

Наставно-научном већу
Математичког факултета
Универзитета у Београду

На 373. седници Наставно-научног већа Математичкој факултета, која је одржана 4. септембра 2020. године, одређени смо за чланове комисије за преглед и оцену докторске дисертације *Полиномијална ентропија за Морсове градијентне системе и логистичко прсликавање* кандидата Милана Перића. После прегледа рукописа који је Милан Перић предао комисији, подносимо Наставно-научном већу Математичког факултета следећи

ИЗВЕШТАЈ

1 Биографија кандидата

Милан Перић је рођен је 22. маја 1972. године у Београду. Уписао је Математички факултет у Београду, смер Теоријска математика и примене 2007. године и дипломирао 2011. године са просечном оценом 9,62. Мастер рад под називом *Симплектоморфизми и флукс хипотеза* одбранио је на Математичком факултету у Београду, код проф. др Јелене Катић, 2012. године. Исте године уписао је докторске студије на Математичком факултету у Београду, на студијском програму Математика. Положио је све предвиђене испите са просечном оценом 9,88. Од 2011. до 2013. године радио је као сарадник у настави, а од 2013. до 2020. као асистент за научну област Математичка анализа на Математичком факултету у Београду.

2 Научни и стручни рад

2.1 Објављени и прихваћени радови

[1] М. Perić, *Polynomial entropy of the logistic map*, прихваћен за публикавање у *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica* импакт фактор (2019): 0.468, категорија М23

[2] Ј. Katić, М. Perić, *On the polynomial entropy for Morse gradient systems*, *Mathematica Slovaca* **69**, No. 3, 611–624, 2019.
импакт фактор (2019): 0.654, категорија М23
<https://doi.org/10.1515/ms-2017-025>

2.2 Саопштења на конференцијама и семинарима

- *Полиномијална ентропија и лутајућа динамика*, Семинар одељења за механику, МИ САНУ, 24. март и 7. април 2021.
- Ј. Katić, М. Perić, *Polynomial entropy and Morse gradient systems*, 2nd Annual Meeting of Seminar Topology of Configuration МИ САНУ, 24–27. децембар 2018.

3 Предмет докторске дисертације

Тополошка ентропија је једна од инваријанти тополошког динамичког система која мери његову комплексност. Иако већ класичан појам, тополошка ентропија је и даље предмет актуелних истраживања у тополошкој динамици. Због компликоване дефиниције, често је сама чињеница да ли је она једнака нули (или строго позитивна) резултат који може да разликује извесне динамичке системе, и да информацију о њиховој хаотичности. Код система ниске комплексности (односно код система за које је тополошка ентропија једнака нули), тополошка ентропија не може да разликује нееквивалентне системе, нити да пружи информацију о томе који је систем сложенији. Француски математичар Марко је 2013. године дефинисао нову инваријанту тополошког динамичког система, која разликује Хамилтонове интеграбилне системе (у којима се тополошка ентропија показала немоћна), и назвао ју је полиномијалном ентропијом.

У докторској дисертацији израчуната је полиномијална ентропија за две класе динамичких система ниске комплексности: Морсове градијентне системе и логистичка пресликавања. Оба ова система су добро позната и веома проучавана и њихова тополошка ентропија је јед-

нака нули. Такође, оба ова система (логистички за одређене вредности параметра) имају својство да су им скупови нелутајућих тачака коначни. То значи да је цела динамика (специјално и полиномијална ентропија) концентрисана у лутајућем делу динамичког система. (Ово је једна специфичност полиномијалне ентропије у односу на тополошку, која остаје непромењена при рестрикцији динамичког система на нелутајући део.) Ова ситуација је погодна за примену техника кодирања, коју су конструисали Озо и Леру 2017. године, у случају када је скуп нелутајућих тачака једночлан, односно када се састоји само од једне фиксне тачке. Технике кодирања су у дисертацији прилагођене, односно уопштене на случај коначног нелутајућег скупа.

4 Структура докторске дисертације

Докторска дисертација *Полиномијална ентропија за Морсове градијентне системе и логистичко пресликавање* написана је на VIII+83+III страна. Структура рукописа је следећа:

1 Основни појмови

- 1.1 Тополошка динамика
- 1.2 Тополошка ентропија
- 1.3 Полиномијална ентропија
- 1.4 Морсови градијентни системи
- 1.5 Кодирање у лутајућој динамици
- 1.6 Логистичко пресликавање

2 Полиномијална ентропија за Морсове градијентне системе

3 Полиномијална ентропија за логистичко пресликавање

4 Даља размишљања

Литература (број библиографских јединица је 36)

5 Приказ садржаја дисертације

Прва глава пре свега садржи дефиниције основних појмова из тополошке динамике, као и доказе неких важних ставова, са акцентом на дефиницији тополошке ентропије. Доказано је важно својство тополошке ентропије, наиме она је једнака тополошкој ентропији рестрикције динамичког система на налутајући скуп. На примерима је илустровано израчунавање тополошке ентропије директно из дефиниције. Затим је дата дефиниција и доказана су својства полиномијалне ентропије, и описане су сличности и разлике између својстава тополошке и полиномијалне ентропије. Дате су дефиниције и основна својства Морсових функција и приказани су Морсови градијентни системи на затвореној многострукости, са нагласком на опису границе модулских простора градијентних трајекторија, који је важна ставка у израчунавању полиномијалне ентропије. Затим је објашњена метода кодирања у лутајућој динамици, прилагођена динамичком систему за коначно много нелутајућих тачака. Објашњен је значај међусобно сингуларних тачака (тачака којима се једна орбита приближава са произвољно великим временским размаком) и доказано је да се полиномијална ентропија може израчунати као супремум локализованих полиномијалних ентропија на скупове међусобно сингуларних тачака. На крају прве главе наведени су познати резултати из динамике логистичког пресликавања.

Глава 2 је посвећена израчунавању полиномијалне ентропије за Морсове градијентне системе и она садржи само оригиналне резултате. Неки термини су прилагођени току, односно континуалном динамичком систему (будући да су у првој глави били формулисани за дискретан динамички систем), пре свега појам међусобно сингуларних тачака. Затим је израчунат број сингуларних тачака Морсовог градијентног система у терминима броја Морсових индекса које критичне тачке могу имати. Ово даје горњу границу за полиномијалну ентропију произвољног Морсовог градијентног система. У случају површи, кружнице (или уније кружница), као и система чије критичне тачке могу имати само три различите вредности Морсових индекса, израчуната је полиномијална ентропија.

У Глави 3 израчуната је полиномијална ентропија за логистичка пресликавања, за вредности параметра $\mu \in [0, \mu_\infty)$. Познато је да је тополошка ентропија логистичког пресликавања једнака нули, за $\mu \in [0, \mu_\infty]$, и да је строго позитивна за $\mu > \mu_\infty$. У поступку израчунавања полиномијалне ентропије коришћен је опис периодичних орбита логистичког пресликавања, понашање непериодичних (лутајућих) тачака, као и опис међусобно сингуларних тачака.

Глава 4 садржи могуће правце у наставку изучавања полиномијалне ентропије. Природно уопштење Морсових система, и једни од најпроучаванијих система ниске комплексности су Морс–Смејлови системи. Метод кодирања прилагођен ситуацији за коначо много нелутајућих тачака је применљив и у овом случају. Друго природно питање које се спомиње као могући предмет истраживања је питање везе између еквинепрекидних система и система са полиномијалном ентропијом нула. Еквинепрекидни системи су раније (2000. године) доведени у везу са системима чији сваки отворен покривач има ограничену комплексност. Природно је питање да ли и под којим условима су системи са полиномијалном ентропијом једнаком нули само еквинепрекидни системи (до сада су познати само парцијални и негативни примери, један од њих је дат у дисертацији). Даље су постављена питања везе полиномијалне ентропије и неких других мера комплексности динамичких система (нпр. Ли-Јорковог хаоса). На крају је споменут проблем односа полиномијалне ентропије датог система и придруженог система на хиперпросторима (скупа компактних подскупова).

6 Закључак и предлог

Рукопис *Полиномијална ентропија за Морсове градијенте системе и логистичко пресликавање* кандидата Милана Перића садржи вредан научни допринос у Тополошкој динамици. Кандидат се успешно бави научним радом у овој области. Објавио је један научни рад, а други, самостални, прихваћен је за штампу у финалној верзији. Оба рада се односе на тему дисертације. Резултати из дисертације излагани су више пута на научним скуповима.

Имајући ово у виду, комисија предлаже Научно-наставном већу Математичког факултета у Београду да рукопис *Полиномијална ентропија за Морсове градијенте системе и логистичко пресликавање* кандидата Милана Перића прихвати као докторску дисертацију и да одреди комисију за одбрану.

У Београду,
17. маја 2021. године

Чланови комисије:

др Јелена Катић, ванредни професор (ментор)

др Дарко Миљинковић, редовни професор

др Јована Николић, доцент

др Миљан Кнежевић, доцент

др Божидар Јовановић, научни саветник