UNIVERZITET U NIŠU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

Katarina S. Đorđević

q-KARAMATINE FUNKCIJE I ASIMPTOTSKA SVOJSTVA REŠENJA NELINEARNIH q-DIFERENCNIH JEDNAČINA

DOKTORSKA DISERTACIJA

Niš, 2021.

UNIVERSITY OF NIŠ
FACULTY OF SCIENCES AND MATHEMATICS

Katarina S. Đorđević

q-KARAMATA FUNCTIONS AND ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF SOLUTIONS OF NONLINEAR q-DIFFERENCE EQUATIONS

DOCTORAL DISSERTATION

Niš, 2021.

Подаци о докторској дисертацији

Ментор:	др Јелена Манојловић, редовни професор, Природно-математички факултет, Универзитет у Нишу
Наслов:	q-Караматине функције и асимптотска својства решења нелинеарних q-диференцних једначина
Резиме:	Циљ докторске дисертације је да се применом теорије q-правилно промењљивих функција одреде услови за егзистенцију и детаљно испитају асимптотска својства решења нелинеарних q-диференцних једначина другог реда. У оквиру теорије Караматиних q-правилно промењљивих функција најпре је разматрана полулинеарна q-диференцна једначина. Одређени су потребни и довољни услови за егзистенцију q-правилно промењљивих решења ове једначине. Осим тога, испитани су услови при којима су сва евентуално позитивна решења ове једначине q-правилно промењљива. У случајевима када је то могуће, применом q-Караматине интеграционе теореме одређене су асимптотске формуле решења, којима се прецизно описује понашање решења у дугим временским интервалима, што је од посебног значаја са становишта примене. Добијени резулати у q-рачуну упоређени су са познатим резултатима у непрекидном и дискретном случају, али и коришћени за добијање нових резултата у дискретној асимптотској анализи диференцних једначина. Сублинеарна q-диференцна једначина типа Емден-Фаулер је такође разматрана у оквиру Караматиних q-правилно промењљивих функција. Под претпоставком да су коефицијенти ове једначине q-правилно промењљиве функције, одређени су потребни и довољни услови за егзистенцију строго растућих и строго опадајућих q-правилно промењљивих решења, као и њихове асимптотске репрезентације. Штавише, показано је да сва q-правилно промењљива решења истог индекса регуларности имају исту асимптотску репрезентацију у бесконачности. Ови резултати омогућавају да структура скупа q-правилно промењљивих решења буде комплетно описана.
Научна област:	Математичке науке
Научна дисциплина:	Диференцијалне и диференцне једначине
Кључне речи:	Нелинеарне q-диференцне једначине, Полулинеарна q-диференцна једначина, Правилно промењљиви низови, q-правилно промењљиве функције, Неосцилаторна решења, Асимптотско понашање решења

УДК:	517.9 517.929
CERIF класификација:	P130: Функције, диференцијалне једначине
Тип лиценце Креативне заједнице:	**CC BY-NC-ND**

Data on Doctoral Dissertation

Doctoral Supervisor:	Jelena Manojlović, PhD, full professor at Faculty of Sciences and Mathematics, University of Niš
Title:	q-Karamata functions and asymptotic behavior of solutions of nonlinear q-difference equations

Abstract:

The purpose of the doctoral dissertation is to determine the conditions for the existence and to examine in detail the asymptotic properties of solutions of the second order nonlinear q-difference equations, with an application of the theory of *q*-regular variation.

The half-linear *q*-difference equation was analyzed in the framework of *q*-regular variation. Necessary and sufficient conditions for the existence of *q*-regularly varying solutions of the half-linear q- difference equation were obtained. Moreover, sufficient conditions for all eventually positive solutions to be *q*-regularly varying were examined. In cases where this is possible, the application of *q*-Karamata's integration theorem and properties of *q*-regularly varying functions have been used to determine the precise asymptotic formula of different types of solutions, which accurately describes the behavior of these solutions in long time intervals, which is of special importance from the point of view of application. The obtained results in the *q*-calculus were compared with the known results in the continuous and the discrete case, but also, they were used to obtain new results in the discrete asymptotic theory.

The sublinear second order *q*-difference equation of Emden-Fowler type was also analyzed in the framework of *q*-regularly varying functions. Assuming that the coefficients of this equation are q-regularly varying functions, necessary and sufficient conditions for the existence of strongly increasing and strongly decreasing solutions, as well as their asymptotic representations at infinity, have been determined. Moreover, it was shown that all q-regularly varying solutions of the same regularity index have the same asymptotic representation at infinity. The obtained results enabled the complete structure of the set of *q*-regularly varying solutions to be presented.

Scientific Field:	Mathematics
Scientific Discipline:	Differential and difference equations

Key Words: Nonlinear q-difference equations, Half-linear q-difference equation, Regularly varying sequences, q-regularly varying functions, Nonoscillatory solutions, Asymptotic behavior of solutions

UDC:	517.9 517.929
CERIF Classification:	P130: Functions, differential equations
Creative Commons License Type:	**CC BY-NC-ND**

Прилог 4/1

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, **РБР**:	
Идентификациони број, **ИБР**:	
Тип документације, **ТД**:	Монографска
Тип записа, **ТЗ**:	Текстуални
Врста рада, **ВР**:	Докторска дисертација
Аутор, **АУ**:	Катарина С. Ђорђевић
Ментор, **МН**:	Јелена В. Манојловић
Наслов рада, **НР**:	q-Караматине функције и асимптотска својства решења нелинеарних q-диференцних једначина
Језик публикације, **ЈП**:	Српски
Језик извода, **ЈИ**:	Енглески
Земља публиковања, **ЗП**:	Србија
Уже географско подручје, **УГП**:	Србија
Година, **ГО**:	2021.
Издавач, **ИЗ**:	Ауторски репринт
Место и адреса, **МА**:	Ниш, Вишеградска 33.
Физички опис рада, **ФО**: (поглавља/страна/ цитата/табела/слика/графика/прилога)	122 стр.
Научна област, **НО**:	Математика
Научна дисциплина, **НД**:	Диференцијалне и диференцне једначине
Предметна одредница/Кључне речи, **ПО**:	нелинеарне q-диференцне једначине, полулинеарна q-диференцна једначина, правилно променљиви низови, q-правилно променљиве функције, неосцилаторна решења, асимптотско понашање решења
УДК	517.9 517.929
Чува се, **ЧУ**:	Библиотека
Важна напомена, **ВН**:	

Извод, **ИЗ**:	Циљ докторске дисертације је да се применом теорије *q*-правилно променљивих функција одреде услови за егзистенцију и детаљно испитају асимптотска својства решења нелинеарних *q*-диференцних једначина другог реда. У оквиру теорије Караматиних *q*-правилно променљивих функција најпре је разматрана полулинеарна *q*-диференцна једначина. Одређени су потребни и довољни услови за егзистенцију *q*-правилно променљивих решења ове једначине. Осим тога, испитани су услови при којима су сва евентуално позитивна решења ове једначине *q*-правилно променљива. У случајевима када је то могуће, применом q-Караматине интеграционе теореме одређене су асимптотске формуле решења, којима се прецизно описује понашање решења у дугим временским интервалима, што је од посебног значаја са становишта примене. Добијени резулати у *q*-рачуну упоређени су са познатим резултатима у непрекидном и дискретном случају, али и коришћени за добијање нових резултата у дискретној асимптотској анализи диференцних једначина. Сублинеарна *q*-диференцна једначина типа Емден-Фаулер је такође разматрана у оквиру Караматиних *q*-правилно променљивих функција. Под претпоставком да су коефицијенти ове једначине *q*-правилно променљиве функције, одређени су потребни и довољни услови за егзистенцију строго растућих и строго опадајућих *q*-правилно променљивих решења, као и њихове асимптотске репрезентације. Штавише, показано је да сва *q*-правилно променљива решења истог индекса регуларности имају исту асимптотску репрезентацију у бесконачности. Ови резултати омогућавају да структура скупа *q*-правилно променљивих решења буде комплетно описана.
Датум прихватања теме, **ДП**:	29.09.2020.
Датум одбране, **ДО**:	
Чланови комисије, **КО**: Председник:	
Члан:	
Члан, ментор:	

Образац Q4.09.13 - Издање 1

Прилог 4/2

	ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ **НИШ**
	KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, **ANO**:	
Identification number, **INO**:	
Document type, **DT**:	monograph
Type of record, **TR**:	textual
Contents code, **CC**:	doctoral dissertation
Author, **AU**:	Katarina S. Đorđević
Mentor, **MN**:	Jelena V. Manojlović
Title, **TI**:	q-KARAMATA FUNCTIONS AND ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF SOLUTIONS OF NONLINEAR q-DIFFERENCE EQUATIONS
Language of text, **LT**:	Serbian
Language of abstract, **LA**:	English
Country of publication, **CP**:	Serbia
Locality of publication, **LP**:	Serbia
Publication year, **PY**:	2021
Publisher, **PB**:	author's reprint
Publication place, **PP**:	Niš, Višegradska 33.
Physical description, **PD**: (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)	122 str.
Scientific field, **SF**:	mathematics
Scientific discipline, **SD**:	differential and difference equations
Subject/Key words, **S/KW**:	nonlinear q-difference equations, half-linear q-difference equation, regularly varying sequences, q-regularly varying functions, nonoscillatory solutions, asymptotic behavior of solutions
UC	517.9 517.929
Holding data, **HD**:	library
Note, **N**:	

Abstract, **AB**:		The purpose of the doctoral dissertation is to determine the conditions for the existence and to examine in detail the asymptotic properties of solutions of the second order nonlinear q-difference equations, with an application of the theory of *q*-regular variation. The half-linear *q*-difference equation was analyzed in the framework of *q*-regular variation. Necessary and sufficient conditions for the existence of *q*-regularly varying solutions of the half-linear q- difference equation were obtained. Moreover, sufficient conditions for all eventually positive solutions to be *q*-regularly varying were examined. In cases where this is possible, the application of *q*-Karamata's integration theorem and properties of *q*-regularly varying functions have been used to determine the precise asymptotic formula of different types of solutions, which accurately describes the behavior of these solutions in long time intervals, which is of special importance from the point of view of application. The obtained results in the *q*-calculus were compared with the known results in the continuous and the discrete case, but also, they were used to obtain new results in the discrete asymptotic theory. The sublinear second order *q*-difference equation of Emden-Fowler type was also analyzed in the framework of *q*-regularly varying functions. Assuming that the coefficients of this equation are q-regularly varying functions, necessary and sufficient conditions for the existence of strongly increasing and strongly decreasing solutions, as well as their asymptotic representations at infinity, have been determined. Moreover, it was shown that all q-regularly varying solutions of the same regularity index have the same asymptotic representation at infinity. The obtained results enabled the complete structure of the set of *q*-regularly varying solutions to be presented
Accepted by the Scientific Board on, **ASB**:		29.09.2020.
Defended on, **DE**:		
Defended Board, **DB**:	President:	
	Member:	
	Member, Mentor:	

Sadržaj

Predgovor

Živimo u dobu zapanjujućeg napretka. Inženjeri mogu stvoriti robote, fizičar može opisati kretanje talasa, klatna ili haotičnih sistema, dok mi bežično komuniciramo u okviru široke svetske mreže. Ali ispod ovih modernih čuda, duboko su skrivene i moćne Diferencijalne jednačine. Gotovo da ne postoji oblast u kojoj diferencijalne jednačine nemaju primenu. U medicini se koriste za modeliranje širenja zaraznih bolesti. U ekologiji se koriste za modeliranje interakcije između vrsta u određenom ekosistemu. U hemiji se koriste za modeliranje hemijskih reakcija. U ekonomiji se koriste za pronalaženje optimalnih investicijskih strategija. One su osnovni alati za opisivanje prirode fizičkog univerzuma. Međutim, većina diferencijalnih jednačina koje modeliraju ove probleme vrlo je komplikovano ili nemoguće rešiti. Sa stanovišta primene nekada je dovoljno poznavati samo osobine rešenja posmatrane jednačine, kao što su periodičnost, stabilnost, oscilatornost ili asimptotsko ponašanje rešenja u beskonačnosti. Kvalitativna teorija diferencijalnih jednačina je oblast matematike koja se bavi upravo ovakvim istraživanjima.

Mnogi modelirani problemi omogućavaju samo numerički tretman. Kontinualni problemi se ponekad moraju zameniti diskretnim problemima čije rešenje je poznato i može se iskoristiti za aproksimaciju rešenja kontinualnog problema. Taj proces se naziva diskretizacijom. Jedna od pogodnih rešetki za diskretizaciju je q-rešetka ili njena modifikacija. Naš centar interesovanja biće kvalitativna analiza ovakvih diskretnih modela.

Veliki broj pojava fizike i astrofizike, toplotno ponašanje sfernog oblaka gasa, izotermalne gasne sfere i termoelektronske emisije (videti [28, 30, 117]), modelirane su *Emden-Fowler diferencijalnom jednačinom*

$$(E_1) \qquad x''(t) + b(t)\Phi_\beta(x(t)) = 0, \quad \beta \neq 1,$$

gde je

$$\Phi_\beta(x) = |x|^{\beta-1}x,$$

jednom od najviše izučavanih nelinearnih diferencijalnih jednačina drugog reda. U slučaju kada je koeficijent b jednačine (E_1) negativan, ona se naziva i *Thomas-Fermi diferencijalna jednačina*. Pomenuta jednačina je najpre privukla pažnju švajcarskog astrofizičara i meteorologa, Jacob Emdena (1862 - 1940) tokom rane faze razvoja teorije dinamike gasova u astrofizici. Nešto kasnije, nezavisno jedan od drugog, fizičari Llewellyn Thomas

(1903 - 1992) i Enrico Fermi (1901 - 1954) su kreirali Thomas-Fermi model, statistički model korišćen za aproksimaciju raspodela elektrona u atomu.

Jednačine

$$(E_2) \qquad (a(t)\Phi_\alpha(x'(t))' + b(t)\Phi_\beta(x(t)) = 0,$$

$$(\mathrm{E}_3) \qquad (a(t)\Phi_\alpha(x''(t)))'' + b(t)\Phi_\beta(x(t)) = 0,$$

gde su $\alpha, \beta > 0$ i koeficijent b realna funkcija konstantnog znaka, predstavljaju prirodne generalizacije jednačine (E_1). Neka od svojstava rešenja jednačine (E_2), kao što su egzistencija, jedinstvenost, oscilatornost i neoscilatornost rešenja, asimptotska svojstva neoscilatornih rešenja su detaljno ispitana (videti [17, 20, 22, 26, 34, 47, 48, 53, 54, 62, 63, 66, 67, 72, 73, 74, 76, 79, 82, 89, 90, 91, 101, 125, 126]). Navedena svojstva rešenja jednačine (E_2) u slučaju $\alpha = \beta$, su razmatrana u radovima [19, 35, 49, 50, 51, 68, 71, 81, 92, 93, 97, 98, 103, 107]. Proučavanje oscilatornosti i asimptotskog ponašanja neoscilatornih rešenja nelinearne diferencijalne jednačine četvrtog reda (E_3) su inicirali Wu [129] i Kamo i Usami [56], 2002. godine, a kasnije je razvijeno u radovima [55, 78, 83, 94, 95, 128].

Pored diferencijalne jednačine (E_2) posmatrana je i odgovarajuća nelinearna diferencna jednačina

$$(\mathrm{E}_4) \qquad \triangle(a(n)\Phi_\alpha(\triangle x(n))) + b(n)\Phi_\beta(x(n+1)) = 0$$

u radovima [2, 18, 21, 23, 24, 25, 27, 29, 57, 58, 119, 120, 121, 127]. Pri analizi diferencne jednačine (E_4) ispostavlja se da su očuvane mnoge osobine diferencijalne jednačine. Međutim, nailazilo se na drugačije, kao i u potpunosti kontradiktorne rezultate u odnosu na neprekidni slučaj.

Krajem dvadesetog veka, sa ciljem objedinjavanja diskretnog i neprekidnog slučaja, definisana je *vremenska skala*. Posmatrana je analogna dinamička nelinearna jednačina na proizvoljnoj vremenskoj skali $\mathbb{T}$

$$(\mathrm{E}_5) \qquad (a(t)\Phi_\alpha(x^\triangle(t)))^\triangle + b(t)\Phi_\beta(x(\sigma(t))) = 0, \quad t \in \mathbb{T}.$$

Jednačina (E_5) u kojoj je $\alpha = \beta$ se naziva *polulinearna*. Ukoliko je u jednačini (E_5) $\alpha > \beta$, ona se naziva *sublinearna*, dok se u slučaju $\alpha < \beta$ naziva *superlinearna tipa Emden-Fowler*.

Kriterijumi oscilatornosti i neoscilatornosti, kao i svojstva neoscilatornih rešenja polulinearne jednačine (E_5) ustanovljeni su u radovima [6, 13, 85, 105, 106, 108]. U radovima [3, 4, 5] razmatrana je klasifikacija neoscilatornih rešenja, kao i potrebni i dovoljni uslovi za egzistenciju neoscilatornih rešenja pojedinih klasa rešenja nelinearne jednačine (E_5). U slučaju kada je $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ jednačina (E_5) se svodi na jednačinu (E_2), dok se u slučaju $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ova jednačina svodi na jednačinu (E_4). U slučaju kada je

$$\mathbb{T} = q^{\mathbb{N}_0} = \{q^n : n \in \mathbb{N}_0\},$$

jednačina (E_5) se svodi na *q-diferencnu jednačinu tipa Emden-Fowler*

$$(\mathrm{E}_6) \qquad D_q(a(t)\Phi_\alpha(D_q x(t))) + b(t)\Phi_\beta(x(qt)) = 0, \quad t \in q^{\mathbb{N}_0}.$$

U dokazima mnogih tvrđenja u kvalitativnoj analizi jednačine (E_5) zahtevano je da gustina vremenske skale $\mathbb{T}$ zadovoljava određeni uslov, tj. da rastojanje između dve susedne tačke bude dovoljno malo. Ovaj uslov ispunjavaju vremenske skale $\mathbb{R}$ i $\mathbb{Z}$, međutim, q-vremenska skala ne zadovoljava pomenuti uslov. Stoga je slučaj jednačine (E_5) na q-vremenskoj skali, tj. jednačinu (E_6), potrebno izolovano posmatrati - što će biti predmet istraživanja ove doktorske disertacije.

Prvi korak pri izučavanju asimptotskih svojstava rešenja nelinearnih jednačina jeste klasifikacija rešenja, koja podrazumeva podelu neoscilatornih rešenja u disjunktne klase na osnovu njhovih ponašanja i ponašanja njihovih kvazi-izvoda u beskonačnosti. Sledeći zadatak je odrediti potrebne i dovoljne uslove za egzistenciju rešenja tako određenih klasa. Potrebni i dovoljni uslovi za egzistenciju rešenja u određenim klasama iskazani su uglavnom konvergencijom integrala koeficijenata jednačine i najčešće se određuju analogno kao u neprekidnom i diskretnom slučaju. Međutim, u nekim slučajevima je korišćenjem standarnih metoda, metoda fiksne tačke, moguće odrediti samo potrebne ili samo dovoljne uslove. Osim toga, određivanje asimptotske formule neoscilatornih rešenja je značajan zadatak, ali često veoma složen.

Karamatina teorija pravilno promenljivih funkcija se pokazala kao veoma efikasan alat u istraživanjima asimptotskih svojstava diferencijalnih, a nešto kasnije i diferencnih jednačina. Prvi rad koji povezuje pravilno promenljive funkcije i diferencijalne jednačine je rad autora V. G. Avakumovića [9] iz 1947. godine. Međutim, kao prvi takav rad, nije izazvao previše interesovanja u to vreme, sve do nekih trideset godina kasnije, kada su Marić i Tomić u svojim radovima nastavili i dalje razvili istraživanje diferencijalnih jednačina koristeći pravilno promenljive funkcije. Marićeva monografija [84], koja obuhvata sve rezultate do 2000. godine, intenzivirala je primenu Karamatine teorije pravilno promenljivih funkcija u analizi diferencijalnih jednačina, koja je i danas aktuelna. Diferencijalne jednačine drugog reda su posmatrane u okviru teorije pravilno promenljivih funkcija u radovima [47, 48, 49, 51, 66, 67, 68, 71, 72, 73, 74, 76, 79, 82, 103, 107, 113], diferencijalne jednačine četvrtog reda u radovima [32, 69, 70, 75, 77, 123] i diferencne jednačine drugog reda u radovima [2, 57, 58, 86, 87, 88, 104, 109].

Značajni rezultati primene Karamatine teorije u izučavanju diferencijalnih i diferencnih jednačina motivisali su razvoj ove teorije na vremenskoj skali, a posebno na vremenskoj skali $\mathbb{T} = q^{\mathbb{N}_0}$, $q > 1$, kako bi se ona mogla primeniti u analizi dinamičkih jednačina i q-diferencnih jednačina. Razvijeni su novi metodi i dobijeni vrlo značajni rezultati. Dinamičke jednačine drugog reda, tačnije linearna (jednačina (E_5) za $\alpha = \beta = 1$) i polulinearna dinamička jednačina (E_5) na vremenskoj skali čija gustina zadovoljava određeni uslov, posmatrane su u okviru teorije pravilno promenljivih funkcija u radovima [110, 112, 116, 124].

Primena teorije q-pravilno promenljivih funkcija u kvalitativnoj analizi q-diferencnih jednačina je tek u začetku. U okviru ove teorije su izučavane linearna q-diferencna jednačina [100, 111, 115] i polulinearna q-diferencna jednačina, tačnije jednačina (E_6) u slučaju $\alpha = \beta$ i $a(t) \equiv 1$ (videti [102, 114]). Međutim, opšti slučaj polulinearne q-diferencne jednačine, kao i slučaj nelinearne q-diferencne jednačine do sada nisu razmatrani. Predmet doktorske teze je nastavak ovih istraživanja.

Disertacija je podeljena u četiri Glave, koje su dalje podeljene na Poglavlja. U Glavi 1 će biti navedeni osnovni pojmovi, oznake, definicije i tvrđenja koja će se koristiti u okviru disertacije. U ovoj Glavi biće navedeni osnovni koncepti q-računa, računa na proizvoljnoj vremenskoj skali i Karamatine teorije pravilno promenljivih funkcija.

U Glavi 2 razmatrana je *polulinearna* q-diferencna jednačina u okviru teorije pravilno promenljivih funkcija. Određeni su potrebni i dovoljni uslovi za egzistenciju q-pravilno promenljivih rešenja. Za jednačinu sa eventualno negativnim koeficijentom b određeni su dovoljni uslovi pri kojima su sva eventualno pozitivna rešenja q-pravilno promenljiva. Osim toga, određene su asimptotske reprezentacije q-pravilno promenljivih rešenja polulinearne q-diferencne jednačine, pod određenim pretpostavkama. Na kraju su ovi rezultati primenjeni u asimptotskoj analizi polulinearne diferencne jednačine (E_4), u kojoj je $\alpha = \beta > 0$, u okviru generalizovanih pravilno promenljivih nizova. *Rezultati Poglavlja 2.3 - 2.7 su originalni i publikovani u radovima [31, 33].*

U Glavi 3 je razmatrana *sublinearna* q-diferencna jednačina tipa Emden-Fowler u okviru teorije pravilno promenljivih funkcija, uz pretpostavku da je koeficijent b eventualno negativna funkcija. Određeni su potrebni i dovoljni uslovi za egzistenciju strogo opadajućih i strogo rastućih q-pravilno promenljivih rešenja, uz pretpostavku da su koeficijenti jednačine q-pravilno promenljive funkcije. Osim toga, određena je i asimptotska reprezentacija ovih rešenja. Štaviše, pokazano je da sva q-pravilno promenljiva rešenja istog indeksa regularnosti imaju istu reprezentaciju u beskonačnosti. Ovi rezultati omogućavaju da kompletna struktura skupa q-pravilno promenljivih rešenja bude okarakterisana. *Rezultati Poglavlja 3.3 i 3.4 su originalni i publikovani u radu [65].*

Koristim priliku da izrazim iskrenu i veliku zahvalnost mentoru, dr Jeleni Manojlović, redovnom profesoru Prirodno-matematičkog fakulteta u Nišu, na nesebično pruženom znanju, idejama, savetima i strpljenju tokom zajedničkih istraživanja i rada na doktorskoj disertaciji. Zahvaljujem članovima komisije, dr Predragu Rajkoviću, redovnom profesoru Mašinskog fakulteta u Nišu i dr Miljani Jovanović, redovnom profesoru Prirodno-matematičkog fakulteta u Nišu na izdvojenom vremenu i sugestijama koje su doprinele kvalitetu ovog rada. Na kraju, od srca hvala najmilijima za bezuslovnu ljubav, podstrek, veru, snagu i razumevanje kada god je trebalo žrtvovati poneki zajednički trenutak.

Glava 1

Uvodni pojmovi

U ovoj Glavi biće navedeni neki od osnovnih pojmova i tvrđenja q-računa i teorije pravilno promenljivih funkcija. q-račun je specijalan slučaj računa vremenskih skala, koji objedinjuje neprekidni i diskretan slučaj. S tim u vezi, biće navedeni osnovni pojmovi računa vremenskih skala, kao i definicija pravilno promenljivih funkcija na vremenskoj skali. Osim toga, u poslednjem Poglavlju biće navedena neka od osnovnih svojstava q-diferencne jednačine tipa Emden-Fowler i polulinearne q-diferencne jednačine.

1.1 Osnove vremenskih skala

"Osnovni zadatak današnje matematike je da uskladi neprekidno i diskretno, da ih ujedini u jednu sveobuhvatnu matematičku celinu i da eliminiše nejasnoću iz oba."

Eric Temple Bell,
1883 – 1960, škotski matematičar i pisac

Za mnoge rezultate iz oblasti teorije diferencijalnih jednačina može se dokazati da će analogni rezultati važiti i za diferencne jednačine. Nasuprot tome, postoje rezultati koji se u potpunosti razlikuju kod diferencijalnih i diferencnih jednačina. Godine 1988. u svojoj doktorskoj disertaciji [44] Stephan Hilger je uspeo da ujedini diskretnu i neprekidnu analizu uvodeći pojam vremenske skale.

Vremenska skala je proizvoljan neprazan, zatvoren skup realnih brojeva. Tako su skupovi $\mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$ i $q^{\mathbb{N}_0} = \{q^n : n \in \mathbb{N}_0\}$, $q \in \mathbb{R}$ primeri vremenskih skala, dok $(0,1), \mathbb{Q}$ ili $\mathbb{C}$ to nisu. Dokazivanjem da određeni rezultat važi za dinamičku jednačinu gde je domen nepoznate funkcije proizvoljna vremenska skala, dokazano je da rezultat važi na skupu $\mathbb{R}$ (tj. za odgovarajuću diferencijalnu jednačinu), na skupu $\mathbb{Z}$ (tj. za odgovarajuću diferencnu jednačinu) ili na skupu $q^{\mathbb{N}_0}$ (tj. za odgovarajuću q-diferencnu jednačinu). Račun vremenskih skala ima primenu u bilo kojoj oblasti koja zahteva istovremeno modeliranje diskretnih i kontinuiranih podataka. U nastavku su navedeni neki od osnovnih pojmova pomenutog računa koji su u vezi sa diferencijalnim i integralnim računom. Navedene definicije, teoreme i njihovi dokazi mogu se naći u knjizi M. Bohnera i A. C. Petersona [12].

Za početak, interval na vremenskoj skali $\mathbb{T}$ se definiše na sledeći način

$$[a, b]_{\mathbb{T}} = \{t \in \mathbb{T} : a \leq t \leq b\}, \; a, b \in \mathbb{R}.$$

Slično, simbol $[a, \infty)_{\mathbb{T}}$ označava beskonačni interval u $\mathbb{T}$, tj.

$$[a, \infty)_{\mathbb{T}} = \{t \in \mathbb{T} : t \geq a\}, \; a \in \mathbb{R}.$$

Definicija 1.1.1. Neka je $\mathbb{T}$ vremenska skala. Za $t \in \mathbb{T}$ definiše se *operator pomeraja napred*

$$\sigma(t) = \inf\{s > t : s \in \mathbb{T}\} \in \mathbb{T}, \quad \inf \emptyset = \sup \mathbb{T}$$

i *operator pomeraja nazad*

$$\rho(t) = \sup\{s < t : s \in \mathbb{T}\} \in \mathbb{T}, \quad \sup \emptyset = \inf \mathbb{T}.$$

Tačka $t \in \mathbb{T}$ naziva se *desno-gusta* ukoliko je $\sigma(t) = t$ i $t < \sup \mathbb{T}$. Tačka $t \in \mathbb{T}$ naziva se *levo-gusta* ukoliko je $\rho(t) = t$ i $t > \inf \mathbb{T}$. Tačke koje su istovremeno desno-guste i levo-guste nazivaju se *gustim.* Ukoliko je $\sigma(t) > t$, tačka $t \in \mathbb{T}$ se naziva *desno-rasuta*, dok ukoliko je $\rho(t) < t$, tačka t se naziva *levo-rasuta.* Tačke koje su istovremeno desno-rasute i levo-rasute nazivaju se *izolovanim.* Definišimo skup $\mathbb{T}^k$, podskup vremenske skale $\mathbb{T}$. $\mathbb{T}^k = \mathbb{T} \setminus (\rho(\sup \mathbb{T}), \sup \mathbb{T}]$, ukoliko je $\sup \mathbb{T} < \infty$. U suprotnom, $\mathbb{T}^k = \mathbb{T}$.

Funkcija gustine vremenske skale $\mu : \mathbb{T} \to [0, \infty)$ definisana je sa $\mu(t) = \sigma(t) - t$. Funkcija gustine igra značajnu ulogu u analizi vremenske skale. U mnogim slučajevima je upravo ona uzrok razlika između diskretnog i neprekidnog slučaja. Funkcija gustine vremenske skale $\mathbb{R}$ je $\mu(t) \equiv 0$, vremenske skale $\mathbb{Z}$ je $\mu(t) \equiv 1$ i vremenske skale $q^{\mathbb{N}_0}$ je $\mu(t) = (q-1)t$, $t \in q^{\mathbb{N}_0}$.

Definicija 1.1.2. Neka je $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ funkcija i neka je $t \in \mathbb{T}^k$. *Delta-izvod (Hilger-izvod) funkcije f u tački t*, u oznaci $f^{\triangle}(t)$, je broj koji zadovoljava svojstvo da za svako dato $\varepsilon > 0$ postoji okolina U tačke t takva da

$$\left| f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\triangle}(t)(\sigma(t) - s) \right| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s| \text{ za svako } s \in U.$$

Za ovako definisan izvod funkcije f važiće da je

(i) $f^{\triangle} = f'$, u slučaju $\mathbb{T} = \mathbb{R}$;

(ii) $f^{\triangle} = \triangle f$, u slučaju $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, gde je $\triangle$ operator prednje razlike: $\triangle f(n) = f(n+1) - f(n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Definicija 1.1.3. Funkcija $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ je *regularna* funkcija ukoliko postoji (konačna) desna granična vrednost funkcije f u svim desno-gustim tačkama i postoji (konačna) leva granična vrednost funkcije f u svim levo-gustim tačkama.

Definicija 1.1.4. Funkcija $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ je *rd-neprekidna* funkcija, u oznaci $f \in C_{rd}(\mathbb{T})$, ukoliko je neprekidna u svim desno-gustim tačkama i u svim levo-gustim tačkama postoji leva konačna granična vrednost ove funkcije.

Teorema 1.1.1. [12, Teorema 1.70] *Neka je $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ regularna funkcija. Tada postoji funkcija F, čija je oblast diferenciranja D, takva da važi*

$$F^{\triangle}(t) = f(t),\ t \in D.$$

Definicija 1.1.5. Neka je $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ regularna funkcija. Svaka funkcija F koja zadovoljava uslove Teoreme 1.1.1 naziva se *pred-primitivna funkcija* funkcije f. *Neodređeni integral* funkcije f definisan je na sledeći način

$$\int f(t)\triangle t = F(t) + C,$$

gde je C proizvoljna konstanta. *Košijev integral* definisan je sa

$$\int_r^s f(t)\triangle t = F(s) - F(r),\ r, s \in \mathbb{T}.$$

Definicija 1.1.6. Funkcija F je *primitivna funkcija* regulisane funkcije f ako i samo ako važi

$$F^{\triangle}(t) = f(t),\ t \in \mathbb{T}^k.$$

Teorema 1.1.2. [12, Teorema 1.74] *Svaka rd-neprekidna funkcija f ima primitivnu funkciju. Specijalno, neka je $t_0 \in \mathbb{T}$, tada F definisana sa*

$$F(t) := \int_{t_0}^t f(\tau)\triangle\tau,\ t \in \mathbb{T}$$

je primitivna funkcija funkcije f.

Teorema 1.1.3. [12, Teorema 1.79] *Neka su $a, b \in \mathbb{T}$ i neka je f rd-neprekidna funkcija.*

(i) Ako je $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ tada je

$$\int_a^b f(t)\triangle t = \int_a^b f(t)dt,$$

gde je integral na desnoj strani jednakosti Rimanov integral.

(ii) Ako se $[a, b]$ sastoji samo od izolovanih tačaka, tada

$$\int_a^b f(t)\triangle t = \begin{cases} \sum_{t\in[a,b)} f(t)\mu(t), & \text{ako je } a < b; \\ 0, & \text{ako je } a = b; \\ -\sum_{t\in[a,b)} f(t)\mu(t), & \text{ako je } a > b. \end{cases}$$

(iii) Ako je $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, tada

$$\int_a^b f(t)\triangle t = \begin{cases} \sum_{t=a}^{b-1} f(t)\mu(t), & \text{ako je } a < b; \\ 0, & \text{ako je } a = b; \\ -\sum_{t=b}^{a-1} f(t)\mu(t), & \text{ako je } a > b. \end{cases}$$

Definicija 1.1.7. Neka je $a \in T$, $\sup \mathbb{T} = \infty$ i f rd-neprekidna funkcija. Tada je *nesvojstveni integral* funkcije f definisan na sledeći način

$$\int_a^\infty f(t)\triangle t = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(t)\triangle t.$$

1.2 Osnove q-računa

"Za onoga ko želi da istražuje, važno je da ne ograničava sebe na samo jedno poglavlje nauke, već da bude u kontaktu sa mnogim drugim."

Jacques Salomon Hadamard,
1865 - 1963, francuski matematičar

Proučavanje *kvantnog računa* iza sebe ima bogatu istoriju, staru već tri stotina godina, u čijem su kreiranju učestvovala neka od najznačajnijih matematičkih imena: Leonhard Euler (1707 - 1783, švajcarski matematičar i fizičar), Daniel Bernoulli (1700 - 1782, švajcarski lekar, matematičar i fizičar), Carl Jacobi (1804 - 1851, nemački matematičar), Srinivasa Ramanujan (1887 - 1920, indijski matematičar), Henri Poincaré (1854-1912, francuski matematičar i fizičar), Émile Picard (1856 - 1941, francuski matematičar) i mnogi drugi. Kvantni račun predstavlja most između matematike i fizike. Najveći broj naučnika koji danas primenjuje kvantni račun jesu fizičari.

Temelje *q-računa* postavlja Leonhard Euler u osamnaestom veku u svojoj knjizi *Introductio* [39]. Međutim, za intenzivni razvoj q-računa početkom dvadesetog veka zaslužan je Frank Hilton Jackson (1870 - 1960, engleski sveštenik i matematičar), koji je definisao q-izvod u [45] i određeni q-integral u [46] u formi u kojoj se danas koriste, koji se u njegovu čast nazivaju Jacksonov izvod i Jacksonov integral. Teorija q-računa je sistematično istraživana od tada. Razlog tome jeste činjenica da je q-analiza naišla na veliku primenu u raznim oblastima matematike, kao što su teorija brojeva, kombinatorika [7], ortogonalni polinomi, hiper-geometrijski redovi [37, 99], Bernoullijevi i Eulerovi polinomi [96], teorija operatora [8], ali i drugim oblastima, kao što su računarske nauke i kvantna fizika. O primeni q-računa u kvantnoj fizici i teoriji relativnosti pisao je Thomas Ernst [36, 37, 38]. U knjizi Predraga Rajkovića [99, Glava 10] pisano je o primeni q-računa u kvantnoj i statističkoj mehanici.

q-račun je potpolje opštijeg matematičkog polja, računa vremenskih skala, tek kasnije definisanog, o kojem je bilo reči u prethodnom poglavlju. Proučavajući q-račun, bavimo se određenom vremenskom skalom, nazvanom q-vremenska skala, definisanom na sledeći način:

$$q^{\mathbb{N}_0} = \{q^n : n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Knjiga Victor Kaca i Pokman Cheunga [52] pokriva mnoge osnovne aspekte q-računa, kao i knjiga srpskog matematičara Predraga Rajkovića [99]. U ovom poglavlju biće navedeni neki od osnovnih pojmova i definicija u q-računu, pre svega u q-diferencijalnom i q-integralnom računu.

Za početak, interval u q-računu se definiše na sledeći način

$$[a, b]_q = \left\{t \in q^{\mathbb{N}_0} : a \leq t \leq b\right\}, \; a, b \in \mathbb{R}.$$

Slično, simbol $[a, \infty)_q$ označava beskonačni interval u $q^{\mathbb{N}_0}$, tj.

$$[a, \infty)_q = \left\{t \in q^{\mathbb{N}_0} : t \geq a\right\}, \; a \in \mathbb{R}.$$

Pojam q-izvoda pominju još Euler [39] i Heinrich Eduard Heine (1821 - 1881, nemački matematičar) [43], ali pojam operatora diferenciranja u q-računu, kakav se danas koristi u literaturi, definisao je Jackson 1908. godine [45]. U nastavku je navedena pomenuta definicija, koja je specijalan slučaj delta-izvoda u slučaju q-vremenske skale, za $q \neq 1$.

Definicija 1.2.1. *q-izvod* funkcije $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, u oznaci $D_q f$, definisan je na sledeći način

$$D_q f(t) = \frac{f(qt) - f(t)}{(q-1)t}, \quad t \neq 0.$$

Postoji nekoliko pristupa definisanju q-izvoda u tački $t = 0$, ukoliko $0 \in X$. Prema jednom od njih

$$D_q f(0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(tq^{-n}) - f(0)}{tq^{-n}}, t \in X \setminus \{0\}, \quad |q| > 1$$

i

$$D_q f(0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(tq^{n}) - f(0)}{tq^{n}}, t \in X \setminus \{0\}, \quad 0 < |q| < 1$$

ukoliko data granična vrednost postoji i ne zavisi od t. Neretko je u literaturi q-izvod funkcije f u nuli definisan sa $f'(0)$ ukoliko je funkcija f diferencijabilna u nuli [64, 118].

Primetimo da je

$$\lim_{q\to 1} D_q f(t) = f'(t),$$

ukoliko je f diferencijabilna funkcija u tački t.

U literaturi se može naći i sledeća definicija *simetričnog q-izvoda*, definisanog u [16] za $|q| \neq 0, 1$:

$$\tilde{D}_q f(t) = \frac{f(qt) - f(q^{-1}t)}{(q - q^{-1})t}, \quad t \neq 0.$$

Neka su f i g proizvoljne realne funkcije i $a, b \in \mathbb{R}$. Naredne osobine q-operatora diferenciranja D_q, koji će biti korišćen u nastavku, jednostavno se dokazuju korišćenjem definicije:

(i) $D_q(af(t) + bq(t)) = aD_q f(t) + bD_q g(t)$, $a, b \in \mathbb{R}$;

(ii) $D_q(fg)(t) = f(qt)D_q g(t) + g(t)D_q f(t) = f(t)D_q g(t) + g(qt)D_q f(t)$;

(iii) $D_q\left(\dfrac{f}{g}\right)(t) = \dfrac{g(t)D_q f(t) - f(t)D_q g(t)}{g(t)g(qt)} = \dfrac{g(qt)D_q f(t) - f(qt)D_q g(t)}{g(t)g(qt)}$, $q(t) \cdot g(qt) \neq 0$;

(iv) Formula q-izvoda složene funkcije, u opštem slučaju, nije analogna formuli izvoda složene funkcije:

$$D_q(f(q(t))) = \frac{f(g(qt)) - f(g(t))}{(q-1)t} D_q g(t).$$

Primer 1.2.1. Odredimo q-izvod stepene funkcije $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{R}$. Prema definiciji,

$$D_q x^n = \frac{(qx)^n - x^n}{(q-1)x} = \frac{q^n - 1}{q-1} x^{n-1},\ x \neq 0, \tag{1.1}$$

dok u tački $x = 0$ vrednost q-izvoda će biti $f'(0) = 0$, te zaključujemo da formula (1.1) važi i za $x = 0$.

U nastavku, biće korišćena oznaka

$$[n]_q = \frac{q^n - 1}{q-1},\ n \in \mathbb{R}.$$

Broj $[n]_q$ naziva se q-*analogom* realnog broja n. Tada se (1.1) može zapisati u obliku

$$D_q f(x) = [n]_q x^{n-1},$$

te se može uvideti analogija u odnosu na izvod funkcije f. Primetimo da je

$$\lim_{q \to 1} [n]_q = n.$$

Carl Johannes Thomae (1840 - 1921), Heine-ov učenik, je 1869. godine u [122] definisao q-integral za $0 < q < 1$, na intervalu $(0, 1)$, na sledeći način:

Definicija 1.2.2. *Određeni q-integral* funkcije f je definisan sa

$$\int_0^1 f(t) d_q t = (1-q) \sum_{n=0}^{\infty} f(q^n) q^n,\ 0 < q < 1.$$

Nešto kasnije, 1910. godine Jackson je definisao q-integral [46] na konačnom i beskonačnom intervalu. Pomenute definicije su navedene u nastavku.

Definicija 1.2.3. Neka je $0 < a < b$. *Određeni q-integral* funkcije f je definisan na sledeći način

$$\int_0^b f(x) d_q x = (1-q) b \sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j b),\ 0 < |q| < 1$$

i

$$\int_a^b f(x) d_q x = \int_0^b f(x) d_q x - \int_0^a f(x) d_q x.$$

Na intervalu $(0, \infty)$, za $0 < |q| < 1$, q-integral je definisan na sledeći način

$$\int_0^{\infty} f(x) d_q x = (1-q) \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^j f(q^j),$$

a na $(-\infty, \infty)$ kao

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) d_q x = (1-q) \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^j (f(q^j) + f(-q^j)).$$

Naredna definicija q-integrala je posledica definicije integrala na vremenskoj skali, iskazana na q-vremenskoj skali (videti Teoremu 1.1.3 (*ii*)) i *ona će biti primenjivana u nastavku.*

Definicija 1.2.4. *Određeni q-integral* funkcije f definisan je na sledeći način

$$\int_a^b f(t)\, d_q t = \begin{cases} (q-1)\sum_{t\in[a,b)\cap q^{\mathbb{N}_0}} t f(t), & \text{if } a<b; \\ 0, & \text{if } a=b; \\ (1-q)\sum_{t\in[b,a)\cap q^{\mathbb{N}_0}} t f(t), & \text{if } a>b, \end{cases}$$

za $q>1$. *Neodređeni q-integral* definiše se na sledeći način

$$\int_a^\infty f(t)\, d_q t = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(t)\, d_q t.$$

Primetimo da je

$$\lim_{q\to 1+}\int_a^b f(t)\, d_q t = \int_a^b f(t)\, dt.$$

ukoliko je funkcija f neprekidna na $[a,b]$.

Naredne oznake za skupove funkcija sa određenim osobinama primenjivaće se u nastavku

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{t_0} &= \{\delta : [t_0,\infty)_q \to \mathbb{R} : (q-1)\delta(t)t+1 \neq 0,\ t\geq t_0\}; \\ \mathcal{R}_{t_0}^+ &= \{\delta : [t_0,\infty)_q \to \mathbb{R} : (q-1)\delta(t)t+1 > 0,\ t\geq t_0\}, \end{aligned}$$

za neko $t_0\in\mathbb{R}$.

U knjizi Bohnera i Petersona [11] definisana je generalizovana q-eksponencijalna funkcija kao jedinstveno rešenje početnog problema

$$D_q y = \delta(t) y,\ \ y(t_0)=1,\ t_0\in q^{\mathbb{N}_0},\ q>1 \tag{1.2}$$

gde je $\delta\in\mathcal{R}_1$. Za dalji rad u okviru teorije q-pravilno promenljivih funkcija biće pogodnije koristiti narednu ekvivalentnu definiciju:

Definicija 1.2.5. Neka je $\delta\in\mathcal{R}_1$.*Generalizovana q-eksponencijalna funkcija* definisana je na sledeći način

$$e_\delta(t,s) = \begin{cases} \prod_{u\in[s,t)_q}((q-1)u\delta(u)+1), & s<t; \\ 1, & s=t; \\ \left(\prod_{u\in[t,s)_q}((q-1)u\delta(u)+1)\right)^{-1}, & s>t, \end{cases}$$

gde su $s,t\in q^{\mathbb{N}_0}$, $q>1$.

Ovako definisana generalizovana q-eksponencijalna funkcija ima sledeća svojstva:

(*i*) Funkcija $e_\delta(\cdot,t_0)$ je rešenje početnog problema (1.2).

(*ii*) Za $\delta\in\mathcal{R}_1^+$ važi $e_\delta(t,s)>0$ za svako $s,t\in q^{\mathbb{N}_0}$.

(*iii*) Ako je $\delta\in\mathcal{R}_1$ tada je $e_\delta(t,\tau)\cdot e_\delta(\tau,s)=e_\delta(t,s)$, za svako $s,t,\tau\in q^{\mathbb{N}_0}$.

(*iv*) Ako su $\delta,\gamma\in\mathcal{R}_1$ tada je $e_\delta(t,s)\cdot e_\gamma(t,s)=e_{\delta+\gamma+t(q-1)\delta\gamma}(t,s)$, za svako $s,t\in q^{\mathbb{N}_0}$.

U nastavku je navedeno Lopitalovo pravilo na q-vremenskoj skali koje je posledica Lopitalovog pravila na vremenskoj skali.

Lema 1.2.1. [12, Teorema 1.119] *Ako je f eventualno pozitivna, strogo rastuća funkcija, takva da $\lim_{t\to\infty} f(t) = \infty$, tada za svaku realnu funkciju g važe sledeće nejednakosti:*

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{D_q f(t)}{D_q g(t)} \leq \liminf_{t\to\infty} \frac{f(t)}{g(t)} \leq \limsup_{t\to\infty} \frac{f(t)}{g(t)} \leq \limsup_{t\to\infty} \frac{D_q f(t)}{D_q g(t)}.$$

Specijalno, ukoliko funkcija $D_q f / D_q g$ ima graničnu vrednost, tada

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{D_q f(t)}{D_q g(t)}. \tag{1.3}$$

Lema 1.2.2. [12, Teorema 1.119] *Ako je f eventualno pozitivna, strogo opadajuća funkcija, tada za svaku realnu funkciju g takvu da $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty} g(t) = 0$, važe sledeće nejednakosti:*

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{D_q f(t)}{D_q g(t)} \leq \liminf_{t\to\infty} \frac{f(t)}{g(t)} \leq \limsup_{t\to\infty} \frac{f(t)}{g(t)} \leq \limsup_{t\to\infty} \frac{D_q f(t)}{D_q g(t)}.$$

Specijalno, ukoliko funkcija $D_q f / D_q g$ ima graničnu vrednost, tada

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{D_q f(t)}{D_q g(t)}. \tag{1.4}$$

1.3 Teorija pravilno promenljivih funkcija

> *"Dobio sam pismo jednog mladića iz Beograda koji tvrdi da je dokazao Hardy-Littlewood teoremu na samo dve stranice. To je prosto nemoguće!"*
>
> *Godfrey Harold Hardy (1877 - 1947, britanski matematičar)*
> *o Jovanu Karamati (1903 - 1967, srpski matematičar)*

Jedno od značajnih dela za istoriju matematike i teoriju pravilno promenljivih funkcija jeste "Orders of Infinity" [42], engleskog matematičara G. H. Hardy-ja poznatog po svojim dostignućima u teoriji brojeva i matematičkoj analizi. U ovom delu se prvi put javlja pojam *pravilnog rasta*, koji je upotrebio Borel, ali ne u Karamatinom smislu u kojem se danas koristi. Naglasak je na funkcijama "logaritamsko-eksponencijalnog" tipa, tj. funkcijama koje se mogu predstaviti kao proizvod logaritamske funkcije, njenih stepena i njenih iteracija i proizvod eksponencijalne funkcije, njenih stepena i njenih iteracija.

Rezultati u onome što je kasnije definisano kao *teorija pravilno promenljivih funkcija* sežu još od Edmund Landau-a (1877–1938, nemački matematičar) [80]. Motivisan analitičkom teorijom brojeva, Landau je radio sa monotonim funkcijama i dokazao da za pozitivnu monotonu funkciju ℓ važi da ukoliko je

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ell(\lambda t)}{\ell(t)} = 1, \tag{1.5}$$

za neko $\lambda = 1$, tada će (1.5) važiti za svako $\lambda > 0$, tj. prema modernim terminima - funkcija ℓ ce biti sporo promenljiva funkcija. Osim toga, George Pólia (1887 -

1985, mađarski matematičar), takođe motivisan analitičkom teorijom brojeva, u svojim tvrđenjima pretpostavljao je da pozitivna funkcija ℓ zadovoljava uslov (1.5) za $\lambda = 2$, govoreći o *sporo rastućim* i *sporo opadajućim* funkcijama.

Pojam pravilno promenljive funkcije definisao je 1930. godine u [59] jedan od najvećih srpskih matematičara, Jovan Karamata. Ova teorija, koja se drugačije naziva i Karamatina teorija, igra veliku ulogu u mnogim oblastima matematike kao što su teorija brojeva, kompleksna analiza, teorija verovatnoće, teorija igara i teorija diferencijalnih jednačina.

Dalji razvoj teorije pravilno promenljivih funkcija nastavili su pripadnici Karamatine škole: Vojislav Avakumović (1910 - 1990), Miodrag Tomić (1912 - 2001), Borivoje Rašajski (1917 - 1995), Slobodan Aljančić (1922 - 1993), Ranko Bojanić (1925 - 2017), Dušan Adamović (1928 - 2008), Vojislav Marić (1930 - 2021), Dragoljub Aranđelović (1942 - 2010), ali i britanski matematičari Nicholas Bingham, Charles Goldie, J.L. Teugels, Eugene Seneta, holandski matematičari J.L. Geluk, Laurens de Haan i mnogi drugi. Čak i danas, Karamata je jedan od najcitiranijih srpskih matematičara.

Definicija 1.3.1. Neka je pozitivna merljiva funkcija f definisana na skupu $[a, \infty)$. Funkcija f je *pravilno promenljiva funkcija indeksa regularnosti* ρ (u Karamatinom smislu) ako za svako $\lambda > 0$ zadovoljava uslov

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(\lambda t)}{f(t)} = \lambda^\rho. \tag{1.6}$$

Ukoliko je $\rho = 0$, f se naziva *sporo promenljiva funkcija*. Skup svih sporo promenljivih i pravilno promenljivih funkcija indeksa ρ označen je sa SV i RV(ρ), redom.

U originalnoj definiciji sporo promenljivih funkcija se umesto uslova merljivosti zahtevao uslov neprekidnosti date funkcije. Klasa pravilno promenljivih funkcija može se posmatrati kao proširenje klase funkcija asimptotski ekvivalentnih stepenoj funkciji do klase funkcija koje su asimptotski ekvivalentne proizvodu stepene funkcije i funkcije koja sporije raste (opada) od ma koje stepene funkcije pozitivnog (negativnog) stepena. Asimptotska ekvivalencija dveju pozitivnih funkcija f i g, u oznaci $f \sim g$, definisana je na sledeći način

$$f(t) \sim g(t),\ t \to \infty \iff \lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 1.$$

Široka primena klase pravilno promenljivih funkcija u raznim oblastima matematike rezultirala je njenim stalnim razvitkom. Primena teorije pravilno promenljivih funkcija u oblasti verovatnoće dovodi do problema sledećeg tipa: kada se niz pozitivnih brojeva $\{\theta(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ može dodefinisati do pravilno promenljive funkcije R takve da je $\theta(n) = R(n)$ za sve prirodne brojeve n? Ovaj problem je 1970tih godina motivisao matematičare L. de Haan [41], R. Bojanić i E. Seneta [14, 15], Galambos [40], da nastave dalji razvoj teorije pravilno promenljivih nizova, čije temelje je takođe postavio Karamata [60, 61]. Karamatina definicija pravilno promenljivih nizova je diskretan pandan definicije pravilno promenljivih funkcija.

Definicija 1.3.2. Niz pozitivnih brojeva $\{\theta(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ je *pravilno promenljivi niz indeksa regularnosti* ρ, $\rho \in \mathbb{R}$ ako i samo ako za svako $\lambda > 0$ zadovoljava uslov

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\theta([\lambda n])}{\theta(n)} = \lambda^{\rho},$$

gde $[u]$ označava ceo deo realnog broja u.

Galambos i Seneta su imali drugačiji pristup pri definisanju pravilno promenljivih nizova.

Definicija 1.3.3. Niz pozitivnih brojeva $\{\theta(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ je *pravilno promenljivi niz indeksa regularnosti* ρ, $\rho \in \mathbb{R}$, ukoliko postoji niz pozitivnih brojeva $\{\alpha(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ takav da je

$$\theta(n) \sim c\alpha(n),\ n \to \infty \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n\triangle\alpha(n)}{\alpha(n)} = \rho,$$

gde je c pozitivna konstanta.

Rehak 2008. godine u radu [110] započinje razvoj teorije pravilno promenljivih funkcija na vremenskoj skali. Uvođenjem pojma pravilne promenljivosti na vremenskoj skali objedinjuje se i proširuje teorija pravilno promenljivih funkcija u neprekidnom i diskretnom slučaju. U nastavku, biće navedena definicija pravilno promenljivih funkcija na proizvoljnoj vremenskoj skali $\mathbb{T}$ čija gustina zadovoljava uslov

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mu(t)}{t} = 0 \tag{1.7}$$

i za koju je pretpostavljeno da nije ograničena odozgo.

Definicija 1.3.4. Pozitivna funkcija $f \in C_{rd}([a,\infty)_{\mathbb{T}})$ je *pravilno promenljiva indeksa regularnosti* ρ, $\rho \in \mathbb{R}$, ukoliko postoji pozitivna delta-diferencijabilna funkcija $\omega \in C_{rd}([a,\infty)_{\mathbb{T}})$ koja zadovoljava

$$f(t) \sim cw(t),\ t \to \infty \quad \text{i} \quad \lim_{t\to\infty} \frac{t\omega^{\triangle}(t)}{w(t)} = \rho,$$

gde je c pozitivna konstanta. Skup svih pravilno promenljivih funkcija indeksa regularnosti ρ biće označen sa $\mathcal{RV}_{\mathbb{T}}(\rho)$. Ukoliko je $\rho = 0$, f se naziva *sporo promenljiva funkcija*. Skup svih sporo promenljivih funkcija biće označen sa $\mathcal{SV}_{\mathbb{T}}$.

Kako je $\mu(t) \equiv 0$ u slučaju $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ i $\mu(t) \equiv 1$ u slučaju $\mathbb{T} = \mathbb{N}$, navedenom definicijom obuhvaćene su definicije pravilno promenljivih funkcija i pravilno promenljivih nizova.

Međutim, gustina q-vremenske skale ne zadovoljava uslov (1.7), te navedenom definicijom nije obuhvaćena definicija q-pravilno promenljivih funkcija. Stoga, Karamatine q-pravilno promenljive funkcije, na q-vremenskoj skali, *gde je* $q > 1$, definisali su P. Řehák i J. Vítovec [115] na sledeći način:

Definicija 1.3.5. Funkcija $f : q^{\mathbb{N}_0} \to (0, \infty)$ je *q-pravilno promenljiva funkcija indeksa regularnosti* ρ, $\rho \in \mathbb{R}$, ukoliko postoji funkcija $\alpha : q^{\mathbb{N}_0} \to (0, \infty)$ takva da

$$f(t) \sim \alpha(t),\ t \to \infty \quad \text{i} \quad \lim_{t\to\infty} \frac{tD_q\alpha(t)}{\alpha(t)} = [\rho]_q, \tag{1.8}$$

gde je c pozitivna konstanta. q-pravilno promenljiva funkcija indeksa regularnosti $\rho = 0$, naziva se *q-sporo promenljiva funkcija.* Skup q-pravilno promenljviih funkcija indeksa regularnosti ρ označen je sa $\mathcal{RV}_q(\rho)$. Skup q-sporo promenljivih funkcija označen je sa $\mathcal{SV}_q$.

Definisane na ovaj način, q-pravilno promenljive funkcije zadržale su većinu osobina pravilno promenljivih funkcija u neprekidnom i diskretnom slučaju. Struktura q-vremenske skale se ispostavlja kao pogodna za razvoj teorije pravilno promenljivih funkcija, jer dovodi do zanimljivih zapažanja i pojednostavljenja u odnosu na Karamatinu teoriju u neprekidnom i diskretnom slučaju.

Navedimo nekoliko primera sporo promenljivih funkcija za $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ ili $\mathbb{T} = q^{\mathbb{N}_0}$.

Primer 1.3.1. Funkcija $f : \mathbb{T} \to (0, \infty)$ sa pozitivnom graničnom vrednošću u beskonačnosti je sporo promenljiva funkcija. Takva funkcija naziva se *trivijalna sporo promenljiva funkcija.*

Primer 1.3.2. Najjednostavniji primer netrivijalne sporo promenljive funkcije je $\ell : \mathbb{T} \to [0, \infty)$, $\ell(t) = \ln t$, što se jednostavno proverava korišćenjem definicije. Funkcija $f : \mathbb{T} \to [0, \infty)$, $f(t) = t^\rho \ell(t)$ je pravilno promenljiva funkcija indeksa regularnosti ρ.

Primer 1.3.3. Primeri nelogaritamskih sporo promenljivih funkcija su $\ell : \mathbb{T} \to (0, \infty)$:

$$\ell(t) = \exp\left\{(\ln t)^{\alpha_1}(\ln_2 t)^{\alpha_2} \cdots (\ln_k t)^{\alpha_k}\right\} \quad 0 < \alpha_i < 1, k \in \mathbb{N};$$

$$\ell(t) = \exp\left\{\ln t / \ln_2 t\right\},$$

gde je $\ln_k = \underbrace{\ln \circ \ln \circ \ldots \circ \ln}_{k\,\text{puta}}, \quad k \in \mathbb{N}$.

Primer 1.3.4. Prethodni primeri nas navode na zaključak da je sporo promenljiva funkcija strogo monotona za velike vrednosti x, ali to u opštem slučaju nije tačno. Primer takve funkcije je $\ell : \mathbb{T} \to (0, \infty)$

$$\ell(t) = \exp\left\{(\ln(1+t))^{\frac{1}{2}} \cos((\ln(1+t))^{\frac{1}{2}})\right\},$$

za koju važi

$$\liminf_{t\to\infty} \ell(t) = 0, \qquad \limsup_{t\to\infty} \ell(t) = +\infty.$$

P. Řehák u [109] uvodi pojam generalizovanih pravilno promenljivih nizova u odnosu na funkciju τ, $\tau : \mathbb{Z}_m \to \mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_m = \{m, m+1, m+2, \ldots\}$, gde je τ strogo rastuća funkcija takva da je $\lim_{k\to\infty} \tau(k) = \infty$ i $\tau(k+1) \sim \tau(k)$, $k \to \infty$.

Definicija 1.3.6. Neka je $y = \{y(n)\}_{n\in\mathbb{Z}_m}$ pozitivan niz. Niz y je *pravilno promenljiv niz indeksa regularnosti ρ u odnosu na τ*, u oznaci $y \in \mathcal{RV}_{\mathbb{Z}}^{\tau}(\rho)$, ukoliko postoji pozitivan niz $x = \{x(n)\}_{n\in\mathbb{Z}_m}$ takav da je

$$y(n) \sim x(n),\ n \to \infty \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{x(n+1)/x(n) - 1}{\tau(n+1)/\tau(n) - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\tau(n)}{\triangle\tau(n)} \frac{\triangle x(n)}{x(n)} = \rho.$$

Pojam pravilno promenljivih nizova u odnosu na τ u uskoj je vezi sa pojmom pravilno promenljivih funkcija na vremenskoj skali $\mathbb{T}$ koja zadovoljava uslov (1.7).

Teorema 1.3.1. [109, Propozicija 1] *Neka je $\tau : \mathbb{Z}_m \to \mathbb{R}$ strogo rastuća funkcija takva da je $\lim_{k\to\infty} \tau(k) = \infty$ i $\tau(k+1) \sim \tau(k)$, $k \to \infty$. Neka je $\mathbb{T} = \tau(\mathbb{Z}_m)$. Tada, $y \in \mathcal{RV}_{\mathbb{Z}}^{\tau}(\rho)$ ako i samo ako je $y \circ \tau^{-1} \in \mathcal{RV}_{\tau(\mathbb{Z})}(\rho)$.*

Prema tome, pojam generalizovanih pravilno promenljivih nizova u odnosu na τ može se shvatiti kao diskretan analog pojma generalizovanih pravilno promenljivih funkcija koje su Jaroslav Jaroš i Takaŝi Kusano definisali u [48]. Naime, neka je funkcija θ takva da zadovoljava sledeće uslove: $\theta(t) > 0$, $\theta'(t) > 0$ za dovoljno veliko t i $\lim_{t\to\infty} \theta(t) = \infty$. Generalizovane pravilno promenljive funkcije u odnosu na funkciju θ su definisane na sledeći način.

Definicija 1.3.7. Merljiva funkcija $f : [a, \infty) \to (0, \infty)$, $a > 0$ je *generalizovana pravilno promenljiva funkcija indeksa ρ u odnosu na θ* ako i samo ako je $f \circ \theta^{-1}$, definisana za dovoljno veliko t, pravilno promenljiva funkcija indeksa regularnosti ρ u Karamatinom smislu. Generalizovana pravilno promenljiva funkcija indeksa 0 u odnosu na θ naziva se *generalizovana sporo promenljiva u odnosu na θ*. Skup svih sporo promenljivih i pravilno promenljivih funkcija indeksa ρ u odnosu na θ označen je sa SV_{θ} i $\mathrm{RV}_{\theta}(\rho)$, redom.

Važno je napomenuti da za razliku od funkcija definisanih na $\mathbb{R}$, u radu sa nizovima nailazi se na probleme sa inverznom funkcijom, izvodom složene funkcije ili smenom promenljivih pri integraciji, što su jedni od osnovnih alata u radu sa generalizovanim pravilno promenljivim funkcijama. Koristeći Teoremu 1.3.1, rezultati na vremenskoj skali pomažu da se prevaziđu ove prepreke i doprinose primeni teorije diskretne pravilne promenljivosti u odnosu na τ u kvalitativnoj analizi diferencnih jednačina.

Primetimo da uslovi koje funkcija τ u Teoremi 1.3.1 zadovoljava impliciraju da gustina vremenske skale $\mathbb{T} = \tau(\mathbb{Z}_m)$ zadovoljava uslov (1.7). Kako gustina q-vremenske skale ne zadovoljava pomenuti uslov, ovaj slučaj je izolovano posmatran.

Definicija 1.3.8. Neka je $y = \{y(n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ pozitivan niz. Niz y je *pravilno promenljiv niz indeksa regularnosti ρ u odnosu na τ*, gde je $\tau : \mathbb{N}_0 \to q^{\mathbb{N}_0}$, $\tau(k) = q^k$, u oznaci $y \in \mathcal{RV}_{\mathbb{Z}}^{\tau}(\rho)$ ako i samo ako je $y \circ \tau^{-1} \in \mathcal{RV}_q(\rho)$.

U radu [109] dokazano je da su sledeća tvrđenja ekvivalentna:

(*i*) $x \in \mathcal{RV}_{\mathbb{Z}}^{\tau}(\rho)$;

(*ii*) $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{\triangle x(k)}{x(k)(q-1)} = [\rho]_q$;

(iii) $\lim_{k\to\infty} \frac{x(k+1)}{x(k)} = q^{\rho}$;

(iv) $x(k) = cq^{k\rho} \exp\left\{\sum_{j=1}^{k-1} \Psi(j)\right\}$, $\Psi(j) \to 0$, $j \to \infty$ i $c \in (0, +\infty)$.

1.4 Teorija q-pravilno promenljivih funkcija

"Matematika upoređuje najrazličitije pojave i otkriva tajne analogije koje ih ujedinjuju."

Jean Baptiste Joseph Fourier
1768 - 1830, francuski matematičar

Řehák i Vítovec su u radu [115] dokazali nekoliko bitnih karakteristika q-pravilno promenljivih funkcija, koje su navedene u nastavku.

Teorema 1.4.1. [115, Teorema 1]

(i) *Za pozitivnu funkciju f, $f \in \mathcal{RV}_q(\rho)$ ako i samo ako f zadovoljava*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(qt)}{f(t)} = q^{\rho}. \tag{1.9}$$

Štaviše, $f \in \mathcal{RV}_q(\rho)$ ako i samo ako f zadovoljava drugi uslov u (1.8).

(ii) *(Zygmund-karakterizacija) Za pozitivnu funkciju f, $f \in \mathcal{RV}_q(\rho)$ ako i samo ako je $f(t)/t^{\gamma}$ eventualno rastuća funkcija za svako $\gamma < \rho$ i eventualno opadajuća funkcija za svako $\gamma > \rho$.*

(iii) *(Reprezentacija I) $f \in \mathcal{RV}_q(\rho)$ ako i samo ako se f može predstaviti na sledeći način*

$$f(t) = \varphi(t)e_{\delta}(t, 1),$$

gde $\varphi : q^{\mathbb{N}_0} \to (0, \infty)$ zadovoljava uslov $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = c \in (0, \infty)$ i $\delta : q^{\mathbb{N}_0} \to \mathbb{R}$ zadovoljava uslove $\lim_{t\to\infty} t\delta(t) = [\rho]_q$ i $\delta \in \mathcal{R}_1^+$.

(iv) *(Reprezentacija II) $f \in \mathcal{RV}_q(\rho)$ ako i samo ako se f može predstaviti u obliku*

$$f(t) = t^{\rho}\hat{\varphi}(t)e_{\psi}(t, 1),$$

gde $\hat{\varphi} : q^{\mathbb{N}_0} \to (0, \infty)$ zadovoljava uslov $\lim_{t\to\infty} \hat{\varphi}(t) = c \in (0, \infty)$ i $\psi : q^{\mathbb{N}_0} \to \mathbb{R}$ zadovoljava uslove $\lim_{t\to\infty} t\psi(t) = 0$ i $\psi \in \mathcal{R}_1^+$.

(iii) *(Karamatina karakterizacija) Za pozitivnu funkciju f, $f \in \mathcal{RV}_q(\rho)$ ako i samo ako f zadovoljava uslov*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(\tau(\lambda t))}{f(t)} = (\tau(\lambda t))^{\rho}, \quad \lambda \geq 1,$$

gde je $\tau : [1, \infty) \to q^{\mathbb{N}_0}$ definisana kao $\tau(x) = max\{s \in q^{\mathbb{N}_0} : s \leq x\}$.

(iv) (Osobina produživosti) Ako $f \in \mathcal{RV}_q(\rho)$ *tada* $F \in \mathcal{RV}(\rho)$, *gde*

$$F(x) = f(\tau(x)) \left(\frac{x}{\tau(x)} \right)^{\rho}, \quad x \in [1, \infty)$$

i τ *je definisana u delu (iii). Obrnuto, ako* $F \in \mathcal{RV}(\rho)$, *tada* $f \in \mathcal{RV}_q(\rho)$, *gde* $f(t) = F(t)$, *za* $t \in q^{\mathbb{N}_0}$.

Naredna teorema prikazuje neka od osnovnih svojstava q-pravilno promenljivih funkcija koja će biti primenjivana u nastavku. Dokazi tvrđenja $(i) - (iv)$ nalaze se u [115, Propozicija 1], dok se dokazi tvrđenja $(v) - (viii)$ nalaze u [100, Propozicija A.1].

Teorema 1.4.2. [115, Propozicija 1],[100, Propozicija A.1]

(i) $f \in \mathcal{RV}_q(\rho)$ *ako i samo ako* $f(t) = t^{\rho}\ell(t)$, *gde* $\ell \in \mathcal{SV}_q$.

(ii) Neka je $f \in \mathcal{RV}_q(\rho)$. *Tada,* $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$ *ukoliko je* $\rho < 0$ *i* $\lim_{t\to\infty} f(t) = \infty$ *ukoliko je* $\rho > 0$.

(iii) Neka je $f \in \mathcal{RV}_q(\rho)$, $\rho \in \mathbb{R}$. *Tada,* $f^{\gamma} \in \mathcal{RV}_q(\gamma\rho)$, $\gamma \in \mathbb{R}$.

(iv) Neka je $f \in \mathcal{RV}_q(\rho_1)$ *i* $g \in \mathcal{RV}_q(\rho_2)$, $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}$. *Tada,* $fg \in \mathcal{RV}_q(\rho_1 + \rho_2)$ *i* $1/f \in \mathcal{RV}_q(-\rho_1)$.

(v) Neka je $|D_q f| \in \mathcal{RV}_q(\rho)$, $\rho \in \mathbb{R}$, *gde je* f *eventualno pozitivna i monotona. Tada,* $f \in \mathcal{RV}_q(\rho + 1)$.

(vi) Ako $f \in \mathcal{RV}_q(\rho)$ *i* $\rho \neq 0$, *tada* $|D_q f| \in \mathcal{RV}_q(\rho - 1)$. *Za* $\rho = 0$ *tvrđenje ne mora da važi, čak ni za monotonu funkciju* f.

(vii) Ako $f \in \mathcal{RV}_q(\rho)$ *i* $f \sim g$, $t \to \infty$, *tada* $g \in \mathcal{RV}_q(\rho)$.

(viii) Ako je $f \in \mathcal{SV}_q$, *tada je* $D_q \ln f(t) \sim \dfrac{D_q f(t)}{f(t)}$, $t \to \infty$.

Uzimajući u obzir tvrđenje Teoreme 1.4.1 (i), ukoliko $f \in \mathcal{RV}_q(\rho)$ zadovoljava

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t^{\rho}} = \lim_{t\to\infty} \ell(t) = const > 0,$$

f se naziva *trivijalna q-pravilno promenljiva funkcija* indeksa regularnosti ρ, u oznaci $f \in tr - \mathcal{RV}_q(\rho)$. U suprotnom, f se naziva *netrivijalna q-pravilno promenljiva funkcija* indeksa ρ, u oznaci $f \in ntr - \mathcal{RV}_q(\rho)$.

U nastavku će biti dokazano svojstvo q-pravilno promenljivih funkcija, koje je od fundamentalnog značaja pri određivanju asimptotske formule pozitivnih q-pravilno promenljivih rešenja nelinearne q-diferencne jednačine drugog reda.

Teorema 1.4.3. [65, Teorema 2.2] *Neka je* $\ell \in \mathcal{SV}_q$.

(i) Ako je ℓ *strogo opadajuća funkcija, takva da* $\lim_{t\to\infty} \ell(t) = 0$, *tada za svako* $\gamma > 0$ *važi*

$$\int_x^\infty \ell(qt)^{\gamma-1} D_q\ell(t)\, d_qt \sim -\frac{\ell(x)^\gamma}{\gamma}, \quad x \to \infty. \tag{1.10}$$

(ii) Ako je ℓ *strogo rastuća funkcija, takva da* $\lim_{t\to\infty} \ell(t) = \infty$, *tada za svako* $\gamma > 0$ *važi*

$$\int_a^x \ell(qt)^{\gamma-1} D_q\ell(t)\, d_qt \sim \frac{\ell(x)^\gamma}{\gamma}, \quad x \to \infty, \tag{1.11}$$

gde je $a \in q^{\mathbb{N}_0}$.

Dokaz: Tvrđenja *(i)* i *(ii)* dokazuju se analogno, te se u nastavku navodi dokaz samo prvog tvrđenja. Primećuje se da za $\gamma = 1$ tvrđenje (i) trivijalno važi. Stoga, neka je $\gamma \neq 1$. Kako bi se dokazalo da pod datim pretpostavkama važi (1.10), potrebno je i dovoljno dokazati sledeće

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\int_x^\infty \ell(qt)^{\gamma-1} D_q\ell(t)\, d_qt}{\ell(x)^\gamma} = -\frac{1}{\gamma}. \tag{1.12}$$

Primetimo da za strogo rastuću funkciju ℓ važi

$$\gamma\ell(qx)^{\gamma-1}(\ell(x) - \ell(qx)) \leq \ell(x)^\gamma - \ell(qx)^\gamma \leq \gamma\ell(x)^{\gamma-1}(\ell(x) - \ell(qx)), \quad \gamma > 1; \tag{1.13}$$

$$\gamma\ell(x)^{\gamma-1}(\ell(x) - \ell(qx)) \leq \ell(x)^\gamma - \ell(qx)^\gamma \leq \gamma\ell(qx)^{\gamma-1}(\ell(x) - \ell(qx)), \quad \gamma < 1. \tag{1.14}$$

Korišćenjem Lopitalovog pravila dokazaćemo (1.12). Funkcija ℓ^γ je strogo monotona i konvergira nuli kada $t \to \infty$. Korišćenjem definicije nesvojstvenog q-integrala i prve nejednakosti iz (1.13), u slučaju $\gamma > 1$ biće dokazano da funkcija u brojiocu razlomka iz (1.12) takođe konvergira nuli

$$\begin{aligned} 0 &\leq -\int_x^\infty \ell(qt)^{\gamma-1} D_q\ell(t)\, d_qt = \sum_{t\in[x,\infty)_q} \ell(qt)^{\gamma-1}(\ell(t) - \ell(qt)) \\ &\leq \frac{1}{\gamma} \sum_{t\in[x,\infty)_q} (\ell(t)^\gamma - \ell(qt)^\gamma) = \frac{\ell(x)^\gamma}{\gamma} \to 0, \quad x \to \infty. \end{aligned}$$

Slično će važiti i u slučaju $\gamma < 1$. Naime, primenjujući Teoremu 1.4.1 (i), za t dovoljno veliko važi $\ell(qt) \geq \ell(t)/2$. Korišćenjem ove činjenice i druge nejednakosti iz (1.14), dobija se

$$\begin{aligned} 0 &\leq -\int_x^\infty \ell(qt)^{\gamma-1} D_q\ell(t)\, d_qt = \sum_{t\in[x,\infty)_q} \ell(qt)^{\gamma-1}(\ell(t) - \ell(qt)) \\ &\leq \sum_{t\in[x,\infty)_q} \left(\frac{\ell(t)}{2}\right)^{\gamma-1} (\ell(t) - \ell(qt)) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\gamma-1} \frac{1}{\gamma} \sum_{t\in[x,\infty)_q} (\ell(t)^\gamma - \ell(qt)^\gamma) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\gamma-1} \frac{\ell(x)^\gamma}{\gamma} \to 0, \quad x \to \infty. \end{aligned}$$

Dakle, svi uslovi za primenu Lopitalovog pravila su ispunjeni, te nakon primene dobija se

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\int_x^\infty \ell(qt)^{\gamma-1} D_q\ell(t)\, d_qt}{\ell(x)^\gamma} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ell(qx)^{\gamma-1}(\ell(qx)-\ell(x))}{\ell(x)^\gamma - \ell(qx)^\gamma}. \tag{1.15}$$

Konačno, primenom nejednakosti (1.13) i (1.14) dobijamo da u slučaju $\gamma > 1$ važi:

$$\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{\ell(qx)^{\gamma-1}(\ell(qx)-\ell(x))}{\ell(x)^{\gamma-1}(\ell(x)-\ell(qx))} \le \frac{\ell(qx)^{\gamma-1}(\ell(qx)-\ell(x))}{\ell(x)^\gamma - \ell(qx)^\gamma} \le \frac{1}{\gamma}\cdot\frac{\ell(qx)^{\gamma-1}(\ell(qx)-\ell(x))}{\ell(qx)^{\gamma-1}(\ell(x)-\ell(qx))},$$

dok u slučaju $\gamma < 1$ važi:

$$\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{\ell(qx)^{\gamma-1}(\ell(qx)-\ell(x))}{\ell(qx)^{\gamma-1}(\ell(x)-\ell(qx))} \le \frac{\ell(qx)^{\gamma-1}(\ell(qx)-\ell(x))}{\ell(x)^\gamma - \ell(qx)^\gamma} \le \frac{1}{\gamma}\cdot\frac{\ell(qx)^{\gamma-1}(\ell(qx)-\ell(x))}{\ell(x)^{\gamma-1}(\ell(x)-\ell(qx))}.$$

Dobijene nejednakosti dalje impliciraju

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ell(qx)^{\gamma-1}(\ell(qx)-\ell(x))}{\ell(x)^\gamma - \ell(qx)^\gamma} = -\frac{1}{\gamma},$$

te uzimajući u obzir (1.15), dokazali smo (1.10). □

Karamatina integraciona teorema je jedan od glavnih alata pri određivanju asimptotskih formula pravilno promenljivih rešenja. U radu [112] dokazana je Karamatina integraciona teorema na proizvoljnoj vremenskoj skali čija gustina zadovoljava uslov $\mu(t) = o(t)$, $t \to \infty$, što nije slučaj sa q-vremenskom skalom. Karamatina integraciona teorema u q-računu dokazana je u radu [100] i navedena u nastavku.

Teorema 1.4.4 (Karamatina q-integraciona teorema)**.** [100, Teorema A.1] *Neka je* $\ell \in \mathcal{SV}_q$ *i* $a \in q^{\mathbb{N}_0}$.

(i) Ako je $\alpha > -1$, *tada*

$$\int_a^x t^\alpha \ell(t)\, d_qt \sim \frac{x^{\alpha+1}}{[\alpha+1]_q}\ell(x), \quad x\to\infty;$$

(ii) Ako je $\alpha < -1$, *tada*

$$\int_x^\infty t^\alpha \ell(t)\, d_qt \sim -\frac{x^{\alpha+1}}{[\alpha+1]_q}\ell(x), \quad x\to\infty;$$

(iii) Ako $\displaystyle\int_a^\infty \frac{\ell(t)}{t}\, d_qt = \infty$, *tada je funkcija*

$$L(x) = \int_a^x \frac{\ell(t)}{t}\, d_qt, \quad x \in [a,\infty)_q$$

q-sporo promenljiva funkcija i $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{L(x)}{\ell(x)} = \infty$;

(iv) Ako $\displaystyle\int_a^\infty \frac{\ell(t)}{t}\, d_q t < \infty$, *tada je funkcija*

$$L(x) = \int_x^\infty \frac{\ell(t)}{t}\, d_q t, \quad x \in [a, \infty)_q$$

q-sporo promenljiva funkcija i $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{L(x)}{\ell(x)} = \infty.$

Napomena 1.4.1. U radu [100], u delu (iv) prethodne teoreme, postoji dodatan uslov za sporo promenljivu funkciju ℓ, $\ell(t) \to 0, t \to \infty$. Međutim u radu [109], dokazano je da je ovaj uslov uvek ispunjen.

1.5 Nelinearna q-diferencna jednačina

"Ono što razlikuje matematički model od poezije, muzike, portreta ili bilo kog drugog umetničkog dela je činjenica da je matematički model prikaz stvarnosti naslikane logičkim simbolima umesto rečima, notama ili uljanim bojama."

John L. Casti,
1943 - , američki autor i matematičar

U ovom poglavlju biće navedena neka od osnovnih svojstava neoscilatornih rešenja nelinearne q-diferencne jednačine drugog reda

$$D_q(a(t)\Phi_\alpha(D_q(x(t)))) + b(t)\Phi_\beta(x(qt)) = 0, \quad t \in q^{\mathbb{N}_0}, \quad q > 1 \tag{1.16}$$

gde su α i β pozitivne konstante takve da je $\alpha \geq \beta$, $a : q^{\mathbb{N}_0} \to (0, \infty)$ i koeficijent b je konstantnog znaka za dovoljno veliko t.

Jednačina (1.16), u kojoj je $\alpha = \beta$ naziva se *polulinearna*, dok se u slučaju $\alpha > \beta$ naziva *sublinearna tipa Emden-Fowler*. Slučaj $\alpha < \beta$, kada se jednačina (1.16) naziva *superlinearnom*, neće biti predmet istraživanja ove doktorske disertacije.

Funkcija $x : q^{\mathbb{N}_0} \to \mathbb{R}$ je *rešenje* jednačine (1.16) ukoliko zadovoljava jednačinu (1.16) i ukoliko za svako $M \in q^{\mathbb{N}_0}$ postoji $m \in q^{\mathbb{N}_0}$, $M \leq m$ tako da je $x(m) \neq 0$. Rešenje x jednačine (1.16) je *oscilatorno rešenje* ukoliko za svako $M \in q^{\mathbb{N}_0}$ postoje $m, n \in q^{\mathbb{N}_0}$, $M \leq m < n$ takvi da $x(m)x(n) \leq 0$, u suprotnom, rešenje x je *neoscilatorno rešenje*. Kako je funkcija x rešenje jednačine (1.16) ako i samo ako je $-x$ takođe njeno rešenje, u ispitivanju osobina neoscilatornih rešenja jednačine (1.16), bez gubljenja opštosti, u nastavku će biti razmatrana samo eventualno pozitivna rešenja. Funkcija je *eventualno jednog znaka* ukoliko za dovoljno veliko t postaje funkcija konstantnog znaka.

Kako je koeficijent b jednačine (1.16) eventualno pozitivna ili eventualno negativna funkcija, sva eventualno pozitivna rešenja jednačine (1.16) mogu biti podeljena u dve klase:

$$\begin{aligned}
\mathbb{M}^- &= \{x \in \mathbb{M} \,|\, \; D_q x(t) < 0 \text{ za } t \text{ dovoljno veliko}\}, \\
\mathbb{M}^+ &= \{x \in \mathbb{M} \,|\, \; D_q x(t) > 0 \text{ za } t \text{ dovoljno veliko}\},
\end{aligned}$$

gde je $\mathbb{M}$ skup svih eventualno pozitivnih rešenja jednačine (1.16).

Tipovi q-diferencne jednačine (1.16) istraživani korišćenjem teorije q-pravilno promenljivih funkcija u dosadašnjoj literaturi su linearna q-diferencna jednačina (jednačina (1.16) za $\alpha = \beta = 1$) [100, 111, 115] i polulinearna q-diferencna jednačina, gde je $a(t) \equiv 1$ (videti [102, 114]). Kriterijumi oscilatornosti i neoscilatornosti polulinearne dinamičke jednačine razmatrani su u radovima [6, 13, 85, 105, 106, 108].

U nastavku će nam biti neophodna klasifikacija i egzistencija pozitivnih rešenja jednačine (1.16). Takvi rezultati su dobijeni u opštem slučaju dinamičke jednačine

$$(a(t)\Phi_\alpha(x^\triangle))^\triangle = b(t)f(x(\sigma(t))), \tag{1.17}$$

u radovima [3, 4, 5], na proizvoljnoj vremenskoj skali $\mathbb{T}$ koja je neograničena odozgo, gde su a i b realne, pozitivne rd-neprekidne funkcije, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija takva da je $uf(u) > 0, u \neq 0$. Predmet istraživanja bila je klasifikacija i utvrđivanje potrebnih i/ili dovoljnih uslova za egzistenciju rešenja pojedinih klasa neoscilatornih rešenja. Jednačina (1.16) je specijalan slučaj jednačine (1.17) za $\mathbb{T} = q^{\mathbb{N}_0}$ i $f = \Phi_\beta$. U radu [3] dokazano je da su sva netrivijalna rešenja jednačine (1.16) neoscilatorna, pod pretpostavkom da je koeficijent b *eventualno negativna funkcija.* U nastavku je naveden pomenuti rezultat.

Lema 1.5.1. [3, Lema 3.1] *Neka je koeficijent b jednačine* (1.16) *eventualno negativna funkcija. Svako netrivijalno rešenje jednačine* (1.16) *je neoscilatorno. Štaviše, svako netrivijalno rešenje jednačine* (1.16) *je eventualno monotona funkcija.*

U opštem slučaju, na nekoj vremenskoj skali $\mathbb{T}$, jedna od klasa $\mathbb{M}^+$ i $\mathbb{M}^-$ može biti prazna. Međutim, u slučaju q-računa ove klase rešenja jednačine (1.16) sa *eventualno negativnim koeficijentom b* su neprazne, što je posledica tvrđenja koje važi u diskretnom slučaju. Naime, q-diferencna jednačina (1.16) može se transformisati u odgovarajuću diferencnu jednačinu. Ako je $\tau : \mathbb{N}_0 \to q^{\mathbb{N}_0}$, $\tau(n) = q^n$, jednostavno se pokazuje da je $y : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ rešenje diferencne jednačine

$$\triangle(p(n)\Phi_\alpha(\triangle y(n))) + r(n)\Phi_\beta(y(n+1)) = 0,\ n \in \mathbb{N}_0, \tag{1.18}$$

gde je

$$p(n) = \frac{a(\tau(n))}{(q-1)^\alpha(\tau(n))^\alpha} \quad \text{i} \quad r(n) = (q-1)\tau(n)b(\tau(n))$$

ako i samo ako je $x = y \circ \tau^{-1}$ rešenje q-diferencne jednačine (1.16). Osim toga, x je eventualno opadajuće (rastuće) rešenje jednačine (1.16) ako i samo ako je y eventualno opadajuće (rastuće) rešenje jednačine (1.18). Kako je u radu [24] dokazano da su klase $\mathbb{MZ}^+$ i $\mathbb{MZ}^-$ jednačine (1.18) neprazne, zaključuje se i da su *klase $\mathbb{M}^+$ i $\mathbb{M}^-$ jednačine* (1.16) *neprazne.*

Prvi korak pri izučavanju asimptotskih svojstava neoscilatornih rešenja jednačina jeste klasifikacija rešenja, koja podrazumeva podelu neoscilatornih rešenja u disjunktne klase na osnovu njihovih ponašanja i ponašanja njihovih kvazi-izvoda u beskonačnosti. *Kvazi-izvod rešenja x* jednačine (1.16) je funkcija

$$x^{[1]}(t) = a(t)\Phi_\alpha(D_q(x(t))), \quad t \in q^{\mathbb{N}_0}.$$

Klase $\mathbb{M}^+$ i $\mathbb{M}^-$ biće podeljene u podklase koje će dati preciznije informacije o asimptotskom ponašanju pozitivnih rešenja u beskonačnosti. Pomenute klase eventualno pozitivnih rešenja jednačine (1.16) koje će se primenjivati pri klasifikaciji navedene su u nastavku:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{M}^+_B = \left\{x \in \mathbb{M}^+ : \lim_{t\to\infty} x(t) = c \in (0,\infty)\right\},\\
&\mathbb{M}^+_{B,B} = \left\{x \in \mathbb{M}^+ : \lim_{t\to\infty} x(t) = c \in (0,\infty), \lim_{t\to\infty} x^{[1]}(t) = d \in (0,\infty)\right\},\\
&\mathbb{M}^+_{B,0} = \{x \in \mathbb{M}^+ : \lim_{t\to\infty} x(t) = c \in (0,\infty), \lim_{t\to\infty} x^{[1]}(t) = 0\},\\
&\mathbb{M}^+_{B,\infty} = \{x \in \mathbb{M}^+ : \lim_{t\to\infty} x(t) = c \in (0,\infty), \lim_{t\to\infty} x^{[1]}(t) = \infty\},\\
&\mathbb{M}^+_{\infty,B} = \{x \in \mathbb{M}^+ : \lim_{t\to\infty} x(t) = \infty, \lim_{t\to\infty} x^{[1]}(t) = c \in (0,\infty)\},\\
&\mathbb{M}^+_{\infty,0} = \{x \in \mathbb{M}^+ : \lim_{t\to\infty} x(t) = \infty, \lim_{t\to\infty} x^{[1]}(t) = 0\},\\
&\mathbb{M}^+_{\infty,\infty} = \{x \in \mathbb{M}^+ : \lim_{t\to\infty} x(t) = \infty, \lim_{t\to\infty} x^{[1]}(t) = \infty\},\\
&\mathbb{M}^-_B = \left\{x \in \mathbb{M}^- : \lim_{t\to\infty} x(t) = c \in (0,\infty)\right\},\\
&\mathbb{M}^-_{B,B} = \left\{x \in \mathbb{M}^- : \lim_{t\to\infty} x(t) = c \in (0,\infty), \lim_{t\to\infty} x^{[1]}(t) = d \in (-\infty,0)\right\};\\
&\mathbb{M}^-_{B,0} = \{x \in \mathbb{M}^- : \lim_{t\to\infty} x(t) = c \in (0,\infty), \lim_{t\to\infty} x^{[1]}(t) = 0\},\\
&\mathbb{M}^-_{B,\infty} = \{x \in \mathbb{M}^- : \lim_{t\to\infty} x(t) = c \in (0,\infty), \lim_{t\to\infty} x^{[1]}(t) = -\infty\},\\
&\mathbb{M}^-_{0,B} = \{x \in \mathbb{M}^- : \lim_{t\to\infty} x(t) = 0, \lim_{t\to\infty} x^{[1]}(t) = c \in (-\infty,0)\},\\
&\mathbb{M}^-_{0,0} = \{x \in \mathbb{M}^- : \lim_{t\to\infty} x(t) = 0, \lim_{t\to\infty} x^{[1]}(t) = 0\},\\
&\mathbb{M}^-_{0,\infty} = \{x \in \mathbb{M}^- : \lim_{t\to\infty} x(t) = 0, \lim_{t\to\infty} x^{[1]}(t) = -\infty\}.
\end{aligned}
\tag{1.19}
$$

Rešenja klase $\mathbb{M}^-_B$ nazivaju se *asimptotski konstantna rešenja*, dok se rešenja klase $\mathbb{M}^-_{0,0}$ nazivaju *strogo opadajuća rešenja*. Rešenja klase $\mathbb{M}^+_B$ nazivaju se *asimptotski konstantna rešenja*, a se rešenja klase $\mathbb{M}^+_{\infty,\infty}$ *strogo rastuća rešenja*.

Napomenimo da će analogne oznake biti korišćene u slučaju klasifikacije pozitivnih rešenja diferencne jednačine (E_4), uz $\mathbb{MZ}$ umesto $\mathbb{M}$. Osim toga, u disertaciji biće korišćene i sledeće oznake:

$\mathcal{R}_q$ $-$ skup svih q-pravilno promenljivih rešenja
$\mathcal{R}^+_q$ $-$ skup svih q-pravilno promenljivih eventualno rastućih rešenja
$\mathcal{R}^-_q$ $-$ skup svih q-pravilno promenljivih eventualno opadajućih rešenja
$\mathcal{R}^+_{\infty,\infty} = \mathcal{R}_q \cap \mathbb{M}^+_{\infty,\infty}$, $\mathcal{R}^-_{0,0} = \mathcal{R}_q \cap \mathbb{M}^-_{0,0}$
$\mathbb{M}_{SV} = \mathbb{M} \cap \mathcal{SV}_q$, $\mathbb{M}^s_{SV} = \mathbb{M}^s \cap \mathcal{SV}_q$, $ntr - \mathbb{M}^s_{SV} = \mathbb{M}^s \cap ntr - \mathcal{SV}_q$
$\mathbb{M}_{RV}(\rho) = \mathbb{M} \cap \mathcal{RV}_q(\rho)$, $\mathbb{M}^s_{RV}(\vartheta) = \mathbb{M}^s \cap \mathcal{RV}_q(\vartheta)$, $ntr - \mathbb{M}^s_{RV}(\vartheta) = \mathbb{M}^s \cap ntr - \mathcal{RV}_q(\vartheta)$
$\mathbb{MZ}_{\mathcal{SV}^\tau_{\mathbb{Z}}} = \mathbb{MZ} \cap \mathcal{SV}^\tau_{\mathbb{Z}}$, $\mathbb{MZ}_{\mathcal{RV}^\tau_{\mathbb{Z}}}(\rho) = \mathbb{MZ} \cap \mathcal{RV}^\tau_{\mathbb{Z}}(\rho)$,

gde je $s \in \{+,-\}$.

(**I**) : *Koeficijent b eventualno negativna funkcija:* U ovom slučaju sva rešenja klase $\mathbb{M}^-$ mogu pripadati sledećim podklasama

$$\mathbb{M}^- = \mathbb{M}_B^- \cup \mathbb{M}_{0,B}^- \cup \mathbb{M}_{0,0}^-.$$

Sva eventualno pozitivna i rastuća rešenja mogu pripadati sledećim podklasama:

$$\mathbb{M}^+ = \mathbb{M}_B^+ \cup \mathbb{M}_{\infty,B}^+ \cup \mathbb{M}_{\infty,\infty}^+.$$

(**I**) : *Koeficijent b eventualno pozitivna funkcija:* U ovom slučaju sva rešenja klase $\mathbb{M}^-$ mogu pripadati sledećim podklasama

$$\mathbb{M}^- = \mathbb{M}_B^- \cup \mathbb{M}_{0,B}^- \cup \mathbb{M}_{0,\infty}^-.$$

Sva eventualno pozitivna i rastuća rešenja mogu pripadati sledećim podklasama:

$$\mathbb{M}^+ = \mathbb{M}_B^+ \cup \mathbb{M}_{\infty,B}^+ \cup \mathbb{M}_{\infty,0}^+.$$

Glava 2

Polulinearna q-diferencna jednačina drugog reda

2.1 Uvod

U ovoj Glavi biće razmatrana egzistencija i asimptotska formula q-pravilno promenljivih rešenja polulinearne q-diferencne jednačine drugog reda

$$D_q(a(t)\Phi(D_q(x(t)))) + b(t)\Phi(x(qt)) = 0, \quad t \in q^{\mathbb{N}_0}, \quad q > 1, \tag{2.1}$$

gde je $\Phi(x) = |x|^{\alpha-1}x$ i $\alpha > 0$. Koeficijenti jednačine su funkcije $a : q^{\mathbb{N}_0} \to (0, \infty)$ i $b : q^{\mathbb{N}_0} \to \mathbb{R}$.

Interesovanje o polulinearnoj diferencijalnoj jednačini

$$(a(t)\Phi(x'(t)))' + b(t)\Phi(x(t)) = 0, \; t \in [t_0, \infty), \tag{2.2}$$

započinje devedesetih godina. Značajni rezultati o kvalitativnoj analizi ove diferencijalne jednačine, dobijeni do 2001. godine, objedinjeni su u knjizi O. Došlý i P. Řehák [35]. Između ostalog, pokazano je da se rešenja ove jednačine ponašaju u mnogim aspektima kao rešenja Sturm-Liouville-ove linearne diferencijalne jednačine drugog reda, koja je specijalan slučaj jednačine (2.2) za $\alpha = 1$. Jedan od razloga za intenzivnim ispitivanjem ove jednačine jeste utvrditi koji rezultati iz kvalitativne analize Sturm-Liouville-ove linearne diferencijalne jednačine drugog reda se mogu uopštiti na polulinearnu jednačinu (2.2). Drugi razlog jeste primena ove jednačine pri opisivanju mnogih fizičkih, bioloških i hemijskih procesa. Stoga, ovaj tip jednačine i danas zavređuje naročitu pažnju. Za skorije rezultate o kvalitativnoj analizi polulinearne diferencijalne jednačine videti [50, 68, 71, 81, 92, 93, 103, 107].

Izučavanje polulinearnih diferencijalnih jednačina primenom Karamatinih funkcija započinje radovima [49, 51], ispitivanjem egzistencije pravilno promenljivih rešenja jednačine (2.2) gde je $b : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija, u slučaju kada je $a(t) \equiv 1$, odnosno ispitivanjem egzistencije generalizovanih pravilno promenljivih rešenja u slučaju kada je a pozitivna, neprekidna funkcija. U oba slučaja, potrebni i dovoljni uslovi za egzistenciju pravilno promenljivih rešenja opisani su uz pomoć granične vrednosti izraza koji zavise od koeficijenata a i b. Nakon egzistencije, asimptotsko ponašanje pravilno promenljivih rešenja polulinearne diferencijalne jednačine (2.2) razmatrano je u radovima [68, 71, 81, 92, 93, 97, 98, 103, 107].

Struktura q-vremenske skale pokazala se prirodnom za razvoj teorije pravilno promenljivih funkcija i dovela do interesantnih zapažanja i pojednostavljenja pojedinih tvrđenja u odnosu na ovu teoriju u neprekidnom i diskretnom slučaju. Stoga, ovakvi rezultati daju nagoveštaj da primena Karamatine teorije pri kvalitativnoj analizi q-diferencnih jednačina može dovesti do nekih novih rezultata, koji se mogu primeniti za dobijanje novih rezultata u asimptotskoj analizi analognih jednačina u diskretnom slučaju, kao i do korisnih zaključaka o asimptotskom ponašanju rešenja odgovarajućih diferencijalnih jednačina.

Teorija q-pravilno promenljivih funkcija je primenjena, na samom početku, u asimptotskoj analizi q-diferencne linearne jednačine drugog reda (videti [100, 111, 115]), gde su određeni potrebni i dovoljni uslovi za egzistenciju q-pravilno promenljivih rešenja. Pored linearne q-diferencne jednačine, razmatrana je i polulinearna q-diferencna jednačina (2.1) sa $a(t) \equiv 1$, u radovima [102, 114], gde su dobijeni sledeći rezultati o egzistenciji q-pravilno promenljivih rešenja pomenute jednačine.

Teorema 2.1.1. [102, Teorema 3.1 $(i),(ii)$] *Za jednačinu*

$$D_q(\Phi(D_q(x(t)))) + b(t)\Phi(x(qt)) = 0, \quad t \in q^{\mathbb{N}_0} \tag{2.3}$$

važe sledeća tvrđenja:

(i) *Jednačina (2.3) ima eventualno pozitivna rešenja $x \in \mathcal{RV}_q(\rho_1)$ i $y \in \mathcal{RV}_q(\rho_2)$, gde su indeksi regularnosti ρ_1 i ρ_2 takvi da su $\lambda_i = \Phi([\rho_i]_q)$, $i = 1, 2$ realni i različiti koreni jednačine $x = h(x) - B/[\alpha]_q$, gde je*

$$h(x) = \frac{x}{1 - q^{-\alpha}}\left(1 - \left(1 + (q-1)\Phi^{-1}(x)\right)^{-\alpha}\right), \quad x \in \left(\Phi\left((1-q)^{-1}\right), \infty\right),$$

ako i samo ako je

$$\lim_{t\to\infty} t^{\alpha+1} b(t) = B \in \left(-\infty, q^{-\alpha}\left|[\alpha/(\alpha+1)]_q\right|^{\alpha+1}\right).$$

Za indekse regularnosti ρ_1 i ρ_2 važi $\rho_1 < 0 < 1 < \rho_2$, u slučaju $B < 0$; $\rho_1 = 0$ i $\rho_2 = 1$, u slučaju $B = 0$; $0 < \rho_1 < \alpha/(\alpha+1) < \rho_2 < 1$, u slučaju $B > 0$.

(ii) *Neka je jednačina (2.3) neoscilatorna. Jednačina (2.3) ima eventualno pozitivno rešenje $x \in \mathcal{RV}_q(\alpha/(\alpha+1))$ ako i samo ako*

$$\lim_{t\to\infty} t^{\alpha+1} b(t) = q^{-\alpha}\left|[\alpha/(\alpha+1)]_q\right|^{\alpha+1}.$$

Sva eventualno pozitivna rešenja jednačine (2.3) su q-pravilno promenljiva indeksa regularnosti $\alpha/(\alpha+1)$.

Jedan od ciljeva ove doktorske disertacije jeste da unapredi navedene rezultate, dobijanjem potrebnih i dovoljnih uslova za egzistenciju q-pravilno promenljivih rešenja opštije jednačine (2.1), u kojoj je koeficijent jednačine a q-pravilno promenljiva funkcija indeksa regularnosti $\lambda \in \mathbb{R}$. U dokazima o egzistenciji q-pravilno promenljivih rešenja biće korišćena Banahova teorema o fiksnoj tački [10], navedena u nastavku.

Teorema 2.1.2 (Banahova teorema o fiksnoj tački)**.** *Neka je (X, d) kompletan metrički prostor i neka je $T : X \to X$ kontraktivno preslikavanje, tj. postoji pozitivna konstanta $K < 1$ takva da je*

$$d(T(x), T(y)) \leq Kd(x, y), \ \ \textit{za svako} \ \ x, y \in X.$$

Preslikavanje T ima jedinstvenu fiksnu tačku u skupu X.

Nakon što je dokazana egzistencija q-pravilno promenljivih rešenja, predmet istraživanja postaje asimptotsko ponašanje ovih rešenja. U dosadašnjim istraživanjima, ustanovljene su samo asimptotske formule q-pravilno promenljivih rešenja linearne q-diferencne jednačine u radu [100]. Stoga, još jedan od zadataka ove doktorske disertacije jeste odrediti asimptotske formule q-pravilno promenljivih rešenja polulinearne jednačine (2.1) sa q-pravilno promenljivim koeficijentom a.

Dobijeni rezultati o egzistenciji i asimptotskom ponašanju pozitivnih rešenja polulinearnih q-diferencnih jednačina biće primenjeni za dobijanje novih rezultata o asimptotskom ponašanju nekih pozitivnih rešenja polulinearnih diferencnih jednačina, primenom generalizovanih pravilno promenljivih nizova u odnosu na $\tau : \mathbb{N}_0 \to q^{\mathbb{N}_0}$, $\tau(k) = q^k$, definisanih u [109].

Rezultati Poglavlja 2.3 - 2.4 su originalni i publikovani u radu [31], dok su rezultati Poglavlja 2.5 publikovani u radu [33].

2.2 Klasifikacija eventualno pozitivnih rešenja

Asimptotsko ponašanje eventualno pozitivnih rešenja jednačine (2.1) zavisi od divergencije integrala

$$I_a = \int_1^\infty \frac{d_q s}{a(s)^{\frac{1}{\alpha}}} \quad \text{i} \quad I_b = \int_1^\infty b(s) d_q s.$$

U nastavku će biti izvršena klasifikacija eventualno pozitivnih rešenja jednačine (2.1) u zavisnosti od diveregencije navedenih integrala. Odvojeno će biti razmatrani slučajevi kada je koeficijent b jednačine (2.1) eventualno pozitivna ili eventualno negativna funkcija.

Lema 2.2.1. *Neka je koeficijent b jednačine (2.1) eventualno negativna funkcija i $I_a = \infty$. Za svako rešenje $x \in \mathbb{M}^-$ jednačine (2.1) važiće da je $\lim_{t\to\infty} x^{[1]}(t) = 0$.*

Dokaz: Neka je $x \in \mathbb{M}^-$ rešenje jednačine (2.1). Funkcija $x^{[1]}$ je tada eventualno negativna i rastuća funkcija, pa će važiti da je

$$\lim_{t\to\infty} x^{[1]}(t) = -w < 0 \quad \text{ili} \quad \lim_{t\to\infty} x^{[1]}(t) = 0. \tag{2.4}$$

Ako pretpostavimo da je $\lim_{t\to\infty} x^{[1]}(t) = -w < 0$, tj. $x^{[1]}(t) \le -w$, $t \ge t_0$, $t_0 \in q^{\mathbb{N}_0}$, slediće

$$x(t) \le x(t_0) - w^{\frac{1}{\alpha}} \int_{t_0}^{t} \frac{d_q s}{a(s)^{\frac{1}{\alpha}}}, \quad t \ge t_0.$$

Divergencija intergala I_a tada implicira da $\lim_{t\to\infty} x(t) = -\infty$, čime je dobijena kontradikcija. Stoga, mora biti $\lim_{t\to\infty} x^{[1]}(t) = 0$. $\square$

Lema 2.2.2. *Neka je koeficijent b jednačine (2.1) eventualno negativna funkcija i $I_a = \infty$. Za svako rešenje $x \in \mathbb{M}^+$ jednačine (2.1) važiće da je $\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty$.*

Dokaz: Neka je $x \in \mathbb{M}^+$ rešenje jednačine (2.1). Tada je $x^{[1]}$ pozitivna i rastuća funkcija na intervalu $[t_0, \infty)_q$, za neko $t_0 \in q^{\mathbb{N}_0}$. Stoga, važiće da je $x^{[1]}(t) \ge x^{[1]}(t_0) > 0$, $t \ge t_0$, odakle sledi

$$x(t) \ge x(t_0) + x^{[1]}(t_0)^{\frac{1}{\alpha}} \int_{t_0}^{t} \frac{d_q s}{a(s)^{\frac{1}{\alpha}}}, \quad t \ge t_0. \tag{2.5}$$

Kako integral I_a divergira, zaključujemo da $\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty$. $\square$

Lema 2.2.3. *Neka je koeficijent b jednačine (2.1) eventualno negativna funkcija i $I_b = \infty$. Za svako rešenje $x \in \mathbb{M}^+$ jednačine (2.1) važiće da je $\lim_{t\to\infty} x^{[1]}(t) = \infty$.*

Dokaz: Neka je $x \in \mathbb{M}^+$ rastuće rešenje na intervalu $[t_0, \infty)_q$. Slediće da je $x(t) \ge x(t_0)$, $t \ge t_0$. Kako je

$$x^{[1]}(t) = x^{[1]}(t_0) - \int_{t_0}^{t} b(s) x(qs)^{\alpha} d_q s \ge x(t_0)^{\alpha} \int_{t_0}^{t} |b(s)| d_q s \to \infty,\ t \to \infty,$$

sledi da je $\lim_{t\to\infty} x^{[1]}(t) = \infty$. $\square$

Lema 2.2.4. *Neka je koeficijent b jednačine (2.1) eventualno negativna funkcija i $I_b = \infty$. Za svako rešenje $x \in \mathbb{M}^-$ jednačine (2.1) važiće da je $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.*

Dokaz: Neka je $x \in \mathbb{M}^-$ rastuće rešenje jednačine (2.1) na intervalu $[t_0, \infty)$, za neko $t_0 \in q^{\mathbb{N}_0}$. Slediće da je

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = c > 0 \quad \text{ili} \quad \lim_{t\to\infty} x(t) = 0.$$

Pretpostavimo da je $\lim_{t\to\infty} x(t) = c > 0$, tj. $c \le x(t) \le x(t_0)$, $t \ge t_0$. Integracijom jednačine (2.1) na intervalu $[t_0, t]$ dobija se

$$x^{[1]}(t) = x^{[1]}(t_0) - \int_{t_0}^{t} b(s) x(qs)^{\alpha} d_q s \ge x^{[1]}(t_0) + c^{\alpha} \int_{t_0}^{t} |b(s)| d_q s \to \infty,\ t \to \infty$$

što je u kontradikciji sa činjenicom da je $x^{[1]}$ negativna funkcija. Stoga mora važiti $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$. $\square$

Lema 2.2.5. *Neka je koeficijent b jednačine (2.1) eventualno pozitivna funkcija i $I_a = \infty$. Tada je $\mathbb{M}^- = \emptyset$ i $\mathbb{M}^+_{B,B} = \emptyset$.*

Dokaz: Dokažimo najpre da je $\mathbb{M}^- = \emptyset$. Pretpostavimo suprotno, neka je $x \in \mathbb{M}^-$. Tada je funkcija $x^{[1]}$ negativna i opadajuća na intervalu $[t_0, \infty)$, za neko $t_0 \in q^{\mathbb{N}_0}$, te će važiti $x^{[1]}(t) \le x^{[1]}(t_0) = -c < 0$, $t \ge t_0$. Ovo dalje implicira

$$x(t) \le x(t_0) - c^{\frac{1}{\alpha}} \int_{t_0}^{t} \frac{d_q s}{a(s)^{\frac{1}{\alpha}}} \to -\infty,\ t \to \infty,$$

te je dobijena kontradikcija.

Dokažimo da je $\mathbb{M}^+_{B,B} = \emptyset$. Pretpostavimo suprotno, neka je $x \in \mathbb{M}^+_{B,B}$ i neka važi $\lim_{t\to\infty} x^{[1]}(t) = w > 0$. Tada je $x^{[1]}(t) \ge w$, $t \ge t_0$, za neko $t_0 \in q^{\mathbb{N}_0}$, odakle će slediti da važi (2.5), gde je $x^{[1]}(t_0)$ zamenjeno sa w. Divergencija integrala I_a tada implicira da je $\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty$, što je u kontradikciji sa polaznom pretpostavkom. □

Lema 2.2.6. *Neka je koeficijent b jednačine (2.1) eventualno pozitivna funkcija i $I_b = \infty$. Tada je $\mathbb{M}^+ = \emptyset$ i $\mathbb{M}^-_{B,B} = \emptyset$.*

Dokaz: Pretpostavimo suprotno, neka je $x \in \mathbb{M}^+$ rastuće rešenje jednačine (2.1) na intervalu $[t_0, \infty)$, za neko $t_0 \in q^{\mathbb{N}_0}$. Tada će važiti da je $x(t) \ge x(t_0)$, $t \ge t_0$. Integracijom jednačine (2.1) na intervalu $[t_0, t]$ dobija se

$$x^{[1]}(t) - x^{[1]}(t_0) = -\int_{t_0}^{t} b(s)x(qs)d_q s \le -x(t_0)^{\alpha} \int_{t_0}^{t} b(s)d_q s,\ t \ge t_0.$$

Divergencija integrala I_b i poslednja nejednakost impliciraju da je $\lim_{t\to\infty} x^{[1]}(t) = -\infty$, što je u kontradikciji sa činjenicom da je funkcija $x^{[1]}$ eventualno pozitivna.

Dokažimo da je $\mathbb{M}^-_{B,B} = \emptyset$. Pretpostavimo suprotno, neka je $x \in \mathbb{M}^-_{B,B}$. Tada je $x(t) \ge c > 0$, $t \ge t_0$, za neko $t_0 \in q^{\mathbb{N}_0}$. Integracijom polazne jednačine na intervalu $[t_0, t]$ dobija se

$$x^{[1]}(t) - x^{[1]}(t_0) = -\int_{t_0}^{t} b(s)x(qs)d_q s \le -c^{\alpha} \int_{t_0}^{t} b(s)d_q s,\ t \ge t_0.$$

Divergencija integrala I_b i poslednja nejednakost impliciraju da je $\lim_{t\to\infty} x^{[1]}(t) = -\infty$, što je u kontradikciji sa polaznom pretpostavkom. □

(**I**) : *Koeficijent b eventualno negativna funkcija:* U ovom slučaju svako netrivijalno rešenje jednačine (2.1) je neoscilatorno, eventualno strogo monotono i obe klase $\mathbb{M}^+$ i $\mathbb{M}^-$ rešenja jednačine (2.1) su neprazne.

Ako pretpostavimo da integral I_a divergira, primenom Leme 2.2.1 i 2.2.2, zaključujemo

$$\mathbb{M}^+ = \mathbb{M}^+_{\infty,\infty} \cup \mathbb{M}^+_{\infty,B} \quad \text{i} \quad \mathbb{M}^- = \mathbb{M}^-_{B,0} \cup \mathbb{M}^-_{0,0}.$$

U slučaju divergencije integrala I_b, primenom Lema 2.2.3 i 2.2.4, zaključujemo

$$\mathbb{M}^+ = \mathbb{M}^+_{B,\infty} \cup \mathbb{M}^+_{\infty,\infty} \quad \text{i} \quad \mathbb{M}^- = \mathbb{M}^-_{0,B} \cup \mathbb{M}^-_{0,0}.$$

(**II**) : *Koeficijent b eventualno pozitivna funkcija:* Najpre razmotrimo asimptotsko ponašanje pozitivnih rešenja pod pretpostavkom $I_a = \infty$. Primena Leme 2.2.5 implicira da je $\mathbb{M}^- = \emptyset$ i da su sva rastuća rešenja podeljena u sledeće tri klase:

$$\mathbb{M}^+ = \mathbb{M}^+_{\infty,0} \cup \mathbb{M}^+_{\infty,B} \cup \mathbb{M}^+_{B,0}.$$

U slučaju kada je $I_b = \infty$, primena Leme 2.2.6 implicira da je skup $\mathbb{M}^+$ je prazan, dok je skup opadajućih rešenja podeljen u sledeće tri klase:

$$\mathbb{M}^- = \mathbb{M}^-_{0,\infty} \cup \mathbb{M}^-_{0,B} \cup \mathbb{M}^-_{B,\infty}.$$

2.3 Pomoćna tvrđenja

U ovom poglavlju biće definisane pomoćne funkcije i tvrđenja koja će biti primenjivana pri dokazivanju glavnih rezultata.

Za $x : q^{\mathbb{N}_0} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definisan je operator $\mathcal{L}$ na sledeći način

$$(\mathcal{L}x)(t) = \frac{a(t)}{a(qt)}\Phi\left(1 - \frac{x(t)}{x(qt)}\right) - \Phi\left(\frac{1}{q}\left(\frac{x(q^2t)}{x(qt)} - 1\right)\right).$$

Lema 2.3.1. *Jednačina* (2.1) *može se predstaviti u obliku*

$$(\mathcal{L}x)(t) = \frac{b(t)((q-1)t)^{\alpha+1}}{a(qt)}, \quad t \in q^{\mathbb{N}_0}, \tag{2.6}$$

za $x \neq 0$.

Dokaz: Na osnovu definicije q-operatora diferenciranja, važiće

$$\begin{aligned}
D_q(a(t)\Phi(D_q x(t))) &= D_q\left(a(t)\Phi\left(\frac{x(qt)-x(t)}{(q-1)t}\right)\right) \\
&= \frac{1}{(q-1)t}\left(a(qt)\Phi\left(\frac{x(q^2t)-x(qt)}{(q-1)qt}\right) - a(t)\Phi\left(\frac{x(qt)-x(t)}{(q-1)t}\right)\right) \\
&= \frac{a(qt)\Phi(x(qt))}{((q-1)t)^{\alpha+1}}\left(\Phi\left(\frac{1}{q}\left(\frac{x(q^2t)}{x(qt)} - 1\right)\right) - \frac{a(t)}{a(qt)}\Phi\left(1 - \frac{x(t)}{x(qt)}\right)\right) \\
&= -\frac{a(qt)\Phi(x(qt))}{((q-1)t)^{\alpha+1}}(\mathcal{L}x)(t), \quad t \in q^{\mathbb{N}_0},
\end{aligned}$$

odakle sledi da se za $x \neq 0$ jednačina (2.1) može predstaviti u obliku (2.6). □

Neka je funkcija $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definisana na sledeći način

$$f(x) = q^{-\lambda}\Phi\left(1 - \frac{1}{x}\right) - \Phi\left(\frac{x}{q} - \frac{1}{q}\right),$$

i funkcija $h_\lambda : (\Phi((1-q)^{-1}), \infty) \to \mathbb{R}$ definisana sa

$$h_\lambda(x) = \frac{x}{1-q^{-\alpha}}\left(1 - q^{-\lambda}\left(1 + (q-1)\Phi^{-1}(x)\right)^{-\alpha}\right),$$

za neko $\lambda \in \mathbb{R}$.

Lema 2.3.2. *Funkcija f je strogo rastuća na intervalu $(0, q^{\alpha_\lambda})$ i strogo opadajuća na intervalu $(q^{\alpha_\lambda}, \infty)$, gde je*

$$\alpha_\lambda = \frac{\alpha - \lambda}{\alpha + 1}.$$

Funkcija f dostiže maksimum u tački $x = q^{\alpha_\lambda}$:

$$f_{max} = (q-1)^{\alpha+1} q^{-\alpha} \left[\alpha_\lambda\right]_q \Phi\left(\left[\alpha_\lambda\right]_q\right).$$

Ako je $\lambda \neq \alpha$, funkcija f ima dve nule: u tačkama $x = 1$ i $x = q^{1-\lambda/\alpha}$. U suprotnom, funkcija f ima jednu nulu, u tački $x = 1$.

Dokaz: Tvrđenje će slediti na osnovu izvoda funkcije f

$$f'(x) = \alpha |x-1|^{\alpha-1} (q^{-\lambda} x^{-(\alpha+1)} - q^{-\alpha}), \quad x \in (0, \infty). \quad \square$$

Lema 2.3.3. *Grafik funkcije h_λ je parabola sa minimumom u tački $\lambda_0 = \Phi\Big(\left[-\lambda/(\alpha+1)\right]_q\Big)$. Jednačina*

$$h_\lambda(x) - x + \frac{B}{[\alpha]_q} = 0 \tag{2.7}$$

1) nema korene u slučaju $B > C_{max} = |[\alpha_\lambda]_q|^{\alpha+1}$;

2) ima dvostruki koren $x_0 = \Phi([\alpha_\lambda]_q)$ u slučaju $B = C_{max}$;

3) ima dva realna i različita korena u slučaju $B < C_{max}$ i to

3.1) ukoliko je $B = 0$ i $\lambda \neq \alpha$ ovi koreni su $x_1 = 0$ i $x_2 = \Phi\left([1 - \lambda/\alpha]_q\right)$;

3.2) ukoliko je $0 < B < C_{max}$ i $\lambda > \alpha$ koreni x_3 i x_4 zadovoljavaju $x_2 < x_3 < x_0 < x_4 < 0$;

3.3) ukoliko je $0 < B < C_{max}$ i $\lambda < \alpha$ koreni x_3 i x_4 zadovoljavaju $0 < x_3 < x_0 < x_4 < x_2$;

3.4) ukoliko je $B < 0$ i $\lambda > \alpha$ koreni x_3 i x_4 zadovoljavaju $x_3 < x_2 < x_0 < 0 < x_4$;

3.5) ukoliko je $B < 0$ i $\lambda < \alpha$ koreni x_3 i x_4 zadovoljavaju $x_3 < 0 < x_0 < x_2 < x_4$;

3.6) ukoliko je $B < 0$ i $\lambda = \alpha$ koreni x_3 i x_4 zadovoljavaju $x_3 < 0 < x_4$.

Dokaz: Kako je

$$h'_\lambda(x) = \frac{1}{1 - q^{-\alpha}} \left(1 + (q-1)\Phi^{-1}(x)\right)^{-\alpha-1},$$

sledi da je funkcija h_λ strogo monotono rastuća funkcija na intervalu (λ_0, ∞), strogo monotono opadajuća na intervalu $(\Phi\left(1/(1-q)\right), \lambda_0)$ i da dostiže minimum u tački λ_0.

Znak drugog izvoda funkcije h_λ

$$h''_\lambda(x) = \frac{-q^{-\lambda}(\alpha+1)}{[-\alpha]_q \alpha} (1 + (q-1)\Phi^{-1}(x))^{-\alpha-2} |x|^{\frac{1}{\alpha}-1}$$

implicira da je grafik funkcije h_λ parabola sa minimumom u tački λ_0. Posmatranjem preseka grafika funkcije $x \mapsto h_\lambda(x) + B/[\alpha]_q$ i prave $x \mapsto x$ slede zaključci o korenima jednačine (2.7). $\square$

Lema 2.3.4. *Za funkcije f i h_λ važi sledeći identitet*

$$f(q^\mu) = q^{-\alpha}(q-1)^{\alpha+1}[\alpha]_q\Phi([\mu]_q)\left[-\frac{\lambda}{\alpha}+1-\mu\right]_{q^\alpha} \tag{2.8}$$
$$= q^{-\alpha}(q-1)^{\alpha+1}[\alpha]_q\big(\Phi([\mu]_q) - h_\lambda(\Phi([\mu]_q))\big),$$

gde je $\mu \in \mathbb{R}$.

Dokaz: Dokažimo najpre prvu jednakost u (2.8):

$$\begin{aligned}
f(q^\mu) &= q^{-\lambda}\Phi(1-q^{-\mu}) - \Phi(q^{\mu-1}-q^{-1}) \\
&= q^{-\lambda-\mu\alpha}\Phi(q^\mu - 1) - q^{-\alpha}\Phi(q^\mu-1) \\
&= q^{-\alpha}(q-1)^\alpha\Phi([\mu]_q)\left(q^{-\lambda-\mu\alpha+\alpha}-1\right) \\
&= q^{-\alpha}(q-1)^{\alpha+1}\Phi([\mu]_q)\left(\frac{q^{-\lambda-\mu\alpha+\alpha}-1}{q^\alpha-1}\cdot\frac{q^\alpha-1}{q-1}\right) \\
&= q^{-\alpha}(q-1)^{\alpha+1}[\alpha]_q\Phi([\mu]_q)\left[-\frac{\lambda}{\alpha}+1-\mu\right]_{q^\alpha}.
\end{aligned}$$

Kako bismo dokazali drugu jednakost u (2.8), primetimo da je

$$\begin{aligned}
\Phi([\mu]_q)\left[-\frac{\lambda}{\alpha}+1-\mu\right]_{q^\alpha} &= \Phi([\mu]_q)\frac{q^{-\lambda-\mu\alpha}-q^{-\alpha}}{1-q^{-\alpha}} \\
&= \Phi([\mu]_q)\left(1-\frac{1-q^{-\lambda-\mu\alpha}}{1-q^{-\alpha}}\right) \\
&= \Phi([\mu]_q) - h_\lambda(\Phi([\mu]_q)). \quad \square
\end{aligned}$$

Princip reciprociteta

Jedan od metoda koji će biti korišćen pri dokazivanju pojedinih tvrđenja je princip reciprociteta. Neka su koeficijenti jednačine (2.1) takvi da je $a(t) \neq 0$, $b(t) \neq 0$, $t \in q^{\mathbb{N}_0}$. Tada je x rešenje jednačine (2.1) ako i samo ako je $u = x^{[1]}$ rešenje jednačine

$$D_q\left(\Phi^{-1}\left(\frac{1}{b(t)}\right)\Phi^{-1}(D_q u(t))\right) + q\Phi^{-1}\left(\frac{1}{a(qt)}\right)\Phi^{-1}(u(qt)) = 0. \tag{2.9}$$

Uvedimo oznake

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{\alpha}, \quad \hat{a}(t) = \frac{1}{|b(t)|^{\frac{1}{\alpha}}}, \quad \hat{b}(t) = \operatorname{sgn}(b(t))\frac{q}{a(qt)^{\frac{1}{\alpha}}}, \quad t \in q^{\mathbb{N}_0}. \tag{2.10}$$

Tada se jednačina (2.9) može ekvivalentno zapisati na sledeći način

$$D_q\left(\hat{a}(t)\Phi_{\hat{\alpha}}(D_q u(t))\right) + \hat{b}(t)\Phi_{\hat{\alpha}}(u(qt)) = 0. \tag{2.11}$$

2.4 Egzistencija $\mathcal{RV}_q-$rešenja

2.4.1 Polulinearna jednačina sa $\mathcal{RV}_q-$koeficijentom a i koeficijentom b proizvoljnog znaka

U ovom poglavlju će biti razmatrana egzistencija q-pravilno promenljivih rešenja jednačine (2.1), uz pretpostavku da je koeficijent jednačine a q-pravilno promenljiva funkcija, tačnije

$$a \in \mathcal{RV}_q(\lambda),\ \lambda \in \mathbb{R},$$

dok je koeficijent b funkcija proizvoljnog znaka. Zasebno će biti razmatrani slučajevi $\lambda < \alpha$, $\lambda > \alpha$ i $\lambda = \alpha$.

Teorema 2.4.1. *Neka je $a \in \mathcal{RV}_q(\lambda)$, $\lambda < \alpha$. Postoje eventualno pozitivna rešenja jednačine (2.1)*

$$x \in \mathcal{RV}_q(\rho_1) \quad i \quad y \in \mathcal{RV}_q(\rho_2),$$

gde su indeksi regularnosti ρ_1 i ρ_2 takvi da su $\lambda_1 = \Phi([\rho_1]_q)$ i $\lambda_2 = \Phi([\rho_2]_q)$ realni i različiti koreni jednačine (2.7) ako i samo ako je

$$\lim_{t\to\infty} \frac{q^\alpha t^{\alpha+1} b(t)}{a(qt)} = B \in \left(-\infty, \left|[\alpha_\lambda]_q\right|^{\alpha+1}\right). \tag{2.12}$$

Za indekse regularnosti ρ_1 i ρ_2 važi sledeće:

(i) $0 < \rho_1 < \alpha_\lambda < \rho_2 < 1 - \lambda/\alpha$ *ako i samo ako je* $0 < B < \left|[\alpha_\lambda]_q\right|^{\alpha+1}$;

(ii) $\rho_1 = 0$ *i* $\rho_2 = 1 - \lambda/\alpha$ *ako i samo ako je* $B = 0$;

(iii) $\rho_1 < 0 < 1 - \lambda/\alpha < \rho_2$ *ako i samo ako je* $B < 0$.

Ukoliko je uslov (2.12) ispunjen i $B < 0$, sva eventualno opadajuća rešenja jednačine (2.1) su q-pravilno promenljiva indeksa regularnosti ρ_1 i sva eventualno rastuća rešenja su q-pravilno promenljiva indeksa regularnosti ρ_2, tj. $\mathbb{M}^- = \mathbb{M}_{RV}(\rho_1)$ i $\mathbb{M}^+ = \mathbb{M}_{RV}(\rho_2)$.

Dokaz: Najpre primetimo da tvrđenja (i), (ii) i (iii) direktno slede na osnovu Leme 2.3.3, ukoliko su $\lambda_i = \Phi\left([\rho_i]_q\right)$, $i = 1, 2$ realna i različita rešenja jednačine (2.7).

($\Rightarrow$:) Pretpostavimo da jednačina (2.1) ima q-pravilno promenljiva rešenja $x \in \mathcal{RV}_q(\rho_1)$ i $y \in \mathcal{RV}_q(\rho_2)$, gde su $\lambda_i = \Phi\left([\rho_i]_q\right)$, $i = 1, 2$ realni i različiti koreni jednačine (2.7). Na osnovu Leme 2.3.3 važiće da je $B < \Phi([\alpha_\lambda]_q)[\alpha_\lambda]_q$. Kako se jednačina (2.1) može ekvivalentno predstaviti u obliku (2.6), primenom identiteta (2.8), slediće da je

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \frac{q^\alpha t^{\alpha+1} r(t)}{p(qt)} &= q^\alpha (q-1)^{-(\alpha+1)} \lim_{t\to\infty} (\mathcal{L}x)(t) = q^\alpha (q-1)^{-(\alpha+1)} f(q^{\rho_1}) \\
&= [\alpha]_q \big(\Phi([\rho_1]_q) - h_\lambda(\Phi([\rho_1]_q))\big) = B,
\end{aligned}$$

te zaključujemo da je uslov (2.12) zadovoljen.

($\Leftarrow$:) Pretpostavimo da je uslov (2.12) zadovoljen.

Najpre, pretpostavimo da je $0 \leq B < \left|[\alpha_\lambda]_q\right|^{\alpha+1}$. Izaberimo realnu konstantu D takvu da je $D \in (B, \left|[\alpha_\lambda]_q\right|^{\alpha+1})$. Jednačina (2.7), u kojoj je B zamenjeno sa D, ima dva realna i različita korena λ_η i λ_μ, koji su zajedno sa korenima λ_1 i λ_2 jednačine (2.7) u sledećem poretku

$$0 \leq \lambda_1 < \lambda_\eta < x_0 < \lambda_\mu < \lambda_2 \leq x_2,$$

gde su x_0 i x_2 definisani u Lemi 2.3.3. Neka je

$$\begin{aligned}\rho_i &= \log_q[(q-1)\Phi^{-1}(\lambda_i)+1],\ i=1,2;\\ \eta &= \log_q[(q-1)\Phi^{-1}(\lambda_\eta)+1];\\ \mu &= \log_q[(q-1)\Phi^{-1}(\lambda_\mu)+1].\end{aligned}$$

Ovako definisani brojevi biće u sledećem poretku

$$0 \leq \rho_1 < \eta < \alpha_\lambda < \mu < \rho_2 \leq 1 - \frac{\lambda}{\alpha}.$$

Dokažimo najpre egzistenciju q-pravilno promenljivog rešenja $x \in \mathcal{RV}_q(\rho_1)$. Definišimo pomoćnu funkciju

$$w(t) = \frac{a(t)}{a(qt)}\Phi\left(1 - \frac{x(t)}{x(qt)}\right),\ t \in q^{\mathbb{N}_0}.$$

Jednačina (2.6) se tada može transformisati u jednačinu po nepoznatoj funkciji w :

$$w(t) - q^{-\alpha}\Phi\left(\left(1 - \Phi^{-1}\left(\frac{a(q^2t)}{a(qt)}w(qt)\right)\right)^{-1} - 1\right) = \frac{((q-1)t)^{\alpha+1}b(t)}{a(qt)},\ t \in q^{\mathbb{N}_0}. \tag{2.13}$$

Kako bismo dokazali egzistenciju pozitivnog rešenja x jednačine (2.1), dokažimo najpre egzistenciju rešenja w jednačine (2.13).

Neka je realna konstanta $d > 1$ izabrana tako da je $D/d \in (B, D)$. Osim toga, neka je $\varepsilon > 0$ izabrano tako da su ispunjeni sledeći uslovi

$$\frac{1}{d} \leq \frac{q^{-\lambda}(1+\varepsilon)^{-1} - q^{\alpha(\eta-1)}}{q^{-\lambda} - q^{\alpha(\eta-1)}} \quad \text{i} \quad q^{-\alpha+\lambda+\eta(\alpha+1)}(1+\varepsilon) < 1. \tag{2.14}$$

Kako je $a \in \mathcal{RV}_q(\lambda)$, zaključujemo da postoji $t_1 \in q^{\mathbb{N}_0}$ tako da je

$$q^\lambda(1-\varepsilon) \leq \frac{a(qt)}{a(t)} \leq q^\lambda(1+\varepsilon), \quad t \geq t_1. \tag{2.15}$$

Pretpostavka (2.12) obezbeđuje egzistenciju konstanti $N \geq 0$ i $t_2 \in q^{\mathbb{N}_0}$ takvih da je ispunjen uslov

$$N \leq \frac{q^\alpha t^{\alpha+1}b(t)}{a(qt)} \leq \frac{D}{d}, \quad t \geq t_2. \tag{2.16}$$

Izaberimo nenegativnu konstantu $\tilde{N}$ takvu da je

$$\tilde{N} \leq \min\left\{N, q^{-\lambda+\alpha}(q-1)^{-(\alpha+1)}(1+\varepsilon)^{-1}\Phi(1-q^{-\eta})\right\}. \tag{2.17}$$

Neka je $\mathcal{X}$ prostor ograničenih funkcija $f : [t_0, \infty)_q \to \mathbb{R}$, gde je $t_0 = \max\{t_1, t_2\}$, opremljen supremum normom. Kako je ℓ^∞ Banahov prostor, zaključujemo da je prostor $\mathcal{X}$ Banahov.

Uočimo skup

$$\Omega_1 = \left\{ w \in \mathcal{X} : (q-1)^{\alpha+1} q^{-\alpha} \tilde{N} \leq w(t) \leq q^{-\lambda}(1+\varepsilon)^{-1}\Phi(1-q^{-\eta}),\ t \geq t_0 \right\}. \tag{2.18}$$

Definišimo operator $\mathcal{F} : \Omega_1 \to \mathcal{X}$ na sledeći način

$$(\mathcal{F}w)(t) = \frac{((q-1)t)^{\alpha+1} b(t)}{a(qt)} + q^{-\alpha}\Phi\left(\left(1 - \Phi^{-1}\left(\frac{a(q^2t)}{a(qt)} w(qt)\right)\right)^{-1} - 1\right),\ t \geq t_0. \tag{2.19}$$

Primenom Banahove teoreme o fiksnoj tački, biće dokazano da operator $\mathcal{F}$ ima fiksnu tačku u skupu Ω_1.

(i) *Operator* $\mathcal{F}$ *slika* Ω_1 *u samog sebe:* Neka je $\omega \in \Omega_1$. Primenom (2.15) i (2.18), primećujemo da je

$$q^{-\eta} \leq 1 - \Phi^{-1}\left(\frac{a(q^2t)}{a(qt)} w(qt)\right) \leq 1, \quad t \geq t_0\,. \tag{2.20}$$

Primena nejednakosti (2.16) i (2.17), implicira da je

$$(\mathcal{F}w)(t) \geq (q-1)^{\alpha+1} q^{-\alpha} N \geq (q-1)^{\alpha+1} q^{-\alpha} \tilde{N}, \quad t \geq t_0\,.$$

Sa druge strane, primenom (2.16), (2.20) i Leme 2.3.4, dobija se

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}w)(t) &\leq (q-1)^{\alpha+1} q^{-\alpha} \frac{D}{d} + \Phi\left(q^{\eta-1} - q^{-1}\right) \\
&= \frac{1}{d}(q-1)^{\alpha+1} q^{-\alpha} [\alpha]_q (\lambda_\eta - h_\lambda(\lambda_\eta)) + q^{\alpha(\eta-1)}\Phi(1-q^{-\eta}) \\
&= \frac{1}{d}(q-1)^{\alpha+1} q^{-\alpha} [\alpha]_q (\Phi([\eta]_q) - h_\lambda(\Phi([\eta]_q))) + q^{\alpha(\eta-1)}\Phi(1-q^{-\eta}) \\
&= \frac{1}{d} f(q^\eta) + q^{\alpha(\eta-1)}\Phi(1-q^{-\eta}), \quad t \geq t_0\,.
\end{aligned}$$

Konačno, primena prve nejednakosti iz (2.14) implicira

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}w)(t) &\leq \frac{q^{-\lambda}(1+\varepsilon)^{-1} - q^{\alpha(\eta-1)}}{q^{-\lambda} - q^{\alpha(\eta-1)}} \left(q^{-\lambda} - q^{\alpha(\eta-1)}\right)\Phi(1-q^{-\eta}) + q^{\alpha(\eta-1)}\Phi(1-q^{-\eta}) \\
&= q^{-\lambda}(1+\varepsilon)^{-1}\Phi(1-q^{-\eta}), \quad t \geq t_0\,.
\end{aligned}$$

Ovim je dokazano da $\mathcal{F}(\Omega_1) \subseteq \Omega_1$.

(ii) *Operator* $\mathcal{F}$ *je kontrakcija:* Neka je $\mathcal{G} : [(q-1)^{\alpha+1} q^{-\alpha}\tilde{N}, q^{-\lambda}(1+\varepsilon)^{-1}\Phi(1-q^{-\eta})] \to \mathbb{R}$ funkcija definisana na sledeći način

$$\mathcal{G}(x) = q^{-\alpha}\Phi\left(\left(1 - \Phi^{-1}\left(\frac{a(q^2t)}{a(qt)} x\right)\right)^{-1} - 1\right).$$

Za svako $w, z \in \Omega_1$ važiće

$$(\mathcal{F}w)(t) - (\mathcal{F}z)(t) = \mathcal{G}(w(qt)) - \mathcal{G}(z(qt)) = \mathcal{G}'(\xi(qt))(w(qt) - z(qt)), \quad t \geq t_0,$$

gde je $\xi : [qt_0, \infty)_q \to \mathbb{R}$ funkcija takva da je

$$\min\{w(t), z(t)\} \leq \xi(t) \leq \max\{w(t), z(t)\}. \tag{2.21}$$

Primenom (2.15) i (2.20) zaključuje se da je

$$|\mathcal{G}'(x)| = \left| q^{-\alpha} \frac{a(q^2t)}{a(qt)} \left(1 - \Phi^{-1}\left(\frac{a(q^2t)}{a(qt)} x\right)\right)^{-\alpha-1} \right| \leq K = q^{-\alpha+\lambda+\eta(\alpha+1)}(1+\varepsilon),$$

za svako $x \in [(q-1)^{\alpha+1} q^{-\alpha} \tilde{N}, q^{-\lambda}(1+\varepsilon)^{-1}\Phi(1-q^{-\eta})]$. Kako je

$$\sup_{t \in [t_0, \infty)_q} |(\mathcal{F}w)(t) - \mathcal{F}(z(t))| \leq K \sup_{t \in [t_0, \infty)_q} |w(qt) - z(qt)| \leq K||w - z||,$$

primenom druge nejednakosti u (2.14), zaključuje se da je $\mathcal{F}$ kontraktivno preslikavanje.

Primenom Banahove teoreme o fiksnoj tački, zaključuje se egzistencija rešenja $w \in \Omega_1$ jednačine (2.13). Stoga, funkcija x definisana na sledeći način

$$x(t) = \prod_{s \in [t_0, t)_q} \left(1 - \Phi^{-1}\left(\frac{a(qs)}{a(s)} w(s)\right)\right)^{-1}, \quad t \in [t_0, \infty)_q \tag{2.22}$$

je pozitivno, rastuće rešenje jednačine (2.1) na intervalu $[t_0, \infty)_q$.

Ostaje pokazati da je ovako definisano rešenje x q-pravilno promenljivo rešenje jednačine (2.1) određenog indeksa regularnosti. Koristićemo oznake

$$M^* = \limsup_{t \to \infty} \frac{x(qt)}{x(t)} \quad \text{i} \quad M_* = \liminf_{t \to \infty} \frac{x(qt)}{x(t)}. \tag{2.23}$$

Na osnovu (2.20) slediće da je

$$1 \leq \frac{x(qt)}{x(t)} \leq q^{\eta} < q^{\alpha_\lambda},$$

što dalje implicira $M^*, M_*, q^{\rho_1} \in [1, q^{\alpha_\lambda})$. Uslov (2.12) i primena Leme 2.3.4 impliciraju da je

$$\lim_{t \to \infty} (\mathcal{L}x)(t) = q^{-\alpha}(q-1)^{\alpha+1}B = f(q^{\rho_1}). \tag{2.24}$$

Sa druge strane, tražeći lim inf i lim sup kada $t \to \infty$ u jednakosti

$$\frac{a(t)}{a(qt)} \Phi\left(1 - \frac{x(t)}{x(qt)}\right) = \Phi\left(\frac{1}{q}\left(\frac{x(q^2t)}{x(qt)} - 1\right)\right) + \frac{((q-1)t)^{\alpha+1} b(t)}{a(qt)}, \tag{2.25}$$

dobija se da je $f(M^*) = f(M_*) = f(q^{\rho_1})$. Kako je u Lemi 2.3.2 dokazano da je funkcija f strogo rastuća na intervalu $[1, q^{\alpha_\lambda})$, zaključuje se da je $M^* = M_* = q^{\rho_1}$, tj. $x \in \mathcal{RV}_q(\rho_1)$.

Dokažimo egzistenciju rešenja $y \in \mathcal{RV}_q(\rho_2)$. Neka je

$$w(t) = \Phi\left(\frac{1}{q}\left(\frac{y(q^2t)}{y(qt)} - 1\right)\right), \quad t \in q^{\mathbb{N}_0}.$$

Jednačina (2.6) se tada može transformisati u jednačinu po nepoznatoj funkciji w :

$$\frac{a(t)}{a(qt)}\Phi\left(1 - \frac{1}{1 + q\Phi^{-1}\left(w\left(q^{-1}t\right)\right)}\right) - w(t) = \frac{((q-1)t)^{\alpha+1}b(t)}{a(qt)}, \quad t \in q^{\mathbb{N}_0}.$$

Dokažimo najpre egizstenciju rešenja ω navedene jednačine. Neka su konstante D i d izabrane kao u prvom delu dokaza. Izaberimo realnu konstantu $\varepsilon > 0$ tako da su ispunjeni uslovi

$$\frac{1}{d} \leq \frac{q^{-\lambda}(1+\varepsilon)^{-1} - q^{\alpha(\mu-1)}}{q^{-\lambda} - q^{\alpha(\mu-1)}} \quad \text{i} \quad q^{\alpha-\lambda-\mu(\alpha+1)}(1-\varepsilon)^{-1} < 1. \tag{2.26}$$

Neka su konstante t_0 i N izabrane tako da su uslovi (2.15) i (2.16) ispunjeni za svako $t \geq t_0$ i konstanta $\tilde{M}$ tako da je

$$\tilde{M} \leq \min\left\{N, (q-1)^{-(\alpha+1)}q^{\alpha}(q^{-\lambda}(1-\varepsilon)^{-1} - \Phi(q^{\mu-1} - q^{-1}))\right\}.$$

Uočimo skup

$$\Omega_2 = \left\{w \in \mathcal{X} : \Phi(q^{\mu-1} - q^{-1}) \leq w(t) \leq q^{-\lambda}(1-\varepsilon)^{-1} - \tilde{M}(q-1)^{\alpha+1}q^{-\alpha},\, t \geq t_0\right\},$$

gde je $\mathcal{X}$ isti Banahov prostor kao u prvom delu. Definišimo operator $\mathcal{H} : \Omega_2 \to \mathcal{X}$ na sledeći način

$$(\mathcal{H}w)(t) = \begin{cases} \dfrac{a(t)}{a(qt)}\Phi\left(1 - \dfrac{1}{1 + q\Phi^{-1}\left(w\left(q^{-1}t\right)\right)}\right) - \dfrac{((q-1)t)^{\alpha+1}b(t)}{a(qt)}, & t \in [qt_0, \infty)_q, \\[2ex] \Phi(q^{\mu-1} - q^{-1}), & t = t_0\,. \end{cases}$$

Primenom Banahove teoreme o fiksnoj tački biće dokazano da operator $\mathcal{H}$ ima fiksnu tačku u skupu Ω_2.

(i) *Operator $\mathcal{H}$ slika Ω_2 u samog sebe:* Za proizvoljno $\omega \in \Omega_2$ važiće

$$1 + q\Phi^{-1}\left(w\left(q^{-1}t\right)\right) \geq q^{\mu}, \quad t \in [qt_0, \infty)_q, \tag{2.27}$$

što uz primenu (2.8), (2.15), (2.16) i (2.26), implicira

$$\begin{aligned}
(\mathcal{H}w)(t) &\geq \frac{a(t)}{a(qt)}\Phi(1 - q^{-\mu}) - (q-1)^{\alpha+1}q^{-\alpha}\frac{D}{d} \\
&\geq q^{-\lambda}(1+\varepsilon)^{-1}\Phi(1 - q^{-\mu}) - \frac{1}{d}f(q^{\mu}) \\
&\geq q^{-\lambda}(1+\varepsilon)^{-1}\Phi(1 - q^{-\mu}) - \frac{q^{-\lambda}(1+\varepsilon)^{-1} - q^{\alpha(\mu-1)}}{q^{-\lambda} - q^{\alpha(\mu-1)}}f(q^{\mu}) \\
&= \Phi(q^{\mu-1} - q^{-1}),\; t \in [qt_0, \infty)_q.
\end{aligned}$$

Sa druge strane,

$$(\mathcal{H}w)(t) \leq \frac{p(t)}{p(qt)} - N(q-1)^{\alpha+1}q^{-\alpha} \leq q^{-\lambda}(1-\varepsilon)^{-1} - \tilde{M}(q-1)^{\alpha+1}q^{-\alpha}, \ t \in [qt_0, \infty)_q,$$

a osim toga važi i

$$\Phi(q^{\mu-1} - q^{-1}) = (\mathcal{H}w)(t_0) \leq q^{-\lambda}(1-\varepsilon)^{-1} - \tilde{M}(q-1)^{\alpha+1}q^{-\alpha}.$$

Ovim je dokazano da je $\mathcal{H}(\Omega_2) \subseteq \Omega_2$.

(*ii*) *Preslikavanje $\mathcal{H}$ je kontrakcija:* Neka je definisana funkcija

$$\mathcal{K}(x) = \frac{a(t)}{a(qt)}\Phi\left(1 - \frac{1}{1 + q\Phi^{-1}(x)}\right),$$

za $x \in [\Phi(q^{\mu-1} - q^{-1}), q^{-\lambda}(1-\varepsilon)^{-1} - \tilde{M}(q-1)^{\alpha+1}q^{-\alpha}]$. Za proizvoljne $w, z \in \Omega_2$, važiće

$$\begin{aligned}(\mathcal{H}w)(t) - (\mathcal{H}z)(t) &= \mathcal{K}(w(q^{-1}t)) - \mathcal{K}(z(q^{-1}t)) \\ &= \mathcal{K}'(\xi(q^{-1}t))(w(q^{-1}t) - z(q^{-1}t)), \quad t \in [qt_0, \infty)_q,\end{aligned} \tag{2.28}$$

gde je $\xi : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}$ funkcija takva da važi (2.21). Primenom (2.15), (2.26) i (2.27) zaključuje se da je

$$|\mathcal{K}'(x)| = \frac{p(t)}{p(qt)}\left|q^{\alpha}\left(1 + q\Phi^{-1}(x)\right)^{-\alpha-1}\right| \leq K = q^{\alpha-\lambda-\mu(\alpha+1)}(1-\varepsilon)^{-1} < 1,$$

za sve $x \in \left[\Phi(q^{\mu-1} - q^{-1}), q^{-\lambda}(1-\varepsilon)^{-1} - \tilde{M}(q-1)^{\alpha+1}q^{-\alpha}\right]$. Prema tome, iz (2.28) slediće

$$||\mathcal{H}w - \mathcal{H}z|| \leq K||w - z||, \ w, z \in \Omega_2,$$

te zaključujemo da je $\mathcal{H}$ kontraktivno preslikavanje.

Primena Banahove teoreme o fiksnoj tački obezbeđuje egzistenciju funkcije $w \in \Omega_2$ takve da je $w = \mathcal{H}w$. Stoga,

$$y(t) = \prod_{s \in [qt_0, t)_q} \frac{1}{1 + q\Phi^{-1}\left(w\left(sq^{-1}\right)\right)}, \quad t \in [qt_0, \infty)_q$$

je pozitivno, rastuće rešenje jednačine (2.1) definisano na intervalu $[qt_0, \infty)_q$.

Ostaje dokazati da je $y \in \mathcal{RV}_q(\rho_2)$. Biće korišćene oznake $Y^* = \limsup_{t\to\infty} y(qt)/y(t)$ i $Y_* = \liminf_{t\to\infty} y(qt)/y(t)$. Primenom (2.27), slediće da je $y(qt)/y(t) \geq q^{\mu}$, što implicira da $Y^*, Y_*, q^{\rho_2} \in (q^{\alpha_\lambda}, \infty)$. Slično prvom delu teoreme, u kojem je dokazano da je rešenje x q-pravilno promenljivo određenog indeksa regularnosti, dobija se da je $f(Y^*) = f(Y_*) = f(q^{\rho_2})$. Stroga monotonost funkcije f na intervalu $[q^{\alpha_\lambda}, \infty)$ implicira da je $Y^* = Y_* = q^{\rho_2}$. Odatle će slediti da je $y \in \mathcal{RV}_q(\rho_2)$.

Razmotrimo sada slučaj kada je $B < 0$. Kako je granična vrednost u (2.12) negativna, koeficijent b jednačine (2.1) je eventualno negativna funkcija. Kako je ranije pokazano, u ovom slučaju su klase rešenja $\mathbb{M}^+$ i $\mathbb{M}^-$ neprazne. Stoga, neka je x proizvoljno pozitivno i opadajuće rešenje jednačine (2.1) na intervalu $[t_0, \infty)_q$, za neko $t_0 \in q^{\mathbb{N}_0}$. Neka su λ_i, $i = 1, 2$ realni i različiti koreni jednačine (2.7) i ρ_i, $i = 1, 2$ definisani kao u prethodnom delu. Tada, primenom Leme 2.3.4 slediće da važi (2.24). Neka su M^*, M_* definisani kao u (2.23). Najpre, primetimo da je slučaj $M_* = 0$ nemoguć. Zaista, ukoliko bi važilo da je $M_* = 0$, tražeći lim inf kada $t \to \infty$ jednakosti (2.25), dobija se da je $\liminf_{t\to\infty}(\mathcal{L}x)(t) = -\infty$, čime dolazimo do kontradikcije.

Dakle, kako je x pozitivno opadajuće rešenje, slediće da je $0 < M_* \leq M^* \leq 1$. Tražeći lim sup i lim inf kada $t \to \infty$ u jednakosti (2.25), dobija se da je $f(M^*) = f(M_*) = f(q^{\rho_1})$, što implicira $M^* = M_* = q^{\rho_1}$, obzirom na činjenicu da je f strogo rastuća funkcija na $(0, q^{\alpha_\lambda})$. Ovim je pokazano da je proizvoljno eventualno monotono opadajuće rešenje x q-pravilno promenljivo rešenje jednačine (2.1) indeksa regularnosti ρ_1. Na taj način dokazano je da su sva opadajuća rešenja jednačine (2.1) q-pravilno promenljiva indeksa regularnosti ρ_1. Drugi deo tvrđenja, da su sva rastuća rešenja q-pravilno promenljiva indeksa regularnosti ρ_2, dokazuje se analogno. □

Teorema 2.4.2. *Neka je $a \in \mathcal{RV}_q(\lambda)$, $\lambda > \alpha$. Postoje eventualno pozitivna rešenja jednačine (2.1)*

$$x \in \mathcal{RV}_q(\rho_1) \quad i \quad y \in \mathcal{RV}_q(\rho_2),$$

gde su indeksi regularnosti ρ_1 i ρ_2 takvi da su $\lambda_1 = \Phi([\rho_1]_q)$ i $\lambda_2 = \Phi([\rho_2]_q)$ realni i različiti koreni jednačine (2.7) ako i samo važi (2.12). Za indekse regularnosti ρ_1 i ρ_2 važi sledeće:

(i) $1 - \lambda/\alpha < \rho_1 < \alpha_\lambda < \rho_2 < 0$ *ako i samo ako* $0 < B < \left|[\alpha_\lambda]_q\right|^{\alpha+1}$;

(ii) $\rho_1 = 1 - \lambda/\alpha$ *and* $\rho_2 = 0$ *ako i samo ako* $B = 0$;

(iii) $\rho_1 < 1 - \lambda/\alpha < 0 < \rho_2$ *ako i samo ako* $B < 0$.

Ukoliko je ispunjen uslov (2.12) i $B < 0$, sva eventualno opadajuća rešenja jednačine (2.1) su q-pravilno promenljiva indeksa regularnosti ρ_1 i sva eventualno rastuća rešenja su q-pravilno promenljiva indeksa regularnosti ρ_2, tj. $\mathbb{M}^- = \mathbb{M}_{RV}(\rho_1)$ i $\mathbb{M}^+ = \mathbb{M}_{RV}(\rho_2)$.

Dokaz: Dokaz da je uslov (2.12) neophodan za egzistenciju bar dva q-pravilno promenljiva rešenja x i y sa određenim indeksima regularnosti je isti kao pomenuti smer dokaza Teoreme 2.4.1. Stoga, navodimo u nastavku samo osnovne segmente dokaza da je uslov (2.12) dovoljan za egzistenciju pomenutih rešenja.

Pretpostavimo da je uslov (2.12) ispunjen.

Razmotrimo najpre slučaj $0 \leq B < \left|[\alpha_\lambda]_q\right|^{\alpha+1}$. Neka su konstante $D, \lambda_\eta, \lambda_\mu$ izabrane kao u Teoremi 2.4.1 i neka su $\lambda_1, \lambda_2, \rho_1, \rho_2$ definisani kao u pomenutoj teoremi. Kako bi bila dokazana egzistencija q-pravilno promenljivog rešenja $x \in \mathcal{RV}_q(\rho_1)$, najpre će biti dokazana egzistencija rešenja w jednačine (2.13). Neka je konstanta d izabrana kao u prethodnoj teoremi i neka je konstanta $\varepsilon > 0$ takva da je

$$\frac{1}{d} \leq \frac{q^{-\lambda}(1-\varepsilon)^{-1} - q^{\alpha(\eta-1)}}{q^{-\lambda} - q^{\alpha(\eta-1)}} \quad \text{i} \quad q^{-\alpha+\lambda+\eta(\alpha+1)}(1+\varepsilon) < 1\,.$$

Osim toga, izaberimo konstante $N \geq 0$ i $t_0 \in q^{\mathbb{N}_0}$ tako da su uslovi (2.15) i (2.16) zadovoljeni. Očigledno, konstanta N može biti izabrana tako da je

$$\tilde{N} = (q-1)^{\alpha+1} q^{-\alpha} N - q^{-\alpha} \leq q^{-\lambda}(1-\varepsilon)^{-1}\Phi(1-q^{-\eta}) .$$

Primenom Banahove teoreme o fiksnoj tački dokazuje se da operator $\mathcal{F}$ definisan sa (2.19) ima fiksnu tačku u skupu

$$\Omega = \{w \in \mathcal{X} : \tilde{N} \leq w(t) \leq q^{-\lambda}(1-\varepsilon)^{-1}\Phi(1-q^{-\eta}),\, t \geq t_0\},$$

gde je $\mathcal{X}$ Banahov prostor definisan u Teoremi 2.4.1. Tada, funkcija x definisana sa (2.22) jeste rešenje jednačine (2.1). Kao u dokazu Teoreme 2.4.1 dokazuje se da je ovako definisano rešenje $x \in \mathcal{RV}_q(\rho_1)$.

Ostaje da razmotrimo slučaj kada je $B < 0$. Neka je x proizvoljno opadajuće pozitivno rešenje jednačine (2.1). Neka su M^*, M_* definisani u (2.23). Kao u dokazu Teoreme 2.4.1, u slučaju $B < 0$, utvrđuje se da važi $M^*, M_* \in (0,1]$ i $f(M^*) = f(M_*) = f(q^{\rho_1})$. Kako je $f(q^{\rho_1}) = (q-1)^{\alpha+1} q^{\alpha} B < 0$, mora važiti da $M^*, M_*, q^{\rho_1} \in (0, q^{1-\lambda/\alpha})$. Obzirom da je funkcija f strogo rastuća na intervalu $(0, q^{1-\lambda/\alpha})$, sledi zaključak da je $M^* = M_* = q^{\rho_1}$, tj. $x \in \mathcal{RV}_q(\rho_1)$.

U oba slučaja, dokaz egzistencije rešenja $y \in \mathcal{RV}_q(\rho_2)$ je sličan delu dokaza u prethodnoj teoremi i biće izostavljen. $\square$

Uporedimo dobijene rezultate sa odgovarajućim rezultatima u neprekidnom slučaju. U radu [49] dokazano je da u slučaju $\lambda < \alpha$, polulinearna diferencijalna jednačina (2.2) ima par generalizovanih RV-rešenja u odnosu na A, gde je $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)^{-1/\alpha} ds$, ako i samo ako je

$$\lim_{t\to\infty} A(t)^{\alpha} \int_t^{\infty} b(s)ds = c \in \Big(-\infty, \frac{\alpha^{\alpha}}{(\alpha+1)^{\alpha+1}}\Big).$$

Indeksi regularnosti ovih pravilno promenljivih rešenja su $\Phi^{-1}(\gamma_i)$, $i = 1, 2$, gde su $\gamma_1 < \gamma_2$ realni koreni jednačine

$$|\gamma|^{1+\frac{1}{\alpha}} - \gamma + c = 0. \tag{2.29}$$

Sa druge strane, ukoliko je $\lambda > \alpha$, jednačina (2.2) poseduje par generalizovanih RV-rešenja u odnosu na $1/\hat{A}$, gde je $\hat{A}(t) = \int_t^{\infty} a(s)^{-1/\alpha} ds$, ako i samo ako je

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\hat{A}(t)} \int_t^{\infty} \hat{A}(s)^{\alpha+1} b(s)ds = c, \quad c \in \Big(-\infty, \frac{\alpha^{\alpha}}{(\alpha+1)^{\alpha+1}}\Big).$$

Indeksi regularnosti ovih rešenja su $\Phi^{-1}(\nu_i)$, $i = 1, 2$, gde su $\nu_1 < \nu_2$ realni koreni jednačine

$$|\nu|^{1+\frac{1}{\alpha}} + \nu + c = 0 . \tag{2.30}$$

Dokazaćemo da ovi rezultati odgovaraju rezultatima Teoreme 2.4.1 i Teoreme 2.4.2 kada $q \to 1+$. Zaista, to će biti posledica sledećih zapažanja:

(*i*) Za funkciju h_λ definisanu sa (2.3), važiće da $h_\lambda(x) \to |x|^{1+\frac{1}{\alpha}} + \frac{\lambda}{\alpha} x$ kada $q \to 1+$, te jednačina (2.7) postaje

$$|x|^{1+\frac{1}{\alpha}} + x\Big(\frac{\lambda}{\alpha} - 1\Big) + \frac{B}{\alpha} = 0. \tag{2.31}$$

(*ii*) Pretpostavljajući da je koeficijent a u (2.2) pravilno promenljiva funkcija indeksa λ, može se proveriti da je

$$x \in \mathcal{RV}(\rho_i),\ i = 1,2 \quad \text{ako i samo ako je} \quad x \in \mathrm{RV}_A\Big(\frac{\alpha\rho_i}{\alpha-\lambda}\Big),\ i = 1,2$$

$$x \in \mathcal{RV}(\rho_i),\ i = 1,2 \quad \text{ako i samo ako je} \quad x \in \mathrm{RV}_{1/\hat{A}}\Big(\frac{\alpha\rho_i}{\lambda-\alpha}\Big),\ i = 1,2$$

(*iii*) Neka je $c = B\alpha^\alpha|\alpha-\lambda|^{-\alpha-1}$.

(*iii*.1) $\lambda_i = \Phi(\rho_i)$, $i = 1,2$ su realni koreni jednačine (2.31) ako i samo ako su $\gamma_i = \Phi\Big(\frac{\alpha\rho_i}{\alpha-\lambda}\Big)$, $i = 1,2$ realni koreni jednačine (2.29);

(*iii*.2) $\lambda_i = \Phi(\rho_i)$, $i = 1,2$ realni koreni jednačine (2.31) ako i samo ako su $\nu_i = \Phi\Big(\frac{\alpha\rho_i}{\lambda-\alpha}\Big)$, $i = 1,2$ realni koreni jednačine (2.30).

Primetimo da ukoliko je $a \in \mathcal{RV}_q(\alpha)$, u uslovu (2.12) mora biti $B < 0$, tj. koeficijent b jednačine (2.1) mora biti eventualno negativan. Stoga, sledeća teorema se dokazuje na isti način kao Teorema 2.4.1 (*iii*) i Teorema 2.4.2 (*iii*).

Teorema 2.4.3. *Neka je $a \in \mathcal{RV}_q(\alpha)$. Postoje eventualno pozitivna rešenja jednačine* (2.1)

$$x \in \mathcal{RV}_q(\rho_1) \quad i \quad y \in \mathcal{RV}_q(\rho_2),$$

gde su indeksi regularnosti ρ_1 i ρ_2 takvi da su $\lambda_1 = \Phi([\rho_1]_q)$ i $\lambda_2 = \Phi([\rho_2]_q)$ realni i različiti koreni jednačine (2.7) *ako i samo ako važi* (2.12)*. Za indekse regularnosti ρ_1 i ρ_2 važi da je $\rho_1 < 0 < \rho_2$. U tom slučaju sva eventualno opadajuća rešenja jednačine* (2.1) *su q-pravilno promenljiva indeksa regularnosti ρ_1 i sva eventualno rastuća rešenja su q-pravilno promenljiva indeksa regularnosti ρ_2, tj. $\mathbb{M}^- = \mathbb{M}_{RV}(\rho_1)$ i $\mathbb{M}^+ = \mathbb{M}_{RV}(\rho_2)$.*

Napomena 2.4.1. Posmatrajući graničnu vrednosti kada $q \to 1+$ u Teoremi 2.4.3, dobijaju se rezultati koji odgovaraju rezultatima dokazanim u neprekidnom slučaju [107, Teorema 5.7].

U narednoj teoremi razmatran je slučaj u kojem jednačina (2.7) ima dvostruki realan koren. Određeni su potrebni i dovoljni uslovi za egzistenciju q-pravilno promenljivih rešenja jednačine (2.1) pod pretpostavkom da je ona neoscilatorna.

Teorema 2.4.4. *Neka je jednačina* (2.1) *neoscilatorna i neka je $a \in \mathcal{RV}_q(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}$. Jednačina* (2.1) *ima eventualno pozitivno rešenje $x \in \mathcal{RV}_q(\alpha_\lambda)$ ako i samo ako*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{q^\alpha t^{\alpha+1} r(t)}{p(qt)} = \big|[\alpha_\lambda]_q\big|^{\alpha+1}. \tag{2.32}$$

U tom slučaju, sva eventualno pozitivna rešenja biće q-pravilno promenljiva indeksa regularnosti α_λ, tj. $\mathbb{M} = \mathbb{M}_{RV}(\alpha_\lambda)$.

Dokaz: Primetimo da u slučaju kada je $B = \Phi([\alpha_\lambda]_q)[\alpha_\lambda]_q = \left|[\alpha_\lambda]_q\right|^{\alpha+1}$ jednačina (2.7) ima realan dvostruki koren $x_0 = \Phi([\alpha_\lambda]_q)$. Zaista, primena Lema 2.3.2 i 2.3.4 implicira

$$\begin{aligned}[][\alpha]_q\big(\Phi([\alpha_\lambda]_q) - h_\lambda(\Phi([\alpha_\lambda]_q))\big) &= [\alpha_\lambda]_q\Phi([\alpha_\lambda]_q)\Big[-\frac{\lambda}{\alpha} + 1 + \alpha_\lambda\Big]_{q^\alpha} \\ &= f(\alpha_\lambda)q^\alpha(q-1)^{-(\alpha+1)} = \left|[\alpha_\lambda]_q\right|^{\alpha+1}.\end{aligned}$$

Dokaz da je uslov (2.32) neophodan za egzistenciju q-pravilno promenljivog rešenja x je isti kao dokaz istog smera u Teoremi 2.4.1 Dokažimo da je uslov (2.32) dovoljan za egzistenciju q-pravilno promenljivog rešenja x. Neka je x proizvoljno eventualno pozitivno rešenje. Tada je

$$\lim_{t\to\infty}(\mathcal{L}x)(t) = (q-1)^{\alpha+1}\lim_{t\to\infty}\frac{t^{\alpha+1}b(t)}{a(qt)} = (q-1)^{\alpha+1}q^{-\alpha}\left|[\alpha_\lambda]_q\right|^{\alpha+1} = f(q^{\alpha_\lambda}).$$

Neka su M^*, M_* definisani u (2.23). Iz jednakosti (2.25) slediće da je $f(M^*) = f(M_*) = f(q^{\alpha_\lambda})$. Kako funkcija f dostiže maksimum u tački q^{α_λ}, zaključuje se da je $M^* = M_* = q^{\alpha_\lambda}$. Na ovaj način, dokazano je da su sva eventualno pozitivna rešenja jednačine (2.1) q-pravilno promenljiva rešenja indeksa regularnosti α_λ. $\square$

2.4.2 Polulinearna jednačina sa $\mathcal{RV}_q-$koeficijentom a i negativnim koeficijentom b

U ovom poglavlju biće razmatrana jednačina (2.1) u kojoj za koeficijente jednačine važi

$$a \in \mathcal{RV}_q(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad b(t) < 0, \quad t \geq t_0, \tag{2.33}$$

za neko $t_0 \in q^{\mathbb{N}_0}$. Svako netrivijalno rešenje jednačine (2.1) je u tom slučaju neoscilatorno i klase $\mathbb{M}^+$ i $\mathbb{M}^-$ su neprazne. Pod pretpostavkom da jednačina (2.1) poseduje q-pravilno promenljiva rešenja, biće ispitani uslovi pod kojim će sva eventualno pozitivna rešenja biti q-pravilno promenljiva.

Kao što je dokazano u Teoremama 2.4.1 - 2.4.4, uslov (2.12) obezbeđuje egzistenciju q-pravilno promenljivih rešenja. Međutim, pretpostavka da je koeficijent b jednačine (2.1) eventualno negativna funkcija implicira da će za graničnu vrednost B važiti da je $B \leq 0$. U nastavku će biti odvojeno razmatrani slučajevi $B < 0$ i $B = 0$.

Ukoliko je uslov (2.12) ispunjen i $B < 0$, dokazano je da su u slučaju $\lambda < \alpha$ (Teorema 2.4.1 (iii)), $\lambda > \alpha$ (Teorema 2.4.2 (iii)) i $\lambda = \alpha$ (Teorema 2.4.3) sva eventualno pozitivna rešenja jednačince (2.1) q-pravilno promenljiva. Osim toga, sva eventualno opadajuća (rastuća) rešenja će imati isti indeks regularnosti.

Ostaje da razmotrimo slučaj kada je $B = 0$. Na isti način kao u navedenim teoremama u prethodnom paragrafu, može biti dokazano da su u slučaju $\lambda < \alpha$ sva opadajuća eventualno pozitivna rešenja q-sporo promenljiva i u slučaju $\lambda > \alpha$ sva eventualno pozitivna rastuća rešenja q-sporo promenljiva.

Teorema 2.4.5. *Neka koeficijenti jednačine* (2.1) *zadovoljavaju uslov* (2.33) *i neka je*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^{\alpha+1}b(t)}{a(t)} = 0. \tag{2.34}$$

Za rešenja jednačine (2.1) *važe sledeća tvrđenja:*

(i) Ukoliko je $\lambda < \alpha$, *tada je* $\mathbb{M}^- \subseteq \mathbb{M}_{SV}$.

(ii) Ukoliko je $\lambda > \alpha$, *tada je* $\mathbb{M}^+ \subseteq \mathbb{M}_{SV}$.

(iii) Ukoliko je $\lambda = \alpha$, *tada je* $\mathbb{M} = \mathbb{M}_{SV}$.

Dokaz: (i) Neka je $x \in \mathbb{M}^-$ proizvoljno rešenje jednačine (2.1). Neka su λ_i, $i = 1, 2$ realni i različiti koreni jednačine (2.7) u kojoj je $B = 0$ i ρ_i, $i = 1, 2$ definisani kao u dokazu Teoreme 2.4.1. Tada je $\rho_1 = 0$ i $\rho_2 = 1 - \lambda/\alpha$.

Uslov (2.34) implicira da je

$$\lim_{t\to\infty} (\mathcal{L}x)(t) = 0.$$

Neka su M^*, M_* definisani kao u (2.23). Analogno kao u prethodnim teorema zaključuje se da slučaj $M_* = 0$ nije moguć. Kako je x pozitivno, opadajuće rešenje, slediće da je $0 < M_* \le M^* \le 1$.

Tražeći lim sup i lim inf kada $t \to \infty$ u jednakosti (2.25), dobija se da je $f(M^*) = f(M_*) = 0$, što implicira $M^* = M_* = 1$, obzirom na činjenicu da funkcija f ima nule u tačkama $x = 1$ i $x = q^{1-\lambda/\alpha} > 1$. Ovim je pokazano da je proizvoljno eventualno monotono opadajuće rešenje x q-sporo promenljivo rešenje jednačine (2.1). Na taj način dokazano je da su sva opadajuća rešenja jednačine (2.1) q-sporo promenljiva rešenja.

(ii) Neka je $x \in \mathbb{M}^+$ proizvoljno rešenje jednačine (2.1). Analogno slučaju (i), koristeći iste oznake, zaključujemo da je $f(M^*) = f(M_*) = 0$, gde su $M_*, M^* \ge 1$, obzirom da je x evenutalno rastuća funkcija. Kako su jedine nule funkcije f tačke $x = 1$ i $x = q^{1-\lambda/\alpha} < 1$, zaključujemo da je $M^* = M_* = 1$, što dalje implicira da je rešenje x q-sporo promenljivo, tj. važiće $\mathbb{M}^+ \subseteq \mathbb{M}_{SV}$.

(iii) U slučaju kada je $\lambda = \alpha$, biće $\alpha_\lambda = 0$, te je uslov (2.34) ekvivalentan uslovu (2.32). Tvrđenje važi na osnovu Teoreme 2.4.4. $\square$

Međutim, ukoliko posmatramo slučaj $\lambda < \alpha$ i eventualno rastuća rešenja, postupak korišćen u dokazu prethodne teoreme nije moguće primeniti da bi se pokazalo da su sva eventualno rastuća rešenja jednačine (2.1) q-pravilno promenljiva. Analogno je i u slučaju $\lambda > \alpha$ i eventualno opadajućim rešenjima.

Kako bismo dali odgovor na pitanje da li su sva rešenja jednačine (2.1) q-pravilno promenljiva u preostalim slučajevima, posmatrajmo jednačinu (2.1) u kojoj koeficijenti, osim uslova (2.34) zadovoljavaju i sledeće uslove:

$$a \in \mathcal{RV}_q(\lambda), \quad \lambda \neq \alpha, \quad |b| \in \mathcal{RV}_q(\lambda - \alpha - 1), \quad b(t) < 0, \quad t \ge t_0. \tag{2.35}$$

U nastavku će biti pokazano da pod pretpostavkom da jednačina (2.1) *poseduje* q*-pravilno promenljivo rešenje i da je koeficijent* b *evenutalno negativan, takav da je* $|b| \in \mathcal{RV}_q(\mu)$, *mora biti*

$$\mu = \lambda - \alpha - 1. \tag{2.36}$$

Pretpostavimo da je $x \in \mathcal{RV}_q(\rho)$, $\rho \in \mathbb{R}$ rešenje jednačine (2.1) definisano na intervalu $[t_1, \infty)$, za neko $t_1 \in q^{\mathbb{N}_0}$ i $|b| \in \mathcal{RV}_q(\mu)$. Tada se q-pravilno promenljive funkcije x i $|b|$ mogu predstaviti u obliku

$$x(t) = t^\rho l_x(t), \quad |b| = t^\mu l_b(t), \quad l_x, l_b \in \mathcal{SV}_q, \quad t \geq t_1.$$

Funkcija $x^{[1]}$ je eventualno rastuća funkcija konstantnog znaka, te je $\lim_{t\to\infty} |x^{[1]}(t)| = c \in [0, \infty]$.

Razmatrajmo najpre slučaj $c = \infty$. Integracijom jednačine (2.1) na intervalu $[t_1, t]_q$, dobija se

$$x^{[1]}(t) - x^{[1]}(t_1) = -\int_{t_1}^{t} b(s)x(qs)^\alpha d_q s = \int_{t_1}^{t} s^{\mu+\rho\alpha} l_b(s) l_x(qs) d_q s, \quad t \geq t_1. \tag{2.37}$$

Kako desna strana jednakosti (2.37) konvergira beskonačnosti kada $t \to \infty$, Karamatina integraciona teorema implicira da mora važiti $\mu + \rho\alpha + 1 \geq 0$.

(i) Ukoliko je $\mu + \rho\alpha + 1 = 0$, primena Karamatine integracione teoreme implicira da je funkcija sa desne strane jednakosti (2.37) q-sporo promenljiva, što dalje implicira da je $x^{[1]} \in \mathcal{SV}_q$. Primena Teoreme 1.4.2 (iv) i (vi) dovodi do zaključka da je $x \in \mathcal{RV}_q\left(1 - \lambda/\alpha\right)$, tj. $\rho = 1 - \lambda/\alpha$. Iz uslova $\mu + \rho\alpha + 1 = 0$, slediće (2.36).

(ii) Ukoliko je $\mu + \rho\alpha + 1 > 0$, tada primena Karamatine integracione teoreme pri integraciji u (2.37) daje

$$x^{[1]}(t) \sim \frac{t^{\mu+\rho\alpha+1}}{[\mu + \rho\alpha + 1]_q} l_b(t) l_x(t), \quad t \to \infty.$$

Stoga, primena Teoreme 1.4.2 (vii) implicira da je $x^{[1]} \in \mathcal{RV}_q(\mu+\rho\alpha+1)$, odakle će dalje slediti da je $x \in \mathcal{RV}_q\left((\mu + \rho\alpha + 1 - \lambda)/\alpha + 1\right)$, tj.

$$\frac{\mu + \rho\alpha + 1 - \lambda}{\alpha} + 1 = \rho,$$

odakle sledi (2.36).

Analogno, u slučaju $c \geq 0$, integracijom jednačine (2.1) na intervalu $[t, \infty)$ i primenom Karamatine integracione teoreme, dokazuje se da mora važiti (2.36).

Naredna teorema dokazuje da su pod pretpostavkama (2.34) i (2.35) u preostalim slučajevima sva eventualno pozitivna rešenja q-pravilno promenljiva.

Teorema 2.4.6. *Neka koeficijenti jednačine (2.1) zadovoljavaju uslove (2.34) i (2.35).*

(i) Ako je $\lambda < \alpha$, tada je $\mathbb{M}^+ = \mathbb{M}_{RV}\left(1 - \lambda/\alpha\right)$ i $\mathbb{M}^- = \mathbb{M}_{SV}$.

(ii) Ako je $\lambda > \alpha$, tada je $\mathbb{M}^- = \mathbb{M}_{RV}\left(1 - \lambda/\alpha\right)$ i $\mathbb{M}^+ = \mathbb{M}_{SV}$.

Dokaz: Dokaz se zasniva na principu reciprociteta. Imajući u vidu pretpostavke teoreme, proverimo koje uslove će ispunjavati koeficijenti jednačine (2.9), definisani u (2.10). Primetimo da je

$$\hat{a} \in \mathcal{RV}_q(\hat{\lambda}), \quad \hat{\lambda} \neq \hat{\alpha}, \quad |\hat{b}| \in \mathcal{RV}_q(\hat{\lambda} - \hat{\alpha} - 1), \quad \hat{\lambda} = 1 - \frac{\lambda}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}. \tag{2.38}$$

Osim toga, važiće

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^{\hat{\alpha}+1}\hat{b}(t)}{\hat{a}(t)} = \lim_{t\to\infty} \operatorname{sgn} b(t) \left(\frac{q^{\alpha}t^{\alpha+1}|b(t)|}{a(qt)}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = 0, \tag{2.39}$$

te zaključujemo da koeficijenti jednačine (2.9) zadovoljavaju uslov (2.34) Teoreme 2.4.5.

(i) Primenom Teoreme 2.4.5 (i) važiće da je $\mathbb{M}^- \subseteq \mathbb{M}_{SV}$. Neka je x proizvoljno rastuće rešenje jednačine (2.1) na intervalu $[t_0,\infty)_q$. Tada je $u(t) = x^{[1]}(t)$, $t \geq t_0$ pozitivno, rastuće rešenje jednačine (2.9). Iz uslova $\lambda < \alpha$ sledi da je $\hat{\lambda} > \hat{\alpha}$, te primenom Teoreme 2.4.5 (ii) na jednačinu (2.9) zaključuje se da je $u \in \mathcal{SV}_q$. Ovo dalje implicira da za rešenje x važi da je $x \in \mathcal{RV}_q\left(1-\lambda/\alpha\right)$. Posledično, kako je x proizvoljno rastuće rešenje jednačine (2.1), sledi da za jednačinu (2.1) važi da je $\mathbb{M}^+ \subseteq \mathbb{M}_{RV}\left(1-\lambda/\alpha\right)$.

Kako bismo dokazali tražene skupovne jednakosti, posmatrajmo q-pravilno promenljiva rešenja jednačine (2.1). Neka je x proizvoljno q-sporo promenljivo rešenje jednačine (2.1). Dokažimo da ovo rešenje pripada klasi $\mathbb{M}^-$. Pretpostavimo suprotno, neka je x eventualno monotono rastuće rešenje, tj. $x \in \mathbb{M}^+$. Na osnovu prethodnog paragrafa, kako je $\mathbb{M}^+ \subseteq \mathbb{M}_{RV}\left(1-\lambda/\alpha\right)$, slediće da je rešenje x q-pravilno promenljivo indeksa regularnosti $1-\lambda/\alpha$, te dolazimo do kontradikcije. Dakle, $\mathbb{M}_{SV} \subseteq \mathbb{M}^-$. Svako $\mathcal{RV}_q$-rešenje x indeksa regularnosti $1-\lambda/\alpha > 0$ je eventualno strogo monotono rastuće, pa zaključujemo da je $\mathbb{M}_{RV}\left(1-\lambda/\alpha\right) \subseteq \mathbb{M}^+$.

(ii) Primenom Teoreme 2.4.5 (ii) važiće da je $\mathbb{M}^+ \subseteq \mathbb{M}_{SV}$. Neka je x prozivoljno opadajuće rešenje jednačine (2.1) na intervalu $[t_0,\infty)_q$. Tada je $u(t) = -x^{[1]}(t)$, $t \geq t_0$ pozitivno opadajuće rešenje jednačine (2.9). Iz uslova $\lambda > \alpha$ sledi da je $\hat{\lambda} < \hat{\alpha}$, te primenom Teoreme 2.4.5 (i) na jednačinu (2.9) zaključuje se da je $u \in \mathcal{SV}_q$. Ovo dalje implicira da za rešenje x važi da je $x \in \mathcal{RV}_q\left(1-\lambda/\alpha\right)$. Posledično, kako je x proizvoljno opadajuće rešenje jednačine (2.1), sledi da za jednačinu (2.1) važi da je, $\mathbb{M}^- \subseteq \mathbb{M}_{RV}\left(1-\lambda/\alpha\right)$. Analogno kao u delu (i) dokazuju se preostale skupovne inkluzije. $\square$

2.5 Asimptotska reprezentacija $\mathcal{RV}_q-$rešenja

2.5.1 Polulinearna q-diferencna jednačina sa $\mathcal{RV}_q-$koeficijentima a i b

U ovom poglavlju biće razmatrana asimptotska reprezentacija q-pravilno promenljivih rešenja jednačine (2.1) pod pretpostavkom da za koeficijente jednačine važi

$$a \in \mathcal{RV}_q(\lambda),\ \lambda \neq \alpha,\ b \ \text{ je eventualno jednog znaka, } |b| \in \mathcal{RV}_q(\lambda-\alpha-1) \tag{2.40}$$

i da je uslov (2.34) ispunjen. Koeficijenti a i b se tada mogu predstaviti u obliku

$$a(t) = t^{\lambda} l_a(t), \quad |b(t)| = t^{\lambda-\alpha-1} l_b(t), \quad l_a, l_b \in \mathcal{SV}_q, \quad t \in q^{\mathbb{N}_0}.$$

Teorema 2.4.1 (ii) i Teorema 2.4.2 (ii) tada impliciraju da je

$$\mathbb{M}_{RV}\left(1-\frac{\lambda}{\alpha}\right) \neq \emptyset \quad \text{i} \quad \mathbb{M}_{SV} \neq \emptyset,$$

te će biti određene asimptotske formule ovih rešenja.

Štaviše, pod ovim pretpostavkama, u slučaju kada je b eventualno negativna funkcija, Teorema 2.4.6 implicira da je u slučaju $\lambda < \alpha$,

$$\mathbb{M}^+ = \mathbb{M}_{RV}\left(1 - \frac{\lambda}{\alpha}\right) \quad \text{i} \quad \mathbb{M}^- = \mathbb{M}_{SV},$$

odnosno, u slučaju $\lambda > \alpha$ je

$$\mathbb{M}^- = \mathbb{M}_{RV}\left(1 - \frac{\lambda}{\alpha}\right) \quad \text{i} \quad \mathbb{M}^+ = \mathbb{M}_{SV}.$$

Stoga, određivanjem asimptotskih formula za q-pravilno promenljiva rešenja, u ovom slučaju, određujemo asimptotske formule za sva eventualno pozitivna rešenja jednačine (2.1).

Uvedimo sledeće oznake

$$\delta = \Phi^{-1}\left(\frac{1}{[\lambda - \alpha]_q}\right) \quad \text{i} \quad G(t) = \Phi^{-1}\left(\frac{tb(t)}{a(t)}\right), t \in q^{\mathbb{N}_0}. \tag{2.41}$$

Naredna pomoćna lema će biti veoma korisna u određivanju asimptotskih formula za q-pravilno promenljiva rešenja jednačine (2.1).

Lema 2.5.1. *Neka koeficijenti jednačine (2.1) zadovoljavaju uslov (2.40). Ako je x q-sporo promenljivo rešenje jednačine (2.1), tada je*

$$D_q \ln x(t) = -(1 + o(1))\delta G(t), \quad t \to \infty. \tag{2.42}$$

Dokaz: Pretpostavimo da je x q-sporo promenljivo rešenje jednačine (2.1) definisano na intervalu $[t_0, \infty)_q$, za neko $t_0 \in q^{\mathbb{N}_0}$. Tada je ispunjen uslov (2.34). Bez gubljenja opštosti, pretpostavimo da je koeficijent b konstantnog znaka na intervalu $[t_0, \infty)_q$.

(i) Najpre razmotrimo slučaj $b(t) < 0$, $t \geq t_0$. Neka je najpre $\lambda < \alpha$. Primena Teoreme 2.4.6 implicira da je x opadajuće rešenje, dok pretpostavka $\lambda < \alpha$ implicira da je $I_a = \infty$. Primena Leme 2.2.1 implicira da će za kvazi izvod rešenja x važiti da je $\lim_{t\to\infty} x^{[1]}(t) = 0$. Integraljenjem jednačine (2.1) na intervalu $[t, \infty)_q$, dobijamo da važi

$$-x^{[1]}(t) \;=\; -\int_t^\infty b(s)x(qs)^\alpha\, d_q s = \int_t^\infty s^{\lambda-\alpha-1} l_b(s) x(qs)^\alpha d_q s,\; t \geq t_0. \tag{2.43}$$

Primena Karamatine integracione teoreme u (2.43) dovodi do

$$-x^{[1]}(t) \sim -\frac{t^{\lambda-\alpha} l_b(t) x(t)^\alpha}{[\lambda - \alpha]_q} = \frac{tb(t)x(t)^\alpha}{[\lambda - \alpha]_q},\; t \to \infty,$$

što dalje implicira

$$-\frac{D_q x(t)}{x(t)} \sim \Phi^{-1}\left(\frac{tb(t)}{a(t)[\lambda - \alpha]_q}\right),\; t \to \infty.$$

Kako je $x \in \mathcal{SV}_q$, koristeći Teoremu 1.4.2 (*viii*), zaključujemo da je

$$-D_q \ln x(t) \sim \delta G(t), t \to \infty,$$

što nas dovodi do tražene asimptotske formule (2.42).

Razmotrimo sada slučaj $\lambda > \alpha$. Primena Teoreme 2.4.6 tada implicira da je rešenje x eventualno rastuća funkcija. Uslov $\lambda > \alpha$, uz primenu Karamatine integracione teoreme implicira da je integral I_b divergentan. Na osnovu Leme 2.2.3 zaključujemo da je $\lim_{t\to\infty} x^{[1]}(t) = \infty$. Integracija jednačine (2.1) na $[t_0, t]$ implicira

$$x^{[1]}(t) = x^{[1]}(t_0) + \int_{t_0}^{t} s^{\lambda-\alpha-1} l_b(s) x(qs)^\alpha d_q s \sim \frac{-tb(t)x(t)^\alpha}{[\lambda-\alpha]_q},\ t \geq t_0.$$

Nastavljajući na isti način kao u prethodnom delu, primena Teoreme 1.4.2 (*viii*) i Teoreme 1.4.4 impliciraju da u ovom slučaju x takođe zadovoljava (2.42).

(*ii*) Neka je $b(t) > 0$, $t \geq t_0$. Razmotrimo najpre slučaj $\lambda < \alpha$. Kako u ovom slučaju važi da je $\mathbb{M}^- = \emptyset$, x mora biti rastuće rešenje koje zadovoljava $\lim_{t\to\infty} x^{[1]}(t) = 0$. Stoga, nakon integracije jednačine (2.1) na intervalu $[t, \infty)$ i primenom Karamatine integracione teoreme, sledi

$$x^{[1]}(t) = \int_t^\infty b(s)x(qs)^\alpha\, d_q s = \int_t^\infty s^{\lambda-\alpha-1} l_b(s) x(qs)^\alpha d_q s \sim \frac{-tb(t)x(t)^\alpha}{[\lambda-\alpha]_q},\ t \to \infty.$$

Poslednja asimptotska relacija implicira

$$D_q \ln x(t) \sim \frac{D_q x(t)}{x(t)} \sim \Phi^{-1}\left(\frac{-tb(t)}{a(t)[\lambda-\alpha]_q}\right) = -\delta G(t),\ t \to \infty,$$

čime je dokazano tvrđenje u ovom slučaju. Preostaje da se utvrdi da li važi (2.42) u slučaju $\lambda > \alpha$. Tada je $x \in \mathbb{M}^-$ i $\lim_{t\to\infty} x^{[1]}(t) = \infty$, tako da integraljenjem jednačine (2.1) na intervalu $[t_0, t]$ dobijamo

$$x^{[1]}(t) = x^{[1]}(t_0) - \int_{t_0}^{t} s^{\lambda-\alpha-1} l_b(s) x(qs)^\alpha d_q s \sim \frac{-tb(t)x(t)^\alpha}{[\lambda-\alpha]_q},\ t \to \infty.$$

Nastavljajući na isti način kao u prethodnim delovima, dobijamo (2.42). □

Sledeće dve teoreme određuju asimptotske formule q-sporo promenljivih rešenja jednačine (2.1). Razmotrićemo odvojeno slučajeve kada je b eventualno negativna i eventualno pozitivna funkcija.

Teorema 2.5.1. *Pretpostavimo da koeficijenti jednačine (2.1) zadovoljavaju uslove (2.34) i (2.40), pri čemu je b eventualno negativna funkcija. Svako q-sporo promenljivo rešenje x jednačine (2.1) zadovoljava sledeća tvrđenja:*

(*i*) *Ako je $\int_1^\infty G(t) d_q t = \infty$, tada*

$$x(t) = \exp\left(-(1+o(1))\delta \int_1^t G(s) d_q s\right),\ t \to \infty, \tag{2.44}$$

Štaviše, ako je $\lambda < \alpha$, tada je $\mathbb{M}^- = \mathbb{M}^-_{0,0} = \mathbb{M}_{SV}$, dok u slučaju $\lambda > \alpha$ važi $\mathbb{M}^+ = \mathbb{M}^+_{\infty,\infty} = \mathbb{M}_{SV}$.

(*ii*) *Ako je* $\int_1^\infty G(t)d_qt < \infty$, *tada je*

$$x(t) = N \exp\left((1+o(1))\delta \int_t^\infty G(s)d_qs\right), \, t \to \infty, \tag{2.45}$$

gde je $N = \lim_{t\to\infty} x(t) \in (0, \infty)$. *Štaviše, ako je* $\lambda < \alpha$, *tada je* $\mathbb{M}^- = \mathbb{M}^-_{B,0} = \mathbb{M}_{SV}$, *dok u slučaju* $\lambda > \alpha$ *važi* $\mathbb{M}^+ = \mathbb{M}^+_{B,\infty} = \mathbb{M}_{SV}$. *Osim toga, važi*

$$\frac{l_b(t)^{\frac{1}{\alpha}}}{l_a(t)^{\frac{1}{\alpha}}(N - x(t))} = o(1), \, t \to \infty. \tag{2.46}$$

Dokaz: Bez gubljenja opštosti, pretpostavimo da je $b(t) < 0$ na intervalu $[t_0, \infty)_q$, za neko $t_0 \in q^{\mathbb{N}_0}$ i x je proizvoljno q-sporo promenljivo rešenje jednačine (2.1) definisano na intervalu $[t_0, \infty)_q$. Uslov (2.34) obezbeđuje postojanje takvog rešenja. Takođe, ispunjeni su uslovi Leme 2.5.1, tako da ovo rešenje zadovoljava asimptotsku formulu (2.42). Štaviše, uslovi Teoreme 2.4.6 su takođe zadovoljeni, tako da u slučaju $\lambda < \alpha$ važi $\mathbb{M}^- = \mathbb{M}_{SV}$, dok u slučaju $\lambda > \alpha$ važi $\mathbb{M}^+ = \mathbb{M}_{SV}$.

(*i*) Pretpostavimo da je $\int_1^\infty G(t)d_qt = \infty$. Integraljenjem (2.42) na $[t_0, t]$ proizilazi

$$\ln x(t) = \ln x(t_0) - \delta \int_{t_0}^t (1+o(1))G(s)d_qs, \, t \to \infty. \tag{2.47}$$

Koristeći q-Lopitalovo pravilo, dokazuje se da važi

$$\ln x(t_0) - \delta \int_{t_0}^t (1+o(1))G(s)d_qs \sim -\delta \int_1^t G(s)d_qs, \, t \to \infty,$$

što uz korišćenje (2.47) dalje vodi do asimptotske formule (2.44) za rešenje x.

U slučaju $\lambda < \alpha$, uslov $\int_1^\infty G(t)d_qt = \infty$ implicira da za rešenje x važi da je $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$. Štaviše, kako u slučaju $I_a = \infty$ primena Leme 2.2.1 implicira da će važiti $\lim_{t\to\infty} x^{[1]}(t) = 0$, sledi da je $x \in \mathbb{M}^-_{0,0}$. Kako je x proizvoljno $\mathcal{SV}_q$ rešenje, zaključujemo da je $\mathbb{M}_{SV} \subseteq \mathbb{M}^-_{0,0}$. Dakle, $\mathbb{M}^- = \mathbb{M}^-_{0,0} = \mathbb{M}_{SV}$.

Slično, ako razmotrimo slučaj $\lambda > \alpha$, divergencija integrala I_b i primena Leme 2.2.3 impliciraju da za kvazi izvod rešenja x važi $\lim_{t\to\infty} x^{[1]}(t) = \infty$. Uslov $\int_1^\infty G(t)d_qt = \infty$ implicira da za rešenje x važi da je $\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty$, te sledi da $x \in \mathbb{M}^+_{\infty,\infty}$. Zaključujemo da je $\mathbb{M}^+ = \mathbb{M}^+_{\infty,\infty} = \mathbb{M}_{SV}$.

(*ii*) Pretpostavimo da je $\int_1^\infty G(t)d_qt < \infty$. Integraljenjem (2.42) na $[t, \infty)_q$ proizilazi

$$\ln x(t) - \ln N = \delta \int_t^\infty (1+o(1))G(s)d_qs, \, t \to \infty, \tag{2.48}$$

gde je $N = \lim\limits_{t\to\infty} x(t)$. Koristeći q-Lopitalovo pravilo, jednostavno je utvrditi da važi

$$\delta \int_t^\infty (1+o(1))G(s)d_qs \sim \delta \int_t^\infty G(s)d_qs, \, t \to \infty,$$

što dalje, uz (2.48) implicira

$$\ln x(t) = \ln N + \delta(1+o(1)) \int_t^\infty G(s) d_q s,\ t \to \infty,$$

odakle će slediti da x zadovoljava asimptotsku formulu (2.45).

U slučaju $\lambda < \alpha$, uslov $\int_1^\infty G(t) d_q t < \infty$ implicira da $\lim_{t\to\infty} x(t) = N$, dok će na osnovu Leme 2.2.1 važiti $\lim_{t\to\infty} x^{[1]}(t) = 0$, te zaključujemo da je $\mathbb{M}_{SV} \subseteq \mathbb{M}^-_{B,0}$. Primenom Teoreme 2.4.6 (i) zaključujemo $\mathbb{M}^- = \mathbb{M}^-_{B,0} = \mathbb{M}_{SV}$.

Da bi dokazali da važi (2.46), primetimo da za q-sporo promenljivo rešenje x važi

$$x(t) - N = \int_t^\infty \frac{L(s)}{s} d_q s,\ t \ge t_0,$$

gde je

$$L(t) = -t\Phi^{-1}\left(\frac{1}{a(t)} \int_t^\infty b(u) x(qu)^\alpha d_q u\right),\ t \ge t_0,$$

q-sporo promenljiva funkcija, prema Teoremi 1.4.4. Karamatina integraciona teorema takođe implicira da je

$$\lim_{t\to\infty} \frac{L(t)}{x(t) - N} = 0.$$

Primenom Karamatine integracione teoreme, uzimajući u obzir oznake uvedene u (2.41), primetimo da važi

$$L(t) \sim \delta t G(t) x(t) \sim -N\delta \left(\frac{l_b(t)}{l_a(t)}\right)^{\frac{1}{\alpha}},\ t \to \infty,$$

što dalje implicira da važi (2.46).

U slučaju $\lambda > \alpha$, slično može biti utvrđeno da svako $\mathcal{SV}_q$ rešenje x pripada klasi $\mathbb{M}^+_{B,\infty}$. Štaviše, za rešenje x važi

$$\begin{aligned} N - x(t) &= \int_t^\infty \left(\frac{1}{a(s)} \Phi^{-1}\left(x^{[1]}(t_0) - \int_{t_0}^s b(u) x(qu)^\alpha d_q u\right)\right) d_q s \\ &\sim \int_t^\infty \Phi^{-1}\left(\frac{1}{a(s)}\left(-\int_{t_0}^s b(u) x(qu)^\alpha d_q u\right)\right) d_q s,\ t \to \infty. \end{aligned}$$

Nastavljajući na isti način kao u prethodnom slučaju, dokazujemo da (2.46) takođe važi.
□

Teorema 2.5.2. *Pretpostavimo da koeficijenti jednačine (2.1) ispunjavaju uslove (2.34) i (2.40), pri čemu je b eventualno pozitivna funkcija. Svako q-sporo promenljivo rešenje x jednačine (2.1) zadovoljava sledeća tvrđenja:*

(i) *Ako je $\int_1^\infty G(t) d_q t = \infty$, tada x zadovoljava (2.44). Štaviše, ako je $\lambda < \alpha$, tada je $\mathbb{M}_{SV} \subseteq \mathbb{M}^+_{\infty,0}$, dok u slučaju $\lambda > \alpha$ važi $\mathbb{M}_{SV} \subseteq \mathbb{M}^-_{0,\infty}$.*

(ii) *Ako je* $\int_1^\infty G(t)d_qt < \infty$, *tada* x *zadovoljava* (2.45), *gde je* $N = \lim_{t\to\infty} x(t) \in (0,\infty)$. *Štaviše, ako je* $\lambda < \alpha$, *tada je* $\mathbb{M}_{SV} = \mathbb{M}^+_{B,0}$, *dok u slučaju* $\lambda > \alpha$ *važi* $\mathbb{M}_{SV} = \mathbb{M}^-_{B,\infty}$. *Osim toga, važi* (2.46).

Dokaz: Bez gubljenja opštosti pretpostavimo da je $b(t) > 0$ na $[t_0,\infty)_q$, za neko $t_0 \in q^{\mathbb{N}_0}$ i neka je x q-sporo promenljivo rešenje jednačine (2.1) definisano na $[t_0,\infty)_q$. Uslov (2.34) obezbeđuje postojanje takvog rešenja. Takođe, Lemma 2.5.1 dokazuje da takvo rešenje zadovoljava (2.42).

(i) Pretpostavimo da je $\int_1^\infty G(t)d_qt = \infty$. Integraljenjem (2.42) od t_0 do t, dobija se da važi (2.47), što dovodi do tražene asimptotske formule (2.44) za rešenje x. Dalje, razmotrimo najpre slučaj $\lambda < \alpha$. U ovom slučaju, kako je $I_a = \infty$, rešenje x je eventualno rastuća funkcija čiji kvazi izvod zadovoljava uslov $\lim_{t\to\infty} x^{[1]}(t) = 0$. Osim toga, uslov $\int_1^\infty G(t)d_qt = \infty$ implicira da za rešenje x važi da je $\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty$, tako da zaključujemo da je $\mathbb{M}_{SV} \subseteq \mathbb{M}^+_{\infty,0}$. Slično, u slučaju $\lambda > \alpha$, svako $\mathcal{SV}_q$ rešenje x jeste eventualno opadajuće i njegov kvazi izvod zadovoljava $\lim_{t\to\infty} x^{[1]}(t) = \infty$. U ovom slučaju uslov $\int_1^\infty G(t)d_qt = \infty$ implicira da je $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$, te zaključujemo da je $\mathbb{M}_{SV} \subseteq \mathbb{M}^-_{0,\infty}$.

(ii) Pretpostavimo da važi $\int_1^\infty G(t)d_qt < \infty$. Integraljenjem (2.42) na intervalu $[t,\infty)_q$ dobijamo (2.48) što je ekvivalentno sa (2.45). Odavde sledi da je $\lim_{t\to\infty} x(t) = N \in (0,\infty)$. Stoga, u slučaju $\lambda < \alpha$, kako svako $\mathcal{SV}_q$ rešenje x jeste rastuća funkcija koja zadovoljava $\lim_{t\to\infty} x^{[1]}(t) = 0$, sledi zaključak $\mathbb{M}_{SV} = \mathbb{M}^+_{B,0}$, dok u slučaju $\lambda > \alpha$ važi $\mathbb{M}_{SV} = \mathbb{M}^-_{B,\infty}$. Nastavljajući na isti način kao u dokazu Teoreme 2.5.1 dobijamo (2.46). $\square$

U narednim teoremama biće određene asimptotske formule $\mathcal{RV}_q(1-\lambda/\alpha)$ rešenja jednačine (2.1) pod zadatim uslovima. Osnovni alat korišćen u narednim teoremama biće princip reciprociteta, opisan u Poglavlju 2.3. Dakle, x je rešenje jednačine (2.1) ako i samo ako je $u = x^{[1]}$ rešenje jednačine (2.11). Imajući u vidu da u ovoj sekciji koeficijenti a i b jednačine (2.1) zadovoljavaju uslove (2.34) i (2.40), to dalje implicira da koeficijenti jednačine (2.11) zadovoljavaju uslove (2.38) i (2.39).

Uvedimo oznake

$$\hat{G}(t) = \frac{t^\alpha b(t)}{a(t)} \quad \text{i} \quad \hat{\delta} = -\Phi\left(\frac{1}{[\lambda/\alpha - 1]_q}\right).$$

Primetimo da

$$\hat{\delta}\hat{G}(t) \sim \Phi\left(\frac{t\hat{b}(t)}{[\hat{\lambda}-\hat{\alpha}]_q \hat{a}(t)}\right),\ t\to\infty.$$

Oznaka za klase pozitivnih rešenja jednačine (2.11) biće analogne onima definisanim u (1.19) sa $\hat{\mathbb{M}}$ umesto $\mathbb{M}$.

Teorema 2.5.3. *Pretpostavimo da koeficijenti jednačine* (2.1) *zadovoljavaju uslove* (2.34) *i* (2.40), *pri čemu je* b *eventualno negativna funkcija. Svako rešenje* x *jednačine* (2.1), *takvo da je* $x \in \mathcal{RV}_q(1-\lambda/\alpha)$, *zadovoljava:*

(*i*) *Ako je* $\int_1^\infty \hat{G}(t)d_qt = \infty$, *tada*

$$x(t) = \frac{t}{a(t)^{\frac{1}{\alpha}}} \exp\left(-(1+o(1))\frac{\hat{\delta}}{\alpha}\int_1^t \hat{G}(s)d_qs\right), \; t \to \infty, \tag{2.49}$$

Osim toga, ako je $\lambda < \alpha$, *onda* $\mathbb{M}^+ = \mathbb{M}^+_{\infty,\infty} = \mathbb{M}_{RV}(1-\lambda/\alpha)$, *dok u slučaju* $\lambda > \alpha$ *važi* $\mathbb{M}^- = \mathbb{M}^-_{0,0} = \mathbb{M}_{RV}(1-\lambda/\alpha)$.

(*ii*) *Ako je* $\int_1^\infty \hat{G}(t)d_qt < \infty$, *tada u slučaju* $\lambda < \alpha$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \left(\frac{\hat{N}}{a(s)}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \exp\left((1+o(1))\frac{\hat{\delta}}{\alpha}\int_s^\infty \hat{G}(v)d_qv\right) d_qs, \; t \to \infty, \tag{2.50}$$

za neko $x_0 \in (0,\infty)$ *i* $t_0 \in q^{\mathbb{N}_0}$, *kao i* $\mathbb{M}^+ = \mathbb{M}^+_{\infty,B} = \mathbb{M}_{RV}(1-\lambda/\alpha)$, *dok u slučaju* $\lambda > \alpha$

$$x(t) = \int_t^\infty \left(\frac{\hat{N}}{a(s)}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \exp\left((1+o(1))\frac{\hat{\delta}}{\alpha}\int_s^\infty \hat{G}(v)d_qv\right) d_qs, \; t \to \infty, \tag{2.51}$$

i $\mathbb{M}^- = \mathbb{M}^-_{0,B} = \mathbb{M}_{RV}(1-\lambda/\alpha)$, *gde je* $\hat{N} = \lim_{t\to\infty}|x^{[1]}(t)|$. *Osim toga,*

$$\frac{l_b(t)}{l_a(t)(N - |x^{[1]}(t)|)} = o(1), \; t \to \infty. \tag{2.52}$$

Dokaz: Neka je x proizvoljno $\mathcal{RV}_q(1-\lambda/\alpha)$ rešenje jednačine (2.1), definisano na intervalu $[t_0,\infty)_q$ i neka je b negativna funkcija na $[t_0,\infty)_q$, za neko $t_0 \in q^{\mathbb{N}_0}$. Uslov (2.34) obezbeđuje postojanje takvog rešenja. Tada je $u = |x^{[1]}|$ q-sporo promenljivo rešenje jednačine (2.11). Osim toga, primetimo da je

$$u \in \hat{\mathbb{M}}^{\pm}_{v,w} \Leftrightarrow x \in \mathbb{M}^{\pm}_{w,v}, \text{ za } v,w \in \{0,B,\infty\}.$$

(*i*) Pretpostavimo da je $\int_1^\infty \hat{G}(t)d_qt = \infty$. Na osnovu prethodnih zapažanja utvrdili smo da su ispunjeni uslovi Teoreme 2.5.1 (*i*), tako da ona može biti primenjena na $\mathcal{SV}_q$ rešenje u jednačine (2.11), te dolazimo do asimptotske formule

$$u(t) = \exp\left(-(1+o(1))\hat{\delta}\int_1^t \hat{G}(s)d_qs\right), \; t \to \infty.$$

Prema tome, rešenje x jednačine (2.1) zadovoljava

$$|D_qx(t)| = \frac{1}{a(t)^{\frac{1}{\alpha}}} \exp\left(-(1+o(1))\frac{\hat{\delta}}{\alpha}\int_1^t \hat{G}(s)d_qs\right), \; t \to \infty. \tag{2.53}$$

Razmotrimo najpre slučaj $\lambda < \alpha$, odnosno $\hat{\lambda} > \hat{\alpha}$. U ovom slučaju Teorema 2.5.1 (*i*) implicira da rešenje u jednačine (2.11) pripada klasi $\hat{\mathbb{M}}^+_{\infty,\infty}$ pozitivnih rešenja jednačine

(2.11), kao i da za klase pozitivnih rešenja ove jednačine važi $\hat{\mathbb{M}}^+ = \hat{\mathbb{M}}^+_{\infty,\infty} = \hat{\mathbb{M}}_{SV}$. Ovo dalje implicira da rešenje x jednačine (2.1) pripada klasi $\mathbb{M}^+_{\infty,\infty}$ i da klase pozitivnih rešenja ove jednačine zadovoljavaju $\mathbb{M}^+ = \mathbb{M}^+_{\infty,\infty} = \mathbb{M}_{RV}\left(1 - \lambda/\alpha\right)$. Integracijom asimptotske relacije (2.53) od t_0 do t dobijamo

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{1}{a(s)^{\frac{1}{\alpha}}} \exp\left(-(1+o(1))\frac{\hat{\delta}}{\alpha}\int_1^s \hat{G}(v)d_qv\right) d_qs \\ &\sim \frac{t}{\left[1-\frac{\lambda}{\alpha}\right]_q} \frac{1}{a(t)^{\frac{1}{\alpha}}} \exp\left(-(1+o(1))\frac{\hat{\delta}}{\alpha}\int_1^t \hat{G}(s)d_qs\right) \\ &= \frac{t}{a(t)^{\frac{1}{\alpha}}} \exp\left(-(1+o(1))\frac{\hat{\delta}}{\alpha}\int_1^t \hat{G}(s)d_qs\right),\ t\to\infty, \end{aligned}$$

primenom Karamatine integracione teoreme, obzirom da je u q-sporo promenljiva funkcija. Dakle, x zadovoljava formulu (2.49). Slično, u slučaju $\lambda > \alpha$ za jednačinu (2.1) dobijamo da važi $\mathbb{M}^- = \mathbb{M}^-_{0,0} = \mathbb{M}_{RV}\left(1 - \lambda/\alpha\right)$. Integracija asimptotske relacije (2.53) na $[t, \infty)$ dovodi do tražene asimptotske formule (2.49) za rešenje x.

(ii) Pretpostavimo da je $\int_1^\infty \hat{G}(t)d_qt < \infty$. Tada primena Teoreme 2.5.1 (ii) na $\mathcal{SV}_q$ rešenje u jednačine (2.9) dovodi do asimptotske formule

$$u(t) = \hat{N}\cdot\exp\left((1+o(1))\hat{\delta}\int_t^\infty \hat{G}(s)d_qs\right),\ t\to\infty,$$

gde je $\lim_{t\to\infty} u(t) = \hat{N}$. Odatle će slediti da za rešenje x jednačine (2.1) važi

$$|D_qx(t)| = \left(\frac{\hat{N}}{a(t)}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \exp\left((1+o(1))\frac{\hat{\delta}}{\alpha}\int_t^\infty \hat{G}(s)d_qs\right),\ t\to\infty. \tag{2.54}$$

Osim toga, Teorema 2.5.1 (ii) takođe implicira

$$\frac{l_{\hat{r}}(t)^\alpha}{l_{\hat{p}}(t)^\alpha(N-u(t))} = o(1),\ t\to\infty,$$

te je (2.52) zadovoljeno.

Kako bismo asimptotsku reprezentaciju rešenja x, razmotrimo najpre slučaj $\lambda < \alpha$, odnosno $\hat{\lambda} > \hat{\alpha}$. Pod ovom pretpostavkom, za pozitivno rešenje jednačine (2.11) važi $\hat{\mathbb{M}}^+ = \hat{\mathbb{M}}^+_{B,\infty} = \hat{\mathbb{M}}_{SV}$. Stoga, za jednačinu (2.1) važiće $\mathbb{M}^+ = \mathbb{M}^+_{\infty,B} = \mathbb{M}_{RV}\left(1-\lambda/\alpha\right)$. Integracijom (2.54) na $[t_0, t]$ dobijamo da x zadovoljava asimptotsku formulu (2.50). Slično, ako je $\lambda > \alpha$, dobijamo $\mathbb{M}^- = \mathbb{M}^-_{0,B} = \mathbb{M}_{RV}\left(1-\lambda/\alpha\right)$, dok integracijom (2.54) na $[t, \infty)$ dobijamo asimptotsku formulu (2.51) za rešenje x. $\square$

Teorema 2.5.4. *Pretpostavimo da koeficijenti jednačine (2.1) zadovoljavaju uslove (2.34) i (2.40), pri čemu je b eventualno pozitivna funkcija. Svako rešenje x jednačine (2.1) takvo da je $x \in \mathcal{RV}_q\left(1-\lambda/\alpha\right)$, zadovoljava* (*i*) *Ako je* $\int^{\infty} \hat{G}(t)d_qt = \infty$, *tada važi* (2.49). *Štaviše, ako je* $\lambda < \alpha$, *tada je* $\mathbb{M}_{RV}(1-\lambda/\alpha) \subseteq \mathbb{M}^{+}_{\infty,0}$, *dok ako je* $\lambda > \alpha$, *tada je* $\mathbb{M}_{RV}(1-\lambda/\alpha) \subseteq \mathbb{M}^{-}_{0,\infty}$.

(*ii*) *Ako je* $\int^{\infty} \hat{G}(t)d_qt < \infty$, *tada u slučaju* $\lambda < \alpha$ *važi* (2.50) *i* $\mathbb{M}^{+}_{\infty,B} = \mathbb{M}_{RV}(1-\lambda/\alpha)$, *dok u slučaju* $\lambda > \alpha$ *važi* (2.51) *i* $\mathbb{M}^{-}_{0,B} = \mathbb{M}_{RV}(1-\lambda/\alpha)$. *Osim toga, važi* (2.52).

Dokaz: Primena Teoreme 2.5.2 na $\mathcal{SV}_q$ rešenje $u = |x^{[1]}|$ jednačine (2.11), slično kao u prethodnoj teoremi, vodi do traženog rezultata. □

Napomena 2.5.1. Ako formalno posmatramo graničnu vrednost kada $q \to 1+$ u Teoremama 2.5.1 i 2.5.3, dobijeni rezultati se poklapaju sa odgovarajućim rezultatima u neprekidnom slučaju (videti [107, Teorema 4.1, Teorema 5.1]). Pod analognim pretpostavkama Teorema 2.5.2 i 2.5.4 u neprekidnom slučaju, asimptotske formule za pravilno promenljiva rešenja jednačine (2.2), pri čemu je b eventualno pozitivna funkcija, nisu razmatrana u postojećoj literaturi. Stoga, uzimajući da $q \to 1+$ u Teoremama 2.5.2 i 2.5.4, možemo pretpostaviti da će odgovarajući rezultati važiti i u neprekidnom slučaju.

2.5.2 Polulinearna jednačina sa koeficijentom $a(t) \equiv 1$ i koeficijentom b proizvoljnog znaka

U ovom poglavlju biće razmatran specijalan slučaj jednačine (2.1) sa $a(t) \equiv 1$, tj. jednačina

$$D_q(\Phi(D_q(x(t)))) + b(t)\Phi(x(qt)) = 0,\ t \in q^{\mathbb{N}_0}. \tag{2.55}$$

Tačnije, biće određena asimptotska reprezentacija q-sporo promenljivih rešenja ove jednačine pod pretpostavkom da je koeficijent b eventualno pozitivna ili eventualno negativna funkcija, koja zadovoljava uslov da funkcija

$$Q(t) = t^{\alpha} \int_t^{\infty} b(s)d_qs,\ t \in q^{\mathbb{N}_0} \tag{2.56}$$

konvergira ka nuli. Za razliku od Teorema 2.5.1 i 2.5.2, biće određena asimptotska formula q-sporo promenljivog rešenja bez pretpostavke da je $|b|$ q-pravilno promenljiva funkcija. Napomenimo da je uslov $\lim_{t\to\infty} Q(t) = 0$ ekvivalentan uslovu $\lim_{t\to\infty} t^{\alpha+1}b(t) = 0$ koji je, prema Teoremi 2.1.1, potreban i dovoljan uslov za egzistenciju q-sporo promenljivog rešenja jednačine (2.55). Naime, u [114, Lema 6], dokazano je da je egzistencija konačne granične vrednosti $\lim_{t\to\infty} t^{\alpha}\int_t^{\infty} f(s)d_qs$ ekvivalentna egzistenciji konačne granične vrednosti $\lim_{t\to\infty} t^{\alpha+1}f(t)$, gde je $f : q^{\mathbb{N}_0} \to \mathbb{R}$ i $\alpha > 0$.

Sledeća teorema pokazuje egzistenciju q-sporo promenljivog rešenja pod dodatnom pretpostavkom o brzini konvergencije funkcije Q ka nuli, dok naredna teorema sadrži asimptotsku formulu za takvo rešenje.

Teorema 2.5.5. *Neka je koeficijent* b *jednačine* (2.55) *eventualno konstantnog znaka. Pretpostavimo da postoji opadajuća funkcija* $\phi : q^{\mathbb{N}_0} \to (0, +\infty)$ *takva da je* $\lim_{t\to\infty} \phi(t) = 0$ *i koja zadovoljava uslov*

$$|Q(t)| \le \phi(t) \ \textit{za } t \textit{ dovoljno veliko.}$$

Tada postoji q-sporo promenljivo rešenje x jednačine (2.55) definisano na intervalu $[t_0, \infty)_q$, za neko $t_0 \in q^{\mathbb{N}_0}$, izraženo u formi

$$x(t) = e_\eta(t, t_0),\ t \geq t_0, \tag{2.57}$$

gde je

$$\eta(t) = \Phi^{-1}\left(\frac{v(t) + Q(t)}{t^\alpha}\right),\ t \geq t_0 \quad i \quad v(t) = O\left(\phi(t)^{1+\frac{1}{\alpha}}\right),\ t \to \infty. \tag{2.58}$$

Dokaz: Dokazaćemo egzistenciju rešenja x jednačine (2.55), izraženog u formi (2.57), za neko $t_0 \in q^{\mathbb{N}_0}$. Funkcija x, izražena u formi (2.57), jeste q-sporo promenljiva funkcija na $[t_0, \infty)_q$ ako i samo ako

$$\lim_{t\to\infty} \Phi^{-1}\left(v(t) + Q(t)\right) = 0 \tag{2.59}$$

i $\eta \in \mathcal{R}^+_{t_0}$, u skladu sa Teoremom 1.4.1 (ii). Osim toga, tako definisana funkcija x je pozitivno rešenje jednačine (2.55) definisano na intervalu $[t_0, \infty)_q$ ako i samo ako

$$w(t) = \frac{v(t) + Q(t)}{t^\alpha},\ t \geq t_0,$$

jeste rešenje Rikatijeve q-diferencne jednačine na $[t_0, \infty)_q$

$$D_q w(t) + r(t) + \frac{w(t)}{(q-1)t}\left(1 - \frac{1}{(\Phi^{-1}(w(t))(q-1)t + 1)^\alpha}\right) = 0. \tag{2.60}$$

Primetimo da je $\Phi^{-1}(w(t))(q-1)t + 1 = x(qt)/x(t)$, $t \geq t_0$. Osim toga, w je rešenje jednačine (2.60) na $[t_0, \infty)_q$ ako i samo ako je v rešenje jednačine

$$D_q\left(\frac{v(t)}{t^\alpha}\right) + \frac{v(t) + Q(t)}{(q-1)t^{\alpha+1}}\left(1 - \frac{1}{(\Phi^{-1}(v(t) + Q(t))(q-1) + 1)^\alpha}\right) = 0, \tag{2.61}$$

definisano na intervalu $[t_0, \infty)_q$. Kako je $\lim_{t\to\infty} Q(t) = 0$, uslov (2.59) ekvivalentan je sa $\lim_{t\to\infty} v(t) = 0$. Stoga, integracija jednačine (2.61) na $[t, \infty)_q$ daje integralnu jednačinu

$$v(t) = t^\alpha \int_t^\infty \frac{v(s) + Q(s)}{(q-1)s^{\alpha+1}}\left(1 - \frac{1}{(\Phi^{-1}(v(s) + Q(s))(q-1) + 1)^\alpha}\right) d_q s,\ t \geq t_0. \tag{2.62}$$

Dakle, egzistencija q-sporo promenljivog rešenja x jednačine (2.55) u formi (2.57) ekvivalentna je egzistenciji rešenja v integralne jednačine (2.62) takvog da su zadovoljeni uslovi $\lim_{t\to\infty} v(t) = 0$ i $\eta \in \mathcal{R}^+_{t_0}$. Kako bismo pokazali postojanje takvog rešenja, koristićemo Banahovu teoremu o fiksnoj tački.

Odaberimo $t_0 \in q^{\mathbb{N}_0}$ tako da su ispunjeni uslovi

$$\Phi^{-1}(Q(t))(q-1) + 1 > 0, \tag{2.63}$$

$$\frac{-(q-1)(\alpha+1)\Phi^{-1}(Q(t))}{(\Phi^{-1}(Q(t))(q-1) + 1)^{\alpha+1}} \leq -\frac{1}{2}[-\alpha]_q, \tag{2.64}$$

$$\phi(t)^{\frac{1}{\alpha}} \leq \min\left\{\frac{2^{-\frac{1}{\alpha}}}{q-1}, -\frac{[-\alpha]_q 2^{-1-\alpha-\frac{1}{\alpha}}}{\alpha}, -\frac{[-\alpha]_q 2^{-1-\alpha-\frac{1}{\alpha}}}{(\alpha+1)(q-1)}\right\} \tag{2.65}$$

na intervalu $[t_0, \infty)_q$ i tako da je Q konstantnog znaka na $[t_0, \infty)_q$. Kako funkcije ϕ i Q teže ka nuli kada $t \to \infty$, ovakav izbor konstante t_0 je moguć.

Neka je $\mathcal{X}$ Banahov prostor ograničenih funkcija $f : [t_0, \infty)_q \to \mathbb{R}$ koje teže nuli u beskonačnosti, snabdeven supremum normom. Primetimo njegov podskup

$$\Omega = \{v \in \mathcal{X} : \ 0 \leq v(t) \leq \phi(t),\, t \geq t_0\}.$$

Operator $\mathcal{F} : \Omega \to \mathcal{X}$, definisan sa

$$(\mathcal{F}v)(t) = t^{\alpha} \int_t^{\infty} \frac{v(s)+Q(s)}{(q-1)s^{\alpha+1}} \left(1 - \frac{1}{(\Phi^{-1}(v(s)+Q(s))(q-1)+1)^{\alpha}}\right) d_q s,\ v \in \Omega,$$

ima sledeće osobine:

(i) *Operator $\mathcal{F}$ slika Ω u sebe samog:* Neka je $v \in \Omega$. Jasno je da važi

$$\operatorname{sgn}(v(t)+Q(t)) = \operatorname{sgn}\left(1 - \frac{1}{(\Phi^{-1}(v(t)+Q(t))(q-1)+1)^{\alpha}}\right),\ t \geq t_0,$$

što ima za posledicu $(\mathcal{F}v)(t) \geq 0$, $t \geq t_0$. Sa druge strane,

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}v)(t) &\leq t^{\alpha} \int_t^{\infty} \frac{2\phi(s)}{(q-1)s^{\alpha+1}} \left(1 - \frac{1}{(\Phi^{-1}(2\phi(s))(q-1)+1)^{\alpha}}\right) d_q s \\ &\leq t^{\alpha} \int_t^{\infty} \frac{2\phi(s)}{(q-1)s^{\alpha+1}} \left(\left(\Phi^{-1}(2\phi(s))(q-1)+1\right)^{\alpha} - 1\right) d_q s,\ t \geq t_0.\end{aligned}$$

Koristeći Lagranžovu teoremu o srednjoj vrednosti i (2.65), dobijamo

$$\begin{aligned}\left(\Phi^{-1}(2\phi(s))(q-1)+1\right)^{\alpha} - 1 &= \alpha\left(\theta\Phi^{-1}(2\phi(s))(q-1)+1\right)^{\alpha-1} \Phi^{-1}(2\phi(s))(q-1) \\ &\leq \alpha\left(\Phi^{-1}(2\phi(s))(q-1)+1\right)^{\alpha} \Phi^{-1}(2\phi(s))(q-1) \\ &\leq \alpha 2^{\alpha} \Phi^{-1}(2\phi(s))(q-1),\ s \geq t_0,\end{aligned}$$

za neko $0 < \theta < 1$. Prema tome, koristeći monotonost funkcije ϕ, dobijamo

$$(\mathcal{F}v)(t) \leq \alpha 2^{\alpha}(2\phi(t))^{1+\frac{1}{\alpha}} t^{\alpha} \int_t^{\infty} \frac{d_q s}{s^{\alpha+1}} = \frac{-\alpha 2^{\alpha}}{[-\alpha]_q}(2\phi(t))^{1+\frac{1}{\alpha}},\ t \geq t_0. \tag{2.66}$$

Koristeći (2.65), na kraju dobijamo $(\mathcal{F}v)(t) \leq \phi(t)$, $t \geq t_0$, što implicira da $\mathcal{F}$ slika Ω u sebe samog.

(ii) *Operator $\mathcal{F}$ je kontrakcija:* Neka su $v, w \in \Omega$ i primetimo da je

$$(\mathcal{F}v)(t) - (\mathcal{F}w)(t) = t^{\alpha} \int_t^{\infty} \frac{1}{(q-1)s^{\alpha+1}} \Big(H(v(s)+Q(s)) - H(w(s)+Q(s))\Big) d_q s, \tag{2.67}$$

za $t \geq t_0$, gde je

$$H(x) = x\left(1 - \frac{1}{(\Phi^{-1}(x)(q-1)+1)^{\alpha}}\right), x \in \mathbb{R}.$$

Koristeći Lagranžovu teoremu o srednjoj vrednosti, dobijamo

$$H(v(s)+Q(s)) - H(w(s)+Q(s)) = H'(\xi(s))(v(s)-w(s)),$$

za neko

$$\min\{v(s)+Q(s), w(s)+Q(s)\} \leq \xi(s) \leq \max\{v(s)+Q(s), w(s)+Q(s)\}, s \geq t_0.$$

Primetimo da $Q(s) \leq \xi(s) \leq 2\phi(s)$, $s \geq t_0$. Stoga, ako je Q pozitivna funkcija na intervalu $[t_0, \infty)_q$, onda je ξ takođe pozitivna funkcija na ovom intervalu, dok u slučaju kada je Q negativna funkcija na $[t_0, \infty)_q$, onda ξ može imati i pozitivne i negativne vrednosti na ovom intervalu. Dokazaćemo da je

$$|H'(\xi(s))| \leq -\frac{1}{2}[-\alpha]_q, s \geq t_0. \tag{2.68}$$

Zaista, u slučaju kada je $\xi(s) > 0$ za neko $s \geq t_0$, koristeći Lagranžovu teoremu o srednjoj vrednosti i (2.65), dobijamo

$$\begin{aligned} |H'(\xi(s))| &= H'(\xi(s)) = \frac{(\Phi^{-1}(\xi(s))(q-1)+1)^{\alpha+1}-1}{(\Phi^{-1}(\xi(s))(q-1)+1)^{\alpha+1}} \\ &\leq (\Phi^{-1}(\xi(s))(q-1)+1)^{\alpha+1}-1 \\ &= (\alpha+1)(\theta\Phi^{-1}(\xi(s))(q-1)+1)^{\alpha}\Phi^{-1}(\xi(s))(q-1) \\ &\leq (\alpha+1)2^{\alpha}(2\phi(s))^{\frac{1}{\alpha}}(q-1) \leq -\frac{1}{2}[-\alpha]_q, \end{aligned}$$

za neko $0 < \theta < 1$. Sa druge strane, ako je $\xi(s) < 0$ za neko $s \geq t_0$, slično prethodnom slučaju, koristeći (2.64), dobijamo

$$\begin{aligned} |H'(\xi(s))| &= -H'(\xi(s)) = \frac{1-(\Phi^{-1}(\xi(s))(q-1)+1)^{\alpha+1}}{(\Phi^{-1}(\xi(s))(q-1)+1)^{\alpha+1}} \\ &\leq \frac{1-(\Phi^{-1}(Q(s))(q-1)+1)^{\alpha+1}}{(\Phi^{-1}(Q(s))(q-1)+1)^{\alpha+1}} \\ &\leq \frac{-(\alpha+1)(\theta\Phi^{-1}(Q(s))(q-1)+1)^{\alpha}\Phi^{-1}(Q(s))(q-1)}{(\Phi^{-1}(Q(s))(q-1)+1)^{\alpha+1}} \\ &\leq \frac{-(\alpha+1)\Phi^{-1}(Q(s))(q-1)}{(\Phi^{-1}(Q(s))(q-1)+1)^{\alpha+1}} \leq -\frac{1}{2}[-\alpha]_q, \end{aligned}$$

za neko $0 < \theta < 1$, te je ispunjeno (2.68). Prema (2.67) i (2.68),

$$\begin{aligned} |(\mathcal{F}v)(t) - (\mathcal{F}w)(t)| &\leq -\frac{1}{2}[-\alpha]_q t^{\alpha}\int_t^{\infty}\frac{1}{(q-1)s^{\alpha+1}}|v(s)-w(s)|d_qs \\ &\leq \frac{1}{2}||v-w||, \; t \geq t_0, \end{aligned}$$

što vodi do zaključka da je $\mathcal{F}$ kontrakcija.

Sledi da su ispunjene sve pretpostavke Banahove teoreme o fiksnoj tački, te postoji fiksna tačka $v \in \Omega$ preslikavanja $\mathcal{F}$ koja prema (2.66) zadovoljava (2.58). Osim toga, x definisano sa (2.57), sa takvim v jeste traženo rešenje. $\square$

Teorema 2.5.6. *Neka je koeficijent b jednačine (2.55) eventualno konstantnog znaka. Pretpostavimo da postoji opadajuća funkcija $\phi : q^{\mathbb{N}_0} \to (0, +\infty)$ takva da je $\lim_{t\to\infty} \phi(t) = 0$ i koja zadovoljava uslov*

$$|Q(t)| \sim \phi(t),\ t \to \infty. \tag{2.69}$$

(*i*) *Ako je $\int_1^\infty \Phi^{-1}(Q(t))/t\, d_q t = \infty$, tada postoji q-sporo promenljivo rešenje x jednačine (2.55) koje zadovoljava sledeću asimptotsku formulu*

$$x(t) = \exp\left((1 + o(1)) \int_1^t \frac{\Phi^{-1}(Q(s))}{s}\, d_q s \right),\ t \to \infty. \tag{2.70}$$

Osim toga, ako je b eventualno negativna funkcija, tada $x \in \mathbb{M}^-_{0,0}$, dok u slučaju kada je b eventualno pozitivna funkcija, onda $x \in \mathbb{M}^+_{\infty,0}$.

(*ii*) *Ako je $\int_1^\infty \Phi^{-1}(Q(t))/t\, d_q t < \infty$, tada postoji q-sporo promneljivo rešenje x jednačine (2.55) koje zadovoljava sledeću asimptotsku formulu*

$$x(t) = N \exp\left(-(1 + o(1)) \int_t^\infty \frac{\Phi^{-1}(Q(s))}{s}\, d_q s \right),\ t \to \infty, \tag{2.71}$$

gde je $N = \lim_{t\to\infty} x(t)$. Osim toga, ako je b eventualno negativna funkcija, tada je $x \in \mathbb{M}^-_{B,0}$, dok u slučaju kada je b eventualno pozitivna funkcija, onda $x \in \mathbb{M}^+_{B,0}$.

Dokaz: Uslov (2.69) implicira da je $|Q(t)| \le (k + 1)\phi(t)$ za t dovoljno veliko i $k > 0$, tako da su ispunjeni uslovi Teoreme 2.5.5 sa $\phi(t)$ zamenjeno sa $(k+1)\phi(t)$. Stoga, postoji q-sporo promenljivo rešenje x jednačine (2.55) u formi (2.57), definisano na $[t_0, \infty)_q$, za neko $t_0 \in q^{\mathbb{N}_0}$, takvo da je $v(t) = O(\phi(t)^{1+\frac{1}{\alpha}})$, $t \to \infty$. Za ovakvo rešenje važiće

$$\frac{D_q x(t)}{x(t)} = \frac{\Phi^{-1}(v(t) + Q(t))}{t},\quad t \ge t_0.$$

Kako Q zadovoljava uslov (2.69), dobijamo

$$\frac{D_q x(t)}{x(t)} = \frac{\Phi^{-1}\left(O(\phi(t)^{1+\frac{1}{\alpha}}) + Q(t)\right)}{t} \sim \frac{\Phi^{-1}(Q(t))}{t},\quad t \to \infty. \tag{2.72}$$

Primena Teoreme 1.4.2 (*viii*) tada implicira

$$D_q \ln x(t) \sim \frac{\Phi^{-1}(Q(t))}{t},\quad t \to \infty. \tag{2.73}$$

(*i*) Neka je $\int_1^\infty \Phi^{-1}(Q(t))/t\, d_q t = \infty$. Integracija (2.73) od t_0 do t implicira

$$\ln x(t) - \ln x(t_0) \sim \int_1^t \frac{\Phi^{-1}(Q(s))}{s}\, d_q s,\quad t \to \infty. \tag{2.74}$$

Divergencija integrala na desnoj strani poslednje asimptotske relacije, kada $t \to \infty$, implicira da funkcija na levoj strani u (2.74) takođe teži ka beskonačnosti kada $t \to \infty$. Ako je b eventualno negativna funkcija, onda (2.74) implicira $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$, dok (2.72) implicira da je $x \in \mathbb{M}^-$. Prema klasifikaciji, zaključujemo da je $x \in \mathbb{M}^-_{0,0}$. Slično, u slučaju kada je b eventualno pozitivna funkcija, (2.74) implicira da je $\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty$, a (2.72) implicira da $x \in \mathbb{M}^+$, tako da mora biti $x \in \mathbb{M}^+_{\infty,0}$.

Asimptotska relacija (2.74) dalje povlači

$$\ln x(t) \sim \int_1^t \frac{\Phi^{-1}(Q(s))}{s}\, d_q s, \quad t \to \infty,$$

što dovodi do zaključka

$$\ln x(t) = (1 + o(1)) \int_1^t \frac{\Phi^{-1}(Q(s))}{s}\, d_q s, \quad t \to \infty,$$

a samim tim dobijamo traženi asimptotsku asimptotsku reprezentaciju (2.70) za netrivijalno q-sporo promenljivo rešenje x.

(ii) Neka je $\int_1^\infty \Phi^{-1}(Q(t))/t\, d_q t < \infty$. Integracija (2.73) od t do ∞ implicira

$$\ln N - \ln x(t) \sim \int_t^\infty \frac{\Phi^{-1}(Q(s))}{s}\, d_q s, \quad t \to \infty, \tag{2.75}$$

gde je $N = \lim_{t\to\infty} x(t)$, što dalje implicira da rešenje x zadovoljava asimptotsku formulu (2.71). Slično prethodnom slučaju, dolazimo do zaključka da u slučaju kada je b eventualno negativna funkcija, x pripada $\mathbb{M}^-_{B,0}$, dok ako je b eventualno pozitvna funkcija, onda $x \in \mathbb{M}^+_{B,0}$. $\square$

Napomena 2.5.2. Uporedimo asimptotske reprezentacije q-sporo promenljivih rešenja jednačine (2.55), u kojoj je koeficijent b eventualno jednog znaka takav da je $|b| \in \mathcal{RV}_q(-\alpha - 1)$, dobijenim u Teoremama 2.5.1 i 2.5.2 sa asimptotskim formulama q-sporo promenljivih rešenja dobijenim u Teoremi 2.5.6. Karamatina integraciona teorema implicira

$$Q(t) \sim \frac{t^{\alpha+1} b(t)}{-[-\alpha]_q}, t \to \infty,$$

što dalje implicira

$$\frac{\Phi^{-1}(Q(t))}{t} \sim -\delta G(t),\, t \to \infty,$$

u skladu sa notacijom u (2.41) i (2.56). Stoga, u ovom slučaju asimptotske formule (2.70) i (2.71) jesu ekvivalentne asimptotskim formulama (2.44) i (2.45), respektivno, kao što je i očekivano.

Napomena 2.5.3. Ako formalno posmatramo graničnu vrednost kada $q \to 1+$ u Teoremi 4.2 (i), dobijeni rezultati su u saglasnosti sa odgovarajućim rezultatima u neprekidnom slučaju (videti [71, Teorema 3.1]). Preciznije, Teorema 3.1 u [71] zahteva strože uslove za funkcije Q i ϕ, ali daje preciznije asimptotske formule. Sa druge strane, kako slučaj $\int_1^\infty \Phi^{-1}(Q(t))/t\, dt < \infty$ nije razmatran u [71], ako posmatramo graničnu vrednost kada $q \to 1+$ u Teoremi 4.2 (ii), možemo pretpostaviti da će odgovarajući rezultati važiti i u neprekidnom slučaju.

2.6 Primeri

Sledeća dva primera ilustruju dobijene rezultate. Prvim primerom ilustrujemo simultano Teoreme 2.5.1, 2.5.2 i 2.5.6, dok drugim primerom demonstriramo rezultate Teorema 2.5.1 – 2.5.4.

Primer 2.6.1. *Odredimo asimptotsku reprezentaciju q-sporo promenljivih rešenja polulinearne q-diferencne jednačine*

$$D_q(\Phi(D_q(x(t)))) + \frac{\varphi(t)}{t^{\alpha+1}(\ln t)^{\alpha\theta}}\Phi(x(qt)) = 0, \tag{2.76}$$

definisane na intervalu $[q,\infty)_q$, gde su konstante α i θ takve da je $\alpha > 0$, $\theta > 0, \theta \neq 1$ i φ je proizvoljna funkcija takva da je $\lim_{t\to\infty}\varphi(t) = c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Najpre primetimo da ova jednačina ima q-sporo promenljivo rešenje. Označimo sa

$$b(t) = \frac{\varphi(t)}{t^{\alpha+1}(\ln t)^{\alpha\theta}}, \quad t \geq q.$$

Primetimo da tada važi $\lim_{t\to\infty} t^{\alpha+1}b(t) = 0$, čime su ispunjeni uslovi Teoreme 2.4.1 (ii), odakle zaključujemo egzistenciju q-sporo promenljivog rešenja.

Proverimo da li su ispunjeni uslovi Teoreme 2.5.1, u slučaju kada je $c < 0$ i funkcija φ eventualno negativna, odnosno uslovi Teoreme 2.5.2, u slučaju kada je $c > 0$ i funkcija φ eventualno pozitivna. Primetimo da je

$$b(t) \sim \frac{c}{t^{\alpha+1}(\ln t)^{\alpha\theta}}, \quad t \to \infty,$$

te zaključujemo da je koeficijent b funkcija eventualno konstantnog znaka, kao i da je $b \in \mathcal{RV}_q(-\alpha-1)$. Neka su δ i G definisani sa (2.41) i neka je $t = q^n$, $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$. Definicija q-integrala, u slučaju kada je $\theta \in (0,1)$, implicira

$$\begin{aligned}
\delta\int_q^t G(s)d_qs \quad &\sim \quad \Phi^{-1}\left(\frac{c}{[-\alpha]_q}\right)(q-1)\sum_{s\in[q,t)_q}\frac{1}{(\ln s)^\theta} \\
&= \quad \Phi^{-1}\left(\frac{c}{[-\alpha]_q}\right)\frac{(q-1)}{(\ln q)^\theta}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^\theta} \\
&\sim \quad \Phi^{-1}\left(\frac{c}{[-\alpha]_q}\right)\frac{(q-1)}{(\ln q)^\theta}\frac{n^{1-\theta}}{1-\theta} \\
&= \quad \Phi^{-1}\left(\frac{c}{[-\alpha]_q}\right)\frac{q-1}{(1-\theta)\ln q}\frac{1}{(\ln t)^{\theta-1}} \to \infty,\ t\to\infty.
\end{aligned}$$

Na osnovu pokazanog, Teorema 2.5.1 (i) može biti primenjena na svako rešenje koje je q-sporo promenljivo rešenje jednačine (2.76) u slučaju kada je funkcija φ eventualno negativna, odnosno Teorema 2.5.2 (i) u slučaju kada je funkcija φ eventualno pozitivna, što vodi do asimptotske formule takvog rešenja

$$x(t) = \exp\left((1+o(1))\Phi^{-1}\left(\frac{c}{[-\alpha]_q}\right)\frac{q-1}{(\theta-1)\ln q}\frac{1}{(\ln t)^{\theta-1}}\right),\ t\to\infty. \tag{2.77}$$

Osim toga, u slučaju kada je funkcija φ eventualno negativna funkcija, svako $\mathcal{SV}_q$-rešenje pripadaće skupu $\mathbb{M}^-_{0,0}$, dok će u slučaju kada je funkcija φ eventualno pozitivna pripadati skupu $\mathbb{M}^+_{\infty,0}$.

U slučaju kada je $\theta > 1$, važiće

$$\delta \int_t^\infty G(s) d_q s \quad \sim \quad \Phi^{-1}\left(\frac{c}{[-\alpha]_q}\right) \frac{q-1}{(\theta-1)\ln q} \frac{1}{(\ln t)^{\theta-1}} \to 0,\ t \to \infty.$$

Primena Teoreme 2.5.1 (ii) u slučaju kada je funkcija φ eventualno negativna, odnosno Teoreme 2.5.2 (ii) u slučaju kada je φ eventualno pozitivna funkcija, implicira da svako $\mathcal{SV}_q$ rešenje jednačine (2.76) zadovoljava

$$x(t) = N \exp\left((1+o(1))\Phi^{-1}\left(\frac{c}{[-\alpha]_q}\right) \frac{q-1}{(\theta-1)\ln q} \frac{1}{(\ln t)^{\theta-1}}\right),\ t \to \infty, \tag{2.78}$$

gde je $N = \lim_{t\to\infty} x(t)$. Osim toga, svako $\mathcal{SV}_q$ rešenje će u slučaju kada je funkcija φ eventualno negativna pripadati skupu $\mathbb{M}^-_{B,0}$, dok će u slučaju kada je φ eventualno pozitivna pripadati skupu $\mathbb{M}^+_{B,0}$.

Egzistencija i asimptotska reprezentacija q-sporo promenljivog rešenja jednačine (2.76) može se ustanoviti i primenom Teoreme 2.5.6. Neka je

$$\phi(t) = \frac{|c|}{-[-\alpha]_q} \frac{1}{(\ln t)^{\alpha\theta}},\ t \in [q,\infty)_q.$$

Koristeći Karamatinu integracionu teoremu, dobijamo

$$Q(t) \sim t^\alpha \int_t^\infty \frac{c}{t^{\alpha+1}(\ln t)^{\alpha\theta}} d_q s \sim \frac{c}{-[-\alpha]_q} \frac{1}{(\ln t)^{\alpha\theta}} \sim \operatorname{sgn}(c)\phi(t),\ t \to \infty,$$

što implicira da je ispunjen uslov (2.69). Stoga, prema Teoremi 2.5.6 (i) postoji q-sporo promenljivo rešenje sa asimptotskom formulom (2.77), u slučaju kada je $\theta \in (0,1)$, dok u slučaju kada je $\theta > 1$, prema Teoremi 2.5.6 (ii) postoji q-sporo promenljivo rešenje sa asimptotskom formulom (2.78), kao što je već navedeno u Napomeni 2.5.2. $\square$

Primer 2.6.2. *Odredimo asimptotske reprezentacije $\mathcal{SV}_q$ i $\mathcal{RV}_q(1-\lambda/\alpha)$ rešenja q-diferencne polulinearne jednačine*

$$D_q(t^\lambda (\ln t)^{\theta_1} \varphi_1(t) \Phi(D_q x(t))) + t^{\lambda-\alpha-1}(\ln t)^{\theta_2} \varphi_2(t) \Phi(x(qt)) = 0, \tag{2.79}$$

definisane na intervalu $[q,\infty)_q$, gde su realne konstante $\alpha, \lambda, \theta_1$ i θ_2 takve da je $\alpha > 0, \alpha \neq \lambda$, $\theta_1 > \theta_2$ i funkcije φ_1, φ_2 takve da je $\lim_{t\to\infty} \varphi_1(t) = c_1 > 0$ i $\lim_{t\to\infty} \varphi_2(t) = c_2 \neq 0$.

Primetimo najpre da jednačina (2.79) ima $\mathcal{SV}_q$ i $\mathcal{RV}_q(1-\lambda/\alpha)$ rešenja. Označimo sa

$$a(t) = t^\lambda (\ln t)^{\theta_1} \varphi_1(t), \quad b(t) = t^{\lambda-\alpha-1}(\ln t)^{\theta_2} \varphi_2(t), \quad t \geq q.$$

Zaista, kako je

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^{\alpha+1} b(t)}{a(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{(\ln t)^{\theta_2} \varphi_2(t)}{(\ln t)^{\theta_1} \varphi_1(t)} = 0,$$

Teoreme 2.4.1 i 2.4.2 dovode do takvog zaključka. Kako bismo odredili asimptotske formule pomenutih q-pravilno promenljivih rešenja, primetimo da je

$$G(t) \sim \Phi^{-1}\left(\frac{c_2}{c_1}\right)\frac{(\ln t)^{\theta_2-\theta_1}}{t}, \quad \hat{G}(t) \sim \frac{c_2(\ln t)^{\theta_2-\theta_1}}{c_1 t}, \, t \to \infty.$$

Slično kao u Primeru 6.1 dobijamo da u slučaju kada $\int_1^\infty G(t)d_qt = \infty$, tj. $\theta_2 - \theta_1 > -\alpha$, primena Teorema 2.5.1 (i) i 2.5.2 (i) implicira da svako q-sporo promenljivo rešenje jednačine ima sledeću asimptotsku reprezentaciju

$$x(t) = \exp\left(-(1+o(1))\Phi^{-1}\left(\frac{c_2}{c_1}\right)\frac{(q-1)\delta}{\left(\frac{\theta_2-\theta_1}{\alpha}+1\right)\ln q}(\ln t)^{\frac{\theta_2-\theta_1}{\alpha}+1}\right) \, t \to \infty.$$

Analogno, ukoliko je $\theta_2 - \theta_1 < -\alpha$, važiće $\int_1^\infty G(t)d_qt < \infty$, pa primena Teorema 2.5.1 (ii) i 2.5.2 (ii) implicira da svako q-sporo promenljivo rešenje ima sledeću asimptotsku reprezentaciju

$$x(t) = N\exp\left(-(1+o(1))\Phi^{-1}\left(\frac{c_2}{c_1}\right)\frac{(q-1)\delta}{\left(\frac{\theta_2-\theta_1}{\alpha}+1\right)\ln q}(\ln t)^{\frac{\theta_2-\theta_1}{\alpha}+1}\right) \, t \to \infty,$$

gde je $\lim_{t\to\infty} x(t) = N > 0$.

U slučaju kada je $\theta_2 - \theta_1 > -1$, primena Teorema 2.5.3 (i) i 2.5.4 (i) implicira da svako $\mathcal{RV}_q\,(1-\lambda/\alpha)$ - rešenje ima sledeću asimptotsku reprezentaciju

$$x(t) \;=\; \frac{t}{a(t)^{\frac{1}{\alpha}}}\exp\left(-(1+o(1))\frac{(q-1)\hat{\delta}c_2}{\alpha c_1\,(\theta_2-\theta_1+1)\ln q}(\ln t)^{\theta_2-\theta_1+1}\right), \, t \to \infty,$$

dok u slučaju $\theta_2 - \theta_1 < -1$, primena Teorema 2.5.3 (ii) i 2.5.4 (ii) implicira da svako $\mathcal{RV}_q\,(1-\lambda/\alpha)$ - rešenje ima sledeću asimptotsku reprezentaciju

$$x(t) \;=\; x_0 + \int_{t_0}^{t}\frac{\hat{N}}{a(s)^{\frac{1}{\alpha}}}\exp\left(-(1+o(1))\frac{(q-1)\hat{\delta}c_2}{\alpha c_1\,(\theta_2-\theta_1+1)\ln q}(\ln s)^{\theta_2-\theta_1+1}\right)d_qs, \, t \to \infty,$$

u slučaju $\lambda < \alpha$, za neko $x_0 > 0$, $t_0 \in q^{\mathbb{N}_0}$, gde je $\lim_{t\to\infty} x^{[1]}(t) = \hat{N}$, odnosno

$$x(t) \;=\; \int_{t}^{\infty}\frac{\hat{N}}{a(s)^{\frac{1}{\alpha}}}\exp\left(-(1+o(1))\frac{(q-1)\hat{\delta}c_2}{\alpha c_1\,(\theta_2-\theta_1+1)\ln q}(\ln s)^{\theta_2-\theta_1+1}\right)d_qs, \, t \to \infty,$$

u slučaju $\lambda > \alpha$. $\square$

2.7 Polulinearna diferencna jednačina u okviru pravilno promenljivih nizova u odnosu na τ

U diskretnom slučaju, linearna diferencna jednačina drugog reda

$$\Delta(p(n)\Delta(x(n))) = r(n)x(n+1), \;\; n \in \mathbb{N}, \tag{2.80}$$

u kojoj je $p(n) \equiv 1$, istraživana je uz primenu teorije pravilno promenljivih nizova u [88, 87]. Polulinearna diferencna jednačina

$$\Delta(p(n)\Phi(\Delta(x(n)))) + r(n)\Phi(x(n+1)) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.81}$$

je istraživana u okviru pravilno promenljivih nizova jedino za $p(n) \equiv 1$ i $r(n) < 0$. Preciznije, u radu [86] određeni su potrebni i dovoljni uslovi za egzistenciju pravilno promenljivih rešenja ove polulinearne diferencne jednačine. S druge strane, asimptotska reprezentacija neoscilatornih rešenja jedino je do sada razmatrana za linearnu jednačinu (2.80) u kojoj je $p(n) > 0$ i $r(n) < 0$ u radu [104] u kojem su određeni dovoljni uslovi da sva eventualno pozitivna rešenja zadovoljavaju određenu asimptotsku formulu.

Prema tome, kako u dosadašnjoj literaturi ne postoje rezultati o asimptotskoj reprezentaciji neoscilatornih rešenja polulinearne diferencne jednačine, primenićemo nedavne rezultate dobijene u [109] koji povezuju pravilno promenljive funkcije na q-vremenskoj skali sa generalizovanim pravilno promenljivim nizovima. Naime, ovi rezultati daju mogućnost primene dokazanih rezultata u prethodnim poglavljima o egzistenciji i asimptotskoj reprezentaciji q-pravilno promenljivih rešenja polulinearne q-diferencne jednačine na neoscilatorna rešenja polulinearne diferencne jednačine (2.81).

U ovom poglavlju će biti određeni potrebni i dovoljni uslovi za egzistenciju rešenja jednačine (2.81) koja su pravilno promenljivi nizovi u odnosu na τ, gde je

$$\tau : \mathbb{N}_0 \to q^{\mathbb{N}_0}, \quad \tau(k) = q^k,$$

pod pretpostavkom da je koeficijent p jednačine (2.81) generalizovani pravilno promenljivi niz u odnosu na τ, proizvoljnog indeksa regularnosti. U slučaju kada je koeficijent r eventualno negativna funkcija, biće određeni dovoljni uslovi da sva eventualno pozitivna rešenja budu generalizovana pravilno promenljiva u odnosu na τ i biće određena asimptotska formula nekih generalizovanih pravilno promenljivih rešenja u odnosu na τ.

Kako bi rezultati iz prethodnih poglavlja bili primenjeni na polulinearnu diferencnu jednačinu (2.81), primetimo da se polulinearna q-diferencna jednačina može transformisati u polulinearnu diferencnu jednačinu. Zaista, jednostavno je utvrditi da je $x : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ rešenje diferencne jednačine (2.81) ako i samo ako je $y = x \circ \tau^{-1}$ rešenje q-diferencne jednačine (2.1) sa koeficijentima

$$a(t) = p(\tau^{-1}(t))((q-1)t)^{\alpha} \quad \text{i} \quad b(t) = \frac{r(\tau^{-1}(t))}{(q-1)t}, \quad t \in q^{\mathbb{N}_0}. \tag{2.82}$$

Osim toga, da bi naredna tvrđenja bila dokazana, dovoljno je primetiti da su pretpostavke $p \in \mathcal{RV}_{\mathbb{Z}}^{\tau}(\rho)$ i $a \in \mathcal{RV}_q(\rho + \alpha)$ ekvivalentne. U nastavku su najpre navedene posledice tvrđenja dokazanih u Poglavlju 2.4.1.

Posledica 2.7.1. *Neka je $p \in \mathcal{RV}_{\mathbb{Z}}^{\tau}(\rho)$, $\rho < 0$. Postoje eventualno pozitivna rešenja jednačine (2.81)*

$$x \in \mathcal{RV}_{\mathbb{Z}}^{\tau}(\rho_1) \ \textit{i} \ y \in \mathcal{RV}_{\mathbb{Z}}^{\tau}(\rho_2),$$

gde su indeksi regularnosti ρ_1 i ρ_2 takvi da su $\lambda_1 = \Phi([\rho_1]_q)$ i $\lambda_2 = \Phi([\rho_2]_q)$ realni i različiti koreni jednačine

$$h_{\rho+\alpha}(x) - x + \frac{B}{[\alpha_\rho]_q} = 0 \tag{2.83}$$

ako i samo ako je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r(n)}{(q-1)^{\alpha+1}p(n+1)} = B \in \left(-\infty, \left|[\alpha_\rho]_q\right|^{\alpha+1}\right), \tag{2.84}$$

gde je $\alpha_\rho = -\rho/(\alpha+1)$. Za indekse regularnosti ρ_1 i ρ_2 važi sledeće:

(i) $0 < \rho_1 < \alpha_\rho < \rho_2 < -\rho/\alpha$ *ako i samo ako je* $0 < B < \left|[\alpha_\rho]_q\right|^{\alpha+1}$;

(ii) $\rho_1 = 0$ *i* $\rho_2 = -\rho/\alpha$ *ako i samo ako je* $B = 0$;

(iii) $\rho_1 < 0 < -\rho/\alpha < \rho_2$ *ako i samo ako je* $B < 0$.

Ukoliko je uslov (2.84) ispunjen i $B < 0$, važiće $\mathbb{M}^- = \mathbb{MZ}_{\mathcal{RV}_{\mathbb{Z}}^\tau}(\rho_1)$ i $\mathbb{M}^+ = \mathbb{MZ}_{\mathcal{RV}_{\mathbb{Z}}^\tau}(\rho_2)$.

Posledica 2.7.2. *Neka je $p \in \mathcal{RV}_{\mathbb{Z}}^\tau(\rho)$, $\rho > 0$. Postoje eventualno pozitivna rešenja jednačine (2.81)*

$$x \in \mathcal{RV}_{\mathbb{Z}}^\tau(\rho_1) \text{ and } y \in \mathcal{RV}_{\mathbb{Z}}^\tau(\rho_2),$$

gde su indeksi regularnosti ρ_1 i ρ_2 takvi da su $\lambda_1 = \Phi([\rho_1]_q)$ i $\lambda_2 = \Phi([\rho_2]_q)$ realni i različiti koreni jednačine (2.83) ako i samo ako je ispunjen uslov (2.84). Za indekse regularnosti ρ_1 i ρ_2 važi sledeće:

(i) $-\rho/\alpha < \rho_1 < \alpha_\rho < \rho_2 < 0$ *ako i samo ako je* $0 < B < \left|[\alpha_\rho]_q\right|^{\alpha+1}$;

(ii) $\rho_1 = 0$ *and* $\rho_2 = -\rho/\alpha$ *ako i samo ako je* $B = 0$;

(iii) $\rho_1 < -\rho/\alpha < 0 < \rho_2$ *ako i samo ako je* $B < 0$.

Ukoliko je uslov (2.84) ispunjen i $B < 0$, važiće $\mathbb{M}^- = \mathbb{MZ}_{\mathcal{RV}_{\mathbb{Z}}^\tau}(\rho_1)$ i $\mathbb{M}^+ = \mathbb{MZ}_{\mathcal{RV}_{\mathbb{Z}}^\tau}(\rho_2)$.

Posledica 2.7.3. *Neka je $p \in \mathcal{SV}_{\mathbb{Z}}^\tau$. Postoje eventualno pozitivna rešenja jednačine (2.81)*

$$x \in \mathcal{RV}_{\mathbb{Z}}^\tau(\rho_1) \text{ i } y \in \mathcal{RV}_{\mathbb{Z}}^\tau(\rho_2),$$

gde su indeksi regularnosti ρ_1 i ρ_2 takvi da su $\lambda_1 = \Phi([\rho_1]_q)$ i $\lambda_2 = \Phi([\rho_2]_q)$ realni i različiti koreni jednačina (2.83) ako i samo ako važi (2.84). Za indekse regularnosti ρ_1 i ρ_2 važi da je $\rho_1 < 0 < \rho_2$. U tom slučaju važiće $\mathbb{M}^- = \mathbb{MZ}_{\mathcal{RV}_{\mathbb{Z}}^\tau}(\rho_1)$ i $\mathbb{M}^+ = \mathbb{MZ}_{\mathcal{RV}_{\mathbb{Z}}^\tau}(\rho_2)$.

Napomena 2.7.1. Primetimo da ukoliko je niz $p \in \mathcal{RV}_{\mathbb{Z}}(\vartheta)$, $\vartheta \in \mathbb{R}$, tada je $\lim_{k\to\infty} p(k+1)/p(k) = 1$, pa će odatle slediti da je $p \in \mathcal{SV}_{\mathbb{Z}}^\tau$. Stoga, uslov $p \in \mathcal{SV}_{\mathbb{Z}}^\tau$ prethodne teoreme može biti zamenjen uslovom $p \in \mathcal{RV}_{\mathbb{Z}}(\vartheta)$, $\vartheta \in \mathbb{R}$.

Posledica 2.7.4. *Neka je jednačina (2.81) neoscilatorna i neka je $p \in \mathcal{RV}_{\mathbb{Z}}^{\tau}(\rho)$, $\rho \in \mathbb{R}$. Postoji eventualno pozitivno rešenje jednačine (2.81) $x \in \mathcal{RV}_{\mathbb{Z}}^{\tau}(\alpha_\rho)$ ako i samo ako je*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r(n)}{(q-1)^{\alpha+1} p(n+1)} = \left|[\alpha_\rho]_q\right|^{\alpha+1}.$$

U tom slučaju su sva eventualno pozitivna rešenja pravilno promenljiva u odnosu na τ indeksa regularnosti α_ρ.

Naredne teoreme su posledice tvrđenja iz Poglavlja 2.4.2. Pod pretpostavkom da je koeficijent $r = \{r(n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ jednačine (2.81) eventualno negativna funkcija, određeni su dovoljni uslovi da bi sva eventualno pozitivna rešenja ove jednačine bila generalizovani pravilno promenljivi nizovi u odnosu na τ. Za dokaz Posledice 2.7.6 potrebno je primetiti da je $|r| \in \mathcal{RV}_{\mathbb{Z}}^{\tau}(\rho)$ ako i samo ako je $|b| \in \mathcal{RV}_q(\rho - 1)$.

Posledica 2.7.5. *Neka je $p \in \mathcal{RV}_{\mathbb{Z}}^{\tau}(\rho)$, $\rho \in \mathbb{R}$, $r(t) < 0$, $t \geq t_0$ i neka je*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r(n)}{p(n+1)} = 0. \tag{2.85}$$

Za rešenja jednačine (2.81) važe sledeća tvrđenja:

(i) Ukoliko je $\rho < 0$, tada je $\mathbb{M}^- \subseteq \mathbb{M}_{SV_Z^\tau}$.

(ii) Ukoliko je $\rho > 0$, tada je $\mathbb{M}^+ \subseteq \mathbb{M}_{SV_Z^\tau}$.

(iii) Ukoliko je $\rho = 0$, tada je $\mathbb{M} = \mathbb{M}_{SV_Z^\tau}$.

Posledica 2.7.6. *Neka je $p \in \mathcal{RV}_{\mathbb{Z}}^{\tau}(\rho)$, $\rho \neq 0$, $r(t) < 0$, $t \geq t_0$, za neko $t_0 \in q^{\mathbb{N}_0}$, $|r| \in \mathcal{RV}_{\mathbb{Z}}^{\tau}(\rho)$ i važi (2.85).*

(i) Ako je $\rho < 0$, tada je $\mathbb{M}^+ = \mathbb{M}_{RV_Z^\tau}(-\rho/\alpha)$ i $\mathbb{M}^- = \mathbb{M}_{SV_Z^\tau}$.

(ii) Ako je $\rho > 0$, tada je $\mathbb{M}^- = \mathbb{M}_{RV_Z^\tau}(-\rho/\alpha)$ i $\mathbb{M}^+ = \mathbb{M}_{SV_Z^\tau}$.

Naredna tvrđenja su posledice tvrđenja dokazanih u Poglavlju 2.5. Naime, uz pretpostavke da su nizovi $p = \{p(n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ i $|r| = \{|r(n)|\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ pravilno promenljivi nizovi u odnosu na τ određenog indeksa regularnosti i r eventualno jednog znaka, dobijeni rezultati će biti primenjeni na polulinearnu diferencnu jednačinu (2.81), dajući asimptotske formule za $\mathcal{SV}_{\mathbb{Z}}^{\tau}$ i $\mathcal{RV}_{\mathbb{Z}}^{\tau}(-\rho/\alpha)$ rešenja ove jednačine.

Koristićemo sledeće reprezentacije pravilno promenljivih nizova u odnosu na τ :

$$p(n) = \tau(n)^\rho l_p(n),\ |r(n)| = \tau(n)^\rho l_r(n), n \in \mathbb{N}_0,$$

gde su $l_p, l_r \in \mathcal{SV}_{\mathbb{Z}}^{\tau}$. U nastavku su date posledice Teorema 2.5.1 – 2.5.4.

Posledica 2.7.7. *Neka je $p \in \mathcal{RV}_{\mathbb{Z}}^{\tau}(\rho)$, $\rho \neq 0$, r je eventualno negativan niz, tako da je $|r| \in \mathcal{RV}_{\mathbb{Z}}^{\tau}(\rho)$ i uslov (2.85) je ispunjen. Svako rešenje $x \in \mathcal{SV}_{\mathbb{Z}}^{\tau}$ jednačine (2.81) zadovoljava:*

(*i*) *Ako je* $\sum_{n=1}^{\infty} \Phi^{-1}(r(n)/p(n)) = \infty$, *tada*

$$x(n) = \exp\left((1+o(1))\frac{1}{\Phi^{-1}(1-q^{\rho})}\sum_{k=1}^{n-1}\Phi^{-1}\left(\frac{r(k)}{p(k)}\right)\right),\ n\to\infty. \tag{2.86}$$

Osim toga, ako je $\rho < 0$, *tada je* $\mathbb{MZ}^- = \mathbb{MZ}^-_{0,0} = \mathbb{MZ}_{\mathcal{SV}^\tau_\mathbb{Z}}$, *dok u slučaju kada je* $\rho > 0$ *važi* $\mathbb{MZ}^+ = \mathbb{MZ}^+_{\infty,\infty} = \mathbb{MZ}_{\mathcal{SV}^\tau_\mathbb{Z}}$.

(*ii*) *Ako je* $\sum_{n=1}^{\infty} \Phi^{-1}(r(n)/p(n)) < \infty$, *tada je*

$$x(n) = N\cdot\exp\left((1+o(1))\frac{1}{\Phi^{-1}(q^{\rho}-1)}\sum_{k=n}^{\infty}\Phi^{-1}\left(\frac{b(k)}{a(k)}\right)\right),\ n\to\infty, \tag{2.87}$$

gde je $N = \lim_{n\to\infty} x(n) \in (0,\infty)$. *Osim toga, ako je* $\rho < 0$, *tada je* $\mathbb{MZ}^- = \mathbb{MZ}^-_{B,0} = \mathbb{MZ}_{\mathcal{SV}^\tau_\mathbb{Z}}$, *dok u slučaju kada je* $\rho > 0$ *važi* $\mathbb{MZ}^+ = \mathbb{MZ}^+_{B,\infty} = \mathbb{MZ}_{\mathcal{SV}^\tau_\mathbb{Z}}$. *Štaviše,*

$$\frac{l_r(n)^{\frac{1}{\alpha}}}{l_p(n)^{\frac{1}{\alpha}}(N-x(n))} = o(1),\ n\to\infty. \tag{2.88}$$

Posledica 2.7.8. *Neka je* $p \in \mathcal{RV}^\tau_\mathbb{Z}(\rho)$, $\rho \neq 0$, r *je eventualno pozitivan niz takav da je da je* $|r| \in \mathcal{RV}^\tau_\mathbb{Z}(\rho)$ *i važi* (2.85). *Svako rešenje* $x \in \mathcal{SV}^\tau_\mathbb{Z}$ *jednačine* (2.81) *zadovoljava:*

(*i*) *Ako je* $\sum_{n=1}^{\infty} \Phi^{-1}(r(n)/p(n)) = \infty$, *tada* x *zadovoljava* (2.86). *Osim toga, ako je* $\rho < 0$, *tada* $\mathbb{MZ}_{\mathcal{SV}^\tau_\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{MZ}^+_{\infty,0}$, *dok u slučaju kada je* $\rho > 0$ *važi* $\mathbb{MZ}_{\mathcal{SV}^\tau_\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{MZ}^-_{0,\infty}$.

(*ii*) *Ako je* $\sum_{n=1}^{\infty} \Phi^{-1}(r(n)/p(n)) < \infty$, *tada* x *zadovoljava* (2.87), *gde je* $N = \lim_{n\to\infty} x(n) \in (0,\infty)$. *Osim toga, ako je* $\rho < 0$, *tada* $\mathbb{MZ}_{\mathcal{SV}^\tau_\mathbb{Z}} = \mathbb{MZ}^+_{B,0}$, *dok u slučaju kada je* $\rho > 0$, *važi* $\mathbb{MZ}_{\mathcal{SV}^\tau_\mathbb{Z}} = \mathbb{MZ}^-_{B,\infty}$. *Štaviše, važi* (2.88).

Posledica 2.7.9. *Neka je* $p \in \mathcal{RV}^\tau_\mathbb{Z}(\rho)$, $\rho \neq 0$, r *je eventualno negativan niz takav da je* $|r| \in \mathcal{RV}^\tau_\mathbb{Z}(\rho)$ *i važi* (2.85). *Svako rešenje* $x \in \mathcal{RV}^\tau_\mathbb{Z}(-\rho/\alpha)$ *jednačine* (2.81) *zadovoljava:*

(*i*) *Ako je* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(n)}{q^n p(n)} = \infty$, *tada je*

$$x(n) = \frac{1}{p(n)^{\frac{1}{\alpha}}}\exp\left((1+o(1))\frac{1}{\alpha\Phi(q^{\rho/\alpha}-1)}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{r(k)}{p(k)}\right),\ n\to\infty, \tag{2.89}$$

Štaviše, ako je $\rho < 0$, *tada* $\mathbb{MZ}^+ = \mathbb{MZ}^+_{\infty,\infty} = \mathbb{MZ}_{\mathcal{RV}^\tau_\mathbb{Z}}(-\rho/\alpha)$, *dok u slučaju kada je* $\rho > 0$ *važi* $\mathbb{MZ}^- = \mathbb{MZ}^-_{0,0} = \mathbb{MZ}_{\mathcal{RV}^\tau_\mathbb{Z}}(-\rho/\alpha)$.

(*ii*) *Ako je* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r(n)}{q^n p(n)}<\infty$, *tada u slučaju kada je* $\rho<0$, *važi*

$$x(n)=A+\sum_{k=m}^{n-1}\left(\frac{\hat{N}}{p(k)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\exp\left((1+o(1))\frac{1}{\alpha\Phi(1-q^{\rho/\alpha})}\sum_{j=k}^{\infty}\frac{r(j)}{p(j)}\right),\ n\to\infty, \tag{2.90}$$

za neko $A\in(0,\infty)$, $m\in\mathbb{N}$ *i* $\mathbb{MZ}^{+}=\mathbb{MZ}^{+}_{\infty,B}=\mathbb{MZ}_{\mathcal{RV}^{\tau}_{\mathbb{Z}}}(-\rho/\alpha)$, *dok u slučaju* $\rho>0$, *važi*

$$x(n)=\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{\hat{N}}{p(k)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\exp\left((1+o(1))\frac{1}{\alpha\Phi(1-q^{\rho/\alpha})}\sum_{j=k}^{\infty}\frac{r(j)}{p(j)}\right),\ n\to\infty, \tag{2.91}$$

i $\mathbb{MZ}^{-}=\mathbb{MZ}^{-}_{0,B}=\mathbb{MZ}_{\mathcal{RV}^{\tau}_{\mathbb{Z}}}(-\rho/\alpha)$, *gde je* $\hat{N}=\lim_{t\to\infty}|x^{[1]}(n)|$. *Osim toga,*

$$\frac{l_r(n)}{l_p(t)(N-x^{[1]}(n))}=o(1),\ t\to\infty. \tag{2.92}$$

Posledica 2.7.10. *Pretpostavimo da je* $p\in\mathcal{RV}^{\tau}_{\mathbb{Z}}(\rho)$, $\rho\neq 0$, r *je eventualno pozitivan tako da je* $|r|\in\mathcal{RV}^{\tau}_{\mathbb{Z}}(\rho)$ *i važi* (2.85). *Svako rešenje* $x\in\mathcal{RV}^{\tau}_{\mathbb{Z}}(-\rho/\alpha)$ *jednačine* (2.81) *zadovoljava:*

(*i*) *Ako je* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r(n)}{q^n p(n)}=\infty$, *tada važi* (2.89). *Štaviše, ako je* $\rho<0$, *tada* $\mathbb{MZ}_{\mathcal{RV}^{\tau}_{\mathbb{Z}}}(-\rho/\alpha)\subseteq\mathbb{MZ}^{+}_{\infty,0}$, *dok ako je* $\rho>0$, *tada* $\mathbb{MZ}_{\mathcal{RV}^{\tau}_{\mathbb{Z}}}(-\rho/\alpha)\subseteq\mathbb{MZ}^{-}_{0,\infty}$.

(*ii*) *Ako je* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r(n)}{q^n p(n)}<\infty$, *tada u slučaju* $\rho<0$ *važi* (2.90) *i* $\mathbb{MZ}^{+}_{\infty,B}=\mathbb{MZ}_{\mathcal{RV}^{\tau}_{\mathbb{Z}}}(-\rho/\alpha)$, *dok u slučaju* $\rho>0$ *važi* (2.91) *i* $\mathbb{MZ}^{-}_{0,B}=\mathbb{MZ}_{\mathcal{RV}^{\tau}_{\mathbb{Z}}}(-\rho/\alpha)$. *Osim toga važi* (2.92).

Sledeća posledica Teoreme 4.2. daje asimptotsku formulu za sporo promenljivo rešenje u odnosu na τ jednačine (2.81), sa koeficijentima takvim da je $p(n)=((q-1)q^n)^{-\alpha}$, $n\in\mathbb{N}_0$ i $r(n)$ proizvoljan niz koji je eventualnio pozitivan ili eventualno negativan.

Posledica 2.7.11. *Neka je* $p=\{((q-1)q^n)^{-\alpha}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *i neka je* r *eventualno jednog znaka. Pretpostavimo da postoji opadajući niz* $\{\varphi(n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *koji konvergira ka* 0 *kada* $n\to\infty$ *i koji zadovoljava*

$$\left|q^{n\alpha}\sum_{k=n}^{\infty}r(k)\right|\sim\varphi(n),\ n\to\infty.$$

(*i*) *Ako je* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}q^n\Phi^{-1}\left(\sum_{k=n}^{\infty}r(k)\right)=\infty$, *tada jednačina* (2.81) *ima sporo promenljivo rešenje* $\{x(n)\}_{n\geq n_0}$ *u odnosu na* τ, *za neko* $n_0\in\mathbb{N}$, *tako da važi*

$$x(n)=\exp\left((1+o(1))(q-1)\sum_{k=1}^{n-1}q^k\Phi^{-1}\left(\sum_{j=k}^{\infty}r(j)\right)\right),\ n\to\infty.$$

Štaviše, ako je r eventualno negativan, tada $x \in \mathbb{MZ}^{-}_{0,0}$, dok ako je b eventualno pozitivan, tada $x \in \mathbb{MZ}^{+}_{\infty,0}$.

(ii) *Ako je $\sum_{n=1}^{\infty} q^n \Phi^{-1}\left(\sum_{k=n}^{\infty} r(k)\right) < \infty$, tada jednačina (2.81) ima sporo promenljivo rešenje $\{x(n)\}_{n \geq n_0}$ u odnosu na τ, za neko $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da*

$$x(n) = N \exp\left(-(1+o(1))(q-1)\sum_{k=n}^{\infty} q^k \Phi^{-1}\left(\sum_{j=k}^{\infty} r(j)\right)\right), \ n \to \infty,$$

gde je $N = \lim_{n\to\infty} x(n)$. Osim toga, ako je r eventualno negativan, tada $x \in \mathbb{MZ}^{-}_{B,0}$, dok ako je r eventualno pozitivan, tada $x \in \mathbb{MZ}^{+}_{B,0}$.

Glava 3

Sublinearna q-diferencncna jednačina drugog reda tipa Emden-Fowler

3.1 Uvod

U ovoj Glavi biće razmatrana egzistencija i asimptotska svojstva neoscilatornih rešenja sublinearne q-diferencne jednačine drugog reda

$$D_q(a(t)\Phi_\alpha(D_q(x(t)))) = b(t)\Phi_\beta(x(qt)), \quad t \in q^{\mathbb{N}_0}, \quad q > 1 \tag{3.1}$$

gde su α i β pozitivne konstante takve da je $\alpha > \beta$ i $a, b : q^{\mathbb{N}_0} \to (0, \infty)$ su q-pravilno promenljive funkcije.

Jednačina (3.1) je specijalan slučaj jednačine (1.17), u slučaju kada je $\mathbb{T} = q^{\mathbb{N}_0}$ i $f = \Phi_\beta$, koja je u dosadašnjoj literaturi razmatrana u radovima [3, 4, 5]. U navedenim radovima neoscilatorna rešenja su podeljena u disjunktne klase (videti (1.19)) na osnovu asimptotskih ponašanja u beskonačnosti i dobijeni su potrebni i/ili dovoljni uslovi za egzistenciju rešenja u određenim klasama. Određivanje uslova za egzistenciju *strogo opadajućih* i *strogo rastućih* rešenja vrlo često nije jednostavno i njihovo utvrđivanje zavisi od toga da li se razmatra polulinearna, sublinearna ili superlinearna jednačina. Za sublinearnu jednačinu (3.1) potrebni i dovoljni uslovi za egzistenciju strogo rastućih rešenja su utvrđeni, ali egzistencija strogo opadajućih rešenja je poznata samo u određenim slučajevima ponašanja koeficijenata a i b i predstavlja otvoren problem u preostalim mogućim slučajevima. Osim toga, još jedan od nerešenih problema u dosadašnjim istraživanjima jeste odrediti asimptotske reprezentacije strogo opadajućih i strogo rastućih rešenja u beskonačnosti.

Jedan od ciljeva ove doktorske disertacije jeste odrediti potrebne i dovoljne uslove za egzistenciju strogo opadajućih rešenja, kao i asimptotske formule strogo opadajućih i strogo rastućih rešenja, uz pretpostavku da su koeficijenti posmatrane q-diferencne jednačine q-pravilno promenljive funkcije, korišćenjem svojstava q-pravilno promenljivih funkcija. Dokazi ovih tvrđenja bazirani su na Knasterovoj teoremi o fiksnoj tački [1, Teorema 5.2.1] na parcijalno uređenom Banahovom prostoru, pri čemu su skupovi na kojima se pomenuta teorema primenjuje opisani uz pomoć karakterističnih svojstava q-pravilno promenljvih funkcija.

Teorema 3.1.1 (Knasterova teorema o fiksnoj tački)**.** *Neka je X parcijalno uređen Banahov prostor sa uređenjem $\leq$. Neka je M podskup skupa X sa sledećim osobinama: infimum skupa M pripada skupu M i svaki neprazan podskup skupa M ima supremum koji pripada skupu M. Neka $\mathcal{F} : M \to M$ rastuća funkcija, tj. $x \leq y$ implicira $\mathcal{F}x \leq \mathcal{F}y$. Tada preslikavanje $\mathcal{F}$ poseduje fiksnu tačku u skupu M.*

U prvom poglavlju biće objedinjeni postojeći rezultati o potrebnim i dovoljnim uslovima za egzistenciju rešenja pojedinih klasa neoscilatornih rešenja. U narednim poglavljima biće razmatrana najpre egzistencija, a potom asimptotska reprezentacija najpre strogo opadajućih, a zatim i strogo rastućih rešenja. Nakon toga će biti izvršena kompletna klasifikacija q-pravilno promenljivih rešenja. Dobijeni rezultati biće ilustrovani primerima. Dobijeni rezultati mogu se smatrati q-analogom rezultata u neprekidnom slučaju [47, 66, 67, 72, 73, 74, 76, 79, 82] ili u diskretnom slučaju [2, 24, 57, 58].

Prikazani rezultati Poglavlja 3.3 i 3.4 publikovani su u radu [65].

3.2 Klasifikacija eventualno pozitivnih rešenja

U ovom poglavlju biće objedinjeni dokazani rezultati o potrebnim i dovoljnim uslovima za egzistenciju rešenja jednačine (3.1) u pojedinim klasama. Rezultati dokazani u radovima [3, 4, 5] biće primenjeni na jednačinu (3.1).

Rešenja skupa $\mathbb{M}^-$ se mogu podeliti u sledeće tri klase u odnosu na asimptotsko ponašanje rešenja i njegovog kvazi-izvoda:

$$\mathbb{M}^- = \mathbb{M}^-_B \cup \mathbb{M}^-_{0,B} \cup \mathbb{M}^-_{0,0}.$$

Egzistencija opadajućih rešenja biće okarakterisana konvergencijom integrala:

$$I_\alpha = \int_1^\infty \left(\frac{1}{a(t)} \int_t^\infty b(s)\, d_q s \right)^{\frac{1}{\alpha}} d_q t \tag{3.2}$$

$$J_{\beta,q} = \int_1^\infty b(t) \left(\int_{qt}^\infty \left(\frac{1}{a(s)} \right)^{\frac{1}{\alpha}} d_q s \right)^{\beta} d_q t \tag{3.3}$$

Potrebni i dovoljni uslovi za egzistenciju rešenja klasa $\mathbb{M}^-_B$ i $\mathbb{M}^-_{0,B}$ za dinamičku jednačinu (1.17) na proizvoljnoj vremenskoj skali su dati u radovima [3, 5]. U nastavku su navedeni ovi rezulatati za q-diferencnu jednačinu (3.1).

Teorema 3.2.1. [3, Teorema 4.1] *Postoji rešenje jednačine* (3.1) *u klasi $\mathbb{M}^-_B$ ako i samo ako $I_\alpha < \infty$.*

Teorema 3.2.2. [5, Teorema 2.1, Teorema 2.3] *Postoji rešenje jednačine* (3.1) *u klasi $\mathbb{M}^-_{0,B}$ ako i samo ako $J_{\beta,q} < \infty$.*

Kao posledica navedenih tvrđenja i činjenice da je $\mathbb{M}^- \neq \emptyset$, važiće sledeće tvrđenje:

Teorema 3.2.3. *Za jednačinu* (3.1) *važe sledeća tvrđenja:*

(i) *Ako* $I_\alpha = \infty$ *i* $J_{\beta,q} = \infty$, *tada* $\mathbb{M}^- = \mathbb{M}^-_{0,0} \neq \emptyset$;

(ii) *Ako* $I_\alpha = \infty$ *i* $J_{\beta,q} < \infty$, *tada* $\mathbb{M}^- = \mathbb{M}^-_{0,B} \cup \mathbb{M}^-_{0,0}$, *pri čemu je* $\mathbb{M}^-_{0,B} \neq \emptyset$;

(iii) *Ako* $I_\alpha < \infty$ *i* $J_{\beta,q} = \infty$, *tada* $\mathbb{M}^- = \mathbb{M}^-_{0,0} \cup \mathbb{M}^-_{B}$, *pri čemu je* $\mathbb{M}^-_{B} \neq \emptyset$;

(iv) *Ako* $I_\alpha < \infty$ *i* $J_{\beta,q} < \infty$, *tada je* $\mathbb{M}^-_{B} \neq \emptyset$ *i* $\mathbb{M}^-_{0,B} \neq \emptyset$;

Osim toga, za rešenja klase $\mathbb{M}^-_B$ važi da je

$$x(t) \sim c,\ t \to \infty, \tag{3.4}$$

gde je c pozitivna konstanta. Rešenja klase $\mathbb{M}^-_{0,B}$ imaju sledeću asimptotsku reprezentaciju

$$x(t) \sim c \int_t^\infty \frac{d_q s}{a(s)^{\frac{1}{\alpha}}},\ t \to \infty,$$

gde je c pozitivna konstanta. Međutim, u dosadašnjoj literaturi nije određena asimptotska reprezentacija strogo opadajućih rešenja, te će to biti jedan od zadataka ove doktorske disertacije.

Analogno, rešenja skupa $\mathbb{M}^+$ se mogu podeliti u sledeće tri klase:

$$\mathbb{M}^+ = \mathbb{M}^+_B \cup \mathbb{M}^+_{\infty,B} \cup \mathbb{M}^+_{\infty,\infty}.$$

Egzistencija rastućih rešenja biće okarakterisana konvergencijom integrala:

$$K_\alpha = \int_1^\infty \left(\frac{1}{a(t)} \int_1^t b(s)\, d_q s \right)^{\frac{1}{\alpha}} d_q t, \tag{3.5}$$

$$H_\beta = \int_1^\infty b(t) \left(\int_1^t \left(\frac{1}{a(qs)} \right)^{\frac{1}{\alpha}} d_q s \right)^{\beta} d_q t, \tag{3.6}$$

Potrebni i dovoljni uslovi za egzistenciju rešenja za svaku od navedene tri klase, za dinamičku jednačinu (1.17) na proizvoljnoj vremenskoj skali su dati u radu [4]. U nastavku su navedeni ovi rezulatati za q-diferencnu jednačinu (3.1).

Teorema 3.2.4. [4, Teorema 3.1] *Postoji rešenje jednačine* (3.1) *u klasi* $\mathbb{M}^+_B$ *ako i samo ako* $K_\alpha < \infty$.

Teorema 3.2.5. [4, Teorema 3.2, Posledica 5.1 (ii),(iv)] *Postoji rešenje jednačine* (3.1) *u klasi* $\mathbb{M}^+_{\infty,B}$ *ako i samo ako* $K_\alpha = \infty$ *i* $H_\beta < \infty$.

Teorema 3.2.6. [4, Teorema 3.2, Teorema 6.1, Teorema 6.3] *Jednačina* (3.1) *ima rešenje u klasi* $\mathbb{M}^+_{\infty,\infty}$ *ako i samo ako* $H_\beta = K_\alpha = \infty$.

Kao posledica navedenih tvrđenja i činjenice da je $\mathbb{M}^+ \neq \emptyset$, važiće sledeća teorema.

Teorema 3.2.7. *Za jednačinu (3.1) važi sledeće:*

(*i*) *Ako* $K_\alpha = \infty$ *i* $H_\beta = \infty$, *tada* $\mathbb{M}^+ = \mathbb{M}^+_{\infty,\infty} \neq \emptyset$;

(*ii*) *Ako* $K_\alpha = \infty$ *i* $H_\beta < \infty$, *tada* $\mathbb{M}^+ = \mathbb{M}^+_{\infty,B} \neq \emptyset$;

(*iii*) *Ako* $K_\alpha < \infty$ *i* $H_\beta = \infty$, *tada* $\mathbb{M}^+ = \mathbb{M}^+_{B} \neq \emptyset$;

(*iv*) *Ako* $K_\alpha < \infty$ *i* $H_\beta < \infty$, *tada je* $\mathbb{M}^+ = \mathbb{M}^+_{B} \neq \emptyset$.

Takođe, za rešenja klase $\mathbb{M}^+_B$ važiće (3.4), dok će za rešenja klase $\mathbb{M}^+_{\infty,B}$ važiti

$$x(t) \sim c\int_1^t \frac{d_q s}{a(s)^{\frac{1}{\alpha}}},\ t \to \infty,$$

za neku pozitivnu konstantu c. Određivanje asimptotske reprezentacije strogo rastućih rešenja biće jedan od naših zadataka.

Na osnovu navedenih rezultata primećujemo da su određeni dovoljni uslovi za egzistenciju rešenja klase $\mathbb{M}^-_{0,0}$, ali samo u jednom od moguća četiri različita slučaja međusobne konvergencije i divergencije integrala I_α i $J_{\beta,q}$, u slučaju kada oba integrala divergiraju. Sa druge strane, određeni su potrebni i dovoljni uslovi za egzistenciju rešenja klase $\mathbb{M}^+_{\infty,\infty}$. U nastavku, pod pretpostavkom da su koeficijenti jednačine (3.1) q-pravilno promenljive funkcije, biće rešen otvoren problem egzistencije rešenja klase $\mathbb{M}^-_{0,0}$ u svakom od preostala tri slučaja, kada je bar jedan od integrala I_α i $J_{\beta,q}$ konvergentan. Štaviše, biće utvrđeni potrebni i dovoljni uslovi za egzistenciju rešenja klase $\mathbb{M}^-_{0,0}$. Zatim će biti određene asimptotske formule rešenja klasa $\mathbb{M}^-_{0,0}$ i $\mathbb{M}^+_{\infty,\infty}$ uz pomoć karakterističnih svojstava q-pravilno promenljivih funkcija.

3.3 Egzistencija strogo opadajućih rešenja

U ovom poglavlju pretpostavljeno je da su koeficijenti u jednačini (3.1) q-pravilno promenljive funkcije, tj. $a \in \mathcal{RV}_q(\lambda), b \in \mathcal{RV}_q(\mu)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ i da su predstavljeni u sledećem obliku

$$a(t) = t^\lambda \ell_a(t),\ \ b(t) = t^\mu \ell_b(t),\ \ \ell_a, \ell_b \in \mathcal{SV}_q. \tag{3.7}$$

Posmatrana su q-pravilno promenljiva strogo opadajuća rešenja jednačine (3.1) izražena u obliku

$$x(t) = t^\rho \ell_x(t), \ell_x \in \mathcal{SV}_q. \tag{3.8}$$

Slično neprekidnom i diskretnom slučaju, asimptotska svojstva pozitivnih rešenja jednačine (3.1) zavise od konvergencije integrala

$$I_a = \int_1^\infty \frac{d_q t}{a(t)^{\frac{1}{\alpha}}} = \int_1^\infty t^{-\frac{\lambda}{\alpha}} \ell_a(t)^{-\frac{1}{\alpha}} d_q t.$$

Shodno tome, biće razmatrani slučajevi $\lambda < \alpha$, koji obezbeđuje divergenciju integrala I_a i $\lambda > \alpha$, koji obezbeđuje konvergenciju integrala I_a, dok će slučaj $\lambda = \alpha$ biti isključen iz razmatranja. U slučaju $\lambda = \alpha$ konvergencija integrala I_a, u opštem slučaju, nije određena.

Pre svega, odredimo intervale indeksa regularnosti strogo opadajućih rešenja jednačine (3.1) pod navedenim pretpostavkama.

I slučaj $\lambda < \alpha$: Pretpostavimo da postoji strogo opadajuće q-pravilno promenljivo rešenje jednačine (3.1) predstavljeno u obliku (3.8). Indeks regularnosti ρ ovakvog rešenja, na osnovu Teoreme 1.4.2 *(ii)*, zadovoljava uslov $\rho \leq 0$. U slučaju $\rho = 0$, kako je $\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} \ell_x(t) = 0$, x je netrivijalno q-sporo promenljivo rešenje. Stoga, skup strogo opadajućih q-pravilno promenljivih rešenja može se podeliti na sledeće dve klase

$$\mathcal{R}^{-}_{0,0} = ntr - \mathbb{M}^{-}_{SV} \cup \mathbb{M}^{-}_{RV}(\rho), \text{ gde je } \rho < 0. \tag{3.9}$$

II slučaj $\lambda > \alpha$: Definišimo opadajuću funkciju $\pi : q^{\mathbb{N}_0} \to (0, \infty)$ na sledeći način

$$\pi(t) = \int_t^\infty \frac{d_q s}{a(s)^{\frac{1}{\alpha}}}, \quad t \in q^{\mathbb{N}_0}. \tag{3.10}$$

Primenom q-Karamatine integracione teoreme, važiće sledeća asimptotska relacija

$$\pi(t) \sim \frac{t^{1-\frac{\lambda}{\alpha}}}{-\left[1-\frac{\lambda}{\alpha}\right]_q} \ell_a(t)^{-\frac{1}{\alpha}}, \quad t \to \infty. \tag{3.11}$$

Na osnovu Teoreme 1.4.2 (vii) zaključuje se da $\pi \in \mathcal{RV}_q\left(1-\lambda/\alpha\right)$. Primenom q-Lopitalovog pravila, za svako q-pravilno promenljivo strogo opadajuće rešenje x jednačine (3.1), važiće

$$\lim_{t\to\infty} \frac{x(t)}{\pi(t)} = \lim_{t\to\infty} (-D_q x(t)) a(t)^{\frac{1}{\alpha}} = \lim_{t\to\infty} |x^{[1]}(t)|^{\frac{1}{\alpha}} = 0, \tag{3.12}$$

te se zaključuje da indeks q-regularnosti rešenja x zadovoljava $\rho \leq 1 - \lambda/\alpha$. Skup strogo opadajućih $\mathcal{RV}_q$ rešenja se može podeliti u dve klase

$$\mathcal{R}^{-}_{0,0} = ntr - \mathbb{M}^{-}_{RV}\left(1 - \frac{\lambda}{\alpha}\right) \cup \mathbb{M}^{-}_{RV}(\rho), \text{ gde je } \rho < 1 - \frac{\lambda}{\alpha}. \tag{3.13}$$

Egzistencija strogo opadajućih rešenja jednačine (3.1) u slučajevima **I** i **II** biće opisana konvergencijom (ili divergencijom) integrala I_α definisanog u (3.3) i integrala

$$J_\beta = \int_1^\infty b(t) \left(\int_t^\infty \left(\frac{1}{a(s)}\right)^{\frac{1}{\alpha}} d_q s \right)^\beta d_q t.$$

Napomenimo da pod pretpostavkom da su koeficijenti a i b jednačine (3.1) q-pravilno promenljive funkcije postoji konstanta θ tako da važi

$$\int_1^t b(s) \left(\int_s^\infty \left(\frac{1}{a(u)}\right)^{\frac{1}{\alpha}} d_q u \right)^\beta d_q s \sim \theta \int_1^t b(s) \left(\int_{qs}^\infty \left(\frac{1}{a(u)}\right)^{\frac{1}{\alpha}} d_q u \right)^\beta d_q s, \quad t \to \infty,$$

te zaključujemo da $J_{\beta,q} < \infty$ ako i samo ako $J_\beta < \infty$. Naredna lema daje potrebne i dovoljne uslove za konvergenciju pomenutih integrala, pod pretpostavkom da su koeficijenti jednačine (3.1) q-pravilno promenljive funkcije.

Lema 3.3.1. *Neka je $a \in \mathcal{RV}_q(\lambda)$, $\lambda \neq \alpha$ i $b \in \mathcal{RV}_q(\mu)$.*

(*i*) *Neka je $\lambda < \alpha$. Tada $I_\alpha < \infty$ ako i samo ako je ispunjen jedan od sledećih uslova*

$$\mu < \lambda - \alpha - 1 \tag{3.14}$$

ili

$$\mu = \lambda - \alpha - 1 \quad i \quad \int_1^\infty (ta(t)^{-1}b(t))^{\frac{1}{\alpha}}\, d_q t < \infty. \tag{3.15}$$

(*ii*) *Neka je $\lambda > \alpha$. Tada $J_\beta < \infty$ ako i samo ako je ispunjen jedan od sledećih uslova*

$$\mu < \beta\left(\frac{\lambda}{\alpha} - 1\right) - 1 \tag{3.16}$$

ili

$$\mu = \beta\left(\frac{\lambda}{\alpha} - 1\right) - 1 \quad i \quad \int_1^\infty b(t)\pi(t)^\beta\, d_q t < \infty, \tag{3.17}$$

gde je funkcija π definisana u (3.10).

Dokaz: (*i*) ($\Rightarrow$:) Iz pretpostavke da $I_\alpha < \infty$ slediće da je $\int_1^\infty b(t)\, d_q t < \infty$, te na osnovu q-Karamatine integracione teoreme važiće da je $\mu \leq -1$.

Dokazaćemo da je slučaj $\mu = -1$ nemoguć. Zaista, iz $\mu = -1$ slediće da je $\int_t^\infty b(s)\, d_q s$ q-sporo promenljiva funkcija. Kao posledica toga, iz konvergencije integrala I_α i Teoreme 1.4.4 proizilazi da je $\lambda > \alpha$, što je u kontradikciji sa polaznom pretpostavkom.

Stoga, mora važiti da je $\mu < -1$ i

$$\int_t^\infty b(s)\, d_q s \sim \frac{t^{\mu+1}}{-[\mu+1]_q}\ell_b(t), \quad t \to \infty. \tag{3.18}$$

Daljom primenom q-Karamatine integracione teoreme slediće da je

$$I_\alpha \sim \int_t^\infty \left(\frac{s^{\mu-\lambda+1}}{-[\mu+1]_q}\ell_a(s)^{-1}\ell_b(s)\right)^{\frac{1}{\alpha}} d_q s, \quad t \to \infty. \tag{3.19}$$

Konvergencija integrala I_α implicira da je $\mu \leq \lambda - \alpha - 1$. Odavde zaključujemo da će važiti (3.14) ili (3.15).

($\Leftarrow$:) Pretpostavimo da je ispunjen uslov (3.14). Odatle će slediti da je $\mu < -1$, te će na osnovu q-Karamatine integracione teoreme važiti (3.18), a potom i (3.19). Uslov (3.14) dozvoljava primenu q-Karamatine integracione teoreme pri integraciji u (3.19), nakon čega se zaključuje konvergencija integrala I_α.

Neka je ispunjen uslov (3.15). Analogno kao u prethodnom paragrafu slediće da je $\mu < -1$, te će na osnovu q-Karamatine integracione teoreme važiti (3.19). Uslov (3.15) implicira konvergenciju integrala na desnoj strani relacije (3.19), a samim tim i integrala I_α.

(*ii*) Analognim postupkom dokazuju se potrebni i dovoljni uslovu za konvergenciju integrala J_β. $\square$

U narednoj teoremi određeni su dovoljni uslovi za egzistenciju strogo opadajućih rešenja. Napomenimo da se ovi uslovi razlikuju od dovoljnih uslova za egzistenciju rešenja klase $\mathbb{M}^-_{0,0}$ datih u Teoremi 3.2.3 (i). Naime, prema Teoremi 3.2.3 (i) pod pretpostavkom da su integrali I_α i J_β istovremeno divergentni, važi da je $\mathbb{M}^-_{0,0} \neq \emptyset$, dok će u narednoj teoremi biti dokazana egzistencija strogo opadajućih rešenja pod pretpostavkom da je bar jedan od ovih integrala konvergentan.

Teorema 3.3.1. *Neka je $a \in \mathcal{RV}_q(\lambda)$, $\lambda \neq \alpha$ i $b \in \mathcal{RV}_q(\mu)$. Ukoliko je ispunjen jedan od sledećih uslova*

(i) $I_a = \infty$ *i* $I_\alpha < \infty$;

(ii) $I_a < \infty$ *i* $J_\beta < \infty$,

postoji rešenje $x \in \mathbb{M}^-_{0,0}$ *jednačine* (3.1), *tj.* $\mathbb{M}^-_{0,0} \neq \emptyset$.

Primetimo da uslov (i) Teoreme 3.3.1 implicira divergenciju integrala J_β. Stoga, na ovaj način biće dokazana egzistencija strogo opadajućih rešenja pod pretpostavkom da je ispunjen uslov Teoreme 3.2.3 (iii). Osim toga, uslov (ii) Teoreme 3.3.1 implicira egzistenciju strogo opadajućih rešenja bez obzira na konvergenciju ili divergenciju integrala I_α. Na taj način dokazana je egzistencija rešenja klase $\mathbb{M}^-_{0,0}$ pod pretpostavkama Teoreme 3.2.3 (ii) i (iv).

Da bismo dokazali prethodnu teoremu, dokažimo najpre neka pomoćna tvrđenja.

Teorema 3.3.2. *Neka je $a \in \mathcal{RV}_q(\lambda)$ i $b \in \mathcal{RV}_q(\mu)$. Ukoliko je ispunjen jedan od sledećih uslova*

$$\begin{aligned} &(i) \quad \lambda < \alpha \quad i \quad (3.14); \\ &(ii) \quad \lambda > \alpha \quad i \quad (3.16), \end{aligned} \tag{3.20}$$

postoji rešenje $x \in \mathbb{M}^-_{0,0}$ *jednačine* (3.1), *tj.* $\mathbb{M}^-_{0,0} \neq \emptyset$.

Dokaz: Primenom Knasterove teoreme o fiksnoj tački biće dokazano da operator

$$(\mathcal{F}x)(t) = \int_t^\infty \left(\frac{1}{a(s)} \int_s^\infty b(u) x(qu)^\beta \, d_q u \right)^{\frac{1}{\alpha}} d_q s, \quad t \in [t_0, \infty)_q, \tag{3.21}$$

gde je $t_0 \in q^{\mathbb{N}_0}$, ima fiksnu tačku na određenom podskupu parcijalno uređenog Banahovog prostora, koji će biti opisan korišćenjem funkcije

$$X_1(t) = \left(\eta_1 t^{\alpha+1} a(t)^{-1} b(t) \right)^{\frac{1}{\alpha-\beta}}, \quad t \in q^{\mathbb{N}_0}, \tag{3.22}$$

gde je $\eta_1 = \dfrac{q^{\rho\beta}}{(-[\rho]_q)^\alpha (-[(\rho-1)\alpha+\lambda]_q)}$ i

$$\rho = \frac{\mu + 1 - \lambda + \alpha}{\alpha - \beta}. \tag{3.23}$$

Pomenuta fiksna tačka biće strogo opadajuće rešenje jednačine (3.1). Sa ovim ciljem, najpre dokažimo da funkcija X_1 zadovoljava sledeću integralnu jednačinu

$$X(t) \sim \int_t^\infty \left(\frac{1}{a(s)} \int_s^\infty b(u) X(qu)^\beta \, d_q u \right)^{\frac{1}{\alpha}} d_q s, \quad t \to \infty. \tag{3.24}$$

Primenom (3.7) i (3.23) X_1 se može predstaviti u obliku

$$X_1(t) = t^\rho \left(\eta_1 \ell_a(t)^{-1} \ell_b(t) \right)^{\frac{1}{\alpha - \beta}}, \quad t \in q^{\mathbb{N}_0}, \tag{3.25}$$

odakle na osnovu Teoreme 1.4.2 (i) zaključujemo da je X_1 q-pravilno promenljiva funkcija indeksa regularnosti ρ, te će na osnovu Teoreme 1.4.1 (i) zadovoljavati

$$X_1(qt) \sim q^\rho X_1(t), \quad t \to \infty. \tag{3.26}$$

Svaka od pretpostavki (i) ili (ii) implicira da je $\mu + \rho\beta + 1 = (\rho - 1)\alpha + \lambda < 0$. Stoga, ispunjeni su uslovi za primenu Teoreme 1.4.4 (ii) pri narednoj integraciji, čija primena, uz korišćenje (3.26), implicira

$$\int_t^\infty b(s) X_1(qs)^\beta \, d_q s \sim \frac{q^{\rho\beta}}{-[(\rho-1)\alpha + \lambda]_q} t b(t) X_1(t)^\beta, \quad t \to \infty\,. \tag{3.27}$$

Svaka od pretpostavki (i) ili (ii) takođe implicira da je $\rho < 0$, te je pri narednoj integraciji ponovo dozvoljena primena q-Karamatine integracione teoreme, koja uz primenu (3.27) dokazuje da X_1 zadovoljava željenu asimptotsku relaciju

$$\begin{aligned} \int_t^\infty \left(\frac{1}{a(s)} \int_s^\infty b(u) X_1(qu)^\beta \, d_q u \right)^{\frac{1}{\alpha}} d_q s \ &\sim \ \int_t^\infty \left(\frac{q^{\rho\beta}}{-[(\rho-1)\alpha + \lambda]_q} \frac{s b(s) X_1(s)^\beta}{a(s)} \right)^{\frac{1}{\alpha}} d_q s \\ &\sim \ \left(\frac{q^{\rho\beta}}{-(-[\rho]_q)^\alpha [(\rho-1)\alpha + \lambda]_q} \frac{t^{\alpha+1} b(t)}{a(t)} \right)^{\frac{1}{\alpha}} X_1(t)^{\frac{\beta}{\alpha}} \\ &= \ X_1(t), \ t \to \infty. \end{aligned}$$

Dakle, postoji $t_0 \in q^{\mathbb{N}_0}$ tako da je

$$\frac{X_1(t)}{2} \le \int_t^\infty \left(\frac{1}{a(s)} \int_s^\infty b(u) X_1(qu)^\beta \, d_q u \right)^{\frac{1}{\alpha}} d_q s \le 2 X_1(t), \quad t \in [t_0, \infty)_q. \tag{3.28}$$

Neka je takvo t_0 fiksirano i izaberimo konstante $0 < k < 1$ i $K > 1$ tako da je

$$k \le 2^{\frac{\alpha}{\beta - \alpha}} \ \text{ i } \ K \ge 2^{\frac{\alpha}{\alpha - \beta}}. \tag{3.29}$$

Posmatrajmo prostor $\mathcal{X}$ funkcija $f : [t_0, \infty)_q \to \mathbb{R}$ takvih da je $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$, opremljen supremum normom

$$||f|| = \sup_{t \in [t_0, \infty)_q} |f(t)|\,.$$

Skup ograničenih realnih funkcija, obezbeđen supremom normom je kompletan. Neka je

$$f \preceq g \Leftrightarrow f(t) \le g(t), \quad t \in [t_0, \infty)_q$$

uređenje na skupu $\mathcal{X}$. Uočimo podskup Ω ovog parcijalno uređenog Banahovog prostora

$$\Omega = \{x \in \mathcal{X} : kX_1(t) \le x(t) \le KX_1(t),\ \ t \in [t_0,\infty)_q\}\,. \tag{3.30}$$

Za svaki podskup $M \subset \Omega$ očigledno važi $\inf M \in \Omega$ i $\sup M \in \Omega$. Pokazaćemo da operator $\mathcal{F}$ definisan na skupu Ω sa (3.21) poseduje fiksnu tačku na skupu Ω. Naime, operator $\mathcal{F}$ ima sledeće osobine:

(*i*) *Operator $\mathcal{F}$ slika Ω u samog sebe:* Neka je $x \in \Omega$. Koristeći (3.28), (3.29) i (3.30) dobijamo sledeće nejednakosti

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}x)(t) &\le K^{\frac{\beta}{\alpha}} \int_t^\infty \left(\frac{1}{a(s)}\int_s^\infty b(u)X_1(qu)^\beta\, d_qu\right)^{\frac{1}{\alpha}} d_qs \le K^{\frac{\beta}{\alpha}} 2X_1(t) \le KX_1(t),\\ (\mathcal{F}x)(t) &\ge k^{\frac{\beta}{\alpha}} \int_t^\infty \left(\frac{1}{a(s)}\int_s^\infty b(u)X_1(qu)^\beta\, d_qu\right)^{\frac{1}{\alpha}} d_qs \ge k^{\frac{\beta}{\alpha}} \frac{X_1(t)}{2} \ge kX_1(t),\end{aligned}$$

za svako $t \ge t_0$. Ovim je pokazano da $\mathcal{F}x \in \Omega$, tj. $\mathcal{F}\Omega \subseteq \Omega$.

(*ii*) *Operator $\mathcal{F}$ je monotono rastuća funkcija:* Očigledno, za svako $x, y \in \Omega$, $x \preceq y$ implicira da je $\mathcal{F}x \preceq \mathcal{F}y$.

Sve pretpostavke Knasterove teoreme o fiksnoj tački su ispunjene. Stoga, operator $\mathcal{F}$ poseduje fiksnu tačku $\widehat{x} \in \Omega$ za koju važi

$$\widehat{x}(t) = \int_t^\infty \left(\frac{1}{a(s)}\int_s^\infty b(u)\widehat{x}(qu)^\beta\, d_qu\right)^{\frac{1}{\alpha}} d_qs,\ \ t \in [t_0,\infty)_q. \tag{3.31}$$

Jasno je da je $\widehat{x}$ pozitivno rešenje jednačine (3.1) koje zadovoljava $\lim_{t\to\infty}\widehat{x}(t) = 0$. Takođe, zaključujemo da $\widehat{x} \in \mathbb{M}^-_{0,0}$, obzirom da

$$0 \le -\widehat{x}^{[1]}(t) = \int_t^\infty b(s)\widehat{x}(qs)^\beta\, d_qs \le K^\beta \int_t^\infty b(s)X_1(qs)^\beta\, d_qs \to 0,\ \ t \to \infty,$$

gde integral na desnoj strani poslednje nejednakosti konvergira nuli kao q-pravilno promenljiva funkcija negativnog indeksa regularnosti. $\square$

Teorema 3.3.3. *Neka je $a \in \mathcal{RV}_q(\lambda)$, $\lambda < \alpha$ i $b \in \mathcal{RV}_q(\mu)$. Ako je ispunjen uslov (3.15) postoji rešenje $x \in \mathbb{M}^-_{0,0}$ jednačine (3.1), tj. $\mathbb{M}^-_{0,0} \ne \emptyset$.*

Dokaz: Definišimo funkciju $X_2 : q^{\mathbb{N}_0} \to (0,\infty)$

$$X_2(t) = (\eta_2 H_2(t))^{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}}\,,\ \ t \in q^{\mathbb{N}_0},$$

gde je

$$\eta_2 = \frac{\alpha-\beta}{\alpha\left(-[\lambda-\alpha]_q\right)^{\frac{1}{\alpha}}} \quad \text{i} \quad H_2(t) = \int_t^\infty \left(sa(s)^{-1}b(s)\right)^{\frac{1}{\alpha}} d_qs,\ \ t \in q^{\mathbb{N}_0}.$$

Dokažimo da funkcija X_2 zadovoljava asimptotsku relaciju (3.24). Primetimo da je na pretpostavke (3.15) sledi da $H_2 \in ntr - \mathcal{SV}_q$, tj. $X_2 \in ntr - \mathcal{SV}_q$. Stoga, primenom Teoreme 1.4.4 (ii) pri integraciji na $[t, \infty)$ dobija se

$$\int_t^\infty b(s)X_2(qs)^\beta \, d_q s \;=\; \int_t^\infty s^{\lambda-\alpha-1}\ell_b(s)X_2(qs)^\beta \, d_q s \sim \frac{t^{\lambda-\alpha}}{-[\lambda-\alpha]_q}\ell_b(t)X_2(qt)^\beta, \;\; t \to \infty.$$

Primenom dobijene asimptotske relacije i Teoreme 1.4.3 (i), dokazuje se da X_2 zadovoljava željenu asimptotsku relaciju:

$$\begin{aligned}
\int_t^\infty \left(\frac{1}{a(s)}\int_s^\infty b(u)X_2(qu)^\beta \, d_q u\right)^{\frac{1}{\alpha}} d_q s \;&\sim\; \frac{1}{(-[\lambda-\alpha]_q)^{\frac{1}{\alpha}}}\int_t^\infty s^{-1}\left(\ell_a(s)^{-1}\ell_b(s)\right)^{\frac{1}{\alpha}} X_2(qs)^{\frac{\beta}{\alpha}} \, d_q s \\
&= \frac{1}{(-[\lambda-\alpha]_q)^{\frac{1}{\alpha}}}\int_t^\infty (-D_q H_2(s))(\eta_2 H_2(qs))^{\frac{\beta}{\alpha-\beta}} \, d_q s \\
&\sim \frac{(\alpha-\beta)\eta_2^{\frac{\beta}{\alpha-\beta}}}{\alpha(-[\lambda-\alpha]_q)^{\frac{1}{\alpha}}} H_2(t)^{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}} \\
&= (\eta_2 H_2(t))^{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}} = X_2(t), \;\; t \to \infty.
\end{aligned}$$

Dalje, postupajući isto kao u dokazu Teoreme 3.3.2, menjajući X_1 sa X_2, egzistencija rešenja $\widehat{x} \in \mathbb{M}^-_{0,0}$ jednačine (3.1) takvog da

$$kX_2(t) \le \widehat{x}(t) \le KX_2(t), \;\; \text{za dovoljno veliko } \; t, \tag{3.32}$$

može se pokazati primenom Knasterove teoreme o fiksnoj tački na operator $\mathcal{F}$ definisan sa (3.21). $\square$

Teorema 3.3.4. *Neka je $a \in \mathcal{RV}_q(\lambda)$, $\lambda > \alpha$ i $b \in \mathcal{RV}_q(\mu)$. Ako je ispunjen uslov (3.17), onda postoji rešenje $x \in \mathbb{M}^-_{0,0}$ jednačine (3.1), tj. $\mathbb{M}^-_{0,0} \neq \emptyset$.*

Dokaz: Neka je

$$X_3(t) = \pi(t)\left(\eta_3 H_3(t)\right)^{\frac{1}{\alpha-\beta}}, \;\; t \in q^{\mathbb{N}_0}, \tag{3.33}$$

gde je

$$\eta_3 = q^{(1-\frac{\lambda}{\alpha})\beta}\frac{\alpha-\beta}{\alpha} \quad \text{ i } \quad H_3(t) = \int_t^\infty b(s)\pi(s)^\beta \, d_q t$$

i funkcija π je definisana u (3.10). Dokazaćemo da X_3 zadovoljava asimptotsku relaciju (3.24). Primetimo da $H_3 \in ntr - \mathcal{SV}_q$, na osnovu pretpostavke (3.17). Primenom Teoreme 1.4.3 (i) dobijamo

$$\begin{aligned}
\int_t^\infty b(s)X_3(qs)^\beta \, d_q s \;&=\; \int_t^\infty b(s)\pi(qs)^\beta \left(\eta_3 H_3(qs)\right)^{\frac{\beta}{\alpha-\beta}} \, d_q s \\
&\sim q^{(1-\frac{\lambda}{\alpha})\beta}\eta_3^{\frac{\beta}{\alpha-\beta}}\int_t^\infty \left(-D_q H_3(s)\right) H_3(qs)^{\frac{\beta}{\alpha-\beta}} \, d_q s \\
&\sim q^{(1-\frac{\lambda}{\alpha})\beta}\eta_3^{\frac{\beta}{\alpha-\beta}}\frac{\alpha-\beta}{\alpha}H_3(t)^{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}} = \left(\eta_3 H_3(t)\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}}, \;\; t \to \infty,
\end{aligned}$$

odakle dalje sledi

$$\begin{aligned}\int_t^\infty \left(\frac{1}{a(s)}\int_s^\infty b(u)X_3(qu)^\beta\, d_q u\right)^{\frac{1}{\alpha}} &\sim \int_t^\infty \left(s^{-\lambda}\ell_a(s)^{-1}(\eta_3 H_3(s))^{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}}\right)^{\frac{1}{\alpha}} d_q s\\ &\sim \frac{t^{1-\frac{\lambda}{\alpha}}}{-\left[1-\frac{\lambda}{\alpha}\right]_q}\ell_a(t)^{-\frac{1}{\alpha}}(\eta_3 H_3(t))^{\frac{1}{\alpha-\beta}}\\ &\sim \pi(t)(\eta_3 H_3(t))^{\frac{1}{\alpha-\beta}} = X_3(t), \quad t\to\infty.\end{aligned}$$

Ponavljajući postupak iz dokaza Teoreme 3.3.2, menjajući X_1 sa X_3, primenom Knasterove teoreme o fiksnoj tački na operator $\mathcal{F}$ definisan sa (3.21), pokazuje se da postoji $\widehat{x}\in\mathbb{M}^-_{0,0}$ takvo da

$$kX_3(t)\le \widehat{x}(t)\le KX_3(t),\quad \text{za dovoljno veliko } t. \quad \square \tag{3.34}$$

Primenom Teorema 3.3.2 - 3.3.4 dokažimo Teoremu 3.3.1.

Dokaz Teoreme 3.3.1 *(i)* Pretpostavka $I_a=\infty$ implicira da je $\lambda<\alpha$, dok će iz pretpostavke $I_\alpha<\infty$ na osnovu Leme 3.3.1 *(i)* biti ispunjen jedan od sledećih uslova

a) (3.14), kada na osnovu Teoreme 3.3.2 *(i)* zaključujemo da je $\mathbb{M}^-_{0,0}\neq\emptyset$;

b) (3.15), kada na osnovu Teoreme 3.3.3 zaključujemo da je $\mathbb{M}^-_{0,0}\neq\emptyset$.

(ii) Pretpostavka $I_a<\infty$, implicira da je $\lambda>\alpha$, dok će iz pretpostavke $J_\beta<\infty$ na osnovu Leme 3.3.1 *(ii)* biti ispunjen jedan od sledećih uslova

a) (3.16), kada na osnovu Teoreme 3.3.2 *(ii)* zaključujemo da je $\mathbb{M}^-_{0,0}\neq\emptyset$;

b) (3.17), kada na osnovu Teoreme 3.3.4 zaključujemo da je $\mathbb{M}^-_{0,0}\neq\emptyset$. $\square$

3.4 Asimptotska reprezentacija $\mathcal{RV}_q-$strogo opadajućih rešenja

U ovom poglavlju biće određeni potrebni i dovoljni uslovi za egzistenciju strogo opadajućih q-pravilno promenljivih rešenja jednačine (3.1) i biće određene asimptotske formule pomenutih rešenja. Osim toga, biće pokazano da sva q-pravilno promenljiva rešenja istog indeksa regularnosti imaju istu asimptotsku reprezentaciju.

U nastavku su navedena pomoćna tvrđenja, koja će biti potrebna kako bi se dokazali glavni rezultati.

Lema 3.4.1. *Neka je $a\in\mathcal{RV}_q(\lambda)$, $\lambda<\alpha$ i $b\in\mathcal{RV}_q(\mu)$. Svako rešenje $x\in\mathbb{M}^-_{0,0}\cap\mathcal{RV}_q(\rho)$, $\rho\le 0$ jednačine (3.1) zadovoljava tačno jedno od sledećih tvrđenja*

(i) $\rho=0$ *i*

$$x(t)\sim\left(\frac{1}{-[\lambda-\alpha]_q}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\int_t^\infty s^{-1}\left(\ell_a(s)^{-1}\ell_b(s)\ell_x(s)^\beta\right)^{\frac{1}{\alpha}} d_q s,\quad t\to\infty. \tag{3.35}$$

U tom slučaju je $\mu=\lambda-\alpha-1$.

(ii) ρ *je dato sa* (3.23) *i*

$$x(t) \sim \left(\frac{q^{\rho\beta} t^{\alpha+1} a(t)^{-1} b(t)}{(-[\rho]_q)^{\alpha} (-[(\rho-1)\alpha+\lambda]_q)} \right)^{\frac{1}{\alpha-\beta}}, \quad t \to \infty. \tag{3.36}$$

U tom slučaju je $\mu < \lambda - \alpha - 1$.

Dokaz: Neka je $x \in \mathbb{M}^{-}_{0,0} \cap \mathcal{RV}_q(\rho)$, $\rho \leq 0$ rešenje jednačine (3.1) takvo da je $x(t) > 0$, $D_q x(t) < 0$, $t \in [t_0, \infty)_q$, $t_0 \in q^{\mathbb{N}_0}$ i neka je takvo rešenje predstavljeno u obliku (3.8).

Kako je $\lim_{t\to\infty} x^{[1]}(t) = 0$, integraljenjem jednačine (3.1) na intervalu $[t, \infty)$ i primenom (3.7) dobija se

$$-x^{[1]}(t) = \int_t^{\infty} b(s) x(qs)^{\beta} \, d_q s = q^{\rho\beta} \int_t^{\infty} s^{\mu+\rho\beta} \ell_b(s) \ell_x(qs)^{\beta} \, d_q s, \quad t \in [t_0, \infty)_q. \tag{3.37}$$

Konvergencija nesvojstvenog integrala u jednakosti (3.37), uz primenu q-Karamatine integracione teoreme, implicira da je $\mu + \rho\beta \leq -1$. Dokažimo da se radi o strogoj nejednakosti.

Pretpostavimo da je $\mu + \rho\beta = -1$. Tada se (3.37) može zapisati na sledeći način

$$-x^{[1]}(t) = q^{\rho\beta} \int_t^{\infty} s^{-1} \ell_b(s) \ell_x(qs)^{\beta} \, d_q s = G(t), \quad t \in [t_0, \infty)_q, \tag{3.38}$$

gde je $G \in ntr-\mathcal{SV}_q$, prema Teoremi 1.4.4 *(iv)* i $\lim_{t\to\infty} G(t) = 0$. Iz poslednje jednakosti slediće

$$-D_q x(t) = \Phi_{1/\alpha}\left(\frac{G(t)}{a(t)} \right), \quad t \in [t_0, \infty)_q. \tag{3.39}$$

Integraljenjem (3.39) na intervalu $[t, \infty)$ dobija se

$$x(t) = \int_t^{\infty} \Phi_{1/\alpha}\left(\frac{G(s)}{a(s)} \right) d_q s, \quad t \in [t_0, \infty)_q. \tag{3.40}$$

Konvergencija nesvojstvenog integrala u jednakosti (3.40) primenom q-Karamatine integracione teoreme implicira da je $\lambda \geq \alpha$, što je u kontradikciji sa polaznom pretpostavkom.

Dakle, važi nejednakost $\mu + \rho\beta < -1$. Primenom q-Karamatine integracione teoreme, iz (3.37) dobija se

$$-x^{[1]}(t) \sim \frac{q^{\rho\beta}}{-[\mu+\rho\beta+1]_q} t^{\mu+\rho\beta+1} \ell_b(t) \ell_x(t)^{\beta}, \quad t \to \infty,$$

odakle će dalje slediti

$$-D_q x(t) \sim \left(\frac{q^{\rho\beta}}{-[\mu+\rho\beta+1]_q} t^{\mu+\rho\beta+1-\lambda} \ell_a(t)^{-1} \ell_b(t) \ell_x(t)^{\beta} \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad t \to \infty, \tag{3.41}$$

Integraljenjem asimptotske relacije (3.41) na $[t, \infty)$ dobija se

$$x(t) \sim \left(\frac{q^{\rho\beta}}{-[\mu+\rho\beta+1]_q} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \int_t^{\infty} s^{\frac{\mu+\rho\beta+1-\lambda}{\alpha}} \left(\ell_a(s)^{-1} \ell_b(s) \ell_x(s)^{\beta} \right)^{\frac{1}{\alpha}} d_q s, \quad t \to \infty. \tag{3.42}$$

Konvergencija nesvojstvenog integrala asimptotske relacije (3.42) implicira sledeće dve mogućnosti:

$$(3.43) \qquad (a)\ \frac{\mu+\rho\beta+1-\lambda}{\alpha} = -1; \quad (b)\ \frac{\mu+\rho\beta+1-\lambda}{\alpha} < -1.$$

Ukoliko važi jednakost (a) Teorema 1.4.4 (iv) implicira da je rešenje x q-sporo promenljiva funkcija. Asimptotska relacija (3.42) dokazuje da rešenje x tada zadovoljava asimptotsku relaciju (3.35) i da je $\mu = \lambda - \alpha - 1$.

Ukoliko važi nejednakost (b), primena q-Karamatine integracione teoreme u (3.42) implicira

$$(3.44) \qquad x(t) \sim \frac{q^{\frac{\rho\beta}{\alpha}} t^{\frac{\mu+\rho\beta+1-\lambda}{\alpha}+1}}{-\left[\frac{\mu+\rho\beta+1-\lambda}{\alpha}+1\right]_q (-[\mu+\rho\beta+1]_q)^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\ell_a(t)^{-1}\ell_b(t)\ell_x(qt)^{\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad t\to\infty.$$

Stoga, mora važiti

$$(3.45) \qquad \rho = \frac{\mu+\rho\beta+1-\lambda}{\alpha} + 1,$$

što dalje implicira da je indeks regularnosti rešenja x dat sa (3.23), kao i da je $\mu < \lambda-\alpha-1$. Primenom (3.7), (3.23) i (3.45), iz (3.44) dobija se da je asimptotska formula rešenja $x \in \mathcal{RV}_q(\rho)$ data sa (3.36). □

Lema 3.4.2. *Neka je $a \in \mathcal{RV}_q(\lambda)$, $\lambda > \alpha$ i $b \in \mathcal{RV}_q(\mu)$. Svako rešenje $x \in \mathbb{M}^-_{0,0} \cap \mathcal{RV}_q(\rho)$, $\rho \le 1-\lambda/\alpha$ jednačine (3.1) zadovoljava tačno jedno od sledećih tvrđenja*

(i) $\rho = 1-\lambda/\alpha$ *i*

$$(3.46) \qquad x(t) \sim \frac{q^{\left(1-\frac{\lambda}{\alpha}\right)\frac{\beta}{\alpha}} t^{1-\frac{\lambda}{\alpha}}}{-\left[1-\frac{\lambda}{\alpha}\right]_q} \left(\ell_a(t)^{-1}\int_t^{\infty} s^{-1}\ell_b(s)\ell_x(qs)^{\beta}\, d_q s\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad t\to\infty.$$

U tom slučaju je $\mu = \beta\ (\lambda/\alpha - 1) - 1$.

(ii) ρ *je dato sa* (3.23) *i rešenje* x *zadovoljava* (3.36). *Tada je* $\mu < \beta\,(\lambda/\alpha - 1) - 1$.

Dokaz: Neka je $x \in \mathbb{M}^-_{0,0} \cap \mathcal{RV}_q(\rho)$, $\rho \le 1-\frac{\lambda}{\alpha}$ rešenje jednačine (3.1) takvo da zadovoljava uslove $x(t) > 0$, $D_q x(t) < 0$, $t \ge t_0$ za neko $t_0 \in q^{\mathbb{N}_0}$ i neka je takvo rešenje predstavljeno u obliku (3.8). Analognim postupkom kao u dokazu prethodne leme zaključuje se da rešenje x jednačine (3.1) zadovoljava jednakost (3.37) i da mora važiti nejednakost $\mu+\rho\beta \le -1$.

Posmatrajmo najpre slučaj $\mu+\rho\beta = -1$. Ponavljajući postupak iz dokaza Leme 3.4.1, dobija se da rešenje x zadovoljava integralnu jednačinu (3.40). Međutim, kako je $\lambda > \alpha$, ispunjeni su uslovi za primenu Karamatine integracione teoreme pri integraciji u (3.40), nakon čega se dobija da rešenje x u ovom slučaju zadovoljava asimptotsku relaciju (3.46). Osim toga, slediće da je indeks regularnosti ovog rešenja $\rho = 1-\lambda/\alpha$, kao i veza između indeksa regularnosti koeficijenata jednačine $\mu = \beta\ (\lambda/\alpha - 1) - 1$.

U drugom slučaju, ukoliko je $\mu + \rho\beta < -1$, analognim postupkom kao u dokazu Leme 3.4.1 zaključuje se da rešenje x zadovoljava asimptotsku relaciju (3.42). Kako je

$$\frac{\mu + \rho\beta + 1 - \lambda}{\alpha} < -\frac{\lambda}{\alpha} < -1\,.$$

primenom Teoreme 1.4.4 (ii) u (3.42) dobija se da rešenje x u ovom slučaju zadovoljava relaciju (3.44). Odatle će slediti da je ρ dato sa (3.23), x zadovoljava asimptotsku formulu (3.36) i $\mu < \beta\ (\lambda/\alpha - 1) - 1$. $\square$

U narednim tvrđenjima određeni su potrebni i dovoljni uslovi za egzistenciju q-pravilno promenljivih rešenja jednačine (3.1), za svaku od četiri podklasa klase strogo opadajućih rešenja navedenih u (3.9) i (3.13). Takođe, biće pokazano da sva rešenja iz određene podklase imaju istu asimptotsku reprezentaciju. Potrebni i dovoljni uslovi za egzistenciju q-pravilno promenljivih rešenja izraženi su uz pomoć indeksa regularnosti q-pravilno promenljivih koeficijenata.

Teorema 3.4.1. *Neka je $a \in \mathcal{RV}_q(\lambda)$ i $b \in \mathcal{RV}_q(\mu)$.*

(i) Neka je $\lambda < \alpha$. Tada jednačina (3.1) ima rešenje $x \in \mathcal{RV}_q(\rho)$, gde je $\rho < 0$ ako i samo ako važi (3.14).

(ii) Neka je $\lambda > \alpha$. Tada jednačina (3.1) ima rešenje $x \in \mathcal{RV}_q(\rho)$, gde je $\rho < 1 - \lambda/\alpha$ ako i samo ako važi (3.16).

U oba slučaja ρ je dato sa (3.23) i asimptotska reprezentacija takvog rešenja određena je formulom (3.36).

Dokaz: Dokazaćemo delove (i) i (ii) simultano.

($\Rightarrow$:) Neka je $x \in \mathcal{RV}_q(\rho)$ rešenje jednačine (3.1) i neka je

$$(a)\ \ \lambda < \alpha \quad \text{i} \quad \rho < 0 \qquad \text{ili} \qquad (b)\ \ \lambda > \alpha \quad \text{i} \quad \rho < 1 - \frac{\lambda}{\alpha}.$$

Primena Teoreme 1.4.2 $(iii), (iv), (vi)$ implicira da $x^{[1]} \in \mathcal{RV}_q(\lambda - \alpha + \alpha\rho)$. Kako svaki od uslova (a) i (b) implicira da je $\rho < 0$ i $\lambda - \alpha + \alpha\rho < 0$, slediće da je $\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} x^{[1]}(t) = 0$. Prema Teoremi 1.4.1 (ii) rešenje x će biti eventualno monotono opadajuća funkcija, te zaključujemo da je $x \in \mathbb{M}^-_{0,0}$.

Ukoliko je ispunjen uslov (a), jedino slučaj (i) Leme 3.4.1 je moguć za rešenje x, te je indeks regularnosti rešenja x dat sa (3.23), μ zadovoljava (3.14) i asimptotska reprezentacija pravilno promenljivog rešenja x indeksa ρ data je sa (3.36).

Ukoliko važi (b) jedino slučaj (ii) Leme 3.4.2 je moguć za rešenje x, odakle zaključujemo da je indeks regularnosti rešenja x dat sa (3.23), μ zadovoljava prvi uslov u (3.15) i asimptotska reprezentacija pravilno promenljivog rešenja x indeksa ρ data je sa (3.36).

($\Leftarrow$:) Pretpostavimo da je jedan od uslova (i) ili (ii) iz (3.20) ispunjen. Primena Teoreme 3.3.2 implicira da je $\mathbb{M}^-_{0,0} \neq \emptyset$, ali i dokazuje da postoji rešenje jednačine (3.1), $x \in \Omega$, koje zadovoljava integralnu jednačinu (3.31), gde je Ω definisano u (3.30). Ostaje pokazati da je ovakvo rešenje q-pravilno promenljiva funkcija indeksa regularnosti ρ, gde je ρ dato sa (3.23). Na osnovu načina definisanja skupa Ω, slediće

$$0 < \liminf_{t\to\infty} \frac{x(t)}{X_1(t)} \leq \limsup_{t\to\infty} \frac{x(t)}{X_1(t)} < \infty,$$

gde je $X_1 \in \mathcal{RV}_q(\rho)$ definisano sa (3.22) i zadovoljava asimptotsku relaciju (3.24). Primenom generalisanog q-Lopitalovog pravila pokazuje se da je

$$\begin{aligned} L &= \limsup_{t\to\infty} \frac{x(t)}{X_1(t)} \leq \limsup_{t\to\infty} \frac{D_q x(t)}{D_q X_1(t)} = \limsup_{t\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{a(t)}\int_t^\infty b(s)x(qs)^\beta \, d_q s\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{\left(\frac{1}{a(t)}\int_t^\infty b(s)X_1(qs)^\beta \, d_q s\right)^{\frac{1}{\alpha}}} \\ &\leq \left(\limsup_{t\to\infty} \frac{\int_t^\infty b(s)x(qs)^\beta \, d_q s}{\int_t^\infty b(s)X_1(qs)^\beta \, d_q s}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq \left(\limsup_{t\to\infty} \frac{b(t)x(qt)^\beta}{b(t)X_1(qt)^\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \\ &\leq \left(\limsup_{t\to\infty} \frac{x(qt)}{X_1(qt)}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}} = L^{\frac{\beta}{\alpha}}. \end{aligned}$$

Kako je $\beta < \alpha$, zaključujemo da je $0 < L \leq 1$. Slično, pokazuje se da je

$$l = \liminf_{t\to\infty} \frac{x(t)}{X_1(t)} \geq l^{\beta/\alpha},$$

te se zaključuje da je $1 \leq l < \infty$. Iz ovih razmatranja slediće da je $l = L = 1$, što znači da

$$x(t) \sim X_1(t), \quad t \to \infty.$$

Time je dokazano da je x q-pravilno promenljivo rešenje jednačine (3.1) sa indeksom regularnosti ρ i asimptotskom formulom datom sa (3.36). $\square$

Teorema 3.4.2. *Neka je* $a \in \mathcal{RV}_q(\lambda)$, $\lambda < \alpha$ *i* $b \in \mathcal{RV}_q(\mu)$. *Jednačina* (3.1) *ima rešenje* $x \in \mathbb{M}_{0,0}^- \cap ntr - \mathcal{SV}_q$ *ako i samo je zadovoljen uslov* (3.15). *Svako takvo rešenje ima sledeću asimptotsku reprezentaciju*

$$x(t) \sim \left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha\left(-[\mu+1]_q\right)^{\frac{1}{\alpha}}} \int_t^\infty \left(sa(s)^{-1}b(s)\right)^{\frac{1}{\alpha}} \, d_q s\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}}, \quad t \to \infty. \tag{3.47}$$

Dokaz: ($\Rightarrow$:) Neka je $x \in \mathbb{M}_{0,0}^- \cap ntr - \mathcal{SV}_q$ rešenje jednačine (3.1). Tada, primenom Leme 3.4.1 (i) zaključuje se da važi veza $\mu = \lambda - \alpha - 1$ između indeksa regularnosti koeficijenata jednačine (3.1) i da rešenje x ove jednačine zadovoljava asimptotsku relaciju (3.35). U dokazu Leme 3.4.1 (i) pokazano je da ovakvo rešenje zadovoljava asimptotsku relaciju (3.41) koja se može predstaviti u sledećem obliku

$$\ell_x(qt)^{-\frac{\beta}{\alpha}} \left(-D_q \ell_x(t)\right) \sim \frac{t^{-1}\left(\ell_a(t)^{-1}\ell_b(t)\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{\left(-[\lambda-\alpha]_q\right)^{\frac{1}{\alpha}}}, \quad t \to \infty. \tag{3.48}$$

Integraljenjem (3.48) na $[t,\infty)$ i primenom Teoreme 1.4.3 (i) zaključujemo

$$\begin{aligned}\frac{1}{(-[\lambda-\alpha]_q)^{\frac{1}{\alpha}}}\int_t^\infty t^{-1}\left(\ell_a(t)^{-1}\ell_b(t)\right)^{\frac{1}{\alpha}}\,d_qs \;&\sim\; \int_t^\infty \ell_x(qs)^{-\frac{\beta}{\alpha}}\left(-D_q\ell_x(s)\right)\,d_qs\\ &\sim\; \frac{\alpha}{\alpha-\beta}\ell_x(t)^{1-\frac{\beta}{\alpha}},\;\; t\to\infty.\end{aligned}$$

Kako je na osnovu polazne pretpostavke $\lim_{t\to\infty}\ell_x(t)^{1-\frac{\beta}{\alpha}}=0$, zaključujemo da nesvojstveni integral u poslednjoj asimptotskoj relaciji konvergira, tj. da je i drugi uslov u (3.15) ispunjen, kao i da je asimptotska reprezentacija rešenja x data sa (3.47).

($\Leftarrow$:) Neka je ispunjen uslov (3.15). Tada, na osnovu Teoreme 3.3.3 postoji rešenje $x\in\mathbb{M}^-_{0,0}$ koje zadovoljava (3.31) i (3.32). Postupajući isto kao u dokazu prethodne teoreme, može se dokazati da je takvo rešenje netrivijalno q-sporo promenljivo rešenje jednačine (3.1) čija je asimptotska reprezentacija data sa (3.47). □

Teorema 3.4.3. *Neka je $a\in\mathcal{RV}_q(\lambda)$, $\lambda>\alpha$ i $b\in\mathcal{RV}_q(\mu)$. Jednačina (3.1) ima rešenje $x\in\mathbb{M}^-_{0,0}\cap ntr-\mathcal{RV}_q\,(1-\lambda/\alpha)$ ako i samo je zadovoljen uslov (3.17). Svako takvo rešenje ima sledeću asimptotsku reprezentaciju*

$$x(t)\sim\pi(t)\left(q^{(1-\frac{\lambda}{\alpha})\beta}\,\frac{\alpha-\beta}{\alpha}\int_t^\infty b(s)\pi(s)^\beta\,d_qs\right)^{\frac{1}{\alpha-\beta}},\;\; t\to\infty, \tag{3.49}$$

gde je π funkcija definisana u (3.10)

Dokaz: **($\Rightarrow$:)** Neka postoji rešenje $x\in\mathbb{M}^-_{0,0}\cap ntr-\mathcal{RV}_q(1-\lambda/\alpha)$. Tada, na osnovu Leme 3.4.2 (i) zadovoljena je veza $\mu=\beta(1-\lambda/\alpha)-1$ između indeksa regularnosti koeficijenata jednačine (3.1) i rešenje x ove jednačine zadovoljava asimptotsku relaciju (3.46). Neka je G definisano u (3.38). Pomenuta asimptotska relacija se tada može transformisati u

$$l_x(t)\sim\frac{1}{-[1-\frac{\lambda}{\alpha}]_q}l_a(t)^{-\frac{1}{\alpha}}G(t)^{\frac{1}{\alpha}},\;\; t\to\infty, \tag{3.50}$$

koja se dalje može transformisati u asimptotsku relaciju

$$-G(qt)^{-\frac{\beta}{\alpha}}D_qG(t)\sim\left(\frac{q^{1-\frac{\lambda}{\alpha}}}{-[1-\frac{\lambda}{\alpha}]_q}\right)^\beta t^{-1}l_a(t)^{-\frac{\beta}{\alpha}}l_b(t)\sim q^{(1-\frac{\lambda}{\alpha})\beta}b(t)\pi(t)^\beta,\; t\to\infty.$$

Integracijom dobijene asimptotske relacije na intervalu $[t,\infty)$ i primenom Teoreme 1.4.3 (i) dobija se

$$\frac{\alpha}{\alpha-\beta}G(t)^{1-\frac{\beta}{\alpha}}\sim q^{(1-\frac{\lambda}{\alpha})\beta}\int_t^\infty b(s)\pi(s)^\beta\,d_qs,\;\; t\to\infty. \tag{3.51}$$

Kako $\lim_{t\to\infty}G(t)^{1-\frac{\beta}{\alpha}}=0$, zaključujemo da je drugi uslov u (3.17) ispunjen. Iz asimptotske relacije (3.51), primenom (3.38) i činjenice da je $-x^{[1]}(t)\sim x(t)/\pi(t)$, $t\to\infty$ dobija se da je asimptotska reprezentacija za rešenje x jednačine (3.1) data sa (3.49).

($\Leftarrow$:) Neka je ispunjen uslov (3.17). Tada, primenom Teoreme 3.3.4 postoji rešenje jednačine (3.1) $x\in\mathbb{M}^-_{0,0}$ koje zadovoljava (3.31) i (3.34). Postupajući kao u dokazu Teoreme 3.4.1, pokazuje se da je ovo rešenje q-pravilno promenljiva funkcija indeksa regularnosti $1-\lambda/\alpha$, sa asimptotskom reprezentacijom datom sa (3.49). □

Naredno tvrđenje je posledica dokazanih Teorema 3.4.1, 3.4.2 i 3.4.3. Određeni su potrebni i dovoljni uslovi za egzistenciju strogo opadajućih q-pravilno promenljivih rešenja izraženi pomoću konvergencije integrala I_α i J_β.

Posledica 3.4.1. *Neka je $a \in \mathcal{RV}_q(\lambda)$, $\lambda \neq \alpha$ i $b \in \mathcal{RV}_q(\mu)$. Tada važe sledeća tvrđenja*

(*i*) *Neka je $I_a = \infty$. Tada je $\mathcal{R}^-_{0,0} \neq \emptyset$ ako i samo ako $I_\alpha < \infty$.*

(*ii*) *Neka je $I_a < \infty$. Tada je $\mathcal{R}^-_{0,0} \neq \emptyset$ ako i samo ako $J_\beta < \infty$.*

3.5 Egzistencija i asimptotska reprezentacija $\mathcal{RV}_q-$ strogo rastućih rešenja

Kao u prethodnom poglavlju, pretpostavimo da su koeficijenti jednačine (3.1) q-pravilno promenljive funkcije predstavljene u obliku (3.7) i posmatrajmo q-pravilno promenljiva strogo rastuća rešenja jednačine (3.1) izražena u obliku (3.8). Razlikujemo slučajeve $\lambda > \alpha$ i $\lambda < \alpha$. Najpre, odredimo intervale indeksa regularnosti strogo rastućih q-pravilno promenljivih rešenja jednačine (3.1).

I slučaj $\lambda < \alpha$: Definišimo rastuću funkciju $P : q^{\mathbb{N}_0} \to [0, \infty)$ na sledeći način

$$P(t) = \int_1^t \frac{d_q s}{a(s)^{\frac{1}{\alpha}}}, \quad t \in q^{\mathbb{N}_0}. \tag{3.52}$$

Primenom q-Karamatine integracione teoreme, važiće sledeća asimptotska relacija

$$P(t) \sim \frac{t^{1-\frac{\lambda}{\alpha}}}{\left[1 - \frac{\lambda}{\alpha}\right]_q} \ell_a(t)^{-\frac{1}{\alpha}}, \quad t \to \infty. \tag{3.53}$$

Na osnovu Teoreme 1.4.2 (*vii*) zaključuje se da $P \in \mathcal{RV}_q\left(1 - \lambda/\alpha\right)$. Pretpostavimo da postoji strogo rastuće q-pravilno promenljivo rešenje x jednačine (3.1), predstavljeno u obliku (3.8). Primenom q-Lopitalovog pravila, za svako takvo rešenje jednačine (3.1) važiće

$$\lim_{t\to\infty} \frac{x(t)}{P(t)} = \lim_{t\to\infty} D_q x(t) a(t)^{\frac{1}{\alpha}} = \lim_{t\to\infty} (x^{[1]}(t))^{\frac{1}{\alpha}} = \infty, \tag{3.54}$$

te se zaključuje da indeks q-regularnosti rešenja x zadovoljava $\rho \geq 1 - \lambda/\alpha$. Skup strogo rastućih $\mathcal{RV}_q$ rešenja jednačine (3.1) se može podeliti u dve klase

$$\mathcal{R}^+_{\infty,\infty} = ntr - \mathbb{M}^+_{RV}\left(1 - \frac{\lambda}{\alpha}\right) \cup \mathbb{M}^+_{RV}(\rho), \text{ gde je } \rho > 1 - \frac{\lambda}{\alpha}. \tag{3.55}$$

II slučaj $\lambda > \alpha$: Neka je x strogo rastuće q-pravilno promenljivo rešenje jednačine (3.1). Indeks regularnosti ρ ovakvog rešenja na osnovu Teoreme 1.4.2 *(ii)* zadovoljava uslov $\rho \geq 0$. U slučaju $\rho = 0$, kako je $\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} \ell_x(t) = \infty$, x je netrivijalno q-sporo promenljivo rešenje. Stoga, skup strogo rastućih q-pravilno promenljivih rešenja može se podeliti na sledeće dve klase

$$\mathcal{R}^{+}_{\infty,\infty} = ntr - \mathbb{M}^{+}_{SV} \cup \mathbb{M}^{+}_{RV}(\rho), \text{ gde je } \rho > 0. \tag{3.56}$$

U Teoremi 3.2.7 (i) određeni su potrebni i dovoljni uslovi za egzistenciju strogo rastućih rešenja jednačine (3.1). Međutim, u nastavku ćemo odrediti potrebne i dovoljne uslove za egzistenciju q-pravilno promenljivih strogo rastućih rešenja za svaku od četiri klasa rešenja navedenih u (3.55) i (3.56) i odrediti njihove asimptotske formule. Pokazaćemo da su, pod pretpostavkom da su koeficijenti jednačine (3.1) q-pravilno promenljive funkcije, potrebni i dovoljni uslovi za egzistenciju strogo rastućih q-pravilno promenljivih rešenja isti kao potrebni i dovoljni uslovi za egzistenciju strogo rastućih rešenja. Štavise, biće dokazano da sva q-pravilno promenljiva rešenja određenog indeksa regularnosti imaju istu asimptotsku formulu kada $t \to \infty$, gde je indeks regularnosti određen konstantama α i β i indeksima regularnosti λ i μ koeficijenata jednačine (3.1).

Kao što smo već videli, potrebni i dovoljni uslovi za egzistenciju strogo rastućih rešenja određeni su divergencijom integrala K_α i H_β definisanih u (3.5) i (3.6). Naredna lema daje potrebne i dovoljne uslove za divergenciju ovih integrala, pod pretpostavkom da su koeficijenti jednačine (3.1) q-pravilno promenljive funkcije određenih indeksa regularnosti.

Lema 3.5.1. *Neka je $a \in \mathcal{RV}_q(\lambda)$, $\lambda \neq \alpha$ i $b \in \mathcal{RV}_q(\mu)$.*

(i) *Neka je $\lambda < \alpha$. Tada $H_\beta = \infty$ ako i samo je ispunjen jedan od sledećih uslova*

$$\mu > \beta\left(\frac{\lambda}{\alpha} - 1\right) - 1 \tag{3.57}$$

ili

$$\mu = \beta\left(\frac{\lambda}{\alpha} - 1\right) - 1 \quad i \quad \int_1^\infty b(t)P(t)^\beta \, d_q t = \infty, \tag{3.58}$$

gde je funkcija P definisana u (3.52).

(ii) *Neka je $\lambda > \alpha$. Tada $K_\alpha = \infty$ ako i samo ako je ispunjen jedan od sledećih uslova*

$$\mu > \lambda - \alpha - 1 \tag{3.59}$$

ili

$$\mu = \lambda - \alpha - 1 \quad i \quad \int_1^\infty (ta(t)^{-1}b(t))^{\frac{1}{\alpha}} \, d_q t = \infty. \tag{3.60}$$

Dokaz: (i) $(\Rightarrow:)$ Iz pretpostavke da je $\lambda < \alpha$ slediće da važi (3.53), te je

$$\int_1^t b(s)\left(\int_1^s \frac{1}{a(u)^{\frac{1}{\alpha}}} \, d_q u\right)^\beta d_q s \sim \frac{1}{[1 - \frac{\lambda}{\alpha}]_q^\beta} \int_1^t s^{\mu + (1-\frac{\lambda}{\alpha})\beta} l_a(s)^{-\frac{\beta}{\alpha}} l_b(s) \, d_q s, \; t \to \infty. \tag{3.61}$$

Kako je $H_\beta = \infty$, integrali u navedenoj asimptotskoj relaciji divergiraju kada $t \to \infty$. Na osnovu q-Karamatine integracione teoreme zaključujemo da je onda ispunjen jedan od uslova (3.57) ili (3.58).

($\Leftarrow$:) Iz pretpostavke da je $\lambda < \alpha$ slediće da važi (3.53), a posledično i (3.61). Kako je ispunjen jedan od uslova (3.57) ili (3.58), zaključujemo da integral na desnoj strani asimptotske relacije (3.61) teži ka beskonačnosti kada $t \to \infty$, a odatle je i $H_\beta = \infty$.

(ii) Analognim postupkom, korišćenjem q-Karamatine integracione teoreme, dokazuju se potrebni i dovoljni uslovu za divergenciju integrala K_α. $\square$

U nastavku su dokazane pomoćne leme koje će biti korišćene pri određivanju asimptotske reprezentacije q-pravilno promenljivih strogo rastućih rešenja.

Lema 3.5.2. *Neka je $a \in \mathcal{RV}_q(\lambda)$, $\lambda > \alpha$ i $b \in \mathcal{RV}_q(\mu)$. Rešenje $x \in \mathbb{M}^+_{\infty,\infty} \cap \mathcal{RV}_q(\rho)$, $\rho \geq 0$ jednačine (3.1) zadovoljava tačno jedno od sledećih tvrđenja:*

(i) $\rho = 0$ *i*

$$x(t) \sim \left(\frac{1}{[\lambda-\alpha]_q}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \int_1^t s^{-1}\left(\ell_a(s)^{-1}\ell_b(s)\ell_x(s)^\beta\right)^{\frac{1}{\alpha}} d_qs, \quad t \to \infty. \tag{3.62}$$

U tom slučaju je $\mu = \lambda - \alpha - 1$.

(ii) *ρ je dato sa (3.23) i*

$$x(t) \sim \left(\frac{q^{\rho\beta}t^{\alpha+1}a(t)^{-1}b(t)}{([\rho]_q)^\alpha[(\rho-1)\alpha+\lambda]_q}\right)^{\frac{1}{\alpha-\beta}}, \quad t \to \infty. \tag{3.63}$$

U tom slučaju je $\mu > \lambda - \alpha - 1$.

Dokaz: Neka je $x \in \mathbb{M}^+_{\infty,\infty} \cap \mathcal{RV}_q(\rho)$, $\rho \geq 0$ rešenje jednačine (3.1) takvo da zadovoljava uslove $x(t) > 0$, $D_qx(t) > 0$ na intervalu $[t_0, \infty)_q$, za neko $t_0 \in q^{\mathbb{N}_0}$ i neka je takvo rešenje predstavljeno u obliku (3.8).

Integraljenjem jednačine (3.1) na intervalu $[t_0, t]$, uz primenu (3.7), dobija se

$$x^{[1]}(t) - x^{[1]}(t_0) = \int_{t_0}^t b(s)x(qs)^\beta\, d_qs = q^{\rho\beta}\int_{t_0}^t s^{\mu+\rho\beta}\ell_b(s)\ell_x(qs)^\beta\, d_qs, \quad t \in [t_0,\infty)_q. \tag{3.64}$$

Kako je $\lim_{t\to\infty} x^{[1]}(t) = \infty$, zaključuje se da integral u jednakosti (3.64) divergira kada $t \to \infty$. Primena q-Karamatine integracione teoreme implicira da je u tom slučaju $\mu+\rho\beta \geq -1$. Dokažimo da se radi o strogoj nejednakosti.

Pretpostavimo da je $\mu + \rho\beta = -1$. Tada će iz (3.64) slediti

$$x^{[1]}(t) \sim q^{\rho\beta}\int_{t_0}^t s^{-1}\ell_b(s)\ell_x(s)^\beta\, d_qs = H(t), \quad t \in [t_0,\infty)_q, \tag{3.65}$$

gde je $H \in ntr - \mathcal{SV}_q$. Iz poslednje asimptotske relacije slediće

$$D_qx(t) \sim \Phi_{1/\alpha}\left(\frac{H(t)}{a(t)}\right), \quad t \to \infty, \tag{3.66}$$

čijim integraljenjem na intervalu $[t_0, t]$ se dalje dobija

$$(3.67)\qquad x(t) \sim \int_{t_0}^{t} \Phi_{1/\alpha}\left(\frac{H(s)}{a(s)}\right) d_q s, \quad t \to \infty.$$

Pretpostavka $\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty$ implicira da integral u jednakosti (3.67) divergira kada $t \to \infty$, te primenom q-Karamatine integracione teoreme zaključuje se da mora važiti da je $\lambda \leq \alpha$, što je u kontradikciji sa polaznom pretpostavkom.

Dakle, važi nejednakost $\mu + \rho\beta > -1$. Primenom q-Karamatine integracione teoreme u (3.64) dobija se

$$x^{[1]}(t) \sim \frac{q^{\rho\beta}}{[\mu + \rho\beta + 1]_q} t^{\mu+\rho\beta+1} \ell_b(t)\ell_x(t)^{\beta}, \quad t \to \infty,$$

odakle će dalje slediti

$$(3.68)\qquad D_q x(t) \sim \left(\frac{q^{\rho\beta}}{[\mu + \rho\beta + 1]_q} t^{\mu+\rho\beta+1-\lambda} \ell_a(t)^{-1}\ell_b(t)\ell_x(t)^{\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \; t \to \infty.$$

Integraljenjem asimptotske relacije (3.68) na $[t_0, t]$ dobija se

$$(3.69)\qquad x(t) \sim \left(\frac{q^{\rho\beta}}{[\mu + \rho\beta + 1]_q}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \int_{t_0}^{t} s^{\frac{\mu+\rho\beta+1-\lambda}{\alpha}} \left(\ell_a(s)^{-1}\ell_b(s)\ell_x(s)^{\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha}} d_q s, \quad t \to \infty.$$

Divergencija integrala u asimptotskoj relaciji (3.69) kada $t \to \infty$ implicira sledeće dve mogućnosti:

$$(3.70)\qquad (a)\; \frac{\mu + \rho\beta + 1 - \lambda}{\alpha} = -1 \quad \text{ili} \quad (b)\; \frac{\mu + \rho\beta + 1 - \lambda}{\alpha} > -1.$$

Ukoliko važi jednakost (a), Teorema 1.4.4 (iii) implicira da je rešenje x q-sporo promenljiva funkcija, tj. da je $\rho = 0$. Dakle, slediće da je $\mu = \lambda - \alpha - 1$. Asimptotska relacija (3.69) se tada može ekvivalentno zapisati

$$(3.71)\qquad x(t) \sim \left(\frac{1}{[\mu + 1]_q}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \int_{t_0}^{t} s^{-1} \left(\ell_a(s)^{-1}\ell_b(s)\ell_x(s)^{\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha}} d_q s, \quad t \to \infty,$$

što dokazuje da rešenje x tada zadovoljava asimptotsku relaciju (3.62).
Ukoliko važi nejednakost (b), primena q-Karamatine integracione teoreme u (3.69) implicira da je

$$(3.72)\qquad x(t) \sim \frac{q^{\frac{\rho\beta}{\alpha}} t^{\frac{\mu+\rho\beta+1-\lambda}{\alpha}+1}}{\left[\frac{\mu+\rho\beta+1-\lambda}{\alpha} + 1\right]_q \left([\mu + \rho\beta + 1]_q\right)^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\ell_a(t)^{-1}\ell_b(t)\ell_x(t)^{\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad t \to \infty.$$

Odavde se zaključuje da indeks regularnosti ρ rešenja x zadovoljava (3.45), što dalje implicira da je indeks regularnosti rešenja x dat sa (3.23). Posledično, iz nejednakosti (b) slediće da je $\mu > \lambda - \alpha - 1$. Primenom (3.7), (3.23) i (3.45), asimptotska relacija (3.72) može se predstaviti u obliku (3.63), čime je dokazano da rešenje x zadovoljava navedenu asimptotsku formulu. $\square$

Lema 3.5.3. *Neka je $a \in \mathcal{RV}_q(\lambda)$, $\lambda < \alpha$ i $b \in \mathcal{RV}_q(\mu)$. Rešenje $x \in \mathbb{M}^+_{\infty,\infty} \cap \mathcal{RV}_q(\rho)$, $\rho \geq 1 - \lambda/\alpha$ jednačine (3.1) zadovoljava tačno jedno od sledećih tvrđenja*

(*i*) $\rho = 1 - \lambda/\alpha$ *i*

$$x(t) \sim q^{\frac{\rho\beta}{\alpha}} P(t) \left(\int_1^t s^{-1} \ell_b(s) \ell_x(s)^\beta \, d_q s \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad t \to \infty, \tag{3.73}$$

gde je P funkcija definisana u (3.52). Tada je $\mu = \beta\,(\lambda/\alpha - 1) - 1$.

(*ii*) *ρ je dato sa (3.23) i rešenje x zadovoljava (3.63). Tada je $\mu > \beta\,(\lambda/\alpha - 1) - 1$.*

Dokaz: Neka je $x \in \mathbb{M}^+_{\infty,\infty} \cap \mathcal{RV}_q(\rho)$, $\rho \geq 0$ rešenje jednačine (3.1) takvo da zadovoljava uslove $x(t) > 0$, $D_q x(t) > 0$ na intervalu $[t_0, \infty)_q$, za neko $t_0 \in q^{\mathbb{N}_0}$ i neka je takvo rešenje predstavljeno u obliku (3.8). Analognim postupkom kao u dokazu prethodne leme zaključuje se da rešenje x zadovoljava jednakost (3.64) i da važi nejednakost $\mu + \rho\beta \geq -1$.

Posmatrajmo najpre slučaj $\mu + \rho\beta = -1$. Ponavljajući postupak iz dokaza Leme 3.5.2 dobija se da rešenje x zadovoljava asimptotsku relaciju (3.67). Kako je $\lambda < \alpha$, ispunjeni su uslovi za primenu q-Karamatine integracione teoreme u (3.67), nakon čega se dobija da rešenje x u ovom slučaju zadovoljava asimptotsku relaciju (3.73). Osim toga, slediće da je indeks regularnosti ovog rešenja $\rho = 1 - \lambda/\alpha$, kao i veza između indeksa regularnosti koeficijenata jednačine $\mu = \beta\,(\lambda/\alpha - 1) - 1$.

Ukoliko je $\mu + \rho\beta > -1$, analognim postupkom kao u dokazu Leme 3.5.2 zaključuje se da rešenje x zadovoljava asimptotsku relaciju (3.69). Kako je

$$\frac{\mu + \rho\beta + 1 - \lambda}{\alpha} > -\frac{\lambda}{\alpha} > -1,$$

primenom Teoreme 1.4.4 (*ii*) u (3.69) dobija se da rešenje x u ovom slučaju zadovoljava relaciju (3.72). Odatle će slediti da je ρ dato sa (3.23), x zadovoljava asimptotsku formulu (3.63) i $\mu > \beta\,(\lambda/\alpha - 1) - 1$. $\square$

U narednim tvrđenjima određeni su potrebni i dovoljni uslovi za egzistenciju strogo rastućih q-pravilno promenljivih rešenja, kao i njihove asimptotske reprezentacije.

Teorema 3.5.1. *Neka je $a \in \mathcal{RV}_q(\lambda)$, $\lambda \neq \alpha$ i $b \in \mathcal{RV}_q(\mu)$.*

(*i*) *Neka je $\lambda > \alpha$. Tada jednačina (3.1) ima rešenje $x \in \mathcal{RV}_q(\rho)$, gde je $\rho > 0$ ako i samo ako važi (3.57).*

(*ii*) *Neka je $\lambda < \alpha$. Tada jednačina (3.1) ima rešenje $x \in \mathcal{RV}_q(\rho)$, gde je $\rho > 1 - \lambda/\alpha$ ako i samo ako važi (3.59).*

U oba slučaja ρ je dato sa (3.23) i asimptotska formula takvog rešenja određena je formulom (3.63).

Dokaz: Dokazaćemo delove (*i*) i (*ii*) simultano.

($\Rightarrow$:) Neka je $x \in \mathcal{RV}_q(\rho)$ rešenje jednačine (3.1) i neka je

$$(a)\ \ \lambda > \alpha \quad \text{i} \quad \rho > 0 \quad \text{ili} \quad (b)\ \ \lambda < \alpha \quad \text{i} \quad \rho > 1 - \frac{\lambda}{\alpha}.$$

Primena Teoreme 1.4.2 $(iii), (iv), (vi)$ implicira da je tada $x^{[1]} \in \mathcal{RV}_q(\lambda - \alpha + \alpha\rho)$. Kako svaki od uslova (a) i (b) implicira da je $\rho > 0$ i $\lambda-\alpha+\alpha\rho > 0$, slediće da je $\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty$ i $\lim_{n\to\infty} x^{[1]}(t) = \infty$. Prema Teoremi 1.4.1 (ii) rešenje x će biti eventualno monotono rastuća funkcija, te zaključujemo da je $x \in \mathbb{M}^+_{\infty,\infty}$.

Ukoliko je ispunjen uslov (a), jedino slučaj (ii) Leme 3.5.2 je moguć za rešenje x, te je indeks regularnosti rešenja x dat sa (3.23), μ zadovoljava (3.57) i asimptotska reprezentacija pravilno promenljivog rešenja x indeksa ρ data je sa (3.63). Ukoliko važi (b), jedino slučaj (ii) Leme 3.5.3 je moguć za rešenje x, odakle zaključujemo da je indeks regularnosti rešenja x dat sa (3.23), μ zadovoljava (3.59) i asimptotska reprezentacija pravilno promenljivog rešenja x indeksa ρ je takođe data sa (3.63).

($\Leftarrow$:) Pretpostavimo da je ispunjen uslov

$$(a)\ \ \lambda > \alpha \quad \text{i} \quad \mu > \beta\left(\frac{\lambda}{\alpha} - 1\right) - 1 \quad \text{ili} \quad (b)\ \ \lambda < \alpha \quad \text{i} \quad \mu > \lambda - \alpha - 1.$$

Definišimo funkciju $Y_1 : q^{\mathbb{N}_0} \to (0,\infty)$

$$Y_1(t) = \left(\sigma_1 t^{\alpha+1} a(t)^{-1} b(t)\right)^{\frac{1}{\alpha-\beta}} = t^\rho \left(\sigma_1 \ell_a(t)^{-1} \ell_b(t)\right)^{\frac{1}{\alpha-\beta}}, \quad t \in q^{\mathbb{N}_0}, \tag{3.74}$$

gde je ρ definisano sa (3.23) i

$$\sigma_1 = q^{\rho\beta} [\rho]_q^{-\alpha} [(\rho-1)\alpha + \lambda]_q^{-1}.$$

Očigledno, $Y_1 \in \mathcal{RV}_q(\rho)$. Dokažimo da funkcija Y_1 zadovoljava sledeću asimptotsku relaciju

$$Y(t) \sim \int_1^t \left(\frac{1}{a(s)} \int_1^s b(u) Y(qu)^\beta \, d_q u\right)^{\frac{1}{\alpha}} d_q s, \quad t \to \infty. \tag{3.75}$$

Svaka od pretpostavki (a) i (b) implicira da je $\mu + \rho\beta + 1 = (\rho-1)\alpha + \lambda > 0$, te su ispunjeni uslovi za primenu Teoreme 1.4.4 (i) pri narednoj integraciji

$$\int_1^t b(s) Y_1(qs)^\beta \, d_q s \sim q^{\rho\beta} \int_1^t b(s) Y_1(s)^\beta \, d_q s \sim \frac{q^{\rho\beta}}{[\mu+\rho\beta+1]_q} t b(t) Y_1(t)^\beta, \quad t \to \infty. \tag{3.76}$$

Takođe, kako svaka od pretpostavki (a) i (b) implicira da je $\rho > 0$, dozvoljena je ponovna primena q-Karamatine integracione teoreme pri narednoj integraciji koja, uz primenu (3.76), dokazuje da Y_1 zadovoljava datu asimptotsku relaciju

$$\begin{aligned}
\int_1^t \left(\frac{1}{a(s)} \int_1^s b(u) Y_1(qu)^\beta \, d_q u\right)^{\frac{1}{\alpha}} d_q s \ &\sim \ \int_1^t \left(\frac{q^{\rho\beta}}{[\mu+\rho\beta+1]_q} \frac{s b(s) Y_1(s)^\beta}{a(s)}\right)^{\frac{1}{\alpha}} d_q s \\
&\sim \ \left(\frac{q^{\rho\beta}}{[\rho]_q^\alpha [\mu+\rho\beta+1]_q}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{t^{\alpha+1} b(t)}{a(t)}\right)^{\frac{1}{\alpha}} Y_1(t)^{\frac{\beta}{\alpha}} \\
&= \ Y_1(t),\ t \to \infty.
\end{aligned}$$

Dakle, postoji $t_0 \in q^{\mathbb{N}_0}$ tako da je

$$\int_{t_0}^t \left(\frac{1}{a(s)} \int_{t_0}^t b(u) Y_1(qu)^\beta \, d_q u\right)^{\frac{1}{\alpha}} d_q s \leq 2 Y_1(t), \quad t \in [t_0, \infty)_q. \tag{3.77}$$

Neka je takvo t_0 fiksirano. Bez gubljenja opštosti može se pretpostaviti da je Y_1 rastuća funkcija na $[t_0,\infty)_q$. Prema (3.75), postoji $t_1 > t_0$ tako da je

$$\int_{t_0}^{t}\left(\frac{1}{a(s)}\int_{t_0}^{t} b(u)Y_1(qu)^{\beta}\,d_qu\right)^{\frac{1}{\alpha}} d_qs \geq \frac{Y_1(t)}{2},\quad t\in[t_1,\infty)_q. \tag{3.78}$$

Izaberimo konstante $0<k<1$ i $K>1$ tako da je

$$k \leq 2^{\frac{\alpha}{\beta-\alpha}},\quad K\geq 4^{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}}\ \text{ i }\ K\geq 2k\frac{Y_1(t_1)}{Y_1(t_0)}. \tag{3.79}$$

Posmatrajmo prostor $\mathcal{Y}$ funkcija $f:[t_0,\infty)_q\to\mathbb{R}$, takvih da su funkcije f/Y_1 ograničene na $[t_0,\infty)_q$, sa normom

$$||f|| = \sup_{t\in[t_0,\infty)_q}\frac{f(t)}{Y_1(t)}.$$

Neka je

$$f\preceq g \Leftrightarrow f(t)\leq g(t),\quad t\in[t_0,\infty)_q$$

uređenje na skupu $\mathcal{Y}$. Uočimo podskup Ω ovog parcijalno uređenog Banahovog prostora

$$\Omega=\{x\in\mathcal{Y}: kY_1(t)\leq x(t)\leq KY_1(t),\quad t\in[t_0,\infty)_q\}. \tag{3.80}$$

Za svaki podskup $M\subset\Omega$ očigledno važi $\inf M\in\Omega$ i $\sup M\in\Omega$.

Definišimo preslikavanje $\mathcal{F}:\Omega\to\mathcal{Y}$

$$(\mathcal{F}x)(t)=c+\int_{t_0}^{t}\left(\frac{1}{a(s)}\int_{t_0}^{s} b(u)x(qu)^{\beta}\,d_qu\right)^{\frac{1}{\alpha}} d_qs,\quad x\in\Omega \tag{3.81}$$

gde je

$$kY_1(t_1)\leq c\leq \frac{K}{2}Y_1(t_0). \tag{3.82}$$

Primenom Knasterove teoreme o fiksnoj tački biće dokazano da operator $\mathcal{F}$ poseduje fiksnu tačku na skupu Ω. Pomenuta fiksna tačka biće rešenje jednačine (3.1), za koje ćemo potom pokazati da je q-pravilno promenljiva funkcija indeksa regularnosti ρ.

Operator $\mathcal{F}$ ima sledeće osobine:

(*i*) *Operator $\mathcal{F}$ slika Ω u samog sebe:* Neka je $x\in\Omega$. Koristeći (3.77), (3.79), (3.80) i (3.82) dobijamo sledeći niz nejednakosti

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}x)(t) &\leq c+K^{\frac{\beta}{\alpha}}\int_{t_0}^{t}\left(\frac{1}{a(s)}\int_{t_0}^{s} b(u)X_1(qu)^{\beta}\,d_qu\right)^{\frac{1}{\alpha}} d_qs\\ &\leq \frac{K}{2}Y_1(t_0)+2K^{\frac{\beta}{\alpha}}Y_1(t)\leq\frac{K}{2}Y_1(t)+\frac{K}{2}Y_1(t)=KY_1(t),\ t\geq t_0.\end{aligned}$$

Sa druge strane, korišćenjem (3.78), (3.79), (3.80) i (3.82) dobija se da je

$$(\mathcal{F}x)(t) \geq k^{\frac{\beta}{\alpha}} \int_{t_0}^{t} \left(\frac{1}{a(s)} \int_{t_0}^{s} b(u) Y_1(qu)^{\beta}\, d_q u \right)^{\frac{1}{\alpha}} d_q s \geq k^{\frac{\beta}{\alpha}} \frac{Y_1(t)}{2} \geq kY_1(t),\ t \geq t_1.$$

Primenom osobine monotonosti funkcije Y_1 na intervalu $[t_0, \infty)_q$ i (3.82) zaključujemo da će važiti

$$(\mathcal{F}x)(t) \geq c \geq kY_1(t_1) \geq kY_1(t),\ \ t_0 \leq t \leq t_1.$$

Ovim je pokazano da $\mathcal{F}x \in \Omega$, tj. $\mathcal{F}\Omega \subseteq \Omega$.

(*ii*) *Operator $\mathcal{F}$ je monotono rastuća funkcija:* Očigledno, za svako $x, y \in \Omega$, $x \preceq y$ implicira da je $\mathcal{F}x \preceq \mathcal{F}y$.

Sve pretpostavke Knasterove teoreme o fiksnoj tački su ispunjene. Stoga, operator $\mathcal{F}$ poseduje fiksnu tačku $\widehat{x} \in \Omega$ za koju važi

$$\widehat{x}(t) = c + \int_{t_0}^{t} \left(\frac{1}{a(s)} \int_{t_0}^{s} b(u) \widehat{x}(qu)^{\beta}\, d_q u \right)^{\frac{1}{\alpha}} d_q s,\ \ t \in [t_0, \infty)_q. \tag{3.83}$$

Primetimo da je $\widehat{x}$ pozitivno i monotono rastuće rešenje jednačine (3.1) na intervalu $[t_0, \infty)_q$. Ostaje da pokažemo da je $\widehat{x}$ q-pravilno promenljiva funkcija određenog indeksa regularnosti. Neka je

$$L = \limsup_{t\to\infty} \frac{\widehat{x}(t)}{Y_1(t)} \quad \text{i} \quad l = \liminf_{t\to\infty} \frac{\widehat{x}(t)}{Y_1(t)}.$$

Na osnovu (3.69) važiće $0 < l \leq L < \infty$. Primenom q-Lopitalovog pravila, zaključujemo sledeće

$$\begin{aligned} L &\leq \limsup_{t\to\infty} \frac{D_q \widehat{x}(t)}{D_q Y_1(t)} = \limsup_{t\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{a(t)} \int_{t_0}^{t} b(s) \widehat{x}(qs)^{\beta}\, d_q s \right)^{\frac{1}{\alpha}}}{\left(\frac{1}{a(t)} \int_{t_0}^{t} b(s) Y_1(qs)^{\beta}\, d_q s \right)^{\frac{1}{\alpha}}} \\ &\leq \left(\limsup_{t\to\infty} \frac{\int_{t_0}^{t} b(s) \widehat{x}(qs)^{\beta}\, d_q s}{\int_{t_0}^{t} b(s) Y_1(qs)^{\beta}\, d_q s} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq \left(\limsup_{t\to\infty} \frac{b(t)\widehat{x}(qt)^{\beta}}{b(t) Y_1(qt)^{\beta}} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \\ &\leq \left(\limsup_{t\to\infty} \frac{\widehat{x}(qt)}{Y_1(qt)} \right)^{\frac{\beta}{\alpha}} = L^{\frac{\beta}{\alpha}}. \end{aligned}$$

Kako je $\beta < \alpha$, slediće da je $0 < L \leq 1$. Slično, pokazuje se da je $l \geq l^{\beta/\alpha}$, te će slediti da je $1 \leq l < \infty$. Iz ovih razmatranja zaključuje se da je $l = L = 1$, što znači da je

$$\widehat{x}(t) \sim Y_1(t),\ \ t \to \infty.$$

Time je dokazano da je x q-pravilno promenljivo rešenje jednačine (3.1) sa indeksom regularnosti ρ i asimptotskom formulom datom sa (3.36). □

Teorema 3.5.2. *Neka je $a \in \mathcal{RV}_q(\lambda)$, $\lambda > \alpha$ i $b \in \mathcal{RV}_q(\mu)$. Jednačina (3.1) ima rešenje $x \in \mathbb{M}^+_{\infty,\infty} \cap ntr-\mathcal{SV}_q$ ako i samo važi (3.58). Svako takvo rešenje ima sledeću asimptotsku reprezentaciju*

$$x(t) \sim \left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha\left([\lambda-\alpha]_q\right)^{\frac{1}{\alpha}}} \int_1^t \left(sa(s)^{-1}b(s)\right)^{\frac{1}{\alpha}} d_q s \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}}, \quad t \to \infty. \tag{3.84}$$

Dokaz: ($\Rightarrow$:) Neka je $x \in \mathbb{M}^+_{\infty,\infty} \cap ntr - \mathcal{SV}_q$ rešenje jednačine (3.1) takvo da je $x(t) > 0$, $D_q x(t) > 0$ na intervalu $[t_0, \infty)_q$, za neko $t_0 \in q^{\mathbb{N}_0}$. Tada za rešenje x jednačine (3.1) važi slučaj (i) Leme 3.5.2, te je $\mu = \lambda - \alpha - 1$ i rešenje x ove jednačine zadovoljava asimptotsku relaciju (3.62). Neka je

$$G(t) = \left(\frac{1}{[\lambda-\alpha]_q}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \int_{t_0}^t s^{-1}\left(\ell_a(s)^{-1}\ell_b(s)\ell_x(s)^{\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha}} d_q s,\ t \geq t_0.$$

Tada se asimptotska relacija (3.62) može ekvivalentno zapisati u obliku

$$G(qt)^{-\frac{\beta}{\alpha}} D_q G(t) \sim \frac{t^{-1}\left(l_a(t)^{-1}l_b(t)\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{\left([\lambda-\alpha]_q\right)^{\frac{1}{\alpha}}} = \frac{\left(ta(t)^{-1}b(t)\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{\left([\lambda-\alpha]_q\right)^{\frac{1}{\alpha}}}, \quad t \to \infty. \tag{3.85}$$

Integraljenjem (3.85) od t_0 do t i primenom Teoreme 1.4.3 (ii) zaključujemo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\left([\lambda-\alpha]_q\right)^{\frac{1}{\alpha}}} \int_{t_0}^t \left(sa(s)^{-1}b(s)\right)^{\frac{1}{\alpha}} d_q s \quad &\sim \quad \int_{t_0}^t G(qs)^{-\frac{\beta}{\alpha}} D_q G(s)\, d_q s \\
&\sim \quad \frac{\alpha}{\alpha-\beta} G(t)^{1-\frac{\beta}{\alpha}}, \quad t \to \infty.
\end{aligned}$$

Kako je na osnovu polazne pretpostavke $\lim_{t\to\infty} \ell_x(t)^{1-\frac{\beta}{\alpha}} = \infty$, a iz asimptotske relacije (3.62) važi $\ell_x(t) \sim G(t)$, $t \to \infty$, zaključujemo da integral u poslednjoj asimptotskoj relaciji diverigira kada $t \to \infty$, tj. da je uslov (3.58) ispunjen, kao i da je asimptotska reprezentacija rešenja x data sa (3.84).

($\Leftarrow$:) Neka je ispunjen uslov (3.58). Definišimo funkciju $Y_2 : q^{\mathbb{N}_0} \to (0, \infty)$ na sledeći način

$$Y_2(t) = \left(\sigma_2 L_2(t)\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}}, \quad t \in q^{\mathbb{N}_0},$$

gde je

$$\sigma_2 = \frac{\alpha-\beta}{\alpha\left([\lambda-\alpha]_q\right)^{\frac{1}{\alpha}}} \quad \text{i} \quad L_2(t) = \int_1^t \left(sa(s)^{-1}b(s)\right)^{\frac{1}{\alpha}} d_q s, \quad t \in q^{\mathbb{N}_0}.$$

Dokažimo da funkcija Y_2 zadovoljava asimptotsku relaciju (3.75). Koristeći Teoremu 1.4.4 (iii) i pretpostavku (3.58), zaključujemo da $L_2 \in ntr-\mathcal{SV}_q$, tj. $Y_2 \in ntr-\mathcal{SV}_q$. Ponovnom primenom q-Karamatine integracione teoreme pri narednoj integraciji dobija se

$$\int_1^t b(s)Y_2(qs)^{\beta}\, d_q s \quad = \quad \int_1^t s^{\lambda-\alpha-1}\ell_b(s)Y_2(qs)^{\beta}\, d_q s \sim \frac{t^{\lambda-\alpha}}{[\lambda-\alpha]_q}\ell_b(t)Y_2(qt)^{\beta}, \quad t \to \infty.$$

Primenom dobijene asimptotske relacije i Teoreme 1.4.3 (ii), dokazuje se da Y_2 zadovoljava željenu asimptotsku relaciju:

$$\begin{aligned}\int_1^t \left(\frac{1}{a(s)}\int_{t_0}^s b(u)Y_2(qu)^\beta\, d_qu\right)^{\frac{1}{\alpha}} d_qs \;&\sim\; \frac{1}{([\lambda-\alpha]_q)^{\frac{1}{\alpha}}}\int_1^t s^{-1}\left(\ell_a(s)^{-1}\ell_b(s)\right)^{\frac{1}{\alpha}} Y_2(qs)^{\frac{\beta}{\alpha}}\, d_qs\\ &=\; \frac{1}{([\lambda-\alpha]_q)^{\frac{1}{\alpha}}}\int_1^t (\sigma_2 L_2(qs))^{\frac{\beta}{\alpha-\beta}} D_qL_2(s)\, d_qs\\ &\sim\; \frac{(\alpha-\beta)\sigma_2^{\frac{\beta}{\alpha-\beta}}}{\alpha([\lambda-\alpha]_q)^{\frac{1}{\alpha}}} L_2(t)^{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}} = Y_2(t), \quad t\to\infty.\end{aligned}$$

Postupajući isto kao u dokazu Teoreme 3.5.1, zamenom Y_1 sa Y_2, egzistencija rešenja $\widehat{x}\in\mathbb{M}^+_{\infty,\infty}$ jednačine (3.1) takvog da zadovoljava

$$kY_2(t)\le \widehat{x}(t)\le KY_2(t), \;\text{ za dovoljno veliko }\; t, \tag{3.86}$$

može se pokazati primenom Knasterove teoreme o fiksnoj tački na operator $\mathcal{F}$ definisan u (3.81). Primenom q-Lopitalovog pravila, pokazuje se da takvo rešenje zadovoljava

$$\widehat{x}(t)\sim Y_2(t),\; t\to\infty,$$

tj. da je $\widehat{x}$ netrivijalno q-sporo promenljivo rešenje jednačine (3.1) sa asimptotskom reprezentacijom (3.84). $\square$

Teorema 3.5.3. *Neka je $a\in\mathcal{RV}_q(\lambda)$, $\lambda<\alpha$ i $b\in\mathcal{RV}_q(\mu)$. Jednačina (3.1) ima rešenje $x\in\mathbb{M}^+_{\infty,\infty}\cap ntr-\mathcal{RV}_q\left(1-\lambda/\alpha\right)$ ako i samo važi (3.60). Svako takvo rešenje ima sledeću asimptotsku reprezentaciju*

$$x(t)\sim P(t)\left(q^{(1-\frac{\lambda}{\alpha})\beta}\frac{\alpha-\beta}{\alpha}\int_{t_0}^t b(s)P(s)^\beta\, d_qs\right)^{\frac{1}{\alpha-\beta}},\quad t\to\infty, \tag{3.87}$$

gde je P funkcija definisana sa (3.52).

Dokaz: ($\Rightarrow$:) Neka postoji rešenje x jednačine (3.1) takvo da je $x\in\mathbb{M}^+_{\infty,\infty}\cap ntr-\mathcal{RV}_q(1-\lambda/\alpha)$ i $x(t)>0$, $D_qx(t)>0$ na intervalu $[t_0,\infty)_q$, za neko $t_0\in q^{\mathbb{N}_0}$. Tada, na osnovu Leme 3.5.3 (i) zadovoljena je veza $\mu=\beta(\lambda/\alpha-1)-1$ između indeksa regularnosti koeficijenata jednačine (3.1) i rešenje x ove jednačine zadovoljava asimptotsku relaciju (3.73). Neka je H definisano u (3.65). Pomenuta asimptotska relacija se tada može transformisati u

$$l_x(t)\sim \frac{1}{\left[1-\frac{\lambda}{\alpha}\right]_q} l_a(t)^{-\frac{1}{\alpha}} H(t)^{\frac{1}{\alpha}},\; t\to\infty, \tag{3.88}$$

koja se dalje može transformisati u asimptotsku relaciju

$$H(qt)^{-\frac{\beta}{\alpha}} D_qH(t)\sim \left(\frac{q^{1-\frac{\lambda}{\alpha}}}{\left[1-\frac{\lambda}{\alpha}\right]_q}\right)^\beta t^{-1} l_a(t)^{-\frac{\beta}{\alpha}} l_b(t)\sim q^{(1-\frac{\lambda}{\alpha})\beta} b(t)P(t)^\beta,\; t\to\infty.$$

Integracijom dobijene asimptotske relacije na intervalu $[t_0, t]$ i primenom Teoreme 1.4.3 (i) dobija se

$$\frac{\alpha}{\alpha-\beta}H(t)^{1-\frac{\beta}{\alpha}} \sim q^{(1-\frac{\lambda}{\alpha})\beta}\int_{t_0}^{t} b(s)P(s)^{\beta}\, d_q s,\ t\to\infty. \tag{3.89}$$

Kako je $\lim_{t\to\infty} H(t)=\infty$, zaključujemo da integral na desnoj strani poslednje asimptotske relacije divergira kada $t\to\infty$, tj. da je drugi uslov u (3.60) ispunjen. Iz asimptotske relacije (3.89), primenom (3.65) i činjenice da je $x^{[1]}(t)\sim x(t)/P(t)$, $t\to\infty$ dobija se da rešenje x zadovoljava željenu asimptotsku relaciju (3.87).

($\Leftarrow$:) Neka je ispunjen uslov (3.60) i neka je definisana funkcija $Y_3 : q^{\mathbb{N}_0}\to(0,\infty)$ na sledeći način

$$Y_3(t) = P(t)\left(\sigma_3 L_3(t)\right)^{\frac{1}{\alpha-\beta}},\quad t\in q^{\mathbb{N}_0}, \tag{3.90}$$

gde je

$$\sigma_3 = q^{(1-\frac{\lambda}{\alpha})\beta}\frac{\alpha-\beta}{\alpha}\qquad \text{i}\qquad L_3(t)=\int_1^t b(s)P(s)^{\beta}\, d_q s.$$

Primetimo da je $L_3\in ntr-\mathcal{SV}_q$ i $Y_3\in\mathcal{RV}_q(1-\lambda/\alpha)$. U nastavku će biti dokazano da Y_3 zadovoljava asimptotsku relaciju (3.75). Činjenica da je $P\in\mathcal{RV}_q(1-\lambda/\alpha)$ implicira da $P(qt)\sim q^{1-\frac{\lambda}{\alpha}}P(t)$, $t\to\infty$. Stoga, primenom Teoreme 1.4.3 (ii) dobijamo

$$\begin{aligned}
\int_1^t b(s)Y_3(qs)^{\beta}\, d_q s &= \int_1^t b(s)P(qs)^{\beta}\left(\sigma_3 L_3(qs)\right)^{\frac{\beta}{\alpha-\beta}}\, d_q s\\
&\sim q^{(1-\frac{\lambda}{\alpha})\beta}\sigma_3^{\frac{\beta}{\alpha-\beta}}\int_1^t L_3(qs)^{\frac{\beta}{\alpha-\beta}} D_q L_3(s)\, d_q s\\
&\sim q^{(1-\frac{\lambda}{\alpha})\beta}\sigma_3^{\frac{\beta}{\alpha-\beta}}\frac{\alpha-\beta}{\alpha}L_3(t)^{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}} = \left(\sigma_3 L_3(t)\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}},\quad t\to\infty,
\end{aligned}$$

odakle dalje sledi

$$\begin{aligned}
\int_1^t\left(\frac{1}{a(s)}\int_1^s b(u)Y_3(qu)^{\beta}\, d_q u\right)^{\frac{1}{\alpha}} &\sim \int_1^t\left(s^{-\lambda}\ell_a(s)^{-1}(\sigma_3 L_3(s))^{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}}\right)^{\frac{1}{\alpha}} d_q s\\
&\sim \frac{t^{1-\frac{\lambda}{\alpha}}}{\left[1-\frac{\lambda}{\alpha}\right]_q}\ell_a(t)^{-\frac{1}{\alpha}}(\sigma_3 L_3(t))^{\frac{1}{\alpha-\beta}}\\
&\sim P(t)(\sigma_3 L_3(t))^{\frac{1}{\alpha-\beta}} = Y_3(t),\quad t\to\infty.
\end{aligned}$$

Ponavljajući postupak iz dokaza Teoreme 3.5.1, stavljajući Y_3 umesto Y_1, primenom Knasterove teoreme o fiksnoj tački na operator $\mathcal{F}$ definisan sa (3.81), pokazuje se da postoji $\widehat{x}\in\mathbb{M}^{+}_{\infty,\infty}$ rešenje jednačine (3.1) takvo da

$$kY_3(t)\le\widehat{x}(t)\le KY_3(t),\ \text{ za dovoljno veliko } t. \tag{3.91}$$

Primenom q-Lopitalovog pravila pokazuje se da je ovo rešenje q-pravilno promenljiva funkcija indeksa regularnosti $1-\lambda/\alpha$. $\square$

Naredno tvrđenje je posledica Teorema 3.5.1, 3.5.2 i 3.5.3. Potrebni i dovoljni uslovi za egzistenciju strogo rastućih q-pravilno promenljivih funkcija izraženi su pomoću divergencije integrala K_α i H_β.

Posledica 3.5.1. *Neka je $a \in \mathcal{RV}_q(\lambda)$, $\lambda \neq \alpha$ i $b \in \mathcal{RV}_q(\mu)$.*

(i) Neka je $I_a < \infty$. Tada je $\mathcal{R}^+_{\infty,\infty} \neq \emptyset$ ako i samo ako $K_\alpha = \infty$.

(ii) Neka je $I_a = \infty$. Tada je $\mathcal{R}^+_{\infty,\infty} \neq \emptyset$ ako i samo ako $H_\beta = \infty$.

Primetimo da ukoliko $I_a < \infty$ i $K_\alpha = \infty$, slediće da je $H_\beta = \infty$. Takođe, uslov $I_a = \infty$ implicira da $K_\alpha = \infty$. Stoga, možemo zaključiti da, pod pretpostavkom da su koeficijenti jednačine (3.1) q-pravilno promenljive funkcije, pri čemu je indeks regularnosti koeficijenta a različit od α, potrebni i dovoljni uslovi za egzistenciju strogo rastućih q-pravilno promenljivih rešenja su isti kao potrebni i dovoljni uslovi za egzistenciju strogo rastućih rešenja.

3.6 Struktura skupa q-pravilno promenljivih rešenja

Na osnovu vrednosti indeksa regularnosti koeficijenata jednačine (3.1), kao što je već dokazano u prethodnim poglavljima, u potpunosti su određene vrednosti indeksa regularnosti q-pravilno promenljivih rešenja. Naredna tvrđenja su posledice teorema dokazanih u prethodnim poglavljima i daju informaciju o koegzistenciji rastućih i opadajućih rešenja, kao i o koegzistenciji q-pravilno promenljivih rešenja različitih indeksa regularnosti. Osim toga, za određene vrednosti indeksa regularnosti koeficijenata zaključujemo da ne postoje opadajuća q-pravilno promenljiva rešenja.

Najpre je navedena klasifikacija svih opadajućih, zatim svih rastućih q-pravilno promenljivih rešenja, a potom i svih q-pravilno promenljivih rešenja u slučaju $\lambda < \alpha$.

Posledica 3.6.1. *Neka je $a \in \mathcal{RV}_q(\lambda)$, $\lambda < \alpha$, $b \in \mathcal{RV}_q(\mu)$.*

(i) Ako je $\mu < \lambda - \alpha - 1$, tada je

$$\mathcal{R}^-_q = \mathcal{R}^-_{0,0} \cup \mathbb{M}^-_B = \mathbb{M}^-_{RV}\left(\frac{\mu + \alpha + 1 - \lambda}{\alpha - \beta}\right) \cup \mathbb{M}^-_{SV}.$$

(ii) Ako je $\mu = \lambda - \alpha - 1$ i $I_\alpha < \infty$, tada je

$$\mathcal{R}^-_q = \mathcal{R}^-_{0,0} \cup \mathbb{M}^-_B = \mathbb{M}^-_{SV}.$$

(iii) Ako je $\mu > \lambda - \alpha - 1$, tada je $\mathcal{R}^-_q = \emptyset$.

Posledica 3.6.2. *Neka je $a \in \mathcal{RV}_q(\lambda)$, $\lambda < \alpha$, $b \in \mathcal{RV}_q(\mu)$.*

(i) Ako je $\mu < \beta(\lambda/\alpha - 1) - 1$ ili $\mu = \beta(\lambda/\alpha - 1) - 1$ i $H_\beta < \infty$, tada je

$$\mathcal{R}^+_q = \mathbb{M}^+_{\infty,B} = \mathbb{M}^+_{RV}\left(1 - \frac{\lambda}{\alpha}\right).$$

(ii) *Ako je* $\mu = \beta(\lambda/\alpha - 1) - 1$ *i* $H_\beta = \infty$, *tada je*

$$\mathcal{R}_q^+ = \mathcal{R}_{\infty,\infty}^+ = \mathbb{M}_{RV}^+\left(1 - \frac{\lambda}{\alpha}\right).$$

(iii) *Ako je* $\mu > \beta(\lambda/\alpha - 1) - 1$, *tada je*

$$\mathcal{R}_q^+ = \mathcal{R}_{\infty,\infty}^+ = \mathbb{M}_{RV}^+\left(\frac{\mu + \alpha + 1 - \lambda}{\alpha - \beta}\right).$$

Posledica 3.6.3. *Neka je* $a \in \mathcal{RV}_q(\lambda)$, $\lambda < \alpha$, $b \in \mathcal{RV}_q(\mu)$.

(i) *Ako je* $\mu < \lambda - \alpha - 1$, *onda je*

$$\mathcal{R}_q = \mathcal{R}_{0,0}^- \cup \mathbb{M}_B^- \cup \mathbb{M}_{\infty,B}^+ = \mathbb{M}_{RV}^-\left(\frac{\mu + \alpha + 1 - \lambda}{\alpha - \beta}\right) \cup \mathbb{M}_{SV}^- \cup \mathbb{M}_{RV}^+\left(1 - \frac{\lambda}{\alpha}\right).$$

(ii) *Ako je* $\mu = \lambda - \alpha - 1$ *i* $I_\alpha < \infty$, *onda je*

$$\mathcal{R}_q = \mathcal{R}_{0,0}^- \cup \mathbb{M}_B^- \cup \mathbb{M}_{\infty,B}^+ = \mathbb{M}_{SV}^- \cup \mathbb{M}_{RV}^+\left(1 - \frac{\lambda}{\alpha}\right).$$

(iii) *Ako je ispunjen jedan od sledećih uslova*

(iii.1) $\mu = \lambda - \alpha - 1$ *i* $I_\alpha = \infty$;

(iii.2) $\lambda - \alpha - 1 < \mu < \beta(\lambda/\alpha - 1) - 1$;

(iii.3) $\mu = \beta(\lambda/\alpha - 1) - 1$ *i* $H_\beta < \infty$,

onda je

$$\mathcal{R}_q = \mathbb{M}_{\infty,B}^+ = \mathbb{M}_{RV}^+\left(1 - \frac{\lambda}{\alpha}\right).$$

(iv) *Ako je* $\mu = \beta(\lambda/\alpha - 1) - 1$ *i* $H_\beta = \infty$, *onda je*

$$\mathcal{R}_q = \mathcal{R}_{\infty,\infty}^+ = \mathbb{M}_{RV}^+\left(1 - \frac{\lambda}{\alpha}\right).$$

(v) *Ako je* $\mu > \beta(\lambda/\alpha - 1) - 1$, *onda je*

$$\mathcal{R}_q = \mathcal{R}_{\infty,\infty}^+ = \mathbb{M}_{RV}^+\left(\frac{\mu + \alpha + 1 - \lambda}{\alpha - \beta}\right).$$

U nastavku je navedena klasifikacija svih opadajućih, zatim svih rastućih q-pravilno promenljivih rešenja, a potom i svih q-pravilno promenljivih rešenja u slučaju $\lambda > \alpha$.

Posledica 3.6.4. *Neka je* $a \in \mathcal{RV}_q(\lambda)$, $\lambda > \alpha$, $b \in \mathcal{RV}_q(\mu)$.

(*i*) *Ako je* $\mu < -1$ *ili* $\mu = -1$ *i* $I_b < \infty$, *tada je*

$$\mathcal{R}_q^- = \mathcal{R}_{0,0}^- \cup \mathbb{M}_B^- \cup \mathbb{M}_{0,B}^- = \mathbb{M}_{RV}^-\left(\frac{\mu+\alpha+1-\lambda}{\alpha-\beta}\right) \cup \mathbb{M}_{SV}^- \cup \mathbb{M}_{RV}^-\left(1-\frac{\lambda}{\alpha}\right).$$

(*ii*) *Ako je* $\mu = -1$ *i* $I_b = \infty$ *ili* $-1 < \mu < \beta(\lambda/\alpha - 1) - 1$, *tada je*

$$\mathcal{R}_q^- = \mathcal{R}_{0,0}^- \cup \mathbb{M}_{0,B}^- = \mathbb{M}_{RV}^-\left(\frac{\mu+\alpha+1-\lambda}{\alpha-\beta}\right) \cup \mathbb{M}_{RV}^-\left(1-\frac{\lambda}{\alpha}\right).$$

(*iii*) *Ako je* $\mu = \beta(\lambda/\alpha - 1) - 1$ *i* $J_\beta < \infty$, *tada je*

$$\mathcal{R}_q^- = \mathcal{R}_{0,0}^- \cup \mathbb{M}_{0,B}^- = \mathbb{M}_{RV}^-\left(1-\frac{\lambda}{\alpha}\right).$$

(*iv*) *Ako je* $\mu = \beta(\lambda/\alpha - 1) - 1$ *i* $J_\beta = \infty$ *ili* $\mu > \beta(\lambda/\alpha - 1) - 1$ *tada je* $\mathcal{R}_q^- = \emptyset$.

Posledica 3.6.5. *Neka je* $a \in \mathcal{RV}_q(\lambda)$, $\lambda > \alpha$, $b \in \mathcal{RV}_q(\mu)$.

(*i*) *Ako je* $-1 \le \mu < \lambda - \alpha - 1$ *ili* $\mu = \lambda - \alpha - 1$ *i* $K_\alpha < \infty$, *tada je*

$$\mathcal{R}_q^+ = \mathbb{M}_B^+ = \mathbb{M}_{SV}^+.$$

(*ii*) *Ako je* $\mu = \lambda - \alpha - 1$ *i* $K_\alpha = \infty$, *tada je*

$$\mathcal{R}_q^+ = \mathcal{R}_{\infty,\infty}^+ = \mathbb{M}_{SV}^+.$$

(*iii*) *Ako je* $\mu > \lambda - \alpha - 1$, *tada je*

$$\mathcal{R}_q^+ = \mathcal{R}_{\infty,\infty}^+ = \mathbb{M}_{RV}^+\left(\frac{\mu+\alpha+1-\lambda}{\alpha-\beta}\right).$$

Posledica 3.6.6. *Neka je* $a \in \mathcal{RV}_q(\lambda)$, $\lambda > \alpha$, $b \in \mathcal{RV}_q(\mu)$.

(*i*) *Ako je* $\mu < -1$ *ili* $\mu = -1$ *i* $I_b < \infty$, *onda je*

$$\mathcal{R}_q = \mathcal{R}_{0,0}^- \cup \mathbb{M}_B^- \cup \mathbb{M}_{0,B}^- \cup \mathbb{M}_B^+ = \mathbb{M}_{RV}^-\left(\frac{\mu+\alpha+1-\lambda}{\alpha-\beta}\right) \cup \mathbb{M}_{SV}^- \cup \mathbb{M}_{RV}^-\left(1-\frac{\lambda}{\alpha}\right) \cup \mathbb{M}_{SV}^+.$$

(*ii*) *Ako je* $\mu = -1$ *i* $I_b = \infty$ *ili* $-1 < \mu < \beta(\lambda/\alpha - 1) - 1$, *tada je*

$$\mathcal{R}_q = \mathcal{R}_{0,0}^- \cup \mathbb{M}_{0,B}^- \cup \mathbb{M}_B^+ = \mathbb{M}_{RV}^-\left(\frac{\mu+\alpha+1-\lambda}{\alpha-\beta}\right) \cup \mathbb{M}_{RV}^-\left(1-\frac{\lambda}{\alpha}\right) \cup \mathbb{M}_{SV}^+.$$

(*iii*) *Ako je* $\mu = \beta(\lambda/\alpha - 1) - 1$ *i* $J_\beta < \infty$, *tada je*

$$\mathcal{R}_q = \mathcal{R}_{0,0}^- \cup \mathbb{M}_{0,B}^- \cup \mathbb{M}_B^+ = \mathbb{M}_{RV}^-\left(1-\frac{\lambda}{\alpha}\right) \cup \mathbb{M}_{SV}^+.$$

(*iv*) *Ako je ispunjen jedan od sledećih uslova*

(*iv*.1) $\mu = \beta(\lambda/\alpha - 1) - 1$ *i* $J_\beta = \infty$;

(*iv*.2) $\beta(\lambda/\alpha - 1) - 1 < \mu < \lambda - \alpha - 1$;

(*iv*.3) $\mu = \lambda - \alpha - 1$ *i* $K_\alpha < \infty$,

onda je

$$\mathcal{R}_q = \mathbb{M}_B^+ = \mathbb{M}_{SV}^+.$$

(*v*) *Ako je* $\mu = \lambda - \alpha - 1$ *ili* $K_\alpha = \infty$, *tada je*

$$\mathcal{R}_q = \mathcal{R}_{\infty,\infty}^+ = \mathbb{M}_{SV}^+.$$

(*vi*) *Ako je* $\mu > \lambda - \alpha - 1$, *tada je*

$$\mathcal{R}_q = \mathcal{R}_{\infty,\infty}^+ = \mathbb{M}_{RV}^+\left(\frac{\mu + \alpha + 1 - \lambda}{\alpha - \beta}\right).$$

Primetimo da ukoliko su ispunjeni uslovi Posledice 3.6.1 (*iii*) ili Posledice 3.6.4 (*iv*), važiće da je $\mathcal{R}_q^- = \emptyset$, tj. da ne postoje q-pravilno promenljiva opadajuća rešenja jednačine (3.1). Kako je klasa $\mathbb{M}^-$ rešenja jednačine (3.1) neprazna, ova činjenica implicira da će u tom slučaju postojati opadajuća rešenja jednačine (3.1) koja nisu q-pravilno promenljiva.

Ovo je još jedna od razlika u kvalitativnoj analizi rešenja jednačine (3.1) i rešenja odgovarajuće jednačine u neprekidnom slučaju. Naime, u radovima Řeháka i Matucci [101, 113] pokazano je da su sva rešenja diferencijalne jednačine

$$(a(t)\Phi_\alpha(x'(t)))' = b(t)\Phi_\beta(x(t)),\ t \in \mathbb{R}, \tag{3.92}$$

pravilno promenljiva, pod pretpostavkom da je $\alpha > \beta > 0$ i da su koeficijenti ove jednačine pravilno promenljive funkcije, takve da je $a \in RV(\lambda)$, $b \in RV(\mu)$ i da za indekse regularnosti ovih koeficijenata važi da je

$$\mu + 1 < \min\left\{\lambda - \alpha, \frac{\beta}{\alpha}(\lambda - \alpha)\right\}.$$

Sa druge strane, primetimo da posmatrajući graničnu vrednosti kada $q \to 1+$ u Teoremama 3.4.1, 3.4.2, 3.4.3, kao i u Teoremama 3.5.1, 3.5.2, 3.5.3 dobijaju se rezultati koji odgovaraju neprekidnom slučaju. Uočimo da indeksi regularnosti tri tipa strogo opadajućih rešenja, odnosno tri tipa strogo rastućih rešenja, odgovaraju dobijenim indeksima regularnosti odgovarajućih rešenja u neprekidnom slučaju. Dobijene asimptotske formule pomenutih strogo opadajućih i strogo rastućih rešenja, kao i potrebni i dovoljni uslovi za njihovu egzistenciju se takođe podudaraju.

3.7 Primeri

U ovom poglavlju navedeni su primeri koji ilustruju rezultate Teorema 3.4.1 - 3.4.3 i Teorema 3.4.1 - 3.4.3. Biće posmatrana jednačina sa koeficijentima koji zadovoljavaju uslove pomenutih teorema, te će njihovom primenom biti dokazana egzistencija q-pravilno promenljivih rešenja određenih indeksa regularnosti i biće određena asimptotska formula takvih rešenja. U slučajevima kada je q-pravilno promenljivo rešenje jednačine poznato, biće napravljeno poređenje sa tako dobijenom asimptotskom formulom.

Primer 3.7.1. *Dokazaćemo egzistenciju strogo rastućih i strogo opadajućih q-pravilno promenljivih rešenja q-diferencne jednačine*

$$D_q\left(t^{\lambda}(\log t\log qt)^2\Phi_2\left(D_qx(t)\right)\right)=b(t)\Phi_{1/2}\left(x(qt)\right),\quad t\in q^{\mathbb{N}}, \tag{3.93}$$

gde je $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$ i odrediti asimptotske reprezentacije pomenutih rešenja.

Primetimo da je koeficijent date jednačine $a(t)=t^{\lambda}(\log t\log qt)^2$, $a\in\mathcal{RV}_q(\lambda)$.

(i) *Neka je*

$$b(t)=t^{\frac{3}{2}\rho-3+\lambda}(\log(qt))^{\frac{5}{2}}\varphi(t),\quad t\in q^{\mathbb{N}},$$

gde je funkcija $\varphi:q^{\mathbb{N}}\to\mathbb{R}$ takva da je $\lim_{t\to\infty}\varphi(t)=\delta>0$ i gde ρ realna konstanta koja zadovoljava jedan od sledećih uslova:

($i.1$) *u slučaju* $\lambda<2$, $\rho\in(-\infty,0)\cup(1-\lambda/2,\infty)$

($i.2$) *u slučaju* $\lambda>2$, $\rho\in(-\infty,1-\lambda/2)\cup(0,\infty)$.

Primetimo da je

$$b\in\mathcal{RV}_q(\mu)\quad\text{gde je}\quad\mu=\frac{3}{2}\rho-3+\lambda.$$

Egzistencija rešenja $x\in\mathcal{RV}_q(\rho)$ jednačine (3.93) zaključuje se na sledeći način:

($i.1.1$) *Neka je $\lambda<2$ i $\rho<0$.* Tada će slediti da je

$$\mu<\lambda-3=\lambda-\alpha-1,$$

te na osnovu Teoreme 3.4.1 (i) zaključujemo egzistenciju strogo opadajućeg rešenja $x\in\mathcal{RV}_q(\rho)$. Osim toga, u ovom slučaju postojaće rešenja u klasama $\mathbb{M}_B^-$ i $\mathbb{M}_{\infty,B}^+$.

($i.1.2$) *Neka je $\lambda<2$ i $\rho>1-\lambda/2$.* Tada će važiti da je

$$\mu>-\frac{3}{2}+\frac{\lambda}{4}=-1-\left(1-\frac{\lambda}{\alpha}\right)\beta,$$

te na osnovu Teoreme 3.5.1 (ii) zaključujemo egzistenciju strogo rastućeg rešenja $x\in\mathcal{RV}_q(\rho)$. Pod datim pretpostavkama ne postoje q-pravilno promenljiva rešenja jednačine (3.93) indeksa regularnosti različitog od ρ. Primetimo da u ovom slučaju postoje opadajuća rešenja koja nisu q-pravilno promenljiva.

$(i.2.1)$ *Neka je $\lambda > 2$ i $\rho < 1 - \lambda/2$.* Tada će slediti da je

$$\mu < -\frac{3}{2} + \frac{\lambda}{4} = -1 - \left(1 - \frac{\lambda}{\alpha}\right)\beta,$$

te na osnovu Teoreme 3.4.1 (ii) zaključujemo egzistenciju strogo opadajućeg rešenja $x \in \mathcal{RV}_q(\rho)$. Osim toga, u ovom slučaju važi i da su klase rešenja $\mathbb{M}^-_{0,B}$ i $\mathbb{M}^+_B$ neprazne. Uz pretpostavku da je integral I_b konvergentan, klasa $\mathbb{M}^-_B$ će takođe biti neprazna.

$(i.2.2)$ *Neka je $\lambda > 2$ i $\rho > 0$.* Tada će slediti da je

$$\mu > \lambda - 3 = \lambda - \alpha - 1,$$

te na osnovu na osnovu Teoreme 3.5.1 (i) zaključujemo egzistenciju strogo rastućeg rešenja $x \in \mathcal{RV}_q(\rho)$. Pod datim pretpostavkama ne postoje q-pravilno promenljiva rešenja jednačine (3.93) indeksa regularnosti različitog od ρ. Primetimo da i u ovom slučaju postoje opadajuća rešenja koja nisu q-pravilno promenljiva.

Svako $\mathcal{RV}_q$ - rešenje indeksa regularnosti ρ ima sledeću asimptotsku reprezentaciju

$$x(t) \sim \frac{t^\rho}{\log t}\left(\frac{q^{\frac{\rho}{2}}(q-1)^3\delta}{(1-q^\rho)^2|1-q^{2(\rho-1)+\lambda}|}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad t \to \infty. \tag{3.94}$$

Specijalno, neka je

$$\varphi(t) = \frac{\left|(q^\rho \log t - \log(qt))^2 - q^{2(\rho-1)+\lambda}(q^\rho \log(qt) - \log(q^2 t))^2\right|}{(q-1)^3 q^{\frac{\rho}{2}}(\log(qt))^2}, \quad t \in q^{\mathbb{N}}.$$

Primetimo da je

$$\lim_{t\to\infty}\varphi(t) = \frac{(1-q^\rho)^2|1-q^{2(\rho-1)+\lambda}|}{q^{\frac{\rho}{2}}(q-1)^3}.$$

Pri ovakvom izboru funkcije φ asimptotska relacija (3.94) postaje

$$x(t) \sim \frac{t^\rho}{\log t}, \; t \to \infty$$

i lako se proverava da je funkcija na desnoj strani poslednje asimptotske relacije $\mathcal{RV}_q(\rho)$ rešenje jednačine (3.93).

(ii) *Neka je*

$$b(t) = t^{\lambda-3}\varphi(t)\sqrt{\log qt}, \quad t \in q^{\mathbb{N}_0},$$

gde je $\lambda < 2$ i funkcija $\varphi : q^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$, takva da je $\lim_{t\to\infty}\varphi(t) = \delta > 0$.

Stoga, $b \in \mathcal{RV}_q(\lambda - 3)$, tj. $\mu = \lambda - 3 = \lambda - \alpha - 1$, pa je prvi uslov u (3.15) ispunjen. Kako bismo primenili Teoremu 3.4.2, ostaje da proverimo da li je i drugi uslov u (3.15) ispunjen. Neka je $t = q^m$, $m \in \mathbb{N}$. Tada je

$$\begin{aligned}
\int_t^\infty s^{-1}\left(l_a(s)^{-1} l_b(s)\right)^{\frac{1}{\alpha}} d_q s &= \int_t^\infty s^{-1}\left(\frac{\varphi(s)\sqrt{\log(qs)}}{(\log s \log(qs))^2}\right)^{\frac{1}{2}} d_q s \\
&\sim (q-1)\sqrt{\delta}\sum_{s\in[t,\infty)_q}\left(\frac{\sqrt{\log(qs)}}{(\log s\log(qs))^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= (q-1)\sqrt{\delta}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{1}{\log q^n(\log q^{n+1})^{\frac{3}{4}}} \\
&= \frac{(q-1)\sqrt{\delta}}{(\log q)^{\frac{7}{4}}}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)^{\frac{3}{4}}} \\
&\sim \frac{4(q-1)\sqrt{\delta}}{3(\log q)^{\frac{7}{4}} m^{\frac{3}{4}}} = \frac{4(q-1)\sqrt{\delta}}{3\log q(\log t)^{\frac{3}{4}}} \to 0, \quad t\to\infty,
\end{aligned}$$

te zaključujemo da je ispunjen uslov (3.15). Primenom Teoreme 3.4.2 zaključujemo da postoji rešenje $x \in \mathbb{M}^-_{0,0} \cap ntr - \mathcal{SV}_q$ jednačine (3.93). Osim toga, jednačina (3.93) poseduje rešenja i u klasama $\mathbb{M}^-_B$ i $\mathbb{M}^+_{\infty,B}$.

Svako rešenje $x \in \mathbb{M}^-_{0,0} \cap ntr - \mathcal{SV}_q$ ima sledeću asimptotsku reprezentaciju

$$x(t) \sim \frac{1}{\log t}\left(\frac{(q-1)^3\delta}{(\log q)^2(1-q^{\lambda-2})}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad t\to\infty. \tag{3.95}$$

Specijalno, neka je

$$\varphi(t) = \frac{(\log q)^2(1-q^{\lambda-2})}{(q-1)^3}, \quad t \in q^{\mathbb{N}}.$$

Pri ovakvom izboru funkcije φ asimptotska relacija (3.95) postaje

$$x(t) \sim \frac{1}{\log t}, \; t\to\infty,$$

funkcija na desnoj strani poslednje asimptotske relacije je netrivijalno q-sporo promenljivo rešenje jednačine (3.93).

(iii) Neka je

$$b(t) = t^{\frac{\lambda-6}{4}}\varphi(t)(\log(qt))^{-\frac{3}{2}}, \quad t\in q^{\mathbb{N}},$$

gde je $\lambda > 2$ *i funkcija* $\varphi : q^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ *takva da je* $\lim_{t\to\infty}\varphi(t) = \delta > 0$.

Stoga, $b \in \mathcal{RV}_q\left((\lambda-6)/4\right)$, tj. $\mu = (\lambda-6)/4 = -1-(1-\lambda/\alpha)\beta$. Neka je $\rho =$

$1-\lambda/2$, $t=q^m$, $m\in\mathbb{N}$. Tada

$$\begin{aligned}
\int_t^\infty s^{-1} l_a(s)^{-\frac{\beta}{\alpha}} l_b(s)\, d_q s &\sim \int_t^\infty s^{-1}\frac{\varphi(s)}{(\log(qs))^2\sqrt{\log s}}\, d_q s \\
&\sim (q-1)\delta \sum_{s\in[t,\infty)_q} \frac{1}{(\log(qs))^2\sqrt{\log s}} \\
&= (q-1)\delta \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{(\log(q^{n+1}))^2\sqrt{\log q^n}} \\
&= \frac{(q-1)\delta}{(\log q)^{\frac{5}{2}}} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2\sqrt{n}} \\
&\sim \frac{2(q-1)\delta}{3(\log q)^{\frac{5}{2}} m^{\frac{3}{2}}} = \frac{2(q-1)\delta}{3\sqrt{-[\rho]_q}\log q(\log t)^{\frac{3}{2}}} \to 0,\ \ t\to\infty,
\end{aligned}$$

te zaključujemo da je uslov (3.17) ispunjen. Stoga, na osnovu Teoreme 3.4.3 postoji rešenje $x\in\mathbb{M}^-_{0,0}\cap ntr-\mathcal{RV}_q\,(1-\lambda/2)$ jednačine (3.93). Osim toga, pod navedenim pretpostavkama su i klase rešenja $\mathbb{M}^-_{0,B}$ i $\mathbb{M}^+_B$ neprazne.

Svako rešenje $x\in\mathbb{M}^-_{0,0}\cap ntr-\mathcal{RV}_q\,(1-\lambda/2)$ zadovoljava sledeću asimptotsku reprezentaciju

$$x(t)\sim \frac{t^\rho}{(\log t)^3}\left(\frac{q^{\frac{\rho}{2}}(q-1)^3\delta}{2(1-q^\rho)^2\log q}\right)^{\frac{2}{3}}, t\to\infty.$$

Specijalno, neka je

$$\varphi(t)=\frac{(\log(qt))^3}{q^{\frac{\rho}{2}}(q-1)^3}\left(\frac{(q^\rho(\log t)^3-(\log(qt))^3)^2}{(\log t\log(qt))^4}-\frac{(q^\rho(\log(qt))^3-(\log(q^2t))^3)^2}{(\log(qt)\log(q^2t))^4}\right),\ \ t\in q^{\mathbb{N}}.$$

Primetimo da je

$$\lim_{t\to\infty}\varphi(t)=\frac{2(1-q^\rho)^2\log q}{q^{\frac{\rho}{2}}(q-1)^3},$$

te u ovom slučaju q-pravilno promenljivo rešenje x jednačine (3.93) zadovoljava asimptotsku relaciju

$$x(t)\sim\frac{t^{1-\frac{\lambda}{2}}}{(\log t)^3},\ t\to\infty,$$

pri čemu je funkcija na desnoj strani poslednje asimptotske relacije $\mathcal{RV}_q\,(1-\lambda/2)$ rešenje jednačine (3.93).

(iv) Neka je

$$b(t)=t^{\lambda-3}\varphi(t)(\log t)^{\frac{7}{2}},\ \ t\in q^{\mathbb{N}_0},$$

gde je $\lambda>2$ *i funkcija* $\varphi: q^{\mathbb{N}_0}\to\mathbb{R}$ *takva da je* $\lim_{t\to\infty}\varphi(t)=\delta>0$.

Stoga, $b\in\mathcal{RV}_q(\lambda-3)$, tj. $\mu=\lambda-3=\lambda-\alpha-1$, pa je prvi uslov u (3.58) ispunjen. Da bismo primenili Teoremu 3.5.2, ostaje da proverimo da li je i drugi uslov u (3.58) ispunjen. Neka je $t = q^m,\ \ m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Tada je

$$\begin{aligned}
\int_q^t s^{-1}\left(l_a(s)^{-1} l_b(s)\right)^{\frac{1}{\alpha}} d_q s &= \int_q^t s^{-1}\left(\frac{\varphi(s)(\log s)^{\frac{7}{2}}}{(\log s \log(qs))^2}\right)^{\frac{1}{2}} d_q s \\
&\sim (q-1)\sqrt{\delta} \sum_{s\in[q,t)_q} \frac{1}{(\log s)^{\frac{1}{4}}} \\
&= (q-1)\sqrt{\delta} \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{(\log q^n)^{\frac{1}{4}}} \\
&= \frac{(q-1)\sqrt{\delta}}{(\log q)^{\frac{1}{4}}} \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}} \sim \frac{4(q-1)\sqrt{\delta}}{3(\log q)^{\frac{1}{4}}} m^{\frac{3}{4}} \\
&= \frac{4(q-1)\sqrt{\delta}}{3\log q} (\log(qt))^{\frac{3}{4}} \to \infty,\ \ t\to\infty,
\end{aligned}$$

te zaključujemo da je ispunjen uslov (3.58). Primenom Teoreme 3.5.2 zaključujemo da postoji rešenje $x \in \mathbb{M}^{+}_{\infty,\infty} \cap ntr - \mathcal{SV}_q$ jednačine (3.93). Svako takvo rešenje ima sledeću asimptotsku reprezentaciju

$$x(t) \sim \log t \left(\frac{(q-1)^3\delta}{(\log q)^2(q^{\lambda-2}-1)}\right)^{\frac{2}{3}},\ t\to\infty.$$

Pod datim pretpostavkama ne postoje q-pravilno promenljiva rešenja jednačine (3.93) indeksa regularnosti različitog od ρ. Primetimo da u ovom slučaju postoje opadajuća rešenja koja nisu q-pravilno promenljiva.

Specijalno, neka je

$$\varphi(t) = (\log q \log(qt))^2 \frac{\left(q^{\lambda-2}(\log(q^2 t))^2 - (\log t)^2\right)}{(q-1)^3 (\log t)^{\frac{7}{2}} \sqrt{\log(qt)}},\ \ t \in q^{\mathbb{N}}.$$

Primetimo da je tada

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \frac{(\log q)^2(q^{\lambda-2}-1)}{(q-1)^3},$$

te rešenje x u ovom slučaju zadovoljava asimptotsku relaciju

$$x(t) \sim \log t,\ t\to\infty$$

i funkcija na desnoj strani poslednje asimptotske relacije jeste netrivijalno q-sporo promenljivo rešenje jednačine (3.93).

(v) *Neka je*

$$b(t) = t^{\frac{\lambda-6}{4}} \varphi(t)(\log t)^{\frac{15}{2}},\ \ t \in q^{\mathbb{N}},$$

gde je $\lambda < 2$ *i funkcija* $\varphi : q^{\mathbb{N}_0} \to \mathbb{R}$ *takva da je* $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \delta > 0$.

Primetimo da je $b \in \mathcal{RV}_q\left((\lambda-6)/4\right)$, tj. $\mu = (\lambda-6)/4 = -1-(1-\lambda/\alpha)\,\beta$. Neka je $\rho = 1-\lambda/2$, $t = q^m$, $m \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$. Tada

$$\begin{aligned}
\int_q^t s^{-1} l_a(s)^{-\frac{\beta}{\alpha}} l_b(s)\, d_q s &\sim \int_q^t s^{-1} \frac{\varphi(s)(\log s)^{\frac{15}{2}}}{\sqrt{\log s \log(qs)}}\, d_q s \sim (q-1)\delta \sum_{s\in[q,t)_q} (\log s)^{\frac{13}{2}} \\
&= (q-1)\delta \sum_{n=1}^{m-1} (\log(q^n))^{\frac{13}{2}} = (q-1)\delta(\log q)^{\frac{13}{2}} \sum_{n=1}^{m-1} n^{\frac{13}{2}} \\
&\sim \frac{2(q-1)\delta(\log q)^{\frac{13}{2}}}{15} m^{\frac{15}{2}} = \frac{2(q-1)\delta(\log t)^{\frac{15}{2}}}{15\log q} \to \infty, \quad t\to\infty,
\end{aligned}$$

te zaključujemo da je uslov (3.17) ispunjen. Stoga, na osnovu Teoreme 3.5.3 postoji rešenje $x \in \mathbb{M}^+_{\infty,\infty} \cap ntr\!-\!\mathcal{RV}_q\,(1-\lambda/2)$ jednačine (3.93). Svako takvo rešenje zadovoljava sledeću asimptotsku reprezentaciju

$$x(t) \sim t^{\rho}(\log t)^3 \left(\frac{q^{\frac{\rho}{2}}(q-1)^3\delta}{10(q^{\rho}-1)^2 \log q} \right)^{\frac{2}{3}},\ t\to\infty.$$

Pod datim pretpostavkama ni u ovom slučaju ne postoje q-pravilno promenljiva rešenja jednačine (3.93) indeksa regularnosti različitog od ρ. Osim toga, postoje opadajuća rešenja jednačine (3.93) koja nisu q-pravilno promenljiva.

Specijalno, neka je

$$\varphi(t) = \frac{(\log(qt))^{\frac{1}{2}}\left((\log(q^2t))^2(q^{\rho}(\log(q^2t))^3 - (\log(qt))^3)^2 - (\log t)^2(q^{\rho}(\log(qt))^3 - (\log t)^3)^2\right)}{q^{\frac{\rho}{2}}(q-1)^3(\log t)^{\frac{15}{2}}},$$

za $t \in q^{\mathbb{N}}$. Primetimo da je

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \frac{10(q^{\rho}-1)^2\log q}{q^{\frac{\rho}{2}}(q-1)^3},$$

te je u tom slučaju asimptotska formula $\mathcal{RV}_q\,(1-\lambda/2)$ rešenja jednačine (3.93) data sa

$$x(t) \sim t^{1-\frac{\lambda}{2}}(\log t)^3,\ t\to\infty$$

i funkcija na desnoj strani poslednje asimptotske relacije je rešenje polazne jednačine. $\square$

Literatura

[1] R. Agarwal, M. Bohner, S.R. Grace, D. O'Regan, *Discrete oscillation theory*, Hindawi Publishing Corporation, New York, 2005.

[2] R. Agarwal, J. Manojlović, *On the existence and the asymptotic behavior of nonoscillatory solutions of second order quasilinear difference equations*, Funkcialaj Ekvacioj Vol. 56 (2013), No. 1, 81–109.

[3] E. Akin-Bohner, *Positive decreasing solutions of quasilinear dynamic equation*, Mathematical and Computer Modelling, Vol. 43 (2006), 283–293.

[4] E. Akin-Bohner, *Positive increasing solutions of quasilinear dynamic equations*, Mathematical Inequalities and Application, Vol. 10 (2007), No. 1, 99–110.

[5] E. Akin-Bohner, *Regularly and strongly decaying solutions for quasilinear dynamic equations*, Advances in Dynamical Systems and Applications, Vol. 3 (2008), No. 1, 15–24.

[6] E. Akin-Bohner, Z. Došlá, *Recessive solutions for half-linear dynamic equations*, African Diaspora Journal of Mathematics, Vol. 8 (2009), No. 2, 182–195.

[7] G. E. Andrews, *q-Series: Their development and applications in analysis, number theory, combinatorics, physics and computer algebra*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, Vol. 66 (1986)

[8] A. Aral, V. Gupta, R. Agarwal, *Application of q-calculus in operator theory*, Springer-Verlag, New York, 2013.

[9] V. G. Avakumović, *Sur L'équation differentielle de Thomas Fermi*, Publications de l'Institut Mathématique (Beograd), Vol. 1 (1947), 101–113.

[10] S. Banach, *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales*, Fundamenta Mathematicae, Vol. 3 (1922), No. 1, 133–181.

[11] M. Bohner, A. C. Peterson, *Advances in dynamic equations on time scales*, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 2003.

[12] M. Bohner, A. C. Peterson, *Dynamic equations on time scales: An introduction with applications*, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 2001.

[13] M. Bohner, S. H. Saher, *Oscillation of second order half-linear dynamic equations on discrete time scales*, International Journal of Difference Equations, Vol. 1 No. 2 (2006), 205–218.

[14] R. Bojanić, E. Seneta, *A unified theory of regularly varying sequences*, Mathematische Zeitschrift, Vol. 134 (1973), 91–106.

[15] R. Bojanić, E. Seneta, *Slowly varying functions and asymptotic relations*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 34 (1971), No. 2, 302–315.

[16] A. J. Bracken, D. S. McAnally, R. B. Zhang, M. D. Gould, *A q-analogue of Bargmann space and its scalar product*, Journal of Physics A: Mathematical and General, Vol. 24 (1991), No. 7, 1379.

[17] M. Cecchi, Z. Došlá, M. Marini, *Intermediate solutions for Emden-Fowler type equations: Continuous Versus Discrete*, Advances in Dynamical Systems and Applications, Vol. 3 (2008), 161–176.

[18] M. Cecchi, Z. Došlá, M. Marini, *Intermediate solutions for nonlinear difference equations with p-Laplacian*, Advanced Studies in Pure Mathematics, Vol. 53 (2009), 33–40.

[19] M. Cecchi, Z. Došlá, M. Marini, *On intermediate solutions and the Wronskian for half-linear differential equations*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 336 (2007), No. 2, 905–918.

[20] M. Cecchi, Z. Došlá, M. Marini, *On nonoscillatory solutions of differential equations with p-Laplacian*, Advances in Mathematical Sciences and Applications, Vol. 11 (2001), No. 1, 419–436.

[21] M. Cecchi, Z. Došlá, M. Marini, *On oscillation and nonoscillation properties of Emden-Folwer difference equations*, Central European Journal of Mathematics, Vol. 7 (2009), No. 2 , 322–334.

[22] M. Cecchi, Z. Došlá, M. Marini, *On the dynamics of the generalized Emden-Fowler equations*, Georgian Mathematical Journal, Vol. 7 (2000), No. 2, 269–282.

[23] M. Cecchi, Z. Došlá, M. Marini, *On the growth of nonoscillatory solutions for difference equations with deviating argument*, Advances in Difference Equations, Vol. 2008 (2008), 1–15.

[24] M. Cecchi, Z. Došlá, M. Marini, *Positive decreasing solutions of quasi-linear difference equations*, Computers and Mathematics with Applications, Vol. 42 (2001), 1401–1410.

[25] M. Cecchi, Z. Došlá, M. Marini, *Unbounded solutions of quasi-linear difference equations*, Computers and Mathematics with Applications, Vol. 45 (2003), 1113–1123.

[26] M. Cecchi, Z. Došlá, M. Marini, I. Vrkoč, *Integral conditions for nonoscillation of second order nonlinear differential equations*, Nonlinear Analysis, Vol. 64 (2006), No. 6, 1278–1289.

[27] M. Cecchi, Z. Došlá, M. Marini, I. Vrkoč, *Nonoscillatory solutions for Emden-Fowler type difference equations*, Proceedings of the International Conference Difference Equations, Special Functions and Orthogonal Polynomials (2007), 159–167.

[28] S. Chandrasekhar, *Introduction to the study of stellar structure*, Dover, New York, 1967.

[29] S. S. Cheng, H. J. Li, W. T. Patula, *Bounded and zero convergent solutions of second order difference equations*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 141 (1989), 463–483.

[30] H. T. Davis, *Introduction to nonlinear differential and integral equations*, Dover, New York, 1960.

[31] K. Djordjević, *Asymptotic formulas for q-regularly varying solutions of half-linear q-difference equations*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2021 (2021), No. 50, 1–23.

[32] K. Djordjević, J. Manojlović, *Existence and asymptotic behavior of intermediate type of positive solutions of fourth-order nonlinear differential equations*, Filomat, Vol. 33, No. 13 (2019), 4185–4211.

[33] K. Djordjević, J. Manojlović, *q-regular variation and the existence of solutions of half-linear q-difference equation*, Mathematical Methods in the Applied Sciences (2021), https://doi.org/10.1002/mma.7570

[34] Z. Došlá, M. Marini, *On super-linear Emden-Fowler type differential equations*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 416 (2014), No. 2, 497–510.

[35] O. Dosly, P. Řehák, *Half-linear differential equations*, Mathematics studies Vol. 202, Elsevier, North-Holland, 2005.

[36] T. Ernst. *A method for q-calculus*, Journal of Nonlinear Mathematical Physics, Vol. 10 (2003), No. 4, 487–525.

[37] T. Ernst, *A comprehensive treatments of q-calculus*, Birkhäuser Basel, Springer Basel, 2012.

[38] T. Ernst, *The history of q-calculus and a new method*, UUDM Report, Department of Mathematics, Uppsala University, 2000.

[39] L. Euler, *Introductio in analysin infinitorum*, Lausanne: Marcum-Michaelem Bousquet, Vol. 1 (1748), 1–320.

[40] J. Galambos, E. Seneta, *Regularly varying sequences*, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 41 (1973), No. 1, 110–116.

[41] L. de Haan, *On regular variation and its application to the weak convergence of sample extremes. Mathematical Centre Tracts, 32*, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1970.

[42] G. H. Hardy, *Orders of infinity: The 'infinitärcalcül' of Paul du Bois-Reymond*, Cambridge University Press, Cambridge, 1910.

[43] E. Heine, *Handbuch der Kugelfunctionen, Theorie und Anwendungen*, Vol. 1, Cornell University Library, 1878.

[44] S. Hilger, *Ein Maßkettenkalkül mit Anwendung auf Zentrumsmannig faltigkeiten*, Ph.D. dissertation, Universität of Würzburg, 1988.

[45] F. H. Jackson, *On q-functions and a certain difference operator*, Transactions of the Royal Society of Edinburgh, Vol. 46 (1908), 253–281.

[46] F. H. Jackson, *On a q-definite integrals*, The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol. 41 (1910), 193–203.

[47] J. Jaroš, T. Kusano, *Existence and precise asymptotic behavior of strongly monotone solutions of systems of nonlinear differential equations*, Differential Equations and Application, Vol. 5 (2013), No. 2, 185–204.

[48] J. Jaroš, T. Kusano, *Self-adjoint differential equations and generalized Karamata funcktion*, Bull. Classe Sci. Mat. Nat., Sci. Math., Acad. Serbe Sci. Arts, CXXIX, No. 29, 25–60.

[49] J. Jaroš, T. Kusano, T. Tanigawa, *Nonoscillatory half-linear differential equations and generalized Karamata functions*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, Vol. 64 (2006), No. 4, 762–787.

[50] J. Jaroš, T. Kusano, T. Tanigawa, *Nonoscillatory solutions of planar half-linear differential systems: a Riccati equation approach*, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, Vol. 2018 (2018), No. 92, 1–28.

[51] J. Jaroš, T. Kusano, T. Tanigawa, *Nonoscillation theory for second order half-linear differential equations in the framework of regular variation*, Results in Mathematics, Vol. 43 (2003), 129–149.

[52] V. Kac, P. Cheung, *Quantum Calculus*, Universitext, Springer - Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 2002.

[53] K. Kamo, H. Usami, *Asymptotic forms of weakly increasing positive solutions for quasilinear ordinary differential equations*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2007 (2007), No. 126 , 1–12.

[54] K. Kamo, H. Usami, *Characterization of slowly decaying positive solutions of second-order quasilinear ordinary differential equations with subhomogeneity*, Bulletin of the London Mathematical Society, Vol. 42 (2010), No. 3, 420–428.

[55] K. Kamo, H. Usami, *Nonlinear oscillations of fourth order quasilinear ordinary differential equations*, Acta Mathematica Hungarica, Vol. 132, No. 3 (2011), 207–2.

[56] K. Kamo, H. Usami, *Oscillation theorems for fourth-order quasilinear ordinary differential equations*, Studia Scientarum Mathematicarum Hungarica, Vol. 39 (2002), 385–406.

[57] A. Kapešić, J. Manojlović, *Positive strongly decreasing solutions of Emden-Fowler type second-order difference equations with regularly varying coefficients*, Filomat Vol. 33 (2019), No. 9, 2751–2770.

[58] A. Kapešić, J. Manojlović, *Regularly varying sequences and Emden-Fowler type second-order difference equations*, Journal of Difference Equations and Applications, Vol. 24 (2018), No. 2, 245–266.

[59] J. Karamata, *Sur certain Tauberian theorems de M.M. Hardy et Littlewood*, Mathematica (Cluj), Vol. 3 (1930), 33–48.

[60] J. Karamata, *Sur un mode de croissance régulière des fonctions*, Mathematica (Cluj), Vol. 4 (1930), 38–53.

[61] J. Karamata, *Sur un mode de croissance régulière. Théorèmes fondamentaux*, Bulletin de la Société Mathématique de France, Vol. 61 (1933), 55–62.

[62] I. Kiguradze, T. Chanturia, *Asymptotic properties of solutions of nonautonomous ordinary differential equations*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, Vol. 89, 1993.

[63] M. Kitano, T. Kusano, *On a class of second order quasilinear ordinary differential equations*, Hiroshima Mathematical Journal, Vol. 25 (1995), No. 2, 321–355.

[64] H. T. Koelink, R. F. Swarttouw, *On the zeros of the Hahn-Exton q-Bessel function and associated q-Lommel polynomials*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 186 (1994), No. 3, 690–710.

[65] K. Kostadinov, J. Manojlović, *Existence of positive strongly decaying solutions of second order nonlinear q difference equations*, Journal of Difference Equations and Applications, Vol. 26 (2020), No. 6, 729–752.

[66] T. Kusano, J. Manojlović, *Asymptotic analysis of Emden-Fowler differential equations in the framework of regular variation*, Annali di Matematica Pura ed Applicata, Vol. 190 (2011), 619–644.

[67] T. Kusano, J. Manojlović, *Asymptotic behavior of positive solutions of sublinear differential equations of Emden-Fowler type*, Computers and Mathematics with Applications, Vol. 62 (2011), 551–565.

[68] T. Kusano, J. Manojlović, *Asymptotic behavior of solutions of half-linear differential equations and generalized Karamata functions*, Georgian Mathematical Journal, https://doi.org/10.1515/gmj-2020–2070

[69] T. Kusano, J. Manojlović, *Positive solutions of fourth order Emden-Fowler type differential equations in the framework of regular variation*, Applied Mathematics and Computation, Vol. 218 (2012), 6684–6701.

[70] T. Kusano, J. Manojlović, *Positive solutions of fourth order Thomas-Fermi type differential equations in the framework of regular variation*, Acta Applicandae Mathematicae, Vol. 121 (2012), 81–103.

[71] T. Kusano, J. Manojlović, *Precise asymptotic behavior of regularly varying solutions of second order half-linear differential equations*, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, Vol. 62 (2016), 1–24.

[72] T. Kusano, J. Manojlović, V. Marić, *Complete asymptotic analysis of second-order differential equations of Thomas-Fermi type in the framework of regular variation*, Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku, No.1959, 2015.7, Qualitative theory of ordinary differential equations in real domains and its applications, 14–34.

[73] T. Kusano, J. Manojlović, V. Marić, *Increasing solutions of Thomas-Fermi type differential equations - the sublinear case*, Bulletin (Académie serbe des sciences et des arts. Classe des sciences mathématiques et naturelles. Sciences mathématiques) Vol. 143 (2011), No. 36 , 21–36.

[74] T. Kusano, J. Manojlović, V. Marić, *Increasing solutions of Thomas-Fermi type differential equations - the superlinear case*, Nonlinear Analysis, Vol. 108 (2014), No. 36, 114–127.

[75] T. Kusano, J. Manojlović, J. Milošević, *Intermediate solutions of fourth order quasilinear differential equations in the framework of regular variation*, Applied Mathematics and Computation, Vol. 219 (2013), 8178–8191.

[76] T. Kusano, V. Marić, T. Tanigawa, *An asymptotic analysis of positive solutions of generalized Thomas-Fermi differential equations - The sub-half-linear case*, Nonlinear Analysis, Vol. 75 (2012), No. 4, 2474–2485.

[77] T. Kusano, J. Manojlović, T. Tanigawa, *Existance and asymptotic behavior of positive solutions of fourth order quasilinear differential equations*, Taiwanese Journal of Mathematics, Vol. 17 (2013), No. 3, 999–1030.

[78] T. Kusano, J. Manojlović, T. Tanigawa; *Sharp oscillation criteria for a class of fourth order nonlinear differential equations*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, Vol. 41 (2011), No. 1, 249–274.

[79] T. Kusano, V. Marić, T. Tanigawa, *Regularly varying solutions of generalized Thomas-Fermi equations*, Bulletin (Académie serbe des sciences et des arts. Classe des sciences mathématiques et naturelles. Sciences mathématiques), Vol. 139 (2009), 44–45.

[80] E. Landau, *Sur les valeurs moyennes de certaines fonctions arithmétiques*, Bulletins de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique, (1911) 443–472.

[81] S. Luey, H. Usami, *Asymptotic forms of solutions of perturbed half-linear ordinary differential equations*, Archivum Mathematicum, Vol. 57 (2021), No. 1, 27–39.

[82] J. Manojlović, V. Marić, *An asymptotic analysis of positive solutions of Thomas-Fermi type sublinear differential equation*, Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics, Vol. 57 (2012), 75–94.

[83] J. Manojlović, J. Milošević, *Sharp oscillation criteria for fourth order sub-half-linear and super-half-linear differential equations*, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, Vol. 2008 (2008), No. 32, 1–13.

[84] V. Marić - *Regular variation and Differential equations*, Lecture Notes in Mathematics, 1726, Springer, 2000.

[85] S. Matucci, P. Řehák, *Nonoscillation of half-linear dynamic equations*, Computers and Mathematics with Applications, Vol. 60 (2010), 1421–1429

[86] S. Matucci, P. Řehák, *Regularly varying sequences and second order difference equations*, Journal of Difference Equations and Applications , Vol. 14 (2008), No. 1, 17—30.

[87] S. Matucci, P. Řehák, *Regularly varying solutions of second-order difference equations with arbitrary sign coefficients*, Advances in Difference Equations, Vol. 2010 (2010), No. 1, 1–16.

[88] S. Matucci, P. Řehák, *Second order linear difference equations and Karamata sequences*, International Journal of Difference Equations, Vol. 3 (2008), No. 2, 277–288.

[89] M. Mizukami, M. Naito, H. Usami, *Asymptotic behavior of solutions of a class of second order quasilinear ordinary differential equations*, Hiroshima Mathematical Journal, Vol. 32 (2002), No. 1, 51–78.

[90] M. Naito, *A note on the existence of slowly growing positive solutions to second order quasilinear ordinary differential equations*, Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics, Vol. 57 (2012), 95–108.

[91] M. Naito, *A remark on the existence of slowly growing positive solutions to second order super-linear ordinary differential equations*, Nonlinear Differential Equations and Applications, Vol. 20 (2013), 1759–1769.

[92] M. Naito, *Remarks on the existence of nonoscillatory solutions of half-linear ordinary differential equations, I*, Opuscula Mathematica, Vol. 41 (2021), No. 1 , 71–94.

[93] M. Naito, *Remarks on the existence of nonoscillatory solutions of half-linear ordinary differential equations, II*, Archivum Mathematicum, Vol. 57 (2021), 41–60.

[94] M. Naito, F. Wu, *A note on the existance and asymptotic behavior of nonoscillatory solutions of fourth order quasilinear differential equations*, Acta Mathematica Hungarica, Vol. 102 (2004), No. 3, 177–202.

[95] M. Naito, F. Wu, *On the existence of eventually positive solutions of fourth-order quasilinear differential equations*, Nonlinear Analysis, Vol. 57 (2004), No. 2, 253–263.

[96] N. E. Nørlund, *Vorlesungen über Differenzenrechnung*, Springer, Berlin, 1924.

[97] Z. Pátíková, *Asymptotyc formulas for solutions of half-linear Euler-Weber equation*, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, Vol. 2008 (2008), No. 15, 1–11.

[98] Z. Pátíková, *Asymptotic formulas for non-oscillatory solutions of perturbed half-linear Euler equation*, Nonlinear Analysis, Vol. 69 (2008), 3281–3290.

[99] P. Rajković, S. Marinković, M. Stanković, *Diferencijalno - ingtegralni račun bazičnih hipergeometrijskih funkcija*, Mašinski fakultet univerziteta u Nišu, Niš, 2010.

[100] P. Řehák, *An asymptotic analysis of nonoscillatory solutions of q-difference equations via q-regular variation*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 454 (2017), 829–882.

[101] P. Řehák, *Asymptotic behavior of increasing solutions to a system of n nonlinear differential equations*, Nonlinear Analysis, Vol. 77 (2013), 45–58.

[102] P. Řehák, *Asymptotic behavior of solutions to half-linear q-difference equations*, Abstract and Applied Analysis, https://doi.org/10.1155/2011/986343.

[103] P. Řehák; *Asymptotic formulae for solutions of half-linear differential equations*, Applied Mathematics and Computation, Vol. 292 (2017), 165–177.

[104] P. Řehák, *Asymptotic formulae for solutions of linear second-order difference equations*, Journal of Difference Equations and Applications, Vol. 22 (2016), No. 1, 107–139.

[105] P. Řehák, *Half-linear dynamic equations on time scales: IVP and oscillatory properties*, Nonlinear Functional Analysis and Applications, Vol. 7 (2002), 361–404.

[106] P. Řehák, *Hardy inequality on time scales and its application to half-linear dynamic equations*, Journal of Inequalities and Applications, Vol. 5 (2005), No. 5, 495–507.

[107] P. Řehák, *Methods in half-linear asymptotic theory,* Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2016 (2016), No. 267, 1–27

[108] P. Řehák, *On certain comparison theorems for half-linear dynamic equations on time scales*, Abstract and Applied Analysis, Vol. 7 (2004), 551–565.

[109] P. Řehák, *Refined discrete regular variation and its applications*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, Vol. 42 (2019), No. 18, 6009–6020.

[110] P. Řehák, *Regular variation on time scales and dynamic equations*, The Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 5 (2008), No. 2, 1–10.

[111] P. Řehák, *Second order linear q-difference equations: nonoscillation and asymptotics*, Czechoslovak Mathematical Journal, Vol 61 (2011), No. 136, 1107–1134.

[112] P. Řehák, *The Karamata integration theorem on time scales and its applications in dynamic and difference equations*, Applied Mathematics and Computation Vol. 338 (2018), 487–506.

[113] P. Řehák, S. Matucci, *Asymptotics of decreasing solutions of coupled p-Laplacian systems in the framework of regular variation*, Annali di Matematica Pura ed Applicata, Vol. 193 (2014), 837–858.

[114] P. Řehák, J. Vítovec, *q-Karamata functions and second order q-difference equations,* Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, Vol. 2011 (2011), No. 24, 1–20.

[115] P. Řehák, J. Vítovec, *q-regular variation and q-difference equations*, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, Vol. 41 (2008), No. 49, 495203.

[116] P. Řehák, J. Vítovec, *Regularly varying decreasing solutions of half-linear dynamic equations*, Proceedings of the 12th ICDEA, Lisbon, 2008.

[117] O. U. Richardson, *The Emission of Electricity from Hot Bodies*, London, 1921.

[118] R. Swarttouw, *The Hahn-Exton q-Bessel Function*, PhD thesis, The Technical University of Delft, 1992.

[119] M. Tan, E. Yang, *Oscillation and nonoscillation theorems for second order nonlinear difference equations*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 276 (2002), No. 1, 239–247.

[120] E. Thandapani, S. Marian, *The asymptotic behavior of solutions of nonlinear second-order difference equation*, Applied Mathematics Letters, Vol. 14 (2001), No. 5, 611–616.

[121] E. Thandapani, K. Ravi, *Bounded and monotone properties of solutions of second-order quasilinear forced difference equations*, Computers and Mathematics with Applications, Vol. 38 (1999), No. 2, 113–121.

[122] J. Thomae, *Beitrage zur Theorie der durch die Heinsche Reihe*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Vol. 70 (1869), 258–281.

[123] A. Trajković, J. Manojlović, *Asymptotic behavior of intermediate solutions of fourth-order nonlinear differential equations with regularly varying coefficients*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2016 (2016), No. 129, 1–32.

[124] J. Vítovec, *Theory of rapid variation on time scales with applications to dynamic equations*, Archivum Mathematicum, Vol. 46 (2010), No. 4, 263–284.

[125] J. S. W. Wong, *A nonoscillation theorem for Emden-Fowler equations*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 274 (2002), No. 2, 746–754.

[126] J. S. W. Wong, *On the generalized Emden-Fowler equation*, SIAM Review, Vol. 17 (1975), No. 2, 339–360.

[127] P. J. Y. Wong, R. P. Agarwal, *Oscillation theorems and existence of positive monotone solutions for second order nonlinear difference equations*, Mathematical and Computer Modelling, Vol. 21 (1995), 63–84.

[128] F. Wu, *Existence of eventually positive solutions of fourth order quasilinear differential equations*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 389 (2012), No. 1, 632–646.

[129] F. Wu, *Nonoscillatory solutions of fourth order quasilinear differential equations*, Funkcialaj Ekvacioj, 45 (2002), No. 1, 71–88.

Biografija

Katarina S. Đorđević (rođena Kostadinov) rođena je 18.08.1991. godine u Nišu. Osnovnu školu "Stefan Nemanja" u Nišu i Gimnaziju "Svetozar Marković" u Nišu, specijalizovano odeljenje za nadarene matematičare, završila je kao nosilac Vukovih diploma. Osnovne akademske studije Matematika je upisala školske 2010/2011. godine, na Prirodno-matematičkom fakultetu u Nišu i iste završila ostvarivši prosečnu ocenu 9.92/10. Školske 2013/2014. godine upisala Master akademske studije Matematika, na Prirodno-matematičkom fakultetu u Nišu i iste završila 16.10.2015. godine ostvarivši prosečnu ocenu 10/10 i odbranivši master rad pod nazivom "Karamatine pravilno promenljive funkcije i linearne diferencijalne jednačine". Školske 2015/2016. godine upisala je Doktorske akademske studije, na istom fakultetu, na kojima je položila sve ispite ostvarivši prosečnu ocenu 10/10. Tokom studija bila je korisnik Republičke stipendije (Ministarstva prosvete, nauke i tehnološkog razvoja) i Dositejeve stipendije (Fonda za mlade talente Ministarstva prosvete, nauke i tehnološkog razvoja).

Od 2014. godine izvodi vežbe na Prirodno-matematičkom fakultetu u Nišu, najpre kao student master akademskih studija, godinu dana kasnije kao saradnik u nastavi. Od 2016. godine angažovana je u zvanje asistenta za užu naučnu oblast Matematika, na Prirodno-matematičkom fakultetu u Nišu i od tada je angažovana na predmetima: Teorija brojeva i polinoma, Diferencijalne jednačine i dinamički sistemi, Parcijalne diferencijalne jednačine, Matematička analiza 4 na Departmanu za matematiku i Matematika 1 na Departmanu za fiziku. Kao istraživač, od 2016. godine učestvovala je na projektu "Funkcionalna analiza, stohastička analiza i primene", OI 174007, Ministarstva prosvete, nauke i tehnološkog razvoja, Republike Srbije. Autor je ili koautor četiri naučna rada objavljena u inostranim i domaćim časopisima sa impakt faktorom.

Bibliografija naučnih radova

1. K. Djordjević, *Asymptotic formulas for q-regularly varying solutions of half-linear q-difference equations*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2021 (2021), No. 50, 1–23. **(M22)**

2. K. Djordjević, J. Manojlović, *Existence and asymptotic behavior of intermediate type of positive solutions of fourth-order nonlinear differential equations*, Filomat, Vol. 33, No. 13 (2019), 4185–4211. **(M22)**

3. K. Djordjević, J. Manojlović, *q-regular variation and the existence of solutions of half-linear q-difference equation*, Mathematical Methods in the Applied Sciences (2021), https://doi.org/10.1002/mma.7570 **(M21)**

4. K. Kostadinov, J. Manojlović, *Existence of positive strongly decaying solutions of second order nonlinear q difference equations*, Journal of Difference Equations and Applications, Vol. 26 (2020), No. 6, 729–752. **(M22)**

ИЗЈАВА О АУТОРСТВУ

Изјављујем да је докторска дисертација, под насловом

q-КАРАМАТИНЕ ФУНКЦИЈЕ И АСИМПТОТСКА СВОЈСТВА РЕШЕЊА НЕЛИНЕАРНИХ q – ДИФЕРЕНЦНИХ ЈЕДНАЧИНА

која је одбрањена на Природно – математичком факултету Универзитета у Нишу:

- резултат сопственог истраживачког рада;
- да ову дисертацију, ни у целини, нити у деловима, нисам пријављивао/ла на другим факултетима, нити универзитетима;
- да нисам повредио/ла ауторска права, нити злоупотребио/ла интелектуалну својину других лица.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци, који су у вези са ауторством и добијањем академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада, и то у каталогу Библиотеке, Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Нишу, као и у публикацијама Универзитета у Нишу.

У Нишу, 13.09.2021.

Потпис аутора дисертације:

Катарина Ђорђевић

Катарина С. Ђорђевић

ИЗЈАВА О ИСТОВЕТНОСТИ ЕЛЕКТРОНСКОГ И ШТАМПАНОГ ОБЛИКА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Наслов дисертације:

q-КАРАМАТИНЕ ФУНКЦИЈЕ И АСИМПТОТСКА СВОЈСТВА РЕШЕЊА НЕЛИНЕАРНИХ q – ДИФЕРЕНЦНИХ ЈЕДНАЧИНА

Изјављујем да је електронски облик моје докторске дисертације, коју сам предао/ла за уношење у **Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу,** истоветан штампаном облику.

У Нишу, 13.09. 2021.

Потпис аутора дисертације:

Катарина Ђорђевић

Катарина С. Ђорђевић

ИЗЈАВА О КОРИШЋЕЊУ

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Никола Тесла“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу унесе моју докторску дисертацију, под насловом:

q-КАРАМАТИНЕ ФУНКЦИЈЕ И АСИМПТОТСКА СВОЈСТВА РЕШЕЊА НЕЛИНЕАРНИХ q – ДИФЕРЕНЦНИХ ЈЕДНАЧИНА

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском облику, погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију, унету у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу, могу користити сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons), за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство **(CC BY)**
2. Ауторство – некомерцијално **(CC BY-NC)**
3. **Ауторство – некомерцијално – без прераде (CC BY-NC-ND)**
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима **(CC BY-NC-SA)**
5. Ауторство – без прераде **(CC BY-ND)**
6. Ауторство – делити под истим условима **(CC BY-SA)**

У Нишу, 13.09.2021.

Потпис аутора дисертације:

Катарина Ђорђевић

Катарина С. Ђорђевић