УНИВЕРЗИТЕТ У КРАГУЈЕВЦУ
ПЕДАГОШКИ ФАКУЛТЕТ У УЖИЦУ

Ненад С. Милинковић

КОНТЕКСТУАЛНИ ПРИСТУП НАСТАВИ АЛГЕБРЕ У МЛАЂИМ РАЗРЕДИМА ОСНОВНЕ ШКОЛЕ

докторска дисертација

Ужице, 2021.

UNIVERSITY OF KRAGUJEVAC
FACULTY OF EDUCATION IN UŽICE

Nenad S. Milinković

THE CONTEXTUAL APPROACH TO TEACHING ALGEBRA IN JUNIOR GRADES OF PRIMARY SCHOOL

Doctoral Dissertation

Užice, 2021.

Аутор
Име и презиме: Ненад С. Милинковић
Датум и место рођења: 10. 08. 1984. године, Ужице
Садашње запослење: Универзитет у Крагујевцу, Педагошки факултет у Ужицу
Докторска дисертација
Наслов: Контекстуални приступ настави алгебре у млађим разредима основне школе
Број страница: 402
Број слика: 14, графикона: 14 , табела: 119
Број библиографских података: 316
Установа и место где је рад израђен: Педагошки факултет у Ужицу
Научна област (УДК): 371.3
Ментор: Др Сања Маричић, редовни професор за ужу научну област *Методика наставе математике*, Педагошки факултет у Ужицу, Универзитет у Крагујевцу
Оцена и обрана
Датум пријаве теме: 17. 09. 2019.
Број одлуке и датум прихватања теме докторске/уметничке дисертације: IV-02-208/13 од 11. 03. 2020.
Комисија за оцену научне заснованости теме и испуњености услова кандидата:
1. Др Оливера Марковић, доцент за ужу научну област *Математика са методиком*, Педагошки факултет у Ужицу, Универзитет у Крагујевцу; 2. Др Нела Малиновић Јовановић, редовни професор за ужу научну област *Методика наставе математике,* Педагошки факултет у Врању, Универзитет у Нишу; 3. Др Оливера Ђокић, ванредни професор за ужу научну област *Методика наставе математике,* Учитељски факултет, Универзитет у Београду
Комисија за оцену и одбрану докторске/уметничке дисертације:
Датум одбране дисертације:

Author
Name and surname: Nenad S. Milinković
Date and place of birth: 10. 08. 1984., Užice
Current employment: Faculty of Education in Užice, University of Kragujevac
Doctoral Dissertation
Title: The Contextual Approach to Teaching Algebra in Junior Grades of Primary School
No. of pages: 402
No. of images: 14, charts: 14, tables: 119
No. of bibliographic data: 316
Institution and place of work: Faculty of Education in Užice
Scientific area (UDK): 371.3
Mentor: Dr. Sanja Maričić, Full professor for the narrow scientific field of *Methodology of Teaching Mathematics*, Faculty of Education in Užice, University of Kragujevac
Grade and Dissertation Defense
Topic Application Date: 17. 09. 2019.
Decision number and date of acceptance of the doctoral / artistic dissertation topic: IV-02-208/13 од 11. 03. 2020.
Commission for evaluation of the scientific merit of the topic and the eligibility of the candidate: 1. Dr. Olivera Marković, Assistant Professor, Faculty of Education in Užice, University of Kragujevac 2. Dr. Nela Malinović Jovanović, Full Professor, Faculty of Education in Vranje, University of Niš 3. Dr. Olivera Djokić, Associate Professor, Faculty of Teacher Education in Belgrade, University of Belgrade
Commission for evaluation and defense of doctoral / artistic dissertation: .
Date of Dissertation Defense:

Користим ову прилику да се посебно захвалим онима који су ми пружили помоћ и били највећа подршка у изради ове докторске дисертације.

Највећу захвалност дугујем свом ментору, изузетном стручњаку, колеги и пријатељу проф. др Сањи Маричић, која ме је водила кроз цео процес израде докторске дисертације и имала стрпљења да ме саслуша, несебично пружи помоћ и даје савете, како би се овај рад успешно привео крају.

Захваљујем се члановима Комисије, уваженим професорима, на корисним сугестијама током израде дисертације.

Посебну захвалност на несебичној подршци и разумевању дугујем својој породици, супрузи Милици и сину Вуку.

Ненад Милинковић

У Ужицу, јуна 2021.

КОНТЕКСТУАЛНИ ПРИСТУП НАСТАВИ АЛГЕБРЕ У МЛАЂИМ РАЗРЕДИМА ОСНОВНЕ ШКОЛЕ

Резиме

Предмет рада је истраживање ефикасности примене контекстуалног приступа у учењу садржаја алгебре у млађим разредима основне школе. У теоријском делу представљене су карактеристике контекстуалног приступа, специфичности учења алгебре на млађем школском узрасту, издвојени проблеми и потешкоће у учењу ових садржаја и операционализоване алгебарске способности, које представљају окосницу учења. У том контексту креиран је и разрађен методички приступ моделовања садржаја алгебре, као начина математизације проблема реалног контекста.

Емпиријски део докторске дисертације имао је за циљ да истражи утицај креираног модела учења на образовна постигнућа, развијање алгебарских способности, трајност знања ученика, као и да и утврди улогу уџбеника математике у стварању услова за контекстуални приступ учењу садржаја алгебре у млађим разредима основне школе. Добијени резултати показују да се применом контекстуалног приступа у настави математике, у односу на класичан приступ учењу, постижу боља образовна постигнућа у учењу садржаја алгебре, доприноси развијању алгебарских способности и стицању знања која имају већу трајност. Анализа садржаја уџбеника математике показала је да они стварају добру основу за контекстуални приступ учењу садржаја алгебре у прва два разреда, а у трећем и четвртом разреду недовољну.

Добијени резултати показују да се бројне потешкоће које прате учење садржаја алгебре у млађим разредима основне школе могу превазићи заснивањем наставе математике на бази реалистичних ситуација учења које су блиске ученику, постепеним кретањем кроз нивое математизације.

Кључне речи: алгебра, алгебарске способности, контекстуални приступ, математизација, моделовање, настава алгебре, почетна настава математике, реалистичко математичко образовање.

THE CONTEXTUAL APPROACH TO TEACHING ALGEBRA IN JUNIOR GRADES OF PRIMARY SCHOOL

Summary

This paper is aimed at examining the efficiency of the contextual approach to algebra in junior grades of primary school. The theoretical section presents the characteristics of the contextual approach, the specifics of learning algebra in junior grades of primary school, selected problems and difficulties in learning this content, and operationalized algebraic skills which represent the foundation for learning. In that context, a methodological approach to modeling algebraic content was created and developed, as well as ways to mathematize real context problems.

The empirical section of the doctoral thesis aims to investigate the impact of the created learning model on educational achievements, development of algebraic skills, durability of student knowledge, as well as to determine the role of mathematics textbooks in creating the conditions necessary for the contextual approach to learning algebraic content in junior grades of primary school. The obtained results show that the implementation of the contextual approach generates a better educational achievement in mastering algebraic content compared to the traditional approach to learning, as well as that it develops students' algebraic skills and results in the acquisition of knowledge of greater durability. Analysis of the content of mathematics textbooks show that they form a good basis for the contextual approach to learning algebra in the first two grades of primary school, while their contribution in that regard in the third and fourth grade is insufficient.

The obtained results show that many of the difficulties associated with learning algebra in junior grades of primary school can be overcome by grounding mathematics classes in real-life learning situations which are familiar and relatable to students, and by gradually moving up through different levels of mathematization.

Keywords: algebra, algebraic skills, contextual approach, mathematization, modeling, teaching algebra, elementary mathematics education, realistic mathematics education.

„Математика мора бити повезана са стварношћу,
бити блиска деци и бити релевантна за друштво,
да би се сматрала људском вредношћу.“
(Freudenthal, 1977)

САДРЖАЈ

УВОД

Питање *Како унапредити наставу математике у млађим разредима основне школе*? увек је у фокусу истраживача математичког образовања. И поред тога што изгледа да су многи од тих проблема решени, неки од њих и даље побуђују пажњу и представљају полазиште за нова истраживања. Садржаје наставе математике у прва четири разреда основне школе чине садржаји који припадају области аритметике, алгебре и геометрије. Методичку трансформацију ових садржаја карактерише специфичан методички приступ, јер сваки од њих има своје посебне одлике, које суштински одређују тај пут. Неки од ових приступа су интуитивно ближи ученику, неки даљи, једне карактерише већа апстрактност, друге, пак, мања. Оно што је заједничко свим наведеним садржајима јесте специфичан језик, симболика која их прати и генерализације које из њих следе, а које се изражавају кроз симболичке нотације. Када је у питању симболичка нотација, она је карактеристична за све садржаје математичког образовања и присутна је у аритметици, геометрији и алгебри, али је њена сложеност и комплексност нарочито изражена у садржајима алгебре. Алгебарска нотација користи се и у аритметичким садржајима, у којима се све математичке законитости изражавају овим нотацијама, као и у геометрији за успостављање веза између геометријских објеката. Управо је та сложеност и овај важан аспект подстакао аутора овог рада на размишљање и избор теме за истраживање учења садржаја алгебре. Циљ истраживања ће обухватити разматрање свих елемената учења од којих зависи успех на овом плану, али и свих специфичности и услова који одређују учење ових садржаја. Тако се у фокусу рада нашло питање методичке трансформације садржаја алгебре и развијања алгебарских способности у настави математике у млађим разредима основне школе. Неколико је разлога за овакав одабир теме.

Садржаји алгебре у наставном програму математике у млађим разредима основне школе чине важан део математичког образовања и представљају „капију за учење математике, али и баријеру, јер велики број ученика не добија кључ за ту капију“ (Cai, 2004: 107; Lott, 2000; Moses & Cobb, 2001). Међутим, студије широм света указују на мноштво проблема како у овладавању овим садржајима од стране ученика, тако и на потребу за различитим приступима развијању алгебарских појмова на млађем школском узрасту, њиховој методичкој трансформацији и организацији наставе ране алгебре (Kieran, 1981, 2004; Sfard & Linchevski, 1994; Herscovics & Linchevski, 1994 и други).

Резултати истраживања показују да је већина препрека и проблема везаних за учење и наставу алгебре повезана са специфичностима садржаја алгебре са једне стране и карактеристикама мишљења деце млађег школског узраста са друге стране (Booth, 1984, 1988; Vergnaud, 1985; Kieran, 1981, 1985, 2004; Sfard & Linchevski, 1994; Filloi & Rojano, 1989; Herscovics & Linchevski, 1994 и други). Мишљење ученика млађег школског узраста је на нивоу конкретних операција, коју карактерише наглашена потреба за очигледношћу у настави математике. На основу тога, можемо рећи да когнитивна и развојна ограничења ученика представљају један сегмент проблема развоја алгебарског мишљења и алгебарских способности.

Велики број истраживања широм света из области методике наставе математике, бави се проблемом развоја алгебарских појмова код ученика, проблемима везаним за решавање задатака и проблемима из области алгебре. Поред наведеног, истраживања се баве и усвајањем садржаја алгебре, као и узроцима који доводе до тих проблема. Већини истраживања на овом плану намећу се заједнички закључци, који истичу потребу реорганизације наставних планова и програма, као и преиспитивање методичких приступа у учењу садржаја алгебре.

Наставни програми у различитим државама широм света не наглашавају значај алгебарских садржаја у млађем школском узрасту, тако да ученици често немају довољно могућности да у потпуности развију алгебарске појмове. Поред тога, често су алгебарски садржаји за ученике овог узраста претешки или недовољно разумљиви због специфичности у изражавању алгебарских истина, коришћењем формалне алгебарске симболизације. Истраживања показују да су сва ова ограничења често узрок потешкоћа у алгебарском образовању у старијим разредима основне школе. Као још један узрок недовољне развијености алгебарских појмова код ученика, може се навести и то што у настави математике на млађем школском узрасту посебно доминира аритметика коју карактерише конкретност и очигледност насупрот алгебри, коју карактерише апстрактност.

На основу проучавања теоријских система и резултата истраживања других аутора који су се бавили овим проблемима, покушали смо да дођемо до одговора на суштинска питања везана за учење и наставу алгебре на млађем школском узрасту. Наш став је да алгебра мора да буде део почетне наставе математике, при чему један од основних циљева почетне наставе алгебре мора бити развој алгебарског мишљења као јасног, прецизног и апстрактног начина размишљања. Значајан део алгебарског образовања мора бити и разумевање и усвајање алгебарске нотације. Постепено обликовање садржаја у настави алгебре, од једноставних до комплексних алгебарских сазнања мора бити засновано на разумевању значења алгебарске симболике, али и њеном коришћењу у изражавању математичких истина.

Настава и учење алгебре, поред усвајања алгебарских садржаја, подразумева и развијање алгебарског мишљења и алгебарских способности. Циљ алгебарског мишљења је да подстакне ученике на мисаоне активности везане за генерализације и законитости, које су саставни део математике као науке. Учење алгебре мора имати основу у аритметици и процесима који условљавају стварање генерализација. Ови процеси односе се на елементе које заједно чине алгебарско мишљење и представљају алгебарске способности. Управо је из тих разлога у фокусу овог рада и разматрање карактеристика и могућности развијања алгебарских способности. У том контексту, као први задатак, наметнуло се питање њихове операционализације и конкретизације имајући у виду природу садржаја математичког образовања на овом узрасту, али и узраст ученика код којих се тежи њиховом развијању. На основу прегледа истраживања у овој области издвојили смо алгебарске способности, чији развој је неопходан када говоримо о учењу алгебарских садржаја и развоју алгебарског мишљења на млађем школском узрасту: *схватање знака једнакости као симбола којим се изражава симетричност (еквивалентност) леве и десне стране једнакости; разумевање функционалне зависности између компонената рачунских операција; способност уочавања функционалних односа на графикону, табели или слици; схватање симбола у алгебарском изразу који представљају непознату или променљиву; развијање појма променљиве и непознате (непозната као број који је само тренутно непознат).*

У наставним плановима и програмима из математике за млађи школски узраст у нашој земљи, наглашава се потреба да се у настави користе реалне проблемске ситуације и математичко моделовање у процесу решавања задатака и учења. Посебно се истиче потреба за коришћењем задатака у форми табеле, слике или графикона. На тај начин се ученик доводи у ситуацију да уочава и издваја битне од небитних информација и оспособљава се за представљање математичких односа у облику израза, једначина или неједначина. Откривање проблема и ограничења везаних за учење и наставу алгебре значајни су за унапређење целокупне наставе математике. Ако се у обзир узму досадашња истраживања у области почетног алгебарског образовања ученика можемо закључити да се у настави математике посебна пажња мора посветити приступу садржајима алгебре у почетној настави математике, али и вези коју ови садржаји имају са другим областима математике као и реалним светом у ком ученик живи.

Сви наведени проблеми намећу питање методичке трансформације садржаја алгебре у млађем школском узрасту. Комплексност садржаја алгебре, потешкоће које настају на путу усвајања ових садржаја, њихово разумевање и коришћење, условљава и специфичан избор метода, приступа и стратегија рада на путу методичке трансформације ових садржаја у раду са ученицима. Полазиште у концпирању методичког приступа садржајима алгебре чинила је идеја да настава математике преставља процес који је заснован на ситуацијама учења, које полазиште имају у реалним ситуацијама из живота, проблемима реалног (животног) контекста, и да ће учећи на овакав начин ученик најуспешније усвајати садржаје. У оваквим настојањима одабрали смо контекстуални приступ у настави и учењу.

Контекстуални приступ настави и учењу заснован је на идеји и концепту *Реалистичног математичког образовања* (РМО) и његовим основним поставкама и различитим модалитетима у настави широм света. Карактеристика наставе и учења заснованог на контекстуалном приступу, базира се на чињеници да ученици могу имати користи од знања и културних вредности изван школе. Креирањем таквог окружења и представљањем ситуација и проблема на другачији начин, који је близак животу ученика, ученици ће бити оспособљенији да изграде и генерализују нова алгебарска знања. Тако се процеси учења и практичних активности (свакодневних, животних) не посматрају као два независна процеса, већ напротив као везани и условљени ентитети.

Суштинске карактеристике овакве организације наставе и учења заснивају се на идеји Фројдентала, који тврди, да ученици треба да уче математику као природну активност (Freudenthal, 1971). У учењу се полази од ситуација и проблема из реалног живота који су блиски ученику, на бази којих се откривају алгебарске идеје и кроз процесе математизације усвајају, а касније и примењују у решавању проблема.

Контекст у настави и учењу алгебре посмара се кроз оба нивоа математизације – и хоризонталне и вертикалне. Хоризонтална математизација обезбеђује прелаз из проблема свакодневног живота у свет симбола, и обухвата трансформационе и генерационе активности ученика у алгебри. Вертикална математизација доприноси откривању веза између математичких концепата и стратегија, тако да ученик достиже виши ниво математике који може бити препознат у глобалним математичким активностима мета-нивоа. Суштина је да, кроз процесе математизације, контекстуалне алгебарске проблеме, ученици разумеју, преведу на језик алгебре и реше, а на тај начин стечена знања примене у конкретним реалним ситуацијама свакодневног живота. Тежње су биле усмерене да се контекстуалним приступом у учењу и настави утиче на развој алгебарских способности, односно да се постепено уђе у свет симбола, овлада правилним значењем знака једнакости, као симболом еквиваленције, схвати идеја променљиве (непознате) и разуме функционална зависност између количина, као и да се у свему томе не удаљи од реалних основа, што све треба да допринесе разумевању елемената ране алгебре. Идеја је да се у настави идентификује и користи контекстуално представљење структуре проблема, јер се на тај начин промовише и унапређује генерализован облик алгебарског размишљања. Ово алгебарско мишљење има, и за циљ, да промовише одређене начине тумачења математике и подстиче ученике на интеракцију и ангажовање са генерализацијама и односима који су нераздвојиви од математике.

Улога контекста у процесу учења посматра се из *угла садржаја* и *угла наставе*. Из садржајног угла контекст се посматра као веза којом се остварује повезивање наставних садржаја математике са реалним животним ситуацијама средине, која окружује ученика и даје смисао самом градиву. Из угла наставе, контекст обухвата специфичности наставног процеса, у смислу проналажења нових модела у процесу усвајања математичких појмова и решавања математичких проблема.

Идеја нашег истраживања је да се приступом заснованим на учењу садржаја алгебре на конкретним, реалним ситуацијама у настави математике покуша позитивно утицати на успех ученика у савладавању садржаја алгебре, али и развој алгебарског мишљења и алгебарских способности. У овом истраживању у први план истиче се реални контекст који се може разумети као ситуација у којој је алгебарски проблем постављен и који иницира процес учења садржаја алгебре. Улога контекста је значајна са аспекта наставе, јер се овако обликованим садржајима омогућава усвајање знања кроз процес поновног откривања, односно самооткрића. Други аспект контекста може се сагледати у реалистичности ситуација контекста односно, проблема код ког проблемска ситуација делује као искуствено могућа за дете, јер је деца доживљавају као „искуствено блиску" (Van der Heuvel-Panhuizen 1998). Тако се улога контекста у настави математике огледа у репрезентацији и увођењу нових појмова који су блиски ученику и блиски реалном окружењу у ком он живи и учи. Реални контекст треба да омогући ученику да у алгебарском проблему уочи битне и значајне информације и исте обликује на њему искуствено близак начин, при чему ће бити у стању да закључује о њиховој међусобној повезаности и условљености.

Истраживање је засновано на анализи ефеката методичког приступа садржајима алгебре који је утемељен на принципима реалног контекста – контекстуални приступ у учењу. Контекстуални приступ развија се у процесима хоризонталне и вертикалне математизације и моделовања проблемских ситуација у настави и учењу алгебре. На овај начин ученик је у ситуацији да реални контекст користи као полазну тачку у учењу, коју касније кроз процесе математизације обликује у моделе који омогућавају да се проблем реши и на крају поново врати на подручје реалног контекста. Ученик је у позицији да проблем посматра из различитих углова, тако да му он постаје близак и разумљив. На тај начин ученик модел користи као инструмент који може да прилагођава и мења у складу са ситуацијама које пред њега поставља неки нови проблем. Тако изграђене моделе ученик унапређује и мења, али у том процесу и модели мењају алгебарске способности и начин на који ученик размишља у процесу учења алгебарских садржаја.

Бројна истраживања контекстуалног приступа у његових ефеката у настави математике (Van den Heuvel-Panhuizen, 2000, 2001, 2003, 2005, 2010; Gravemeijer, 1999, 2004; Gravemeijer & Doorman, 1999; Romberg & Shafer, 2004; Freudenthal, 1982; Frykholm, 2004; Cobb & Gravemeijer, 2006; Webb & Meyer, 2002 и други) говоре управо о ефикасности и успешности овако организоване наставе, али и о томе да је овакав приступ у настави веома мало заступљен. Позитивни ефекти контекстуалног приступа утицали су на то да се неке земље определе за институционализовано увођење овог приступа у облику различитих форми у наставу математике. Реалистични контекст у настави и учењу математике је тако постао основа за изградњу великог броја образовних покрета широм света међу којима су: Реалистично математичко образовање у Холандији; у Индији и другим земљама.

У нашој земљи је веома мали број истраживања која се баве применом и ефектима контекстуалног приступа и реалног контекста у учењу и настави математике, нарочито у области алгебре, на млађем школском узрасту. Разлози због којих смо се определили за ово истраживање су многобројни и обухватају следеће: апстрактност алгебарских садржаја; карактеристике мишљења ученика млађег школског узраста, недостатак истраживања ефеката контекстуалног приступа у настави алгебре на млађем школском узрасту, мала заступљеност реалног контекста у настави алгебре на млађем школском узрасту; у уџбеницима се не поклања довољно пажње контекстуалном приступу у учењу алгебарских садржаја; побољшање и унапређење школских докумената који су ослонац за организацију учења и наставе математике, а самим тим и алгебре.

Ови разлози утицали су на то да се у раду определимо за истраживање ефеката контекстуалног приступа, као приступа кога карактеришу: реални контекст у садржајима као и процеси математизације и моделовања тих контекста у форме смислене и блиске учениковом мишљењу. Наша идеја је да истражимо утицај овако организоване наставе на процес усвајања алгебарских садржаја и развој алгебарских способности ученика млађег школског узраста.

Садржај дисертације конципиран је у три дела. Први део дисертације односи се на *Теоријске основе истраживања* који је структиуран кроз три целине. У првој целини описана је суштина контекстуалног приступа, дата су полазишта у формирању основних поставки контекстуалног приступа, заснованог на теорији *Реалистичког математичког образовања (РМО)* као и његове карактеристике. Друга целина разматра алгебру, од основних идеја до њеног научног заснивања, као и карактеристике садржаја и наставе алгебре у млађим разредима основне школе. Посебно су издвојене потешкоће и проблеми који карактеришу ову наставу и отежавају усвајање алгебарских садржаја од стране ученика млађег школског узраста. На основу карактеристика алгебре и евидентних проблема и ограничења који је прате на овом узрасту, направљени су оквири за полазиште у учење и наставу алгебре у млађим разредима основне школе. Овај методички оквир има смер од аритметике ка алгебри, односно од конкретног ка апстрактном. Посебан део у оквиру ове целине посвећен је развоју алгебарских способности, са циљем да се кључне алгебарске способности операционализују, како би се посветила већа пажња њиховом развијању, јер се оне схватају као кључни елементи учења алгебре. На крају је приказан посебан осврт на функционално мишљење, као крајњи и најапстрактнији домет алгебарског учења.

У трећој целини пажња је посвећена реалном контексту као основном полазишту у контекстуалном приступу учења садржаја алгебре. У овом делу дисертације представљен је методички оквир контекстуалног приступа настави алгебре у млађим разредима основне школе. Детаљно су разрађени модели учења, засновани на контекстуалном приступу, за сваку од операционализованих алгебарских способности. У оквиру ове целине, посебна пажња је посвећена процесу моделовања у решавању алгебарских задатака, као важном делу процеса математизације који је карактеристичан за контекстуални приступ у учењу и настави математике. На крају се даје посебан осврт на досадашња истраживања проблема у настави алгебре, као и ефектима наставе организоване у складу са контекстуалним приступом.

У другом делу дисертације структуриран је методолошки оквир истраживања у коме су детаљно представљени и описани сви елементи истраживања које је имало за циљ да испита ефекте контекстуалног приступа у настави математике у учењу садржаја алгебре у млађим разредима основне школе. Операционализовани су задаци и хипотезе и представљени сви елеменети експерименталног и истраживања заснованог на техници анализе садржаја.

У трећем делу дисертације приказани су резултати истраживања и извршена је њихова анализа и интерпретација кроз анализу утицаја контекстуалног приступа на постигнућа ученика у настави алгебре, развијање алгебарских способности, трајност алгебарских знања код ученика млађег школског узраста. У другом делу анализе представљени су резултати истраживања улоге уџбеника математике у стварању услова за контекстуални приступ учењу садржаја алгебре у млађим разредима основне школе.

У закључку је извршена синтетеза добијених емпиријских резултата, али је указано и на нека ограничења која прате учење на овај начин. На основу тога, изведене су методичке импликације које произилазе из добијених теоријских и емпиријских разматрања, а које дају основне смернице у циљу побољшања наставе и учења алгебре коришћењем контекстуалног приступа на млађем школском узрасту, као и смернице за све оне који су посредно или непосредно везани за почетну наставу математике и учење алгебарских садржаја на раном узрасту.

I ТЕОРИЈСКЕ ОСНОВЕ ИСТРАЖИВАЊА

1. КОНТЕКСТУАЛНИ ПРИСТУП УЧЕЊУ – СУШТИНА, КАРАКТЕРИСТИКЕ И ТЕОРИЈСКА ЗАСНОВАНОСТ

Математика често представља камен спотицања за већину ученика који долазе у контакт са основним математичким садржајима. Разлог томе се може пронаћи у чињеници да често не постоји веза која мора постојати између наставе и свакодневног живота. Сличности и разлике које постоје између појмова у различитим околностима и контекстима важни су, како за развојну психологију, тако и целокупну наставу уопште. Значај се огледа у специфичностима појединих појмова, као и њиховом значењу у различитим контекстуалним ситуацијама, али и у трансферу знања из једног подручја у друго или из једног контекста у други контекст (школа и свакодневни живот или обрнуто).

Контекст (lat. *contextum* – преплетено) је термин који је потекао из лингвистике и теорије информација. У другој половини 20. века појам „контекст” се „проширио изван области лингвистике и постао део хуманистичких наука. То се догодило због лингвистичке филозофије, филозофских концепата контекстуализма, семиотике и методологије постмодернизма, који третира читав свет као текст“ (Verbitsky & Kalashnikov, 2013: 1).

Руски научници, на челу са Вербитским, пионири су у контекстуалном образовању, јер су за разлику од сличних покушаја широм света успели да уведу теорију контекстуалног образовања и опишу њен значај и потенцијал за теорију и праксу образовања. Вербитски је први дао одређење контекста као „система унутрашњих и спољашњих фактора и услова људског понашања и активности, који утичу на специфичности перцепције, разумевања и трансформације неке конкретне ситуације који одређују значење и разумевање те ситуације у целини, као и компоненти које она обухвата“ (Verbitsky & Kalashnikov, 2013:1). То значи да, са психолошког становишта, појам контекста представља когнитивни механизам људске психе, који даје смисао и значење садржају који се учи на основу конкретних примера, слика, појмова, манипулације предметима и друго.

Према мишљењу Вербитског и Калашњикова (2013) сваки контекст има *структурални* и *процесуални* аспект. Структурални аспект подразумева вишедимензионални простор, који поред одређеног објекта или појма који се усваја обухвата и различите активности и комуникацијске ситуације које објашњавају и дају значење том објекту или појму. Контекст у процесуалном смислу означава механизам усвајања и повезивања менталних садржаја везаних за одређену ситуацију или објекат. Суштински, ако се настава и учење посматрају у процесуалном смислу контекст се схвата „као посебан механизам повезивања менталних садржаја, при чему делује као предмет различитих нивоа“ (Verbitsky & Kalashnikov, 2013: 7). Другим речима, информација се не може тумачити нити разумети без контекста, нити контекст сам по себи може да постоји без информације.

Контекст, по мишљењу Рота (Roth, 1996) има три аспекта:

1) додатно знање ученика које је неопходно да би се разумеле проблемске ситуације (на пример, прича која је уклопљена у проблем);

2) феномен из реалног окружења који може бити математички моделован (на пример, куповина одеће као физички контекст за линеарну једначину);

3) окружење и ситуације (Према: Fauzan 2002: 50).

Једна од значајних карактеристика контекста је и међусобни однос и утицај који може постојати између два или више контекста. Овај однос се може посматрати у два облика:

1) слагање контекста – два контекста се преклапају или подударају, али се не мења њихово значење, могу коегзистирати независно,
2) интеракција контекста – у комбинацији контекста долази до њиховог преклапања и међусобне трансформације, која најчешће води до проширења значења; стварање новог „когнитивног хоризонта" као резултат два раније независна концепта (Verbitsky & Kalashnikov, 2012).

Као што видимо, појам контекста може се тумачити на различите начине и може имати различит облик и функцију. У најширем смислу речи термин контекст односи се на ситуације у којој је проблем постављен, које иницирају учење, односно ситуације у којима се одвија процес учења. Његова функција, у првом реду је, да садржај учења приближи ученику, његовом искуству. Уколико је ситуација у којој се одвија процес учења блиска ученику, лакши ће бити прелаз из непознатог у познато, из конкретног у апстрактно, боље ће бити разумевање нових појмова и њихово повезивање са већ усвојеним појмовима, и изградњом мреже знања. Друга, а не мање важна улога контекста, је да подстакне ученика на процес учења, побуди га на активност, учење, развије његову жељу за открићем. Ови задаци захтевају интеграцију математичких и нематематичких вештина, које могу укључивати и материјале који садрже пуно или премало информација, а доводе до решења која су често од практичног значаја (Van den Heuvel-Panhuizen, 1996).

У складу са суштинским одредницама појма контекста одређује се и појам контекстуалне наставе и учења као „концепција наставе и учења, која помаже наставницима да повежу садржај са ситуацијама реалног света и мотивише ученике да пронађу везе између знања и примене у њиховом животу као чланова породице, грађана, радника, као и при учествовању у тешком раду које учење од њих захтева" (Berns & Erickson, 2001: 2). Џонсон (2002) дефинише контекстуално учење као „образовни процес који има за циљ да помогне ученицима да виде смисао академских садржаја које уче, повезивањем истих с контекстом свакодневног живота, односно, с контекстом својих личних, друштвених и културних околности" (Johnson, 2002). На сличан начин и Браун (Brown, 1998) одређује контекстуално учење као стратегију за помагање ученицима при конструисању знања и значења нових информација, кроз сложену интеракцију наставних метода, садржаја, ситуација и времена. Дакле, у првом плану је повезивање садржаја, који се усваја у контексту свакодневног живота и реалности која окружује ученика. Циљ контекстуалног модела учења и наставе, према мишљењу Ивановне и Витлејевне (2015), јесте интеграција целовитог система когнитивног, социјалног и рефлексивног искуства, којим се обезбеђује способност појединца да трансформише стварност на основу вештина повезивања знања са његовим сопственим практичним акцијама и деловањима (Ivanovna & Vitalyevna, 2015).

Контекстуално учење је „систем унутрашњих и спољашњих фактора и услова људског понашања и активности, које утичу на специфичности перцепције, разумевања и трансформације неке конкретне ситуације и који одређују значење и разумевање те ситуације у целини као и компоненти које она обухвата" (Verbitsky & Kalashnikov, 2013: 1). У том смислу посебно се истиче значај окружења, као и значај реалних проблемских ситуација, које ће подстицати ученике да разумеју односе и стварају природне генерализације алгебарских садржаја.

Да бисмо могли говорити о теорији која је призната са становишта педагогије, она мора бити заснована на јасним принципима теорије и праксе образовања. Полазишта за идеју контекстуалне наставе и учења проналазимо у теорији бихејвиоризма у којој Торндајк (Thorndike, 1932) учење види као резултат веза формираних између надражаја из спољашње средине и одговора на надражај кроз примену награда. Веза између надражаја из спољне средине и контекста проблема представља полазиште за учење у контекстуалном приступу учењу у математици.

Идеја контекстуалног приступа учењу основу има и у конструктивистичким теоријама. Конструктивистичке теорије су се развиле као теорије које се баве сазнањем и учењем. Конструктивизам је епистемиолошко становиште, по коме „сазнајне структуре, исто као и основне категорије сазнања (објекат, простор, време) нису ни урођене нити директан резултат искуства, већ производ процеса активне конструкције од стране субјекта“ (*Педагошки лексикон*, 1996). Полази се од тога да „оно што мислимо да је објективно знање представља резултат перспективе” (Гојков 2002: 583) и да постоји различит однос према спољашњој стварности. Конструктивисти посматрају учење и поучавање као ангажоване интелектуалне процесе и конструкције знања, који траже мишљење вишег реда, јер је акценат на конструкцији знања, а не на репродукцији.

Контекстуални приступ поучавању и учењу „јавља се као надоградња и један од елемената конструктивистичких теорија учења и поучавања“ (Шпијуновић и Маричић, 2016: 255). Основна идеја конструктивизма је да ученици конструишу своје знање на основу претходног знања и искуства, применом знања у новим ситуацијама, и интегрисањем нових знања са већ постојећим, што је и идеја контекстуалног приступа учења. Идеја конструктивизма укорењена је у теорији Дјуија (Dewey, 1997), која претпоставља активно учешће у решавању проблема и критичком мишљењу, које је у вези са конкретним ученичким побудама за учење и активностима.

Конструктивистичка парадигма, мора бити схваћена као укључивање ученика у активности властитог учења. Конструктивизам произлази из става да људска бића немају приступ објективној стварности, тј. стварности која је независна од начина спознавања исте. Појединац гради знање о свету на основу перцепције и искустава која су посредована кроз претходно знање и искуство. Учење је процес којим се људи прилагођавају свом искуственом свету (Simon, 1995). Тај пут креће од формалног, спољашњег дела знања, које се мора пренети ученицима. При томе, сваки ученик може истражити процесе кроз које се математичко знање развија конструисањем на основу сопственог искуства. Према томе, ученици би требало да буду укључени у активности које пружају богато искуство и могућности за размишљање, испитивање, дискусију и извођење закључака, једном речју стицање знања, развијање вештина и способности.

Конструктивисти тврде да на учениково учење утиче контекст у којем се наставни садржај поучава, као и веровања и ставови сваког појединог ученика (Jukić, 2013: 247). Средина за учење и поучавање од великог је значаја и одликује се аутентичношћу (постављају се реални проблеми и аутентичне ситуације), разноврсношћу контекста (проблеми се представљају и сагледавају кроз многоструке повезаности) и различитошћу перспектива (проблеми се уочавају и решавају из различитих аспеката и различитих гледишта) (Đukić, 2008). Значи, настава мора бити укорењена у неки контекст стварног света и на том контексту заснована.

Пијажеови ставови о учењу одражавају суштину контекстуалног приступа учењу. Учење Пијаже посматра као активан процес у коме појединац стиче знања кроз активну интеракцију са окружењем (према Вилотијевић: 1999). Важно је да појединац у том процесу самостално стиче знања сопственим откривањем, односно самооткривањем. У том процесу кључни фактори су сазревање и искуство – *физичко,* које се своди на извлачење сазнања из самих објеката помоћу апстракције *и логичко-математичко,* које се изводи из акција које субјект врши на објектима и води до стварања нових сазнајних структура везаних за саме објекте. Процес учења је одређен. Ученик полази од одређеног мишљења о конкретном проблему, а затим кроз самосталну интеракцију са окружењем мења своје мишљење уколико се оно не подудара са стварним стањем. На тај начин ученик је у ситуацији да усваја ново знање и остварује напредак у развоју. Оно што је на првом месту је процес сазревања, који је неминован и представља основу развоја појединца, сазревањем је условљен когнитивни развој појединца. Поред тога, према мишљењу Пијажеа искуство има значајну улогу код откривања и разумевања појма. Физичко искуство укључује откривање својства објеката, а логичко – математичко искуство укључује „учење о својствима и односима који не припадају стварима но пре нашим акцијама на стварима“ (Зељић, 2014: 33). На пример, у ситуацији у којој ученик треба да одреди укупан број кликера, који се налазе у два скупа – плави и зелени кликери, прво уочавање везно је за чисто физичко искуство које кроз процес апстракције води до одређивања бројности та два скупа. На овај начин ученик ће лако утврдити укупан број свих кликера, односно бројност уније ова два скупа. Право откриће биће повезано за ситуације у којима ученик може самостално и слободно да манипулише овим кликерима и тако закључи да ће без обзира на положај, распоред или боју кликера, њихов укупан број увек бити исти.

Пијаже (1970, 1985) је користио појам апстракције како би описао интеракцију субјекта, спољних објеката и унутрашње менталне операције субјекта. По његовом мишљењу, постоје три врсте апстракција: емпиријска; псеудо-емпиријска и рефлексивна апстракција (према Dubinsky, 2002: 95). Емпиријска апстракција проистиче из знања ученика о особинама предмета. Ова врста апстракције доводи до издвајања заједничких особина објеката и екстензивне генерализације, то јест прелазак од *неких* на *све*, односно од специфичног ка генералном (облик, маса предмета итд.). Псеудо-емпиријска апстракција се налази између емпиријске и рефлексивне апстракције и истиче особине која представљају радње субјекта на објектима, као на пример, запажање кореспонденције 1−1 између два низа предмета који је субјект поставио у поравњавајући положај. Схватање субјекта да постоји однос 1-1 између ова два низа је резултат унутрашњих конструкција. Најзад, рефлексивна апстракција је извучена из онога што је Пијаже назвао генералном координацијом акција и, као такав, његов извор је предмет, а он је потпуно интеран (према Dubinsky, 2002). Пример би била серијација, у којој ученик обавља неколико појединачних акција формирања парова, тројки, итд., а затим интернализацијом и координирањем радњи утиче на потпуни поредак. Ова врста апстракције доводи до веома различите врсте генерализације која је конструктивна и резултира новим синтезама у којима одређени закони добијају ново значење (према Dubinsky, 2002: 414).

Према мишљењу Пијажеа когнитивна структура је изграђена од основних елемената или шема које представљају општу могућност за извођење неке врсте понашања. Те структуре представљају системе мисаоних операција (облике мисли) које се изграђују од дечијег доба и у које треба да се сместе информације из окружења. „Живи организам, такође, није прост одраз својстава средине која га окружује, већ и он садржи *структурацију* која се, у току епигенезе, постепено образује и није потпуно преформирана“ (Пијаже, 1990а: 13). Ове структуре су у стању сталних промена и зависе превасходно од узраста ученика и садржаја у окружењу са којима се он сусреће. Пијаже сматра да извор логичких операција треба тражити у „дубљим регионима него што је језик“ тако да он „не представља мотор оперативног напредовања, већ средство у служби саме интелигенције“ (Пијаже, 1990б: 21). Када је реч о учењу алгебарских садржаја, евидентни су одређени проблеми који се могу уочити код ученика млађег школског узраста. Ограничења у развоју која су препрека за учење, наводно су везана за недовољно развијене структуре, шеме и опште механизме за обраду информација. Они се називају „развојним“ јер се „подразумева да су они блиско везани за постепену изградњу нових структура које служе широким разноликостима функција у менталном животу“ (Carraher, Schliemann, Brizuela & Earnest, 2006: 90). Може се закључити да природан процес развоја когнитивних структура ученика утиче, како на редослед, тако и на специфичан приступ садржајима математике. Поред тога, теорија Пијажеа „представља оквир који се најчешће користи у културним компарацијама контекста, јер омогућава идентификацију сличности (исте темеље логичко-математичке структуре) упркос разликама у културама“ (Carraher, Schliemann, & Carraher, 1988: 71).

Поред сличности и везе са индивидуалним конструктивизмом, сличности и слагање основних поставки контекстуалног приступа могу се уочити и пронаћи у теорији *социјалног конструктивизма*. У настави математике социо-конструктивистички модел наставе сматра се погодним за образовање ученика млађег школског узраста, јер се на овај начин посебно истиче њихова флексибилност у размишљању. Учитељи би, према овом моделу, требали да започну своје активности стварањем посебно осмишљених проблемских ситуација које могу довести до формирања одређеног математичког појма или својства. Основа овог модела је схватање ученика као ствараоца сопственог знања, што се остварује кроз размену идеја, све до колективне систематизације добијених резултата и размишљања о њиховом значењу и њиховој улози. Учитељ у овом случају преузима улогу оног ко осмишљава наставне секвенце погодне за развијање математичких конструкција од стране ученика, оног ко ствара окружење које фаворизује математичко истраживање, и користи комуникативне стратегије које у први план стављају интеракцију и размену идеја (Cusi, Malara & Navarra, 2011). Фројдентал (Freudenthal, 1991), пак, са друге стране указује да учитељи не би требало превише да се мешају у наставни процес, због ризика у изградњи сопствених конструктивних активности ученика (према Gravemeijer, 2020).

Према теорији социо-конструктивизма умне активности и психички процеси посебан су облик људске делатности и друштвено и историјски су условљени, па можемо рећи да се структурално и системски развијају. Две врсте умних активности, по мишљењу Виготског (Vigotski, 1990), карактеришу активности ученика:

- спољње активности у које спада људско физичко деловање на реалним предметима;
- унутрашње активности које подразумевају манипулисање моделима који у свести замењују реалне предмете.

Активности се могу одвијати из правца споља према унутра и обрнуто. То значи да се може снажно утицати на понашање и рад ученика у настави и његов развој мишљења. Виготски сматра да „посредованост човекових операција, настаје захваљујући увођењу помоћних средстава у понашање, с једне стране, и владање сопственим понашањем које се остварује тим средствима, с друге стране – представљају два момента која одређују специфичност историјског развоја понашања“ (Vigotski, 1990: 40).

Повезивање социо-конструктивистичких ставова подразумева колективни приступ настави и учењу, који утиче на активност ученика и развој његових способности. Насупрот томе основне поставке контекстуалног приступа учењу теже индивидуализацији у настави. Без обзира на ове различитости временом се основне поставке колективизма у настави и учењу укорењују у контекстуални приступ, при чему се истиче значај сарадње и интеракције између ученика. Контекстуални приступ у процесу наставе подразумева различите друштвене норме које обухватају способности ученика да осмисле своја решења, створе моделе, објасне и докажу решења као и да покушају да разумеју решења и моделе друге деце, али и да покушају да разумеју и она решења са којима се не слажу. Улога наставника није искључиво ограничена на објашњавање и постављање задатака, већ и на постављање питања која могу подстаћи ученичко мишљење, а самим тим и помоћи ученицима да тако конструишу напреднија математичка знања (Gravemeijer, 2020). Кључна компонента контекстуалног, реалистичног математичког образовања јесте да ученици реконструишу или поново проналазе математичке идеје и концепте излажући их великом и разноврсном броју проблема или модела реалног света (De Lange, 1995).

Када говоримо о вези између спољашњих и унутрашњих активности у процесу наставе, према ставовима социо-конструктивизма, можемо рећи да се та веза остварује помоћу знакова односно симбола. Они представљају спону између замишљене и реализоване активности. Реч служи да се означи предмет кад он није у близини и да се предметима и појавама придају одређена значења (Вилотијевић, 1996: 97). Посебно се истиче значај повезаности речи, значења и мисли. Значење представља јединство мисли и речи. Што се ученик прецизније изражава и исказује своју мисао то је интелектуално развијенији. Виготски (1977) истиче да је смислена реч микрокосмос човекове свести. Самим тим „развој говора код детета утиче на мишљење и мења га” (Vigotski 1996: 208), односно „развој говора реорганизује мишљење и претаче га у нове форме” (Vigotski 1996: 213). То упућује на значај контекста и реалних животних ситуација, јер ученик развија мишљење и учи управо кроз везу између његовог замишљања ситуације и речи или симбола којима би изразио ту ситуацију језиком математике.

У процесу наставе ученици често имају проблем са схватањем симбола и знакова који означавају поједине ентитете у математици. Из тог разлога социо-конструктивистичка теорија указује на значај тактилних и визуелних приказа који ће уз реч бити моћно средство подршке ученику у процесу наставе. Са друге стране, контекстуални приступ, у великој мери, се ослања на употребу модела, ситуација или шема које карактерише сам процес математизације. Процес моделовања покушава превазићи проблем социо-конструктивиста, код којих се симболи појављују нераздвојиво од свог значења, на тај начин што осигурава да симболизација и значење коеволуирају у рефлексном процесу истовремено подржавајући конструкцију неке нове математичке стварности. Ова конструкција математичке стварности значење добија из мреже математичких односа (Gravemeijer, 2020: 223). Процес се на тај начин може пратити кроз Треферсову (Treffers, 1987) карактеризацију прогресивне математизације и *моделе од* и *моделе за.*

У опису развоја виших менталних функција код деце Виготски (1962) је идентификовао појам псеудопојмова, који види као суштински мост у размишљању до завршне фазе формирања појма. Као резултат тога, ученик може „радити са *појмом,* као и практиковати концептуално размишљање, пре него што постане свесно природе ових операција“ (према Blanton & Kaput, 2011: 12). Ово указује на то да развој математичког мишљења укључује усвајање симболичких записа који су у ученику „зона наредног развоја“, и није у потпуности у власништву детета. У суштини, то укључује прелазак ученика из невидљиве до транспарентне употребе симбола. Штавише, дијалектика између мисли и језика у учењу Виготског подразумева да су симболички нотациони системи у потпуности концептуално формирани код деце, као резултат интеракције деце са њима у значајним контекстима (Blanton & Kaput, 2011). Ова чињеница се посебно може сагледати из перспективе контекстуалног учења у процесу наставе ране алгебре. Са једне стране основна карактеристика алгебре јесте у њеној специфичној нотацији, док са друге стране основу контекстуалне наставе и учења чине разноврсни живи контексти у којима се таква нотација може развијати.

На основу чулног искуства у свакодневним активностима код мале деце јављају се *спонтани* појмови, док се *научни* појмови стичу радом у школи. Сваки спонтани појам који деца на узрасту млађег школског доба усвајају мора имати своју основу у стварним и конкретним „животним“ ситуацијама. Те ситуације у почетној настави математике заснивају се на реалним математичким ситуацијама или контекстима који ученика стављају у позицију да мора решити проблем. На основу ситуација блиских ученику, кроз процес решавања проблема он формира појам. Да би се почело било какво учење, према мишљењу Виготског, „неопходно је да неке особености детета, неки његови квалитети и својства буду сазрели у извесном степену“ (Vigotski, 1990: 47). Идеју заснива на прелазу са нижег на виши ниво развоја.

Темељне поставке теорије социјалног конструктивизма заснивају се на чињеници да учење на значајан начин зависи од претходног знања, а да ученици најбоље уче када примењују знање како би решили аутентичне проблеме и то када су заједнички са наставницима и вршњацима ангажовани у раду којим се осмишљава садржај и стварност. Ове идеје можемо уочити у основним поставкама контекстуалне наставе и учења. Контекст реалне ситуације треба да омогући ученицима да науче, али и да то што су учили умеју да примене кроз моделе у сличним ситуацијама. Ако се у обзир узме схватање Виготског о нивоима развоја, ученици треба увек да буду у стању да се врате на нижи ниво разумевања. То подразумева двосмерни карактер модела који их чини толико моћним. Захтев који је потребно испунити, да би модели могли бити функционални је то што они треба да буду такви да их ученици поново „изумеју“ као активни учесници у процесу учења (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003).

Информације и чињенице морају бити организоване тако да на основу заједничких централних карактеристика одражавају структуру неког садржаја. Према мишљењу Џерома Брунера (1915 - 2016), када ученик усвоји одређено знање то значи да долази до промена у постојећим когнитивним структурама. Ако се знања супротстављају досадашњем мишљењу ученика та знања се трансформишу и замењују већ постојећа. Учење представља повезивање сродних ствари, сређивање одређених појмова, предмета или појава према неком критеријуму. У процесу учења ученик проналази заједничке елементе чињеница и сврстава их у категорије, а да би решио проблем користи различите стратегије (које су засноване на досадашњим структурама), које му омогућавају да постигне циљ као и да лако манипулише и користи се њима у даљем учењу.

Према мишљењу Брунера (Bruner, 1990) битније је савладати структуру организованог знања него памтити једноставне чињенице и податке. Да би се могле уопште формирати структуре мора постојати почетно стање. У почетној настави математике знања се усвајају постепено и континуирано, и при томе се води рачуна о вези између појмова који се уче, са онима који су већ савладани и постали део ученикове когнитивне структуре. Не може се од ученика очекивати да усвоји појам броја, а да није претходно усвојио појам скупа или очекивати да усвоји и савлада поступак вантабличног множења, уколико није претходно савладао множење збира и разлике бројем и тако даље.

Основна поставка Брунерове теорије односи се на развој мишљења појединца који се одвија истовремено кроз три равни апстракције: акционо (непосредне активности детета), иконичко (сликовно представљање) и симболичко (коришћење специфичних симбола, језика и система нотације). Када је реч о алгебри и њеној вези са аритметиком Киеран (Kieran, 1981) сматра да се могу уочити три начина репрезентације (који су паралелни Брунеровој акционој, иконичкој и симболичкој фази). Ученик би могао да стекне кроз интуитивну основу разумевање значења једначине, а затим да то постепено трансформише до разумевања облика алгебарске једначине. Дакле, његова алгебра би била усидрена у својој аритметици. Слово скрива број који називамо непозната – термин који блиско одговара идеји о скривеном броју. Ученик је у ситуацији да формира неколико једначина из сопствених аритметичких идентитета. За ученика ће бити важно да схвати да дати аритметички идентитет може довести до изградње различитих једначина. Овакав пример у настави ране алгебре може послужити да би се уочио прелаз од акције преко слике до симбола као представе за појам непознате.

Водећу улогу у развоју когнитивних структура за појединца има језик. Координисање различитим равнима и прелаз са једне на другу је условљен употребом језика. Несклад води ка процесу развоја мишљења, а спона свему томе је језичко-симболичка интерпретација. Тако Брунер (1990) сматра да језик постаје медијум за превођење искуства, па тако долази до прогресивног ослобађања од непосредног. Узимајући у обзир ову чињеницу такође се може закључити да „ако интелектуално вежбање није интензивно, ако се језик не користи слободно у својој прагматичкој функцији вођења мисли и акције, онда наилазимо на интелект који је у стању да решава само конкретне задатке, а не и оне који подразумевају употребу апстрактних информација“ (Grinfild i Bruner, 1990: 72). Овакав став Брунера првенствено наглашава значај који постоји између вежбања, језика и мисли, чиме се посебно истиче значај употребе задатака и проблема реалног контекста у настави. За разлику од Пијажеа који сматра да се способност апстракције и операције са апстрактним појмовима одвијају тек око дванаесте године живота, Брунер сматра да се ова способност детета може испољити и раније већ у седмој или осмој години живота (Шпијуновић и Маричић, 2016). Ово је посебно значајно ако се у обзир узму садржаји ране алгебре, због специфичности овог садржаја који одликује висок степен апстрактности алгебарских појмова.

У настави заснованој на идеји конструктивизма „одликује се активан став – укљученост у оно што се учи, истраживачке активности, решавање проблема и сарадња са другима; активности се прилагођавају услови контекста у којима се одвија; ученицима се нуде провокативни и изазовни проблеми које треба решавати“ (Jukić, 2013: 247). Ако се у обзир узме микро-дидактички ниво, контекстуални приступ настави и учењу и његов теоријски оквир имају великих сличности са другим конструктивистичким теоријама. Разлике се могу уочити на макро-дидактичком нивоу где се конструктивистичке теорије могу више посматрати као теорије учења него као теорије образовања (Van den Heuvel-Panhuizen, 2002).

На основу наведених карактеристика теорија конструктивизма и социо-конструктивизма, можемо издвојити најзначајније смернице на којима се заснива контекстуална настава и учење у почетној настави математике:

– учење је активан и динамичан процес у ком ученик на основу искуства које добија преко чула реагује на стварност око себе и на тај начин изграђује значење математичких појмова,
– чулна искуства нису довољна сами по себи, јер је конструкција знања когнитивне природе,

– језик је најзначајније средство развијања знања и математичких појмова,
– учење се остварује искуствено у интеракцији са другима и окружењем у коме ученик живи, ради и учи,
– не уче се изоловано чињенице и подаци, већ се мора обратити пажња и на *контекст* математичког садржаја,
– учење треба да развије мишљење вишег реда и прелазак са нижег на виши ниво развоја мишљења,
– градиво се ученицима презентује као надоградња на оно што ученик већ зна.

Данас постоји „општа сагласност да се процес учења у настави математике посматра као активан процес стицања знања, процес у коме је улога наставника да помаже ученику у стицању нових и преструктуирању старих знања и тако даље, а не као процес у коме ученици пасивно усвајају одређене математичке садржаје и стичу готова знања" (Maričić & Špijunović, 2015: 285). С обзиром на „интенције савременог математичког образовања, у којима се инсистира на улози математике у научном, технолошком и друштвеном развоју, неопходно је наставу математике засновати на приступу који је пре свега реалистичан, приступу у коме су присутна и хоризонтална и вертикална математизација, у коме ученик у реалном контексту учи, на реалним ситуацијама гради знање кроз решавање конкретних реалних проблема, а при томе вежба и начине математичког мишљења (апстракција, генерализација, логичко расуђивање, доказивање и др)" (Felda, Cotič, Maričić, 2016: 4). Основу за овакав приступ представља контекстуално учење.

1.1. Теорија Реалистичног математичког образовања – полазиште за контекстуални приступ учењу у настави математике

Математика, као наука, развијала се из потребе човека да реши нека конкретна питања свакодневног живота (трговина, изградња, мерење и друго). Савремене интенције почетне наставе математике заснивају се на повратку коренима у настајању математичких појмова, односно, повратку на интуитивне основе математике. Када је реч о природи садржаја математике које ученици усвајају на овом узрасту, приступ учењу мора бити такав да води потпунијем разумевању математичких појмова. Он мора бити заснован на ситуацијама и активностима учења које су блиске ученику, које су ослоњене на његово искуство, предзнање и везане су за ситуације, које за ученика имају смисла и чије решавање изазива унутрашња побуда ученика да реши проблем, што је, пре свега, у складу са природом дечијег мишљења, односно мора бити заснован на реалном контексту.

Настава и учење математичких садржаја, заснованих на реалном контексту, представља значајну тему за истраживаче, како у Европи, тако и широм света. Бројна истраживања (Van den Heuvel-Panhuizen, 2000, 2003, 2004; Gravemeijer, 1999, 2004; Gravemeijer & Doorman, 1999; Cobb & Gravemeijer, 2006; Freudenthal, 1982) усмерена су на анализу различитих аспеката и облика овакве организације наставе и учења. У њима се посебно наглашава значај и ефикасност контекстуалног приступа у настави и учењу као и могућност његове примене у различитим наставним предметима. Настава и учење засновано на реалистичном контексту представља основу у изградњи многобројних образовних покрета широм света. Најзначајнији покрет који се заснива на идеји реалног контекста у настави математике настао је у Холандији и развијан је кроз идеју теорије *Реалистичног математичког образовања* (РМО). Покрет је настао као холандски одговор на потребу реформе наставе математике и математичких курикулума широм света.

Импулс за реформски покрет реалног математичког образовања био је почетак, 1968. године и пројекат Вискобас (Wiskobas project), који су покренули Вајдевелд и Гофри (Wijdeveld and Goffree) (Van den Heuvel-Panhuizen, 2000). Развој РМО теорије почео је око 1970. године, на иницијативу и идеје Фројдентала и његових колега на IOWO-у институту (претходнику Института Фројдентал). Основна идеја Фројдентала је да математика мора бити повезана са стварношћу, мора остати близу искуства деце и мора бити релевантна за друштво да би се сматрала људском вредношћу (Freudenthal, 1971; 1973). Математику не треба схватити као предмет, већ као људску активност у којој ученици имају прилику да „поново измишљају" математику својим сопственим радом. Поред наведених импулса бројни истраживачки радови утицали су на изградњу и развој РМО теорије (De Lange, 1987, 2003; Streefland, 1985; Treffers 1987; Freudenthal, 1971, 1973). Поред теоријских основа може се навести и велики број публикација које се баве проблемима имплементације РМО у настави (Van den Heuvel-Panhuizen, 2000, 2001, 2003, 2005, 2010; Gravemeijer, 1999, 2004; Gravemeijer & Doorman, 1999; Klein, Beishuizen & Treffers,1998; Cobb & Gravemeijer, 2006 и други).

Данас о значају и квалитету идеја РМО примењених у математичком образовању деце у Холандији говоре резултати два међународна програма процене ученичких постигнућа: *Programme for I nternational Student Assessment* (PISA) и *Trends in International Mathematics and Science Study* (TIMSS), где је су ученици у овој држави постигли резултате знатно изнад просека на оба ова теста (Dickinson & Hough, 2012).

Идеје развијене у РМО представљале су и основне поставке контекстуалног приступа настави математике у пројекту *Математика у Контексту* (*Mathematics in Context - MiC*) који се развијао у Великој Британији и САД. Основни циљеви пројекта су:

1) развијање разумевања РМО у контексту енглеског језика;
2) разумевање развоја ученика и
3) подршка наставницима да развију практичне вештине и компетенције за реалистичко математичко образовање (Dickinson & Hough, 2012: 5).

Пројектни тим је у току три године пројекта, кроз промену приступа у решавању проблема код ученика, дошао до закључка да је овако организована настава утицала на начин како ученици разумеју математику. Универзитет у Висконсину 1991. године, финансиран од стране Националне фондације за науку (USA), у сарадњи са Фројдентал Институтом је почео да развија приступ *Математика у контексту* заснован на РМО-у на подручју САД. Прва верзија *Математика у контексту* објављена је 1996. године и од тада је прошла неколико ревизија. Врло брзо *Математика у контексту* усвојена је од стране великог броја школа, а њена примена довела је до доказа о значајном постигнућу ученика (Dickinson & Hough, 2012). Реакција на овакав приступ настави математике била је изузетно позитивна, са стварним осећајем да је овај приступ вредан континуираног истраживања, па су тако ове теме привукле пажњу многобројних истраживача (Meyer, 1997; Burrill & Romberg, 1998; Romberg, Shafer, Webb & Folgert, 2005; Romberg & Shafer, 2004; Webb & Meyer, 2002; Frykholm, 2004 и други).

Резултат свих активности је и иновативан приступ у настави под називом *Контекстуална настава и учење* (*Contextual Teaching and Learning – CTL*).

Контекстуална настава и учење заснована је на основним принципима конструктивистичких теорија, као што су критичко мишљење, истраживачко учење и учење решавањем проблема, који се налазе у релевантним физичким, интелектуалним и друштвеним контекстима (Glynn & Winter, 2004).

Инспирисан поставкама РМО теорије настао је покрет *Пендидиканска реалистичка математика Индонезије (Pendidikan Matematika Realistik Indonesia – PMRI*), чији је циљ био да развије побољшани приступ у учењу математике у индонежанским школама. Многобројне студије и истраживања наставе у индонежанским учионицама показала су позитивне резултате овако организоване наставе математике (Fauzan, Slettenhaar & Plomp, 2002a, 2002b; Armanto, 2002; Sembiring, Hadi & Dolk, 2008; Helsa & Hartono, 2011; Fauzan, Plomp & Gravemeijer, 2013; Arsaythamby & Zubainur, 2014; Lady, Utomo & Lovi, 2018). Покрет је временом постао основа за реформу математичког образовања у Индонезији. Овакав приступ настави математике у Индонезији у супротности је са традиционалним уверењима и наставом која је заснована на приступу једноставног преношења знања ученику, а не његовом поновном откривању кроз процесе решавања проблема (Sembiring et al., 2008).

Реформа математичког образовања, заснована на принципима РМО теорије, заживела је у бројним школама и различитим државама и донела низ дидактичких иновација, попут повећане улоге моделовања и примене аутентичног математичког истраживања, открића и симулација (Van den Heuvel-Panhuizen, 2019).

Значајан приступ, који у својој основи има идеје засноване на контекстуалној настави и учењу је *Метода отвореног приступа* (*The open approach method*) која је развијена у Јапану. Потреба за подстицањем развоја ученичког математичког мишљења, водила је ка истраживањима нових и другачијих приступа настави математике, још од 70-их година прошлог века. За традиционалну наставу математике у Јапану карактеристичан је фронтални облик наставе, а кроз *Методу отвореног приступа*, мењају се односи у учионици и улога ученика у том процесу. Суштина се састоји у томе да се, кроз примере контекстуалних задатака свакодневног живота, омогући ученицима различит приступ њиховом решавању, у складу са њиховим способностима, као и претходним усвојеним знањима. За наставу су карактеристичне три ситуације: 1) формулисање математичког проблема, 2) проналажење различитих приступа формулисаном проблему и 3) постављање, сложеног проблема (Nohda, 2000). Полазиште у учењу чине задаци отвореног типа који имају велики број различитих тачних решења. Они укључују проблеме „проналажења обрасца и односа из табела или из геометријских фигура, стварајући сопствене методе ученика и бројеве које задовољавају одређене услове за стварање својих проблема заснованих на првобитном проблему“ (Hino, 2007: 508). Ученици на крају могу сагледати различита решења и њиховим сумирањем изводити опште закључке, који им могу користити за нека будућа учења и решавања проблема.

Наше полазиште у раду за конципирање принципа и контекстуалног приступа учењу у настави математике пронашли смо у принципима теорије РМО, па ћемо је стога детаљније представити. Теорија *Реалистичног математичког образовања* базира се на идеји начина на који деца уче и усвајају математичке садржаје, као и како ти садржаји утичу на даљу изградњу њихових нових знања. Основа у изградњи знања и учења математичких процедура проналази се у контекстима који изражавају ситуације реалног света. У реалистичном математичком образовању, реални свет се користи као полазна основа за развој математичких појмова и идеја.

Појам реалног контекста има значајну улогу у савременом приступу настави математике, нарочито у млађим разредима основне школе, пре свега јер се заснива на Фројденталовој идеји математике као људске активности. То подразумева чињеницу да треба „учити математику како би она била од користи" (према Van Den Heuvel-Panhuizen, 2005: 3). Тако се реалистичко математичко образовање може схватити као образовна филозофија која користи контекст као медијум, кроз који ученици развијају математичко знање и разумевање математичких појмова.

Основни принципи наставе и учења који су засновани на теорији РМО представљају базичне карактеристике утемељене на истраживањима и пројектима који су се појавили широм света. Ови принципи односе се на карактеристике наставе математике у оквирима реалног контекста. Суштина оваквог приступа у настави математике огледа се у чињеници да у настави не треба почињати апстракцијама и дефиницијама, већ богатим избором различитих и деци блиских контекста, који својом природом упућују на проблеме из математике. Дакле, контексти треба да буду такви да се могу лако превести на подручје математике.

Контекстуално учење представља такав приступ настави математике, за који је карактеристично да се дају „богате" реалне ситуације у процесу наставе и учења. Ове ситуације представљају извор за развијање математичких појмова, алата и процедура у којима ученици у каснијој фази могу применити математичка знања, која временом постају општија и формалнија, а самим тим и мање везана за контекст. Дакле, „организацијом чулног искуства из реалних ситуација граде се интуитивне основе за математичке појмове и њихово формирање, те стварање когнитивне схеме за математичке садржаје који се затим обрађују у почетној настави" (Ђокић, 2014в: 670). Када је реч о проблемима стварног живота, контексти се не могу нужно ограничити искључиво на ситуације из стварног света, јер и „фантазијски свет бајки, па чак и формални свет математике може бити врло погодан контекст за проблеме, докле год су они *стварни* у умовима ученика" (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003: 9). Под појмом реалног контекста не подразумевају се само потпуно реалне ситуације, већ све оне ситуације које су део дечије мисли и маште. Појам *реално* треба посматрати шире, што значи да се ученицима могу нудити и проблемске ситуације које они могу да замисле (холандски израз „zich REALISEren" што значи „замислити"). Нагласак је, дакле, на стварању нечег стварног у мислима ученика.

Према Фројденталовом мишљењу, ученик нема избора него да поново „измисли" математику у одговарајућим смерницама, почевши од већине основних искустава и оријентацији све више ка комплексним структурама (Van den Heuvel-Panhuizen, 2000). Према мишљењу истог аутора, математичко знање никада не може да се пренесе одозго на доле у готовој форми. Тако и најбољи час математике имаће ефекта за ученике, само ако има смисла за њега и ако је он активно изградио то знање у складу са својим личним искуством. Фројдентал се радикално противио идеји дидактичког дедуктивног преношења знања од вишег ка нижем нивоу, при чему сматра да је овај начин строго аксиоматски и да „гуши" ученика (Wittmann, 2005). Посебна вредност наставе математике засноване на принципима контекстуалног учења лежи у чињеници да ученици могу да обликују дате проблемске ситуације, тако да и сами постају господари, односно власници проблема, на овај начин могу самостално да одлучују и утичу активно на решавање, а да притом осећају задовољство и жељу да још више раде и уче.

Основне карактеристике РМО, по мишљењу Ван ден Хувел и сарадника (van den Heuvel, Gravemeijer & Streefland, 1990) су: вођено откриће (вођена реинвенција путем прогресивне математизације), дидактичка феноменологија и коришћење модела (према Arseven & Yağcı, 2010: 266–267).

У процесу наставе *вођено откриће* подразумева процес којим се представљају добро одабрани контекстуални проблеми, који ученицима нуде могућности да развију неформална решења, која су специфична за контекст и стратегије решавања проблема. Ови поступци функционишу као упоришта за даљу формализацију и генерализацију, односно процес прогресивне математизације. Процес прогресивне математизације, као процес поновног откривања, покреће се када ученици користе свој свакодневни језик и неформални опис за структуирање контекстуалних проблема у неформални или формалнији математички облик (Armanto, 2002). Задатак учитеља је да увек изнова поставља нове проблеме који могу заједно довести до низа процеса који резултирају поновним откривањем математичких идеја. Са становишта конструктивизма, овај процес може се посматрати као „хипотетичка путања учења" (Clements & Sarama, 2004; Simon, 1995), која обухвата циљ учења, активности које се односе на развој учења и мишљења и редослед наставних задатака. Са овог становишта концептуализација хипотетичке путање учења схвата се као опис ученичког мишљења о одређеном математичком појму претпостављеном путањом кроз посебно обликоване садржаје учења (задатке) којима се покрећу ментални процеси или радње.

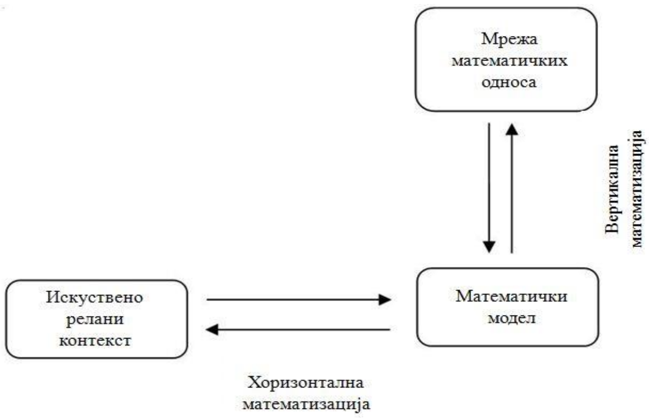
Према мишљењу Фројдентала, математика није само костур математичког знања, већ активност решавања и тражења проблема, односно, активност организовања садржаја из стварности у математичке садржаје које он назива математизацијом (Sarama & Clements, 2009). Математизација представља језгро математичке активности које подразумева организовање садржаја из математичке перспективе. Ову активност ученика, аутор види као начин поновног проналаска математике, али на сопствени начин, с циљем да се стекне индивидуално знање за које су сами ученици одговорни. Искуство ученика у процесу математизације интуитивно утиче на формирање основних појмова у математици, које се касније дорађују креирањем модела кроз процесе свакодневних математичких активности и коришћење математике за изградњу структура (Sarama & Clements, 2009). Важност процеса математизације најбоље илуструју следећи ставови Фројдентала о овом процесу: 1) математизација је главна активност математичара у настави; 2) математизација подстиче примену математичких знања у свакодневним ученичким активностима; 3) математизација се директно односи на идеје поновног процеса изградње знања у којем ученици формализују своје неформално резоновање и интуиције (Freudenthal, 1973). Видимо да овај процес представља срж математичког образовања, његов пут, циљ и исход. У процесу математизације Фројдентал посебно наглашава да се конвенционална симболизација не сме узети као почетна тачка у настави математике, јер се на тај начин процес, којим математичари развијају математичке идеје, окреће наопако (према Cobb, Zhao, & Visnovska, 2008). Тај процес треба да карактерише процес открића који се креће из ситуација које су блиске ученику, које су блиске његовом животу и које се ослањају на његово искуство и знање.

Дидактичка феноменологија обухвата проучавање односа између појава које математички појам представља и који се односи на сам појам. Дидактичка феноменологија сугерише начине идентификовања могућих инструктивних активности које могу подржати поједине активности и целокупне дискусије у којима се ученици укључују у прогресивну математизацију (Gravemeijer, 1994). Дакле, дидактичка феноменологија се односи на фокусирање ученика на тумачење математичког феномена како би се решио проблем. Фројдентал (Freudenthal, 1973) јасно истиче да „нема математике без математизације" (према Van Den Heuvel-Panhuizen, 2003: 11).

Наиме, ученици пролазе природне етапе развоја сваког појма кроз проблеме реалног света и на тај начин уче и граде способности, али и повезују градиво са свакодневним животом. Математичко образовање треба започети са математизацијом свакодневног живота, а поновно откривање знања захтева да ученици математизују сопствену математичку активност (Gravemeijer & Doorman, 1999). Према томе, ученици су у прилици да уче математику математизирањем својстава из стварних контекста и кроз сопствену математичку активност, а не кроз наставу у којој је математика представљена као систем са општом примењивошћу. Процес у ком ученици уче треба да буде вођен, односно ученицима треба понудити такво окружење за учење у коме могу да конструишу математичка знања сопственом активношћу, и тиме стекну концептуална знања и достигну више нивое разумевања.

Битна одлика РМО теорије је *коришћење нових модела* које подразумева активности моделовања задатака од стране ученика приликом решавања контекстуалних проблема. Моделовање се остварује на различите начине и може укључивати цртеже, таблице, дијаграме чија је функција да представе везу неформалног и формалног математичког размишљања. На овај начин ученици развијају способности разумевања математичких односа, способности да у сличним ситуацијама користите сличне моделе или исте користе да би створили нове. Честа примена различитих облика нотације, шема и модела, израда сопствених конструкција и продукција заједно са праксом уздижу се изнад стварности као извора примене. То није само зато што се карактеристике могу извући из реалног контекста кроз неразвијене операције већ и због њихове функције у развоју процеса математизације (Streefland, 1993).

Фројденталов поглед на математизацију представљао је основу да Треферс (Treffers, 1987) даље разради овај модел. Он издваја два облика математизације: *хоризонталну и вертикалну математизацију* (Слика 1).



Слика 1. *Активности хоризонталне и вертикалне математизације* (према Jupri & Drivers, 2016: 2484)

Хоризонтална математизација означава прелазак из реалне ситуације у свет математичких симбола (Ђокић, 2014б). Она се односи на процес описивања контекстуалног проблема у математичком смислу, како би ученик био у стању да га реши математичким путем. *Вертикална математизација* се односи на математизацију властите математичке активности, а то значи, кретање у свету симбола, кроз откривање веза између математичких појмова и стратегија решавања проблема, тако да ученик достиже виши ниво математике (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003).

Активности које одликују хоризонталну математизацију према мишљењу Де Ланжа (De Lange, 1987) укључују „идентификовање специфичних математичких појмова и активности у општем реалном контексту, шематизацију, формулисање и визуелизацију проблема на различите начине, као и откривање односа. Активности које карактеришу вертикалну математизацију укључују, на пример, манипулисање и усавршавање математичких модела, коришћење различитих модела, комбиновање и интегрисање модела и уопштавање“ (према Jupri & Drivers, 2016: 2483). Сигурно је да јасна граница између хоризонталне и вертикалне математизације не постоји, нити је нека од њих посебно доминантна у процесу изградње математичких појмова и учења математике.

Према мишљењу Треферса (Treffers, 1987), ако се у обзир узму други приступи математичког образовања ученика, емпиријски приступ се фокусира само на хоризонтално математизирање, структуралистички приступ ограничава на вертикално математизирање, док у механистичком приступу недостају оба облика (према Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Од врсте математизације, дакле, зависи врста и начин на који се формирају и користе модели у процесу решавања задатака и учења.

Опасност постоји када ученици уђу у процес вертикалне математизације, а да претходно нису прошли кроз процес хоризонталне математизације. У овом случају постоји велика могућност да се забораве алгоритми које су ученици савладали, тако да више немају стратегију која би им помогла у решавању проблема. Да би се превазишао овај проблем истиче се значај хоризонталног процеса математизације, којим се граде јасни модели који ће омогућити сталну употребу у решавању сличних проблема. Широко гледано процес математизације подразумева низ активности које обухватају: „проблем који је постављен у контексту, идентификацију релевантних математичких појмова, пречишћавање проблема тако да он постане потпуно математички, решавање проблема, тумачење решења у односу на изворну ситуацију” (Bray & Tangney, 2016: 177).

Суштину наставе математике и приступ математичким садржајима у концепту РМО теорије, Треферс (Treffers, 1987) описује кроз пет принципа: „феноменолошко истраживање или искориштавање контекста; употреба модела и/или премошћавање вертикалних инструмената; употреба ученичког рада и њихових конструкција; интерактивни карактер процеса наставе и међусобно прожимање више поступака учења и/или тема (наставних јединица) (Према: Romano, 2009: 15). Наведене принципе ван ден Хувел-Панхуизен (Van den Heuvel-Panhuizen, 2000) проширује и описује кроз шест принципа: принцип активности, принцип реалности, принцип нивоа, принцип интерног спаривања, принцип интеракције и принцип вођења (Van den Heuvel-Panhuizen, 2000: 5−9).

Принцип активности подразумева да се ученици посматрају и виде као активни учесници у процесу учења. Кроз овај принцип изражена је идеја да је математику најбоље учити тако што ће се математика радити, што истиче идеју математике као људске активности. Ученици, уместо да усвајају „готова“ математичка знања, третирају се као активни учесници у образовном процесу у ком развијају сопствени математички алат. Принцип активности значи да су ученици суочени са проблемским ситуацијама, кроз које самостално граде знања, односно да је ученичка продукција у првом плану.

Принцип реалности може се схватити кроз важност која се придаје циљу математичког образовања, укључујући способност ученика да примене математичка знања у решавању проблема свакодневног живота. Са друге стране, математичко образовање треба да почне од проблемских ситуација које имају смисла за ученике, што им омогућава да даље дају различита значења математичким појмовима током решавања проблема. Дакле, ученици се постављају у ситуацију тражења стратегија за решење задатка или проблема кроз коришћење неформалног контекста, радије него да се уводе апстракције или дефиниције које ће користити у процесу учења. Пре него се почне са апстракцијама и дефиницијама које ће се примењивати у математици, мора се почети богатим контекстима који ће се организовати помоћу математизације. Овај принцип није карактеристичан само за примену на крају процеса учења, већ и као извор за учење математике.

Математизација се као процес може одвијати на различитим нивоима разумевања математичких појмова. *Принцип нивоа разумевања* упућује на то да у учењу математике ученици пролазе различите нивое, од неформалног контекста решења, преко стварања различитих нивоа коришћењем пречица и шематизација, све до стицања знања о појмовима и стратегијама повезивања. Различити нивои разумевања у процесу математизације могу усмеравати процес учења, на тај начин ученици могу имати активну улогу у развоју модела, а модели се могу даље развијати у току процеса учења и наставе и утицати на даљи развој и учење појединца. Активности математизације у почетку су активности које су изведене на неформалан начин, касније као резултат размишљања могу постати формалније и постати предмет истраживања на вишем нивоу размишљања. Ученици се тако виде као активни учесници у процесима наставе и учења који се одвијају у оквиру социјалног контекста у учионици. Трансформација модела је основни принцип преласка са једног на други ниво разумевања. Ако наставник у процесу наставе успе да достигне прави степен конкретности, прецизности и математизације кроз материјале које су развили ученици, тада се може развијати и процес интеракције између нивоа. Нагласак је на дискусији и разговорима о материјалу али и транзицији нивоа који су својствени за материјал (Streefland, 1993).

Принцип интерног спаривања означава да је у теорији РМО немогуће одвојити поглавља у математици. Решавање проблема богатог и реалног контекста значи да се мора применити широк спектар различитих облика мишљења и алата. Поред информација које се могу добити у самом задатку, треба сагледати и карактеристике које се односе на специфичност повезаности различитих области математике. Различите области и теме одређене наставним планом и програмом из математике се не посматрају изоловано и одвојено већ интегрисано. Ученицима се нуде разноврсни проблеми у којима могу користити различите математичке алате и знања. Овај принцип је јако важан са становишта математике у млађим разредима основне школе због специфичности садржаја и њихове потребе за интегрисаним усвајањем (на пример: садржаји о скуповима и бројевима). Снага овог принципа огледа се у кохерентности наставног плана и програма.

Принцип повезаности и интеракције подразумева да настава треба да омогући ученицима међусобну сарадњу и интеракцију у смислу могућности размене идеја и стратегија за решавање проблема. Уколико су ученици у ситуацији да слушају једни друге и размењују идеје, они сами могу напредовати у процесу учења, тако што ће им друге идеје пружити могућности да један исти проблем сагледају из више перспектива. На овај начин они не долазе само до решења задатака или развијања неког појма, већ и мењају структуру свог мишљења и модификују стратегије решавања, које ће им помоћи и у наредним активностима.

Принцип вођења подразумева да у процесу учења пресудну улогу у стицању знања имају програми наставе и учења и наставници, који управљају процесом учења и директно су повезани са активностима у настави. Задатак наставника је да обезбеди погодно окружење за ученике, у коме ће они бити у стању поново да створе нове математичке идеје.

Као основне карактеристике учења и наставе засноване на реалистичком математичком образовању могу се издвојити:

1) коришћење смислених контекста;
2) развој модела који омогућавају прелазак из првобитног реалног контекста у формални;
3) ученици кроз процес математизације поново откривају математичке појмове;
4) интерактивност између ученика и наставника;
5) поглед на математику као предмет који је повезан са другим предметима, интегрисаност са другим темама (преплитање) (Bray & Tangney, 2016).

Импликације наставе засноване на контекстуалном приступу и кључним принципима РМО значајно се разликују од приступа који се често користе у свакодневној школској настави. Тако Дикинсон и Хоуг (2012) наводе следеће карактеристике и предности овако организоване наставе:

– употреба реалних ситуација омогућава ученицима да развијају своја математичка знања за разлику од коришћења контекста у облику формалних математичких нотација, којима се уводи нови садржај при чему се одмах прелази на теорију;
– мањи нагласак је на алгоритмима, а већи на смислу и постепеном усавршавању неформалних процедура;
– акценат је на пречишћавању и систематизацији мишљења и разумевања;
– мањи нагласак је на повезивању појединих лекција са непосредним стицањем знања, и то кроз постепени развој током дужег временског периода, чиме ученици остају везани за тему дужи временски период у истом контексту;
– дискусија и размишљања играју значајну улогу у пружању подршке ученниковом развоју;
– већи је нагласак на истраживање учења, истраживање садржаја који се користе у школама (Dickinson & Hough, 2012: 7).

Фокус у настави математике заснованој на идеји реалног математичког контекста огледа се у остваривању везе између формалног и неформалног математичког образовања. Суштина је у дихтомији ове две форме, чији је основни циљ да формална математика произилази из математичких активности ученика у реалном контексту.

Контекстуални приступ учењу заснива се на овом моделу и ми смо га у раду овако и посматрали. Суштина контекстуалног приступа учења је створити услове који обезбеђују што бољу, ефикаснију и рационалнију математизацију, с циљем да се ученицима обезбеди што боља веза између постојећег знања и искуства и новог садржаја учења, прелазећи постепено пут од конкретних ка апстрактним математичким идејама и генерализацијама. Детаљније ћемо представити карактеристике тог процеса и расветлити процес математизације и коришћење модела у том процесу.

1.2. Математизација – основна идеја у контекстуалном приступу учењу

Процес математизације представља кључни елемент у учењу математичких садржаја, али истовремено и процес који је потребно обликовати, испланирати и осмислити како би његов исход био што бољи. Ученици пролазе различите нивое разумевања у којима се одвија процес математизације: од осмишљавања неформалних контекста, преко достизања одређеног нивоа шематизације у процесу решавања задатка, све до сазнања о општим односима изван проблема који омогућавају сагледавање целокупне слике проблема. У првом плану је реалистични контекст којим се остварује повезивање математичких знања са светом који окружује појединца. На овај начин контекст чини математички проблем живим, тако да ученик постаје свестан чему то знање служи и како може да га употреби.

Спону између реалног контекста и формалне математике чине *модели*. Модел овде служи као веза којом се премошћава раскорак између неформалног разумевања реалне или замишљене стварности и разумевања формалних система и односа у математици. Процес учења не започиње дефинисањем, формулом, теоремом или карактеристиком која је праћена неким примером формалног математичког проблема, већ сви ови наведени елементи представљају циљ и исход до којег ученици долазе у процесу наставе кроз процес хоризонталне и вертикалне математизације. Математика се посматра као људска активност у којој се настава математике изводи постављањем стварних реалних проблема у природном окружењу, блиском за ученика. На овај начин креирају се модели стварности, који представљају полазиште за математичке активности ученика, које он у процесу учења трансформише и кроз процес апстракције генерализује и пребацује на поље математике.

Модели се посматрају као „репрезентације проблемских ситуација, које нужно одражавају суштинске аспекте математичких концепата и структура које су релевантне за проблемску ситуацију, и које могу имати различите манифестације" (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003: 13). Ове манифестације модела могу бити веома различите и кретати се од визуелних слика, реалних предмета, шема, таблица, графикона, дијаграма или симбола. Суштина је да модел који се формира у процесу учења и који потиче из реалних ситуација свакодневног живота, мора имати одређени степен општости како би подстицао даљу изградњу ученичких знања. Они се могу пронаћи, како у стратегијама самог приступа проблему, тако и у поступку решавања проблема. Посебно је битно да, кроз процесе математизације и изграђивања различитих нивоа разумевања, ученици изграђују моделе.

Моделовање у решавању проблема доводи до стварања ситуације учења, која започиње активним ангажовањем ученика на проблемским ситуацијама, које изазивају значајне математичке конструкције, а који се затим проширују на истраживање и прерађују, како би се користили у другим проблемским ситуацијама, што доводи до генерализовања система, који се може користити у низу различитих контекста (Mousoulides, Sriraman, & Christou, 2007).

Функција модела је премошћавање неформалног и формалног нивоа: померањем од „модела од" до „модела за" (Streefland, 1985). То значи да се на почетку одређеног процеса учења модел конституише у веома блиској ситуацији кроз везу са проблемском ситуацијом, која је предочена, док касније контекстуални модел, који је генерализован у ситуацијама, постаје модел који се може користити за организовање нових, али сродних проблемских ситуација (према Van den Heuvel-Panhuizen, 2003).

Коришћење модела треба да буде природан процес који долази сам по себи, односно, сви који учествују у процесу наставе треба да осмисле проблемске ситуације које ће подстаћи ученике да самостално граде моделе, као и да ти модели на тај начин подстичу виши ниво општости. Можемо рећи да, поред модела којим се изражава нека стварна животна ситуација, „ту је и друга врста модела, при чему се активности које изазивају модел користе као средство за развој (уместо примене) математичких појмова“ (Bonotto, 2011: 20). Другим речима, учење почиње од неформалних корака који касније усмеравају ученике да врше математизацију проблема из стварног света у свет који чине симболи. Након тога, ученици могу наставити са вертикалном математизацијом, користећи моделе, како би извукли општи закључак (Laurens, Batlolona, Batlolona & Leasa, 2018). Модели употребљени на овај начин су укорењени у конкретним ситуацијама, али су са друге стране довољно флексибилни, тако да су корисни у вишим нивоима математичких активности. То значи, да ће модели пружити подршку током вертикалног процеса математизације, без ометања тог пута.

Прелазак са *модела од* на *модел за* подразумева померање размишљања ученика о контекстуалној ситуацији моделовања, ка фокусирању на математичке односе. Овај прелазак са једног на други облик модела условљен је процесом који се састоји из низа активности, а завршава се када ученику више није потребан модел у решавању задатака.

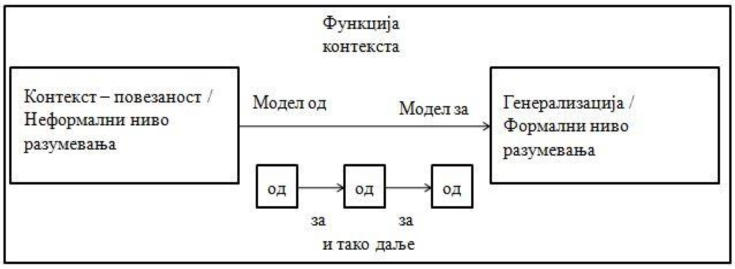
Активности које прате процес развијања модела су:

1) *„постављање задатака* у којој интерпретације и решења зависе од разумевања како треба поступити у окружењу (често ван школских оквира);
2) *референтна активност*, у којој се модели формирају кроз активности у окружењу описаним у наставним активностима (које се углавном постављају у школи);
3) *општа активност* у којој се формирају *модели за* којима се омогућава фокусирање на интерпретације и решења независно од специфичних слика;
4) *формално математичко резоновање*, које више не зависи од *модела за* у математичкој активности“ (Gravemeijer, 1999: 162).

У процесу наставе модел долази у први план, као део неформалне активности ученика. У активностима након тога, улога модела се почиње мењати тако што ученици стичу више искустава у сличним проблемима, тако да је њихова пажња окупирана на односе који постоје између ситуација у самом проблему, као и између појединих проблема. На овај начин ученици развијају математичке везе које спајају проблеме сличног контекста.

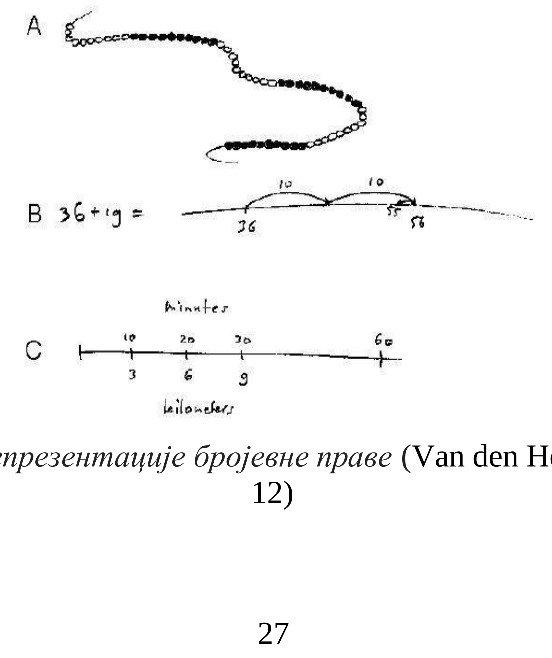
Модел у овако организованој настави постаје нешто више за ученике. Уместо да се само изводи његово значење из активности у контексту у ком се проблем налази, модел почиње да добија и значење из математичких односа који се у њему налазе. На овај начин, модел добија шире значење и постаје основа за касније формалније размишљање, а не само начин представљања контекстуалног проблема. Дакле овај пут прелази пут – од модела неформалне математичке активности до формалнијег облика математичког резоновања. Овде посебно треба нагласити да није реч о два независна модела, већ је у питању општа концепција једног истог појма – конкретног модела. Формирање модела у пракси означено је низом узастопних корака и подмодела који се могу описати као мрежа или веза значења. Сваки модел је условљен низом активности, односно, сваки модел означава неку ранију активност са сличним проблемима (Gravemeijer, 2020). Од ученика се очекује да до формалног начина размишљања дође математизацијом своје сопствене неформалне математичке активности. Са друге стране, циљ формалне математике је да ученици искусе формалну математику кроз ситуације реалног контекста.

Напредак у размишљању ученика огледа се у општости решења до којих долазе на основу контекста реалних ситуација (Слика 2). Контекст који има улогу модела може послужити као важан елемент за премошћавање јаза између неформалне и формалне математике, што је посебно важно за области математике у којима доминира симболичка нотација и генерализација, као што је алгебра. Ученици у почетку развијају стратегије које су уско повезане са контекстом. Касније одређени аспекти контекстуализације могу постати уопштенији, што значи да контекст постепено преузима карактер модела и као такав може пружити подршку за решавање других сличних проблема. Модели тако пружају ученицима више формално математичко знање (Gravemeijer, 1999; Van den Heuvel-Panhuizen, 2002). Модели на овај начин могу, поред функције учења, да постану значајно средство развоја мишљења појединца.



Слика 2. *Нивои разумевања и смена од модела од до модела за* (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003: 30)

Основно начело, у оквиру оваквог модела математизације, састоји се у томе да он константно води и подстиче учеников раст, кроз остваривање наставног плана и програма. Карактеристична је дугорочна перспектива, што значи да постоји снажна повезаност између онога што се научило раније, као и оног што ће се тек учити. То значи да се употреба модела не може посматрати као изолована активност, већ се напредак заснива на снажној вези која између њих постоји. Сам модел или његови прилагођени облици на тај начин могу бити у складу са развојем математичких способности, које даље подстичу сам процес напредовања ученика. Као пример ћемо узети развијање појма бројевне праве, при чему се она различито схвата од првог разреда (на пример, низ перли), преко празне бројевне праве, најкасније полуправе којом се изражавају разломци (Слика 3).



Слика 3. *Различите репрезентације бројевне праве* (Van den Heuvel-Panhuizen, 2002: 12)

Као што видимо, једна представа је увек само једна од могућих репрезентација истог проблема, што се подудара са процесом решавања проблема. На примеру развијања модела бројевне праве показано је како се кохерентно и дугорочно одвија процес развијања једног појма и примене модела заснованих на истом принципу. Контекст даје смисао појмовима у математици. Ученици су често у ситуацији да посматрају репрезентације или размишљају о објектима контекста. У почетку ученици размишљају о односима и закључују на основу контекста, док касније сам контекст постаје основа на којој деца реагују уколико се пронађу у сличној ситуацији.

Према мишљењу Гравемејера (Gravemeijer, 1999), модел који се користи у процесу развијања математичког појма, кроз математизацију, поприма различите манифестације. Серија манифестација може се описати као ланац значења. Овај ланац значења је на специфичнијем нивоу од модела који је општији. Појам ланца значења утемељен је на идеји да знак садржи пар (означени и означитељ). Нови знак обухвата првобитни знак, док се значење првобитног знака мења. Последњи корак односи се на формирање новог знака у коме су и означитељ и означени повезани међусобно (Gravemeijer, 1999). Из перспективе математичког образовања посебно је битан ланац значења, јер показује како се формални математички знакови могу укоренити кроз конкретне активности ученика.

У овом процесу посебна пажња мора се обратити на контекст проблема, јер он понекад може довести до грешке у процесу решавања. Узмимо на пример симболе + и −, који се односе на аритметичке операције, односно извођење аритметичких операција сабирања и одузимања у процесу решавања проблема. Сами симболи не означавају ситуације контекста у коме се налазе. Битно је да ученици разумеју значења ситуација које се посматрају у смислу разлика које субјекта доводе до различитих поступака у решавању задатка, као и друштвене ситуације које одређују на шта се тај тип проблема односи (Carraher, Schliemann & Carraher, 1988). Тако ученици често користе површне перцепције кључних речи или директне стратегије превођења – моделовања пре него што дубоко размисле о конкретној ситуацији у стварном свету приликом решавања стереотипних текстуалних проблема (Reusser & Stebler, 1997). Узмимо, на пример, задатак:

Са једног дрвета су одлетеле 4 птице, а затим још 2 птице. Колико птица је одлетело са гране?

Оно што, на први поглед, код ученика одређује шта треба урадити како би се одредио број птица који је одлетео са гране јесте реч *одлетеле*. Контекст у ком је задатак формулисан упућује да они ученици који обрате пажњу само на контекст једне речи могу погрешно решити овај проблем. Са друге стране, овакви контексти пружају учитељу јасне смернице за даље деловање кроз то: шта треба променити, чему треба посветити пажњу и на чему инсистирати у процесу наставе. Кад ученици праве грешке, то је често због погрешних представа о проблемским ситуацијама утемељених на недовољном разумевању семантичких шема у текстуалним задацима. Уочавање кључних речи у самом поступку решавања задатка, без претходног сагледавања односа који постоје између величина у задатку представља само површно разумевање односа у задатку. Дакле, један од основних захтева у овом случају би био да се ученици навикавају на дубље сагледавање односа и захтева у задатку како би задатак могли разумети на прави начин, а самим тим и решити.

На крају, можемо закључити да постоје две концепције схватања моделовања и модела у процесу математизације:

– *моделовање проблемске ситуације* – формулација задатка који изражава односе и приказује јединствене облике математичких проблема на различите начине);
– *моделовање метода решавања проблема* – у процесу решавања задатка ученик се служи различитим моделима који поједностављују односе и омогућавају му да на њему приступачан начин разуме и реши задатак.

Посебно треба истаћи значај активности у учионици у којој се одвија стварање модела и који обухвата процесе које воде од репрезентација и доживљавања проблема од стране ученика, до процеса које обухватају уочавање веза које постоје између модела, као и уопштених приступа решавања задатка. Упоређивање различитих облика моделовања има изузетан педагошки значај у развоју алгебарских и других математичких врста мишљења.

Дакле, реални контекст има значајну улогу у процесу развијања математичког појма. На основу чињеница добијених из контекста и ранијег искуства ученика, ученици поново откривају математичке идеје. Овај процес мора бити прецизно осмишљен и остварен у средини која је блиска ученицима, а која их подстиче на рад и истраживање. На овај начин ученици су у стању да дају претпоставке и тестирају могућа решења у процесу математизације. Тако ученици развијају појмове и схватају његове карактеристике. Ученик у овом процесу развија способности и усваја знања која постају део њега, тако да све то може даље користити у усвајању нових знања и развијању нових способности.

2. РАЗВОЈ АЛГЕБРЕ – ОД ИДЕЈА ДО НАУЧНОГ ЗАСНИВАЊА

У природи човека као свесног и разумног бића је да посматра свет који га окружује и покушава да разуме, како и на који начин он функционише. Посматрајући природу човек је покушавао да разоткрије скривене истине и реши конкретне проблеме свакодневног живота са којима се сусреће. Управо је на овај начин настала и развијала се математичка мисао. Потреба човека да размери земљиште, да изгради систем за наводњавање, да одреди количину нечега, да мери или из више гомила одреди бројност неких ствари довела га је у ситуацију да размишља, проверава, а на крају да уопштава и записује своје мисли. Потреба за проналажењем решења, које се може применити увек када се човек пронађе у сличној ситуацији, представља прве обрисе генерализација научних истина. На овај начин се развијала и алгебра, као део математике коју карактерише велики степен уопштености и апстрактности.

Према мишљењу Киерана могу се издвојити „три фазе у развоју алгебарске мисли:

1. реторичка фаза (пре Диофанта – 250. године),
2. синкопатска фаза (Диофант)
3. симболичка фаза (почиње са радом Вијета)“ (Kieran, 1992: 390–391).

Фазе су издвојене према начину на који су алгебарске нотације записиване. У реторичкој фази све алгебарске истине, дефиниције и нотације записиване су речима, односно реченицама, а алгебарске истине исказиване природним језиком свакодневног живота. Синкопатску фазу карактерише реторика, а симболика којом се означавају скраћенице користила се само да се изразе поједини појмови или операције у алгебри. Тек у последњој фази развоја алгебре настаје потпуна симболизација, односно сви бројеви, операције и односи се изражавају кроз скуп конвенционалних и договорених симбола, као и правила за њихово записивање.

Исте фазе у развоју алгебарске мисли систематично је представила Ван Амером кроз епохе развоја алгебарске мисли (Табела 1).

Табела 1. *Карактеристике три типа алгебарске нотације* (van Amerom, 2002: 37)

Алгебра	Реторичка	Синкопатска	Симболичка
Записивање форме проблема	Само речи	Речи и бројеви	Речи и бројеви
Метода решавања у писаном облику	Само речи	Речи и бројеви; скраћенице и математички симболи за операције и експоненте	Речи и бројеви; скраћенице и математички симболи за операције и експоненте
Представљање непознате	Речи	Симболи и слова	Слова
Представљање добијених резултата	Специфични бројеви	Специфични бројеви	Слова

Зачеци алгебарске мисли и прве идеје у алгебри, које се односе на дефиниције у математичком смислу, везујемо за период Месопотамије и старе су око 4000 година. Сачувани списи упућују на две врсте различитих проблема којима су се бавили месопотамски математичари. Прва врста проблема односила се на проблеме рачуна и трговине, док се друга врста односила на проблеме геометрије „резања и слагања“ које су развили кроз проблеме поделе и размере земљишта (Katz & Barton, 2007: 186).

Сведочанства пронађена на глиненим таблицама из периода 2000−1700. године пре нове ере, показују да су Вавилонци решавали проблеме које ми данас називамо квадратним једначинама. Потреба за квадратним једначинама била је условљена проблемима одређивања дужине и ширине правоугаоника за потребе размеравања земљишта и потребе свакодневног живота.

Основна карактеристика старогрчке математике је да је, у највећем делу, заснована на геометрији, па се стога и развој алгебре одвијао у оквиру геометрије. Геометрија је имала доминантну улогу у решавању проблема и сматрала се конзистентном и математички ригорозном и тачном науком. Број се везивао за неку величину. Они који су се бавили проблемима непознате, изражене кроз дужину и површину, очигледно су се надали да ће на овај начин предности геометрије бити пренесене на аритметику и алгебру. Друго објашњење значаја геометријске алгебре, у овом периоду, односи се на идеју ирационалног броја. Ова разлика је прво настала у контексту несразмерности, тако да је природно било да је посматрају на овај начин. Проблем ирационалног броја послужиће као зачетак у раздвајању идеје броја од неке континуиране величине. Пошто је ова разлика прво настала у контексту несразмерности, било је природно да ће се одређене величине посматрати чврсто повезане са подручјем геометрије (Sfard, 1995).

Проблем несразмерности се рефлектује на појам ирационалног броја према ком су грчки математичари имали посебан однос. Тако се Питагора суочио са проблемом одређивања дијагонале квадрата странице 1 m и закључио да се она није могла изразити као неки одређен број, што није ишло на руку његовим дотадашњим тврђењима да је број све. Пракса повезивања геометријских облика и бројева је самим тим одбачена, тако да су се ове дужине називале *алогон,* или *нерационалан*, а данас *ирационалан.* Пошто *алогон* значи и *нешто што не треба говорити*, Питагора је забранио следбеницима да о том проблему и парадоксу чак и говоре. Предање каже да је било и оних који су о тој тајни проговорили и због ње изгубили и живот.

Повезаност вавилонске и старогрчке математике може се уочити управо кроз алгебру, која је била заснована на геометријским манипулацијама и мерама у проблемима свакодневног живота. Мора се нагласити чињеница да су процеси посматрани „изнутра“, а не из перспективе вишег нивоа разумевања алгебре. „Њихова једина брига била је проналажење општих рецепата за рачунање непознатих вредности из конкретних нумеричких података. На овај начин су проналажени алгоритми, који би се могли користити за читаве скупове проблема“ (Sfard, 1995: 20). Дакле, у том периоду математичари су своје методе рачунања и решавања проблема објашњавали конкретним нумеричким примерима, а не општим и универзалним оштостима. Проблем се наводи у општем смислу, док се његово објашњење даје у виду конкретних бројева који објашњавају решење.

Временом су алгоритми почели да замењују геометрију. Историја алгебре почиње да се креће према фази „решавања једначина“. Сведочанство за то можемо пронаћи у Диофантовом раду и алгоритму за решавање квадратних једначина, који је искључиво базиран на бројевима. Овај период представља прекретницу у којој почиње фаза синкопатске алгебре и првих облика симболичког записивања, као и постепеног одвајања алгебре од геометрије.

Сведочанство о развоју алгебре даје и преглед развоја идеје о записивању непознате и промењливе. Миленијумима пре него што ће се први пут појавити симбол као ознака за непознату и променљиву постојали су други начини за изражавање ових појмова. То значи да је појам непознате и променљиве јако стар. Неке од најстаријих писаних ознака које су означавале појам непознате вредности пронађене су на старим вавилонским таблицама, где су називани речима *игибум* и *игум*. Грчки математичари су, такође, користили идеју непознате, обично као дужине које задовољавају неки геометријски однос или једнакост, иако су методе проналажења непознатих бројева извођене одвојено од метода проналаска непознатих дужина. Исламски математичари су непознату називали *ствар* или *број* или *корен*, тако да су на сличан начин као и грчки и вавилонски математичари непознате изражавали речима, а не симболима (Ely & Adams, 2012).

У Индији се, такође, користила реторичка алгебра, а реч *авиакта ганита* означавала је аритметику непознатих количина, за разлику од *виакта ганите* која је као реч означавала аритметику познатих количина. Касније реч *бијаганита* постаје реч која је служила за означавање алгебре. Реч *бија* значи семе или елемент, тако да се преводи као „рачунање са семеном или непознатом количином“. Реч *бија* се такође може превести као „анализа“ а *бијаганита* као „израчунавање на основу анализе“. Ова реч се чак и данас користи у многим индијским језицима за означавање школске алгебре. Реч симбол у Индији је представљен кроз реч *варна*, што значи боја. Овај стандардан начин представљања непознате количине налази се у корену индијске традиције – при чему се непознате представљају различитим бојама (Subramaniam & Banerjee, 2011: 92-93).

Реч *алгебра* (од арапске речи *Al – jabr* што би могло значити - склапање поломљених делова), први пут се спомиње у раду „Књига израчунавања интеграла и једначина“ (арап. الكتاب المختصر في حساب الجبر والمقابلة, al-Kitāb al-muẖtaṣar fī ḥisāb al-ğabr wal-muqābala), Мухамеда ибн Муса ал-Кваризми-ја, написаног у Багдаду око 825. године нове ере, који се уједно сматра и првим радом из области алгебре (Слика 4).

Слика 4. *Део Ал-Кваризмијеве књиге al-Kitāb al-muẖtaṣar fī ḥisāb al-ğabr wa-l-muqābala (*Lim & Brezina, 2016)

Први део овог рада садржи упутства за решавање линеарних и квадратних једначина. Аутор класификује једначине у шест типова, од којих су три мешовите квадратне једначине, и за сваки од њих он представља алгоритам за њихово решење. Међутим, његов начин решавања линеарних једначина више се може окарактерисати као аритметика, а не као алгебра, јер су основне идеје решавања биле засноване на пропорцијама, као чистом аритметичком концепту. До краја деветог века нове ере значајан број дела познатих математичара (Еуклида, Архимеда, Птоломеја, Диофанта и других) преведен је на арапски језик. Исламским математичарима су у то време били доступни и радови математичара вавилонске и хиндуистичке математике, што је омогућило стварање потпуно нове врсте математике, која је подразумевала много више од до тада постојећих математичких идеја. Систематско проучавање метода за решавање квадратних једначина представља централну тему рада исламских математичара, па се из тог разлога посебно истиче њихов допринос напретку алгебарског размишљања.

Реч *алгебра* је ушла у енглески језик током петнаестог века из средњовековног латинског језика. Изворно, реч алгебра, у почетку се односила на хируршку процедуру постављања поломљених или дислоцираних костију. Математичко значење ове речи први пут је записано у шеснаестом веку.

Идеје и решења арапских математичара везана за алгебру, постепено су се преносиле и у Европу. У свим текстовима који су стизали у Европу, као и оним који су Европљани написали убрзо након тога, решени проблеми алгебре практично су увек били апстрактни проблеми. Било је веома тешко поставити и решити проблем квадратне једначине који је повезан са „стварним животом". То је указивало на све већу апстрактност и удаљавање од почетних идеја алгебре и њене везе са геометријом и свакодневним животом.

У XVI веку Франсоа Виет (1540–1603), под утицајем радова Диофанта, први пут бројеве замењује словним ознакама и ствара услове за већу генерализацију алгебарских истина. Мењајући бројеве словним ознакама, створио је основу за решавање проблема читаве класе линеарних једначина, према тачно утврђеним правилима − алгоритмима. Овакав развој симболичке алгебре створио је могућности за оперисање симболима, а не само бројевима, што је до тада био случај. Развој алгебарске симболике утицао је и на геометрију, па се у радовима Декарта (1596–1650), а затим и Ферма (1601–1665) геометријске фигуре и њихове трансформације представљају кроз одговарајуће рачунске трансформације и симболе. У *Геометрији* Декарт описује свој нови метод употребе алгебре − симболизам за представљање и решавање геометријских проблема. Овако схваћена геометрија добиће назив *аналитичка геометрија*. Декартова истраживања била су базирана на тежњи да се алгебра користи за решавање геометријских проблема, док је Ферма био заинтересован само за представљање и тумачење кривих у области алгебре. Историјски посматрано, прекретницу у развоју алгебре чини тренутак када Виет замењује бројеве словним ознакама и на тај начин ствара услове за каснију примену слова за означавање променљиве или непознате.

Временом, алгебра постаје све мање заокупљена идејом проналажења решења једначина, а све више тражењу заједничких структура у различитим математичким објектима, при чему је објекат дефинисан скупом аксиома (Katz & Barton, 2007: 197). Оно што је било карактеристично за практичаре је да док год постоји нека врста аксиоматског система, постоји и сигурност да се добијају тачни резултати у рачунању.

Одвајајући се од аритметике и аритметичких операција, алгебарске нотације, из историјске перспективе, постају ослобођене аритметичких „стега", односно „више се не очекује да значење симболичких манипулација произађе из значења аритметичких манипулација, већ оно мора бити тражено у начину како се трансформишу и комбинују алгебарски симболи" (Zeljić, 2015: 10). Тако и Сфард сматра да "деаритмизација алгебре представља типичан пример одвајања математичке идеје од свог операционалног порекла, како би се постигла његова потпуна реификација" (Sfard, 1995: 29).

Све већа генерализација алгебре доводи до тога да математичари почињу да посматрају алгебарске структуре без икакве везе и односа према физичком свету или њиховим потенцијалним применама у природним наукама. На овај начин богатство нових структура и њихова веза са другим областима науке постају важнији за истраживања. Тако долази до појаве нових структура и нових грана алгебре. Концепт групе, пратио је појам инваријантности и теорије матрица, које су праћене идејама поља, прстена и линеарног простора. Средином двадесетог века и појавом *Бурбакиста* алгебра постаје једна од три основне матичне структуре у математици.

Као што видимо, алгебра је у каснијим историјским фазама развоја прерасла у моћан алат за описивање и коришћење математичких система. Алгебра у облику у коме је данас познајемо, најчешће је организована око скупа алгебарских вештина које најчешће нису повезане једна са другом, а користе се само у препознатљивим математичким ситуацијама, које је већина људи усвојила и примењује без дубљег и потпунијег разумевања.

Историјски развој алгебарске мисли нам може показати пут који је човек прешао у откривању алгебарских истина. Ми овај пут можемо искористити у процесу наставе, како би формирање алгебарских појмова био природан и једноставан процес, нарочито ако се у обзир узму специфичности дечијег мишљења на овом узрасту. Како сматра Купер историја може помоћи разумевању различитих тема у оквиру курикулума математике (Kooper, 1996). На сличан начин размишља и Ван Амером која сматра да су ученици „истражујући историју математике, у стању да виде како су културни и друштвени фактори утицали на развој математике, као и да разумеју везе које постоје између математике и других дисциплина“ (van Amerom, 2002: 49). Ученици ће заједно са наставницима на овај начин бити у бољој ситуацији да увиде и схвате грешке и проблеме, који су се у историјском развоју јављали и бити у позицији да их предупреде и отклоне на време. Ове смернице у историјском развоју алгебре су, на неки начин, и део питања којима ћемо се бавити у овом раду и покушати да дамо један савремен, другачији приступ настави и учењу садржаја алгебре у млађим разредима основне школе.

2.1. Настава алгебре у млађим разредима основне школе

Људи из времена у ком су живели Аристотел и Еуклид би сигурно имали потешкоће да схвате већину математичких идеја, које у савременим условима средњошколац може лако да разуме и користи. Разлог томе крије се у чињеници да су антички Грци проблеме и математичке истине представљали помоћу природног, свакодневног језика и геометријских односа. На пример, Еуклидов запис у делу *Елементи*, у ком он објашњава и доказује квадрат бинома у Ставу 2.4.: „Ако се дата дуж произвољно подели, квадрат на целој дужи једнак је збиру квадрата на одсечцима и двоструког правоугаоника обухваћеног одсечцима“ објашњава једно алгебарско својство, али кроз језик геометрије и језиком очигледности. Иако овај текст нема такву симболику и општост, која је карактеристичан за алгебру, ипак једноставним језиком објашњава одређену врсту генерализације. Запис облика $(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$ не би био разумљив математичарима античког времена, иако изражава својство које је њима било познато. Управо развој алгебарске мисли био је условљен потребом за њеним поједностављивањем, а самим тим и повећањем апстракције.

Математика, а нарочито алгебра, у историјском развоју доживела је значајне промене, које се могу окарактерисати већом уопштеношћу и већим степеном симболизације. Савремену математику одликује већи степен апстрактности, тако да се природно јавља потреба за другачијим приступом у настави, како би се математичка знања приближила ученику. Дакле, потребно је створити такве околности за учење алгебарског садржаја, које ће омогућити њихово потпуно и несметано усвајање. Због тога су за математичку заједницу и оне који се баве математичким образовањем значајна истраживања и анализе различитих приступа математичким садржајима, којима се подстиче развој дечијег мишљења и способности. Само ако знамо начин на који ученик размишља о односима, закључује и изводи правила, можемо на прави начин обликовати наставни процес и омогућити да буде ефикасан за развој сваког од њих.

Може се поставити питање *На који начин развој алгебре и алгебарских идеја може утицати на савремену наставу алгебре данас?* У дискурсу назначеног, истраживачи Катс и Бартон (Katz & Barton, 2007) посебно издвајају следеће питања и своја размишљања о њима:

- *Како повезати наставу алгебре са садржајима геометрије?* Према ауторима, то се може учинити коришћењем конкретних геометријских облика, који могу послужити као основа за разматрање алгебарских садржаја. На пример, површина правоугаоника и однос дужина његових страница, као основа за генерализације идеје комутативности множења. Затим, збир дужина две дужи – као пример комутативности сабирања; дистрибутивност као промена једне од величине у одређивању површине правоугаоника и друго.
- *Да ли се усвајање алгебарских садржаја може усмерити на решавање проблема коришћењем једначина?* Управо, ученици у усвајању једначина све алгебарске манипулације схватају као алате за решавање једначина. Тако се наглашава потреба о идеји превођења проблема „стварног живота" у алгебру.
- Пошто је идеја функције најапстрактнија, поставља се питање да ли је могуће ову идеју развијати раније у млађим разредима основне школе? Према мишљењу аутора, уколико се деци понуди велики број примера, кроз наставу геометрије, цртањем и разумевањем графикона, овај пут каснијег потпуног разумевања функције биће олакшан (Katz & Barton, 2007: 197).

Шездесетих година двадесетог века у свету се појавио покрет под називом *Нова школа*, који је посебно утицао на наставу алгебре, кроз идеју да се савремена математичка сазнања из алгебре уврсте у средњошколску, а касније и основношколску математику. На бази тих идеја, садржаји о скуповима и пресликавању, а касније и садржаји о једначинама и неједначинама пронаћи ће своје место у настави математике у млађим разредима основне школе. „Оријентација на структуру и број, која је посебно изражена иницијативама *Нове школе* утицао је на сажимање математичких објеката и процеса, који треба да буду део искуства деце млађег школског узраста" (Katz & Barton, 2007: 200).

Када се говори о алгебри и алгебарским садржајима, они се често виде у оном облику у ком их је прихватила математичка заједница. Проблем настаје у оном тренутку када садржаји математике нису дати у облику алгебарске нотације, односно не постоји алгебарски запис, јер су садржаји алгебре, често уткани у многе друге садржаје.

Проблем укључивања садржаја алгебре у програме наставе математике за млађе разреде основне школе произилазио је из високог степена апстракције ових садржаја, са једне стране, и когнитивних ограничења карактеристичних за узраст деце и њихових способности за усвајања алгебарских садржаја, са друге стране. Идеја није да се ови садржаји само уврсте у наставне планове и програме, већ и да се пронађу начини како да те садржаје ученици усвоје, сходно ограничењима која имају на плану симболичког мишљења и представљања. Управо из тог разлога, све више истраживача и теоретичара, почиње да се бави проблемом методичког обликовања алгебарских садржаја у складу са когнитивним могућностима деце (Зељић, 2014). Тиме се стварају и почетне идеје о укључивању садржаја алгебре у наставне програме математике за млађе разреде основне школе.

Већ током 6. конгреса ICME, који је одржан у Аделаиди 1984. године било је речи о алгебри, при чему су се појавили предлози за увођење релацијских активности генерализације и моделовања у основној школи. Нови поглед на наставу алгебре у млађим разредима основне школе, који ће представљати подстрек за развој и конституисање ране алгебре, настаће под утицајем закључака донетих на 7. конгресу ICME у Квебеку 1992. године, где је истакнут захтев за формирањем нове области у алгебри која ће се називати *пре-алгебра (рана алгебра)*. Основни циљ ове области математике био је формирање и развој алгебарских *претпојмова* код ученика (Зељић, 2014). Значење речи *пре-алгебра* и *претпојмови* у овом смислу односе се на формирање базе основних знања из области алгебре, која ће омогућити касније потпуно и целовито разумевање сложенијих алгебарских структура. У првом плану се истиче значај наставе аритметике (преалгебре) која је усмерена на развој *претпојмова.* Ови претпојмови значајни су за алгебру, „јер представљају аритметичке појмове структуралног типа, који постављају искуствену и појмовну основу за везу ка апстрактнијим и формалнијим алгебарским појмовима“ (Cusi at. al., 2011: 487). На сличан начин и Катс (2007), када користи израз рана алгебра, подразумева такав „приступ у образовању ученика, који негује навике и способности ума, које се фокусирају на дубље и темељније структуре математике“ (Katz, 2007: 2).

Ако се у обзир узме положај алгебре у нашем образовању, можемо рећи да *рана алгебра* подразумева садржаје везане за млађи школски узраст (од првог до четвртог разреда), док се са формалнијим облицима алгебарске мисли и садржаја почиње у старијим разредима основне школе, и наставља преко средњошколске алгебре све до факултета.

Када је реч о учењу алгебре и развијању почетних алгебарских појмова, као и положају алгебарских садржаја у наставним плановима и програмима широм света посебно је значајна 12. ICME научна конференција, која је одржана у Аустралији под називом *Будућност наставе и учења алгебре* на којој је покренуто питање *Шта би требало да буде садржај и централни циљ ране алгебре?* Идеје и иницијативе са ове конференције представљале су прекретницу у развоју ране алгебре. Током година које су уследиле, поље ране алгебре је постало јасније дефинисано, а циљеви усвајања алгебарских садржаја прецизније дефинисани (Kieran, Pang, Schifter & Ng, 2016). Срж истраживања области ране алгебре чини усредсређивање на математичке односе и обрасце, аритметичке структуре са већом пажњом на процесе расуђивања, који су карактеристични за ученике млађег школског узраста. Посебна пажња се поклањала начинима формирања математичких релација кроз процесе уочавања, постављања претпоставки, уопштавања, решавања, представљања и закључивања. Кључне теме везане за област почетне наставе алгебре обухватају садржаје генерализоване аритметике, једначина, неједначина као и развијања основних идеја функција и функционалног мишљења. Нека од савремених стремљења и истраживања у овој области биће детаљније изложена у овом раду.

Почетна алгебра произилази из потребе да се у први план истакне изградња значења алгебарских идеја и појмова код ученика млађег школског узраста кроз активности на садржајима аритметике. Повезаност аритметике и алгебре, према мишљењу Куси и сарадника (Cusi, et al., 2011) заснована је на следећим принципима:

- *Остваривање генерализованих пре-алгебарских активности* у вртићу и млађим разредима основне школе кроз генезу алгебарског језика;
- *Друштвена конструкција знања*, односно заједничка конструкција нових значења, која су договорена на основу заједничког инструмента који је доступан и ученику и учитељу, а где се аритметичка и алгебарска знања формирају кроз скуп појединачних закључака који су основни ресурс на којем се они граде;
- *Централна улога природног језика,* као главног дидактичког посредника, је у формирању семантичких и синтаксичких аспеката алгебарског језика, и стварања основе за тумачење репрезентација изражених алгебарским језиком, што се даље проширује на друге видове репрезентација (иконички, графички и други);
- *Идентификација и стварање експлицитног алгебарског мишљења, „скривеног“ у аритметичким појмовима и репрезентацијама.* На пример, када ученик жели описати једнакост $4 \cdot 2 + 1 = 9$, у почетку то ради речима *Када број 4 помножим бројем 2 и додам број 1 добићу 9*. Касније тај исти проблем изражава речима *Збир производа бројева 4 и 2 и броја 1 је 9*. При томе се говори о математичком језику, који се кроз природни језик не фокусира само на бројеве и процедурално читање, већ и на односе, односно структуру (Cusi, et al., 2011).

На сличан начин, Карпентер и сарадници (2003) сматрају да алгебра на млађем школском узрасту обухвата истраживање особина кроз операције са одређеним бројевима, а затим и генерализацију сазнања, користећи свакодневне или симболичке језичке системе, где се симболизација развија као валидан лингвистички облик изражавања, кроз интеракцију деце са бројевима и операцијама (Carpenter, Franke & Levi, 2003). Према мишљењу Карахера, Шлимана и Шварца (Carraher, Schliemann & Schwartz, 2008), почетну алгебру у великој мери треба заснивати на проблемима контекста, а затим временом постепено уводити формалне нотације, које су чврсто испреплетане са следећим темама из раног математичког програма. Своје идеје аутор излаже кроз навођење следећих принципа којих се треба придржавати у настави и учењу:

1) Алгебру на млађем школском узрасту треба изграђивати у позадини контекста проблема, тако да шири проблемски контекст подстиче увођење алгебре у коме ученици користе формално без потребе да "преведу" значење у реални контекст;
2) Формалну нотацију у настави алгебре уводити постепено, као би се избегла прерана формализација, јер ученици неће сами откривати алгебру без одређених смерница, и мало је вероватно да ће изразити потребу за записивањем алгебарских нотација;
3) Алгебра на млађем школском узрасту је чврсто повезана са другим садржајима почетне наставе математике, тако да нема оправданих разлога за додавање садржаја алгебре постојећим наставним програмима, јер се они већ налазе у оквиру садржаја сабирања, одузимања, множења, дељења, мерења и у репрезентативним системима (бројеви, линије и графикони, табеле, писмена аритметичка нотација и објашњење структура) (Carraher et al., 2008: 236 − 237).

Са друге стране, када је реч о схватању алгебре као посебног дела математике, који треба да чини део курикулума математике за млађи школски узраст, Капут и

Блантон (2000) сматрају да је ове садржаје потребно организовати око пет међусобно повезаних тема:

1. Алгебра као генерализација и формализација образаца и ограничења, посебно, али не искључиво и алгебра као генерализовано аритметичко и квантитативно расуђивање;
2. Алгебра као синтактички вођена манипулација симболима;
3. Алгебра као проучавање структура и система апстрахованих из рачунања и веза;
4. Алгебра као проучавање функција, односа и заједничких променљивих;
5. Алгебра као моделовање и језик за контролу феномена (Kaput & Blanton, 2000: 6−7).

Видимо да Капут и Блантон (Kaput & Blanton, 2000) у први план истичу аритметику и њену повезаност са алгебром, кроз односе и зависност рачунских операција и бројева. Поред тога, они сматрају да се настава алгебре може организовати као вођена манипулација симболима, у смислу коришћења симбола и знакова као ознака и у аритметичком искуству, како би се касније створила основа за формалнији приступ словима, као ознакама за непознату или променљиву.

По мишљењу Линчевског и Ливнеа (Linchevski & Livneh, 1999) развијање алгебарске структуре представља једну од основних одлика алгебарске мисли. Када је реч о алгебарским структурама, Линчевски (Linchevski, 1995) сматра да се она може развијати кроз нумеричке активности. По његовом мишљењу, ове активности треба да обухвате:

1) редослед рачунских операција кроз вежбе које ученицима пружају могућност да уоче различита решења и открију правила за редослед извођења рачунских операција;
2) употреба заграда у аритметичким изразима има статичну димензију и односи се на сигнал који изражава „уради прво“, док се у преалгебри њено значење мења и има динамичнији карактер;
3) одвајање у извођењу операција које укључује способност издвајања делова израза и манипулације њима пре поновног враћања у израз (Linchevski, 1995: 116 – 117).

Линчевски и Ливнех (Linchevski & Livneh, 1999) посебно истичу повезивање развоја аритметичких структура са развојем *структура* у алгебри. Развој структуралног мишљења подразумева фокусирање на односе, а не на процедуре. Дакле у првом плану је однос између елемената и објеката, а не инструменталног извођења операција и алгоритама решавања задатка. Према мишљењу Киерана (Kieran, 2018), појам структуре је један од централних појмова у математици, али такође сматра да постоји велики број различитих гледишта о структури, па се често третира као неодређен појам. Киеран сматра да је алгебарска структура уско повезана са појмом генерализације, тако да генерализација подразумева идентификацију структура, док обрнуто структуре укључују идентификацију општости. Значајан захтев у развоју преалгебарских способности је развој и функционалног мишљења, појма функције, као и развијање алгебарских способности, о чему ће касније у раду бити речи.

У многобројним радовима и истраживањима издвојиле су се различите концептуализације о настави алгебре у млађим разредима основне школе. Тако Кастро-Гордило и Годино (2014) дају смернице, које могу представљати полазиште у настави алгебре у основној школи: проширивање појма броја и геометријских образаца; формулисање вербалних правила за постепено проширивање образаца; замена бројева формулама, потврђивање помоћу калкулатора и формулисање вербалних правила за функционалне односе или објашњења општих резултата или правила (Castro-Gordillo & Godino, 2014: 148).

На сличан начин и Усискин (Usiskin, 1988) види концепцију алгебре у настави и излаже је у виду следећих ставова:

1) *Алгебра као генерализована аритметика* – до алгебре се долази преко односа између бројева, где променљиве представљају генерализоване законитости између њих (на пример, на основу једнакости међу бројевима: 2 + 3 = 5, 3 + 2 = 5; 5 + 7 = 12, 7 + 5 = 12 долазимо до генерализације који изражавамо алгебарски $a + b = b + a$).
2) *Алгебра као учење о процедурама за решавање одређених врста проблема* – учење алгебре започиње конкретном формулом у којој се од ученика захтева потпуна пажња и усредсређеност на непознату, која је често и константа. Решавање задатака се своди на решавање поједностављивањем и применом поступака карактеристичних за одређени тип једначине.
3) *Алгебра као проучавајући однос између величина* – алгебра се учи кроз алгебарске изразе, којима се објашњавају везе које постоје између компонената у изразима, и прати како промене одређене величине утичу на равнотежу која постоји у односима између компонената. Променљиве нису константе, већ опште променљиве – параметри, који могу имати различите вредности и могу бити изражене кроз формуле, таблице, графиконе и друго.
4) *Алгебра као проучавање структура* – учење алгебре се схвата превише формално, подразумева употребу теорема док је закључивање дедуктивног карактера. Варијабле се схватају искључиво као објекти о којима се просуђује и којима се манипулише. Овом концепцијом су обухваћена знања карактеристична за напредну алгебру, као што су: групе, прстенови, поља и векторски простори. (Usiskin, 1988: 9 – 12)

За млађи школски узраст посебно су значајне прве три концепције којима се изражава однос између бројева, разумевање идеје непознате и идеје формуле као алгебарског записа, као и схватање променљиве и њено изражавање на различите начине. Прве три концепције изражавају основу математичког и алгебарског мишљења, као и процесе који произилазе из специфичности садржаја ране алгебре и значаја који променљива у том процесу има.

Као што се може приметити у великом броју истраживања која се баве алгебром и алгебарским начином размишљања, указује се на неке особине и облике мишљења који су доминантни. Тешко је указати на математичку активност која не укључује апстракцију, генерализацију и формализацију. Управо те карактеристике мишљења га и чине математичким. Особине које су посебно карактеристичне за алгебарски начин размишљања обухватају проучавање функција на јасним и очигледним примерима, као и разумевање варијабли и коришћење специфичног симболичког језика алгебре.

Свако од наведених гледишта изражава специфичности алгебре а самим тим и специфичности методичког приступа овим садржајима на млађем школском узрасту. Чињеница је да се нека од важних питања алгебре могу искристалисати развијањем алгебарског мишљења ученика, које не подразумева само манипулисање алгебарским објектима, већ и изградњу специфичног начина размишљања, чиме се мења поглед на математику у целини. Стога се алгебра не сме схватити искључиво као генерализована аритметика, јер је она суштински много више од тога. У том смислу алгебра постаје средство за решавање проблема, анализирање, описивање и уопштавање односа.

Овде се намеће питање *Како да учитељи већу пажњу посвете алгебарским садржајима?* На ово питање је релативно тешко дати одговор, пре свега што је наставни план и програм испуњен, а да би се додало још тема и садржаја неке морају бити или одбачене или им мора бити поклоњена мања пажња. Елиминисање постојећих садржаја или смањивање њихове дубине, на рачун алгебарских садржаја, није добро. Да би алгебра имала корисно место у наставном програму математике за млађе разреде основне школе, треба да се постигне значајан напредак по питањима могућности (*Могу ли мала деца да уче алгебру?),* пожељности (*Да ли је добро да деца овог узраста науче алгебарске садржаје?*) и имплементације (*Како се садржаји алгебре могу методички приближити ученику?*).

Оно што је сигурно јесте да се садржаји алгебре не морају нужно додавати у постојеће планове и програме. Оно што се може искористити јесте, да се већ постојеће теме могу проширивати и продубљивати наглашавањем генерализација и симболизација, чиме се директно упућује на развој алгебарских способности и усвајање алгебарских садржаја. Оваквим приступом настави математике може се избећи често навођен проблем, којим се садржаји изучавају превише широко, али не и превише дубоко. Значи, повезивањем садржаја математике и инсистирањем на способностима у првом плану, утичемо на дубину схватања математике и њених законитости, као и повезивања математичког и свакодневног искуства ученика.

С обзиром на све претходно наведено, као и на чињеницу да свет постаје све више математизован, алгебра ипак постаје кључно подручје у учењу математике. Важност укључивања садржај алгебре у програме наставе и учења математике за млађе разреде основне школе, Блантон и сарадници виде у следећем: 1) алгебра се односи на пет неопходних компетенција математичког знања на млађем узрасту; 2) омогућава деци да разумеју сложеније математичке појмове, али и припрема их за касније усвајање сложених алгебарских појмова у вишим нивоима математичког образовања; и 3) доприноси бољем разумевању математичких идеја које омогућавају да већи број ученика разуме математичке идеје, а самим тим, и развије осећај успеха (Blanton, Schifter, Inge, Lofgren, Willis, Davis & Confrey, 2007: 8).

2.2. Садржаји алгебре у програму наставе и учења математике у млађим разредима основне школе

Питање заснивања и концепирања програма наставе математике представља једно од најважнијих питања математичког образовања на сваком нивоу образовања. Када је у питању почетно математичко образовање питање је још сложеније. Његово решавање одређује велики број елемената, од којих је највећи део везан за ученика, његове когнитивне могућности за учење. Са друге стране, увек се у разматрањима садржаја мора имати у виду континуитет и поступност у учењу. Садржаји који изазивају највише полемике и размишљања у конципирању програма наставе и учења у млађим разредима основне школе су садржаји алгебре.

У методици наставе математике постоје различити приступи интегрисања алгебре у програме наставе и учења математике у млађим разредима основне школе. У разматрању овог питања у литератури имамо различите погледе на овај проблем, који се крећу од идеја увођења алгебре као генерализоване аритметике (Mason, 1996;

Usiskin, 1988), затим као репрезентацију количина и решавања једначина (Bodanski, 1991), па све до оних који бране плурализам, из разлога што ниједан приступ не може бити потпун и самосталан узимајући у обзир опсег и сложеност алгебре (Kaput, Blanton, & Moreno, 2008) (према: Carraher et al., 2008). Оно што је заједничко већини гледишта је да мора постојати базични садржај, који ће представљати основу на коју се даљом генерализацијом ослања алгебарски садржај. Дакле, треба направити основу у садржајима који ће омогућити ученику да разуме нове и сложеније садржаје, и при том пронаћи најадекватнији методички приступ, како би се ови садржаји приближили ученику. Оно што не изазива дилему међу истраживачима математичког образовања и свима који се баве овим проблемом је чињеница, да у програмима наставе математике за млађе разреде основне школе треба да буду присутни садржаји из алгебре, који ће омогућити касније формално проучавање алгебре у старијим разредима (NCTM 2000; Carpenter et al. 2003; Kaput 1999).

Свеобухватну анализу курикулума математичког образовања са становишта заступљености алгебре у њима реализовао је Каи и сарадници (Cai, Lew, Morris, Moyer, Ng & Schmittau, 2005) кроз анализу програма математике у Кини, Јужној Кореји, Сингапуру и одабраним руским и америчким наставним програмима математике за млађе разреде основне школе. Како би извршили анализу курикулума са аспекта заступљености алгебарских садржаја у њима, аутори су се руководили *Принципима и стандардима за школску математику* (NCTM: 2000), при чему су пажњу обратили на следећа четири елемента која се односе на алгебру: 1) разумевање образаца, односа и функција; 2) представљање и анализа математичких ситуација и структура које користе алгебарске симболе; 3) коришћење математичких модела за представљање и разумевање квантитативних односа; 4) анализа промена у различитим контекстима.

На основу анализе курикулума (Табела 2) Каи и сарадници (Cai et al., 2005) закључили су да у курикулумима источно-азијских земаља (Кина, Сингапур, Јужна Кореја) доминира схватање образаца, коришћење алгебарске симболике и коришћење математичких модела у решавању задатака алгебре, док је у њима потпуно изостављено анализирање промена. За разлику од курикулума у овим земљама курикулум математике у Русији одликује заступљеност коришћења алгебарске симболике и математичких модела, као и анализирање промена, док је потпуно изостало схватање образаца, као одлике алгебарских садржаја. За разлику од свих анализираних курикулума, у курикулуму у САД потпуно изостаје коришћење алгебарске симболике у представљању и анализирању математичких ситуација.

Табела 2. *Карактеристике алгебре у пет наставних програма* (Cai et al., 2005: 10)

	Кина	Русија	Сингапур	Јужна Кореја	САД
Схватање образаца	+		+	+	+
Коришћење алгебарске симболике	+	+	+	+	
Коришћење математичких модела	+	+	+	+	+
Анализирање промена		+			+

Анализом курикулума Каи и сарадници (2005) дошли су до закључка да је у курикулуму математике у Кини акценат на исказивању квантитативних односа из различитих перспектива. Наиме, ученицима се пружају могућности за представљање квантитативних односа како аритметички тако и алгебарски, затим се од ученика очекује да упореде аритметичке и алгебарске начине представљајући те квантитативне односе. У кинеском и јужнокорејском наставном програму користи се формална алгебарска симболика. Анализом руског курикулума аутори су дошли до закључка да овај курикулум фокусиран на анализу квантитативних односа као полазну тачку у развоју алгебарске мисли. Наглашен је развој алгебарске мисли кроз директан рад са количинама, као и репрезентативног моделовања математичких односа и активности. Садржаји почетне алгебре се обрађују пре аритметичких, чиме се постиже да деца почињу рано да користе слова, којима се изражавају односи између количина, са постепеним преласком на једначине и неједначине. Руски наставни програм користи писане симболе који означавају резултате истраживања величина, као што су дужина, површина, запремина и маса, који су проистекли из аутентичних контекстуализованих проблема. У курикулуму математике у Јужној Кореји се конкретне оперативне активности користе за смањење когнитивног јаза између аритметике и алгебре. Симболичко представљање у облику празног места се уводи као ознака за непознату вредност, при чему се решавање ових задатака своди на интуитивно закључивање о вредностима непознате. У овом наставном плану се већ од првог разреда уводе различите стратегије и модели у решавању математичког проблема, као што су израда таблица или инверзно обављање рачунских операција. Користе се различити облици моделовања, при чему се ученици користе геометријским моделима и дијаграмима за решавање алгебарских задатака (Cai et al., 2005).

У сингапурском наставном плану и програму пружају се велике могућности за генерализације кроз активности са бројевима. Једначине се не уводе симболички, већ у облику слика које имају функцију модела у процесу моделовања. Појам непозната се уводи кроз коришћење правоугаоника, а не кроз употребу апстрактних симбола и слова. Такав начин представљања се користи како би се изразили квантитативни односи, при чему они не представљају само алат за решавање задатака, већ представљају средство за развој алгебарских појмова (Cai et al., 2005). Руски приступ у наставном програму не учи децу да решавају једначине помоћу размишљања о „извођењу и поништавању“ нумеричких операција, већ директним упоређивањем односа између количина. То се прилично разликује од сингапурског приступа развијању алгебарског мишљења у раним разредима, где су односи део−целина такође укључени, при чему се извођење и поништавање операција сматра централним (Ng, 2004).

Налази до којих су дошли Каи и сарадници (Cai et al., 2005), анализирајући курикулум математике у САД, показују да је у њима кључно анализирање промена у различитим контекстима, и то из неформалне перспективе. План и програм се гради на интуицији коју деца изражавају у раном добу и тај процес постепено тече ка симболичком, односно формалном. У трећем и четвртом разреду основне школе ученици развијају сопствене стратегије за решавање једначина, што значи да се у наставном плану и програму не упућује на формалне начине решавања. Симболичке репрезентације се одлажу све до тренутка када ученици не буду имали довољно искуства кроз неформалне репрезентације, које су самостално развили (Cai et al., 2005).

Поред карактеристика ране алгебре у наведеним земљама, навешћемо и неке од резултата студије коју су спровели Хеми и сарадници (Hemmi, Lepik, Madej, Bråting & Smedlund, 2019) са циљем да истражи специфичности карактеристика ране алгебре у три суседне земље Скандинавије (Шведске, Финске и Естоније). Специфичности су истражене на основу анализе уџбеника и приступа настави ране алгебре у њима. Налази су посебно значајни из разлога што су ученици из ових земаља у међународним тестирањима (ТИМСС и ПИСА) постизали одличне резултате. Анализа уџбеника математике у погледу анализе заступљености садржаја алгебре за нас је релевантна, јер је уџбеник извор за учење и мора садржати све елементе које предвиђа курикулум. Поменута анализа показује да сви програми наведених држава у својим програмима имају садржаје из алгебре, али да се у извесном смислу разликују у неким елементима у приступу учењу као и сврси и циљу учења.

Хеми и сарадници су дошли до запажања да је у уџбеницима математике у Естонији карактеристично да се једначине посматрају као објекти којима се манипулише, и да се у другом разреду основне школе оне описују као односи између различитих количина, које произилазе из контекстуалних ситуација (Hemmi et al., 2019). Захтеви који се постављају пред ученике подразумевају шематско приказивање квантитативних односа исказаних кроз текстуалне проблеме и записивање израза, који изражавају те односе, што омогућава да се исти апстрактни однос приказује у различитим контекстима. Насупрот томе у уџбеницима у Финској се инсистира да ученици састављају текстуалне задатке на основу датих израза. Када је реч о односу према појмовима једнакости и неједнакости, оне се уводе од почетка као ознаке еквиваленције и неједнакости два израза (укључујући и изразе са словима) и вежбају у облику формалних знакова (=, <, >).

Анализом уџбеника у Финској Хеми и сарадници (2019) дошли су до закључка да се у решавању неформалних једначина користи својство везе која постоји између сабирања и одузимања, као супротних рачунских операција. На исти начин се једначине са множењем и дељењем уводе у уџбеницима за други разред. Посебност финских уџбеника је што се користе вежбе у неформалним облицима једначина, тако да се рано почиње са увођењем, чак и решавање система једначина. Трећу групу анализираних уџбеника чинили су уџбеници математике из Шведске. У уџбеницима математике у Шведској нагласак је на отвореним бројевним изразима. Инверзни изрази се јављају у контексту блокова бројева, док је веза између сабирања и одузимања у садржајима једва приметна. У решавању једначина се не користе експлицитне везе којима би се наглашавала примена везе супротних рачунских операција. Значење знака једнакости наглашено је у уџбеницима, у којима деца треба да запишу знак једнакости између различитих израза или у потпуно отвореним математичким изразима са држачима места. Естонски и део финских уџбеника користе обрнута својства рачунских операција у решавању неформалних једначина, што је слично са упутствима која постоје у кинеским и сингапурским курикулумима. Један део финских и шведских уџбеника не користе експлицитно својство супротних рачунских операција у решавању једначина, већ користе једнакости са бројем који недостаје. Овакав приступ је повезан са специфичним приступом у развијању значења знака једнакости (Hemmi et al., 2019).

У свим уџбеницима се очекује да ученици пишу изразе засноване на проблемима стварног света, док се само у Естонским очекује да користе словне ознаке за означавање непознате или променљиве (слично као у руском курикулуму). Са друге стране, шведски и фински уџбеници теже ка томе да ученици решавају проблеме реалног контекста писањем или цртањем, односно коришћењем сопствених модела. Овакав приступ је сличан препорукама у америчком курикулуму, који захтева од ученика да у процесу решавања задатака конструишу сопствене стратегије помоћу различитих алата (Hemmi et al., 2019).

С обзиром на чињеницу да последњих година холандски курикулум математичког образовања има бројне новине, које се пре свега односе на праксу математичког образовања, која је заснована на реалном математичком образовању, за нас је релевантно да сагледамо у којој мери су садржаји алгебре инкорпорирани у овај програм. Истраживања Кригера показују да основна карактеристика холандског плана и програма наставе математике јесте формалнији приступ структури, са нагласком на генерално разумевање и моделовање *реалистичних проблема* (Krüger, 2015). У програму, посебна пажња се посвећује упоређивању количина, кроз задатке реалног контекста. Суштина је да се развију стратегије резоновања помоћу којих се може лако манипулисати са непознатим и на тај начин омогући одређивање њихове вредности. Дакле, непознате се разумеју као конкретни предмети чија је количина непозната. Алгебра, њена структура и симболи, „није циљ сама по себи. Алгебра је алат за решавање проблема. Проблеми који произлазе из стварног света, често су представљени у контекстима" (Van der Kooij, 2001: 140).

Чињеница је да су аритметички садржаји ближи ученику, његовом начину размишљања и његовим способностима. Ученик на овом узрасту разуме скуп, бројност скупа (број), лако овладава рачунским операцијама, уочава битне и суштинске карактеристике математичких појмова и односа између њих док је искуство са бројевима и њиховим својствима темељ за каснији рад са симболима и алгебарским изразима (Kieran, 2004: 143). То значи да је природни пут ка развоју алгебарских идеја управо у добро формираној основи аритметике. Вештачко одвајање аритметике и алгебре лишава ученике моћне шеме за развој математичког мишљења, у раним разредима, и отежава пут учења алгебре у каснијим разредима (Carpenter & Levi, 2000: 2).

Први сусрет ученика са математиком, па чак и изван наставе је у њиховом сусрету са бројевима и потреби да се одреди бројност неког скупа. Аритметика тако постаје основа на којој ученици природно граде знања из алгебре, јер је она најближа и најконкретнија област математике. Отуда произилази и потреба ученика за очигледношћу, која је блиска његовим когнитивним карактеристикама. У складу са тим, Катс (Katz, 2007) и Сфард (Sfard, 1995) указали су на потребу за пажљивијом изградњом алгебарског мишљења кроз фазе и концепције откривене у историјском развоју. Они сматрају да ће ученици усвојити симболичку алгебру најлакше, ако прате природан историјски развој од речи, бројева, као и очигледних представа у геометрији, на крају до симбола, који ће представљати основу каснијој апстрактној алгебри.

Иако је одређивање вредности непознате у једначинама са једном променљивом прилично доминантно у наставним програмима математике за млађе разреде основне школе Блантон и Капут (Blanton & Kaput, 2004) тврде, да уколико програми основних школа имају циљ промовисање алгебарског мишљења и резоновања онда у њих треба укључити и функционално мишљење. Алгебарско размишљање не треба посматрати искључиво као садржај или нову тему или област која је додата онима које су већ у наставном плану, већ као средство за „чврсто преплитање постојећих тема ране математике" како би се обезбедиле основе за касније учење и обезбедио улазак у будући симболички свет алгебре (Carraher et al., 2008).

Садржаји алгебре који се изучавају у млађим разредима основне школе, у нашој земљи, могу се сврстати у четири области: једначине, неједначине, развијање идеје функције и низа. На основу *Плана и програма наставе и учења за млађе разреде основне школе* у Табели 3 приказали смо садржаје и исходе који се односе на алгебру. Видимо да програм наставе и учења математике за прва четири разреда основне школе у Србији предвиђа увођење садржаја алгебре почев од првог разреда основне школе. За разлику од осталих разреда *Правилник о програму наставе и учења за први разред основног образовања и васпитања* (2017) предвиђа да се непознати број означава у облику „држача места", како би се избегло коришћење симболичке нотације, а са друге стране како би ученици стекли прве представе о појму једнакости и еквивалентности две стране једнакости. Решавање задатака са непознатим бројем се у садржајима првог разреда ослања искључиво на погађање броја који је непознат, на основу ранијег искуства ученика, упоредо са извођењем рачунских операција у блоку бројева до 100. На основу тога можемо закључити да је програм наставе и учења за први разред основне школе оријентисан на формирање базичних алгебарских знања (претпојмова), који ће касније послужити за постепено увођење симболичке нотације и апстрактнијих алгебарских појмова.

Табела 3. *Исходи и садржаји алгебре у програмима наставе и учења за млађе разреде основне школе*

Разред	Исходи Ученик ће бити у стању да:	Садржаји програма
Први разред	– уочи правило и одреди следећи члан започетог низа; – прочита и користи податке са једноставнијег стубичног и сликовног дијаграма или табеле;	Откривање непознатог броја у једнакостима с једном рачунском операцијом.
Други разред	– одреди непознати број у једначини са једном аритметичком операцијом;	Слово као ознака за непознати број. Једначине са једном рачунском операцијом (сабирање, одузимање, множење, дељење).
Трећи разред	– реши једначине и неједначине и провери тачност решења; – реши једначину са једном рачунском операцијом; – одреди и запише скуп решења неједначине са сабирањем и одузимањем; – реши проблемски задатак користећи бројевни израз или једначину;	Функционална зависност резултата рачунских операција од промене компонената. Једначине облика: $a + x = b$, $a - x = b$, $x - a = b$, $a \cdot x = b$. Изрази са променљивом. Неједначине облика: $a \pm x < b$, $a \pm x > b$, $x - a < b$, $x - a > b$.
Четврти разред	– реши једначине и неједначине и провери тачност решења; – реши проблемски задатак користећи бројевни израз, једначину или неједначину; – чита, користи и представља податке у табелама или графичким дијаграмима; – – формира низ на основу упутства.	Функционална зависност резултата рачунских операција од промене компонената. Једначине са једном и више рачунских операција у скупу N_0. Неједначине са сабирањем, одузимањем, множењем или дељењем у скупу N_0.

Правилник о програму наставе и учења за други разред основног образовања и васпитања (2018) у Србији предвиђа увођење појма непозната, и симболичко означавање непознатог броја, као и развијање појма *једначина*. Решавање једначина засновано је на уочавању везе и зависности која постоји између супротних рачунских операција, као и добром познавању таблица сабирања, одузимања, множења и дељења. Можемо закључити да се тек од другог разреда основне школе почиње са постепеним преласком на развијање апстрактнијих појмова алгебре.

Правилник о наставном програму за трећи разред основног образовања и васпитања (2019) предвиђа да се поред једначина, уводе појмови променљиве и неједначине. Поред тога, у овом разреду се тежи усвајању садржаја о зависности резултата од промене компонената рачунских операција, што ће чинити основу за одређивање решења неједначине, односно могућих вредности променљиве. Символички запис аритметичких правила се не уводи у трећем разреду. Решавање неједначина своди се на решавање еквивалентних једначина, при чему се скуп решења одређује на основу зависности резултата од промене компонената рачунских операција или посматрања резултата израза са променљивом представљених табеларно. У *Програму наставе и учења за трећи разред основне школе* наглашена је употреба реалистичних проблемских ситуација и коришћења математичког моделовања у процесу решавања задатка. Посебно се истиче потреба за решавањем задатака у форми табеле, слике или графикона, чиме се ученик доводи у ситуацију за уочавање битних и небитних, као и познатих и непознатих величина и представљање њихових односа у облику израза, једначина или неједначина.

Правилник о наставном програму за четврти разред основног образовања и васпитања (2019) предвиђа да се ученици оспособе да поред простих решавају и сложене једначине, да даље увежбавају решавања простих неједначина са сабирањем и одузимањем, да се оспособе да решавају неједначине са множењем и дељењем, као и да одређују вредност израза са променљивом у скупу N_0. Поред ових садржаја у курикулуму за четврти разред се истиче и потреба за развијањем математичког и логичког мишљења, кроз садржаје који ће омогућити припрему ученика за развијање појма функције у наредним разредима, па се тако посебно истичу задаци са одређивањем непознатог члана у низу; описивања правила на основу започетог низа; формирања низа на основу задатог правила, као и осмишљавања правила за нови низ. Симболичке нотације у програму четвртог разреда присутне су у свим садржајима програма. Све законитости, правила и закључци у области аритметике, који се односе на рачунске операције, изражавају се симболички, што је велики искорак у односу на садржаје трећег разреда.

На основу анализе програма математике могу се уочити сличности програма наставе и учења математике у републици Србији, са програмима математике у Русији, Јужној Кореји и Сингапуру у којима се такође почиње раније са изучавањем формалнијих облика алгебарских садржаја.

У складу са програмом наставе и учења математике за млађи школски узраст утврђени су О*пшти стандарди постигнућа - образовни стандарди за крај првог циклуса обавезног образовања* (2011) који представљају основу за планирање, припремање и избор садржаја у почетној настави математике. Исходи наставе математике за крај првог циклуса основног образовања за садржаје алгебре наведени су у оквиру области *Природни бројеви и операције са њима* и одређени су на три нивоа когнитивних захтева:

„Основни ниво:

1МА.1.1.5. уме да решава једноставне једначине у оквиру прве хиљаде

Средњи ниво:

1МА.2.1.5. уме да решава једначине

Напредни ниво:

1МА.3.1.5. уме да одреди решења неједначине са једном операцијом“ (*Општи стандарди постигнућа – образовни стандарди за крај првог циклуса обавезног образовања – Математика*, 2011: 1–3).

Ако се у обзир узму овако конципирани образовни стандарди за подручје алгебре, може се уочити неколико карактеристика. Образовни стандарди за подручје алгебре конципирани су прилично неодређено и широко, посебно ако се у обзир узме образовни стандард за средњи ниво постигнућа, у ком се наводи да је довољно да ученик овлада способношћу решавања једначине, без посебног осврта на врсту или начин решавања исте. Са друге стране, за садржаје о једначинама не постоји образовни стандард постигнућа на напредном нивоу. Насупрот томе, образовни стандарди нису дефинисани за садржаје о неједначинама ни у једном нивоу осим напредном, што би значило да би за напредни ниво постигнућа ученицима било довољно да умеју да одреде решења неједначине са једном операцијом, такође без осврта на поступак решавања. Ако се у обзир узму целокупни садржаји алгебре са којима се ученик може срести у садржајима математике (функционалне зависности, низ) можемо закључити да они нису пронашли своје место у *Образовним стандардима постигнућа из математике за први циклус основног образовања и васпитања*. На основу свега претходно реченог могли бисмо изнети запажање, да промена програма из математике за млађе разреде основне школе мора подразумевати промене у *Образовним стандардима постигнућа*, па би се то могло навести као један од значајних захтева за побољшање математичког образовања. Мањак простора за алгебарске садржаје и непрецизности по питању образовних стандарда који се односе на ову област, у најновијим програмима наставе и учења математике, могли би ограничити улогу и значај алгебре, који она има у оквиру математике као наставног предмета. Из тог разлога би посебну пажњу требало посветити јачању алгебарских појмова и потражити све начине, како би у процесу наставе математике алгебарско мишљење могли развијати кроз везу свих садржаја математике.

2.3. Од аритметике до алгебре у настави математике у млађим разредима основне школе

Први сусрет са алгебром је дуго времена био преломни тренутак за већину људи у одлуци да математика није за њих и да они такве математичке идеје не разумеју. Разлог томе крије се у чињеници да је алгебра, као област математике, посебно апстрактна. Апстрактност алгебарских садржаја утиче на страх од математике који се директно рефлектује на општи потенцијал математичког развоја људи, а све се то даље води ка формирању страха од математике код млађих нараштаја. Брандфорд (Brandford, 1908) је приметио да је „радикална грешка алгебарског учења многих генерација у прескакању од посебне аритметике до чисто симболичке алгебре, чиме се изоставља много из наставе генерализоване аритметике... најједноставније врсте значајне за симболичку алгебру" (према Mason, 2008: 58).

Питање методичке трансформације садржаја алгебре у настави математике у млађим разредима основне школе, заокупља пажњу великог броја истраживача. Апстрактност алгебре, неопходност развијености виших нивоа мишљења, закључивања, генерализација и уочавања код ученика имплицира потребу пажљивог промишљања о методичком путу увођења ових садржаја, како би њихово усвајање од стране ученика било што успешније и на највишем нивоу разумевања. Когнитивне способности ученика млађег школског узраста су у погледу логичког закључивања и апстрактности мишљења ограничене, њихов начин размишљања је конкретан, везан за очигледност у настави, прелогички и интуитиван, што захтева пажљиво увођење садржаја алгебре и добру везаност за садржаје који су му блиски. Многи истраживачи

(Carraher, Schliemann i Brizuela, 2000; Kieran, 2004, 2006; Warren, 2005) вођени овом идејом, сматрају да у приступу обради садржаја ране алгебре тај пут треба да води од аритметике, а да раздвајање аритметике и алгебре води до проширивања и продубљивања тешкоћа у усвајању алгебарских садржаја.

На сличан начин размишљају и други истраживачи (Brizuela & Schliemann, 2003; Carraher et al., 1999, 2000), који тврде да је идеја ране алгебре, односно развоја почетних алгебарских појмова, уско повезана са аритметиком, а да са друге стране за дубоко разумевање аритметике, морају постојати одређене математичке генерализације. И Бут (Booth, 1988) истиче везу између аритметике и алгебре, при чему алгебру посматра као *уопштену аритметику.* Све генерализације аритметичких односа, по његовом мишљењу, најпре захтевају да се ти односи и поступци схвате унутар аритметичког контекста и да неразумевање аритметичких појмова не може позитивно утицати на способности ученика у алгебри, односно „тешкоће са којима се ученици сусрећу у алгебри нису само потешкоће у самој алгебри, колико су проблеми у аритметици, која није добро савладана“ (Booth, 1988: 29). Пут развоја алгебарског мишљења налази се на релацији од аритметике ка алгебри, односно „математика се може схватити као хијерархијска структура у којој неки слојеви не могу бити изграђени пре него што неки други не буду завршени“ (Sfard & Linchevski, 1994a: 91).

Према мишљењу Радфорда (Radford, 2011, 2014), ако се у обзир узме веза која постоји између аритметике и алгебре, може се тврдити да постоји нешто што је специфично за аритметику у алгебри и нешто што је својствено алгебри унутар аритметике. Разлике између ове две дисциплине постоје, јер се у многим подручјима не поклапају. Оно на шта Радфорд указује јесте значај проналажења тих разлика. Уколико смо способни да уочимо разлике, онда нећемо доћи у ситуацију да учимо или предајемо аритметику, када мислимо да је то алгебра и обрнуто. У први план се истиче значај промовисања елементарних оквира алгебарске мисли ученика (алгебарског мишљења). Дакле, само ако се јасно одреде разлике и епистемолошке везе које постоје између ових области, могу се на прави начин и организовати активности у учионици које би подстакле развој алгебарских појмова на млађем школском узрасту.

По мишљењу Герхарда (Gerhard, 2011) увођење променљиве сувише рано у рану наставу алгебре није добро. Разлози за овакав став аутора произилазе из низа различитих проблема, које ученици имају у алгебарском мишљењу и схватању слова као варијабли, па је неопходно дуже трајање наставе аритметике у млађим разредима основне школе. Да би „развили алгебарска знања ученици не морају трансформисати конкретно знање у апстрактно формално знање, него треба да буду способни интегрисати конкретне процесе и апстрактне појмове у поступке“ (Gerhard, 2011: 2).

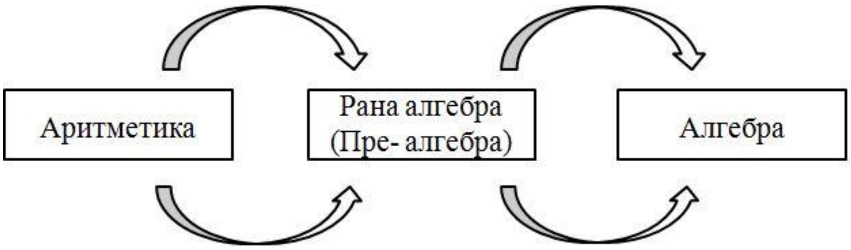
Међусобни однос аритметике и алгебре Шлиман и сарадници (2003) исказују кроз следеће ставове: а) присутне су могућности истраживања алгебарског карактера елементарне математике кроз постојеће наставне планове и програме, али се ретко користе; б) алгебра је и нотациони систем и математичка област која је посвећена проучавању математичких структура; ц) аритметика је део алгебре, али део који се бави бројевним системима, нумеричким функцијама; д) генерализације стоје у срцу алгебарског мишљења; е) аритметичке операције се могу посматрати као функције (Schliemann, Carraher, Brizuela, Earnest, Goodrow, Lara-Roth & Peled, 2003: 128).

Зељић (2014) издваја основне активности које треба испунити у настави аритметике у остваривању везе са раном алгебром: „развијање значења аритметичких операција кроз ослањање на шеме и дијаграме; аритметички изрази се морају третирати као самостални објекти; правилно схватање знака једнакости; правила у аритметици треба да буду заснована на интуицији; разумевање поступака рачунања; иконичко представљање квантитативних односа; уочавање и уопштавање односа променљивих квантитета; решавање задатака кроз сагледавање опште структуре проблема и третирање словних израза као процеса“ (Зељић, 2014: 109−110).

На сличан начин, Киеран (2004) указује да се трансформација од аритметике до алгебре код великог броја ученика одвија са потешкоћама, будући да алгебра од ученика захтева значајна прилагођавања. На основу тога она наводи низ активности које треба да омогуће прелаз од аритметике до алгебре, а самим тим и постепени развој алгебарских способности кроз:

- фокусирање на међусобне везе између бројева, а не само на коришћење тих бројева у израчунавању;
- фокусирање на операције, као и на појмове шта би требало, односно шта не би требало радити;
- фокусирање на разумевање шта је проблем, а не само како га решити;
- фокусирање на бројеве и на симболе (слова), а не само на бројеве како је раније био случај;
- преиспитивање значења знака једнакости (Kieran, 2004:140).

Ван Амером (Van Amerom, 2002) издваја карактеристике и специфичности аритметике и алгебре, и у њиховој повезаности посебно издваја пре-алгебру, чије специфичности одликују наставу и учење алгебарских садржаја на млађем школском узрасту. Средиште оквира у коме се формирају основни алгебарски појмови и развијају основне алгебарске способности, представља период учења који се одвија у оквиру наставе математике у млађим разредима основне школе, а који можемо назвати периодом ране алгебре или пре-алгебре. Суштину односа између ових области можемо представити графички (Слика 5).



Слика 5. *Пут од аритметике до алгебре*

Овакав пут учења од аритметике до алгебре издвајају и други аутори. Тако Филој иРојано прелазак од аритметике до алгебре сматрају значајном тачком у учењу математике и дефинишу је као „дидактички пресек дуж дечије мисаоне еволуционе линије од аритметике до алгебре“ (Filloy & Rojano, 1989: 20). Основни задатак ране алгебре треба да буде формирање темељних знања, која ће подстаћи развој како аритметичке, тако и алгебарске мисли.

Традиционално у програмима наставе и учења математике за млађе разреде основне школе први садржаји са којима се деца сусрећу јесу садржаји аритметике. Алгебарске теме се уводе након аритметичких, у времену када би требало да су ученици већ стекли потребне аритметичке способности и усвојили знања о бројевима и рачунским операцијама. У савременим схватањима односа између алгебре и аритметике, често се алгебра посматра као уопштена (генерализована) аритметика. Генерализације и формализације представљају уопштавање и артикулацију идеја којима се изражавају важне математичке везе које постоје између рачунских операција и компонената рачунских операција. Дакле, алгебру треба посматрати као уопштавање знања која се остварују кроз процес генерализације знања у аритметици. На овај начин се преко аритметичких израза у процесу генерализације изражавају општа математичка својства и односи (на пример: зависност резултата рачунских операција од промене компонената, комутативност сабирања и друго).

Са друге стране, постоје схватања која преиспитују овако схваћен однос између аритметике и алгебре, при чему се истиче да је алгебра више усмерена на питање схватања и разумевања, него коришћења симбола. „Алгебра је основа аритметике, а не само уопштавање аритметике, што имплицира да се сама аритметика мора посматрати *алгебарским очима*" (Subramaniam & Banerjee, 2011: 91). Идеја да алгебра може побољшати схватање аритметике је становиште које своју подршку проналази у историјској традицији индијске математике о којој исти аутори говоре. Алгебра се тако посматра као „алат за истраживање потенцијала овог облика репрезентације, а самим тим и средство за откривање ефикаснијих алгоритама аритметике, као и да истраживања другачијих облика репрезентација сложених проблема" (Subramaniam & Banerjee, 2011: 94). Значај овог становишта у алгебри није само у наглашавању симбола као промењљивих и манипулације њима као објектима, већ и наглашавање разумевања квантитативних односа који постоје између елемената или количина.

Неспособност ученика за спонтано разумевање и коришћење промењљиве или непознате указује на постојање „когнитивног јаза", који се може сматрати као препрека или разграничење између аритметике и алгебре. Неки аутори ово раздвајање називају „когнитивни јаз" (Herscovics & Linchevski, 1994), други „дидактички пресек" (Filloy & Rojano, 1984), док се суштински ради о истом појму. Ова тачка разграничења у великој мери представља проблем за правилно формирање свих алгебарских појмова и решавање алгебарских проблема. Оно чему се тежи у савременој настави алгебре је тежња да тај „јаз" буде премошћен и проблем решен. Алат којим би се то постигло налази се у когнитивним способностима ученика овог узраста, док је задатак методичара да пронађу начин којим би се те способности максимално активирале.

Према мишљењу Сфарда (Sfard, 1991) могу се разликовати два приступа у схватању математичких и алгебарских појмова: *структурално* – као објекти и *оперативно* – као процеси. Посматрање математичког ентитета структурално – као објекта, подразумева да се он види као стварна ствар којом се може манипулисати у целини, не улазећи у детаље. Структурално мислити значи мислити о целини и јединству, без уласка у особине и карактеристике елемената који могу ту целину чинити. Са друге стране, тумачење појма као процеса – оперативно, подразумева сагледавање целине неког математичког ентитета искључиво кроз низ акција и карактеристика, које су специфичне за дати ентитет или неки његов део. Док је структурална концепција статична, тренутна и интегративна, операционална је динамична, дељива и детаљна. Имајући то у виду структурална концепција је апстрактнија, јер се не обазире на детаље, док је оперативна очигледнија и јаснија, а самим тим мање апстрактна.

Значење оперативног разумевања неког математичког појма илуструје пример истраживања Пијажеа (Piaget, 1952). Када дете учи да броји, „постоји фаза када он или она већ могу да праве разлику „један на један" између речи „један", „два", „три",... и објеката у датом облику низа, али без коришћења последње речи за број, која је коришћена у овом процесу као одговор на питање *Колико укупно има објеката?*. Кад год би се детету поставило то питање оно би само поновило поступак бројања. Овај феномен јасно „показује оперативне корене природних бројева: за дете кад год се помиње појам *број* за њега представља процес пребројавања, а не његов апстрактни резултат“ (према Sfard 1991: 11).

Алгебарска репрезентација се може лако интерпретирати на оба начина: оперативно, као сажет опис неког рачуна, или структурално, као сталан однос између две величине. Са аспекта алгебре, обе репрезентације су значајне, јер се њима изражава суштинско својство сваког алгебарског појма. Није довољно само разумети делове неке целине или савладати алгоритам решавања проблема, већ је потребно схватити и законитости које важе за целину посматраног алгебарског појма. Треба нагласити да је оперативни и структурални облик размишљања суштински међусобно повезан и на одређени начин комплементаран. Математички објекат се посматра различито са аспекта ова два становишта, али се њихова употреба своди на међусобно допуњавање. Процес којим се покушава превазићи, односно тежи премостити „когнитивни јаз“ између аритметике и алгебре Сфард (Sfard, 1991) назива *реификација*. Активност кроз коју се симбол одваја од објекта на који се односи и када постане сам објекат над којим се обављају радње представља поступак *реификације*.

Имајући у виду наведене ставове аутора о потреби и неопходности учења садржаја алгебре на темељу садржаја аритметике и наша оријентација у раду и методичком приступу усвајања ових садржаја конципирана је на истим основама. Дакле, учење алгебре у настави математике разматраћемо из перспективе генерализације аритметичких правила и односа који постоје између елемената рачунских операција и количина, али у оквиру реалистичног контекста.

2.4. Разумевање алгебарских појмова – инструментално наспрам релационог

Питање на који начин схватити алгебарске појмове, оперативно или структурално зависи од великог броја елемената. Развој оперативне и структуралне концепције зависе од типа разумевања који постоји између објеката. Постоје различити називи за ове две концепције, које подразумевају различите нивое разумевања појмова, тако да га неки истраживачи називају *концептуално и процедурално* (Rittle-Johnson, 2017; Rittle-Johnson, Schneider & Star, 2015; Hiebert & Lefevre, 1986) или *инструментално и релационо* (Skemp, 1976).

У схватању математике и математичких појмова Фишбајн (1994) описује три компоненте математичких активности: 1) *формална компонента* (појмовно или концептуално разумевање), а обухвата аксиоме, дефиниције, теореме или доказе до којих су дошли, које су ученици научили, организовали, проверили и активно користили; 2) *алгоритамска компонента* (процедурално разумевање) која се састоји од вештина које се користе у решавању задатака у одређеним контекстима и произилазе из алгоритамске праксе; 3) *интуитивна компонента*, која подразумева схватање математике без потребе њеног доказивања, већ само интуитивно (Fischbein, 1994).

Слично гледиште о схватању појмова истичу Ритл-Џонсон и сарадници (Rittle-Johnson et al., 2015) који сматрају да *концептуално знање* представља знање о појмовима, који су апстрактни и општи, односно разумевање математичких појмова, операција и односа. Притом, овакав облик знања може бити имплицитно или експлицитно исказан, а поред тога не мора ни бити вербализован. Ово знање је богато везама. Тако га Хиберт и Лефевре (1986) описују као „повезану мрежу знања, мрежу у којој су односи и везе једнако истакнути као и дискретни делови информација. Односи се прожимају кроз појединачне чињенице и примере тако да су сви заједно повезани у исту мрежу" (Hiebert & Lefevre, 1986: 3-4).

Процедурално знање се дефинише као познавање поступака, као низ корака или радњи које су предузете да би се постигао неки циљ (Rittle-Johnson et al., 2015). Према мишљењу Хиберта и Лефевра (1986) постоје две врсте процедуралних знања. Једна врста овог типа знања је заснована на формалном језику или систему представљања симбола у математици. Друга врста процедуралних знања састоји се од правила или поступака за решавање математичких проблема. Ови поступци представљају везе инструкција којима се манипулише симболима. Такво знање се развија решавањем практичних проблема и стога се везује за посебне типове проблема и подразумева само свест о површинским особинама, али не и знање о значењу симбола или односа (Hiebert & Lefevre, 1986).

За потпун развој математичког мишљења, а посебно алгебарског, поставља се циљ у коме ученици треба да развију и један и други облик знања. Ако се посматра однос између ове две врсте знања, може се посматрати и однос о њиховој зависности и повезаности. Са једне стране посматрано, развој концептуалног знања зависи од примене поступака, кроз процесе апстракције и генерализације. Са друге стране постоји и мишљење да процедурално знање не може водити до концептуалног знања, већ га може само ометати. Треба имати у виду, да математичке способности почивају на развијању и концептуалних и процедуралних знања, а широко је распрострањено мишљење да концептуално знање подржава и води ка процедуралном знању. Како сматра Ритл-Џонсон (Rittle-Johnson, 2017) увид у развој математичког знања се може остварити сагледавањем односа који постоје између концептуалног и процедуралног знања. Према мишљењу истог аутора, математичке компетенције захтевају развој концептуалних знања, процедуралних знања и процедуралне флексибилности. Односи између ових категорија су двосмерни и интерактивни, при чему се на развој процедуралних знања утиче унапређењем концептуалног знања, и обратно.

Процедурална флексибилност представља показатељ дубоког процедуралног знања. Када ученици користе формалне методе за решавање линеарних једначина у алгебри, они на располагању имају ограничен скуп активности (додавање или одузимање истих вредности са обе стране знака једнакости, множење са обе стране знака истим бројем и слично). Дакле, вештине које се могу користити у решавању једначина подразумевају флексибилне приступе, који су ефикасни за решавање различитих типова проблема (Star, 2005).

Аутори Хиберт и Лефевр (Hiebert & Lefevre, 1986) предност дају концептуалном знању у учењу алгебре. Свој став образлажу чињеницом да симболи унапређују математичка знања, односно да формални језик математике представља моћан алат за развијање сложених математичких идеја. Они сматрају, да је концептуално знање корисно за решавање математичких задатака, само када се претвара у одговарајућу форму и да процедуре подстичу развој појмова. Као што нова симболичка нотација продукује или унапређује формирање појмова, тако и нове процедуре могу покренути развој нових појмова.

Упркос чињеници да је концептуално разумевање превише апстрактно, али са друге стране веома важно, оно се може подстицати и развијати. Битно је наћи модел учења који ће то и да омогући и обезбеди постепен прелазак из конкретног у апстрактно. Да би то било оствариво предлажу се различити модели учења засновани на принципима *реалистичког математичког образовања* (Hidayat & Iksan, 2015). Ученици се на овај начин усресређују на контекст проблема у оквиру којег концептуално разумеју алгебарске односе. Задаци реалног контекста омогућују ученицима да користе своја претходна искуства, тако да су у стању да у јединству разумеју нова и претходно научена знања.

Када је реч о алгебри на млађем школском узрасту доминантна је процедурална компонента код стандардних задатака, која се огледа у способности ученика за брзим и тачним извођењем алгоритама у решавању задатака. Овакво решавање задатака често је без разумевања и размишљања како или зашто је примењена одређена метода и задатак решен на одређени начин. Са друге стране, концептуално разумевање подразумева потпуно схватање односа и веза које постоје у задатку. Повезивање концептуалне (појмовне) и процедуралне врсте знања је неопходно како би ученик решио задатак, али и разумео процедуре и односе између елемената у задатку. Само у јединству односа између ове две врсте знања може се утицати на развој алгебарских способности код ученика млађег школског узраста.

Скемп (Skemp, 1976) разликује два нивоа разумевања математичког појма: инструментално и релационо. *Инструментално разумевање* подразумева познавање правила, односно начина како спровести и применити одређени поступак, без нужног разумевања разлога који стоји иза таквог правила. *Релационо разумевање* подразумева сазнање о томе шта се и зашто ради, односно обухвата способност закључивања о посебним правилима и процедурама из општијих математичких односа.

Када је реч о усвајању алгебарских садржаја и развијању функционалног мишљења ученици треба претходно да савладају аритметичке садржаје и овладају рачунањем, као процесом који директно означава аритметику. Процес једноставног израчунавања или извођења било каквог алгоритма, без разумевања дубље суштинске структуре представља процес инструменталног разумевања. Како би ученик разумео аритметичке операције, потребно је да схвати апстрактна својства (унутрашње структуре) аритметичких операција и зависности која међу њима постоји, као и везе ових структура са реалним ситуацијама. Учењем аритметичких садржаја подстиче се развој и коришћење *релационог* размишљања, које може помоћи ученицима да развију дубље разумевање аритметике, на основу кога се заснивају све будуће апстракције у алгебри. Каже се да особа мисли релационо или користи релационо размишљање када „испитује две или више математичких идеја или објеката, алтернативно тражећи везе између њих, и анализира или користи те односе како би решио проблем, донео одлуку или сазнао нешто више о ситуацији или појмовима који су укључени" (Molina, Castro & Ambrose, 2005: 267). Овакав начин размишљања је битан, не само у учењу алгебре, већ и учењу било којег садржаја математике, јер многе математичке идеје укључују односе између различитих представа код бројева и рачунских операција. Релационо размишљање ће помоћи ученику да уочава односе између бројева, рачунских операција, математичких објеката и непознатих, али ће се више фокусирати на односе који постоје између објеката, него на алгоритме рачунања и решавања.

Видимо да оба нивоа знања *концептуално* (*релационо*) и *процедурално* (*инструментално*) имају подједнако важну улогу у процесу учења алгебарских садржаја и уопште учењу математике. *Да ли се може дати предност једном у односу на други?* Одговор на ово питање образложићемо на примерима алгебарских садржаја.

Први садржаји са којима се ученици сусрећу у настави аритметике и који упућују на везу са алгебром су бројевни изрази у којима се могу представити конкретни односи и својства која се могу генерализовати. Узмимо пример неких од задатака којима се може директно упутити на облик релационог размишљања. Једнакост $23 + 5 - 5 = \_\_\_\_$ у којој ученици треба да открију резултат, то прво чине рачунањем, при чему се једноставно извођење операција односи на инструментално разумевање. Дакле, треба тежити да ученици буду у ситуацији да закључују о односима и уочавају генерализације које ће им омогућити да закључују о одређеном својству које постоји између сабирања и одузимања. Након тога, ученици ће бити у стању да уоче и генерализују својство: ако се неком броју дода и одузме исти број, тај број се неће променити. Временом ће ученици доћи у ситуацију да ово својство користе и без рачунања, а касније и као олакшицу у сабирању и одузимању вишецифрених бројева, што упућује на релационо закључивање.

Сличну ситуацију можемо уочити, ако узмемо за пример једнакост облика $56 + 7 = \_\_\_ + 56$. Велики број ученика ће рачунати прво збир са леве стране знака једнакости, а затим одузимати 56 како би открили да број који недостаје јесте број 7. Израчунавањем и упоређивањем вредности леве и десне стране једнакости ученици ће бити у стању да, на основу више примера, закључују о комутативности сабирања. Генерализацијом тог својства из низа примера указује се на карактер релационог мишљења. Ово својство сабирања ће касније користити без рачунања, па га чак изражавати у облику формуле и тако уопштеног га користити, када постану део учениковог знања кроз процесе индукције и генерализације.

Ако се ученицима постави задатак *Када се броју 5 дода троструко вредност неког броја, добиће се број 17. О ком броју је реч*?, ученици који добро владају аритметиком задатак ће решити тако што ће од броја 17 одузети број 5, а затим резултат поделити бројем три. Суштински се овај проблем алгебарском нотацијом може представити у облику једначине: $5 + 3 \cdot x = 17$. Као што видимо, на једном примеру су изражена два начина размишљања: *инструментално* – инверзно обављање рачунских операција (аритметички) и *релацијско* – уочавањем односа између елемената у проблему може се употребити једначина, како би се проблем решио.

Можемо закључити да је *релациони облик размишљања* важан за развијање алгебарских појмова и закључивање у алгебри, управо из тог разлога што у себи подразумева одређени оквир уочавања и уопштавања одређених својстава или концепција. Све то даље упућује на повезаност са процесом генерализације, који представља један од основних процеса који карактеришу алгебарско мишљење. Дакле, за ученика млађег школског узраста није довољно само да разуме и да уме да примени поступак решавања једначине или неједначине, већ и да разуме ту једначину или неједначину као независни објекат који постоји сам за себе. Тако ће ученик бити у стању да препозна све ситуације које се могу изразити управо на тај исти начин.

У настави математике могу се уочити предности и једног и другог облика размишљања. Тако Скемп (Skemp, 1976) предности инструменталне математике види у лакшем разумевању инструменталне математике, бржем и лакшем постизању успеха кроз инструменталну математику од стране ученика, што изазива задовољство, тако да се прави одговор често може добити лакше и брже него у релационој математици, јер је мање знања укључено у процес решавања. Са друге стране, постоје и *предности релационе математике*: прилагодљивија је новим задацима, лакше је запамтити, релационо знање је ефикасно само по себи као циљ, док релационе шеме подстичу даље учење и истраживање неког појма или проблема (Skemp, 1976).

Поред ових облика разумевања математичких појмова Скемп (1982) издваја и *симболичко разумевање*, које подразумева способност спајања математичке симболике и нотације кроз математичке идеје и способност да се те идеје комбинују у логичке ланце резоновања. Ово је посебно значајно са аспекта алгебре, јер је симболичка нотација један од њених најзначајнијих обележја (Према Davidenko, 2006).

Бут и сарадници (Booth, McGinn, Barbieri & Young, 2017) наводе низ проблема у учењу алгебарских садржаја, при чему за превазилажење ових проблема на прво место постављају значај процедуралних вештина које су засноване на одређеним принципима. Ови принципи подразумевају начин на који ученици уче, и обухватају комбинацију: самообјашњења (сопственог трагања за истином), радних примера (навођење примера у учењу) и учења на грешкама (подстиче ученике да препознају суштину проблема, што им заузврат може помоћи да исправе погрешно научене и савладане појмове) (Booth, McGinn, Barbieri & Young, 2017).

Циљ коме треба тежити у настави алгебре је да се процес развоја алгебарских појмова заснива пре свега на релационом разумевању, јер оно представља суштину алгебарског мишљења заснованог на процесу генерализације. Много је примера који се могу користити да означе везе између аритметике и алгебре кроз релационо закључивање о односима између бројева и објеката. Суштина је да се касније тај пут заврши потпуно на пољу алгебре и алгебарског записа. Може се закључити да пут ка алгебри води преко аритметике, а оно што ми желимо да докажемо је да тај пут може бити много једноставнији и бољи, ако је садржај представљен кроз реалистичне ситуације и проблеме. Наше мишљење је да ученик користећи проблеме реалног контекста осећа задовољство и има жељу да учи и истражује до краја својих могућности.

2.5. Потешкоће у настави и учењу садржаја алгебре

Учење алгебарских садржаја код ученика често изазива и незадовољство, тако да овим садржајима ученици често приписују да су „незанимљиви", „бесмислени" или чак и „вештачки". Још се у уводној белешци *Аритметике* (250 година п.н.е.), Диофанта из Александрије наводи незадовољство ученика у учењу онога што ми данас називамо „алгебарским техникама" за решавање текстуалних проблема (Radford, 2000).

Проблеми усвајања алгебарских садржаја су евидентни, као што видимо, од античког доба, па све до савремене наставе математике. Данас се ови проблеми покушавају превазићи различитим приступима у настави алгебре и тежи се пронаћи најбољи тренутак када треба почети са изучавањем алгебарских идеја и како те идеје треба имплементирати у наставни процес. Када је реч о процесу усвајања алгебарских појмова, у први план се истичу проблеми усвајања алгебарских садржаја, као и веровање у фазу формалних операција Пијажеове теорије, у којој се може говорити о потпуном схватању алгебарске симболике. Као разлог за потешкоће у усвајању алгебарских садржаја наводе се когнитивна развојна ограничења, односно ниво когнитивног развоја ученика, као ограничавајући фактор у начину закључивања. Тако, MacGregor (2001) тврди да већина ученика није успешна у настави алгебре, јер су многи од њих још увек на нивоу конкретних операција (према Carraher & Schliemann, 2018). Нека од савремених истраживања управо се баве тим проблемом и доказују да се одређени елементи алгебарске симболике и алгебарских идеја, упркос оваквим схватањима, могу развијати и раније специфичним приступом у настави и учењу ових садржаја.

Велики број ученика нема успеха у области ране алгебре, што даље води ка проблемима у учењу и других садржаја математике на млађем школском узрасту. Одсуство значења у алгебарском учењу и недостатак везе између алгебре и других математичких области представљају најзначајније проблеме за наставу ране алгебре (Molina et al., 2005). Проблеми који произилазе из специфичности алгебарских садржаја на овом узрасту су разноврсни, преплићу се и могу се уочити додирне тачке између њих у настави и учењу алгебре. Како наводе Шлиман и сарадници (Schliemann et al., 2003), ранија истраживања о алгебарском мишљењу наглашавају недостатке и проблеме код ученика као што су: (1) ограничено тумачење знака једнакости (Booth, 1988; Vergnaud, 1985; Kieran, 1981, 1985); (2) погрешно схватање значења слова које представљају варијабле (Vergnaud, 1985; Kieran, 1985; Kuchemann, 1981); (3) одбијање прихватања израза као што су $3a + 7$ као одговора на проблем (Sfard & Linchevski, 1994); и (4) тешкоће у решавању једначина са непознатим са обе стране знака једнакости (Filloi & Rojano, 1989; Herscovics & Linchevski, 1994).

На сличан начин, Бут (Booth, 1988), у свом истраживању са ученицима од 13 до 16 година, наводи читав низ грешака које се јављају у тумачењу алгебарских израза који обухватају: „а) усредсређеност на проналажење одређене вредности, чак и када се то од њих не тражи; б) симболи операција се тумаче искључиво као акције које треба извести; ц) слова се користе као ознаке или као тачно одређене вредности, а не као променљиве; и д) погрешно разумевање значења алгебарских поступака“ (Booth, 1988: 299).

Неки од узрока проблема у учењу алгебре, по мишљењу Киндта (Kindt, 1980) су:

- „недостатак пажње у генерализацијама аритметичких концепата;
- пракса да се прерано улази у подучавање формалне алгебре;
- несагледавање методичких разлога за кога и зашто је корисно развијање алгебре у нижим разредима основне школе” (према Molina, Castro & Ambrose, 2005: 265).

Видимо да постоји много сличности у навођењу проблема који се јављају у настави ране алгебре широм света. Проблеми идентификовани у многим истраживањима подстакли су нас да у овом раду посебну пажњу посветимо алгебарским садржајима, али изнад свега развоју алгебарског мишљења и способности.

Како би се проблеми превазишли, истраживачи се залажу за веће повезивање аритметике и алгебре од самог почетка учења математике, као и за раније увођење почетних алгебарских појмова у наставу математике. При том се не пориче значај развојних карактеристика деце тог узраста. Специфичности узраста и боља имплементација и повезаност математичких тема, води ка бољем развоју алгебарских способности али и једноставнијем усвајању алгебарских садржаја. Можемо закључити да је поље проблема који се појављују широко, и да је због тога потребан систематски и свеобухватан приступ садржајима ране алгебре.

Изградња основних алгебарских појмова креће од генерализација на аритметичким изразима и појмовима. У овом процесу посебну пажњу треба обратити на елементе и односе који међу њима постоје. Манипулацијом у изразима са конкретним бројевима, кроз процесе израчунавања вредности и уочавања везе између рачунских операција поставља се основа за алгебарске садржаје. Оно што се истиче као значајан моменат јесте одређивање правог тренутка за почетак увођења алгебарских садржаја. Специфичан методички приступ овим садржајима има посебну улогу у увођењу алгебарских садржаја у почетној настави математике. Прави тренутак за увођење алгебарских садржаја је тренутак када је ученик способан да разуме однос између бројева, специфичности рачунских операција и математичких израза. Многе критике неуспеха у учењу ране алгебре, као и касније у школи и на факултету, заснивају се на чињеници да велики број студената, који није успешан у овој области, не жели да учи математику. При том је код ученика карактеристично одсуство значења у алгебарском знању, као и недостатак везе између алгебре и других математичких области (Molina et al., 2005).

Током активности у учионицама, како сматрају Карахер и Шлиеман (Carraher & Schliemann, 2018) у учењу ране алгебре треба имати у виду да кашњења у развоју и когнитивне потешкоће с алгебром могу бити резултат ограничења наставног програма математике у основној школи. Затим, треба имати у виду да је математичко разумевање индивидуална конструкција, која се трансформише и шири друштвеном интеракцијом и искуством у више смислених контекста приступом математичким симболичким системима и алатима. Децу је потребно социјализовати и навикавати на симболичке системе и тако их учинити самосталним. У том циљу, ученици имају користи од могућности да започну са властитом интуитивном представом односа између количина и постепено усвоје конвенционалне репрезентације као алате за представљање и разумевање математичких односа (Carraher & Schliemann, 2018).

Предлози који су се појавили као решења ових проблема у учењу алгебре треба да обухвате: базирање на учењу алгебре кроз решавање проблема, коришћење технологија за подстицање ученика у алгебарском размишљању и нагласку на јачању аритметичких способности (Freiman, & Lee, 2004). Једна од посебних иницијатива је и тежња за интегрисањем алгебарских садржаја са другим областима ране математике, јер се искључиво у том јединству може видети потпуни смисао учења математичких садржаја.

У овом раду посебну пажњу смо посветили многим од ових питања и покушали расветлити неке од најзначајнијих проблема везаних за учење и наставу ране алгебре. Детаљније ћемо размотрити проблеме који су суштински битни за учење садржаја алгебре у настави математике у млађим разредима основне школе. Имајући у виду садржаје програма наставе и учења математике, и то:

1) схватање и употреба знака једнакости,
2) схватање појма непозната и променљива;
3) слово као ознака за непознату или променљиву у раној алгебри;
4) схватање појма једначина и неједначина и разумевање поступка решавања;
5) развијање идеје функције и функционалне зависности.

Низ проблема који се појављују у истраживањима аутора широм света, указују на потребу за променама, како у садржају, тако и у приступу садржајима. Наша идеја је заснована на природи дечијег мишљења и потреби да ученик млађег школског узраста алгебарске садржаје види као одраз реалистичног контекста, као и да вежбањем овако обликованог садржаја подстичемо развој алгебарских способности и мишљења ученика.

2.5.1. Схватање и употреба знака једнакости

Један од најзначајнијих појмова и симбола за целокупну математику, па и алгебру јесте *знак једнакости*. Овај знак је, чак, пресудан за учење и разумевање алгебре. Међутим, бројни истраживачи указују да већина ученика не разуме знак једнакости и да постоје бројни проблеми који се јављају у вези са разумевањем знака једнакости (Booth, 1988; Kieran, 1981; Sfard & Linchevski, 1994, Filloy & Rojano, 1989; Carpenter & Levi, 2000). Потешкоће које се одражавају у настави математике, а односе се на неправилно схватање знака једнакости, потичу од чињенице да се деца у настави математике прво сусрећу са аритметиком. Чињеница је да се ученици кроз аритметику навикавају на знак једнакости, као знак који означава „израчунај" или „одреди" (Baroody & Ginsburg, 1983; Kieran, 1981; McNeil & Alibali, 2005).

Настава аритметике води децу до разумевања знака једнакости, као команде израчунај, али не води и ка суштини његовог значења. По мишљењу Киерана, у настави аритметике знак једнакости се користи у различитим формама, али исто тако ученици могу да стекну погрешну концептуализацију знака једнакости, као односа између две ознаке за исту вредност (Kieran, 1981). Знак једнакости мора изражавати значење истоветности, односно еквивалентности, где у ширем контексту означава буквалну замену једног објекта или примера другим. Тако, знак једнакости ученици врло често виде као знак који представља наредбу „израчунај", на основу чега они теже одредити решење и израчунати све оно што се налази са леве стране једнакости (Kieran, 1981).

Да би ученици могли да схвате односе који постоје између сродних и „супротних" рачунских операција, као и да разумеју однос између компонената рачунских операција, треба да схвате и разумеју појам *математички израз* као целину. То значи да ученици морају бити способни да виде израз не само као процес обављања рачунске операције, већ да схвате да он може да постоји самостално. Узмимо, на пример израз *15 + 6*. Примарна тежња ученика, када се пред њима пронађе овакав израз је да изврше рачунску операцију, односно одреде вредност израза на пример, *15 + 6 = 21*. За учење алгебре пресудно је ученици израз *15 + 6* разумеју и посматрају као целину, која може да постоји независно и којом се може манипулисати, као и са бројем. Овај израз ученик треба да схвати као ситуацију која природно одговара некој од мноштва различитих реалних ситуација које он приказује, а које дају повод за сабирање природних бројева, као на пример, 15 плавих и 6 црвених кликера или 15 жутих и 6 зелених лопти и тако даље. Тек пошто ученик буде у стању да математички израз схвати као независан објекат, може се говорити о структуралном разумевању и дубљем схватању израза и једнакости.

Међутим, истраживања показују да већина ученика није способна да се флексибилно бави математичком структуром израза и једначина (Van Stiphout, Drijvers & Gravemeijer, 2013). Може се поставити питање, како онда да очекујемо да ученик напредује и учи садржаје из алгебре, ако не разуме структуру израза и појма једнакости који представљају основу за усвајање алгебарских садржаја.

Ако узмемо, на пример израз *15 + 5 = ____*, природна потреба ученика је да открије збир бројева *15* и *5*. На основу претходног искуства у аритметици ученици теже да увек, на исти начин, виде израз и једнакост тако да је очекивано да ће на празном месту бити број *20*. Ако у обзир узмемо претходно понашање ученика у сусрету са изразом, у изразу *15 + 5 = ____ + 2* ученици ће врло тешко разумети еквивалентност леве и десне стране једнакости. Односно, у овом случају, они се фокусирају на израчунавање вредности на левој страни знака једнакости, тако да уместо броја *18*, који представља тачно решење, они пишу вредност на левој страни једнакости, а то је број *20* и добијају *15 + 5 =* <u>*20* </u>*+ 2*, што није тачно. Слично томе, Мек Нил и сарадници (McNeil, Weinberg, Stephens, Hattikudur, Asquith, Knuth & Alibali, 2010) наводе да чак и ученици у средњој школи различито тумаче знак једнакости у „нестандардним“ изразима (нпр. *3 + 4 = 5 + 2* и *7 = 7*) него у изразима на које су навикли (на пример, *3 + 4 = 7*).

Наведени примери показују неразумевање знака једнакости, што показује да ученици имају проблема у схватању односа између израза који се налазе са једне и друге стране знака једнакости. Ученици кроз учење аритметике стичу навику да лева страна знака једнакости увек представља страну на којој је захтев за спровођењем операције, док се на десној страни искључиво изражава резултат. У складу с тим, деца овог узраста често сматрају да једнакости, као што је *8 = 3 + 5,* нису тачне (Kieran, 1981; Filloy & Rojano, 1989; Carpenter & Levi, 2000). На основу наведених истраживања можемо закључити да ученици у току наставе аритметике не формирају у потпуности појам знака једнакости и не изграде структурално разумевање појма математичког израза. Међутим, истраживања показују и да се у настави аритметике може утицати на правилно усвајање знака једнакости као знака еквивалентности, уз одговарајуће садржаје који су креирани с тим циљем (McNeil, Fyfe & Dunwiddie, 2015). У модификованим околностима, у којима ученици решавају проблеме са једноставним изразима са рачунским операцијама сабирања и одузимања, на пример, ____ *= 4 + 3,* знак једнакости треба мењати речима које означавају еквиваленцију: „једнак је“, „две количине су исте“, „нешто је еквивалентно нечем другом“ и друго.

Оно чему треба тежити у почетној настави аритметике, јесте да се она заснива на примерима који на прави начин одражавају суштинско својство знака једнакости:

15 = 17 – 2 – израз се налази са десне стране једнакости,

23 + 5 = 29 – 1 – изрази се налазе са обе стране знака једнакости.

Овакви примери доприносе проширивању значења појма знака једнакости, где је резултат израза на левој страни једнакости, а израз на десној. Ако се ово проширење не изврши, схватање знака једнакости би се увек сводило на очекивање да је резултат израза увек на десној страни знака једнакости (Booth, 1988). До сличног закључка у свом истраживању долазе и Ли и Вилер (1989), који сматрају да прелазак са аритметичког језика на формални алгебарски језик може изазвати привремене пропусте, што значи да ће довести до непотребних аритметичких понашања. Тако исти аутори сматрају да се „стаза која води од аритметике до алгебре оптерећује процедуралним, језичким, концептуалним и епистемолошким препрекама” (Lee & Wheeler, 1989: 53).

Карпентер и Ливај (Carpenter & Levi, 2000) дошли су до закључка да ученици првог и другог разреда, кроз активности решавања задатака са тачним и лажним математичким једнакостима и дискусију о њима, могу потпуније развити значење и релацијски схватити знак једнакости. Ученици се кроз проверу истинитости тачне и нетачне једнакости (*23 – 14 = 9, 7 + 8 = 13, 67 + 54 = 571*) оспособљавају да на исти начин решавају и алгебарске форме (*x + 57 = 84, x + y = 7, x + x = 24*). Тиме су аутори показали да бројевне једнакости могу да обезбеде контекст за продуктивну математичку активност која укључује и алгебарско размишљање ученика (Carpenter & Levi, 2000). Улога првих аритметичких израза има огроман значај за развој ученичког доживљавања и структуралног схватања израза и једнакости, а касније наравно и једначина.

Александру-Леониду и Филипоу (Alexandrou-Leonidou & Philippou, 2011) сматрају да употреба вишеструких визуелних репрезентација доприноси разумевању појма једнакости, и то у првом реду коришћењем визуелних и симболичких репрезентација, а мање коришћењем вербалних израза и дијаграма.

Истраживање Кнута и сарадника (Knuth, Stephens, McNeil & Alibali, 2006) показује да се релациони поглед на знак једнакости (као знак еквиваленције) временом поправља, као и да постоји веза између разумевања знака једнакости и способности решавања једначина. Аутори посебно наглашавају чињеницу, да ученици који нису имали искуства са формалном алгебром, боље разумеју и решавају једначине, ако су знак једнакости разумели релационо.

Можемо закључити да постоји потреба да ученици млађег школског узраста морају разумети правилно појам знака једнакости и симбола за његово означавање, како би касније били способни за његово коришћење у сложенијим садржајима алгебре и аритметике. У први план се истиче процес генерализације, зато што се на тај начин може постићи да ученици потпуније схвате појам знака једнакости, а самим тим и поставља добра основа за касније бављење формалном алгебром у вишим разредима.

2.5.2. Схватање појма непозната и променљива

Ученици знају да се у вршењу рачунских операција у скупу природних бројева већи број не може одузимати од мањег, да се један број не може поделити другим уколико није дељив њиме и многа друга правила које се односе на аритметику за млађе разреде основне школе. У аритметици је доминантна тежња ка добијању нумеричких одговора у операцијама са конкретним бројевима и величинама. У тренутку када се у наставу математике уведу непознати бројеви настају тешкоће, јер се јавља проблем израчунавања и сталне тежње ученика да задатак може решити само ако су му све вредности познате.

Значајна карактеристика алгебарског начина размишљања јесте развијеност појма непознате или променљиве. У алгебарским једнакостима, непознате изражене симболима су почетна тачка у решавању проблема, али у исто време, сам симбол представља објекат манипулације. Најзначајнија активност у процесу схватања и решавања алгебарске једначине/неједначине или алгебарског израза јесте одређивање вредности непознатог броја или променљиве. Да би ученици млађег школског узраста одредили непознате вредности и разумели шта је то једначина или неједначина, потребно је да код њих у потпуности буде правилно развијен *појам непознате и променљиве*. Међутим, чињеница је да се у настави веома мало пажње посвећује овим појмовима, већ се врло често одмах прелази на сложеније појмове попут једначина. Савремене тежње у настави почетне алгебре, из тог разлога, треба да буду усмерене проналажењу оних праваца који омогућавају разумевање идеје непознате.

За Скемпа појам променљиве (Skemp, 1986) јесте *кључни појам у алгебри* (Према Akgün & Özdemir, 2006). Тако, Мале (Malle, 1993) издваја два начина за разумевање променљиве у раној алгебри. Према првом начину, аутор наводи да се непозната и променљива могу посматрати са *аспекта објекта* (као непознати или неодређени број), са *аспекта замене* (као резервисано место за одређени број) и са *аспекта рачунања* (као знак без значења, којим се може манипулисати правилима). Други начин, разумевања променљиве подразумева *појединачни* и *обласни* аспект. Појединачни аспект промењиве подразумева одређени и тачан број, док обласни аспект промењиву види као скуп бројева или број који се може мењати (према Wille, 2008).

У почетној настави алгебре бројне потешкоће везују се за појмове *непозната и промењива*. Ученици који се сусрећу са идејом промењиве на почетку је поистовећују са непознатом, као бројем или конкретном фиксном количином која је непозната. У ситуацијама када се ученик сусреће са промењивом *x*, види је као слово које има скривену вредност, а не и низ вредности које може имати.

Развијање идеје непознате заснива се на употреби симбола, али и на разумевању значења тог симбола у алгебарским изразима. Тежња је да ученици не схватају појам непознате као броја који је потпуно непознат и чија вредност се не може утврдити. Интенције су усмерене ка томе да се појам непознате разуме као „број који је тренутно непознат" и чију вредност треба открити. Непозната се примарно третира као количина или вредност коју је потребно одредити. За разлику од аритметике, код које је тежња у откривању вредности израза, непозната у алгебри је и објекат којим се манипулише а у исто време и резултат. Како наводе Агун и Оздемир „да би ученици разумели и развили идеју промењиве и непознате, треба да буду у могућности да:

- препознају и идентификују, у проблемској ситуацији, присуство нечег што се може утврдити ако се у обзир узму карактеристике те ситуације;
- интерпретирају симболе који се појављују у једначинама, као представе за одређене бројеве;
- замењују промењиве у једначинама бројевима (једним или више) да би створили односе који представљају тачне нумеричке односе;
- одређују непознате количине које се појављују у једначинама изводећи алгебарске и аритметичке операције;
- симболизују непознате величине идентификоване у проблемским ситуацијама и користе те симболе за постављање једначина" (Akgün & Özdemir, 2006: 49).

Правилна изградња појма непознате и промењиве је неопходна у процесу развијања математичког мишљења и учења алгебарских садржаја. Тако Килам (Kilhamn, 2014) сматра да у том процесу кључну улогу има учитељ, односно његова оспособљеност и владање садржајима алгебре. Поред тога, исти аутор истиче значај контекста који даје значење непознатим и промењивим у процесу развијања ових појмова. Дакле, важно је да учитељи буду оспособљени у проналажењу и интерпретацији контекста, који ће омогућити уочавање експлицитних разлика између две различите улоге алгебарске нотације у процесу њиховог формирања.

Значај контекста у алгебарским садржајима истичу Ристед и сарадници (Rystedt, Kilhamn & Helenius, 2016), при чему посебно издвајају његов значај у разумевању значења слова у алгебарским изразима. Према мишљењу аутора коришћење различитих контекста и разговора о њима, може помоћи у преласку са примитивних на напредније интерпретације симбола у алгебри. Аутори сматрају да је у учењу алгебре важно коришћење одређеног комуникативног жанра (контекста) у изражавању односа и интерпретацији симбола.

Стивенс и сарадници (Stephens, Blanton, Knuth, Isler & Gardiner, 2015) су у оквиру истраживања показали су да се кроз адекватан приступ и вежбање алгебарске способности у процесу наставе математике могу развијати појмови непознате и промењиве. Њихове резултате илуструје наведени пример задатка:

”Тим и Анђела имају своје касице за новац. Они знају да свака од њих садржи исту количину новца, али они не знају колико. Анђела има и 8 пенија у руци.

1. Како бисте изразили колико новца има Тим?

2. Како бисте изразили колико новца има Анђела?

3. Анђела и Тим удружују сав свој новац да би купили бомбоне. Како бисте изразили колико укупно новца имају Анђела и Тим?” (Stephens, Blanton, Knuth, Isler & Gardiner, 2015: 95).

Одговор од стране ученика на захтев задатка био је често нетачан. Посебну тешкоћу ученика представљала је њихова неспособност у симболичком изражавању непознатих количина. На пример, на питање о количини Тимовог новца ученици су одговарали са одређеном вредношћу (10 пенија), иако су били свесни да је количина његовог новца непозната. Иста је ситуација и са другим одговорима на питања. Након вежбања и обезбеђивања одређених алгебарских искуства у сличним задацима, ученици су са лакоћом решавали наведене, и сличне задатке, и били успешни у симболичком представљању непознатих вредности. Након тога, они су успешно представљали непознату вредност користећи непознату – n (количина новца коју има Тим). Затим количина новца коју има Анђела ($n + 8$). Најтежи захтев био је да се представи укупна количина Тимовог и Анђелиног новца ($n + n + 8$), при чему се од ученика очекује висок ниво разумевања односа и симболичког изражавања непознате.

Ово истраживање показало је да ученици под утицајем одређеног алгебарског искуства могу бити успешни у разумевању односа и симболичком представљању непознатих вредности. Поред тога, аутори сугеришу да се алгебарским образовањем у млађим разредима основне школе могу ублажити неке од потешкоћа које ученици имају са учењем алгебром у старијим разредима.

Карахер и сарадници (Carraher et al., 2008), такође, истичу значај раног укључивања алгебарских садржаја у наставу математике, при чему сматрају да се алгебарским активностима може утицати на многе аспекте алгебарског мишљења, уочавања односа и развијања појма непознате и променљиве. Аутори сматрају да се алгебра на овом узрасту учи у позадини контекста реалног проблема, постепено уводећи формални запис, кроз чврсто повезивање свих садржаја математике. На пример, аутори су пред децу поставили две исте кутије бомбона. Ученицима је предочено да се у њима налази исти број бомбона. На једној кутији стајале су 3 бомбоне. Ученици су имали задатак да број бомбона изразе симболички. Велики број ученика покушао је да реши проблем тако што је непознатој количини дао одређену вредност, док је други пак покушао да реши користећи се цртежом који изражава ситуацију, како би графичким приказом ублажио апстрактност проблема. Алгебарски постоји само једно тачно решење, али логички свако решење које изражава однос, у коме је у једној кутији има за 3 више бомбона у односу на број бомбона у другој кутији је тачно. Резултати сугеришу на то да ће ученици можда моћи да преусмере фокус са појединачних елемената на скупове и њихове међусобне односе. Реални контекст служи као позадина да би се описале везе између физичких величина, при чему се на крају праве генерализације у облику формалних представа, тако да „математички предмет више није појединачни случај или вредност, већ однос, односно функционални однос између две променљиве“ (Carraher et al., 2008: 247).

Видимо да разумевање идеје непознате и променљиве од стране ученика прате бројне потешкоће. То је и логично, јер их карактерише највиши ниво апстрактности. Међутим, истраживачки радови показују да их је могуће развијати кроз одговарајуће приступе учењу ових садржаја, а посебно кроз смештање у реални контекст света у коме ученик живи.

2.5.3. Слово као ознака за непознату или промењиву у алгебри

За разлику од материјалних објеката и стварности која нас окружује, математички појмови су потпуно недоступни нашим чулима и могу се разумети искључиво нашим умом. Једна од најзначајнијих карактеристика алгебре је у употреби слова и специфичне алгебарске нотације за приказ вредности у математичким изразима и једнакостима. Чест је случај да ученици решавање проблема схватају искључиво као одређивање резултата. То значи да је њихова пажња усмерена искључиво на операције које ће послужити да се дође до једног броја, односно решења. Посебан задатак наставе математике подразумева оспособљавање ученика да већу пажњу посвете поступку и тумачењу структуре проблема представљајући га алгебарским језиком, више него самој бризи за резултат. Алгебра на овај начин постаје језик описивања стварности, при чему се појачава само разумевање исте. Овај процес у настави јесте спор и континуиран, али свакако и неизбежан у поступку математичког образовања, уопште, а посебно образовања у области садржаја из алгебре.

Временом се идеја непознате и промењиве развијала тако што се покушавао пронаћи најадекватнији начин за њихово приказивање. Већа уопштеност и генерализација математичких истина довела је до развоја другачијег начина и приступа многобројним појмовима алгебре, па тако и појму непознате и промењиве, при чему се ови појмови не посматрају искључиво као непознате количине већ као *уопштени број* или *скуп бројева*. Ако се у обзир узме настава алгебре, може се поставити питање: *Када треба почети са увођењем симбола и алгебарске нотације у почетној настави математике?* Одговор на ово питање је сложен, пре свега због чињенице да ученици млађег школског узраста имају потешкоће у разумевању идеје непознате и промењиве, при чему се појављују и проблеми у њиховом симболичком означавању.

Многа истраживања показала су различите проблеме схватања симбола као промењиве или непознате, који се јављају у учењу и решавању алгебарских проблема. У истраживању Кучеман (Küchemann, 1978), на узорку ученика узраста од 13 до 15 година, испитао је на које начине они разумеју симболе у улози непознате. Резултати показују да деца разумеју симболе на следеће начине: 1) *слово као процењена вредност* (вредност слова се одређује одмах на основу процене, тако да нема прелазних корака израчунавања непознате), 2) *слово се игнорише,* 3) *слово као објекат,* 4) *слово као специфична непозната* (непозната која испуњава одређени захтев), 5) *слово као општи број,* 6) *слово као промењива*. Закључак аутора је да са когнитивним сазревањем расте и способност ученика да разуме појам непознате и појам промењиве.

Истраживање које је спровела Спехт (Specht, 2005) са ученицима четвртог разреда у Немачкој показује да се потешкоће ученика у вези са разумевањем промењивих огледају у: разумевању израза у којима се симбол x може користити и за описивање општих правила и односа (није ограничена само на означавање непознатог броја); прихватању симболичког израза као резултата у задатку; схватању значења да x *може бити било који број*.

Са друге стране, слова се појављују и у аритметици, али на сасвим другачији начин. Словне ознаке у аритметици представљају најчешће скраћенице назива објеката и предмета и директно упућују на сам појам, док је улога слова у алгебри потпуно другачија. Овакво схватање и употреба словних ознака од стране ученика касније води до грешака и дубљег неразумевања симбола као ознаке за промењиву. До сличних резултата у истраживању су дошли и МекНил и сарадници (McNeil et al., 2010) у којем су од ученика тражили да протумаче алгебарске изразе у задатку, у ком су морали да одреде укупну цену четири торте и три колача (нпр. $4 \cdot t$ и $3 \cdot k$). Њихов успех у решавању задатка зависио је од симбола који су ученици користили у изразу. Истраживање је показало да ученици боље резултате постижу када симболи, који су коришћени у изразу нису били мнемотички везани за сам симбол (на пример, x или неко друго слово као ознака за цену торте), него када су симболи у изразу били коришћени као ознака за назив (на пример, t као ознака за цену торте, а k као ознака за цену колача).

Проблем схватања симбола настаје и када ученици симболе прихватају искључиво везане за одређени број, односно, слову се одмах при сусрету са њим додељује одређена бројевна вредност. Често је та вредност повезана са ранијим искуством и проблемима са којима се ученик сусретао. Када им се задају задаци попут *Напиши број који је двоструко већи од x*, ученици тешко прихватају запис *2x* као коначан одговор, већ инсистирају на томе да га замене одређеним бројем (Booth, 1988).

У истраживању које су спровели МекГрегор и Стејси (MacGregor & Stacey, 1997) представљени су докази за специфично порекло погрешних тумачења која су у литератури често занемарена и која могу или не морају бити повезана са когнитивним развојем. Суштина је у томе да ученици често нису свесни генералности нити значаја који алгебарске нотације имају. Погрешне интерпретације ученика нису показатељ ниског нивоа развоја когнитивних способности, већ представљају покушаје да се схвате нове нотације, које су проузроковане преношењем значења из других контекста. Аутори наводе да је то порекло повезано са: интуитивним претпоставкама и прагматичним резоновањем о новој нотацији са којом се ученици сусрећу (кроз анализу са познатим системима симбола), као и сметњама које настају као ефекти погрешног одабира наставних садржаја. Ови истраживачи сматрају да препознавање порекла проблема представља неопходан захтев за побољшањем наставе алгебре.

Међутим, све је више аутора и истраживачких радова који сугеришу да алгебарске нотације треба користити што раније. Резултати истраживања показују да ученици млађих разреда основне школе могу научити и разумети елементарне алгебарске идеје и репрезентације као саставни део раног математичког програма (Carraher, Schliemann & Brizuela, 2000; Carraher, Schliemann, Brizuela & Earnest, 2006; Carraher, Schliemann & Schwartz, 2008). По мишљењу аутора, ученици могу да науче да користе слова за означавање непознате вредности, које укључују слова и бројеве без потребе за удаљавањем од њих. Затим, могу се оспособити да раде са непознатим вредностима и извлаче закључке о операцијама, без обзира да ли знају вредности непознатих. На овај начин они ће бити у ситуацији не само да разумеју, већ и да смислено користе алгебарске изразе.

Блантон и сарадници (Blanton, Brizuela, Gardiner, Sawrey & Newman-Owens, 2017) сматрају да се реконцептуализацијом појма променљиве може утицати на увођење променљиве и симбола за њено означавање много раније, али да је потребно пронаћи начин да се претерана апстрактност симбола ублажи и симболи као ознаке за променљиве усвоје на прави начин. Потреба за увођењем алгебарских нотација у наставу већ на почетку математичког образовања, по мишљењу аутора, има сврху да убрза дечије кретање кроз огромне просторе раног математичког програма, кроз везу која постоји између анализирања, апстракције, генерализације и њеног превођења у специфичан језик симбола, што уједно представља скуп процеса карактеристичних за развијање и формирање свих појмова у математици на млађем школском узрасту.

За разлику од аритметике, слова у алгебри (симболи) имају доста шири контекст примене и значења. Према мишљењу Радфорда (2004) кључни елементи развоја алгебарског размишљања проналази се у односу који постоји између *синтаксе (значења реченице – израза) и семиотике (значење симбола).* Он сматра „да синтакса лежи на ’површини структура’, и представља само мртву материју, сенку дубоке, структурно регулисане, менталне активности, док се стварна природа ствари види у њиховом правом значењу. Нема супротности између синтаксе и значења. Сваки знак има значење. У супротном, то не може бити знак. Насупрот томе, свако значење је апстракт или ентитет – који проналази своју функцију само у знаковима“ (Radford, 2004: 165). На сличан начин Сфард и Линчевски (Sfard & Linchevski, 1994b) сматрају да алгебарски симболи не говоре сами о себи, већ оно што се у њима види зависи од потреба конкретног проблема на који се односе.

Ученици се сусрећу са алгебарским проблемима рано па отуда потреба за алгебарском нотацијом и то на почетку математичког образовања. У следећим задацима се, чак, и сугерише употреба непознатог броја и потребе за његовим означавањем словом: *Који број треба додати броју 20 да би се добио број 40? Од ког броја треба одузети број 10, да би се добио број 5*? Када ученици овладају идејом непознатог броја кроз једначине, постепено овладавају и идејом променљиве кроз неједначине, а до генерализованих алгебарских нотација формирају и идеју „независно променљиве“ – симбол који представља ознаку за било који број из скупа бројева. За увођење непознате и променљиве Фуџи и Стивенс (Fujii & Stephens, 2008) предлажу да се уместо квази променљиве почне користити неки други облик симболичке нотације (троуглови, кружићи, квадрати), све до тренутка када ученик буде потпуно свестан тих генерализација и законитости алгебре.

Када говоримо о алгебри на млађем школском узрасту, морамо узети у обзир чињеницу да се не мора увек говорити о симболичком резоновању и симболичком запису. Симболичка нотација којом се објашњавају односи и везе треба да постоји, али није увек неопходна. Прелаз од конкретног, ка симболичком запису и употреби слова треба да произилази из конкретних математичких реченица и да буде ослоњен на свакодневни говор (Ferrari, 2006; Radford, 2002).

Истраживања показују да ученици млађег школског узраста могу схватити да је $a + b - b = a$ за било коју вредност a и b (Carpenter & Levi, 2000; Carpenter & Franke, 2001). Овакви налази упућују на чињеницу, да деца овог узраста могу савладати алгебарске садржаје и овладати алгебарским нотацијама, само је потребно, на прави начин, приступити овим садржајима и омогућити им да, природно кроз међусобну сарадњу логички расуђују и изводе генерализације о односима. Према мишљењу Меира (Meira, 1995), симболизација је динамичан процес, у ком се кроз симболизацију ствара и развија значење симбола. У овом процесу, нотациони системи обликују саме активности из којих се појављују, док истовремено исте те активности обликују значења симбола који се појављују.

Истраживања Блантон и сарадника (2017) показује да ученици првог разреда основне школе разумеју идеју непознате и променљиве. Њихови резултати показују да ученик мора перципирати променљиву количину у математичком смислу, пре него што стекне потребу да је на неки начин симболизује (Blanton et al., 2017).

Када говоримо о скупу симбола и знакова које користимо у математици онда говоримо о специфичном облику семиотичких система. Тако Вајнберг и сарадници (Weinberg, Dresen & Slater, 2016) наводе да се семиотички систем може дефинисати као скуп знакова, односа између знакова и образаца које особа или група људи намерно, систематски користи у сврху бављења одређеном математичком активношћу. Поједини ученици стварају личне семиотичке системе током рада у оквиру контекста чија је употреба социјално, већ унапред одређена и договорена од стране математичке заједнице. Ови лични системи се могу мењати и еволуирати у процесу рада ученика, његовог учења или размишљања о односима као и у процесу усвајања институционалних значења у контексту математичке активности. Према мишљењу Вајнберга и сарадника (Weinberg et al., 2016), наставници треба да имају у виду рад ученика на семиотичким системима и алгебарској нотацији као нечему што може потенцијално представљати проблем и сукоб између личног и институционализованог. Са друге стране, овај потенцијални сукоб између два овако схваћена система може бити и продуктиван, ако је фокус на значењу које произилази из употребе тих семиотичких система.

Дакле, разумевање алгебарских симбола је један комплексан процес који укључује читав низ услова контекста и ситуација на које се сам симбол односи. Слично схватање можемо проширити и на све оне једнакости и изразе у којима се симбол појављује у својству непознате или променљиве.

Можемо закључити да је широк спектар различитих проблема везаних за разумевање слова као симбола којим се означавају непознате или променљиве у раној алгебри. Симболи и знакови се не могу узети искључиво као алат, већ као компонента менталних активности, односно огледало унутрашњих когнитивних процеса, који омогућавају извршавање акција, које захтевају контекстуалне активности у којима појединци учествују. Према мишљењу Радфорда (2000), овде се види „теоретски помак од онога што знаци представљају до онога што нам омогућавају да урадимо" (Radford, 2000: 241). Са аспекта значења симбола, треба имати у виду да они подразумевају културно симболичке системе у оквиру којих појединац размишља и који превазилазе индивидуално мишљење појединца. Са једне стране, они функционишу као оруђе које омогућава појединцу да се укључи у когнитивне процесе. Са друге стране, они представљају део система који превазилазе појединца и одређени су кроз друштвену стварност (Radford, 2000).

Схватање симбола и њихово разумевање од стране ученика, у великој мери, утиче и на начин развијања алгебарског мишљења. Треба имати у виду да „пука употреба алгебарских симбола не подразумева алгебарске активности и да последично искључује решавање једначина као алгебарске активности, јер укључује прелазак са унапред познатог полазног броја ка непознатом броју, док алгебарске методе укључују кретање уназад од непознатог броја ка познатом броју" (Aczel, 1998: 26).

У решавању алгебарских задатка и развијању алгебарског начина размишљања посебно се могу издвојити два критична тренутка: 1) прелаз са вербалног језика на симболички запис, 2) прелазак са аритметике на алгебру. Сваки од њих условљен је одређеним карактеристикама и односима који постоје између мишљења ученика, наставе и карактеристика алгебре. Велики проблем у разумевању слова, као ознаке непознате или променљиве проистиче из различих контекста употребе слова у математици. Да би смо потпуније сагледали разлике, које постоје у значењу слова у математици узмимо следеће симболичке записе:

1) $O = a + b + c$
2) $5 + x = 35$
3) $k \cdot 1 = k$
4) $n = t : 2$

Ако се у обзир узму горе наведени алгебарски записи, можемо рећи да сваки од њих има другачије значење. У првом, запис називамо формулом, у другом је једначина, у трећем је представљено одређено својство аритметичке операције, док је у четвртом функција, односно формула којом се изражава функционална зависност. Различити записи одражавају и различита значења која слова имају у њима. Тако у првом случају слова изражавају различите величине – обим и дужине страница троугла, у другом случају то је непозната у једначини. У трећем случају слово представља слободну променљиву, односно може представљати било који број, док у четвртом случају слова представљају зависну и независну променљиву у функцији. Ако се све ово има у виду, слова у настави математике имају различита значења. Тако, слово може бити замена за конкретан број или вредност; замена за број који је само тренутно непознат; слободна променљива која може бити било који број и слово као ознака којом се изражава функционална зависност.

Из претходно наведеног, можемо рећи да задатак који се поставља пред ученике на овом узрасту треба да буде везан за развијање идеје симбола у алгебарским записима као:

- непозната (скривени број, број чију вредност треба открити, као непозната али фиксна величина – једначине);
- променљива (скуп бројева који испуњавају одређене услове функционалне зависности – неједначине, функције, низ);
- слободна променљива (симбол који представља било који број у одређеном скупу бројева).

Могли бисмо рећи да коришћење симбола и његова примена за изражавање алгебарских истина подразумева и постојање специфичног језика алгебре. *Алгебарски језик* је прецизан, тачан и концизан облик нотације, којим се на ефикасан и једноставан начин изражавају одређене алгебарске истине. Већина истраживања које смо навели потврђује чињеницу да деца у процесу развоја алгебарске мисли и у раду са садржајима алгебре различито схватају идеју слова и симбола, као ознака за променљиву или непознату. Често су у прилици да игноришу слова, да им дају произвољну вредност или их сматрају скраћеним именима за тачно утврђене вредности или речи.

Иако алгебарска нотација даје веће могућности за манипулацију и даљу анализу, ипак свакодневни језик омогућава да се генерализацији да смисао, пренесе информација и употпуни контекст који недостаје у алгебарској нотацији. Управо из тог разлога наше полазиште у раду је природни језик, реалне ситуације свакодневног живота, који представљају добру основу за разумевање идеја алгебре и развој алгебарских способности. Поред тога, веома је важно користити различите видове визуелних репрезентација, као вид алгебарских представа: графикони, слике, скице и цртежи, којима се може изражавати функционална зависност и односи између величина. Величине изражене на овај начин могу бити познате или непознате. Сви ови облици изражавања генерализација су прихваћени и могу се разумети и користити различито. Иако постоје различита схватања у ком смеру треба ићи у представљању генерализација, ученик на овом узрасту разуме генерализације и уме да их тумачи у сваком облику. Наше мишљење је да тај пут има одређени смер који води од природних ситуација и проблема изражених свакодневним језиком, који постепено прелази до апстрактнијих представа, преко слика или других визуелних представа до симбола.

2.5.4. Схватање појма једначина и неједначина и разумевање поступка решавања

Једначина је појам који најочигледније упућује на алгебру, као област математике. Први садржаји, у програмима математике за млађи основношколски узраст, везани за алгебру у правом смислу, су садржаји који се односе на једначине. Ученик се први пут сусреће са идејом непознатог броја већ у првом разреду основне школе, иако се у овом периоду учења не уводи слово као непозната, већ се она обележава иконички преко тзв. „држача места“ (црта, квадрат, круг и слично), док се од другог разреда упознају са идејом непознате, и први пут записују једначину у алгебарском облику. Учење и рад на решавању једначина у овом периоду изгледа, ако површно посматрамо, једноставно. Ученици се оспособе да кроз усвајање правила о одређивању непознатог броја, тај број и одређују и врше проверу тачности добијеног решења. Међутим „истраживања су показала да многи ученици уче да баратају једначинама аутоматски и без размишљања, тј. да нису свесни структуре која стоји иза поступака које употребљавају“ (Зељић, 2011: 39).

Зашто је то тако? Одговор се може пронаћи у претходно разматраним проблемима учења алгебре на раном узрасту. Наиме, учење садржаја о једначинама и њихово разумевање захтева од ученика да:

- схвати израз као посебан и целовит објекат којим се може манипулисати, односно да се оспособи оперише изразима, а не само бројевима,
- разуме знак једнакости као израз којим се означава еквивалентност леве и десне стране једнакости,
- разуме идеју непознате (слово као ознаку за непознату).

Решавање једначина своди се на чињеницу да се вредности непознате величине морају пронаћи на основу једнакости два дата математичка израза – по један са сваке стране знака једнакости. Суштина једначине је да ови математички изрази имају исте вредности, што знак једнакости чини кључним појмом у решавању једначина. Правилно разумевање знака једнакости повезано је са процесом решавања једначина. Дакле, ученици морају бити у стању да схвате да изрази са обе стране знака једнакости имају исту вредност и да се те вредности у процесу решавања морају одржавати.

Проблем неразумевања појма једначина можда најбоље илуструје истраживање које су спровели Хок и Драјфус (2004) са израелским средњошколцима којима су поставили питање: *Шта је једначина?* На ово питање ученици су дали различите одговоре:

1. Задатак у коме је циљ пронаћи x.
2. Задатак који има решење, то је задатак који се решава, и на крају треба нешто да се уради и дође до решења. Мора се одредити непозната.
3. x са једне стране, бројеви са друге, знак једнакости између њих; треба пронаћи x.
4. Израз са обе стране знака једнакости и један или више x.
5. Две стране повезане знаком једнакости и одређеним правилима за решавање (Hoch & Dreyfus, 2004: 153).

Као што можемо да видимо из наведених одговора, поглед на једначине као математичке објекте је различит и разноврстан, чак и код ученика средње школе. У првом и другом одговору карактеристично је процедурално разумевање, што значи да се у схватању појма једначине више пажње поклања самој процедури њеног решавања. У следећа два одговора, код ученика се може препознати више дефинисање једначине као описа на основу елемената које она садржи. У последњем је доминантно структурално схватање појма једначине, у коме се поред спољашње структуре у обзир узимају и процедуре за њихово решавање.

До сличних резултата дошли су Стејси и МекГрегор (1999) у свом истраживању, у коме су ученици исказали три различите представе о томе шта за њих суштински представљају једначине:

- формула за решавање задатка;
- наратив који описује операције које дају резултат;
- опис суштинских односа (Stacey & MacGregor, 1999: 163).

У првом случају ученици једначине схватају као формуле које се користе како би се на директан начин одредила вредност неког непознатог броја. У другом случају се једначина види као опис низа операција које у исказаном редоследу, воде до решења. На крају виђење једначине, као описа суштинских односа, представља и најапстрактнији облик, који показује дубинско разумевање једначина и односа елемената у једначини.

Када ученик решава једначине мора бити у стању да се креће између оперативног и структуралног разумевања. То значи да његова мисао мора да се усредсређује на процесе који су представљени алгебарским изразима и да размишља о процедурама решавања, али и на структуре које су представљене кроз апстрактне објекте који се крију иза симбола. Стога се може рећи да је важна компонента развоја алгебарског мишљења флексибилност приступа − способност брзе промене различитих начина размишљања и различитих тумачења алгебарских израза (Sfard & Linchevski, 1994а: 282). Уско повезано са проблемима решавања једначина је схватање једначине као процеса, а не као објекта којим се може управљати и који се може трансформисати. Ученици у почетку једначине виде као опис неког аритметичког процеса, на пример, $2 \cdot 3 + 4 = x$. У ситуацијама када им се представи једначина за решавање, на пример, $2 \cdot x + 4 = 10$, они једначину поново схватају као опис аритметичког процеса, и решавају га методом „погоди и провери“ као природни начин проналажења непознате x. Чак и напреднија стратегија решавања једначине може довести до схватања решавања једначине као процеса. Често се шире схватање једначине код ученика открива тек при сусрету са једначинама облика $2 \cdot x + 4 = 3 \cdot x - 6$, у којима је непозната са обе стране знака једнакости (Linsell, 2008). Помак од манипулација бројевима, како би се одредила непозната у једначинама, до манипулације непознатим означава улазак у алгебру. Тек када се једначина схвати као независан објекат, могуће је говорити о правом преласку на алгебарски начин размишљања.

Разумевање унутрашње структуре једначине представља пут ка успеху њене трансформације и решавања. Ако посматрамо једначину: $2 + 5 \cdot x = 3 \cdot x + 6$, можемо закључити да са обе стране знака једнакости постоји непозната x, и да се ради о једначини која садржи две рачунске операције. Оно што смо на овакав начин закључили могли би назвати стварном структуром, док трансформацију и поједностављивање једначине води ка потенцијалној структури, тако да се ова једначина може записати и као: $2 \cdot x = 4$. Трансформацијом једначине у овај облик омогућено је поједностављивање и лакше решавање. Препознавање и коришћење ове унутрашње структуре, може помоћи у лакшем и успешнијем решавању једначина (Hoch & Dreyfus, 2004).

Истраживање које су спровели Бризуела и Шлиеман (Brizuela & Schliemann, 2003) са ученицима четвртог разреда, узраста 9 и 10 година, имало је за циљ да испита како ученици схватају и користе алгебарска правила у разумевању и изражавању односа између количина. Подаци су прикупљени кроз лонгитудинално истраживање које је трајало од 2. до 4. разреда основне школе. Један од захтева који се нашао пред овим ученицима је и решавање једначина исказаних кроз проблем реалног контекста са непознатом, са обе стране знака једнакости. У последњем делу истраживања тражено је од деце да писмено изразе и реше следећи проблем:

> *Харолд има одређену суму новца. Када Харолд заради још 18 долара, тада ће Сали имати четири пута више новца од Харолда. Колико новца има Харолд, а колико Сали?* (Brizuela & Schliemann, 2003: 142)

Резултати истраживања су показали да су ученици овог узраста способни да смислено расправљају и анализирају проблеме који укључују непознате на обе стране знака једнакости. Нешто више од трећине испитаних ученика било је у стању да овакав проблем представи као једначину, реши је и смислено објасни зашто и на који начин се може манипулисати непознатим у оваквој једначини. Поред тога, више од половине ученика је умело да изрази и прикаже непознате вредности као и односе између њих. Ово пак указује на то да уколико се омогући да овакве активности постану део свакодневних активности у учионици, може се и утицати на развој алгебарских способности (правилно схватање знака једнакости, развијање идеје непознате) и способности разумевања и решавања једначине.

Дакле, један од кључних проблема у развоју алгебарског размишљања је да се пређе са схватања знакова, који су у означавању имали контекстуално и суштинско значење, на схватање знакова који се могу подвргнути формалним трансформацијама (Radford, 2004). Тако у настави математике треба створити ситуације у којима ће ученици поново, ослањајући се на аритметичке садржаје, доћи у прилику да истражују, и то овај пут са непознатим бројем. Примери једнакости у којима би учитељ сакрио један од бројева у њој, а затим од ученика тражио да они открију који је то број, одличан је начин за увођење идеје непознате. На овај начин ученици се сусрећу са појмом непозната и пре обраде једначина, а тако касније и лакше разумеју идеју непознате, не само као броја који „није познат“, већ као броја који је тренутно „сакривен“. Оно што ученик заправо види у њима зависи од захтева проблема на који се оне односе“ (Sfard & Linchevski, 1994b: 88). Са друге стране, треба имати у виду да „манипулација симболима без везивања за значење, не води разумевању“ (Зељић, 2014: 51).

Формирање појма неједначине, њено усвајање и структурално разумевање прате бројни проблеми у настави математике. Када су у питању ови садржаји, ученици имају потешкоће да прихвате и разумеју појам неједначине, њихово записивање, значење симбола, односно променљиве, као и њихово решавање. Са друге стране, учитељи имају проблем, како да тако апстрактне алгебарске нотације представе ученику на прави начин, да их он усвоји са разумевањем и уме да их користи у решавању задатака.

Највећи број тешкоћа везаних за разумевање појма неједначине ипак проистиче из њене сличности, на први поглед, са једначинама. Често, у бегу од тих сличности, учитељи теже да неједначине представе на чисто алгебарски начин, удаљавајући је од њених корена у аритметици, што резултира низом процедура које ученици не могу у потпуности разумети, тумачити и контролисати. Како наводе Базини и Боеро (Bazzini & Boero, 2004), већина студената који уписују прву годину студија на математичким смеровима у Италији, не успевају да реше чак ни лаке неједначине. Разлоге за то аутори проналазе у чињеници да се алгебарске трансформације изводе без пажње о ограничењима, која проистичу из чињенице да се знак > (већи од) или < (мањи од) не понаша као знак = (једнако). О сличном проблему говори и Киеран (2004) који сматра да карактеристике које подлежу важећим трансформацијама решавања једначина нису исте, као и основне трансформације којима се решавају неједначине. На пример, „множење обе стране истим бројем, који је карактеристичан за еквивалентне једначине, може довести до замке у решавању неједначина" (Kieran, 2004: 142).

Истраживање које су спровели Самир и Базини (2001) код ученика у Италији и Израелу о неједначинама, показало је да сви ученици имају потешкоће да схвате да $x = 3$ може бити решење и неједначине. Ученици сматрају да „резултат једначине може бити само решење задатка са једначинама" или да „задатак неједначине мора имати решења неједначине" (Tsamir & Bazzini, 2001). У сличном истраживању које су спровели ови истраживачи са ученицима другог и трећег разреда, дошли су до сазнања о томе како ученици доживљавају неједначине. Њихова објашњења у интервјуима јасно су показала да је њихово интуитивно разумевање неједначина засновано на чињеници да их виде као: „сличне једначинама", „исте као једначине" или „другу врсту једначина". Поред тога, истраживање је показало да се једначине користе као прототип у алгоритамским моделима решавања неједначина (Bazzini & Tsamir, 2003). Овакав однос, према решењима неједначина, су у складу са интуитивним схватањем појмова једначина и неједначина. У настави ране алгебре, ученици се прво срећу са једначинама и идејом непознате, тако да је логично да сви наведени проблеми буду карактеристични за децу овог узраста. Ови проблеми огледају се у поистовећивању садржаја, неразумевању идеје променљиве, као и схватању да решење једначине може бити скуп бројева (једно, више решења или без решења). Да би се на прави начин могао усвојити појам неједначине, прво се уводе садржаји везани за неједнакости развијањем појма променљиве и увођењем скуповно-теоријске нотације. Увођењем основних појмова теорије скупова као и нове симболичке нотације, апстрактност неједначина се додатно повећава. Из тог разлога се у настави ових садржаја мора посветити посебна пажња, јер се тада ствара база за касније сложеније алгебарске садржаје. Идеју скупа ученици развијају знатно раније, али је сада потребно унети и одређени систем нотације и нове симболе, којима би се могло на прецизан начин одредити скуп бројева, који задовољавају дату неједначину. Стога се уводе знаци: припадности скупа (је елемент скупа), знаци за означавање скупа у облику великих заграда { } (скуп бројева) и симбола три тачке (…) којима се означава непрекидан низ бројева који представља решење неједначине.

Први садржаји у настави везани су за неједнакости облика $x < a$ и $x > a$, док се касније прелази на сложеније облике са сабирањем, одузимањем, множењем и дељењем (нпр. $x - 4 > 8$, $x : 3 < 4$). Решавање једначина „своди се на: бирање или проверавање бројевних вредности за x, одређивањем непознатог сабирка и преко таблице" (Дејић и Егерић, 2003:225). На сличан начин, Тал (Tall, 2004) наводи неколико различитих приступа у контексту разумевања и решавања неједначине кроз: физичке репрезентације, употребу табела, однос између једначина и неједначина.

Суштина наставе о неједначинама, треба да буде заснована на идеји постепеног прелаза од математичког израза (једнакости и неједнакости), преко једначине до на крају неједначине. Развој појма променљиве, у уској је вези са доживљавањем идеје неједначине и њеног упоређивања са појмом једначине. Упоређивањем еквивалентне једначине и неједначине у настави се може потенцирати на сличностима, али и разликама које постоје између једначина и неједначина. На овај начин би се покушали отклонити проблеми о којима смо говорили. Решавањем једначине добија се истинито тврђење, односно, добијамо вредност која провером даје тачну једнакост. Решавањем једначине задатак је да се изједначе вредности са леве и десне страна знака једнакости.

$2 \cdot x = 6,$

$x = 6 : 2;$

$x = 3$, тако да је: $2 \cdot 3 = 6$, а то је тачно.

Решавањем неједначине испитује се истинитост неког исказа, тако да се добија скуп решења која испуњавају одређени услов. Код једначина долазимо до истине решавањем, док у неједначинама тестирамо истинитост тврђења, при чему долазимо до скупа решења у скупу природних бројева, која задовољавају или незадовољавају дато тврђење. Дакле:

$2 \cdot x < 6;$

$x < 6 : 2;$

$x < 3;$

$x \in \{1, 2, 3\}$

тако да је $2 \cdot 0 < 6$, а то је тачно;

исто $1 \cdot 2 < 6$, и то је тачно;

и на крају $2 \cdot 2 < 6$ што је такође тачно.

Решавање неједначине зато треба посматрати као решавање одговарајуће једначине, која се добија кад се у неједначини знак неједнакости замени знаком једнакости, при чему се у обзир узима зависност резултата од промене компонената рачунских операција. Управо, на садржајима зависности рачунских операција треба градити идеју промене знака неједнакости у неједначинама у којима је непознат умањилац и делилац. Зависност резултата од промене компонената рачунских операција представља садржај, којим се изражава природна веза са аритметиком и својствима рачунских операција, а самим тим и функционалне зависности.

Насупрот томе, неки од истраживача сматрају да традиционална настава неједначина има неколико недостатака. Сматра се да настава неједначина није довољно повезана са развојем појма „функције“. Овако организованом наставом се појављују потешкоће које настају у разумевању појма променљиве и усложњава се процес решавања неједначине третирањем неједначине као посебне врсте једначина (Boero, Bazzini & Garuti, 2001). Дакле, једна од највећих замерки је у занемаривању идеје функције, при чему се у први план истиче веза која постоји између једначина и неједначина. Из тог разлога се у каснијем учењу ових садржаја појављују проблеми у поступку решавања неједначине.

Потешкоће које настају као резултат поистовећивања појма једначине са појмом неједначине евидентне су у учионицама широм света. Решавање једначина и неједначина своди искључиво на низ механички научених поступака. Овако усвојен приступ често је критикован, јер се своди на низ рутинских поступака, који се не могу лако тумачити нити контролисати од стране ученика у процесу решавања неједначине. Из тог разлога ученици често нису у могућности да разумеју или реше неједначине, које се не уклапају у овако научене шеме, односно алгоритме. Другачији приступ учењу ових садржаја у свом истраживању, применили су Верикиос и Фармаки (Verikios & Farmaki, 2006), при чему су применили наставу у контексту, у којој се користе математички алати, који могу описати појаве стварног света у контексту почетне алгебре. Истраживање је спроведено са ученицима узраста 13 година у Грчкој. Проблеми који се традиционално решавају формалним решавањем једначине или неједначине, у овом истраживању, су третирани кроз употребу табела, графичких приказа или алгебарског записа. Ученици су учили тако што су исказане различите представе о функцијама, при чему су их ученици даље користили као стратегије у решавању проблема. Ово истраживање је показало низ проблема, који су углавном засновани на изједначавању поступка решавања неједначине са поступком решавања једначине. Управо из тог разлога, ови истраживачи наводе да формално решавање неједначина захтева већу зрелост од стране ученика, па би ове садржаје требало одложити за старије разреде. До тада је пожељно користити мање формалне стратегије као што су: графикони и табеле. Коришћењем графикона и табела се подстиче визуелно размишљање – визуелизација која је посебно значајна у настави математике на овом узрасту.

2.5.5. Развијање идеје функције и функционалне зависности

Развој идеје функције је заснован на разумевању и формирању идеје пресликавања. Развој идеје функције можемо пратити од Лајбница (Leibniz, 1646 - 1716) који је први употребио реч *функција*, па све до данашњих дана. Дакле, идеја функције, старија од једног века, сматра се од стране математичара као моћна, уједначавајућа идеја у математици, која заслужује централно место у наставном плану и програму (Freudenthal, 1982). Дефинисање функције и њен развој је прешао далек пут кроз историју. Овај пут започиње од схватања функције као формуле која изражава природу неке зависности (Лајбниц), преко схватања функције, од стране Ојлера, који је схвата у доносу који постоји између зависне и независне променљиве, све до Бурбакиста који функцију схватају као релацију која постоји између скупова.

Ако се у обзир узму когнитивне способности деце на овом узрасту, може се поставити питање: *Да ли ученици млађег школског узраста могу схватити и разумети појам реалног контекста, који ће условити истовремене промене две или више варијабли, и то изразити алгебарским језиком?* Велики број истраживача утврдио је да деца у млађим разредима основне школе могу развити и користити различите репрезентације, које подржавају идеју функције, као и то да се одређене коваријацијске везе могу описати речима и симболима. Поред тога, истраживања су показала, да деца овог узраста могу користити симболички језик за моделовање и решавање једначина са непознатим количинама (Blanton & Kaput, 2011; Brizuela & Schliemann, 2003; Schliemann et al. 2003; Carraher et al., 2008).

У почетку, ученици имају тенденцију да схватају алгебарске изразе на чисто оперативан начин, као концизно упутство за извођење рачунских операција. Најчешће треба много времена да ученик почне да размишља о алгебарским формулама и на структуралан начин (Linchevski, 1995). Функција, као појам, у настави алгебре се може увести јако рано, кроз неформално трансформисање математичких идеја. Функције се могу искористити у наставном плану и програму ране математике кроз коришћење проблема, код којих се генерализоване вредности појављују као променљиве величине (Hotomski, Schliemann, Carraher, & Teixidor-i-Bigas, 2018). Да би смо илустровали ово тврђење узећемо пример задатка који су навели Карахер и сарадници (Carraher, Schliemann & Schwartz, 2008) у свом раду:

> *Мајкл у руци има 8 долара. Остатак новца је у новчанику. Робин има тачно три пута више новца него што Мајкл има у свом новчанику. Опишите сопственим речима или покажите помоћу цртежа колико они имају новца (*Carraher, Schliemann & Schwartz, 2008: 248)

Да би описали овај проблем ученици млађег школског узраста га тумаче описом приче о двоје деце који имају одређене суме новца. Једна група ученика је тврдила да један дечак има више новца, док је друга група наводила различите примере и тврдила да више новца има други дечак. Преиспитивањем формулације проблема, пролазећи кроз различите приче ученици су били у ситуацији да ове односе све више расветљавају и на крају закључе да постоји велики број различитих могућности. На крају ће доћи до закључка да ће количина новца у Мајкловом новчанику представљати генерализовану променљиву, и да ће количина Робиновог новца зависити од количине новца коју Мајкл има у новчанику. На овај начин количине новца које поседују ова два дечака постају изражене кроз функционалну зависност која постоји између њих.

Према мишљењу Гравемејера (Gravemeijer, 1999) у настави је потребно често подстицање мишљења ученика и увођење конвенционалних математичких репрезентација и алата заснованих на повезаности са реалним приказима и ситуацијама реалистичног контекста. На овај начин математички прикази и модели неформалне математичке активности могу отворити пут конвенционалним математичким репрезентацијама (Gravemeijer, 1999).

Када је реч о функционалној зависности која постоји између променљивих, према мишљењу Смита (Smith, 2007), могу се издвојити три начина анализе записа и односа између променљивих:

1) рекурзивно узорковање, које подразумева проналажење варијација унутар секвенци вредности;
2) коваријантно размишљање, које се заснива на анализи како две количине варирају истовремено и задржавају ту промену, као експлицитни динамични део описа функције (нпр., ”када се *x* повећава за један, *y* се повећава за три”) и
3) кореcподенцијални однос, који се заснива на идентификацији и корелацији која постоји између варијабли (нпр., ”*x* је 3 пута *y* плус 2”) (Према: Blanton & Kaput, 2011).

У програмима наставе и учења математике за млађе разреде основне школе у Републици Србији, у оквиру садржаја ране алгебре, није експлицитно исказан захтев за развијање идеје функције. У програму математике највећи је фокус на решавању проблема са једначинама у којима се „x“ третира као непозната. Функционална перспектива проширује значење алгебарских израза третирајући „x“ као променљиву, тј. као објекат чија вредност може варирати. На овај начин се ученици подстичу да пређу са размишљања о операцијама са специфичним и конкретним бројевима на односе који постоје између променљивих (Carraher, Martinez & Schliemann, 2008). Као основа на којој се граде алгебарске идеје, често се узимају садржаји аритметике, односно, почиње се од садржаја који се односе на савладавање рачунских операција и различитих форми и модела везаних за садржаје аритметике. Функционална зависност развија се поступно и растегнуто у времену, и са овим вежбањима може се почети рано у настави.

Потешкоће откривене у многобројним истраживањима о развоју алгебарских способности и усвајању алгебарских садржаја, представљају основу читавог низа проблема у учењу алгебре касније у школи. Нека истраживања су потврдила да тешкоће у учењу алгебре произилазе из развојних и когнитивних карактеристика ученика овог узраста, међутим има и оних које упућују на велику улогу искуства у том процесу. Управо из тог разлога би требало већу пажњу посветити проналажењу правог методичког пута за успех у изградњи почетних алгебарских појмова.

2.6. Алгебарско мишљење и алгебарске способности – циљ и исход наставе алгебре

У наставним плановима и програмима за млађи школски узраст широм света, садржаји из алгебре заузимају значајно место. Иако су садржаји алгебре најкасније уведени у почетну наставу математике, њихов значај за целокупно математичко образовање ученика је огроман. Циљ коме се тежи у настави ране алгебре није да ученици само овладају једноставним алгебарским процедурама, већ превасходно да развију алгебарски начин размишљања, јер „основа алгебарског размишљања лежи у математичким активностима млађе деце, и могућностима да генерализују и формализују своје размишљање“ (Kaput & Blanton, 2000: 8). Дакле, нагласак у учењу алгебре, је на алгебарском размишљању, а не на „формалној алгебри”, која ће се појавити тек касније. У настави алгебре битно је да ученик разуме односе, схвати идеје и развије специфичан начин размишљања, кога у првом плану карактерише генерализација. Изградња алгебарских концепата и идеја обавља се кроз различите активности ученика, које укључују и различите области математике.

Када је реч о алгебри и алгебарском мишљењу, посебно се истиче значај симбола и симболике. Развој, не само алгебарског, већ и математичког мишљења у целини, не би био могућ без присуства и улоге симбола, посебно у настави ране алгебре. Математичко мишљење почива на симболичком позиционом нумеричком систему и алгоритамским поступцима заснованим на знаковима основних аритметичких операција. Алгебра и алгебарско мишљење представљају много више од симбола или ознака. Став по коме се алгебра види искључиво кроз симболику може да доводе до непризнавања несимболичких облика мишљења, као истински алгебарских. Алгебарско мишљење обухвата читав низ способности, које се могу у јединству схватити као специфичан начин размишљања о садржајима алгебре. Ово је посебно доминантно у млађим разредима основне школе и начину на који ученик овог узраста види и разуме свет који га окружује, као и начин на који закључује о односима и предметима у том свету.

Алгебарско мишљење је понекад тешко издвојити као посебан облик мишљења од осталих облика математичког мишљења или облика закључивања ученика млађег школског узраста. Карактеристике алгебарског закључивања обухватају елементе различитих типова мишљења − од логичког закључивања, преко критичког сагледавања проблема, до креативног расуђивања и решавања проблема. Алгебарски језик и алгебарске способности није могуће одвојити од свакодневних активности на математичким садржајима и њиховог изражавања свакодневним језиком. Само у јединству способности уочавања и генерализација, може се говорити о дубини и целовитости математичког мишљења. Са друге стране, суштина није само да ученик дође до сазнања и изгради способности, већ да може и активно да их користи у будућим активностима.

Природа алгебарских способности и алгебарског мишљења веома је сложена, условљена бројним елементима когнитивног развоја ученика, њиховим узрастом, али и природом садржаја на којима се испољавају. У њиховом одређивању, увек треба сагледати све ове елементе, како би њихова операционализација била што прецизнија, усмеренија и одређенија. Из тих разлога први корак у настојању развијања ових способности представља њихова операционализација.

Блантон и сарадници издвајају следеће алгебарске способности на млађем школском узрасту: 1) описивање, симболизација и извођење аритметичких особина и односа; 2) алгебарски, релацијски поглед на једнакост; 3) коришћење одговарајућих репрезентација за изражавање функционалних односа, 4) идентификовање и симболизовање функционалних односа, 5) истраживање и доказивање помоћу контекстуалних проблема и доношење генерализације и закључака, 6) упоређивање апстрактних количина и физичких мера (на пример, дужина, површина, запремина), како би се развили општи односи (на пример, транзитивно својство једнакости) о тим мерама (Blanton et al., 2007: 9).

Када је реч о схватању и развијању алгебарских способности Мејсон (Mason, 2008) наглашава значај урођених дечијих способности, које природно, кроз вежбе аритметике постепено утичу на развој алгебарских способности. Према његовом мишљењу, алгебарске способности налазе се у природи сваког ученика. На сличан начин, Карахер и Шлиман (Carraher & Schliemann, 2007) схватају алгебарско резоновање као психолошки процес, који је укључен у решавање проблема, које математичари могу лако изразити помоћу алгебарске нотације, и то на исти начин на који су друштва и народи решавали проблеме, пре него што је алгебарска нотација и постојала. Ово упућује на то да ће ученици бити у ситуацији да раде и користе променљиве и аритметичке законитости пре него што их науче у алгебри. Потврду оваквих ставова даје и истраживање које је спровео Радфорд (Radford, 2018) у коме је пратио исту групу ученика од другог до шестог разреда основне школе, у коришћењу алгебарске симболике у изражавању алгебарских генерализација. Ученици су имали задатак да реше један исти проблем у различитим разредима и да изражавају генерализације уочене у том проблему на њима најлакши начин. Истраживање је показало да су ученици постепено из разреда у разред мењали свој доживљај задатка и постепено прелазили са несимболичког на симболички начин изражавања генерализација. Тек су у шестом разреду ученици у потпуности користили симболику у изражавању генерализација и били способни да кроз формуле изражавају те односе. Ово истраживање упућује на чињеницу да се алгебарско мишљење не може везивати искључиво за један облик и једну способност, већ оно представља комплексан појам који све способности посматра у његовом јединству.

Пут који ученик пролази и способности које изражава у процесу алгебарског резоновања, према мишљењу Мејсона (Mason, 2008) су:

1) *замишљање и изражавање* – ученик користи машту и чула у процесу стварања слика и доживљаја и објашњења;
2) *фокусирање и дефокусирање* – ученик усредсређује пажњу на ствари које га привлаче, прави разлике између објеката и њихових карактеристика;
3) *специјализација и генерализација* – ученик је способан да издвоји битне карактеристике, схватајући разлике и сличности између објеката, као и да те сличности прошири на шири скуп сличних објеката тестирањем тих општих тврдњи;
4) *усвајање и потврђивање* – процеси који се надовезују на генерализацију и воде ка тестирању добијених сазнања и њиховом усвајању;

5) *класификација и карактеризација* – издвајање неких битних особина и класификација, на основу њих у групе, подгрупе и целине.

Задатак наставе алгебре у млађем школском узрасту треба да буде заснован на јачању и употреби природних способности ученика у циљу учења алгебре и развоја алгебарских способности. Алгебра се не може посматрати искључиво као математичко манипулисање симболима, нити као аритметика са словима, па чак ни као језик једначина и неједначина, већ као језгровит језик којим се манипулише и којим се изражавају општости и одређују ограничења те општости. Треба имати у виду да „алгебра представља културни артефакт − тело знања уграђено у образовне системе широм света, док је алгебарско мишљење човекова активност − активност из које произлази алгебра" (Hodgen, Oldenburg, & Strømskag, 2018: 32). Ако се има у виду овакво одређење алгебре и алгебарског мишљења, посебно се мора обратити пажња на специфичности које алгебра носи са собом у креирању својих темеља, односно основа у развијању алгебарских појмова.

Имајући у виду повезаност алгебре и других математичких области Фројдентал (1976) је *алгебру* дефинисао као појам који се налази између симболике и просторних димензија. Када је у питању начин на који, према његовом мишљењу, треба учити алгебру, алгебра се може схватити као знање о одређивању непознатих величина уз коришћење систематских процедура. На сличан начин и Ојлер (1984) дефинише *алгебру*, при чему је види као науку о одређивању непознате количине помоћу оних које су познате (Према: Katz & Barton, 2007).

Како наводе Капут, Карахер и Блантон (Kaput, Carraher, Blanton, 2008) алгебра се може схватити двојако. На један начин, алгебра се може схватити као људска активност која обухвата читав низ других активности. При томе се од ученика очекује да ради, истражује, размишља о математици и математичким идејама. Алгебра на овај начин произилази из људске активности. Према другом гледишту, алгебра се схвата као део математике који се налази изван људске активности, при чему егзистира као део једног ширег математичког подручја. Дакле, према другом гледишту, математичке и алгебарске законитости се схватају као такве, без обзира на то како су људи дошли до те законитости и каква је његова дубља суштина. Оба гледишта имају своју сврху, али за узраст деце којим се ми бавимо, значајнији је први приступ, јер се на тај начин види природност и суштина алгебарских садржаја и алгебарских способности. Слично гледиште има и Киеран (Kieran, 2007), који сматра да се алгебра састоји од уопштавајућих активности, које представљају алате за изражавање образаца и правила. При томе он алгебру не схвата само као садржај, већ и као начин размишљања и расуђивања о математичким ситуацијама и односима између објеката.

Алгебарско мишљење у млађим разредима основне школе, према мишљењу Киерана, подразумева „развој начина размишљања унутар активности за које би се словна симболика могла користити као алат, или алтернативно унутар активности које би се могле остварити без употребе словне симболике уопште" (Kieran, 2004: 149). Према истом аутору, то се може остварити анализом односа између количина, уочавањем структуре, проучавањем промена, генерализацијом, решавањем проблема, моделовањем, расуђивањем, доказивањем и предвиђањем.

На сличан начин Карахер и Шлиман (2018) посматрају *алгебарско мишљење*. Оно се односи на расуђивање, које се изражава као израз или другачији приказ нечег што означава односе између скупа елемената (обично бројева или количина) (Carraher & Schliemann, 2018). Према мишљењу Линса (Lins, 1992) алгебарско мишљење обухвата више различитих облика мишљења: аритметичко мишљење, унутрашње мишљење и аналитичко мишљење.

Можемо закључити да се алгебарско мишљење заснива на способности ученика да на основу конкретних примера буду способни да апстрахују и генерализују суштинске особине, али и способни да те особине касније примене у новим ситуацијама и решавању сличних проблема. Алгебарско резоновање омогућава ученицима да решавају много сложеније проблеме, јер се ученици доводе у ситуацију да о непознатом размишљају на основу познатог, односно да непознате вредности одреде на основу познатих. Са друге стране, до тачних решења могу доћи само ако разумеју суштину непознатог.

На сличан начин Друхард и сарадници (Drouhard, Panizza, Puig & Radford, 2006) сматрају да алгебарско мишљење није увек повезано са коришћењем савременог алгебарског симболизма. Овакав став аутора може се интерпретирати на два начина: 1) употреба савремене алгебарске симболике не укључује увек алгебарско размишљање; 2) алгебарско мишљење увек подразумева употребу савремене алгебарске симболике. У првом плану је начин размишљања, кога карактерише разноликост представа које може имати један исти алгебарски појам (Drouhard et al., 2006). Поред тога, постоји и мишљење да не постоји још увек прецизна и сажета дефиниција алгебарског мишљења, и да се разлог томе може пронаћи у широком оквиру алгебарских појмова и објеката (нпр. једначине, функције, низови и друго) и процеса (поједностављивање, генерализација) као и различитих начина размишљања уопште (Radford, 2006).

У документу *Принципи и стандарди за школску математику* (NCTM 2000) операционализоване су следеће алгебарске способности: „разумевање образаца, односа и функција; представљање и анализирање математичке ситуације и структуре користећи алгебарске симболе, као и анализирање промена у различитим контекстима“ (NCTM 2000: 37). Акценат савремене наставе алгебре у млађим разредима основне школе, према овом документу, оријентисан је на изградњу и јачање комплексних структура мишљења које обухватају: анализирање, функционално мишљење, способности представљања и уочавања промена и варијабилности. У складу са тим основне тежње савремене наставе ране алгебре огледају се не само у савладавању и усвајању алгебарских садржаја и процедура, већ и у оспособљавању ученика да функционално мисле, разумеју, трансформишу и користе садржаје и способности. Ако ученик буде успео да алгебарске садржаје разуме и буде способан да функционално мисли и закључује, онда ће бити способан и да та сазнања примени у другим областима и свакодневном животу. Интенције су да се вежбањем ових садржаја изграде способности, које ће постати део ученикове когнитивне структуре, која се не мора огледати само у подручју математике већ и сферама целокупног живота.

У оквиру истраживања, на узорку ученика трећег разреда основне школе, Стивенс и сарадници (Stephens et al., 2015) издвојили су следеће карактеристике алгебарског мишљења: *генерализација аритметике, еквивалентни односи* (схватање знака једнакости као знака еквиваленције), *функционално мишљење, схватање идеје промењиве* и *пропорционално резоновање*.

Успешно учење у настави алгебре, у првом реду, одређује развијеност алгебарских способности код ученика. Ученици морају бити у стању да уоче својства и односе међу објектима, запишу формуле, визуелно изразе односе, као и да умеју да анализирају визуелне репрезентације и решења. На овом узрасту у формирању почетних алгебарских сазнања фокус није на типичној алгебарској манипулацији симболима, већ је фокус на употреби алгебре у решавању проблема, али и изградњи алгебарских генерализација решавањем проблема. Настава алгебре треба да омогући ученицима да развијају и користе сопствене стратегије за решавање проблема.

Изградња алгебарског мишљења и закључивања, на нивоу односа између бројева и количина обухвата низ активности везаних за процесе изградње алгебарских појмова и решавања алгебарских задатака, од којих издвајамо:

1) *посматрање* – ученик се поставља у ситуацију да посматра ситуације и уочава односе, релације и везе између датих података које мора искористити да би решио одређени проблем*;*
2) *поређење* – ученик упоређује дате информације у задатку, односе и количине, податке и информације које су дате са онима које је потребно одредити;
3) *расуђивање* – ученик расуђује о односима између података или особина, утврђује непознате величине као и односе између непознатих и познатих величина;
4) *закључивање о односима* – ученик изводи закључке о односима и међусобној повезаности између података, при чему је у првом плану генерализација као мисаона операција.

Када је реч о алгебри на овом узрасту Капут (Kaput, 2008) издваја две основне карактеристике алгебре: *генерализацију* и *симболизацију*. У процесу генерализације – анализирају се подаци, увиђају се битне карактеристике функционалних односа, увиђа се правило или оквир, генерализује се на шири аспект проблемске ситуације. У процесу симболизације заокружује се процес алгебарског расуђивања, симболима се изражава правило које је уочено, прелази се на виши ниво апстракције, ученик користи симболичку нотацију и удаљава се од контекста проблема. Симболи се могу посматрати као независни елементи којима ученик манипулише, не узимајући у обзир његове референтне облике контекста у задатку. У овакве записе не укључују се искључиво записи са променљивим или непознатим, већ и други симболички записи као што су природни језик, графикони и табеле (Kaput, 2008; Carraher i Schliemann, 2007). Ученици треба да буду у могућности да изражавају различите приказе једног истог алгебарског објекта и да се флексибилно и лако померају између њих. Суштина је да ученици разумеју значење симбола и повезују их са контекстом задатка или проблемске ситуације.

Генерализација је појам који је дубоко интегрисан у природу алгебре. Не може се одредити ни један део алгебре, нити алгебарски појам, који на неки начин није повезан са генерализацијом. Можемо рећи да је то мисаони процес, којим се својства неког ужег скупа проширују на најшири скуп са тим својствима. Са становишта алгебре, генерализација је врло значајан процес којим се идентификују обрасци или правила у датом скупу објеката или елемената. Она садржи тврдњу којом се неко својство или техника односи на велики број математичких објеката или услова. Обим тврдње је увек већи од скупа појединачних случајева, при чему често укључује неограничен број случајева. Генерализацијом се уопштавају многа правила и својства рачунских операција у почетној настави математике, као и обрасци функционалних односа и низова. Дакле, генерализација се јавља као спона између броја и бројевних израза, са једне, и симбола и формула у правом алгебарском смислу, са друге стране.

Према мишљењу Радфорда (Radford, 2003) генерализација се у алгебри развија кроз три нивоа: фактички, контекстуални и симболички. На фактичком нивоу генерализација остаје на нивоу објеката на којима се врши. На контекстуалном нивоу фокус се помера на апстрактнију и одређенију језичку генерализацију, док се на симболичком алгебарска нотација користи за описивање генерализација. Дакле, генерализација је неопходни циљ сваког часа математике.

Треба имати у виду да генерализације немају чисто дедуктивни карактер и као такве их не треба представљати ученицима (Carraher et al., 2008). Математички објекти не могу бити директно приказани алгебарском нотацијом, већ треба постепено открити њихов репрезентативни облик, односно, оне се морају појавити у искуствено блиским ситуацијама за ученика. У математичким генерализацијама ученици уче на тај начин што развијају мишљење о томе како се физичке величине мењају или остају непромењливе, као резултат неке акције или операције (Carraher et al. , 2008). Слично томе, Герхард (Gerhard, 2011) тврди да приступ генерализацији броја може да омета развој алгебарске мисли и да мора бити у сфери интензивне визуелизације, која је највише заступљена у геометрији.

Генерализација није могућа без апстракције. За разлику од материјалних објеката, сложени математички појмови потпуно су недоступни за наша чула – могу се разумети и видети само умом. Како Сфард (Sfard, 1991) истиче, чак и када напишемо функцију или само један број, ми на тај начин истичемо да тај знак на папиру представља заправо само једну од много могућих репрезентација неког апстрактног објекта, који сам по себи не може бити ни виђен, ни опипан, нити на било који начин доступан чулима. Бити способан за „виђење“ ових предмета и појмова представља суштинску компоненту математичке способности, а његов недостатак један од разлога за лоше разумевање математике и потпун развој математичког мишљења. Алгебра се, за разлику од аритметике, бави словним симболима, па се може рећи да је апстракција као процес у алгебри неизбежна. Словни симбол је апстрактан објекат и за њега је карактеристична потпуна одсутност контекста. Апстракција се тако може схватити као процес којим се из групе објеката или појмова издвајају и задржавају битне карактеристике. Касније ће те *битне* карактеристике у процесу генерализације бити уопштене. Чињеница је да се у алгебри апстракција у великој мери разликује од апстракција у другим областима математике. У геометрији она је заснована на визуелним представама, односно на слици предмета и појма који се описује. У алгебри се апстрактност не садржи у форми која се може описати једноставно сликом или скицом. То представља значајан проблем за ученике код којих још није развијен формални начин размишљања. Апстракција је супротна конкретизацији, тако да се у настави алгебре број често узима као конкретна, а слово као апстрактна величина.

Алгебарско мишљење, по мишљењу Криглера (Kriegler, 2007), обухвата две главне компоненте: 1) алате математичког мишљења и 2) алгебарске идеје. Алати математичког мишљења су: вештине представљања, вештине закључивања и вештине решавања проблема. Свака алгебарска способност треба да обухвати све ове елементе, од представљања проблема, његовог моделовања у процесу решавања, па све до начина решавања, самим тим и мисаоних способности које се у том процесу развијају. Вештине представљања подразумевају елементе који се односе на организацију података у процесима анализе и синтезе и оне обухватају, не само процесе који се односе на етапу решавања задатка, већ и његовог представљања на било који начин (графикон, табела, скица и друго). Вештине закључивања обухватају способности које се односе на закључивање и апстракцију и генерализацију. Последња вештина се односи искључиво на процес решавања задатка и појављује се као посебан алат у процесу изградње алгебарског мишљења. Сви набројани алати математичког мишљења обухватају елементе математичког моделовања и изражавају креативност у проналажењу најбољег начина за решавање математичког проблема.

Као што можемо видети, постоји сличност између аутора о суштини и карактеристикама алгебарског мишљења и алгебарских способности. Већина аутора издваја следеће менталне процесе, као карактеристике алгебарског мишљења: расуђивање кроз активности са непознатим, генерализације алгебарских истина и процеса, формализације између величина, као и развој појма *непознате и променљиве* кроз процесе алгебарске симболизације (манипулације симболима на папиру).

Суштинске карактеристике алгебарског мишљења и расуђивања чине генерализација, формализација и симболизација (Bednarz, Kieran & Lee, 1996; Kaput, 1998; Kieran, 1989, 1990, 1992; Linchevski & Herscovics, 1996; Sfard, 1991, 1995; Sfard & Linchevski, 1994a; Filloy & Rojano, 1989; Herscovics, 1989; Herscovics & Linchevski, 1994). Ове способности алгебарског мишљења и расуђивања односе се на начин на који ученик разуме алгебарске садржаје и решава алгебарске проблеме. У првом плану је алгебра као алат којим се решавају проблеми и гради мишљење кроз генерализацију и формализацију односа који постоје, и манипулацију симболима уз коришћење специфичног језика алгебре.

Када је у питању улога симболизације Радфорд (2014) издваја три услова карактеристична за алгебарско мишљење:

„1) неодређеност – проблем укључује непознате бројеве (непознате, променљиве, параметре итд.);

2) означавање – неодређени бројеви који су укључени у проблем морају бити именовани или симболизовани (симболизација природним језиком, гестовима, неконвенционалним знаковима);

3) аналитичност – неодређене количине се третирају као познати бројеви, наиме полази се од непознате вредности и делује се на њих као да су познате, што упућује на аналитичност (извођење истих операција са бројевима са обе стране знака једнакости)“ (Radford, 2014: 260).

Аутор посебно истиче да је „погрешно проучавати развој алгебарског мишљења фокусирајући се само на једну његову компоненту. Тако се, развој алгебарског мишљења не може свести на развој његове симболичке компоненте (алгебарске нотације), већ на међусобну дијалектичку повезаност његових различитих компоненти“ (Radford, 2014: 268).

Према *Принципима и стандардима за наставу математике* (NCTM, 2000) развој алгебарских идеја, у курикулумима од трећег до петог разреда, одвија се кроз скуп следећих активности:

- идентификација и изградња нумеричких и геометријских образаца;
- описивање образаца и њихово вербално представљање помоћу табела или симбола;
- уочавање и примена односа између различитих величина, да би се изградила предвиђања;
- извођење и објашњење генерализација;
- коришћење графикона за описивање образаца и извођење предвиђања;
- истраживање својстава броја;
- употреба нестандардних и стандардних симбола и променљивих за описивање образаца, генерализација или ситуација“ (NCTM, 2000: 159).

У *Плановима и програмима наставе и учења за трећи и четврти разред основне школе* (2019) у Републици Србији, када су у питању садржаји алгебре, оријентација је ка идеји развијања алгебарских појмова, формирања математичког језика и математичке симболике. Тежња је усмерена на постепно изграђивање представа о непознатој и промењљивој, при чему се слово појављује као симбол за њихово означавање. Програм наставе и учења за трећи разред основне школе предвиђа да се већ у овом разреду посебна пажња мора поклонити „вези између операција и зависности резултата од промене компонената рачунских операција, као основе на којој се даље гради појам једначине и неједначине“ (*Правилник о програму наставе и учења за трећи разред основног образовања и васпитања*, 2019). Овим програмом предвиђено је решавање једначина са једном непознатом на основу везе која постоји између рачунских операција сабирања и одузимања, односно множења и дељења. Програм посебно истиче значај провере тачности решења једначина као и анализу „логичности“ решења с обзиром на контекст проблема. Истим програмом прописује се усвајање појма *неједначина* и њено решавање код којих је лако сагледати скуп решења (погађањем или коришћењем табела), при чему њихово решавање подразумева и упознавање ученика са симболима који су неопходни за обележавање скупа решења ($\in$, { и }).

Програмом наставе и учења за четврти разред основног образовања и васпитања у Републици Србији утврђује се, да се од четвртог разреда почиње са решавањем једначина са једном и више рачунских операција, као и простих неједначина чија решења припадају скупу N_0. Поред тога, исти програм утврђује да се у четвртом разреду решавање неједначина „заснива на таблицама или на решавању одговарајућих једначина и познавању функционалне зависности резултата рачунских операција од њених компонената“ (*Правилник о програму наставе и учења за четврти разред основног образовања и васпитања*, 2019). При томе се посебно упућује на потребу да се обрати пажња на примере неједначина са једним решењем, више решења и неједначине које немају решење. Програм предвиђа да треба почети са вежбањем задатака у којима је захтев за одређивањем следећег члана у низу, уочавања и записивања правила на основу започетог низа, формирање низа на основу задатог правила, као и давање правила на основу којег ће се формирати низ. Ови задаци треба да омогуће развој математичког и логичког мишљења и припрему ученика за бављење појмом функције у наредним разредима. Програм посебно предвиђа да је поред задатка у текстуалној форми потребно развијати и способност уочавања проблема анализом ситуације задате сликом, табелом или графиком (стубичастим дијаграмом и сликовним дијаграмом у коме симбол може представљати више од једног објекта). На тај начин се посебно истиче значај селекције битних информација за решавање проблема и уочавање односа између познатих и непознатих компоненти.

За овај рад је посебно важно што се у новим програмима наставе и учења у Републици Србији упућује на значај решавања задатака у реалистичним проблемским ситуацијама, које уједно чине и контекст за проширивање знања о својствима рачунских операција и развој способности математичког моделовања. Из тог разлога резултати овог истраживања могу послужити као добар оријентир за смернице које су дате у новим програмима.

Учење алгебре у млађим разредима основне школе, према мишљењу ван Амером, треба да обухвати следеће:

- учење кроз генерализације – вежбе са целим бројевима; операцијама и изразима, кроз знак једнакости и разумевање израза као целине;
- алгебра као алат за решавање проблема где се преводи свакодневни језик у свет симбола и језик алгебре;

− учење алгебре кроз моделовање – флексибилност ученика у описивању појава које их окружују, изражавање односа између различитих величина, што доприноси развијању идеје о појму непозната;
− функционални приступ алгебри – скривање структуре иза скупа нумеричких података (Van Amerom, 2002: 6).

Алгебарско мишљење има за циљ да промовише одређене начине тумачења математике и подстиче ученике на интеракцију и ангажовање са генерализацијама и односима који су нераздвојиви од математике. За ван Амером учење алгебре полазиште има у аритметици, а одвија се преко пре-алгебре коју карактеришу одређени процеси који су изазвани у аритметици и бивају генерализовани на пољу алгебре. У том контексту, ауторка прецизно одређује активности које се одвијају у аритметици, а потом кроз процесе који се дешавају у пре-алгебри, одређује исте те активности у алгебри указујући на њихове сличности (Табела 4).

Табела 4. *Карактеристике аритметике и алгебре* (Према: van Amerom, 2002: 20)

Аритметика	Пре-алгебра	Алгебра
Пронаћи нумеричко решење.	Генерализација	Генерализовати и симболизовати методе решавања проблема
Генерализација специфичних ситуација са бројевима.		Генерализација односа између бројева, уопштавање.
Табела као алат за рачунање.		Табела као алат за решавање проблема.
Манипулација одређеним бројевима.	Значење слова	Манипулација променљивим.
Слова су ознаке за мере или скраћенице неког објекта.		Слова су променљиве или непознате.
Симболички изрази репрезентују процесе.	Разумевање симболичких израза	Симболички изрази се виде као производ и процес.
Операције се односе на акције.		Операције су независни објекти.
Знак једнакости изражава резултат.		Знак једнакости представља еквивалентност.
Закључивање са познатим вредностима.	Решавање проблема, закључивање са (не)познатим	Закључивање са непознатим вредностима.
Непозната као крајња тачка.		Непознате као почетна тачка.
Проблеми са једном непознатом.		Проблеми са више непознатих: системи једначина.

Имајући у види све наведено о алгебарском мишљењу и алгебарским способностима израженим кроз ставове и виђења бројних истраживача (Van Amerom, 2002, 2003; Зељић, 2014; Kieran, 2004a, 2004b; Radford, 2014; Schliemann, et al, 2003; Carraher, Schliemann, & Brizuela, 2000 и други) можемо закључити да алгебарске способности представљају кључни елемент учења у настави алгебре, услов развијања алгебарских појмова, али и крајњи исход математичког образовања у млађим разредима основне школе. Питање које се намеће је *Које су то алгебарске способности које чине суштину алгебарског мишљења ученика у млађим разредима основне школе?*

Одговор на ово питање је сложен и условљен природом садржаја математике у млађим разредима основне школе, карактеристикама мишљења ученика и захтевима програма наставе и учења математике. Полазећи од тога, да на основу прегледа теоријских и емпиријских ставова истраживача, карактеристика и садржаја наставе математике у млађим разредима основне школе, посебно оних који се односе на садржаје алгебре, можемо издвојити следеће алгебарске способности као карактеристике алгебарског начин размишљања:

1) правилно схватање знака једнакости;
2) разумевање функционалне зависности између компонената рачунских операција;
3) способност уочавања функционалних односа на графикону, табели или слици;
4) схватање симбола у алгебри;
5) развијање појма променљиве и непознате.

Издвајање карактеристичних алгебарских способности у овом раду покушали смо одредити на основу односа који постоји између специфичности аритметике и алгебре на млађем школском узрасту које издваја ван Амером (van Amerom, 2002) у виду карактеристичних активности које карактеришу ове две области математике и процеса који се одвијају у пре-алгебри. Како бисмо указали на које процесе и активности се издвојене алгебарске способности односе, представићемо их кроз допуну *Табеле 4,* коју даје ван Амером (*Табела 5*).

Табела 5. *Алгебарске способности*

Аритметика	Пре-алгебра	Алгебра	Алгебарске способности
Пронаћи нумеричко решење.	Генерализација	Генерализовати и симболизовати методе решавања проблема.	Разумевање функционалне зависности између компонената рачунских операција. Способност уочавања функционалних односа на графикону, табели или слици.
Генерализација специфичних ситуација са бројевима.		Генерализација односа између бројева, уопштавање.	
Табела као алат за рачунање.		Табела као алат за решавање проблема.	
Манипулација одређеним бројевима.	Значење слова	Манипулација променљивим.	Схватање симбола у алгебарском изразу које представљају непознату или променљиву.
Слова су ознаке за мере или скраћенице неког објекта.		Слова су променљиве или непознате.	
Симболички изрази репрезентују процесе.	Разумевање симболичких израза	Симболички изрази се виде као производ и процес.	Схватање знака једнакости као симбола којим се изражава симетричност (еквивалентност) леве и десне стране једнакости.
Операције се односе на акције.		Операције су независни објекти.	
Знак једнакости изражава резултат.		Знак једнакости представља еквивалентност.	

<table>
<tr><td>Закључивање са познатим вредностима.</td><td rowspan="3">Решавање проблема, закључивање са (не)познатим</td><td>Закључивање са непознатим вредностима.</td><td rowspan="3">Развијање појма променљиве и непознате (непозната као број који је само тренутно непознат, не као вредност која не постоји).</td></tr>
<tr><td>Непознате као крајња тачка.</td><td>Непознате као почетна тачка.</td></tr>
<tr><td>Проблеми са једном непознатом.</td><td>Проблеми са више непознатих: системи једначина.</td></tr>
</table>

Преглед теоријских и емпиријских истраживања послужио нам је као основа за издвајање конкретних алгебарских способности. Имајући у виду проблеме који могу пратити њихово развијање и испољавање у процесу учења алгебарских садржаја, за сваку издвојену способност смо дефинисали очекиване исходе учења алгебре у настави математике у млађим разредима основне школе (Табела 6).

Табела 6. *Од развијања алгебарских способности до решавања проблема у учењу алгебре*

<table>
<tr><th>Алгебарске способности</th><th>Проблеми</th><th>Исходи</th></tr>
<tr><td>Схватање знака једнакости као симбола којим се изражава симетричност (еквивалентност) леве и десне стране једнакости.</td><td>Ограничено тумачење знака једнакости (Booth, 1984, 1988; Kieran, 1981, 1985; Vergnaud, 1985).</td><td>Преусмеравање значења знака једнакости са команде израчунај на еквивалентност.
Симболички изрази се виде као процес и производ процеса.
Операције су независни објекти.
Знак једнакости означава еквивалентност.</td></tr>
<tr><td>Разумевање функционалне зависности између компонената рачунских операција.</td><td rowspan="2">Проблеми схватања функционалних односа.
Тешкоће у решавању једначина са непознатим са обе стране знака једнакости.</td><td rowspan="2">Фокусираност на односе, а не само на израчунавање нумеричког одговора решења.
Уочавање и примена односа између различитих величина.
Примена зависности резултата од компонената операције у решавању проблемских задатака.
Коришћење различитих визуелних репрезентација као алат за решавање проблема.</td></tr>
<tr><td>Способност уочавања функционалних односа на графикону, табели или слици.</td></tr>
<tr><td>Схватање симбола у алгебарском изразу које представљају непознату или променљиву.</td><td>Погрешно схватање значења слова које представљају непознату или променљиву (Kieran, 1985; Kuchemann, 1981; Vergnaud, 1985).</td><td>Фокус на бројеве и слова, а не само на бројеве.
Рад са словима која могу бити непознате, променљиве или параметри.
Коришћење израза као решења.
Употреба нестандардних и стандардних симбола и променљивих за описивање образаца, генерализација или ситуација.</td></tr>
<tr><td>Развијање појма променљиве и непознате (непозната као број који је само тренутно непознат, не као вредност која не постоји).</td><td>Погрешно схватање идеје непознате и променљиве.</td><td>Разумевање идеје непознате и променљиве као броја или бројева којима је само тренутно непозната вредност.
Расуђивање о непознатим и променљивим.
Разумевање непознате као почетна тачке за решавање проблема.</td></tr>
</table>

Када можемо рећи да је ученик развио одређену способност или формирао неке специфичне карактеристике алгебарског мишљења? Начин на који ученик приступа проблему, начин на који решава проблем и пут који проналази у поступку решавања су само неки од показатеља развијености одређене алгебарске способности. Из тога произилази значајан задатак за учитеља, а то је да уме да препозна промене и буде способан да пронађе природан пут за развој алгебарских способности ученика, који је заснован на његовим интересовањима. Овај посао не сме бити ограничен искључиво на садржаје алгебре. Алгебарско мишљење треба да буде саставни део свих математичких активности ученика. На сваком часу математике, без обзира на садржај, већина активности обухвата апстраховање и генерализовање. Само у јединству тих односа можемо говорити о истинском развоју, не само алгебарских, него свих способности појединца које ће бити функционалне и примењиве у свакој ситуацији, како у школи тако и свакодневном животу.

Питање које се сада намеће је: *Који је то методички пут који ће да води ученике у процесу развијања алгебарских способности, прелазу од аритметике ка алгебри и уопште алгебарском образовању у настави математике у млађим разредима основне школе?* То питање је и централно питање нашег рада. Намера нам је да, имајући у виду карактеристике мишљења ученика овог узраста, специфичности учења садржаја алгебре и проблеме који прате њено разумевање, заснујемо методички приступ трансформације садржаја алгебре, који ће водити ка дефинисаним исходима издвојених алгебарских способности.

2.7. Функционално мишљење као крајњи домет алгебарског учења

Потреба за развијањем функционалног мишљења је у основи развоја ране алгебре у млађем школском периоду. Није довољно да ученик овлада одређеним алгебарским техникама, већ је потребно да развије такав начин размишљања, у коме ће анализирати и уочавати везе између променљивих и умети да их генерализује у шире алгебарске појмове. Моћ математике лежи у односима и трансформацијама које стварају обрасце и генерализације. Суштина образаца је основа структуралног знања, док је тежиште наставе математике неговање основних вештина у генерализацији, изражавању и систематском откривању математичких генерализација (Warren & Cooper, 2005). У том односу се функционално мишљење јавља као моћно оружје у развоју алгебарских способности ученика. Овај облик размишљања Блантон и Капут дефинишу као „репрезентативно размишљање које се фокусира на однос између две или више различитих количина“ (Blanton & Kaput, 2004: 142).

Функционално мишљење је врста алгебарског резоновања, које је усресређено на функције, посматране као однос између две различите величине. Генерализација лежи у срцу алгебарске мисли. Аритметичке операције се посматрају као функције, док алгебарска симболика подржава такво размишљање (Blanton, Levi, Crites, & Dougherty, 2011). На сличан начин и Смит (Smith, 2008) посматра функционално размишљање, при чему га види као когнитивну активност „која се фокусира на однос између две (или више) различитих количина, тачније врста размишљања, које воде до одређеног односа (појединачних појава) изражених кроз генерализације између објеката или количина“ (Smith, 2008: 143). Овакав облик размишљања укључује промишљање о конструкцијама и односима који постоје, њиховој идентификацији и генерализацији о међусобним везама између варијабли. Ворен и Купер (Warren & Cooper, 2005) тако појам *функција* схватају као однос између варијабилних величина, односно као начин на који се може изразити, на пример: нечија висина у односу на старост.

У настави математике функционално мишљење ученик испољава у следећим ситуацијама:

- пронaлажење законитости или образаца варијација у низу вредности за променљивих, на такав начин да се вредност следеће променљиве у низу може пронаћи из законитости које постоје у односима између претходних;
- коваријантна веза између променљивих, што подразумева везу која се изражава кроз промену вредности једне променљиве, под утицајем промене вредности друге.

У оба случаја аритметичко изражавање функционалних односа могуће је, само ако је његова сврха да кроз испитивање на конкретним бројевима води ка генерализацији. У другом случају посебно се издваја генерализација као облик мишљења која подразумева уочавање законитости или обрасца у односу између променљивих. Генерализација се увек види као један од основних показатеља и процеса који су карактеристични за алгебру. Каже се да је генерализација постигнута „када је исказано правило које се односи на све нивое у одређеној класи“ (Pinto & Cañadas, 2017: 474).

Развој функционалног мишљења повезан је са формулацијом и изражавањем генерализација, као и употребе истих за формирање предвиђања, олакшица и правила у алгебри. Од ученика очекујемо да савлада алгебарске нотације и да уме да их користи у изражавању образаца и односа. Развој функционалног закључивања треба да буде заснован на различитим видовима репрезентација. Посебно се истичу предности у коришћењу визуелних вештина у решавању проблема алгебре. Генерализације засноване на проучавању визуелних образаца ученицима омогућавају да једноставније ступе у контакт са динамичким компонентама идејних конструкција математичких објеката и појмова, а то све даље води ка лакшем формирању значења симбола и израза (Barbosa & Vale, 2015: 57).

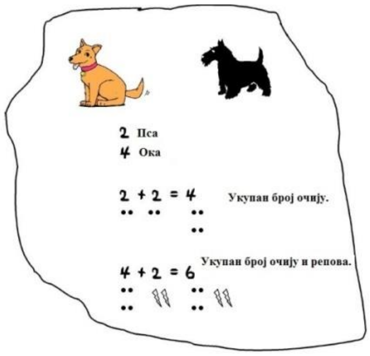
Трагање за обрасцима који постоје између елемената низа или функционалних односа између непознатих, директно су повезани са процесом генерализације. Ова врста садржаја може бити моћно средство за разумевање односа између количина, које стоје у основи математичких функција, доприносећи тако успостављању односа функционалног типа (Blanton & Kaput, 2005; Warren, 2005a, 2005b). Ако ученик разуме односе који постоје између елемената или величина, лакше ће разумети и доделити значења језику и симболима, који се користе у алгебри и одговарајућим репрезентативним системима. Размишљање о односу који постоји између величина, своди се на њихову анализу, као и однос између њих, који даље постепено води ка генерализацији која суштински изражава основну идеју алгебарског начина размишљања. Студије сугеришу да ученици млађег школског узраста могу узети у обзир односе између два квантитета истовремено, разумети правила улазно-излазних информација и идентификовати узајамне односе (Stephens, Ellis, Blanton, & Brizuela, 2017).

У изградњи способности функционалног мишљења у великој мери помаже ослањање на визуелизацију, односно, коришћење таблица и дијаграма за увиђање квантитативних односа. На овај начин, ученици су у могућности да схвате узајамне односе и зависност између појединих података или величина (променљивих). Значајна упутства у ранијим разредима, могу иницирати транзицију репрезентативних алата од непознатих до транспарентних објеката у размишљању деце, тако да деца могу да усмере своју пажњу на сложеније задатке у старијим разредима основне школе и касније (Blanton & Kaput, 2011). Појам функције и њене репрезентације представља моћно средство за моделовање физичких карактеристика и мера, за расуђивање или доказ као и за потребу прилагођавања математичких модела у свакодневним или научним применама (Carraher & Schliemann, 2018).

Значајну улогу у процесу развоја функционалног мишљења имају низови. Различите врсте низа могу утицати на начин на који ученик доживљава обрасце којима се изражавају особине односа између променљивих или елемената низа. Када истражују ове обрасце, од ученика се очекује да пронађу однос између елемената у низу, као и положај елемента у истом. На основу тог сазнања ученици су у стању да одреде положај или вредност елемената у низу. На овај начин ученици се мотивишу да размишљају о низовима као функцијама, уместо да се фокусирају само на варијабилност и однос између променљивих.

Задаци који обухватају проблеме низа и проучавање образаца који се понављају или расту, могу се изразити на различите начине и обухватити различите визуелне и невизуелне облике. У први план се истиче употреба визуелних помагала у представљању проблема, који укључују тражење образаца. Уочавање обрасца нужно је први корак у тражењу правилности и ученици би требало да имају способност перцепције, односно увиђања образаца на неколико начина, што им омогућава да напусте све оне који нису корисни за решавање задатка (Barbosa & Vale, 2015). Дакле, изражавање генерализација може обухватити цртеже, графиконе и речи или објашњења одређеног феномена карактеристичног за променљиве. Ову црту флексибилности у мишљењу посебно треба развијати на млађем школском узрасту, при чему идеје реалног контекста и проблема реалног живота више добијају на значају.

Истраживање које су спровели Блантон и Капут (Blanton & Kaput, 2004) показује да се функционално мишљење може систематски развијати од почетка систематског математичког образовања. Истраживачи су испитивали на који начин деца у вртићу и млађим разредима основне школе развијају идеју функционалних односа и изражавају функције. Подаци су анализирани према облицима репрезентација које ученици користе кроз напредовање у развијању математичког језика, операција које се обављају и односа између једне или више различитих величина. Истраживање је било засновано на задатку у игри „Очи и репови“, који укључује развијање функционалних односа између произвољног броја паса и укупног броја њихових очију и репова. Овај проблем је изабран, јер је његова доступност у свим разредима омогућила схватање лонгитудиналних трендова у функционалном размишљању ученика различитог узраста. Резултати су показали да су деца у вртићу користила бројање видљивих предмета и различитих репрезентација како би означила број очију и репова на слици (Слика 6).



Слика 6. *Репрезентација проблема „Број очију и репова два пса“* (Blanton & Kaput, 2004: 36)

За представљање односа међу величинама и уочавање њихове функционалне зависности, по мишљењу Блантона и Капута највише погодују Т − таблице (Blanton & Kaput, 2004). Т − таблице представљају врсту табеле које се састоје из две колоне, при чему се у првој колони исписују вредности независне променљиве, док се у колони поред исписују вредности зависне променљиве у проблему. У примеру задатка „Очи и репови“ независну променљиву би чинио број паса, док би вредности зависне променљиве у том случају представљао број очију и број репова.

У овом истраживању деца су радила на подударности која постоји у односу између количина и бројчаном приказу тог односа. На узрасту од првог до петог разреда основне школе Т-таблице су биле најчешћи облик приказа, који су ученици користили и којим су представљали податке. У истраживању је примећено да су ученици трећег разреда били у могућности да симболизују количине и да разумеју шта симболи представљају. У четвртом разреду су били у стању да напишу однос након састављања Т-таблице и врло често користили речи и симболе да опишу функције. На основу тога може се закључити да су учитељи у могућности, да оваквим задацима и вежбањима постепено обликују мишљење ученика овог узраста, тако да репрезентативни и језички алати постану део све већег ученичког репертоара алгебарског расуђивања.

Путања која може послужити као оквир за рад са децом на развоју функционалног мишљења, према мишљењу Блантона и сарадника (2015), укључује различите нивое у уопштавању функционалних односа одређивањем да ли ученик може да:

а) примети математичке карактеристике у задатку,

б) разуме односе између количина кроз рекурзивно или функционално размишљање,

в) посматра правилност унутар одређених случајева, или на неки други начин у различитим облицима,

г) опише функционални однос у генерализованом облику,

д) опише две количине упоређивањем и функционалним односом између њих и

е) бави се функцијама као објектима уз разумевање граница општости (Blanton, Brizuela, Gardiner, Sawrey & Newman-Owens, 2015).

Праћење ових нивоа је значајно, јер осветљава пут о начинима разумевања функционалних односа код деце млађег школског узраста.

Коришћење различитих видова контекста, односно различитих облика обликовања проблемске ситуације, омогућава да у процесу наставе ученик поступно развија функционално мишљење. Из тог разлога у овом раду посебно ћемо обратити пажњу на коришћење реалних ситуација свакодневног живота, како би омогућили ученицима, да кроз процес моделовања решавају задатке, генерализују, уопштавају и симболички изражавају алгебарске структуре. Почетну наставу математике могуће је „преобликовати на систематски и темељан начин, али не игнорисањем рачуна и аритметике, већ проширивањем задатака на начине који укључују претварање старих у нове форме које се намерно контекстуализују, продубљују и користе за учење основних вештина и бројевних односа, интегришући их у форму дубљих математичких схватања“ (Blanton & Kaput, 2005: 40). Генерализација је људска активност и урођени природни капацитет, који је својствен за сваког човека, па и ученика млађег школског узраста, тако да је развијеност способности функционалног мишљења његов природан исход.

Садржаји који су везани за идеју функције и развој функционалног мишљења су садржаји који се односе на развијање идеје алгебарског низа. Разноврсна вежбања која укључују различите садржаје математике (аритметике), могу бити изражена у облику низа. Планови и програми наставе и учења за математику у млађим разредима основне школе управо и наглашавају важност и значај задавања, формирања и одређивања чланова низа, као садржаја којим се ученици повезују са светом око себе, а све то чини темељ алгебарског размишљања. Појам низа, на овом нивоу математичког образовања, најчешће се односи на тражење редоследа или правила у низу података.

Бројна истраживања показују да низови могу бити корисни у настави алгебре, јер могу:

1) подржати ученичко разумевање зависних односа између величина које стоје у основи математичке функције (Carraher, Schliemann & Schwartz, 2008);
2) послужити као конкретан и транспарентан пример за увођење, ученика млађег школског узраста у процесе апстракције и генерализације (Kieran, 1992);
3) подстаћи ученике да развијају језичка објашњења као доказ о начину на који они размишљају о правилима у низовима (Beatty & Moss, 2006).

У првом сусрету деце са појмом низа, од њих се може тражити да препознају и опишу визуелно представљене низове у њиховом окружењу (на одећи, на сликама, на тепиху, на игралишту или на стварима код њихове куће). Данас постоји велики број књига и сликовница које се могу користити за примере, понављајућих, растућих и других врста низа који се могу пронаћи у природи. Управо ови визуелни обрасци заузимају прво место у развоју алгебарског мишљења, јер деца на оваквим примерима уочавају одређене правилности понављања. Визуелним сликама намећу се структурне правилности и описују правила која помажу ученику у проширивању или предвиђању законитости. Како сматра Мек Гарви (McGarvey, 2012) визуелним истраживањем слике, прошло искуство и знање обликује перцепцију, а перцепција даље обликује оно што видимо и што сазнајемо. Наметањем структуре и правилности у низовима на сликама омогућава откривање смисла и правилности у непознатим контекстима. Исти аутор издваја неколико наставних активности, које би могле бити коришћене у развијању појма низа и подршци развоју функционалног мишљења: давање инструкција на уочавање правилности понављања у низовима, обезбеђивање сталних, понављајућих слика и неправилних непредвидивих слика и на крају усмеравање ученичке пажње на јединице или елементе који се понављају (McGarvey, 2012).

Истраживања Вотерс (Waters, 2004) показују да је развијање идеје низа могуће и у раду са децом предшколског узраста. Наиме, ауторка је открила да предшколска деца стварају и описују сопствене низове, који се крећу од понављања једноставних облика, све до понављања геометријских облика. Међутим, да би тај процес био што успешнији потребно је пружити већу подршку васпитачима о значају развијања ових елемената. Њено истраживање сугерише да су потребна даља истраживања, како би се подржало укључивање идеје низа у програме раног детињства, као и развијање способности развијања идеје низа кроз моделовање низова у окружењу и односа између низа и случајности (Waters, 2004).

У сличном истраживању које су спровели Папић и Малиган (Papic & Mulligan, 2007) дошло се до закључка да дечије вештине низања могу развити код деце сложене појмове мишљења и пре формалног школовања. Искуства са шаблонима и понављањима у вртићу охрабрују децу да виде једноставније структуру користећи се понављањима представа и образаца у различитим просторним облицима, као што су мреже, низови, бројевне слике и бројевни низови. Они сматрају да развој шаблона као јединице понављања подстиче друге математичке процесе, као што су способности множења и вештине трансформација (Papic & Mulligan, 2007).

Идеја низа и његово развијање на вишем нивоу започиње у првом разреду основне школе. Тада се први пут појављују задаци у којима треба испратити низ одређених боја (вежбе класификације или серијације), затим задаци у којима треба наставити низ облика (прво облике који су блиски ученику, а касније све апстрактнији), све док се не појаве и задаци у којима се одређују низови бројева. У овом процесу могу се идентификовати два облика низова:

1) *понављајући* и
2) *растући* (Papic & Mulligan, 2007: 592).

Понављајући низови садрже препознатљиву јединицу понављања, то јест, образац има цикличну структуру која је састављена од понављања мањих елемената. Ти елементи се могу разликовати по броју и сложености предмета у зависности од атрибута као што су величина, облик, димензија и правац, а најчешће се називају сегменти или делови (Papic, 2007). Када је реч о овој врсти низа, деца их могу савладати веома рано, још у предшколском периоду. Понављајући низ обично садржи два или три елемента који се понављају (нпр. АБАБАБ) и који се разликују према кључној димензији или особини, попут боје (плаво-црвено-плаво-црвено-плаво-црвено), облика (квадрат-троугао-квадрат-троугао-квадрат-троугао) или величине (мало-велико-мало-велико-мало-велико). Неке од понављајућих низова издваја и Папић: *линеарне низове* (понављање је линеарно у облику линије), *циклични низови* (који немају јасан почетак или крај) и *низови у облику „школице“* (карактерише способност ученика да разуме низове у облику хоризонтално и вертикално постављених елемената низа) (Papic, 2007).

Растући низови су нешто захтевнији за ученике. Ове низове карактерише систематско повећавање или смањивање вредности елемената у низу. Они представљају варијацију једног скупа података, где се може идентификовати одређени однос између узастопних елемената унутар низа. У растућим низовима може се захтевати од ученика да наставе неки низ или одреде „удаљене генерализације“ односно број на одређеном месту у низу. Растући низови когнитивно су захтевнији и сложенији у односу на понављајуће низове, закључак је истраживања Ворен (Warren, 2005).

Истраживање које су спровели Мос и Мек Неб (Moss & McNab, 2011) имало је за циљ да открије да ли се развијањем идеје низа може подстицати развој генерализације код ученика. Резултати су показали да су ученици развили широко разумевање правила у функцијама сложених низова из два дела. Они су могли предвидети како ће низ да расте, као и да пронађу општа правила за геометријске и нумеричке низове. Поред тога, истраживање је показало да су ученици били у стању да своје схватање низа и промена у низу пренесу и изразе у новом наративном контексту.

У истраживању које су спровели Сингер и Воиса (Singer & Voica, 2008) са ученицима узраста од 7 до 17 година, желели су да испитају на који начин деца разумеју идеју низа. У истраживању су користили различите типове низа (понављајуће и растуће). Резултати су показали постојање способности за решавање различитих репрезентација и коришћење одговарајућих алгебарских и геометријских алата за прављење веза између елемената низа. Примарни закључак овог истраживања састојао се у чињеници да коришћење низа може послужити као подршка за разумевање површинске и дубинске структуре математичких идеја. Са друге стране, у истраживању су открили да ученици имају природне способности да врше трансфер знања између алгебарског и геометријског контекста, што даље доприноси бољем разумевању алгебре и геометрије, као и везе између њих.

Задаци карактеристични за садржаје који се односе на низ, на овом узрасту, обухватају, поред низа геометријских фигура и низове са бројевима, као и задатке у којима је карактеристично вербално исказивање особина низа који се посматра. Развијање функционалне зависности и функционалног мишљења гради се на развијању идеје низа, при чему се пред ученика поставља задатак да открије одређене генерализације и да их изрази алгебарском нотацијом.

Суштинско својство развоја функционалног мишљења јесте уочавање односа, развијање генерализација и њихово изражавање. Тако, Радфорд (Radford, 2006) наглашава да се у процесу уопштавања и генерализације низа, алгебарски начин размишљања ослања на способности: *схватања заједничких карактеристика* које су уочене на неким елементима или објектима неког низа, свесности да се заједничке вредности и карактеристике *односе на све изразе тог низа*, и на крају његова употреба *како би се изразио* било који део тог низа. За ученика, процес развијања појма низа није процес који се дешава одједном, већ је процес који траје и условљен је уочавањем и издвајањем сличности и разлика између елемената. Одговарајућа идентификација онога што је исто, и оног што је другачије, унутар одређеног узорка низа јесте пресудан елемент у коначном откривању алгебарске симболичке генерализације низа. Суштина није само у откривању правила између елемената у низу, већ и у способности да се то правило уопшти, тако да важи за сваки део низа.

Дуго се претпостављало да деца млађег школског узраста не могу да изразе генерализације преко апстрактнијих система и симбола. Истраживање које је спровела Ворен (2005) сугерише да ученици овог узраста то ипак могу. На основу овог истраживања она издваја четири главне категорије којима се деца служе у изражавању генерализација: „а) коришћење великих бројева за изражавање генерализација, б) једноставно понављање броја n-ова како би се формирао m, два n-а повезана чине m и коначно 3 n-а заједно чине m, в) користећи речи за изражавање генерализација, као што су: двоструко n и троструко n или два пута n и три пута n, и г) формална нотација, као што је $2 \cdot n$ и $3 \cdot n$" (Warren, 2005: 765).

Поред тога, Сингер и Воиса (2008) тврде да ученици чак и појам бесконачности скупа бројева заснивају на процесу перцепције низа. Ученици узраста основне школе сазнања о бесконачности могу заснивати на просторно ритмичким перцепцијама: након што науче да рачунају могу да развијају низове природних бројева који су неограничено дуги без посебне наставе (обуке), јер је ово сазнање карактеристика ума ученика (Singer & Voica, 2008).

3. КОНТЕКСТУАЛНИ ПРИСТУП НАСТАВИ АЛГЕБРЕ У МЛАЂИМ РАЗРЕДИМА ОСНОВНЕ ШКОЛЕ

Садржаји алгебре заузимају важно место у математичком образовању ученика у млађим разредима основне школе. Њихово усвајање и разумевање представља важан исход математичког образовања у овом периоду, а развијање алгебарских способности у процесу наставе и учења представља способности који одређују исходе каснијег образовања. Из тих разлога посебну пажњу треба посветити методичком обликовању садржаја алгебре у почетној настави математике и избору стратегија и приступа методичке трансформације ових садржаја. Видели смо да бројна истраживања указују на проблеме и тешкоће које прате усвајање садржаја алгебре, њихово неразумевање на потребном нивоу од стране ученика, које касније доводи до проблема у учењу и примени ових садржаја у учењу математике. Све то ствара потребу за разматрањем методичког приступа, који ће превазићи наведене проблеме и допринети усвајању садржаја алгебре на највишем нивоу разумевања и примене, и кроз који ће ученици развити неопходне алгебарске способности. Ове способности ће даље представљати основу за увођење алгебарске нотације, извођење закључака и генерализација на симболичком плану и добро разумевање свих алгебарских законитости.

У конципирању методичког оквира приступа учењу садржаја алгебре полазишта су нам чиниле следећи ставови:

– учење алгебре треба да буде чврсто инкорпорирано у садржаје аритметике и полазиште за учење алгебарских садржаја буде засновано на аритметичким садржајима;
– приступ учењу алгебарских садржаја мора бити повезан са искуством ученика, бити заснован на ситуацијама учења које су ученику блиске и које су део његовог свакодневног живота;
– ученик мора бити активан у процесу учења и пажљиво вођен у процесу учења од стране учитеља кроз диференциран приступ, како би постепено прелазио из света конкретног у свет апстрактног, и на тај начин из аритметике градио алгебарска сазнања.

На бази оваквих ставова у конципирању методичког приступа одабрали смо контекстуални приступ учењу. Циљ је да ученици, почевши од млађих разреда основне школе, конструишу скуп искустава која ће учење алгебре на овом узрасту за њих учинити смисленим и оправданим. На овај начин приступ учењу садржаја алгебре постаје ближи и разумљивији ученику, јер је контекст учења близак његовом искуству и животу, а ствара мање апстрактни оквир кроз који се могу разумети њени принципи (Aczel, 1998). Карактеристике мишљења деце на млађем школском узрасту на нивоу су конкретних операција, тако да апстрактност референтног језика симбола у алгебри често представља проблем. Основна карактеристика алгебре налази се у специфичности алгебарског језика, тако да језик симбола и на овај начин исказаних законитости и генерализација може бити ограничење у учењу ових садржаја. Потреба деце на овом узрасту је да разумеју задатке и проблеме који су конкретни, тако да контекст у облику слике или реалне ситуације, као и манипулације објектима реалне стварности представља добар пут за савладавање алгебарских проблема.

Приступ у процесу учења алгебарских садржаја и настави алгебре, заснован на принципима контекстуалног учења, мора да садржи три корака:

1) реалистична ситуација која изражава алгебарски проблем;
2) моделовање реалистичне ситуације где се на једноставан и концизан начин приказују идеје и односи, чије би описивање било дуго и комплексно, па би самим тим суштина била тешко замислива.
3) превођење идеје на конкретно подручје референтног алгебарског језика уз коришћење алгебарских симбола и операција, при чему ученици не морају да памте релевантне нумеричке податке, који се односе на проблем, већ су у ситуацији да решење или законитост уоче и генерализују.

Полазиште у контекстуалном приступ учењу представља *контекст*, односно реалистична ситуација која даје повод за активност ученика у процесу учења. Улога контекста је веома важна у усвајању математичких садржаја у млађим разредима основне школе. Применом реалног контекста у настави и учењу алгебарских садржаја у могућности смо да учење не постане само инструментално, већ и релационо. На овај начин је ученик је у позицији да разуме садржаје и вешто их користи у свакодневном животу. Ученик ће притом бити у стању да решава проблеме, а самим тим и осети жељу и мотив да даље учи и напредује. Ако ученици искусе процес усвајања знања из математике као „проширење здравог разума, онда неће доживети дихтомију свакодневног животног искуства и математике, већ ће оба бити део исте реалности" (Gravemeijer & Doorman, 1999: 127). Проблеми у облику контекста су укорењени у стварности, док са друге стране такви проблеми омогућавају ученицима да прошире своју реалност.

Са аспекта почетне наставе алгебре, контекст би се могао схватити као ситуација у којој се остварују интеракције и активности које означавају процесе учења и наставе, а засноване су на реалности. У оквиру ових активности значајан је психолошки аспект контекста, при чему се мисли на карактеристике психолошког развоја деце млађег школског узраста, њихове способности, знања, жеље, навике и друго.

Општа алгебарска знања добијају се из „занимљивих" и стварних животних ситуација или математичких проблема, који су искуствено блиски ученику кроз низ активности хоризонталне и вертикалне математизације. Дакле, ученици прво истражују активности кроз процесе *хоризонталне математизације*, као што су шематизација, откривање односа и законитости, како би се изградио неформални математички модел. Након тога се укључују активности које подразумевају *вертикалну математизацију* и обухватају поступке генерализације, односно уопштавања.

Ученицима треба понудити такве проблеме и задатке у којима ће бити у ситуацији да раде са мерљивим атрибутима стварних објеката (дужина, површина, количина, маса и друго), тако да ће на тај начин правити поређења која омогућавају да направе основно разумевање једнакости и неједнакости као и њихових својстава. За описивање односа који постоје у тим везама користе се речи, дужи, краћи, тежи, мањи, већи од, мањи од, једнако. Управо кроз те речи деца су у ситуацији да представљају поређења користећи се симболима. Касније ти симболи не наглашавају предмет него количину, а након тога и број (Slovin & Venenciano, 2008). Када је у питању схватање и разумевање идеје симбола као ознаке за непознату и промењиву, Радфорд (Radford, 2000) у свом истраживању показује да је генерализација природног језика од суштинског значаја за развој симболичког записа. Симболичка формула се појављује као говор који се сажима или скраћује. То управо говори о значају свакодневног, природног језика у формирању не само симбола него и свих алгебарских записа.

Поред стварања ситуација за учење алгебре, односно обезбеђивања контекста за то учење веома су важне и активности моделовања те ситуације и визуелног представљања квантитативних односа који омогућавају развој значења алгебарских симбола и процедура (Зељић и Дабић, 2014). Реални контекст створен у сврху учења представља полазну основу за учење, он је близак ученику и конкретан, а следећи корак је визуализација те ситуације, односно датог контекста, која најпре може бити представљен шематски, сликом или на неки други начин, а затим и на менталном плану. Визуелизација природно прати процес учења, који се одвија у контексту и који се не може посматрати као независан и изолован процес. Визуелизација представља основу асимиловања апстрактног алгебарског значења и посебних појмова, чиме се остварује пут преласка од реалног ка апстрактном у почетној настави алгебре. Процес апстракције се даље наставља кроз визуелизацију и омогућава формирање менталних слика које Клементс дефинише као „појаву менталне активности која одговара перцепцији објекта, чак и када објекат није у домету чула“ (Clement, 1981, према: Gutiérrez, 1996).

Бишоп (Bishop, 1983) препознаје два типа способности у визуелизацији: визуелно процесуирање и тумачење фигуралне информације (према: Gutiérrez, 1996: 7). Визуелно процесуирање информација укључује превођење апстрактних односа и нефигуралних података у визуелном смислу, манипулације и генерализације визуелног приказа, и трансформације једне визуелне слике у другу. Тумачење фигуралне информације укључује знање о визуелним скуповима и просторном речнику који се користи у геометријском раду, графиконима и дијаграмима свих врста. У ову способност спада и ”читање” и тумачење визуелних слика, било да су физичке или менталне природе, при чему се користе све релевантне информације које могу помоћи у решавању проблема (према Gutiérrez, 1996).

Улога визуелизације у учењу садржаја алгебре, према мишљењу Тортона (2001) може се изразити кроз три карактеристике:

1) визуелизацијом се лако развија опште правило за одређени садржај алгебре, а на основу шаблона;
2) визуелизација омогућава јасне и моћне приступе решавању проблема и повезивању различитих области математике;
3) важност препознавања и вредновања различитих стилова учења и помагање ученицима да развију репертоар техника учења кроз различите математичке ситуације (Thorton, 2001: 251).

Коришћењем различитих модела у настави алгебре, омогућено је јасније и потпуније сагледавање сложенијих појмова. Модели служе као важан алат за премошћавање јаза између неформалног математичког контекста и формалне математике. Прво, ученици теже да развију стратегије повезане са контекстом. Касније, одређени аспекти контекстуалне ситуације могу постати више генерални, што значи да контекст мање или више добија карактер модела, и као такав може пружити подршку за решавање других сличних проблема. На крају, модели омогућавају ученицима приступ формалном математичком знању (Van den Heuvel-Panhuizen, 2000).

У процесу усвајања алгебарског садржаја као и развијању алгебарског мишљења, посебно се мора нагласити повезаност са аритметиком. Аритметика, као једна од значајних грана математике, бави се проучавањем основних особина одређених рачунских операција са бројевима. Кроз ранија истраживања свакодневне математике дошло се до закључка да су богати, развијени контексти пружили значајне оквире математичких идеја за децу која уче. Уочено је да су „новчане трансакције“, на пример, подржале логику множења („што више плаћате, то више ствари добијате“, „кусур враћен купцу увек мора бити мањи од добијене суме новца“ итд.) (Carraher, et al., 2000: 19).

На сличан начин, Радфорд (2006) се у свом раду бави несимболичким начином размишљања ученика другог разреда и вези између рачунања и развоја алгебарског начина размишљања. Овакав начин размишљања он назива контекстуалним алгебарским размишљањем, како би нагласио чињеницу да су значења са којим се развијају алгебарске формуле повезане са просторним или другим контекстуалним знацима генерализације. У случају ученика другог разреда, калкулатор се показао изузетно корисним у развоју чињеничног и контекстуалног алгебарског размишљања. Његова корисност, међутим, није била ограничена на израду нумеричких одговора, који су били изван ограничених параметара знања ученика. Његова корисност се налази у појмовном оквиру, који је омогућио ученицима да представе калкулације које се изводе, и тако да дођу до алгебарских формула. Можда то није случајност „историјски гледано, где је запањујућа консолидација алгебре, у касној ренесанси, била праћена покушајима изградње првих рачунских машина” (Radford, 2006: 319).

У истраживању које је спровео Киеран (2004) са ученицима осмог разреда наставник је имао за циљ да помогне ученицима да разумеју значење облика алгебарских неједначина, користећи реалан контекст у решавању проблема. Ови контексти обухватали су ситуације са неједначинама кроз алгебарску активност која се карактерише на глобалном мета нивоу. Проблем је послужио као позадина за генерисање израза који садржи симбол неједнакости. Ученици су користећи неалгебарске методе формирали алгебарску неједнакост. Решавање контекстуализованог проблема успешно је искоришћено како би се обезбедило значење неједначине и њеног симболичког обрасца (Kieran, 2004b). На основу овог истраживања, може се закључити да контекст може послужити као значајна основа изградњи и разумевању проблема са неједначинама као и разумевања самог појма једначине. Контекст свакодневног живота ученицима је омогућио да кроз аритметичке активности тестирају ситуације, и генерализују симболички изразе у неједначине. Значај није само у формирању појма неједначине, већ и у томе што се на очигледан начин може нагласити разлика између једначине и неједначине, што представља један од проблема са којима се ученици сусрећу у учењу садржаја ране алгебре.

Капут (Kaput, 1994) скреће пажњу на проблем односа који постоји између математичких симболичких система попут графикона и свакодневне реалности. Проблем, по његовом мишљењу, јесте у раскораку који постоји између формалне математике и стварног људског искуства. Овај раскорак објашњава разликом између математичких функција које су дефинисане алгебарским формулама и емпиријским функцијама које описују свакодневни животни феномени. Према његовом мишљењу, ситуације у којима ученици могу максимално искористити своје аутентично искуство ради истраживања, могу помоћи да се оствари повезивање са формалним репрезентацијама. Уколико би се математичка симболизација појављивала на природан начин, у активностима ученика, тако би се и формална математика могла схватити као продужетак њиховог властитог аутентичног искуства (Kaput, 1994).

Истраживање које су спровели Боеро и сарадници (Boero et al., 2001) са ученицима осмог разреда имала је за циљ развијање појма функције, кроз активности које укључују табеле, графиконе и формуле које су везане за геометријске ентитете (дужине, линије, површине...). Они су запазили да се модели за опис ових алгебарских ситуација могу замислити као кретање два лица која се пењу и спуштају низ степенице.

Како сматрају аутори математичко искуство, у овом случају, везано је за обично животно искуство и засновано је на њиховој међусобној вези. Активности цртања линија на равним површима пружају подршку за визуелно схватање тачке пресека. Ситуација свакодневног живота може бити подстакнута и технолошким средством које обезбеђује физичку представу тачке пресека или сусрета. Све наведено изражава потребу за различитим врстама свакодневног искуства, које се може изразити кроз „непосредну везу у првом случају, визуелизацију у другом случају, и технолошки посредовану везу у трећем случају“ (Boero et al., 2001: 190).

Студија коју су спровели Карпентер и Ливај (Carpenter & Levi, 2000), имала је за циљ да истражи како дизајнирати наставни процес, како би деци помогли у следећем кораку – да генерализују и формализују своје знање у моћне апстрактне системе и омогуће рад на математичким идејама, тј. остваре прелазак са аритметичког размишљања на алгебарски начин размишљања. Студија је заснована на постојећим истраживањима о *Когнитивно Вођеним Упутствима* (*CGI – Cognitively Guided Instruction*). Суштинска карактеристика овако схваћене наставе, заснована је на идеји контекстуалне наставе и учења, односно поставкама реалистичног математичког образовања. Резултати овог истраживања су показали да су деца у учионицама кроз овако организовану наставу, тежили изградњи различитих стратегија за решавање низа проблема, који укључују основне аритметичке операције. Ученици су били у стању да флексибилно и креативно користе различите стратегије у решавању проблема. Деца су најпре решавала проблеме моделовањем проблемских ситуација користећи физичке материјале. Разматрајући стратегије моделовања, деца почињу апстрактно да користе ове стратегије, тако да више не постоји потреба за стварним материјалима у решавању проблема. Касније ученици у решавању проблема користе аритметичке процедуре које су у суштини апстракције физичких манипулација. Крајња активност обухвата самостално размишљање о рачунским процедурама. Истраживање је показало да деца првог и другог разреда могу успешно користити различите моделе како би се обезбедила основа за фокусирање дискусије о генерализацијама и нотационом систему којим би се изразиле ове генерализације. У овом истраживању деци је био потребан подстрек у облику афирмативних питања, али без обзира на то студија је показала да и аритметички изрази могу да обезбеде контекст за продуктивну математичку активност, која упућује ученике у алгебарско размишљање.

Нека истраживања су показала да чак и многи млади адолесценти имају потешкоћа у преласку на обрасце (формуле) као функције. То је изазвано недостатком одговарајућег језика који је потребан за описивање овог односа, односно недостатак способности коришћења стратегија за описивање генерализација. У истраживању које је спровела Ворен (2005), кроз експеримент са ученицима четвртог разреда, покушала је да кроз очигледне примере црвених и зелених плочица у низу, развије идеју низа и да омогући представљање тог низа и у облику симбола (словних ознака). Ово истраживање показало је да деца могу да изразе генерализације са апстрактним системима симбола, при чему су користили визуелне представе, како би повећали очигледност математичког низа. При томе, шаблони у облику низа плочица представљају моделе низа, чиме изражавају спону између реалног живота и формалних алгебарских нотација (Warren, 2005a).

Са друге стране, могло би се поставити питање: *Да ли одређени контексти и физичке реалне ситуације доводе до шума (грешака) који ученици морају научити да филтрирају и игноришу?* Карахер и сарадници (2000) сматрају да је то немогуће. Према њиховом мишљењу, већина ученика ће потпуније сагледати математичка знања, јер она долазе из њихове способности да их примене на широк низ различитих ситуација. То се може постићи само ако се схвати како математички појмови и репрезентативни алати утичу на посебне карактеристике реалних ситуација (Carraher, Schliemann & Brizuela, 2000: 19).

Ако се у обзир узму многобројна истраживања о значају и предностима контекстуалног приступа у настави математике, са једне стране, и специфичностима и карактеристикама ране алгебре (наставе алгебре у млађим разредима основне школе), са друге стране, могу се извести следеће смернице за наставу:

1) Контекстуална настава и учење математике засновано на принципима РМО може се организовати и применити у учионицама и условима у складу са нашим планом и програмом (адекватна организација, адекватна припрема окружења и обука наставника);
2) Неопходна је анализа способности ученика и кључних појмова које је потребно усвојити;
3) Неопходан је адекватан одабир и трансформација садржаја који омогућавају реалистичан контекст;
4) Оспособљавање ученика за самостално решавање проблема (самостално проналажење пута за усвајање садржаја и развијање способности које треба да произведу темељ за даље учење – поновно откривање математичких истина);
5) Решавање проблема заснованих на карактеристикама реалног света треба да омогући,не само усвајање алгебарских знања, већ првенствено развој алгебарских способности које даљим радом треба усавршавати.

Наведене смернице представљају само оквир за деловање и остваривање наставе алгебре засноване на принципима контекстуалног учења. У даљем тексту детаљније ће бити приказане основе овог приступа и могућности његове примене у настави математике у млађим разредима основне школе у учењу садржаја алгебре.

3.1. Реални контекст – полазиште у контекстуалном приступу учењу садржаја алгебре

Контекстуални приступ у настави математике обухвата процес усвајања математичког појма кроз трансформацију математичког садржаја. Један од најзначајнијих сегмената овако засноване наставе математике је задатак заснован на реалном контексту. Овај проблем се може дефинисати као „проблемска ситуација која је искуствено блиска ученику“ (Gravemeijer & Doorman, 1999: 111). Дакле, овако конципиран задатак могли би ближе одредити као: *математички проблем који је заснован на конкретној ситуацији свакодневног живота.* Када је реч о појму реалног контекста, често се у литератури појављују синоними или појмови сличног значења. Тако се задаци реалног контекста често називају или „реалне проблемске ситуације“, „проблеми свакодневног живота“, „проблеми стварног живота“, „аутентични проблеми“ и тако даље. Сви ови називи суштински представљају синониме за један исти појам – задатак реалног контекста.

Може се поставити питање: *Зашто реалан контекст и која је његова улога у почетној настави математике?* На ово питање можемо одговорити на неколико начина. Прво, контекстуална настава и учење у складу је са карактеристикама когнитивног развоја ученика овог узраста. Тежње у савременој методици наставе математике усмерене су ка идеји изградње појмова и решавања проблема од конкретног ка апстрактном. Друго, ученици су у стању да боље разумеју и схвате зашто нешто уче. Проблем усвајања математичких појмова крије се у чињеници да је настава математике врло често апстрактна ученику, и да ученик овог узраста тешко схвата суштину неког појма или процеса уколико није очигледан. Самим тим, ученик ће у репрезентативном контексту, кроз пример, схватити где и како то „знање“ може искористити у реалној ситуацији у свакодневном животу. Употребом реалног контекста обезбеђује се да ученици уче кроз њима смислене активности, односно, активности које разумеју и прихватају као „логичне“. Поред тога, издваја се и појам репрезентативног контекста. Овај појам односи се на „интеракције и дискурс који су конструисани у учионици око одређене репрезентације“ (Ball, 1993:157). Овакви репрезентативни контексти служе као начин да ученици развију математичке идеје и појмове или их трансформишу у њима смислене облике.

Ако се у ситуацијама учења или настави говори о појму контекста, он се посматра као појам који може изражавати два основна значења у ширем смислу: прво је да се појам реалног контекста односи на *окружење* у коме се одвија учење, док се друга односи на *карактеристике задатка,* који је предочен ученицима (укључује речи и слике које помажу ученику да разумеју задатак, питање или ситуацију у којој се налази).

Значи улога контекста у почетној настави математике би се могла посматрати из перспективе садржаја и перспективе наставе. Из перспективе садржаја, контекст би се могао схватити као веза којом се остварује повезивање наставних садржаја математике са реалним животним ситуацијама средине, која окружује ученика и даје смисао самом садржају. Из перспективе наставе појам контекста може обухватити специфичности наставног процеса, у смислу проналажења нових модела у поступку усвајања математичких појмова.

Постоји могућност да се појам контекста поистовети са другим појмовима, као што су: окружење за учење и наставу са једне стране и контекстуални чиниоци учења и наставе са друге. Потребно је, из тог разлога направити јасну дистанцу између ових појмова у настави и њихово разликовање у зависности од карактеристика контекстуалног учења. Узмимо на пример окружење за наставу и учење у учионици који најчешће нису део контекста учења и поучавања, јер се на овај начин ничим не даје смисао садржајима. Са друге стране, многи контекстуални чиниоци попут: социјалних услова, школске администрације, материјално-техничке опремљености школе, могу утицати на наставу и учење, али се не могу сматрати наставним контекстом, ако нису намерно укључени у њега и не дају смисао учењу (Purković i Jelaska, 2014).

Де Ланж (De Lange, 1987) разликује три врсте контекста. Контексти *првог реда* укључују превођење текстуално представљених математичких проблема, док контексти *другог* и *трећег реда* заправо стварају прилику за математизацију. Управо се контексти *трећег реда* схватају као контексти који ученицима омогућавају да открију нове математичке појмове.

Контексти се могу разликовати с обзиром на њихов степен реалности: без контекста, маскирани и релевантни (битни) контексти (De Lange, 1979). У првом случају нема реалног контекста, већ су у питању чисти математички проблеми (математички контекст). Маскирани контексти су нешто слично оним првим, где су за разлику од њих само замаскирани неком ситуацијом. Релевантни контексти су контексти који дају релевантан допринос проблему и значајни су за његово разумевање и решавање (према Van den Heuvel-Panhuizen, 1996).

Главна улога коју контекст може имати у проблемима усмереним на развој математичких способности јесте једноставнији приступ апстрактнијим математичким појмовима. Друга улога се састоји у чињеници да се на овај начин доприноси транспарентности и еластичности проблема. На крају, ученици су у ситуацији да самостално предлажу стратегије у решавању проблема (Van Den Heuvel-Panhuizen, 2005).

Ако се у обзир узме реални контекст у математичком образовању Гравемејер и Дурман (1999) у издвајају три различите оријентације његове примене у настави математике:

- „помоћ ученицима да развију квалитетне генеричке појмове који могу да функционишу као основа за њихово разумевање;
- стварање средине за учење, где ученици могу да се ухвате у коштац са основним идејама кроз постављање и тестирање хипотеза и
- подстицање поновне изградње способности“ (Gravemeijer и Doorman, 1999: 113).

По мишљењу Треферса и Гофрија (Treffers & Goffree, 1985) реални контекст у настави математике има следеће функције:

- *формирање појмова* – контекст служи као природно окружење за учење и делује мотивишуће;
- *обликовање модела* – контекст пружа чврст ослонац у учењу формалних операција, процедура, симболичких нотација и правила, који са другим моделима заједно чине подршку за развој мишљења;
- *примењљивост* – контекст открива стварност као извор и област проблема;
- *вежбање специфичних способности у примењљивим ситуацијама* (према: De Lange, 1995: 101).

У оквиру реалистичног математичког образовања најкарактеристичнија је употреба контекста у процесу формирања појмова, јер он подразумева појмовни процес математизације, али исто тако улога контекста је велика и у процесу разумевања и примене знања. Укључивање контекста реалног света у наставу и наставне садржаје није једноставан процес, иако је наглашен његов значај у скоро свим принципима и стандардима (NCTM, 2000) као и многим реформским курикулумима широм света (Earnest & Balti, 2008: 522).

По мишљењу Бесвика (Beswick, 2011) укључивање проблема реалног контекста у програме математике значајно је из следећих разлога:

- задовољавање економских потреба друштва кроз корисност математике;
- коришћење математике за побољшање ученичког разумевања важних питања о свету који га окружује, где се математика користи као средство за подучавање ученика о важним проблемима, као и пружање контекста у којем се математика може применити;
- побољшање ученичког разумевања математичких појмова, што је посебно важно за побољшање квалитета процеса наставе математике;

– унапређивање ученичког схватања природе математике и математичких идеја кроз стицање искуства о природи математике и тога шта подразумева бављење математиком;

– побољшање односа ученика према математици, јер контекст доприноси да ученици математику посматрају на другачији начин, да немају страх чиме се смањује незадовољство у учењу садржаја математике.

У овом раду контекст у настави математике у млађим разредима основне школе ћемо посматрати кроз садржаје и процесе који повезују учениково знање са реалним животним ситуацијама које га окружују. Контекст ће на тај начин ученику омогућити да разуме, не само зашто нешто учи, већ и где и како то што учи може да примени. У овако конципираном процесу наставе, ученик постаје равноправан чинилац и конструктор личног искуства, кроз изградњу властитог знања, које може употребити у конкретној ситуацији.

Да би смо разумели улогу реалистичног контекста у настави математике, морамо га посматрати као дугорочни процес, који у процесу учења води до постепених промена. Читав процес се види у дугорочним променама, а не у остваривању појединачних циљева (Gravemeijer, 1999, према Fauzan 2002). Пут усвајања знања и развоја способности у овако организованој настави, представља низ корака које ученик треба да савлада самостално. На овај начин превазилази се традиционално виђење математике са аспекта наставе, у којој се формална знања излажу у облику процедура, где се затим те процедуре уче да би се задатак савладао.

Реалистични (реални) контекст се види као проблемска ситуација која је искуствено блиска ученику, при чему представља полазну тачку која ће послужити ученику за поновно откривање математичких истина. Тако, циљ реалног контекста у контекстуалном учењу представља стварање погодне наставне ситуације, која ће омогућити формирање формалног математичког знања ученика. Основа овог приступа је у томе да учење математике треба да има карактеристике когнитивног раста, а не да се види само као процес слагања делова математичког знања. На овај начин процес учења заснован је на самосталној конструкцији математичког знања и модела формирајући га на основу проблема са контекстом свакодневног живота. Пред ученике се поставља изазов, да самостално граде стратегије у процесу решавању проблема тако што самостално размишљају о проблему и разговарају са другима о томе. Проналажење решења у проблемима који изражавају ситуације свакодневног живота није једини задатак овако организоване наставе. На овај начин ученици развијају своје неформалне стратегије, док је задатак учитеља да омогући да те стратегије постепено постану формалније, како би их могли користити у другим сличним ситуацијама.

Контекст се може схватити различито, па отуда и разлика у његовој употреби кроз процесе наставе и учења математике. Задатак који је представљен у облику реалног контекста, представља моћно средство увиђања односа и изградње специфичних математичких појмова. Поред тога, контекст не означава само специфичну форму задатка, већ помаже у схватању односа у задатку и приступу решавања задатка. Када је реч о улози контекста у решавању математичких проблема (Van Den Heuvel-Panhuizen, 2005) наводи три његове главне карактеристике:

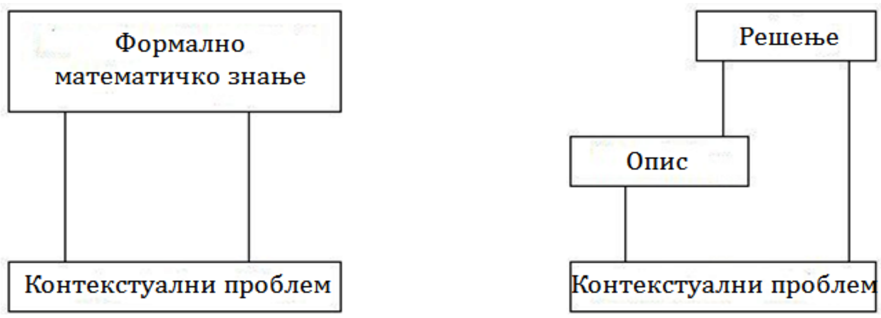
1) *Повећавање могућности приступа проблемима уз помоћ контекста* – значај визуелизације је у томе, што ученици врло лако могу увидети главне карактеристике проблема и не морају се мучити са великом количином текста, при чему ће бити мотивисани у раду.

2) *Контекст као пут ка транспарентности и еластичности проблема* – проблеми у контексту, омогућавају да се проблем сагледа као реална ситуација, и поред тога пронађе више различитих решења.

3) *Предлагање стратегије решавања проблема* – ученици кроз процес замишљања ситуације, која је постављена у задатку, могу сагледати проблем из друге перспективе, а самим тим и пронаћи нове стратегије у решавању истог.

Када је реч о вези која постоји између проблема реалног контекста и модела који тај проблем математички описује, може се рећи да је њихова повезаност двосмерна. *Формулацијом* проблема реалног контекста исти преводимо у математички модел, односно симболички запис овог проблема. Са друге стране, *интерпретацијом* математичког модела могу се представити проблеми реалног живота. *Формулација и интерпретација* у поступку моделовања ситуација и проблема представљају значајне активности којима се изражава математичко мишљење и способности ученика.

Везу између формалног математичког знања и контекстуалног проблема реалног живота Гравемајер (Gravemeijer, 1999), описује у облику два модела решавања проблема (Слика 7).



Слика 7. *Два модела приступа контекстуалном проблему* (Gravemeijer, 1999, Према: Fauzan 2002: 37).

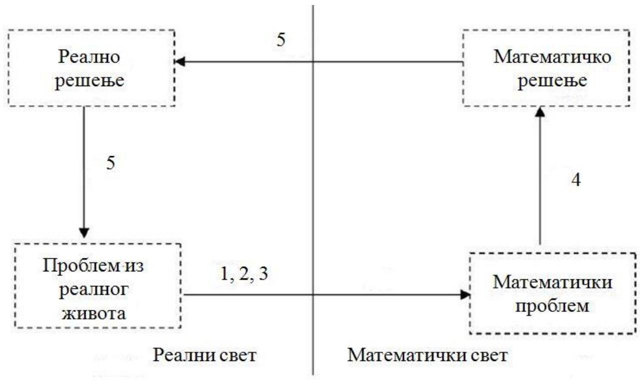
Први модел описује процес решавања контекстуалног проблема помоћу формалног математичког знања кроз кораке. У првом кораку, проблем је преведен у математички проблем (доминирају математички појмови), тако да се математички проблем решава коришћењем релевантних математичких поступака. На крају се математичко решење враћа назад у оригинални контекст. Овај модел није пожељан, јер се у овом процесу минимализују информације из задатка у самом поступку решавања. На овај начин ће бити избрисани многи аспекти оригиналног контекста проблема, тако да се подаци математичког решења не уклапају у оригинални проблем. Поред тога, решавање задатака на овај начин поспешује рутинско решавање задатка, што није циљ у почетној настави математике.

Други модел решавања проблема састоји се из три фазе: прва фаза је описивање контекстуалног проблема, друга решавање проблема на овом нивоу (уз опис), и на крају превођење назад у контекст. Истичући значај овог другог приступа Гравемајер (Gravemeijer, 1999) наводи следеће карактеристике процеса решавања задатка:

1) проблем је стварни циљ, а не употребљени математички алат;
2) решавање проблема се врши неформалним путем, а не применом стандардних процедура за решавање;
3) проблем је описан на начин који омогућава ученицима да се ухвате у коштац са њим;

4) коришћењем схема и идентификовањем централних односа у проблему, ученици лакше разумеју проблем;
5) у опису, да би избегли недоречености можемо се користити измишљеним симболима (симболи не морају бити у оквиру устаљених симбола математичког језика);
6) опис поједностављује проблем, описују се односи и омогућава разликовање питања која су кључна од оних која то нису;
7) превод и тумачење решења је лакше, јер симболи имају смисла. (Gravemeijer, 1999, Према Fauzan 2002: 38)

На сличан начин, према мишљењу Де Ланжа (De Lange, 2006), процес математизације, у оквиру решавања математичког проблема, има циклични карактер (Слика 8). Процес математизације почиње са проблемом који се налази у стварности и представља први корак (1). С обзиром на карактеристике проблема из стварности, ученик решава задатак кроз процес разумевања проблема и идентификацију релевантних математичких појмова унутар њега (корак 2). Након тога, решавањем проблема, на основу идентификованих математичких појмова, уклања небитне елементе, који стварно постоје, претварањем проблема у математички модел проблема (3). У четвртом кораку, математички проблем обухваћен моделом је припремљен, док се ученик концентрише на процес решења. На крају, у петом кораку, ученик је способан тумачити математичко решење у смислу првобитне, реалне ситуације. Ученик може да постави питање, шта ово математичко решење представља у реалном свету или како ово решење могу применити у даљем учењу.



Слика 8. *Шема процеса математизацију у решавању проблема* (De Lange, 2006)

Прва три корака претварају реалан проблем у симболички математички проблем и као такав укључују хоризонталну математизацију. Четврти корак се одвија у симболичком математичком свету, и стога га карактерише вертикална математизација. Пети корак представља тумачење математичког решења у реалном решењу и поново се односи на хоризонталну математизацију. Ако конструкција реалног решења, у смислу првобитног реалног проблема, укључује проверу свих услова у проблему, генерализацијом поступка решења и препознавање могуће примене ове процедуре у другим сличним проблемима, онда је укључена и вертикална математизација (Jupri & Drijvers, 2016). Решавањем математичког проблема, сагледава се реално решење и његова импликација на реални живот, односно врши провера да ли то решење одговара ситуацијама реалног живота.

Да би смо објаснили циклични карактер процеса математизације у решавању задатака, узмимо следећи пример:

Марко је имао одређени број кликера, док је Бојан имао 3 пута више кликера од Марка. Одреди колико Марко и Бојан имају кликера, ако знаш да је укупан број кликера 60.

Пошто је проблем исказан у реалном контексту започиње *процес који је усмерен на разумевање односа у задатку*. Ученик прво треба да схвати да се проблем односи на елементе који одликују непознати број – непознату, односно, да су у питању садржаји алгебре. Први корак у процесу решавања је разумевање односа који постоје између датих података у задатку. У овом примеру једини конкретан број је укупан број кликера (60). Са друге стране дати су и односи између броја Маркових и Бојанових кликера (Бојан има три пута више кликера од Марка).

Други корак односи се на *формулисање проблема у математички модел (проблем)*. У овом делу задатка ученик размишљајући о односима формира моделе који ће му омогућити да реши задатак. Размишљање о односима подразумева и одлуку о коришћењу неког од модела који ученик познаје, односно ситуација утиче на ученика како би сам створио нови – сопствени модел. Навешћемо два најчешћа модела, који могу послужити ученику како би решио овај задатак и које би он могао употребити на основу његовог ранијег искуства.

Модел 1

Ученик решава задатак моделовањем ситуације помоћу дужи. Дате податке у задатку представља моделом који му омогућава да разуме односе (Слика 9), да их представи визуелно и реши задатак.

Слика 9. *Илустрација задатка моделом дужи*

Ученик закључује на основу моделовања да укупно постоје четири исте дужине (вредности) које изражавају непознати број. *Математичко решавање проблема* (*3*) ће се у овом случају сводити на аритметичко израчунавање (60 : 4 = 15). На овај начин задатак је решен и одређен је број Маркових кликера.

Следећи корак процеса математизације у поступку решавања задатка је тумачење добијеног резултата, односно поновно *враћање у реалност* (*4*). Ученик је у стању да интерпретира решење у реалном контексту као бројност Маркових кликера. Са друге стране, у смислу реалног проблема, ученик може да верификује све услове задате у задатку, самим тим одреди и бројност Бојанових кликера. Добијањем свих података, ученик је у ситуацији да провери добијена решења и потврди тачност решења задатка:

$15 + 3 \cdot 15 = 60$ или $15 + 3 \cdot 15 = 15 + 45 = 60$

$15 + 45 = 60$

$60 = 60$

Модел 2

Ученик поставља једначину $x + 3 \cdot x = 60$, у којој је број Маркових кликера означен непознатим бројем (x), а број Бојанових кликера $3 \cdot x$. Једначина изражава укупан број кликера једног и другог дечака. Даље *математичко решавање проблема* (*3*) своди се на алгоритам којим ће одредити укупан број једнаких и непознатих делова ($4 \cdot x = 60$). Следећи корак је одређивање вредности непознате кроз поступак одређивања непознатог чиниоца ($x = 60 : 4$). На крају ученик долази до еквивалентне једначине којом се изражава непознати број Маркових кликера ($x = 15$).

Моделовање представља постепен прелазак са подручја реалног контекста услова у задатку, на алгебарску нотацију. Када је реч о процесу решавања задатка често се у први план истиче и значај интуиције, као процеса који се односи на наслућивање могуће истине. Као процес веома је важан у тренутку процене поступка о решавању задатка или могућег тачног решења, посебно, ако је реч о проблемима свакодневног живота у којима деца имају довољно претходног искуства.

Поред способности закључивања, у учењу математике, значајне су и способности математичке комуникације. Постоје и истраживања која говоре о томе да се у настави математике заснованој на реалном контексту, могу подстицати комуникативне способности ученика (Joko Supriyanto & Hairun, 2020; Habsah, 2017; Handayani & Suparman, 2018). Под математичком комуникацијом подразумева се начин на који ученици размењују идеје и своје мисли са другима, при чему се труде да буду јасни, прецизни и да се користе математичким језиком (усмени разговор, симболи, графикони, дијаграми или други медији комуникације). У математици се кроз процес комуникације развијају идеје и утиче на изградњу математичких појмова. Ако се у обзир узме специфичност алгебре, посебно се могу издвојити способности математичке комуникације које обухватају ученичке способности: визуелног изражавања идеја, тумачења визуелних приказа и способности ученика да објасне процес развијања алгебарских идеја и појмова. Основне ученичке компетенције, неопходне за учење математике, могу се пронаћи у вези која постоји између способности математичке комуникације и математичког мишљења. Само у јединству ове две категорије се може говорити о успешности ученика у оквиру математичког образовања.

Како Харви и Аверил (Harvey & Averill, 2012) истичу, политика и наставни план и програм наглашавају важност контекста свакодневног живота, али у литератури и даље недостају примери најбоље праксе, која би се могла применити на овај начин. Кроз њихову анализу рада учитеља, који су користили контекст реалног живота у садржајима алгебре, уочили су неке позитивне аспекте у учењу ових садржаја. Први аспект подразумева пажљиво планирање и припремање за овакав вид наставе. Контексти који су уведени на овај начин временом су лако превођени на нематематичке аспекте контекста. У току рада учитељи су често упућивали на контексте из стварног света и реалног окружења, док се валидност математичких решења увек сагледавала у контексту реалног света. Истраживање је показало да је за успешан рад у овако организованој настави потребна комуникација са наставником, страст према предмету, као и дубина знања из ког се може развијати контекст реалног света.

Манипулација различитим објектима реалне стварности, може послужити у развијању идеја рачунских операција, својстава рачунских операција (комутативности и асоцијативности сабирања и множења...), развијању алгебарских појмова (једначине, неједначине, математичког низа и функције) и друго. Бројни истраживачки пројекти потврдили су да ситуације које „имају смисла“ могу допринети ономе што деца могу да науче и ураде. У оваквом приступу математичким садржајима не оставља се довољно простора културолошким и друштвеним ситуацијама које играју значајну улогу у когнитивним задацима.

Сличан пример наводе Карахер и сарадници (1985) који у свом истраживању долазе до резултата који показују да су деца, која су радила као улични продавци, била способна за решавање аритметичких проблема на улици. Са друге стране та иста деца су била неуспешна у решавању проблема који су укључивали исте аритметичке проблеме у школи (Carraher et al., 1988). Резултати овог истраживања показали су различите способности које су деца, у овом случају развила сходно контексту или ситуацији реалног живота. Деца на улици су ментално решавала проблеме и рачунала, док су у школи користили папир и оловку за решавање истог типа проблема. Различит контекст ситуација је различито утицао на разлике у перформансама и облицима рачунања, тако да су деца − улични продавци, била много спретнија у усменом рачунању него у писменом. Управо то значи да се контекст различитих ситуација може искористити у настави, како би се постигао жељени циљ наставе. У овом случају циљ је био повезати појмове са околностима у којима су представљени, као и развити способности за сагледавање истог садржаја из различитих перспектива. Учење математичких садржаја изван школског контекста, није ограничено само област у аритметици, већ се на овај начин могу развити много сложенији појмови и концепти као што су појмови у алгебри.

3.2. Репрезентације контекста у учењу садржаја алгебре

Реални контекст у почетној настави алгебре од великог је значаја, како у разумевању математичког проблема, које се огледа преласком из поља реалног света у поље математичког света, тако и у решавању алгебарских проблема коришћењем различитих модела. Садржаји засновани на принципима реалног контекста треба да омогуће реалистичност ситуација у току процеса учења математике. Ако се у обзир узму карактеристике материјала за учење, према мишљењу Нивина (Nieveen, 1999), ови материјали треба да буду обликовани на основу снажног теоријског утемељења при чему мора да постоји снажна повезаност између компонената материјала за учење. Из тог разлога припрема садржаја и материјала за учење мора пронаћи основу у принципима реалистичког математичког образовања. Садржаји осмишљени на овај начин треба да буду у функцији подстицања интересовања и постепене изградње знања и способности кроз процесе математизације и моделовања. На овај начин материјали и садржаји постају основни алати у настави математике, који треба да побољшају ефикасност наставника и постигнућа ученика у алгебри.

Ако се у обзир узме значај прогресивне формализације као једног од најзначајнијих особина реалистичног математичког образовања, према мишљењу Ван Ројвика (2001) у многим наставним програмима – који обухватају *алгебру,* алгебарске теме се уводе веома брзо, тако да ученици једва имају времена да развију појмовно разумевање алгебарских појмова. Често не постоји веза са постојећим неформалним знањем ученика. За ученике то представља бесмислено представљање и коришћење симбола. Један аспект прогресивне формализације састоји се у временској дистанци, која је потребна да се развију потребни појмови и вештине (Van Reeuwijk, 2001). Дакле, са алгебром треба почети рано. Ако се у обзир узму алгебарска знања, ученици млађег школског узраста имају изграђено много неформалних и интуитивних појмова и концепција о употреби симбола, организовању и описивању информација и количина, коришћењу различитих репрезентација информација и проналажење генерализација за одређене ситуације (Kaput 1994, Mason 1996). Из тих разлога наставу алгебре треба засновати на ситуацијама које су блиске учениковом искуству, његовом неформалном знању, уткати их у аритметику и у контекст који је близак ученику и ситуацији учења које за ученике имају смисла. Управо је избор и креирање контекста учења један од најважнијих задатака у програмирању садржаја математике.

Примена контекста у задацима математике може бити различита и обухватити задатке у којима:

1) *нема контекста уопште* – пример задатака заснован на чисто математичком контексту);
2) *контекст се користи за „маскирање“ математичког проблема* – контекст у овом смислу служи само као „камуфлажа“ математичких односа и обухвата најједноставније типове текстуалних задатака, који не захтевају размишљање о односима;
3) *контекст представља суштински и значајан део самог проблема* – право и релевантно значење контекста који ствара проблемску ситуацију за учење.

Нас интересује контекст који је суштински део проблема, односно реални контекст чија је функција да покрене ученика на учење, размишљање о проблему, при чему ће потом ученик сличан задатак моћи да реши уз помоћ искуства, знања или помоћи учитеља.

Математизација у алгебри, као основни процес контекстуалног приступа у настави и учењу, постаје носилац алгебризације – процеса који означава прелазак из света аритметике у свет алгебре, као и преласка из света реалности у свет симбола. На основу функције и облика репрезентације, коју контекст може имати у оквиру проблема, можемо разликовати неколико врста проблема реалног контекста у садржајима ране алгебре: текстуални, сликовни, симболички, шематски и табеларни.

Садржаји наставе математике задати у текстуалном контексту традиционално су повезани са школским окружењем, у коме се ученик свакодневно налази или проблемима са којима се сусреће. Текстуални задатак могли би да дефинишемо као проблем са речима у којима је на вербални начин описана проблемска ситуација. Ове проблемске ситуације садрже питања, чији одговори захтевају примену математичких операција на нумеричким подацима који су дати у формулацији проблема. У том смислу овако формулисани задаци имају облик кратких текстова у којима су описане ситуације које изражавају одређене количинске односе, као и односе чија је вредност скривена. Основни циљ онога који решава задатак јесте да одговори на питање у задатку тако што ће на директан или индиректан начин искористити величине које су наведене у тексту задатка (Nortvedt, 2008). Тако, текстуални проблеми, не само да ученицима пружају прилику за проучавање интеракције између језика и процеса, математичких процеса и ситуационог резоновања, подударности између разумевања текста, разумевања ситуације и математичког решавања проблема, већ дају и прилику да виде смисао и створе искуство у процесу математизације проблема и моделовања (Reusser & Stebler, 1997).

Ако се у обзир узму карактеристике контекстуалног приступа, онда основна тема текстуалних задатака мора бити реалистична проблемска ситуација, која изражава реалне односе и ситуације у којима ученик може да се нађе у свакодневном животу. Поред тога, посебна пажња се мора посветити чињеници, да ученици у процесу решавања текстуалних задатака треба да препознају и открију битне информације, као и информације које су апсолутно непотребне за његово решавање. Поред тога треба да буду способни да на прави начин пронађу смисао у подацима који су представљени и утврде начин на који је могуће те податке повезати. Колико су подаци значајни за начин на који ће ученик размишљати о проблему навешћемо кроз пример, који је навео

Шоенфелд (Schoenfeld, 2013) у свом раду. Он наводи истраживање спроведено са деведесет седам ученика првог и другог разреда којима је поставио задатак:

> *На броду је двадесет шест оваца и десет коза. Колико година има капетан?* (Schoenfeld, 2013: 13).

Размишљање деце је ишло у различитим правцима, али чињеница је да седамдесет шест од деведесет седам ученика решило задатак! Ова група ученика одговорила је да би капетан могао да има 36 година. Начин на који су ученици размишљали о подацима у задатку, говори нам о начину њиховог закључивања. Ученици су размишљали овако: „Двадесет шест и десет, то је тридесет шест. Да, капетан би могао имати тридесет шест. Двадесет шест минус десет, то је шеснаест. Не, превише би био млад. Двадесет и шест пута десет, не, био би мртав. Не знам како да поделим ове бројеве, па решење мора бити тридесет шест.“ (Schoenfeld, 2013: 14). Дакле, ученици су имали потребу да на питање одговоре и то без обзира што нису имали адекватне податке, нити било какве смернице како би проблем уопште могли да реше.

У истраживању које су спровели Русер и Стиблер (Reusser & Stebler, 1997) са ученицима четвртог и петог разреда наведена је листа задатака, од којих ћемо издвојити један којим желимо да истакнемо на који начин реална ситуација може утицати на развој ученичког резоновања. Задатак који су истраживачи поставили ученицима био је:

> *Џоново најбоље време за трчање на 100 m је 17 секунди. Колико времена ће му бити потребно да претрчи 1 km?* (Reusser & Stebler, 1997: 312)

Начин на који је већина ученика решила овај задатак састојао се у чињеници да се занемарује искуствена страна задатка, тако да је решење 170 секунди (2 минута и 50 секунди). Решење је добијено тако што је 17 секунди помножено са десет, јер је у питању десет пута дуже растојање. Ако се у први план истакне реалистична страна задатка, онда се може рећи да се тачно време трчања у новој ситуацији не може израчунати због умора тркача на тој раздаљини. Одговор се заснива на реалним аспектима, јер се односи на ситуацију у којој се упоређује начин трчања на различитим дужинама стаза. Као што се може видети, решавање задатака реалног контекста је процес који је условљен различитим аспектима. Реално у ужем, чисто когнитивном смислу, односи се на проблем у коме се занемарују „реалне“ интерпретације, тако да знање постаје функционално, јер води до тачних и очекиваних одговора. Дакле, реално служи да опише математичке ситуације текстом, док у ширем (контекстуалном) смислу представља упућивање на шире друштвено-прагматичне или културне описе у којима је текст део ширег контекста на који се задатак односи.

Решавање проблема не зависи само о увежбаности извођења одређених аритметичких операција или алгебарских процедура, већ и од специфичности знања која су потребна да би се одређени проблем решио. Наведимо пример који је у свом раду предложио Мајер (Mayer, 1981), а односи се на проблем кретања моторног чамца:

> *Моторни чамац кретао се низводно 120 минута уз речну струју чија је брзина 5 миља на сат. Повратак узводно истом речном струјом трајао је три сата. Колика би била брзина пловила у мирној води?* (Mayer, 1981: 139).

Да би се решио овај проблем ученику је потребно познавање неколико категорија знања: *језичко* (значење шта у овом задатку значи „мирна вода“); *шематско* (однос између брзине пловила, брзине речне струје и времена); *семантичко* (да река има своје струје које се крећу само низводно, док се чамац креће и узводно и низводно); *алгоритамски* (редослед извођења рачунских операција и поступка решавања једначине). Дакле, у првом плану јесте разумевање структуре проблема. Онај ко разуме основне карактеристике, које се односе на значење појмова у задатку и њихове узајамне повезаности, може и да утврди које податке и операције из текста треба користити и у ком редоследу. Овај проблем се може решити само ако је ученик у стању да схвати специфичне детаље наведене у датом проблему, који морају бити организовани у једначину:

(брзина чамца + брзина струје) · (време низводно) = (брзина чамца - брзина струје) · (време узводно)

Кључна карактеристика, која се може схватити као основа за разумевање текстуалних проблема, јесте ментална репрезентација овако изражене проблемске ситуације. Ментална репрезентација је јако важна, посебно ако се у обзир узму основне поставке контекстуалног приступа. Ове репрезентације представљају моделе проблемских ситуација, које у исто време чине мост између неформалног и формалног у поступку решавања задатка. Процес који је доминантан у овом случају јесте поступак математизације и самосталне изградње модела, који касније добијају формалнију улогу, тако да постају поступак којим се ученик служи када је у ситуацији да решава задатак сличног облика.

Може се поставити питање: *Зашто проблеми текстуалног типа могу бити тешки за ученике?* Резултати истраживања показали су да се фактори који утичу на разумевање текста тешко уклапају у проблеме текстуалног типа (Cummins, Kintsch, Reusser & Weimer, 1988). Аутори су у раду показали да способности ученика у решавању задатака зависе од квалитета разумевања текста задатка. Разумевање је, са друге стране, било под утицајем природе језика који се користи у оваквим задацима. Проблеми у којима се појављују речи неодређене језичке форме, такође представљају проблем за ученике (*неки, толико више, неколико, више, за неколико* и друге речи уопштеног значења). Резултати ове студије показали су да су грешке одређеног облика биле директно повезане са језичким способностима које поседује ученик који решава задатак. Ако је ученик довољно добро разумео причу из проблема, и на тај начин створио личну слику о њему, велика је вероватноћа и да ће проблем исправно решити.

Када је реч о текстуалним задацима у алгебри посебно се мора обратити пажња на то како различити облици алгебарских нотација могу одговарати решењу истог текстуалног задатка. Дакле, реч је пре свега о процесу превођења проблема текстуалног типа у облик алгебарске нотације и начина на који ученик у том процесу размишља. Узмимо на пример задатак:

Марија је на полици имала одређен број књига. Када је Тањи дала 5 књига, Марији је остало 8 књига. Колико књига је Марија имала на полици?

Да би решио овај задатак ученик може да напише неколико различитих једначина, које могу послужити као основа за решавање проблема. Ако се у обзир узму односи и количине у проблему могу се написати једначине:

а) $x - 5 = 8$;   б) $x - 8 = 5$;   в) $x = 8 + 5$;   г) $x = 5 + 8$.

Како би решили проблем ученици могу написати четири једначине, две са сабирањем и две са одузимањем при чему су кроз њих изражени односи који одликују дату проблемску ситуацију. Ученици у свом раду бирају ону једначину, која највише одговара методи коју преферирају у свом размишљању и поступку решавања проблема. На пример, ученици који дословно следе хронологију речи, односно прате дословно радњу у проблему одабраће једначину под а). Ученици који у решавању задатка користе рад уназад, односно модел инверзије, одабраће једначине под в) или г).

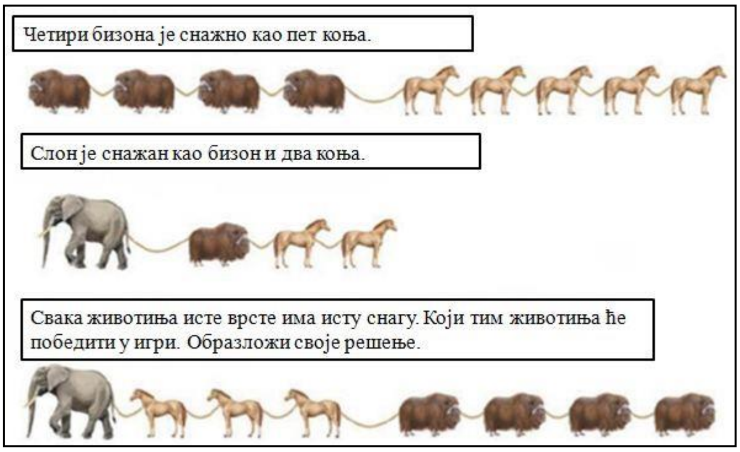
Уколико ученици у први план поставе број Маријиних књига, при чему добро познају карактеристике знака једнакости, определиће се за једначину под б). Као што можемо видети, у све четири једначине долази се до тачног решења, при чему примена одређене једначине говори о начину на који ученик размишља решавајући проблем. Постављајући једначине на различите начине доказује се и различито доживљавање и разумевање идеје променљиве, али и знака једнакости.

У задацима контекстуалног типа често се користе слике да би се ученици у потпуности упознали са контекстом дате ситуације и информисали о проблему који постоји и који треба решити. Дакле, овде није реч само о формулацијама као што је случај у текстуалним задацима, већ у овом случају слика има улогу контекста. Често текст који прати слику служи само као упутство које се даје ученику, како би разумео начин на који треба приступити проблему, кроз слику као основни носилац контекста. Функција слике у овом случају је важна не само из разлога што слика прати проблем, већ и из разлога што се на тај начин повећава активност и мотивација ученика.

Према мишљењу Ван ден Хувел-Панхуизен, слике могу имати многобројне функције у проблемима реалног контекста:

- „мотивациона – мотивише ученике на већу активност,
- описна – описује ситуације, јер слика може рећи више него читава прича,
- информативна – потребне информације се добијају из слике или илустрације,
- индикатор акције – покреће одређену радњу која служи као стратегија која води ка решењу,
- дистрибутер модела – илустрација садржи извесне могућности структурирања, које се могу користити за решавање проблема,
- решење и информатор у одабиру стратегије решења – решење или начини примене стратегије у решавању задатка могу бити назначени на илустрацији“ (Van Den Heuvel-Panhuizen, 2005: 4).

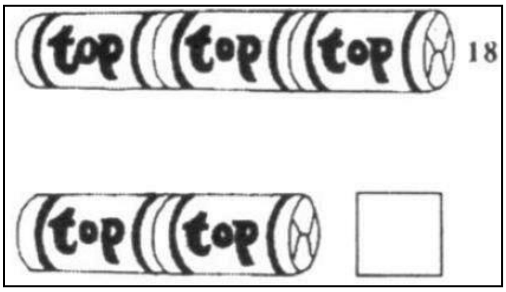
Слика у облику контекста је моћно средство за децу млађег школског узраста, не само у усвајању знања и овладавању појмова из математике, него и у решавању проблема и развијању математичког мишљења. Богатство односа је „постулат на који се треба непрекидно враћати и закључивати о структуралним везама и односима у реалном свету“ (Wittmann, 2005: 295). Наведимо пример једног задатка којег аутори називају „Надвлачење животиња“ у коме је контекст представљен у облику слике (Слика 10):



Слика 10. *Проблем надвлачење животиња* (Abels, Matassa & Johnson, 2016: 3)

У овом случају је узет пример задатка у ком непознату вредност представља снага животиња. Упоређивањем и изједначавањем леве и десне стране у надвлачењу животиња се поред идеје непознате у први план истиче разумевање знака једнакости, као знака којим се изражава еквивалентност. У пренесеном значењу знак једнакости представљају везе између снаге животиња на прве две слике. Последња слика изражава питање у задатку, а одговор зависи само од способности ученика да увиди везе које постоје између података датих у облику слике. Наравно, када је реч о реалности ситуације може се поставити питање снаге сваке животиње посебно. Као што је раније наведено, сврха контекста јесте да изрази све оне ситуације које примарно не морају бити потпуно у сфери реалног.

Сличан пример задатка израженог сликом наводи и ван дер Хувел-Панхуизен (Van Den Heuvel-Panhuizen, 2005) у свом раду:



Слика 11. *Проблем слаткиша* (Van Den Heuvel-Panhuizen, 2005: 5)

У примеру овог задатка све информације које су потребне да би се задатак решио дају се у облику илустрације. Потребно је одредити број бомбона у две кутије, ако је познат број бомбона у три такве кутије. Изглед задатка на одређени начин и упућује на начин решавања, односно облик структуирања задатка упућује на начин његовог решења.

Садржаји алгебре на млађем школском узрасту се могу лако обликовати и представити у облику слика или илустрација, али је њихово коришћење у настави запостављено. Разноврсним задацима израженим сликом могу се вежбати и развијати алгебарске способности, проширивати и учвршћивати знања о математичким појмовима.

Када је реч о *симболичком означавању* и употреби симбола у задацима реалног контекста, његов значај се посебно може истаћи, ако се у обзир узму садржаји ране алгебре. Специфичност алгебарских садржаја указује на његову значајну карактеристику симболизације, као специфичног начина изражавања идеја и својстава другачијим језиком и употребом алгебарске нотације.

Када Вергнауд (Vergnaud,1982) описује способност деце млађег школског узраста у решавању математичких проблема, он наглашава два значајна аспекта ефикасности симболичких репрезентација:

- симболички прикази треба да помогну ученицима да решавају проблеме које иначе не умеју да реше;
- симболичке репрезентације треба да омогуће ученицима разликовање различитих структура и класа проблема (Према Brizuela & Alvarado, 2010).

Појам симболичких репрезентација у овом случају схваћен је прешироко и подразумева све оне облике и моделе који могу послужити у решавању одређеног математичког проблема.

Различите репрезентације проблема, које се представљају ученику, значајне су у смислу начина на који се информације преносе, што даље утиче на начин на који деца уче. Коришћење више репрезентација у математици корисно је у смислу једноставнијег представљања проблема. Ово може бити посебно значајно за представљање проблема у тренутку када се започиње развој алгебарског мишљења и када ученици још увек нису способни за апстрактно мишљење које је неопходно. Визуелне репрезентације, као што су дијаграми, графикони, табеле често се користе у настави математике, јер се сматра да могу бити од значајне помоћи ученицима у разумевању и формирању математичких појмова (Greeno & Hall, 1997). Када је реч о развијању идеје функције, Кунингем (Cunningham, 2005), издваја неколико различитих репрезентација функције, посебно истичући њихову повезаност и њихову примену:

- „*алгебарска репрезентација* је такав облик репрезентације у којој се линеарна функција пише коришћењем симбола у облику једначине са две променљиве;
- *нумеричка репрезентација* у којој се линеарна функција изражава кроз табелу или низ одређених парова;
- *графичка репрезентација,* када се функција изражава у координатном систему и у први план се истиче способност ученика да разумеју и успешно користе све врсте репрезентација. На овај начин њихово знање постаје потпуније, а њихове способности флексибилније" (Cunningham, 2005: 74).

Истраживање Бута и Коедингера (Booth & Koedinger, 2010) показала су да су спољне репрезентације значајне у когнитивном смислу и да се добри ефекти постижу, ако се комбинују различите врсте репрезентација. Ученици боље уче ако је дијаграм додат тексту задатка, него ако решавају текстуални задатак дат само у тој форми. На овај начин ученици су у ситуацији да изграде две менталне репрезентације (вербалног и визуелног облика) и формирају везе између њих. Дијаграм у решавању задатка доприноси формирању специфичних модела, који додатно доприноси разумевању, али и каснијем коришћењу у сличним ситуацијама у сусрету са сличним проблемима.

Посебно треба нагласити везе које постоје између познавања особина рачунских операција и дијаграма. Да би ученик могао да разуме дијаграм (графикон), мора добро познавати рачунске операције и њихову повезаност, јер их у процесу формирања менталних репрезентација користи. Графички приступ представљању алгебарских садржаја може се схватити и као пример методичких алата, који се могу користити у решавању задатака. Графичко представљање алгебарског проблема тако постаје врста репрезентативног алата за представљање како познатих, тако и непознатих величина. Овде се појављује проблем приказивања непознатих величина, при чему се оне, односно њихова вредност, не може тачно приказати. Самим тим, да би се решио проблем, и задатак изразио кроз репрезентацију, која је визуелно пријемчивија деци, у ситуацији смо да користимо дијаграме у облику трака произвољне дужине. На овај начин смо непознате вредности одредили директном применом аритметичких операција на познатим вредностима. Дакле, уместо директног коришћења слова и знакова у алгебри у ситуацији смо да непознато израчунамо на основу односа који постоје и могу се уочити на графицима и дијаграмима, који у исто време постају и модели решавања проблема.

Посебно се мора обратити пажња на односе који постоје између линија и трака на дијаграмима и графицима у смислу њихове величине и дужине са количинама (вредностима) које оне означавају. Дакле, величина и дужина трака на дијаграмима који се користе у процесу моделовања су значајне искључиво у смислу односа који постоје између количина које означавају. Истраживање, које су спровели Ли и сарадници (Lee, Khng, Ng & Ng Lan Kong, 2013), имало је за циљ да истражи на који начин ученици основне и средње школе у Сингапуру користе и разумеју шеме и дијаграме за решавање алгебарских проблема. Овде треба напоменути да је Сингапурски план и програм наставе математике један од најнапреднијих на свету што показују у успеси њихових ученика на ТИМСС тестирањима (Milinković, 2017). Поред тога се у наставном програму у Сингапуру се инсистира на раном увођењу алгебарских садржаја, још у млађим разредима основне школе. Суштина овог истраживања је сведена на истраживање односа, који постоји између графичких приказа и њиховог односа према величинама које изражавају. Резултати су показали да су деца користила дуже траке за веће вредности, тако да су способна да ове моделе употребе за решавање алгебарских проблема. Истраживање је такође показало да су деца способна да дужину трака на дијаграмима, које изражавају апстрактне и непознате величине, користе и да притом дужина траке не буде строго повезана са величином коју изражавају. У овом случају деца траке користе као моделе, који ће послужити само као прелазни модел за формирање новог општијег модела који даље служи у решавању задатака (Lee et al., 2013).

И коришћење табела, као контекста задатака, у настави математике веома је важно у процесу визуелизације садржаја алгебре. Табела се сматра значајним образовним ресурсом, који има велики потенцијал у изградњи алгебарских појмова, посебно у изградњи и формирању функционалног мишљења и развијању идеје функције кроз решавање алгебарских проблема. Истраживање које су спровели Шлиеман и сарадници (Schliemann, Carraher & Brizuela, 2001) са ученицима трећег разреда, имало је за циљ да истражи способност ученика за рад са табелама које изражавају функционалне односе у процесу откривања алгебарских својстава аритметике. Циљ је био да се осмисли ситуација, која би деци омогућила разумевање множења кроз однос између две количине (учење таблице множења). Овакво третирање алгебре подразумева приступ у коме се алгебра посматра као генерализована аритметика бројева и количина, тако да су се у току експеримента промене представљане кроз структуре у табелама. На тај начин покушало се да се ученици подстакну на уочавање функционалног односа који је имплицитно дат у табелама. Истраживање је показало да су у оваквим условима деветогодишњаци успевали смислено да користе алгебарску нотацију за описивање функција. Ово истраживање показује да ученици могу истраживати односе користећи се табелама и на тај начин постепено градити функционалне односе.

Сличан приступ у истраживању применили су Мек Елдон и Ритл-Џонсон (McEldoon & Rittle-Johnson, 2010), који су испитивали утицају функционалних табела у сврху развијања алгебарског размишљања. Истраживање је спроведено са ученицима од другог до шестог разреда основне школе. Циљ је био да се процени развијеност елементарних функционалних способности са посебним фокусом на проналажење правила између података у табелама, као и ниво вештина функционалног мишљења ученика. У овом раду издвојене су посебне карактеристике функционалног мишљења које су карактеристичне за разумевање табела и њихову употребу у решавању задатака. Ове карактеристике обухватају: *примену правила* (ученици примењују дато правило да би утврдили вредност броја), *препознавање правила* (ученици треба да утврде правило између вредности и одређивање следеће вредности у табели), *стварање и коришћење вербалног правила* (одређивање даљих недостајућих вредности у табели и генерисање вербалног правила односа између величина), *стварање симболичког записа* (писање правила користећи алгебарске нотације). Истраживање је показало различите нивое способности, за различит узраст ученика. Ученици шестог разреда су били најуспешнији у стварању симболичког записа, што је и очекивано, ако се у обзир узме узраст и ниво способности ученика.

Често се употреба таблица повезује са дијаграмом чиме се покушава превазићи нумеричко ограничење и једноставније уочити веза која постоји између рачунских операција, као и зависности резултата од промене компонената рачунских операција. Како у свом истраживању наводе Селке и сарадници (Sellke, Behr & Voelker, 1991), табела као облик репрезентације може бити ефикасна алтернатива другим моделима и приступима који се традиционално користе, како би се приказали текстуални проблеми са множењем. Аутори ипак наговештавају да овакав облик не треба по сваку цену да замени друге облике представљања задатка, али да је посебно ефикасан ако се ради о подацима који не представљају конкретне бројеве у задатку. Оваква стратегија у решавању проблема може имати значајан утицај на учење пропорција и схватање пропорционалних односа, јер се на очигледан начин изражавају везе које постоје између података. О примени табела у изражавању пропорционалних односа посебно пише Стрифленд (Streefland, 1985), при чему сматра да табеле представљају очигледан запис пропорција у облику статичних еквивалентних односа, чиме се доприности развијању појма пропорционалности. Процес учења треба да буде организован кроз активности које омогућавају повезивање између различитих појмова. Из тог разлога аутор сматра да „треба развијати шеме и визуелне моделе, које ће подржати дугорочни процес учења и развој општих когнитивних процеса као што су: апстракција, генерализација и синтеза“ (Streefland, 1985: 92). Применом табеле на овај начин је омогућено одвајање од контекста, што је посебно важно за правилно развијање појма пропорције. Табела омогућава већу општост, тако да су могуће различите примене, јер се на овај начин чува јединствен однос између величина. На крају, табеле које изражавају пропорционалне односе повећавају напредак у шематизацији и вежбају флексибилност у изражавању односа између величина.

Као што видимо, истраживачи се често усресређују на употребу табела како би се побољшала или усмерила пажња ученика на разумевање и развијање идеје функције. Такав приступ употреби табела је једносмеран, јер се табела може користити многоструко у приступу садржајима из алгебре. У истраживању које су спровеле Бризуела и Лара-Рот (Brizuela & Lara-Roth, 2001) са ученицима другог разреда, желеле су истражити на који начин ученици користе табеле у решавању задатака са сабирањем. Истраживање је требало да покаже начин на који су деца представљала информације о неком проблему, кроз самостално цртање и коришћење функционалних табела. Истраживање је показало да нека ранија искуства са коришћењем функционалних табела могу помоћи ученицима у развијању софистициранијих репрезентација проблема о количини новца стеченог у одређеном временском периоду. Ученици су били у стању да конструишу табеле, које имају смисла и које откривају на који начин логички размишљају о проблему, како га представљају и организују податке из проблема. При том је велики број ученика успео да испрати временске односе и промене у задатку кроз редове и колоне. Ово истраживање је показало да врло млади ученици могу да користе табеле за решавање проблема алгебарске природе, и да притом постижу добре резултате. Све ово указује на значај табела, као врсте репрезентација у решавању задатака или организацији података у процесу решавања математичког проблема.

У истраживању које су спровели Нобре, Амадо и Кареира (Nobre, Amado & Carreira, 2012) желели су да открију како табела подржава рад ученика осмог разреда (од 13 до 14 година) у решавању задатака заснованих на реалном контексту, кроз усресређивање на њихов начин репрезентације променљивих и услова наведених у проблему. Резултати су показали да су ученици користили искуство у коришћењу табела, кроз моделовање односа у проблемима реалног контекста. Они су се често одлучивали да помоћу оваквог алата реше поменуте проблеме и на тај начин се укључе у процес превођења односа између променљивих, њихово комбиновање у низове у задацима са разломцима, скуповима и изразима. Аутори посебно истичу улогу табела за рачунање у процесима идентификације непознате и превођења проблема у алгебарске моделе и њихове експерименталне облике за проналажење решења једначина. Алгебарско размишљање подстакнуто је коришћењем табеле за рачунање, у генерисању правила, која се намећу у проблему који су ученици решавали.

Табах, Херсковиц и Аркави (Tabach, Hershkowitz & Arcavi, 2008) наводе неке од карактеристика које су типичне за учење ране алгебре употребом табела. Прва карактеристика обухвата *Организацију података и развој стратегија решења* и подразумева ученичко коришћење табела као подршке у представљању односа између количина. Ученици су на овај начин у ситуацији да размишљају о односима и траже најефикаснији начин за представљање података. Овакво размишљање даље обухвата анализу података и подстиче на употребу симбола за изражавање општих односа. Друга карактеристика, коју аутори наводе, подразумева *симболичку генерализацију* која се односи на потребу ученика да односе и везе, које постоје између величина, изражавају употребом симбола. У првом плану је генерализација, као процес којим се остварује уопштавање, које омогућава да неке опште идеје и односи буду изражени помоћу симбола. У истом раду, Табах и сарадници (Tabach, Hershkowitz & Arcavi, 2008) успели су да имплементирају три теме: рачунарско окружење, учење почетне алгебре и процесе инструменталног стварања, као процес примене слике алата и модела током решавања различитих задатака. Резултати су показали да су ученици успели да искористе контекстуалне карактеристике проблемских задатака и тако развију различите стратегије за решавање. Поред тога, ученици су били у стању да генерализују и представе контекстуалне ситуације кроз употребу табела и графикона, стварају и користе стратегије за проналажење различитих решења једног истог проблема, формирају правилно значење и коришћење симбола у процесу решавања задатака и користе математику како би побољшали своје разумевање и опште способности.

Видимо да контекст учења може бити представљен у различитој форми и да сваки има своје вредности. Важан задатак учитеља је да добро процени у свакој ситуацији учења, који контекст је најадекватнији, који ће остварити најбољи ефекат у смислу што бољег прихватања од стране ученика и који ће водити бољем разумевању садржаја. Чињеница је и да је пожељно комбиновање различитих контекста и њихово стално мењање. Који контекст ће бити одабран зависи од великог броја елемената.

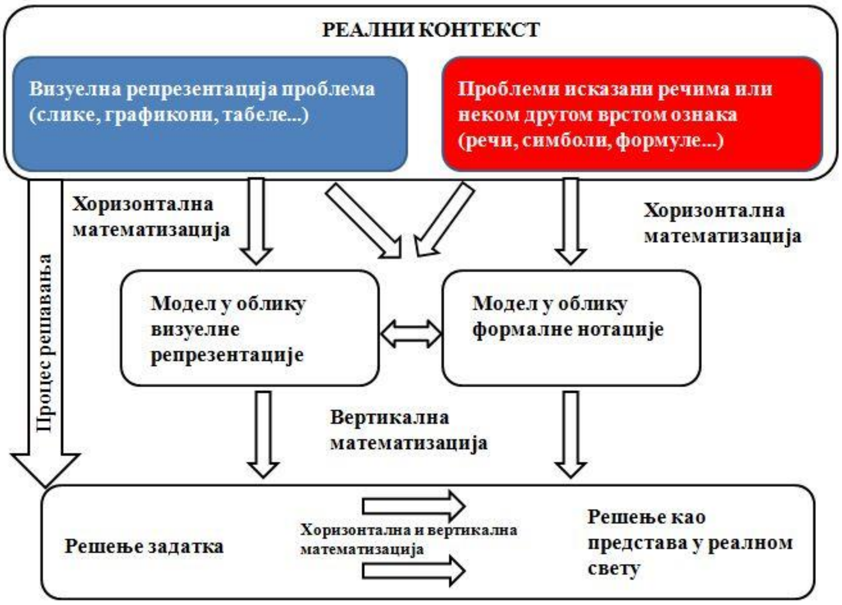
3.3. Методички оквир контекстуалног приступа настави алгебре у млађим разредима основне школе

Алгебарски појмови су најапстрактнији од свих појмова из области математике који се формирају и усвајају на млађем школском узрасту. Имајући у виду ту чињеницу, треба посебно обратити пажњу на специфичности везане за начин представљања и изградње ових појмова код ученика. Циљ је пронаћи прави приступ и одредити најбоље смернице, које би биле у складу са специфичностима дечијег мишљења на овом узрасту, са једне стране и специфичностима и апстрактности садржаја алгебре, са друге стране. Захтев који се поставља пред савремену методику наставе математике није једноставан, па је овај проблем актуелан код истраживача широм света.

Најбољи и најефикаснији пут за превазилажење потешкоћа у учењу алгебарских садржаја налази се у сталним и константним активностима, које укључују различите нивое апстрактности. Природно се намеће питање о приступу који ће омогућити природан и једноставан процес формирања првих и основних појмова, на којима ће се градити касније сложене алгебарске структуре. У овом раду ћемо покушати да разрешимо ову недоумицу и понудимо методички приступ, који ће бити заснован на идеји коришћења реалног контекста као ослонца у моделовању проблемске ситуације, у којој ученик самостално гради и обликује моделе који омогућавају решавање проблема, али и усвајање алгебарских садржаја.

Суштина контекстуалног приступа у учењу и настави, није само у брзом и ефикасном решавању задатака, већ у изградњи позитивног и функционалног мишљења. Полазиште у учењу представља решавање проблема, који потичу из реалног контекста ученика, који су му блиски, интересантни и за њега имају животно смисао. Према мишљењу Њутна (Newton, 2017), решавање проблема свакодневног живота треба да обухвати неколико фаза. Процес решавања проблема треба да почне добијањем задатка, који ученици читају, разговарају о њему, размењују идеје. Почетак је у схватању проблема, његовој визуелизацији односно, стварању сопствене слике тог проблема у мислима, а затим и разговора са другима о томе. Следећи корак јесте да ученици утврде који тип проблема је у питању и шта треба одредити, као и начин како треба израчунати. При том треба користити различите облике записивања и различите врсте симбола, који ће омогућити лако сагледавање односа који постоје између количина или вредности. На крају, последњи корак је потрага за решењем на основу датих података и односа који постоје између њих. Посебно се истиче значај проверавања и истицања другачијих начина решавања задатка. На овај начин се подстиче ученичка креативност и развија математичко мишљење.

Централно место у решавању алгебарског проблема контекстуалним приступом треба да има процес математизације. Овај процес подразумева читав низ корака који имају циклични карактер. На овај начин проблем реалног контекста представља полазишну и завршну тачку у решавању проблема који се креће путевима, прво хоризонталне, а затим и вертикалне математизације (Слика 12).



Слика 12. *Шематски приказ контекстуалног приступа учењу*

Полазиште у процесу учења представља проблем који може бити изражен у облику визуелне репрезентације или у облику речи или неке друге врсте ознака. Дакле, обликовањем проблемске ситуације изражавамо односе који приказују математичке проблеме везане за стварност или реалност која окружује ученика. Важно је издвојити две врсте обликовања (моделовања), у првом случају је то моделовање проблема, а у другом самог поступка решавања.

Следећи корак у процесу математизације подразумева формирање математичког проблема у формалном облику, односно у облику симболичке алгебре. То обухвата коришћење различитих модела, који омогућавају да проблем постане више апстрактан, односно да се односи између вредности пренесу на поље симболике и формалне алгебарске нотације. Модели који се у том процесу користе могу бити различити, и у највећој мери зависе од природе проблема, као и претходног искуства које ученик има у решавању задатака. Ови модели треба да омогуће ученику да уклони небитне елементе и претвори проблем у математички модел. Прелаз са поља реалности у поље формалне математике називамо хоризонталном математизацијом. Следећи корак у процесу математизације јесте процес решавања задатка који може бити потпуно везан за апстрактни формални облик, при чему се ученик концентрише на само решавање проблема. Овај процес у коме је мисао ученика потпуно у свету симбола називамо вертикалном симболизацијом. Када ученик дође до решења, он је у ситуацији да истражи његову веродостојност. Поступком хоризонталне и вертикалне математизације, решење се поново враћа у реалну стварност и првобитни контекст, чиме се постиже да се ученик нађе у ситуацији да разматра тачност решења из перспективе реалности. Значајна карактеристика је реалистичко значење самог решења.

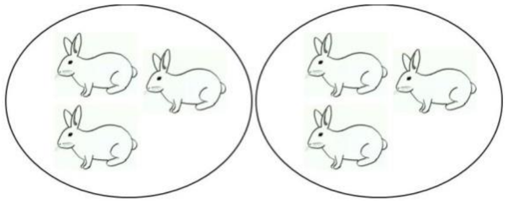
Може се закључити да се у процесу математизације и моделовања, модели које ученици користе настају из њиховог сопственог резоновања. Посебно, ако су у питању задаци реалног контекста, ученик је у могућности један проблем посматра из више углова и из више перспектива. У процесу у ком ученик размишља о проблему у могућности је да идентификује и издвоји карактеристичне информације и раздвоји битне од небитних информација, при чему закључује о њима и њиховој међусобној повезаности. У овом процесу сви елементи су међусобно повезани и условљени, тако да су ученици у стању да генеришу, тестирају или мењају и унапређују сопствене моделе. На овај начин модел постаје трајно својство појединца и сигуран алат за будућа истраживања многих других проблема.

Пошто смо у овом раду посебно издвојили алгебарске способности на основу проблема који прате наставу алгебре на овом узрасту, посебно ћемо разматрати методичко обликовање садржаја алгебре контекстуалним приступом и улогу математизације у том приступу. На конкретним примерима садржаја за сваку од издвојених способности, приказаћемо процес учења и процес математизације, али и само део од могућих модела решавања, који се могу појавити у оваквом приступу настави и учењу алгебре. Наравно сваки од модела може послужити и као модел на основу ког ће ученик изградити неки нови модел за учење и решавање проблема.

3.3.1. Развијање појма знака једнакости као симбола којим се изражава еквивалентност контекстуалним приступом

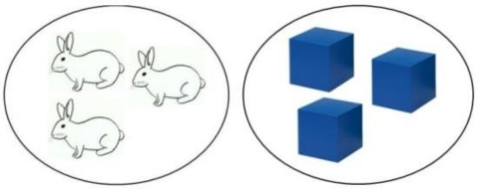
Када је реч о алгебри на млађем школском узрасту, посебно из аспекта симболичког изражавања алгебарских истина или проблема, значајну улогу има *схватање знака једнакости као симбола којим се изражава симетричност (еквивалентност) леве и десне стране једнакости*. Велики број истраживача широм света указује на проблем разумевања знака једнакости, при чему се наводи да овај знак ученици најчешће доживљавају као наредбу „одреди“ или „израчунај“ (Booth, 1988; Baroody & Ginsburg, 1983; Kieran, 1981; McNeil & Alibali, 2005; Sfard & Linchevski, 1994, Filloy & Rojano, 1989; Carpenter & Levi, 2000). Неки од истраживача (Alexandrou-Leonidou & Philippou, 2011) сматрају да употреба вишеструких визуелних репрезентација доприноси разумевању појма једнакости, и то у првом реду коришћењем визуелних и симболичких репрезентација, док се други слажу да је боље значење овог знака развијати изван формалне алгебре (Knuth et al., 2006). Ми ћемо у овом раду представити контекстуални приступ, кроз процесе моделовања и математизације, како би подстицали правилно схватање појма једнакости и симбола за његово означавање. Правилно схватање појма једнакости као појма који означава еквивалентност је веома важно са аспекта алгебре, јер правилно схватање овог појма подразумева да ће ученик бити у стању да разуме и на прави начин формира остале алгебарске појмове. Развијање овог појма на млађем школском узрасту могуће је кроз проблеме реалног контекста у којима ће реална ситуација свакодневног живота изражавати еквивалентост. У почетку се могу користити примери у којима ученик има задатак да упоређује скупове по бројности (Пример 1).

Пример 1. Упореди скупове.



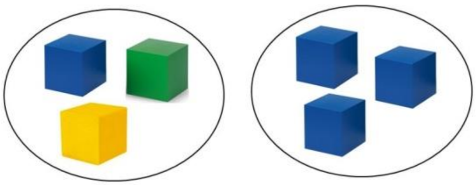
Ученик је у ситуацији да упоређује бројност два скупа. У овом примеру ученик посматра слику и кроз процес хоризонталне математизације закључује да се у оба скупа налази исти број зечева, односно у оба скупа се налазе по три зеца. Када је у питању развој појма једнако, у првом плану мора бити синтагма „исти број зечева“ којом се изражава еквивалентност бројности ова два скупа. Ученици треба да закључе да су ова два скупа једнака по бројности, јер се у оба скупа налази исти број елемената. Даље кроз процес вертикалне математизације потпуно прелазимо на симболички запис, тако што ћемо појам еквивалентности или једнакости изразити помоћу симбола „=“. Тако, упоређивањем бројности ова два скупа закључујемо: $3 = 3$. Како бисмо овај појам даље развијали могу се искористити примери са већим степеном апстрактности (Пример 2).

Пример 2. Упореди скупове.



Ученик је у ситуацији поново да упоређује бројност, при чему овај пут упоређује скупове са различитим елементима. Хоризонталном математизацијом у процесу апстракције ученик занемарује разлике, тако да бројност ова два скупа долази у први план. И у овом случају оба скупа имају исти број елемената, тако да се у овом случају појам једнакости изражава синтагмом већег степена апстрактности „исти број елемената“. И у овом случају изражавање еквивалентности је остварено кроз процес вертикалне математизације, тако да се упоређивањем бројности ова два скупа може закључити да је $3 = 3$. Даљи развој овог појма можемо везати за примере са апстракцијом на још већем нивоу (Пример 3).

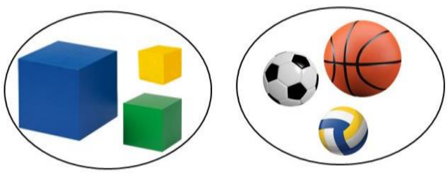
Пример 3. Упореди скупове.



У примеру 3 ученик је у ситуацији да упоређује бројност ова два скупа, при чему треба да уочи да се први скуп састоји од једне плаве, једне зелене и једне жуте коцке, док се други скуп састоји од три плаве коцке. На основу тога ученик у изражавању еквивалентности ова два скупа може искористити једнакост којом се изражава однос бројности ових скупова $1 + 1 + 1 = 3$. Оперисање са изразима на овом нивоу апстрактности везује се за процес вертикалне математизације, док је ученик у могућности да у сваком тренутку напусти поље формалног математичког записа и врати се у контекст реалности.

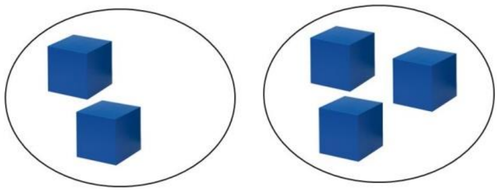
Као још апстрактнији пример, можемо искористити пример два скупа са различитим елементима. Опет се ученик поставља у ситуацију да упоређује скупове по бројности. Упоређивањем скупова одбациће све карактеристике елемената, а задржаће бројност као својство скупа. Када упореди ове скупове, поново ће бити у ситуацији да закључи да су једнакобројни, односно имају исти број елемената (Пример 4).

Пример 4. Упореди скупове.



Како би се ситуације у којима се скупови упоређују по бројности постепено превеле на подручје алгебре, може се искористити задатак у Примеру 5:

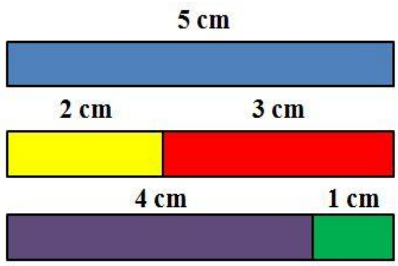
Пример 5. Шта треба да урадиш да ови скупови имају исти број елемената?



Посматрајући ова два скупа ученик закључује о сличностима и разликама, тако да може закључити да се они разликују по броју елемената. Пошто је у задатку бројност кључна за решење проблема ученик може одреаговати на различите начине како би решио овај проблем. Суштински за решење проблема потребан је реалан контекст у ком се може манипулисати елементима како би скупови били еквивалентни. Ученик у овом случају може додати једну коцку у скуп плавих коцки ($2 + 1 = 3$) или једну коцку издвојити из скупа жутих коцки ($2 = 3 – 1$), тако да ови скупови поново постану еквивалентни.

Појам знака једнакости као знака којим се изражава еквивалентност, а не команда „израчунај“ може се развијати кроз различите примере, један од њих је и проблем са тракама одређене дужине (Пример 6).

Пример 6. Упореди дужине трака.



Слика која изражава ситуацију реалног контекста приказује траке различите дужине. Ученик посматра дужине трака и закључује о односима који постоје између њих. Процес хоризонталне математизације означава поступак у ком ученичко мишљење прелази из света реалног у свет формалне математике и омогућава запис математичких једнакости. Ученик је у ситуацији да изражава једнакости дужине трака математичким језиком, тако што упоређује једнаке дужине трака:

$5\ cm = 2\ cm + 3\ cm$ – дужина плаве траке једнака је збиру дужина жуте и црвене;

$5\ cm = 4\ cm + 1\ cm$ – дужина плаве траке једнака је збиру дужина љубичасте и зелене.

На овај начин се могу вежбати математичке једнакости у којима се израз налази са десне стране знака једнакости, а број са леве стране овог знака. Упоређивањем дужине траке са дужином плаве траке, ствара се основа на којој се могу упоређивати дужине трака из другог и трећег реда:

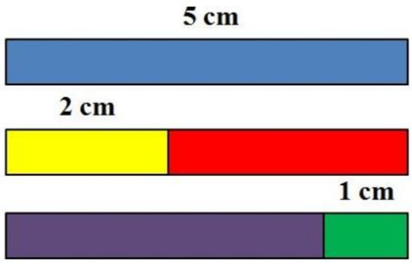
$2\ cm + 3\ cm = 4\ cm + 1\ cm$ – укупна дужина жуте и црвене траке једнака је укупној дужини љубичасте и зелене траке.

На крају ученици могу упоређивати дужине сва три реда трака:

$5\ cm = 2\ cm + 3\ cm = 4\ cm + 1\ cm$ – укупна дужина плаве траке једнака је укупној дужини жуте и црвене траке, а то је даље једнако укупној дужини љубичасте и зелене траке. На овај начин стварамо реални контекст за разумевање знака једнакости као знака којим се изражава еквивалентност – оно што се налази са леве стране знака једнакости еквивалентно је ономе што се налази са његове десне стране.

Садржај који упућује на одређивање непознатих дужина трака везан је за контекст реалног живота, тако да је ученик у ситуацији да посматра дужине трака и закључује о односима који између њих постоје. Проблем дат у овом облику у исто време може представљати модел који ће ученицима омогућити визуелизацију и уочавање битних односа између дужина трака (Пример 7).

Пример 7. Одреди дужину црвене и љубичасте траке.



Процес математизације почиње од тренутка када овај проблем ученик покуша да запише у облику математичке једнакости, при чему ће непознате дужине представити држачем места. Овај однос у дужинама трака различитих боја могла би се изразити као једнакост са непознатим вредностима:

$$5\ cm = 2\ cm + \_\_\_ = \_\_\_\_ + 1\ cm$$

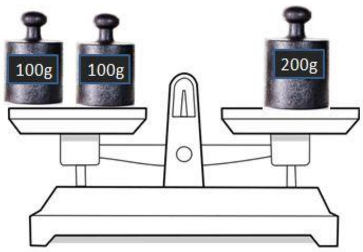
Хоризонтална математизација је омогућила прелазак из света реалног у свет апстрактног математичког записа који изражава однос између дужина. Даље, ученик је у ситуацији да упоређује изразе са различитих страна знака једнакости и на основу тога одређује дужине. Пошто је знак једнакости знак који изражава еквивалентност, то значи да вредност сваког од ова три израза раздвојена знаком једнакости мора бити иста. Тако ће ученик у процесу вертикалне математизације закључити да решење ове једнакости мора бити:

$$5\ cm = 2\ cm + 3\ cm = 4\ cm + 1\ cm$$

На крају у решавању овог задатка ученик се опет враћа на поље реалности и образлаже резултате до којих је дошао, тако да ће рећи да је дужина црвене траке 3 *cm* док је дужина љубичасте траке 4 *cm*.

Разумевању и схватању знака једнакости значајно може допринети и моделовање проблема на ваги. На овај начин постепено се гради значење знака једнакости као знака еквивалентности, јер се суштина ових проблема заснива на идеји равнотеже, која постоји између тасова ваге. Узмимо за пример следећи задатак (Пример 8).

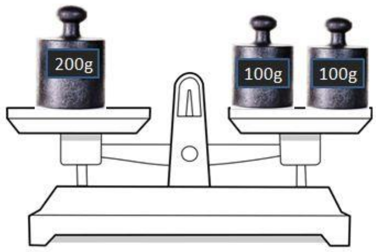
Пример 8. На основу слике запиши једнакост.



У *Примеру 8* ученици су у позицији да посматрају масе тегова који се налазе на тасовима ваге. Поред тога, пошто је вага у равнотежи, можемо рећи да је маса која се налази на левом тасу ваге, једнака маси која се налази на десном тасу ваге. Хоризонталном математизацијом, реални контекст маса на тасовима ваге може се превести у облик математичке једнакости: *100 g + 100 g = 200 g*. У овом облику математичка једнакост изражава равнотежу ваге у стварности, тако да се и сам појам *једнакости* може схватити као појам који изражава равнотежу елемената који се налазе са леве и десне стране тог знака – *једнако, еквивалентно, у равнотежи*.

Како би значење знака једнакости проширили на нетипичне изразе са којима се ученик сусреће, могу се користити и следећи проблеми са вагом (Пример 9).

Пример 9. На основу слике запиши једнакост.



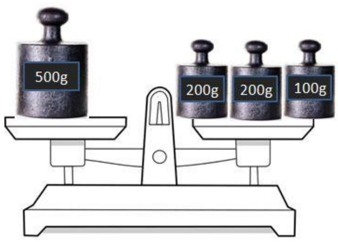
Ако се ова ситуација упореди са претходном може се закључити да су тегови заменили стране на ваги, тако да је у овом задатку ученик у ситуацији да уочи да тег масе 200 g, који се налази на левом тасу ваге има исту масу као два тега од 100 g који се налазе на десном тасу ваге. Ову чињеницу ученик преноси на поље формалне математике, па ситуацију може да изрази у облику једнакости:

200 g = 100 g + 100 g.

У овом случају формални математички запис има облик у ком се израз налази са десне стране знака једнакости, што је нетипично за задатке аритметике на које је ученик навикао, при чему знак једнакости доживљава као „одреди“ или „израчунај“. Ученик је на овај начин у ситуацији да се врати на поље реалности и закључи да овај запис изражава равнотежу односно еквивалентност, на исти начин као што постоји равнотежа између тасова ваге у реалном контексту.

У следећем кораку проблем реалног контекста изражен вагом треба да омогући још потпуније разумевање знака једнакости, тако да се може искористити следећи задатак (Пример 10).

Пример 10. На основу слике запиши једнакост.



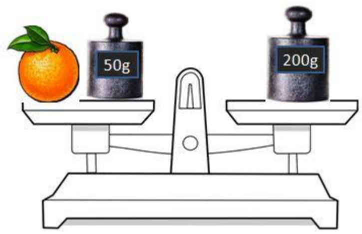
Ученик у првом реду уочава једнакост укупних маса тегова на тасовима. Равнотежа изражена у реалном контексту на апстрактном нивоу формалне нотације може се записати као једнакост:

500 g = 200 g + 200 g +100 g.

На овај начин у први план се истичу сложене једнакости, које ће утицати на потпуније разумевање знака једнакости као знака еквиваленције.

Како би се значење знака једнакости проширило, могу се користити и проблеми реалног контекста са вагом у којима је непозната маса објекта или објеката (Пример 11).

Пример 11. Одреди масу поморанџе.



Овај задатак заснован је на особини коју вага користи да би мерила масу, а то је равнотежа маса левог и десног таса. Равнотежа тасова експлицитно указује на једнакост страна у једнакости и доприноси њеном разумевању. Ученик у процесу решавања задатка размишља о познатим и непознатим вредностима и закључује да је маса тега од 200 грама у равнотежи са поморанџом и тегом од 50 грама. Процесом математизације овај задатак може се превести на поље формалне математичке нотације и представити у облику једначине или једнакости са непознатим бројем:

$\underline{\quad\quad} + 50\ g = 200\ g.$

Празно место, које означава непознати број на вишем нивоу апстракције представља се симболом, односно словом, тако да ова математичка једнакост постаје једначина:

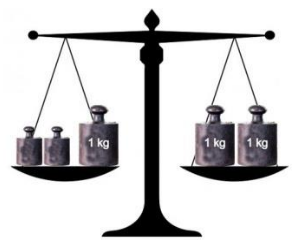
$x + 50\ g = 200\ g.$

У овом случају, решавање једначине потпуно је у сфери оперисања са алгебарским изразима, који је карактеристичан за процес вертикалне математизације. Пошто је вага у равнотежи, то значи да поморанџа мора имати масу од 150 грама како би овај услов био испуњен.

Нешто сложенији задаци овог типа могу се искористити за вежбањем како значења знака једнакости, тако и решавања једначина (Пример 12).

Пример 12. Одреди масу тегова чија маса није одређена.

или



Први корак у процесу математизације јесте реални контекст у који је смештен проблем свакодневног живота. Ученик је у ситуацији да се сусретне са проблемом и да започне процес анализе проблема, као и уочавање односа који постоје између количина у овом проблему. Процес анализе треба да доведе до закључка да је вага у равнотежи, односно да је оно што се налази на левом тасу ваге исте масе као оно што се налази на његовом десном тасу. Даље уочава да постоје два иста тега чија је маса непозната, али чија се маса може утврдити. Читава анализа задатка има циљ да проблем који је дат у реалном контексту кроз процес хоризонталне математизације апстракцијом преведе у језик симбола. Овај корак је важан зато што ученик у њему може користити различите моделе који помажу у закључивању. Раније искуство ученика омогућиће му да одабере пут којим би употребио податке из задатка и синтетизовао их у облику математичког израза, како би дошао до решења. Један од могућих модела може бити једначина, која ће изражавати однос између маса на тасовима ваге ($2 \cdot x + 1\,000\ g = 2\,000\ g$). На овај начин ученик изражава способност потпуног разумевања знака једнакости, јер се овим знаком показује еквивалентност маса која постоји између тасова на ваги. Даље, сам поступак решавања једначине подразумева разумевање знака једнакости као знака који изражава еквивалентност. Процес решавања проблема, у овој фази, одвија се потпуно у симболичком свету који је одвојен од реалности, што упућује на вертикалну математизацију. Решење једначине изражаваће масу тега на ваги (500 g) тако да се на крају опет враћамо процесом хоризонталне математизације у реалност и проверавамо тачност решења тако што ћемо користити једнакост:

$2 \cdot 500\ g + 1\,000\ g = 2\,000\ g$

$1\,000\ g + 1\,000\ g = 2\,000\ g$

$2\,000\ g = 2\,000\ g$

Наравно, модел који ће послужити као основа за решење може бити другачији. У овом поступку ученик може користити цртеж или неки други модел како би приближио односе између познатих и непознатих вредности у задатку.

Модел који се може вежбати у задацима овог типа, а који може бити од велике користи је одстрањивање маса са оба таса ваге истовремено, при чему она остаје у равнотежи. У математичком контексту то би значило одузимање истог броја са леве и десне стране знака једнакости у једначини. У овом случају ученици би одузели тегове масе 1 000 g и са једног и са другог таса тако да би укупна маса два иста тега чију масу не знамо била 1 000 g (Пример 13).

Пример 13. Одреди масу тега.

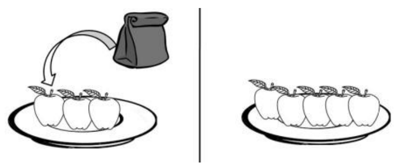
Ученици закључују да је маса једног тега 500 g. У овом случају решавање овог задатка је пребачено потпуно на поље реалности. На овај начин ми смо у стању да постепено градимо моделе који ће бити основа за учење садржаја, али и изградњу нових сложенијих модела из постојећих.

3.3.2.Развијање појма променљиве и непознате контекстуалним приступом

Многи истраживачи наводе да је појам променљиве и непознате, кључни појам алгебре (Skemp, 2012) и да је веома важно тај појам развијати од најранијег школског периода (Carraher et al., 2008). Поред тога способност ученика да реши алгебарски проблем јесте и начин на који разуме и доживљава појам непознате и променљиве у овом поступку. *Развијање појма променљиве и непознате* (*непозната као број који је само тренутно непознат, не као вредност која не постоји*) представља значајну алгебарску способност, коју у настави алгебре на млађем школском узрасту треба развијати, и која мора бити императив развоја свих других способности и учења алгебарских садржаја. Контекстуалним приступом може се подстицати развој ове способности, тако што се тежи да се ученик постави у ситуацију да размишља о непознатој из реалног контекста.

Усвајање ових садржаја на овом узрасту није једноставно, па велики број истраживача широм света наводи различите приступе како би се ови појмови приближили мишљењу ученика на овом узрасту, а посебно се истиче значај и улога контекста реалних ситуација којима се може подстицати развој ових појмова (Kilhamn, 2014; Rystedt et al., 2016; Stephens et al., 2015; Carraher et al., 2008). На конкретним примерима ћемо приказати како се појам променљиве и непознате може развијати у оквиру наставе математике засноване на принципима контекстуалног учења. Навешћемо пример задатка у ком постоји реалистична ситуација свакодневног живота, како би развијали идеју непознатог броја (Пример 14).

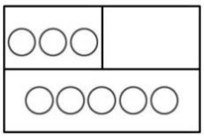
Пример 14. Колико јабука је додато у корпу са воћем?



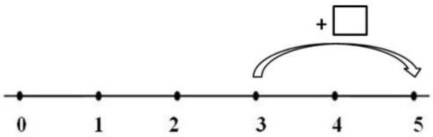
На основу реалне ситуације која је изражена помоћу слике, представили смо задатак који може послужити да развијемо идеју непознатог броја. На основу слике ученик закључује о количинама које су дате у задатку. Ово закључивање представља процес хоризонталне математизације којом се из поља реалног контекста постепено прелази на поље формалне нотације. Ученик треба да у овом процесу уочи шта је непознато у задатку. Слика која је везана за идеју непознатог броја је кеса у којој се налазе јабуке, при чему ученик не зна колико је јабука у тој кеси. Пошто је број јабука непознат, а јабуке се додају у корпу самим тим може се закључити да у једнакости који би написали непозната представља један од сабирака. Први корак у развијању идеје непознате је стварање менталне представе непознатог броја, при чему се у облику математичког записа он може представити и као „држач места“. Идеју формирања непознате у почетку развијамо без његове симболизације, тако да је реч очигледно о вези која постоји између аритметике и алгебре на овом нивоу. У случају овог задатка математичка једнакост би била:

$$3 + \square = 5$$

Квадрат или „држач места“ у овом случају има улогу непознате, при чему се овај запис и даље не може посматрати као једначина. Хоризонталном математизацијом, смо проблем дат у реалном контексту превели на језик формалне математике и на одређени начин генерализовали ову ситуацију. Како би одредили број који недостаје у процесу вертикалне математизације, ученици могу користити претходно искуство са сабирањем бројева да одреде вредност непознате, или се могу послужити моделом који би им приближио ову ситуацију и омогућио да закључе који то број треба додати броју 2 да бисмо добили број 5. Наведимо моделе који могу послужити као начин да се процес решавања проблема поједностави и лакше преведе на раван формалне математике. Први модел који може послужити јесте модел у ком се на очигледан начин могу сагледати односи који изражавају збир:



Поред овог модела на ком ученик може једноставније сагледати односе може се искористити модели полуправе:



3 + ____ = 5

На овај начин у процесу хоризонталне математизације можемо искористити моделе како би записали математичку једнакост са непознатим бројем, али са друге стране модели могу послужити и као помоћ у одређивању непознате. На овај начин ученик ће бити у стању да једноставније уочи, да ако броју 3 додамо број 2 добићемо број 5. Да би одредио колико је јабука додато у корпу и сама слика која изражава проблемску ситуацију може послужити као модел, при чему би је ученик могао искористити за решавање задатка потпуно на нивоу реалног контекста.

Задаци у којима се може вежбати и развијати способност разумевања појма непознате јесу и задаци у коме се од ученика захтева да утврде значење симбола, тако што ће на основу дате једначине, одредити проблемску ситуацију којој тај запис одговара. Да би то урадио, ученик мора разумети идеју непознате као и функције коју оне имају у проблему који је исказан у облику реалног контекста (Пример 15).

Пример 15. На основу дате једначине заокружи редни број испред одговарајућег текста задатка:

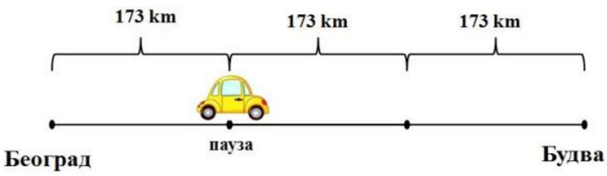
$$x + 3 = 7$$

1. *Саша има 3 кликера. Од друга је добио неколико и сада има 7. Колико кликера је Саша добио од друга?*
2. *Саша има 3 кликера. Када је другу поклонио неколико, остало му је 7 кликера. Колико кликера је Саша поклонио другу?*
3. *Када је Саша добио од друга 3 кликера имао је укупно 7 кликера. Колико кликера је имао Саша?*
4. *Саша је имао неколико кликера. Када је другу поклонио 3 кликера остало му је 7 кликера. Колико кликера је имао Саша?*

Пример оваквог задатка може послужити као ослонац у изградњи правилног схватања појма променљиве и његовог значења у задатку. На основу наведених примера датих у облику реалног контекста, ученик је у ситуацији да утврди значење променљиве у алгебарској једначини. У овом проблему процес математизације је обрнут, односно, ученик је у ситуацији да кроз процес вертикалне математизације размишља о односима између података датих у облику једначине и закључује о значењу које променљива има у различитим контекстима. Кроз поступак хоризонталне математизације ученик дату једначину преводи на језик реалног контекста, односно у размишљању он се креће од формалне алгебарске нотације, ка реалистичном контексту значења тих формалних нотација. Узимајући у обзир питања у датим проблемима реалног контекста у прилици је да закључује о улози коју непозната има у проблему. На основу тога ученик изводи закључак да овој једначини одговара трећа ситуација у којој непозната показује број кликера које је Саша имао пре него што је добио од друга 3 кликера.

Идеја непознате може се развијати и у задацима реалног контекста у којима се ученик поставља у позицију да поставља питања у математичком проблему и користећи се математичким знањем, даје одговоре на њих. Како бисмо илустровали овакав приступ узећемо следећи пример (Пример 16).

Пример 16. На слици је приказано путовање породице Марковић до мора. Шта све можеш одредити на основу слике?



Овај проблем исказан је кроз реалан контекст у облику слике. Слика описује путовање, и приказује удаљеност појединих етапа путовања. У исто време овако постављен задатак представља проблем који омогућује ученику да сам поставља питања и истражује познате и непознате односе у задатку. На реалном нивоу ученик расуђује о подацима са слике и закључује о односима који постоје између тих података. Питања која су кључна у овом проблему су:

Колика је дужина пута који је прешла породица Марковић до паузе?

Који део пута је прешла породица Марковић до паузе?

Колика је укупна дужина пута до мора?

Колику дужину пута породица Марковић треба да пређе од паузе?

Осим првог питања, одговори на свако друго питање у задатку захтевају од ученика да на неки начин утврди непознате дужине пута. Посматрајући слику ученик је у ситуацији да непознате дужине и делове пута одреди на основу уочавања везе која постоји између података датих на слици. Размишљање о односима који постоје у контекстуалном проблему подразумева поступак хоризонталне математизације, при чему је за одговор на било које питање потребно манипулисати вредностима дужина пута у процесу вертикалне математизације. Тако ученик на основу слике може закључити: да је породица Марковић прешла до паузе 173 km, што представља трећи део укупне дужине пута – три пута се понавља иста дужина пута од почетне до крајње тачке путовања. Укупна дужина пута од Београда до Будве представљаће збир три једнаке дужине пута, односно:

$$3 \cdot 173km = 173km + 173km + 173\ km = 519\ km.$$

На крају се може одредити и дужина пута који треба да пређу од паузе до Будве:

$$2 \cdot 173\ km = 173\ km + 173\ km = 346\ km$$

Суштина је да ученик вежбањем оваквог типа задатка научи да размишља о проблему и да разуме разлику између непознатих величина, које су само тренутно непознате, а које се могу одредити математичким путем. Процесима хоризонталне и вертикалне математизације ученик је у могућности да прелази пут од алгебарског до реалног контекста размишљајући о односима и значењу које непозната у том односу има. Ученик размишљајући о улози коју непозната има у реалном контексту у ситуацији је да гради и проширује њено значење и постепено је преводи на апстрактнији ниво формалне алгебре и симболичке нотације.

Како бисмо развијали идеју промењиве, као појма који се разликује од непознате на овом узрасту се могу искористити проблеми реалног контекста као у следећем примеру (Пример 17).

Пример 17. Марко је у десном џепу имао 5 кликера. Колико кликера је Марко могао имати у левом џепу, ако је у оба џепа имао мање од 10 кликера?

У почетку ученик је у ситуацији да увиђа односе који постоје у задатку и при томе закључује које вредности су познате, а које непознате. Пошто је захтев у задатку одређен са две чињенице: у десном џепу је тачно утврђена вредност кликера и укупно у оба џепа могао имати мање од 10 кликера, то ученик кроз процес хоризонталне математизације може закључити да је број кликера у левом џепу вредност која је промењива, али и различита. Модел који може послужити у овом случају, како би се функционална зависност изразила близак је реалном контексту и можемо га приказати табеларно:

Десни џеп	Леви џеп	Укупно
○○○○○	○	6
○○○○○	○○	7
○○○○○	○○○	8
○○○○○	○○○○	9

У процесу закључивања таблица као модел, може приближити услове у задатку и на одређени начин омогућити уочавање функционалног односа који постоји између две вредности: броја кликера у левом и десном џепу и укупног броја кликера у оба џепа. На овај начин ученик је у могућности да у реалном контексту варира могуће ситуације и одређује решења проблема. Модел који се може развити из овог модела јесте нови модел, са вишим нивоом апстрактности, а то је табела у којој је бројност изражена бројевима:

Број кликера у десном џепу	5	5	5	5	5	5
Број кликера у левом џепу	1	2	3	4	5	6
Укупан број кликера	6	7	8	9	10	11

У овом случају модел у облику табеле омогућава ученику да прати промене изражене у функционалној зависности кроз процес вертикалне математизације и уочава могући број кликера у левом џепу. На основу тога он закључује да је у левом џепу могло да буде: 4 кликера или 3 кликера или 2 кликера или 1 кликер. У процесу хоризонталне математизације ученик се опет може вратити у реални контекст и коментарисати реалност добијених вредности промењиве. Оваква вежбања су основа на којој се уводи појам промењиве, али касније и појам неједначине.

Па би тако у овом случају, неједначина која одговара овом проблему имала облик:

$5 + x < 10.$

У решавању ове неједначине могли бисмо се послужити истим моделима, за одређивање вредности променљиве. У поступку решавања неједначина процеси хоризонталне и вертикалне математизације, уз коришћење модела би омогућили прелаз на потпуну алгебарску нотацију, тако да скуп решења ове неједначине можемо представити:

$x \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Проблем реалног контекста може послужити као идеја за развој појма променљиве и у ситуацијама у којима се не може одредити тачна вредност променљиве (Пример 18).

Пример 18. У једној кошаркашкој утакмици један тим је победио и постигао одређени број кошева. Ако је у другој утакмици постигао за 15 кошева више него у првој, да ли то значи да је и у другој утакмици победио? Зашто?

На основу података који су исказани у задатку можемо рећи да постоји непознати број, односно вредност која може бити различита. У овом случају то је број кошева које је један тим постигао на првој утакмици. Анализирајући односе између података који су дати у задатку ученик закључује да су познате чињенице о одређеном броју кошева, који је конкретан, али нама недоступан и чињеници да је у другој утакмици иста екипа постигла за 15 кошева више. Оно што је поред овога непознато је број постигнутих кошева друге екипе у другој утакмици. Овај процес анализе услова задатка и превођења на језик математике у смислу упоређивања количина подразумева хоризонталну математизацију.

Пошто је број кошева друге екипе у другој утакмици непознат, а поред тога не зна се ни тачан број кошева прве екипе, осим тога што је постигнуто за 15 кошева више него у првој утакмици, то се може закључити да однос између ових количина може бити различит. На основу тога се може закључити да број кошева у првој и у другој утакмици може бити различит, односно ова ситуација упућује на појам променљивих величина које су означене реалним контекстом као број кошева екипа у првој и другој утакмици. Да би дошли до решења проблема ученици треба да закључе да без обзира на то што је други тим постигао више кошева у другој утакмици не значи да је и у другој утакмици и победио. Закључивање о односима између променљивих у овом случају је подручје вертикалне математизације, док је задатак постављен и решен у потпуности на нивоу реалног контекста свакодневног живота.

Наведени су само неки примери којима је илустровано на који начин се могу контекстуалним приступом развијати идеја непознате и променљиве. Примена модела у контекстуалном приступу кроз развијање идеје променљиве и непознате зависи од проблема, али и самог искуства ученика у процесу размишљања о односима и захтевима у задатку.

3.3.3. Разумевање функционалне зависности између компонената рачунских операција контекстуалним приступом

Појам функционалне зависности између компонената рачунских операција, представља први садржај који се односи на појам функције, са којим се ученици сусрећу у млађем школском узрасту. Апстрактност промена исказана језиком алгебре је далека уму ученика, стога многобројни истраживачи у својим радовима нуде разноврсне приступе решавању тог проблема (Blanton & Kaput, 2011; Linchevski, 1994, Schliemann & Brizuela, 2003; Schliemann et al. 2003; Carraher, Martinez & Schliemann, 2008; Carraher et al., 2008). Приступ овим садржајима, који фаворизујемо у овом раду заснован је на мишљењу Гравемејера (Gravemeijer, 1999) о повезаности конвенционалних математичких репрезентација и ситуација реалистичног контекста коришћењем реалних приказа и модела.

Када се у обзир узме значај развоја алгебарског мишљења, у њему посебно место заузима развој функционалног мишљења и *разумевања функционалне зависности између компонената рачунских операција.* Зависност резултата од промене компонената рачунских операција је алгебарска тема која многим ученицима задаје главобољу. У сличном проблему се налазе и учитељи који се труде да пронађу адекватан начин да те садржаје обликују тако да буду јаснији и очигледнији ученицима. Наше мишљење је да се овај садржај може ефикасно представити ученицима тако што ће се искористити контекстуални приступ у обликовању садржаја и математизацији као процесу у решавању задатка и учењу ових садржаја. Наведимо пример задатка којим се може подстицати разумевање функционалне зависности између компонената и резултата рачунске операције (Пример 19).

Пример 19. Бранко има 350 динара, а Сања 480 динара. Колико динара имају заједно Бранко и Сања?

Ако Бранко потроши 50 динара, колико динара ће тада имати заједно он и Сања?

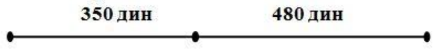
Ако Бранко добије 50 динара, колико динара ће тада имати заједно он и Сања?

Ако Сања потроши 80 динара, колико динара ће тада имати заједно она и Бранко?

Ако Сања добије 80 динара, колико ће динара тада имати заједно она и Бранко?

Садржај зависности промене збира од промене сабирака обликован је и представљен ученику у облику реалног контекста који изражава ситуацију свакодневног живота. Први корак јесте процес хоризонталне математизације која треба да омогући прелазак из реалног света проблема у свет симбола и алгебарске нотације. Тај процес је одређен коришћењем модела који могу послужити као начин да се премости тај апстрактни расцеп. Узећемо пример модела дужи који може на очигледан начин представити те односе.

Укупну сума новца коју имају Бранко и Сања можемо представити графички:



Ако суму новца коју има Бранко умањимо за 50 динара, умањиће се и укупна сума новца коју имају Бранко и Сања.

На основу овога на апстрактном нивоу закључујемо: *ако се први сабирак смањи за одређени број, за исти број смањиће се и збир*.

Ако суму новца коју има Бранко повећамо за 50 динара, и укупна сума новца повећаће се за 50 динара.

На апстрактном нивоу закључујемо: *ако се први сабирак повећа за одређени број, за исти број ће се повећати и збир.*

Ако суму новца коју има Сања умањимо за 80 динара, и укупна сума Сање и Бранка ће бити умањена за исту вредност.

На апстрактном нивоу закључујемо: *ако се други сабирак смањи за одређени број, за исти број ће се смањити и збир.*

Ако суму новца коју има Сања увећамо за 80 динара, и укупна сума Сање и Бранка ће се увећати за 80 динара.

На апстрактном нивоу закључујемо: *ако се други сабирак повећа за одређени број, за исти број повећаће се и збир.*

За сваки од наведених делова проблема модел може послужити као оквир за уочавање односа који постоје између резултата, односно збира и компонената сабирања односно сабирака. Ученик на очигледан начин уочава односе који постоје између сабирака који се мењају и збира. Процесом вертикалне математизације користи се рачуном и закључује о односима који постоје. Закључке до којих долази у сваком тренутку може поново вратити на поље реалности, и одредити да ли се поклон за маму може купити или не. У овом процесу се увек може користити моделима како би уочио зависност збира услед промене сабирака. Последњи корак у овом процесу је закључивање непотпуном индукцијом, у којој се поред више примера може уочити законитост. Ова особина се даље може генерализовати на скупу природних бројева и потпуно пренети на поље алгебре:

$a, b, c, x \in N$

$a + b = c$

$(a + x) + b = c + x;$

$(a - x) + b = c - x; (a > x)$

$a + (b + x) = c + x;$

$a + (b - x) = c - x; (b > x)$

Како бисмо показали колико процес математизације може бити од користи у развијању нових модела, тако што се могу користити већ постојећи, узмимо пример проблема реалног контекста (Пример 20).

Пример 20. У 3 кутије налази по 10 бомбона. Колико је укупно бомбона у кутијама?

Ако број кутија повећамо 3 пута, колико пута се повећа укупан број бомбона?

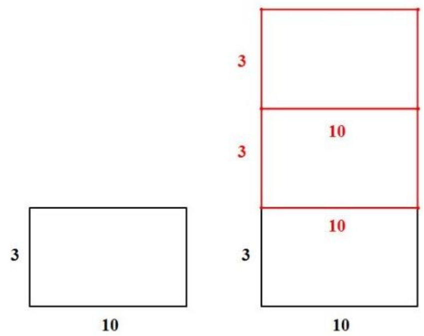
Ако би се број кутија смањио 3 пута, колико би се пута смањио укупан број бомбона?

Ако би се број бомбона у свакој кутији повећао 2 пута, колико би се пута повећао укупан број бомбона?

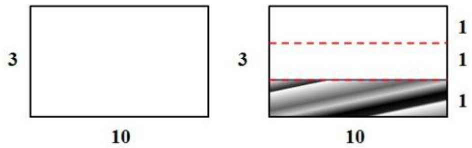
Ако би се број бомбона у свакој кутији повећао 2 пута, колико би се пута повећао укупан број бомбона?

Први корак у развијању појма зависности производа од промене чинилаца односи се на анализу датих података у проблему. Пошто проблем има више ситуација, оне се као и у претходном случају кроз процес хоризонталне математизације преносе на поље апстрактне математике. И у овом случају ученик може искористити модел како би проблем поједноставио. Модел дужи који је послужио као основа за раније закључивање, у овом случају може прерасти у *модел од*, односно полазишну тачку како би се формирао *модел за*. Пошто је у питању множење, модел који је раније користио постаје дводимензионалан – модел правоугаоника.

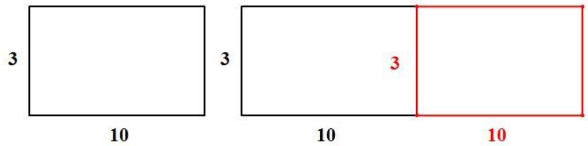
На основу овог принципа, могу се створити модели који би олакшали закључивање и омогућили ученику да уочи одређене законитости. Услови у задатку би се могли представити следећим моделима:



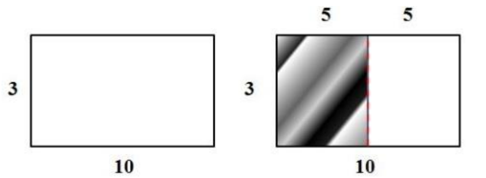
Укупан број бомбона може се изразити као: $3 \cdot 10 = 30$. У другом захтеву број кутија повећао се 3 пута, тако да можемо закључити да се три пута повећала површина фигуре из почетног услова, односно: $(3 \cdot 3) \cdot 10 = 9 \cdot 10 = 90$. На основу тога у процесу вертикалне математизације и превођења на поље формалне математике можемо закључити да: *ако први чинилац повећамо одређени број пута, исти број пута ће се повећати и производ.*



У другом услову задатка може се уочити да се број кутија смањио 3 пута, тако да се и укупан број бомбона смањио исто 3 пута, односно: $(3 : 3) \cdot 10 = 1 \cdot 10 = 10$. *На вишем степену апстракције закључујемо: Ако се први чинилац смањи одређени број пута, исти број пута ће се смањити и производ.*



У трећем услову у задатку број бомбона у свакој кутији повећао се два пута, тако да се на основу модела може уочити да се и укупан број бомбона повећао исто два пута, односно: $3 \cdot (2 \cdot 10) = 3 \cdot 20 = 60$. На апстрактном нивоу закључујемо да: *ако се други чинилац повећа два пута, исти број пута ће се повећати производ.*



У четвртом условy у задатку број бомбона у свим кутијама смањио се два пута, тако да на основу слике можемо закључити да се укупан број бомбона смањио два пута, односно: $3 \cdot (10 : 2) = 3 \cdot 5 = 15$. Посматрајући на апстрактном нивоу, можемо закључити да*: ако се други чинилац смањи одређени број пута, исти број пута ће се смањити и производ*.

Модели који се на овај начин могу користити на очигледан начин могу доказати промене које се дешавају са производом услед промене првог и другог чиниоца. Прелаз ка апстрактним формама алгебарског записа условљен је процесом индуктивног закључивања на основу више примера на којима се може уочити исто својство кроз вертикалну математизацију. Тако се на крају ово својство множења може представити алгебарском облику:

$a, b, c, x \in N$

$a \cdot b = c$

$(a \cdot x) \cdot b = c \cdot x;$

$a \cdot (b \cdot x) = c \cdot x;$

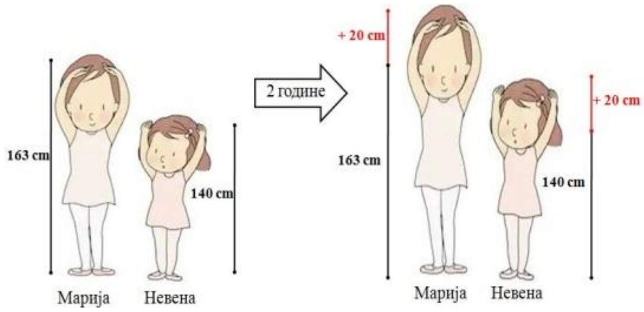
$(a : x) \cdot b = c : x;\ x|a;\ x|c$

$a \cdot (b : x) = c : x;\ x|b;\ x|c$

Проблем реалног контекста који се може користити у формирању појма сталности разлике, а који се може обликовати на различите начине – текстуално (Пример 21) и сликовном репрезентацијом (Пример 22).

Пример 21. Марија је пре две године била висока 153 cm, док је Невена била висока 140 cm. Данас су се мериле и закључиле да су обе порасле по 20 cm. Да ли је разлика у висини између њих иста, као и пре две године?

Пример 22. Да ли је разлика у висини између девојчица иста, као и пре две године?



У ова два примера једног истог проблема може се уочити нешто другачији приступ процесу математизације. Док се у Примеру 21 почиње од анализе података и тражењу модела, који би могао премостити апстрактан пут до формалне математике, то се у Примеру 22 контекст задатка може користити као модел, коме се ученик увек може вратити у процесу решавања. Слика, као визуелна репрезентација, која изражава реални контекст свакодневног живота посебно је значајна, ако се имају у виду способности и карактеристике мишљења ученика млађег школског узраста. Процес вертикалне математизације даље води ка упоређивању висина и закључивања о односима које постоје у висини две девојчице. Висина обе девојчице се мења за исту вредност после одређеног времена, а ученици закључују да се ни разлика у висинама тих девојчица није променила, односно:

$163\ cm - 140\ cm = 23cm;$

$(163\ cm + 20\ cm) - (140\ cm + 20\ cm) = 183\ cm - 160\ cm = 23\ cm.$

Ако исти проблем сагледамо уназад, као реалну ситуацију која треба да изрази разлику у висини ове две девојчице, али пре две године у односу на сада, ученици ће доћи до закључка да: ако се и умањеник и умањилац смање за исту вредност разлика ће остати непромењена, односно:

$183\ cm - 160\ cm = 23\ cm$

$(183\ cm - 20\ cm) - (160\ cm - 20\ cm) = 163\ cm - 140\ cm = 23\ cm$

На крају се процесом хоризонталне математизације поново враћа у стварност и проверава природност ситуације и да ли је то решење могуће у реалности, док се процес вертикалне математизације кроз апстракцију и генерализацију завршава на пољу алгебре:

$a, b, c, x \in N$

$a - b = c$

$(a + x) - (b + x) = c;$

$(a - x) - (b - x) = c;\ a > x$

Ми смо приказали само неке од најкарактеристичнијих модела који представљају део контекстуалног приступа у развоју разумевања функционалне зависности између компонената рачунских операција. Контекстуалним приступом, може се утицати да се односи који постоје између компонената поједноставе и омогући њихово лакше уочавање, а затим и усвајање од стране ученика. У овом процесу ученик је у сталној могућности да у процесу мишљења прелази са поља реалности на апстрактно поље алгебре и враћа се уназад, чиме једноставније уочава односе тестирајући их у новим околностима и новим условима све до тренутка док не буде спреман да их генерализује и док они не постану део његовог мишљења.

3.3.4. Развијање способност уочавања функционалних односа на графикону, табели или слици или било којој другој визуелној репрезентацији контекстуалним приступом

Како би се развијала идеја функционалне зависности, функције и функционалног мишљења, у великој мери помаже ослањање на визуелизацију тих појмова кроз коришћење таблица, дијаграма, графикона и слика за увиђање функционалних односа између променљивих. Многобројни радови истраживача широм света говоре о значају коришћења ових визуелних репрезентација, као и проблемима које треба превазићи у развоју функционалног мишљења у садржајима алгебре (Blanton & Kaput, 2004, 2011; Blanton et al. , 2015; Carraher & Schliemann, 2018; Barbosa & Vale, 2015 и многи други). Отуда се намеће питање методичке трансформације ових садржаја у настави математике у млађим разредима основне школе. Способност разумевања функционалне зависности је важна алгебарска способност, али поред ње је веома важно код ученика подстицати и с*пособност уочавања функционалних односа на графикону, табели или слици или било којој другој визуелној репрезентацији.* Основна идеја и полазиште контекстуалног приступа је да се сви математички појмови уведу на бази пажљиво одабраних примера из реалног контекста и да се на бази њих кроз процес математизације пребаце на симболички и апстрактни план математике. Кроз процес математизације може се утицати на развој способности схватања функционалних односа између променљивих, ако се у том контексту употребе различите визуелне репрезентације. Визуелне репрезентације омогућавају да се неки сложени односи или услови у проблему представе на једноставнији начин. Уколико је ученик у ситуацији да проблеме види у облику различитих репрезентација, он ће временом градити и флексибилнији однос у начину њиховог решавања и коришћења модела које ће у то истом процесу моћи и да модификује и прилагођава. Узмимо пример задатка у ком је кроз табелу изражена функционална зависност између две променљиве (Пример 23).

Пример 23. Користећи табелу откриј правило по коме машина пакује бомбоне у кутије. Покушај да попуниш табелу у складу са правилом које си уочио.

Кутије	20		80	100	150
Бомбоне	400	800		2000	

*Ако је број упакованих кутија x онда је укупан број бомбона у њима*__________

Број кутија: x

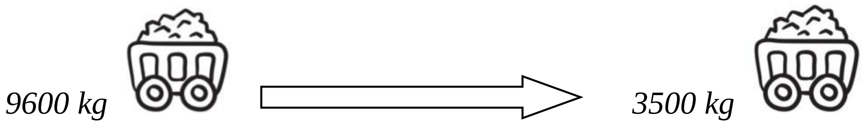
Број бомбона: $x \cdot 20$

У овом проблему ученик је у ситуацији да посматра податке који су дати у таблици и закључује о њиховом односу. Проблем је постављен у реалном контексту, док процесом хоризонталне математизације, мишљење ученика прелази на апстрактни ниво операсања са бројевима и уочавања односа, који постоји између њих. Промене које су карактеристичне одражавају особину вредности које изражавају број кутија и број бомбона у њима, тако да су ове вредности међусобно условљене. Уочавајући однос између датих вредности ученик је у ситуацији да сада у процесу вертикалне математизације закључује о функционалној зависности између променљивих.

За уочавање ове зависности ученик може користити табелу, као модел који ће користити за закључивање, али у овом поступку може користити и било који други модел или облик репрезентације, који је њему близак да би дошао до закључка. Кључ у уочавању односа јесу два конкретна примера дата у табели, на основу којих се може уочити та зависност и веза између променљивих. Закључак је да ће у сваку кутију машина упаковати по 20 бомбона. Последњи корак је потпуно на подручју алгебре, јер уочени однос треба изразити симболима који изражавају генерализовано својство односа променљивих, односно зависности која постоји између броја кутија и бомбона упакованих у њима.

Сличан проблем у ком је потребно увидети правило према ком се мењају одређене вредности, представићемо у следећем Примеру 24.

Пример 24. Због годишњих одмора су у једном руднику смањили производњу као на слици. На основу слике одреди и заокружи принцип који су рудари користили да би смањили производњу.

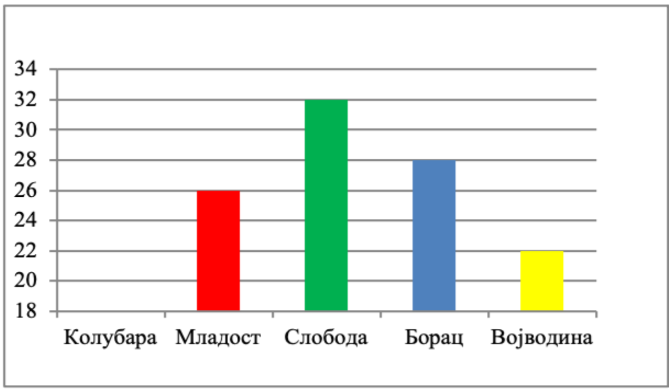


1. *Масу произведеног угља од раније делили су са 3 и увећавали за 100 kg.*
2. *Масу произведеног угља од раније су множили са 3 и умањивали за 100 kg.*
3. *Масу произведеног угља од раније делили су са 4 и умањивали за 100 kg.*
4. *Масу произведеног угља од раније су множили са 4 и увећавали за 100 kg.*

Процес хоризонталне математизације у овом случају креће од слике у којој су изражене вредности и наставља се даље кроз прелаз на поље формалне математике. Ученик је у ситуацији да тестира вредности и при том утврди правило које одговара датој промени на слици. Оперисањем са подацима на апстрактном нивоу, ученик је у ситуацији да поново користи процес хоризонталне математизације и резултате до којих је дошао упореди поново са реалним контекстом у задатку, односно правилима који изражавају реалне ситуације производње у једном руднику. Тако ученик расуђујући о односима количине произведене руде долази до закључка да ће та промена бити изражена тако што су масу произведеног угља од раније делили са 3 и умањивали за 100 kg. Овај процес закључивања захтева од ученика одређени напор, али се тај напор огледа у подстицању развоја функционалног мишљења што представља и значајан задатак овако организоване наставе математике.

Тенденције у савременом математичком образовању су да се у настави математике више пажње посвети графиконима као основи за развој функционалног и алгебарског мишљења. Важност коришћења графикона је и у чињеници да се ученици веома рано у свакодневном животу сусрећу са подацима који су приказани на овај начин. Наша идеја је да се са графиконима може подстицати развој функционалног и алгебарског мишљења, ако се користе како би изразили реалне ситуације свакодневног живота (Пример 25).

Пример 25. На графикону је приказан број бодова који су освојиле кошаркашке екипе у току шампионата. Одреди број бодова који је освојила екипа Колубара и прикажи на графикону, ако знаш да се налази на четвртом месту на табели. Разлика у броју поена између суседних места на табели екипа је иста.



Процес хоризонталне математизације почиње у тренутку када ученик почне да размишља о односима између поена сваке две суседне екипе у шампионату. Пошто је број поена сваке екипе, као вредност изражена кроз вредност стубаца на графикону, ученик уочава њихову вредност на графикону. Вертикална математизација означава процес карактеристичан за манипулисање вредностима без везивања за реалну подлогу, а то би у овом случају било уочавање односа који постоје између поена сваке две екипе, као и највеће и најмање вредности. Закључујући о односима на овом нивоу ученик закључује да разлика између суседних места у шампионату износи 3 поена. Овај закључак води га до решења, јер се повратком на графикон и реалну ситуацију изражену њиме, може пратити односе и распоредити екипе од најбоље до најлошије пласиране, а при том и одредити број поена коју је остварио кошаркашки клуб *Колубара*, а то су 23 поена. Последњи, не мање важан, корак јесте цртање ступца који треба да изрази број бодова кошаркашког клуба *Колубара*. Манипулисање подацима изражених сликом и изражавање вредности путем визуелне репрезентације су важни процеси који воде развоју функционалног мишљења и генерално развоју алгебарског мишљења уопште.

Схватање функционалних односа представља један од важних задатака почетне наставе математике управо из разлога, што се на овај начин почиње са развијањем првих појмова који ће касније у математичком образовању ученика представљати основу за сложеније садржаје који се односе на развој функције и њених особина.

3.3.5. Развијање схватања симбола у алгебарском изразу контекстуалним приступом

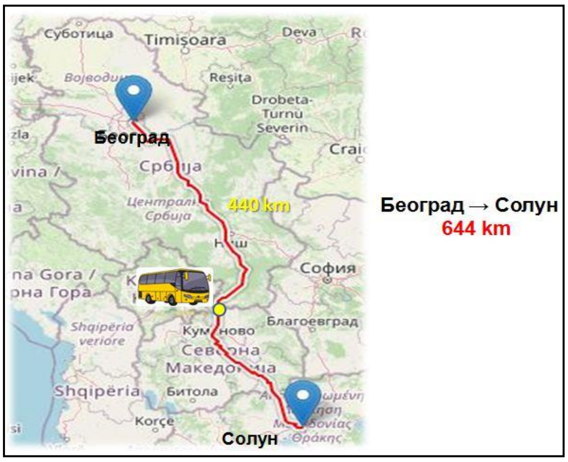
Разумевање идеје непознате и променљиве је уско повезано са симболима за њихово означавање, па је веома важан и приступ изградњи тог појма на шта указују многобројни радови истраживача широм света (Kieran, 1981, 2004; McNeil et al., 2010; ; Papadopoulos, 2019; Carraher, Schliemann & Schwartz, 2008 и други). Симбол у алгебри представља знак који означава непознати број или скуп бројева који представљају променљиву, стога употреба симбола у алгебарској нотацији означава тренутак када ученик из света реалности прелази у свет алгебре.

Да би се ученик разумео алгебру и алгебарске идеје потребно је да му буде потпуно јасна улога непознате и променљиве и алгебарској једнакости, као и начина њеног означавања. Како бисмо описали процес математизације, кроз идеју контекстуалног приступа у настави алгебре, узећемо пример следећег задатка којим желимо да развијемо схватање појма непознате и променљиве у садржајима о једначинама (Пример 26).

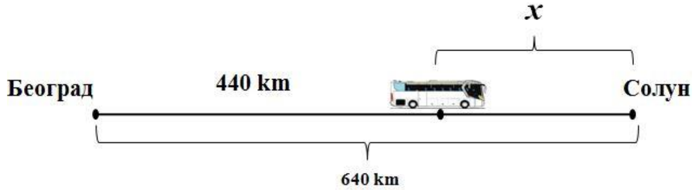
Пример 26. Аутобус путује од Београда до Солуна. Када је аутобус прешао 440 km направио је паузу, после које му је преостало да пређе још одређену дужину пута. Колики пут је аутобус треба још да пређе, ако је укупна дужина пута између Београда и Солуна 644 km?

Овај задатак је дат у текстуалној форми. Контекстуални приступ предвиђа различите врсте репрезентација проблема, тако да се исти задатак може представити у облику слике или цртежа (Пример 27).

Пример 27. Израчунај дужину пута која је преостала аутобусу да пређе на релацији од Београда до Солуна.



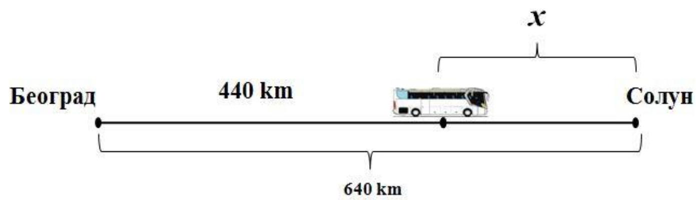
На примеру који смо навели проблем који је претходно задат у облику текста (Пример 26), сада је представљен цртежом (Пример 27). На овај начин смо употребили различито моделовање проблемске ситуације. Различите репрезентације истог проблема представљају први корак у процесу математизације. Следећа етапа се односи на процес, у ком ученик идентификује битне чињенице које се односе на његово решавање. Овај процес је веома битан у овом примеру из више разлога. Први разлог је везан за препознавање непознате величине и начина за његово означавање, док се други односи на разумевање симбола знака једнакости и његове правилне употребе. У овом поступку ученик је у ситуацији да из реалног контекста податке дате у проблему преведе у апстрактни симболички оквир и коришћење рачунских операција. При овом процесу ученик одбацује све небитне податке, док користи само оне који су потребни за решење проблема. Да би решио проблем ученик треба да буде у стању да користи сопствене моделе или на основу постојећих у свом искуству изгради нове. Ученик реагује на ситуацију на основу реалистичног контекста, на пример, следећим приказом:



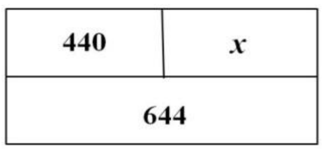
Модел ученику може послужити да одреагује записом на чисто аритметичком нивоу и облику математичке једнакости, којом ће изразити дужину пута која је преостала до Солуна. Ученик у реалном контексту увиђа односе који постоје између информација у задатку и закључује да ће дужину пута која је преостала до Солуна израчунати тако што ће од укупне дужине пута одузети дужину пута коју су већ прешли:

644 km – 440 km = 204 km

Вежба на оваквим моделима касније омогућава решавање једначине, односно усвајање појма непознате као симбола којим се иста означава. Питања која се односе на ситуације реалног контекста треба да послуже као смерница за одређивање непознате у задатку. У овом случају то би била дужина пута коју аутобус још треба да пређе. Да би означио непознату вредност ученик ће користити словну ознаку и самим тим омогућити прелазак од контекстуалног на подручје алгебарски израженог проблема. Следећи корак у процесу решавања проблема подразумева активност у којој ученик треба да реши математички проблем настао у процесу хоризонталне математизације, што подразумева коришћење специфичних модела како би се непозната вредност у једначини одредила. У том процесу ослања се на модел који смо већ представили:



Да би касније овај модел послужио да се формира нови модел који изражава већи ниво апстракције кроз процес хоризонталне математизације, који би омогућио увођење симбола као ознаке за непознату дужину пута. У овом задатку графички приказ којим се на сликовит начин изражава однос између познатих и непознатих вредности у проблему може се приказати као:



На основу графичког приказа ученик је у позицији да уочи односе између дужине пређеног пута и укупне дужине, као и дужине коју аутобус тек треба да пређе, а која је непозната. Тако ће овај графички приказ послужити да би на овај проблем реалног контекста одреаговао једначином, односно на чисто алгебарски начин:

440 km + x = 644 km

На основу слике и процеса поновног враћања у реалност, ученик закључује да ће растојање које је преостало до Солуна одредити тако што од укупне дужине пута одузме дужину пута који је аутобус већ прешао, и то преводи на језик формалне нотације и записује:

x = 644 km – 440 km

Ситуација се преводи на апстрактно поље алгебре, а даље се може закључити да непознати сабирак израчунава тако што се од збира одузме познати сабирак. Решење новог задатка у алгебарском облику било би:

x = 204 km.

Ученик закључује да је преостали пут има дужину од 204 km. Провера тачности решења такође треба да подстакне на правилно разумевање знака једнакости. У процесу провере тачности решења једначине задатак је испитати да израз који се налази са десне стране знака једнакости еквивалентан броју који се налази са његове десне стране, односно:

204 km + 440 km = 640 km

640 km = 640 km, што значи да смо добили тачно решење.

На крају ученик прелази поново пут хоризонталне и вертикалне математизације, кроз процес у ком се он пита: *Шта ово математичко решење представља у реалном свету?* У овом случају решење је дужина пута који аутобус још треба да пређе да би стигао до одредишта. Поред тога, модели којима се ученик служио у току решавања овог задатка могу послужити и у решавању њему сличних проблема. Процес изградње модела се наставља и ученик активно ради на њему. Овај последњи корак везан је за процес генерализације, који води ка уопштавању правила о израчунавању непознатог сабирка.

Коришћење симбола, као знака којим се обележава непозната или променљива у задатку представља једну од способности алгебарског мишљења која се, као што можемо видети, може развијати тако што ће се ученику понудити алгебарски проблеми у облику реалног контекста. Навешћемо пример проблема реалног контекста у коме ученик треба да утврди значење непознате (Пример 28).

Пример 28. Кројач Сава за месец дана сашије одређени број мајица. Кројач Сава шије за 150 мајица мање од кројача Паје. Напиши израз који показује број мајица које сашије кројач Паја за месец дана?

Поново процес решавања проблема почиње од анализе контекстуално заснованог проблема, који даље кроз процес хоризонталне математизације прелази у поље апстрактне математике. Ученик, размишљајући о односима који постоје у задатку, може закључити да: ако кројач Сава за месец дана сашије 150 мајица мање од кројача Паје, то значи да кројач Паја месечно шије 150 мајица више од кројача Саве. На основу тога и чињенице да је број мајица које кројач Сава сашије за месец дана означен са x, то број мајица које месечно сашије кројач Паја мора бити $x + 150$. У размишљању о односима, мисао ученика је потпуно на пољу апстрактне математике издвојена од реалног проблема, односно у процесу вертикалне математизације.

Овим примерима желели смо да покажемо методички приступ у обликовању проблема реалног контекста и њиховог решавања, кроз процес математизације на различитим нивоима апстрактности. Посебно смо нагласили улогу модела и процеса моделовања, који може бити од користи како у процесу обликовања математичког проблема тако и у поступку откривања начина за његово решење. Ученици би требало да буду задовољни када решавају задатке у којима је проблем свакодневног живота, јер су то ствари и ситуације са којима се сусрећу сваки дан. Наш задатак је да математизујемо свакодневни живот и омогућимо да он у том задатку пронађе ситуације из своје породице и средине у којој живи. Ако је проблем близак ученику он има жељу да га реши, а знање до кога дође истражујући проблем, постаће функционалније.

У оквиру теоријских поставки, у овом раду, посебну пажњу посветили смо проблемима који су евидентни у настави ране алгебре, у млађим разредима основне школе. Покушали смо дати преглед садржаја који се налазе у курикулумима и дати смернице методичког приступа обради ових садржаја, али и изнети недостатке до којих су дошли истраживачи који су се бавили овом темом пре нас.

3.4. Моделовање у решавању алгебарских задатака у настави математике

Задатак је основни садржај математичког образовања којим се остварује сви циљеви и задаци наставе математике, предвиђени исходи и образовни стандарди постигнућа. Они представљају и средство и циљ математичког образовања, па је отуда њихов значај огроман. Решавање задатака у настави треба да буде процес који је природан и забаван, али и веома често, од стране ученика, доживљен са стрепњом и страхом. Из тог разлога задаци би требали да буду представљени тако да изазивају задовољство у њиховом решавању. Одбојност често потиче од апстрактности математичких појмова и неспособности разумевања математике. Најчешћи узрок томе може се пронаћи у неразумевању језика којим се у настави математике служимо. Задатак дат у реалном контексту може бити излаз из ове ситуације, јер проблем који је близак ученику и његовом искуству јесте проблем који ће он разумети, али и мотивисати ученика да га реши. Решавањем проблема ученик би требало да размишља, расуђује, истражује, поставља хипотезе и увек поставља ново питање које га подстиче да логички и критички расуђује. Само на овај начин ученик ће бити у ситуацији да осети задовољство и буде истрајан у раду и учењу садржаја математике.

Да би ученик могао да решава математички проблем, треба да буду испуњени следећи услови:

1) „ученици треба да поседују одређену базу знања;
2) ученици треба да разумеју проблем и да имају жељу да га реше;
3) контекст задатка треба да буде познат и угодан за ученика“ (NRC, 2001: 130).

Дакле, у првом плану је дечије искуство као основа за његов рад, затим схватање и разумевање проблема, а на крају и контекст самог проблема.

Коришћењем реалног контекста у задацима алгебре подстиче се процес генерализације који се природно наставља на симболизацију, при чему се користи веза са аритметиком кроз процес увиђања односа, који се могу разумети у стварним проблемским ситуацијама. На овај начин покушава се превазићи апстрактни симболизам, карактеристичан за алгебру, с једне стране, а са друге стране ученици се подстичу да размишљају о односима и значењу симбола у свакодневном животу. Сваки процес који почиње представљањем задатка симболичким језиком, може бити објашњен реалним ситуацијама свакодневног живота. Тако се различитим моделима решавања задатака, покушава превазићи јаз између процедуралног и симболичког у настави алгебре.

Неки од захтева које ученици морају да испуне да би могли да решавају задатке и проблеме у настави алгебре у млађим разредима основне школе су: разумевање аритметичке структуре, поседовање знања о алгебарским нотацијама и конвенционалним симболима али и разумевање знака једнакости и неједнакости. Познавање аритметике и особина аритметичких операција представља основу за изградњу алгебарских законитости кроз процес генерализације. Усвајање алгебарске нотације, разумевање симбола и правила симболичког изражавања односа (разумевање знака једнакости као знака еквиваленције) и генерализација, представљају карактеристике процеса овладавања алгебарским способностима. Све су ово неопходни услови како би ученик могао успешно решавати проблем и успешно усвајати садржаје алгебре.

Када је реч о вези која постоји између развоја алгебарског мишљења и задатака у алгебри Карпентер и сардници (Carpenter at al., 2003) тврде да: „одабрани задаци могу да а) омогуће ученицима да се фокусирају на артикулацију својих идеја, б) буду изазов ученицима пружајући им различите контексте које они могу истраживати, ц) пруже увид у дечији начин размишљања“ (према Kieran, 2007: 8). Формулација задатака, са једне стране, може пружити ученицима велике могућности за схватање и изражавање генерализација, али свакако, са друге стране, њиховим решавањем може се пружити увид у то на који начин ученик размишља о проблему, како схвата односе и које методе користи да би решио проблем, као и на који начин размишља о решењу до ког је дошао.

Задаци представљају најзначајнији елемент, којим се наставник служи да би постигао одређени циљ наставе и учења математике. На првом месту, у настави математике треба да буде схватање решења и одговора на задатке које ученици решавају, јер се на овај начин генерализују правила која могу бити корисна за неко будуће учење. Решавање алгебарских задатака омогућава дефинисање различитих нивоа алгебризације. Овај процес представља прелазак из аритметике у подручје алгебре. У том контексту Аке и сарадници (Aké, Godino, Gonzato & Wilhelmi, 2013), имајући у виду активност ученика у решавању задатака, операционализују четири нивоа примарне алгебризације. Нивои су уоквирени између нултог и трећег, а математичка активност може се посматрати искључиво у алгебарском смислу:

0 ниво – овај ниво не укључује алгебарске карактеристике мишљења, већ је заснован на чињеници да су објекти који се посматрају, изражени на природан, иконички или неки други начин изражавања. На овом нивоу ученици могу да уоче елементе који се односе на непознату вредност, где се та вредност добија као резултат операција са одређеним вредностима;

Ниво 1 – у овом случају објекти који се издвајају су на већем ступњу општости. Ученик проналази опште правило, које му омогућава да пронађе вредност функције за било коју вредност независне променљиве. У овом процесу ученик користи обични и аритметички језик, али још увек не успева да користи симболички језик;

Ниво 2 – ученик проналази исправну формулу којом изражава односе између објеката. Формула је заснована на визуелном резоновању, израженом природним језиком. Објашњење ученика на овом нивоу подразумева контекстуалне и симболичке генерализације;

Ниво 3 – Стварају се објекти или функције, које су изражене дословно симболички, и над њима се изводе операције. Трансформације су представљене у симболичкој форми која изражава дату еквиваленцију (Aké et al., 2013: 3-6).

Овако дефинисани нивои алгебризације изражавају јединствена својства процеса мишљења ученика и специфичности промене размишљања, деловањем средине или оних који учествују у наставном процесу. Ови задаци тако постају значајни за рад учитеља, као неког ко ће бити главни актер организације и развоја алгебарског мишљења ученика овог узраста.

Алгебарско мишљење и расуђивање подразумева и различите приступе решавању задатка, односно, начина решавања датог проблема. Када говоримо о решавању алгебарског задатака, може се рећи да он подразумева свако решавање које укључује разумевање односа и особина рачунских операција, бројева и количина које у том процесу учествују. Решавање алгебарских проблема на овом узрасту може обухватити скуп различитих приступа, у самом поступку решавања задатка.

Активности са бројевима, које су карактеристичне за аритметику, у алгебри се почињу мењати, тако да се постепено уводе оне активности у које су укључени објекти који нису бројеви (непознате и промењљиве), као и сазнања о томе шта ови нови објекти представљају и шта значе. Настава алгебре се у том тренутку усмерава на дидактичке поступке који покушавају повезати све елементе, који у овим новим ситуацијама учествују. Како би се постигло што боље разумевање од стране ученика и како би се обезбедила боља успешност у процесу решавања задатака у области алгебре, прибегава се моделовању. На овај начин модел има улогу да визуализује и представи очигледне односе и релације које постоје у самом задатку.

Појам модел и моделовање се у литератури различито посматра − од извођења математичких симулација, преко стварања приказа проблемских ситуација, до стварања унутрашњих, психолошких приказа у процесу самог решавања проблема. На путу конструисања различитих алгебарских структура и усвајању алгебарских знања, користимо се различитим дидактичким моделима, који у том процесу постају математички модели. Што се тиче алгебарских садржаја, алгебарски појмови морају послужити као математички модели, односно алати помоћу којих се различите појаве или проблеми могу организовати, разумети и решити. Овакав однос према стварању и коришћењу модела је уједно и један од основних елемената контекстуалног приступа у настави математике. Дакле, суштина је у развоју ученичког мишљења и тежњи да оно постане флексибилно, тако да модели постану сет алата, којим ће се ученици користити у процесу решавања проблема, а чија ће се концепција стално мењати и проширивати у том процесу (Peled & Carraher, 2008).

Како наводе Инглиш и Срираман (English & Sriraman, 2010) моделовање омогућава разноврсне приступе настави математике, који имају бројне предности. Аутори сматрају да бројеви и операције које су потребне за математизацију реалистичних ситуација често превазилазе оно што се традиционално учи у школској математици, док моделовање омогућава стварање модела самостално од стране ученика (English & Sriraman, 2010). Поред тога, моделовање нуди богатије искуство учења од текстуалних проблема и користи се на контекстима из стварног света који се односе на више области, укључујући науку, економију, информационе системе, уметност. Моделовање посебно унапређује постојећу наставну праксу, јер охрабрује развој генерализованих модела које ученици у процесу моделовања стварају и које касније користе у сличним ситуацијама или у стварања нових модела (English & Sriraman, 2010: 273–274).

Моделовањем у процесу решавања задатака покушава се премостити јаз између оперативног и структуралног, односно прелаз од аритметике ка алгебри. Издвојићемо неколико најчешћих модела који се могу користити у решавању алгебарских задатака:

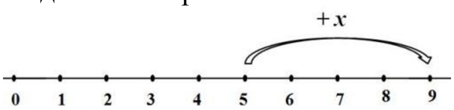
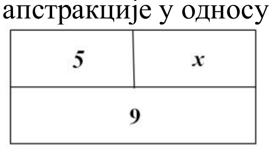
- моделовање у решавању једначина на основу везе која постоји између рачунских операција,
- моделовање у решавању једначина елиминацијом једне непознате,
- моделовање у решавању једначина симетричним исправљањем разлике и односа између непознатих (модел равнотеже),
- моделовање у коришћењу алгебарских законитости за решавање задатака,
- модел инверзије – инверзно обављање рачунских операција као начин решавања алгебарског проблема,
- аритметички модел алгебарског задатка.

3.4.1. Моделовање у решавању једначина на основу везе која постоји између рачунских операција

Решавање једначина на основу везе која постоји између рачунских операција представља приступ који се заснива на Виетовом моделу решавања линеарне једначине и веома је заступљен у настави. Овај приступ подразумева премештање објеката са једне на другу страну знака једнакости у једначини. Његова заступљеност и значај на млађем школском узрасту је велика из разлога што се на овај начин улази дубље у структуру односа који постоје између рачунских операција, као и њихове међусобне повезаности и условљености (супротне рачунске операције). Управо те активности представљају основу за решавање једначина и неједначина.

Наведимо пример задатка у ком ћемо представити поступак његовог чисто алгебарског процеса решавања, и решавања кроз процес математизације уз коришћење модела (Пример 29).

Пример 29. Марко има 5 јабука, од брата је добио још неколико, тако да их сада има 9. Колико јабука је Марко добио од брата?

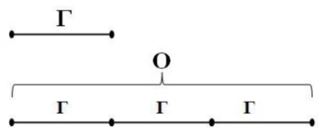
Алгебарско решење	Решење коришћењем модела кроз процес математизације
Постављање једначине: $5 + x = 9$	Постављање једначине: Моделовање проблема  На основу слике кроз процес хоризонталне математизације закључујемо да се може написати следећа једначина: $5 + x = 9$
Решавање једначине: На основу везе између рачунских операција, закључујемо да се непознати сабирак израчунава тако што се од збира одузме познати сабирак: $x = 9 – 5$ $x = 4$	Решавање једначине: Да би се решио задатак и уочила веза која постоји између рачунских операција користићемо модел вишег нивоа апстракције у односу на претходни:  На основу слике закључујемо о односима који постоје између сабирања и одузимања, па ћемо закључити да ћемо број јабука које је Милан добио од брата изразити тако што ћемо од укупног броја одузети број јабука које је Милан већ имао, односно: $x = 9 – 5$ $x = 4$
Провера тачности решења: 5 + 4 = 9 9 = 9	Провера тачности решења: 5 + 4 = 9 9 = 9 Опет се у поступку хоризонталне математизације враћамо на поље реалности и закључујемо да је број јабука које је Милан добио од брата реалан и да резултат одговара контексту задатка.

Процес решавања задатка започиње моделовањем ситуације, како би се дошло до једначине која изражава реалну ситуацију. Након тога ученици поново користе моделовање и слику, која очигледно изражава односе који постоје између непознатих и познатих вредности у задатку. На крају се вертикална и хоризонтална математизација преплићу тако да је ученик у стању да добијено решење процењује и упоређује са познатим вредностима.

3.4.2. Моделовање у решавању једначина елиминацијом једне непознате

Изражавањем једне непознате преко друге омогућује се да се проблем поједностави и сведе на онерисање само са једном непознатом. Овај приступ решавању задатака у алгебри може се развијати на млађем школском узрасту коришћењем задатака реалног контекста. Касније се овакав приступ у формалнијем облику може користити за решавање система линеарних једначина (Пример 30).

Пример 30. Одредити вредност оловке и гумице, ако знамо да је оловка кошта колико и 3 гумице, док укупна вредност гумице и оловке износи 120 динара.

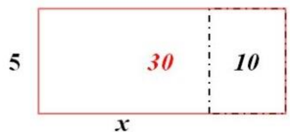
Алгебарско решење	Решење коришћењем модела кроз процес математизације
Постављање једначине: У овом случају можемо елиминисати једну непознату и изразити је кроз вредност друге (вредност оловке преко вредности гумице). *О + Г = 120;* *О = 3 · Г;* Ако у задатку вредност оловке заменимо вредношћу 3 гумице, једначину можемо написати као: *3 · Г + Г = 120;* *4 · Г = 120*	Постављање једначине: Моделовање проблема Моделима дужи представићемо вредности ове две величине:  На основу односа који постоји између дужи формирамо коначну слику модела:  На основу слике закључујемо да је вредност четири гумице 120 динара.
Решавање једначине: На овај начин смо успели да одстранимо једну непознату тако да ће вредност гумице бити: *Г = 120 : 4;* *Г = 30* Да би смо одредили вредност оловке, вратићемо се на почетак и одредити вредност оловке: *О* = 3 · 30 = *90*	Решавање једначине: Да бисмо одредили вредност једне гумице ако знамо укупну вредност 4 такве гумице, решење ћемо добити тако што ћемо укупну вредност 4 гумице поделити бројем гумица, односно: *Г = 120 : 4;* *Г = 30* Пошто једна оловка кошта као три гумице, закључујемо да ће вредност оловке бити: О = 3 · 30 = 90

Провера: 90 + 30 = 120 120 = 120	Провера: Оловка вреди колико и три гумице: 3 · 30 = 90, што је тачно. Укупна вредност оловке и гумице је: 90 + 30 = 120, што значи да се решење поклапа са условом задатка.

Предност геометријског или просторног модела задатка лежи у његовој визуелизацији и конкретности значења симболичких израза. Овакав тип модела представља одличан приступ за визуелизацију линеарних једначина. Ови модели могу послужити за представљање непознатих количина или вредности помоћу правоугаоника, где се у одређивању непознате користи однос између дужина страница и површине правоугаоника (Пример 31). Овакав приступ може се користити и за развијање појмова зависности и функционалних односа између променљивих.

Пример 31. На столу се налази пет истих паковања бомбона и још 10 бомбона поред. Колико бомбона је у сваком паковању ако знамо да је на столу укупно 30 бомбона?

Модел који смо искористили у овом случају је модел правоугаоника, при чему површина правоугаоника изражава производ броја и непознате. На овај начин ученик је у могућности да на очигледан начин увиди односе између површина, али и предвиди даље кораке у решавању задатка.



Површина правоугаоника површине 5 · x представља број бомбона у паковањима на столу. Збир ове површине и површине чија је вредност 10, која представља број бомбона на столу поред паковања, чини укупан број бомбона на столу.

Први корак у израчунавању непознате у овом случају било би одузимање површине изражене вредношћу 10 од укупне површине 30, односно *30 – 10 = 20*. Тако се једначина своди на одређивање једне странице правоугаоника, ако су дате површина и једна страница. Даље ученик закључује да ће непознату дужину правоугаоника израчунати, тако што ће површину поделити дужином ширине, односно 20 : 5 = 4. На овај начин смо без коришћења друге непознате успели да одредимо решење, односно број бомбона у паковању.

Коришћењем овог модела могу се приближити садржаји о зависности резултата од промене компонената рачунских операција (Пример 32).

Пример 32. У две кутије се налази по три кесице бомбона. Колико кесица бомбона је укупно у кутијама?

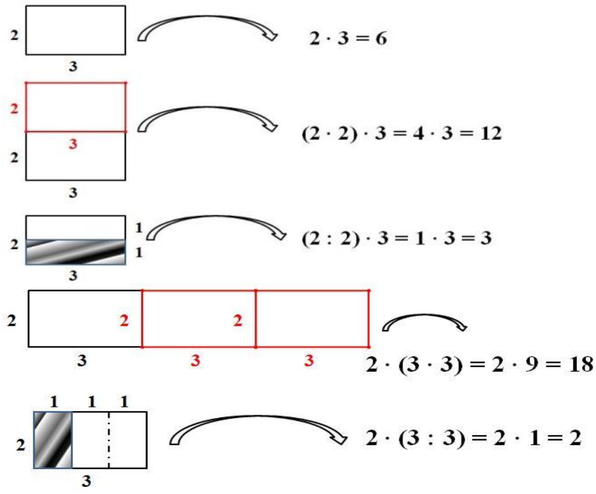
Ако се број кутија повећа два пута, а број кесица у њима остане исти, колико кесица бомбона ће бити укупно у кутијама?

Ако се број кутија умањи два пута, а број кесица у њима остане исти, колико кесица бомбона ће бити укупно у кутијама?

Ако се број кесица повећа три пута, а број кутија остане исти, колико кесица бомбона ће бити укупно у кутијама?

Ако се број кесица умањи три пута, а број кутија остане исти, колико кесица бомбона ће бити укупно у кутијама?

Дату ситуацију моделоваћемо користећи модел правоугаоника.



Слике у улози модела у овом случају на очигледан начин изражавају промене које се дешавају променом првог и другог чиниоца. Површина правоугаоника изражава својство, које се процесима хоризонталне и вертикалне математизације даље преноси у свет формалне алгебре.

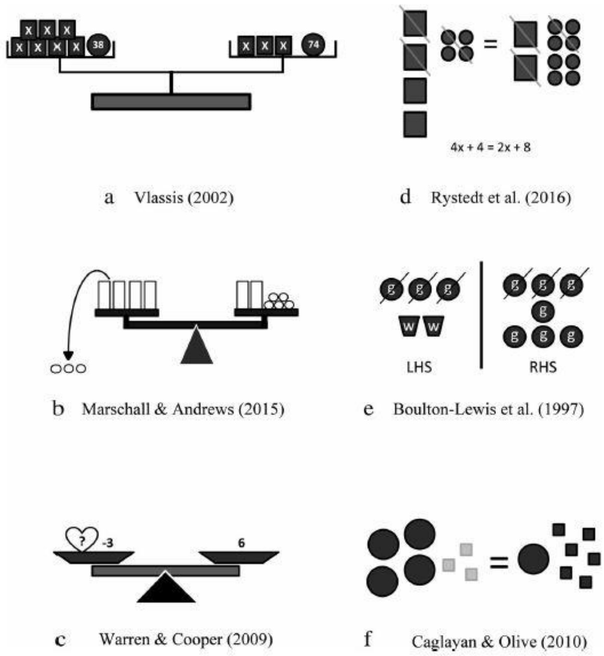
Значај схема или цртежа у представљању алгебарских и математичких структура је огроман. Резултати истраживања Зељић (2014) показао је да примена схема као модела, у настави математике може побољшати: разумевање словних израза као математичких објеката, релационо разумевање поступка у решавању једначина, функционалне зависности, као и способности ученика да уочене алгебарске генерализације примене и на другим алгебарским садржајима.

3.4.3. Моделовање у решавању једначина симетричним исправљањем разлике и односа између непознатих (модел равнотеже)

Модел равнотеже може се поистоветити са Ојлеровим начином решавања једначина, који је заснован на идеји извођења истих рачунских операција са обе стране знака једнакости у једначини (рачунске операције се изводе са истим бројевима, како би се једначина упростила и решила). Модел који користимо у решавању ове врсте проблема заснива се на концепту једнаких квантитета са обе стране знака једнакости и називамо га моделом равнотеже или моделом ваге. Моделовањем кроз процес математизације, у решавању једначина, може се користити модел ваге или равнотеже. Ова врста модела може бити корисна, јер пружа широке могућности у решавању алгебарских задатака.

Када је реч о типовима модела равнотеже, који су коришћени као контекст учења алгебарских садржаја могу се издвојити:

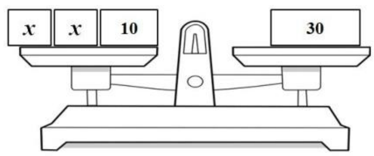
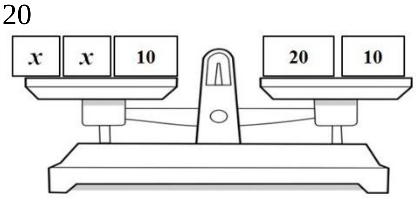
- физички модели – обухватају примере вага у равнотежа са физичким карактеристикама баланса и удаљености предмета мерења од основе на ваги,
- виртуелни модели вага који су изражени симболима и
- нацртани модели равнотеже и вага (Слика 13).

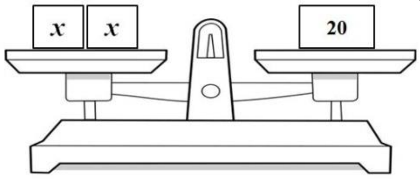


Слика 13. *Типови задатака модела равнотеже* (према Otten, Van den Heuvel-Panhuizen & Veldhuis, 2019: 13)

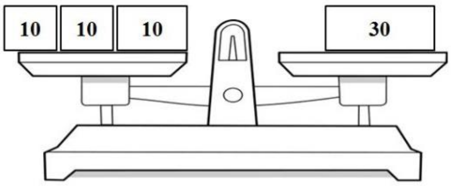
Како бисмо илустровали примену овог модела у решавању задатка алгебре узећемо Пример 33.

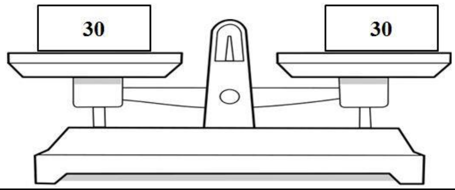
Пример 33. У кеси коју Милан носи из продавнице налазе се две исте кутије чоколадица и поред њих још 10 чоколадица. Колико је чоколадица у свакој кутији, ако знамо да је у Милановој кеси укупно 30 чоколадица?

Алгебарско решење	Решење коришћењем модела кроз процес математизације
Постављање једначине: $2 \cdot x + 10 = 30$	Постављање једначине: Моделовање проблема 
Решавање једначине: $2 \cdot x + (10 - 10) = (30 - 10)$	Решавање једначине: лева страна једначине садржи збир двоструког непознатог броја и броја 10, док се на десној страни налази број 30. Вредност *x* може се одредити помоћу „избацивања“ једнаких величина на обе стране знака једнакости. Пошто се број 30 који се налази са десне стране знака једнакости може написати као збир броја 10 и 20  Избацујемо исте вредности са леве и десне стране тако да добијамо:

<table>
<tr>
<td>2 · x = 20
x = 10</td>
<td>

Пошто је вредност два иста броја једнака 20, онда се вредност једне непознате може одредити као половина од 20,
x = 10</td>
</tr>
<tr>
<td>Провера:

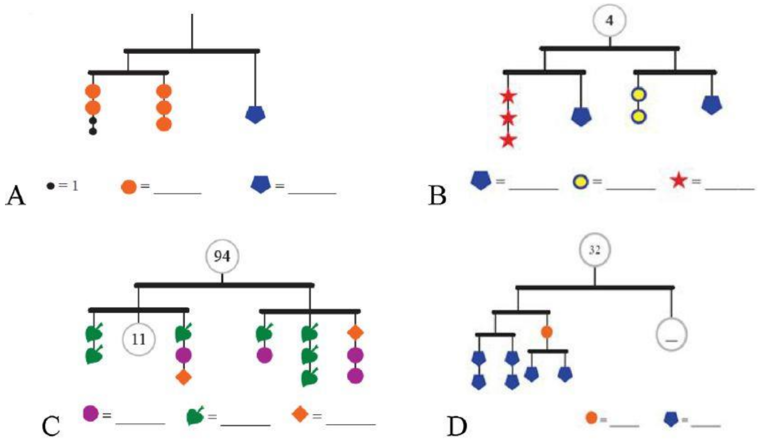
2 · 10 + 10 = 30
20 + 10 = 30
30 = 30</td>
<td>Провера:
Поново се враћамо на почетак и упоређујемо вредности са леве и десне стране


Тако да је:

</td>
</tr>
</table>

Велики број радова указује на специфичности и значај овог модела у учењу алгебре и решавању алгебарских проблема (Aczel, 1998; Vlassis, 2002; Otten et al., 2020; Rojano & Martínez, 2009; Rystedt, Helenius & Kilhamn, 2016). Модел равнотеже је често коришћени дидактички модел као подршка ученицима за разумевање и решавање линеарне једначине. Оно што је карактеристично за модел равнотеже јесте његов изглед и функција коју има у решавању једначина (положај тасова на ваги одређује једнакости математичких израза са обе стране једначине).

Ови модели имају значајну улогу у учењу и решавању једначина. При том, треба имати у виду да се они могу користити како би се превазишли најчешћи проблеми везани за појам једначине, а то су: разумевање знака једнакости као знака еквиваленције и развијање појма непознате. Откривање односа у ситуацијама реалног контекста (баланса, равнотеже) је стратегија која почива на инверзији свакодневних поступака ради добијања поједностављеног или генерализованог модела, који се може применити у новим сличним проблемским ситуацијама. Коришћење оваквог модела омогућава визуелизацију и природност у решавању једначине. Основна идеја оваквих задатака заснована је на чињеници да ученици разумеју принципе, на којима је заснована активност мерења на ваги или теразијама и активности које одржавају или поново успостављају ту равнотежу. Правилним приступом, разноврсни типови једначина се могу упростити (одузимањем или додавањем исте масе на леви и десни тас), тако да ученик на очигледном примеру учи и другачије начине решавања једначине (елиминација једне непознате и симетрично исправљање разлике и односа између непознатих). У основном моделу равнотеже,Ројано и Мартинез (2009) разликују неколико дидактичких корака: 1) упознавање са принципом вагања, мерења; 2) представљање једначина у облику равнотеже или теразија; 3) поједностављивање једначине и одређивање непознате масе кроз поступке уклањања предмета са тасова (манипулација којом се одржава равнотежа); 4) решавање једначине са сталном равнотежом, коришћењем инверзних операција које се примењују на услове у самом проблему (алгебарска еквиваленција); 5) решавање једначине без примера баланса трансформишући проблем на чистом симболичком нивоу алгебре (аутоматизација на синтаксичком нивоу) (Rojano & Martínez, 2009).

У истраживању које је спровео Пападопулос (Papadopoulos, 2019), фокус је био на употреби такозваних „мобилних слагалица“ како би се испитао њихов утицај на развој одређених алгебарских способности и разумевање значења симбола. Овај приступ је такође заснован на идеји баланса, јер су ситуације „мобилних слагалица“, у ствари, модели баланса изражени кроз ситуације равнотеже предмета. У овим „мобилним слагалицама“ предмети су обешени о хоризонталне греде жицама, тако да се на тај начин изражава баланс леве и десне стране (Слика 14). Као у стандардној алгебарској нотацији, различити изрази и облици могу имати исте или различите масе. Ученици се на овај начин фокусирају на једнакост израза и користе слику, како би изградили логику равнотеже или развили идеју значења знака једнакости и значења појма једначине. Овако представљени задаци омогућавају да се представе читави системи једначина.



Слика 14. *Задаци мобиних слагалица заснованих на принципу баланса* (Papadopoulos, 2019: 211)

Резултати у истраживању Пападопулоса (2019), са ученицима шестог разреда на овако организованим садржајима, показали су да су ученици били у стању да схвате проблеме који су им постављени, и при том формирају одрживе поступке радећи са моделима.

Можемо закључити да употреба ове врсте задатака представља моћно средство богато контекстом, јер пружа широке могућности за учење и коришћење симболичке нотације, док са друге стране, олакшава приказивање структуре односа између количина. Оно што ће се касније формализовати као одређено својство рачунске операције или поступак решавања једначине, у почетку је интуитивни осећај баланса изражен кроз задатке са равнотежом. Дакле процес развијања алгебарских способности тече од реалних ситуација и односа којима се изражавају поступци у реалности, до формалног записивања и усвајања поступака у решавању задатака у чистом симболичком облику.

Изоморфизам који постоји између самог објекта и математичких појмова омогућава ученицима да формирају менталну слику операција и поступака које морају да примене. На овај начин су ученици у стању да активирају слику и примене овај поступак у било ком тренутку када се пред њима пронађе сличан проблем (Vlassis, 2002). На овом узрасту могу се користити ситуације баланса које изражавају једначине облика:

$a \cdot x = b$; $a \cdot x \pm b = c$, *при чему су* a, b, c *природни бројеви*, као и сложене једначине са непознатим са обе стране знака једнакости, облика

$a \cdot x \pm b = c \cdot x \pm d$, *при чему су a, b, c и d природни бројеви*.

Овај последњи тип једначине посебно је важан, јер показује да се на овом узрасту могу вежбати сложене линеарне једначине и овог облика. Истраживање које је спровео Власис (Vlassis, 2001) је показало да се у вежбању задатака овог типа касније морају превазићи препреке везане за процес апстракције, као што је случај решавања једначина које укључују негативне бројеве, а за које модел баланса није адекватан.

Насупрот томе Филој иРојано (Filloy & Rojano, 1989) тврде да су ученици у случајевима решавања једначина, које укључују негативне бројеве, спонтано прилагодили модел равнотеже и решавали једначине са негативним бројевима, што је било неочекивано. Ови аутори указују на то да се може закључити да код ученика постоје манифестације когнитивних тенденција, које су дубоко усађене и везане за конкретан модел, чак и у случајевима када је процес моделовања те ситуације сложенији од модела исказаног на чисто симболичком нивоу (Filloy & Rojano, 1989: 25). Овако примењен модел представља моћно средство којим се у настави можемо служити, како би ученици савладали различите облике линеарних једначина. Највећи недостатак је у чињеници да одузимање у једначинама (пример: $x - 14 = 25$ или сложеније $25 \cdot x - 25 = 120$) и негативни бројеви (пример: $25 \cdot x + 25 = -1200$) могу изазвати проблеме у решавању, као и постављању оваквог типа задатка. Ученици праве грешке у покушају да се исте вредности одузму са обе стране знака једнакости. Једино објашњење за ове грешке је у томе што ученици могу имати недовољно развијена знања о негативним бројевима. Занемаривање знака минус у овим случајевима искључиво је на штету тачног решавања проблема (Booth & Koedinger, 2008).

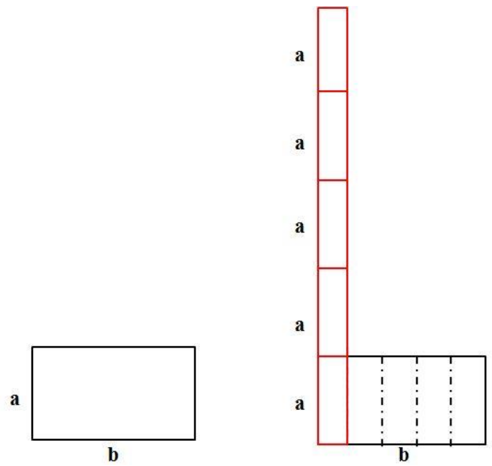
У истраживању употребе овог модела у настави алгебре (Otten, Van den Heuvel-Panhuizen & Veldhuis, 2019) дошло се до закључка, да се овај тип модела може искористити: како би се побољшало разумевање ученика о појму знака једнакости, како би се унапредило појмовно разумевање ученика у решавању линеарних једначина и како би се схватила ограничења у употреби овог модела за решавање линеарних једначина.

3.4.4. Моделовање у коришћењу алгебарских законитости за решавање задатака

Алгебарске законитости до којих ученик дође у процесу учења алгебарских садржаја, могу се искористити за решавање задатака из других математичких области. Ова повезаност је нарочито изражена управо у садржајима алгебре и геометрије кроз специфичности визуелизације коју ове области имају. Пример задатака може бити задатак из геометрије (Пример 34).

Пример 34. Површина њиве правоугаоног облика је 60 m^2. Да ли ће се површина ове њиве променити и за колико, ако дужину њиве повећамо пет пута, а ширину смањимо исти број пута?

Решавање овог задатка може се свести на алгебарско расуђивање, превођењем на језик алгебре. Тако знамо да је $P = a \cdot b$, односно $a \cdot b = 60\ m^2$, као и да је вредност $(a \cdot 5) \cdot (b : 5)$ непозната. У решавању задатка може се искористити модел који ће изражавати сталност производа. Посматрајући дати образац промене услова у задатку може се закључити да је у питању сталност производа, и да се површина неће променити. На овај начин расуђивање о односима геометријског садржаја свели смо на подручје алгебре и законитости математике који у њој важе. Моделовање овог проблема и коришћење цртежа може помоћи у уочавању законитости.

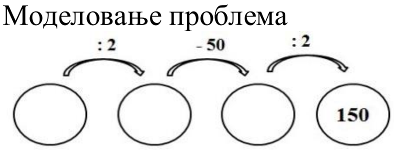


Оваква вежбања посебно су значајна за подручје алгебре и геометрије, јер је на тај начин омогућено да се математичке законитости схвате много шире, тако да ће њихова употреба у учењу новог садржаја бити ефикаснија.

3.4.5. Модел инверзије – инверзно обављање рачунских операција као начин решавања алгебарског проблема

Овај модел решавања алгебарског задатка типичан је поступак решавања задатака који алгебарске структуре своди на операције са бројевима. Да би се могло говорити о аритметичком решавању једначине, мора се нагласити да у тим случајевима лева страна једначине треба да одговара низу операција које се изводе на бројевима (познатим или непознатим), док десна страна изражава резултат тога што се налази са леве стране знака једнакости. Тако се једначина може решити помоћу извођења рачунских операција обрнутим редоследом, односно поступцима инверзног извођења рачунских операција у односу на непознату вредност у задатку (Пример 35).

Пример 35. Марија је у понедељак из касице узела половину новца, у уторак 50 динара од остатка, а у среду половину остатка новца, тако да је у касици остало 150 динара. Колико је динара било у касици пре понедељка?

Алгебарско решење	Решење коришћењем модела кроз процес математизације
Постављање једначине: Решавање овог задатка могло би се свести на сложену линеарну једначину облика: *((x : 2) – 50) : 2 = 150*	Постављање једначине: Моделовање проблема  Уместо непознате користимо држаче места и моделујемо извођење рачунских операција, онако како је у задатку Марија узимала новац из касице.

<table>
<tr>
<td>Решавање једначине:

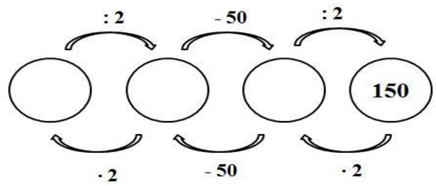
(x : 2) – 50 = 150 · 2

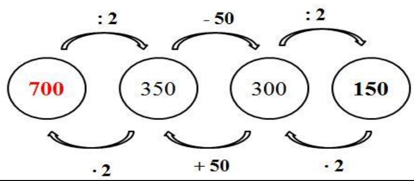
(x : 2) – 50 = 300

x : 2 = 300 + 50

x : 2 = 350

x = 350 : 2

x = 700</td>
<td>Решавање једначине:
Моделовање решења


На основу модела, решавање овог задатка се своди на инверзно обављање рачунских операција, чиме се поступак решавања сложене једначине поједностављује.

</td>
</tr>
<tr>
<td>Провера:
((700 : 2) – 50) : 2 = 150
(350 – 50) : 2 = 150
300 : 2 = 150
150 = 150</td>
<td>Провера:
Провера се заснива на прелажењу овог пута у једном и другом смеру како би се проверио сваки корак у његовом решавању. Поново се враћамо на реалну основу и закључујемо да је пре понедељка у касици било 700 динара.</td>
</tr>
</table>

На овом узрасту решавање оваквих једначина није једноставно. Коришћењем модела инверзије избегава се коришћење непознате, тако што се читав задатак решава извођењем супротних рачунских операција од краја задатка ка почетку. На основу тога, како би смо одредили колико је Марија имала новца пре понедељка, суму новца који јој је остао множимо са два, затим тој добијеној суми додајемо 50 динара и на крају новодобијену суму множимо са два. Инверзијом смо одредили вредност непознате величине и решили задатак без симболизације или коришћења непознате у решавању задатка. Без обзира што нема непознате у симболичком облику, концепт расуђивања и приступ решавања задатка указује на сложеност у начину размишљања о том проблему код ученика. Ово упућује на сложеност процеса закључивања и односа који постоје између података, тако да се може препознати алгебарски начин размишљања.

3.4.6. Аритметички модел алгебарског задатка

Аритметички модел користи аритметичке идентитете као претходницу симболичке једначине. Једнакост $3 \cdot 2 + 12 = 5 \cdot 2 + 8$, може се користити, на пример, за конструкцију једначине $3 \cdot ? + 12 = 5 \cdot ? + 8$, или $3 \cdot 2 + \blacktriangle = 5 \cdot 2 + 8$, итд. Тако, упитник или тачка (или било који други симбол) може бити замењен словом (симболом) и послужити као пример за поступно увођење појма непознатог броја. Аритметички модел решавања задатака је карактеристичан за прве алгебарске задатке са којима се ученик сусреће и формирање идеје непознате односно, развијања способности одређивања непознатог броја. Често се непознати број у задацима представља празним местима (државима места) у облику круга, квадратића, линије и др (○, □, __,...). Изрази и једнакости оваквог облика не могу се посматрати као једначине (неједначине) у правом и потпуном смислу, зато што у овом случају не постоји симбол, а решавање се своди најчешће на погађање броја који није познат, кроз везу и познавање рачунских операција на том узрасту.

Аритметичко решавање задатака подразумевало би свако решење које обухвата искључиво oперисање бројевима и закључивање на основу проверавања вредности. Један од начина решавања алгебарских задатака своди се на решавање путем покушаја и грешке (даје се вредност непознате, а затим се провером утврди тачност, тако да се задатак решава провером вредности, а не закључивањем на основу особина операција и бројева). Узмимо, на пример, једнакост:

$\square + 5 = 15$

Ученик покушава да реши задатак тако што на основу претпоставке одређује вредност броја који би могао да буде у квадрату. Ученик је у ситуацији је да размишља о односима и закључује на основу ранијег искуства: *Којем броју можемо додати број 5 да би добили број 15?* У решавању алгебарских задатака ученик користи аритметичке изразе, при чему непознатој вредности даје тачно одређену вредност (лажна претпоставка) и закључује о односима на основу конкретних промена између бројева (количина). Овакав начин решавања задатка показује везу између аритметике и алгебре, али исто тако и недостатак у апстракцији и генерализацији односа, што упућује на недостатак алгебарског начина расуђивања.

У процесу решавања математичког проблема, често смо у прилици да користимо различите моделе за његово решавање. Ученици су некада у ситуацији да користе неколико модела, да би се решили само један проблем. Дакле, различити делови проблема могу бити подложни употреби различитих приказа, укључујући комбинацију конкретног резоновања са апстрактним формалним резоновањем. Тежња је да се ученик оспособи и буде спреман да одабере модел којим би најефикасније могао решити проблем који се пред њим налази.

У истраживању које су спровели Ди Бернардо и сарадници (Di Bernardo, Carotenuto, Mellone & Ribeiro, 2018) желели су да испитају знања и способности будућих италијанских наставника из области ране алгебре. Посебна пажња поклоњена је знању будућих наставника, које би представљало подршку развоју знања и расуђивања ученика на алгебарским садржајима. Од наставника се очекивало да поседују богата и широка знања о примерима, стратегијама и репрезентацијама, које се могу користити за решавање проблема. То им омогућује да разумеју не само решења која се очекују од ученика, већ и многа друга која су потпуно неочекивана. Управо, интерпретацијом ученичких одговора јасније се може проценити начин на који они резонују алгебарске идеје и проблеме, па чак и ако су њихови одговори потпуно нетачни. Задаци које су истраживачи у овом истраживању користили били су изражени у контексту свакодневних реалних ситуација. Истраживање је показало да је највећи број испитаних студената задатак реалног контекста решавало путем покушаја и грешака, затим коришћењем одговарајуће једначине, док је најмањи број оних који су решавали на основу интуиције или графичким приказивањем те ситуације. Кроз разговор са студентима истраживачи су их подстакли на многобројна питања, која би потенцијално могла бити значајна у будућем раду на алгебарским садржајима са ученицима. Ово истраживање указује на потребу да се у образовању будућих наставника већа пажња посвети чињеници, да они сами више интерпретирају и размишљају о својим одговорима и решавању задатака, како би разумели и усмерили рад њихових будућих ученика (Di Bernardo, Carotenuto, Mellone & Ribeiro, 2018).

Задаци текстуалног типа често се решавају применом неког од модела, али се у схватању проблемске ситуације таквих задатака може јавити и проблем. У текстуалним задацима се појављује проблем семантичког схватања текста, управо из тог разлога што текст представља специфичну артикулацију одређеног простора и односа који су јединствени и непоновљиви, а које је особа направила као резултат читања истог. Дакле, модел представља процес који обухвата активности трансформације на основу смисла који ученици формирају кроз читање текста или разумевање садржаја. Када се ученици сусрећу са датим текстом, они замишљају ситуације и промишљају о датим односима. На овај начин модел настаје кроз смисао самог проблема са једне, и одређивања алгебарских активности на симболичком нивоу алгебарске нотације са друге стране.

3.5. Преглед досадашњих истраживања

У овом делу рада навешћемо резултате неких истраживања у свету и код нас, који су се бавили проблемом реалног математичког контекста у настави и учењу математике у млађем школском узрасту. Преглед истраживања о примени овако организоване наставе математике и алгебре обухватиће ефекте његове примене, али и недостатке и ограничења која овако организовану наставу и учење прате.

Студије широм света показале су мноштво проблема који се односе на учење и наставу алгебре на млађем школском узрасту. Ови проблеми обухватили су тешкоће деце у савладавању ових садржаја, развијању основних алгебарских појмова – променљиве и знака једнакости, разумевање садржаја алгебре као и грешака у процесу решавања алгебарских задатака у контексту реалних ситуација (Booth, 1984, 1988, Kieran, 1981, 2004; Vergnaud, 1985; Filloy & Rojano, 1989; Sfard & Linchevski, 1994a; Herscovics & Linchevski, 1994; Jupri, Drijvers & Van den Heuvel-Panhuizen, 2014, 2015 и други).

Навешћемо нека од истраживања која су се бавила проблемом имплементације реалног контекста у настави и учењу садржаја алгебре, како би покушали истаћи значај и могућа ограничења овог приступа.

У истраживању које су спровели Карахер и сарадници (Carraher et al., 2006) са ученицима старости од 9 и 10 година, покушали су да покажу да ученици могу користити и разумети алгебарске идеје и репрезентације које су најчешће одсутне у раном математичком образовању. Резултате су добили на основу лонгитудиналног истраживања у трајању од тридесет месеци у четири одељења у државној школи у Масачусетсу. Вежбе су почеле са отвореним проблемом, који је укључивао неодређене количине. Контекст је служио као подршка у активним разговорима о схватању односа између физичких количина и низа бројева или израза. После првобитне расправе о ситуацији, од ученика је захтевано да изразе своје идеје у писаној форми. Након тога су разговарали о њиховом репрезентацијама и уводили конвенционалне репрезентације. Истраживање је показало да су ученици користили слова као замену за променљиву. Користили су алгебарске изразе као што је $n + 3$ за представљање функција. Штавише, они су користили знања о променама у квантитативном облику и формулисали нове алгебарске изразе на основу тога. Ученици су разумели односе између одређених количина у проблему, као и како се количине мењају сваког дана у односу на почетну количину из проблема. Истраживање је показало да су ученици јасно разумели функционалне односе између неодређених количина и користили непознате како би изразили стални, непроменљив однос између њих (Carraher et al., 2006).

Слично истраживање спровели су Шлиман и сарадници (Schliemann et al., 2003). Истраживање је било фокусирано на алгебру као генерализовану аритметику. Обухватило је рад ученика у посебно обликованим активностима, које су имале за циљ да оспособе ученике за разумевање и представљање општих образаца које уочавају између промењљивих. У овој лонгитудиналној студији, истраживачи су радили са 70 ученика у четири одељења узраста другог, трећег и четвртог разреда основне школе, како би дошли до резултата о разумевању алгебарских веза и нотација. Активности су обухватиле садржаје везане за сабирање, одузимање, множење, дељење, разломке, пропорције и негативне бројеве, а у току рада су користили промењљиве, функције, алгебарске нотације, функционалне табеле, графиконе и једначине. Задаци су били конципирани као отворене проблемске ситуације свакодневног живота, које су омогућавале очигледан приступ садржајима које је потребно усвојити. Резултати су показали да су ученици способни да разумеју аритметичке операције као функције, а не само као рачунске операције са бројевима, да бројевна права може бити значајан алат за представљање бројева и операција као и за решавање проблема. Ученици су успели да разумеју да слова могу да се односе на одређене вредности или количине, али и на скупове могућих вредности – да задатак може имати више решења. Након учествовања у овим активностима, ученици четвртог разреда успели су да реше алгебарске проблеме коришћењем вишеструких репрезентативних система као што су: табеле, графикони и једнакости са промењљивим са обе стране знака једнакости. Посебно се истиче да су симболички системи, који се користе у алгебри важан део учења алгебре, тако да је деци потребан приступ овим системима, као и могућност да константно представљају алгебарске концепте на више начина (Schliemann et al. 2003).

Студија коју су спровели Букер и Виндсор (Booker & Windsor, 2010), са ученицима старости 7 година у Аустралији, имала је за циљ да истражи како ученици схватају, представљају и решавају структурно повезане проблеме на различите начине и на тај начин се кроз процес решавања реалистичних проблема оспособљавају да мисле алгебарски. Мале групе ученика су радиле на сродним проблемима, а затим су своје решење приказали свим присутним ученицима у одељењу. На овај начин се подстицала дискусија о различитим приступима, који су предузети за решавање истих проблема уграђених у наизглед различите контексте. У експерименту су коришћени различити контекстуално засновани проблеми, као основа за извођење генерализација од стране ученика, која води даље ка изградњи алгебарског мишљења. Резултати до којих се дошло у оквиру овог истраживања указују на то да се може утицати на развој мисаоних способности и генерализација које чине алгебарско мишљење. Истраживање је показало различите креативне приступе у решавању и трагању за моделима, који омогућују решавање структурно повезаних проблема на различите начине. Та способност представља припрему ученика да размишљају алгебарски, артикулишу и генерализују решења и сазнања до којих су дошли. Закључак је да ученицима у конструисању алгебарских нотација, образаца и генерализација, на значајан начин могу помоћи материјали, дијаграми, модели, табеле и графикони (Booker & Windsor, 2010).

Када је реч о вези аритметике и алгебре као и утицаја *контекстуалног приступа* на наставу и учење алгебре у млађем школском узрасту, можемо навести пример истраживања у оквиру докторске дисертације Ван Амером (van Amerom, 2002). Основни циљ ове дисертација је био да утврди на који начин се, неформалним приступом у настави алгебре, полазећи од аритметичких способности и знања које ученици већ имају и кроз садржаје који обухватају историјске елементе и проблеме, може утицати на развој алгебарског мишљења и специфичних алгебарских способности. Истраживање је спроведено кроз експеримент на ученицима петог и шестог разреда (11− 12 година), чију је основу чинила образовна теорија *Реалистичног математичког образовања*. Овакав приступ је примењен кроз садржаје из историје математике чиме се покушавало остварити јединство теорије и праксе. У току експеримента ученици су се сусретали са реалним проблемима свакодневног живота и били у ситуацији да се користе различитим начинима репрезентације и различитим моделима у њиховом решавању. Резултати истраживања показали су да не треба почињати сувише рано са симболизацијом у настави алгебре и да треба дозволити ученику да развија истовремено значење и симболизацију. Истраживање је показало да ученици треба да буду способни да користе симболизацију, кроз свакодневно размишљање и расуђивање о проблемима свакодневног живота, при чему је само решавање проблема једнако важно, као и проналажење решења. Модели и схеме су значајни за решавање задатака и разумевање реалистичних алгебарских проблема, тако да се не користи само природно размишљање ученика, већ утиче на развој многих других вештина и способности (van Amerom, 2002).

Истраживањем које су спровели Бекер и Ривера (Becker & Rivera, 2006) са ученицима шестог разреда, желели су да утврде способности које имају утицај на начин на који ученици изражавају и разумеју генерализације у алгебри, како објашњавају своје генерализације, и да ли су способни да развију вишеструке репрезентације за исте алгебарске низове. Од 29 ученика издвојено је 12 ученика са различитим способностима чији рад је се посебно пратио у току, и након експеримента. Као основу у истраживању способности ученика узете су поставке *Математике у контексту* која се заснива на идејама *Реалистичног математичког образовања*. Резултати су показали да су ученици користили нумеричке или фигуралне стратегије у изражавању генерализација. Ниједан од 12 испитаних ученика није радио на симболичком нивоу. У постинтервјуима 10 од 11 ученика радило је нумерички, а свих 11 је успело да изрази тачне симболичке генерализације. Истраживање је показало да су ученици који су пре и после експеримента користили различите врсте репрезентација за изражавање генерализација били способни да објасне своје симболичке генерализације. Резултати упућују на значај различитих визуелних представа у процесу учења алгебарских садржаја, јер се на тај начин постиже већи степен алгебризације, односно развијања способности симболичке генерализације. Разумевање кључних аспеката алгебарског резоновања упућује на важност и значај вишеструких репрезентација.

Истраживање које је спровео Ван Реувијк (Van Reeuwijk, 2001) бавило се концептом прогресивне формализације као једне од значајних карактеристика теорије *Реалистичког математичког образовања*. Концепт истраживања је илустрован резултатима студије о учењу и настави решавања система једначина. Истраживање је спроведено са ученицима узраста од 11 година, при чему је коришћен припремљени материјал, који је обухватао проблеме: поређења количина, дијаграма, куповине, бележнице и формалних нотација једначина. Постигнућа тестираних ученика (слаби, просечни, добри) анализирана су тако што су дате информације о просечном напретку ученика. Истраживање је показало да су ученици развили математичке концепте, који се односе на решавање једначина, и тако развили концептуално разумевање алгебре. Наставници су задовољни оваквим напредком ученика, а напредак је евидентан у свим групама ученика. Циљ је био да се код ученика развију стратегије решавања једначина, које нису својствене формалној нотацији, као и да се оваквим типом задатака може утицати на другачије схватање формалних нотација алгебре.

Значај репрезентација из перспективе *Реалистичног математичког образовања*, кроз употребу модела „ситуације“ према моделу „за ситуацију“ у настави и учењу алгебре потврђено је кроз истраживање спроведено са групом ученика петог разреда

(11 година) у истраживању Ричардсона и МекГаларда (Richardson & McGalliard, 2010). Експериментално истраживање било је засновано на решавању задатака заснових на реалном контексту, при чему се пратио развој стратегија ученика у процесу решавања задатака. Анализом резултата и модела које су ученици користили у решавању, као и интервјуа са ученицима и наставницима истраживачи су уочили напредак ученика у разумевању проблема алгебре, као и интезивном развоју генерализације модела у формалне нотације. Након неколико сличних проблема, умели су самостално да генерализују правила и искажу правила искључиво језиком алгебре. Овакав процес наставе и учења текао је природним путем, јер су ученици решавали задатке користећи се сопственим моделима.

Да би се истражиле тешкоће ученика у решавању алгебарских текстуалних проблема, (Jupri & Drijvers, 2016) спроведен је експеримент са 51-им индонежанским учеником (старости од 12 до 13 година). Ученици су у учењу садржаја алгебре користили дигитално математичко окружење, које је обухватило: интерактивне математичке алате за алгебру, геометрију и друге области; моделовање отворених онлајн задатака и одговарајућих повратних информација, као и конвенционалне математичке нотације и технике. Суштинска карактеристика овог истраживања је у математизацији, тј. активности трансформације проблема реалног живота у симболички математички проблем. На овај начин су се покушале идентификовати ученичке потешкоће у савладавању садржаја линеарних једначина са једном непознатом. Резултати показују да је ученицима посебно тешко формулисање математичког модела. То је доказано грешкама у формулисању једначина, шема или дијаграма у току овог истраживања. Ово истраживање наглашава важност математизације, као кључног процеса у учењу алгебре и развоју алгебарског мишљења ученика.

Истраживање које је спровео Калак (Khuluq, 2015) имало је за циљ да допринесе иновацији у настави ране алгебре у школама у Индонезији, посебно у оквиру садржаја линеарних једначина са једном непознатом. Ова студија истиче учење засновано на идеји *Реалистичног математичког образовања* (РМО) које укључује активности равнотеже како би се ученицима помогло да развију идеју линеарне једначине као и њеног решавања. У овом истраживању је представљен другачије обликовање наставног процеса, који је био тестиран у индонезијским учионицама. Организација наставе обухватила је другачије материјале за учење, као и *хипотетичке путање учења* (ХЛТ), које ће у целини сугерисати практичне и теоријске приступе настави и садржајима математике. *Хипотетичка путања учења* је у истраживању прихваћена као мисаони процес о рефлексивним односима између обликовања наставне активности и резоновања ученика, који учествују у овако организованим активностима. Резултати истраживања сугеришу да активности које се односе на проблеме равнотеже, помажу ученицима да развију своја чула и алгебарске репрезентације, од њиховог схватања као предмета, све до разумевања њихових унутрашњих карактеристика и квантитативних односа. Подаци добијени истраживањем су такође показали да су активности помогле ученицима да буду флексибилнији у одређивању и коришћењу различитих стратегија (модела) за решавање једначина.

Проблемима алгебре у млађим разредима основне школе, у нашој земљи, посебно се бавила Зељић (2014, 2015). У истраживању које је спровела Зељић (2014) циљ је био да испита карактеристике и ефикасност модела учења алгебарских садржаја заснованог на *схематском представљању појмова* у четвртом разреду основне школе. У овом раду посебно се истиче значај визуелизације у облику схема, које представљају ослонац у изградњи појмовне структуре алгебарских садржаја. Визуелизација омогућава различите стилове учења и помаже ученицима да развију широк репертоар техника учења кроз различите математичке ситуације. У истраживању се посебан акценат стаља на начин структуирања и логичку повезаност садржаја, као и разрађеност садржаја кроз визуелне моделе, што упућује на основне поставке *контекстуалног приступа* у овладавању математичким садржајима. Резултати овог истраживања показали су да постоји значајна разлика у поступцима сагледавања структуре словних израза и представљања истих у виду схеме. Пре примене модела ученици су били мање успешни у решавању задатака, који захтевају иконичко представљање квантитативних односа. Након завршеног експеримента ученици су били успешнији у прихватању словних израза као самосталних објеката, при чему су показали структурално разумевање словних израза. У оквиру истраживања резултати су показали да су ученици најбоље резултате постигли на задацима у којима је математичка структура проблема представљена схематски, док су најлошије резултате постигли у задацима који су представљени симболички. Резултати су показали да су ученици који имају оцене *врло добар (4)* и *одличан (5)* из математике статистички значајно боље решавали задатке, код којих је структура проблема представљена схематски, за разлику од осталих ученика. Након примењеног модела у оквиру овог истраживања ученици су показали релационо разумевање поступка решавања неједначине, као и способности представљања функционалне зависности у различитим окружењима и оспособљеност за генерализације на другим алгебарским садржајима као што су низови.

Поред истраживања која су се бавила утицајем реалног контекста у настави алгебре, постоји велики број истраживања која су се односила на утицај реалног контекста у другим областима математике на млађем школском узрасту. У свом истраживању Боното (2011) наводи резултате наставних експеримената заснованих на употреби културног контекста, интерактивне методе и увођење нових социо-математичких норми у настави математике. У експерименту је створено модификовано окружење за наставу и учење које је фокусирано на подстицање свесног приступа математичком моделовању и постављању проблема. У математичким проблемима су коришћени предмети за употребу из свакодневног живота. У овом истраживању, појављују се различити предмети свакодневног живота, као што су: недељни ТВ водич, брошура за супермаркете, новински чланци и друго. Резултати до којих је дошао аутор, показали су, супротно пракси класичног решавања проблема, да деца нису игнорисала релевантне, веродостојне и познате аспекте и контексте реалности, нити су искључили знање из стварног света и њиховог посматрања и доживљавања истог. Деца су показала флексибилност у приступу процесима решавања проблема истражујући различите стратегије решавања и постављања проблема, често осетљиве на контекст и количину (Bonotto, 2011).

Да би истражио потенцијал употребе РМО у оквиру наставе, као подршка ученицима који имају проблема са учењем математике, Барнс (Barnes, 2004) је спровео истраживање кроз студију случаја у дванаест одељења осмог разреда (средња школа 8 – 12 разреда) у Јужној Африци. Теоријске поставке РМО су примењене у осмишљавању и дизајнирању наставног процеса, као покушај да се отклоне уочени проблеми у концептуалном разумевању основних математичких појмова. Ово истраживање је показало успех ученика у учењу у ком су имали прилике да се сусрећу са проблемима реалног контекста. У примерима у којима су ученици били у могућности да користе хоризонталну математизацију карактеристична је ранија идентификација потенцијалних грешака. На овај начин су ученици успели да избегну грешке у решавању задатака, а самим тим и правилно изградили математичке појмове. Кроз процес вертикалне математизације ученици су били у ситуацији да користе различите стратегије у решавању задатака што је такође утицало на препознавање потенцијалних грешака, тако да су могли на време да их исправе. Основни принцип РМО, којим су се истраживачи водили био је принцип вођене реинвенције, односно прогресивне формализације.

Експериментално истраживање, које су спровели Лоренс и сар. (2018) имало је за циљ да истражи разлике у математичком когнитивном постигнућу након имплементације идеја *реалистичног математичког образовања* у геометријским садржајима са једне стране и конвенционалне наставе и учења геометрије са друге. Истраживање је спроведено у јавној средњој школи у Амбону (Индонезија), са две групе од по 25 ученика, које су уједначене пре експеримента према просеку. Експериментални програм се састојао од учења математике засноване на идеји реалног контекста кроз посебно обликовану игру „Змија и мердевина". Резултати Т − теста потврдили су разлику у когнитивним постигнућима ученика између експерименталне и контролне групе. Ученици који су учествовали у експерименталном програму постигли су боље резултате од ученика који су радили у складу са стандардном наставом геометрије. Ови резултати истраживања упућују на то да је уважавањем основних принципа реалистичког математичког образовања могуће утицати на развој интелектуалних способности ученика, и да наставници треба активно да учествују у унапређивању овако организоване наставе геометрије (Laurens et al., 2018). Пошто је ово истраживање обухватило само когнитивно постигнуће ученика, аутори предлажу да нека будућа истраживања обухвате и утицај РМО на ставове ученика, способности решавања проблема, интересовања за учење или других варијабли, које су повезане са учењем математике на овом узрасту.

Када је реч о истраживањима која се баве проблемом и улогом реалног контекста у настави и учењу математичких садржаја у нашој земљи, неки од најзначајнијих радова везани су за садржаје геометрије у млађим разредима основне школе су радови О. Ђокић (2013, 2014а, 2014б, 2014в, 2015). Навешћемо пример докторске дисертације Ђокић (2013), чији је главни циљ био да се испита утицај реалног окружења у геометријским садржајима IV разреда основне школе. Аутор је желео да покаже како овакво окружење у настави геометрије утиче на постигнућа ученика (по нивоима знања) и резоновање, као и ученичку мотивацију за учење. У истраживању је употребљена експериментална метода, како би се утврдила међусобна повезаност ових чинилаца. Кроз овај рад аутор је желео представити иновативни модел уџбеника, који подржава конструктивистички приступ настави у реалном окружењу. У истраживању је указано на методичке импликације употребе овог уџбеника на почетну наставу математике, које су добијене на основу експерименталног истраживања. За потребе главног теста геометријских способности индивидуално је тестирано 148 ученика IV разреда ОШ „Милан Ђ. Милићевић" из Београда. Структуре одељења су задржане тако да је 75 ученика у експерименталној и 75 ученика у контролној групи, по три одељења четвртог разреда из исте школе при чему су три учитеља изводила експериментални програм. Анализа резултата показује да су ученици који су учествовали у експерименталном програму успешнији у задацима реалног контекста од ученика контролне групе, али су остали на истом нивоу у задацима примене знања, док су ученици контролне групе показали значајно лошије резултате. Ученици експерименталне групе имају значајно боље резултате у задацима примене знања у математичком контексту, али не и у реалном. Примена одговарајућег модела створила је већу мотивисаност ученика за учење геометријског садржаја. Мишљење ученика и учитеља о оваквом приступу у настави је позитивно, при чему се овакав модел уџбеника види као подстицајан за учење, стварање пријатне климе као и побуђивања веће мотивисаности и спремности за израду тежих проблемских задатака. Ово истраживање отвара многобројна питања за нека од будућих истраживања, која би се бавила развојем просторних способности и резоновања као и развијање искуства при мерењу дужине, површине и запремине у почетној настави геометрије. Посебно се истичу питања примене оваквог иновативног модела заснованог на теорији *Реалног математичког образовања* и идејама Поенкареа о развоју и доживљају *геометријског простора и његовог односа према физичком простору окружујуће реалности ученика.*

Значајно истраживање, у оквиру своје докторске дисертације, спровео је Фаузан (Fauzan, 2002) са ученицима четвртог разреда основне школе у Индонезији. Ова студија се односила на *развој и имплементацију ИРМО курикулума* наставе и учења у оквиру геометријских садржаја у тематским областима *површине и обима*. Кроз ово истраживање покушао је да утврди: да ли би приступ РМО могао да се користи у Индонезији и у којој мери РМО може решити неке проблеме у учењу геометрије у индонежанским основним школама. Истраживање је обухватило и способности ученика у учењу ових геометријских садржаја. Резултати показују да је развој способности под утицајем овако конструисаног курикулума био значајан. На првом месту способности је *ученичка активност*, док је на последњем *ученичко расуђивање (мишљење*). Према мишљењу Фаузана, ученичко расуђивање се налази на последњем месту, зато што је ученицима и даље потребно више времена да развију способности резоновања. Разлог томе он види у чињеници да скоро никада од њих није затражено, да дају своје мишљење о решењу математичког проблема, када су учили користећи традиционални начин учења. Резултати показују и да се наставницима и ученицима допао ИРМО наставни план и програм, јер је био веома различит од приступа и садржаја класичног индонежанског наставног плана и програма. Садржаји који су конципирани на основу принципа *Реалистичног математичког образовања* омогућили су ученицима да изграде разумевање користећи своје неформално знање. Ученици су постали активнији и креативнији, док је улога учитеља промењена од оног који представља центар процеса учења и наставе, до оног ко води и усмерава ученика у тим процесима.

Истраживање које су спровели (Gravemeijer, Bruin-Muurling, Kraemer & van Stifthout, 2016) имало је за циљ да истражи изазове и тешкоће у имплементацији *Реалистичког математичког образовања* (РМО) у Холандији. У овом чланку, Гравемејер и сар. (2016) су проучавали неуспех учитеља у имплементацији РМО на начине којима би се могло обогатити концептуално схватање ученика у три подручја математике. Аутори су дискутовали о налазима три независне студије о примени уџбеника заснованих на принципима РМО. Истраживања су имала за циљ да утврде разлоге слабијег разумевања садржаја који обухватају: одузимање до 100, разломке и алгебарске садржаја од стране ученика млађег школског узраста. У истраживању се дошло до закључка да се у настави и уџбеницима (поред смерница у наставним плановима и програмима) преурањено зауставља процес концептуалног развоја ученика. Иако је курикулум био осмишљен и припремљен, циљеви концептуалног разумевања нису укључивали и напредне циљеве током трајања наставног процеса. Напредни циљеви учења математичких садржаја нису били реализовани, јер се при решавању проблема у значајним контекстима окренуло ка готовим решењима, која су могла понудити само краткорочни успех. Као решење свих негативних импликација примењене РМО у настави математике, треба тежити ка томе да се „боља концептуална математичка схватања не смеју посматрати само као дугорочни циљеви, већ и као интегрални делови наставних секвенци“ (Gravemeijer, Bruin-Muurling, Kraemer & van

Stifthout, 2016: 40). То значи да у наставном процесу сваки појединачни час, па и секвенца часа треба да буде заснована на принципима РМО, без скраћивања и враћања на традиционалну наставну праксу.

Значај и улога контекста заснованог на реалним ситуацијама свакодневног живота у учењу и настави није везана само за подручје математичких садржаја. Истраживање које је извео Purković (2016), у оквиру своје докторске дисертације односило се на примену контекстуалног приступа учењу и настави техничке културе. Циљ овог истраживања је био да се утврди значај одабраних специфичних садржајних елемената наставног контекста и контекстуалних приступа настави за остваривање општих циљева наставе *Техничке култур*е из перспективе наставника, као компетентног евалуатора наставног процеса. Прикупљање емпиријских података обављено је анкетним истраживањем ставова 295 наставника Техничке културе с целокупног подручја Републике Хрватске. На основу резултата истраживања мишљења наставника о утицају издвојених контекстуалних елемената и приступа на остваривање општих циљева наставе *Техничке културе*, утврђена је појединачна важност истих, али и њихова хијерархијска структура важности за остваривање општих циљева наставе. Као најважнији елемент наставног контекста истичу се активности или рад ученика с материјалима, алатима, машинама, уређајима и инструментима, чија важност је истакнута за остваривање циљева наставе *Техничке културе* у целини. Истакнута важност за остваривање свих издвојених циљева наставе утврђена је, такође, за активности ученика у ученичким задругама, камповима, школским радионицама. Резултати истраживања указују на то како је употреба модела, макета и симулација у настави *Техничке културе* посебно важна за постигнућа ученика у когнитивном домену (ученикова знање, разумевање и примена знања), док је извођење стручних екскурзија неизоставна за остваривање циљева из радно-социјалне и професионалне функције техничке културе (Purković, 2016).

Широка је могућност примене основних принципа РМО на различите аспекте наставе и учења, како ученика тако и професионалног оспособљавања и учења наставника и учитеља. Истраживање (Ndlovu, 2014) обухватило је проблеме перцепције и учинка наставника математике у програмима професионалног учења (Teacher Professional Learning - TPL) које је базирано на реалистичним принципима математичког образовања РМО. Ово истраживање укључило је теме о трансформацијама, које је спровео истраживач. У истраживању је учествовало четрдесет седам наставника математике виших разреда основне школе (од 7. до 9. разреда) који су одговарали на упитник, који је садржао питања отвореног и затвореног типа. Педесет наставника је на крају програма радило тест постигнућа. Овај експериментални програм је користио приступ реалног математичког контекста у дизајнирању посебно намењених математичких задатака, како би се побољшало математичко знање наставника за овакав вид наставе. Истраживачке сесије су спроведене помоћу моделовања на начин на који се принципи РМО могу усвојити као наставне стратегије професионалног развоја. Значај ове студије је у томе што је овакав начин организације наставних активности препознат од стране наставника као користан и да доприноси унапређењу наставе и учења и превазилажењу проблема недовољног успеха ученика у учењу математике. Наставници су известили да су активно учествовали као појединци у малим групама и изразили спремност да усвоје и примене овакву врсту активности и материјала и у својим учионицама.

Слично истраживање засновано на идеји *Контекстуалне наставе и учења* (КНУ) које су спровели су Глин и Винтер (Glynn & Winter, 2004), обухвата студију случаја у коју је било укључено 21 наставник, који је користио КНУ у настави науке у основним школама у САД са различитим групама деце. Резултати истраживања су показали да су услови који подстичу имплементацију КНУ стратегије били засновани на: сарадничкој интеракцији између ученика, означен је висок ниво активности у оквиру лекција, остварена је веза са контекстима из стварног света и извршена интеграција садржаја науке са другим садржајима и областима. Надаље, стратегије КНУ најбоље су примењене када су их наставници користили у комбинацији са звучном учионицом и другим техничким и технолошким помагалима.

Истраживање које је спровео Пападакис и сарадници (Papadakis, Kalogiannakis & Zaranis, 2017) имало је за циљ да се истражи и упореди утицај наставе реалистичне математике на развој математичких компетенција у вртићу. Узорак је сачињавало 231 дете у вртићима у Грчкој. Свакодневна рутина је била посвећена подучавању реалистичне математике кроз тематски приступ знању. Циљ је био развијање логичко-математичких способности. Претходна знања о бројевима, кроз активности организоване у складу са принципима РМО, покушали су проширити на забаван начин и кроз познате контексте. Резултати су показали да је технологија уз употребу РМО значајно допринела развоју математичких компетенција младе деце. Ови резултати потврђују чињеницу да се активностима заснованим на реалистичном контексту може приближити математичко знање и подстицати развијање математичких способности кроз разне врсте подражаја. Значај оваквог приступа васпитно-образовној пракси, заснованој на основама *Реалистичког математичког образовања*, може се препознати како у настави млађих разреда основне школе, тако и у васпитно-образовном раду у предшколским установама.

Слично овоме, истраживање које је спровела Саенз-Ладлоу (Sáenz-Ludlow, 2006) имало је за циљ да подстакне ученике трећег разреда на коришћење текстуалних проблема отвореног типа. Учитељ је покренуо причу подстичући ученике да креативно користе своје лично искуство и машту како би у обзир узимали нумеричке вредности и односе и постављали питања која се односе на ситуације из приче. Ученици су у току наставе били у ситуацији да истражују односе и самостално и даље проширују задатак, проналазећи сва питања која се могу поставити на основу датих података. Ниво коришћења оваквих проблема превазилазио је класичне проблеме у уџбеницима који су пред ученике постављали само један захтев. Текстуални проблеми који су изражавали ученици мотивисали су их на дубље разумевање структуре задатака, а истовремено наставу учинили занимљивијом, тако да су они били мотивисани на рад који је другачији од онога на шта су они до тада навикли.

II МЕТОДОЛОШКИ ОКВИР ИСТРАЖИВАЊА

1. ПРОБЛЕМ И ПРЕДМЕТ ИСТРАЖИВАЊА

Контекстуални приступ у настави математике на млађем школском узрасту, његова примена и ефекти које остварује, представља један од актуелних проблема савремене наставе математике, како у теоријском, тако и у практичном смислу. Специфичност узраста ученика и карактеристике садржаја алгебре чине да истраживања примене контекстуалног приступа у настави математике буду популарна широм света, при чему се посебно истиче његов научни, друштвени и практични значај.

Проблем истраживања је контекстуални приступ у настави алгебре у млађим разредима основне школе. Овакво дефинисање проблема истраживања произашло је из чињенице да у нашој земљи не постоји довољан број истраживања која се баве овим проблемом у настави математике, ни у теоријском ни у практичном смислу. Из тог разлога, у истраживању је посебна пажња усмерена на сагледавање теоријских и практичних аспеката контекстуалног приступа у настави математике и ефикасности његове примене у савладавању садржаја алгебре у млађим разредима основне школе. У истраживању ће се посебно издвојити питања која се односе на карактеристике контекстуалног приступа и специфичности реалистичног контекста у настави математике, карактеристике алгебарског начина размишљања и специфичности алгебарских способности ученика. На бази теоријских проматрања креираће се модел методичког обликовања садржаја у складу са контекстуалним приступом кроз процесе моделовања и испитати његова ефикасност у циљу бољег успеха ученика из области алгебре у млађим разредима основне школе.

Предмет овог рада је истраживање ефикасности примене контекстуалног приступа у почетној настави математике на садржајима алгебре. У истраживању се тежи истражити улога и ефекти контекстуалног приступа на постигнуће и развијеност алгебарских способности ученика у почетној настави алгебре.

Предмет који смо одабрали за ово истраживање актуелан је из више разлога. На првом месту, то су проблеми које ученици имају у овладавању садржајима алгебре на овом узрасту као и често питање ученика: *Зашто ја ово учим*? Велики број истраживања широм света (Booth, 1988; Vergnaud, 1985; Kieran, 1981, 2004a; Sfard & Linchevski, 1994; Filloy & Rojano, 1989; Herscovics & Linchevski, 1994 и други), показала су да ученици млађег школског узраста имају проблеме у овладавању садржајима алгебре, њиховом разумевању као и примени наученог. Основна идеја овог истраживања усмерена је на заснивање наставе математике у учењу садржаја алгебре на идејама контекстуалног, како би се омогућило превазилажење ових проблема, али и позитивно утицало на развој алгебарских способности и свеукупно постигнуће ученика из области алгебре у млађим разредима основне школе. На основу специфичности алгебре, карактеристика деце млађег школског узраста, као и проблема који прате наставу и учење алгебре у млађим разредима основне школе, издвојили смо алгебарске способности које је неопходно развијати на овом узрасту: *правилно схватање знака једнакости, разумевање функционалне зависности између компонената рачунских операција, способност уочавања функционалних односа на графикону, табели или слици, схватање симбола у алгебарском изразу, развијање појма променљиве и непознате.*

Суштинске карактеристике организације наставе и учења у складу са контекстуалним приступом, у овом истраживању, заснивају се на идеји Фројдентала да ученици треба да искусе математику као природну активност. Исти аутор описује ову активност кроз активности тражења проблема, решавања проблема, и организовања садржаја (Freudenthal, 1971). Последњу активност – организовање, он назива и математизацијом, а односи се на процес обликовања садржаја, како би се он учинио математичким (према Gravemeijer, et al., 2016). Ученици на овај начин могу поново да открију идеје конвенционалне математике, тако што математизују предмете и ситуације из стварности кроз сопствену активност. У истраживању полазимо од ситуација и проблема из реалног живота који су блиски ученику тако да се у том процесу откривају алгебарске идеје и кроз процесе математизације развијају и усвајају, а касније и примењују. Карактеристика контекстуалног приступа заснована је на чињеници да ученици могу имати користи од знања и математичких културних вредности изван школе. Креирањем таквог окружења и представљањем ситуација и проблема на начин који је близак животу ученика, ученици ће бити способни да изграде и генерализују нова алгебарска знања. Тако се процеси учења и практичних активности не посматрају као два неповезана процеса, већ напротив као везани и условљени ентитети.

Ако се у обзир узму два облика схватања израза и једначина: *оперативно и структурално* (Sfard & Linchevski, 1994b), можемо рећи да у нашем истраживању тежња да се нагласи структурално разумевање алгебарских нотација и потпуније разумеју односи између елемената алгебарских структура кроз количинске односе и ситуације реалног контекста. Суштина је да, кроз процесе математизације, контекстуалне алгебарске проблеме, ученици треба да разумеју, преведу на језик алгебре и реше, и таква знања на крају могу да примене у конкретним и реалним ситуацијама свакодневног живота. Методички приступ садржајима алгебре у овом истраживању био је заснован на идеји коришћења реалног контекста као ослонца у моделовању проблемске ситуације кроз коју ученик гради и обликује моделе у процесима математизације, чиме решава проблем, учи али и развија алгебарске способности. На основу свега тога наш циљ је да се у настави идентификује и користи контекстуални приступ у учењу и настави алгебре, који промовише и унапређује генерализован облик алгебарског размишљања, који ће подстаћи развој когнитивних структура ученика, као и алгебарских способности.

Намера овог истраживања је да се concipirају дидактичко-методички модели и ситуације реалног математичког контекста у настави математике у млађим разредима основне школе и испита њихов утицај на постигнуће, развијеност алгебарских способности ученика млађег школског узраста.

Научни и педагошки значај истраживања у првом плану огледа се у томе што су у раду издвојене специфичности наставе алгебре на млађем школском узрасту, проблеми ученика у учењу овог садржаја, као и специфичности плана и програма и савремених стремљења у настави, на основу којих су операционализоване специфичне алгебарске способности.

Посебан значај заснива се на чињеници да истраживања о примени контекстуалног приступа настави и учењу садржаја алгебре у млађим разредима основне школе није било у довољној мери, на просторима наше земље и окружења. Овакав приступ у настави и учењу садржаја ране алгебре могао би бити од користи свима онима који се баве практичним активностима у учионици, односно, свима онима који проучавају ове и сличне проблеме наставе и учења са једне стране, и квалитетнијем усвајању знања ученика са друге стране. Значај произилази и из чињенице у истраживању проблема, да ли овакав приступ садржајима алгебре кроз примену и праксу у учионицама може утицати на ученичко постигнуће.

Експериментални програм креиран је у складу са реалистичким контекстом са једне стране и специфичним алгебарским способностима са друге стране, може послужити за унапређивање наставе на млађем школском узрасту. Значај се огледа у смислу конкретних решења, које могу помоћи практичарима (методичарима и наставницима) за ефикаснији рад и истраживање почетне наставе и учења алгебре.

Поред тога, значај овог истраживања се огледа и у давању предлога за побољшање тренутних, општеважећих школских докумената који су упориште за креирање уџбеника у млађим разредима основне школе, као и основа које би омогућиле потпуније и јасније сагледавање проблема контекстуалног приступа и његове примене у настави алгебре, као и других области математике.

Друштвени значај овог истраживања произилази из чињенице да се у овако организованим наставним активностима утиче на развој способности сарадње и размене идеја које су од круцијалног значаја у решавању проблема и развоју алгебарских способности ученика. Ученик је у ситуацији да на основу ситуација и проблема реалног контекста свакодневног живота, на различите начине приступа проблему и идеје размењује са друговима у одељењу и учитељем. На основу контекстуално засноване проблемске ситуације ученици разговарају, размењују идеје и тако заједнички граде пут ка новим сазнањима ране алгебре. На овај начин, ученици не усвајају издвојена и неупотребљива знања, већ развијају и алгебарски начин размишљања, који ће им омогућити да увек трагају за новим могућностима и моделима решавања проблема.

Овако организована настава и учење има значајан утицај на практичне способности ученика. Кроз проблемске ситуације у овом облику ученик се сусреће са конкретним проблемом, тако да то знање постаје примењиво и у другим сличним ситуацијама. Ученик неће бити у ситуацији да знање које стекне у учионици примени само на проблеме, који обухватају изоловане вештине и знања, већ да буде способан да решавајући комплексне реалистичке проблеме, то знање примени у свету који га окружује и пренесе га другима.

2. ЦИЉ И ЗАДАЦИ ИСТРАЖИВАЊА

Циљ истраживања је да се испита у којој мери контекстуални приступ садржајима ране алгебре утиче на ученичко постигнуће и развој алгебарских способности.

Истраживањем смо желели да:

- моделујемо експериментални програм заснован на контекстуалном приступу учењу и утврдимо његов утицај на развијање ученичког постигнућа у настави алгебре у млађем школском узрасту;
- утврдимо улогу и значај контекстуалног приступа у процесу наставе и учења садржаја алгебре у млађем школском узрасту;
- испитамо у којој мери уџбеници математике стварају основу за учење засновано на принципима контекстуалног приступа у настави алгебре у млађим разредима основне школе.

Ако се у обзир узме постављени циљ истраживања могу се утврдити следећи задаци истраживања:

1) Испитати утицај контекстуалног приступа на постигнућа ученика у настави алгебре.
2) Испитати утицај експерименталног програма на развијање алгебарских способности ученика.
3) Истражити утицај контекстуалног приступа на трајност алгебраских знања, код ученика млађег школског узраста.
4) Истражити улогу уџбеника математике, у стварању услова за контекстуални приступ учењу садржаја алгебре у млађим разредима основне школе.

3. ХИПОТЕЗЕ ИСТРАЖИВАЊА

Општа хипотеза гласи*:* Контекстуални приступ у учењу и настави математике у млађим разредима основне школе доприноси постизању бољих образовних постигнућа у савладавању садржаја алгебре и развоју алгебарских способности.

Полазећи од задатака истраживања поставили смо следеће посебне хипотезе:

1) Контекстуални приступ у учењу садржаја алгебре доприноси постизању бољих образовних постигнућа у настави математике у млађим разредима основне школе.
2) Контекстуални приступ у учењу и настави алгебре у млађим разредима основне школе подстиче развијање алгебарских способности.
3) Контекстуални приступ у учењу и настави алгебре у млађим разредима основне школе доприноси трајности алгебарских знања и способности.
4) Уџбеници математике имају значајну улогу у стварању услова за контекстуални приступ учењу садржаја алгебре у млађим разредима основне школе.

4. ВАРИЈАБЛЕ ИСТРАЖИВАЊА

Узимајући у обзир све елементе проблема и предмета истраживања, можемо утврдити више варијабли које смо, према функцији коју имају у раду, поделили у две групе на зависне и независне варијабле.

Зависну варијаблу у овом истраживању представљало је постигнуће ученика на тестовима знања, укупно, и по алгебарским способностима;

Независну варијаблу у овом истраживању представљао је контекстуални приступ у настави ране алгебре, односно експериментални програм по коме је једна група ученика радила.

Издвојићемо и зависне и независне варијабле које се односе на карактеристике ученика.

Зависну варијаблу за ученике чинио је:

- успех ученика на тестовима знања, односно стечена знања и развијене алгебарске способности применом контекстуалног приступа у настави математике.

Независну варијаблу за ученике чинио је:

- пол ученика, који је укључивао две категорије: дечаци и девојчице.
- општи успех ученика на крају трећег разреда основне школе: одличан, врло добар, добар, довољан, недовољан;
- оцена из математике постигнута на крају трећег разреда основне школе: одличан (5), врло добар (4), добар (3), довољан (2) и недовољан (1).

Корелацију између независних варијабли (пол, општи успех, оцена из математике) и примењеног контекстуалног приступа вредновали смо коришћењем Пирсонове линеарне корелације.

5. УЗОРАК ИСТРАЖИВАЊА

За потребе истраживања одабрали смо две врсте узорка: узорак ученика и узорак уџбеника.

Узорак ученика одабран је из популације ученика четвртог разреда основне школе у школској 2019/2020. на територији Града Ужица. Случајним избором одабрали смо три основне школе и одељења у оквиру њих, чији ученици су учествовали у експерименталној групи (ОШ „Душан Јерковић" у Ужицу) и контролној групи (ОШ „Слободан Секулић" у Ужицу и ОШ „Нада Матић" у Ужицу) (Табела 7).

Узорак је чинило укупно десет одељења четвртог разреда (N = 257) и то пет за експерименталну и пет за контролну групу (130 ученика експерименталне групе, што је чинило 50,6% укупног броја ученика и 127 ученика у контролној групи што је чинило 49,4% укупног броја ученика). Определили смо се за ученике четвртог разреда из разлога што су за овај разред Наставним планом и програмом предвиђене три тематске целине, које су значајне за ово истраживање: једначине, неједначине и зависност резултата од промене компонената рачунских операција.

Табела 7. *Структура узорка ученика по школама и одељењима*

Експериментална група				Контролна група			
Школа	Одељење	N	%	Школа	Одељење	N	%
ОШ Душан	IV/1	22	8,6	ОШ Слободан	IV/2	25	10,01
Јерковић	IV/2	27	10,5	Секулић	IV/3	27	10,05
	IV/3	26	10,1		IV/4	24	9,3
	IV/4	26	9,7	ОШ Нада	IV/1	25	9,7
	IV/5	29	11,3	Матић	IV/2	26	10,1
Укупно		130	50,6			127	49,4

Пошто смо се определили за експеримент са паралелним групама, формирали смо две групе ученика – експерименталну и контролну групу. Уједначавање група смо извели уједначавањем према општем успеху и оцени из математике, док смо анализом коваријансе контролисали поступак уједначавања. Применом анализе коваријансе омогућено је упоређивање резултата финалног теста експерименталне и контролне групе, пошто је у обзир узета одређена регресија која постоји на резултатима иницијалног мерења.

Ученици контролне и експерименталне групе припадали су средњем социјалном сталежу и сви долазе из исте градске средине. Пошто наше истраживање фокусирано на варијабле: пол, општи успех ученика и оцена из математике, можемо рећи да је узорак стратификован. Узорак има елементе случајног стратификованог и групног узорка.

Структура узорка ученика у односу на пол представљена је у Табели 8. Од укупно 130 ученика који су учествовали у експерименталној групи, 62 (47,7%) ученика су дечаци, а 68 (52,3%) девојчице. У контролној групи је учествовало укупно 127 ученика, од чега је 65 (51,2%) ученика било мушког пола и 62 (48,8%) ученика је био женског пола.

Табела 8. *Структура узорка ученика у односу на пол*

	Експериментална група		Контролна група		Укупно	
Пол	N	%	N	%	N	%
Дечак	62	47,7	65	51,2	127	49,4
Девојчица	68	52,3	62	48,8	130	50,6
Укупно	130	100	127	100	257	100

Структура узорка ученика у односу на општи успех дат је у Табели 9. У обзир смо узели општи успех ученика на претходном полугодишту. На основу представљених података можемо уочити уједначеност у броју ученика са истим успехом у обе групе ученика који су учествовали у овом истраживању. Од 130 ученика који су чинили експерименталну групу чак 77 (59,2%) ученика је постигло одличан успех, док је у контролној групи број одличних нешто мањи и чини 64 (50,4%) ученика. Врло добар општи успех у експерименталној групи чинило је 32,3% ученика, док је у контролној групи проценат врло добрих ученика био 31,5%. Најмањи проценат у обе групе чинили су ученици са добрим општим успехом, и то у експерименталној групи они су чинили 8,5% од укупног броја ученика, док је у контролној групи било 18,1% укупног броја ученика.

Табела 9. *Структура узорка ученика у односу на на општи успех*

	Експериментална група		Контролна група		Укупно	
Успех	N	%	N	%	N	%
Добар	11	8,5	23	18,1	34	13,2
Врло добар	42	32,3	40	31,5	82	31,9
Одличан	77	59,2	64	50,4	141	54,9
Укупно	130	100	127	100	257	100

Структуру узорка ученика експерименталне и контролне групе у односу на оцену из математике приказана је у Табели 10. Увидом у табелу можемо уочити да су највећи проценат ученика експерименталне групе (43,1%) чинили ученици са оценом *одличан (5)*. У контролној групи су, такође, ученици са оценом *одличан (5)* били најбројнији, тако да су чинили 37,7% од укупног броја ученика. Ученици са оценом *врло добар (4)* у експерименталној групи чинили су 28,4% од броја ученика, док је у контролној групи проценат ових ученика био 33,1% од укупног броја ученика те групе.

Проценат ученика са оценом *добар (3)* био је поприлично уједначен у обе групе, тако да је у експерименталној чинио 20,8%, док је у контролној 21,3% укупног броја ученика у групи. Најмањи проценат у обе групе чинили су ученици са оценом *довољан (2)*, тако да је њихова заступљеност у експерименталној групи била свега 7,7%, док је у контролној била нешто већа и чинила 7,9% укупног броја ученика те групе.

Табела 10. *Структура узорка ученика у односу на оцену из математике*

	Експериментална група		Контролна група		Укупно	
Оцена	N	%	N	%	N	%
Довољан (2)	10	7,7	10	7,9	20	7,8
Добар (3)	27	20,8	27	21,3	54	21
Врло добар (4)	37	28,4	42	33,1	79	30,7
Одличан (5)	56	43,1	48	37,7	104	40,5
Укупно	130	100	127	100	257	100

Узорак уџбеника обухватио је уџбенике математике шест издавача од првог до четвртог разреда основне школе, који су одобрени од стране *Министарства просвете, науке и технолошког развоја* Републике Србије. Уџбенике смо анализирали као део јединственог уџбеничког комплета, који се разликује у зависности од издавача. У оквиру истраживања, анализирали смо 24 уџбеничка комплета, који укупно садрже 70 уџбеника (Табела 11).

Табела 11. *Број уџбеничких комплета и уџбеника по разредима*

Разред	Број уџбеничких комплета	Број уџбеника
I	6	20
II	6	20
III	6	16
IV	6	14
Укупно	24	70

У истраживању је извршена анализа садржаја 6 уџбеничких комплета за први, други, трећи и четврти разред основне школе. За први и други разред основне школе анализирали смо 20 уџбеника математике, за трећи разред анализирано је 16 и за четврти разред 14 уџбеника математике (Табела 11). Навешћемо, по разредима, уџбенике који су чинили узорак анализе уџбеника (Табела 12, Табела 13, Табела 14 и Табела 15).

Табела 12. *Узорак уџбеника за први разред основне школе*

Р.Б.	Уџбеници математике за први разред основне школе
1.	Јухас, И. (2018). *Математика 1а,* уџбеник за први разред основне школе; Београд: Едука Јухас, И. (2018). *Математика 1б,* уџбеник за први разред основне школе; Београд: Едука Јухас, И. (2019) *Мудрица 1*, збирка задатака за први разред основне школе, Београд: Едука
2.	Милинковић, Ј. (2019). *Математика 1*, уџбеник за први разред основне школе; Београд: Креативни центар. Милинковић, Ј. и Матић Н. (2019) *Математика 1***,** радна свеска за први разред основне школе; Београд: Креативни центар.
3.	Тодоровић, О. и Огњановић, С. (2019). *Математика 1*, уџбеник за први разред

	основне школе; Београд: Завод за уџбенике. Тодоровић, О. и Огњановић, С.(2019). *Математика 1*, вежбанка за први разред основне школе; Београд: Завод за уџбенике.
4.	Маричић, С. (2018). *Математика 1*, уџбеник за први разред основне школе, Београд: БИГЗ школство. Маричић, С. (2018). *Математика 1*, радна свеска (1. део) за први разред основне школе, Београд: БИГЗ школство. Маричић, С. (2018). *Математика 1*, радна свеска (2. део) за први разред основне школе, Београд: БИГЗ школство.
5.	Поповић, Б., Вуловић, Н., Анокић, П. Кандић, М. (2018). *Раша и Маша – Математика 1*, Уџбеник за први разред основне школе (1. део), Београд: Klett, Београд. Поповић, Б., Вуловић, Н., Анокић, П. Кандић, М. (2018). *Раша и Маша – Математика 1*, Уџбеник за први разред основне школе (2. део), Београд: Klett, Београд. Поповић, Б., Вуловић, Н., Анокић, П. Кандић, М. (2018). *Раша и Маша – Математика 1*, Уџбеник за први разред основне школе (3. део), Београд: Klett, Београд. Поповић, Б., Вуловић, Н., Анокић, П. Кандић, М. (2018). *Раша и Маша – Математика 1*, Уџбеник за први разред основне школе (4. део), Београд: Klett, Београд. Поповић, Б., Вуловић, Н., Анокић, П. Кандић, М. (2018). *Раша и Маша – Математика 1,* Радна свеска за први разред основне школе (1. део), Београд: Klett, Београд. Поповић, Б., Вуловић, Н., Анокић, П. Кандић, М. (2018). *Раша и Маша – Математика 1,* Радна свеска за први разред основне школе (2. део), Београд: Klett, Београд. Поповић, Б., Вуловић, Н., Анокић, П. Кандић, М. (2018). *Раша и Маша – Математика 1,* Радна свеска за први разред основне школе (3. део), Београд: Klett, Београд. Поповић, Б., Вуловић, Н., Анокић, П. Кандић, М. (2018). *Раша и Маша – Математика 1,* Радна свеска за први разред основне школе (4. део), Београд: Klett, Београд.
6.	Иванчевић Илић, И. и Тахировић, С. (2018). *Математика 1*, Уџбеник за први разред основне школе, Београд: Нови Логос. Иванчевић Илић, И. и Тахировић, С. (2018). *Математика 1*, наставни листови за први разред основне школе, Београд: Нови Логос.

Табела 13. *Узорак уџбеника за други разред основне школе*

Р.Б.	Уџбеници математике за други разред основне школе
1.	Јухас, И. (2019). *Математика 2а* , уџбеник за други разред основне школе; Београд: Едука. Јухас, И. (2019). *Математика 2б* , уџбеник за други разред основне школе; Београд: Едука. Јухас, И. (2019). *Мудрица 2*, збирка задатака за други разред основне школе, Београд: Едука.
2.	Милинковић, Ј. (2019). *Математика 2* **,** уџбеник за други разред основне школе; Београд: Креативни центар. Милинковић, Ј. (2019). *Математика 2 ,* радна свеска за други разред основне

	школе; Београд: Креативни центар.
3.	Тодоровић, О. и Огњановић, С. (2019). *Математика 2* , уџбеник за други разред основне школе; Београд: Завод за уџбенике. Тодоровић, О. и Огњановић, С. (2019). *Математика 2* , вежбанка за други разред основне школе; Београд: Завод за уџбенике.
4.	Маричић, С. и Ђуровић, Д. (2019). *Математика 2*, уџбеник за други разред основне школе, Београд: БИГЗ школство. Маричић, С. и Ђуровић, Д. (2019). *Математика 2,* радна свеска (1. део) за други разред основне школе, Београд: БИГЗ школство. Маричић, С. и Ђуровић, Д. (2019). *Математика 2,* радна свеска (2. део) за други разред основне школе, Београд: БИГЗ школство.
5.	Поповић, Б., Вуловић, Н., Анокић, П. Кандић, М. (2018). *Раша и Маша – Математика 2*, Уџбеник за други разред основне школе (1. део), Београд: Klett, Београд. Поповић, Б., Вуловић, Н., Анокић, П. Кандић, М. (2018). *Раша и Маша – Математика 2*, Уџбеник за други разред основне школе (2. део), Београд: Klett, Београд. Поповић, Б., Вуловић, Н., Анокић, П. Кандић, М. (2018). *Раша и Маша – Математика 2*, Уџбеник за други разред основне школе (3. део), Београд: Klett, Београд. Поповић, Б., Вуловић, Н., Анокић, П. Кандић, М. (2018). *Раша и Маша – Математика 2*, Уџбеник за други разред основне школе (4. део), Београд: Klett, Београд. Поповић, Б., Вуловић, Н., Анокић, П. Кандић, М. (2018). *Раша и Маша – Математика 2*, Радна свеска за други разред основне школе (1. део), Београд: Klett, Београд. Поповић, Б., Вуловић, Н., Анокић, П. Кандић, М. (2018). *Раша и Маша – Математика 2*, Радна свеска за други разред основне школе (2. део), Београд: Klett, Београд. Поповић, Б., Вуловић, Н., Анокић, П. Кандић, М. (2018). *Раша и Маша – Математика 2*, Радна свеска за други разред основне школе (3. део), Београд: Klett, Београд. Поповић, Б., Вуловић, Н., Анокић, П. Кандић, М. (2018). *Раша и Маша – Математика 2*, Радна свеска за други разред основне школе (4. део), Београд: Klett, Београд.
6.	Иванчевић Илић, И. и Тахировић, С. (2019). *Математика 1*, Уџбеник за први разред основне школе, Београд: Нови Логос. Иванчевић Илић, И. и Тахировић, С. (2019). *Математика 1*, Радна свеска за први разред основне школе, Београд: Нови Логос.

Табела 14. *Узорак уџбеника за трећи разред основне школе*

Р.Б.	Уџбеници математике за трећи разред основне школе
1.	Зарупски, С. и Влаховић, Б. (2016). *Математика 3,* уџбеник за 3. разред основне школе, Београд: Едука. Зарупски, С. и Влаховић, Б. (2016). *Математика 3а***,** радне свеске за 3. разред основне школе, Београд: Едука. Зарупски, С. и Влаховић, Б. (2016). *Математика 3б***,** радне свеске за 3. разред основне школе, Београд: Едука.
2.	Стефановић, А. и Рикало, В. (2018). *Математика 3,* уџбеник за трећи разред

	основне школе; Београд: Креативни центар. Стефановић, А. и Маринковић, С. (2016). *Математика 3*, радна свеска (1. део) за 3. разред основне школе; Београд: Креативни центар. Стефановић, А. и Маринковић, С. (2016). *Математика 3*, радна свеска (2. део) за 3. разред основне школе; Београд: Креативни центар.
3.	Тодоровић, О. и Огњановић, С. (2016). *Математика 3*, уџбеник за трећи разред основне школе; Београд: Завод за уџбенике. Тодоровић, О. и Огњановић, С. (2016). *Математика 3*, вежбанка за трећи разред основне школе; Београд: Завод за уџбенике.
4.	Јовановић-Лазић, М. и Дрндаревић, Д. (2014). *Математика 3,* уџбеник (1. део) за трећи разред основне школе, Београд: БИГЗ школство. Јовановић-Лазић, М. и Дрндаревић, Д. (2014). *Математика 3,* уџбеник (2. део) за трећи разред основне школе, Београд: БИГЗ школство. Јовановић-Лазић, М. и Дрндаревић, Д. (2014). *Математика 3*, радна свеска за трећи разред основне школе, Београд: БИГЗ школство.
5.	Поповић, Б., Вуловић, Н., Анокић, П. Кандић, М. (2015). *Раша и Маша – Математика 3*, Уџбеник за трећи разред основне школе, Београд: Klett, Београд. Поповић, Б., Вуловић, Н., Анокић, П. Кандић, М. (2015). *Раша и Маша – Математика 3*, Радна свеска за трећи разред основне школе (1. део), Београд: Klett, Београд. Поповић, Б., Вуловић, Н., Анокић, П. Кандић, М. (2015). *Раша и Маша – Математика 3*, Радна свеска за трећи разред основне школе (2. део), Београд: Klett, Београд.
6.	Иванчевић Илић, И. и Тахировић, С. (2018). *Математика 1*, Уџбеник за први разред основне школе, Београд: Нови Логос. Иванчевић Илић, И. и Тахировић, С. (2018). *Математика 1*, Радна свеска за први разред основне школе, Београд: Нови Логос.

Табела 15. *Узорак уџбеника за четврти разред основне школе*

Р.Б.	Уџбеници математике за четврти разред основне школе
1.	Зарупски, С. (2019). *Математика 4***,** уџбеник за 4. разред основне школе; Београд: Едука. Зарупски, С. (2019). *Математика 4а*, радна свеска за 4. разред основне школе, Београд: Едука. Зарупски, С. (2019). *Математика 4б*, радна свеска за 4. разред основне школе, Београд: Едука.
2.	Дејић, М., Милинковић, Ј., Ђокић, О. (2016). *Математика 4***,** уџбеник за 4. разред основне школе; Београд: Креативни центар. Дејић, М., Милинковић, Ј., Ђокић, О. (2016). *Математика 4*, радна свеска за 4. разред основне школе; Београд: Креативни центар.
3.	Тодоровић, О. и Огњановић, С.(2016). *Математика 4,* уџбеник за четврти разред основне школе; Београд: Завод за уџбенике. Тодоровић, О. и Огњановић, С.(2016). *Математика 4*, вежбанка за четврти разред основне школе; Београд: Завод за уџбенике.
4.	Максимовић, М. (2012). *Математика 4*, уџбеник за четврти разред основне школе, Београд: БИГЗ школство. Максимовић, М. (2012). *Математика 4*, радна свеска (1. део) за четврти разред основне школе, Београд: БИГЗ школство. Максимовић, М. (2012). *Математика 4*, радна свеска (2. део) за четврти разред

	основне школе, Београд: БИГЗ школство.
5.	Поповић, Б., Вуловић, Н., Анокић, П. Кандић, М. (2015). *Раша и Маша – Математика 4*, Уџбеник за четврти разред основне школе, Београд: Klett, Београд. Поповић, Б., Вуловић, Н., Анокић, П. Кандић, М. (2015). *Раша и Маша – Математика 4*, Радна свеска за четврти разред основне школе, Београд: Klett, Београд.
6.	Тахировић, С. (2020). *Математика 1*, Уџбеник за први разред основне школе, Београд: Нови Логос. Тахировић, С. и Степановић, М. (2020). *Математика 1*, Уџбеник за први разред основне школе, Београд: Нови Логос.

6. МЕТОДЕ, ТЕХНИКЕ И ИНСТРУМЕНТИ ИСТРАЖИВАЊА

Према постављеном циљу и задацима истраживања, изабране су методе, технике и инструменти истраживања. У истраживању смо користили методу теоријске анализе, дескриптивну научно-истраживачку методу и експерименталну методу.

Методу теоријске анализе користили смо у конципирању методичких оквира контекстуалног приступа у настави математике.

Дескриптивну научно-истраживачку методу смо користили приликом проучавања стручне литературе, прикупљања података о улози и значају контекстуалног приступа настави алгебре у млађим разредима основне школе, приликом анализе уџбеника и интерпретације и извођења закључака у раду.

Експерименталну методу смо користили да бисмо утврдили утицај експерименталног програма на ученичко постигнуће у почетној настави алгебре. Експерименталну методу користили смо у модалитету експеримента са паралелним групама. Њоме смо желели да утврдимо постојање узрочно – последичних веза између контекстуалног приступа обради алгебарских садржаја у млађим разредима основне школе и ученичког постигнућа. На почетку смо обавили иницијално тестирање у обе групе (експерименталној и контролној) како бисмо утврдили иницијални ниво знања код ученика. Након тога смо у експерименталној групи применили експериментални програм.

Експериментални програм је садржао посебно припремљене моделе часова конципиране према принципима контекстуалног приступа учења алгебарских садржаја. Ученици експерименталне групе су у одређеном периоду (од 25 часова), радили по овим унапред припремљеним моделима контекстуалног приступа садржајима алгебре. Ученици који су радили у оквиру контролне групе, радили су по на уобичајен начин на часовима математике. Настава у обе групе одвијала се према Наставном плану и програму и садржајима који су утврђени од стране Министарства просвете, науке и технолошког развоја. Након завршеног експерименталног програма извршили смо финално тестирање како бисмо утврдили ниво знања ученика обе групе након обрађених садржаја по два модалитета. Након четири месеца од завршетка експеримента извршено је ретестирање ученика у обе групе, како би се утврдили ефекти трајности знања ученика.

У истраживању смо користили следеће истраживачке технике:

- тестирање,
- анализа садржаја.

Тестирање, као истраживачку технику, користили смо да бисмо утврдили ефекте експерименталног програма на ученичко постигнуће и развијеност алгебарских способности у садржајима алгебре за четврти разред основне школе. Тестирање је обављено у три наврата. Прво тестирање обављено је пре почетка деловања експерименталног фактора – иницијално мерење. Друго (финално) тестирање извршено је након завршетка експерименталног програма, како би се утврдили ефекти истог. И треће мерење (ретест), обавили смо шест месеци након завршетка експерименталног програма, како би се утврдила трајност знања ученика.

Анализу садржаја користили смо с циљем да утврдимо у којој мери уџбеници математике својим садржајем стварају основу за контекстуални приступ изучавању садржаја алгебре у почетној настави математике. Сви анализирани уџбеници математике одобрени су од стране *Министарства просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије* за коришћење у настави од првог до четвртог разреда основне школе.

У истраживању смо користили два нивоа анализе садржаја уџбеника математике. Први ниво анализе имао је за циљ да утврди да ли у уводним примерима, постоји основа за контекстуални приступ у учењу садржаја алгебре, односно да ли се садржаји алгебре уводе преко реалне, конкретне ситуације или кроз примере који су дати у математичком контексту. Категорије садржаја за анализу на овом нивоу чине садржаји засновани на:

- контекстуалном приступу – садржаји су изражени у облику реалних ситуација свакодневног живота и као такви представљају полазиште за учење и математизацију;
- неконтекстуалном (математички) приступу – садржаји у којима се приступа на чисто математички начин и кроз примере који су изражени искључиво математичким језиком, без употребе реалних ситуација свакодневног живота.

Други ниво анализе садржаја подразумевао је да испитамо у којој мери су у задацима предвиђеним за вежбање и утврђивање знања из алгебре заступљени задаци контекстуалног типа. У анализи садржаја уџбеника математике задацима су сматрани сви једнозначни захтеви са математичким садржајем, који се постављају пред ученика. Категорија за анализу садржаја у овом случају био је задатак заснован на реалном математичком контексту и задатак заснован на чистом математичком контексту:

- *Задатке засноване на реалном математичком контексту,* односно реалној математичкој ситуацији, која изражава ситуације свакодневног живота и
- *Задатке засноване на чистом математичком контексту*, односно математичким ситуацијама израженим у облику математичке формуле, реченице или математичког записа.

Анализу садржаја уџбеника обавила су два независна истраживача и аутор. У анализи садржаја уџбеника истраживачи су приликом сврставања задатака у наведене категорије били поприлично уједначени. Након извршене процене резултати су уједначени и задаци су груписани у категорије. Подаци добијени анализом уџбеника математике бележили смо у евиденциону листу.

У истраживању су коришћени следећи инструменти:

1) тестови знања.
2) евиденциона листа.

Истраживање које смо спровели захтевало је израду посебних тестова за мерење ученичког *постигнућа и развијености алгебарских способности* у области алгебре за млађе разреде основне школе. За потребе истраживања сачињена су три теста:

1) Иницијални тест (ИТ) за утврђивање нивоа знања из алгебре и развијености алгебарских способности пре увођења експерименталног програма (Прилог 1);
2) Финални тест 1 (ФТ 1) за утврђивање нивоа знања из алгебре и развијености алгебарских способности након реализације експерименталног програма (Прилог 2);
3) Финални тест 2 (ФТ 2) за утврђивање трајности знања и способности ученика из области алгебре шест месеци након реализације експерименталног програма (Прилог 3).

Тестом смо мерили укупно образовно постигнуће у настави алгебре у млађим разредима основне школе, а кроз субтестове развијеност алгебарских способности. Сваки тест садржао је по 10 задатака, а сваки задатак вреднован је са пет поена максимално. Тестови су обухватили пет група задатака. Задаци су груписани у групе према операционализованим алгебарским способностима. Сваки тест је садржао по два задатка који су се односили на одређене алгебарске способности: *правилно схватање знака једнакости, разумевање функционалне зависности између компонената рачунских операција, способност уочавања функционалних односа на графикону, табели или слици, схватање симбола у алгебарском изразу, развијање појма променљиве и непознате*.

Тестови су пилотирани на узорку од 50 ученика четвртог разреда и сличних карактеристика као и одељења ученика са којима смо радили истраживање. Пилотирање је спроведено за иницијални и финални тест у сарадњи са ментором, при чему су након анализе урађене корекције на тестовима у складу са потребама и уоченим недостацима тестова.

Тестирања су се обављала у одељењима у трајању од једног школског часа.

Иницијални тест (ИТ) примењен је на иницијалном тестирању, пре спроведеног експерименталног програма. У овом тестирању учествовали су ученици контролне и експерименталне групе како би се утврдио укупан ниво постигнућа и развијеност алгебарских способности. Тест је садржао 10 задатака, при чему се сваки задатак бодовао у зависности од тога да ли је задатак урађен у потпуности или не. Максималан број бодова на тесту износио је 50 бодова. Структура, број поена по алгебарским способностима, као и појединачно задацима је следећи:

- *Правилно схватање знака једнакости*: (1. и 2. задатак), укупно 10 поена (5 + 5);
- *Разумевање функционалне зависности између компонената рачунских операција*: (3. и 4. задатак), укупно 10 поена (5 + 5);
- *Способност уочавања функционалних односа на графикону, табели или слици*: (6. и 7. задатак), укупно 10 поена (5 + 5);
- *Схватање симбола у алгебарском изразу*: (8. и 9. задатак), укупно 10 поена (5 + 5);
- *Развијање појма променљиве и непознате*: (10. и 5. задатак), укупно 10 поена (5 + 5).

Ученици су у сваком задатку имали могућност да освоје од 2 до 5 поена у зависности од тога да ли су задатак завршили у целини или само део њега. Иницијални, финални тест и ретест су имали исти број задатака, како би се олакшала обрада података и упоређивање постигнућа која су добијена пре и након извршеног експерименталног програма (иницијални, финални тест и ретест)

Финални тест 1 (ФТ 1) примењен је на финалном тестирању након спроведеног експерименталног програма (контекстуални приступ у настави алгебре). Циљ финалног тестирања био је да се утврде ефекти контекстуалног приступа у настави алгебре у млађим разредима основне школе. Као и иницијални тест, и финални тест је садржао 10 задатака и сваки од задатака је носио 5 бодова. Задаци у финалном тесту бодовани су у складу са сложеношћу. Максималан број бодова, као и на иницијалном тесту био је 50 бодова. Структура, број поена по алгебарским способностима, као и појединачно задацима је следећа:

- *Правилно схватање знака једнакости*: (1. и 2. задатак), укупно 10 поена (5 + 5);
- *Разумевање функционалне зависности између компонената рачунских операција*: (3. и 4. задатак), укупно 10 поена (5 + 5);
- *Способност уочавања функционалних односа на графикону, табели или слици*: (5. и 6. задатак), укупно 10 поена (5 + 5);
- *Схватање симбола у алгебарском изразу*: (7. и 8. задатак), укупно 10 поена (5 + 5);
- *Развијање појма променљиве и непознате*: (9. и 10. задатак), укупно 10 поена (5 + 5).

Финални тест 2 (ФТ 2) коришћен утврђивање трајности знања је извршен шест месеци након извршеног финалног мерења, код ученика контролне и експерименталне групе са циљем да се утврде ефекти контекстуалног приступа у настави и садржајима алгебре у млађим разредима основне школе. Као и код остала два теста, и овај тест је садржао 10 задатака, док је сваки задатак носио 5 бодова. Структура, број поена по алгебарским способностима, као и појединачно задацима, у овом тесту је следећа:

- *Правилно схватање знака једнакости*: (1. и 2. задатак), укупно 10 поена (5 + 5);
- *Разумевање функционалне зависности између компонената рачунских операција*: (3. и 4. задатак), укупно 10 поена (5 + 5);
- *Способност уочавања функционалних односа на графикону, табели или слици*: (5. и 6. задатак), укупно 10 поена (5 + 5);
- *Схватање симбола у алгебарском изразу*: (7. и 8. задатак), укупно 10 поена (5 + 5);
- *Развијање појма променљиве и непознате*: (9. и 10. задатак), укупно 10 поена (5 + 5).

У обе групе узорка (експерименталној и контролној) истовремено је извршено тестирање. Добијени резултати су изражени у квантитативном облику, који представља укупан скор изражен у броју поена на тестовима знања, као и скор по издвојеним алгебарским способностима.

У анализи садржаја уџбеника користили смо *евиденциони лист* који је послужио за евидентирање података. Његову садржину су чинили називи уџбеника и бројност која је изражавала заступљеност задатака заснованих на реалном контексту и чистом математичком контексту, по наставним јединицама.

7. ПРОВЕРА МЕТРИЈСКИХ КАРАКТЕРИСТИКА ИНСТРУМЕНАТА ИСТРАЖИВАЊА

Метријске карактеристике тестова одредили смо тако што смо утврдили његову *валидност, објективност, дискриминативност, и релијабилност* и на тај начин оправдали употребу ових тестова.

Валидност теста постигли смо тако што смо применили логичку и садржајну валидацију које се односе на утврђивање слагања тестова са захтевима наставног програма и садржајима на које се односе. Тест се сматра ваљаним, ако мери знање из области на коју се односи, што ће бити постигнуто овим истраживањем кроз вишеструку валидацију и задатке који су у складу са циљем истраживања, јер се задаци односе на алгебру и мере развијеност алгебарских способности. Ова вишеструка валидација постигнута је кроз израду и одабир задатака у сарадњи са учитељима практичарима са вишегодишњим искуством

Објективност теста постигли смо тако што је сваки ученик постављен у приближно једнаку испитну ситуацију, тако што је независни испитивач поступао по истим упутствима и што се бодовање задатака вршило на исти начин помоћу и по истом критеријуму. Објективност иницијалног и финалног теста проверили смо утврђивањем степена слагања резултата два независна процењивача (аутора и професора ментора). Задаци који су се користили у тестовима били су у складу са прописаним програмом и стандардима постигнућа за тај разред.

Дискриминативност (осетљивост) теста постижемо када тестом можемо да утврдимо фине разлике код испитаника у ономе што меримо. Заправо, на овај начин ми проверавамо да ли се помоћу тестова разликују испитаници по знању и проверавамо преко расподеле учесталости скорова на тестовима знања да ли та расподела значајно одступа од (теоријске) нормалне расподеле. Осетљивост тестова смо утврдили путем тестирања хипотезе о нормалности расподеле. Како је узорак испитаника већи од 50, нормалност расподеле иницијалног, финалног теста знања 1 и финалног теста знања 2 утврдили смо применом Колмогоров-Смирновљевог теста (Табела 16, Прилог 5).

Табела 16. *Тестирање нормалности иницијалног, финалног 1 и финалног 2 теста*

Група	Тест	Skewness	Sde	Kurtosis	Sde
Експериментална група	Иницијални	0,177	0,212	- 0,825	0,422
	Финални 1	- 0,278	0,212	- 0,635	0,422
	Финални 2	- 0,226	0,212	- 0,706	0,422
Контролна група	Иницијални 1	- 0,166	0,215	- 0,655	0,425
	Финални 1	- 0,141	0,215	- 0,938	0,427
	Финални 2	- 0,198	0,215	- 0,935	0,425

У табели 16 представили смо вредности асиметричности скјунис (skewness) и спљоштености куртозис (kurtosis) за иницијално, финално 1 и финслно 2 мерење, који описују расподелу резултата унутар експерименталне и контролне групе. У нормалној расподели „асиметрија и спљоштеност једнаке су 0 (што се у друштвеним наукама ретко среће)" (Pallant, 2016: 57).

Ако се у обзир узму добијени резултати, можемо рећи да су све вредности асиметрије (скјуниса) негативне осим на иницијалном мерењу експерименталне групе. Негативне вредности асиметрије показују да је већина резултата десно од средње вредности, односно да се налазе међу већим вредностима. Добијене вредности спљоштености (куртозиса) за сва мерења и у обе групе показују негативне вредности што значи да је расподела пљоснатија од нормалне (има више случајева на реповима).

Пошто је узорак који смо користили у истраживању преко 200, то значи да оваква расподела резултата нема знатнијег утицаја на резултате анализе (Tabachnik i Fidell, 2013). Вредности за скјунис (skewness) и куртозис (kurtosis) у свим тестовима и групама крећу у опсегу од – 2 до 2, што говори да резултати показују нормалну униваријантну расподелу (George & Mallery, 2010).

Како бисмо испитали нормалност расподеле резултата иницијалног, финалног и ретеста, искористили смо и Колмогоров – Смирнов тест (Табела 17).

Табела 17. *Колмогоров - Смирнов тест за испитивање нормалности расподеле резултата мерења*

Група		Kolmogorov-Smirnov Statistic	df	Sig.
Експериментална група	Иницијално мерење	0,089	130	0,014
	Финално мерење	0,091	130	0,010
	Ретест мерење	0,066	130	0,200
Контролна група	Иницијално мерење	0,071	127	0,190
	Финално мерење	0,101	127	0,003
	Ретест мерење	0,088	127	0,016

Добијене вредности Колмогоров-Смирнов теста показују нормалност расподеле на финалном мерењу 2 експерименталне групе и иницијалном мерењу контролне групе, јер је значајност у овим тестовима већа од 0,05. У свим осталим мерењима вредност $p < 0,05$, што значи да претпоставка о нормалности расподеле није потврђена па ћемо је самим тим одбацити. Према мишљењу Палант (Pallant, 2017) овакво одбацивање хипотезе о нормалности расподеле је сасвим уобичајено за велике узорке.

Релијабилност (поузданост) теста утврдили смо помоћу Кронбаховог коефицијента алфа као показатеља који испитује поузданост наших тестова (иницијалног, финалног 1 и ретеста). Овим тестом се покушава одредити постојање унутрашње сагласности скале, односно ставки из којих се она састоји (Табела 18).

Табела 18. *Вредности Кромбах коефицијента алфа за тестове*

	Cronbach's Alpha	Cronbach's Alpha Based on Standardized Items	N of Items
Иницијални тест	0,795	0,885	10
Финални тест	0,813	0,926	10
Ретест	0,813	0,928	10

Вредности Кронбах алфа коефицијента (Табела 18) за иницијални, финални тест 1, ретест показују резултате веће од 0,7 што, према мишљењу Палант (Pallant, 2017), представља прихватљиве и пожељне вредности релијабилности.

Добијене метријске карактеристике тестова дају сигурну основу да добијени резултати пружају реалну слику и реалан показатељ ефеката контсктуалног приступа у учењу садржаја алгебре у настави математике у млађим разредима основне школе. Овим смо потврдили вредност тестова које смо користили да би утврдили утицај контекстуалног приступа у настави алгебре у млађим разредима основне школе.

8. ОРГАНИЗАЦИЈА И ТОК ИСТРАЖИВАЊА

Емпиријско истраживање реализовано је у току школске 2019/2020. године. Пилот тестирање спровели смо на почетку истраживања, како бисмо могли кориговати инструменте и обавити израду коначне форме иницијалног теста постигнућа ученика. Након тога, уследио је договор са директорима школа, стручном педагошко-психолошком службом и учитељима, чија одељења су представљала контролну и експерименталну групу у истраживању. Учитељи су били детаљно упознати са предметом и циљем истраживања као и садржајем и циљем експерименталног програма.

Прво (иницијално) тестирање обављено је у свим предвиђеним групама (контролна и експериментална). Након тога започели смо са увођењем експерименталног програма у експерименталну групу. Експериментални програм се реализовао на часовима редовне наставе математике у четвртом разреду основне школе. Експериментални програм је пратио предвиђени наставни програм математике, након чега се обавило финално тестирање ученичког постигнућа.

Експериментални програм је реализован у оквиру следећих наставних тема:

- *Сабирање и одузимање природних бројева*
- *Множење и дељење природних бројева*

Распоред наставних тема и у оквиру њих наставних јединица, преузели смо из Годишњег наставног програма учитеља. Овај документ је одредио и редослед наставних јединица у оквиру експерименталног програма. Експериментални програм реализован на 25 часова математике у оквиру редовне наставе. У табели су представљене наставне јединице у оквиру којих је реализован експериментални програм. (Табела 19).

Табела 19. *Вежбе експерименталног програма*

Редни број часа вежбе	Назив наставне јединице	Тип часа
1.	Једначине са сабирањем	Обрада
2.	Једначине са одузимањем	Обрада
3.	Једначине са сабирањем и одузимањем	Утврђивање
4.	Једначине са сабирањем и одузимањем	Вежбање
5.	Зависност збира од промене сабирака	Обрада
6.	Сталност збира	Обрада
7.	Зависност разлике од промене умањеника	Обрада
8.	Зависност разлике од промене умњиоца	Обрада
9.	Сталност разлике	Обрада
10.	Зависност збира и разлике	Утврђивање
11.	Неједначине	Обрада
12.	Неједначине са сабирањем	Обрада
13.	Неједначине са одузимањем	Обрада
14.	Једначине са множењем	Обрада
15.	Једначине са непознатим дељеником	Обрада
16.	Једначине са непознатим делиоцем	Обрада
17.	Једначине са множењем и дељењем	Утврђивање

18.	Зависност производа од промене чинилаца	Обрада
19.	Сталност производа	Обрада
20.	Зависност количника од промене дељеника	Обрада
21.	Зависност количника од промене делиоца	Обрада
22.	Сталност количника	Обрада
23.	Зависност производа и количника	Утврђивање
24.	Неједначине са множењем	Обрада
25.	Неједначине са дељењем	Обрада

У току реализације наставних садржаја алгебре доминирао је индивидуални рад ученика уз присутну помоћ учитеља и уз сталне инструкције експериментатора. Сваки од садржаја био је заснован на идеји реалног контекста свакодневног живота, при чему се на сваком часу тежило развоју свих алгебарских способности. Ученици су у току рада имали могућност да постављају питања, дају предлоге у решавању задатака и користе све што им је неопходно како би задатак решили. Ученици су задатке добијали одштампане на наставном листићу, јер се на тај начин желела постићи максимална ефикасност у раду. Део вежби експерименталног програма реализовали су студенти четврте године и мастер студенти Педагошког факултета у Ужицу, у оквиру предвиђеног хоспитовања, при чему су упутства и садржаје добили од експериментатора. На сваком часу и у сваком одељењу присуствовао је експериментатор, који је пратио рад и давао инструкције.

Финално тестирање спровели смо одмах након завршеног експерименталног програма у истим условима као и иницијално, док је ретест био спроведен шест месеци након завршеног експерименталног програма, како би се утврдила трајност ученичког знања. Након извршених тестирања, обавило се прикупљање података и њихова статистичка обрада.

Анализа садржаја уџбеника обављена је у току експерименталног програма.

Емпиријско истраживање реализовано је према следећим фазама:

1. Прикупљање и проучавање релевантне литературе у описаној области.
2. Израда експерименталног програма (модели часова заснованих на контекстуалном приступу учењу и настави алгебре у млађем школском узрасту, који су у складу са програмом математике за четврти разред основне школе).
3. Договор са директором школе и учитељима око организације и реализације експерименталног програма.
4. Планирање и припремање материјалних и техничких ресурса за извођење експеримента.
5. Израда инструмената истраживања и спровођење пилот тестирања како би се утврдиле метријске карактеристике инструмената и направила потребна корекција.
6. Израда иницијалног теста мерења и његова реализација.
7. Израда анкетних упитника за ученике.
8. Реализација експерименталног програма. У унапред одређеним одељењима спроводи се експериментални програм, примењујући контекстуални приступ учењу и настави алгебре. Аутор учествује и присуствује часовима на којима се спроводи програм.
9. Израда финалног теста знања и реализација након завршеног експерименталног програма.
10. Анализа уџбеника ће се спровести у току експерименталног програма.

11. Реализација анкетних упитника којим се жели утврдити мотивисаност ученика за рад према овако организованој настави.
12. Ретестирање ученика којим се утврђује трајност знања ученика шест месеци након завршеног експерименталног програма.
13. Обрада и анализа прикупљених података, извођење закључака и израда докторске дисертације.

9. СТАТИСТИЧКА ОБРАДА ПОДАТАКА

Статистичка обрада података је заснована на употреби стандардних статистичких поступака уз употребу софтверског пакета IBM SPSS 23. При обради података прикупљених анализом садржаја, користила се интерпретација резултата изражена кроз фреквенције и проценте.

Како би се остварила анализа прикупљених резултата, употребили смо следеће статистичке поступке:

- Једнофакторска анализа варијансе (ANOVA) – користили смо како бисмо утврдили статистички значајне разлике између експерименталне и контролне групе код мерења постигнућа из алгебре на тестовима знања на иницијалном и финалном мерењу.
- Анализа коваријансе (ANCOVA) – користили смо за утврђивање статистички значајних разлика између експерименталне и контролне групе на мерењима у којима је уклоњена варијанса у зависној променљивој коју узрокује коваријат, при чему се контролише уједначеност експерименталне и контролне групе.
- Двофакторска анализа коваријансе за утврђивање статистичке значајности разлика између група према алгебарским способностима у зависности од пола, оцене или општег успеха ученика.
- Колмогоров-Смирновљев тест – коришћен је за утврђивање нормалности расподеле иницијалног, финалног тестирања и ретеста и утврђивање осетљивости коришћених тестова у истраживању.
- Кронбах-алфа коефицијент – утврдили смо поузданост наших тестова (иницијалног, финалног теста и ретеста).

Бројчано и процентуално исказивање резултата користили смо у свим ситуацијама у којима су добијени подаци морали да се представе према одређеном критеријуму, највише у представљању заступљености задатака који су засновани на реалном математичком контексту у односу на задатке са чистим математичким контекстом.

III РЕЗУЛТАТИ ИСТРАЖИВАЊА И ЊИХОВА ИНТЕРПРЕТАЦИЈА

1. УТИЦАЈ КОНТЕКСТУАЛНОГ ПРИСТУПА НА ПОСТИГНУЋА УЧЕНИКА У УЧЕЊУ САДРЖАЈА АЛГЕБРЕ

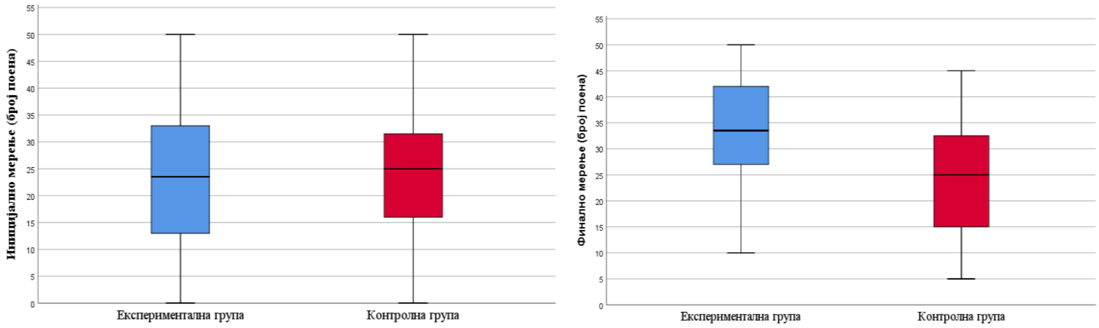
Првим истраживачким задатком желели смо да утврдимо ефекте контекстуалног приступа у настави математике у учењу садржаја који припадају области алгебре. Ефекте контекстуалног приступа пратили смо кроз укупно образовно постигнуће не тесту, а затим смо испитали да ли је овај приступ остварује подједнаке ефекте код ученика различитог пола, оцене из математике и општег успеха ученика. Истраживањем смо тестирали истраживачку хипотезу која је представљала полазиште: *Контекстуални приступ у учењу садржаја алгебре доприноси постизању бољих образовних постигнућа у настави математике у млађим разредима основне школе*.

Пре увођења експерименталног програма (контекстуални приступ учењу) извршено је иницијално мерење постигнућа ученика. На овом мерењу обе групе ученика постигле су поприлично уједначене резултате и то: експериментална група ($M = 23,68$; $SD = 11,59$), контролна група ($M = 23,81$; $SD = 10,79$) (Табела 20). Вредност варијансе на иницијалном мерењу ($F (1, 255) = 0,008$; $p = 0,928$) показује да не постоје статистички значајне разлике у постигнућима између ученика експерименталне и контролне групе (Табела 21). Добијени резултат можемо сматрати поузданим, јер Левенов тест ($F = 0,889$; $p = 0,347$) показује да није прекршена претпоставка о хомогености варијансе (Табела 21).

Табела 20. *Дескриптивни показатељи постигнућа ученика експерименталне и контролне групе на иницијалном и финалном мерењу*

		N	M	SD	SDE	95% Confidence Interval for Mean	
						Lower Bound	Upper Bound
Иницијално мерење	Експериментална група	130	23,68	11,59	1,02	21,67	25,70
	Контролна група	127	23,81	10,79	0,96	21,92	25,71
	Укупно	257	23,75	11,18	0,69	22,37	25,12
Финално мерење	Експериментална група	130	33,66	10,35	0,91	31,87	35,46
	Контролна група	127	23,98	10,70	0,95	22,11	25,86
	Укупно	257	28,88	11,57	0,72	27,46	30,30

Након реализације експерименталног програма извршено је финално мерење постигнућа ученика на садржајима алгебре. У односу на иницијално мерење ученици експерименталне групе на финалном тесту постигли су знатно бољи резултат ($M = 33,66$; $SD = 10,35$), док су ученици контролне групе постигли остали на истом нивоу постигнућа ($M = 23,98$; $SD = 10,70$) (Табела 1). Добијене разлике илуструје и Графикон 1.



Графикон 1. *Резултати контролне и експерименталне групе на иницијалном и финалном мерењу*

Разлику у постигнућу ученика експерименталне и контролне на финалном мерењу групе тестирали смо анализом варијансе (Табела 21).

Табела 21. *Анализа варијансе иницијалног и финалног мерења*

Test of Homogeneity of Variances

	Levene Statistic	df1	df2	Sig.
Иницијално мерење	0,889	1	255	0,347
Финално мерење	0,169	1	255	0,681

		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Иницијално мерење	Између група	1,027	1	1,027	0,008	0,928
	Унутар групе	31993,534	255	125,465		
	Укупно	31994,560	256			
Финално мерење	Између група	6016,185	1	6016,185	54,311	0,000
	Унутар групе	28247,076	255	110,773		
	Укупно	34263,261	256			

Вредност Левеновог теста у финалном мерењу (F (1, 255) = 0,169; p = 0,681) показује да није прекршена претпоставка о хомогености варијанси, тако да се резултат анализе варијансе за финално мерење може сматрати поузданим. Вредност израчунате варијансе у финалном мерењу (F (1, 255) = 54,31; p = 0,000) имплицира да постоји статистички значајна разлика између експерименталне и контролне групе у финалном мерењу (Табела 21). На основу добијеног резултата можемо закључити да су ученици експерименталне групе под утицајем примењеног експерименталног програма направили побољшање у образовном постигнућу у односу на ученике контролне групе који су радили по устаљеном начину рада. То све иде у прилог нашој претпоставци да се контекстуалним приступом у настави математике у учењу садржаја из алгебре на млађем школском узрасту може утицати на побољшање успеха

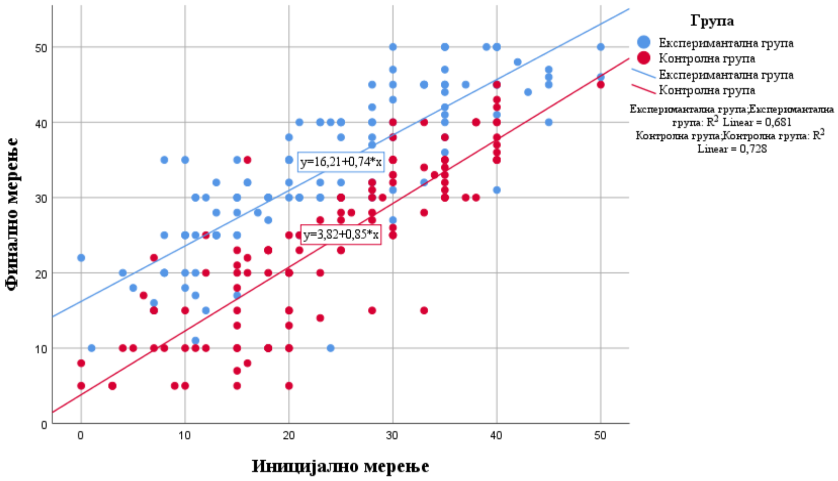
Како бисмо били сигурни у поузданост резултата у ефектима контекстуалног приступа у учењу садржаја алгебре и отклонили сумњу да је резултат последица статистичке неуједначености група израчунали смо анализу коваријансе (ANCOVA). На овај начин смо истражили разлике које постоје између група, уз статистичко отклањање утицаја једне додатне (непрекидне) променљиве – у овом случају то је резултат иницијалног мерења. Регресионим поступцима се, на овај начин, уклања варијанса у зависној променљивој, коју проузрокују коваријати и потом на кориговане резултате примењује уобичајена технике анализе варијансе, а повећава и моћ F теста, односно повећава вероватноћа за откривањем разлика између група, ако она постоји.

Пре утицаја експерименталног програма измерен је коваријат. Његову поузданост смо утврдили помоћу Кронбах алфа коефицијента, који у овом случају износи 0,795, што показује веома добру поузданост и унутрашњу сагласност скале за овај узорак (Табела 22).

Табела 22. *Кронбахов алфа коефицијент*

Cronbach's Alpha	Cronbach's Alpha Based on Standardized Items	N of Items
0,795	0,885	10

Да бисмо проверили линеарност зависне променљиве и коваријата искористили смо дијаграм растурања. На овом дијаграму (Графикон 2) јасно се види да је однос између сваке променљиве и коваријата у свакој групи линеаран (праволинијски). Пошто је у овом случају однос линеаран онда можемо рећи да претпоставка о линеарности није нарушена.



Графикон 2. *Линеарност зависне променљиве и коваријата (резултата иницијалног мерења)*

Последња претпоставка коју обухвата анализа коваријансе односи се на хомогеност регресионих нагиба, која се односи на утицај између коваријата и зависне променљиве у свим групама. Хомогеност регресионих нагиба смо утврдили статистички (Табела 23).

Табела 23. *Хомогеност регресионих нагиба*

Зависна варијабла: Финално мерење

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.	Partial Eta Squared
Corrected Model	25935,734[a]	3	8645,245	262,653	0,000	0,757
Intercept	4634,769	1	4634,769	140,810	0,000	0,358
Група	1772,627	1	1772,627	53,854	0,000	0,176
Иницијални	19915,622	1	19915,622	605,060	0,000	0,705
Група * Иницијални	96,137	1	96,137	2,921	0,089	0,011
Error	8327,526	253	32,915			
Total	248606,000	257				
Corrected Total	34263,261	256				

a. R Squared = 0,757 (Adjusted R Squared = 0,754)

Увидом у резултате приказане у Табели 23. уочавамо да вредност интеракције између коваријата и зависне променљиве (F = 2,921; p = 0,089) није статистички значајна и закључујемо да хомогеност регресионих нагиба није нарушена. На основу свега претходног можемо закључити да су испуњени сви услови за употребу анализе коваријансе.

Табела 24. *Левенов тест хомогености варијансе*

Зависна варијабла: Финално мерење

F	df1	df2	Sig.
0,060	1	255	0,807

a. Design: Intercept + Inicijalni + Grupa

И вредност Левеновог теста (F (1, 255) = 0,60; p = 0,807) показује да није нарушена претпоставка о једнакости варијансе (Табела 24) и да су испуњени сви услови неопходни за примену анализе коваријансе и тумачење добијених резултата као поузданих.

Табела 25. *Анализа коваријансе између иницијалног и финалног мерења*

Зависна промењива: Финално мерење

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.	Partial Eta Squared
Corrected Model	25839,597[a]	2	12919,799	389,573	0,000	0,754
Intercept	4768,482	1	4768,482	143,785	0,000	0,361
Иницијално мерење	19823,413	1	19823,413	**597,738**	**0,000**	**0,702**
Група	6140,341	1	6140,341	**185,151**	**0,000**	**0,422**
Error	8423,664	254	33,164			
Total	248606,000	257				
Corrected Total	34263,261	256				

a. R Squared = 0,754 (Adjusted R Squared = 0,752)

Анализа коваријансе између група (F (1, 254) = 185,15; p = 0,000) показује да између експерименталне и контролне групе на финалном мерењу постоје статистички значајне разлике у постигнућу ученика (Табела 25). Добијени резултат одбацује сумњу да су разлике на тестовима знања резултат неуједначености група, већ да је у питању резултат који је настао под утицајем деловања експерименталног програма којим је подвргнута експериментална група. Када је реч о величини утицаја у обзир треба узети и парцијални ета квадрат, који показује који део варијансе у зависној промењивој објашњава независна промењива. У овом случају величина парцијалног ета квадрата је 0,422, што указује на велики утицај контекстуалног приступа у савладавању садржаја алгебре. Ово значи да се 42,2% варијансе у зависној промењивој може објаснити утицајем експерименталног програма, односно утицаја контекстуалног приступа.

Утицај коваријата (резултата иницијалног мерења) на резултате финалног мерења, кад се уклони утицај независне промењиве је, такође, значајан (F (1,254) = 597,74; p = 0,000). На основу добијених резултата, може се рећи да постоји јака веза између резултата испитивања постигнућа ученика пре и после деловања експерименталног програма, заснованог на принципима контекстуалног приступа у садржајима алгебре. Ова јака веза изражена је кроз чак 70,2% варијансе у резултатима финалног мерења остварених постигнућа ученика у учењу садржаја алгебре.

На основу добијених резултата и њихове анализе можемо закључити да контекстуални приступ у настави математике у учењу садржаја алгебре позитивно утиче на постигнућа ученика у области алгебре, што потврђује постављену хипотезу истраживања: *контекстуални приступ у учењу садржаја алгебре доприноси постизању бољих образовних постигнућа у настави математике у млађим разредима основне школе.*

Вредност контекстуалног приступа лежи у чињеници да у процесу учења ученик решава проблеме свакодневног живота, користи различите стратегије и моделе у процесу учења и решавања проблема, који су својствени њему самом и засновани на његовом претходном искуству. На овај начин ученик није у ситуацији да се одмах сусреће са апстрактним формама алгебре, већ је у ситуацији да процес учења тече постепено и у складу са његовим способностима. На тај начин садржај учења постаје ближи ученику, за њега има већи смисао, што све обезбеђује боље разумевање. Из тих разлога ово истраживање намеће потребу да са контекстуалним приступом у садржајима алгебре треба започети рано на млађем школском узрасту. Контекстуални приступ омогућава да у процесу учења ученик на конкретним примерима свакодневног живота, примерима који су му блиски, кроз процесе вертикалне и хоризонталне математизације, постепено развија и формира алгебарске појмове. Правилним формирањем алгебарских појмова на млађем школском узрасту стварамо основу за разумевање сложенијих и апстрактнијих алгебарских појмова у каснијим годинама.

Потврду вредности примене контекстуалног приступа у настави математике у садржајима алгебре сагледаћемо целовито, ако сагледамо какав допринос овај приступ остварује код ученика различитог пола, различите оцене из математике и различитог општег успеха, што је предмет даље анализе резултат истраживања.

1.1. Утицај контекстуалног приступа на постигнуће ученика у настави алгебре у зависности од пола ученика

Поред истраживања ефеката контекстуалног приступа у настави математике у учењу садржаја алгебре желели смо испитати и да ли контекстуални приступ настави алгебре у млађим разредима основне школе остварује подједнаке ефекте код дечака и девојчица. Циљ је утврдити, дакле, да ли се наставом заснованом на реалистичним ситуацијама и проблемима може утицати позитивно на успех ученика у области ране алгебре без обзира на пол ученика.

Ако се у обзир узму добијени резултати (Табела 26) на иницијалном мерењу, можемо рећи да су дечаци и у експерименталној ($M = 24,87$; $SD = 12,15$) и контролној групи ($M = 25,65$; $SD = 11,28$) у просеку постизали боље резултате него девојчице у експерименталној ($M = 22,60$; $SD = 11,04$) и контролној групи ($M = 21,89$; $SD = 9,98$). Овде је уочљиво да су, на иницијалном мерењу, успешнији били дечаци у контролној групи у односу на дечаке у експерименталној групи, док су са друге стране девојчице у експерименталној групи биле успешније од девојчица у контролној групи.

Након деловања експерименталног програма, на финалном мерењу ефеката контекстуалног приступа у настави алгебре, просечне вредности резултата дечака ($M = 35,02$; $SD = 9,37$) и девојчица ($M = 32,43$; $SD = 11,09$) у експерименталној групи биле су знатно боље у односу на просечне резултате дечака ($M = 25,84$; $SD = 10,88$) и девојчица ($M = 22,84$; $SD = 10,48$) у контролној групи. И на финалном мерењу постигнућа, у обе групе ученика дечаци су постигли боље резултате. Да бисмо утврдили да ли су разлике између дечака и девојчица статистички значајне користили смо двофакторску анализу коваријансе.

Табела 26. *Постигнуће ученика различитог пола на тестовима знања*

Група	Пол	Иницијално мерење		Финално мерење		Укупно
		M	SD	M	SD	N
Експериментална група	Дечаци	24,87	12,15	35,02	9,37	62
	Девојчице	22,60	11,04	32,43	11,09	68
	Укупно	23,68	11,59	33,66	10,35	130
Контролна група	Дечаци	25,65	11,28	25,84	10,88	65
	Девојчице	21,89	9,98	22,84	10,48	62
	Укупно	23,81	10,79	23,98	10,70	127
Укупно	Дечаци	25,27	11,67	29,93	11,29	127
	Девојчице	22,26	10,51	27,85	11,79	130
	Укупно	23,75	11,18	28,88	11,57	257

Вредност Левеновог теста (F (3, 253) = 0,851; p = 0,467) показује да је задовољена претпоставка о једнакости варијансе и да постоје неопходни услови за анализу коваријансе (Табела 27).

Табела 27. *Левенов тест хомогености варијансе*

Зависна варијабла: Финално мерење постигнућа

F	df1	df2	Sig.
0,851	3	253	0,467

Tests the null hypothesis that the error variance of the dependent variable is equal across groups.
a. Design: Intercept + Inicijalni + Grupa + Pol + Grupa * Pol

Анализа коваријансе показује да не постоји статистички значајан утицај интеракције резултата (експерименталне и финалне групе) и пола ученика (F (1,252) = 61,122; p = 0,291), ако се узме у обзир утицај коваријата (резултат иницијалног мерења) (Табела 28). Парцијални ета квадрат износи 0,004, што значи да је тек 0,4% варијансе у зависној променљивој (резултата експерименталне и финалне групе) објашњено преко зависних променљивих (контекстуални приступ и пол ученика). Дакле, у овом случају не можемо тврдити да ученицима у зависности од пола одговарају различити начини рада (класични начин рада и контекстуални приступ) у настави алгебре.

Табела 28. *Анализа коваријансе ефеката контекстуалног приступа на постигнуће ученика у односу на пол*

Зависна варијабла: Финално мерење постигнућа

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.	Partial Eta Squared
Corrected Model	25877,087[a]	4	6469,272	194,398	0,000	0,755
Intercept	4684,450	1	4684,450	140,765	0,000	0,358
Иницијално мерење	19484,445	1	19484,445	**585,497**	**0,000**	**0,699**
Група	6144,972	1	6144,972	184,653	0,000	0,423
Пол	,097	1	0,097	**0,003**	**0,957**	**0,000**
Група * Пол	37,326	1	37,326	**1,122**	**0,291**	**0,004**
Error	8386,174	252	33,278			
Total	248606,000	257				
Corrected Total	34263,261	256				

a. R Squared = 0,755 (Adjusted R Squared = 0,751)

Ако се у обзир узму добијени подаци просечних резултата између дечака и девојчица, можемо рећи да су и дечаци и девојчице експерименталне групе направили значајан напредак у односу на дечаке и девојчице контролне групе. Анализа утицаја коваријата (резултати иницијалног мерења) и зависне променљиве (резултата на финалном мерењу), када се уклони утицај независне променљиве (група – начин рада), показује да контекстуални приступ остварује значајно побољшање постигнућа и код девојчица и код дечака (F = 585,497; p = 0,000). То значи да је коваријат у овом случају значајан и да објашњава чак 69,9% варијансе у зависној променљивој.

Анализа коваријансе финалног мерења између дечака и девојчица (F(1,252) = 0,003; p = 0,957) показује да разлике између дечака и девојчица нису статистички значајне, ако се изузме утицај коваријата (резултата иницијалног мерења). Парцијални ета квадрат у овом случају је 0,000 што значи да ниједан део зависне променљиве није узрокован независном променљивом.

Да би смо били сигурни у тачност добијених резултата у *Прилогу 6* дајемо кориговане (утицај коваријата уклоњен) средње вредности зависне променљиве за сваку групу, које су дате за сваку независну променљиву засебно, а потом и заједно. Као додатак у *Прилогу 6* дајемо и дијаграм коригованих средњих вредности резултата испитивања контекстуалног приступа за дечаке и девојчице и то за оба мерења (иницијално и финално). На дијаграму се види да не постоји интеракција између резултата који постижу дечаци и девојчице и да су и дечаци и девојчице постизали боље резултате након учења садржаја алгебре контекстуалним приступом.

На основу анализе добијених резултата можемо закључити да другачија стратегија у настави алгебре показује је исте ефекте на укупно постигнуће ученика без обзира на пол, што говори о значају и специфичности наставе организоване на принципима контекстуалног приступа. То значи да се у настави алгебре контекстуални приступ може примењивати без страха од значајних разлика које могу постојати између дечака и девојчица у разумевању садржаја алгебре. Када је реч о приступу у решавању задатака, у овом истраживању нисмо посветили пажњу том проблему, иако постоје истраживања која извештавају да постоје докази да девојчице радије и боље користе стандардне стратегије, док су дечаци способнији у интуитивним стратегијама решавања проблема (Van den Heuvel-Panhuizen, 2004). Наше истраживање је оријентисано на процес учења кроз процесе математизације, који су омогућили изградњу индивидуалних стратегија и модела од стане ученика. Добијени резултати дају потврду о ефектима које контекстуални приступ остварује у учењу садржаја алгебре у млађим разредима основне школе.

1.2. Утицај контекстуалног приступа на постигнућа у настави алгебре у зависности од општег успеха ученика

У истраживању смо желели да испитамо да ли постоји веза између контекстуалног приступа у настави ране алгебре и општег успеха ученика, односно да ли овакав приступ настави и учењу алгебарских садржаја у млађим разредима основне школе остварује позитивне ефекте на све ученике, без обзира на општи успех који постижу.

Ако посматрамо остварен просечан број поена на иницијалном мерењу (Табела 29), уочавамо да су најбоље резултате постизали ученици са успехом *одличан*, и то у контролној (M = 30,78; SD = 8,30) и експерименталној групи (M = 29,57; SD = 10,25). Ученици који имају *врло добар* успех, у контролној групи (M = 18,55; SD = 8,29), као и ученици са истим успехом из експерименталне групе (M = 16,26; SD = 7,54) су следећи по успешности у просечном броју бодова на иницијалном мерењу постигнућа ученика. Најлошије резултате постигли су ученици са успехом *добар* у контролној групи (M = 13,57; SD = 6,77) и експерименталној групи (M = 10,82; SD = 4,62). Можемо уочити да су на иницијалном мерењу ученици сваке подгрупе формиране на основу општег успеха у настави у контролној групи постизали просечно више поена у односу на ученике истог успеха у експерименталној групи.

Када се у обзир узму резултати тестирања спроведеног након експерименталног програма, просечан број поена у групама ученика формираним према општем успеху је потпуно другачији. Најбоље резултате у финалном мерењу постигли су ученици са општим успехом *одличан* у експерименталној (M = 38,65; SD = 8,81) и контролној групи (M = 30,84; SD = 8,01) (Табела 11). Резултати финалног тестирања показали су да су ученици са општим успехом *врло добар* у експерименталној групи (M = 28,45; SD = 6,97) показали значајно боље резултате у односу на ученике са истим успехом у контролној групи (M = 19,50; SD = 7,87). Слична ситуација је и у групи ученика са најлошијим општим успехом у нашем тестирању, тако да у ученици са успехом *добар* из експерименталне групе (M = 16,64; SD = 6,26) су у просеку постизали боље резултате у односу на ученике контролне групе (M = 12,70; SD = 7,45) са истим општим успехом.

Ученици експерименталне групе су на финалном мерењу у свим групама, формираним на основу општег успеха, постизали просечно већи број бодова у односу на ученике са истим успехом из контролне групе. Највећа разлика у постигнућу је код ученика са успехом *врло добар*, затим *одличан* и на крају *добар*. На основу добијених резултата можемо закључити да су ученици са општим успехом *добар* у контролној групи након завршеног експерименталног програма показали чак и просечно слабије резултате у односу на иницијално тестирање. Највећи напредак у експерименталној групи, постигли су ученици са успехом *врло добар*, затим *одличан* и на крају *добар*.

Табела 29. *Постигнуће ученика на тестовима знања у односу на општи успех*

Група	Успех	Иницијално мерење		Финално мерење		Укупно
		M	SD	M	SD	N
Експериментална група	Добар	10,82	4,62	16,64	6,26	11
	Врло добар	16,26	7,54	28,45	6,97	42
	Одличан	29,57	10,25	38,65	8,81	77
	Укупно	23,68	11,59	33,66	10,35	130
Контролна група	Добар	13,57	6,77	12,70	7,45	23
	Врло добар	18,55	8,29	19,50	7,87	40
	Одличан	30,78	8,30	30,84	8,01	64
	Укупно	23,81	10,79	23,98	10,70	127
Укупно	Добар	12,68	6,22	14,62	7,54	,34
	Врло добар	17,38	7,95	24,09	8,64	82
	Одличан	30,12	9,40	35,11	9,29	141
	Укупно	23,75	11,18	28,88	11,57	257

Да бисмо то утврдили да ли је нарушена претпоставка о једнакости варијансе. користили смо Левенов тест чија је вредност F(5,251) = 0,931; p = 0,462. На основу добијене вредности Левеновог теста можемо рећи да је испуњен услов о једнакости варијансе (Табела 30).

Табела 30. *Левенов тест хомогености варијансе*

Зависна промењива: Финално мерење

F	df1	df2	Sig.
0,931	5	251	0,462

Tests the null hypothesis that the error variance of the dependent variable is equal across groups.
a. Design: Intercept + Inicijalni + Grupa + Uspeh + Grupa * Uspeh

Након отклањања коваријансе (резултата иницијалног мерења постигнућа ученика), дошли смо до закључка да не постоји значајан утицај интеракције између групе и успеха ученика на резултате финалног мерења постигнућа ученика (F(2,250) = 1,004; p = 0,368) (Табела 31). Вредност парцијалног ета квадрата износи 0,008, што према Коену (Cohen, 1988) представља веома мали утицај.

Табела 31. *Анализа варијансе ефеката контекстуалног приступа на постигнуће ученика у односу на општи успех*

Зависна променљива: Финално мерење

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.	Partial Eta Squared
Corrected Model	26731,966[a]	6	4455,328	147,894	0,000	0,780
Intercept	4737,709	1	4737,709	157,267	0,000	0,386
Иницијално мерење	8430,495	1	8430,495	**279,849**	**0,000**	**0,528**
Група	3384,705	1	3384,705	112,355	0,000	0,310
Успех	833,842	2	416,921	**13,840**	**0,000**	**0,100**
Група * Успех	60,507	2	30,254	**1,004**	**0,368**	**0,008**
Error	7531,294	250	30,125			
Total	248606,000	257				
Corrected Total	34263,261	256				

a. R Squared = 0,780 (Adjusted R Squared = 0,775)

Када је реч о утицају општег успеха ученика на резултате финалног мерења, можемо закључити да постоји статистички значајан утицај оваквог приступа у настави алгебре (F(2,250) = 13,840; p = 0,000), ако се отклони утицај коваријата (резултата иницијалног мерења постигнућа) на успех ученика. Ови резултати показују да су ученици у зависности од успеха различито напредовали и да су боље резултате постизали ученици са бољим општим успехом. Поред тога, анализа резултата показује и да контекстуални приступ подједнако утиче на све ученике без обзира на општи успех. Вредност ета квадрата показује да се 10% варијансе резултата финалног мерења може објаснити независном променљивом (општим успехом ученика).

На крају смо проверили и утицај коваријата. На основу добијеног резултата (F(1,250) = 279,849; p = 0,000) можемо рећи да постоји статистички значајан утицај резултата иницијалног мерења постигнућа на резултате финалног мерења постигнућа, ако се отклони утицај независне променљиве (у овом случају то је општи успех ученика). Чак се 52,8% варијансе резултата финалног мерења може објаснити резултатима иницијалног мерења. Овим смо потврдили претходно добијене резултате.

Као прилог добијеним резултатима дајемо и кориговане средње вредности (Прилог 7). У оквиру ових података дате су вредности резултата финалног мерења које су кориговане за одређену вредност коваријата и то за сваку групу, општи успех као и интеракцију ове две независне променљиве. На крају смо нацртали и дијаграм кориговани средњих вредности резултата финалног мерења постигнућа. На овом дијаграму се јасно види значајна разлика између коригованих резултата експерименталне и контролне групе, али исто тако да се у свакој од група формираних на основу општег успеха види напредак ученика у експерименталној у односу на ученике контролне групе.

Добијени резултати показују да свим ученицима, без обзира на успех који постижу у настави, погодује контекстуални приступ. Овакав резултат је посебно значајан, ако се има у види да и ученици са најлошијим успехом остварују напредак у учењу садржаја алгебре, што је посебна вредност примењеног приступа. То потврђује да учење апстрактних математичких садржаја, уколико је засновано на реалном контексту, блиском ученицима, остварује значајне ефекте у постигнућу ученика.

Овакве резултате можемо оправдати чињеницом да овако организована настава омогућује ученику да сваку проблемску ситуацију сагледа из аспекта реалног контекста, при чему се служи моделима које сам у процесу учења гради и надограђује. Тако је омогућено да и ученици који имају слабији општи успех лакше разумеју односе и математизују стварност која постаје део њиховог математичког мишљења. Са друге стране, ученицима који постижу најбољи успех, овакав приступ још више подупире њихово разумевање и доприноси до бољег образовног постигнућа.

1.3. Утицај контекстуалног приступа на постигнуће ученика у настави алгебре у зависности од оцене коју ученик има из математике

Желели смо да испитамо и да ли постоји веза између контекстуалног приступа у настави алгебре и оцене коју ученик постиже у математици. Дакле, циљ је био да се утврди да ли контекстуални приступ у настави ране алгебре утиче на постигнуће ученика, без обзира на оцену коју он има из математике.

Резултати иницијалног мерења (Табела 32) показују да су најбоље резултате постигли ученици са оценом *одличан* (5) у експерименталној групи (M = 32,13; SD = 9,60), док су у контролној групи такође најуспешнији били ученици били са оценом *одличан* (5) (M = 31,85; SD = 8,33). Иза њих, по успеху иду редом, ученици са оценом *врло добар* (4) у контролној групи (M = 23,90; SD = 7,49) и експерименталној (M = 21,08; SD = 8,52), иза њих ученици са оценом *добар* (3) у експерименталној групи (M = 14,81; SD = 6,86) и контролној групи (M = 13,30; SD = 7,73). Најлошије резултате на иницијалном тесту постигли су ученици са оценом *довољан* (2) и то у контролној групи (M = 13,20; SD = 6,07) и на крају ученици експерименталне групе (M = 10; SD = 4,52). На основу резултата можемо закључити да су ученици у складу са оценама постизали приближно једнаке резултате у обе групе.

Након иницијалног тестирања, експериментална група радила је према експерименталном програму (контекстуални приступ у настави алгебре), док је контролна група радила на класичан начин у настави алгебре. Након експерименталног програма спроведено је финално тестирање. Резултати финалног тестирања показали су да су највеће постигнуће у просеку постигли ученици са оценом *одличан* (5) и то у експерименталној групи (M = 40,93; SD = 6,99) и контролној (M = 31,73; SD = 8,54). Просечни резултати на финалном тестирању показали су ученици са оценом *врло добар* (4) у експерименталној групи (M = 31,70; SD = 6,19) успешнији од ученика са истом оценом из контролне групе (M = 23,67; SD = 8,02), као и ученици са оценом *добар* (3) из експерименталне групе (M = 27,15; SD = 6,41) у односу на ученике са истом оценом из контролне групе (M = 15,85; SD = 7,95). Најслабије резултате постигли су ученици са просечном оценом *довољан* (2) у експерименталној групи (M = 17,80; SD = 5,33) и ученици са истом оценом у контролној групи (M = 10,10; SD = 3,72). На основу добијених резултата очигледно је да су сви ученици без обзира на оцену у експерименталној групи били успешнији у односу на ученике са истом оценом из контролне групе. Специфично је то да су ученици експерименталне групе са просечном оценом *добар* (3) постизали у просеку боље резултате у односу на ученике са оценом *врло добар* (4) у контролној групи на финалном тестирању. Резултати су показали сличну ситуацију и са ученицима који имају оцену *довољан* (2) у експерименталној групи, који су постигли просечно већи број бодова у финалном мерењу у односу на ученике са оценом *добар* (3) у контролној групи. То значи да је овај приступ у настави ране алгебре посебно одговарао ученицима који су имали просечне и исподпросечне оцене из математике, тако да је њихов напредак најочигледнији. За разлику од ученика експерименталне групе. Када је реч о ученицима контролне групе резултати показују да су ученици свих подгрупа, формираних на основу оцене из математике, углавном постизали исте резултате на финалном као и на иницијалном мерењу. Једино погоршање у успеху, у односу на резултат на иницијалном мерењу, видљиво је код ученика контролне групе чија је оцена из математике била *довољан* (2) (Табела 32).

Табела 32. *Постигнуће ученика на тестовима знања у односу на оцену из математике*

Група	Оцена	Иницијално мерење		Финално мерење		Укупно
		M	SD	M	SD	N
Експериментална група	Довољан (2)	10,00	4,52	17,80	5,33	10
	Добар (3)	14,81	6,86	27,15	6,41	27
	Врло добар (4)	21,08	8,52	31,70	9,19	37
	Одличан (5)	32,13	9,60	40,93	6,99	56
	Укупно	23,68	11,59	33,66	10,35	130
Контролна група	Довољан (2)	13,20	6,07	10,10	3,72	10
	Добар (3)	13,30	7,73	15,85	7,95	27
	Врло добар (4)	23,90	7,49	23,67	8,02	42
	Одличан (5)	31,85	8,33	31,73	8,54	48
	Укупно	23,81	10,79	23,98	10,70	127
Укупно	Довољан (2)	11,60	5,46	13,95	5,97	20
	Добар (3)	14,06	7,28	21,50	9,15	54
	Врло добар (4)	22,58	8,06	27,43	9,44	79
	Одличан (5)	32,00	8,99	36,68	8,98	104
	Укупно	23,75	11,18	28,88	11,57	257

Како бисмо утврдили да ли контекстуални приступ у настави ране алгебре утиче на постигнуће ученика у односу на њихову оцену из математике, користили смо двофакторску анализу коваријансе. Вредност Левеновог теста у овом случају ($F(7,249) = 0,449$; $p = 0,871$) показује да је претпоставка о хомогености варијансе потврђена, што ствара услове за двофакторску анализу коваријансе (Табела 33).

Табела 33. *Левенов тест хомогености варијансе*

Зависна варијабла: Финално мерење

F	df1	df2	Sig.
0,449	7	249	0,871

Tests the null hypothesis that the error variance of the dependent variable is equal across groups.
a. Design: Intercept + Inicijalni + Grupa + Ocena + Grupa * Ocena

Двофакторска анализа коваријансе (Табела 34) показује да, када се уклони утицај коваријата (резултати иницијалног мерења), не постоји статистички значајан утицај интеракције између групе (експериментална и контролна група) и оцене из математике ($F(3,248) = 0,191$; $p = 0,903$). Вредност парцијалног ета квадрата износи 0,002, што значи да је веома мали део варијансе зависне променљиве (резултата финалног мерења) објашњен независним променљивим (групом и оценом из математике). То значи да можемо рећи да ученицима на исти начин одговара експериментални програм и да нема разлике у смислу да ученицима са одређеном оценом из математике више одговара контекстуални приступ у настави алгебре.

Анализа је показала да се добијени резултати на финалном мерењу значајно разликују у односу на оцену коју ученик има из математике. То објашњава чињеницу да су ученици који имају бољу оцену постизали боље резултате у односу на ученике који су имали слабију оцену из математике. Вредност добијене анализе коваријансе ($F(3,248) = 10,041$; $p = 0,000$) показује да постоје статистички значајне разлике између ученика на финалном мерењу у односу на оцене из математике, уколико се отклони утицај коваријата (резултати иницијалног мерења). Парцијални ета квадрат показује да је 10,8% варијансе у резултатима финалног мерења објашњено независном варијаблом (оценом из математике).

Табела 34. *Двофакторска анализа коваријансе ефеката контекстуалног приступа на постигнуће ученика у односу на оцену из математике*

Зависна варијабла: Финално мерење

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.	Partial Eta Squared
Corrected Model	26767,923[a]	8	3345,990	110,710	0,000	0,781
Intercept	4393,103	1	4393,103	145,356	0,000	0,370
Иницијално мерење	7394,233	1	7394,233	244,655	0,000	0,497
Група	4184,187	1	4184,187	138,443	0,000	0,358
Оцена	910,384	3	303,461	**10,041**	**0,000**	**0,108**
Група * Оцена	17,304	3	5,768	**0,191**	**0,903**	**0,002**
Error	7495,338	248	30,223			
Total	248606,000	257				
Corrected Total	34263,261	256				

a. R Squared = 0,781 (Adjusted R Squared = 0,774)

Да бисмо били сигурни у вредност добијених резултата урађена је анализа у којој је статистички отклоњен утицај коваријата на вредности променљивих: зависне променљиве за сваку групу и то дате за сваку независну променљиву, као и заједно. Поред тога, нацртан је и дијаграм кориговaних средњих вредности резултата испитивања ефеката контекстуалног приступа за групе ученика одређених оцена из математике. Дијаграм је показао да сви ученици без обзира на оцену из математике показују исти напредак у постигнућу између експерименталне и контролне групе (Прилог 8).

Добијени резултати показују да се контекстуалним приступом у настави ране алгебре може позитивно утицати на постигнуће ученика, и да тај успех не зависи од оцене коју ученици имају из математике. Напредак ученика експерименталне групе, која је радила према посебном програму је евидентан, а резултати показују успешност у савладавању садржаја алгебре, при чему чак и ученици са мањом оценом показују значајно боље резултате у односу на ученике контролне групе. Трансформација садржаја алгебре омогућава ученицима да апстрактне алгебарске садржаје сагледају из перспективе реалних проблема свакодневног живота. На овај начин, животност ситуације утиче на успех, како код ученика који су и раније имали успеха са овим садржајима, тако и код ученика који су имали проблема са њима. Анализом резултата показали смо да не постоје ограничења у примени овог начина и приступа настави ране алгебре у смислу оцене коју ученици имају из математике.

* * * * *

На основу добијених података и њихове анализе можемо извести закључак да контекстуални приступ доприноси постизању бољих образовних постигнућа у учењу садржаја алгебре у настави математике у млађим разредима основне школе. Овакав резултат посебно охрабрује, посебно ако се имају у виду бројни истраживачки резултати (Booth, 1984, 1988; Kieran, 1981, 1985, 2004; Vergnaud, 1985; Filloi & Rojano, 1989; Sfard & Linchevski, 1994; Herscovics & Linchevski, 1994 и други) показују да ученици млађег школског узраста имају проблеме у овладавању садржајима алгебре, њиховом разумевању као и примени наученог. Резултати добијени у овом истраживању показују да се контекстуалним приступом у настави и учењу ових садржаја могу превазићи наведени проблеми. Тиме смо потврдили полазну хипотезу истраживања *контекстуални приступ у учењу садржаја алгебре доприноси постизању бољих образовних постигнућа у настави математике у млађим разредима основне школе*.

Добијени резултати у овом истраживању у складу су са истраживањима других аутора (Van Reeuwijk, 2001; Van Amerom, 2002; Booker & Windsor, 2010; Jupri & Drijvers, 2016; Richardson & McGalliard, 2010) који показују да се употребом реалистичног контекста у садржајима алгебре може позитивно утицати на успех ученика, као и развој карактеристика алгебарског мишљења. И истраживање Карахера и сарадника (Carraher et al., 2006) показује да се кроз конкретне, реалне ситуације учења и њихове репрезентације доприноси разумевању алгебарских идеја и репрезентација.

Резултати показују да контекстуални приступ омогућава ученицима да кроз процесе математизације, кроз постепен прелазак из хоризонталне математизације у вертикалну, кроз учење засновано на реалном контексту, учење које је у њега уграђено и из њега произилази доприноси да ученици постепено граде властите моделе који ће послужити као ослонац, не само у решавању проблема, већ и формирању алгебарских појмова. За разлику од класичног приступа у настави математике у учењу садржаја алгебре, ученик је у контекстуалном приступу у ситуацији да, увек полази од примера свакодневног живота и да се у процесу учења, уколико се јави проблем неразумевања, увек тој реалној ситуацији може и вратити. И Ван Реувијик (Van Reeuwijk, 2001) је у свом истраживању доказао да рад ученика на проблемима из реалног живота доприноси да они развијају различите стратегије решавања једначина које нису својствене формалној нотацији и, што је посебно значајно, на тај начин развију појмовно разумевање алгебре. Аутор је показао да се оваквим типовима задатака може утицати и на свеобухватније и потпуније схватање формалних нотација алгебре. Даље, студија Калака (Khuluq, 2015) показала је да учење, засновано на идеји реалистичног математичког образовања, које је засновано на моделовању на примерима равнотеже (ваге) у циљу развијања појма знака једнакости, линеарне једначине и њеног решавања и алгебарске репрезентације, доприноси разумевању алгебарских репрезентација, флексибилности у одабиру различитих стратегија (модела) у решавању линеарних једначина са једном непознатом.

Проблеми реалистичног контекста представљају основу прогресивне математизације, кроз коју ученици поступно развијају неформалне контекстуално засноване стратегије за решавање проблема реалних ситуација (Gravemeijer & Doorman, 1999: 117). У процесу наставе, реалистичним контекстом смо у ситуацији да заинтересујемо и мотивишемо ученика, који ће онда имати жељу да ради и учи зато што стварно жели да реши проблем, а не да то решавање буде просто испуњавање жеља других. Мотив је посебно значајан за ученике слабијег општег успеха, јер је њима потребан додатни подстрек како би напредовали и имали жељу да уче. Анализа резултата овог истраживања показала је да се контекстуалним приступом може утицати на постигнуће ученика у раној алгебри и да тај напредак није условљен општим успехом ученика, односно да сви ученици без обзира на општи успех показују значајно боље резултате након спроведеног експерименталног програма − заснованог на идеји реалистичног контекста. Оваквим налазима потврдили смо и резултате неких ранијих истраживања (Van Reeuwijk, 2001), која су показала да ученици под утицајем реалистичног контекста једноставније усвајају садржаје, без обзира на њихов општи успех.

Добијени резултати у складу су и са резултатима истраживања, које је Ђокић (Đokić, 2013) добила у оквиру истраживања ефеката примене реалистичног математичког образовања, чију су принципи уграђени у концепт уџбеника математике, на образовна постигнућа ученика у настави математике, у учењу садржаја геометрије. Иако су ефекти приступа учењу заснованом на реалистичним ситуацијама праћени на садржајима геометрије, они уз ове резултате, још више потврђују његову вредност. То сада несумњиво значи да контекстуални приступ у настави математике у млађим разредима основне школе остварује значајне ефекте на плану постизања бољих образовних постигнућа.

Истраживање је показало да се контекстуалним приступом у настави алгебре може потпуно и свеобухватно утицати на све групе ученика, без обзира на пол, општи успех или оцену коју ученик има из математике, како би се потпуније развили алгебарски појмови и омогућило једноставније прихватање алгебарске нотације. Овакав приступ омогућује да се од најранијег периода алгебарске активности заснивају на интуитивним и конкретним формама чиме се поставља основа за разумевање апстрактне алгебре касније.

2. УТИЦАЈ КОНТЕКСТУАЛНОГ ПРИСТУПА НА РАЗВИЈАЊЕ АЛГЕБАРСКИХ СПОСОБНОСТИ УЧЕНИКА

Други истраживачки задатак био је усмерен на испитивање утицаја контекстуалног приступа у настави математике на развој алгебарских способности ученика. На основу операционализованих способности пажњу у анализи усмерили смо на испитивање утицаја контекстуалног приступа учењу садржаја алгебре на: *правилно схватање знака једнакости; разумевање функционалне зависности између компонената рачунских операција; способност уочавања функционалних односа на графикону, табели или слици; способност правилног схватања симбола у алгебри; развијање појма променљиве и непознате.*

Истраживачка хипотеза од које смо пошли је да *контекстуални приступ у учењу и настави алгебре у млађим разредима основне школе подстиче развијање алгебарских способности*. Анализу резултата представићемо пратећи ефекте контекстуалног приступа на сваку операционализовану компоненту алгебарских способности.

2.1. Утицај контекстуалног приступа на развијање способности правилног схватања знака једнакости

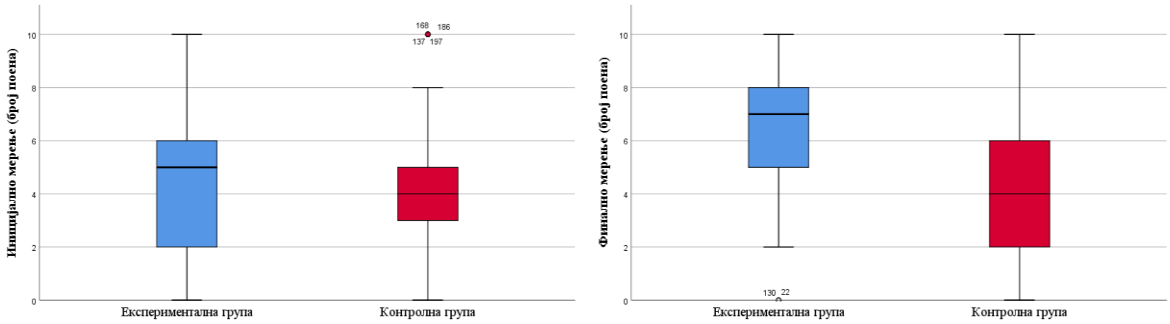
Способност правилног схватања знака једнакости подразумева способност ученика да разумеју овај знак као симбол који изражава симетричност леве и десне стране једнакости. Циљ је да се ученицима преусмери мишљење од схватања знака једнакости као команде „израчунај“ на схватање знака у значење „еквивалентно је“, што би даље омогућило схватање симболичких израза као процеса који егзистирају као независни објекти. У том контексту истраживачка пажња усмерена је на испитивање ефеката контекстуалног приступа у настави алгебре на способност правилног схватања знака једнакости у млађим разредима основне школе.

Иницијално мерење развијеност способности правилног схватања знака једнакости показује да ученици обе групе постижу слабе резултате и то: експериментална (M = 4,07; SD = 2,71) и контролна група (M = 3,87; SD = 2,47) (Табела 35). Ако се има у виду да су ученици кроз ове задатке могли да постигну максимално 10 поена, добијени резултат показује да нису оставили ни половину укупног броја поена на субтесту који мери ову способност на иницијалном мерењу. То би даље значило да су обе групе у просеку постигле слабе резултате, односно да код ученика није у потпуности развијена способност правилног схватања знака једнакости.

Табела 35. *Разумевање и схватање знака једнакости од стране ученика на иницијалном и финалном мерењу*

		N	M	SD
Иницијално мерење	Експериментална група	130	4,07	2,71
	Контролна група	127	3,87	2,47
Финално мерење	Експериментална група	130	6,52	2,50
	Контролна група	127	4,02	2,41

На финалном мерењу ученици експерименталне групе постигли су боље резултате (M = 6,52; SD = 2,50) у односу на иницијално, за разлику од ученика у контролној групи који су постигли приближно исте резултате као на иницијалном мерењу (M = 4,02; SD = 2,41) који су и даље остали испод просека (Графикон 3). Очигледно је да су ученици који су садржаје алгебре усвајали на учењу заснованом на принципима контекстуалног приступа напредовали у односу на ученике који су радили према класичном приступу у настави математике.



Графикон 3. *Постигнућа ученика експерименталне и контролне групе на иницијалном и финалном мерењу способности правилног разумевања знака једнакости*

Разлике у постигнућу ученика експерименталне и контролне групе у способности правилног разумевања знака једнакости тестирали смо помоћу анализе варијансе (Табела 36).

Табела 36. *Анализа варијансе иницијалног и финалног мерења способности правилног разумевања знака једнакости*

	Levene Statistic	df1	df2	Sig.
Иницијално мерење	0,889	1	255	0,347
Финално мерење	0,169	1	255	0,681

		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Иницијално мерење	Између група	2,448	1	2,448	0,364	0,547
	Унутар групе	1716,361	255	6,731		
	Укупно	1718,809	256			
Финално мерење	Између група	401,333	1	401,333	66,482	0,000
	Унутар групе	1539,360	255	6,037		
	Укупно	1940,693	256			

Вредност Левеновог теста на иницијалном мерењу (F(1,255) = 0,889; p = 0,347) и финалном мерењу (F(1, 255) = 0,169; p = 0,681) показују да нису прекршене претпоставке о хомогености варијансе, тако да се резултати добијени анализом варијансе могу сматрати поузданим. Добијена вредност анализе варијансе на иницијалном мерењу (F(1, 255) = 0,364; p = 0,547) показује да не постоји статистички значајна разлика између ученика експерименталне и контролне групе у развијености ове способности. Насупрот томе вредност анализе варијансе у финалном мерењу (F(1,255) = 66,482; p = 0,000) показује да постоји статистички значајна разлика у постигнућу на мерењу способности правилног разумевања знака једнакости између група. Добијени резултати показују да су ученици који су садржаје алгебре усвајали кроз реалне ситуације, стварали основу за разумевање знака једнакости постигли побољшање у правилном схватању знака једнакости у односу на ученике контролне групе.

Да бисмо били сигурни у поузданост резултата искористили смо и анализу коваријансе (ANCOVA) како би истражили утицај експерименталног програма на способности ученика за правилно разумевање знака једнакости у садржајима алгебре. Левенов тест једнакости варијанси износи F = 2,853 за p = 0,092 што значи да није нарушена претпоставка о једнакости варијанси (Табела 37).

Табела 37. *Левенов тест једнакости варијанси*

Зависна промењљива: Финално мерење
(правилно схватање знака једнакости

F	df1	df2	Sig.
2,853	1	255	0,092

Tests the null hypothesis that the error variance of the dependent variable is equal across groups.
a. Design: Intercept + Jednako1 + Grupa

Анализом коваријансе и уклањањем утицаја коваријата (иницијално мерење), дошли смо до закључка да постоји статистички значајна разлика у постигнућу између ученика експерименталне и контролне групе (F(1, 254) = 143,84; p = 0,000) (Табела 19). У овом случају парцијални ета квадрат износи 0,362 што према Коену (Cohen, 1988) представља велики утицај. То значи да се чак 36,2% варијансе у финалном мерењу може објаснити независном промењљивом, што у овом случају представља контекстуални приступ садржајима алгебре. Ако се у обзир узме утицај коваријата (резултати тестова на иницијалном мерењу схватања знака једнакости) на финално мерење исте способности, када се уклони утицај независне промењљиве (група) и тада се добијају статистички значајне разлике у развијености способности правилног разумевања знака једнакости (F(1,254) = 367,14; p = 0,000). Парцијални ета квадрат има вредност 0,59, што говори да је у питању велики утицај (Табела 38).

Табела 38. *Анализа коваријансе способности правилног схватања знака једнакости*

Зависна промењљива: Финално мерење (схватање знака једнакости)

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.	Partial Eta Squared
Corrected Model	1311,209[a]	2	655,604	264,540	0,000	0,676
Intercept	433,594	1	433,594	174,957	0,000	0,408
Иницијално мерење	909,876	1	909,876	**367,140**	**0,000**	**0,591**
Grupa	356,477	1	356,477	**143,840**	**0,000**	**0,362**
Error	629,484	254	2,478			
Total	9127,000	257				
Corrected Total	1940,693	256				

a. R Squared = 0,676 (Adjusted R Squared = 0,673)

Резултати статистичке анализе показују да контекстуални приступ у настави математике на садржајима алгебре доприноси развијању правилног схватања знака једнакости. Ово је посебно значајно, ако се у обзир узме улога коју знак једнакости има у алгебри. Неразумевање знака једнакости, на првом месту представља потешкоћу за разумевање аритметике, а потом и усвајање и разумевање садржаја алгебре, и то пре свега, појма *једначина*, *функционална зависност* и слично. Истраживање је показало да се обликовањем садржаја математике, тако да они буду засновани на реалним ситуацијама учења, које су блиске ученику и које су засноване на његовом искуству, знању, интересовањима. На овај начин, моделовањем самих ситуација учења, проблем неразумевања знака једнакости може се предупредити. Ако се има у виду значај разумевања знака једнакости и у аритметици, геометрији и другим областима математике, онда је несумњиво велики значај добијених резултата и примењеног методичког приступа у учењу.

Даљом анализом добијених резултата желели смо да испитамо да ли контекстуални приступ остварује подједнаке ефекте код ученика различитог пола, општег успеха и оцене из математике. Стога ћемо у даљем тексту рада анализирати утицај ових независних варијабли на развијање способности правилног схватања знака једнакости.

2.1.1. Утицај експерименталног програма на развијање способности правилног схватања знака једнакости у зависности од пола ученика

На иницијалном мерењу развијености способности правилног схватања знака једнакости (Табела 39) дечаци су и у експерименталној (M = 4,15; SD = 2,97) и у контролној групи (M = 4,17; SD = 2,48) постигли боље резултате у односу на девојчице у експерименталној (M = 4,00; SD = 2,46) и контролној групи (M = 63,56; SD = 2,44) (Табела 20). Ако се у обзир узме чињеница да су ученици у мерењу ове способности могли да постигну максимално 10 поена, то значи да су на иницијалном мерењу ученици оба пола постигли недовољно добре резултате, јер су резултати мањи од половине укупног броја поена. На основу тога, можемо закључити да је ова способност на иницијалном мерењу била недовољно развијена код оба пола ученика и то у обе групе и експерименталној и контролној.

Резултати финалног тестирања показали су да су и дечаци (M = 6,73; SD = 2,45) и девојчице (M = 6,34; SD = 2,55) у експерименталној групи постигли знатно боље резултате у односу на дечаке (M = 4,12; SD = 2,30) и девојчице (M = 3,92; SD = 2,53) у контролној групи на задацима у којима су требали да покажу разумевање знака једнакости (Табела 39). Просечни резултати на финалном тестирању говоре да су и дечаци и девојчице у просеку постигли знатно боље резултате у схватању знака једнакости у односу на дечаке и девојчице у контролној групи. Ове разлике су уочљиве, нарочито ако се у обзир узме чињеница да је просечан број поена ученика оба пола у експерименталној групи знатно изнад просека, док су резултати и дечака и девојчица у контролној групи испод 50% максималног резултата. На основу резултата можемо уочити да су дечаци у контролној групи показали слабије резултате чак и у односу на иницијално мерење.

Табела 39. *Постигнућа ученика у схватању знака једнакости у односу на пол*

		Иницијално мерење		Финално мерење		Укупно
Група	Пол	M	SD	M	SD	N
Експериментална група	Дечаци	4,15	2,97	6,73	2,45	62
	Девојчице	4,00	2,46	6,34	2,55	68
	Укупно	4,07	2,71	6,52	2,50	130
Контролна група	Дечаци	4,17	2,48	4,12	2,30	65
	Девојчице	3,56	2,44	3,92	2,53	62
	Укупно	3,87	2,47	4,02	2,41	127
Укупно	Дечаци	4,16	2,72	5,39	2,70	127
	Девојчице	3,79	2,45	5,18	2,81	130
	Укупно	3,97	2,59	5,29	2,75	257

Вредност Левеновог теста хомогености варијансе износи F = 1,180 за p = 0,318, што значи да претпоставка о једнакости варијансе није нарушена и да постоје услови за двофакторску анализу коваријансе (Табела 40).

Табела 40. *Левенов тест хомогености варијансе*

Зависна варијабла: Финално мерење

F	df1	df2	Sig.
1,180	3	253	0,318

Tests the null hypothesis that the error variance of the dependent variable is equal across groups.
a. Design: Intercept + Jednako1 + Grupa + Pol + Grupa * Pol

Двофакторском анализом варијансе (Табела 41) утврдили смо да не постоји статистички значајан утицај у интеракцији између начина рада (контекстуални приступ) и пола ученика (F(1,252) = 0,188; p = 0,188) на резултате финалног мерења, ако се изузме утицај коваријата (резултат иницијалног мерења). Истраживањем смо показали да нема значајних разлика између дечака и девојчица у смислу да једнима одговара један начин рада, а другима други у схватању релације једнакости. Величина парцијалног ета квадрата у овом случају је 0,007, што значи да је мали утицај независних варијабли (начин рада и пол) на резултате финалног мерења.

Табела 41. *Двофакторска анализа коваријансе постигнућа ученика у схватању знака једнакости у односу на пол*

Зависна варијабла: Финално мерење

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.	Partial Eta Squared
Corrected Model	1315,567[a]	4	328,892	132,583	0,000	0,678
Intercept	430,502	1	430,502	173,543	0,000	0,408
Иницијално мерење	908,046	1	908,046	366,051	0,000	0,592
Група	356,946	1	356,946	143,892	0,000	0,363
Пол	0,031	1	0,031	**0,012**	**0,911**	**0,000**
Група * Пол	4,317	1	4,317	**1,740**	**0,188**	**0,007**
Error	625,125	252	2,481			
Total	9127,000	257				
Corrected Total	1940,693	256				

a. R Squared = 0,678 (Adjusted R Squared = 0,673)

Поред тога могуће је уочити (Табела 41) и да не постоји статистички значајна разлика између дечака и девојчица на финалном мерењу (F (1,252) = 0,012; p = 0,911) у односу на независну променљиву (пол), ако се изузме утицај коваријата (иницијалног мерења). То значи да и дечаци и девојчице на исти начин реагују на ефекте контекстуалног приступа у развијању правилног схватања знака једнакости у настави ране алгебре. Парцијални ета квадрат износи 0,000, што значи да се 0% варијансе резултата финалног мерења ове способности могу објаснити полом ученика. Као доказ поузданости ових резултата урађена је анализа у којој је утицај коваријата статистички уклоњен и изражена вредност зависне променљиве за сваку групу (Прилог 9).

На основу добијених резултата може се закључити да су и дечаци и девојчице показали боље резултате на финалном мерењу способности разумевања знака једнакости под утицајем контекстуалног приступа у садржајима алгебре. То значи да не постоје статистички разлике у постигнућу ученика мушког и женског пола под утицајем експерименталног програма. Дакле, контекстуалним приступом заснованим на ситуацијама реалног контекста се може утицати на развој схватања знака једнакости као знака еквиваленције подједнако и код дечака и код девојчица.

2.1.2. *Утицај контекстуалног приступа на развијање способности правилног схватања знака једнакости у зависности од општег успеха*

Најбоље резултате на иницијалном мерењу развијености способности правилног схватања знака једнакости постигли су ученици који имају успех *одличан*, у контролној групи (M = 5,14; SD = 2,36) и експерименталној групи (M = 4,81; SD = 2,49). Ученици који имају успех *врло добар* постигли су следеће резултате: у експерименталној групи (M = 3,50; SD = 2,77) и у контролној (M = 2,65; SD = 1,89), док су најлошији резултат постигли ученици који имају успех *добар* у контролној (M = 2,48; SD = 1,81) и експерименталној групи (M = 1,09; SD = 0,94). Ако се у обзир узме чињеница да су на иницијалном мерењу ученици могли имати максимално 10 поена, онда се може извести закључак да су једино ученици контролне групе са општим успехом *одличан* имали резултате који су мало изнад половине могућих поена које су могли остварити, док су сви остали ученици имали лошији резултат (Табела 42).

Резултати до којих смо дошли на финалном мерењу способности схватања знака једнакости показују да су најбоље резултате постигли ученици са општим успехом *одличан* из експерименталне групе (M = 7,49; SD = 2,12) и ученици из контролне групе (M = 5,22; SD = 2,28) (Табела 23). Ученици из експерименталне групе са успехом *врло добар* постигли су боље резултате (M = 5,60; SD = 2,21) у односу на ученике из контролне групе са истим успехом (M = 2,98; SD = 1,90). Ученици са успехом *добар* из експерименталне групе (M = 3,27; SD = 2,05) су успешнији у односу на ученике са истим успехом из контролне групе (M = 2,52; SD = 1,85). На основу добијених резултата можемо нагласити чињеницу да су ученици са успехом *врло добар* из експерименталне групе под утицајем контекстуалног приступа на финалном мерењу постигли боље резултате од ученика контролне групе који имају успех *одличан*, док су ученици експерименталне групе са успехом *добар* постигли боље резултате од ученика са успехом *врло добар* из контролне групе.

Табела 42. *Постигнућа ученика у схватању знака једнакости у односу на општи успех*

		Иницијално мерење		Финално мерење		Укупно
Група	Успех	M	SD	M	SD	N
Експериментална група	Добар	1,09	0,94	3,27	2,05	11
	Врло добар	3,50	2,77	5,60	2,21	42
	Одличан	4,81	2,49	7,49	2,12	77
	Укупно	4,07	2,71	6,52	2,50	130
Контролна група	Добар	2,48	1,81	2,52	1,85	23
	Врло добар	2,65	1,89	2,98	1,90	40
	Одличан	5,14	2,37	5,22	2,28	64
	Укупно	3,87	2,47	4,02	2,41	127
Укупно	Добар	2,03	1,70	2,76	1,92	34
	Врло добар	3,09	2,40	4,32	2,44	82
	Одличан	4,96	2,43	6,46	2,46	141
	Укупно	3,97	2,59	5,29	2,75	257

Резултати Левеновог теста хомогености варијансе показују да је његова вредност F = 1,918, p = 0,042, што значи да није нарушена једнакост варијансе, тако да се може урадити двофакторска анализа коваријансе (Табела 43).

Табела 43. *Левенов тест хомогености варијансе*

Зависна промењљива: Финално мерење

F	df1	df2	Sig.
1,918	5	251	0,042

Tests the null hypothesis that the error variance of the dependent variable is equal across groups.

a. Design: Intercept + Jednako1 + Grupa + Uspeh + Grupa * Uspeh

Двофакторском анализом коваријансе (Табела 44) утврдили смо да не постоји значајан утицај интеракције начина рада и успеха ученика у односу на резултате финалног мерења способности схватања знака једнакости, када се уклони утицај резултата иницијалног мерења (F (2,250) = 1,185; p = 0,308). Вредност парцијалног ета квадрата је 0,009, што према Коену (Cohen, 1988) представља веома мали утицај. Поред тога, уклањањем коваријата (резултата иницијалног мерења способности разумевања знака једнакости) можемо закључити да постоји статистички значајан утицај успеха на резултате финалног мерења (F(2,250) = 12,111; p = 0,000). Тај статистички значајан утицај се може објаснити величином парцијалног ета квадрата који показује да 8,8% варијансе резултата финалног мерења способности схватања знака једнакости објашњава општи успех ученика.

Табела 44. *Двофакторска анализа коваријансе постигнућа ученика у схватању знака једнакости у односу на општи успех*

Зависна променљива: Финално мерење

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.	Partial Eta Squared
Corrected Model	1371,105[a]	6	228,518	100,300	0,000	0,707
Intercept	421,119	1	421,119	184,835	0,000	0,425
Иницијално мерење	557,612	1	557,612	244,744	0,000	0,495
Група	181,335	1	181,335	79,590	0,000	0,241
Успех	55,185	2	27,592	**12,111**	**0,000**	**0,088**
Група * Успех	5,399	2	2,699	**1,185**	**0,308**	**0,009**
Error	569,587	250	2,278			
Total	9127,000	257				
Corrected Total	1940,693	256				

a. R Squared = 0,707 (Adjusted R Squared = 0,699)

У Прилогу 10 дате су кориговане средње вредности зависне променљиве за сваку независну променљиву (групу и успех), као и за њихову међусобну интеракцију.

На основу добијених резултата можемо закључити да су ученици из експерименталне групе без обзира на општи успех који имају постигли боље резултате у односу на ученике са истим општим успехом из контролне групе. Очигледно је да су ученици који имају општи успех *врло добар* из експерименталне групе били успешнији од ученика са општим успехом *одличан* из контролне групе. Поред тога, морамо напоменути да су значајан напредак постигли ученици са општим успехом *добар* из експерименталне групе, који су имали просечно боље резултате у односу на ученике са општим успехом *добар* па и *врло добар* из контролне групе.

Ово истраживање показало је да се реалистичним контекстом може подстицати релацијско схватање знака једнакости, што је посебно важно у настави алгебре. При том су резултати показали да се под утицајем контекстуалног приступа у настави ране алгебре може подстицати развој способности правилног разумевања знака једнакости и то без обзира на општи успех ученика. Дакле, ученици у овом случају показују подједнак напредак без обзира на општи успех (*добри, врло добри, одлични)* под утицајем овако организоване наставе ране алгебре.

2.1.3. Утицај експерименталног програма на развијање способности правилног схватања знака једнакости у зависности од оцене из математике

На иницијалном мерењу развијености способности правилног схватања знака једнакости (Табела 45) најбоље резултате постигли су ученици са оценом *одличан* (5) и то у експерименталној (M = 5,29; SD = 2,50) и контролној групи (M = 5,33; SD = 2,39) (Табела 26). Ученици са оценом *врло добар* (4) постигли су приближно исте просечне резултате и то ученици у експерименталној групи (M = 3,92; SD = 2,52) и ученици у контролној групи (M = 3,60; SD = 2,14). Приближно исте резултате постигли су и ученици са оценом *добар* (3) у експерименталној групи (M = 2,81; SD = 2,40) и контролној групи (M = 2,52; SD = 1,80). Најслабије резултате постигли су ученици са оценом *довољан* (2), при чему су ученици експерименталне групе постигли слабије резултате (M = 1,20; SD = 1,32) у односу на ученике из контролне групе (M = 1,70; SD = 1,32).

Резултати финалног мерења (Табела 26) показују да су најбоље просечне резултате постигли ученици са просечном оценом *одличан* (5) и то у експерименталној групи (M = 8,00; SD = 1,82) и контролној групи (M = 5,42; SD = 2,28). Ученици са оценом *врло добар* (4) у експерименталној групи (M = 6,32; SD = 2,30) постигли су боље резултате у односу на ученике са истом оценом из контролне групе (M = 3,60; SD = 2,23). Просечни број поена код ученика експерименталне групе са оценом *добар* (3) из математике (M = 5,07; SD = 1,88) је већи у односу на исту групу у контролној групи (M = 3,04; SD = 1,80). Најслабије просечне резултате на финалном тесту постигли су ученици чија је оцена из математике *довољан* (2) и у контролној (M = 2,90; SD = 1,91) и у експерименталној групи (M = 1,80; SD = 1,55).

Највеће разлике у постигнућу између истих група различитих оцена, јесте разлика која постоји између ученика са оценом *врло добар* (4). Можемо закључити да постоји значајан напредак код свих група ученика експерименталне групе формираним на основу оцене коју имају из математике, у схватању знака једнакости под утицајем контекстуалног приступа. Посебно се може нагласити напредак ученика експерименталне групе, при чему су ученици са оценом *добар* (3) постизали боље резултате у односу на ученике са оценом *врло добар* (4) у контролној групи док су ученици са оценом *врло добар* (4) постигли боље резултате у односу на ученике са оценом *одличан* (5) у контролној групи.

Табела 45. *Постигнућа ученика у схватању знака једнакости у односу на оцену из математике*

		Иницијално мерење		Финално мерење		Укупно
Група	Оцена	M	SD	M	SD	N
Експериментална група	Довољан (2)	1,20	1,317	2,90	1,912	10
	Добар (3)	2,81	2,403	5,07	1,880	27
	Врло добар (4)	3,92	2,521	6,32	2,298	37
	Одличан (5)	5,29	2,499	8,00	1,819	56
	Укупно	4,07	2,709	6,52	2,503	130
Контролна група	Довољан (2)	1,70	1,703	1,80	1,549	10
	Добар (3)	2,52	1,805	3,04	1,808	27
	Врло добар (4)	3,60	2,142	3,60	2,231	42
	Одличан (5)	5,33	2,391	5,42	2,277	48
	Укупно	3,87	2,472	4,02	2,409	127
Укупно	Довољан (2)	1,45	1,504	2,35	1,785	20
	Добар (3)	2,67	2,110	4,06	2,096	54
	Врло добар (4)	3,75	2,318	4,87	2,633	79
	Одличан (5)	5,31	2,438	6,81	2,410	104
	Укупно	3,97	2,591	5,29	2,753	257

Да би смо утврдили да ли постоје статистички значајне разлике у постигнућу ученика различитих оцена користили смо двофакторску анализу варијансе. Левенов тест хомогености варијансе (F = 0,989, p = 0,440) показује да је потврђена претпоставка о једнакости варијансе (Табела 46).

Табела 46. Левенов тест хомогености варијансе

Зависна променљива: Финално мерење

F	df1	df2	Sig.
0,989	7	249	0,440

Tests the null hypothesis that the error variance of the dependent variable is equal across groups.
a. Design: Intercept + Jednako1 + Grupa + Ocena + Grupa * Ocena

Уклањањем коваријата (резултата иницијалног мерења схватања знака једнакости) утврдили смо да не постоји статистички значајан утицај интеракције начина рада и оцене ученика на резултате финалног мерења ове способности (F(3, 248) = 1,52; p = 0,210). Вредност парцијалног ета квадрата у овом случају је 0,018, што према Коену (Cohen, 1988) представља мали утицај независне променљиве (групе и оцене) на резултате финалног мерења способности схватања знака једнакости. То значи да нема значајних разлика у смислу да ученицима са различитим оценама одговарају различити начини рада (класични и контекстуални приступ) у схватању знака једнакости.

Као што можемо видети у Табели 45 просечни резултати се значајно разликују између експерименталне и контролне групе у односу на оцену коју ученици имају из математике. Што је већа оцена из математике, то су ученици успешнији у схватању знака једнакости. Двофакторском анализом коваријансе на финалном мерењу постигнућа разумевања знака једнакости између различитих група (према оцени коју имају из математике) статистички је значајна (F(3,248) = 10,05; p = 0,000) (Табела 47). То значи да постоји статистички значајна разлика у постигнућу на финалном мерењу способности схватања знака једнакости ученика са различитим оценама из математике. Вредност парцијалног ета квадрата у овом случају показује да је 10,8% варијансе резултата финалног мерења се може објаснити оценом из математике.

Табела 47. *Двофакторска анализа коваријансе постигнућа ученика у схватању знака једнакости у односу на оцену из математике*

Зависна променљива: Финално мерење

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.	Partial Eta Squared
Corrected Model	1389,425[a]	8	173,678	78,133	0,000	0,716
Intercept	438,852	1	438,852	197,427	0,000	0,443
Иницијално мерење	499,941	1	499,941	224,909	0,000	0,476
Група	194,273	1	194,273	87,398	0,000	0,261
Оцена	67,001	3	22,334	**10,047**	**0,000**	**0,108**
Група * Оцена	10,143	3	3,381	**1,521**	**0,210**	**0,018**
Error	551,268	248	2,223			
Total	9127,000	257				
Corrected Total	1940,693	256				

a. R Squared = 0,716 (Adjusted R Squared = 0,707)

Да бисмо били сигурни у поузданост добијених резултата урађена је анализа у којој је утицај коваријата статистички уклоњен и израчуната вредност зависне променљиве за сваку групу што потврђује наше закључке (Прилог 11).

* * * * *

На основу добијених резултата можемо рећи да се применом контекстуалног приступа у настави ране алгебре позитивно утиче на правилно схватање знака једнакости, без обзира на оцену коју ученици имају из математике. Резултати истраживања су показали да се реалистичним контекстом у задацима ране алгебре може утицати на постигнуће у савладавању способности правилног разумевања знака једнакости, али исто тако и да разлике у развоју ове способности не постоје између ученика који имају различите оцене из математике. Добијени резултати показали су да контекстуални приступ остварује позитивне ефекте на све ученике у настави математике и да сви под његовим утицајем напредују, и они који постижу најбоље резултате из математике, али и они који постижу најслабије. На основу тога, можемо закључити да се реалистичан контекст може искористити као добар приступ развијању појмова и способности ране алгебре, а посебно што позитивно делује и код ученика који постижу слабији успех у настави математике. Моделовање ситуација учења који изражавају јасне и реалне ситуације свакодневног живота, представљају значајан покретач правилног разумевања знака једнакости.

Општа присутност знака једнакости на свим нивоима и у свим областима математике наглашава његову важност. Разумевање појма једнакости у смислу еквивалентности, традиционално се уводи током раног основношколског математичког образовања ученика. Многобројна истраживања широм света (Kieran, 1992; 2004, 2007; 2018; Kaput, 1999; Kaput & Blanton, 2000; Freiman & Lee, 2004; McNeil & Alibali, 2005; Knuth, Stephens, McNeil & Alibali, 2006) у области алгебре истичу значај правилног развијања и разумевања појма знака једнакости као важног појма у почетном математичком образовању ученика.

Знак једнакости се код ученика млађих разреда основне школе схвата на два начина. На један начин ученици знак једнакости схватају „оперативно“, односно разумеју га као „одреди укупно“, „израчунај“ и тако даље. Други начин подразумева „релацијско“ схватање знака једнакости, при чему се он види као релација еквиваленције, односно знак који означава да изрази, са обе стране овог знака, подразумевају исту количину или имају исту вредност (McNeil, Grandau, Knuth, Alibali & Stephens, 2006). Истраживање које су спровели (Byrd, McNeil, Chesney & Matthews, 2015) показало је да присуство релационих интерпретација показује позитивне, а аритметичка интерпретација знака једнакости негативне ефекте на алгебарске способности ученика. Поред тога, тумачење знака једнакости није повезано са аритметичким способностима ученика, док снажно укорењен погрешан концепт знака једнакости може бити штетнији за учење раних појмова алгебре од недостатка релационог погледа на овај знак. Резултати истраживања (Hattikudur & Alibali, 2010) су показали да су ученици који су били у ситуацији да појам знака једнакости усвајају тако што га упоређују са релацијама неједнакости, постигли боље резултате у појмовном разумевању појма једнакости. Овим истраживањем аутори су доказали да другачији приступ, заснован на упоређивању релација, може бити ефикасан алат за правилно развијање математичких појмова. Истраживање које су спровели Кнут и сарадници (Knuth, Stephens, McNeil & Alibali, 2006) показало је да ученици старијих разреда основне школе показују слабије способности у решавању једначина, што аутори даље повезују са погрешним разумевањем знака једнакости. Наиме, резултати показују да релативно мали број ученика знак једнакости посматра као знак еквивалентности (релационо схватање знака једнакости), и да поред тога није било доказа који би упућивали на то да се разумевање знака једнакости побољшава у старијим разредима.

На основу наведених истраживања, можемо закључити да идеја схватања еквиваленције, једнакости и једначине подразумева развијеност правилног разумевања знака једнакости. То подразумева манипулацију и схватање израза и једначина у њиховом симболичком облику, описујући односе који постоје између генерализованих количина које могу или не морају бити једнаке (Blanton, Stephens, Knuth, Gardiner, Isler & Kim, 2015). Схватање појма знака једнакости, као знака еквиваленције је значајно у садржајима алгебре, па ће тако и један од циљева овог истраживања бити развој правилног схватања знака једнакости кроз употребу контекстуалног приступа у учењу и настави алгебре.

У развоју способности правилног схватања знака једнакости у садржајима алгебре посебно се могу истаћи задаци равнотеже (ваге) који на очигледан начин изражавају математичку еквиваленцију и омогућавају да реални контекст послужи као ослонац у изградњи дубљег значења знака једнакости. Ови задаци могу послужити и као модели у решавању једначина у процесу формалног решавања задатака, извођењем истих операција са обе стране знака једнакости (Vlassis, 2002). Нека од истраживања (Khuluq, 2015) показала су је да су ученици под утицајем задатка равнотеже постали флексибилнији у одабиру различитих стратегија у решавању једначина, али и слободнији да решавање једначина прикажу на формалнији начин одржавајући равнотежу ваге као израз еквивалентности. Значај овог модела најбоље описују Отен и сарадници (Otten, Van den Heuvel-Panhuizen & Veldhuis, 2019) који сматрају да модел равнотеже најпозитивније делује на исходе учења једначина у млађем школском периоду код ученика који немају претходних знања о решавању једначина, док код старијих ученика овај модел може послужити као освежење у начину решавања једначина на које су већ навикли или као модел у решавању нових врста једначине. Резултати нашег истраживања потврдили су резултате ових истраживања и показали да се правилно разумевање знака једнакости може развијати употребом проблема који изражавају ситуације реалистичног контекста равнотеже или ваге. Рад на задацима овог типа омогућио је ученицима, не само да усвоје знања већ и прилагоде своје мишљење новим ситуацијама и контекстима у задацима кроз процесе моделовања и математизације.

Покушаћемо да се осврнемо на најчешће грешке које праве ученици у решавању задатака којима смо тестирали способност разумевања знака једнакости. На овај начин ћемо потпуније сагледати начин на који ученици размишљају и користе знак једнакости, као важан елемент изградње алгебарских способности и целокупног алгебарског мишљења. Потешкоће ученика у разумевању знака једнакости могу се приписати великом броју различитих фактора, али се можемо сложити са Карпентером и сарадницима (Carpenter, Franke & Levi, 2003) који тврде да „ограничено схватање значења знака једнакости јесте главни камен спотицања у учењу алгебре. Практично све манипулације са једначинама захтевају разумевање знака једнакости као симбола којим се изражава однос еквиваленције“ (Carpenter, Franke & Levi, 2003: 22).

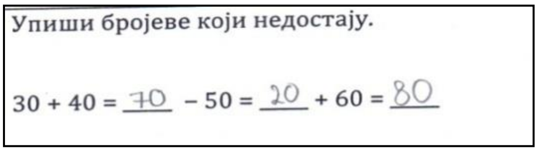
Недовољна пажња код формирања појма знака једнакости води до тога да велики број ученика основних и средњих школа показује неадекватно схватање значења знака једнакости, при чему тај симбол посматрају као резултат аритметичких операција, а не као симбол математичке еквиваленције (Kieran, 1981; Rittle-Johnson & Alibali, 1999). Најчешће грешке ученика у нашем истраживању се своде на неправилно разумевање знака једнакости као у Примеру 36.

Пример 36. Решење задатка баланса – иницијални тест

Ученик је успешно одредио решење овог задатка, али је са друге стране једнакост коју је у поступку решавања задатка користио потпуно нетачна. Знак једнакости у овом случају повезује низ израза чија вредност није иста. У решењу овог задатка може препознати правилно размишљање ученика у процесу решавања проблема (одређивање масе на десном тасу ваге, како би означио вредност укупне масе на десном тасу ваге). До грешке долази неадекватном употребом знака једнакости који ученик разуме и користи не као „еквивалентно је“ већ као „одреди вредност“. Ова грешка ученика и грешке сличне овој у нашем истраживању потврђују резултате других истраживања (Mason, 1996; Kieran, 2006; Obradović & Zeljić, 2015) која су показала тежњу одређеног броја ученика да знак једнакости погрешно користи, при чему се у решавању ученици више оријентишу на резултат, него на сам поступак и начин репрезентације информација у задатку.

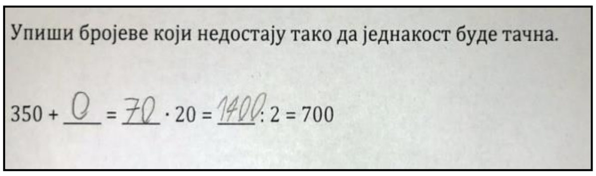
Велики број тестираних ученика показао је неразумевање знака једнакости као знака који изражава еквивалентност, већ овај појам везују за аритметичко доживљавање овог знака у смислу „одреди вредност“ или „израчунај“, као у примеру следећег задатка са иницијалног теста (Пример 37).

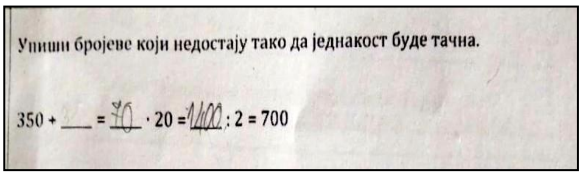
Пример 37. Задатак са бројевима који недостају у једнакости – иницијални тест



Као што можемо видети, ученици „посматрају знак једнакости као симбол који раздваја проблем и његово решење“ (Kieran, 1981: 324). На овај начин ученик не посматра читаву једнакост, већ је концентрисан искључиво на поједине изразе и њихову вредност, при чему знак једнакости изражава еквивалентност, али само у једном смеру. Одређени број ученика, а највећим делом оних из контролне групе показали су недовољно разумевање знака једнакости и на финалном тестирању (Пример 38).

Пример 38. Задатак са бројевима који недостају у једнакости – финални тест





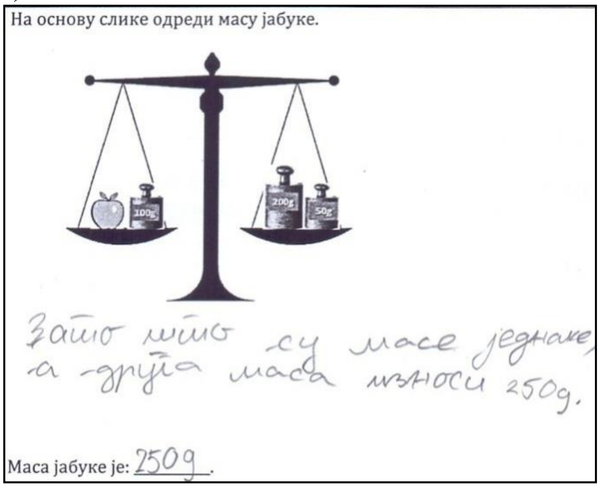
У овом примеру може се уочити најчешћа грешка код тестираних ученика, која се односи на решавање задатка у којима се знак једнакости види искључиво као наредба „израчунај“. При томе се потпуно занемарује вредност израза са сваке стране знака једнакости. Начин на који су ученици погрешно решили задатак говори и о начину на који су приступили у решавању задатка, при чему крећу од онога што је познато у једнакости. Једино је вредност другог израза са десне стране је тачна, док су вредности осталих израза повезани са погрешним разумевањем знака једнакости, што је довело до погрешних вредности у осталим изразима.

Поједина решења задатка ваге (равнотеже) показала су неспособност ученика за разумевањем односа у реалистичним примерима (Пример 39).

Пример 39. Решења задатка равнотеже – иницијални тест

а)

б)



У првом случају (под а), карактеристично је погрешно разумевање реалне ситуације која је изражена на слици, што је даље водило до погрешног решавања задатка. У другом случају (под б) ученик је показао потпуно занемаривање вредности масе тега који се налази на истом тасу ваге као и јабука, што је такође довело до погрешног решења. У овом случају ученик занемарује вредност тега, јер га не схвата одвојено од јабуке, већ као целину која заједно постоји на тасу ваге.

Одређени број решења задатка са вагом сводио се на аритметичке процедуре у којима се свесно изостављала непозната (Пример 40), што показује утицај садржаја аритметике и потребу ученика за избегавањем непознате у решавању задатака.

Пример 40. Решење задатка равнотеже – иницијални тест

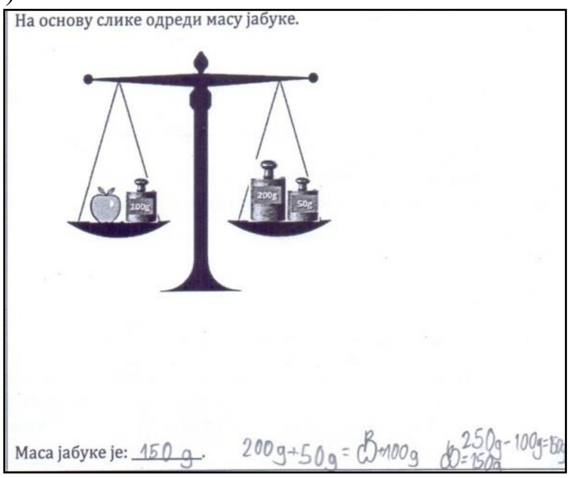
Ученици су се у овом случају (Пример 40), решавајући задатак равнотеже са вагом, користили аритметичким процедурама, како би утврдили масу јабуке. Без обзира на то у овом примеру је очигледан алгебарски начин размишљања, јер су ученици свесни односа равнотеже који постоји између масе тегова и масе јабуке на ваги. Дакле, иако се не користе искључиво алгебарским техникама у решавању задатка, ученици су у ситуацији да алгебарски размишљају о односима који постоје између маса. Имајући у виду ове односе ученици постављају једнакост којом долазе до тачног решења.

Једна група ученика је у решавању овог задатка користила цртеж као ознаку за непознату, што на неки начин представља постепени прелаз ка симболу (слову) као ознаци за непознату. У овом случају ученици су цртежом јабуке заменили вредност масе, који је представљен на цртежу у задатку са проблемом ваге (равнотеже) (Пример 41 а), б), в)). Дакле, у овом случају ученици самостално граде и користе различите врсте модела, који им помажу у визуелизацији односа који постоје у задатку. Модели тако постају оруђе којим се ученик користи да би једноставније сагледао односе, али и да би једноставније решио задатак. На овај начин је очигледна тенденција ученика у преласку са аритметичког на искључиво алгебарски начин размишљања.

Пример 41. Решења задатка равнотеже (а, б, в) – иницијални тест

а)

б)



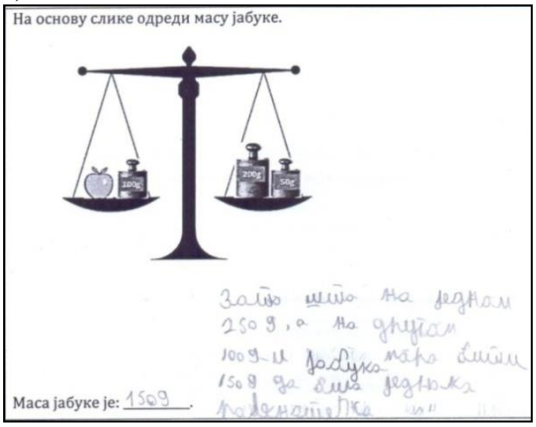
в)

У решењу задатка (Пример 41 а), б) и в)) ученици су користили једначине, при чему су као ознаку за непознату користили слику (цртеж јабуке). Без обзира на чињеницу што је симбол, у правом алгебарском смислу, био замењен цртежом, у решавању задатка ученици су користили једначину. У поступку решавања једначине ученици су се према цртежу понашали на исти начин, као да је у питању симбол као ознака за непознату. Решења овог задатка показују да су ученици правилно схватили знак једнакости, као знак који у овом случају изражава еквивалентност кроз баланс масе на левом и десном тасу ваге у задатку.

Сличне примере решења у којима знак једнакости изражен као знак еквиваленције можемо приказати у решењима ученика као у Примеру 42.

Пример 42. Решења задатка равнотеже - иницијални тест

а)



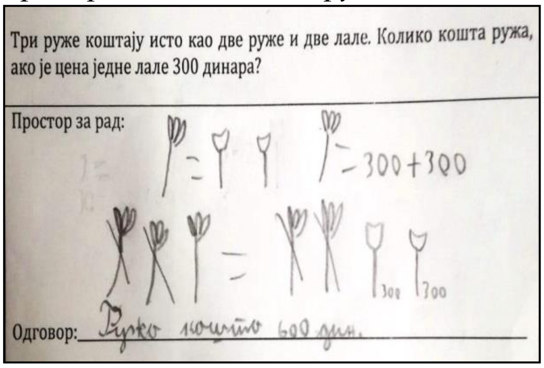
б)

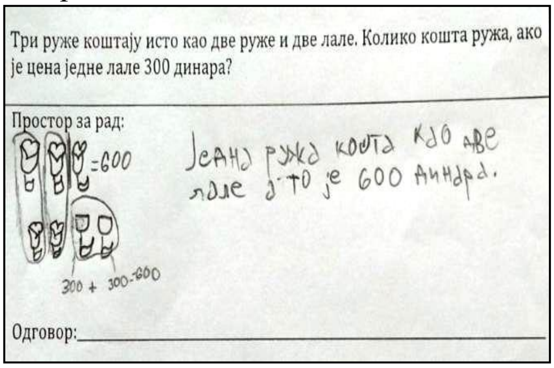
Да би се истакла равнотежа која постоји између маса на тасовима ваге, ученици су користили знак једнакости. У првом примеру овај однос је описан речима, док је у другом исказан симболом знака једнакости. У другом примеру је очигледна потреба ученика за провером тачности решења, чиме симболички потврђује односе који постоје на ваги. Значај реалног контекста може се пронаћи у чињеници да је ученик на овај начин увек у ситуацији да се у поступку решавања задатка врати на реални контекст и увери да је у поступку решавања задатка на правом путу. Резултати у овом истраживању се поклапају са резултатима истраживања Отена и сарадника (Otten, van den Heuvel-Panhuizen, Veldhuis, Boom & Heinze, 2020) које је показало да ученици који користе задатке равнотеже чешће користе представе, моделе и напредне алгебарске стратегије у учењу и решавању задатака. Резултати тог истраживања показују да би различите репрезентације модела равнотеже играју значајну улогу у процесима учења алгебарских садржаја.

Резултати статистичке анализе у нашем истраживању показали су напредак ученика у разумевању знака једнакости као знака еквиваленције. Анализом ученичких решења можемо уочити напредак који је евидентан нарочито код ученика експерименталне групе, који су радили у складу са контекстуалним приступом у настави алгебре. Навешћемо и примере решења који показују напредак ученика у разумевању појма знака једнакости.

У задатку са ружама и лалама (Пример 43) на финалном тесту ученик сликом изражава реалне ситуације, како би уочио односе који су одређени у задатку и једноставније решио задатак.

Пример 43. Задатак са ружама и лалама – финални тест

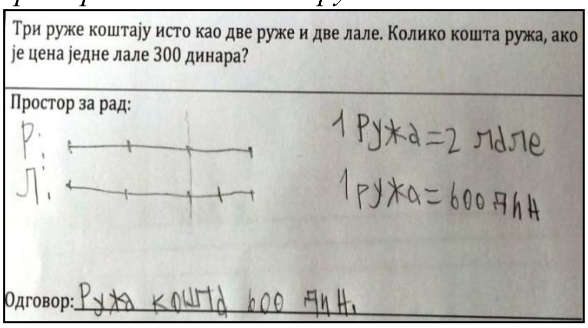


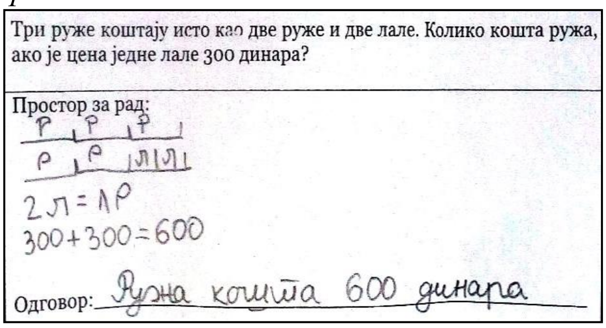


У овом случају, цртеж је послужио као модел у процесу решавања задатка до ког је ученик дошао у процесу математизације реалног контекста израженог у задатку. Цртежом ученик изражава ситуације контекста, а знаком једнакости утврђује односе који постоје у условима задатка. У овом случају можемо закључити да ученик знак једнакости у потпуности схвата као знак еквиваленције, јер се у поступку решавања задатка користи поништавањем истих вредности са леве и десне стране знака једнакости. Поступак одбацивања истих вредности са једне и друге стране знака једнакости представља основу која касније може послужити као поступак решавања једначина којим се избегава друга непозната.

Да би решили исти задатак, један број ученика је користио и модел дужи како би изразио односе у задатку и решио га (Пример 44).

Пример 44. Задатак са ружама и лалама – финални тест





За разлику од примера решења у којима је цртеж на директан начин изражавао однос између цене цвећа, у овом случају ученици се користе апстрактнијим моделима (моделима дужи). Када посматрамо начин на који су ученици решили овај задатак, можемо уочити тежњу за визуелизацијом проблема, при чему је дужина дужи представљала вредност ружа и лала у задатку. Цртежи дужи искоришћени су како би се потпуније сагледао однос између познатих и непознатих вредности у задатку, али и омогућило његово једноставније решавање. У овим примерима решења задатка очигледна је потреба ученика за коришћењем модела како би се изразили односи, али у исто време и изоставило симболичко означавање истих. Разлог за то можемо пронаћи у природној потреби ученика овог узраста за очигледношћу. До сличних резултата долазе и Обрадовић и Зељић (2015) који сматрају да употреба модела за представљање информација треба да доведе до исправног резоновања и тачног уочавања односа и износе закључак да „ученици без употребе различитих репрезентација и модела не могу увек разумети структуру задатка и поступак решавања“ (Obradović & Zeljić, 2015: 77).

Резултати до којих смо дошли у овом истраживању поклапају се са великим бројем других истраживања широм света која сугеришу да је свеприсутан проблем правилног разумевања знака једнакости. Можемо закључити да овом појму у настави математике треба прилазити са више пажње и да га треба постепено развијати кроз наставни план и програм, уз сталан осврт на специфичност садржаја математике (Alexandrou-Leonidou & Philippou, 2011; Alibali, Knuth, Hattikudur, McNeil & Stephens, 2007; NCTM, 2000). Кључни период за развој ове способности је у настави математике у млађим разредима основне школе, посебно у садржајима алгебре.

Правилно схватање знака једнакости у алгебри представља значајну способност којом се поставља битан темељ каснијем даљем учењу алгебарских садржаја. На основу добијених резултата у истраживању можемо се сложити са чињеницом да „ограничено разумевање знака једнакости (само оперативно значење знака) може кочити развој важних алгебарских идеја, тако да ученици који знак једнакости разумеју као знак еквиваленције успешније решавају алгебарске једначине него њихови вршњаци који немају такво разумевање (Knuth, Stephens, McNeil & Alibali, 2006; Alexandrou-Leonidou & Philippou, 2011). Наше истраживање је потврдило и налазе (Van Reeuwijk, 2001) који су показали да реални контекст помаже ученицима да потпуније разумеју појам једначине, али и омогућава ученицима да разумеју значење формално изражене математике и знака једнакости као знака еквиваленције.

Резултати нашег истраживања показали су да се пажљивим дизајнирањем математичких активности, кроз реалне ситуације свакодневног живота, побољшава ученичко разумевање знака једнакости као знака математичке еквиваленције, а самим тим ствара основа за потпуније разумевање појма једначине. На овај начин смо ученике одвратили од једноставног ослањања на обрасце и једнакости у чистој математичкој форми, чиме се пружила прилика за конструисање концептуалног разумевања знака једнакости из ситуација које изражавају реалне проблеме свакодневног живота. Ово истраживање је показало да се употребом реалног контекста, кроз процесе математизације и моделовања, процес учења може појeдноставити и на тај начин створити снажна основа за даљу изградњу и развој алгебарских појмова и алгебарских способности. Резултати овог истраживања су показали да се контекстуалним приступом у настави математике може утицати на развијање способности правилног разумевања знака једнакости подједнако на све ученике, без обзира на пол, оцену коју имају из математике или општи успех. Све ово говори о вредност оваквог приступа и потреби да му се поклони већа пажња у учењу и настави математике и алгебре.

2.2. Утицај контекстуалног приступа на развијање способности разумевања функционалне зависности између компонената рачунских операција

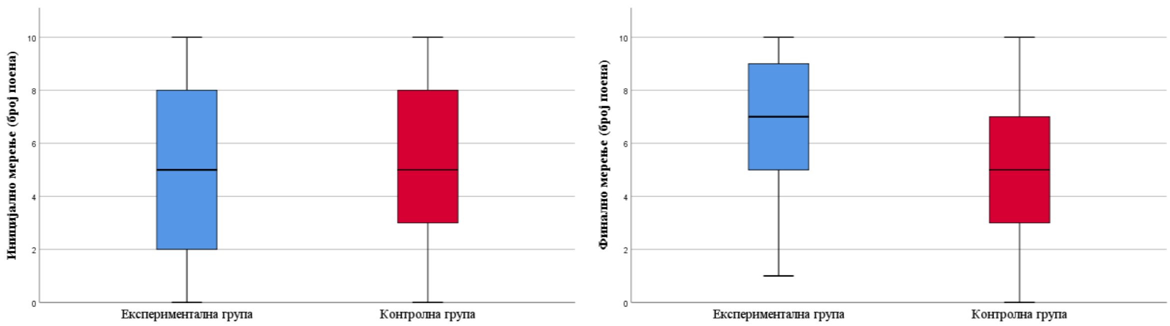
Способност разумевања функционалне зависности која постоји између компонената рачунских операција подразумева способност ученика да разуме односе који постоје између променљивих у проблемима алгебре, као и то како се променом једне може утицати на другу променљиву. Суштина је да ученик разуме односе, схвати везе и генерализације које постоје и да уме да их изрази језиком алгебре, односно алгебарском нотацијом. Ова способност представља основ за учења садржаја алгебре. Стога смо у истраживању ефеката примене контекстуалног приступа у учењу садржаја алгебре пажњу усмерили на способност разумевања функционалне зависности између компонената рачунских операција. Наша идеја је да се у подстицању функционалног мишљења оријентишемо на везу између реалних ситуација и проблема свакодневног живота и математичких активности моделовања и математизације како би се створила основа за конвенционалне алгебарске репрезентације (Табела 45).

У процесу статистичке анализе резултата утицаја на постигнућа контекстуалног приступа на разумевање функционалне зависности између компонената рачунских операција утврдили смо да су на иницијалном мерењу ученици контролне групе у просеку постигли боље резултате (M = 5,13; SD = 2,84) у односу на ученике експерименталне групе (M = 4,72; SD = 3,09) (Табела 45). У иницијалном мерењу ове способности ученици су могли да освоје максимално 10 поена, тако да се на основу тога може рећи да ученици обе групе нису имали довољно развијену способност разумевања функционалне зависности између компонената рачунских операција.

Табела 45. *Постигнућа ученика експерименталне и контролне групе у разумевању функционалне зависности између компонената рачунских операција*

		N	M	SD
Иницијално мерење	Експериментална група	130	4,72	3,09
	Контролна група	127	5,13	2,85
Финално мерење	Експериментална група	130	6,88	2,50
	Контролна група	127	5,09	2,71

Када се у обзир узму резултати финалног мерења (Табела 45), онда резултати показују сасвим другачије односе. У финалном мерењу, након примене експерименталног програма, ученици експерименталне групе постижу значајно боље резултате (M = 6,88; SD = 2,50) у односу на ученике контролне групе (M = 5,09; SD = 2,71). Ако се у обзир узме однос између иницијалног и финалног мерења, такође се може уочити веће просечно напредовање експерименталне групе у односу на контролну групу (Графикон 4).



Графикон 4. *Постигнуће ученика експерименталне и контролне групе на иницијалном и финалном мерењу разумевања функционалне зависности између компонената рачунских операција*

Како бисмо утврдили разлике између ученика експерименталне и контролне групе на иницијалном и финалном мерењу развијености способности разумевања функционалне зависности између компонената рачунских операција искористили смо анализу варијансе (Табела 46).

Табела 46. *Анализа варијансе иницијалног и финалног мерења развијености способности разумевања функционалне зависности између компонената рачунских операција*

	Levene Statistic	df1	df2	Sig.
Иницијално мерење	1,639	1	255	0,202
Финално мерење	0,315	1	255	0,575

		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Иницијално мерење	Између група	11,250	1	11,250	1,275	0,260
	Унутар групе	2249,194	255	8,820		
	Укупно	2260,444	256			
Финално мерење	Између група	205,865	1	205,865	30,237	0,000
	Унутар групе	1736,135	255	6,808		
	Укупно	1942,000	256			

Вредност Левеновог теста на иницијалном ($F(1,255) = 1,639$; $p = 0,202$) и финалном мерењу ($F(1,255) = 0,315$; $p = 0,575$) показује да претпоставка о хомогености варијансе није прекршена и да се резултат добијен анализом варијансе може сматрати веродостојним. Вредност израчунате варијансе на иницијалном мерењу ($F(1,255) = 1,275$; $p = 0,260$) показује да не постоји статистички значајна разлика између група. Насупрот томе, резултат анализе варијансе на финалном мерењу ($F(1,255) = 30,237$; $p = 0,000$) показује да између групе ученика који су радили у складу са принципима контекстуалног приступа и ученика који су радили према устаљеном начину рада постоје статистички значајне разлике. Ако се у обзир узму резултати дескриптивне статистике изнад, можемо рећи да су ученици из експерименталне групе постигли статистички значајно боље резултате у односу на ученике из контролне групе. Резултати које смо добили су у складу са нашом претпоставком да се контекстуалним приступом у настави математике може утицати на развијање способности разумевања функционалне зависности између компонената рачунских операција.

Како би били сигурни у веродостојност добијених резултата и отклонили сумњу да су настале разлике резултат неуједначености група, искористили смо анализу коваријансе (ANCOVA) којом смо истражили утицај експерименталног програма на постигнућа ученика у разумевању функционалне зависности. Левеновим тестом једнакости варијансе смо утврдили да је задовољена претпоставка о једнакости варијансе ($F(1,255) = 0,75$; $p = 0,388$) (Табела 47).

Табела 47. *Левенов тест једнакости варијансе*

Зависна варијабла: Финално мерење разумевања функционалне зависности

F	df1	df2	Sig.
0,749	1	255	0,388

Tests the null hypothesis that the error variance of the dependent variable is equal across groups.

a. Design: Intercept + FunkcZav1 + Grupa

Након уклањања коваријата (Табела 48), утврдили смо да постоје статистички значајне разлике између експерименталне и контролне групе у финалном мерењу разумевања функционалне зависности ($F(1,254) = 107, 205$; $p = 0,000$). Парцијални ета квадрат у овом случају износи 0,30 што показује велики утицај. То значи да 30% варијансе у финалном мерењу можемо објаснити независном променљивом (група). Поред тога, овде се може уочити и статистички значајна разлика између група у иницијалном и финалном мерењу ($F(1,254) = 418,88$; $p = 0,000$). У овом случају парцијални ета квадрат чија је вредност 0,623 показује да постоји значајна веза између иницијалног мерења (коваријата) и финалног мерења ове способности када се отклони утицај независне променљиве (групе). Чак 62,3% варијансе објашњено је зависној променљивој.

Табела 48. *Анализа коваријансе у развијању способности функционалне зависности*

Зависна варијабла: Финално мерење

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.	Partial Eta Squared
Corrected Model	1286,638[a]	2	643,319	249,333	0,000	0,663
Intercept	452,155	1	452,155	175,243	0,000	0,408
Иницијално мерење	1080,774	1	1080,774	**418,878**	**0,000**	**0,623**
Група	276,606	1	276,606	**107,205**	**0,000**	**0,297**
Error	655,362	254	2,580			
Total	11194,000	257				
Corrected Total	1942,000	256				

a. R Squared = 0,663 (Adjusted R Squared = 0,660)

Добијени резултати показују да су ученици експерименталне групе постигли боље резултате у односу на ученике контролне групе. Контекстуалним приступом у задацима омогућили смо да ученици потпуније сагледају односе који постоје између различитих компонената проблема. Примером свакодневног живота ученици су у ситуацији да тестирају компоненте рачунских операција и логички закључују о њиховим односима и величинама.

Истраживање Пинто и Кањадас (Pinto & Cañadas, 2017) показало је да су ученици трећег разреда основне школе способни да развијају функционално мишљење и генерализацију кроз употребу контекстуализованог проблема, што се поклапа са налазима у нашем истраживању. Развој генерализација повезан је са развојем функционалног мишљења, па се самим тим на конкретним примерима свакодневног живота формирају предвиђања, олакшице или законитости у извођењу рачунских операција. Када ученик разуме односе између компонената рачунских операција биће у стању да размишља на вишем нивоу апстракције, тако да буде способан да исте те односе генерализује и изрази специфичним језиком алгебре користећи симболе. Са друге стране ученик који има изграђену ову способност у стању је исту да примени у ситуацијама реалног живота из којих је и развијен.

У истраживању смо желели да испитамо и да ли контекстуални приступ у настави математике на садржајима алгебре остварује подједнаке ефекте код ученика без обзира на пол, општи успех и оцену из математике. Из тог разлога ћемо анализирати утицај ових варијабли на развијање способности разумевања функционалне зависности између компонената рачунских операција.

2.2.1. Утицај контекстуалног приступа на развијање способности разумевања функционалне зависности између компонената рачунских операција у зависности од пола ученика

Резултати добијени на иницијалном мерењу развијености способности разумевања функционалне зависности између компонената рачунских операција (Табела 49) показују да су дечаци у контролној групи ($M = 5,66$; $SD = 2,96$) постигли нешто боље резултате у односу на дечаке из експерименталне групе ($M = 5,18$; $SD = 3,30$) (Табела 32). На иницијалном мерењу девојчице су постигле нешто лошије резултате у односу на дечаке. Девојчице су у мерењу способности разумевања функционалне зависности између компонената рачунских операција у контролној групи (M = 4,58; SD = 2,63) такође постигле боље резултате у односу на девојчице у експерименталној групи (M = 4,29; SD = 2,84). На основу добијених резултата приказаних у Табели 32 можемо уочити да су на финалном мерењу дечаци у експерименталној групи (M = 7,18; SD = 2,36) у просеку постизали боље резултате у односу на дечаке у контролној групи (M = 5,46; SD = 2,84). Слична ситуација је и са девојчицама. Девојчице које су биле под утицајем експерименталног програма (M = 6,62; SD = 2,61) постизале су просечно боље резултате у односу на девојчице које су учествовале у класичној настави (M = 4,71; SD = 2,53).

Табела 49. *Постигнућа ученика у разумевању функционалне зависности између компонената рачунских операција у односу на пол*

		Иницијално мерење		Финално мерење		Укупно
Група	Пол	M	SD	M	SD	N
Експериментална група	Дечаци	5,18	3,30	7,18	2,36	62
	Девојчице	4,29	2,83	6,62	2,61	68
	Укупно	4,72	3,09	6,88	2,50	130
Контролна група	Дечаци	5,66	2,96	5,46	2,84	65
	Девојчице	4,58	2,63	4,71	2,53	62
	Укупно	5,13	2,85	5,09	2,71	127
Укупно	Дечаци	5,43	3,13	6,30	2,75	127
	Девојчице	4,43	2,73	5,71	2,74	130
	Укупно	4,92	2,97	6,00	2,75	257

Вредност Левеновог теста (F(3,253) = 1,113; p = 0,344), показује да су варијације једнаке и да претпоставка о њиховој једнакости није нарушена (Табела 50).

Табела 50. *Левенов тест једнакости варијансе*

Зависна варијабла: Финално мерење

F	df1	df2	Sig.
1,113	3	253	0,344

Tests the null hypothesis that the error variance of the dependent variable is equal across groups.
a. Design: Intercept + FunkcZav1 + Grupa + Pol + Grupa * Pol

Када се изостави утицај коваријата (резултати иницијалног мерења) утврдили смо да не постоји статистички значајан утицај интеракције између групе и пола ученика на резултате финалног мерења ((F(1,252) = 0,019; p = 0,891) (Табела 51). Вредност ета квадрата у овом случају 0,000 показује да независна променљива (пол и група) не утичу на варијансу у финалном мерењу разумевања функционалне зависности између компонената рачунских операција.

Табела 51. *Двофакторска анализа коваријансе постигнућа ученика у разумевању функционалне зависности између компонената рачунских операција у односу на пол*

Зависна варијабла: Финално мерење

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.	Partial Eta Squared
Corrected Model	1286,729[a]	4	321,682	123,710	0,000	0,663
Intercept	440,905	1	440,905	169,560	0,000	0,402
Иницијално мерење	1052,764	1	1052,764	404,865	0,000	0,616
Група	276,167	1	276,167	106,206	0,000	0,296
Пол	0,041	1	0,041	**0,016**	**0,900**	**0,000**
Група * Пол	0,048	1	0,048	**0,019**	**0,891**	**0,000**
Error	655,271	252	2,600			
Total	11194,000	257				
Corrected Total	1942,000	256				

a. R Squared = 0,663 (Adjusted R Squared = 0,657)

Коваријанса измерена на финалном мерењу између дечака и девојчица (F(1,252) = 0,016; p = 0,900), када се изостави утицај резултата иницијалног мерења, показује да не постоји статистички значајна разлика. Парцијални ета квадрат, у овом случају, показује да у зависној промењљивој нема дела варијансе који је објашњен полом ученика као зависном промењљивом.

У Прилогу 12 су дате кориговане средње вредности резултата финалног теста за сваку групу, за сваку независну промењљиву посебно, а затим и заједно како би се доказала поузданост претходних тврђења.

На основу добијених вредности у анализи резултата истраживања можемо закључити да не постоји статистичка зависност између резултата финалног мерења и пола ученика у разумевању функционалне зависности између компонената рачунских операција. Добијени резултати су показали да је евидентан напредак и дечака и девојчица у разумевању промене резултата рачунских операција у зависности од промене њених компонената, под утицајем контекстуалног приступа. Дакле, уношењем проблема реалног света у задатке алгебре и обрада садржаја заснована на контекстуалном приступу утичу подједнако на способност и дечака и девојчица у разумевању везе која постоји између компонената рачунских операција. Евидентно је дакле да се код ученика под утицајем контекстуалног приступа у проблемима реалног контекста у садржајима алгебре, кроз процесе математизације може утицати на развој способност разумевања односа и међусобне зависности која постоји између промењљивих.

2.2.2. Утицај контекстуалног приступа на развијање способности разумевања функционалне зависности између компонената рачунских операција у зависности од општег успеха ученика

Резултати иницијалног мерења показују да су ученици из контролне групе показали боље резултате у разумевању функционалне зависности између компонената рачунских операција у свим групама у односу на ученике из експерименталне групе. Тако ученици из контролне групе са успехом *одличан* (M = 6,59; SD = 2,35), показују боље резултате у односу на ученике са истим општим успехом из експерименталне групе (M = 6,03; SD = 2,93) (Табела 52). Сличан однос постоји и ако се у обзир узму резултати ученика са успехом *врло добар*, при чему су такође ученици из контролне групе (M = 4,05; SD = 2,65) показали значајно боље резултате у односу на ученике експерименталне групе (M = 2,86; SD = 2,27). Најслабије резултате у развијености функционалне зависности показали су ученици са успехом *добар*, при чему су такође ученици контролне групе (M = 2,96; SD = 2,18) у просеку постигли нешто боље резултате у односу на ученике експерименталне групе (M = 2,64; SD = 1,96).

На основу резултата финалног мерења способности разумевања функционалне зависности између компонената рачунских операција (Табела 52) дошли смо до закључка да су најбоље просечне резултате постигли ученици са успехом *одличан* и то у експерименталној групи (M = 8,17; SD = 1,99) и контролној групи (M = 6,66; SD = 2,15). Ученици са општим успехом *врло добар* из експерименталне групе (M = 5,26; SD = 1,94) су постигли боље резултате у односу на ученике експерименталне групе (M = 4,03; SD = 2,11). Када су у питању ученици са општим успехом *добар*, морамо рећи такође да су успешнији ученици из експерименталне групе (M = 4,09; SD = 1,76) у односу на ученике контролне групе (M = 2,61; SD = 2,33).

Тестирањем ученика експерименталне и контролне групе добили смо резултате који указују да су сви ученици експерименталне групе, без обзира на успех, постигли напредак под утицајем експерименталног програма у односу на ученике контролне групе. На основу ових резултата можемо рећи да је најмањи напредак евидентан код ученика из експерименталне групе са општим успехом *одличан*, при чему су разлике у просечним резултатима финалног тестирања ове способности најмањи. Ако се у обзир узму просечни резултати финалног тестирања ове способности код експерименталне, највећи напредак остварили су управо ученици са најлошијим општим успехом *добар*. На основу ових резултата можемо закључити да је контекстуални приступ, кога одликују реалистичне ситуације свакодневног живота и процеси математизације, више одговарао слабијим ученицима у разумевању функционалне зависности између компонената рачунских операција.

Табела 52. *Постигнућа ученика у разумевању функционалне зависности између компонената рачунских операција у односу на општи успех*

		Иницијално мерење		Финално мерење		Укупно
Група	Успех	M	SD	M	SD	N
Експериментална група	Добар	2,64	1,96	4,09	1,76	11
	Врло добар	2,86	2,27	5,26	1,94	42
	Одличан	6,03	2,93	8,17	1,99	77
	Укупно	4,72	3,09	6,88	2,50	130
Контролна група	Добар	2,96	2,18	2,61	2,33	23
	Врло добар	4,05	2,65	4,03	2,11	40
	Одличан	6,59	2,35	6,66	2,15	64
	Укупно	5,13	2,85	5,09	2,71	127
Укупно	Добар	2,85	2,09	3,09	2,25	34
	Врло добар	3,44	2,52	4,66	2,10	82
	Одличан	6,28	2,69	7,48	2,19	141
	Укупно	4,92	2,97	6,00	2,75	257

Вредност Левеновог теста (F(5,251) = 1,661; p = 0,144) показује да није нарушена претпоставка о једнакости варијансе (Табела 53).

Табела 53. *Левенов тест хомогености групе*

Зависна промењива: Финално мерење

F	df1	df2	Sig.
1,661	5	251	0,144

Tests the null hypothesis that the error variance of the dependent variable is equal across groups.
a. Design: Intercept + FunkcZav1 + Grupa + Uspeh + Grupa * Uspeh

Када смо у двофакторској анализи коваријансе (Табела 54) уклонили утицај коваријата (резултата иницијалног мерења разумевања функционалне зависности између компонената рачунских операција) дошли смо до закључка да не постоји статистички значајан утицај независне промењиве (групе и успеха) на резултате финалног мерења ове способности (F(2,250) = 0,077; p = 0,926). Вредност парцијалног ета квадрата говори нам да је само 0,1% варијансе зависне промењиве (резултата финалног тестирања) објашњено интеракцијом групе и успеха.

Поред тога, резултати показују да постоји статистички значајан утицај успеха на резултате финалног мерења способности разумевања функционалне зависности између компонената рачунских операција, ако се уклони утицај коваријансе (резултата иницијалног мерења) (F(2,250) = 24,139; p = 0,000) (Табела 54). Вредност парцијалног ета квадрата износи 0,162, што према Коену (Cohen, 1988) представља велики утицај. На основу свега тога можемо закључити да се постигнуће ученика у финалном мерењу разликује у односу на општи успех ученика, односно сви ученици, без обзира на успех, показују напредак у разумевању функционалне зависности између компонената рачунских операција.

Табела 54. *Двофакторска анализа коваријансе постигнућа ученика у разумевању функционалне зависности између компонената рачунских операција у односу на општи успех*

Зависна промењљива: Финално мерење

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.	Partial Eta Squared
Corrected Model	1394,430[a]	6	232,405	106,107	0,000	0,718
Intercept	461,340	1	461,340	210,631	0,000	0,457
Иницијално мерење	521,154	1	521,154	237,939	0,000	0,488
Група	136,350	1	136,350	62,252	0,000	0,199
Успех	105,741	2	52,870	**24,139**	**0,000**	**0,162**
Група *Успех	0,336	2	0,168	**0,077**	**0,926**	**0,001**
Error	547,570	250	2,190			
Total	11194,000	257				
Corrected Total	1942,000	256				

a. R Squared = 0,718 (Adjusted R Squared = 0,711)

У Прилогу 13 израчунали смо и кориговане средње вредности резултата финалног мерења разумевања функционалне зависности између компонената рачунских операција, за сваку групу ученика различитог успеха као и интеракције групе и успеха ученика.

На основу добијених резултата о ефектима учења садржаја алгебре контекстуалним приступом у настави математике у млађим разредима основне школе можемо рећи да постоји позитиван утицај овог приступа на побољшање ученичког постигнућа у разумевању функционалне зависности. Поред тога, оваквим приступом се у настави ране алгебре, без обзира на општи успех, подстиче напредак у разумевању способности разумевања функционалне зависности резултата рачунских операција од промене његових компонената. Као што можемо видети, овакав приступ садржајима ране алгебре позитивно утиче на ученике и са општим успехом *добар*, као и ученике који имају општи успех *врло добар* и *одличан*, тако да су ефекти оваквог приступа у овом смислу без ограничења у развијању функционалне зависности резултата од промене компонената рачунских операција. Контекстуалним приступом смо у ситуацији да у примерима свакодневног живота мењамо количинске односе и процесима математизације кроз употребу модела, на очигледан начин ученицима приближимо ефекте тих промена. Реалистичним контекстом успели смо да привучемо пажњу и мотивишемо и ученике са слабијим, као и ученике са бољим општим успехом, тако да су ефекти оваквог приступа у развијању ове способности евидентни, и то посебно код ученика са слабијим општим успехом. То можемо објаснити чињеницом да је класична настава алгебре у садржајима о зависности највише усмерена на симболику и да се мало пажње поклања реалном контексту помоћу ког се ови сложени односи и зависност могу објаснити.

2.2.3. *Утицај контекстуалног приступа на развијање способност разумевања функционалне зависности између компонената рачунских операција у зависности од оцене коју ученик има из математике*

Резултати иницијалног мерења показују да су ученици контролне групе били нешто успешнији на мерењу развијености способности разумевања функционалне зависности у односу на ученике експерименталне групе (Табела 55). Тако су ученици са оценом *одличан* (5) из контролне групе (M = 6,94; SD = 2,43) били успешнији у односу на ученике из експерименталне групе (M = 6,45; SD = 2,94). Исти случај је и са ученицима са оценом *врло добар* (4), при чему су поново ученици из контролне групе (M = 5,14; SD = 2,36) постигли већи број поена у просеку у односу на ученике експерименталне групе (M = 4,27; SD = 2,75). Ученици са успехом *добар* (3) из контролне групе (M = 2,81; SD = 2,30) такође су постигли нешто боље резултате у односу на ученике експерименталне групе (M = 2,56; SD = 1,93). Најслабије резултате у мерењу ове способности постигли су очекивано ученици са оценом *довољан* (2), при чему су ученици контролне групе (M = 2,70; SD = 1,34) били бољи у односу на ученике експерименталне групе (M = 2,50; SD = 1,90). Ако се у обзир узме чињеница да су ученици у овом тесту могли да освоје максимално 10 поена, то значи да је ова способност била слабо развијена код ученика обе групе, јер су само ученици са оценом *одличан* (5) из контролне и експерименталне групе и ученици са оценом *врло добар* (4) показали резултате изнад просека на иницијалном мерењу.

На основу добијених резултата финалног мерења (Табела 55) можемо уочити да су ученици у експерименталној групи постигли значајно боље резултате у односу на ученике са истом оценом из контролне групе. Утицај експерименталног програма је очигледан тако да су најбоље просечне резултате у мерењу способности разумевања функционалне зависности постигли ученици са оценом *одличан* (5) и то у експерименталној групи (M = 8,54; SD = 1,57) и у контролној групи (M = 6,94; SD = 2,17). Када је реч о ученицима који имају оцену *врло добар* (4), у експерименталној групи (M = 6,65; SD = 2,50) ученици су постигли боље резултате у односу на ученике контролне групе (M = 5,05; SD = 2,06). Ученици који имају оцену *добар* (3) из математике у експерименталној групи су постигли просечно боље резултате (M = 4,85; SD = 1,70) у односу на ученике са истом оценом у контролној групи (M = 3,19; SD = 2,30). Најлошије просечне резултате у мерењу ове способности су постигли ученици са оценом *довољан* (2), и то у експерименталној групи (M = 4,00; SD = 1,63) у односу на контролну групу (M = 1,60; SD = 1,07).

Очигледан је значајан напредак ученика експерименталне групе (без обзира на оцену). Ученици у експерименталној групи постигли су значајно боље резултате у односу на ученике контролне групе. Највећа разлика у просеку освојених поена је код ученика са оценом *Довољан* (2), при чему су ученици у експерименталној групи просечно постизали значајно већи број поена, у односу на ученике са истом оценом из контролне групе. При том је иста група ученика из експерименталне групе просечно постизала већи број поена у мерењу ове способности у односу на ученике са оценом *Добар* (3) у контролној групи.

Табела 55. *Постигнућа ученика у способности разумевања функционалне зависности између компонената рачунских операција у односу на оцену из математике*

		Иницијално мерење		Финално мерење		Укупно
Група	Оцена	M	SD	M	SD	N
Експериментална група	Довољан (2)	2,50	1,90	4,00	1,63	10
	Добар (3)	2,56	1,93	4,85	1,70	27
	Врло добар (4)	4,27	2,75	6,65	2,50	37
	Одличан (5)	6,45	2,94	8,54	1,57	56
	Укупно	4,72	3,09	6,88	2,50	130
Контролна група	Довољан (2)	2,70	1,34	1,60	1,07	10
	Добар (3)	2,81	2,30	3,19	2,30	27
	Врло добар (4)	5,14	2,36	5,05	2,06	42
	Одличан (5)	6,94	2,43	6,94	2,17	48
	Укупно	5,13	2,85	5,09	2,71	127
Укупно	Довољан (2)	2,60	1,60	2,80	1,82	20
	Добар (3)	2,69	2,11	4,02	2,18	54
	Врло добар (4)	4,73	2,58	5,80	2,40	79
	Одличан (5)	6,67	2,71	7,80	2,03	104
	Укупно	4,92	2,97	6,00	2,75	257

Да би смо утврдили хомогеност варијансе, урадили смо Левенов тест који је показао вредност F = 1,233 за вредност p = 0,285 (Табела 56). На основу добијене вредности можемо закључити да је потврђена претпоставка о хомогености варијансе, тако да се може урадити двофакторска анализа коваријансе између променљивих у мерењу ове способности ученика.

Табела 56. *Левенов тест хомогености варијансе*

Зависна варијабла: Финално мерење

F	df1	df2	Sig.
1,233	7	249	0,285

Tests the null hypothesis that the error variance of the dependent variable is equal across groups.
a. Design: Intercept + FunkcZav1 + Grupa + Ocena + Grupa * Ocena

Двофакторска анализа коваријансе постигнућа ученика (Табела 57), у разумевању функционалне зависности између компонената рачунских операција, када се уклони утицај коваријата (иницијално мерење разумевања функционалне зависности) показала је да не постоји значајан утицај интеракције групе (начина рада) и оцене из математике на резултате финалног мерења ове способности (F(3,248) = 0,358; p = 0,783). Вредност парцијалног ета квадрата износи 0,004, што значи да је утицај занемарљив, јер се само 0,4% варијансе у финалном мерењу ове способности је објашњено независном варијаблом (интеракција начина рада и оцене).

Када се отклони утицај иницијалног мерења способности разумевања функционалне зависности, можемо закључити да не постоји статистички значајан утицај оцене на постигнуће ученика на финалном мерењу ове способности (F(3,248) = 18,282; p = 0,000). То значи да је контекстуални приступ у настави алгебре утицао на исти начин на ученике без обзира на оцену коју имају из математике, односно не може се рећи да је овакав приступ више одговарао одређеној групи ученика. Вредност парцијалног ета квадрата показује да се 18,1% варијансе финалног мерења може објаснити утицајем оцене из математике.

Табела 57. *Двофакторска анализа коваријансе постигнућа ученика у способности разумевања функционалне зависности између компонената рачунских операција у односу на оцену из математике*

Зависна варијабла: Финално мерење

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.	Partial Eta Squared
Corrected Model	1407,123[a]	8	175,890	81,553	0,000	0,725
Intercept	461,514	1	461,514	213,985	0,000	0,463
Иницијално мерење	468,083	1	468,083	217,031	0,000	0,467
Група	187,052	1	187,052	86,728	0,000	0,259
Оцена	118,291	3	39,430	**18,282**	**0,000**	**0,181**
Група * Оцена	2,318	3	0,773	**0,358**	**0,783**	**0,004**
Error	534,877	248	2,157			
Total	11194,000	257				
Corrected Total	1942,000	256				

a. R Squared = 0,725 (Adjusted R Squared = 0,716)

У Прилогу 14 смо израчунали кориговане средње вредности зависне промењљиве за сваку од група (у односу на оцене из математике), тако што је приказана вредност за сваку независну промењљиву посебно, а затим и заједно.

На крају можемо закључити да се оваквим приступом у настави ране алгебре може позитивно утицати на ученичко постигнуће у схватању функционалне зависности између компонената рачунских операција, без обзира на оцену коју они имају из математике. Напредак је очигледан ако се упореде резултати контролне и експерименталне групе и то за ученике сваке групе формиране на основу оцене коју имају из математике.

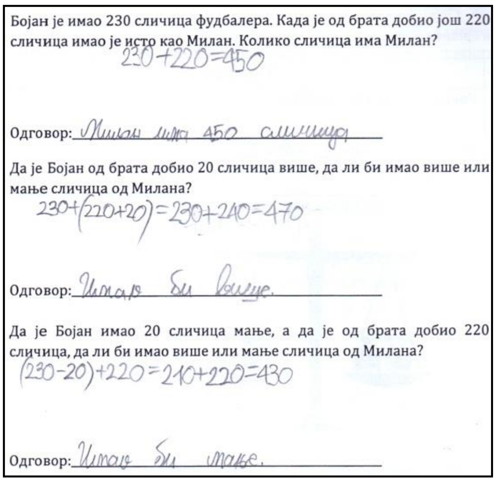
Овај садржај је поприлично апстрактан ученицима млађег школског узраста па се они труде врло често да механички науче ове односе и зависности, никада не размишљајући суштински о значају и повезаности резултата и компонената рачунских операција. Реалистичким контекстом ученици су у стању да разумеју односе и увиде ситуације, које им могу помоћи да знања не уче чисто механички, већ да иста могу употребити у ситуацији свакодневног живота. Потпуним разумевањем функционалних односа између резултата и компонената рачунских операција ствара се плодно тло за апстрактније форме алгебре са којима ће ученик бити у ситуацији да се сусреће у будућности. Резултати су показали и да оцена није фактор који ће представљати ограничење у примени контекстуалног приступа у настави ране алгебре. Дакле, ово истраживање је показало да ученици који имају оцену *довољан* (2) напредују на сличан начин као и ученици са оценом *одличан* (5), под утицајем приступа кога карактерише реални контекст свакодневног живота и процеси математизације који обликују тај контекст.

Наше истраживање показало је да је контекстуалним приступом могуће утицати на ученике како би они развили специфичан начин размишљања, кога одликује анализирање и уочавање веза између промењљивих, као и способност генерализације и уопштавања тих веза.

Како бисмо илустровали различите приступе ученика у решавању задатака који осликавају начин на који ученик размишља у процесу учења ових садржаја навешћемо неколико примера решења задатака који се односе на способност разумевања функционалне зависности и функционалног мишљења.

У Примеру 45 решења задатка са иницијалног тестирања може се уочити да је ученик тачно решио задатак, али да у поступку решавања није користио својство зависности збира од промене сабирака.

Пример 45. Задатак са сличицама – иницијални тест



Бојан је имао 230 сличица фудбалера. Када је од брата добио још 220 сличица имао је исто као Милан. Колико сличица има Милан?

230+220=450

Одговор: Милан има 450 сличица

Да је Бојан од брата добио 20 сличица више, да ли би имао више или мање сличица од Милана?

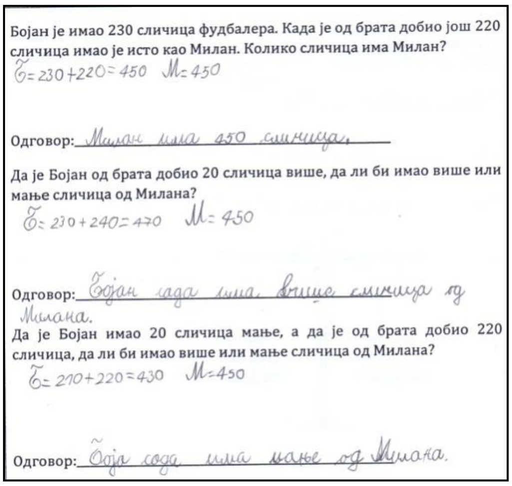
230+(220+20)=230+240=470

Одговор: Имао би више.

Да је Бојан имао 20 сличица мање, а да је од брата добио 220 сличица, да ли би имао више или мање сличица од Милана?

(230-20)+220=210+220=430

Одговор: Имао би мање.



Бојан је имао 230 сличица фудбалера. Када је од брата добио још 220 сличица имао је исто као Милан. Колико сличица има Милан?

Б=230+220=450 М=450

Одговор: Милан има 450 сличица.

Да је Бојан од брата добио 20 сличица више, да ли би имао више или мање сличица од Милана?

Б=230+240=470 М=450

Одговор: Бојан сада има више сличица од Милана.

Да је Бојан имао 20 сличица мање, а да је од брата добио 220 сличица, да ли би имао више или мање сличица од Милана?

Б=210+220=430 М=450

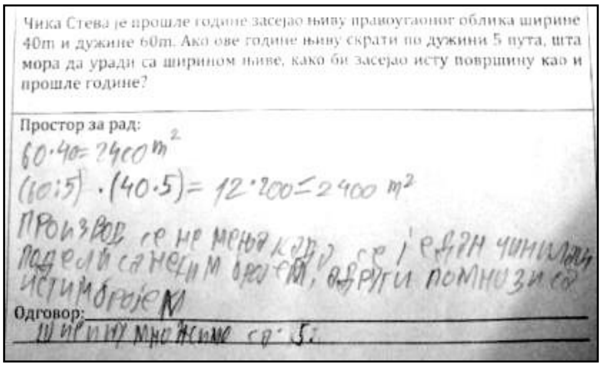
Одговор: Боја сада има мање од Милана.

У овом примеру решења ученик се не ослања на правило зависности збира од промене сабирака, већ се ослања на њему близак, аритметички начин решавања задатака. Ученик на овај начин у процесу решавања задатка сигуран у тачност резултата, при чему није у стању да сагледа дубље односе који постоје између података који су дати у задатку. Нетачна решења овог задатка у истраживању најчешће су подразумевала неспособност ученика да сагледа односе дате у облику реалног контекста.

Следећи примери (Пример 46) указују на то да ученици под утицајем експерименталног програма показују одлике функционалног мишљења. Заправо, ученици су у стању да разумеју односе између променљивих у ситуацијама и садржајима који нису искључиво алгебарски.

Пример 46. Задатак са чика Стевином њивом – финални тест

а)



Чика Стева је прошле године засејао њиву правоугаоног облика ширине 40m и дужине 60m. Ако ове године њиву скрати по дужини 5 пута, шта мора да уради са ширином њиве, како би засејао исту површину као и прошле године?

Простор за рад:

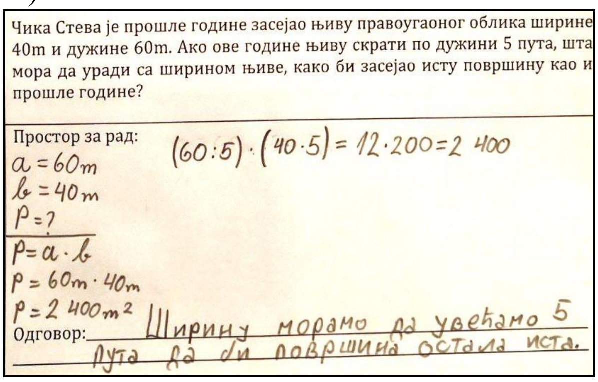
60·40=2400 m²

(60:5)·(40·5)=12·200=2400 m²

Производ се не мења када се један чинилац подели са неким бројем, а други помнози са истим бројем

Одговор: Ширину множимо са 5.

б)



Чика Стева је прошле године засејао њиву правоугаоног облика ширине 40m и дужине 60m. Ако ове године њиву скрати по дужини 5 пута, шта мора да уради са ширином њиве, како би засејао исту површину као и прошле године?

Простор за рад:

(60:5)·(40·5)=12·200=2 400

a=60m

b=40m

P=?

P=a·b

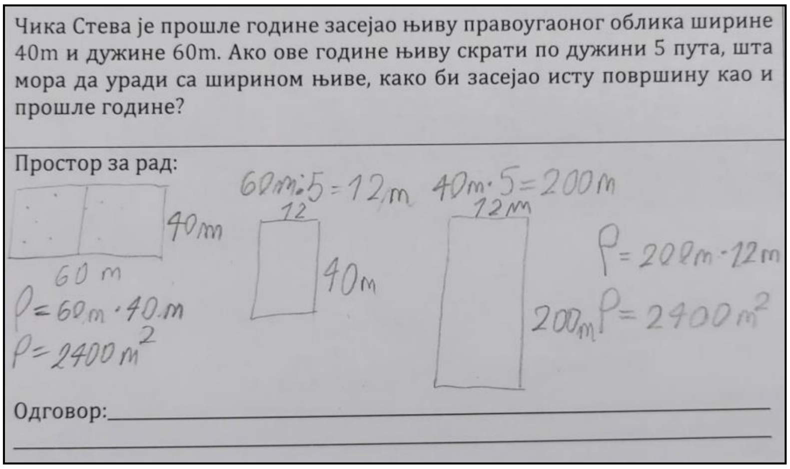
P=60m·40m

P=2 400m²

Одговор: Ширину морамо да увећамо 5 пута да би површина остала иста.

Решења ученика, у примерима изнад, показују потпуно разумевање функционалне зависности. Ученици разумеју промене исказане у облику реалног контекста и исте умеју да образложе и докажу математичким путем. При том они наводе правило сталности производа у облику једнакости или помоћу речи. Решавање задатака овог типа указује и на значај вишеструких репрезентација једног истог проблема. На овај начин ученици су у ситуацији да стварају и користе и различите моделе у процесу математизације који им омогућавају да лакше уоче односе и разумеју функционалне односе у проблему (Пример 47).

Пример 47. Задатак са чика Стевином њивом – финални тест



Чика Стева је прошле године засејао њиву правоугаоног облика ширине 40m и дужине 60m. Ако ове године њиву скрати по дужини 5 пута, шта мора да уради са ширином њиве, како би засејао исту површину као и прошле године?

Простор за рад:

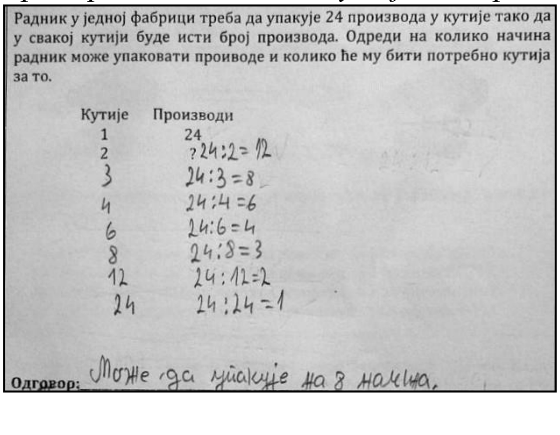
40m
60 m
P=60m·40m
P=2400m²
60m:5=12m 40m·5=200m
12
40m
12m
200m
P=200m·12m
P=2400m²

Одговор:

Значај вишеструких репрезентација математичког појма посебно истичу Ракоњац и Милинковић (2019) у свом истраживању, при чему сматрају да се различитим репрезентацијама математичких појмова може утицати на препознавање алгебарских репрезентација и идеја еквивалентних геометријским, као и представа и законитости између квантитативних варијабли. У нашем истраживању одговор ученика у примеру а) (Пример 46) показује конкретну примену наученог правила у ситуацији која је природно блиска ученику. Ученик није само савладао правило, већ је разумео и дубље суштинско својство односа између компонената, које препознаје у нетипичним ситуацијама. Можемо рећи да ученици, без обзира на то што умеју да примене правило и разумеју функционалну зависност у решавању задатака, ипак рачунају како би били сигурни у закључак и решење до кога су дошли. До сличних резултата дошао је и Ракоњац (2018) са ученицима четвртог разреда основне школе, у истраживању које је имало за циљ да испита у којој мери функционална зависност између величина утиче на успешност у решавању задатака у настави математике. Резултати тог истраживања показали су да је анализа математичких објеката са релацијског аспекта од великог значаја за успешно решавање задатака. На основу ових резултата аутор закључује да „анализа функционалних веза између величина представља вид подршке у решавању математичких проблема везаних за препознавање и зависност између променљивих величина“ (Ракоњац, 2018: 2013).

Поред тога, ученици експерименталне групе су у финалном тесту показали способност разумевања функционалних односа између променљивих, при чему су умели да искористе табелу која им је дата како би организовали податке (Пример 48).

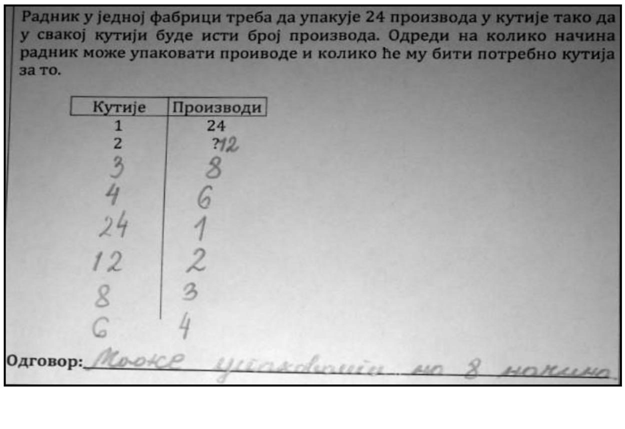
Пример 48. Задатак са кутијама – финални тест



Радник у једној фабрици треба да упакује 24 производа у кутије тако да у свакој кутији буде исти број производа. Одреди на колико начина радник може упаковати проиводе и колико ће му бити потребно кутија за то.

Кутије	Производи
1	24
2	?24:2=12
3	24:3=8
4	24:4=6
6	24:6=4
8	24:8=3
12	24:12=2
24	24:24=1

Одговор: Може да упакује на 8 начина.



Радник у једној фабрици треба да упакује 24 производа у кутије тако да у свакој кутији буде исти број производа. Одреди на колико начина радник може упаковати проиводе и колико ће му бити потребно кутија за то.

Кутије	Производи
1	24
2	?12
3	8
4	6
24	1
12	2
8	3
6	4

Одговор: Може упаковати на 8 начина

На основу решења (Пример 48) можемо закључити да су ученици показали потпуно разумевање функционалних односа у смислу односа између броја кутија и производа који се могу упаковати у њих. Коришћењем таблице постиже се очигледност која постоји између бројева, што омогућује да се једноставније увиде односи између променљивих. Схватањем односа између променљивих ученици су у ситуацији да организују и систематизују податке на другачији начин у облику таблице. Значај коришћења таблица у настави алгебре је велики, јер се на очигледан начин могу представити односи између величина, као и уочити функционална зависност између њих (Brizuela & Lara-Roth, 2001; Blanton & Kaput, 2004). Са друге стране, истраживање Шлимана и сарадника (Schliemann, Carraher & Brizuela, 2001) показало је да ученици могу имати потешкоћа у фокусирању на вредности у ступцима табела које изражавају функционалну зависност, али и да се финим променама у структури табела може помоћи у развоју њихове способност разумевања функционалне зависности између променљивих. Навикавање на табеле од најранијег школског узраста омогућава касније лакше уочавање односа и развој функционалног мишљења и разумевања функционалне зависности између променљивих.

Резултати које смо добили у нашем истраживању потврдили су претходне налазе Блантона и Капута (Blanton & Kaput, 2011), који у свом истраживању закључују да се наставни материјали и свакодневне активности у школи које су блиске искуству ученика могу обликовати тако да подрже развој функционалног мишљења ученика. Кључну улогу у том процесу треба да имају учитељи који треба да препознају те ситуације и да их искористе и обликују за потребе наставе како би приближили апстрактне алгебарске појмове ученику. Наша идеја је да у том процесу значајну улогу мора да има реални контекст који ће процесима хоризонталне и вертикалне математизације, кроз употребу модела, омогућити потпуније и смисленије усвајање знања али и развој алгебарских способности.

Ово истраживање је показало да су ученици из експерименталне групе показали разумевање функционалне зависности, што се може закључити на основу постигнућа на финалном тестирању, али и начину на који су решавали задатке. Овакви резултати показују да контекстуални приступ може бити од користи у настави алгебре у млађим разредима основне школе у развоју функционалног мишљења ученика и да ситуације реалног живота и различити математички модели могу подржати развој функционалног мишљења као дела ширег алгебарског резоновања. Поред тога, резултати показују да су ученици напредовали под утицајем контекстуалног приступа без обзира на разлике које постоје између њих у односу на пол, оцену из математике или општи успех ученика. То све говори у корист контекстуалном приступу као јединственом процесу кога карактерише висок степен ефикасности у учењу и настави садржаја алгебре.

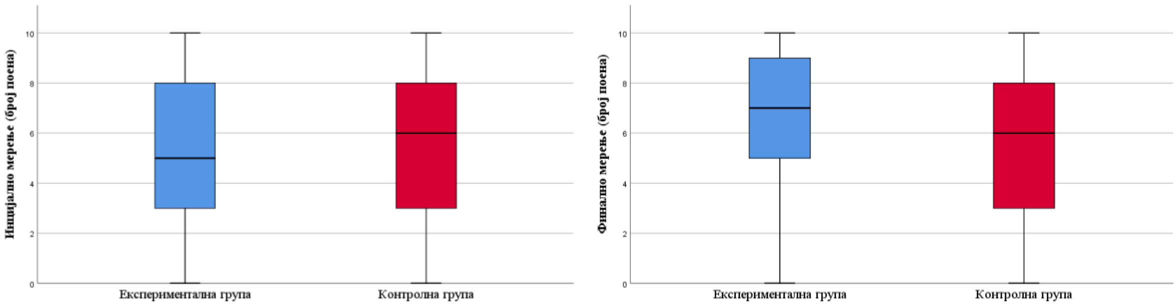
2.3. Утицај контекстуалног приступа на развијање способности уочавања функционалних односа на графикону, табели или слици

Један од задатака овог истраживања био је да се утврде ефекти контекстуалног приступа у настави алгебре на млађем школском узрасту, на способност уочавања функционалних односа на графикону, табели или слици. Анализа резултата развијености способности уочавања функционалних односа на графикону табели или слици (Табела 58) показала је да је контролна група на иницијалном мерењу просечно показала нешто боље резултате (M = 5,70; SD = 2,99) у односу на експерименталну групу (M = 5,55; SD = 3,13) (Табела 41). Ако се у обзир узме чињеница да је сваки ученик могао постићи максимално 10 поена, можемо рећи да су резултати обе групе око просека.

Табела 58. *Постигнуће ученика експерименталне и контролне групе у способности уочавања функционалних односа на графикону, табели или слици*

		N	M	SD
Иницијално мерење	Експериментална група	130	5,55	3,14
	Контролна група	127	5,70	2,99
Финално мерење	Експериментална група	130	6,75	2,52
	Контролна група	127	5,67	3,03

Резултати финалног мерења, показали су да је експериментална група под утицајем експерименталног програма значајно напредовала у просечном броју поена (M = 6,75; SD = 2,52), док је контролна група постигла за нијансу лошије резултате него на иницијалном мерењу (M = 5,67; SD = 3,03) (Табела 58, Графикон 5). Дакле, ученици из експерименталне групе су напредовали под утицајем контекстуалног приступа у садржајима алгебре, док су ученици који су радили према класичној настави чак у одређеној мери назадовали у овој способности.



ГГрафикон 5. *Постигнуће ученика експерименталне и контролне групе у способности уочавања функционалних односа на графикону, табели или слици*

Како бисмо утврдили да ли постоје статистички значајне разлике у развијености способности уочавања функционалних односа на графикону, табели или слици користили смо анализу варијансе (Табела 59).

Табела 59. *Анализа варијансе иницијалног и финалног мерења способности уочавања функционалних односа на графикону, табели или слици*

	Levene Statistic	df1	df2	Sig.
Иницијално мерење	0,236	1	255	0,627
Финално мерење	1,062	1	255	0,926

		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Иницијално мерење	Између група	1,387	1	1,387	0,148	0,701
	Унутар група	2396,753	255	9,399		
	Укупно	2398,140	256			
Финално мерење	Између група	74,496	1	74,496	9,620	0,002
	Унутар група	1974,733	255	7,744		
	Укупно	2049,230	256			

Увидом у Табелу 59 уочавамо да вредност Левеновог теста и у иницијалном (F(1,255) = 0,236; p = 0,627) и финалном мерењу (F(1,255) = 1,062; p = 0,926) показује да је у оба случаја потврђена хипотеза о хомогености варијансе, па се тако вредности резултата анализе варијансе за иницијално и финално мерење ове способности могу сматрати поузданим. Вредност резултата анализе варијансе у иницијалном мерењу

(F(1,255) = 0,148; p = 0,701) имплицира да не постоје статистички значајне разлике између постигнутих резултата контролне и експерименталне групе у мерењу способности уочавања функционалних односа на графикону, табели или слици. Са друге стране резултати анализе варијансе на финалном мерењу (F(1,255) = 9,620; p = 0,002) показују да постоји статистички значајна разлика у постигнућу на мерењу ове способности између контролне и експерименталне групе. На основу ових резултата можемо закључити да су ученици који су радили према експерименталном програму постигли боље резултате у односу на ученике контролне групе у способности уочавања функционалних односа на графикону, табели или слици, али и да су ти бољи резултати статистички значајно бољи у односу на контролну групу.

Како бисмо били сигурни у поузданост овог резултата урадили смо анализу коваријансе. Вредност Левеновог теста (F(1,255) = 0,629; p = 0,429) показује да је задовољена хипотеза о једнакости варијансе (Табела 60).

Табела 60. *Левенов тест једнакости варијансе*

Зависна варијабла: Финално мерење способности уочавања функц. зависности

F	df1	df2	Sig.
0,629	1	255	0,429

Tests the null hypothesis that the error variance of the dependent variable is equal across groups.
a. Design: Intercept + GrafSli1 + Grupa

Пошто смо уклонили коваријат (резултате иницијалног мерења) утврдили смо да постоје статистички значајне разлике између експерименталне и контролне групе у финалном мерењу способности уочавања функционалних односа на графикону, табели или слици (F(1,254) = 21,003; p = 0,000) (Табела 61). Ако у обзир узмемо вредност парцијалног ета квадрата, можемо закључити да је у овом случају његова вредност 0,076, што према Коену (Cohen, 1988) представља средњи утицај. На основу тога можемо рећи да је 7,6% варијансе у финалном мерењу (способности уочавања функционалних односа на графикону, слици или табели) објашњено независном променљивом (контекстуални приступ). Ако посматрамо утицај коваријата (резултат на иницијалном мерењу способности) на резултате финалног мерења истих способности, када се отклони утицај независне променљиве (група – начин рада), можемо закључити да постоји статистички значајна разлика (F(1,254) = 219,764; p = 0,000). У овом случају парцијални ета квадрат износи 0,464, што значи да је утицај велики и да се чак 46,4% зависне променљиве (резултата финалног мерења) може објаснити експерименталним програмом (контекстуалним приступом).

Табела 61. *Анализа коваријансе иницијалног и финалног мерења способности уочавања функционалних односа на графикону, табели или слици*

Зависна променљива: Финално мерење

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.	Partial Eta Squared
Corrected Model	990,512[a]	2	495,256	118,818	0,000	0,483
Intercept	435,368	1	435,368	104,451	0,000	0,291
Иницијално мерење	916,016	1	916,016	**219,764**	**0,000**	**0,464**
Група	87,544	1	87,544	**21,003**	**0,000**	**0,076**
Error	1058,717	254	4,168			
Total	11973,000	257				
Corrected Total	2049,230	256				

a. R Squared = 0,483 (Adjusted R Squared = 0,479)

На основу добијених резултата можемо закључити да контекстуални приступ у настави алгебре доприноси развоју способности уочавања функционалне зависности на графиконима, сликама или табелама. Применом контекстуалног приступа у задацима ране алгебре као што резултати показују могу ће је утицати на то да се код ученика утиче на развој способности уочавања функционалних односа у задацима са различитим визуелним репрезентацијама. Код ученика се на овај начин утиче на способност проналажења веза између реалних животних ситуација и математичких истина исказаних кроз слику, графикон или табелу. Развој ове способности је посебно важан, јер се на тај начин утиче на касније потпуније разумевање идеје функције или формуле.

Задацима реалистичког контекста изражених у облику графикона, слика или табела успели смо да утичемо на развијање алгебарског мишљења ученика на овом узрасту. На часовима математике са овако организованим садржајима, показали смо да се може утицати на развој способности ученика за разумевање функционалних односа изражених на различите начине и да ученик може своје знање о функционалној зависности проширити на различите графичке приказе, као и да ти прикази често могу послужити као модели за учење и откривање других генерализација. Овако схватање функционалне зависности и способност да генерализације и зависност представи на различите начине омогућавају ученику да успостави везу између проблема реалног света и формалне алгебарске нотације.

Желели смо да утврдимо да ли се контекстуалним приступом може утицати подједнако на ефекте код ученика различитог пола, општег успеха и оцене из математике. Из тог разлога ћемо анализирати утицај ових варијабли на развој способности уочавања функционалних односа на графикону, табели или слици.

2.3.1. Утицај контекстуалног приступа на способности уочавања функционалних односа на графикону, табели или слици у односу на пол

Резултати иницијалног мерења способности уочавања функционалних односа на графикону, табели или слици (Табела 62) показује да су дечаци (M = 5,95; SD = 2,94) били успешнији у контролној групи, док су девојчице (M = 5,66; SD = 3,31) биле успешније и постигле у просеку боље резултате у експерименталној групи. Ако се у обзир узме чињеница да су ученици могли да постигну највише 10 поена на иницијалном тесту у мерењу ове способности можемо рећи да су резултати показали просечно развијене способности и код дечака и код девојчица.

Ако се у обзир узму просечни резултати ученика на финалном мерењу, можемо уочити да су дечаци (M = 6,92; SD = 2,42) и девојчице (M = 6,59; SD = 2,61) у експерименталној групи постигли боље резултате у односу на дечаке (M = 5,88; SD = 2,95) и девојчице (M = 5,45; SD = 3,12) у контролној групи (Табела 62). Ученици оба пола, у групи која је радила према контекстуалном приступу, су постигли боље резултате у односу на ученике контролне групе.

Табела 62. *Постигнућа ученика у способности уочавања функционалних односа на графикону, табели или слици у односу на пол*

Група	Пол	Иницијално мерење M	Иницијално мерење SD	Финално мерење M	Финално мерење SD	Укупно N
Експериментална група	Дечаци	5,44	2,96	6,92	2,42	62
	Девојчице	5,66	3,31	6,59	2,61	68
	Укупно	5,55	3,14	6,75	2,52	130
Контролна група	Дечаци	5,95	2,94	5,88	2,95	65
	Девојчице	5,44	3,04	5,45	3,12	62
	Укупно	5,70	2,99	5,67	3,03	127
Укупно	Дечаци	5,70	2,95	6,39	2,75	127
	Девојчице	5,55	3,17	6,05	2,91	130
	Укупно	5,63	3,06	6,21	2,83	257

Левенов тест једнакости варијансе има вредност F = 1,063 за p = 0,365, што значи да вредност није значајна и да су варијансе уједначене (Табела 63), тако да је могуће извршити двофакторску анализу варијансе како бисмо испитали утицај експерименталног програма на ову способност у односу на пол ученика.

Табела 63. *Левенов тест једнакости варијансе*

Зависна варијабла: Финално мерење

F	df1	df2	Sig.
1,063	3	253	0,365

Tests the null hypothesis that the error variance of the dependent variable is equal across groups.
a. Design: Intercept + GrafSli1 + Grupa + Pol + Grupa * Pol

Двофакторска анализа коваријансе постигнућа ученика (Табела 64) показала је да не постоји статистички значајан утицај интеракције пола и начина рада на резултате финалног мерења способности уочавања функционалних односа на графикону, табели или слици, ако се отклони утицај иницијалног мерења (независне варијабле) (F(1,252) = 0,515; p = 0,474). Вредност парцијалног ета квадрата у овом случају износи 0,002, што значи да се само 0,2% варијансе финалног мерења може објаснити утицајем групе и пола, као независних варијабли. Ако се посматра утицај пола на резултате финалног тестирања, може се закучити да не постоји статистички значајан утицај, јер је вредност F = 1,273 за p = 0,260. Вредност парцијалног ета квадрата у овом случају износи 0,005, што према Коену (Cohen, 1988) представља веома мали утицај.

Табела 64. *Двофакторска анализа коваријансе постигнућа ученика у способности уочавања функционалних односа на графикону, табели или слици у односу на пол*

Зависна варијабла: Финално мерење

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.	Partial Eta Squared
Corrected Model	998,057[a]	4	249,514	59,817	0,000	0,487
Intercept	434,717	1	434,717	104,216	0,000	0,293
Иницијално мерење	914,265	1	914,265	219,179	0,000	0,465
Група	89,266	1	89,266	21,400	0,000	0,078
Пол	5,312	1	5,312	**1,273**	**0,260**	**0,005**
Група * Пол	2,149	1	2,149	**0,515**	**0,474**	**0,002**
Error	1051,172	252	4,171			
Total	11973,000	257				
Corrected Total	2049,230	256				

a. R Squared = 0,487 (Adjusted R Squared = 0,479)

Поузданост добијених података доказана је анализом у којој је утицај коваријата статистички уклоњен и израчуната вредност променљиве за сваку независну варијаблу као и заједно (Прилог 15).

На основу добијених резултата можемо рећи да је истраживање показало да се под утицајем наставе организоване на принципима контекстуалног приступа учењу може побољшати способност и дечака и девојчица у уочавању функционалних односа на графиконима, табелама и сликама у настави ране алгебре. Такође, резултати показују да не постоји разлика између успешности развијања ове способности између дечака и девојчица, већ да они на исти начин напредују под утицајем овог експерименталног програма.

2.3.2. Утицај контекстуалног приступа на развијање способности уочавања функционалних односа на графикону, табели или слици у односу на општи успех

Резултати иницијалног мерења способности уочавања функционалних односа на графикону, табели или слици (Табела 65) показују да су ученици са успехом *одличан* постигли најбоље резултате и то у контролној (M = 7,31; SD = 2,26) и експерименталној групи (M = 7,06; SD = 2,81). Ученици са успехом *врло добар* у контролној групи (M = 4,78; SD = 2,81) били су бољи на иницијалном мерењу у односу на ученике са истим успехом у експерименталној групи (M = 3,74; SD = 2,07). Најслабије резултате у мерењу ове способности постигли су ученици са општим успехом *добар*, при чему су ученици контролне групе (M = 2,83; SD = 2,19) били нешто успешнији у односу на ученике експерименталне групе (M = 1,91; SD = 1,76). Ако се у обзир узме чињеница да су ученици на иницијалном тесту за мерење ове способности могли да освоје највише 10 поена, можемо уочити да добијени резултати ученика са успехом *добар* и *врло добар* у обе групе, показују да је код ових ученика слабо развијена способност уочавања функционалних односа.

На основу добијених резултата на финалном мерењу ове способности (Табела 65) можемо рећи да су најбоље просечне резултате постигли ученици са општим успехом *одличан* у експерименталној групи (M = 7,62; SD = 2,40) и контролној групи (M = 7,33; SD = 2,46). Ученици који имају општи успех *врло добар* постигли су нешто слабије резултате и то у експерименталној групи (M = 6,12; SD = 1,61) и контролној групи (M = 4,73; SD = 2,60). Најслабије резултате постигли су ученици са општим успехом *добар:* и то у експерименталној (M = 3,00; SD = 2,10) и контролној групи (M = 2,70; SD = 2,10). Резултати показују да је контекстуални приступ у учењу садржаја алгебре код свих ученика експерименталне групе, без обзира на општи успех, допринео да они постигну боље резултате на финалном мерењу у односу на ученике који су радили према класичном начину рада у настави математике. Највеће разлике се виде код ученика који имају општи успех *врло добар*, где су значајно већи број освојених поена оствариле ученици експерименталне групе у односу на ученике истог успеха из контролне групе. Најмање разлике у броју освојених поена на финалном тесту постоје између ученика експерименталне и контролне групе који имају општи успех *добар.* Добијени подаци упућују на закључак да је за нешто слабије као и најбоље ученике контекстуални приступ имао мањи утицај на развијање способности уочавања функционалних односа на графикону, табели или слици.

Табела 65. *Постигнућа ученика у способности уочавања функционалних односа на графикону, табели или слици у односу на општи успех*

Група	Успех	Иницијално мерење M	Иницијално мерење SD	Финално мерење M	Финално мерење SD	Укупно N
Експериментална група	Добар	1,91	1,76	3,00	2,10	11
	Врло добар	3,74	2,07	6,12	1,61	42
	Одличан	7,06	2,81	7,62	2,40	77
	Укупно	5,55	3,14	6,75	2,52	130
Контролна група	Добар	2,83	2,19	2,70	2,10	23
	Врло добар	4,78	2,81	4,73	2,60	40
	Одличан	7,31	2,26	7,33	2,46	64
	Укупно	5,70	2,99	5,67	3,03	127
Укупно	Добар	2,53	2,08	2,79	2,07	34
	Врло добар	4,24	2,50	5,44	2,25	82
	Одличан	7,18	2,57	7,49	2,42	141
	Укупно	5,63	3,06	6,21	2,83	257

Левенов тест хомогености варијансе у овом случају има вредност F = 2,187 за p = 0,056. То значи да је тест показао једнакост у варијансама и да је могуће спровести двофакторску анализу коваријансе, како би се утврдио однос између резултата финалног тестирања и успеха ученика као независне варијабле (Табела 66).

Табела 66. *Левенов тест хомогености варијансе*

Зависна променљива: Финално мерење

F	df1	df2	Sig.
2,187	5	251	0,056

Tests the null hypothesis that the error variance of the dependent variable is equal across groups.
a. Design: Intercept + GrafSli1 + Grupa + Uspeh + Grupa * Uspeh

Двофакторска анализа варијансе (Табела 67) показује да, када се отклони утицај коваријата (резултата иницијалног мерења ове алгебарске способности) да постоји статистички значајан утицај интеракције групе и општег успеха ученика на резултате финалног мерења способности уочавања функционалних односа на графикону, табели или слици (F(2,250) = 3,878; p = 0,022). Овај резултат показује да ученици у зависности од општег успеха различито реагују на контекстуални приступ и класичан приступ у настави алгебре. Парцијални ета квадрат говори да се 3% варијансе резултата финалног мерења ове способности је објашњен утицајем интеракција успеха и групе.

Ако се у обзир узме засебни утицај успеха на резултате финалног мерења, можемо рећи да постоји статистички значајан утицај (F(2,250) = 0,077; p = 0,926), када се уклони утицај коваријата (резултата иницијалног мерења). То значи да ученици у зависности од успеха постижу другачије резултате у способности уочавања функционалних односа на графикону, табели или слици. Вредност парцијалног ета квадрата износи 0,085, то према Коену (Cohen, 1988), представља средњи утицај и да се 8,5% варијансе резултата финалног мерења може објаснити општим успехом ученика.

Табела 67. *Двофакторска анализа коваријансе постигнућа ученика способности уочавања функционалних односа на графикону, табели или слици у односу на општи успех*

Зависна промењљива: Финално мерење

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.	Partial Eta Squared
Corrected Model	1112,321[a]	6	185,387	49,468	0,000	0,543
Intercept	437,535	1	437,535	116,750	0,000	0,318
Иницијално мерење	392,528	1	392,528	104,740	0,000	0,295
Група	44,797	1	44,797	11,953	0,001	0,046
Успех	86,852	2	43,426	**11,588**	**0,000**	**0,085**
Група* Успех	29,069	2	14,535	**3,878**	**0,022**	**0,030**
Error	936,908	250	3,748			
Total	11973,000	257				
Corrected Total	2049,230	256				

a. R Squared = 0,543 (Adjusted R Squared = 0,532)

У прилогу су дате и кориговане средње вредности (Прилог 16) резултата финалног мерења способности уочавања функционалних односа на графикону, слици или табели за сваку независну промењљиву (начин рада, успех, интеракција између начина рада и групе) који потврђују наведене резултате.

У литератури се често наводе различите стратегије у настави алгебре које треба да допринесу процесу генерализације и развијања функционалног мишљења ученика. У том смислу „интеракцију контекста, вишеструких репрезентација и технолошких алата“ се посматра као примарна стратегија у развоју функционалног мишљења (Confrey & Smith, 1994: 32). Ипак, упркос свим новим приступима, потешкоће у развоју функционалног мишљења и даље постоје. Наша идеја у овом истраживању се заснивала на реалистичном контексту у задацима алгебре, чиме се покушало утицати на побољшање постигнућа ученика у развијању способности уочавања функционалних односа на слици, табели или графикону. Добијени резултати показују да се контекстуалним приступом у настави ране алгебре може утицати на развој способности уочавања функционалних односа, али и да то суштински не зависи од успеха ученика. Поред тога резултати су показали да одређеној групи ученика средњег успеха (*врло добар* успех) више одговара контекстуални приступ у учењу и да су под утицајем овако организоване наставе постизали знатно боље резултате, у мерењу развијености ове способнсти, у односу на ученике из контролне групе са истим успехом. На основу свих резултата можемо закључити да контекстуалним приступом у настави и учењу садржаја алгебре ученици, без обзира на општи успех из математике, показују напредак у развоју функционалног мишљења и разумевању функционалних односа изражених кроз различите визуелне представе.

2.3.3. *Утицај контекстуалног приступа на развијање способности уочавања функционалних односа на графикону, табели или слици у односу на оцену из математике*

Желели смо да истражимо и ефекте контекстуалног приступа у настави ране алгебре на развој способности уочавања функционалних односа на графикону, табели или слици, ако се у обзир узму оцене које ученици имају из математике. Резултати иницијалног мерења способности уочавања функционалних односа на графикону, табели или слици (Табела 68) показују да су најбоље резултате постигли ученици са оценом *одличан* (5) у експерименталној групи (M = 7,48; SD = 2,56) и контролној групи (M = 7,37; SD = 2,16). Ученици са оценом *врло добар* (4) из контролне групе (M = 6,29; SD = 2,49) били су нешто успешнији од ученика са истом оценом из експерименталне групе (M = 5,03; SD = 2,90). Ученици са оценом *добар* (3) из експерименталне групе (M = 3,37; SD = 2,39) постигли су нешто боље резултате у односу на ученике са истом оценом из контролне групе (M = 3,07; SD = 2,69). Сличан однос је са ученицима који имају оцену *довољан* (2), при чему су ученици обе групе на иницијалном мерењу постигли најслабије резултате и то ученици из експерименталне (M = 2,60; SD = 1,58) и контролне групе (M = 2,30; SD = 1,25). Можемо уочити да су ученици обе групе са истом оценом из математике постизали приближно исте резултате на иницијалном мерењу.

Добијени резултати финалног мерења (Табела 68) показују да су све групе ученика, формиране на основу оцене из математике у експерименталној групи постигли боље просечне резултате у односу на ученике исте групе у контролној групи. Најуспешнији ученици, на основу добијених резултата су ученици са просечном оценом *одличан* (5) у експерименталној групи (M = 8,16; SD = 1,86) и контролној групи (M = 7,27; SD = 2,57). Када се упореде просечни бодови код ученика са оценом *врло добар* (4), може се уочити једва мала предност код ученика у експерименталној групи (M = 6,19; SD = 2,66) за разлику од контролне групе (M = 6,17; SD = 2,60). Највеће разлике у просечном броју бодова су карактеристичне за ученике са оценом *добар* (3) у експерименталној групи (M = 5,67; SD = 1,94) насупрот ученика са истом оценом у контролној групи (M = 3,26; SD = 2,46). Најслабије резултате су, као и у другим способностима, постигли ученици са оценом *довољан* (2) у експерименталној (M = 3,80; SD = 1,93) и контролној групи (M = 2,40; SD = 1,26).

Табела 68. *Постигнућа ученика у способности уочавања функционалних односа на графикону, табели или слици у односу на оцену из математике*

		Иницијално мерење		Финално мерење		Укупно
Група	Оцена	M	SD	M	SD	N
Експериментална група	Довољан (2)	2,60	1,58	3,80	1,93	10
	Добар (3)	3,37	2,39	5,67	1,94	27
	Врло добар (4)	5,03	2,90	6,19	2,66	37
	Одличан (5)	7,48	2,56	8,16	1,86	56
	Укупно	5,55	3,14	6,75	2,52	130
Контролна група	Довољан (2)	2,30	1,25	2,40	1,26	10
	Добар (3)	3,07	2,69	3,26	2,46	27
	Врло добар (4)	6,29	2,49	6,17	2,60	42
	Одличан (5)	7,37	2,16	7,27	2,57	48
	Укупно	5,70	2,99	5,67	3,03	127
Укупно	Довољан (2)	2,45	1,39	3,10	1,74	20
	Добар (3)	3,22	2,52	4,46	2,51	54
	Врло добар (4)	5,70	2,75	6,18	2,61	79
	Одличан (5)	7,43	2,38	7,75	2,25	104
	Укупно	5,63	3,06	6,21	2,83	257

Да би се испунили услови за двофакторску анализу коваријансе, потребно је испитати хомогеност варијансе. Резултати Левеновог теста (Табела 69) показују да је вредност овог теста F = 0,811, за p = 0,579, што значи да је испуњена претпоставка о једнакости варијансе.

Табела 69. *Левенов тест хомогености варијансе*

Зависна променљива: Финално мерење

F	df1	df2	Sig.
0,811	7	249	0,579

Tests the null hypothesis that the error variance of the dependent variable is equal across groups.

a. Design: Intercept + GrafSli1 + Grupa + Ocena + Grupa * Ocena

Резултати двофакторске анализе варијансе (Табела 70) показују да не постоји значајан утицај интеракције групе и оцене на резултате финалног мерења способности уочавања функционалних односа на графикону, табели или слици, када се уклони утицај коваријата (резултата иницијалног тестирања исте алгебарске способности) ($F(3,248) = 2{,}053$; $p = 0{,}107$). Вредност парцијалног ета квадрата потврђује претходно речено и показује вредност од 0,024, што представља мали утицај према Коену (Cohen, 1988).

Табела 70. *Двофакторска анализа коваријансе постигнућа ученика у способности уочавања функционалних односа на графикону, табели или слици у односу на оцену из математике*

Зависна промењљива: Финално мерење

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.	Partial Eta Squared
Corrected Model	1080,142[a]	8	135,018	34,553	0,000	0,527
Intercept	461,218	1	461,218	118,031	0,000	0,322
Иницијално мерење	366,640	1	366,640	93,827	0,000	0,274
Група	68,534	1	68,534	17,539	0,000	0,066
Оцена	69,841	3	23,280	**5,958**	**0,001**	**0,067**
Група * Оцена	24,067	3	8,022	**2,053**	**0,107**	**0,024**
Error	969,087	248	3,908			
Total	11973,000	257				
Corrected Total	2049,230	256				

a. R Squared = 0,527 (Adjusted R Squared = 0,512)

Двофакторска анализа коваријансе показује да постоји статистички значајан утицај између резултата финалног тестирања способности уочавања функционалних односа на графикону, табели или слици и оцене коју ученик има из математике, када се одстрани утицај коваријата (иницијалног мерења ове способности) ($F(3,248) = 5{,}958$; $p = 0{,}001$). Парцијални ета квадрат показује да се 6,7% варијансе финалног мерења може објаснити оценом као независном варијаблом. Дакле, што ученик има већу оцену из математике то се под утицајем контекстуалног приступа остварује већи напредак код ученика у развијању способности уочавања функционалне зависности.

Анализа коригованих вредности зависне промењљиве за сваку групу у складу са сваком независном промењљивом посебно, као и заједно, потврђује добијене резултате (Прилог 17).

Визуелизација се јавља као моћна активност у повезивању реалног, конкретног са апстрактним у настави алгебре, како у смислу решавања задатака, тако и у повезивању различитих садржаја и појмова. Из тог разлога, задатак приказан у форми слике, графикона или табеле може послужити као сјајна основа за увиђање односа и међусобне зависности компонената у садржајима ране алгебре. Тако је један од задатака у овом истраживању био и да испитамо утицај реалистичног контекста на успех ученика у разумевању функционалних односа изражених визуелно на различите начине, односно да ли постоје разлике у разумевању ових односа између ученика са различитим оценама из математике. Резултати анализе су потврдили нашу претпоставку, односно, да се контекстуалним приступом заснованим на реалистичком контексту може позитивно утицати на постигнуће ученика у способности уочавања функционалних односа на графикону, табели или слици, без обзира на оцену коју ученици имају из математике. То значи да ученици подједнако напредују у развоју ове способности без обзира на оцену коју имају из математике и та разлика не постоји између различитих група.

* * * * *

Ученицима у конструисању алгебарских нотација, образаца и генерализација, али и развоју функционалног мишљења, на значајан начин могу помоћи дијаграми, модели, табеле и графикони. Дакле, као помоћ у развоју кључних способности алгебарског закључивања истиче се значај вишеструких репрезентација (Booker & Windsor, 2010; Kieran, 1999; McNab, 2006; Wilkie & Clarke, 2016).

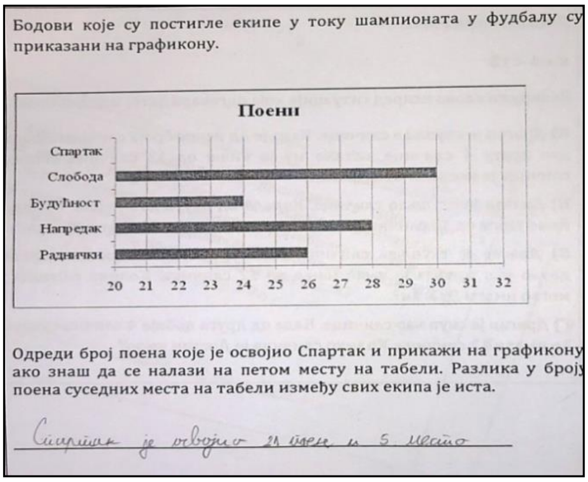
У процесу генерализације, наставници су ти који имају кључну улогу у коришћењу вишеструких представа како би се развијало функционално мишљење ученика. Према мишљењу Капута (Kaput, 1999) развоју функционалног мишљења успешно се може приступити у раним разредима, ако се користимо контекстима познатим деци (висина биљака или људи, температуре, цене производа која се мења у току времена) који су представљени сликовно или временским графиконима. На крају и различите представе истих функционалних односа утичу на потпуније сагледавање односа и омогућавају једноставнију генерализацију алгебарских истина. Један број истраживања (Blanton et al., 2015; Schliemann, Carraher & Brizuela, 2001; Carraher & Schliemann, 2007; Carraher, Schliemann, Brizuela, & Earnest, 2006) истраживао је приступ у настави којим би ученици стварали репрезентације и исте користили у учењу алгебре. Посматрајући алгебру као генерализовану аритметику, ова истраживања показују да су ученици, у основној школи, у стању да репрезентују и објашњавају односе између непознатих величина, размишљају о аритметичким операцијама као функцијама, решавају алгебарске проблеме и једначине конструишу и тумаче графиконе функција и користе различите репрезентације за опис и рад са променљивим величинама, што се поклапа са налазима нашег истраживања. Управо ту чињеницу истичу и Гравемејер и Дурман (Gravemeijer & Doorman, 1999) који сматрају да „модели морају имати значајну улогу у преласку са реалистичних активности на моделе математичког расуђивања. У том преласку са *модела од*, на *модел за* кључну улогу имају функције и графикони који постају посредник између контекстуалних проблема и формалног записа који у том процесу настаје“ (Gravemeijer & Doorman, 1999: 111).

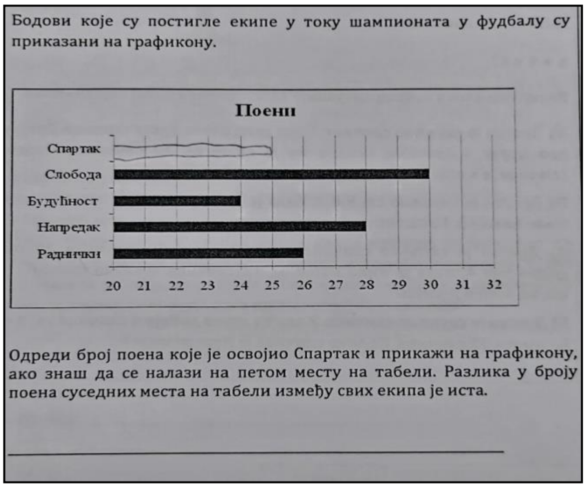
Ово истраживање је показало да се вредност дијаграма, табела и цртежа огледа у томе што се односи изражавају на другачији систематизован и очигледан начин. Поред тога, представљањем података у овом облику омогућује ученику да се користи различитим врстама репрезентација, које касније могу послужити и у моделовању у поступку решавања проблема. Са друге стране ученик је увек у ситуацији да исти функционални однос види на различите начине, што омогућава потпунији развој ове алгебарске способности, док ученик на овај начин осећа задовољство, јер је у ситуацији да исти проблем види на другачији начин.

Анализираћемо и неке карактеристичне одговоре или решења ученика, који нам могу показати начин на који они размишљају и уочавају односе и функционалну зависност на сликама, графиконима или табелама. Примере које смо приказали су решења ученика на иницијалном или финалном мерењу.

Одређени број ученика показао је несигурност код решавања задатака у смислу потешкоћа у уочавању функционалних односа изражених у облику слике, дијаграма, графикона или табеле, иако су многи од ових приказа били део експерименталног програма током серије лекција које су репрезентоване ученицима контекстуалним приступом. Код ове групе ученика постоји проблем у дубљем разумевању појмова алгебре, па је потребна већа пажња у раду са њима (Пример 49).

Пример 49. Погрешна решења задатака у којима је реалистични контекст изражен сликом и дијаграмом – иницијални тест

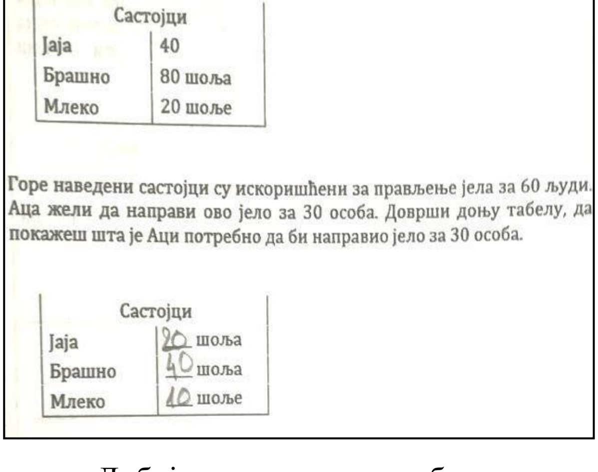


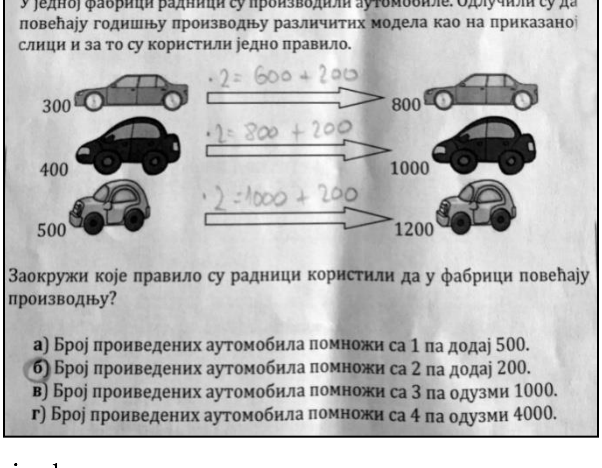


Решења у овим примерима показују неспособност једне групе ученика да схвате и разумеју односе између података који су приказани на графикону, док су други имали потешкоће да то решење прикажу на истом. Без обзира на ту чињеницу један број ученика је показао недовољно разумевање слика или графикона, као једног од облика алгебарског резоновања. Разлог за ове потешкоће могли би пронаћи у аритметичкој позадини ученичког начина размишљања на овом узрасту. Други разлог би могли пронаћи у чињеници да ученици имају мало искуства са оваквим садржајима у свакодневној настави као и у уџбеницима. Истраживање које су спровели МекЕлдон и Ритл-Џонсон (McEldoon & Rittle-Johnson, 2010) показало је сличне потешкоће као и наше истраживање. У њиховом истраживању ученици су имали проблеме у препознавању правила као и одређивању следеће вредности у низу, као и тешкоће у испуњавању табела којима се изражава функционална зависност и вербално изражава правило по коме се променљиве мењају.

Примери задатка у финалном тесту показују да су ученици показали напредак у разумевању ових односа. Пример 50 показује да су ученици успешно могли да уоче функционалну зависност између података датих у табели, као и одреде функционалну зависност на цртежу.

Пример 50. Задатак са јелом и задатак са фабриком аутомобила – финални тест





Добијени резултати у области развоја функционалног мишљења драгоцени су, како у смислу позитивних ефеката, тако и у смислу потешкоћа које могу настати у настави алгебре. Посебно треба имати у виду грешке и уочене проблеме како би се пружиле смернице и могли предупредити нежељени ефекти или грешке у учењу у организацији наставе алгебре на млађем школском узрасту.

Многи истраживачи говоре о важности активног учешћа ученика у изградњи сопствених модела решавања задатака и развоја визуелних представа (Van den Heuvel-Panhuizen, 1995; Gravemeijer, 1994, 2001; Streefland, 1985; Treffers, 1987). Стога, можемо закључити да се задацима реалистичног контекста у настави алгебре пружа разноврсно искуство ученицима у визуелизацији, како у разумевању проблема, тако и у поступку решавања проблема. Реалистичним контекстом се може избећи пасивна улога ученика, а самим тим и омогућити природно повезивање садржаја различитих области математике. Ово истраживање је показало да се контекстуалним приступом може позитивно утицати на развој способности уочавања функционалних односа на графикону, табели или слици, и да је утицај овог приступа евидентан у свим групама ученика без обзира на пол, оцену из математике или општи успех ученика.

2.4.Утицај контекстуалног приступа на развијање способност правилног схватања симбола у алгебри

Већина математичких појмова је недоступна нашим чулима и могу се разумети једино нашим умом. Алгебра на одређени начин као део математике користи сопствени језик да би законитости и генерализације описао и приближио ученику. У овом процесу алгебра користи језик симбола и симболичких записа који јој омогућавају да сложене законитости опише и објасни на једноставан и ефикасан начин. Овим истраживањем желели смо да утврдимо и ефекте контекстуалног приступа у настави алгебре у млађем школском узрасту на способност разумевања симбола као ознаке за непознату или променљиву у алгебри. Процесом математизације, кроз процесе моделовања, покушава се превазићи проблем разумевања симбола који се појављују нераздвојиво од свог значења, на тај начин што осигурава да симболизација и значење истовремено постоје у јединству реалног контекста подржавајући конструкцију неке нове математичке стварности.

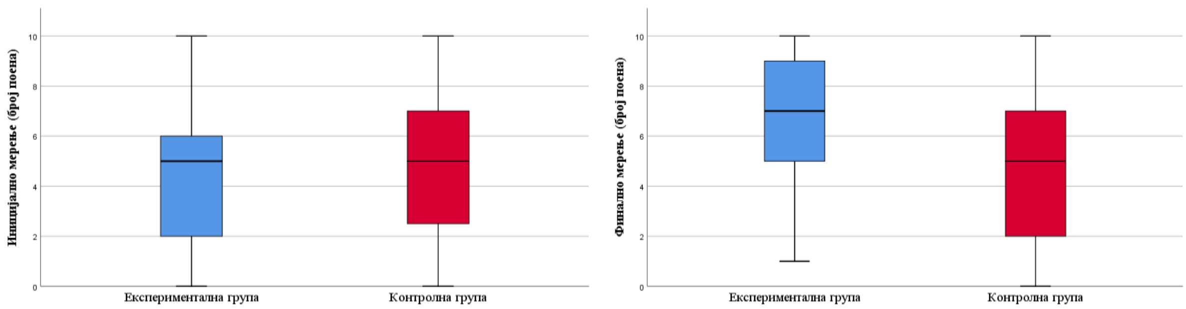
Анализа резултата ефеката контекстуалног приступа (Табела 71) на правилно схватање симбола у раној алгебри показала је да је експериментална група на иницијалном мерењу (M = 4,62; SD = 3,07) просечно постигла приближно исти број бодова као и контролна група (M = 4,56; SD = 2,94). За мерење ове способности ученици су на иницијалном мерењу могли да освоје највише 10 поена. Ако се у обзир узму постигнути резултати обе групе ученика можемо рећи да способност правилног схватања симбола у алгебри није у довољној мери развијена.

Табела 71. *Постигнуће ученика експерименталне и контролне групе у способности правилног схватања симбола у алгебри*

		N	M	SD
Иницијално мерење	Експериментална група	130	4,62	3,07
	Контролна група	127	4,56	2,94
Финално мерење	Експериментална група	130	6,89	2,41
	Контролна група	127	4,60	2,83

Резултати финалног мерења показују да је експериментална група у просеку постизала боље резултате (M = 6,89; SD = 2,41) у односу на контролну групу (M = 4,60;

SD = 2,83) у мерењу ове способности (Табела 71). На основу анализе добијених резултата можемо уочити да је експериментална група направила напредак у правилном схватању идеје симбола у алгебарским изразима у односу на иницијално мерење. За разлику од експерименталне групе, контролна група је остала на приближно истом просечном броју поена као на иницијалном мерењу (Графикон 6).



Графикон 6. *Постигнуће ученика експерименталне и контролне групе у схватању симбола у алгебри*

Како бисмо утврдили разлике у развијености способности правилног схватања симбола у алгебри користићемо анализу варијансе (Табела 72).

Табела 72. *Анализа варијансе иницијалног и финалног мерења способности правилног схватања симбола у алгебри*

	Levene Statistic	df1	df2	Sig.
Иницијално мерење	0,074	1	255	0,786
Финално мерење	4,796	1	255	0,209

		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Иницијално мерење	Између група	0,204	1	0,204	0,023	0,881
	Унутар групе	2306,076	255	9,043		
	Укупно	2306,280	256			
Финално мерење	Између група	338,031	1	338,031	48,837	0,000
	Унутар групе	1765,012	255	6,922		
	Укупно	2103,043	256			

Вредности Левеновог теста иницијалног (F(1,255) = 0,074; p = 0,786) и финалног мерења (F(1,255) = 4,796; p = 0,209) показују да је у оба случаја испуњена претпоставка о једнакости варијансе па се стога анализа варијансе ових резултата може сматрати поузданом. Вредност добијене анализе варијансе (F(1,255) = 1,059; p = 0,305) на иницијалном мерењу способности правилног разумевања симбола у алгебри показује да не постоји статистички значајна разлика између контролне и експерименталне групе. Са друге стране, резултати анализе варијансе финалног мерења (F(1,255) = 1,059; p = 0,305) ове способности показују да постоји статистички значајна разлика у постигнућу контролне и експерименталне групе. Добијени резултати показују да су ученици експерименталне групе статистички значајно постигли боље резултате у односу на контролну групу у развијености способности правилног разумевања симбола у алгебри.

Како би били сигурни да су добијени резултати поуздани и да на њих није утицала статистичка неуједначеност група, искористићемо и анализу коваријансе. На овај начин анализом коваријансе желели смо истражити утицај експерименталног програма, заснованог на принципима контекстуалног приступа у настави алгебре, на способност правилног разумевања идеје симбола у алгебри. Вредност Левеновог теста F(1,255) = 1,059; p = 0,305 показује да је испуњена претпоставка о једнакости варијанси, тако да је могуће урадити анализу коваријансе како би се утврдиле разлике (Табела 73).

Табела73. *Левенов тест анализе варијансе*

Зависна варијабла: Финално мерење

F	df1	df2	Sig.
1,059	1	255	0,305

Tests the null hypothesis that the error variance of the dependent variable is equal across groups.
a. Design: Intercept + Simbol1 + Grupa

Анализом коваријансе у поступку уклањања коваријата (резултата иницијалног мерења) утврдили смо постојање статистички значајних разлика између експерименталне и контролне групе у финалном мерењу способности разумевања симбола у алгебри (F(1,254) = 117,010; p = 0,000) (Табела 74). Овакав резултат показује значајне разлике између експерименталне и контролне групе у мерењу ове способности. Величина парцијалног ета квадрата износи 0,315, што представља велики утицај. То значи да је 31,5% варијансе у финалном мерењу (способности разумевања симбола) објашњено је независном променљивом (групом – начином рада). Ако се у обзир узме утицај коваријата на финално мерење (резултати финалног мерења способности разумевања симбола), када се уклони утицај независне променљиве (групе) уочљиве се такође статистички значајне разлике (F(1,254) = 377,835; p = 0,000). Резултати показују да се 59,8% варијансе финалног мерења ове способности објашњено независном варијаблом (контекстуални приступ).

Табела 74. *Анализа коваријансе иницијалног и финалног мерења у способности правилног схватања симбола у алгебри*

Зависна променљива: Финално мерење

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.	Partial Eta Squared
Corrected Model	1393,502[a]	2	696,751	249,421	0,000	0,663
Intercept	536,250	1	536,250	191,966	0,000	0,430
Иницијално мерење	1055,471	1	1055,471	**377,835**	**0,000**	**0,598**
Група	326,864	1	326,864	**117,010**	**0,000**	**0,315**
Error	709,541	254	2,793			
Total	10626,000	257				
Corrected Total	2103,043	256				

a. R Squared = 0,663 (Adjusted R Squared = 0,660)

На основу анализе добијених резултата можемо закључити да се наставом алгебре организованом у складу са принципима контекстуалног приступа и реалним ситуацијама свакодневног живота може утицати на развој способности правилног разумевања симбола као ознаке за променљиву или непознату. Резултати показују да постоје статистички значајне разлике између група, након спроведеног експеримента, па са може закључити да се контекстуалним приступом може утицати на правилно разумевање симбола у алгебри.

Симбол представља значајан појам у алгебри и из тог разлога је веома важно правилно развијање овог појма од најранијег узраста. Словна ознака (симбол) представља значајан појам ране алгебре, који на одређени начин, као ознака, упућује на алгебру као посебну област математике. Симбол има моћ да скрати запис и изрази комплексне и разноврсне законитости на једноставан начин, а самим тим и олакша комуникацију. Овим истраживањем смо доказали да је наставом организованом у складу са контекстом реалних (животних) ситуација, може утицати позитивно на правилан развој овог појма код ученика.

У истраживању смо желели да испитамо и да ли се контекстуалним приступом може утицати подједнако на способност правилног разумевања симбола у алгебри код ученика различитог пола, општег успеха и оцене из математике. Стога ћемо анализирати утицај ових независних варијабли на развијање способности правилног разумевања симбола.

2.4.1. Утицај контекстуалног приступа на развијање способности правилног схватања симбола у алгебри у зависности од пола ученика

Резултати иницијалног мерења развијености способности правилног схватања симбола у алгебри показују да су дечаци из експерименталне групе (M = 4,89; SD = 3,01) били успешнији у односу на девојчице (M = 4,37; SD = 3,12); док су са друге стране девојчице из контролне групе (M = 4,11; SD = 3,00) биле успешније од дечака (M = 4,98; SD = 2,84) (Табела 75). Резултати показују да су дечаци из контролне групе били успешнији од дечака из експерименталне групе, док су девојчице из експерименталне групе биле успешније у односу на девојчице из контролне групе. Уочавамо да су и дечаци и девојчице у експерименталној и контролној групи остарили мање од половине укупног броја поена.

Резултати које смо добили на финалном мерењу показују да дечаци експерименталне групе показују просечно боље резултате (M = 7,15; SD = 2,19) у односу на дечаке из контролне групе (M = 4,91; SD = 2,57). Ако упоредимо девојчице, такође је уочљиво да девојчице из експерименталне групе на финалном мерењу (M = 6,66; SD = 2,60) показују боље резултате у односу на девојчице из контролне групе (M = 4,27; SD = 3,08) које су радиле у складу са класичном наставом алгебре.

Табела 75. *Постигнуће ученика експерименталне и контролне групе у правилном схватању симбола у алгебри у односу на пол*

		Иницијално мерење		Финално мерење		Укупно
Група	Пол	M	SD	M	SD	N
Експериментална група	Дечаци	4,89	3,01	7,15	2,19	62
	Девојчице	4,37	3,12	6,66	2,60	68
	Укупно	4,62	3,07	6,89	2,41	130
Контролна група	Дечаци	4,98	2,84	4,91	2,57	65
	Девојчице	4,11	3,00	4,27	3,08	62
	Укупно	4,56	2,94	4,60	2,83	127
Укупно	Дечаци	4,94	2,91	6,00	2,63	127
	Девојчице	4,25	3,06	5,52	3,07	130
	Укупно	4,59	3,00	5,76	2,87	257

Да би смо утврдили хомогеност варијансе, користили смо Левенов тест и утврдили да у овом случају он износи F = 0,492 и p = 0,688 што значи да је претпоставка о једнакости варијансе потврђена (Табела 76) па можемо испитати однос коришћењем двофакторске анализе коваријансе.

Табела 76. *Левенов тест хомогености варијансе*

Зависна варијабла: Финално мерење

F	df1	df2	Sig.
0,492	3	253	0,688

Tests the null hypothesis that the error variance of the dependent variable is equal across groups.
a. Design: Intercept + Simbol1 + Grupa + Pol + Grupa * Pol

Када изузмемо утицај коваријата (резултата иницијалног мерења у схватању симбола у раној алгебри), можемо уочити да не постоји значајан утицај интеракције, која постоји између начина рада и пола ученика ($F(1,252) = 0,044$; $p = 0,834$) (Табела 77). Вредност парцијалног ета квадрата у овом случају (0,000) говори нам да не постоји део варијансе зависне промењљиве који се може објаснити независном промењљивом, која је у овом случају пол и група ученика.

Анализом варијансе смо утврдили и да не постоји статистички значајан утицај пола на резултате у финалном мерењу способности схватања симбола у раној алгебри, ако се изузме утицај резултата на иницијалном мерењу ове способности ($F(1,252) = 0,178$; $p = 0,674$). Парцијални ета квадрат у овом случају износи 0,001, што према Коену (Cohen, 1988) представља веома мали утицај пола на резултате финалног мерења способности схватања симбола у садржајима алгебре на млађем школском узрасту.

Табела 77. *Двофакторска анализа коваријансе иницијалног и финалног мерења у правилном схватању симбола у алгебри у односу на пол*

Зависна варијабла: Финално мерење

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.	Partial Eta Squared
Corrected Model	1394,133[a]	4	348,533	123,895	0,000	0,663
Intercept	533,818	1	533,818	189,759	0,000	0,430
Иницијално мерење	1035,789	1	1035,789	368,197	0,000	0,594
Група	327,465	1	327,465	116,406	0,000	0,316
Пол	0,500	1	0,500	**0,178**	**0,674**	**0,001**
Група * Пол	0,123	1	0,123	**0,044**	**0,834**	**0,000**
Error	708,910	252	2,813			
Total	10626,000	257				
Corrected Total	2103,043	256				

a. R Squared = 0,663 (Adjusted R Squared = 0,658)

Као што смо већ раније закључили, анализом ових резултата потврдили смо да постоји статистички значајна разлика између експерименталне и контролне групе у постигнућу ученика ($F(1,252) = 116,40$; $p = 0,000$).

Како би смо били сигурни у поузданост добијених резултата урађена је анализа у којој је утицај коваријата изузет, тако да смо добили просечне вредности финалног мерења по групама независних промењљивих. Вредности су дате у Прилогу 18.

Математички језик је везан за алгебру у том смислу што користи рачунске операције, промењљиве и бројеве како би изразио математичку структуру и односе у сажетој форми. Када говоримо о математичком језику тада се у први план истиче и симбол као ознака за промењљиву. Циљ овог рада био је да утврдимо да ли се ситуацијама и језиком свакодневног живота, кроз процесе математизације и моделовање проблемских ситуација може утицати позитивно на изградњу способности правилног разумевања симбола као ознаке за промењљиву без обзира на пол ученика. Анализа резултата је показала да постоји напредак у схватању симбола у настави ране алгебре код свих ученика у експерименталној групи без обзира на пол. То значи да су и дечаци и девојчице, који су били изложени утицају експерименталног фактора (контекстуалног приступа настави алгебре) показали напредак у односу на дечаке и девојчице контролне групе, али да између дечака и девојчица у свакој групи не постоји статистички значајна разлика у правилном схватању симбола у алгебри.

2.4.2. Утицај контекстуалног приступа на развијање способности правилног схватања симбола у алгебри у зависности од општег успеха ученика

Овим истраживањем желели смо утврдити ефекте контекстуалног приступа заснованог на основама реалистичног образовања на правилно схватање симбола у настави ране алгебре у односу на општи успех који ученици имају. Ако се у обзир узму резултати иницијалног тестирања способности правилног схватања симбола у алгебри (Табела 78) ученици ~~са~~ који постижу *одличан* успех из контролне групе (M = 5,84; SD = 2,73) постигли су у просеку боље резултате у односу на ученике истог успеха из експерименталне групе (M = 5,52; SD = 2,90). Ученици са успехом *врло добар* из контролне групе (M = 3,77; SD = 2,72) такође су били успешнији од ученика истог успеха из експерименталне групе (M = 3,40; SD = 2,80). Резултати иницијалног мерења показују да су ученици са општим успехом *добар* из експерименталне групе (M = 2,91; SD = 3,14) постигли боље резултате у односу на ученике са истим успехом из контролне групе (M = 2,35; SD = 1,99). Ако се у обзир узме чињеница да су ученици могли да освоје укупно 10 поена у тестирању способности правилног схватања симбола у алгебри, можемо закључити да су једино ученици са општим успехом *одличан* у обе групе постигли мало изнад половине укупног броја поена, док су све остале групе испод овог броја поена. На основу тога можемо закључити да је ова алгебарска способност недовољно развијена код ученика.

Резултати финалног тестирања (Табела 78) схватања симбола у раној алгебри показали су да су сви ученици из експерименталне групе, без обзира на општи успех, показали знатно боље просечне резултате у односу на ученике из контролне групе. Најбоље резултате у обе групе постигли су ученици са општим успехом *одличан*, и то у експерименталној (M = 7,64; SD = 2,06) и контролној групи (M = 5,89; SD = 2,45). Ученици са успехом *врло добар* из експерименталне групе (M = 6,24; SD = 2,27), показали су боље просечне резултате у односу на ученике са истим успехом из контролне групе (M = 3,90; SD = 2,72). Ученици са општим успехом *добар* у експерименталној групи (M = 4,18; SD = 2,79) су такође показали боље резултате у односу на ученике са истим успехом из контролне групе (M = 2,22; SD = 2,00). Ако се у обзир узму резултати финалног тестирања можемо рећи да је највећа разлика код ученика са општим успехом *врло добар*, затим *добар* и тек на крају ученици са најбољим успехом (*одличан*). Добијени резултати показују да су и ученици експерименталне групе са општим успехом *врло добар* постигли бољи резултат од ученика који имају општи успех *одличан* у контролној групи, под утицајем експерименталног програма.

Табела 78. *Постигнуће ученика експерименталне и контролне групе у способности правилног схватања симбола у алгебри у односу на општи успех*

		Иницијално мерење		Финално мерење		Укупно
Група	Успех	M	SD	M	SD	N
Експериментална група	Добар	2,91	3,14	4,18	2,79	11
	Врло добар	3,40	2,80	6,24	2,27	42
	Одличан	5,52	2,90	7,64	2,06	77
	Укупно	4,62	3,07	6,89	2,41	130
Контролна група	Добар	2,35	1,99	2,22	2,00	23
	Врло добар	3,77	2,72	3,90	2,72	40
	Одличан	5,84	2,73	5,89	2,45	64
	Укупно	5,56	2,94	4,60	2,83	127
Укупно	Добар	2,53	2,39	2,85	2,43	34
	Врло добар	3,59	2,75	5,10	2,75	82
	Одличан	5,67	2,82	6,84	2,40	141
	Укупно	4,59	3,00	5,76	2,87	257

У Табели 79 може се уочити вредност израчунатог Левеновог теста, који показује хомогеност варијансе. Пошто је вредност овог теста F(5, 251) = 0,844; p = 0,520, то значи да је претпоставка о хомогености варијансе испуњена, па је могуће извршити двофакторску анализу коваријансе како би се утврдиле потенцијалне разлике у резултатима различитих група ученика.

Табела 79. *Левенов тест хомогености варијансе*

Зависна промењљива: Финално мерење

F	df1	df2	Sig.
0,844	5	251	0,520

Tests the null hypothesis that the error variance of the dependent variable is equal across groups.
a. Design: Intercept + Simbol1 + Grupa + Uspeh + Grupa * Uspeh

Уклањањем утицаја резултата иницијалног мерења (Табела 80) правилног схватања симбола, дошли смо до закључка да не постоји узајамни утицај интеракције групе и општег успеха ученика на резултате финалног мерења (F (2, 250) = 1,361; p = 0,258). Самим тим, можемо рећи да ученици постижу подједнак напредак у схватању симбола у раној алгебри без обзира на успех који имају. Вредност парцијалног ета квадрата показује да је овај утицај веома мали и износи тек 1,1% варијансе.

Поред тога, резултати показују и да постоји статистички значајан утицај успеха на резултате финалног мерења схватања симбола уколико се уклони утицај коваријата (F(2,250) = 12,066; p = 0,000). То говори у прилог чињеници да ученици различитог успеха различито напредују под утицајем експерименталног програма (врло добри ученици – највећи напредак). Вредност парцијалног ета квадрата у овом случају показује да је утицај средњи и да 8,8% варијансе резултата финалног мерења можемо објаснити утицајем општег успеха ученика.

Табела 80. *Двофакторска анализа коваријансе иницијалног и финалног мерења у способности правилног схватања симбола у алгебри у односу на општи успех*

Зависна промењљива: Финално мерење

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.	Partial Eta Squared
Corrected Model	1460,180[a]	6	243,363	94,640	0,000	0,694
Intercept	466,045	1	466,045	181,238	0,000	0,420
Иницијално мерење	723,958	1	723,958	281,537	0,000	0,530
Група	177,422	1	177,422	68,997	0,000	0,216
Успех	62,056	2	31,028	**12,066**	**0,000**	**0,088**
Група * Успех	6,999	2	3,500	**1,361**	**0,258**	**0,011**
Error	642,863	250	2,571			
Total	10626,000	257				
Corrected Total	2103,043	256				

a. R Squared = 0,694 (Adjusted R Squared = 0,687)

Поред ових, израчунали смо и кориговане средње вредности резултата финалног мерења правилног схватања симбола у алгебри у складу са начином рада – група, успехом и интеракцијом успеха и групе који дају потврду наведених (Прилог 19).

На основу добијених резултата можемо закључити да су сви ученици из експерименталне групе, без обзира на општи успех, показали знатно боље резултате у односу на ученике са истим успехом из контролне групе. Ово значи да је контекстуални приступ, заснован на идеји реалистичних ситуација свакодневног живота утицао подједнако на схватање симбола без обзира на то који општи успех ученици имају.

Како се рана алгебра не би схватала искључиво као наслов Брекеовог (Brekke, 2001) рада „Школска алгебра: Примарна манипулација бесмисленим симболима на комаду папира“, потребно је да ученици буду свесни шта тај симбол означава и која је његова функција у једначини или алгебарском изразу. Стратегија за коју смо се ми одлучили имала је за циљ да симбол, као ознаку за променљиву или непознату приближи ученику кроз ситуације реалног живота и обликује и прилагоди његовом мишљењу кроз процесе математизације и моделовања. Резултати овог истраживања показали су позитивне резултате контекстуалног приступа у смислу напретка свих ученика у разумевању симбола без обзира на општи успех ученика.

2.4.3. Утицај контекстуалног приступа на развијање способност правилног схватања симбола у алгебри у зависности од оцене коју ученик има из математике

Желели смо да утврдимо да ли постоје разлике између ученика са различитим оценама из математике у правилном схватању симбола у алгебри, под утицајем контекстуалног приступа у учењу и настави алгебре.

Резултати иницијалног мерења способности правилног схватања симбола у алгебри (Табела 81) показали су да су ученици са највећом оценом *одличан* (5) из математике у експерименталној групи (M = 6,05; SD = 2,80) постигли нешто боље резултате у односу на ученике са истом оценом у контролној групи (M = 6,00; SD = 2,47). Ученици са оценом *врло добар* (4) из контролне групе (M = 4,64; SD = 2,98) били су успешнији у односу на ученике са истом оценом из експерименталне групе (M = 4,30; SD = 2,65). Однос је другачији ако се у обзир узму резултати које су постигли ученици са оценом *добар* (3), при чему су у овом случају боље резултате постигли ученици из експерименталне групе (M = 3,33; SD = 2,92) у односу на ученике из контролне групе (M = 2,52; SD = 2,55). Ученици са најслабијом оценом *довољан* (2) постигли су најслабије резултате, при чему су ученици из контролне групе (M = 2,80; SD = 1,75) били нешто успешнији у односу на ученике контролне групе (M = 1,20; SD = 1,75). Ако се у обзир узму резултати свих ученика можемо рећи да је код свих ученика карактеристична недовољна развијеност ове способности.

Након деловања експерименталног програма сви ученици експерименталне групе, без обзира на успех који постижу у настави математике, остварили су боље резултате на финалном мерењу. Најуспешнији ученици у финалном мерењу схватања симбола у раној алгебри (Табела 62) су ученици са оценом *одличан* (5), у експерименталној (M = 8,04; SD = 1,89) и контролној групи (M = 6,06; SD = 2,57). Ученици из експерименталне групе који имају оцену *врло добар* (4) (M = 6,57; SD = 2,20), постигли су боље просечне резултате у односу на ученике са истом оценом из контролне групе (M = 4,43; SD = 2,65). На основу добијених резултата ученици експерименталне групе са оценом *добар* (3) из математике, такође су постигли боље просечне резултате (M = 7,27; SD = 2,57) у односу на ученике са истом оценом из контролне групе. Најслабије резултате у схватању симбола у раној алгебри постигли су ученици са оценом *довољан* (2) и то у експерименталној (M = 3,00; SD = 1,70) и контролној групи (M = 2,10; SD = 1,45).

Ако посматрамо добијене резултате (Табела 81) можемо рећи да су ученици из групе која је радила у складу са принципима контекстуалног учења у настави алгебре постигли боље резултате у односу на ученике који су садржаје алгебре усвајали на уобичајен начин у настави математике. Када упоредимо резултате ове две групе, можемо рећи да је највећа разлика између ученика са истом оценом из математике код ученика који имају оцену *добар* (3). Овде је најочигледнија и највећа разлика између ученика експерименталне и контролне групе у просечном броју постигнутих поена.

Табела 81. *Постигнуће ученика експерименталне и контролне групе у способности правилног схватања симбола у алгебри у односу на оцену из математике*

		Иницијално мерење		Финално мерење		Укупно
Група	Оцена	M	SD	M	SD	N
Експериментална група	Довољан (2)	1,20	1,75	3,00	1,70	10
	Добар (3)	3,33	2,92	6,41	2,15	27
	Врло добар (4)	4,30	2,65	6,57	2,20	37
	Одличан (5)	6,05	2,80	8,04	1,89	56
	Укупно	4,62	3,07	6,89	2,41	130
Контролна група	Довољан (2)	2,80	1,75	2,10	1,45	10
	Добар (3)	2,52	2,55	3,19	2,59	27
	Врло добар (4)	4,64	2,98	4,43	2,65	42
	Одличан (5)	6,00	2,47	6,06	2,57	48
	Укупно	4,56	2,94	4,60	2,83	127
Укупно	Довољан (2)	2,00	1,82	2,55	1,60	20
	Добар (3)	2,93	2,75	4,80	2,86	54
	Врло добар (4)	4,48	2,82	5,43	2,66	79
	Одличан (5)	6,03	2,64	7,12	2,43	104
	Укупно	4,59	3,00	5,76	2,87	257

Статистичку значајност уочених разлика између група ученика и тиме утицај контекстуалног приступа тестирали смо двофакторском анализом варијансе. Услови за двофакторску анализу варијансе су испуњени јер је Левеновим тестом (Табела 82) потврђена хипотеза о једнакости варијансе (F (7,249) =0,722, p = 0,653).

Табела 82. *Левенов тест хомогености варијансе*

Зависна променљива: Финално мерење

F	df1	df2	Sig.
0,722	7	249	0,653

Tests the null hypothesis that the error variance of the dependent variable is equal across groups.
a. Design: Intercept + Simbol1 + Grupa + Ocena + Grupa * Ocena

Ако се у уклони утицај коваријата (резултата иницијалног мерења ове способности), резултати показују да не постоји значајан утицај интеракције групе и оцене на резултате финалног мерења (F(3,248) = 0,816; p = 0,486) (Табела 83). То значи да код схватања симбола у настави ране алгебре нема статистички значајних разлика у постигнућу у смислу да ученицима са различитим оценама одговарају различити начини рада. Вредност парцијалног ета квадрата показује да се тек 1% укупне варијансе финалног мерења може објаснити интеракцијом групе и оцене.

Табела 83. *Двофакторска анализа коваријансе иницијалног и финалног мерења у способности правилног схватања симбола у алгебри у односу на оцену из математике*

Зависна променљива: Финално мерење

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.	Partial Eta Squared
Corrected Model	1462,580[a]	8	182,822	70,793	0,000	0,695
Intercept	486,067	1	486,067	188,215	0,000	0,431
Иницијално мерење	669,138	1	669,138	259,103	0,000	0,511
Група	217,189	1	217,189	84,100	0,000	0,253
Оцена	64,117	3	21,372	**8,276**	**0,000**	**0,091**
Група * Оцена	6,318	3	2,106	**0,816**	**0,486**	**0,010**
Error	640,463	248	2,583			
Total	10626,000	257				
Corrected Total	2103,043	256				

a. R Squared = 0,695 (Adjusted R Squared = 0,686)

Када је реч о схватању симбола у настави ране алгебре, двофакторска анализа коваријансе показује да, што је већа оцена из математике, то ученици постижу боље резултате. На основу добијених резултата, можемо закључити да постоји статистички значајан утицај оцена на постигнуће ученика у финалном мерењу када се отклони утицај коваријата (иницијално мерење схватања симбола у раној алгебри) ($F(3,248) = 8,276$; $p = 0,000$). Вредност парцијалног ета квадрата износи 0,09, што према Коену (Cohen, 1988) представља средњи утицај варијансе независне променљиве који објашњава зависну променљиву.

Потврду добијених резултата смо добили смо кроз кориговане средње вредности зависне променљиве за сваку групу у свакој независној променљивој засебно и заједно (Прилог 20).

* * * * *

Симбол као ознака за непознату и променљиву, на млађем школском узрасту представља један од најапстрактнијих појмова. Поставља се питање, како наставу треба организовати, да би ученици усвојили појам симбола и његовог значења у алгебри са разумевањем. Специфичност језика алгебре је садржана у значењу симбола, при чему симбол постаје средство за једноставан, практичан, потпун и економичан начин изражавања законитости у алгебри. Реалистичан контекст у проблемима алгебре, као што видимо у овом истраживању, може олакшати усвајање појма симбола као ознаке за променљиву и непознату. Поред тога, анализа резултата је показала да ученици, без обзира на оцену коју имају из математике, постижу боље резултате под утицајем контекстуалног приступа у настави алгебре. Овај експеримент је показао да ученици под утицајем контекстуалног приступа, односно учења заснованог на реалном контексту у раној алгебри показују напредак у разумевању правилног значења симбола. Напредак у схватању симбола је евидентан код свих ученика, иако ипак ученици са најбољом оценом из математике постижу боље резултате, док ученици са најслабијом оценом нешто слабије.

У настави алгебре на млађем школском узрасту, појам симбола (слова за означавање непознате и променљиве) суштински је везан са другим појмовима као што су једначине, неједначине, низови, формуле и друго. Када је реч о настави математике, ученици симбол често користе као ознаку у којој слово етикетира предмет на који се односи, што може допринети ометању правилне интерпретације слова као ознаке у почетној настави алгебре (McNeil, Weinberg, Hattikudur, Stephens, Asquith, Knuth & Alibali, 2010). Истраживање Ваинберга и сарадника (Weinberg, Dresen & Slater, 2016) показује да употреба и манипулација симболима, који етикетирају предмете на које се односе, у складу са правилима правих алгебарских симбола доводе до препрека и проблема у схватању алгебарских појмова.

Насупрот овим резултатима, анализа решења ученика у овом истраживању показала је да одређени број ученика јесте користио слова за етикетирање предмета или особа, али и да таква употреба симбола није ометала алгебарске манипулације и да су ученици увек долазили до тачног решења. Насупрот резултатима претходно наведених истраживања у овом истраживању ученици су користили различите интерпретације као ознаке за променљиву или непознату, али су њима манипулисали као стандардним алгебарским симболима.

На основу добијених резултата можемо закључити да проблем изражен у облику контекста свакодневног живота, може помоћи у интерпретацији и лакшем разумевању суштинске идеје и улоге симбола у математичким једнакостима или неједнакостима, једначинама или неједначинама. У прилог овим резултатима наведимо и пример истраживања Блантона и сарадника (Blanton, Brizuela, Gardiner, Sawrey & Newman-Owens, 2017) које је показало одређене могућности разумевања слова као ознака за непознату и промењљиву и то већ код ученика првог разреда основне школе. Аутори сматрају да се и на овако раном узрасту деца могу научити да размишљају на софистициранији начин о промењљивим количинама и промењљивим нотацијама, као и да их при том означавају користећи симболе. Кључну улогу у схватању идеје промењљиве и симбола за њено означавање треба да имају различите врсте нестандардних облика означавања, што укључује и природни језик. Наше истраживање показало је сличне резултате, при чему се слажемо са ауторима да се кроз дугорочна искуства са симболичким нотацијама може градити и појам промењљиве, а самим тим и предупредити каснији потенцијални проблеми у схватању овог појма. Тако је истраживање Ристед и сарадника (Rystedt, Kilhamn & Helenius, 2016) показало да су дванаестогодишњи ученици способни да користе богатство различитих контекстуалних ресурса. Ученици су успели да користе широк спектар интерпретација слова, као симбола за ознаку промењљиве или непознате, али да су у том одабиру показали одређену неодлучност. Њихово истраживање је показало да је дијалог између деце представљао кључну помоћ у преласку са примитивне на напреднију интерпретацију симбола, што потврђује значај ситуација свакодневног живота али и моћ речи и говора свакодневног живота.

Наше истраживање потврдило је резултате других истраживача, као што је Ван Рувејк (Van Reeuwijk, 2001) у ком су резултати показали потребу ученика за коришћењем различитих вештина и алата за манипулисање у процесу решавања једначина. Процес учења започиње од проблема реалног контекста у чијем решавању ученици имају потребу да самостално развијају стратегије којима ће помоћи ученику да савлада формалну алгебарску нотацију а самим тим и правилну употребу симбола у алгебри.

Апстрактност алгебре највећим делом се налази у алгебарској нотацији, као посебном облику изражавања алгебарских и математичких истина. Овај језик је јасан, прецизан и његова најважнија карактеристика је што омогућава на најефикаснији начин изражавање математичких истина. Ако се у обзир узме начин на који ученик схвата односе између промењљивих, можемо рећи да је наше истраживање показало да је највећи број грешака ученика везано за употребу слова као ознаке за промењљиву у алгебарском изразу (Пример 51)

Пример 51. Решење задатка са Мајом и Светланом – иницијални тест

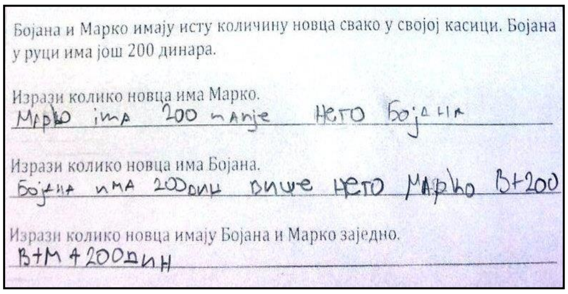
Маја има x динара. Маја има за 3000 динара мање од Светлане. Заокружи израз који приказује колико Светлана има новца.

а) x : 3000 б) x – 3000 в) x + 3000 г) 3000– x

Одређени број ученика се у решавању наведеног задатка одлучио за решење под б). Разлог томе можемо пронаћи у неправилном схватању односа између сума новца које имају Маја и Светлана. Овде се ради о такозваној „грешки преокрета“, у којој се дословно пребацује значење које симбол као промењљива има у проблему. До сличних резултата у свом истраживању долазе и Веинберг и сарадници (Weinberg, Dresen & Slater, 2016), који извор *грешке преокрета* проналазе у непотпуном разумевању симбола, неразумевање појма промењљиве или непознате и знака једнакости. Неке од захтева који се очекују код ученика млађег школског узраста и преласку на алгебарску нотацију, издваја Ферари (Ferrari, 2006), који сматра да језичке компетенције ученика треба да омогуће ученицима да у међусобној комуникацији постану свесни преласка на алгебарску нотацију. Значајно је потпуно активно учешће ученика и у нематематичким активностима, док је улога учитеља од пресудног значаја у одређивању ученичких циљева и активности у тако организованој настави. Резултати истраживања које је спровела Ван Амером (Van Amerom, 2002) показали су да се симболизација тешко развија у учењу и настави алгебре на млађем школском узрасту. Тачније, резултати показују да су неки од ученика, под утицајем реалистичних историјских проблема, способни да расуђују о непознатим, али да ће запис и даље остати аритметички. Исто истраживање је показало да чак и математички надарени ученици постижу успех у алгебарском резоновању ипак имају слабо развијену способност симболизације.

Анализираћемо неке од примера грешака карактеристичних за употребу симбола као ознаке за променљиву или непознату који су се појавили код дела ученика контролне групе у финалном тестирању. У Примеру 52 смо приказали неколико најчешћих грешака у решавању задатака који су били карактеристични код ученика у употреби симбола као ознаке за непознату или променљиву.

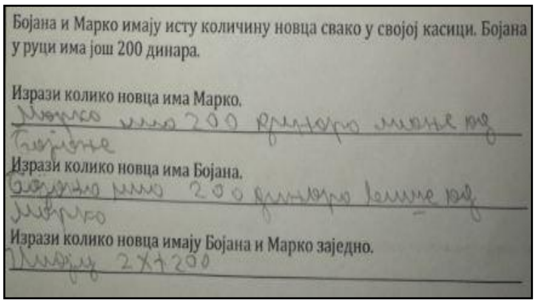
Пример 52. Решење задатка са Бојаном и Марком – финални тест


Бојана и Марко имају исту количину новца свако у својој касици. Бојана у руци има још 200 динара.

Изрази колико новца има Марко.
Марко има 200 мање него Бојана

Изрази колико новца има Бојана.
Бојана има 200дин више него Марко Б+200

Изрази колико новца имају Бојана и Марко заједно.
Б+М+200дин


Бојана и Марко имају исту количину новца свако у својој касици. Бојана у руци има још 200 динара.

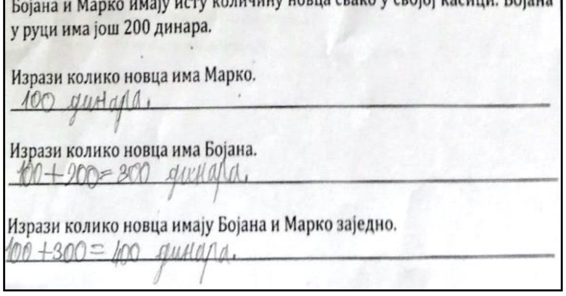
Изрази колико новца има Марко.

Изрази колико новца има Бојана.

Изрази колико новца имају Бојана и Марко заједно.
Имају 2x+200

У наведеним решењима Примера 52 може се уочити да ученик није способан да на прави начин искористи симбол као ознаку за непознату количину новца Марка и Бојане. У овим примерима решења ученици су користили речи да би изразили количину новца сваког од двоје деце. Дакле, ученици су били у ситуацији да променљиве занемарују или одбаце, већ уместо тога користе речи којима покушавају утврдити и изразити односе. На потребу за изражавањем генерализација и математичких истина коришћењем речи, пре увођења алгебарске нотације указао је и Расел са сарадницима (Russell, Schifter & Bastable, 2011). Тек у примеру који се односио на заједничку количину новца, ученици користе симболе као ознаку за непознату количину новца. Сличне грешке у резултатима ученика су показали Стивенс и сарадници (Stephens, Blanton, Knuth, Isler & Gardiner, 2015) у истраживању које је имало сличан карактер као и наше. Поред тога, одређени број ученика је имао потребу да у решавању овог задатка потпуно избегне непознату, тако да је уместо симбола, непознатим давао тачно одређену вредност (Пример 53).

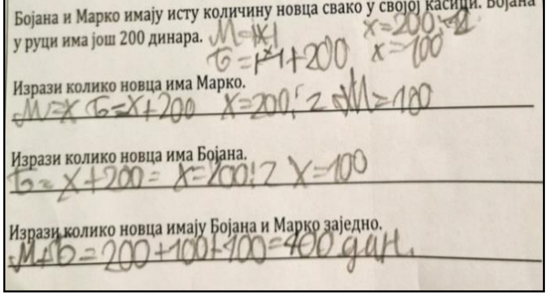
Пример 53. Решење задатка са Бојаном и Марком – финални тест


Бојана и Марко имају исту количину новца свако у својој касици. Бојана у руци има још 200 динара.

Изрази колико новца има Марко.
100 динара.

Изрази колико новца има Бојана.
100+200=300 динара.

Изрази колико новца имају Бојана и Марко заједно.
100+300=400 динара.


Бојана и Марко имају исту количину новца свако у својој касици. Бојана у руци има још 200 динара.

Изрази колико новца има Марко.

Изрази колико новца има Бојана.

Изрази колико новца имају Бојана и Марко заједно.
М+Б=200+100+100=400 дин.

У немогућности да схвате идеју непознате, ученици избегавају записивање алгебарском нотацијом. Насупрот томе, део њих се одлучује да је боље дати произвољну одређену вредност, како би се испунили захтеви у задатку. Генерално говорећи, задатак решен на овај начин даје решење које је емпиријски тачно, али изражено конкретним бројем без генерализација. На исти начин у истраживању које су спровели Карахер и сарадници (Carraher, Schliemann & Schwartz, 2008), део ученика у решењу избегавао је да користи променљиве, већ је уместо њих непознатој количини давао произвољна вредност. Нека од истраживања, као што је и истраживање Стејсија и Мекгрегора (Stacey & MacGregor, 1999), показују да се чак и ученици старијег узраста пре оријентишу на аритметички начин решавања проблема, него на решавање коришћењем симбола (алгебарски запис – једначина). На сличан начин и Озгелди (Özgeldi, 2013) у свом истраживању долази до закључка да неки ученици нису способни да представљају генерализације, све док не постану способни да манипулишу употребом променљиве. Како би се подржало разумевање генерализација, од помоћи могу бити различите концепције променљивих. У њих спада и празно место у запису или цртеж и скица које има улогу променљиве или непознате у првом сусрету ученика са идејом непознате или променљиве. До сличних резултата у свом истраживању долази и Зељић (2014) која наводи да су ученици имали тенденцију да променљивој додељују нумеричку вредност, да занемарују или игноришу променљиву, да слово третирају као конкретан објекат, или да погрешно разумеју математичку структуру проблема на који се променљива односи.

Тако Радфорд (Radford, 2018) у истраживању долази до закључка да природни језик са својим широким системом могућности може понудити квалитетан семиотички материјал за стварање контекстуалних генерализација, али да се исти мора временом повући у позадину како би његово место заузео нови когнитивни облик симболизације. Ова контекстуална уопштавања могу се разумети као иконички облик означавања који ће временом прерасти у чист алгебарски симболизам. Резултати овог истраживања потврдили су претходно речено, јер су ученици у преласку на симболичку нотацију често користили различите врсте иконичких репрезентација у облику скица или слика, како би поједноставили односе и проблемску ситуацију приближили сопственом мишљењу.

За развој алгебарског мишљења од пресудног значаја је разумевање и употреба слова као ознаке за непознату или променљиву, а пут до разумевања његовог значења може бити кроз пажљиво одабране садржаје обликоване контекстуалним приступом. Тако Сфард и Линчевски (Sfard & Linchcvski, 1994) сматрају да док се ученик суочава са једначинама и неједначинама треба бити у стању да се креће између оперативног приступа када се његова мисао усредсређује на процесе (представљене алгебарским изразима) и структурални приступ, када се фокусирају на апстрактне објекте који се крију иза симбола (Sfard & Linchcvski, 1994). Управо у овом односу се и огледа значај контекстуалног приступа који омогућава ученику да у сваком тренутку његова мисао путује између алгебарске нотације и реалног контекста, при чему му на том путу може помоћи модел који ученик у поступку учења сам гради.

На крају можемо закључити да контекстуални приступ, заснован на ситуацијама реалног окружења ученика, може подстицати ученичку способност правилног разумевања симбола као ознаке за променљиву или непознату. Ова чињеница је посебно важна, ако се у обзир узме значај симбола као једног од најважнијих појмова алгебре, као и његов значај за касније усвајање апстрактнијих алгебарских садржаја. Вредност оваквог приступа, кога карактерише висок степен очигледности, кроз процесе хоризонталне и вертикалне математизације и способности преласка са нижег на виши ниво апстракције моделовањем ситуација, огледа се првенствено у његовој ефикасности. Истраживање показује да овај приступ постаје подједнако добар у настави математике у садржајима алгебре, код свих ученика без обзира на разлике које могу постојати између њих.

2.5. Утицај контекстуалног приступа на правилно разумевање појма промењливе и непознате

За разлику од аритметике у којој је доминантна тежња за добијањем одговора и решења у облику конкретних бројева и величина, у алгебри се решавање проблема не може замислити без употребе промењливе и непознате. Из тог разлога је у настави алгебре веома важно развијати ове појмове као најважније и кључне појмове, који ће омогућити касније разумевање и формирање осталих сложенијих појмова алгебре. Наравно, формирање овог појма не може се посматрати издвојено већ у јединству са свим другим алгебарским способностима, али се у тој вези посебно мора нагласити повезаност са симболом као ознаком за промењливу и непознату. Развијање појмова промењлива и непозната заснована је на употреби симбола, али и разумевању значења истог. Интенције морају бити усмерене да ученици не схвате појма непознате или промењливе као број или бројеве које је немогуће утврдити, већ се ови појмови морају схватити као број који је само тренутно непознат и чија се вредност може одредити.

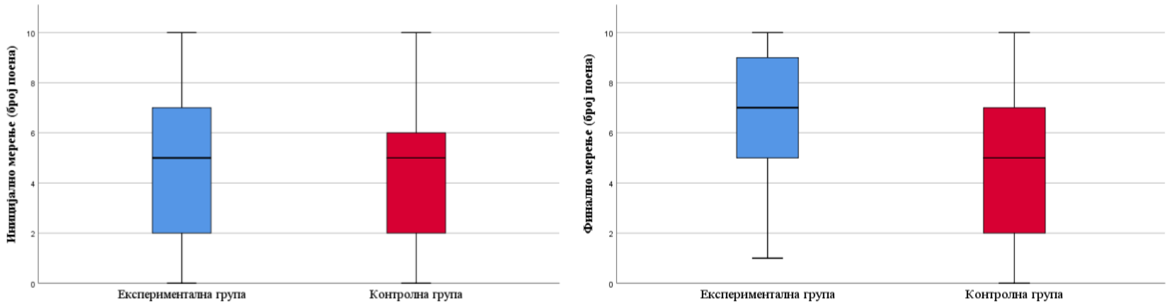
Чињеница је да се у настави мало пажње посвећује овим примарним појмовима и да се често одмах прелази на манипулацију знатно сложенијим појмовима алгебре, као што су једначине или неједначине, тако да један од најважнијих циљева учења и наставе алгебре мора бити проналажење приступа, који ће омогућити правилно разумевање појмова промењлива и непозната, и на тај начин потпунијег развијања алгебарског мишљења. Наша идеја у истраживању је да се контекстуалним приступом и процесима хоризонталне и вертикалне математизације повеже реални свет са апстрактним појмовима алгебре коришћењем и развијањем модела, који ће појмове промењливе и непознате учинити приступачнији уму ученика. Из тог разлога један од задатака овог истраживања јесте да се утврде ефекти контекстуалног приступа на способност правилног разумевања појма промењлива и непозната. Задатак је био да утврдимо да ли реални контекст, кроз процес математизације и моделовања, може утицати на развијање способности правилног разумевања појмова промењлива и непозната.

Дескриптивни показатељи на иницијалном мерењу развијености способности разумевања појма промењливе и непознате показали су да су ученици експерименталне групе у просеку постигли нешто боље резултате (M = 4,66; SD = 3,25) у односу на контролну групу (M = 4,57; SD = 3,06) (Табела 84).

Табела 84. *Постигнуће ученика експерименталне и контролне групе у правилном разумевању појма промењливе и непознате*

		N	M	SD
Иницијално мерење	Експериментална група	130	4,66	3,25
	Контролна група	127	4,57	3,06
Финално мерење	Експериментална група	130	6,60	2,55
	Контролна група	127	4,69	3,01

Када је реч о просечном броју поена на финалном мерењу, којим се испитује разумевање појма промењливе и непознате, можемо закључити да је експериментална група постигла значајно већи број просечних поена (M = 6,06; SD = 2,55) у односу на контролну групу (M = 4,69; SD = 3,01) (Табела 65). Посебно је уочљив напредак експерименталне групе у просечном броју поена у финалном у односу на иницијално мерење (Графикон 7).



Графикон 7. *Постигнуће ученика експерименталне и контролне групе у способности правилног разумевања појма променљиве и непознате*

Како бисмо утврдили разлике у постигнућу у мерењу способности правилног схватања појма променљиве и непознате између контролне и експерименталне групе искористићемо анализу варијансе (Табела 85).

Табела 85. *Анализа варијансе иницијалног и финалног мерења развијености способности правилног разумевања појма променљиве и непознате*

	Levene Statistic	df1	df2	Sig.
Иницијално мерење	1,307	1	255	0,254
Финално мерење	3,227	1	255	0,074

		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Иницијално мерење	Између група	0,575	1	0,575	0,058	0,810
	Унутар група	2544,289	255	9,978		
	Укупно	2544,864	256			
Финално мерење	Између група	235,577	1	235,577	30,330	0,000
	Унутар група	1980,602	255	7,767		
	Укупно	2216,179	256			

Вредност израчунате варијансе у иницијалном мерењу ($F(1,255) = 0,058$; $p = 0,810$) имплицира да не постоји статистички значајна разлика између тестираних група на иницијалном мерењу у правилном разумевању појма променљива и непозната. Са друге стране у финалном мерењу анализа варијансе показује ($F(1,255) = 30,330$; $p = 0,000$) да постоји статистички значајна разлика између експерименталне и контролне групе у развијености ове способности (Табела 85). Наиме, резултати показују да је експериментална група показала статистички значајно побољшање под утицајем контекстуалног приступа. Вредности Левеновог теста на иницијалном ($F(1,255) = 1,307$; $p = 0,254$) и финалном мерењу ($F(1,254) = 3,227$; $p = 0,074$) показују да није прекршена претпоставка о хомогености варијансе, тако да се резултати анализе могу сматрати поузданим. То значи да су ученици под утицајем овако организованог експерименталног програма успели да значајно више развију способност разумевања појма променљива и непозната.

Како би били сигурни у истинитост добијених резултата и утицај контекстуалног приступа у настави ране алгебре на схватање променљиве и непознате користили смо и анализу коваријансе како би отклонили сумњу да је резултат последица неуједначености група. Да би утврдили претпоставку о једнакости варијансе користили смо Левенов тест (Табела 86) чија вредност у овом случају износи (F(1,255) = 0,869; p = 0,352). Вредност теста нам говори да претпоставка није нарушена, јер је вредност *p* већа од граничних 0,05.

Табела 86. *Левенов тест једнакости варијансе*

Зависна варијабла: Финално мерење

F	df1	df2	Sig.
0,869	1	255	0,352

Tests the null hypothesis that the error variance of the dependent variable is equal across groups.
a. Design: Intercept + PromNep1 + Grupa

Анализом коваријансе (Табела 87) утврдили смо да након уклањања коваријата (резултата иницијалног мерења) постоје статистички значајне разлике између експерименталне и контролне групе у финалном мерењу схватања појма променљиве и непознате (F(1,254) = 65,031; p = 0,000). Вредност парцијалног ета квадрата има вредност 0,204, што значи да се 20,4% варијансе финалног мерења може објаснити независном варијаблом (контекстуалним приступом) и то значи да је овај утицај велики. Ако се у обзир узме утицај коваријата (резултата иницијалног мерења способности разумевања променљиве и непознате) на резултате финалног мерења, када се уклони утицај независне променљиве (група) такође је значајан (F(1,254) = 330,560; p = 0,000). У овом случају вредност парцијалног ета квадрата је 0,565, што према Коену (Cohen, 1988) представља велики утицај на део зависне варијансе који је објашњен независном променљивом.

Табела 87. *Анализа коваријансе иницијалног и финалног мерења способности правилног разумевања променљиве и непознате*

Зависна променљива: Финално мерење

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.	Partial Eta Squared
Corrected Model	1355,578[a]	2	677,789	200,044	0,000	0,612
Intercept	543,401	1	543,401	160,381	0,000	0,387
Иницијално мерење	1120,000	1	1120,000	**330,560**	**0,000**	**0,565**
Група	220,337	1	220,337	**65,031**	**0,000**	**0,204**
Error	860,601	254	3,388			
Total	10431,000	257				
Corrected Total	2216,179	256				

a. R Squared = 0,612 (Adjusted R Squared = 0,609)

Резултати које смо добили овим истраживањем показали су да се контекстуалним приступом може утицати на развој способности разумевања променљиве и непознате. Добијени резултати су посебно важни ако се у обзир узме значај променљиве и непознате у садржајима алгебре. Нека од истраживања (Weinberg, Dresen & Slater, 2016) показују посебну наглашеност везе између разумевања знака једнакости и разумевања појма променљиве и непознате, као и чињеницу да они у основним алгебарским задацима имају централну улогу попут објашњавања односа између количина и описивања образаца. Према мишљењу ових аутора наставници математике греше у томе што од ученика траже да о овим појмовима размишљају користећи се искључиво традиционалним видовима репрезентације: знак једнакости и симболи као што су *x* и *y*.

Истраживање је показало да се контекстуалним приступом, кроз садржаје засноване на реалистичним ситуацијама свакодневног живота може утицати на развој појма променљива и непозната, али и да су ови појмови и јакој међусобној повезаности са другим алгебарским појмовима као што је, на пример, симбол или знак једнакости.

Животност ситуације је ученицима омогућила да непознату и промењљиву не схвате само као слово у алгебри, већ да разумеју дубље значење тог појма у смислу броја (вредности или количине) који су само тренутно непознати и који се могу утврдити.

У истраживању смо желели да утврдимо да ли контекстуални приступ остварује исте ефекте код ученика различитог пола, општег успеха или оцене из математике. Из тог разлога ћемо анализирати утицај ових независних варијабли на развијање способности разумевања промењљиве и непознате.

2.5.1. Утицај контекстуалног приступа на развијање способности разумевања појма промењљиве и непознате у односу на пол

Резултати иницијалног теста (Табела 88) показују да су дечаци (M = 5,21; SD = 3,32) у експерименталној групи били успешнији у способности правилног разумевања појма промењљива и непозната у односу на девојчице (M = 4,16; SD = 3,13). Слични резултати су карактеристични и за контролну групу у којој су дечаци (M = 4,89; SD = 3,22) постигли нешто боље резултате у односу на девојчице (M = 4,23; SD = 2,86). Ако се у обзир узме чињеница да су ученици могли да освоје укупно највише 10 поена у мерењу ове способности, можемо закључити да је ова способност била недовољно развијена и код дечака и код девојчица у обе тестиране групе.

Анализа резултата (Табела 88) показала је да су дечаци (M = 7,05; SD = 2,25) и девојчице (M = 6,19; SD = 2,74) експерименталне групе, који су садржаје алгебре усвајали кроз контекстуални приступ учењу показали у просеку боље резултате у схватању појма промењљиве, у односу на дечаке (M = 4,74; SD = 2,81) и девојчице (M = 4,69; SD = 2,81), који су радили на уобичајен начин, без посебних интервенција. Највеће разлике карактеристичне су за дечаке између група, јер су дечаци из експерименталне групе постигли значајно већи просечан број бодова у односу на дечаке контролне групе у правилном схватању појма промењљиве и непознате након спроведеног експерименталног програма.

Табела 88. *Постигнуће ученика експерименталне и контролне групе у способности правилног разумевања појма промењљиве и непознате у односу на пол*

		Иницијално мерење		Финално мерење		Укупно
Група	Пол	M	SD	M	SD	N
Експериментална група	Дечаци	5,21	3,32	7,05	2,25	62
	Девојчице	4,16	3,13	6,19	2,74	68
	Укупно	4,66	3,25	6,60	2,55	130
Контролна група	Дечаци	4,89	3,22	4,74	3,21	65
	Девојчице	4,23	2,86	4,63	2,81	62
	Укупно	4,57	3,06	4,69	3,01	127
Укупно	Дечаци	5,05	3,26	5,87	3,01	127
	Девојчице	4,19	3,00	5,45	2,87	130
	Укупно	4,61	3,15	5,65	2,94	257

Левенов тест хомогености варијансе (F = 0,433; p = 0,730) даје потврду претпоставке о једнакости варијансе чиме су испуњени услови за тестирање уочених разлика у постигнућу између ученика експерименталне и контролне групе формираних на основу пола двофакторском анализом варијансе (Табела 89).

Табела 89. *Левенов тест хомогености варијансе*

Зависна варијабла: Финално мерење

F	df1	df2	Sig.
0,433	3	253	0,730

Tests the null hypothesis that the error variance of the dependent variable is equal across groups.
a. Design: Intercept + PromNep1 + Grupa + Pol + Grupa * Pol

Двофакторском анализом коваријансе (Табела 90) и уклањањем коваријата (резултата иницијалног мерења схватања појма променљиве и непознате) утврдили смо да на резултат у финалном мерењу ове способности не постоји значајан утицај (F(1,252) = 153,40; p = 0,284) интеракције између спроведеног експерименталног програма и пола ученика. Вредност парцијалног ета квадрата износи 0,005 што према Коену (Cohen, 1988) представља веома мали утицај. То значи да само 0,5 % варијансе финалног мерења ове способности објашњава утицај групе и пола. Ако се у обзир узме анализа коваријансе у односу на пол, можемо закључити да, такође, не постоји статистички значајан утицај на финалне резултате схватања променљиве и непознате између дечака и девојчица (F(1,252) = 0,137; p = 0,712). При том вредност парцијалног ета квадрата говори да се само 0,1% варијансе финалног мерења ове способности може објаснити полом ученика.

Табела 90. *Двофакторска анализа коваријансе постигнућа ученика експерименталне и контролне групе у способности правилног схватања појма променљива и непозната у односу на пол*

Зависна варијабла: Финално мерење

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.	Partial Eta Squared
Corrected Model	1359,943[a]	4	339,986	100,062	0,000	0,614
Intercept	534,996	1	534,996	157,456	0,000	0,385
Иницијално мерење	1100,156	1	1100,156	323,788	0,000	0,562
Група	219,937	1	219,937	64,730	0,000	0,204
Пол	0,465	1	0,465	**0,137**	**0,712**	**0,001**
Група * Пол	3,918	1	3,918	**1,153**	**0,284**	**0,005**
Error	856,236	252	3,398			
Total	10431,000	257				
Corrected Total	2216,179	256				

a. R Squared = 0,614 (Adjusted R Squared = 0,608)

Да бисмо потврдили значај добијених резултата извршили смо анализу у којој је статистички уклоњен утицај коваријата и подаци приказани за сваку независну променљиву појединачно као и заједно (Прилог 21). И ови подаци дају потврду непостојања статистички значајних разлика између дечака и девојчица. На основу резултата статистичке анализе можемо рећи да контекстуални приступ у настави алгебре утиче подједнако на дечаке и девојчице у способности правилног разумевања појмова непознате и променљиве.

Када је реч о алгебри, језик се не сматра само носиоцем претходног значења, већ се схвата и као дизајнер самих значења. Језички садржај који се усваја у математичкој комуникацији је значајан за развој математичког мишљења, тако да лоши језички ресурси утичу на лош развој мишљења (Ferrari, 2006: 81). Исти случај је и са појмом непознате или променљиве, тако да смо у истраживању покушали одредити језик свакодневног живота као квалитетан ресурс који ће омогућити потпуно и тачно формирање ових појмова. Дешава се и да ученици тешко прихватају двосмисленост непознате количине, па често имају тенденцију да непознатим вредностима додељују тачно одређене нумеричке вредности, чак и по цену нарушавања проблемске ситуације (Carraher, Schliemann & Schwartz, 2008; Knuth, Stephens, McNeil & Alibali, 2006). Да бисмо отклонили могуће недоумице, искористили смо реалистични контекст и кроз процес математизације, идеју непознате и променљиве приближили ученицима и учинили је транспарентнијом. Истраживање је такође показало да се контекстуалним приступом у настави алгебре може подстицати разумевање појма променљива и непозната и да то разумевање не зависи од пола ученика. Добијени резултати показали су подједнако напредовање и дечака и девојчица у схватању променљиве и непознате под утицајем контекстуалног приступа у настави ране алгебре.

2.5.2. Утицај контекстуалног приступа на разумевање појма променљиве и непознате у односу на општи успех

Резултати иницијалног мерења развијености способности правилног схватања појма непознате и променљиве (Табела 91) показали су да су најбоље резултате у обе групе постигли ученици са најбољим општим успехом *одличан* и то у експерименталној групи (M = 6,08; SD = 2,97) и контролној групи (M = 6,00; SD = 2,83). Ученици са успехом *врло добар* су били нешто успешнији у контролној групи (M = 3,20; SD = 2,46) у односу на експерименталну групу. Ученици са најлошијим општим успехом *добар* у мерењу ове способности у контролној групи (M = 2,96; SD = 2,79) били су нешто успешнији у односу на ученике са истим успехом у експерименталној групи (M = 2,18; SD = 1,83). На основу добијених резултата можемо закључити да су једино код ученика са општим успехом *одличан* ученици имали нешто развијенију способност пре експерименталног програма.

Резултати финалног мерења способности схватања појма променљиве и непознате (Табела 91), показују да су ученици са *одличним* успехом постигли најбоље просечне резултате и то у експерименталној (M = 7,78; SD = 2,13) и контролној групи (M = 5,98; SD = 2,94). Ученици са општим успехом *врло добар* из експерименталне групе су постигли боље резултате (M = 5,10; SD = 2,12) него ученици са истим општим успехом из контролне групе (M = 3,83; SD = 2,32). Када је реч о ученицима са успехом *добар*, такође су ученици експерименталне групе (M = 4,09; SD = 1,92) показали боље просечне резултате у односу на ученике из контролне групе (M = 2,57; SD = 2,61).

Можемо уочити да су ученици из експерименталне групе без обзира на општи успех у просеку показивали боље резултате у односу на ученике са истим општим успехом из контролне групе. Ако се упореде ученици са истим просеком из ове две групе, можемо рећи да су највеће разлике у постигнућу у схватању појма променљиве и непознате код ученика са *одличним* општим успехом. Значајно је да су ученици са најлошијим успехом у експерименталној групи (општи успех *добар*) постигли боље резултате од ученика који имају општи успех *врло добар* у контролној групи.

Табела 91. *Постигнуће ученика експерименталне и контролне групе у способности правилног схватања појма променљиве и непознате у алгебри у односу на општи успех*

		Иницијално мерење		Финално мерење		Укупно
Група	Успех	M	SD	M	SD	N
Експериментална група	Добар	2,18	1,83	4,09	1,92	11
	Врло добар	2,71	2,60	5,10	2,12	42
	Одличан	6,08	2,97	7,78	2,13	77
	Укупно	4,66	3,25	6,60	2,55	130
Контролна група	Добар	2,96	2,79	2,57	2,61	23
	Врло добар	3,20	2,46	3,83	2,32	40
	Одличан	6,00	2,83	5,98	2,94	64
	Укупно	4,57	3,06	4,69	3,01	127
Укупно	Добар	2,71	2,52	3,06	2,49	34
	Врло добар	2,95	2,53	4,48	2,29	82
	Одличан	6,04	2,90	6,96	2,67	141
	Укупно	4,61	3,15	5,65	2,94	257

Левенов тест (Табела 92) показује вредност F = 1,144 за p = 0,338, што значи да је претпоставка о једнакости варијансе испуњена. То значи да је могуће извршити двофакторску анализу коваријансе у истраживању односа између група под утицајем контекстуалног приступа на развијање способности разумевања променљиве и непознате.

Табела 92. *Левенов тест хомогености варијансе*

Зависна променљива: Финално мерење

F	df1	df2	Sig.
1,144	5	251	0,338

Tests the null hypothesis that the error variance of the dependent variable is equal across groups.
a. Design: Intercept + PromNep1 + Grupa + Uspeh + Grupa * Uspeh

Увидом у Табелу 93 можемо уочити да када се уклони утицај коваријата (резултата иницијалног мерења способности) не постоји статистички значајан утицај групе и општег успеха као једне варијабле на резултате финалног мерења схватања појма променљиве и непознате (F(2,250) = 0,169; p = 0,845). При томе, вредност парцијалног ета квадрата износи 0,001 што значи да је тај утицај занемарљив.

Ако се у обзир узме утицај начина рада (групе) на резултате финалног мерења можемо рећи да постоји статистички значајан утицај између њих (F(2,250) = 7,697; p = 0,001), ако се уклони утицај резултата иницијалног мерења схватања појма променљиве и непознате. Вредност парцијалног ета квадрата показује да се 5,8% варијансе финалног мерења може објаснити независном променљивом (општим успехом ученика), тако да је утврђена јака веза између постигнућа ученика различитог општег успеха.

Табела 93. *Двофакторска анализа коваријансе постигнућа ученика експерименталне и контролне групе у способности правилног схватања појма променљиве и непознате у односу на општи успех*

Зависна променљива: Финално мерење

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.	Partial Eta Squared
Corrected Model	1413,058[a]	6	235,510	73,311	0,000	0,638
Intercept	495,623	1	495,623	154,280	0,000	0,382
Иницијално мерење	665,065	1	665,065	207,025	0,000	0,453
Група	131,707	1	131,707	40,999	0,000	0,141
Успех	49,455	2	24,728	**7,697**	**0,001**	**0,058**
Група * Успех	1,086	2	0,543	**0,169**	**0,845**	**0,001**
Error	803,121	250	3,212			
Total	10431,000	257				
Corrected Total	2216,179	256				

a. R Squared = 0,638 (Adjusted R Squared = 0,629)

У Прилогу 22, смо дали кориговане средње вредности зависне променљиве за сваку групу, дату за сваку независну променљиву посебно (група и успех), као и заједно, који кроз дубљу анализу дају потврду добијених резултата.

На основу добијених резултата можемо закључити да су ученици без обзира на општи успех постизали боље резултате у схватању појма променљиве и непознате, када су били под утицајем експерименталног програма (контекстуалног приступа) у настави алгебре.

Ако појам променљиве представимо као слово које означава један или више бројева, то значи да смо тај појам формално одредили. Таква врста дефиниције је честа за наставу ране алгебре, али се у таквом дефинисању не даје ближе одређење и значење тог појма. Изградња значења променљиве у потпуном смислу подразумева проналажење когнитивне основе на којој ће се тај појам постепено градити. Наша идеја је да ученици граде смисао на основу већ постојећег знања, али и примера и проблема реалног света који их окружује. Да бисмо постигли такве резултате у настави алгебре осмислили смо иновативни приступ заснован на идеји реалистичног контекста и процесе хоризонталне и вертикалне математизације којима се проблеми свакодневног живота преводе у свет апстрактне алгебре.

Резултати истраживања су показали да су ученици, који су усвајали садржаје алгебре под утицајем контекстуалног приступа, показали боље разумевање појма променљиве и непознате без обзира на то какав су општи успех имали. Резултати показују ипак, да су одлични ученици за нијансу показивали боље резултате у односу на ученике истог успеха из контролне групе, али и у односу на остале ученике из експерименталне групе. На крају можемо закључити да је контекстуални приступ у настави ране алгебре позитивно утицао на све ученике без обзира на њихов општи успех у развоју способности правилног схватања променљиве и непознате.

2.5.3. Утицај контекстуалног приступа на развијање способности правилног разумевања појма променљиве и непознате у односу на оцену из математике

На иницијалном мерењу развијености способности правилног схватања појма променљиве и непознате (Табела 94) ученици који имају оцену из математике *одличан* (5) постигли су најбоље резултате, при чему су ученици из експерименталне групе (M = 5,00; SD = 2,11), били нешто бољи у односу на ученике из контролне групе (M = 5,00; SD = 2,11) са истом оценом. Ученици са оценом *врло добар* (4) из контролне групе (M = 5,00; SD = 2,11) показали су просечно боље резултате у односу на ученике са истом оценом из експерименталне групе (M = 5,00; SD = 2,11). Иницијално мерење показало је да су ученици са оценом *добар* (3) из експерименталне групе (M = 5,00; SD = 2,11) били успешнији у односу на ученике са истом оценом из контролне групе (M = 5,00; SD = 2,11). Најслабије резултате у мерењу ове способности, пре експерименталног програма, постигли су ученици са оценом *довољан* (2) из експерименталне групе (M = 5,00; SD = 2,11). Насупрот њима ученици са истом оценом из контролне групе (M = 5,00; SD = 2,11) постигли су знатно боље резултате, чак и од ученика са оценом *добар* (3) из исте групе.

Резултати истраживања (Табела 94) показали су да сви ученици под утицајем учења садржаја алгебре у настави математике контекстуалним приступом, без обзира на оцену коју имају из математике, показали боље резултате на финалном мерењу у односу на ученике из контролне групе са истом оценом. Најбоље просечне резултате на финалном мерењу правилног схватања појма променљиве и непознате, су показали ученици са оценом *одличан* (5) и то у експерименталној групи (M = 8,25; SD = 1,87) и контролној (M = 6,44; SD = 2,86). Ученици са оценом *врло добар* (4) из експерименталне групе су били такође успешнији (M = 5,95; SD = 2,31) у односу на ученике из контролне групе (M = 4,29; SD = 2,55). Ако се упореде просечни резултати ученика са оценом *добар* (3) успешнији су ученици из експерименталне групе (M = 5,00; SD = 2,11) насупрот ученицима из контролне групе са истом оценом (M = 3,11; SD = 2,37). Најслабије просечне резултате су постигли ученици чија је оцена *довољан* (2) у експерименталној (M = 4,10; SD = 2,02) и контролној групи (M = 2,20; SD = 2,66). На основу резултата очигледан је напредак ученика експерименталне групе у односу на ученике контролне и тај напредак је поприлично уједначен између сваке групе. Када је реч о резултатима контролне групе, можемо закључити да су ученици у развоју ове способности стагнирали, док су неки и назадовали, као што је случај са ученицима са најслабијом оценом *довољан* (2).

Табела 94. *Постигнуће ученика експерименталне и контролне групе у схватању појма променљиве и непознате у односу на оцену из математике*

		Иницијално мерење		Финално мерење		Укупно
Група	Оцена	M	SD	M	SD	N
Експериментална група	Довољан (2)	2,50	1,72	4,10	2,02	10
	Добар (3)	2,63	2,79	5,00	2,11	27
	Врло добар (4)	3,57	2,69	5,95	2,31	37
	Одличан (5)	6,75	2,79	8,25	1,87	56
	Укупно	4,66	3,25	6,60	2,55	130
Контролна група	Довољан (2)	3,70	3,02	2,20	2,66	10
	Добар (3)	2,37	2,22	3,11	2,37	27
	Врло добар (4)	4,24	2,41	4,29	2,55	42
	Одличан (5)	6,27	3,09	6,44	2,86	48
	Укупно	4,57	3,06	4,69	3,01	127
Укупно	Довољан (2)	3,10	2,47	3,15	2,50	20
	Добар (3)	2,50	2,50	4,06	2,42	54
	Врло добар (4)	3,92	2,55	5,06	2,56	79
	Одличан (5)	6,53	2,93	7,41	2,53	104
	Укупно	4,61	3,15	5,65	2,94	257

Вредност Левеновог теста (Табела 95) износи F(7,249) = 0,500; p = 0,834 што значи да је испуњена претпоставка о хомогености варијансе, а то значи да су варијансе једнаке и да се може израчунати двофакторска анализа коваријансе.

Табела 95. *Левенов тест хомогености варијансе*

Зависна променљива: Финално мерење

F	df1	df2	Sig.
0,500	7	249	0,834

Tests the null hypothesis that the error variance of the dependent variable is equal across groups.
a. Design: Intercept + PromNep1 + Grupa + Ocena + Grupa * Ocena

Када се уклони утицај коваријата (резултата иницијалног мерења у схватању променљиве и непознате) резултати двофакторске анализе коваријансе (Табела 96) показују да не постоји статистички значајан утицај независне променљиве (интеракције групе и оцене) на резултате финалног мерења схватања променљиве и непознате (F(3, 248) = 0,671; p = 0,571). Вредност парцијалног ета квадрата показује да је само 0,8% варијансе финалног мерења способности разумевања променљиве и непознате објашњено интеракцијом начина рада и оцене коју ученици имају из математике.

Табела 96. *Двофакторска анализа коваријансе постигнућа ученика експерименталне и контролне групе у способности правилног схватања појма променљиве и непознате у односу на оцену из математике*

Зависна променљива: Финално мерење

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.	Partial Eta Squared
Corrected Model	1440,603[a]	8	180,075	57,581	0,000	0,650
Intercept	456,209	1	456,209	145,878	0,000	0,370
Иницијално мерење	622,366	1	622,366	199,009	0,000	0,445
Група	172,371	1	172,371	55,118	0,000	0,182
Оцена	77,610	3	25,870	**8,272**	**0,000**	**0,091**
Група * Оцена	6,291	3	2,097	**0,671**	**0,571**	**0,008**
Error	775,576	248	3,127			
Total	10431,000	257				
Corrected Total	2216,179	256				

a. R Squared = 0,650 (Adjusted R Squared = 0,639)

Анализа резултата показује и да постоји статистички значајан утицај између оцене коју ученици имају из математике и финалних резултата у мерењу способности разумевања променљиве и непознате, када се уклони утицај коваријата (резултати иницијалног мерења ове способности) ($F (3, 248) = 8{,}272$; $p = 0{,}000$). Вредност Парцијалног ета квадрата показује да је 9,1% варијансе резултата финалног мерења објашњен оценом коју ученици имају из математике.

Двофакторском анализом коваријансе израчунали смо и кориговане средње вредности финалног мерења способности правилног разумевања променљиве и непознате за сваку групу, оцену и интеракцију групе и оцене (Прилог 23).

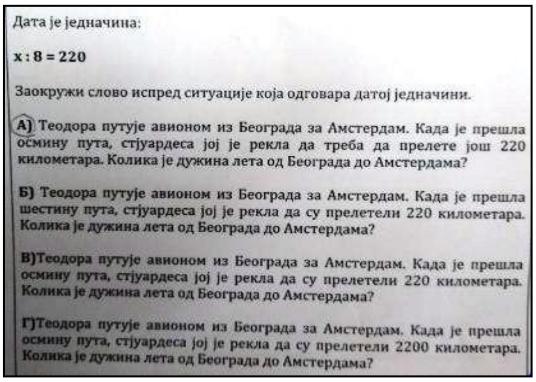
Добијени резултати показали су да се контекстуалним приступом може утицати на развијање способности правилног разумевања појмова непозната и променљива, али да не постоји статистички значајна разлика између ученика са различитом оценом из математике.

* * * * *

Прелазак од вербалног језика до симболичког записа представља активност која у себи обухвата способност детета да иконички изрази ситуације и односе помоћу слика, цртежа или других ознака. Радфорд (Radford, 2002) тврди да је таква транзиција лакша, ако ученици могу да управљају везама између знакова и значења на флексибилан начин, развијају, мењају и напуштају своја претходна тумачења, ако је то потребно. Да би значење симбола било развијено на прави начин, потребно је да ученик буде свестан појма променљиве и непознате. Наше истраживање показало је да ученици под утицајем реалистичног контекста могу постићи значајан напредак у развоју појмова променљива и непозната. При том можемо закључити да су ученици постизали значајно боље резултате у експерименталној групи насупрот ученика контролне групе у финалном мерењу ове способности. Ученици су притом, без обзира на пол, општи успех или оцену коју имају из математике, постизали поприлично уједначен напредак у разумевању идеје променљиве и непознате, када смо користили реалистичан контекст у приступу садржајима алгебре на млађем школском узрасту.

Један од задатака на тестовима које смо користили да би утврдили ову способност односио се на захтев у ком су ученици имали задатак да утврде који проблем, изражен кроз ситуацију реалног живота, одговара датој једначини или неједначини. Пример оваквог задатка је одабран да би утврдили како ученик доживљава појам непознате и да ли је способан препознати односе и схватити идеју непознате изражене у симболичком облику. Пример који се појавио као најчешћа грешка изражава неразумевање појма непознате (односно, шта непозната означава у задатку) (Пример 54).

Пример 54. Задатак са Теодориним путовањем



Дата је једначина:

x : 8 = 220

Заокружи слово испред ситуације која одговара датој једначини.

А) Теодора путује авионом из Београда за Амстердам. Када је прешла осмину пута, стјуардеса јој је рекла да треба да прелете још 220 километара. Колика је дужина лета од Београда до Амстердама?

Б) Теодора путује авионом из Београда за Амстердам. Када је прешла шестину пута, стјуардеса јој је рекла да су прелетели 220 километара. Колика је дужина лета од Београда до Амстердама?

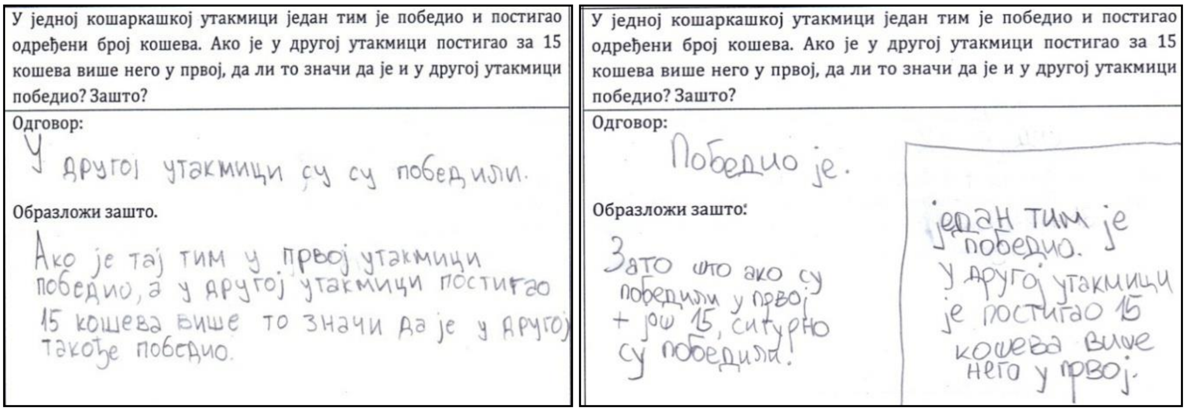
В)Теодора путује авионом из Београда за Амстердам. Када је прешла осмину пута, стјуардеса јој је рекла да су прелетели 220 километара. Колика је дужина лета од Београда до Амстердама?

Г)Теодора путује авионом из Београда за Амстердам. Када је прешла осмину пута, стјуардеса јој је рекла да су прелетели 2200 километара. Колика је дужина лета од Београда до Амстердама?

Грешка се појавила код оних ученика који *x* не схватају као дужину пута који авион прелети од Београда до Амстердама, већ као део пута који је пређен. Стога, можемо рећи да се посебна пажња мора обратити на то како ученик доживљава непознату и како је користи у облику симбола у задацима. Једна реч може променити смисао и значење непознате или променљиве у задатку, а у томе пресудну улогу има контекст самог проблема. Килам (Kilhamn, 2014) посебно истиче важност контекста у давању значења и вредности варијабли у изразима. Од таквих контекста зависи које ће значење симбол имати у алгебарском изразу.

И следећи пример илуструје сложеност овог питања, када је у питању разумевање непознатог броја и односа између непознатих количина или вредности. Пример најчешће грешке која се појавила у одговорима ученика везана је за погрешно схватање појма непознате (Пример 55).

Пример 55. Решења задатка са кошаркашким тимом


У једној кошаркашкој утакмици један тим је победио и постигао одређени број кошева. Ако је у другој утакмици постигао за 15 кошева више него у првој, да ли то значи да је и у другој утакмици победио? Зашто?

Одговор:

У другој утакмици су су победили.

Образложи зашто.

Ако је тај тим у првој утакмици победио, а у другој утакмици постигао 15 кошева више то значи да је у другој такође победио.

У једној кошаркашкој утакмици један тим је победио и постигао одређени број кошева. Ако је у другој утакмици постигао за 15 кошева више него у првој, да ли то значи да је и у другој утакмици победио? Зашто?

Одговор:

Победио је.

Образложи зашто:

Зато што ако су победили у првој + још 15, сигурно су победили!

Један тим је победио. У другој утакмици је постигао 15 кошева више него у првој.

Најтипичније грешке ученика везане су за проблем схватања количина и количинских односа, што је у овом случају био број кошева исте екипе у две утакмице. Већина ученика, који су направили грешку, занемарила је учинак друге екипе за коју не знамо број постигнутих кошева. У овом случају ученик је фокусиран само на број постигнутих кошева једне екипе у обе утакмице. Иако су вредности о којим размишља непознате ученику, о њиховим односима може дискутовати и извести закључак, искључиво у смислу разумевања значења непознатог броја и идеје непознате.

Да би се једначине и неједначине могле формирати из неформалног реалистичног контекста, непозната као појам има пресудну улогу. Са друге стране разумевање појма непознате у једначини не подразумева оспособљеност за решавање исте. У задацима реалистичног контекста непозната се појављује током хоризонталног кретања у активности математизације, док се у поступку решавања ученици често користе аритметичким процедурама за решавање (избегава се употреба непознате – Пример 53). Дакле, ученици се у поступку решавања задатка користе моделима који нису примарно алгебарски, али се у процесу решавања задатака препознаје алгебарски начин размишљања. Да би ученици могли да размишљају алгебарски, један од кључних способности је и способност разумевања појма непознате и променљиве, као броја или количине, која је само тренутно непозната и чију вредност или можемо утврдити или можемо исказати њену вредност односом према другим величинама. Овде би се свакако могли сложити са Фемианом, који тврди да је се „алгебарско решавање проблема показало као непроцењив алат и помоћ деци у развијању математичких способности математичког и логичког мишљења“ (Femiano, 2003: 449).

Анализа добијених резултата истраживања потврђује постављену хипотезу да контекстуални приступ у учењу и настави алгебре у млађим разредима основне школе доприноси трајности алгебарских знања и способности. На крају можемо закључити да се контекстуалним приступом у учењу и настави математике на млађем школском узрасту може позитивно утицати на успех ученика у савлађивању садржаја алгебре, али и развој способности правилног разумевања појмова промењливе и непознате, без обзира на разлике које постоје између ученика.

3. УТИЦАЈ КОНТЕКСТУАЛНОГ ПРИСТУПА НА ТРАЈНОСТ АЛГЕБРАСКИХ ЗНАЊА УЧЕНИКА

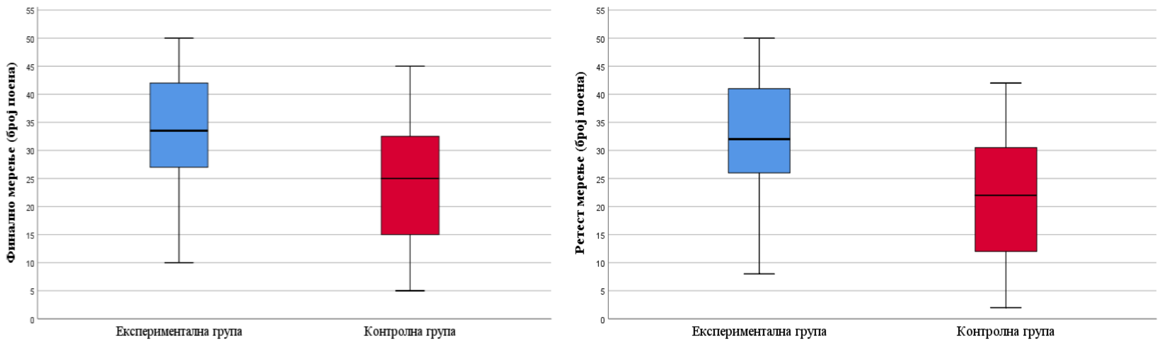
Утицај контекстуалног приступа на трајност алгебарских знања и алгебарских способности пратили смо кроз постигнуће ученика на тестовима знања. Желели смо да утврдимо да ли се контекстуалним приступом, заснованим на реалистичним математичким ситуацијама свакодневног живота, може позитивно утицати на стицање алгебарских знања и развијање алгебарских способности ученика у дужем временском периоду. Наш циљ био је да истражимо да ли ће то знање и способности остати трајна својина ученика. Шест месеци након извршеног експерименталног програма и финалног тестирања, поново смо спровели тестирање ученика експерименталне и контролне групе, под истим условима као и иницијално и финално тестирање, како бисмо утврдили код којих ученика су знања стечена у процесу учења трајнија. Ефекте контекстуалног приступа мерили смо кроз укупно постигнуће, као и постигнуће у развијености алгебарских способности (*правилно схватање знака једнакости, разумевање функционалне зависности између компонената рачунских операција, уочавање функционалних односа на графикону, табели или слици, правилног схватања симбола у алгебри, правилно разумевање појма променљиве и непознате*). У складу са овако одређеним истраживачким задатком поставили смо следећу истраживачку хипотезу: *Контекстуални приступ у учењу садржаја алгебре у настави математике у млађим разредима основне школе доприноси трајности алгебарских знања*.

Увидом у дескриптивне показатеље добијене на ретесту увиђамо да су ученици експерименталне групе на овом тестирању трајности стечених знања (M = 31,98; SD = 10,34) постигли мало слабији резултат у односу на резултат добијен на тестирању шест месеци пре овог (M = 33,66; SD = 10,35) (Табела 97). Сличан пад су имали и ученици контролне групе који су на ретесту постигли (M = 21,75; SD = 10,28), а на финалном (M = 23,98; SD = 10,70). На основу добијених резултата дескриптивне анализе можемо закључити да без обзира на благи пад у постигнућу код обе групе након одређеног времена, ипак ученици из експерименталне групе показују значајно боље резултате у односу на ученике контролне групе.

Табела 97. *Дескриптивни показатељи успешности експерименталне и контролне групе на финалном и ретест мерењу*

		N	M	SD	95% Confidence Interval for Mean Lower Bound	95% Confidence Interval for Mean Upper Bound
Финално мерење	Експериментална група	130	33,66	10,35	31,87	35,46
	Контролна група	127	23,98	10,70	22,11	25,86
	Укупно	257	28,88	11,57	27,46	30,30
Ретест мерење	Експериментална група	130	31,98	10,34	30,19	33,78
	Контролна група	127	21,75	10,28	19,94	23,55
	Укупно	257	26,93	11,50	25,51	28,34

На основу добијених резултата (Графикон 8) можемо закључити да су ученици експерименталне групе, у ретесту спроведеном шест месеци након финалног тестирања, показали у просеку нешто слабије резултате у односу на резултате финалног мерења. До сличних резултата дошли смо и са контролном групом у којој су ученици показали благи пад у просечном броју поена у односу на финално мерење. Овај пад у постигнућу у обе групе говори више о природном процесу заборављања, али и о чињеници да ученици из експерименталне групе и даље показују напредак у постигнућу под утицајем контекстуалног приступа.



Графикон 8. *Резултати експерименталне и контролне групе на финалном и ретест мерењу*

Резултати потврђују да је евидентан напредак експерименталне групе у односу на резултат који је остварила контролна група након проласка одређеног времена, што говори о позитивним ефектима које контекстуални приступ настави ране алгебре има на трајност ученичког знања. Ученици који су били под утицајем експерименталног програма након одређеног времена постигли су боље резултате у односу на ученике који су радили према класичној настави алгебре. Напредак је евидентан, али је очигледан и незнатан пад у постигнућу у односу на претходно тестирање (финално мерење).

Како бисмо утврдили разлике у постигнућу на финалном и ретест мерењу постигнућа ученика урадили смо анализу варијансе (Табела 98).

Табела 98. *Анализа варијансе финалног и ретест мерења постигнућа ученика*

	Levene Statistic	df1	df2	Sig.
Финално мерење	0,169	1	255	0,681
Ретест мерење	0,067	1	255	0,795

		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Финално мерење	Између група	6016,185	1	6016,185	54,311	0,000
	Унутар групе	28247,076	255	110,773		
	Укупно	34263,261	256			
Ретест мерење	Између група	6731,689	1	6731,689	63,347	0,000
	Унутар групе	27097,906	255	106,266		
	Укупно	33829,595	256			

Да би смо одредили статистичку значајност разлика између експерименталне и контролне групе на финалном мерењу и ретесту користили смо анализу варијансе. Левенов тест хомогености (Табела 98) варијансе за финално мерење износи ($F(1,255) = 0,169$; $p = 0,681$), а на ретесту ($F(1,255) = 0,067$; $p = 0,795$) што значи да ни на једном тесту није нарушена претпоставка о хомогености варијансе. Вредност израчунате анализе варијансе за финално мерење ($F(1,255) = 54,311$; $p = 0,000$) показује да постоје статистички значајне разлике у постигнућу између експерименталне и контролне групе што смо и раније у овом истраживању показали. Ако се у обзир узму резултати анализе варијансе ретест мерења ($F(1,255) = 63,347$; $p = 0,000$), можемо закључити да и у овом мерењу постоје статистички значајне разлике између група. На основу ових статистичких резултата можемо рећи да су ученици из експерименталне групе, који су били под утицајем контекстуалног приступа у учењу и настави алгебре, постигли статистички значајно боље резултате у односу на ученике који су радили устаљеним начином рада.

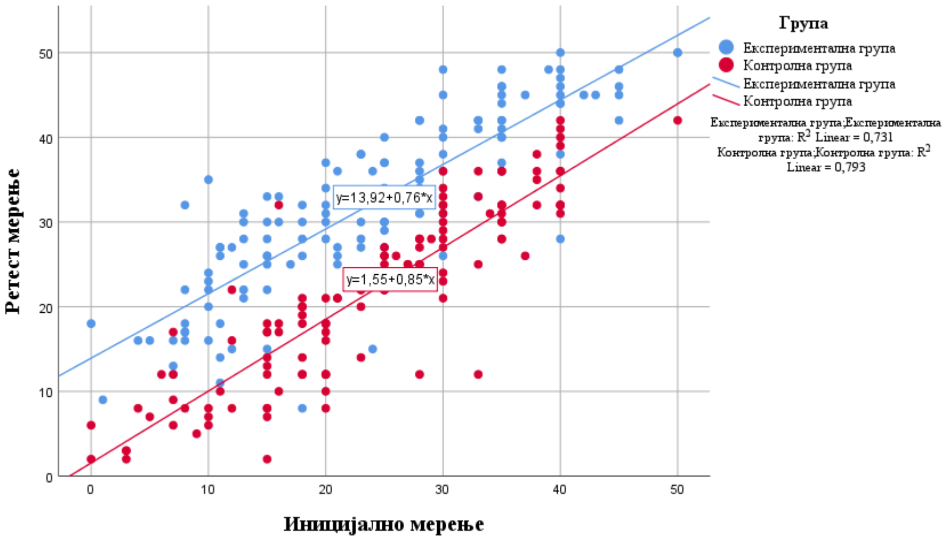
На основу мерења можемо уочити да је Кронбахов коефицијент алфа 0,813, што значи да ретест има добру унутрашњу сагласност и поузданост (Табела 99).

Табела 99. *Кронбахов алфа коефицијент*

Cronbach's Alpha	Cronbach's Alpha Based on Standardized Items	N of Items
0,813	0,928	10

Да бисмо утврдили разлике између група искористили смо анализу коваријансе, јер смо желели уклонити утицај коваријата (резултата иницијалног мерења) како би отклонили сумњу на његов утицај на вредност ретест мерења. На овај начин смо повећали осетљивост F теста и вероватноћу за откривање могуће разлике између група.

На дијаграму расипања (Графикон 9) проверили смо линеарност између резултата ретеста и резултата иницијалног мерења за све групе. Линеарност расипања резултата (права линија) је уочљива на дијаграму тако да претпоставка о линеарности није нарушена.



Графикон 9. *Линеарност зависне промењиве и коваријата*

Да бисмо спровели анализу коваријансе урадили смо проверу хомогености регресионих нагиба. Ова претпоставка се односи на везу између резултата иницијалног мерења и начина рада у свим групама. Један начин је да проверимо на дијаграму исцртане линије нагиба, а пошто обе линије имају исти нагиб, ова претпоставка није нарушена. Поред тога статистички смо испитали ову претпоставку. Резултати (Табела 100) показују вредност значајности интеракције између групе и иницијалног мерења ($F(1,253) = 2,272$; $p = 0,133$), при чему је вредност p већа од граничне, ра је претпоставка о хомогености регресионих нагиба потврђена.

Табела 100. *Хомогеност регресионих нагиба*

Зависна варијабла: Ретест мерење

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Corrected Model	27357,766[a]	3	9119,255	356,495	0,000
Intercept	2765,524	1	2765,524	108,111	0,000
Група	1766,846	1	1766,846	69,070	0,000
Иницијални	20606,943	1	20606,943	805,577	0,000
Група * Иницијални	58,120	1	58,120	**2,272**	**0,133**
Error	6471,829	253	25,580		
Total	220158,000	257			
Corrected Total	33829,595	256			

a. R Squared = 0,809 (Adjusted R Squared = 0,806)

Како бисмо у анализи резултата искористили анализу коваријансе, урадили смо Левенов тест хомогености варијансе. Добијени резултати (Табела 101) показују вредност теста F = 2,027 за p = 0,156, тако да је претпоставка о хомогености варијансе потврђена.

Табела 101. *Левенов тест хомогености варијансе*

Зависна променљива: Ретест мерење

F	df1	df2	Sig.
2,027	1	255	0,156

Tests the null hypothesis that the error variance of the dependent variable is equal across groups.
a. Design: Intercept + Inicijalni + Grupa

Да бисмо истражили да ли се групе значајно разликују по постигнућу у ретест мерењу искористили смо анализу коваријансе. При томе смо уклонили утицај коваријата, што у овом случају представљају резултати иницијалног мерења постигнућа ученика. На основу добијених резултата (Табела 102) можемо закључити да постоји статистички значајан утицај између резултата ретест мерења ученика експерименталне и контролне групе, ако се уклони утицај коваријата (резултати иницијалног мерења) (F(1,254) = 267,049; p = 0,000). Вредност парцијалног ета квадрата показује велики утицај променљивих (Cohen, 1988, према: Pallant, 2011). У овом случају чак 51,3% варијансе ретест мерења се може објаснити начином рада који је спроведен у току експеримента.

Табела 102. *Анализа коваријансе иницијалног и ретест мерења*

Зависна варијабла: Ретест мерење

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.	Partial Eta Squared
Corrected Model	27299,646[a]	2	13649,823	530,947	0,000	0,807
Intercept	2845,725	1	2845,725	110,692	0,000	0,304
Иницијално мерење	20567,957	1	20567,957	800,046	0,000	0,759
Група	6865,431	1	6865,431	**267,049**	**0,000**	**0,513**
Error	6529,949	254	25,708			
Total	220158,000	257				
Corrected Total	33829,595	256				

a. R Squared = 0,807 (Adjusted R Squared = 0,805)

Анализом добијених резултата можемо закључити да контекстуални приступ у настави математике у учењу садржаја ране алгебре остварује значајне позитивне ефекте на трајност ученичких знања. На овај начин смо потврдили хипотезу да се контекстуалним приступом у настави математике може утицати на трајност ученичких знања из алгебре. Наравно, један од најважнијих циљева учења и наставе јесте и то да знање или способност коју ученик усваја буде што трајније задржана у његовој свести или способностима.

Овим истраживањем показали смо да се контекстуалним приступом може утицати на успех ученика у учењу алгебре, али и да су тако савладани садржаји трајнији. Резултати показују да се учењем садржаја алгебре на бази реалистичних ситуација свакодневног живота, кроз процесе математизације и моделовања, алгебарска знања трајније задржавају у уму ученика. Разлог томе можемо пронаћи у чињеници да на овај начин знања постају ближа ученику, кроз ситуације са којима се свакодневно сусреће, па из тог разлога очекујемо и овакве резултате. Ако се при том у обзир узму резултати финалног тестирања, онда се може закључити да постоји природан и очекиван тренд заборављања, али упркос томе разлике у постигнућу ученика експерименталне и контролне групе су и даље значајне.

Поред тога, у овом раду истражићемо и утицај контекстуалног приступа на трајност операционализованих алгебарских способности (*правилно схватање знака једнакости; разумевање функционалне зависности између компонената рачунских операција; способност уочавања функционалних односа на графикону, табели или слици; способност правилног схватања симбола у алгебри; развијање појма променљиве и непознате*) изражених кроз постигнуће у тестовима. За сваку од алгебарских способности утврдићемо да ли постоје статистички значајне разлике између резултата које су постигли ученици експерименталне и контролне групе на ретест мерењу.

3.1. Утицај контекстуалног приступа на трајност правилног схватања знака једнакости

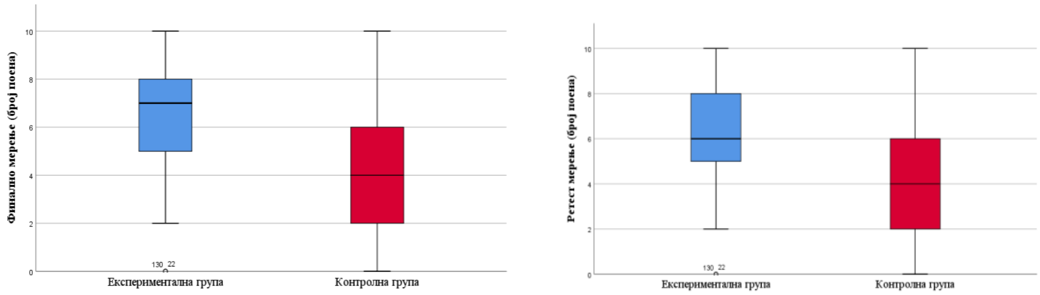
Овим истраживањем желели смо да утврдимо да ли се контекстуалним приступом може утицати на трајност алгебарске способности правилног разумевања знака једнакости, као знака који изражава еквивалентност.

Анализа резултата истраживања утицаја контекстуалног приступа на трајност правилног схватања знака једнакости (Табела 103), показала је да су на финалном мерењу ученичког постигнућа, ученици експерименталне групе (M = 6,52; SD = 2,50) постигли већи број поена у односу на ученике контролне групе (M = 4,02; SD = 2,41). Када је реч о резултатима ретест мерења, дошли смо до сличних резултата. И на ретестирању, спроведеном након одређеног временског периода, ученици експерименталне групе (M = 6,31; SD = 2,47) су показали боље просечне резултате у односу на ученике контролне групе (M = 3,98; SD = 2,66) (Табела 80).

Табела 103. *Постигнуће ученика експерименталне и контролне групе у способности правилног схватања знака једнакости на финалном и ретест мерењу*

		N	M	SD
Финално мерење	Експериментална група	130	6,52	2,50
	Контролна група	127	4,02	2,41
	Укупно	257	5,29	2,75
Ретест мерење	Експериментална група	130	6,31	2,47
	Контролна група	127	3,98	2,66
	Укупно	257	5,16	2,81

Поред тога, резултати показују да су ученици из контролне групе постигли приближно исте резултате на финалном и ретест мерењу, док су ученици експерименталне групе у ретест мерењу постигли незнатно слабије резултате (Графикон 10).



Графикон 10. *Постигнуће ученика експерименталне и контролне групе на финалном и ретест мерењу способности правилног схватања знака једнакости*

Да бисмо утврдили да ли постоје статистички значајне разлике у резултатима контролне и експерименталне групе након одређеног временског периода од спроведеног експерименталног програма (контекстуални приступ у настави алгебре) користили смо анализу коваријансе. У сврху испитивања хомогености варијансе, искористили смо Левенов тест. Вредност Левеновог теста (Табела 104) у овом случају износи F = 1,742 за p = 0,188, што је знатно изнад граничног нивоа, па се може рећи да је претпоставка о хомогености варијансе потврђена.

Табела 104. *Левенов тест хомогености варијансе*

Зависна варијабла: Ретест мерење

F	df1	df2	Sig.
1,742	1	255	0,188

Tests the null hypothesis that the error variance of the dependent variable is equal across groups.
a. Design: Intercept + Jednako1 + Grupa

Анализа коваријансе (Табела 105) постигнућа ученика у схватању знака једнакости, када се уклони утицај коваријансе (резултата иницијалног мерења ове способности), показала је да постоји статистички значајан утицај начина рада на постигнуће ученика након одређеног временског периода (F(1,254) = 112,840; p = 0,000). Дакле, уочена је статистички значајна разлика између контролне и експерименталне групе на ретест мерењу ове способности. Овакав резултат показује да се под утицајем експерименталног програма може очекивати трајније знање ученика у схватању знака једнакости. У прилог томе иде и чињеница о величини утврђеног ета квадрата, који у овом случају износи 0,308. То значи да се 30,8% варијансе резултата ретест мерења може објаснити начином рада, односно начином на којим се у настави ране алгебре приступа садржајима ране алгебре.

Табела 105. *Анализа коваријансе постигнућа ученика у способности правилног схватања знака једнакости на иницијалном и ретест мерењу*

Зависна варијабла: Ретест мерење

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.	Partial Eta Squared
Corrected Model	1343,563[a]	2	671,782	249,866	0,000	0,663
Intercept	343,346	1	343,346	127,706	0,000	0,335
Иницијално мерење	996,765	1	996,765	**370,742**	**0,000**	**0,593**
Група	303,377	1	303,377	**112,840**	**0,000**	**0,308**
Error	682,896	254	2,689			
Total	8868,000	257				
Corrected Total	2026,459	256				

a. R Squared = 0,663 (Adjusted R Squared =0,660)

У приказаној Табели 105, можемо уочити и утицај коваријансе. На основу резултата можемо уочити да постоји значајна веза између резултата иницијалног мерења и резултата ретест мерења, када су уклони утицај начина рада ($F(1,254) = 370,742$; $p = 0,000$). Вредност парцијалног ета квадрата показује да је чак 59,3% варијансе резултата ретест мерења може објаснити резултатима иницијалног мерења.

Можемо закључити да се контекстуалним приступом у настави алгебре може утицати на развој правилног схватања знака једнакости, али и да се на овај начин може утицати на трајност те способности. Ово је јако важна чињеница, нарочито ако се у виду има да је ова способност посебно битна за даље ученичко напредовање и учење сложенијих садржаја ране алгебре. Резултати су показали да су ученици који су радили према контекстуалном приступу у садржајима алгебре показали знатно боље постигнуће у способности разумевања знака једнакости у односу на групу ученика која је радила класичним приступом, чак и шест месеци након обраде тих садржаја у почетној настави математике. Ови резултати говоре у корист чињеници да контекстуални приступ у настави алгебре може позитивно утицати на трајност способности правилног разумевања знака једнакости, па отуда произилази и вредност оваквог приступа у настави математике на млађем школском узрасту.

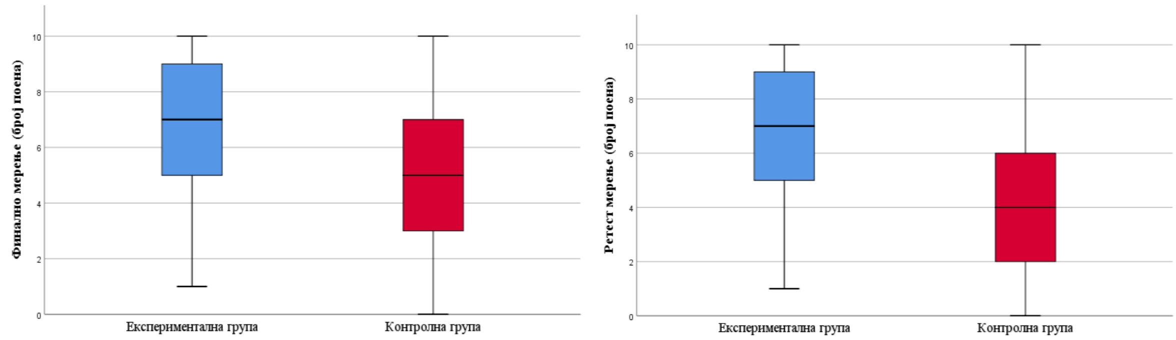
3.2. Утицај контекстуалног приступа на трајност разумевања функционалне зависности између компонената рачунских операција

Желели смо да истражимо да ли се контекстуалним приступом може утицати на трајност разумевања функционалне зависности између компонената рачунских операција. Ако се у обзир узму добијени резултати (Табела 106), можемо уочити да су ученици експерименталне групе ($M = 6,88$; $SD = 2,50$) у финалном мерењу разумевања функционалне зависности између компонената рачунских операција, постигли боље просечне резултате у односу на ученике контролне групе ($M = 5,09$; $SD = 2,71$). На ретест мерењу ученици експерименталне групе остварили су у просеку за 0,36 поена мање у односу на финално мерење ($M = 6,52$; $SD = 2,51$), док су ученици контролне групе постигли за 0,7 поена мање у односу на финални тест ($M = 4,39$; $SD = 2,61$).

Табела 106. *Постигнуће ученика експерименталне и контролне групе у разумевању функционалне зависности између компонената рачунских операција на финалном и ретест мерењу*

		N	M	SD
Финално мерење	Експериментална група	130	6,88	2,50
	Контролна група	127	5,09	2,71
Ретест мерење	Експериментална група	130	6,52	2,51
	Контролна група	127	4,39	2,62

Ако се у обзир узме однос између резултата ученика исте групе, али различитих мерења, можемо закључити да је евидентан благи пад у просечном броју бодова између финалног теста и ретеста (Графикон 11).



Графикон 11. *Постигнуће ученика експерименталне и контролне групе на финалном и ретест мерењу разумевања функционалне зависности између компонената рачунских операција*

Левенов тест хомогености варијансе (F(1,255) = 0,081; p = 0,777) (Табела 107) показује да је претпоставка о једнакости варијансе испуњена и да можемо урадити анализу коваријансе у мерењу статистичких разлика између ученика иницијалног и ретест мерењу ове способности.

Табела 107. *Левенов тест хомогености варијансе*

Зависна варијабла: Ретест мерење

F	df1	df2	Sig.
0,081	1	255	0,777

Tests the null hypothesis that the error variance of the dependent variable is equal across groups.
a. Design: Intercept + FunkcZav1 + Grupa

Анализа коваријансе постигнућа (Табела 108) ученика показује да постоји статистички значајна разлика у резултатима ретест мерења експерименталне и контролне групе, ако се отклони утицај коваријата (резултата иницијалног мерења) (F(1,254) = 120,213; p = 0,000). Овај утицај је велики што показује и вредност парцијалног ета квадрата (Табела 105), који показује да се 32,1% варијансе резултата ретест мерења може објаснити групом ученика (експериментална и контролна).

Поред тога, можемо утврдити утицај коваријата на резултате ретест мерења. Резултати показују да постоји статистички значајан утицај резултата иницијалног мерења на резултате ретест мерења (F(1,254) = 296,000; p = 0,000), када се отклони утицај групе (начина рада). Овај утицај је велики што нам посебно говори и величина парцијалног ета квадрата 0,538. То значи да се 53,8% варијансе резултата ретест мерења може објаснити резултатима иницијалног мерења.

Табела 108. *Анализа коваријансе постигнућа ученика у разумевању функционалне зависности између компонената рачунских операција на иницијалном и ретест мерењу*

Зависна варијабла: Ретест мерење

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.	Partial Eta Squared
Corrected Model	1193,679[a]	2	596,840	195,773	0,000	0,607
Intercept	372,857	1	372,857	122,303	0,000	0,325
Иницијално мерење	902,394	1	902,394	**296,000**	**0,000**	**0,538**
Група	366,484	1	366,484	**120,213**	**0,000**	**0,321**
Error	774,352	254	3,049			
Total	9660,000	257				
Corrected Total	1968,031	256				

a. R Squared = 0,607 (Adjusted R Squared = 0,603)

Дакле, добијени резултати указују на то да се контекстуалним приступом, може утицати на развој, али и трајност разумевања функционалне зависности између компонената рачунских операција. Када се упореде резултати финалног и ретест мерења, можемо уочити мали пад у постигнућу ученика, без обзира на приступ настави ране алгебре. Као што можемо видети, и поред тога, евидентан је напредак ученика који су радили под утицајем контекстуалног приступа. Ови ученици показују значајно боље резултате у односу на ученике контролне групе на ретесту. Поред тога очигледно је да постоји статистички значајан утицај између резултата које су ученици постигли на иницијалном и ретест мерењу. На овај начин смо показали утицај контекстуалног приступа у трајности способности разумевања функционалне зависности резултата у односу на компоненте рачунских операција. Ако се у обзир узму добијени резултати, можемо рећи да приступ заснован на реалистичном контексту одговара ученицима и омогућава како развој тако и трајност способности разумевања функционалне зависности компонената рачунских операција. Разлог за овај став можемо пронаћи и у чињеници да примери реалног окружења омогућавају ученицима да једноставније сагледају међусобну зависност компонената рачунских операција и лакше користе и примењују то знање, чак и након дужег временског периода.

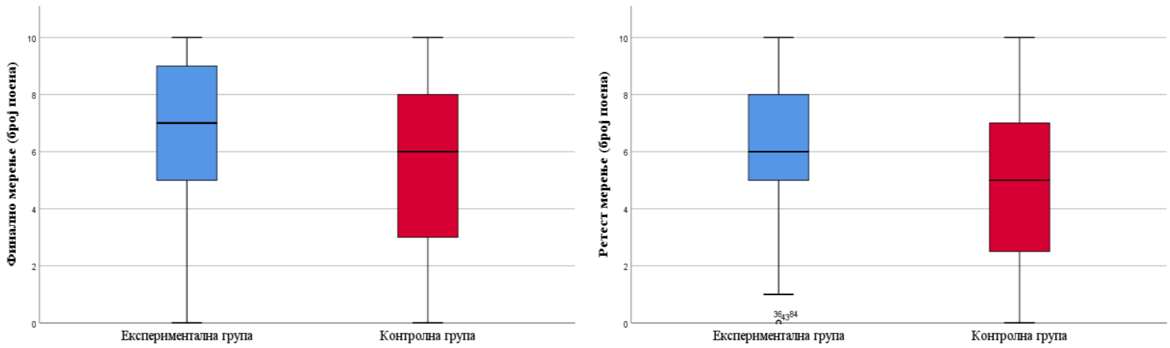
3.3. Утицај контекстуалног приступа на трајност уочавања функционалних односа на графикону, табели или слици

У истраживању смо желели да утврдимо утицај контекстуалног приступа на трајност способности уочавања функционалних односа на графикону, табели или слици. Како би утврдили трајност знања упоредили смо резултате иницијалног, финалног и ретест мерења. На основу добијених резултата (Табела 109), можемо рећи да су ученици експерименталне групе у финалном мерењу (M = 6,75; SD = 2,52) постигли боље просечне резултате у односу на ученике из контролне групе (M = 5,67; SD = 3,03). Сличне резултате смо добили и на ретест мерењу, у којем се такође може уочити значајно бољи резултат експерименталне групе (M = 6,24; SD = 2,44) у односу на резултате ученика из контролне групе (M = 4,80; SD = 2,96).

Табела 109. *Постигнуће ученика експерименталне и контролне групе у уочавању функционалних односа на графикону, табели или слици на финалном и ретест мерењу*

		N	M	SD
Финално мерење	Експериментална група	130	6,75	2,52
	Контролна група	127	5,67	3,03
Ретест мерење	Експериментална група	130	6,24	2,44
	Контролна група	127	4,80	2,96

На основу резултата приказаних на Графикону 12 можемо уочити да су ученици после одређеног периода (без обзира на групу) показали нешто лошије резултате у односу на финално мерење, које је спроведено одмах након експерименталног програма. Ови резултати иду у прилог природном процесу заборављања, али разлике и ефекти контекстуалног приступа су и даље присутни. Да би утврдили значај контекстуалног приступа и након одређеног времена урадили смо анализу коваријансе постигнућа у мерењу способности уочавања функционалних односа на графикону, табели или слици.



Графикон 12. *Постигнуће ученика експерименталне и контролне групе на финалном и ретест мерењу уочавања функционалних односа на графикону, табели или слици*

Левенов тест треба да послужи како би утврдили тачност претпоставке о једнакости варијансе иницијалног и ретест мерења, како би утврдили ефекте напредка под утицајем експерименталног програма. Вредност Левеновог теста је F = 1,133 за p = 0,288, што значи да је претпоставка о хомогености варијансе потврђена (Табела 110).

Табела 110. *Левенов тест хомогености варијансе*

Зависна варијабла: Ретест мерење

F	df1	df2	Sig.
1,133	1	255	0,288

Tests the null hypothesis that the error variance of the dependent variable is equal across groups.
a. Design: Intercept + GrafSli1 + Grupa

Да бисмо утврдили да ли постоји статистички значајан утицај начина рада на резултате ретеста уочавања функционалних односа на графикону, табели или слици, користићемо анализу коваријансе. Резултати анализе (Табела 111) показују да постоји статистички значајан утицај (F(1,254) = 36,364; p = 0,000) начина рада и резултата ретест мерења. То значи да постоји статистички значајна разлика између експерименталне и контролне групе на ретесту када се изузме утицај коваријата (резултата иницијалног мерења). Величина парцијалног ета квадрата говори да је тај утицај велики и да се 12,5% варијансе резултата ретест мерења може објаснити утицајем групе којој ученик припада.

Табела 111. *Анализа коваријансе постигнућа ученика у уочавању функционалних односа на графикону, табели или слици на иницијалном и ретест мерењу*

Зависна варијабла: Ретест мерење

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.	Partial Eta Squared
Corrected Model	951,634[a]	2	475,817	115,272	0,000	0,476
Intercept	290,668	1	290,668	70,418	0,000	0,217
Иницијално мерење	817,833	1	817,833	**198,130**	**0,000**	**0,438**
Група	150,103	1	150,103	**36,364**	**0,000**	**0,125**
Error	1048,452	254	4,128			
Total	9846,000	257				
Corrected Total	2000,086	256				

a. R Squared = 0,476 (Adjusted R Squared = 0,472)

У Табели 111 може се уочити и утицај коваријата (резултата иницијалног мерења). На основу добијених резултата (F(1,254) = 198,130; p = 0,000), можемо рећи да постоји статистички значајан утицај резултата иницијалног мерења на резултате ретест мерења, ако се отклони утицај независне променљиве (начин рада). И овај утицај резултата иницијалног мерења на резултате финалног мерење се може објаснити величином парцијалног ета квадрата. У овом случају он износи p = 0,438, што се сматра великим утицајем према мишљењу Коена (Cohen, 1988).

Савремене тенденције у настави ране алгебре наглашавају потребу за развијањем способности разумевања функционалних односа и уочавање истог на графикону, табели или слици. Са табелом и сликом, ученици се сусрећу још од првог разреда, али је употреба дијаграма била неправедно запостављена једно време. Употреба ових облика представљања функционалних односа заснована је превасходно на очигледности. Да би овакав пример имао потпун смисао, идеја у нашем раду била је да се искористи реалистични контекст, како би се објаснили односи између величина на сликама, табелама или графиконима. Да ли се оваквим приступом може утицати на развој ове способности али и њихову трајност.

Резултати истраживања су показали да се контекстуалним приступом, кога карактерише употреба реалистичних примера свакодневног живота у садржајима ране алгебре кроз процес математизације, може утицати на развој, али и трајност способности уочавања функционалне зависности на графиконима, табелама или сликама.

3.4. Утицај контекстуалног приступа на трајност правилног схватања симбола у алгебри

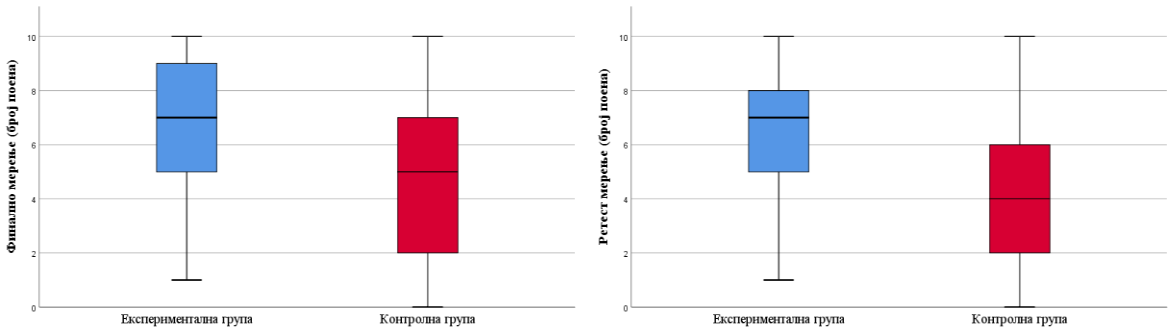
У раду смо желели да истражимо и утицај контекстуалног приступа на развој и трајност правилног схватања симбола у алгебри на млађем школском узрасту, односно да ли приступом заснованим на реалном контексту можемо утицати на трајност способности ученика правилног схватања симбол, као знака који означава променљиву или непознату.

Ако се у обзир узму резултати финалног мерења (спроведеног одмах након експерименталног програма) и ретест мерења (спроведеног 6 месеци након експерименталног програма) (Табела 112), можемо рећи да су ученици експерименталне групе у оба случаја били успешнији у односу на контролну групу.

Табела 112. *Постигнуће ученика експерименталне и контролне групе у правилном схватању симбола у алгебри на финалном и ретест мерењу*

		N	M	SD
Финално мерење	Експериментална група	130	6,89	2,41
	Контролна група	127	4,60	2,83
Ретест мерење	Експериментална група	130	6,49	2,30
	Контролна група	127	4,43	2,69

У финалном мерењу ученици експерименталне групе постигли су значајно боље резултате (M = 6,89; SD = 2,41) и односу на контролну групу (M = 4,60; SD = 2,83). Слични резултати су карактеристични и за ретест мерење у ком су ученици експерименталне групе (M = 6,49; SD = 2,30) поново били успешнији од ученика контролне групе (M = 4,43; SD = 2,69).



Графикон 13. *Постигнуће ученика експерименталне и контролне групе на финалном и ретест мерењу правилног схватања симбола у алгебри*

Резултати ова два тестирања показују и да су средње вредности резултата обе групе (експерименталне и контролне), нешто лошије у односу на финално мерење. Дакле уочљив је благ пад у постигнућу ученика у схватању симбола у алгебри (Графикон 13).

Табела 113. *Левенов тест хомогености варијансе*

Зависна варијабла: Ретест мерење

F	df1	df2	Sig.
3,102	1	255	0,079

Tests the null hypothesis that the error variance of the dependent variable is equal across groups.
a. Design: Intercept + Simbol1 + Grupa

Желели смо да утврдимо да ли постоји статистички значајан утицај начина рада на постигнуће ученика у ретесту. Да би то утврдили користили смо анализу коваријансе. Први корак је да утврдимо хомогеност варијансе користећи Левенов тест хомогености варијансе (Табела 113). Пошто је вредност Левеновог теста у овом случају ($F(1{,}255) = 3{,}102$; $p = 0{,}079$), можемо рећи да је претпоставка о хомогености варијансе испуњена.

Табела 114. *Анализа коваријансе постигнућа ученика у правилном схватању симбола у алгебри на иницијалном и ретест мерењу*

Зависна варијабла: Ретест мерење

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.	Partial Eta Squared
Corrected Model	1152,802[a]	2	576,401	204,112	0,000	0,616
Intercept	530,735	1	530,735	187,941	0,000	0,425
Иницијално мерење	880,390	1	880,390	**311,758**	**0,000**	**0,551**
Група	263,258	1	263,258	**93,223**	**0,000**	**0,268**
Error	717,283	254	2,824			
Total	9573,000	257				
Corrected Total	1870,086	256				

a. R Squared = 0,616 (Adjusted R Squared = 0,613)

Анализа коваријансе (Табела 114) показује да постоји статистички значајан утицај између експерименталне и контролне групе на ретест мерењу, ако се уклони утицај коваријата (резултата иницијалног мерења) ($F(1{,}254) = 93{,}223$; $p = 0{,}000$). Утицај који постоји је велики, што показује и величина парцијалног ета квадрата, која је знатно већа од граничне вредности 0,05. Поред тога, тестирали смо утицај коваријата, и дошли до резултата да такође постоји статистички значајан утицај коваријата ($F(1{,}254) = 311{,}758$; $p = 0{,}000$), на резултате ретест мерења, када се уклони утицај групе (начина рада). То значи да постоји статистички значајан утицај између резултата истих група на иницијалном и ретест мерењу. Овај утицај је такође велики, јер парцијални ета квадрат показује да се чак 55,1% варијансе ретест мерења може објаснити утицајем резултата иницијалног мерења.

На основу добијених резултата можемо закључити да постоји статистички значајна разлика између ученика на ретесту правилног схватања симбола у алгебри, односно да су разлике у овој способности између група које су радиле у различито организованој настави евидентне и након одређеног времена.

Алгебарски језик се схвата као начин изражавања математичких информација, али и скуп изузетно ефикасних и моћних начина за представљање и решавање проблема. На млађем школском узрасту, код већине ученика постоји проблем разумевања апстрактног језика алгебре. Симбол, као ознака за променљиву или непознату се у том смислу јавља као најзначајнији елемент језика алгебре. Наша идеја је да се апстрактност алгебарског језика ублажи приступом заснованим на реалистичном контексту кроз процесе хоризонталне и вертикалне математизације коришћењем модела. Реалистични контекст треба да омогући ученику да схвати симбол као замену за појам, док процес математизације треба да омогући начин како да њиме манипулише у алгебарским изразима и једнакостима.

На основу добијених резултата у нашем истраживању можемо закључити да се контекстуалним приступом заснованим на примерима свакодневног живота може утицати на трајност правилног схватања симбола у раној алгебри. Резултати показују значајан напредак експерименталне групе, која је радила према контекстуалном приступу, у односу на ученике који су радили у складу са класичном наставом алгебре. Истраживање је показало да је протекло време утицало на заборављање, али исто тако је значајно напоменути да се оваквом организацијом наставе може позитивно утицати на трајност способности правилног разумевања и употребе симбола у алгебри.

3.5.Утицај контекстуалног приступа на трајност правилног разумевања појма променљиве и непознате

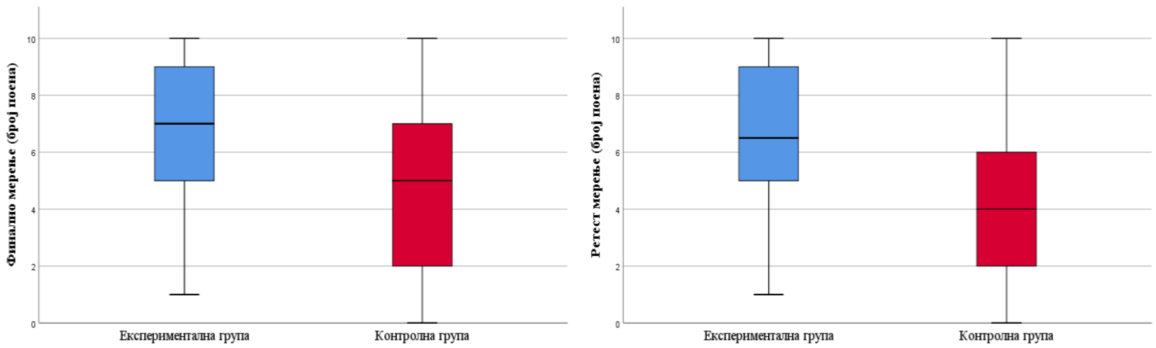
Овим истраживањем смо желели и да испитамо ефекте контекстуалног приступа, заснованог на идеји реалистичних ситуација свакодневног живота, на трајност правилног разумевања појма променљиве и непознате. Прво смо упоредили просечне резултате финалног и ретест мерења у експерименталној и контролној групи, како би увидели однос између њих.

Резултати (Табела 115) показују да су ученици који су радили према контекстуалном приступу, показали боље просечне резултате ($M = 6,60$; $SD = 2,55$) у односу на ученике који су радили према класичном приступу настави ране алгебре ($M = 4,69$; $SD = 3,01$), на истом мерењу. Слична ситуација је и са резултатима тестирања спроведеног након одређеног временског периода, на ком су ученици експерименталне групе показали просечно боље резултате ($M = 6,45$; $SD = 2,54$) у односу на ученике контролне групе ($M = 4,31$; $SD = 2,79$).

Табела 115. *Постигнуће ученика експерименталне и контролне групе у правилном схватању појма променљиве и непознате*

		N	M	SD
Финално мерење	Експериментална група	130	6,60	2,55
	Контролна група	127	4,69	3,01
Ретест мерење	Експериментална група	130	6,45	2,54
	Контролна група	127	4,31	2,79

Када се упореде резултати финалног и ретест мерења може се уочити и благи пад у просечним резултатима и у експерименталној и у контролној групи у способности правилног схватања појма променљиве и непознате (Графикон 14). Овај пад у просечним резултатима је уочљив како у експерименталној тако и у контролној групи код ученика, при чему је у контролној групи нешто већи.



Графикон 14. *Постигнуће ученика експерименталне и контролне групе на финалном и ретест мерењу правилног разумевања појма променљиве и непознате*

Левеновим тестом смо испитали хомогеност варијансе. Вредност овог теста (F(1,255) = 0,124; p = 0,725) показује да је изнад граничне вредности, па је самим тим претпоставка о једнакости варијансе потврђена (Табела116).

Табела 116. *Левенов тест хомогености варијансе*

Зависна варијабла: Ретест мерење

F	df1	df2	Sig.
0,124	1	255	0,725

Tests the null hypothesis that the error variance of the dependent variable is equal across groups.
a. Design: Intercept + PromNep1 + Grupa

Да бисмо утврдили ефекте контекстуалног приступа на трајност способности правилног разумевања појма променљиве и непознате користили смо анализу коваријансе. Статистичким одстрањивањем утицаја коваријата (претходно постојећих разлика у постигнућу између група на иницијалном мерењу), дошли смо до закључка да постоји статистички значајан утицај између резултата на ретест мерењу између експерименталне и контролне групе (F(1,254) = 92,216; p = 0,000) (Табела 117). То значи да је експериментални програм имао ефекта на трајност знања, јер се ученици ове две групе статистички значајно разликују у постигнућу, чак и након одређеног временског периода. Парцијални ета квадрат показује да је 26,6% варијансе резултата ретест мерења објашњено кроз начин рада (група).

Поред тога смо истражили и утицај коваријата (резултата иницијалног мерења) на резултате ретест мерења. Резултати у Табели 117, показују да постоји значајна веза између коваријата и резултата ретест мерења, ако се уклони утицај начина рада (групе) (F(1,254) = 347,298; p = 0,000). Утврђена је јака веза између резултата иницијалног и ретест мерења што показује и вредност парцијалног ета квадрата 0,578.

Табела 117. *Анализа коваријансе постигнућа ученика у правилном разумевању појма променљиве и непознате на иницијалном и ретест мерењу*

Зависна варијабла: Ретест мерење

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.	Partial Eta Squared
Corrected Model	1338,870[a]	2	669,435	222,497	0,000	0,637
Intercept	477,520	1	477,520	158,711	0,000	0,385
Иницијално мерење	1044,927	1	1044,927	**347,298**	**0,000**	**0,578**
Група	277,453	1	277,453	**92,216**	**0,000**	**0,266**
Error	764,219	254	3,009			
Total	9567,000	257				
Corrected Total	2103,089	256				

a. R Squared = 0,637 (Adjusted R Squared = 0,634)

Још од времена Лајбница, који је појам променљиве користио да би представио непознате количине, постојале су различите дефиниције и схватања овог истог појма. Према Усискину (Usiskin, 1988) различити приступи алгебри подразумевају и различите дефиниције променљивих, које могу бити опште променљиве, непознате, константе или параметри којим се утврђују односи. Појам променљиве је у уској вези са схватањем симбола који скупа подразумевају висок ниво апстрактности. Наше истраживање показало је да настава заснована на принципима контекстуалног приступа омогућава ученику лакше развијање алгебарских појмова и способности.

Резултати истраживања су показали да се контекстуалним приступом заснованим и реалним ситуацијама свакодневног живота, може утицати на трајност ученичке способности правилног разумевања појма променљиве и непознате. Такође, резултати показују да је дужи временски период утицао на заборављање, али да је утицај контекстуалног приступа и даље присутан тако да ученици који су радили под утицајем експерименталног програма постижу и даље боље резултате.

На основу добијених резултата истраживања можемо извести закључак и потврдити постављену хипотезу истраживања да *контекстуални приступ у учењу и настави алгебре у млађим разредима основне школе доприноси трајности алгебарских знања и способности*. Статистичка анализа резултата истраживања показала је да је код ученика обе групе карактеристичан пад у постигнућу који се може објаснити процесом заборављања. Са друге стране, резултати показују и даље знатно боље резултате код ученика који су у настави и учењу садржаја алгебре радили према принципима контекстуалног приступа. Реални контекст у задацима алгебре и процеси хоризонталне и вертикалне математизације позитивно утичу на трајност алгебарских знања, али и способности правилног разумевања знака једнакости, функционалне зависности, правилног разумевања појма променљиве и непознате, као и симбола за означавање истих.

4. УЏБЕНИЦИ МАТЕМАТИКЕ У ФУНКЦИЈИ СТВАРАЊА ОСНОВЕ КОНТЕКСТУАЛНИ ПРИСТУП УЧЕЊУ САДРЖАЈА АЛГЕБРЕ

Четврти задатак истраживања био је да утврдимо у којој мери уџбеници математике својим садржајем стварају основу за контекстуални приступ учењу садржаја алгебре у почетној настави математике. На основу циља истраживања постављена је хипотеза: *Уџбеници математике имају значајну улогу у стварању услова за контекстуални приступ учењу садржаја алгебре у млађим разредима основне школе.* Анализа је вршена на свим алгебарским садржајима који чине садржај програма математике за млађе разреде основне школе. У оквиру истраживања рађена су два нивоа анализе садржаја.

На првом нивоу анализе желели смо да утврдимо да ли уџбеници математике стварају основу за учење садржаја алгебре контекстуалним приступом. Желели смо, дакле, да утврдимо да ли је уводни пример, задатак или садржај, чији је циљ упознавање новог садржаја алгебре, заснован на реалној, конкретној ситуацији или је та ситуација дата у математичком контексту. Уводни примери у уџбеницима чине примери кроз које се ученик упознаје са новим садржајима, стиче знања, развија или формира математичке појмове. Категорије садржаја за анализу на овом нивоу чине садржаји засновани на:

- контекстуалном приступу – садржаји су изражени у облику реалних ситуација свакодневног живота и као такви представљају полазиште за учење и математизацију
- неконтекстуалном (математички) приступу – садржаји у којима се приступа на чисто математички начин и кроз примере који су изражени искључиво математичким језиком, без употребе реалних ситуација свакодневног живота.

Други ниво анализе садржаја подразумевао је истраживање заступљености задатака контекстуалног типа у уџбеницима математике у млађим разредима основне школе у учењу садржаја алгебре. У истраживању смо желели да испитамо у којој мери су, у задацима предвиђеним за вежбање и утврђивање знања из алгебре, заступљени задаци контекстуалног типа. У овом случају анализа садржаја обухватила је два типа задатака, који су представљали категорије садржаја за анализу:

- контекстуални задатак – проблем који је дат као реална, конкретна, животна ситуација;
- неконтекстуални задатак – проблем који је дат у чисто математичком контексту

Резултати анализе садржаја представићемо одвојено кроз две целине, како је анализа и рађена према категоријама које смо навели.

4.1.Улога уџбеника математике у стварању услова за контекстуални приступ у учењу алгебарских садржаја

Добијени резултати анализе показују да у анализираним уџбеницима из математике за први разред основне школе, у свим уџбеницима доминирају садржаји који су засновани на реалистичком контексту (Табела 118). Притом се проценат заступљености ових садржаја у свим анализираним уџбеницима за први разред је од 50 % до 100%. Дакле, у скоро свим уџбеницима за први разред аутори се за прве примере, који служе за развијање алгебарских појмова, опредељују за реални контекст, који треба да омогући лакше развијање почетних алгебарских идеја и учење садржаја алгебре. Оно што је очигледно у анализи је то да се у, чак, четири од шест анализираних уџбеничких комплета аутори, за уводне примере у учењу садржаја алгебре, у потпуности опредељују за садржаје реалног контекста (Бигз, Креативни центар, Едука, ЈП Завод за уџбенике).

Табела 118. *Заступљеност контекстуалног приступа у формирању алгебарских појмова у уџбеницима математике за први, други, трећи и четврти разред основне школе*

Уџбеници		Први разред	Други разред	Трећи разред	Четврти разред
Klett	f	2	9	7	0
	%	50%	81,82%	50%	0%
Бигз	f	3	12	0	13
	%	100%	100%	0%	52%
Креативни центар	f	6	8	6	15
	%	100%	100%	20,69%	46,87%
Нови Логос	f	2	5	11	14
	%	66,67%	83,33%	40,74%	31,82%
Едука	f	3	3	8	14
	%	100%	75%	22,85%	31,11%
ЈП Завод за уџбенике	f	1	6	2	1
	%	100%	100%	50%	6,67%

На основу анализе садржаја уџбеника математике за други разред (Табела 118) могу се уочити сличности са резултатима анализе садржаја уџбеника за први разред основне школе. И у овим уџбеницима доминанте су контекстуално засноване ситуације, базиране на реалистичним примерима свакодневног живота као полазишта за учење. Резултати показују да је у три од шест анализираних уџбеника у потпуности заступљен контекстуални приступ (Бигз, Креативни центар, ЈП Завод за уџбенике) у увођењу садржаја алгебре и формирања почетних алгебарских појмова. Контекстуални приступ најмање је заступљен приликом увођења и формирања садржаја алгебре у уџбеницима издавачке куће *Едука* (75%) (Табела 118). Анализа показује да аутори препознају значај реалистичног контекста као основе за учење садржаја алгебре и да на тој основи и уводе ове садржаје. Ово је посебно важно ако се у обзир узме чињеница да се у другом разреду ученици први пут сусрећу са великим бројем нових алгебарских појмова (појам непознате, појам једначине, решење једначине, као и поступци решавања једначина и неједначина).

За разлику од уџбеника математике за први и други разред, аутори уџбеника у уџбеницима за трећи разред основне школе напуштају контекстуално засноване реалистичне ситуација као полазишта за увођење садржаја алгебре. Резултати показују да је код већине издавачких кућа доминантан приступ заснован на чистом математичком контексту (*Бигз, Креативни центар, Нови Логос и Едука*). Само у уџбеницима две издавачке куће (*Klett и ЈП Завод за уџбенике*), у примерима који служе за развијање алгебарских појмова, аутори у увођењу садржаја алгебре користе подједнако контекстуални и неконтекстуални (математички) приступ. Веома мала заступљеност садржаја реалног контекста уочљива је код половине анализираних уџбеника, при чему заступљеност садржаја заснованих на реалном контексту не прелази петину анализираних садржаја алгебре у сваком од уџбеницика.

До сличних резултата дошли смо и анализом уџбеника за четврти разред основне школе (Табела 118), при чему можемо закључити да је само у једном од шест анализираних уџбеника нешто већа заступљеност (52%) примера који стварају основу за контекстуални приступ у учењу садржаја алгебре. У већини уџбеника математике за четврти разред, доминирају примери који су засновани на чистом математичком приступу, и њихова заступљеност се креће у распону од 0% до 46,87%. Анализом уџбеника за четврти разред основне школе можемо закључити да у пет од шест анализираних компета уџбеника доминира неконтекстуални приступ у формирању алгебарских појмова. Овде треба посебно нагласити да у уџбенику издавачке куће *Klett* не постоји ниједан контекстуално заснован садржај на основу којег се уводе садржаји алгебре. Ову чињеницу могли би правдати тиме што су се ученици већ раније сусретали са истим алгебарским појмовима, у предходним разредима, па би се могло рећи да већ имају изграђене одређене представе о њима.

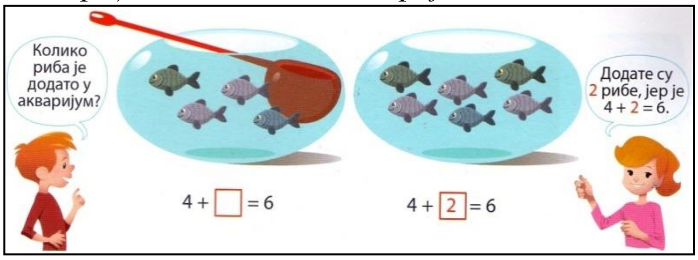
Можемо закључити да је у уџбеницима за трећи и четврти разред основне школе мала заступљеност примера, који стварају услове за контекстуални приступ у усвајању алгебарских садржаја. Са друге стране у уџбеницима математике за први и други разред у скоро свим уџбеницима доминирају примери, који стварају основу за контекстуални приступ садржајима алгебре. Аутори уџбеника за први и други разред су препознали примере реалног контекста, као примере који стварају добру основу формирање основних појмова и учење садржаја алгебре. То бисмо могли оправдати и чињеницом да се у млађим разредима основне школе очекује већа потреба за визуелизацијом у примерима реалног конткеста, због карактера мишљења деце овог узраста и њихових когнитивних способности. Још једна разлог томе могли би пронаћи у чињеници да аутори теже да обезбеде припрему за постепен прелазак на учење алгебарских садржаја у старијим разредима основне школе, тако све више напуштају очигледност и конкретност у процесу учења садржаја алгебре.

Истраживање је показало да су у уџбеницима за први разред доминантни примери засновани на контекстуалном приступу, за разлику од сличног истраживања које су спровели Маричић и Милинковић (2017), које је показало већу заступљеност примера чистог математичког контекста у садржајима алгебре. Наведена анализа садржаја је рађена са старим уџбеницима, тако да смо резултате упоредили са нашим истраживањем, у коме је анализа рађена са новим уџбеницима, који су писани на основу новог програма наставе и учења. Ове промене у приступу садржајима алгебре које су евидентне у уџбеницима математике, можемо оправдати променама у програмима математике, али и савременим интенцијама у настави које нови програми садрже.

У *Правилнику о плану и програму наставе и учења за први разред основног образовања и васпитања* (2017), дају се основне смернице на основу којих се може увести идеја непознате и променљиве и наводи се да се „разматрају и случајеви у којима је један од сабирака непознат број. На основу добро савладане таблице сабирања и одузимања ученици откривају непознати сабирак, умањилац, а затим и примере где је непознат умањеник" (2017: 25). Можемо закључити да се одређивање непознатог броја у једнакостима у овом разреду заснива искључиво на уочавању и „погађању“ решења на основу савладаних таблица сабирања и одузимања. Пошто се на овом нивоу одређивање непознатог броја одвија искључиво на погађању на основу познавања таблице сабирања и одузимања, то се и користе посебне ознаке у виду „држача места“ за њихово означавање.

У таквим смерницама и аутори уџбеника тежили су да на очигледан начин, преко реалних ситуација, ученицима приближе појма и идеју непознатог броја (Пример 56 и Пример 57).

Пример 56. Одређивање непознатог броја



(Маричић, 2018а: 81)

У *Примеру 56* аутор идеју непознатог броја развија кроз илустрацију додавања непознатог броја риба у акваријум. На илустрацији је број додатих рибица сакривен и представља непознату, која је у једнакости изражена у облику држача места (квадрат). На овај начин се избегава коришћење симбола као ознаке за непознату, док се њено одређивање своди на знање везано за извођење рачунске операције сабирања.

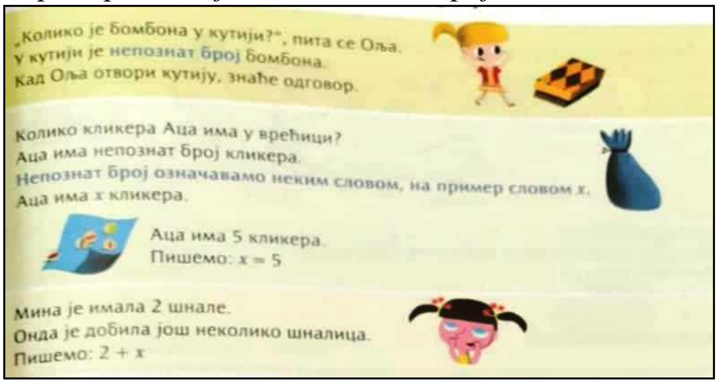
На сличан начин идеју непознате представља и аутор уџбеника у *Примеру 57*. Реални контекст је садржан у овом случају као проблем непознатог броја бомбона, који аутор означава облачићем са знаком питања, а потом уводи држач места.

Пример 57. Откривамо непознати број

(Јухас, 2018: 43)

Када је реч о уџбеницима за први разред, неки од аутора су посебну пажњу поклонили формирању једног од најосетљивијих појмова алгебре, а то је појам непознате, као и симбола за његово означавање. Иако програм одређује да се у првом разреду не инсистира на увођењу симбола за означавање непознате, неки од аутора се ипак одлучују за тај корак. Навешћемо неке од примера задатака заснованих на реалистичном контексту, које су аутори искористили како би формирали појам непознате (*Пример 58*) и одређивања непознатог броја (*Пример 59*).

Пример 58. Појам непознатог броја



„Колико је бомбона у кутији?", пита се Оља.
У кутији је непознат број бомбона.
Кад Оља отвори кутију, знаће одговор.

Колико кликера Аца има у врећици?
Аца има непознат број кликера.
Непознат број означавамо неким словом, на пример словом x.
Аца има x кликера.

Аца има 5 кликера.
Пишемо: $x = 5$

Мина је имала 2 шнале.
Онда је добила још неколико шналица.
Пишемо: $2 + x$

(*Милинковић, 2019: 63)*

У *Примеру 58* аутор користи пример реалног контекста, како би ученику проближио појам непознатог броја, као броја бомбомбона у кутији или броја кликера у врећици, чија бројност је само тренутно прикривена, односно непозната. У *Примеру 59* аутор, користи ситуацију реалног контекста, при чему на очигледан начин упућује на проблем непознатог броја, чија се вредност може одредити, ако се искористе подаци који су ученику дати у проблему. Непознати број, у овом случају, означава непознату количину јаја, коју је девојчица Ђурђа офарбала. У оба наведена примера, аутор користи илустрацију, како би проблем и однос који постоји између података у задатку био очигледнији.

Пример 59. Одређивање непознатог сабирка

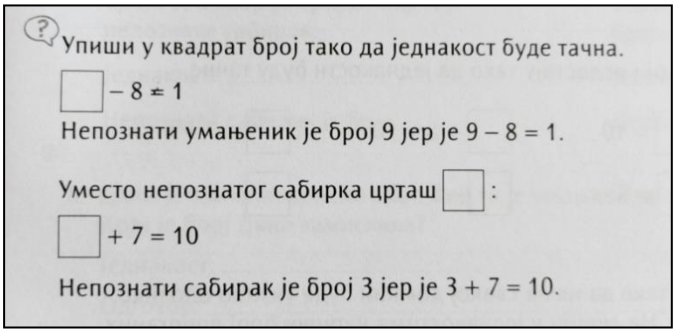
Милена и Ђурђа заједно су обојиле 12 јаја.

Шта је непознато?
Непознат је број јаја које је обојила Ђурђа.
Означимо га са x.
$7 + x = 12$
$x = 5$
Ђурђа је обојила 5 јаја.

(Милинковић, 2019: 64)

Морамо истаћи да овакав приступ није присутан у свим уџбеницима математике. Упркос томе, што се ученик први пут сусреће са овим садржајима, аутори и на овом првом сусрету ученика са непознатим бројем бирају математички контекст као полазиште за формирање појма непознате (Пример 60).

Пример 60. Одређивање непознатог броја



Упиши у квадрат број тако да једнакост буде тачна.
$\square - 8 = 1$
Непознати умањеник је број 9 јер је $9 - 8 = 1$.

Уместо непознатог сабирка црташ $\square$:
$\square + 7 = 10$
Непознати сабирак је број 3 јер је $3 + 7 = 10$.

(Иванчевић Илић и Тахировић, 2018а*:* 49).

Правилник о плану и програму наставе и учења за други разред основног образовања и васпитања (2018) предвиђа да се симбол уведе као ознака за непознати број и да се ученици оспособе да решавају једначине са једном операцијом на основу уочавања везе између супротих рачунски операција.

Када је у питању увођње симбола за непознати број аутори и ову идеју теже да развијају кроз контекстуално засноване ситуације (*Пример 61*).

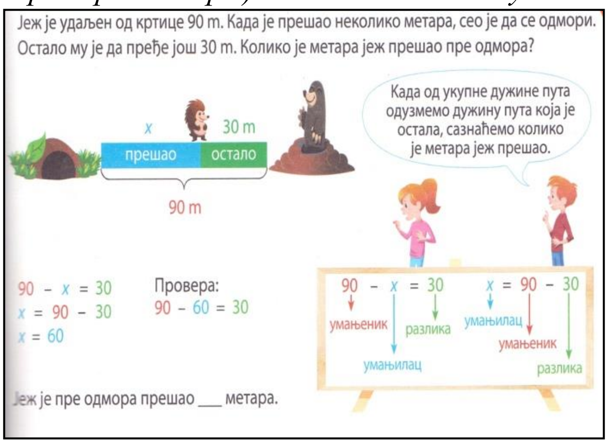
Пример 61. Одређивање непознатог сабирка

(Маричић, Ђуровић, 2019: 44)

У *Примеру 61* аутори користе идеју реалног контекста како би код ученика формирали представу непознатог броја, као броја који означава непознати број колача на столу који је прекривен. Откривање колача, прати откривање и непознатог броја, као вредности која је била само тренутно сакривена и која се може одредити.

На бази контекстуално заснованих ситуација аутори уџбеника уводе ученике и у процес решавања једначина (*Пример 62*).

Пример 62. Одређивање непознатог умањиоца

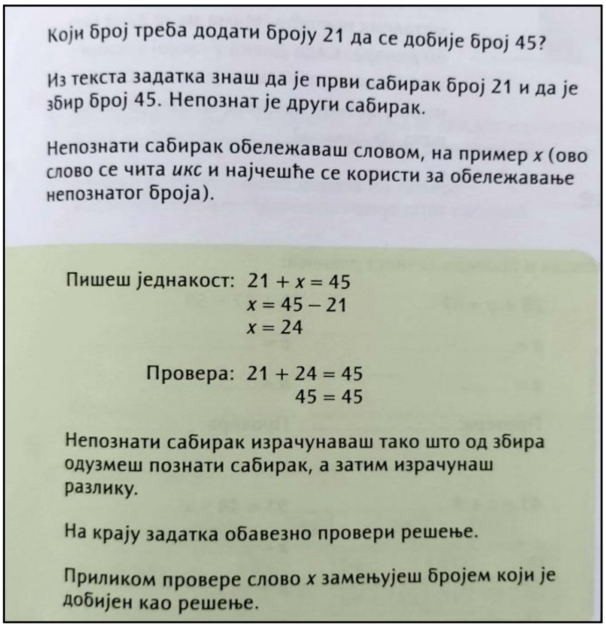


(Маричић, Ђуровић, 2019: 45)

У *Примеру 62* аутори су коришћењем цртежа и боје у контексту задатка успели да прикажу модел који омогућава ученицима да на очигледан начин дођу до правила за одређивање непознатог умањиоца. Полазиште у учењу представља реална ситуација, али вредност примера је у слици која визуализује проблем и на тај начин га приближава ученику. Илустрација проблема у овом случају служи као модел којим се представља ситуација која омогућава уочавање веза и односа између непознате и датих елемента проблема. Конкретана ситуација пребацује се на симболичку нотацију, а затим се кроз процес анализе праве генерализације.

За разлику од оваквих контекстуално заснованих ситуација за означавање непознатог броја, у уџбеницима се могу пронаћи често и примери засновани на математичком контексту, чија је сврха увођење и развој основних појмова алгебре (*Пример 63*).

Пример 63. Одређивање непознатог сабирка



Који број треба додати броју 21 да се добије број 45?

Из текста задатка знаш да је први сабирак број 21 и да је збир број 45. Непознат је други сабирак.

Непознати сабирак обележаваш словом, на пример x (ово слово се чита *икс* и најчешће се користи за обележавање непознатог броја).

Пишеш једнакост: $21 + x = 45$

$x = 45 - 21$

$x = 24$

Провера: $21 + 24 = 45$

$45 = 45$

Непознати сабирак израчунаваш тако што од збира одузмеш познати сабирак, а затим израчунаш разлику.

На крају задатка обавезно провери решење.

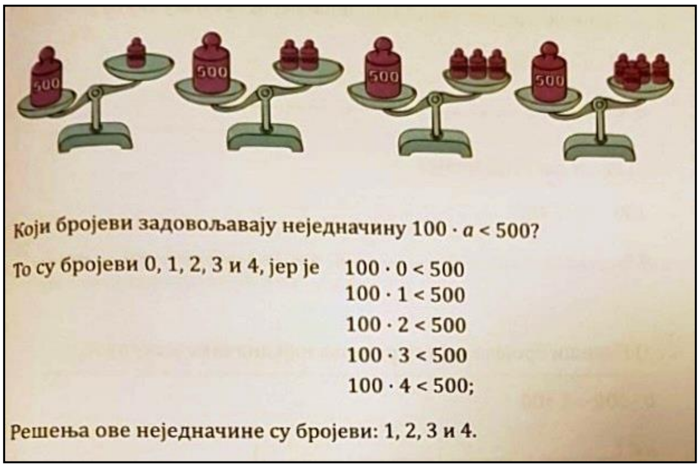
Приликом провере слово x замењујеш бројем који је добијен као решење.

(Иванчевић Илић и Тахировић, 2019: 51)

У трећем разреду основне школе ученици се први пут сусрећу са појмом неједначине и садржајима зависности резултата од промене компонената рачунских операција. *Правилник о плану и програму наставе и учења за трећи разред основног образовања и васпитања* (2019) предвиђа да паралелно са случајевима једнакости два израза, ученици упознају и случајеве неједнакости. На тој основ заснива се и методички приступ увођења ових садржаја и оспособљавања ученика да решавају неједначине. То није лаган посао и често га прате потешкоће у неразумевању поступка, а посебно у одређивању скупа решења неједначине, односно разумевање изводљивости рачунских операција. Према мишљењу Зељић „ако хоћемо да ученици решавају неједначине разумевајући општу структуру поступка, задатак ‘решавати неједначине’ мора се конкретизовати као решавати неједначине применом правила зависности резултата од промене компонената“ (Зељић, 2013: 31). Овакав став је саставни део упутства које даје *Правилник о плану и програму наставе и учења за трећи разред основног образовања и васпитања* (2019).

Почетне идеје променљиве и одређивање скупа решења неједначине треба сводити на „погађање“ бројева који задовољавау дату неједнакост, али на примерима који су блиску ученику и полазиште имају у реалним ситуацијама. Овакве идеје аутори у уџбеницима и примењују (*Пример 64*).

Пример 64. Неједначине са множењем



Који бројеви задовољавају неједначину $100 \cdot a < 500$?

То су бројеви 0, 1, 2, 3 и 4, јер је $100 \cdot 0 < 500$
$100 \cdot 1 < 500$
$100 \cdot 2 < 500$
$100 \cdot 3 < 500$
$100 \cdot 4 < 500$;

Решења ове неједначине су бројеви: 1, 2, 3 и 4.

(Тодоровић и Огњановић, 2016а: 151)

На овај начин, аутор уџбеника је успео да, кроз реалистичну ситуацију „вагања“ маса на левој и десној страни ваге, сликовито дочара проблем и ученике уведе у поступак решавања неједначине заснован на реалној основи, а кроз модел равнотеже.

Увођење ученика у решавање неједначине уводи се и преко табеле кроз пример реалне ситуације (*Пример 65*) у коме су аутори искористили табелу као модел за одређивање скупа решења, односно вредности променљиве у неједначини.

Пример 65. Неједначине са одузимањем

Славка је имала џак са 50 килограма брашна. Колико је килограма брашна могла да узме из џака ако је у џаку остало више од 44kg?

На основу текста можемо саставити неједначину $50 - x > 44$. Одредимо решења помоћу табеле.

x	0	1	2	3	4	5	6	7
$50 - x$	50	49	48	47	46	45	44	43

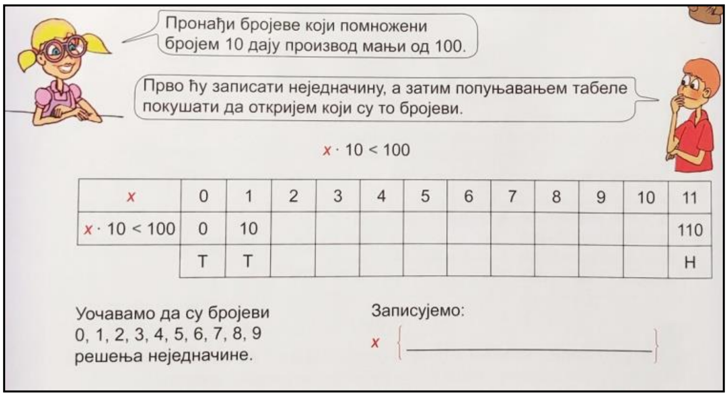
Дакле, решења посматране неједначине су $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

(Поповић, Вуловић, Анокић, Кандић, 2015а: 93)

Табела у овом задатку изражава однос између две променљиве величине које представљају количину узетог брашна из џака и количину брашна које је могло остати у џаку након узимања. На тај начин се изражава веза између зависне и независне променљиве, што ће чинити основу за схватање појма функције. Тако табела постаје најочигледнији модел за одређивање вредности променљиве, у којој се решења најчешће траже у скупу бројева који су унапред одређени.

Насупрот примера реалног контекста, у уџбеницима за трећи разред основне школе, чешћи су примери засновани на чисто математичком контексту. Навешћемо пример оваквог задатка, који служи као основа за развијање појма неједначине са множењем (*Пример 66*).

Пример 66. Неједначине са множењем



(Јовановић-Лазић и Дрндаревић, 2014: 58)

Наставним планом и програмом за трећи и четврти разред основне школе предвиђено је да се ученици први пут упознају са садржајима који треба да обухвате: *зависност збира, сталност збира, зависност разлике, сталност разлике, зависност производа од промене чинилаца, сталност производа, зависност количника од промене дељеника и делиоца и сталност количника*. Сви садржаји зависности резултата од промене компонената рачунских операција, веома су важни за даље учење математичких садржаја (упрошћавање извођења рачунских операција, одређивање решења неједначина).

Навешћемо пример контекстуалног задатка који су аутори издвојили за усвајање садржаја *Зависности производа од промене чинилаца* у уџбенику издавачке куће *Klett* (*Пример 67*).

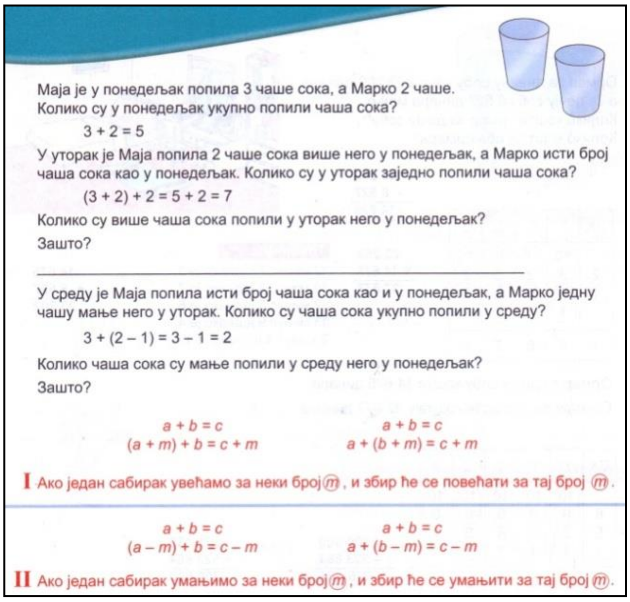
Пример 67. Зависност производа од промене чинилаца

(Поповић,Вуловић, Анокић, Кандић, 2015б: 69)

У задатку је на очигледан начин представљен проблем који прати одговарајућа илустрација. Овако представљен пример задатка у процесу закључивања помаже ученику да уочи правило промене производа услед промене једног од чинилаца. Реалистичност садржаја је у овим садржајима посебно важна, ако се узме у обзир апстрактност садржаја зависности, али и њихов значај као основе на којој се формира појам неједначине и решавања исте.

На бази реланог контекста и други аутори уџбеника уводе ове садржаје (*Пример 68*).

Пример 68. Зависност збира од промене сабирака



Маја је у понедељак попила 3 чаше сока, а Марко 2 чаше.
Колико су у понедељак укупно попили чаша сока?

$3 + 2 = 5$

У уторак је Маја попила 2 чаше сока више него у понедељак, а Марко исти број чаша сока као у понедељак. Колико су у уторак заједно попили чаша сока?

$(3 + 2) + 2 = 5 + 2 = 7$

Колико су више чаша сока попили у уторак него у понедељак?
Зашто?

У среду је Маја попила исти број чаша сока као и у понедељак, а Марко једну чашу мање него у уторак. Колико су чаша сока укупно попили у среду?

$3 + (2 - 1) = 3 - 1 = 2$

Колико чаша сока су мање попили у среду него у понедељак?
Зашто?

$a + b = c$ $\quad$ $a + b = c$
$(a + m) + b = c + m$ $\quad$ $a + (b + m) = c + m$

I Ако један сабирак увећамо за неки број m, и збир ће се повећати за тај број m.

$a + b = c$ $\quad$ $a + b = c$
$(a - m) + b = c - m$ $\quad$ $a + (b - m) = c - m$

II Ако један сабирак умањимо за неки број m, и збир ће се умањити за тај број m.

(Максимовић, 2012: 38)

Аутор је пример реалистичног контекста са чашама сока искористио како би приближио ситуацију зависности збира од промене сабирака. Оваквим и сличним примерима ученик је у стању да кроз процесе математизације прелази пут од реалног контекста до генерализација исказаних чисто алгебарским језиком, при чему је на том путу у стању да се у сваком тренутку врати уназад и разматра реалност решења или алгебарске истине. Реални контекст задатка омогућава да процес потпуног превођења садржаја у апстрактну алгебарску нотацију буде природан и очигледан, али и да ученик уме исто то уочено правило да искористи поново у сличном проблему.

За разлику од наведених примера аутори уџбеника уводе ове садржаје и кроз чисто математички контекст (*Пример 69*).

Пример 69. Зависност разлике од промене умањиоца

Пажљиво читај следеће редове.

3 800 – 1 900 = 1 900

3 800 – (**1 900** + 100) = 3 800 – 2 000 = 1 800 = **1 900** – 100

3 800 – (**1 900** + 300) = 3 800 – 2 200 = 1 600 = **1 900** – 300

3 800 – (**1 900** + 500) = 3 800 – 2 400 = 1 400 = **1 900** – 500

Уочаваш да када смо умањилац повећали за неки број, разлика се смањила за тај број.

3 800 – 1 800 = 2 000

3 800 – (**1 800** – 100) = 3 800 – 1 700 = 2 100 = **2 000** + 100

3 800 – (**1 800** – 300) = 3 800 – 1 500 = 2 300 = **2 000** + 300

3 800 – (**1 800** – 500) = 3 800 – 1 300 = 2 500 = **2 000** + 500

Слично, када смо умањилац смањили за неки број, разлика се повећала за тај исти број.

(Поповић, Вуловић, Анокић, Кандић, 2015б: 56)

Ако направимо поређење између наведених задатака, сигурни смо да примери којима се ученици упознају са новим садржајима, уколико су засновани на реалном контексту доприносе бољем разумевању садржаја и њиховој бољој примени. Примери засновани на математичком контексту треба да следе иза њих и да омогуће даљу апстракцију алгебарских истина.

Добијени резултати анализе показују да у уџбеницима математике за прва два разреда основне школе доминира контекстуални приступ у увођењу садржаја алгебре, док у уџбеницима за трећи и четврти разред доминирају неконтекстуално засновани садржаји. Ако се узме у обзир да су на овом узрасту когнитивне способности ученика оријентисане на конкретне операције, требало би да постоји природна потреба за већом очигледношћу садржаја, а самим тим и већа заступљеност контекстуалног приступа у обради ових садржаја. Вредност контекстуалног приступа, не огледа се само у реалистичности проблема, већ и процесу који такав пример омогућава кроз процес моделовања и математизације, у изградњи и индуктивном доказивању математичких истина.

Можемо закључити да добијени резултати показују да уџбеници математике за млађе разреде основне школе само делимично омогућавају стварање основе за контекстуални приступ учењу садржаја алгебре. То значи да овако обликовани уводни примери, који служе за учење садржаја, доминирају само у уџбеницима за први и други разред, док је у уџбеницима за трећи и четврти разред већи број примера заснованих на чистом математичком контексту. Тешко је и пронаћи баланс у одабиру приступа. Сваки аутор у конципирању приступа, у увођењу садржаја алгебре, руководио се неком идејом како треба да изгледа тај пут. Учитељи треба да имају у виду добијене резултате и да теже да у свом раду прилагоде приступ когнитивним могућностима ученика и да у непосредном раду са њима, кроз креирање методичког приступа, искористе све могућности квалитетног уџбеника.

На крају можемо закључити да је хипотеза коју смо поставили само делимично потврђена. То значи да уџбеници математике имају значајну улогу у стварању услова за контекстуални приступ учењу садржаја алгебре и да је то посебно карактеристично у анализираним уџбеницима за први и други разред основне школе.

4.2.Улога уџбеника математике у стварању услова за вежбање и утврђивање алгебарских садржаја контекстуалним приступом

У истраживању желели смо да испитамо заступљеност садржаја (задатака) на којима ученик вежба, утврђује и систематизује знања, заснованих на идеји реалног контекста. Анализа добијених резултата (Табела 119) показала је да у уџбеничком комплету за први разред у свим уџбеницима, осим уџбеника издавачке куће *Едука* (19,51%) доминирају задаци засновани на реалном контексту свакодневног живота и проценат њихове заступљености је од 50%, до чак 92%. Добијени резултат показују да аутори уџбеника настоје да, и кроз задатке намењене за вежбање, искористе садржаје на бази реаланог контекста у садржајима алгебре. Доминација задатака реалног контекста у уџбеницима за први разред иде у прилог нашој тврдњи о значају и предностима контекстуалног приступа и очигледности, која се остварује кроз овај приступ у формирању базичних појмова алгебре.

Табела 119. *Заступљеност задатака контекстуалног типа из алгебре у уџбеницима математике за први разред основне школе*

Уџбеници		Први разред	Други разред	Трећи разред	Четврти разред
Klett	f	18	38	11	30
	%	78,26%	63,33%	10,58%	14,92%
Бигз	f	26	35	13	21
	%	55,32%	45,45%	21,31%	19,44%
Креативни центар	f	11	21	29	34
	%	78,57%	61,76%	21,97%	31,77%
Нови Логос	f	23	88	98	73
	%	92%	76,52%	59,04%	43,98%
Едука	f	8	26	50	28
	%	19,51%	41,27	30,12%	18,92%
ЈП Завод за уџбенике	f	13	31	18	36
	%	50%	46,27%	18,95%	18,46%

Анализа уџбеника за други разред (Табела 119) показује мању заступљеност задатака контекстуалног типа, која креће се од 41,27% до 76,52%. Чак у три уџбеничка компета заступљеност контекстуалних азадатака мања је од 50% укупног броја задатака. Највећа заступљеност контекстуалних задатака предвиђених за вежбање и утврђивање садржаја алгебре налази се у уџбеницима издавачке куће *Нови Логос* (76,52%), а најмања у уџбеницима издавачке куће *Едука* (41,27%). Иако је за узраст ученика другог разреда важна очигледност у настави математике, ипак се може уочити да чак половина анализираних уџбеника вежбање садржаја алгебре заснива на чистом математичком контексту.

Анализа уџбеника за трећи разред показује да је само у једном од укупно шест уџбеничких комплета заступљеност задатака реалног контекста већа од 50%. Ако се у обзир узме заступљеност ових задатака у свим уџбеницима за трећи разред можемо рећи да се она креће од 10,58% у уџбеницима издавачке куће *Klett* до 59,04% у уџбеницима издавачке куће *Нови Логос*. Када се у обзир узму резултати анализе садржаја уџбеника математике за трећи разред, можемо рећи да у уџбеницима свих издавача доминирају задаци неконтекстуалног типа.

Анализом садржаја уџбеника за четврти разред основне школе (Табела 119), дошли смо до сличних резултата, као и у уџбеницима за трећи разред. У уџбеницима за четврти разред доминантни су задаци чистог математичког контекста. Заступљеност задатака контекстуалног типа у уџбеницима креће се од 14,92% до 43,98%. Само у једном уџбеничком комплету задаци контекстуалног типа су нешто заступљенији (*Нови Логос* – 43,98%), док у свим осталим уџбеничким комплетима, задаци за вежбање и утврђивање садржаја из алгебре, чине мање од петине укупног броја задатака.

Навешћемо неколико примера како бисмо илустровали и указали на вредности које носе контекстуални задаци у учењу садржаја алгебре.

Када је реч о задацима који изражавају ситуације свакодневног живота, можемо рећи да задаци равнотеже представљају добру основу за формирање, али и вежбање алгебарских садржаја. И поред многобројних предности задатака изражених у облику контекста равнотеже (ваге), ови задаци се нажалост ретко појављују у уџбеницима математике. Навешћемо пример задатка у уџбенику за први разред издавачке куће *Бигз*, у којој је аутор проблем баланса искористио у задатку одређивања непознатог сабирка (*Пример 70*).

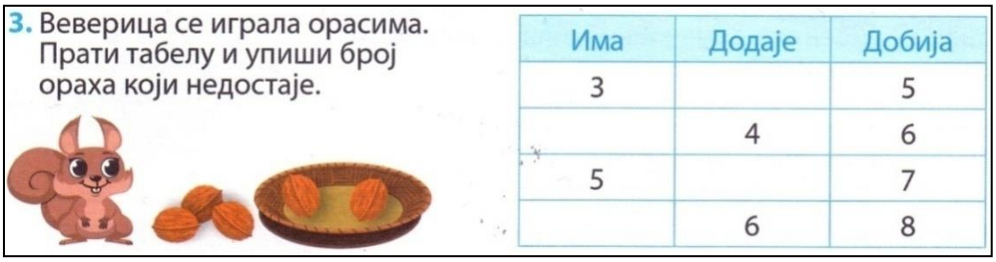
Пример 70. Одређујем непознати сабирак

(Маричић, 2018а: 81)

У овом случају, равнотежа на ваги представља ситуацију, којом се подстиче изградња појма знака једнакости на реалној основи. Знак једнакости у овом случају представља баланс на ваги, при чему је у првом плану количина, а не маса. Да би се изједначио однос на ваги, потребно је да количине јабука на оба таса буду исте. Задатак ученика се своди да одреди непознати број јабука, које је потребно додати на тас ваге, како би она поново била у равнотежи.

Задаци реалног контекста могу бити изражени у облику табеле, којом се на овај начин ученици оспособљавају да увиде функционалну зависност између компонената рачунских операција. На овај начин табела представља специфичан модел који се може искористити за решавање „једначине“, а заснива се на вези између „супротних“ рачунских операција (*Пример 71*).

Пример 68. Одређујем непознати сабирак

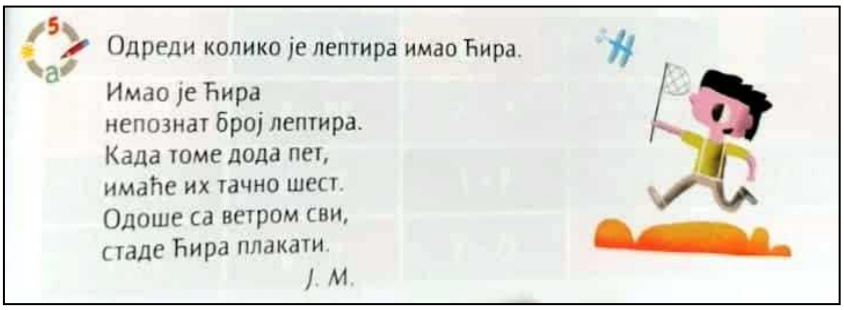

3. Веверица се играла орасима. Прати табелу и упиши број ораха који недостаје.

Има	Додаје	Добија
3		5
	4	6
5		7
	6	8

(Маричић, 2018б: 82)

За ученика овог узраста, школа је место у коме учи, али и место у ком живи и игра се. Реални контекст може имати мотивишући карактер, ако се проблем изрази помоћу стихова, као у примеру задатка у уџбенику за први разред издавачке куће *Креативни центар* (*Пример 72*).

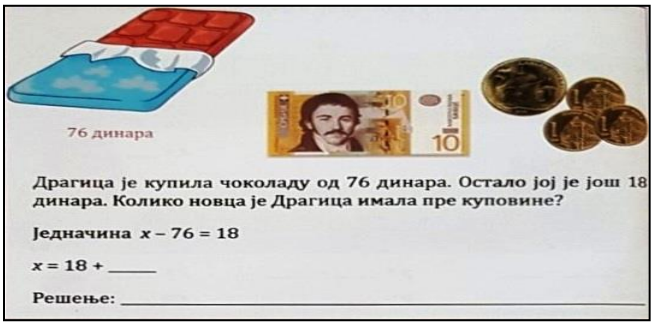
Пример 69. Одређивање непознатог сабирка



(Милинковић, 2019: 65)

Значај цртежа и визуелних представа у изражавању односа и проблема у садржајима алгебре је евидентан, пре свега што се на тај начин омогућава природност ситуације, али и што се ученику предочава однос који у другачијем облику може бити скривен. Навешћемо пример задатка у уџбенику за други разред, у коме се слика користи како би изразила реалистичан контекст и омогућила ученику да на реалном примеру свакодневног живота, размишља о решењу алгебарског проблема (*Пример 73*).

Пример 73. Одређивање непознатог умањеника



(Тодоровић, Огњановић, 2019: 40)

У овом случају је цена чоколаде и кусур приказана ученику у облику слике, тако да је он у ситуацији да закључује о вези између датих података, али и начину како да реши проблем који се пред њим налази.

Реални контекст у задацима равнотеже (ваге) може бити од користи за вежбање и утврђивање садржаја о једначинама, али и развијање првилног схватања знака једнакости, као у примеру уџбеника за други разред издавачке куће *Едука* (*Пример 74*).

Пример 74. Једначине

(Јухас, 2019: 27)

Задаци реалног контекста су значајни и због чињенице да садржаји математике, обликовани на овај начин, могу остварити повезивање садржаја различитих предмета или упознавање ученика са занимљивим чињеницама свакодневног живота. Овако обликовани садржаји мотивишу ученика и подстичу га да размишља о решењу, притом и пронађе пут до скривеног податка. Сличан задатак смо навели у *Примеру 75* из радне свеске за трећи разред издавачке куће *Нови логос*.

Пример 75. Одређивање непознатог сабирка

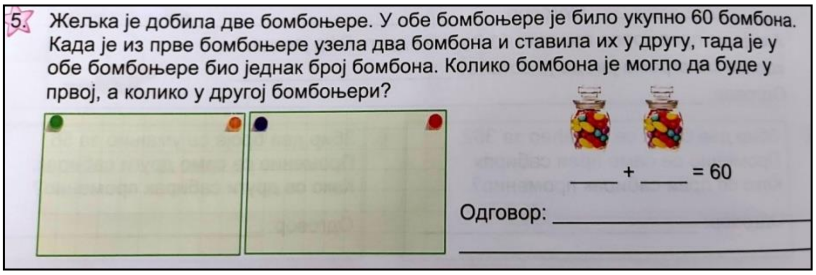
> 7. Најстарији човек на свету до краја 2012. године био је Јапанац који је имао 115 година. Он би са женом која је пре њега била најстарија на свету, имао укупно 232 године. Израчунај колико је година живела најстарија жена на свету. Када израчунаш, укупан број њихових година представи збиром бројева.

(Иванчевић Илић, Тахировић, 2018б: 78)

Задатак ученика је да открију колико је живела најстарија жена на свету, и то ће сазнати, ако у решавању овог задатка употребе једначину. Овај задатак се може представити и решити коришћењем различитих једначина, па је важна реченица на крају задатка која пажњу ученика треба да усмери на једначине са сабирањем.

Реални контекст у садржајима који се односе на зависност резултата рачунских операција, могу у великој мери помоћи да се овако захтевни садржаји лакше усвоје и буду потпуно разумљиви ученицима. Наведимо задатак (*Пример 76*) у радној свесци за трећи разред издавачке куће *Едука*.

Пример 76. Сталност збира


5. Жељка је добила две бомбоњере. У обе бомбоњере је било укупно 60 бомбона. Када је из прве бомбоњере узела два бомбона и ставила их у другу, тада је у обе бомбоњере био једнак број бомбона. Колико бомбона је могло да буде у првој, а колико у другој бомбоњери?

____ + ____ = 60

Одговор: ____________

(Зарупски, Влаховић, 2016: 84)

У примеру задатка са бомбоњерама реална ситуација изражава функционалну зависност, која постоји између две променљиве. Однос између бројности бомбона две бомбоњере представљен је кроз сталност збира, која је изражена односом две зависне променљиве (број бомбона у једној бомбоњери и број бомбона у другој бомбоњери). На овај начин промене које постоје између променљивих постају очигледније, а сталност збира разумљивија ученику.

Разлог оваквим резултатима анализе заступљености контекстуалних задатака у уџбеницима за трећи и четврти разред, можемо оправдати једино чињеницом да су на овом узрасту ученици нешто искуснији, па у задацима за вежбање могу доминирати неконтекстуални задаци и чиста алгебарска нотација у њима.

Важан сегмент у процесу формирања појма непознате и променљиве, представља употреба симбола за означавање непознате величине. Прво слово са којим се ученик сусреће у садржајима из математике је управо симбол x. Коришћење овог симбола, за означавање непознате, толико је уобичајен и заступљен, да се веома често користи у свакодневном животу и говору. Узмимо пример задатка из радне свеске за четврти разред (*Пример 77*) у ком је неопходно открити масу зеленог пакета. Сама чињеница да је маса пакета означена са x, указује на то да се у задатку ученик подстиче на коришћење једначину како би одредио вредност непознате.

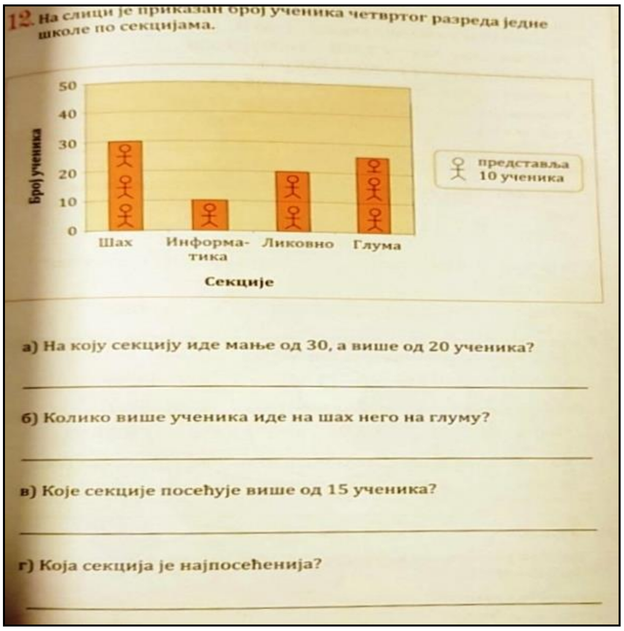
Пример 77. Једначине са сабирањем и одузимањем

(Поповић, Вуловић, Анокић, Кандић, 2015в: 92)

Реални контекст у задацима овог типа омогућује ученику не само да усвоји одређена знања из алгебре, већ и да буде способан да та знања примени у сличним ситуацијама и проблемима који се пронађу испред њега.

Проблеми реалног контекста могу се пронаћи у облику графикона, чиме се на очигледан начин приказује однос између количина, али и веза која постоји између њих у садржајима са неједначинама (*Пример 78*). Коришћење графикона овог типа може послужити као очигледан пример за изражавање скупа решења у неједначинама. На овај начин се постиже већа очигледност, али и врши повезивање садржаја са другим областима математике.

Пример 78. Неједначине



(Тодоровић и Огњановић, 2016б: 89)

Добијени резултати анализе садржаја показују да само у уџбеничким комплетима за први разред у задацима предвиђеним за вежбање и утврђивање алгебарских садржаја, доминирају задаци реалног контекста, док у свим осталим уџбеницима, по разредима, овај однос је или изједначен (други разред) или доминирају задаци математичког контекста. Анализа садржаја уџбеника математике за трећи и четврти разред, показала је да у уџбеницима доминирају неконтекстуални задаци, што није очекивано, јер ученици неке од садржаја уче по први пут тада, па је природно очекивати већу заступљеност задатака контекстуалног типа. До сличних резултата о заступљеност садржаја контекстуалног типа у садржајима ране алгебре долазе и други аутори у својим истраживањима (Маричић и Фелда, 2017; Маричић и Милинковић, 2017; Милинковић и Маричић, 2019).

На основу тога можемо рећи да смо, такође, делимично потврдили постављену хипотезу овог истраживања, да уџбеници математике имају значајну улогу у стварању услова за вежбање и утврђивање алгебарских садржаја контекстуалним приступом и да је такав однос посебно изражен у уџбеницима и радним свескама за први разред основне школе.

Успешно учење садржаја алгебре на млађем школском узрасту не подразумева само усвајање скупа чињеница и знања, већ подразумева и специфичан начин размишљања. Овакав начин размишљања заснован је на разумевању функционалних односа и веза које постоје између рачунских операција, као и зависности која постоји између компонената рачунских операција. Да би се о развоју оваквог начина размишљања могло говорити, потребно је организовати наставу у којој би ученик био у стању да учи на конкретним примерима, који су њему очигледни и са којима се може срести у свакодневном животу. Посебно треба имати у виду значај уџбеника, као извора знања за ученике тог узраста, јер он представља најзначајнији ослонац у учењу и решавању проблема. Тешкоће које прате учење свих садржаја ране алгебре засноване су на превише заступљеном формализму и механичком извођењу одређених поступака. Управо из тог разлога, у овом раду, ми истичемо значај контекстуалног приступа и контекстуалних задатака заснованих на реалистичним ситуацијама свакодневног живота. У првом плану је очигледност, као један од најзначајнијих принципа у настави математике, јер на примерима очигледног живота решавајући проблем ученик стиче нова знања која тако постају практична.

Иако се у анализираним уџбеницима може уочити мањи број задатака реалистичног контеста, што би се на овом узрасту сматрало једним од недостатака (карактристике дечијег мишљења), ипак не можемо тврдити да ће на овај начин у настави сами уџбеници представљати ограничавајући фактор. Разлог томе можемо пронаћи у чињеници да је улога учитеља у процесу наставе доминантна и да је он тај који има задатак да тај процес осмисли и учини приступачнијим. Мало је истраживања која говоре о адекватној припреми учитеља и наставника за наставу ране алгебре. Нека од истраживања показала су специфичне проблеме у схватању основних појмова алгебре од стране учитеља (Hohensee, 2017), па се на основу тога може закључити да је потребна и посебна подршка будућим учитељима за извођење наставе на овим садржајима. Задатак који се последично истиче односи се на учитеља и његову способност да пронађе начин и у преласку са конкретних примера постепено и поступно утиче на изградњу ученичких знања и способности у садржајима ране алгебре. Као значајна подршка раду учитеља и настави коју организује је уџбеник, због тога је важно да садржаји који се налазе у њему, буду адекватни и да подстичу ученичке способности и мишљење.

Пут од конкретног до апстрактног треба да води кроз примере свакодневног живота. Значај се огледа у чињеници да се на овај начин обезбеђује боље разумевање градива, бољи трансфер знања, лакше уочавање односа што омогућава бољу примену стечених знања у решавању проблема. На овај начин, ученик је у ситуацији, не само да разуме и схвати математичка знања, већ и да схвати математику као науку која је важна за живот сваког човека.

ЗАКЉУЧАК И МЕТОДИЧКЕ ИМПЛИКАЦИЈЕ

Бројна истраживања издвајају садржаје алгебре, као садржаје математичког образовања, које карактерише велика апстрактност и које прате бројне тешкоће у разумевању и проблеми у учењу на млађем школском узрасту (Booth, 1984, 1988; Kieran, 1981, 1985, 2004; Vergnaud, 1985; Filloi & Rojano, 1989; Sfard & Linchevski, 1994; Herscovics & Linchevski, 1994 и други). Стога се велика пажња поклања методичкој трансформацији ових садржаја и избору адекватног приступа у њиховом увођењу у млађим разредима основне школе. На бази анализе предложених решења, дошли смо на идеју да искористимо позитивне ефекте приступа заснованог на реалном контексту истраживача широм света (Gravemeijer, 1999, 2004; Cobb & Gravemeijer, 2006; Gravemeijer & Doorman, 1999; Van den Heuvel-Panhuizen, 2000, 2001, 2003, 2005, 2010; Romberg & Shafer, 2004; Webb & Meyer, 2002; Frykholm, 2004; и други) и истражимо његове ефекте у настави математике код нас.

Први корак у овим настојањима био је усмерен на сагледавање места, улоге и везе садржаја алгебре са другим садржајима наставе математике у млађим разредима основне школе, уочавање и издвајање потешкоћа у њиховом учењу, а крајњи циљ издвајање и операционализација алгебарских способности, које представљају основу за учење ових садржаја. На бази теоријских разматрања операционализоване су следеће алгебарске способности: *правилно схватање знака једнакости, разумевање функционалне зависности између компонената рачунских операција, способност уочавања функционалних односа на графикону, табели или слици, схватање симбола у алгебарском изразу, развијање појма променљиве и непознате*, као неопходне у процесу учења садржаја алгебре у почетној настави математике. Наведене способности посматрали смо као циљ, али и исход математичког образовања.

Све ово послужило је као основа за конципирање методичког оквира учењу садржаја алгебре заснованог на контекстуалном приступу. На бази теоријских разматрања извршена је емпиријска верификација конципираног методичког оквира у настави алгебре, кроз експериментално истраживање са паралелним групама, са ученицима четвртог разреда основне школе. Овим истраживањем имали смо намеру да, конципирањем модела у настави, заснованих на идеји контекстуалног приступа, утврдимо његов утицај на постигнућа ученика, развој алгебарских способности, као и трајност овако усвојених знања ученика.

Сагледавање улоге, могућности и ефеката контекстуалног приступа пратили смо на две основе: 1) кроз експериментално истраживање ефеката примењеног методичког приступа у учењу садржаја алгебре у настави математике у четвртом разреду основне школе и 2) кроз анализу садржаја уџбеника математике с циљем утврђивања у којој мери уџбеници стварају основу за контекстуални приступ учењу.

Експериментално истраживање ефеката контекстуалног приступа у учењу садржаја алгебре пратили смо кроз анализу доприноса примене овако конципиране наставе математике у односу на класичну наставу на: 1) укупно постигнуће ученика, 2) трајност знања ученика и 3) развијање алгебарских способности код ученика. Добијени резултати упућују на следеће закључке:

- Контекстуални приступ у садржајима алгебре доприноси постизању бољих образовних постигнућа у почетној настави математике у односу на класичан начин учења ових садржаја.

− Контекстуални приступ у настави алгебре даје позитивне ефекте на укупно постигнуће ученика без обзира на пол. То значи да се у настави алгебре контекстуални приступ може примењивати, без страха од значајних разлика које могу постојати између дечака и девојчица у разумевању садржаја алгебре.

− Под утицајем контекстуалног приступа у почетној настави математике, сви ученици, без обзира на општи успех, постижу напредак у образовним постигнућима у алгебри. Истраживање је показало да су, чак, и ученици са најлошијим успехом – *добар*, успели да покажу напредак у учењу алгебарских садржаја, и при том покажу значајну креативност у проналажењу и коришћењу модела у процесу математизације и решавања задатака.

− Контекстуалним приступом у настави математике на садржајима алгебре позитивно се утиче на постигнуће ученика, и тај успех не зависи од оцене коју ученици имају из математике. Евидентан напредак ученика експерименталне групе огледа се у чињеници да су ученици са слабијим оценама из експерименталне групе, показали боље резултате у односу на ученике са бољим оценама из математике у контролној групи.

− Приступом заснованом на реалном контексту доприноси се повећању трајности стечених алгебарских знања и способности.

Добијени резултати потврдили су полазну хипотезу овог истраживања: *Примена контекстуалног приступа у настави математике доприноси постизању бољих исхода у савладавању садржаја алгебре у млађим разредима основне школе*. Овим истраживањем смо потврдили резултате многобројних истраживања широм света која указују на позитивне ефекте контекстуалног приступа у настави математике (Booker & Windsor, 2010; Van Reeuwijk, 2001; Van Amerom, 2002; Jupri & Drijvers, 2016; Richardson & McGalliard, 2010; Carraher et al., 2006).

Испитујући ефекте експерименталног програма на развијање алгебарских способности дошли смо до следећих закључака:

− Контекстуални приступ у настави математике доприноси развијању способности правилног схватања знака једнакости код ученика. Резултати показују да сви ученици, без обзира на пол, општи успех или оцену коју имају из математике, под утицајем контекстуалног приступа постижу напредак у развијености ове алгебарске способности.

− Методички приступ заснован на реалном контексту у настави математике утиче позитивно на развој алгебарске способности разумевања функционалне зависности између компонената рачунских операција. Сви ученици без обзира на пол, општи успех или оцену постижу значајно боље резултате у развијености ове алгебарске способности под утицајем контекстуалног приступа у учењу садржаја алгебре.

− Контекстуални приступ у учењу садржаја алгебре доприноси развијању способности уочавања функционалних односа на графикону, табели или слици. Добијени резултати показују напредак у развоју ове способности код свих ученика, који су радили у складу са контекстуалним приступом, без обзира на пол, општи успех или оцену коју имају из математике у односу на ученике који су радили у оквиру класичне наставе математике.

− Контекстуални приступ даје позитивне ефекте у развоју способности схватања симбола у алгебарском изразу. Ученици који су радили у складу са контекстуалним приступом показују бољу развијеност ове способности у односу на ученике који су радили у складу у класичној настави математике на садржајима алгебре. Резултати показују да сви ученици из експерименталне групе, без обзира на пол, општи успех или оцену из математике показују већи напредак у развијености ове способности у односу на ученике контролне групе.

- Контекстуални приступ у садржајима алгебре позитивно утиче на развој способности развијања појма променљиве и непознате. Ученици који су садржаје алгебре усвајали контекстуалним приступом, без обзира на пол, општи успех или оцену из математике показују бољу развијеност способности разумевања променљиве и непознате.

На основу добијених резултата експерименталног истраживања можемо закључити да смо потврдили и другу хипотезу: *Контекстуални приступ у учењу и настави алгебре у млађим разредима основне школе подстиче развијање алгебарских способности.*

Ако се у обзир узму специфичности алгебарског мишљења и алгебарских способности, на основу многобројних истраживања (Brizuela, 2004; Van Amerom, 2002, 2003; Зељић, 2014; Kieran, 2004, 2004; Radford, 2014; Schliemann, et. al, 2003; Carraher, Schliemann, & Brizuela, 1999, 2000) можемо закључити да овако конципиране алгебарске способности представљају окосницу у учењу алгебарских садржаја, а самим тим и значајан исход целокупног математичког образовања ученика млађих разреда основне школе. Из тог разлога добијени резултати показују значај контекстуалног приступа и ефикасност процеса математизације у учењу алгебарских садржаја.

Анализом садржаја 70 уџбеника математике за млађе разреде основне школе, у циљу сагледавања њихове улоге у стварању основе за контекстуални приступ учењу садржаја алгебре дошли смо до следећих закључака:

- У уџбеницима математике за прва два разреда основне школе доминирају садржаји који стварају основу за контекстуални приступ у увођењу садржаја алгебре, док у уџбеницима за трећи и четврти разред доминирају садржаји засновани на чистој математичкој основи.

- У уџбеницима за први разред, у задацима предвиђеним за вежбање и утврђивање алгебарских садржаја доминирају контекстуални задаци, док у уџбеницима за други, трећи и четврти разред доминирају неконтекстуални задаци.

На основу добијених резултата можемо рећи да постављена хипотеза: *Уџбеници математике имају значајну улогу у стварању услова за контекстуални приступ учењу садржаја алгебре у млађим разредима основне школе* није потврђена. Имајући у виду слободу аутора у обликовању уџбеника у складу са захтевима наставног плана и програма, можемо рећи да се аутори опредељују за различите приступе у учењу и вежбању садржаја алгебре.

Поред предности реалистичног контекста у настави математике, морају се имати на уму и његова ограничења и потенцијални проблеми које овакав начин организације наставе носи са собом. Једном приликом је Ајнштајн изјавио „Ако се математички закони односе на стварност, они нису поуздани; а уколико су поуздани, они се онда не односе на стварност“ (према: Fasheh, 1982). Овај цитат се односи на један од основних проблема математике као науке, а то је да се математика посматра као формални систем, који је семантички празан и често не означава ништа. Њена корист постаје значајна, само ако се примени или ако се односи на стварни свет, и при том има у виду да математичке операције или функције по својој природи не одговарају природи или култури у којој појединац живи.

Коришћење реалистичног контекста не омогућава увек подршку ученицима у решавању проблема. Проблем настаје када постоји потреба да се пронађе одговарајући пример за проблеме који у себи крију велике бројеве. При том је чест случај да величина тог броја ученику постаје незамислива и одвлачи му пажњу. Са друге стране, проблем могу представљати ситуације у којима се ученици постављају у неравноправан положај (пример неравномерне поделе слаткиша), при чему се изазива негодовање и скреће пажња ученика од суштинских идеја које су пресудне за решавање проблема (Van den Heuvel-Panhuizen, 1996).

Боалер (Boaler, 1993) наводи низ проблема повезаних са употребом реалистичног контекста у наставним ситуацијама у учионици. Аутор сматра да контексти који треба да мотивишу ученике на савладавање градива математике, могу представљати ометајући фактор, ако ученици нису у довољној мери упознати са контекстом (нпр. плаћање рачуна за домаћинство, плате и друго). Поред тога, често се претпоставља да ће увођење реалистичног контекста утицати на мотивацију, али не и на тачну употребу математичких процедура и поступака. Учитељ може очекивати да ће контекстуални математички проблем повећати активност ученика, али такође и очекивати да ће ученик проблему приступити на исти начин, користећи процедуре које је научио изван реалног контекста. Исти аутор даље наводи да се ученици лако укључују у рад са задацима реалног контекста, али исто тако да често занемарују факторе који су релевантни у ситуацијама свакодневног живота. Из тог разлога, он сматра да проблем може настати у неспособности да знања настала у овако организованим ситуацијама учења пребаце у ситуације изван школског контекста. Из тог разлога, ученицима треба омогућити одређени степен аутономије у њиховом приступу задацима. На овај начин би то резултирало формирањем појединачних циљева за активности које би биле део контекста за појединца и његовог односа према задатку. При том би се тај задатак чинио лично смисленим за ученика.

И Бесвик (Beswick, 2011) наводи да постоје одређени проблеми везани за имплементацију проблемских ситуација реалног света у настави. Ауторка се позива на истраживања о начинима како контексти реалног света помажу у разумевању математичких појмова и који контексти су ефикасни у којим околностима – у зависности од фактора као што су карактеристике и разноликост у мишљењу ученика као и разноликости њихових способности. Ауторка сматра да употреба задатака реалног контекста треба да има сврху само у добро утврђеним околностима. Дакле, правим избором задатака и организацијом рада у учионици могуће је утицати на јасноћу усвајања математичких појмова и позитивног односа ученика према математици. При том треба водити рачуна о утицају различитих врста проблема, фактора и сложености контекста у задацима, који се користе у настави математике, као и карактеристикама и специфичностима сваког ученика посебно.

Стога, у настави математике организованој у складу са контекстуалним приступом, посебна пажња мора се посветити избору садржаја, проблема који представљају полазишта за учење, како би он изазивао што мање потешкоћа или недоумица и био користан ученику, како за учење тако и за примену у свакодневном животу. Упркос свим ограничењима и негативним странама коришћења контекстуално заснованих проблема у настави математике, треба увек имати у виду допринос и вредност ових садржаја на узрасту ученика од 7 до 11 година, чије је мишљење и активности у процесу учења везане за конкретне операције и очигледност. Посебно треба имати у виду, значај ових садржаја у учењу садржаја алгебре, које карактерише велика апстрактност, употреба симболичке нотације и велики број генерализација, које су симболички изражене.

Сви добијени резултати нашег истраживања указују ипак на значај и ефикасност контекстуалног приступа на наставу математике у млађим разредима основне школе на садржајима алгебре. Добијени резултати показују читав низ позитивних ефеката на процес учења алгебарских садржаја, али и развој алгебарских способности. Резултати истраживања показују да се реалистичним контекстом у садржајима алгебре може подстицати моделовање кроз процесе вертикалне и хоризонталне математизације, чиме се ублажава апстрактност која карактерише алгебру. Значај овог приступа, посебно се може истаћи ако се у обзир узму когнитивне могућности и специфичност мишљења деце млађег школског узраста. Применом овог приступа, кроз реални контекст и процесе математизације, ученик је у ситуацији да гради разумљиве моделе и развија их, како би алгебарске садржаје приближио свом уму. Ученицима у конструисању алгебарских нотација, образаца и генерализација, на значајан начин могу помоћи материјали, дијаграми, модели, табеле и графикони (Booker & Windsor, 2010; Kieran, 1999). Резултати овог истраживања показали су да је приступом који је заснован на реалним ситуацијама свакодневног живота могуће утицати на способност ученика у уочавању математичких односа изражених у облику различитих репрезентација. Позитивни ефекти наставе организоване у складу са реалистичним контекстом су евидентни код ученика без обзира на пол, њихову оцену из математике или опште постигнуће ученика.

Посебан допринос овог истраживања може се сагледати у чињеници да контекстуални приступ значајно доприноси бољем постигнућу ученика у усвајању алгебарских садржаја али и развоја специфичних способности које су карактеристичне за алгебарско мишљење у целини. Резултати показују да је очигледан напредак ученика, како у квалитету алгебарских знања тако и ефикасности и развијености алгебарских способности под утицајем контекстуалног приступа.

Имајући у виду проблеме које настава алгебре носи, овај рад је покушао разрешити низ дилема и пружити одговор на њих фаворизовањем идеје реалистичног контекста и процеса математизације који га карактерише. Ово је идеја о којој би учитељи требали да размишљају у настави алгебре на млађем школском узрасту, јер нуди бројне могућности и утиче на велики број карактеристика алгебарског мишљења ученика овог узраста. Тренутно у школи алгебарске нотације често представљају извор многобројних проблема: од организације наставе до приступа којим се треба руководити код овако апстрактних садржаја. Наш став је да ти проблеми треба да буду потенцијално извор продуктивног стварања нових и другачијих приступа, а не скуп неспоразума и грешака које треба исправљати. Дакле, у стварању основа алгебре треба поћи од „темеља“ и поклонити значајну пажњу формирању основних појмова, кроз садржаје и примере који су ученику блиски, односно са којима ученик живи и са којима се сусреће у свакодневном животу. Сваки отклон од природе детета и природе његовог мишљења, може створити само проблеме, који се даље рефлектују на касније потешкоће, ако се на њих не делује правилно и одмах у процесу развијања и формирања алгебарских појмова.

Добијени резултати истраживања и експериментална верификација контекстуалног приступа у учењу садржаја алгебре дају и одређене смернице, препоруке и сугестије за планирање, програмирање и организовање наставе математике у млађим разредима основне школе.

Када је у питању процес планирања учења садржаја алгебре у настави математике у млађим разредима основне школе препорука је да ови садржаји треба да имају основу у активностима заснованих на аритметичкој основи. Само добра основа у садржајима аритметике водиће ка учењу алгебре. Уколико ученик у процесу учења аритметике не схвати значење симбола, не развије појам једнакости и неједнакости, не схвати везе и односе између рачунских операција не може успешно усвајати ни садржаје алгебре. Учење садржаја алгебре треба да буде проткано кроз аритметику, а аритметика да представља полазиште.

У процесу програмирања садржаја учења у настави алгебре треба имати у виду да она мора да буде организована и заснована на садржајима који потичу из природног окружења ученика, на контекстима његовог живота, примерима који за ученика има смисао и сврху и кроз које он решава проблеме који за њега имају смисла. На овај начин садржаји математике усвајају се кроз процес хоризонталне математизације и моделовања реалних проблема на бази чега ученици постепено и систематично улазе у математички контекст. Реални контекст у овом процесу представља полазиште за учење, али и основу којој се ученик увек враћа моделујући математички контекст у реални. На овај начин сви математички садржаји, које ученик усваја, бивају конкретизовани у првом сусрету са њима, лишени симболике и чистог математичког контекста, блиски и доступни за практичне активности моделовања на реалним ситуацијама. Све ово води учењу са разумевањем и омогућава касније примену стечених знања и способности у решавању проблема из реалног света као и примени математике у животу.

У процесу учења и решавања задатака у настави математике у контекстуалном приступу не треба инсистирати на тачно утврђеним моделима решавања задатака, већ ученику допустити слободу да моделе гради кроз процесе математизације и изградње властитог мишљења и способности. Увек треба поћи од питања да ли се дидактичким избором модела од стране учитеља може утицати на развој симболике и резоновања ученика, чиме се умањује или подстиче креативност и флексибилност у мишљењу. Наш став је да у настави математике треба инсистирати на структуирању математичких знања кроз шематизовање и моделовање, јер то представља пут ка смисленом. Ученици треба да схвате да модели и шеме у овом процесу могу да буду корисни за решавање проблема.

У настави алгебре у млађим разредима основне школе, не треба претерано и прерано инсистирати на симболизацији као процесу, јер прерана симболизација може ометати правилно разумевање алгебарских појмова непознате и променљиве, као и слова као ознаке за променљиву или непознату. Ученику треба омогућити да постепено у процесу учења слово као ознаку за непознату, усваја заједно са појмом непознате, кроз вежбе у реалним примерима свакодневног живота. Овде се у први план истиче улога учитеља као неког ко ће тај процес водити, полазећи од реалних ситуација и неформалног знања, методички обликујући садржаје ка формалнијем облику, који ће дати значење симболима. Овај процес је јако важан, јер представља основу на којој ученици развијају знања и способности, које су значајне за наставак алгебарског образовања, а које је касније тешко исправити, уколико нису развијене на правилан начин.

Увођење симбола и њихово коришћење, на почетку учења и при сваком новом проширивању садржаја алгебре, треба засновати на ситуацијама реалног контекста, тако да постану саставни део њиховог резоновања. Ученици морају разумети важност поступка у решавању алгебарског задатка исто као и самог решења. Једначине и неједначине могу настати у реалистичном контексту, али се не може очекивати да у таквом окружењу буду и решење (неопходан је прелаз у свет чисте симболичке алгебре). Из тог разлога је једна од основних карактеристика алгебарског мишљења схватање и манипулација симболима, као ознакама за променљиву.

Ученике треба од почетка у настави математике суочавати са тешкоћама и недоумицама кроз проблеме свакодневног живота, како би имали у виду разлике и сличности између алгебарских појмова. На овај начин ученици ће водити рачуна о алгебарским појмовима у решавању задатака, што ће даље водити до њиховог потпуног разумевања (знак једнакости као знак еквиваленције, значење променљиве и непознате). При томе, мора се водити рачуна да речник текстуалних задатака буде приступачан ученику, како би се лакше дочарали проблеми свакодневног живота.

Међутим, треба имати у виду да се учење математике не може свести само на подручје реалног контекста, па се стога не може очекивати да ученици решавају само задатке тог типа. Проблем настаје у тренутку када се ученици сусретну са задацима које карактерише чиста симболички нотација, тако да у настави треба имати слуха и за задатке неконтекстуалног облика. Из тог разлога у вежбањима садржаја алгебре морају постојати примери задатака које карактерише чиста симболичка нотација.

Потешкоћу у креирању реално заснованих ситуација учења и задатака представља и чињеница да су неки од алгебарских садржаја тешки за превођење у ситуације свакодневног живота. Наиме, постоје садржаји, који и поред своје једноставности, тешко проналазе своје место у ситуацијама реалног контекста. Другим речима, понекад је симболичност алгебарског језика превише снажна и апстрактна да би се превела на подручје свакодневног говора и језика. У овом смислу, учитељ треба да покаже своју креативност и тактичност у избору и међусобном повезивању садржаја. Стога, вештине и знања учитеља треба стално надограђивати кроз: а) јачање компетенција у области алгебре и наставе алгебре, б) организовања обука за коришћење контекстуалног приступа у учењу и настави математике, в) проширивање знања о специфичностима дечијег мишљења и његових когнитивних способности на овом узрасту.

Како би студије и истраживања попут овог имале смисла и пружиле одговоре на значајна питања наставе и учења алгебре, у први план истиче се потреба за континуираним истраживањима различитих перспектива проблема, који се у настави алгебре појављују. Само истраживањем различитих приступа и покушајима њене имплементације у наставну праксу могуће је потпуније сагледавање карактеристика алгебарског мишљења ученика млађег школског узраста, јер се свака од ових карактеристика и способности одликује широким спектром особина изражених међусобним односима.

Надамо се да ће ова дисертација бити инспирација за друге истраживаче, и да ће их подстаћи да истражују друге перспективе контекстуалног приступа, али и карактеристика наставе и учења алгебре на млађем школском узрасту.

ЛИТЕРАТУРА

Abels, M., Matassa, M. S., & Johnson, R. (2013). *Making Sense of Algebra with Realistic Mathematics Education*. Gallery workshop for the Annual Meeting of the National Council of Teachers of Mathematics, Denver, CO. https://dx.doi.org/10.6084/m9.figshare.3124831.v1

Akgün, L., & Özdemir, M. E. (2006). Students' understanding of the variable as general number and unknown: A case study. *The teaching of mathematics*, (16), 45–51.

Aké, L. P., Godino, J. D., Gonzato, M., & Wilhelmi, M. R. (2013). Proto-algebraic levels of mathematical thinking. In: Lindmeier, A. M. & Heinze, A. (Eds.). *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, (1–8). Kiel, Germany: PME.

Alexandrou-Leonidou, V., & Philippou, G. N. (2011). Can they 'see' the equality? In: M. Pytlak, T. Rowland, E. Swoboda. *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (*CERME 7)*, (410–419). Poland: University of Rzeszów.

Alibali, M. W., Knuth, E. J., Hattikudur, S., McNeil, N. M., & Stephens, A. C. (2007). A longitudinal examination of middle school students' understanding of the equal sign and equivalent equations. *Mathematical Thinking and learning*, *9* (3), 221–247.

Armanto, D. (2002). *Teaching multiplication and division realistically in Indonesian primary schools: a prototype of local instructional theory*. (Doctoral dissertation). University of Twente.

Arsaythamby, V., & Zubainur, C. M. (2014). How A Realistic Mathematics Educational Approach Affect Students' Activities In Primary Schools?. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, *159*, 309–313.

Arseven, A., & Yağcı, E. (2010). The Theoretical Structure of Realistic Mathematics Education. *Middle-East Journal of Scientific Research*, *6*(6), 664–666.

Aczel, J. (1998). *Learning equations using a computerised balance model: a Popperian approach to learning symbolic algebra* (Doctoral dissertation). University of Oxford.

Bazzini, L. & Tsamir, P. (2003). Connections between theory and research findings: the case of inequalities. In: M. A. Mariotti (Ed.), Proceedings of the 3rd Conference of the European Society for Research in Mathematics Education 10, (1–3). Bellaria, Italia: ERME.

Bazzini, L., & Boero, P. (2004). Inequalities in Mathematics Education: the need for complementary perspectives (Research Forum on Algebraic equations and inequalities: issues for research and teaching), In: M. J. Høines A. B. Fuglestad (Eds.). *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* , 2, (137–166). Bergen, Norway.

Ball, D. L. (1993). Halves, pieces, and twoths: Constructing and using representational contexts in teaching fractions. *Rational numbers: An integration of research*, 157–195.

Barbosa, A., & Vale, I. (2015). Visualization in pattern generalization: Potential and Challenges. *Journal of the European Teacher Education Network*, *10*, 57–70.

Baroody, A. J., & Ginsburg, H. P. (1983). The effects of instruction on children's understanding of the" equals" sign. *The Elementary School Journal*, *84*(2), 199–212.

Barnes, H. (2004). Realistic mathematics education: Eliciting alternative mathematical conceptions of learners. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education, 8*(1), 53–64.

Beatty, R., & Moss, J. (2006). Multiple vs. numeric approaches to developing functional understanding through patterns–affordances and limitations for Grade 4 students. In: Alatorre, S., Cortina, J.L., Sáiz, M., and Méndez, A.(Eds) (2006). *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 2, (87–94). *Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.*

Becker, J. R., & Rivera, F. (2006). Sixth graders' figural and numerical strategies for generalizing patterns in algebra. In: Alatorre, S., Cortina, J.L., Sáiz, M., and Méndez, A.(Eds) (2006). *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 2, (95–100). *Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.*

Bednarz, N., Kieran, C., & Lee, L. (1996). Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching. In: Bednarz, N., Kieran, C., Lee, L. (Eds.). *Approaches to algebra* (3–12). Springer, Dordrecht.

Berns, R. G. & Erickson, P. M. (2001). *Contextual teaching and learning: Preparing Students for the New Economy.* Louisville, KY: University of Louisville, National Research Center for Career and Technical Education.

Beswick, K. (2011). Putting context in context: An examination of the evidence for the benefits of 'contextualised'tasks. *International journal of science and mathematics education*, *9*(2), 367–390.

Blanton, M., & Kaput, J. (2004). Elementary grade students' capacity for functional thinking. In: M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, (135–142). Bergen, Norway: PME.

Blanton, M., & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36 (5), 412–446.

Blanton, M., Schifter, D., Inge, V., Lofgren, P., Willis, C., Davis, F., & Confrey, J. (2007). Early algebra. In: V. J. Katz (Ed.), *Algebra: Gateway to an technological future*. (7–14). MAA Report. Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Blanton, M., & Kaput, J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. In: J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives* (5–23). Dordrecht: Springer.

Blanton, M., Levi, L., Crites, T., Dougherty, B., & Zbiek, R. M. (2011). *Developing Essential Understanding of Algebraic Thinking for Teaching Mathematics in Grades 3-5. Series in Essential Understandings*. National Council of Teachers of Mathematics.

Blanton, M., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K., & Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-year-olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(5), 511–558.

Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Gardiner, A. M., Isler, I., & Kim, J. S. (2015). The development of children's algebraic thinking: The impact of a comprehensive early algebra intervention in third grade. *Journal for research in Mathematics Education*, *46*(1), 39–87.

Blanton, M., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K., & Newman-Owens, A. (2017). A progression in first-grade children's thinking about variable and variable notation in functional relationships. *Educational Studies in Mathematics, 95*(2), 181–202.

Boaler, J. (1993). The Role of Contexts in the Mathematics Classroom: Do they Make Mathematics More" Real"?. *For the learning of mathematics*, *13*(2), 12–17.

Boero, P., Bazzini, L., & Garuti, R. (2001). Metaphors in teaching and learning mathematics: A case study concerning inequalities. In: M. van den Hueuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th PME Conference*, 2, (185–19). Utrecht, Netherlands: Utrecht University.

Bonotto, C. (2011). Engaging students in mathematical modelling and problem posing activities. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, *1*(3), 18–32.

Booker, G., & Windsor, W. (2010). Developing algebraic thinking: Using problem-solving to build from number and geometry in the primary school to the ideas that underpin algebra in high school and beyond. *Procedia-Social and Behavioral Sciences, 8*, 411–419.

Booth, L. R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. *The ideas of algebra*, K-12, *19*, 20–32.

Booth, J.L., & Koedinger, K.R. (2008). Key misconceptions in algebraic problem solving. In: B.C. Love, K. McRae, & V. M. Sloutsky (Eds.), *Proceedings of the 30th Annual Cognitive Science Society*, (571–576). Austin, TX: Cognitive Science Society.

Booth, J., & Koedinger, K. (2010). Facilitating low-achieving students' diagram use in algebraic story problems. *Proceedings of the Annual Meeting of the Cognitive Science Society*, *32*(32), 1649–1654.

Booth, J. L., McGinn, K. M., Barbieri, C., & Young, L. K. (2017). Misconceptions and Learning Algebra. In: S. Sepideh (Ed.), *And the Rest is Just Algebra* (63–78). Cham: Springer.

Bray, A., & Tangney, B. (2016). Enhancing student engagement through the affordances of mobile technology: a 21st century learning perspective on Realistic Mathematics Education. *Mathematics Education Research Journal*, *28*(1), 173–197.

Brekke, G. (2001). School algebra: Primarily manipulations of empty symbols on a piece of paper?. In: H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), *12th ICMI Study Conference: The Future of the Teaching and Learning of Algebra*, (96–102). Melbourne: University of Melbourne.

Brizuela, B. M., & Schliemann, A. D. (2003). Fourth Graders Solving Equations. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *2*, 137–144.

Brizuela, B., & Alvarado, M. (2010). First graders' work on additive problems with the use of different notational tools. *Revista IRICE*, (21), 37–43.

Brizuela, B. M., & Lara-Roth, S. (2001). Additive relations and function tables. *The Journal of Mathematical Behavior*, *20*(3), 309–319.

Brown, B. (1998). *Aplying Constructivisim in Vocational and Career Education. Information Series no. 378.*, Columbus: ERIC Caleringhouse on Adult, the Ohio State University: Career, and Vocational Education, Center on Education and Training for Employment.

Bruner, Dž. (1990): Tok kognitivnog razvoja. U: J. Mirić (ur.): *Zbornik radova iz razvojne psihologije Kognitivni razvoj deteta*, 3, (75–90). Beograd: Savez društava psihologa SR Srbije.

Burrill, G., & Romberg, T. (1998). Statistics and probability for the middle grades: Examples from mathematics in context. In: S. Lajoie (Ed.), *Reflection on statistics*, (33–62). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Byrd, C. E., McNeil, N. M., Chesney, D. L., & Matthews, P. G. (2015). A specific misconception of the equal sign acts as a barrier to children's learning of early algebra. *Learning and Individual Differences*, *38*, 61–67.

Van Amerom, B. A. (2002). *Reinvention of early algebra: Developmental research on the transition from arithmetic to algebra* (Doctoral dissertation). Utrecht University.

Van Amerom, B. A. (2003). Focusing on informal strategies when linking arithmetic to early algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *54*(1), 63–75.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (1996). *Assessment and realistic mathematics education.*Utrecht, the Netherlands: CD Beta Press.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2000). Mathematics education in the Netherlands: A guided tour. *Freudenthal Institute CD-rom for ICME9*, 1–32.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (Ed.). (2001). *Children learn mathematics; A learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets*. Utrecht: Freudenthal Institute.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2002). 'Realistic Mathematics Education as work in progress', In: F. L. Lin (ed.), *Common Sense in Mathematics Education. Proceedings of 2001 The Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics Education*, (1–42). National Taiwan Normal University, Taipei, Taiwan.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational studies in Mathematics*, *54*(1), 9–35.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). Girls' and boys' problems: Gender differences in solving problems in primary school mathematics in the Netherlands. In Nunes T. and Bryant P. (Eds.), *Learning and Teaching Mathematics: An International Perspective*, (223–253). Psychology Press, UK.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2005). The role of contexts in assessment problems in mathematics. *For the learning of mathematics*, *25*(2), 2–23.

Van den Heuval-Panhuizen, M. (2010). Reform under attack – Forty years of working on better mathematics education thrown on the scrapheap? No way! In: L.Sparrow, B.Kissane, & C. Hurst (Eds.), *Shaping the future of mathematics education: Proceedings of the 33rd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, (1–25). Freemantle: MERGA.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2019). Didactics of mathematics in the Netherlands. In: W. Blum et al. (Eds.). *European Traditions in Didactics of Mathematics* (57–94). Cham, Switzerland: Springer.

Van der Kooij, H. (2001). Algebra: A tool for solving problems? In: F.L. Lin (Ed), *Proceedings of 2001 The Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics Education: Common sense in mathematics education*, (135–152). Taipei, Taiwan.

Van Reeuwijk, M. (2001). From informal to formal, progressive formalization: An example on “solving systems of equations.” In: H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra: Proceedings of the 12th ICMI Study Conference,* 2, 613–620.

Van Stiphout, I., Drijvers, P. H. M., & Gravemeijer, K. P. E. (2013). The development of students’ algebraic proficiency. *Mathematics Education, 8*(2–3), 62–80.

Verbitsky, A. A., & Kalashnikov, V. G. (2012). Category of “Context” and Contextual Approach in Psychology. *Psychology in Russia*, *5*, 117–130.

Verbitsky A. A. Kalashnikov V. G. (2013). Contextual Approach in Psychology. *Europian Scientific Journal*, 9(32), 1–12.

Vergnaud, G. (1985). Understanding mathematics at the secondary-school level. In: A. Bell, B. Low, & J. Kilpatrick (Eds.), *Theory, Research & Practice in Mathematical Education,* (27–45). University of Nottingham, UK: Shell Center for Mathematical Education

Verikios, P. & Farmaki, V. (2006). Introducing algebraic thinking to 13 year-old students: the case of the inequality. In: J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 5, (321–328). Prague: PME.

Виготски, Л. (1977). *Мишљење и говор*. Београд: Нолит.

Vigotski, L. (1996). *Problemi razvoja psihe*, tom III. Beograd: Zavod za udžbenike i nastavna sredstva.

Vigotski, L. (1990). Istorijski razvoj ponašanja čoveka, U: J. Mirić (ur.). *Zbornik radova iz razvojne psihologije „Kognitivni razvoj deteta“,* 3, (39–46). Beograd: Savez društava psihologa SR Srbije.

Вилотијевић, М. (1996): *Системско-теоријске основе наставног процеса*, Београд: Учитељски факултет.

Вилотијевић, М. (1999). *Дидактика 2 – Дидактичке теорије и теорије учења*. Београд: Научна књига и Учитељски факултет.

Vlassis, J. (2001). Solving equations with negatives or crossing the formalizing gap, In. M. Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, (375–382), Utrecht, Netherlands

Vlassis, J. (2002). The balance model: Hindrance or support for the solving of linear equations with one unknown. *Educational Studies in Mathematics*, *49*(3), 341–359.

Gerhard, S. (2011). Investigating the influence of student's previous knowledge on their concept of variables - an analysis tool considering teaching reality. In: M. Pytlak, T. Rowland, E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (*CERME 7),* (490–499). Poland: University of Rzeszów.

George, D., & Mallery, P. (2010). *SPSS for Windows step by step. A simple study guide and reference (10. Baskı)*. *GEN*, Boston, MA: Pearson Education, Inc.

Glynn, S. M., & Winter, L. K. (2004). Contextual teaching and learning of science in elementary schools. *Journal of elementary science education*, *16*(2), 51–63.

Gojkov, G. (2002). Конструктивизам као епистемолошко-методолошка основа постмодерне дидактике 1. *Pedagogija*, *40*(4), 27–50.

Gravemeijer, K. (1994). *Developing realistic mathematics education*. Utrecht, the Netherlands: CD-β Press.

Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical thinking and learning*, *1*(2), 155–177.

Gravemeijer K. & Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: A calculous course as an example. *Educational Studies in Matemathics*, 39, 111–119.

Gravemeijer, K. (2004). Local instruction theories as means of support for teachers in reform mathematics education. *Mathematical thinking and learning*, *6*(2), 105–128.

Gravemeijer, K., Bruin-Muurling, G., Kraemer, J. M., & van Stiphout, I. (2016). Shortcomings of mathematics education reform in the Netherlands: a paradigm case?. *Mathematical thinking and learning*, *18*(1), 25–44.

Gravemeijer, K. (2020). A socio-constructivist elaboration of realistic mathematics education. In: M. V. den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *National reflections on the Netherlands didactics of mathematics: Teaching and learning in the context of realistic mathematics education,* (217–233). Springer International Publishing.

Greeno, J. G., & Hall, R. P. (1997). Practicing representation: Learning with and about representational forms. *Phi Delta Kappan*, *78*, 361–367.

Grinfild, P. i Bruner, Dž. (1990). Kultura i kognitivni razvoj, U: J. Mirić (ur.): *Zbornik radova iz razvojne psihologije Kognitivni razvoj deteta, 3*, (57–74). Beograd: Savez društava psihologa SR Srbije.

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry. In: search of a framework. In: L. Puig & A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME International Conference,* 1, (3-19). Valencia, España: Universidad de Valencia.

Davidenko, S. M. (2006). A framework to analyze the algebra mathematics register. In: Alatorre, S., Cortina, J.L., Sáiz, M., & Méndez, A. (Eds.). *Proceedings of the Twenty Eighth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, (165–166). Mérida, Mexico: Universidad Pedagógica Nacional.

Dewey, J. (1997). *How we think*. Courier Corporation.

Дејић, М., Егерић, М. (2003). *Методика наставе математике*. Учитељски факултет: Јагодина.

De Lange, J. (1987). *Mathematics, Insight and Meaning*, Utrecht University: Utrecht.

De Lange, J. (1995). Assessment: No change without problems. In: Th. A. Romberg (Ed.), *Reform in School Mathematics and Authentic Assessment*, (87–172). SUNY, Albany, NY.

De Lange, J. (2003). Mathematics for literacy. *Quantitative literacy: Why numeracy matters for schools and colleges*, *80*, 75–89.

De Lange, J. (2006). Mathematical literacy for living from OECD-PISA perspective. *Tsukuba Journal of Educational Study in Mathematics. Special Issue on The APEC-TSUKUBA International Conference "Innovative Teaching Mathematics through Lesson Study". 25,* 13–35.

Di Bernardo, R., Carotenuto, G., Mellone, M., & Ribeiro, M. (2018). Prospective teachers' interpretative knowledge on early algebra. *Cadernos de Pesquisa*, *24*, 208–222.

Dickinson, P., & Hough, S. (2012). *Using realistic mathematics education in UK classrooms*. Manchester: Paul Dickinson and Sue Hough.

Drouhard, J.-P., Panizza, M., Puig, L., & Radford, L. (2006). Working Group 6. Algebraic thinking. In: M. Bosch (Ed.). *Proceedings of the IVth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4*), (631–642). Barcelona: Universitat Ramon Llull Editions.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In: D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking*. (95–123). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Ђокић, О. (2013). *Реално окружење у почетној настави геометрије*. (Докторска дисертација), Универзитет у Београду.

Đokić, O. (2014a). Realno okruženje u početnoj nastavi geometrije. *Inovacije u nastavi*, *27*(2), 7–21.

Ђокић, О. (2014б). PME/RME (REALISTIC MATHEMATICS EDUCATION). У: П. Пијановић (ур.), *Лексикон образовних термина*. (686). Београд: Учитељски факултет.

Ђокић, О. (2014в). Реалне ситуације. У: П. Пијановић (ур.), *Лексикон образовних термина*. (670–671). Београд: Учитељски факултет.

Djokic, O. (2015). The Effects of RME and Innovative Textbook Model on 4th Grade Pupils' Reasoning in Geometry. In: J. Novotná & H. Moraová (Eds.), *International Symposium Elementary Maths Teaching SEMT '13 Proceedings* (107–117). Prague: Univerzita karlova, Pedagogická fakulta

Đukić, M. (2008). Konstruktivistička evaluacija nastave: Didaktičke implikacije. *Zbornik odseka za pedagogiju*, *21*(22), 107–117.

Earnest, D., & Balti, A.(2008). Instructional strategies for teaching algebra in elementary school. *Teaching Children Mathematics*, *14*(9), 518–522.

Ely, R., & Adams, A. E. (2012). Unknown, placeholder, or variable: what is x?. *Mathematics Education Research Journal*, *24*(1), 19–38.

English, L. D., & Sriraman, B. (2010). Problem solving for the 21st century. In: B. Sriraman & L. D. English (Eds.*), Theories of mathematics education: Seeking new frontiers,* (263–285). Berlin, London: Springer

Зељић, М. (2011). Проблем разумевања структуре и поступка решавања једначина у основношколској алгебри. *Иновације у настави-часопис за савремену наставу*, *24*(1), 39–52.

Зељић, М. (2014). *Методички аспекти ране алгебре*. Учитељски факултет: Универзитет у Београду.

Zeljić, M., Dabić, M. (2014). Iconic representation as student's success factor in algebraic generalisations. *Journal plus education*, *10*(1), 173–183.

Zeljić, M. (2015). Odnos istorijskog razvoja algebre i metodike nastave algebre. *Pedagogija*, *70*(2), 279–291.

Ivanovna, B. N., & Vitalyevna, M. T. (2015). Competence contextual model of teaching and fostering at a general Academic school as an innovaton. *Образование через всю жизнь: непрерывное образование в интересах устойчивого развития*, *1*(13), 400–402.

Joko Supriyanto, S., & Hairun, Y. (2020). Design of Worksheets for RME Model to Improve Mathematical Communication. *Universal Journal of Educational Research*, *8*(4), 1363–1371.

Johnson, E. B. (2002). *Contextual teaching and learning: what it is and why it's here to stay*. Thousand Oaks: Corwin Press, INC.

Jupri, A., Drijvers, P., & van den Heuvel-Panhuizen, M. (2014). Difficulties in initial algebra learning in Indonesia. *Mathematics Education Research Journal*, *26*(4), 683–710.

Jupri, A., Drijvers, P., & van den Heuvel-Panhuizen, M. (2015). Improving grade 7 students' achievement in initial algebra through a technology-based intervention. *Digital Experiences in Mathematics Education*, *1*(1), 28–58.

Jupri, A., & Drijvers, P. (2016). Student difficulties in mathematizing word problems in algebra. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *12*(9), 2481–2502.

Jukić, R. (2013). Konstruktivizam kao poveznica poučavanja sadržaja prirodoznanstvenih i društvenih predmeta. *Pedagogijska istraživanja*, *10*(2), 241–261.

Kaput, J.J. (1994). The Representational Roles of Technology in Connecting Mathematics with Authentic Experience. In: R. Biehler, R.W. Scholz, R. Sträber and B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (379–397). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Kaput, J., & Blanton, M. (2000). *Algebraic reasoning in the context of elementary mathematics: Making it implementable on a massive scale.* Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In: J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades,* (5–19). New York, NY: Lawrence Erlbaum Associates/Taylor & Francis Group and National Council of Teachers of Mathematics.

Katz, V. (2007). Executive summary. In: V. J. Katz (Ed.), *Algebra: Gateway to a technological future,* (1–6). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Katz, V., & Barton, B. (2007). Stages in the history of algebra with implications for teaching. *Educational Studies in Mathematics*, 66(2), 185–201.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational studies in Mathematics*, *12*(3), 317–326.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In: D. A. Grouws, (Eds.), *Handbook of research on mathematics teachingand learning,* (390–419). New York: Macmillan.

Kieran, C. (2004a). Algebraic thinking in the early grades: What is it. *The Mathematics Educator*, *8*(1), 139–151.

Kieran, C. (2004b). The equation/inequality connection in constructing meaning for inequality situations. In: M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1 (143–147). Bergen, Norway: Bergen University College.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. In: A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on psychology of mathematics education: Past, present and future,* (11–49). Rotterdam/Taipei: Sense.

Kieran, C. (2007). Developing algebraic reasoning: The role of sequenced tasks and teacher question from the primary to the early secondary school levels. *Quadrante*, *16*(1), 5–26.

Kieran, C. (2018). Seeking, using, and expressing structure in numbers and numerical operations: A fundamental path to developing early algebraic thinking. In: C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice*, (79–105). New York: Springer.

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D., & Ng, S. F. (2016). *Early algebra: Research into its nature, its learning, its teaching.* New York: Springer.

Kilhamn, C. (2014). When does a variable vary? Identifying mathematical content knowledge for teaching variables. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *19*(3–4), 83–100.

Klein, A. S., Beishuizen, M., & Treffers, A. (1998). The empty number line in Dutch second grades: Realistic versus gradual program design. *Journal for Research in Mathematics Education*, *29*(4), 443–464.

Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal for research in Mathematics Education*, *37*(4), 297–312.

Kooper, A. (1996). The historical development of mathematics–its integration into the teaching of the subject in the upper grades by means of independent readings by students. *Aleh*, *18*, 27–31.

Kriegler, S. (2007). Just what is algebraic thinking. In: S. Kriegler , T. Gamelin, M. Goldstein & C. Hsu Chan (Eds.) *Introduction to algebra: Teacher handbook,* (7–18). Los Angeles, Ca: Printing and Copies Unlimited.

Krüger, J. (2015). Algebra in Dutch education, 1600-2000. In: K. Krainer; N. Vondrov´a (Eds.). *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, (1832–1838). Prague, Czech Republic.

Küchemann, D. (1978). Children's understanding of numerical variables. *Mathematics in school*, *7*(4), 23–26.

Khuluq, M.H. (2015). *Developing Students' understanding of Linear Equations With One Variable Through Balancing Activities.* (Doctoral dissertation). Sriwijaya University.

Lady, A., Utomo, B. T., & Lovi, C. (2018). Improving mathematical ability and student learning outcomes through realistic mathematic education (RME) approach. *International Journal of Engineering and Technology (UAE)*, *7*(2), 55–57.

Laurens, T., Batlolona, F. A., Batlolona, J. R., & Leasa, M. (2018). How Does Realistic Mathematics Education (RME) Improve Students' Mathematics Cognitive Achievement. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *14*(2), 569–578.

Lee, K., Khng, K. H., Ng, S. F., & Ng Lan Kong, J. (2013). Longer Bars for Bigger Numbers? Children's Usage and Understanding of Graphical Representations of Algebraic Problems. *Frontline Learning Research*, *1*(1), 81–96.

Lee, L., & Wheeler, D. (1989). The arithmetic connection. *Educational Studies in Mathematics*, *20*(1), 41–54.

Lim, B., & Brezina, C. (2016). *Al-Khwarizmi: Father of Algebra and Trigonometry*. The Rosen Publishing Group, Inc.

Linchevski, L. (1995). Algebra with numbers and arithmetic with letters: A definition of pre-algebra. *The Journal of Mathematical Behavior*, *14*(1), 113–120.

Linchevski, L., & Livneh, D. (1999). Structure sense: The relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational studies in mathematics*, *40*(2), 173–196.

Lins, R. C. (1992). *A framework for understanding what algebraic thinking is* (Doctoral dissertation) University of Nottingham.

Linsell, C. (2008). Solving equations: Students' algebraic thinking. In: C. Linsell, A. Neill (Eds.). *Findings from the New Zealand Secondary Numeracy Project 2007,* (39–44). Wellington: Learning Media.

Lott, J.W. (ed) (2000). Algebra? A gate? A barrier? A mystery! *Mathematics Education Dialogues*, *3*(2), 1–12.

Маричић, С. М., и Милинковић, Н. (2017). Уџбеник у стварању услова за контекстуални приступ учењу садржаја алгебре у почетној настави математике. *Зборник радова Педагошког факултета, 20*(19), 117–130.

Маричић, С., и Фелда, Д. (2017). Уџбеник у стварању услова за контекстуални приступ учењу геометрије у Србији и Словенији, У: Н. Вуловић, А. Михајловић (ур). *Методички аспекти наставе математике, четврта међународна конференција* (17–18). Јагодина: Факултет педагошких наука Универзитета у Крагујевцу.

Maričić, S., & Špijunović, K. (2015). Developing critical thinking in elementary mathematics education through a suitable selection of content and overall student performance. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, *180*, 653–659.

Mason, J. (1996). Expressingenerality and roots of algebra. In: N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra* (65–86). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers

Mason, J. (2008). Making use of children's powers to produce algebraic thinking. In: J. J. Kaput, D. W. Carraher, M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades*, (57–94). New York: Routledge.

Mayer, R. (1981). Frequency norms and structural analysis of algebra story problems into families, categories, and templates. *Instructional Science*, *10*(2), 135–175.

MacGregor, M., & Stacey, K. (1997). Students'understanding of algebraic notation: 11–15. *Educational studies in mathematics*, *33*(1), 1–19.

Meira, L. (1995). The microevolution of mathematical representations in children's activity. *Cognition and instruction*, *13*(2), 269–313.

Meyer, M. R. (1997). Mathematics in Context: Opening the gates to mathematics for all at the middle level. *NASSP Bulletin*, *81*(586), 53–59.

McGarvey, L. M. (2012). What is a pattern? Criteria used by teachers and young children. *Mathematical Thinking and Learning*, *14*(4), 310–337.

McEldoon, K. L., & Rittle-Johnson, B. (2010). Assessing elementary students' functional thinking skills: the case of function tables. In: P. Brosnan, D. B. Erchick, & L. Flevares (Eds.), *Proceedings of the Thirty Second Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education: Optimizing Student Understanding in Mathematics*, (202–211). Columbus, OH: Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Mc Nab, S. L. 2006. Supporting algebraic thinking and generalising about fucntional relationship through patterning in a second grade classroom. In: Alatorre, S., Cortina, J. L., Sáiz, M., & Méndez, A. (eds.) *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, (118–122). Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.

McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2005). Knowledge change as a function of mathematics experience: All contexts are not created equal. *Journal of Cognition and Development*, *6*(2), 285–306.

McNeil, N. M., Grandau, L., Knuth, E. J., Alibali, M. W., Stephens, A. C., Hattikudur, S., & Krill, D. E. (2006). Middle-school students' understanding of the equal sign: The books they read can't help. *Cognition and instruction*, *24*(3), 367–385.

McNeil, N. M., Weinberg, A., Hattikudur, S., Stephens, A. C., Asquith, P., Knuth, E. J., & Alibali, M. W. (2010). A is for apple: Mnemonic symbols hinder the interpretation of algebraic expressions. *Journal of Educational Psychology*, *102*(3), 625–634.

McNeil, N. M., Fyfe, E. R., & Dunwiddie, A. E. (2015). Arithmetic practice can be modified to promote understanding of mathematical equivalence. *Journal of Educational Psychology*, *107*(2), 423–436.

Милинковић, Ј. (2017). Постигнуће ученика из математике; главни налази, трендови и наставни програм. У: М. Марушић Јаблановић, Н. Гутвајн, И. Јакшић, (ур.). *ТИМСС 2015 у Србији: Резултати међународног истраживања постигнућа ученика 4. разреда основне школе из математике и природних наука*, (27–50). Београд: Институт за педагошка истраживања.

Милинковић, Н., и Маричић, С. (2019). Приступ садржајима о зависности резултата од промене компонената рачунских операција у уџбеницима математике. *Зборник радова Педагошког факултета*, Ужице, *22*(21), 193–206.

Molina, M., Castro, E., & Ambrose, R. (2005). Enriching arithmetic learning by promoting relational thinking. *The international journal of Learning*, *12*(5), 265–270.

Mousoulides, N., Sriraman, B., & Christou, C. (2007). From problem solving to modeling– the emergence of models and modelling perspectives. Nordic Studies in Mathematics Education, *12*(1), 23–47.

Moses, R. P., & Cobb., C. E. (2001). *Radical Equations: Math Literacy and Civil Rights*. Boston: Beacon Press.

Moss, J., & McNab, S. (2011). An approach to geometric and numeric patterning that fosters second grade students' reasoning and generalizing about functions and co-variation. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization*, (277–301). Springer, Berlin, Heidelberg.

McGarvey, L. (2012). What is a pattern? Criteria used by teachers and young children. *Mathematical Thinking and Learning*, *14*(4), 310–337.

National Research Council. (2001). *Knowing what students know: The science and design of educational assessment*. National Academies Press.

Ng, S. F. (2004). Developing algebraic thinking in early grades: Case study of the Singapore primary mathematics curriculum. *The Mathematics Educator*, *8*(1), 39–59.

Ndlovu, M. (2014). The effectiveness of a teacher professional learning programme: The perceptions and performance of mathematics teachers. *Pythagoras*, *35*(2), 1–10.

Newton, N. (2017). *Math Problem Solving in Action: Getting Students to Love Word Problems, Grades 3-5*. Taylor & Francis.

Nieveen, N. (1999). Prototyping to reach product quality. In: J. van den Akker, R.M. Branch, K. Gustafson, N. Nieveen, & T. Plomp (Eds), *Design approaches and tools in education and training*, (125–136). Boston: Kluwer Academic

Nobre, S., Amado, N., & Carreira, S. (2012). Solving a contextual problem with the spreadsheet as an environment for algebraic thinking development. *Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA*, *31*(1), 11–19.

Nortvedt, G. A. (2008). Understanding word problems. In: O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepúlveda (Eds). *International Group for the Psychology of Mathematics Education. Mathematical Ideas: History, Education, and Cognition. Proceedings of the Joint Meeting of PME32 and PME-NA XXX*, *4*, (41–48). México.

Nohda, N. (2000). Teaching by open-approach method in Japanese mathematics classroom. In: T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (1–39). Hiroshima, Japan: Academic Press.

NCTM [National Council of Teachers of Mathematics]. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*, Reston, Virginia.

NCTM [National Council of Teachers of Mathematics]. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*, Reston, Virginia.

Obradović, D. R., & Zeljić, M. Ž. (2015). Methods and strategies of solving story problems in initial mathematical teaching. *Inovacije u nastavi - časopis za savremenu nastavu*, 28(1), 69–81.

Otten, M., Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Veldhuis, M. (2019). The balance model for teaching linear equations: a systematic literature review. *International Journal of STEM Education*, *6*(1), 30–51.

Otten, M., van den Heuvel-Panhuizen, M., Veldhuis, M., Boom, J., & Heinze, A. (2020). Are physical experiences with the balance model beneficial for students' algebraic reasoning? An evaluation of two learning environments for linear equations. *Education Sciences*, *10*(6), 163–188.

Özgeldi, M. (2013). Interpretation of unknown and variable prior to formal algebraic instruction. *Kastamonu Education Journal*, *21*(4), 1317–1326.

Pallant, J. (2017). *SPSS priručnik za preživljavanje: postupni vodič kroz analizu podataka pomoću SPSS-a*, Prevod 6. izdanja. Beograd: Mikro knjiga.

Papadakis, S., Kalogiannakis, M., & Zaranis, N. (2017). Improving mathematics teaching in kindergarten with realistic mathematical education. *Early Childhood Education Journal*, *45*(3), 369–378.

Papadopoulos, I. (2019). Using mobile puzzles to exhibit certain algebraic habits of mind and demonstrate symbol-sense in primary school students. *The Journal of Mathematical Behavior*, *53*, 210–227.

Papic, M., & Mulligan, J. T. (2007). The growth of early mathematical patterning: An intervention study. In: J. Watson, & K. Beswick (Eds.), *Mathematics: Essential research, essential practice (Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*), 2, (591–600). Adelaide: MERGA.

Papic, M. (2007). Promoting repeating patterns with young children-more than just alternating colours!. *Australian Primary Mathematics Classroom*, *12*(3), 8–13.

Peled, I., & Carraher, D. (2008). Signed numbers and algebraic thinking. In: J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (303–328). New York, NY: Lawrence Erlbaum Associates/Taylor & Francis Group and National Council of Teachers of Mathematics.

Pijaže, Ž. (1990a). Pijažeovo gledište, U: J. Mirić (ur.), *Zbornik radova iz razvojne psihologije „Kognitivni razvoj deteta“*, 3, (11–26). Beograd: Savez društava psihologa SR Srbije.

Pijaže, Ž. (1990б). Učenje i razvoj, U: J. Mirić (ur.), *Zbornik radova iz razvojne psihologije „Kognitivni razvoj deteta“*, 3, (27–38). Beograd: Savez društava psihologa SR Srbije.

Pinto, E. & Cañadas, M. C. (2017). Generalization in fifth graders within a functional approach. In: B. Kaur, W. K. Ho, T. L. Toh, & B. H. Choy (Eds.), Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4, (49–56). Singapore: PME.

Pintrich, P. R. & De Groot, E. V. (1990): Motivational and Self-Regulated Learning Components of Classroom Academic Performance, *Journal of Educational Psychology*, *82*(1), 33–40.

Поткоњак, Н. (ред.), (1996). *Педагошки лексикон*. Београд: Завод за уџбенике и наставна средства.

Правилник о плану и програму наставе и учења за први разред основног образовања и васпитања (2017). Просветни гласник, Службени гласник Републике Србије бр. 10/2017.

Правилник о плану и програму наставе и учења за други разред основног образовања и васпитања (2018). Просветни гласник, Службени гласник Републике Србије бр. 16/2018.

Правилник о плану и програму наставе и учења за трећи разред основног образовања и васпитања (2019). Просветни гласник, Службени гласник Републике Србије бр. 5/2019.

Правилник о плану и програму наставе и учења за четврти разред основног образовања и васпитања (2019). Просветни гласник, Службени гласник Републике Србије бр. 11/2019.

Purković, D. (2016). *Elementi kontekstualnog pristupa učenju i poučavanju kao čimbenici uspješnosti nastave Tehničke culture.* (Doktorska disertacija). Sveučilište u Splitu.

Purković, D. i Jelaska, I. (2014). The Impact of Selected Contextual Factors on the Teacher's Perception of the Achievements of Goals and Objectives in Teaching Tehnical Culture. *Hrvatski časopis za odgoj i obrazovanje*, *16*(4), 977–997.

Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational studies in mathematics*, *42*(3), 237–268.

Radford, L. (2002). On heroes and the collapse of narratives: a contribution to the study of symbolic thinking. In: Cockburn, A.D. & E.Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group of Psychology of Mathematics Education*, Norwich (UK), 4, (81–88). Norwich, UK: PME.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical thinking and learning*, *5*(1), 37–70.

Radford, L. (2004). Syntax and meaning. In: M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28 Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1, (161–166). Norway: Bergen University College.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. In: J. Alatorre, M. Saiz, A. Mendez (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter*, 1, (2–21). Mexico: Merida.

Radford, L. (2011). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. In: J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization.* (303–22). Berlin: Springer.

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, *26*(2), 257–277.

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. In: C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice*, (3–25). New York: Springer.

Ракоњац, М. М. (2018). Утицај испитивања функционалне зависности између величина на успешност у решавању математичких проблема. *Зборник радова Педагошког факултета, Ужице*, *21*(20), 213–234.

Reusser, K., & Stebler, R. (1997). Every word problem has a solution—The social rationality of mathematical modeling in schools. *Learning and instruction*, *7*(4), 309–327.

Richardson, K., & McGalliard, W. (2010). Traveling representations in a fifth grade classroom: An exploration of algebraic reasoning. In: C. Pinchback (Ed.): *Proceedings of the 37th annual meeting of the Research Council on Mathematics Learning*, (37–43) Conway AR: University of Central Arkansas.

Rittle-Johnson, B., Schneider, M., & Star, J. R. (2015). Not a one-way street: Bidirectional relations between procedural and conceptual knowledge of mathematics. *Educational Psychology Review*, *27*(4), 587–597.

Rittle-Johnson, B. (2017). Developing mathematics knowledge. *Child Development Perspectives*, *11*(3), 184–190.

Rittle-Johnson, B., & Alibali, M. W. (1999). Conceptual and procedural understanding: Does one lead to the other? *Journal of Educational Psychology, 91*, 175–189

Rojano, T., & Martínez, M. (2009). From concrete modeling to algebraic syntax: Learning to solve linear equations with a virtual balance. In S. L. Swars, D. W. Stinson, & S. Lemons-Smith (Eds.), *Proceedings of the 31st annual meeting of the North American chapter of the international group for the psychology of mathematics education,* 5, (235–243). Atlanta: Georgia State University.

Romano, D.A. (2009). Teorije matematičkog obrazovanja, prvi dio: RME – teorija. *Istraživanje matematičkog obrazovanja*, *1*(1), 23–35.

Romberg, T. A., Shafer, M. C., Webb, D. C., & Folgert, L. (Eds.) (2005). *The impact of MiC on student achievement* (Monograph 5). Madison: University of Wisconsin—Madison

Romberg, T. A., & Shafer, M. C. (Eds.) (2005). *The Longitudinal/ Cross-sectional study of the impact of teaching mathematics using Mathematics in Context on student achievement: Implications and conclusions* (Monograph 8). Madison, WI: Wisconsin Center for Education Research.

Russell, S. J., Schifter, D. & Bastable, V. (2011). Developing algebraic thinking in the context of arithmetic. In: J. Cai & E. J. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives,* (43–69). Berlin: Springer.

Rystedt, E., Kilhamn, C., & Helenius, O. (2016). What's there in an n? Investigating contextual resources in small group discussions concerning an algebraic expression. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *21*(1), 5–26.

Rystedt, E., Helenius, O. & Kilhamn, C. (2016). Moving in and out of contexts in collaborative reasoning about equations. *The Journal of Mathematical Behavior,* 44, 50–64.

Sáenz-Ludlow, A. (2006). A Teachers' method to introduce story–problems: student – generated problems. In: Novotná, J., Moraová, H., Kratká, M., Stehlíková, N. (Eds.). *Proceedings of the 30th Conference of the international Group for the Psychology of Mathematics Education, 5*(5), (9–16). Czech Republic: Praga.

Sarama, J., & Clements, D. H. (2009). Building blocks and cognitive building blocks: Playing to know the world mathematically. *American Journal of Play*, *1*(3), 313–337.

Sellke, D. H., Behr, M. J., & Voelker, A. M. (1991). Using data tables to represent and solve multiplicative story problems. *Journal for research in mathematics education*, *22*(1), 30–38.

Sembiring, R. K., Hadi, S., & Dolk, M. (2008). Reforming mathematics learning in Indonesian classrooms through RME. *ZDM Mathematics Education*, *40*(6), 927–939.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for research in mathematics education*, *26*(2), 114–145.

Singer, F. M. & Voica, C. (2008). Extrapolating Rules: How Do Children Develop Sequences? In: O. Figueras, J. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepulveda (Eds.). *Proceedings of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 4, (256–263). Morelia: International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Slovin, H. & Venenciano, L. (2008). Success in Algebra, In: O. Figueras, J. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepulveda (Eds.) *Proceedings of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, (273–280). Morelia: International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Specht, B. J. (2005). Early Algebra – Processes and Concepts of Fourth Grades Solving Algebraic Problems. In: M. Bosch, M. Perpiñán, M. Àngels Portabella, and R. Llull, (Eds.). *Proceedings of the 4th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, (706–716). Sant Feliu de Guíxols, Spain.

Stacey, K., & MacGregor, M. (1999). Learning the algebraic method of solving problems. *The Journal of Mathematical Behavior*, *18*(2), 149–167.

Schoenfeld, A. H. (2013). Reflections on problem solving theory and practice. *The Mathematics Enthusiast*, *10*(1), 9–34.

Stephens, A., Blanton, M., Knuth, E., Isler, I., & Gardiner, A. M. (2015). Just say yes to early algebra!. *Teaching children mathematics*, *22*(2), 92–101.

Stephens, A. C., Ellis, A. B., Blanton, M., & Brizuela, B. M. (2017). Algebra Thinking in the Elementary and Middle Grades. In: J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education*, (421–456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Streefland, L. (1985). Search for the roots of ratio: Some thoughts on the long term learning process (towards... a theory). *Educational Studies in Mathematics*, *16*(1), 75–94.

Streefland, L. (1993). The design of a mathematics course. A theoretical reflection. *Educational Studies in Mathematics*, *25*(1), 109–135.

Star, J. R. (2005). Reconceptualizing procedural knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36, 404–411.

Subramaniam, K. & Banerjee, R. (2011). The arithmetic-algebra connection: a historical-pedagogical perspective. In: J. Cai & D. Knuth (Eds.), *Early algebraization: a global dialogue from multiple perspectives* (87–105). New York: Springer.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, *22*(1), 1–36.

Sfard, A. (1995). The development of algebra: Confronting historical and psychological perspectives. *The Journal of Mathematical Behavior*, *14*(1), 15–39.

Sfard, A. & Linchevski, L. (1994a). Between artithmetic and algebra: In the search of a missing link, the case of equations and inequalities. *Rendiconti Del Seminario Matematico*, *52*(3), 279–307.

Sfard, A. & Linchevski, L. (1994b). The gains and pitfalls of reification: The case of algebra. Educational Studies in Mathematics, *26*(2–3), 191–228.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching*, *77*(1), 20–26.

Skemp, R. R. (2012). *The psychology of learning mathematics: Expanded American edition*. Routledge.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. In: J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades*. (5–23) Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates/Taylor & Francis Group and National Council of Teachers of Mathematics.

Streefland, L. (1993). The design of a mathematics course. A theoretical reflection. *Educational Studies in Mathematics*, *25*(1–2), 109–135.

Schoenfeld, A. H. (2013). Mathematical Modeling, Sense Making, and the Common Core State Standards. *Journal of Mathematics Education at Teachers College*, *4*(2), 13–25.

Schliemann, A. D., Carraher, D. W., & Brizuela, B. M. (2001). When tables become function tables. In: M. v. d. Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the Twenty-fifth Conference of the International Groupfor the Psychology of Mathematics Education,* 4, (145–152). Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute.

Schliemann, A. D., Carraher, D. W., Brizuela, B. M., Earnest, D., Goodrow, A., Lara-Roth, S., et al. (2003). Algebra in elementary school. In: N. Pateman, B. Dougherty, & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 2003 Joint Meeting of PME and PME-NA*, 4, (127–134). Honolulu, HI: CRDG, College of Education, University of Hawai.

Tabach, M., Hershkowitz, R., & Arcavi, A. (2008). Learning beginning algebra with spreadsheets in a computer intensive environment. *The Journal of Mathematical Behavior*, *27*(1), 48–63.

Tabachnik, B. G., & Fidell, L. S. (2013). *Using multivariate statistics* (6th ed.). Boston, MA: Pearson Education.

Tall, D. O. (2004). Reflections on research and teaching of equations and inequalities. In: M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1, (158–161). Bergen, Norway: Bergen University College.

Thorndike, E. L. (1932). *The fundamentals of learning*. Teachers College Bureau of Publications, Columbia University, Institute of Educational Research.

Thornton, S. (2001). A picture is worth a thousand words. In: A. Rogerson (Ed.), *New ideas in mathematics education: Proceedings of the International Conference of the Mathematics Education into the 21st Century Project*, (251–256). Palm Cove, Australia: ALMA.

Treffers, A. (1987). *Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Education*. Netherlands, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Tsamir, P., & Bazzini, L., (2001). Can x=3 be the solution of an inequality? A study of Italian and Israeli students, In: M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education: PME 25*, 4, (303–310). Utrecht, The Netherlands,.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variable. In: A. F. Coxford & A. P. Shulte (Eds.), *The ideas of algebra*, K–12, (8–19). Reston, VA: NCTM.

Fasheh, M. (1982). Mathematics, culture and authority. *For the Learning of Mathematics, 3(2),* 2–8.

Fauzan, A. (2002). *Applying Realistic Mathematics Education (RME) in Teaching Geometry in Indonesian primary schools*, (Doctoral dissertation). University of Twente.

Fauzan, A., Slettenhaar, D., & Plomp, T. (2002a). Traditional mathematics education vs. realistic mathematics education: Hoping for changes. In: P. Valero & O. Skovsmose (2002) (Eds.). *Proceedings of the 3rd International Mathematics Education and Society Conference,* (1–4). Copenhagen: Centre for Research in Learning Mathematics.

Fauzan, A., Slettenhaar, D., & Plomp, T. (2002b). Teaching Mathematics in Indonesian Primary Schools Using Realistic Mathematics Education (RME) – Approach. In: I. Vakalis, J. Wiley (Eds.), *Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics (at the Undergraduate Level),* (1–6). Hersonissos, Crete, Greece.

Fauzan, A., Plomp, T., & Gravemeijer, K. P. E. (2013). The development of an RME-based geometrycourse for Indonesian Primary schools. In: T. Plomp, & N. Nieveen (Eds.), *Educational design research - Part B. Illustrative cases*, (159–178). SLO : Netherlands institute for curriculum development.

Felda, D., Cotič, M., Maričić, S. (2016). *Building Mathematical Literacy by Solving Realistic Problems.* Hamburg: Verlag Dr. Kovač.

Femiano, R. B. (2003). Algebraic problem solving in the primary grades. *Teaching Children Mathematics*, *9*(8), 444–450.

Ferrari, P. L. (2006). From verbal texts to symbolic expressions: A semiotic approach to early algebra. In: J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, (73–80). Prague: PME.

Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the learning of mathematics, 9*(2), 19–25.

Fischbein, E. (1994). The interaction between the formal, the algorithmic, and the intuitive components in a mathematical activity. In: R. Biehler, R. W. Scholz, R. Strasser & B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (231–245). Dordrecth: Kluwer.

Freiman, V., & Lee, L. (2004). Tracking primary students' understanding of the equality sign. In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (415–422). Bergen, Norway: Bergen University College.

Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics, 3*, 413–435.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Springer, Dordrecht.

Freudenthal, H. (1982). Variables and functions. In: G. V. Barneveld & H. Krabbendam (Eds.), *Proceedings of Conference on Functions* (7–20). Enschede, The Netherlands: National Institute for Curriculum Development.

Frykholm, J. A. (2004). Teachers' tolerance for discomfort: Implications for curricular reform in mathematics. *Journal of Curriculum and Supervision, 19*(2), 125–149.

Fujii, T., & Stephens, M. (2008). Using number sentences to introduce the idea of variable. In C. Greenes & R. Rubenstein (Eds.) *Algebra and algebraic thinking in school mathematics: Seventieth Yearbook*, (127–140). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Habsah, F. (2017). Developing teaching material based on realistic mathematics andoriented to the mathematical reasoning and mathematical communication. *Jurnal Riset Pendidikan Matematika*, *4*(1), 43–55.

Handayani, R., & Suparman, S. (2018). Design of Mathematics Student Worksheet based on Realistic Mathematics Education Approach to Improving the Mathematical Communication Ability Students of Class VII Junior High School in Indonesia. *International Journal of Engineering & Technology*, *7*(4), 31–35.

Harvey, R., & Averill, R. (2012). A Lesson Based on the Use of Contexts: An Example of Effective Practice in Secondary School Mathematics. *Mathematics teacher education and development*, *14*(1), 41–59.

Hattikudur, S., & Alibali, M. W. (2010). Learning about the equal sign: Does comparing with inequality symbols help?. *Journal of experimental child psychology*, *107*(1), 15–30.

Helsa, Y., & Hartono, Y. (2011). Designing Reflection and Symmetry Learning by Using Math Traditional Dance in Primary School. *Indonesian Mathematical Society Journal on Mathematics Education*, *2*(1), 79–94.

Hemmi, K., Lepik, L., Madej, L., Bråting, K., & Smedlund, J. (2019). Introduction to early algebra in Estonia, Finland and Sweden – Some distinctive features identified in textbooks for Grades 1-3. In: U. T. Jankvist, M. Van den Heuvel-panhuizen, & M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME11)*, (2039–2046). Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.

Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational studies in mathematics*, *27*(1), 59–78.

Hidayat, R., & Iksan, Z. H. (2015). The Effect of Realistic Mathematic Education on Students' Conceptual Understanding of Linear Progamming. *Creative Education*, *6*(22), 2438–2445.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*, *2*, 1–27.

Hino, K. (2007). Toward the problem-centered classroom: trends in mathematical problem solving in Japan. *ZDM Mathematics Education*, *39*(5–6), 503–514.

Hodgen, J., Oldenburg, R., & Strømskag, H. (2018). Algebraic thinking. In: T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger, & K. Ruthven (Eds.). *Developing research in mathematics education: Twenty years of communication, cooperation and collaboration in Europe*, 1, (32–45). London and New York: Routledge – New Perspectives on Research in Mathematics Education – ERME series.

Hoch, M., & Dreyfus, T. (2004). Structure sense in high school algebra: The effect of brackets. In: M. J. Høines A. B. Fuglestad (Eds.). *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* , 3, (49–56). Bergen, Norway.

Hotomski, M., Schliemann, A. D., Carraher, D. W., & Teixidor-i-Bigas, M. (2018). Poincaré Institute: Impact on Mathematics Achievement of Ethnic Groups (Unpublished research report). Tufts University, Medford, MA: The Poincaré Institute (retrieved 10. May 2020. from:https://sites.tufts.edu/poincare/files/2018/07/Poicaré-Institute-Impact-on-Mathematics-Achievement-of-Ethnic-Groups.pdf).

Hohensee, C. (2017). Preparing elementary prospective teachers to teach early algebra. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *20*(3), 231–257.

Cai, J., Lew, H. C., Morris, A., Moyer, J. C., Ng, S. F., & Schmittau, J. (2005). The development of students' algebraic thinking in earlier grades. *ZDM Mathematics Education*, *37*(1), 5–15.

Cai, J. (2004). Developing Algebraic Thinking in the Earlier Grades: A Case Study of the Chinese Elementary School Curriculum, *The Mathematics Educator*, *8*(1), 107–130.

Carpenter, T. P., & Levi, L. (2000). *Developing conceptions of algebraic reasoning in the primary grades*. Madison, WI: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Carpenter, T., & Franke, M. (2001). Developing algebraic reasoning in the elementary school: Generalization and proof. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the Twelfth ICMI Study Conference: The future of the teaching and learning of algebra*, 1, (155–162). Melbourne, Australia: University of Melbourne Press.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically integrating arithmetic & algebra in elementary school*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Carraher, T. N., Schliemann, A. D., & Carraher, D. W. (1988). Mathematical concepts in everyday life. In: G. B. Saxe & M. Gearhart (Eds.), *Children's mathematics*, (71–87). San Francisco: Jossey Bass.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., & Brizuela, B. (2000). Early algebra, early arithmetic: Treating operations as functions. Plenary address presented at the *Twenty-second Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Tucson, Arizona.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M., & Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics education*, 87–115.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early Algebra and algebraic reasoning. In: F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (669–705). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., & Schwartz, J. (2008). Early algebra is not the same as algebra early. In: J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), Algebra in the Early Grades. (235–272). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates/Taylor & Francis Group and National Council of Teachers of Mathematics.

Carraher, D. W., Martinez, M. V., & Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education*, *40*(1), 3–22.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2018). Cultivating early algebraic thinking. In: C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds. The global evolution of an emerging field of research and practice*, (107–138). New York, NY: Springer.

Castro-Gordillo, W., & Godino, J. (2014). Preservice elementary teacher's thinking about algebraic reasoning. *Mathematics Education*, 9(2), 149–164.

Clement, J. (1982). Algebra word problem solutions: Thought processes underlying a common misconception. *Journal for research in mathematics education*, *13*(1), 16–30.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical thinking and learning*, *6*(2), 81–89.

Cobb, P., Zhao, Q., & Visnovska, J. (2008). Learning from and adapting the theory of realistic mathematics education. *Éducation et didactique,* 2(1), 105–124.

Cobb, P., & Gravemeijer, K. (2006). Design research from a learning design perspective. In: T. Plomp & N. Nieveen (Eds.). *Educational design research,* (29–63). Routledge.

Confrey J., Smith E. (1994) Exponential Functions, Rates of Change, and the Multiplicative Unit. In: Cobb P. (Ed.). *Learning Mathematics*, (31–60). Springer, Dordrecht.

Cummins, D. D., Kintsch, W., Reusser, K., & Weimer, R. (1988). The role of understanding in solving word problems. *Cognitive psychology*, *20*(4), 405–438.

Cunningham, R. (2005). Algebra teachers' utilization of problems requiring transfer between algebraic, numeric, and graphic representations. *School Science and Mathematics*, *105*(2), 73–82.

Cusi, A., Malara, N. A., & Navarra, G. (2011). Theoretical issues and educational strategies for encouraging teachers to promote a linguistic and metacognitive approach to early algebra. In: J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization,* (483–510). Springer, Berlin, Heidelberg.

Warren, E. (2005a). Patterns supporting the development of early algebraic thinking. *Building connections: Research, theory and practice*, *2*, 759–766.

Warren, E. (2005b). Young children's ability to generalise the pattern rule for growing patterns. In: H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds), *Proceedings of the 29th annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, (305–312). Melbourne: PME.

Warren, E., & Cooper, T. J. (2005). Young children's ability to use the balance strategy to solve for unknowns. *Mathematics Education Research Journal*, *17*(1), 58–72.

Waters, J. L. (2004) A Study of mathematical patterning in early chldhood settings. In: I. Putt and R. Faragher, and M. MacLean (Eds.) *Proceedings Mathematics education for the 3rh milllennium: Towards 2010. The 27th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, 2,* 321–328. Sydney: MERGA.

Webb, D. C., & Meyer, M. R. (2002). *Summary report of student achievement data for Mathematics in Context: A connected curriculum for grades 5–8*. Madison: University of Wisconsin, School of Education, Wilson Center for Educational Research.

Weinberg, A., Dresen, J., & Slater, T. (2016). Students' understanding of algebraic notation: A semiotic systems perspective. *The Journal of Mathematical Behavior*, 43, 70–88.

Wille, A. M. (2008). Aspects of the concept of a variable in imaginary dialogues written by students. In: O. Figueras, J. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME32),* 4, (417–424). Cinvestav-UMSNH, Mexico: PME.

Wilkie, K. J., & Clarke, D. M. (2016). Developing students’ functional thinking in algebra through different visualisations of a growing pattern’s structure. *Mathematics Education Research Journal*, *28*(2), 223–243.

Wittmann, E. (2005). Realistic Mathematics Education, past and present. *Nieuw Archief voor Wiskunde*, *6*(4), 294–296.

Шпијуновић, К., и Маричић, С. (2016). *Методика почетне наставе математике*. Ужице: Учитељски факултет.

ИЗВОРИ

Зарупски, С. (2019б). *Математика 4а*, радна свеска за 4. разред основне школе, Београд: Едука.

Зарупски, С. и Влаховић, Б. (2016). *Математика 3а,* радна свеска за 3. разред основне школе, Београд: Едука.

Иванчевић Илић, И. и Тахировић, С. (2018а). *Математика 1*, уџбеник за први разред основне школе, Београд: Нови Логос.

Иванчевић Илић, И. и Тахировић, С. (2018б). *Математика 3*, радна свеска за трећи разред основне школе, Београд: Нови Логос.

Иванчевић Илић, И. и Тахировић, С. (2019). *Математика 2*, уџбеник за други разред основне школе, Београд: Нови Логос.

Јовановић-Лазић, М. и Дрндаревић, Д. (2014). *Математика 3,* уџбеник (2. део) за трећи разред основне школе, Београд: БИГЗ школство.

Јухас, И. (2018). *Математика 1б,* уџбеник за први разред основне школе; Београд: Едука

Јухас, И. (2019). *Математика 2а* , уџбеник за други разред основне школе; Београд: Едука.

Максимовић, М. (2012). *Математика 4*, уџбеник за четврти разред основне школе, Београд: БИГЗ школство.

Милинковић, Ј. (2019). *Математика 1*, уџбеник за први разред основне школе; Београд: Креативни центар.

Маричић, С. (2018а). *Математика 1*, уџбеник за први разред основне школе, Београд: БИГЗ школство.

Маричић, С. (2018б). *Математика 1*, радна свеска (1. део) за први разред основне школе, Београд: БИГЗ школство.

Маричић, С. и Ђуровић, Д. (2019). *Математика 2*, уџбеник за други разред основне школе, Београд: БИГЗ школство.

Поповић, Б., Вуловић, Н., Анокић, П. Кандић, М. (2018). *Раша и Маша – Математика 1*, уџбеник за први разред основне школе (1. део), Београд: Klett, Београд.

Поповић, Б., Вуловић, Н., Анокић, П. Кандић, М. (2015а). *Раша и Маша – Математика 3*у за трећи разред основне школе, Београд: Klett, Београд.

Поповић, Б., Вуловић, Н., Анокић, П. Кандић, М. (2015б). *Раша и Маша – Математика 4*, уџбеник за четврти разред основне школе, Београд: Klett, Београд.

Поповић, Б., Вуловић, Н., Анокић, П. Кандић, М. (2015в). *Раша и Маша – Математика 4*, радна свеска за четврти разред основне школе, Београд: Klett, Београд.

Тодоровић, О. и Огњановић, С. (2016а). *Математика 3*, уџбеник за трећи разред основне школе; Београд: Завод за уџбенике.

Тодоровић, О. и Огњановић, С.(2016б). *Математика 4*, вежбанка за четврти разред основне школе; Београд: Завод за уџбенике.

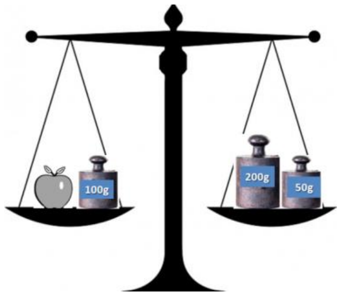
Тодоровић, О. и Огњановић, С. (2019). *Математика 2*, уџбеник за други разред основне школе; Београд: Завод за уџбенике.

ПРИЛОЗИ

ПРИЛОГ 1. ИНИЦИЈАЛНИ ТЕСТ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Разред и одељење:____

Име и презиме____

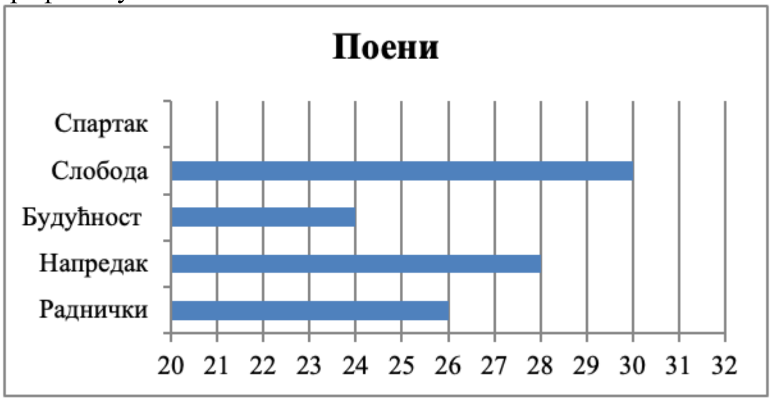
Ред. број	ЗАДАТАК	Број поена
1.	Упиши бројеве који недостају. 30 + 40 = _____ − 50 = _____ + 60 = _____	5
2.	На основу слике одреди масу јабуке.  Маса јабуке је: ___________.	5
3.	У једној фабрици је у понедељак произведено 300 гума за аутомобиле док је у уторак, услед квара машине, направљено 70 гума мање него у понедељак. Колико аутомобилских гума треба направити у среду, како би се надокнадио заостатак у производњи од уторка, ако се очекује иста производња за сваки дан? Одговор:____	5
4.	Бојан је имао 230 сличица фудбалера. Када је од брата добио још 220 сличица имао је исто као Милан. Колико сличица има Милан? Одговор:____ Да је Бојан од брата добио 20 сличица више, да ли би имао више или мање сличица од Милана? Одговор:____ Да је Бојан имао 20 сличица мање, а да је од брата добио 220 сличица, да ли би имао више или мање сличица од Милана? Одговор:____	5

<table>
<tr><td rowspan="2">5.</td><td>У једној кошаркашкој утакмици један тим је победио и постигао одређени број кошева. Ако је у другој утакмици постигао за 15 кошева више него у првој, да ли то значи да је и у другој утакмици победио? Зашто?</td><td rowspan="2">5</td></tr>
<tr><td>Одговор:

Образложи зашто.</td></tr>
<tr><td>6.</td><td>Марко је на летовању изнајмио бицикл. На основу увида у табелу испод закључи колико кошта сваки наредни сат изнајмљивања бицикла. За колико сати вожње ће Марко потрошити 1000 динара?

<table>
<tr><th colspan="2">Изнајмљивање бицикла</th></tr>
<tr><th>Сат</th><th>Рачун</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>250</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>400</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>550</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>700</td></tr>
<tr><td>5.</td><td>850</td></tr>
<tr><td>6.</td><td>1000</td></tr>
<tr><td>7.</td><td>1150</td></tr>
</table>
Сваки наредни сат изнајмљивања кошта: ___________________________

Марко ће 1000 динара потрошити за _________ сати.</td><td>5</td></tr>
</table>

7.	Бодови које су постигле екипе у току шампионата у фудбалу су приказани на графикону.  Одреди број поена које је освојио Спартак и прикажи на графикону, ако знаш да се налази на петом месту на табели. Разлика у броју поена суседних места на табели између свих екипа је иста. ____	5
8.	Младен има 70 плавих и 50 црвених кликера. Када је брату дао одређени број плавих и црвених кликера остало му је 60 кликера. Заокружи једначину којом ћеш изразити колико плавих и црвених кликера је укупно Младен дао брату. а) $(70 - x) + (50 - x) = 60$ б) $(70 + 50) - x = 60$ в) $(70 - 50) - x = 60$	5
9.	Маја има x динара. Маја има за 3000 динара мање од Светлане. Заокружи израз који приказује колико Светлана има новца. а) $x : 3000$ б) $x - 3000$ в) $x + 3000$ г) $3000 - x$	5
10.	Дата је неједначина: $x + 4 < 12$ Заокружи слово испред ситуације која одговара датој неједначини. А) Драган је скупљао сличице. Када је од неког броја сличица Драган дао другу 4 сличице, остало му је више од 12 сличица. Колико сличица је могао имати Драган? Б) Драган је скупљао сличице. Када је од друга добио још 4 онда је имао више од 12 сличица. Колико сличица је могао имати Драган? В) Драган је скупљао сличице. Када је својим сличицама Драган додао још 4, тада је имао мање од 12 сличица. Колико сличица је могао имати Драган? Г) Драган је скупљао сличице. Када од друга добије 4 сличице укупно ће имати 12 сличица. Колико сличица је Драган имао	5

ПРИЛОГ 2. ФИНАЛНИ ТЕСТ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Разред и одељење:____________________________________

Име и презиме: ____

<table>
<tr><th>Ред. број</th><th>Задатак</th><th>Број поена</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>Упиши бројеве који недостају тако да једнакост буде тачна.

350 + _____ = _____ · 20 = _____ : 2 = 700</td><td>5</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2.</td><td>Три руже коштају исто као две руже и две лале. Колико кошта ружа, ако је цена једне лале 300 динара?</td><td rowspan="2">5</td></tr>
<tr><td>Простор за рад:

Одговор:____</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3.</td><td>Чика Стева је прошле године засејао њиву правоугаоног облика ширине 40m и дужине 60m. Ако ове године њиву скрати по дужини 5 пута, шта мора да уради са ширином њиве, како би засејао исту површину као и прошле године?</td><td rowspan="2">5</td></tr>
<tr><td>Простор за рад:

Одговор:____</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>Радник у једној фабрици треба да упакује 24 производа у кутије тако да у свакој кутији буде исти број производа. Одреди на колико начина радник може упаковати проиводе и колико ће му бити потребно кутија за то.

<table><tr><th>Кутије</th><th>Производи</th></tr><tr><td>1</td><td>24</td></tr><tr><td>2</td><td>?</td></tr></table>

Одговор:____</td><td>5</td></tr>
</table>

5.

Састојци	
Јаја	40
Брашно	80 шоља
Млеко	20 шоље

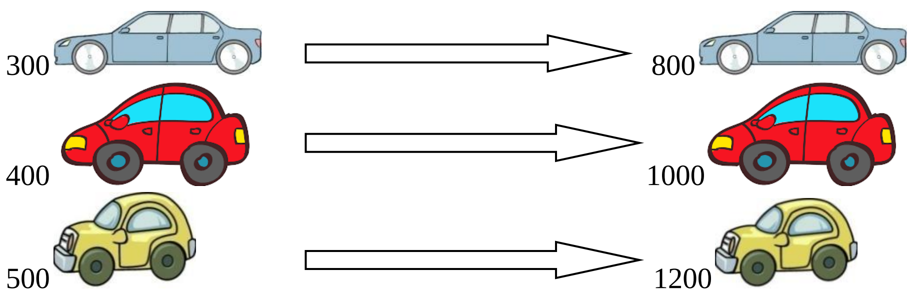
Горе наведени састојци су искоришћени за прављење јела за 60 људи. Аца жели да направи ово јело за 30 особа. Доврши доњу табелу, да покажеш шта је Аци потребно да би направио јело за 30 особа.

Састојци	
Јаја	_____ шоља
Брашно	_____ шоља
Млеко	_____ шоље

5

6.

У једној фабрици радници су производили аутомобиле. Одлучили су да повећају годишњу производњу различитих модела као на приказаној слици и за то су користили једно правило.



Заокружи које правило су радници користили да у фабрици повећају производњу?

а) Број проведених аутомобила помножи са 1 па додај 500.
б) Број проведених аутомобила помножи са 2 па додај 200.
в) Број проведених аутомобила помножи са 3 па одузми 1000.
г) Број проведених аутомобила помножи са 4 па одузми 4000.

5

7.

Раздаљина између Ужица и Суботице преко Београда је 380 km. Када путник допутује из Ужица до Београда и пређе још 30 km налази се на половини пута до Суботице. Заокружи једначину којом можеш изразити удаљеност од Ужица до Београда?

а) $x + 30km = 380km \cdot 2$
б) $x = (380km \cdot 2) – 30km$
в) $(x + 30km) \cdot 2 = 380km$
г) $380km = (x + 30km) : 2$

5

8.	Бојана и Марко имају исту количину новца свако у својој касици. Бојана у руци има још 200 динара. Изрази колико новца има Марко. ____ Изрази колико новца има Бојана. ____ Изрази колико новца имају Бојана и Марко заједно. ____	5
9.	Бранко, Дарко и Јелена укупно имају мање кликера од Славка. а) Да ли Бранко има мање кликера од Славка? Одговор:___________________________________ ____ б) Да ли Дарко и Јелена заједно имају мање кликера од Славка? Одговор:___________________________________ ____	5
10.	Дата је једначина: $x : 8 = 220$ Заокружи слово испред ситуације која одговара датој једначини. А) Теодора путује авионом из Београда за Амстердам. Када је прешла осмину пута, стјуардеса јој је рекла да треба да прелете још 220 километара. Колика је дужина лета од Београда до Амстердама? Б) Теодора путује авионом из Београда за Амстердам. Када је прешла шестину пута, стјуардеса јој је рекла да су прелетели 220 километара. Колика је дужина лета од Београда до Амстердама? В)Теодора путује авионом из Београда за Амстердам. Када је прешла осмину пута, стјуардеса јој је рекла да су прелетели 220 километара. Колика је дужина лета од Београда до Амстердама? Г)Теодора путује авионом из Београда за Амстердам. Када је прешла осмину пута, стјуардеса јој је рекла да су прелетели 2200 километара. Колика је дужина лета од Београда до Амстердама?	5

ПРИЛОГ 3. РЕТЕСТ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Разред:____

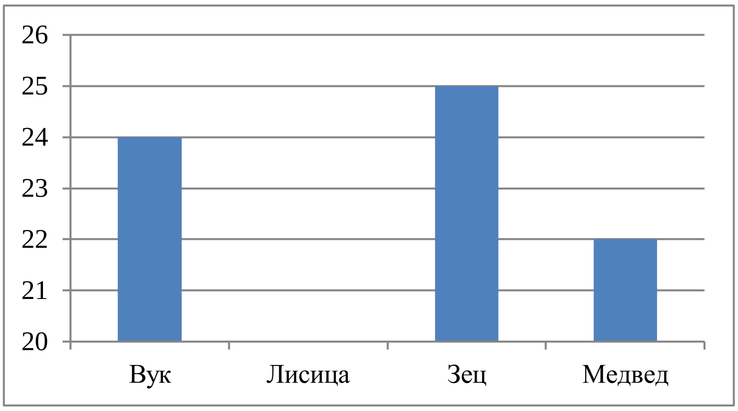
Одељење:_____________________________________

Име и презиме_______________________________________

Ред. број	**Задатак**	Број поена
1.	Упиши бројеве који недостају тако да једнакост буде тачна. 520 − ___ = ____ + 200 = ____ · 4 = 200	5
2.	Сок је 7 пута скупљи од флаше. Четири флаше пуне сока коштају 320 динара. Колико кошта једна празна флаша? Простор за рад: Одговор:____ ____	5
3.	Чика Пера је окречио један зид дужине 12 метара и висине 2 метра. Други зид је два пута краћи по дужини од окреченог. Колика је висина другог зида, који чика Пера треба да окречи, ако знамо да су површине и једног и другог зида исте? Простор за рад: Одговор:____ ____	

<table>
<tr>
<td rowspan="2">4.</td>
<td>Воћни коктел се прави од воде, сирупа од малине и сирупа од вишње. На 5 чаша воде долазе 3 чаше сирупа од малине и једна чаша сирупа од вишње. Колико се чаша коктела добије, ако се узме 10 чаша воде за прављење тог коктела.</td>
<td rowspan="2">5</td>
</tr>
<tr>
<td>Простор за рад:

Одговор:____
____</td>
</tr>
<tr>
<td>5.</td>
<td>У току ноћи су животиње прешле одређени број километара који су приказани на графикону.



Лисица је према броју пређених километара у току ноћи на четвртом месту. Прикажи на графикону колико је километара лисица прешла у току ноћи, ако знаш да је разлика између животиња у пређеним километрима иста.</td>
<td>5</td>
</tr>
<tr>
<td>6.</td>
<td>Машина пакује бомбоне у кутије према одређеном правилу. На основу таблице откриј правило и попуни празна поља до краја.

<table>
<tr><td>Кутије</td><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>5</td><td>10</td></tr>
<tr><td>Бомбоне</td><td>100</td><td>200</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Ако има x кутија онда има _______ бомбона.</td>
<td>5</td>
</tr>
<tr>
<td>7.</td>
<td>Аца и Мира имају касице. Мира у касици има два пута више новца од Аце, али и 500 динара у десном џепу.

Изрази колико новца има Мира:________________________________
Изрази колико новца има Аца: ___________________________
Изрази колико новца имају укупно Аца и Мира:_________________ _</td>
<td>5</td>
</tr>
</table>

8.	Ако Милан од 380 динара које има у џепу купи књигу, у џепу ће му остати мање од 250 динара. Колико може коштати књига? Заокружи. а) x – 380 < 250 б) 380 – x > 250 в) 380 – x = 250 г) 380 – x < 250	5
9.	Дата је неједначина: 500 – x > 360. Заокружи слово испред ситуације која одговара датој неједначини. А) Од укупно 500 сличица које је Алекса имао, током игре изгубио је одређени број, тако да му је остало мање од 360 сличица. Колико сличица је Алекса могао да изгуби? Б) Од укупно 500 сличица које је Алекса имао, током игре изгубио је одређени број, тако да му је остало 360 сличица. Колико сличица је Алекса могао да изгуби? В) Од укупно 500 сличица које је Алекса имао, током игре изгубио је одређени број, тако да му је остало више од неколико сличица. Колико сличица је Алекса могао да изгуби? Г) Од укупно 500 сличица које је Алекса имао, током игре изгубио је одређени број, тако да му је остало више од 360 сличица. Колико сличица је Алекса могао да изгуби?	5
10.	Тим А и Тим Б су учествовали на фудбалским мечевима. Тим А је постигао 3 гола и победио. Ако је Тим Б постигао исто 3 гола у својој утакмици, да ли то значи да је и он победио? Одговор:______________________________ ______________________________ ______________________________	5

ПРИЛОГ4. ВЕЖБЕ У ОКВИРУ ЕКСПЕРИМЕНТАЛНОГ ПРОГРАМА

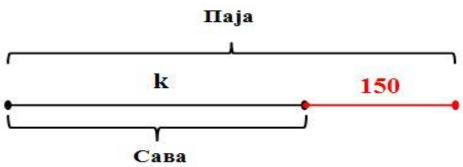
ВЕЖБА 1.	**НАСТАВНА ЈЕДИНИЦА: ЈЕДНАЧИНЕ СА САБИРАЊЕМ**
Тип часа:	Обрада
Алгебарске способности:	Развијање појма непозната и променљива, развијање способности схватања симбола у алгебри; развијање способности правилног разумевања знака једнакости; развијање способности уочавања функционалне зависности на графикону.

1. Кројач Сава за месец дана сашије k мајица. Кројач Сава шије за 150 мајица мање од кројача Паје. Који од израза показује број мајица које сашије кројач Паја за месец дана?

   а) $k - 150$ б) $k \cdot 150$ в) $k + 150$

Решење:

У задатку треба упоредити односе који постоје између података који су дати. У томе може помоћи модел дужи.

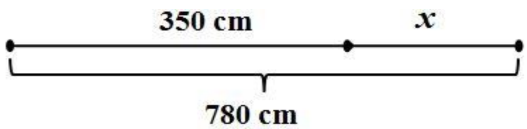


На основу слике може се закључити да је тачан одговор под в.

2. Да би се сашила кошуља потребно је 350 cm конца, док је за шивење панталона потребна одређена дужина конца. Колико конца је потребно за шивење панталона, ако је за шивење кошуље и панталона укупно потрошено 780 cm конца?

Решење:

Овај задатак се може решити употребом једначине. Да би се односи у задатку изразили у облику једначине, може се искористити модел дужи.



Модел може послужити како у писању једначине, тако и у њеном решавању.

$350cm + x = 780cm$

$x = 780cm - 350cm$

$x = 430cm$

3. За шивење кошуља за седам дана је употребљено 1200 белих, 250 жутих и одређени број плавих дугмића. Колико плавих дугмића је употребљено за седам дана, ако знамо да је укупан број употребљених дугмића 1800?

   Решење:

   За решење задатка може се употребити једначина. Како би се разумели односи у задатку може се искористити цртеж.

1200	**250**	x
1800		

$1200 + 250 + x = 1800$

$1450 + x = 1800$

$x = 1800 - 1450$

$x = 350$ *За седам дана употребљено је 350 плавих дугмића.*

4. Једна продавница наручила је из кројачке радње 150 мајица, друга дупло више него прва продавница, а трећа одређени број мајица. Укупан број мајица које је испоручила кројачка радња у ове три продавнице је 860. Колико мајица је наручено из треће продавнице?

Решење:

За решење задатка може се употребити једначина. Како би се разумели односи у задатку може се искористити цртеж.

150	**150**	**150**	x
860			

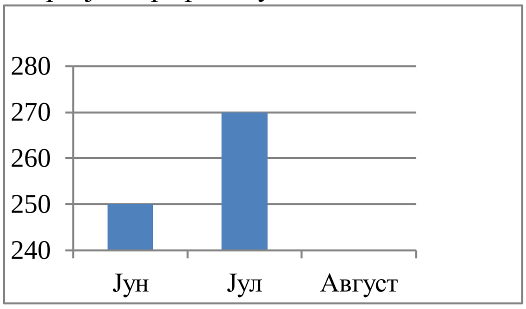
150 + 300 + x = 860

450 + x = 860

X = 860 – 450

X = 420 *Из треће продавнице наручено је 420 мајица.*

5. Кројачка радња у току летњих месеци потрошила је укупно 775 метара платна. На основу података са слике покушај одредити колико је метара платна потрошено у августу, а затим доцртај на графикону.



Решење:

На основу података који се могу прочитати са графикона, можемо уочити да је у јуну потрошено 250 метара, а у јулу 270 метара платна. На основу тих података задатак можемо решити помоћу једначине.

250 m + 270 m + x = 775 m

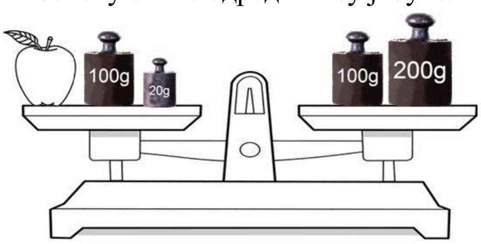
520 m + x = 775 m

x = 775 m – 520 m

x = 255 m

У августу је потрошено 255 метара платна.

6. На основу слике одреди масу јабуке.



Решење:

Задатак се може решити на више начина. Пошто су тасови на ваги у равнотежи то значи да је маса на левом тасу ваге једнака маси на десном тасу ваге. На основу тога ову ситуацију можемо и упростити тако што ћемо са тасова уклонити исте масе, а то је тег масе 100 грама. Даље пишемо једначину.

x + 20g = 200g

x = 200g – 20g

x = 180g

Дакле, маса јабуке је 180 грама.

ВЕЖБА 2.	**НАСТАВНА ЈЕДИНИЦА: ЈЕДНАЧИНЕ СА ОДУЗИМАЊЕМ**
Тип часа:	Обрада
Алгебарске способности:	Развијање појма непозната и променљива, развијање способности правилног разумевања знака једнакости; , развијање способности схватања симбола у алгебри; развијање способности уочавања функционалне зависности на графикону.

1. Од укупног броја продатих карата за биоскопску пројекцију, школе су откупиле 420 улазница тако да је остало 230 улазница. Одреди колико је улазница укупно продато.

Решење:

Како би ученици разумели односе између података у задатку могу искористити цртеж.

x	
420	**230**

На основу модела задатак се може представити у облику једначине.

x – 420 = 230
x = 230 + 420
x = 650 *Укупно је продато 650 улазница за биоскопску пројекцију.*

2. Одреди са ког таса на теразијама треба уклонити тег како би теразије биле у равнотежи.

Решење:

Посматрајући слику може се уочити да су на тасовима ваге неједнаке масе. Да би теразије биле у равнотежи потребно је да се одређена маса уклони са једног од тасова. Можемо упоредити масе:

50g + 50g + 100g < 200g + 50g
200g < 250g

Разлика у маси левог и десног таса је 50 грама, што значи да са таса са већом масом треба уклонити тег од 50 грама, тако да ће:

50g + 50g + 100g = 200g
200g = 200g

3. Од уштеђеног новца Мирјана је купила биоскопску улазницу која кошта 250 динара и кокице које коштају 125 динара, тако да јој је након тога остало 3250 динара. Колико је новца Мирјана имала пре куповине?

Решење:

Да би се овај задатак решио може се искористити једначина. Уочавање односа у задатку може бити олакшано коришћењем цртежа.

x		
250	**125**	**3250**

Модел може послужити и као олакшица како би се уочило правило за израчунавање непознатог броја (умањеник) у једначини.

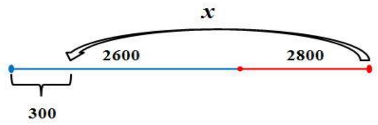
x – (250 + 125) = 3250
x – 375 = 3250
x = 3250 + 375
x = 3625 *Пре куповине Мирјана је имала 3625 динара.*

4. Милан је имао 2600 динара, а Бојан 2800 динара. Заједно су скупили новац да би мами за рођендан купили поклон. Након куповине остало им је 300 динара. Колико кошта поклон за

маму?

Решење:

Да би се задатак решио може се употребити једначина. Како би се уочили односи између података у задатку може се искористити модел дужи.



Модел исказан на овај начин може послужити као основа за писање једначине, али и као помоћ за њено решавање.

$(2600 + 2800) – x = 300$

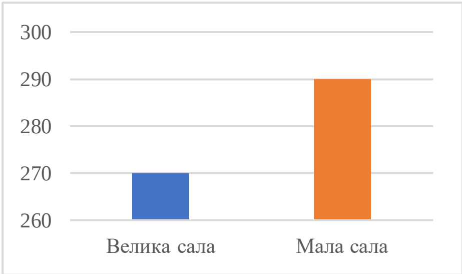
$6400 – x = 300$

$x = 6400 – 300$

$x = 6100$

Поклон за маму кошта 6100 динара.

5. Број гледалаца два филма у две сале је исти. Након првог филма, један део гледалаца напустио је велику салу, тако да је број гледалаца који је остао у великој сали приказан на графикону. На основу података са графикона попуни табелу и одреди број гледалаца који је напустио велику салу после првог филма.



	Велика сала	Мала сала
Број гледалаца у салама после првог филма	*270*	*290*

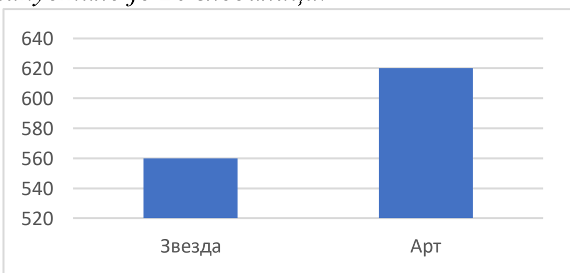
Решење:

$290 – x = 270$

$X = 290 – 270$

$X = 20$ *Након прве пројекције прву салу напустило је 20 гледалаца.*

6. Број продатих улазница у два биоскопа у току једне седмице приказан је у табели. Покушај одредити која од једначина приказује разлику у броју продатих улазница у првом и другом биоскопу. (ПАЗИ може бити више решења).



а) $560 + x = 620$ б) $560 + 620 = x$

в) $620 – x = 560$ г) $x = 620 – 560$

Решење:

Тачни одговори су под а, в и г. Свака од једначина изражавају разлику у броју продатих улазница у два биоскопа.

7. Када Марко позајми 1200 динара Милану остаће му 6300 динара. Одреди која од датих једначина изражава колико је новца Марко има пре позајмице?

а) $x – 1200 < 6300$ б) $6300 – 1200 = x$

в) $6300 + x = 1200$ г) $x – 1200 = 6300$

Решење:

На основу података у задатку може се уочити да је непознато колико је Марко имао новца пре позајмице. У задатку треба одредити количину новца пре позајмице, што значи да непозната у једначини има улогу умањеника. Тачан одговор је под г.

ВЕЖБА 3.	**НАСТАВНА ЈЕДИНИЦА: ЈЕДНАЧИНЕ СА САБИРАЊЕМ И ОДУЗИМАЊЕМ**
Тип часа:	Утврђивање
Алгебарске способности:	Развијање појма непозната и променљива, развијање способности правилног разумевања знака једнакости, развијање способности схватања симбола у алгебри.

1. Попуни празна поља.

   5600 – 1500 = 5600 – _____ − 1000

   2200 − 200 = _____ + 1000 = _____ − 1000 = ______

   Решење:

   5600 – 1500 = 5600 – ***500*** *− 1000*

   2200 − 200 = ***1000*** *+ 1000 =* ***3000*** *− 1000 =* ***2000***

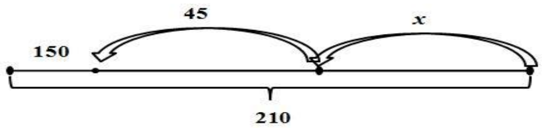
2. Бојан је имао 210 сличица. Када је брату дао неколико, а другу 45 сличица остало му је 150 сличица. Којом једначином можеш да представиш колико сличица је дао брату?

   а) 210 – x + 45 = 150　　　　б) (210 + 45) – x = 150

   в) (210 – x) – 45 = 150

   Решење:

   Како би се потпуније разумели односи у задатку могу се искористити модели.

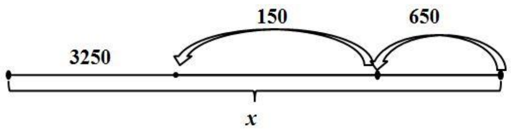


   Дакле, на основу слике, можемо одреаговати на ситуацију у проблему користећи једначину (210 – x) – 45 = 150 .

3. Од уштеђеног новца Мирјана је купила биоскопску улазницу која кошта 650 динара и кокице које коштају 150 динара, тако да јој је након тога остало 3250 динара. Колико је новца Мирјана имала пре куповине?

   Решење:

   Како би се потпуније разумели односи у задатку могу се искористити модели.



   x – 650 – 150 = 3250

   x – 650 = 3250 + 150

   x – 650 = 3400

   x – 3400 + 650

   x = 4050

   Мирјана је пре куповине имала 4050 динара.

4. Када Марко позајми 1120 динара од Милана и 2560 динара од Бојана, имаће 4630 динара. Одреди која од датих једначина изражава колико је новца Марко има пре позајмице?

   а) x – 1120 – 2560 = 4630　　　　б) 4630 + 1120 + 2560 = x

   в) x + 1120 + 2560 = 4630

Решење:

Да би се једноставније сагледали односи између познатих и непознатих вредности у задатку може се искористити цртеж.

<table>
<tr><td>x</td><td>1 120</td><td>2 560</td></tr>
<tr><td colspan="3">4 630</td></tr>
</table>

На основу слике можемо закључити да једначина која одговара овом проблему јесте једначина x + 1120 + 2560 = 4630.

5. Тата је једном новчаницом платио рачун у продавници који је износио 650 динара. Кусур који му је вратила продавачица састојао се из две новчанице од сто динара и три новчанице од 50 динара. Којом новчаницом је тата платио рачун?

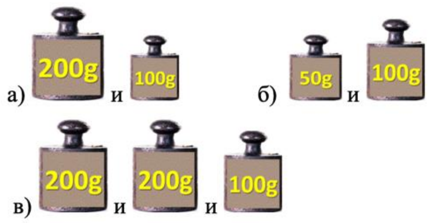
Решење:

Да се проблем поједноставио, можемо искористити цртеж.

<table>
<tr><td colspan="3">x</td></tr>
<tr><td rowspan="3">650</td><td rowspan="2">100</td><td>50</td></tr>
<tr><td>50</td></tr>
<tr><td>100</td><td>50</td></tr>
</table>

x – 650 = 2 · 100 + 3 · 50
x – 650 = 200 + 150
x – 650 = 350
x = 650 + 350
x = 1000
Тата је платио рачун новчаницом од 1000 динара.

6. На основу слике одреди које тегове и на који тас треба додати да би теразије биле у равнотежи.



Решење:

Да би тасови ове ваге били у равнотежи маса на тасовима мора бити иста. Ако се у обзир узме тренутна маса можемо закључити да је на левом тасу маса од 200 грама док је на десном тасу маса од 700 грама.

x + 200g = 700g

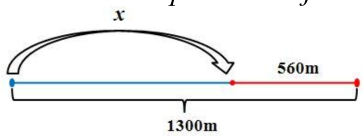
x = 700g – 200g

x = 500g

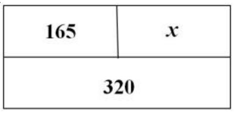
Дакле, на тас треба поставити тегове чија је укупна маса 500 грама, односно треба поставити тегове као у примеру под в).

ВЕЖБА 4.	НАСТАВНА ЈЕДИНИЦА: ЈЕДНАЧИНЕ СА САБИРАЊЕМ И ОДУЗИМАЊЕМ
Тип часа:	Вежбање
Алгебарске способности:	Развијање појма непозната и променљива, развијање способности правилног разумевања знака једнакости, развијање способности схватања симбола у алгебри; способност уочавања функционалних односа на графикону, табели или слици.

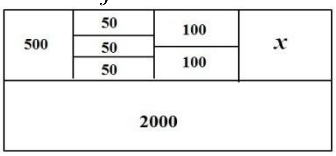
1. Школа је удаљена од Мирине куће 1300 метара. Када је Мира дошла до продавнице која се налази на путу од куће до школе остало јој је да пређе још 560 метара. Колико је удаљена продавница од Мирине куће?
   Решење:
   Уколико постоји потреба може се искористити модел дужи који може послужити за записивање и решавање једначине.



   1300m – x = 560m
   x = 1300m – 560m
   x = 740m *Продавница је удаљена 740 метара од Мирине куће.*
2. У акваријум је наливено 165 литара воде. У акваријум може да стане 320 литара воде. Заокружи начин на који можеш да представиш колико литара воде је потребно још да би се акваријум налио до краја?
   а) 165l + x = 320l б) 165l – x = 320l
   в) 165l – x < 320l г) 165l + x > 320l
   Решење:
   Како би се одредио начин на који се може записати проблем можемо искористити различите моделе.



   На основу слике можемо закључити да је непознат један од сабирака. Дакле, овом проблему одговора једначина: 165l + x = 320l.
3. Марија има Новчаницу од 500 динара, три новчанице од 50 динара и две новчанице од 100 динара. Колико Марији недостаје новца да би имала 2000 динара?
   Решење:
   Задатак се може представити и помоћу модела, на основу кога се може записати и решити једначина.

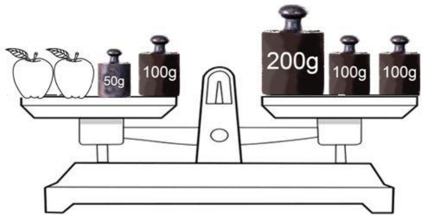


   500 + 150 + 200 + x = 2000
   850 + x = 2000
   x = 2000 – 850
   x = 1150
   Марији недостаје 1150 динара до 2000 динара.
4. Милан је одгледао два филма један иза другог чије је укупно трајање 205 min. Колико траје први филм, ако други траје 95 min? У које време је Милан завршио гледање првог филма, ако је гледање почео у 17h?
   Решење:
   Задатак се може представити и помоћу модела, на основу кога се може записати и решити једначина.

x	95
205	

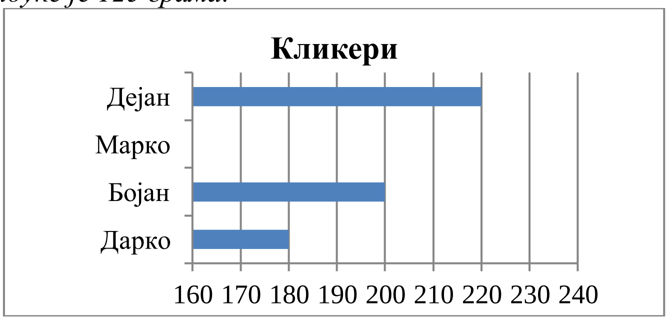
x + 95min = 205min
x = 205min – 95min
x = 110min
Први филм траје 110 минута, односно 1 сат и 50 минута.
Ако је гледање започео у 17 часова, први филм се завршио у 18 часова и 50 минута.

5. На основу слике одреди масу једне јабуке, ако су јабуке исте масе.



Решење:
На слици се може уочити да су тасови ваге у равнотежи, што значи да је маса на оба таса иста. Како би упростили ситуацију, са левог и десног таса се прво могу уклонити исте масе. Да бисмо решили задатак можемо искористити једначину. Масу једне јабуке означићемо са непознатом.
2 · x + 50g = 200g + 100g
2 · x + 50g = 300g
2 · x = 300g – 50g
2 · x = 250g
x = 250g : 2
x = 125g *Маса једне јабуке је 125 грама.*

6. Дечаци су сакупљали кликере. Укупно су сакупили 810 кликера. Да би приказао колико је ко сакупио кликера, Дарко је почео да црта графикон. Одреди и доцртај шта недостаје на графикону.



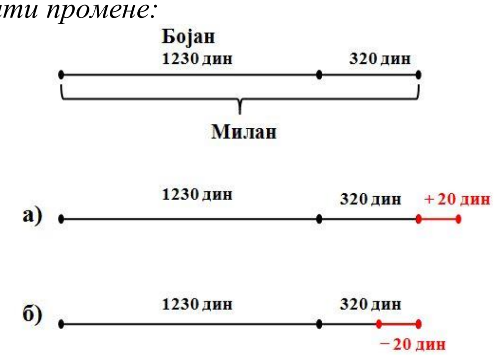
Решење:
На основу графикона и података у њему можемо уочити количину кликера сваког од дечака. Тако, Дејан има 220 кликера, Бојан има 200 кликера, док Дарко има 180 кликера. На основу тих података и услова у задатку можемо поставити једначину како бисмо израчунали број Маркових кликера, а затим то и представили у графикону.
220 + 200 + 180 + x = 810
600 + x = 810
x = 810 – 600
x = 210
Марко је сакупио 210 кликера.

ВЕЖБА 5.	НАСТАВНА ЈЕДИНИЦА: ЗАВИСНОСТ ЗБИРА ОД ПРОМЕНЕ САБИРАКА
Тип часа:	Обрада
Алгебарске способности:	Разумевање функционалне зависности између компонената рачунских операција; спобност уочавања функционалних односа на графикону, табели или слици

1. Бојан је имао 1230 сличица фудбалера. Када је од брата добио још 320 имао је исто сличица као Милан. Колико сличица има Милан?
   а) Да је Бојан од брата добио 20 сличица више колико би сличица имао? Да ли би имао више или мање сличица од Милана?
   б) Да је Бојан од брата добио 20 сличица мање, колико би сличица имао? Да ли би имао више или мање сличица од Милана?

Решење:

Како би се овај задатак решио ученици се могу послужити моделом дужи на основу ког могу уочити промене:



1230 + 320 = 1550
Милан има 1550 сличица.
а) 1230 + (320 + 20) = 1230 + 340 = 1570
Бојан би имао 20 сличица више од Милана.
б) 1230 + (320 – 20) = 1230 + 300 = 1530
Бојан би имао 20 сличица мање од Милана.

2. Мама је направила торту за коју јој је било потребно 1350 грама меког брашна и 1450 грама оштрог брашна. Колико је укупно брашна потребно за мамину торту?
   а) Да мама има за 500 грама мање меког брашна, а исту количину оштрог, да ли би могла да направи торту?
   б) Да мама има за 500 грама више оштрог брашна, а исту количину меког, да ли би могла да направи торту?

   Решење:

   Како би се овај задатак решио ученици се могу послужити моделом дужи на основу ког могу уочити промене:

1350g + 1450g = 2800g
За мамину торту је потребно 2800g брашна.
а) (1350g – 500g) + 1450g = 850g + 1450g = 2300g
Мама не би могла направити торту, јер би фалило 500g брашна.
б) 1350g + (1450g + 500g) = 1350g + 1950g = 3300g
Мама би могла направити торту и остало би јој 500g брашна.

Друго решење:
Одговори ученика на обај задатак могли би се свести потпуно на поље алгебре када би разговарали о променама и зависности збира од промене сабирака и на основу тога закључивати о односима у задатку.

3. Путнички воз је превозио путнике до Београда. Путници су улазили на две станице у празан воз. На основу слике одреди укупан број путника који су путовали у Београд.

а) Да је на првој станици ушло за 40 путника мање, колико би путника допутовало до Београда возом?
б) Да је на другој станици ушло 40 путника више, колико би путника допутовало до Београда возом?

Решење:
Како би се овај задатак решио ученици се могу послужити графиконом на основу ког могу уочити промене:
Са графикона се уочавају подаци и записује:
565 + 655 = 1220
а) 565 – 40 + 655 = 525 + 655 = 1180
До Београда би допутовало 1180 путника, односно за 40 путника мање.
б) 565 + 655 + 40 = 565 + 695 = 1260
До Београда би допутовало 1260 путника, односно за 40 путника више.
Друго решење:
Одговори ученика на обај задатак могли би се свести потпуно на поље алгебре када би разговарали о променама и зависности збира од промене сабирака и на основу тога закључивати о односима у задатку.

4. Графикон приказује поене које су освојиле 4 екипе у Кошаркашком шампионату Србије. Партизан је на првом месту. Слобода је на трећем месту. Нацртај траку која приказује колико поена је освојила Будућност ако је на другом месту у шампионату.

5. Марко је на летовању изнајмио ауто. У табели испод је приказана цена изнајмљивања за први, други и трећи сат. Сваки наредни сат је за скупљи од претходног за исту вредност. Допуни табелу до краја и одговори на питања. У ком сату ће изнајмљивање аутомобила бити веће од 200 динара? Након колико сати коришћења ће укупни рачун изнајмљивања аутомобила бити већи од 1000 динара?

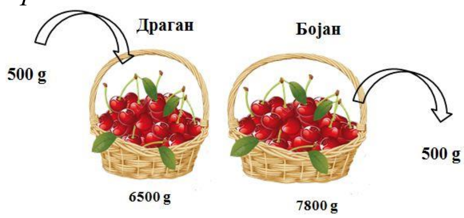
Изнајмљивање аутомобила	
Сати	Цена
1.	120
2.	150
3.	180
4.	*210*
5.	*240*
6.	*270*
7.	*310*

У четвртом сату ће цена изнајмљивања бити већа од 200 динара.
120 + 150 + 180 + 210 + 240 + 270 = 1170
Укупни рачун ће бити преко 1000 динара у шестог сата изнајмљивања.

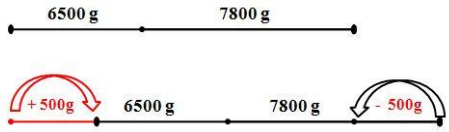
ВЕЖБА 6.	НАСТАВНА ЈЕДИНИЦА: СТАЛНОСТ ЗБИРА
Тип часа:	Обрада
Алгебарске способности:	Разумевање функционалне зависности између компонената рачунских операција; спобност уочавања функционалних односа на графикону, табели или слици

1. Драган је у корпу убрао 6500 грама вишања, док је Бојан у своју корпу убрао 7800 грама вишања. Колико грама вишања су убрали заједно?
Да ли би се укупна маса вишања које су убрали променила, да је Драган убрао 500 грама више, а Бојан 500 грама мање вишања?
Решење:
У процесу решавања задатка ученик може користит различите моделе или облике репрезентација како би приближио проблема у реалном контексту.

Први модел

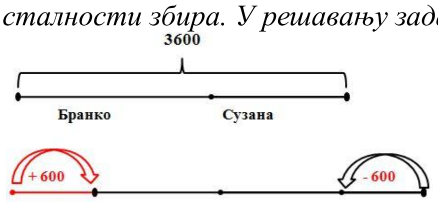


Други модел



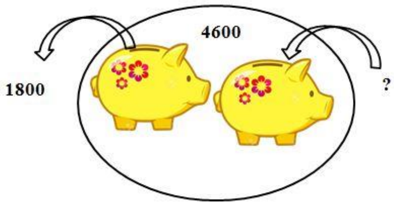
6500 + 7800 = 14 300
Заједно су убрали 14 300 грама вишања.
(6500 + 500) + (7800 – 500) = 7000 + 7300 = 14 300
Укупно би убрали 14300 грама, односно укупна маса убраних вишања се не би променила.

2. Бранко и Сузана су имали укупно 3 600 динара. Бранко је купио књигу за 600 динара, док је Сузана од оца добила 600 динара. Колико сада новца имају Бранко и Сузана?
Решење:
На ово питање ученици могу одговорити и без рачуна користећи се само правилом о сталности збира. У решавању задатка могу користити и модел дужи:



3600 – 600 + 600 = 3600
Бранко и сузана имаће исто новца, односно 3600 динара.

3. Маја у две касице има укупно 4 600 динара. Ако из прве касице узме 1 800 динара, колико динара треба да дода у другу касицу да би имала исту суму новца?
Решење:
Ученици могу закључивати на основу слике:

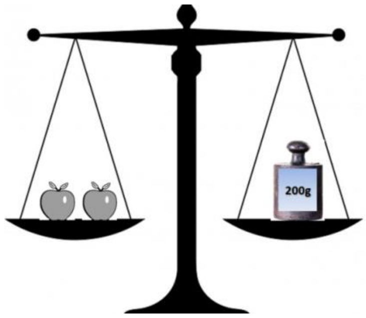


Да би остала иста количина новца потребно је да се у другу касицу дода онолико новца колико је узето из прве касице, односно 1800 динара.

4. Милан је у левом џепу панталона имао 3600 динара, док је у десном џепу имао 2600 динара. Колико Милан има укупно новца у оба џепа? Ако из левог џепа Милан пребаци 600 динара у свој десни џеп, колико ће новца имати укупно?

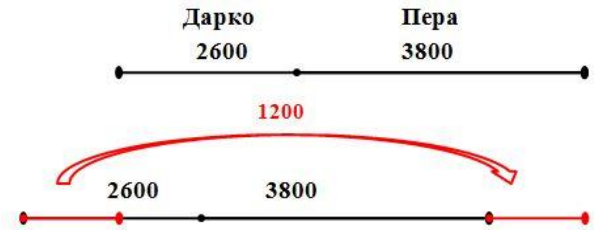
Решење:
3600 + 2600 = 6200
Милан има укупно 6200 динара
(3600 – 600) + (2600 + 600) = 3000 + 3200 = 6200
Опет ће имати исту суму.
Може се закључивати и уочавањем промена без рачуна и моделовањем у реалном контексту, пребацивањем новца.
Ако одређена сума новца буде пребачена из једног у други џеп, у панталонама без обзира на то остаје иста сума новца!

5. Теразије су у равнотежи као на слици. Ако на леви тас додамо још две јабуке чија је маса по 100 грама, који од тегова треба поставити на десни тас да би теразије опет биле у равнотежи. Заокружи тачан одговор.
   а) тег од 200 грама
   б) тег од 150 грама
   в) три тега од 100 грама
   г) тег од 100 грама



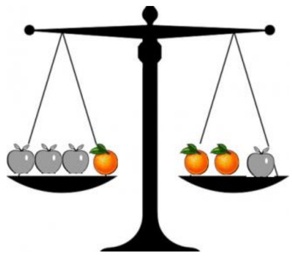
Решење:
Да би тасови били у равнотежи, на други тас се мора поставити тег од 200 грама.

6. Мајстор Дарко је имао 2600 динара, док је мајстор Пера имао 3800 динара. Колико су укупно новца имали мајстори?
   Пошто је Дарко вратио Пери 1200 динара које му је дуговао, да ли сада имају укупно мање или више новца?
   Решење:
   У решавању задатка може послужити слика или модел са дужима:



2600 + 3800 = 6400
Мајстори су укупно имали 6400 динара.
(2600 – 1200) + (3800 + 1200) = 1400 + 5000 = 6400
Укупна сума новца двојице мајстора се није променила.

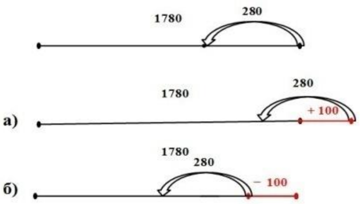
7. Теразије су у равнотежи. Колика је маса поморанџе, ако знамо да је маса једне јабуке 70 g?
   (Маса сваке воћке исте врсте је иста.)



Решење:
Да би се решио овај задатак најлакше је применити принцип избацивања истих маса са левог и десног таса и одржавања равнотеже, како би се почетно стање упростило. Ако се са оба таса скину по једна поморанџа и једна јабука на левом тасу ће остати две јебуке, а на десном једна поморанџа. На основу тога закључујемо да је поморанџа дупло тежа од јабуке, односно да је њена маса 140g.

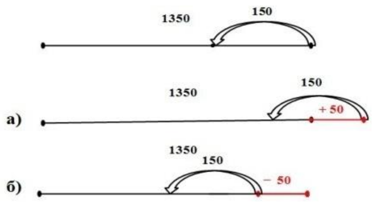
ВЕЖБА 7.	НАСТАВНА ЈЕДИНИЦА: ЗАВИСНОСТ РАЗЛИКЕ ОД ПРОМЕНЕ УМАЊЕНИКА
Тип часа:	Обрада
Алгебарске способности:	Разумевање функционалне зависности између компонената рачунских операција; спобност уочавања функционалних односа на графикону, табели или слици

1. Бранка је у свом новчанику имала 1780 динара. Купила је чоколаду која кошта 280 динара. Колико новца је Бранки остало након куповине?
   а) Колико би новца Бранки остало, да је имала 100 динара више у новчанику?
   б) Колико би новца Бранки остало, да је имала 100 динара мање у новчанику?
   Решење:
   1780 – 280 = 1500
   Бранки је остало 1500 динара.
   Како би се решио овај задатак може се искористити модел са дужима:



а) (1780 + 100) – 280 = 1880 – 280 = 1600
Бранки би остало 1600 динара, односно за 100 динара више.
б) (1780 – 100) – 280 = 1680 – 280 = 1400
Бранки би остало 1400 динара, односно за 100 динара мање.

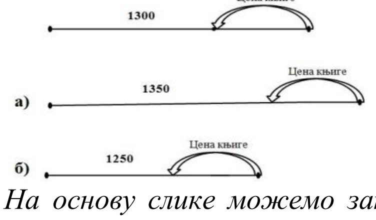
2. Књига коју чита Марија има 1350 страница. Након седам дана Марија је прочитала 150 страница књиге? Колико страница је Марији још остало да прочита?
   а) Да књига има за 50 страница више, колико би Марији остало још страница да прочита?
   б) Да књига има 50 страница мање, колико би јој још страница остало да прочита?
   Решење:
   1350 – 150 = 1200
   Марији би остало 1200 страница да прочита.
   Како би се решио овај задатак може се искористити модел са дужима:



а) (1350 + 50) – 150 = 1400 – 150 = 1250
Марији би остало да прочита 1250 страница, односно 50 страница више.
б) (1350 – 50) – 150 = 1300 – 150 = 1150
Марији би остало да прочита 1150 страница, односно за 50 страница мање.

3. Милан је имао одређену суму новца, тако да је након куповине књиге остатак његовог новца био 1300 динара.
   а) Да је Милану након куповине исте књиге остало 1350 динара, да ли би имао више или мање новца пре куповине и за колико?
   б) Да је Милану након куповине исте књиге остало 1250 динара, колико би онда новца да ли би имао више или мање новца пре куповине и за колико?
   Решење:

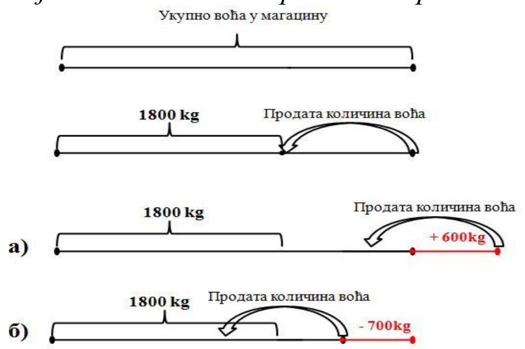
Како би се решио овај задатак може се искористити модел са дужима:



На основу слике можемо закључити да ако се мења кусур (разлика) на исти начин се мења и новац који може имати Милан пре куповине (умањеник).О односима закључијемо на основу зависности промене разлике услед промене умањеника, као и помоћу неке

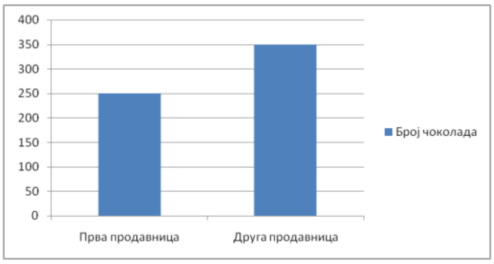
визуелне репрезентације, као на слици изнад.
а) 1350 – 1300 = 50
Милан би пре куповине имао за 50 динара више.
б) 1300 – 1250 = 50
Милан би пре куповине имао за 50 динара мање.

4. Када је из магацина продата одређена количина воћа, у магацину је остало 1800 килограма воћа.
   а) Да је у магацину било за 600 kg више воћа, колико би воћа остало у магацину након продаје?
   б) Да је у магацину било за 700 kg мање воћа, колико би килограма воћа остало у магацину?
   Решење:
   Овај задатак може се решити користећи се моделима дужи:



а) 1800kg + 600kg = 2400kg
У магацину би остало за 600 kg више воћа, односно 2400kg.
б) 1800kg – 700kg = 1100kg
У магацину би остало за 700kg мање воћа, односно 1100kg.

5. У две продавнице налази се одређени број чоколада који је приказан на графикону. У којој продавници се налази већи број чоколада и за колико? Ако се у другом магацину број чоколада повећа за 30, да ли ће се разлика у броју чоколада у овим продавницама променити?



Решење:
У првој продавници се налази 250 чоколада, док се у другој налази 350 чоколада.
350 – 250 = 100
У другој продавници се налази за 100 чоколада више него у првој продавници.
(350 + 30) – 250 = 380 – 250 = 130
Ако би се број чоколада у другој продавници повећао, онда би се повећала и разлика између продавница за 30.

6. У граду постоји мобилни оператер који услуге наплаћује према одређеном ценовнику:
   Успостављање разговора кошта: 5 динара
   Сваки минут разговора кошта: 3 динара

   Ако разговор траје 5 минута, цена разговора је:______ *(5 + 5 · 3 = 5 + 15 = 20)*
   Ако разговор траје x минута, онда разговор кошта:______ *5 + x · 3*
7. Цена улазнице за филм је опадала у току године од јула, тако да је сваки наредни месец била јефтинија за 20 динара. Ако знамо да је у децембру коштала 230 динара, одреди њену цену у јулу.
   Решење:
   5 месеци уназад, значи да се толико месеци смањивала цена односно
   230 – 5 · 20 = 230 – 100 = 130
   У јулу улазница је коштала 130 динара.

ВЕЖБА 8.	**НАСТАВНА ЈЕДИНИЦА: ЗАВИСНОСТ РАЗЛИКЕ ОД ПРОМЕНЕ УМАЊИОЦА**
Тип часа:	Обрада
Алгебарске способности:	Разумевање функционалне зависности између компонената рачунских операција; спобност уочавања функционалних односа на графикону, табели или слици

1. Са стоваришта грађевинског материјала на коме је било 1570 палета материјала одвезено је 270 палета. Колико палета материјала је остало на стоваришту?

а) Да је са стоваришта одвезено за 120 палета мање, да ли би на стоваришту остало више или мање палета и за колико?

б) Да је са стоваришта одвезено за 120 палета више, да ли би на стоваришту остало мање или више палета и за колико?

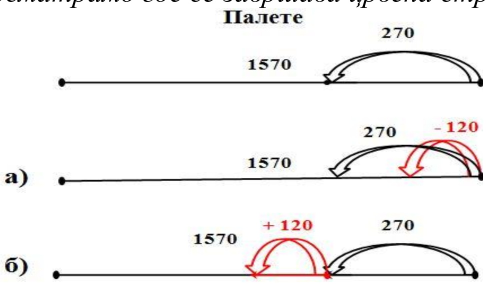
Решење:

1570 – 270 = 1300

На стоваришту је остало 1300 палета.

Како би решили задатак ученици као помоћ могу искористити модел дужи:

Посматрамо где се завршава црвена стрелица на дужи коју скраћујемо за неку дужину.



а) 1570 – (270 – 120) = 1570 – 150 = 1420

На стоваришту би остало за 150 више палета, односно 1420 палета.

б) 1570 – (270 + 120) = 1570 – 390 = 1180

На стоваришту би остало мање за 150 палета, односно остало би 1180 палета.

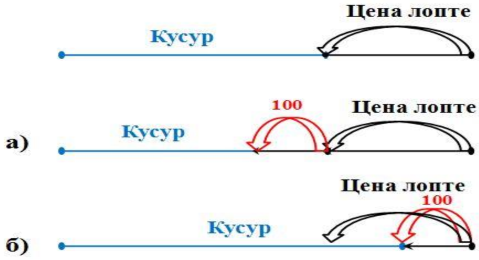
2. Када је Марко у продавници купио лопту у новчанику му је остало 1620 динара.

а) Да је лопта коштала за 100 динара више, колико би му онда остало новца у новчанику?

б) Да је лопта коштала за 100 динара мање, колико би му онда остало новца у новчанику?

Решење:

Упоеђујемо вредности. Кусур у овом случају представља разлику две суме новца. У закључивању може послужити модел са дужима. Дужина плаве линије представља вредност кусура.



На основу слике можемо закључити да је лопта коштала 100 динара више остало би за 100 динара мање кусура.

Да је лопшта коштала 100 динара мање, остало би за 100 динара више кусура.

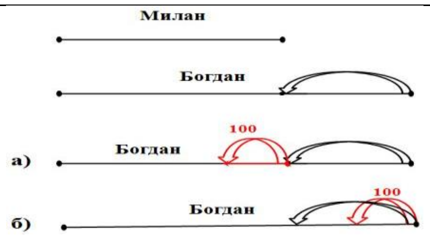
3. Милан има 1370 динара. Ако Богдан да другу одређену суму новца онда ће му остати иста сума новца као што има Милан.

а) Ако Богдан да другу за 100 динара више новца, да ли ће му остати сума као што има Милан?

б) Ако Богдан да другу за 100 динара мање новца, да ли ће му остати сума као што има Милан?

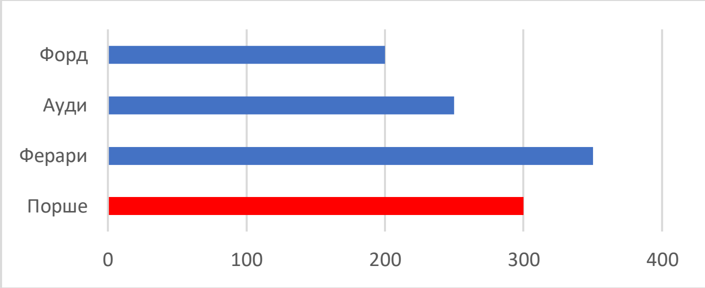
Решење:

У закључивању може послужити модел са дужима.



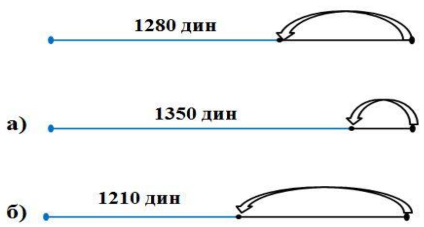
Упоређујући дужине дужи можемо закључити да:
а) Ако Богдан позајми 100 динара више другу, онда ће имати за 100 динара мање новца од Милана.
б) Ако Богдан позајми 100 динара мање другу, онда ће имати за 100 динара више новца од Милана.

4. Брзина којом су се кретали аутомобили на трци приказани су на графикону.Одреди брзину којом је се кретао Форд и прикажи на графикону, ако знаш да се налази на четвртом месту по брзини. Разлика у брзини суседних места по брзини између свих аутомобила је иста.



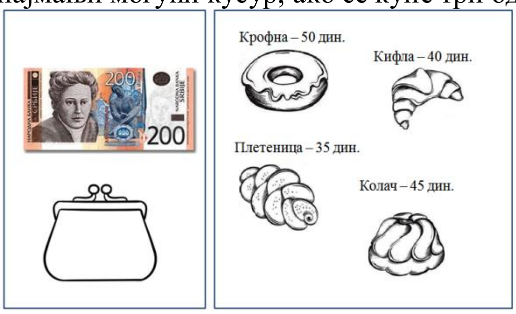
Решење:
Посматрајући графикон, може се закључити да се свака два суседна аутомобила по брзини разликују за 50km/h, што значи да је Форд спорији за 50km/h у односу на трећег, што значи да је његова брзина 200km/h.

5. Милан је имао одређену суму новца, тако да је након куповине књиге остатак његовог новца био 1280 динара.
а) За колико би мање коштала књига, да је Милану након куповине остало 1350 динара?
б) За колико би више коштала књига, да је Милану након куповине остало 1210 динара?
Решење:
Решење:
У закључивању може послужити модел са дужима.



Посматрамо слику и закључујемо на основу слике:
а) Разлика у кусуру показује разлику у сени књиге.
1350 – 1280 = 70
То значи да би књига коштала за 70 динара мање.
б) Разлика у кусуру показује разлику у сени књиге.
1280 – 1210 = 70
То значи да би књига коштала за 70 динара више.

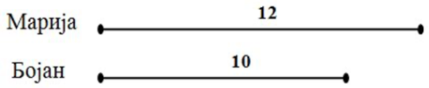
6. Тијана је куповала у пекари у којој је остало неколико производа. На основу слике одреди најмањи могући кусур, ако се купе три од четири производа из пекаре.



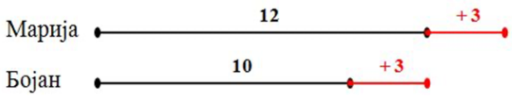
Решење:
Посматрају се цене прозвода и закључују да ће најмањи кусур бити ако се купе три најскупља производа у пекари, односно: крофна, колач и кифла. Дакле
200 – (50 + 45 + 40) = 200 – 135 = 65
Најмањи кусур биће кусур од 65 динара.

ВЕЖБА 9.	НАСТАВНА ЈЕДИНИЦА: СТАЛНОСТ РАЗЛИКЕ
Тип часа:	Обрада
Алгебарске способности:	Разумевање функционалне зависности између компонената рачунских операција; спобност уочавања функционалних односа на графикону, табели или слици

1. Марија је пре 3 године имала 12 година, док је Бојан имао 10 година. Да ли је сада Марија старија од Бојана као и пре 3 године и за колико?
Решење:
За решење овог задатка се може искористити цртеж или модел дужи да би се ситуација визуелизовала и приближила ученицима.

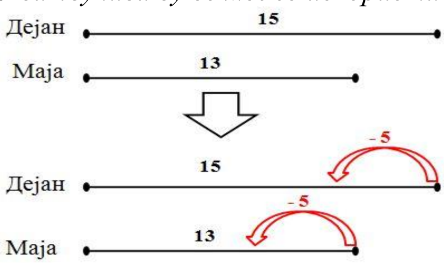


За 3 године



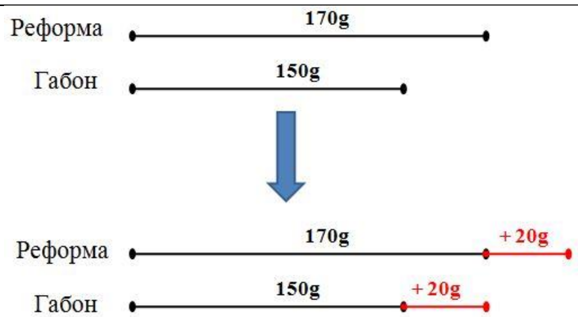
12 – 10 = 2
(12 + 3) – (10 + 3) = 15 – 13 = 2
Марија ће бити старија 3 године, као и пре.
У решавању овог задатка ученик може искористити правило сталности разлике и одговорити на питање без израчунавања.

2. Дејан сада има 15 година, а Маја има 13 година. Колико је Дејан био старији од Маје пре 5 година? Да ли је се разлика у годинама између њих променила сада у односу на пре 5 година?
Решење:
У закључивању се може искористити и модел са дужима.



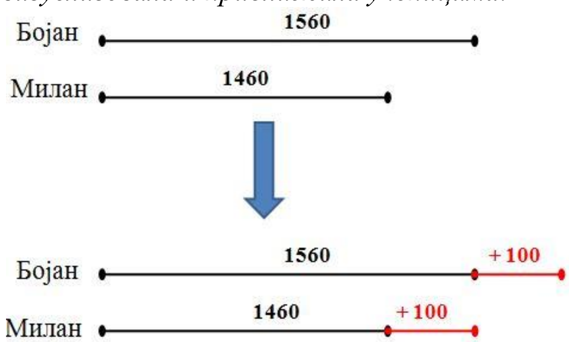
15 – 13 = 2
(15 – 5) – (13 – 5) = 10 – 8 = 2
Разлика у годинама се није променила између њих.

3. Мама је за Реформа торту искористила 170 грама ораха, док је за Габон торту искористила 150 грама ораха. За коју торту је мама искористила више ораха и за колико?
Да је мама и за једну и за другу торту користила 20 грама више ораха, да ли би разлика у потребним орасима за торте остала иста?
Решење:
За решење овог задатка се може искористити цртеж или модел дужи да би се ситуација визуелизовала и приближила ученицима.



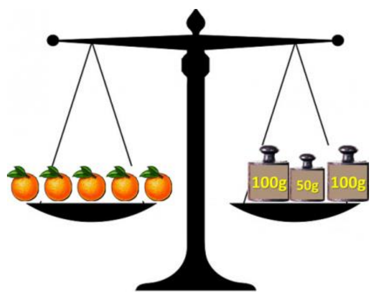
170g – 150g = 20g
Мама је 20 грама више ораха искористила за Реформа торту.
(170g + 20g) – (150g + 20g) = 190g – 170g = 20g
Мама би искористила опет 20 грама више ораха за Реформа торту.
У решавању овог задатка ученик може искористити правило сталности разлике и одговорити на питање без израчунавања.

4. Бојан је за градњу дворца од лего коцкица потрошио 1560 коцкица, док је Милан за градњу свог потрошио 1460 коцкица. Ко је потрошио више коцкица и за колико?
Ко би потрошио више коцкица да су и један и други потрошили по 100 коцкица више?
Решење:
За решење овог задатка се може искористити цртеж или модел дужи да би се ситуација визуелизовала и приближила ученицима.



1560 – 1460 = 100
Бојан је за градњу свог дворца потрошио 100 коцкица више.
(1560 + 100) – (1460 + 100) = 1660 – 1560 = 100
Бојан би опет потрошио 100 коцкица више.
У решавању овог задатка ученик може искористити правило сталности разлике и одговорити на питање без израчунавања.

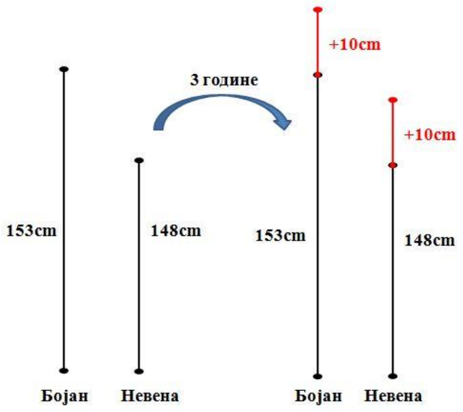
5. Теразије су у равнотежи као на слици. Ако са левог таса скинемо 3 поморанџе, које тегове морамо скинути са десног таса да би вага била у равнотежи? Заокружи тачан одговор. (Маса сваке поморанџе је иста).
   а) само тег од 100 грама
   б) 2 тега од 100 грама
   в) само тег од 50 грама
   г) тег од 100 грама и тег од 50 грама



Решење:
Пошто пет истих поморанџи има масу од 250 грама, онда ће маса једне бити 50 грама. На основу тога закључујемо да ако се склоне три такве поморанџе са десног таса, да би вага остала у равнотежи са десног таса се мора склонити маса укупне масе 150 грама. То значи да је тачан одговор: тег од 100 грама и тег од 50 грама.
Другачије се задатак може решити помоћу једначине:

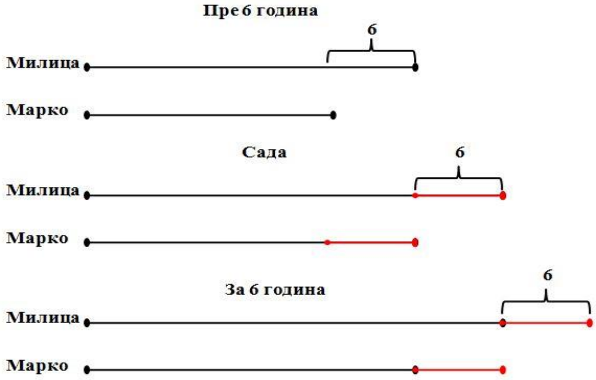
$5 \cdot x = 250g$
$x = 250g : 5$
$x = 50g$
$3 \cdot 50g = 150g$, што значи да се са десног таса морају скинути тегови од 100 и 50 грама да би вага остала у равнотежи.

6. Бојан је пре 3 године био висок 153cm, док је Невена била висока 148cm. За три године они су порасли по 10 cm. Да ли је разлика у висини између њих иста сада као и пре 3 године?
Решење:
У закључивању се може искористити и модел са дужима.



$153cm – 148cm = 5cm$
$(153cm + 10cm) – (148cm + 10cm) = 163cm – 158cm = 5cm$
Разлика у висини између њих је иста сада као и пре 3 године.

7. Пре 6 година Милица је била старија од Марка 6 година. Колико година ће бити старија Милица од Марка за 6 година од сад?
Решење:
У закључивању се може искористити и модел са дужима



Дакле можемо закључити да се разлика у старости Милице и Марка неће приоменити ни после 6, као ни 12 година. И Умањеник и умањилац се повећавају за исти број у сваком случају.

8. Марко је замислио један број, док је Милица замислила други. Разлика између та два броја је 320. Ако и Марко и Милица својим бројевима додају 120, да ли ће се разлика између замишљених бројева променити и за колико?
Решење:
Разлика између нових бројева се неће променити јер се и један и други број повећавају за исту вредност. Овај закључак се може извести тако што се могу узети примери година које су деца замислила.

ВЕЖБА 10.	НАСТАВНА ЈЕДИНИЦА: ЗАВИСНОСТ ЗБИРА И РАЗЛИКЕ
Тип часа:	Утврђивање
Алгебарске способности:	Разумевање функционалне зависности између компонената рачунских операција; спобност уочавања функционалних односа на графикону, табели или слици

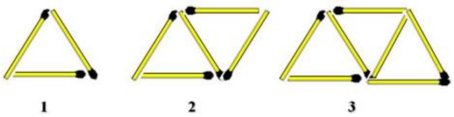
1. Брат и сестра су сакупљали новац да би купили поклон за баку. Када је брат дао 365 динара, а сестра 325 динара имали су тачно колико је потребно за поклон. Колико кошта поклон за баку?
а) Да је брат дао 60 динара више да ли би могли купити поклон за баку и да ли би им остао кусур?
б) Да је сестра дала 60 динара мање да ли би могли купити поклон за баку и да ли би им остао кусур?

Решење:
Да би се уочиле промене може се користити неки од начина визуелизације проблема (модел дужи):

365 + 325 = 680
Поклон за баку кошта 680 динара.
а) 365 + 60 + 325 = 425 + 325 = 750
Могли би купити поклон и остао би им кусур од 60 динара.
б) 365 + 325 – 60 = 365 + 265 = 630
Не би могли купити поклон јер би им фалило 60 динара за њега.

2. Са једне железничке станице је отпутовала је једна група путника тако да је на њој остало 375 путника.
Да је на железничкој станици остало за 50 путника више онда је могло бити:
а) 50 путника више пре одласка групе,
б) 50 путника мање пре одласка групе,
в) 50 путника више отпутовало,
г) 50 путника мање отпутовало. (Заокружи тачне одговоре)
Решење:
Образложити одговоре. Разлика ће бити већа за 50, само ако се умањеник повећа за 50 или се умањилац смањи за 50. То значи да ће тачни одговори бити а) и г).

3. Марија треба да направи од палидрвцади 5 фигура. Фигуре 1, 2 и 3 су приказане доле. Она сваки пут користи исто правило да би направила следећу фигуру у низу.



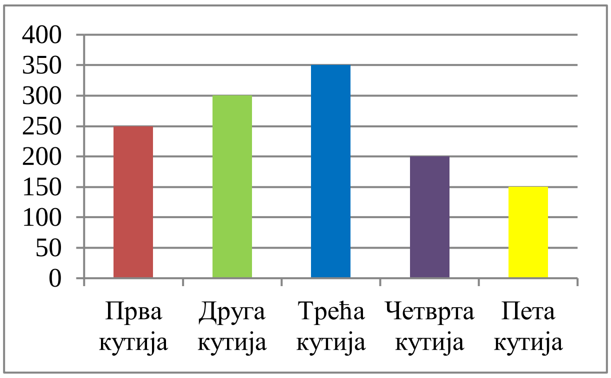
Колико палидрвцади ће јој бити потребно да направи фигуру 5, ако користи исто правило?
Решење:
Да би ученици решили овај задатак треба уочити односе који постоје између фигура у низу и броја палидрваца која су потребена да би се фигура направила. Ученици уочавају односе и закључују да се број палидрвцади у низу мења према одређеном правилу:
3, 5, 7,...
На основу слике и броја палидрвцади у низу може се закључити да се свака нова фигура може направити тако што се додају два нова палидрвца, што даље значи да би низ даље требало наставити на следећи начин:
3, 5, 7, 9, 11, 13...
На основу тога ученици закључују да ће за пету фигуру бити потребно 11 палидрвцади.

Друго решење:
Ученици могу користити табелу која показује функционалне односе:

Фигура	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Палидрвца	*3*	*5*	*7*	*9*	*11*

Треће решење:
Ученици могу цртати фигуре у низу и бројати палидрвца.

4. Радник пакује чоколаде у кутије. Графикон показује број чоколада у свакој кутији.
На основу графикона утврди да ли је однос између броја чоколада између сваке две кутије суседне по броју чоколада у њима исти и одреди за колико се разликују.

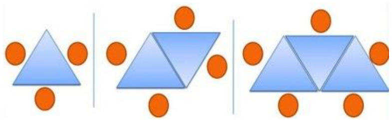


Решење:
Ученик има задатак да поређа кутије према броју чоколада у њима на основу графикона:
Пета кутија, четврта кутија, прва кутија, друга кутија и трећа кутија.
Број чоколада у кутијама је:
150, 200, 250, 300, 350
На основу тога можемо закључити да је разлика између сваке две суседне кутије по броју је 50 чоколада.
Друго решење:
Однос између сваке две кутије по бројности може се упростити коришћењем табеле:

Кутије	*пета кутија*	*четврта кутија*	*прва кутија*	*друга кутија*	*трећа кутија*
Број чоколада	*150*	*200*	*250*	*300*	*350*

На основу тога можемо закључити да је разлика између сваке две суседне кутије по броју је 50 чоколада.

5. У једном ресторану столови су у облику троугла. За сваки сто може да седне троје људи. На основу доње слике покушај да одредиш колико људи може да седне ако се на исти начин сложи 10 столова.

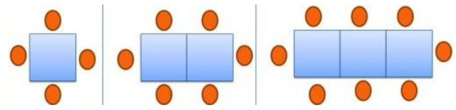


Решење:
На основу слике ученици уочавају однос између броја столова и броја столица потребних за те столове, при чему је кључан број столица па се тако може формирати низ:
3, 4, 5, 6,...
На основу тога може се закључити да ће за 10 столова бити потребно 12 столица.
Друго решење:
Однос између броја столова и броја столица може се приказати табелом:

Број столова	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
Број столица	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*

Треће решење:
Може се цртати и на тај начин закључити о броју потребних столова.

6. У једном кафеу да би боље организовали простор седења слагали су столове као на слици један поред другог. На основу слике покушај да одговориш на питања.
Колико столова је потребно да би село 12 људи?
Колико људи може сести ако 6 столова сложи на исти начин?



Решење:
На основу слике ученици уочавају однос између броја столова и броја столица потребних за те столове, при чему је кључан број столица па се тако може формирати низ:
4, 6, 8, 10, 12, 14
На основу тога може се закључити да је за 12 људи потребно 5 столова.
Ако се сложи 6 столова може сести 14 људи.
Друго решење:
Однос између броја столова и броја столица може се приказати табелом:

Број столова	*1*	*2*	*3*	*4*	***5***	*6*
Број столица	*2*	*4*	*6*	*8*	*10*	***12***

Треће решење:
Може се цртати и на тај начин закључити о броју потребних столова.

7. Приказане су две рекламе за изнајмљивање бицикла.

Изнајмљивање рекреативних бицикала
80 динара за први сат
30 динара за сваки наредни сат

Изнајмљивање тркачких бицикала
100 динара за први сат
20 динара за сваки наредни сат

Користи податке из реклама како би попунио табеле и одговорио на питање.

Изнајмљивање рекреативних бицикала	
Сат	Рачун
1.	80
2.	110
3.	140
4.	170
5.	200
6.	230
7.	270

Изнајмљивање тркачких бицикала	
Сат	Рачун
1.	100
2.	120
3.	140
4.	160
5.	180
6.	200
7.	220

За колико сати изнајмљивања ће цена бити иста у оба случаја?
Цена изнајмљивања биће иста у 5 сату рекреативних бицикала и шестом сату тркачких бицикала.

8. Један камион превози воће у продавнице. На њему се налази товар од 900 килограма воћа. У прву продавницу испоручио је 120 килограма воћа. У сваку следећу продавницу истовариће за 30 kg више него у претходној. Колико продавница ће посетити док не испоручи цео товар?
Решење:
120kg + 150kg + 180kg + 210kg + 240kg = 900kg
Камион за испоруку посетиће 5 продавница.
Ученици могу цртати ситуацију и користити се својим методама визуелизације овог проблема да би га решили.

ВЕЖБА 11.	НАСТАВНА ЈЕДИНИЦА: НЕЈЕДНАЧИНЕ
Тип часа:	Обрада
Алгебарске способности:	Развијање појма непозната и променљива; развијање способности схватања симбола у алгебри; способност уочавања функционалних односа на графикону, табели или слици.

1. Бранко је за седам дана укупно претрчао мање од 9 km. Колико километара је Бранко могао претрчати за 7 дана.

   Решење:
   Бранко је могао претрчати мање од 9 километара, што значи да је могао претрчати, 8km, 7km, 6km, 5km, 4km, 3km, 2km или 1km.
   Ако би ово изразили математички број Бранкових претрчаних километара можемо приказати помоћу неједначине:
   $x < 9km$
   $x \in \{8km, 7km, 6km, 5km, 4km, 3km, 2km, 1km\}$

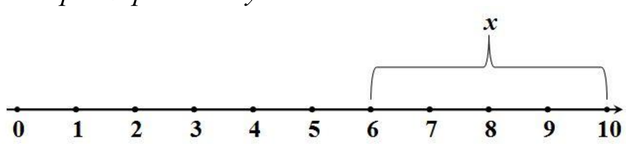
2. На основу слике одреди колика може бити маса крушке на теразијама.

   Решење:
   Ученик треба да закључи на основу слике да је маса јабуке на тасу ваге већа од тега масе 100g, пошто тасови нису у равнотежи. На основу тога ову ситуацију може изразити и помоћу неједначине:
   $x < 100g$
   $x \in \{99g, 98g, 97g, \ldots 1g\}$

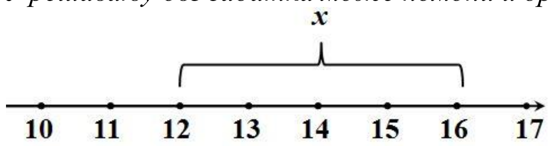
3. Укупно претрчана раздањина Јелене и Маје је мања од Бранкине. Да ли то значи да је Маја сама претрчала мању раздаљину од Бранке?
   Решење:
   Пошто су Јелена и Маја претрчали раздаљину мању од раздаљине коју је претрчала Бранка, то значи да ће свакако Маја претрчати мању раздаљину.

4. Јован и Бранко су бацали куглу у даљ. Оба такмичара су пребацила 6 метара. Ако знамо да је Бранко био бољи и куглу бацио 10 метара, колико метара је куглу могао бацити Јован?
   Решење:
   У овом задатку је важно издвојити два услова:
   Први да је Јован бацио куглу више од 8 метара, и други да је Јован бацио куглу мање од 12 метара. У решавању овг задатка може помоћи и бројевна права.

   На основу тога можемо закључити да је Јован могао да баци куглу 7m, 8m или 9m.
   Алгебарски:
   $x > 6m$ и $x < 10m$;
   $x \in \{7m, 8m, 9m\}$

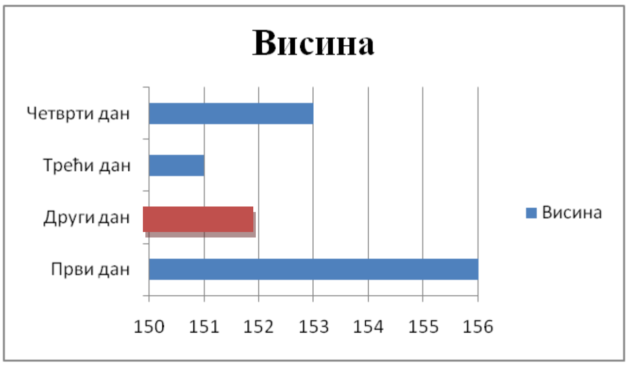
5. Мирјана, Драгана и Бојана трче на сто метара. Бојана је претрчала раздаљину за 12 секунди, док су Драгана и Мирјана стигле на циљ после ње. Колико секунди је могла трчати Драгана, ако је Мирјана стигла последња са резултатом од 16 секунди?
Решење:
У решавању овг задатка може помоћи и бројевна права.



Ученик на основу реалне ситуације закључује о односима у задатку:
Пошто је прва на циљ стигла Бојана за 12, секунди а последња Мирјана за 16 секунди то значи да је Драгана могла дође до циља за 13, 14 или 15 секунди.
Алгебарски:
x > 12 и x < 16;
x ϵ {13, 14, 15}

6. Деца су у школи скакали у даљ, тако да је најдужи скок био 150 cm. Ако је Биљана скочила 120 cm, колико су могле скочити Невена и Ана које су скочиле више од ње?
Решење:
Упоређујући односе ученик закључује да су Невена и Ана могле да скоче раздаљину од 120cm до 150cm.
Алгебарски:
x > 120cm и x < 150cm;
x ϵ {120 cm, 121cm, 122cm,..., 149cm}

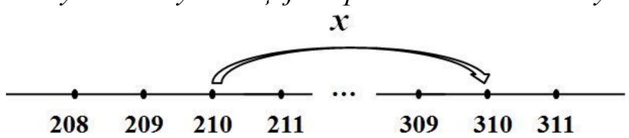
7. Мирко је четири дана скакао у вис. У табели су приказани његови најбољи резултати за четири дана и изражени у центиметрима. Првог дана Мирко је скочио највише, а трећег најмање, док је другог дана мање од четвртог дана. Нацртај на графикону траку која приказује колико је скочио другог дана.



ВЕЖБА 12.	**НАСТАВНА ЈЕДИНИЦА: НЕЈЕДНАЧИНЕ СА САБИРАЊЕМ**
Тип часа:	Обрада
Алгебарске способности:	Развијање појма непозната и променљива; развијање способности схватања симбола у алгебри; способност уочавања функционалних односа на графикону, табели или слици.

1. Ако Марија и Петар заједно имају мање сличица од Бранка, да ли то значи да Петар сам има мање сличица од Бранка?
   Решење:
   Закључујемо о односима у задатку. Ако Марија и Петар заједно имају мање сличица од Бранка, онда то значи да и Петар сам мора имати мање сличица од Бранка.
   **Решавање задатка овог типа може се остварити постављајући ученика у ситуацију да лично учествује у задатку, чиме се постиже већа реалност ситуације у проблему.*

2. Првог дана базен је посетило 210 људи, другог дана одређени број тако да је укупно за два дана базен посетило мање од 310 људи. Колико је људи могло посетити базен други дан?
   Решење:
   Решавање овог задатка се може поједноставити тако што ће ученицима бити омогућена визуелизација коришћењем модела дужи.



   $210 + x < 310$
   $x < 310 - 210$
   $x < 100$
   $x \in \{1, 2, 3, \ldots, 98, 99\}$
   Други дан базен је могло посетити од 1 човека до 99 људи.

3. Ако се од 350 улазница на базен додају и оне које које су намењене за децу до 7 година, онда је тај број улазница мањи од 420. Колико је могло бити улазница за децу до 7 година?
   Решење:
   $350 + x < 420$
   $x < 420 - 350$
   $x < 70$
   $x \in \{1, 2, 3, \ldots 68, 69\}$
   Улазница за децу до 7 година је могло бити од 1 до 69.

4. Низ један тобоган у аква парку спусти се 112 дечака у току једног дана. Колико се девојчица могло спустити низ тобоган, ако је укупан број деце које се спустило тобоганом мањи од 227 за један дан? Заокружи слово испред неједначине којом се може решити овај проблем.

   а) $227 < 112 - x$ б) $227 = 112 - x$
   в) $227 < 112 + x$ ***г) $227 > 112 + x$***

   Решење:
   Треба уочити односе између вредности у задатку, на основу чега закључујемо о улози коју има променљива у задатку. У овом случају променљива означава могући број девојчица које су се спустиле тобоганом. Тачно решење је под Г).

5. Рачун за коришћење две лежаљке и сунцобрана на базену износи мање од 250 динара. Колико може коштати сунцобран, ако је цена једне лежаљке 90 динара?

Решење:

Да би се решио задатак може се искористити неједначина.

$(2 \cdot 90) + x < 250$

$180 + x < 250$

$X < 250 - 180$

$X < 70$

$X \in \{1, 2, 3 \ldots 68, 69\}$

Сунцобран може коштати од 1 динар до 69 динара.

6. Колико ствари Марија може највише купити, а да потроши мање од половине суме новца који има у новчанику.

Решење:

Половина новца коју Марија има у новчанику је 500 динара.

Треба одабрати што више најјефтинијих ствари, тако да:

$150 + 50 + 250 = 450$

$450 < 500$

Марија може купити лопту кофу и лопатицу за песак.

7. На основу слике, покушај одредити колика може бити маса кесице са слаткишима на левом тасу ваге.

Решење:

Да би се решио овај задатак ученик мора уочити односе који постоје између маса на левом и десном тасу ваге на слици. Тасови ваге нису у равнотежи, што значи да је маса тега од 200g већа од укупне масе кесице бомбона и тега од 100g на левом тасу ваге. На осову тога може се поставити једначина помоћу које се може решити задатак или погађати вредност на основу слике.

$x + 100g < 200g$

$x < 200g - 100g$

$x < 100g$

$x \in \{1g, 2g, 3g, \ldots, 98g, 99g\}$

Маса кесице са слаткишима може бити од 1g до 99g.

ВЕЖБА 13.	**НАСТАВНА ЈЕДИНИЦА: НЕЈЕДНАЧИНЕ СА ОДУЗИМАЊЕМ**
Тип часа:	Обрада
Алгебарске способности:	Развијање појма непозната и промењива; развијање способности схватања симбола у алгебри;

1. Тијана и Кристина имају исту суму новца. Ако Тијана позајми део новца Марији, да ли ће онда Кристина имати више новца од Марије? Колико новца треба да позајми Марија да би имала исту суму као Кристина?

   Решење:
   Пошто је Марија позајмила само део новца од Тијане, то значи да ће Кристина имати више новца од Марије.
   Само ако Марија позајми целу суму новца који има Тијана имаће исто новца као Кристина.

2. Ако Бојан од својих 118 сличица сестри да одређени број сличица, тада ће му остати више од 112 сличица. Колико је сличица могао дати сестри?

   Решење:
   $118 - x > 112$
   $x < 118 - 112$
   $x < 6$
   $x = \{5, 4, 3, 2, 1\}$

   Како се број сличица које Бојан даје сестри повећава, то се број сличица које њему остају смањује. Дакле, број сличица које је дао сестри мора бити мањи од разлике 118 и 112. Непознат је умањилац. Када се вредност умањиоца повећава то се количник 118 – x смањује. Стога, мора се променити знак тако да умањилац буде мањи од резултата.

3. Бојан је од својих 90 сличица залепио 30. Када Ана од 89 сличица одређени број залепи у албум имаће мањи број незалепљених сличица од Бојана након лепљења. Колико сличица је могла да залепи Ана у албум.

   Решење:
   Задатак се може решити коришћењем неједначине.
   $89 - x < 90 - 30$
   $89 - x < 60$
   $x > 89 - 60$
   $x > 29$
   $x \in \{30, 31, 32, \ldots 88, 89\}$

   Ана је могла да залепи од 30 до 89 сличица, тако да јој остане мање од Бојанових незалепљених сличица.

   **Промену знака неједнакости треба објаснити на основу реалне ситуације и зависности која постоји у промени разлике услед промене умањиоца. Да би број незалепљених сличица (разлика) била мања, то број залепљених сличица (умањилац) у албуму мора бити већи, тако да се знак мора променити.*

4. Дата је неједначина: 500 – x > 360. Заокружи слово испред ситуације која одговара датој неједначини.
   а) Од укупно 500 сличица које је Алекса имао, током игре изгубио је одређени број, тако да му је остало мање од 360 сличица. Колико сличица је Алекса могао да изгуби?
   б) Од укупно 500 сличица које је Алекса имао, током игре изгубио је одређени број, тако да му је остало 360 сличица. Колико сличица је Алекса могао да изгуби?
   в) Од укупно 500 сличица које је Алекса имао, током игре изгубио је одређени број, тако да му је остало више од неколико сличица. Колико сличица је Алекса могао да изгуби?
   г) Од укупно 500 сличица које је Алекса имао, током игре изгубио је одређени број тако да му је остало више од 360 сличица. Колико сличица је Алекса могао да изгуби?

   Решење:
   У овом задатку треба уочити односе у задатку и улогу која непозната има у неједначини. Поред тога задатак је, схватити симбол у неједначини као симбол који означава променљиву а не непознати број.
   Тачан одговор је под г).

5. Марко је од суме новца коју има дао другу две новчанице од 200 динара, тако да је њему остало мање од 500 динара. Колико новца је Марку могло остати после позајмице?
   Решење:
   Да и се решио овај задатак може се искористити неједначина.
   $x - (200 + 200) < 500$
   $x < 500 - 400$
   $x < 100$
   $x \in \{1, 2, 3, \ldots, 98, 99\}$
   Марку је након позајмице могло остати од 1 до 99 динара.

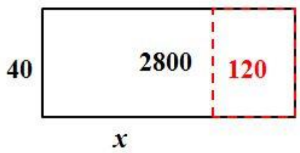
6. У једној продавници је било 350 бомбона. Продавачица је у току дана продала одређену количину бомбона, тако да јој је остало више од 330 бомбона. Колико бомбона је продавачица могла продати тог дана?

   Решење:

   $350 - x > 330$
   $x < 350 - 330$
   $x < 20$
   $x \in \{1, 2, 3, \ldots, 18, 19\}$
   Тог дана продавачица је могла продати од 1 до 19 бомбона.

ВЕЖБА 14.	НАСТАВНА ЈЕДИНИЦА: ЈЕДНАЧИНЕ СА МНОЖЕЊЕМ
Тип часа:	Обрада
Алгебарске способности:	Развијање појма непозната и променљива; развијање способности схватања симбола у алгебри; правилно схватање знака једнакости

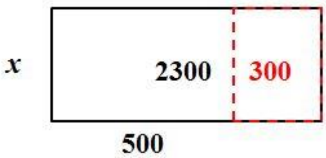
1. У првом цвећњаку у 40 једнаких редова засађен је одређени број ружа. У другом цвећњаку налази се 120 ружа тако да је укупан број ружа у оба цвећњака 2800. Одреди колико је ружа у сваком реду у првом цвећњаку.
Решење:
Да би се сагледали односи између података у задатку може се искористити модел правоугаоника. Како би решили задатак искористићемо једначину.



$40 \cdot x + 120 = 2800$
$40 \cdot x = 2680$
$x = 2680 : 40$
$x = 67$
$40 \cdot 67 + 120 = 2800$
$2800 = 2800$

Одговор: У једном реду је засађено 67 ружа.

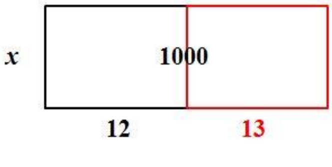
2. Одређени број камиона је допремио по 500 гајби јабука у магацин. Ако се у магацин допреми још 300 гајби тада ће у магацину бити укупно 2300 гајби јабука. Одреди број камиона који је допремао јабуке.
Решење:
Да би се сагледали односи између података у задатку се мое моделовати преко модела правоугаоника.



$x \cdot 500 + 300 = 2300$
$x \cdot 500 = 2000$
$x = 2000 : 500$
$x = 4$
Провера:
$x \cdot 500 + 300 = 2300$
$2300 = 2300$

Одговор: Гајбе са јабукама је допремило 4 камиона.

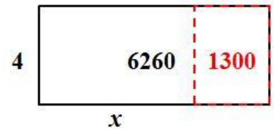
3. Једна гондола је два дана превезла скијаше на врх планине. Првог дана гондола је превезла 12 пута, а други дан 13 пута по исти број скијаша на врх планине. Израчунај колико је скијаша превезла гондола у сваком одласку, ако знаш да је укупан број превезених скијаша 1000.
Решење:
Да би се сагледали односи између података у задатку може се искористити модел правоугаоника .



$(12 + 13) \cdot x = 1000$
$25 \cdot x = 1000$
$x = 1000 : 25$
$x = 40$
ПР:
$(12 + 13) \cdot 40 = 1000$
$1000 = 1000$

Одговор: Гондола је сваки пут превезла по 40 скијаша.

4. На једном пијацу је 4 дана продавана иста количина крушака, док је петог дана продато 1300 крушака. Колико је крушака продато дневно за прва четири дана, ако је укупно за 5 дана продато 6260 крушака?
Решење:
Задатак сликовито можемо приказати преко модела правоугаоника.



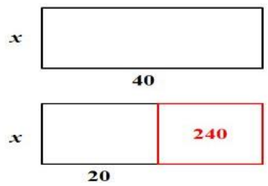
4 · x + 1300 = 6260
4 · x = 4960
x = 4960 : 4
x = 1240.

Одговор: Прва четири дана продавано је по 1240 крушака.

5. На основу слике одреди масу једне јабуке, ако знаш да су обе јабуке исте масе.

Решење:
Одбацивањем тега исте масе са једне и друге стране да би се поједноставила ситуација на којој остаје очигледно да је маса две исте јабуке 200 грама, тако да је маса једне 100 грама.
Други начинрешавања је преко једначине:
$2 \cdot x + 50g = 250g$
$2 \cdot x = 200g$
$x = 200g : 2$
$x = 100g$
Маса једне јабуке је 100 грама.

6. У четрдесет кутија стаје исти број жвака као у двадесет таквих кутија и још 240 жвака. Колико је жвака у једној кутији?
Решење:



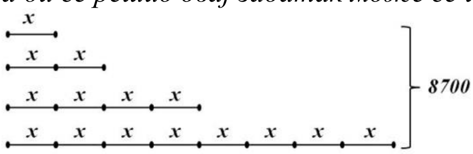
20 кутија + 240 = 40 кутија

$x \cdot 20 = 240$
$x = 240 : 20$
$x = 12$

7. На основу слике одреди масу једне јабуке, ако знаш да је свака јабука исте масе.

Решење:
Одбацивањем истих маса са леве и десне стране теразије остају у равнотежи, и тако је најлакше решити овај задатак. Ако и са левог и са десног таса склонимо по јабуку и тег од 50 грама, вага ће показивати масу једне јабуке од 100 грама.
На овај начин одбацујемо могућност да се појави једначина у којима се непозната појављује са обе стране знака једнакости.

8. У фабрици је у току сваке године сашивено дупло више мајица него у току претходне године. Ако је за 4 године сашивено укупно 8700 мајица, колико је мајица сашивено у току сваке године?
Решење:
Да би се решио овај задатак може се искористити модел са дужима.



$15 \cdot x = 8700$
$x = 8700 : 15$
$x = 580$
Прве године: 580 мајица
Друге године: 2 · 580 = 1160
Треће године: 4 · 580 = 2320
Четврте године: 8 · 580 = 4640

ВЕЖБА 15.	НАСТАВНА ЈЕДИНИЦА: ЈЕДНАЧИНЕ СА НЕПОЗНАТИМ ДЕЉЕНИКОМ
Тип часа:	Обрада
Алгебарске способности:	Развијање појма непозната и променљива; развијање способности схватања симбола у алгебри; правилно схватање знака једнакости

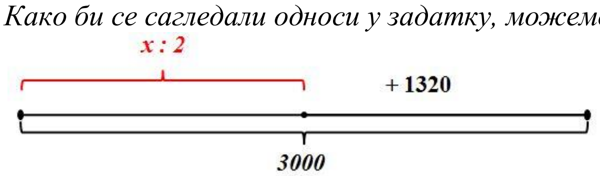
1. Број туриста једног хотела означен је са h. Од укупног броја туриста у хотелу, сваки трећи туриста је дете. Којим изразом можемо представити број деце у хотелу?

   а) h · 3　　　　б) h : 3
   в) 3 · h　　　　г) 3 : h

   Решење:
   Ако кажемо да је сваки трећи туриста дете, онда то значи да трећину туриста чине деца, односно да када укупан број туриста поделимо бројем 3 добијамо број деце. Дакле, тачан одговор је под б).

2. Када је Марко издвојио половину своје уштеђевине и добио од оца још 1320 динара, могао је купити зимске рукавице од 3000 динара. Колика је била Маркова уштеђевина пре куповине рукавица?

   Решење:
   Како би се сагледали односи у задатку, можемо искористити модел.



   $x : 2 + 1320 = 3000$
   $x : 2 = 1680$
   $x = 1680 \cdot 2$
   $x = 3360$

   Маркова уштеђевина пре куповине рукавица била је 3360 динара.

3. Ако се од трећине укупног броја продатих улазница за вожњу гондолом одузме 105 које су биле предвиђене за децу, остаће 116 улазница. Колико је продато укупно улазница за вожњу гондолом?

   Решење:
   $x : 3 - 105 = 116$
   $x : 3 = 221$
   $x = 221 \cdot 3$
   $x = 663$
   Одговор: Укупно је продато 663 улазнице.

4. Ако се од укупно 1663 туриста, одузме трећина оних који не иду на скијање добије се број од 1563 туристе. Одреди колико туриста не иде на скијање.

   Решење:
   $1663 - x : 3 = 1563$
   $x : 3 = 1664 - 1563$
   $x : 3 = 100$
   $x = 100 \cdot 3$
   $x = 300$
   Одговор: Укупан број гостију који не скијају је 300.

5. На основу дате једначине заокружи слово испред одговарајућег текста задатка:

x : 8 = 220

а) Теодора путује авионом из Београда за Амстердам. Када је прешла осмину пута, стјуард јој је рекао да треба да прелете још 220 километара. Колико је удаљен Амстердам од Београда?

б) Теодора путује авионом из Београда за Амстердам. Када је прешла шестину пута, стјуард јој је рекао да су прелетели 220 километара. Колико је удаљен Амстердам од Београда?

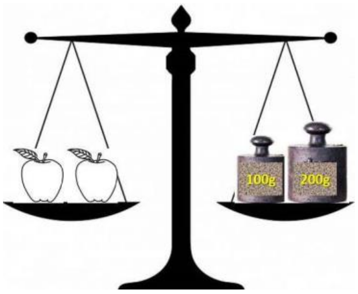
в)Теодора путује авионом из Београда за Амстердам. Када је прешла осмину пута, стјуард јој је рекао да су прелетели 220 километара. Колико је удаљен Амстердам од Београда?

г)Теодора путује авионом из Београда за Амстердам. Када је прешла осмину пута, стјуард јој је рекао да су прелетели 2200 километара. Колико је удаљен Амстердам од Београда?

Решење:

На основу једначине може се закључити да је x : 8 означава осми део (осмину) укупне дужине пута. На основу тога можемо закључити да је тачан одговор под в).

6. На осонову слика одреди масу крушке, ако знаш да је маса свих јабука иста.



Решења:

Овај задатак се може решити на више начина. Битно је да ученици увиде односе између маса на тасовима. Најлакше је да почну од прве ситуације и одреде масу једне јабуке, а затим то примене и на другим теразијама.

Маса једне јебуке:

$2 \cdot x = 100g + 200g$

$x = 150\ g$

Маса једне крушке:

$150g + y = 200g + 50g$

$y = 250g – 150g$

$y = 100g$

ВЕЖБА 16.	**НАСТАВНА ЈЕДИНИЦА: ЈЕДНАЧИНЕ СА НЕПОЗНАТИМ ДЕЛИОЦЕМ**
Тип часа:	Обрада
Алгебарске способности:	Развијање појма непозната и променљива; развијање способности схватања симбола у алгебри; правилно схватање знака једнакости

1. На путу од једног до другог града авион треба да пређе1800km. Колико сати је потребно да дође до тог града, ако сваког сата прелази 600 километара?

   Решење:
   1800km : x = 600km
   x = 1800km : 600km
   x = 3
   Одговор: Потребна су му 3 сата да допутује од једног до другог града.

2. Број кутија бомбона означен је са z. Ако Маја 320 бомбона подели у те кутије, тако да у свакој кутији буде исти број бомбона, колико бомбона ће бити у свакој кутији? Који од записа одговара броју бомбона у свакој кутији?
   а) 320 · z   б) z : 320
   в) 320 : z   г) 320 – z

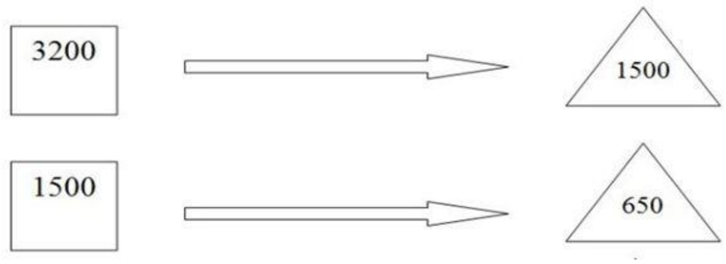
   Решење:
   На основу односа који постоје у задатку можемо закључити да непозната у овом случају представља број број кутија, што даље значи да ће израз који означава број бомбона у свакој кутији бити 320 : *z. Тачан запис је под в).*

3. У продавници у једној кутији је било 2400 и у другој кутији 1200 кликера. Кликере треба распоредити у одређени број кесица. Колико кесица је потребно за расподелу, ако знамо да у сваку кесицу може да стане тачно 90 кликера?

   Решење:
   Овај задатак се коришћењем једначине. Ученици могу користити слику или неки други облик репрезентације како би представили односе у задатку.
   (2400 + 1200) : x = 90
   3600 : x = 90
   x = 3600 : 90
   x = 40
   Одговор: Потребно је 40 кесица да би се упаковале ове бомбоне.

4. Првог дана камиони за транспорт поврћа су прешли укупно 300 km, другог дана 340 km. Колико камиона је учествовало у транспорту, ако знамо да је сваки од њих за оба дана прешао по 128 km?
   Решење:
   (300km + 340km) : x = 128km
   660km : x = 128km
   x = 640km : 128km
   x = 5
   Одговор: У транспорту поврћа учествовало је 5 камиона.

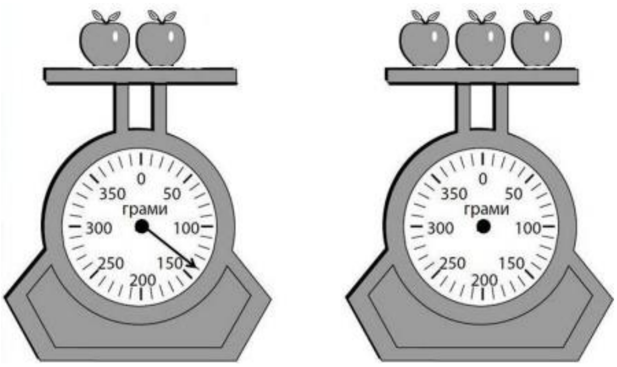
5. Мирко је користио једно правило да би од броја у квадратима добио број у троугловима, као на слици.



а) Број дели са 3.
б) Број дели са два и одузима 100.
в) Број множи са два и додаје 200.
г) Број дели са два и одузима 200.

Решење:
Да би се могло уочити правило треба сагледати односе који постоје између вредности у квадратима и троугловима. На основу вредности и уочавањем везе између овако датих бројева, можемо уочити да се вредноси мењају тако што се број у квадрату дели са два и одузима 100. Тачан одговор је под б).

6. Одреди масу јабука на слици десно, ако знаш да је свака јабука исте масе.



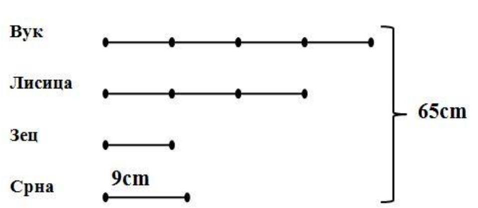
Решење:
Пошто је маса две јабуке 140 грама, маса једне је 70 грама. Маса три такве јабуке на ваги биће 210 грама.

ВЕЖБА 17.	НАСТАВНА ЈЕДИНИЦА: ЈЕДНАЧИНЕ СА МНОЖЕЊЕМ И ДЕЉЕЊЕМ
Тип часа:	Утврђивање
Алгебарске способности:	Развијање појма непозната и променљива; развијање способности схватања симбола у алгебри; правилно схватање знака једнакости

1. У једној шуми је x зечева. Зечева је десет пута више него јелена. Заокружи израз показује број јелена у шуми.
   а) x · 10 б) x : 10
   в) 10 + x г) x – 10
   Решење:
   *Тачан одговор је под б). Ако је зечева десет пута више, значи да је јелена десет пута мање, стога је тачан одговор **x: 10**.*
2. Да би се прехранили у току зиме врапци су у своју кућицу у дрвету сакупили укупно 3200 семенки. У кућици живи неколико врабаца. Колико је врабаца у тој кућици, ако сваки од вра поједе у току зиме по 800 семенки?
   Решење:
   3200 : x = 800
   x = 3200 : 800
   x = 4
   Одговор: Врабаца у дрвету је 4.
3. Дата је једначина:
   4 · x + 1200 = 5000
   Заокружи слово испред ситуације која одговара датој неједначини.
   а) Ако Теа учетворостручи свој новац и на ту суму дода још 1200 динара имаће мање од 5000 динара. Колико новца има Теа?
   б) Ако Теа учетворостручи свој новац и на ту суму дода још 1200 динара, имаће 5000 динара. Колико новца има Теа?
   в) Ако Теа увећа четири пута свој новац, а затим на ту суму дода још 1200 динара имаће више од 5000 динара. Колико новца има Теа?
   г) Ако Теа увећа своју суму новца пет пута, а затим на ту суму дода 1200 динара имаће 5000 динара. Колико новца има Теа?
   Решење:
   Тачан одговор је под б).
4. Животиње су се такмичиле ко има најдужи реп. Вуков реп је четири пута дужи од репа зеца. Лисица има реп чија је дужина 3 пута дужа од зеца, док је срнин реп дуг 9 cm. Одреди чији р је најдужи, а чији најкраћи, ако знаш да је укупна дужина свих репова ове 4 животиње 65 центиметара.

Животиње	Дужина репа	Освојено место
Зец		
Лисица		
Вук		
Срна		

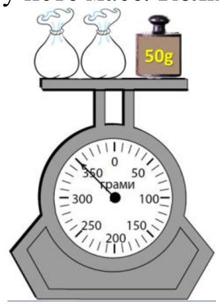
Решење:
Може се решити на различите начине. Један од њих је метода дужи.



(65cm – 9cm) : 8 = 56 cm : 8 = 7cm

Или, ако дужину зечевог репа означимо као непознату, онда можемо искористити и једначину:
8 · x + 9cm = 65cm
8 · x = 65cm – 9cm
8 · x = 56cm
x = 56cm : 8
x = 7cm
Вукв реп: 4 · 7cm = 28cm
Лисичији реп: 3 · 7cm = 21cm
Зечев реп је дугачак 7 cm, лисичији реп 21 cm, а вуков реп 28 cm .

5. Мерећи своје сакупљене орахе у току дана, веверице су дошле до резултата на слици. Врећи су исте масе. Колика маса би била за 3 овакве кесице?

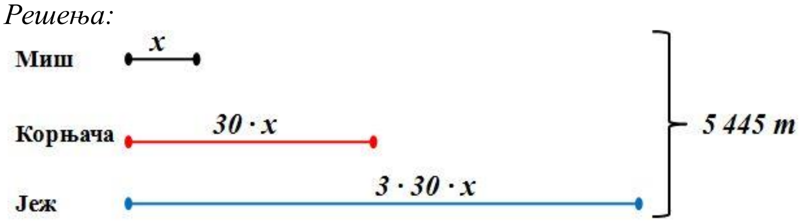


Решење:
2 · x + 50g = 350g
2 · x = 350g – 50g
2 · x = 300g
X = 300g : 2
x = 150g
Одговор: Маса једне врећице је 150 грама.

6. У четири исте вреће ораха има иста количина ораха као и у две такве вреће врећице и још 12 ораха. Свака врећа има исти број ораха. Колико ораха је у једној врећици?
Решење:
Може се користити једначина (4 · x = 2 · x + 1200), али се на овом узрасту мже искористити модел дужи како би се избегло коришћење једначина са непознатим са обе стране знака једнакости.
Може се искористити модел дужи.

2 · x = 1200
x = 1200 : 2
x = 600
Ако се у четири вреће налази иста количина ораха као у две вреће и још 1200 ораха, то значи да се у две вреће налази количина од 1200 ораха. Ако знамо да се у свакој врећи налази исти број ораха онда ће у једној бити 600 ораха.

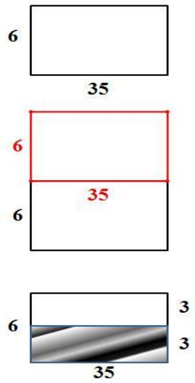
7. Корњача је за сат времена прешла тридесет пута дужи пут од миша, а јеж три пута дужи пут у односу на корњачу. Колики пут ће прећи свака од животиња за сат времена, ако су за сат времена укупно прешли 5 445 метара?
Решења:



5 445m : 121 = 45m
Миш је прешао 45m, корњача 30 · 45m = 1350 m, и јеж 90 · 45m = 4050 m.
Или једначином:
121 · x = 5445m
x = 5445m : 121
x = 45m

ВЕЖБА 18.	**НАСТАВНА ЈЕДИНИЦА: ЗАВИСНОСТ ПРОИЗВОДА ОД ПРОМЕНЕ ЧИНИЛАЦА**
Тип часа:	**Обрада**
Алгебарске способности:	Разумевање функционалне зависности између компонената рачунских операција, способност уочавања функционалних односа на графикону, табели или слици правилно схватање знака једнакости

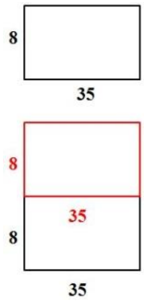
1. Један посластичар за један дан направи 350 колача. Колико колача ће направити 6 посластичара за један дан?
   а) Колико ће колача бити више направљено, ако се број посластичара увећа два пута?
   б) Колико ће колача бити направљено, ако се број посластичара умањи два пута?
   Решење:
   6 · 350 = 2100
   У закључивању о односима у задатку може помоћи и цртежи.



За један дан шест посластичара направи 2100 колача.
а) 6 · 2 · 350 = 12 · 350 = 4200
Ако се број посластичара повећа два пута, исто толико пута ће се повећати и број направљених колача.
б) 6 : 2 · 350 = 3 · 350 = 1050
Ако се број посластичара умањи два пута, исто толико пута ће се умањити и број направљених колача.

2. Ако један посластичар за сат времена потроши 35 килограма брашна, колико брашна потроши у смени од осам сати?
   Колико би посластичара требало да ради, ако би сви трошили 35kg брашна за смену и укупно потрошили 840kg брашна?
   Решење:
   8 · 35kg = 280kg
   На основу зависности производа од промене чинилаца закључујемо да колико се пута повећа проивод толико пута ће се повећати и један од чинилаца, под условом да други чинилац остане непромењен.
   840kg : 280kg = 3
   Да би потрошили 840кг брашна треба да раде 3 посластичара.

3. Машина у посластичарници, за сат времена направи 50 килограма сладоледа. Колико сладоледа ће направити за једну радну смену од осам сати, ако ради све време?
   Ако би две овакве машине радиле истовремено, за колико би времена направиле исту количину сладоледа, као једна машина за радну смену?
   Решење:
   8 · 50kg = 400kg
   За једну смену машина направи 400kg сладоледа.
   Да би се решио задатак у закључивању о односима може се употребити и модел.



(2 · 8) · 50kg = 16 · 50kg = 800kg
Ако би истовремено радиле две исте машине произвеле би два пута више сладоледа, односно 800кг за једну смену за један дан.

4. Када је конобар донео Маји рачун у посластичарници, он је био оштећен. Помози Маји да плати рачун. Колико би рачун износио да је исте ствари наручила за себе, сестру и брата?


СТУР "Колач"
ПИБ: 123456789
ИБФМ: ED123456
Сладолед 240дин
Колач 280дин
Сок 180дин
ЕТ:
ЗА УПЛАТУ: 700дин
ГОТОВИНА:
УПЛАЋЕНО:

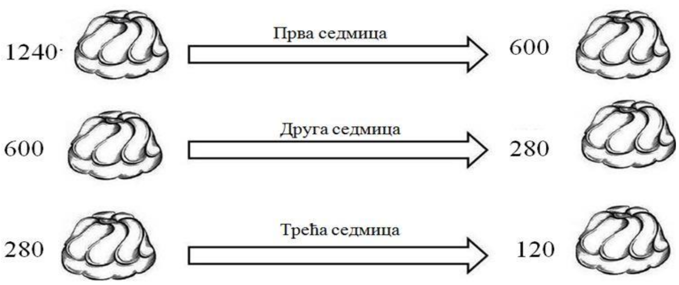
Решење:
Ако за једну особу рачун износи 700 динара онда ће за троје основа рачун бити три пута већи, односно:
3 · 700 = 2100
Рачун за три особе биће 2100 динара.

5. Да би куварица направила палачинке за двадесеторо деце употребиће следеће састојке дате у табели. Израчунај колико би јој састојака било потребно, ако би направила палачинке за шездесеторо деце и попуни табелу.

Састојци	Количина
Млеко	20 шоља
Брашно	30 шоља
Јаја	30 јаја

Састојци	Количина
Млеко	*60 шоља*
Брашно	*90 шоља*
Јаја	*90 јаја*

6. Због годишњих одмора у току лета посластичарница је постепено, за три седмице, смањивала број произведених колача. То су радили према одређеном правилу. На основу слике покушај да утврдиш које правило је коришћено да би се смањила производња.



а) Број колача су делили са три и додавали тридесет;
б) Број колача су множили са два;
в) Број колача су делили са два и одузимали двадесет
г) Број колача су делили са два и одузимали десет.

Решење:
На основу слике може се закључити о односима у задатку. На основу слике може се закључити да је у сва три случаја правило по које се смањивала производња одговара правилу под г. Дакле, да би смањили производњу радници су кристили правило да су број колача делили са два и одузимали двадесет.
1240 : 2 – 20 = 600
600 : 2 – 20 = 280
280 : 2 – 20 = 120

ВЕЖБА 19.	**НАСТАВНА ЈЕДИНИЦА: СТАЛНОСТ ПРОИЗВОДА**
Тип часа:	Обрада
Алгебарске способности:	Разумевање функционалне зависности између компонената рачунских операција, способност уочавања функционалних односа на графикону, табели или слици правилно схватање знака једнакости

1. Цвећарка Маша је првог дана продала 20 букета ружа по цени од 120 динара. Следећег дана Маша је продала два пута мање букета, и зарадила исту количину новца као првог дана. Колико су букети коштали другог дана?
   Решење:
   20 · 120 = 2400
   На основу сталности производа закључујемо да ако се један чинилац смањи два пута, други чинилац се мора повећати две пута да би производ остао исти. На основу тога закључујемо да се цена букета мора повећати два пута да би зарадила исту количину новца. Цена букета мора бити 240 динара.
   Други начин је да се одреди на основу постављене ситуације, при чему ће се користити једначина или рачунати:
   2400 : 10 = 240.

2. Одбојкашки клуб је наручио 200 лопти по цени од 1500 динара. Колико би могли наручити лопти за исту количину новца, да је цена лопте 3000 динара?
   Решење:
   Пошто је цена лопте дупло већа, онда се мора наручити дупло мањи број лопти за исту количину новца. То значи да би се могло наручити 100 лопти.
   200 · 1500 = 300 000
   300 000 : 3000 = 100

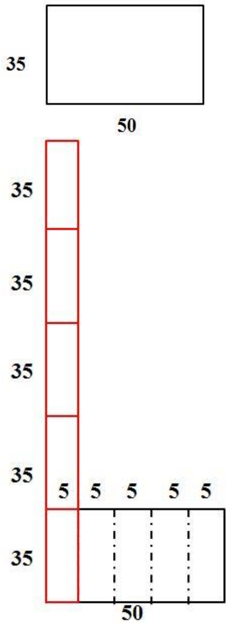
3. Марко је имао 50 новчаница од 2000 динара. Колико је Марко добио новчаница, када је новчанице заменио новчанице у апоенима од 1000 динара?
   Решење:
   Вредност новчаница је се смањио за дупло, што значи да се број новчаница мора повећати два пута да би била иста количина новца. У овом случају новчаница треба да буде 100.
   50 · 2000 = 100 000
   100 000 : 1000 = 100

4. Ако је површина једног винограда правоугаоног облика дужине 100m и ширине 35m. Напиши димензије још 4 винограда који имају исту површину.
   Решење:
   Ако се примени сталност производа може се пронаћи велики број различитих решења:
   $$\left.\begin{array}{l} 100m \cdot 35m \\ 50m \cdot 70m \\ 25m \cdot 140m \\ 500m \cdot 7m \\ 20m \cdot 175m \end{array}\right\} 3500m^2$$

5. Врт облика квадрата има дужину 14m. Одреди димензије 3 врта облика правоугаоника чија је површина једнака површини датог врта (дужине страница су изражене природним бројевима).
   Решење:
   Ако се примени сталност производа може се пронаћи велики број различитих решења:
   $$\left.\begin{array}{l} 14m \cdot 14m \\ 7m \cdot 28m \\ 2m \cdot 98m \\ 1m \cdot 196m \end{array}\right\} 196m^2$$

6. Деда Миле је прошле године засејао њиву правоугаоног облика ширине 35m и дужине 50m. Ако ове године скрати њиву по дужини 5 пута, шта мора да уради са ширином њиве како би засејао исту површину као и прошле године?

Решење:

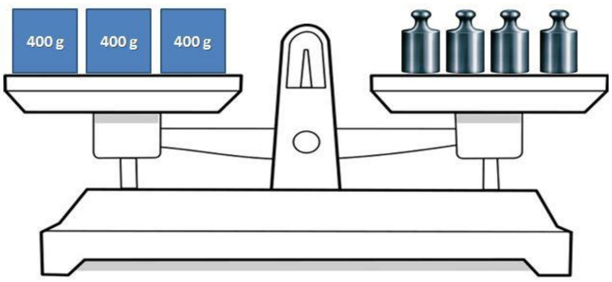


Ако деда Миле скрати њиву пет пута по дужини, онда је мора проширити пет пута по ширини како би засејао исту површину као и прошле године. То значи да ће дужина нове њиве бити 175m.

$35m \cdot 50m = 1750m^2$

$1750m^2 : 10m = 175m$

7. Ако се маса на левом тасу увећа четири пута, колико ће истих тегова бити потребно на десном тасу да би вага била у равнотежи?



Решење:

Да би маса на левом и десном тасу ваге била иста и вага била у равнотежи потребно је да се маса на левом и десном тасу подједнако повећава. Из тог разлога, ако се маса на левом тасу повећа четири пута то значи да ће се и маса на десном тасу ваге морати повећати исто толико пута. На основу тога закључујемо да ће на десном тасу ваге бити потребно 16 тегова исте масе да би вага била у равнотежи.

Овај задатак се може решити и аритметички:

$3 \cdot 400г = 1200г$

$1200г : 4 = 300г$

$1200г \cdot 4 = 4800г$

$4800г : 300г = 16$

ВЕЖБА 20.	НАСТАВНА ЈЕДИНИЦА: ЗАВИСНОСТ КОЛИЧНИКА ОД ПРОМЕНЕ ДЕЉЕНИКА
Тип часа:	Обрада
Алгебарске способности:	Разумевање функционалне зависности између компонената рачунских операција, способност уочавања функционалних односа на графикону, табели или слици правилно схватање знака једнакости

1. Ако је укупно 160 уџбеника математике подељено на 40 ученика тако да је свако од њих добио потпун комплет, колико уџбеника садржи један комплет?
   Да је два пута мањи број уџбеника подељен истом броју ученика, колико би уџбеника онда садржао уџбенички комплет?

   Решење:
   160 : 40 = 4
   Један комплет саджи 4 уџбеника.
   О другом услову у задатку се може закључити и на основу својства зависности количника од промене дељеника и делиоца. Пошто се дељеник смањио два пута, то се и количник смањио два пута.
   (160 : 2) : 40 = 80 : 40 = 2
   Уџбенички комплет би садржао 2 уџбеника.

2. У једној фабрици сока је 2600 литара сока упаковано у флаше од два литра. Ако се количина сока који се пакује утростручи, колико ће бити потребно флаша да би се сав сок упаковао?
   Решење:
   О задатку се може размишљати у оквиру реалне ситуације. Ако се повећава количина сока а он се пакује у флаше исте запремине, то значи да ће бити потребно дупло више флаша. Говорећи језиком алгебре, ако се дељеник повећа два пута, а делилац остане непромењен, количник ће се повећати такође два пута.
   2600l : 2 = 1300l
   (3 · 2600l) : 2 = 7800l : 2 = 3900l
   Биће потребно три пута више флаша.

3. Једна књижара је за шеснаест месеци продала укупно 5600 књига. Колико је књига продавано сваког месеца, ако се зна да је сваког месеца продат исти број књига?
   а) Колико би књига било продато сваког месеца, ако би се исти број књига продавао за два пута дужи период?
   б) Колико би књига било продато сваког месеца, ако би се исти број књига продавао за два пута краћи период?

   Решење:
   5600 : 16 = 350
   Сваког месеца би књижара продала 350 књига.
   Задатак се може решити без рачунања на основу познавања зависности количника од промене делиоца.
   а) 5600 : (16 · 2) = 5600 : 32 = 175
   Сваког месеца би се продала два пута мања количина књига, односно 175 књига.
   б) 5600 : (16 : 2) = 5600 : 8 = 700
   Сваког месеца би се продала два пута већа количина књига, односно 700 књига.

4. У библиотеку једне школе у току године је допремљено укупно 1200 књига. Колико књига је допремљено сваког месеца, ако је сваког месеца допреман исти број књига?
   а) Колико би књига било допремљено сваког месеца, ако би се допремао укупно четири пута мањи број књига?
   б) Колико би књига било допремљено сваког месеца, ако би се допремао укупно четири пута већи број књига?

Решење:
1200 : 12 = 100
Сваког месеца би било допремљено 100 књига.
Задатак се може решити без рачунања на основу познавања зависности количника од промене делиоца.
а) (1200 : 4) : 12 = 300 : 12 = 25
Ако би се допремао четири пута мањи број књига, онда би се сваког месеца допремио четири пута мањи број књига, односно 25 књига.
б) (1200 · 4) : 12 = 4800 : 12 = 400
Ако би се допремао четири пута већи број књига, онда би се сваког месеца допремио четири пута мањи број књига

5. Рачун у једној књижари за куповину свезака је приказан на слици. Колико кошта једна свеска? Ако би рачун у тој књижари три пута мањи, колико би коштала једна свеска? Колико би коштала једна свеска да је рачун 3 пута већи?


СТР "Књижара"
ПЕТРА ПЕТРОВИЋА 444
11500 ОБРЕНОВАЦ
БЕОГРАД-ОБРЕНОВАЦ
ПИБ: 123456789
ИБФМ: ED123456

Свезка
15 x 450 дин

ЕЂ:
ЕТ:

ЗА УПЛАТУ: 450 дин
ГОТОВИНА:

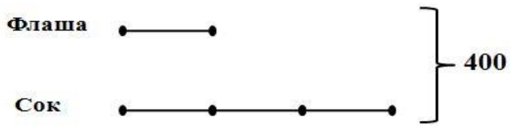
Решење:
450 : 15 = 30
Једна свеска кошта 30 динара.
(450 : 3) : 15 = 150 : 15 = 10
Ако би рачун био три пута мањи онда би и свеска коштала три пута мање, односно 10 динара.
(450 · 3) : 15 = 1350 : 15 = 90
Ако би рачун био три пута већи онда би и свеска коштала три пута више, односно 90 динара.

6. Књиге су сложене на полице, према одређеном правилу. На основу табеле одреди правило и попуни табелу до краја.

Број књига	60	1500	600	90	*120*
Број полица	2	5	*20*	*3*	4

Ако је број књига на полицама x, онда је број полица _________.
Решење:
На основу података из прве две колоне у табели може се закључити да се на свакој полици налази по 30 књига. На основу тога се попуни остатак табеле.
Ако је број књига на полицама x, онда је број полица x : 30.

7. Сок и флаша у којој се налази сок коштају 400 динара. Колико кошта флаша, а колико сок, ако знаш да је флаша 3 пута јефтинија од сока?
Решење:
За решење овог задатка можемо се послужити моделом.



На основу модела можемо одредити цену флаше.
400 : 4 = 100
3 · 100 = 300
Флаша кошта 100 динара, док сок кошта 300 динара.

ВЕЖБА 21.	НАСТАВНА ЈЕДИНИЦА: ЗАВИСНОСТ КОЛИЧНИКА ОД ПРОМЕНЕ ДЕЛИОЦА
Тип часа:	Обрада
Алгебарске способности:	Разумевање функционалне зависности између компонената рачунских операција, способност уочавања функционалних односа на графикону, табели или слици правилно схватање знака једнакости

1. Из штампарије је подједнако распоређено 945 књига у 9 књижара. Колико је књига добила свака књижара? Колико би књига било распоређено у сваку књижару да је три пута мањи број књижара?

Решење:

945 : 9 = 105

Ученици у задатку могу закључивати о решењу на основу претходног знања о зависности количника од промене делиоца.

Свака књижара је добила по 105 књига.

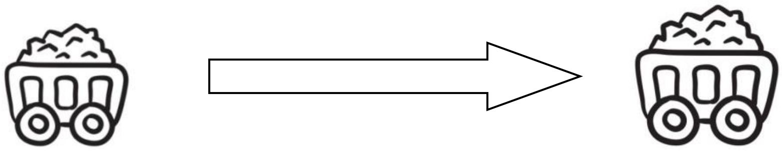
945: (9 : 3) = 945 : 3 = 315

У сваку књижару би било распоређено по 315 књига, односно три пута више књига.

1. Из магацина је укупно одвезено 5000 кутија помоћу 5 камиона. Колико је кутија одвезао сваки камион, ако знамо да је у сваком камиону био исти број кутија?
   Колико би кутија било у сваком камиону, да је исту количину кутија одвезао четири пута већи број камиона?
   Решење:
   Ученици у задатку могу закључивати о решењу на основу претходног знања о зависности количника од промене делиоца.
   5000 : 5 = 1000
   Сваки камион је одвезао по 1000 кутија.
   5000 : (5 · 4) = 5000 : 20 = 250
   У сваком камиону би било по 250 кутија, односно четири пута мање.

2. За 20 дана изнајмљивања аутомобила Марко је издвојио 22 000 динара. Колико би Марко издвајао новца дневно за дупло мањи број дана?

   Решење:
   22000 : 20 = 1100
   (22000 : 2) : 20 = 11000 : 20 = 550
   Марко би дневно за изнајмљивање аутомобила издвојио по 550 динара, односно дупло мање новца него у првом случају.
3. Због годишњих одмора су у једном руднику смањили производњу као на слици. На основу слике одреди и заокружи принцип који су рудари користили да би смањили производњу.



36 500 kg 9 025 kg

а) Масу произведеног угља од раније делили су са 3 и додавали 100 kg.

б) Масу произведеног угља од раније су множили са 3 и одузимали 100 kg.

в) Масу произведеног угља од раније делили су са 4 и одузимали 100 kg.

г) Масу произведеног угља од раније су множили са 4 и додавали 100 kg.

Решење:

Тачан одговор је под ц).
$(36500kg : 4) – 100kg = 9125kg – 100kg = 9025kg$
Масу произведеног угља од раније делили су са 4 и одузимали 100 кg.

4. Вредност пакета истих свезака је 1250 динара. Колика би била вредност 3 пакета ових свезака? Колико би била вредност овог пакета да свака свеска кошта дупло мање?
Решење:
$1250 \cdot 3 = 3750$

Вредност три пакета свезака је 3750 динара.

Ако свака свеска кошта дупло мање и вредност пакета би била дупло мања, самим тим $1250 : 2 = 625$.

5. Да би превезли терет укупне масе од 6800 kg у Индији су користили 50 слонова. Ако 4 коња пренесу терет једног слона, колико коња би им било потребно за овај исти терет.
Решење:
Ученици у задатку могу закључивати о решењу на основу претходног знања о зависности количника од промене делиоца.
50 слонова = 6800 кg терета

За исти терет било би потребно четири пута више коња него слонова.

То значи да је потребно $50 \cdot 4 = 200$ слонова.

6. За пречишћавање 360 000 литара воде у једном базену искоришћено је 50 литара специјалне течности. Колико литара воде се може пречистити једним литром течности? Колико литара течности је потребно за 3 пута већи базен?
Решење:
$360\,000\, l : 50\, l = 7\,200\, l$

Једним литром течности може се пречистити 7200 литара воде.

За три пута већи базен потребно је три пута више течности односно $3 \cdot 5 = 15$ литара течности.

ВЕЖБА 22.	**НАСТАВНА ЈЕДИНИЦА: СТАЛНОСТ КОЛИЧНИКА**
Тип часа:	Обрада
Алгебарске способности:	Разумевање функционалне зависности између компонената рачунских операција, способност уочавања функционалних односа на графикону, табели или слици правилно схватање знака једнакости

1. Стева треба да засади својих 1500 садница у 50 редова тако да у сваком реду буде исти број садница. Колико садница ће бити у сваком реду?
Да Стева треба да распореди дупло већи број садница да подједнако засади у дупло већи број редова, колико би онда било садница у сваком реду?
Да Стева треба да распореди два пута мањи број садница у два пута мањи број редова, колико би онда садница било у сваком реду?
Решење:
Ученици могу закључивати о односима без рачунања на основу правила које су претходно усвојили, а односи се на сталност количника.
1500 : 50 = 30
У сваком реду ће бити по 30 садница.
(1500 · 2) + (50 · 2) = 3000 : 100 = 30
У сваком реду би било по 30 садница.
(1500 : 2) · (50 : 2) = 750 : 25 = 30
У сваком реду би такође било по 30 садница.

2. У једној фабрици бомбона је 1500 бомбона подједнако распоређено у 150 кесица. Колико бомбона ће бити потребно, ако би се за паковање употребило 5 пута мањи број кесица за бомбона?
Решење:
Ученици могу закључивати о односима без рачунања на основу правила које су претходно усвојили, а односи се на сталност количника.
1500 : 150 = 10
Ако се употреби 5 пута мање кесица онда ће бити потребно и 5 пута мање бомбона.
(1500 : 5) : (150 : 5) = 10

3. Рачун у продавници су платила три друга тако што су трошак поделили равномерно. Да је рачун дупло већи, колико би онда другова морало да дели рачун, ако очекујемо да свако од њих потроши исту суму новца као и у рачуну на слици?

Рачун	Број другова	Сваки друг је платио по...
3600 динара	3	1200

Решење:
3600 : 3 = 1200
(3600 · 2) : 1200 = 7200 : 1200 = 6

Да је рачун дупло већи, дупло већи и број другова би морао да подели рачун.

4. У једној цвећари се дневно потроши 1800 ружа, тако што се направи по 300 букета са истим бројем ружа у сваком. За Осми март је утростручен број ружа. Колико букета ће се направити тог дана, ако број ружа у букету остане исти као пре?

   Решење:

   1800 : 300 = 6
   (1800 · 3) : 300 = 5400 : 300 = 18
   Направиће се 18 букета ружа., што значи да ће се утростручити и број букета.

5. Сваког дана се у мензи потроши 50 kg меса за прављење 200 пљескавица. Ако се жели утростручити број проиведених пљескавица исте величине као и пре треба:
   а) Дуплирати потребну количину меса,
   б) Учетвороструčити број радника,
   в) Утростручити потребну количину меса,
   г) Преполовити потребну количину меса.

   Решење:

   Ученици треба да закључују на основу сталности количника. Ако се утостручи број истих пљескавица, онда треба утростручити потребну количину меса од којих се пљескавице праве. Дакле, тачан одговор је под в).

6. Дека Миле 24 саднице шљива сади у редове. Напиши на које начине све деда Миле може засадити шљиве у редове, ако у сваком реду мора да буде исти број шљива. (Користи таблицу да решиш задатак).

Редови	Саднице
1	24
2	?

   Решење:

РЕДОВИ	*САДНИЦЕ*
1	*24*
2	*12*
3	*8*
4	*6*
6	*4*
8	*3*

7. Поља на шаховској табли су распоређена у осам редова и осам колона. На које начине би могао направити другачију таблу правоугаоног облика, али тако да укупан број поља остане исти као на шаховској табли? Ако ти је лакше цртај!

   Решење:

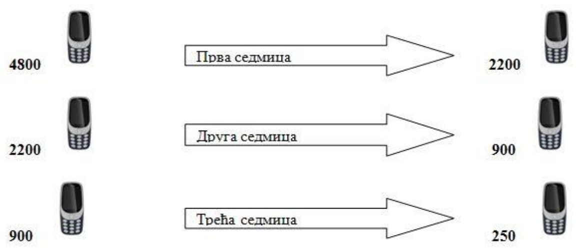
   Задатак се може решити цртањем или записом. Укупан број поља је 8 · 8 = 64.
   На три различита начина се може добити табла правоугаоног облика са истим бројем поља:
   64 x 1 или 32 x 2 или 16 x 4.

ВЕЖБА 23.	НАСТАВНА ЈЕДИНИЦА: ЗАВИСНОСТ ПРОИЗВОДА И КОЛИЧНИКА
Тип часа:	Утврђивање
Алгебарске способности:	Разумевање функционалне зависности између компонената рачунских операција, способност уочавања функционалних односа на графикону, табели или слици правилно схватање знака једнакости

1. Двеста сокова кошта колико и триста чоколада. Колико сокова се може купити у вредности од 1200 чоколада?
   Решење:

   200 сокова = 300 чоколада
   x сокова = 1200 чоколада
   Закључујемо да се број чоколада повећао четири пута, самим тим се може купити и четири пута већи број сокова, тако да је 4 · 200 сокова = 800 сокова.

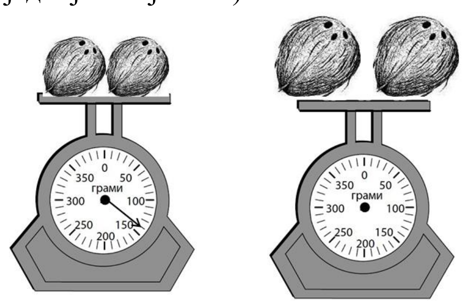
2. У једној фабрици производе се мобилни телефони. Због годишњих одмора морали су да смање производњу по неком принципу у току три седмице. На основу слике покушај да откријеш који је то принцип, тако што ћеш заокружити слово испред правог принципа.



а) Број произведених телефона подели са три.
б) Број произведених телефона подели са три и одузми двеста.
в) Број произведених телефона подели са два и одузми двеста.
г) Број произведених телефона помножи са два па подели са три.

Решење:
Број произведених телефона подели са два и одузме 200, односно тачан одговор је под в).
Доказ:
(4800 : 2) – 200 = 2400 – 200 = 2200
(2200 : 2) – 200 = 1100 – 200 = 900
(900 : 2) – 200 = 450 – 200 = 250

3. На слици десно доцртај масу коју мери вага, ако знаш да је маса једног кокосовог ораха на слици десно два пута већа од кокосовог ораха на слици лево. (маса кокосових ораха на једној ваги је иста)



Решење:
Ако знамо да је маса једног кокосовог ораха (на слици десно), 2 пута већа од масе кокосовог ораха (на слици лево),самим тим закључујемо да укупну масу оба кокосова ораха (слика лево) дуплирамо, тако да ће бити:
140g · 2 = 280g

4. Да би се превукао одређени терет потребно је педесет слонова. Колико је бизона и коња потребно да би превукли такав терет?

Слон је снажан као бизон и два коња.

Решење:
1 слон = 1 бизон + 2 коња
Пошто се број слонова повећао 50 пута, онда ће се исти број пута повећати број бизона и коња.
50 слонова = 50 бизона + 100 коња
Да би превукли исти терет потребно је 50 бизона и 100 коња.

5. Деда Мирко је прошле године сејао жито на парцелу правоугаоног облика дужине 150 метара и ширине 80 метара и за то урошио 35 kg жита. Ове године је проширио парцелу два пута по дужини. Колико жита му је потребно за сејање ове године.
Решење:

$P = 150m \cdot 80m = 12\,000m^2$
Ако се дужина парцеле повећа 2 пута, и површина ће се повећати 2 пута (ако се у обзир узме зависност производа од промене чинилаца – један од чинилаца се увећао два пута па се и производ увећао два пута)
Провера овог тврђења:
$P = (150m \cdot 2) \cdot 80m = 300m \cdot 80m = 24\,000m^2$
Самим тим и потребна количина жита се повећала два пута.
35 кг · 2 = 70 кг
Потребно му је 70 kg жита.

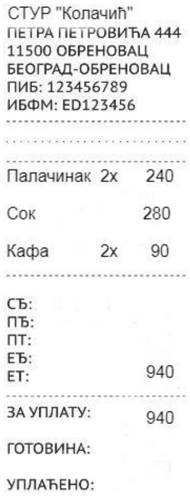
6. Марко је посматрао мапу Србије. Два центиметра на мапи показују 16 km у стварности. Растојање између два града на мапи је 20 центиметара. Колика је раздаљина између та два града у стварности?
Решење:
2 cm = 16 km
1 cm = 8 km
Дужина на карти је 20 пута већа, самим тим је 20 пута већа раздаљина и у стварности.
20 · 8 km = 160 km
Раздаљина у стварности је 160 km.

7. Користећи табелу откриј правило по коме је Ненад штедео новац за бицикл. Покушај да попуниш табелу у складу са правилом које си уочио и откријеш колико је Ненад потрошио новца за бицикл ако га је купио након 5 месеци уштеде.

Месеци	1	2	3	4	5
Новац	600 дин	1200 дин	*1800 дин*	*2400 дин*	*3000 дин*

Ако Ненад штеди x месеци онда би имао _____*$x \cdot 600$*_____дин.

Рачун из ресторана за Марка и његову сестру је приказан у табели. Колико би износио рачун у истом ресторану, ако би се наручила 4 палачинка, 2 сока и четири кафе?


СТУР "Колачић"
ПЕТРА ПЕТРОВИЋА 444
11500 ОБРЕНОВАЦ
БЕОГРАД-ОБРЕНОВАЦ
ПИБ: 123456789
ИБФМ: ED123456

Палачинак 2x 240
Сок 280
Кафа 2x 90

СЂ:
ПЂ:
ПТ:
ЕЂ:
ЕТ: 940

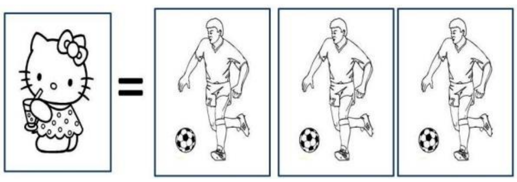
ЗА УПЛАТУ: 940
ГОТОВИНА:
УПЛАЋЕНО:

Решење:
Као и сваки од ових задатака може се решити на различите начине:

Рачун		*Нови рачун*	
2 палачинке	*480 динара*	*4 палачинке*	*960 динара*
1 сок	*280 динара*	*2 сока*	*560 динара*
2 кафе	*180 динара*	*4 кафе*	*360 динара*
Укупно	*940 динара*	*Укупно*	***1880 динара***

Други начин:
Закључујемо да се дуплирао број сваког од наручених ствари, самим тим се дуплирао и укупан рачун: 940 · 2 = 1880

8. Деца су размењивала сличице тако да су за једну сличицу цртаних филмова деца мењала за 3 сличице фудбалера.



Катарина је хтела да добије 30 сличица из цртаних филмова, колико би јој било потребно сличица фудбалера да размени?
Борко је имао 42 сличице фудбалера. Колико може добити сличица цртаних филмова, ако све сличице размени?
Решења:

30 · 3 = 90
30 сличица цртаних филмова = 90 сличица фудбалера
Катарини би било потребно 90 сличица фудбалера.
42 : 3 = 14

42 сличице цртаних филмова = 126 сличица фудбалера
Борко може добити 126 сличица фудбалера.

ВЕЖБА 24.	НАСТАВНА ЈЕДИНИЦА: НЕЈЕДНАЧИНЕ СА МНОЖЕЊЕМ
Тип часа:	Утврђивање
Алгебарске способности:	Правилно схватање симбола у алгебри, развијање појма промењиве и непознате

1. Ако је хлеб скупљи од 5 кифли, да ли је скупљи и од две кифле?

   Решење:

   Хлеб је скупљи и од две кифле. Ако је скупљи од пет, онда је скупљи и од две.

2. У пекару је допремљено 25 џакова брашна, тако да је сада укупно мање од 350 kg брашна. Колико килограма може бити маса једног џака брашна?

   Решење:

   Овај задатак се може решити употребом неједначина.

   $25 \cdot x < 350kg$

   $x < 350\ kg : 25$

   $x < 14kg$

   $x \in \{13, 12, 11, \dots, 2, 1\}$

3. У току школског одмора пекара је продала 25 бухтли које су укупно коштале мање од 1000 динара. Којом неједначином се може изразити колико може коштати једна бухтла?

   а) $x \cdot 25 > 1000$ б) $25 \cdot x < 1000$

   в) $1000 > 25 : x$ г) $25 \cdot x = 1000$

   Решење:

   Међу понуђеним одговорима, ученик треба да препозна значење и улогу коју симбол има у овом проблему. Имајући у виду да овај задатак може имати више решења, то значи да је у питању променљива па самим тим и неједначина. Пошто 25 бухтли треба да буде мање од 1000 динара, то значи да је тачан одговор под б.

4. Одреди колика може бити маса једне переце, ако су теразије у овом положају. Маса обе переце је иста.

Решење:
На слици се може уочити да тасови ваге нису у равнотежи, то значи да је маса тега од 50 грама већа од масе две переце исте масе. Да бисмо одредили колика маса може бити једне переце можемо искористити неједначину.

$2 \cdot x < 50g$

$x < 50g : 2$

$x < 25g$ $x \in \{24g, 23g, \dots, 2g, 1g\}$

Маса переца може бити од 1грама до 24 грама.

5. Тридесет две переце коштају мање него тепсија бурека. Маса тепсије бурека је 1кг. Колико може коштати једна переца ако 1kg бурека кошта 1600 динара?

Решење:

Пошто 32 переце коштају мање него тепсија бурека, то значи да 32 переце морају коштати мање од 1600 динара.

$32 \cdot x < 1600$
$x < 1600 : 32$
$x < 50$
$x \in \{50, 48, 47, \ldots, 2, 1\}$

6. Пекар треба да донесе на печење различите производе у пекари. У кутију је ставио 30 паковања кифлица и 40 паковања штрудлица. Одреди колика може бити маса једног паковања, ако знаш да су сва паковања исте масе и да једна кутија може да издржи масу мању од 140 000 грама.

Решење:

Задатак се може решити тако што ће се искористити неједначина.

$(30 + 40) \cdot x < 140\,000g$
$70 \cdot x < 140\,000g$
$x < 140\,000g : 70$
$x < 2000g \;\; x \in \{1999, 24, 23, \ldots 1\}$

ВЕЖБА 25.	НАСТАВНА ЈЕДИНИЦА: НЕЈЕДНАЧИНЕ СА ДЕЉЕЊЕМ
Тип часа:	Утврђивање
Алгебарске способности:	Правилно схватање симбола у алгебри, развијање појма променљиве и непознате

1. Укупно мање од 55 килограма хране поједе 5 коња за један дан. Да ли то значи да је свако од тих коња појео мање од 55 килограма?

   Решење:

   Да то значи да је сваки коњ појео појединачно мање од 55 килограма.

2. Зоолошки врт је добио 54 харинге за исхрану пингвина. Колико пингвина се може нахранити, ако сваки од њих може да поједе мање од 6 харинги. Одреди коју неједначину можемо искористити да бисмо решили овај проблем.

   а) 54 : x > 6   б) 54 : x = 6

   в) x : 54 < 6   г) 54 : x < 6

   Решење:

   Да бисмо решили овај задатак потребно је да искористимо неједначину, пошто сваки од пингвина може појести мање од 6 харинги. Тачан одговор је под г).

3. Слон поједе за један сат 35 килограма траве, исто као неколико жирафа. Колико жирафа може јести ту количину траве, ако свака од жирафа може да поједе мање од 7 килограма траве?

   Решење:

   Ученик може нацртати цртеж који ћему приближити ситуацију и омогућити да запише једначину која одговара овој ситуацији.

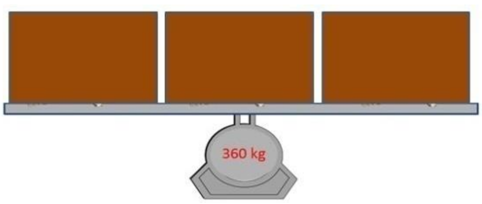
   Како бисмо решили овај задатак потребно је да искористимо неједначину. Посебно треба обратити пажњу на промену знака у једначини. Пошто количник 35kg : x треба да буде мањи од 7, онда делилац мора бити већи од 5. Када се дељеник повећава количник се смањује. Мора бити испуњен још један услов, а то је да дељеник мора бити дељив делиоцем.

   35kg : x < 7kg
   x > 35kg : 7kg
   x > 5

   $x \in \{7, 35\}$

   Ову количину траве може појести 7 или 35 жирафа.

4. На ваги се налазе сандуци са храном за животиње у зоолошком врту. Колико се оваквих сандука може сместити у камион чија је носивост мања од 720 килограма?



Решење:

Да бисмо могли одредити колико се сандука са слике може сместити на камион, треба одредити масу једног сандука.

$360kg : 3 = 120kg$

Пошто смо одредили масу једног сандука, даље задатак решавамо постављањем неједначине.

$x \cdot 120kg < 720kg$
$x < 720kg : 120kg$
$x < 6$
$x \in \{5, 4, 3, 2, 1\}$
У овакав камион се може сместити највише 5 сандука хране.

5. За седам дана зоолошки врт је посетио одређени број ученика из 8 одељења. Колико је ученика могло посетити зоолошки врт, ако знаш да је у сваком одељењу било мање од 20 ученика?

   Решење:

   Задатак се може решити коришћењем неједначине.

   $x : 8 < 20$

   $x < 8 \cdot 20$

   $x < 160$

   $x \in \{ 152, 144, 136 \ldots 16, 8\}$

   Зоолошки врт мора посетити најмање по један ученик из сваког одељења. Стога, треба нагласити да решења неједначине могу бити само решења дељива са 8.

6. У магацину хране за животиње у зоолошком врту је допремљено 48 тона хране. Колико пута је камион могао допремити храну, ако знаш да је носивост камиона мања од 8 тона и да је сваки пут допремао исту количину хране?

   Решење:

   $48t : x < 8t$
   $x > 48t : 8t$
   $x > 6$
   $x \in \{12, 24, 48\}$

   Камион је могао храну допремити 12, 24 или 48 пута.

ПРИЛОГ 5. СТАТИСТИЧКЕ АНАЛИЗЕ

Иницијално мерење

Descriptives

	Група			Statistic	Std. Error
Иницијално мерење	Експериментална група	Mean		23,68	1,017
		95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	21,67	
			Upper Bound	25,70	
		5% Trimmed Mean		23,50	
		Median		23,50	
		Variance		134,357	
		Std. Deviation		11,591	
		Minimum		0	
		Maximum		50	
		Range		50	
		Interquartile Range		20	
		Skewness		0,177	0,212
		Kurtosis		-0,825	0,422
	Контролна група	Mean		23,81	0,957
		95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	21,92	
			Upper Bound	25,71	
		5% Trimmed Mean		24,02	
		Median		25,00	
		Variance		116,361	
		Std. Deviation		10,787	
		Minimum		0	
		Maximum		50	
		Range		50	
		Interquartile Range		17	
		Skewness		-0,166	0,215
		Kurtosis		-0,655	0,427

Финално мерење

Descriptives

	Група			Statistic	Std. Error
Финално мерење	Експериментална група	Mean		33,66	0,908
		95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	31,87	
			Upper Bound	35,46	
		5% Trimmed Mean		33,95	
		Median		33,50	
		Variance		107,109	
		Std. Deviation		10,349	
		Minimum		10	
		Maximum		50	
		Range		40	
		Interquartile Range		16	
		Skewness		-0,278	0,212
		Kurtosis		-0,635	0,422
	Контролна група	Mean		23,98	0,950
		95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	22,11	
			Upper Bound	25,86	
		5% Trimmed Mean		24,02	
		Median		25,00	
		Variance		114,524	
		Std. Deviation		10,702	
		Minimum		5	
		Maximum		45	
		Range		40	
		Interquartile Range		18	
		Skewness		-0,141	0,215
		Kurtosis		-0,938	0,427

Ретест

Descriptives

	Grupa			Statistic	Std. Error
Ретест	Експериментална група	Mean		31,98	0,907
		95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	30,19	
			Upper Bound	33,78	
		5% Trimmed Mean		32,18	
		Median		32,00	
		Variance		106,899	
		Std. Deviation		10,339	
		Minimum		8	
		Maximum		50	
		Range		42	
		Interquartile Range		15	
		Skewness		-0,226	0,212
		Kurtosis		-0,706	0,422
	Контролна група	Mean		21,75	0,912
		95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	19,94	
			Upper Bound	23,55	
		5% Trimmed Mean		21,77	
		Median		22,00	
		Variance		105,619	
		Std. Deviation		10,277	
		Minimum		2	
		Maximum		42	
		Range		40	
		Interquartile Range		19	
		Skewness		-0,098	0,215
		Kurtosis		-0,935	0,427

ПРИЛОГ 6.

1. Група

Зависна варијабла: Финално мерење постигнућа

			95% Confidence Interval	
Група	Mean	Std. Error	Lower Bound	Upper Bound
Експериментална група	33,729[a]	0,506	32,732	34,727
Контролна група	23,942[a]	0,512	22,934	24,951

a. Covariates appearing in the model are evaluated at the following values: Inicijalni = 23,75.

2. Пол

Зависна варијабла: Финално мерење постигнућа

			95% Confidence Interval	
Пол	Mean	Std. Error	Lower Bound	Upper Bound
Дечаци	28,855[a]	0,514	27,842	29,869
Девојчице	28,816[a]	0,509	27,814	29,818

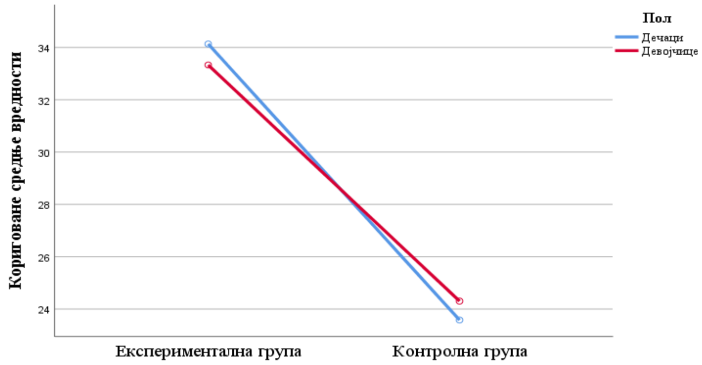
a. Covariates appearing in the model are evaluated at the following values: Inicijalni = 23,75.

3. Група * Пол

Зависна варијабла: Финално мерење постигнућа

				95% Confidence Interval	
Група	Пол	Mean	Std. Error	Lower Bound	Upper Bound
Експериментална група	Дечаци	34,131[a]	0,734	32,686	35,575
	Девојчице	33,328[a]	0,701	31,948	34,708
Контролна група	Дечаци	23,580[a]	0,718	22,166	24,995
	Девојчице	24,304[a]	0,735	22,857	25,752

a. Covariates appearing in the model are evaluated at the following values: Inicijalni = 23,75.



Covariates appearing in the model are evaluated at the following values: Inicijalni = 23,75

ПРИЛОГ 7.

1. Група

Зависна варијабла: Финално мерење

Група	Mean	Std. Error	95% Confidence Interval Lower Bound	95% Confidence Interval Upper Bound
Експериментална група	31,857[a]	0,683	30,513	33,201
Контролна група	22,888[a]	0,542	21,820	23,956

a. Covariates appearing in the model are evaluated at the following values: Inicijalni = 23,75.

2. Успех

Зависна варијабла: Финално мерење

Успех	Mean	Std. Error	95% Confidence Interval Lower Bound	95% Confidence Interval Upper Bound
Добар	23,454[a]	1,109	21,271	25,637
Врло добар	28,250[a]	0,658	26,954	29,546
Одличан	30,413[a]	0,532	29,366	31,460

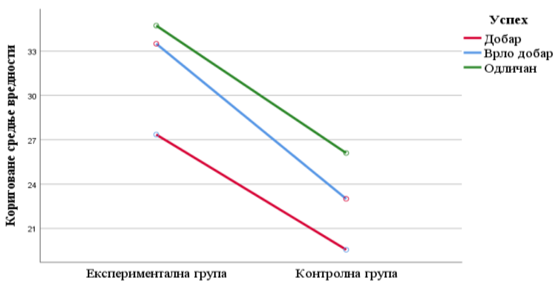
a. Covariates appearing in the model are evaluated at the following values: Inicijalni = 23,75.

3. Група * Успех

Зависна варијабла: Финално мерење

Група	Успех	Mean	Std. Error	95% Confidence Interval Lower Bound	95% Confidence Interval Upper Bound
Експериментална група	Добар	27,350[a]	1,735	23,933	30,767
	Врло добар	33,497[a]	0,899	31,727	35,268
	Одличан	34,724[a]	0,668	33,408	36,040
Контролна група	Добар	19,558[a]	1,216	17,164	21,952
	Врло добар	23,003[a]	0,893	21,245	24,761
	Одличан	26,103[a]	0,742	24,641	27,565

a. Covariates appearing in the model are evaluated at the following values: Inicijalni = 23,75.



Covariates appearing in the model are evaluated at the following values: Inicijalni = 23,75

ПРИЛОГ 8.

1. Група

Зависна варијабла: Финално мерење

Група	Mean	Std. Error	95% Confidence Interval Lower Bound	Upper Bound
Експериментална група	32,231[a]	0,614	31,023	33,440
Контролна група	22,465[a]	0,601	21,281	23,650

a. Covariates appearing in the model are evaluated at the following values: Inicijalni = 23,75.

2. Оцена

Зависна варијабла: Финално мерење

Оцена	Mean	Std. Error	95% Confidence Interval Lower Bound	Upper Bound
Довољан (2)	22,072[a]	1,334	19,444	24,700
Добар (3)	27,980[a]	0,855	26,296	29,664
Врло добар (4)	28,523[a]	0,622	27,298	29,748
Одличан (5)	30,818[a]	0,645	29,547	32,089

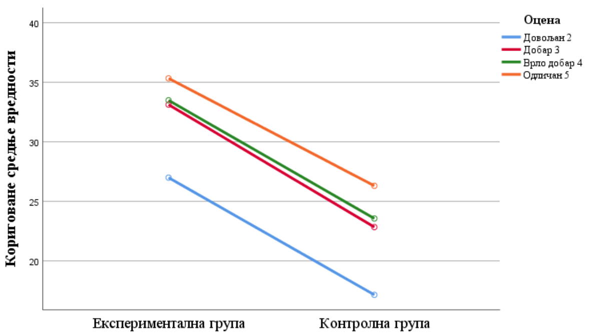
a. Covariates appearing in the model are evaluated at the following values: Inicijalni = 23,75.

3. Група * Оцена

Зависна варијабла: Финално мерење

Група	Оцена	Mean	Std. Error	95% Confidence Interval Lower Bound	Upper Bound
Експериментална група	Довољан 2	26,992[a]	1,835	23,377	30,606
	Добар 3	33,120[a]	1,125	30,905	35,336
	Врло добар 4	33,485[a]	0,911	31,691	35,279
	Одличан 5	35,327[a]	0,817	33,717	36,937
Контролна група	Довољан 2	17,152[a]	1,796	13,615	20,689
	Добар 3	22,839[a]	1,148	20,578	25,101
	Врло добар 4	23,561[a]	0,848	21,890	25,232
	Одличан 5	26,309[a]	0,866	24,603	28,014

a. Covariates appearing in the model are evaluated at the following values: Inicijalni = 23,75.



Covariates appearing in the model are evaluated at the following values: Inicijalni = 23,75

ПРИЛОГ 9.

1. Група

Зависна варијабла: Финално мерење

Група	Mean	Std. Error	95% Confidence Interval Lower Bound	Upper Bound
Експериментална група	6,459[a]	0,138	6,187	6,732
Контролна група	4,099[a]	0,140	3,823	4,374

a. Covariates appearing in the model are evaluated at the following values: Jednako1 = 3,97.

2. Пол

Зависна варијабла: Финално мерење

Пол	Mean	Std. Error	95% Confidence Interval Lower Bound	Upper Bound
Дечаци	5,290[a]	0,140	5,014	5,565
Девојчице	5,268[a]	0,138	4,995	5,541

a. Covariates appearing in the model are evaluated at the following values: Jednako1 = 3,97.

3. Група * Пол

Зависна варијабла: Финално мерење

Група	Пол	Mean	Std. Error	95% Confidence Interval Lower Bound	Upper Bound
Експериментална група	Дечаци	6,600[a]	0,200	6,206	6,994
	Девојчице	6,318[a]	0,191	5,942	6,695
Контролна група	Дечаци	3,980[a]	0,195	3,595	4,365
	Девојчице	4,217[a]	0,201	3,822	4,612

a. Covariates appearing in the model are evaluated at the following values: Jednako1 = 3,97.

ПРИЛОГ 10.

1. Група

Зависна варијабла: Финално мерење

Група	Mean	Std. Error	95% Confidence Interval Lower Bound	Upper Bound
Експериментална група	5,993[a]	0,183	5,632	6,354
Контролна група	3,924[a]	0,148	3,634	4,215

a. Covariates appearing in the model are evaluated at the following values: Jednako1 = 3,97.

2. Успех

Зависна варијабла: Финално мерење

Успех	Mean	Std. Error	95% Confidence Interval Lower Bound	Upper Bound
Добар	4,300[a]	0,291	3,728	4,873
Врло добар	4,861[a]	0,171	4,525	5,197
Одличан	5,715[a]	0,134	5,451	5,979

a. Covariates appearing in the model are evaluated at the following values: Jednako1 = 3,97.

3. Група * Успех

Зависна варијабла: Финално мерење

Група	Успех	Mean	Std. Error	95% Confidence Interval Lower Bound	Upper Bound
Експериментална група	Добар	5,121[a]	0,470	4,195	6,047
	Врло добар	5,898[a]	0,234	5,438	6,359
	Одличан	6,960[a]	0,175	6,614	7,305
Контролна група	Добар	3,480[a]	0,321	2,849	4,112
	Врло добар	3,823[a]	0,245	3,341	4,305
	Одличан	4,470[a]	0,195	4,086	4,853

a. Covariates appearing in the model are evaluated at the following values: Jednako1 = 3,97.

ПРИЛОГ 11.

1. Група

Зависна варијабла: Финално мерење

Група	Mean	Std. Error	95% Confidence Interval Lower Bound	95% Confidence Interval Upper Bound
Експериментална група	5,988[a]	0,161	5,670	6,306
Контролна група	3,887[a]	0,161	3,569	4,205

a. Covariates appearing in the model are evaluated at the following values: Jednako1 = 3,97.

2. Оцена

Зависна варијабла: Финално мерење

Оцена	Mean	Std. Error	95% Confidence Interval Lower Bound	95% Confidence Interval Upper Bound
Довољан (2)	3,911[a]	0,349	3,223	4,599
Добар (3)	4,864[a]	0,210	4,450	5,277
Врло добар (4)	5,093[a]	0,168	4,762	5,425
Одличан (5)	5,881[a]	0,157	5,573	6,190

a. Covariates appearing in the model are evaluated at the following values: Jednako1 = 3,97.

3. Група * Оцена

Зависна варијабла: Финално мерење

Група	Оцена	Mean	Std. Error	95% Confidence Interval Lower Bound	95% Confidence Interval Upper Bound
Експериментална група	Довољан (2)	4,616[a]	0,485	3,660	5,571
	Добар (3)	5,791[a]	0,291	5,218	6,364
	Врло добар (4)	6,358[a]	0,245	5,875	6,840
	Одличан (5)	7,188[a]	0,206	6,781	7,594
Контролна група	Довољан (2)	3,206[a]	0,481	2,260	4,153
	Добар (3)	3,937[a]	0,293	3,360	4,514
	Врло добар (4)	3,829[a]	0,231	3,375	4,283
	Одличан (5)	4,575[a]	0,222	4,137	5,013

a. Covariates appearing in the model are evaluated at the following values: Jednako1 = 3,97.

ПРИЛОГ 12.

1. Група

Зависна варијабла: Финално мерење

Група	Mean	Std. Error	95% Confidence Interval Lower Bound	95% Confidence Interval Upper Bound
Експериментална група	7,027[a]	0,142	6,748	7,306
Контролна група	4,948[a]	0,143	4,665	5,230

a. Covariates appearing in the model are evaluated at the following values: FunkcZav1 = 4,92.

2. Пол

Зависна варијабла: Финално мерење

Пол	Mean	Std. Error	95% Confidence Interval Lower Bound	95% Confidence Interval Upper Bound
Дечаци	5,974[a]	0,144	5,691	6,258
Девојчице	6,000[a]	0,143	5,719	6,281

a. Covariates appearing in the model are evaluated at the following values: FunkcZav1 = 4,92.

3. Група * Пол

Зависна варијабла: Финално мерење

Група	Пол	Mean	Std. Error	95% Confidence Interval Lower Bound	Upper Bound
Експериментална група	Дечаци	7,000[a]	0,205	6,597	7,404
	Девојчице	7,053[a]	0,197	6,666	7,441
Контролна група	Дечаци	4,949[a]	0,202	4,551	5,346
	Девојчице	4,947[a]	0,205	4,543	5,351

a. Covariates appearing in the model are evaluated at the following values: FunkcZav1 = 4,92.

ПРИЛОГ 13.

1. Група

Зависна варијабла: Финално мерење

Група	Mean	Std. Error	95% Confidence Interval Lower Bound	Upper Bound
Експериментална група	6,452[a]	0,181	6,096	6,808
Контролна група	4,650[a]	0,144	4,367	4,933

a. Covariates appearing in the model are evaluated at the following values: FunkcZav1 = 4,92.

2. Успех

Зависна варијабла: Финално мерење

Успех	Mean	Std. Error	95% Confidence Interval Lower Bound	Upper Bound
Добар	4,551[a]	0,282	3,995	5,107
Врло добар	5,473[a]	0,172	5,134	5,812
Одличан	6,628[a]	0,135	6,362	6,894

a. Covariates appearing in the model are evaluated at the following values: FunkcZav1 = 4,92.

3. Група * Успех

Зависна варијабла: Финално мерење

Група	Успех	Mean	Std. Error	95% Confidence Interval Lower Bound	Upper Bound
Експериментална група	Добар	5,383[a]	0,454	4,488	6,277
	Врло добар	6,429[a]	0,241	5,955	6,903
	Одличан	7,545[a]	0,173	7,203	7,887
Контролна група	Добар	3,720[a]	0,317	3,095	4,344
	Врло добар	4,518[a]	0,236	4,053	4,983
	Одличан	5,712[a]	0,195	5,328	6,095

a. Covariates appearing in the model are evaluated at the following values: FunkcZav1 = 4,92.

ПРИЛОГ 14.

1. Група

Зависна варијабла: Финално мерење

Група	Mean	Std. Error	95% Confidence Interval Lower Bound	Upper Bound
Експериментална група	6,549[a]	0,161	6,232	6,866
Контролна група	4,481[a]	0,158	4,171	4,792

a. Covariates appearing in the model are evaluated at the following values: FunkcZav1 = 4,92.

2. Оцена

Зависна варијабла: Финално мерење

Оцена	Mean	Std. Error	95% Confidence Interval Lower Bound	Upper Bound
Довољан (2)	4,081[a]	0,340	3,412	4,750
Добар (3)	5,252[a]	0,217	4,826	5,679
Врло добар (4)	5,967[a]	0,166	5,641	6,294
Одличан (5)	6,760[a]	0,159	6,447	7,073

a. Covariates appearing in the model are evaluated at the following values: FunkcZav1 = 4,92.

3. Група * Оцена

Зависна варијабла: Финално мерење

Група	Оцена	Mean	Std. Error	95% Confidence Interval Lower Bound	Upper Bound
Експериментална група	Довољан (2)	5,336[a]	0,473	4,404	6,268
	Добар (3)	6,157[a]	0,296	5,574	6,741
	Врло добар (4)	7,008[a]	0,243	6,530	7,486
	Одличан (5)	7,695[a]	0,204	7,292	8,097
Контролна група	Довољан (2)	2,826[a]	0,472	1,896	3,755
	Добар (3)	4,348[a]	0,293	3,770	4,926
	Врло добар (4)	4,926[a]	0,227	4,479	5,373
	Одличан (5)	5,826[a]	0,225	5,383	6,269

a. Covariates appearing in the model are evaluated at the following values: FunkcZav1 = 4,92.

ПРИЛОГ 15.

1. Група

Зависна варијабла: Финално мерење

Група	Mean	Std. Error	95% Confidence Interval Lower Bound	Upper Bound
Експериментална група	6,802[a]	0,179	6,449	7,155
Контролна група	5,622[a]	0,181	5,265	5,979

a. Covariates appearing in the model are evaluated at the following values: GrafSli1 = 5,63.

2. Пол

Зависна варијабла: Финално мерење

Пол	Mean	Std. Error	95% Confidence Interval Lower Bound	Upper Bound
Дечаци	6,356[a]	0,181	5,999	6,713
Девојчице	6,068[a]	0,179	5,715	6,421

a. Covariates appearing in the model are evaluated at the following values: GrafSli1 = 5,63.

3. Група * Пол

Зависна варијабла: Финално мерење

Група	Пол	Mean	Std. Error	95% Confidence Interval Lower Bound	Upper Bound
Експериментална група	Дечаци	7,038[a]	0,260	6,526	7,549
	Девојчице	6,566[a]	0,248	6,079	7,054
Контролна група	Дечаци	5,674[a]	0,254	5,175	6,174
	Девојчице	5,570[a]	0,260	5,059	6,081

a. Covariates appearing in the model are evaluated at the following values: GrafSli1 = 5,63.

ПРИЛОГ 16.

1. Група

Зависна варијабла: Финално мерење

Група	Mean	Std. Error	95% Confidence Interval Lower Bound	95% Confidence Interval Upper Bound
Експериментална група	6,281[a]	0,241	5,807	6,755
Контролна група	5,246[a]	0,190	4,872	5,620

a. Covariates appearing in the model are evaluated at the following values: GrafSli1 = 5,63.

2. Успех

Зависна варијабла: Финално мерење

Успех	Mean	Std. Error	95% Confidence Interval Lower Bound	95% Confidence Interval Upper Bound
Добар	4,490[a]	0,389	3,723	5,257
Врло добар	6,112[a]	0,224	5,671	6,554
Одличан	6,688[a]	0,181	6,332	7,045

a. Covariates appearing in the model are evaluated at the following values: GrafSli1 = 5,63.

3. Група * Успех

Зависна варијабла: Финално мерење

Група	Успех	Mean	Std. Error	95% Confidence Interval Lower Bound	95% Confidence Interval Upper Bound
Експериментална група	Добар	4,873[a]	0,612	3,669	6,078
	Врло добар	7,071[a]	0,313	6,454	7,687
	Одличан	6,898[a]	0,232	6,442	7,355
Контролна група	Добар	4,107[a]	0,427	3,267	4,947
	Врло добар	5,154[a]	0,309	4,546	5,763
	Одличан	6,478[a]	0,256	5,975	6,982

a. Covariates appearing in the model are evaluated at the following values: GrafSli1 = 5,63.

ПРИЛОГ 17.

1. Група

Зависна варијабла: Финално мерење

Група	Mean	Std. Error	95% Confidence Interval Lower Bound	95% Confidence Interval Upper Bound
Експериментална група	6,450[a]	0,217	6,023	6,877
Контролна група	5,202[a]	0,215	4,778	5,625

a. Covariates appearing in the model are evaluated at the following values: GrafSli1 = 5,63.

2. Оцена

Зависна варијабла: Финално мерење

Оцена	Mean	Std. Error	95% Confidence Interval Lower Bound	95% Confidence Interval Upper Bound
Довољан (2)	4,664[a]	0,471	3,738	5,591
Добар (3)	5,647[a]	0,295	5,065	6,229
Врло добар (4)	6,163[a]	0,223	5,724	6,602
Одличан (5)	6,828[a]	0,215	6,405	7,252

a. Covariates appearing in the model are evaluated at the following values: GrafSli1 = 5,63.

3. Група * Оцена

Зависна варијабла: Финално мерење

Група	Оцена	Mean	Std. Error	95% Confidence Interval Lower Bound	Upper Bound
Експериментална група	Довољан (2)	5,291[a]	0,644	4,023	6,559
	Добар (3)	6,778[a]	0,397	5,995	7,560
	Врло добар (4)	6,484[a]	0,326	5,842	7,127
	Одличан (5)	7,247[a]	0,281	6,694	7,799
Контролна група	Довољан (2)	4,038[a]	0,648	2,763	5,314
	Добар (3)	4,516[a]	0,402	3,725	5,308
	Врло добар (4)	5,842[a]	0,307	5,238	6,446
	Одличан (5)	6,410[a]	0,299	5,821	6,998

a. Covariates appearing in the model are evaluated at the following values: GrafSli1 = 5,63.

ПРИЛОГ 18.

1. Група

Зависна варијабла: Финално мерење

Група	Mean	Std. Error	95% Confidence Interval Lower Bound	Upper Bound
Експериментална група	6,877[a]	0,147	6,587	7,167
Контролна група	4,617[a]	0,149	4,324	4,910

a. Covariates appearing in the model are evaluated at the following values: Simbol1 = 4,59.

2. Пол

Зависна варијабла: Финално мерење

Пол	Mean	Std. Error	95% Confidence Interval Lower Bound	Upper Bound
Дечаци	5,791[a]	0,149	5,497	6,085
Девојчице	5,702[a]	0,148	5,411	5,993

a. Covariates appearing in the model are evaluated at the following values: Simbol1 = 4,59.

3. Група * Пол

Зависна варијабла: Финално мерење

Група	Пол	Mean	Std. Error	95% Confidence Interval Lower Bound	Upper Bound
Експериментална група	Дечаци	6,943[a]	0,213	6,523	7,363
	Девојчице	6,810[a]	0,204	6,409	7,211
Контролна група	Дечаци	4,640[a]	0,209	4,229	5,050
	Девојчице	4,595[a]	0,214	4,174	5,015

a. Covariates appearing in the model are evaluated at the following values: Simbol1 = 4,59.

ПРИЛОГ 19.

1. Група

Зависна варијабла: Финално мерење

Група	Mean	Std. Error	95% Confidence Interval Lower Bound	Upper Bound
Експериментална група	6,415[a]	0,192	6,036	6,794
Контролна група	4,372[a]	0,157	4,063	4,680

a. Covariates appearing in the model are evaluated at the following values: Simbol1 = 4,59.

2. Успех

Зависна варијабла: Финално мерење

Успех	Mean	Std. Error	95% Confidence Interval Lower Bound	Upper Bound
Добар	4,407[a]	0,303	3,811	5,003
Врло добар	5,684[a]	0,181	5,328	6,040
Одличан	6,089[a]	0,141	5,811	6,368

a. Covariates appearing in the model are evaluated at the following values: Simbol1 = 4,59.

3. Група * Успех

Зависна варијабла: Финално мерење

Група	Успех	Mean	Std. Error	95% Confidence Interval Lower Bound	Upper Bound
Експериментална група	Добар	5,216[a]	0,487	4,256	6,176
	Врло добар	6,967[a]	0,251	6,472	7,462
	Одличан	7,062[a]	0,186	6,696	7,428
Контролна група	Добар	3,597[a]	0,344	2,919	4,276
	Врло добар	4,401[a]	0,255	3,898	4,903
	Одличан	5,117[a]	0,206	4,712	5,522

a. Covariates appearing in the model are evaluated at the following values: Simbol1 = 4,59.

ПРИЛОГ 20.

1. Група

Зависна варијабла: Финално мерење

Група	Mean	Std. Error	95% Confidence Interval Lower Bound	Upper Bound
Експериментална група	6,534[a]	0,175	6,190	6,877
Контролна група	4,310[a]	0,173	3,970	4,650

a. Covariates appearing in the model are evaluated at the following values: Simbol1 = 4,59.

2. Оцена

Зависна варијабла: Финално мерење

Оцена	Mean	Std. Error	95% Confidence Interval Lower Bound	Upper Bound
Довољан (2)	4,136[a]	0,373	3,402	4,869
Добар (3)	5,814[a]	0,228	5,366	6,263
Врло добар (4)	5,570[a]	0,181	5,213	5,927
Одличан (5)	6,167[a]	0,167	5,838	6,497

a. Covariates appearing in the model are evaluated at the following values: Simbol1 = 4,59.

3. Група * Оцена

Зависна варијабла: Финално мерење

Група	Оцена	Mean	Std. Error	95% Confidence Interval Lower Bound	Upper Bound
Експериментална група	Довољан (2)	5,076[a]	0,524	4,043	6,108
	Добар (3)	7,176[a]	0,313	6,560	7,792
	Врло добар(4)	6,745[a]	0,264	6,225	7,266
	Одличан (5)	7,137[a]	0,222	6,700	7,574
Контролна група	Довољан (2)	3,195[a]	0,513	2,185	4,205
	Добар (3)	4,453[a]	0,319	3,824	5,082
	Врло добар (4)	4,395[a]	0,248	3,906	4,883
	Одличан (5)	5,197[a]	0,238	4,728	5,666

a. Covariates appearing in the model are evaluated at the following values: Simbol1 = 4,59.

ПРИЛОГ 21.

1. Група

Зависна варијабла: Финално мерење

Група	Mean	Std. Error	95% Confidence Interval Lower Bound	95% Confidence Interval Upper Bound
Експериментална група	6,573[a]	0,162	6,254	6,891
Контролна група	4,721[a]	0,164	4,399	5,043

a. Covariates appearing in the model are evaluated at the following values: PromNep1 = 4,61.

2. Пол

Зависна варијабла: Финално мерење

Пол	Mean	Std. Error	95% Confidence Interval Lower Bound	95% Confidence Interval Upper Bound
Дечаци	5,604[a]	0,164	5,280	5,928
Девојчице	5,690[a]	0,163	5,369	6,010

a. Covariates appearing in the model are evaluated at the following values: PromNep1 = 4,61.

3. Група * Пол

Зависна варијабла: Финално мерење

Група	Пол	Mean	Std. Error	95% Confidence Interval Lower Bound	95% Confidence Interval Upper Bound
Експериментална група	Дечаци	6,653[a]	0,235	6,190	7,116
	Девојчице	6,492[a]	0,224	6,051	6,933
Контролна група	Дечаци	4,554[a]	0,229	4,103	5,005
	Девојчице	4,887[a]	0,235	4,425	5,349

a. Covariates appearing in the model are evaluated at the following values: PromNep1 = 4,61.

ПРИЛОГ 22.

1. Група

Зависна варијабла: Финално мерење

Група	Mean	Std. Error	95% Confidence Interval Lower Bound	95% Confidence Interval Upper Bound
Експериментална група	6,222[a]	0,217	5,794	6,649
Контролна група	4,458[a]	0,175	4,114	4,802

a. Covariates appearing in the model are evaluated at the following values: PromNep1 = 4,61.

2. Успех

Зависна варијабла: Финално мерење

Успех	Mean	Std. Error	95% Confidence Interval Lower Bound	95% Confidence Interval Upper Bound
Добар	4,539[a]	0,339	3,871	5,207
Врло добар	5,442[a]	0,209	5,029	5,854
Одличан	6,039[a]	0,163	5,718	6,359

a. Covariates appearing in the model are evaluated at the following values: PromNep1 = 4,61.

3. Група * Успех

Зависна варијабла: Финално мерење

Група	Успех	Mean	Std. Error	95% Confidence Interval Lower Bound	95% Confidence Interval Upper Bound
Експериментална група	Добар	5,531[a]	0,550	4,449	6,614
	Врло добар	6,221[a]	0,287	5,654	6,787
	Одличан	6,913[a]	0,213	6,494	7,332
Контролна група	Добар	3,547[a]	0,380	2,799	4,295
	Врло добар	4,663[a]	0,289	4,093	5,232
	Одличан	5,164[a]	0,231	4,709	5,620

a. Covariates appearing in the model are evaluated at the following values: PromNep1 = 4,61.

ПРИЛОГ 23.

1. Група

Зависна варијабла: Финално мерење

Група	Mean	Std. Error	95% Confidence Interval Lower Bound	Upper Bound
Експериментална група	6,265[a]	0,191	5,888	6,641
Контролна група	4,284[a]	0,189	3,911	4,657

a. Covariates appearing in the model are evaluated at the following values: PromNep1 = 4,61.

2. Оцена

Зависна варијабла: Финално мерење

Оцена	Mean	Std. Error	95% Confidence Interval Lower Bound	Upper Bound
Довољан (2)	4,037[a]	0,400	3,248	4,825
Добар (3)	5,294[a]	0,256	4,789	5,798
Врло добар (4)	5,533[a]	0,202	5,136	5,930
Одличан (5)	6,234[a]	0,191	5,858	6,610

a. Covariates appearing in the model are evaluated at the following values: PromNep1 = 4,61.

3. Група * Оцена

Зависна варијабла: Финално мерење

Група	Оцена	Mean	Std. Error	95% Confidence Interval Lower Bound	Upper Bound
Експериментална група	Довољан (2)	5,338[a]	0,566	4,223	6,453
	Добар (3)	6,162[a]	0,350	5,473	6,852
	Врло добар (4)	6,559[a]	0,294	5,980	7,138
	Одличан (5)	7,000[a]	0,252	6,503	7,497
Контролна група	Довољан (2)	2,736[a]	0,561	1,632	3,840
	Добар (3)	4,425[a]	0,353	3,730	5,120
	Врло добар (4)	4,506[a]	0,273	3,968	5,045
	Одличан (5)	5,468[a]	0,264	4,947	5,989

a. Covariates appearing in the model are evaluated at the following values: PromNep1 = 4,61.

Биографија

Ненад Милинковић рођен је у Ужицу 10. августа 1984. године. Основне академске студије завршио је 2008. године на Педагошком факултету у Ужицу Универзитета у Крагујевцу. Мастер академске студије завршио је 2014. године на Педагошком факултету Универзитета у Крагујевцу, на студијском програму мастер учитељ, одбранивши рад на тему „Диференцирана настава и ученици потенцијално даровити за математику”, из области методике наставе математике. На мастер студијама остварио је просечну оцену 9,71. Докторске академске студије уписао је школске 2014/15. године на Педагошком факултету у Ужицу, на смеру *доктор наука – методика разредне наставе*.

Професионални ангажман започео је 2013. године на Педагошком факултету у Ужицу Универзитета у Крагујевцу, као сарадник у настави, а касније и као асистент за ужу научну област Методика наставе математике. Тренутно је ангажован на предметима: *Методика наставе матем*атике и *Методика развоја почетних математичких појмова.* Био је учесник у пројекту *МОДиКУ* (период 2018 – 2019). Тренутно је ангажован на пројекту *РАКУНД* (период 2020 – 2021).

Учествује на домаћим и међународним научним скуповима и конференцијама из области методике наставе математике. Аутор је и коаутор бројних научних радова.

Образац 1

ИЗЈАВА АУТОРА О ОРИГИНАЛНОСТИ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Ја, Ненад Милинковић, изјављујем да докторска дисертација под насловом:

"Контекстуални приступ настави алгебре у млађим разредима основне школе"

која је одбрањена на Педагошком факултету у Ужицу Универзитета у Крагујевцу представља *оригинално ауторско дело* настало као резултат *сопственог истраживачког рада*.

Овом Изјавом такође потврђујем:

- да сам *једини аутор* наведене докторске дисертације,
- да у наведеној докторској дисертацији *нисам извршио/ла повреду* ауторског нити другог права интелектуалне својине других лица,
- да умножени примерак докторске дисертације у штампаној и електронској форми у чијем се прилогу налази ова Изјава садржи докторску дисертацију истоветну одбрањеној докторској дисертацији.

У Ужицу, 18.6.2021. године,

потпис аутора

Образац 2

ИЗЈАВА АУТОРА О ИСКОРИШЋАВАЊУ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Ја, Ненад Милинковић,

☑ дозвољавам

☐ не дозвољавам

Универзитетској библиотеци у Крагујевцу да начини два трајна умножена примерка у електронској форми докторске дисертације под насловом:

"Контекстуални приступ настави алгебре у млађим разредима основне школе"

која је одбрањена на Педагошком факултету у Ужицу Универзитета у Крагујевцу, и то у целини, као и да по један примерак тако умножене докторске дисертације учини трајно доступним јавности путем дигиталног репозиторијума Универзитета у Крагујевцу и централног репозиторијума надлежног министарства, тако да припадници јавности могу начинити трајне умножене примерке у електронској форми наведене докторске дисертације путем *преузимања*.

Овом Изјавом такође

☑ дозвољавам

☐ не дозвољавам[1]

[1] Уколико аутор изабере да не дозволи припадницима јавности да тако доступну докторску дисертацију користе под условима утврђеним једном од *Creative Commons* лиценци, то не искључује право припадника јавности да наведену докторску дисертацију користе у складу са одредбама Закона о ауторском и сродним правима.

припадницима јавности да тако доступну докторску дисертацију користе под условима утврђеним једном од следећих *Creative Commons* лиценци:

1) Ауторство

2) Ауторство - делити под истим условима

3) Ауторство - без прерада

4) Ауторство - некомерцијално

5) Ауторство - некомерцијално - делити под истим условима

6) Ауторство - некомерцијално - без прерада[2]

У Ужицу, ___________, 18.6.2021. године,

потпис аутора

[2] Молимо ауторе који су изабрали да дозволе припадницима јавности да тако доступну докторску дисертацију користе под условима утврђеним једном од *Creative Commons* лиценци да заокруже једну од понуђених лиценци. Детаљан садржај наведених лиценци доступан је на: http://creativecommons.org.rs/