



УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ

ФАКУЛТЕТ ТЕХНИЧКИХ НАУКА



**Примена летис Болцман методе за решавање
раванских једначина течења воде, кретања
наноса и морфолошких промена у природним
водотоцима**

ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА

Ментор:
Проф. др Љубомир Будински

Кандидат:
Данило Стипић

Нови Сад, 2022. године

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА¹

Врста рада:	Докторска дисертација
Име и презиме аутора:	Данило Стипић
Ментор (титула, име, презиме, звање, институција)	др Љубомир Будински, редовни професор, Факултет Техничких Наука у Новом Саду, Универзитет у Новом Саду
Наслов рада:	Примена летис Болцман методе за решавање раванских једначина течења воде, кретања наноса и морфолошких промена у природним водотоцима
Језик публикације (писмо):	Српски (ћирилица)
Физички опис рада:	Унети број: Страница <u>130</u> . Поглавља <u>8</u> . Референци <u>100</u> . Табела <u>4</u> . Слика <u>41</u> . Графикона Прилога <u>13</u> .
Научна област:	Грађевинско инжењерство
Ужа научна област (научна дисциплина):	Хидротехника
Кључне речи / предметна одредница:	летис Болцман метода, природни водотоци, раванске једначине течења, транспорт наноса, морфолошке промене
Резиме на језику рада:	У оквиру докторске дисертације је формулисан и креиран нови модел за решавање раванских једначина течења воде, кретања наноса и морфолошких промена у природним водотоцима, применом летис Болцман методе (ЛБМ). За решавање струјне слике, модел примењује раванске једначине осредњене по дубини тока, суспендовани нанос решава применом адвективно – дифузне једначине, вучени нанос једначином одржања активног слоја, а за морфолошке промене користи глобалну једначину одржања наноса на дну. Све једначине повезане су међусобно додатним члановима којима се описује размена материјала ерозијом и депоновањем, а формулисане су посебно за сваки гранулометријски интервал. На тај начин омогућено је да се природна мешавина материјала, коју најчешће карактерише неуниформан гранулометријски састав, представи кроз гранулометријске интервале, разматрајући тако понашање фракција које су дефинисане карактеристичним зрнима одређене крупноће. Уз то, модел омогућава и размену материјала између слојева дна корита, такође примењујући

¹ Аутор докторске дисертације потписао је и приложио следеће Обрасце:

5б – Изјава о ауторству;

5в – Изјава о истоветности штапане и електронске верзије и о личним подацима;

5г – Изјава о коришћењу.

Ове Изјаве се чувају на факултету у штапаном и електронском облику и не кориче се са тезом.

	<p>принцип активног слоја. Раванске једначине течења решене су применом „multiple-relaxation time“ летис Болцман једначине (МРТ-ЛБМ), док је за решавање осталих једначина примењен основни облик летис Болцман једначине „single-relaxation time“ (СРТ-ЛБМ).</p> <p>Дисертација има два основна циља, а то су: примена ЛБМ за решавање струјне слике у компликованим природним водотоцима и успостављање нове математичке формулације за решавање наносних процеса, имплементација у модел и тестирање модела. У ту сврху извршена је калибрација и верификација модела за решавање струјне слике на три примера реалних природних водотока, док је модел за наносне процесе и морфолошке промене примењен на једном природном водотоку. За све примере калибрација је извршена поређењем добијених резултата са резултатима добијеним применом методе коначних разлика и са мереним подацима.</p>
Датум прихватања теме од стране надлежног већа:	30.06.2022.
Датум одбране: (Попуњава одговарајућа служба)	
Чланови комисије: (титула, име, презиме, звање, институција)	<p>Председник: др Срђан Колаковић, редовни професор, Факултет Техничких наука, Универзитет у Новом Саду,</p> <p>Члан: др Ђула Фабиан, редовни професор, Грађевински Факултет Суботица, Универзитет у Новом Саду,</p> <p>Члан: др Славиша Трајковић, редовни професор, Грађевинско Архитектонски Факултет, Универзитет у Нишу,</p> <p>Члан: др Драго Жарковић, доцент, Факултет Техничких наука, Универзитет у Новом Саду,</p> <p>Члан, ментор: др Љубомир Будински, редовни професор, Факултет Техничких наука, Универзитет у Новом Саду.</p>
Напомена:	

KEY WORD DOCUMENTATION²

Document type:	Doctoral dissertation
Author:	Danilo Stipić
Supervisor (title, first name, last name, position, institution)	PhD, Ljubomir Budinski, Full professor
Thesis title:	Flow simulation, sediment transport and morphological changes in shallow water flows using lattice Boltzmann method in natural watercourses
Language of text (script):	Serbian language (cyrillic)
Physical description:	Number of: Pages <u>130</u> , Chapters <u>8</u> , References <u>100</u> , Tables <u>4</u> , Illustrations <u>41</u> , Graphs Appendices <u>13</u> .
Scientific field:	Civil engineering
Scientific subfield (scientific discipline):	Hydrotechnics
Subject, Key words:	lattice Boltzmann method, natural watercourses, shallow water equations, sediment transport, morphological changes
Abstract in English language:	A new model for solving the shallow water equations, sediment transport and morphological changes in natural watercourses, using the lattice Boltzmann method (LBM) has been formulated and produced by this doctoral dissertation. The depth averaged shallow water equations (SWE) have been used to reach the flow pattern, the advection-diffusion equation (ADE) was exploited to determine sediment concentration in the water, bed load was determined by the active layer mass conservation equation (ALMC), while the morphological changes of the river bed were determined by the global active layer mass conservation equation (GALMC). All equations are linked by additional terms describing the exchange of materials by erosion and deposition, formulated separately for each granulometric interval. This approach enables presentation of the non-uniform grain size composition, often characteristic to natural mixtures, by size intervals, thus providing opportunity for considering the behavior of fractions, defined by characteristic grains of certain size, separately. In addition, the model enables exchange of material between the layers of the river bed, applying the principle of the active layer. The SWE are solved by the multiple-relaxation-time lattice

² The author of doctoral dissertation has signed the following Statements:

5b – Statement on the authority,

5b – Statement that the printed and e-version of doctoral dissertation are identical and about personal data,

5r – Statement on copyright licenses.

The paper and e-versions of Statements are held at the faculty and are not included into the printed thesis.

	<p>Boltzmann method, (MRT-LBM), while the single-relaxation-time (SRT-LBM) approach has been used for solving the ADE, ALMC and GALMC. The dissertation has two main goals, namely: application of the LBM for solving the flow pattern in complex natural watercourses, and providing a new mathematical formulation for solving sediment related processes, its implementation into the model and testing the model. For this purpose, the calibration and verification of the model for solving the flow pattern was performed on three examples of real, natural watercourses, while the model for sediment processes and morphological changes has been checked on one natural watercourse. In all examples, calibration has been achieved by comparison of the results produced by the proposed LBM model to the results gained by the finite difference method, and by measurements.</p>
Accepted on Scientific Board on:	30.06.2022.
Defended: (Filled by the faculty service)	
Thesis Defend Board: (title, first name, last name, position, institution)	<p>President: PhD, Srđan Kolaković, Full professor, Faculty of Technical Sciences, University of Novi Sad, Member: PhD, Đula Fabian, Full professor, Faculty of Civil Engineering Subotica, University of Novi Sad, Member: PhD, Slaviša Trajković, Full professor, Faculty of Civil Engineering and Architecture, University of Niš, Member: PhD, Drago Žarković, Assistant professor, Faculty of Technical Sciences, University of Novi Sad, Member, mentor: PhD, Ljubomir Budinski, Full professor, Faculty of Technical Sciences, University of Novi Sad.</p>
Note:	

РЕЗИМЕ

Примена летис Болцман методе за решавање раванских једначина течења воде, кретања наноса и морфолошких промена у природним водотоцима.

У оквиру докторске дисертације је формулисан и креиран нови модел за решавање раванских једначина течења воде, кретања наноса и морфолошких промена у природним водотоцима, применом летис Болцман методе (ЛБМ). За решавање струјне слике, модел примењује раванске једначине осредњене по дубини тока, суспендовани нанос решава применом адвективно – дифузне једначине, вучени нанос једначином одржања активног слоја, а за морфолошке промене користи глобалну једначину одржања наноса на дну. Све једначине повезане су међусобно додатним члановима којима се описује размена материјала ерозијом и депоновањем, а формулисане су посебно за сваки гранулометријски интервал. На тај начин омогућено је да се природна мешавина материјала, коју најчешће карактерише неуниформан гранулометријски састав, представи кроз гранулометријске интервале, разматрајући тако понашање фракција које су дефинисане карактеристичним зрнима одређене крупноће. Уз то, модел омогућава и размену материјала између слојева дна корита, такође примењујући принцип активног слоја. Раванске једначине течења решене су применом „multiple-relaxation time“ летис Болцман једначине (МРТ-ЛБМ), док је за решавање осталих једначина примењен основни облик летис Болцман једначине „single-relaxation time“ (СРТ-ЛБМ).

Дисертација има два основна циља, а то су: примена ЛБМ за решавање струјне слике у компликованим природним водотоцима и успостављање нове математичке формулације за решавање наносних процеса, имплементација у модел и тестирање модела. У ту сврху извршена је калибрација и верификација модела за решавање струјне слике на три примера реалних природних водотока, док је модел за наносне процесе и морфолошке промене примењен на једном природном водотоку. За све примере калибрација је извршена поређењем добијених резултата са резултатима добијеним применом методе коначних разлика и са мереним подацима.

Кључне речи: летис Болцман метода, природни водотоци, раванске једначине течења, транспорт наноса, морфолошке промене.

ABSTRACT

Flow simulation, sediment transport and morphological changes in shallow water flows using lattice Boltzmann method in natural watercourses.

A new model for solving the shallow water equations, sediment transport and morphological changes in natural watercourses, using the lattice Boltzmann method (LBM) has been formulated and produced by this doctoral dissertation. The depth averaged shallow water equations (SWE) have been used to reach the flow pattern, the advection-diffusion equation (ADE) was exploited to determine sediment concentration in the water, bed load was determined by the active layer mass conservation equation (ALMC), while the morphological changes of the river bed were determined by the global active layer mass conservation equation (GALMC). All equations are linked by additional terms describing the exchange of materials by erosion and deposition, formulated separately for each granulometric interval. This approach enables presentation of the non-uniform grain size composition, often characteristic to natural mixtures, by size intervals, thus providing opportunity for considering the behavior of fractions, defined by characteristic grains of certain size, separately. In addition, the model enables exchange of material between the layers of the river bed, applying the principle of the active layer. The SWE are solved by the multiple-relaxation-time lattice Boltzmann method, (MRT-LBM), while the single-relaxation-time (SRT-LBM) approach has been used for solving the ADE, ALMC and GALMC.

The dissertation has two main goals, namely: application of the LBM for solving the flow pattern in complex natural watercourses, and providing a new mathematical formulation for solving sediment related processes, its implementation into the model and testing the model. For this purpose, the calibration and verification of the model for solving the flow pattern was performed on three examples of real, natural watercourses, while the model for sediment processes and morphological changes has been checked on one natural watercourse. In all examples, calibration has been achieved by comparison of the results produced by the proposed LBM model to the results gained by the finite difference method, and by measurements.

Keywords: lattice Boltzmann method, natural watercourses, shallow water equations, sediment transport, morphological changes.

САДРЖАЈ

РЕЗИМЕ	i
ABSTRACT	ii
САДРЖАЈ	iii
СПИСАК СЛИКА	v
СПИСАК ТАБЕЛА	vii
ПРИЛОЗИ	viii
1. УВОД	1
1.1. Предмет истраживања	2
1.2. Потреба за истраживањем	3
1.3. Хипотеза	4
2. ПРЕГЛЕД ЛИТЕРАТУРЕ	5
2.1. Преглед модела који се заснивају на класичним нумеричким методама	5
2.2. Преглед модела који се заснивају на летис Болцман методи	6
2.2.1. Дводимензионални модели за решавање једначина тока осредњених по дубини, применом „single-relaxation time“ летис Болцман методе (СРТ-ЛБМ)	6
2.2.2. Дводимензионални модели за решавање једначина тока осредњених по дубини, применом „multiple-relaxation time“ летис Болцман методе (МРТ-ЛБМ)	8
2.2.3. Дводимензионални модели за решавање адвективно - дифузне једначине (АДЈ) применом ЛБ методе	9
2.2.4. ЛБ модели за моделирање наноса и морфолошких промена	10
2.2.5. ЛБ модели за моделирање једнодимензионалних и тродимензионалних проблема течења воде	12
2.2.6. Дискусија о прегледу литературе	13
3. ТЕОРИЈСКЕ ОСНОВЕ	14
3.1. Теоријске основе за дефинисање течења воде и наносних процеса	14
3.1.1. Једначине којима се дефинише течење воде	14
3.1.2. Једначина одржања масе суспендованог наноса	15
3.1.3. Једначина одржања масе активног слоја	17
3.1.4. Глобална једначина одржања масе наноса на дну – Екснерова једначина	20
3.2. Основе летис Болцман методе	21
3.2.1. Летис Болцман метода са више коефицијената τ (multi-relaxation-time)	26
3.2.2. Гранични услови	27

3.3. Математичка формулација ЛБМ за раванске једначине течења и адвективно – дифузну једначину.....	30
3.3.1. Примена летис Болцман методе на једначине течења осредњене по дубини тока	30
3.3.2. Примена летис Болцман методе на адвективно – дифузну једначину.....	36
3.4. Нова предложена математичка формулација за решавање наносних процеса применом ЛБМ.....	39
3.4.1. Нова предложена математичка формулација за решавање једначине одржања масе активног слоја	39
3.4.2. Нова предложена математичка формулација за решавање глобалне једначине одржања масе наноса на дну	42
4. РАЗВИЈЕНИ РАЧУНАРСКИ ПРОГРАМ	45
4.1. Програм за прорачун струјне слике.....	45
4.2. Програм за решавање наносних процеса и морфолошких промена	46
5. НУМЕРИЧКИ ПРИМЕРИ И АНАЛИЗА РЕЗУЛТАТА	50
5.1. Модел струјне слике и транспорта материје за канал параболичног попречног пресека са кривином	50
5.2. Модел струјне слике деонице реке Дунав.....	59
5.3. Модел струјне слике деонице реке Мисури	69
5.4. Модел струјне слике деонице реке Ачафалаја	76
5.5. Модел наносних процеса и морфолошких промена	83
5.6. Општа запажања нумеричких прорачуна	94
6. ЗАКЉУЧАК	95
7. ЛИТЕРАТУРА	99
8. ПРИЛОЗИ	108

СПИСАК СЛИКА

Слика 1. Концепт активног слоја	20
Слика 2. Шематски приказ промене концентрације суспендованог наноса по дубини и процеса размене наноса између воде и дна	20
Слика 3. Расподела молекула у простору	21
Слика 4. Дијаграм функције расподеле	22
Слика 5. Једнодимензионални типови решетки	24
Слика 6. Дводимензионални типови решетки	24
Слика 7. Тродимензионални тип решетке	24
Слика 8. Скица за одређивање функција расподеле на чврстој граници	28
Слика 9. Скица брзине на границама у зависности од примењеног граничног услова	28
Слика 10. Познате и непознате функције расподеле на узводној и низводној граници	30
Слика 11. Блок шеме програмских кодова МРТ_ЛБМСС (лево) и ЛБМ_НАНОС (десно)	49
Слика 12. Попречни пресек канала	51
Слика 13. Геометријске карактеристике канала са детаљем рачунске мреже	52
Слика 14. Графички приказ промене брзина у каналу од почетног до устаљеног стања	53
Слика 15. Поређење нивоа воде у каналу за почетно и устаљено стање	54
Слика 16. Графички приказ брзина у каналу након успостаљања устаљеног стања, са детаљима вектора брзина	54
Слика 17. Поређење брзина у каналу добијених применом ЛБМ, МКР и мерених података	55
Слика 18. Концентрација материје у каналу након 20 s и 50 s	57
Слика 19. Ситуација анализираних деонице реке Дунав са графичким приказом коте дна (Zd), означеним мерним профилима и детаљем рачунске мреже	60
Слика 20. Приказ нивоа воде разматране деонице Дунава, добијено применом СРТ-ЛБМ61	61
Слика 21. Компоненте брзина у x (u) и y (v) правцу за деоницу реке Дунав	63
Слика 22. Графички приказ брзина у деоници реке Дунав	64
Слика 23. Поређење израчунатих брзина са мереним подацима и са резултатима добијеним применом ЛБМ на криволинијским координатама и применом МКР, у попречним профилима П3, П4, П5 и П6 - Дунав	65
Слика 24. Детаљи струјница и вектора брзина - Дунав	67
Слика 25. Ситуација анализираних деонице реке Мисури са графичким приказом коте дна (Zd), означеним мерним профилима и детаљима рачунске мреже	70
Слика 26. Компоненте брзина у x (u) и y (v) правцу за деоницу реке Мисури	71

Слика 27. Графички приказ брзина у деоници реке Мисури	71
Слика 28. Поређење израчунатих брзина са мереним подацима и са резултатима добијеним применом МКР, у попречним профилима П2, П5, П6 и П9 - Мисури	74
Слика 29. Детаљи струјница и вектора брзина - Мисури	75
Слика 30. Ситуација анализирани деонице реке Ачафалаја са графичким приказом коте дна (Zd), означеним мерним профилима и детаљима рачунске мреже	77
Слика 31. Компоненте брзина у x (u) и у y (v) правцу за деоницу реке Ачафалаја.....	79
Слика 32. Графички приказ брзина у деоници реке Ачафалаја	79
Слика 33. Поређење израчунатих брзина са мереним подацима и са резултатима добијеним применом МКР, у попречним профилима П4, П5, П6 и П9 - Ачафалаја	80
Слика 34. Детаљи струјница и вектора брзина – Ачафалаја	82
Слика 35. Почетна расподела концентрације суспендованог наноса.....	85
Слика 36. Почетна заступљеност фракција вученог наноса и гранулометријска крива	85
Слика 37. Концентрација суспендованог наноса у попречним профилима П3 и П6. Поређење резултата добијених применом ЛБМ са резултатима добијеним применом МКР и са мереним подацима	88
Слика 38. Просторни распоред концентрација суспендованог наноса за фракције 1 и 4 – С1 и С4.....	89
Слика 39. Заступљеност фракција вученог наноса у попречним профилима П3 и П6 у мерним вертикалама (В). Поређење резултата добијених применом ЛБМ са резултатима добијеним применом МКР и мереним резултатима.....	91
Слика 40. Просторна расподела вученог наноса за фракције 7 и 8	92
Слика 41. Морфолошке промене речног корита	93

СПИСАК ТАБЕЛА

Табела 1. Грешке прорачуна (L1, L2) за ЛБМ и МКР.....	56
Табела 2. Средње вредности грешке прорачуна (L1, L2) за ЛБМ и МКР.....	56
Табела 3. Начин формулисања граничних услова за реку Ачафалаја	76
Табела 4. Гранулометријски интервали наносног материјала	84

ПРИЛОЗИ

Прилог 1. Поређење израчунатих брзина са мереним подацима и са резултатима добијеним применом ЛБМ на криволинијским координатама и применом МКР, у попречним профилима П1, П2 и П7 – Дунав	109
Прилог 2. Поређење израчунатих брзина са мереним подацима и са резултатима добијеним применом МКР, у попречним профилима П1, П3, П4 и П7 – Мисури	110
Прилог 3. Поређење израчунатих брзина са мереним подацима и са резултатима добијеним применом МКР, у попречним профилима П8, П10, П11 и П12 – Мисури	111
Прилог 4. Поређење израчунатих брзина са мереним подацима и са резултатима добијеним применом МКР, у попречним профилима П13 и П14 – Мисури	112
Прилог 5. Поређење израчунатих брзина са мереним подацима и са резултатима добијеним применом МКР, у попречним профилима П2, П3, П7 и П8 – Ачафалаја	113
Прилог 6. Поређење израчунатих брзина са мереним подацима и са резултатима добијеним применом МКР, у попречним профилима П10 и П11 – Ачафалаја	114
Прилог 7. Концентрација суспендованог наноса у попречним профилима П2 и П4. Поређење резултата добијених применом ЛБМ са резултатима добијеним применом МКР и са мереним подацима	115
Прилог 8. Концентрација суспендованог наноса у попречним профилима П5 и П7. Поређење резултата добијених применом ЛБМ са резултатима добијеним применом МКР и са мереним подацима	116
Прилог 9. Просторни распоред концентрација суспендованог наноса за фракције 2, 3, 5, 6, 7 и 8	117
Прилог 10. Просторни распоред концентрација суспендованог наноса за фракције 9, 10, 11 и 12	118
Прилог 11. Заступљеност фракција вученог наноса у попречним профилима П2, П4, П5 и П7 у мерним вертикалама (В). Поређење резултата добијених применом ЛБМ са резултатима добијеним применом МКР и мереним резултатима.....	119
Прилог 12. Просторна расподела вученог наноса за фракције 1, 2, 3, 4, 5 и 6	120
Прилог 13. Просторна расподела вученог наноса за фракције 9, 10, 11 и 12	121

1. УВОД

Течење воде у природним водотоцима одликује се константном временском и просторном променом хидрауличких показатеља (проток, дубина, брзина, концентрација наноса, ...). Компликоване геометријске и морфолошке карактеристике, као и непрекидна промена количине воде у водотоку, проузрокована хидролошким условима, узрок су настанка веома сложене струјне слике. Поред тога, струјање воде изазива кретање наносног материјала, којег најчешће одликује неуниформна расподела крупноће зрна у наносној мешавини. Тако неуједначен гранулометријски састав речног наноса доводи до тога да се зрна одређене крупноће крећу заједно са водом, као суспендовани нанос, а да се део зрна креће по дну, као вучени нанос. Кретање наноса узрокује и деформацију речног корита, што за последицу има промену концентрације наноса у суспензији и на дну, али и промену дубина и распореда брзина.

Међусобни утицај процеса који се јављају у природним водотоцима и њихове непрестане промене у времену и простору, указују на то да природни водоток представља веома сложен систем у којем се ни један од процеса не може самостално анализирати без утицаја других процеса.

Конструисање модела који би што реалније симулирали кретање воде, наноса и морфолошких промена захтевало би моделирање свих процеса и њихових међусобних веза. Како је течење воде, кретање наноса и размена материјала између дна и суспензије просторни проблем, најпрецизнија анализа би се добила тродимензионалним (3Д) моделом. Међутим, поставља се питање да ли је 3Д моделе рационално користити за практичне проблеме. Чак и применом савремених рачунара, просторни модели су доста ограничени када је у питању трајање прорачуна. Иако би се добило најтачније могуће решење, моделирање дугорочних промена би захтевало веома дуго трајање прорачуна, што са становишта практичне примене није од користи, тако да овакви модели своју примену могу наћи само када је у питању проблем локалног карактера, где се са сигурношћу зна да се јавља изразито турбулентно струјање. Са друге стране, једнодимензионалним (1Д) моделима проблем би се могао превише поједноставити, чиме би се довела у питање тачност модела и употребљивост добијених података. Сходно томе, 1Д моделе корисно је примењивати у случају када је приоритет израчунавање дугорочне

промене дубине и протока или концентрације одређеног загађивача у некој дужој деоници водотока.

У жељи да се формира употребљив модел који, са једне стране није превише поједностављен, док са друге стране није ни превише компликован, јавља се потреба за формирањем дводимензионалних (2Д) модела. 2Д или равански модели омогућавају да се са довољном тачношћу омогући сагледавање реалних практичних проблема, међутим треба имати на уму и ограничења оваквих модела и могућност њихове примене. Равански модели одликују се осредњавањем параметара по дубини, чиме се, код природних водотока које карактерише значајно већа ширина од дубине, не утиче превише на тачност резултата, док се прорачун значајно поједностављује и убрзава.

1.1. Предмет истраживања

Предмет истраживања је израда модела који ће обухватити процесе течења воде, кретања наноса, мофолошких промена и везе између воде и наноса, применом летис Болцман методе (ЛБМ). Како се наведени процеси описују парцијалним диференцијалним једначинама (ПДЈ), које немају аналитичко решење, за њихово решавање потребно је применити неку од нумеричких метода. Развијен је велик број модела за решавање наведених једначина, од којих се највећи број ослања на класичне нумеричке методе, као што су метода коначних разлика (МКР), коначних елемената (МКЕ) или коначних запремина (МКЗ). Ове нумеричке методе, иако су се показале као ефикасне у погледу тачности, захтевају решавање компликованих математичких релација, што може проузроковати проблем са стабилношћу нумеричког решења. Поред тога, с обзиром да је природа кретања наноса и деформације корита физички спор процес, класичне нумеричке методе захтевају веома дуго трајање прорачуна.

Као алтернатива класичним нумеричким методама, у овој студији коришћена је релативно нова нумеричка метода - летис Болцман метода. У односу на класичне методе, ЛБМ се одликује прилично једноставном математичком формулацијом, која омогућава формирање једноставних алгоритама. Тиме се дозвољава креирање програмског кода који брзо и ефикасно доводи до решења, а притом се смањује и могућност појаве грешке. Поред тога, ЛБМ је изузетно погодна и за паралелизацију математичког кода, чиме се

значајно убрзава прорачун у односу на класичне методе [65], [66]. Због својих предности у односу на остале нумеричке методе, летис Болцман метода је своју примену нашла и у другим инжењерским областима, као што су: струјање флуида у порозној средини [19], [72], термодинамички процеси [21], аероиндструја [17], струјање ваздуха око објеката [31], струјање флуида у машинским елементима [11], у медицини [84], у хемијској индустрији [1] итд, што доказује широку распрострањеност и употребљивост ЛБМ.

Модел који је предмет овог истраживања, развијен је тако да у потпуности сагледа све процесе који се дешавају у природним водотоцима, разматрајући и њихово међусобно дејство. Модел укључује течење воде, кретање суспендованог и вученог наноса, деформацију речног корита, размену материјала између воде и дна и размену материјала између слојева терена. Како би се што реалније сагледали сви наносни процеси, модел омогућава и поделу наносног материјала на гранулометријске интервале, чиме се сваки процес разматра за карактеристична зрна одређене крупноће.

За прорачун струјне слике модел користи једначине струјања осредњене по дубини тока, док је кретање суспендованог наноса решено применом адвективно - дифузне једначине. Расподела зрна различите крупноће у вученом наносу решена је једначином одржања масе активног слоја, а морфолошке промене описане су Екснеровом једначином. Процеси размене материјала у свакој наносној једначини, који се остварују кроз процесе ерозије и депоновања, представљени су кроз додатне чланове у једначинама. Све наносне једначине написане су посебно за различите гранулометријске интервале, поштујући њихов однос и удео у укупној маси материјала.

Моделом није обухваћен утицај деформације тла, односно промена дубина на струјну слику. Како је промена дубина значајно мања у односу на саме дубине у природним водотоцима, може се сматрати да је утицај морфолошких промена на промену брзина занемарљив.

1.2. Потреба за истраживањем

Познавање струјне слике, наносних процеса и морфолошких промена неког природног водотока је за практичне инжењерске проблеме од великог значаја. Чак и без утицаја људске делатности, природни водотоци су у сталном процесу прилагођавања

променама које се дешавају. Поред тога, изградња објеката (мостови, бране, преливи, уставе, изливне грађевине итд.), извођење радова на регулацији водотока (напери, прагови, праве паралелне грађевине, обалоутврде итд.) и други радови којима се утиче на водни режим, захтевају познавање струјне слике и наносних процеса.

Сходно томе, јавља се потреба за формирањем модела којим ће се анализирати сви наведени процеси. У тежњи да се формира модел који ће задовољити потребе инжењера и уклонити или умањити недостатке постојећих модела, у оквиру овог истраживања, формиран је модел који се заснива на летис Болцман нумеричкој методи. Летис Болцман метода је одабрана због већ споменутих предности које има у односу на класичне нумеричке методе.

Постоји неколико модела који се заснивају на ЛБМ, међутим сваки од њих има одређена ограничења. Постојећи модели анализирају само поједине процесе, не разматрајући њихово међусобно дејство. Такође, осим модела којим се разматра течење воде, ни један модел није примењен на природне водотоке, код којих компликована геометрија и морфологија често могу бити разлог губитка нумеричке стабилности.

С обзиром на лимитираност постојећих модела који се заснивају на ЛБМ, јасно је да постоји потреба за формирањем јединственог модела који ће бити у могућности да обухвати све поменуте процесе који се јављају у природним водотоцима.

Већина модела који разматрају нанос применом ЛБМ, развијена је тек последњих неколико година, што говори о томе да је ова тема веома актуелна.

1.3. Хипотеза

Основна хипотеза: Могуће је формирати модел за симулацију течења воде, наносних процеса и морфолошких промена у природним водотоцима, применом летис Болцман методе. Моделом би се обухватили сви наносни процеси, њихово међусобно дејство, морфолошке промене и подела наноса на гранулометријске интервале, тако да се сваки процес разматра посебно за сваку фракцију.

2. ПРЕГЛЕД ЛИТЕРАТУРЕ

У овом поглављу дат је преглед досадашњих истраживања, стручне литературе, научних радова и постојећих модела, који су везани за моделирање отворених токова.

Подела постојеће литературе извршена је на две основне групе:

- преглед модела који се заснивају на класичним нумеричким методама,
- преглед модела који се заснивају на летис Болцман методи.

2.1. Преглед модела који се заснивају на класичним нумеричким методама

Будући да је тема овог истраживања примена летис Болцман методе за моделирање отворених токова, акценат у прегледу литературе ће се дати на литературу у којој се обрађује ЛБМ, док ће у овој секцији бити дат преглед неколико модела који за решавање парцијалних диференцијалних једначина користе класичне нумеричке методе (методу коначних разлика, коначних елемената и коначних запремина). Методом коначних разлика врши се апроксимација извода коначним разликама, тако да се решење добија у тачкама рачунске мреже. Методом коначних елемената и коначних запремина врши се дискретизација рачунског домена на коначне елементе, односно запремине. Избор методе зависи од саме природе проблема који се анализира. Поменути нумеричким методама се врши дискретизација извода, чиме се парцијалне диференцијалне једначине своде на алгебарске, да би се затим решавале директно или итеративно [5], а избор методе зависи од саме природе проблема који се анализира.

Развијен је велик број модела за прорачун наноса, међутим већина има одређена ограничења у смислу да се поједини процеси занемарују или поједностављују. Неки од првих радова у којима су се аутори бавили моделирањем течења воде без наносних процеса су: [60], [23], [55]. Модели представљени у радовима [35], [38] разматрају само деформацију корита, док модели: [22], [63] разматрају само вучени нанос. Одређени аутори анализирају само суспендовани нанос, узимајући и размену материјала између дна и суспензије [18], [73]. Неки модели занемарују поједине процесе, као нпр. модели који занемарују вучени нанос [42], [27], или модели који занемарују суспендовани нанос [78], [33]. Примењујући принцип активног слоја (поглавље 3), Спасојевић и Холи [69], [70],

формирају јединствен модел који омогућава сагледавање свих процеса и њиховог међусобног дејства, као и поделу гранулометријског састава на интервале, тестирајући га на примеру природног водотока. Модел је даље побољшао Будински [10], [5] унапређењем нумеричке методе и механизма размене наноса између воде и дна, са могућношћу промене активне зоне струјања услед промене нивоа воде, примењујући га на природни водоток, на не-ортогоналној криволинијској мрежи.

Неки од комерцијалних програма који се заснивају на класичним нумеричким методама, а у пракси су се показали као ефикасни су: Delft3D [97], HEC-RAS [76], FLOW3D HYDRO [98], RiverFlow2D [99].

2.2. Преглед модела који се заснивају на летис Болцман методи

Модел за симулацију течења воде, кретања наноса и морфолошких промена, формиран у оквиру докторске дисертације, заснива се на летис Болцман нумеричкој методи. Веома једноставна математичка формулација, велика ефикасност и погодност за паралелизацију математичког кода, чине летис Болцман методу веома успешном у решавању компликованих парцијалних диференцијалних једначина.

У поглављима 2.2.1, 2.2.2, 2.2.3 и 2.2.4 даће се преглед радова који су уско везани за проблематику која се разматра у овом раду, а то је дводимензионално моделирање отворених токова и моделирање наносних процеса, применом ЛБМ. У поглављу 2.2.5 даће се преглед литературе која обухвата једнодимензионалне и тродимензионалне летис Болцман моделе, који нису тема овог истраживања, али имају додирних тачака са дводимензионалним моделима.

2.2.1. Дводимензионални модели за решавање једначина тока осредњених по дубини, применом „single-relaxation time“ летис Болцман методе (СРТ-ЛБМ)

Летис Болцман методу за решавање једначина течења осредњених по дубини, јед. (1) и јед. (2), први је применио Зоу [86], користећи D2Q9 квадратну мрежу. Аутор је формулисао равнотежну функцију, јед. (43), и показао да применом Чепмен - Енског поступка, летис Болцман једначина, јед. (48), може успешно репродуковати једначине

течења, јед. (1) и (2). Граничне услове аутор је формулисао на начин дефинисан у [93]. Модел је креиран за устаљено и неустаљено течење у правоугаоном каналу, са препрекама на дну и у пољу, и за нагло проширење попречног пресека канала. Резултати анализе су се веома добро поклопили са аналитичким решењем, чиме је аутор доказао да се ЛБМ може успешно применити за симулацију дводимензионалног течења воде. У својој књизи [87], Зоу је увео одређена побољшања ЛБ једначине за отворене токове. Доказао је да се члан спољашње силе који фигурише у ЛБ једначини, најпрецизније апроксимира централном шемом коначних разлика и представио је начин за третирање границе у случају неправилне геометрије. Модел је тестиран на каналима са неправилним дном и у каналу са кривином од 180 степени. Резултате је поредио са експериментом и добио је веома добра подударња измерених и срачунатих вредности брзина. Аутори Лиу и сар. [51] поновили су прорачун на истим примерима, али примењујући другачији приступ третирању закривљених граница, објашњен у [29], [24]. Такође, у раду су представљени основни услови које је потребно задовољити како би се одржала нумеричка стабилност. Са намером да се докаже примена ЛБМ и за изузетно турбулентно стање, креиран је модел таласа са стрмим челом, изазван рушењем бране [52].

Иако су се модели показали као функционални, имају проблем са стабилношћу у случају компликованијих нагиба дна корита. Зоу је то решио тако што је члан нагиба дна, имплементирао директно у ЛБ једначину, чиме је добијен унапређен облик ЛБ једначине [88]. На тај начин решен је проблем нестабилности модела при компликованој морфологији, задржавајући једноставну математичку формулацију која карактерише ЛБМ. Ли и сар. [43] су предложили да се, када је у питању проблем комплексне морфологије, модел може додатно унапредити променом равнотежне функције расподеле.

Како би показали да се ЛБМ може применити и за практичне проблеме, група аутора [75] објавила је рад у којем су D2Q9 модел применили за симулацију течења воде у Гибралтарском мореузу, међутим нису дата мерења, нити резултати добијени другим методама, који поткрепљују добијене резултате. Такође, природа кретања воде у морима и океанима у многоме се разликује од природе течења воде у рекама, па се овако формиран модел не може сматрати као репрезентативан за примену ЛБМ у природним водотоцима.

У циљу бољег прилагођавања рачунске мреже комплексној геометрији, Будински [6] је извршио трансформацију раванских једначина течења у криволинијске координате. Модел је верификован поређењем добијених резултата са резултатима добијеним применом ЛБМ у картезијанским координатама и са експерименталним подацима.

2.2.2. Дводимензионални модели за решавање једначина тока осредњених по дубини, применом „multiple-relaxation time“ летис Болцман методе (МРТ-ЛБМ)

Компликована геометрија, морфологија и велики Рејнолдсови бројеви који су карактеристични за природне водотоке, могу проузроковати проблем са стабилношћу СРТ-ЛБМ. Из тог разлога, када је у питању моделирање течења воде, потребно је применити софистициранији, стабилнији облик ЛБМ, као што је МРТ-ЛБМ.

Предност МРТ-ЛБМ у односу на СРТ-ЛБМ може се наћи у [80], где су аутори поредили споменуте две методе за случај вртложног струјања, при решавању Навие-Стокс-ових једначина. У раду се јасно види да при малим вредностима Рејнолдсових бројева нема разлике, док са повећањем Рејнолдсовог броја долази до осцилација нумеричког решења применом СРТ-ЛБМ, док МРТ-ЛБМ задржава нумеричку стабилност и конвергенцију. Понашање МРТ-ЛБМ при већим вредностима Рејнолдсових бројева за решавање Навие-Стокс-ових једначина, може се наћи и у радовима: [20], [16], [82].

Предност МРТ-ЛБМ у односу на СРТ-ЛБМ, огледа се у могућности да свака функција расподеле има посебно време релаксације, формирајући тако „флексибилнији“ и стабилнији модел. У раду [89], Зоу представља математичку формулацију функције расподеле, јед. (66) и (67), трансформисане у МРТ-ЛБМ. Први функционалан МРТ-ЛБМ модел којим се решавају осредњене једначине течења представљају Лиу и сар. [49]. У раду је дато поређење СРТ-ЛБМ и МРТ-ЛБМ у погледу тачности, стабилности и временског трајања прорачуна. Показано је да МРТ модели захтевају око 15% више рачунског времена, али да за разлику од СРТ-ЛБМ задржавају стабилност, не само када су у питању велики Рејнолдсови бројеви, већ и када услед великог броја итерација СРТ-ЛБМ почиње да дивергира, док МРТ-ЛБМ задржава конвергенцију. МРТ-ЛБМ за решавање дводимензионалних једначина течења трансформисаних у криволинијске координате

представио је Будински [7]. Модел је тестиран на непризматичним каналима са кривинама од по 90° и 180° . Добијени резултати су поређени са експерименталним подацима и са резултатима добијеним применом методе коначних разлика. Забележена су веома добра подударња резултата, чиме је извршена верификација модела. Исти аутор [9], први је применио ЛБ методу за моделирање струјне слике природних водотока. Модел је формиран за неустаљено течење у деоници реке Дунав, коју карактерише компликована геометрија и морфологија. Резултати су поређени са резултатима добијеним методом коначних разлика и са мереним подацима. Забележен је висок ниво поклапања резултата, чиме је доказано да ЛБМ представља снажну нумеричку методу која се може користити као алтернатива класичним нумеричким методама када је у питању моделирање струјне слике природних водотока.

2.2.3. Дводимензионални модели за решавање адвективно - дифузне једначине (АДЈ) применом ЛБ методе

Кретање и концентрација суспендованог наноса моделира се применом адвективно – дифузне једначине. Стога, у наставку ће се дати преглед литературе у којој је обрађена проблематика решавања АДЈ, применом ЛБМ.

У раду [85] аутори су представили дводимензионални модел за решавање адвективно – дифузне једначине базиран на СРТ моделу са изотропном и анизотропном дифузијом. Модел је верификован на једноставним примерима праволинијског правоугаоног канала поређењем резултата са аналитичким решењем. Гинзбург [25] представља модел за решавање АДЈ применом ТРТ-ЛБМ, да би се затим исти модел [44] применио за решавање АДЈ у раванским отвореним токовима на једноставним примерима правоугаоних канала. Више о ТРТ-ЛБМ моделима за решавање АДЈ може се наћи у [30], [66]. Ли и Хуанг [45] представљају први модел који уједно решава и осредњене једначине течења и адвективно – дифузну једначину. Аутори су дали предлог за равнотежне функције и доказали да се применом Чепмен - Енског поступка може репродуковати АДЈ, јед. (3). Верификација је извршена на једноставним примерима поређењем са аналитичким решењем. У раду [90], Зоу презентује формулацију у којој је коефицијент дифузије независан од времена релаксације, стварајући на тај начин флексибилнији модел када је у питању одабир

времена релаксације. Први МРТ-ЛБ модел примењен за решавање АДЈ презентован је у раду [58], користећи седам локалних брзина у три димензије – D3Q7 модел. У раду је, поред приказа нумеричких примера и верификације модела, дат приказ грешке која настаје у прорачуну за СРТ и МРТ модел, где се јасно уочава предност МРТ модела. Аутори Пенг и сар. [58] представљају модел који за решавање АДЈ користи модел са 5 локалних брзина, док Зоу [91] представља нову форму равнотежне функције и први D2Q9 модел за симулацију течења и АДЈ. За разлику од претходних модела, који су верификовани користећи само једноставне примере, у овом раду је моделирано и струјање флуида са транспортом супстанце кроз порозну средину компликоване геометрије. У раду је такође представљена равнотежна функција за 3Д модел са 19 локалних брзина. Представљене методе су тачности првог реда. Како би се смањила грешка која настаје у прорачуну, у раду [2] је демонстрирана формулација којом се не производи грешка другог реда, чиме се додатно побољшала тачност методе. Како би се креирао ефикасан модел за симулацију течења и транспорта растворене супстанце у природним водотоцима, Будински [8] представља модел који се заснива на D2Q9 криволинијској мрежи. Модел користи МРТ за течење и СРТ за АДЈ, а калибрисан је и верификован на примеру правог канала, параболичног канала са кривином, као и на деоници реке Дунав. Резултати анализе су се веома добро поклопили са мереним подацима, чиме је показано да се ЛБМ може користити за симулацију транспорта супстанце у природном водотоку. Комбинација једнодимензионалног и дводимензионалног модела за транспорт супстанце представљена је у [77], где је презентован начин за успостављање везе између граничних услова 1Д и 2Д модела. Стабилнији и ефикаснији модел за транспорт супстанце, у случајевима када постоји изразита денивелација дубина, представљен је у раду [64].

2.2.4. ЛБ модели за моделирање наноса и морфолошких промена

Један од првих покушаја да се моделира нанос применом ЛБМ приказан је у раду [53]. Аутори су представили модел у x - z равни за моделирање наносних формација у иригационим каналима са уставама. Модел функционише тако што се посматрани домен подели мрежом на коначан број поља и посматра се присуство наноса у сваком пољу. Иако је у раду назначено да се узимају у обзир и процеси ерозије и депоновања, није експлицитно објашњено на који начин ти процеси функционишу. Такође, у раду није дата

анализа суспендованог наноса који утиче на вучени нанос, нити су дате карактеристике наносног материјала. Као што су и сами аутори то истакли, модел због својих недостатака није применљив за симулацију реалних физичких система. Један од начина за моделирање вученог наноса, јесте посматрање појединачних зрна наноса. У раду [14] аутори презентују тродимензионални модел за нумеричку симулацију кретања зрна у цевима са храпавим дном, базиран на ЛБМ. Дно је формирано од сферних зрна, истог облика и димензија као и покретна зрна, чије је кретање изазвано гравитационом и хидродинамичком силом. Модел је верификован поређењем трајекторија зрна добијених симулацијом и експериментом. На сличан начин, у раду [12] аутори представљају модел који такође разматра кретање појединачних зрна. Дно је моделирано као скуп сферних зрна исте крупноће и омогућена је анализа кретања сваког зрна појединачно, узимајући у обзир и њихову интеракцију. Такође, моделом је омогућена симулација таложења зрна. Иако се добијени резултати, претходно наведена два модела, веома добро подударују са експерименталним подацима, овакви модели се не могу узети као меродавани за анализу вученог наноса. Природни нанос се не одликује зрнима једнаке крупноће и због огромног броја зрна, немогуће је анализирати кретање сваког зрна појединачно. Поред тога, модели не укључују размену материјала између дна и суспензије, нити деформацију дна. Овакви модели своју примену могу наћи у неким другим областима, на пример у хемијској индустрији. У раду [34] аутори су представили модел којим се прорачунава распоред концентрације честица по попречном пресеку цеви и канала, као и утицај честица на струјну слику, такође занемарујући размену материјала између воде и дна и промену коте дна. Како би се прорачуном обухватио и утицај наноса на морфолошке промене [54], формиран је модел за симулацију кретања наноса и формирање пешчаних структура у близини објеката на дну океана. Модел обухвата процесе ерозије и депоновања на једноставан начин, тако што упоређује стварну и критичну вредност тангенцијалног напона. Прекорачењем критичне вредности тангенцијалног напона долази до кретања зрна и до ерозије, док у супротном долази до депоновања. Верификација модела је извршена на примеру струјања воде око хоризонталног цилиндра на пешчаном дну униформног састава. Моделом нису обухваћени транспорт суспендованог наноса и размена материјала између воде и дна. Оваквим моделом може се добити увид у облик пешчане структуре око објекта који се налази на дну, међутим исти модел је доста ограничен када је у питању

примена на речне токове, које карактерише неуниформан нанос. Такође, модел је применљив само за локалне проблеме, не разматрајући целокупне промене у некој деоници водотока.

Како се би формирао модел за симулацију морфолошких промена у природним водотоцима [92], Зоу представља модел заснован на решавању Екснерове једначине, јед. (19). Аутор је представио равнотежну функцију и показао да се применом Чепмен - Енског поступка летис Болцман једначином може успешно репродуковати Екснерова једначина. Проток вученог наноса рачунат је формулом Граса [26]. Модел је верификован анализирањем 1Д и 2Д деформације пешчане дине у каналу и поређењем резултата са резултатима добијеним методом коначних елемената и аналитичким резултатом. У раду [59] аутори представљају модел који за решавање једначина струјања користи ЛБМ, међутим Екснерова једначина решена је применом методе коначних разлика.

2.2.5. ЛБ модели за моделирање једнодимензионалних и тродимензионалних проблема течења воде

Будући да је тема овог истраживања израда дводимензионалног модела, у прегледу литературе акценат је дат на тематику која је уско везана за дводимензионалне проблеме, међутим важно је напоменути да то нису једини модели којима се описују кретање воде и наносни процеси. Једнодимензионално течење у отвореним токовима најчешће се описује Сен – Венан - овим једначинама (СВЈ) [68]. Прву примену ЛБМ за моделирање СВЈ представила је група аутора [74], тестирајући модел на једноставним примерима призматичних канала. Модел је даље унапређен, примењујући га на примерима непризматичних корита [50]. Како би се елиминисала главна мана ЛБМ, а то је симетричност решетке, Ожват и Будински [57], [56], представљају трансформисан облик СВЈ. Верификација модела извршена је на примеру деонице реке Дунав поређењем резултата са мереним вредностима. У раду [56] приказан је и једнодимензионални модел транспорта суспендованог наноса, такође на деонице реке Дунав.

У раду [67], представљен је тродимензионални модел за течење воде. Модел је тестиран на примеру таласа са стрмим челом изазваног рушењем бране у правоугаоном каналу. У раду [13], аутори су применили свој модел на исти пример, додавајући и објекат

у каналу. Због нумеричке нестабилности, Лиу и сар. [47] уводе унапређен облик ЛБМ, тестирајући модел на примеру кретања таласа. На сличан начин представљен је модел [46], са посебним нагласком на стварање мехура гаса. 3Д модел кретања таласа кроз порозну средину представљен је у раду [81], користећи МРТ-ЛБМ.

2.2.6. Дискусија о прегледу литературе

На основу прегледа литературе може се закључити да се латис Болцман метода показала као веома успешна када је у питању моделирање струјне слике и да је апсолутно компаративна тренутно расположивим нумеричким методама. Оно што недостаје постојећој литератури и што би свакако допринело унапређењу оваквих модела, јесте тестирање и верификација већег броја компликованијих водотока.

Што се тиче наносних процеса, може се закључити да практично не постоји модел који се заснива на ЛБМ, а који се може применити на природне водотоке. Постојећи модели су примењени за једноставне примере и ограничени су само на поједине наносне процесе. Ни један од модела не разматра све наносне процесе, нити њихову интеракцију. Такође, ни један модел не посматра нанос као природну мешавину неуниформног гранулометријског састава. Према томе, несумњиво је да постоји потреба за формирањем модела који ће обухватити све наносне процесе, њихову везу и поделу наносне мешавине на гранулометријске интервале.

3. ТЕОРИЈСКЕ ОСНОВЕ

У овом поглављу представљене су постојећа и нова предложена математичка формулација, као и основни принципи за формулисање процеса који су обухваћени формираним моделом.

3.1. Теоријске основе за дефинисање течења воде и наносних процеса

Математичка формулација једначина којима се описују процеси које се дешавају у природним водотоцима: течење воде, транспорт суспендованог и вученог наноса, процеси размене материјала и морфолошке промене, приказана је у овом поглављу.

3.1.1. Једначине којима се дефинише течење воде

Течење нестишљивог вискозног флуида описује се Навие–Стокс - овим једначинама. Ове једначине представљају систем парцијалних диференцијалних једначина, које се састоје од једначине континуитета и динамичких једначина, написаних за флуидни делић [96]. У турбулентним токовима долази до мешања флуидних делића, услед чега се јављају флукуације величина у времену и простору. Осредњавањем Навие–Стокс - ових једначина по времену, добијају се Рејнолдс-ове једначине, погодне за описивање турбулентних токова [94]. Будући да природне токове карактерише значајно већа ширина корита од дубине, односно да је проблем више равански него просторни, извршиће се осредњавање Рејнолдс-ових једначина по дубини тока. Таквим видом осредњавања, вредности променљивих постају константне по дубини тока.

Једначине осредњене по дубини тока чине систем једначина који се састоји од:

- једначине континуитета:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu_j)}{\partial x_j} = 0, \quad (j = 1, 2) \quad (1)$$

- и једначине одржања количине кретања:

$$\frac{\partial(hu_i)}{\partial t} + \frac{\partial(hu_i u_j)}{\partial x_j} = -g \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{h^2}{2} \right) + \nu \frac{\partial^2(hu_i)}{\partial x_j \partial x_j} - gh \frac{\partial Z_b}{\partial x_i} + \frac{\tau_{wi}}{\rho} - \frac{\tau_{bi}}{\rho}, \quad (2)$$

где је: t - време, x_i - картезијанска координата у правцу i , u_i - компонента брзине у правцу i , h - дубина, g - гравитационо убрзање, ρ - густина флуида, Z_b - кота дна корита, ν - кинематска вискозност, τ_{bi} - смичући напон на дну, τ_{wi} - смичући напон услед ветра [70], [87].

Једначинама (1) и (2) омогућава се прорачун дубине и компонената брзине у свакој тачки рачунске мреже.

3.1.2. Једначина одржања масе суспендованог наноса

Ситнија зрна наносног материјала која својом тежином не могу да се одупру кретању воде кретаће се заједно са водом, у суспензији воде и наноса. Такав вид наноса назива се суспендовани нанос. Транспорт суспендованог наноса описује се једначином одржања масе суспендованог наноса, која представља адвективно - дифузну парцијално диференцијалну једначину. Написана за један гранулометријски интервал (k) гласи:

$$\frac{\partial(h\rho_m C_k)}{\partial t} + \frac{\partial(u_i h \rho_m C_k)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_i \frac{\partial(h\rho_m C_k)}{\partial x_i} \right) + S_k, \quad (3)$$

при чему је: ρ_m - густина мешавине воде и наноса, C_k - бездимензионална концентрација суспендованог наноса фракције k , D_i - коефицијент молекуларне дифузије у правцу i . Члан S_k представља размену материјала између суспендованог и вученог наноса, дефинисаног као:

$$S_k = E_k - D_k, \quad (4)$$

при чему је E_k - флуks еродованог материјала k -те фракције из дна у суспензију, усмерен вертикално навише, D_k - флуks депонованог материјала k -те фракције из суспензије на дно, усмерен вертикално наниже (слика 1.)

Члан ерозије се може представити на следећи начин [70]:

$$E_k = -\beta_k D_{Tz} \frac{(\rho_m C_k)_{a+\Delta a} - (\rho_m C_k)_a}{\Delta a}, \quad (5)$$

где је: D_{Tz} - коефицијент турбулентне дифузије, a - дебљина референтног слоја, Δa - дискретизовани просторни прираштај, $(C_k)_a$ - референтна концентрација, $(C_k)_{a+\Delta a}$ - концентрација на растојању $a + \Delta a$ од дна корита. Наведене величине могу се израчунати на следећи начин [32], [61], [62]:

$$D_{Tz} = (a + \Delta a) \left(1 - \frac{a + \Delta a}{h}\right) \beta_z \kappa u_*, \quad (6)$$

$$(C_k)_a = 0.015 \frac{d_k T_k^{1.5}}{a d_{*k}^{0.3}}, \quad (7)$$

$$(C_k)_{a+\Delta a} = C_k (h - a) \frac{\left(\frac{h - a}{a}\right)^{z^*}}{\int_a^h \left(\frac{h}{z} - 1\right)^{z^*} dz}, \quad (8)$$

где су:

d_k карактеристични пречник зрна гранулометријског интервала k ,

u_* ефективна смичућа брзина; $u_* = \frac{u\sqrt{g}}{c}$,

C' Шезијев коефицијент; $C' = 18 \log\left(\frac{12h}{3d_*}\right)$,

d_{*k} бездимензионални параметар зрна; $d_{*k} = d_k \sqrt[3]{g\delta/v^2}$,

ν кинематски коефицијент вискозности, (9)

δ бездимензионална густина наноса; $\delta = \frac{\rho_s}{\rho} - 1$,

ρ_s густина наноса на дну реке,

ρ густина воде,

T_k ефективни бездимензионални тангенцијални напон; $T_k = \frac{u_*^2 - u_{*cr}^2}{u_{*cr}^2}$,

u_{*cr} критична смичућа брзина добијена из Шилцовог дијаграма; $u_{*cr} = \sqrt{\theta g \delta d_k}$,

θ бездимензионални тангенцијални напон – Шилцов број [61],

β_z коефицијент; $\beta_z = 1 + 2 \left(\frac{w_{tk}}{u_*} \right)^2$, $\beta_z < 2$,

κ вон Карман-ова константа,

z растојање мерено од дна корита,

Z^* суспензиони број; $Z^* = \frac{w_{tk}}{\beta_z \kappa u_*}$,

w_{tk} брзина тоњења карактеристичног зрна.

Брзина тоњења зрна рачуна се на основу емпиријских образаца [36], [95]:

$$w_{tk} = \begin{cases} g \cdot \delta \cdot d^2 / (18\nu), & : d = 0.001 \div 0.1 \text{ mm}, \\ \frac{10\nu}{d} \left[\left(1 + \frac{0.01 \cdot g \cdot \delta \cdot d^3}{\nu^2} \right)^{1/2} - 1 \right], & : d = 0.1 \div 1 \text{ mm}, \\ 1.1(g \cdot \delta \cdot d)^{1/2}, & : d > 1 \text{ mm}. \end{cases} \quad (10)$$

Члан депоновања се може представити на следећи начин:

$$D_k = w_{tk} \rho_m (C_k)_{a+\Delta a}. \quad (11)$$

Једначинама (3) - (11) омогућава се прорачун суспендованог наноса, узимајући у обзир и размену материјала између воде и дна корита.

3.1.3. Једначина одржања масе активног слоја

За анализу наносних процеса на дну речног корита користи се принцип активног слоја [69], којим се дефинише површински слој речног дна дебљине E_m у којем се нанос креће (слика 1). Применом закона одржања масе на елементарну запремину активног слоја за један гранулометријски интервал (κ), добија се следећа једначина:

$$\rho_s(1-p) \frac{\partial(\beta_k E_m)}{\partial t} + \frac{\partial \phi_{ki}}{\partial x_i} = D_k - E_k + S_{p_k}, \quad (12)$$

при чему је: β_k - заступљеност фракције одређеног гранулометријског интервала у активном слоју, ϕ_{ki} - флуks вученог наноса, S_{p_k} - члан размене материјала између активног слоја и активног подслоја.

Узимајући у обзир интензитет и трајање процеса ерозије, дебљина активног слоја се рачуна по следећој формули [4]:

$$E_m = -c_e(Z_d^{n+1} - Z_d^n) + \frac{1}{\sum_{k=m}^K \beta_k} \frac{D_m}{1-p}, \quad (13)$$

где је: c_e - параметар ерозије, D_m - пречник најмањег непокретног зрна, p - порозност.

Флуks вученог наноса рачуна се по формули [32], [95]:

$$\phi_{ki} = \beta_k(1 - \gamma_k) \zeta_k 0.053 \rho_s \sqrt{\delta g d_k} d_k T_{ki}^{2.1} / d_{*k}^{0.3}, \quad (14)$$

где су:

$$\gamma_k \text{ параметар транспортног капацитета: } \gamma_k = 0.25 + 0.325 \ln \left(\frac{u_*}{w_{tk}} \right), 0.47 < \gamma_k < 10, \quad (15)$$

$$\zeta_k \text{ параметар изложености зрна: } \zeta_k = \left(\frac{d_k}{d_{50}} \right)^{0.85}.$$

Да би се одредио члан S_{p_k} користиће се једначина одржања масе активног подслоја:

$$\rho_s(1-p) \frac{\partial}{\partial t} [\beta_{p_k}(Z_d - E_m)] + S_{p_k} = 0. \quad (16)$$

Члан S_{p_k} прорачунава се у зависности од тога да ли се јавља ерозија или депоновање.

У случају ерозије ($Z_d^{n+1} < Z_d^n$), S_{p_k} се прорачунава на следећи начин:

- ако се дно активног слоја спушта, тј. $(Z_d^{n+1} - E_m^{n+1}) \leq (Z_d^n - E_m^n)$:

$$S_{p_k} = -\frac{\rho_s(1-p)}{\Delta t} [(Z_d^{n+1} - E_m^{n+1}) - (Z_d^n - E_m^n)] \beta_{p_k}, \quad (17)$$

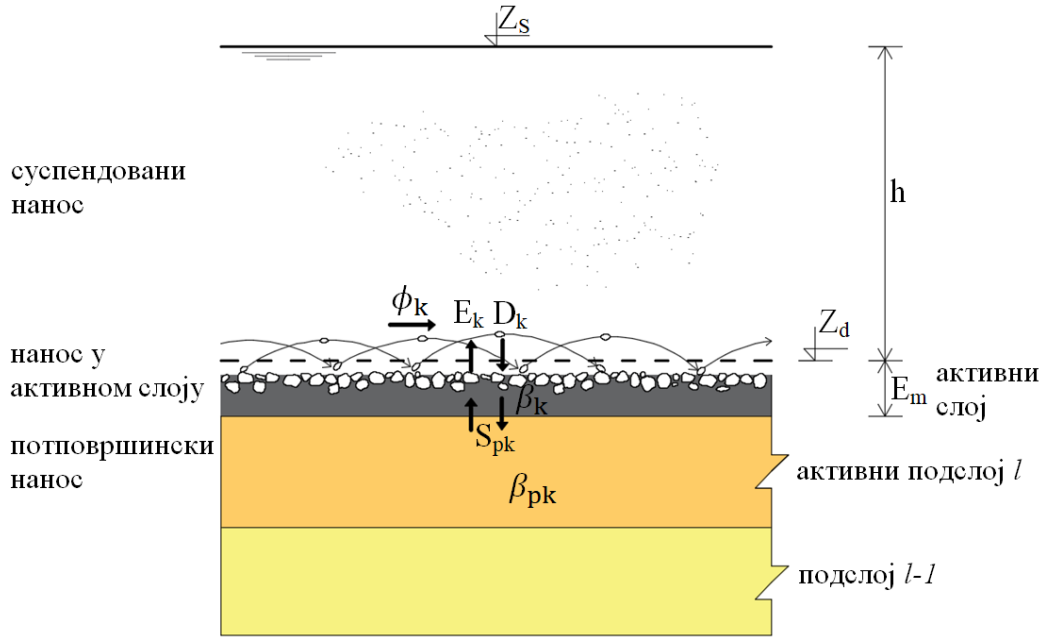
- ако долази до подизања дна активног слоја, тј. $(Z_d^{n+1} - E_m^{n+1}) > (Z_d^n - E_m^n)$:

$$S_{p_k} = -\frac{\rho_s(1-p)}{\Delta t} [(Z_d^{n+1} - E_m^{n+1}) - (Z_d^n - E_m^n)] \frac{\beta_k^n + \beta_k^{n+1}}{2}, \quad (18)$$

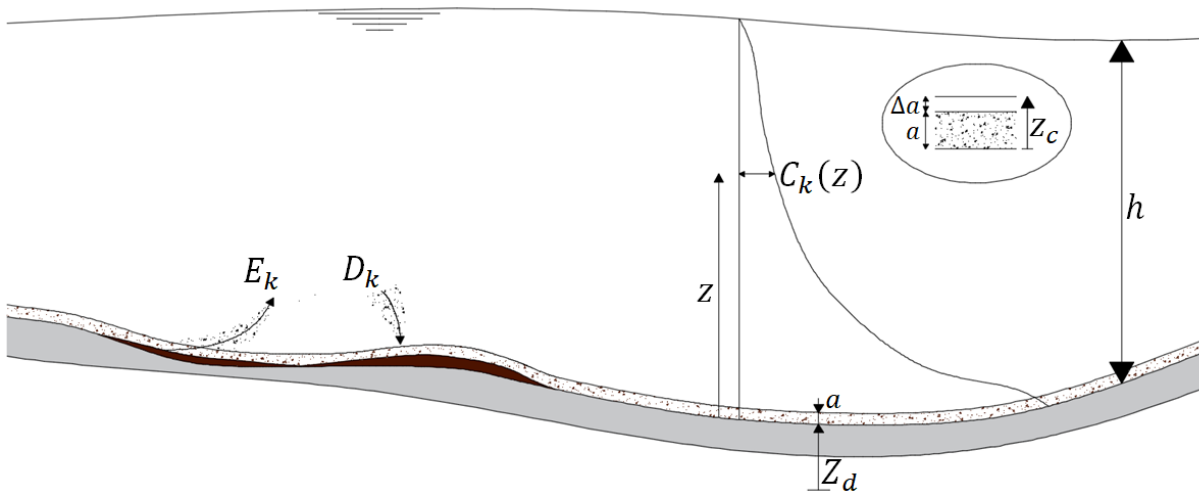
при чему се са β_{p_k} обележава заступљеност гранулометријског интервала (к) у активном подслоју, тј. првом слоју испод активног слоја. У случају ерозије, потребно је проверити да ли је нова кота дна (Z_d) мања од коте дна подслоја ($Z_{d,pds}$) тј. $(Z_d < Z_{d,pds})$. Ако јесте, онда је потребно проверити да ли је: $Z_d - E_m - Z_{d,pds,l-1} > h_{pds,max}$, где је са $h_{pds,max}$ означена максимална дебљина подслоја. Ако је и то задовољено, нова кота дна подслоја рачуна се као: $Z_{d,pds} = Z_d - E_m - h_{pds,max}$, а $\beta_{p_k} = \beta_{p_k,l-1}$. Ако се дно активног слоја подиже, из активног слоја се део материјала отпушта у активни подслој. Прерасподела расподеле β_p у тој ситуацији врши се на основу процента заступљености фракције из активног слоја и активног подслоја. Ако је дубина активног подслоја већа од максималне дубине $h_{pds,max}$, отпустиће се део материјала из активног подслоја l у слој испод $l - 1$.

У случају да је дошло до подизања дна ($Z_d^{n+1} > Z_d^n$), не постоји прелазак материјала између слојева дна корита, тако да је $S_{p_k} = 0$.

Овакав начин прорачуна омогућава да се за сваки гранулометријски интервал одреди заступљеност зрна одређене крупноће у укупној мешавини наноса, узимајући у обзир процесе ерозије и депоновања и могућу размену материјала између слојева дна услед деформације корита.



Слика 1. Концепт активног слоја



Слика 2. Шематски приказ промене концентрације суспендованог наноса по дубини и процеса размене наноса између воде и дна

3.1.4. Глобална једначина одржања масе наноса на дну – Екснерова једначина

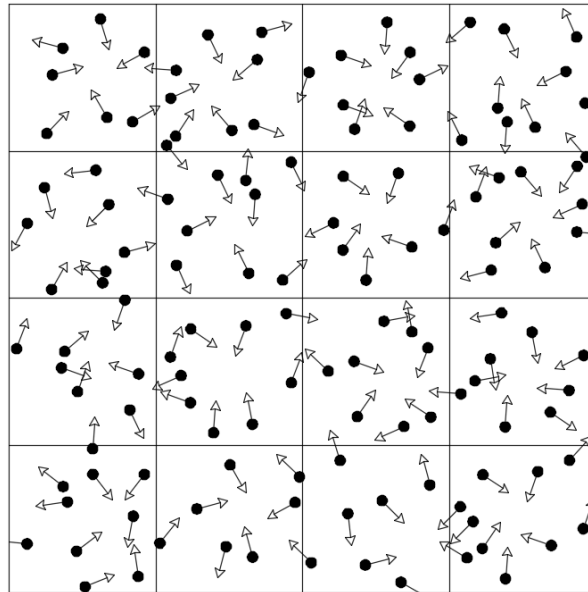
Сумирајући једначине (12) и (16) за све гранулометријске интервале, водећи рачуна да је $\sum_{k=1}^K \beta_k = 1$, и њиховим сабирањем, долази се до глобалне једначине одржања масе наноса на дну:

$$\rho_s(1-p) \frac{\partial Z_d}{\partial t} + \sum_{k=1}^K \left(\frac{\partial \phi_{k_i}}{\partial x_i} + S_k \right) = 0. \quad (19)$$

Једначина (19), позната и као Екснер-ова једначина са додатком члана S_k , омогућава прорачун деформације дна узимајући у обзир кретање наноса по дну као и процесе ерозије и депоновања.

3.2. Основе летис Болцман методе

Летис Болцман метода представља нумеричку методу која се користи за решавање једначина којима се описује кретање флуида [39], [71], [87]. Због велике ефикасности и стабилности нумеричког модела, једноставне формулације и могућности паралелизације математичког кода, чиме се значајно убрзава прорачун, ЛБ метода је последњих двадесетак година привукла велику пажњу истраживача различитих научних области.



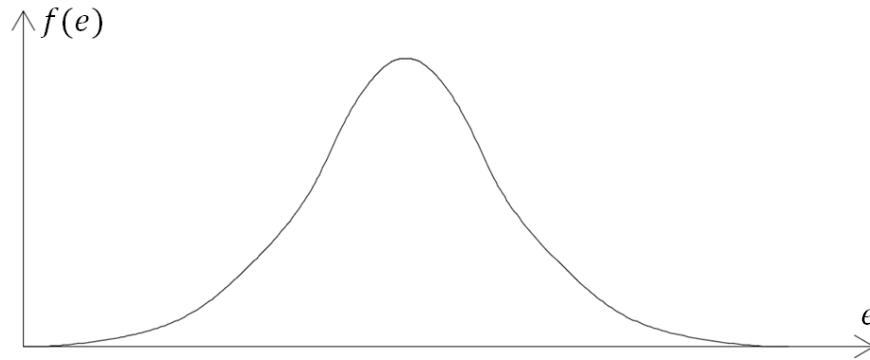
Слика 3. Расподела молекула у простору

Метода се заснива на основним принципима молекуларне динамике. Посматра се флуидни делић и молекули флуида у њему, за које је карактеристично хаотично кретање, тако да се сваки од молекула креће у одређеном правцу и смеру, са одређеном брзином (слика 3).

Основна идеја летис Болцман методе је да се не посматра кретање сваког молекула посебно, већ да се разматра кретање групе молекула која се креће у одређеном правцу. Ако се са Δx означи растојање које молекули пређу у неком временском тренутку Δt , онда се брзина молекула e добија као:

$$e = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (20)$$

Разматрањем промене броја молекула у функцији њихове брзине, добија се функција расподеле f . Функција расподеле $f(e, x, t)$ (слика 4) представља вероватноћу да ће се одређени број молекула који се налазе у некој тачки x , у неком временском тренутку t , кретати у одређеном правцу брзином e .



Слика 4. Дијаграм функције расподеле

Ако се сада „сумирају“ сви молекули без обзира која им је брзина, односно функција расподеле интегрални по брзини молекула, добија се густина флуида:

$$\int d^3 e f(e, x, t) = \rho(x, t). \quad (21)$$

Множењем функције расподеле са брзином молекула добија се количина кретања система:

$$\int d^3 e e f(e, x, t) = \rho u(x, t), \quad (22)$$

при чему је $u(x, t)$ брзина кретања флуида у некој тачки (x) у одређеном временском тренутку (t).

Промена функције расподеле током времена се рачуна као извод функције f по времену, односно:

$$\frac{df(e, x, t)}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{de}{dt} \frac{\partial}{\partial e} \right) f(e, x, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + e \frac{\partial}{\partial x} + \frac{f}{\rho} \frac{\partial}{\partial e} \right) f(e, x, t) = \Omega(f). \quad (23)$$

Приликом кретања молекули се сударају, чиме се мења смер њиховог кретања и број молекула који се крећу у одређеном правцу, а самим тим долази и до измене функције расподеле. Промена функције расподеле услед судара, представљена је оператором судара $\Omega(f)$. Оператор судара формулисали си научници Батнагар, Грос и Крук [3], на веома једноставан начин:

$$\Omega(f) = -\frac{1}{\tau}(f - f^{eq}) \quad (24)$$

Принцип који је коришћен за формирање оператора судара се заснива на чињеници да ће се након великог броја судара после неког времена успоставити равнотежно стање функције расподеле f^{eq} , при чему је τ коефицијент који представља време релаксације, односно брзину којом функција расподеле тежи равнотежној функцији. Једначине (23) и (24) представљају Болцманову једначину. Да би се Болцманова једначина могла решити потребно је, као и код класичних нумеричких метода, извршити дискретизацију једначине по простору и времену, али поред тога, Болцманова једначина захтева и дискретизацију функције расподеле:

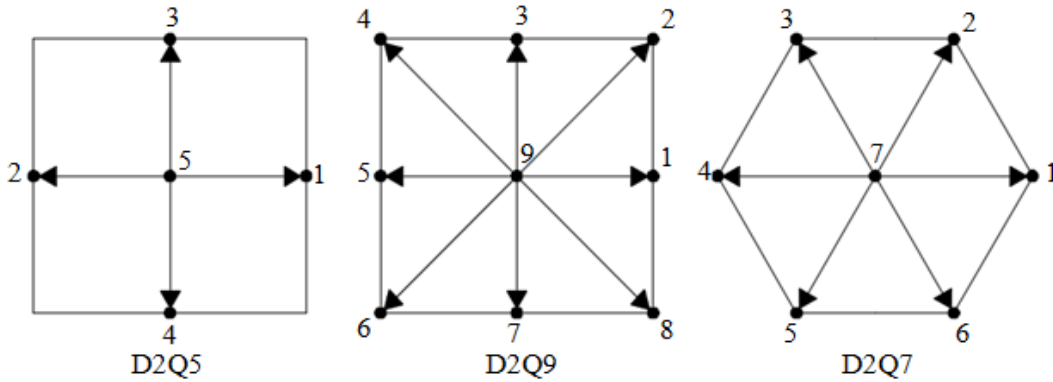
- простор: $x \rightarrow \Delta x$,
- време: $t \rightarrow \Delta t$,
- функција расподеле: $f(e, x, t) = f_\alpha(x, t)$,

при чему је са α - обележен један од могућих праваца којим се молекули могу кретати. Дискретизацијом функције расподеле, бесконачни број праваца своди се на ограничен број од укупно m праваца, који су дефинисани решетком. Под решетком се подразумева начин дискретизације простора, али се уједно дефинишу и правци којима се молекули

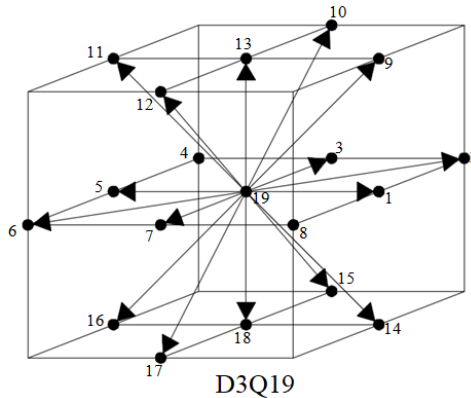
могу кретати, односно дуж којих се врши пропација, док се у чворовима решетке обавља процес сударања. Неки од могућих типова решетке приказани су на сликама 5, 6 и 7.



Слика 5. Једнодимензионални типови решетки



Слика 6. Двoдимензионални типови решетки



Слика 7. Трoдимензионални тип решетке

Решетке се обележавају ознаком $D_n Q_m$, при чему се са n обележава димензија, а са m број могућих праваца, односно број локалних брзина (слика 7).

Након дискретизације функција расподеле, једначине (21) и (22) добијају следећи облик:

$$\sum_{\alpha} f_{\alpha}(x, t) = \rho(x, t), \tag{25}$$

$$\sum_{\alpha} e_{\alpha} f_{\alpha}(x, t) = \rho u(x, t). \quad (26)$$

Ако се изједначи лева стране једначине (23) са једначином (24), а затим изврши дискретизација по времену, добија се основни облик летис Болцман једначине:

$$f_{\alpha}(x + e_{\alpha} \Delta t, t + \Delta t) - f_{\alpha}(x, t) = -\frac{\Delta t}{\tau} (f_{\alpha}(x, t) - f_{\alpha}^{eq}(x, t)). \quad (27)$$

Ако на флуид делује и нека спољашња сила F_i у правцу i , и Δt представи преко коефицијента τ , једначина (27) добија свој коначни облик:

$$f_{\alpha}(x + e_{\alpha} \Delta t, t + \Delta t) - f_{\alpha}(x, t) = -\frac{1}{\tau} (f_{\alpha}(x, t) - f_{\alpha}^{eq}(x, t)) + \frac{\Delta t}{N_{\alpha} e^2} e_{\alpha i} F_i(x, t), \quad (28)$$

где је са N_{α} означена константа која зависи од типа решетке, а добија се по изразу:

$$N_{\alpha} = \frac{1}{e^2} \sum_{\alpha} e_{\alpha i} e_{\alpha i}. \quad (29)$$

С обзиром да су предмет овог истраживања дводимензионални модели, за потребе формирања модела примениће се квадратна решетка са девет локалних брзина, односно D2Q9 модел. За такав вид решетке вектор локалних брзина e_{α} износи:

$$e_{\alpha} = \begin{cases} (0,0), & \alpha = 9, \\ (\pm e_{\alpha}, 0), & \alpha = 1, 5, \\ (0, \pm e_{\alpha}), & \alpha = 3, 7, \\ (\pm e_{\alpha}, \pm e_{\alpha}), & \alpha = 2, 4, 6, 8. \end{cases} \quad (30)$$

Основни облик летис Болцман једначине (ЛБЈ), који се често назива и БГК (Батнагар-Грос-Крук) или СРТ (single-relaxation-time) модел, је због своје једноставности најпопуларнији вид ЛБЈ. Међутим, управо његова једноставност представља разлог због којег се БГК-ЛБМ не може применити за неке комплексније проблеме. Велики

Рејнолдсови бројеви узрок су нумеричке нестабилности и смањене тачности. Како би се повећала стабилност ЛБМ, развијени су комплекснији облици ЛБЈ: ЛБМ са два коефицијента τ (two-relaxation-time) (ТРТ-ЛБМ) [25] и са више коефицијената τ (multi-relaxation-time) (МРТ-ЛБМ) [20], [83].

Да би се успоставила веза између летис Болцман једначине и диференцијалних једначина које се решавају, користи се тзв. Чепмен-Енског поступак [28], [41]. Овим поступком се доказује да летис Болцман једначина, са предложеном равнотежном функцијом и усвојеним типом решетке, може успешно репродуковати парцијалне диференцијалне једначине које се решавају. Овај поступак је детаљно објашњен у поглављима 3.3 и 3.4.

3.2.1. Летис Болцман метода са више коефицијената τ (multi-relaxation-time)

Будући да је предмет овог истраживања моделирање природних водотока, код којих неправилна геометрија, компликована морфологија и константна промена хидролошких услова, проузрокују изузетно компликоване услове течења и намећу велике Рејнолдсове бројеве, моделирање оваквих проблема захтева коришћење софистициранијих облика ЛБЈ. Из тог разлога ће се модел у овире овог истраживања формирати применом МРТ-ЛБМ [15]. Основна идеја МРТ-ЛБМ јесте увођење трансформационе матрице чиме се ЛБЈ не разматра више у домену простор - брзина већ у домену простор - количина кретања, односно разматра се промена количине кретања у систему. Овако формирани модели, иако су компликованији и захтевају дуже време прорачуна, задржавају једноставност ЛБМ, а значајно повећавају стабилност и тачност модела.

Основни облик МРТ-ЛБ једначине гласи:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{e}_\alpha \Delta t, t + \Delta t) - \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = -\mathbf{M}^{-1} \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{m}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{m}^{eq}(\mathbf{x}, t)) + \mathbf{F} \Delta t, \quad (31)$$

где је: $\mathbf{f} = [f_1, f_2, \dots, f_9]^T$ транспонована матрица матрице функције расподеле, \mathbf{m} и \mathbf{m}^{eq} представљају векторе количине кретања, $\mathbf{m} = \mathbf{M}\mathbf{f}$ и $\mathbf{m}^{eq} = \mathbf{M}\mathbf{f}^{eq}$, матрица судара $\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{M}\mathbf{S}\mathbf{M}^{-1}$ представља дијагоналну матрицу, $\hat{\mathbf{S}} = \text{diag}(s_1, s_2, \dots, s_9)$, док је матрица трансформације \mathbf{M} дата изразом [40]:

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 2 & -1 & 2 & -1 & 2 & -4 \\ -2 & 1 & -2 & 1 & -2 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (32)$$

3.2.2. Гранични услови

Чврсте границе

Прорачун непознатих величина на границама се код ЛБМ своди на прорачун непознатих функција расподела. Два су основна типа граничних услова који се користе на чврстим границама: „bounce-back“ и „elastic-collision“ [93], [87].

Идеја „bounce-back“ граничног услова је да се функције расподеле које излазе из рачунског домена одбијају од границе и враћају у флуид под истим углом, односно, за пример хоризонталне границе где су непознате f_2, f_3 и f_4 , са слике 8, следи:

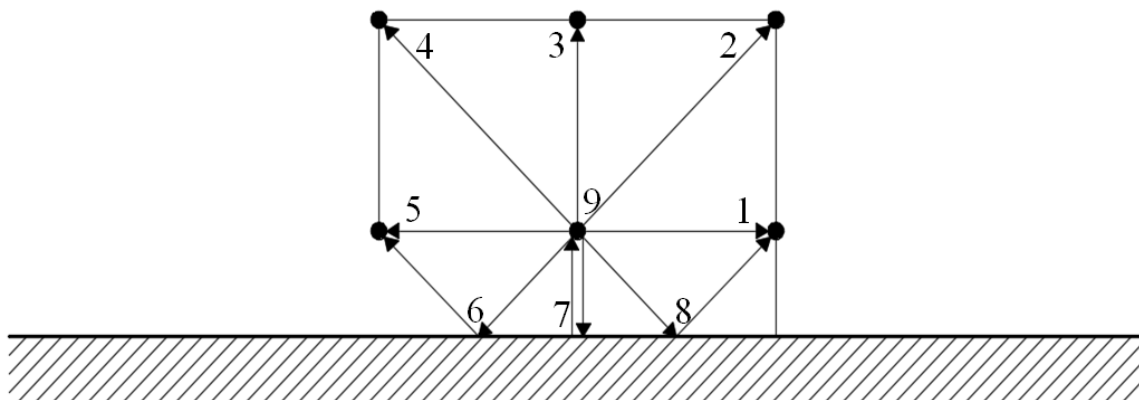
$$f_2 = f_6; \quad f_3 = f_7; \quad f_4 = f_8. \quad (33)$$

Овако дефинисан гранични услов, познат и као „no-slip“, значио би да је брзина из саму границу једнака нули (слика 9, дијаграм лево).

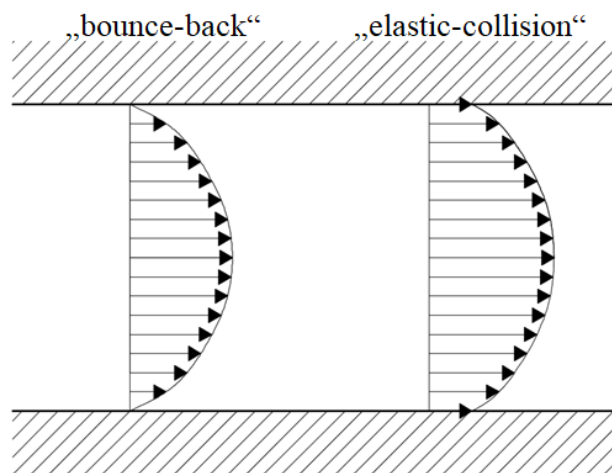
Идеја „elastic-collision“ граничног услова је да се непознате функције расподеле одбијају од границе под одређеним углом, за пример са слике 8, следи:

$$f_2 = f_8; \quad f_3 = f_7; \quad f_4 = f_6 \quad (34)$$

На тај начин задовољен је услов да брзина на границама није једнака нули (слика 9, дијаграм десно), познато и као „slip“ гранични услов.



Слика 8. Скица за одређивање функција расподеле на чврстој граници



Слика 9. Скица брзине на границама у зависности од примењеног граничног услова

У оба случаја процедура дефинисања граничних услова је веома једноставна, а оно што је посебно битно је да су на тај начин задовољени и услови одржања масе и количине кретања.

Узводни и низводни гранични услов

Узводни и низводни гранични услов формирани су ослањајући се на радове [48], [93]. Задавање непознатих функција расподела на узводној и низводној граници показаће се на примеру вертикалних граница, док се за друге примере користи исти принцип.

На узводној граници познат је проток Q . Познавајући проток и изглед попречног пресека, може се успоставити веза између брзина и нивоа воде. Примењујући услове који морају бити испуњени, дефинисани изразима (25) и (26), потребно је добити дубину на

основу познате брзине и познатих функција расподела. Како су за пример приказан на слици 10, познате функције расподела на улазној граници f_3, f_4, f_5, f_6, f_7 и f_9 , на основу јед. (25) и (26) долази се до израза за прорачун дубине и непознатих функција расподеле f_1, f_2 и f_8 :

$$h = \frac{1}{(1-u)/e} (f_3 + f_7 + f_9) + 2(f_4 + f_5 + f_6), \quad (35)$$

$$f_1 = f_5 + 2 \frac{uh}{3e}, \quad (36)$$

$$f_2 = \frac{uh}{2e} + \frac{vh}{2e} + 0.5(-f_1 - f_3 + f_5 + f_7) + f_6, \quad (37)$$

$$f_8 = \frac{uh}{2e} - \frac{vh}{2e} + 0.5(-f_1 + f_3 + f_5 - f_7) + f_4. \quad (38)$$

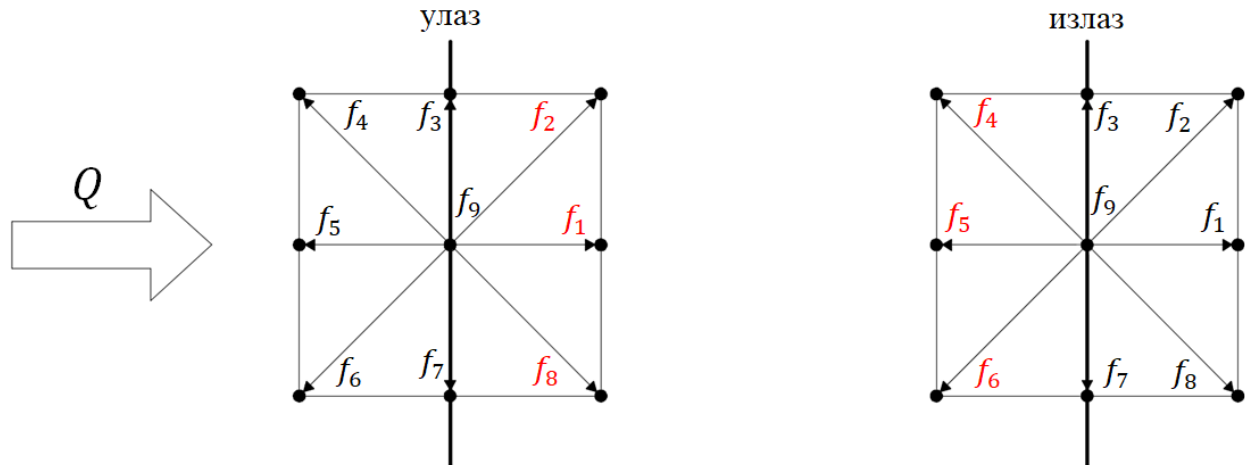
На низводној граници најчешће се као гранични услов користи измерен ниво воденог огледала. Познавајући ниво, односно дубину, потребно је одредити брзину и непознате функције расподеле. За пример вертикалне границе, приказан на слици 10, познате функције расподеле су f_1, f_2, f_3, f_7, f_8 и f_9 , а потребно је одредити непознате f_4, f_5 и f_6 . Као и за случај улазне границе, на основу јед. (25) и (26) добијају се непознате:

$$u = -e + \left(\frac{e}{h_{niz}} \right) (f_3 + f_7 + f_9 + 2(f_1 + f_2 + f_8)), \quad (39)$$

$$f_5 = f_1 - 2 \frac{uh_{niz}}{3e}, \quad (40)$$

$$f_4 = -\frac{uh_{niz}}{2e} + \frac{vh_{niz}}{2e} + 0.5(f_1 - f_3 - f_5 + f_7) + f_2, \quad (41)$$

$$f_6 = -\frac{uh_{niz}}{2e} - \frac{vh_{niz}}{2e} + 0.5(f_1 + f_3 - f_5 - f_7) + f_8, \quad (42)$$



Слика 10. Познате и непознате функције расподеле на узводној и низводној граници

3.3. Математичка формулација ЛБМ за равanske једначине течења и адвективно – дифузну једначину

У овом поглављу даће се преглед познате математичке формулације једначина осредњених по дубини тока и адвективно – дифузне једначине, применом ЛБМ.

3.3.1. Примена летис Болцман методе на једначине течења осредњене по дубини тока

Решавање парцијалних диференцијалних једначина летис Болцман методом се своди на дефинисање равнотежне функције и успостављање везе између функције густине расподеле и тражених величина.

Зоу [86] је први дефинисао равнотежну функцију расподеле за једначине течења осредњене по дубини тока, јед. (1) и (2) на следећи начин:

$$f_{\alpha}^{eq} = \begin{cases} h - \frac{5gh^2}{6e^2} - \frac{2h}{3e^2}u_iu_i, & \alpha = 9, \\ \frac{gh^2}{6e^2} + \frac{h}{3e^2}e_{\alpha i}u_i + \frac{h}{2e^4}e_{\alpha i}e_{\alpha j}u_iu_j - \frac{h}{6e^2}u_iu_i, & \alpha = 1,3,5,7, \\ \frac{gh^2}{24e^2} + \frac{h}{12e^2}e_{\alpha i}u_i + \frac{h}{8e^4}e_{\alpha i}e_{\alpha j}u_iu_j - \frac{h}{24e^2}u_iu_i, & \alpha = 2,4,6,8, \end{cases} \quad (43)$$

при чему локална дистрибуција расподеле мора да задовољи следеће услове:

$$\sum_{\alpha} f_{\alpha}^{eq}(x, t) = h(x, t), \quad (44)$$

$$\sum_{\alpha} e_{\alpha i} f_{\alpha}^{eq}(x, t) = h(x, t)u_i(x, t), \quad (45)$$

$$\sum_{\alpha} e_{\alpha i}e_{\alpha j} f_{\alpha}^{eq}(x, t) = \frac{1}{2}gh^2(x, t)\delta_{i,j} + h(x, t)u_i(x, t)u_j(x, t), \quad (46)$$

где је са $\delta_{i,j}$ означена Кронекерова константа:

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases} \quad (47)$$

Члан спољашње силе једначине (2) садржи први извод нагиба дна. Ако би се нагиб дна решавао тако што би се тражио извод нагиба дуж сваког правца изабране решетке, као што је дефинисано једначином (28), добила би се неконзистентна једначина, која није сагласна са основним принципима летис Болцман методе. Како би се решио тај проблем, тј. како би се члан спољашње силе који обухвата нагиб дна $gh \frac{\partial z_d}{\partial x_i}$, представио на правилан начин, Зоу [88] представља унапређен облик летис Болцман једначине. Он је предложио да се нагиб дна имплементира директно у ЛБЈ, чиме је добијен модификован облик ЛБЈ:

$$f_\alpha(x + e_\alpha \Delta t, t + \Delta t) - f_\alpha(x, t) = -\frac{1}{\tau} (f_\alpha(x, t) - f_\alpha^{eq}(x, t)) - \chi_\alpha + Z_\alpha \Delta t, \quad (48)$$

при чему је нагиб дна представљен чланом χ_α , у зависности од правца α , на следећи начин:

$$\chi_\alpha = \begin{cases} \frac{g\bar{h}}{2e_x^2} [Z_d(x + e_\alpha \Delta t) - Z_d(x)], & \alpha = 1,5, \\ \frac{g\bar{h}}{2e_y^2} [Z_d(x + e_\alpha \Delta t) - Z_d(x)], & \alpha = 3,7, \\ 0, & \alpha = 2, 4, 6, 8, 9, \end{cases} \quad (49)$$

где је са \bar{h} означена просечна дубина између суседних тачака, дефинисана на следећи начин:

$$\bar{h} = 0.5(h(x + e_\alpha \Delta t) - h(x, t)). \quad (50)$$

Члан спољашње силе формулисан је у функцији правца α , следећим изразом:

$$Z_\alpha = \begin{cases} 0, & \alpha = 9, \\ \frac{F_x}{6e_{ax}}, & \alpha = 1,5, \\ \frac{F_y}{6e_{ay}}, & \alpha = 3,7, \\ \frac{F_y}{6e_{ai}}, & \alpha = 2, 4, 6, 8, 9. \end{cases} \quad (51)$$

У наставку ће се, користећи поступак Чепмен-Енског, дати доказ да једначине (1) и (2) могу бити репродуковане користећи ЛБЈ. Претпоставља се да је Δt јако мало и једнако ε , тако да се ЛБЈ, јед. (48) може написати у следећем облику:

$$\begin{aligned} f_\alpha(x + e_\alpha \varepsilon, t + \varepsilon) - f_\alpha(x, t) \\ = -\frac{1}{\tau} (f_\alpha(x, t) - f_\alpha^{eq}(x, t)) - \frac{g\bar{h}}{6e^2} [Z_d(x + e_\alpha \varepsilon) - Z_d(x)] + Z_\alpha \varepsilon. \end{aligned} \quad (52)$$

Лева страна једначине (52) развиће се у Тејлоров ред у околини тачке (x, t) :

$$\begin{aligned} f_\alpha(x + e_\alpha \varepsilon, t + \varepsilon) - f_\alpha(x, t) \\ = \varepsilon \left(\frac{\partial}{\partial t} + e_{\alpha i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) f_\alpha + \frac{\varepsilon^2}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + e_{\alpha i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2 f_\alpha + O(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (53)$$

Чепмен – Енског поступак предвиђа да се функција расподеле може развити и око локалне равнотежне функције на следећи начин:

$$f_\alpha = f_\alpha^{(0)} + \varepsilon f_\alpha^{(1)} + \varepsilon^2 f_\alpha^{(2)} + O(\varepsilon^3). \quad (54)$$

Други члан са десне стране једначине се такође може развити у Тејлоров ред:

$$\frac{g}{6e^2} \left[h + \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\partial h}{\partial t} + e_{\alpha j} \frac{\partial Z_d}{\partial x_j} \right) \right] \left(\varepsilon e_{\alpha j} \frac{\partial Z_d}{\partial x_j} + \frac{\varepsilon^2}{2} e_{\alpha i} e_{\alpha j} \frac{\partial^2 Z_d}{\partial x_i \partial x_j} \right) + O(\varepsilon^3). \quad (55)$$

Члан спољашње силе F_j , апроксимираће се централном шемом:

$$F_j = F_j \left(x + \frac{1}{2} e_\alpha \varepsilon, t + \frac{1}{2} \varepsilon \right), \quad (56)$$

а затим ће се, такође развити у Тејлоров ред:

$$F_j \left(x + \frac{1}{2} e_\alpha \varepsilon, t + \frac{1}{2} \varepsilon \right) = F_j(x, t) + \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\partial F_j}{\partial t} + e_{\alpha i} \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \right) + O(\varepsilon^2). \quad (57)$$

Заменом једначина (53), (54), (55) и (57) у једначину (52) добија се:

$$\begin{aligned}
& \varepsilon \left(\frac{\partial}{\partial t} + e_{\alpha i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \left(f_{\alpha}^{(0)} + \varepsilon f_{\alpha}^{(1)} + \varepsilon^2 f_{\alpha}^{(2)} \right) \\
& + \frac{\varepsilon^2}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + e_{\alpha i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2 \left(f_{\alpha}^{(0)} + \varepsilon f_{\alpha}^{(1)} + \varepsilon^2 f_{\alpha}^{(2)} \right) = \\
& = -\frac{1}{\tau} \left(f_{\alpha}^{(0)} + \varepsilon f_{\alpha}^{(1)} + \varepsilon^2 f_{\alpha}^{(2)} - f_{\alpha}^{eq} \right) \\
& + \frac{g}{6e^2} \left[h + \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\partial h}{\partial t} + e_{\alpha j} \frac{\partial Z_d}{\partial x_j} \right) \right] \left(\varepsilon e_{\alpha j} \frac{\partial Z_d}{\partial x_j} + \frac{\varepsilon^2}{2} e_{\alpha i} e_{\alpha j} \frac{\partial^2 Z_d}{\partial x_i \partial x_j} \right) \\
& + F_j(x, t) + \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\partial F_j}{\partial t} + e_{\alpha i} \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \right).
\end{aligned} \tag{58}$$

Сада ће се за сваки степен члана ε издвојити сви чланови, тако да се за једначину реда ε^0 добија:

$$f_{\alpha}^{(0)} = f_{\alpha}^{eq}, \tag{59}$$

за једначину реда ε^1 :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + e_{\alpha j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) f_{\alpha}^{(1)} = -\frac{f_{\alpha}^{(1)}}{\tau} - \frac{g h e_{\alpha j}}{6e^2} \frac{\partial Z_d}{\partial x_j} + e_{\alpha j} \frac{\partial F_j}{6e^2}, \tag{60}$$

за једначину реда ε^2 :

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial}{\partial t} + e_{\alpha j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) f_{\alpha}^{(2)} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + e_{\alpha j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^2 f_{\alpha}^{(1)} \\
& = -\frac{f_{\alpha}^{(2)}}{\tau} - \frac{g e_{\alpha j}}{12e^2} \left(\frac{\partial h}{\partial t} + e_{\alpha i} \frac{\partial h}{\partial x_i} \right) \frac{\partial Z_d}{\partial x_j} - \frac{g h e_{\alpha i} e_{\alpha j}}{12e^2} \frac{\partial^2 Z_d}{\partial x_i \partial x_j} \\
& + \frac{e_{\alpha j}}{12e^2} \left(\frac{\partial F_j}{\partial t} + e_{\alpha i} \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \right).
\end{aligned} \tag{61}$$

Заменом једначине (60) у (61) и применом услова $\sum_{\alpha} f_{\alpha}^{(n)} = 0$ и $\sum_{\alpha} e_{\alpha} f_{\alpha}^{(n)} = 0$, за $n \geq 1$ добија се:

$$\left(1 - \frac{1}{2\tau}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + e_{\alpha j} \frac{\partial}{\partial x_j}\right) f_{\alpha}^{(1)} = -\frac{f_{\alpha}^{(2)}}{\tau}. \quad (62)$$

Комбинацијом израза (60) и (62) у форми $\sum_{\alpha}((60)+\varepsilon(62))$, уз примену претходно наведених услова, добија се:

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{\alpha} f_{\alpha}^{(0)} + \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{\alpha} e_{\alpha j} f_{\alpha}^{(0)} = 0. \quad (63)$$

Заменом израза (44) и (45) у једначину (63), долази се до једначине континуитета (1).

Ако се исти изрази комбинују у форми $\sum_{\alpha} e_{\alpha}((60)+\varepsilon(62))$, добија се:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{\alpha} e_{\alpha i} f_{\alpha}^{(0)} + \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{\alpha} e_{\alpha i} e_{\alpha j} f_{\alpha}^{(0)} + \varepsilon \left(1 - \frac{1}{2\tau}\right) \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{\alpha} e_{\alpha i} e_{\alpha j} f_{\alpha}^{(1)} = \\ = -gh \frac{\partial Z_d}{\partial x_i} + F_i \end{aligned} \quad (64)$$

Користећи услове (44), (45), (46), израз (64) постаје једначина одржања количине кретања (2), при чему је:

$$\tau = \frac{3\nu}{e^2 \Delta t} + \frac{1}{2}, \quad (65)$$

где је ν коефицијент кинематске вискозности.

Множењем матрице (32) и равнотежне функције (43), Зоу [89] дефинише вектор количине кретања, јед. (66), (67), чиме се дефинише МРТ-ЛБМ једначина (31) за решавање једначина течења (1) и (2):

$$m^{eq} = \left[e^{eq}, e^{2eq}, \frac{hu_x}{e_x}, q_x^{eq}, \frac{hu_y}{e_y}, q_y^{eq}, p_{xx}^{eq}, p_{xy}^{eq}, h \right]^T, \quad (66)$$

$$\begin{aligned}
e^{eq} &= -4h + \left(\frac{3gh}{2e_x^2} + 3\frac{u_x^2}{e_x^2} + \frac{3gh}{2e_y^2} + 3\frac{u_y^2}{e_y^2} \right) h, \\
e^{2eq} &= 4h + \left(3\frac{gh}{e_x^2} + 6\frac{u_x^2}{e_x^2} + 3\frac{gh}{e_y^2} + 6\frac{u_y^2}{e_y^2} \right) h, \\
q_x^{eq} &= -\frac{hu_x}{e_x}, \\
q_y^{eq} &= -\frac{hu_y}{e_y}, \\
p_{xx}^{eq} &= \left(\frac{1gh}{2e_x^2} + \frac{u_x^2}{e_x^2} - \frac{1gh}{2e_y^2} - \frac{u_y^2}{e_y^2} \right) h, \\
p_{xy}^{eq} &= \frac{hu_x u_y}{e_x e_y}.
\end{aligned} \tag{67}$$

3.3.2. Примена летис Болцман методе на адвективно – дифузну једначину

Као што је већ објашњено у поглављу 3.1.2, кретање суспендованог наноса се описује адвективно – дифузном једначином, са чланом размене наносног материјала између воде и дна, јед. (3). Имајући у виду да је једначина (3) изведена посебно за сваки гранулометријски интервал (к), за њено решавање применом ЛБМ, потребно је и ЛБЈ разложити на исти број интервала.

У складу са једначином (28), ЛБЈ се може написати за сваки гранулометријски интервал (к) на следећи начин:

$$\left(r_\alpha(x + e_\alpha \Delta t, t + \Delta t) \right)_k = \left(r_\alpha(x, t) \right)_k - \frac{1}{\tau_c} \left(\left(r_\alpha(x, t) \right)_k - \left(r_\alpha^{eq}(x, t) \right)_k \right) + \Delta t \frac{S_k}{b}, \tag{68}$$

где је: r_α и r_α^{eq} функција расподеле и равнотежна функција расподеле, респективно, τ_c време релаксације, b број локалних брзина изабране решетке, у случају D2Q9 мреже $b = 9$, S_k масени члан.

Зоу [91] је дефинисао израз за равнотежну функцију r_α^{eq} , који за један гранулометријски интервал (к) гласи:

$$(r_{\alpha}^{eq})_k = \begin{cases} \left(1 - \frac{\lambda_{yy}e_x^2 + \lambda_{xx}e_y^2}{e_x e_y}\right) h\rho_m C_k, & \alpha = 9, \\ \left(\frac{1}{2} \frac{e_y}{e_x} \lambda_{xx} + \frac{u_x}{4e_{\alpha x}}\right) h\rho_m C_k, & \alpha = 1, 5, \\ \left(\frac{1}{2} \frac{e_x}{e_y} \lambda_{yy} + \frac{u_y}{4e_{\alpha y}}\right) h\rho_m C_k, & \alpha = 3, 7, \\ \left(\frac{1}{4} \frac{e_x e_y}{e_{\alpha x} e_{\alpha y}} \lambda_{xy} + \frac{u_i}{4e_{\alpha i}}\right) h\rho_m C_k, & \alpha = 2, 4, 6, 8, \end{cases} \quad (69)$$

при чему је λ_{ij} бездимензионални коефицијент који зависи од дифузије D_{ij} :

$$\lambda_{ij} = \frac{D_{ij}}{\Delta t \left(\tau_c - \frac{1}{2}\right) e_x e_y}. \quad (70)$$

Равнотежна функција r_{α}^{eq} , мора да задовољи следеће услове:

$$\sum_{\alpha} (r_{\alpha}^{eq})_k = C_k h\rho_m, \quad (71)$$

$$\sum_{\alpha} e_{\alpha i} (r_{\alpha}^{eq})_k = u_i C_k h\rho_m, \quad (72)$$

$$\sum_{\alpha} e_{\alpha i} e_{\alpha j} (r_{\alpha}^{eq})_k = \lambda_{ij} e_x e_y C_k h\rho_m. \quad (73)$$

Концентрација сваке фракције, C_k , рачуна се у складу са једначином (71):

$$C_k = \frac{1}{h\rho_m} \sum_{\alpha} (r_{\alpha}^{eq})_k. \quad (74)$$

Како би доказао да једначина (74) задовољава једначину (3), Зоу [91] је применио анализу Чепмен-Енског. У наставку ће се приказати анализа за један гранулометријски интервал (k), па ће се због краћег и једноставнијег записа уместо $(r_{\alpha})_k$, користити запис r_{α} .

Најпре ће се функција r_{α} развити у Тејлоров ред:

$$r_\alpha(x + e_\alpha \varepsilon, t + \varepsilon) - r_\alpha(x, t) = \varepsilon \left(\frac{\partial}{\partial t} + e_{\alpha i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) r_\alpha + \frac{\varepsilon^2}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + e_{\alpha i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2 r_\alpha + O(\varepsilon^3). \quad (75)$$

Према Чепмен-Енског анализи, функција расподеле r_α се може развити и око равнотежне функције:

$$r_\alpha = r_\alpha^{(0)} + \varepsilon r_\alpha^{(1)} + \varepsilon^2 r_\alpha^{(2)} + O(\varepsilon^3). \quad (76)$$

Члан S_k апроксимираће се централном шемом, а затим ће се развити у Тејлоров ред:

$$S_k \left(x + \frac{1}{2} e_\alpha \varepsilon, t + \frac{1}{2} \varepsilon \right) = S_k(x, t) + \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\partial S_k}{\partial t} + e_{\alpha i} \frac{\partial S_k}{\partial x_i} \right) + O(\varepsilon^2). \quad (77)$$

Заменом израза (75), (76) и (77) у једначину (68), и издвајањем нултог степена ε^0 добија се:

$$r_\alpha^{(0)} = r_\alpha^{eq}, \quad (78)$$

издвајањем првог степена ε^1 :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + e_{\alpha i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) r_\alpha^{(0)} = -\frac{r_\alpha^{(1)}}{\tau_c} + \frac{S_k}{b}, \quad (79)$$

и издвајањем другог степена ε^2 , добија се:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + e_{\alpha i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) r_\alpha^{(1)} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + e_{\alpha i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2 r_\alpha^{(0)} = -\frac{r_\alpha^{(2)}}{\tau_c} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + e_{\alpha i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \frac{S_k}{b}. \quad (80)$$

Заменом једначине (79) у горњи израз, добија се:

$$\left(1 - \frac{1}{2\tau_c} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + e_{\alpha i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) r_\alpha^{(1)} = -\frac{r_\alpha^{(2)}}{\tau_c}. \quad (81)$$

Из једначине ((79)+ ε (81)) добија се израз:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + e_{\alpha i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) r_\alpha^{(0)} + \varepsilon \left(1 - \frac{1}{2\tau_c} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + e_{\alpha i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) r_\alpha^{(1)} = \frac{S_k}{b} - \frac{1}{\tau_c} (l_\alpha^{(1)} + \varepsilon l_\alpha^{(2)}). \quad (82)$$

Сумирајући једначину (82) за све вредности α , добија се:

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{\alpha} r_{\alpha}^{(0)} + \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{\alpha} e_{\alpha i} r_{\alpha}^{(0)} + \varepsilon \left(1 - \frac{1}{2\tau_c}\right) \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{\alpha} e_{\alpha i} r_{\alpha}^{(1)} = S_k \quad (83)$$

Заменом једначине (79) у једначину (83), следи:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{\alpha} r_{\alpha}^{(0)} + \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{\alpha} e_{\alpha i} r_{\alpha}^{(0)} &= \varepsilon \left(\tau_c - \frac{1}{2}\right) \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{\alpha} e_{\alpha i} e_{\alpha j} \frac{\partial r_{\alpha}^{(0)}}{\partial x_j} + S_k \\ &+ \varepsilon \left(\tau_c - \frac{1}{2}\right) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{\alpha} e_{\alpha i} r_{\alpha}^{(0)} \end{aligned} \quad (84)$$

Након што се чланови у јед. (84) замене условима дефинисаним у јед. (72), (73), (74) добија се једначина одржања масе суспендованог наноса, јед. (3), што је и циљ спроведене анализе.

3.4. Нова предложена математичка формулација за решавање наносних процеса применом ЛБМ

У овом поглављу дата је нова предложена математичка формулација за решавање једначине одржања масе активног слоја и глобалне једначине одржања масе наноса на дну, применом ЛБМ. Дате су предложене равнотежне функције и доказ да се једначине могу репродуковати применом ЛБМ.

3.4.1. Нова предложена математичка формулација за решавање једначине одржања масе активног слоја

Летис Болцман једначина за D2Q9 СРТ модел која одговара једначини одржања масе активног слоја, јед. (12), гласи:

$$\begin{aligned} (g_{\alpha}(x + e_{\alpha} \Delta t, t + \Delta t))_k - (g_{\alpha}(x, t))_k \\ = -\frac{1}{\tau_{al}} \left((g_{\alpha}(x, t))_k - (g_{\alpha}^{eq}(x, t))_k \right) + \Delta t \frac{U_k}{b}, \end{aligned} \quad (85)$$

где је: $(g_\alpha)_k$ и $(g_\alpha^{eq})_k$ функција расподеле и равнотежна функција расподеле, респективно, за сваки гранулометријски интервал (k), τ_{al} време релаксације, U_k масени члан.

Равнотежна функција расподеле $(g_\alpha^{eq})_k$ мора задовољити следеће релације:

$$\sum_{\alpha} (g_\alpha^{eq})_k = \rho_s(1-p)\beta_k E_m, \quad (86)$$

$$\sum_{\alpha} e_{\alpha i} (g_\alpha^{eq})_k = \phi_{k i}. \quad (87)$$

У складу са једначинама (85), (86) и (87), предложена је функција $(g_\alpha^{eq})_k$:

$$(g_\alpha^{eq})_k = \begin{cases} \rho_s(1-p)\beta_k E_m, & \alpha = 9, \\ \frac{1}{4} \frac{\phi_{k i}}{e_{\alpha i}}, & \alpha = 1, 3, 5, 7, \\ \frac{1}{8} \frac{\phi_{k i}}{e_{\alpha i}}, & \alpha = 2, 4, 6, 8. \end{cases} \quad (88)$$

Масени члан је у складу са јед. (12) приказан на следећи начин:

$$U_k = D_k - E_k + S_{p k}. \quad (89)$$

Како би се развила јед. (12) из ЛБЈ, јед. (85), примениће се, као и у претходним случајевима, анализа Чепмен-Енског, која ће се спровести за један гранулометријски интервал (k). Лева страна јед. (85) развиће се у Тејлоров ред у времену и простору, у околини тачке (x, t) и претпоставиће се да је Δt јако мало и једнако ε :

$$\begin{aligned} \varepsilon \left(\frac{\partial}{\partial t} + e_{\alpha i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) g_\alpha + \frac{\varepsilon^2}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + e_{\alpha i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2 g_\alpha + O(\varepsilon^3) \\ = -\frac{1}{\tau_{al}} \left(g_\alpha(x, t) - g_\alpha^{eq}(x, t) \right) + \Delta t \frac{U_k}{b}, \end{aligned} \quad (90)$$

а затим ће се функција расподеле g_α развити и око равнотежне функције:

$$g_\alpha = g_\alpha^{(0)} + \varepsilon g_\alpha^{(1)} + \varepsilon^2 g_\alpha^{(2)} + O(\varepsilon^3). \quad (91)$$

Члан U_k апроксимира се централном шемом и развиће се у Тејлоров ред:

$$U_k \left(x + \frac{1}{2} e_{\alpha} \varepsilon, t + \frac{1}{2} \varepsilon \right) = U_k(x, t) + \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + e_{\alpha i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) U_k(x, t) + O(\varepsilon^2). \quad (92)$$

Једначине (91) и (92) замениће се у јед. (90), чиме се добија:

$$\begin{aligned} & \varepsilon \left(\frac{\partial}{\partial t} + e_{\alpha i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \left(g_{\alpha}^{(0)} + \varepsilon g_{\alpha}^{(1)} + \varepsilon^2 g_{\alpha}^{(2)} \right) \\ & + \frac{\varepsilon^2}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + e_{\alpha i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2 \left(g_{\alpha}^{(0)} + \varepsilon g_{\alpha}^{(1)} + \varepsilon^2 g_{\alpha}^{(2)} \right) = \\ & = -\frac{1}{\tau_{al}} \left(g_{\alpha}^{(0)} + \varepsilon g_{\alpha}^{(1)} + \varepsilon^2 g_{\alpha}^{(2)} - g_{\alpha}^{eq} \right) \\ & + \varepsilon \left[U_k(x, t) + \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + e_{\alpha i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) U_k \right], \end{aligned} \quad (93)$$

а затим ће се издвојити чланови истог реда, тако да се за једначину реда ε^0 добија:

$$g_{\alpha}^{(0)} = g_{\alpha}^{eq}, \quad (94)$$

за јед. реда ε^1 :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + e_{\alpha i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) g_{\alpha}^{(0)} = -\frac{g_{\alpha}^{(1)}}{\tau_{al}} + \frac{U_k}{b}, \quad (95)$$

и за јед. реда ε^2 :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + e_{\alpha i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2 g_{\alpha}^{(0)} + \left(\frac{\partial}{\partial t} + e_{\alpha i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) g_{\alpha}^{(1)} = -\frac{g_{\alpha}^{(2)}}{\tau_{al}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + e_{\alpha i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \frac{U_k}{b}. \quad (96)$$

Заменом јед. (95) у (96) долази се до:

$$\left(1 - \frac{1}{2\tau_{al}} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + e_{\alpha i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) g_{\alpha}^{(1)} = -\frac{g_{\alpha}^{(2)}}{\tau_{al}}. \quad (97)$$

На основу јед. ((95)+ ε (97)) добија се:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + e_{\alpha i} \frac{\partial}{\partial x_i}\right) g_{\alpha}^{(0)} + \varepsilon \left(1 - \frac{1}{2\tau_{al}}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + e_{\alpha i} \frac{\partial}{\partial x_i}\right) g_{\alpha}^{(1)} = \frac{U_k}{b} - \frac{1}{\tau_{al}} \left(g_{\alpha}^{(1)} + \varepsilon g_{\alpha}^{(2)}\right). \quad (98)$$

Сумирајући чланове претходне једначине за све вредности α , односно $\sum_{\alpha}((95)+\varepsilon(97))$ и примењујући услове $\sum_{\alpha} g_{\alpha}^{(n)} = 0$ и $\sum_{\alpha} e_{\alpha} g_{\alpha}^{(n)} = 0$, за $n \geq 1$, добија се:

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{\alpha} g_{\alpha}^{(0)} + \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{\alpha} e_{\alpha i} g_{\alpha}^{(0)} = U_k. \quad (99)$$

Након што се чланови замене изразима (86) и (87), јасно је да претходна једначина одражава једначину одржања масе активног слоја, чиме је и доказано да се са новом дефинисаном функцијом расподеле, јед. (103), може репродуковати јед. (12), летис Болцман једначином.

3.4.2. Нова предложена математичка формулација за решавање глобалне једначине одржања масе наноса на дну

Летис Болцман једначина за D2Q9 СРТ модел која одговара глобалној једначини одржања масе наноса на дну, јед. (19), гласи:

$$l_{\alpha}(x + e_{\alpha} \Delta t, t + \Delta t) - l_{\alpha}(x, t) = -\frac{1}{\tau_{gal}} (l_{\alpha} - l_{\alpha}^{eq}) + \Delta t \frac{W}{b}, \quad (100)$$

где је: l_{α} и l_{α}^{eq} функција расподеле и равнотежна функција расподеле, респективно, τ_{al} време релаксације, W масени члан.

У складу са јед. (19), равнотежна функција мора задовољити следеће услове:

$$\sum_{\alpha} l_{\alpha}^{eq} = \rho_s (1 - p) Z_b, \quad (101)$$

$$\sum_{\alpha} e_{\alpha i} l_{\alpha}^{eq} = \sum_{k=1}^K \phi_{k i}. \quad (102)$$

Нова предложена равнотежна функција l_{α}^{eq} , која ће задовољити претходне услове формулисана је на следећи начин:

$$l_{\alpha}^{eq} = \begin{cases} \rho_s(1-p)Z_b, & \alpha = 9, \\ \frac{1}{4e_{\alpha_i}} \sum_{k=1}^K \phi_{k_i}, & \alpha = 1, 3, 5, 7, \\ \frac{1}{8e_{\alpha_i}} \sum_{k=1}^K \phi_{k_i}, & \alpha = 2, 4, 6, 8. \end{cases} \quad (103)$$

Члан масе W , је у складу са јед. (19) дефинисан као:

$$W = \sum_{k=1}^K (D_k - E_k). \quad (104)$$

Примениће се анализа Чепмен-Енског како би се показало да јед. (19) може да се репродукује летис Болцман једначином, јед. (100). Најпре ће се лева стране јед. (100) развити у Тејлоров ред, претпостављајући да је $\Delta t = \varepsilon$:

$$\begin{aligned} \varepsilon \left(\frac{\partial}{\partial t} + e_{\alpha_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) l_{\alpha} + \frac{\varepsilon^2}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + e_{\alpha_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2 l_{\alpha} + O(\varepsilon^3) \\ = -\frac{1}{\tau_{gal}} \left(l_{\alpha}(x, t) - l_{\alpha}^{eq}(x, t) \right) + \Delta t \frac{U_k}{b}, \end{aligned} \quad (105)$$

а затим ће се функција расподеле l_{α} развити и око равнотежне функције:

$$l_{\alpha} = l_{\alpha}^{(0)} + \varepsilon l_{\alpha}^{(1)} + \varepsilon^2 l_{\alpha}^{(2)} + O(\varepsilon^3). \quad (106)$$

Члан W ће се апроксимирати централном шемом и развити у Тејлоров ред:

$$W \left(x + \frac{1}{2} e_{\alpha} \varepsilon, t + \varepsilon \right) = W(x, t) + \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + e_{\alpha_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) W(x, t) + O(\varepsilon^2). \quad (107)$$

Једначине (106) и (107) замениће се у јед. (105), да би се потом издвојиле једначине истог реда, тако се за ред ε^0 добија:

$$l_{\alpha}^{(0)} = l_{\alpha}^{eq}. \quad (108)$$

Једначина реда ε^1 гласи:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + e_{\alpha i} \frac{\partial}{\partial x_i}\right) l_{\alpha}^{(0)} = -\frac{l_{\alpha}^{(1)}}{\tau_{gal}} + \frac{W}{b}, \quad (109)$$

јед. реда ε^2 :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + e_{\alpha i} \frac{\partial}{\partial x_i}\right) l_{\alpha}^{(1)} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + e_{\alpha i} \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 l_{\alpha}^{(0)} = -\frac{l_{\alpha}^{(2)}}{\tau_{gal}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + e_{\alpha i} \frac{\partial}{\partial x_i}\right) \frac{W}{b}. \quad (110)$$

Комбиновањем јед. (109) и (110) долази се до израза:

$$\left(1 - \frac{1}{2\tau_{gal}}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + e_{\alpha i} \frac{\partial}{\partial x_i}\right) l_{\alpha}^{(1)} = -\frac{l_{\alpha}^{(2)}}{\tau_{gal}}. \quad (111)$$

Из израза ((109)+ ε (111)) добија се:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + e_{\alpha i} \frac{\partial}{\partial x_i}\right) l_{\alpha}^{(0)} + \varepsilon \left(1 - \frac{1}{2\tau_{gal}}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + e_{\alpha i} \frac{\partial}{\partial x_i}\right) l_{\alpha}^{(1)} = \frac{W}{b} - \frac{1}{\tau_{gal}} \left(l_{\alpha}^{(1)} + \varepsilon l_{\alpha}^{(2)}\right). \quad (112)$$

Сумирајући претходни израз за све вредности α тј. $\sum_{\alpha} ((109)+\varepsilon(111))$ и примењујући услове $\sum_{\alpha} l_{\alpha}^{(n)} = 0$ и $\sum_{\alpha} e_{\alpha i} l_{\alpha}^{(n)} = 0$, за $n \geq 1$ добија се:

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{\alpha} l_{\alpha}^{(0)} + \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{\alpha} e_{\alpha i} l_{\alpha}^{(0)} = W. \quad (113)$$

Заменом израза (101) и (102) у јед. (113), јасно је да јед. (113) постаје глобална једначина одржања масе наноса на дну, јед. (19). Тиме је доказано да са дефинисаном функцијом расподеле, јед. (103), применом ЛБМ може успешно бити репродукована јед. (19).

4. РАЗВИЈЕНИ РАЧУНАРСКИ ПРОГРАМ

За потребе решавања математичке формулације дефинисане у претходним поглављима, формиран је модел, написан програмским језиком FORTRAN. Иако је најстарији виши програмски језик, FORTRAN је и даље водећи програмски језик у свету када је у питању прорачун великог броја математичких релација, што је карактеристично за већину нумеричких прорачуна [37], [79]. Као програмска средина коришћен је софтвер Microsoft Visual Studio. Програм је написан тако да се састоји од више мањих програма (subroutine) који су повезани главним програмом (main program). Подела на потпрограме је извршена како би математички код био читљивији и да би се лакше уочила евентуална грешка приликом читања.

Програм у оквиру овог истраживања се дели на два главна програма: први који решава струјну слику и други за прорачун наносних процеса и морфолошких промена. Најпре се прорачунавају дубине и компоненте брзина програмом MPT_ЛБМСС, да би се затим ти подаци користили у оквиру програма ЛБМ_НАНОС за прорачун наноса и деформације корита.

Пре прорачуна потребно је извршити припрему података који ће се користити као улазне вредности. Добијени подаци о котама дна корита дати су табеларно у виду координата тачака са котама дна корита (x, y, Z_{dna}) . Како свака тачка рачунске мреже захтева познавање коте дна, а добијени подаци углавном се не поклапају са рачунским тачкама, јавља се проблем на који начин пренети улазне податке на рачунску мрежу. Проблем је решен применом софтвера SMS, који функционише тако што између мерених података врши интерполацију применом методе троуглова, а затим тако интерполиране податке преноси на тачке претходно формиране рачунске мреже.

4.1. Програм за прорачун струјне слике

Блок шема на којој се заснива програм за решавање струјне слике (MPT_ЛБМСС) приказана је на слици 11. Програм се састоји од следећих потпрограма:

- геометрија – учитавање података о морфологији и геометрији (x, y, Z_{dna}) .

- улаз – унос основних улазних података: Δx , Δt , проток, низводна дубина, Манингов коефицијент храпавости, дефинисање рачунских тачака, дефинисање граничних тачака и тачака улазних и низводних граничних услова, прорачун брзина узводног граничног услова, коефицијенти матрице судара,
- почетно_стање – задавање почетног стања система, односно почетних дубина и компонената брзина,
- матрице – задавање матрица M , M^{-1} и \hat{S} ,
- вектор_локалних_брзина – прорачун вектора e_α ,
- операције_са_матрицама – прорачун матрица m , m^{eq} и $M^{-1}\hat{S}(m - m^{eq})$,
- члан_силе – прорачун спољашњих сила,
- функција_расподеле – прорачун функције расподеле на основу јед. (31),
- гранични_услови – прорачун функција расподеле на чврстим границама и узводним и низводним границама,
- непознате – прорачун непознатих величина, h , u , v ,
- равнотежна_функција_расподеле – прорачун равнотежне функције расподеле.
- излаз – запис коначних резултата,

Потпрограме: геометрија, улаз, почетно_стање, матрице и вектор_локалних_брзина, главни програм учитава само једном на почетку, док се потпрограми: операције_са_матрицама, члан_силе, функција_расподеле, гранични_услови, непознате, равнотежна_функција_расподеле и излаз, налазе у петљи. Петља је формирана тако да се заустави када је достигнуто равнотежно стање у систему или након одређеног броја временских корака. Након што се изврши прорачун и резултати забележе табеларно, даје се графички приказ резултата применом софтвера TECPLOT360 [100].

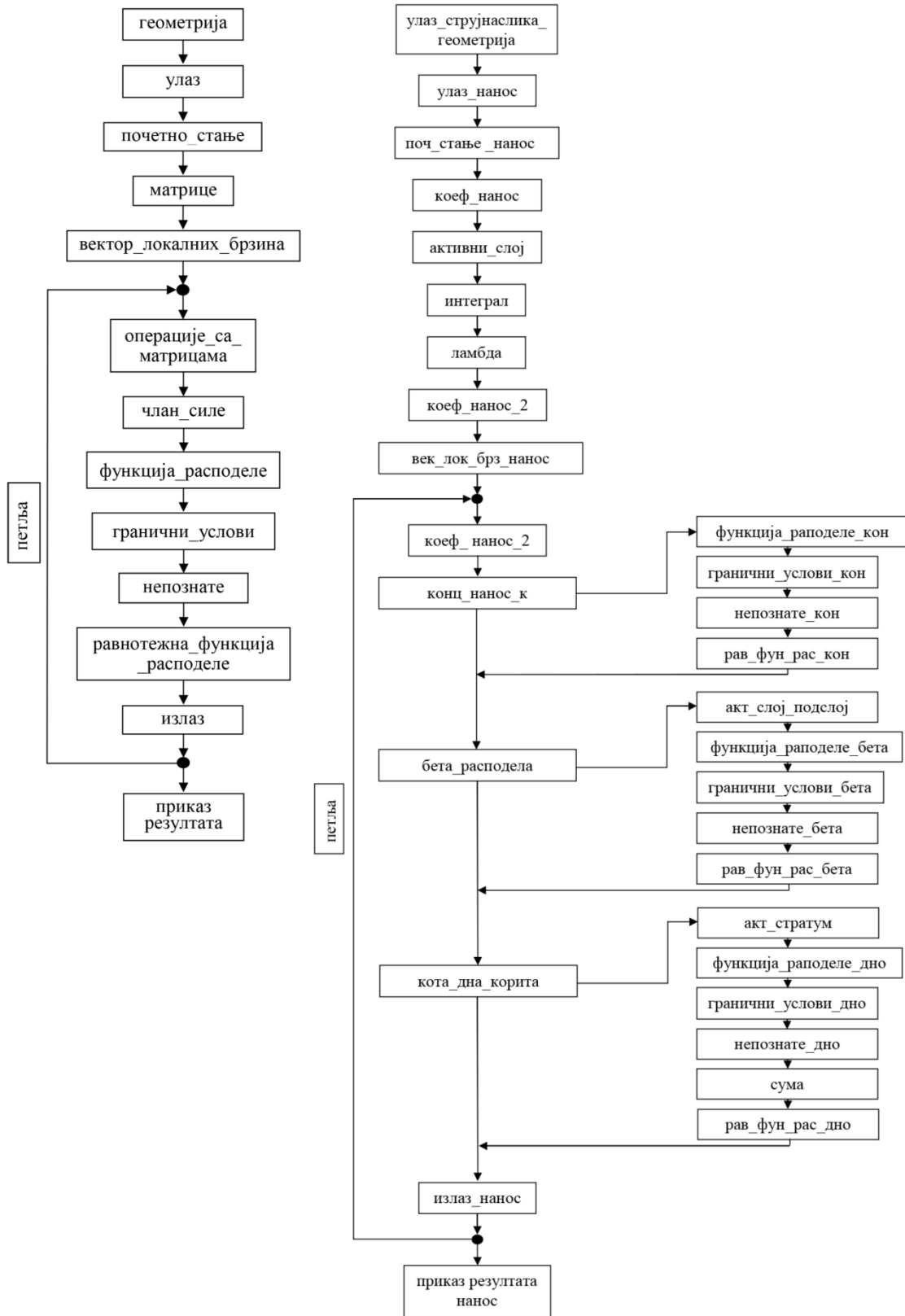
4.2. Програм за решавање наносних процеса и морфолошких промена

Након прорачуна дубина и компонената брзина приступа се решавању наносних процеса и деформације корита. Блок шема програмског кода приказана је на слици 11. Програм (ЛБМ_НАНОС) се састоји од следећих потпрограма:

- улаз_струјнаслика_геометрија – потпрограм који учитава излазне податке из програма МРТ_ЛБМСС, односно улазне податке за програм ЛБМ_НАНОС, геометрију и компоненте брзина,
- улаз_нанос – унос основних података за нанос: број гранулометријских интервала, d_k , ρ_s , c_e , d_{50} , d_{90} , κ , a , Δa ,
- поч_стање_нанос – унос почетних вредности концентрација сваке фракције C_k и почетних заступљености сваке фракције у вученом наносу β_k ,
- коеф_нанос – прорачун коефицијената за нанос који се рачунају само на почетку прорачуна: δ , d_{*k} , θ , u_{*cr} , w_{*k} , C^* , u_* , T_k , β_z , D_{Tz} , Z^* , γ_k , ζ_k , D_m ,
- активни_слој – прорачун дебљине активног слоја,
- интеграл – решавање интеграла из јед. (8),
- ламбда – прорачун коефицијента λ , јед. (70),
- коеф_нанос_2 – прорачун коефицијената наноса који се мењају у сваком временском кораку: ρ_m , ϕ_{ki} , $(C_k)_{a+\Delta a}$, $(C_k)_a$, D_k , E_k , S_k ,
- конц_нанос_к – потпрограм за прорачун концентрације суспендованог наноса сваког гранулометријског интервала (κ), који се састоји од потпрограма:
 - функција_расподеле_кон – прорачун функције расподеле за суспендовани нанос,
 - гранични_услови_кон – прорачун функција расподела на чврстим границама, узводним и низводним границама, за суспендовани нанос,
 - непознате_кон – прорачун концентрације суспендованог наноса сваке фракције,
 - рав_фун_рас_кон – прорачун равнотежне функције расподеле суспендованог наноса,
- бета_расподела – потпрограм за прорачун процентуалне заступљености фракције одређеног гранулометријског интервала у активном слоју, који се састоји од следећих потпрограма:
 - акт_слој_подслој – прорачун члана S_{p_k} у зависности од тога да ли се јавља ерозија или депоновање,

- функција_расподеле_бета – прорачун функције расподеле за одређивање заступљености вученог наноса,
- гранични_услови_бета – прорачун функција расподела на чврстим границама, узводним и низводним границама, за заступљеност вученог наноса,
- непознате_бета – прорачун заступљености вученог наноса сваке фракције,
- рав_фун_рас_бета – прорачун равнотежне функције расподеле заступљености вученог наноса,
- кота_дна_корита – потпрограм за прорачун деформације корита, који се састоји од потпрограма:
 - акт_стратум – прорачун процентуалног учешћа фракција у активном стратуму, тј. активном подслоју,
 - функција_расподеле_дно – прорачун функције расподеле за одређивање деформације корита,
 - гранични_услови_дно – прорачун функција расподела на чврстим границама, узводним и низводним границама, за деформацију корита,
 - непознате_дно – прорачун деформације корита $\Delta Z_{дно}$,
 - сума_гал – прорачун суме из јед. (19),
 - рав_фун_рас_дно – прорачун равнотежне функције расподеле деформације корита,
- излаз_нанос – запис резултата прорачуна, за сваки гранулометријски интервал у свакој тачки бележи се C_k , β_k , $\Delta Z_{дно}$ у одређеним временским интервалима,

Потпрограме: улаз_струјнаслика_геометрија, улаз_нанос, поч_стање_нанос, коеф_нанос, активни_слој, интеграл, ламбда, коеф_нанос_2 и век_лок_брз_нанос главни програм учитава само једном на почетку прорачуна, док се сви остали потпрограми налазе у петљи. Петља је формирана тако да се заустави када је достигнуто равнотежно стање у систему или након одређеног броја временских корака. Након што је прорачун извршен, резултати се бележе у потпрограму излаз_нанос, а затим се графички приказују применом софтвера TECPLOT360.



Слика 11. Блок шеме програмских кодова MRT_LBMSS (лево) и LBM_NANOS (десно)

5. НУМЕРИЧКИ ПРИМЕРИ И АНАЛИЗА РЕЗУЛТАТА

Могућности и ограничења формираног модела испитаће се на конкретним нумеричким примерима, најпре за течење воде, а затим и за наносне процесе. Тестирање модела врши се како би се проверила исправност имплементираних математичке формулације и програмског кода, као и да би се утврдиле вредности параметара у оквиру којих је модел стабилан. Верификација модела и провера тачности добијених резултата, извршиће се поређењем резултата са мереним подацима на терену и са резултатима који су добијени класичним нумеричким методама.

Прорачун струјне слике спровешће се на четири примера. Први пример је једноставни пример - канал параболичног попречног пресека са кривином од 90° . Тај пример је изабран како би се испитала валидност програмског кода и ефикасност летис Болцман методе. Други пример је природни водоток - деоница реке Дунав. Сврха овог примера је да се докаже употребљивост ЛБМ за симулацију струјне слике у природном водотоку којег карактерише компликована геометрија и морфологија. У трећем примеру анализирано је течење у деоници реке Мисури, карактеристичној по великом броју регулационих грађевина које узрокују струјање са изразитим вртложењем. У последњем примеру обухваћена је деоница реке Ачафалаја карактеристична по притокама.

Наносни процеси: суспендовани, вучени нанос и деформација корита, анализирани су за деоницу реке Дунав. За тај пример позната су мерења и подаци добијени применом МКР за дванаест гранулометријских интервала.

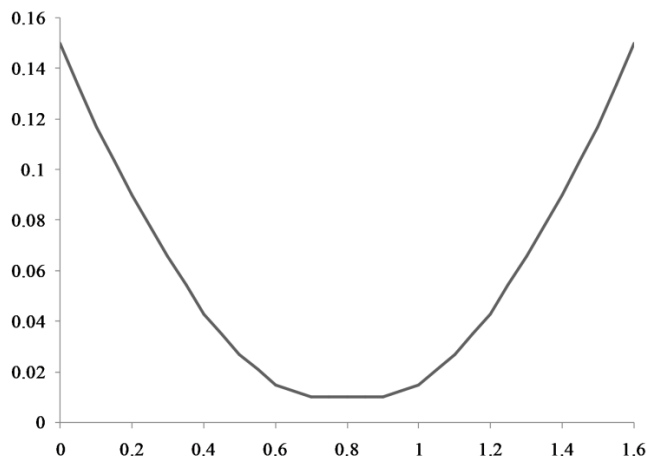
5.1. Модел струјне слике и транспорта материје за канал параболичног попречног пресека са кривином

Као први пример анализиран је канал параболичног попречног пресека са кривином од 90° . Канал је укупне дужине 27.2 m, а састоји се од два права сегмента дужина 13 m и 6.4 m и закривљеног сегмента дужине 7.8 m, радијуса 5 m. Ширина воденог огледала износи 1.6 m, а нагиб дна 0.001. Ради лакше имплементације, попречни пресек канала апроксимиран је полигоном (слика 12). Хоризонтална пројекција канала са приказом коте дна (Z_d) дата је на слици 13.

Иако је представљен као шематски пример, овако формиран канал „активира“ практично све чланове једначина течења. Закривљеност канала у хоризонталној пројекцији и промена коте дна управно на правац струјања узроковаће појаву обе компоненте брзине и члана спољашње силе, дефинисаног као нагиб дна, у оба правца x и y . Овако формиран модел омогућава да се сагледају комплетне једначине течења и да се добије увид у функционалност нумеричке методе и исправност алгоритма и математичког кода, без занемарења било ког члана једначина. Такође, овај пример ће се искористити да се покаже како програм функционише, односно како се од почетно задатог стања долази до устаљеног стања.

Прорачун струјне слике

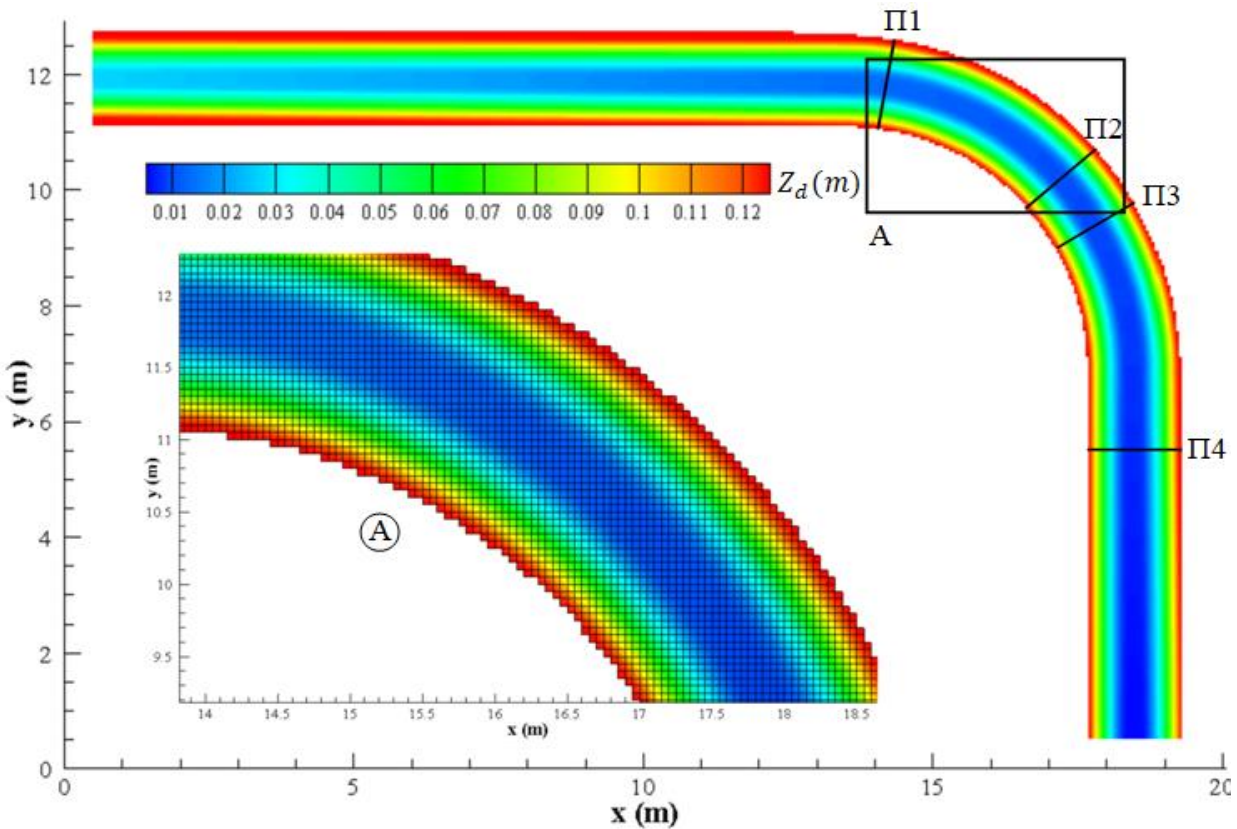
С обзиром на димензије канала, усвојена је рачунска мрежа димензија $\Delta x = \Delta y = 0.05$ m, са генерисаних 18202 рачунских тачака. Детаљ мреже приказан је на слици 13. Као улазни гранични услов коришћен је измерен проток $Q=0.054$ m³/s и ниво $Z_s=0.1685$ m, а као низводни гранични услов измерен ниво воденог огледала $Z_s=0.413$ m. С обзиром на параболични попречни пресек, који намеће да су дубине и брзине уз чврсту границу блиске нули, као гранични услов уз чврсту границу примењен је „bounce-back“ гранични услов. Почетно стање је формирано тако што је свакој рачунској тачки задата нулта брзина и ниво воде који је једнак нивоу задатом на низводном граничном услову.



Слика 12. Попречни пресек канала

Модел је калибрисан поређењем добијених резултата са експерименталним мерењима и резултатима добијеним применом МКР, приказаним у раду [7]. Калибрацијом модела,

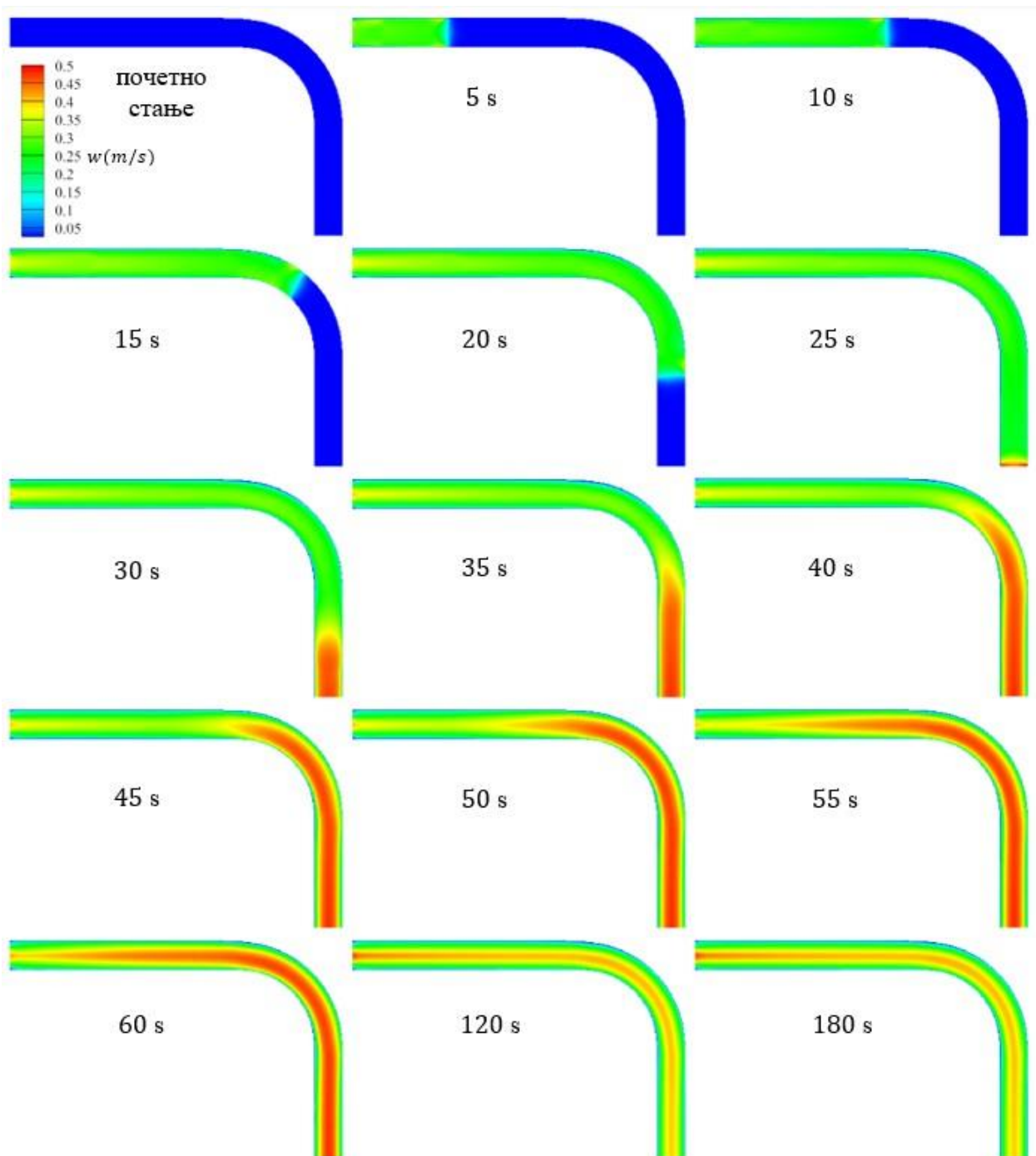
усвојене су следеће вредности параметара за потребе прорачуна: $\Delta t=0.01$ s, $n=0.0213$ $m^{-1/3}s$, $\nu=0.00025$ m^2/s , $\tau=0.503$, $s_1=s_4=s_6=1.35$, $s_2=0.9$, $s_3=s_5=s_9=0$, $s_7=s_8=1/\tau$.



Слика 13. Геометријске карактеристике канала са детаљем рачунске мреже

На слици 14 приказано је како се мењају брзине $w(m/s)$ у каналу у различитим временским тренуцима, од почетног до устаљеног стања. У почетном тренутку брзине су једнаке нули (приказано плавом бојом), а затим је на сваких 500 временских корака, односно 5 секунди, приказана пропација таласа и промена брзина, до 6000 временских корака. Првих 2500 временских корака тј. 25 секунди, вредности брзина у свим рачунским тачкама су приближно 0.3 m/s , приказано зеленом бојом, што уједно представља и положај чела таласа. Након 25 секунди, талас је дошао до низводног граничног услова, где сада, због велике денивелације нивоа (узроковано фиксираним нивоом воде), долази до повећања брзина, приказано црвеном бојом. Након тога, долази до пропације таласа узводно и до повећања брзина целом деоницом канала. На последње две слике, дате су брзине након 120 и 180 секунди, где се може уочити да више нема промене брзина током

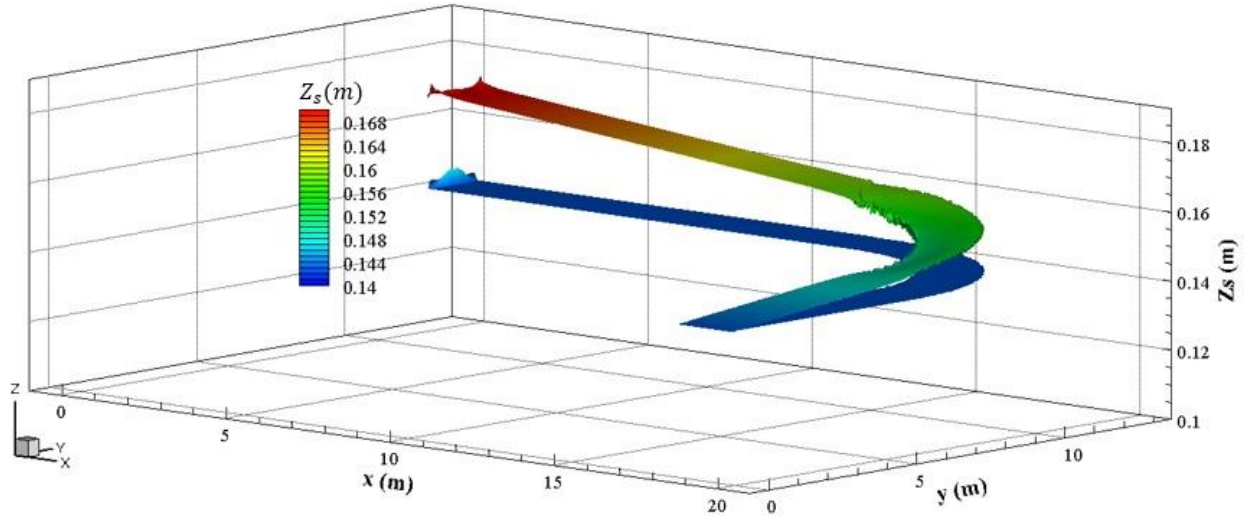
времена, тј. да се успоставило устаљено стање. На овај начин приказано је како програм, од почетног задатог стања и задатих граничних услова, долази до устаљеног стања.



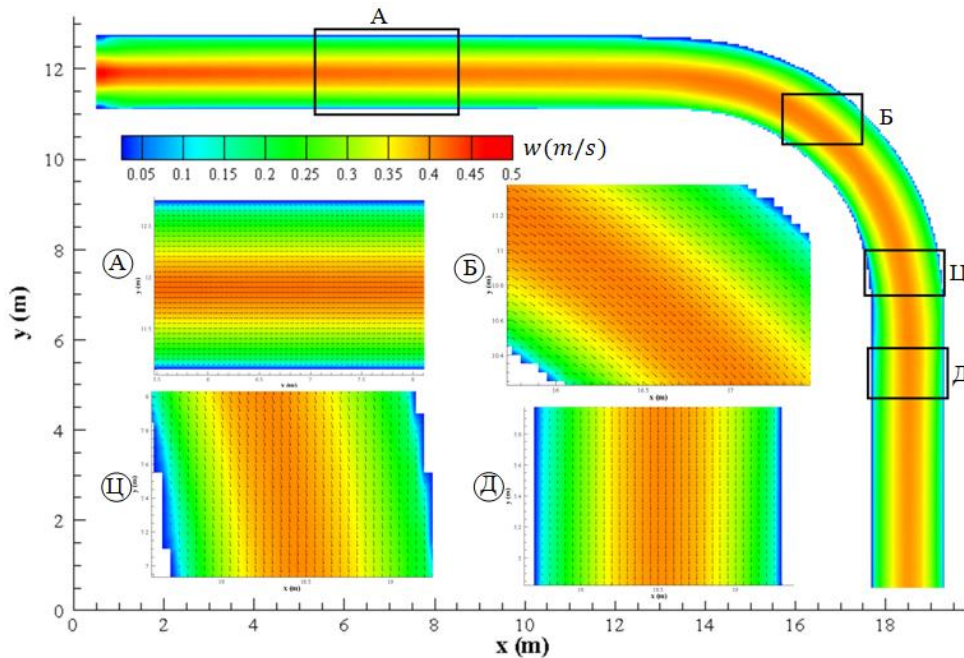
Слика 14. Графички приказ промене брзина у каналу током времена од почетног до устаљеног стања

На слици 15, дато је поређење нивоа воденог огледала за почетно и крајње устаљено стање. Уочава се да у првим деоницама нема промене нивоа управо на правац струјања,

док у закривљеној деоници, као последица центрифугалне силе, долази до попречног нагиба нивоа, тако да је ниво уз спољашњу (конкавну) ивицу виши од нивоа уз унутрашњу (конвексну) ивицу [95].



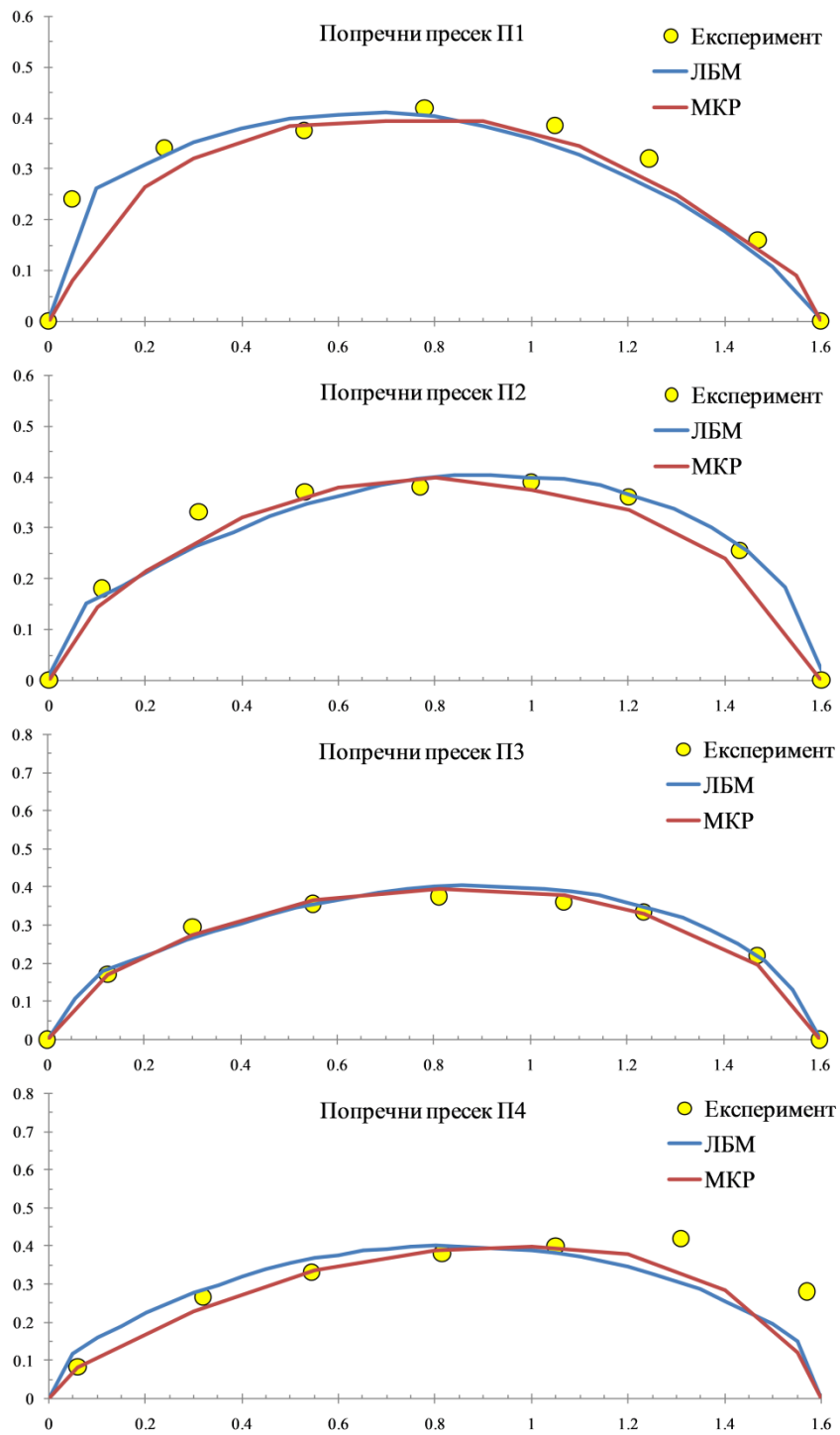
Слика 15. Поређење нивоа воде у каналу за почетно и устаљено стање



Слика 16. Графички приказ брзина у каналу након успостављања устаљеног стања, са детаљима вектора брзина

На слици 16 приложен је графички приказ распореда брзина у каналу, са четири детаља (А, Б, Ц, Д) на којима су приказани вектори брзина. Очекивано, с обзиром на

параболични попречни пресек, максималне вредности брзина су забележене у средини попречног пресека, где су и највеће дубине, док ка границама брзине опадају до нуле.



Слика 17. Поређење брзина у каналу добијених применом ЛБМ, МКР и мерених података

На слици 17 приказани су дијаграми промене брзина у четири попречна пресека означена на слици 13. Дато је поређење резултата добијених применом ЛБМ са подацима добијеним применом МКР и мереним подацима. У свим мерним профилима уочава се веома добро поклапање резултата примењене две методе и измерених вредности, чиме је доказано да се примењени модел може користити за решавање раванских једначина течења. Висок ниво поклапања резултата потврђен је и прорачуном нумеричке грешке L1, L2, на основу следећих једначина:

$$L1 = \sum |w_{izmereno} - w_{izračunato}| \quad (114)$$

$$L2 = \sum |w_{izmereno} - w_{izračunato}|^2 \quad (115)$$

У табелама 1 и 2 приказано је да је грешка која се јавља приликом прорачуна приближно једнака за обе методе, док средња вредност грешака показује чак да је ЛБМ незнатно тачнија од МКР.

Табела 1. Грешке прорачуна (L1, L2) за ЛБМ и МКР

Поп.пр.	П1		П2		П3		П4	
	L1	L2	L1	L2	L1	L2	L1	L2
ЛБМ	0.289	0.142	0.113	0.063	0.115	0.053	0.325	0.197
МКР	0.346	0.183	0.208	0.092	0.099	0.044	0.259	0.213

Табела 2. Средње вредности грешке прорачуна (L1, L2) за ЛБМ и МКР

Средње вредности	L1	L2
ЛБМ	0.211	0.114
МКР	0.228	0.133

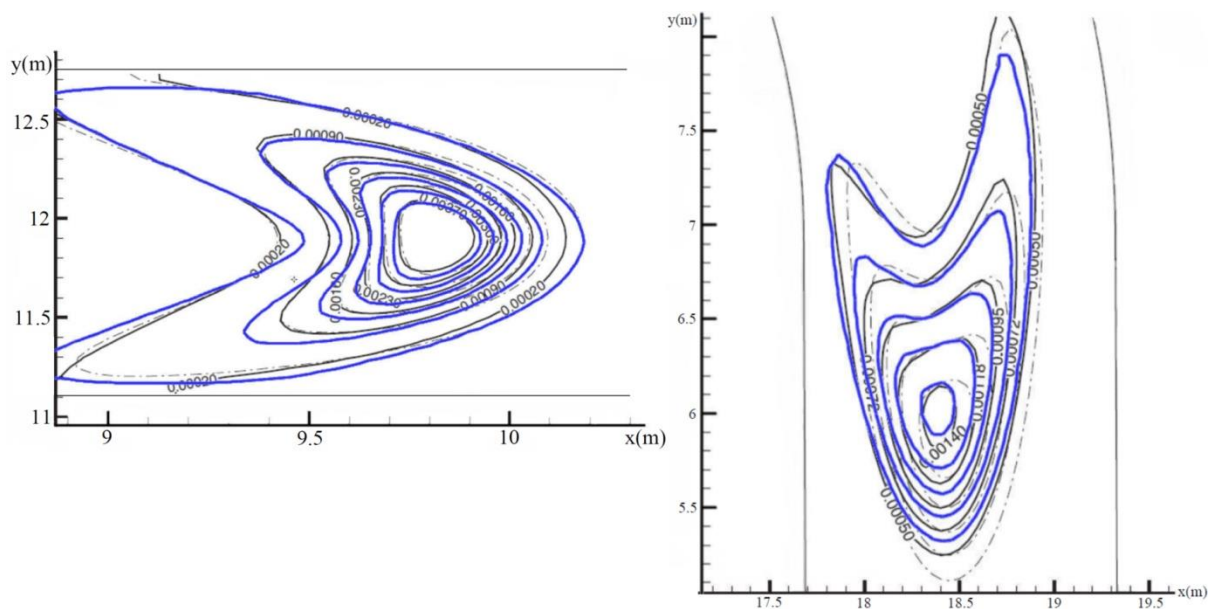
Овим примером доказана је могућност примене латис Болцман методе за симулацију течења у отвореним токовима. Резултати спроведене анализе потврђују висок степен

ефикасност и стабилност формираног модела, чиме је добијена добра основа за даље унапређење модела и примену на реалним практичним проблемима.

Прорачун транспорта материје

Како би се испитала могућност примењеног модела да симулира и транспорт материје, разматраће се адвекција и дифузија одређеног загађивача у претходно анализираном каналу. За овај пример познати су резултати добијени применом класичних нумеричких метода и ЛБМ са криволинијским координатама (ЛБМ-кк.) [8], који ће се користити за калибрацију и верификацију модела.

Разматра се транспорт 1000 грама загађивача иницираног у једној тачки, на растојању 1.4 m од узводног граничног услова, на средини ширине канала. Усвојене вредност калибрационих параметера су: $D=0.00195 \text{ m}^2/\text{s}$ и $\tau_c=0.85$. Резултат спроведене анализе приказан је на слици 18 у виду ситуационог приказа расподеле концентрације након 20 и 50 секунди. Црном пуном линијом су приказани резултати применом ЛБМ-кк., а испрекиданом линијом резултати добијени класичним нумеричким методама, комбинацијом методе карактеристика и коначних разлика. Плавом линијом приказани су резултати добијени применом креираног модела.



Слика 18. Концентрација материје у каналу након 20 s и 50 s

Поређењем концентрација са слике 18, уочава се веома добро поклапање резултата чиме је доказано да модел успешно решава и адвекцију и дифузију и да су добијени резултати сасвим прихватљиви за потврду валидности модела.

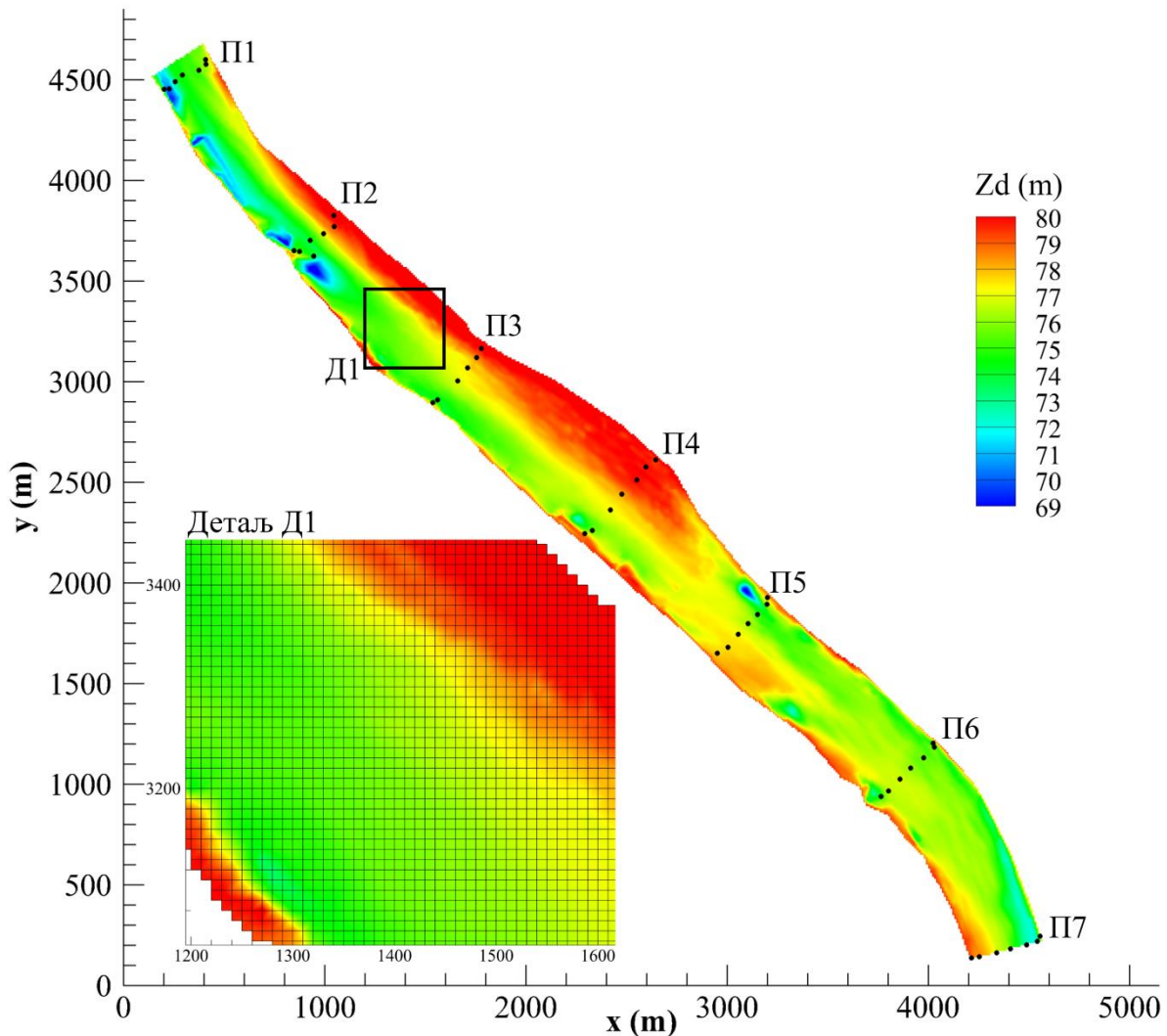
5.2. Модел струјне слике деонице реке Дунав

Први реалан пример природног водотока који ће се анализирати у оквиру дисертације јесте деоница реке Дунав, приказана на слици 19. Посматрана деоница је смештена између хидролошке станице Мохач у Мађарској (1446.9 km) и хидролошке станице Бездан у Србији (1425.5 km), а анализирана је од 1432. до 1438. километра реке. Деоница се одликује приближно праволинијским током, са ширином воденог огледала од 300 m на улазној граници до 580 m на средишњем делу. Морфолошки приказ деонице дат је на слици 19. Мерење коте дна, брзина и нивоа је извршено из стационарног пловила у периоду од 23. до 27. маја 2011. године, применом ADCP (Acoustic Doppler Current Profiler) методе. ADCP се заснива на емитовању звучних сигнала који се одбијају од ситних честица у води и враћају у пријемник. Уређај за мерење емитује три зрака под различитим угловима и на основу протеклог времена за добијање повратне информације и софтверске обраде података, даје компоненте брзина у свим правцима. Мерење брзина и нивоа је извршено у седам мерних профила, тако да се први профил П1 поклапа са узводним, а последњи профил П7, са низводним граничним условом. У сваком профилизу мерење је извршено у седам мерних вертикала распоређених на приближно једнаким растојањима, док је кота дна корита мерена на растојањима од приближно 100 m у x и у правцу. Тачан положај свих мерних вертикала у попречним профилима приказан је на слици 19. Током четири дана мерења забележене су незнатне промене протока и нивоа, тако да је за прорачун усвојена њихова константна вредност.

С обзиром на димензије анализираних деоница простор је дискретизован квадратном мрежом димензија 10 x 10 m, са укупно 26833 рачунских тачака. Величина мреже је усвојена водећи рачуна да се, са једне стране, добије довољан број података за верификацију модела и не наруши геометрија водотока, а да са друге стране, број рачунских тачака не буде превелик, чиме би се прилично успорио прорачун, а не би имало великог значаја за тачност добијених резултата. Детаљ рачунске мреже приказан је на слици 19.

Интеграцијом дијаграма брзина по попречном пресеку добијена је вредност протока од $Q=1676 \text{ m}^3/\text{s}$, који је коришћен као узводни гранични услов. Као низводни гранични

услов коришћен је измерени ниво воде $Z_s=81.69$ m. На чврстим границама примењен је „elastic-collision“ гранични услов.

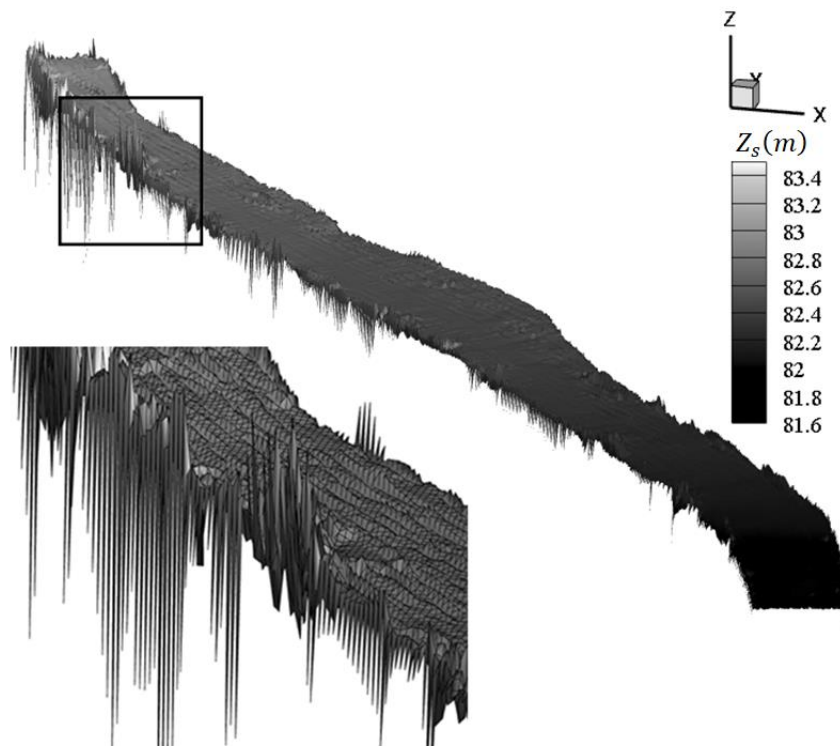


Слика 19. Ситуација анализираних деонице реке Дунав са графичким приказом коте дна (Z_d), означеним мерним профилима и детаљем рачунске мреже

У поглављу 3.2.1, објашњено је да компликована геометрија, морфологија и велики Рејнолдсови бројеви могу проузроковати губитак стабилности модела који се заснива на основном облику ЛБМ, односно СРТ-ЛБМ. Како би се указало на проблеме који се јављају при моделирању течења у отвореним токовима применом ЛБМ, креиран је модел који се заснива на СРТ-ЛБМ. За потребе прорачуна, усвојене су следеће вредности

параметара: $n=0.017 \text{ m}^{-1/3}\text{s}$, $\Delta t=0.7 \text{ s}$, $\tau=0.9$, а резултати спроведене анализе приказани су у виду нивоа воденог огледала, на слици 20.

Приметне су велике осцилације нивоа воде, које на чврстој граници износе реда величине до 1.5 m, док су највеће осцилације у пољу 10 cm. Ради повећања стабилности прибегло се корекцији параметра, тако да се добије максимална могућа тачност. Утврђено је да је коришћена вредност времена релаксације τ минимална вредност при којој је достигнута доња граница нумеричке стабилности. Последица велике вредности коефицијента τ је и повећање нивоа воде, што је проузроковано и великим коефицијентом кинематске вискозност ν , јед. (65). У физичком смислу, повећана вискозност ствара додатни успор услед чега долази до подизања нивоа, тако је добијена вредност нивоа на узводној граници 1.5 m већа у односу на измерену вредност.



Слика 20. Приказ нивоа воде разматране деонице Дунава, добијено применом СРТ-ЛБМ

Проблеми који су се јавили указују на то да је СРТ-ЛБ метода неприменљива за практичне примере, што намеће примену софистициранијих приступа решавања раванских једначина течења. Како би се ублажили недостаци разматране методе и добио

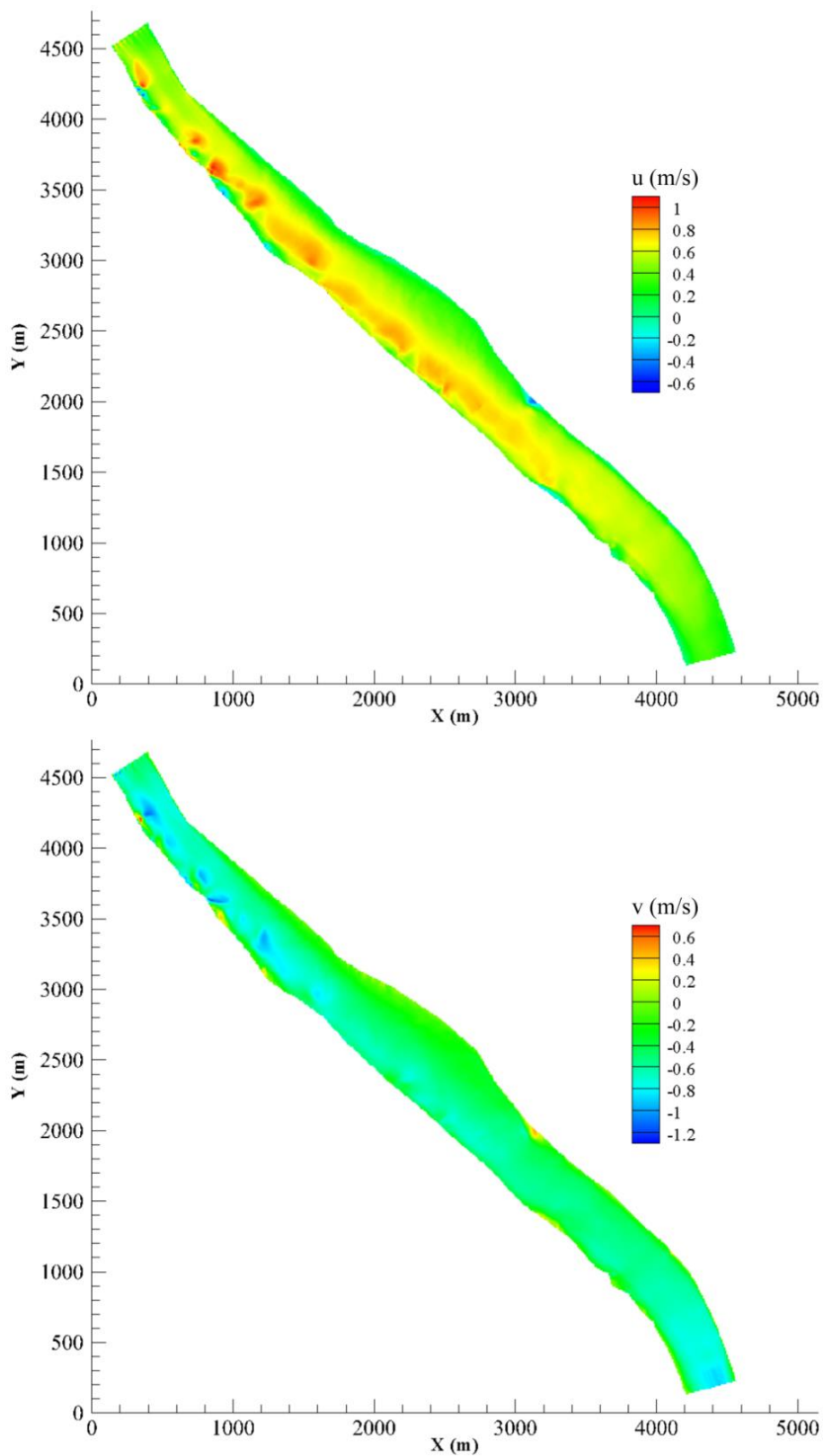
ефикаснији и стабилнији модел, за потребе прорачуна струјне слике примениће се МРТ-ЛБМ.

Прорачун је извршен са следећим усвојеним вредностима параметара: $n=0.017 \text{ m}^{-1/3}\text{s}$, $\nu=0.05 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, $\Delta t=0.7 \text{ s}$, $s_1=s_4=s_6=1.3$, $s_2=0.7$, $s_3=s_5=s_9=0$, $s_7=s_8=1/\tau$, при чему је τ израчунат користећи израз (65). Устаљено стање добијено је након 50000 временских корака, односно 9.72 часова.

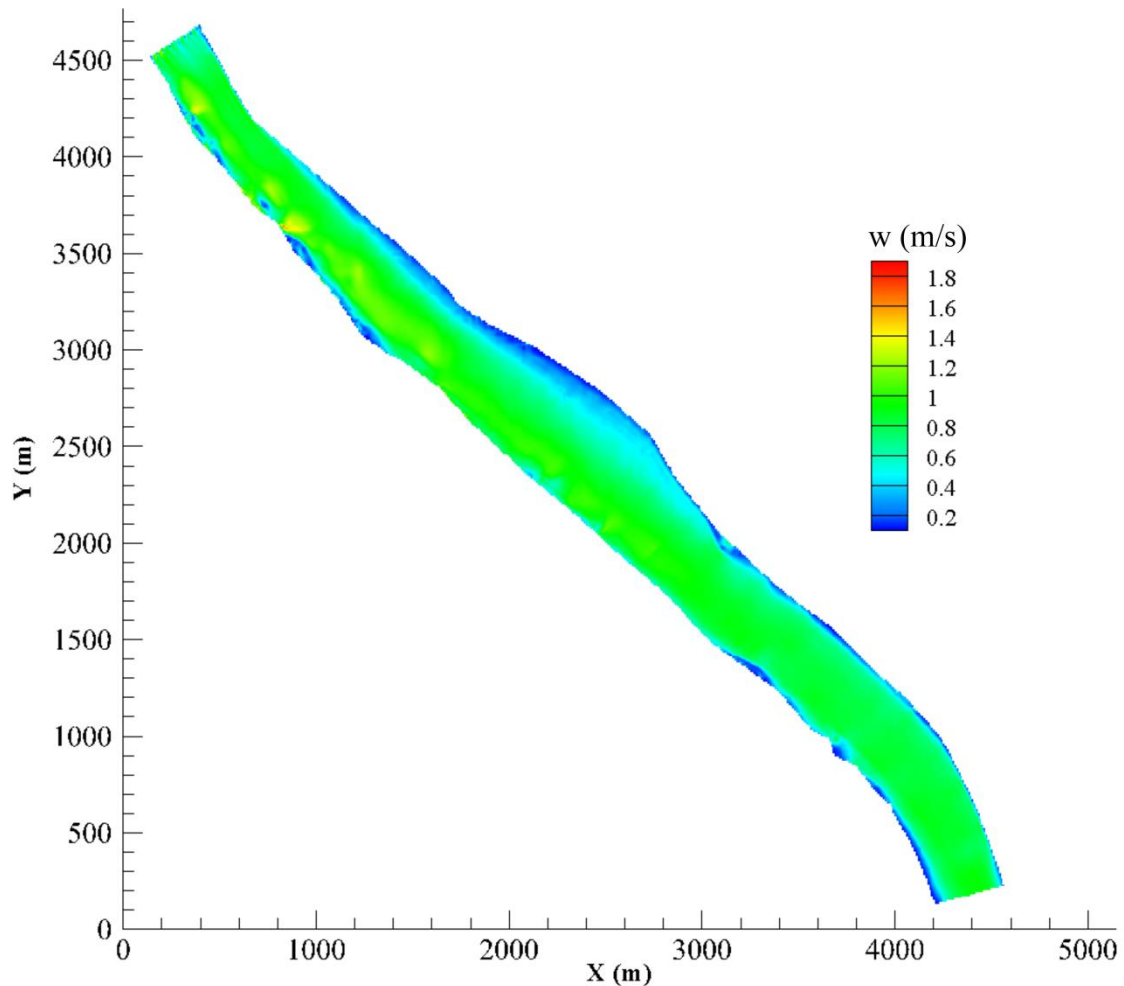
Вредности калибрационих параметара добијају се тако што се најпре претпоставе, а затим се након прорачуна добијени резултати пореде са измереним подацима. Поступак се понавља све док се не добије задовољавајући ниво подударана израчунатих и измерених вредности. Тиме је добијен сет вредности параметара које важе за анализирани водоток и које се могу користити за било које задате вредности граничних услова.

У наставку су дати резултати прорачуна.

На слици 21 дати су графички прикази компонената брзина u (m/s) и v (m/s) у правцима x и y , а на слици 22 је дат графички приказ брзина w (m/s).

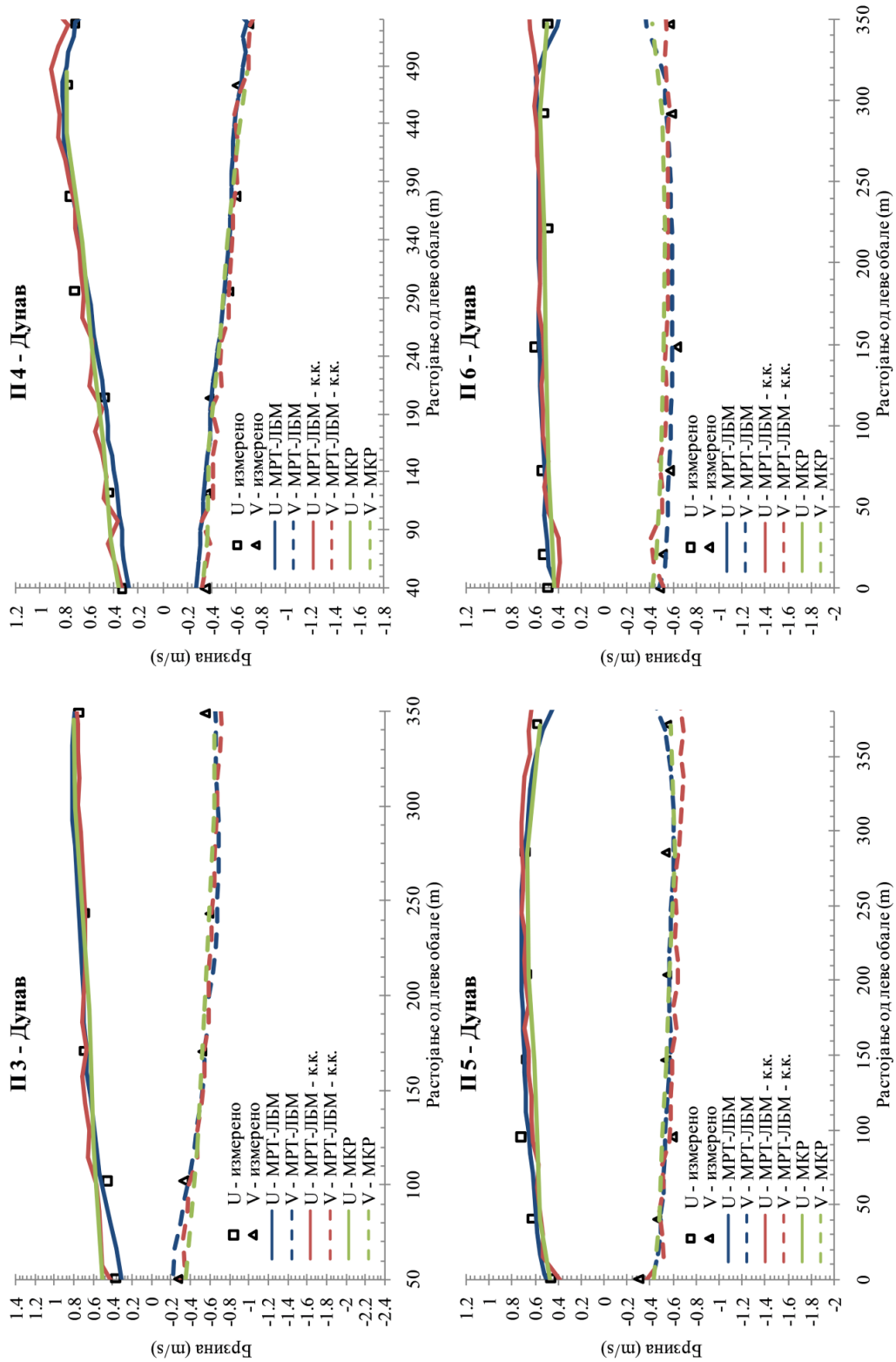


Слика 21. Компоненте брзина у x (u) и у (v) правцу за деоницу реке Дунав



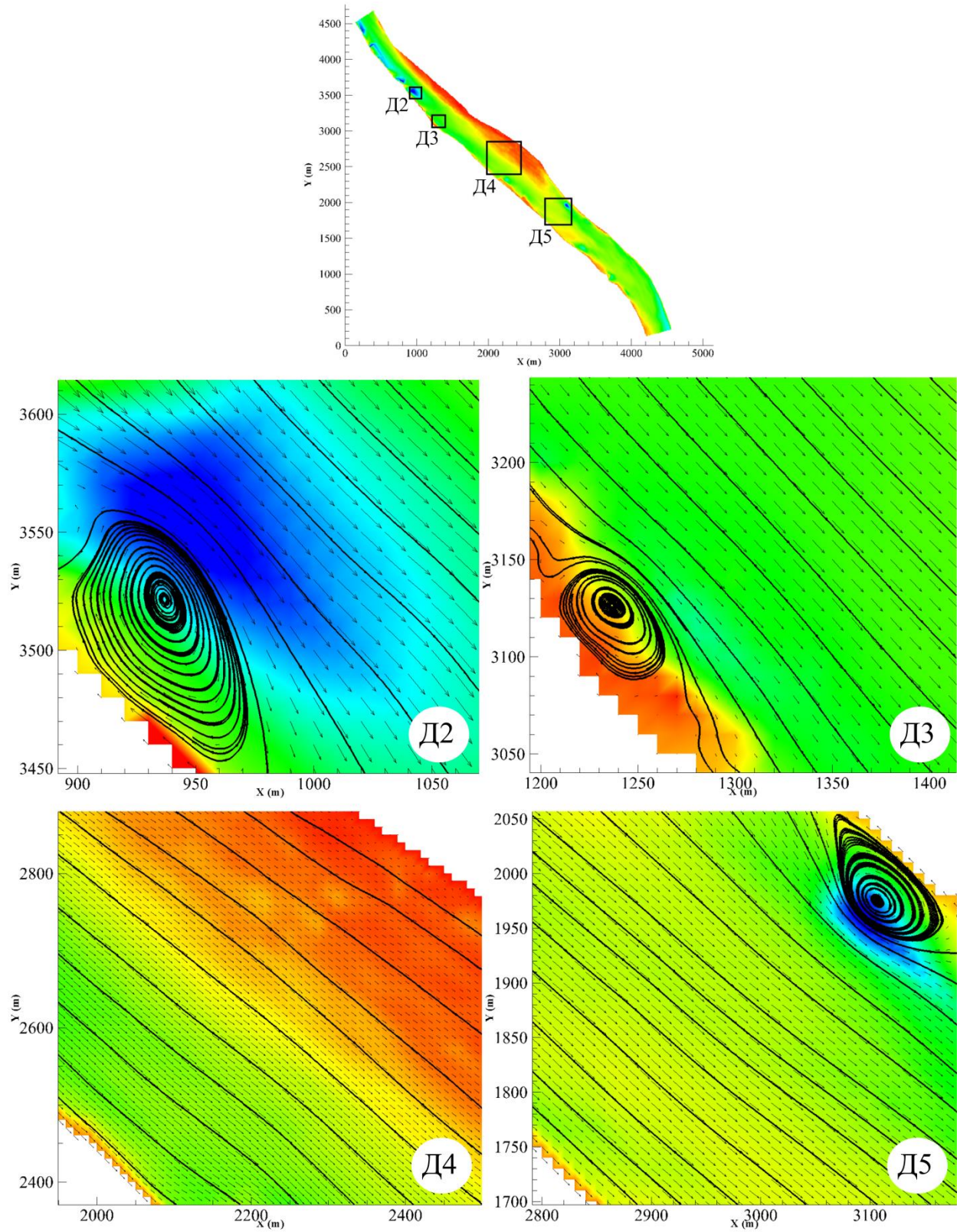
Слика 22. Графички приказ брзина у деоници реке Дунав

Визуелним поређењем слика 19 и 22 јасно се уочава веза између дубина и брзина. Највеће вредности брзина јављају се на местима највећих дубина и супротно, што се и очекивало, с обзиром да је таква веза брзина и дубина карактеристична за природне водотоке. Детаљније поређење израчунатих резултата са мереним подацима и резултатима добијеним применом МКР приказано је дијаграмима, за седам мерних профила (слика 23). Такође, приказани су и резултати добијени применом ЛБ модела формираног на криволинијским координатама [9], како би се утврдила разлика између резултата добијених применом картезијанских и криволинијских координата.



Слика 23. Поређење израчунатих брзина са мереним подацима и са резултатима добијеним применом ЛБМ на криволинијским координатама и применом МКР, у попречним профилима П3, П4, П5 и П6 - Дунав

Како би се добио што јаснији увид у тачност добијених резултата прорачуна, на слици 23 приказано је поређење израчунатих вредности компонената брзина са измереним вредностима, подацима добијеним применом ЛБМ на криволинијском координатама (к.к.) и подацима добијеним применом МКР, у профилима П3, П4, П5 и П6. У прилогу 1, дати су дијаграми за профиле П1, П2 и П7. Са приложених дијаграма уочава се веома добро подударане измерених вредности са свим приказаним вредностима за поређење. Приметно је да у свим мерним профилима израчунате вредности прате тренд промене измерених података. Значајнија одступања јављају се у профилима П2 и П7. У профилима П2 одступања резултата се јављају уз десну обалу и забележена су за све приказане методе. Највећа одступања од измерених вредности износе: 18% у пољу и 50% на граници за МРТ-ЛБМ, 18% у пољу и 25% на граници за МРТ-ЛБМ к.к. и 18% у пољу и 56% на граници за МКР. С обзиром да се одступања резултата јављају за све три методе на истом месту и да се крећу у сличним границама, може се сматрати да је то последица израженијег турбулентног струјања, што се и да закључује на основу положаја мерних вертикала (слика 19), које се налазе баш на месту изражене промене коте дна корита, услед чега долази до вртложног струјања. У профилима П7 одступања се јављају уз десну обалу из разлога што се тај профил поклапа са низводним граничним условом где су фиксирани дубине, што представља проблем на границама, а може се решити уситњавањем мреже на самој граници. У профилима П1 долази до благих осцилација брзина, које се јављају као последица прерасподеле брзина у попречном пресеку, који је коришћен за формулисање узводног граничног услова. Ту је битно напоменути да је задовољен проток чија је вредност задата као узводни гранични услов. У профилима П3, П4, П5 и П6 готово да целом ширином попречног пресека нема одступања резултата са подацима за поређење. Тренд расподеле брзина по попречним пресецима указује на прилично равномерно распоређене брзине, што се и могло закључити с обзиром да је разматрана деоница приближно праволинијског облика, односно да сама геометрија водотока не утиче превише на неравномерност расподеле брзина. Оно што узрокује благу промену брзина по попречним пресецима јесте морфологија, а најбоље се може уочити у профилима П4, где се јасно види како са повећањем дубина расту и брзине. За разлику од профила П4, профил П6 одликује се приближно једнаким дубинама по попречном пресеку, па су самим тим забележене и готово исте вредности брзина.



Слика 24. Детаљи струјница и вектора брзина - Дунав

На слици 24 дати су прикази струјница и вектора брзина за четири означена детаља. На детаљима Д2, Д3 и Д5 демонстрирана је могућност модела да симулира и вртложно струјање узроковано наглим променама геометрије или коте дна корита.

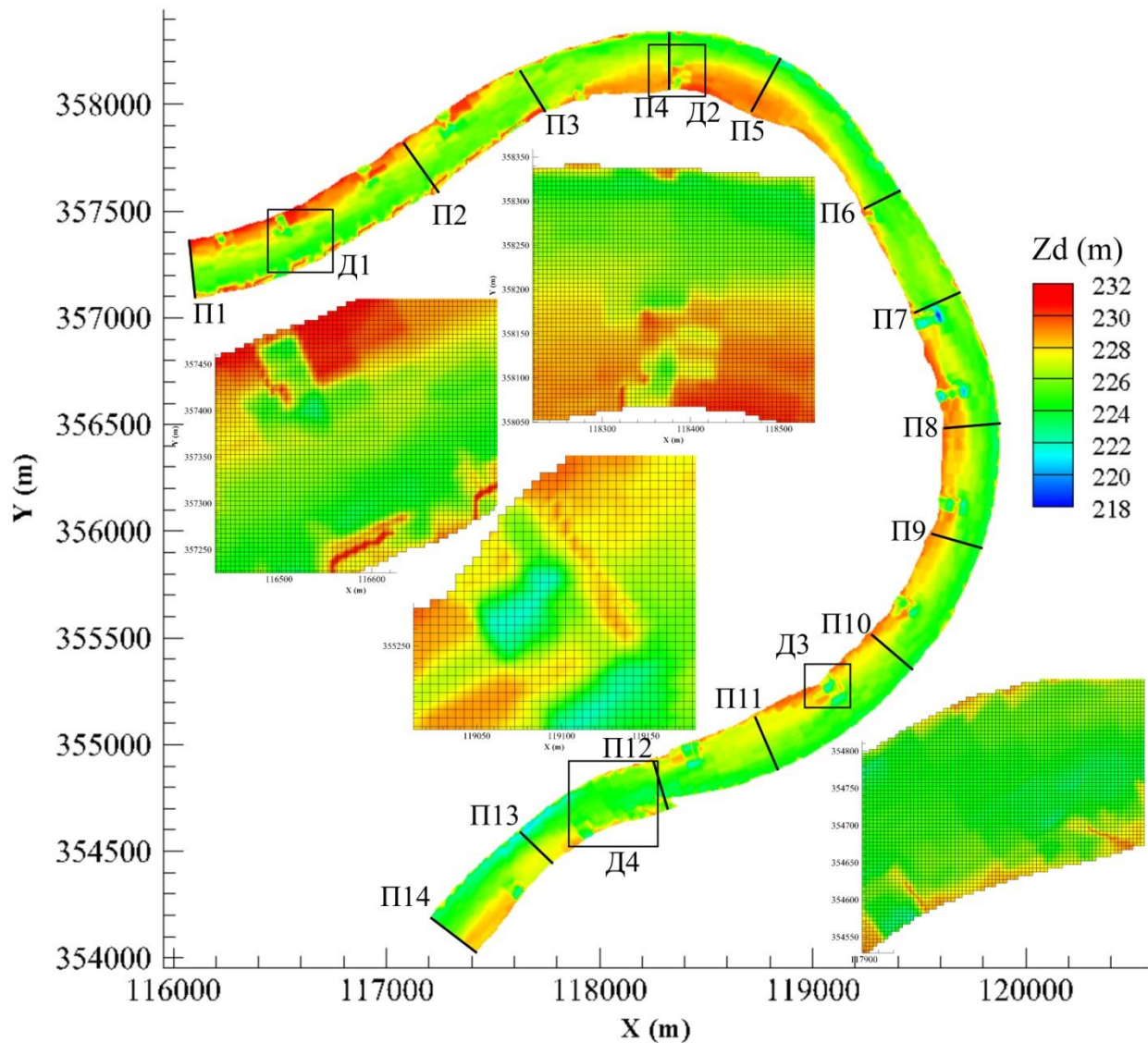
На основу приказаног закључује се да је формиран модел употребљив и да даје веома високу тачност када је у питању симулација течења у природом водотоку.

5.3. Модел струјне слике деонице реке Мисури

Иако су подударња резултата добијених за Дунав веома добра, треба узети у обзир да је разматрана деоница прилично праволинијска. Будући да природне водотоке најчешће одликује компликована геометрија, која може проузроковати проблеме у нумеричком смислу (губитак конвергенције, нумеричке осцилације), за потребе додатне верификације модела када је у питању течење флуида, извршена је симулација течења у деоници реке Мисури (слика 25). Деоница реке од 642.77 до 651.78 километра реке, за коју је модел конструисан, изузетно меандрира, тако да се смер кретања воде мења за готово 180°. Ширина водотока у посматраној деоници се креће око 250 m, а оно што је додатно карактерише јесте присуство великог броја потоњених регулационих грађевина, као што су напери и прагови. Мерење брзина, нивоа воде и коте дна корита извршено је 9. и 10. јуна 2000. године [5]. Брзине су мерене применом ADCP методе из стационарног пловила, у 14 мерних профила, означених на слици 25. Морфологија је мерена је на сваких 60 m, с тим да су у близини грађевина, за добијање њихових прецизних димензија, извршена додатна мерења.

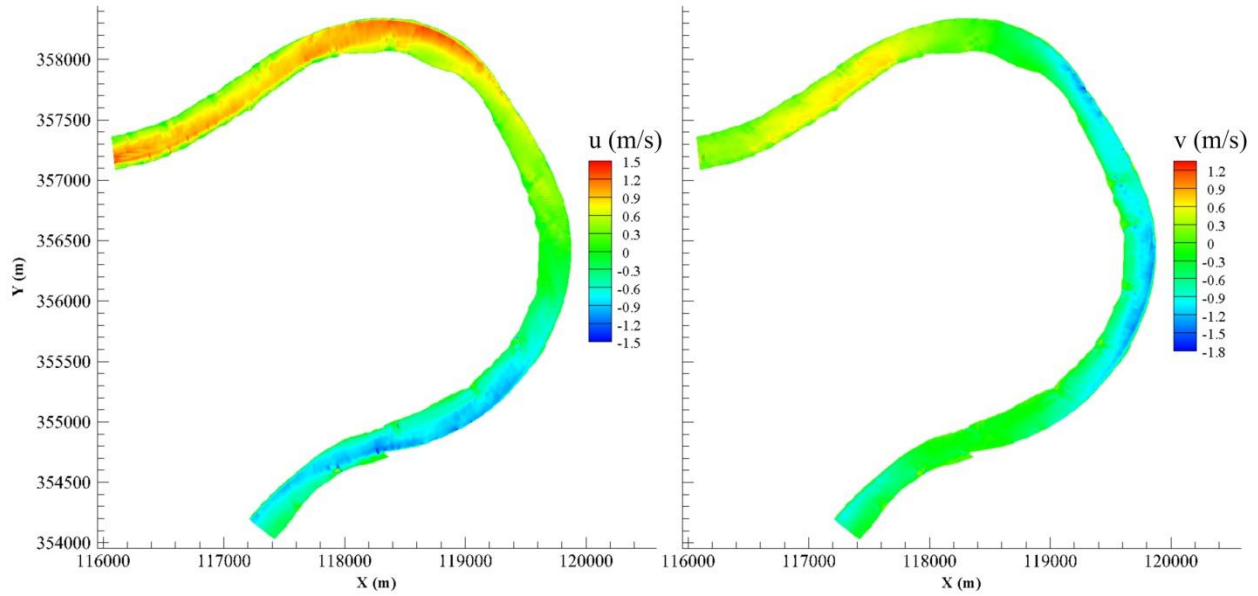
Као и у претходно разматраном примеру, димензије рачунске мреже су усвојене водећи рачуна да се прецизно прикажу геометрија и сви објекти у кориту, али и да број рачунских тачака буде прихватљив са становишта временског трајања прорачуна. Узимајући у обзир димензије разматране деонице и објеката у кориту, за формулисање модела усвојена је квадратна мрежа димензија 5x5 m, са укупно 89691 рачунских тачака. Детаљи генерисане рачунске мреже су приказани на слици 25. Узводни гранични услов поклапа се са профилем П1 и формиран је задавањем константне вредности протока од $Q=1060 \text{ m}^3/\text{s}$, процењене на основу измерених брзина у профилу П1. Низводни гранични услов поклапа се са попречним профилем П14 и формиран је задавањем измерене вредности нивоа, $Z_s=229.55 \text{ m}$. Чврсте границе дефинисане су „elastic-collision“ граничним условом. У почетном стању усвојене су нулте брзине у свим рачунским тачкама. За разлику од претходног примера, где је у почетном стању усвојено да је ниво у свим тачкама једнак нивоу на низводном крају, у овом примеру, због конфигурације терена то није могуће (кота дна је у неким тачкама виша у односу на ниво на низводном крају). Покушано је да се за почетно стање зада вредност нивоа која је једнака нивоу на узводној

граници ($Z_s=231.22$ m), међутим велика денивелација која се као последица тога јавила на низвом крају изазвала је губитак стабилности. Проблем је решен тако што је усвојено да је ниво у низводној деоници једнак измереној вредности, а да се узводно ниво каскадно повећава (усвојено је дванаест каскада висине 10-15 cm).

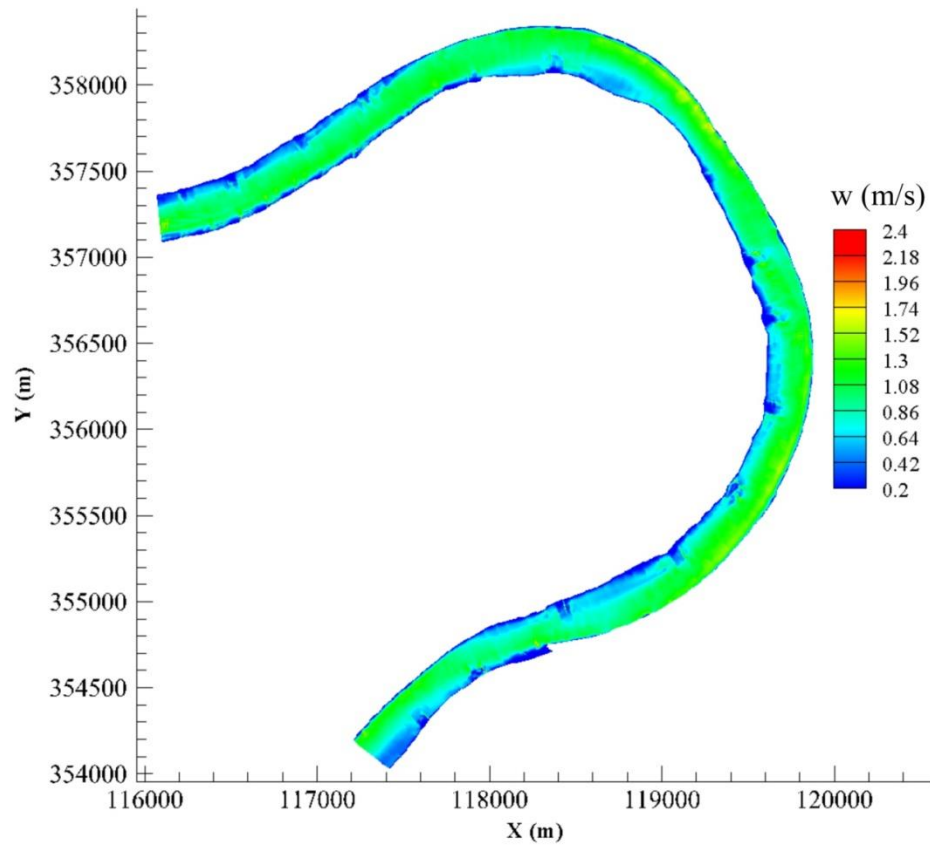


Слика 25. Ситуација анализиране деонице реке Мисури са графичким приказом коте дна (Z_d), означеним мерним профилима и детаљима рачунске мреже

Прорачун је извршен користећи следеће вредности калибрационих параметара: $n=0.038$ m^{-1/3}s, $\nu=0.05$ m²/s, $\Delta t=0.35$ s, $s_1=s_4=s_6=1.0$, $s_2=0.9$, $s_3=s_5=s_9=0$, $s_7=s_8=1/\tau$. Устаљено стање успостављено је након 80000 временских корака, односно 7.3 часова.



Слика 26. Компоненте брзина у x (u) и у y (v) правцу за деоницу реке Мисури



Слика 27. Графички приказ брзина у деоници реке Мисури

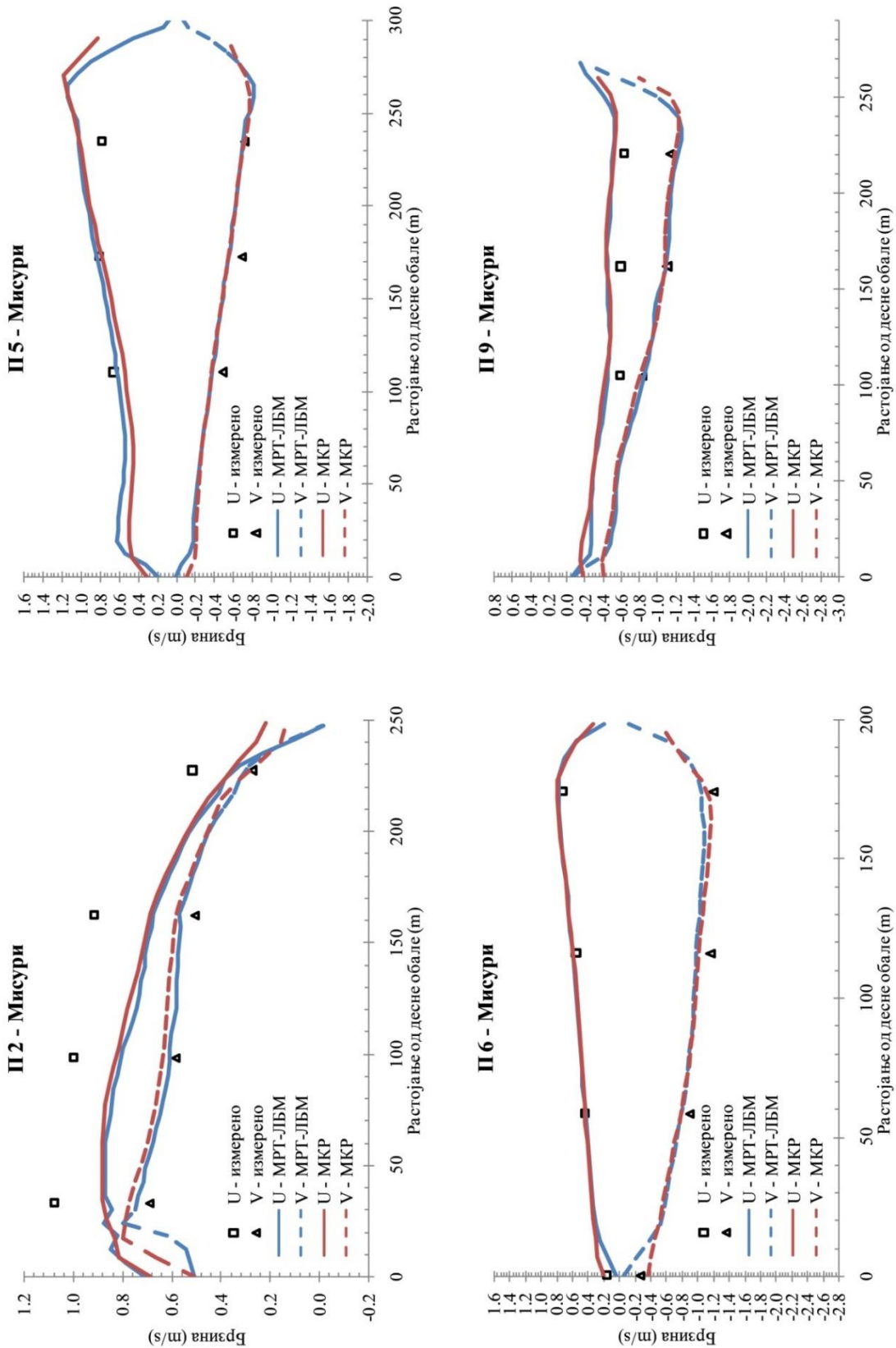
Добијени резултати прорачуна дати су у виду ситуационог приказа брзина (слике 26 и 27) и дијаграма брзина у мерним профилима (профили П2, П5, П6 и П9, приказани су на слици 28, док су дијаграми за остале профиле дати у прилозима 2, 3 и 4). Поремећаји струјне слике у виду вртложног струјања изазваног објектима на дну, приказани су на слици 29.

У узводном делу тока, првих 1730 m, уз десну обалу постављено је 9 објеката у правцу тока, дужине око 80 m, при чему улазе у корито око 20 m. У истој деоници уз леву обалу налазе се 4 напера, дужине око 60 m, оријентисани управно на правац тока. Тако оријентисани објекти узрокују померање матице реке ка десној обали, па самим тим долази и до прерасподела брзина у складу са kotaма дна (попречни профили П1, П2 и П3). У даљем току, од профила П3 до П6, река меандрира и мења правац за готово 90° удесно, што доводи до тога да крива расподеле брзина у тој деоници расте од десне ка левој обали. У истој деоници уз десну обалу постављена су два напера, чији је утицај на струјну слику приказан детаљима Д5 и Д6, на слици 29. Профил П7 налази се у прилично праволинијској деоници, па су самим тим и брзине равномерно распоређене по попречном пресеку. Од профила П8 до П11 река опет меандрира ка удесно и као последица тога, исто као што је био случај и у профилима П3-П5, долази до повећања брзина уз леву обалу. У циљу сужења речног корита, у споменутој деоници постављена су три напера уз конвексну обалу. Профил П12 постављен је непосредно иза проширења које изазива вртложно струјање и локални пад брзина уз леву обалу. Као последица геометрије водотока али и три напера постављена уз леву обалу, у деоници П12- П14 брзине су сконцентрисане уз десну обалу.

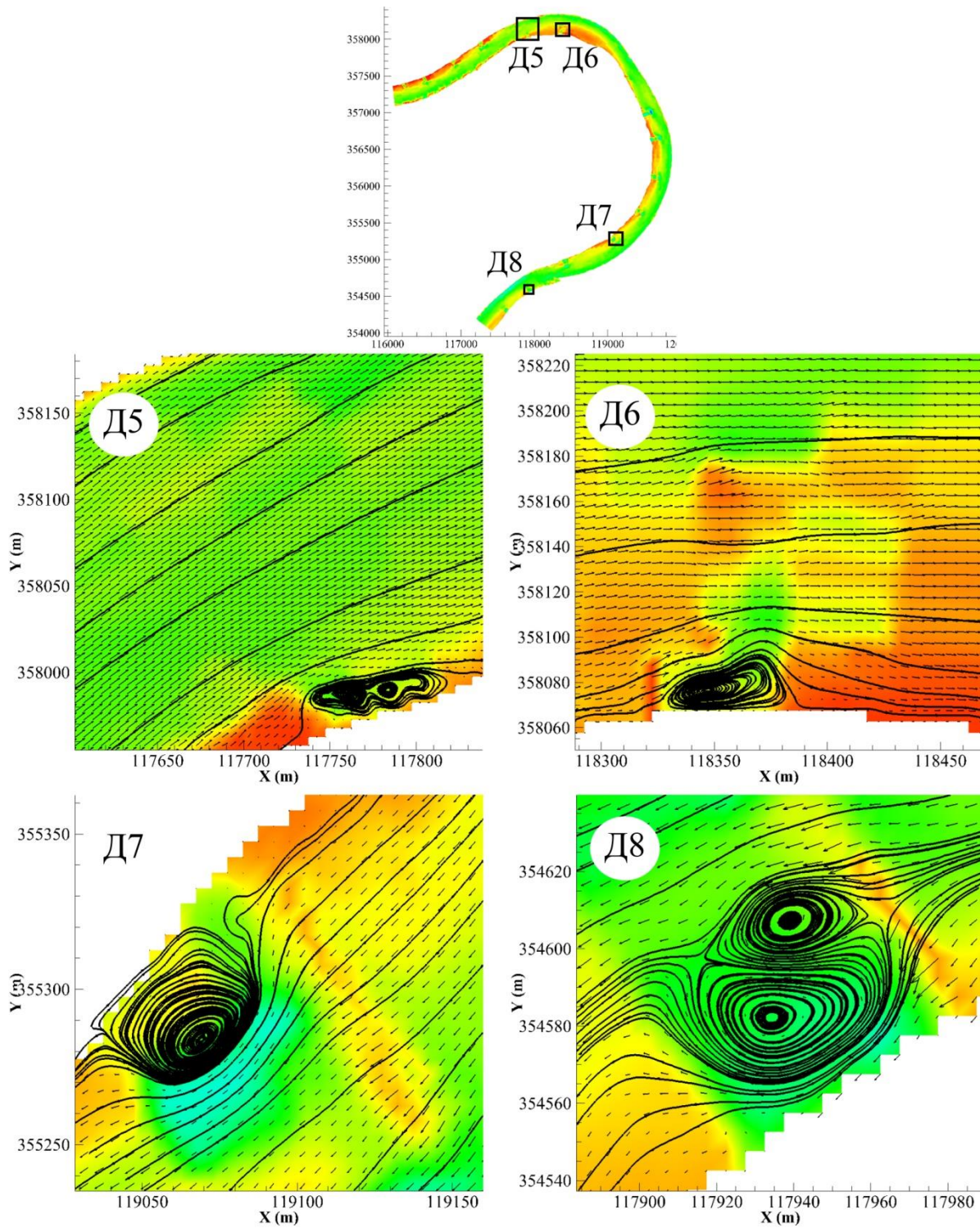
Са приложних дијаграма на слици 28, види се веома добро подударње добијених резултата са резултатима добијеним применом МКР и мереним подацима. Највећа одступања резултата од измерених вредности забележена су у профилима П2 и П3 и износе до 20%, међутим с обзиром да се резултати веома добро слажу са МКР, може се довести у питање квалитет мерења у тим профилима. Нешто мања одступања срачунатих и измерених вредности забележена су у профилима П12, П13 и П14. Одступања у тим профилима се јављају као последица недовољно густе мреже на самој граници, при чему се грешка која се јавља пропагира до профила П12. Проблем се свакако може решити уситњавањем мреже у низводном граничном услову (што је предмет даљег истраживања),

а оно што је битно јесте да и поред одступања, израчунате вредности прате тренд расподеле измерених података. Резултати добијени применом МРТ-ЛБМ и МКР се веома добро поклапају. Забележена одступања брзина у профилима П1-П11 су веома мала, крећу се до највише 10% у појединим вертикалама, па се са становишта практичне примене може сматрати да су занемарљива, док се нешто већа одступања у профилима П12-П14 јављају из већ споменутог разлога.

На слици 29 графички су приказани вектори брзина и струјнице непосредно уз потопљене објекте. Објекти представљају препреку при кретању флуида и самим тим проузрокују локални поремећај струјне слике. Велика разлика у брзинама непосредно око објекта (велике брзине поред и мале брзине иза објекта) узрокује вртложно струјање које затим доводи до поткопавања корита низводно од објекта. Као што се види са приложених детаља, формиран модел омогућава симулацију и оваквих зона са изразитом турбуленцијом, што представља још један вид верификације програма када је у питању моделирање течења воде у природном водотоку.



Слика 28. Поређење израчунатих брзина са мереним подацима и са резултатима добијеним применом МКР, у попречним профилима П2, П5, П6 и П9 - Мисури



Слика 29. Детаљи струјница и вектора брзина - Мисури

5.4. Модел струјне слике деонице реке Ачафалаја

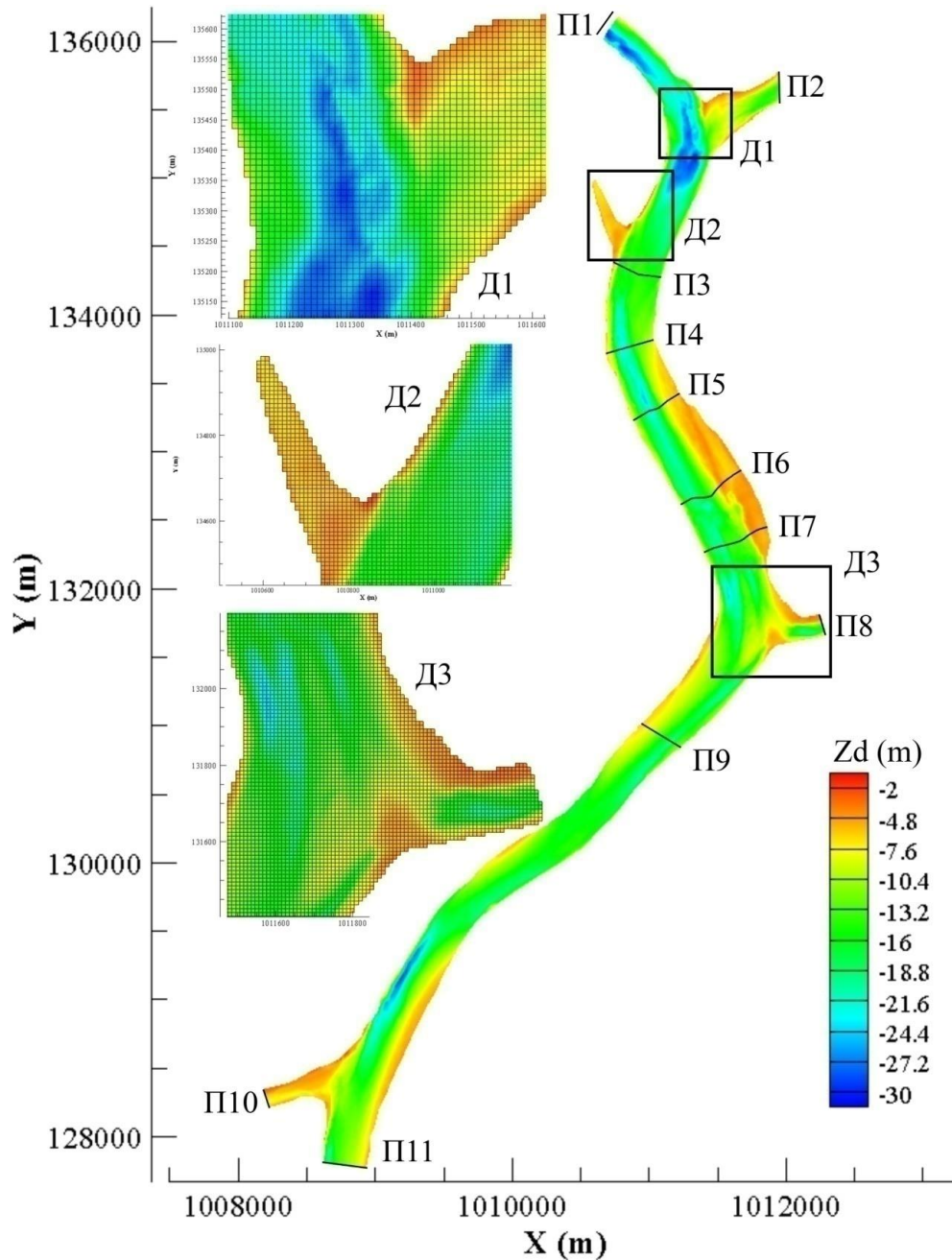
У прва два анализирана примера, доказано је да се ЛБМ може веома успешно применити за симулацију течења у природним водотоцима. Оно што је поред компликоване геометрије и морфологије, често карактеристично за природне водотоке, а није раније анализирано применом ЛБМ, јесте присуство бочних притока. Како би се извршила верификација модела за течење воде и за случај са притокама, као трећи пример у дисертацији, коришћена је деоница реке Ачафалаја (Atchafalaya) у САД, смештена између 179.5 и 190.0 километра реке. Ширина анализирани деонице креће се од 200 m на узводном крају до 500 m у профилу П6, а дубина се креће од 4 m па до чак 30 m, што поред компликоване геометрије, указује и на изразито променљиву конфигурацију речног корита. Деоница се одликује присуством четири бочна канала, два на узводном делу (профил П2 и детаљ Д2), један на средини деонице (П8) и један на низводном крају (П10). Ситуациони приказ посматране деонице, са kotaма дна корита, приказан је на слици 30.

Мерење морфологије и брзина извршено је 28. и 29. 05. 1999. године за потребе конструисања нумеричког модела. Брзине су мерене из пловила у покрету применом ADCP методе, у 13 до 40 мерних вертикала, у сваком од 11 означених профила [5]. Први и последњи профил П1 и П14 поклапају се са узводним и низводним граничним условом, респективно. У профилима П2, П8 и П10 постављени су гранични услови за бочне канале. На основу измерених брзина, израчунати су протоци на отвореним границама (П1, П2, П8 и П10), док је у профилу П11 задата фиксна вредност нивоа воденог огледала (табела 3). На чврстим границама коришћен је „elastic collision“ гранични услов.

Табела 3. Начин формулисања граничних услова за реку Ачафалаја

Попречни пресек	Тип граничног услова	Коришћене вредности
П1	улаз - проток	$Q_1=3879.4 \text{ m}^3/\text{s}$
П2	улаз - проток	$Q_2=1302.6 \text{ m}^3/\text{s}$
П8	излаз - проток	$Q_3=906.1 \text{ m}^3/\text{s}$
П10	излаз - проток	$Q_4=481.4 \text{ m}^3/\text{s}$
П11	излаз – ниво воде	$Z_s=1.22 \text{ m}$

Имајући у виду димензије анализирани деонице утврђено је да је оптимална димензија рачунске мреже 10 x 10 m (деталји Д1, Д2 и Д3 на слици 30). Тако формирана мрежа, са 39384 рачунских тачака, довољно је густа да адекватно апроксимира геометрију водотока, док са друге стране, број тачака није превелик са становишта временског трајања прорачуна.

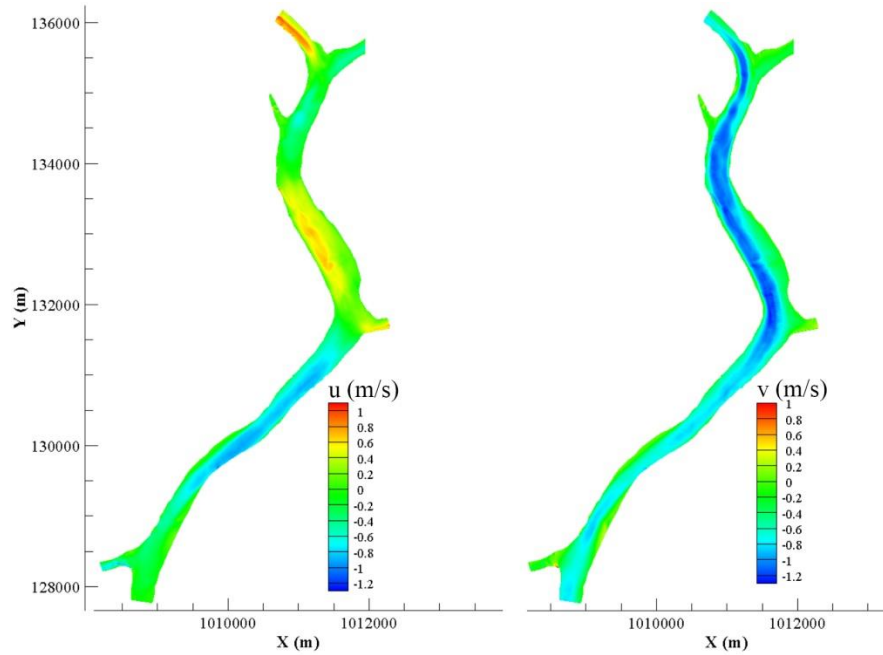


Слика 30. Ситуација анализирани деонице реке Ачафалаја са графичким приказом коте дна (Z_d), означеним мерним профилима и детаљима рачунске мреже

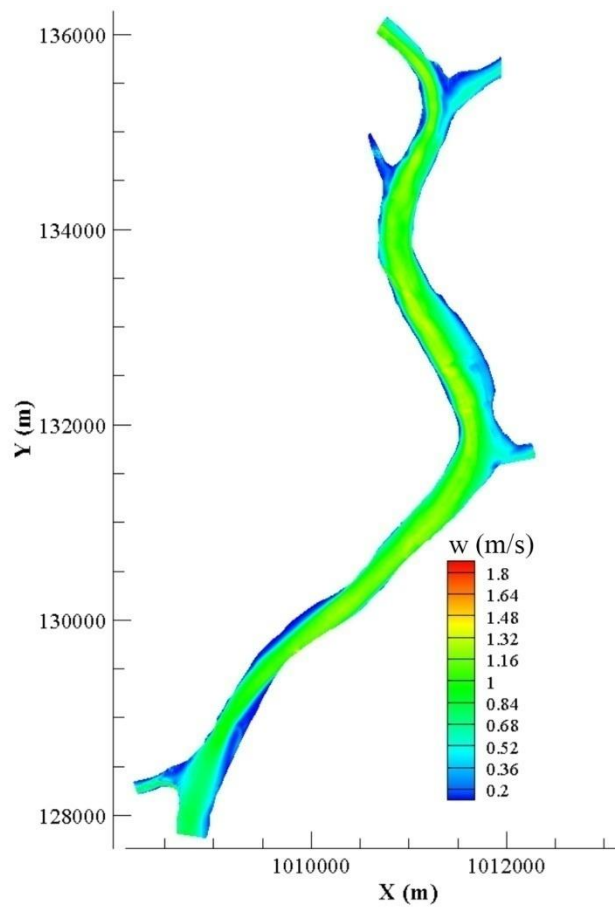
Вредности калибрационих параметара утврђене су итеративним поступком, све док се добијене вредности брзина и нивоа воде нису поклопиле са мереним брзинама и подацима добијеним применом МКР. Добијене вредности нивоа на отвореним границама износе: $Z_s(\text{П1})=0.19 \text{ m}$, $Z_s(\text{П2})=0.19 \text{ m}$, $Z_s(\text{П8})=0.10 \text{ m}$, $Z_s(\text{П10})=0.01 \text{ m}$. На основу брзина и нивоа, установљене су следеће вредности параметара: $n=0.030 \text{ m}^{-1/3}\text{s}$, $\nu=0.05 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, $\Delta t=0.7 \text{ s}$, $s_1=s_4=s_6=1.1$, $s_2=0.9$, $s_3=s_5=s_9=0$, $s_7=s_8=1/\tau$. Устаљено стање успостављено је након 50000 временских корака, односно 9.7 часова. Као почетни услов, у свим тачкама рачунске мреже усвојене су нулте брзине и ниво воде који је једнак нивоу на низводној граници.

Ситуациони приказ брзина приказан је на сликама 31 и 32, док је поређење израчунатих резултата са резултатима добијеним применом МКР и са мереним подацима, приказано дијаграмима на слици 33 (профили П4, П5, П6 и П9) и у прилозима 5 и 6 (профили П2, П3, П7, П8, П10 и П11).

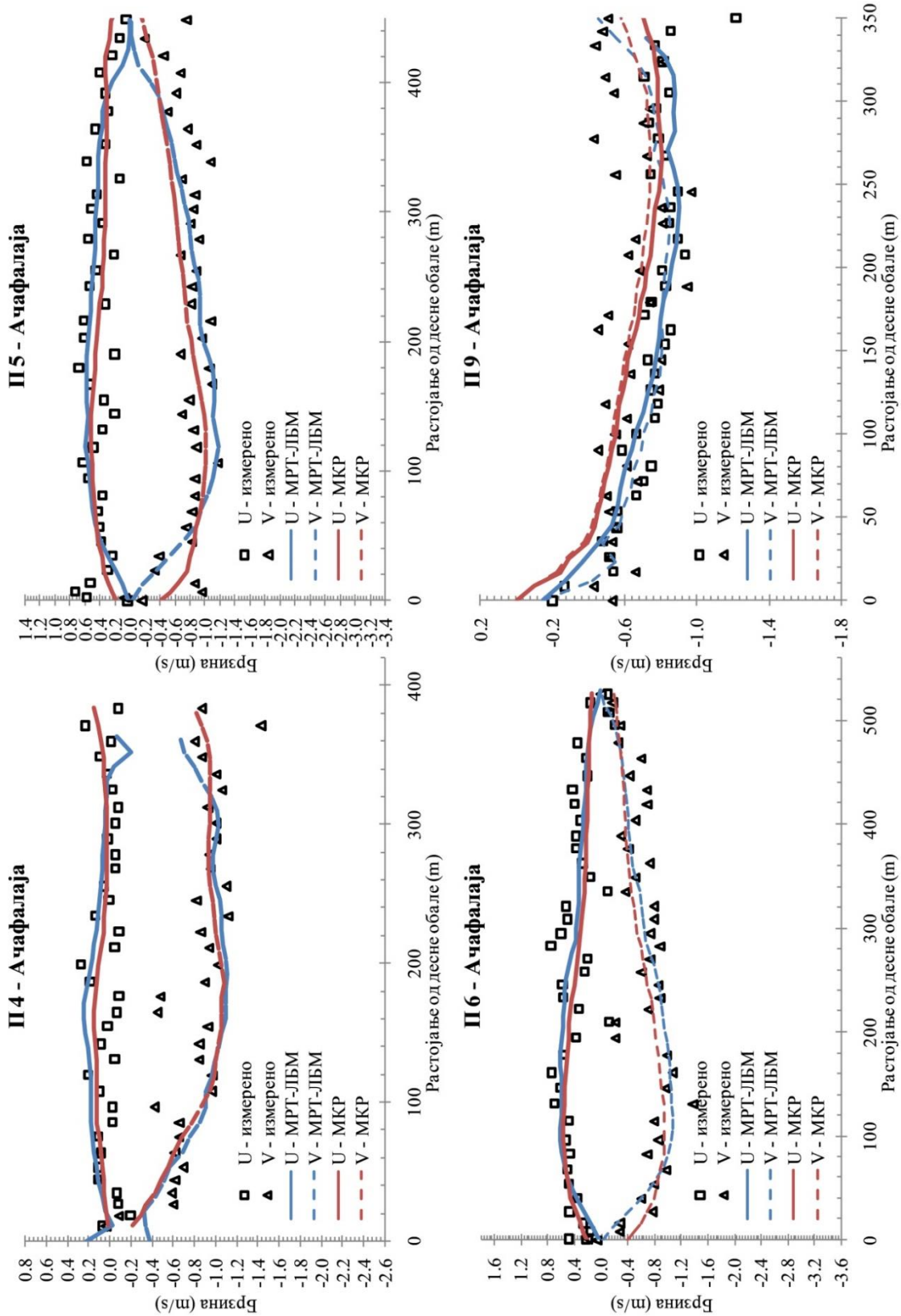
На слици 34 приложен је детаљ рачве на спајању главног тока и канала који је моделиран од профила П2. Уочава се утицај бочног канала на струјање главног тока. У узводном делу рачве долази до благог вртложења, које се јавља као последица разлике у брзинама водених маса, што се и види на основу вектора брзина. Како су брзине у главном току значајно веће од брзине долазног канала, брзине непосредно низводно од рачве се прерасподељују тако да расту од десне ка левој обали. Низводно, непосредно пре кривине, у профилу П3, брзине на кратко расту идући више ка левој (конвексној) обали. Интеграљењем брзина из профила П3, добија се проток $Q_1+Q_2=5182 \text{ m}^3/\text{s}$. У кривини, у профилу П4, брзине су прилично равномерно распоређене по попречном пресеку, са благим падом уз саму конкавну кривину, због мањих дубина. Код профила П5 се завршава кривина и до профила П7 се задржава приближно праволинијски ток. У тој деоници сразмерно котама дна, извршена је и прерасподела брзина, тако да вредност брзина расте ка десној обали (профили П5, П6 и П7). У профилу П8 из главног тока излива се $Q_3=906.1 \text{ m}^3/\text{s}$, чиме се добија проток низводно од рачве $4275.9 \text{ m}^3/\text{s}$, што се може потврдити и интеграцијом брзина у профилу П9, где се струја постепено пребацује ка левој обали. У профилу П10 из главног тока истиче још $Q_4=481.4 \text{ m}^3/\text{s}$, чиме се добија да је излазни проток у профилу П11 једнак $3794.5 \text{ m}^3/\text{s}$.



Слика 31. Компоненте брзина у x (u) и y (v) правцу за деоницу реке Ачафалаја



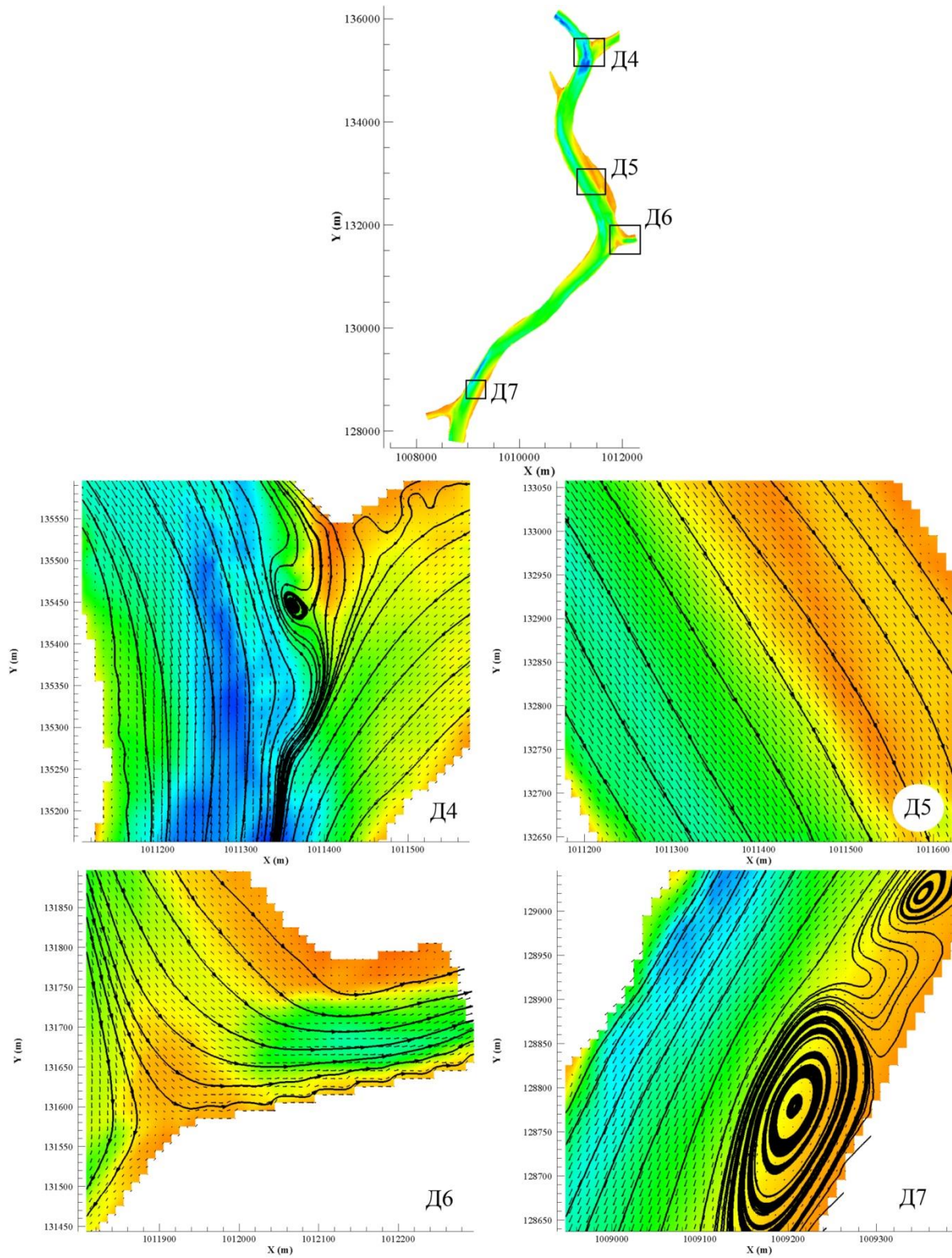
Слика 32. Графички приказ брзина у деоници реке Ачафалаја



Слика 33. Поређење израчунатих брзина са мереним подацима и са резултатима добијеним применом МКР, у попречним профилима П4, П5, П6 и П9 - Ачафалаја

Поређење резултата на приложеним дијаграмима показује веома добро подударанье МРТ-ЛБМ, МКР и мерених података. Како је мерење извршено из нестационарног пловила, забележена су осциловања мерених података, међутим и поред тога, приметан је тренд расподеле измерених брзина. Одступања мерења од МРТ-ЛБМ и МКР резултата крећу се чак и до 70% у појединим мерним вертикалама, док је забележена средња вредност одступања МРТ-ЛБМ и мерених података око 17%, што је идентично као и одступање МКР и мерених резултата. С обзиром на квалитет мерења, јаснији увид у тачност добијених резултата добиће се поређењем МРТ-ЛБМ и МКР резултата. Највећа одступања резултата забележена су у профилу П7 и крећу се највише до 20%, док се у осталим профилима крећу до 15%. Процентуално, средња вредност одступања МРТ-ЛБМ и МКР износи 10%. С обзиром на интензитете одступања може се сматрати да су резултати добијени моделом потпуно прихватљиви, поготово са становишта инжењерске праксе.

На слици 34 приказани су вектори брзина и струјнице у појединим детаљима. Детаљима Д4 и Д6 приказано је како изгледа струјна слика на укрштању два водотока. Детаљ Д5 даје приказ струјања у праволинијској деоници, са приближно равномерно распоређеним брзинама по попречном пресеку, док детаљ Д7 приказује струјну слику у деоници са изразитим вртложењем, које се јавља као последица „одвајања“ главног тока од конвексне обале у кривини.



Слика 34. Деталји струјница и вектора брзина – Ачафалаја

5.5. Модел наносних процеса и морфолошких промена

Након верификације модела за добијање струјне слике, приступа се верификацији модела за прорачун наносних процеса и морфолошких промена. Модел функционише тако што на основу дефинисане математичке формулације прорачунава концентрацију суспендованог наноса, проценат заступљености фракције у маси вученог наноса и деформацију корита кроз процесе ерозије и депоновања. Такође, модел омогућава и прорачун размене материјала између слојева речне подлоге, што у оквиру овог истраживања услед недостатка мерења није извршено. Како би се добили што реалнији резултати, модел омогућава и поделу гранулометријског састава на интервале, чиме се сваки процес разматра посебно за сваку фракцију. Такав приступ прорачуна даје увид у понашање зрна различитих крупноћа, од најситнијих која се крећу само у суспензији, до најкрупнијих која се крећу само по дну.

Квалитетна анализа захтева познавање што већег броја података на основу којих се модел може калибрисати. Будући да је за деоницу реке Дунав, дефинисане у поглављу 5.2, поред мерења брзина и нивоа воде извршено и веома темељно мерење наноса, иста деоница је коришћена за верификацију модела када је у питању анализа наносних процеса. Мерење суспендованог и вученог наноса извршено је упоредо са мерењем брзина, у пет мерних вертикала у сваком од шест дефинисаних мерних профила, док је у профили П5 мерење извршено само у једној вертикали. Како би се добио састав природне мешавине, узорак наносног материјала просејан је кроз дванаест сита различите величине отвора (Табела 4), при чему се може видети изузетна неуниформност расподеле величине зрна. Прва четири гранулометријска интервала класификовани су као прашина, интервали 5 - 10 као песак, а интервали 11 и 12 као шљунак. На основу гранулометријске средине најмањег и највећег заступљеног зрна, одређен је карактеристични пречник сваког гранулометријског интервала.

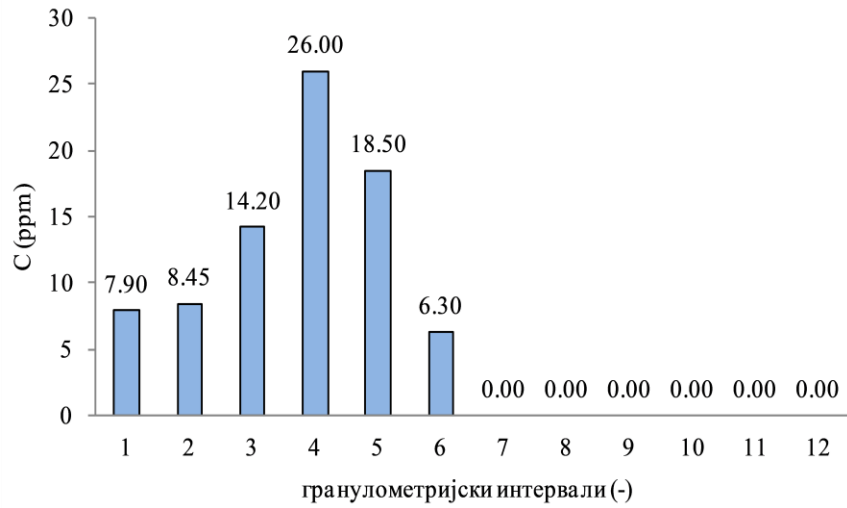
Наносни материјал у суспензији добијен је у виду масеног удела наноса у запремини мешавине воде и наноса (mg/L). Делјењем са запреминском тежином мешавине воде и наноса (ρ_m) добијена је бездимензионална концентрација наноса. Ради јаснијег приказа концентрације, означене са C , су приказане у милионитим деловима (ppm). За потребе прорачуна извршено је осредњавање измерених вредности концентрација. Најпре су

вредности концентрације суспендованог наноса осредњене по дубини, како би се добила референтна концентрација сваке фракције у свакој вертикали. Тако добијене вредности у попречном профилу П1 коришћене су као узводни гранични услов. Почетни услов формиран је задавањем константне вредности концентрације за сваки гранулометријски интервал, у свакој тачки рачунске мреже. Почетне вредности концентрација добијене су осредњавањем вредности концентрација свих вертикала у свим мерним профилима анализирани деонице. Тако добијене вредности почетних концентрација приказане су на слици 35, где се уочава да суспендовани нанос чине првих 6 фракција.

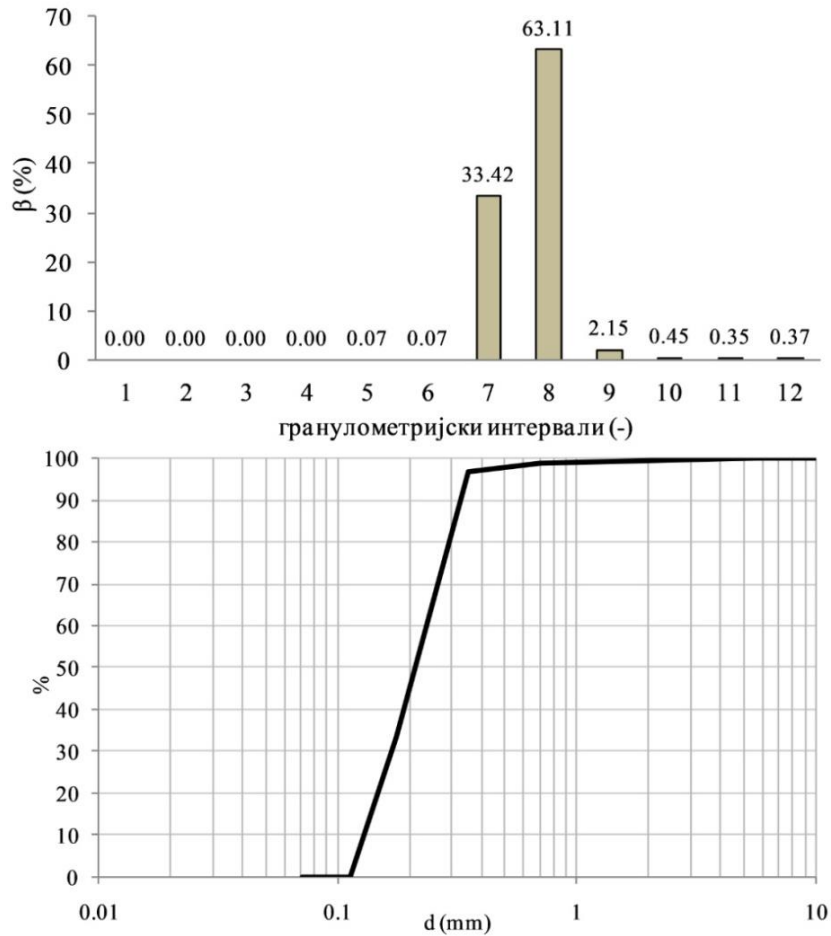
Табела 4. Гранулометријски интервали наносног материјала

Гранулометријски интервал (κ)	Пречник фракције d (mm)	Карактеристични пречник зрна d (mm)	Брзина тоњења честица w_t ($\frac{m}{s}$)
1	$0.001 < d < 0.005$	0.0022	3.85×10^{-6}
2	$0.005 < d < 0.01$	0.0070	3.89×10^{-5}
3	$0.01 < d < 0.02$	0.0141	1.58×10^{-4}
4	$0.02 < d < 0.05$	0.0316	7.95×10^{-4}
5	$0.05 < d < 0.1$	0.0707	3.98×10^{-3}
6	$0.1 < d < 0.125$	0.1118	8.58×10^{-3}
7	$0.125 < d < 0.25$	0.1768	1.94×10^{-2}
8	$0.25 < d < 0.5$	0.3535	5.01×10^{-2}
9	$0.5 < d < 1$	0.7071	9.22×10^{-2}
10	$1 < d < 2$	1.4142	0.166
11	$2 < d < 4$	2.8284	0.235
12	$4 < d < 8$	5.6568	0.333

Вучени нанос узоркован је на истим местима као и суспендовани. Добијени подаци дати су у виду процентуалног учешћа фракција у укупној маси материјала, означено са $\beta(\%)$. Осредњавањем вредности за све мерне вертикале добијена је гранулометријска крива, приложена на слици 36, која показује да нанос на дну реке чине претежно фракције 7 и 8, са заступљеношћу од 33% и 63% респективно, док је укупна заступљеност осталих фракција мања од 4%.



Слика 35. Почетна расподела концентрације суспендованог наноса



Слика 36. Почетна заступљеност фракција вученог наноса и гранулометријска крива

Поред усвојених почетних вредности, за потребе прорачуна су коришћени следећи параметри:

- параметри летис Болцман једначина: $\tau_c=1.4$, $\tau_{al}=2.8$, $\tau_{gal}=2.5$,
- параметри наноса: $\rho_s=2650 \text{ kg/m}^3$, $p=0.4$, $\kappa=0.4$, $d_{50}=0.22 \text{ mm}$, $d_{90}=0.33 \text{ mm}$,
 $D_{xx}=D_{yy}=0.6$,
- параметри анализиране деонице: $a=0.05 \text{ m}$, $\Delta a=0.03 \text{ m}$, $c_e=1$, дебљина активног подслоја = 0.3 m .

Као гранични услов на чврстим границама, коришћен је услов да нема промене суспендованог и вученог наноса управно на границу. Узводна граница формирана је задавањем константних вредности, а низводна задавањем условом слободног преноса.

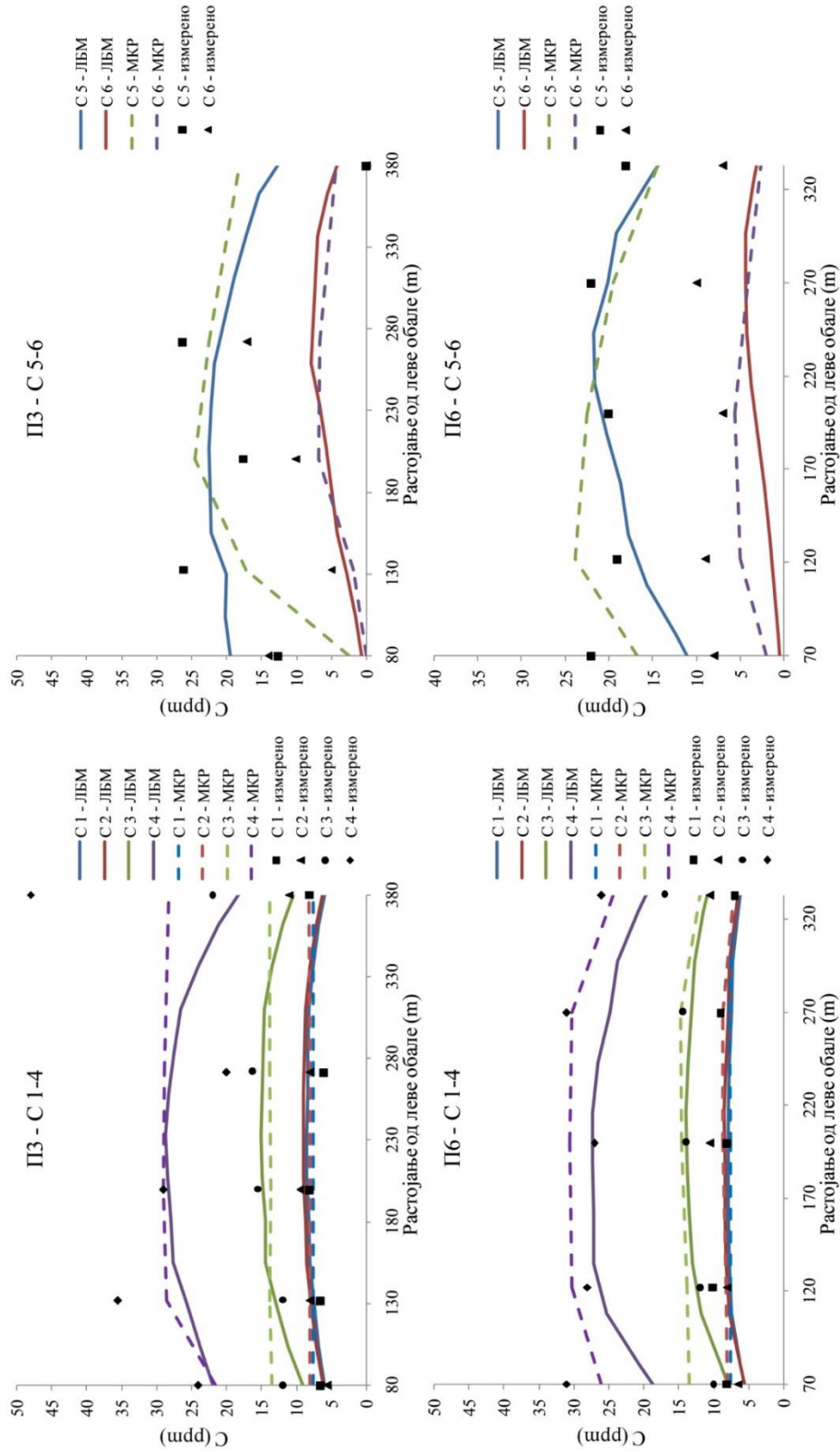
Коначан резултат спроведене анализе добијен је након успостављања равнотежног стања између воде и наноса. Симулациони период трајао је 3.6 дана, што је постигнуто након 800000 временских корака. Резултати прорачуна приказани су у виду дијаграма и ситуационих приказа концентрација суспендованог и вученог наноса.

На слици 37 приказани су дијаграми расподеле концентрација суспендованог наноса у попречним профилима П3 и П6, док су дијаграми за остале профиле приказани у прилозима 7 и 8. Ситуациони прикази просторног распореда концентрација суспендованог наноса приказани су на слици 38 за фракције 1 и 4 – С1 и С4, и у прилозима 9 и 10 за остале гранулометријске интервале.

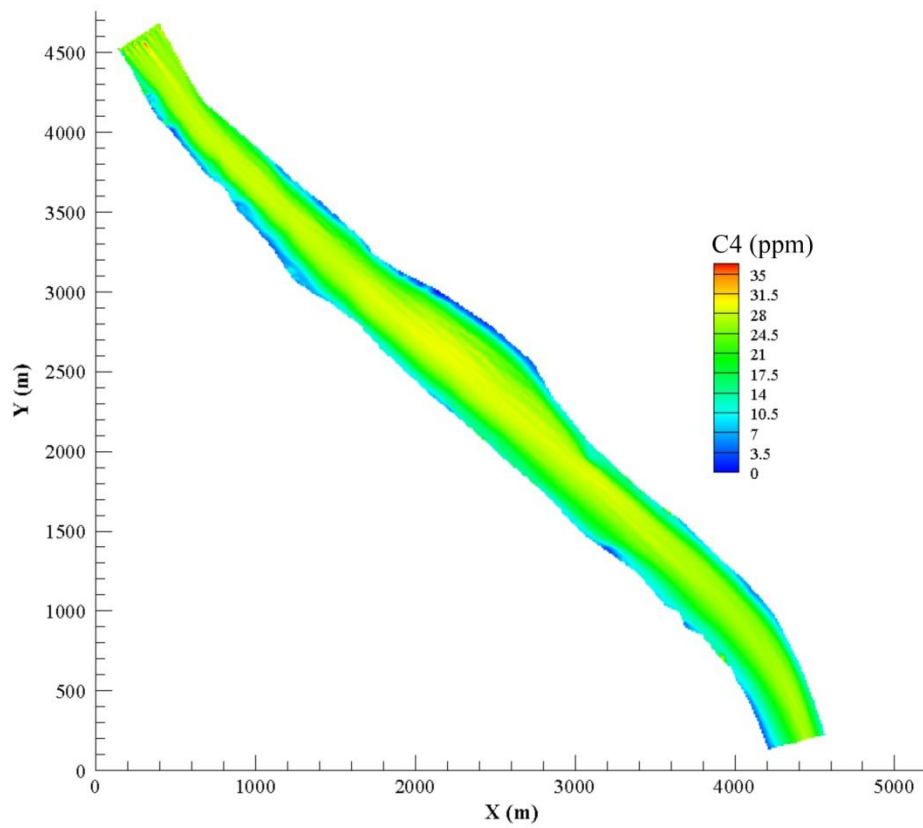
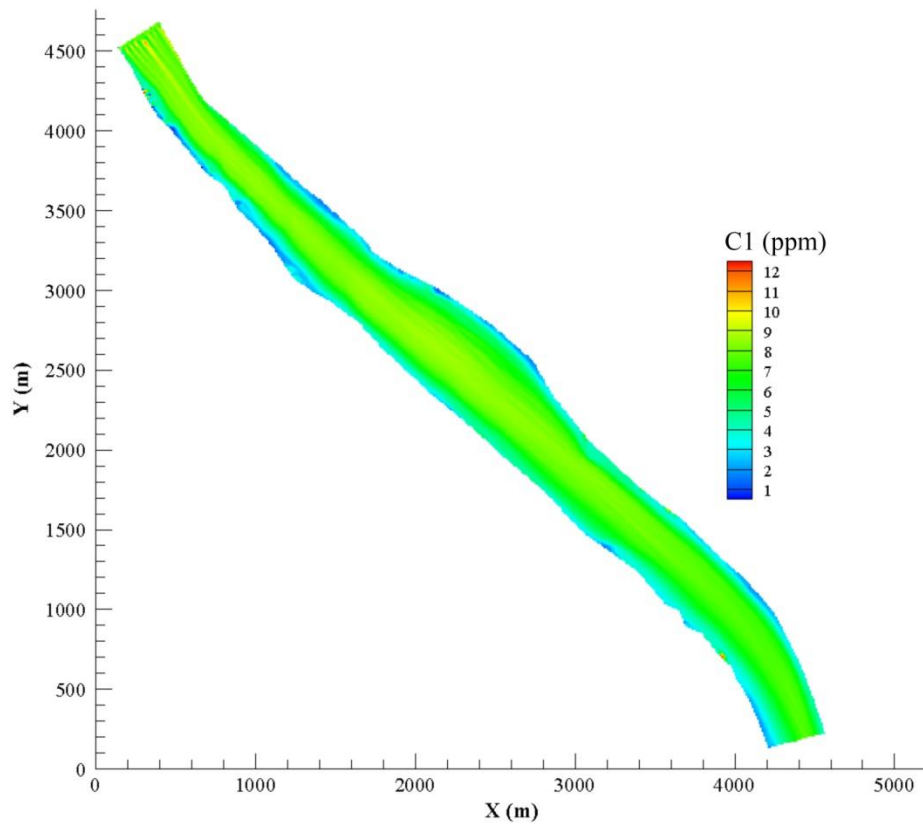
Ситне фракције, $\kappa=1-3$, немају довољну тежину за исталожавање, док са друге стране услед недостатка у садржини вученог наноса, ерозија практично не постоји. Како су процеси ерозије и депоновања ситнијих зрна занемарљиви, не постоји механизам који би утицао на значајнију промену почетних концентрација тих фракција. Као последица занемарљиве размене ситнијих честица између воде и дна, концентрација тих фракција мора бити приближно равномерно распоређена по целој деоници, што се и уочава са приложених дијаграма. Најситније фракције 1 и 2 задржале су концентрацију од приближно 8 ppm, док је код фракције 3 забележено благо опадање ка границама, тако да се С3 креће од просечно 9 ppm ближе чврстој граници, до 15 ppm у средишњем делу. Нешто крупнија зрна, фракције $\kappa=4-5$, и даље немају довољну тежину да се одупру

брзинама у средишњем делу деонице, где задржавају приближно почетне вредности, док је ка обалама забележено интензивније опадање због мањих брзина које нису довољног интензитета да одрже почетно задате вредности концентрација. Вредности концентрације С4 варирају од просечно 10 ppm на границама до 29 ppm у средини, а фракције С5 од 10 ppm до 27 ppm. Интензивније варијације забележене су за фракцију 6, тако да се вредности крећу од 0 ppm до 7 ppm. Код фракција 7-12 забележена је веома мала концентрација, мања од 3 ppm, што се и може видети у прилозима 9 и 10. Разлог за то лежи у чињеници да услед већих брзина таложења честица, члан депоновања постаје доминантан у односу на ерозију, као и да брзине нису довољног интензитета да одрже честице у суспензији.

Са приложених дијаграма се уочава веома добро слагање добијених концентрација (пуне линије) са МКР резултатима (испрекидане линије) и измереним подацима (тачке). Најбоља поклапања резултата забележена су за прве три фракције, где је највеће одступање израчунатих од измерених вредности 19% забележено у профилу П7 док у осталим профилима не прелази 10%. За исте фракције одступање МКР од мерења износи највише 25%. Нешто већа одступања обе методе од мерених података забележена су за фракције $k=4-6$, међутим оно што је приметно је да обе методе дају веома сличне резултате. Највећа одступања израчунатих вредности од МКР и мерених вредности забележена су у профилу П6. Просечна одступања ЛБМ и МКР од мерења, у профилу П6, износе респективно: 20% и 10% за фракцију 4, 18% и 17% за фракцију 5 и 70% и 27% за фракцију 6. У осталим профилима забележена су много мања одступања и са приложених дијаграма се уочава да израчунати подаци веома добро прате тренд расподеле измерених података. Ако би се анализирао просечна одступања концентрација свих фракција од мерених вредности, у свим мерним профилима, може се констатовати да су та одступања готово идентична за обе методе. Чињенице да су у питању веома мале концентрације (милионити делови) као и да се већа одступања јављају само у појединим вертикалама, доводе до закључка да се летис Болцман метода показала као веома успешна када је у питању моделирање суспендованог наноса.



Слика 37. Концентрација суспендованог наноса у попречним профилима ПЗ и П6. Поређење резултата добијених применом ЛБМ са резултатима добијеним применом МКР и са мереним подацима



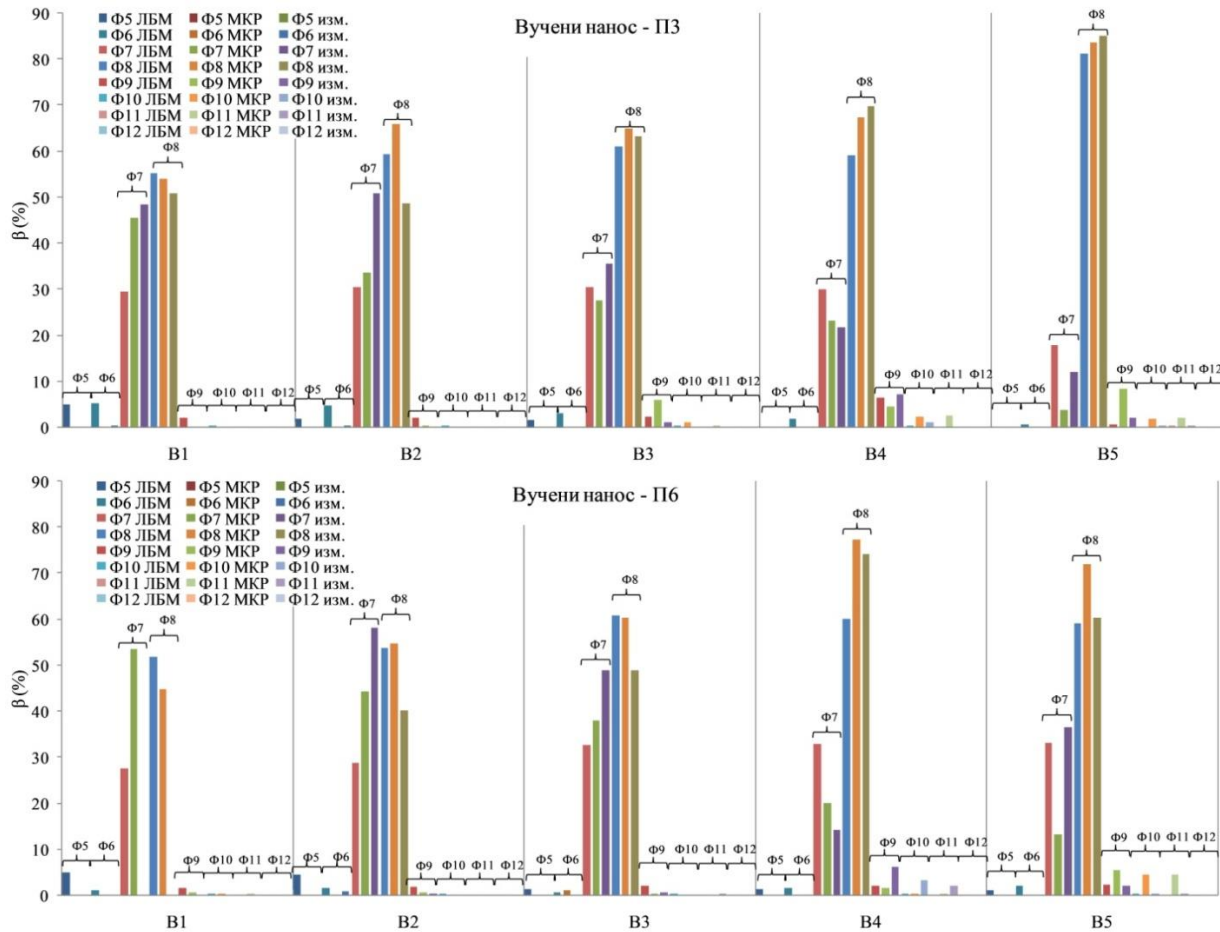
Слика 38. Просторни распоред концентрација суспендованог наноса за фракције 1 и 4 – C1 и C4

На слици 39, дато је поређење резултата добијених применом ЛБМ, МКР и мерених података за вучени нанос у профилима ПЗ и П6, у пет мерних вертикала (В), док су за остале попречне профиле подаци дати у прилогу 11. Просторни распоред заступљености фракција 7 и 8 у укупној количини вученог наноса приказан је на слици 40, док је за остале фракције дат у прилозима 12 и 13. Анализом резултата уочава се доминантна заступљености фракција 7 и 8 у вученом наносу, за обе примењене методе, што се веома добро слаже и са мереним подацима. Заступљеност фракција 5, 6 и 9 се креће до највише 5% за обе методе, док је присуство осталих фракција практично занемарљиво. Просечна заступљеност фракција 7 и 8, од 33.4% и 63.1% одржана је приближно у целој анализираној деоници, осим у зонама турбулентнијег струјања где се види пораст вредности β_8 и смањење вредности β_7 .

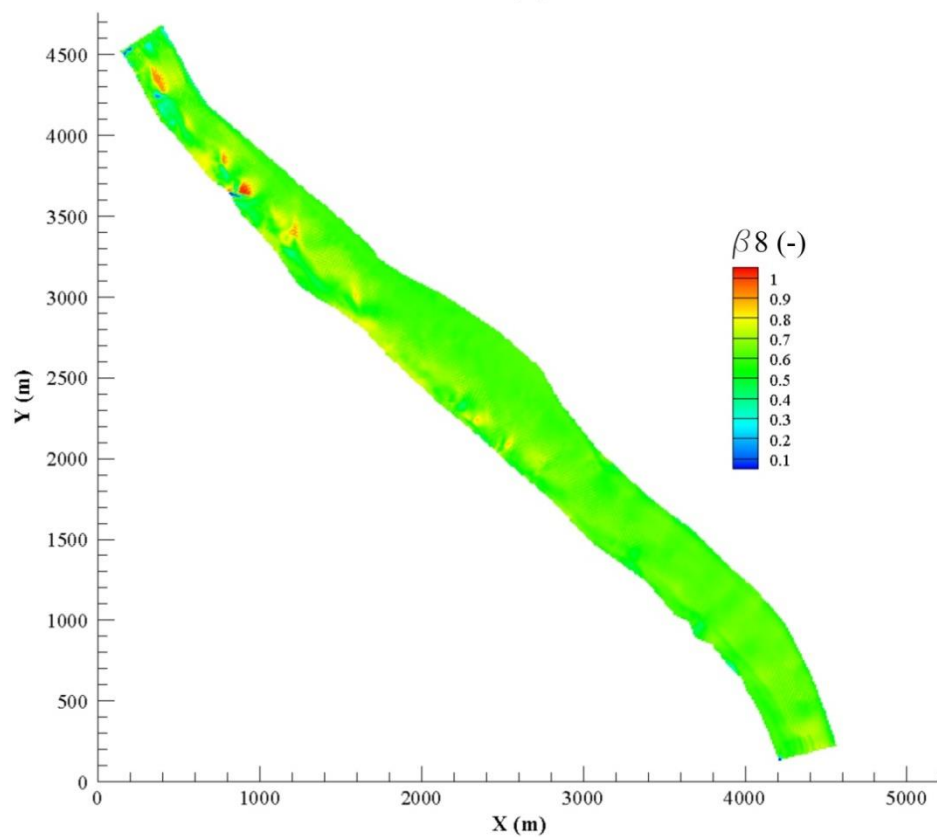
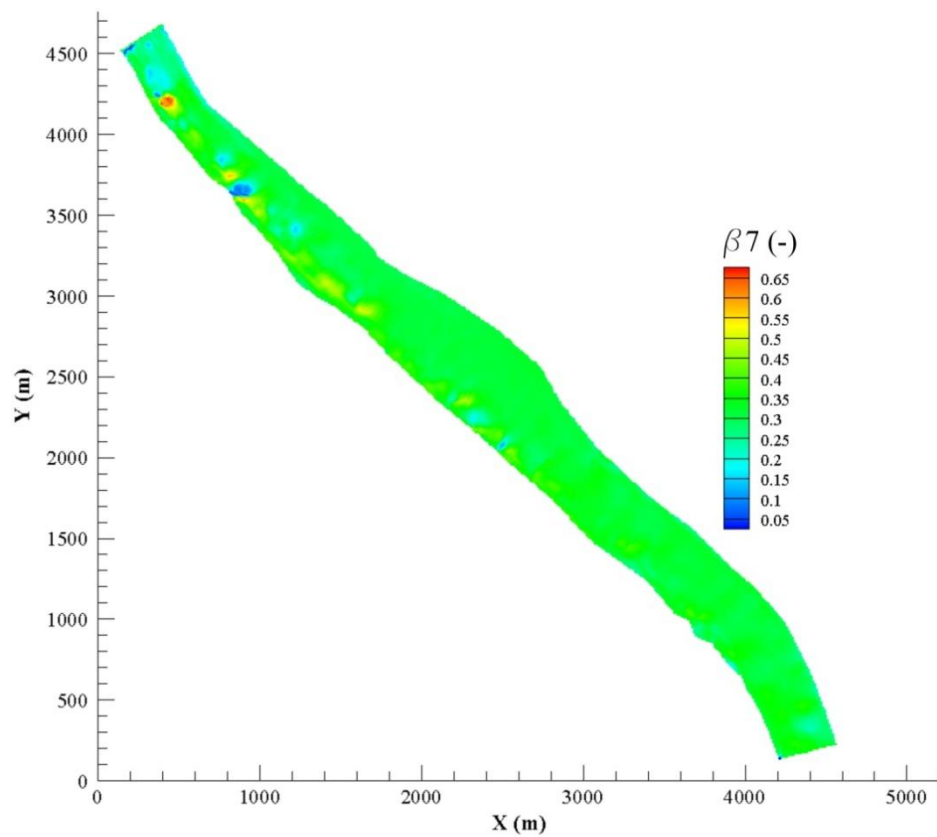
Промена коте речног дна (ΔZ) приказана је на слици 41. Резултати прорачуна показују да су морфолошке промене свега неколико центиметара, што се објашњава тиме да је почетно задато стање коте дна веома блиско равнотежном стању. Највеће подизање коте дна услед депоновања је 5 cm (црвена боја), док је највеће забележено спуштање дна услед ерозије 15 cm (плава боја). Како је дебљина активног подслоја (0.3 m) већа од максималне ерозије, закључује се да неће доћи до пробијања активног подслоја, односно до размене материјала између слојева дна.

Поређењем дијаграма приложених на сликама 22, 39 и 41, може се уочити веза која је успостављена између брзина, расподеле фракција на дну и деформације корита. У пределу мањих брзина уз леву обалу јавља се депоновање и приметно је доминантно присуство фракција 7 и 8 са присуством фракција 5 и 6 до 5% (вертикале В1, В2 и В3 на слици 39). Са порастом интензитета брзина ка десној обали, долази до испирања фракција 5 и 6 и до смањења процентуалног учешћа фракције 7. Последица тога је повећање учешћа фракције 8, али и појава фракција 9 и 10 (до 5%). Забележено присуство фракције 8 у мерним профилима, креће се од 52% уз леву обалу до 84% у пределу највећих брзина уз десну обалу, док се присуство фракције 7 креће од 17% уз десну обалу до 34% уз леву обалу. Поређењем резултата добијених применом ЛБМ са резултатима добијеним применом МКР и мереним подацима, уочава се веома добро поклапање. Ако се за све профиле и мерне вертикале упросече одступања ЛБМ и МКР од мерења, добија се да су та одступања за обе методе готово идентична и да се крећу око 30% за фракцију 7 и 10% за фракцију 8.

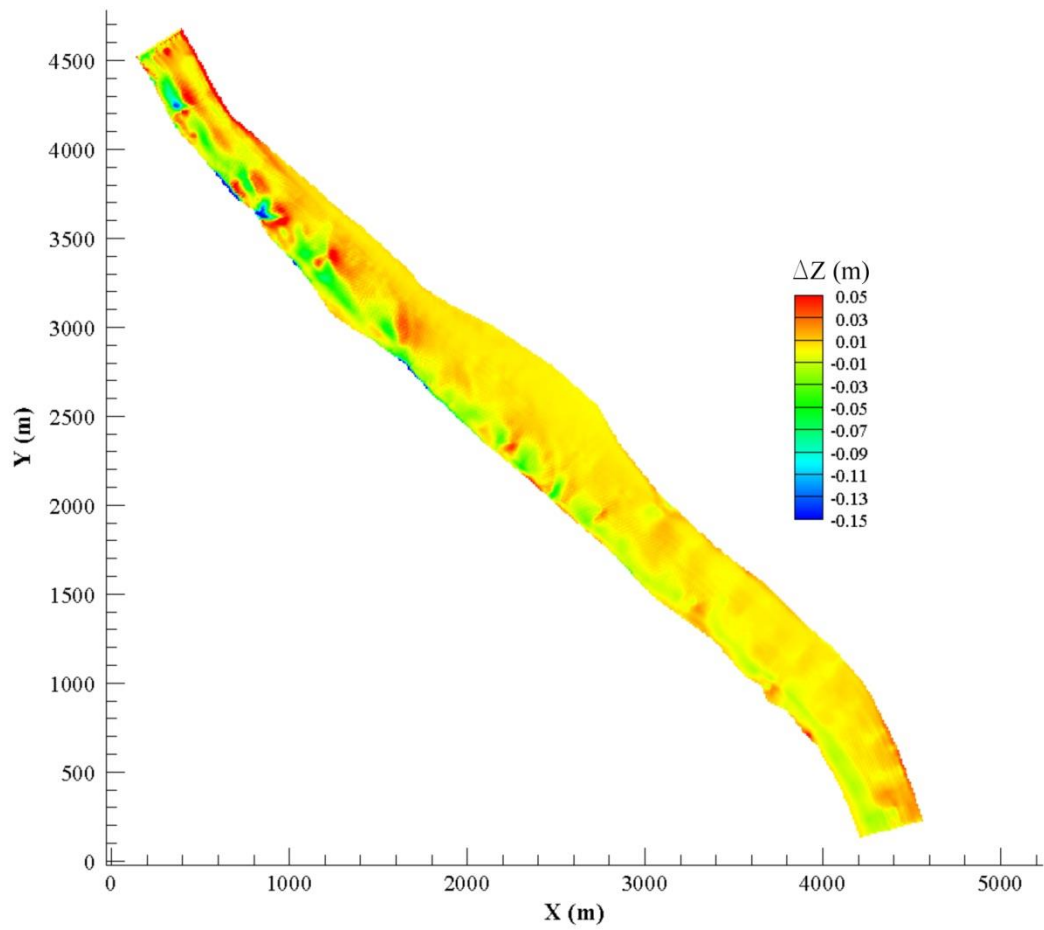
Анализом добијених резултата закључује се да је летис Болцман метода веома ефикасна када је у питању моделирање наносних процеса и морфолошких промена. Формирани модел показао се као довољно стабилан и тачан за решавање практичних инжењерских проблема.



Слика 39. Заступљеност фракција вученог наноса у попречним профелима ПЗ и ПБ у мерним вертикалама (В). Поређење резултата добијених применом ЛБМ са резултатима добијеним применом МКР и мерним резултатима



Слика 40. Просторна расподела вученог наноса за фракције 7 и 8



Слика 41. Морфолошке промене речног корита

5.6. Општа запажања нумеричких прорачуна

Како би се извршила верификација модела и добили што тачнији резултати прорачуна, потребно је извршити калибрацију параметара који фигуришу у једначинама на којима се модел заснива. Већи број калибрационих параметара значио би да се моделом прецизније обухватају карактеристике водотока и физички процеси који се у њима дешавају. Са друге стране, већи број параметра захтева и дуже време потребно за калибрацију модела, па се поставља питање на који начин убрзати процес калибрације, а да се тиме не утиче на смањење тачности прорачуна. Један од начина да се то постигне, јесте познавање приближних вредности параметара, које ће омогућити кориснику да брже дође до вредности карактеристичних за анализирани водоток. Оријентационе вредности коефицијената могу се утврдити на основу већег броја тест примера који су анализирани у раду.

На основу четири анализирани примера за прорачун струјне слике, предлажу се следеће оријентационе вредности коефицијената летис Болцман једначине: $\tau \approx 0.501$; $s_1=s_4=s_6 \approx 1.0 \div 1.3$; $s_2 \approx 0.7 \div 0.9$; $s_3=s_5=s_9=0$; $s_7=s_8=1/\tau$. Параметри за нанос утврђени су на основу једног анализирани примера и имају вредности: $\tau_c=1.4$, $\tau_{al}=2.8$, $\tau_{gal}=2.5$. Свакако да је за прецизније податке потребан већи број анализирани примера, међутим, може се сматрати да су и овако предложене вредности довољно прецизне да корисницима дају увид у приближне вредности које ће користити у оквиру својих прорачуна.

За потребе нумеричке анализе у дисертацији, коришћен је процесор Intel Core(TM) i7-7700K CPU 4.2GHz са инсталираном меморијом DDR4 од 64GB. С обзиром на број рачунских тачака и временски корак, трајање прорачуна струјне слике износило је у првом анализирани примеру 45 мин, у другом 90 мин и у трећем 60 мин, док је прорачун наносних процеса трајао 48 сати. Проблем дугачког трајања прорачуна може се решити паралелизацијом кода, за шта је летис Болцман метода изузетно погодна. Бржи прорачун омогућава и да се смањи просторни рачунски корак, чиме би се још више побољшала ефикасност модела.

6. ЗАКЉУЧАК

У овој докторској дисертацији формиран је нови модел за решавање једначина течења, кретања наноса и морфолошких промена у природним водотоцима, применом летис Болцман методе, чиме је потврђена хипотеза на којој се дисертација заснива. Идеја за успостављање таквог модела, проистела је из потребе истраживача и инжењера да се формира свеобухватан модел који је у стању да ефикасно симулира све процесе који се јављају у природним водотоцима. Прегледом литературе дошло се до закључка да је летис Болцман метода изузетно погодна за нумеричко решавање наведених процеса и да је ефикаснија од класичних нумеричких метода, пре свега када је у питању временско трајање прорачуна. Имајући у виду постојеће ЛБ моделе утврђено је следеће:

- Иако је развијен модел који решава струјну слику у природним водотоцима, модел је примењен и верификован на једном примеру, па се стога јавља потреба да се испита примена ЛБМ и за случај компликованијих водотока,
- Не постоји модел који се заснива на ЛБМ, а да обухвата све наносне процесе и њихову међусобну везу.

Сходно томе, истраживање у оквиру дисертације имало је два основна циља: верификацију модела течења за пример водотока са комплекснијом струјном сликом и формирање и верификацију модела који решава наносне процесе и морфолошке промене.

Математичка формулација на којој се заснива програмски код детаљно је приказана у поглављу 3, а састоји се од комбинације већ постојећих и предложених нових израза. Модел за решавање течења користи раванске једначине осредњене по дубини тока, суспендовани нанос решава применом адвективно – дифузне једначине, за вучени нанос примењена је једначина одржања активног слоја, а за морфолошке промене глобална једначина одржања наноса на дну. Све једначине међусобно су повезане кроз додатне чланове којима се описује размена материјала ерозијом и депоновањем, и написане су посебно за сваки гранулометријски интервал. На тај начин омогућено је да се природна мешавина материјала, коју најчешће карактерише неуниформан гранулометријски састав, представи кроз гранулометријске интервале, разматрајући тако понашање фракција које су дефинисане карактеристичним зрнима одређене крупноће. Уз то, модел омогућава и

размену материјала између слојева дна корита, такође примењујући принцип активног слоја.

Први корак при изради модела је да се математички докаже да разматране једначине могу бити решене применом летис Болцман методе. Поступак се састоји од тога да се најпре предложи равнотежна функција расподеле, а потом се применом Чепмен-Енског поступка врши доказ да се летис Болцман једначином може успешно репродуковати једначина која је предмет решавања. Такав поступак је раније био познат за једначине течења и адвективно – дифузну једначину, док је за решавање једначине одржања масе активног слоја и глобалне једначине одржања масе наноса на дну, у оквиру дисертације предложена нова математичка формулација. Оно што је такође новина, јесте да су у свим једначинама додати чланови размене материјала и да је извршена подела једначина на „к“ гранулометријских интервала.

Други корак израде модела био је писање програмског кода на којем се модел заснива, на основу познатих једначина. Код је написан програмским језиком Fortran, а алгоритам решавања приказан је у поглављу 4. Програм се састоји од комбинације програма за решавање струјне слике и програма за решавање наносних процеса.

Након формулисања једначина и креирања програмског кода, извршена је верификација модела. Као први пример који је послужио за тестирање модела за течење воде коришћен је канал параболочног попречног пресека са кривином под 90° . Овим примером показано је да је модел стабилан и да даје висок степен тачности. Извршено је поређење израчунатих вредности брзина са мереним подацима и са подацима добијеним применом методе коначних разлика, чиме је установљено да је нумеричка грешка анализираних метода готово идентична. Исти пример коришћен је и за верификацију модела када је у питању транспорт материје, где је показано да се летис Болцман методом може веродостојно симулирати физички процеси адвекције и дифузије.

Након верификације модела на тест примеру, приступљено је анализирању течења воде у природним водотоцима. Симулирана је струјна слика у деоницама реке Дунав, Мисури и Ачафалаја. Моделом Дунава констатовано је да СРТ-ЛБМ није довољно стабилан и да се не може користити за моделирање природних водотока. Из тог разлога, примењен је софистициранији приступ решавања, МРТ-ЛБМ, што је допринело креирању

стабилног и ефикасног модела. Друга два примера послужила су да се докаже примена ЛБМ и на водотоцима са компликованијом геометријом и морфологијом. Моделирањем реке Мисури доказана је примена ЛБМ за случај турбулентног струјања узрокованог потопљеним регулационим објектима, док је Ачафалаја анализирана како би се моделом обухватило и спајање водотока. Калибрација и верификација модела извршена је поређењем израчунатих вредности са подацима добијеним применом МКР и мереним подацима, при чему су забележена веома добра подударња свих вредности. Високим степеном подударња резултата потврђено је да се ЛБМ може ефикасно применити за моделирање струјне слике реалних природних водотока.

Подаци који су добијени из анализе струјне слике, коришћени су као улазни подаци за прорачун наносних процеса. Програм се заснива на новој математичкој формулацији која је предложена у дисертацији, а као крајњи резултат даје концентрације суспендованог наноса и процентуалну заступљеност наноса на дну, за сваки гранулометријски интервал, као и деформацију корита. Моделом је симулирана деоница реке Дунав, која је одабрана за анализу због веома темељних мерења на основу којих се модел калибрисао. Природна мешавина материјала подељена је на чак дванаест гранулометријских интервала, што је омогућило да се прорачуном обухвати читав спектар зрна наносне мешавине. Резултати прорачуна су као и код прорачуна струјне слике, поређени са мереним и МКР подацима. Поклапања која су забележена могу се сматрати сасвим задовољавајућим са становишта практичне примене, чиме је потврђена хипотеза да се ЛБМ може применити и за решавање наносних процеса и морфолошких промена.

На основу свега што је наведено, може се констатовати да летис Болцман метода представља моћан нумерички алат, да је потпуно компаративна класичним нумеричким методама и да је изузетно погодна за моделирање природних токова. Модел формиран у оквиру дисертације има практичну примену и пружа добру основу истраживачима за даља унапређења.

Правци даљег истраживања

- Даље унапређење модела би требало усмерити пре свега на преформулацију и унапређење програмског кода, услед чињенице да је ЛБМ изузетно погодна за паралелизацију, као и због могућности да се саме наносне једначине могу истовремено решавати, чиме се значајно скраћује време прорачуна. Бржи прорачун омогућава и да се рачунска мрежа прогустити, што утиче на повећање тачности добијених резултата,
- Модел би се могао спојити са једнодимензионалим и тродимензионалним моделом, тако да се добије један универзалан модел за решавање разматране проблематике,
- Модел би се могао применити и на буран режим, тако да се добије модел који решава и миран и буран режим,
- Како би се прецизније дефинисала геометрија водотока могуће је прогустити рачунску мрежу у пределу граница или објеката у водотоку (нпр. регулациони објекти, мостовски стубови итд). Ситнија мрежа омогућила би и прецизније резултате, а смањила би се и нумеричка нестабилност,
- Модел је формиран под претпоставком да се услед промене нивоа воденог огледала не мења област течења, односно да је рачунски домен фиксиран. Таква претпоставка оправдана је када се моделирају водотоци код којих је ширина значајно већа у односу на дубину. Међутим, ако то није случај потребно је моделом обухватити и могућност да се област течења може мењати.
- Ради бољег прилагођавања рачунске мреже геометрији водотока, могуће је извршити трансформацију картезијанских координата у криволинијске.
- Рад на унапређењу модела би се могао усмерити на даља мерења и прикупљања података, којима би се омогућила додатна верификација модела и добио прецизнији увид у могућности и ограничења модела. Већи број информација допринео би и јаснијој слици о интеракцији физичких процеса који се дешавају у природним водотоцима.

7. ЛИТЕРАТУРА

- [1] Akker, H. E., “Lattice Boltzmann simulations for multi-scale chemical engineering,” *Curr. Opin. Chem. Eng.*, vol. 21, pp. 67–75, Sep. 2018, doi: 10.1016/j.coche.2018.03.003.
- [2] Aursjø, O., Jettestuen, E., Vinningland, J. L., and Hiorth, A., “An improved lattice Boltzmann method for simulating advective–diffusive processes in fluids,” *J. Comput. Phys.*, vol. 332, pp. 363–375, 2017, doi: 10.1016/j.jcp.2016.12.014.
- [3] Bhatnagar, P. L., Gross, E. P., and Krook, M., “A Model for Collision Processes in Gases. I. Small Amplitude Processes in Charged and Neutral One-Component Systems,” *Phys. Rev.*, vol. 94, no. 3, pp. 511–525, May 1954, doi: 10.1103/PhysRev.94.511.
- [4] Borah, D. K., Alonso, C. V., and Prasad, S. N., “Routing Graded Sediments in Streams: Applications,” *J. Hydraul. Div.*, vol. 108, no. 12, pp. 1504–1517, Dec. 1982, doi: 10.1061/JYCEAJ.0005956.
- [5] Budinski, L., “Matematičko modeliranje ravanskih (osrednjenih po dubini) jednačina strujanja vode, transporta nanosa i morfoloških promena u prirodnim aluvijalnim vodotocima” - doktorska disertacija, 2010.
- [6] Budinski, L., “Lattice Boltzmann method for 2D flows in curvilinear coordinates,” *J. Hydroinformatics*, vol. 14, no. 3, pp. 772–783, Jul. 2012, doi: 10.2166/hydro.2012.097.
- [7] Budinski, L., “MRT lattice Boltzmann method for 2D flows in curvilinear coordinates,” *Comput. Fluids*, vol. 96, pp. 288–301, Jun. 2014, doi: 10.1016/j.compfluid.2014.03.007.
- [8] Budinski, L., “Solute transport in shallow water flows using the coupled curvilinear Lattice Boltzmann method,” *J. Hydrol.*, vol. 573, no. May 2018, pp. 557–567, Jun. 2019, doi: 10.1016/j.jhydrol.2019.03.094.
- [9] Budinski, L., Kermani, E. P., Ožvat, S., Fabian, J., and Stipić, M., “Unsteady flow simulation using the curvilinear multiple-relaxation-time lattice Boltzmann method: Danube River case study,” *J. Hydraul. Res.*, vol. 58, no. 2, pp. 204–217, Feb. 2019, doi: 10.1080/00221686.2019.1573761.
- [10] Budinski, L. and Spasojević, M., “2D Modeling of Flow and Sediment Interaction: Sediment Mixtures,” *J. Waterw. Port, Coastal, Ocean Eng.*, vol. 140, no. 2, pp. 199–209, Mar. 2014, doi: 10.1061/(ASCE)WW.1943-5460.0000226.
- [11] Casalino, D., Hazir, A., and Mann, A., “Turbofan Broadband Noise Prediction Using the Lattice Boltzmann Method,” *AIAA J.*, vol. 56, no. 2, pp. 609–628, Feb. 2018, doi: 10.2514/1.J055674.
- [12] Chen, Y., Jin, G., Zhang, P., Galindo-Torres, S. A., Scheuermann, A., and Li, L., “An efficient framework for particle-fluid interaction using Discrete Element Lattice

- Boltzmann Method: Coupling scheme and periodic boundary condition,” *Comput. Fluids*, vol. 208, p. 104613, Aug. 2020, doi: 10.1016/j.compfluid.2020.104613.
- [13] Dinesh Kumar, E., Sannasiraj, S. A., and Sundar, V., “Lattice Boltzmann simulation of free surface flow impact on a structure,” *Phys. Rev. E*, vol. 99, no. 2, pp. 1–12, 2019, doi: 10.1103/PhysRevE.99.023308.
- [14] Dolanský, J., Chára, Z., Vlasák, P., and Kysela, B., “Lattice Boltzmann method used to simulate particle motion in a conduit,” *J. Hydrol. Hydromechanics*, vol. 65, no. 2, pp. 105–113, Jun. 2017, doi: 10.1515/johh-2017-0008.
- [15] Dominique, D., “Generalized Lattice-Boltzmann Equations,” in *Rarefied Gas Dynamics: Theory and Simulations*, Washington DC: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1994. doi: 10.2514/5.9781600866319.0450.0458.
- [16] Du, R., Shi, B., and Chen, X., “Multi-relaxation-time lattice Boltzmann model for incompressible flow,” *Phys. Lett. A*, vol. 359, no. 6, pp. 564–572, Dec. 2006, doi: 10.1016/j.physleta.2006.07.074.
- [17] Du, T., Li, X., Zhang, X., and Wang, Y., “Lattice Boltzmann Method used for the aircraft characteristics computation at high angle of attack,” *Sci. China Technol. Sci.*, vol. 53, no. 8, pp. 2068–2073, 2010, doi: 10.1007/s11431-010-3222-2.
- [18] Duan, J. G. and Nanda, S. K., “Two-dimensional depth-averaged model simulation of suspended sediment concentration distribution in a groyne field,” *J. Hydrol.*, vol. 327, no. 3–4, pp. 426–437, Aug. 2006, doi: 10.1016/j.jhydrol.2005.11.055.
- [19] Fabian, Đ. and Budinski, L., *Potpovršinske vode*. Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu, 2017.
- [20] Fakhari, A. and Lee, T., “Multiple-relaxation-time lattice Boltzmann method for immiscible fluids at high Reynolds numbers,” *Phys. Rev. E - Stat. Nonlinear, Soft Matter Phys.*, vol. 87, no. 2, pp. 1–8, 2013, doi: 10.1103/PhysRevE.87.023304.
- [21] Feng, Y.-Y., Wang, C.-H., Xiang, Y., and Zhang, X.-X., “Internal thermal source effects on convection heat transfer in a two-dimensional porous medium: A lattice Boltzmann study,” *Int. J. Therm. Sci.*, vol. 173, p. 107416, Mar. 2021, doi: 10.1016/j.ijthermalsci.2021.107416.
- [22] Gao, P., “An equation for bed-load transport capacities in gravel-bed rivers,” *J. Hydrol.*, vol. 402, no. 3–4, pp. 297–305, May 2011, doi: 10.1016/j.jhydrol.2011.03.025.
- [23] Garcia, R. and Kahawita, R. A., “Numerical solution of the St. Venant equations with the MacCormack finite-difference scheme,” *Int. J. Numer. Methods Fluids*, vol. 6, no. 5, pp. 259–274, May 1986, doi: 10.1002/flid.1650060502.

- [24] Ginzburg, I., “Grid Refinement for Lattice-BGK Models,” *Adv. Water Resour.*, Nov. 2003, doi: 10.1006/jcph.1998.6089.
- [25] Ginzburg, I., “Equilibrium-type and link-type lattice Boltzmann models for generic advection and anisotropic-dispersion equation,” *Adv. Water Resour.*, vol. 28, no. 11, pp. 1171–1195, 2005, doi: 10.1016/j.advwatres.2005.03.004.
- [26] Grass, A. J., *Sediment transport by waves and currents*. University College, London, Dept. of Civil Engineering.
- [27] Guan, M. and Liang, Q., “A two-dimensional hydro-morphological model for river hydraulics and morphology with vegetation,” *Environ. Model. Softw.*, vol. 88, no. November 2017, pp. 10–21, Feb. 2017, doi: 10.1016/j.envsoft.2016.11.008.
- [28] Guangwu, Y., “A Lattice Boltzmann Equation for Waves,” *J. Comput. Phys.*, vol. 161, no. 1, pp. 61–69, Jun. 2000, doi: 10.1006/jcph.2000.6486.
- [29] Guo, Z., Zheng, C., and Shi, B., “An extrapolation method for boundary conditions in lattice Boltzmann method,” *Phys. Fluids*, vol. 14, no. 6, pp. 2007–2010, Jun. 2002, doi: 10.1063/1.1471914.
- [30] Hammou, H., Ginzburg, I., and Boulerhcha, M., “Two-relaxation-times Lattice Boltzmann schemes for solute transport in unsaturated water flow, with a focus on stability,” *Adv. Water Resour.*, vol. 34, no. 6, pp. 779–793, 2011, doi: 10.1016/j.advwatres.2011.04.008.
- [31] Han, M., Ooka, R., and Kikumoto, H., “Validation of lattice Boltzmann method-based large-eddy simulation applied to wind flow around single 1:1:2 building model,” *J. Wind Eng. Ind. Aerodyn.*, vol. 206, p. 104277, Nov. 2020, doi: 10.1016/j.jweia.2020.104277.
- [32] Holly, F. M. and Rahuel, J.-L., “New numerical/physical framework for mobile-bed modelling,” *J. Hydraul. Res.*, vol. 28, no. 4, pp. 401–416, Jul. 1990, doi: 10.1080/00221689009499057.
- [33] Javernick, L., Redolfi, M., and Bertoldi, W., “Evaluation of a numerical model’s ability to predict bed load transport observed in braided river experiments,” *Adv. Water Resour.*, vol. 115, pp. 207–218, May 2018, doi: 10.1016/j.advwatres.2018.03.012.
- [34] Jebakumar, A. S., Magi, V., and Abraham, J., “Lattice-Boltzmann simulations of particle transport in a turbulent channel flow,” *Int. J. Heat Mass Transf.*, vol. 127, pp. 339–348, 2018, doi: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2018.06.107.
- [35] Jia, Y. and Wang, S. S. Y., “Numerical Model for Channel Flow and Morphological Change Studies,” *J. Hydraul. Eng.*, vol. 125, no. 9, pp. 924–933, Sep. 1999, doi: 10.1061/(ASCE)0733-9429(1999)125:9(924).
- [36] Julien, P. Y., *Erosion and Sedimentation*. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.

- doi: 10.1017/CBO9780511806049.
- [37] Kamenshchikov, L., “Parallel implementation of lattice boltzmann flow simulation in fortran-DVM language,” *Lect. Notes Comput. Sci. (including Subser. Lect. Notes Artif. Intell. Lect. Notes Bioinformatics)*, vol. 5698 LNCS, no. 4, pp. 216–225, 2009, doi: 10.1007/978-3-642-03275-2_22.
- [38] Kassem, A. and Chaudhry, M. H., “Effect of Bed Armoring on Bed Topography of Channel Bends,” *J. Hydraul. Eng.*, vol. 131, no. 12, pp. 1136–1140, Dec. 2005, doi: 10.1061/(ASCE)0733-9429(2005)131:12(1136).
- [39] Krüger, T., Kusumaatmaja, H., Kuzmin, A., Shardt, O., Silva, G., and Vigen, E. M., *The Lattice Boltzmann Method*. Cham: Springer International Publishing, 2017. doi: 10.1007/978-3-319-44649-3.
- [40] Lallemand, P. and Luo, L.-S., “Theory of the lattice Boltzmann method: Dispersion, dissipation, isotropy, Galilean invariance, and stability,” *Phys. Rev. E*, Jun. 2000, doi: 10.1103/PhysRevE.61.6546.
- [41] Li, J., “Appendix: Chapman-Enskog Expansion in the Lattice Boltzmann Method,” pp. 1–6, 2015, [Online]. Available: <http://arxiv.org/abs/1512.02599>
- [42] Li, S. S., Millar, R. G., and Islam, S., “Modelling gravel transport and morphology for the Fraser River Gravel Reach, British Columbia,” *Geomorphology*, vol. 95, no. 3–4, pp. 206–222, Mar. 2008, doi: 10.1016/j.geomorph.2007.06.010.
- [43] Li, S., Huang, P., and Li, J., “A modified lattice Boltzmann model for shallow water flows over complex topography,” *Int. J. Numer. Methods Fluids*, vol. 77, no. 8, pp. 441–458, 2015, doi: 10.1002/flid.3991.
- [44] Li, Y. and Huang, P., “A coupled lattice Boltzmann model for advection and anisotropic dispersion problem in shallow water,” *Adv. Water Resour.*, vol. 31, no. 12, pp. 1719–1730, Dec. 2008, doi: 10.1016/j.advwatres.2008.08.008.
- [45] Li, Y. and Huang, P., “A coupled lattice Boltzmann model for the shallow water-contamination system,” *Int. J. Numer. Methods Fluids*, vol. 59, no. 2, pp. 195–213, Jan. 2009, doi: 10.1002/flid.1819.
- [46] Lin, X., Xu, W.-J., Lv, K., and Li, Y.-J., “Multiple-relaxation-time lattice Boltzmann method for three dimensional free-surface flows with multi-bubble model,” *Comput. Fluids*, vol. 233, no. April 2021, p. 105247, Jan. 2021, doi: 10.1016/j.compfluid.2021.105247.
- [47] Liu, G., Zhang, J., and Zhang, Q., “A high-performance three-dimensional lattice Boltzmann solver for water waves with free surface capturing,” *Coast. Eng.*, vol. 165, no. August 2020, p. 103865, Apr. 2021, doi: 10.1016/j.coastaleng.2021.103865.

- [48] Liu, H., Zhou, J. G., and Burrows, R., “Inlet and outlet boundary conditions for the Lattice-Boltzmann modelling of shallow water flows,” *Prog. Comput. Fluid Dyn. An Int. J.*, vol. 12, no. 1, p. 11, 2012, doi: 10.1504/PCFD.2012.044850.
- [49] Liu, H., Li, M., and Shu, A., “Large eddy simulation of turbulent shallow water flows using multi-relaxation-time lattice Boltzmann model,” *Int. J. Numer. Methods Fluids*, vol. 70, no. 12, pp. 1573–1589, Dec. 2012, doi: 10.1002/flid.3643.
- [50] Liu, H., Wang, H., Liu, S., Hu, C., Ding, Y., and Zhang, J., “Lattice Boltzmann method for the Saint-Venant equations,” *J. Hydrol.*, vol. 524, pp. 411–416, 2015, doi: 10.1016/j.jhydrol.2015.03.002.
- [51] Liu, H., Zhou, G. J., and Burrows, R., “Lattice Boltzmann model for shallow water flows in curved and meandering channels,” *Int. J. Comput. Fluid Dyn.*, vol. 23, no. 3, pp. 209–220, 2009, doi: 10.1080/10618560902754924.
- [52] Liu, H., Zhou, J. G., and Burrows, R., “Lattice Boltzmann simulations of the transient shallow water flows,” *Adv. Water Resour.*, vol. 33, no. 4, pp. 387–396, 2010, doi: 10.1016/j.advwatres.2010.01.005.
- [53] Marcou, O., Chopard, B., El Yacoubi, S., Hamroun, B., Lefèvre, L., and Mendes, E., “A Lattice Boltzmann model to study sedimentation phenomena in irrigation canals,” *Commun. Comput. Phys.*, vol. 13, no. 3, pp. 880–899, 2013, doi: 10.4208/cicp.371011.260112s.
- [54] Morrison, H. E. and Leder, A., “Sediment transport in turbulent flows with the lattice Boltzmann method,” *Comput. Fluids*, vol. 172, pp. 340–351, 2018, doi: 10.1016/j.compfluid.2018.04.015.
- [55] Ouillon, S. and Dartus, D., “Three-Dimensional Computation of Flow around Groyne,” *J. Hydraul. Eng.*, vol. 123, no. 11, pp. 962–970, Nov. 1997, doi: 10.1061/(ASCE)0733-9429(1997)123:11(962).
- [56] Ožvat, S., “Matematičko modeliranje linijskog strujanja vode i transporta nanosa primenom latis Bolcman metode za prirodne vodotoke” - doktorska disertacija, 2018.
- [57] Ožvat, S. and Budinski, L., “Non-uniform grid based LBM for the Saint-Venant equations,” *J. Hydrol.*, vol. 563, no. February, pp. 435–445, Aug. 2018, doi: 10.1016/j.jhydrol.2018.06.008.
- [58] Peng, Y., Zhou, J. G., and Burrows, R., “Modelling solute transport in shallow water with the lattice Boltzmann method,” *Comput. Fluids*, vol. 50, no. 1, pp. 181–188, 2011, doi: 10.1016/j.compfluid.2011.07.008.
- [59] Peng, Y., Zhou, J. G., and Zhang, J. M., “Mixed numerical method for bed evolution,” *Proc. Inst. Civ. Eng. - Water Manag.*, vol. 168, no. 1, pp. 3–15, Feb. 2015, doi:

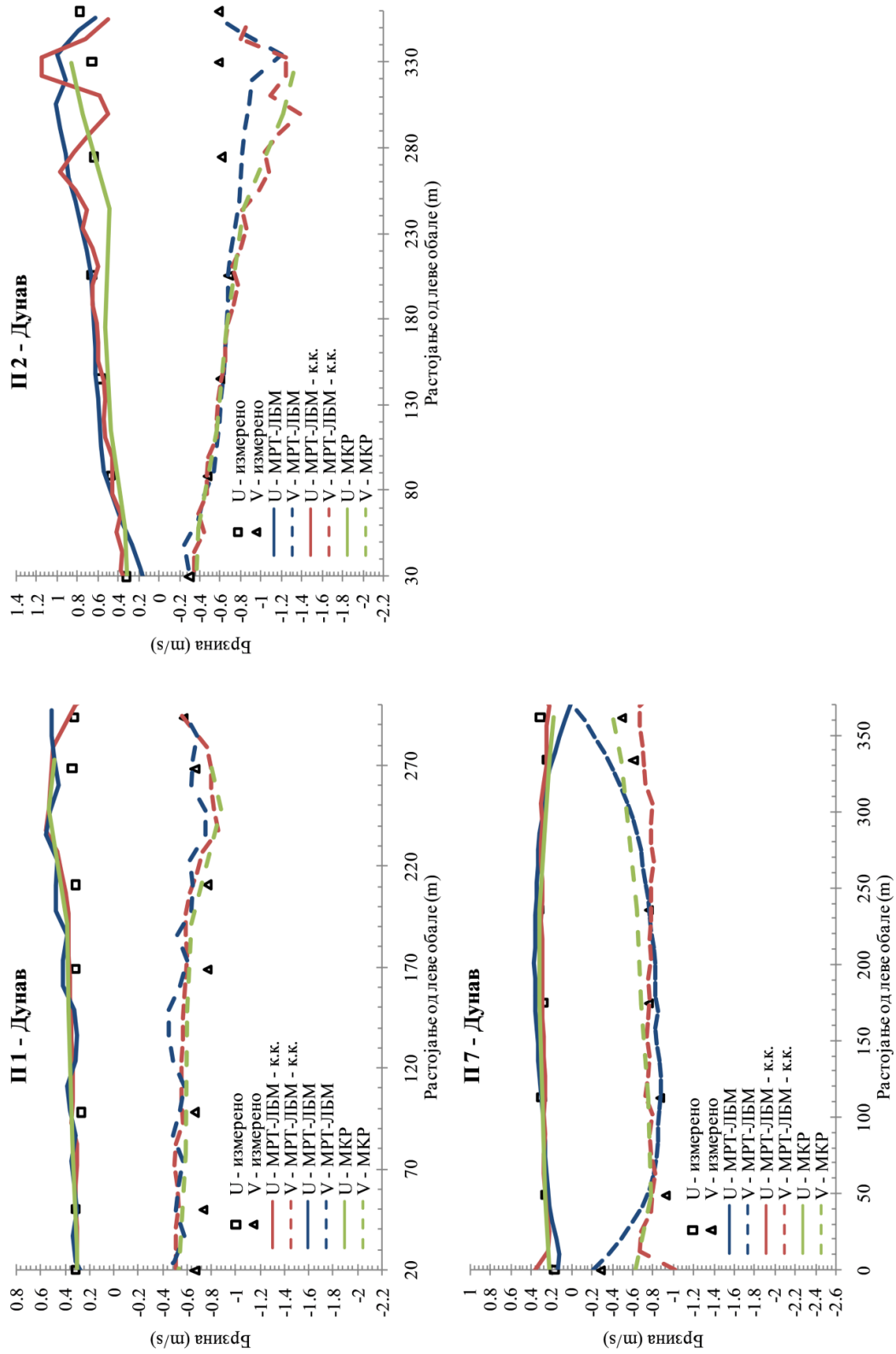
- 10.1680/wama.12.00070.
- [60] Ponce, V. M. and Yabusaki, S. B., “Closure to ‘ Modeling Circulation in Depth-Averaged Flow ’ by Victor M. Ponce and Steven B. Yabusak (November, 1981),” *J. Hydraul. Eng.*, vol. 109, no. 1, pp. 151–153, Jan. 1983, doi: 10.1061/(ASCE)0733-9429(1983)109:1(151).
- [61] van Rijn, L. C., “Sediment Transport, Part I: Bed Load Transport,” *J. Hydraul. Eng.*, vol. 110, no. 10, pp. 1431–1456, Oct. 1984, doi: 10.1061/(ASCE)0733-9429(1984)110:10(1431).
- [62] van Rijn, L. C., “Sediment Transport, Part II: Suspended Load Transport,” *J. Hydraul. Eng.*, vol. 110, no. 11, pp. 1613–1641, Nov. 1984, doi: 10.1061/(ASCE)0733-9429(1984)110:11(1613).
- [63] Roushangar, K. and Koosheh, A., “Evaluation of GA-SVR method for modeling bed load transport in gravel-bed rivers,” *J. Hydrol.*, vol. 527, pp. 1142–1152, Aug. 2015, doi: 10.1016/j.jhydrol.2015.06.006.
- [64] Ru, Z., Liu, H., Xing, L., and Ding, Y., “A well-balanced lattice Boltzmann model for the depth-averaged advection–diffusion equation with variable water depth,” *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 379, p. 113745, 2021, doi: 10.1016/j.cma.2021.113745.
- [65] Satofuka, N. and Nishioka, T., “Parallelization of lattice Boltzmann method for incompressible flow computations,” *Comput. Mech.*, vol. 23, no. 2, pp. 164–171, Mar. 1999, doi: 10.1007/s004660050397.
- [66] Servan-Camas, B. and Tsai, F. T. C., “Lattice Boltzmann method with two relaxation times for advection–diffusion equation: Third order analysis and stability analysis,” *Adv. Water Resour.*, vol. 31, no. 8, pp. 1113–1126, Aug. 2008, doi: 10.1016/j.advwatres.2008.05.001.
- [67] Sitompul, Y. P. and Aoki, T., “A filtered cumulant lattice Boltzmann method for violent two-phase flows,” *J. Comput. Phys.*, vol. 390, pp. 93–120, 2019, doi: 10.1016/j.jcp.2019.04.019.
- [68] Spasojević, M., *Numerička hidraulika - otvoreni tokovi* -. 1996.
- [69] Spasojevic, M. and Holly, F. M., “2-D Bed Evolution in Natural Watercourses—New Simulation Approach,” *J. Waterw. Port, Coastal, Ocean Eng.*, vol. 116, no. 4, pp. 425–443, Jul. 1990, doi: 10.1061/(ASCE)0733-950X(1990)116:4(425).
- [70] Spasojevic, M. and Holly, F. M., “Two- and Three-Dimensional Numerical Simulation of Mobile-Bed Hydrodynamics and Sedimentation,” in *Sedimentation Engineering*, no. November, Reston, VA: American Society of Civil Engineers, 2008, pp. 683–761. doi: 10.1061/9780784408148.ch15.

- [71] Sukop, M. C. and Thorne, D. T., *Lattice Boltzmann Modeling*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2006. doi: 10.1007/978-3-540-27982-2.
- [72] Szymkiewicz, A., *Modelling Water Flow in Unsaturated Porous Media*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2013. doi: 10.1007/978-3-642-23559-7.
- [73] Ta, W., Wang, H., and Jia, X., “Suspended sediment transport response to upstream wash-load supply in the sand-bed reach of the Upper Yellow River, China,” *J. Hydrol.*, vol. 528, pp. 562–570, Sep. 2015, doi: 10.1016/j.jhydrol.2015.06.051.
- [74] van Thang, P., Chopard, B., Lefèvre, L., Ondo, D. A., and Mendes, E., “Study of the 1D lattice Boltzmann shallow water equation and its coupling to build a canal network,” *J. Comput. Phys.*, vol. 229, no. 19, pp. 7373–7400, 2010, doi: 10.1016/j.jcp.2010.06.022.
- [75] Thömmes, G., Seaid, M., and Banda, M. K., “Lattice Boltzmann methods for shallow water flow applications,” *Int. J. Numer. Methods Fluids*, vol. 55, no. 7, pp. 673–692, Nov. 2007, doi: 10.1002/flid.1489.
- [76] USACE, “HEC-RAS River Analysis System Hydraulic Reference Manual,” *Hydrol. Eng. Cent.*, no. February, p. 547, 2016.
- [77] Wang, H. and Liu, H., “A mesoscopic coupling scheme for solute transport in surface water using the lattice boltzmann method,” *J. Hydrol.*, vol. 588, no. October 2019, p. 125062, Sep. 2020, doi: 10.1016/j.jhydrol.2020.125062.
- [78] Warburton, J. and Davies, T., “Variability of bedload transport and channel morphology in a braided river hydraulic model,” *Earth Surf. Process. Landforms*, vol. 19, no. 5, pp. 403–421, Aug. 1994, doi: 10.1002/esp.3290190503.
- [79] Wolf-Gladrow, D. A., “Lattice-gas cellular automata and lattice Boltzmann models: an introduction,” 2004.
- [80] Wu, J.-S. and Shao, Y.-L., “Simulation of lid-driven cavity flows by parallel lattice Boltzmann method using multi-relaxation-time scheme,” *Int. J. Numer. Methods Fluids*, vol. 46, no. 9, pp. 921–937, Nov. 2004, doi: 10.1002/flid.787.
- [81] Xing, E., Zhang, Q., Liu, G., Zhang, J., and Ji, C., “A three-dimensional model of wave interactions with permeable structures using the lattice Boltzmann method,” *Appl. Math. Model.*, vol. 104, pp. 67–95, Apr. 2021, doi: 10.1016/j.apm.2021.11.018.
- [82] Yang, F., Shi, X., Guo, X., and Sai, Q., “MRT Lattice Boltzmann Schemes for High Reynolds Number Flow in Two-Dimensional Lid-Driven Semi-Circular Cavity,” *Energy Procedia*, vol. 16, pp. 639–644, 2012, doi: 10.1016/j.egypro.2012.01.103.
- [83] Yu, H., Luo, L. S., and Girimaji, S. S., “LES of turbulent square jet flow using an MRT lattice Boltzmann model,” *Comput. Fluids*, vol. 35, no. 8–9, pp. 957–965, 2006, doi:

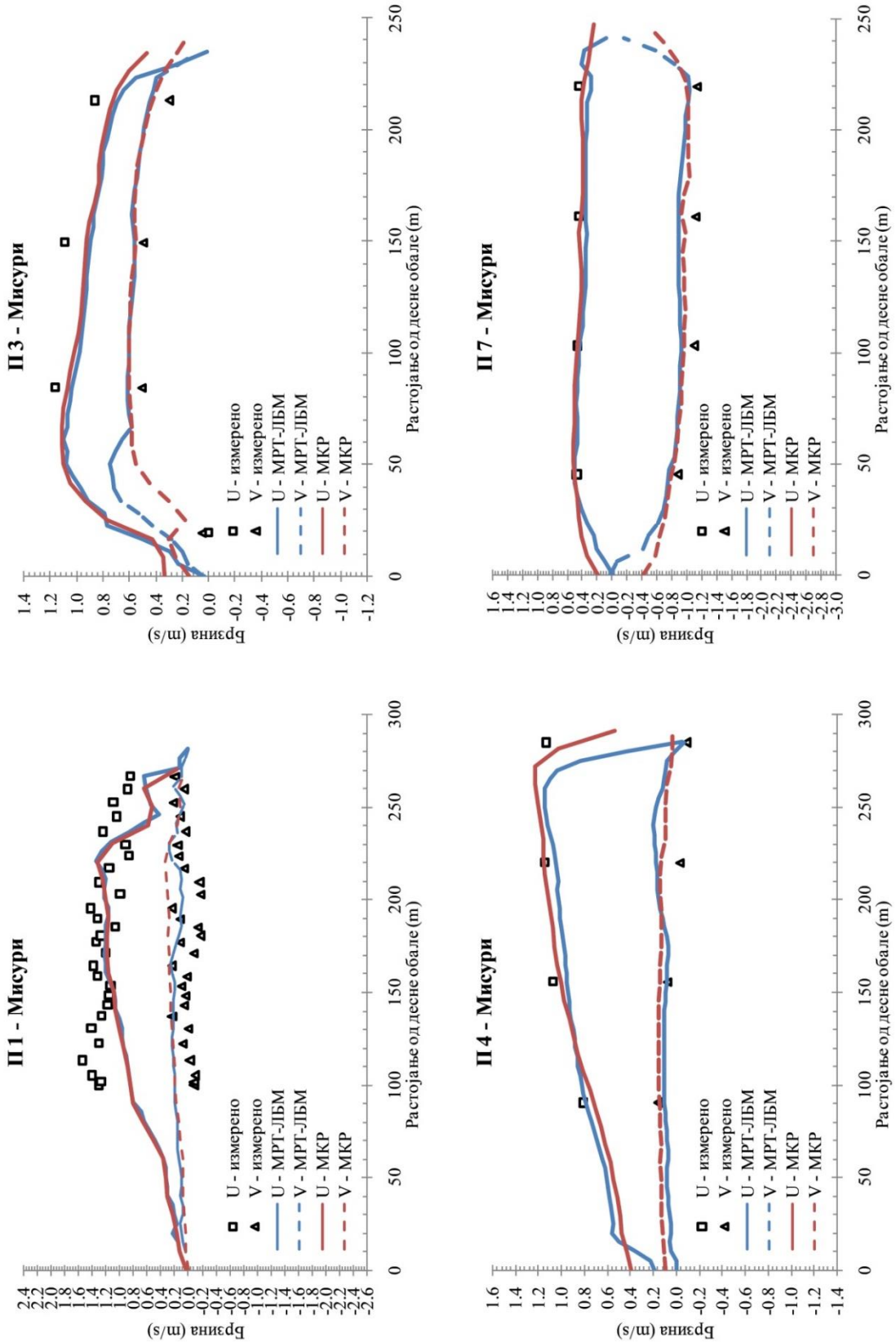
- 10.1016/j.compfluid.2005.04.009.
- [84] Zhang, H. and Misbah, C., “Lattice Boltzmann simulation of advection-diffusion of chemicals and applications to blood flow,” *Comput. Fluids*, vol. 187, pp. 46–59, Jun. 2019, doi: 10.1016/j.compfluid.2019.04.018.
- [85] Zhang, X., Bengough, A. G., Crawford, J. W., and Young, I. M., “A lattice BGK model for advection and anisotropic dispersion equation,” *Adv. Water Resour.*, vol. 25, no. 1, pp. 1–8, Jan. 2002, doi: 10.1016/S0309-1708(01)00047-1.
- [86] Zhou, J. G., “A lattice Boltzmann model for the shallow water equations,” *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 191, no. 32, pp. 3527–3539, Jun. 2002, doi: 10.1016/S0045-7825(02)00291-8.
- [87] Zhou, J. G., *Lattice Boltzmann Methods for Shallow Water Flows*, vol. 507. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2004. doi: 10.1007/978-3-662-08276-8.
- [88] Zhou, J. G., “Enhancement of the LABSWE for shallow water flows,” *J. Comput. Phys.*, vol. 230, no. 2, pp. 394–401, Jan. 2009, doi: 10.1016/j.jcp.2010.09.027.
- [89] Zhou, J. G., “MRT RECTANGULAR LATTICE BOLTZMANN METHOD,” *Int. J. Mod. Phys. C*, vol. 23, no. 05, p. 1250040, May 2012, doi: 10.1142/S0129183112500404.
- [90] Zhou, J. G., “A lattice Boltzmann method for solute transport,” *Int. J. Numer. Methods Fluids*, vol. 61, no. 8, pp. 848–863, Nov. 2009, doi: 10.1002/fld.1978.
- [91] Zhou, J. G., “Lattice Boltzmann Method for Advection and Anisotropic Dispersion Equation,” *J. Appl. Mech.*, vol. 78, no. 2, pp. 1–5, Mar. 2011, doi: 10.1115/1.4002572.
- [92] Zhou, J. G., “Lattice Boltzmann morphodynamic model,” *J. Comput. Phys.*, vol. 270, pp. 255–264, Aug. 2014, doi: 10.1016/j.jcp.2014.04.005.
- [93] Zou, Q. and He, X., “On pressure and velocity boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model,” *Phys. Fluids*, vol. 9, no. 6, pp. 1591–1598, Jun. 1997, doi: 10.1063/1.869307.
- [94] Јовановић, М., *Основе нумеричког моделирања раванских отворених токова*. 1998.
- [95] Јовановић, М., “Регулација река - речна хидраулика и морфологија,” 2008.
- [96] Хајдин, Г., *МЕХАНИКА ФЛУИДА – књига прва – ОСНОВЕ*. 2002.
- [97] “3D/2D modelling suite for integral water solutions: Hydro-Morphodynamics.” p. 710, 2014. [Online]. Available: <https://oss.deltares.nl/web/delft3d>
- [98] “FLOW3D Quick Start Guide.”

- [99] “RiverFlow2D River Dynamics Model,” no. September. 2005. [Online]. Available: <http://www.hydronia.com/riverflow2d>
- [100] “Tecplot Chorus User`s Manual.” 2022.

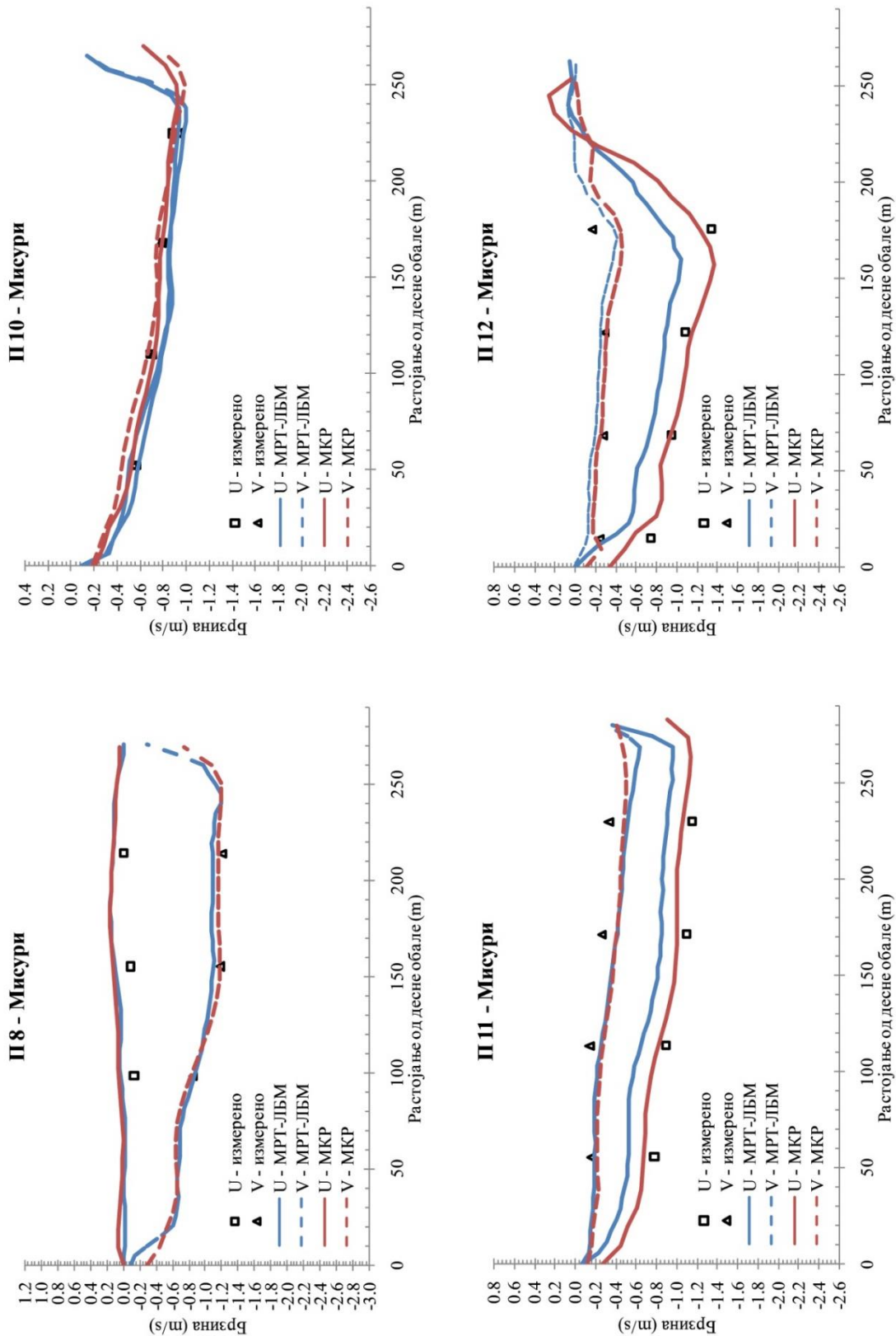
8. ПРИЛОЗИ



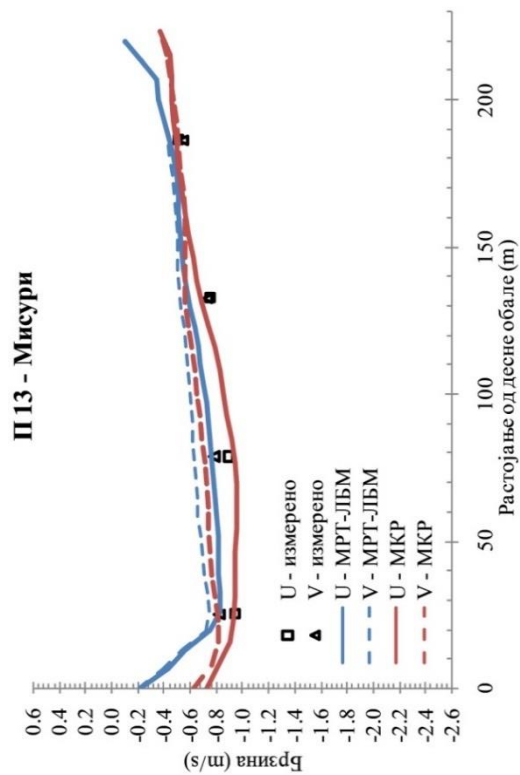
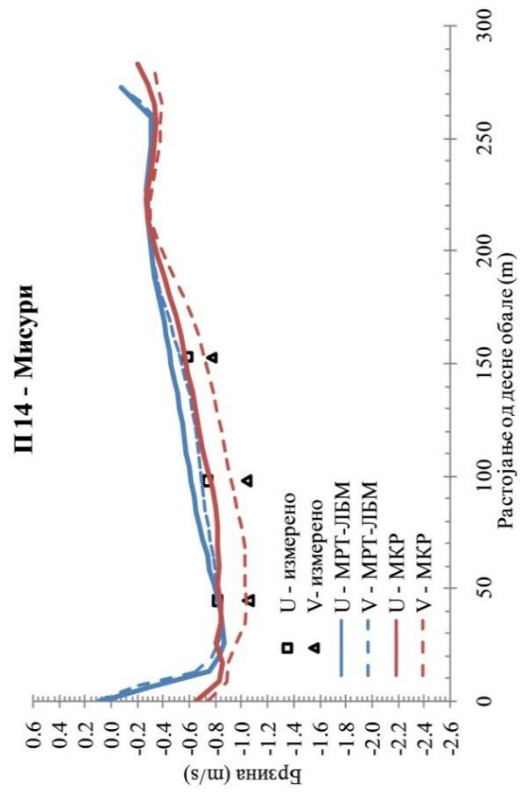
Прилог 1. Поређење израчунатих брзина са мереним подацима и са резултатима добијеним применом ЛБМ на криволинијским координатама и применом МКР, у попречним профилима П1, П2 и П7 – Дунав



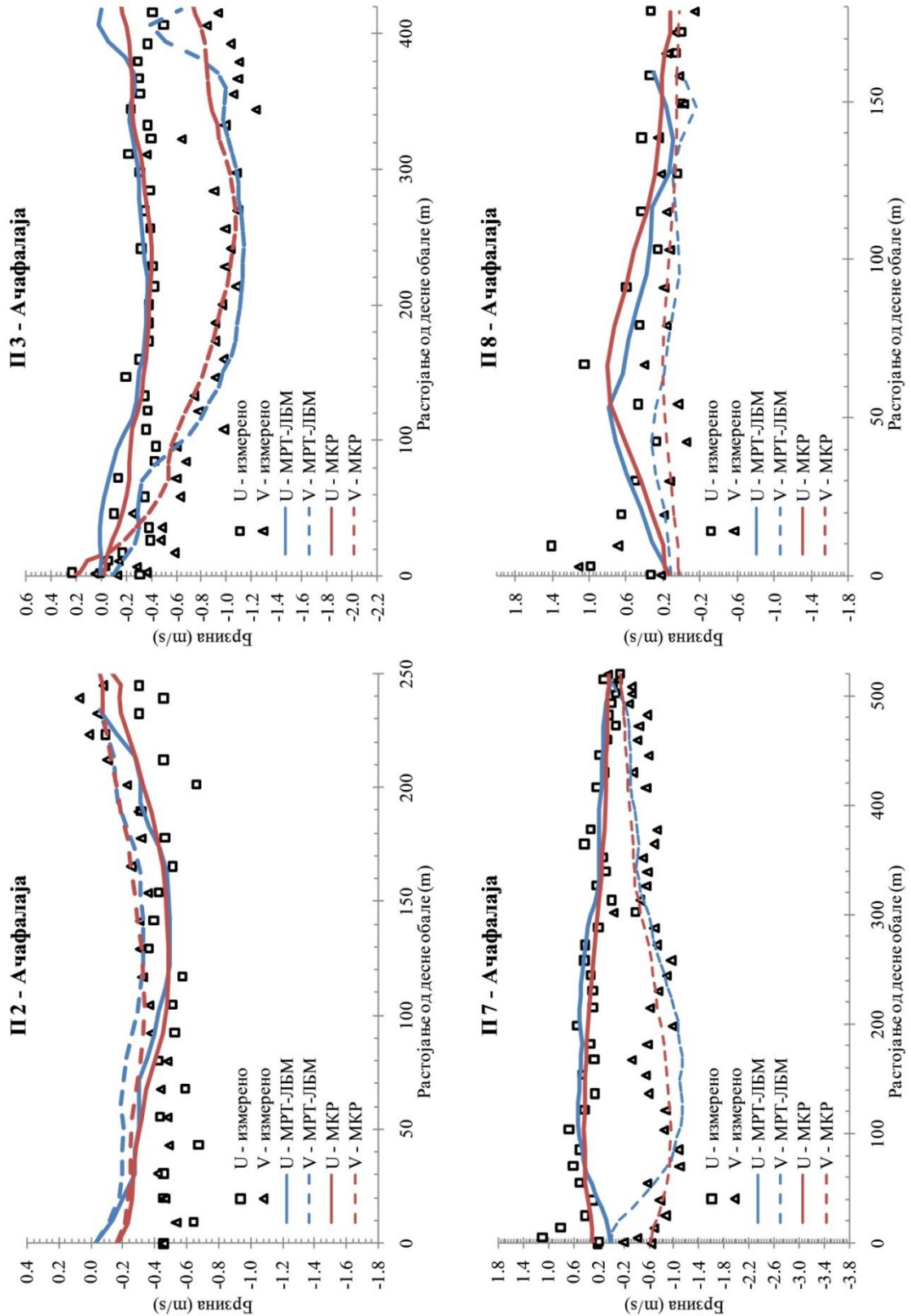
Прилог 2. Поређење израчунатих брзина са мереним подацима и са резултатима добијеним применом МКР, у попречним профилима П1, П3, П4 и П7 – Мисури



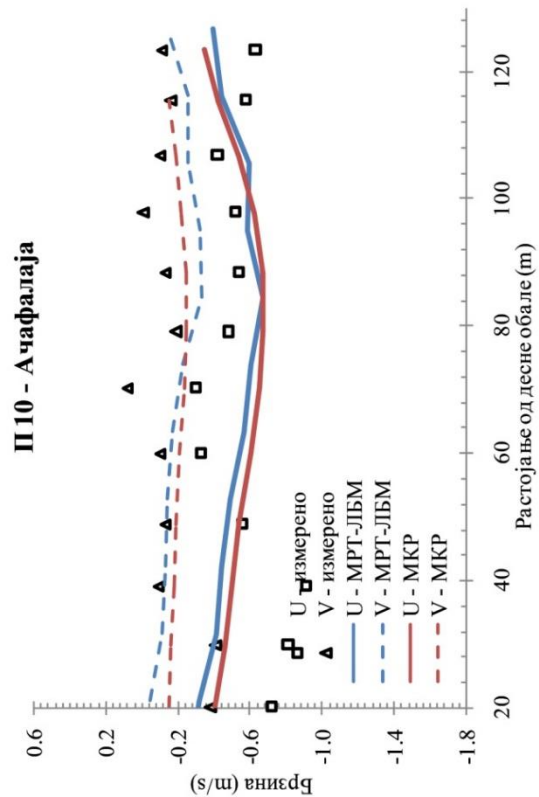
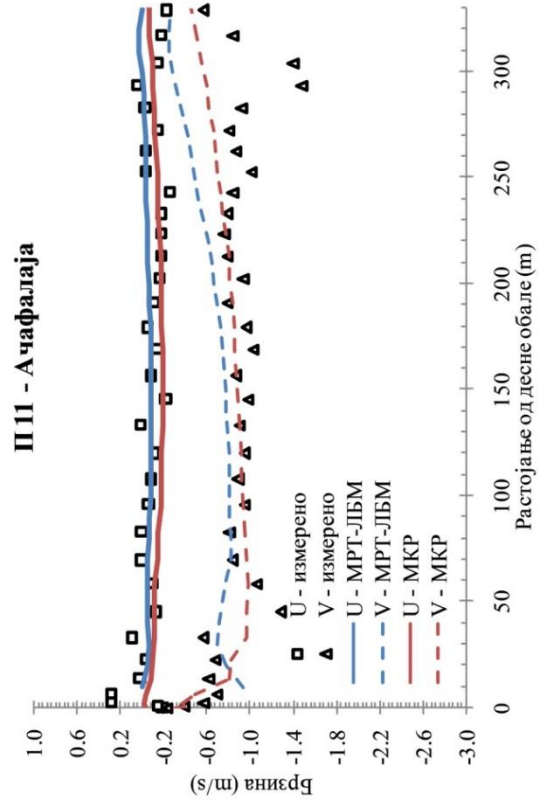
Прилог 3. Поређење израчунатих брзина са мереним подацима и са резултатима добијеним применом МКР, у попречним профилима П8, П10, П11 и П12 – Мисури



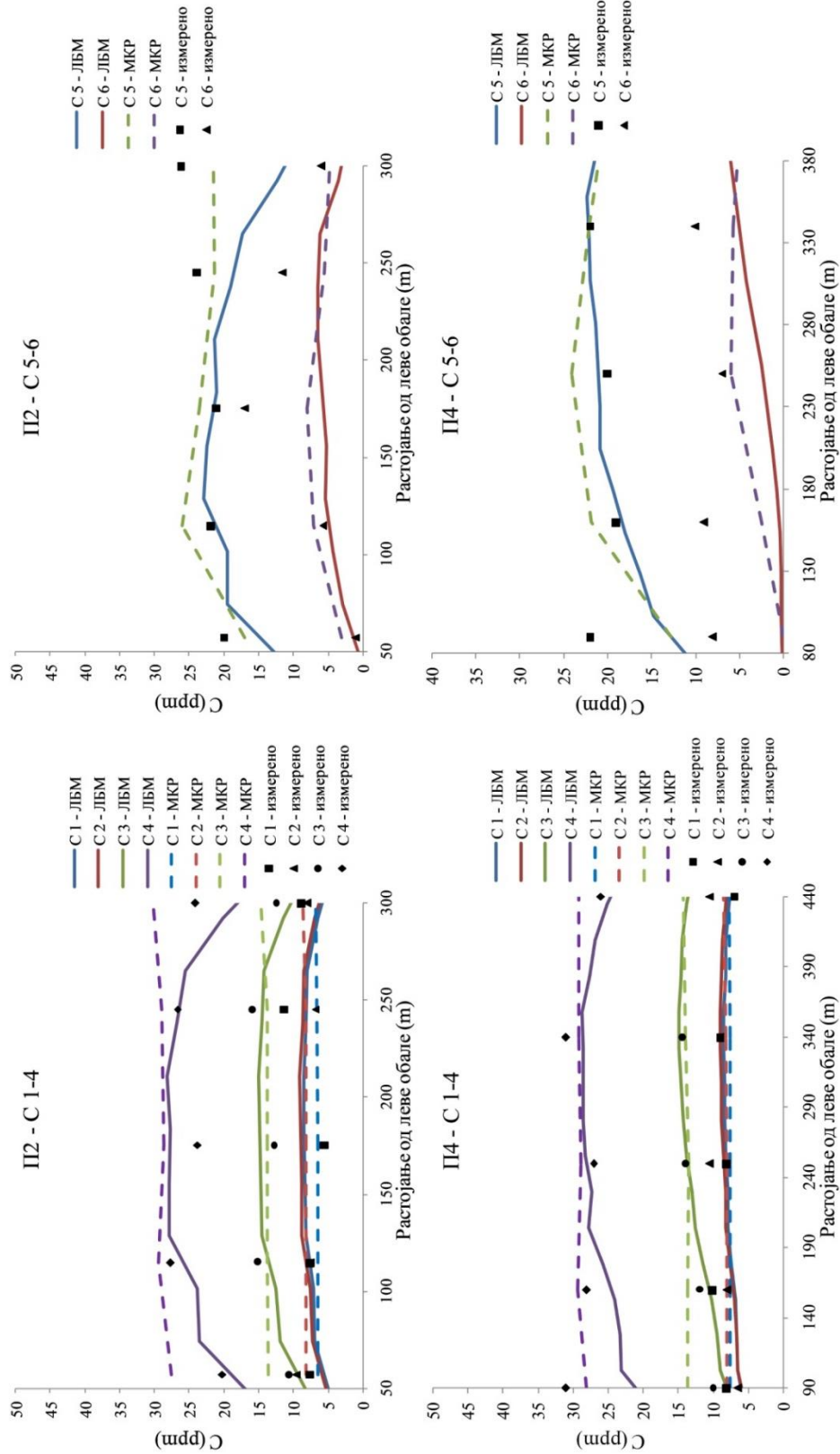
Прилог 4. Поређење израчунатих брзина са мереним подацима и са резултатима добијеним применом МКР, у попречним профилима П13 и П14 – Мисури



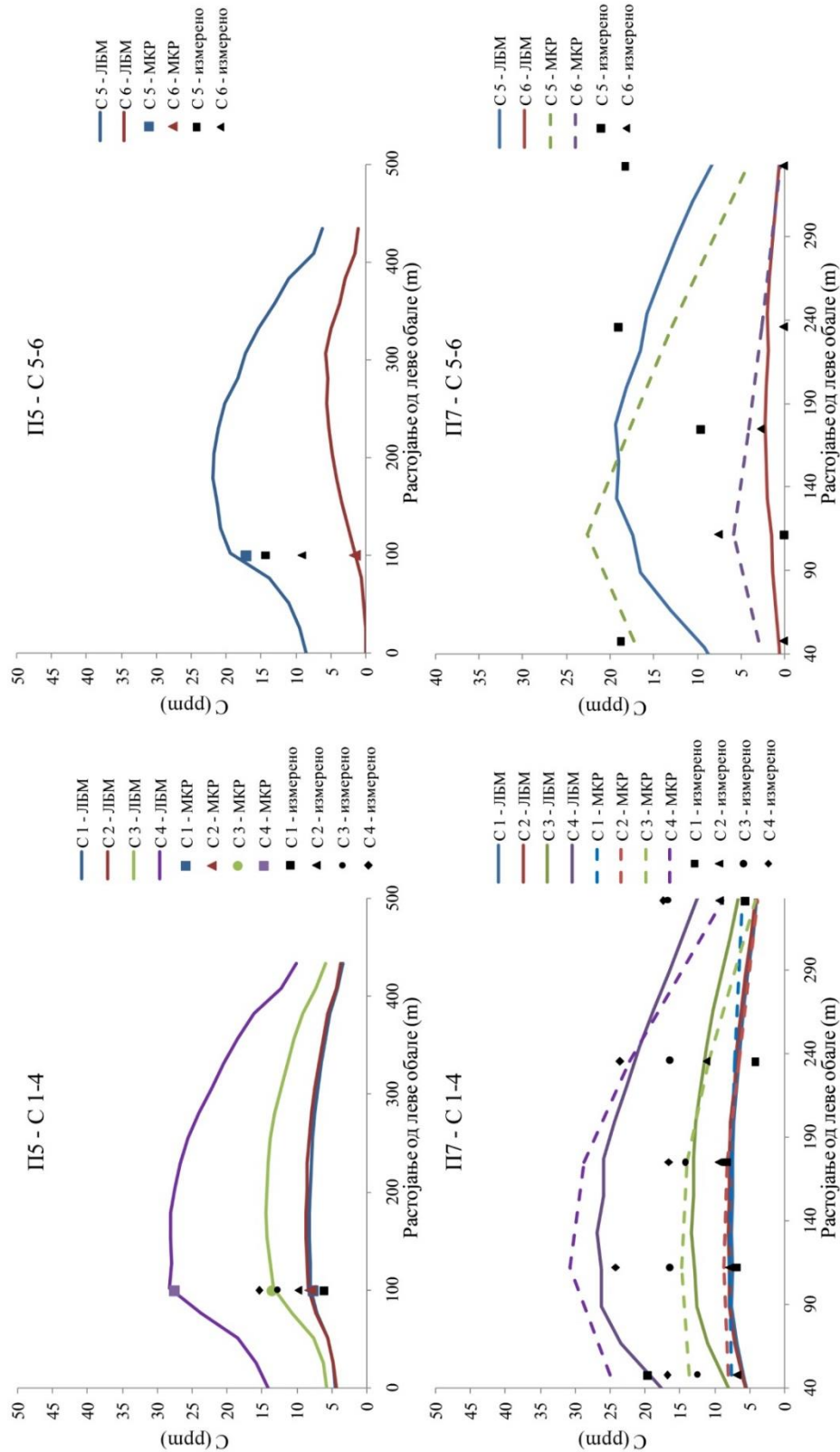
Прилог 5. Поређење израчунатих брзина са мереним подацима и са резултатима добијеним применом МКР, у попречним профилима П2, П3, П7 и П8 – Ачафалаја



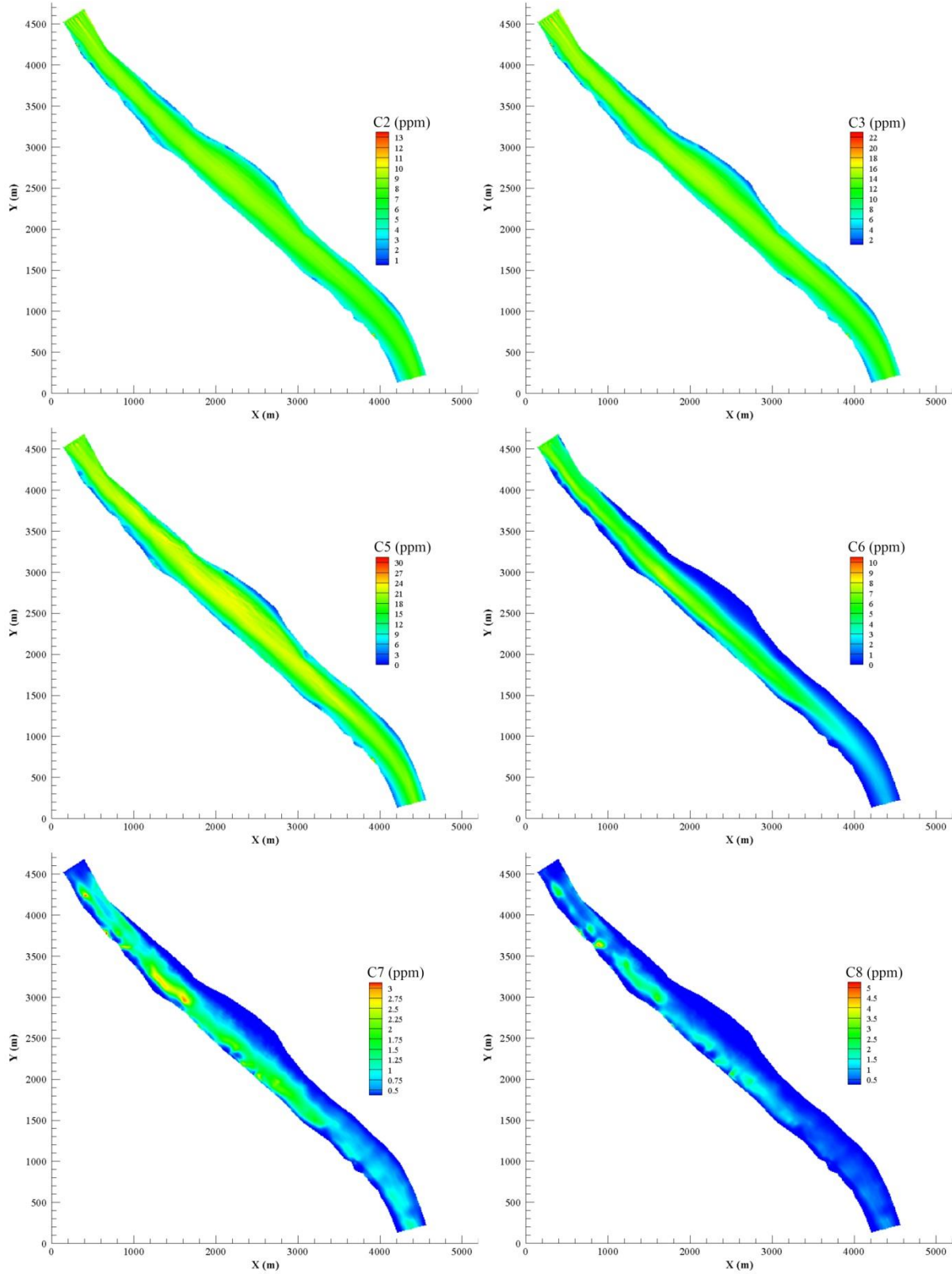
Прилог 6. Поређење израчунатих брзина са мереним подацима и са резултатима добијеним применом МКР, у попречним профилима П10 и П11 – Ачафалаја



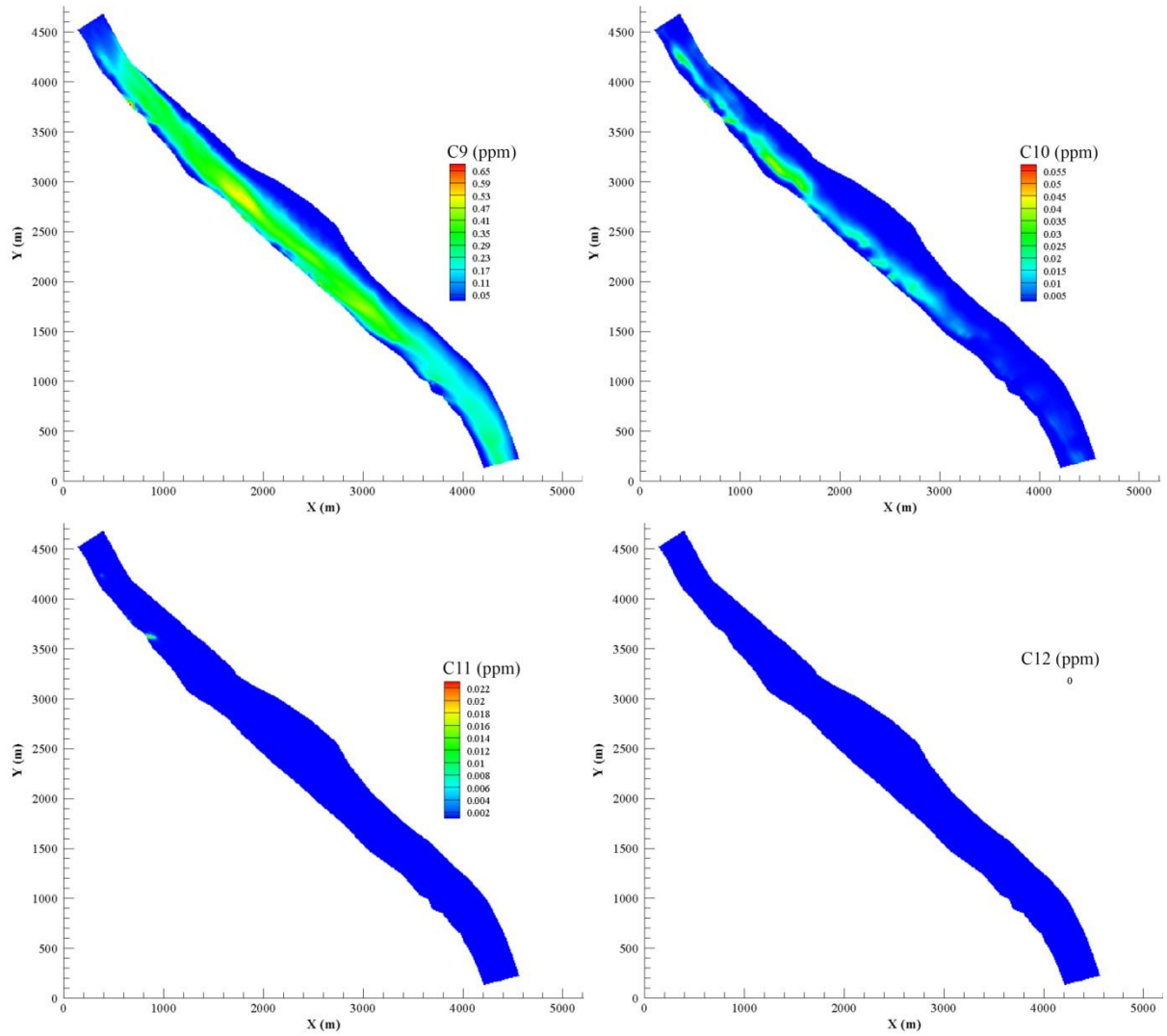
Прилог 7. Концентрација суспендованог наноса у попречним профилима П2 и П4. Поређење резултата добијених применом ЛБМ са резултатима добијеним применом МКР и са мереним подацима



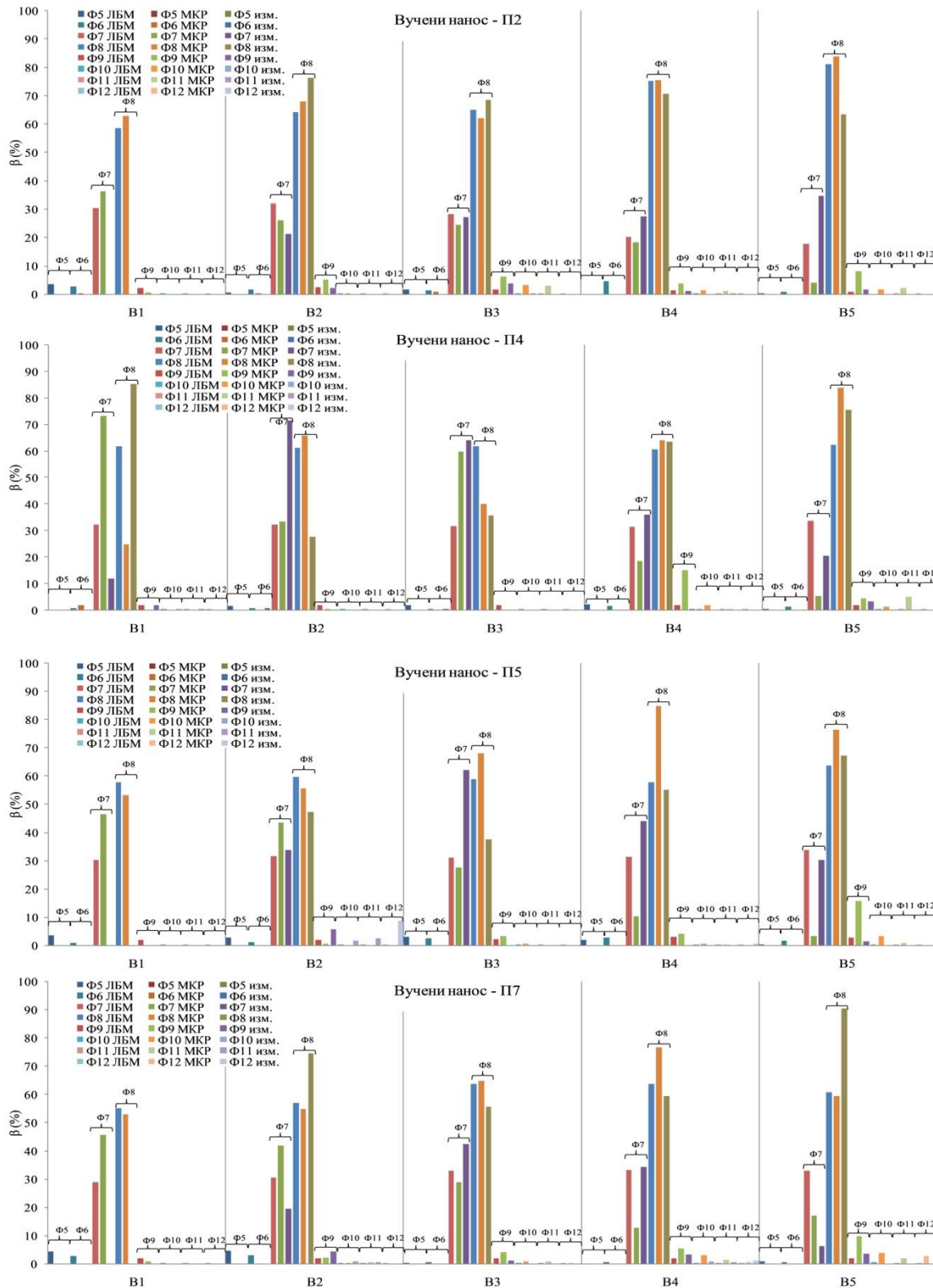
Прилог 8. Концентрација суспендованог наноса у попречним профилима П5 и П7. Поређење резултата добијених применом ЛБМ са резултатима добијеним применом МКР и са мереним подацима



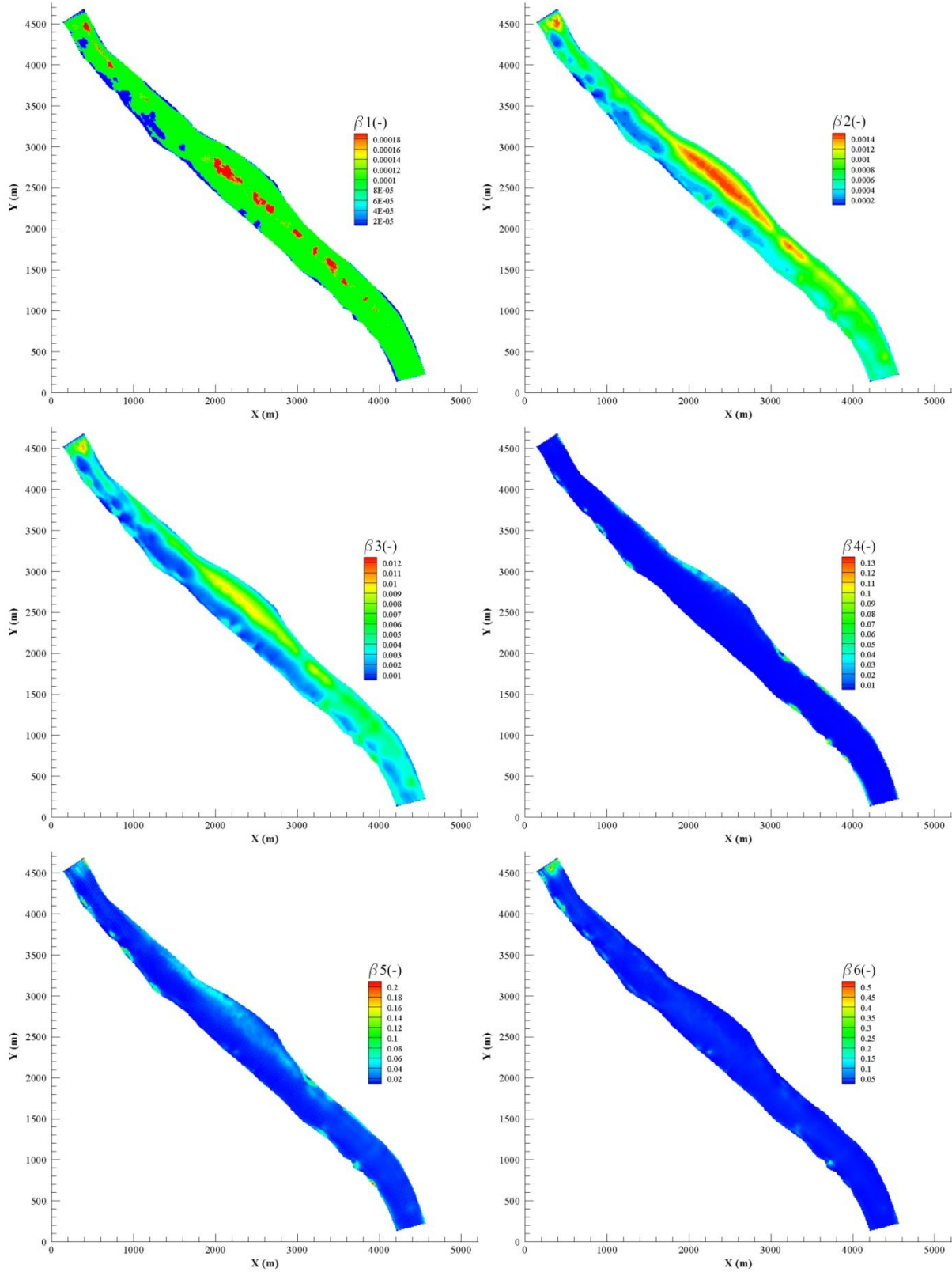
Прилог 9. Просторни распоред концентрација суспендованог наноса за фракције 2, 3, 5, 6, 7 и 8



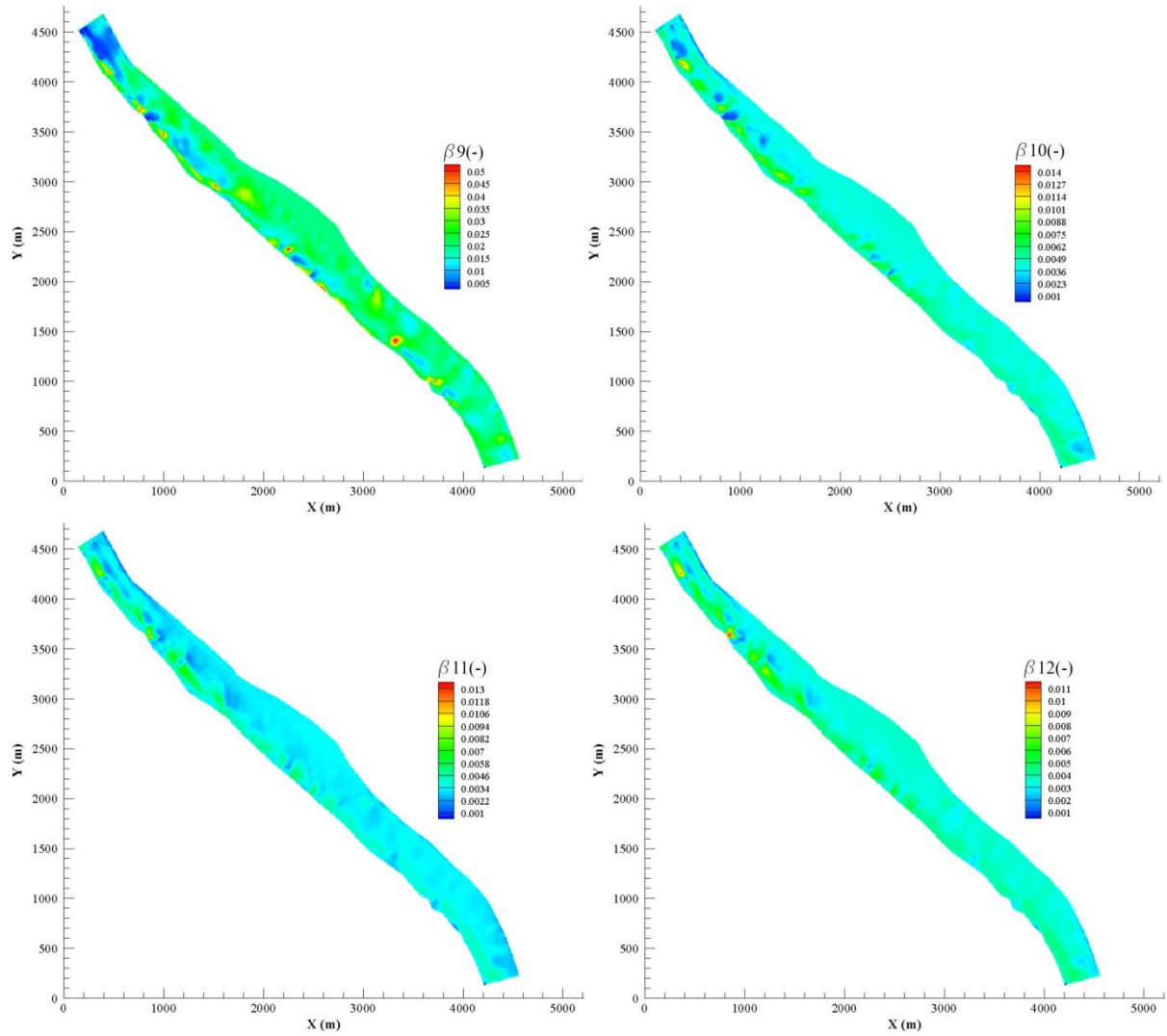
Прилог 10. Просторни распоред концентрација суспендованог наноса за фракције 9, 10, 11 и 12



Прилог 11. Заступљеност фракција вученог наноса у попречним профилима П2, П4, П5 и П7 у мерним вертикалама (В). Поређење резултата добијених применом ЛБМ са резултатима добијеним применом МКР и мереним резултатима



Прилог 12. Просторна расподела вученог наноса за фракције 1, 2, 3, 4, 5 и 6



Прилог 13. Просторна расподела вученог наноса за фракције 9, 10, 11 и 12

Овај Образац чини саставни део докторске дисертације, односно докторског уметничког пројекта који се брани на Универзитету у Новом Саду. Попуњен Образац укоричити иза текста докторске дисертације, односно докторског уметничког пројекта.

План третмана података

Назив пројекта/истраживања
Примена летис Болцман методе за решавање раванских једначина течења воде, кретања наноса и морфолошких промена у природним водотоцима
Назив институције/институција у оквиру којих се спроводи истраживање
а) Факултет техничких наука, Универзитет у Новом Саду б) в)
Назив програма у оквиру ког се реализује истраживање
1. Опис података
<p>1.1 Врста студије</p> <p><i>Укратко описати тип студије у оквиру које се подаци прикупљају</i></p> <p>У овој студији нису прикупљани подаци.</p> <hr/> <hr/> <hr/>
<p>1.2 Врсте података</p> <p>а) квантитативни</p> <p>б) квалитативни</p>

1.3. Начин прикупљања података

- a) анкете, упитници, тестови
- б) клиничке процене, медицински записи, електронски здравствени записи
- в) генотипови: навести врсту _____
- г) административни подаци: навести врсту _____
- д) узорци ткива: навести врсту _____
- ђ) снимци, фотографије: навести врсту _____
- е) текст, навести врсту _____
- ж) мапа, навести врсту _____
- з) остало: описати _____

1.3 Формат података, употребљене скале, количина података

1.3.1 Употребљени софтвер и формат датотеке:

- a) Excel фајл, датотека _____
- б) SPSS фајл, датотека _____
- в) PDF фајл, датотека _____
- г) Текст фајл, датотека _____
- д) JPG фајл, датотека _____
- е) Остало, датотека _____

1.3.2. Број записа (код квантитативних података)

- a) број варијабли _____
- б) број мерења (испитаника, процена, снимака и сл.) _____

1.3.3. Поновљена мерења

- a) да
- б) не

Уколико је одговор да, одговорити на следећа питања:

- a) временски размак између поновљених мера је _____
- б) варијабле које се више пута мере односе се на _____

в) нове верзије фајлова који садрже поновљена мерења су именоване као _____

Напомене: _____

Да ли формати и софтвер омогућавају дељење и дугорочну валидност података?

а) Да

б) Не

Ако је одговор не, образложити _____

2. Прикупљање података

2.1 Методологија за прикупљање/генерисање података

2.1.1. У оквиру ког истраживачког нацрта су подаци прикупљени?

а) експеримент, навести тип _____

б) корелационо истраживање, навести тип _____

ц) анализа текста, навести тип _____

д) остало, навести шта _____

2.1.2 Навести врсте мерних инструмената или стандарде података специфичних за одређену научну дисциплину (ако постоје).

2.2 Квалитет података и стандарди

2.2.1. Третман недостајућих података

а) Да ли матрица садржи недостајуће податке? Да Не

Ако је одговор да, одговорити на следећа питања:

а) Колики је број недостајућих података? _____

б) Да ли се кориснику матрице препоручује замена недостајућих података? Да Не

в) Ако је одговор да, навести сугестије за третман замене недостајућих података

2.2.2. На који начин је контролисан квалитет података? Описати

2.2.3. На који начин је извршена контрола уноса података у матрицу?

3. Третман података и пратећа документација

3.1. Третман и чување података

3.1.1. Подаци ће бити депоновани у _____ репозиторијум.

3.1.2. URL адреса _____

3.1.3. DOI _____

3.1.4. Да ли ће подаци бити у отвореном приступу?

а) Да

б) Да, али после ембарга који ће трајати до _____

в) Не

Ако је одговор не, навести разлог _____

3.1.5. Подаци неће бити депоновани у репозиторијум, али ће бити чувани.

Образложење

3.2 Метаподаци и документација података

3.2.1. Који стандард за метаподатке ће бити примењен? _____

3.2.1. Навести метаподатке на основу којих су подаци депоновани у репозиторијум.

Ако је потребно, навести методе које се користе за преузимање података, аналитичке и процедуралне информације, њихово кодирање, детаљне описе варијабли, записа итд.

3.3 Стратегија и стандарди за чување података

3.3.1. До ког периода ће подаци бити чувани у репозиторијуму? _____

3.3.2. Да ли ће подаци бити депоновани под шифром? Да Не

3.3.3. Да ли ће шифра бити доступна одређеном кругу истраживача? Да Не

3.3.4. Да ли се подаци морају уклонити из отвореног приступа после извесног времена?

Да Не

Образложити

4. Безбедност података и заштита поверљивих информација

Овај одељак МОРА бити попуњен ако ваши подаци укључују личне податке који се односе на учеснике у истраживању. За друга истраживања треба такође размотрити заштиту и сигурност података.

4.1 Формални стандарди за сигурност информација/података

Истраживачи који спроводе испитивања с људима морају да се придржавају Закона о заштити података о личности (https://www.paragraf.rs/propisi/zakon_o_zastiti_podataka_o_licnosti.html) и одговарајућег институционалног кодекса о академском интегритету.

4.1.2. Да ли је истраживање одобрено од стране етичке комисије? Да Не

Ако је одговор Да, навести датум и назив етичке комисије која је одобрила истраживање

4.1.2. Да ли подаци укључују личне податке учесника у истраживању? Да Не

Ако је одговор да, наведите на који начин сте осигурали поверљивост и сигурност информација везаних за испитанике:

- а) Подаци нису у отвореном приступу
- б) Подаци су анонимизирани
- ц) Остало, навести шта

5. Доступност података

5.1. Подаци ће бити

- а) јавно доступни
- б) доступни само уском кругу истраживача у одређеној научној области
- ц) затворени

Ако су подаци доступни само уском кругу истраживача, навести под којим условима могу да их користе:

Ако су подаци доступни само уском кругу истраживача, навести на који начин могу приступити подацима:

5.4. Навести лиценцу под којом ће прикупљени подаци бити архивирани.

6. Улоге и одговорност

6.1. Навести име и презиме и мејл адресу власника (аутора) података

6.2. Навести име и презиме и мејл адресу особе која одржава матрицу с подацима

6.3. Навести име и презиме и мејл адресу особе која омогућује приступ подацима другим истраживачима
