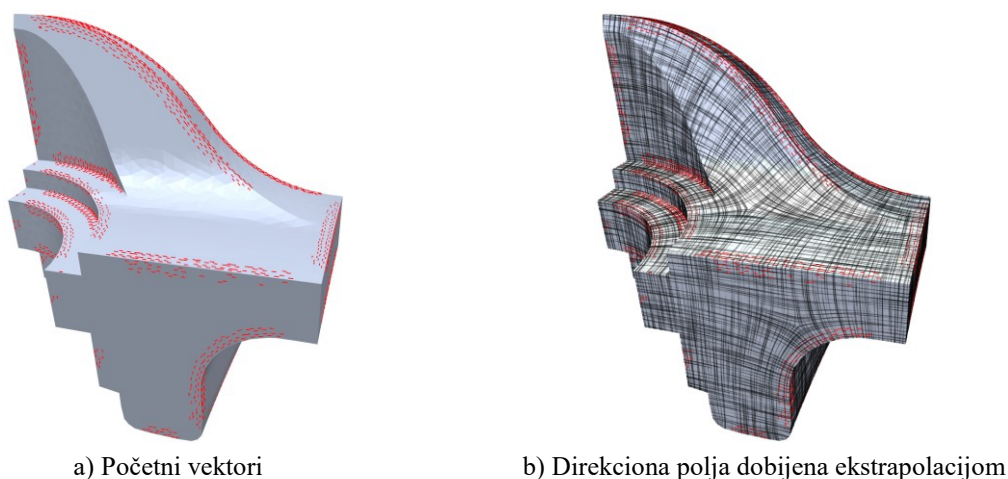
Imajući na umu da je trougaona mreža koju analiziramo samo aproksimacija glatke geometrije, te da i diskretna direkciona polja predstavljaju samo odbirke direkcionih polja koja postoje na originalnoj geometriji, potrebno je kod računanja ugla  $\Delta\theta_{ij}$  uzeti u obzir i eventualnu dodatnu rotaciju vektora polja. Ova se rotacija uzima u obzir kroz član dat sa  $2\pi p_{ij}$ , gde se  $p_{ij} \in Z$  naziva *ugaonim skokom* na ivici  $e_{ij}$ . S obzirom da je polje rotaciono simetrično na svakom elementu, sasvim je svejedno da li će vektor  $\mathbf{d}_1$  iz elementa  $i$  zaklapati mali ugao sa vektorom  $\mathbf{d}_1$  ili sa nekim drugim vektorom iz elementa  $j$ . Iz tog razloga se prethodno definisana ugaona promena deli faktorom 4, te dobija vrednost  $\frac{\pi}{2} p_{ij}$ .

Na osnovu svega rečenog, jednačina za glatkost polja postaje:

$$E_s = \sum_{e_{ij} \in M} \omega_{ij} \left( \theta_j - \left( \theta_i + \psi_{ij} + \frac{\pi}{2} p_{ij} \right) \right)^2. \quad (48)$$

Maksimalno glatko polje se dobija minimizacijom vrednosti ovog izraza. Ovako definisan optimizacioni problem je dodatno otežan činjenicom da su uglovi  $\theta_i$  i  $\theta_j$  realni brojevi, dok ugaoni skok  $p_{ij}$  uzima celobrojne vrednosti. Iz tog razloga se u [87] predlaže predstavljanje polja preko tzv. reprezentativnih vektora oblika  $(\cos 4\theta, \sin 4\theta)$ , umesto preko ugla u odnosu na referentnu ivicu elementa. Ovakva reprezentacija eliminiše potrebu za uvođenje ugaonog skoka. Međutim, u ovom slučaju ne postoji direktna linearna veza između direkcionog polja i odgovarajućeg reprezentativnog

vektora, te se uvode dodatna ograničenja kako bi se sprečila izobličenja u konstrukciji direkcionog polja.



a) Početni vektori

b) Direkcionalna polja dobijena ekstrapolacijom

Slika 23. Kreiranje direkcionalnih polja. [3]

Pokazuje se da je regularnost čvora u finalnoj mreži direktno određena vrednostima ugaonih skokova u zvezdi čvora inicijalne trougaone mreže [88]. Jasno je odavde da se i pozicije neregularnih tačaka mogu direktno podešavati odgovarajućim izborom ugaonih skokova u okviru postupka optimizacije koja podrazumeva minimizaciju izraza (16).

### *Dimenziona polja*

Direkcionalna polja određuju orijentaciju elemenata mreže, ali ne sadrže informaciju o poželjnim ili maksimalnim/minimalnim dozvoljenim dimenzijama elemenata. Iz tog razloga se uvode dimenziona polja, koja zajedno sa direkcionalnim daju punu informaciju o željenim parametrima mreže.

Dimenziona polja se mogu kreirati na različite načine, a njihove karakteristike su usko povezane sa zahtevanim karakteristikama mreže. Najjednostavnija dimenziona polja su konstantna polja, gde je maksimalna dimenzija elementa (odnosno dužina ivice) jedini parametar koji je njima definisan. Međutim, ovakva dimenziona polja mogu uneti veliku grešku u modelovanju geometrije, naročito u okolini sitnih detalja ili u oblastima sa malim radijusima zakrivljenosti. Iz tog razloga je korisno uvesti zavisnost dimenzionog polja od radijusa krivina površi i ivica [90]. Kako bi se tačnost modelovanja geometrije dodatno povećala na ovu zavisnost se dodaje i lokalna zavisnost od dimenzija sitnih detalja geometrije [91].

Oblik elemenata u finalnoj mreži takođe diktira karakteristike polja, tako da u slučaju da anizotropni elementi nisu poželjni imamo izotropna dimenziona polja. U slučaju kada je anizotropija elemenata poželjna uvode se anizotropna polja, gde je magnituda vrednosti polja određena oblikom geometrije. Tako je u [85] magnituda direkcionalnih polja proporcionalne lokalnom radijusu krivine površi u datom pravcu.

Dimenzionim poljima je potrebno pokriti i maksimalnu dozvoljenu brzinu rasta dimenzija elemenata mreže. Ukoliko maksimalna brzina rasta nije zadata, dimenziona polja se kreiraju na osnovu nekog od gore navedenih parametara. Međutim, ukoliko je brzina rasta zadata, dimenziono polje je potrebno je dodatno modifikovati, kako bi se zadovoljio zahtev nametnut ovim parametrom [92].

## Kreiranje mreže

Jednom kada su izračunata direkcionalna i dimenzionalna polja, kreiranje četvorougaoone mreže se vrši na osnovu njih. Ovde se izdvajaju dve grupe metoda:

- Eksplicitne metode, koje se zasnivaju na direktnom podeli geometrije na elemente na osnovu direkcionih i dimenzionih polja. Linije podele se kreiraju tako da njihova orijentacija odgovara direkcionim poljima, a međusobno rastojanje dimenzionim poljima.
- Metode zasnovane na računanju globalne parametrizacije koja poštuje zahteve za orijentacijom i dimenzijama elemenata definisane direkcionim i dimenzionim poljima.

Eksplicitne metode su značajno jednostavnije, ali generalno završavaju kreiranjem dominantno četvorougaoone, a ne čiste četvorougaoone mreže. Strogo gledano ove metode ne spadaju u metode zasnovane na parametrizaciji, jer se mreža kreira direktno, a ne preslikavanjem iz osnovnog domena. U odnosu na direkcionalna polja, razlikujemo dve grupe površina:

- Površine na kojima se jasno razlikuju dva dominantna pravca krivine, kao što su cilindrične ili parabolične površine.
- Površine na kojima ne možemo jasno razlikovati dva dominantna pravca krivine, kao što su sferične ili ravne površine.

S tim u vezi se i segmentacija ovih površina vrši na različit način. U slučaju prve grupe površina čvorove segmentacije dobijamo direktno, u preseku linija čija orijentacija odgovara direkcionim, a međusobno rastojanje dimenzionim poljima (slika 24). Na površinama na kojima nije moguće jasno izdvojiti glavne linije zakrivljenosti četvorougaoone segmentacija se vrši primenom neke od metoda za konverziju trougaone u četvorougaoonu mrežu.

Jasno je da se na oba opisana načina, tj. na obe vrste površi, u opštem slučaju može dobiti samo dominantno četvorougaoone mreža, koja se primenom tehnika opisanih u poglavlju 3.4.1 može konvertovati u čistu četvorougaoonu mrežu.

Sa druge strane metode bazirane na globalnoj parametrizaciji diktiranoj dimenzionim i direkcionim poljima daju dodatni stepen slobode kada je u pitanju optimizacija mreže. Takođe, ove metode omogućavaju direktno kreiranje čiste četvorougaoone mreže. Pokazuje se da se konstrukcijom kvalitetne parametrizacije dobijaju veoma kvalitetne čiste četvorougaoone mreže [3].

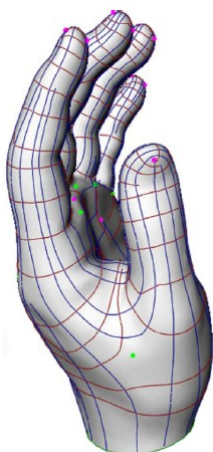
Međutim, radovi u kojima se opisuju ove metode uglavnom potiču iz oblasti kompjuterske grafike, te je stoga i fokus na glatkim geometrijama, bez velikog broja oštih ivica ili sličnih ograničenja kakva postoje u CAD modelima. Čak i za takve geometrije računanje globalne parametrizacije predstavlja vremenski veoma zahtevan problem [15]. Pokazuje se da je primena metoda globalne parametrizacije na složene CAD modele potpuno nepraktična, a u pitanje se dovodi čak i teorijska mogućnost adaptacije ove metode tako da bude primenjiva za složene CAD modele [20].



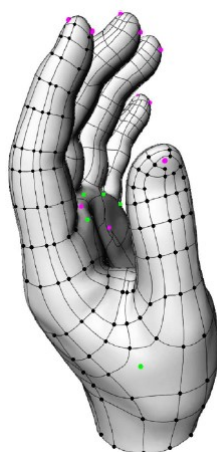
a) Ulazna geometrija (trougona mreža)



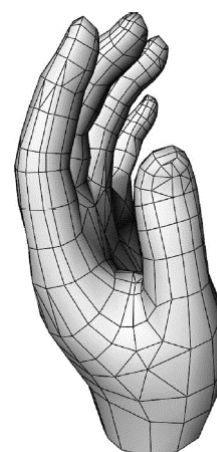
b) Direkciona polja



c) Linije podele



d) Elementi određeni preseccima linija podele



e) Finalna mreža

Slika 24. Eksplicitna segmentacija na osnovu direkcioni i dimenzioni polja. [90]

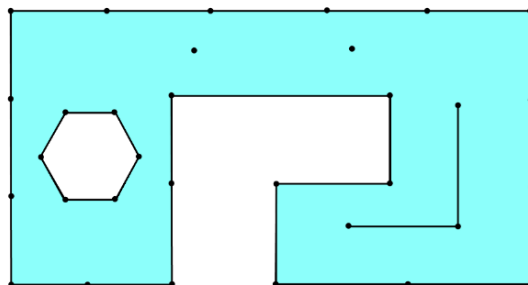


## 3.5. Pregled metoda za četvorougao nu segmentaciju ravnog poligona

U ovom poglavlju je dat pregled metoda koje se koriste za nestrukturiranu četvorougao nu segmentaciju ravnog poligona.

Fokus će biti na metodama baziranim na dekompoziciji poligona, jer ove metode prirodno kreiraju anizotropnu mrežu, uz minimizaciju broja elemenata i visok Q-faktor četvorouglova [38].

Sam poligon može imati proizvoljan broj unutrašnjih otvorenih i zatvorenih petlji, kao i nultih petlji, tj. pojedinačnih, izolovanih čvorova, kao što je ilustrovano na slici 25. Lako se pokazuje [93] da se čista četvorougao na mreža poligona može dobiti jedino ukoliko je ukupan broj stranica na njegovim zatvorenim petljama paran broj. U slučaju da je ovaj broj neparan, a makar jedna od stranica koja pripada jednoj od zatvorenih petlji predstavlja graničnu ivicu strukture, podelom ove stranice, dodavanjem jednog čvora, postiže se zahtevana parnost. Ukoliko ni jedna od ovih stranica ne predstavlja graničnu ivicu strukture, problem je složeniji, a detaljno razmatranje rešenja ovog problema dato je u glavi 8.



Slika 25. Poligon sa po jednom unutrašnjom otvorenom i zatvorenom, i dve nulte petlje.

Metode za četvorougao nu segmentaciju ravnog poligona se generalno mogu podeliti u dve grupe [94]:

- Indirektne, koje podrazumevaju trougaonu segmentaciju, a zatim konverziju trougaone mreže u četvorougao nu.
- Direktne metode.

### 3.5.1. Indirektne metode

Ideja da se najpre kreira trougaona mreža poligona proizašla je iz činjenice da su metode za trougaonu segmentaciju značajno jednostavnije od metoda za četvorougao nu segmentaciju. Ove metode se takođe dele na dve grupe:

- Metode zasnovane Katmul-Klark algoritmu, tj. podeli svih trouglova na tri četvorougla [45]. Kao što je već rečeno u poglavlju 3.4.1, prednosti ovakve podele leže u jednostavnoj implementaciji algoritma i činjenici da se svaka trougaona mreža može konvertovati u čistu četvorougao nu. Očigledni nedostaci su značajno povećanje broja elemenata, te skroman Q-faktor dobijenih četvorouglova, kao i veliki broj neregularnih čvorova.
- Metode koje se zasnivaju na kreiranju četvorougao nih elemenata spajanjem dva susedna trougla. Jasno je da ove metode daju značajno manji broj četvorouglova u finalnoj mreži, ali kvalitet četvorouglova u velikoj meri zavisi od oblika trouglova u inicijalnoj mreži, kao i od načina njihovog spajanja. Takođe, u zavisnosti od redosleda spajanja trouglova moguće je da finalna mreža ne bude čista, već da sadrži veliki broj trougaonih elemenata. Algoritmi za eliminaciju zaostalih trouglova opisani u poglavlju 3.4.1 primenjivi su i za slučaj segmentacije poligona. Ovde ćemo pomenuti još jedan pristup, koji je zasnovan na

algoritmu propagirajućih frontova [95]. Inicijalni skup frontova predstavljaju stranice petlji koje definišu poligon. Spajanje susednih trouglova u četvorouglove vrši se duž frontova, a sami frontovi se pomeraju prema unutrašnjosti poligona i u svakoj iteraciji front predstavlja granicu između oblasti sa čistom trougaonom i oblasti sa čistom četvorougonaom mrežom. Nakon dovoljnog broja iteracija oblast sa trougaonom mrežom nestaje, te se dobija čista četvorougona mreža.

### 3.5.2. Direktne metode

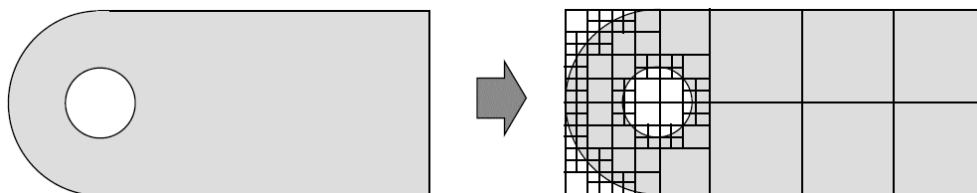
Ove metode podrazumevaju direktno kreiranje četvorougona mreže, bez trougaone segmentacije kao međukoraka. Direktne metode se dele na tri grupe, koje su opisane u naredna tri poglavlja.

#### **Quadtree algoritam**

*Quadtree* algoritam predstavlja jedan od najstarijih algoritama za automatsku segmentaciju 3D [96] i 2D [97] geometrije.

Poligon čija se segmentacija vrši smešta se u kvadrat koji ga potpuno okružuje. Ovaj kvadrat predstavlja koren stabla koje se generiše u narednim iteracijama. Kvadrati koji sadrže neki geometrijski entitet rekurzivno se dele, dok se ne postigne zadata rezolucija, kao što je ilustrovano na slici 26. Radi ograničavanja brzine rasta elemenata uvodi se ograničenje u razlici nivoa podele susednih kvadrata. Obično se ne dozvoljava razlika veća od jednog nivoa u odnosu na susede po ivici [97] ili po ivici i čvoru [98].

Kada se inicijalna podela završi razlikuju se dve grupe poligona: unutrašnji poligoni koji imaju pravilan kvadratni oblik, i granični poligoni čiji je oblik diktiran oblikom stranica poligona koji se deli. Unutrašnji poligoni se dele primenom jednostavnih obrazaca, dok je podela spoljašnjih poligona nešto složenija [97].



Slika 26. *Quadtree* dekompozicija modela.

Za razliku od algoritama koji su opisani u naredna dva poglavlja, ovaj algoritam ne polazi od stranica poligona, pa direktno i ne daje mrežu koja se potpuno slaže sa stranicama. Još jedan značajan problem ove metode jeste određivanje pravilne orijentacije kvadrata koji okružuje poligon, tj. grida koji se u rekurzivnoj podeli formira, a od koje presudno zavisi kvalitet dobijene mreže. Zbog svega navedenog, ovaj algoritam se danas veoma retko koristi u kodovima za automatsku segmentaciju [94].

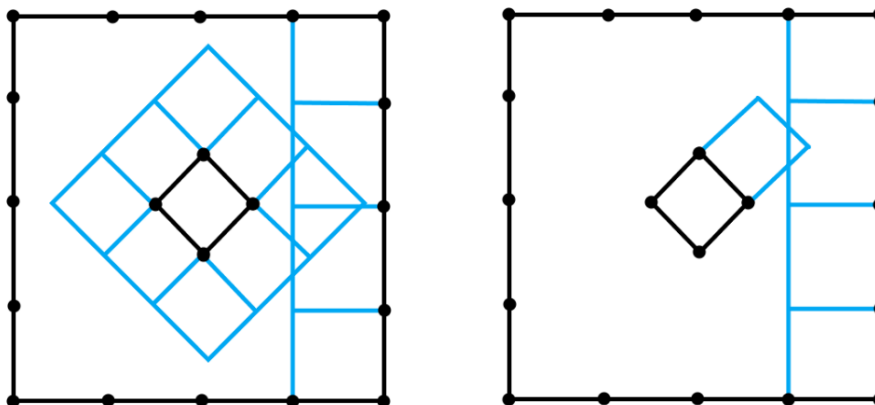
#### **Paving algoritam**

*Paving* algoritam je prvi put predložen u [99]. Osnovna ideja je da se četvorougona elementi ubacuju iterativno duž celog fronta, koji se inicijalno sastoji od stranica poligona. U svakoj iteraciji se elementi dodaju duž celog fronta. Novi front na početku svake sledeće iteracije određen je slobodnim ivicama elemenata dodatih u prethodnoj iteraciji. (Pod pojmom slobodne ivice podrazumeva se ivica koja pripada samo jednom elementu.) S obzirom da algoritam polazi od stranica poligona, ne postoji problem sa poravnanjem grida kakav je postojao kod *quadtree* algoritma. Takođe, postoji potpuna kontrola oblika elemenata, što omogućava kreiranje veoma kvalitetne četvorougona mreže.

Problem predstavlja robusnost algoritma u radu sa kompleksnim poligonima, gde algoritam lako ulazi u beskonačnu petlju u situacijama kada dolazi do presecanja i/ili preklapanja frontova [100]. Ovaj



problem je rešen modifikacijom algoritma, koja podrazumeva da se u jednoj iteraciji umesto dodavanja elemenata duž celog fronta dodaje samo jedan element. Nakon dodavanja ovog elementa vrši se provera postojanja preseka (slika 27), kao i određivanje njegovog rastojanja od drugih elemenata, te se na osnovu toga sam element: ili ostaje nepromenjen ili se dodatno modifikuje tako da se spoji sa nekim od postojećih elemenata, ili se pak briše, a novi element se dodaje na mestu koje je procenjeno kao povoljnije. Ovom modifikacijom je robusnost algoritma značajno povećana [100].



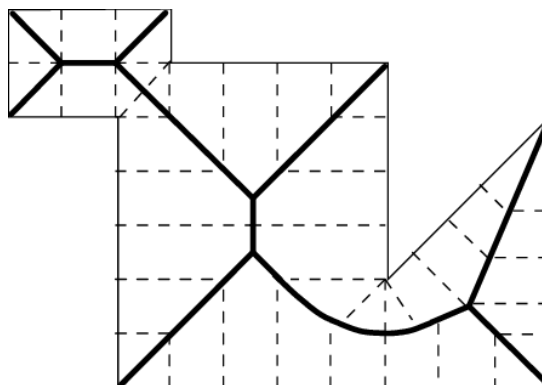
Slika 27. Provera preseka na nivou celog fronta (levo) i na nivou jednog elementa (desno).

### Algoritmi zasnovani na dekompoziciji poligona

Ovi algoritmi se zasnivaju na podeli originalnog poligona na poligone jednostavne topologije, čija se segmentacija zatim vrši primenom jednostavnih algoritma i/ili predefinisanih obrasca. Naravno, kako se ne bi narušio uslov za parnost broja stranica, u toku procesa podele osnovnog poligona sve vreme se mora održavati parnost broja stranica novonastalih poligona.

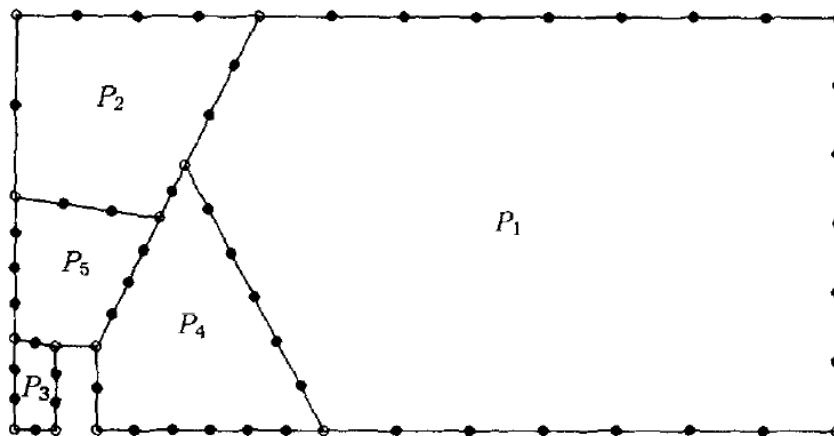
Neki autori svrstavaju i *quadtree* algoritam u ovu grupu algoritama [94]. On je ovde ipak izdvojen u posebnu grupu, jer za razliku od algoritama opisanih u ovom poglavlju, ne polazi od čvorova i stranica poligona, već je baziran na kreiranju grida nad poligonom [101].

Jedan od najranijih algoritama za dekompoziciju kompleksnog poligona zasnovan je na ekstrakciji oblika poligona računanjem njegovih medijalnih osa [102]. Medijalne ose poligona predstavljaju skup tačaka koje imaju više od jedne najbliže tačke na stranicama poligona, kao što je ilustrovano na slici 28. Jednom kada su medijalne ose izračunate, originalni poligon se deli na konveksne poligone, u skladu sa oblikom i međusobnim položajem medijalnih osa u pojedinim delovima poligona [103], [104]. Segmentacija ovako dobijenih konveksnih poligona se zatim vrši primenom predefinisanih obrazaca. Glavni nedostatak ovog algoritma jeste numerička složenost, jer je i samo određivanje medijalnih osa kompleksnih poligona veoma složen problem [105], [106].



Slika 28. Medijalne ose poligona (boldovane linije).

Algoritam predložen u [107] podrazumeva podelu originalnog poligona na konveksne poligone, u skladu sa unapred zadatom dužinom segmenata po stranicama poligona (slika 29). Podela se vrši tako da dimenzije segmenata budu približno jednake unutar svakog novonastalog poligona, a da se ne razlikuju više od dva puta između susednih poligona. Svaki od ovako kreiranih konveksnih poligona se dalje nezavisno deli primenom algoritama koji se zasnivaju na algoritmima ranije predloženim za trougaonu segmentaciju [108]. Glavni nedostaci ovog algoritma jesu činjenice da se prirodno ne dobija anizotropna mreža, te da se nakon inicijalne podele ne dobijaju elementi visokog Q-faktora, pa se veoma kvalitetna mreža dobija tek nakon rafinacije inicijalne podele (više o metodama za rafinaciju dato je u sledećem poglavlju). Razlog za ovakvo ponašanje algoritma leži u izboru linija kojima se originalni poligon deli na konveksne poligone. Naime, ne forsira se uslov da uglovi konveksnih poligona budu pravi, te uglovi različiti od  $90^\circ$  dalje propagiraju kroz mrežu.



Slika 29. Dekompozicija poligona na 5 konveksnih poligona,  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $P_4$  i  $P_5$ . [107]

Kako bi se rešio problem sa neoptimalnim uglovima, razvijen je veći broj algoritama [17], [18], [109], [110], koji među linijama koje su kandidati za liniju podele poligona prednost daju onim linijama koje sa stranicama poligona zaklapaju uglove bliske pravom uglu. Tako se u [17] uvodi težinski koeficijent za svaku razmatranu liniju podele. Koeficijent se računa kao proizvod ugaonog i dužinskog koeficijenta:

$$\delta = \delta_U \delta_D. \quad (49)$$

Ugaoni koeficijent se računa kao:

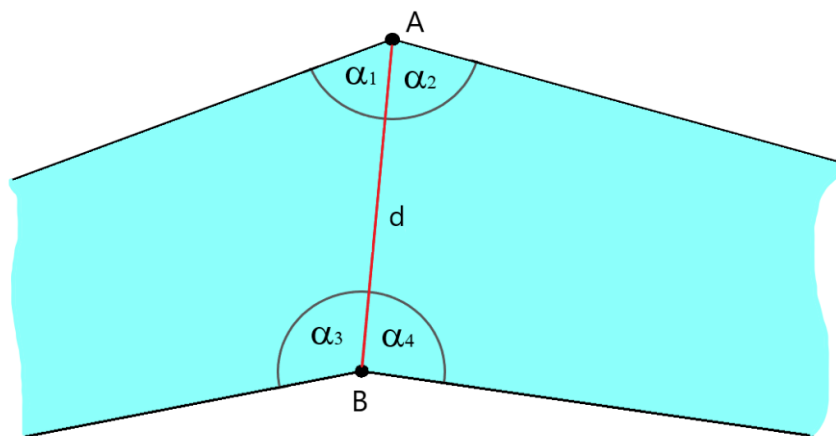
$$\delta_U = \frac{\sum_{i=1}^4 \left( \alpha_i - \frac{\pi}{2} \right)^2}{5\pi^2} \quad (50)$$

dok se dužinski računa kao:

$$\delta_D = \frac{|d|}{d_{MAX}} \quad (51)$$

gde su  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  i  $\alpha_4$  uglovi koje linija podele,  $d$ , zaklapa sa stranicama poligona, kao što je ilustrovano na slici 30, dok je  $d_{MAX}$  maksimalno rastojanje između dva čvora poligona. Podela se najpre vrši po liniji koja ima najmanju vrednost težinskog koeficijenta.

U [109] pored uglova i dužine linije, u izrazu za težinski koeficijent linije figuriše i odstupanje dužine segmenata na podeli linije od preferirane dimenzije segmenta. Forsiraju se linije sa malim odstupanjem dužine segmenata od željene dužine. U [18] i [110] predložen je dodatni parametar kod izbora linije podele, a to je odnos površina poligona na koje data linija deli originalni poligon. Prednost se daje linijama koje kreiraju poligone približno jednakih površina.

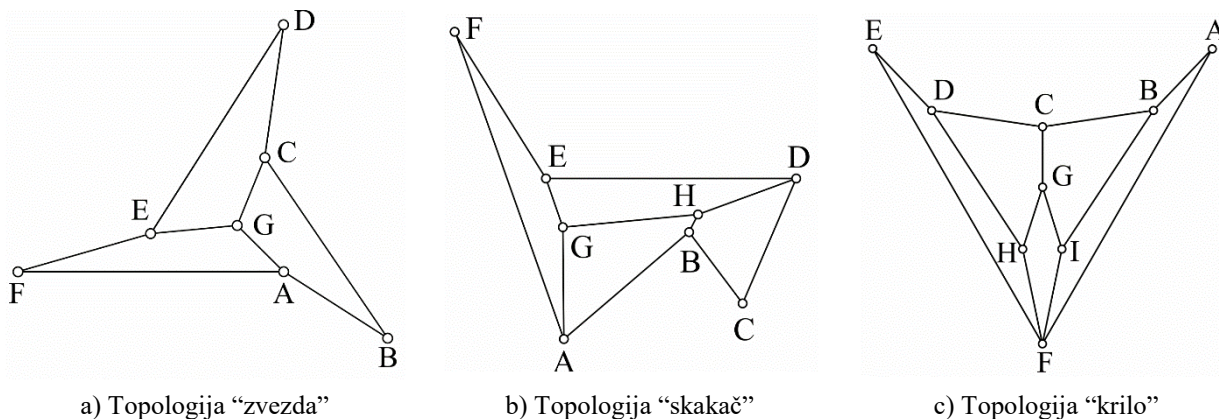


Slika 30. Linija podele poligona između čvorova A i B.

Važno je takođe napomenuti da se u svim navedenim radovima, složeni poligoni najpre dele na poligone sa jednom spoljašnjom petljom, pa se nakon toga vrši dalja podela ovih poligona. Podela poligona se vrši do nivoa tzv. jediničnih poligona, čija se segmentacija vrši primenom obrazaca. Osim četvorougla u jedinične poligone spadaju i šestougao [17], [18], [109], odnosno osmougao [110]. U [18] se podela poligona do nivoa jediničnih ne vrši sve vreme opisanom dekompozicijom poligona, već se dekompozicija kombinuje sa *paving* tehnikom. Naime, dekompozicija posmatranog poligona se zaustavlja kada njegov oblik postane relativno pravilan, tj. ima mali odnos obima i površine, i predstavlja topološki trougao ili topološki četvorougao. Ovo znači da su svi uglovi među stranicama posmatranog poligona kreću u opsegu između  $\pi - \epsilon$  i  $\pi + \epsilon$ , osim za tri ili četiri čvora u kojima su unutrašnji uglovi poligona manji od  $\frac{\pi}{2} + \epsilon$ . Segmentacija ovakvih poligona se dalje vrši primenom *paving* algoritma, sve do nivoa šestougla, kada se primenjuju obrasci za četvorougao segmentaciju. Zbog topološke jednostavnosti poligona na kojima se primenjuje, *paving* algoritam ovde nema problem sa robusnošću o kom je bilo reči ranije.

Oblik jediničnih poligona je u [18], [109], [110] ograničen na konveksne šestouglove, odnosno osmouglove [110], a kada su u pitanju konkavni dozvoljava se da samo jedan unutrašnji ugao bude veći od  $180^\circ$ . Obrasci podele ovakvih šestouglova i osmouglova dati su u [110].

Opisano ograničenje za oblik jediničnih šestouglova ne postoji u [17]. Prvi pokušaj generalizacije segmentacije proizvoljnog šestougla na konveksne četvorouglove dat je u [111]. Tu je pokazano da se svaki šestougao može podeliti na  $m$  konveksnih četvorouglova (gde je  $m = 2, 3, 4, 5$ ), ubacivanjem  $m - 2$  čvora, uz korišćenje jedinstvene procedure za svako  $m$ . Generalizacija algoritma data je u [17] i [38], a primeri podele nekih topologija konkavnih šestouglova dati su na slici 31.



Slika 31. Segmentacija nekonveksnog šestougla na konveksne četvorouglove. [38]

### 3.6. Metode za obradu četvorougone mreže

Jednom kada je segmentacija završena ili u toku procesa segmentacije, kvalitet četvorougone mreže u smislu kvaliteta pojedinih elemenata, broja elemenata, kvaliteta aproksimacije geometrije i regularnosti mreže može biti popravljen primenom različitih operacija. Sa stanovišta segmentacije optimizovane za efikasnu elektromagnetsku analizu, od interesa su pre svega operacije koje dovode do poboljšanja faktora kvaliteta elemenata i smanjenja broja elemenata.

Sve operacije koje se primenjuju kako bi se popravio faktor kvaliteta elemenata mogu se podeliti u dve velike grupe:

- Operacije koje ne menjaju povezanost mreže.
- Operacije koje menjaju povezanost mreže.

Najčešće korišćena metoda iz prve grupe jeste Laplasova relaksacija [112], gde se razmatrani čvor pomera u tačku koja je dobijena kao aritmetička sredina pozicija čvorova sa kojima dati čvor deli ivice. Ovaj postupak se ponavlja iterativno nad svim čvorovima mreže, sve dok rastojanje između trenutnih pozicija čvorova i novih pozicija, određenih opisanim postupkom, ne postane manje od predefinisano praga. Ova metoda je jednostavna za implementaciju, i pokazuje veoma dobre rezultate u zonama u kojima su elementi mreže konveksni. Međutim, njena primena u okolini nekonveksnih elemenata ne samo da ne popravlja, već može i pokvariti kvalitet elemenata [112]. Iz tog razloga je razvijen veći broj modifikacija metode, od kojih ćemo ovde navesti samo neke od njih. U [113] se kod računanja pomeraja čvora predlaže uvođenje težinskih koeficijenta koji zavise od dužine ivica kao i oblika i dimenzija elemenata kojima dati čvor pripada. Neki autori primenjuju opisani postupak za čvorove koji pripadaju konveksnim elementima, a predlažu poseban tretman čvorova u nekonveksnim zonama [114].

U metodama koje se baziraju na optimizaciji pozicija čvorova umesto heurističkog pristupa koji se koristi u Laplasovoj relaksaciji pozicija čvora se dobija optimizacijom tako da se maksimizuje faktor kvaliteta elemenata koji sadrže dati čvor [115], [116]. Iako se pokazuje da ova metoda daje bolje rezultate od Laplasove metode, posebno u zonama oko konkavnih elemenata, problem predstavlja vreme izvršavanja, posebno u modelima koji se sastoje od velikog broja elemenata. Iz tog razloga se ona obično koristi u kombinaciji sa Laplasovom relaksacijom [117], [118], gde se Laplasova relaksacija koristi u konveksnim oblastima, dok se optimizacija primenjuje samo u okolini nekonveksnih elemenata.

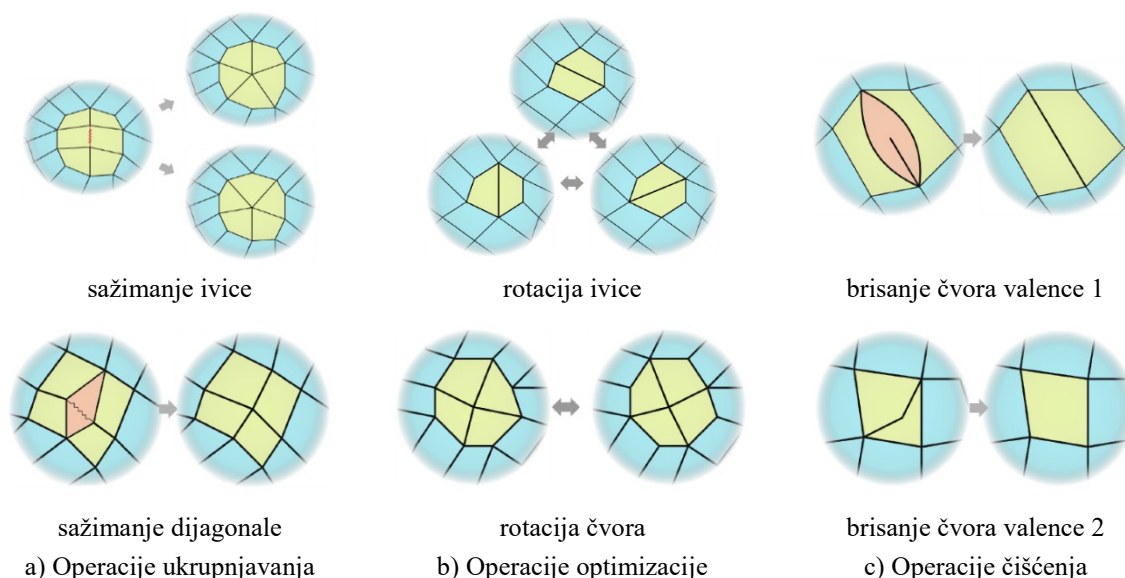
Kada su u pitanju metode koje menjaju povezanost mreže, pozabavićemo se najpre njihovom primenom u cilju poboljšanja faktora kvaliteta pojedinih elemenata. U [10] su predložene lokalne operacije koje se primenjuju na nivou manifoldne ivice ili čvora čije su sve ivice manifoldne. Operacije optimizacije oblika elementa nazvane rotacijom ivice, odnosno rotacijom čvora prikazane su na slici 32. Očigledno je da ove operacije ne menjaju broj elemenata u mreži, pa svaku od operacija možemo primeniti uvek kada njena primena doprinosi poboljšanju faktora kvaliteta elemenata.

Lokalna operacija opisana u [38] podrazumeva spajanje susednih četvorouglova u šestougao, brisanjem zajedničke manifoldne ivice. Dobijeni šestougao se zatim segmentira na konveksne četvorouglove primenom predefinisanih obrazaca. Kao što je rečeno u prethodnom poglavlju, šestougao se deli na  $m$  četvorouglova (gde je  $m = 2,3,4,5$ ), ubacivanjem  $m - 2$  čvora u unutrašnjost šestougla. S obzirom da se dobijeni šestougao segmentira na optimalan način, povećanje faktora kvaliteta je veće nego u [10], ali se ukupan broj elemenata može povećati. Kako bi se sprečilo da broj elemenata značajno poraste uz malo povećanje faktora kvaliteta, podela se vrši jedino ukoliko su zadovoljeni sledeći uslovi:

$$Q_{MIN}^{(novo)} > 0 \text{ i } Q_{MIN}^{(novo)} > C^{m-2} Q_{MIN}^{(staro)} \quad (52)$$

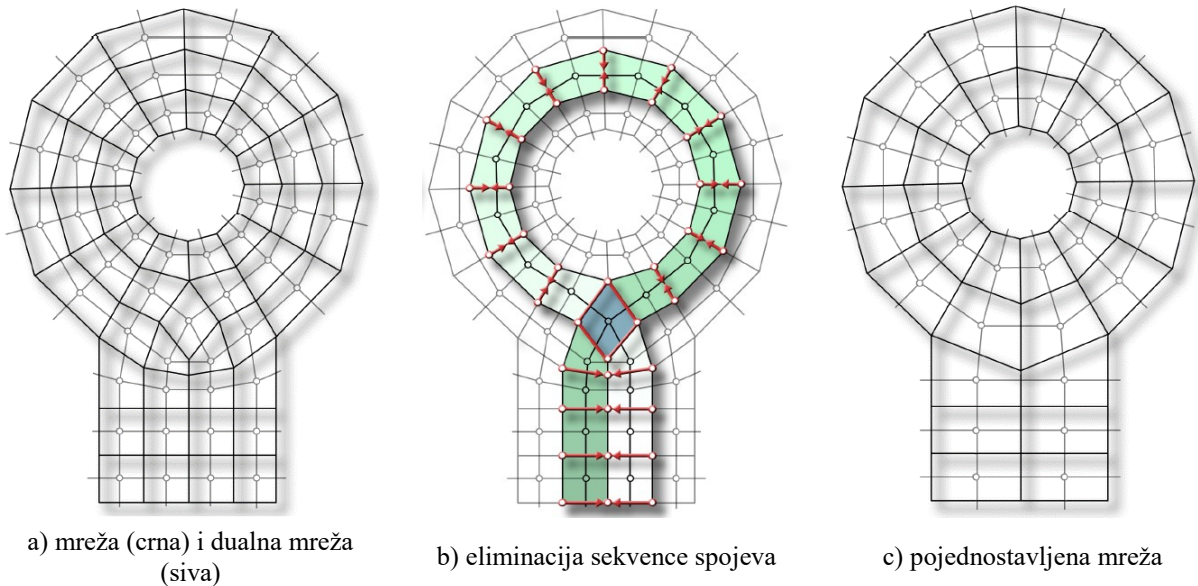
gde je  $Q_{MIN}^{(staro)}$  minimalni faktor kvaliteta četvorouglova spojenih u šestougao,  $Q_{MIN}^{(novo)}$  minimalni faktor kvaliteta novonastalih četvorouglova, dok je  $C$  konstanta čija vrednost treba da bude veća od 1 (u [38] se preporučuje vrednost 1.2). Osim uslova definisanog ovom jednačinom, uvodi se i dodatni uslov koji proizilazi iz činjenice da poboljšanje faktora kvaliteta iznad neke vrednosti, označimo je sa  $Q_0$  ( $Q_0 > 0$ ), ne doprinosi značajnom poboljšanju tačnosti elektromagnetske analize [39]. Ovaj uslov predviđa da u posmatrani proces spajanja u šestougao i dalje podele šestougla, ulaze samo oni četvorouglovi čiji je faktor kvaliteta manji od  $Q_0$ . Opisani postupak primenjuje se iterativno dok god u mreži postoje elementi nad kojima primena postupka ima smisla u skladu sa definisanim kriterijumima.

Metode koje smanjuju broj elemenata možemo podeliti na lokalne i globalne. Lokalne metode se zasnivaju na primeni predefinisanih operacija nad grupom susednih elemenata. Pokazuje se da se primenom skupa lokalnih operacija predloženih u [10] (slika 32), može postići značajno smanjenje broja elemenata, uz istovremeno povećanje faktora kvaliteta. Operacije prikazane na slici 32 označene su kao elementarne operacije, jer se ni jedna od njih se ne može dobiti kombinovanjem ostalih. Pokazuje se da je redosled primene operacija veoma važan, pa se najpre primenjuju operacije ukрупnjavanja, zatim operacije optimizacije oblika, i na kraju operacije čišćenja nekorektnih elemenata. Navedene operacije se primenjuju iterativno nad svim entitetima u mreži, sve dok se ne postignu zadati uslovi ili dok se ne pokaže da njihova dalja primena ne doprinosi značajno poboljšanju kvaliteta mreže.



Slika 32. Lokalne operacije za popravljjanje kvaliteta mreže. [10]

Globalne metode imaju uticaj na mnogo veće zone mreže ili čak na celu mrežu. Najčešće korišćena globalna metoda jeste sažimanje sekvenci ivica [66], [119]. Moramo najpre definisati pojam dualne mreže, kroz definiciju entiteta dulanog svakom od osnovnih entiteta mreže. Elementu mreže je dualan njegov centroid. Ivici je dualna duž koja spaja centroide elemenata kojima data ivica pripada, a koju ćemo nazvati spojem. Konačno, čvoru je dualan poligon definisan centroidima elemenata kojima dati čvor pripada. Ukрупnjavanje mreže sastoji se od pronalaženja neprekidnih sekvenci spojeva koje su zatvorene ili čija oba kraja izlaze na granične ivice. Za svaku sekvencu spojeva koja zadovoljava jedan od ovih uslova može se izvršiti sažimanje svake ivice koju ona seče u tačku, a da se pri tome ne ugrozi povezanost mreže (slika 33).



Slika 33. Smanjenje broja elemenata sažimanjem sekvence spojeva. [66]

Glavni nedostatak ove metode predstavlja činjenica da sekvence spojeva mogu biti veoma duge, obuhvatajući ponekad celu mrežu. Sažimanje dugih sekvenci može dovesti do kreiranja mreže koja reprezentuje originalnu geometriju sa velikom greškom, kao i do nastanka elemenata veoma niskog faktora kvaliteta. Iz tog razloga se pre sažimanja sekvenci uvode lokalne operacije koje skraćuju dužinu sekvenci. Primera radi, u [66] se predlažu sledeće lokalne operacije:

- Sažimanje dijagonale, na elementima gde se četiri spoja stiču u centroidu, i
- Brisanje čvora valence 2, ukoliko sekvencija spojeva seče obe ivice koje dele dati čvor.

## 4. Kratak opis metode

Kako je u uvodnoj glavi već rečeno, cilj rada na razvoju nove metode za četvorougao nu segmentaciju jeste razvoj metode koja će za zadatu CAD geometriju kreirati čistu i usaglašenu četvorougao nu mrežu. Dodatno, radi povećanja tačnosti analize i smanjenja broja nepoznatih koeficijenata, broj elemenata mreže se mora minimizirati uz visoke vrednosti faktora kvaliteta pojedinih elemenata mreže.

U ovoj glavi je dat kratak opis predložene metode, koji čitaocu treba da da grubu sliku o osnovnim idejama na kojima se metoda zasniva i omogući bolje razumevanje detaljnog opisa pojedinih faza segmentacije, koji će biti dati u sledećim glavama ovog rada. Pre nego što pređemo na opis same metode u poglavlju 4.1 ćemo se osvrnuti na format zapisa geometrije, kao i parametre koje mreža mora da zadovolji kada su u pitanju tačnost modelovanja geometrije i kompatibilnost sa metodom korišćenom za elektromagnetsku analizu.

### 4.1. Ulazni parametri

Geometrija čija se segmentacija vrši zadata je kao CAD geometrija, dok kao izlaz metoda treba da da četvorougao nu mrežu pogodnu za efikasnu elektromagnetsku analizu.

U svim modelima prikazanim u ovom radu, za opis CAD geometrije i sve geometrijske i topološke manipulacije nad njom koristimo Parasolid tehnologiju [120]. Kao što će iz opisa metode biti očigledno, sama metoda nije ograničena na Parasolid tehnologiju, ali je Parasolid tehnologija izabrana kao jedna od najšire korišćenih tehnologija u oblasti CAD modelovanja. Svi modeli prikazani u radu su modeli iz WIPL-D Pro CAD softverskog paketa [26].

Najvažniji parametri mreže koje zadaje korisnik su sledeći:

- Dimenzija elementa. Ovaj parametar se zadaje kao maksimalna dozvoljena dimenzija, tj. dužina stranice, elementa mreže. Kako je minimizacija ukupnog broja elemenata u mreži jedan od zahteva, maksimalna dozvoljena dimenzija elementa predstavlja i poželjnu dimenziju u svim delovima mreže gde ova dimenzija nije ograničena nekim drugim parametrom (kao što je mali radijus krivine ili postojanje sitnih površina u modelu). Kada govorimo o elektromagnetskoj analizi (ili ma kojoj drugoj numeričkoj analizi) maksimalna dimenzija elementa je ograničena tehnologijom koja se koristi. Kao što je rečeno u poglavlju 2.6, maksimalna dimenzija elementa u WIPL-D numeričkom kernelu iznosi  $2\lambda$  kada se koriste modifikovane funkcije bazisa do reda 7 [34], [40]. Iz tog razloga je podrazumevana vrednost za ovu dimenziju jednaka  $2\lambda$ .
- Površinska i ivična ugaona tolerancija. Ova dva parametra su međusobno veoma slična i oba se zadaju kako bi se zadala tačnost sa kojom četvorougao nu mreža modeluje CAD geometriju. Površinska ugaona tolerancija definiše maksimalni dozvoljeni ugao između normala na elemente mreže koji dele zajedničku ivicu, a koji su nastali podelom iste površine CAD modela. Ivična ugaona tolerancija definiše maksimalnu ukupnu promenu ugla tangente duž krive koja odgovara jednom segmentu u poligonskoj aproksimaciji ivice CAD geometrije. Kao što je to slučaj sa dimenzijom elementa, i za ova dva parametra maksimalno dozvoljena vrednost predstavlja i poželjnu vrednost parametra.
- Tolerancija za ukрупnjavanje. U CAD modelima, a naročito onim importovanim koji nisu inicijalno kreirani za potrebe EM analize, već za neke druge namene kao što je mašinska izrada složenih sklopova i njihovih delova, obično postoji veliki broj detalja koji nisu od interesa sa stanovišta EM analize. Kako se ne bi dobila mreža sa jako velikim brojem elemenata koji nemaju uticaj na elektromagnetske parametre od interesa, uvodi se tolerancija



za ukрупnjavanje. Ova se tolerancija definiše u odnosu na maksimalnu dimenziju modela. Ukoliko su dimenzije elemenata u nekom delu mreže, koje su diktirane oblikom geometrije i ugaonim tolerancijama, manje od tolerancije za ukрупnjavanje, onda se dozvoljava segmentacija sa nešto grubljim ugaonim tolerancijama.

- Faktor relaksacije parametara podele. Prethodno navedeni parametri podele u potpunosti određuju maksimalnu dimenziju elemenata mreže i tačnost modelovanja geometrije. Međutim, postoje situacije u kojima je potrebno blago odstupiti od zadatih parametara zarad povećanja kvaliteta mreže, kako u smislu smanjenja broja elemenata, tako u smislu povećanja faktora kvaliteta pojedinih elemenata. Faktor relaksacije parametara podele definiše ovo odstupanje, i zadaje se u procentima u odnosu na zadate dužinske i ugaone parametre.
- Minimalna dimenzija površine. Ovaj parametar se definiše u odnosu na najveću dimenziju površine, koja se može definisati kao dužina dijagonale kvadra opisanog oko površine ili na neki dugi način. Cilj definisanja ovog parametra jeste da se ograniči minimalno rastojanje između dva čvora koja ne pripadaju istoj ivici ili minimalno rastojanje između čvora i ivice. Pokazuje se da postojanje suviše bliskih entiteta uzrokuje pojavu elemenata veoma niskog faktora kvaliteta, te se stoga uvode dodatne podele površina u cilju zadovoljenja ovog parametra, odnosno u cilju podizanja faktora kvaliteta elemenata mreže.

Po definiciji se ovi parametri zadaju globalno i važe za celu geometriju. Međutim, često je neophodno izvršiti nešto finiju podelu u pojedinim delovima modela, na primer u okolini napajanja. Iz tog razloga je dimenziju elementa, površinsku i ivičnu ugaonu toleranciju moguće zadati i lokalno na ma kojoj površini, a dimenziju elementa i ivičnu ugaonu toleranciju je moguće zadati i na ivicama modela. Kako ne bi došlo do neželjenog smanjenja tačnosti modelovanja na delovima modela koji su veoma značajni za elektromagnetsku analizu, na izabranim površinama i ivicama je moguće isključiti primenu tolerancije za ukрупnjavanje.

## 4.2. Kratak opis metode

Metoda za četvorougaonu segmentaciju opisana u ovom radu može se svrstati u grupu metoda zasnovanih na podeli geometrije na makro-elemente. Metoda predviđa da se mreža kreira za svaku površinu zasebno, a jedini zahtev koji postoji na granici dveju površina jeste povezanost mreže. Činjenica da se u procesu kreiranja četvorougaone mreže ne kreira trougaona mreža kao međukorak svrstava metodu u grupu direktnih metoda za četvorougaonu segmentaciju.

Dijagram toka predložene metode dat je na slici 34. Na ovom mestu ćemo dati kratak opis pojedinih faza metode, a detaljan opis svake faze dat je u narednim glavama.

Podela na kvazi-planarne površine, predstavlja prvi korak u procesu segmentacije CAD geometrije. Kvazi-planarnom nazivamo površinu koja se može bijektivno preslikati na ravan, ortogonalnim projektovanjem tačaka površine. Zadovoljenje zahteva za kvazi-planarnost je potrebno kako bi površine mogle da uđu u naredne faze algoritma, ali nije dovoljno sa stanovišta dobijanja kvalitetne mreže. U tom smislu je linije podele originalnih površina potrebno izabrati tako da odgovaraju glavnim pravcima zakrivljenosti površi, te izbeći kreiranje suviše kratkih ivica. Sama referentna ravan se određuje posebno za svaku površinu. U [121] je predloženo korišćenje ravni minimalnog kvadratnog odstupanja. Međutim, kako se pokazalo da je računanje ove ravni suviše vremenski zahtevno, umesto nje se koristi ma koja ravan čija normala odgovara normali na površinu u njenom parametarskom centru [122].

U sledećoj fazi algoritma kreira se poligonska aproksimacija svih ivica. Ova aproksimacija se kreira u skladu sa zadatom dimenzijom elementa i ivičnom ugaonom tolerancijom, tako da:

- dužina pojedinih pravolinijskih segmenata ne sme biti veća od zadate dimenzije elementa,



- ugao među vektorima definisanim susednim segmentima ne sme biti veći od ugaone tolerancije za posmatranu ivicu.

Važno je ovde napomenuti da se ivice koje pripadaju većem broju površina dele samo jednom i ista poligonska aproksimacija ivice se koristi u svakoj površini kojoj data ivica pripada. Na ovaj način se automatski obezbeđuje povezanost mreže.

Čvorovi ovako kreirane aproksimacije ivica se zatim projektuju na referentnu ravan posmatrane površine, gde kreiraju ravan poligon. Na ovom mestu se najpre vrši kontrola poligona u smislu njegove regularnosti i oblika. Neregularne poligone i poligone čiji je oblik takav da onemogućava kreiranje kvalitetne podele dodatno procesiramo na jedan od dva načina:

- Rafinacijom podele ivica odgovarajuće površine, ili
- Dodatnom podelom same površine.

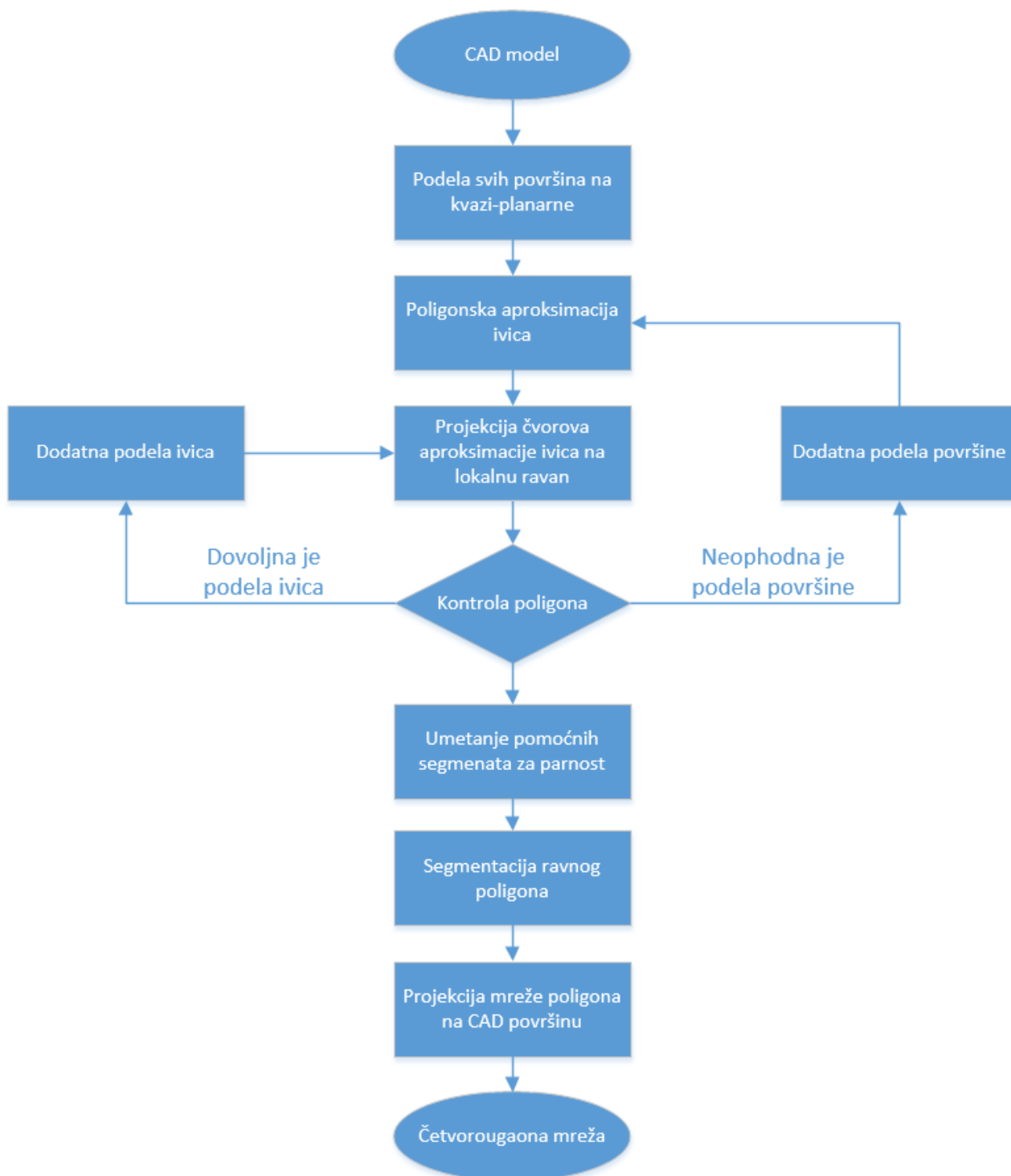
Kako bi se postupak segmentacije ubrzao, na ovom mestu se vrši i dodatna podela kvazi-planarnih površina koje su preslikane u poligone sa suviše velikim brojem stranica.

Kao što je ranije rečeno broj segmenata na zatvorenim petljama poligona mora biti paran, da bi bilo moguće kreiranje čiste četvorougone mreže. Na drugoj strani, način na koji je kreirana poligonska aproksimacija ivica ne obezbeđuje automatski ovu parnost, te je u opštem slučaju potrebno dodati izvestan broj pomoćnih segmenata u poligonsku aproksimaciju pojedinih ivica strukture. Kako se ne bi narušila povezanost mreže, dodavanje segmenata za parnost se ne može vršiti na jednoj površini nezavisno od njoj susednih površina.

Kada su kreirani poligoni sa parnim brojem segmenata na zatvorenim petljama za sve kvazi-planarne površine, može se ući u proces segmentacije ravnih poligona. U predloženoj metodi se koristi modifikacija algoritma za segmentaciju ravnih poligona predloženog u [17] i [38]. Modifikacija se odnosi na uzimanje u obzir činjenice da je ravni poligon koji se segmentira dobijen projektovanjem na ravan poligonske aproksimacije ivica, u opštem slučaju, zakrivljene površine. Iz tog razloga je svaku liniju podele koja se povlači u toku segmentacije poligona potrebno najpre projektovati na odgovarajuću CAD površinu, odrediti poligonsku aproksimaciju ovako dobijene krive, te konačno projektovati čvorove ove aproksimacije nazad na ravan poligona.

Konačno, nakon što je ravan poligon segmentiran, čvorovi njegove četvorougone mreže projektuju se na odgovarajuću površinu CAD modela. Suma ovako dobijenih mreža pojedinih kvazi-planarnih površina čini finalnu četvorougona mrežu CAD modela.

Kao što je već naglašeno, četvorougona segmentacija kompleksne CAD geometrije već sama po sebi predstavlja veoma složen problem. Kada se u vidu imaju i specifični zahtevi koji proizilaze iz potrebe za segmentacijom koja će omogućiti efikasnu EM analizu, ovaj problem se dodatno usložnjava. U metodi izloženoj u ovom radu ovaj složeni problem je podeljen na više faza od kojih svaka predstavlja relativno jednostavan pod-problem. Pojedine faze su međusobno gotovo nezavisne, što predstavlja dodatni kvalitet metode, jer se svaka faza može unapređivati i optimizovati nezavisno od ostatka algoritma.



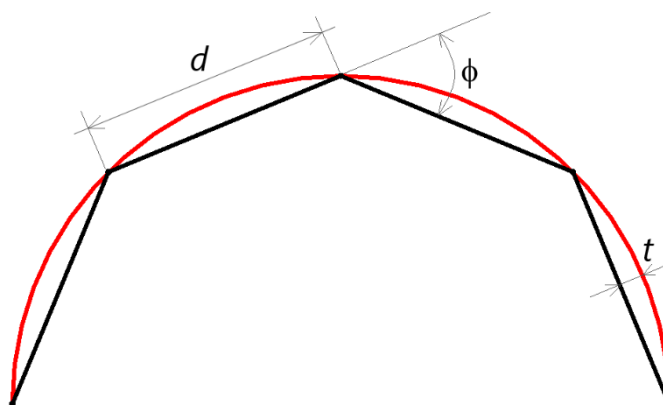
Slika 34. Dijagram toka metode za četvorougaonu segmentaciju.

## 5. Poligonska aproksimacija krive

U prethodnoj glavi je pomenuto da jednu od faza metode za četvorougao segmentaciju predstavlja kreiranje poligonske aproksimacije svih ivica geometrije. Kreiranje poligonske aproksimacije proizvoljne krive linije predstavlja, međutim, mnogo značajniji problem nego što se iz dijagrama toka predložene metode da naslutiti. Naime, osim u pomenutoj fazi algoritma kreiranje ove aproksimacije veoma je značajno i u procesu podele površina na kvazi-planarne, kao i u procesu segmentacije ravnog poligona gde se u obzir uzima i oblik površine čija je ovaj poligon slika.

Na slici 35 prikazan je jednostavan primer poligonske aproksimacije krive linije. Kriva linija je prikazana u crvenoj boji, i sastoji se od jednog polukružnog segmenta. Izlomljena prava linija, koja predstavlja njenu poligonsku aproksimaciju prikazana je u crnoj boji. Na slici su označeni i najvažniji parametri ove aproksimacije:

- $d$  – maksimalna dužina pravolinijskog segmenta u poligonskoj aproksimaciji;
- $\phi$  – ugaona tolerancija, koja definiše maksimalnu ukupnu promenu ugla tangente na delu krive koji odgovara jednom segmentu u poligonskoj aproksimaciji krive. U daljem tekstu ćemo ovaj parametar nazivati ukupnom zakrivljenošću posmatranog dela krive. U jednostavnom primeru uniformno zakrivljene krive prikazane na slici 35, ova tolerancija odgovara spoljašnjem uglu između susednih segmenata u poligonskoj aproksimaciji krive.
- $t$  – tolerancija tetive, koja predstavlja maksimalno dozvoljeno normalno rastojanje između segmenta u poligonskoj aproksimaciji krive i njemu odgovarajućeg dela krive.



Slika 35. Poligonska aproksimacija polukružne krive linije.

Iz prethodno rečenog je jasno da je maksimalna dužina pravolinijskog segmenta određena zadatom dimenzijom elementa, dok je ugaona tolerancija definisana zadatom površinskom ili ivičnom ugaonom tolerancijom, u zavisnosti od toga da li se vrši aproksimacija ivice ili krive dobijene na nekoj od površina. Kada je reč o toleranciji tetive, ovaj se parametar ne zadaje u metodi opisanoj u ovom radu, a ovde ga navodimo radi kompletnosti izlaganja i razumevanja parametara koji su od interesa u odgovarajućoj Parasolid API funkciji.

S obzirom da se implementacija algoritma vrši u Parasolid tehnologiji, za određivanje poligonske aproksimacije krive nameće se korišćenje Parasolid API funkcije “PK\_CURVE\_output\_vectors”. Ova funkcija kao ulazne argumente prima krivu, interval u parametarskom prostoru krive za koji je potrebno izračunati poligonsku aproksimaciju, kao i tri gore navedena parametra: maksimalnu dužinu pravolinijskog segmenta, ugaonu toleranciju i toleranciju tetive. Izlaz iz funkcije su tačke koje predstavljaju čvorove poligonske aproksimacije, koji su dati odgovarajućim koordinatama u 3D prostoru, ali i odgovarajućim vrednostima parametra u parametarskom prostoru krive. Poligonska

aproksimacija data na slici 35 dobijena je korišćenjem ove funkcije, sa ugaonom tolerancijom od  $45^\circ$ , te dužinskom tolerancijom i tolerancijom tetive koje su jednake radijusu polukružnog segmenta. Jasno je da ugaona tolerancija ovde predstavlja najstrožiji uslov, te da ona diktira izgled poligonske aproksimacije.

Međutim, direktna primena funkcije “PK\_CURVE\_output\_vectors” za kreiranje poligonske aproksimacije krive nije se pokazala dobrom iz sledećih razloga:

- Funkcija garantuje da će svi zadati parametri (dužina segmenta, ugaona tolerancija i tolerancija tetive) biti zadovoljeni, ali ne postoji garancija da će ma koja od zadatih maksimalnih vrednosti biti ostvarena. Iz tog razloga ne postoji garancija ni da će broj segmenata u poligonskoj aproksimaciji krive biti minimalan.
- Funkcija počiva na algoritmu sekvencijalne pretrage, te poligonska aproksimacija stoga pokazuje zavisnost od izbora polazne tačke.

Bez obzira na navedene nedostatke, funkcija “PK\_CURVE\_output\_vectors” ima neke očigledne dobre strane koje treba iskoristiti. Najpre je to linearna složenost algoritma, što omogućava praktično trenutno izvršavanje funkcije i za veoma složene krive. Činjenica da je zadovoljenje svih zadatih parametara poligonske aproksimacije garantovano veoma je značajna u posrednoj primeni ove funkcije u algoritmu koji je opisan u ovom poglavlju. Naime, umesto direktne primene ove funkcije sa zadatim parametrima segmentacije, funkcija se najpre primenjuje sa parametrima segmentacije koji su značajno smanjeni, odnosno:

$$d'_s = \frac{d_s}{k_1}, \quad \varphi'_s = \frac{\varphi_s}{k_2} \quad (53)$$

gde su  $d_s$  i  $\varphi_s$  zadata dimenzija elementa i ugaona tolerancija, respektivno, dok su  $d'_s$  i  $\varphi'_s$  dimenzija elementa i ugaona tolerancija, respektivno, sa kojima se računa inicijalna poligonska aproksimacija krive, pozivom funkcije “PK\_CURVE\_output\_vectors”. Koeficijenti  $k_1$  i  $k_2$  su konstante čija vrednost određuje finoću inicijalne poligonske aproksimacije i čija vrednost treba da bude značajno veća od 1. U svim primerima prikazanim u ovom radu vrednost ovih konstanti je  $k_1 = k_2 = 50$ .

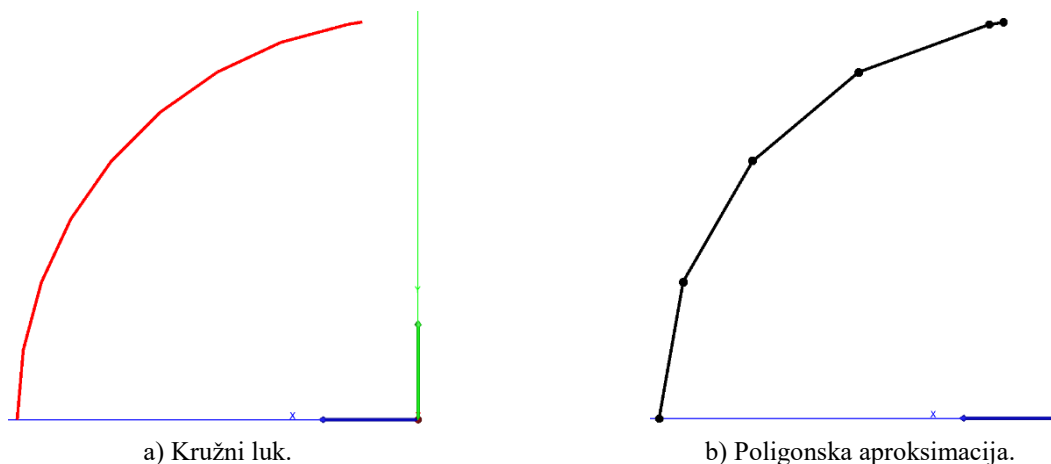
Na opisani način se dobija inicijalna fina poligonska aproksimacija, koja se sastoji od veoma velikog broja segmenata veoma male dužine i veoma male zakrivljenosti, nazovimo ove segmente *mikro-segmentima*. Označimo broj mikro-segmenata sa  $N_0$ , dužinu svakog od njih sa  $l_i, i = 1, 2 \dots N_0$ , a ukupnu zakrivljenost svakog od njih sa  $\varphi_i, i = 1, 2 \dots N_0$ . S obzirom da je poligonska aproksimacija izračunata sa veoma malom vrednošću za ugaonu toleranciju, zakrivljenost posmatranog mikro-segmenta određuje se kao apsolutna vrednost ugla između tangenti na krivu u njegovim krajnjim tačkama. (Tangente na krivu izračunavaju se pozivom Parasolid API funkcije “PK\_CURVE\_eval”.)

Poligonska aproksimacija krive koja zadovoljava zadate dužinski i ugaoni kriterijum,  $d_s$  i  $\varphi_s$ , sa minimalnim brojem segmenata kreira se primenom algoritma sekvencijalne pretrage na aproksimaciju koja se sastoji od mikro-segmenata. Polazi se od prvog čvora inicijalne aproksimacije, te se analiziraju sukcesivni čvorovi sve dok se ne pronađe čvor za koji ugaoni ili dužinski kriterijum nije zadovoljen. Kada je reč o dužinskom kriterijumu, dužina segmenta se određuje kao rastojanje između početnog i posmatranog čvora. Ukupno zakrivljenje na analiziranom delu krive računa se kao zbir zakrivljenja mikro-segmenata koji mu pripadaju. Čvor koji prethodi onom u kom ugaoni ili dužinski kriterijum nije zadovoljen uzima se kao krajnju čvor datog segmenta i od njega kreće dalja pretraga po opisanom algoritmu. Proces se završava kada se dođe do kraja krive.

Primenom opisanog postupka dobijaju se segmenti čije su dužina i ukupna zakrivljenost odgovarajućeg dela krive veoma bliski zadatim parametrima  $d_s$  i  $\varphi_s$ . (Jedino poslednji segment može imati proizvoljno malu dužinu i zakrivljenost odgovarajućeg dela krive.) Maksimalno odstupanje

dužine, odnosno zakrivljenosti, segmenta od zadatih vrednosti ne može prelaziti vrednosti  $d'_s$  i  $\varphi'_s$ , date jednačinom (53). Kako je složenost opisanog algoritma linearna ( $O(N_0)$ ), dok se određivanje zakrivljenosti segmenta svodi na sabiranje zakrivljenosti mikro-segmenata, a određivanje rastojanja između dva čvora predstavlja operaciju niske složenosti, jasno je da je ceo postupak veoma efikasan, te da se može raditi sa veoma niskom vrednostima za  $d'_s$  i  $\varphi'_s$ . Kao što je već rečeno, u ovom radu se radi sa  $d'_s = \frac{d_s}{50}$  i  $\varphi'_s = \frac{\varphi_s}{50}$ . Kako su segmenti i po dužini i po uglu veoma bliski maksimalnim zadatim vrednostima za  $d_s$  i  $\varphi_s$ , jasno je da je broj segmenata jednak minimalnom potrebnom za date parametre poligonske aproksimacije krive. Označimo ovaj broj sa  $N_{\min}$ .

Na ovaj način je rešen problem vezan za broj segmenata u poligonskoj aproksimaciji krive, ali ne i problem zavisnosti aproksimacije od izbora polazne tačke, koji je inherentni problem algoritma sekvencijalne pretrage. Kao ilustraciju ovog problema posmatrajmo krivu prikazanu na slici 36a. Radi se o kružnom luku poluprečnika 1 mm i ugla od  $82^\circ$ . Poligonska aproksimacija luka dobijena primenom opisanog postupka, za dimenziju elementa jednaku poluprečniku luka i ugaonu toleranciju od  $20^\circ$ , prikazana je na slici 36b. Poligonska aproksimacija se sastoji od 5 segmenata, što je i očekivano s obzirom da je  $\frac{82}{20} = 4.1$ , ali dok je zakrivljenost prva 4 segmenta<sup>1</sup>  $20^\circ$  poslednji segment ima zakrivljenost od  $2^\circ$  i proporcionalno manju dužinu.



Slika 36. Kružni luk ugla  $82^\circ$  i poligonska aproksimacija za ugaonu toleranciju od  $20^\circ$ .

Radi ilustracije problema koji zavisnost poligonske aproksimacije krive od izbora polazne tačke može da stvori u finalnoj mreži, posmatrajmo model prikazan na slici 37. Radi se o cilindričnoj površini visine 1 mm koja je dobijena kretanjem krive prikazane na slici 36 duž vektora normalnog na ravan u kojoj se kriva nalazi. Na slikama 37b i 37c prikazana je mreža ove površine koja se dobija kada se koristi opisani algoritam za kreiranje poligonske aproksimacije krive. Na slici 37b je prikazana mreža koja se dobija kada se zakrivljene ivice u modelu segmentiraju pošavši sa suprotnih strana. Srednja vrednost faktora kvaliteta elemenata mreže iznosi 0.702. Na slici 37c prikazana je mreža koja se dobija kada se zakrivljene ivice segmentiraju pošavši sa iste strane. Iako su svi elementi pravougaoni, faktora kvaliteta jednakog jedinici, poslednji element je značajno uži od ostalih, te iako je struktura rotaciono simetrična nemamo simetričnu mrežu.

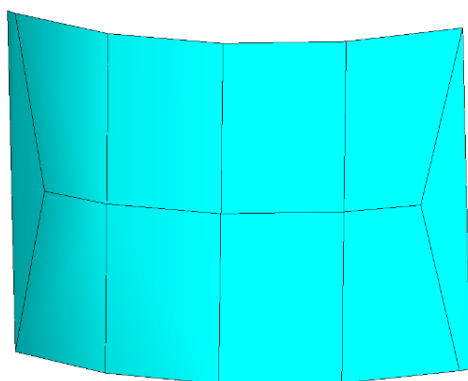
Jasno je iz svega rečenog da se primenom opisane metode može odrediti minimalni broj segmenata potreban za aproksimaciju krive sa zadatom dimenzijom elementa i ugaonom tolerancijom, ali da je dobijena podela zavisna od izbora početne tačke, te stoga neuniformna kada je u pitanju raspodela dužina i zakrivljenosti pojedinih segmenata. U narednim poglavljima opisane su metode koje

<sup>1</sup> Segmenti u poligonskoj aproksimaciji su prave linije, a pod pojmom zakrivljenosti segmenta podrazumeva se zakrivljenost dela krive koji odgovara datom segmentu.

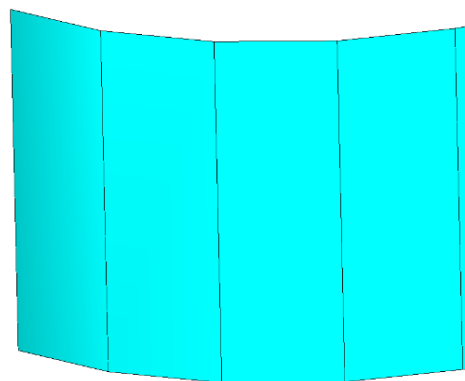
omogućavaju delimično ili potpuno rešavanje problema zavisnosti aproksimacije od izbora početne tačke i uniformnosti podele.



a) CAD model cilindrične površine.



b) Podela zakrivljenih ivica počevši sa različitim strana.



c) Podela zakrivljenih ivica počevši sa iste strane.

Slika 37. CAD model i dve mreže cilindrične površine.

## 5.1. Uniformna podela u parametarskom prostoru

Ova metoda zasniva se na uniformnoj podeli krive u parametarskom prostoru, sa brojem segmenata koji je određen metodom opisanom u prethodnom poglavlju,  $N_{\min}$ . Označimo granice parametarskog prostora krive sa  $[p_{\min}, p_{\max}]$ . Parametarski prostor krive deli se uniformno na  $N_{\min}$  segmenata, tj. dužina segmenta u parametarskom prostoru data je sa  $\frac{p_{\max} - p_{\min}}{N_{\min}}$ . Jednom kada su tačke podele u parametarskom prostoru određene na ovaj način, odgovarajući čvorovi na krivoj određuju se pozivom Parasolid funkcije “PK\_CURVE\_eval”.

Ovakva podela je uniformna u parametarskom prostoru krive, međutim ništa ne garantuje uniformnost dužina segmenata i zakrivljenosti odgovarajućih delova krive, kao ni zadovoljenost uslova vezanih za maksimalnu dužinu i zakrivljenost segmenata, te se ovo mora naknadno proveriti. Za svaki segment računa se njegova dužina, kao rastojanje između njegovih krajnjih tačaka. Ukupna zakrivljenost dela krive koji odgovara jednom segmentu računa se tako što se dati deo krive podeli na mikro-segmente pozivom funkcije “PK\_CURVE\_output\_vectors”. Maksimalna dužina ovih mikro-segmenata može biti ma kolika, na primer može biti jednaka dimenziji elementa  $d_s$ , dok je ugaonu toleranciju potrebno postaviti na neku malu vrednost, pa je ona u svim primerima prikazanim u ovom radu podešena na  $5^\circ$ . Ukupna zakrivljenost segmenta računa se zatim kao zbir apsolutnih vrednosti uglova među tangentama u krajnjim tačkama odgovarajućih mikro-segmenata.

Označimo dužine segmenata u poligonskoj aproksimaciji krive sa  $l_i, i = 1, 2 \dots N_{\min}$ , a ukupnu zakrivljenost odgovarajućih delova krive sa  $\varphi_i, i = 1, 2 \dots N_{\min}$ . Da bi poligonska aproksimacija bila prihvatljiva najpre mora biti zadovoljen sledeći osnovni uslov:

$$l_i \leq d_s, \varphi_i \leq \varphi_s, \quad i = 1, 2 \dots N_{\min} \quad (54)$$

gde su  $d_s$  i  $\varphi_s$  zadata dimenzija elementa i ugaona tolerancija, respektivno. Ukoliko je ovaj uslov zadovoljen proverava se uniformnost aproksimacije po dužini i uglu, gde treba da bude zadovoljen bar jedan od sledećih uslova:

$$l_i \geq c_1 l_{\max}, \quad i = 1, 2 \dots N_{\min} \quad (55)$$

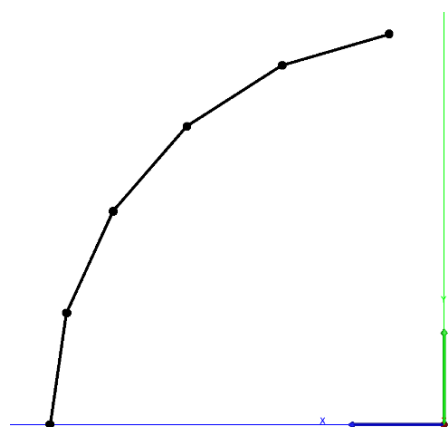
$$\varphi_i \geq c_2 \varphi_{\max}, \quad i = 1, 2 \dots N_{\min}$$

gde su  $l_{\max}$  i  $\varphi_{\max}$  dužina najdužeg i ukupna zakrivljenost najzakrivljenijeg segmenta u poligonskoj aproksimaciji krive, respektivno. Vrednost konstanti  $c_1$  i  $c_2$  određuje nivo uniformnosti poligonske aproksimacije, i u svim primerima datim u ovom radu njihova vrednost je  $c_1 = c_2 = 0.95$ .

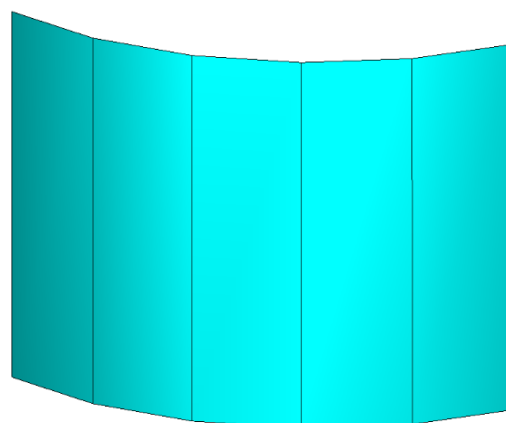
Ukoliko su svi navedeni uslovi zadovoljeni poligonska aproksimacija kreirana na ovaj način proglašava se uniformnom i usvaja se kao finalna. U slučaju da neki od navedenih uslova nije zadovoljen poligonska aproksimacija krive kreira se primenom metoda opisanih u narednim poglavljima.

Tipovi krivih koje postoje u Parasolid tehnologiji i njihove parametarske definicije dati su u Prilogu B. Očigledno je da će metoda zasnovana na uniformnoj podeli u parametarskom prostoru dati uniformnu poligonsku aproksimaciju za pravu, kružnicu i elipsu, dok se za B-krive i krive preseka to ne može znati pre nego što se izvrši provera zadovoljenosti uslova datih jednačinama (54) i (55). Pokazuje se da se primenom ove metode dobija uniformna poligonska aproksimacija za ogromnu većinu krivih u modelima sa kojima se srećemo u praksi. U modelima koji su prikazani u ovom radu ova metoda daje uniformnu aproksimaciju za ogromnu većinu krivih: najmanje 96.6% krivih (model kružne *patch* antene postavljene na trup helikoptera, opisan u poglavlju 10.4), a najviše 100% krivih (modeli opisani u poglavljima 10.1, 10.2 i 10.3).

Primenom ove metode na kružni luk sa slike 36 dobija se poligonska aproksimacija prikazana na slici 38a. Svi segmenti imaju jednaku dužinu koja iznosi  $\sim 0,285$  mm i jednaku zakrivljenost čija je vrednost  $16.4^\circ$ . Mreža cilindrične površine sa slike 37a kada se primeni ova metoda za određivanje poligonske aproksimacije krive data je na slici 38b. Svi elementi mreže su međusobno podudarni pravougaonici, čiji je faktor kvaliteta jednak jedinici.



a) Poligonska aproksimacija kružnog luka.



b) Mreža cilindrične površine.

Slika 38. Poligonska aproksimacija kružnog luka i odgovarajuća mreža cilindrične površine, kada se koristi uniformna podela krive u parametarskom prostoru.

## 5.2. Unapređenje algoritma zasnovanog na sekvencijalnoj pretrazi

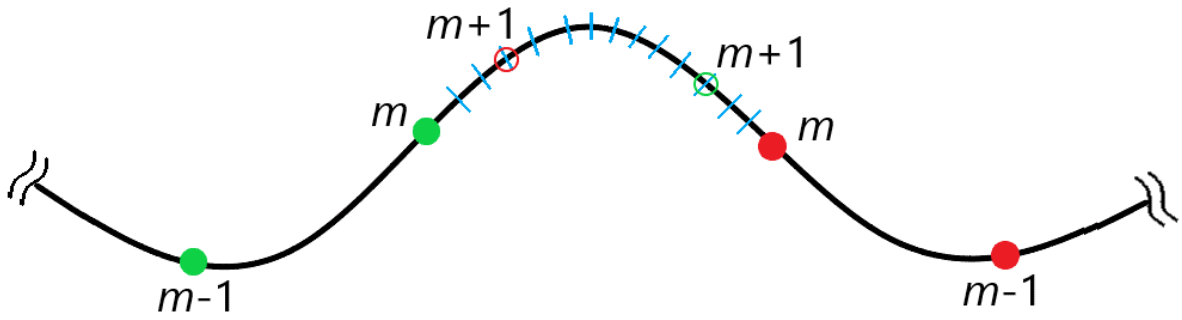
Cilj algoritma opisanog u ovom poglavlju jeste eliminacija zavisnosti poligonske aproksimacije krive od polazne tačke u izračunavanju ove aproksimacije, te smanjenje neuniformnosti dužine i zakrivljenosti segmenata. Jasno je iz opisa algoritma koji počiva na sekvencijalnoj pretrazi po mikro-segmentima da su dužine i/ili ukupne zakrivljenosti svih segmenata izuzev poslednjeg veoma slične zadatim vrednostima za dimenziju elementa i ugaonu toleranciju,  $d_s$  i  $\varphi_s$ . Poslednji segment može imati proizvoljno malu dužinu i zakrivljenost. U primeru prikazanom na slici 36 poslednji segment u poligonskoj aproksimaciji krive bio je 10 puta manje zakrivljen i srazmerno kraći od ostalih segmenata, iako je kriva uniformno zakrivljena.

Osnovna ideja unapređenog algoritma jeste da se finalna poligonska aproksimacija krive kreira na osnovu dve poligonske aproksimacije koje su dobijene primenom algoritma zasnovanog na sekvencijalnoj pretrazi po mikro-segmentima: jedne koja je kreirana pošavši od početka krive (parametar  $p_{\min}$ ) i druge koja je kreirana pošavši od kraja krive (parametar  $p_{\max}$ ). Jasno je da će u prvoj poligonskoj aproksimaciji samo segment koji se završava parametrom  $p_{\max}$  biti u opštem slučaju kraći od ostalih segmenata, dok će u drugoj aproksimaciji to važiti za segment koji se završava parametrom  $p_{\min}$ . Označimo parametre krive koji odgovaraju prvoj poligonskoj aproksimaciji sa  $p_i^{(1)}, i = 1, 2 \dots N_{\min}^{(1)}$  (jasno je da je  $p_1^{(1)} = p_{\min}$  i  $p_{N_{\min}^{(1)}}^{(1)} = p_{\max}$ ), a parametre koji odgovaraju drugoj aproksimaciji sa  $p_i^{(2)}, i = 1, 2 \dots N_{\min}^{(2)}$  ( $p_1^{(2)} = p_{\max}$  i  $p_{N_{\min}^{(2)}}^{(2)} = p_{\min}$ ). Parametri finalne poligonske aproksimacije određuju se u iterativnom postupku u kom se u svakoj iteraciji dodaje po jedan parametar iz svake od dve polazne poligonske aproksimacije, počevši od parametara  $p_1^{(1)} = p_{\min}$  i  $p_1^{(2)} = p_{\max}$ . Iterativni postupak dodavanja parametara iz polaznih poligonskih aproksimacija se ponavlja sve dok je zadovoljen uslov da je parametar iz prve manji od odgovarajućeg parametra iz druge poligonske aproksimacije, tj.  $p_k^{(1)} < p_k^{(2)}$ . Označimo poslednje parametre koji su dodati u finalnu aproksimaciju sa  $p_m^{(1)}$  i  $p_m^{(2)}$ . Segment koji je određen ovim parametrima, a koji se nalazi u centralnom delu krive pa će u daljem tekstu biti označen kao centralni segment, može biti:

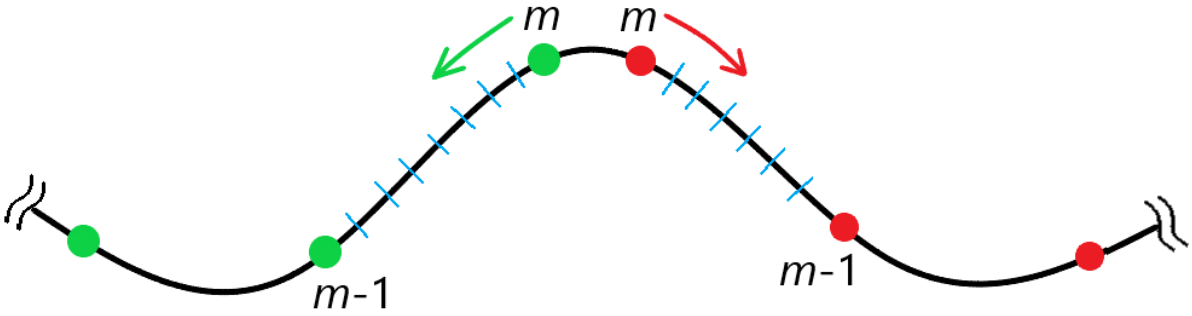
- *Dugačak segment*: duži od dimenzije elementa  $d_s$  i/ili imati ukupno zakrivljenje koje je veće od ugaone tolerancije  $\varphi_s$ . U tom slučaju ovaj segment je potrebno podeliti na dva segmenta, kako bi se zadovoljili zadati parametri mreže. Radi uniformnosti podele ova dva segmenta treba da imaju što sličniju dužinu i zakrivljenje.
- *Kratak segment*: kraći od dimenzije elementa  $d_s$  i sa zakrivljenjem koje je manje od ugaone tolerancije  $\varphi_s$ . U ovom slučaju su parametri mreže zadovoljeni, ali dužina segmenta određenog parametrima  $p_m^{(1)}$  i  $p_m^{(2)}$  može biti proizvoljno mala, te osim pomeranja kratkog segmenta sa kraja krive na njenu sredinu nije ništa postignuto. U cilju dobijanja uniformne podele u ovom slučaju se određuje što uniformnija tro-segmentna aproksimacija dela krive određene parametrima  $p_{m-1}^{(1)}$  i  $p_{m-1}^{(2)}$ .

Prethodno opisane situacije ilustrovane su na slici 39. Čvorovi koji odgovaraju poligonskoj aproksimaciji sa početnim parametrom  $p_{\min}$  označeni su zelenom bojom, dok su čvorovi koji odgovaraju aproksimaciji sa početnim parametrom  $p_{\max}$  označeni crvenom bojom. Plave crtice označavaju čvorove mikro-segmenata inicijalne poligonske aproksimacije. Ovde treba napomenuti da su obe poligonske aproksimacije od kojih se polazi dobijene primenom algoritma sekvencijalne pretrage nad istom inicijalnom poligonskom aproksimacijom, pa su iz tog razloga i mikro-segmenti identični za obe.





a) Centralni segment ne zadovoljava parametre segmentacije.



b) Centralni segment zadovoljava parametre segmentacije.

Slika 39. Kreiranje poligonske aproksimacije na osnovu dve poligonske aproksimacije zasnovane na sekvencijalnoj pretrazi po mikro-segmentima.

Aproksimacija centralnog dela krive se najpre pokušava izvršiti primenom algoritma opisanog u prethodnom poglavlju, tj. primenom uniformne podele u parametarskom prostoru. Ukoliko ova podela ne uspe primenjuje se iterativni postupak, koji ima za cilj postizanje uniformne podele.

U slučaju dugačkog centralnog segmenta (slika 39a) uočavamo ma koji čvor koji predstavlja čvor fine poligonske aproksimacije koji se nalazi između parametara  $p_{m+1}^{(2)}$  i  $p_{m+1}^{(1)}$ . Označimo parameter krive koji odgovara ovom čvoru sa  $p_{mid}$ . Označimo rasojanje među čvorovima koji odgovaraju parametrima  $p_m^{(1)}$  i  $p_{mid}$  sa  $l_1$ , a odgovarajuće zakrivljenje krive sa  $\varphi_1$ . Odgovarajuće veličine na segmentu između parametara  $p_{mid}$  i  $p_m^{(2)}$  označimo sa  $l_2$  i  $\varphi_2$ . Kako se čvor koji odgovara parametru  $p_{mid}$  nalazi na  $m$ -tom segmentu obe polazne poligonske aproksimacije, jasno je da su dužine  $l_1$  i  $l_2$  manje od  $d_s$ , a uglovi  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  manji od  $\varphi_s$ . Minimalna dužina segmenta data je sa  $l_{min} = \min(l_1, l_2)$ , dok je minimalni ugao dat sa  $\varphi_{min} = \min(\varphi_1, \varphi_2)$ , dok su ukupne dužine odnosno zakrivljenja dati sa  $l_{sum} = l_1 + l_2$  i  $\varphi_{sum} = \varphi_1 + \varphi_2$ , respektivno.

U slučaju kratkog centralnog segmenta (slika 39b) uočavamo tri segmenta određena sledećim parovima parametara:  $(p_{m-1}^{(1)}, p_m^{(1)})$ ,  $(p_m^{(1)}, p_m^{(2)})$  i  $(p_m^{(2)}, p_{m-1}^{(2)})$ . Minimize i sume rastojanja, odnosno zakrivljenja definišemo na anlogan način kao u slučaju dugačkog centralnog segmenta.

Uvodimo na ovom mestu faktor koji definiše uniformnost poligonske aproksimacije posmatranog dela krive kao:

$$\delta = \delta_l \cdot \delta_\varphi, \quad (56)$$

gde faktor  $\delta_l$  kvantifikuje uniformnost apriksimacije po dužini, i dat je sa:

$$\delta_l = \frac{l_{min}}{l_{sum}}, \quad (57)$$

dok faktor  $\delta_\varphi$  kvantifikuje uniformnost aproksimacije po zakrivljenosti, i dat je sa:

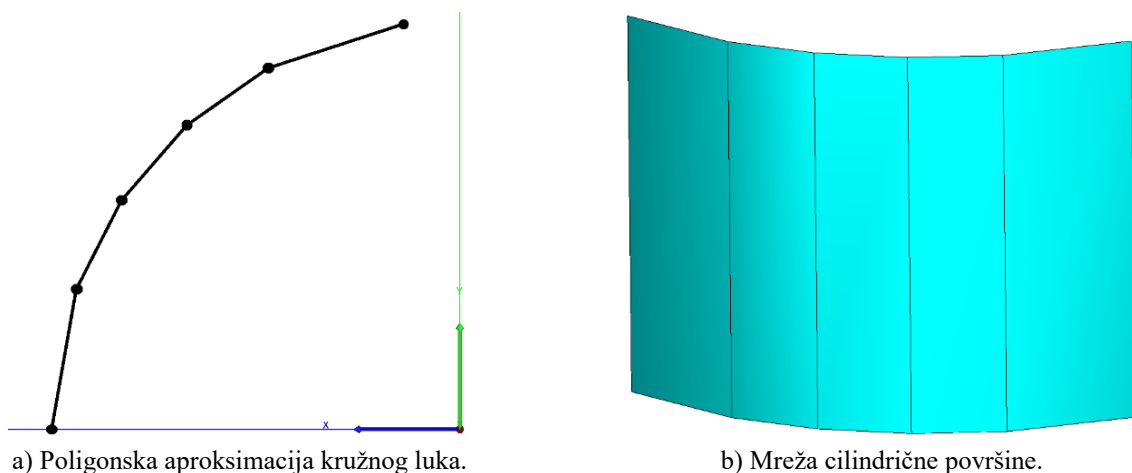
$$\delta_\varphi = \begin{cases} 1, & \varphi_{\text{sum}} < \frac{\varphi_s}{10} \\ \frac{\varphi_{\text{min}}}{\varphi_{\text{sum}}}, & \varphi_{\text{sum}} \geq \frac{\varphi_s}{10} \end{cases} \quad (58)$$

Za slučaj dugačkog centralnog segmenta faktor određen jednačinom (56) se izračunava za parametar  $p_{\text{mid}}$  i dva njemu susedna parametra kojima odgovaraju čvorovi fine poligonske aproksimacije krive. Pomeranje parametra se zatim vrši na onu stranu za koju faktor  $\delta$  raste. Pomeranje parametra se vrši iterativno u diskretnim koracima koji odgovaraju dužini jednog segmenta u finoj poligonskoj aproksimaciji krive sve dok parametar  $\delta$  raste ili dok zadati kriterijumi po dimenziji elementa ili zakrivljenosti nisu narušeni za neki od novonastalih segmenata. Očigledno je da ni jedan od dva ovako dobijena centralna segmenta ne može biti kraći od  $\frac{d_s}{2}$  i/ili imati zakrivljenje manje od  $\frac{\varphi_s}{2}$ .

U slučaju kada deo krive određen parametrima  $p_m^{(1)}$  i  $p_m^{(2)}$  nije potrebno deliti faktor  $\delta$  se izračunava za početno stanje, a zatim se čvorovi određeni parametrima  $p_m^{(1)}$  i  $p_m^{(2)}$  iterativno pomeraju za po jedan podeok u finoj poligonskoj aproksimaciji krive sve dok parametar  $\delta$  raste ili dok zadati kriterijumi po dimenziji elementa ili zakrivljenosti nisu narušeni za neki od tri posmatrana centralna segmenta. Pomeranje parametra  $p_m^{(1)}$  vrši se ka parametru  $p_{m-1}^{(1)}$ , dok se parametar  $p_m^{(2)}$  pomera prema parametru  $p_{m-1}^{(2)}$ , kao što je strelicama naznačeno na slici 39b. Ni jedan od tri centralna segmenta dobijena nakon ovog postupka ne može biti kraći od  $\frac{2d_s}{3}$  i/ili imati zakrivljenost koja je manja od  $\frac{2\varphi_s}{3}$ .

Na osnovu svega rečenog možemo zaključiti da se primenom opisanog algoritma rešava problem zavisnosti poligonske aproksimacije krive od polazne tačke za računanje ove aproksimacije, ali se isto tako ublažava problem neuniformne dužine i zakrivljenosti segmenta. Umesto proizvoljno kratkog segmenta na kraju krive, ovim postupkom se dobijaju dva (tri) segmenta u centralnom delu krive čija dužina i/ili zakrivljenost nisu manje od polovine (dve trećine) odgovarajućih zadatih parametara mreže.

Primenom ove metode na kružni luk sa slike 36 dobija se poligonska aproksimacija prikazana na slici 40a. Prvi i poslednji segment imaju dužinu od  $\sim 0.347$  mm i zakrivljenost od  $20^\circ$ , dok su tri centralna segmenta međusobno jednake dužine od  $\sim 0.244$  mm i zakrivljenosti od  $14^\circ$ . Mreža cilindrične površine sa slike 37a kada se primeni ova metoda za određivanje poligonske aproksimacije krive data je na slici 40b. Svi elementi mreže su pravougaonog oblika, i faktora kvaliteta jednakog jedinici.

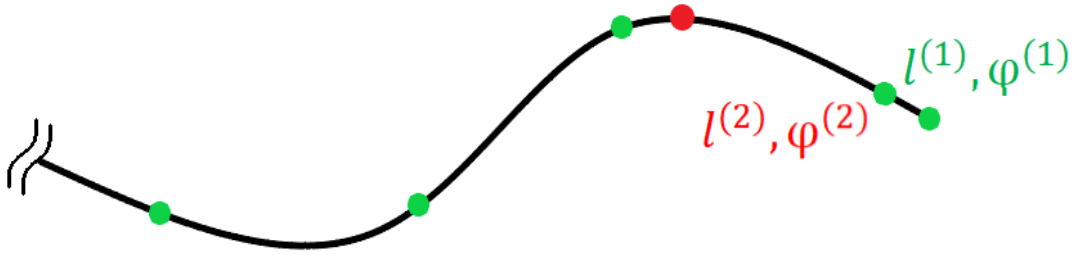


Slika 40. Poligonska aproksimacija kružnog luka i odgovarajuća mreža cilindrične površine, kada se koristi metoda zasnovana na spajanju dve poligonske aproksimacije.

### 5.3. Optimizacija parametara segmentacije

Algoritam opisan u prethodnom poglavlju omogućava delimično rešavanje problema neuniformnosti dužina i zakrivljenosti segmenata u poligonskoj aproksimaciji krive. Međutim, centralni segmenti (dva ili tri takva segmenta u zavisnosti od ukupnog broja segmenata) ostaju nešto kraći od ostalih, te se u cilju povećanja uniformnosti podele dužina i/ili zakrivljenost ovih segmenata mora povećati na račun ostalih segmenata u poligonskoj aproksimaciji krive.

Metoda koja će biti opisana u ovom poglavlju ima za cilj određivanje dimenzije elementa mreže  $d_s^{(opt)}$  ( $d_s^{(opt)} \leq d_s$ ) i ugaone tolerancije  $\varphi_s^{(opt)}$  ( $\varphi_s^{(opt)} \leq \varphi_s$ ), čije su vrednosti takve da se primenom algoritma zasnovanog na sekvencijalnoj pretrazi po mikro-segmentima dobije poligonska aproksimacija uniformna po dužini i zakrivljenosti segmenata. Problem koji je uočen u algoritmu zasnovanom na sekvencijalnoj pretrazi po mikro-segmentima jeste proizvoljno mala dužina i zakrivljenost poslednjeg segmenta. Kreira se zato, primenom algoritma sekvencijalne pretrage po mikro-segmentima, jedan segment koji počinje od kraja krive (parametar  $p_{max}$ ), kao što je prikazano na slici 41. Dakle za razliku od algoritma koji je opisan u prethodnom poglavlju, ovde se ne kreira poligonska aproksimacija cele krive počevši i od njenog kraja, već je dovoljan samo jedan segment. Ukoliko su parametri segmentacije  $d_s^{(opt)}$  i  $\varphi_s^{(opt)}$  korektno izabrani jasno je da će segment koji se završava u parametru  $p_{max}$  biti jednake ili veoma približne dužine i zakrivljenosti bez obzira na izbor polazne tačke. Iz navedenog razloga se uniformnost podele posmatra samo na nivou ovog segmenta u dvema poligonskim aproksimacijama.



Slika 41. Čvorovi poligonske aproksimacije: zelena boja – početna tačka je početak krive, crvena boja – kraj prvog segmenta počevši od kraja krive.

Označimo sa  $l^{(1)}$  i  $\varphi^{(1)}$  dužinu i zakrivljenost poslednjeg segmenta u poligonskoj aproksimaciji kreiranoj primenom algoritma sekvencijalne pretrage po mikro-segmentima sa početnim čvorom u parametru  $p_{min}$ , a sa  $l^{(2)}$  i  $\varphi^{(2)}$  dužinu i zakrivljenost prvog segmenta u poligonskoj aproksimaciji čiji je početak u čvoru sa parametrom  $p_{max}$ . Uniformnost poligonske aproksimacije kvantifikovana je sledećim faktorom:

$$\delta = \delta_l \cdot \delta_\varphi, \quad (59)$$

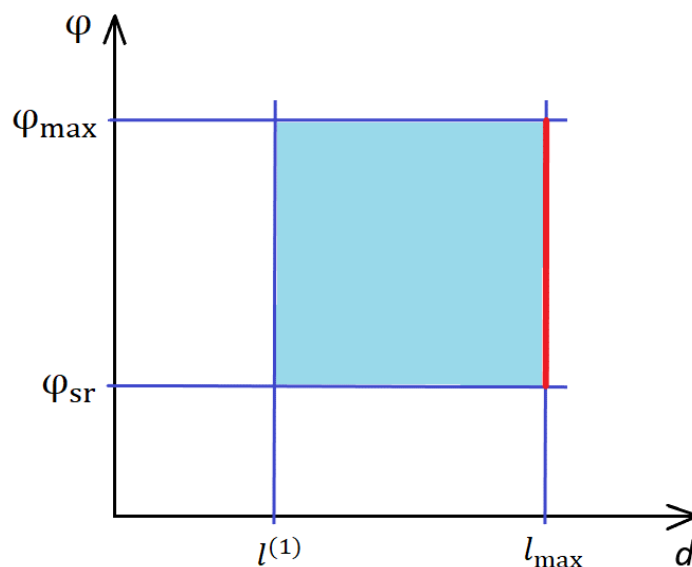
gde je  $\delta_l$  dužinski faktor dat sa:

$$\delta_l = \frac{\min(l^{(1)}, l^{(2)})}{\max(l^{(1)}, l^{(2)})}, \quad (60)$$

dok je  $\delta_\varphi$  ugaoni faktor dat sa:

$$\delta_\varphi = \begin{cases} 1, & \varphi_{max} < \frac{\varphi_s}{10} \\ \frac{\min(\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)})}{\max(\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)})}, & \varphi_{max} \geq \frac{\varphi_s}{10} \end{cases}. \quad (61)$$

Parametre segmentacije  $d_s^{(\text{opt})}$  i  $\varphi_s^{(\text{opt})}$  treba izabrati tako da maksimizuju faktor definisan prethodnim jednačinama, a da daju poligonsku aproksimaciju koja se sastoji od  $N_{\min}$  segmenata. Kada govorimo o oblasti pretrage, tj. o minimalnim i maksimalnim vrednostima koje mogu imati parametri  $d_s^{(\text{opt})}$  i  $\varphi_s^{(\text{opt})}$ , jasno je da ovi parametri moraju biti manji ili jednaki vrednostima  $d_s$  i  $\varphi_s$ , respektivno. Kako bi se oblast pretrage dodatno suzila, maksimalne vrednosti za dužinski i ugaoni parametar ograničavamo maksimalnom dužinom i zakrivljenošću segmenata u početnoj poligonskoj aproksimaciji, koja je dobijena za parametre  $d_s$  i  $\varphi_s$ , tj.  $d_s^{(\text{opt})} \leq l_{\max}$  i  $\varphi_s^{(\text{opt})} \leq \varphi_{\max}$ . Sa donje strane je maksimalna dimenzija elementa ograničena dužinom poslednjeg segmenta u početnoj poligonskoj aproksimaciji, tj.  $d_s^{(\text{opt})} \geq l^{(1)}$ . Konačno, ugaona tolerancija je sa donje strane ograničena srednjom vrednošću zakrivljenosti segmenta, koja se dobija kada se ukupna zakrivljenost krive podeli brojem segmenata, tj.  $\varphi_{sr} = \frac{\varphi_{\text{tot}}}{N_{\min}}$ , gde je  $\varphi_{\text{tot}}$  ukupna zakrivljenost krive. Očigledno je da bi korišćenje ugaone tolerancije koja je niža od ove dovelo do kreiranja poligonske aproksimacije koja se sastoji od više od  $N_{\min}$  segmenata. Oblast pretrage po dimenziji elementa i ugaonoj toleranciji označena je na slici 42.



Slika 42. Oblast u kojoj se nalaze optimalne vrednosti za dimenziju elementa i ugaonu toleranciju.

Oblast pretrage po dimenziji elementa i ugaonoj toleranciji moguće je dodatno smanjiti ukoliko su svi segmenti u poligonskoj aproksimaciji kreirani zato što je u postupku sekvencijalne pretrage po mikro-segmentima narušen ugaoni kriterijum, dok su po kriterijumu dužine svi segmenti bili značajno kraći od zadate dimenzije elementa  $d_s$ . U tom slučaju treba optimizovati samo ugaonu toleranciju, pa se oblast pretrage svodi na crvenu liniju sa slike 42. Štaviše, uniformna podela bi u tim slučajevima trebalo da se dobije za ugaonu toleranciju koja je jednaka  $\varphi_{sr}$  ili za nijansu višu vrednost zbog tolerancije definisane dužinom mikro-segmenta.

U cilju pronalazjenja optimalnih vrednosti za dimenziju elementa i ugaonu toleranciju,  $d_s^{(\text{opt})}$  i  $\varphi_s^{(\text{opt})}$ , na ovom mestu treba primeniti neki optimizacioni algoritam. Kao što je već rečeno, optimizacioni kriterijum je maksimizacija faktora datog jednačinom (59), uz zadržavanje minimalnog broja segmenata,  $N_{\min}$ , u poligonskoj aproksimaciji krive.

U modelima koji su prikazani u ovom radu ova optimizacija je implementirana kao sistematska pretraga u dva koraka. U prvom koraku se poligonska aproksimacija i vrednost faktora  $\delta$  (datog jednačinom (59)) izračunavaju u uniformnoj mreži tačaka u oblasti pretrage ilustrovanj na slici 42. Broj tačaka mreže je identičan po dužinskom i ugaonom kriterijumu i iznosi 10. Naravno u gore pomenutom slučaju kada se analizira samo ugaoni kriterijum ova mreža se svodi u niz ekvidistantnih

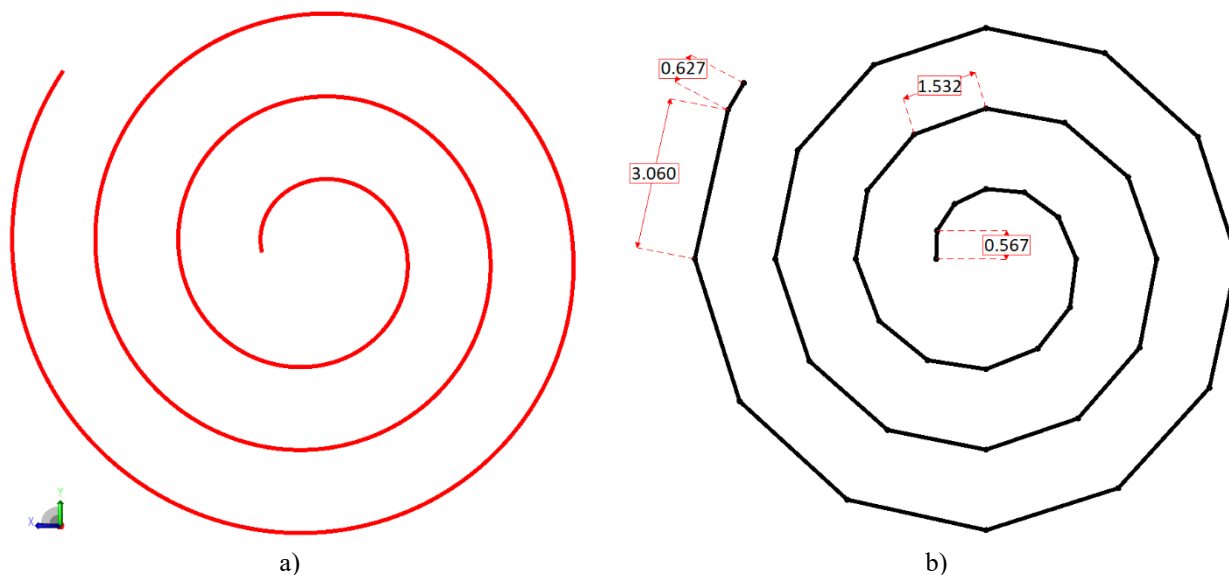
vrednosti po ugaonom kriterijumu. U okolini tačke u kojoj je vrednost faktora  $\delta$  maksimalna sprovodi se dodatna pretraga u istom broju ekvidistantnih tačaka, s tim što se dimenzije oblasti pretrage svode na dimenzije jednog okca inicijalne mreže. Ceo postupak se prekida ukoliko se utvrdi da je u nekoj tački vrednost faktora  $\delta$  veća od 0.95.

U slučaju da se opisanim postupkom ne pronađu parametri za koje je  $\delta > 0.5$  poligonska aproksimacija se kreira primenom algoritma opisanog u prethodnom poglavlju.

Kada je u pitanju složenost algoritma, ona se svodi na linearnu složenost algoritma sekvencijalne pretrage po mikro-segmentima, pomnoženu brojem iteracija u optimizacionom postupku. Treba napomenuti da se mikro-segmentska aproksimacija kreira samo jednom, a zatim se ista koristi u celom daljem postupku.

U primerima kružnog luka i odgovarajuće cilindrične površine, prikazanim u prethodnim poglavljima, optimizacija parametara segmentacije svodi se na optimizaciju ugaone tolerancije. Kako ukupna zakrivljenost kružnog luka iznosi  $82^\circ$ , a minimalan broj segmenata je  $N_{\min} = 5$ , dobija se da je  $\varphi_{sr} = 16.4^\circ$ . Upravo je sa ovim ugaonim parametrom izvršena segmentacija, pa je poligonska aproksimacija krive i odgovarajuća mreža cilindrične površine identična onoj koja se dobija primenom algoritma zasnovanog na uniformnoj podeli u parametarskom prostoru krive (slika 38).

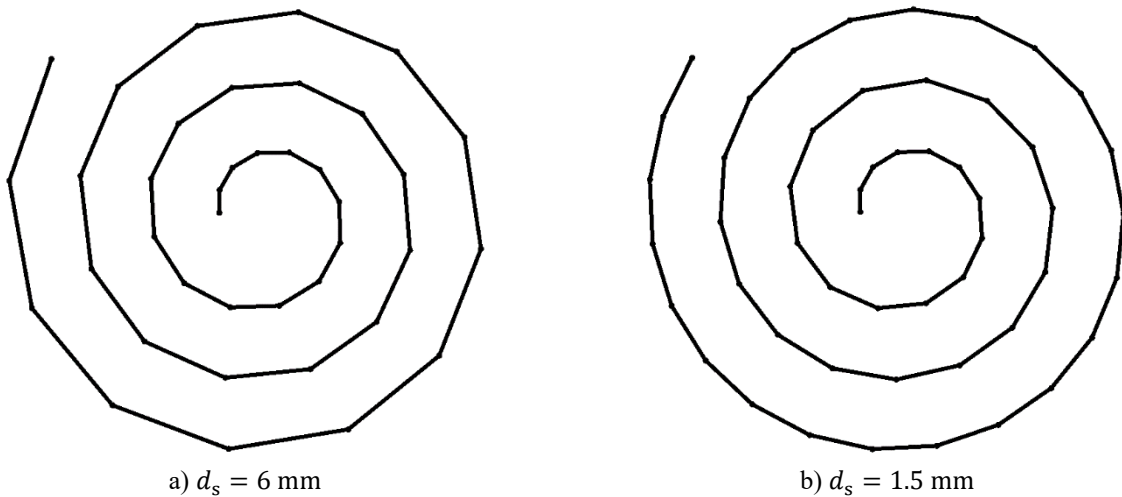
Posmatrajmo krivu oblika Arhimedove spirale prikazanu na slici 43a. Radijus spirale u početnoj tački iznosi 1 mm, a u krajnjoj tački 6 mm. Broj navojaka spirale je 3.1, što znači da je ukupno zakrivljenje jednako  $3.1 \cdot 360^\circ = 1116^\circ$ . Ukoliko se dimenzija elementa postavi na 6 mm, a ugaona tolerancija na  $30^\circ$ , poligonska aproksimacija ove spirale dobijena primenom metode sekvencijalne pretrage po mikro-segmentima prokazana je na slici 43b. Jasno je da je sa ovim parametrima segmentacije dimenzija svakog segmenta određena ugaonim kriterijumom kao strožijim, te da svi segmenti osim poslednjeg imaju zakrivljenje od  $30^\circ$ , dok je zakrivljenje poslednjeg iznosi  $6^\circ$ . Broj segmenata je 38. Dužine nekoliko segmenata prikazane su na slici 43b.



Slika 43. Kriva oblika Arhimedove spirale (a) i njena poligonska aproksimacija izračunata primenom algoritma sekvencijalne pretrage po mikro-segmentima (b).

Na slici 44a je prikazana poligonska aproksimacija ove krive kada se upotrebi metoda opisana u ovom poglavlju, za iste parametre segmentacije koji su korišćeni prethodno. Kako je ugaoni kriterijum strožiji, i optimizacija se vrši samo po ugaonom kriterijumu. Poslednji segment krive ima zakrivljenje od približno  $28.4^\circ$ , dok je zakrivljenje ostalih segmenata međusobno jednako i iznosi  $29.4^\circ$ . Broj segmenata je 38, tj. jednak je kao u slučaju kada je primenjen algoritam sekvencijalne pretrage po mikro-segmentima.

Ukoliko se koristi ista ugaona tolerancija, ali se maksimalna dimenzija elementa smanji na 1.5 mm, jasno je na osnovu dužina segmenata prikazanih na slici 43b da će ugaoni kriterijum biti dominantan na prvom i samom početku drugog zavojka spirale, dok će na ostatku krive kritičniji biti dužinski kriterijum. Iz tog razloga se i optimizacija vrši po oba parametra segmentacije. Izračunata optimalna vrednost za dimenziju elementa je  $\sim 1.48$  mm, a za ugaonu toleranciju je  $\sim 29.1^\circ$ . Poligonska aproksimacija spirale za ove parametre segmentacije prikazana je na slici 44b. Ukupan broj segmenata je naravno povećan i sada iznosi 52. Vrednost faktora  $\delta$  definisanog jednačinom (59) iznosi približno 0.99.



Slika 44. Poligonska aproksimacija Arhimedove spirale za ugaonu toleranciju od  $30^\circ$  i dve dimenzije elementa mreže.

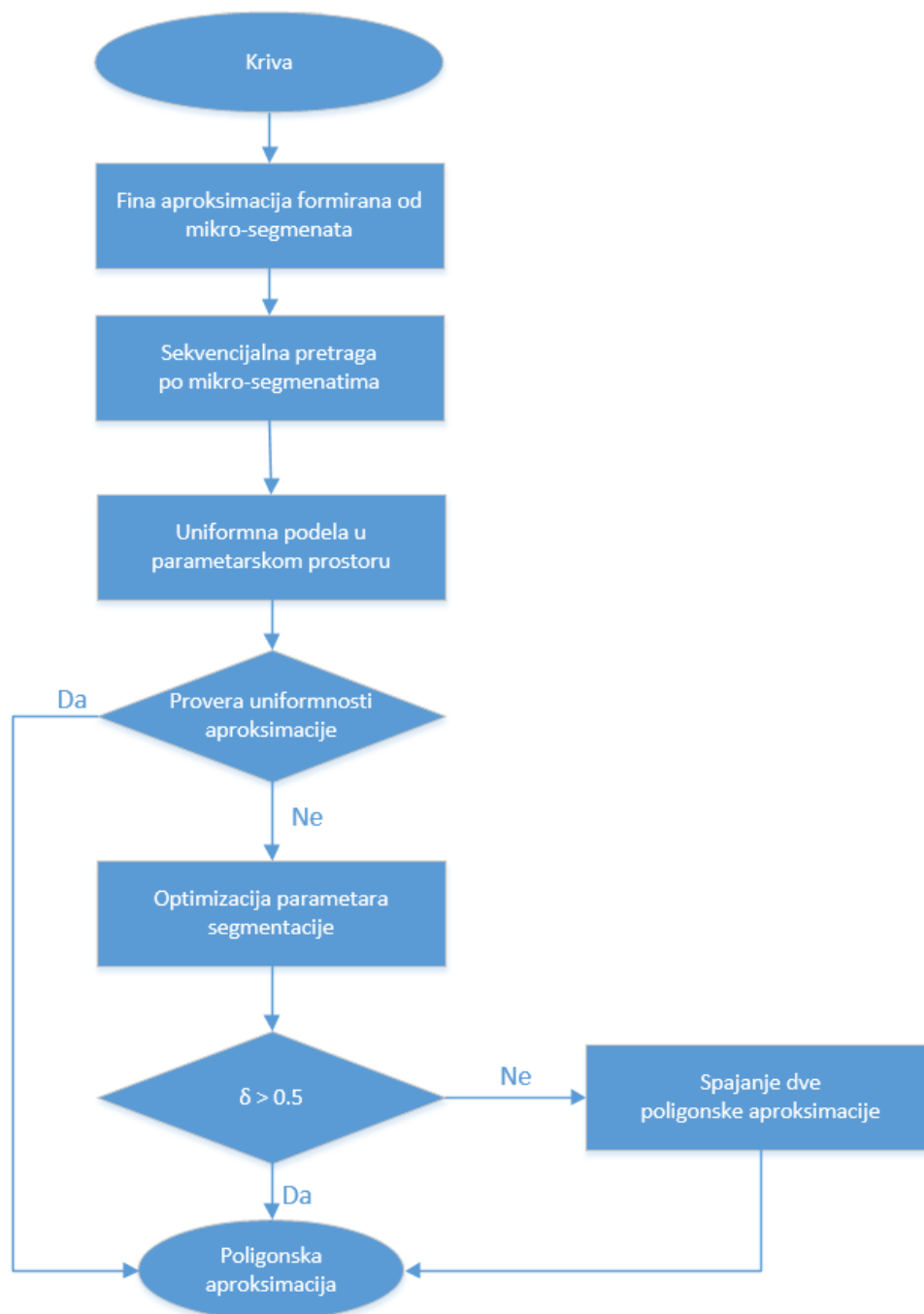
## 5.4. Metoda za kreiranje poligonske aproksimacije krive

Nakon što su opisani svi algoritmi koji se koriste za konstrukciju poligonske aproksimacije krive u metodi predloženoj u ovom radu, u ovom poglavlju će biti dat opis metode. Dijagram toka metode dat je na slici 45.

Kao što se sa dijagrama može videti, prvu fazu u procesu kreiranja poligonske aproksimacije krive čini kreiranje fine aproksimacije koja se sastoji od mikro-segmenata. Kao što je na početku ove glave rečeno, dužina i zakrivljenost svakog mikro-segmenta značajno je manja od vrednosti diktiranih dimenzijama elementa mreže i ugaonom tolerancijom. Sledeću fazu predstavlja kreiranje prve poligonske aproksimacije koja zadovoljava dimenziju elementa i ugaonu toleranciju sa minimalnim brojem segmenata, a koja se kreira primenom sekvencijalne pretrage po mikro-segmentima. Prevažodni cilj ove faze jeste određivanje broja segmenata u finalnoj poligonskoj aproksimaciji.

Nakon što je minimalni broj segmenata određen kreira se uniformna podela u parametarskom prostoru krive i odgovarajuća poligonska aproksimacija, kao što je opisano u poglavlju 5.1. Ukoliko ova poligonska aproksimacija zadovoljava uslov uniformnosti aproksimacije i uslove zadate kroz maksimalnu dimenziju elementa i ugaonu toleranciju, ona se prihvata kao finalna poligonska aproksimacija krive. Kao što je već rečeno, za ogromnu većinu krivih koje se pojavljuju u praktičnim modelima kreiranje poligonske aproksimacije se završava na ovom mestu.

U slučaju da navedeni uslovi nisu zadovoljeni primenjuje se algoritam zasnovan na optimizaciji parametara segmentacije, koji je detaljno opisan u poglavlju 5.3. Ukoliko se kao izlaz iz ovog algoritma ne dobije segmentacija sa zadovoljavajućim nivoom uniformnosti (tj. ako vrednost faktora definisanog jednačinama (59) do (61) nije veća od 0.5), primenjuje se algoritam koji se zasniva na spajanju dveju poligonskih aproksimacija, dobijenih sekvencijalnom pretragom po mikro-segmentima, koji je detaljno opisan u poglavlju 5.2.



Slika 45. Dijagram toka metode za kreiranje poligonske aproksimacije krive.

## 5.5. Ukрупnjavanje poligonske aproksimacije

U prethodnom delu ove glave dimenzija elementa i ugaona tolerancija su navedeni kao jedina dva parametra koji određuju izgled poligonske aproksimacije krive. Međutim, veoma važan parametar, a naročito u slučaju importovanih CAD modela koji sadrže veliki broj detalja koji nisu od interesa sa stanovišta EM analize, jeste i tolerancija za ukрупnjavanje. Ovu tolerancija se u metodi predloženoj u ovom radu definiše u odnosu na maksimalnu dimenziju modela, pa se odgovarajuća kritična dužina računa kao:

$$d_{kr} = t \cdot d_{max}, \quad (62)$$

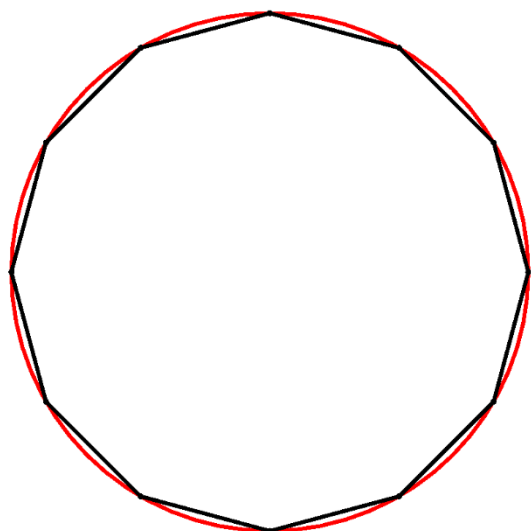


gde je  $t$  tolerancija za ukрупnjavanje, dok je sa  $d_{\max}$  označena maksimalna dimenzija modela. Sama maksimalna dimenzija modela se određuje korišćenjem Parasolid API funkcije "PK\_TOPOL\_find\_box", koja vraća minimalne i maksimalne  $x$ -,  $y$ - i  $z$ -koordinate za prosleđeni topološki entitet. Nakon što se ova funkcija pozove za sva tela u modelu određivanje maksimalne dimenzije modela, kao dijagonale odgovarajućeg kvadra, postaje trivijalno.

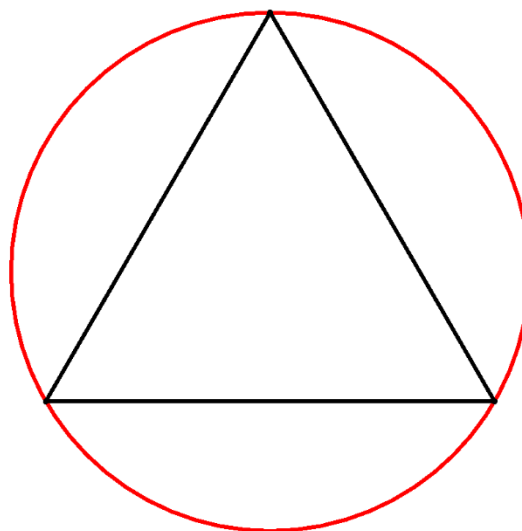
Modifikacija prethodno opisane metode za kreiranje poligonske aproksimacije krive, tako da se uvede i ukрупnjavanje segmenata aproksimacije veoma je jednostavna. Naime, sitna modifikacija uvodi se u samo dva postupka:

- Sekvencijalna pretraga po mikro-segmentima se modifikuje tako da ukoliko je dužina posmatranog segmenta manja od tolerancije za ukрупnjavanje ( $l_i < d_{kr}$ ) dozvoljava se veća vrednost zakrivljenosti segmenta od inicijalno definisane. U svim primerima iz ovog rada, maksimalna dozvoljena zakrivljenost segmenta je u ovom slučaju ograničena na  $150^\circ$ . Ova vrednost je dovoljno visoka da se postigne visoka efikasnost postupka ukрупnjavanja, a dovoljno niska (značajno je niža od  $180^\circ$ ) da se ne ugrozi kvazi-planarnost u postupku podele površina na kvazi-planarne.
- Strogo govoreći u postupku optimizacije parametara segmentacije, trebalo bi optimizovati i vrednosti kritične dužine,  $d_{kr}$ , i maksimalne zakrivljenosti kratkih segmenata. Na ovaj način bi se broj parametara koji se optimizuju duplirao, što bi zahtevalo uvođenje nešto naprednijeg optimizacionog algoritma u odnosu na onaj koji se trenutno koristi.  
U trenutno implementiranom rešenju se zato zadržavamo na optimizaciji dimenzije elementa i ugaone tolerancije ukoliko je makar jedan segment u poligonskoj aproksimaciji kreiran jer je neki od ovih parametara dosegnut. Ukoliko to nije slučaj optimizuju se samo kritična dužina i maksimalna dozvoljena zakrivljenosti kratkih segmenata.

Posmatrajmo model krive oblika kružnice prikazan na slici 46. Ukoliko je dimenzija elementa jednaka dijametru kružnice, ugaona tolerancija iznosi  $30^\circ$ , a tolerancija za ukрупnjavanje je veoma niska, poligonska aproksimacija kružnice sastoji se od 12 segmenata, kao što je prikazano na slici 46a. Ukoliko je vrednost tolerancije za ukрупnjavanje dovoljno visoka tako da je i kritična dužina  $d_{kr}$  približno jednaka dijametru kružnice, dobija se poligonska aproksimacija koja se sastoji od samo tri segmenta (slika 46b).



a) Bez ukрупnjavanja.



b) Sa ukрупnjavanjem.

Slika 46. Kružna petlja (crvena boja) i njene poligonske aproksimacije (crna boja) bez ukрупnjavanja i sa ukрупnjavanjem.



## 5.6. Umetanje dodatnih segmenata

Primenom metode opisane u prethodnim poglavljima dobija se poligonska aproksimacija krive koja sa minimalnim brojem segmenata zadovoljava zadate parametre segmentacije. Postoje međutim situacije kada je u ovako kreiranu poligonsku aproksimaciju potrebno umetnuti izvestan broj dodatnih segmenata. Označimo ovaj broj sa  $N_{\text{add}}$ . Dve takve situacije u predloženoj metodi su:

- umetanje dodatnih segmenata u poligonske aproksimacije ivica kako bi se dobio regularan poligon u osnovnom domenu (detaljno objašnjenje je dato u poglavlju 7.1),
- umetanje pomoćnog segmenta u poligonske aproksimacije krivih kako bi se postigla zahtevana parnost broja segmenata (glava 8).

Generalno je to moguće uraditi modifikacijom parametara segmentacije u optimizacionom postupku ili postupku iterativne promene parametara dok broj segmenata nakon postupka sekvencijalne pretrage po mikro-segmentima ne postane za potrebnu vrednost veći od minimalnog. Nakon toga bi se cela prethodno opisana procedura kreiranja poligonske aproksimacije krive ponovila sa novoizračunatim parametrima segmentacije.

Međutim, imajući u vidu sledeće činjenice:

- uniformna poligonska aproksimacija za ogromnu većinu krivih uspešno se kreira primenom postupka uniformne podele u parametarskom prostoru krive,
- broj krivih na kojima je potrebno umetnuti pomoćni segment za parnost se minimizuje primenom naprednih tehnika (poglavlje 8.3),

dodavanje segmenta je moguće izvršiti i na značajno jednostavniji način, bez velikog uticaja na kvalitet finalne mreže. U trenutno implementiranom rešenju broj segmenata se povećava za potrebnu vrednost,  $N_{\text{add}}$ , i sa ovim brojem segmenata se pokušava kreirati uniformna poligonska aproksimacija primenom algoritma zasnovanog na uniformnoj podeli krive u parametarskom prostoru. Ukoliko se primenom ovog postupka ne dobije željena poligonska aproksimacija krive,  $N_{\text{add}}$  puta se ponavlja sledeći postupak: identifikuje se segment najveće dužine u trenutnoj poligonskoj aproksimaciji, a zatim se vrši njegova podela na dva segmenta primenom postupka opisanog u poglavlju 5.2.

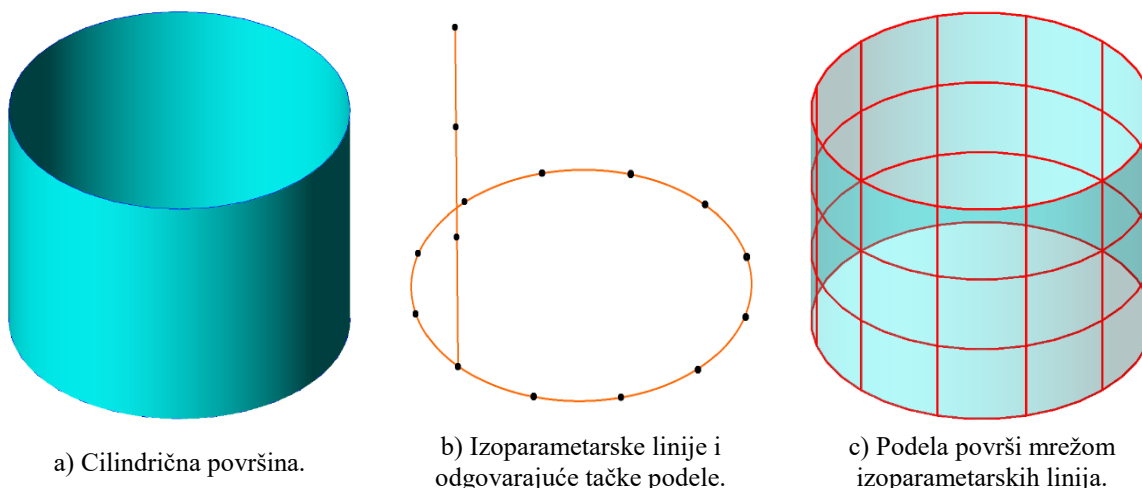
## 6. Podela na kvazi-planarne površine

Osnovni zadatak u ovoj fazi algoritma jeste podela svih površina koje sačinjavaju ulaznu CAD geometriju na kvazi-planarne površine. Podela površina koja će obezbediti ispunjenje ovog zahteva može se izvršiti na više načina, ali kako se pokazuje da je za elemente mreže optimalna ona orijentacija koja je paralelna glavnim pravcima zakrivljenosti [7], i linije podele treba orijentisati na takav način. U poglavlju 3.4.3 je pokazano da se ovakve linije podele mogu odrediti na osnovu direkcioni i dimenzioni polja. Algoritmi koji su u literaturi predloženi za računanje ovih polja rade isključivo sa trougaonom mrežom kao ulaznom geometrijom. Dodatni problem predstavlja vreme izvršavanja ovih algoritama. Konačno, glavna ideja metode opisane u ovom radu jeste direktno kreiranje četvorougone mreže, bez trougaone mreže kao međukoraka.

U algoritmu za podelu na kvazi-planarne površine koji je opisan u ovom radu za određivanje optimalnih linija podele koristi se prirodna parametrizacija CAD površina u lokalnom  $uv$ -koordinatnom sistemu. (Tipovi površi koji postoje u Parasolid tehnologiji, zajedno sa odgovarajućim definicijama u  $uv$ -koordinatnom sistemu dati su u Prilogu B.) Za većinu površi koje se mogu naći u jednom CAD modelu glavne linije zakrivljenosti se poklapaju sa linijama konstantnog  $u$ , odnosno  $v$ , parametra. Iz tog razloga se i podela površina po pravilu vrši po  $u$  i  $v$  izoparametarskim linijama.

Linije konstantne  $u$ , odnosno konstantne  $v$ -koordinate, nazivamo  $u$ , odnosno  $v$ , izoparametarskim linijama, respektivno. Sama ekstrakcija izoparametarskih linija vrši se korišćenjem Parasolid API funkcije "PK\_SURF\_make\_curve\_isoparam".

Posmatrajmo najpre cilindričnu površinu prikazanu na slici 47a. Ova površina nije kvazi-planarna, te ju je potrebno dodatno izdeliti kako bi se zadovoljio zahtev za kvazi-planarnošću. Sve  $u$ -izoparametarske linije su prave linije jednakih dužina, a sve  $v$ -izoparametarske linije su kružnice međusobno jednakih radijusa. Po jedna  $u$  i  $v$  izoparametarska linija je prikazana na slici 47b. Osnovna ideja podele površi po izoparametarskim linijama zasniva se na kreiranju poligonske aproksimacije samih izoparametarskih linija, da bi se zatim kao linije podele usvojile one koje odgovaraju čvorovima poligonske aproksimacije. Preciznije, jednom kada je određena poligonska aproksimacija  $u$ -izoparametarske linije, za linije podele se usvajaju  $v$ -izoparametarske linije čiji je  $v$  parametar izračunat na površini u tački koja odgovara čvoru ove poligonske aproksimacije. (Naravno, isto važi i za određivanje  $u$ -izoparametarskih linija podele.) Kao što je u prethodnom poglavlju rečeno, ova aproksimacija se računa sa izvesnim dužinskim ograničenjem i ugaonom tolerancijom. U primeru datom na slici 47 korišćena je ugaona tolerancija od  $30^\circ$ , dok je dužina segmenta ograničena na trećinu visine cilindra. Čvorovi poligonske aproksimacije dobijene sa ovim parametrima prikazani su na slici 47b, tj. kreirano je 12 segmenata jednake dužine na kružnoj  $v$ -izoparametarskoj liniji i 3 segmenta jednakih dužina na pravoj  $u$ -izoparametarskoj liniji. Finalna podela cilindrične površine po linijama podele koje odgovaraju čvorovima poligonske aproksimacije izoparametarskih linija prikazana je na slici 47c, i sastoji se od 36 kvazi-planarnih površina.



Slika 47. Podela cilindrične površi mrežom izoparametarskih linija.

Postavlja se pitanje, na koji način, tj. sa kojim dužinskim i ugaonim parametrima treba izvršiti aproksimaciju izoparametarskih linija u opštem slučaju. Da bi dobijene površine bile kvazi-planarne ugaona tolerancija mora biti manja od  $180^\circ$ . Dodatno, kako ćemo sve kvazi-planarne površine segmentirati sa zadatim površinskim ugaonim tolerancijama, za segmentaciju sa minimalnim brojem elemenata potrebno je da ugaona tolerancija sa kojom se na ovom mestu aproksimiraju izoparametarske linije (označimo je sa  $\varphi_i$ ) mora biti celobrojni umnožak površinske ugaone tolerancije (označimo je sa  $\varphi_s$ ), tj.:

$$\varphi_i = k_1 \varphi_s \quad (63)$$

gde je  $k_1$  ceo broj. U svim primerima prikazanim nadalje u ovom radu vrednost koeficijenta  $k_1$  će biti jednaka jedinici, osim ukoliko drugačije ne bude eksplicitno rečeno.

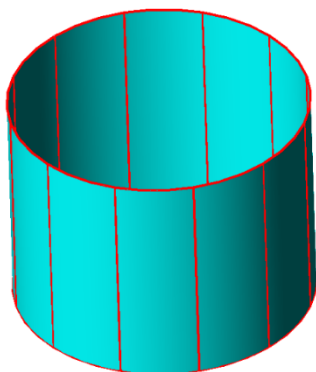
Kada je u pitanju dužinski parametar, jasno je da on ne treba da bude niži od zadate dimenzije elementa. U [121] je predloženo da ovaj parametar ima vrednost koja je jednaka dimenziji elementa. Međutim, kako cilj ove faze algoritma nije kreiranje četvorougane ili dominantno četvorougane mreže već samo kreiranje kvazi-planarnih površina čija će dalja segmentacija biti izvršena u narednim koracima, ovakvo ograničenje dimenzije kvazi-planarne površine nije potrebno. Zato se u [122] predlaže potpuno izostavljanje dužinskog parametra u procesu kreiranja poligonske aproksimacije izoparametarskih krivih. Pokazuje se da se na ovaj način značajno smanjuje broj kvazi-planarnih površina, te i ukupan broj elemenata u finalnoj mreži. Međutim, potpuno izostavljanje ovog parametra dovodi do kreiranja površina kojima u osnovnom domenu odgovaraju poligoni sa veoma velikim brojem čvorova, a čija segmentacija je vremenski veoma zahtevna. Iz navedenih razloga, a imajući u vidu da će sve kvazi-planarne površine biti segmentirane sa zadatom vrednošću za dimenziju elementa (označimo ovu vrednost sa  $d_s$ ), zaključujemo da je celobrojni umnožak dimenzije elementa dobar izbor za dužinsko ograničenje (označimo ga sa  $d_i$ ), tj.:

$$d_i = k_2 d_s \quad (64)$$

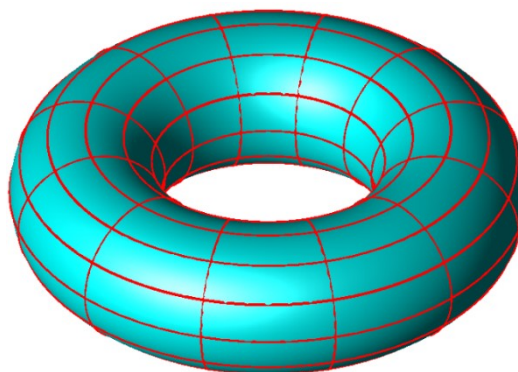
gde je  $k_2$  ceo broj. Kako bi se pomirili zahtevi za minimizacijom broja elemenata u mreži i trajanju procesa segmentacije, u svim primerima prikazanim u ovom radu konstanta  $k_2$  je postavljena na vrednost 10, osim ukoliko drugačije nije eksplicitno naglašeno.

Osim navedenih parametara, u procesu kreiranja poligonske aproksimacije izoparametarskih linija u obzir se uzima i tolerancija za ukрупnjavanje. Jedino u slučaju kada je na analiziranoj površini zadato lokalno podešavanje za dimenziju elementa i/ili površinsku ugaonu toleranciju, tolerancija za ukрупnjavanje se ne uzima u obzir.

Podela cilindrične i torusne površine sa ugaonom tolerancijom od  $30^\circ$  i bez ograničenja vezanog za dužinsku toleranciju prikazana je na slici 48. Cilindrična površina je podeljena na 12 kvazi-planarnih površina, gde linije podele odgovaraju čvorovima poligonske aproksimacije  $v$ -izoparametarske linije. Torusna površina je podeljena na 144 kvazi-planarne površine, gde su linije podele dobijene iz po 12 čvorova poligonske aproksimacije  $u$  i  $v$  izoparametarskih linija.



a) Cilindrična površina.



b) Torusna površina.

Slika 48. Podela cilindrične (a) i torusne (b) površine sa ugaonom tolerancijom od  $30^\circ$ .

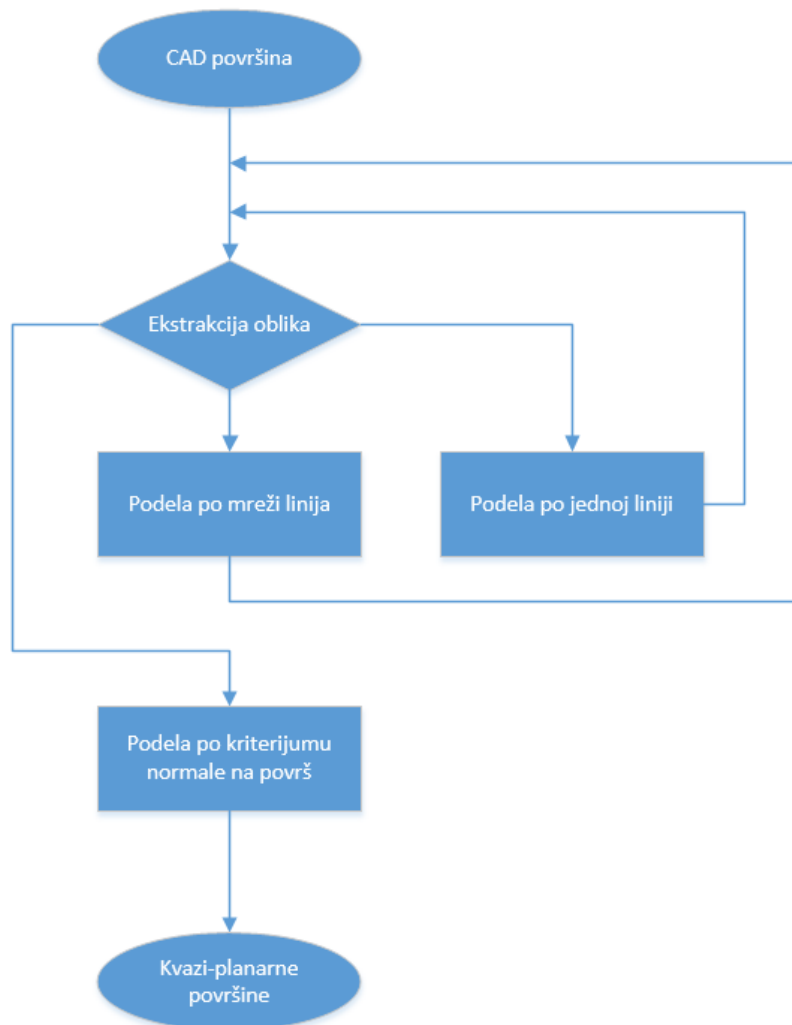
Obe prethodno prikazane površine imale su veoma jednostavan oblik. Već je rečeno da su i  $u$ - i  $v$ -izoparametarske linije cilindra međusobno identične. Kada je reč o torusu sa slike 48b, njegove  $v$ -izoparametarske linije su kružnice jednakih radijusa, dok su  $u$ -izoparametarske linije takođe kružnice, ali im se radijusi međusobno razlikuju. Kako se linije podele određuju na osnovu poligonske aproksimacije izoparametarske linije, ukoliko se u računanju ove aproksimacije u obzir uzima samo ugaoni parametar razlika u radijusu nije od interesa. Dakle, u slučaju cilindrične i torusne površine, kao i svih drugih površina čije  $u$ , odnosno  $v$ , izoparametarske linije imaju osobinu međusobne sličnosti, određivanje linija podele može se izvršiti na osnovu poligonske aproksimacije proizvoljnih  $u$  i  $v$  izoparametarskih linija. Za sve površi kod kojih ovo nije slučaj optimalne linije podele ne mogu biti dobijene na osnovu analize samo po jedne  $u$  i  $v$  izoparametarske linije. Takođe, podatak o sličnosti izoparametarskih linija jedne površine nije unapred poznat.

U cilju generalizacije algoritma i dobijanja optimalnih linija podele za proizvoljnu površinu potrebno je pre same podele izvršiti ekstrakciju oblika površine. Takođe, iz razloga koji će kasnije biti detaljnije objašnjeni, osim podele koja je diktirana poligonskom aproksimacijom izoparametarskih linija vršimo i podelu po kriterijumu normale na površ. Dijagram toka algoritma za podelu površine na kvazi-planarne površine dat je na slici 49. Opis pojedinih delova ovog algoritma dat je u poglavljima 6.1 do 6.4. Opis postupka za relaksaciju parametara podele, koja se primenjuje kod izbora svake od optimalnih linija podele, dat je u poglavlju 6.5.

## 6.1. Ekstrakcija oblika površine

Ekstrakcija oblika površine se radi isključivo na osnovu analize izoparametarskih linija. Ovu ekstrakciju vršimo kako bismo utvrdili optimalan način za podelu površine.

Najpre je potrebno odrediti broj  $u$  i  $v$  izoparametarskih linija, koji se analizira. U prvom koraku se po svakoj koordinati,  $u$  i  $v$ , izdvoji izvestan broj izoparametarskih linija, koje su ekvidistantne u parametarskom prostoru površine. U svim primerima prikazanim u ovom radu koristi se po 5 izoparametarskih linija izdvojenih po obe koordinate. Za svaku izdvojenu liniju se odredi poligonska aproksimacija. Za broj izoparametarskih linija koji će biti analiziran po  $u$ -koordinati uzima se maksimalan broj čvorova u poligonskim aproksimacijama izoparametarskih linija po  $v$ -koordinati, i obratno. Primera radi, za cilindar slike 47 maksimalan broj čvorova po  $u$ -izoparametarskim linijama cilindra sa jednak je 12, a po  $v$ -izoparametarskim linijama 3.



Slika 49. Dijagram toka algoritma za podelu površine na kvazi-planarne površine.

U drugom koraku algoritma se analizira onaj broj ekvidistantnih parametarskih linija koji je određen kao potreban u prvom koraku algoritma - ove linije nazvaćemo *reprezentativnim linijama* površine. Za svaku od ovih linija se određuje poligonska aproksimacija. Označimo sa  $N_u^{(max)}$  i  $N_v^{(max)}$  maksimalan, a sa  $N_u^{(mean)}$  i  $N_v^{(mean)}$  srednji broj čvorova u poligonskim aproksimacijama  $u$  i  $v$  reprezentativnih linija, respektivno. Računamo na ovom mestu dve varijacije u broju čvorova u poligonskim aproksimacijama izoparametarskih krivih:

- relativna varijacija se računa kao:

$$\delta_u = \frac{N_u^{(max)}}{N_u^{(mean)}} \quad , \quad \delta_v = \frac{N_v^{(max)}}{N_v^{(mean)}} \quad , \quad (65)$$

- apsolutna varijacija se računa kao:

$$\Delta_u = N_u^{(max)} - N_u^{(mean)} \quad , \quad \Delta_v = N_v^{(max)} - N_v^{(mean)} \quad . \quad (66)$$

Za površinu kažemo da je ima *uniformnu zakrivljenost* ukoliko su obe varijacije ispod zadatog praga po obe koordinate,  $u$  i  $v$ , tj. ukoliko važi sledeće:

$$\Delta_{u,v} < C_1 \quad \text{i} \quad \delta_{u,v} < C_2 \quad (67)$$

Konstante  $C_1$  i  $C_2$  imaju vrednosti 2 i 1.25, respektivno, u svim primerima prikazanim u ovom radu. Drugim rečima, površinu proglašavamo površinom uniformne zakrivljenosti ukoliko ne postoji velika varijacija u broju čvorova u poligonskim aproksimacijama njenih izoparametarskih linija.

Površina uniformne zakrivljenosti odmah se deli po mreži izoparametarskih linija, dok se u suprotnom podela vrši po pojedinačnim linijama.

## 6.2. Podela po mreži izoparametarskih linija

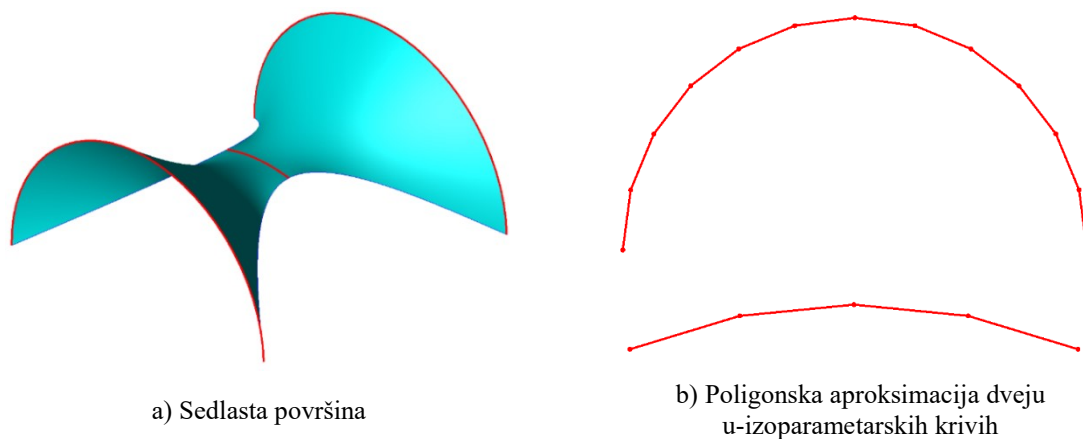
U prethodnom poglavlju je opisan način izbora reprezentativnih linija površine, kao i uslov koji površina treba da zadovolji da bismo je proglasili uniformno zakrivljenom. Jednom kada je za posmatranu površinu utvrđeno da ima uniformnu zakrivljenost, linije podele se određuju na osnovu čvorova poligonskih aproksimacija onih izoparametarskih linija čije poligonske aproksimacije imaju najveći broj čvorova,  $N_u^{(max)}$  i  $N_v^{(max)}$ . Podela površine se zatim vrši po mreži koju formiraju ove krive. Podele površina prikazanih na slikama 47 i 48 dobijene su na ovaj način.

Algoritmi za ekstrakciju oblika površine i izbor linija podele su heuristički algoritmi koji ni na koji način ne garantuju da će sve površine nastale ovom podelom biti kvazi-planarne. (Iz definicija površi u Parasolid tehnologiji, datih u Prilogu B lako se vidi da će ovo biti slučaj za većinu površi, ali ne nužno i za kompleksne NURBS površi.) Iz tog razloga sve površine nastale podelom ponovo prolaze kroz ceo postupak podele, kao što je prikazano na slici 49. Isto važi i za površine nastale podelom po pojedinačnim linijama, koja je opisana u sledećem poglavlju.

Kada je reč o implementaciji ove podele u Parasolid tehnologiji, sama tehnologija ne nudi funkciju koja deli površinu po mreži parametara ili krivih. Dodatno, iz razloga objašnjenih u poglavlju 6.5 podela po pojedinačnim parametrima (krivim) je preferirana u odnosu na podelu po mreži parametara (krivih). S obzirom da govorimo o podeli po parametarskoj liniji, nameće se korišćenje funkcije "PK\_FACE\_split\_at\_param". Međutim, iz razloga koji su navedeni u poglavlju 6.5, umesto direktnog korišćenja ove funkcije kriva se eksplicitno kreira, a zatim utiskuje na površinu primenom funkcije "PK\_FACE\_imprint\_curve". Iste funkcije se koriste i za podelu po pojedinačnim linijama.

## 6.3. Podela po pojedinačnim linijama

Ukoliko je u proceduri ekstrakcije oblika utvrđeno da površina nije uniformno zakrivljena, podela površine po prethodno opisanom algoritmu podele po mreži izoparametarskih linija nije optimalna. Ilustrovaćemo to na primeru sedlaste površine prikazane na slici 50a. Tri karakteristične  $u$ -izoparametarske linije prikazane su crvenom bojom, a poligonske aproksimacije jedne krajnje i jedne centralne linije sa ugaonom tolerancijom od  $15^\circ$  prikazane su na slici 50b. Ukoliko se podela ove površine izvrši po algoritmu opisanom u prethodnom poglavlju dobija se podela prikazana na slici 51a. Ova podela jeste uniformna, a sve površine su topološki četvorouglovi, ali je broj površina veoma veliki i iznosi 108. Očigledno je sa slike da je ravni deo u okolini centralnog dela površine izdelfjen značajno više nego što je to neophodno.



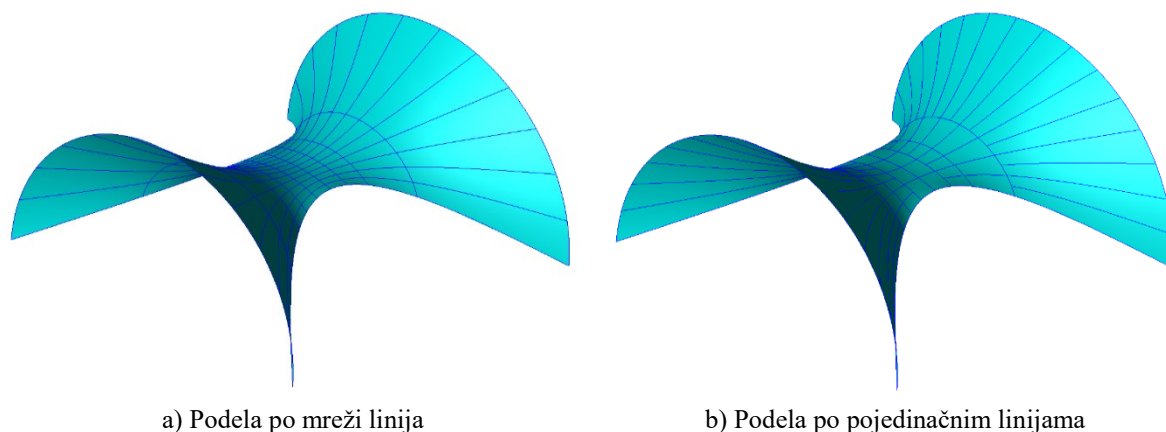
Slika 50. Sedlasta površina i poligonska aproksimacija dveju  $u$ -izoparametarskih linija.

Kako bi se rešio navedeni problem, u slučaju površina koje nisu uniformno zakrivljene podela se vrši u iterativnom postupku. U svakoj iteraciji se podela vrši po jednoj izoparametarskoj liniji, a površine koje nastaju ovom podelom ulaze u novi proces ekstrakcije oblika i podele (slika 49). Ukoliko po jednoj od koordinata ( $u$  ili  $v$ ) nema potrebe vršiti podelu ( $N^{max} = 2$ ), uzima se izoparametarska linija po drugoj koordinati. U suprotnom se izbor koordinate po kojoj će podela biti izvršena vrši se na osnovu varijacije broja čvorova u poligonskim aproksimacijama  $u$  i  $v$  reprezentativnih linija. Osnovna ideja jeste da površine dobijene podelom po izabranoj liniji imaju što uniformniju zakrivljenost. Iz tog razloga se za liniju podele uzima ona koja je izoparametarska po koordinati po kojoj je:

- veća relativna varijacija u broju čvorova u poligonskim aproksimacijama izoparametarskih linija,
- ukoliko su relativne varijacije međusobno jednake, liniju podele biramo po koordinati po kojoj je veća apsolutna varijacija u broju čvorova,
- ukoliko je varijacija jednaka po obe koordinate, linija podele se bira po koordinati po kojoj je veći maksimalan broj čvorova u poligonskim aproksimacijama,
- ukoliko su i varijacije i maksimalni broj čvorova jednaki, uzima se  $u$ -izoparametarska linija.

Kada je u pitanju sam izbor linije, tj. vrednost odgovarajućeg parametra, uzima se centralna linija iz mreže određene kao što je opisano u prethodnom poglavlju.

Kada se za podelu sedlaste površine prikazane na slici 50 primeni ovaj algoritam dobijaju se površine prikazane na slici 51b. Poređenjem sa modelom dobijenim podelom po mreži izoparametarskih krivih vidimo da je podela u zakrivljenim delovima geometrije ostala nepromenjena, dok u ravnijem centralnom delu površine više nemamo nepotrebne podele. Ukupan broj površina se smanjen sa 108 na 72.

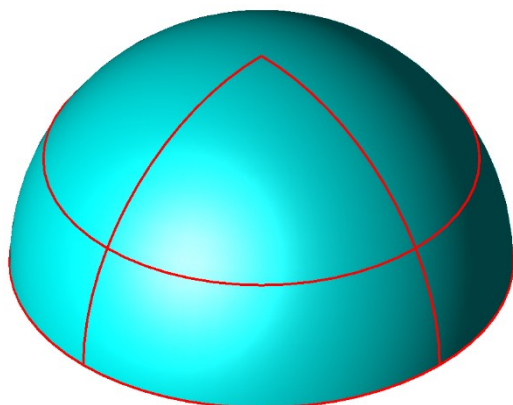


Slika 51. Podela sedlaste površine sa ugaonom tolerancijom od  $15^\circ$ .

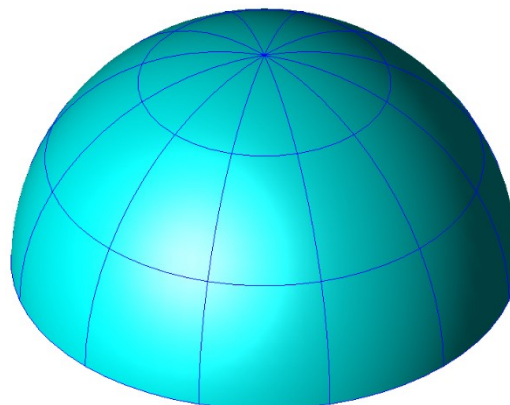
Ovde treba navesti i jedan specijalni slučaj. Posmatrajmo polusfernu površinu prikazanu na slici 52a.  $u$ -izoparametarske linije su međusobno identične krive oblika četvrtine kružnice, dok su  $v$ -izoparametarske linije kružnice čiji se radijusi međusobno razlikuju. Po dve  $u$  i  $v$  izoparametarske linije prikazane su crvenom bojom na slici 52a. Karakteristično za ovakvu površinu, a što nije bio slučaj sa do sada razmatranim površinama, jeste činjenica da se sve izoparametarske linije po jednoj koordinati ( $u$ -koordinata u ovom slučaju) stiču u jednoj tački. Ovu tačku nazvaćemo *polom* date površine. Bilo da primenimo podelu površine po mreži izoparametarskih linija ili po jednoj po jednoj liniji dobićemo podelu sličnu onoj sa slike 52b. Problem u ovakvoj podeli jesu površine koje se stiču u polovima, čijom segmentacijom će nastati elementi niskog faktora kvaliteta (utoliko nižeg koliko je niža vrednost površinske ugaone tolerancije). Sam pol će u finalnoj mreži predstavljati čvor visoke valence (vrednost valence biće veća ili jednaka broju kvazi-planarnih površina koje se susstiču u polu).

Kako bismo rešili ovaj problem, na površinama na kojima su detektovani polovi najpre treba izvršiti izdvajanje dela površine sa polom. Izdvajamo zato onu izoparametarsku liniju koja se završava u polu i čija poligonska aproksimacija ima najviše čvorova. Podela površine se vrši po parametru koji odgovara onom čvoru u aproksimaciji ove linije koji je najbliži polu. Ovakva podela na primeru polusferne površine prikazana je na slici 53a. Deo površine na kom se nalazi pol se dalje ne deli po kriterijumima vezanim za izoparametarske linije, već se dalje analizira po kriterijumu normala na površ (poglavlje 6.4). Deo površine na kome nema polova prolazi kroz standardnu proceduru ekstrakcije oblika i podele. Podela polusferne površine dobijena primenom opisanog postupka prikazana je na slici 53b.

Iz svega rečenog je jasno da ne postoji suštinska razlika između algoritama za podelu površine po mreži linija i podele po jednoj po jednoj liniji, te da bismo drugi algoritam mogli uvek da koristimo, jer u opštem slučaju rezultira manjim brojem površina. Međutim, manji broj površina sam po sebi nije garancija da će broj elemenata u finalnoj mreži biti manji, jer su površine dobijene podelom po mreži linija topološki jednostavnije. Iz tog razloga forsiramo podelu po mreži linija kad god neuniformnost zakrivljenosti površine, tj. vrednost konstanti  $C_1$  i  $C_2$  iz jednačine (67), nije suviše velika. Uz to, efikasnost prvog algoritma je veća jer se ekstrakcija oblika površine vrši samo jednom, dok se u drugom algoritmu ona vrši nakon svake podele površine po izabranoj liniji.



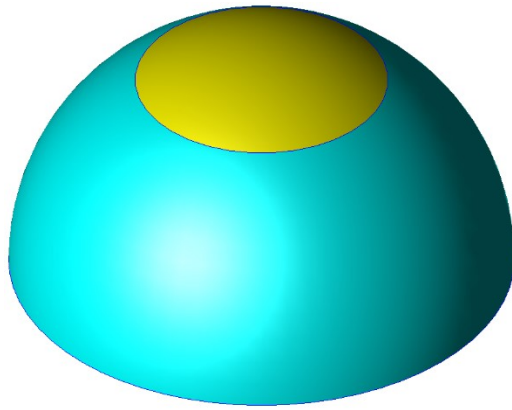
a) Polusferna površina



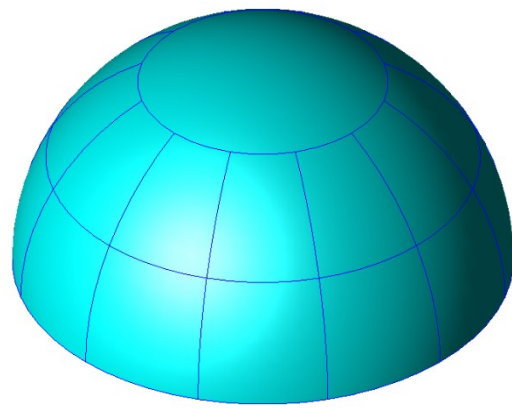
b) Podela sa ugaonom tolerancijom od  $30^\circ$

Slika 52. Podela polusferne površine, bez specijalnog tretmana pola.





a) Izdvojena površina sa polom (žuta boja)



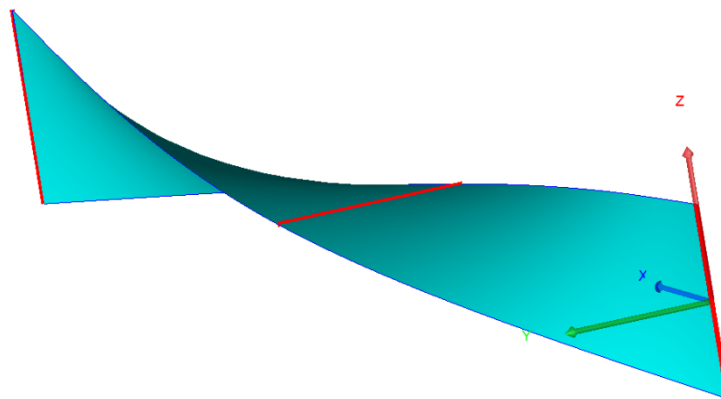
b) Podela sa ugaonom tolerancijom od 30°

Slika 53. Podela polusferne površine, sa specijalnim tretmanom pola.

## 6.4. Podela na osnovu normale na površ

Metoda za ekstrakciju oblika površine i određivanje optimalnih linija za podelu, opisana u prethodna tri poglavlja, zasniva se na analizi izoparametarskih linija. Za većinu površina sa kojima se srećemo u praksi ova analiza se pokazala kao veoma dobra. Postoje, međutim, površine kod kojih se ekstrakcija oblika ne može izvršiti na osnovu analize oblika izoparametarskih linija. Jedan od najjednostavnijih primera jeste bilinearna površ, kod koje su sve izoparametarske linije prave, a sama površ može biti zakrivljena.

Na slici 54 je data površina koja je dobijena operacijom *Loft* kroz tri prave linije dužine 1 mm (linije su prikazane u crvenoj boji). Prva linija je postavljena duž  $z$ -ose, dok su druge dve dobijene translacijom za po 5 mm i rotacijom oko  $x$ -ose za ugao od 90°. Sve  $u$ -izoparametarske linije su prave linije, što važi i za centralnu  $v$ -izoparametarsku liniju. Najveće zakrivljenje imaju  $v$ -izoparametarske krive koje odgovaraju ivicama površine, a ukupna promena ugla tangente duž ove ivice iznosi približno 16.7°. Ukoliko se podela površine vrši sa ugaonom tolerancijom od 30°, jasno je da površina neće biti podeljena. Sa druge strane, jasno je da površina nije kvazi-planarna. Vektor normale na površinu u njenom parametarskom centru ima smer  $z$ -ose, pa će se ivice površine koje su paralelne  $z$ -osi projektovati u jednu tačku u ravni određenoj ovim vektorom.



Slika 54. Zakrivljena površina sa malim zakrivljenjem izoparametarskih linijama.

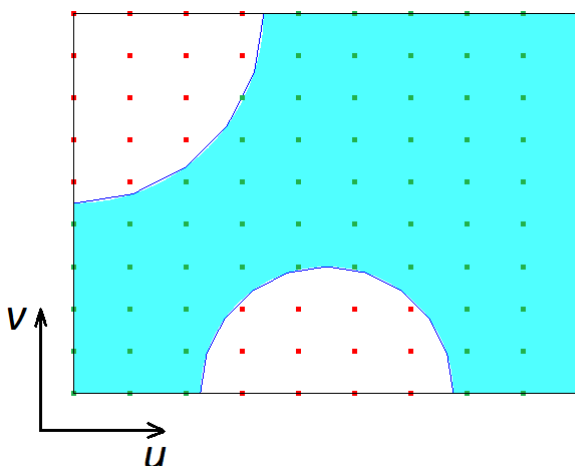
U slučaju ovakvih površina provera kvazi-planarnosti i određivanje linija podele sprovodi se na osnovu analize vektora normale na površinu u izvesnom broju kontrolnih tačaka. U algoritmu opisanom u ovom radu to se vrši tako što se najpre odredi minimalni pravougaonik u parametarskom prostoru, na čijim naspramnim stranicama  $u$ , odnosno  $v$  parametar imaju konstantu vrednost, a potpuno okružuje posmatranu površinu. (Ovaj pravougaonik se dobija direktno korišćenjem Parasolid funkcije “PK\_FACE\_find\_uvbox”.) Zatim se u ovom pravougaoniku kreira uniformna mreža

izoparametarskih linija u čijim presecima se nalaze čvorovi koji su nam od interesa, kao što je prikazano na slici 55. Broj linija koji se u startu uzima u razmatranje ne sme biti premali kako eventualne velike zakrivljenosti koje su lokalizovane na malom prostoru ne bi bile preskočene, ali ni preveliki, kako efikasnost algoritma ne bi bila ugrožena. U predloženom algoritmu ovaj broj je fiksiran na 20 po obe ose, tj. ukupan broj čvorova u uniformnoj mreži iznosi 400. Za sve čvorove iz posmatrane mreže odrede se koordinate odgovarajućih tačaka na površi (primenom Parasolid API funkcije “PK\_SURF\_eval”). Tačku koja odgovara čvoru  $(u, v)$ , označićemo kao  $\mathbf{t}(u, v)$ . Ove se tačke, kao i odgovarajući čvorovi, klasifikuju u dve grupe:

- Tačke koje se nalaze na posmatranoj površini, i u kojima se računa vektor normale na površ. Odgovarajući čvorovi su označeni zelenom bojom na slici 55.
- Tačke koje se ne nalaze na posmatranoj površini ne uzimaju se u dalje razmatranje. Odgovarajući čvorovi su označeni crvenom bojom na slici 55.

Osim normala u ovim tačkama određuje se i normala u parametarskom centru površine (koja će definisati referentnu ravan za datu površinu, ukoliko površina ne bude dalje deljena). Da bi površina mogla da bude kvazi-planarna, moraju biti zadovoljeni sledeći uslovi:

- Ugao između normala na površinu u ma koje dve tačke mora biti manji od  $180^\circ$ .
- Ugao između normale u parametarskom centru površine i normale u ma kojoj drugoj tački površine mora biti manji od  $90^\circ$ .



Slika 55. Minimalni parametarski pravougaonik i odgovarajuća mreža kontrolnih čvorova.

Nakon što su određene normale u svim tačkama određenim na opisani način, računaju se uglovi između normala u tačkama koje su susedi po  $u$  ili po  $v$  parametru. Ukoliko se utvrdi da je ugao između neke dve normale veći od praga koji se određuje kao ugao od  $180^\circ$  podeljenog brojem segmenata u mreži duž datog parametra, u slučaju opisanog algoritma to je  $\frac{180^\circ}{20-1} = 9.5^\circ$ , dodaje se još jedna kontrolna tačka na polovini posmatranog segmenta. Postupak se ponavlja iterativno sve dok uglovi između svake dve normale u tačkama susednim po  $u$  ili po  $v$  parametru ne postanu manji od zadanog praga.

Postupak određivanja linije podele nastavlja se kroz dva koraka. U prvom koraku se određuju uglovi između normala u svake dve kontrolne tačke. U slučaju da za dve tačke važi da je:

$$\angle\{\mathbf{n}(u_i, v_j), \mathbf{n}(u_k, v_l)\} > 180^\circ - \Delta \quad (68)$$

gde je  $\Delta$  ugaona tolerancija, koja je u svim primerima iz ovog rada podešena na  $10^\circ$ , dok je  $\mathbf{n}(u_i, v_j)$  normala u tački sa koordinatama  $(u_i, v_j)$ , linija podele će biti izoparametarska linija koja leži između ovih tačaka. Pri računanju same linije podele, najpre se računaju ukupne zakrivljenosti

između tačaka koje definišu izoparametarske stranice četvorougla čija je dijagonala definisana tačkama  $\mathbf{t}(u_i, v_j)$  i  $\mathbf{t}(u_k, v_l)$  i određuje se najveća među datim zakrivljenostima. Ukoliko je zakrivljenost maksimalna po  $u$ -parametru podela se vrši po  $u$  izoparametarskoj liniji određenoj parametrom  $u = \frac{u_i + u_j}{2}$ . Analogno važi za slučaj kada je maksimalna zakrivljenost duž  $v$ -parametra.

U ovom postupku se polazi od najudaljenijih tačaka, koje su određene koordinatama  $(u_{\min}, v_{\min})$  i  $(u_{\max}, v_{\max})$ , a zatim se ide prema unutrašnjosti površine. Na ovaj način se u proseku smanjuje složenost algoritma, jer je veća verovatnoća da su tačke u kojima normale na površ zaklapaju veliki međusobni ugao udaljene tačke, nego da se radi o međusobno bliskim tačkama.

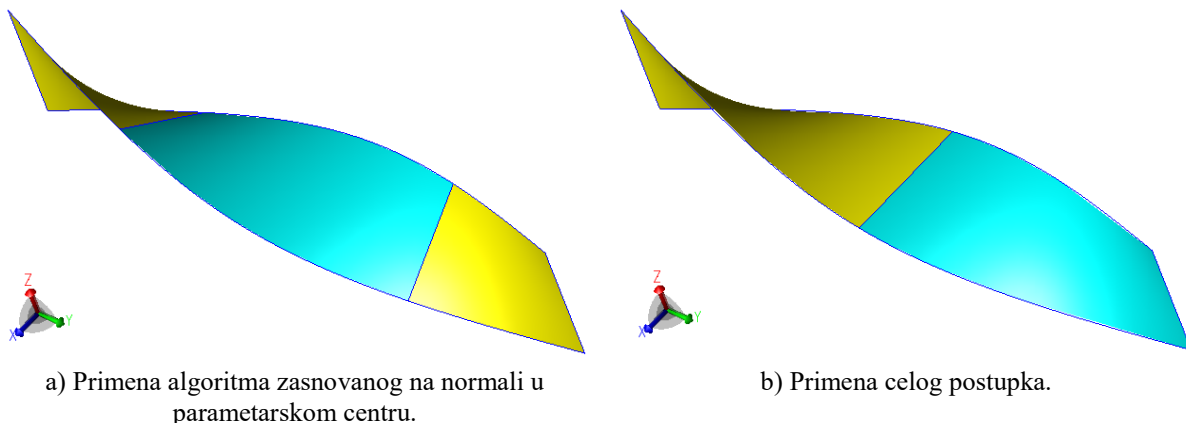
S obzirom da je referentna ravan definisana normalom na površinu u njenom parametarskom centru, opisana analiza nije dovoljna za prepoznavanje svih površina koje nisu kvazi-planarne u odnosu na ovu ravan. Iz tog razloga se u slučaju da nije pronađen ni jedan par tačaka koji zadovoljava jednačinu (68) sprovodi dodatna analiza u kojoj se računa ugao između normale na površ u njenom parametarskom centru i normala u kontrolnim tačkama. Ukoliko za neku tačku važi sledeće:

$$\angle\{\mathbf{n}(u_c, v_c), \mathbf{n}(u_i, v_j)\} > 90^\circ - \Delta \quad (69)$$

gde je  $(u_c, v_c)$  parametarski centar površine, a  $\Delta$  ugaona tolerancija, koja je u svim primerima iz ovog rada podešena na  $5^\circ$ , površinu treba deliti po izoparametarskoj liniji koja leži između date tačke i parametarskog centra površine. Sama linija podele se određuje na način opisan za slučaj dveju kontrolnih tačaka.

Očigledno je da je uslov definisan jednačinom (69) strožiji od onog definisanog jednačinom (68). Isto tako, složenost drugog algoritma je značajno manja, jer on podrazumeva računanje  $N$  uglova, gde je  $N$  broj kontrolnih tačaka, dok se kod prvog algoritma računa  $\frac{N^2-1}{2}$  uglova. Međutim, prvi algoritam uz uslov da se u postupku računanja uglova između normala polazi sa suprotnih krajeva površine daje generalno manji broj površina. Primera radi, za model sa slike 54 primena prvog algoritma (kao i primena celog opisanog postupka) daje dve identične površine, dok samo primena drugog algoritma daje tri površine od kojih je centralna dvostruko veća od ostale dve. Ovo je ilustrovano na slici 56, gde je zbog jasnoće prikaza svaka druga površina (idući duž  $y$ -ose) obojena žutom bojom.

Kako je broj površina koje se dele primenom ovog postupka u modelima sa kojima se srećemo u praksi veoma mali, a kako je složenost algoritma koji se zasniva na strožijem uslovu značajno manja, kod primene ovog postupka najpre se utvrđuje da li je površ potrebno deliti na osnovu strožijeg uslova. Ukoliko to nije slučaj, manje strogo uslov, koji podrazumeva računanje velikog broja uglova među normalama, uopšte se ne proverava.

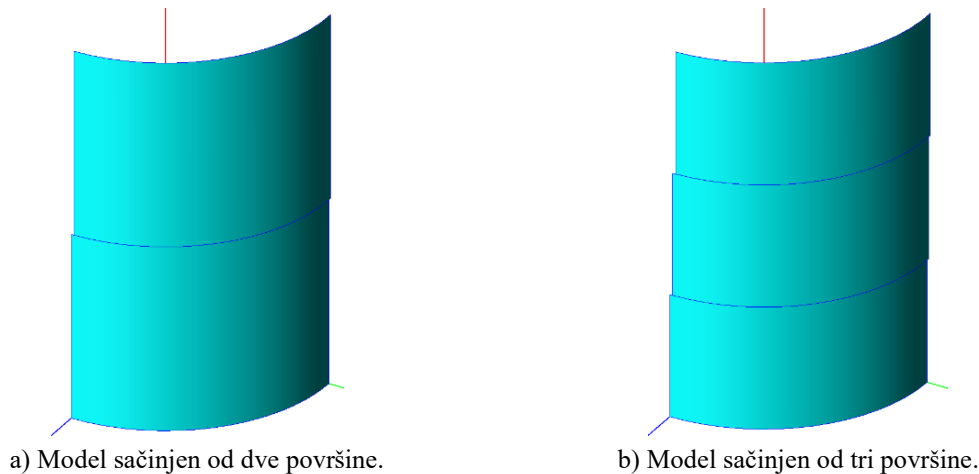


Slika 56. Podela površine na osnovu normala na površ.

## 6.5. Relaksacija parametara podele

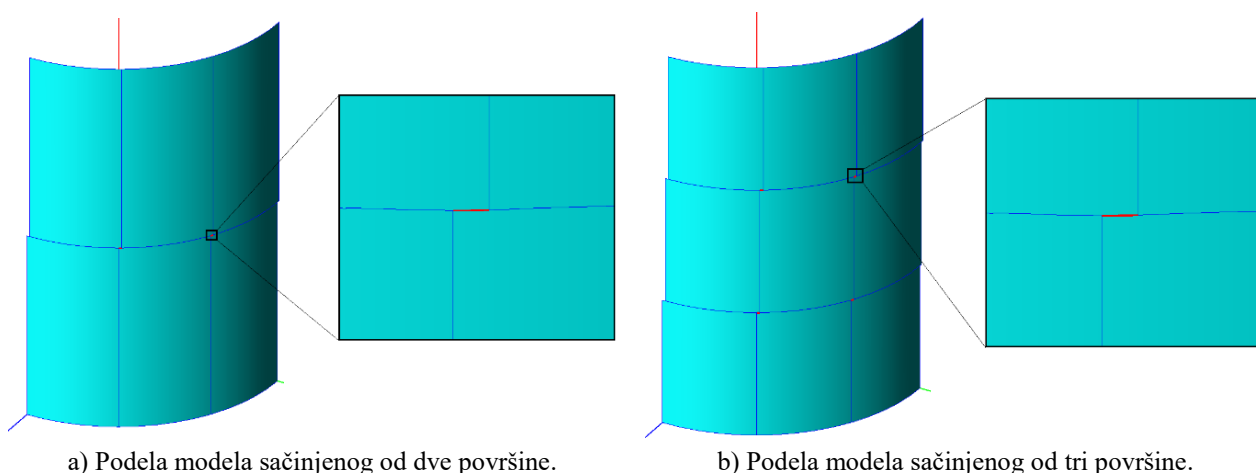
U svim do sada analiziranim primerima posmatrali smo usamljene površine. Površine su u praksi obično deo složenijih struktura, pa je i u podeli jedne površine na kvazi-planarne delove potrebno uzeti u obzir način na koji je ona povezana sa susednim površinama.

Posmatrajmo dva jednostavna modela prikazana na slici 57. Modeli se sastoje od dve, odnosno tri, površine oblika četvrtine omotača cilindra. Površine su međusobno identične, ali je idući duž  $z$ -ose svaka površina zarotirana za  $1^\circ$  oko  $z$ -ose u odnosu na prethodnu površinu.



Slika 57. Modeli sa identičnim površinama, smaknutim za  $1^\circ$ .

Pretpostavimo da je površinska ugaona tolerancija podešena na  $30^\circ$ , te da je podela svake površine izvršena po prethodno opisanim algoritmima. Očigledno je da će podela biti izvršena samo duž  $u$ -izoparametarskih krivih, i to tako što će svaka površina biti podeljena na po 3 podudarne površine. Modeli nakon ove podele prikazani su na slici 58. Problem koji se javlja u ovim modelima jeste pojava veoma kratkih ivica duž ivice koja je predstavljala granicu između originalnih površina. Kratke ivice na CAD geometriji će uzrokovati nastanak kratkih ivica u finalnoj mreži, odnosno nastanak trapezoidnih elemenata niskog faktora kvaliteta.



Slika 58. Podela modela sa smaknutim površinama, bez relaksacije parametara podele.

Kao rešenje ovog problema uvodi se relaksacija parametara segmentacije, tako da se dozvoli blago povećanje dužinskih i ugaonih tolerancija. Na taj način se dozvoljava pomeranje veoma bliskih linija podele susednih površina kako bi se one susticale u istom čvoru, umesto da formiraju kratku ivicu.

Koji god od prethodno opisanih algoritama podele da je u pitanju, podela se u jednom trenutku uvek vrši po samo jednoj izoparametarskoj krivoj. Umesto da se podela vrši po originalnoj površini, kreira

se kopija površine, pa se inicijalna podela po izoparametarskoj krivoj vrši na kopiji. Nakon što je podela izvršena analiziraju se ivice koje izlaze iz čvorova koji su nastali u procesu podele, a u cilju određivanja ivica duž kojih treba izvršiti pomeranje linije podele.

Uvodimo na ovom mestu ugaonu i dužinsku toleranciju, koje se definišu kao:

$$\begin{aligned}\varphi_{\text{tol}} &= \frac{t}{100} \cdot \varphi_s \\ d_{\text{tol}} &= \frac{t}{100} \cdot \min(d_s, l_e^{(\text{mean})})\end{aligned}\tag{70}$$

gde je  $t$  faktor relaksacije parametara podele dat u procentima,  $\varphi_s$  i  $d_s$  su površinska ugaona tolerancija i dimenzija elementa na posmatranoj površini. Parametar  $l_e^{(\text{mean})}$  predstavlja srednju vrednost dužine ivice date površine. Ukoliko se za ma koju od analiziranih ivica utvrdi da je njena dužina manja od dužinske tolerancije  $d_{\text{tol}}$ , definisane prethodnim izrazom, data ivica se proverava i po ugaonom kriterijumu. Provera po ugaonom kriterijumu podrazumeva računanje vektora normale na površinu u čvorovima posmatrane ivice i računanje ugla među ovim vektorima. Ukoliko je ovaj ugao manji od ugaone tolerancije  $\varphi_{\text{tol}}$ , definisane jednačinom (70), za datu ivicu kažemo da je ivica po kojoj treba izvršiti pomeranje linije podele. Označićemo ovakvu ivicu kao *kompresibilnu*.

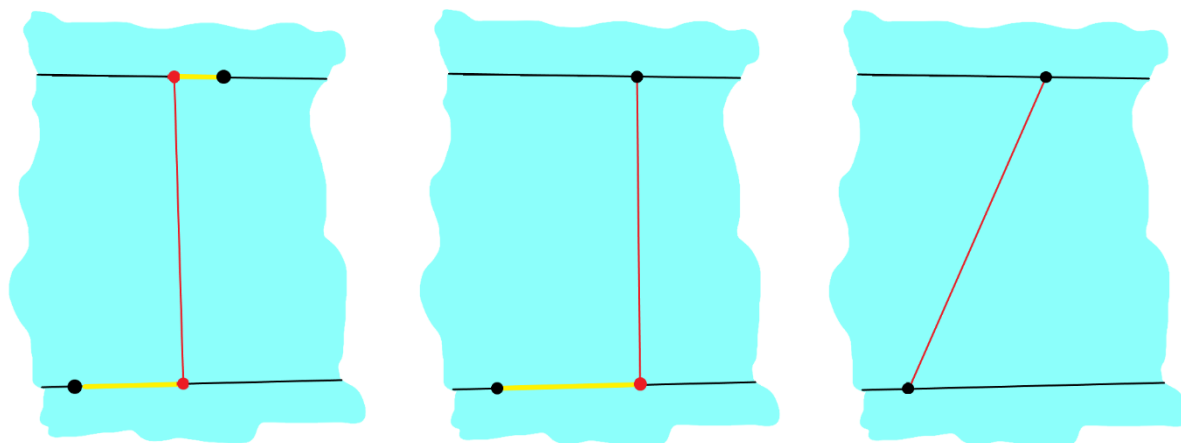
Ukoliko u prethodno opisanoj analizi nije pronađena ni jedna kompresibilna ivica, nema promene ni u liniji podele. Ukoliko je pronađena makar jedna kompresibilna ivica nova linija podele određuje se u dva koraka (slika 59):

- U prvom koraku se određuje se izoparametarska kriva koja odgovara čvoru najkraće kompresibilne ivice koji ne predstavlja novi čvor, a koja je izoparametarska po istom parametru kao i inicijalno određena linija podele. Podela se zatim vrši po novoj izoparametarskoj liniji podele, ali opet na kopiji površine.
- U drugom koraku se vrši analiza ivica nastalih podelom po izoparametarskoj liniji određenoj u prvom koraku ovog postupka. Ukoliko na strani novonastalog čvora postoje kompresibilne ivice, vrši se pomeranje linije podele duž najkraće od njih, tako da se linija podele poklopi sa čvorom koji nije novonastali čvor.

Jasno je da se u prvom koraku algoritma vrši samo promena parametra podele, a da linija podele ostaje izoparametarska. U drugom koraku, međutim, pomera se samo jedan čvor linije podele, te ona ne ostaje izoparametarska. Linija podele se u tom slučaju određuje kao linija koja odgovara duži koja spaja slike svoja dva čvora u parametarskom prostoru površine. Ova se duž ekvidistantno deli na izvestan broj segmenata, a na površini se odrede tačke koje odgovaraju čvorovima ove podele. Broj segmenata se dobija kao veći od broja segmenata u poligonskim aproksimacijama izoparametarskih linija koje odgovaraju čvorovima linije podele. Poligonska aproksimacija se određuje tako da je maksimalna dužina segmenta jednaka dimenziji elementa, a ugaona tolerancija jednaka površinskoj ugaonoj toleranciji. Konačno, linija podele se dobija projekcijom na površinu krive dobijene fitingom kroz ove tačke.

Kada je u pitanju implementacija opisanog postupka u Parasolid tehnologiji, koriste se sledeće API funkcije:

- Za dobijanje fitovane krive kroz zadati skup tačaka: “PK\_BCURVE\_create\_spline\_2”.
- Za određivanje normalne projekcija fitovane krive na površinu: “PK\_FACE\_imprint\_cus\_normal”.
- Podela površine po krivoj vrši se primenom funkcije “PK\_FACE\_imprint\_curve”, bez obzira na to da li je kriva izoparametarska ili ne.



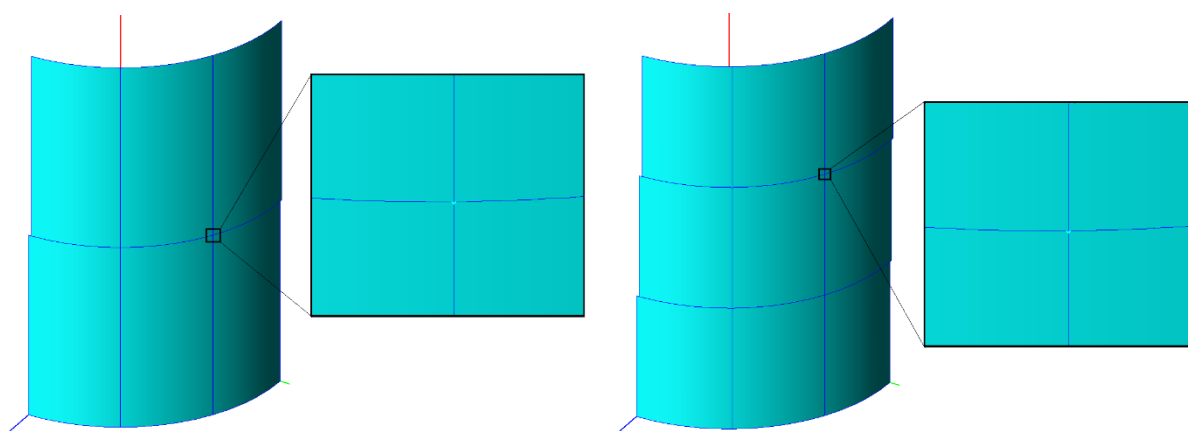
a) Inicijalna izoparameterska kriva podele.

b) Pomeranje krive podele po parametru.

c) Finalna kriva podele.

Slika 59. Pomeranje krive po kojoj se deli površina. (Crne tačke – originalni čvorovi, crvene tačke – čvorovi nastali podelom, crvena linija – linija podele, žuta linija – kompresibilne ivice)

Podela modela sa slike 57, kada je uvedena relaksacija parametara podele sa faktorom od 10%, prikazana je na slici 60. Broj površina nakon podele je ostao nepromenjen, ali su eliminisane kratke ivice. U modelu koji se sastoji iz dve površine, sve promene linija za podelu svode se na promene parametra izoparameterskih linija, jer se kompresibilne ivice nalaze samo na granici dveju površina, tj. samo na jednoj strani linija za podelu. U slučaju modela koji se sastoji od tri površine, tip promene zavisi od redosleda podele površina. Ukoliko se površine dele tako što se izvrši podela dveju površina na krajevima modela, a zatim se deli centralna površina, sve linije podele centralne površine određuju se u drugom koraku algoritma, tj. spajanjem dveju postojećih tačaka fitovanom krivom.

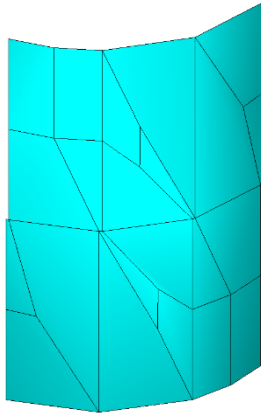


a) Podela modela sačinjenog od dve površine.

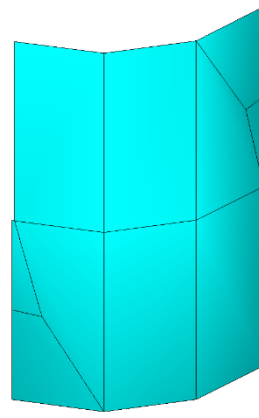
b) Podela modela sačinjenog od tri površine.

Slika 60. Podela modela sa smaknutim površinama, sa relaksacijom parametara podele.

Prikažaćemo na ovom mestu i finalnu mrežu modela sa slike 57, za slučajeve kada je primenjena relaksacija parametara podele sa faktorom od 10% i kada ova relaksacija nije primenjena. Dimenzija elementa je postavljena na vrednost koja je veća od maksimalne dimenzije modela, dok su površinska i ivična ugaona tolerancija podešene na  $30^\circ$ . Mreže su prikazane na slikama 61 i 62. Za model koji se sastoji od dve površine broj elemenata je smanjen sa 22 na 10 kada je relaksacija primenjena. U isto vreme je srednja vrednost faktora kvaliteta je porasla sa 0.41 na 0.77. Kada je u pitanju model koji se sastoji od tri površine, situacija je slična. Uvođenje relaksacije parametara podele smanjilo je broj elemenata sa 27 na 17, uz povećanje srednjeg faktora kvaliteta elementa sa 0.40 na 0.69.

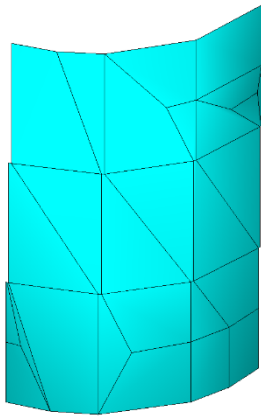


a) Bez relaksacije parametara podele.

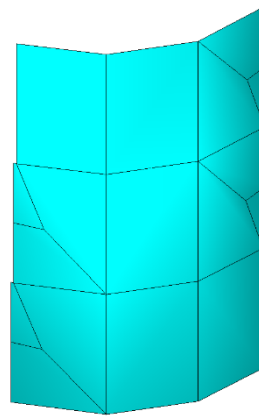


b) Sa relaksacijom parametara podele.

Slika 61. Mreža modela sačinjenog od dve površine smaknute po uglu.



a) Bez relaksacije parametara podele.



b) Sa relaksacijom parametara podele.

Slika 62. Mreža modela sačinjenog od tri površine smaknute po uglu.

## 6.6. Primeri podele na kvazi-planarne površine

Algoritam podele na kvazi-planarne površine opisan u prethodnim poglavljima biće u ovom poglavlju ilustrovan na dva međusobno veoma različita modela:

- Prvi model je model helikoptera prikazan na slici 63. Model je veoma kompleksan i sastoji se od 1 213 površina. Dužina helikoptera je približno 16 m, a dijametar rotora je oko 13 m.
- Drugi je model ljudske glave, prikazan na slici 64, koji se sastoji od samo 6 površina.

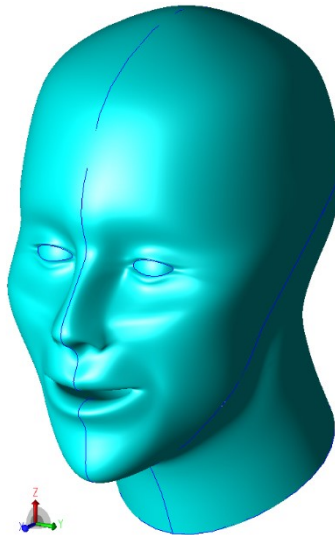
Modeli su međusobno veoma različiti. Model helikoptera se sastoji od velikog broja površina, ali su same površine veoma jednostavne, i pripadaju sledećim tipovima: ravan, sfera, cilindar, *swept* i *spun* površ. Sa druge strane, površine koje definišu lice u modelu ljudske glave su veoma složene NURBS površine. Interesantno je stoga videti ne samo finalni izgled podele na kvazi-planarne površine, već i vreme koje je potrebno za podelu i fazu podele u kojoj nastaje najveći broj kvazi-planarnih površina.

U tabelama 1 i 2, je dat broj površina nakon pojedinih faza podele, kao i trajanje pojedinih faza za model helikoptera i model ljudske glave, respektivno. Sve vrednosti su date za sledeće parametre segmentacije: dimenzija elementa je veća od dimenzije modela tako da ne utiče na podelu površina, površinska ugaona tolerancija je podešena na  $45^\circ$  za model helikoptera, a na  $60^\circ$  za model glave, tolerancija za ukрупnjavanje je  $10^{-4}$ , dok je faktor relaksacije parametara podele postavljen na 10%, za oba modela.





Slika 63. Model helikoptera.



Slika 64. Model ljudske glave.

Tabela 1 Broj površina nakon pojedinih faza podele i trajanje pojedinih faza za model helikoptera.

	Početak	Podela po mreži parametara	Podela po pojedinim parametrima	Podela na osnovu normale na površ
Broj površina	1 213	1 902	1 949	1 949
Vreme [s]	-	7.0	2.2	1.2

Tabela 2 Broj površina nakon pojedinih faza podele i trajanje pojedinih faza za model ljudske glave.

	Početak	Podela po mreži parametara	Podela po pojedinim parametrima	Podela na osnovu normale na površ
Broj površina	6	26	232	232
Vreme [s]	-	2.1	12.7	0.37

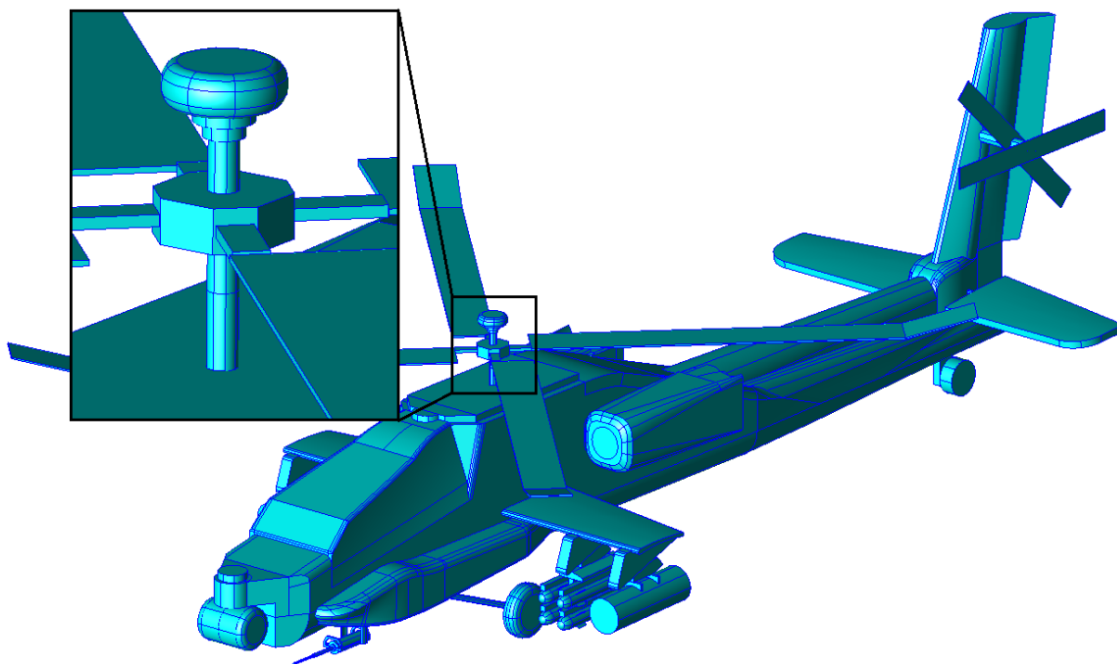


Na osnovu podataka datih u prethodnim tabelama možemo zaključiti da se segmentacija modela helikoptera koji se sastoji od površina jednostavnog ili relativno jednostavnog oblika uglavnom vrši primenom algoritma podele po mreži parametara. Ovo je sasvim očekivano, jer se radi o površinama uniformne zakrivljenosti. Na drugoj strani, model ljudske glave, koji sadrži složene neuniformno zakrivljene površine, dominantno se deli primenom algoritma koji podrazumeva iterativni postupak podele po pojedinim parametrima. Može se takođe primetiti da ni u jednom modelu ni jedna površina nije podeljena primenom algoritma koji se zasniva na analizi normala na površ.

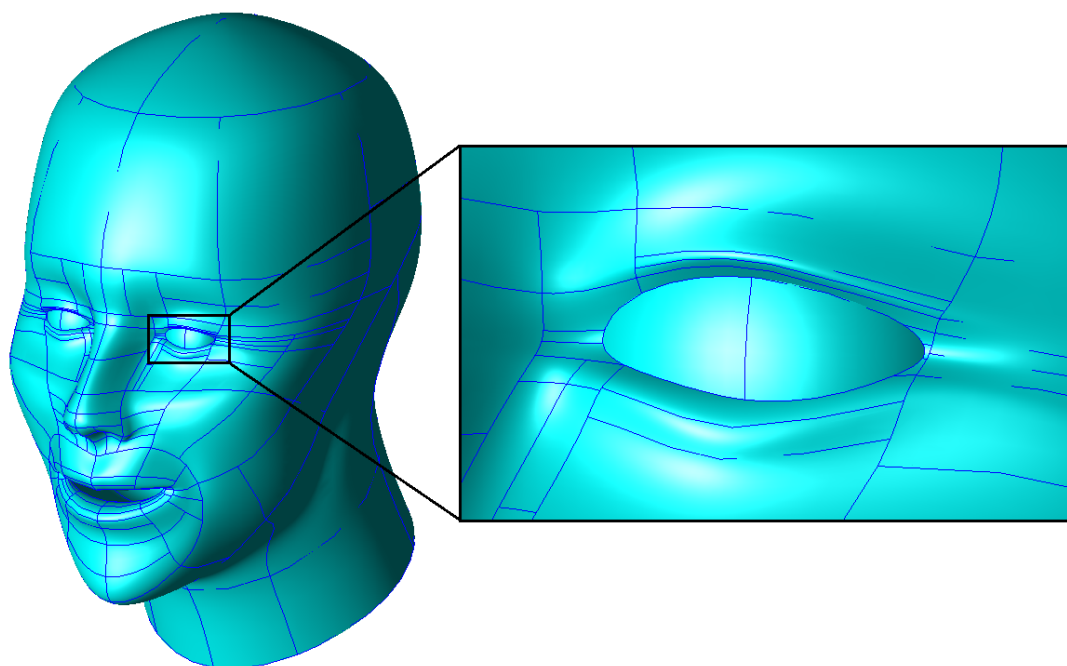
Trajanje podele na kvazi-planarne površine veoma je kratko za oba modela. Model helikoptera je podeljen za oko 10 sekundi, dok je model ljudske glave zahtevao nešto više vremena i njegova podela je izvršena za oko 15 sekundi. Razlog tome jeste nešto duže trajanje Parasolid funkcija kada se radi sa složenim NURBS površinama, kakve su površine koje modeluju lice.

Proces podele površina na kvazi-planarne nije paralelizovan. Generalno sam algoritam dozvoljava paralelizaciju, koja bi se zbog procesa relaksacije parametara podele gde podela jedne površine zavisi od podele njoj susednih površina, morala sprovesti po obrascu koji ne dozvoljava paralelno procesiranje susednih površina u različitim nitima. Međutim, dobar deo Parasolid funkcija koje se u ovom procesu koriste, tj. sve Parasolid funkcije koje podrazumevaju promenu geometrije, ne dozvoljavaju paralelno izvršavanje u većem broju niti. Prema tome, paralelizacija nije izvršena ne zbog karakteristika samog algoritma, već zbog ograničenja korišćene CAD tehnologije.

Modeli nakon podele na kvazi-planarne površine prikazani su na slikama 65 i 66. Vidimo da je podela izvršena paralelno sa glavnim pravcima zakrivljenosti za oba modela. Primera radi, u modelu helikoptera se vidi da cilindrični detalji nisu deljeni duž aksijalne ose, dok se u modelu glave vidi izduženost površina u pravcima paralelnim ivicama usana. Takođe se može primetiti izrazita neuniformnost podele u modelu glave, gde su površine najsitnije u oblastima najvećeg zakrivljenja (na primer u okolini očiju), a vidi se rast prema oblastima manje zakrivljenosti.



Slika 65. Model helikoptera nakon podele na kvazi-planarne površine.



Slika 66. Model ljudske glave nakon podele na kvazi-planarne površine.

## 7. Preslikavanje površina u osnovni domen

U trenutku kada su sve površine CAD geometrije podeljene na kvazi-planarne površine, moguće je izvršiti njihovo preslikavanje u osnovni domen. Kao što je već rečeno, osnovni domen predstavlja poligon u ravni. U daljem tekstu ćemo ovu ravan označavati kao referentnu ravan.

Referentna ravan može biti određena na različite načine. U [121] je predloženo korišćenje ravni koja predstavlja ravan minimalnog kvadratnog odstupanja u odnosu na tačke površine. Pokazuje se međutim da je određivanje ove ravni vremenski zahtevno. Sa druge strane, jedini zahtev koji referentna ravan treba da zadovolji jeste da normalna projekcija tačaka površine koja se segmentira na ovu ravan predstavlja bijektivnu funkciju. S obzirom da su sve površine podeljene na kvazi-planarne, jasno je da ravan čija se normala poklapa sa normalom na površinu u njenom parametarskom centru zadovoljava navedeni uslov. Određivanje ove ravni je trivijalno, te se stoga ona uzima za referentnu ravan za segmentaciju CAD površine.

Sledeći korak u preslikavanju površine u osnovni domen predstavlja kreiranje poligonske aproksimacije svih njenih ivica. Poligonska aproksimacija ivica se kreira primenom algoritma opisanog u glavi 5. Parametri aproksimacije su dimenzija elementa, ivična ugaona tolerancija i tolerancija za ukupnjavanje. Važno je napomenuti da se poligonska aproksimacija kreira samo jednom za svaku ivicu CAD geometrije, i kao takva se koristi u preslikavanju u osnovni domen svih površina kojima data ivica pripada. Na taj način se obezbeđuje usaglašenost mreže.

Određivanje poligonske aproksimacije se nezavisno vrši za sve ivice CAD geometrije, te je stoga paralelizacija ovog procesa veoma jednostavna. Takođe, u ovom postupku se ne koriste Parasolid funkcije koje menjaju geometriju, te nema tehnološkog ograničenja za paralelizaciju postupka.

Konačno, nakon što su određene referentna ravan i poligonska aproksimacija ivica površine, kreira se poligon koji predstavlja osnovni domen za segmentaciju površine. Poligon se kreira normalnim projektovanjem čvorova poligonske aproksimacije ivica površine na referentnu ravan. Na taj način svakom čvoru u poligonskoj aproksimaciji ivica površine odgovara čvor poligona u osnovnom domenu.

Kako se poligonske aproksimacije ivica poligona određuju na osnovu zadatih parametara mreže (dimenzija elementa, ivična ugaona tolerancija i tolerancija za ukupnjavanje), ne postoji garancija da će broj ukupan segmenata na zatvorenim petljama poligona biti paran broj. Iz tog razloga je, pre nego što se započne proces segmentacije poligona, potrebno umetnuti dodatne segmente koji će obezbediti ovu parnost. Problem dodavanja pomoćnih segmenata za parnost ovde samo navodimo, ali ćemo se njime detaljno pozabaviti nešto kasnije. Pre problema sa parnošću moramo se pozabaviti analizom oblika poligona, kako bi se povećala robusnost metode i kvalitet kreirane mreže. Kontrola oblika podrazumeva dve provere, koje su opisane u sledeća dva poglavlja.

### 7.1. Kontrola regularnosti poligona

Za poligon kažemo da je regularan ukoliko za sve njegove stranice važi uslov da ili nemaju zajedničku tačku ili dele isti čvor. Drugim rečima, poligon nije regularan ukoliko postoji presek ma koje dve njegove stranice. Prva provera koja se vrši nakon projekcije površine u osnovni domen, jeste upravo presecanje stranica poligona.

Postoje dva moguća razloga za neregularnost poligona, odnosno površine u osnovnom domenu:

- Površina nije kvazi-planarna. Iako je cilj prve faze predložene metode za segmentaciju dobijanje kvazi-planarnih površina, dešava se da se nakon te faze dobiju neke površine koje nisu kvazi-planarne.

Kako bi se ovaj problem rešio, primenjuje se tehnika koja je slična onoj opisanoj u poglavlju 6.4, koja se bazira na analizi normala na površinu u izvesnom broju kontrolnih tačaka. Jedina razlika tehnike primenjene ovde jeste način odabira kontrolnih tačaka. Tačkama uzetim u skladu sa algoritmom opisanim u poglavlju 6.4, dodaje se mreža od 20x20 tačaka u oblasti koja je određena čvorovima stranica koje se međusobno seku. Ukoliko se analizom normala na površinu u ovako izabranoj mreži tačaka dobije da je dodatna podela površine neophodna, vrši se podela površine po parametru određenom na osnovu ove analize.

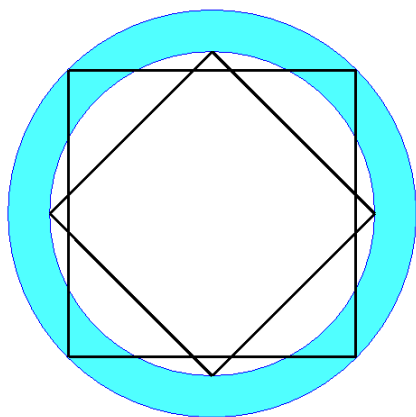
- Poligonska aproksimacija ivica je suviše gruba.

Ilustracija ovakve situacija data je na primeru ravnog (dakle kvazi-planarnog) tankog prstena prikazanog na slici 67. Crne linije na ovoj slici predstavljaju segmente poligonske aproksimacije ivica. Na slici 67a prikazana je veoma gruba poligonska aproksimacija ivica, gde je kružnica modelovana sa 4 segmenta.

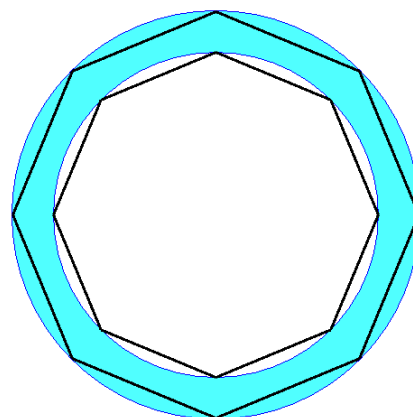
Ovaj problem se rešava umetanjem dodatnih čvorova u poligonske aproksimacije ivica kojima odgovaraju stranice koje se seku u osnovnom domenu, kao što je ilustrovano na slici 67b. Umetanje čvorova se vrši u skladu sa algoritmom opisanim u poglavlju 5.6. Umetanje čvorova se vrši iterativno tako što se:

- U prvoj iteraciji umeće jedan čvor ukoliko je inicijalni broj segmenata u poligonskoj aproksimaciji ivice neparan, a dva čvora ukoliko je broj segmenata paran.
- U narednim iteracijama se umeću dva čvora.

Opisani postupak se ponavlja sve dok poligon ne postane regularan. Jasno je da primenom opisanog postupka umetanja čvorova nakon svake iteracije dobija poligonska aproksimacija ivice koja sadrži paran broj segmenata. S obzirom da se radi o osetljivim delovima geometrije, u kasnijem postupku umetanja dodatnih čvorova za parnost nije dozvoljeno umetanje čvorova u poligonske aproksimacije ivica tretiranih u ovom postupku.



a) Inicijalna gruba poligonska aproksimacija ivica.



b) Poligonska aproksimacija nakon umetanja dodatnih čvorova.

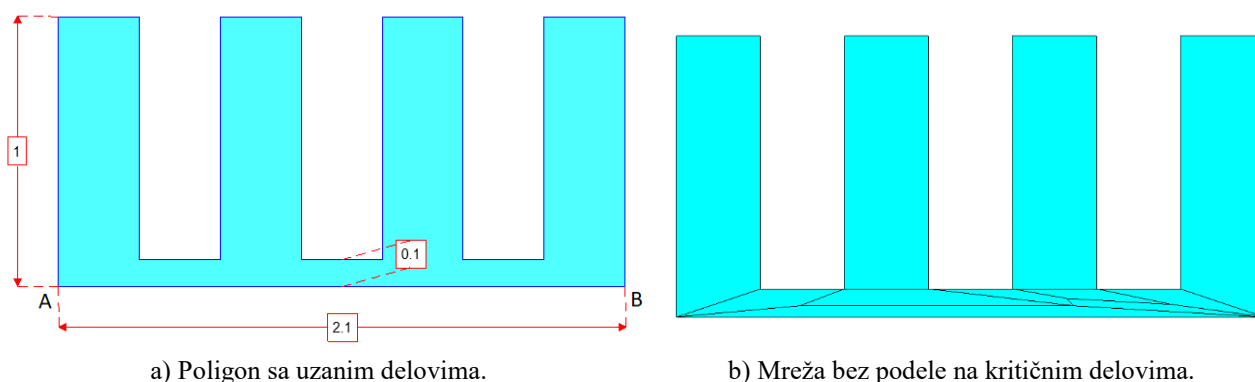
Slika 67. Dodavanje čvorova u poligonsku aproksimaciju, radi dobijanja regularnog poligona.

Ukoliko broj stranica označimo sa  $N$  broj parova stranica za koje se presek proverava približno iznosi  $\frac{N^2}{2}$ . Radi se dakle o kvadratnoj složenosti algoritma za određivanje preseka među stranicama. Trajanje ovakvog postupka bi moglo da bude veoma dugo ukoliko radimo sa veoma kompleksnim poligonima, tj. ukoliko broj stranica u poligonu veoma veliki. Kako bi se broj stranica u poligonu ograničio, te postupak opisan u ovom poglavlju, ali i postupak opisan u narednom poglavlju, učinio vremenski manje zahtevnim, osim podele na kvazi planarne površine uvodi se i dodatna podela površina kojima odgovaraju složeni poligoni.

## 7.2. Kontrola oblika poligona

Kontrola poligona opisana u prethodnom poglavlju neophodna je kako bi segmentacija uopšte bila moguća. Kontrola koju ćemo opisati u ovom poglavlju sprovodi se kako bi se povećao faktor kvaliteta elemenata mreže koji odgovaraju posmatranom poligonu.

Posmatrajmo poligon prikazan na slici 68a. Poligon je regularan i ima samo jednu zatvorenu petlju, čiji je broj segmenata paran, te je stoga segmentacija poligona moguća. Međutim, stranici AB odgovara veliki broj čvorova koji su joj naspramni, a koji se nalaze na malom rastojanju od nje. To će u finalnoj mreži rezultovati kreiranjem izduženih elemenata, veoma niskog faktora kvaliteta, kao što je prikazano na slici 68b. Srednji faktor kvaliteta svih elemenata mreže prikazane na slici 68b je nizak i iznosi 0.469. Dok za elemente koji se nalaze u uzanom delu poligona on iznosi 0.193.



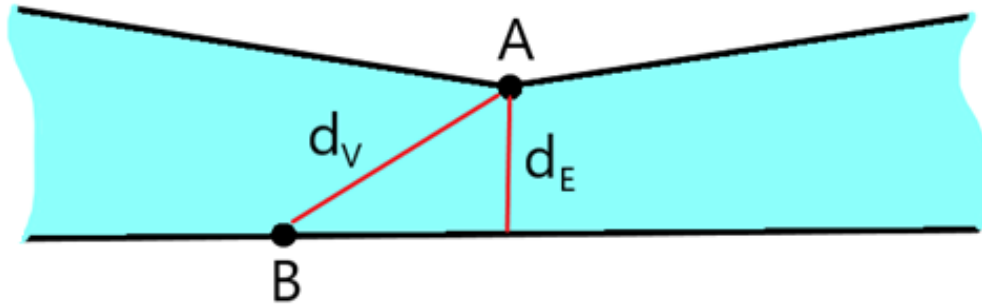
Slika 68. Poligon nepravilnog oblika i njegova mreža.

U cilju povećanja faktora kvaliteta elemenata u finalnoj mreži ovakvi poligoni se moraju podeliti na celine jednostavnijeg oblika. U tom cilju se za svaki čvor poligona određuje rastojanje od njemu najbližeg čvora sa kojim ne deli istu stranicu, označimo to rastojanje sa  $d_V$ . Takođe, za svaki čvor se određuje minimalno normalno rastojanje od stranica, isključujući stranice kojima dati čvor pripada, označimo to rastojanje sa  $d_E$ . Rastojanje nazivamo kritičnim rastojanjem, a par čvor-čvor ili čvor-stranica kojima dato rastojanje odgovara kritičnom pozicijom u poligonu, ukoliko važi sledeće:

$$d < t_{min} C_p \quad (71)$$

gde je  $t_{min}$  tolerancija koju zadaje korisnik, a koja definiše minimalnu dozvoljenu dimenziju poligona,  $C_p$  je obim spoljašnje petlje poligona, dok je  $d$  rastojanje među entitetima na kritičnoj poziciji. Ukoliko je u poligonu detektovano više kritičnih pozicija, potrebno je uvesti težinski faktor za svaku od njih.

Razmotrimo najpre razliku između para čvor-čvor i para čvor-stranica. Pretpostavimo da jedan isti čvor, označen kao čvor A na slici 69 ima rastojanje od najbližeg nesusednog čvora koje je manje od kritičnog, ali isto tako i rastojanje od nesusedne stranice koje je manje od kritičnog. Ukoliko bismo parove čvor-čvor i čvor-stranica tretirali na istovetan način, a za duž podele birali onu koja odgovara kraćem rastojanju, to bi u primeru sa slike 69 bila duž koja odgovara paru čvor-stranica. Podela po ovoj duži dovela bi do nastanka kratke ivice (određene čvorom B i normalnom projekcijom čvora A na njemu naspramnu stranicu), koja bi u svim poligonima kojima pripada mogla da dovede do kreiranja trapezoidnih elemenata niskog faktora kvaliteta. Kako bi se ovakve situacije izbegle rastojanje koje odgovara paru čvor-stranica množimo težinskim faktorom koji je veći od 1. U svim primerima prikazanim u ovom radu vrednost ovog težinskog faktora postavljena je na 2. Ukoliko jedan čvor pripada i kritičnom paru čvor-čvor i kritičnom paru čvor-stranica, u razmatranje uzimamo samo onaj par u kome je rastojanje manje (naravno rastojanje u paru čvor-stranica je prethodno skalirano odgovarajućim faktorom), dok se drugi par eliminiše iz dalje analize.



Slika 69. Par čvor-čvor, sa rastojanjem  $d_V$ , i par čvor-stranica, sa rastojanjem  $d_E$ .

Za svaku kritičnu poziciju se računa težinski faktor, u skladu sa sledećom formulom:

$$\delta = \begin{cases} d, & \text{entiteti kritičnog para na različitim petljama} \\ \frac{d}{C_p^{min}}, & \text{entiteti kritičnog para na istoj petlji} \end{cases} \quad (72)$$

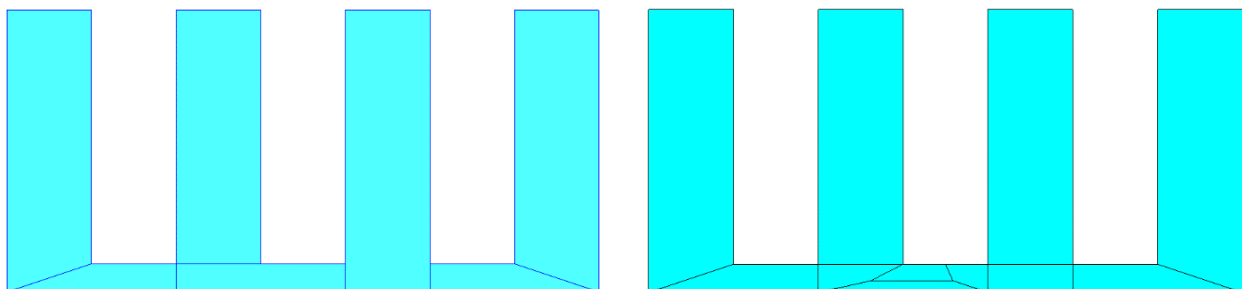
gde je sa  $C_p^{min}$  označena dužina kraće od dve putanje koje se duž zajedničke petlje mogu formirati između entiteta kritičnog para. Duž po kojoj se vrši podela poligona, odnosno odgovarajuće površine, jeste ona koja odgovara kritičnoj poziciji sa minimalnom vrednošću ovako izračunatog težinskog faktora. Podela se najpre vrši na pozicijama čiji entiteti pripadaju različitim petljama, a tek ukoliko ovakvih pozicija nema razmatraju se pozicije čiji entiteti pripadaju istoj petlji.

Podela površine se dakle vrši na poziciji koja je označena kao najkritičnija. Sama podela se vrši tako što se odabrana duž projektuje na površinu duž normale na referentnu ravan, te se izvrši imprint ovako dobijene krive na površinu. Topologija CAD modela se menja tako što nastaje:

- Jedna nova ivica, koja odgovara duži kritičnog para.
- Ukoliko je podela izvršena po liniji koja odgovara paru čvor-stranica, ivica površine koja odgovara stranici iz ovog kritičnog para biva podeljena na dve ivice.
- Konačno, ukoliko entitet koji odgovara čvoru u kritičnom paru ne predstavlja čvor CAD geometrije, već unutrašnji čvor poligonske aproksimacije ivice, data ivica se deli na dve.

Za sve novonastale ivice se kreira poligonska aproksimacija. Kontrola oblika poligona se vrši za sve površine koje sadrže novonastale ivice. Proces kontrole oblika za posmatranu površinu se završava u trenutku kada u odgovarajućem poligonu više nema kritičnih pozicija.

Podela površine prikazane na slici 68 i odgovarajuća mreža, kada se tolerancija za minimalnu dimenziju poligona postavi na 0.05, date su na slici 70. Broj elemenata u finalnoj mreže se nije promenio u odnosu na slučaj kada nije vršena kontrola oblika poligona. Međutim, srednja vrednost faktora kvaliteta računata za sve elemente mreže porasla je sa 0.469 na 0.64, dok je u uzanoj oblasti poligona sa 0.193 porasla na 0.464.



a) Podela površine na kritičnim delovima.

b) Mreža nakon podele na kritičnim delovima.

Slika 70. Poligon nepravilnog oblika i njegova mreža nakon primene kontrole oblika o odgovarajuće podele.

Kada je u pitanju složenost ovog algoritma, jasno je da je potrebno odrediti rastojanje između svaka dva nesusedna čvora i između svakog čvora i njemu nesusednih stranica, te govorimo o kvadratnoj složenosti. Iz tog razloga je podela površina kojima odgovaraju izuzetno složeni poligoni na jednostavnije celine veoma značajna za skraćenje trajanja ovog postupka.

### 7.3. Eliminacija kratkih ivica i površina koje se svode na tačku ili liniju

U CAD modelima, a naročito onim koji su dobijeni konverzijom iz drugih CAD formata u CAD format koji se koristi u aplikaciji od interesa veoma često se srećemo sa veoma kratkim ivicama i površinama koje su geometrijski veoma male po jednoj ili po više dimenzija. Postojanje ovakvih entiteta posledica je na jednoj strani konačnih tolerancija u geometrijskom modelovanju i operacijama kakve su operacije Bulove logike, a na drugoj strani činjenice da različiti CAD formati koriste različite matematičke definicije za krive i površi, ali i različite vrednosti za tolerancije u geometrijskom modelovanju.

Uvedimo najpre pojam *kritične ivice*. Kao što je u već više puta napomenuto u ovom radu, postojanje veoma kratkih ivica na jednoj površini nije poželjno, jer sa velikom verovatnoćom dovodi do kreiranja elemenata niskog faktora kvaliteta. Označimo sa  $l_e$  dužinu ivice koju posmatramo. U opštem slučaju ova ivica pripada proizvoljnom broju površina. Označimo broj susednih površina sa  $M$ , a obime njihovih spoljašnjih petlji sa  $C_e^{(i)}$ , gde je  $i = 1, 2, \dots, M$ . Za ivicu kažemo da je kritična ukoliko važi sledeće:

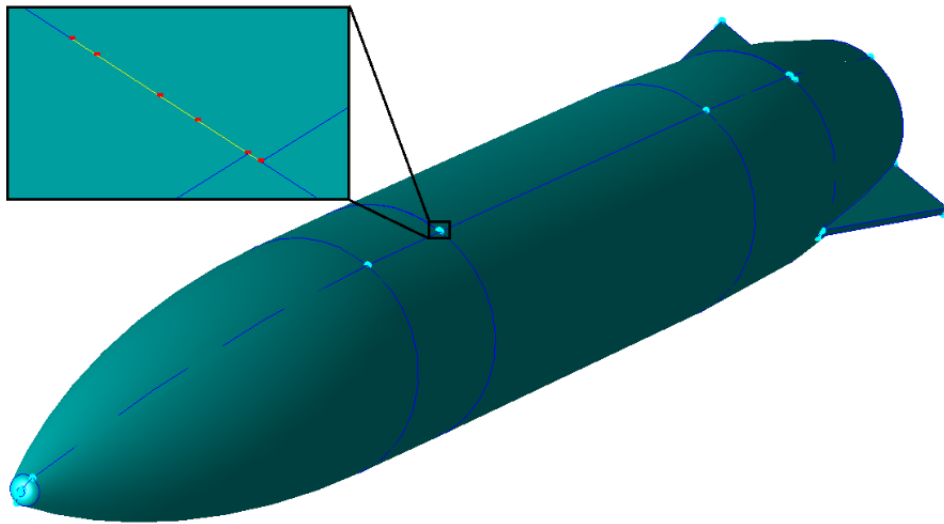
$$l_e < t \cdot \max(C_e^{(i)}), \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (73)$$

gde je  $t$  tolerancija koja je u svim primerima prikazanim u ovom radu podešena na  $10^{-6}$ .

Ukoliko je dužina ivice takva da je zadovoljen kriterijum dat jednačinom (73) ivicu proglašavamo kritičnom i u procesu segmentacije je komprimujemo u jednu tačku (tj. jedan čvor u finalnoj mreži). Poligonska aproksimacija ovakve ivice se ne određuje kao za ostale ivice, već se samo određuje tačka u koju će ivica biti komprimovana. Za ovu tačku uzimamo tačku koja odgovara parametarskom centru date ivice. Ukoliko je veći broj međusobno susednih ivica proglašen za kritične, koordinate čvora u koji se sve ove ivice komprimuju određuju se kao aritmetička sredina koordinata parametarskih centara ivica.

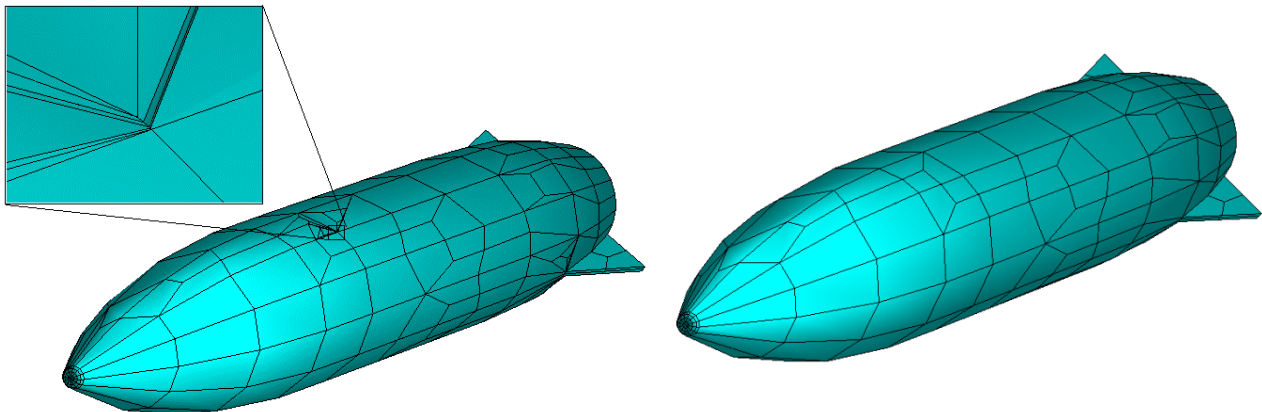
Jasno je da komprimovanje ivice u tačku neće pokvariti povezanost mreže, jer se kompresija vrši na nivou ivice, a ne na nivou pojedinih površina. Međutim, kompresija ivice u tačku se mora uzeti u obzir kod analize parnosti broja segmenata na zatvorenim petljama poligona. Kako bi se to uradilo na najjednostavniji način, parametarski centar ivice se smatra centralnim čvorom u njenoj poligonskoj aproksimaciji, pa se takva poligonska aproksimacija sastoji od dva segmenta. U kasnijem postupku analize parnosti i dodavanja segmenata za parnost, nije dozvoljeno dodavanje segmenata na ovakvim ivicama. Na taj način se u procesu kompresije ivice sistem od 2 segmenta svodi na jedan čvor, tj. 0 segmenata, pa se parnost broja segmenata ne narušava.

Osim u slučaju ivica čija dužina zadovoljava jednačinu (73) opisani postupak se može primeniti i na ivice koje su od strane korisnika označene kao ivice koje u procesu segmentacije treba komprimovati u čvor. Takve ivice se često javljaju u CAD modelima uvezenim iz drugih formata, i često ih je nemoguće eliminisati na drugačiji način. (Brisanje čvorova u CAD modelu često nije moguće, jer su dati čvorovi deljeni između više od 2 ivice ili je geometrija ivica koje se susstiču u datom čvoru takva da onemogućava njegovo brisanje.) Jedan takav primer dat je na modelu sa slike 71. Ivice označene žutom bojom su ivice za kompresiju, dok su crvenom bojom označeni njihovi čvorovi.



Slika 71. CAD model rakete sa označenim ivicama za kompresiju.

Na slici 72 je prikazana mreža modela sa slike 71 za slučaj kada se ne vrši kompresija kratkih ivica i za slučaj kada se ova kompresija vrši. Očigledno je sa slike da se broj elemenata smanjio, a njihov faktor kvaliteta značajno povećao kada je izvršena kompresija kratkih ivica.



a) Bez kompresije kratkih ivica.

b) Sa kompresijom kratkih ivica.

Slika 72. Segmentacija modela rakete bez kompresije i sa kompresijom kratkih ivica.

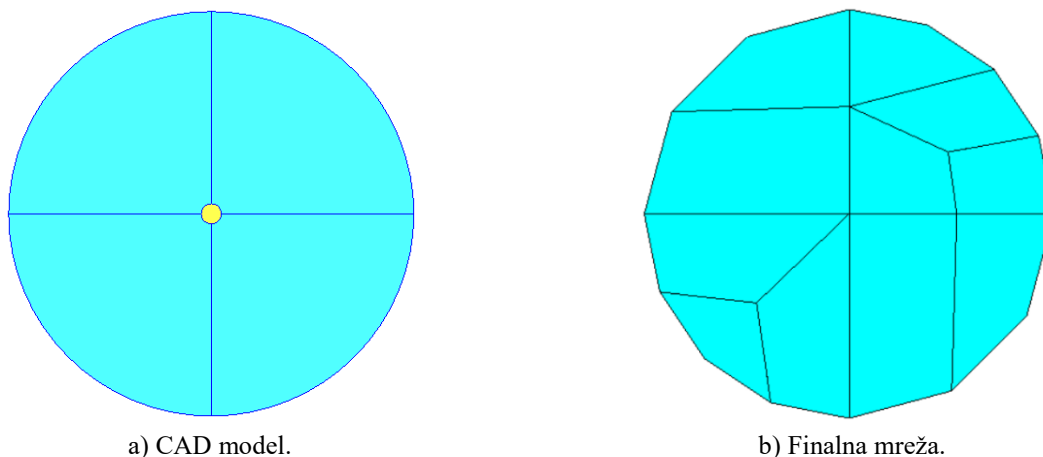
Kada je reč o površinama koje su geometrijski male po jednoj ili po više dimenzija, ukoliko bi se ovakve površine konvertovale u četvorougao u mrežu bez posebnog tretmana, to bi dovelo do kreiranja veoma sitnih ili veoma izduženih elemenata u mreži ovih površina. Na drugoj strani, došlo bi do kreiranja trapezoidnih elemenata veoma niskog faktora kvaliteta u mreži njima susednih površina. Konačno, kako je uticaj ovih površina na geometriju, pa samim tim i na elektromagnetsku analizu, zanemarljivo mali, čak i ukoliko bi se dobili elementi savršenog faktora kvaliteta, to bi značilo bespotrebno povećanje broja elemenata u finalnoj mreži, te i bespotrebno povećanje broja nepoznatih koeficijenata i vremena simulacije. Iz svega rečenog jasno je da je ovakve površine potrebno tretirati na poseban način. To uključuje na prvom mestu prepoznavanje takvih površina, a zatim i njihov poseban tretman.

U zavisnosti od oblika i dimenzija ovih površina možemo izvršiti sledeću klasifikaciju:

- Površine koje se geometrijski svode na tačku,
- Površine koje se geometrijski svode na, u opštem slučaju nemanifoldnu, liniju.



Kada je reč o površinama iz prve kategorije, njih lako prepoznamo i pre njihove projekcije u osnovni domen. Naime, karakteristika ovih površina je da sve njihove ivice predstavljaju ivice za kompresiju. Kako se sve ivice komprimuju u jedan čvor, i sama površina se komprimuje u jedan čvor. Kao što je već objašnjeno u opisu kompresije ivica, ovakvo komprimovanje površine ne remeti povezanost mreže. Ovaj postupak je ilustrovan na slici 73, gde je površina koja se komprimuje u čvor označena žutom bojom. Ugaona tolerancija je  $30^\circ$ , a maksimalna dozvoljena dimenzija elementa veća od dimenzije strukture.



Slika 73. Kompresija površine u čvor.

Kada su u pitanju površine koje se po obliku svode na liniju, u opštem slučaju nemanifoldnu, situacija je značajno složenija i kada je u pitanju njihova detekcija i kada je u pitanju njihov tretman. Sve ivice ovakvih površina ne moraju biti ivice koje se komprimuju u tačku, a oblik površina može biti veoma složen. Detekcija ovakvih površina se stoga vrši analizom poligona u osnovnom domenu. Vršiti se u tom smislu analiza koja je veoma slična onoj koja je opisana u prethodnom poglavlju. Dakle, za svaki čvor poligona određuje se minimalno rastojanje od njemu najbližeg čvora sa kojim ne deli istu stranicu,  $d_V$ , i minimalno normalno rastojanje od njemu nesusedne stranice,  $d_E$ . Takođe, sa svaki čvor se određuje unutrašnji ugao koji mu odgovara, označimo ovaj ugao sa  $\varphi_i$ . Za površinu kažemo da je površina za kompresiju ukoliko za svaki čvor njenog poligona u osnovnom domenu važi jedan od sledećih uslova:

$$\min(d_V, 2d_E) < k \cdot C \quad (74)$$

ili

$$\varphi_i < \varphi_C. \quad (75)$$

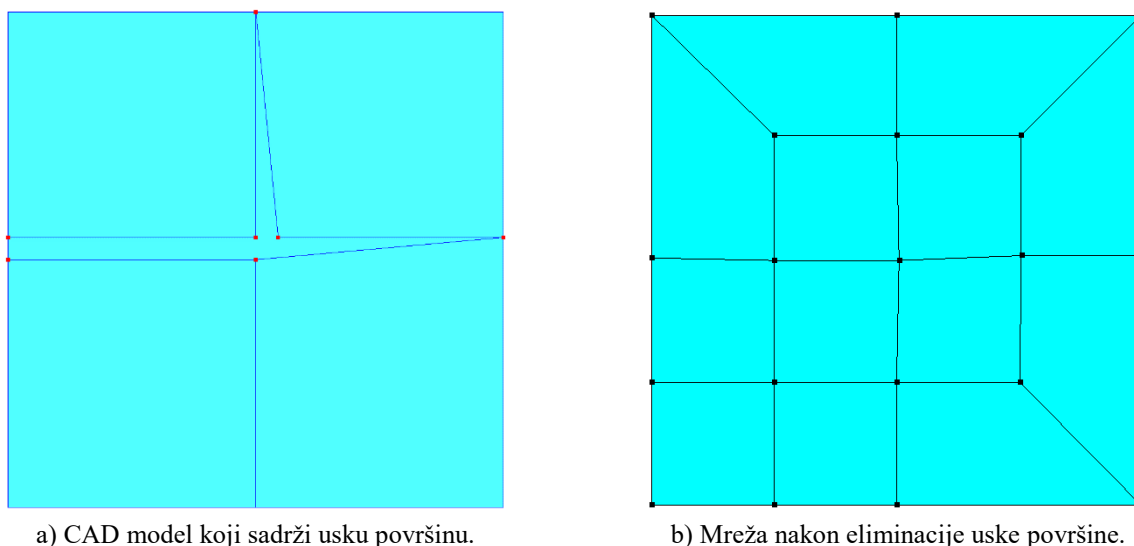
Gde je  $k$  konstanta čija je vrednost jednaka vrednosti konstante koja se koristi u jednačini (73), tj. ima vrednost  $10^{-6}$  u svim primerima prikazanim u ovom radu, dok je  $\varphi_C$  ugaona tolerancija koja pokazuje da li se razmatrani čvor nalazi na poziciji oštrog ugla. U svim primerima prikazanim u ovom radu vrednost ove tolerancije postavljena je na  $3^\circ$ .

Jasno je da bi prosto izbacivanje iz procesa segmentacije površina koje su na osnovu navedenih uslova prepoznate kao površine za kompresiju dovelo do kreiranja nepovezane mreže. Međutim, parovi čvor-čvor i čvor-stranica čija rastojanja zadovoljavaju jednačinu (74) određuju čvorove koji će u finalnoj mreži biti međusobno spojeni pomeranjem svakog od njih na sredinu duži koja ih povezuje, zatvarajući na taj način procep koji nastaje izostavljanjem uzane površine iz segmentacije. Čvorovi koji zadovoljavaju jednačinu (75) nalaze se u ostrim uglovima površine, i ne pomeraju se nakon što se proces segmentacije završi. Prema tome, opisana analiza ne služi samo za prepoznavanje uzanih površina, već predstavlja i prvi korak u obradi ovih površina.

Sam proces obrade uzanih površina sastoji se iz sledećih koraka:

- Najpre se na ivicama površine na lokacijama koje odgovaraju čvorovima poligona u osnovnom domenu kreiraju čvorovi CAD modela. Jasno je da izvesnom broju čvorova poligona već odgovaraju čvorovi CAD modela, i za takve čvorove u ovom koraku nije potrebna dodatna akcija. Za ostale čvorove poligona se vrši kreiranje čvorova CAD modela tako što se odgovarajuća ivica deli na odgovarajućoj vrednosti parametra (koristi se Parasolid funkcija “PK\_EDGE\_split\_at\_param”). Na ovaj način je svakom paru čvor-čvor poligona dodeljen par čvor-čvor CAD geometrije.
- Na ivicama površine se kreiraju čvorovi koji odgovaraju pozicijama normalne projekcije čvora na stranicu u parovima čvor-stranica. Kako bi se kreirali ovi čvorovi, odgovarajuća ivica CAD površine se seče ravni koja je normalna na referentnu ravan, a sadrži duž projekcije čvora na odgovarajuću stranicu. Na ovaj način je svakom paru čvor-stranica poligona dodeljen par čvor-čvor CAD geometrije.
- Nakon prethodno opisanih operacija imamo parove čvorova CAD geometrije koji se preslikavaju jedan na drugi, ali isto tako i parove ivica CAD geometrije koje se preslikavaju jedna na drugu. Kako su ove ivice dobijene na osnovu poligonske aproksimacije originalnih ivica površine, jasno da se njihova poligonska aproksimacija sastoji od samo jednog segmenta. Isto tako je jasno da se u postupku dodavanja segmenata zbog parnosti poligona segmenti ne smeju dodavati nezavisno na ivicama koje pripadaju istom paru. Dodatnu komplikaciju unosi činjenica da se u modelima nekad javljaju grupe susednih uzanih poligona, te da nemamo uvek parove čvorova odnosno ivica, već potencijalno dosta duže nizove entiteta koji se preslikavaju jedni na druge. Ovde kao rešenje primenjujemo najjednostavnije rešenje, mada ne optimalno po broju segmenata, a to je da se sve ivice formirane u ovom postupku podele na po 2 segmenta (minimalan parni broj), a da se dodatno dodavanje segmenata za parnost zabrani na svima njima.

Primer modela koji sadrži usku površinu koja se svodi na nemanifoldnu liniju i mreže dobijene eliminacijom ove površine iz segmentacije dat je na slici 74.



Slika 74. Eliminacija uske površine iz finalne mreže.

S obzirom da prethodno opisani postupak obrade uske površine podrazumeva kreiranje novih čvorova na ivicama površine, tj. podelu originalnih ivica na nove, nakon što se postupak završi mora se izvršiti kontrola oblika svih poligona koji odgovaraju površinama koje sadrže novonastale ivice.

## 7.4. Dodatna podela kompleksnih površina

Kao što je rečeno u prethodnim poglavljima, kontrola regularnosti i oblika poligona ima kvadratnu zavisnost od broja stranica, odnosno čvorova u poligonu. Kada je u pitanju četvorougona segmentacija poligona primenom algoritma zasnovanog na dekompoziciji, gde se za svaku potencijalnu liniju podele određuje težinski faktor, a podela se vrši najpre po linijama sa minimalnom vrednošću težinskog faktora, složenost algoritma je  $O(N^2)$ , gde je  $N$  broj čvorova poligona. S obzirom da se radi o algoritmima prilično visoke složenosti, trajanje pomenutih faza procesa segmentacije biće dosta veliko u slučaju poligona sa velikim brojem čvorova i stranica. Kako bi se trajanje ovih faza skratilo, pribegava se dodatnoj podeli veoma složenih poligona, odnosno njima odgovarajućih površina. Ovaj postupak podele se vrši neposredno nakon projekcije površina u osnovni domen, tj. pre nego što se uđe u postupak kontrole regularnosti i kontrole oblika poligona.

Pre nego što pređemo na opis samog algoritma, uvedimo pojam *složene površine*. Kao što se može zaključiti iz prethodno rečenog, pod složenom površinom se podrazumeva površina kojoj u osnovnom domenu odgovara poligon čiji je broj čvorova veći od neke granične vrednosti. Označimo ovu graničnu vrednost sa  $N_C$ . U svim primerima prikazanim u ovom radu, ova granična vrednost je postavljena na 50.

Podela površine se vrši u iterativnom postupku, gde se za svaku od novonastalih površina proverava da li je složena, pa se ukoliko jeste vrši njena dalja podela sve do trenutka kada ni jedna od novonastalih površina ne predstavlja složenu površinu. Ova podela se vrši po izoparametarskim linijama površine.

Označimo sa  $u_{min}$  i  $u_{max}$  minimalnu i maksimalnu vrednost  $u$ -parametra posmatrane površine, respektivno. Analogno tome, minimalnu i maksimalnu vrednost  $v$ -parametra ćemo označiti sa  $v_{min}$  i  $v_{max}$ . Za površine koje ne sadrže unutrašnje petlje odluku o tome po kom parametru se najpre vrši podela donosimo na osnovu parametarskih dimenzija površine po  $u$ - i  $v$ -koordinatama. Podela po  $u$ -parametru se vrši ukoliko je:  $(u_{max} - u_{min}) \geq (v_{max} - v_{min})$ . U suprotom se vrši podela po  $v$ -parametru. Vrednost parametra po kom se podela vrši određuje se kao srednja vrednost parametra površine po datoj koordinati. Pretpostavimo da je to  $u$ -koordinata:

$$u_{sr} = \frac{u_{min} + u_{max}}{2}. \quad (76)$$

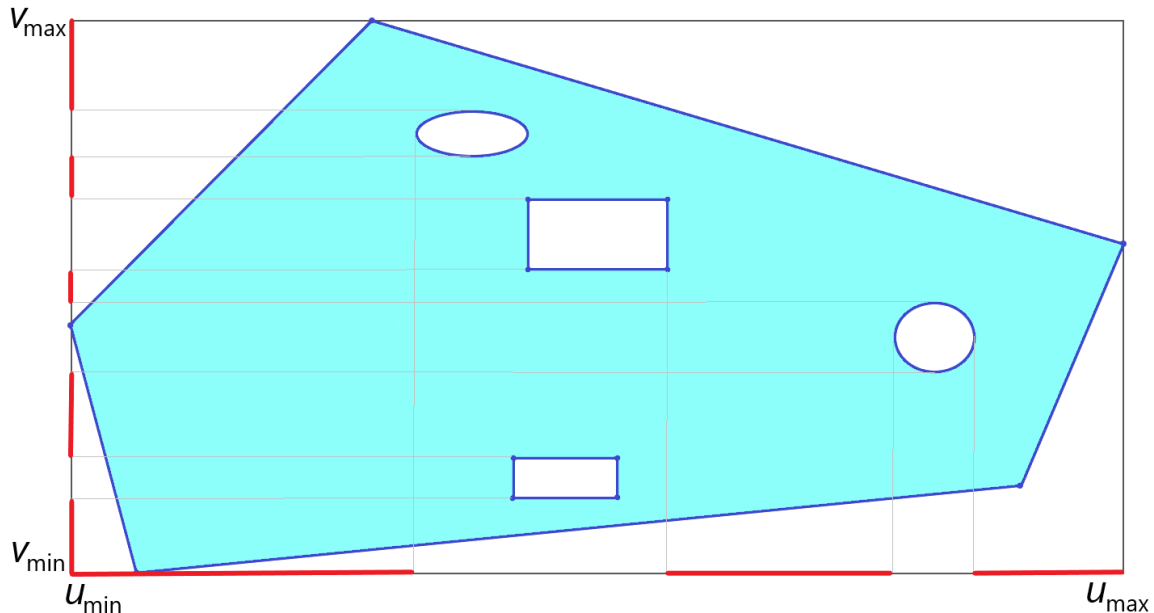
Srednja vrednost parametra po  $v$ -koordinati računa se na analogan način.

Međutim, ukoliko površina sadrži unutrašnje petlje podela po ovom parametru bi mogla preseći neke od unutrašnjih petlji i izazvati nastanak novih ivica, i to potencijalno velikog broja njih ukoliko izoparametarska linija seče veći broj petlji. Takođe, prolazak izoparametarske linije blizu neke od petlji stvara uzane delove površine koji se moraju prepoznati i posebno tretirati, kao što je opisano u poglavlju 7.2. Iz tog razloga se položaj unutrašnjih petlji u parametarskom prostoru površine takođe mora uzeti u obzir i u izboru parametra po kom se podela vrši i u izboru vrednosti tog parametra.

Za svaku unutrašnju petlju se odredi parametarski prostor u kome ona leži. Zatim se odrede parametarski opsezi po  $u$  i  $v$  parametru u kojima ne leži ni jedna petlja. Nazvaćemo ove opsege *dozvoljenim opsezima*. Podela se vrši po onom parametru po kome je broj ovih opsega veći. U primeru sa slike 75, gde su ovu opsezi naznačeni crvenom bojom po  $u$  i  $v$  osama, to bi bio  $v$ -parametar. Ideja je da se podela izvrši po centralnom parametru dozvoljenog opsega, koji je što bliži centralnom parametru površine po posmatranoj osi, a da širina odgovarajućeg dozvoljenog opsega takođe bude što je moguće veća. Kako bi se postigao kompromis između ovih zahteva računa se srednja vrednost širine dozvoljenog opsega, kao aritmetička sredina širina svih dozvoljenih opsega po datom parametru. Označimo ovu vrednost sa  $w_{sr}$ . Dozvoljene opsege svrstavamo na osnovu njihove širine,  $w$ , u sledeće grupe:

- prvu grupu čine opsezi za koje važi:  $w > k \cdot w_{sr}$ ,
- u drugoj grupi su opsezi za koje važi:  $\frac{w_{sr}}{k} \leq w \leq k \cdot w_{sr}$ ,
- ostali opsezi (za koje je  $w < \frac{w_{sr}}{k}$ ) pripadaju trećoj grupi,

gde je  $k$  težinski koeficijent veći od 1. U svim primerima iz ovog rada vrednost ovog koeficijenta postavljena je na 1.5. Ukoliko prva grupa sadrži neki dozvoljeni opseg, podela se vrši po centralnom parametru opsega koji je najbliži centralnom parametru površine. Ukoliko prva grupa ne sadrži ni jedan dozvoljeni opseg ista analiza primenjuje se nad drugom grupom.



Slika 75. Parametarski opsezi u kojima ne leži ni jedna unutrašnja petlja (označeni crvenom bojom).

U slučaju da su jedina dva dozvoljena opsega po svakoj od osa opsezi koji sadrže početni i krajnji parametar površine po odgovarajućoj osi, a broj segmenata u poligonskim aproksimacijama ivica unutrašnjih petlji je veći od granične vrednosti  $N_c$ , podela se vrši po istom parametru kao i za površine bez unutrašnjih petlji.

Na koji god način da je određen parametar za podelu površine, pri samoj podeli se primenjuje algoritam opisan u poglavlju 6.3, uz relaksaciju parametra podele koja je opisana u poglavlju 6.5.

## 8. Umetanje pomoćnih segmenata za parnost poligona

Kao što je u prethodnim glavama više puta naglašeno, čista četvorougona mreža može se kreirati samo ukoliko je ukupan broj segmenata na zatvorenim petljama poligona paran broj. (Parnost otvorenih petlji nije od značaja.) Način na koji je kreirana poligonska aproksimacija ivica kvazi-planarnih površina, te kasnije modifikacije ove aproksimacije, odnosno dodatne podele samih površina ni na koji način ne garantuju ovu parnost. Grubo govoreći, možemo reći da će u generalnom slučaju oko 50% poligona imati paran broj segmenata na zatvorenim petljama, a ostalih 50% neparan broj. Prema tome, potrebna je dodatna modifikacija poligonskih aproksimacija ivica, kako bi uslov za paran broj segmenata bio zadovoljen na svim poligonima. U ovoj glavi ćemo dati opis algoritma za umetanje pomoćnih segmenata za parnost u poligonske aproksimacije pojedinih ivica, koji je korišćen u metodi koju predlažemo.

Pre nego što pređemo na detaljnije razmatranje problema i opis predloženog algoritma uvedimo nekoliko termina koje ćemo koristiti u daljem tekstu. Ivice čija se poligonska aproksimacija sastoji od parnog, odnosno neparnog broja segmenata nazivaćemo parnim, odnosno neparnim ivicama, respektivno. Isto tako, poligone kod kojih je ukupan broj segmenata na zatvorenim petljama paran, odnosno neparan nazivaćemo parnim, odnosno neparnim poligonima, respektivno. Konačno, površine kojima odgovaraju parni, odnosno neparni poligoni nazivaćemo parnim, odnosno neparnim površinama, respektivno.

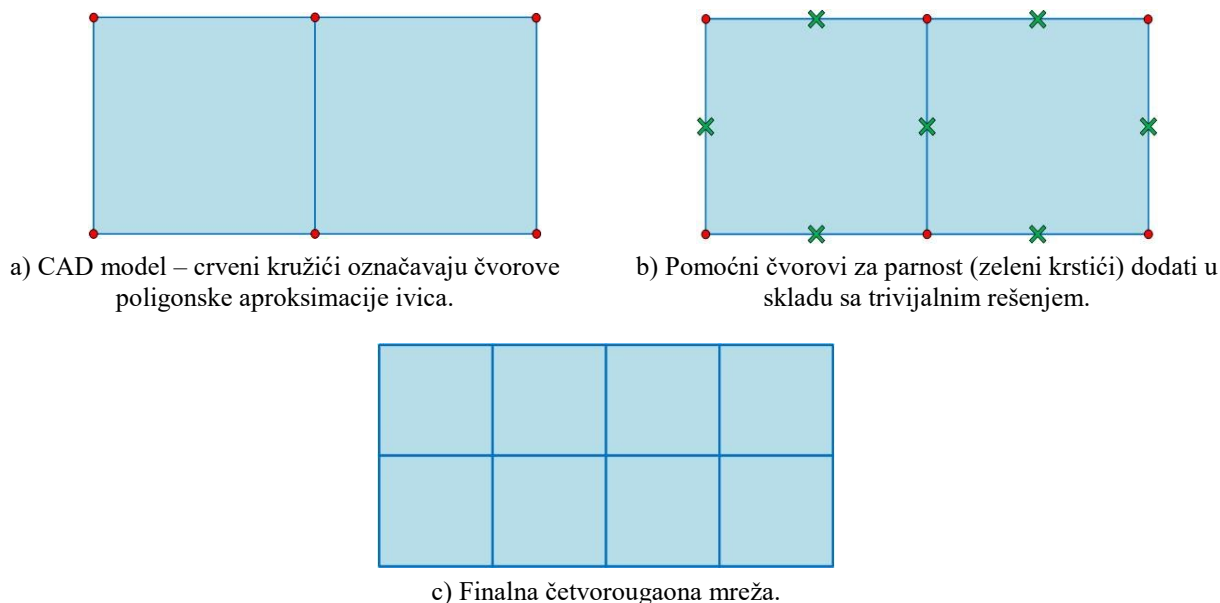
U daljem tekstu ćemo uglavnom govoriti o pomoćnim segmentima, ali ćemo na nekim mestima koristiti i termin pomoćnih čvorova. Treba reći da su ova dva termina praktično identična, jer dodavanje  $N$  segmenata u poligonsku aproksimaciju podrazumeva uvek i dodavanje  $N$  čvorova.

Jasno je da se dodavanjem neparnog broja segmenta u poligonske aproksimaciju ivica koje pripadaju zatvorenim petljama neparnog poligona ovaj poligon konvertuje u paran poligon. S obzirom da je minimizacija broja elemenata u finalnoj mreži jedan od glavnih zahteva za efikasnu elektromagnetsku analizu, i broj pomoćnih segmenata za parnost treba minimizovati. Takođe, kako se ne bi narušila usaglašenost mreže, segmenti za parnost se ne mogu dodavati u poligonske aproksimacije ivica jedne površine nezavisno od njoj susednih površina, već ovaj postupak zahteva globalni tretman.

Treba napomenuti da je parnost poligona osim dodavanjem moguće promeniti i eliminisanjem segmenata iz poligonske aproksimacije ivica, npr. spajanjem dva susedna segmenata u jedan segment. Međutim, kako je inicijalna poligonska aproksimacija ivica kreirana tako da sa minimalnim brojem segmenata zadovolji zadate dužinske i ugaone tolerancije, svako smanjenje broja segmenata bi ugrozilo zadovoljenje ovih uslova, te zato govorimo o dodavanju, a ne o eliminaciji segmenata.

### 8.1. Trivijalno rešenje

Trivijalno rešenje za problem parnosti poligona bilo bi rešenje koje podrazumeva dodavanje pomoćnog segmenta na svim neparnim ivicama koje pripadaju zatvorenoj petlji bar jedne površine. Na taj način bi sve ivice od interesa bile parne, pa bi automatski bila zadovoljena i parnost svih poligona, odnosno odgovarajućih površina, u modelu. Trivijalno rešenje je veoma jednostavno za implementaciju, i automatski garantuje parnost svih poligona. Problem predstavlja suviše veliki broj dodatnih segmenata, te shodno tome i veliki broj elemenata u finalnoj mreži. Ovo je ilustrovano na jednostavnom modelu koji se sastoji od samo 2 površine četvorougona oblika, prikazanom na slici 76a. Čvorovi inicijalne poligonske aproksimacije prikazani su crvenim kružićima. Očigledno je da bi se mreža ovog modela mogla sastojati od samo dva elementa. Pomoćni čvorovi za parnost dodati u skladu sa opisanim trivijalnim rešenjem označeni su zelenim krstićima na slici 76b. Broj elemenata u finalnoj mreži jednak je 8 (slika 76c), dakle 4 puta je veći od minimalnog.



Slika 76. Segmentacija CAD modela kada se pomoćni segment za parnost dodaje na svim neparnim ivicama.

Iz prethodno rečenog zaključujemo da je trivijalno rešenje daleko od optimalnog kada je reč o broju elemenata u finalnoj mreži, te da broj umetnutih pomoćnih segmenata treba na neki način redukovati.

## 8.2. Rešenja predložena u literaturi

U [107] je predloženo rešenje za dodavanje pomoćnih segmenata koje se može primeniti na manifoldnu geometriju (otvorene ili zatvorene). Predloženo rešenje podrazumeva formiranje dveju lista neparnih ivica: u prvoj se nalaze unutrašnje ivice, a u drugoj granične ivice modela. U prvom prolazu se prolazi kroz obe liste i iz njih se eliminišu sve ivice koje za susede imaju isključivo parne površine, dok se na ivice kojima su susedne isključivo neparne površine dodaje pomoćni segment, a same ivice se eliminišu iz liste. Primera radi, u slučaju jednostavnog modela prikazanog na slici 76, već nakon ovog prolaza obe liste bi ostale prazne, bez da je dodat i jedan pomoćni segment. Nakon prvog prolaza lista graničnih ivica ostaje prazna, dok se u listi unutrašnjih ivica u opštem slučaju još uvek nalazi izvestan broj ivica čija je jedna susedna površina parna, a druga neparna. Dodavanje pomoćnih segmenata na ivice iz ove liste se vrši u iterativnom postupku. Pomoćni segment se dodaje na jednu ivicu iz liste u jednoj iteraciji. Nakon dodavanja pomoćnog segmenta ivica se briše iz liste, a broj segmenata u njoj susednim poligonima se povećava za 1 (čime se njihova parnost invertuje). Ovaj postupak se ponavlja sve dok lista ivica ne ostane prazna.

Vreme izvršavanja opisanog algoritma je linearno u odnosu na broj ivica u modelu, a generalizacija algoritma na slučaj nemanifoldne geometrije je trivijalna. Problem predstavlja činjenica ovaj algoritam ne minimizuje broj umetnutih pomoćnih segmenata, a u najgorem slučaju daje isti rezultat kao gore opisano trivijalno rešenje. Drugi problem predstavlja činjenica da se parnost menja samo na inicijalno neparnim ivicama, što u generalnom slučaju može biti nepovoljno.

Algoritam u kome se teži minimizaciji broja pomoćnih segmenata predložen je u [38]. Pre nego što pređemo na opis algoritma uvedimo pojam putanje između dva poligona i njene dužine. Pod putanjom između dva poligona podrazumevamo niz poligona, koji počinje jednim, a završava se drugim od ta dva poligona i u kojem su svaka dva uzastopna poligona susedna. Rastojanje između dva poligona je ceo broj, za dva manji od najkraće putanje između ovih poligona. Ako su poligoni susedni, najkraća putanja sadrži samo ta dva poligona, pa je rastojanje između njih jednako nuli.

Osnovna ideja u predloženom algoritmu jeste da se za posmatrani neparni poligon pronađe najkraća putanja do drugog neparnog poligona. Jednom kada je ovakva putanja pronađena dodaju se pomoćni



## 8.3. Nova metoda

Metoda za dodavanje pomoćnih segmenata za parnost predložena u ovom radu zasniva se na primeni trivijalnog rešenja kao polaznog rešenja. Kao što je rečeno, trivijalno rešenje je jednostavno za implementaciju i garantuje parnost svih površina, ali rezultira dodavanjem velikog broja pomoćnih segmenata. Iz tog razloga se nakon primene trivijalnog rešenja predlažu dva algoritma za eliminaciju pomoćnih segmenata za parnost:

- *Lokalni algoritam* radi na nivou čvora ili para susednih čvorova geometrije.
- *Globalni algoritam* radi na nivou cele geometrije, ili izolovanih delova geometrije, ukoliko se geometrija sastoji od više međusobno izolovanih delova.

Parnost ivica koje ne pripadaju zatvorenoj petlji ni jedne površine u modelu nije nam od interesa, jer broj segmenata na otvorenim petljama poligona ne ugrožava mogućnost kreiranja čiste četvorougaoone mreže. Iz tog razloga se ovakve ivice ignorišu u analizi koja je opisana u nastavku ovog poglavlja.

Kada je reč o implementaciji metode, radi uštede vremena pomoćni segmenti se ne dodaju zaista sve do kraja postupka eliminacije nepotrebnih pomoćnih segmenata. Umesto toga se za svaku ivicu uvodi logička promenjiva koja označava da li je dodavanje segmenta za parnost potrebno. Ukoliko je vrednost ove promenjive *true* dodavanje je potrebno, a ukoliko je *false* dodavanje pomoćnog segmenta nije potrebno. Dakle, nakon primene trivijalnog rešenja na svim neparnim ivicama ova promenjiva ima vrednost *true*, a na svim parnim vrednost *false*.

Promena parnosti ivica dozvoljena je na svim ivicama izuzev sledećih:

- Ivice koje se zatvaraju u sebe, tj. na kojima postoji jedan ili ni jedan čvor moraju biti parne. Razlog je taj što ovakva ivica može potpuno obuhvatati jednu površinu, te bi njena neparnost onemogućila čistu četvorougaoonu segmentaciju ove površine.
- Ivice koje su u postupcima kontrole dužine ivice, i oblika i regularnosti poligona, opisanim u prethodnoj glavi, označene kao ivice koje moraju biti parne i sa nepromenljivim brojem segmenata u poligonskoj aproksimaciji.

U sledeća dva poglavlja biće dat opis lokalnog i globalnog algoritma za eliminaciju suvišnih segmenata za parnost.

### 8.3.1. Lokalni algoritam

Lokalni algoritam za eliminaciju suvišnih segmenata za parnost zasniva se na analizi ivica koje izlaze iz jednog čvora, ili iz para susednih čvorova, povezanih tačno jednom ivicom. Kada je trivijalno rešenje polazno rešenje, lako se pokazuje da je parnost svih ivica iz ovakve grupe moguće promeniti tako da sve postanu parne ili sve neparne, a da se ne ugrozi parnost odgovarajućih površina. Naime, s obzirom da je trivijalno rešenje polazno rešenje sve površine kojima pripadaju ivice iz posmatrane grupe su već parne. Kako svakoj površini pripada paran broj ivica koje izlaze iz jednog čvora ili iz para susednih čvorova, promena parnosti takvih ivica neće ugroziti parnost površina.

Ukoliko su sve ivice iz analizirane grupe parne, na njima se ništa ne menja. Ukoliko su sve ivice neparne, na svima se vrednost odgovarajuće logičke promenjive postavi na *false*, tj. ni na jednu od njih se ne dodaje pomoćni segment. Međutim, ukoliko u analiziranoj grupi ima i parnih i neparnih ivica, potrebna je dodatna analiza kako bi se donela odluka o tome na kojim ivicama se menja parnost. U [123] je predloženo da kriterijum za ovu odluku bude samo broj parnih i neparnih ivica, te da se parnost menja tako da broj pomoćnih segmenata bude minimalan. To rešenje minimizuje broj pomoćnih segmenata, ali ne uzima u obzir dužinu pojedinih segmenata koja može značajno uticati na kvalitet mreže. Iz tog razloga uvodimo težinski faktor za ivicu, dat sa:



$$w = \frac{d_s}{l_{min}} \quad (77)$$

gde je  $d_s$  zadata dimenzija mreže na posmatranoj ivici, a  $l_{min}$  dužina najkraćeg segmenta u poligonskoj aproksimaciji posmatrane ivice. Kako je dužina segmenata u poligonskoj aproksimaciji ivice uvek manja ili jednaka zadatoj dimenziji mreže, vrednost ovako definisanog težinskog faktora je uvek veća ili jednaka od 1. Težinski faktor za grupu ivica računa se kao suma težinskih faktora svih ivica iz grupe.

Odluka o tome da li se parnost menja na parnim ili neparnim ivicama iz posmatrane grupe donosi se na osnovu relativne promene težinskog faktora cele grupe, kada se dodaju pomoćni segmenti na odgovarajuću (parnu ili neparnu) podgrupu. Relativna promena težinskog faktora računa se kao:

$$d_w = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{d_s^{(i)}}{l_{min}^{(i)}}}{\sum_{i=1}^N \frac{d_s^{(i)}}{l_{add}^{(i)}}} \quad (78)$$

gde je  $N$  broj ivica u posmatranoj grupi, dok je  $l_{add}^{(i)}$  procenjena dužina najkraćeg segmenta u poligonskoj aproksimaciji  $i$ -te ivice nakon dodavanja pomoćnog segmenta za parnost.

Jasno je da ukoliko ivica pripada grupi čija se parnost ne menja nema ni promene u dužini najkraćeg segmenta, tj.  $l_{add}^{(i)} = l_{min}^{(i)}$ . Ukoliko se pak pomoćni segment dodaje, procenjena dužina najkraćeg segmenta zavisi od inicijalne poligonske aproksimacije ivice. Ukoliko je inicijalna aproksimacija uniformna po dužini segmenata, tj. ukoliko je varijacija dužine segmenta ispod predefinisane praga, kreira se nova uniformna poligonska aproksimacija sa brojem segmenata povećanim za 1. U slučaju da je inicijalna aproksimacija neuniformna, pomoćni segment se dodaje podelom najdužeg segmenta inicijalne poligonske aproksimacije na dva segmenta jednakih dužina. Prema tome, procenjena dužina najkraćeg segmenta računa se kao:

$$l_{add} = \begin{cases} l_{min} \frac{N}{N+1}, & \text{ako je } l_{max} < k \cdot l_{min} \\ \min\left(l_{min}, \frac{l_{max}}{2}\right), & \text{inače} \end{cases} \quad (79)$$

gde je  $l_{max}$  dužina najdužeg segmenta u poligonskoj aproksimaciji ivice, dok je  $k$  koeficijent koji određuje uniformnost podele. U svim primerima iz ovog rada vrednost ovog koeficijenta je postavljena na 1.1, tj. smatra se da je podela uniformna ukoliko varijacija dužine segmenata nije veća od 10%.

Pomoćni segment se dodaje na onu podgrupu ivica za koju je proizvod broja ivica koji joj pripadaju i koeficijenta izračunatog u skladu sa jednačinom (78) manji. Formalno zapisano, ukoliko sa  $N_p$ ,  $N_n$ ,  $d_w^p$  i  $d_w^n$  označimo broj parnih i neparnih ivica u posmatranoj grupi, i promene težinskog faktora za parne i neparne ivice, respektivno:

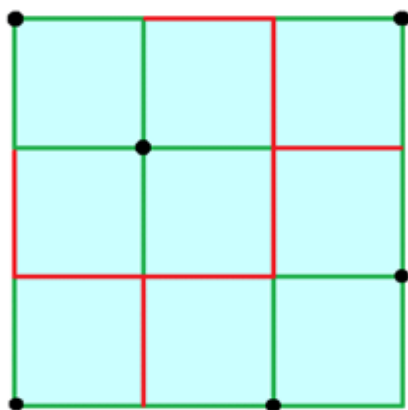
- Ako je  $N_p d_w^p \geq N_n d_w^n$ , ništa se ne menja u odnosu na trivijalno rešenje, tj. pomoćni segment se dodaje na neparne ivice.
- Ako je  $N_p d_w^p < N_n d_w^n$ , podešavanja se invertuju u odnosu na trivijalno rešenje, tj. pomoćni segment se ne dodaje na neparne, ali se dodaje na parne ivice.

Na ovaj način se u izboru ivica čija će parnost biti promenjena (tj. na kojima će biti dodat pomoćni segment) u obzir uzimaju i broj dodatnih segmenata (koji je jednak broju odgovarajućih ivica u gornjim jednačinama) i dužina novonastalih segmenata (uzeta u obzir kroz koeficijent  $d_w$ ). Na taj

način se postiže kompromis između minimizacije broja elemenata u finalnoj mreži i faktora kvaliteta elemenata, koji može značajno opasti ukoliko se u poligonskim aproksimacijama ivica pojave veoma kratki segmenti.

Opisana analiza se vrši za svaki čvor i za svaku ivicu u modelu. Polazi se od proizvoljnog čvora (ivice), a u narednim iteracijama se skup analiziranih čvorova (ivica) širi uniformnim širenjem granice između skupa analiziranih i skupa neanaliziranih entiteta. Ukoliko se geometrija sastoji od više međusobno izolovanih delova, opisana procedura se primenjuje za svaki od delova nezavisno.

Na ovaj način se sprečava kreiranje “ostrva” neanaliziranih entiteta, u kojima eliminacija suvišnih segmenata primenom opisanog postupka nije moguća. Takva situacija je prikazana na slici 78, gde je prikazan model koji se sastoji od 9 površina. Sve ivice su inicijalno aproksimirane sa po jednim segmentom. Nakon primene trivijalnog rešenja na svima njima je logička promenjiva, koja označava da li je dodavanje segmenta za parnost potrebno, postavljena na *true*. Iako je očigledno da je na svima njima moguće eliminisati dodavanje pomoćnog segmenta, ukoliko se opisani algoritam primeni najpre na ivice koje izlaze iz čvorova označenih crnim kružićima, eliminacija pomoćnog segmenta na ivicama označenim crvenom bojom nije moguća primenom opisanog algoritma.



Slika 78. Nepovezani skupovi analiziranih čvorova (crni kružići) i ivice na kojima je nemoguće eliminisati suvišne segmente (crvene ivice).

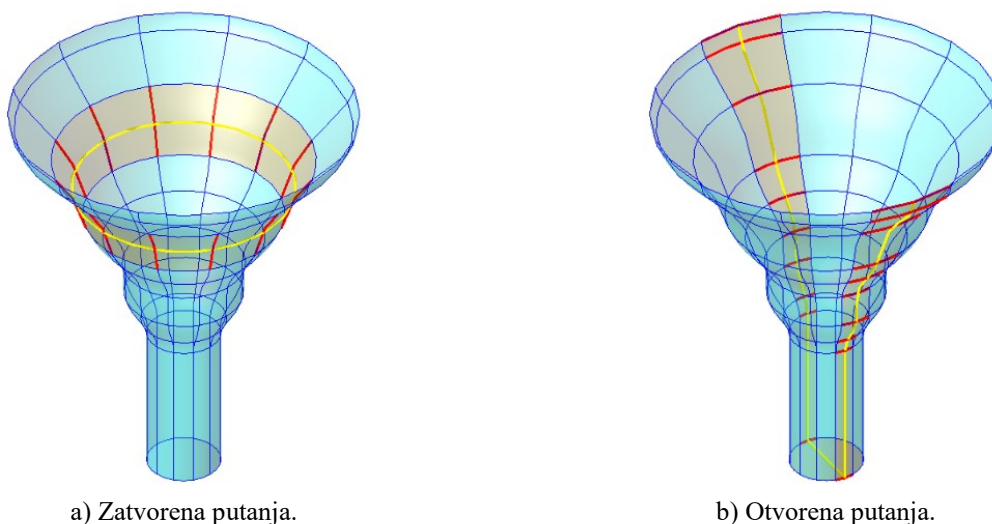
U postupku analize ivica koje izlaze iz čvora svaki čvor je posećen jedanput, a svaka ivica najviše dva puta (po jednom za svaki svoj čvor). U toku analize ivica koje izlaze iz susednih čvorova, svaka ivica je posećena 3 puta u najgorem slučaju: jednom kao ivica koja povezuje dva susedna čvora, i dva puta kao ivica koja izlazi iz jednog od dva susedna čvora. Prema tome, složenost algoritma je linearna,  $O(N_V + N_E)$ , gde je  $N_V$  broj čvorova, a  $N_E$  broj ivica u modelu.

Važno je na ovom mestu napomenuti da se u opisanom algoritmu polazi od trivijalnog rešenja, koje garantuje parnost svih površina. U toku postupka eliminacije pomoćnih segmenata parnost ni jednog trenutka nije ugrožena ni za jednu površinu. Čak i ukoliko se postupak ne sprovede do kraja parnost površina će biti zadovoljena. Ova osobina izdvaja opisani algoritam u poređenju sa algoritmima opisanim u poglavlju 8.2.

### 8.3.2. Globalni algoritam

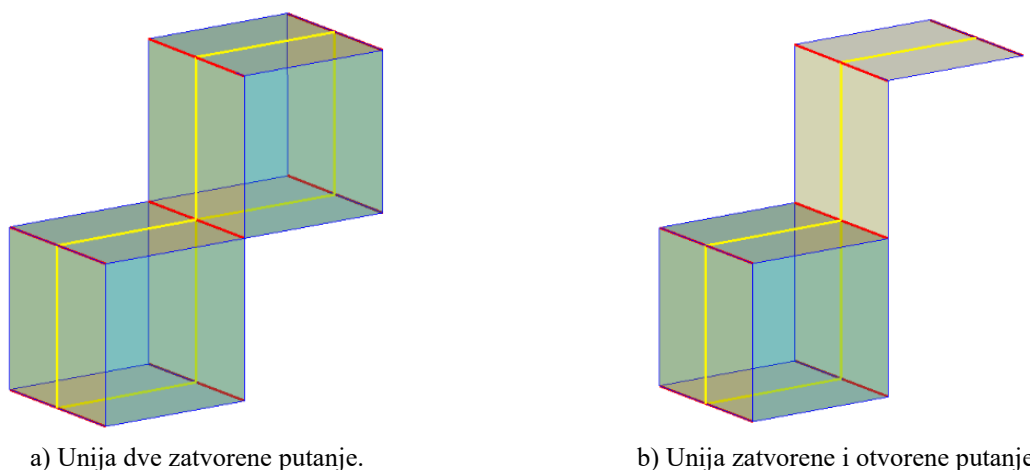
Nakon primene algoritma opisanog u prethodnom poglavlju još uvek je moguće da izvestan broj površina ima više od jedne ivice na kojoj je potrebno dodati pomoćni segment za parnost. Ukoliko je broj ovakvih ivica na posmatranoj površini dat sa  $2k$ , gde je  $k$  ceo broj, jasno je da se dodavanje pomoćnog segmenta može eliminisati sa svih njih. Ako je broj takvih ivica dat sa  $2k+1$ , dodavanje segmenta je potrebno na samo jednoj ivici, dok se sa ostalih može eliminisati. Međutim, kako se ne bi ugrozila usaglašenost mreže, ovaj postupak se ne može primeniti na jednoj površini nezavisno od njoj susednih površina već zahteva globalni tretman.

Algoritam za eliminaciju suvišnih pomoćnih segmenata na ovakvim površinama započinje pronalaženjem svih površina na kojima je dodavanje pomoćnog segmenta za parnost podešeno na dve ili više ivice. Nakon toga se konstruiše putanja, koja se sastoji od jednog ili više segmenata, gde se svaki segment putanje nalazi na jednoj površini i povezuje dve ivice na kojima je potrebno dodavanje pomoćnog segmenta za parnost. Putanja može proći proizvoljan broj puta preko svake površine, ali samo jednom kroz jednu ivicu. Cilj je pronalaženje putanja koje su zatvorene ili se završavaju na graničnoj ivici na oba svoja kraja, kao što je prikazano na slici 79. Nakon što konstruišemo ovakvu putanju, pomoćni segment za parnost se eliminiše na svim ivicama kroz koje ona prolazi. Putanju na kojoj je moguće izvršiti eliminaciju segmenata za parnost označavaćemo u daljem tekstu kao *eliminacionu putanju*.



Slika 79. Putanje (označene žutom bojom) koje povezuju ivice (označene crvenom bojom) na kojima je potrebno dodavanje pomoćnog segmenta za parnost.

Primena ovog algoritma na nemanifoldne geometrije je trivijalna. Jedine ivice koje zahtevaju poseban tretman jesu nemanifoldne ivice. Za njih se putanja koja je zatvorena ili se završava na graničnoj ivici mora kreirati kroz svaku površinu koja sadrži datu nemanifoldnu ivicu, kreirajući na taj način složenu putanju, kao što je prikazano na slici 80.



Slika 80. Složene putanje za eliminaciju.

Za razliku od lokalnog algoritma koji počinje u slučajno izabranom čvoru (ivici), kod globalnog algoritma se primenjuje gramziva (*greedy*) strategija. Algoritam počinje u ivici koja ima najveću relativnu promenu težinskog faktora definisanog jednačinom (77), a u svakoj sledećoj iteraciji se između više ivica kojima bi putanja mogla da bude nastavljena bira ona sa najvećom promenom ovog težinskog faktora.

Kreiranje putanje se vrši primenom pretrage u dubinu (Depth-First Search) [62]. Ukoliko je pošavši iz neke ivice eliminaciona putanja pronađena vrši se eliminacija pomoćnih segmenata za parnost na ivicama koje ona seče. Ukoliko ovakva putanja nije pronađena sve ivice koje su posećene u analizi smeštaju se u jednu od sledećih grupa: ivice koje su presečene lokalnim, kraćim eliminacionim putanjama, i ivice koje nisu presečene takvim putanjama. Oba tipa ivica se eliminišu iz dalje analize, s tim što se na onima koje su presečene lokalnim eliminacionim putanjama eliminišu pomoćni segmenti za parnost. Na taj način svaka ivica može u najgorem slučaju biti posećena  $N_{path}$  puta, gde je  $N_{path}$  broj eliminacionih putanja sa kojima je data ivica povezana. Kako je broj takvih putanja u generalnom slučaju mali (jer se u globalni algoritam ulazi nakon što je primenjen veoma efikasan lokalni algoritam), možemo reći da algoritam ima linearnu složenost datu sa  $O(N'_S + N'_E)$ . Sa  $N'_S$  je označen broj površina sa više od jedne ivice na kojoj je potrebno dodati pomoćni segment, dok je sa  $N'_E$  označen broj ivica koje pripadaju takvim površinama, a na kojima je potrebno dodati pomoćni segment za parnost.

Kao što je to bio slučaj i sa lokalnim algoritmom, ni globalni algoritam ne ugrožava parnost nakon eliminacije pomoćnih segmenata duž pojedinih eliminacionih putanja. To omogućava bezbednu implementaciju različitih modifikacija algoritma, ili prekidanje algoritma u proizvoljnom trenutku.

### 8.3.3. Primeri primene nove metode

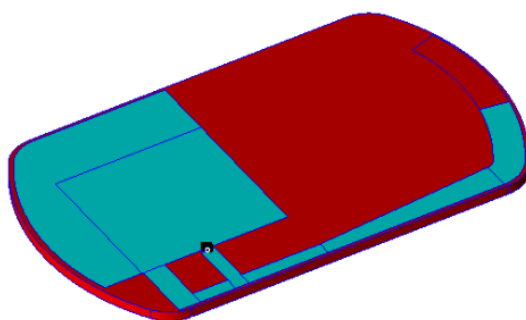
Efikasnost predložene metode za dodavanje pomoćnih segmenata za parnost biće ilustrovana na dva primera, jednom jednostavnom i jednom kompleksnom. Nova metoda će biti upoređena sa sličnim metodama koje su predložene ranije, u [121] i [122]. Ranije predložene metode podrazumevaju, kao i nova, trivijalno rešenje kao polazno rešenje, ali se eliminacija nepotrebnih segmenata za parnost vrši samo primenom lokalnog algoritma. Dodatno, ranije predložene metode nisu dozvoljavale promenu parnosti na inicijalno parnim ivicama, pa je pomoćni segment za parnost mogao biti dodat samo na ivice koje su inicijalno neparne.

Parametri koje ćemo porediti jesu broj elemenata u finalnoj mreži i srednja vrednost faktora kvaliteta. Faktor kvaliteta pojedinih elemenata računat je u skladu sa jednačinom (38), dok je srednja vrednost faktora kvaliteta računata kao aritmetička sredina vrednosti za pojedine elemente mreže. Na ovom mestu nećemo ulaziti u način na koji je kreirana finalna mreža, za sada je bitno samo da su sve ostale faze algoritma uključujući i kreiranje finalne mreže potpuno identične kod primene obe metode za dodavanje pomoćnih segmenata za parnost.

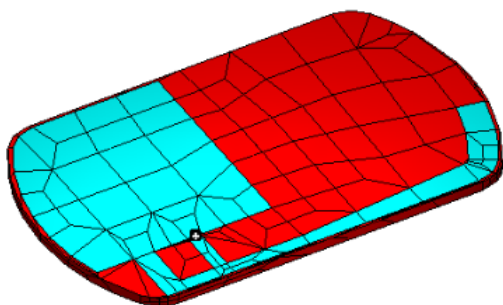
Svi modeli su simulirani u WIPL-D numeričkom kernelu [26], pa je dato i poređenje broja nepoznatih, vremena simulacije i rezultata simulacije, za dve metode. Sve simulacije su izvršene na računaru sledeće konfiguracije: Intel Core i7-7700 CPU @ 3.60GHz, sa 32 GB RAM-a, i sa jednom NVidia GeForce GTX 1080 Ti grafičkom karticom.

Prvi analizirani model je model štampane invertovane-F antene (Printed Inverted-F Antenna - PIFA), prikazane na slici 81. Metalizacija je modelovana sa konačnom debljinom, pa je geometrija nemanifoldna jer su sve ivice koje predstavljaju granicu između metala i dielektrika deljene između tri površine. Sama geometrija je relativno jednostavna i u momentu kada se ulazi u proceduru dodavanja pomoćnih segmenata za parnost sastoji se od 129 površina, 335 ivica i 210 čvorova.

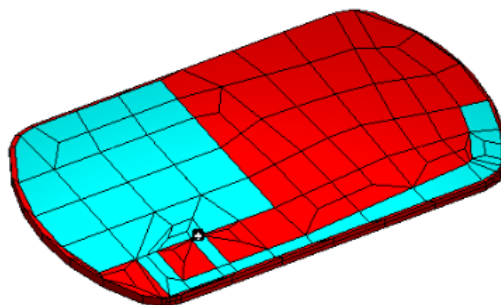
Mreža antene dobijena primenom dve metode za dodavanje pomoćnih segmenata za parnost prikazana je na slici 82. Broj elemenata mreže, srednja vrednost faktora kvaliteta i vreme potrebno za dodavanje pomoćnih segmenata za parnost prikazani su u tabeli 3.



Slika 81. CAD model invertovane-F antene.



a) Stara metoda.



b) Nova metoda.

Slika 82. Mreža četvorouglova invertovane-F antene.

Tabela 3 Broj elemenata mreže, srednji Q-faktor i trajanje dodavanja pomoćnih segmenata za model PIFA.

Metoda	Broj elemenata mreže	Srednja vrednost Q-faktora	Vreme [s]
Stara	620	0.777	0.01
Nova	494	0.788	0.12

Na osnovu vrednosti prikazanih u tabeli 3 vidimo da je primena nove tehnike donela redukciju broja elemenata mreže od oko 20%, uz istovremeno blago povećanje srednje vrednosti faktora kvaliteta elemenata. Vreme koje je potrebno za dodavanje pomoćnih segmenata za parnost u oba slučaja je zanemarljivo malo u odnosu na ukupno vreme segmentacije, koje iznosi oko 2.5 sekundi.

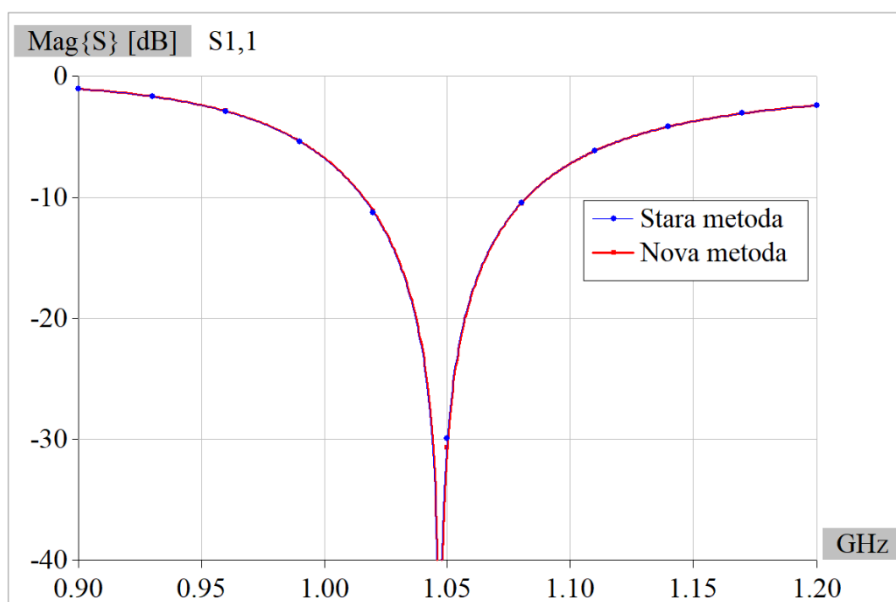
Broj nepoznatih koeficijenata i vremena potrebna za pojedine faze simulacije prikazana su u tabeli 4. Model je simuliran u frekventijskom opsegu između 0.9 GHz i 1.2 GHz, u 11 frekventnih tačaka. Vremena data u tabeli 4 odnose se na simulaciju u celom opsegu učestanosti. Kako se radi o električki malom modelu, nije primenjivano GPU ubrzanje [124], [125], već samo CPU paralelizacija.

Tabela 4 Broj nepoznatih koeficijenata i vreme simulacije za model PIFA.

Metoda	Broj nepoznatih	Punjenje matrice [s]	Matrična inverzija [s]	Ukupno vreme simulacije [s]
Stara	2669	55.2	3.82	59.1
Nova	2207	40.7	2.12	43.0

Kao što se može videti iz tabele 4, broj nepoznatih koeficijenata je redukovan za oko 20%, što je slično redukciji u broju elemenata mreže. Ukupno vreme simulacije je redukovano za oko 27%. Složenost algoritma za punjenje MoM matrice je  $O(N^2)$ , a za matričnu inverziju, koja se u WIPL-D softverskom paketu po definiciji radi kao direktna LU dekompozicija,  $O(N^3)$ , gde je  $N$  broj nepoznatih koeficijenata. U slučaju ovog modela punjenje matrice je dominantno vreme, te je stoga redukcija vremena simulacije nešto skromnija nego što bi se moglo očekivati imajući u vidu da je broj nepoznatih redukovan za oko 20%. Za modele sa većim brojem nepoznatih vreme matrične inverzije će postati dominantno, pa se očekuju i veće redukcije ukupnog vremena simulacije.

Kada govorimo o rezultatima simulacije, vrednosti koeficijenta refleksije su praktično identične za obe metode, kao što se može videti sa dijagrama prikazanog na slici 83.

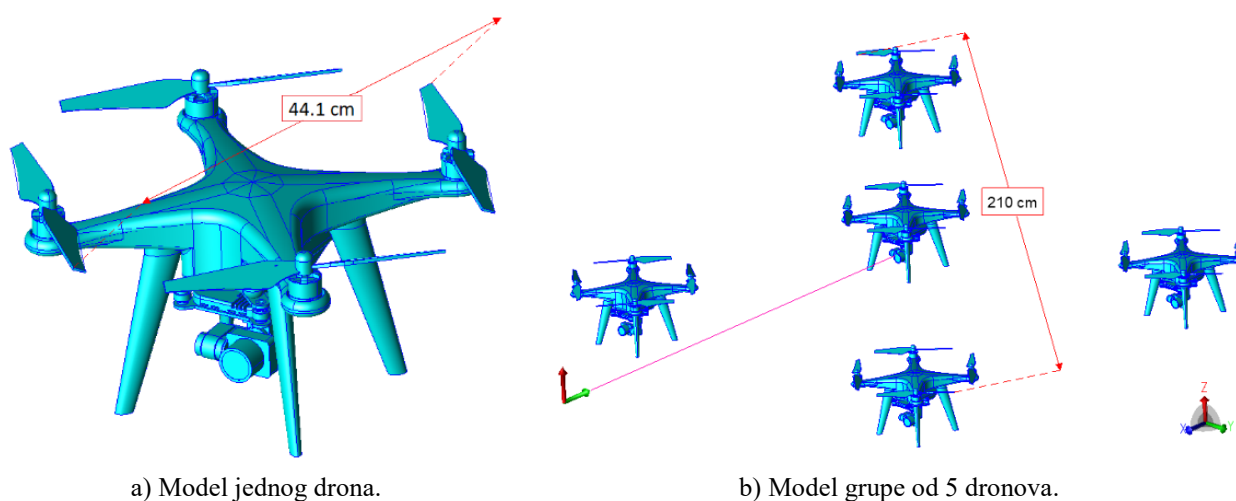


Slika 83. Koeffcijent refleksije invertovane-F.

Drugi model koji ćemo analizirati značajno je kompleksniji od prethodnog. To je model sistema od 5 dronova prikazanih na slici 84. Dronovi su modelovani sa velikim brojem detalja, pa je ukupan broj entiteta u modelu, u momentu kada se ulazi u proceduru dodavanja pomoćnih segmenata za parnost: 13 245 površina, 34 380 ivica i 21 215 čvorova. Model je manifoldan, ali se za razliku od prethodnog sastoji od 5 izolovanih delova.

Rezultat od interesa je monostatičko rasejanje u horizontalnoj ravni, a struktura je pobuđena  $\theta$ -polarizovanim uniformnim ravnim talasom. Model je simuliran na učestanosti od 3 GHz. Najveća dimenzija modela je oko 210 cm, što je oko 21 talasna dužina na učestanosti od interesa.

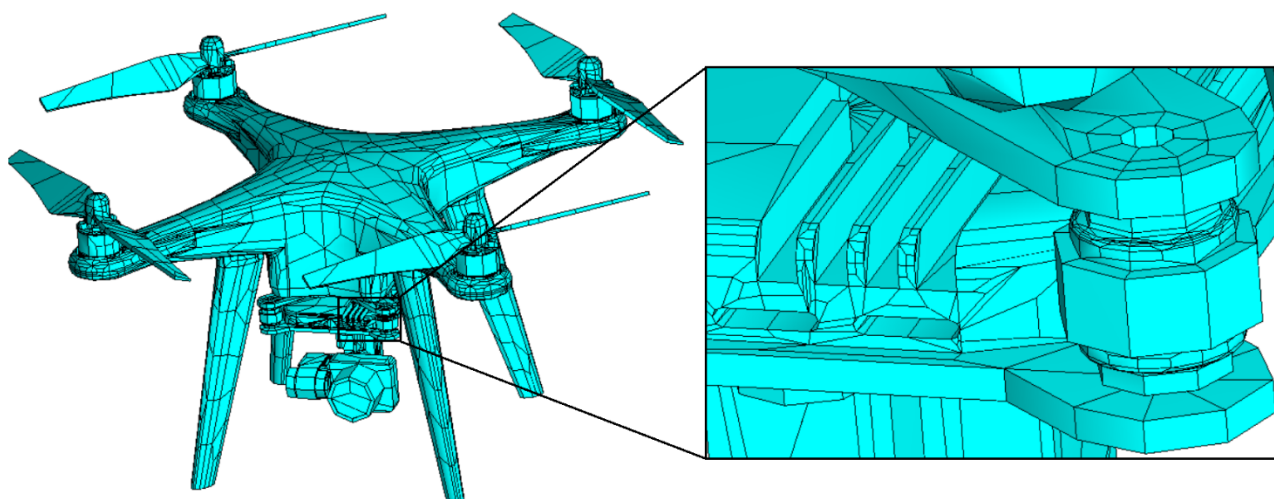
Mreža modela jednog drona prikazana je na slici 85. Očigledno je sa ove slike da se značajno kvalitetnija mreža dobija primenom nove metode za dodavanje pomoćnih segmenata za parnost. Na uvećanom delu mreže se mogu videti izduženi trapezoidni elementi kada je primenjena stara metoda, što je posledica nepotrebnih dodatnih segmenata za parnost koji nisu eliminisani. Primenom nove metode ovi segmenti bivaju eliminisani, pa je i oblik svih elemenata mreže na tom delu modela pravougaon.



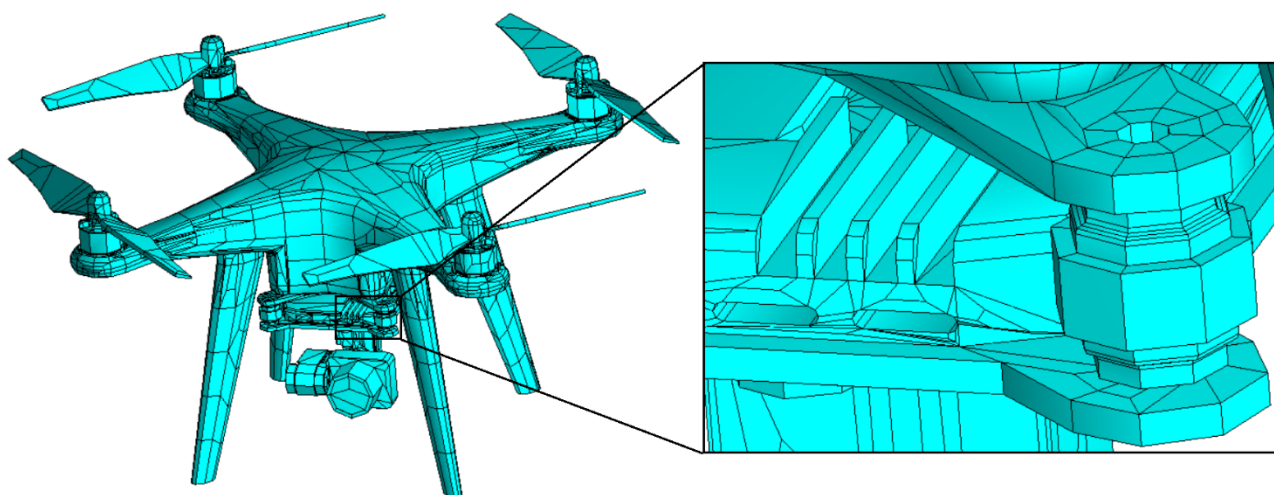
a) Model jednog drona.

b) Model grupe od 5 dronova.

Slika 84. CAD model drona i grupe od 5 dronova obasjanih uniformnim ravnim talasom.



a) Stara metoda.



b) Nova metoda.

Slika 85. Četvorougona mreža modela drona.

Broj elemenata mreže, srednja vrednost faktora kvaliteta i vreme potrebno za dodavanje pomoćnih segmenata za parnost, za model sistema od 5 dronova, prikazani su u tabeli 5.

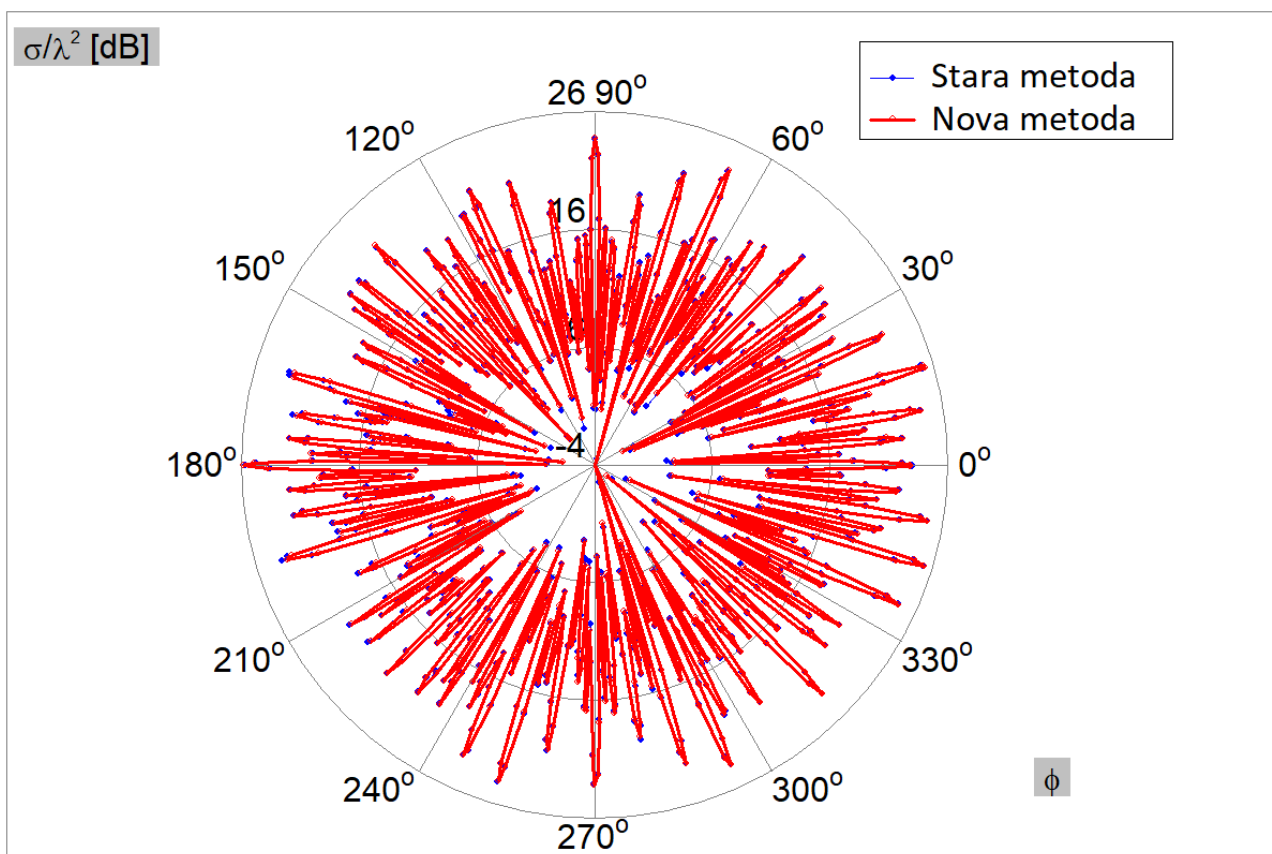
Tabela 5 Broj elemenata mreže, srednji Q-faktor i trajanje dodavanja pomoćnih segmenata za model sistema od 5 dronova.

Metoda	Broj elemenata mreže	Srednja vrednost Q-faktora	Vreme [s]
Stara	45 780	0.573	4.0
Nova	35 490	0.585	16.1

Na osnovu vrednosti datih u tabeli 5, vidimo da primena nove metode za dodavanja pomoćnih segmenata za parnost smanjuje broj elemenata u mreži modela 5 dronova za oko 22.5%, uz istovremeno blago povećanje srednjeg faktora kvaliteta elemenata. Vreme koje je potrebno za dodavanje pomoćnih segmenata za parnost je u slučaju obe metode zanemarljivo malo u odnosu na ukupno vreme segmentacije, koje iznosi oko 6 minuta. Takođe, ovo vreme pokazuje linearno povećanje u odnosu na povećanje broja elemenata u modelu, kada se uporedi sa modelom invertovane-F antene.

Rezultat za monostatičko rasejanje u 721 pravcu u horizontalnoj ravni prikazan je na slici 86. Rezultati simulacije su praktično identični za obe metode za dodavanja pomoćnih segmenata za parnost.





Slika 86. Monostatičko rasejanje u horizontalnoj ravni za model sistema od 5 dronova.

Broj nepoznatih koeficijenata i vremena simulacije dati su u tabeli 6. Broj nepoznatih koeficijenata za oba modela je takav da je memorija zahtevana za smeštanje matrice sistema veća od dostupne RAM memorije, te su oba modela simulirana u *out-of-core* modu (matrica smeštena na disku) [126]. Jedan disk sa brzinom upisa/čitavanja od oko  $450 \frac{\text{MB}}{\text{s}}$  je korišćen za simulacije. GPU ubrzanje je korišćeno za matricnu inverziju [127].

Tabela 6 Broj nepoznatih koeficijenata i vreme simulacije za model sistema od 5 dronova.

Metoda	Broj nepoznatih	Punjenje matrice [s]	Matrična inverzija [s]	Ukupno vreme simulacije [s]
Stara	113 355	1 405.2	1 209.2	2 913.0
Nova	92 442	920.3	637.9	1 770.4

Primena nove metode dovela je do redukcije broja nepoznatih od oko 17%. Međutim, zbog velikog broja nepoznatih koeficijenata vreme matricne inverzije postaje značajno, što vodi ka većem ukupnom ubrzanju simulacije. Vreme simulacije je smanjeno za oko 40% kada je primenjena nova metoda za dodavanje pomoćnih segmenata za parnost.



## 9. Četvorougona segmentacija CAD površina

U ovoj glavi će biti opisan postupak za segmentaciju CAD površine baziran na segmentaciji odgovarajućeg poligona u osnovnom domenu.

U prethodnim glavama je opisana podela CAD površina na kvazi-planarne, te kreiranje poligonske aproksimacije ivica kvazi-planarnih površina i njihova projekcija u osnovni domen. U poglavlju 3.5.2 je dat opis metode za četvorougona segmentaciju ravnog poligona, koja je predložena u [17] i [38], a za koju se pokazuje da rezultira mrežom koja je pogodna za efikasnu elektromagnetsku analizu. Ideja je da se ova metoda za segmentaciju koristi i za segmentaciju kvazi-planarnih površina. Da bi direktna primena metode koja je razvijena za ravan poligon bila moguća nad površinom proizvoljnog oblika preslikavanje te površine na ravan poligon moralo bi da bude izometrijsko (Prilog A). Kako preslikavanje koje se vrši u metodi predloženoj u ovom radu u opštem slučaju nije izometrijsko (izometrijsko je za ravne površine, a odstupa od izometrijskog srazmerno nivou zakrivljenosti površine) direktna primena metode predložene u [17] i [38] na segmentaciju proizvoljne površine nije moguća, već je potrebno uvesti neke modifikacije kako bi se oblik površine uzeo u obzir.

Podsećanja radi, metoda za segmentaciju ravnog poligona predložena u [17] i [38] zasniva se na dekompoziciji poligona na jednostavnije delove, povlačenjem duži između čvorova poligona. Ove duži se povlače tako da se za svaku računa odgovarajući težinski faktor, a forsiraju se duži sa minimalnim težinskim faktorom, tako da se maksimizuje faktor kvaliteta elemenata mreže. Dekompozicija se vrši do nivoa četvorougla ili šestougla koji se zatim segmentira primenom odgovarajućih obrazaca. Modifikacija algoritma za dekompoziciju poligona, kako bi se omogućila njegova primena na površinu proizvoljnog oblika opisana je u poglavlju 9.1.

Projekcija čvorova četvorougane mreže ravnog poligona na odgovarajuću CAD površinu opisana je u poglavlju 9.2.

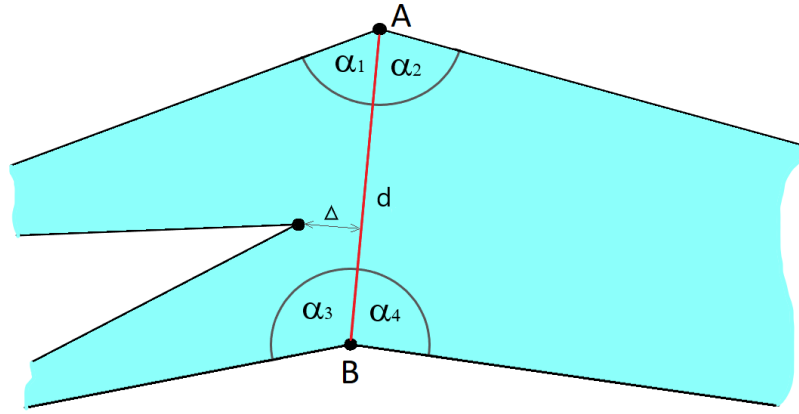
Konačno, generalizacija predložene metode, tako da se umesto bilinearnih dobiju zakrivljeni krivolinijski četvorouglovi opisana je u poglavlju 9.3.

### 9.1. Segmentacija poligona

Kao što je opisano u poglavlju 3.5.2, osnovni problem u dekompoziciji proizvoljnog poligona na jednostavnije delove predstavlja optimalan izbor linija podele. Ukoliko bi se u postupku izbora linije podele koristio težinski faktor dat jednačinom (51), zakrivljenost površine ni na koji način ne bi bila uzeta u obzir.

Kao što je već rečeno preslikavanje u osnovni domen koje je predloženo u ovom radu svodi se na ortogonalnu projekciju čvorova poligonske aproksimacije ivica kvazi-planarne površine na referentnu ravan. Kao takvo ovo preslikavanje nije izometrijsko, ali se može reći da je kvazi-konformalno. Kvazi-konformalnost omogućava da u računanju težinskog faktora pojedinih duži direktno koristimo uglove koje te duži zaklapaju sa stranicama poligona u osnovnom domenu. Sa druge strane, oblik površine kojoj odgovara posmatrani poligon u osnovnom domenu mora se uzeti u obzir projektovanjem razmatrane duži na površinu. Iz tog razloga uvodimo dva težinska faktora za svaku duž:

- Težinski faktor u ravni,  $i$
- Težinski faktor projekcije duži na površ.



Slika 87. Duž  $\overline{AB}$  koja deli poligon u osnovnom domenu na jednostavnije poligone.

Posmatrajmo duž  $\overline{AB}$  prikazanu na slici 87, koja je povučena između dva čvora poligona koji predstavlja sliku površine u osnovnom domenu. Težinski faktor u ravni definišemo na osnovu ugaonog i dužinskog težinskog faktora. Ugaoni težinski faktor dat je sa:

$$\delta_U = 10 \sum_{i=1}^4 \frac{\left| \frac{\alpha_i}{\pi} - \frac{1}{2} \right| \left| \frac{\alpha_i}{\pi} - 1 \right| \left| \frac{\alpha_i}{\pi} - \frac{3}{2} \right|}{\left| \frac{\alpha_i}{\pi} \right|^{0.25}}, \quad (80)$$

gde uglovi  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  i  $\alpha_4$  predstavljaju uglove između duži  $\overline{AB}$  i njoj susednih stranica poligona, kao što je prikazano na slici 87. Bitna razlika ovako definisanog težinskog faktora u odnosu na težinski faktor predložen u [17] i [38], i dat jednačinom (51) u poglavlju 3.5.2, jeste činjenica da ovako definisan težinski faktor podjednako favorizuje uglove od  $180^\circ$  i  $270^\circ$  kao i ugao od  $90^\circ$ . Razlog je činjenica da će ovi uglovi u narednim iteracijama podele poligona rezultirati uglovima od  $90^\circ$ , kao najpoželjnijim u finalnoj mreži.

Dužinski težinski faktor definisan je na sledeći način:

$$\delta_L = \begin{cases} \frac{L}{\Delta} - 1, & \text{za } L > \Delta \\ 0, & \text{za } L \leq \Delta \end{cases}. \quad (81)$$

Gde je sa  $\Delta$  označeno minimalno rastojanje između duži  $\overline{AB}$  i nekog od čvorova poligona, dok je dužina  $L$  definisana kao:

$$L = \frac{\min(d_s, d)}{4}, \quad (82)$$

gde je  $d_s$  dimenzija elementa mreže za datu površ, a  $d$  predstavlja dužinu duži  $\overline{AB}$ . Strogo govoreći, s obzirom da preslikavanje površine u osnovni domen nije izometrijsko, rastojanja  $\Delta$  i  $d$  bi trebalo meriti po površini, a ne u osnovnom domenu. Međutim, kako je ovaj faktor uveden samo da bi se sprečilo da podelom posmatranog poligona nastanu poligoni sa veoma uzanim delovima, merenjem ove dužine u osnovnom domenu postiže se željeni cilj. Takođe, postiže se značajno ubrzavanje računanja težinskog faktora.

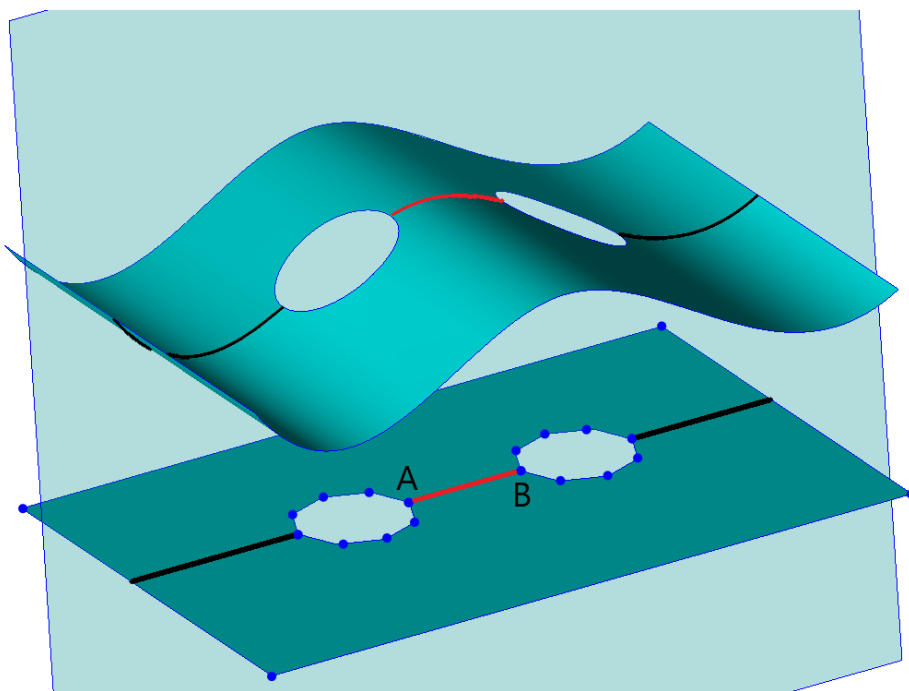
Konačno, ukupan težinski faktor u ravni računamo kao geometrijsku sredinu ugaonog i dužinskog faktora, tj.:

$$\delta_R = \sqrt{\delta_U^2 + \delta_L^2}. \quad (83)$$

Jasno je da težinski faktor u ravni ni na koji način ne uzima u obzir zakrivljenost površine koja odgovara datom poligonu. Kako bi se to uzelo u obzir izvestan broj duži sa najnižim vrednostima težinskog faktora u ravni projektuju se na CAD površinu i izračunava se njihova poligonska aproksimacija. U svim primerima prikazanim u ovom radu broj ovih duži fiksiran je na 4.

Projektovanje duži na površinu ilustrovano je na slici 88. Čvorovi poligona označeni su plavim kružićima, a duž čija se projekcija na površ određuje označena je kao duž  $\overline{AB}$  i obojena crvenom bojom.

Samo projektovanje duži vrši se tako što se konstruiše ravan koja sadrži datu duž (transparentna ravan na slici 88), a koja je normalna na referentnu ravan. Kopija površine se preseče ovom ravni, korišćenjem funkcije “PK\_FACE\_intersect\_surf” i na taj način se u opštem slučaju dobija veći broj krivih u zavisnosti od toga koliko je unutrašnjih petlji presečeno ravni. U primeru sa slike 88 dobijene su tri krive. Krajnje tačke svih ovih krivih se zatim projektuju na referentnu ravan i proverava se pozicija tih tačaka u odnosu na razmatranu duž. One krive čije se obe tačke nalaze izvan duži, a sa iste strane duži, izbacuju se iz dalje analize, kao što je slučaj sa krivama označenim crnom bojom na slici 88. Krive čija se i početna i krajnja tačka nalaze na duži ulaze u dalju analizu bez ikakvih promena. Konačno, krive čije se početna i krajnja tačka nalaze sa različitih strana duži ili se jedna tačka nalazi unutar a druga izvan duži ulaze u dalju analizu, ali uz odgovarajuće skraćivanje. Ovo skraćivanje bi teorijski moglo da se izvrši prostim projektovanjem krajnjih tačaka duži iz osnovnog domena na krivu, ali je to rešenje numerički nestabilno. Iz tog razloga se skraćivanje u posmatranoj tački duži vrši tako što se konstruiše ravan koja sadrži posmatranu tačku, a koja je normalna i na duž u osnovnom domenu i na referentnu ravan. Kriva čije se skraćivanje računa zatim se preseca ovom ravni korišćenjem funkcije “PK\_SURF\_intersect\_curve”.



Slika 88. Projekcija duži  $\overline{AB}$  na CAD površinu (crvena boja – duž i kriva od interesa, crna boja – krive koje se odbacuju i njima odgovarajuće duži).

Jednom kada su određene krive koje predstavljaju projekciju duži na CAD površinu, računa se njihova poligonska aproksimacija, u skladu sa parametrima segmentacije koji odgovaraju datoj površini. Treba napomenuti da svaka duž koja se povlači u procesu dekompozicije poligona ima zahtevanu parnost broja segmenata u poligonskoj aproksimaciji. Ukoliko se parnost broja segmenata inicijalno izračunate poligonske aproksimacije ne poklapa sa zahtevanom parnošću dodaje se

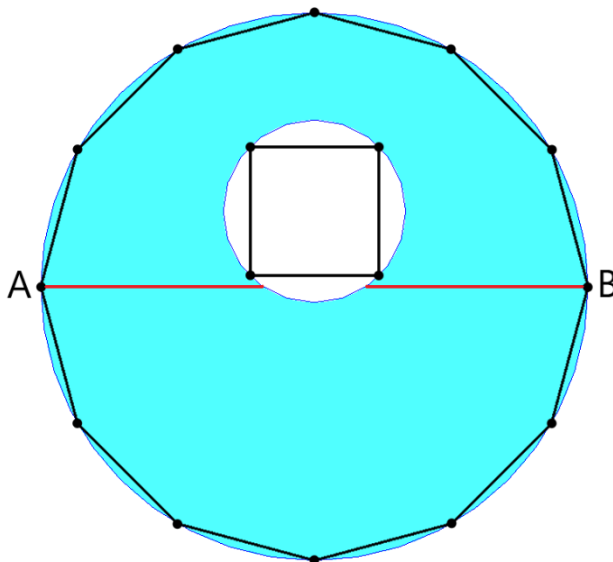
pomoćni segment za parnost. Pomoćni segment se dodaje na onu krivu na kojoj dolazi do najmanje relativne promene srednje dužine segmenta, izračunate u skladu sa jednačinom (78).

Težinski faktor projekcije duži na površinu jednak je broju segmenata u ovoj poligonskoj aproksimaciji,  $N_{seg}$ . Konačno, ukupan težinski faktor duži računamo kao:

$$\delta = N_{seg} \delta_R. \quad (84)$$

Nakon što je ukupan faktor kvaliteta izračunat za sve duži koje su uzete u razmatranje, dekompozicija poligona vrši se njegovom podelom duž one koja ima minimalan ukupni težinski faktor. Duž ove linije podele se dodaju čvorovi koji predstavljaju ortogonalnu projekciju prethodno izračunate poligonske aproksimacije.

U prethodnom tekstu govorimo o krivama koje predstavljaju projekciju duži na CAD površinu. Očigledno je da je u većini slučajeva reč o jednoj krivoj. Veći broj krivih može nastati jedino u slučaju kada duž ne seče stranice poligona u osnovnom domenu, a odgovarajuća ravan preseca ivicu površine. Ovo je ilustrovano na slici 89, gde je cijan bojom označena površina, a plavom njene ivice, dok su čvorovi i ivice poligona u osnovnom domenu prikazani u crnoj boji. Veoma gruba ugaona tolerancija sa kojom je aproksimirana unutrašnja petlja površine dovodi do situacije da duži  $\overline{AB}$  u poligonu odgovaraju dve krive (označene crvenom bojom) na CAD površini.



Slika 89. Duži  $\overline{AB}$  odgovaraju dve krive, označene crvenom bojom, na CAD površini.

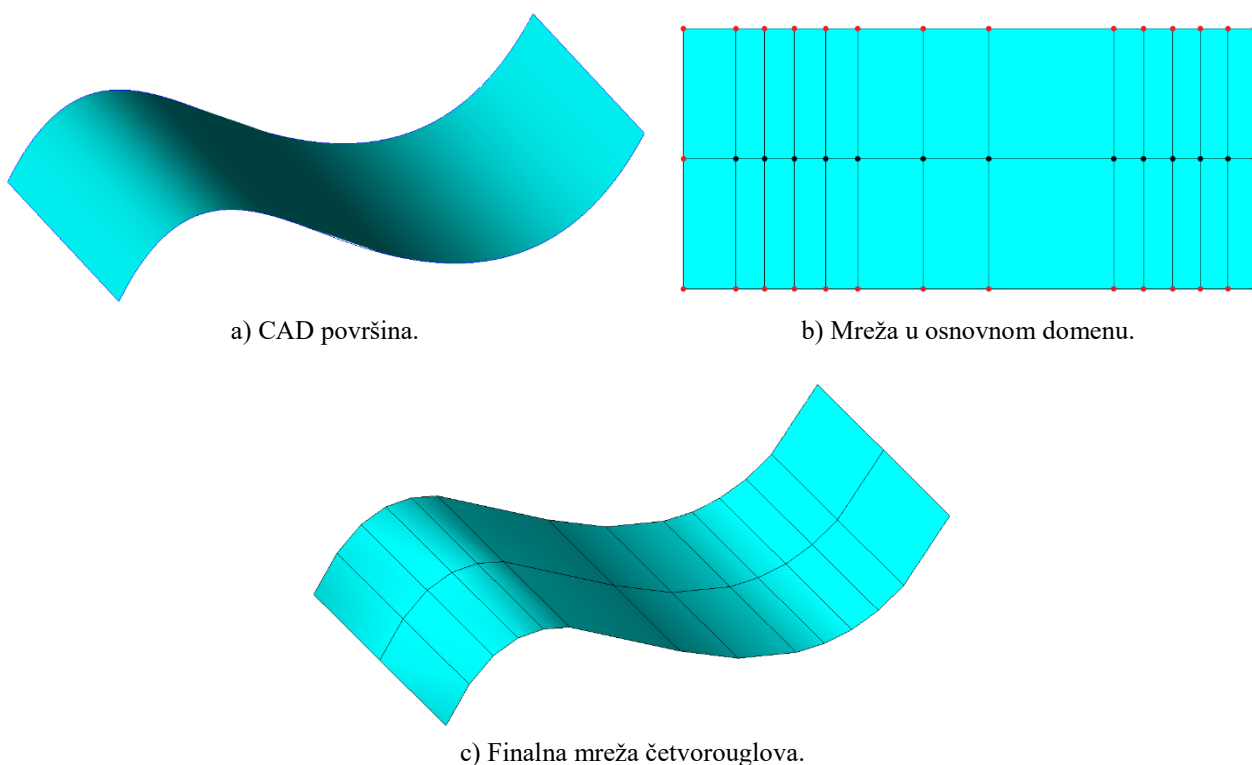
Opisani postupak izbora optimalne linije za dekompoziciju i povlačenje ove linije sa odgovarajućim brojem i pozicijom čvorova podele vrši se sve dok se poligon ne dekomponuje do nivoa četvorouglova ili šestouglova. Šestouglovi se segmentiraju primenom predefinisanih obrazaca opisanih u [38], glava 5. Jednom kada je mreža četvorouglova ravnog poligona kreirana, mreža odgovarajuće CAD površine dobija se na način koji je opisan u sledećem poglavlju.

## 9.2. Preslikavanje mreže iz osnovnog domena na CAD površinu

Postupak preslikavanja mreže iz osnovnog domena na CAD površinu svodi se na projekciju čvorova mreže iz osnovnog domena na CAD površinu duž prave koja je paralelna normalni na referentnu ravan. Ovaj postupak je veoma jednostavan i svodi se na kreiranje odgovarajuće prave i pronalaženje njenog preseka sa CAD površinom, primenom Parasolid funkcije "PK\_FACE\_intersect\_curve". S obzirom da je CAD površina kvazi-planarna i ovaj presek je jedinstven.

Međutim, ovaj postupak je numerički nestabilan kada se radi o čvorovima koji se nalaze na samim granicama površine, tj. na ivicama površine. Iz tog razloga se za ove čvorove primenjuje drugačiji postupak. Naime, nije moguće predvideti na kojim će se tačno lokacijama nalaziti čvorovi koji su smešteni u unutrašnjosti površine, ali se za one na ivicama zna da se poklapaju sa čvorovima poligonske aproksimacije ivica. Zato se za svaki čvor iz poligonske aproksimacije ivica izračunava njegova projekcija na referentnu ravan i pronalazi se čvor iz mreže poligona koji je ovoj projekciji najbliži. Teorijski ovo minimalno rastojanje jednako je nuli. Ovaj postupak je dakle suprotan od onog koji se primenjuje za unutrašnje čvorove mreže, jer se ovde polazi od čvora na površini, pa se pronalazi njegova slika u osnovnom domenu. Tek kada se ovaj postupak završi za sve čvorove iz poligonske aproksimacije svih ivica, za ostale čvorove se primenjuje prethodno opisani postupak.

Slika 90 prikazuje preslikavanje mreže iz osnovnog domena na odgovarajući CAD površinu. Čvorovi koji odgovaraju čvorovima poligonske aproksimacije ivica prikazani su crvenom, a unutrašnji čvorovi crnom bojom.



Slika 90. CAD površina, mreža u osnovnom domenu i finalna mreža.

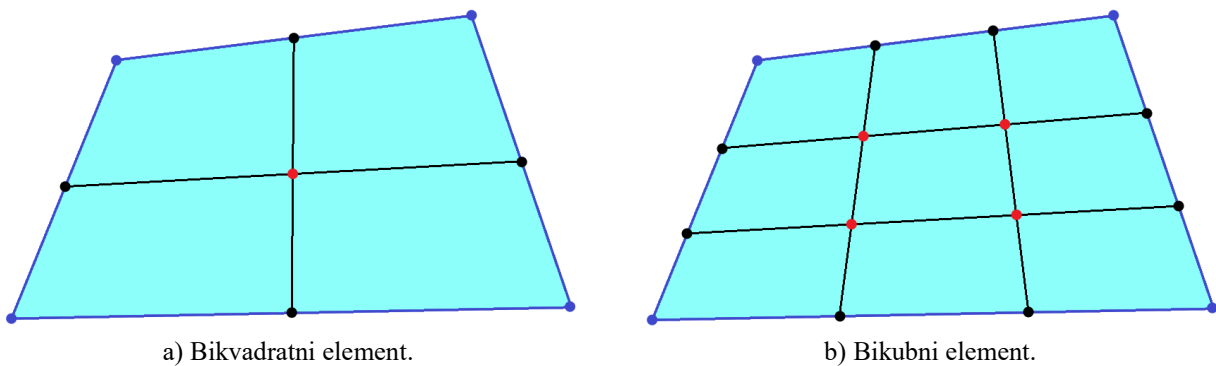
### 9.3. Zakrivljeni krivolinijski četvorougaoni elementi

U ovom poglavlju će biti opisana generalizacija metode opisane u ovom radu, tako da se umesto bilinearnih kreiraju zakrivljeni krivolinijski četvorougaoni elementi. Primena ovih elemenata omogućava preciznije geometrijsko modelovanje, koje omogućava ostvarivanje efikasnijeg elektromagnetskog modelovanja. Ovoj generalizaciji metode nije posvećena posebna glava već tek poglavlje, jer sve faze procesa segmentacije ostaju nepromenjene, izuzev poslednje koja se odnosi na preslikavanje mreže četvorouglova iz osnovnog domena na CAD površinu.

U poglavlju 2.4.2 data je parametarska jednačina generalizovanog četvorougla (jednačina (18)), kao odgovarajući oblik ove jednačine kada su poznate tačke na površini četvorougla koje odgovaraju čvorovima  $ps$ -mreže (jednačina (21)). Iz jednačine (21) možemo videti da je bilinearni četvorougao potpuno određen sa svoja  $2^2 = 4$  čvora, bikvadratni sa  $3^2 = 9$  čvorova, bikubni sa  $4^2 = 16$  čvorova, i tako dalje. Četiri čvora koja daje metoda za segmentaciju opisana u ovom radu potpuno određuju

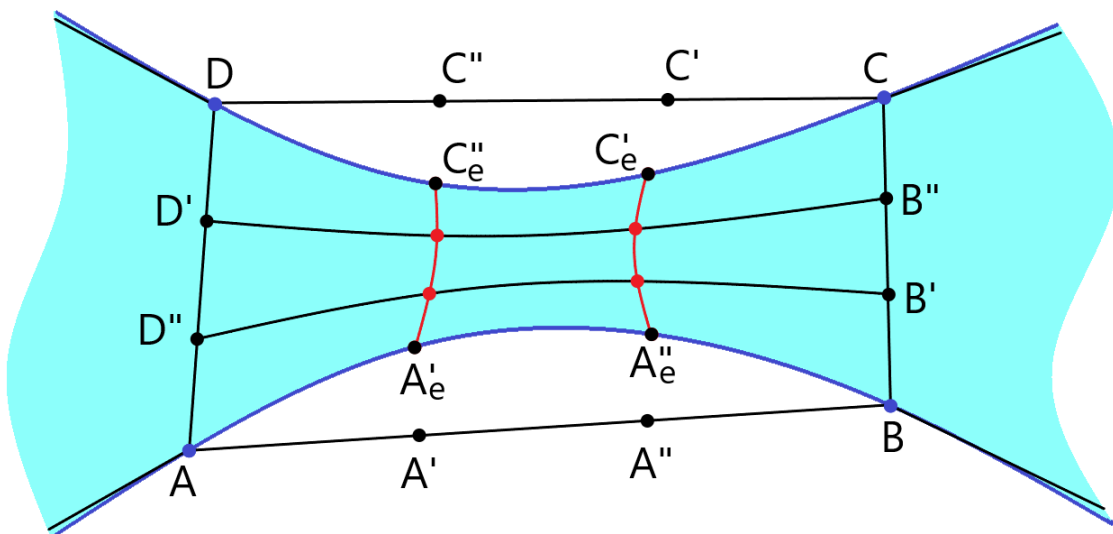
bilinearne elemente. Ovi čvorovi odgovaraju ugaonim parametrima u parametarskom prostoru generalizovanog četvorougla, tj.  $p, s = \pm 1$ .

U cilju dobijanja bikvadratnih, bikubnih i elemenata višeg reda potrebno je odrediti dodatne čvorove u unutrašnjosti četvorouglaonih elemenata. Ovo se može izvršiti primenom veoma jednostavnog postupka, gde se najpre svaka stranica četvorougla u osnovnom domenu ekvidistantno deli na onoliko segmenata koliko je potrebno za generalizovani četvorougao odgovarajućeg stepena. Na taj način se dobijaju čvorovi koji su granični po jednom od dva parametra, tj.  $p = \pm 1$  ili  $s = \pm 1$ . Označimo ove čvorove kao *ivične* čvorove. U preseku duži koje spajaju dodatne čvorove na naspramnim ivicama dobijaju se odgovarajući *unutrašnji* čvorovi, za koje važi  $-1 < p, s < 1$ . Ovaj postupak za slučaj bikvadratnih i bikubnih elemenata ilustrovan je na slici 91, gde su plavim kružićima označeni čvorovi originalnog četvorougla, crnim dodatni čvorovi na ivicama, a crvenim dodatni čvorovi u unutrašnjosti četvorougla. Konačno, projektovanjem ovih čvorova duž prave paralelne normali na referentnu ravan, u postupku koji je istovetan onom opisanom u prethodnom poglavlju, dobijaju se odgovarajući čvorovi na CAD površini. Na taj način se umesto inicijalno bilinearnih dobijaju generalizovani četvorouglovi proizvoljnog stepena.



Slika 91. Određivanje dodatnih čvorova u osnovnom domenu za generalizovane četvorouglove višeg reda.

Međutim, ukoliko neka od stranica četvorougla u osnovnom domenu odgovara ivici površine, tj. ako oba njena čvora odgovaraju projekcijama čvorova poligonske aproksimacije neke od ivica, direktna primena prethodno opisanog postupka mogla bi da dovede do kreiranja čvorova koji se ne mogu projektovati na odgovarajuću CAD površinu. Ovo je ilustrovano slikom 92. Jasno je da se čvorovi  $A', A'', C'$  i  $C''$  ne mogu projektovati na CAD površinu. Iz tog razloga određivanje ivičnih i unutrašnjih čvorova u ovakvim situacijama sprovodi na nešto drugačiji način u odnosu na prethodno opisani.



Slika 92. Određivanje dodatnih čvorova za bikubni element, kada se čvorovi bilinearnog elementa nalaze na ivicama CAD geometrije.

Stranice četvorougla u osnovnom domenu dele se u dve grupe:

- Stranice koje ne odgovaraju ivicama CAD površine (stranice BC i DA na slici 92). Ivični čvorovi generalizovanog četvorougla koji odgovaraju ovim stranicama određuju se primenom prethodno opisane generalne procedure, tj. projekcijom čvorova ekvidistantne podele stranica u osnovnom domenu (čvorovi  $B'$ ,  $B''$ ,  $D'$  i  $D''$  na slici 92) na CAD površinu.
- Stranice koje odgovaraju ivicama (stranice AB i CD na slici 92). Ivični čvorovi generalizovanog četvorougla koji odgovaraju ovim stranicama određuju se direktnom podelom odgovarajućih ivica CAD geometrije. Podela ivica CAD geometrije se vrši jednostavnim ekvidistantnom podelom u parametarskom prostoru ivice. Na primeru ilustrovanom slikom 92 na ovaj način su dobijeni čvorovi  $A'_e$ ,  $A''_e$ ,  $C'_e$  i  $C''_e$ .

Jednom kada su određeni ivični čvorovi, unutrašnji čvorovi generalizovanog četvorougla se dobijaju u preseku krivih koje se nalaze na CAD površini, a spajaju odgovarajuće čvorove na naspramnim stranicama generalizovanog četvorougla. Sam postupak određivanja ovih krivih (koje mogu, ali ne moraju biti izoparametarske krive CAD površine) opisan je u poglavlju 6.5. Unutrašnji čvorovi su označeni crvenim kružićima na slici 92. Jasno je da je ovaj postupak generalniji od postupka koji se zasniva na određivanju čvorova u osnovnom domenu i njihovoj projekciji na CAD površinu, te da se on može koristiti uvek. Međutim, isto tako je jasno da je on vremenski značajno zahtevniji, te se zato primenjuje samo za one elemente koji imaju bar jednu stranicu koja odgovara ivici CAD geometrije.

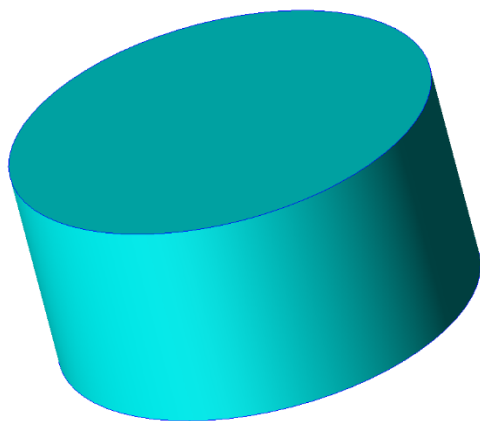
Maksimalna zakrivljenost generalizovanih četvorouglova ograničena je uslovom za kvazi-planarnost CAD površina koje se projektuju u osnovni domen, tako da su i generalizovani četvorouglovi dobijeni primenom predložene metode uvek kvazi-planarni.

### **9.3.1. Primeri mreža sa bikvadratnim i bikubnim četvorougaoim elementima**

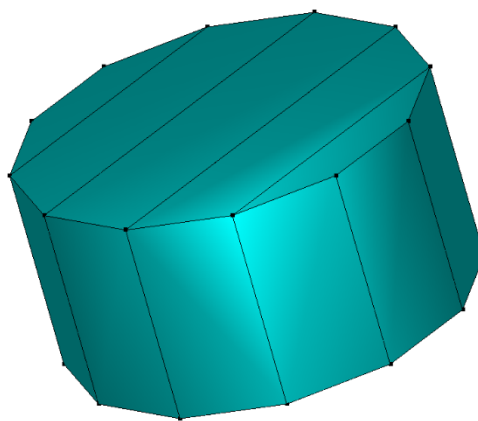
Posmatrajmo model cilindra prikazan na slici 93. Radijus cilindra jednak je njegovoj visini i iznosi 1 mm. Model je segmentiran sa dimenzijom elementa postavljenom na 2 mm, te sa primenom tri različita tipa četvorougaoih elemenata: bilinearnih, bikvadratnih i bikubnih. U slučaju bilinearnih elemenata površinska i ivična ugaona tolerancija podešene su na  $30^\circ$ . U slučaju bikvadratnih i bikubnih elemenata ove ugaone tolerancije postavljene su na  $90^\circ$ . Čvorovi su označeni crnim tačkama za sve tipove elemenata.

Mreže koje se sastoje od bikvadratnih i bikubnih četvorouglova sadrže po 6 elemenata, dok mreža bilinearnih četvorouglova sadrži 22 elementa. Hausdorfovo rastojanje za mrežu bilinearnih četvorouglova iznosi 0.034 mm, i jedini način da se ono smanji jeste smanjenje ugaonih tolerancija i/ili značajno smanjenje dimenzije elementa, što neminovno dovodi do povećanja broja elementa u mreži. Na drugoj strani, bikvadratni i bikubni elementi omogućavaju egzaktno geometrijsko modelovanje cilindra, i to sa veoma malim brojem elemenata. Naravno, egzaktno modelovanje nije moguće za proizvoljnu geometriju.

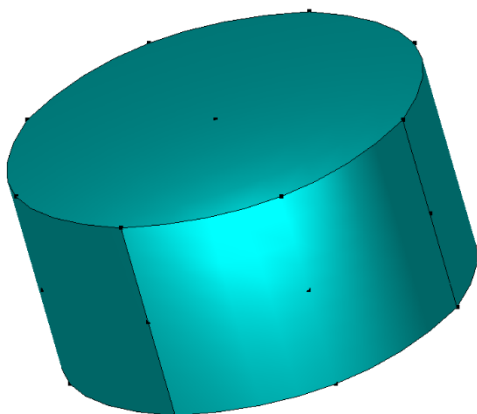
Posmatrajmo sada značajno složeniji model, prikazan na slici 94. Radi se o modelu aviona koji se inicijalno sastoji od 126 površina različitog nivoa složenosti, od jednostavnih cilindričnih površina na delovima raketa, do izuzetno složenih površina kojima su modelovani trup i krila aviona.



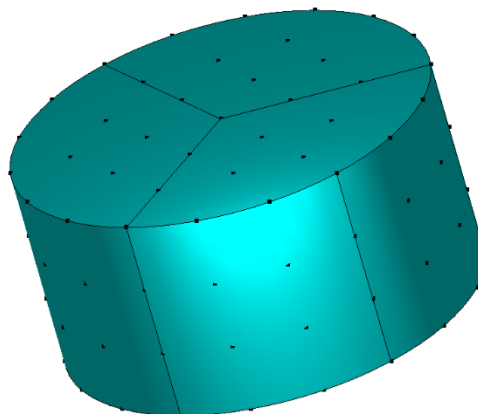
a) CAD model cilindra.



b) Bilinearni elementi.

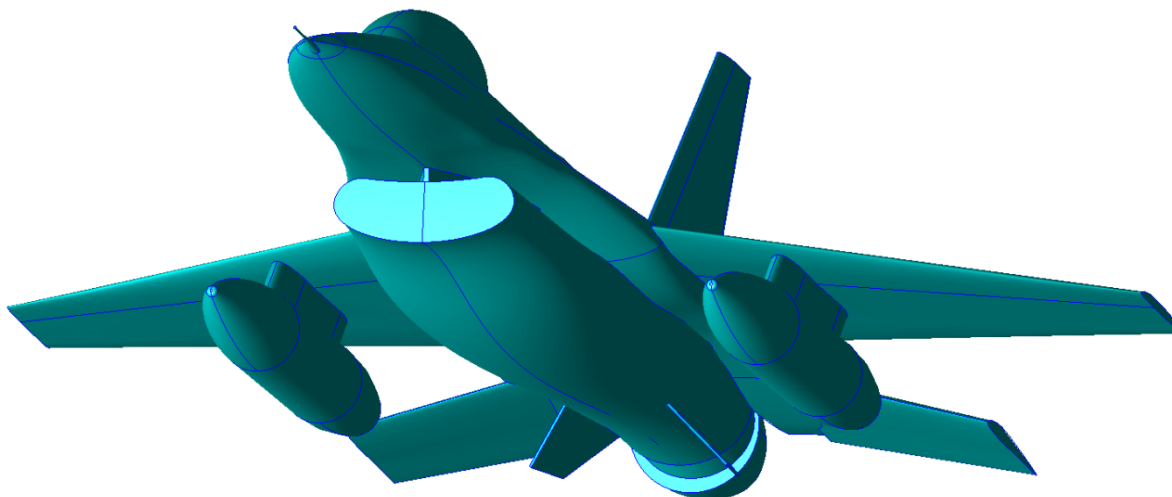


c) Bikvadratni elementi.



d) Bikubni elementi.

Slika 93. Mreža cilindra sa tri tipa generalizovanih četvorougaoih elemenata.

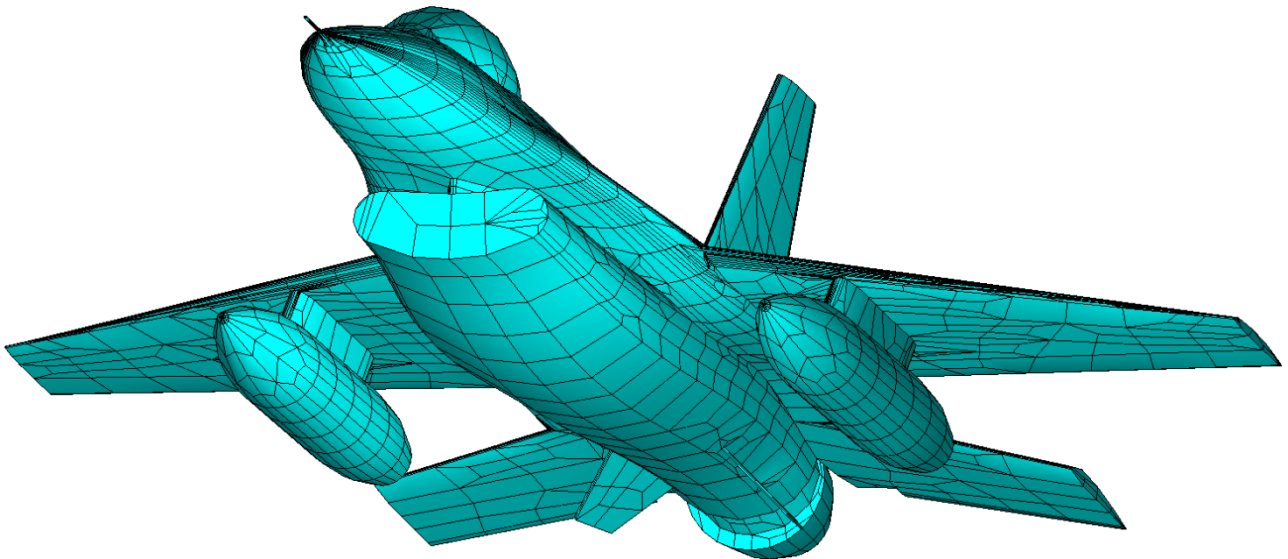


Slika 94. CAD model aviona.

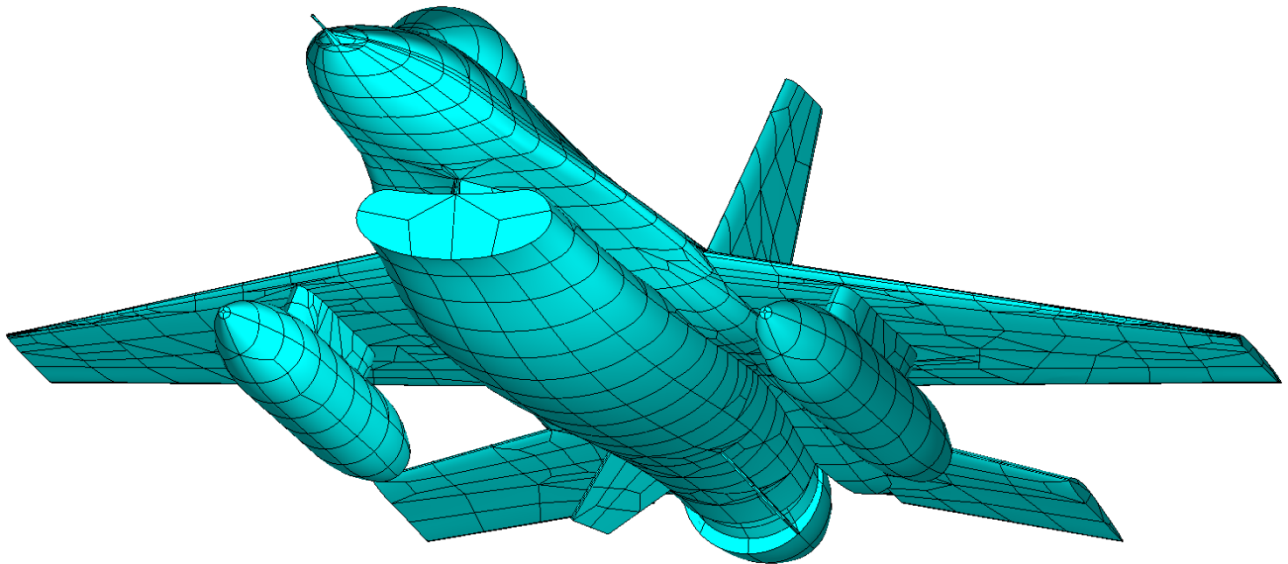
Dužina modela iznosi 14.8 m, a segmentacija je vršena na učestanosti 1 GHz, sa maksimalnom dimenzijom elementa od  $2\lambda$ , tj. oko 0.6 m. Kreirane su dve mreže (slika 95): jedna koja se sastoji od bilinearnih elemenata gde su korišćene površinska i ivična ugaona tolerancije od  $30^\circ$ , dok se druga mreža sastoji od bikubnih elemenata gde su ugaone tolerancije podešene na  $90^\circ$ .

Broj elemenata u mreži koja se sastoji od bilinearnih četvorouglova je 4562. Kada se koriste bikubni četvorouglovi broj elemenata se značajno smanjuje i iznosi 2498. Takođe, sa ovim elementima se postiže i značajno povećanje kvaliteta geometrijskog modelovanja, što je naročito uočljivo na trupu i kokpitu aviona.





a) Bilinearni četvorouglovi.



b) Bikubni četvorouglovi.

Slika 95. Četvorougaona mreža modela aviona.

Bez obzira na korišćeni tip elemenata mreže prikazane na slici 95 pokazuju osobine koje su poželjne za efikasnu elektromagnetsku analizu. Većina elemenata ima pravougaoni oblik, a elementi trapezoidnog oblika se javljaju samo na delovima modela gde se sa sitnih prelazi na krupnije elemente. Takođe, anizotropija mreže je izražena, pa se veoma izduženi elementi mogu videti u oblastima malog radijusa krivine po jednoj i velikog radijusa po drugoj glavnoj osi zakrivljenosti, što je posebno izraženo na obodima krila ili bočnim stranama trupa.

## 10. Primeri primene nove metode za segmentaciju na elektromagnetskim problemima

U ovoj glavi će biti dati primeri primene nove metode za četvorougaoonu segmentaciju na elektromagnetskim problemima. Fokus je na tačnosti i brzini elektromagnetske analize. Tačnost će biti potvrđena poređenjem rezultata simulacije sa analitičkim ili merenim rezultatima.

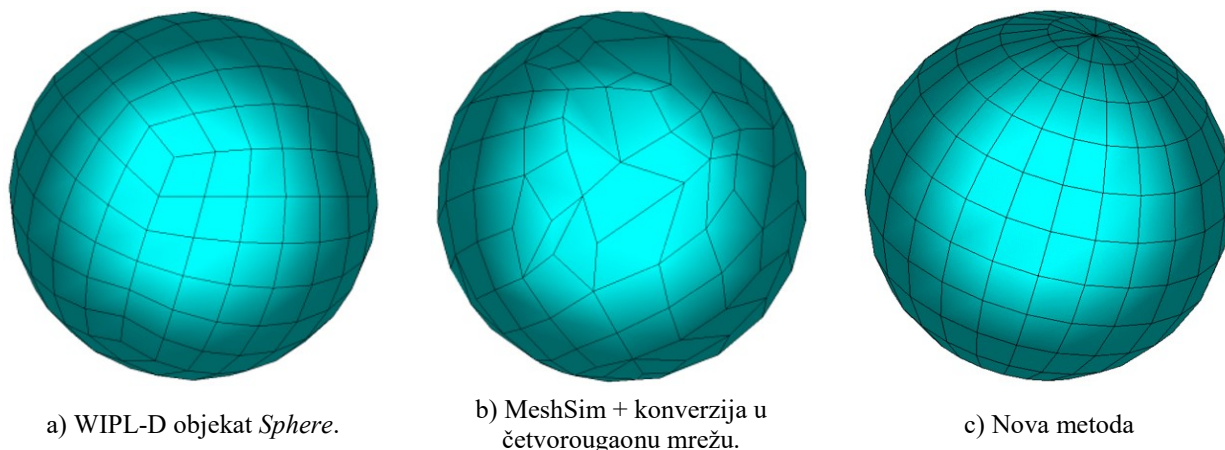
Takođe, biće dato poređenje nove metode sa metodom zasnovanom na trougaonoj segmentaciji primenom komercijalno dostupnog softvera MeshSim [128] i direktnoj konverziji trougaone u četvorougaoonu mrežu. Veličine od interesa u ovom poređenju su broj elemenata i faktor kvaliteta elemenata mreže, kao i tačnost i brzina elektromagnetskih simulacija.

Sve elektromagnetske simulacije prikazane u ovoj glavi izvršene su u programskom paketu WIPL-D [26].

### 10.1. Rasejanje na savršeno provodnoj sferi

Model koji razmatramo je savršeno provodna sfera radijusa  $1\lambda$ , koja je pobuđena uniformnim ravnim linearno polarisanim elektromagnetskim talasom. Simulirana su tri modela (slika 96):

- WIPL-D pre-segmentirani model sfere [129]. Ovaj objekat se kreira tako što se uniformna mreža kocke čiji se centar poklapa sa centrom sfere preslika na sferu. Svaki čvor na sferi dobija se u preseku površi sfere i poluprave koja polazi iz zajedničkog centra kocke i sfere i prolazi kroz čvor u mreži kocke.
- Mreža drugog modela dobijena je primenom komercijalno dostupnog softvera za trougaonu segmentaciju MeshSim [128] i konverzijom trougaone u četvorougaoonu mrežu primenom algoritma opisanog u [11].
- Mreža trećeg modela dobijena je primenom metode za segmentaciju predložene u ovom radu.

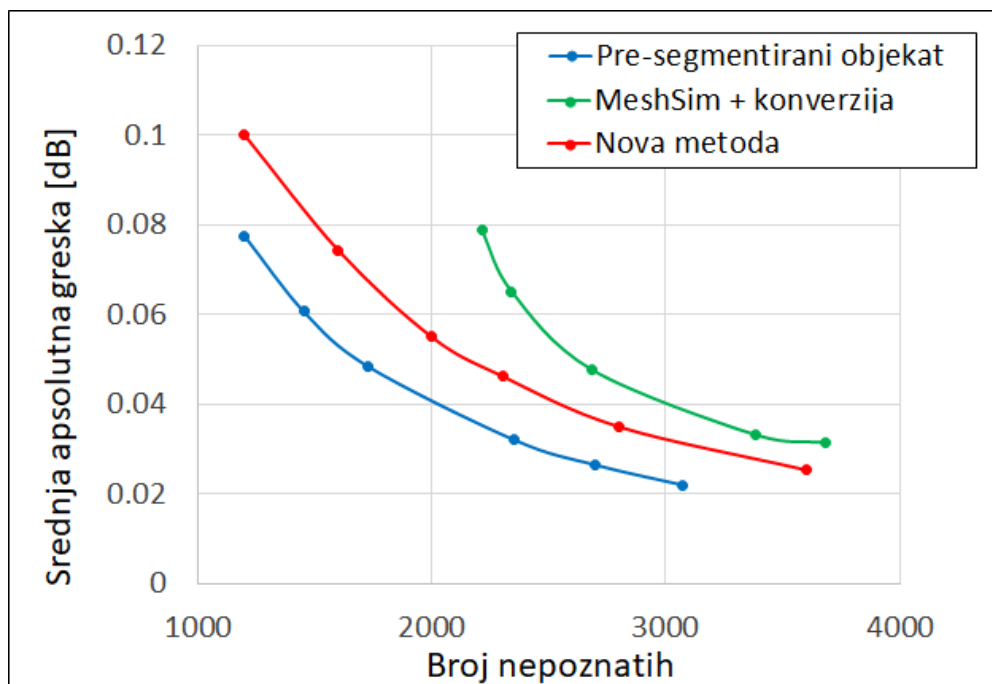


Slika 96. Četvorougaoone mreža sfere.

Rezultat od interesa je rasejano elektromagnetsko polje u celom prostoru, koje je računato sa ugaonom rezolucijom od  $1^\circ$  i po azimutu i po elevaciji. Rezultati za radarski poprečni presek (RCS) u dB dobijeni simulacijama poređeni su sa analitičkom rešenjem koje je dobro poznato i dobija se izračunavanjem odgovarajućih *Mie*-ovih redova [130], pa je za svaki simulirani model izračunata srednja apsolutna greška radarskog poprečnog preseka (Radar Cross-Section - RCS) u dB.

Dimenzije elemenata mreže su tako podešene da je u svim simuliranim modelima korišćen samo prvi red aproksimacije za struje (*roof-top* funkcije bazisa). Tačnost analiza povećavana je povećanjem

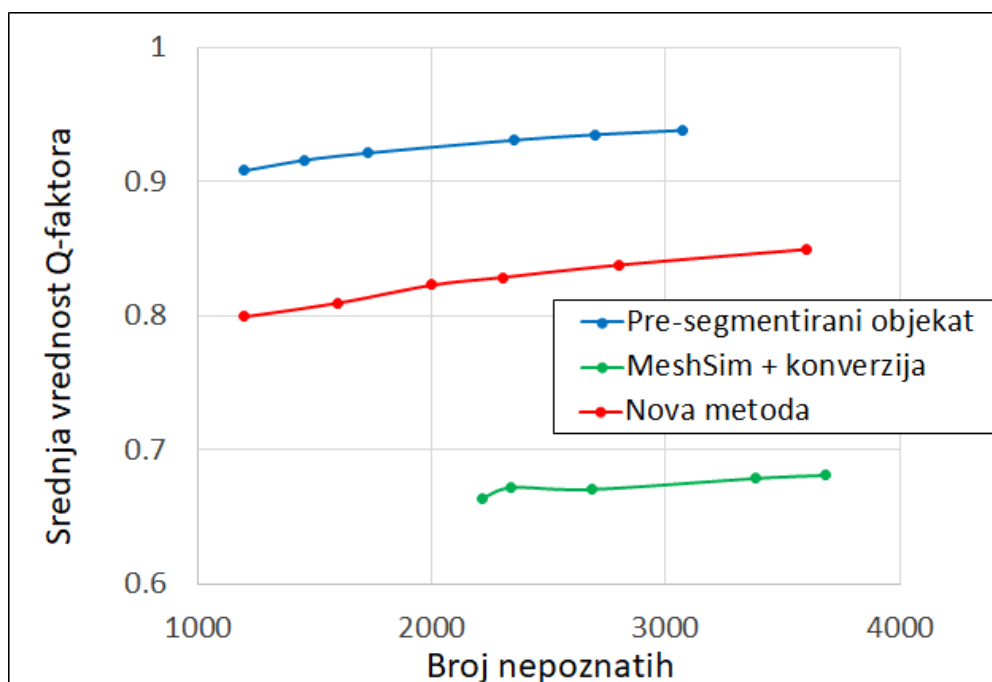
broja elemenata mreže, čime je povećavan i broj nepoznatih koeficijenata. Zavisnost srednje apsolutne greške RCS-a u dB od broja nepoznatih koeficijenata, za tri simulirana modela, prikazana je na slici 97.



Slika 97. Srednja apsolutna greška RCS-a u zavisnosti od broja nepoznatih koeficijenata.

Sa dijagrama prikazanog na slici 97 može se videti da je tačnost EM analize najveća, tj. srednja apsolutna greška za isti broj nepoznatih koeficijenata najmanja, kada se koristi pre-segmentirani WIPL-D sferni objekat. Kada se uporede dve automatske metode za segmentaciju, bolja tačnost se dobija primenom metode predložene u ovom radu.

Ovaj rezultat je u veoma dobroj korelaciji sa srednjim vrednostima faktora kvaliteta elemenata mreže, koji su prikazani na slici 98.



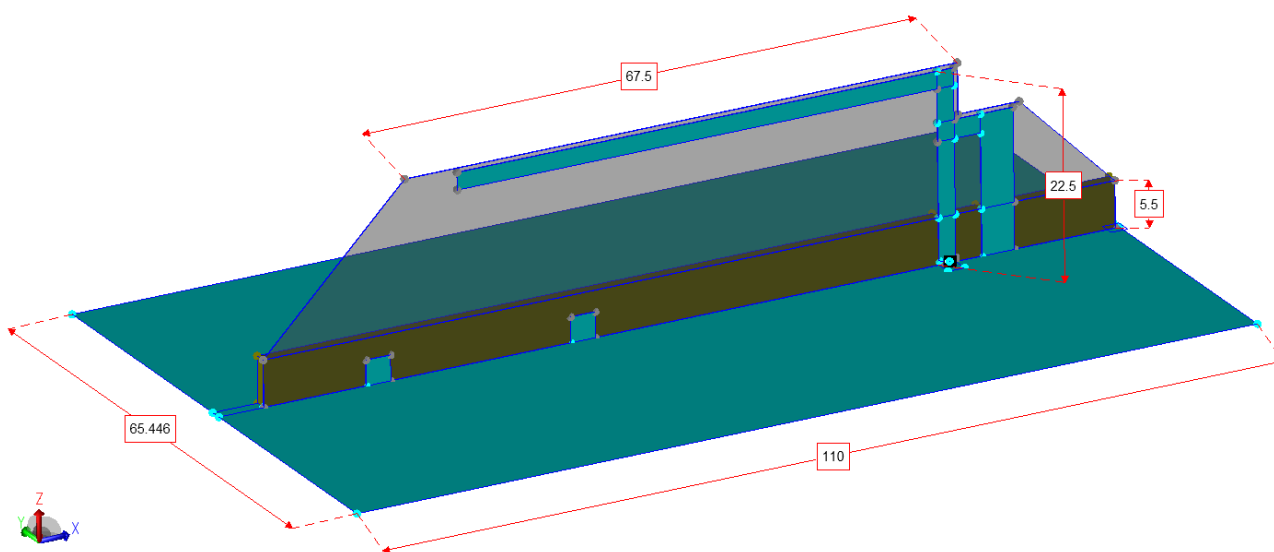
Slika 98. Srednja vrednost faktora kvaliteta elementa mreže u zavisnosti od broja nepoznatih koeficijenata.

## 10.2. Štampana invertovana-F antena

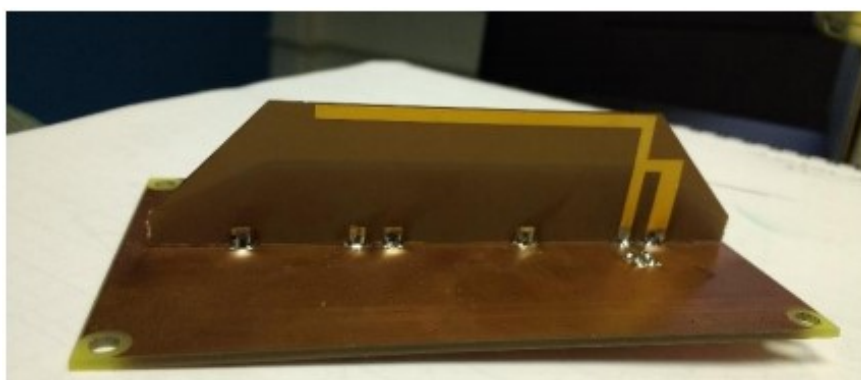
U ovom poglavlju će biti dato poređenje simuliranih i merenih S-parametara za štampanu invertovanu-F antenu (Printed Inverted-F Antenna – PIFA). CAD model antene i fotografija izrađenog prototipa prikazani su na slici 99.

Antena je dizajnirana da radi u opsegu oko 900 MHz, a dimenzije antene u milimetrima su prikazane na slici 99a. U izradi antene korišćena su dva dielektrična supstrata:

- FR-4 (prikazan u žutoj boji na slici 99a) debljine 1.325 mm i visine 5.5 mm. Uloga ovog materijala je samo da da čvrstinu anteni, jer je drugi korišćeni supstrat veoma tanak i fleksibilan.
- Fleksibilni supstrat debljine 0.1 mm (prikazan kao transparentan na slici 99a), na kome je antena štampana. Relativna permitivnost ovog supstrata iznosi 3.4, dok je vrednost tangensa ugla gubitaka 0.0015.



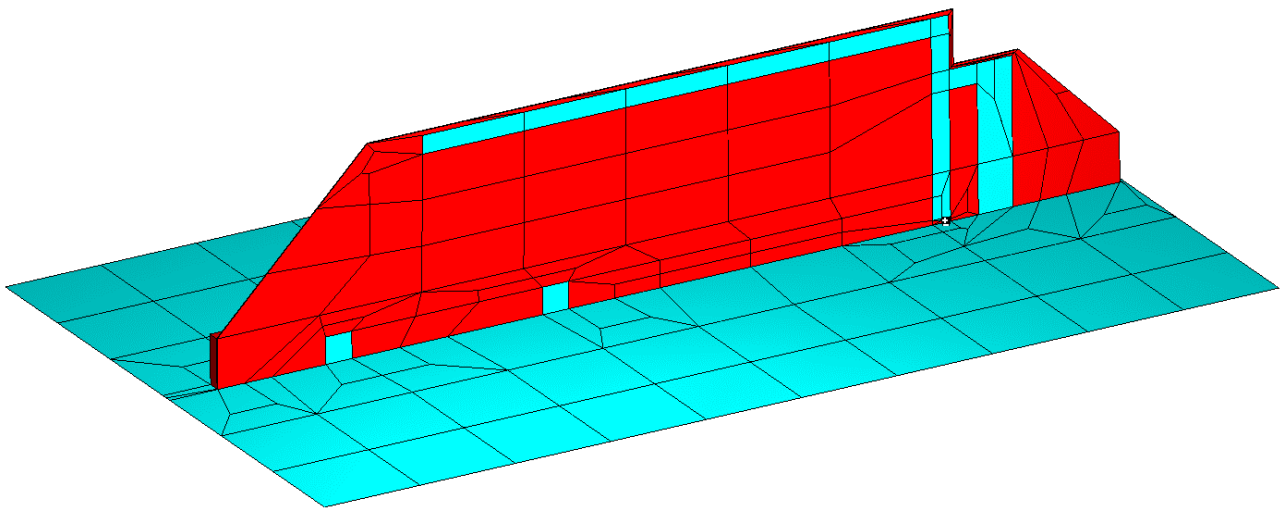
a) Model PIFA antene u programskom paketu WIPL-D Pro CAD.



b) Prototip PIFA antene.

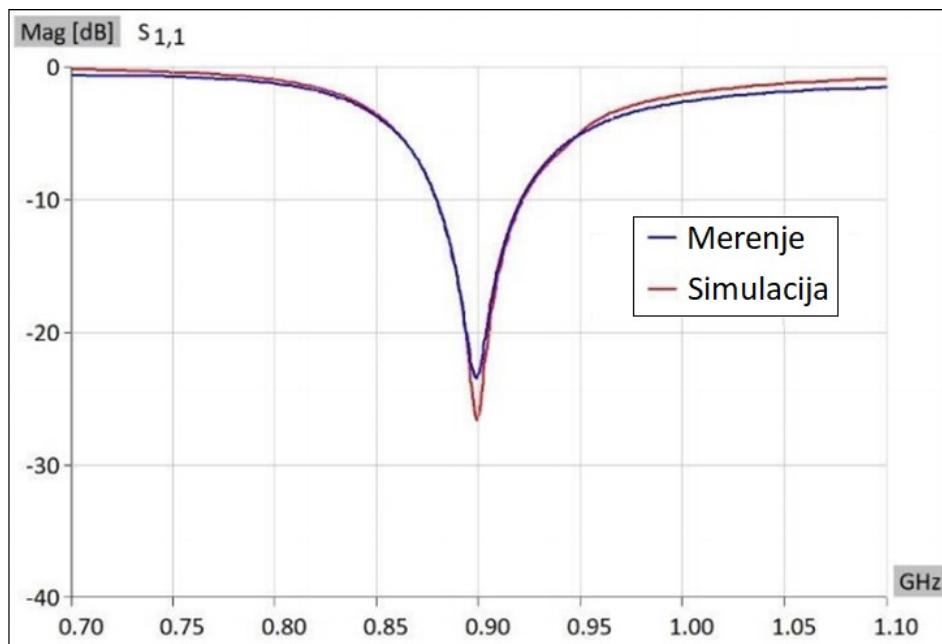
Slika 99. CAD model i prototip PIFA antene.

Model je segmentiran primenom nove metode, sa dimenzijom elementa mreže podešenom na 12 mm. S obzirom da model ne sadrži zakrivljene površine niti ivice ugaone tolerancije ovde nisu od interesa. Tolerancije za ukрупnjavanje i faktor relaksacije parametara podele su podešeni na 0.0001 i 10%. Minimalna dimenzija površine je podešena na 0.01. Mreža (slika 100) se sastoji od 429 elemenata, srednje vrednosti faktora kvaliteta od približno 0.82.



Slika 100. Četvorougona mreža modela PIFA antene.

Poređenje koeficijenata refleksije dobijenih simulacijom i merenjem, u opsegu učestanosti između 700 MHz i 1.1 GHz prikazano je na slici 101. Sa dijagrama prikazanog na ovoj slici možemo zaključiti da postoji praktično potpuno slaganje rezultata simulacije i merenja.

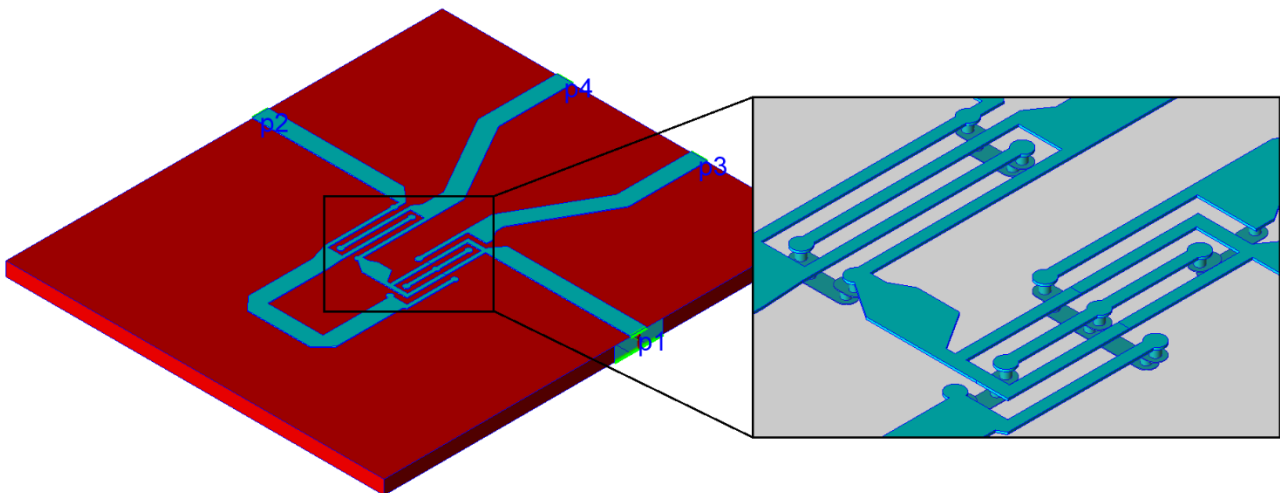


Slika 101. Poređenje simuliranog i izmerenog koeficijenta refleksije.

### 10.3. Protivfazni hibrid sa paralelnim Langeovim sprežnicima

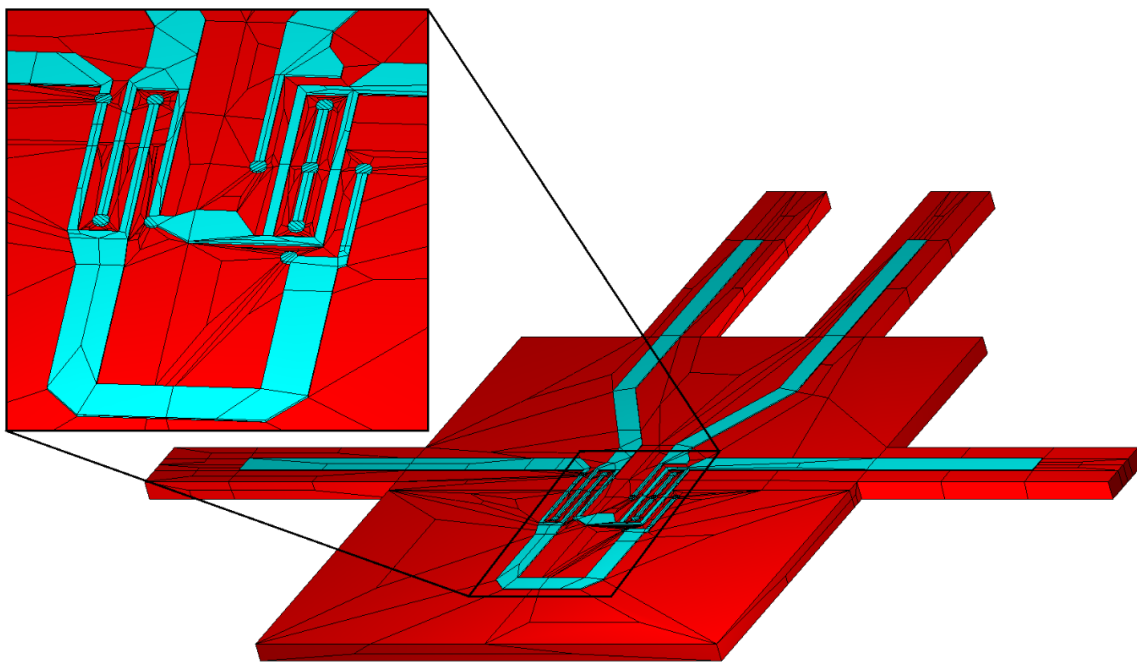
Model razmatran u ovom poglavlju je protivfazni hibrid sa paralelnim Langeovim sprežnicima, čiji je dizajn predložen u [131]. Model je izrađen u tehnici troslojne keramike, na supstratu relativne permitivnosti 7.7 i tangensa ugla gubitaka 0.006. Hibrid je dizajniran da radi na učestanostima oko 8 GHz, a simulacija je izvršena u 21 uniformno raspodeljenoj frekvencijskoj tački u opsegu između 6 GHz i 10 GHz.

Model hibrida u programskom paketu WIPL-D Pro CAD, sa uvećanim centralnim delom i transparentnim dielektrikom, tako da je geometrija Langeovih sprežnika jasno vidljiva prikazan je na slici 102. *Microstrip* portovi označeni su na slici kao p1, p2, p3 i p4.



Slika 102. CAD model protivfaznog hibrida sa paralelnim Langeovim sprežnicima.

Prva mreža (slika 103) je kreirana sa podrazumevanim parametrima segmentacije. (Segmenti *microstrip* voda na pozicijama portova automatski se dodaju, kako bi se simuliralo napajanje *microstrip* portom.) Dimenzija elementa jednaka  $2\lambda$  na najvišoj učestanosti iz opsega od interesa, tj. iznosi  $\sim 60$  mm, što je više od maksimalne dimenzije modela koja iznosi  $\sim 20$  mm. Površinska i ivična ugaona tolerancija iznose  $30^\circ$ , dok tolerancija za ukрупnjavanje, faktor relaksacije parametara podele i minimalna dimenzija površine imaju vrednosti 0.0001, 10% i 0.01, respektivno.



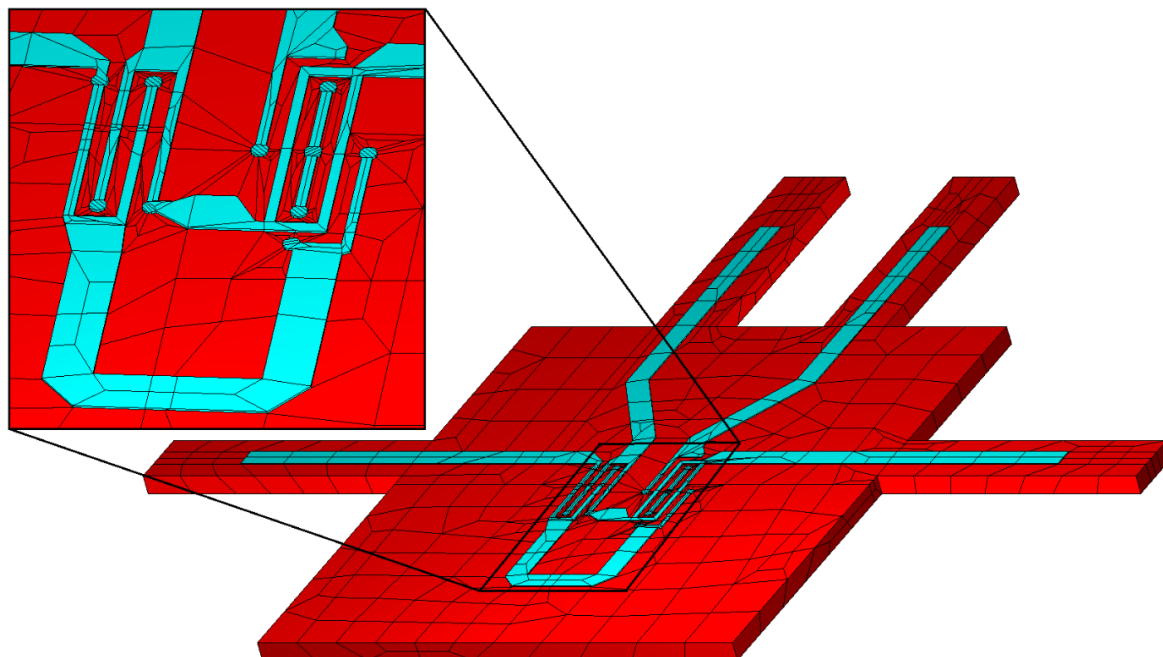
Slika 103. Mreža protivfaznog hibrida sa podrazumevanim parametrima segmentacije.

Očigledno je da mreža prikazana na slici 103 sadrži veliki broj izduženih elemenata čiji oblik značajno odstupa od pravougaonog. Ovo se jasno vidi i iz srednje vrednosti faktora kvaliteta, koja je prikazana u tabeli 7. Ovaj problem nastaje na lokacijama na kojima postoji prelaz sa veoma kratkih na veoma dugačke segmente mreže. Kako bi se ovaj problem rešio, bez intervencije korisnika, potrebno je uvesti faktor koji bi kontrolisao brzinu rasta elementa mreže. Na taj način bi se izuzetno izduženi elementi dekomponovali na više manjih od kojih bi svaki imao bolji faktor kvaliteta u odnosu na inicijalni izduženi element.

Jedan način da se spreči nastanak veoma izduženih elemenata jeste ograničavanje maksimalne dimenzije elementa. Na slici 104 prikazana je mreža ovog modela koja se dobija kada se dimenzija



elementa podesi na 1.5 mm, a minimalna dimenzija površine se sa 0.01 poveća na 0.05. Već na prvi pogled je jasno da je ova mreža značajno kvalitetnija od prethodno prikazane, a na osnovu podataka prikazanih u tabeli 7 može se videti da je i srednja vrednost faktora kvaliteta značajno povećana.



Slika 104. Mreža protivfaznog hibrida sa modifikovanim parametrima segmentacije.

U tabeli 7 su dati broj elemenata mreže, srednja vrednost faktora kvaliteta, kao i broj nepoznatih koeficijenata i trajanje simulacije za jednu učestanost, za dve prethodno prikazane mreže. Broj nepoznatih je dat za podrazumevane parametre simulacije. Modeli su simulirani na računaru sledećih karakteristika: Intel Core i7-7700 @ 3.60 GHz procesor (ukupno 4 jezgra / 8 logičkih niti), 32 GB RAM memorije, i jedna GTX 1080 Ti grafička kartica. WIPL-D GPU Solver koji omogućava ubrzanje simulacije korišćenjem grafičkih kartica korišćen je i za matrično punjenje [124] i za inverziju [125].

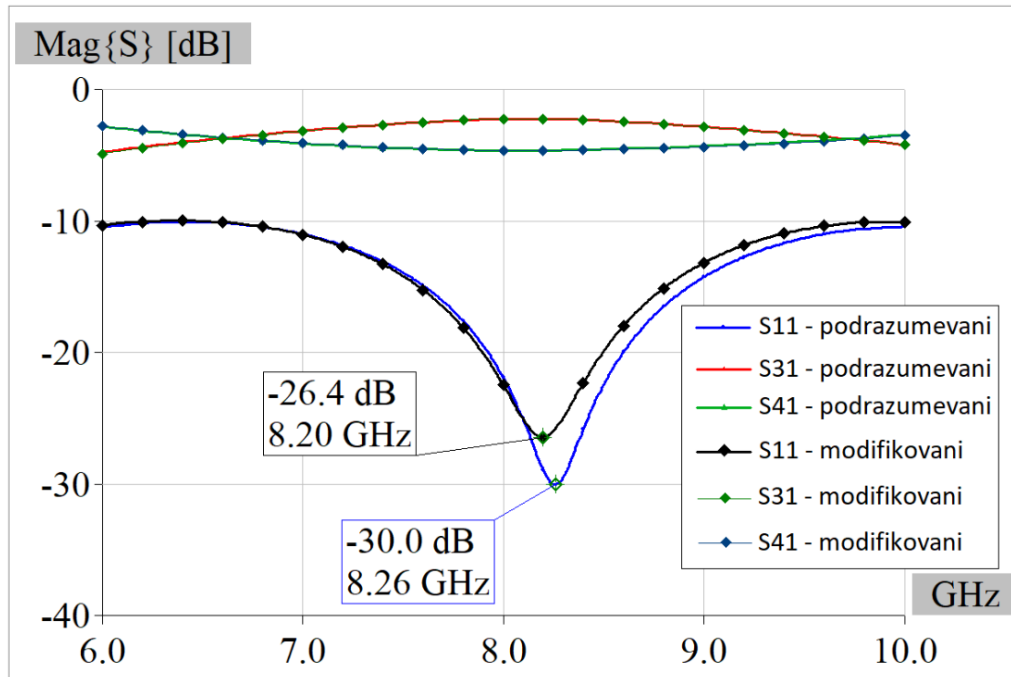
Tabela 7 Poređenje mreža, broja nepoznatih i vremena simulacije za različite parametre segmentacije.

Parametri segmentacije	Broj elemenata	Q-faktor	Broj nepoznatih	Punjenje [s]	Inverzija [s]	Ukupno vreme [s]
Podrazumevani	2 968	0.448	10 221	38.1	2.57	42.1
Modifikovani	3 554	0.777	12 972	33.5	3.82	38.6

Broj elemenata mreže je povećan za oko 20% u slučaju kada su korišćeni modifikovani parametri segmentacije, ali je zato došlo do značajnog povećanja srednje vrednosti faktora kvaliteta elemenata. Trajanje simulacije je smanjeno za ~10% iako se broj nepoznatih povećao za oko 27%.

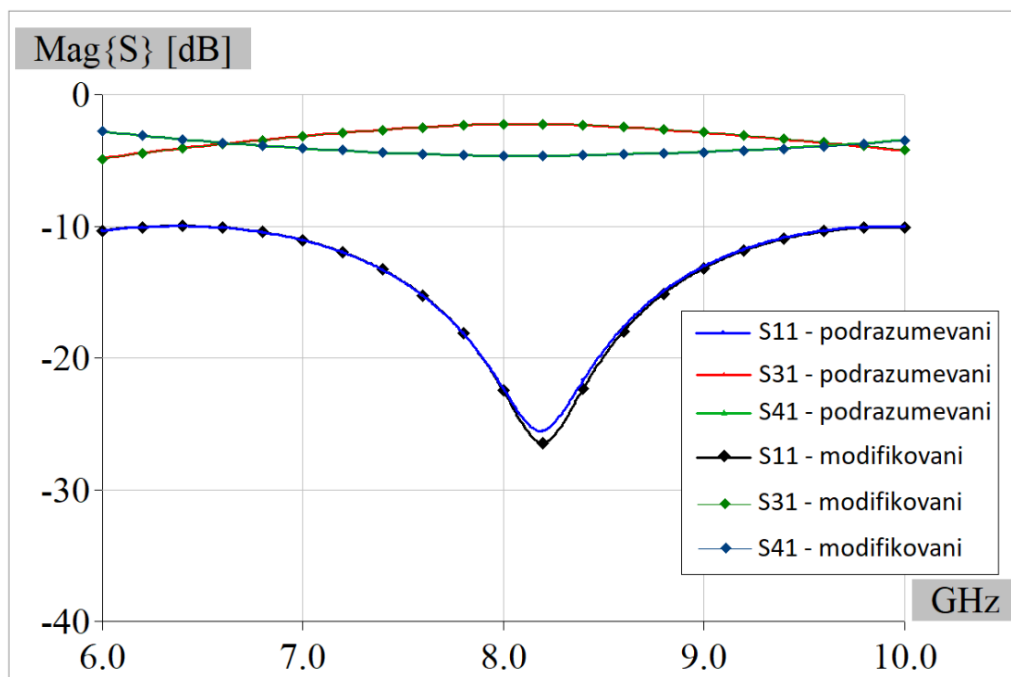
Smanjenje ukupnog vremena simulacije posledica je smanjenja vremena matričnog punjenja, tj. računanja elemenata MoM matrice. Razlog za nešto duže trajanje punjenja u slučaju kada se koriste podrazumevani parametri segmentacije leži u činjenici da se broj tačaka za integraciju u WIPL-D numeričkom kernelu značajno povećava za veoma izdužene elemente mreže. Broj veoma izduženih elemenata, kao i stepen njihove izduženosti, značajno se smanjuje kada se koriste modifikovani parametri za segmentaciju. Izduženost elemenata se ne uzima u obzir kod računanja faktora kvaliteta na način koji je definisan u poglavlju 2.6, a koji se koristi u ovom radu. Razlog za to je činjenica da je anizotropija (izduženost) elemenata poželjna osobina kada se radi o smanjenju broja nepoznatih koeficijenata. Međutim, kako prevelika izduženost dovodi do povećanja vremena punjenja treba u budućnosti uneti promenu u način računanja faktora kvaliteta elementa, kao i odgovarajuće promene u algoritmu za segmentaciju, kako bi se ograničio nivo izduženosti elemenata mreže.

S-parametri analiziranog modela prikazani su na slici 105.



Slika 105. S-parametri hibrida dobijeni za dva različita podešavanja parametara za segmentaciju.

Sa dijagrama prikazanog na slici 105 može se videti da su s-parametri za dve mreže pomereni po učestanosti za približno 6 MHz. Dalja analiza konvergencije rezultata pokazuje da je za mrežu sa višim faktorom kvaliteta elemenata konvergencija postignuta već sa podrazumevanim podešavanjima za EM analizu. Za drugu mrežu je potrebno dodatno povećati broj nepoznatih koeficijenata, smanjivanjem maksimalne dimenzije elementa. Kada se broj nepoznatih koeficijenata za ovu mrežu sa inicijalnih 10 221 poveća na 14 536 dobija se praktično potpuno poklapanje s-parametara za dve mreže (slika 107). Međutim, povećavanje broja nepoznatih dovodi i do povećanja vremena simulacije, koje sada iznosi 50.45 sekundi.



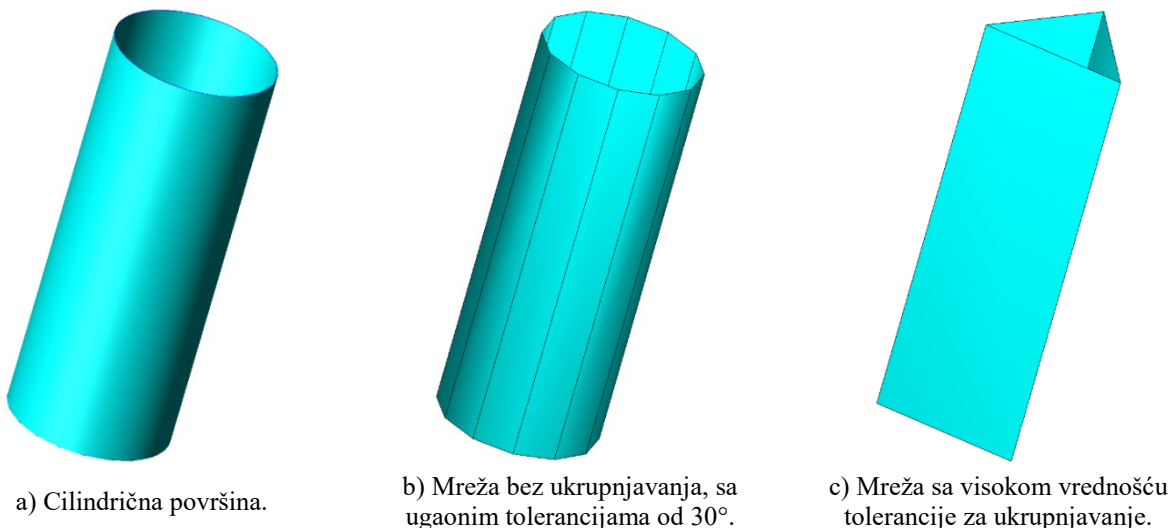
Slika 106. S-parametri hibrida dobijeni za dva podešavanja parametara za segmentaciju, i povećanim brojem nepoznatih koeficijenata za podrazumevana podešavanja.



## 10.4. Lokalna podešavanja i tolerancije za ukрупnjavanje

Modeli prikazani u prva dva poglavlja ove glave su veoma jednostavni, dok model hibrida prikazan u prethodnom poglavlju ima nešto složeniju geometriju. U praksi se međutim veoma često srećemo sa veoma kompleksnim modelima, koji često nisu kreirani za potrebe EM analize, i koji sadrže veliki broj detalja koji nemaju uticaj na elektromagnetske parametre od interesa. Na ovakvim delovima modela je pri konverziji u mrežu potrebno raditi sa nešto većom maksimalnom greškom geometrijskog modelovanja, kako bi se smanjio ukupan broj elemenata mreže. Sa druge strane, na delovima modela koji imaju veliki uticaj na elektromagnetske parametre od interesa, kao što su same antene ili napojne mreže, potrebno je radi povećanja tačnosti EM analize smanjiti ne samo maksimalnu grešku geometrijskog modelovanja, već veoma često i dimenzije elemenata mreže. Ovi zahtevi nameću potrebu za uvođenjem:

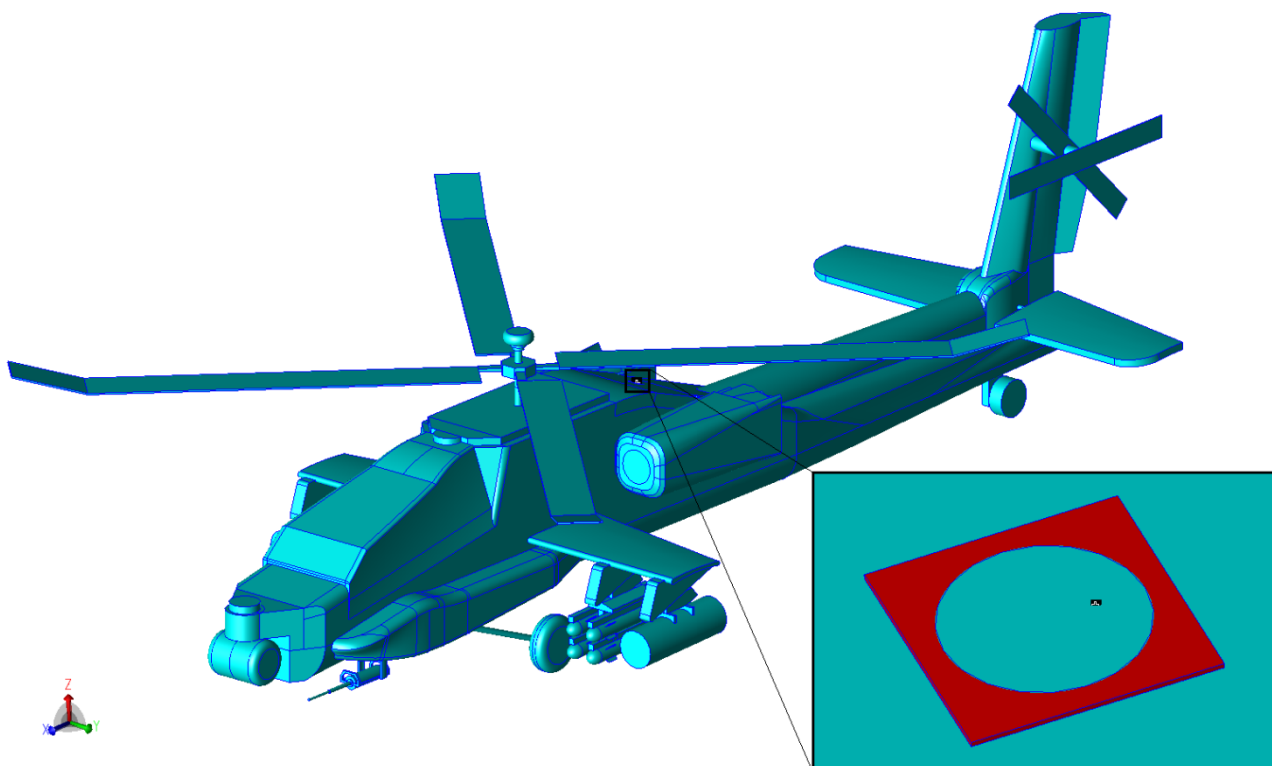
- Lokalnih podešavanja parametara mreže. U metodi opisanoj u ovom radu na svakoj površini CAD modela mogu se zadati dimenzija elementa, površinska i ivična ugaona tolerancija, dok je na svakoj ivici moguće zadati dimenziju elementa i ivičnu ugaonu toleranciju. Kako je sama metoda bazirana na dekompoziciji, i praktično nezavisnoj segmentaciji svake CAD površine, lokalna zadavanja navedenih parametara su prirodna i veoma jednostavna za implementaciju.
- Tolerancije za ukрупnjavanje. U poglavlju 4.1 je uveden pojam ove tolerancije, a u poglavlju 5.5 je opisana njena primena kod kreiranja poligonske aproksimacije krive. Treba primetiti da se isti algoritam za kreiranje poligonske aproksimacije krive koristi i kod podele površina na kvazi-planarne i kod kreiranja poligonske aproksimacije ivica. To omogućava da se ukрупnjavanje vrši ne samo na nivou delova modela koji su veoma mali po svim dimenzijama, već i na nivou delova modela koji su izduženi duž ose velikog radijusa krivine, a imaju veoma mali radijus duž druge ose glavne zakrivljenosti. Takav jedan primer prikazan je na slici 107, gde je ukрупnjavanje izvršeno na nivou cilindrične površine, koji je moguće predstaviti sa samo tri četvorougona elementa.



Slika 107. Mreža cilindrične površine bez ukрупnjavanja i sa ukрупnjavanjem.

Značaj uvođenja pomenutih lokalnih podešavanja i tolerancije za ukрупnjavanje biće ilustrovan na modelu kružne *microstrip patch* antene postavljene na trup helikoptera, kao što je prikazano na slici 108. Antena je dizajnirana da radi na učestanostima oko 1 GHz. Model helikoptera je identičan onom koji je korišćen u primeru iz poglavlja 6.6, dakle dužina helikoptera je približno 16 m (oko 53 talasne dužine na učestanosti od interesa), a dijametar rotora je oko 13 m (oko 43 talasne dužine na učestanosti od interesa).

S obzirom da je precizno modelovanje antene veoma važno za tačnost analize, na površinama antene su ivična i površinska ugaona tolerancija postavljene na  $10^\circ$ , dok je maksimalna dimenzija elementa podešena na vrednost jednaku polovini radijusa *patch*-a. Korišćena su dva globalna podešavanja parametara segmentacije. Prvo odgovara podrazumevanim podešavanjima za učestanost od 1 GHz i maksimalnu dimenziju elementa od  $1.83 \lambda$  (približno 0.549 m), površinska i ivična ugaona tolerancija iznose  $30^\circ$ , dok tolerancija za ukрупnjavanje, faktor relaksacije parametara podele i minimalna dimenzija površine imaju vrednosti 0.0001, 10% i 0.01, respektivno. Druga mreža je kreirana sa identičnim lokalnim i globalnim podešavanjima, uz promenu koja se odnosi samo na toleranciju za ukрупnjavanje, koja je povećana 50 puta, tj. ima vrednost 0.005.



Slika 108. CAD model kružne *patch* antene postavljene na trup helikoptera.

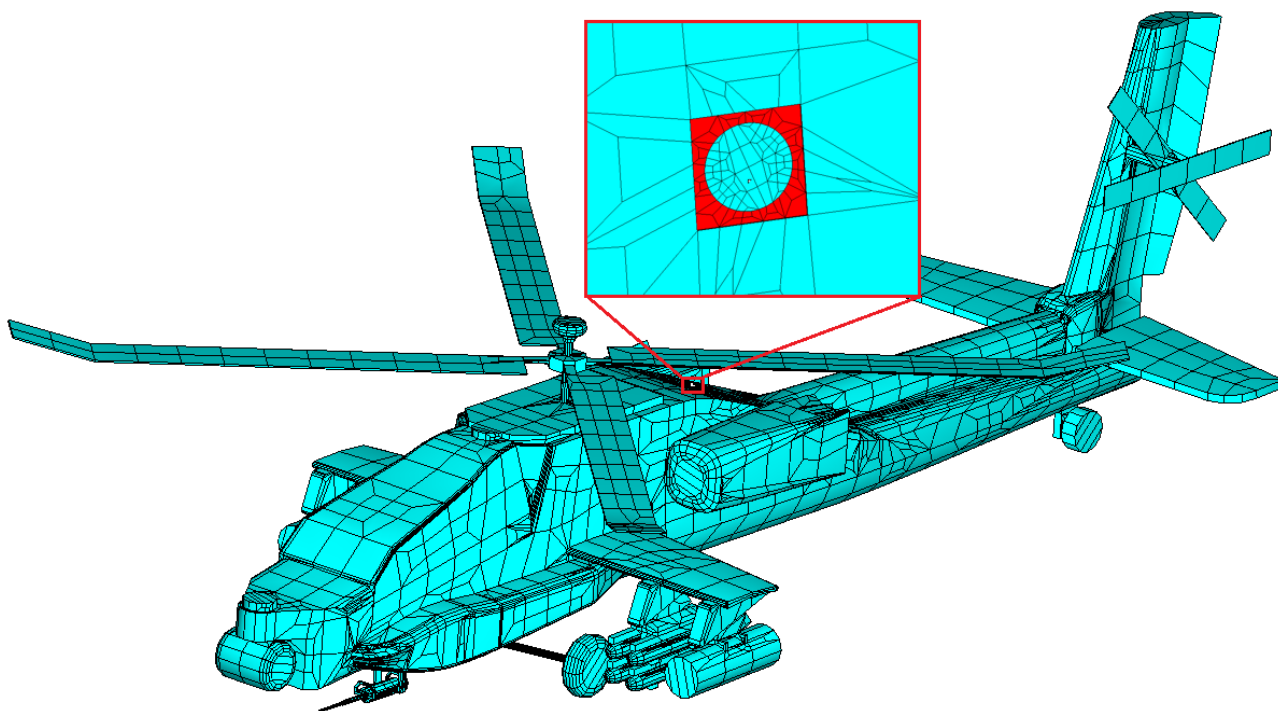
Mreže kreirane primenom ovih podešavanja prikazane su na slici 109. Ukupan broj elemenata mreže je 9497 kada je tolerancija za ukрупnjavanje postavljena na 0.0001. Kada je tolerancija povećana na 0.005 broj elemenata mreže se smanjio na 7173, tj. za oko 25%. Sa slike 109 se može jasno videti da su sve krivine modelovane sa manjim brojem segmenata kada je korišćena povećana vrednost za toleranciju za ukрупnjavanje. Ovo je posebno uočljivo na delovima oko nosa helikoptera, na točkovima, raketama, vertikalnom nosaču elise, te površinama malog radijusa krivine na bočnim stranama kabine. Sa druge strane, na površinama same antene primenjeno je lokalno zadavanje parametara mreže, pa se na tim površinama i odgovarajućim ivicama ne primenjuje ukрупnjavanje. Iz tog razloga je mreža antene praktično identična bez obzira na vrednost tolerancije za ukрупnjavanje, kao što se može videti na slici 109.

Model je simuliran uz primenu *Antenna Placement* redukcije [132], koja podrazumeva adaptivno određivanje reda aproksimacije u zavisnosti od rastojanja posmatranog elementa od generatora. Svi redovi aproksimacije koji su inicijalno izračunati na osnovu dimenzije posmatranog elementa u pravcu odgovarajuće ose pomnoženi su faktorom:

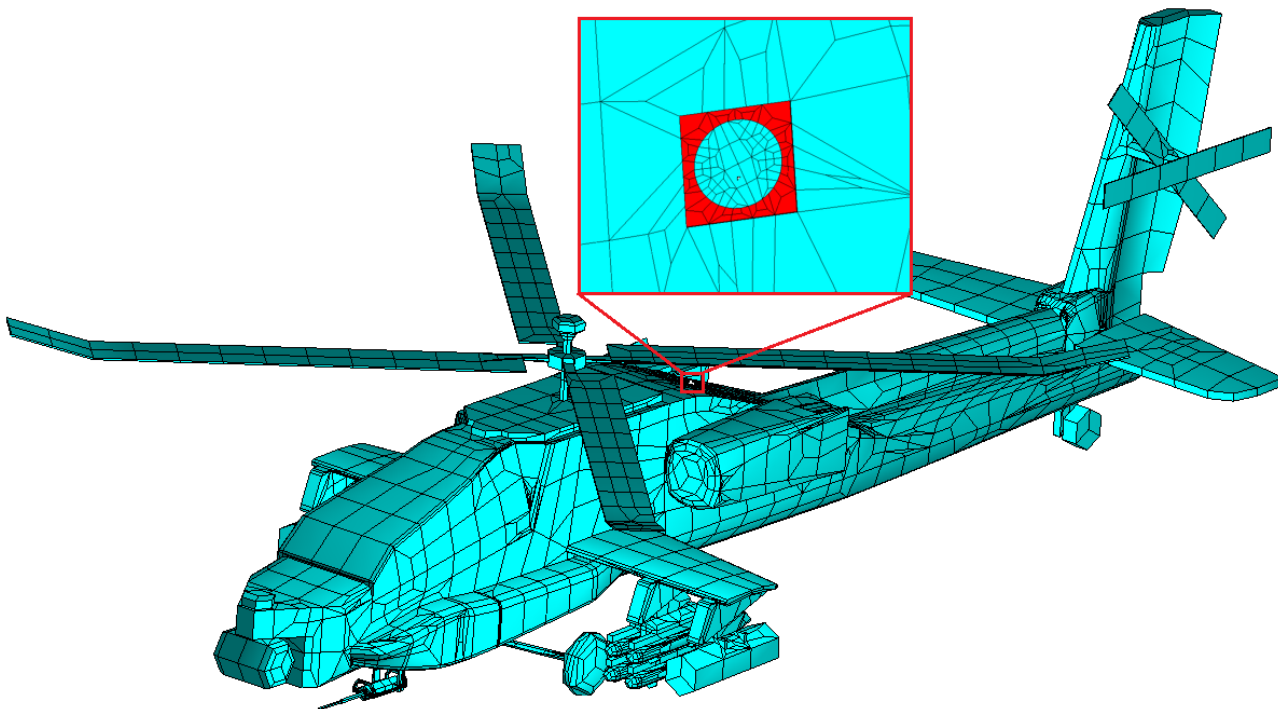
$$C = 1 - k \frac{r}{r_{\max}}, \quad 0 \leq k \leq 1 \quad (85)$$

gde je  $r$  rastojanje posmatranog elementa od generatora,  $r_{\max}$  je rastojanje najudaljenijeg elementa od generatora, dok je  $k$  faktor redukcije. Primeri prikazani u ovom poglavlju simulirani su sa faktorom redukcije od 0.5.

Modeli su simulirani na računaru opremljenom sa dva Intel Xeon CPU E5-2650 v5 @ 2.20GHz procesora (ukupno 24 jezgra / 48 logičkih niti), 256 GB RAM memorije, i četiri GTX 1080 Ti grafičke kartice. Matrična inverzija je rađena na grafičkim karticama [125], dok su ostale faze analize rađene na centralnim procesorima. Broj elemenata mreže, srednja vrednost faktora kvaliteta elemenata, te broj nepoznatih koeficijenata i vreme simulacije dati su u tabeli 8.



a) Tolerancija za ukрупnjavanje od 0.0001.



b) Tolerancija za ukрупnjavanje od 0.005.

Slika 109. Mreža modela kružne patch antene na trupu helikoptera za različite vrednosti tolerancije za ukрупnjavanje.

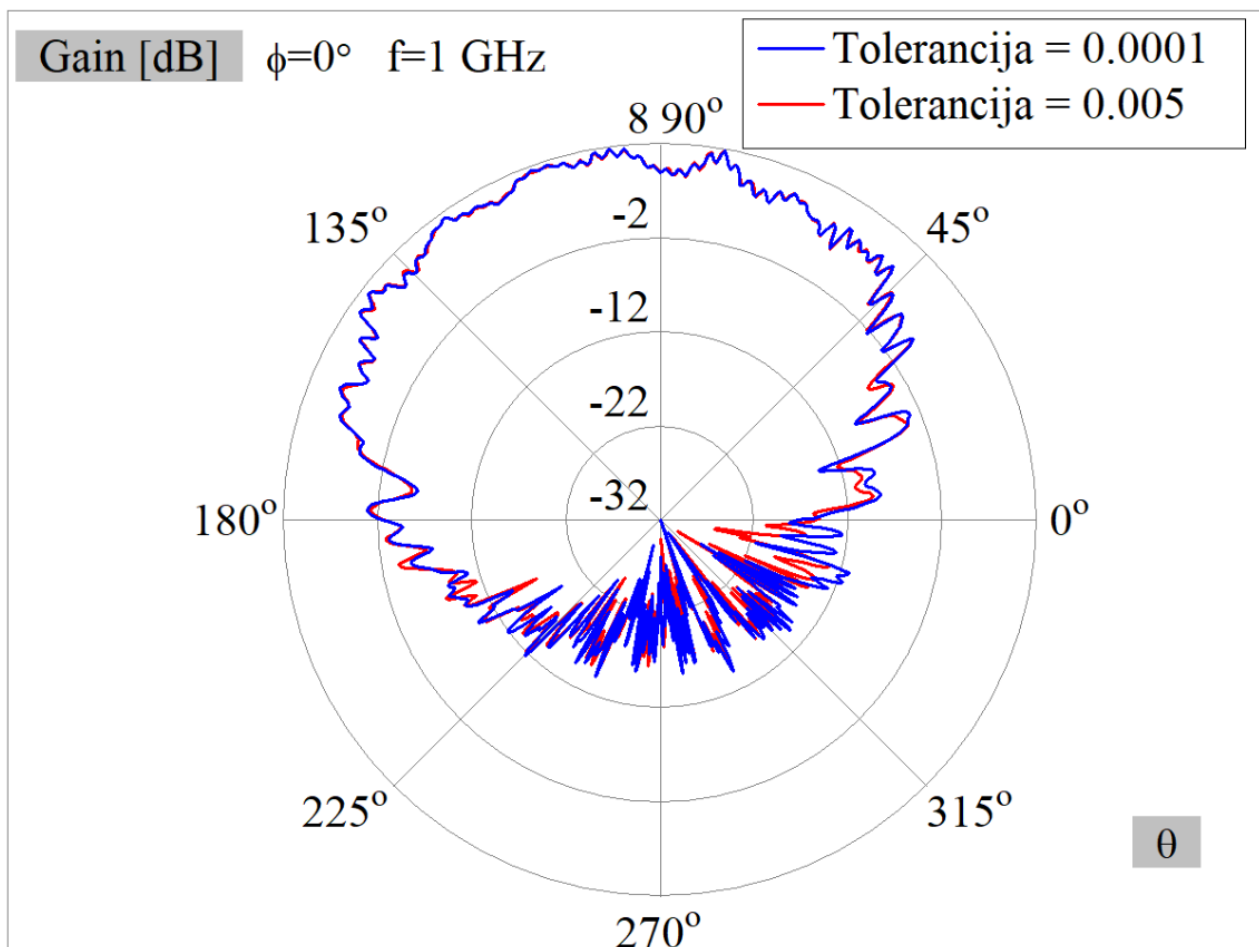
Tabela 8 Poređenje segmentacije za različite tolerancije ukрупnjavanja.

Tolerancija ukрупnjavanja	Broj elemenata	Q-faktor	Broj nepoznatih	Vreme simulacije [s]
0.0001	9 484	0.60	116 922	811.2
0.005	7 173	0.58	104 893	623.1

Na osnovu podataka datih u tabeli 8 može se zaključiti da je korišćenje veće tolerancije za ukрупnjavanje dovelo do smanjenja broja nepoznatih koeficijenata za oko 10%, iako je broj elemenata smanjen za oko 25%, uz neznatno smanjenje srednje vrednosti faktora kvaliteta. Ovo se lako može objasniti činjenicom da su elementi dobijeni ukрупnjavanjem nešto veći od originalnih elemenata, te su na njima korišćeni i nešto viši redovi aproksimacije. Na drugoj strani, ukupno vreme simulacije je smanjeno za oko 25%.

Trajanje postupka segmentacije značajno je kraće od vremena EM analize. Kada je tolerancija za ukрупnjavanje podešena na 0.0001 ovo vreme iznosi oko 90 sekundi, dok se za toleranciju od 0.005 ono smanji na oko 55 sekundi.

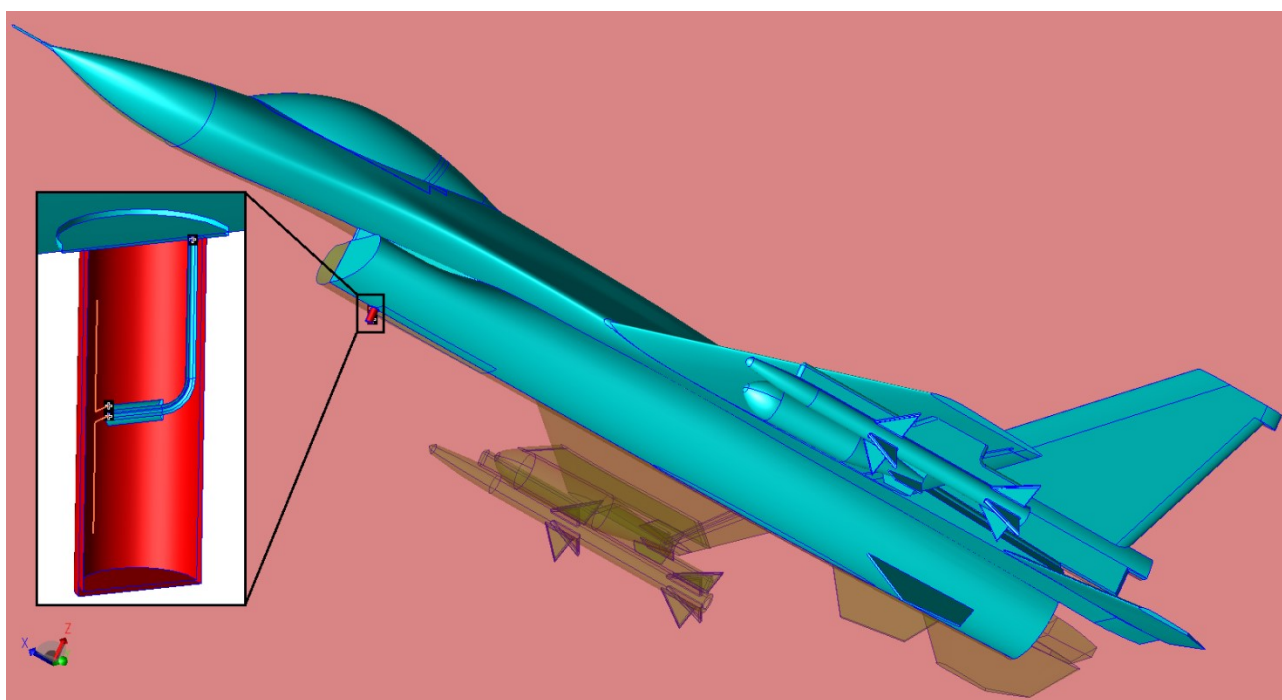
Dijagram zračenja antene u ravni  $\varphi = 0^\circ$  (vertikalna ravan paralelna uzdužnoj osi helikoptera) prikazan je na slici 110. Dijagrami zračenja dobijeni za dve mreže analizirane u ovom poglavlju praktično se podudaraju. Veoma male razlike su vidljive jedino na niskom nivoima dobitka antene i to u pravcima koji odgovaraju zračenju antene unazad, gde tačnost modelovanja pojedinih ivica veoma udaljenih od antene postaje značajna zbog tačnosti modelovanja difrakcije na njima.



Slika 110. Dijagram zračenja kružne *patch* antene postavljene na trup helikoptera, u ravni  $\varphi = 0^\circ$ .

## 10.5. Dipol na trupu aviona – poređenje sa metodom baziranom na MeshSim tehnologiji

Posmatrajmo model polutalasne dipol antene postavljene na trup aviona, prikazan na slici 111. Dipol je napajan koaksijalnim vodom na čijem kraju se nalazi četvrttalasni *choke*. Antena je optimizovana tako da radi na učestanosti od 2.4 GHz. Dipol je smešten ispod tankog dielektričnog radoma, debljine 2.5 mm i relativne permitivnosti dielektrika 2.2. Dužina aviona je oko 15 m, odnosno oko 120 talasnih dužina na učestanosti od interesa. Kako bi se smanjio broj nepoznatih i trajanje simulacije iskorišćena je simetričnost geometrije i pobude, te je zadata jedna ravan simetrije (u ravni  $y = 0$ ).



Slika 111. CAD model polutalasnog dipola na trupu aviona.

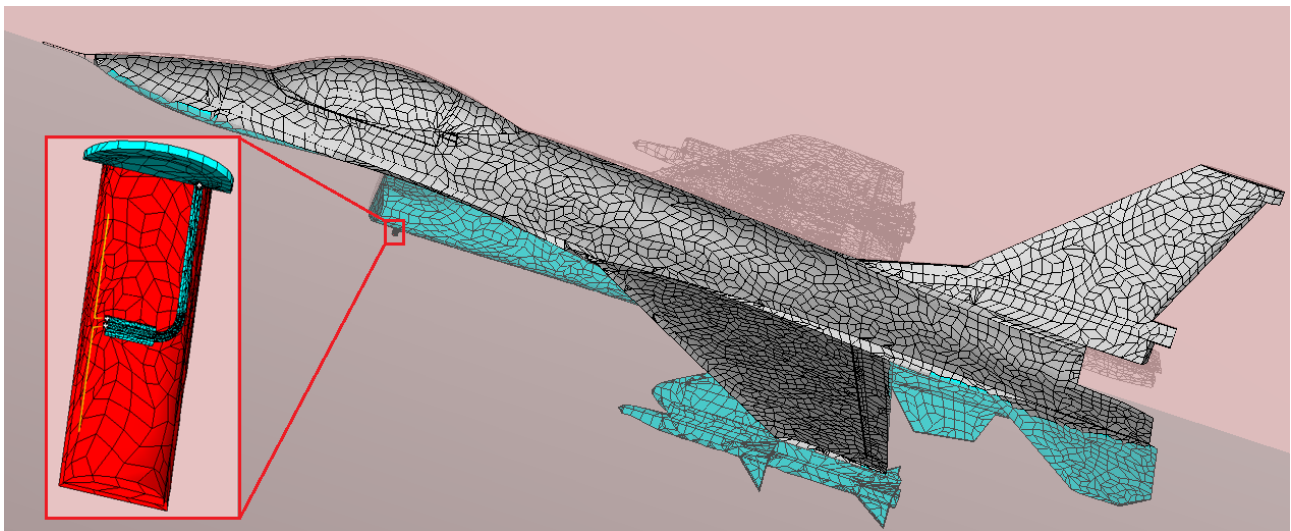
Model je segmentiran primenom dve metode. Prva se zasniva na primeni komercijalno dostupnog softvera za trougaonu segmentaciju MeshSim [128] i konverziji trougaone u četvorougaonu mrežu primenom algoritma opisanog u [11]. Druga metoda je metoda predložena u ovom radu. U oba slučaja je korišćena dimenzija elemenata koja je jednaka dvostrukoj vrednosti talasne dužine na učestanosti od interesa. Mreže dobijene primenom ove dve metode prikazane su na slici 112. Osnovne prednosti nove metode su očigledne sa ove slike, a to su:

- Anizotropija elemenata mreže, koja je najočiglednija na radomu i koaksijalnom kablju koji napaja antenu.
- Bolji kvalitet pojedinih elemenata mreže, jer za razliku od metode koja je zasnovana na konverziji trougaone u četvorougaonu mrežu gde većina elemenata ima romboidni oblik, nova metoda daje gotovo isključivo kvadratne i pravougaone elemente.

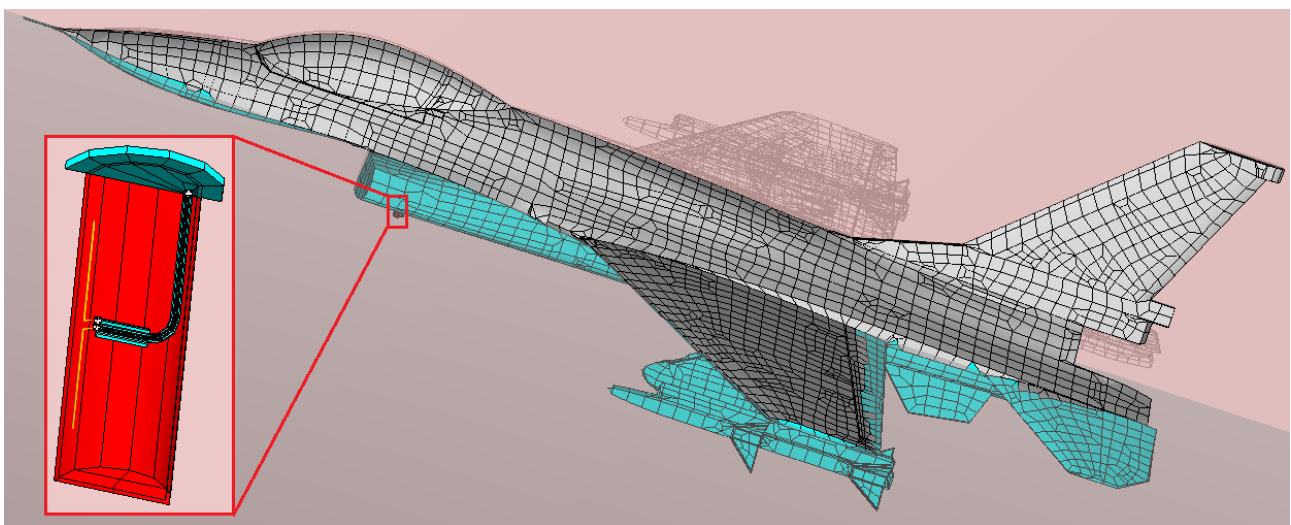
Model je simuliran uz primenu dve metode za redukciju broja nepoznatih na elementima koji su udaljeni od antene. Osim *Antenna Placement* redukcije opisane u prethodnom poglavlju, korišćena je i dodatna redukcija na elementima koji se nalaze u zoni senke. Zona senke je podešena tako da obuhvata elemente koji su na slici 112 obojeni sivom bojom. Koeficijent redukcije je podešen na 0.6 za *Antenna Placement* redukciju, a na 0.5 za redukciju u zoni senke.

Broj elemenata, prosečan faktor kvaliteta elemenata, te broj nepoznatih koeficijenata i vreme simulacije dati su u tabeli 9.





a) MeshSim trougaona mreža + konverzija u četvorougaonu.



b) Nova metoda.

Slika 112. Mreža modela dipol antene na trupu aviona dobijena primenom dve metode za segmentaciju.

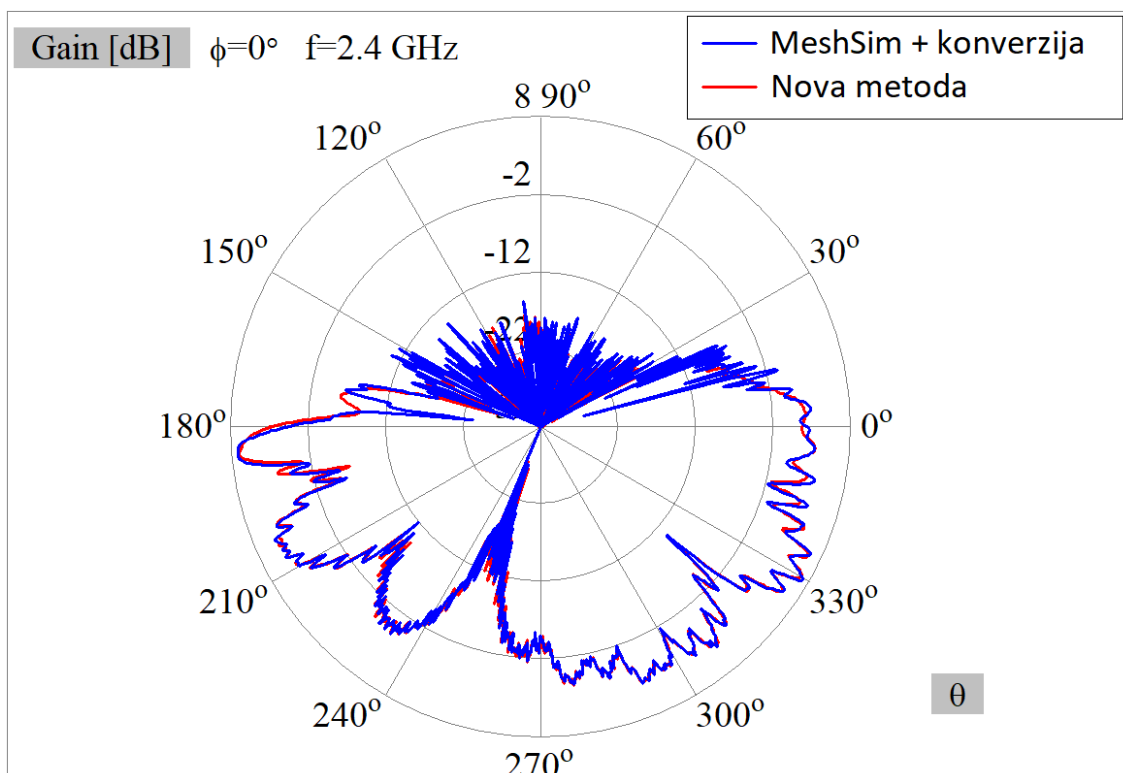
Tabela 9 Poređenje dve metode za segmentaciju.

Metoda	Broj elemenata	Q-faktor	Broj nepoznatih	Vreme simulacije [s]
MeshSim + konverzija	9 386	0.56	147 090	1660.4
Nova metoda	5 434	0.66	107 189	751.52

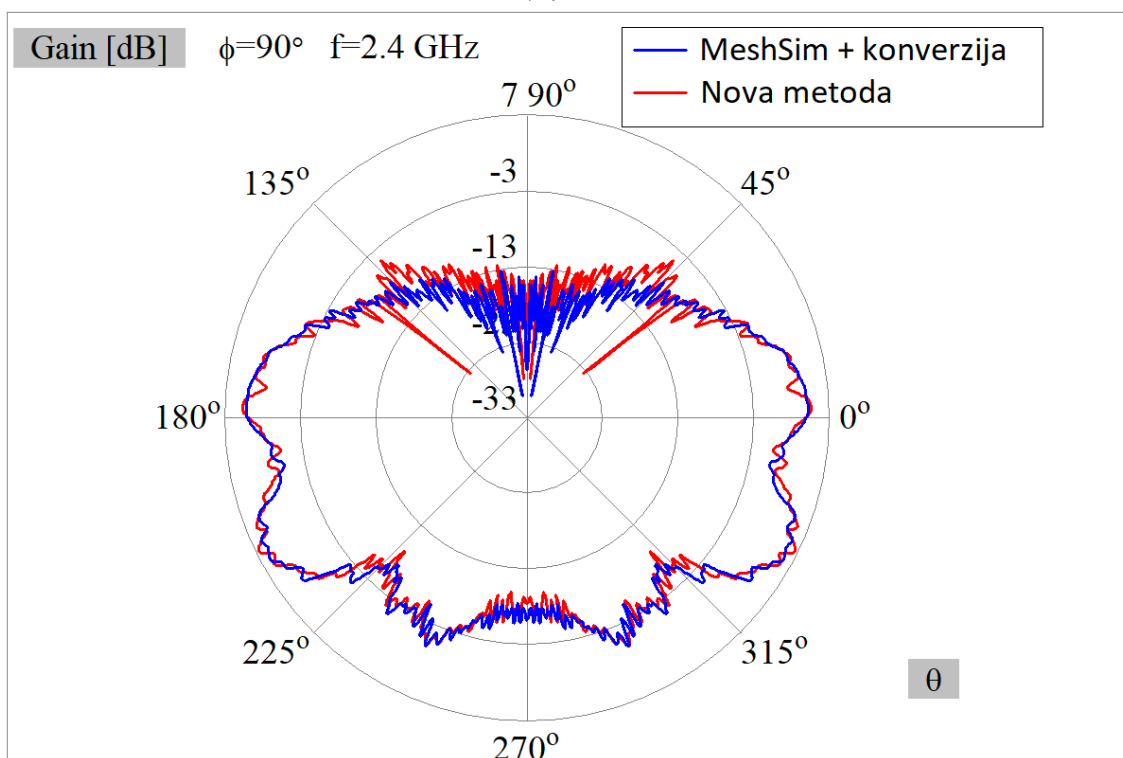
Na osnovu podataka datih u tabeli 9 može se videti da se primenom nove metode dobija za oko 42% manje elemenata, uz značajno povećanje faktora kvaliteta elemenata mreže. To dovodi do značajnog smanjenja broja nepoznatih koeficijenata, te konačno oko 2.2 puta kraćeg vremena simulacije.

Trajanje procesa segmentacije značajno je kraće od EM simulacije i iznosi oko 120 sekundi, od čega se oko 95 sekundi troši na poslednju fazu, tj. segmentaciju poligona u osnovnom domenu i projekciju mreže iz osnovnog domena na CAD površine.

Dijagrami zračenja antene u dve vertikalne ravni,  $\varphi = 0^\circ$  i  $\varphi = 90^\circ$ , prikazani su na slici 113, gde se može videti veoma dobro slaganje dijagrama zračenja za dve metode segmentacije.



a)  $\phi = 0^\circ$



b)  $\phi = 90^\circ$

Slika 113. Dijagram zračenja dipol antene postavljene na trup aviona, za dve metode segmentacije.

# 11. Zaključak

U ovom radu su razmatrani algoritmi za četvorougao nu segmentaciju CAD geometrije, sa fokusom na algoritmima koji su pogodni za efikasnu elektromagnetsku analizu zasnovanu na površinskim integralnim jednačinama, metodi momenata i funkcijama bazisa višeg reda. Pokazuje se da mreža koja je pogodna za efikasnu analizu primenom pomenute metode treba da ima sledeće osobine:

- usaglašenost, odnosno potpunu povezanost,
- minimalan broj elemenata za zadatu tačnost geometrijskog modelovanja, i
- maksimalan mogući faktor kvaliteta pojedinih elemenata.

Kako bi se postigao dobar kompromis između minimizacije broja elemenata i tačnosti geometrijskog modelovanja elementi mreže treba da imaju dimenzije koje su adaptivne lokalnom obliku i dimenzijama CAD geometrije, uključujući i anizotropiju samih elemenata. Takođe, zbog tačnog modelovanja zakrivljenih površina elementi treba da budu bilinearni, a ne strogo ravni četvorouglovi. Poželjan oblik elementa određen je metodom za elektromagnetsku analizu koja se koristi, a u ovom radu je on kvantifikovan kroz faktor kvaliteta koji je za metodu koju koristimo maksimalan za elemente oblika pravougaonika.

Data je klasifikacija algoritama koji se koriste za četvorougao nu segmentaciju, kao i opis algoritama koji su najčešće korišćeni u praksi. Za sve pomenute algoritme naglašene su prednosti i nedostaci kada je u pitanju njihova primena za kreiranje četvorougao ne mreže pogodne za elektromagnetsku analizu. Osim što algoritam za četvorougao nu segmentaciju treba da rezultira mrežom koja ima odgovarajuće osobine, sam algoritam mora biti:

- robusan i primenjiv na geometriju proizvoljne topološke i geometrijske složenosti,
- efikasan, tako da trajanje segmentacije bude značajno kraće od trajanja elektromagnetske analize.

U radu je predložena i detaljno opisana nova metoda za četvorougao nu segmentaciju CAD geometrije, koja je optimizovana za efikasnu elektromagnetsku analizu. Nova metoda je zasnovana na direktnom kreiranju četvorougao ne mreže, bez trougao ne mreže kao međukoraka. Na ovaj način se postiže veća brzina kreiranja mreže uz eliminaciju uticaja kvaliteta inicijalne trougao ne na kvalitet finalne četvorougao ne mreže. Metoda se može svrstati u grupu metoda zasnovanih na podeli geometrije na makro elemente, jer predviđa da se mreža kreira za svaku površinu CAD modela zasebno, a jedini zahtev koji postoji na granici dveju površina jeste povezanost mreže.

Kada je u pitanju segmentacija pojedinih površina, ona se zasniva na algoritmu za četvorougao nu segmentaciju ravnih poligona, koji je optimizovan za efikasnu elektromagnetsku analizu. Kako bi preslikavanje površine u osnovni domen (ravan poligon) bilo efikasno funkcija koja definiše ovo preslikavanje mora biti funkcija koja se veoma brzo izračunava. Iz tog razloga je primenjen pristup da se sve površine najpre podele na kvazi-planarne, a da se zatim preslikavanje u osnovni domen svede na projekciju tačaka u ravan osnovnog domena duž prave paralelne normalni na ovu ravan. Razvijen je poseban heuristički algoritam za podelu površina na kvazi-planarne. Ovaj algoritam počiva na ekstrakciji oblika površine na osnovu analize poligonskih aproksimacija izoparametarskih linija u  $uv$ -parametarskom prostoru površine. Ova analiza omogućava detekciju glavnih pravaca zakrivljenosti, te podelu na kvazi-planarne površine paralelno sa njima, što konačno omogućava optimalnu orijentaciju elemenata u finalnoj mreži, gde su elementi orijentisani paralelno glavnim pravcima zakrivljenosti površina.

Poligonska aproksimacija u skladu sa zadatim parametrima mreže se izračunava za sve ivice ovako kreiranih kvazi-planarnih površina, te se projekcijom čvorova poligonske aproksimacije u osnovni domen dobija poligon koji predstavlja sliku kvazi-planarne površine u osnovnom domenu. Mreža



poligona u osnovnom domenu kreira se primenom metode zasnovane na dekompoziciji, ali tako modifikovane da se u obzir uzme oblik površine čija je slika dati poligon. Konačno, finalna mreža CAD površine dobija se projektovanjem čvorova mreže poligona u osnovnom domenu nazad na CAD površinu.

Sama poligonska aproksimacija izoparametarskih linija i ivica CAD površina, tj. generalno krivih linija, kreira se primenom algoritma koji minimizuje broj segmenata u ovoj aproksimaciji, uz maksimizaciju uniformnosti njihovih dužina i zakrivljenosti delova krive koji odgovaraju pojedinim segmentima. Algoritam se sastoji iz dve faze: prva predstavlja kreiranje veoma fine poligonske aproksimacije krive, koja se sastoji od velikog broja mikro-segmenata veoma male dužine i zakrivljenosti, na osnovu koje se u drugoj fazi algoritma kreira finalna aproksimacija krive. Druga faza algoritma kombinuje podelu u parametarskom prostoru krive sa dobro poznatim algoritmima koji počivaju na sekvencijalnoj pretrazi po mikro-segmentima i optimizaciji parametara segmentacije.

Velika pažnja je posvećena rafinaciji predložene metode za četvorougao nu segmentaciju, kako bi se postiglo dodatno smanjenje broja elemenata mreže uz maksimizaciju faktora kvaliteta pojedinih elemenata. Pre svega, u algoritmu za kreiranje poligonske aproksimacije krivih uvedena je tolerancija za ukрупnjavanje, koja omogućava da se električki veoma male krive aproksimiraju malim brojem segmenata, bez obzira na nivo njihove zakrivljenosti. Kako je za čistu četvorougao nu mrežu potrebno da ukupan broj segmenata na zatvorenim petljama svih površina bude paran, razvijena je nova heuristička metoda za umetanje pomoćnih segmenata za parnost, koja minimizuje broj ivica u čije je poligonske aproksimacije umetnut pomoćni segment. Osim toga, ova metoda forsira umetanje segmenta na ivicama na kojima to ne podrazumeva kreiranje veoma sitnih segmenata, koji bi sa velikom verovatnoćom doveli do kreiranja trapezoidnih elemenata niskog faktora kvaliteta. Konačno, razvijen je veći broj specijalnih tehnika, koje su detaljno opisane u radu:

- Relaksacija parametara podele u postupku kreiranja kvazi-planarnih površina, koja sprečava nastanak veoma kratkih ivica.
- Komprimovanje kratkih ivica i veoma sitnih površina u jedan čvor.
- Komprimovanje veoma tankih i izduženih površina u, u opštem slučaju nemanifoldnu, poligonsku liniju.
- Nakon projekcije u osnovni domen vrši se kontrola oblika poligona, te po potrebi dodatna podela odgovarajuće CAD površine, kako bi se sprečio nastanak veoma izduženih elemenata niskog faktora kvaliteta.

Činjenica da metoda počiva na dekompoziciji, i praktično nezavisnoj segmentaciji svake CAD površine, daje mogućnost veoma jednostavne implementacije lokalnih zadavanja parametara mreže. Na taj način se postiže jednostavno podizanje broja elemenata, tj. tačnosti elektromagnetske analize, na delovima modela na kojima je to neophodno.

Nova metoda za četvorougao nu segmentaciju CAD geometrije je implementirana u Parasolid tehnologiji i testirana na realističnim elektromagnetskim problemima, koji su simulirani u programskom paketu WIPL-D. Dobijeni rezultati su veoma dobri. Pre svega, metoda pokazuje veliku robusnost, te je zbog toga postala i deo komercijalno dostupnog programskog paketa WIPL-D Pro CAD. Efikasnost je veoma dobra, pa je za praktično sve realistične modele trajanje segmentacije zanemarljivo u odnosu na trajanje elektromagnetske analize. Mreže kreirane primenom nove metode pokazuju adaptivnost i anizotropiju elemenata, koje su neophodne osobine za postizanje dobrog geometrijskog modelovanja uz minimizaciju broja elemenata. U radu je prikazano poređenje rezultata elektromagnetske simulacije sa analitičkim rezultatima i rezultatima merenja, koje potvrđuje visoku tačnost geometrijskog i elektromagnetskog modelovanja za mreže dobijene primenom nove metode.

Takođe, dato je poređenje nove metode sa metodom baziranom na trougaonoj segmentaciji korišćenjem komercijalno dostupnog softvera MeshSim i konverziji trougaone u četvorougao nu mrežu. Pokazuje se da se primenom nove metode značajno smanjuje broj elemenata mreže, uz povećanje faktora kvaliteta. To dovodi do značajnog smanjenja broja nepoznatih koeficijenata, te konačno računarskih i vremenskih resursa potrebnih za elektromagnetsku analizu.

Konačno, nova metoda se sastoji od više praktično nezavisnih celina. Ova činjenica daje mogućnost modifikovanja ili optimizacije svake celine nezavisno. To je u radu prikazano na primeru generalizacije metode, tako da se umesto bilinearnih mreža sastoji od zakrivljenih krivolinijskih četvorouglova. Ova generalizacija je sprovedena modifikacijom samo jedne faze algoritma, i to poslednje koja se odnosi na projektovanje četvorougao ne mreže iz osnovnog domena na CAD površinu.

Kada se govori o nedostacima i mogućnostima za unapređenje nove metode, to se pre svega odnosi na sledeće:

- Osnovni nedostatak postojećeg algoritma za podelu površina na kvazi-planarne leži u činjenici da se podela uvek vrši po izoparametarskim ili njima bliskim linijama. Ukoliko se glavni pravci zakrivljenosti površine ne poklapaju sa ovim linijama podela na kvazi-planarne površine neće biti optimalna, kao ni orijentacija elemenata u finalnoj mreži. Iz navedenog razloga je ovaj algoritam potrebno unaprediti tako da se u obzir uzmu pozicije čvorova poligonskih aproksimacija izoparametarskih linija i radijusi krivina u njima, te da se linije podele konstruišu u skladu sa tim, tako da prate glavne pravce zakrivljenosti površine.
- Algoritam za kreiranje poligonske aproksimacije krive moguće je unaprediti uvođenjem naprednog algoritma za optimizaciju parametara segmentacije. Ne očekuje se međutim veliki uticaj ovog unapređenja na ukupni kvalitet mreže, jer i postojeći algoritam daje optimalan rezultat za ogromnu većinu krivih u realističnim CAD modelima.
- Verovatno najveći nedostatak postojeće metode jeste nepostojanje mehanizma koji kontroliše brzinu rasta elemenata, pa se u pojedinim modelima pojavljuju veoma izduženi trapezoidni elementi niskog faktora kvaliteta. Iz tog razloga bi uvođenje ovog mehanizma predstavljalo značajno unapređenje predložene metode.

Dalje istraživanje i razvoj vezani za algoritme četvorougao ne segmentacije biće pre svega fokusirani na algoritme koji će omogućiti unapređenje predložene metode u navedenim pravcima.

## 12. Literatura

- [1] R.F. Harrington, *Field computation by moment methods*, New York: Macmillan; 1968.
- [2] S. M. Rao, D. R. Wilton, and A. W. Glisson, “Electromagnetic Scattering by Surfaces of Arbitrary Shape”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, AP-30, pp. 409-418, May 1982.
- [3] D. Bommès, B. Lévy, N. Pietroni, E. Puppo, C. Silva, M. Tarini, D. Zorin, “Quad-Mesh Generation and Processing: A Survey”, *Computer Graphics Forum*, vol. 32, no. 6, pp. 51-76, March 2013.
- [4] B. M. Kolundzija, and A. R. Djordjevic, *Electromagnetic Modeling of Composite Metallic and Dielectric Structures*, Artech House, Norwood, 2002.
- [5] E. H. Newman and P. Tulyathan, “A surface patch model for polygonal plates”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 30, pp. 588–593, July 1982.
- [6] E. H. Newman, P. Alexandropoulos, and E. K. Walton, “Polygonal plate modeling of realistic structures”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 32, pp. 742–747, July 1984.
- [7] E. F. D’Azevedo, “Are bilinear quadrilaterals better than linear triangles?”, *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 22, pp. 198-217, Jan. 2000.
- [8] J. F. Thompson, B. K. Soni, and N. P. Weatherill, eds., *Handbook of Grid Generation*, CRC Press, 1998.
- [9] P. J. Frey and P.-L. George, *Mesh Generation - Application to Finite Elements*, Hermes Science Publishing, Oxford, UK, 1st ed., 2000, 2nd ed. 2008.
- [10] M. Tarini, N. Pietroni, P. Cignoni, D. Panozzo, and E. Puppo, “Practical quad mesh simplification”, *Computer Graphics Forum*, vol. 29, No. 2, pp. 407–418, May 2010.
- [11] B. M. Kolundzija, M. M. Kostic, B. Lj. Mrdakovic, and D. S. Sumic, “Efficient EM Modeling Based on Conversion of Triangular Mesh into Quadrilateral Mesh”, *Int. Conf. on Electromagnetics in Adv. Appl. (ICEAA)*, Torino, September 14-18, 2009.
- [12] J. Daniels, C. Silva, and E. Cohen, “Semi-regular quadrilateral-only remeshing from simplified base domains”, *Computer Graphics Forum*, vol. 28, pp. 1427–1435, July 2009.
- [13] I. Boier-Martin, H. Rushmeier, and J. Jin, “Parameterization of triangle meshes over quadrilateral domains”, *Proceedings of the 2004 Eurographics/ACM SIGGRAPH symposium on Geometry processing (SGP '04)*, New York, NY, USA, pp. 193–203, July 2004.
- [14] S. Dong, P.-T. Bremer, M. Garland, V. Pascucci, and J. C. Hart, “Spectral surface quadrangulation”, *ACM Transactions on Graphics*, vol. 25, pp. 1057-1066, July 2006.
- [15] N. Ray, W. C. Li, B. Levy, A. Sheffer, and P. Alliez, “Periodic global parameterization”, *ACM Transactions on Graphics*, vol. 25, issue 4, pp. 1460-1485, Oct. 2006.
- [16] D. Bommès, H. Zimmer, and L. Kobbelt, “Mixed-integer quadrangulation”, *ACM Transactions on Graphics*, vol. 28, issue 3, pp. 1-10, July 2010.
- [17] M. S. Tasic and B. M. Kolundzija, “Efficient electromagnetic modeling based on automated quadrilateral meshing of polygons,” *Elsvier Science Proc., Eng. Analysis with Boundary Elements* 27, pp. 361-373, April 2003.

- [18] D. Nowotny, "Quadrilateral Mesh Generation via Geometrically Optimized Domain Decomposition", Proceedings, 6th International Meshing Roundtable, Sandia National Laboratories, pp. 309-320, 1997.
- [19] A. Vaxman, M. Campen, O. Diamanti, D. Bommès, K. Hildebrandt, M. B.-C. Technion, and D. Panozzo, "Directional field synthesis, design, and processing", Computer Graphics Forum, vol. 35, issue 2, pp. 1-30, July 2017.
- [20] M. Reberol, C. Georgiadis, and J.-F. Remacle, "Quasi-structured quadrilateral meshing in Gmsh - a robust pipeline for complex CAD models", March 2021.
- [21] A. W. Maue, "Toward Formulation of a General Diffraction Problem via an Integral Equation," J. Phys., vol. 126, no. 7, pp. 601–618, 1949.
- [22] A. J. Poggio and E. K. Miller, "Integral Equation Solutions of Three-Dimensional Scattering Problems," in Computer Techniques for Electromagnetics, R. Mittra, Ed. Oxford, U.K.: Pergamon Press, 1973.
- [23] J. R. Mautz and R. F. Harrington, "H-Field, E-Field and Combined-Field Solutions for Conducting Bodies of Revolution," Arch. Elek. Übertragung, vol. 32, no. 4, pp. 157–164, 1978.
- [24] L. Gurel and O. Ergul, "Contamination of the Accuracy of the Combined-Field Integral Equation With the Discretization Error of the Magnetic-Field Integral Equation," IEEE Trans. Antennas Propag., vol. 57, no. 9, pp. 2650–2657, September 2009.
- [25] B. M. Kolundzija and V. V. Petrovic, "Power balance in MoM/SIE and FEM solved by Galerkin method," in IEEE AP-S Int. Symp, USA, OH, Columbus, June 22-27, 2003.
- [26] WIPL-D Pro CAD 2021, WIPL-D d.o.o, Belgrade, 2021.
- [27] B. D. Popović, Elektromagnetika, Građevinska knjiga, Beograd, 1980.
- [28] Poggio, A. J., and E. K. Miller, "Integral Equation Solutions of Three-Dimensional Scattering Problems," in Computer Techniques for Electromagnetics, R. Mittra, (ed.), Oxford, U.K.: Pergamon Press, 1973.
- [29] Chang, Y., and R. F. Harrington, "A Surface Formulation for Characteristic Modes of Material Bodies," IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol. AP-25, No. 6, November 1977, pp. 789–795.
- [30] Wu, T. K., and L. L. Tsai, "Scattering from Arbitrarily-Shaped Lossy Dielectric Bodies of Revolution," Radio Sci., Vol. 12, No. 5, 1977, pp. 709–718.
- [31] Mautz, J. R., and R. F. Harrington, "Electromagnetic Scattering from a Homogenous Material Body of Revolution," Arch. Elek. Übertragung, Vol. 33, 1979, pp. 71–80.
- [32] B. M. Kolundzija, "Electromagnetic Modeling of Wire to Plate Structures," D. Sc. Thesis, University of Belgrade, Department of Electrical Engineering, 1990.
- [33] A. G. Polimeridis, I. D. Koufogiannis, M. Mattes, J. R. Mosig, "Considerations on Double Exponential-Based Cubatures for the Computation of Weakly Singular Galerkin Inner Products," IEEE Trans. Antennas Propag., vol. 60, no. 5, pp. 2579 - 2582, May 2012.
- [34] B. M. Kolundzija and B. D. Popovic, "Entire-Domain Galerkin Method for Analysis of Generalized Wire Antennas and Scatterers", Proceedings of the IEE, vol. 139, issue 1, pp. 17-24, Feb. 1992.

- [35] A. J. Krneta and B. M. Kolundzija, "Evaluation of Potential and Impedance Integrals in Analysis of Axially Symmetric Metallic Structures to Prescribed Accuracy Up To Machine Precision", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 65, no. 5, pp. 2526-2539, May 2017.
- [36] A. J. Krneta and B. M. Kolundzija, "Using Ultra-High Expansion Orders of Max-Ortho Basis Functions for Analysis of Axially Symmetric Metallic Antenna", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 66, no. 7, pp. 3696-3699, July 2018.
- [37] Kolundzija, B. M., "Effect of a Wire End in Thin-Wire Analysis," *Proc. IEEE AP-S Symposium*, Syracuse, NY, 1988, pp. 843–846.
- [38] M. S. Tasić, "Efikasno elektromagnetsko modelovanje zasnovano na automatskoj segmenatciji poligona na četvorouglove", magistarski rad, Univerzitet u Beogradu – Elektotehnički fakultet, 2004.
- [39] B. M. Kolundzija, "On the locally continuous formulation of surface doublets", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 46, pp. 1879-1883, Dec. 1998.
- [40] B. M. Kolundzija, "Comparison of a class of subdomain and entire domain basis functions automatically satisfying KCL", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 44, no. 10, pp. 1362-1366, Oct. 1996.
- [41] I. Gibson and P. Jorge Bártolo, Paulo. "History of Stereolithography", *Stereolithography: Materials, Processes, and Applications.*, pp. 41-43, Oct. 2015.
- [42] W. J. Gordon, and R. F. Riesenfeld. "B-Spline curves and surfaces," *Computer Aided Geometric Design*, pp. 95-126, 1974.
- [43] Gerald E. Farin, *NURBS for Curve and Surface Design*, Society for Industrial and Applied Mathematics, USA, 1991.
- [44] P. Kinney, "CleanUp: Improving Quadrilateral Finite Element Meshes", *Proceedings, 6th International Meshing Roundtable*, Sandia National Laboratories, pp.437-447, October 1997.
- [45] E. Catmull, and J. Clark, "Recursively generated B-spline surfaces on arbitrary topological meshes," *Computer-Aided Design*, vol. 10, issue 6, pp. 350-355, Nov. 1978.
- [46] A. Myles, N. Pietroni, D. Kovacs, D. Zorin, "Feature-aligned T-meshes", *ACM Transactions on Graphics*, vol. 29, issue 4, July 2010.
- [47] Y. Kurozumi and W.A. Davis, "Polygonal approximation by the minimax method", *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, vol. 19, pp. 248-264, 1982.
- [48] H. Imai and M. Iri, "Polygonal Approximations of a Curve - Formulations and Algorithms", *Machine Intelligence and Pattern Recognition*, vol. 6, pp. 71-86, 1988.
- [49] P. S. Heckbert and M. Garland, "Survey of polygonal surface simplification algorithms", *Technical Report*, CS Dept., Carnegie Mellon University, May 1997.
- [50] I. Ihm and B. Naylor, "Piecewise linear approximations of digitized space curves with applications", In N.M. Patrikalakis, editor, *Scientific Visualization of Physical Phenomena*, pp. 545-569, Tokyo, 1991.
- [51] F. Attneave, "Some informational aspects of visual perception", *Psychological Review*, vol. 61, no. 3, pp. 189-193, 1954.

- [52] D. H. Douglas and T. K. Peucker, "Algorithms for the reduction of the number of points required to represent a line or its caricature", *The Canadian Cartographer*, vol. 10, no. 2, pp. 112-122, 1973.
- [53] E. R. White, "Assessment of line-generalization algorithms using characteristic points", *The American Cartographer*, vol. 12, no. 1, pp. 17-27, 1985.
- [54] R. B. McMaster, "The geometric properties of numerical generalization", *Geographical Analysis*, vol. 19, no. 4, pp. 330-346, Oct. 1987.
- [55] A. Pikaz and I. Dinstein, "An algorithm for polygonal approximation based on iterative point elimination", *Pattern Recognition Letters*, vol. 16, issue 6, pp. 557-563, 1995.
- [56] B. N. Delaunay, "Sur la Sphere Vide". *Izvestia Akademia Nauk SSSR, VII Seria, Otdelenie Matematicheskii i Estestvennyka Nauk*, vol. 7, pp. 793-800, 1934.
- [57] N. P. Weatherill and O. Hassan, "Efficient three-dimensional Delaunay triangulation with automatic point creation and imposed boundary constraints", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 37, issue 12, pp. 2005-2039, June 1994.
- [58] S. Rebay, "Efficient Unstructured Mesh Generation by Means of Delaunay Triangulation and Bowyer-Watson Algorithm", *Journal of Computational Physics*, vol. 106, issue 1, pp. 125-138, May 1993.
- [59] J.-F. Remacle, J. Lambrechts, B. Seny, E. Marchandise, A. Johnen, C. Geuzaine, "Blossom-Quad: A non-uniform quadrilateral mesh generator using a minimum-cost perfect-matching algorithm", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 89, no. 9, pp. 1102-1119, March 2012.
- [60] B. Kolundzija, M. Kostic, B. Mrdakovic and D. Sumic, "Comparison of different strategies for conversion of triangular mesh into quadrilateral mesh", *Proceedings of the Fourth European Conference on Antennas and Propagation*, pp. 1-5, April 2010.
- [61] L. Velho, D. Zorin, "4-8 subdivision", *Computer Aided Geometric Design*, vol. 18, pp. 397-427, June 2001.
- [62] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, and C. Stein, *Introduction to Algorithms*, The MIT Press, 2009.
- [63] M. Kostic, B. Kolundzija, D. Sumic and B. Mrdakovic, "Optimized quadrilateral mesh for higher order method of moment based on triangular mesh decimation", *2010 IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*, pp. 1-4, July 2010.
- [64] A. Fournier and D.Y. Montuno, "Triangulating Simple Polygons and Equivalent Problems", *ACM Trans. on Graphics*, vol. 3, pp. 153-174, 1984.
- [65] A. W. F. Lee, W. Sweldens, P. Schröder, L. Cowsar, D. Dobkin, "Maps: multiresolution adaptive parameterization of surfaces", *25th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pp. 95-104, New York, NY, USA, 1998.
- [66] J. Daniels, C. Silva, J. Shepherd, and E. Cohen, "Quadrilateral mesh simplification", *ACM SIGGRAPH Asia 2008*, pp. 1-9, Dec. 2008.
- [67] G. Turk, "The Stanford Bunny", [www.cc.gatech.edu](http://www.cc.gatech.edu), Aug. 2000.
- [68] M. Tarini, K. Hormann, P. Cignoni, and C. Montani, "PolyCube-Maps", *ACM Transactions on Graphics*, vol. 23, pp. 853-860, Aug. 2004.

- [69] J. Lin, X. Jin, Z. Fan, and C. Wang, “Automatic PolyCube-Maps”, In Proceedings of the 5th International Conference on Advances in Geometric Modeling and Processing, pp. 3-8, Berlin, 2008.
- [70] Y. Yang, X.-M. Fu, L. Liu, “Computing Surface PolyCube-Maps by Constrained Voxelization”, Computer Graphic Forum, vol. 38, issue 8, pp. 299-309, Nov. 2019.
- [71] B. Lj. Mrdakovic, D. I. Olcan, and B. M. Kolundzija, “Full-wave modeling of stochastic trees for radar cross section calculation”, 9th European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP), pp. 1-4, Lisbon, Portugal, April 2015.
- [72] M. Garland, A. Willmott, and P. Heckbert, “Hierarchical Face Clustering on Polygonal Meshes”, Symposium on Interactive 3D Graphics, SI3D 2001, Chapel Hill, NC, USA, March 26-29, 2001.
- [73] V. Faber and M. Gunzburger, “Centroidal Voronoi Tessellations: Applications and Algorithms”, SIAM Review, vol. 41, issue 4, pp. 637-676, Dec. 1999.
- [74] S. P. Lloyd, “Least squares quantization in PCM”, IEEE Transactions on Information Theory, vol. 28, issue 2, pp. 129–137, March 1982.
- [75] M. S. Floater and K. Hormann, “Surface Parameterization: a Tutorial and Survey”, Advances in Multiresolution for Geometric Modelling, pp. 157-186, 2005.
- [76] H.-C. Ebke, Parametrization Based Quad Meshing in Practical Applications, Dissertation, RWTH Aachen University, 2017.
- [77] M. S. Floater, “Parametrization and smooth approximation of surface triangulations”, Computer Aided Geometric Design, vol. 14, issue 3, pp. 231-250, April 1997.
- [78] C. Gotsman, X. Gu, and A. Sheffer, “Fundamentals of spherical parameterization for 3D meshes”, ACM Transactions on Graphics, vol. 22, issue 3, pp. 358–363, July 2003.
- [79] S. J. Gortler, C. Gotsman, D. Thurston, “Discrete one-forms on meshes and applications to 3D mesh parameterization”, Computer Aided Geometric Design, vol. 23, issue 2, pp. 83-112, Feb. 2006.
- [80] F. Kälberer, M. Nieser, and K. Polthier, “QuadCover - Surface Parameterization using Branched Coverings”, Computer Graphics Forum, vol. 26, issue 3, pp. 375-384, Oct. 2007.
- [81] D. Bommes, M. Campen, H.-C. Ebke, P. Alliez, and L. Kobbelt, “Integer-grid maps for reliable quad meshing”, ACM Transactions on Graphics, vol. 32, issue 4, July 2013.
- [82] U. Pinkall and K. Polthier, “Computing Discrete Minimal Surfaces and Their Conjugates”, Experimental Mathematics, vol. 2, issue 1, pp. 15-36, Nov. 1996.
- [83] M. Eck, T. DeRose, T. Duchamp, H. Hoppe, M. Lounsbery, and W. Stuetzle, “Multiresolution analysis of arbitrary meshes”, In Proceedings of the 22nd annual conference on Computer graphics and interactive techniques (SIGGRAPH '95), pp. 173-182, Sept. 1995.
- [84] J. Huang, M. Zhang, J. Ma, X. Liu, L. Kobbelt, and H. Bao, “Spectral quadrangulation with orientation and alignment control”, ACM SIGGRAPH Asia '08, pp. 1-9, Dec. 2008.
- [85] M. Zhang, J. Huang, X. Liu and H. Bao, “A wave-based anisotropic quadrangulation method”, ACM Transactions on Graphics, vol. 29, issue 4, pp. 1-8, July 2010.
- [86] A. Hertzmann and D. Zorin, “Illustrating smooth surfaces”, 27th annual conference on Computer graphics and interactive techniques (SIGGRAPH '00), pp. 517-526, July 2000.

- [87] J. Palacios and E. Zhang, “Rotational symmetry field design on surfaces”, *ACM Transactions on Graphics*, vol. 26, issue 3, July 2007.
- [88] N. Ray, B. Vallet, W. C. Li, and B. Lévy, “N-symmetry direction field design”, *ACM Transactions on Graphics*, vol. 27, issue 2, pp. 1-13, April 2008.
- [89] K. Crane, M. Desbrun, and P. Schröder, “Trivial Connections on Discrete Surfaces”, *Computer Graphics Forum*, vol. 29, issue 5, pp. 1525-1533, 2010.
- [90] P. Alliez, D. Cohen-Steiner, O. Devillers, B. Lévy, and M. Desbrun, “Anisotropic polygonal remeshing”, *ACM Transactions on Graphics*, vol. 22, issue 3, pp. 485-493, July 2007.
- [91] N. Amenta, M. Bern, “Surface Reconstruction by Voronoi Filtering”, *Discrete and Computational Geometry*, vol. 22, pp 481–504, March 1999.
- [92] A. Bawin, F. Henrotte, and J.-F. Remacle “Automatic feature-preserving size field for three-dimensional mesh generation”, *Numerical Methods in Engineering*, May 2021.
- [93] H. Fuhring, “The application of node element rules for forecasting problems in the generation of finite element meshes,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 9, issue 3, pp. 617 629, 1975.
- [94] S. Owen, “A survey of unstructured mesh generation technology.” In *Proc. 7th Int. Meshing Roundtable*, pp. 239–267, May 2000.
- [95] C. K. Lee, and S. H. Lo, “A New Scheme for the Generation of a Graded Quadrilateral Mesh,” *Computers and Structures*, vol.52 pp.847-857, 1994.
- [96] M. A. Yerry, and M. S. Shephard, “Automatic Three-Dimensional Mesh Generation by Modified Octree Technique”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol 20, pp. 1965-1990, November 1984.
- [97] P. L. Baehmann, S. L. Wittchen, M. S. Shephard, K. R. Grice, and M. A. Yerry, “Robust, geometrically based, automatic two-dimensional mesh generation”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 24, pp. 1043-1078, June 1987.
- [98] A. A. Rushdi, S. A. Mitchell, A. H. Mahmoud, C. C. Bajaj, M. S. Ebeida, “All-quad meshing without cleanup,” *Computer-Aided Design*, vol. 85, pp. 83-98, April 2017.
- [99] T. D. Blacker, and M. B. Stephenson, “Paving: A New Approach to Automated Quadrilateral Mesh Generation”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 32 pp.811-847, 1991.
- [100] D. R. White, and P. Kinney, “Redesign of the Paving Algorithm: Robustness Enhancements through Element by Element Meshing,” *Proceedings, 6th International Meshing Roundtable*, Sandia National Laboratories, pp. 323-335, 1997.
- [101] K. Ho-Le, “Finite element mesh generation methods: a review and classification,” *Computer-Aided Design*, vol. 20, issue 1, pp. 27-38, Jan.-Feb. 1988.
- [102] H. Blum, “A transformation for extracting new descriptors of shape”, in *Proc. Symp. Models for Perception of Speech and Visual Form*, W. Whaten-Dunn, Ed. Cambridge, MA: M.I.T. Press, pp. 362-380, 1967.
- [103] T. K. H. Tam and C. G. Armstrong, “2D Finite Element Mesh Generation by Medial Axis Subdivision”, *Advances in Engineering Software*, vol. 13, pp. 313-324, Sept.–Nov. 1991.



- [104] V. Srinivasan, L. R. Nackman, J. M. Tang and S. N. Meshkat, "Automatic mesh generation using the symmetric axis transformation of polygonal domains," in Proceedings of the IEEE, vol. 80, no. 9, pp. 1485-1501, Sept. 1992.
- [105] T. Tam, M. Price, C. Armstrong, and R. McKeag. "Computing the critical points on the medial axis of a planar object using a Delaunay point triangulation algorithm," IEEE PAMI, 1991.
- [106] D. Attali, J.-D. Boissonnat, H. Edelsbrunner, "Stability and Computation of Medial Axes: a State-of-the-Art Report", Mathematical Foundations of Scientific Visualization, Computer Graphics, and Massive Data Exploration, Springer-Verlag, pp. 109-125, 2009.
- [107] B. Joe, "Quadrilateral Mesh Generation in Polygonal Regions", Computer Aided Design, vol. 27, pp. 209-222, March 1995.
- [108] B. Joe, "Delaunay Triangular Meshes in Convex polygons", SIAM J. Sci. Stat. Comput., vol.7, pp.514-539, April 1986.
- [109] J. A. Talbert and A. R. Parkinson, "Development of an Automatic, Two Dimensional Finite Element Mesh Generator using Quadrilateral Elements and Bezier Curve Boundary Definitions", International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 29, pp. 1551-1567, May 1990.
- [110] Soo-Won Chae and Jung-Hwan Jeong, "Unstructured Surface Meshing Using Operators", Proceedings, 6th International Meshing Roundtable, pp. 281-291, October 1997.
- [111] N. Petrovic and B. M. Kolundzija: "Meshing of hexagons into convex quadrilaterals", Proc. of 10th International Meshing Roundtable, October 7-10, 2001, Newport Beach, California, USA
- [112] D. A. Field, "Laplacian smoothing and Delaunay triangulations", Communications in Applied Numerical Methods., vol. 4, pp. 709-712, Nov.-Dec. 1988.
- [113] R. E. Jones, "QMESH: A self-organizing mesh generation program", Sandia Report SLA-73-1088, Sandia National Laboratories, p. 23, Nov. 1991.
- [114] S. A. Canann, Y. C. Liu, and A. V. Mobley, "Automated 3D surface meshing to address today's industrial needs", Finite Elements in Analysis and Design, vol. 25, pp. 185-198, March 1997.
- [115] N. Amenta, M. Bern, and D. Eppstein, "Optimal point placement for mesh smoothing", Journal of Algorithms, vol. 30, pp. 302-322, Feb. 1999.
- [116] L. Freitag, M. Jones, and P. Plassmann, "An Efficient Parallel Algorithm for Mesh Smoothing", 4th International Meshing Roundtable, pp.47-58, Oct. 1995, Albuquerque, NM, USA
- [117] L. Freitag, "On combining Laplacian and optimization-based mesh smoothing techniques", AMD Trends in Unstructured Mesh Generation, ASME, vol. 220, pp. 37-43, July 1997.
- [118] S. A. Canann, J. R. Tristano, and M. L. Staten, "An Approach to Combined Laplacian and Optimization-Based Smoothing for Triangular, Quadrilateral, and Quad-Dominant Meshes", 7th International Meshing Roundtable, October 26-28, 1998, Dearborn, Michigan, USA
- [119] M. Borden, S. Benzley, and J. Shepherd, "Hexahedral sheet extraction", 11th International Meshing Roundtable, pp. 147-152, Nov. 2002
- [120] <https://www.techsoft3d.com/products/parasolid/>
- [121] B. Lj. Mrdakovic, M. M. Kostic, D. P. Zoric, M. M. Stevanetic, M. S. Tasic, and B. M. Kolundzija, "Quadrilateral meshing technique optimized for higher order basis functions", IEEE International Symposium on Antennas and Propagation, Orlando, Florida, USA, July 7-13, 2013.

- [122] B. Lj. Mrdakovic, M. M. Kostic, D. P. Zoric, M. M. Stevanetic, M. S. Tasic, and B. M. Kolundzija, "A new method for quadrilateral meshing of arbitrary shaped geometry based on meshing of flat polygons", The 8th European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP 2014), pp. 3417-3421, The Hague, Netherlands, April 6-11, 2014.
- [123] B. Lj. Mrdakovic, B. M. Kolundzija, "Improvements in Insertion of Auxiliary Parity Segments in WIPL-D All-Quad Meshing Algorithm", ACES Journal, vol. 35, no. 11, November 2020, doi: 10.47037/2020.ACES.J.351116
- [124] B. M. Kolundzija, D. P. Zoric, "Efficient evaluation of MoM matrix elements using CPU and/or GPU," 2012 6th European Conference on Antennas and Propagation (EUCAP), Prague, 2012, pp. 702-706, doi: 10.1109/EuCAP.2012.6206595.
- [125] B. Lj. Mrdakovic, M. M. Kostic, D. I. Olcan, and B. M. Kolundzija, "New Generation of WIPL-D in-Core Multi-GPU Solver", 2018 IEEE International Symposium on Antennas and Propagation & USNC/URSI National Radio Science Meeting, Boston, MA, 2018, pp. 413-414, doi: 10.1109/APUSNCURSINRSM.2018.8608435.
- [126] M. Yuan, T. K. Sarkar and B. Kolundzija, "Solution of large complex problems in computational electromagnetics using higher-order basis in MoM with out-of-core solvers", IEEE Antennas and Propagation Magazine, vol. 48, no. 2, pp. 55-62, April 2006, doi: 10.1109/MAP.2006.1650817.
- [127] D. P. Zoric, D. I. Olcan and B. M. Kolundzija, "Solving electrically large EM problems by using out-of-core solver accelerated with multiple graphical processing units", 2011 IEEE International Symposium on Antennas and Propagation (APSURSI), 2011, pp. 1-4, doi: 10.1109/APS.2011.6165482.
- [128] MeshSim™ from Simmetrix Inc. (<http://www.simmetrix.com/index.php/technologies/mesh-generation>)
- [129] Kolundzija, B. M., J. S.Ognjanovic, and T. K. Sarkar, WIPL-D – Electromagnetic Modeling of Composite Metallic and Dielectric Structures, Software and User’s Manual, Norwood, MA, Artech House, 1995.
- [130] C. A. Balanis, Advanced Engineering Electromagnetics, New York: John Wiley & sons, 1989.
- [131] V. M. Napijalo, "Protivfazni hibridi sa spregnutim vodovima u tehnici višeslojne keramike", doktorska teza, Univerzitet u Beogradu – Elektotehnički fakultet, 2010.
- [132] B. M. Kolundzija, D. S. Sumic, "Adaptive Higher Order Modeling of Antennas Placed on Large Platforms", 1st European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP), Nice, France, pp. 6 – 10, Nov. 2006.
- [133] E. Kreyszig, Differential Geometry, Dover, New York, 1991.
- [134] T. Rado, Aufgabe 41, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, vol. 35, pp. 49, 1926.
- [135] H. Kneser, Lösung der Aufgabe 41, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, vol. 35, pp. 123-124, 1926.
- [136] G. Choquet, Sur un type de transformation analytique generalisant la representation conforme et define au moyen de fonctions harmoniques, Bulletin des Sciences Mathematiques, vol. 69, pp. 156-165, 1945.
- [137] W. Klingenberg. A Course in Differential Geometry, Springer, Berlin, Heidelberg, 1978.

# Prilozi

## Prilog A – Parametrizacija površi

Parametrizacija predstavlja 1-1 preslikavanje date površi u željeni domen. Kako i domen u koji se vrši preslikavanje predstavlja površ (obično ravan), na parametrizaciju možemo gledati kao na preslikavanje jedne površi na drugu. Parametrizacija obično unosi distorziju po uglu i/ili po površini, pa se konstruisanje dobre parametrizacije svodi na minimizaciju ovih distorzija [75].

Posmatramo površ  $S$  definisanu u trodimenzionom prostoru,  $S \subset R^3$ , čija je parametrizacija data sa:

$$\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \quad (\text{A.1})$$

gde je  $(u, v)$  tačka u dvodimenzionom prostoru,  $(u, v) \in R^2$ . Za ovu parametrizaciju kažemo da je *regularna* ako su funkcije  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$  i  $z(u, v)$  diferencijabilne u svakoj tački površi, i ukoliko su vektori:

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \quad \text{i} \quad \mathbf{r}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \quad (\text{A.2})$$

linearno nezavisni u svakoj tački površi  $S$ .

Mnoge karakteristike površi i najvažnije karakteristike parametrizacije definisane su preko *prve fundamentalne forme* površi, koja se definiše kao:

$$ds^2 = (\mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv)^2 = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u du^2 + 2\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v dudv + \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v dv^2. \quad (\text{A.3})$$

Kako bismo ovaj izraz napisali u kompaktnijoj formi, uvodimo sledeći notaciju:

$$g_{ab} = \mathbf{r}_a \cdot \mathbf{r}_b, \quad a = 1, 2, \quad b = 1, 2, \quad (\text{A.4})$$

i koeficijente iz jednačine A.3 uređujemo u matricnoj formi kao:

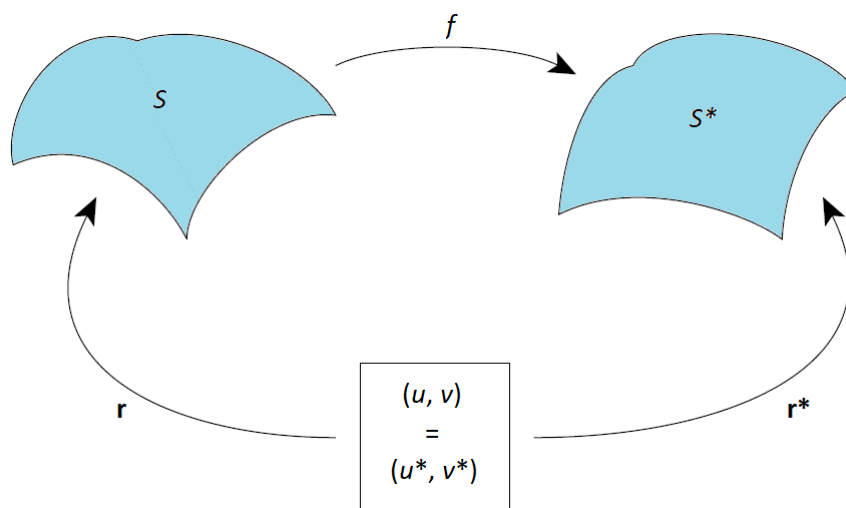
$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

Konačno, dobijamo sledeći izraz za prvu fundamentalnu formu:

$$ds^2 = [du \quad dv] \mathbf{I} \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

U literaturi se sama matrica  $\mathbf{I}$  obično naziva prvom fundamentalnu formom površi [75]. Očigledno je iz izraza (A.4) i (A.5), da je matrica  $\mathbf{I}$  uvek simetrična. Za regularne parametrizacije determinanta ove matrice je pozitivna, pa je matrica  $\mathbf{I}$  pozitivno definitna. Koeficijenti ove matrice,  $g_{ab}$ , nazivaju se metričkim tenzorima.

Posmatrajmo preslikavanje  $f$ , koje površ  $S$  čije su tačke definisane parametrima  $(u, v)$ , preslikava u površ  $S^*$ . Definišemo zatim parametrizaciju  $\mathbf{r}^* = f \circ \mathbf{r}$ , takvu da su parametri ma koje tačke  $f(\mathbf{p}) \in S^*$  jednaki parametrima tačke  $\mathbf{p} \in S$ , kao što je prikazano na slici A.1. Ako je parametrizacija  $\mathbf{r}^*$  regularna, za preslikavanje  $f$  kažemo da je *dozvoljeno*. Osnovne klase ovakvih preslikavanja, koje su od interesa u tehnikama za segmentaciju, biće opisane u nastavku ovog poglavlja. Takođe, bez dokaza ćemo navesti teoreme koje povezuju date tipove preslikavanja i osobine prve fundamentalnu forme površi. Dokazi ovih teorema mogu se naći u [133].



Slika A. 1. Preslikavanje  $f: S \rightarrow S^*$ , i parametrizacija  $\mathbf{r}^* = \mathbf{f} \circ \mathbf{r}$ .

## Izometrijsko preslikavanje

Za dozvoljeno preslikavanje,  $f$ , površi  $S$  u površ  $S^*$  kažemo da je izometrijsko ukoliko je dužina manjeg luka na površi  $S$ , jednaka dužini njegove slike na površi  $S^*$ .

**Teorema A.1:** *Dozvoljeno preslikavanje površi  $S$  u površ  $S^*$  je izometrijsko ako i samo ako su koeficijenti prvih fundamentalnih formi ovih površi međusobno jednaki, tj.*

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}^*. \quad (\text{A.6})$$

Za površi za koje je zadovoljen uslov dat ovom teoremom kažemo da su izometrične. Kako Gausova krivina površi zavisi isključivo od prve fundamentalne forme, zaključujemo da dve površi koje su izometrične imaju jednake Gausove krivine u odgovarajućim tačkama.

## Konformalno preslikavanje

Za dozvoljeno preslikavanje,  $f$ , površi  $S$  u površ  $S^*$  kažemo da je konformalno ako je ugao preseka manja koja dva luka na površi  $S$  jednak uglu preseka njihovih slika u odgovarajućoj tački na površi  $S^*$ .

**Teorema A.2:** *Dozvoljeno preslikavanje površi  $S$  u površ  $S^*$  je konformalno ako i samo ako postoji ne-nulta funkcija  $\eta(u, v)$ , takva da važi:*

$$\mathbf{I} = \eta(u, v)\mathbf{I}^*. \quad (\text{A.7})$$

## Ekvipovršinsko preslikavanje

Za dozvoljeno preslikavanje,  $f$ , površi  $S$  u površ  $S^*$  kažemo da je ekvipovršinsko ako se proizvoljan okolina svake tačke površi  $S$  preslikava u jednaku površinu na površi  $S^*$ .

**Teorema A.3:** *Dozvoljeno preslikavanje površi  $S$  u površ  $S^*$  je ekvipovršinsko ako i samo ako su determinante prvih osnovnih formi ovih površi međusobno jednake, tj.*

$$\|\mathbf{I}\| = \|\mathbf{I}^*\|. \quad (\text{A.8})$$

Važno je na ovom mestu navesti još jednu teoremu, koja se odnosi na međusobnu vezu navedenih tipova preslikavanja.

**Teorema A.4:** *Preslikavanje je izometrijsko ako i samo ako je konformalno i ekvipovršinsko.*

Jasno je odavde da je izometrijsko preslikavanje idealno, jer ne unosi distorziju ni po dužini, ni po uglu, niti po površini. Međutim, ovakvo preslikavanje je moguće konstruisati samo u specijalnim slučajevima. Primera radi, ukoliko se preslikavanje vrši na ravan, onda je izometrijsko preslikavanje moguće samo za one površi koje se mogu razviti u ravan bez deformacije. Takva jedna površ je cilindrična površ, ali ne i sfera. U praksi se zato obično teži konstruisanju preslikavanja koje je konformalno ili ekvipovršinsko, ili blisko oboma, tako da unese malu distorziju i po uglu i po površini.

## Harmonijsko preslikavanje

Posmatrajmo zbog jednostavnosti preslikavanje,  $f$ , jedne ravne površine,  $S^* \subset R^2$ , u drugu,  $S \subset R^2$ . Ako tačku na površi  $S$  označimo kao  $(x, y)$ , a tačku na površi  $S^*$  kao  $(u, v)$ , navedeno preslikavanje možemo da zapišemo u kompleksnom obliku kao:

$$x + jy = f(u + jv). \quad (\text{A.9})$$

Ukoliko je preslikavanje  $f$  konformalno, pokazuje se da ono zadovoljava Koši-Rimanove jednačine date sa:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\partial y}{\partial u}. \quad (\text{A.10})$$

Diferenciranjem jedne od ovih jednačina po  $u$  i druge po  $v$  dobijamo sledeće:

$$\Delta x = 0, \quad \Delta y = 0. \quad (\text{A.11})$$

gde je operator  $\Delta$  Laplasijan definisan kao:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}. \quad (\text{A.12})$$

Svako preslikavanje koje zadovoljava jednačinu (A.11) predstavlja *harmonijsko* preslikavanje. Očigledno je da je svako konformalno preslikavanje istovremeno i harmonijsko, dok suprotno naravno ne važi, što će reći da harmonijsko preslikavanje u opštem slučaju unosi distorziju uglova. Drugi nedostatak harmonijskih preslikavanja jeste činjenica da preslikavanje inverzno datom harmonijskom preslikavanju ne mora biti harmonijsko.

Bez obzira na ove nedostatke, harmonijska preslikavanja predstavljaju veoma važnu grupu preslikavanja. Ovde ćemo navesti neke prednosti ovih preslikavanja, koje su doprinele njihovoj popularnosti.

Prva prednost u odnosu na konformalna preslikavanja jeste činjenica da se aproksimativno rešenje za harmonijsko preslikavanje jednostavno izračunava [75]. Obično se kreće sa izborom preslikavanja za granicu površine  $S$ , da bi se zatim funkcije  $x$  i  $y$  odredile primenom neke numeričke metode (kao što je metoda konačnih elemenata ili metoda konačnih razlika) koja rešavanje eliptičke parcijalne diferencijalne jednačine svodi na rešavanje sistema linearnih jednačina.

Druga prednost jeste činjenica da su harmonijska preslikavanja uvek 1-1 za konveksne regione.

**Teorema A.5:** *Ako je preslikavanje  $f: S \rightarrow R^2$  harmonijsko i ako preslikava granicu  $\partial S$  homeomorfno na granicu,  $\partial S^*$ , konveksnog regiona  $S^* \subset R^2$ , onda  $f$  predstavlja 1-1 preslikavanje.*

Ova teorema prvi put je navedena u [134], a dokaz je dat u [135] i [136].

Konačno, i najvažnije, harmonijsko preslikavanje minimizira deformaciju uglova i površina, kroz minimizaciju Dirihleove energije [75]:

$$E_D(f) = \int_S \|\text{grad}f\|^2 dS. \quad (\text{A.13})$$

Sve osobine harmonijskog preslikavanja koje su navedene za jednostavniji slučaj preslikavanja površine  $S \subset R^2$  važe i za generalni slučaj kada se površina  $S \subset R^3$  preslikava na ravan. Jedino se u drugom slučaju gore navedene jednačine usložnjavaju [75], [137]. Izraz za Dirihleovu energiju postaje:

$$E_D(f) = \int_S \|\text{grad}_S f\|^2 dS \quad (\text{A.14})$$

gde je  $\text{grad}_S f$  površinski gradijent funkcije  $f$  po površi  $S$ .

## Prilog B – Tipovi krivih i površi u Parasolid tehnologiji

U ovom dodatku ćemo dati pregled osnovnih tipova krivih i površi koje se koriste u Parasolid tehnologiji. Poznavanje matematičkih formula kojima su ovi entiteti definisani u odgovarajućem parametarskom prostoru omogućava bolje razumevanje funkcionisanja algoritama predloženih za kreiranje poligonske aproksimacije krivih i podelu površina na kvazi-planarne.

Za modelovanje krivih i površi u Parasolid tehnologiji se kada god je to moguće koristi analitička geometrija. Na primer, krive poput kružnice, elipse ili prave linije, i površi kakve su sfera, torus ili konus definisane su odgovarajućim analitičkim jednačinama. Korišćenje analitičke geometrije gde god je to moguće omogućava Parasolid tehnologiji veliku brzinu rada i minimizaciju zahtevanih memorijskih resursa.

U slučaju da geometrijski entitet ne može biti definisan analitičkim izrazom, koriste se drugi načini za definisanje geometrije, kao što su *spun* ili *swept* površi. U slučaju da se neki geometrijski entitet ne može definisati ni korišćenjem ovih tipove geometrije, pribegava se korišćenju geometrije zasnovane na neuniformnim B-krivama, koje mogu biti polinomske ili racionalne (Non-Uniform Rational B-spline, NURBs). Ovakva geometrija je u Parasolid tehnologiji označena kao B-geometrija, te tako imamo: B-krive i B-površi. Red bazisnih funkcija koje definišu ovu geometriju nije ograničen, ali je treći red najčešći u Parasolid tehnologiji. Za razliku od analitičke geometrije, B-geometrija je definisana samo za konačan region u prostoru. Ovaj region se veoma često poklapa ili gotovo poklapa sa ivicom ili površinom koja je definisana datom B-geometrijom.

Tipovi krivih i njihova parametrizacija dati su u tabeli B1. Osim krivih datih u tabeli B1, čija je parametrizacija jasno definisana, u Parasolid tehnologiji se uvode i *krive preseka*. Ove krive nastaju u preseku površina i u generalnom slučaju nemaju eksplicitnu parametarsku formu. Njihova parametrizacija postoji, ali je određena na osnovu poligonske aproksimacije krive. Parametrizacija kao i njen prvi izvod su kontinualni, ali drugi izvod ne mora biti kontinualan.

Tipovi površi i njihova parametrizacija dati su u tabeli B2.

Tabela B1. Tipovi krivih i njihova parametrizacija.

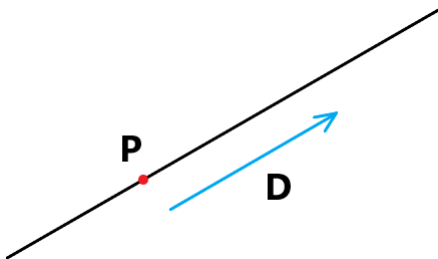
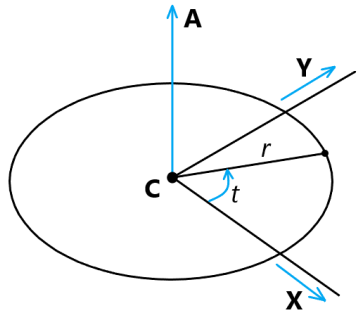
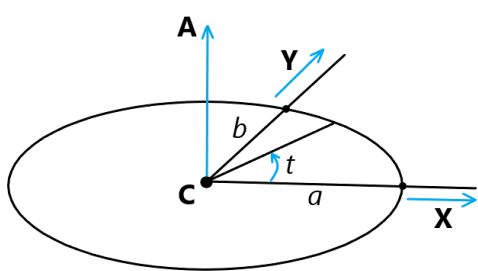
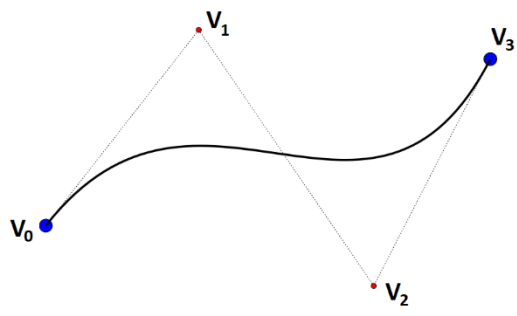
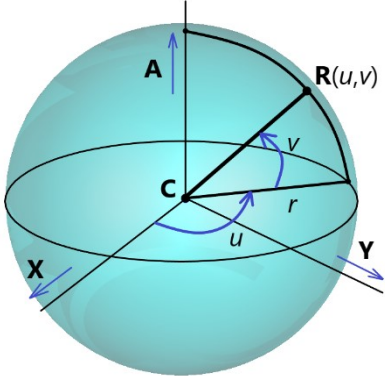
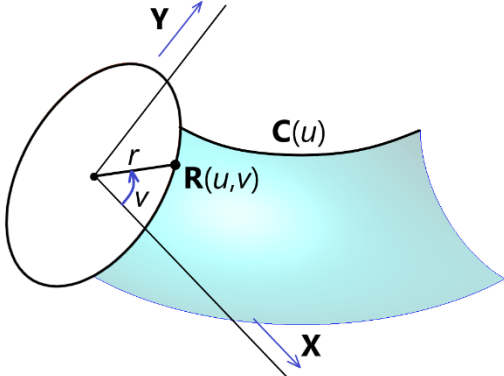
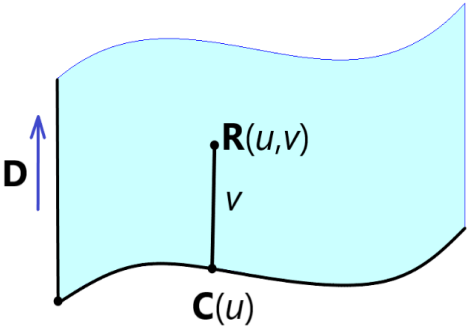
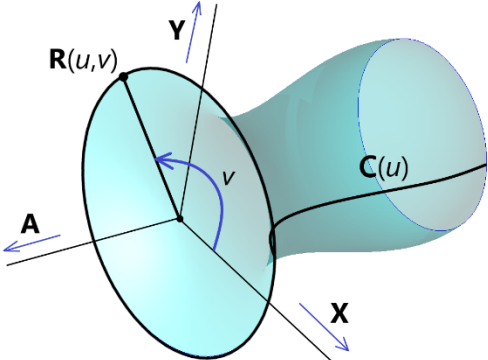
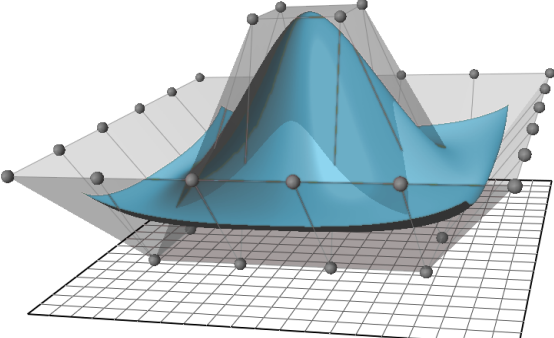
Tip	Ilustracija	Parametrizacija
Prava		$\mathbf{R}(t) = \mathbf{P} + t\mathbf{D}$ <p><math>\mathbf{P}</math> – referentna tačka na pravoj  <math>\mathbf{D}</math> – jedinični vektor</p>
Kružnica		$\mathbf{R}(t) = \mathbf{C} + r\mathbf{X} \cos(t) + r\mathbf{Y} \sin(t)$ <p><math>\mathbf{C}</math> – centar kružnice  <math>\mathbf{A}</math> – normala na ravan u kojoj leži kružnica  <math>\mathbf{X}, \mathbf{Y}</math> – jedinični vektori: <math>\mathbf{A} = \mathbf{X} \times \mathbf{Y}</math>  <math>r</math> – radijus kružnice</p>
Elipsa		$\mathbf{R}(t) = \mathbf{C} + a\mathbf{X} \cos(t) + b\mathbf{Y} \sin(t)$ <p><math>\mathbf{C}</math> – centar kružnice  <math>\mathbf{A}</math> – normala na ravan u kojoj leži elipsa  <math>\mathbf{X}, \mathbf{Y}</math> – jedinični vektori, koji odgovaraju dužoj i kraćoj poluosi:  <math>\mathbf{A} = \mathbf{X} \times \mathbf{Y}</math>  <math>a</math> – duža poluosa  <math>b</math> – kraća poluosa</p>
B-kriva		<p>Postoje 2 forme:</p> <p>Polinomska: <math display="block">\mathbf{R}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i(t)\mathbf{V}_i</math></p> <p>Racionalna: <math display="block">\mathbf{R}(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} b_i(t)w_i\mathbf{V}_i}{\sum_{i=0}^{n-1} b_i(t)w_i}</math></p> <p><math>n</math> – broj čvorova koji definišu krivu  <math>\mathbf{V}_i</math> – čvorovi  <math>w_i</math> – težinski koeficijenti  <math>b_i(t)</math> – bazisne funkcije</p>

Tabela B2. Tipovi površi i njihova parametrizacija.

Tip	Ilustracija	Parametrizacija
Ravan		$\mathbf{R}(u, v) = \mathbf{P} + u\mathbf{X} + v\mathbf{Y}$ <p> <math>\mathbf{P}</math> – referentna tačka u ravni  <math>\mathbf{A}</math> – vektor normale na ravan  <math>\mathbf{X}, \mathbf{Y}</math> – uzajamno ortogonalni jedinični vektori, <math>\mathbf{A} = \mathbf{X} \times \mathbf{Y}</math> </p>
Cilindar		$\mathbf{R}(u, v) = \mathbf{P} + r\mathbf{X} \cos(u) + r\mathbf{Y} \sin(v) + v\mathbf{A}$ <p> <math>\mathbf{P}</math> – centar baze cilindra  <math>\mathbf{X}, \mathbf{Y}</math> – međusobno ortogonalni jedinični vektori u bazi cilindra  <math>\mathbf{A}</math> – jedinični vektor normalan na bazu cilindra, <math>\mathbf{A} = \mathbf{X} \times \mathbf{Y}</math>  <math>r</math> – radijus baze cilindra         </p>
Konus		$\mathbf{R}(u, v) = \mathbf{P} + v\mathbf{A} + (\mathbf{X} \cos(u) + \mathbf{Y} \sin(v))(r + v \tan(a))$ <p> <math>\mathbf{P}</math> – tačka na osi konusa  <math>\mathbf{X}, \mathbf{Y}</math> – međusobno ortogonalni jedinični vektori u ravni poprečnog preseka konusa  <math>\mathbf{A}</math> – jedinični vektor ose konusa, <math>\mathbf{A} = \mathbf{X} \times \mathbf{Y}</math>  <math>r</math> – radijus konusa u tački <math>\mathbf{P}</math>  <math>a</math> – polovina ugla konusa         </p>
Torus		$\mathbf{R}(u, v) = \mathbf{C} + (\mathbf{X} \cos(u) + \mathbf{Y} \sin(u))(a + b \cos(v)) + b\mathbf{A} \sin(v)$ <p> <math>\mathbf{C}</math> – centar torusa  <math>\mathbf{A}</math> – jedinični vektor ose torusa  <math>\mathbf{X}, \mathbf{Y}</math> – međusobno ortogonalni jedinični vektori u ravni ortogonalnoj na osu torusa, <math>\mathbf{A} = \mathbf{X} \times \mathbf{Y}</math>  <math>a</math> – radijus centralne linije torusa  <math>b</math> – radijus kružnice u poprečnom preseku torusa         </p>



Sfera		$\mathbf{R}(u, v) = \mathbf{C} + (\mathbf{X} \cos(u) + \mathbf{Y} \sin(u))r \cos(v) + r\mathbf{A} \sin(v)$ <p> <math>\mathbf{C}</math> – centar sfere  <math>r</math> – radijus sfere  <math>\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{A}</math> – set međusobno ortogonalnih jediničnih vektora </p>
Rolling-ball blend		$\mathbf{R}(u, v) = \mathbf{C}(u) + r\mathbf{X}(u) \cos(v) + r\mathbf{Y}(u) \sin(v)$ <p> Površ se dobija kretanjem dela kružnice radijusa <math>r</math> po krivoj <math>\mathbf{C}(u)</math>. Ravan kružnice je u svakoj tački ortogonalna na krivu <math>\mathbf{C}(u)</math>. Opseg ugaonog parametra <math>v</math> određuje deo kružnice koji se koristi za kreiranje površi. </p>
Swept površ		$\mathbf{R}(u, v) = \mathbf{C}(u) + v\mathbf{D}$ <p> Površ se dobija kretanjem krive <math>\mathbf{C}(u)</math> duž prave određene jediničnim vektorom <math>\mathbf{D}</math>. </p>
Spun površ		$\mathbf{R}(u, v) = \mathbf{Z}(u) + (\mathbf{C}(u) - \mathbf{Z}(u)) \cos(v) + \mathbf{A} \times (\mathbf{C}(u) - \mathbf{Z}(u)) \sin(v)$ <p> Površ se dobija rotacijom krive <math>\mathbf{C}(u)</math> oko ose definisane jediničnim vektorom <math>\mathbf{A}</math>. <math>\mathbf{Z}(u)</math> - projekcija krive <math>\mathbf{C}(u)</math> na osu rotacije </p>

<p>B-površ</p>		<p><math>\mathbf{R}(u, v) =</math></p> $\frac{\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} b_i(u) b_j(v) w_{ij} \mathbf{V}_{ij}}{\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} b_i(u) b_j(v) w_{ij}}$ <p><math>N, M</math> – broj čvorova koji definišu površ po <math>u</math> i <math>v</math> pravcu respektivno  <math>\mathbf{V}_{ij}</math> – čvorovi  <math>w_{ij}</math> - težinski koeficijenti  <math>b_i(u), b_j(v)</math> – bazisne funkcije</p>
----------------	---	---

## Biografija autora

Branko Mrdaković rođen je 15.04.1984. godine u Sjenici. Osnovnu školu završio je u Sjenici kao nosilac diplome „Vuk Karadžić“. Gimnaziju opšteg smera završio je u Sjenici kao đak generacije i nosilac diplome „Vuk Karadžić“.

Osnovne studije na Elektrotehničkom fakultetu Univerziteta u Beogradu upisao je školske 2003/04. godine. Diplomirao je na odseku za telekomunikacije, smer Mikrotalasna tehnika, sa prosečnom ocenom 9.71. Diplomski rad na temu „Elektrodinamička analiza rezonantne šupljine metodom konačnih elemenata višeg reda“, pod mentorstvom prof. dr Milana Ilića, odbranio je 2007. godine sa ocenom 10.

Master studije na Elektrotehničkom fakultetu Univerziteta u Beogradu, na smeru za Mikrotalasnu tehniku, upisao je školske 2007/08. Sve ispite na master studijama položio je ocenom 10. Master rad na temu „Mikrostrip patch antene za RFID aplikacije sa mobilnim čitačem“, pod mentorstvom prof. dr Branka Kolundžije, odbranio je 2009. godine sa ocenom 10.

Doktorske studije na Elektrotehničkom fakultetu Univerziteta u Beogradu, na smeru za Mikrotalasnu tehniku, upisao je školske 2020/21. Sve ispite na doktorskim studijama položio je ocenom 10. Okosnicu istraživačkog rada u vezi sa doktorskom tezom čine algoritmi za četvorougaoonu segmentaciju CAD geometrije, sa fokusom na algoritmima koji generišu mrežu koja je pogodna za primenu u analizi baziranoj na metodi momenata koja koristi funkcije bazisa višeg reda.

Profesionalnu karijeru započeo je u septembru 2008. godine, kao stručni saradnik u sektoru za istraživanje i razvoj u preduzeću WIPL-D d.o.o. u Beogradu. Od novembra 2015. godine radi kao rukovodilac sektora za istraživanje i razvoj u preduzeću WIPL-D d.o.o. Glavne oblasti profesionalnog angažovanja su mu: dizajn softvera, razvoj interfejsa i numeričkih algoritama u softveru za numeričku elektromagnetsku analizu; CPU, GPU i MPI paralelizacija; i algoritmi za četvorougaoonu segmentaciju CAD geometrije.

# Izjava o autorstvu

Ime i prezime autora: Branko Mrdaković

Broj indeksa: 2020/5032

## Izjavljujem

da je doktorska disertacija pod naslovom

### Algoritmi za površinsku segmentaciju optimizovani za efikasnu elektromagnetsku analizu

- rezultat sopstvenog istraživačkog rada;
- da disertacija u celini ni u delovima nije bila predložena za sticanje druge diplome prema studijskim programima drugih visokoškolskih ustanova;
- da su rezultati korektno navedeni i
- da nisam kršio autorska prava i koristio intelektualnu svojinu drugih lica.

U Beogradu, 30.05.2022.

Potpis autora

---

## Izjava o istovetnosti štampane i elektronske verzije doktorskog rada

Ime i prezime autora: Branko Mrdaković  
Broj indeksa: 2020/5032  
Studijski program: Mikrotalasna tehnika  
Naslov rada: Algoritmi za površinsku segmentaciju optimizovani za  
efikasnu elektromagnetsku analizu  
Mentor: dr Branko Kolundžija, redovni profesor

Izjavljujem da je štampana verzija mog doktorskog rada istovetna elektronskoj verziji koju sam predao radi pohranjivanja u **Digitalnom repozitorijumu Univerziteta u Beogradu**.

Dozvoljavam da se objave moji lični podaci vezani za dobijanje akademskog zvanja doktora nauka, kao što su ime i prezime, godina i mesto rođenja i datum odbrane rada.

Ovi lični podaci mogu se objaviti na mrežnim stranicama digitalne biblioteke, u elektronskom katalogu i u publikacijama Univerziteta u Beogradu.

U Beogradu, 30.05.2022.

Potpis autora

---

## Izjava o korišćenju

Ovlašćujem univerzitetsku biblioteku "Svetozar Marković" da u Digitalni repozitorijum Univerziteta u Beogradu unese moju doktorsku disertaciju pod naslovom:

Algoritmi za površinsku segmentaciju optimizovani za efikasnu elektromagnetsku analizu

koja je moje autorsko delo.

Disertaciju sa svim priložima predao sam u elektronskom formatu pogodnom za trajno arhiviranje.

Moju doktorsku disertaciju pohranjenu u Digitalnom repozitorijumu Univerziteta u Beogradu i dostupnu u otvorenom pristupu mogu da koriste svi koji poštuju odredbe sadržane u odabranom tipu licence Kreativne zajednice (Creative Commons) za koju sam se odlučio.

1. Autorstvo (CC BY)
2. Autorstvo – nekomercijalno (CC BY-NC)
3. Autorstvo – nekomercijalno – bez prerada (CC BY-NC-ND)
4. Autorstvo – nekomercijalno – deliti pod istim uslovima (CC BY-NC-SA)
5. Autorstvo – bez prerada (CC BY-ND)
6. Autorstvo – deliti pod istim uslovima (CC BY-SA)

U Beogradu, 30.05.2022.

Potpis autora

---

1. **Autorstvo.** Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, i prerade, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence, čak i u komercijalne svrhe. Ovo je najslobodnija od svih licenci.
2. **Autorstvo – nekomercijalno.** Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, i prerade, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence. Ova licenca ne dozvoljava komercijalnu upotrebu dela.
3. **Autorstvo – nekomercijalno – bez prerada.** Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, bez promena, preoblikovanja ili upotrebe dela u svom delu, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence. Ova licenca ne dozvoljava komercijalnu upotrebu dela. U odnosu na sve ostale licence, ovom licencom se ograničava najveći obim prava korišćenja dela.
4. **Autorstvo – nekomercijalno – deliti pod istim uslovima.** Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, i prerade, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence i ako se prerada distribuira pod istom ili sličnom licencom. Ova licenca ne dozvoljava komercijalnu upotrebu dela i prerada.
5. **Autorstvo – bez prerada.** Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, bez promena, preoblikovanja ili upotrebe dela u svom delu, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence. Ova licenca dozvoljava komercijalnu upotrebu dela.
6. **Autorstvo – deliti pod istim uslovima.** Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, i prerade, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence i ako se prerada distribuira pod istom ili sličnom licencom. Ova licenca dozvoljava komercijalnu upotrebu dela i prerada. Slična je softverskim licencama, odnosno licencama otvorenog koda.