УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
Машински факултет

ВЕЋУ ДОКТОРСКИХ СТУДИЈА

Предмет: Реферат о урађеној докторској дисертацији кандидата **Дарка М. Радојевића,** маст.инж.орг.наука, студента Докторских студија

Одлуком број 825/2 од 02.06.2022 године, именовани смо за чланове Комисије за преглед, оцену и одбрану докторске дисертације кандидата Дарка М. Радојевића под насловом

„Стабилност посебних класа механичких система нецелог и целог реда са кашњењем на коначном временском интервалу“

После прегледа достављене Дисертације и других пратећих материјала и разговора са Кандидатом, Комисија је сачинила следећи

Р Е Ф Е Р А Т

1. УВОД

1.1. Хронологија одобравања и израде дисертације

Кандидат Дарко М. Радојевић, маст.инж.орг.наука, уписао је прву годину докторских студија на Машинском факултету Универзитета у Београду школске 2012/2013 године. Кандидату је одобрено мировање статуса студента на Докторским студијама у трајању од два семестра у школској 2013/14 години (бр.решења 9/10589 од 27.11.2015. године), и у школској години 2020/21 (решење 9/17098 од 30.09.2021.године), односно одобрено му је и продужење статуса студента на Докторским студијама у трајању од два семестра у школској 2021/22 години (решење 9/17012 од 30.09.2021 године).

Кандидат је поднео захтев за одобреење теме докторске дисертације број 1853/1 од 18.10.2021 године на Катедри за механику Машинског факултета Универзитета у Београду. Кандидат је за ментора предложио др Михаила Лазаревића, редовног професора Машинског факултета у Београду. На основу сагласности Катедре за механику број 1853/2 од 26.10.2021 године, Наставно-научно веће Машинског факултета у Београду донело је 18.11.2021 године Одлуку број 1853/3 од 18.11.2021 о именовању Комисије за оцену подобности теме и кандидата за израду докторске дисертације и научне заснованости теме докторске дисертације у саставу:

- др Михаило Лазаревић, редовни професор (ментор), Машински факултет, Универзитет у Београду,
- др Петар Мандић, доцент, Машински факултет, Универзитет у Београду
- др Сретен Стојановић, редовни професор,Технолошки факултет у Лесковцу, Универзитет у Нишу.

Веће научних области техничких наука Универзитета у Београду донело је Одлуку број 61206-5126/2-21 од 19.01.2022 године којом се даје сагласност на предлог теме докторске дисертације кандидата Дарка Радојевића, маст.инж.орг.наука., под насловом:

„Стабилност посебних класа механичких система нецелог и целог реда са кашњењем на коначном временском интервалу “

На основу обавештења редовног проф. др Михаила Лазаревића да је кандидат Дарко М. Радојевић, маст.инж.орг.наука, завршио докторску дисертацију под насловом: **„Стабилност посебних класа механичких система нецелог и целог реда са кашњењем на коначном временском интервалу “** и предлога Катедре за механику број 825/1 од 26.05.2022 године, Наставно-научно веће Машинског факултета у Београду је на седници одржаној 02.06.2022 године донело Одлуку број 825/2 којом се именују чланови Комисије за преглед, оцену и одбрану докторске дисертације у саставу:

- др Михаило Лазаревић, редовни професор (ментор), Машински факултет, Универзитет у Београду,
- др Петар Мандић, доцент, Машински факултет, Универзитет у Београду
- др Сретен Стојановић, редовни професор,Технолошки факултет у Лесковцу, Универзитет у Нишу.

1.2. Научна област дисертације

Докторска дисертација под насловом **„Стабилност посебних класа механичких система нецелог и целог реда са кашњењем на коначном временском интервалу “** припада области техничких наука - **машинство**, ужој научној области - Механика, за коју је Машински факултет Универзитета у Београду матичан. Ментор др Михаило Лазаревић је редовни професор на Катедри за механику Машинског факултета Универзитета у Београду. Као аутор или коаутор до сада је публиковао 33рада на SCI листи.

1.3. Биографски подаци о кандидату

Кандидат, **Дарко М. Радојевић** је рођен је у Београду, општина Савски Венац, 10. 11. 1976. године. Основну школу „Радоје Домановић, на Новом Београду, завршио је 1991. године а Девету гимназију „Михаило Петровић Алас“ на Новом Београду 1995. године. Дипломирао је на Факултету организационих наука у Београду, 2002. године а на истом факултету је завршио и мастер студије 2008. године са просечном оценом 9,86.

Докторске студије је уписао школске 2012/2013 године на Машинском факултету, Универзитета у Београду, где је положио све испите предвиђене Планом и Програмом усавршавања са просечном оценом 9,50.Године 2016 објавио је свој први научни рад на конференцији *Chinese Control and Decision Conference CCDC 2016, Yinchuan* у Кини. У периоду од 2016. до 2021. године објавио је једананест научних радова на домаћим и иностраним конференцијама односно часописима.

У својој радној каријери између осталог бавио се инжењерингом, пројектовањем, анализом и оптимизацијом производних линија и процесне опреме у индустрији, израдом модела оптимизације оперативне припреме производње, организацијом одржавања и управљањем техничим системом објекта који укључује процесне, хидро и термотехничке системе. Такође био је координатор на пројекту израде и имплементације апликативних/ софтверских система кроз фазно увођење нових решења као и израдом, имплементацијом и развојем контакт центара.

Током свог школовања и професионалног усавршавања похађао и завршио велики број професионалних курсева: MCSA Microsoft, AutoCAD, Windows Server 2003, ISA Server, SQL, Visual Basic, Primavera Project Planner, Monte Carlo, LaTeX, QuarkXPress, Проактивно вођење продаје Moduli I i II. Исто тако завршио је и обуке из вештина презентације, комуникације, вођења и техника продаје.

Одслужио је редован војни рок 2003. године. Течно говори енглески језик.

2. ОПИС ДИСЕРТАЦИЈЕ

2.1. Садржај дисертације

Докторска дисертација кандидата Дарка М. Радојевића, маст.инж.орг.наука, под насловом **"Стабилност посебних класа механичких система нецелог и целог реда са кашњењем на коначном временском интервалу"** је документ формата А4, штампан једнострано, написан на српском језику, ћириличним писмом. Написана је на укупно 86 нумерисаних страна укључујући Прилоге и Литературу која садржи 135 референци. Илустрована је са 7 слика и садржи 267 нумерисаних израза.

Докторска дисертација садржи следећа Поглавља:

1. Увод;
2. Стабилност временски континуалних система са кашњењем нецелог реда на коначном временском интервалу;
3. Нека питања стабилности посебних класа механичких система: фракциони приступ;
4. Робусна стабилност на коначном временском интервалу неутралног система нецелог реда $0 < \beta < \alpha < 1$ са временски промењљивим кашњењима и неизвесностима;
5. Стабилност на коначном временском интервалу неутралног вишечланог система нецелог реда $0 < \gamma \leq 1 < \beta < \alpha \leq 2$ са временски променљивим кашњењима;
6. Закључак и научни доприноси дисертације;

Осим наведеног, докторска дисертација садржи резиме на српском и енглеском језику, садржај, биографију аутора, Изјаву о ауторству, Изјаву о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада и Изјаву о коришћењу.

2.2. Кратак приказ појединачних поглавља

Прво поглавље, поред уводних разматрања која се односе на системе са кашњењем, где се даје основна поставка проблема, особине и специфичности разматраних класа система са позиција могуће динамичке анализе, приказан је у наставку кратак преглед по поглављима. Такође, на крају дат је и селективан и хронолошки преглед досадашњих резултата на пољу изучавања практичне стабилности и стабилности временски континуалних система целог реда на коначном временском интервалу.

Друго поглавље, почиње уводним разматрањима која се односе динамичке системе који моделовани и управљани применом рачуна нецелог реда. Затим се даје солидна основа рачуна нецелог реда који ће бити од значаја за испитивање стабилности механичких система нецелог реда. У наставку је дат на селективан и хронолошки начин преглед досадашњих резултата на пољу изучавања стабилности система нецелог реда са кашњењем на коначном временском интервалу. Такође, посебна пажња у овом поглављу је посвећена хронолошком прегледу досадашњих резултата на пољу изучавања стабилности неутралних система нецелог реда са кашњењем на коначном временском интервалу.

Треће поглавље посвећено је оригиналним резултатима који се односе на нељапуновску стабилност тј. стабилност на коначном временском интервалу посебних класа механичких система применом рачуна нецелог реда а који се могу приказати као одговарајући неутрални системи нецелог реда и целог реда са кашњењем. Први механички систем који је проучаван јесте људско тело у задатку балансирања у сагиталној равни који се може моделовати као одговарајући биомеханички систем дат у виду инверзног клатна. За његову стабилизацију око нестабилног положаја вертикалног равнотеже примењено је управљање нецелог реда типа ПДД2 које укључује и чисто временско кашњење, где је у наставку испитана стабилност на временском интервалу одговарајућег затвореног неутралног система нецелог реда са временским кашњењем. Такође, испитана је стабилност на коначном временском интервалу одговарајућег затвореног неутралног система али сада целог реда са временским кашњењем.

Спроведена је адекватна анализа стабилности инверзног клатна у задатку балансирања људског тела у сагиталној равни методом Д-разлагања. За испитивање стабилности система узет је и разматран утицај параметара $\left(K_p, K_d, \beta\right)$ на стабилност система где су преостали параметри унапред били задати и познати (појачање K_a, нецели ред γ као и временско кашњење τ). Одговарајућим нумеричким симулацијама дата је потврда претходне теоријске анализе. На крају поглавља разматрана је такође стабилност на коначном временском интервалу још једног механичког пригушног система са кашњењем нецелог реда заснованог на *Scot-Blair*-овом моделу где је примењен вискоеластични материјал који има за циљ смањење нежељних вибрација у датом систему.

Четврто поглавље бави се решавањем проблема робусне стабилности на коначном временском интервалу датог посебне класе неутралног система нецелог реда $0<\beta<\alpha<1$ са временски промењљивим кашњењима. У првом делу поглавља, испитивана је робусна стабилност на коначном временском интервалу неутралног система нецелог реда са временски промењљивим кашњењима и неизвесношћу где су довољни услови стабилности добијени применом генерализоване Гронвалове неједнакости. Такође, истраживања су настављена у циљу решавања робусне стабилности на коначном временском интервалу датог неутралног система са временски промењљивим кашњењем нецелог реда са нелинеарним несигурностима параметара и пертурбацијама. На крају дати су и одговарајући нумерички примери који потврђују исправност предложеног приступа.

У петом поглављу добијени су и приказани оргигинални резултати који се односи на проблематику решавања питања стабилности на коначном временском интервалу за један неутрални вишечлани систем нецелог реда $0<\gamma\leq 1<\beta<\alpha\leq 2$ са временски промењљивим кашњењима. У наставку, добијени су нови критеријуми стабилности на коначном временском интервалу датог неутралног вишечланог система нецелог реда са временски промењљивим кашњењима. На крају, на једном пажљиво одабраном нумеричком примеру потврђена је исправност и значај претходно изведених теоријских резултата.

Докторска теза се завршава са *шестим поглављем* које садржи закључке и научне доприносе дисертације.

3. ОЦЕНА ДИСЕРТАЦИЈЕ

3.1. Савременост и оригиналност

Докторска дисертација под насловом **“ Стабилност посебних класа механичких система нецелог и целог реда са кашњењем на коначном временском интервалу “**

кандидата Дарка М. Радојевића, маст.инж.орг.наука, представља наставак актуелног истраживања у области стабилности на коначном временском интервалу као и стабилизације механичких система са кашњењем који су моделовани и приказани као одговарајућа класа неутралних система целог/нецелог реда са кашњењем. Истраживања у области решавања питања стабилности неутралних система нецелог/целог реда са кашњењем су веома значајна и актуелна. Приликом моделирања односно стабилизације истих у синтези адекватног управљања датих система примењена је савремена математичка теорија нецелог реда (фракциони рачун), која има све већу примену у науци и техници у последњих пар деценија.

При формирању математичког модела датог пригушног система нецелог реда искоришћен је вискоеластични материјал који је моделован као Scot-Blair- модел нецелог реда уз адекватну примену рачуна нецелог реда. Наиме, користи се чињеница да применом фракционих (нецелих) оператора имамо више степени слободе у фази добијања одговарајућег модела или описивање сложенијег понашања датог динамичког система, односно материјала.

Стабилизација разматраним механичким системима је решавана применом одговарајућег управљања са кашњењем при чему управљање садржи одговарајуће чланове нецелог реда и као такво представља актуелан проблем у савременој литератури, и што је управо једна од истраживачких области ове тезе.

Оригинални приступ за решавање задатка стабилности на коначном временском интервалу разматраних динамичких (механичких) система нецелог реда са кашњењем огледа се у добијању нових критеријума стабилности а који су добијени применом генерализоване Гронвалове неједнакости и његове проширене форме.

У оквиру докторске дисертације примењени су савремени истраживачки поступци и уз коришћење најновијих софтверских решења за нумеричке симулације.

Оригиналност добијених резултата у оквиру дисертације потврђују радови који су публиковани и саопштени на међународним научним скуповима или објављени у светском часопису.

3.2. Осврт на референтну и коришћену литературу

Током израде докторске дисертације коришћени су референтни и актуелни литературни извори из релевантних области и то пре свега радови из научних часописа и са међународних конференција, као и одговарајућа монографска литература. Прегледом цитиране литературе у уводном делу дисертације закључује се да је кандидат Дарко Радојевић дао актуелни приказ постојеће и референтне литературе. Дат је селективан преглед релевантних резултата из области на пољу изучавања практичне стабилности и стабилности временски континуалних система целог реда на коначном временском интервалу. Такође, дат је селективан и хронолошки начин преглед досадашњих резултата на пољу изучавања стабилности на коначном временском интервалу система нецелог реда са кашњењем. На крају, посебна пажња је посвећена хронолошком прегледу досадашњих резултата на пољу изучавања стабилности на коначном временском интервалу неутралних система нецелог реда са кашњењем.

О актуелности коришћене литературе говори и чињеница да је већина наведених радова публикована који се односе на системе нецелог реда у претходних десет година, а преостали радови у претходних петнаест година, где се поред радова из врхунских међународних часописа, анализирани су и радови објављени на водећим светским конференцијама.

3.3. Опис и адекватност примењених научних метода

Резултати приказани у овој докторској дисертацији добијени су применом следећих научних метода (теорија) добро познатих научној и стручној јавности:

- Теорија рачуна нецелог реда
- Методе теоријског испитивања и анализе посебних класа система са кашњењем.
- Методе аналитичке механике
- Методе синтезе континуалног управљања на коначном временском интервалу
- Методе компаративне анализе

које су током истраживања примењене на адекватан начин.

3.4. Применљивост остварених резултата

Добијени резултати у оквиру докторске дисертације поред научне вредности имају и практичну примену у решавању задатка стабилизације датом класом механичких система. Формирани нови критеријуми стабилности за неутралне системе нецелог реда са кашњењем, имајући у виду њихов степен општости, се могу применити за испитивање стабилности других динамичких система уз незнатну модификацију истих. Такође, приказана метода анализе стабилности се може проширити и на испитивање динамичког понашања на коначном временском интервалу и шире класе динамичких система линеарних/нелинеарних система нецелог/целог реда са чистим временским кашњењем.

3.5. Оцена достигнутих способности кандидата за самостални научни рад

Кандидат Дарко Радојевић (који је током студија био запослен) је током израде докторске дисертације показао да је самосталан у постављању, препознавању и решавању научно-истраживачких задатака као и да успешно влада научно-истраживачким методама. Резултати докторске дисертације доказ су способности кандидата за самостални научно-истраживачки рад. Кроз рад на дисертацији кандидат је стекао потребна знања за претрагу и одабир референтне литературе, као и за писање научних радова, што је потврђено бројним ауторским и коауторским радовима.

4. ОСТВАРЕНИ НАУЧНИ ДОПРИНОС

4.1. Приказ остварених научних доприноса

Најзначајнији научни допринос кандидата састоји се у формирању нових критеријума стабилности на коначном временском интервалу за одговарајућу класу неутралних механичких система нецелог/целог реда са чистим временским кашњењем и приказан је у поглављима три до пет.

Анализа стабилности на коначном временском интервалу једног неутралног вишечланог систем нецелог реда $0<\gamma\leq 1<\beta<\alpha\leq 2$ са временски промењљивим кашњењима уз добијање нових критеријума стабилности је спроведена у петом поглављу што представља оригинални научни допринос. При томе илустрована је супериорност и општост добијеног критеријума у односу на одговарајуће познате критеријуме стабилности. Посебно су разматрани једноставнији једночлани и двочлани неутрални механички системи нецелог реда са кашњењем и приказани су у трећем поглављу. Комплетан поступак и његова верификација су приказани у раду [1], одељак 4.3 Верификација научних доприноса), у часопису Filomat категорије M22, доступан на линку https://journal.pmf.ni.ac.rs/filomat/index.php/filomat/article/view/18114 на коме је кандидат први аутор и једини докторанд. Часопис не даје на увид јавности одмах већ са закашњењем приближно од једне године, али се зато у прилогу реферата даје рад са заглављем часописа и броја у коме је објављен.

Формирање нових критеријума робусне стабилности на коначном временском интервалу који су по први пут добијени за дату класу неутралног система нецелог реда $0 < \beta < \alpha < 1$ са временски промењљивим кашњењима. Прво је испитивана робусна стабилност на коначном временском интервалу неутралног система нецелог реда са временски промењљивим кашњењима и неизвесношћу где су довољни услови стабилности добијени применом генерализоване Гронвалове неједнакости. Овај допринос приказан је у четвртом поглављу докторске дисертације. Међународно је научно верификован у раду [2] (одељак 4.3 Верификација научних доприноса), категорије M24.

Такође, истраживања су била посвећена и проблематици робусне стабилности на коначном временском интервалу неутралног система са временски промењљивим кашњењем нецелог реда са нелинеарним несигурностима параметара и пертурбацијама. Овај научни допринос приказан је у четвртом поглављу докторске дисертације и научно верификован у раду [3] (одељак 4.3 Верификација научних доприноса), категорије M33.

4.2. Критичка анализа резултата истраживања

На основу прегледа релевантне научне литературе и сагледавања постојећих решења из области ове докторске дисертације, комисија констатује да су приказани резултати истраживања нови, изузетно значајни и научно утемељени. Истовремено, на основу увида у задате циљеве истраживања и резултате представљене у докторској дисертацији, констатујемо да су пружени одговори на сва релевантна питања и да су решени проблеми са којима се кандидат сусрео у току истраживања.

Развијени нови критеријуми стабилности имају значајну примењивост у области решавања проблема стабилности и стабилизације разматране класе динамички сложенијих неутралних система нецелог реда са кашњењем уз пратећу адекватну софтверску подршку.

4.3. Верификација научних доприноса

Научни доприноси предметне докторске дисертације су верификовани следећим радовима:

Категорија M20:

1. D. M. Radojević**,** M. P. Lazarević, *Further results on finite-time stability of neutral nonlinear multi-term fractional order time-varying delay systems*, Filomat 36:5 (2022), 1775–1787, https://doi.org/10.2298/FIL2205775R (IF=0.848) (ISSN: 2406-0933 On line; 0354-5180 Print) (**категорија M22**)
2. Lazarević P.M., D. M. Radojević, S. Pišl, G. Maione, *Robust finite-time stability of uncertain neutral nonhomogeneous fractional-order systems with time-varying delays*, Theoretical and Applied Mechanics, Serbia, 2020. Vol.47 (2020) Issue 2, 241–255. http://elib.mi.sanu.ac.rs/files/journals/tam/91/tamn91p241-255.pdf (**категорија M24**)

Категорија M30:

3. Lazarević P.M., D. Radojević, G. Maione, S. Pišl, *Finite-time stability of neutral fractional-order time varying delay systems with nonlinear parameter uncertainties and perturbations*, 8th International Congress of Serbian Society of Mechanics Kragujevac, ISBN 978-86-909973-8-1 Serbia, June 28-30, 2021, pp.652-661. (**категорија M33**)

5. ЗАКЉУЧАК И ПРЕДЛОГ

На основу детаљног прегледа и анализе докторске дисертације, Комисија за преглед, оцену и одбрану докторске дисертације констатује да је докторска дисертација под називом

„Стабилност посебних класа механичких система нецелог и целог реда са кашњењем на коначном временском интервалу“

кандидата **Дарка Радојевића**, маст.инж.орг.наука, урађена према свим стандардима у научно-истраживачком раду, као и да испуњава све услове предвиђене Законом о високом образовању и да је у складу са Статутом и Правилником о докторским студијама Машинског факултета Универзитета у Београду. На основу резултата и закључака приказаних у докторској дисертацији, Комисија констатује да је кандидат **Дарко Радојевић**, маст.инж.орг.наука, успешно завршио докторску дисертацију у складу са предвиђеним предметом и постављеним циљевима истраживања. Кандидат је дошао до оригиналних научних резултата који су успешно и верификовани.

Комисија за оцену и одбрану докторске дисертације закључила је да докторска дисертација под називом **„Стабилност посебних класа механичких система нецелог и целог реда са кашњењем на коначном временском интервалу“** представља оригиналан и вредан научни рад са научним доприносима у области машинства, ужа научна област Механика. Стога Комисија предлаже Наставно-научном већу Машинског факултета у Београду да Реферат прихвати, дисертацију стави на увид јавности и упути Реферат на коначно усвајање Већу научних области техничких наука Универзитета у Београду, а да се након тога кандидат **Дарко Радојевић**, маст.инж.орг.наука, позове на јавну одбрану дисертације.

У Београду, 14.06. 2022. год.

ЧЛАНОВИ КОМИСИЈЕ

____

др Михаило Лазаревић, редовни професор, ментор
Универзитет у Београду, Машински факултет

____

др Петар Мандић, доцент
Универзитет у Београду, Машински факултет

____

др Сретен Стојановић, редовни професор,
Универзитет у Нишу,
Технолошки факултет у Лесковцу

Filomat 36:5 (2022), 1775–1787
https://doi.org/10.2298/FIL2205775R

Published by Faculty of Sciences and Mathematics,
University of Niš, Serbia
Available at: http://www.pmf.ni.ac.rs/filomat

Further Results on Finite-Time Stability of Neutral Nonlinear Multi-Term Fractional Order Time-Varying Delay Systems

Darko Radojević[a], Mihailo P. Lazarević[a]

[a]*Faculty of Mechanical Engineering, University of Belgrade, Kraljice Marije 16,11120 Belgrade 35*

Abstract. In this paper, the finite-time stability for nonlinear neutral multi-term fractional order systems with time-varying input and state delays is investigated. By use of the generalized Gronwall inequality and extended form of the generalized Gronwall inequality, new sufficient conditions for finite-time stability of such systems are obtained. Finally, numerical examples are given to illustrate the effectiveness and applicability of the proposed theoretical results.

1. Introduction

In this contribution, we consider system stability in the non-Lyapunov sense-*finite-time stability* (FTS) because the boundedness properties of system responses are very important from the engineering point of view, [1]. In the past decades, there has been a growing research interest in the field of stability and stabilization of time-delay systems which often leads to poor performance or even instability, [2-4]. Also, in the past four decades, applications of fractional (non-integer) calculus have attracted increasing attention of experts worldwide since they provide an excellent tool in modeling the complex dynamics, (for the description of memory and hereditary properties of various materials and processes), [5,6] and a lot of significant contributions have been made in non-integer (fractional) order control theory, [7,8]. In recent decades, stability problems of the non-integer time-delay systems (NITDS) have extensively been studied by using methods of the (generalized) Gronwall inequality, linear matrix inequalities, the Lyapunov method, the Holder inequality, the comparison principles, [9-13].

Here, we are interested in FTS where FTS analysis of NITDS is initially investigated and presented in [14,15] using (generalized) Gronwall inequality. In this context, several researchers have investigated FTS of NITDS, and presented their results, see [9,10,16-20].

Particularly, some authors have devoted attention to stability and control issues of the neutral TDS (NTDS) integer and fractional order [21-30]. Integer order NTDS in mechanical problems were presented in [21,22]; the stability chart of an elastic beam was obtained in [21] and the problem of ship rolling with control based on values of delayed acceleration was considered in [22]. Also, in [23] the delayed acceleration feedback control has been applied for chatter suppression in turning machines. The human self-balancing models have been modeled as integer order neutral TDS due to stabilizing time-delayed feedback control which depends on position, velocity and acceleration [24-26]. Moreover, the generalized Scot-Blair model

2020 *Mathematics Subject Classification*. Primary xxxxx (mandatory); Secondary xxxxx, xxxxx (optionally)
Keywords. Finite-time stability, Fractional order, Time-varying delay, Neutral nonlinear system
Received: 12 March 2022; Revised: 30 March 2022; Accepted: 01 April 2022
Communicated by Miodrag Spalević
Email addresses: drmasf@yahoo.com (Darko Radojević), mlazarevic@mas.bg.ac.rs (Mihailo P. Lazarević)

has been studied [27], which can be modeled as neutral NITDS where a viscoelastic material is used as damping in vibration systems, on the assumption that the damping is proportional to a fractional rder derivative of the displacement variable with the non-integer order of derivative $0 < \alpha < 1$.

Recently, a few results have been obtained for the neutral NITDS with different fractional orders, [31]. In [32] authors studied FTS of linear neutral NITDS by using the method of steps. Also, in [33] FTS analysis of homogeneous NITDS with nonlinear perturbation based on generalized Bellman-Gronwall inequality have been investigated. In [34] the authors obtained sufficient conditions for FTS of the neutral NITDS two-term fractional order $0 < \mu \leq \lambda < 1$ with Lipschitz nonlinearities using the method of steps and the more generalized Gronwall inequality. Additionally, in [35] authors considered FTS of generalized neutral NITDS with fractional orders $0 < \beta \leq \alpha < 1$. Also, we have obtained a new criterion which is related to robust FTS of uncertain neutral nonhomogeneous NITDS $0 < \beta \leq \alpha < 1$ with time-varying input and state delay, [36]. In the meantime, the FTS of a class multiterm nonlinear fractional system with multistate time delay and $0 < \alpha_1 \leq 1 < \alpha_2 \leq 2$ have been studied in [37,38].

Based on the above motivations and discussions, first time in this paper we shall address the FTS problem of nonlinear neutral NITDS with time-varying input and state delay and multi-term fractional order $0 < \gamma \leq 1 < \beta < \alpha \leq 2$ using the generalized Gronwall inequality and extended form of the generalized Gronwall inequality. The main contributions and features of this paper can be stated as follows.

(1) There are a few works of FTS for multi-term fractional order nonlinear systems. It is more essential to study the FTS of NITDS with damping behavior and time delay effects. Thus, a novel generalized neutral NITDS with three different fractional orders $0 < \gamma \leq 1 < \beta < \alpha \leq 2$ with time-varying input and state delays is studied, where for the first time we consider a case of multi-term neutral NITDS which includes delay terms ${}^{c}D_t^{\beta}\mathbf{x}(t - \tau_{xN1}(t))$, ${}^{c}D_t^{\gamma}\mathbf{x}(t - \tau_{xN2}(t))$ at the same time, $0 < \gamma \leq 1 < \beta < \alpha \leq 2$.
(2) Three novel criteria of FTS of neutral NITDS with multi-term fractional order $0 < \gamma \leq 1 < \beta < \alpha \leq 2$ with time-varying input and state delays are obtained by use of the generalized Gronwall inequality and extended form of the generalized Gronwall inequality.
(3) There are delay terms in the obtained novel FTS criteria of neutral NITDS with multi-term different fractional orders. Therefore, the proposed criteria in this paper are more general.
(4) Two numerical examples are presented to illustrate the correctness of the obtained results.

The rest of the paper is arranged as follows. Some basic concepts with properties of fractional calculus and problem descriptions are presented in Section 2. In Section 3, sufficient conditions ensuring the FTS of neutral NITDS are obtained and new criteria for FTS of NITDS with multi-term fractional order $0 < \gamma \leq 1 < \beta < \alpha \leq 2$ are given. In Section 4, two examples are provided to illustrate the validity of the obtained results. In Section 5, some conclusions are drawn.

2. Preliminaries and problem description

2.1. Preliminaries

In this subsection, some basic notations and definitions including the definition of Caputo fractional derivative are given. In this paper, the norm $\|(\cdot)\|$ will denote any vector norm, i.e. $\|(\cdot)\|_1$, $\|(\cdot)\|_2$, or $\|(\cdot)\|_\infty$ or the corresponding matrix norm induced by the equivalent vector norm, i.e. $1-$, -2, or $\infty-$ norm, respectively. Throughtout this paper, ${}_{a}^{C}D_t^{\alpha} f(t)$ or ${}_{a}D_t^{\alpha} f(t)$ denote Caputo's derivative of fractional order α with the lower limit a for function $f(\cdot)$, ${}_{a}^{RL}D_t^{-\alpha} f(t)$ or ${}_{a}I_t^{\alpha} f(t)$ denote an integral of order α with the lower limit a for function $f(\cdot)$.

Definition 2.1. *The gamma function $\Gamma(\cdot)$ known as Euler's gamma function is defined as*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t, \quad \Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha), \quad \alpha \in C \tag{1}$$

where C is the set of complex numbers. The Caputo fractional derivative is defined for a function $f(\cdot) : [a, b] \to C$ *that belongs to the space of absolutely continuous functions:*

$$f(t) \in AC^n[a, b] = \left\{ f(t) : \mathrm{d}^{n-1} f(t)/\mathrm{d}t^{n-1} \right\}, \quad n \in N$$

Definition 2.2. *The Caputo fractional derivative of order* α, $\alpha \in C$, $\mathrm{Re}(\alpha) \geq 0$, *for any function* $f(t) \in AC^n[a, b]$ *is defined as [39]:*

$$ {}_{a}^{C}D_t^{-\alpha} f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int\limits_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s)\,\mathrm{d}s, & \alpha \neq N_0, \quad n = [\mathrm{Re}(\alpha)] + 1, \ n \in N, \\ f^{(n)}(t) = \dfrac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}, & \alpha = n \in N_0. \end{cases} \tag{2}$$

Definition 2.3. *Let* $f(t)$ *be a continuous function on* $[a, b]$ *The Riemann–Liouville (RL) fractional integral of order* α *is [39]:*

$$ {}_{a}^{RL}D_t^{-\alpha} f(t) \equiv {}_{a}I_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)\,\mathrm{d}s, \quad t \in [a, b], \quad \alpha \in C, \quad t > 0, \mathrm{Re}(\alpha) > 0. \tag{3}$$

Definition 2.4. *The Mittag-Leffler function with one parameter is given as [39]:*

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k / \Gamma(k\alpha + 1) \quad \textit{where} \quad \alpha > 0, z \in C \tag{4}$$

and the two-parameter Mittag-Leffler function is presented as

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k / \Gamma(k\alpha + \beta) \quad \textit{where} \quad \alpha > 0, \beta > 0, z \in C. \tag{5}$$

Remark 2.1. *When* $\beta = 1$ *we have* $E_{\alpha,1}(z) = E_\alpha(z)$, *especially* $E_1(z) = e^z$.

The following lemmas are introduced and help prove our main stability criterion.

Lemma 2.1. *[35] Assume* $x(t) \in C^1([0, +\infty), R)$, $\dot{x}(t) \geq 0$ *and* $\alpha > 0$. *Then,* $\int\limits_0^t ((t-s)^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha))\, x(s)\,\mathrm{d}s$ *is monotonically increasing with respect to t.*

Lemma 2.2. *[39]*

$$ {}_0I_t^{\alpha} \left({}^cD_0^{\alpha} x(t) \right) = x(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} x^{(k)}(0), \quad n-1 < \alpha < n, \ t > 0. \tag{6}$$

Here, when $1 < \alpha < 2$, *it follows*

$$ {}_0I_t^{\alpha} \left({}^cD_0^{\alpha} x(t) \right) = x(t) - x(0) - t x'(0), \quad t > 0. \tag{7}$$

Lemma 2.3. *Let* $\alpha > \beta > 0$, $n - 1 < \beta < n$ *and* $x(t) \in AC^n[a, b]$. *Then*

$$ {}_0I_t^{\alpha} \left({}^cD_0^{\beta} x(t) \right) = {}_0I_t^{\alpha-\beta} x(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k+\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha - \beta + k + 1)} x^{(k)}(0). \tag{8}$$

Proof: From the definition 2.2, we have

$$ {}^{c}D_{0}^{\beta}x(t) = {}_{0}I_{t}^{n-\beta c}D_{0}^{n}x(t). \tag{9}$$

Applying fractional operator ${}_{0}I_{t}^{\alpha}$ and taking into account the commutative property of RL integral, we obtain

$$ {}_{0}I_{t}^{\alpha c}D_{0}^{\beta}x(t) = {}_{0}I_{t}^{\alpha}{}_{0}I_{t}^{n-\beta c}D_{0}^{n}x(t) = {}_{0}I_{t}^{\alpha-\beta}\left({}_{0}I_{t}^{nc}D_{0}^{n}x(t)\right). \tag{10}$$

Actually from Lemma 2.2 we note that

$$ {}_{0}I_{t}^{nc}D_{0}^{n}x(t) = x(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^{k}x^{(k)}(0)}{\Gamma(k+1)}. \tag{11}$$

Then, we have

$$\begin{aligned} {}_{0}I_{t}^{\alpha c}D_{0}^{\beta}x(t) &= {}_{0}I_{t}^{\alpha-\beta}\left(x(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^{k}x^{(k)}(0)}{\Gamma(k+1)}\right) = \\ &= {}_{0}I_{t}^{\alpha-\beta}x(t) - {}_{0}I_{t}^{\alpha-\beta}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^{k}x^{(k)}(0)}{\Gamma(k+1)}\right) = \\ &= {}_{0}I_{t}^{\alpha-\beta}x(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^{k+\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+k+1)}x^{(k)}(0). \end{aligned} \tag{12}$$

The proof is complete.

Property 2.2. *Assume that* $0 < \gamma < 1 < \alpha < 2$. *Then*

$$ {}_{0}I_{t}^{\alpha}\left({}^{c}D_{0}^{\gamma}x(t)\right) = {}_{0}I_{t}^{\alpha-\gamma}x(t) - \frac{x(0)\cdot t^{\alpha-\gamma}}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)}, \quad t \geq 0. \tag{13}$$

Property 2.3. *Assume that* $0 < \beta < \alpha < 2$. *Then*

$$ {}_{0}I_{t}^{\alpha}\left({}^{c}D_{0}^{\beta}x(t)\right) = {}_{0}I_{t}^{\alpha-\beta}x(t) - \frac{x(0)\cdot t^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)} - \frac{x(1)\cdot t^{\alpha-\beta+1}}{\Gamma(\alpha-\beta+2)}, \quad t \geq 0. \tag{14}$$

Lemma 2.4. *[40] (generalized Gronwall inequality) Suppose* $x(t)$, $a(t)$ *are nonnegative and local integrable on* $0 \leq t < T$, $T \leq +\infty$ *and* $g(t)$ *is a nonnegative, nondecreasing continuous function defined on* $0 \leq t < T$, $g(t) \leq M = \text{const}$, $\alpha > 0$ *with*

$$ x(t) \leq a(t) + g(t)\int_{0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}x(s)\,\mathrm{d}s \tag{15}$$

on this interval. Then

$$ x(t) \leq a(t) + \int_{0}^{t}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(g(t)\Gamma(\alpha))^{n}}{\Gamma(n\alpha)}(t-s)^{n\alpha-1}a(s)\right]\mathrm{d}s, \quad 0 \leq t < T. \tag{16}$$

Corollary 2.4. *Under the hypothesis of Lemma 2.4, let* $a(t)$ *be a nondecreasing function on* $[0, T]$. *Then it holds:*

$$ x(t) \leq a(t)E_{\alpha}(g(t)\Gamma(\alpha)t^{\alpha}) \tag{17}$$

where $E_{\alpha}(z)$ *is the one-parameter Mittag-Leffler function 4.*

Lemma 2.5. *(extended form of the generalized Gronwall inequality), [41] Suppose non-integer orders $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $a(t)$ is a nonnegative function locally integrable on $[0, T]$, $g_1(t)$ and $g_2(t)$ are nonnegative, nondecreasing, continuous functions defined on $[0, T)$; $g_1(t) \le N_1$, $g_2(t) \le N_2$, (N_1, N_2 = const). Suppose $x(t)$ is nonnegative and locally integrable on $[0, T)$ with*

$$x(t) \le a(t) + g_1(t) \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} x(s)\,\mathrm{d}s + g_2(t) \int_0^t (t-s)^{\beta-1} x(s)\,\mathrm{d}s, \quad t \in [0, T). \tag{18}$$

Then,

$$x(t) \le a(t) + \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} [g(t)]^n \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k [\Gamma(\alpha)]^{n-k} [\Gamma(\beta)]^k}{\Gamma((n-k)\alpha + k\beta)} (t-s)^{(n-k)\alpha + k\beta - 1} a(s)\,\mathrm{d}s, \quad t \in [0, T) \tag{19}$$

where $g(t) = g_1(t) + g_2(t)$ and $C_n^k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)/k!$.

Corollary 2.5. *Under the hypothesis of Lemma 2.5, let $a(t)$ be a nondecreasing function on $[0, T)$. Then*

$$x(t) \le a(t) E_\kappa \left[g(t) \left(\Gamma(\alpha) t^\alpha + \Gamma(\beta) t^\beta \right) \right], \quad \kappa = \min(\alpha, \beta) \tag{20}$$

2.2. Problem description

Consider the following neutral multi-term fractional order system with time-varying input and state delay with nonlinear perturbation and disturbance, presented by the following equation:

$$\begin{aligned} {}^{c}D_t^{\alpha} x(t) &= A_0 x(t) + A_1 \mathbf{x}(t - \tau_x(t)) + A_{N_1} {}^{c}D_t^{\beta} \mathbf{x}(t - \tau_{xN_1}(t)) + A_{N_2} {}^{c}D_t^{\gamma} \mathbf{x}(t - \tau_{xN_2}(t)) + \\ &+ B_0 \mathbf{u}(t) + B_1 \mathbf{u}(t - \tau_u(t)) + f(t, x(t)) + Cw(t.) \end{aligned} \tag{21}$$

with associated continuous functions of initial state and input (control):

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Psi}_x(t),\ t \in [-\tau_{xm}, 0], \quad \mathbf{x}'(t) = \varphi_x(t),\ t \in [-\tau_{xm}, 0], \quad \mathbf{u}(t) = \mathbf{\Psi}_u(t),\ t \in [-\tau_{uM}, 0] \tag{22}$$

where $\tau_x(t)$ is the time varying state delay, $\tau_{xN(\cdot)}(t)$ is the neutral time varying delay, $\tau_u(t)$ is the time varying input delay and they are continuous functions satisfying (13):

$$\begin{aligned} &0 \le \tau_x(t) \le \tau_{xM}, \quad 0 \le \tau_{xM}(t) \le \tau_{xM}, \quad \forall t \in J = [t_0, t_0 + T], \quad t_0 \in \mathbb{R},\ T > 0, \\ &0 \le \tau_u(t) \le \tau_{uM}. \end{aligned} \tag{23}$$

For the sake of simplicity $\tau_{xN}(t) = \tau_{xN_1}(t) = \tau_{xN_2}(t)$, of system (21) is assumed in this contribution, where τ_{xM}, τ_{xN} and τ_{uM} are constants; τ_{xm} is defined to be $\max(\tau_{xM}, \tau_{xN})$ and t_0 is the initial time of observation of the system. ${}^{C}D_t^{\alpha}$, ${}^{C}D_t^{\beta}$, ${}^{C}D_t^{\gamma}$ denote Caputo fractional derivatives of order α, β, γ, $0 < \gamma \le 1 < \beta < \alpha \le 2$; $x(t) \in R^n$ is the state vector and $u(t) \in \mathbb{R}^m$ is the control input; $A_0, A_1, A_{N_1}, B_0, B_1$ and C are constant matrices with appropriate dimensions; $w(t) \in R^n$ is the disturbance vector, which has the upper bound as follows: $\|w(t)\| < \eta_w$, $\eta_w = \text{const} > 0\ \forall t \in J$. $\mathbf{\Psi}_x(t) \in C([-\tau_{xm}, 0], R^n)$ is the initial function of $x(t)$ with the norm $\|\Psi_x\|_C = \sup_{-\tau \le \theta \le 0} \|\Psi_x(\theta)\|$, and $\varphi_x(t) \in C([-\tau_{xm}, 0], R^n)$ is the initial function of $x'(t) = \mathrm{d}x(t)/\mathrm{d}t$ with the norm $\|\varphi_x\|_C = \sup_{-\tau \le \theta \le 0} \|\varphi_x(\theta)\|$.

Here, it is assumed that the nonlinear perturbation $f : [0, T] \times R^n \times R^n \to R^n$ is Lipschitz continuous on $[0, T]$ and there exists a continuous function $l(t)$ such that

$$\|f(t, x(t))\| \le l(t) \|x(t)\| \tag{24}$$

for any $\forall t \in [0, T]$ and $f(t, 0) = (0, 0)^T$. Before proceeding further, the definitions of FTS will be given for nonhomogeneous system (21) with associated initial functions (22).

Definition 2.5. *[9,42]: The fractional neutral time-delay system given by nonhomogeneous state equation (21) satisfying initial conditions (22) is finite-time stable w.r.t.* $\{\delta, \varepsilon, \eta_u, \eta_0, t_0, J, \|(\cdot)\|\}$, $\delta < \varepsilon$ *if and only if:*

$$\left.\begin{array}{l}\rho < \delta, \quad \|\mathbf{\Psi}_u\|_C < \eta_0, \\ \|\mathbf{u}(t)\|_C < \eta_u, \quad \forall t \in J,\end{array}\right\} \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \in J, \tag{25}$$

where $\rho = \max\{\|\Psi\|_C, \|\varphi\|_C\}$ *and* $\delta, \varepsilon, \eta_0, \eta_u$ *are positive constants.*

Definition 2.6. *[9,42]: The fractional neutral time-delay system given by nonhomogeneous state equation (21),* $(\mathbf{u}(t - \tau_u(t)) \equiv 0)$ *satisfying initial conditions (22) is finite-time stable w.r.t.* $\{\delta, \varepsilon, \eta_u, t_0, J, \|(\cdot)\|\}$, $\delta < \varepsilon$ *if and only if:*

$$\rho < \delta, \quad \|\mathbf{u}(t)\| < \eta_u, \quad \forall t \in J \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \in J, \tag{26}$$

where $\rho = \max\{\|\Psi\|_C, \|\varphi\|_C\}$ *and* $\delta, \varepsilon, \eta_u, \eta_0$ *are positive constants.*

Definition 2.7. *[9,40]: The fractional neutral time-delay system given by homogeneous state equation (21),* $(\mathbf{u}(t - \tau_u(t)) \equiv 0,\ \mathbf{u}(t) \equiv 0)$ *satisfying initial conditions (22) is finite-time stable w.r.t.* $\{\delta, \varepsilon, t_0, J, \|(\cdot)\|\}$, $\delta < \varepsilon$ *if and only if:*

$$\rho < \delta, \quad \forall t \in J \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \in J, \tag{27}$$

where $\rho = \max\{\|\Psi\|_C, \|\varphi\|_C\}$ *and* δ, ε *are positive constants.*

3. Main Results

In this section, using generalized Gronwall inequality including an extended form, new criteria for FTS of NITDS are derived.

Theorem 3.1. *The nonhomogeneous nonlinear neutral multi-term fractional order time varying delay system (21) satisfying initial conditions (22) is finite-time stable w.r.t.* $\{\delta, \varepsilon, \eta_u, \eta_0, t_0, J, \|(\cdot)\|\}$, $\delta < \varepsilon$ *if the following condition holds:*

$$\begin{aligned}&\left[1 + |t| + \frac{a_{n_1}|t|^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)} + \frac{a_{n_1}|t|^{\alpha-\beta+1}}{\Gamma(\alpha-\beta+2)} + \frac{a_{n_2}|t|^{\alpha-\gamma}}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)} + \right] \cdot E_\kappa[g(t)(\Gamma(\alpha-\beta)t^{\alpha-\beta} + \Gamma(\alpha-\gamma)t^{\alpha-\gamma})]E_\alpha(\mu_\Sigma t^\alpha) + \\ &+ \frac{\eta_{0u}|t^\alpha|}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\eta_{01}\tau_{uM}^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\eta_{1u}|t-\tau_{uM}|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\eta_{0w}|t|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} < \frac{\varepsilon}{\delta}, \quad \forall t \in J_0,\end{aligned} \tag{28}$$

where: $\|A_0\| = a_0$, $\|A_1\| = a_1$, $\|A_{N_1}\| = a_{n_1}$, $\|A_{N_2}\| = a_{n_2}$, $\|B_0\| = b_0$, $\|B_1\| = b_1$, $\|C\| = c$,

$$\begin{aligned}&\sup_{t\in[0,T]}(a_0 + l(t)) = \mu_0, \quad a_1 = \mu_1, \quad \mu_\Sigma = \mu_0 + \mu_1, \\ &\eta_{0u} = b_0\eta_u/\delta, \quad \eta_{0w} = c\eta_w/\delta, \quad \eta_{01} = b_1\eta_0/\delta, \quad \eta_{1u} = b_1\eta_u/\delta.\end{aligned} \tag{29}$$

Proof: Following the property of the non-integer order $0 < \gamma \le 1 < \beta < \alpha \le 2$ and applying the fractional integral ${}_0I_t^\alpha$ on the system (21), we have

$$\begin{aligned}&{}_0I_t^\alpha\left({}^cD_t^\alpha\mathbf{x}(t) - A_{N_1}{}^cD_t^\beta\mathbf{x}(t-\tau_{xN_1}(t)) - A_{N_2}{}^cD_t^\gamma\mathbf{x}(t-\tau_{xN_2}(t))\right) = \\ &= {}_0I_t^\alpha\left(A_0\mathbf{x}(t) + A_1\mathbf{x}(t-\tau_x(t)) + B_0\mathbf{u}(t) + B_1\mathbf{u}(t-\tau_u(t)) + f(t,x(t)) + Cw(t)\right)\end{aligned} \tag{30}$$

Using Lemma 2.2 and Lemma 2.3, we can obtain solution for (30) in the form of the equivalent Volterra integral equation, where $t_0 = 0$ as:

$$\mathbf{x}(t) = \psi_x(0) + t\varphi_x(0) - A_{N_2}\cdot \psi_x(-\tau_{xm})\frac{t^{\alpha-\gamma}}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha-\gamma)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-\gamma-1} A_{N_2} x(s-\tau_{xN}(s))\,\mathrm{d}s -$$
$$- A_{N_1}\frac{\psi_x(-\tau_{xm})\cdot t^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)} - A_{N_1}\frac{\varphi_x(-\tau_{xm})\cdot t^{\alpha-\beta+1}}{\Gamma(\alpha-\beta+2)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-\beta-1} A_{N_1} x(s-\tau_{xN}(s))\,\mathrm{d}s + \tag{31}$$
$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left[A_0\mathbf{x}(s) + A_1\mathbf{x}(t-\tau_x(s)) + B_0\mathbf{u}(s) + B_1\mathbf{u}(s-\tau_u(s)) + f(t,x(s)) + Cw(s)\right]\mathrm{d}s$$

Now, using the norm $\|(\cdot)\|$ on equation (30), we can obtain an estimate of the solution

$$\|\mathbf{x}(t)\| \le \|\psi_x(0)\| + |t|\,\|\varphi_x(0)\| + \|A_{N_2}\|\,\|\psi_x(-\tau_{xm})\|\frac{|t|^{\alpha-\gamma}}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)} +$$
$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha-\gamma)}\int_0^t |(t-s)|^{\alpha-\gamma-1}\|A_{N_2}\|\,\|x(s-\tau_{xN}(s))\|\,\mathrm{d}s + \|A_{N_1}\|\,\|\psi_x(-\tau_{xm})\|\frac{|t|^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)} +$$
$$+ \|A_{N_1}\|\,\|\varphi_x(-\tau_{xm})\|\frac{|t|^{\alpha-\beta+1}}{\Gamma(\alpha-\beta+2)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^t |(t-s)|^{\alpha-\beta-1}\|A_{N_1}\|\,\|x(s-\tau_{xN}(s))\|\,\mathrm{d}s + \tag{32}$$
$$+ \int_0^t |(t-s)|^{\alpha-1}\left[A_0\mathbf{x}(s) + A_1\mathbf{x}(t-\tau_x(s)) + \mathbf{B}_0 u(s) + \mathbf{B}_1 u(s-\tau_u(s)) + f(s,x(s)) + Cw(s)\right]\mathrm{d}s.$$

Also, we can obtain:

$$\begin{aligned} &\left\|A_0\mathbf{x}(s) + A_1\mathbf{x}(t-\tau_x(s)) + \mathbf{B}_0 u(s) + \mathbf{B}_1 u(s-\tau_u(s)) + f(s,x(s)) + Cw(s)\right\| \le \\ &\le a_0\|\mathbf{x}(t)\| + a_1\|\mathbf{x}(t-\tau_x(t))\| + b_0\|\mathbf{u}(t)\| + b_1\|\mathbf{u}(t-\tau_u(t))\| + c\|\mathbf{w}(t)\| + \|f(t,x(t))\| \le \\ &\le (a_0 + l(t))\|x(t)\| + a_1\|\mathbf{x}(t-\tau_x(t))\| + b_0\|u(t)\| + b_1\|\mathbf{u}(t-\tau_u(t))\| + c\|\mathbf{w}(t)\| = \\ &= \mu_0\|x(t)\| + \mu_1\|\mathbf{x}(t-\tau_x(t))\| + b_0\|\mathbf{u}(t)\| + b_1\|\mathbf{u}(t-\tau_u(t))\| + c\|\mathbf{w}(t)\|. \end{aligned} \tag{33}$$

Let $y(t) = \sup\limits_{\theta\in[-\tau_{xm},t]} \|x(\theta)\|$, [18]. For $\forall t^\bullet \in [0,t]$ the following conditions satisfy

$$\left\|x\left(t^\bullet - \tau_{x^*(t^\bullet)}\right)\right\| \le y(t^\bullet), \quad \|x(t^\bullet)\| \le \sup_{t^\bullet\in[t-\tau_{xm},t]}\left\{\ \left\|\ \mathbf{x}(t^\bullet)\right\|\right\} \le y(t^\bullet) \tag{34}$$

Applying this inequality, expression (32) can be rewritten as follows:

$$\|\mathbf{x}(t)\| \le \|\psi_x\|_C\left[1 + \frac{a_{n_2}|t|^{\alpha-\gamma}}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)} + \frac{a_{n_1}|t|^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}\right] + \|\varphi_x\|_C\left[|t| + \frac{a_{n_1}|t|^{\alpha-\beta+1}}{\Gamma(\alpha-\beta+2)}\right] +$$
$$+ \frac{a_{n_1}}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^t |(t-s)|^{\alpha-\beta-1} y(s)\,\mathrm{d}s + \frac{a_{n_2}}{\Gamma(\alpha-\gamma)}\int_0^t |(t-s)|^{\alpha-\gamma-1} y(s)\,\mathrm{d}s + \tag{35}$$
$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t |(t-s)|^{\alpha-1}\left[(\mu_0+\mu_1)y(s) + b_0\|\mathbf{u}(s)\| + b_1\|\mathbf{u}(s-\tau_u(s))\| + c\|w(s)\|\right]\mathrm{d}s.$$

In view of the $\|\mathbf{u}(s)\| < \eta_u$ conditions for $\|\mathbf{w}(s)\| < \eta_w$, one may rewrite the above inequality as

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}(t)\| \leq \|\psi_x\|_C &\left[1 + \frac{a_{n_2}|t|^{\alpha-\gamma}}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)} + \frac{a_{n_1}|t|^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}\right] + \|\varphi_x\|_C \left[|t| + \frac{a_{n_1}|t|^{\alpha-\beta+1}}{\Gamma(\alpha-\beta+2)}\right] + \\ &+ \frac{a_{n_1}}{\Gamma(\alpha-\beta)} \int_0^t |(t-s)|^{\alpha-\beta-1}\, y(s)\,\mathrm{d}s + \frac{a_{n_2}}{\Gamma(\alpha-\gamma)} \int_0^t |(t-s)|^{\alpha-\gamma-1}\, y(s)\,\mathrm{d}s + \\ &+ \frac{\mu_\Sigma}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t |(t-s)|^{\alpha-1}\, y(s)\,\mathrm{d}s + \frac{b_0\,\eta_u\,|t|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{b_1\,\eta_0\,\tau_{uM}^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{c\,\eta_w\,|t|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \\ &+ \frac{b_1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\tau_{uM}}^t \left|(t-s)^{\alpha-1}\right| \|\mathbf{u}(s-\tau_{uM})\|\,\mathrm{d}s,\end{aligned} \tag{36}$$

or

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}(t)\| \leq \|\psi_x\|_C &\left[1 + \frac{a_{n_2}|t|^{\alpha-\gamma}}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)} + \frac{a_{n_1}|t|^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}\right] + \|\varphi_x\|_C \left[|t| + \frac{a_{n_1}|t|^{\alpha-\beta+1}}{\Gamma(\alpha-\beta+2)}\right] + \\ &+ \frac{a_{n_1}}{\Gamma(\alpha-\beta)} \int_0^t |(t-s)|^{\alpha-\beta-1}\, y(s)\,\mathrm{d}s + \frac{a_{n_2}}{\Gamma(\alpha-\gamma)} \int_0^t |(t-s)|^{\alpha-\gamma-1}\, y(s)\,\mathrm{d}s + \\ &+ \frac{\mu_\Sigma}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t |(t-s)|^{\alpha-1}\, y(s)\,\mathrm{d}s + \frac{b_0\,\eta_u\,|t|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{b_1\,\eta_0\,\tau_{uM}^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{c\,\eta_w\,|t|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{b_1\eta_u\,|t-\tau_{uM}|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.\end{aligned} \tag{37}$$

For $\forall\theta \in [0, t]$ we have

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}(\theta)\| \leq \|\psi_x\|_C &\left[1 + \frac{a_{n_2}|\theta|^{\alpha-\gamma}}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)} + \frac{a_{n_1}|\theta|^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}\right] + \|\varphi_x\|_C \left[|\theta| + \frac{a_{n_1}|\theta|^{\alpha-\beta+1}}{\Gamma(\alpha-\beta+2)}\right] + \\ &+ \frac{a_{n_1}}{\Gamma(\alpha-\beta)} \int_0^\theta |(\theta-s)|^{\alpha-\beta-1}\, y(s)\,\mathrm{d}s + \frac{a_{n_2}}{\Gamma(\alpha-\gamma)} \int_0^\theta |(\theta-s)|^{\alpha-\gamma-1}\, y(s)\,\mathrm{d}s + \\ &+ \frac{\mu_\Sigma}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\theta |(\theta-s)|^{\alpha-1}\, y(s)\,\mathrm{d}s + \frac{b_0\,\eta_u\,|\theta|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{b_1\,\eta_0\,\tau_{uM}^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{c\,\eta_w\,|\theta|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{b_1\eta_u\,|\theta-\tau_{uM}|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.\end{aligned} \tag{38}$$

Taking into account that the nonnegative function $y(t)$ is increasing, then functions $\int_0^t |s|^{\alpha-\gamma-1} y(t-s)\,\mathrm{d}s$. $\int_0^t |s|^{\alpha-\beta-1} y(t-s)\,\mathrm{d}s$, $\int_0^t |s|^{\alpha-1} y(t-s)\,\mathrm{d}s$, are increasing with respect to $t \geq 0$,

Lemma 3.1. *Therefore, $\alpha > 0$, $\alpha-\beta > 0$, $\alpha-\gamma > 0$, $\theta^\alpha \leq t^\alpha$, $\theta^{\alpha-\beta} \leq t^{\alpha-\beta}$, $\theta^{\alpha-\gamma} \leq t^{\alpha-\gamma}$, it follows*

$$\int_0^\theta |s|^\omega\, y(\theta-s)\,\mathrm{d}s \leq \int_0^t |s|^\omega\, y(t-s)\,\mathrm{d}s, \quad \omega = (\alpha-1, \alpha-\beta-1, \alpha-\gamma-1) \tag{39}$$

i.e.

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}(\theta)\| \leq \|\psi_x\|_C \left[1+\frac{a_{n_2}|t|^{\alpha-\gamma}}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)}+\frac{a_{n_1}|t|^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}\right]+\|\varphi_x\|_C\left[|t|+\frac{a_{n_1}|t|^{\alpha-\beta+1}}{\Gamma(\alpha-\beta+2)}\right]+ \\ +\frac{a_{n_1}}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^t |(t-s)|^{\alpha-\beta-1}\,y(s)\,\mathrm{d}s+\frac{a_{n_2}}{\Gamma(\alpha-\gamma)}\int_0^t |(t-s)|^{\alpha-\gamma-1}\,y(s)\,\mathrm{d}s+ \\ +\frac{\mu_\Sigma}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t |(t-s)|^{\alpha-1}\,y(s)\,\mathrm{d}s+\frac{b_0\eta_u\,|t|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{b_1\eta_0\,\tau_{uM}^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{c\eta_w\,|t|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{b_1\eta_u\,|t-\tau_{uM}|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.\end{aligned} \tag{40}$$

Also, we get

$$\begin{aligned} y(t) &= \sup_{\theta\in[-\tau_{xm},t]}\|x(\theta)\| \leq \max\left\{\sup_{\theta\in[-\tau_{xm},0]}\|x(\theta)\|, \sup_{\theta\in[0,t]}\|x(\theta)\|\right\} \leq \\ &\leq \max\left\{\|\psi_x\|_C, \|\psi_x\|_C\left[1+\frac{a_{n_2}|t|^{\alpha-\gamma}}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)}+\frac{a_{n_1}|t|^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}\right]+\|\varphi_x\|_C\left[|t|+\frac{a_{n_1}|t|^{\alpha-\beta+1}}{\Gamma(\alpha-\beta+2)}\right]+\right. \\ &+\frac{a_{n_1}}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^t |(t-s)|^{\alpha-\beta-1}\,y(s)\,\mathrm{d}s+\frac{a_{n_2}}{\Gamma(\alpha-\gamma)}\int_0^t |(t-s)|^{\alpha-\gamma-1}\,y(s)\,\mathrm{d}s+ \\ &\left.+\frac{\mu_\Sigma}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t |(t-s)|^{\alpha-1}\,y(s)\,\mathrm{d}s+\frac{b_0\eta_u\,|t|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{b_1\eta_0\,\tau_{uM}^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{c\eta_w\,|t|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{b_1\eta_u\,|t-\tau_{uM}|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right\} = \\ &= \|\psi_x\|_C\left[1+\frac{a_{n_2}|t|^{\alpha-\gamma}}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)}+\frac{a_{n_1}|t|^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}\right]+\|\varphi_x\|_C\left[|t|+\frac{a_{n_1}|t|^{\alpha-\beta+1}}{\Gamma(\alpha-\beta+2)}\right]+ \\ &+\frac{a_{n_1}}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^t |(t-s)|^{\alpha-\beta-1}\,y(s)\,\mathrm{d}s+\frac{a_{n_2}}{\Gamma(\alpha-\gamma)}\int_0^t |(t-s)|^{\alpha-\gamma-1}\,y(s)\,\mathrm{d}s+ \\ &+\frac{\mu_\Sigma}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t |(t-s)|^{\alpha-1}\,y(s)\,\mathrm{d}s+\frac{b_0\,\eta_u\,|t|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{b_1\,\eta_0\,\tau_{uM}^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{c\,\eta_w\,|t|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{b_1\,\eta_u\,|t-\tau_{uM}|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.\end{aligned} \tag{41}$$

Now, we introduce $e(t)$ *which is a nondecreasing function on* $J_0 = [0, T]$

$$e(t) = \|\psi_x\|_C\left[1+\frac{a_{n_2}|t|^{\alpha-\gamma}}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)}+\frac{a_{n_1}|t|^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}\right]+\|\varphi_x\|_C\left[|t|+\frac{a_{n_1}|t|^{\alpha-\beta+1}}{\Gamma(\alpha-\beta+2)}\right] \tag{42}$$

From Lemma 2.5 we obtain:

$$\begin{aligned} y(t) &\leq e(t)\,E_\kappa\left[g(t)(\Gamma(\alpha-\beta)t^{\alpha-\beta}+\Gamma(\alpha-\gamma)t^{\alpha-\gamma})\right]+ \\ &+\frac{\mu_\Sigma}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t |(t-s)|^{\alpha-1}\,y(s)\,\mathrm{d}s+\frac{b_0\,\eta_u\,|t|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{b_1\,\eta_0\,\tau_{uM}^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{c\,\eta_w\,|t|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{b_1\,\eta_u\,|t-\tau_{uM}|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\end{aligned} \tag{43}$$

where $g(t) = g_1(t) + g_2(t)$, $g_1 = \dfrac{a_{n1}}{\Gamma(\alpha-\beta)}$, $g_2 = \dfrac{a_{n2}}{\Gamma(\alpha-\gamma)}$ *and* $\kappa = \min(\alpha-\gamma,\ \alpha-\beta)$. *Now, applying Lemma 2.4, we* *have:*

$$\begin{aligned}
&\|\mathbf{x}(t)\| \le y(t) \le e(t)E_\kappa\left[g(t)(\Gamma(\alpha-\beta)t^{\alpha-\beta}+\Gamma(\alpha-\gamma)t^{\alpha-\gamma})\right]E_\alpha(\mu_\Sigma\, t^\alpha)+\\
&\quad+\frac{b_0\,\eta_u\,|t|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{b_1\,\eta_0\,\tau_{uM}^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{b_1\,\eta_u\,|t-\tau_{uM}|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{c\,\eta_w\,|t|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\le\\
&\quad\le \varrho\left[1+|t|+\frac{a_{n_1|t|^{\alpha-\beta}}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}+\frac{a_{n_1|t|^{\alpha-\beta+1}}}{\Gamma(\alpha-\beta+2)}+\frac{a_{n_2|t|^{\alpha-\gamma}}}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)}+\right]\cdot\\
&\quad E_\kappa\left[g(t)(\Gamma(\alpha-\beta)t^{\alpha-\beta}+\Gamma(\alpha-\gamma)t^{\alpha-\gamma})\right]E_\alpha(\mu_\Sigma\, t^\alpha)+\\
&\quad+\frac{b_0\,\eta_u\,|t|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{b_1\,\eta_0\,\tau_{uM}^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{b_1\,\eta_u\,|t-\tau_{uM}|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{c\,\eta_w\,|t|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.
\end{aligned} \tag{44}$$

Finally, using the basic condition of Theorem 3.1, we can obtain the required FTS condition:

$$\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \in J. \tag{45}$$

From Theorem 3.1, we obtain the following result.

Theorem 3.2. *The homogeneous system given by (21), when $\mathbf{u}(t) \equiv 0$, $\mathbf{u}(t-\tau_u) \equiv 0\, \forall t \in J_0$ without perturbations and disturbance $f(t, x(t)) \equiv 0$, $w(t) \equiv 0$ satisfying function of the initial state (22) is finite-time stable w.r.t. $\{\delta, \varepsilon, J_0, \|(\cdot)\|\}$, $\delta < \varepsilon$, if the following condition is satisfied:*

$$\begin{aligned}
&\left[1+|t|+\frac{a_{n_1}|t|^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}+\frac{a_{n_1}|t|^{\alpha-\beta+1}}{\Gamma(\alpha-\beta+2)}+\frac{a_{n_2}|t|^{\alpha-\gamma}}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)}\right]\cdot\\
&E_\kappa\left[g(t)(\Gamma(\alpha-\beta)t^{\alpha-\beta}+\Gamma(\alpha-\gamma)t^{\alpha-\gamma})\right]E_\alpha(\mu_\Sigma\, t^\alpha) < \frac{\varepsilon}{\delta}, \quad \forall t \in J_0.
\end{aligned} \tag{46}$$

Proof: The proof immediately follows from the proof of previous Theorem 3.1.

Theorem 3.3. *The nonhomogeneous nonlinear neutral two-term fractional order time varying delay system without term $A_{N_1}{}^cD_t^\beta\,\mathbf{x}(t-\tau_{xn_1}(t))$, (i.e $A_{N_1} = 0$) given by (47) with satisfying function of the initial state (22) is finite-time stable w.r.t. $\{\delta, \varepsilon, \eta_u, \eta_0, t_0, J, \|(\cdot)\|\}$, $\delta < \varepsilon$, if the following condition is satisfied, (48):*

$$\begin{aligned}
{}^cD_t^\beta\,\mathbf{x}(t) &= A_0\mathbf{x}(t)+A_1\mathbf{x}(t-\tau_x(t))+A_{N_2}{}^cD_t^\gamma\,\mathbf{x}(t-\tau_{t-\tau_{xN_2}}(t))+\\
&\quad+B_0\,\mathbf{u}(t)+B_1\,\mathbf{u}(t-\tau_u(t))+f(t,x(t))+Cw(t)
\end{aligned} \tag{47}$$

$$\begin{aligned}
&\left[1+|t|+\frac{a_{n_2}|t|^{\alpha-\gamma}}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)}\right]E_\kappa\left[\left(\frac{a_{n_2}}{\Gamma(\alpha-\gamma)}+\frac{\mu_\Sigma}{\Gamma(\alpha)}\right)(\Gamma(\alpha-\gamma)t^{\alpha-\gamma}+\Gamma(\alpha)t^\alpha)\right]+\\
&+\frac{\eta_{0u}\,|t|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{\eta_{01}\,\tau_{uM}^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{\eta_{0w}\,|t|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{\eta_{1u}|t-\tau_{uM}|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} < \frac{\varepsilon}{\delta}, \quad \forall t \in J_0,
\end{aligned} \tag{48}$$

where $\kappa = \min(\alpha-\gamma, \alpha)$.

Proof: Similar to the proof of Theorem 3.1 with applying only the extended form of generalized Gronwall inequality we get the proposed result (48) of Theorem 3.3.

Remark. The system (47) can be reduced to [37], ((9) for case $n = 1$, $\tau_{N_1} = 0$, $A_{N_2} = B_1 = 0$, $C = 0$) and [38], (1) assuming that $\tau_{N_1} = 0$, $A_{N_2} = B_1 = 0$, $C = 0$, $f = 0$. It is easily check that obtained criteria (29), (48) are more general.

4. Numerical examples

In this section, to demonstrate the effectiveness of the previously obtained FTS results, a nonhomogeneous nonlinear NITDS with disturbance (49) is considered. Here all notation $\|(\cdot)\|$ means the $\infty-$ norm of a matrix or a vector.

Example 4.1. *Consider the nonlinear neutral NITDS (21) with time-varying input and state delay and multi-term non-integer order* $0<\gamma\le 1<\beta<\alpha\le 2$

$$\begin{aligned}{}^cD_t^{\alpha}\,\mathbf{x}(t) &= A_0\mathbf{x}(t)+A_1\mathbf{x}(t-\tau_x(t))+A_{N_1}{}^cD_t^{\beta}\mathbf{x}(t-\tau_{xN_1}(t))+A_{N_2}{}^cD_t^{\gamma}\mathbf{x}(t-\tau_{t-\tau_{xN_2}}(t))+\\ &+B_0\,\mathbf{u}(t)+B_1\,\mathbf{u}(t-\tau_u(t))+f(t,x(t))+Cw(t)\end{aligned} \tag{49}$$

where

$$A_0=\begin{bmatrix}-0.2 & 0\\ -0.1 & 0.3\end{bmatrix},\quad A_1=\begin{bmatrix}-0.2 & 0.1\\ 0 & -0.1\end{bmatrix},\quad A_{N_1}=\begin{bmatrix}0.3 & 0\\ -0.05 & 0.2\end{bmatrix},\quad A_{N_2}=\begin{bmatrix}0.3 & -0.2\\ 0.4 & 0.1\end{bmatrix},$$
$$\text{where} \tag{50}$$
$$B_0=\begin{bmatrix}0\\ 0.5\end{bmatrix},\quad B_1=\begin{bmatrix}0.5\\ 0\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}0.5\\ 0\end{bmatrix},\quad f(t,x(t))=\begin{bmatrix}0.01\sin x_1(t)\\ 0.01\sin x_2(t)\end{bmatrix},\quad w(t)\sin(t)$$

and $t_0=0$, $\alpha=1.5$, $\beta=1.1$, $\gamma=0.5$, $\tau_x=\tau_u=0.1$, $\tau_{xN_1}=\tau_{xN_2}=\tau_{xN}=0.1$, $\tau_{xm}=0.1$, *with associated functions:* $\psi_x=[0.05\,0.05]^T$*;* $t\in[-0.1,0]$*;* $\varphi(t)=[0.07\,0.07]^T$, $\psi_u=0.05$. *The task is to analyze the FTS with respect to* $\{\delta=0.08,\ \varepsilon=50,\ \eta_u=1\}$. *From the initial functions and given state equation, we have:* $\|\psi_x\|_C=\max\limits_{t\in[-0.1,0]}\|\psi_x(t)\|_\infty=0.05$, $\|\varphi_x\|_C=0.07$, $\rho=\max\{\|\psi\|_C,\|\varphi\|_C\}=0.07<\delta=0.08$, $\|A_0\|=0.4$, $\|A_1\|=0.3$, $\|A_{N_1}\|=0.3$, $\|A_{N_2}\|=0.5$, $\|B_0\|=0.5$, $\|C\|=0.5$, $l(t)=0.01$, $\eta_w=1.01$, $\eta_u=1$, $\eta_0=0.06$. *Applying the condition of Theorem 3.1, we can obtain the estimated time of the FTS* $T_e\approx 0.8\,s$.

Example 4.2. *Consider the following homogeneous neutral NITDS with time-varying state delays multi-term non-integer order* $0<\gamma\le 1<\beta<\alpha\le 2$

$${}^cD_t^{\alpha}\,\mathbf{x}(t)=A_0\mathbf{x}(t)+A_1\mathbf{x}(t-\tau_x(t))+A_{N_1}{}^cD_t^{\beta}\mathbf{x}(t-\tau_{xN_1}(t))+A_{N_2}{}^cD_t^{\gamma}\mathbf{x}(t-\tau_{t-\tau_{xN_2}}(t)) \tag{51}$$

where

$$A_0=\begin{bmatrix}0.2 & 0\\ 0 & 0.2\end{bmatrix},\quad A_1=\begin{bmatrix}0.1 & -0.3\\ 0.2 & 0.1\end{bmatrix},\quad A_{N_1}=\begin{bmatrix}-0.3 & 0\\ 0.3 & 0.2\end{bmatrix},\quad A_{N_2}=\begin{bmatrix}0 & 0.1\\ -0.2 & 0.2\end{bmatrix} \tag{52}$$

and $\alpha=1.75$, $\beta=1.5$, $\gamma=0.75$, $\tau_x=0.15$, $\tau_{xm}=0.15$ $\tau_{xN_1}=\tau_{xN_2}=\tau_{xN}=0.15$, *with associated functions:* $\psi_x=[0.03\,0.03]^T$, $t\in[-0.15,\,0]$, $\varphi_x(t)=[0.05\,0.05]^T$. *Also, from the initial functions and given state equation, we calculate:* $\|\psi_C\|_C=0.03$, $\|\varphi_C\|_C=0.05$, $\rho=\max\{\|\psi_C\|_C,\|\varphi_C\|_C\}=0.05<\delta=0.06$. *It is obviosly that* $\|A_0\|=0.2$, $\|A_1\|=0.4$, $\|A_{N_1}\|=0.5$, $\|A_{N_2}\|=0.4$. *If we take* $\delta=0.06$ *and* $\varepsilon=100$ *then condition (48) of Theorem 3.2 holds for* $T_e\approx 0.328\,s$ *so we can get the estimated time of the FTS.*

5. Conclusions

In this paper, FTS analysis for a class of (non)homogeneous nonlinear neutral multi-term fractional order systems $0<\gamma\le 1<\beta<\alpha\le 2$ with time-varying input and state delays has been investigated. By use of the extended form of generalized Gronwall inequality, new criteria for the FTS have been developed. Sufficient conditions for FTS for this class of neutral NITDS have been proposed. Finally, two numerical examples have been provided to illustrate the effectiveness and the benefit of the proposed novel stability criterion of FTS.

Acknowledgements

This work is supported by the Ministry of Education, Science and Technological Development of the Republic of Serbia under the Grant No. 451-03-68/2022-14/200105.

Literatura

[1] Dorato P. (2006) An Overview of Finite-Time Stability. In: Menini L., Zaccarian L., Abdallah C.T. (eds) Current Trends in Nonlinear Systems and Control. Systems and Control: Foundations & Applications. Birkhäuser Boston, https://doi.org/10.1007/0-8176-4470-$9_1 0$

[2] M. P. Lazarević, D. Lj. Debeljković, Z. Lj. Nenadić, S. A. Milinković, Finite-time stability of delayed systems. IMA Journal of Mathematical Control and Information, Volume 17, Issue 2, June 2000, Pages 101–109, https://doi.org/10.1093/imamci/17.2.101

[3] Cao Y.Y.,J. Lam, Computation of robust stability bounds for time-delay systems with nonlinear time-varying perturbations, Int. J. Syst. Sci. 31 (3) (2009) 420 359–365. https://doi.org/ 10.1080/002077200291190

[4] Liu P.L., A delay decomposition approach to robust stability analysis of uncertain systems with time-varying delay, ISA Trans. 51 (6) (2012) 694–701. http://dx.doi.org/10.1016/j.isatra.2012.07.001

[5] F. Mainardi and R. Gorenflo, Time-fractional derivatives in relaxation processes: a tutorial survey,Fractional Calculus and Applied Analysis, Vol. 10 No 3 pp. 269-308 (2007). E-print http://arxiv.org/abs/0801.4914

[6] Podlubny I. Fractional differential equations. New York: Academic Press; 1999 https://www.elsevier.com/books/fractional-differential-equations/podlubny/978-0-12-558840-9

[7] Monje, C. A., Chen, Y., Vinagre, B. M., Xue, D. and Feliu-Batlle, V., Fractional-Order Systems and Controls: Fundamentals and Applications, Springer, ISBN 9781849963350, 2010. https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-84996-335-0.

[8] Caponetto R. Fractional order systems: Modeling and control applications, Vol. 72. World Scientific; 2010, http://dx.doi.org/10.1142/7709

[9] Lazarević M., A.Spasić, Finite-Time Stability Analysis of Fractional Order Time Delay Systems:Gronwall's Approach, Mathematical and Computer Modelling, 49,(2009), pp.475-481,2009 https://doi.org/10.1016/j.mcm.2008.09.011

[10] L. Chen, W. Pan, R. Wu, Y. He, New result on finite-time stability of fractional-order nonlinear delayed systems, J. Comput. Nonlinear Dyn. 10 (6) (2015) 064504. DOI: 10.1115/1.4029784.

[11] J. Čermák, Z. Došlá, T. Kisela, Fractional differential equations with a constant delay: stability and asymptotics of solutions, Appl. Math. Comput. 298 (2017) 336–350. DOI: 10.1016/j.amc.2016.11.016.

[12] Y. Wen, X. Zhou, Z. Zhang, S. Liu, Lyapunov method for nonlinear fractional differential systems with delay, Nonlinear Dyn. 82 (1–2) (2015) 1015–1025. https://doi.org/10.1007/s11071-015-2214-y

[13] G.C. Wu, D. Baleanu, S.D. Zeng, Finite–time stability of discrete fractional delay systems: Gronwall inequality and stability criterion, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation Volume 57, April 2018, Pages 299-308 , doi: 10.1016/j.cnsns.2017.09.001

[14] M. P. Lazarević, D. L. Debeljković, Finite time stability analysis of linear autonomous fractional order systems with delayed state, Asian J. Control, 7 (4) (2005) 440-447. https://doi.org/10.1111/j.1934-6093.2005.tb00407.x

[15] Lazarević M. P., Finite Time Stability Analysis of $PD\alpha$ Fractional Control of Robotic Time-Delay Systems, Mechanics Research Communications, Vol. 33, No. 2, 269–279, 2006, https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2005.08.010

[16] M. Li, J. Wang, Finite time stability of fractional delay differential equations, Appl. Math. Lett,64 (2017) 170–176, http://dx.doi.org/10.1016/j.aml.2016.09.004

[17] F. Wang, D. Chen, X. Zhang, Y. Wu, Finite-time stability of a class of nonlinear fractional order system with the discrete time-delay,(2017), Int. J. Syst. Sci., 48(5):984–993, https: //doi.org/10.1080/00207721.2016.1226985

[18] Naifar O, Nagy AM, Makhlouf AB, Kharrat M, Hammami MA. Finite-time stability of linear fractional-order time-delay systems. Int J Robust Nonlinear Control. 2019; 29:180–187. https://doi.org/10.1002/rnc.4388

[19] F. Du and J.,G. Lu, New criterion for finite-time stability of fractional delay systems, Applied Mathematics Letters,104 (2020) 106248, https://doi.org/10.1016/j.aml.2020.106248

[20] Ben Makhlouf B.A,A novel finite time stability analysis of nonlinear fractional-order time delay systems: A fixed point approach, Asian J Control (2021), 1–8. https://doi.org/10.1002/asjc.2756

[21] L. Zhang and G. Stepan, Exact stability chart of an elastic beam subjected to delayed feedback. Journal of Sound and Vibration. 367 (2016) 219-232. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2016.01.002

[22] K. Patanarapeelert, T.D. Frank, R. Friedrich, P.J. Beek, I.M. Tang, A data analysis method for identifying deterministic components of stable and unstable time-delayed systems with colored noise, Physics Letters A 360 (2006) 190–198. https://doi.org/10.1016/j.physleta.2006.08.003

[23] I. Mancisidor, A. Pena-Sevillano, Z. Dombovari, R. Barcena, J. Munoa, Delayed feedback control for chatter suppression in turning machines, Mechatronics,Volume 63, November 2019, 102276 https://doi.org/10.1016/j.mechatronics.2019.102276

[24] T. Insperger, J.G. Milton and G. Stepan, Acceleration feedback improves balancing against reflex delay. J. R. Soc. Interface 10 (2013) 20120763. https://doi.org/10.1098/rsif.2012.0763

[25] L. Zhang, G. Stepan and T. Insperger, Saturation limits the contribution of acceleration feedback to balancing against reaction delay. J. R. Soc. Interface 2018 (2018) 20170771. https://doi.org/10.1098/rsif.2017.0771

[26] A. Domoshnitsky, S. Levi, R. H. Kappel, E. Litsyn,R. Yavich, Stability of neutral delay differential equations with applications in a model of human balancing, Math. Model. Nat. Phenom. 16 (2021) 21 https://doi.org/10.1051/mmnp/2021008

[27] Xu Q., M.Shi, Z.Wang, Stability and delay sensitivity of neutral fractional-delay systems, Chaos 26, (2016), 084301, https://doi.org/10.1063/1.4958713

[28] M.Veselinova, H. Kiskinov, A. Zahariev, Stability Analysis of Neutral Linear Fractional System with Distributed Delays, Filomat 30:3 (2016), 841–851, https://doi.org/10.2298/FIL1603841V
[29] Sawoor A.A, Stability analysis of fractional-order linear neutral delay differential–algebraic system described by the Caputo–Fabrizio derivative, Advances in Difference Equations (2020) 2020:531 https://doi.org/10.1186/s13662-020-02980-8
[30] H.Tuan, H.T. Thai, R. Garrappa, An analysis of solutions to fractional neutral differential equations with delay, (2021), Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, vol.100, Sept. 2021, 105854, https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2021.105854
[31] A. Chadhaa, S. N. Borab, Stability Results on Mild Solution of Impulsive Neutral Fractional Stochastic Integro-Differential Equations Involving Poisson Jumps, Filomat 35:10 (2021), 3383–3406, https://doi.org/10.2298/FIL2110383C
[32] Liu K.W.Jiang W., Finite time stability of fractional order neutral differential equations, Journal of Mathematics, vol.34,no1. pp.43-50.2014.
[33] Z.Li, G. Cunchen, R. Qifeng, Robust finite-time stability of neutral fractional time-delay systems, (2021), Vol.49, No.3 Journal of Shanghai Normal University, pp.344-360. doi:10.3969/J.ISSN.1000-5137.2020.03.010
[34] F. Du, J-G Lu, Finite-time stability of neutral fractional order time delay systems with Lipschitz nonlinearities, Applied Mathematics and Computation 375, (2020) 125079, https://doi.org/ 10.1016/j.amc.2020.125079
[35] J. Ren, C. Zhai, Stability analysis of generalized neutral fractional differential systems with time delays, Applied Mathematics Letters 116 (2021) 106987, https://doi.org/10.1016/j.aml.2020.106987
[36] Lazarević P.M., D. Radojević, S. Pišl, and G. Maione, Robust finite-time stability of uncertain neutral nonhomogeneous fractional-order systems with time-varying delays, Theoretical and applied mechanics (TAM), (2020), Vol.47 issue 2, 241–255. doi: https://doi.org/10.2298/TAM201203016L.
[37] G. Arthi, N. Brindha and Yong-Ki Ma, Finite-time stability of multiterm fractional nonlinear systems with multistate time delay, Advances in Difference Equations, (2021) 2021:102 p.1-15, https://doi.org/10.1186/s13662-021-03260-9
[38] Arthi G., Brindha N. and Baleanu D. (2022) Finite-time stability results for fractional damped dynamical systems with time delays, Nonlinear Analysis: Modelling and Control, 27(2), pp. 221-233. doi: 10.15388/namc.2022.27.25194. DOI:https://doi.org/10.15388/namc.2022.27.25194
[39] Kilbas A., Srivastava H., Trujillo J., Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier, Amsterdam, (2006). DOI: 10.1016/S0304-0208(06)80001-0
[40] Ye., J.Gao., Y. Ding., A generalized Gronwall inequality and its application to a fractional differential equation, J. Math. Anal. Appl. (2007),328 ,1075–1081. DOI:10.1016/J.JMAA.2006.05.061
[41] Sheng J., W. Jiang, Existence and uniqueness of the solution of fractional damped dynamical systems, Advances in Difference Equations, (2017) 1-16, 2017. https://doi.org/10.1186/s13662-016-1049-2
[42] C. Liang,W.Wei, J.Wang, Stability of delay differential equations via delayed matrix sine and cosine of polynomial degrees, Adv. Difference Equ., (2017) (1):1–17, https://doi.org/10.1186/s13662-017-1188-0.