



УНИВЕРЗИТЕТ У НИШУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
ДЕПАРТМАН ЗА ФИЗИКУ



Марко Д. Стојановић

**ТАХИОНСКА ИНФЛАЦИЈА
У ХОЛОГРАФСКОЈ КОСМОЛОГИЈИ**

ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА

Ниш, 2021.



UNIVERSITY OF NIŠ
FACULTY OF SCIENCES AND MATHEMATICS
DEPARTMENT OF PHYSICS



Marko D. Stojanović

**TACHYON INFLATION
IN HOLOGRAPHIC COSMOLOGY**

DOCTORAL DISSERTATION

Niš, 2021.

Подаци о докторској дисертацији

Ментор:	др Горан Ђорђевић, редовни професор, Универзитет у Нишу, Природно-математички факултет др Драгољуб Димитријевић, ванредни професор, Универзитет у Нишу, Природно-математички факултет
Наслов:	Тахионска инфлација у холографској космологији
Резиме:	Теорија инфлације је широко прихваћена као најбољи приступ проблемима раног свемира у стандардној космологији. Порекло и природа физичког поља које одређује инфлаторни процес нису довољно познати. Популарна класа инфлаторних модела базира се на ефективној теорији тахионског поља описаној лагранжијаном DBI типа. Потенцијална улога тахионских поља у објашњењу механизма инфлације се заснива на веома развијеној теорији струна и брана - M теорији и у блиској је вези са актуелним развојем квантне гравитације. Акцент истраживања у дисертацији је на моделу холографске космологије, ефективним Ајнштајновим једначинама на 4-димензионалној холографској граници и AdS/CFT кореспонденцији. Аналитичко и нумеричко израчунавање посматрачких параметара и поређење са посматрачким подацима указују на валидност модела.
Научна област:	Физика / Теоријска физика
Научна дисциплина:	Космологија
Кључне речи:	Космологија, инфлација, DBI лагранжијан, холографија
УДК:	524.82 : 524.834
CERIF класификација:	P190 Математичка и општа теоријска физика, класична механика, квантна механика, релативитет, гравитација, статистичка физика
Тип лиценце Креативне заједнице:	CC BY-NC-ND

Data on Doctoral Dissertation

Doctoral Supervisor:	Dr Goran Djordjević, Full Professor, University of Niš, Faculty of Sciences and Mathematics Dr Dragoljub Dimitrijević, Associate Professor, University of Niš, Faculty of Sciences and Mathematics
Title:	Tachyon inflation in holographic cosmology
Abstract:	Theory of inflation is widely accepted as the best approach to the problems of the Early universe in the standard cosmology. The origin and nature of the physical field that determines the inflationary process are not well known. A popular class of inflatory models is based on the effective tachyon field theory determined by the Lagrangian of the DBI type. The potential role of tachyon fields in explaining the mechanism of inflation is based on the highly well developed string theory, M theory and brane theory, and its close relation to the current development of quantum gravity. The focus in this PhD thesis is on holographic cosmology, Einstein's effective equations in the 4-dimensional holographic boundary, and AdS/CFT correspondence. Analytical and numerical calculation of the observable parameters and their comparison with observational data indicate the validity of the model.
Scientific Field:	Physics / Theoretical Physics
Scientific Discipline:	Cosmology
Key Words:	Cosmology, inflation, DBI Lagrangian, holography
UDC:	524.82 : 524.834
CERIF Classification:	P190 Mathematical and general theoretical physics, classical mechanics, quantum mechanics, relativity, gravitation, statistical physics, thermodynamics
Creative Commons License Type:	CC BY-NC-ND



**ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ**

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, РБР:	
Идентификациони број, ИБР:	
Тип документације, ТД:	монографска
Тип записа, ТЗ:	текстуални / графички
Врста рада, ВР:	докторска дисертација
Аутор, АУ:	Марко Д. Стојановић
Ментор, МН:	Горан С. Ђорђевић, Драгољуб Д. Димитријевић
Наслов рада, НР:	ТАХИОНСКА ИНФЛАЦИЈА У ХОЛОГРАФСКОЈ КОСМОЛОГИЈИ
Језик публикације, ЈП:	српски
Језик извода, ЈИ:	енглески
Земља публикавања, ЗП:	Србија
Уже географско подручје, УГП:	Србија
Година, ГО:	2021.
Издавач, ИЗ:	ауторски репринт
Место и адреса, МА:	Ниш, Вишеградска 33.
Физички опис рада, ФО: <small>(поглавља/страна/цитата/табела/слика/графика/прилога)</small>	9 поглавља, 120 страна, 138 цитата, 2 табеле, 14 слика, 2 прилога
Научна област, НО:	Физика
Научна дисциплина, НД:	Космологија
Предметна одредница/Кључне речи, ПО:	Космологија, инфлација, DBI лагранжијан, холографија
УДК	524.82 : 524.834
Чува се, ЧУ:	библиотека
Важна напомена, ВН:	/

Извод, ИЗ:	Теорија инфлације је широко прихваћена као најбољи приступ проблемима раног свемира у стандардној космологији. Порекло и природа физичког поља које одређује инфлаторни процес нису довољно познати. Популарна класа инфлаторних модела базира се на ефективној теорији тахионског поља описаној лагранжијаном DBI типа. Потенцијална улога тахионских поља у објашњењу механизма инфлације се заснива на веома развијеној теорији струна, брана - M теорији, у блиској је вези са актуелним развојем квантне гравитације. Акцент истраживања у дисертацији је на моделу холографске космологије, ефективним Ајнштајновим једначинама на 4-димензионој холографској граници и AdS/CFT кореспонденцији. Аналитичко и нумеричко израчунавање оспервабилних параметара и поређење са посматрачким подацима указују на валидност модела.
Датум прихватања теме, ДП:	10. децембар 2019.
Датум одбране, ДО:	
Чланови комисије, КО:	Председник: Члан: Члан, ментор: Члан, ментор:



**ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ**

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, ANO :	
Identification number, INO :	
Document type, DT :	monograph
Type of record, TR :	textual / graphic
Contents code, CC :	doctoral dissertation
Author, AU :	Marko D. Stojanović
Mentor, MN :	Goran S. Djordjević, Dragoljub D. Dimitrijević
Title, TI :	TACHYON INFLATION IN HOLOGRAPHIC COSMOLOGY
Language of text, LT :	Serbian
Language of abstract, LA :	English
Country of publication, CP :	Serbia
Locality of publication, LP :	Serbia
Publication year, PY :	2021.
Publisher, PB :	author's reprint
Publication place, PP :	Niš, Višegradska 33.
Physical description, PD : (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)	9 chapters, 120 pages, 138 references, 2 tables, 14 graphs, 2 appendix
Scientific field, SF :	Physics
Scientific discipline, SD :	Cosmology
Subject/Key words, S/KW :	Cosmology, inflation, DBI Lagrangian, holography
UC	524.82 : 524.834
Holding data, HD :	library
Note, N :	/

Abstract, AB :	Theory of inflation is widely accepted as the best approach to the problems of the Early universe in the standard cosmology. The origin and nature of the physical field that determines the inflationary process are not well known. A popular class of inflatory models is based on the effective tachyon field theory determined by the Lagrangian of the DBI type. The potential role of tachyon fields in explaining the mechanism of inflation is based on the highly well developed string theory, M theory and brane theory, and on its close relation to the current development of quantum gravity. The focus in this PhD thesis is on holographic cosmology, Einstein's effective equations in the 4-dimensional holographic boundary, and AdS/CFT correspondence. Analytical and numerical calculation of the observable parameters and their comparison with observational data indicate the validity of the model.
Accepted by the Scientific Board on, ASB :	December 10, 2019.
Defended on, DE :	
Defended Board, DB :	
President:	
Member:	
Member, Mentor:	
Member, Mentor:	

ЗАХВАЛНИЦА

Захваљујем се менторима, проф. др Горану Борђевићу и проф. др Драгољубу Димитријевићу, на предлогу теме и великој помоћи током израде докторске тезе и докторских студија.

Захваљујем се доц. др Милану Милошевићу на корисним саветима и несебичној помоћи у раду током заједничког истраживања.

Захваљујем се др Предрагу Јовановићу, научном саветнику Астрономске опсерваторије у Београду, на корисним примедбама и сугестијама које су допринеле побољшању и коначном изгледу дисертације.

Овом приликом се захваљујем проф. др Невену Билићу, научном саветнику Института Руђер Бошковић у Загребу, на бројним идејама, предложеним правцима истраживања и целокупној сарадњи.

Захваљујем се професорима ПМФ-а у Нишу на уложеном напору и пренетом знању током студија.

Посебну захвалност дугујем својој породици на разумевању, одрицању и подршци која ми је несебично пружана.

“You know how sometimes you meet somebody and they’re really nice, so you invite them over to your house and keep talking with them and they keep telling you more and more cool stuff? But then at some point you’re like, maybe we should call it a day, but they just won’t like, and as more stuff comes up it becomes more and more disturbing and you’re like, just stop already? That’s kind of what happened with inflation.”

Max Tegmark
Physicist

Садржај

1	Увод	1
2	Елементи Стандардног космолошког модела	5
2.1	Метрика хомогеног и изотропног свемира	5
2.2	Ајнштајнове једначине	9
2.3	Тензор енергије-импулса	11
2.4	Фридманове једначине	12
2.5	Параметар стања и критична густина	13
2.6	Тамна материја и тамна енергија	15
2.7	Хаблов радијус и честични хоризонт	17
2.8	Енергетски биланс модела	18
2.9	Проблеми Стандардног космолошког модела	19
3	Инфлаторна космологија	21
3.1	Решење проблема хоризонта и равног свемира	22
3.2	Космолошка инфлација	22
3.3	Инфлација вођена канонским скаларним пољем	23
3.4	Апроксимација спорог котрљања	24
3.5	Параметри спорог котрљања и број е-фолдова	26
3.6	Хамилтон-Јакобијева формулација инфлације	28
3.7	Особине инфлаторног атрактора	29
3.8	Крај инфлације и поновно загревање	30
4	Теорија космолошких пертурбација	31
4.1	Основне поставке и идеје	31
4.2	Пертурбација метрике	32
4.3	Линеаризоване Ајнштајнове једначине	35
4.4	Пертурбације у моделу k -инфлације	37
4.4.1	Скаларне пертурбације	38
4.4.2	Тензорске пертурбације	41
4.5	Посматрачки параметри	42

5	Тахионска динамика у стандардној теорији инфлације	45
5.1	Тахиони	45
5.2	Тахиони у теорији струна и космологији	46
5.3	Инфлаторна динамика тахионског поља	46
5.3.1	Услови за инфлацију и параметри спорог котрљања	48
5.3.2	Скаларни спектрални индекс и количник тензора и скалара	51
5.4	Проблеми са тахионском инфлацијом	51
6	Космологија света на брани	53
6.1	Идеје о додатним димензијама	53
6.2	Рандал-Сундрум II модел	54
6.2.1	Модификовани RSII модел	57
6.3	Холографска дуалност	58
6.4	Холографска космологија	59
6.4.1	Фридманове једначине у холографској космологији	60
7	Модел тахионске инфлације у холографској космологији	63
7.1	Динамика тахионске инфлације у холографској космологији	63
7.1.1	Динамичке једначине	64
7.1.2	Експоненцијални потенцијал	65
7.1.3	Инверзни косинус хиперболички потенцијал	68
7.2	Инфлација на холографској брани	69
7.3	Инфлаторни атрактор	71
7.4	Пертурбације у холографском моделу инфлације	76
7.4.1	Скаларани спектрални индекс и количник тензора и скалара	79
7.4.2	Одступање пертурбација од Гаусове расподеле	81
8	Нумеричко израчунавање параметара инфлације у холографском моделу инфлације	83
8.1	Нумеричко решење динамичких једначина за експоненцијални потенцијал	83
8.2	Нумеричко израчунавање посматрачких параметара за експоненцијални потенцијал	84
8.3	Упоредна анализа посматрачких параметара холографског и “нехолографских” тахионских модела	88

9 Закључак	93
Додаци	
А Израчунавање спектра снаге скаларних пертурбација	95
Б Израчунавање посматрачких параметара	100
Литература	105
Индекс слика	116
Индекс табела	117
Биографија	118
Библиографија	119
Изјаве аутора	121

Глава 1

Увод

Широко је прихваћено да је космолошка инфлација неопходна допуна Стандардног космолошког модела [1]. Уведена је са жељом да се отклоне проблеми који се јављају у опису и разумевању (раног) свемира, међу којима се, као најупечатљивији, издвајају проблем хоризонта и проблем равног свемира [2]. Опис физичког процеса који води инфлацију се временом мењао, али је кључна идеја, која је у основи сваког модела инфлације, остала иста - обезбедити веома кратку, рану, фазу ($10^{-35} - 10^{-34}$ s) током које се свемир убрзано ширио и драстично увећао (око e^{60} пута) [3].

Предложен је велики број инфлаторних модела [4]. Они садрже различите физичке механизме. Њихова предвиђања су у великој мери у складу са критеријумима који се дефинишу на основу резултата астрофизичких мерења и посматрања, а не противурече Стандардном космолошком моделу. И даље није, недвосмислено, утврђено који је то физички механизам у основи инфлаторног процеса одговоран за процес експоненцијалног ширења раног свемира. Већина предложених модела базира се на постојању „инфлаторног“ скаларног поља - инфлатона, чија природа, генерално, није позната и чијом је еволуцијом одређена динамика инфлаторног процеса. Такође, четрдесетогодишње искуство у развоју космолошке инфлације сугерише да се потенцијал (стандардног канонског) инфлаторног поља споро мења, односно да има приближно константну вредност. Ваља нагласити да је велики број инфлаторних модела који се појавио током времена у литератури, понекад и понегде, изазвао скепсу према теорији инфлације и да се могло приговорити да скоро сваки од њих може бити „тачан“. Међутим, драстично побољшање посматрачких техника, посебно последњих деценија, а пре свега Планк (*Planck*) мисија, довела је до драстичног смањења броја и класа модела, као и спектра прихватљивих вредности кључних параметара модела, који су у складу са прикупљеним подацима [5, 6].

Развој физике честица и теорије струна омогућио је да се идеје и резултати тих теорија примењују у контексту космологије. То је подстакло развој нових инфлаторних модела у чијој су основи савремене идеје и достигнућа из области фундаменталне физике. Важна карактеристика већине „нових“ модела је разлика у изведеним Фридмановим једначинама у односу на оне из стандардне космологије [7]. Један од првих модела у коме је инфлација одређена динамиком брана био је Рандал-Сундрум II модел. У овом моделу Фридманове једначине су модификоване услед постојања додатне димензије просторног типа [8, 9].

Важно је напоменути да постоји популарна класа инфлаторних модела базирана на динамици тахионског поља. Ова класа модела такође је мотивисана теоријом струна и брана [10, 11]. Динамика тахионских модела је најчешће одређена лагранжијаном нестандардног облика, из класе Дирак-Борн-Инфелд (*Dirac-Born-Infeld*, DBI) лагранжијана [12]. Показало се да предвиђања и резултати модела са тахионским пољем имају одређени пресек са предикцијама модела са канонским скаларним пољем. Степен слагања зависи од избора тахионског потенцијала [13].

На избор теме докторске дисертације утицала је и „историја“ истраживања групе теоријских физичара из Ниша. Деведесетих година прошлог века активно се истраживала динамика физичких система на малим растојањима (неархимедова, p -адична геометрија) у оквиру квантне теорије [14] и квантне космологије [15].

Након иницијалних радова А. Сена¹ [16] о улози тахионске „материје“ у теорији струна и космологији и идеје С. Кара² [17] о механичким аналогонима динамике тахионских поља, истраживања су настављена у неколико параваца. Навешћемо два: тахионска инфлација [18, 19] и квантна динамика „тахионских честица“, базирана на локално еквивалентним лагранжијанима, „изворним“ DBI лагранжијанима, на Архимедовим и неархимедовим просторима [20–22]. Истраживања тахионске динамике, са индицијама примене у космологији, сумирана су у докторској дисертацији [23] и радовима [24, 25].

Након великог ентузијазма, да су тахиони и њихове а priori нестабилне структуре изванредна основа за „природни“ инфлаторни процес, убрзо се показало [26, 27] да „стандардна тахионска инфлација“ пати од, барем, два основна проблема: (недовољно дуго) трајање тахионске инфлације и „рихитинг“.

Задржавање тахионске динамике, али у другом, „суптилнијем“, физичком контексту, као што је Рандал-Сундрум II модел, оживело је интересовање за

¹ енг. *Ashoke Sen*.

² енг. *Sayan Kar*.

тахсионску динамику. У том контексту значајни су радови [28–30], као и докторска дисертација [31]. Следећи природни корак, који се делом чини овом дисертацијом, је разматрање холографског приступа у Рандал-Сундрум II моделу и AdS_5 простору.

Предмет ове докторске дисертације је, дакле, анализа инфлаторног Рандал-Сундрум II модела са браном која је локализована у близини границе AdS_5 простора. Материја на брани је описана тахионским лагранжијаном. Због уочене холографске структуре [32] погодно је анализирати разматрани модел користећи AdS/CFT кореспонденцију (холографску дуалност) [33]. Због тога, разматрани модел можемо сврстати у класу инфлаторних модела у холографској космологији [34]. Услед модификације Фридманових једначина [35], у односу на стандардну космологију, које следе из ефективних Ајнштајнових једначина на холографској граници, природно је очекивати да ће инфлација у овом моделу имати модификовани карактер и особине. Основни елементи дисертације су: анализа инфлаторне динамике на основу динамичких једначина добијених у оквиру Хамилтоновог формализма, налажење аналитичких решења у апроксимацији спорог котрљања, као и анализа решења у односу на критеријуме који одређују инфлаторни атрактор. Изложен је поступак добијања аналитичких израза за кључне посматрачке параметре (скаларни спектрални индекс и тзв. количник тензора и скалара). Налажење њихових бројних вредности омогућава упоређивање са резултатима посматрања. При томе је проширен домен примене теорије пертурбација у односу на до сада познате приступе за моделе из стандардне космологије.

Излагање у дисертацији је организовано на следећи начин. Након увода, у другој глави, су приказани основни елементи стандардне (неинфлаторне) космологије.

У трећој глави дате су основе инфлаторне теорије, пре свега за моделе са канонским скаларним пољем.

У наставку, у четвртој глави, уведене су космолошке пертурбације у стандардној космологији, са акцентом на модел тзв. k -инфлације [36]. Такође, уведени су и посматрачки параметри.

У петој глави се анализира динамика тахионског поља у стандардној космологији.

Тема шесте главе је „космологија света на брани“. Дате су основне поставке холографског модела у оквиру кога се проучава инфлација. Изведене су холографске Фридманове једначине као основа за централни модел ове дисертације.

Најважнији оригинални резултати су приказани претежно у седмој глави. Приказана су израчунавања посматрачких параметара и дискутовани су у светлу посматрачких резултата.

У осмој глави, приказани су резултати нумеричких израчунавања параметара инфлације у холографском моделу.

У закључку су сумирани најважнији резултати, и предложени правци даљих истраживања.

Како би се избегло оптерећивање основног текста техничким детаљима, у Додатку су дати детаљи израчунавања спектра снаге скаларних пертурбација и посматрачких параметара, чиме се заокружује садржај дисертације.

Глава 2

Елементи Стандардног КОСМОЛОШКОГ МОДЕЛА

Модерна космологија се базира на Општој теорији релативности (ОТР), која је обезбедила и математички апарат неопходан да се потпуније дефинишу и примене класичне физичке законитости које владају у свемиру. У овој глави дајемо појмове и дефиниције из Стандардног космолошког модела, релевантне за даља разматрања. Детаљи се могу наћи у богатој литератури из области космологије [1, 3, 37, 38].

2.1 Метрика хомогеног и изотропног свемира

На основу ОТР је показано да постоји суштинска веза између геометрије простор-времена и материје у простору, односно еквиваленција између постојања, дистрибуције и динамике материје-енергије и закривљености простор-времена. За разлику од Њутнове теорије гравитације, која за опис гравитационих ефеката уводи гравитационо поље, у ОТР је гравитација „кодирана“ у геометрију простор-времена. Иако се до појединих резултата у космологији (раван свемир) може доћи само на основу Њутнове теорије гравитације [39], ОТР пружа знатно потпунији и прецизнији приступ, на нивоу садашњег развоја физике.

Геометрија простор-времена је описана уколико је позната метрика, односно функција ds^2 , која дефинише квадрат растојања између две тачке у простору на инфинитезималном растојању. Општа форма метрике за n димензиони простор

у коме су дефинисане координате $x^\mu = (x^1, \dots, x^n)$ има облик [40]

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu=0}^n g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.1)$$

где се величине $g_{\mu\nu}(x^\mu)$ називају метричким функцијама, које су у општем случају функције просторно-временских координата. Метрика облика (2.1), квадратна по диференцијалима координата, дефинише Риманов тип геометрије. Код овог типа метрике метричке функције су симетричне у односу на измену редоследа координата ($g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$). Такође, инваријантност метрике на координатне трансформације одређује симетрију која дефинише особине простора и обрнуто.

Према Космолошком принципу [1] свемир је на великим растојањима (скалама) хомоген и изотропан, што значи да не постоји привилегован положај нити привилегован правац у свемиру. Поменути приступ је обезбедио основу за конструкцију првих космолошких модела, у време када његова структура није била довољно позната. Космолошки принцип је уведен више интуитивно него што је био заснован на прецизним резултатима посматрања [37]. Данас се на основу астрофизичких мерења и посматрања зна да је на „мањим“ растојањима материја у свемиру груписана у форми галаксија, њихових јата и суперјата, те да је на растојањима која су мања, или упоредива са димензијама поменутих формација, свемир веома нехомоген и неизотропан. Међутим, на растојањима димензија галактичких суперјата и већим материја је распоређена хомогено и изотропно. Космолошки принцип применљив је на скали већој од 100 Мрс¹ [41]. Астрофизичка посматрања су показала да се свемир шири [42], односно, да се на великим скалама растојање између удаљених објеката у свемиру временом увећава. У складу са наведеним особинама свемира, одговарајућа метрика 3+1 димензионог простор-времена се може записати у Фридман-Леметр-Робертсон-Вокер (*Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker*, FLRW) форми [2]

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dt^2 - a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right), \quad \mu, \nu = \overline{0, 3}, \quad (2.2)$$

где је $d\Omega^2 = d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2$ диференцијал просторног угла, $x^0 = t$ временска², а $x^i = \{x^1, x^2, x^3\} = \{r, \vartheta, \varphi\}$ су просторне координате. Ова временски зависна форма метрике, хомогеног и изотропног простора, у зависности од вредности константе

¹ Мегапарсек, 1 Мрс $\simeq 3,26 \cdot 10^6$ светлосних година.

² Ако другачије није наглашено, у раду су величине изражене у природном систему јединица ($c = \hbar = 1$).

k дефинише три различита типа геометрије: раван (Еуклидски) простор ($k = 0$), простор са позитивном кривином ($k = 1$) и простор са негативном кривином ($k = -1$). Просторне координате x^i су координате тачака у покретном (*comoving*) координатном систему. Физичке координате x_p^i су дефинисане преко производа $x_p^i = a(t)x^i$, где је $a(t)$ функција времена, која носи назив (космолошки) фактор скале. У свемиру који се шири фактор скале је растућа функција времена.

Физичко растојања r_p између два објекта (галаксије) у нпр. равном свемиру, дуж радијалног правца ($\vartheta = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$), износи

$$r_p(t) = a(t)r. \quad (2.3)$$

Диференцирањем (2.3) по времену³ добија се израз за релативну брзину \dot{r}_p

$$\dot{r}_p = H(t)r_p, \quad (2.4)$$

где је фактор пропорционалности између релативне брзине објеката \dot{r}_p и њиховог растојања r_p у тренутку t

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a}. \quad (2.5)$$

Из израза (2.4) се може закључити да удаљенији објекти имају већу релативну брзину. Исти закључак је добијен на основу астрономских посматрања Е. Хабла⁴ 1929. године. Израз (2.4) носи назив Хаблов закон⁵, а величина $H(t)$ Хаблов параметар. Инверзна вредност Хабловог параметра H^{-1} , као и производ брзине светлости и H^{-1} се могу узети као карактеристичне вредности за изражавање времена (Хаблово време, t_H) и дужине (Хаблов радијус, H^{-1}). Тренутна вредност Хабловог параметра $H_0 \equiv H(t_0)$ носи назив Хаблова константа. Уобичајно је да се вредност Хаблове константе изражава преко бездимензионог параметра h

$$H_0 = 100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}, \quad (2.6)$$

за чију се тренутну вредност најчешће узима $h = 0,677$ [44]. То значи да се, у принципу, сви објекти у свемиру удаљени од нас 100 Мрс удаљавају брзином од 6770 km s^{-1} . Далеки објекти се удаљавају зато што се свемир шири (простор између објеката постаје већи), мада постоји и (сопствено) кретање на

³ Тачка изнад величине представља извод по времену t .

⁴ енг. *Edwin Hubble*.

⁵Званичан назив, од 2018. године, за израз (2.4) је Хабл-Леметров закон [43].

локалном нивоу, пре свега услед гравитационог деловања. Код блиских галаксија (удаљених неколико Мрс или неколико десетина Мрс) брзина локалног кретања $v_p \lesssim \pm 500 \text{ km s}^{-1}$ (*peculiar velocity*) је већа или упоредива са брзином којом би се галаксије удаљавале услед ширења свемира, тако да се ефекат ширења свемира не уочава [45].

Инваријантност метрике (2.2) у односу на истовремена скалирања

$$a \rightarrow \lambda a, \quad r \rightarrow r/\lambda, \quad k \rightarrow \lambda^2 k, \quad (2.7)$$

произвољном константом λ , омогућава да се редефинише фактор скале a и уведе као бездимензиона величина, за чију је вредност у садашњем тренутку t_0 , за случај равнoг свемира, погоднo одабрати $a_0 \equiv a(t_0) = 1$.

Координатном трансформацијом се метрика (2.2) може преписати у облик

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)d\Omega_k^2, \quad (2.8)$$

где је

$$d\Omega_k^2 = d\chi^2 + \frac{\sin^2(\sqrt{k}\chi)}{k}(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2). \quad (2.9)$$

Ако се уведе тзв. конформно време

$$\tau = \int \frac{dt}{a(t)}, \quad (2.10)$$

израз за метрику се трансформише у

$$ds^2 = a^2(\tau) \left(d\tau^2 - d\chi^2 - \frac{\sin^2(\sqrt{k}\chi)}{k}(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) \right). \quad (2.11)$$

Овакав облик метрике је погодан за разматрање узрочно-последичних догађаја (каузалне структуре простор-времена). Трајекторије које одговарају кретању фотона ($ds^2 = 0$) дуж радијалног правца су облика

$$\chi = \pm\tau + \text{const}. \quad (2.12)$$

У (τ, r) равни трајекторије (фотона) су праве линије које се секу под углом од $\pm 45^\circ$. Трајекторије које се секу у једној тачки формирају светлосни конус, а тачке на графику су просторно-временске координате догађаја. Тачке које су у

унутрашњости конуса су координате каузално повезаних догађаја, док се тачке ван конуса односе на догађаје између којих не постоји каузална веза [2].

2.2 Ајнштајнове једначине

Непосредно након објављивања ОТР 1915. године А. Ајнштајн⁶ је настојао да нову теорију примени на свемир као целину, уз предубеђење да је свемир (без материје) статичан⁷. Убрзо је (1917. године) В. де Ситер⁸ разматрао модел свемира који се експоненцијално шири (данас бисмо рекли на рачун енергије вакуума). Тек 1922. године А. Фридман⁹ је поставио реалистичан модел који описује динамички свемир и који је и данас у великој мери у складу са посматрачким подацима.

Ајнштајнове једначине представљају једначине гравитационог поља у ОТР. Једначине одређују везу између величина које се дефинишу на основу просторно-временских функција и величина које описују особине, расподелу и гравитациону интеракцију материје у свемиру. На основу решења једначина може се одредити еволуција фактора скале, као кључне величине која описује динамику хомогеног и изотропног свемира. Ајнштајнове једначине се (најчешће) записују у тензорском облику, користећи тзв. компоненте Ајнштајновог тензора G_ν^μ и компоненте тензора енергије-импулса T_ν^μ [40, 46]

$$G_\nu^\mu = 8\pi G_N T_\nu^\mu, \quad (2.13)$$

где је G_N Њутнова гравитациона константа. Компоненте Ајнштајновог тензора

$$G_\nu^\mu \equiv R_\nu^\mu - \frac{1}{2}\delta_\nu^\mu R, \quad (2.14)$$

дефинишу се преко компоненти Ричијевог тензора R_ν^μ

$$R_\nu^\mu = g^{\mu\rho}(\Gamma_{\rho\nu,\lambda}^\lambda - \Gamma_{\rho\lambda,\nu}^\lambda + \Gamma_{\rho\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\sigma}^\sigma - \Gamma_{\rho\sigma}^\lambda \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma), \quad (2.15)$$

где зарез означава парцијални извод по одговарајућој координати, δ_ν^μ је Кронекеров симбол и $g^{\mu\rho}$ су компоненте инверзног метричког тензора ($\delta_\nu^\mu = g^{\mu\rho}g_{\rho\nu}$).

⁶ енг. *Albert Einstein*.

⁷ У то време експерименталних доказа у супротно (свемир који се шири) није било.

⁸ енг. *Willem de Sitter*.

⁹ енг. *Alexander Friedmann*.

Контракцијом Ричијевог тензора добија се Ричијев скалар кривине R

$$R \equiv R^\mu_\mu. \quad (2.16)$$

Величине $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$ су Кристофелови симболи друге врсте, дефинисани преко метричких функција, односно компонената $g_{\mu\nu}$ метричког тензора

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\sigma\lambda}(g_{\nu\lambda,\mu} + g_{\lambda\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\lambda}). \quad (2.17)$$

Може се показати да је коваријантни извод компоненти Ајнштајновог тензора једанак нули

$$\nabla_\mu G^\mu_\nu \equiv G^\mu_{\nu;\mu} = 0. \quad (2.18)$$

Уобичајно је да се каже да су све поменуте величине, које фигуришу на левој страни једначине (2.13), одређене геометријом простора. За случај FLRW метрике компоненте Ајнштајновог тензора су

$$G^0_0 = 3 \left(H^2 + \frac{k}{a^2} \right), \quad (2.19)$$

$$G^0_i = 0, \quad (2.20)$$

$$G^i_j = \left(2\frac{\ddot{a}}{a} + H^2 + \frac{k}{a^2} \right) \delta^i_j. \quad (2.21)$$

Ајнштајнове једначине се могу добити варијацијом дејства [47, 48]

$$S = S_{\text{EH}} + S_{\text{matt}}, \quad (2.22)$$

где је S_{EH} Ајнштајн-Хилбертово (*Einstein-Hilbert*) дејство

$$S_{\text{EH}} = -\frac{1}{16\pi G_{\text{N}}} \int d^4x \sqrt{-g} R, \quad (2.23)$$

а S_{matt} дејство за материју

$$S_{\text{matt}} = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{matt}}, \quad (2.24)$$

задато преко (густине) лагранжијана за материју $\mathcal{L}_{\text{matt}}$ и где је g детерминанта метричког тензора, $g = \det(g_{\mu\nu})$. Ако је познат лагранжијан материје, онда се

може увести тензор енергије-импулса, чије се компоненте добијају из (дефиниционог) израза

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_{\text{matt}})}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (2.25)$$

На тај начин (2.13) постаје систем (у општем случају парцијалних) диференцијалних једначина, чија решења описују динамику свемира и материје у њему.

2.3 Тензор енергије-импулса

Као што смо видели, на десној страни Ајнштајнових једначина фигуришу компоненте тензора енергије-импулса $T_{\mu\nu}$ које су повезане са особинама и расподелом материје. У случају FLRW метрике тензор енергије-импулса је дијагоналан и (због особине изотропности) има исте просторне компоненте. Облик Ајнштајновог тензора ($G_{ij} \propto g_{ij}$) намеће ограничење $T_{ij} \propto g_{ij}$. У случају хомогеног простора коефицијенти пропорционалности су функције времена и не зависе од просторних координата, тако да се ненулте компоненте тензора могу записати у облику

$$T_0^0 = \rho(t), \quad T_j^i = -p(t)\delta_j^i, \quad (2.26)$$

где су $\rho(t)$ и $p(t)$ густина и притисак флуида материје, респективно. Компоненте тензора енергије-импулса за идеалан флуид су облика

$$T_\nu^\mu = (\rho + p)u^\mu u_\nu - p\delta_\nu^\mu, \quad (2.27)$$

где су $u^\mu \equiv dx^\mu/d\tau$ компоненте четворо-вектора брзине флуида у покретном координантом систему, са особином $u^\mu u_\mu = 1$. Особине тензора енергије-импулса одређене су и симетријама које важе за Ајнштајнов тензор. Без обзира на конкретан облик тензора енергије-импулса, на основу израза (2.18) долазимо до израза

$$T_{\nu;\mu}^\mu = 0. \quad (2.28)$$

За $\nu = i$ израз је индентитет [41], а за $\nu = 0$ добија се једначина која описује временску промену густине материје (флуида) у свемиру

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0, \quad (2.29)$$

која се, у складу са терминологијом у динамици флуида, назива једначином континуитета и представља закон одржања енергије.

2.4 Фридманове једначине

Симетричност метричког тензора има као последицу да се 16 Ајнштајнових једначина (2.13) своди на систем од 10 парцијалних диференцијалних једначина другог реда. Постојање додатних симетрија смањује број независних диференцијалних једначина. Тако, у случају FLRW метрике тај број износи два.

Из једначине (2.13), за $\mu = 0$ и $\nu = 0$, следи прва Фридманова једначина

$$H^2 = \frac{8\pi G_N}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \quad (2.30)$$

а за $\mu = i$ и $\nu = i$ следи једначина у којој фигурише други извод фактора скале по времену

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + H^2 = -8\pi G_N p. \quad (2.31)$$

Из претходне две једначине може се елиминисати експлицитна зависност од Хабловог параметра. Тако се долази до друге Фридманове једначине¹⁰

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G_N}{3}(\rho + 3p). \quad (2.32)$$

Из једначине (2.32) се, уз коришћење израза

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2, \quad (2.33)$$

може одредити промена Хабловог параметра у времену у функцији притиска и густине

$$\dot{H} = -4\pi G_N(\rho + p). \quad (2.34)$$

Решење Фридманових једначина одређује еволуцију фактора скале. За све познате типове материје важи услов (*strong energy condition*)

$$\rho + 3p \geq 0, \quad (2.35)$$

тако да за свемир који се шири важи $\ddot{a} < 0$, односно, ширење мора бити успорено. Може се показати да, под наведеним условом, постоји тренутак у прошлости $t_{\text{ВВ}} = 0$, који се назива Велики прасак (*Big Bang*, ВВ), у коме је фактор скале био $a(t_{\text{ВВ}}) = 0$ и у коме је густина материје (енергије) имала веома велику бесконачну

¹⁰ У литератури се уместо назива друга Фридманова једначина често користи и назив „једначина за убрзање“.

вредност. Сингуларитет у $t_{\text{ВВ}} = 0$ је један од кључних проблема у Стандардном космолошком моделу.

2.5 Параметар стања и критична густина

Динамика хомогеног и изотропног свемира описује се системом једначина који чине Фридманове једначине и једначина континуитета. Иначе, једначина континуитета (2.29) није независна од преосталих једначина и може се добити у Фридмановим космолошким моделима комбиновањем прве и друге Фридманове једначине. Систем једначина није потпун јер је број линеарно независних једначина мањи од броја непознатих величина. Да би се систем решио потребно је познавати особине флуида материје, односно везу између густине и притиска, која се дефинише једначином стања $p = p(\rho)$. Код баротропних флуида постоји линеарна веза између притиска и густине

$$p(\rho) = \omega\rho, \quad (2.36)$$

где је параметар стања ω величина која може имати константну вредност. Вредност параметра стања одређена је типом материје.

Погодно је све динамичке величине приказати као функције у којима фигурише параметар стања, како би се лакше анализирао решења динамичких једначина. Користећи параметар стања, једначина континуитета (2.29) се може преписати у облику диференцијалне једначине

$$\frac{d \ln \rho}{d \ln a} = -3(1 + \omega), \quad (2.37)$$

чијом интеграцијом се добија израз за промену густине у функцији фактора скале

$$\rho \propto a^{-3(1+\omega)}. \quad (2.38)$$

Еволуција Хабловог параметра у равном свемиру се може одредити на основу прве Фридманове једначине. Добија се израз

$$H \propto a^{-\frac{3}{2}(1+\omega)}. \quad (2.39)$$

Иначе, параметар стања има различите вредности код различитих типова материје. Нерелативистичка (или барионска) материја се описује идеалним флуидом код кога услед одсуства интеракције не постоји притисак, што има за последицу

$\omega = 0$. Релативистичка материја (или зрачење) се састоји од честица које се крећу релативистичким брзинама. Параметар стања у овом случају може се одредити на основу особине да је траг тензора енергије-импулса релативистичке материје једнак нули¹¹ [41], тако да је $p = 1/3\rho$ и $\omega = 1/3$. За оба типа материје важи услов $\omega > -1/3$, у складу са (2.35). Уобичајно је да се нерелативистичка материја назива само материјом, а релативистичка материја зрачењем. Природно, густина материје се смањује уколико се запремина свемира, услед ширења, повећава. Густина енергије зрачења ($\rho \propto a^{-4}$) опада брже од густине енергије барионске материје ($\rho \propto a^{-3}$). Одавде следи: уколико је у раној фази развоја свемира зрачење имало доминанту улогу, онда ће допринос материје постати доминантан након тренутка када ће се густина материје и зрачења изједначити.

Динамика фактора скале дата је изразом

$$a(t) \propto t^{\frac{2}{3(1+\omega)}}, \quad (2.40)$$

који се добија на основу (2.39), а на основу кога се може одредити временска еволуција Хабловог параметра

$$H(t) = \frac{2}{3(1+\omega)t}. \quad (2.41)$$

Критична густина представља вредност¹² густине материје (енергије) равног свемира ($k = 0$). На основу прве Фридманове једначине критична густина ρ_{crit} је

$$\rho_{\text{crit}} \equiv \frac{3H^2}{8\pi G_{\text{N}}}. \quad (2.42)$$

Уколико се у разматрање узме више различитих типова материје истовремено, под претпоставком да оне међусобно не интерагују, укупан притисак и густина се могу приказати као збир притисака p_ω и густина ρ_ω за сваки тип материје

$$\rho = \sum_{\omega} \rho_{\omega}, \quad p = \sum_{\omega} p_{\omega}. \quad (2.43)$$

¹¹ Исту особину има Максвелов тензор у електродинамици.

¹² Тренутна вредност критичне густине, у функцији бездимензионог параметра h , износи $\rho_{\text{crit}0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G_{\text{N}}} = 1,87h^2 \cdot 10^{-29} \text{ g cm}^{-3}$ [41].

У динамичким једначинама ће фигурирати укупне вредности, у складу са уведеним ознакама. За сваку компоненту материје може се увести параметар густине

$$\Omega_\omega \equiv \frac{\rho_\omega}{\rho_{\text{crit}}}, \quad (2.44)$$

и прва Фридманова једначина се може записати у облику

$$1 - \Omega = -\frac{k}{a^2 H^2}, \quad (2.45)$$

где је

$$\Omega = \sum_\omega \Omega_\omega. \quad (2.46)$$

Формално, члан на десној страни израза (2.45) је параметар густине који је у вези са кривином простора $\Omega_k = -k/(aH)^2$, тако да се претходна једначина може записати у облику

$$\Omega + \Omega_k = 1. \quad (2.47)$$

Ако параметар стања има вредност $\Omega \simeq 1$, онда је свемир раван.

2.6 Тамна материја и тамна енергија

Анализом сјаја и спектра експлозија супернових типа Ia дошло се до закључка да се свемир последњих неколико милијарди година шири убрзано [49]. Да би се објаснило убрзано ширење свемира претпоставило се да постоји неко додатно „необично“ својство свемира, односно да постоји глобално „антигравитационо“ деловање. Опште прихваћен назив за такво деловање, односно тип материје, је тамна енергија (*Dark Energy*, DE).

Најједноставнији начин да се математички опише убрзано ширење свемира је додавање додатног члана у Ајнштајнове једначине, који је пропорционалан величини која носи назив космолошка константа¹³ Λ

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G_N T_{\mu\nu}. \quad (2.48)$$

Иако наведена модификација не следи директно из ОТР, она је дозвољена и оправдана у смислу да метричке функције такође задовољавају једнакост $g^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0$, као што то важи за компоненте $G_{\mu\nu}$ и $T_{\mu\nu}$, изрази (2.18) и (2.28). Модификација

¹³Прво увођење Λ члана потиче од Ајнштајна, додуше у другом контексту.

у Ајнштајновим једначинама доводи до додатног члана у Фридмановим једначинама [41]

$$H^2 = \frac{8\pi G_N}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2}, \quad (2.49)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G_N}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (2.50)$$

Поредећи Фридманове једначине (2.49) и (2.50) са изразима (2.30) и (2.32), без космолошке константе, уочавамо да се допринос космолошке константе динамици свемира (фактора скале) може повезати са постојањем додатне компоненте материје, густине ρ_Λ и притиска p_Λ

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G_N}, \quad p_\Lambda = -\rho. \quad (2.51)$$

Како је густина материје по дефиницији величина која може имати само позитивне вредности, следи да је притисак који одговара космолошкој константи негативан. На основу једначине континуитета долази се до закључка да густина и притисак имају константне вредности. Хаблов параметар, за случај равног свемира и материје искључиво у форми космолошке константе (вредност параметра стања $\omega = -1$), има такође константну вредност

$$H_\Lambda = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}. \quad (2.52)$$

Ако у свемиру постоје истовремено и материја и зрачење, њихови доприноси динамици су кључни само у раној фази, јер се њихова густина смањује. Стога се за Хаблов параметар у веома раном свемиру, као и у веома далекој будућности, може узети вредност H_Λ . Космолошки модел у коме је простор раван и који не садржи обичну материју већ само тамну енергију, представљену космолошким константом Λ , носи назив „де Ситеров“ свемир (*de Sitter universe*).

Постоји неколико начина да се одреди количина материје у свемиру: на основу зрачења које емитује материја (ако је позната веза између масе и луминозности), на основу гравитационих ефеката који потичу од распореда материје у свемиру, итд. Мерењем ротационих брзина код спиралних галаксија уочено је да постоји знатно одступање измерених вредности од теоријски предвиђених [50]. Резултати мерења указују на то да мора постојати још неки тип материје, различит од барионске који се директно опсервира посматрањима. Тај додатни тип материје, која није барионске природе, носи назив тамна материја (*Dark*

Matter, DM). Алтернативни приступ овом питању је модификована гравитација [51, 52], али се тиме нећемо бавити у овој дисертацији.

2.7 Хаблов радијус и честични хоризонт

На основу Хабловог закона, брзина којом се далеки објекат у свемиру удаљава од посматрача повећава се линеарно са растојањем, пропорционално Хабловом параметру. То значи да ће на растојању већем од H^{-1} брзина удаљавања објекта бити већа од брзине светлости. Инверзна вредност Хабловог параметра дефинише карактеристично растојање које носи назив Хаблов радијус, и представља полупречник опсервабилног свемира, који износи око 28,5 Гpc [53]. Према томе, области у свемиру које су од посматрача на већем растојању од Хабловог радијуса тренутно нису и неће ни у будућности бити у каузалној вези, јер фотони не могу да пренесу информацију између области које се једна у односу на другу крећу релативном брзином већом од брзине светлости. На тај начин Хаблов радијус има смисао хоризонта¹⁴.

Хоризонт се може дефинисати и на основу максималног растојања које пређу фотони. Фотон од тренутка емитовања t_i до тренутка детектовања t пређе координатно растојање које је једнако $\chi_p(\tau) = \tau - \tau_i$. Одговарајуће физичко растојање износи

$$d_p(t) = a(t)\chi_p = a(t) \int_{t_i}^t \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.53)$$

Ако d_p има коначну вредност, онда то растојање дефинише полупречник сфере која одређује границу између области која се може опсервирати и области из које светлосни сигнали нису стигли до посматрача, до тренутка t . Такође, услови који владају на већем растојању од d_p у тренутку t не утичу на његову еволуцију у будућности. Растојање d_p носи назив честични хоризонт (*particle horizon*). Ако у свемиру доминира материја која је описана параметром стања $\omega > -1/3$, еволуција фактора скале, одређена једначином (2.53), има облик степене функције $a \propto t^n$ ($n = \text{const}$) и решење интеграла у изразу (2.53) има коначну вредност [54]. Честични хоризонт је у том случају [41]

$$d_p(t) = \frac{2}{1 + 3\omega} H^{-1}, \quad (2.54)$$

¹⁴ Термин хоризонт преузет је из теорије црних рупа, и у космологији означава границу области где каузаност престаје да важи.

и током времена се линеарно увећава ($d_p \propto t$), што је условљено променом Хабловог радијуса ($H^{-1} \propto t$). Иако је у овом случају честични хоризонт до на нумерички фактор једнак Хабловом радијусу, између уведених величина постоји концептуална разлика. Области које су на већем растојању од d_p никада нису биле у каузалном контакту, јер није било довољно времена да дође до размене, рецимо, фотона. Уколико је растојање веће од H^{-1} области (сада) нису у каузалном контакту. То значи, да уколико је $d_p > H^{-1}$ честице данас не могу да интерагују (размеђују фотоне), али су у прошлости биле у контакту.

2.8 Енергетски биланс модела

Стандардни модел у космологији, како га данас третирамо, укључује нерелативистичку материју и зрачење, као добро описане и проучене компоненте материје, а подразумева и постојање тамне енергије (космолошке константе Λ) и нерелативистичке тамне материје (*Cold Dark Matter*, CDM), чија природа и даље није довољно позната. У литератури се (овај) модел среће под називом Λ CDM модел. Прва Фридманова једначина која урачунава допринос свих компоненти материје у моделу има облик [44]

$$\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = \sum_{\omega} \Omega_{\omega} a^{-3(1+\omega)} + \Omega_k a^{-2}. \quad (2.55)$$

На основу процена изведених из астрофизичких посматрања и мерења, у садашњој епохи највећу заступљеност има тамна енергија у форми космолошке константе [5]

$$\Omega_{\Lambda} = 0,6911 \pm 0,0062, \quad (2.56)$$

док преостали део у највећој мери чине тамна и барионска¹⁵ материја

$$\Omega_{\text{CDM}0} h^2 = 0,1188 \pm 0,0010, \quad \Omega_{\text{b}0} h^2 = 0,02230 \pm 0,00014. \quad (2.57)$$

Што се тиче релативистичке материје, пре свега фотона и неутрина, њихов удео је јако мали

$$\Omega_{\gamma 0} h^2 \approx 2,47 \cdot 10^{-5}, \quad \Omega_{\nu 0} h^2 \approx 1,68 \cdot 10^{-5}. \quad (2.58)$$

¹⁵ Када се говори о нерелативистичкој материји обично се мисли на материју барионског типа, зато што је маса већине барионских честица знатно већа од масе већине лептона.

Вредност актуелног параметра густине који одговара кривини простора је $\Omega_{k0} = 0,0008$ и указује на то да је свемир, у садашњој епохи¹⁶ раван.

2.9 Проблеми Стандардног космолошког модела

И поред тога што Стандардни космолошки модел добро описује физику свемира и даје предвиђања која су емпиријски потврђена, постоје чињенице за које модел не даје адекватна или потпуна објашњења. Оне су означене као „проблеми у Стандардном космолошком моделу“. У овом одељку указујемо на два (од петнаестак) проблема који се срећу у раној епохи свемира: проблем равног свемира и проблем хоризонта.

Проблем равног свемира везује се за динамику параметра густине, која је одређена једначином (2.45)

$$\Omega - 1 = \frac{k}{(aH)^2}. \quad (2.59)$$

Да би се анализирао проблем погодно је дефинисати Хаблов радијус у покретном координатном систему (*comoving Hubble radius*) $(aH)^{-1}$ и изразити честични хоризонт у покретном координатном систему $\tau(t)$ у функцији од $(aH)^{-1}$ [2]

$$\tau(t) = \int_0^a \frac{da}{a} (aH)^{-1}. \quad (2.60)$$

Промене Хабловог радијуса и честичног хоризонта условљене су променом фактора скале [2]

$$\tau \propto (aH)^{-1} \propto a^{\frac{1}{2}(1+3\omega)}. \quad (2.61)$$

Астрофизичка мерења су показала да је свемир раван, односно да је тренутна вредност параметра густине $\Omega_0 \approx 1$. Координатни Хаблов радијус се увећава током времена, у складу са једначинама (2.40) и (2.61), што значи да је вредност параметра густине у раним епохама свемира била екстремно близу јединице, а за то не постоји физичко оправдање у оквиру Стандардног космолошког модела.

За талас таласне дужине $\lambda_p = a\lambda$ каже се да је унутар Хабловог радијуса уколико је $\lambda_p < H^{-1}$ [55]. Таласна дужина се у складу са променом фактора скале увећава по закону $\lambda_p \propto t^n$ ($n < 1$). Како Хаблов радијус линеарано расте $H^{-1} \propto t$ количник $\lambda_p/H^{-1} \propto t^{n-1}$ опада са временом, што значи да талас остаје унутар Хабловог радијуса [56], али је у прошлости био изван њега. Како Хаблов

¹⁶Видећемо касније да је од периода инфлације свемир раван.

радијус одређује величину каузалне области закључак је да у раном свемиру постоји велики број каузално неповезаних области.

Зрачење у виду фотона које се данас детектује у свемиру, космичко микроталасно позадинско зрачење (*Cosmic Microwave Background*, СМВ), настало је у тренутку када се свемир услед ширења довољно охладио ($T \propto a^{-1}$), а енергија фотона смањила и тиме омогућило формирање стабилних стања првих атома водоника. Од тренутка када су се фотони декупловали од материје они слободно пропагирају. На основу њих се могу проучавати услови који су владали у раном свемиру. Спектар СМВ зрачења данас одговара спектру апсолутно црног тела на температури $T_{\text{СМВ}} = 2,728 \text{ K}$ [57], што имплицира да је постојало стање термодинамичке равнотеже у тренутку декупловања (одвајање фотонског гаса од остатка материје). Зрачење одликује висок степен хомогености и изотропности који се огледа у малим варијацијама у температури у различитим правцима у којима се детектује зрачење ($\delta T/T \sim 10^{-5}$). То такође значи да је свемир у овој фази био хомоген и изотропан. Наведене чињенице указују на то да су фотони зрачења у прошлости били у каузалној вези, што је у контрадикцији са чињеницом да су фотони у тренутку декупловања били изван честичног хоризонта [2].

Полупречник опсервабилног свемира l_i је у прошлости, у тренутку времена t_i , био је a_i/a_0 пута мањи

$$l_i \sim t_0 \frac{a_i}{a_0}. \quad (2.62)$$

Величина каузалног свемира у том тренутку била је $l_c \sim t_i$, а број каузално неповезаних области

$$\frac{l_i}{l_c} \sim \frac{t_0}{t_i} \frac{a_i}{a_0}. \quad (2.63)$$

Примера ради, у тренутку када је старост свемира реда Планковог времена ($t_{\text{Pl}} \sim 10^{-44} \text{ s}$, $T_{\text{Pl}} \sim 10^{32} \text{ K}$), добија се огроман број [3]

$$\frac{l_i}{l_c} \sim 10^{28}, \quad (2.64)$$

где је узето $T_0 = T_{\text{СМВ}}$.

Глава 3

Инфлаторна космологија

Доминантна парадигма која успешно решава бројне проблеме у Стандардном космолошком моделу носи назив космолошка инфлација. У основи теорије космолошке инфлације је претпоставка да је у раном свемиру постојала краткотрајна фаза током које се свемир нагло и експоненцијално ширио. Иако су се идеје о фазном прелазу и убрзаном ширењу свемира појавиле седамдесетих година двадесетог века, основе инфлаторне теорије постављене су од стране А. Гата¹ 1981. године [58] у моделу базираном на појави фазног прелазу у свемиру, генерисаним спонтаним нарушењем симетрије у тренутку када је температура свемира достигла критичну вредност. Суштина овог приступа је да свемир из иницијалног, метастабилног стања, прелази у стабилно стање са нижом енергијом, процесом који подсећа на квантномеханичко тунеловање кроз потенцијалну баријеру. Убрзо је уочено да је потребно наћи адекватнији механизам који би довео до инфлаторне епохе и редефинисати иницијални модел инфлације, који сада носи назив „стара“ инфлација (*old inflation*). У раду А. Линдеа² [59] постављене су основе „нове“ инфлаторне теорије (*new inflation*), која се базира на идеји да је инфлација вођена скаларним пољем, чији је потенцијал скоро „раван“ (константан). Већина актуелних модела припада класи хаотичне инфлације (*chaotic inflation*), код које је инфлаторни процес могућ за широк интервал почетних услова [60]. Модел чија се предвиђања тренутно најбоље слажу са астрономским посматрањима предложен је од стране А. Старобинског³ (*Starobinsky inflation*) [61].

¹ енг. *Alan Guth*.

² енг. *Andrei Linde*.

³ енг. *Alexei Starobinsky*.

3.1 Решење проблема хоризонта и равног свемира

Као што је наведено у одељку 2.9, проблеми хоризонта и равног свемира условљени су динамиком Хабловог радијуса у покретном координатном систему, у свемиру са „конвенционалним“ типом материје. Оба проблема би нестала у случају да је $(aH)^{-1}$ опадајућа функција времена. Код проблема равног свемира то је очигледно, члан на десној страни једначине (2.59) временом има све мању вредност, тако да вредност параметра Ω тежи јединици. Такође, током времена, вредност Хабловог радијуса у покретном координатном систему постаје мања од вредности честичног хоризонта. То значи да су фотони, који „сада“ не „комуницирају“, некада били у каузалној вези, услед чега је СМВ зрачење скоро идеално хомогено и изотропно.

3.2 Космолошка инфлација

Ако је $(aH)^{-1}$ опадајућа функција по времену, тада важи неједнакост

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} < 0, \quad (3.1)$$

на основу које се добија услов за промену фактора скале

$$\ddot{a} > 0. \quad (3.2)$$

Да би се обезбедила наведена промена фактора скале, из једначине (2.32) следи ограничење на вредност притиска

$$p < -\frac{1}{3}\rho. \quad (3.3)$$

Теорија космолошке инфлације нуди опис раног периода у еволуцији свемира у коме су сви наведени услови испуњени. Током инфлације динамика свемира може се описати ако се уведе „материја“ са негативним притиском ($\omega < -1/3$), која услед наведене особине обезбеђује убрзано ширење свемира.

У складу са наведеним условима, материја у форми космолошке константе Λ обезбеђује инфлаторну динамику током које Хаблов параметар H_Λ има константну вредност, а фактор скале експоненцијално расте са временом

$$a \propto e^{H_\Lambda t}. \quad (3.4)$$

Међутим, модел са космолошком константом не задовољава све захтеве који се односе на инфлацију, тако да се може прихватити само као (груба) апроксимација инфлаторног процеса [3]. Један од главних проблема у овом моделу је немогућност да се креира материја и зрачење након инфлаторне фазе. Да би се добио реалистичан модел потребна је квази-експоненцијална промена фактора скале. Хаблов параметар се мора разматрати као функција времена чија је вредност приближно константна ($\dot{H} \sim 0$).

ОТР је у основи класична теорија, што значи да не укључује квантне ефекте. Постојање иницијалне сингуларности у Стандардном космолошком моделу ограничава валидност физичких закона у најранијој епохи свемира, где се класичне једначине поља не могу применити. Инфлација као период у развоју свемира мора да обезбеди услове како би се даља еволуција свемира одвијала у складу са предвиђањима Стандардног космолошког модела и мерења. Да би се процес бариогенезе (формирање првих честица, бариона) несметано одвијао потребно је да се период инфлације заврши не касније од 10^{-34} s [3].

Као што је већ речено, до сада је предложен велики број инфлаторних модела, међу којима, значајно место имају инфлаторни модели са скаларним пољем. Модел квинтесенције⁴ (*quintessence*) је један од једноставнијих модела на основу кога се може стећи прецизан увид у особине инфлаторног процеса и смисао величина које се уводе како би се описала инфлаторна динамика [62].

3.3 Инфлација вођена канонским скаларним пољем

Основна претпоставка у инфлаторним моделима је да се механизам који води инфлацију може описати класичном физиком, користећи једно или више скаларних поља. Скаларно поље ϕ , одговорно за процес инфлације, носи назив инфлатон. Генерално, динамика канонског скаларног поља се одређује на основу канонског лагранжијана

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - V(\phi), \quad (3.5)$$

где је $V(\phi)$ потенцијал датог поља ϕ . Компоненте тензора енергије-импулса налазе се варијацијом лагранжијана (3.5) на основу израза (2.25). Под претпоставком да је метрика FLRW облика и да је поље просторно хомогено $\phi = \phi(t)$, тензор енергије-импулса дефинисан за канонско поље има облик који одговара тензору за идеалан флуид, чије су компоненте задате изразом (2.27). Густина и притисак таквог идеалног космолошког флуида у функцији поља ϕ задати су

⁴ Назив потиче од латинске речи за пети елемент.

изразима

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V, \quad (3.6)$$

$$p = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V. \quad (3.7)$$

Параметар стања ω је у овом случају динамичка величина, чија вредност зависи од односа кинетичког члана $1/2\dot{\phi}^2$ и потенцијала поља

$$\omega = \frac{1/2\dot{\phi}^2 - V}{1/2\dot{\phi}^2 + V}. \quad (3.8)$$

У првој Фридмановој једначини (2.30) се, услед квази-експоненцијалне промене фактора скале током инфлације, може занемарити сабирак у коме фигурише константа која описује закривљеност простора. На основу израза (3.6) прва Фридманова једначина се може записати у облику

$$H^2 = \frac{8\pi G_N}{3} \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V \right). \quad (3.9)$$

Користећи једначину континуитета (2.29) добија се једначина Клајн-Гордоновог (*Klein-Gordon*) типа, којом је одређена временска еволуција поља

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_{,\phi} = 0, \quad (3.10)$$

при чему је уведена ознака $V_{,\phi} \equiv dV/d\phi$. Једначина (3.10) је по облику еквивалентна једначини која описује линеарни хармонијски осцилатор са „фрикцијом“. Познато је да се члан $\ddot{\phi}$ у једначини (3.10) може занемарити уколико је вредност „фрикционог“ члана $3H\dot{\phi}$ довољно велика [3].

3.4 Апроксимација спорог котрљања

Систем једначина који описују инфлаторну динамику, једначине (3.9) и (3.10), има егзактно решење за потенцијал експоненцијалног облика [63]. Када је због облика потенцијала тешко наћи, или не постоји, аналитичко решење, уобичајено је да се систем једначина решава користећи апроксимацију спорог котрљања (*slow-roll approximation*). Апроксимација подразумева да је промена Хабловог

параметра у времену $t_H = H^{-1}$ јако мала [53]

$$\frac{|\dot{H}|}{H^2} \ll 1, \quad (3.11)$$

чиме се постиже квази-експоненцијални раст фактора скале. Диференцирањем једначине (3.9) по времену и заменом $\ddot{\phi}$ из једначине (3.10) добија се једнакост

$$\dot{H} = -4\pi G_N \dot{\phi}^2, \quad (3.12)$$

на основу које се услов спорог котрљања $|\dot{H}| \ll H^2$ може записати у облику

$$\dot{\phi}^2 \ll |V(\phi)|. \quad (3.13)$$

Једноставније речено, апроксимација спорог котрљања се примењује када је кинетички члан много мањи од потенцијалног. Тиме је однос притиска и густине $p \simeq -\rho$. Све док је услов (3.13) задовољен, скаларно поље може да обезбеди инфлаторну динамику која је аналогна динамици коју има свемир са космолошким константом. Прва Фридманова једначина, уз коришћење апроксимације (3.13), добија облик

$$H^2 \simeq \frac{8\pi G_N}{3} V. \quad (3.14)$$

Како се вредност потенцијала споро мења, Хаблов параметар има приближно константну вредност, чиме се обезбеђује квази-експоненцијална промена фактора скале.

Додатни услов, који налаже апроксимација спорог котрљања, се односи на промену $\dot{\phi}$

$$\frac{1}{H} \frac{|\ddot{\phi}|}{|\dot{\phi}|} \ll 1. \quad (3.15)$$

То значи да се у наведеној апроксимацији у једначини (3.10) може занемарити допринос првог сабирка ($\ddot{\phi} \ll \dot{\phi}H$) и разматрати диференцијална једначина првог реда

$$3H\dot{\phi} \simeq -V_{,\phi}. \quad (3.16)$$

Видимо да су једначине (3.9) и (3.10) у апроксимацији спорог котрљања сведене на једначине (3.14) и (3.16), за које се каже да важе у режиму спорог котрљања.

3.5 Параметри спорог котрљања и број е-фолдова

Да би се описао режим спорог котрљања веома је погодно дефинисати параметре спорог котрљања [64], кроз бездимензиони однос динамичких величина. Веза између \ddot{a} и Хабловог параметра, задата изразом (2.33), може се преписати у облику [2]

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2 = H^2(1 - \epsilon), \quad (3.17)$$

где је ϵ

$$\epsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{H} \right), \quad (3.18)$$

први параметар спорог котрљања.

Током инфлације је $\ddot{a} > 0$, што је испуњено све док је $\epsilon < 1$. На основу Фридманових једначина добија се веза између параметра ϵ и параметра стања ω

$$\epsilon = \frac{3}{2}(1 + \omega), \quad (3.19)$$

што значи да параметар ϵ квантитативно описује одступање од де Ситеровог режима ($\omega = -1$).

Да би се осигурало да период инфлације траје довољно дуго, како би се елиминисали проблеми хоризонта, равног свемира итд., уводи се параметар η . Ако се параметар ϵ диференцира по времену и искористи једнакост (3.12) добија се израз [44]

$$\dot{\epsilon} = 2H\epsilon(\epsilon - \eta), \quad (3.20)$$

на основу кога је одређена вредност другог параметра спорог котрљања η

$$\eta \equiv -\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}}. \quad (3.21)$$

Режим спорог котрљања важи све док су вредности оба параметара јако мале

$$\epsilon \ll 1, \quad |\eta| \ll 1. \quad (3.22)$$

Наведени услови су довољни да се обезбеди постојање процеса инфлације.

Параметри спорог котрљања се могу изразити у функцији потенцијала. На

основу дефиниција параметара, користећи једнакост (3.12), изводе се апроксимативни изрази, који су валидни током спорог котрљања [54]

$$\epsilon \simeq \frac{1}{16\pi G_N} \left(\frac{V_{,\phi}}{V} \right)^2 \equiv \epsilon_V, \quad (3.23)$$

$$\eta \simeq \frac{1}{8\pi G_N} \frac{V_{,\phi\phi}}{V} \equiv \eta_V. \quad (3.24)$$

На основу наведених параметара и услова да су током спорог котрљања вредности параметара много мање од јединице следе ограничења на облик потенцијала

$$|V_{,\phi}/V| \ll 1, \quad |V_{,\phi\phi}/V| \ll 1. \quad (3.25)$$

Потенцијал који је „скоро раван“ може обезбедити режим спорог котрљања. То је потребан али не и довољан услов спорог котрљања, јер се параметрима дефинисаним у функцији потенцијала не ограничава вредност $\dot{\phi}$. Како је једначина (3.10) диференцијална једначина другог реда, вредност $\dot{\phi}$ у почетном тренутку се може одабрати произвољно, али у складу са изразом (3.16). У литератури се могу наћи и друге дефиниције параметара спорог котрљања, али не мењају суштину описа и праћења периода инфлације.

Током инфлације фактор скале се увећава квази-експоненцијално, чиме се свемир драстично шири. За опис инфлаторног увећања свемира уводи се величина у функцији количника фактора скале на крају (a_f) и почетку инфлације (a_i). Погодно је дефинисати број е-фолдова (*e-folds*) N као (природни) логаритам количника a_f/a_i

$$N \equiv \ln \frac{a_f}{a_i}. \quad (3.26)$$

Ако је позната функција промене Хабловог параметра, може се израчунати N

$$N = \int_{a_i}^{a_f} H dt. \quad (3.27)$$

Користећи једначине (3.14) и (3.16), у режиму спорог котрљања добија се

$$N \simeq -8\pi G_N \int_{\phi_i}^{\phi_f} \frac{V}{V_{,\phi}} d\phi, \quad (3.28)$$

где су ϕ_i и ϕ_f вредности поља на почетку и крају инфлације, редом. Да би инфлација успешно решила проблеме Стандардног космолошког модела потребно је да је $N \simeq 60$.

3.6 Хамилтон-Јакобијева формулација инфлације

Инфлација се може реализовати и без режима спорог котрљања. Хаблов параметар и поље ϕ су функције које зависе од времена, што значи да се имплицитно може дефинисати функција $H = H(\phi)$. Ако се са извода по времену пређе на извод по пољу ($\dot{H} = \dot{\phi}H_{,\phi}$), једначина (3.12) се може записати у облику

$$\dot{\phi} = -2M_{\text{Pl}}^2 H_{,\phi}, \quad (3.29)$$

где је $M_{\text{Pl}} = (8\pi G_{\text{N}})^{-1/2}$ редукована Планкова маса. Заменом $\dot{\phi}$ у једначину (3.9) добија се Хамилтон-Јакобијева (*Hamilton-Jacobi*) једначина

$$H_{,\phi}^2 - \frac{3}{2M_{\text{Pl}}^2} H^2 = -\frac{V(\phi)}{2M_{\text{Pl}}^4}. \quad (3.30)$$

Једначина се може решити за конкретан облик потенцијала, или се из ње може реконструисати потенцијал уколико је позната функција $H = H(\phi)$.

Како би се и овде пратио ток инфлације погодно је дефинисати одговарајуће параметре у функцији Хабловог параметра. Први параметар, $\epsilon_H \equiv \epsilon$, дефинише се изразом

$$\epsilon_H \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} = 2M_{\text{Pl}}^2 \left(\frac{H_{,\phi}}{H} \right)^2. \quad (3.31)$$

Дефинише се и параметар η_H по аналогији са дефиницијом за параметар η

$$\eta_H = 2M_{\text{Pl}}^2 \frac{H_{,\phi\phi}}{H}. \quad (3.32)$$

Параметри се могу изразити и у функцији вредности поља и потенцијала [57]

$$\epsilon_H = 3 \frac{1/2 \dot{\phi}^2}{1/2 \dot{\phi}^2 + V(\phi)} = \frac{d \ln H}{d \ln a}, \quad (3.33)$$

$$\eta_H = -3 \frac{\ddot{H}}{3H\dot{\phi}} = -\frac{d \ln \dot{\phi}}{d \ln a} = \frac{d \ln H_{,\phi}}{d \ln a}, \quad (3.34)$$

чија је вредност током периода спорог котрљања ограничена неједнакостима

$$\epsilon_H \ll 1, \quad |\eta_H| \ll 1. \quad (3.35)$$

Ако су наведени услови испуњени оправдано је занемарити први члан на левој страни у Хамилтон-Јакобијевој једначини (3.30). Вредности параметара ϵ_H и η_H нису апроксимативне, за разлику од вредности параметара ϵ_V и η_V . Између

две групе параметара постоје везе облика [53]

$$\epsilon_H \simeq \epsilon_V, \quad \eta_H \simeq \eta_V - \epsilon_V, \quad (3.36)$$

валидне током периода спорог котрљања.

Полазећи од дефиниције за број е-фолдова (3.27), користећи (3.29), добија се израз

$$N = - \int_{\phi_i}^{\phi_f} \frac{1}{\sqrt{2\epsilon_H}} d\phi, \quad (3.37)$$

који се може применити генерално.

3.7 Особине инфлаторног атрактора

Појам атрактора у космологији не задовољава у потпуности дефиницију која се иначе користи у литератури [65]. Једна од особина коју мора да поседује инфлаторни модел је предиктивност. То значи да еволуција скаларног поља не би требало да зависи од почетне вредности за поље и за изводе поља по времену. Једначина за поље је диференцијална једначина другог реда по времену. Да би се нашло њено решење потребно је задати почетну вредност $\dot{\phi}$. Свакој почетној вредности $\dot{\phi}$ одговара по једно партикуларно решење једначине. Међутим, решење диференцијалне једначине (3.10) има особину атрактора у случају да сабирак $3H\dot{\phi}$ има довољно велику вредност [66]. То значи да иницијалне разлике које постоје између решења, услед различитих почетних услова, врло брзо ишчезавају и сва решења конвергирају ка јединственом решењу. Наведени услов, еквивалентан услову $\ddot{\phi} \ll \dot{\phi}H$, испуњен је у режиму спорог котрљања, што значи да је апроксимација спорог котрљања од суштинске важности за проучавање периода космолошке инфлације.

Постојање атрактора може се показати користећи Хамилтон-Јакобијеву једначину (3.30) [67]. Нека је $H_0(\phi)$ решење једначине (3.30). Ако се решење пертурбује, заменом $H(\phi) = H_0(\phi) + \delta H(\phi)$ у једначину (3.30), њеном линеаризацијом добија се диференцијална једначина [57]

$$(H_0)_{,\phi} \delta H_{,\phi} \simeq \frac{3}{M_{\text{Pl}}^2} H_0 \delta H. \quad (3.38)$$

Решење једначине (3.38) има облик

$$\delta H(\phi) = \delta H(\phi_i) \exp\left(\frac{3}{2M_{\text{Pl}}^2} \int_{\phi_i}^{\phi} \frac{H_0}{(H_0)_{,\phi}} d\phi\right), \quad (3.39)$$

где је $\delta H(\phi_i)$ вредност пертурбације у (почетном) тренутку када је вредност поља ϕ_i . Користећи једначину (3.37) добија се

$$\delta H(\phi) = \delta H(\phi_i) \exp(-3(N_i - N)). \quad (3.40)$$

Због експоненцијалног члана δH брзо опада, чиме се постиже јединствена динамика - особина атрактора.

3.8 Крај инфлације и поновно загревање

Критеријум за крај инфлације може се дефинисати на основу вредности параметара спорог котрљања. Период инфлације траје све док један од параметара спорог котрљања не достигне вредност једнаку јединици. Постоје изузеци од наведеног правила, код инфлаторних модела (модел хибридне инфлације) са додатним физичким ефектима, где се инфлација завршава пре него што се испуни наведени услов [57].

Након инфлације, еволуција свемира наставља се у складу са динамиком предвиђеном Стандарним космолошким моделом. Због тога инфлаторни механизам мора да обезбеди адекватне услове на крају инфлације ($\ddot{a} < 0$), односно да инфлација има „грациозан излаз“ (*graceful exit*).

Ако потенцијал, који обезбеђује инфлаторну динамику, има локални минимум близу краја инфлације (прави вакуум), могућа је фаза поновног загревања, тзв. рихитинг (*reheating*), периода који се надовезује на инфлацију. Током рихитинга вредност скаларног поља осцилује око минимума потенцијала са фактором пригушења који је пропорционалан Хабловом параметру. Услед пригушења осциловања енергија скаларног поља се смањује и поље ишчезава. Енергија која се ослобађа се троши на креацију честица „конвенционалне“ материје. Другим речима, експоненцијално ширење свемира има и експоненцијални пад температуре која ће на крају инфлације пасти знатно испод температуре бариогенезе (и других температура кључних за креацију честица у свемиру који познајемо). Механизам постинфлаторног рихитинга је један од већих изазова са којима се сусреће теорија инфлације а посебно тахионска инфлација [68, 69].

Глава 4

Теорија космолошких пертурбација

Успех инфлаторне теорије огледа се и у могућности да се објасни порекло, како опсервабилних, тако и иницијалних нехомогености у свемиру. Иницијалне нехомогености увећане у току периода инфлације и касније, услед гравитационе интеракције, довеле су до формирања структура на великим скалама (*Large Scale Structure*, LSS). Инфлаторни механизам обезбеђује опис еволуције почетних квантних флуктуација у флуктуације густине материје на класичном нивоу. Услед инфлаторног ширења неке од карактеристика (спектар пертурбација) остају непромењене. Формализам космолошких пертурбација омогућава да се теоријска предвиђања, добијена из инфлаторних модела, упореде са резултатима мерења. Развој овог пертурбативног формализма базиран је на гејџ (*gauge*) инваријантном приступу. Започет је пионирским радом Џ. Бардина¹ [70]. У овом одељку су изложени најважнији елементи формализма потребни за даље разматрање, како би се на основу њих израчунале вредности посматрачких параметара за инфлаторни модел који ће бити разматран. Детаљнији приказ дат је у прегледним радовима [71] и [72].

4.1 Основне поставке и идеје

Основна стратегија у теорији космолошких пертурбација је да се свака динамичка величина $X(t, \vec{x})$ прикаже као збир просторно хомогеног дела $\bar{X}(t)$ (дакле, зависи једино од времена) и просторно-временски зависног дела $\delta X(t, \vec{x})$, који се назива пертурбацијом

$$X(t, \vec{x}) = \bar{X}(t) + \delta X(t, \vec{x}). \quad (4.1)$$

¹ енг. *James Bardeen*.

По правилу (дефиницији) пертурбације су мале, што значи да је $\delta X \ll \bar{X}$. Пертурбација уведена на овај начин нема увек физички смисао, јер се декомпозиција на просторно хомогени део и пертурбацију може реализовати као последица координатне трансформације. Тако уведена пертурбација не описује реалне нехомогености и зависи од избора координата. За разлику од хомогеног и изотропног свемира у коме симетрија простора одређује облик метрике и намеће избор координата, код нехомогеног свемира не постоји критеријум за избор адекватног координатног система у коме би се анализирале пертурбације. Проблем који настаје услед произвољног одабира координата може се решити увођењем величина које не зависе од избора координата. Једино тако уведене величине релевантне су за разматрање јер имају физички смисао и носе назив гејд инваријантне величине.

Након што се величине у једначинама пертурбују у складу са изразом (4.1), потребно је извршити линеаризацију. То значи, да у једначинама треба задржати само сабирке који су линеарни (или у наредном реду, квадратични) по пертурбацијама, а одбацити сабирке који садрже чланове вишег реда по пертурбацијама.

4.2 Пертурбација метрике

Метрика FLRW типа адекватно описује свемир на великим скалама. На растојањима на којима простор (мало) одступа од хомогеног и изотропног метрика се може записати у облику

$$ds^2 = (g_{\mu\nu}^{(0)}(t) + \delta g_{\mu\nu}(t, \vec{x})) dx^\mu dx^\nu, \quad (4.2)$$

где су $g_{\mu\nu}^{(0)}$ компоненте метричког тензора FLRW метрике ($k = 0$)

$$g_{\mu\nu}^{(0)} dx^\mu dx^\nu = a^2(\tau) (d\tau^2 - \delta_{ij} dx^i dx^j). \quad (4.3)$$

Пертурбације метричког тензора могу се разложити на скаларне (S), векторске (V) и тензорске (T) компоненте (SVT декомпозиција). У теорији линеарних пертурбација различите компоненте пертурбација међусобно не „интерагују“ и њихова се еволуција може анализирати независно. Пертурбације $\delta g_{\mu\nu}$, због

особина симетрије, могу се записати на следећи начин [3]

$$\delta g_{00} = 2a^2 \phi, \quad (4.4)$$

$$\delta g_{0i} = a^2 (B_{,i} + S_i), \quad (4.5)$$

$$\delta g_{ij} = a^2 (2\psi \delta_{ij} + E_{,ij} + F_{i,j} + F_{j,i} + h_{ij}), \quad (4.6)$$

где је $i, j = \overline{1, 3}$ и при чему за уведене величине важи

$$S_{,i}^i = 0, \quad (4.7)$$

$$F_{,i}^i = 0, \quad h_i^i = 0, \quad h_{j,i}^i = 0. \quad (4.8)$$

Услед тога је број независних функција потребних да се дефинише $\delta g_{\mu\nu}$ једнак броју независних компоненти $g_{\mu\nu}$. Скаларне пертурбације описане су скаларним функцијама: ϕ , ψ , B и E . Оне су индуковане разликама у густини енергије у свемиру. Због тога је њихова улога у еволуцији гравитационих нестабилности веома важна. Векторске пертурбације описане су векторима чије су компоненте S_i и F_i . Показано је да током еволуције свемира векторске пертурбације брзо ишчезавају, тако да су оне ирелевантне са аспекта космологије. Тензорске пертурбације описане су величинама h_{ij} и везују се за појаву гравитационих таласа.

При инфинитезималној координатној трансформацији

$$x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu + \epsilon^\mu, \quad (4.9)$$

где за компоненте инфинитезималног четворо-вектора $\epsilon^\mu \equiv (\epsilon^0, \epsilon^i)$ важи

$$\epsilon^i = \epsilon_{\perp}^i + \varepsilon^i, \quad \epsilon_{\perp,i}^i = 0, \quad (4.10)$$

пертурбације метричког тензора трансформишу се у складу са изразом

$$\delta g_{\mu\nu} \rightarrow \delta \tilde{g}_{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu} - g_{\mu\nu,\rho}^{(0)} \epsilon^\rho - g_{\rho\nu}^{(0)} \epsilon_{,\mu}^\rho - g_{\mu\rho}^{(0)} \epsilon_{,\nu}^\rho. \quad (4.11)$$

Пертурбована метрика, у функцији скаларних величина, има облик

$$ds^2 = a^2 [(1 + 2\phi)d\tau^2 + 2B_{,i} dx^i d\tau - ((1 - 2\psi)\delta_{ij} - 2E_{,ij}) dx^i dx^j]. \quad (4.12)$$

На основу (4.11) може се показати да су трансформације величина које описују скаларне пертурбације одређене изразима [3]

$$\phi \rightarrow \tilde{\phi} = \phi - \frac{1}{a}(a\epsilon^0)', \quad (4.13)$$

$$B \rightarrow \tilde{B} = B + \epsilon' - \epsilon^0, \quad (4.14)$$

$$\psi \rightarrow \tilde{\psi} = \psi + \frac{a'}{a}\epsilon^0, \quad (4.15)$$

$$E \rightarrow \tilde{E} = E + \epsilon, \quad (4.16)$$

где су примоване величине изводи тих величина по конформном времену τ , које је дефинисано изразом (2.10). Постоји бесконачан број линеарних комбинација уведених скаларних величина, у метрици (4.12), које су гејџ инваријантне. Најједноставније, по облику, су тзв. Бардинови потенцијали

$$\Phi \equiv \phi - \frac{1}{a}(a(B - E'))', \quad (4.17)$$

$$\Psi \equiv \psi + \frac{a'}{a}(B - E)'. \quad (4.18)$$

Трансформација величина које описују скаларне пертурбације одређена је са ϵ^0 и ϵ . Њихов избор, избор гејџа, може поједноставити облик гејџ инваријантних величина и тиме олакшати израчунавања. Еквивалентно, гејџ се може фиксирати задавањем вредности за две од четири уведене скаларне функције. Услови

$$E = 0, \quad B = 0, \quad (4.19)$$

дефинишу тзв. лонгитудинални (*longitudinal*) гејџ. На основу дефиниција (4.17) и (4.18), у лонгитудиналном гејџу Бардинови потенцијали одређени су ненултим скаларним функцијама

$$\Phi = \phi, \quad \Psi = \psi. \quad (4.20)$$

Метрика (4.12) се тада своди на облик

$$ds^2 = a^2 \left((1 + 2\Phi)d\tau^2 - (1 - 2\Psi)\delta_{ij}dx^i dx^j \right), \quad (4.21)$$

у којем фигуришу само гејџ инваријантне величине Φ и Ψ .

Пертурбована метрика, која садржи само компоненте тензорског типа, је облика

$$ds^2 = a^2 \left(d\tau^2 - (\delta_{ij} - h_{ij})dx^i dx^j \right). \quad (4.22)$$

Тензор, чије компоненте h_{ij} представљају тензорске пертурбације, је по дефиницији инваријантан на опште координатне трансформације.

4.3 Линеаризоване Ајнштајнове једначине

Линеаризоване Ајнштајнове једначине сада добијају облик

$$\delta G_{\nu}^{\mu} = 8\pi G_{\text{N}} \delta T_{\nu}^{\mu}, \quad (4.23)$$

где је δG_{ν}^{μ} пертурбација компоненти Ајнштајновог тензора, а δT_{ν}^{μ} пертурбација компоненти тензора енергије-импулса.

Користећи метрику (4.21), из Ајнштајнових једначина изводе се једначине за скаларне пертурбације

$$\Delta\Psi - 3\mathcal{H}(\Psi' + \mathcal{H}\Phi) = 4\pi G_{\text{N}} a^2 \delta T_0^0, \quad (4.24)$$

$$(\Psi' + \mathcal{H}\Phi)_{,i} = 4\pi G_{\text{N}} a^2 \delta T_i^0, \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} & \left(\Psi'' + \mathcal{H}(2\Psi + \Phi)' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi + \frac{1}{2}\Delta(\Phi - \Psi) \right) \delta_j^i \\ & - \frac{1}{2}(\Phi - \Psi)_{,j}^i = -4\pi G_{\text{N}} a^2 \delta T_j^i, \end{aligned} \quad (4.26)$$

где је Δ Лапласијан и $\mathcal{H} = aH = a'/a$. Компоненте пертурбованог тензора енергије-импулса, у случају идеалног флуида (2.27), добијају облик

$$\delta T_0^0 = \delta\rho, \quad \delta T_i^0 = (\rho + p)\delta u_i, \quad \delta T_j^i = -\delta p \delta_j^i. \quad (4.27)$$

На основу једначина (4.26), за $i \neq j$ се може закључити да су Бардинови потенцијали Φ и Ψ међусобно једнаки

$$\Phi = \Psi. \quad (4.28)$$

У том случају се једначине за скаларне пертурбације поједностављују

$$\Delta\Phi - 3\mathcal{H}(\Phi' + \mathcal{H}\Phi) = 4\pi G_{\text{N}} a^2 \delta T_0^0, \quad (4.29)$$

$$(\Phi' + \mathcal{H}\Phi)_{,i} = 4\pi G_{\text{N}} a^2 \delta T_i^0, \quad (4.30)$$

$$(\Phi'' + 3\mathcal{H}\Phi' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi) \delta_j^i = -4\pi G_{\text{N}} a^2 \delta T_j^i. \quad (4.31)$$

Пертурбација притиска δp у општем случају зависи од пертурбације густине $\delta\rho$ и пертурбације ентропије δS [3]

$$\delta p = c_s^2 \delta\rho + \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_\rho \delta S, \quad (4.32)$$

где c_s^2 је квадрат адијабатске брзине звука дефинисан изразом

$$c_s^2 \equiv \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S. \quad (4.33)$$

На основу једначина (4.29) и (4.31) добија се диференцијална једначина за потенцијал Φ [3]

$$\Phi'' + 3(1 + c_s^2)\mathcal{H}\Phi' - c_s^2\Delta\Phi + (2\mathcal{H}' + (1 + 3c_s^2)\mathcal{H}^2)\Phi = 4\pi a^2 \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_\rho \delta S. \quad (4.34)$$

Еволуција тензорских пертурбација одређена је једначином која се добија из Ајнштајнових једначина за метрику (4.22). У случају тензора енергије-импулса за идеалан флуид, једначина за векторске пертурбације има облик

$$h''_{ij} + 2\mathcal{H}h'_{ij} - \Delta h_{ij} = 0. \quad (4.35)$$

Генерално, једначине за пертурбације су диференцијалне једначине које садрже извод по времену и просторним координатама. Погодан и опште прихваћен приступ за њихово решавање је декомпозиција пертурбација на компоненте применом Фуријеове трансформације

$$\delta X(\tau, \vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 q e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \delta X_q(\tau), \quad (4.36)$$

где је у експоненту скаларни производ таласног вектора \vec{q} и вектора положаја \vec{x} . Свака компонента пертурбација у развоју је равна талас таласне дужине λ , коме одговара таласни број $q = 2\pi/\lambda$. Применом Фуријеове трансформације долази се до диференцијалних једначина (по времену) за Фуријеову амплитуду $\delta X_q(\tau)$.

Пертурбације се налазе изван Хабловог радијуса ако је $qc_s \ll aH$ ($qc_s\tau \ll 1$), односно унутар њега ако је $qc_s \gg aH$ ($qc_s\tau \gg 1$). Током инфлације Хаблов радијус $(aH)^{-1}$ се смањује, док вредност q^{-1} остаје непромењена (c_s има скоро константну вредност). Пертурбације које су током инфлације започеле своју еволуцију унутар Хабловог радијуса, након тренутка (*horizon crossing*, HC) у коме је

$qc_s = aH$, излазе изван њега. Области изван Хабловог радијуса нису каузално повезане. То значи да престаје даља еволуција пертурбација све до тренутка када се вредност Хабловог радијуса, услед динамике коју свемир има након инфлације, довољно увећа да се пертурбације поново нађу унутар Хабловог радијуса.

Анализа адијабатских пертурбација ($\delta S = 0$) се може олакшати ако се уведе гејџ инваријантна величина која носи назив пертурбација кривине ζ (*curvature perturbation on uniform-density hypersurfaces*)

$$\zeta = \frac{2}{3} \frac{\Phi + \mathcal{H}^{-1}\Phi'}{1 + \omega} + \Phi. \quad (4.37)$$

Користећи једначину (4.34) показује се да је [47]

$$\zeta'_q = -\frac{2}{3} \frac{\mathcal{H}}{1 + \omega} c_s^2 \left(\frac{q}{\mathcal{H}}\right)^2 \Phi_q, \quad (4.38)$$

што значи да величина ζ_q има константну вредност у режиму у коме су таласне дужине пертурбација много веће од Хабловог радијуса

$$\zeta'_q \simeq 0, \quad (q \ll \mathcal{H}). \quad (4.39)$$

4.4 Пертурбације у моделу k -инфлације

Широка класа инфлаторних модела са скаларним пољем ϕ , којој припада и инфлаторни модел који се разматра у овој дисертацији, одређена је дејством облика [36, 73, 74]

$$S = S_{\text{EH}} + \int \sqrt{-g} p(X, \phi) d^4x, \quad (4.40)$$

где је дејство S_{EH} задато изразом (2.23) и $X = 1/2g^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu}$ кинетичка енергија поља. Класа модела код којих је дејство облика (4.40) носи назив k -инфлација (*k-inflation*). Код ове класе модела кинетички члан у лагранжијану $p(X, \phi)$ доводи до инфлаторног режима.

Варијацијом дејства (4.40) добијају се компоненте тензора енергије-импулса (идеалног) космолошког флуида

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}, \quad (4.41)$$

при чему је густина флуида задата изразом

$$\rho = 2Xp_{,X} - p, \quad (4.42)$$

и $u_\mu = \phi_{,\mu}/(2X)^{1/2}$. У складу са уведеном ознаком лагранжијан $p(X, \phi)$ дефинише притисак флуида у функцији поља ϕ .

Извод густине флуида по времену може се израчунати на основу једначине континуитета (2.29). На основу израза

$$\dot{\rho} = p_{,X}\dot{X} + \rho_{,\phi}\dot{\phi}, \quad (4.43)$$

и једначине континуитета, може се написати израз за извод притиска по времену

$$\dot{p} = p_{,X}\dot{X} + p_{,\phi}\dot{\phi} = -3c_s^2 H(\rho + p) + \dot{\phi}(p_{,\phi} - c_s^2 \rho_{,\phi}), \quad (4.44)$$

где је квадрат адијабатске брзине звука, у складу са изразом (4.43), задат изразом

$$c_s^2 = \frac{p_{,X}}{\rho_{,X}} = \frac{\rho + p}{2X\rho_{,X}}. \quad (4.45)$$

4.4.1 Скаларне пертурбације

Пертурбована FLRW метрика за раван свемир, у лонгитудиналном гејцу у функцији времена t , има облик

$$ds^2 = (1 + 2\Phi)dt^2 - (1 - 2\Phi)a^2(t)\delta_{ij}dx^i dx^j. \quad (4.46)$$

Пертурбација скаларног поља

$$\phi(t, x) = \phi_0(t) + \delta\phi(t, x), \quad (4.47)$$

доводи до пертурбације компоненти тензора енергије-импулса

$$\delta T_0^0 = \delta\rho = \rho_{,X} + \rho_{,\phi}\delta\phi = \frac{\rho + p}{c_s^2} \left[\left(\frac{\delta\phi}{\phi} \right)^{\cdot} - \Phi \right] - 3H(\rho + p)\frac{\delta\phi}{\phi}, \quad (4.48)$$

$$\delta T_i^0 = (\rho + p) \left(\frac{\delta\phi}{\phi} \right)^{\cdot}_{,i}. \quad (4.49)$$

У изразима (4.48) и (4.49) је, због једноставнијег записа, вредност ϕ_0 означена са ϕ и тачка означава извод по времену. Заменом израза за пертурбоване компоненте тензора енергије-импулса у линеаризованим Ајнштајновим једначинама

(4.29) и (4.30) добија се систем једначина за Φ и $\delta\phi/\dot{\phi}$

$$\left(\frac{\delta\phi}{\dot{\phi}}\right)' = \left(1 + \frac{c_s^2 \Delta}{4\pi G a^2 (\rho + p)}\right) \Phi, \quad (4.50)$$

$$(a\Phi)' = 4\pi G_N a (\rho + p) \frac{\delta\phi}{\dot{\phi}}. \quad (4.51)$$

У складу са (4.37) уводи се променљива ξ , тако да је [75]

$$\Phi a = 4\pi G_N H \xi, \quad (4.52)$$

$$\frac{\delta\phi}{\dot{\phi}} = \frac{\zeta}{H} - \frac{4\pi G_N}{a} \xi. \quad (4.53)$$

Пертурбација кривине ζ задата је преко потенцијала Φ

$$\zeta = \frac{5\rho + 3p}{3(\rho + p)} \Phi + \frac{2}{3} \frac{\rho}{\rho + p} \frac{\dot{\Phi}}{H}. \quad (4.54)$$

Систем једначина (4.50) и (4.51), користећи (4.52) и (4.53), се своди на

$$\dot{\xi} = \frac{a(\rho + p)}{H^2} \zeta, \quad (4.55)$$

$$\dot{\zeta} = \frac{c_s^2 H^2}{a^3 (\rho + p)} \Delta \xi. \quad (4.56)$$

Да би се извршило квантовање пертурбација, неопходно је познавати облик дејства на основу кога се изводе једначине (4.55) и (4.56). Показује се да дејство има општи облик [75]

$$S = \int \left(\xi \hat{O} \dot{\zeta} - \frac{1}{2} \frac{H^2 c_s^2}{a^3 (\rho + p)} \xi \hat{O} \Delta \xi + \frac{1}{2} \frac{a^3 (\rho + p)}{H^2} \zeta \hat{O} \dot{\zeta} \right) dt d^3x. \quad (4.57)$$

За оператор \hat{O} , за раван свемир, имамо $\hat{O} = \Delta$. Заменом израза (4.56) у (4.57) и увођењем конформног времена τ , израз (2.10), добија се [75]

$$S = \frac{1}{2} \int z^2 \left(\zeta'^2 + c_s^2 \zeta \Delta \zeta \right) d\tau d^3x, \quad (4.58)$$

где је помоћно скаларно поље z дефинисано изразом

$$z \equiv \frac{a(p + \rho)^{1/2}}{c_s H}. \quad (4.59)$$

Ако се уведе нова променљива $v = z\zeta$, дејство се своди на облик

$$S = \frac{1}{2} \int \left(v'^2 + c_s^2 v \Delta v + \frac{z''}{z} v^2 \right) d\tau d^3x, \quad (4.60)$$

чијом се варијацијом добија диференцијална једначина за v

$$v'' - c_s^2 \Delta v - \frac{z''}{z} v = 0. \quad (4.61)$$

Фуријеовом трансформацијом

$$v(\tau, \vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3q e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} v_q(\tau), \quad (4.62)$$

из једначине (4.61), следи тзв. Муханов-Сасаки (*Mukhanov-Sasaki*) једначина [76]

$$v_q'' + \left(c_s^2 q^2 - \frac{z''}{z} \right) v_q = 0. \quad (4.63)$$

Користећи смену

$$\frac{z''}{z} = \frac{1}{\tau^2} \left(\nu^2 - \frac{1}{4} \right), \quad (4.64)$$

где је ν реалан параметар, Муханов-Сасаки једначина се може преписати у облику

$$v_q'' + \left[q^2 c_s^2 - \frac{1}{\tau^2} \left(\nu^2 - \frac{1}{4} \right) \right] v_q = 0. \quad (4.65)$$

Може се показати да је једначина (4.65) диференцијална једначина Беселовог типа

$$\frac{d^2 f_q}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{df_q}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) f_q = 0, \quad (4.66)$$

где је $v_q = \sqrt{-\tau} f_q$ и $x = c_s q \tau$. Решења једначине (4.63) која задовољавају услов

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} v_q = \frac{e^{-i c_s q \tau}}{\sqrt{2 c_s q}}, \quad (4.67)$$

су облика

$$v_q = \frac{\sqrt{\pi}}{2} (-\tau)^{1/2} H_\nu^{(1)}(-c_s q \tau), \quad (4.68)$$

где је $H_\nu^{(1)}$ Хенкелова функција прве врсте и ранга ν . Апроксимативни израз Хенкелове функције када $c_s q \tau \rightarrow 0$ је [77]

$$H_\nu^{(1)}(-c_s q \tau) \simeq -\frac{i}{\pi} \Gamma(\nu) \left(\frac{-c_s q \tau}{2} \right)^{-\nu}, \quad (4.69)$$

где је $\Gamma(\nu)$ гама функција. Израз (4.67) представља услов за постојање вакуумског решења Банч-Дејвисовог (*Bunch-Davies*) типа, док вакуумско стање дефинисано функцијама облика (4.68) носи назив Банч-Дејвисов вакуум [76].

Квантовање поља v_q подразумева увођење оператора поља [72]

$$\hat{v}_q = v_q \hat{a}_{\vec{q}} + v_{-q}^* \hat{a}_{-\vec{q}}^\dagger \quad (4.70)$$

где су $\hat{a}_{\vec{q}}$ и $\hat{a}_{\vec{q}}^\dagger$ оператори који задовољавају комутациону релацију

$$[\hat{a}_{\vec{q}}, \hat{a}_{\vec{q}'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta(\vec{q} - \vec{q}'). \quad (4.71)$$

Спектар поља $\zeta = v/z$ се добија на основу двотачкасте корелационе функције

$$\langle \hat{\zeta}_q \hat{\zeta}_{q'} \rangle = \langle \hat{v}_q \hat{v}_{q'} \rangle / z^2 = (2\pi)^3 \delta(\vec{q} + \vec{q}') |\zeta_q|^2, \quad (4.72)$$

где је $\hat{\zeta}_q$ оператор придружен Фуријеовој амплитуди ζ_q . Спектар снаге скаларних пертурбација дефинише се на основу израза

$$\mathcal{P}_S(q) = \frac{q^3}{2\pi^2} |\zeta_q|^2 = \frac{q^3}{2\pi^2 z^2} |v_q|^2, \quad (4.73)$$

где је v_q дато изразом (4.68) и њиме се карактеришу скаларне пертурбације.

4.4.2 Тензорске пертурбације

Да би се нашло решење једначине (4.35), као и у случају скаларних пертурбација, погодно је користити Фуријеову трансформацију

$$h_{ij}(\tau, \vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3q e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \sum_s h_q^s(\tau) \sum_s e_{ij}^s(q), \quad (4.74)$$

где за компоненте тзв. поларизационог тензора $e_{ij}^s(q)$ важи: $q^i e_{ij}^s(q) = 0$ и $e_{ij}^s e_{ij}^{s'} = 2\delta_{ss'}$, за две могуће поларизације $s = +, \times$. Амплитуда $h_q^s(\tau)$ задовољава једначину

$$h'' + 2aHh'_q + q^2 h_q = 0, \quad (4.75)$$

у којој је зависност од s занемарена и биће урачуната у коначном решењу. Уводи се нова променљива

$$v_q = \frac{a}{16\pi G_N} h_q. \quad (4.76)$$

Претходна једначина се трансформише у

$$v_q'' + \left(q^2 - \frac{a''}{a} \right) v_q = 0. \quad (4.77)$$

Једначина има исти облик као једначина (4.63) у којој је $c_s = 1$, а z је замењено са a . Решење једначине (4.77) је облика

$$v_q = \frac{\sqrt{\pi}}{2} (-\tau)^{1/2} H_\nu^{(1)}(-q\tau), \quad (4.78)$$

где је $\nu^2 = 9/4 + 3\epsilon_H$. Квантизација се спроводи на сличан начин као код скаларних пертурбација. Спектар поља $h_q = (16\pi G_N/a)v_q$ се добија на основу двотачкасте корелационе функције

$$\langle \hat{h}_q \hat{h}_{q'} \rangle = \langle \hat{v}_q \hat{v}_{q'} \rangle \frac{(16\pi G_N)^2}{a^2} = (2\pi)^3 \delta(\vec{q} + \vec{q}') |h_q|^2. \quad (4.79)$$

Спектар снаге тензорских пертурбација има облик

$$\mathcal{P}_T(q) = \frac{q^3}{\pi^2} |h_q|^2 = \frac{q^3}{\pi^2} \left| \frac{16\pi G_N}{a} v_q \right|^2, \quad (4.80)$$

где је v_q дато изразом (4.78).

4.5 Посматрачки параметри

Да би се теоријска предвиђања упоредила са резултатима посматрања уведени су тзв. посматрачки параметри. Најважнији од њих су: скаларни спектрални индекс (*scalar spectral index*) n_s и однос тензорског и скаларног спектра снаге, тј. количник тензора и скалара (*tensor-to-scalar ratio*) r .

Скаларни спектрални индекс дефинисан је изразом [78]

$$n_s - 1 = \frac{d \ln \mathcal{P}_S(q) \Big|_{\text{HC}}}{d \ln q}, \quad (4.81)$$

где је $\mathcal{P}_S(q) \Big|_{\text{HC}}$ спектар снаге у тренутку проласка скаларних пертурбација кроз хоризонт

$$\mathcal{P}_S(q) \Big|_{\text{HC}} \equiv \mathcal{P}_S(q) \Big|_{qc_s=aH}. \quad (4.82)$$

Количник тензора и скалара дефинисан је количником тензорског и скаларног спектра снаге

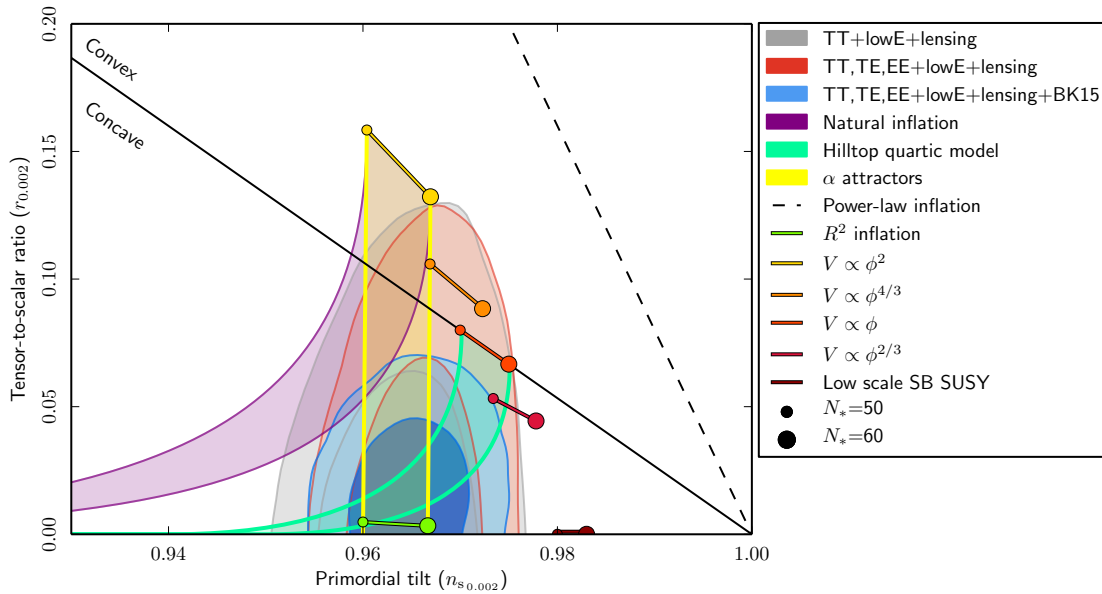
$$r = \frac{\mathcal{P}_T(q)\Big|_{\text{HC}}}{\mathcal{P}_S(q)\Big|_{\text{HC}}}. \quad (4.83)$$

Анализом спектра СМВ зрачења постављена су ограничења на вредности опсервабилних параметара са одговарајућим нивоом поверења (*Confidence Level*, CL). На основу мерења сателита Планк објављених 2018. године одређене су вредности и ограничења за посматрачке параметре [6]

$$n_s = 0,9668 \pm 0,0037, \quad (68\% \text{ CL}), \quad (4.84)$$

$$r_{0,002} < 0,058, \quad (95\% \text{ CL}). \quad (4.85)$$

На слици 1 су приказани резултати за посматрачке параметре, добијени на основу различитих инфлаторних модела, у тзв. (n_s, r) равни и ограничења из [6]. Различитим бојама приказана су ограничења која произилазе на основу спектра снаге (TT,TE,EE) и поларизације (*BICEP2/Keck Array* [79], BK15) СМВ зрачења, барио-акустичних осцилација (*Baryon Acoustic Oscillations*, BAO) и података добијених на основу гравитационих сочива (*lensing*), итд.



Слика 1: Ограничења за опсервабилне параметре и предвиђања различитих инфлаторних модела [6].

Поред наведених параметара, који се најчешће израчунавају код инфлаторних модела, ограничења за моделе намећу се и додатним параметрима. Они

се дефинишу преко извода првог и виших редова параметара n_s и r по $\ln q$, тзв. ранинг (*running*) параметри. Астрофизичка мерења и посматрања налажу да вредности додатних параметара морају бити много мањи од јединице [6].

Глава 5

Тахионска динамика у стандардној теорији инфлације

5.1 Тахиони

Историјски гледано, термин тахион означава честицу која се креће брзином већом од брзине светлости. На основу израза за интензитет брзине ($v > 1$ у природном систему јединица) релативистичке честице масе m

$$v = \frac{p}{\sqrt{p^2 + m^2}}, \quad (5.1)$$

где је p интензитет импулса, следи закључак да је тахиону - честици - придружен негативан квадрат масе [80].

Појам масе у контексту квантне теорије поља се разликује од конвенционалног појма масе. Нека је $V(\phi)$ потенцијал скаларног поља ϕ . Развој потенцијала у ред у околини тачке екстремума генерише члан облика $1/2V_{,\phi\phi}\phi^2$ у лагранжијану. У теорији поља, константа са негативним предзнаком која множи квадрат (канонског) поља представља квадрат масе честице коју то поље описује ($m^2 = V_{,\phi\phi}$). Јасно је да квадрат масе има негативну вредности када је $V_{,\phi\phi} < 0$. Основно стања у теорији поља назива се вакуумом, а ексцитована стања одговарају честицама. Спектар теорије добија се пертурбацијом основног стања. Појава тахионских стања при квантизацији (скаларног) поља објашњава се тиме да је извршен развој потенцијала у тачки његовог максимума (лажни вакуум), а не минимума. Из тог разлога се појава тахионских стања везује за нестабилне конфигурације и фазне прелазе. Квантовање тахионских поља остаје интересно и отворено питање у физици.

5.2 Тахиони у теорији струна и космологији

У теорији струна различити модови којима осцилују струне карактеришу се енергијом E и импулсом p . Сваком моду одговара честица са квадратом масе $E^2 - p^2$. Код тахионских честица је $E^2 - p^2 < 0$ [80].

Примена тахионског поља у космологији мотивисана је, пре свега, радовима А. Сена из области теорије струна [10, 11]. У радовима је показано да је распад нестабилних система D-брана праћен појавом тахиона. Процес је означен термином тахионска кондензација [81]. Преко тахионског поља може се описати материја у виду идеалног флуида, чији параметар стања ω узима вредност у интервалу $[-1, 0]$. Тахионско поље минимално купловано са гравитацијом може обезбедити инфлаторну динамику у најранијој епохи еволуције свемира и потенцијално описати динамику свемира са тамном материјом у епохама након инфлације [82]. То је мотивација за радове објављене протеклих година [30, 83, 84], као и за ову дисертацију.

5.3 Инфлаторна динамика тахионског поља

Динамика тахионских поља добро је проучавана у стандардној теорији инфлације [19, 23, 27, 85–88], у оквиру које је еволуција фактора скале одређена Фридмановим једначинама (2.30) и (2.32). Дејство за тахионско скаларно поље θ , у оквиру ефективне теорије, има облик

$$S_{\text{tach}} = - \int d^4x \sqrt{-g} V(\theta) \sqrt{1 - g^{\mu\nu} \theta_{,\mu} \theta_{,\nu}}, \quad (5.2)$$

где је $V(\theta)$ потенцијал тахионског поља, при чему је

$$\mathcal{L} = -V(\theta) \sqrt{1 - g^{\mu\nu} \theta_{,\mu} \theta_{,\nu}}, \quad (5.3)$$

тахионски лагранжијан DBI типа [12, 89]. У најопштијем случају лагранжијан DBI типа има облик [2]

$$\mathcal{L}(X, \theta) = -f^{-1}(\theta) \sqrt{1 - 2f(\theta)X} + f^{-1}(\theta) - V(\theta), \quad (5.4)$$

где је $f(\theta)$ произвољна функција поља. Одговарајући хамилтонијан, лагранжијану (5.3), је

$$\mathcal{H} = \frac{V(\theta)}{\sqrt{1 - g^{\mu\nu} \theta_{,\mu} \theta_{,\nu}}}. \quad (5.5)$$

Потенцијал тахионског типа подразумева оне потенцијале које имају особине

$$V(0) > 0, \quad V_{,\theta}(\theta > 0) < 0, \quad V(|\theta| \rightarrow \infty) \rightarrow 0. \quad (5.6)$$

Неки од потенцијала који задовољавају горе наведене услове, разматрани у моделима у оквиру стандардне теорије инфлације, су:

- експоненцијално опадајући потенцијал [82]

$$V(\theta) = V_0 e^{-\omega\theta}, \quad V_0 = \text{const}, \quad \omega = \text{const}, \quad (5.7)$$

- инверзни косинус хиперболички потенцијал [13]

$$V(\theta) = \frac{V_0}{\cosh(\omega\theta)}, \quad V_0 = \text{const}, \quad \omega = \text{const}, \quad (5.8)$$

- инверзни степени потенцијал [90]

$$V(\theta) = V_0 \theta^n, \quad V_0 = \text{const}, \quad \omega = \text{const}, \quad (5.9)$$

где је n негативан и реалан број.

Компоненте тензора енергије-импулса за материју која се описује тахионским пољем, дефинисане изразом (2.25), имају облик [91]

$$T_{\mu\nu} = \frac{V(\theta)}{\sqrt{1 - g^{\rho\lambda}\theta_{,\rho}\theta_{,\lambda}}} \theta_{,\mu}\theta_{,\nu} - g_{\mu\nu} V(\theta) \sqrt{1 - g^{\rho\lambda}\theta_{,\rho}\theta_{,\lambda}}. \quad (5.10)$$

Ако се уведе четворо-вектор брзине, чије су компоненте

$$u_\mu = \frac{\theta_{,\mu}}{\sqrt{g^{\rho\lambda}\theta_{,\rho}\theta_{,\lambda}}}, \quad (5.11)$$

онда се из израза за компоненте тензора могу „прочитати“ густина ρ и притисак p идеалног космолошког флуида

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu}. \quad (5.12)$$

За метрику FLRW типа

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \delta_{ij} dx^i dx^j, \quad (5.13)$$

уз услов да је поље просторно хомогено и изотропно $\theta \equiv \theta(t)$, израз за лагранжијан тахионског поља се поједностављује и своди на облик

$$\mathcal{L} = -V(\theta)\sqrt{1 - \dot{\theta}^2}. \quad (5.14)$$

Притисак и густина ефективног флуида у функцији тахионског поља постају

$$\rho \equiv \mathcal{H} = \frac{V(\theta)}{\sqrt{1 - \dot{\theta}^2}}, \quad p \equiv \mathcal{L} = -V(\theta)\sqrt{1 - \dot{\theta}^2}, \quad (5.15)$$

на основу којих се за параметар стања ω добија израз

$$\omega = -1 + \dot{\theta}^2. \quad (5.16)$$

Параметар стања ω има вредности у интервалу $-1 \leq \omega \leq 0$ и за разлику од инфлације са канонским скаларним пољем не зависи од облика потенцијала.

Квадрат адијабатске брзине звука је

$$c_A^2 \equiv \frac{\dot{p}}{\dot{\rho}} = -\omega \left(1 + \frac{2}{3} \frac{V_{,\theta}}{H\dot{\theta}V} \right), \quad (5.17)$$

док је израз за ефективну брзину звука

$$c_s^2 = \frac{\partial p / \partial \dot{\theta}^2}{\partial \rho / \partial \dot{\theta}^2} = -\omega. \quad (5.18)$$

У случају адијабатских пертурбација ове две брзине су једнаке [13].

5.3.1 Услови за инфлацију и параметри спорог котрљања

У тахионској инфлацији, у равном свемиру, укупно дејство за модел у коме је просторно хомогено тахионско поље минимално купловано са гравитацијом је

$$S = S_{\text{EH}} + S_{\text{tach}}. \quad (5.19)$$

Прва Фридманова једначина добија облик

$$H^2 = \frac{1}{3M_{\text{Pl}}^2} \frac{V(\theta)}{\sqrt{1 - \dot{\theta}^2}}, \quad (5.20)$$

док једначина континуитета (2.29), која одређује временску еволуцију тахионског поља, постаје

$$\frac{\ddot{\theta}}{1 - \dot{\theta}^2} + 3H\dot{\theta} + \frac{V_{,\theta}}{V} = 0. \quad (5.21)$$

За $\dot{\theta} \ll 1$ једначина (5.21) се своди на једначину Клајн-Гордоновог типа за хомогено скаларно поље, где члан $V_{,\theta}/V$ има формалну улогу (канонског) потенцијала. Друга Фридманова једначина се може записати у облику

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{1}{3M_{\text{Pl}}^2} \frac{V}{(1 - \dot{\theta}^2)^{1/2}} \left(1 - \frac{3}{2}\dot{\theta}^2 \right), \quad (5.22)$$

на основу које се добија ограничење¹ за вредност извода поља током инфлаторног периода

$$\dot{\theta}^2 < \frac{2}{3}, \quad (5.23)$$

и разликује се од случаја када је инфлација вођена стандардним (канонским) скаларним пољем ($\dot{\phi}^2 < V(\phi)$). Како би се обезбедило инфлаторно ширење, да подсетимо, неопходно је да параметар стања има негативну вредност ($\omega < -1/3$).

Инфлација траје довољно дуго уколико је у једначини (5.21) члан $\ddot{\theta}/(1 - \dot{\theta}^2)$ мањи од „фрикционог“ члана $3H\dot{\theta}$. Услови који обезбеђују период спорог котрљања имају облик

$$\dot{\theta}^2 \ll 1, \quad \ddot{\theta} \ll 3H\dot{\theta}. \quad (5.24)$$

У режиму спорог котрљања поједностављује се облик једначина (5.20) и (5.21)

$$H^2 \simeq \frac{V}{3M_{\text{Pl}}^2}, \quad (5.25)$$

$$\dot{\theta} \simeq -\frac{V_{,\theta}}{3HV}. \quad (5.26)$$

Параметри спорог котрљања, код модела инфлације са тахионским пољем и другим нестандартним инфлаторним моделима, могу се дефинисати на следећи начин [92]

$$\varepsilon_0 \equiv \frac{H_*}{H}, \quad \varepsilon_{j+1} \equiv \frac{d \ln |\varepsilon_j|}{dN}, \quad j \geq 0, \quad (5.27)$$

где је H_* вредност Хабловог параметра у произвољном тренутку времена и важи

$$\varepsilon_{j+1} = \frac{\dot{\varepsilon}_j}{H\varepsilon_j}. \quad (5.28)$$

¹Корисно је напоменути да овај услов ($\dot{\theta}^2 < \frac{2}{3}$) у знатној мери олакшава испитивање динамике тахионског поља у тахионској инфлацији јер је члан $\sqrt{1 - \dot{\theta}^2}$ у (5.14) увек реалан.

Прва два параметра спорог котрљања могу се записати у облику

$$\varepsilon_1 = -\frac{\dot{H}}{H^2}, \quad (5.29)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{H} \frac{\ddot{H}}{\dot{H}} + 2\varepsilon_1. \quad (5.30)$$

Користећи Фридманове једначине, параметри спорог котрљања се могу написати у функцији тахионског поља и Хабловог параметра

$$\varepsilon_1 = \frac{3}{2}\dot{\theta}^2, \quad (5.31)$$

$$\varepsilon_2 = 2\frac{\ddot{\theta}}{H\dot{\theta}}. \quad (5.32)$$

Користећи изразе који важе у режиму спорог котрљања могу се извести изрази за параметре ε_1 и ε_2 у функцији потенцијала [13].

Еволуција Хабловог параметра у зависности од тахионског поља одређена је Хамилтон-Јакобијевом једначином

$$H_{,\theta}^2 - \frac{9}{4}H^4(\theta) + \frac{1}{4M_{\text{Pl}}^2}V^2(\theta) = 0, \quad (5.33)$$

и њено решење има особине атрактора [13]. Прва Фридманова једначина у инфлаторном моделу са стандардним скаларним канонским пољем ϕ , коме одговара потенцијал $V(\phi)$, може се записати у облику

$$H^2 \left[1 - \frac{1}{3}\epsilon_H(\phi) \right] = \frac{1}{3M_{\text{Pl}}^2}V(\phi), \quad (5.34)$$

где је параметар $\epsilon_H = \varepsilon_1$ дефинисан изразом (3.31). Из (5.20) добија се

$$H^2 \left[1 - \frac{2}{3}\varepsilon_1(\theta) \right]^{1/2} = H^2 \left[1 - \frac{1}{3}\varepsilon_1(\theta) \right] + \mathcal{O}(\varepsilon_1^2) = \frac{1}{3M_{\text{Pl}}^2}V(\theta), \quad (5.35)$$

што значи да је динамика тахионског поља слична динамици канонског скаларног поља.

5.3.2 Скаларни спектрални индекс и количник тензора и скалара

У тахионској инфлацији, на основу (4.59), користећи (5.15) и (5.31), добија се

$$z = \frac{a}{c_s} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{4\pi G_N}}. \quad (5.36)$$

Спектри снаге скаларних и тензорских пертурбација за инфлацију вођену тахионским пољем су задати изразима [13]

$$\mathcal{P}_S^{1/2} = \frac{H}{2\sqrt{2}M_{\text{Pl}}\sqrt{\varepsilon_1}c_s} \left[1 - (1 + C - \alpha)\varepsilon_1 - \frac{1}{2}C\varepsilon_2 \right], \quad (5.37)$$

$$\mathcal{P}_T^{1/2} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{H}{M_{\text{Pl}}} [1 - (1 + C)\varepsilon_1], \quad (5.38)$$

где је $C = -2 + \ln 2 + \gamma \simeq -0.72$, γ Ојлерова константа и константа $\alpha = 1/6$. На основу добијених израза се изводе изрази за опсервабилне параметре у стандардној (*standard*, *st*) тахионској теорији инфлације

$$n_s|_{\text{st}} = 1 - 2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - 2\varepsilon_1^2 - (2C + 3 - 2\alpha)\varepsilon_1\varepsilon_2 - C\varepsilon_2\varepsilon_3, \quad (5.39)$$

$$r|_{\text{st}} = 16\varepsilon_1(1 + C\varepsilon_2 - \varepsilon_1/3). \quad (5.40)$$

Изрази за опсервабилне параметре за тахионско поље у првом реду развоја по параметрима спорог котрљања идентични су са изразима за модел инфлације са канонским скаларним пољем [13].

5.4 Проблеми са тахионском инфлацијом

На одређене проблеме модела са тахионским пољем указано је релативно брзо након Сенових претпоставки [26]. Динамика коју има инфлација са тахионским пољем не може обезбедити довољно дуг период инфлације, неопходан да би предвиђања инфлаторних модела била конзистентна са ограничењима добијеним на основу мерења СМВ зрачења. Слободније говорећи: тахионска инфлација је „пребрза“, или траје „прекратко“.

Тахионски потенцијал нема ни потребне особине како би процес рихитинга био могућ („грациозни“ излаз из инфлације). Модели са тахионским пољем су

генерално суочени са тешкоћама да се након инфлаторне фазе креира „конвенционална“ материја. Упркос наведеним недостацима, тахински модели успешно и „природно“ описују почетак инфлације и њену рану фазу. Такође, нуди „занимљиву“ везу између теорије струна и настанка - инфлаторне фазе свемира. Зато се улога тахионских поља разматра у оквиру неких других модела, као што су космологија „света на брани“, Рандал-Сундрум модели и други. Овим ћемо се бавити више у следећим главама.

Глава 6

Космологија света на брани

Интензивна теоријска разматрања, могли бисмо рећи - пре свега у теорији струна, дала су потпору идеји о постојању додатних (скривених) димензија. Поред примена у теорији елементарних честица, модели са додатним димензијама имају и значајне космолошке импликације [93, 94]. Космологија света на брани (*braneworld cosmology*) базирана је на идеји да се материја налази на брани (својеврсна, вишедимензиона генерализација појма (једнодимензионе) струне), која се налази у вишедимензионом простор-времену, при чему једино гравитација делује и у додатним димензијама [95]. Код ове класе модела Фридманове једначине немају исти облик као у случају стандардне космологије. Логично је очекивати да ће услед наведене разлике и инфлација имати другачији карактер и особине. Тим питањем се бавимо у овој и следећој глави.

6.1 Идеје о додатним димензијама

Идеје о додатним димензијама имају значајану улогу у модерним физичким теоријама. У теорији гравитације, након заснивања ОТР, Т. Калуца¹ је предложио да се простор-времену дода пета димензија, са циљем да се постигне јединствен опис гравитационих и електромагнетних појава на класичном нивоу [96]. Истраживања на овом пољу са аспекта квантне механике проширена су радом О. Клајна² [97]. Назив за вишедимензионе теорије гравитације овог типа су Калуца-Клајнове (*Kaluza-Klein*, КК) теорије.

Појава теорије струна и њен развој који траје више од пет деценија показује да „додатне“ димензије нису само могуће или пожељне, већ неопходне да би теорија струна била конзистентна. Зависно од приступа, укупан број просторно-временских димензија би могао бити 10, 11 или 26 [98]. При томе, увек је

¹ енг. *Theodor Kaluza*.

² енг. *Oskar Klein*.

само једна димензија временска, три су макроскопске, а преостале просторне не опажамо јер су, у реалности, компактификоване, савијене, са радијусом који је јако мали, могао би бити и реда Планкове дужине ($l_{\text{Pl}} \sim 10^{-35}$ m) [99].

Знатно касније, са циљем да се реши проблем хијерархије у физици честица, конструисан је ADD (*Arkani-Dimopoulos-Dvali*) модел [100]. Модел се базира на идеји да су честице Стандардног модела локализоване на брани, која је смештена у раван простор, са бројем (просторних) димензија већим од три. Честице не осећају присуство додатних димензија, јер у њима једино делује гравитација. Модел дозвољава постојање додатних димензија које не морају бити „мале“, за разлику од предвиђања КК модела.

Модел Л. Рандал³ и Р. Сундрума⁴, тзв. први Рандал-Сундрум модел (RSI), предложен је, иницијално, у теорији елементарних честица, такође са циљем да се реши проблем хијерархије [8]. Модел предвиђа постојање једне додатне просторне димензије, компактификоване на кругу, услед чега се она не опажа. Динамика модела одређена је са две $3 + 1$ бране, супротних тензија (*tension*), у $4 + 1$ димензионом, анти де Ситеровом (AdS) простору [101], чије компоненте метричког тензора представљају максимално симетрично решење Ајнштајнових једначина са негативном космолошком константом. Честице Стандардног модела налазе се на брани са (константном) негативном тензијом бране. Растојање између брана мери се у додатној димензији у којој делује само гравитација. По стандардној терминологији, простор у коме пропадају бране (струне) назива се балк (*bulk*), док се простор-време са димензијом мање назива границом. Једна од битних разлика у односу на ADD модел је што је простор у балку закривљен.

6.2 Рандал-Сундрум II модел

Модификацијом RSI модела настао је Други Рандал-Сундрум модел (RSII) [9], у коме је брана са негативном тензијом смештена у бесконачност (у додатној димензији). У овом моделу не постоји потреба за компактификацијом и нашао је много примена у космологији.

Ако се уведу координате $x^a = (x^\mu, y)$ метрика у балку се може записати у облику [102]

$$ds^2 = G_{ab}dx^a dx^b = e^{-2A(y)}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - dy^2, \quad a, b = \overline{0, 4}, \quad (6.1)$$

³ енг. *Lisa Randall*.

⁴ енг. *Raman Sundrum*.

где је $A(y)$ функција додатне просторне димензије y , а $\eta_{\mu\nu}$ компоненте четвородимензионог метричког тензора метрике Минковског⁵. Облик метрике је у складу са захтевом да је простор у три просторне димензије хомоген и изотропан. Експоненцијални фактор у метрици, ворп (*warp*) фактор, је функција координате која одговара додатној (петој) димензији, услед чега се простор не може приказати (факторизовати) као производ простора Минковског и многострукости додатне димензије.

Укупно дејство за RSII модел чине дејство за гравитацију у балку

$$S = \frac{1}{8\pi G_5} \int d^5x \sqrt{G} \left[-\frac{R^{(5)}}{2} - \Lambda_5 \right], \quad (6.2)$$

и дејство за брану (без материје) [103]

$$S_{\text{br}}[\gamma] = - \int d^4x \sqrt{-\gamma} \sigma, \quad (6.3)$$

где је G_5 гравитациона константа, Λ_5 космолошка константа у (петодимензионом) балку, σ тензија бране и γ детерминанта метричког тензора метрике на брани са компонентама $\gamma_{\mu\nu}$, $\gamma = \det(\gamma_{\mu\nu})$.

У оригиналној поставци је претпостављена Z_2 симетрија, што значи да је додатна димензија инваријантна на (огледалску) трансформацију облика $y \rightarrow -y$. Непозната функција $A(y)$ у метрици (6.1) се може наћи на основу решења Ајнштајнових једначина за балк [102]

$$6A'^2 = -\Lambda_5, \quad (6.4)$$

$$3A'' = 8\pi G_5 \sigma \delta(y), \quad (6.5)$$

где је $A' = \partial A / \partial y$ и $\delta(y)$ Диракова делта функција. Интеграцијом прве једначине добија се

$$A(y) = \sqrt{\frac{-\Lambda_5}{6}} y \equiv y/\ell, \quad (6.6)$$

што значи да космолошка константа Λ_5 мора бити негативна. Метрика у облику

$$ds^2 = e^{-2|y|/\ell} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dy^2, \quad (6.7)$$

⁵ нем. *Hermann Minkowski*.

дефинише AdS_5 простор [104] полупречника кривине ℓ [105]

$$R^{(5)} = -\frac{20}{\ell^2}. \quad (6.8)$$

Након интеграције једначине (6.5), у границама од $-\epsilon$ до ϵ , при чему $\epsilon \rightarrow 0$, добија се израз

$$6A' \Big|_0 = 8\pi G_5 \sigma, \quad (6.9)$$

на основу кога следи израз који даје везу између тензије бране и петодимензионе космолошке константе

$$\sigma = \frac{6}{8\pi G_5} \sqrt{\frac{-\Lambda_5}{6}} = \frac{6}{8\pi G_5 \ell}. \quad (6.10)$$

У статичком балку тензија бране „подешена“ је космолошком константом Λ_5 . Да би се обухватио случај када не важи Z_2 симетрија, тензија бране се може записати у функцији параметра s (*sidedness* параметар) [103, 106]

$$\sigma = \frac{3s}{8\pi G_5 \ell}, \quad (6.11)$$

чија је вредност у том случају $s = 1$, док је у случају постојања Z_2 симетрије $s = 2$.

У оригиналној поставци RSII модела простор на брани је статичан. За примену у космологији у RSII моделу је потребно узети метрику на брани у FLRW форми. Показује се да је у том случају прва Фридманова једначина [106, 107]

$$H^2 = \frac{1}{3M_{\text{Pl}}^2} \rho \left(1 + \frac{\rho}{2\sigma}\right) + \frac{\mu \ell^2}{a^4}, \quad (6.12)$$

где је вредност тензије бране одређена изразом (6.11). Вредност параметра μ је повезана са масом црне рупе M_{bh} [108]

$$\mu = \frac{8G_5 M_{\text{bh}}}{3\pi \ell^2}, \quad (6.13)$$

која може настати у AdS_5 простору [101]. Последњи сабирак, на десној страни једначине (6.12), формално описује „тамно“ зрачење (*dark radiation*). Очигледно је да ова једначина има другачији облик у односу на прву Фридманову једначину у стандардној космологији (2.30).

Динамика додатне бране у RSII моделу се ефективно може описати динамиком тахионског скаларног поља са потенцијалом $V(\theta) \propto \theta^{-4}$ [29], услед чега се јавило интересовање да се тахионска инфлација проучава код ове класе модела [30].

6.2.1 Модификовани RSII модел

Други Рандал-Сундрум модел се проширује укључењем материје и у балку. Присуство материје мења ворп фактор који доводи до модификоване инфлаторне динамике.

У конформним координатама, $4 + 1$ димензиони линијски елемент има облик

$$ds^2 = G_{ab}dx^a dx^b = \frac{1}{\chi^2(z)} (g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - dz^2). \quad (6.14)$$

За AdS_5 балк функција χ је $\chi = z/\ell$. Може се увести параметризација $x^a = (x^\mu, \theta)$, где је координата z замењена тахионским пољем $\theta(x^\mu)$, за коју се индукује метрика на брани у облику [69]

$$\gamma_{\mu\nu} = \frac{1}{\chi^2(\theta)} (g_{\mu\nu} - \theta_{,\mu} \theta_{,\nu}). \quad (6.15)$$

Дејство, за брану (6.3), се своди на облик дејства за тахионско поље DBI типа

$$S_{\text{br}} = S_{\text{tach}} = -\sigma \int d^4x \frac{1}{\chi^4(\theta)} \sqrt{1 - g^{\mu\nu} \theta_{,\mu} \theta_{,\nu}}, \quad (6.16)$$

са лагранжијаном

$$\mathcal{L} = -V(\theta) \sqrt{1 - g^{\mu\nu} \theta_{,\mu} \theta_{,\nu}}, \quad (6.17)$$

и (тахионским) потенцијалом степеног облика

$$V(\theta) = \frac{\sigma}{\chi^4(\theta)}. \quad (6.18)$$

На основу метрике (6.14) изводи се прва Фридманова једначина [109]

$$H^2 = \sqrt{\frac{8\pi G_{\text{N}}}{3} \mathcal{H} \left(\frac{1}{k} \chi_{,\theta} + \frac{2\pi G_{\text{N}}}{3k^2} \mathcal{H} \right)}, \quad (6.19)$$

где је $k = G_{\text{N}}/G_5$ и \mathcal{H} хамилтонијан тахионског поља задат изразом (5.5). Инфлација у овом моделу проучена је у радовима [110, 111] и кратко поређење са резултатима стандардне тахионске космологије и резултатима Планк мисије су дати у глави 8.

6.3 Холографска дуалност

AdS/CFT кореспонденција се заснива на хипотези о еквиваленцији теорије гравитације у $n+1$ димензионом AdS простор-времену и конформне теорије поља (*Conformal Field Theory*, CFT) на n -димензионој граници тог простор-времена [34, 112]. Оригинално је уведена као веза између ПВ теорије суперструна на $\text{AdS}_5 \times \text{S}^5$ и $\mathcal{N} = 4$ суперсиметричне Јанг-Милсове (*Yang-Mills*) теорије дефинисане на M_4 , који представља конформну границу простора $\text{AdS}_5 \times \text{S}^5$ [33]. Еквивалентност две физичке теорије које су дефинисане у просторима различитих димензија носи назив холографска дуалност.

Дејство, за теорију дефинисану у балку, има општи облик

$$S[\Phi] = \int d^5x \sqrt{G} \mathcal{L}(\Phi, G_{ab}). \quad (6.20)$$

Вредност поља Φ у балку одређена је једначинама које се добијају на основу варијационог услова

$$\frac{\delta S}{\delta \Phi} = 0. \quad (6.21)$$

Нека је вредност поља на граници $\Phi(x, z=0) \equiv \phi(x)$ и нека су $\gamma_{\mu\nu}$ компоненте метрике индуковане на граници. Може се дефинисати функционал

$$S[\phi, \gamma] = S^{\text{sh}}[\Phi[\phi, \gamma]], \quad (6.22)$$

где је S^{sh} дејствено на граници (*shell bulk action*).

Основна идеја је да поље на граници представља извор за који се куплују оператори у дуалној теорији дефинисаној на граници. На основу AdS/CFT кореспонденције важи [113]

$$S[\phi, h] \equiv \ln \int d\psi \exp \left\{ - \int d^4x \sqrt{-|\gamma|} \left[\mathcal{L}^{\text{CFT}}(\psi(x)) - \hat{O}(\psi(x))\phi(x) \right] \right\}, \quad (6.23)$$

где је \mathcal{L}^{CFT} CFT лагранжијан, а $\hat{O}(\psi)$ CFT оператор (конформне) димензије Δ . Корелационе функције се израчунавају помоћу израза

$$\frac{\delta^2 S}{\delta \phi(x) \delta \phi(x)} = \langle \hat{O}(\psi(x)) \hat{O}(\psi(y)) \rangle - \langle \hat{O}(\psi(x)) \rangle \langle \hat{O}(\psi(y)) \rangle. \quad (6.24)$$

Очекиване вредности компоненти тензора енергије-импулса задате су изразом [113]

$$\langle T_{\mu\nu}^{\text{CFT}} \rangle = \frac{1}{2\sqrt{|\gamma|}} \frac{\delta S}{\delta \gamma^{\mu\nu}}. \quad (6.25)$$

6.4 Холографска космологија

Већ смо говорили о одређеним проблемима „стандардне“ тахионске космологије. Резултати [83] указују на одређено, али не и сасвим задовољавајуће, слагање са резултатима Планк мисије. Космолошки RSII модел, такође базиран на тахионској динамици, али у другом физичком контексту, показује знатно боље слагање са доступним опсервабилним резултатима [30]. Холографска космологија је „природан“ наставак у овом правцу истраживања и представља најважнији, оргинални, део и допринос дисертације.

Размотримо космолошки модел одређен динамиком $3 + 1$ димензионе бране, која је локализована у близини границе асимптотског AdS простора [32, 114–118]. Због наглашене холографске структуре, погодно је анализирати RSII модел користећи AdS/CFT кореспонденцију.

Метрика AdS₅ простора у Феферман-Грахам (*Fefferman-Graham*) координатама има облик [119]

$$ds^2 = G_{ab} dx^a dx^b = \frac{\ell^2}{z^2} (g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dz^2). \quad (6.26)$$

Између координата y и z постоји веза $z = \ell e^{y/\ell}$ [103]. У тачки $z = 0$ дефинисана је (конформна) граница у којој је метрика сингуларна. У близини границе се метричке функције могу развити у ред

$$g_{\mu\nu}(z, x) = g_{\mu\nu}^{(0)}(x) + z^2 g_{\mu\nu}^{(2)}(x) + z^4 g_{\mu\nu}^{(4)}(x) + \dots, \quad (6.27)$$

где се функције $g_{\mu\nu}^{(2n)}$, $n = 0, 1, 2$, задају преко $g_{\mu\nu}^{(0)}$ [120].

Дејство (6.2), за гравитацију у балку, је дивергентно и може се регуларизовати дејством за RSII брану која је локализована у близини границе, тј. у $z = \epsilon\ell$, $\epsilon \ll 1$. На брани се индукује метрика облика

$$\gamma_{\mu\nu} = \frac{1}{\epsilon^2} g_{\mu\nu}(\epsilon\ell, x) = \frac{1}{\epsilon^2} (g_{\mu\nu}^{(0)} + \epsilon^2 \ell^2 g_{\mu\nu}^{(2)} + \dots). \quad (6.28)$$

Брана се налази између две области у балку: $0 \leq z < \epsilon\ell$ и $\epsilon\ell \leq z < \infty$. У разматрањима у наставку, због једноставности [113], ограничимо се на област $z \geq \epsilon\ell$.

Регуларизовано дејство (6.2) има облик [121]

$$S^{\text{reg}}[\gamma] = \frac{1}{8\pi G_5} \int_{z \geq \epsilon \ell} d^5 x \sqrt{G} \left[-\frac{R^{(5)}}{2} - \Lambda_5 \right] + S_{\text{GH}}[\gamma] + S_{\text{br}}[\gamma], \quad (6.29)$$

где је S_{GH} Гибонс-Хокинг (*Gibbons-Hawking*) гранични члан, а S_{br} дејство за брану

$$S_{\text{br}}[\gamma] = \int d^4 x \sqrt{-\gamma} (-\sigma + \mathcal{L}_{\text{matt}}[\gamma]), \quad (6.30)$$

где је $\mathcal{L}_{\text{matt}}$ лагранжијан материје (на брани). Дејство се ренормализује додавањем додатних чланова

$$S^{\text{ren}}[\gamma] = S^{\text{reg}}[\gamma] + S_1[\gamma] + S_2[\gamma] + S_3[\gamma], \quad (6.31)$$

у лимесу $\epsilon \rightarrow 0$. Додатни чланови су облика [120]

$$S_1[\gamma] = -\frac{6}{16\pi G_5 \ell} \int d^4 x \sqrt{|\gamma|}, \quad (6.32)$$

$$S_2[\gamma] = -\frac{\ell}{16\pi G_5} \int d^4 x \sqrt{|\gamma|} \left(-\frac{R|\gamma|}{2} \right), \quad (6.33)$$

$$S_3[\gamma] = -\frac{\ell^3}{16\pi G_5 \ell} \int d^4 x \sqrt{|\gamma|} \frac{\log \epsilon}{4} \left(R^{\mu\nu}[\gamma] R_{\mu\nu}[\gamma] - \frac{1}{3} R^3[\gamma] \right). \quad (6.34)$$

Сада, када имамо ренормализовано дејство, имамо могућност да изведемо ефективне Ајнштајнове једначине на холографској граници, а затим холографске Фридманове једначине на основу којих ћемо проучавати инфлацију.

6.4.1 Фридманове једначине у холографској космологији

Варијација регуларизованог дејства, по индукованој метрици $\gamma_{\mu\nu}$

$$\delta S^{\text{reg}}[\gamma] = 0, \quad (6.35)$$

се може, на основу израза (6.31), записати у облику

$$\begin{aligned} & \delta \left[S^{\text{ren}} - S_3 - \left(\sigma - \frac{3}{8\pi G_5} \right) \int d^4 x \sqrt{-\gamma} \right. \\ & \left. + \int d^4 x \sqrt{-\gamma} \mathcal{L}_{\text{matt}} - \frac{\ell}{16\pi G_5} \int d^4 x \sqrt{-\gamma} \frac{R[\gamma]}{2} \right] = 0. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Израз се поједностављује захтевом да је тензија бране „подешена“ космолошком константом у балку, што значи да је вредност тензије одређена изразом (6.11).

Ефективне Ајнштајнове једначине на холографској граници су облика

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}^{(0)} = 8\pi G_N (\langle T_{\mu\nu}^{\text{CFT}} \rangle + T_{\mu\nu}), \quad (6.37)$$

где се за T_{ν}^{μ} компоненте тензора енергије-импулса материје за идеални флуид на брани узима

$$T_{\nu}^{\mu} = \text{diag}(\rho, -p, -p, -p). \quad (6.38)$$

На основу AdS/CFT кореспонденције, очекиване вредности компоненти тензора енергије-импулса у конформној теорији рачунају се на основу израза

$$\langle T_{\mu\nu}^{\text{CFT}} \rangle = \frac{2}{\sqrt{-\gamma}} \frac{\delta S^{\text{ren}}}{\delta \gamma^{\mu\nu}} - \frac{2}{\sqrt{-\gamma}} \frac{\delta S_3}{\delta \gamma^{\mu\nu}}, \quad (6.39)$$

или

$$\langle T_{\mu\nu}^{\text{CFT}} \rangle = \frac{2}{\sqrt{-g^{(0)}}} \frac{\partial S^{\text{ren}}}{\partial g^{(0)\mu\nu}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial S^{\text{ren}}}{\partial g^{\mu\nu}}. \quad (6.40)$$

Тако се добија [121]

$$\langle T_{\mu\nu}^{\text{CFT}} \rangle = \frac{\ell^3}{4\pi G_5} \left\{ \frac{1}{8} [(\text{Tr}g^{(2)})^2 - \text{Tr}(g^{(2)})^2] g_{\mu\nu}^{(0)} + \frac{1}{2}(g^{(2)})_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{4}\text{Tr}g^{(2)}g_{\mu\nu}^{(2)}g_{\mu\nu}^{(2)} - g_{\mu\nu}^{(4)} \right\}, \quad (6.41)$$

где је траг тензора $g^{(2)}$ дефинисан изразом

$$\text{Tr}g^{(2)} = g^{(0)\mu\nu}g_{\mu\nu}^{(2)}. \quad (6.42)$$

Веза између G_5 и G_N задата је изразом [106]

$$G_5 = \frac{\ell G_N}{2}. \quad (6.43)$$

Уколико је метрика на холографској граници FLRW типа

$$ds_{(0)}^2 = g_{\mu\nu}^{(0)}dx^{\mu}dx^{\nu} = dt^2 - a^2(t)d\Omega_k^2, \quad (6.44)$$

добија се [35, 122]

$$\langle T_{\mu\nu}^{\text{CFT}} \rangle = t_{\mu\nu} + \frac{1}{4}\langle T_{\alpha}^{\text{CFT}\alpha} \rangle g_{\mu\nu}^{(0)}, \quad (6.45)$$

где је

$$\langle T_{\alpha}^{\text{CFT}\alpha} \rangle = \frac{3\ell^3}{16\pi G_5} \frac{\ddot{a}}{a} \left(H^2 + \frac{k}{a^2} \right). \quad (6.46)$$

Траг тензора чије су компоненте $t_{\mu\nu}$ је једнак нули. Вредности ненултих компоненти су

$$t_{00} = -3t_i^i = \frac{3\ell^3}{64\pi G_5} \left[\left(H^2 + \frac{k}{a^2} \right)^2 + \frac{4\mu}{a_0^4} - \frac{\ddot{a}_0}{\dot{a}_0} \left(H^2 + \frac{k}{a^2} \right) \right]. \quad (6.47)$$

На основу ефективних Ајнштајнових једначина, израз (6.37), изводе се Фридманове једначине у холографској космологији [35]

$$H^2 + \frac{k}{a^2} - \frac{\ell^2}{4} \left(H^2 + \frac{k}{a^2} \right)^2 = \frac{8\pi G_N}{3} \rho + \frac{\ell^2 \mu}{a^4}, \quad (6.48)$$

$$\left(\dot{H} - \frac{k}{a^2} \right) \left[1 - \frac{\ell^2}{2} \left(H^2 + \frac{k}{a^2} \right)^2 \right] = -4\pi G_N (\rho + p). \quad (6.49)$$

Разлике у холографским Фридмановим једначинама, у односу на Фридманове једначине у стандардној космологији (једначине (2.30) и (2.32)), су чланови директно пропорционални ℓ^2 .

Једначине, „холографске“, су основа за израчунавање опсервабилних параметара „базичног“ модела који разматрамо у дисертацији.

Глава 7

Модел тахионске инфлације у холографској космологији

У наставку ће бити приказани оригинални резултати, који представљају основу ове докторске дисертације [110, 123–127].

7.1 Динамика тахионске инфлације у холографској космологији

Као што смо видели, динамика тахионског поља одређена је лагранжијаном (5.3). Погодно је увести тахинско поље са димензијом дужине и разматрати лагранжијан облика

$$\mathcal{L} = -\ell^{-4}V(\theta/\ell)\sqrt{1 - g^{\mu\nu}\theta_{,\mu}\theta_{,\nu}}, \quad (7.1)$$

са кинетичким чланом

$$X = g^{\mu\nu}\theta_{,\mu}\theta_{,\nu}. \quad (7.2)$$

Ако се уведе бездимензиони Хаблов параметар $h \equiv \ell H$, Фридманове једначине у холографској космологији, једначине (6.48) и (6.49), за случај $k = 0$ и $\mu = 0$, могу се записати у облику [123]

$$h^2 - \frac{1}{4}h^4 = \frac{\kappa^2}{3}\ell^4\rho, \quad (7.3)$$

$$\dot{h} \left(1 - \frac{1}{2}h^2\right) = -\frac{\kappa^2}{2}\ell^3(p + \rho), \quad (7.4)$$

где је κ тзв. фундаментална константа купловања [69]

$$\kappa^2 = \frac{8\pi G_{\text{N}}}{\ell^2}. \quad (7.5)$$

Једначина (7.3), квадратна по h^2 , има два решења

$$h^2 = 2 \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{\kappa^2}{3} \ell^4 \rho} \right). \quad (7.6)$$

Физички прихватљиво решење се, у лимесу малих густина ($\kappa^2 \ell^4 \rho \ll 1$), своди на Фридманову једначину (2.30) за стандардну космологију. Из наведеног разлога „холографско“ решење које садржи знак (+) не узима се у разматрање. Хаблов параметар је задат изразом

$$h = \sqrt{2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\kappa^2}{3} \ell^4 \rho} \right)}. \quad (7.7)$$

Максималној вредности бездимензионог Хабловог параметра $h_{max} = \sqrt{2}$, одговара максимална вредност густине материје у свемиру $\rho_{max} = 3/(\kappa^2 \ell^4)$ [128]. Ако је испуњен услов $p + \rho \geq 0$ параметар h је монотono опадајућа функција времена, у складу са једначином (7.4). Еволуција свемира почиње у тренутку $t = 0$ у коме је $h_i \leq h_{max}$ и при коначним вредностима за густину енергије и фактора скале. Према томе, у холографској космологији не постоји иницијална сингуларност, што је једна од карактеристика и значајна предност модела са модификованим Фридмановим једначинама [129] у односу на многе друге.

7.1.1 Динамичке једначине

Хамилтонијан, придружен лагранжијану (7.1), има облик [69]

$$\mathcal{H} = \ell^{-4} V \sqrt{1 + \eta^2}, \quad (7.8)$$

где је

$$\eta = \ell^4 V^{-1} \sqrt{g_{\mu\nu} \pi^\mu \pi^\nu}, \quad (7.9)$$

а π^μ је коњуговани импулс дефинисан изразом

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_{,\mu}}. \quad (7.10)$$

Из система Хамилтонових једначина

$$\theta_{,\mu} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^\mu}, \quad \pi^\mu{}_{;\mu} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta}, \quad (7.11)$$

следе диференцијалне једначине¹ (једначине кретања), чија решења описују динамику тахионског поља θ

$$\dot{\theta} = \frac{\eta}{\sqrt{1+\eta^2}}, \quad (7.12)$$

$$\dot{\eta} = -\frac{3h\eta}{\ell} - \frac{V_{,\theta}}{V} \left(\sqrt{1+\eta^2} + \frac{\eta^2}{\sqrt{1+\eta^2}} \right). \quad (7.13)$$

Густина енергије и притисак оваквог флуида задати су, као и обично, изразима

$$p \equiv \mathcal{L} = -\ell^{-4}V\sqrt{1-X} = -\frac{\ell^{-4}V}{\sqrt{1+\eta^2}}, \quad (7.14)$$

$$\rho \equiv \mathcal{H} = \frac{\ell^{-4}V}{\sqrt{1-X}} = \ell^{-4}V\sqrt{1+\eta^2}, \quad (7.15)$$

где је сада $X = \dot{\theta}^2$.

7.1.2 Експоненцијални потенцијал

За додатно прецизирање модела неопходно је одабрати конкретан облик потенцијала. Избор облика потенцијала одређен је условима (5.6), који дефинишу класу потенцијала тахионског типа. Потенцијал облика

$$V = V_0 e^{-\omega|\theta|/\ell}, \quad (7.16)$$

је један од најједноставнијих и „најприроднијих“. Интензивно је проучаван у радовима посвећеним тахионским конфигурацијама у теорији струна [82, 130, 131]. Слободни параметри V_0 и ω су бездимензиони и имају позитивне вредности. Ако се редефинише вредност поља $\theta \rightarrow \theta - \theta_i$, где је $\theta_i = -\ell\omega^{-1} \ln V_0$ његова иницијална вредност, у физички релевантној области $\theta_i \leq \theta < \infty$, потенцијал добија облик

$$V = e^{-\omega(\theta_i+|\theta-\theta_i|)/\ell} = e^{-\omega\theta/\ell}. \quad (7.17)$$

Тиме се параметар V_0 може елиминисати. Вредност θ_i је произвољна и фиксира се избором почетне вредности Хабловог параметра h .

Ако се уведе бездимензионо време $\tilde{t} = t/\ell$ и нова променљива y као функција поља θ

$$y = \frac{\kappa^2}{3} e^{-\omega\theta/\ell}, \quad (7.18)$$

¹ У једначини (7.13), приликом анализе динамике модела у референци [123], занемарен је допринос другог сабирка у загради.

динамичке једначине (7.12) и (7.13) се могу записати у облику

$$\frac{dy}{d\tilde{t}} = -\frac{\omega y \eta}{\sqrt{1 + \eta^2}}, \quad (7.19)$$

$$\frac{d\eta}{d\tilde{t}} = -3\eta \left(2 - 2\sqrt{1 - y\sqrt{1 + \eta^2}} \right)^{1/2} + \omega \left(\sqrt{1 + \eta^2} + \frac{\eta^2}{\sqrt{1 + \eta^2}} \right). \quad (7.20)$$

Важно је нагласити да у случају потенцијала експоненцијалног облика у динамичким једначинама не фигурише константа купловања κ . Тиме се из модела елиминисе још један параметар.

Процена почетних услова

Облик динамичких једначина (7.19) и (7.20) указује на неопходност да се овај систем једначина решава нумеричким путем². У конкретном случају за нумеричко решавање једначина неопходно је узети почетне вредности функција θ (или y) и η . Систем једначина се решава уз претпоставку да је у тренутку $t = 0$ вредност Хабловог параметра $h_i \leq \sqrt{2}$ унапред позната. За произвољно изабрану почетну вредност η_i , почетна вредност θ_i (или y_i) се може проценити и израчунати на основу једначине (7.3). Овде разматрамо почетне услове који могу бити: $\eta_i = 0$ или $\dot{\eta}_i = 0$.

У случају $\eta_i = 0$, на основу једначина (7.14) и (7.15), добија се израз

$$p_i = -\rho_i. \quad (7.21)$$

Вредност \dot{h} је коначна, чак и за $h_i = \sqrt{2}$, што следи из једначине (7.4). Иницијална вредност поља θ_i се израчунава помоћу израза

$$V(\theta_i) = \frac{3}{\kappa^2} \left(h_i^2 - \frac{h_i^4}{4} \right), \quad (7.22)$$

који, пак, следи из (7.3) и (7.14). За случај експоненцијалног потенцијала (7.17), користећи (7.3) и (7.15) добија се

$$\theta_i = -\frac{\ell}{\omega} \ln \left[\frac{3}{\kappa^2} \left(h_i^2 - \frac{h_i^4}{4} \right) \right], \quad (7.23)$$

²Аналитичко решавање система једначина (7.19) и (7.20) би захтевало таква поједностављења да би на овом нивоу биле изгубљене све кључне карактеристике модела.

односно

$$y_i = h_i^2 - \frac{h_i^4}{4}. \quad (7.24)$$

Други случај ($\dot{\eta}_i = 0$) се разликује од првог по томе што су решења једначина у складу са условима спорог котрљања, што ће бити показано у наставку (одељак 7.2). Из једначине (7.13) се добија

$$\eta_i = \frac{(\ell V_{,\theta}/V)_i}{\sqrt{9h_i^2 - 4(\ell V_{,\theta}/V)_i^2 + 3\sqrt{9h_i^4 - 4h_i^2(\ell V_{,\theta}/V)_i^2}}}, \quad (7.25)$$

док из (7.3) следи

$$\left(1 - \frac{h_i^2}{2}\right)^2 = 1 - \frac{\kappa^2}{3} V(\theta_i) \sqrt{1 + \eta_i^2}. \quad (7.26)$$

За конкретан облик потенцијала, на основу једначина (7.25) и (7.26), могу се одредити почетне вредности η_i и θ_i . За експоненцијални потенцијал (7.17), почетне вредности се могу израчунати на основу израза³

$$\eta_i = \frac{\omega}{\sqrt{9h_i^2 - 4\omega^2 + 3\sqrt{9h_i^4 - 4h_i^2\omega^2}}}, \quad (7.27)$$

$$\theta_i \approx -\frac{\ell}{\omega} \ln \left[\frac{3}{\kappa^2} \left(h_i^2 - \frac{h_i^4}{4} \right) \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{9h_i^2}} \right]. \quad (7.28)$$

Вредност променљиве y у почетном тренутку износи

$$y_i \approx \left(h_i^2 - \frac{h_i^4}{4} \right) \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{9h_i^2}}. \quad (7.29)$$

На основу израза (7.27) следе ограничења: $0 < \omega < 3/2\sqrt{2}$ и $h_i > 2/3\omega$. Вредност η_i је увек позитивна. Ако је $h_i = \sqrt{2}$ бројна вредност за \dot{h}_i је негативна и није коначна. Приликом нумеричких израчунавања потребно је одабрати вредности слободних параметара модела, као и почетне услове, у складу са добијеним ограничењима.

³На основу израза (7.28) израчунава се приближна вредност за θ_i . Израз (7.28) је добијен у апроксимацији спорог котрљања, користећи израз (7.13) у коме је занемарен допринос другог сабирка у загради.

7.1.3 Инверзни косинус хиперболички потенцијал

Поред експоненцијалног потенцијала у холографском моделу инфлације разматрамо и тахионски потенцијал облика

$$V = \frac{V_0}{\cosh(\omega\theta/\ell)}. \quad (7.30)$$

За разлику од експоненцијалног потенцијала, за потенцијал облика (7.30) није могуће елиминисати константу κ из динамичких једначина (7.12) и (7.13), а самим тим ни смањити број параметара у моделу. Међутим, како у динамичким једначинама параметар V_0 увек фигурише у облику производа $\kappa^2 V_0$, можемо редефинисати константу κ

$$\kappa^2 V_0 \rightarrow \kappa^2, \quad (7.31)$$

и разматрати потенцијал са једним слободним параметром (ω)

$$V = \frac{1}{\cosh(\omega\theta/\ell)}. \quad (7.32)$$

Процена почетних услова

У случају $\eta_i = 0$, почетна вредност поља θ_i израчунава се на основу израза

$$\theta_i \simeq \frac{\ell}{\omega} \operatorname{arccosh} \left[\frac{\kappa^2}{3 \left(1 - \left(1 - \frac{h_i^2}{2} \right)^2 \right)} \right], \quad (7.33)$$

који се добија на основу једначине (7.3).

Одређивање почетних вредности η_i и θ_i , у режиму спорог котрљања $\dot{\eta}_i = 0$, базира се на нумеричком решавању једначине добијене заменом (7.25) у (7.26), за дате вредности κ и h_i . Алтернативни приступ, који се такође може применити, је да се за унапред задату вредност h_i на основу израза (7.25) израчуна η_i и вредност κ користећи израз [125–127]

$$\kappa^2 = \frac{3}{V(\theta_i) \sqrt{1 + \eta_i^2}} \left(1 - \left(1 - \frac{h_i^2}{2} \right)^2 \right), \quad (7.34)$$

који се такође добија из једначине (7.3).

7.2 Инфлација на холографској брани

У овом одељку разматрамо инфлацију у холографском моделу са експоненцијалним потенцијалом (7.17).

Режим спорог котрљања дефинишу услови спорог котрљања задати неједнакостима (5.24). На основу једначине (7.12) следи еквивалентан облик ових услова за η

$$\eta \ll 1, \quad |\dot{\eta}| \ll \frac{3h}{\ell}\eta. \quad (7.35)$$

Друга неједнакост је конзистентна са почетним условом $\dot{\eta}_i = 0$. У режиму спорог котрљања оправдано је занемарити фактор $(1 - \dot{\theta}^2)^{-1/2} = (1 + \eta^2)^{1/2}$ у једначинама (7.14) и (7.15). Следи да се квадрат Хабловог параметра, у режиму спорог котрљања, може записати на начин

$$h^2 \simeq 2(1 - \sqrt{1 - \kappa^2 V/3}). \quad (7.36)$$

Ако се услови (5.24) и (7.35) примене на (7.12) и (7.13) добија се

$$\dot{\theta} \simeq -\frac{\ell V_{,\theta}}{3hV}, \quad (7.37)$$

$$\ddot{\theta} \simeq \frac{\ell V_{,\theta} \dot{h}}{3Vh^2} + \left[\left(\frac{V_{,\theta}}{V} \right)^2 - \frac{V_{,\theta\theta}}{V} \right] \frac{\ell \dot{\theta}}{3h}. \quad (7.38)$$

На основу рекурентног израза за параметре спорог котрљања (5.28) за прва два параметра се добија

$$\varepsilon_1 \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} \simeq \frac{4 - h^2}{12h^2(2 - h^2)} \left(\frac{\ell V_{,\theta}}{V} \right)^2, \quad (7.39)$$

$$\varepsilon_2 \equiv \frac{\dot{\varepsilon}_1}{H\varepsilon_1} \simeq 2\varepsilon_1 \left(1 - \frac{2h^2}{(2 - h^2)(4 - h^2)} \right) + \frac{2\ell^2}{3h^2} \left[\left(\frac{V_{,\theta}}{V} \right)^2 - \frac{V_{,\theta\theta}}{V} \right]. \quad (7.40)$$

Током инфлације је $\varepsilon_1 < 1$ и $\varepsilon_2 < 1$, а инфлација се завршава у тренутку када један од предходна два услова престане да важи. Услед једнакости

$$\left(\frac{V_{,\theta}}{V} \right)^2 = \frac{V_{,\theta\theta}}{V} = \frac{\omega^2}{\ell^2}, \quad (7.41)$$

последњи сабирак у изразу (7.40) је једнак нули што је додатна погодност код

експоненцијалног облика потенцијала. Како је услов $h^2 \ll 1$ испуњен при крају периода инфлације, важи апроксимативна релација $\varepsilon_2 \simeq 2\varepsilon_1$, стога се крај инфлације може дефинисати условом $\varepsilon_{2f} = 1$.

Параметар ε_3 , у случају експоненцијалног облика потенцијала у апроксимацији спорог котрљања, је задат изразом

$$\varepsilon_3 \equiv \frac{\dot{\varepsilon}_2}{H\varepsilon_2} \simeq \varepsilon_2 + \frac{4h^2(8-h^4)}{(2-h^2)(4-h^2)(8-8h^2+h^4)}\varepsilon_1. \quad (7.42)$$

Вредност параметра ε_3 је потребна за израчунавање вредности посматрачких параметара (Додатак Б) у развоју до другог реда по параметрима спорог котрљања.

Интеграцијом једначине (7.37) добија се израз за време t у функцији Хабловог параметра h , који важи током режима спорог котрљања,

$$t = \frac{3\ell}{\omega^2} \left[2(h_i - h) + \ln \frac{(2-h_i)(2+h)}{(2+h_i)(2-h)} \right]. \quad (7.43)$$

Овде је константа интеграције изабрана тако да је $h = h_i$ у тренутку $t = 0$. У нумеричким израчунавањима вредност за h_i^2 се узима у интервалу $0 \leq h_i^2 \leq 2$.

Апроксимативна вредност за број е-фолдова се израчунава на основу израза

$$N \simeq -3 \int_{\theta_i}^{\theta_f} \frac{h^2 V}{\ell^2 V_{,\theta}} d\theta, \quad (7.44)$$

добијеном на основу (3.28) и (7.37). Интеграл који се јавља у изразу (7.44) се може решити аналитички уколико се уведе нова променљива

$$x \equiv 1 - h^2/2 = \sqrt{1 - \kappa^2 e^{-\omega\theta/\ell}/3}. \quad (7.45)$$

Добија се израз

$$N = \frac{6}{\omega\ell}(\theta_f - \theta_i) - \frac{12}{\omega^2} \int_{x_i}^{x_f} \frac{x^2 dx}{1-x^2}, \quad (7.46)$$

где је

$$x_{i,f} = 1 - h_{i,f}^2/2 = \sqrt{1 - \kappa^2 e^{-\omega\theta_{i,f}/\ell}/3}. \quad (7.47)$$

Вредност поља на крају инфлације одређује се на основу услова за крај инфлације

$$\varepsilon_{2f} \simeq \frac{\omega^2}{\kappa^2 V_f} = \frac{\omega^2}{\kappa^2} e^{\omega\theta_f/\ell} = 1, \quad (7.48)$$

на основу кога се добија

$$\theta_f = \frac{\ell}{\omega} \ln \frac{\kappa^2}{\omega^2}, \quad (7.49)$$

као и

$$x_f = \sqrt{1 - \omega^2/3}. \quad (7.50)$$

Везу између параметра ω , броја е-фолдова N и иницијалне вредности h_i налазимо користећи израз (7.46)

$$N = \frac{12}{\omega^2} \left[\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{3}} - 1 + \frac{h_i^2}{2} + \ln \left(2 - \frac{h_i^2}{2} \right) - \ln \left(1 + \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{3}} \right) \right]. \quad (7.51)$$

Израз (7.51) за број е-фолдова N се може апроксимирати тако да се добија

$$N \simeq \frac{12}{\omega^2} \left[\frac{h_i^2}{2} + \ln \left(1 - \frac{h_i^2}{4} \right) \right] - 1. \quad (7.52)$$

За експоненцијални потенцијал (7.17), вредност N , као и вредност параметара спорог котрљања, не зависи од константе купловања κ . На основу израза (7.52) може се одредити вредност параметра ω за задате вредности N и h_i , што ће бити коришћено при нумеричком израчунавању посматрачких параметара.

7.3 Инфлаторни атрактор

На значај инфлаторног решења са особинама атрактора указано је у одељку 3.7. Анализирамо холографски модел са циљем да испитамо да ли поседује особине које дефинишу инфлаторни атрактор.

Општи облик једначине кретања у фазном простору је облика [125]

$$\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = g(\theta, \dot{\theta}). \quad (7.53)$$

Функција $g(\theta, \dot{\theta})$ се може одредити на основу лагранжијана модела.

Притисак и густина идеалног флуида материје, чије су особине одређене лагранжијаном \mathcal{L} (и хамилтонијаном \mathcal{H}) су

$$p \equiv \mathcal{L}, \quad \rho \equiv \mathcal{H}. \quad (7.54)$$

Уколико је познат лагранжијан материје, хамилтонијан се може израчунати користећи Лежандрову трансформацију

$$\mathcal{H} = \dot{\theta} \mathcal{L}_{,\dot{\theta}} - \mathcal{L}. \quad (7.55)$$

Диференцирањем по времену израза (7.55) добија се

$$\dot{\rho} = \dot{\theta} \frac{dp_{,\dot{\theta}}}{dt} - p_{,\theta} \dot{\theta}. \quad (7.56)$$

Заменом (7.54) у (7.55) добија се једначина на основу које се једначина континуитета (2.29) може записати у облику

$$\dot{\rho} = -3 \frac{h}{\ell} \dot{\theta} p_{,\dot{\theta}}. \quad (7.57)$$

Заменом (7.56) у (7.57) добија се једначина [36]

$$\frac{d}{dt} p_{,\dot{\theta}} + 3 \frac{h}{\ell} p_{,\dot{\theta}} = p_{,\theta}. \quad (7.58)$$

Ако се први сабирак запише у облику

$$\frac{d}{dt} p_{,\dot{\theta}} = p_{,\dot{\theta}\dot{\theta}} \ddot{\theta} + p_{,\dot{\theta}\theta} \dot{\theta}, \quad (7.59)$$

једначина (7.58) се своди на облик

$$\frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}} = -\frac{1}{\dot{\theta} p_{,\dot{\theta}\dot{\theta}}} \left[3 \frac{h}{\ell} p_{,\dot{\theta}} + \dot{\theta} p_{,\dot{\theta}\theta} - p_{,\theta} \right]. \quad (7.60)$$

Користећи једнакост

$$\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} \frac{dt}{d\theta} = \frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}}, \quad (7.61)$$

на основу (7.53) за $g(\theta, \dot{\theta})$ добија се израз [36]

$$g(\theta, \dot{\theta}) = -\frac{1}{\dot{\theta} p_{,\dot{\theta}\dot{\theta}}} \left[3 \frac{h}{\ell} p_{,\dot{\theta}} + \dot{\theta} p_{,\dot{\theta}\theta} - p_{,\theta} \right]. \quad (7.62)$$

Инфлаторно решење има особине атрактора уколико важи услов [3]

$$\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \simeq 0, \quad (7.63)$$

што је еквивалентно услову $g(\theta, \dot{\theta}) \simeq 0$. У моделима инфлације са тахионским пољем, чија је еволуција одређена једначином (5.21), наведени услов има облик [124]

$$-\left(3\frac{h}{l}\dot{\theta} + \frac{V_{,\theta}}{V}\right)\frac{1-\dot{\theta}^2}{\dot{\theta}} \simeq 0, \quad (7.64)$$

и једнак је нули, уколико је израз у загради једнак нули. Услов је испуњен током режима спорог котрљања, када се вредност извода поља по времену мења у складу са (7.37). Услов је конзистентан са добро познатим тврђењем да апроксимација спорог котрљања обезбеђује динамику модела са особинама атрактора [64]. У апроксимацији спорог котрљања једначина (7.53) постаје [125]

$$\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \simeq -\frac{1}{\dot{\theta}}\left(3\frac{h}{l}\dot{\theta} + \frac{V_{,\theta}}{V}\right). \quad (7.65)$$

Користећи једначине (7.3) и (7.4) за извод поља θ по времену добија се израз

$$\dot{\theta} = -\frac{2}{3}\ell\frac{1-\frac{1}{2}h^2}{h^2-\frac{1}{4}h^4}h_{,\theta}, \quad (7.66)$$

на основу кога се из једначине (7.3) добија Хамилтон-Јакобијева једначина

$$9\left(h^2 - \frac{1}{4}h^4\right)^2 - 4\ell^2\left(1 - \frac{1}{2}h^2\right)^2 h_{,\theta}^2 = \kappa^4 V^2. \quad (7.67)$$

Да бисмо показали да решење добијене једначине има особине атрактора користимо поступак приказан у одељку 3.7. Заменом $h(\theta) = h_0(\theta) + \delta h(\theta)$ у једначину (7.67), а затим линеаризацијом, добија се диференцијална једначина по $\delta h(\theta)$

$$\frac{9}{4}h_0^3\frac{4-h_0^2}{2-h_0^2}\frac{d\theta}{(h_0)_{,\theta}} = \frac{d\delta h}{\delta h}. \quad (7.68)$$

Решење једначине (7.68) је облика

$$\delta h(\theta) = \delta h(\theta_i)e^{-3N}. \quad (7.69)$$

Експоненцијални фактор у решењу и позитивна дефинитност за N обезбеђују да инфлаторна решења за различите почетне услове конвергирају ка јединственом решењу.

У наставку тражимо решења једначине (7.65) за конкретне облике потенцијала.

Експоненцијални потенцијал

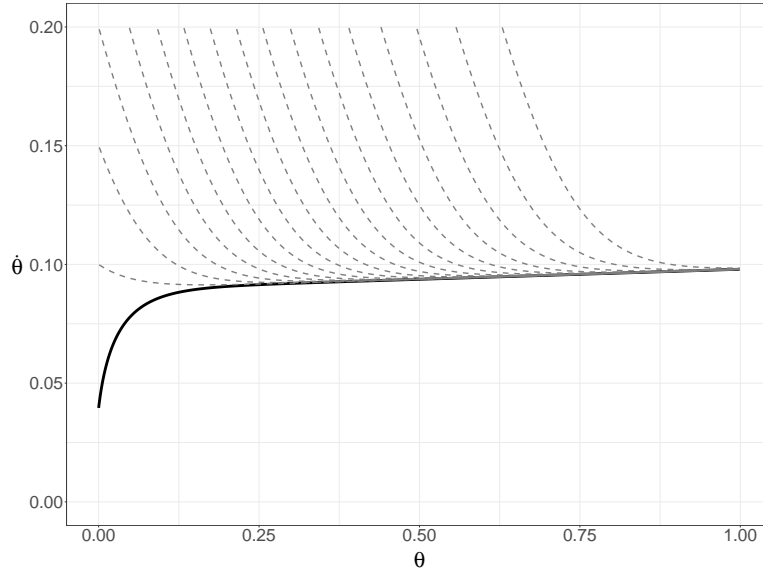
За експоненцијални потенцијал облика (7.17) једначина (7.65) се своди на облик

$$\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \simeq -\frac{1}{\dot{\theta}} \left(3\frac{h}{l}\dot{\theta} - \frac{\omega}{\ell} \right). \quad (7.70)$$

Вредност параметра ω у потенцијалу одређена је избором h_i и N , и може се израчунати на основу једначине (7.51). Примера ради, за $h_i = 0,6$ и $N = 60$ добија се $\omega = 0,164$. За нумеричко решење једначине (7.70) потребно је познати вредност извода поља по времену у почетном тренутку. У режиму спорог котрљања између $\dot{\theta}$ и θ постоји веза облика

$$\dot{\theta} \simeq \frac{\omega}{\sqrt{18(1 - \sqrt{1 - \frac{\kappa^2}{3}e^{-\omega\theta/\ell}})}}, \quad (7.71)$$

која је добијена коришћењем израза (7.36) и (7.37). Вредност параметра κ се фиксира, избором $\kappa = 1$, како би се на основу почетне вредности поља израчунао извод поља по времену у почетном тренутку. Вредност поља θ_f на крају инфлације је задата изразом (7.49). На слици 2 приказана су нумеричка решења једначине (7.70) за различите почетне вредности $\dot{\theta}_i$.



Слика 2: Нумеричка решења једначине (7.70) за различите почетне вредности $\dot{\theta}_i$. Пуна линија одговара решењу које је добијено за почетну вредност $\dot{\theta}$, одређену на основу израза (7.71). Вредност параметра ω у потенцијалу је $\omega = 0,164$.

Инверзни косинус хиперболички потенцијал

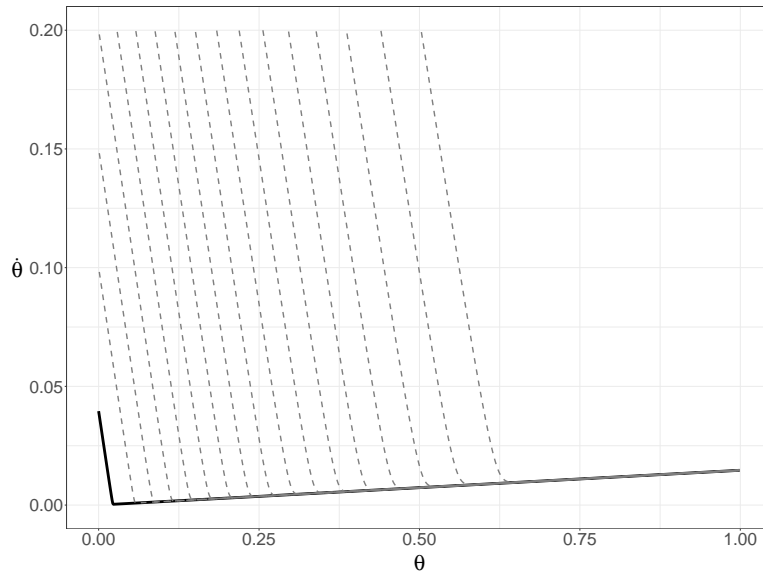
У овом случају једначина (7.65) се своди на облик

$$\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \simeq -\frac{1}{\dot{\theta}} \left(3\frac{h}{\ell}\dot{\theta} - \frac{\omega}{\ell} \tanh(\omega\theta/\ell) \right). \quad (7.72)$$

Да би се одредила вредност параметра ω потребно је наћи нумеричко решење интеграла (7.44). Извод поља по времену израчунава се на основу израза

$$\dot{\theta} \simeq -\frac{\omega \tanh(\omega\theta/\ell)}{\sqrt{18\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\kappa^2}{3} \frac{1}{\cosh(\omega\theta/\ell)}}\right)}}, \quad (7.73)$$

који је добијен на основу (7.3), (7.15) и (7.32). На слици 3 приказана су нумеричка решења једначине (7.72) за различите почетне вредности $\dot{\theta}_i$.



Слика 3: Нумеричка решења једначине (7.72) за различите почетне вредности $\dot{\theta}_i$. Пуна линија одговара решењу које је добијено за почетну вредност $\dot{\theta}$, одређену на основу израза (7.73). Вредност параметра у потенцијалу је $\omega = 0,164$.

Са графика, на слици 2 и слици 3, се види да за различите почетне вредности θ_i и $\dot{\theta}_i$ трајекторије у фазном простору конвергирају ка једној трајекторији. Закључак је да у разматраном моделу решење има особине атрактора. У складу са тим, потврдили смо да холографски модел задовољава неопходан услов да би се разматрао као инфлаторни.

7.4 Пертурбације у холографском моделу инфлације

У овом одељку анализирамо космолошке пертурбације у холографском моделу инфлације. Како се холографске Фридманове једначине, једначине (6.48) и (6.49), разликују од једначина (2.30) и (2.32), није оправдано користити израз за скаларни спектар снаге из модела стандардне тахионске инфлације [13]. Показаћемо да се увођењем ефективних вредности за густину и притисак идеалног флуида, којим се описује тахионска материја, може израчунати спектар снаге. Користићемо поступак који је развијен код модела k -инфлације. У анализи пертурбација користимо апроксимацију спорог котрљања. Показаће се да се допринос „конформног“ флуида (пертурбације тензора енергије-импулса у конформној теорији) скаларним пертурбацијама може занемарити⁴.

Једначина (7.3) се може формално записати у форми прве Фридманове једначине у стандардној космологији

$$H^2 = \frac{8\pi G_N}{3} \tilde{\rho}, \quad (7.74)$$

где је $\tilde{\rho}$ ефективна густина

$$\tilde{\rho} = \frac{6}{\kappa^2 \ell^4} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{\kappa^2}{3} \ell^4 \rho} \right). \quad (7.75)$$

Облик једначина (7.74) и (7.75) сугерише увођење лагранжијана $\tilde{\mathcal{L}} = \tilde{\mathcal{L}}(X, \theta)$, који по облику одговара моделу k -инфлације. На основу тога је

$$\tilde{\rho} = 2X \tilde{\mathcal{L}}_{,X} - \tilde{\mathcal{L}}. \quad (7.76)$$

Дејство \tilde{S} за модел који разматрамо има облик

$$\tilde{S} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{R}{16\pi G_N} + \tilde{\mathcal{L}}(X, \theta) \right]. \quad (7.77)$$

⁴Пертурбације тензора енергије-импулса у конформној теорији се могу наћи на основу израза (6.41). Анализа пертурбација која укључује тензор енергије-импулса у конформној теорији излази из оквира ове дисертације.

У Ајнштајновим једначинама које следе из израза (7.77)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi G_N \tilde{T}_{\mu\nu}, \quad (7.78)$$

фигурише ефективни тензор енергије-импулса чије су компоненте облика

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = (\tilde{p} + \tilde{\rho})u_\mu u_\nu - \tilde{p}g_{\mu\nu}, \quad (7.79)$$

где је

$$\tilde{p} \equiv \tilde{\mathcal{L}}, \quad u_\mu = \frac{\theta_{,\mu}}{\sqrt{X}}. \quad (7.80)$$

Екплицитни израз за лагранжијан $\tilde{\mathcal{L}}$, у функцији од X и θ , се може наћи интеграцијом израза (7.76). Ако се претпостави просторна хомогеност и изотропност, из Ајнштајнових једначина (7.78) се изводе холографске Фридманове једначине, једначине (6.48) и (6.49), као и једначина континуитета

$$\dot{\tilde{\rho}} + 3H(\tilde{p} + \tilde{\rho}) = 0. \quad (7.81)$$

Како дејство (7.77) има облик (4.40), за израчунавање посматрачких параметара можемо користити резултате теорије пертурбација у моделу k -инфлације. При томе имамо у виду да је динамика модела одређена холографским Фридмановим једначинама (7.3) и (7.4).

Пертурбацијом Ајнштајнових једначина (7.78) и тензора енергије-импулса (7.79) добијамо једначине индентичне једначинама (4.29) и (4.30), којима се описују скаларне пертурбације

$$\left(\frac{\delta\theta}{\dot{\theta}}\right)^\cdot = \left(1 + \frac{\tilde{c}_s^2 \Delta}{4\pi G_N a^2 (\tilde{p} + \tilde{\rho})}\right) \Phi, \quad (7.82)$$

$$(a\Phi)^\cdot = 4\pi G_N a (\tilde{p} + \tilde{\rho}) \frac{\delta\theta}{\dot{\theta}}, \quad (7.83)$$

где тачка означава извод по времену t . Добијене једначине не зависе од облика Фридманових једначина, тј. истог су облика у стандардној и холографској космологији. Директним израчунавањем показује се да је $\tilde{c}_s = c_s$. Ако се уведу нове променљиве

$$\xi = \frac{a\Phi}{4\pi G_N H}, \quad (7.84)$$

$$\zeta = \Phi + H \frac{\delta\theta}{\dot{\theta}}, \quad (7.85)$$

уз коришћење једначине (7.4), добија се систем једначина за нове променљиве

$$\dot{\xi} = a \frac{p + \rho}{H^2} \zeta - \frac{\ell^2 H \dot{H}}{2} \xi, \quad (7.86)$$

$$\dot{\zeta} = \frac{c_s^2 H^2}{a^3(p + \rho)} \Delta \xi + \frac{\ell \dot{H}}{2} \left(\zeta - \frac{4\pi G_N}{a} H \xi \right). \quad (7.87)$$

Сабирци пропорционални изводу Хабловог параметра по времену \dot{H} су последица разлика између Фридманових једначина у стандардној и холографској космологији. Систем који чине једначине (7.86) и (7.87) се може решити нумерички, међутим, да бисмо били у прилици да упоредимо резултате овог модела са резултатима других модела, погодно је наћи решење у апроксимацији спорог котрљања. Ако се искористе апроксимативни изрази

$$|\dot{\xi}| \approx H |\xi|, \quad |\dot{\zeta}| \approx H |\zeta|, \quad (7.88)$$

показује се да је оправдано занемарити последњи сабирак на десној страни једначине (7.86), који је $\varepsilon_1 \ell^2 H^2 / 2$ пута мањи од члана на левој страни. Одатле следи

$$H |\xi| \approx \frac{a(p + \rho)}{H^2} |\zeta|. \quad (7.89)$$

Сличан закључак важи и за једначину (7.87), јер је у тренутку проласка пертурбација кроз хоризонт

$$|\Delta \xi| \approx q^2 |\xi| \approx H^2 a^2 c_s^{-2} |\xi|. \quad (7.90)$$

Како је уз наведене апроксимације оправдано занемарити сабирке пропорционалне \dot{H} , једначине за пертурбације (7.86) и (7.87) се могу записати у облику

$$a \dot{\zeta} = z^{-2} \Delta \xi, \quad (7.91)$$

$$a \dot{\xi} = z^2 c_s^2 \zeta, \quad (7.92)$$

где је

$$z = \frac{a(p + \rho)^{1/2}}{c_s H}. \quad (7.93)$$

У холографском моделу инфлације, користећи једначину (7.4), за поље z се добија

$$z = \frac{a}{c_s} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{4\pi G_N}} \sqrt{1 - \frac{h^2}{2}}. \quad (7.94)$$

Да би се решила Муханов-Сасаки једначина (4.63), у режиму спорог котрљања, погодно је изразити фактор z''/z у функцији параметара спорог котрљања ε_i . Користећи једнакост [132]

$$\tau = -\frac{1 + \varepsilon_1}{aH} + \mathcal{O}(\varepsilon_i^2), \quad (7.95)$$

која следи из дефиниције параметра ε_1 , на основу (7.94) добијамо, у првом реду развоја по параметрима ε_i израз

$$\frac{z''}{z} = \frac{\nu^2 - 1/4}{\tau^2}, \quad (7.96)$$

где је

$$\nu^2 = \frac{9}{4} + \frac{3}{2} \left(2 + \frac{h^2}{2 - h^2} \right) \varepsilon_1 + \frac{3}{2} \varepsilon_2. \quad (7.97)$$

У лимесу, за свемир де Ситеровог типа, сви параметри спорог котрљања су једнаки нули и $\nu = 3/2$. Следи да је решење једначине (4.63) облика

$$v_q = \frac{e^{-i c_s q \tau}}{\sqrt{2 c_s q}} \left(1 - \frac{i}{c_s q \tau} \right). \quad (7.98)$$

Како за тренутак проласка пертурбација кроз хоризонт важи $\zeta \approx v_q/z$, користећи израз (7.95), добија се

$$\dot{\zeta} \approx \left(\frac{v_q}{z} \right)' \approx \left(\alpha H - \frac{\dot{z}}{z} \right) \zeta, \quad (7.99)$$

где је α комплексна константа. На основу (7.94) налазимо да је $\dot{z}/z = H + \mathcal{O}(\varepsilon_i^2)$, што је еквивалентно са уведеном апроксимацијом $|\dot{\zeta}| \approx H|\zeta|$.

Суштинска разлика у холографском моделу у односу на стандардну тахионску инфлацију огледа се у измењеној дефиницији за z и у модификацији v_q због израза за ν , што за последицу има и разлике у изразима за опсервабилне параметре. Изразима и вредностима за n_s и r ћемо се позабавити у следећем одељку.

7.4.1 Скаларани спектрални индекс и количник тензора и скалара

Један од најважнијих задатака и резултата холографског инфлаторног модела је процена вредности опсервабилних параметара n_s и r . Овај одељак започињемо разматрањем израза за квадрат брзине звука. На основу његове

дефиниције, дате изразом (4.45), за брзину звука материје тахионског типа у холографској космологији се добија

$$c_s^2 = 1 - X = 1 - \frac{4(2 - h^2)}{3(4 - h^2)} \varepsilon_1. \quad (7.100)$$

Умањилац у последњој једнакости је добијен на основу Фридманових једначина (7.3) и (7.4). У случају када $h \rightarrow 0$ (што важи при крају периода инфлације) израз за квадрат адијабатске брзине звука се своди на израз добијен у оквиру стандардне космологије

$$c_s^2|_{\text{st}} = 1 - \frac{2}{3} \varepsilon_1. \quad (7.101)$$

Спектар снаге скаларних пертурбација израчунавамо на основу (4.73), користећи (7.94), (7.97) и (4.68). Детаљно израчунавање дато је у Додатку А. У најнижем реду по параметрима спорог котрљања се за спектар снаге скаларних пертурбација добија израз

$$\mathcal{P}_S \simeq \frac{\kappa^2 h^2}{8\pi^2(1 - h^2/2)c_s \varepsilon_1} \left[1 - 2 \left(1 + C + \frac{Ch^2}{2 - h^2} \right) \varepsilon_1 - C\varepsilon_2 \right]. \quad (7.102)$$

Важна разлика у односу на стандардну тахионску инфлацију је да израз за \mathcal{P}_S садржи фактор $1 - h^2/2$ у имениоцу и сабирак у загради пропорционалан фактору $h^2/(2 - h^2)$.

За спектар снаге тензорских пертурбација, на основу (4.73) и користећи (4.78), добија се [13]

$$\mathcal{P}_T \simeq \frac{2\kappa^2 h^2}{\pi^2} [1 - 2(1 + C)\varepsilon_1]. \quad (7.103)$$

На основу дефиниција за скаларни спектрални индекс n_s и однос тензора и скалара r , изрази (4.81) и (4.83), добијамо

$$\begin{aligned} n_s = & 1 - \left(2 + \frac{2h^2}{2 - h^2} \right) \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \left(2 + \frac{2h^2}{2 - h^2} - \frac{8h^2}{3(4 - h^2)^2} - \frac{8Ch^2}{(2 - h^2)^2} \right) \varepsilon_1^2 \\ & - \left(\frac{8}{3} + \frac{h^2}{3(4 - h^2)} + \frac{4C}{2 - h^2} \right) \varepsilon_1 \varepsilon_2 - C\varepsilon_2 \varepsilon_3, \end{aligned} \quad (7.104)$$

$$r = 8(2 - h^2)\varepsilon_1 \left[1 + C\varepsilon_2 + 2 \left(\frac{Ch^2}{2 - h^2} - \frac{2 - h^2}{12 - 3h^2} \right) \varepsilon_1 \right], \quad (7.105)$$

где се за h , ε_1 и ε_2 узимају вредности на почетку инфлације. Нагласимо да се добијени изрази разликују од израза за посматрачке параметре у оквиру стандардне тахионске инфлације, изрази (5.39) и (5.40). У случају када $h \rightarrow 0$

разлика између израза изчезава. Извођење израза за посматрачке параметре дато је у Додатку Б.

7.4.2 Одступање пертурбација од Гаусове расподеле

У стандардној космологији постоји претпоставка да се иницијалне нехомогености могу третирати као случајне величине са Гаусовом расподелом. Показано је да се у „једноставним“ инфлаторним моделима, попут инфлаторног модела са канонским скаларним пољем, генеришу пертурбације које мало одступају од Гаусовог профила расподеле [133, 134]. У инфлаторним моделима са два и више скаларних поља, као и у моделима са једним скаларним пољем и кинетичким чланом у нестандардном облику, могу се очекивати мерљива одступања пертурбација од Гаусовог профила расподеле.

Спектар снаге дефинише се на основу вредности двотачкасте корелационе функције, која за пертурбације са Гаусовим профилем расподеле даје најпотпунију информацију која се може добити израчунавањем самих корелационих функција. Корелационом функцијом [2]

$$\langle \hat{\zeta}_{q_1} \hat{\zeta}_{q_2} \hat{\zeta}_{q_3} \rangle = (2\pi)^3 \delta(\vec{q}_1 + \vec{q}_2 + \vec{q}_3) f_{\text{NL}} F(q_1, q_2, q_3), \quad (7.106)$$

где је $\hat{\zeta}_q$ оператор придружен Фуријеовој амплитуди пертурбације кривине (4.37), се може описати одступање пертурбација од Гаусовог профила расподеле. Бездимензиони параметар f_{NL} носи назив амплитуда и даје квантитативну меру одступања. У зависности од вредности таласних бројева q_1 , q_2 и q_3 дефинишу се карактеристичне конфигурације код којих је одступање за дати модел највеће.

Како разматрамо модел из класе k -инфлације, израчунавамо амплитуду једнакостраничне (*equilateral*, *equil*) конфигурације дефинисане условом $q_1 \sim q_2 \sim q_3$, код које је, за ову класу модела, највеће одступање пертурбација од Гаусовог профила расподеле. Амплитуда се за општи облик лагранжијана израчунава на основу израза [135]

$$f_{\text{NL}}^{\text{equil}} = -\frac{35}{108} \left(\frac{1 - c_s^2}{c_s^2} \right) + \frac{20}{81} \Lambda, \quad (7.107)$$

где је

$$\Lambda \equiv X^2 \frac{\mathcal{L}_{,XX}^2 - (1/3)\mathcal{L}_{,X}\mathcal{L}_{,XXX}}{\mathcal{L}_{,X}^2 + 2X\mathcal{L}_{,X}\mathcal{L}_{,XX}}. \quad (7.108)$$

За лагранжијане DBI типа је $\Lambda = 0$. Код инфлаторних модела у стандардној космологији (у којој је динамика свемира одређена једначинама (2.30) и (2.32)) амплитуда $f_{\text{NL}}^{\text{equil}}$ је пропорционална $1 - c_s^2$ [136]. У тахионском моделу инфлације

(у стандардној космологији) амплитуда је задата изразом

$$f_{\text{NL}}^{\text{equil}} \Big|_{\text{st}} = -\frac{35}{108} \left(\frac{1 - c_s^2}{c_s^2} \right), \quad (7.109)$$

где је квадрат брзине звука c_s задат изразом (7.101).

Амплитуда $f_{\text{NL}}^{\text{equil}}$ у холографском моделу се може проценити на основу разлика између стандардне и холографске космологије. Спектар снаге скаларних пертурбација у холографском моделу садржи фактор $1 - h^2/2$ у имениоцу, стога је природно очекивати да је амплитуда (7.109) увећана за $(1 - h^2/2)$, степеновано на неки фактор. Међутим, како је при крају периода инфлације $h^2 \ll 1$, тај допринос је занемарљив. Ако се у израз (7.109) унесе израз за квадрат брзине звука (7.100), уз услов $\varepsilon_1 = 1$, добија се

$$f_{\text{NL}}^{\text{equil}} \approx -\frac{70(1 - h^2/2)}{108(1 + h^2/4)} \approx f_{\text{NL}}^{\text{equil}} \Big|_{\text{st}} = -\frac{70}{108}. \quad (7.110)$$

Израчуната вредност је у границама добијеним на основу резултата Планк мисије објављених 2018. године [137]

$$f_{\text{NL}}^{\text{equil}} = 2,6 \pm 61,6 \quad \text{и} \quad f_{\text{NL}}^{\text{equil}} = 15,6 \pm 37,3, \quad (7.111)$$

при чему су вредности амплитуде $f_{\text{NL}}^{\text{equil}}$ добијене на основу температуре и на основу температуре и поларизације СМВ зрачења, респективно. Прецизнија оцена одступања пертурбација од Гаусове расподеле излази изван оквира ове дисертације.

Глава 8

Нумеричко израчунавање параметара инфлације у холографском моделу инфлације

У овој глави приказујемо и дискутујемо оргиналне нумеричке резултате за параметре спорог котрљања и опсервабилне параметре у холографском моделу инфлације. Упоређујемо добијене вредности са резултатима Планк мисије [6] и резултатима других модела у којима је динамика такође одређена тахионским пољем, а који имају сличности са разматраним моделом.

8.1 Нумеричко решење динамичких једначина за експоненцијални потенцијал

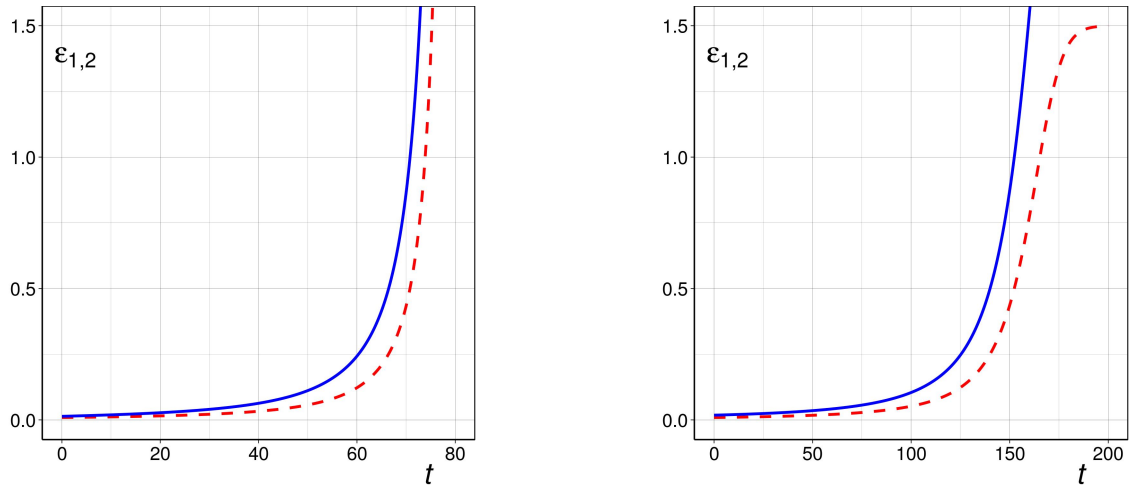
У овом делу се у разматрањима ограничавамо на експоненцијални облик потенцијала, задат изразом (7.17). За то постоји неколико разлога. Показали смо да се у случају експоненцијалног потенцијала редукује број слободних параметара у потенцијалу са два (κ , ω) на један (ω) и извели смо аналитичке изразе на основу којих се може израчунати вредност поља на почетку и крају инфлације. Израчунали смо, аналитички, почетне услове који знатно олакшавају нумеричко решавање динамичких једначина. Не постоји суштинска разлика у поступку уколико се користе други облици (тахионских) потенцијала.

Систем једначина (7.19) и (7.20) се решава нумерички, за почетне услове дате у одељку 7.1.2. У овом истраживању коришћен је метод из референци [30, 31, 83, 84]. За произвољно одабрану вредност N (у интервалу $60 \leq N \leq 90$) и произвољно одабрану вредност h_i (у интервалу $0 < h_i^2 < 2$) вредност параметра ω одређује се на основу израза (7.52). Упоредо са системом једначина (7.19) и

(7.20) решава се једначина за број е-фолдова N

$$dN = h d\tilde{t}, \quad (8.1)$$

за почетно $t = 0$ до неколико стотина, у јединицама ℓ . На слици 4 приказана је еволуција параметара спорог котрљања (ε_1 и ε_2), добијена на основу израза (7.39) и (7.40). Инфлација се завршава у тренутку t_f , чија се вредност, у холографском моделу, одређује на основу услова да је $\varepsilon_2(t_f) = 1$.



Слика 4: Параметри спорог котрљања ε_1 (испрекидана црвена линија) и ε_2 (пуна плава линија) у холографском моделу са експоненцијалним потенцијалом $V = e^{-\omega\theta/\ell}$. На левом графику су приказане вредности израчунате аналитички (у апроксимацији спорог котрљања). На десном графику су приказане вредности израчунате нумерички без апроксимације спорог котрљања. За вредности $\omega^2 = 0,027$ и $h_1^2 = 0,6$, у складу са изразом (7.51), добија се $N = 60$.

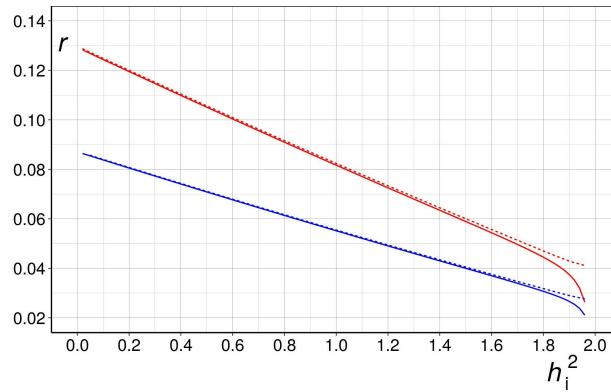
8.2 Нумеричко израчунавање посматрачких параметара за експоненцијални потенцијал

Вредност t_f добијена аналитички, користећи апроксимацију спорог котрљања, је мања од вредности добијене нумерички, што се може видети на слици 4. То значи да ће вредност $N(t_f)$ израчуната нумерички бити приметно већа од претпостављене вредности N , тако да је почетак инфлације тренутак $t_i > 0$, односно

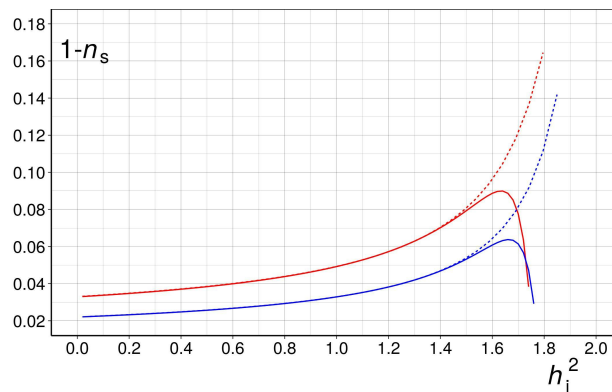
$$N(t_f) - N(t_i) = N. \quad (8.2)$$

Користећи израчунату вредност за t_i израчунавамо иницијалне вредности параметара $\varepsilon_1(t_i)$ и $\varepsilon_2(t_i)$, на основу којих одређујемо вредности посматрачких параметара n_s и r користећи изразе (7.104) и (7.105).

На слици 5 и 6 приказани су графици за r и $1 - n_s$ у функцији иницијалне вредности h_i^2 , за фиксирано N и ω које се мења. Сваком пару (h_i^2, N) одговара јединствена вредност ω , добијена на основу израза (7.52).



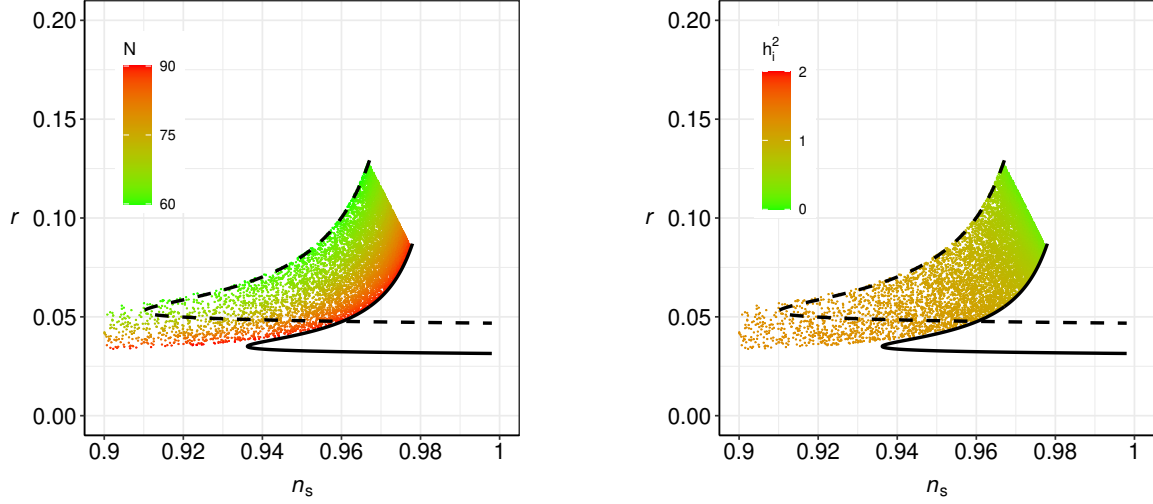
Слика 5: За експоненцијани потенцијал $V = e^{-\omega\theta/\ell}$ приказана је зависност параметра r од иницијалне вредности h_i^2 израчуната аналитички (пуна линија) и нумерички (испрекидана линија) за $N = 60$ (црвене линије) и $N = 90$ (плаве линије). Вредност параметра ω се мења дуж линије у складу са изразом (7.52).



Слика 6: За експоненцијани потенцијал $V = e^{-\omega\theta/\ell}$ приказана је зависност $1 - n_s$ од иницијалне вредности h_i^2 израчуната аналитички (пуна линија) и нумерички (испрекидана линија) за $N = 60$ (црвене линије) и $N = 90$ (плаве линије). Вредност параметра ω се мења дуж линије у складу са изразом (7.52).

На слици 7 приказан је однос вредности параметара r и n_s у тзв. (n_s, r) равни. Тачкама су означене нумеричке вредности за случајно изабране вредности N у интервалу од 60 до 90 и h_i^2 у интервалу од 0 до 2. Промена N и h_i је означена различитом бојом. Нумеричке вредности су ограничене линијама аналитички израчунатим за $N = 60$ и $N = 90$, горња и доња страна графика, респективно.

Аналитички резултати добијени су у апроксимацији спорог котрљања на основу израза (7.39), (7.40), (7.42) и (7.52).



Слика 7: За експоненцијани потенцијал $V = e^{-\omega\theta/\ell}$ приказани су добијени резултати за посматрачке параметре у (n_s, r) равни. Различита боја одговара различитим вредностима N (леви график), и различитим вредностима h_1^2 (десни график). Аналитички резултати добијени у апроксимацији спорог котрљања за $N = 60$ и $N = 90$ су означени црном пуном и црном испрекиданом линијом, респективно.

На слици 6 види се да за веће вредности h_1^2 аналитичко решење одступа од нумеричког. Након максимума коју има крива аналитичког решења за $1 - n_s$ апроксимација спорог котрљања више није валидна. То значи да аналитички резултати који одговарају „доњим“ деловима кривих, (паралелни n_s оси), на слици 7 нису физички релевантни.

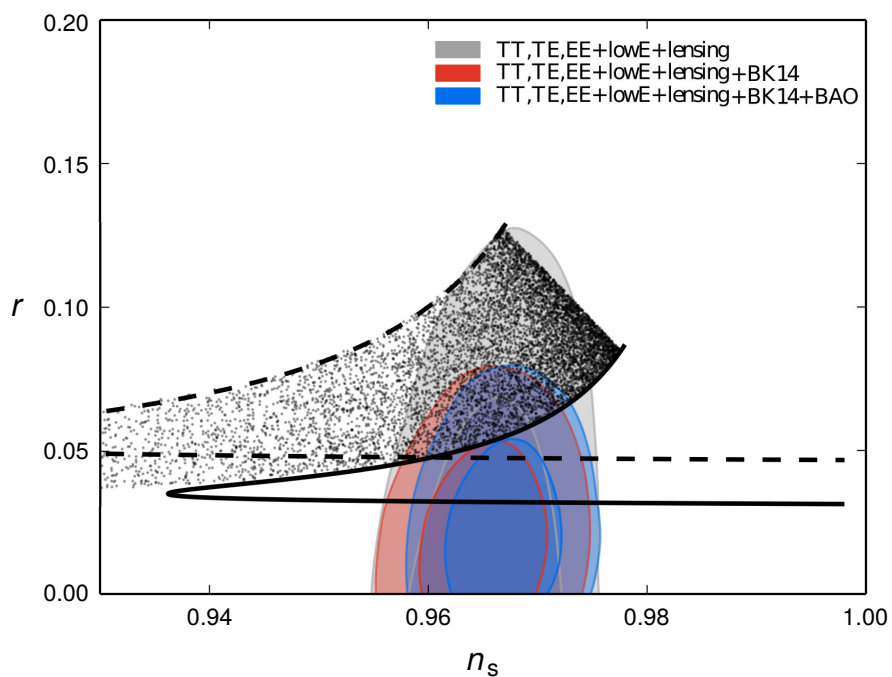
На слици 8 су аналитичке и нумеричке вредности за n_s и r упоређене са ограничењима која произилазе из посматрачких резултата Планк мисије [6]. Различитим бојама приказана су ограничења. Најрестриктивнија област одређена је комбинацијом различитих мерења и означена је на графику плавом бојом.

Да би се боље уочила зависност израчунатих вредности опсервабилних параметара од вредности за N , на слици 9 у (n_s, r) равни су приказани резултати за неколико фиксираних вредности N у интервалу од 60 до 140. Са графика се види да је слагање нумеричких вредности са најновијим резултатима добијеним посматрањем [6]

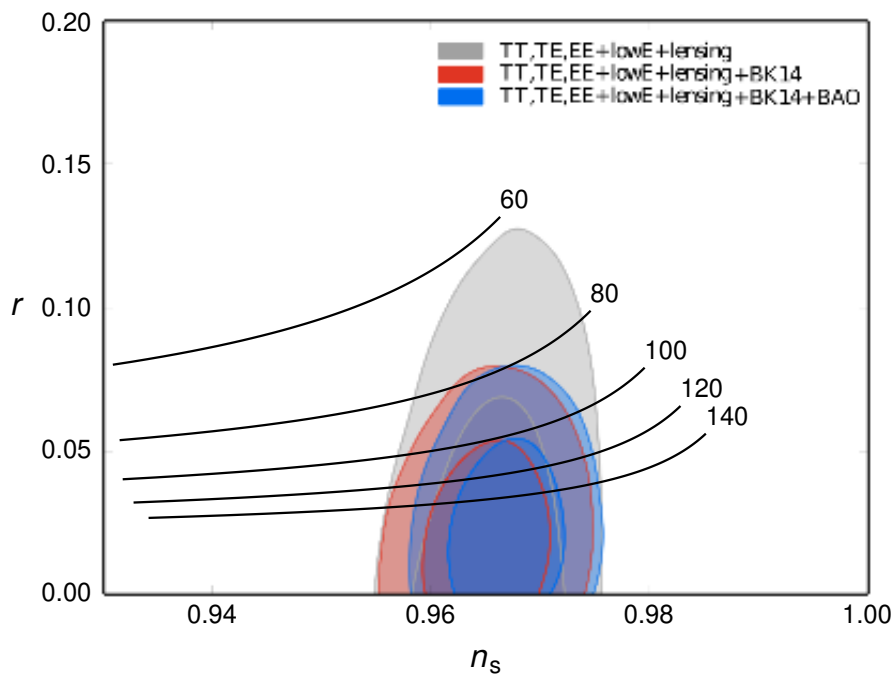
$$n_s = 0,9668 \pm 0,0037, \quad (68\% \text{ CL}), \quad (8.3)$$

$$r_{0,002} < 0,058, \quad (95\% \text{ CL}), \quad (8.4)$$

знатно боље за веће вредности N .



Слика 8: За експоненцијални потенцијал $V = e^{-\omega\theta/\ell}$ приказани су добијени резултати за посматрачке параметре у (n_s, r) равни и ограничења из [6]. Као и на слици 7, тачкама су приказане израчунате вредности параметара добијене нумерички на основу једначина кретања за произвољно изабране вредности за N и h_i^2 .



Слика 9: За експоненцијални потенцијал $V = e^{-\omega\theta/\ell}$ приказана је међусобна зависност r и n_s , за неколико различитих вредности N и за h_i^2 у интервалу од 0,01 до 2.

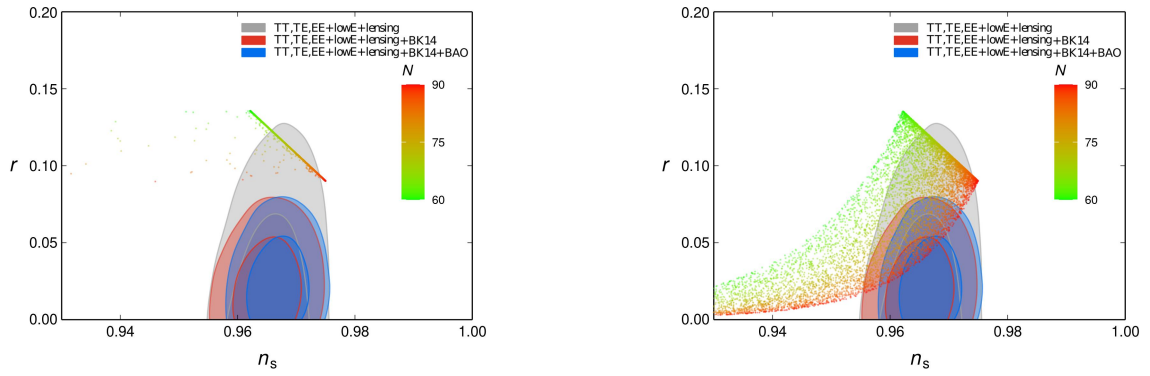
8.3 Упоредна анализа посматрачких параметара холографског и „нехолографских“ тахионских модела

Да би смо били у прилици да јасније представимо, упоредимо и дискутујемо добијене вредности за опсервабилне параметре у холографском моделу у дисертацији и вредности опсервабилних параметара у моделима са тахионским пољем који су му претходили, правимо кратак осврт на процене вредности посматрачких параметара из „нехолографских“ тахионских модела. Поступак израчунавања параметара приказан је у одељку 8.2. Вредност параметра κ у моделима мења се у интервалу $0 < \kappa < 12$. Једна од круцијалних разлика између различитих модела огледа су у облику прве Фридманове једначине (Табела 1), што доводи до разлика у изразима за скаларни спектар снаге, као и у вредностима за опсервабилне параметре.

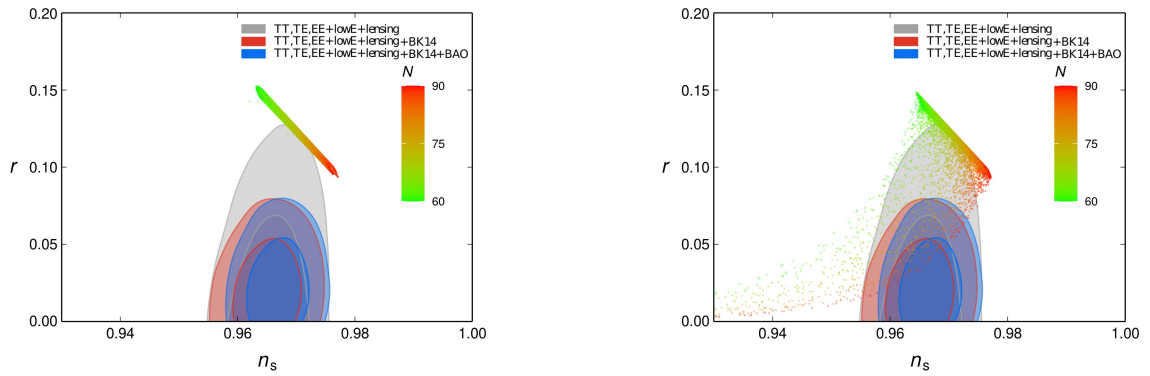
Табела 1: Облик прве Фридманове једначине у инфлаторним моделима са тахионским пољем. У једначинама је, ради поређења, узето $\ell = 1$.

Модел	прва Фридманова једначина
Тахионски модел у стандардној космологији	$h^2 = \frac{\kappa^2}{3}\rho$
Тахионски модел са RSII космологијом	$h^2 = \frac{\kappa^2}{3}\rho \left(1 + \frac{\kappa^2}{12}\rho\right)$
Модификовани RSII модел са тахионским пољем	$h^2 = \frac{\kappa^2}{3}\rho \left(\chi_{,\theta} + \frac{\kappa^2}{12}\rho\right)$
Холографски RSII модел са тахионским пољем	$h^2 - \frac{1}{4}h^4 = \frac{\kappa^2}{3}\rho$

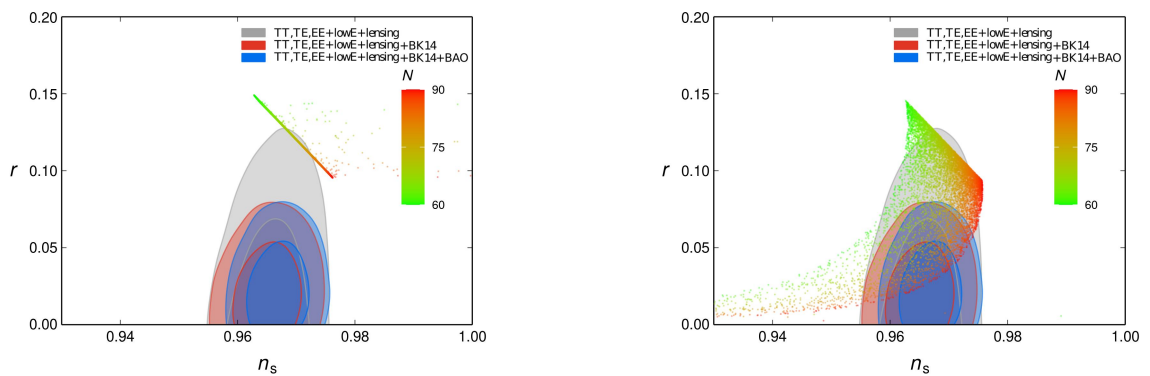
На графицима (Слике 10-12) су приказане израчунате вредности посматрачких параметара у (n_s, r) равни за: тахионски модел у стандардној космологији (одељак 5.3.1), тахионски модел са RSII космологијом и модификовани RSII модел (одељак 6.2.1). Различита боја одговара различитим вредностима N . Вредност параметра у потенцијалу узима се у интервалу $0 < \omega < 2$. Услед повећања тачности коришћених нумеричких метода и промене интервала параметара постоје мале разлике на приказаним графицима у односу на графике из референци [84] и [111].



Слика 10: Добијени резултати за посматрачке параметре у (n_s, r) равни у тахионском моделу у стандардној космологији за потенцијале: $e^{-\omega\theta}$ (леви график) и $1/\cosh(\omega\theta)$ (десни график).

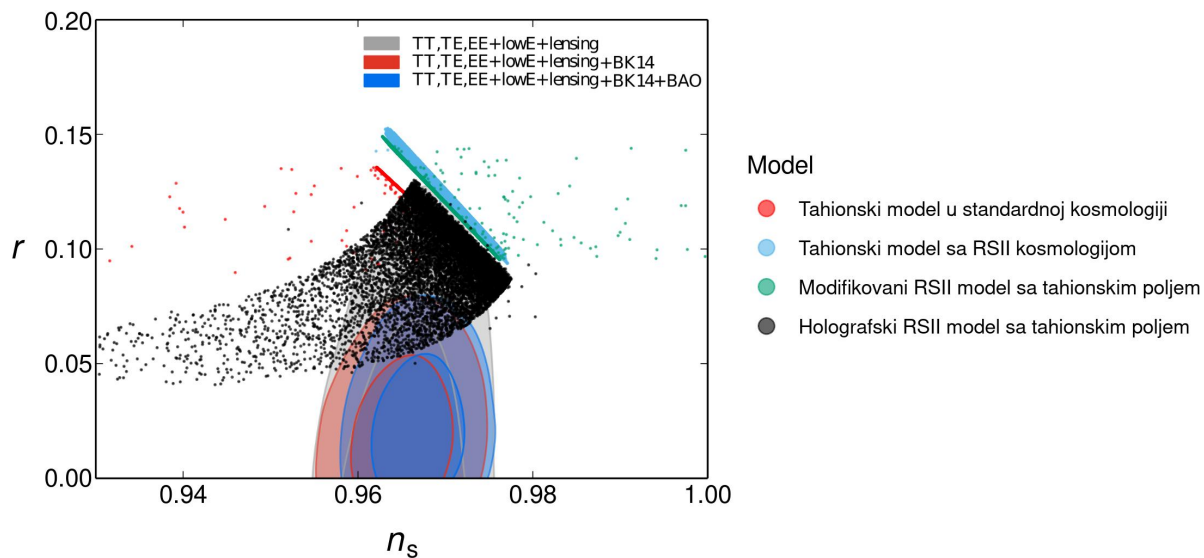


Слика 11: Добијени резултати за посматрачке параметре у (n_s, r) равни у тахионском моделу са RSII космологијом за потенцијале: $e^{-\omega\theta}$ (леви график) и $1/\cosh(\omega\theta)$ (десни график).

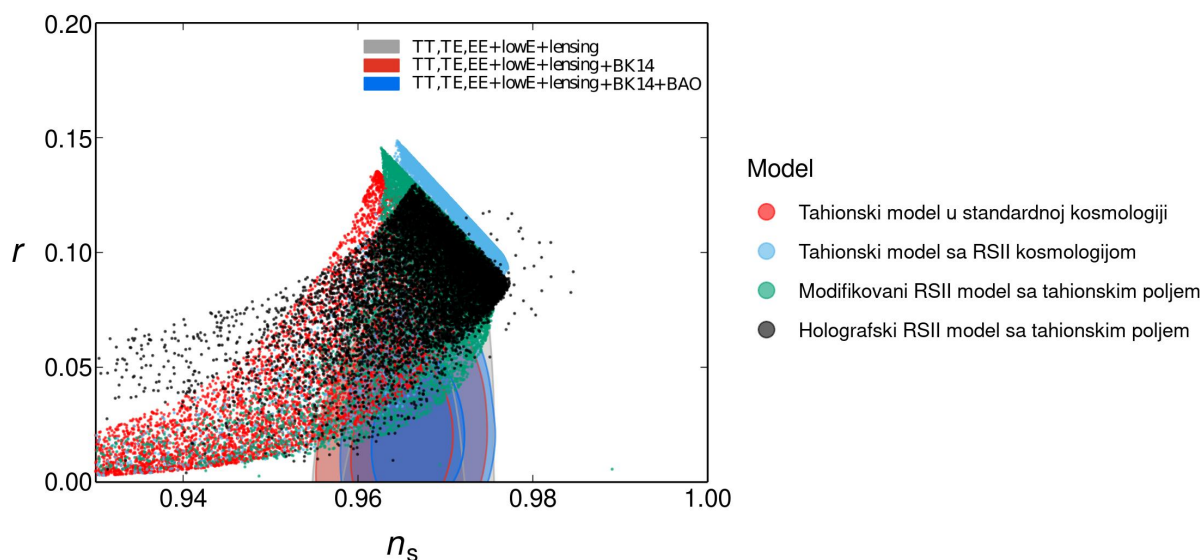


Слика 12: Добијени резултати за посматрачке параметре у (n_s, r) равни у модификованом RSII моделу са тахионским пољем за потенцијале: $e^{-\omega\theta}$ (леви график) и $1/\cosh(\omega\theta)$ (десни график).

Упоредни приказ резултата свих поменутих модела са резултатима холографског модела дат је на слици 13 и слици 14.



Слика 13: Добијени резултати за посматрачке параметре у (n_s, r) равни за различите моделе са потенцијалом облика $e^{-\omega\theta}$.



Слика 14: Добијени резултати за посматрачке параметре у (n_s, r) равни за различите моделе са потенцијалом облика $1/\cosh(\omega\theta)$.

Вредности опсервабилних параметара у „нехолографским“ моделима израчунавамо на основу израза (5.39) и (5.40). Константа α , у изразу за скаларни спектрални индекс (5.39), у RSII космологији има вредност $\alpha = 1/12$ [30].

На основу приказаних графика за посматрачке параметре, можемо извести закључак да су предвиђања холографског (RSII) модела слична са предвиђањима раније уведених модела са тахионским пољем, што се донекле очекивало. Треба имати у виду да не можемо на основу просторне расподеле тачака у (n_s, r) равни поуздано тврдити који се модел у већој мери слаже са ограничењима Планк мисије. Да би имали прецизну оцену у којој мери постоји слагање потребно је статистички анализирати добијене резултате.

Корен средње квадратне грешке (*Root Mean Square Error*, RMSE), се може узети као показатељ који од наведених модела даје најприближније вредности измереним вредностима за опсервабилне параметре. Вредност RMSE израчунава се на основу израза

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m \left[\left(\frac{n_{s_i} - \bar{n}_s}{\bar{n}_s} \right)^2 + \left(\frac{r_i - \bar{r}}{\bar{r}} \right)^2 \right]}{m}}, \quad (8.5)$$

где је m број тачака (n_{s_i}, r_i) , за сваки модел, а \bar{n}_s и \bar{r} измерене вредности. Типична вредност коју користимо у симулацијама је $m \simeq 10000$. За измерену вредност скаларног спектра снаге узећемо, у складу са резултатима Планк мисије [6], $\bar{n}_s = 0,9668$. На вредност количника тензора и скалара постоји ограничење ($r < 0,058$). У процени користимо вредност, на половини 1σ интервала (плава област на графику $n_s - r$), $\bar{r} \simeq 0,035$. Добијене вредности за RMSE су приказане у табели 2.

Табела 2: Израчуане вредности RMSE.

Модел	Експоненцијални потенцијал	Инверзни косинус хиперболички потенцијал
Тахионски модел у стандардној космологији	0,827	10,116
Тахионски модел са RSII космологијом	0,789	2,194
Модификовани RSII модел са тахионским пољем	0,787	1,476
Холографски RSII модел са тахионским пољем	0,720	0,703

Упоредјујући добијене вредности RMSE, код различитих модела и за два типа потенцијала, налазимо да је њена најмања вредност за резултате из холографског модела. Изводимо закључак да од разматраних модела добијене вредности опсервабилних параметара у холографском моделу, за оба типа потенцијала, се најбоље слажу са измереним вредностима. Вредност RMSE може бити критеријум на основу кога можемо упоредити моделе. На основу наведеног, дајемо „предност“ холографском моделу у односу на раније уведене моделе са тахионским пољем које смо анализирали у дисертацији.

Глава 9

Закључак

У овој дисертацији је разматран холографски инфлаторни модел са тахионским пољем, заснован на динамици RSII бране која је локализована у близини границе AdS_5 простора, чиме се регуларизује дејство у балку. Фридманове једначине изведене из ефективних Ајнштајнових једначина на холографској граници се разликују од Фридманових једначина у стандардној космологији, што је главни мотив за разматрање инфлације у овом приступу.

Анализом динамичких једначина модела показано је да решења имају особине атрактора, што је неопходан услов за валидност и предиктивност модела. Постојање атрактора као решења је одлика овог холографског модела која не зависи од облика (тахионског) потенцијала, у складу са једначинама (7.44) и (7.69).

Једначине кретања су изведене коришћењем Хамилтоновог формализма. Израчуната су њихова аналитичка решења користећи апроксимацију спорог котрљања, за потенцијал експоненцијалног облика са једним слободним параметром. Систем једначина које описују динамику модела решаван је и нумерички.

Посебан изазов је био наћи начин да се анализирају космолошке пертурбације у разматраном моделу, јер директна примена постојећих поступака [75] није могућа, пре свега због додатних чланова у холографским Фридмановим једначинама, једначине (6.48) и (6.49), у односу на стандардну космологију. Проблем је решен увођењем ефективних вредности за притисак и густину флуида тахионске материје и коришћењем прилагођеног приступа анализи скаларног спектра снаге познатог у k -инфлацији. Изведени су изрази за параметре спорог котрљања. Нађени су изрази за посматрачке параметре у функцији параметара спорог котрљања. Израчунате су вредности посматрачких параметара и доби-

јене вредности упоређене су са посматрачким подацима. Показано је њихово врло добро слагање за нешто веће вредности N у односу на типичну вредност ($N \simeq 60$).

Израчунате вредности за скаларни спектрални индекс и однос тензора и скалара, у холографском инфлаторном моделу, упоређене су са вредностима добијеним у неколико инфлаторних модела са тахионским пољем (у стандардној, RSII и модификованој RSII космологији). Поређење је вршено за моделе са два типа тахионског потенцијала: експоненцијални и инверзни косинус хиперболички потенцијал. На основу израчунате вредности корена средње квадратне грешке направљена је процена одступања израчунатих вредности посматрачких параметара од вредности добијених из Планк мисије, као критеријум поређења. Закључак је да су, од разматраних инфлаторних модела, вредности посматрачких параметара у холографском моделу у најбољем сагласју са посматрачким вредностима.

Непосредан, логичан, наставак истраживања био би анализа инфлаторне динамике за друге облике тахионског потенцијала. Истраживања би била базирана на нумеричким израчунавањима, уз развој постојећих програма. Такође, треба извести егзактне изразе за спектар снаге скаларних и тензорских пертурбација и на основу њих добити изразе за посматрачке параметре. Дубља анализа захтевала би прецизно израчунавање одступања пертурбација, као случајних величина, од Гаусове расподеле у разматраном моделу.

На крају, један од највећих изазова је наћи адекватан механизам за „рихитинг“, који се у моделима са тахионским пољем не може одвијати на исти начин као што је то могуће у случају потенцијала који поседују локални минимум.

Додатак А

Израчунавање спектра снаге скаларних пертурбација

У овом Додатку је детаљно приказано израчунавање спектра снаге скаларних пертурбација у холографском моделу у коме је инфлација вођена тахионским пољем. Користимо поступак приказан у референци [13].

Спектар снаге скаларних пертурбација израчунавамо у апроксимацији спорог котрљања [138]. Конформно време током периода спорог котрљања се може представити изразом

$$\tau = - \left(\frac{\ell}{ah} \right) \frac{1 - \varepsilon_1}{(1 - \varepsilon_1)^2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2} + \mathcal{O}(\varepsilon_i^3), \quad (\text{A.1})$$

који, у првом реду развоја по параметрима спорог котрљања, добија облик

$$\tau = - \left(\frac{\ell}{ah} \right) \frac{1}{1 - \varepsilon_1} + \mathcal{O}(\varepsilon_i^2) \simeq - \left(\frac{\ell}{ah} \right) (1 + \varepsilon_1) + \mathcal{O}(\varepsilon_i^2), \quad (\text{A.2})$$

На основу (A.2) се добија израз за извод конформног времена τ по времену t

$$\frac{d\tau}{dt} = \left(\frac{\ell}{a} \right) (1 - \varepsilon_1^2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2) + \mathcal{O}(\varepsilon_i^3). \quad (\text{A.3})$$

Користећи дефиницију параметара спорог котрљања (5.28) и (A.3) добијамо изразе

$$\dot{h} = -h^2 \varepsilon_1, \quad (\text{A.4})$$

$$\dot{\varepsilon}_1 = h \varepsilon_1 \varepsilon_2, \quad (\text{A.5})$$

$$\dot{\varepsilon}_2 = h \varepsilon_2 \varepsilon_3, \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{dt}{d\tau} = \left(\frac{a}{\ell}\right) \frac{1}{1 - \varepsilon_1^2 - \varepsilon_1\varepsilon_2} + \mathcal{O}(\varepsilon_i^3), \quad (\text{A.7})$$

$$\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = \left(\frac{a}{\ell}\right)^2 \frac{1}{(1 - \varepsilon_1^2 - \varepsilon_1\varepsilon_2)^2} + \mathcal{O}(\varepsilon_i^3), \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dt}{d\tau}\right) = \left(\frac{ah}{\ell}\right) \frac{1}{1 - \varepsilon_1^2 - \varepsilon_1\varepsilon_2} + \mathcal{O}(\varepsilon_i^3), \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dt}{d\tau}\right) \frac{dt}{d\tau} = \left(\frac{a^2h}{\ell^2}\right) \frac{1}{(1 - \varepsilon_1^2 - \varepsilon_1\varepsilon_2)^2} + \mathcal{O}(\varepsilon_i^3). \quad (\text{A.10})$$

Из сличности израза (A.8) и (A.10) следи једнакост

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dt}{d\tau}\right) \frac{dt}{d\tau} = h \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2. \quad (\text{A.11})$$

Вредност поља z у холографском моделу, задата изразом (7.94), може се записати у облику

$$z = \frac{a}{c_s} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{4\pi G_N}} \sqrt{A(h)}, \quad (\text{A.12})$$

где је

$$A(h) = 1 - \frac{h^2}{2}, \quad (\text{A.13})$$

и

$$c_s^2 = 1 - \frac{4(2 - h^2)}{3(4 - h^2)} \varepsilon_1. \quad (\text{A.14})$$

Размотримо $A(h)$ као непознату функцију Хабловог параметра h , са циљем да уведемо изразе за опсервабилне параметре за општи облик функције $A(h)$. Диференцирањем израза (A.12) и (A.14) по времену t добија се

$$\dot{A}(h) = -h^2 \frac{dA(h)}{dh} \varepsilon_1, \quad (\text{A.15})$$

и

$$\dot{c}_s = -\frac{1}{2c_s} M, \quad (\text{A.16})$$

где је

$$M \equiv \frac{d}{dt} \left(\frac{8 - 4h^2}{12 - 3h^2} \varepsilon_1 \right) = \frac{48h^3}{(12 - 3h^2)^2} \varepsilon_1^2 + h \frac{8 - 4h^2}{12 - 3h^2} \varepsilon_1 \varepsilon_2. \quad (\text{A.17})$$

Погодно је дефинисати величину

$$\mathcal{D} \equiv \frac{c_s}{a} \frac{d}{dt} \left(\frac{a}{c_s} \right) + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} \frac{d\sqrt{\varepsilon_1}}{dt} + \frac{1}{\sqrt{A(h)}} \frac{d\sqrt{A(h)}}{dt}, \quad (\text{A.18})$$

тако да је

$$\frac{1}{z} \frac{dz}{dt} = \frac{\dot{z}}{z} = \mathcal{D}. \quad (\text{A.19})$$

Диференцирањем израза (A.19) по времену t добија се

$$\frac{\ddot{z}}{z} = \mathcal{D}^2 + \dot{\mathcal{D}}. \quad (\text{A.20})$$

Други извод функције z по конформном времену τ се може израчунати на основу израза

$$z'' = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{dz}{d\tau} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dz}{dt} \frac{dt}{d\tau} \right) \frac{dt}{d\tau}, \quad (\text{A.21})$$

који у функцији \mathcal{D} има облик

$$\frac{z''}{z} = \left(\mathcal{D}^2 + \dot{\mathcal{D}} \right) \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 + \mathcal{D} \frac{d}{dt} \left(\frac{dt}{d\tau} \right) \frac{dt}{d\tau}. \quad (\text{A.22})$$

Користећи (A.11) израз (A.22) добија облик

$$\frac{z''}{z} = \left(\frac{a^2}{\ell^2} \right) \frac{1}{(1 - \varepsilon_1^2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2)^2} \left(\mathcal{D}^2 + \dot{\mathcal{D}} + h\mathcal{D} \right). \quad (\text{A.23})$$

На основу (A.12), (A.14) и (A.15) добија се

$$\mathcal{D} = h \left[1 - \frac{1}{2} h \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dh} \right) \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \varepsilon_2 + \frac{1}{2h} M + \mathcal{O}(\varepsilon_i^3) \right], \quad (\text{A.24})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^2 &= h^2 \left[1 - h \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dh} \right) \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \frac{1}{4} h^2 \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dh} \right)^2 \varepsilon_1^2 + \frac{1}{4} \varepsilon_2^2 \right] \\ &- h^2 \left[\frac{1}{2} h \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dh} \right) \varepsilon_1 \varepsilon_2 - \frac{1}{h} M + \mathcal{O}(\varepsilon_i^3) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{D}} &= h^2 \left\{ -\varepsilon_1 + \left[h \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dh} \right) + \frac{1}{2} h^2 \frac{1}{A} \frac{d^2 A}{dh^2} - \frac{1}{2} h^2 \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dh} \right)^2 \right] \varepsilon_1^2 \right\} \\ &- h^2 \left\{ \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} h \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dh} \right) \right] \varepsilon_1 \varepsilon_2 - \frac{1}{2} \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \mathcal{O}(\varepsilon_i^3) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

при чему су коришћени изрази (А.4)-(А.6) и (А.16)-(А.17). Израз z''/z се може записати у облику

$$\frac{z''}{z} = \frac{a^2 h^2}{\ell^2} \frac{1}{(1 - \varepsilon_1^2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2)^2} \left\{ 2 - \left[1 + \frac{3}{2} h \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dh} \right) \right] \varepsilon_1 + \frac{3}{2} \varepsilon_2 + B_1 \varepsilon_1^2 + B_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \frac{1}{4} \varepsilon_2^2 + \frac{1}{2} \varepsilon_2 \varepsilon_3 \right\}, \quad (\text{A.27})$$

где је

$$B_1(h) = h \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dh} \right) + \frac{1}{2} h^2 \frac{1}{A} \frac{d^2 A}{dh^2} - \frac{1}{4} h^2 \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dh} \right)^2 + \frac{8h^2}{(4 - h^2)^2}, \quad (\text{A.28})$$

$$B_2(h) = \frac{1}{2} - h \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dh} \right) + \frac{h^2}{4 - h^2}. \quad (\text{A.29})$$

Вредност члана испред заграде у изразу (А.27) је

$$\frac{1}{(1 - \varepsilon_1^2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2)^2} = 1 + 2\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \mathcal{O}(\varepsilon_i^3), \quad (\text{A.30})$$

тако да се добија

$$\begin{aligned} \frac{z''}{z} = & \frac{a^2 h^2}{\ell^2} \left\{ 2 - \left[1 + \frac{3}{2} h \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dh} \right) \right] \varepsilon_1 + \frac{3}{2} \varepsilon_2 \right\} \\ & + \frac{a^2 h^2}{\ell^2} \left\{ [4 + B_1] \varepsilon_1^2 + [2 + B_2] \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \frac{1}{4} \varepsilon_2^2 + \frac{1}{2} \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \mathcal{O}(\varepsilon_i^3) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Апроксимативно решење Муханов-Сасаки једначине облика [75]

$$v_q^2(\tau) \simeq \left[2^{\nu-3/2} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(3/2)} \right]^2 \frac{1}{2q c_s} (-q c_s \tau)^{2(-\nu+1/2)}, \quad (\text{A.32})$$

је валидно ако је промена ν и c_s по конформном времену спора и одговара пертурбацијама код којих је

$$q c_s \ll \frac{a h}{\ell}. \quad (\text{A.33})$$

Како је

$$\left(\nu - \frac{3}{2} \right) \sim \mathcal{O}(\varepsilon_i), \quad (\text{A.34})$$

важи приближна једнакост

$$(-q c_s \tau)^{2(-\nu+1/2)} = \frac{1}{(-q c_s \tau)^2} (-q c_s \tau)^{-2(\nu-3/2)} \simeq \frac{1}{(-q c_s \tau)^2}. \quad (\text{A.35})$$

Користећи (А.2) и (А.35), израз (А.32) постаје

$$v_q^2(\tau) \simeq F \frac{1}{2qc_s} \left(\frac{ah}{qc_s\ell} \right)^2 \frac{1}{(1 + \varepsilon_1)^2}, \quad (\text{А.36})$$

где је

$$F \equiv \left[2^{\nu-3/2} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(3/2)} \right]^2. \quad (\text{А.37})$$

Имајући у виду да важи (А.34), могу се користити апроксимативни изрази

$$2^{\nu-3/2} \simeq 1 + \left(\nu - \frac{3}{2}\right) \ln 2, \quad (\text{А.38})$$

$$\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(3/2)} \simeq 1 - \left(\nu - \frac{3}{2}\right)(C + \ln 2), \quad (\text{А.39})$$

где је $C = -1 + \gamma + \ln 2 \simeq -0.72$, а γ је Ојлерова константа. Користећи уведене апроксимације, изразе (А.38) и (А.39), из (А.37) следи израз

$$F = 1 - 2C\left(\nu - \frac{3}{2}\right) + (C^2 - 2\tilde{C})\left(\nu - \frac{3}{2}\right)^2 + \mathcal{O}(\varepsilon_i^3), \quad (\text{А.40})$$

где је $\tilde{C} = (C + \ln 2) \ln 2$. У коначном, за $v_q^2(\tau)$ добија се

$$v_q^2(\tau) \simeq \frac{1}{2qc_s} \left(\frac{ah}{qc_s\ell} \right)^2 \frac{1}{(1 + \varepsilon_1)^2} \left(1 - 2C\left(\nu - \frac{3}{2}\right) + (C^2 - 2\tilde{C})\left(\nu - \frac{3}{2}\right)^2 \right). \quad (\text{А.41})$$

Користећи (4.73), (А.12) и (А.41), израз (4.82) се може записати у облику

$$\mathcal{P}_S(q) \Big|_{\text{НС}} = \frac{\kappa^2}{8\pi^2} \frac{h^2}{c_s A(h)} \frac{1}{\varepsilon_1 (1 + \varepsilon_1)^2} \left(1 - 2C\left(\nu - \frac{3}{2}\right) + (C^2 - 2\tilde{C})\left(\nu - \frac{3}{2}\right)^2 \right) \Big|_{\text{НС}}. \quad (\text{А.42})$$

У холографском моделу функција $A(h)$ је облика (А.13) тако да се на основу (А.42) за спектар снаге скаларних пертурбација добија израз (7.102).

Додатак Б

Израчунавање посматрачких параметара

Изводимо изразе за посматрачке параметре n_s и r на основу израза за скаларни спектар снаге (А.42) и за општи облик функције $A(h)$. Крајњи циљ је да изведемо изразе за посматрачке параметре у холографском моделу.

Логаритмовањем једнакости $qc_s = aH$ добија се

$$d \ln q = h \left(1 - \varepsilon_1 + \frac{1}{h} M + \mathcal{O}(\varepsilon_i^3) \right) dt \simeq h(1 - \varepsilon_1) dt, \quad (\text{Б.1})$$

на основу кога је

$$\frac{d}{d \ln q} \simeq \frac{1}{h(1 - \varepsilon_1)} \frac{d}{dt}. \quad (\text{Б.2})$$

Из (А.42) добијамо

$$\left. \frac{d\mathcal{P}_S(q)}{d \ln q} \right|_{\text{HC}} = \frac{1}{h(1 - \varepsilon_1)} \left(\frac{2}{h} \dot{h} - \frac{1}{c_s} \dot{c}_s - \frac{1}{A} \dot{A} - \frac{1}{\varepsilon_1} \dot{\varepsilon}_1 - \frac{2}{1 + \varepsilon_1} \dot{\varepsilon}_1 + \frac{1}{F} \dot{F} \right). \quad (\text{Б.3})$$

Заменом (А.4)-(А.6), (А.16) и (А.17) у (Б.3) добија се

$$\left. \frac{d\mathcal{P}_S(q)}{d \ln q} \right|_{\text{HC}} = \frac{1}{(1 - \varepsilon_1)} \left\{ - \left[2 - h \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dh} \right) \right] \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - 2 \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{1 + \varepsilon_1} + \frac{1}{2h} M + \frac{1}{hF} \dot{F} \right\}, \quad (\text{Б.4})$$

где се F израчунава на основу израза (А.40). Сабирци у (Б.4) могу се записати

$$2 \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{1 + \varepsilon_1} = 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \mathcal{O}(\varepsilon_i^3), \quad (\text{Б.5})$$

$$\frac{1}{hF} \dot{F} = - \frac{2C}{h} \frac{d}{d\tau} \left(\nu - \frac{3}{2} \right) + \mathcal{O}(3), \quad (\text{Б.6})$$

где је коришћен израз (А.40) и

$$\frac{d}{dt}\left(\nu - \frac{3}{2}\right) \sim \mathcal{O}(\varepsilon_i^2). \quad (\text{Б.7})$$

Користећи развој

$$\frac{1}{1 - \varepsilon_1} = 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1^2 + \mathcal{O}(\varepsilon_i^3), \quad (\text{Б.8})$$

израз (Б.4) може се записати у облику

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{P}_s(q)}{d \ln q} \Big|_{\text{НС}} = & - \left[2 - h \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dh} \right) \right] \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \left[2 - h \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dh} \right) - \frac{8h^2}{3(4-h^2)^2} \right] \varepsilon_1^2 \\ & - \left[\frac{8}{3} + \frac{h^2}{3(4-h^2)} \right] \varepsilon_1 \varepsilon_2 - \frac{2C}{h} \frac{d}{d\tau} \left(\nu - \frac{3}{2} \right). \end{aligned} \quad (\text{Б.9})$$

За скаларни спектрални индекс, дефинисан изразом (4.81), добија се

$$\begin{aligned} n_s - 1 = & - \left[2 - h \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dh} \right) \right] \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \left[2 - h \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dh} \right) - \frac{8h^2}{3(4-h^2)^2} \right] \varepsilon_1^2 \\ & - \left[\frac{8}{3} + \frac{h^2}{3(4-h^2)} \right] \varepsilon_1 \varepsilon_2 - \frac{2C}{h} \frac{d}{d\tau} \left(\nu - \frac{3}{2} \right). \end{aligned} \quad (\text{Б.10})$$

Последњи члан се може записати у облику

$$\left(\nu - \frac{3}{2} \right) = b_1 \varepsilon_1 + b_2 \varepsilon_2 + b_3 \varepsilon_3 + \dots, \quad (\text{Б.11})$$

где су b_i коефицијенти у функцији од h . Користећи (А.4)

$$\frac{d}{d\tau} b_i(h) = -h^2 \frac{db_i}{dh} \varepsilon_1, \quad (\text{Б.12})$$

добија се

$$\frac{d}{d\tau} \left(\nu - \frac{3}{2} \right) = h \left[-h \frac{db_1}{dh} \varepsilon_1^2 + \left(b_1 - h \frac{db_2}{dh} \right) \varepsilon_1 \varepsilon_2 + b_2 \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \mathcal{O}(\varepsilon_i^3) \right]. \quad (\text{Б.13})$$

Израз (Б.10) се може преписати у облику

$$\begin{aligned}
 n_s - 1 = & - 2 \left[1 - \frac{1}{2}h \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dh} \right) \right] \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\
 & - 2 \left[1 - \frac{1}{2}h \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dh} \right) - Ch \frac{db_1}{dh} - \frac{4h^2}{3(4-h^2)^2} \right] \varepsilon_1^2 \\
 & - \left[\frac{8}{3} + \frac{h^2}{3(4-h^2)} + 2Cb_1 - 2Ch \frac{db_2}{dh} \right] \varepsilon_1 \varepsilon_2 - 2Cb_2 \varepsilon_2 \varepsilon_3. \quad (\text{Б.14})
 \end{aligned}$$

Да би се одредила вредност коефицијената b_i у (Б.11) потребно је преписати (А.31) користећи (А.2) у облику

$$\begin{aligned}
 \frac{z''}{z} = & \frac{1}{\eta^2} (1 + \varepsilon_1)^2 \left\{ 2 - \left[1 + \frac{3}{2}h \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dh} \right) \right] \varepsilon_1 + \frac{3}{2} \varepsilon_2 \right\} \\
 & + \frac{1}{\eta^2} (1 + \varepsilon_1)^2 \left\{ [4 + B_1] \varepsilon_1^2 + [2 + B_2] \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \frac{1}{4} \varepsilon_2^2 + \frac{1}{2} \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \mathcal{O}(\varepsilon_i^3) \right\}. \quad (\text{Б.15})
 \end{aligned}$$

Након сређивања израза (Б.15) добија се

$$\begin{aligned}
 \frac{z''}{z} = & \frac{1}{\eta^2} \left\{ 2 + \left[3 - \frac{3}{2}h \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dh} \right) \right] \varepsilon_1 + \frac{3}{2} \varepsilon_2 \right\} \\
 & + \frac{1}{\eta^2} \left\{ \left[4 + B_1 - \frac{3}{2}h \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dh} \right) \right] \varepsilon_1^2 + [5 + B_2] \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \frac{1}{4} \varepsilon_2^2 + \frac{1}{2} \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \mathcal{O}(\varepsilon_i^3) \right\}. \quad (\text{Б.16})
 \end{aligned}$$

Поређењем (Б.16) и (4.64) добија се

$$\begin{aligned}
 \nu^2 = & \frac{9}{4} + \left[3 - \frac{3}{2}h \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dh} \right) \right] \varepsilon_1 + \frac{3}{2} \varepsilon_2 \\
 & + \left[4 + B_1 - \frac{3}{2}h \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dh} \right) \right] \varepsilon_1^2 + [5 + B_2] \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \frac{1}{4} \varepsilon_2^2 + \frac{1}{2} \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \mathcal{O}(\varepsilon_i^3). \quad (\text{Б.17})
 \end{aligned}$$

Израз за ν се у општем случају може записати у облику

$$\nu = b_0 + b_1 \varepsilon_1 + b_2 \varepsilon_2 + b_3 \varepsilon_1^2 + b_4 \varepsilon_1 \varepsilon_2 + b_5 \varepsilon_2^2 + b_6 \varepsilon_2 \varepsilon_3. \quad (\text{Б.18})$$

Квадрирањем израза (Б.18) добија се

$$\begin{aligned}
 \nu^2 = & b_0^2 + 2b_0 b_1 \varepsilon_1 + 2b_0 b_2 \varepsilon_2 + (b_1^2 + 2b_0 b_3) \varepsilon_1^2 + \\
 & + (2b_0 b_4 + 2b_1 b_2) \varepsilon_1 \varepsilon_2 + (b_2^2 + 2b_0 b_5) \varepsilon_2^2 + 2b_0 b_6 \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \mathcal{O}(\varepsilon_i^3). \quad (\text{Б.19})
 \end{aligned}$$

Поређењем (Б.17) са (Б.19) закључујемо

$$\begin{aligned}
 b_0 &= \frac{3}{2}, & b_1 &= 1 - \frac{1}{2}h \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dh} \right), & b_2 &= \frac{1}{2}, \\
 b_3 &= \frac{1}{3} \left\{ \left[4 + B_1 - \frac{3}{2}h \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dh} \right) \right] - \left[1 - \frac{1}{2}h \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dh} \right) \right]^2 \right\}, \\
 b_4 &= \frac{1}{3} \left[4 + B_2 + \frac{1}{2}h \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dh} \right) \right], & b_5 &= 0, & b_6 &= \frac{1}{6}.
 \end{aligned} \tag{Б.20}$$

У коначном за параметар ν се добија

$$\begin{aligned}
 \nu &= \frac{3}{2} + \left[1 - \frac{1}{2}h \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dh} \right) \right] \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \varepsilon_2 + \\
 &+ \frac{1}{3} \left\{ \left[4 + B_1 - \frac{3}{2}h \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dh} \right) \right] - \left[1 - \frac{1}{2}h \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dh} \right) \right]^2 \right\} \varepsilon_1^2 \\
 &+ \frac{1}{3} \left[4 + B_2 + \frac{1}{2}h \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dh} \right) \right] \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \frac{1}{6} \varepsilon_2 \varepsilon_3,
 \end{aligned} \tag{Б.21}$$

где су B_1 и B_2 задати изразима (А.28) и (А.29).

На основу коефицијената b_1 и b_2 , чија је вредност одређена са (Б.20), израз (Б.14) за скаларни спектрални индекс се може записати у облику

$$\begin{aligned}
 n_s - 1 &= - 2 \left[1 - \frac{1}{2}h \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dh} \right) \right] \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\
 &- 2 \left[1 - \frac{1}{2}h \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dh} \right) - Ch \frac{db_1}{dh} - \frac{4h^2}{3(4-h^2)^2} \right] \varepsilon_1^2 \\
 &- \left[\frac{8}{3} + \frac{h^2}{3(4-h^2)} + 2C - 2C \frac{1}{2}h \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dh} \right) \right] \varepsilon_1 \varepsilon_2 - C \varepsilon_2 \varepsilon_3,
 \end{aligned} \tag{Б.22}$$

где је

$$\frac{db_1}{dh} = \frac{d}{dh} \left[1 - \frac{1}{2}h \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dh} \right) \right]. \tag{Б.23}$$

Параметар r дефинисан је изразом (4.83) и представља количник спектра снаге тензорских и скаларних пертурбација. Спектар снаге тензорских пертурбација, израз (7.103), има исту вредност као и у стандардној космологији. Користећи израз (А.42) за параметар r се добија

$$r = 16A(h)c_s \varepsilon_1 (1 + \varepsilon_1)^2 \frac{1 - 2(1 + C)\varepsilon_1}{1 - 2C(\nu - \frac{3}{2}) + (C^2 - 2\tilde{C})(\nu - \frac{3}{2})^2}, \tag{Б.24}$$

где је изразом (Б.21) ν задато као функција од $A(h)$. Израз за r (Б.24) се може прегледније записати у облику

$$r = 16A\varepsilon_1 \left[1 + C\varepsilon_2 - Ch \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dh} \right) \varepsilon_1 - \frac{4 - 2h^2}{12 - 3h^2} \varepsilon_1 \right]. \quad (\text{Б.25})$$

Последњи члан у загради разликује се од израза у односу на стандардну космологију због разлике у изразу за адијабатску брзину звука.

Функција $A(h)$ има облик дат изразом (А.13), тако да за скаларни спектрални индекс и количник тензора и скалара, на основу израза (Б.22) и (Б.24), добијамо изразе (7.104) и (7.105).

Треба напоменути да је израз за спектар снаге скаларних пертурбација у холографској космологији изведен уз одређене апроксимације. За случај да се у егзактном приступу јаве разлике, које би довеле до измењеног израза за поље z , увођењем функције $A(h)$ обезбедили смо могућност примене добијених израза и једноставно и брзо израчунавање нових вредности параметара.

Литература

- [1] S. Dodelson, *Modern Cosmology*, Amsterdam: Academic Press, 2003, ISBN: 978-0-12-219141-1.
- [2] D. Baumann, Inflation, *Physics of the large and the small, TASI 09, proceedings of the Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics, Boulder, Colorado, USA, 1-26 June 2009*, 2011, 523–686, DOI: 10.1142/9789814327183_0010, arXiv: 0907.5424 [hep-th].
- [3] V. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology*, Oxford: Cambridge University Press, 2005, ISBN: 0521563984.
- [4] J. Martin, C. Ringeval, V. Vennin, Encyclopaedia Inflationaris, *Phys. Dark Univ.* 5-6 (2014), 75–235, DOI: 10.1016/j.dark.2014.01.003, arXiv: 1303.3787 [astro-ph.CO].
- [5] P. Ade et al., Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters, *Astron. Astrophys.* 594 (2016), A13, DOI: 10.1051/0004-6361/201525830, arXiv: 1502.01589 [astro-ph.CO].
- [6] Y. Akrami et al., Planck 2018 results. X. Constraints on inflation, *Astron. Astrophys.* 641 (2020), A10, DOI: 10.1051/0004-6361/201833887, arXiv: 1807.06211 [astro-ph.CO].
- [7] S. del Campo, Approach to exact inflation in modified Friedmann equation, *JCAP* 12 (2012), 005, DOI: 10.1088/1475-7516/2012/12/005, arXiv: 1212.1315 [astro-ph.CO].
- [8] L. Randall, R. Sundrum, A Large mass hierarchy from a small extra dimension, *Phys. Rev. Lett.* 83 (1999), 3370–3373, DOI: 10.1103/PhysRevLett.83.3370, arXiv: hep-ph/9905221.
- [9] L. Randall, R. Sundrum, An Alternative to compactification, *Phys. Rev. Lett.* 83 (1999), 4690–4693, DOI: 10.1103/PhysRevLett.83.4690, arXiv: hep-th/9906064.
- [10] A. Sen, Rolling tachyon, *JHEP* 04 (2002), 048, DOI: 10.1088/1126-6708/2002/04/048, arXiv: hep-th/0203211.

- [11] A. Sen, Tachyon matter, *JHEP* 07 (2002), 065, DOI: 10.1088/1126-6708/2002/07/065, arXiv: hep-th/0203265.
- [12] A. Sen, Supersymmetric world volume action for nonBPS D-branes, *JHEP* 10 (1999), 008, DOI: 10.1088/1126-6708/1999/10/008, arXiv: hep-th/9909062.
- [13] D. A. Steer, F. Vernizzi, Tachyon inflation: Tests and comparison with single scalar field inflation, *Phys. Rev. D* 70 (2004), 043527, DOI: 10.1103/PhysRevD.70.043527, arXiv: hep-th/0310139.
- [14] G. Djordjević, O p -adičnoj i adeličnoj kvantnoj mehanici, Doktorska disertacija, Beograd: Univerzitet u Beogradu, (1999).
- [15] Lj. Nešić, Kosmološki modeli u p -adičnoj kvantnoj mehanici, Doktorska disertacija, Beograd: Univerzitet u Beogradu, (2002).
- [16] A. Sen, Tachyon condensation on the brane anti-brane system, *JHEP* 08 (1998), 012, DOI: 10.1088/1126-6708/1998/08/012, arXiv: hep-th/9805170.
- [17] S. Kar, A Simple mechanical analog of the field theory of tachyon matter (2002), arXiv: hep-th/0210108.
- [18] G. W. Gibbons, Thoughts on tachyon cosmology, *Class. Quant. Grav.* 20 (2003), S321–S346, DOI: 10.1088/0264-9381/20/12/301, arXiv: hep-th/0301117.
- [19] M. Fairbairn, M. H. Tytgat, Inflation from a tachyon fluid?, *Phys. Lett. B* 546 (2002), 1–7, DOI: 10.1016/S0370-2693(02)02638-2, arXiv: hep-th/0204070.
- [20] D. Dimitrijevic, G. Djordjevic, L. Nestic, Quantum Cosmology and Tachyons, *Fortsch. Phys.* 56 (2008), 412–417, DOI: 10.1002/prop.200710513, arXiv: 0804.1328 [gr-qc].
- [21] G. S. Djordjevic, L. Nestic, Real and p -Adic aspects of quantization of tachyons (2005), DOI: 10.1142/9789812702166_0018, arXiv: hep-th/0508245.
- [22] D. Vulcanov, G. S. Djordjevic, C. Sporea, REM - the Shape of Potentials for $f(R)$ Theories in Cosmology and Tachyons, *Cosmology and Particle Physics beyond Standard Models*, CERN-Proc, CERN, Geneva, 2014, 165–170.
- [23] D. D. Dimitrijevic, Dinamika tahionskog polja u klasičnoj i kvantnoj kosmologiji, Doktorska disertacija, Niš: Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Nišu, (2015).
- [24] G. S. Djordjevic, D. D. Dimitrijevic, M. Milosevic, On Canonical Transformation and Tachyon-Like "Particles" in Inflationary Cosmology, *Rom. J. Phys.* 61.1-2 (2016), 99.

- [25] D. D. Dimitrijevic, G. S. Djordjevic, M. Milosevic, Classicalization and Quantization of Tachyon-like Matter on (non)Archimedean Spaces, *Rom. Rep. Phys.* 68.1 (2016), 5, arXiv: 1512.09259 [gr-qc].
- [26] L. Kofman, A. D. Linde, Problems with tachyon inflation, *JHEP* 07 (2002), 004, DOI: 10.1088/1126-6708/2002/07/004, arXiv: hep-th/0205121.
- [27] A. V. Frolov, L. Kofman, A. A. Starobinsky, Prospects and problems of tachyon matter cosmology, *Phys. Lett. B* 545 (2002), 8–16, DOI: 10.1016/S0370-2693(02)02582-0, arXiv: hep-th/0204187.
- [28] N. Bilic, G. B. Tupper, 'Warm' Tachyon Matter from Back-reaction on the Brane (2013), arXiv: 1302.0955 [hep-th].
- [29] N. Bilić, G. B. Tupper, AdS braneworld with Backreaction, *Central Eur. J. Phys.* 12 (2014), 147–159, DOI: 10.2478/s11534-013-0325-y, arXiv: 1309.6588 [hep-th].
- [30] N. Bilic et al., Tachyon inflation in an AdS braneworld with backreaction, *Int. J. Mod. Phys. A* 32.05 (2017), 1750039, DOI: 10.1142/S0217751X17500397, arXiv: 1607.04524 [gr-qc].
- [31] M. Milosevic, Inflatorni kosmološki modeli sa tahionskim i radionskim poljima, Doktorska disertacija, Niš: Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Nišu, (2017).
- [32] S. Nojiri, S. D. Odintsov, S. Zerbini, Quantum (in)stability of dilatonic AdS backgrounds and holographic renormalization group with gravity, *Phys. Rev. D* 62 (2000), 064006, DOI: 10.1103/PhysRevD.62.064006, arXiv: hep-th/0001192.
- [33] J. M. Maldacena, The Large N limit of superconformal field theories and supergravity, *Int. J. Theor. Phys.* 38 (1999), 1113–1133, DOI: 10.1023/A:1026654312961, arXiv: hep-th/9711200.
- [34] E. Witten, Anti-de Sitter space and holography, *Adv. Theor. Math. Phys.* 2 (1998), 253–291, DOI: 10.4310/ATMP.1998.v2.n2.a2, arXiv: hep-th/9802150.
- [35] P. S. Apostolopoulos, G. Siopsis, N. Tetradis, Cosmology from an AdS Schwarzschild black hole via holography, *Phys. Rev. Lett.* 102 (2009), 151301, DOI: 10.1103/PhysRevLett.102.151301, arXiv: 0809.3505 [hep-th].
- [36] C. Armendariz-Picon, T. Damour, V. F. Mukhanov, k - inflation, *Phys. Lett. B* 458 (1999), 209–218, DOI: 10.1016/S0370-2693(99)00603-6, arXiv: hep-th/9904075.
- [37] E. W. Kolb, M. S. Turner, The Early Universe, *Front. Phys.* 69 (1990), 1–547.
- [38] B. Ryden, *Introduction to cosmology*, Cambridge University Press, 2016, ISBN: 978-1-107-15483-4.

- [39] A. R. Liddle, *An introduction to modern cosmology*, 1998.
- [40] M. Hobson, G. Efstathiou, A. Lasenby, *General relativity: An introduction for physicists*, 2006.
- [41] A. Riotto, Inflation and the theory of cosmological perturbations, *ICTP Lect. Notes Ser.* 14 (2003), 317–413, arXiv: hep-ph/0210162 [hep-ph].
- [42] E. Hubble, A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae, *Proc. Nat. Acad. Sci.* 15 (1929), 168–173, DOI: 10.1073/pnas.15.3.168.
- [43] *Resoluton B4 on a suggested renaming of the Hubble Law*, 2018, URL: https://www.iau.org/static/resolutions/IAU2018_ResolB4_English.pdf.
- [44] O. F. Piattella, *Lecture Notes in Cosmology*, UNITEXT for Physics, Cham: Springer, 2018, DOI: 10.1007/978-3-319-95570-4, arXiv: 1803.00070 [astro-ph.CO].
- [45] S. Watson, An Exposition on inflationary cosmology (2000), arXiv: astro-ph/0005003.
- [46] B. F. Schutz, *A first course in general relativity*, Cambridge, UK: Cambridge Univ. Pr., 1985.
- [47] P. Peter, J.-P. Uzan, *Primordial Cosmology*, Oxford Graduate Texts, Oxford University Press, 2013, ISBN: 9780199665150.
- [48] L. Amendola, S. Tsujikawa, *Dark Energy: Theory and Observations*, Cambridge University Press, 2015, ISBN: 978-1-107-45398-2.
- [49] S. Perlmutter et al., Measurements of Ω and Λ from 42 high redshift supernovae, *Astrophys. J.* 517 (1999), 565–586, DOI: 10.1086/307221, arXiv: astro-ph/9812133.
- [50] Y. Sofue et al., Central rotation curves of spiral galaxies, *Astrophys. J.* 523 (1999), 136, DOI: 10.1086/307731, arXiv: astro-ph/9905056.
- [51] B. Famaey, S. McGaugh, Modified Newtonian Dynamics (MOND): Observational Phenomenology and Relativistic Extensions, *Living Rev. Rel.* 15 (2012), 10, DOI: 10.12942/lrr-2012-10, arXiv: 1112.3960 [astro-ph.CO].
- [52] V. Borica Jovanović et al., Fundamental Plane of Elliptical Galaxies in $f(R)$ Gravity: The Role of Luminosity, *Atoms* 7.1 (2018), 4, DOI: 10.3390/atoms7010004, arXiv: 1812.10957 [astro-ph.GA].
- [53] H. Nastase, *Cosmology and String Theory*, vol. 197, Fundamental Theories of Physics, Springer, 2019, ISBN: 978-3-030-15076-1, DOI: 10.1007/978-3-030-15077-8.
- [54] C. Knobel, *An Introduction into the Theory of Cosmological Structure Formation*, 2012, arXiv: 1208.5931 [astro-ph.CO].

- [55] B. A. Bassett, S. Tsujikawa, D. Wands, Inflation dynamics and reheating, *Rev. Mod. Phys.* 78 (2006), 537–589, DOI: 10.1103/RevModPhys.78.537, arXiv: astro-ph/0507632.
- [56] L. Sriramkumar, An introduction to inflation and cosmological perturbation theory (2009), arXiv: 0904.4584 [astro-ph.CO].
- [57] A. R. Liddle, D. Lyth, *Cosmological inflation and large scale structure*, 2000, ISBN: 978-0-521-57598-0.
- [58] A. H. Guth, The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems, *Adv. Ser. Astrophys. Cosmol.* 3 (1987), 139–148, DOI: 10.1103/PhysRevD.23.347.
- [59] A. D. Linde, A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution of the Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy and Primordial Monopole Problems, *Adv. Ser. Astrophys. Cosmol.* 3 (1987), 149–153, DOI: 10.1016/0370-2693(82)91219-9.
- [60] A. D. Linde, Chaotic Inflation, *Phys. Lett. B* 129 (1983), 177–181, DOI: 10.1016/0370-2693(83)90837-7.
- [61] A. A. Starobinsky, A New Type of Isotropic Cosmological Models Without Singularity, *Adv. Ser. Astrophys. Cosmol.* 3 (1987), 130–133, DOI: 10.1016/0370-2693(80)90670-X.
- [62] P. Peebles, A. Vilenkin, Quintessential inflation, *Phys. Rev. D* 59 (1999), 063505, DOI: 10.1103/PhysRevD.59.063505, arXiv: astro-ph/9810509.
- [63] S. Weinberg, *Cosmology*, 2008, ISBN: 978-0-19-852682-7.
- [64] A. R. Liddle, P. Parsons, J. D. Barrow, Formalizing the slow roll approximation in inflation, *Phys. Rev. D* 50 (1994), 7222–7232, DOI: 10.1103/PhysRevD.50.7222, arXiv: astro-ph/9408015 [astro-ph].
- [65] G. N. Remmen, S. M. Carroll, Attractor Solutions in Scalar-Field Cosmology, *Phys. Rev. D* 88 (2013), 083518, DOI: 10.1103/PhysRevD.88.083518, arXiv: 1309.2611 [gr-qc].
- [66] L. Senatore, Lectures on Inflation, *Proceedings, Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics: New Frontiers in Fields and Strings (TASI 2015): Boulder, CO, USA, June 1-26, 2015*, 2017, 447–543, DOI: 10.1142/9789813149441_0008, arXiv: 1609.00716 [hep-th].
- [67] Z.-K. Guo et al., Inflationary attractor from tachyonic matter, *Phys. Rev. D* 68 (2003), 043508, DOI: 10.1103/PhysRevD.68.043508, arXiv: hep-ph/0304236.

- [68] R. Allahverdi et al., Reheating in Inflationary Cosmology: Theory and Applications, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* 60 (2010), 27–51, DOI: 10.1146/annurev.nucl.012809.104511, arXiv: 1001.2600 [hep-th].
- [69] N. Bilic, S. Domazet, G. S. Djordjevic, Particle creation and reheating in a braneworld inflationary scenario, *Phys. Rev. D* 96.8 (2017), 083518, DOI: 10.1103/PhysRevD.96.083518, arXiv: 1707.06023 [hep-th].
- [70] J. M. Bardeen, Gauge Invariant Cosmological Perturbations, *Phys. Rev. D* 22 (1980), 1882–1905, DOI: 10.1103/PhysRevD.22.1882.
- [71] H. Kodama, M. Sasaki, Cosmological Perturbation Theory, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* 78 (1984), 1–166, DOI: 10.1143/PTPS.78.1.
- [72] V. F. Mukhanov, H. Feldman, R. H. Brandenberger, Theory of cosmological perturbations. Part 1. Classical perturbations. Part 2. Quantum theory of perturbations. Part 3. Extensions, *Phys. Rept.* 215 (1992), 203–333, DOI: 10.1016/0370-1573(92)90044-Z.
- [73] C. Armendariz-Picon, V. F. Mukhanov, P. J. Steinhardt, Essentials of k essence, *Phys. Rev. D* 63 (2001), 103510, DOI: 10.1103/PhysRevD.63.103510, arXiv: astro-ph/0006373.
- [74] C. Armendariz-Picon, V. F. Mukhanov, P. J. Steinhardt, A Dynamical solution to the problem of a small cosmological constant and late time cosmic acceleration, *Phys. Rev. Lett.* 85 (2000), 4438–4441, DOI: 10.1103/PhysRevLett.85.4438, arXiv: astro-ph/0004134.
- [75] J. Garriga, V. F. Mukhanov, Perturbations in k-inflation, *Phys. Lett. B* 458 (1999), 219–225, DOI: 10.1016/S0370-2693(99)00602-4, arXiv: hep-th/9904176.
- [76] V. Mukhanov, S. Winitzki, *Introduction to quantum effects in gravity*, Cambridge University Press, 2007, ISBN: 978-0-521-86834-1.
- [77] J.-c. Hwang, H. Noh, Cosmological perturbations in a generalized gravity including tachyonic condensation, *Phys. Rev. D* 66 (2002), 084009, DOI: 10.1103/PhysRevD.66.084009, arXiv: hep-th/0206100.
- [78] W. H. Kinney, Cosmology, inflation, and the physics of nothing, *NATO Sci. Ser. II* 123 (2003), 189–243, DOI: 10.1007/978-94-010-0076-5_5, arXiv: astro-ph/0301448.

- [79] P. A. R. Ade et al., BICEP2 / Keck Array x: Constraints on Primordial Gravitational Waves using Planck, WMAP, and New BICEP2/Keck Observations through the 2015 Season, *Phys. Rev. Lett.* 121 (2018), 221301, DOI: 10.1103/PhysRevLett.121.221301, arXiv: 1810.05216 [astro-ph.CO].
- [80] A. Sen, Tachyon dynamics in open string theory, *Int. J. Mod. Phys. A* 20 (2005), 5513–5656, DOI: 10.1142/S0217751X0502519X, arXiv: hep-th/0410103.
- [81] N. Berkovits, A. Sen, B. Zwiebach, Tachyon condensation in superstring field theory, *Nucl. Phys. B* 587 (2000), 147–178, DOI: 10.1016/S0550-3213(00)00501-0, arXiv: hep-th/0002211.
- [82] M. Sami, P. Chingangbam, T. Qureshi, Aspects of tachyonic inflation with exponential potential, *Phys. Rev. D* 66 (2002), 043530, DOI: 10.1103/PhysRevD.66.043530, arXiv: hep-th/0205179.
- [83] M. Milosevic et al., Dynamics of tachyon fields and inflation - comparison of analytical and numerical results with observation, *Serbian Astronomical Journal* 192 (2016), 1–8, DOI: 10.2298/SAJ160312003M.
- [84] M. Milosevic et al., Numerical Calculation of Hubble Hierarchy Parameters and Observational Parameters of Inflation, *AIP Conf. Proc.* 2075.1 (2019), 090009, DOI: 10.1063/1.5091223, arXiv: 1809.04939 [gr-qc].
- [85] G. W. Gibbons, Cosmological evolution of the rolling tachyon, *Phys. Lett. B* 537 (2002), 1–4, DOI: 10.1016/S0370-2693(02)01881-6, arXiv: hep-th/0204008.
- [86] A. Feinstein, Power law inflation from the rolling tachyon, *Phys. Rev. D* 66 (2002), 063511, DOI: 10.1103/PhysRevD.66.063511, arXiv: hep-th/0204140.
- [87] G. Shiu, I. Wasserman, Cosmological constraints on tachyon matter, *Phys. Lett. B* 541 (2002), 6–15, DOI: 10.1016/S0370-2693(02)02195-0, arXiv: hep-th/0205003.
- [88] S. del Campo, R. Herrera, A. Toloza, Tachyon Field in Intermediate Inflation, *Phys. Rev. D* 79 (2009), 083507, DOI: 10.1103/PhysRevD.79.083507, arXiv: 0904.1032 [astro-ph.CO].
- [89] A. Sen, Field theory of tachyon matter, *Mod. Phys. Lett. A* 17 (2002), 1797–1804, DOI: 10.1142/S0217732302008071, arXiv: hep-th/0204143.
- [90] K. Rezazadeh, K. Karami, S. Hashemi, Tachyon inflation with steep potentials, *Phys. Rev. D* 95.10 (2017), 103506, DOI: 10.1103/PhysRevD.95.103506, arXiv: 1508.04760 [gr-qc].

- [91] F. Felegary, I. Akhlaghi, H. Haghi, Evolution of matter perturbations and observational constraints on tachyon scalar field model, *Phys. Dark Univ.* 30 (2020), 100739, DOI: 10.1016/j.dark.2020.100739.
- [92] D. J. Schwarz, C. A. Terrero-Escalante, A. A. Garcia, Higher order corrections to primordial spectra from cosmological inflation, *Phys. Lett. B* 517 (2001), 243–249, DOI: 10.1016/S0370-2693(01)01036-X, arXiv: astro-ph/0106020.
- [93] E. E. Flanagan, S. H. H. Tye, I. Wasserman, Cosmological expansion in the Randall-Sundrum brane world scenario, *Phys. Rev. D* 62 (2000), 044039, DOI: 10.1103/PhysRevD.62.044039, arXiv: hep-ph/9910498.
- [94] P. Binetruy, C. Deffayet, D. Langlois, Nonconventional cosmology from a brane universe, *Nucl. Phys. B* 565 (2000), 269–287, DOI: 10.1016/S0550-3213(99)00696-3, arXiv: hep-th/9905012.
- [95] R. Maartens, K. Koyama, Brane-World Gravity, *Living Rev. Rel.* 13 (2010), 5, DOI: 10.12942/lrr-2010-5, arXiv: 1004.3962 [hep-th].
- [96] T. Kaluza, Zum Unitatsproblem der Physik, *Int. J. Mod. Phys. D* 27.14 (2018), 1870001, DOI: 10.1142/S0218271818700017, arXiv: 1803.08616.
- [97] O. Klein, The Atomicity of Electricity as a Quantum Theory Law, *Nature* 118 (1926), 516, DOI: 10.1038/118516a0.
- [98] S. Mukhi, String theory: a perspective over the last 25 years, *Class. Quant. Grav.* 28 (2011), 153001, DOI: 10.1088/0264-9381/28/15/153001, arXiv: 1110.2569 [physics.pop-ph].
- [99] T. G. Rizzo, Pedagogical introduction to extra dimensions, *eConf* C040802 (2004), L013, arXiv: hep-ph/0409309.
- [100] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G. Dvali, The Hierarchy problem and new dimensions at a millimeter, *Phys. Lett. B* 429 (1998), 263–272, DOI: 10.1016/S0370-2693(98)00466-3, arXiv: hep-ph/9803315.
- [101] M. Natsuume, *AdS/CFT Duality User Guide*, vol. 903, 2015, ISBN: 978-4-431-55441-7, DOI: 10.1007/978-4-431-55441-7, arXiv: 1409.3575 [hep-th].
- [102] P. Brax, C. van de Bruck, Cosmology and brane worlds: A Review, *Class. Quant. Grav.* 20 (2003), R201–R232, DOI: 10.1088/0264-9381/20/9/202, arXiv: hep-th/0303095.
- [103] N. Bilic, Aspects of braneworld cosmology and holography, *9th Mathematical Physics Meeting: Summer School and Conference on Modern Mathematical Physics*, 2018, arXiv: 1802.02775 [hep-th].

- [104] G. W. Gibbons, Anti-de-Sitter spacetime and its uses, *2nd Samos Meeting on Cosmology, Geometry and Relativity: Mathematical and Quantum Aspects of Relativity and Cosmology*, 2011, 102–142, arXiv: 1110.1206 [hep-th].
- [105] A. V. Ramallo, Introduction to the AdS/CFT correspondence, *Springer Proc. Phys.* 161 (2015), 411–474, DOI: 10.1007/978-3-319-12238-0_10, arXiv: 1310.4319 [hep-th].
- [106] N. Bilic, Randall-Sundrum versus holographic cosmology, *Phys. Rev. D* 93.6 (2016), 066010, DOI: 10.1103/PhysRevD.93.066010, arXiv: 1511.07323 [gr-qc].
- [107] P. Binetruy et al., Brane cosmological evolution in a bulk with cosmological constant, *Phys. Lett. B* 477 (2000), 285–291, DOI: 10.1016/S0370-2693(00)00204-5, arXiv: hep-th/9910219.
- [108] E. Witten, Anti-de Sitter space, thermal phase transition, and confinement in gauge theories, *Adv. Theor. Math. Phys.* 2 (1998), 505–532, DOI: 10.4310/ATMP.1998.v2.n3.a3, arXiv: hep-th/9803131.
- [109] N. Bilić, S. Domazet, G. Djordjevic, Tachyon with an inverse power-law potential in a braneworld cosmology, *Class. Quant. Grav.* 34.16 (2017), 165006, DOI: 10.1088/1361-6382/aa7e0f, arXiv: 1704.01072 [gr-qc].
- [110] D. D. Dimitrijevic et al., Tachyon scalar field in a braneworld cosmology, *Int. J. Mod. Phys. A* 33.34 (2018), 1845017, DOI: 10.1142/S0217751X18450173.
- [111] M. Stojanović et al., Inflationary RSII Model with a Matter in the Bulk and Exponential Potential of Tachyon Field, *Facta Univ. Ser. Phys. Chem. Tech.* 17.1 (2019), 79–87, DOI: 10.2298/FUPCT1901079S, arXiv: 1904.11329 [gr-qc].
- [112] S. Gubser, I. R. Klebanov, A. M. Polyakov, Gauge theory correlators from noncritical string theory, *Phys. Lett. B* 428 (1998), 105–114, DOI: 10.1016/S0370-2693(98)00377-3, arXiv: hep-th/9802109.
- [113] N. Bilic, Holographic cosmology and tachyon inflation, *Int. J. Mod. Phys. A* 33.34 (2018), 1845004, DOI: 10.1142/S0217751X18450045, arXiv: 1808.08146 [gr-qc].
- [114] S. S. Gubser, AdS / CFT and gravity, *Phys. Rev. D* 63 (2001), 084017, DOI: 10.1103/PhysRevD.63.084017, arXiv: hep-th/9912001.
- [115] S. Hawking, T. Hertog, H. Reall, Brane new world, *Phys. Rev. D* 62 (2000), 043501, DOI: 10.1103/PhysRevD.62.043501, arXiv: hep-th/0003052.
- [116] S. B. Giddings, E. Katz, L. Randall, Linearized gravity in brane backgrounds, *JHEP* 03 (2000), 023, DOI: 10.1088/1126-6708/2000/03/023, arXiv: hep-th/0002091.

- [117] M. Duff, J. T. Liu, Complementarity of the Maldacena and Randall-Sundrum pictures, *Class. Quant. Grav.* 18 (2001), 3207–3214, DOI: 10.1088/0264-9381/18/16/310, arXiv: hep-th/0003237.
- [118] S. Nojiri, S. D. Odintsov, Brane world inflation induced by quantum effects, *Phys. Lett. B* 484 (2000), 119–123, DOI: 10.1016/S0370-2693(00)00629-8, arXiv: hep-th/0004097.
- [119] C. Fefferman, C. R. Graham, The ambient metric, *arXiv e-prints* (2007), arXiv: 0710.0919 [math.DG].
- [120] S. de Haro, S. N. Solodukhin, K. Skenderis, Holographic reconstruction of space-time and renormalization in the AdS / CFT correspondence, *Commun. Math. Phys.* 217 (2001), 595–622, DOI: 10.1007/s002200100381, arXiv: hep-th/0002230.
- [121] S. de Haro, K. Skenderis, S. N. Solodukhin, Gravity in warped compactifications and the holographic stress tensor, *Class. Quant. Grav.* 18 (2001), 3171–3180, DOI: 10.1088/0264-9381/18/16/307, arXiv: hep-th/0011230.
- [122] E. Kiritsis, Holography and brane-bulk energy exchange, *JCAP* 10 (2005), 014, DOI: 10.1088/1475-7516/2005/10/014, arXiv: hep-th/0504219.
- [123] N. Bilic et al., Tachyon inflation in the holographic braneworld, *JCAP* 08 (2019), 034, DOI: 10.1088/1475-7516/2019/08/034, arXiv: 1809.07216 [gr-qc].
- [124] M. Stojanovic et al., Holographic inflation with tachyon field as an attractor solution, *SFIN XXXIII*, 2019, 311–318, ISBN: 978-86-82441-51-9.
- [125] D. D. Dimitrijević et al., Attractor Behaviour of Holographic Inflation Model for Inverse Cosine Hyperbolic Potential, *Facta Univ. Ser. Phys. Chem. Tech.* 18 (2020), 65–73.
- [126] M. Stojanovic et al., Tachyon inflation with inverse cosh potential in holographic braneworld, in preparation, (2021).
- [127] M. Milosevic et al., On an inflation in holographic cosmology with inverse cosh potential, *Annals of the University of Craiova, Physics* 30(part II) (2020), 196–203.
- [128] N. Bilic, Randall-Sundrum vs. Holographic Braneworld, 2016, arXiv: 1609.09362 [gr-qc].
- [129] C. Gao, Generalized modified gravity with the second order acceleration equation, *Phys. Rev. D* 86 (2012), 103512, DOI: 10.1103/PhysRevD.86.103512, arXiv: 1208.2790 [gr-qc].
- [130] J. M. Cline, H. Firouzjahi, P. Martineau, Reheating from tachyon condensation, *JHEP* 11 (2002), 041, DOI: 10.1088/1126-6708/2002/11/041, arXiv: hep-th/0207156.

- [131] A. Nautiyal, Reheating constraints on Tachyon Inflation, *Phys. Rev. D* 98.10 (2018), 103531, DOI: 10.1103/PhysRevD.98.103531, arXiv: 1806.03081.
- [132] J. E. Lidsey et al., Reconstructing the inflation potential : An overview, *Rev. Mod. Phys.* 69 (1997), 373–410, DOI: 10.1103/RevModPhys.69.373, arXiv: astro-ph/9508078.
- [133] J. M. Maldacena, Non-Gaussian features of primordial fluctuations in single field inflationary models, *JHEP* 05 (2003), 013, DOI: 10.1088/1126-6708/2003/05/013, arXiv: astro-ph/0210603.
- [134] C. T. Byrnes, Lecture notes on non-Gaussianity, *Astrophys. Space Sci. Proc.* 45 (2016), 135–165, DOI: 10.1007/978-3-319-44769-8_3, arXiv: 1411.7002 [astro-ph.CO].
- [135] X. Chen et al., Observational signatures and non-Gaussianities of general single field inflation, *JCAP* 01 (2007), 002, DOI: 10.1088/1475-7516/2007/01/002, arXiv: hep-th/0605045.
- [136] E. Silverstein, D. Tong, Scalar speed limits and cosmology: Acceleration from Deceleration, *Phys. Rev. D* 70 (2004), 103505, DOI: 10.1103/PhysRevD.70.103505, arXiv: hep-th/0310221.
- [137] Y. Akrami et al., Planck 2018 results. IX. Constraints on primordial non-Gaussianity, *Astron. Astrophys.* 641 (2020), A9, DOI: 10.1051/0004-6361/201935891, arXiv: 1905.05697 [astro-ph.CO].
- [138] D. Dimitrijevic et al., Power spectrum in slow-roll regime for some tachyon-like inflationary models, in preparation, (2021).

Индекс слика

- Слика 1:** Ограничења за опервабилне параметре и предвиђања различитих инфлаторних модела [6]. 43
- Слика 2:** Нумеричка решења једначине (7.70) за различите почетне вредности $\dot{\theta}_i$. Пуна линија одговара решењу које је добијено за почетну вредност $\dot{\theta}$, одређену на основу израза (7.71). Вредност параметра ω у потенцијалу је $\omega = 0,164$ 74
- Слика 3:** Нумеричка решења једначине (7.72) за различите почетне вредности $\dot{\theta}_i$. Пуна линија одговара решењу које је добијено за почетну вредност $\dot{\theta}$, одређену на основу израза (7.73). Вредност параметра у потенцијалу је $\omega = 0,164$ 75
- Слика 4:** Параметри спорог котрљања ε_1 (испрекидана црвена линија) и ε_2 (пуна плава линија) у холографском моделу са експоненцијалним потенцијалом $V = e^{-\omega\theta/\ell}$. На левом графику су приказане вредности израчунате аналитички (у апроксимацији спорог котрљања). На десном графику су приказане вредности израчунате нумерички без апроксимације спорог котрљања. За вредности $\omega^2 = 0,027$ и $h_i^2 = 0,6$, у складу са изразом (7.51), добија се $N = 60$ 84
- Слика 5:** За експоненцијани потенцијал $V = e^{-\omega\theta/\ell}$ приказана је зависност параметра r од иницијалне вредности h_i^2 израчуната аналитички (пуна линија) и нумерички (испрекидана линија) за $N = 60$ (црвене линије) и $N = 90$ (плаве линије). Вредност параметра ω се мења дуж линије у складу са изразом (7.52). 85
- Слика 6:** За експоненцијани потенцијал $V = e^{-\omega\theta/\ell}$ приказана је зависност $1 - n_s$ од иницијалне вредности h_i^2 израчуната аналитички (пуна линија) и нумерички (испрекидана линија) за $N = 60$ (црвене линије) и $N = 90$ (плаве линије). Вредност параметра ω се мења дуж линије у складу са изразом (7.52). 85
- Слика 7:** За експоненцијани потенцијал $V = e^{-\omega\theta/\ell}$ приказани су добијени резултати за посматрачке параметре у (n_s, r) равни. Различита боја одговара различитим вредностима N (леви график), и различитим вредностима h_i^2 (десни график). Аналитички резултати добијени у апроксимацији спорог котрљања за $N = 60$ и $N = 90$ су означени црном пуном и црном испрекиданом линијом, респективно. 86

Слика 8: За експоненцијални потенцијал $V = e^{-\omega\theta/\ell}$ приказани су добијени резултати за посматрачке параметре у (n_s, r) равни и ограничења из [6]. Као и на слици 7, тачкама су приказане израчунате вредности параметара добијене нумерички на основу једначина кретања за произвољно изабране вредности за N и h_i^2 87

Слика 9: За експоненцијални потенцијал $V = e^{-\omega\theta/\ell}$ приказана је међусобна зависност r и n_s , за неколико различитих вредности N и за h_i^2 у интервалу од 0,01 до 2. 87

Слика 10: Добијени резултати за посматрачке параметре у (n_s, r) равни у тахионском моделу у стандардној космологији за потенцијале: $e^{-\omega\theta}$ (леви график) и $1/\cosh(\omega\theta)$ (десни график). 89

Слика 11: Добијени резултати за посматрачке параметре у (n_s, r) равни у тахионском моделу са RSII космологијом за потенцијале: $e^{-\omega\theta}$ (леви график) и $1/\cosh(\omega\theta)$ (десни график). 89

Слика 12: Добијени резултати за посматрачке параметре у (n_s, r) равни у модификованом RSII моделу са тахионским пољем за потенцијале: $e^{-\omega\theta}$ (леви график) и $1/\cosh(\omega\theta)$ (десни график). 89

Слика 13: Добијени резултати за посматрачке параметре у (n_s, r) равни за различите моделе са потенцијалом облика $e^{-\omega\theta}$ 90

Слика 14: Добијени резултати за посматрачке параметре у (n_s, r) равни за различите моделе са потенцијалом облика $1/\cosh(\omega\theta)$ 90

Индекс табела

Табела 1: Облик прве Фридманове једначине у инфлаторним моделима са тахионским пољем. У једначинама је, ради поређења, узето $\ell = 1$ 88

Табела 2: Израчунате вредности RMSE. 91

Биографија

Марко Стојановић је рођен 18.04.1991. године у Параћину, где је завршио основну и средњу школу. Основне академске студије физике уписао је на Природно-математичком факултету у Нишу, школске 2010/11. године. Завршио у року 2013. године и исте године уписао мастер академске студије на Природно-математичком факултету у Нишу, на смеру Општа физика. Докторске академске студије физике уписао је школске 2015/16. на истом факултету.

Од 2016. године ангажован је у настави на Депарману за Физику Природно-математичког факултету у Нишу за извођење рачунских вежби из предмета *Специјална теорија релативности* и *Општа теорија релативности*. Од школске 2017/18. године ангажован је на Медицинском факултету у Нишу као сарадник у настави, а од 2019/20. године као асистент, за ужу научну област Физика. Од школске 2020/2021. године ангажован је у Гимназији „Светозар Марковић“ у Нишу за извођење наставе из предмета *Астрономија* и *Основе механике и термодинамике* за ученике у „Одељењу за ученике са посебним способностима за физику“.

Био је корисник стипендије Министарства просвете, науке и технолошког развоја за студенте докторских студија, од школске 2015/16. године до заснивања радног односа 2017. године.

Маја месеца 2018. године прикључен је научноистраживачком пројекту Министарства просвете науке и технолошког развоја под називом „Гравитација и структура космоса на великим скалама“ (ОИ 176003).

Бави се истраживањима везаним за класичну и квантну динамику тахионског поља и теорију инфлације.

Учествовао је на неколико конференција и међународним школама намењеним студентима докторских студија.

Библиографија

Рад у врхунском међународном часопису [M21]

- 1) N. Bilić, D.D. Dimitrijević, G.S. Djordjević, M. Milošević, M. Stojanović, *Tachyon inflation in the holographic braneworld*, JCAP08 (2019) 034, IF-5.210, ISSN 1475-7516.

Рад у истакнутом међународном часопису [M22]

- 1) D.D. Dimitrijevic, N. Bilić, G.S. Djordjevic, M. Milosevic, M. Stojanovic, *Tachyon scalar field in a braneworld cosmology*, International Journal of Modern Physics A, Vol. 33, No. 34, 1845017 (2018), IF-1.336, ISSN 0217-751X.

Рад у међународном часопису [M23]

- 1) M. Milosevic, D.D. Dimitrijevic, G.S. Djordjevic, M.D. Stojanovic, *Dynamics of tachyon fields and inflation - comparison of analytical and numerical results with observation*, Serbian Astron. J. (2016), IF-0.840, ISSN 1450-698X.

Саопштења са међународних скупова штампана у целини [M33]

- 1) M. Stojanović, M. Milošević, G.S. Djordjević, D.D. Dimitrijević, *Holographic Inflation with Tachyon Field as an Attractor Solution*, SFIN year XXXIII Series A: Conferences, No. A1, 311-318 (2020), ISBN 978-86-82441-51-9.
- 2) M. Milošević, N. Bilić, D.D. Dimitrijević, G.S. Djordjević, M. Stojanović, *Numerical calculation of Hubble hierarchy parameters and observational parameters of inflation*, AIP Conference Proceedings 2075, 090009 (2019).
- 3) N. Bilic, D.D. Dimitrijevic, G.S. Djordjevic, M. Milosevic, M. Stojanovic, *Dynamics of tachyon fields and inflation: Analytical vs numerical solutions*, AIP Conference Proceedings 1722, 050002 (2016).

Рад у тематском зборнику националног значаја [M45]

- 1) P. Jovanović, L. Č. Popović, N. Bon, E. Bon, M. Stalevski, V. Borka Jovanović, D. Borka, M. Stojanović, *Istraživanja galaktičkih i vangalaktičkih gravitacionih pojava na Astronomskoj opservatoriji (2017-2019)*, Zbornik radova konferencije "Razvoj astronomije kod Srba X", Beograd, Srbija, 22. - 26. april 2019., Publ. Astr. druš. "Ruđer Bošković" 19, 65-90 (2019).

Радови у водећим часописима националног значаја [M51]

- 1) M. Stojanović, N. Bilić, D.D. Dimitrijević, G.S. Djordjević, M. Milošević, *Inflationary RSII Model with a Matter in the Bulk and Exponential Potential of Tachyon Field*, Facta Universitatis Series: Physics, Chemistry and Technology, Vol. 17, No 1, 79-88 (2019), ISSN 0354-4656.
- 2) D.D. Dimitrijević, G. Djordjević, M. Milošević, M. Stojanović, *Attractor Behaviour of Holographic Inflation Model for Inverse Cosine Hyperbolic Potential*, Facta Universitatis Series: Physics, Chemistry and Technology, Vol. 18, No 1, 65-73 (2020), ISSN 0354-4656.
- 3) M. Milosevic, M. Stojanovic, G. S. Djordjevic, D. D. Dimitrijevic, *On an inflation in holographic cosmology with inverse cosh potential*, Annals of the University of Craiova, Physics, Vol. 30(part II), 196-203 (2020), ISSN 1223-6039.

Изјаве аутора

**ИЗЈАВА О ИСТОВЕТНОСТИ ЕЛЕКТРОНСКОГ И ШТАМПАНОГ ОБЛИКА
ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ**

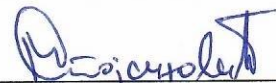
Наслов дисертације:

Тахионска инфлација у холографској космологији

Изјављујем да је електронски облик моје докторске дисертације, коју сам предао/ла за уношење у **Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу**, истоветан штампаном облику.

У Нишу, 06.05.2021.

Потпис аутора дисертације:



Марко Д. Стојановић

ИЗЈАВА О АУТОРСТВУ

Изјављујем да је докторска дисертација, под насловом

Тахионска инфлација у холографској космологији

која је одбрањена на Природно-математичком факултету Универзитета у Нишу:

- резултат сопственог истраживачког рада;
- да ову дисертацију, ни у целини, нити у деловима, нисам пријављивао/ла на другим факултетима, нити универзитетима;
- да нисам повредио/ла ауторска права, нити злоупотребио/ла интелектуалну својину других лица.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци, који су у вези са ауторством и добијањем академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада, и то у каталогу Библиотеке, Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Нишу, као и у публикацијама Универзитета у Нишу.

У Нишу, 06.05.2021.

Потпис аутора дисертације:



Марко Д. Стојановић

ИЗЈАВА О КОРИШЋЕЊУ

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Никола Тесла“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу унесе моју докторску дисертацију, под насловом:

Тахионска инфлација у холографској космологији

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском облику, погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију, унету у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу, могу користити сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons), за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство (CC BY)
2. Ауторство – некомерцијално (CC BY-NC)
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде (CC BY-NC-ND)
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима (CC BY-NC-SA)
5. Ауторство – без прераде (CC BY-ND)
6. Ауторство – делити под истим условима (CC BY-SA)

У Нишу, 06.05.2021.

Потпис аутора дисертације:



Марко Д. Стојановић