



Univerzitet u Novom Sadu
Fakultet tehničkih nauka
Novi Sad



Armin Berecki

**Uticaj smicanja na sekundarne bifurkacije štapa
oslonjenog na nelinearnu elastičnu podlogu**

Doktorska disertacija

Novi Sad, septembar 2021.

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА¹

Врста рада:	Докторска дисертација
Име и презиме аутора:	Армин Берецки
Ментор (титула, име, презиме, звање, институција)	Др Валентин Главарданов, редован професор, Факултет техничких наука
Наслов рада:	Утицај смицања на секундарне бифуркације штапа ослоњеног на нелинеарну еластичну подлогу
Језик публикације (писмо):	Српски (латиница) или (навести ћирилица или латиница) _____
Физички опис рада:	Унеги број: Страница 93 Поглавља 7 Референци 54 Табела 3 Слика 38 Графикона 0 Прилога 3
Научна област:	Машинско инжењерство
Ужа научна област (научна дисциплина):	Механика деформабилног тела
Кључне речи / предметна одредница:	Еластични штап, Ефекат смицања, Нелинеарна еластична подлога, Секундарне бифуркације, Стабилност
Резиме на језику рада:	Предмет истраживања је послекритично понашање еластичног штапа ослоњеног на нелинеарну еластичну подлогу. При томе је нарочито посвећена пажња испитивању секундарних бифуркација. Конститутивне једначине штапа узимају у обзир ефекат смицања. За анализу бифуркација користи се метода Љапунов-Шмита. За критичне вредности помоћног бифуркационог параметра изабране су вредности за које се појављују двоструке сопствене вредности. Као последица, изведене су две бифуркационе једначине. Ове једначине описују послекритично понашање за вредности параметара у околини критичних вредности. Показано је да нелинеарна подлога и смичућа крутост знатно утичу на послекритично понашање штапа, а нарочито на појаву секундарних бифуркација. Одређени су типови бифуркација, као и стабилност и асимптотско понашање примарне и секундарне гране. Показано је да за сваку критичну вредност параметара постоји једанаест различитих послекритичних понашања који зависе од нелинеарности подлоге и смичуће крутости.

¹ Аутор докторске дисертације потписао је и приложио следеће Обрасце:

5б – Изјава о ауторству;

5в – Изјава о истоветности штампане и електронске верзије и о личним подацима;

5г – Изјава о коришћењу.

Ове Изјаве се чувају на факултету у штампаном и електронском облику и не кориче се са тезом.

Датум прихватања теме од стране надлежног већа:	27.01.2021
Датум одбране: (Попуњава одговарајућа служба)	
Чланови комисије: (титула, име, презиме, звање, институција)	Председник: Академик Теодор Атанацковић, професор емеритус, ФТН Нови Сад Члан: др Михаило Лазаревић, редовни професор, Машински факултет Београд Члан: др Бранислава Новаковић, редовни професор, ФТН Нови Сад Члан: др Ненад Граховац, ванредни професор, ФТН Нови Сад Ментор: Др Валентин Главарданов, редован професор, ФТН Нови Сад
Напомена:	

**UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OR CENTER**

KEY WORD DOCUMENTATION²

Document type:	Doctoral dissertation
Author:	Armin Berecki
Supervisor (title, first name, last name, position, institution)	Valentin Glavardanov, Ph.D., full professor, Faculty of Technical Sciences
Thesis title:	Secondary bifurcation of a shearable rod on nonlinear elastic foundation
Language of text (script):	Serbian language (latin script) (cyrillic or latin script)
Physical description:	Number of: Pages 93 Chapters 7 References 54 Tables 3 Illustrations 38 Graphs 0 Appendices 3
Scientific field:	Mechanical engineering
Scientific subfield (scientific discipline):	Solid mechanics
Subject, Key words:	Shearable rod, Nonlinear foundation, Secondary bifurcation, Stability
Abstract in English language:	The local analysis of primary and secondary bifurcations of a simply supported elastic rod resting on a nonlinear elastic foundation is the subject of this thesis. The constitutive equations of the rod take into account the effect of shear. Using the Liapunov-Schmidt method a local bifurcation analysis is performed. It is shown that for the specific values of auxiliary parameter the lowest eigenvalues are double. As a consequence two bifurcation equations are formulated. These equations are used to describe the postbuckling behavior of the rod in the case when the values of auxiliary parameter are close to the critical ones. It is shown that the nonlinearity of foundation and shear rigidity influence on the postbuckling behavior of the rod. In particular, the influence of shear rigidity and foundation nonlinearity on bifurcation types, stability and asymptotic expansions of primary and secondary branches are obtained. The results show that there are eleven different postbuckling behaviors.
Accepted on Scientific Board on:	27.01.2021

² The author of doctoral dissertation has signed the following Statements:

5б – Statement on the authority,

5в – Statement that the printed and e-version of doctoral dissertation are identical and about personal data,

5г – Statement on copyright licenses.

The paper and e-versions of Statements are held at the faculty and are not included into the printed thesis.

Defended: (Filled by the faculty service)	
Thesis Defend Board: (title, first name, last name, position, institution)	President: Teodor Atanacković, professor emeritus, Faculty of Technical Sciences Member: Mihailo Lazarević, Ph.D., full professor Member: Branislava Novaković, Ph.D., full professor, Faculty of Technical Sciences Member: Nenad Grahovac, Ph.D., associate professor, Faculty of Technical Sciences Mentor: Valentin Glavardanov, Ph.D., full professor, Faculty of Technical Sciences
Note:	

Sadržaj

1	Uvod	1
2	Metodi analize stabilnosti	5
2.1	Metod bliske ravnotežne konfiguracije	5
2.2	Energijski metod	6
2.3	Dinamički metod	7
3	Kratke osnove teorije elastičnih štapova	8
3.1	Jednačine ravnoteže	8
3.2	Geometrijske relacije	10
3.3	Konstitutivne jednačine	10
3.4	Opšte jednačine teorije elastičnih štapova	11
4	Matematička formulacija problema	13
5	Lokalna bifurkaciona analiza	19
5.1	Uvod	19
5.2	Određivanje kritične sile izvijanja	20
5.3	Bifurkacione jednačine	23
5.4	Lokalne bifurkacije	29
5.4.1	Primarne bifurkacije	29
5.4.2	Sekundarne bifurkacije	30
5.5	Stabilnost poslekritičnog položaja štapa	34
6	Rezultati	38
6.1	Primarne grane	38
6.1.1	Primarna grana $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_1}$	38
6.1.2	Primarna grana $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_2}$	40
6.2	Sekundarne grane	44
6.2.1	Sekundarna grana $\Gamma_{2\bar{a}}^{B_1}$	47
6.2.2	Sekundarna grana $\Gamma_{2\bar{a}}^{B_2}$	49
6.3	Poslekritično ponašanje elastičnog štapa	50
7	Zaključak i pravci daljih istraživanja	60
8	Dodatak A	63
8.1	Bifurkacioni dijagrami za $n = 1$	63
8.1.1	Slika A1 - Bifurkacioni dijagrami za oblasti 1-4	63
8.1.2	Slika A2 - Bifurkacioni dijagrami za oblasti 5-8	64

8.1.3	Slika A3 - Bifurkacioni dijagrami za oblasti 9-11	65
8.2	Bifurkacioni dijagrami za $n = 2$	66
8.2.1	Slika A4 - Bifurkacioni dijagrami za oblasti 1-4	66
8.2.2	Slika A5 - Bifurkacioni dijagrami za oblasti 5-8	67
8.2.3	Slika A6 - Bifurkacioni dijagrami za oblasti 9-11	68
8.3	Bifurkacioni dijagrami za $n = 3$	69
8.3.1	Slika A7 - Bifurkacioni dijagrami za oblasti 1-4	69
8.3.2	Slika A8 - Bifurkacioni dijagrami za oblasti 5-8	70
8.3.3	Slika A9 - Bifurkacioni dijagrami za oblasti 9-11	71
9	Dodatak B	72
9.1	Poslekritični ugibi ose štapa za $n = 1$	72
9.1.1	Slika B1 - Poslekritični ugibi ose štapa koji odgovaraju sekundarnim granama za oblasti 1-3	72
9.1.2	Slika B2 - Poslekritični ugibi ose štapa koji odgovaraju sekundarnim granama za oblasti 4-6	73
9.1.3	Slika B3 - Poslekritični ugibi ose štapa koji odgovaraju sekundarnim granama za oblasti 7-9	74
9.1.4	Slika B4 - Poslekritični ugibi ose štapa koji odgovaraju sekundarnim granama za oblasti 10-11	75
9.2	Poslekritični ugibi ose štapa za $n = 2$	76
9.2.1	Slika B5 - Poslekritični ugibi ose štapa koji odgovaraju sekundarnim granama za oblasti 1-3	76
9.2.2	Slika B6 - Poslekritični ugibi ose štapa koji odgovaraju sekundarnim granama za oblasti 4-6	77
9.2.3	Slika B7 - Poslekritični ugibi ose štapa koji odgovaraju sekundarnim granama za oblasti 7-9	78
9.2.4	Slika B8 - Poslekritični ugibi ose štapa koji odgovaraju sekundarnim granama za oblasti 10-11	79
9.3	Poslekritični ugibi ose štapa za $n = 3$	80
9.3.1	Slika B9 - Poslekritični ugibi ose štapa koji odgovaraju sekundarnim granama za oblasti 1-3	80
9.3.2	Slika B10 - Poslekritični ugibi ose štapa koji odgovaraju sekundarnim granama za oblasti 4-6	81
9.3.3	Slika B11 - Poslekritični ugibi ose štapa koji odgovaraju sekundarnim granama za oblasti 7-9	82
9.3.4	Slika B12 - Poslekritični ugibi ose štapa koji odgovaraju sekundarnim granama za oblasti 10-11	83

<i>SADRŽAJ</i>	iii
10 Dodatak C	84
10.1 Teorema o implicitnoj funkciji	84
Literatura	86

1 Uvod

Proučavanje poslekritičnog ponašanja elastičnih tela ima veoma dugu i bogatu istoriju. Ta istorija počinje 1744. godine proučavanjem fleksibilnog pritisnutog štapa u radu [11]. Međutim, analiza stabilnosti postaje interesantna tek jedan vek kasnije, kao posledica pojave čeličnih konstrukcija. Značaj nelinearne teorije u praksi prepoznat je tek tridesetih godina prošlog veka, a opšta nelinearna teorija analize poslekritičnog ponašanja elastičnih tela pojavila se u doktorskoj tezi profesora Koitera 1945. godine ([23]). Kao odličan istorijski pregled literature do sredine prošlog veka navodimo knjigu [43]. Istraživanja koja su sledila kasnije u šezdesetim i sedamdesetim godinama prošlog veka uglavnom su bila vezana za rezultate Britanske [41] i Harvardske škole [7]. Kasnije, razvojem tehnike i tehnologija došlo je novih istraživanja u oblasti teorije stabilnosti i bifurkacija (grananja). Rezultati tih istraživanja su uglavnom, pored ostalih, dati kroz radove profesora Kelera, Antmana, Satingera, Josa, Džozefa, Potije-Ferija, Golubitskog i Šefera. Neki njihovi važniji rezultati su [21], [3], [34], [19], [30], [15] i [16]. Pored spomenutih, a s obzirom na njegov uticaj na razvoj teorije stabilnosti elastičnih štapova krajem dvadesetog i u dvadesetprvom veku, važno je napomenuti i veliki doprinos profesora Atanackovića ([4]) koji je svojim predanim naučno-obrazovnim radom uveo veliki broj mladih istraživača u interesantni svet mehanike neprekidnih sredina.

S obzirom na rečeno, stabilnost elastičnih štapova je tema velikog broja kako naučnih radova tako i knjiga od kojih svakako treba pomenuti [3] i [23]. U početku razvoja teorije stabilnosti elastičnih štapova dominirala je linearna analiza. Kasnije, razvoj matematičkih metoda u oblasti nelinearne analize doveo je do razvoja i teorije bifurkacija. Kao posledica tog razvoja, analiza poslekritičnog ponašanja elastičnih štapova je postala nezaobilazni deo u inženjerstvu.

Značaj bifurkacione teorije je naročito prisutan u objašnjenjima i predviđanju interesantnih fizičkih fenomena. Potvrda takvog značaja je mišljenje profesora Koitera [24] da je čvrsto ubeđen da adekvatno razumevanje fenomena vezanih za poslekritično ponašanje ne može biti postignuto bez odgovarajućeg poznavanja i razvoja teorije bifurkacija.

U svakom slučaju, neki od fenomena u oblasti mehanike su sekundarne bifurkacije, skokovi između modova izvijanja i poslekritično ponašanje štapa pri bimodalnoj optimizaciji ([5], [35], [18], [29]). Kod jednog dela ovih fenomena zajednička stvar je pojava da su sopstvene vrednosti bifurkacionog parametra dvostruke ili bar veoma bliske jedna drugoj. Dvostruke sopstvene vrednosti se pojavljuju u raznim granama fizike, pa tako i u mehanici. Uočeno je da se promenom vrednosti drugih fizičkih veličina, obično nazivanih pomoćnim

parametrima, može doći do razdvajanja dvostrukih sopstvenih vrednosti. Pri tome je uočeno da tada dolazi do grananja u bifurkacionom dijagramu što dovodi do pojave novih rešenja. Za ta nova rešenja, koja nastaju grananjem primarnih grana (one koje nastaju grananjem trivijalne grane) u bifurkacionim dijagramima, kažemo da obrazuju sekundarne grane. Mehanizam njihovog nastanka matematički je detaljno objašnjen između ostalog i u [5], gde je analiziran diskretan štap kao i elastična pritisnuta sferna ljuska. U onome što je usledilo, pojavio se značajan broj istraživanja koja su se bavila sekundarnim bifurkacijama kod elastičnih štapova. Uočena je pojava sekundarnih bifurkacija kako kod ravanskih [50], [51], [32], [18], [49], [12], [13] tako i kod prostorno deformisanih štapova [47], [8].

Radovi koji se bave izučavanjem stabilnosti štapova na elastičnoj podlozi su od posebne važnosti za istraživače i inženjere. Kao primere navodimo rad [17] koji spada u klasike i nekoliko nedavno objavljenih radova kao što su [26], [40], [54], [20] i [52]. Bitan fenomen, koji se javlja kod elastične podloge, je upravo pojava sekundarnih bifurkacija, zbog toga što male promene koeficijenta linearne krutosti podloge dovode do razdvajanja dvostrukih sopstvenih vrednosti ([5]).

Uzimajući do sada navedeno, razumno je za cilj ove disertacije postaviti uopštavanje problema koji je dat u [48]. Konkretno u tom radu je posmatrano poslekritično ponašanje štapa na linearno elastičnoj Vinklerovoj podlozi pri dvostrukim sopstvenim vrednostima. Pri tom konstitutivne jednačine su uzimale u obzir efekte savijanja i smicanja.

Generalizacija je u ovoj disertaciji urađena u dva pravca. Prvo, u ovoj disertaciji se koristi nelinearna elastična podloga. Drugo, umesto poslekritičnog ponašanja štapa pri dvostrukim sopstvenim vrednostima, analiziraće se poslekritično ponašanje štapa u slučaju kada su sopstvene vrednosti bliske dvostrukim. Ovo praktično znači da će se analizirati primarne i sekundarne bifurkacije za vrednosti pomoćnog parametra u okolini kritične vrednosti a koja odgovara dvostrukim sopstvenim vrednostima.

Treba napomenuti da se tema ove disertacije može posmatrati i kao generalizacija radova [49], [27] i [32]. U ovim radovima su korišćene klasične Bernuli-Ojlerove konstitutivne jednačine i linearne geometrijske relacije za analizu štapa na nelinearnoj elastičnoj podlozi, što ih čini specijalnim slučajevima. Kao potvrdu aktuelnosti teme ove disertacije navodimo nedavno objavljen rad [33]. U njemu je za klasičan Bernuli-Ojlerov štap na linearnoj elastičnoj podlozi i uz nelinearne geometrijske relacije, analizirano poslekritično ponašanje u okolini dvostruke sopstvene vrednosti korišćenjem metode date u [9].

Analitičke metode pogodne za lokalnu bifurkacionu analizu statičkih problema mogu se između ostalog naći u [5], [37], [15], [9], [49], [28] i [25]. Većina

od njih je bazirana korišćenju Ljapunov-Šmitove metode i Teoreme o implicitnoj funkciji. Pored toga značajnu ulogu u analizi ima i eventualno prisustvo simetrija koje veoma olakšavaju proučavanje sekundarnih bifurkacija. U ovoj disertaciji ćemo pratiti smernice koje su korišćene u analizi primarnih i sekundarnih bifurkacija a date su u [49], [13] i [14].

Sada možemo dati kratak opis teme ove disertacije i njenu organizaciju. Konkretno, predmet istraživanja ove doktorske disertacije je poslekritično ponašanje pravog aksijalno pritisnutog elastičnog štapa koji je izložen izvijanju. Konstitutivne jednačine će se izabrati tako da uzimaju u obzir efekte savijanja i smicanja. Takođe, konstitutivne jednačine će biti linearnog tipa i efekat savijanja će biti uzet u obzir preko klasične Bernuli-Ojlerove teorije dok će se za efekat smicanja koristiti Timošenkov pristup. Na krajevima štap će biti oslonjen na pokretan i nepokretan zglob dok će celom svojom dužinom ležati na nelinearnoj elastičnoj podlozi Vinklerovog tipa. Za nelinearnost podloge izabraće se kubni tip i posmatraće se i meka i tvrda podloga.

Praktično, cilj disertacije je određivanje uticaja koeficijenata krutosti elastične podloge i smicajne krutosti na pojavu, tip i stabilnost primarnih i sekundarnih bifurkacija u okolinama dvostrukih sopstvenih vrednosti. Kao pomoćni bifurkacioni parametar, čija promena izaziva razdvajanje dvostrukih sopstvenih vrednosti koristiće se koeficijent linearne krutosti podloge. Doktorska disertacija će biti organizovana na sledeći način.

Prvo će opisati metode analize stabilnosti elastičnih štapova i dati kratak opis osnovne teorije elastičnih štapova.

Zatim će se koristeći teorijske osnove teorije elastičnih štapova formulisati matematički model koji opisuje deformacije štapa u vidu dvotačkastog nelinearnog problema opisanog običnim diferencijalnim jednačinama. Pored toga, izvešće se i varijaciona formulacija problema.

Kao sledeći korak izvršiće se linearizacija i odrediti sopstveni vektori i sopstvene vrednosti. Pošto ćemo koristiti terminologiju iz [3] sopstvene vrednosti će predstavljati vrednosti kritične sile izvijanja. Primenom Ljapunov-Šmitove metode formiraće se dve bifurkacione jednačine, za koje će biti pokazano da poseduju dvostruku Z_2 simetriju. Sledeće, korišćenjem energijskog metoda će se izvesti dovoljni uslovi za stabilnost i nestabilnost poslekritičnih položaja štapa.

Primenom Teoreme o implicitnoj funkciji odrediće se analitički grane primarnih i sekundarnih bifurkacija, njihov tip kao i stabilnost i oblik poslekritičnih položaja ravnoteže koji im odgovaraju.

Korišćenjem dobijenih analitičkih rešenja, u sledećem koraku će se izvršiti analiza uticaja smičuće krutosti i nelinearnosti podloge na tip bifurkacija, stabilnost bifurkacionih grana kao i na oblik poslekritičnih položaja koji odgo-

varaju sekundarnim bifurkacijama. Dobijeni rezultati pokazuju da je poslekritično ponašanje veoma kompleksno. Naime, u zavisnosti od nelinearnosti podloge i smičuće krutosti, pojavljuje se jedanaest različitih poslekritičnih ponašanja štapa u okolini svake dvostruke sopstvene vrednosti.

Pretposlednji deo disertacije sadržiće rezime dobijenih rezultata. Pored toga biće navedeni i mogući pravci daljih istraživanja.

Na kraju disertacije nalaze se dodaci koji sadrže Teorem o implicitnoj funkciji, bifurkacione dijagrame i dijagrame koji kvalitativno opisuju sve moguće oblike poslekritičnih ugiba ose štapa koji odgovaraju sekundarnim bifurkacijama. Posle dodataka naveden je i spisak korišćene literature prilikom izrade disertacije.

2 Metodi analize stabilnosti

Za određivanje kritičnih vrednosti opterećenja pri kojima štap gubi stabilnost uspešno se koristi nekoliko metoda. Štap se može naći u ravnoteži u više različitih položaja, što sledi iz činjenice da postavljeni nelinearni problem može imati više rešenja tj. rešenje nije jedinstveno.

2.1 Metod bliske ravnotežne konfiguracije

Metod bliskog ravnotežnog položaja, koji je ujedno i najstariji metod, postavio je Ojler polazeći od činjenice da rešenje problema nije jedinstveno. Postavlja se pitanje: ako se spoljašnje opterećenje koje deluje na štap povećava kvazistatički, da li postoji kritična vrednost pri kojoj će se pojaviti dva, različita, ali veoma bliska ravnotežna položaja? Pod različitim ravnotežnim položajima misli se na različita stanja deformacije pri kojima je štap u ravnoteži. Osnovni primer je elastičan štap koji je pritisnut aksijalnom silom na jednom kraju. Kako se sila na kraju štapa povećava, u jednom trenutku doći će do dva ili više ravnotežnih položaja, gde je jedan od njih položaj gde je došlo do izvijanja štapa, dok je drugi položaj u kom štap ostaje prav. Ako je intenzitet sile isti za dva moguća bliska ravnotežna položaja, sledi da postoji tačka bifurkacije. Ovaj metod se matematički može redukovati na problem sopstvenih vrednosti, gde su kritični uslovi (opterećenja pri kojima dolazi do gubitka stabilnosti) dati baš sa sopstvenim vrednostima. U okviru ovog metoda stabilnost i nestabilnost ravnotežnog položaja date su sledećim definicijama ([4]):

Definicija 1 *Neki položaj ravnoteže elastičnog tela se naziva stabilnim ako pri datom opterećenju i graničnim uslovima u okolini tog položaja ne postoji ni jedan drugi bliski položaj ravnoteže.*

Definicija 2 *Neki položaj ravnoteže elastičnog tela se naziva nestabilnim ako pri datom opterećenju i graničnim uslovima u okolini tog položaja postoji bar jedan drugi bliski položaj ravnoteže.*

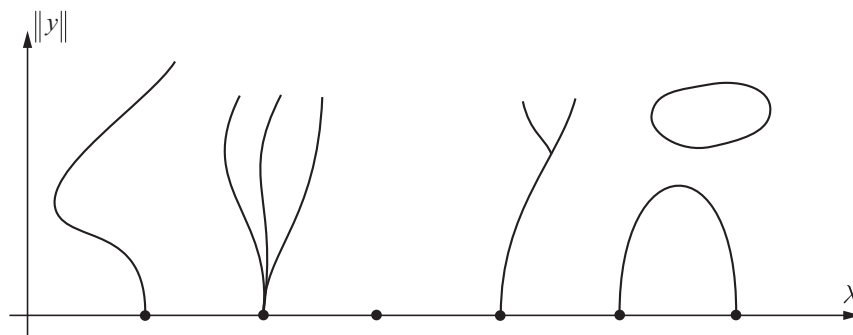
Da bismo iskoristili navedene definicije treba odrediti položaje ravnoteže (što je obično veoma teško) ili neko njihovo kvalitativno svojstvo. To se obično svodi na analizu nelinearne jednačine

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}(\xi), \lambda) = 0 \quad (2.1)$$

gde je $\mathbf{F} = \{F_i\}_{i=1,2,\dots,n}$, $\mathbf{y}(\xi) = \{y_i\}_{i=1,2,\dots,n}$, $\xi \in (0, 1)$, a λ je m -dimenzioni vektor koji se sastoji od parametara problema. Nelinearnom sistemu jednačina (2.1), se u konkretnim problemima pridružuje i sistem graničnih uslova u obliku

$$\mathbf{T}(\mathbf{y}(\xi_i), \lambda) = 0, \quad (2.2)$$

gde je $\mathbf{T} = \{T_i\}_{i=1,2,\dots,n}$, dok $\xi_i \in \{0, 1\}$ $i = 1, 2, \dots, n$. Konkretno, umesto da određujemo tačna rešenja sistema (2.1), (2.2), naš cilj će biti da odredimo njihov broj u zavisnosti od vrednosti parametara. Za postizanje tog cilja koristićemo Ljapunov-Šmitov metod. Ako sa $\|\mathbf{y}\|$ označimo odgovarajuću normu rešenja sistema (2.1), (2.2), tada nam Ljapunov-Šmitov metod omogućava formiranje bifurkacionih dijagrama (dijagrama odziva). Praktično, bifurkacioni dijagrami predstavljaju vezu norme $\|\mathbf{y}\|$ i λ . Neka je $m = 1$ i $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ rešenje za svako λ . Tada to rešenje nazivamo trivijalnim rešenjem a rešenja koja nastaju njegovim grananjem nazivamo primarnim granama bifurkacije. Rešenja koja nastaju grananjem primarnih grana nazivamo sekundarnim granama bifurkacije. Takođe, tačke u kojima se javlja grananje nazivamo tačkama bifurkacije.



Slika 1: Primeri bifurkacionih dijagrama

Na Slici 1 dati su neki primeri bifurkacionih dijagrama. U onome što sledi, nas će zanimati slučaj 4 gde se pojavljuju i sekundarne bifurkacije.

2.2 Energijski metod

Energijski metod je metod gde se kritična opterećenja mogu dobiti posmatranjem totalne potencijalne energije sistema. U okviru analize stabilnosti energijskim metodom obično se uvodi sledeća definicija stabilnosti položaja ravnoteže:

Definicija 3. *Ravnotežna konfiguracija elastičnog štapa pod dejstvom konzervativnog sistema sila je stabilna ako i samo ako totalna potencijalna energija ima slabi lokalni minimum u klasi dopustivih pomeranja.*

U opštem slučaju potencijalna energija elastičnog štapa Π je funkcionala koja preslikava normirani linearni prostor X u \mathbb{R} . Ova funkcionala ima globalni minimum u tački $\mathbf{x}_0 \in X$ ako je zadovoljen uslov:

$$\Pi(\mathbf{x}) > \Pi(\mathbf{x}_0),$$

za svako $\mathbf{x} \in X$ i $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$. Sa druge strane Π ima lokalni minimum u tački $\mathbf{x}_0 \in X$ ako postoji okolina U tačke \mathbf{x}_0 takva da za svako $\mathbf{x} \in U \cap X$ i $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ važi

$$\Pi(\mathbf{x}) > \Pi(\mathbf{x}_0).$$

Potreban uslov za postojanje lokalnog minimuma u tački \mathbf{x}_0 je postojanje okoline U tačke \mathbf{x}_0 takve da je za svako $\mathbf{x} \in U \cap X$ važi ([4])

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{x}}\Pi(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} &= 0, \\ D_{\mathbf{xx}}\Pi(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}, \mathbf{h}) &\geq 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

gde je $D_{\mathbf{x}}(\cdot)$ izvod po \mathbf{x} a $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$. Takođe, dovoljan uslov za lokalni minimum funkcionala $\Pi(\mathbf{x})$ u tački $\mathbf{x}_0 \in X$ je postojanje okoline U tačke \mathbf{x}_0 tako da za svako $\mathbf{x} \in U \cap X$ i $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ važi ([4])

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{x}}\Pi(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} &= 0, \\ D_{\mathbf{xx}}\Pi(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}, \mathbf{h}) &\geq c_0\|\mathbf{h}\|^2, \end{aligned} \quad (2.4)$$

za neki realan broj c_0 . Dakle, na osnovu navedenog kao najvažniji rezultat ovog dela možemo zaključiti da ispunjenost dovoljnih uslova (2.4) vodi ka stabilnoj ravnoteži, dok postojanje \mathbf{h}_1 , koje zadovoljava uslov

$$D_{\mathbf{xx}}\Pi(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_1) < 0,$$

vodi ka nestabilnom ravnotežnom položaju jer je time narušen potreban uslov (2.3)₂ za stabilnu ravnotežu.

2.3 Dinamički metod

S obzirom da u okviru ove disertacije neće biti korišćen ovaj metod, a radi celovitosti prezentacije daćemo samo opisno njegovu definiciju prema Ljapunovu ([4]). Tako kažemo, da je položaj ravnoteže elastičnog štapa stabilan ako sva moguća kretanja štapa, izazvana promenom početnih uslova, ostaju u bliskoj okolini ravnotežnog položaja svo vreme. Takođe, ako sva kretanja teže ka položaju ravnoteže kada vreme teži ka beskonačnosti kažemo da je ravnotežni položaj asimptotski stabilan. Napominjemo da je upotreba ovog metoda važna ukoliko su opterećenja nekonzervativna.

3 Kratke osnove teorije elastičnih štapova

U ovom delu ce biti formulisane osnovne jednačine koje opisuju ravnotežu elastičnih štapova. U opštem slučaju one se sastoje od jednačina ravnoteže, geometrijskih veza i konstitutivnih jednačina. Sa fizičke strane biće uzeti u obzir efekti savijanja, kompresibilnosti i smicanja štapa. Mi ćemo posmatrati samo ravanske deformacije štapa. Pretpostavlja se da je štap napravljen od takvog materijala da se veza između presečnih veličina i mera deformacije može opisati pomoću linearne zavisnosti. Prilikom izvođenja osnovnih jednačina teorije štapova uvešćemo sledeće pretpostavke ([4]) :

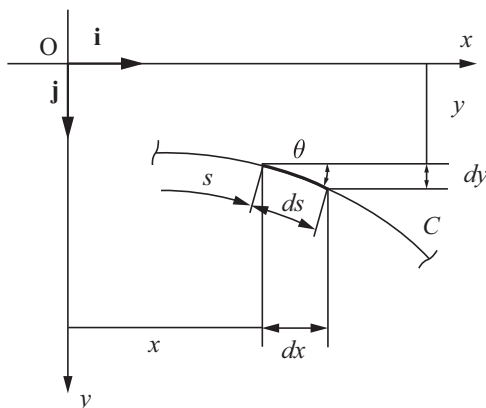
1) Ravni preseki u nedeformisanom stanju ostaju ravni u deformisanom stanju

2) Poprečni preseki na štapu ne menjaju svoj oblik i veličinu

Prezentovane jednačine će se odnositi na štapove koji su pravi u nedeformisanom položaju. Za analizu krivih štapova mogu se koristiti jednačine date u [4].

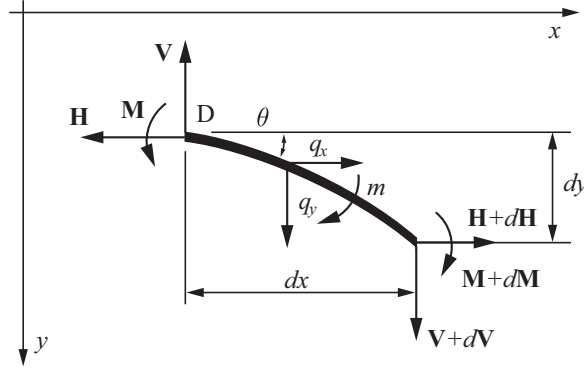
3.1 Jednačine ravnoteže

Neka je C neprekidna ravanska kriva koja predstavlja osu elastičnog štapa u deformisanom položaju. Da bismo opisali deformaciju štapa, u ravni, uvešćemo fiksni koordinatni sistem xy sa jediničnim vektorima \mathbf{i} i \mathbf{j} , respektivno. Pri tome će vektor \mathbf{i} biti u pravcu ose štapa u nedeformisanom položaju. U deformisanom položaju, položaj proizvoljnog preseka štapa će se opisati koordinatama x i y . (Slika 2).



Slika 2: Osa štapa u deformisanom položaju

Neka je $S \in [0, L]$ lučna koordinata koja određuje položaj proizvoljnog preseka štapa pre deformacije, a L dužina štapa u nedeformisanom položaju. Ako krivu C parametrizujemo koristeći koordinatu S , krivu C možemo opisati sa funkcijama $x = x(S)$, $y = y(S)$, koje su glatke funkcije na intervalu $[0, L]$. U onome što sledi s će biti lučna koordinata uzduž ose elastičnog štapa u deformisanom položaju, ili uzduž krive C . Za pisanje jednačina ravnoteže posmatraćemo element štapa u deformisanom položaju. Posmatrajući Sliku 3,



Slika 3: Opterećenje elementarnog dela štapa

dolazimo do jednačina ravnoteže elementarnog dela štapa u obliku:

$$\begin{aligned} \sum F_x^i &= H + dH + q_x dS - H = 0, \\ \sum F_y^i &= V + dV + q_y dS - V = 0, \\ \sum M^D &= dM + (V + dV) dx - (H + dH) dy + m dS = 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

gde su q_x i q_y opterećenja po jedinici dužine u nedeformisanom položaju duž x i y osa, m predstavlja neprekidno raspoređene spregove po jedinici dužine u nedeformisanom položaju, H i V su komponente presečne sile u proizvoljnom preseku $\mathbf{R} = H\mathbf{i} + V\mathbf{j}$, a M je moment savijanja. Posle sređivanja, jednačine ravnoteže (3.1) postaju

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dS} &= -q_x, \\ \frac{dV}{dS} &= -q_y, \\ \frac{dM}{dS} &= -V \frac{dx}{dS} + H \frac{dy}{dS} - m. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Izvedimo sada jednačine koje međusobno povezuju geometrijske veličine.

3.2 Geometrijske relacije

Na osnovu Slike 2 za elementarni deo deformisane ose štapa (kriva C) u tački (x, y) sledi

$$dx = ds \cos \theta, \quad dy = ds \sin \theta. \quad (3.3)$$

Jednačine (3.3) određuju funkciju $\theta(S)$, koja predstavlja ugao koji zaklapa tangenta na osu štapa u deformisanom položaju sa x osom. Dilataciju ose štapa definišemo kao što je uobičajeno sa

$$\varepsilon = \frac{ds - dS}{dS} = \frac{ds}{dS} - 1. \quad (3.4)$$

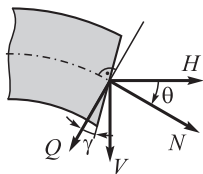
Na osnovu (3.3), (3.4) sledi

$$\begin{aligned} dx &= ds \cos \theta = (1 + \varepsilon) dS \cos \theta, \\ dy &= ds \sin \theta = (1 + \varepsilon) dS \sin \theta. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Predhodne jednačine predstavljaju geometrijske relacije koje će se koristiti za matematičku formulaciju problema. Napominjemo da su one nelinearnog tipa.

3.3 Konstitutivne jednačine

U slučaju ravanske deformacije elastičnih štapova kod kojih se uzimaju u obzir efekti kompresibilnosti i smicanja potrebno je formulisati tri konstitutivne jednačine. Te jednačine povezuju presečne veličine: aksijalnu i transverzalnu silu i moment savijanja sa merama deformacije. U opštem slučaju postoji više načina da se to uradi ([3], [4]). U okviru ove disertacije mi ćemo iskoristiti Timošenkov pristup. Kao posledicu uvešćemo tri mere deformacija $\frac{d\theta}{dS}$, ε i γ . Veličinu γ nazivamo ugao klizanja i definišemo kao promenu ugla koji zaklapaju tangenta na osu štapa i poprečni presek. Geometrijski prikaz je dat na Slici 4.



Slika 4: Presečne sile i ugao klizanja

Sledeći Timošenkov pristup prvo ćemo presečnu silu \mathbf{R} razložiti na komponente u pravcu tangente na osu štapa i na njemu ortogonalan pravac (Slika 4). Tako dobijamo

$$\begin{aligned} N &= H \cos \theta + V \sin \theta, \\ Q &= -H \sin \theta + V \cos \theta, \end{aligned} \quad (3.6)$$

gde su N i Q normalna i transverzalna sila. Konstitutivne jednačine prema Timošenku ([42], [6]) su sada oblika

$$\begin{aligned} N &= EA\varepsilon, \\ Q &= \frac{GA}{k}\gamma, \\ M &= EI \left(\frac{d\theta}{dS} - \frac{d\gamma}{dS} \right), \end{aligned} \quad (3.7)$$

gde je E modul elastičnosti, G modul klizanja, A površina poprečnog preseka štapa, I aksijalni moment inercije i k Timošenkov korekcionni koeficijent. Koristeći (3.6), jednačine (3.7) možemo zapisati kao

$$\begin{aligned} H \cos \theta + V \sin \theta &= EA\varepsilon, \\ -H \sin \theta + V \cos \theta &= \frac{GA}{k}\gamma, \\ M &= EI \left(\frac{d\theta}{dS} - \frac{d\gamma}{dS} \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Važno je napomenuti da su konstitutivne jednačine (3.7) linearnog tipa jer je veza presečnih veličina i mera deformacije linearna.

3.4 Opšte jednačine teorije elastičnih štapova

Na osnovu prethodnih izlaganja možemo formulisati kompletan sistem jednačina Timošenkovog pristupa. On se sastoji od jednačina ravnoteže, ge-

ometrijskih relacija i konstitutivnih jednačina. Dakle, imamo

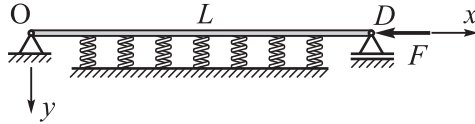
$$\begin{aligned}
 \frac{dH}{dS} &= -q_x, \\
 \frac{dV}{dS} &= -q_y, \\
 \frac{dM}{dS} &= -V \frac{dx}{dS} + H \frac{dy}{dS} - m, \\
 \frac{dx}{dS} &= (1 + \varepsilon) \cos \theta, \\
 \frac{dy}{dS} &= (1 + \varepsilon) \sin \theta, \\
 H \cos \theta + V \sin \theta &= EA\varepsilon, \\
 -H \sin \theta + V \cos \theta &= \frac{GA}{k} \gamma, \\
 M &= EI \left(\frac{d\theta}{dS} - \frac{d\gamma}{dS} \right). \tag{3.9}
 \end{aligned}$$

Jednačinama (3.9), je prilikom rešavanja, potrebno pridružiti odgovarajuće granične uslove.

4 Matematička formulacija problema

Kao što je navedeno u uvodu, osnovni cilj ove disertacije će biti analiza poslekritičnog ponašanja pravog prizmatičnog elastičnog pritisnutog štapa. Ova sekcija će biti posvećena određivanju jednačina ravanske deformacije štapa. Pri tome će se uzeti u obzir efekti savijanja i smicanja, dok se efekat kompresibilnosti neće uzeti u obzir.

Posmatraćemo štap dužine L i poprečnog preseka A koji je u krajnjim tačkama vezan za podlogu zglobnim osloncima (Slika 5). Takođe, duž cele svoje dužine štap će biti oslonjen na nelinearnu elastičnu podlogu koja u opštem slučaju može biti mekog ili tvrdog tipa (Slika 5). Kod desnog oslonca štap će biti opterećen konstantom silom intenziteta F koja deluje u pravcu ose štapa u nedeformisanom položaju. Za određivanje deformacija, koristićemo nepokretn Dekartov koordinatni sistem xOy (Slika 5). S obzirom da je osa štapa nekompresibilna (aksijalna krutost je beskonačna) važi da je $\epsilon = 0$ odnosno $s = S$.



Slika 5: Pritisnuti štap na nelinearnoj elastičnoj podlozi

Neka su q_x i q_y komponente otporne sile podloge po jedinici dužine ose štapa. S obzirom da ćemo pretpostaviti da je nelinearnost kubnog tipa, nelinearnu podlogu modelujemo tako što pretpostavljamo da su komponente otporne sile podloge oblika

$$q_x = 0, \quad q_y = -ay - by^3, \quad (4.1)$$

gde su a i b koeficijenti koji određuju krutost podloge. Praktično, (4.1) znači da podlogu matematički modelujemo kao niz neprekidno raspoređenih vertikalnih nelinearnih opruga (Slika 5). S obzirom da nema neprekidno raspoređenih spregova ($m = 0$), da je osa štapa nekompresibilna kao i da važi (4.1), osnovne jednačine (3.9) se mogu napisati u obliku

$$\begin{aligned}
\frac{dH}{dS} &= 0, \\
\frac{dV}{dS} &= ay + by^3, \\
\frac{dM}{dS} &= -V \cos \theta + H \sin \theta, \\
\frac{dx}{dS} &= \cos \theta, \\
\frac{dy}{dS} &= \sin \theta, \\
\frac{GA}{k} \gamma &= -H \sin \theta + V \cos \theta, \\
M &= EI \left(\frac{d\theta}{dS} - \frac{d\gamma}{dS} \right).
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Kao što je uobičajeno, veličine EI i GA nazivamo savojnom i smičućom krutosti. Granični uslovi koji odgovaraju sistemu (4.2) slede sa Slike 5 i oblika su

$$\begin{aligned}
x(0) &= 0, \\
y(0) &= 0, \\
y(L) &= 0, \\
H(L) &= -F, \\
M(0) &= 0, \\
M(L) &= 0.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Iz (4.2) i (4.3) sledi

$$H(S) = -F. \tag{4.4}$$

Koristeći (4.3) i (4.4) jednačine (4.2) možemo transformisati u

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dS} &= ay + by^3, \\
\frac{dM}{dS} &= -V \cos \theta - F \sin \theta, \\
\frac{dy}{dS} &= \sin \theta, \\
M &= EI \frac{d}{dS} \left[\theta - \frac{k}{GA} (F \sin \theta + V \cos \theta) \right].
\end{aligned} \tag{4.5}$$

gde su granični uslovi oblika

$$\begin{aligned}
y(0) &= 0, \\
y(L) &= 0, \\
M(0) &= 0, \\
M(L) &= 0.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Da bismo jednačine (4.5) transformisali u pogodniju formu uvodimo sledeću zavisnu promenljivu

$$\varphi = \theta - \frac{k}{GA} (F \sin \theta + V \cos \theta). \tag{4.7}$$

Sada iz (4.5)₄ sledi

$$EI \frac{d\varphi}{dS} = M, \tag{4.8}$$

što posle diferenciranja postaje

$$EI \frac{d^2\varphi}{dS^2} = \frac{dM}{dS}.$$

Izvod momenta se može prikazati preko (4.5)₂ pa prethodna jednačina postaje

$$EI \frac{d^2\varphi}{dS^2} = -V \cos \theta - F \sin \theta, \tag{4.9}$$

Koristeći (4.7) možemo (4.9) zapisati kao

$$\frac{d^2\varphi}{dS^2} - \frac{GA}{kEI} (\varphi - \theta) = 0. \tag{4.10}$$

Eliminacijom veličine θ , koristeći (4.5)₃ sledi

$$\frac{d^2\varphi}{dS^2} - \frac{GA}{kEI} \left[\varphi - \arcsin \left(\frac{dy}{dS} \right) \right] = 0. \quad (4.11)$$

Iz (4.7) sledi

$$V = -\frac{1}{\cos \theta} \left[\frac{GA}{k} (\varphi - \theta) + F \sin \theta \right].$$

Sada korišćenjem (4.5)₂ kao i trigonometrijske relacije $\cos \theta = \sqrt{1 - (\sin \theta)^2}$ sledi

$$V = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{dy}{dS}\right)^2}} \left\{ \frac{GA}{k} \left[\arcsin \left(\frac{dy}{dS} \right) - \varphi \right] - F \frac{dy}{dS} \right\}. \quad (4.12)$$

Diferenciranjem (4.12) i korišćenjem (4.5)₁ posle sređivanja dobijamo drugu diferencijalnu jednačinu drugog reda

$$\frac{d}{dS} \left[\frac{GA}{k} \frac{\arcsin \left(\frac{dy}{dS} \right) - \varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{dy}{dS}\right)^2}} - \frac{F \frac{dy}{dS}}{\sqrt{1 - \left(\frac{dy}{dS}\right)^2}} \right] = ay + by^3, \quad (4.13)$$

koja zajedno sa (4.11) čini zatvoren sistem dve diferencijalne jednačine drugog reda koje opisuju deformaciju štapa preko promenljivih y i φ . Granični uslovi koji odgovaraju sistemu (4.11) i (4.13) slede iz (4.6) i (4.8) i oblika su

$$\begin{aligned} y(0) &= 0, & y(L) &= 0, \\ \frac{d\varphi}{dS}(0) &= 0, & \frac{d\varphi}{dS}(L) &= 0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

U onome što sledi, pretpostavićemo da je $0 < a < \infty$, $-\infty < b < \infty$. Veličine ovih konstanti određuju krutost podloge. Fizički ovo znači da ćemo analizirati i meku i tvrdu elastičnu podlogu.

Pri matematičkom modeliranju fizičkih pojava važno je smanjiti broj fizikih parametara kako bi analiza problema bila lakša. To obično postiže uvođenjem bezdimenzijskih veličina. Iz tog razloga uvode se sledeće bezdimenzione veličine:

$$\begin{aligned} t &= \frac{S}{L}, & \bar{a} &= \frac{aL^4}{EI}, & \bar{b} &= \frac{bL^6}{EI}, \\ \mu &= \frac{GAL^2}{kEI}, & \lambda &= \frac{FL^2}{EI}, & \bar{y} &= \frac{y}{L}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

tako da sistem dat sa jednačinama (4.11) i (4.13) i granični uslovima (4.14) postaje

$$\begin{aligned} \left[\mu \frac{\arcsin(\bar{y}') - \varphi}{\sqrt{1 - (\bar{y}')^2}} \right]' - \lambda \left[\frac{\bar{y}'}{\sqrt{1 - (\bar{y}')^2}} \right]' - \bar{a}\bar{y} - \bar{b}\bar{y}^3 &= 0, \\ \varphi'' - \mu[\varphi - \arcsin(\bar{y}')] &= 0, \end{aligned} \quad (4.16)$$

zajedno sa

$$\bar{y}(0) = 0, \quad \bar{y}(1) = 0, \quad \varphi'(0) = 0, \quad \varphi'(1) = 0, \quad (4.17)$$

gde je $(\cdot)' = \frac{d(\cdot)}{dt}$. Treba napomenuti da je $\bar{y} = \varphi = 0$ trivijalno rešenje sistema (4.16), (4.17). To znači da će posle uvođenja poremećaja trivijalnog rešenja dobijene jednačine biti iste kao i (4.16) i (4.17). U daljem tekstu jednačine (4.16) i (4.17) će biti polazne jednačine za lokalnu bifurkacionu analizu.

U onome što sledi važno je napomenuti da sistem (4.16) i (4.17) poseduje varijacionu formulaciju. U tu svrhu uvedimo

$$\bar{L} = \frac{1}{2}(\varphi')^2 + \frac{1}{2}\mu[\varphi - \arcsin(\bar{y}')]^2 - \lambda \left[1 - \sqrt{1 - (\bar{y}')^2} \right] + \frac{\bar{a}}{2}\bar{y}^2 + \frac{\bar{b}}{4}\bar{y}^4,$$

i funkcionalu $\Pi(\bar{y}, \bar{y}'\varphi, \varphi')$ sa

$$\Pi(\bar{y}, \bar{y}'\varphi, \varphi') = \int_0^1 \bar{L} dt. \quad (4.18)$$

Sa fizičke strane funkcionala (4.18) predstavlja totalnu potencijalnu energiju. Sistemu (4.16) i (4.17) odgovaraju Ojler-Lagranževe jednačine

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \bar{y}'} \right) - \frac{\partial \bar{L}}{\partial \bar{y}} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \varphi'} \right) - \frac{\partial \bar{L}}{\partial \varphi} &= 0, \end{aligned}$$

s obzirom da je

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \bar{y}} &= \bar{a}\bar{y} + \bar{b}\bar{y}^3, \\ \frac{\partial \bar{L}}{\partial \varphi} &= \mu[\varphi - \arcsin(\bar{y}')], \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \bar{y}'} \right) &= \left[\frac{\mu[\arcsin(\bar{y}') - \varphi]}{\sqrt{1 - (\bar{y}')^2}} - \lambda \frac{\bar{y}'}{\sqrt{1 - (\bar{y}')^2}} \right]', \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \varphi'} \right) &= \varphi''. \end{aligned}$$

Napominjemo da su jednačine (4.16) i (4.17) kao i totalna potencijalna energija (4.18) generalizacija osnovnih jednačina koje su korišćene u [48].

5 Lokalna bifurkaciona analiza

5.1 Uvod

U ovoj sekciji biće izvedena lokalna bifurkaciona analiza primenjena na problem (4.16) i (4.17). Preciznije, izvešće se:

1. analitičke formule na osnovu kojih se može odrediti najmanja vrednost bezdimenzijske sile λ pri kojoj se pojavljuje izvijeni položaj štapa (kritična sila izvijanja) u zavisnosti od parametara,
2. bifurkacione jednačine koje opisuju bifurkacije u okolini najmanje dvostruke sopstvene vrednosti,
3. analitičke formule koje opisuju primarne i sekundarne grane bifurkacije u okolini najmanje dvostruke sopstvene vrednosti,
4. analitičke formule koje određuju stabilnost primarnih i sekundarnih grana bifurkacije.

Kako bi zadržali što jednostavniji i elegantniji zapis problema za njegovu analizu, potrebno je iskoristiti aparat matematičke analize. Dakle, neka je \mathbf{x} vektor definisan kao $\mathbf{x} = (\bar{y}, \varphi)^T$ gde su \bar{y} i φ neprekidne funkcije sa neprekidnim drugim izvodima. Definisaćemo sledeće prostore funkcija

$$\begin{aligned} X &= \left\{ \mathbf{x} : \mathbf{x} = (\bar{y}, \varphi)^T \in C^2([0, 1], \mathbb{R}) \times C^2([0, 1], \mathbb{R}), \right. \\ &\quad \left. \bar{y}(0) = 0, \quad \bar{y}(1) = 0, \quad \varphi'(0) = 0, \quad \varphi'(1) = 0, \right\}, \\ Z &= \{ \mathbf{z} : \mathbf{z} = (z_1, z_2) \in C([0, 1], \mathbb{R}) \times C([0, 1], \mathbb{R}) \}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

gde je $C^2([0, 1], \mathbb{R})$ prostor svih funkcija koje imaju neprekidan drugi izvod i preslikavaju $[0, 1]$ u \mathbb{R} , dok je $C([0, 1], \mathbb{R})$ prostor neprekidnih funkcija koje preslikavaju $[0, 1]$ u \mathbb{R} . Norme na X i Z su

$$\|\mathbf{x}\|_X^2 = \sum_{i=1}^2 (\sup |x_i| + \sup |x'_i| + \sup |x''_i|)^2, \quad \|\mathbf{z}\|_Z^2 = \sum_{i=1}^2 (\sup |z_i|)^2.$$

Sa ovim normama X i Z postaju Banahovi prostori. Takođe, definisaćemo i skalarni proizvod na Z ([22])

$$\langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \rangle_Z = \int_0^1 \mathbf{z}_1^T \mathbf{z}_2 dt, \quad \forall \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in Z.$$

Treba napomenuti da je $X \subset Z$ i da je preslikavanje $I : X \rightarrow Z$ neprekidno. Problem se sada može postaviti u kompaktnoj formi, tako što se uvodi sledeći nelinearni operator $\mathbf{G} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times U \rightarrow Z$

$$\mathbf{G}(\lambda, \bar{a}, \mathbf{x}) = \begin{cases} \left[\mu \frac{\arcsin(\bar{y}') - \varphi}{\sqrt{1 - (\bar{y}')^2}} \right]' - \lambda \left[\frac{\bar{y}'}{\sqrt{1 - (\bar{y}')^2}} \right]' - \bar{a}\bar{y} - \bar{b}\bar{y}^3, \\ \varphi'' - \mu(\varphi - \arcsin(\bar{y}')), \end{cases} \quad (5.2)$$

gde je $U \subset X$ otvoren skup u okolini $\mathbf{x} = (0, 0)$. Sistem jednačina (4.16), (4.17) sada postaje

$$\mathbf{G}(\lambda, \bar{a}, \mathbf{x}) = \mathbf{0}. \quad (5.3)$$

Veličine λ i \bar{a} će se u daljem tekstu nazivati bifurkacioni i pomoćni parametar, respektivno. Pored toga, nelinearni operator (5.2) ima sledeća svojstva

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(\lambda, \bar{a}, \mathbf{x} = \mathbf{0}) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{G}(\lambda, \bar{a}, -\mathbf{x}) &= -\mathbf{G}(\lambda, \bar{a}, \mathbf{x}), \end{aligned} \quad (5.4)$$

za sve vrednosti λ i \bar{a} .

5.2 Određivanje kritične sile izvijanja

Da bismo odredili kritične sile izvijanja potrebno je analizirati linearni problem. U tu svrhu izračunaćemo Frešev izvod $\mathbf{L}(\lambda, \bar{a}) = D_{\mathbf{x}}\mathbf{G}(\lambda, \bar{a}, \mathbf{0})$ operatora $\mathbf{G}(\lambda, \bar{a}, \mathbf{x})$ u $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Tako dobijamo

$$\mathbf{L}(\lambda, \bar{a})\mathbf{x} = D_{\mathbf{x}}\mathbf{G}(\lambda, \bar{a}, \mathbf{0})\mathbf{x} = \begin{cases} (\mu - \lambda)\bar{y}'' - \mu\varphi' - \bar{a}\bar{y} \\ \varphi'' - \mu(\varphi - \bar{y}') \end{cases}. \quad (5.5)$$

Sada se problem određivanja kritične sile svodi na rešavanje jednačine

$$\mathbf{L}(\lambda, \bar{a})\mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (5.6)$$

što u razvijenom obliku postaje

$$\begin{aligned} (\mu - \lambda)\bar{y}'' - \mu\varphi' - \bar{a}\bar{y} &= 0, \\ \varphi'' - \mu(\varphi - \bar{y}') &= 0. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Tražena rešenja jednačine (5.6) su zapravo sopstvene vrednosti i sopstveni vektori linearnog operatora $\mathbf{L}(\lambda, \bar{a})$ u terminologiji korišćenoj u [3]. U daljem tekstu analiziraćemo samo sopstvene vrednosti koje odgovaraju najmanjim

vrednostima sile pri kojoj je moguć izvijeni položaj (kritična sila izvijanja). Sopstvene vektore koji odgovaraju sopstvenim vrednostima ćemo nazvati modovima izvijanja. Za slučaj $\lambda \neq \mu$ jednačine (5.7) postaju

$$\bar{y}'''' + K\bar{y}'' + R\bar{y} = 0, \quad (5.8)$$

sa graničnim uslovima

$$\bar{y}(0) = \bar{y}(1) = \bar{y}''(0) = \bar{y}''(1) = 0, \quad (5.9)$$

pri čemu su konstante K i R oblika

$$K = \frac{\lambda - \frac{\bar{a}}{\mu}}{1 - \frac{\lambda}{\mu}}, \quad R = \frac{\bar{a}}{1 - \frac{\lambda}{\mu}}. \quad (5.10)$$

Problem istog tipa se pojavljuje i u [48]. Opšte rešenje (5.8) zavisi od vrednosti parametara λ , \bar{a} i μ kao i u problemu stabilnosti Bernuli-Ojlerovog štapa na linearnoj elastičnoj podlozi ([4], [36]). Međutim, kompletna analiza pokazuje da se kritična sila dobija kao

$$\lambda_n = \frac{\bar{a}}{\pi^2 n^2} + \frac{\mu \pi^2 n^2}{\mu + \pi^2 n^2}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (5.11)$$

gde veličina n određuje mod izvijanja. Mi ćemo naročito obratiti pažnju na slučaj kada su kritične vrednosti sile (najmanje sopstvene vrednosti) dvostruke u smislu da jednoj vrednosti sile odgovaraju dva moda izvijanja. Karakteristična jednačina (5.11) pokazuje da je za $0 < \bar{a} < \mu^2$ najmanja vrednost kritične sile

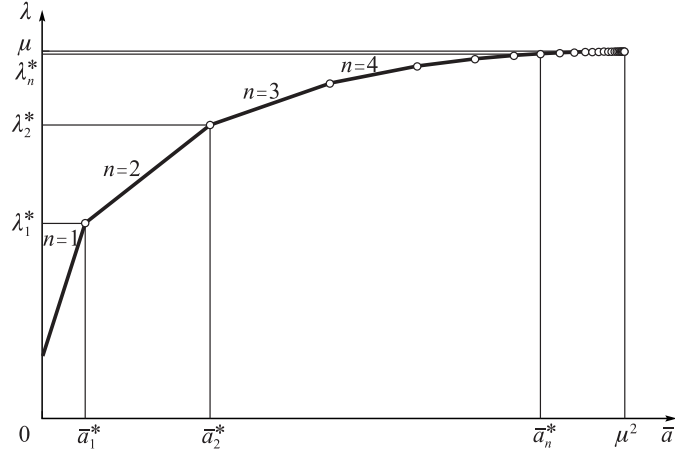
a) jednostruka i određena sa

$$\lambda_n \text{ ako } \bar{a}_{n-1}^* < \bar{a} < \bar{a}_n^* \text{ gde je } \bar{a}_n^* = \frac{\mu^2 n^2 (n+1)^2 \pi^4}{(\mu + \pi^2 n^2) [\mu + \pi^2 (n+1)^2]}, \quad (5.12)$$

b) dvostruka i određena sa

$$\lambda_n^* = \lambda_n = \lambda_{n+1} = \frac{\bar{a}_n^*}{\pi^2 n^2} + \frac{\mu \pi^2 n^2}{\mu + \pi^2 n^2} \text{ ako } \bar{a} = \bar{a}_n^*. \quad (5.13)$$

Vrednosti λ_n^* i \bar{a}_n^* u daljem tekstu biti karakteristične vrednosti bifurkacionog i pomoćnog parametara. U nastavku dodajemo da za $\bar{a} > \mu^2$ nema dvostrukih vrednosti kritične sile. Koristeći (5.12) i (5.13) možemo grafički prikazati vrednost najmanje kritične sile za $0 < \bar{a} < \mu^2$, i neku vrednost bezdimezijske smicajne krutosti, recimo $\mu = 50$ (Slika 6)



Slika 6: Dijagram kritične sile izvijanja u zavisnosti od parametra \bar{a} za $\mu = 50$

Kako bi se odredili modovi izvijanja koji odgovaraju najmanjoj dvostrukoj vrednosti kritične sile, analizirace se slučaj kod kojeg je zadovoljeno $1 - \lambda/\mu > 0$, $\lambda - \bar{a}/\mu > 0$ i $K^2 - 4R > 0$, gde su K i R dati sa (5.10). Opšte rešenje jednačine (5.8) glasi

$$\bar{y} = C_1 \cos \gamma_1 t + C_2 \sin \gamma_1 t + C_3 \cos \gamma_2 t + C_4 \sin \gamma_2 t, \quad (5.14)$$

gde su C_1, C_2, C_3 i C_4 proizvoljne konstante dok je $\gamma_{1,2} = \sqrt{K \mp \sqrt{K^2 - 4R}}$. Rešavanjem jednačina (5.14) i (5.9) za $\bar{a} = \bar{a}_n^*$ dobija se najmanja dvostruka vrednost kritične sile $\lambda_n = \lambda_n^*$, dok rešenje jednačine (5.6) postaje

$$\mathbf{x} = D_1 \mathbf{x}_1 + D_2 \mathbf{x}_2 = D_1 \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \varphi_1 \end{bmatrix} + D_2 \begin{bmatrix} \bar{y}_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}. \quad (5.15)$$

Veličine \mathbf{x}_1 i \mathbf{x}_2 u (5.15) odgovaraju modovima izvijanja, D_1 i D_2 su proizvoljne konstante dok funkcije $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \varphi_1$, i φ_2 imaju oblik

$$\begin{aligned} \bar{y}_1 &= \sin n\pi t, \\ \bar{y}_2 &= \sin (n+1)\pi t, \\ \varphi_1 &= \frac{\mu n\pi}{\mu + n^2\pi^2} \cos n\pi t, \\ \varphi_2 &= \frac{\mu\pi(n+1)}{\mu + (n+1)^2\pi^2} \cos (n+1)\pi t. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Treba napomenuti da u zavisnosti od moda izvijanja n funkcije $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \varphi_1$ i φ_2 su ili simetrične ili antisimetrične u koordinatnom sistemu definisanom sa horizontalnom t osom i vertikalom osom koja prolazi kroz središte štapa. Ova simetrična i antisimetrična svojstva su od ključnog značaja za određivanje bifurkacionih jednačina.

Može se zaključiti da za $\bar{a} = \bar{a}_n^*$ i $\lambda = \lambda_n^*$, (5.15) pokazuje da je prostor nula operatora $\mathbf{L}(\lambda_n^*, \bar{a}_n^*)$ dvodimenzionalan tj. da je $\dim N(\mathbf{L}(\lambda_n^*, \bar{a}_n^*)) = 2$.

U slučaju kada je kritična sila izvijanja jednostruka (jednačina (5.12)) rešavanjem (5.8) za $\lambda - \bar{a}/\mu > 0$, $1 - \lambda/\mu > 0$ i $K^2 - 4R \geq 0$ gde su konstante K i R date sa (5.10), dobija se rešenje za (5.6) u obliku

$$\mathbf{x} = D_1 \mathbf{x}_1 = D_1 \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \varphi_1 \end{bmatrix}. \quad (5.17)$$

gde je \mathbf{x}_1 odgovarajući mod izvijanja, D_1 je proizvoljna konstanta dok su funkcije \bar{y}_1 i φ_1 date sa (5.16).

5.3 Bifurkacione jednačine

Jedan od osnovnih zadataka lokalne bifurkacione analize je da odrediti broj rešenja nelinearnih problema kada neki fizički parametar uzima vrednosti u okolini svoje kritične vrednosti. Pored toga potrebno je, barem približno, odrediti i oblik tih rešenja kao i njihovu stabilnost. Kako je u većini slučajeva nemoguće odrediti analitička rešenja problema, potrebno je koristiti neke od matematičkih metoda za lokalnu analizu. Jedan od tih postupaka je i Ljapunov-Šmitova metoda i ona će biti korišćena u okviru ove disertacije. Osnovna ideja ove metode je da umesto analize rešenja originalnog problema (u ovom slučaju diferencijalnih jednačina) analiziraju rešenja algebarskih jednačina na osnovu kojih se može odrediti broj rešenja originalnog problema. Sama metoda je dobro poznata u literaturi a zainteresovanom čitaocu se preporučuje [15]. Mi ćemo u nastavku pratiti postupak koji su koristili [22] i [49].

Kao prvo primetimo da za operator $\mathbf{G}(\lambda, \bar{a}, \mathbf{x})$ postoji funkcionala $\Pi(\lambda, \bar{a}, \mathbf{x})$, data sa (4.18) takva da zadovoljava

$$D_{\mathbf{x}} \Pi(\lambda, \bar{a}, \mathbf{x}) \mathbf{h} = \langle \mathbf{G}(\lambda, \bar{a}, \mathbf{x}), \mathbf{h} \rangle \quad \forall \mathbf{h} \in X, \quad \forall \mathbf{x} \in U, \quad (5.18)$$

gde je $D_{\mathbf{x}}(\cdot)$ izvod po \mathbf{x} . Takve operatore ćemo zvati potencijalnim operatorima.

Kao drugu važnu činjenicu napominjemo da je $\mathbf{L}(\lambda_n^*, \bar{a}_n^*)$ Fredholmov operator sa indeksom nula ([53] i [15]). Ova činjenica kao i (5.18) omogućava da se prostori X i Z predstave preko direktne sume na sledeći način ([22])

$$X = N(\mathbf{L}(\lambda_n^*, \bar{a}_n^*)) \oplus R(\mathbf{L}(\lambda_n^*, \bar{a}_n^*)) \cap X, \quad Z = N(\mathbf{L}(\lambda_n^*, \bar{a}_n^*)) \oplus R(\mathbf{L}(\lambda_n^*, \bar{a}_n^*)), \quad (5.19)$$

gde je $R(\mathbf{L}(\lambda_n^*, \bar{a}_n^*))$ slika od $\mathbf{L}(\lambda_n^*, \bar{a}_n^*)$. Sada se proizvoljna funkcija koja pripada X ili Z može zapisati na sledeći način

$$\mathbf{x} = \alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{x}_2 + \mathbf{u}, \quad \mathbf{z} = \gamma \mathbf{x}_1 + \delta \mathbf{x}_2 + \mathbf{v}, \quad (5.20)$$

gde su α, β, γ i δ proizvoljne konstante, $\mathbf{u} \in R(\mathbf{L}(\lambda_n^*, \bar{a}_n^*)) \cap X$ i $\mathbf{v} \in R(\mathbf{L}(\lambda_n^*, \bar{a}_n^*))$. Iz uslova da je $\dim N(\mathbf{L}(\lambda_n^*, \bar{a}_n^*)) = 2$ kao i (5.19) jednačina (5.3) je ekvivalentna sa

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{G}(\lambda, \bar{a}, \mathbf{x}), \mathbf{x}_1 \rangle &= 0, \\ \langle \mathbf{G}(\lambda, \bar{a}, \mathbf{x}), \mathbf{x}_2 \rangle &= 0, \\ \langle \mathbf{G}(\lambda, \bar{a}, \mathbf{x}), \mathbf{v} \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Napominjemo da jednačine (5.21)_{1,2} opisuju projekciju $\mathbf{G}(\lambda, \bar{a}, \mathbf{x})$ na prostor nula operatora $\mathbf{L}(\lambda_n^*, \bar{a}_n^*)$, a jednačina (5.21)₃ opisuje projekciju $\mathbf{G}(\lambda, \bar{a}, \mathbf{x})$ na $R(\mathbf{L}(\lambda_n^*, \bar{a}_n^*))$. Kako je restrikcija $\mathbf{L}(\lambda_n^*, \bar{a}_n^*)$ na $R(\mathbf{L}(\lambda_n^*, \bar{a}_n^*)) \cap X$ bijektivno preslikavanje na $R(\mathbf{L}(\lambda_n^*, \bar{a}_n^*))$ moguće je primeniti Teoremu o implicitnoj funkciji na (5.21)₃ (Dodatak C). Na taj način dobija se rešenje po \mathbf{u} u obliku

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\lambda, \bar{a}, \alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{x}_2), \quad (5.22)$$

u okolini $(\mathbf{u}, \alpha, \beta, \lambda, \bar{a}) = (\mathbf{0}, 0, 0, \lambda_n^*, \bar{a}_n^*)$. Pri tome Ljapunov-Šmitov metod implicira da je ([15])

$$\mathbf{u} = O((|\alpha| + |\beta|)^2). \quad (5.23)$$

Uvedimo sada sledeća dva ograničena linearna operatora $S_i : Z \rightarrow Z$ $i = 1, 2$, kao

$$\begin{aligned} S_1 \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} &= (-1)^{n-1} \begin{pmatrix} z_1(1-t) \\ -z_2(1-t) \end{pmatrix}, \\ S_2 \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} &= (-1)^n \begin{pmatrix} z_1(1-t) \\ -z_2(1-t) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Može se pokazati da ovi operatori imaju sledeća svojstva

$$\begin{aligned} S_i^2 &= I, \quad i = 1, 2, \\ \langle S_i \mathbf{z}_1, S_i \mathbf{z}_2 \rangle &= \langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \rangle, \quad \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in Z, \quad i = 1, 2, \\ S_1 \mathbf{x}_1 &= \mathbf{x}_1, \quad S_1 \mathbf{x}_2 = -\mathbf{x}_2, \quad S_2 \mathbf{x}_1 = -\mathbf{x}_1, \quad S_2 \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Takođe važi i

$$\Pi(\lambda, \bar{a}, S_i \mathbf{x}) = \Pi(\lambda, \bar{a}, \mathbf{x}) \quad i = 1, 2 \quad (5.26)$$

na osnovu čega, kao i definicije potencijalnog operatora, sledi

$$\langle \mathbf{G}(\lambda, \bar{a}, \mathbf{x}), \mathbf{h} \rangle = D_{\mathbf{x}} \Pi(\lambda, \bar{a}, \mathbf{x}) \mathbf{h} = D_{\mathbf{x}} \Pi(\lambda, \bar{a}, S_i \mathbf{x}) \mathbf{h} = \langle \mathbf{G}(\lambda, \bar{a}, S_i \mathbf{x}), S_i \mathbf{h} \rangle.$$

Kako je zbog (5.25)_{1,2}

$$\langle \mathbf{G}(\lambda, \bar{a}, S_i \mathbf{x}), S_i \mathbf{h} \rangle = \langle S_i^2 \mathbf{G}(\lambda, \bar{a}, S_i \mathbf{x}), S_i \mathbf{h} \rangle = \langle S_i \mathbf{G}(\lambda, \bar{a}, S_i \mathbf{x}), \mathbf{h} \rangle,$$

konačno sledi

$$\mathbf{G}(\lambda, \bar{a}, \mathbf{x}) = S_i \mathbf{G}(\lambda, \bar{a}, S_i \mathbf{x}), \quad i = 1, 2. \quad (5.27)$$

Neka je $\mathbf{z} \in R(\mathbf{L}(\lambda_n^*, \bar{a}_n^*))$. Tada, s obzirom na (5.21)₃

$$\langle \mathbf{G}(\lambda, \bar{a}, \alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{x}_2 + \mathbf{u}(\lambda, \bar{a}, \alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{x}_2)), \mathbf{z} \rangle = 0,$$

kao i (5.25)_{1,2} i (5.27) važi

$$\begin{aligned} &\langle S_i \mathbf{G}(\lambda, \bar{a}, \alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{x}_2 + \mathbf{u}(\lambda, \bar{a}, \alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{x}_2)), S_i \mathbf{z} \rangle \\ &= \langle \mathbf{G}(\lambda, \bar{a}, S_i(\alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{x}_2) + S_i \mathbf{u}(\lambda, \bar{a}, \alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{x}_2)), S_i \mathbf{z} \rangle = 0. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Pošto je $S_i \mathbf{z} \in R(\mathbf{L}(\lambda_n^*, \bar{a}_n^*))$, zbog jedinstvenosti rešenja po \mathbf{u} i (5.28) sledi

$$\mathbf{u}(\lambda, \bar{a}, \alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{x}_2) = S_i \mathbf{u}(\lambda, \bar{a}, S_i(\alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{x}_2)). \quad i = 1, 2. \quad (5.29)$$

Zamenom $\lambda = \lambda_n^* + \Delta \lambda$ i $\bar{a} = \bar{a}_n^* + \Delta \bar{a}$ u levu stranu bifurkacionih jednačina (5.21)_{1,2} definišemo dve funkcije

$$\begin{aligned}
g_1(\alpha, \beta, \Delta\lambda, \Delta\bar{a}) &= \langle \mathbf{G}(\lambda, \bar{a}, \mathbf{x}), \mathbf{x}_1 \rangle \\
&= \int_0^1 [\mathbf{G}(\lambda_n^* + \Delta\lambda, \bar{a}_n^* + \Delta\bar{a}, \alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2 + \mathbf{u})]^T \mathbf{x}_1 dt = 0, \\
g_2(\alpha, \beta, \Delta\lambda, \Delta\bar{a}) &= \langle \mathbf{G}(\lambda, \bar{a}, \mathbf{x}), \mathbf{x}_2 \rangle \\
&= \int_0^1 [\mathbf{G}(\lambda_n^* + \Delta\lambda, \bar{a}_n^* + \Delta\bar{a}, \alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2 + \mathbf{u})]^T \mathbf{x}_2 dt = 0 \quad (5.30)
\end{aligned}$$

gde je $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\lambda_n^* + \Delta\lambda, \bar{a}_n^* + \Delta\bar{a}, \alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2)$. Pokažimo sada da jednačine (5.30) poseduju važna svojstva. Posmatrajmo prvo slučaj

$$g_1(-\alpha, \beta, \Delta\lambda, \Delta\bar{a}) = \langle \mathbf{G}(\lambda, \bar{a}, -\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2 + \mathbf{u}(\lambda, \bar{a}, -\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2)), \mathbf{x}_1 \rangle. \quad (5.31)$$

Desnu stranu jednačine (5.31) možemo, koristeći (5.25), (5.27) i (5.29) transformisati na sledeći način

$$\begin{aligned}
g_1(-\alpha, \beta, \Delta\lambda, \Delta\bar{a}) &= \langle \mathbf{G}(\lambda, \bar{a}, -\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2 + \mathbf{u}(\lambda, \bar{a}, -\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2)), \mathbf{x}_1 \rangle \\
&= \langle \mathbf{G}(\lambda, \bar{a}, S_2(\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2) + \mathbf{u}(\lambda, \bar{a}, S_2(\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2))), \mathbf{x}_1 \rangle \\
&= \langle \mathbf{G}(\lambda, \bar{a}, S_2(\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2) + S_2\mathbf{u}(\lambda, \bar{a}, \alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2)), \mathbf{x}_1 \rangle \\
&= \langle \mathbf{G}(\lambda, \bar{a}, S_2(\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2 + \mathbf{u}(\lambda, \bar{a}, \alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2))), \mathbf{x}_1 \rangle \\
&= \langle S_2\mathbf{G}(\lambda, \bar{a}, \alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2 + \mathbf{u}(\lambda, \bar{a}, \alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2)), \mathbf{x}_1 \rangle \\
&= \langle S_2^2\mathbf{G}(\lambda, \bar{a}, \alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2 + \mathbf{u}(\lambda, \bar{a}, \alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2)), S_2\mathbf{x}_1 \rangle \\
&= \langle \mathbf{G}(\lambda, \bar{a}, \alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2 + \mathbf{u}(\lambda, \bar{a}, \alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2)), -\mathbf{x}_1 \rangle \\
&= -\langle \mathbf{G}(\lambda, \bar{a}, \alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2 + \mathbf{u}(\lambda, \bar{a}, \alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2)), \mathbf{x}_1 \rangle.
\end{aligned}$$

Dakle, na osnovu izvedenog važi

$$g_1(-\alpha, \beta, \Delta\lambda, \Delta\bar{a}) = -g_1(\alpha, \beta, \Delta\lambda, \Delta\bar{a}). \quad (5.32)$$

Slično se može pokazati da funkcije $g_1(\alpha, \beta, \Delta\lambda, \Delta\bar{a})$ i $g_2(\alpha, \beta, \Delta\lambda, \Delta\bar{a})$ zadovoljavaju sledeće

$$\begin{aligned}
g_2(-\alpha, \beta, \Delta\lambda, \Delta\bar{a}) &= g_2(\alpha, \beta, \Delta\lambda, \Delta\bar{a}), \\
g_1(\alpha, -\beta, \Delta\lambda, \Delta\bar{a}) &= g_1(\alpha, \beta, \Delta\lambda, \Delta\bar{a}), \\
g_2(\alpha, -\beta, \Delta\lambda, \Delta\bar{a}) &= -g_2(\alpha, \beta, \Delta\lambda, \Delta\bar{a}). \quad (5.33)
\end{aligned}$$

Svojstva data sa (5.32) i (5.33) označavamo sa $Z_2 \oplus Z_2$ i nazivamo ih dvostruka Z_2 simetrija ([15], [49]). Sada možemo napisati bifurkacione jednačine u razvijenoj formi. Dakle, razvijanjem (5.30) u Tejlorov red u okolini $(\Delta\lambda, \Delta\bar{a}, \mathbf{x}) = (0, 0, \mathbf{0})$ i korišćenjem (5.23) kao i

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(\lambda_n^*, \bar{a}_n^*) (\alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{x}_2) &= 0, \\ \langle \mathbf{L}(\lambda_n^*, \bar{a}_n^*) \mathbf{u}, \alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{x}_2 \rangle &= 0, \end{aligned}$$

jednačina (5.30) postaje

$$\begin{aligned} g_1(\alpha, \beta, \Delta\lambda, \Delta\bar{a}) &= (a_1\Delta\lambda + b_1\Delta\bar{a})\alpha + p\alpha^3 + r\alpha\beta^2 + \alpha h_1 = 0, \\ g_2(\alpha, \beta, \Delta\lambda, \Delta\bar{a}) &= (a_2\Delta\lambda + b_2\Delta\bar{a})\beta + q\beta\alpha^2 + s\beta^3 + \beta h_2 = 0, \end{aligned} \quad (5.34)$$

gde su koeficijenti oblika

$$\begin{aligned} a_1 &= \int_0^1 y_1 y_1'' dt, & a_2 &= \int_0^1 y_2 y_2'' dt, \\ b_1 &= \int_0^1 y_1^2 dt, & b_2 &= \int_0^1 y_2^2 dt, \\ p &= \frac{1}{6} \int_0^1 \{6by_1^4 + 3y_1 y_1' [y_1' (\mu\varphi_1' + (3\lambda - 4\mu)y_1'') + 2\mu\varphi_1 y_1''] - \mu\varphi_1 y_1'^3\} dt, \\ r &= \frac{1}{2} \int_0^1 \{y_1 [6by_1 y_2^2 + y_2'^2 (\mu\varphi_1' + (3\lambda - 4\mu)y_1'') + \\ &\quad + 2y_2' (y_1' (\mu\varphi_2' + (3\lambda - 4\mu)y_2'') + \mu(\varphi_2 y_1'' + \varphi_1 y_2''))] + 2\mu\varphi_2 y_1' y_2''\} dt, \\ q &= \frac{1}{2} \int_0^1 \{y_2 [6by_2 y_1^2 + y_1'^2 (\mu\varphi_2' + (3\lambda - 4\mu)y_2'') + \\ &\quad + 2y_1' (y_2' (\mu\varphi_1' + (3\lambda - 4\mu)y_1'') + \mu(\varphi_2 y_1'' + \varphi_1 y_2''))] + 2\mu\varphi_1 y_2' y_1'' \\ &\quad - \mu\varphi_2 y_1'^2 y_2'\} dt, \\ s &= \frac{1}{6} \int_0^1 \{6by_2^4 + 3y_2 y_2' [y_2' (\mu\varphi_2' + (3\lambda - 4\mu)y_2'') + 2\mu\varphi_2 y_2''] \\ &\quad - \mu\varphi_2 y_2'^3\} dt, \end{aligned} \quad (5.35)$$

a $h_i = h_i(\alpha, \beta, \Delta\lambda, \Delta\bar{a})$, $i = 1, 2$ označavaju članove višeg reda po $(\alpha, \beta, \Delta\lambda, \Delta\bar{a})$. Korišćenjem (5.13) i (5.16) dobijamo konačne vrednosti koeficijenata

$$\begin{aligned}
a_1 &= -\frac{1}{2}n^2\pi^2, & a_2 &= -\frac{(1+n)^2\pi^2}{2}, \\
b_1 &= \frac{1}{2}, & b_2 &= \frac{1}{2}, \\
p &= \frac{3}{8}\bar{b} + \frac{n^4\pi^6\mu \left[(n+n^2)^2\pi^2 - \mu(3(n+1)^2 - n^2) \right]}{16(n^2\pi^2 + \mu)((1+n)^2\pi^2 + \mu)}, \\
r &= q = \frac{3}{4}\bar{b} + \frac{n^2(1+n)^2\pi^6\mu \left[(n+n^2)^2\pi^2 - ((n+1)^2 + n^2)\mu \right]}{8(n^2\pi^2 + \mu)((1+n)^2\pi^2 + \mu)}, \\
s &= \frac{3}{8}\bar{b} + \frac{(1+n)^4\pi^6\mu \left[(n+n^2)^2\pi^2 + \mu((n+1)^2 - 3n^2) \right]}{16(n^2\pi^2 + \mu)((1+n)^2\pi^2 + \mu)}. \tag{5.36}
\end{aligned}$$

Radi veće opštosti u daljem tekstu neće se koristiti relacija da je $r = q$ osim ako ista nije neizbežna. Takođe, pretpostavljamo da su nedegenerativni uslovi zadovoljeni ([37], [49], [12])

$$a_1a_2 \neq 0, \quad a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0, \quad a_1q - a_2p \neq 0, \quad a_1s - a_2r \neq 0, \quad ps - qr \neq 0. \tag{5.37}$$

Prva dva uslova su ispunjena za svako $n \in \mathbb{N}$. Značaj uslova nedegenerativnosti će postati jasniji prilikom kasnije analize bifurkacionih jednačina.

Na kraju ovog dela vredi napomenuti da se, koristeći (5.20)₁, (5.22), $\lambda = \lambda_n^* + \Delta\lambda$ i $\bar{a} = \bar{a}_n^* + \Delta\bar{a}$, totalna potencijalna energija može napisati u obliku

$$\bar{\Pi}(\alpha, \beta, \Delta\lambda, \Delta\bar{a}) = \Pi(\lambda_n^* + \Delta\lambda, \bar{a}_n^* + \Delta\bar{a}, \alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2 + \mathbf{u}), \tag{5.38}$$

gde je $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\lambda_n^* + \Delta\lambda, \bar{a}_n^* + \Delta\bar{a}, \alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2)$. Potencijalnu energiju datu sa (5.38) ćemo zvati redukovana totalna potencijalna energija i njena uloga će biti prevashodno u određivanju stabilnosti poslekritičnih položaja štapa. Takođe, moguće je bifurkacione jednačine izvesti i koristeći redukovanu totalnu potencijalnu energiju ([22])

$$\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial \beta} = 0.$$

U sledećem delu analiziraćemo primarne i sekundarne grane bifurkacije.

5.4 Lokalne bifurkacije

U ovom poglavlju pratićemo rezultate iz [49], [37] i [12]. Preciznije, odredićemo broj rešenja jednačine (5.3) u okolini $(\lambda, \bar{a}, \mathbf{x}) = (\lambda_n^*, \bar{a}_n^*, \mathbf{0})$ kao i njihov približni oblik. Za ovu analizu prvo se mora definisati termin grana bifurkacije. Pod ovim terminom podrazumevaćemo neprekidnu krivu koja je definisana vrednostima (λ, \mathbf{x}) u $\mathbb{R}_+ \times X$. Glavni cilj će biti analiza primarnih i sekundarnih grana bifurkacije.

5.4.1 Primarne bifurkacije

Kao što je ranije navedeno primarne grane bifurkacije su one koje se granaju iz trivijalnog rešenja $(\lambda, \mathbf{0})$, dok su sekundarne grane bifurkacije one koje se granaju iz primarnih grana. Kako bi se odredile ove grane koristiće se svojstva (5.32) i (5.33) na osnovu kojih se bifurkacione jednačine (5.34) mogu napisati u obliku ([15])

$$\begin{aligned} g_1(\alpha, \beta, \Delta\lambda, \Delta\bar{a}) &= \alpha \bar{g}_1(\alpha, \beta, \Delta, \lambda, \Delta\bar{a}) \\ &= \alpha [a_1 \Delta\lambda + b_1 \Delta\bar{a} + p\alpha^2 + r\beta^2 + h_1(\alpha, \beta, \Delta\lambda, \Delta\bar{a})] = 0, \\ g_2(\alpha, \beta, \Delta\lambda, \Delta\bar{a}) &= \beta \bar{g}_2(\alpha, \beta, \Delta, \lambda, \Delta\bar{a}) \\ &= \beta [a_2 \Delta\lambda + b_2 \Delta\bar{a} + q\alpha^2 + s\beta^2 + h_2(\alpha, \beta, \Delta\lambda, \Delta\bar{a})] = 0. \end{aligned} \quad (5.39)$$

gde su $\bar{g}_1(\alpha, \beta, \Delta, \lambda, \Delta\bar{a})$ i $\bar{g}_2(\alpha, \beta, \Delta, \lambda, \Delta\bar{a})$ kvadratne funkcije po α i β . Iz jednačine (5.39) sledi da je $\alpha = \beta = 0$ jedno njeno rešenje. S obzirom na (5.20) i (5.22) to rešenje odgovara trivijalnoj grani. U slučaju kada je $p \neq 0$ teorema o implicitnoj funkciji i (5.39)₁ pokazuju da za $\beta = 0$ postoji primarna grana, u oznaci $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_1}$, koja je data sa

$$\Gamma_{1\bar{a}}^{B_1} = \left\{ \begin{array}{l} (\lambda = \lambda_n^* + \Delta\lambda, \mathbf{x}) : \mathbf{x} = \alpha \mathbf{x}_1 + \hat{h}(\alpha, \Delta\bar{a}), \\ \lambda = \lambda_n^* - \frac{b_1}{a_1} \Delta\bar{a} - \frac{p}{a_1} \alpha^2 + O(\alpha^4, \Delta\bar{a}\alpha^2, \Delta\bar{a}^2) \end{array} \right\}, \quad (5.40)$$

gde $(\alpha, \Delta\bar{a})$ pripada maloj okolini tačke $(0, 0)$, dok veličina $\hat{h}(\alpha, \Delta\bar{a})$ označava članove višeg reda po $(\alpha, \Delta\bar{a})$. Ova primarna grana se razdvaja od trivijalne u $(\lambda_n^* + \Delta\lambda, 0)$. Na sličan način, $\alpha = 0$, (5.39)₂ i teorema o implicitnoj funkciji daju drugu primarnu granu $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_2}$

$$\Gamma_{1\bar{a}}^{B_2} = \left\{ \begin{array}{l} (\lambda = \lambda_n^* + \Delta\lambda, \mathbf{x}) : \mathbf{x} = \beta \mathbf{x}_2 + \hat{h}(\beta, \Delta\bar{a}), \\ \lambda = \lambda_n^* - \frac{b_2}{a_2} \Delta\bar{a} - \frac{s}{a_2} \beta^2 + O(\beta^4, \Delta\bar{a}\beta^2, \Delta\bar{a}^2) \end{array} \right\}, \quad (5.41)$$

gde $(\beta, \Delta\bar{a})$ pripada maloj okolini tačke $(0, 0)$ dok veličina $\widehat{h}(\beta, \Delta\bar{a})$ označava članove višeg reda po $(\beta, \Delta\bar{a})$.

Napominjemo da postojanje operatora S_i implicira da rešenja $\alpha\mathbf{x}_1 + \mathbf{u}(\lambda, \bar{a}, \alpha\mathbf{x}_1)$ i $\beta\mathbf{x}_2 + \mathbf{u}(\lambda, \bar{a}, \beta\mathbf{x}_2)$ nelinearnog problema (5.3), a koja odgovaraju primarnim granama $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_1}$ i $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_2}$, nasleđuju svojstva simetrije i antisimetrije linearnih rešenja \mathbf{x}_1 i \mathbf{x}_2 datih sa (5.25), respektivno. Da bi smo to pokazali primetimo da za primarnu granu $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_1}$ na osnovu (5.22), (5.25)₃ i (5.29) važi

$$\begin{aligned} S_1(\alpha\mathbf{x}_1 + \mathbf{u}(\lambda, \bar{a}, \alpha\mathbf{x}_1)) &= \alpha S_1\mathbf{x}_1 + S_1\mathbf{u}(\lambda, \bar{a}, \alpha\mathbf{x}_1) \\ &= \alpha S_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{u}(\lambda, \bar{a}, \alpha S_1\mathbf{x}_1) \\ &= \alpha\mathbf{x}_1 + \mathbf{u}(\lambda, \bar{a}, \alpha\mathbf{x}_1). \end{aligned} \quad (5.42)$$

Slično se pokazuje da za primarnu granu $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_2}$ važi

$$\begin{aligned} S_2(\beta\mathbf{x}_2 + \mathbf{u}(\lambda, \bar{a}, \beta\mathbf{x}_2)) &= \alpha S_2\mathbf{x}_2 + S_2\mathbf{u}(\lambda, \bar{a}, \beta\mathbf{x}_2) \\ &= \alpha S_2\mathbf{x}_2 + \mathbf{u}(\lambda, \bar{a}, \beta S_2\mathbf{x}_2) \\ &= \beta\mathbf{x}_2 + \mathbf{u}(\lambda, \bar{a}, \beta\mathbf{x}_2). \end{aligned} \quad (5.43)$$

Sada na osnovu definicije operatora S_i kao i (5.42), (5.43) slede simetrije i antisimetrije rešenja nelinearnog problema.

5.4.2 Sekundarne bifurkacije

Pokažimo sada način na koji se određuju sekundare grane bifurkacije. Osnovni matematički alat će biti teorema o implicitnoj funkciji što je česta praksa u teoriji lokalnih bifurkacija. Kao što je urađeno u [12] uvešćemo prvo dva skalara

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \operatorname{sgn} [(a_2b_1 - a_1b_2)(a_1q - a_2p)], \\ \chi_0 &= \operatorname{sgn} [(a_2b_1 - a_1b_2)(a_1s - a_2r)], \end{aligned} \quad (5.44)$$

i zatim transformisati bifurkacione jednačine (5.39) uvođenjem smena

$$\lambda - \lambda_n^* = \nu^2\Lambda, \quad \bar{a} - \bar{a}_n^* = \nu^2\tau, \quad \alpha = \nu\xi, \quad \beta = \nu\eta. \quad (5.45)$$

Na taj način umesto rešavanja bifurkacionih jednačina $\bar{g}_1(\alpha, \beta, \Delta\lambda, \Delta\bar{a}) = 0$ i $\bar{g}_2(\alpha, \beta, \Delta\lambda, \Delta\bar{a}) = 0$, rešavaćemo lokalno jednačine

$$\hat{g}_1(\xi, \eta, \Lambda, \tau, \nu) = 0, \quad \hat{g}_2(\xi, \eta, \Lambda, \tau, \nu) = 0, \quad (5.46)$$

gde je

$$\begin{aligned}\hat{g}_1(\xi, \eta, \Lambda, \tau, \nu) &= \begin{cases} \frac{1}{\nu^2} \bar{g}_1(\nu\xi, \nu\eta, \nu^2\Lambda, \nu^2\tau) & \text{ako } \nu \neq 0 \\ a_1\Lambda + b_1\tau + p\xi^2 + r\eta^2 & \text{ako } \nu = 0 \end{cases}, \\ \hat{g}_2(\xi, \eta, \Lambda, \tau, \nu) &= \begin{cases} \frac{1}{\nu^2} \bar{g}_2(\nu\xi, \nu\eta, \nu^2\Lambda, \nu^2\tau) & \text{ako } \nu \neq 0 \\ a_2\Lambda + b_2\tau + q\xi^2 + s\eta^2 & \text{ako } \nu = 0 \end{cases}. \end{aligned} \quad (5.47)$$

a) Odredimo prvo sekundarne grane bifurkacija koje se granaju iz primarnih grana $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_1}$. Prvo ćemo lokalno rešiti sistem (5.46) za $\tau = \tau_0$. Dakle rešavaćemo

$$\hat{g}_1(\xi, \eta, \Lambda, \tau_0, \nu) = 0, \quad \hat{g}_2(\xi, \eta, \Lambda, \tau_0, \nu) = 0, \quad (5.48)$$

Kako bi se rešile jednačine (5.48) primetimo da sistem

$$\begin{aligned}\hat{g}_1(\xi, 0, \Lambda, \tau_0, 0) &= a_1\Lambda + b_1\tau_0 + p\xi^2 = 0, \\ \hat{g}_2(\xi, 0, \Lambda, \tau_0, 0) &= a_2\Lambda + b_2\tau_0 + q\xi^2 = 0, \end{aligned} \quad (5.49)$$

ima sledeće rešenje

$$\begin{aligned}\Lambda &= \bar{\Lambda}_0 = \frac{b_2p - b_1q}{a_1q - a_2p} \tau_0, \\ \xi &= \pm \bar{\xi}_0 = \pm \sqrt{\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_1q - a_2p}} \tau_0. \end{aligned} \quad (5.50)$$

S obzirom da je na osnovu uslova nedegenerativnosti

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \hat{g}_1}{\partial \Lambda} & \frac{\partial \hat{g}_1}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \hat{g}_2}{\partial \Lambda} & \frac{\partial \hat{g}_2}{\partial \xi} \end{vmatrix}_{(\xi, \eta, \Lambda, \nu) = (\pm \bar{\xi}_0, 0, \bar{\Lambda}_0, 0)} = \begin{vmatrix} a_1 & \pm 2p\bar{\xi}_0 \\ a_2 & \pm 2q\bar{\xi}_0 \end{vmatrix} = \pm 2\bar{\xi}_0 (a_1q - a_2p) \neq 0,$$

teorema o implicitnoj funkciji daje jedinstvena lokalna rešenja $\Lambda(\eta, \nu)$ i $\xi(\eta, \nu)$ jednačine (5.48) u okolini $(\xi, \eta, \Lambda, \nu) = (\pm \bar{\xi}_0, 0, \bar{\Lambda}_0, 0)$. Rešenja ćemo formalno zapisati u obliku

$$\Lambda = \bar{\Lambda}(\eta, \nu), \quad \xi = \pm \bar{\xi}(\eta, \nu). \quad (5.51)$$

gde su $\bar{\Lambda}(\eta, \nu)$, $\bar{\xi}(\eta, \nu)$ kvadratne funkcije po η i ν s obzirom na (5.45). Koristeći razvoj u Tejlorov red, (5.51) možemo zapisati kao

$$\begin{aligned}\bar{\Lambda}(\eta, \nu) &= \bar{\Lambda}_0 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{\Lambda}}{\partial \eta^2}(0, 0) \eta^2 + O(\nu^2, \eta^4), \\ \bar{\xi}(\eta, \nu) &= \bar{\xi}_0 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial \eta^2}(0, 0) \eta^2 + O(\nu^2, \eta^4).\end{aligned}\quad (5.52)$$

Teorema o implicitnoj funkciji, (5.52) i (5.48) određuju koeficijente u obliku ([49])

$$\frac{\partial^2 \bar{\Lambda}}{\partial \eta^2}(0, 0) = 2 \frac{ps - qr}{a_1q - a_2p}, \quad \frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial \eta^2}(0, 0) = \frac{a_2r - a_1s}{a_1q - a_2p} \frac{1}{\bar{\xi}_0}. \quad (5.53)$$

Sada za vrednosti $\Delta \bar{a} = \bar{a} - \bar{a}_n^* = \nu^2 \tau_0$ jednačine (5.20)₁, (5.45) i (5.52) određuju sekundarne grane bifurkacije $\Gamma_{2\bar{a}}^{B_1}$ koje se granaju iz $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_1}$. Ove sekundarne grane imaju oblik

$$\Gamma_{2\bar{a}}^{B_1} (\Delta \bar{a} = \nu^2 \tau_0) = \left\{ \begin{array}{l} (\lambda = \lambda_n^* + \Delta \lambda, \mathbf{x}) : \\ \mathbf{x} = \pm \nu \left[\bar{\xi}_0 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial \eta^2}(0, 0) \eta^2 \right] \mathbf{x}_1 + \nu \eta \mathbf{x}_2 + \bar{h}(\eta, \nu), \\ \lambda = \lambda_n^* + \nu^2 \left[\bar{\Lambda}_0 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{\Lambda}}{\partial \eta^2}(0, 0) \eta^2 \right] + O(\nu^4, \nu^2 \eta^4), \end{array} \right\}, \quad (5.54)$$

gde veličine (η, ν) pripadaju okolini $(0, 0)$, dok $\bar{h}(\eta, \nu)$ označava članove višeg reda po (η, ν) . Bitno je napomenuti da za $\Delta \bar{a} = \nu^2 \tau_0$, (5.50)₂ implicira postojanje dve bifurkacione tačke na $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_1}$, dok za $\Delta \bar{a} = \nu^2(-\tau_0)$ ne dolazi do pojave ni jedne tačke bifurkacije na $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_1}$.

b) Odredimo sada sekundarne grane bifurkacija koje se granaju iz primarne grane $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_2}$. Prvo ćemo rešiti sistem (5.46) za $\tau = \chi_0$. Dakle rešavaćemo

$$\hat{g}_1(\xi, \eta, \Lambda, \chi_0, \nu) = 0, \quad \hat{g}_2(\xi, \eta, \Lambda, \chi_0, \nu) = 0. \quad (5.55)$$

Kako bi se lokalno rešile jednačine (5.55) primetimo prvo da sistem

$$\begin{aligned}\hat{g}_1(0, \eta, \Lambda, \chi_0, 0) &= a_1 \Lambda + b_1 \chi_0 + r \eta^2 = 0, \\ \hat{g}_2(0, \eta, \Lambda, \chi_0, 0) &= a_2 \Lambda + b_2 \chi_0 + s \eta^2 = 0,\end{aligned}\quad (5.56)$$

ima rešenje

$$\begin{aligned}\tilde{\Lambda}_0 &= \frac{b_2 r - b_1 s}{a_1 s - a_2 r} \chi_0, \\ \tilde{\eta}_0 &= \pm \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_1 s - a_2 r} \chi_0.\end{aligned}\quad (5.57)$$

Uslovi nedegenarativnosti sada obezbeđuju

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \hat{g}_1}{\partial \Lambda} & \frac{\partial \hat{g}_1}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \hat{g}_2}{\partial \Lambda} & \frac{\partial \hat{g}_2}{\partial \eta} \end{vmatrix}_{(\xi, \eta, \Lambda, \nu) = (0, \pm \tilde{\eta}_0, \tilde{\Lambda}_0, 0)} = \begin{vmatrix} a_1 & \pm 2r\tilde{\eta}_0 \\ a_2 & \pm 2s\tilde{\eta}_0 \end{vmatrix} = \pm 2\tilde{\eta}_0 (a_1s - a_2r) \neq 0,$$

pa na osnovu Teoreme o implicitnoj funkciji sledi jedinstveno lokalno rešenje $\Lambda(\eta, \nu)$ i $\eta(\xi, \nu)$ jednačine (5.55) u okolini $(\xi, \eta, \Lambda, \nu) = (0, \pm \tilde{\eta}_0, \tilde{\Lambda}_0, 0)$. U ovom slučaju rešenja ćemo zapisati kao

$$\Lambda = \tilde{\Lambda}(\xi, \nu), \quad \eta = \pm \tilde{\eta}(\xi, \nu), \quad (5.58)$$

gde su $\tilde{\Lambda}(\xi, \nu)$, $\tilde{\eta}(\xi, \nu)$ kvadratne funkcije po ξ i ν s obzirom na (5.45). Razvoji u Tejlorov red (5.58) sada postaje

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}(\xi, \nu) &= \tilde{\Lambda}_0 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{\Lambda}}{\partial \xi^2}(0, 0) \xi^2 + O(\nu^2, \xi^4), \\ \tilde{\eta}(\xi, \nu) &= \tilde{\eta}_0 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{\eta}}{\partial \xi^2}(0, 0) \xi^2 + O(\nu^2, \xi^4). \end{aligned} \quad (5.59)$$

Slično kao u slučaju a) koeficijente nalazimo u obliku ([49])

$$\frac{\partial^2 \tilde{\Lambda}}{\partial \xi^2}(0, 0) = 2 \frac{ps - qr}{a_2r - a_1s}, \quad \frac{\partial^2 \tilde{\eta}}{\partial \xi^2}(0, 0) = \frac{a_1q - a_2p}{a_2r - a_1s} \frac{1}{\tilde{\eta}_0}. \quad (5.60)$$

Za vrednosti $\Delta \bar{a} = \bar{a} - \bar{a}_n^* = \nu^2 \chi_0$ jednačine (5.20)₁, (5.45) i (5.59) određuju sekundarne grane bifurkacije $\Gamma_{2\bar{a}}^{B_2}$ koje se granaju iz $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_2}$. a date su sa

$$\Gamma_{2\bar{a}}^{B_2} (\Delta \bar{a} = \nu^2 \chi_0) = \left\{ \begin{array}{l} (\lambda = \lambda_n^* + \Delta \lambda, \mathbf{x}) : \\ \mathbf{x} = \nu \xi \mathbf{x}_1 \pm \nu \left[\tilde{\eta}_0 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{\eta}}{\partial \xi^2}(0, 0) \xi^2 \right] \mathbf{x}_2 + \tilde{h}(\xi, \nu), \\ \lambda = \lambda_n^* + \nu^2 \left[\tilde{\Lambda}_0 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{\Lambda}}{\partial \xi^2}(0, 0) \xi^2 \right] + O(\nu^4, \nu^2 \xi^4), \end{array} \right\}, \quad (5.61)$$

gde veličine (ξ, ν) pripadaju maloj okolini $(0, 0)$, dok $\tilde{h}(\xi, \nu)$ označava članove višeg reda po (ξ, ν) . Treba obratiti pažnju da (5.57)₂ kada je $\Delta \bar{a} = \nu^2 \chi_0$ implicira da postoje dve bifurkacione tačke na $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_2}$, dok za $\Delta \bar{a} = \nu^2 (-\chi_0)$ nema ni jedne tačke bifurkacije na primarnoj grani $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_2}$.

S obzirom na definiciju τ_0 i χ_0 važi sledeća relacija

$$\tau_0 = \text{sgn} [(a_1q - a_2p) (a_1s - a_2r)] \chi_0,$$

na osnovu koje, kao i rezultata pod a) i b), možemo zaključiti:

1) ako je $(a_1q - a_2p)(a_1s - a_2r) > 0$ tada za $\Delta\bar{a} = \nu^2\chi_0 = \nu^2\tau_0$ postoje po dve bifurkacione tačke na svakoj primarnoj grani $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_1}$ i $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_2}$. Kao što je pokazano u [37], sekundarne grane $\Gamma_{2\bar{a}}^{B_1}$ i $\Gamma_{2\bar{a}}^{B_2}$ formiraju zatvorenu krivu koja povezuje sve bifurkacione tačke na primarnim granama $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_1}$ i $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_2}$. Kada $\Delta\bar{a} \rightarrow 0$ ova kriva nestaje ([37], [39], [12]). Kao posledica, za $\Delta\bar{a} = 0$, postoje dve primarne grane bifurkacije koje se granaju iz trivijalne grane u $(\lambda_n^*, \mathbf{0})$.

2) ako je $(a_1q - a_2p)(a_1s - a_2r) < 0$ tada za $\Delta\bar{a} = \nu^2\tau_0 = \nu^2(-\chi_0)$ postoje dve bifurkacione tačke na $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_1}$ dok za $\Delta\bar{a} = \nu^2\chi_0 = -\nu^2\tau_0$ postoje dve bifurkacione tačke na $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_2}$. U slučaju da je $\Delta\bar{a} = 0$, četiri primarne bifurkacione grane nastaju iz trivijalne grane u $(\lambda_n^*, \mathbf{0})$, ([37], [39], [12]).

Prethodni zaključak biće korišćen u značajnoj meri kod grafičke prezentacije lokalne bifurkacione analize u bifurkacionim dijagramima u (α, β, λ) prostoru. Treba napomenuti da (5.32) i (5.33) impliciraju da će u bifurkacionim dijagramima, ravni (α, λ) i (β, λ) biti ravni simetrije. Kao posledica za bilo koje mešovito rešenje (rešenje koje se odnosi na sekundarnu granu) postoje još tri kombinovana rešenja koja imaju istu totalnu potencijalnu energiju. Ova rešenja slede, korišćenjem prvog rešenja i nekoliko njegovih rotacija oko vertikalne ose simetrije i ose štapa pre deformacije.

5.5 Stabilnost poslekritičnog položaja štapa

S obzirom da je štap opterećen konzervativnim opterećenjem za analizu stabilnosti poslekritičnih položaja štapa koristiće se energijski metod. Kao što je ranije navedeno ([2], [4], [6]) smatraćemo da je ravnotežni poslekritični položaj štapa stabilan ako totalna potencijalna energija ima lokalni minimum u klasi dopustivih deformacija. U suprotnom smatraćemo da je položaj ravnoteže nestabilan.

Kako bi se odredila stabilnost rešenja koje odgovaraju primarnim i sekundarnim granama bifurkacije, sledićemo rezultate dobijene u [44], [30] i [49]. Preciznije, zbog elastičnosti štapa može se pokazati ([44]) da za $\lambda < \lambda_n^*$ operator $D_{\mathbf{xx}}\Pi(\lambda, \bar{a}_n^*, \mathbf{0})$ zadovoljava $D_{\mathbf{xx}}\Pi(\lambda, \bar{a}_n^*, \mathbf{0})(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq c_1\|\mathbf{x}\|^2$ na X za $c_1 = \text{const} > 0$. Na osnovu navedenog i neprekidnosti $D_{\mathbf{xx}}\Pi(\lambda, \bar{a}_n^*, \mathbf{0})$ po λ sledi ([44], [49])

$$D_{\mathbf{xx}}\Pi(\lambda_n^*, \bar{a}_n^*, \mathbf{0})(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq c_2\|\mathbf{u}\|^2, \quad \forall \mathbf{u} \in X \cap R(\mathbf{L}(\lambda_n^*, \bar{a}_n^*)),$$

gde je $c_2 = \text{const} > 0$, a $\|\cdot\|$ je odgovarajuća norma. Sada se mogu koristiti rezultati dati u [30], koji pokazuju da se stabilnost određenog ravnotežnog položaja štapa može odrediti koristeći redukovanu totalnu potencijalnu en-

ergiju $\bar{\Pi}(\alpha, \beta, \Delta\lambda, \Delta\bar{a})$. U tu svrhu definisamo prvo matricu stabilnosti

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \bar{\Pi}}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 \bar{\Pi}}{\partial \alpha \partial \beta} \\ \frac{\partial^2 \bar{\Pi}}{\partial \beta \partial \alpha} & \frac{\partial^2 \bar{\Pi}}{\partial \beta^2} \end{bmatrix}, \quad (5.62)$$

gde su

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{\Pi}}{\partial \alpha^2} &= a_1 \Delta\lambda + b_1 \Delta\bar{a} + 3p\alpha^2 + r\beta^2 + h_1 + \alpha \frac{\partial h_1}{\partial \alpha}, \\ \frac{\partial^2 \bar{\Pi}}{\partial \beta^2} &= a_2 \Delta\lambda + b_2 \Delta\bar{a} + q\alpha^2 + 3s\beta^2 + h_2 + \beta \frac{\partial h_2}{\partial \beta}, \\ \frac{\partial^2 \bar{\Pi}}{\partial \alpha \partial \beta} &= 2r\alpha\beta + h_{12}, \\ \frac{\partial^2 \bar{\Pi}}{\partial \beta \partial \alpha} &= 2q\alpha\beta + h_{12}, \end{aligned} \quad (5.63)$$

a veličine h_{12} označavaju članove višeg reda. Napominjemo da (5.63) sledi s obzirom da je

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial \alpha} &= g_1(\alpha, \beta, \Delta\lambda, \Delta\bar{a}), \\ \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial \beta} &= g_2(\alpha, \beta, \Delta\lambda, \Delta\bar{a}). \end{aligned}$$

Za određivanje stabilnosti ćemo koristiti pozitivnu definitnost matrice stabilnosti jer je to dovoljan uslov za minimum redukovane totalne potencijalne energije. To možemo uraditi i koristeći činjenicu da su za simetričnu matricu stabilnosti, uslovi pozitivne definitnosti ekvivalentni uslovima pozitivnosti sopstvenih vrednosti ([38]) ili koristeći Sylvesterov kriterijum.

Sa druge strane da bi smo odredili nestabilnost moramo pokazati da u ravnotežnom poslekritičnom položaju štapa redukovana totalna potencijalna energija nema lokalni minimum. To možemo uraditi koristeći činjenicu da je postojanje bar jedne negativne sopstvene vrednosti matrice stabilnosti dovoljan uslov za ne postojanje minimuma redukovane totalne potencijalne energije ([38]).

Za svaku bifurkacionu granu ćemo posebno formirati matricu stabilnosti i zatim odrediti odgovarajuće uslove stabilnosti.

a) **Primarna grana** $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_1}$. Da bismo dobili matricu stabilnosti za granu $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_1}$, treba izraz za $\Delta\lambda$ iz (5.40) zameniti u (5.62) uz uslov da je $\beta = 0$. Na taj način dobijamo

$$\mathbf{S}(\Gamma_{1\bar{a}}^{B_1}) = \begin{bmatrix} 2p\alpha^2 + O(\Delta\bar{a}\alpha^2, \alpha^4) & 0 \\ 0 & \frac{a_1q - a_2p}{a_1}\alpha^2 + \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1}\Delta\bar{a} + O((\Delta\bar{a})^2, \Delta\bar{a}\alpha^2, \alpha^4) \end{bmatrix}. \quad (5.64)$$

Pošto je matrica stabilnosti $\mathbf{S}(\Gamma_{1\bar{a}}^{B_1})$ data sa (5.64) dijagonalna sledi da su obe sopstvene vrednosti pozitivne za $\Delta\bar{a} \neq 0$ i $(\alpha, \beta, \Delta\bar{a})$ u okolini $(0, 0, 0)$ ako važi

$$p > 0 \quad \text{i} \quad \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1}\Delta\bar{a} > 0. \quad (5.65)$$

Dakle, ako važi (5.65) bifurkaciona grana $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_1}$ je stabilna. Međutim, ako je

$$p < 0 \quad \text{ili} \quad \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1}\Delta\bar{a} < 0, \quad (5.66)$$

tada je bar jedna sopstvena vrednost matrice stabilnosti $\mathbf{S}(\Gamma_{1\bar{a}}^{B_1})$ negativna za $\Delta\bar{a} \neq 0$ i $(\alpha, \beta, \Delta\bar{a})$ u okolini $(0, 0, 0)$. Dakle uslov (5.66) vodi ka nestabilnosti bifurkacione grane $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_1}$.

b) **Primarna grana** $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_2}$. Na sličan način kao u slučaju a) zamenićemo izraz za $\Delta\lambda$ iz (5.41) u (5.62) uz uslov da je $\alpha = 0$ i tako dobiti matricu stabilnosti koja odgovara grani $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_2}$ u obliku

$$\mathbf{S}(\Gamma_{1\bar{a}}^{B_2}) = \begin{bmatrix} \frac{a_2r - a_1s}{a_2}\beta^2 + \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2}\Delta\bar{a} + O((\Delta\bar{a})^2, \Delta\bar{a}\beta^2, \beta^4) & 0 \\ 0 & 2s\beta^2 + O(\Delta\bar{a}\beta^2, \beta^4) \end{bmatrix}. \quad (5.67)$$

Pošto je i matrica stabilnosti $\mathbf{S}(\Gamma_{1\bar{a}}^{B_2})$ data sa (5.67) dijagonalna sledi da su obe sopstvene vrednosti pozitivne za $\Delta\bar{a} \neq 0$ i $(\alpha, \beta, \Delta\bar{a})$ u okolini $(0, 0, 0)$ ako vazi

$$s > 0 \quad \text{i} \quad \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2}\Delta\bar{a} > 0, \quad (5.68)$$

te je grana $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_2}$ stabilna. Međutim ako je

$$s < 0 \quad \text{ili} \quad \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2}\Delta\bar{a} < 0, \quad (5.69)$$

tada je ponovo bar jedna sopstvena vrednost matrice stabilnosti $\mathbf{S}(\Gamma_{1\bar{a}}^{B_2})$ negativna za $\Delta\bar{a} \neq 0$ i $(\alpha, \beta, \Delta\bar{a})$ u okolini $(0, 0, 0)$. Dakle uslov (5.69) vodi ka nestabilnosti bifurkacione grane $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_2}$.

c) **Sekundarna grana** $\Gamma_{2\bar{a}}^{B_1}$. Da bismo dobili matricu stabilnosti za granu $\Gamma_{2\bar{a}}^{B_1}$, potrebno je izraz za $\Delta\lambda$ iz (5.54) zameniti u (5.62) uz korišćenje (5.45) i (5.53). Sada je matrica stabilnosti koja odgovara sekundarnoj grani $\Gamma_{2\bar{a}}^{B_1}$

$$\mathbf{S}(\Gamma_{2\bar{a}}^{B_1}) = \nu^2 \begin{bmatrix} 2p\bar{\xi}_0^2 + O(\nu^2, \eta^2) & 2r\bar{\xi}_0\eta + O(\nu^2\eta, \eta^3) \\ 2q\bar{\xi}_0\eta + O(\nu^2\eta, \eta^3) & 2s\eta^2 + O(\nu^2\eta^2) \end{bmatrix}. \quad (5.70)$$

Posmatraće se sada stabilnost ravnotežnih položaja koji odgovaraju sekundarnim granama $\Gamma_{2\bar{a}}^{B_1}$. Uzimajući u obzir da je $r = q$, i koristeći Silvesterov kriterijum za pozitivnu definitnost matrice stabilnosti (5.70), za (η, ν) u okolini $(0, 0)$ sledi da je dovoljan uslov za stabilnost grane $\Gamma_{2\bar{a}}^{B_1}$ oblika

$$p > 0 \quad \text{i} \quad ps - qr > 0, \quad (5.71)$$

Sa druge strane kada je

$$p < 0 \quad \text{ili} \quad ps - qr < 0, \quad (5.72)$$

tada je ponovo bar jedna sopstvena vrednost matrice stabilnosti $\mathbf{S}(\Gamma_{2\bar{a}}^{B_1})$ negativna za (η, ν) u okolini $(0, 0)$. Dakle uslov (5.72) vodi ka nestabilnosti bifurkacione grane $\Gamma_{2\bar{a}}^{B_1}$.

d) **Sekundarna grana** $\Gamma_{2\bar{a}}^{B_2}$. Za matricu stabilnosti grane $\Gamma_{2\bar{a}}^{B_2}$, potrebno je izraz za $\Delta\lambda$ iz (5.61) zameniti u (5.62) uz korišćenje (5.45) i (5.57). Matrica stabilnosti koja odgovara sekundarnoj grani $\Gamma_{2\bar{a}}^{B_2}$ sada je

$$\mathbf{S}(\Gamma_{2\bar{a}}^{B_2}) = \nu^2 \begin{bmatrix} 2p\xi^2 + O(\nu^2\xi^2) & 2r\tilde{\eta}_0\xi + O(\nu^2\xi, \xi^3) \\ 2q\tilde{\eta}_0\xi + O(\nu^2\xi, \xi^3) & 2s\tilde{\eta}_0^2 + O(\nu^2, \xi^2) \end{bmatrix}. \quad (5.73)$$

Posmatraće se sada stabilnost konfiguracija koje odgovaraju sekundarnim granama $\Gamma_{2\bar{a}}^{B_2}$. Uzimajući u obzir da je $r = q$, i koristeći Silvesterov kriterijum pozitivne definitnosti matrice stabilnosti (5.73), za (η, ν) u okolini $(0, 0)$, sledi da je dovoljan uslov za stabilnost grane $\Gamma_{2\bar{a}}^{B_2}$ oblika

$$s > 0 \quad \text{i} \quad ps - qr > 0. \quad (5.74)$$

Međutim za

$$s < 0 \quad \text{ili} \quad ps - qr < 0, \quad (5.75)$$

bar jedna sopstvena vrednost matrice stabilnosti $\mathbf{S}(\Gamma_{2\bar{a}}^{B_2})$ je negativna za (ξ, ν) u okolini $(0, 0)$. Dakle uslov (5.75), vodi ka nestabilnosti bifurkacione grane $\Gamma_{2\bar{a}}^{B_2}$.

6 Rezultati

U ovom delu biće predstavljeni rezultati koji opisuju poslekritično ponašanje štapa oslonjenog celom svojom dužinom na nelinearnu elastičnu podlogu u blizini dvostruke vrednosti kritične sile λ_n^* . Obratiće se naročito pažnja na uticaj smičuće krutosti i nelinearnosti podloge na tip bifurkacija, stabilnost bifurkacionih grana i poslekritični ugib (pomeranje u y pravcu) ose štapa. Posmatraće se problem kada je $\Delta\bar{a}$ malo i $\Delta\bar{a} \neq 0$ iz razloga što je taj slučaj najbitniji za inženjere. Treba napomenuti da su za specijalni slučaj kada je $\Delta\bar{a} = 0$ rezultati dobijeni u ovoj disertaciji u saglasnosti sa rezultatima datim u [48].

6.1 Primarne grane

6.1.1 Primarna grana $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_1}$.

Prvo, razmotriće se primarna grana bifurkacije $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_1}$ data sa (5.40). Poslekritični položaj štapa, koji odgovara grani $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_1}$, kao što je ranije pokazano, nasleđuje svojstvo simetrije rešenja linearnog problema \mathbf{x}_1 . Koristeći (5.36) i (5.11) dobija se

$$\begin{aligned} -\frac{p}{a_1} &= \frac{3\bar{b}}{4n^2\pi^2} + \frac{n^2\pi^4\mu[(n+1)n^2\pi^2 - \mu(3(n+1)^2 - n^2)]}{8(n^2\pi^2 + \mu)[(1+n)^2\pi^2 + \mu]}, \\ \lambda_{cr}^{B_1} &= \lambda_n^* + \frac{1}{n^2\pi^2}\Delta\bar{a}, \end{aligned} \quad (6.1)$$

gde je sa $\lambda_{cr}^{B_1}$ označena kritična sila koja odgovara pojavi grane $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_1}$. Iz (5.11) i Slike 6, sledi da je $\lambda_{cr}^{B_1}$ takođe i najmanja kritična sila za $\Delta\bar{a} < 0$. Za $\mu > 0$ i $n \in \mathbb{N}$ iz (6.1)₁ se dobija sledeće

$$\begin{aligned} -\frac{p}{a_1} &> 0, & \text{ako } \bar{b} > \bar{b}_1^{B_1}, \\ -\frac{p}{a_1} &= 0, & \text{ako } \bar{b} = \bar{b}_1^{B_1}, \\ -\frac{p}{a_1} &< 0, & \text{ako } \bar{b} < \bar{b}_1^{B_1}, \end{aligned} \quad (6.2)$$

gde je

$$\bar{b}_1^{B_1} = -\frac{n^4\pi^6\mu[(n+1)n^2\pi^2 - \mu(3(n+1)^2 - n^2)]}{6(n^2\pi^2 + \mu)[(1+n)^2\pi^2 + \mu]}. \quad (6.3)$$

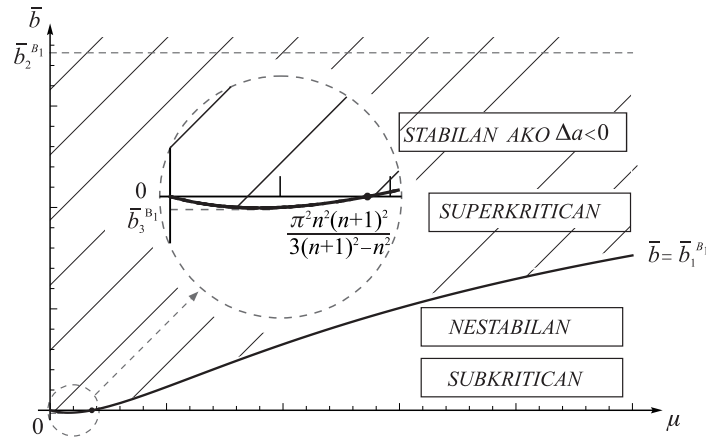
Sada ćemo obratiti pažnju na tip bifurkacija koje odgovaraju $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_1}$ kada je $\Delta\bar{a} \neq 0$. Kako je tip bifurkacije određen sa (5.40), t.j

$$\lambda = \lambda_n^* - \frac{b_1}{a_1} \Delta\bar{a} - \frac{p}{a_1} \alpha^2 + O(\alpha^4, \Delta\bar{a}\alpha^2, \Delta\bar{a}^2), \quad (6.4)$$

možemo zaključiti da se radi o vilastoj bifurkaciji. Napomenimo da s obzirom na definiciju važi i

$$\lambda_{cr}^{B_1} = \lambda(\Delta\bar{a}, \alpha = 0) = \lambda_n^* - \frac{b_1}{a_1} \Delta\bar{a} + O(\Delta\bar{a}^2).$$

Analiza (5.40) i (6.2) pokazuje da u zavisnosti od smičuće krutosti i nelinearnosti podloge ova vilasta bifurkacija može biti superkritična ako važi (6.2)₁ dok je za (6.2)₃ bifurkacija subkritična. Koristeći (6.2) možemo grafički prikazati oblasti koje odgovaraju superkritičnoj i subkritičnoj bifurkaciji u $\mu\bar{b}$ dijagramu (Slika 7). Analizom (6.3) zaključuje se da su za svako $n \in \mathbb{N}$ ovi dijagrami kvalitativno isti i da je njihov opšti oblik je dat na Slici 7.



Slika 7: Stabilnost i tip bifurkacije za primarnu granu $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_1}$

Veličine koje su korišćene na slici 7 su sledeće

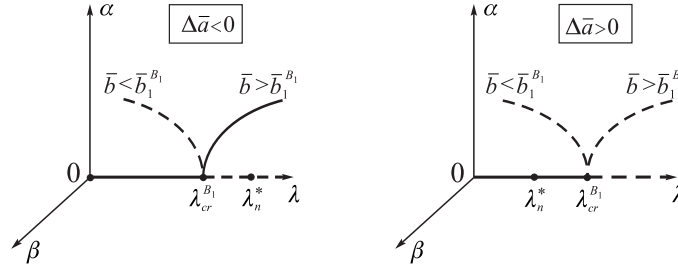
$$\bar{b}_2^{B_1} = \frac{1}{6} n^4 [3(n+1)^2 - n^2] \pi^6,$$

$$\bar{b}_3^{B_1} = \frac{n^6 (1+n)^2 \left[2\sqrt{3}(1+n) \sqrt{(2+n)(2+3n)} - (7(n+1)^2 - n^2) \right] \pi^6}{6(1+2n)^2},$$

gde je $\bar{b} = \bar{b}_2^{B_1}$ horizontalna asimptota a $\bar{b}_3^{B_1}$ minimum krive $\bar{b} = \bar{b}_1^{B_1}(\mu)$. Kao posledica ovoga sledi da za $\bar{b} > \bar{b}_2^{B_1}$ i proizvoljnu smičuću krutost μ dolazi samo

do superkritične bifurkacije, dok za $\bar{b} < \bar{b}_3^{B_1}$ i proizvoljnu smičuću krutost μ dolazi samo do subkritične bifurkacije. Ova posledica je važna kako bi inženjeri izbegli pojavu subkritičnih bifurkacija za proizvoljnu smičuću krutost μ pri korišćenju nelinearne elastične podloge ($\bar{b} > \bar{b}_2^{B_1} > 0$). U specijalnom slučaju kada je $\bar{b} = 0$, bifurkacije mogu biti i superkritične i subkritične u zavisnosti od veličine μ . Ovaj specijalan slučaj je analiziran u [48] i ovde prezentovani rezultati odgovaraju rezultatima iz [48]. Treba napomenuti da za $\bar{b}_3^{B_1} < \bar{b} < \bar{b}_2^{B_1}$ tip vilaste bifurkacije zavisi od oba parametra, i od nelinearnosti podloge \bar{b} kao i od smičuće krutosti μ (Slika 7).

Kako bi odredili stabilnost ravnotežnih položaja koji odgovaraju grani $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_1}$ izračunaće se sopstvene vrednosti matrice stabilnosti (5.64). Pri tome ćemo razlikovati dva slučaja $\bar{b} < \bar{b}_1^{B_1}$ i $\bar{b} > \bar{b}_1^{B_1}$: Tako u slučaju kada je $\bar{b} < \bar{b}_1^{B_1}$, jednačine (6.1)₁ i (5.36) daju $p < 0$, što s obzirom na (5.66) vodi ka nestabilnosti primarne grane $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_1}$. Sa druge strane, u slučaju kada važi $\bar{b} > \bar{b}_1^{B_1}$, jednačine (6.1)₁ i (5.36) daju $p > 0$ i $\frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1} < 0$. Sada postoje dve mogućnosti u zavisnosti od vrednosti $\Delta\bar{a}$. Naime, uslov (5.65) implicira stabilnost grane $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_1}$ za $\Delta\bar{a} < 0$ i nestabilnost iste grane $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_1}$ za $\Delta\bar{a} > 0$ (Slika 7). Veoma bitna za inženjere je mogućnost da za $\Delta\bar{a} < 0$ grana $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_1}$ može biti stabilna ako je $\bar{b} > \bar{b}_1^{B_1}$.



Slika 8: Bifurkacioni dijagram za primarnu granu $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_1}$

Na osnovu navedenog sada grafički na Slici 8 možemo prikazati bifurkacionu granu $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_1}$ u zavisnosti od parametara. Isprekidana linija označava nestabilnost a puna stabilnost grane $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_1}$.

6.1.2 Primarna grana $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_2}$.

Sada će se obratiti pažnja na primarnu granu $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_2}$ koja je data sa (5.41). Poslekritični položaj štapa koji odgovara $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_2}$ nasleđuje svojstva simetrije rešenja linearizovanog problema \mathbf{x}_2 . U ovom slučaju iz (5.36) i (5.11) dobija se

$$\begin{aligned}
-\frac{s}{a_2} &= \frac{3\bar{b}}{4(1+n)^2\pi^2} + \frac{(1+n)^2\pi^4\mu \left[(n+n^2)^2\pi^2 + \mu((n+1)^2 - 3n^2) \right]}{8(n^2\pi^2 + \mu) [(1+n)^2\pi^2 + \mu]}, \\
\lambda_{cr}^{B_2} &= \lambda_n^* + \frac{1}{(n+1)^2\pi^2} \Delta\bar{a},
\end{aligned} \tag{6.5}$$

gde je $\lambda_{cr}^{B_2}$ kritična sila koja odgovara $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_2}$. Napominjemo da iz jednačine (5.11) i Slike 6, sledi da je $\lambda_{cr}^{B_2}$ i najmanja kritična sila za $\Delta\bar{a} > 0$ i $n \in \mathbb{N}$. Slično kao u prethodnom slučaju iz (6.5)₁ dobija se

$$\begin{aligned}
-\frac{s}{a_2} &> 0, \quad \text{ako } \bar{b} > \bar{b}_1^{B_2}, \\
-\frac{s}{a_2} &= 0, \quad \text{ako } \bar{b} = \bar{b}_1^{B_2}, \\
-\frac{s}{a_2} &< 0, \quad \text{ako } \bar{b} < \bar{b}_1^{B_2},
\end{aligned} \tag{6.6}$$

gde je

$$\bar{b}_1^{B_2} = -\frac{(1+n)^4\pi^6\mu \left[(n+n^2)^2\pi^2 + \mu((n+1)^2 - 3n^2) \right]}{6(n^2\pi^2 + \mu) [(1+n)^2\pi^2 + \mu]}.$$

Tip bifurkacije je sada određen sa (5.41), t.j

$$\lambda = \lambda_n^* - \frac{b_2}{a_2} \Delta\bar{a} - \frac{s}{a_2} \beta^2 + O(\beta^4, \Delta\bar{a}\beta^2, \Delta\bar{a}^2), \tag{6.7}$$

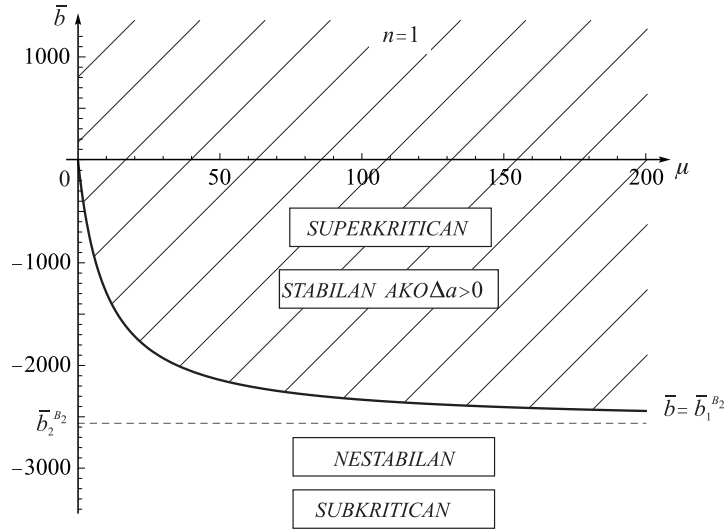
pa ponovo možemo zaključiti da se radi o vilastoj bifurkaciji. Napomenimo da s obzirom na definiciju važi i

$$\lambda_{cr}^{B_2} = \lambda(\Delta\bar{a}, \beta = 0) = \lambda_n^* - \frac{b_2}{a_2} \Delta\bar{a} + O(\Delta\bar{a}^2).$$

Jednačine (6.7) i (6.5) pokazuju da je bifurkacija superkritična ako je (6.6)₁ zadovoljeno dok je bifurkacija subkritična ako je (6.6)₃ zadovoljeno. Za razliku od grane $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_1}$ postoji razlika između slučajeva kada je $n = 1$ i $n \geq 2$. Na Slici 9 su pokazane oblasti koje se odnose na superkritične i subkritične bifurkacije za $n = 1$. Sa druge strane na Slici 10 su prikazane oblasti koje se odnose na superkritične odnosno subkritične bifurkacije za $n \geq 2$. Veličine koje su korišćene na ovim dijagramima su

$$\begin{aligned}\bar{b}_2^{B_2} &= -\frac{8\pi^6}{3}, \\ \bar{b}_3^{B_2} &= \frac{1}{6}(1+n)^4 [3n^2 - (n+1)^2] \pi^6, \\ \bar{b}_4^{B_2} &= -\frac{n^2(1+n)^6\pi^6}{6 \left[2\sqrt{3}n\sqrt{(n-1)(1+3n)} + (7n^2 - (n+1)^2) \right]},\end{aligned}$$

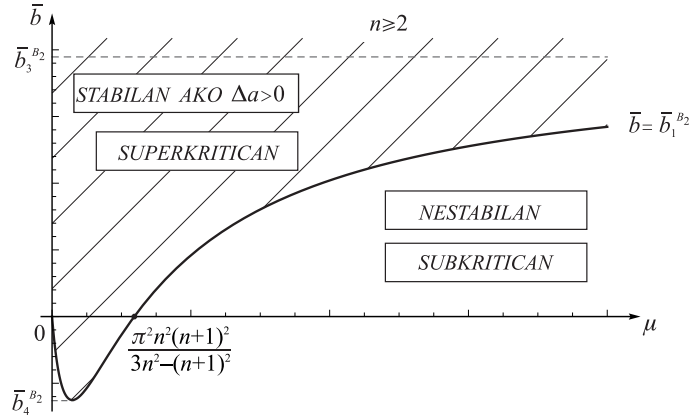
su gde je $\bar{b} = \bar{b}_2^{B_2}$ horizontalna asimptota na Slici 9, $\bar{b}_3^{B_2}$ horizontalna asimptota na Slici 10 i $\bar{b}_4^{B_2}$ minimum na Slici 10 krive $\bar{b} = \bar{b}_1^{B_2}(\mu)$.



Slika 9: Stabilnost i tip bifurkacije primarne grane $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_2}$ za $n = 1$

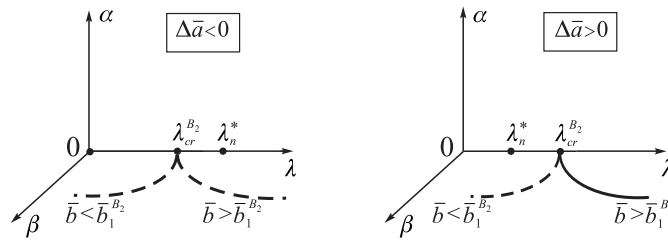
U slučaju kada je $n = 1$, Slika 9 pokazuje da za $\bar{b} > 0$ i proizvoljnu smičuću krutost μ dolazi samo do superkritične bifurkacije, dok za $\bar{b} < \bar{b}_2^{B_2}$ i proizvoljnu smičuću krutost μ javlja se samo subkritična bifurkacija. Međutim, ako je $\bar{b}_2^{B_2} < \bar{b} < 0$ bifurkacija zavisi od oba parametra: nelinearnosti podloge \bar{b} i smičuće krutosti μ (Slika 9). U slučaju kada je $n \geq 2$ svi dijagrami su kvalitativno isti. Njihove opšti oblik, koji je dat na Slici 10 je veoma sličan onom koji odgovaraja grani $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_1}$. Tako da se za $\bar{b} > \bar{b}_3^{B_2}$ i $\bar{b} < \bar{b}_4^{B_2}$, javljaju superkritične i subkritične bifurkacije, repektivno. Još jednom se ponavlja da se za proizvoljnu smičuću krutost μ može izbeći subkritična bifurkacija tako

što će se koristiti nelinearna trvrda elastična podloga ($\bar{b} > \bar{b}_3^{B_2} > 0$). Međutim, ako je $\bar{b}_4^{B_2} < \bar{b} < \bar{b}_3^{B_2}$ tada bifurkacija zavisi od oba parametra: \bar{b} i μ (Slika 10).



Slika 10: Stabilnost i tip bifurkacije primarne grane $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_2}$ za $n \geq 2$

U ovom slučaju matrica stabilnosti (5.67) vodi ka analizi dva različita slučaja $\bar{b} < \bar{b}_1^{B_2}$ i $\bar{b} > \bar{b}_1^{B_2}$. Iz uslova da je $\bar{b} < \bar{b}_1^{B_2}$, jednačine (6.5)₁ i (5.36) vode ka $s < 0$ što prouzrokuje nestabilnost grane $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_2}$ na osnovu (5.69) bez obzira na vrednost $\Delta\bar{a}$. Drugi slučaj, kada je $\bar{b} > \bar{b}_1^{B_2}$, vodi ka $s > 0$. Pošto je $\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2} > 0$, uslov (5.68) vodi ka stabilnosti grane $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_2}$ za $\Delta\bar{a} > 0$, dok uslov (5.69) implicira nestabilnost grane $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_2}$ za $\Delta\bar{a} < 0$. Na slikama 9 i 10 prikazane su oblasti stabilnosti i nestabilnosti za $n = 1$ i $n \geq 2$, respektivno. Iz inženjerske perspektive treba obratiti pažnju da za $\Delta\bar{a} > 0$, grana $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_2}$ može biti stabilna ako je $\bar{b} > \bar{b}_1^{B_2}$.



Slika 11: Bifurkacioni dijagram za primarnu granu $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_2}$

Na osnovu navedenog sada grafički na Slici 11 možemo prikazati bifurkacionu granu $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_2}$ u zavisnosti od parametara. Isprekidana linija označava nestabilnost a puna stabilnost grane $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_2}$.

Na kraju ovog dela, a kao rezultat navedene analize izdvojicemo i dva interesantna slučaja:

1. U okolini svake najmanje dvostruke sopstvene vrednosti primarne grane koje odgovaraju najmanjim kritičnim silama ($\lambda_{cr}^{B_1}$ za $\Delta\bar{a} < 0$ i $\lambda_{cr}^{B_2}$ za $\Delta\bar{a} > 0$) su uvek superkritične i stabilne za proizvoljnu smičuću krutost μ ako se koristi nelinearna tvrda elastična podloga ($\bar{b} > \max\{\bar{b}_2^{B_1}, \bar{b}_3^{B_2}\} > 0$)

2. Pri promeni veličine \bar{b} od $-\infty$ do ∞ subkritična bifurkacija se menja u superkritičnu bifurkaciju za proizvoljne smičuće krutosti μ i $n \in \mathbb{N}$.

6.2 Sekundarne grane

Kao što je pokazano u slučaju primarnih bifurkacija u zavisnosti od smičuće krutosti i nelinearnosti podloge postoje dve oblasti u dijagramu koje odgovaraju super i subkritičnim bifurkacijama (Slike 7,9 i 10). U slučaju sekundarnih bifurkacija ta situacija je značajno složenija. Da bi smo izvršili tu analizu označimo sa $f_1(n, \mu)$, $f_2(n, \mu)$ rešenja jednačina

$$\begin{aligned} a_1q - a_2p &= 0, \\ a_1s - a_2r &= 0, \end{aligned}$$

po \bar{b} , respektivno. Eksplicitno ova rešenja su oblika

$$\begin{aligned} f_1(n, \mu) &= \frac{n^4(1+n)^2\pi^6\mu \left[-(n+n^2)^2\pi^2 + \mu(3n^2 - (n+1)^2) \right]}{6 [2n^2 - (n+1)^2] (n^2\pi^2 + \mu) [(1+n)^2\pi^2 + \mu]}, \\ f_2(n, \mu) &= -\frac{n^2(1+n)^4\pi^6\mu \left[(n+n^2)^2\pi^2 - \mu(3(n+1)^2 - n^2) \right]}{6 [2(1+n)^2 - n^2] (n^2\pi^2 + \mu) [(1+n)^2\pi^2 + \mu]}. \end{aligned}$$

Sledeće, uočimo da je jednačina

$$ps - qr = 0,$$

kvadratna po \bar{b} , t.j

$$d_1\bar{b}^2 + d_2\bar{b} + d_3 = 0,$$

gde su

$$\begin{aligned}
d_1 &= -27/64, \\
d_2 &= \frac{3\pi^6 \mu (\mu(2n(n+1)+1)(2n(n+1)(3n(n+1)+2)+1))}{128 (\mu + \pi^2 n^2) (\mu + \pi^2 (n+1)^2)} \\
&\quad + \frac{3\pi^6 \mu (\pi^2 n^2 (n+1)^2 (2n(n(3n(n+2)+1)-2)-1))}{128 (\mu + \pi^2 n^2) (\mu + \pi^2 (n+1)^2)}, \\
d_3 &= \frac{\pi^{12} \mu^2 n^4 (n+1)^4 (-\mu^2 (4n(n+1)(3n(n+1)+7)+7))}{256 (\mu + \pi^2 n^2)^2 (\mu + \pi^2 (n+1)^2)^2} \\
&\quad + \frac{\pi^{12} \mu^2 n^4 (n+1)^4 (6\pi^2 \mu n^2 (n+1)^2 (2n(n+1)+1) - 3\pi^4 (n^2+n)^4)}{256 (\mu + \pi^2 n^2)^2 (\mu + \pi^2 (n+1)^2)^2}.
\end{aligned}$$

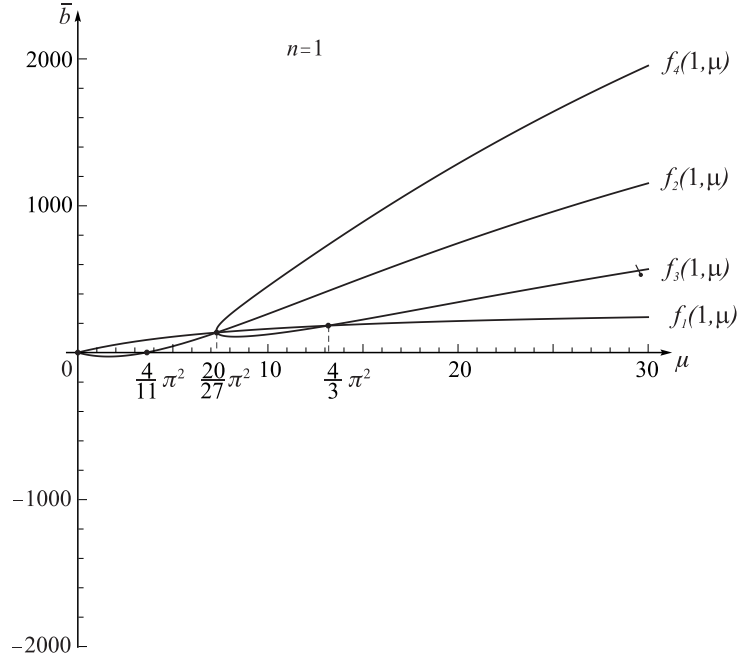
Rešenja ove jednačine po \bar{b} će biti označena sa $f_3(n, \mu)$ i $f_4(n, \mu)$. Pretpostavićemo da je $f_3 < f_4$ kada su kada su rešenja f_3 i f_4 realna. Dakle, rešenja $f_3(n, \mu)$ i $f_4(n, \mu)$ su oblika

$$\begin{aligned}
f_3(n, \mu) &= \frac{-d_2 + \sqrt{d_2^2 - 4d_1 d_3}}{2d_1}, \\
f_4(n, \mu) &= \frac{-d_2 - \sqrt{d_2^2 - 4d_1 d_3}}{2d_1}.
\end{aligned}$$

Grafički prikaz rešenja $f_1(n, \mu)$, $f_2(n, \mu)$, $f_3(n, \mu)$ i $f_4(n, \mu)$ za $n = 1, 2, 3$ u $\bar{b}\mu$ dijagramu je dat na na Slikama 12,13 i 14.

Sa Slika 12 13 i 14 sledi da na svakoj postoji 7 oblasti u kojima su vrednosti $a_1q - a_2p$, $a_1s - a_2r$ i $ps - qr$ različitih znakova. Da bi smo rezultate sa tih slika predstavili u pogodnom analitičkom obliku, koristeći (5.36), definišemo pomoćne veličine $A_i, i = 1, 2, 3$ sa

$$\begin{aligned}
A_1 &= \operatorname{sgn}(a_1q - a_2p) = \begin{cases} 1 & \text{ako } (\bar{b} > f_1 \wedge n \leq 2) \vee (\bar{b} < f_1 \wedge n \geq 3) \\ -1 & \text{ako } (\bar{b} < f_1 \wedge n \leq 2) \vee (\bar{b} > f_1 \wedge n \geq 3) \end{cases}, \\
A_2 &= \operatorname{sgn}(a_1s - a_2r) = \begin{cases} 1 & \text{ako } \bar{b} > f_2 \\ -1 & \text{ako } \bar{b} < f_2 \end{cases}, \\
A_3 &= \operatorname{sgn}(ps - qr) = \begin{cases} 1 & \text{ako } f_3 < \bar{b} < f_4 \wedge (f_3, f_4) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ -1 & \text{ako } \bar{b} < f_3 \vee \bar{b} > f_4 \vee (f_3, f_4) \notin \mathbb{R} \times \mathbb{R} \end{cases}, \quad (6.8)
\end{aligned}$$



Slika 12: Oblasti u kojima su vrednosti $a_1q - a_2p$, $a_1s - a_2r$ i $ps - qr$ različitih znakova u zavisnosti od smičuće krutosti i nelinearnosti podloge za $n = 1$

na osnovu kojih sledi

$$\begin{aligned} (a_1q - a_2p)(a_1s - a_2r) &> 0 & \text{ako} & \quad A_1A_2 = 1, \\ (a_1q - a_2p)(a_1s - a_2r) &< 0 & \text{ako} & \quad A_1A_2 = -1. \end{aligned} \quad (6.9)$$

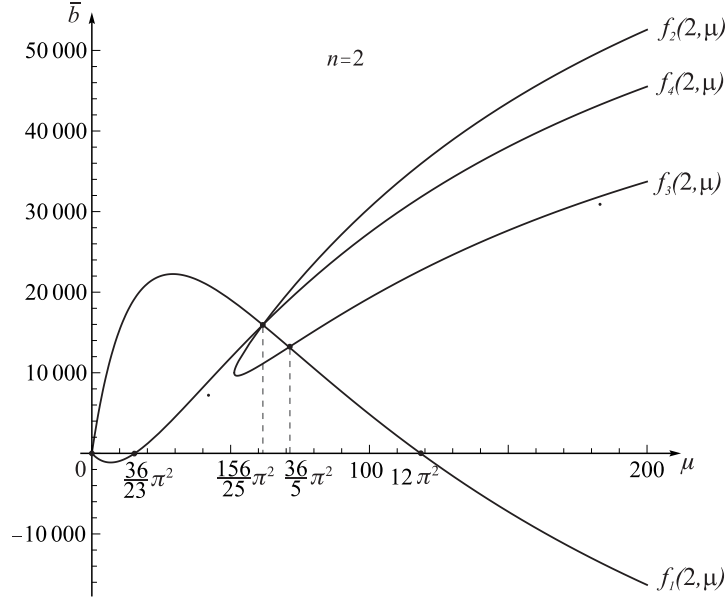
Iz (6.8) i uslova

$$a_2b_1 - a_1b_2 = \frac{1}{4}\pi^2 [n^2 - (1+n)^2] < 0,$$

dobijaju se vrednosti τ_0 i χ_0 u obliku

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \operatorname{sgn} [(a_2b_1 - a_1b_2)(a_1q - a_2p)] = \begin{cases} 1 & \text{ako } A_1 = -1 \\ -1 & \text{ako } A_1 = 1 \end{cases}, \\ \chi_0 &= \operatorname{sgn} [(a_2b_1 - a_1b_2)(a_1s - a_2r)] = \begin{cases} 1 & \text{ako } A_2 = -1 \\ -1 & \text{ako } A_2 = 1 \end{cases}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Na osnovu navedenog sada možemo odrediti tip sekundarnih bifurkacija u zavisnosti od parametara.



Slika 13: Oblasti u kojima su vrednosti $a_1q - a_2p$, $a_1s - a_2r$ i $ps - qr$ različitih znakova u zavisnosti od smičuće krutosti i nelinearnosti podloge za $n = 2$

6.2.1 Sekundarna grana $\Gamma_{2\bar{a}}^{B_1}$

S obzirom na (5.54) sekundarna grana bifurkacije $\Gamma_{2\bar{a}}^{B_1}$ je određena sa

$$\lambda = \lambda_n^* + \nu^2 \left[\bar{\Lambda}_0 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{\Lambda}}{\partial \eta^2}(0, 0) \eta^2 \right] + O(\nu^4, \nu^2 \eta^4), \quad (6.11)$$

što za fiksirano ali malo ν predstavlja vilastu bifurkaciju. Kako bi našli odgovarajući tip ove sekundarne bifurkacije potrebno je odrediti znak $\frac{\partial^2 \bar{\Lambda}}{\partial \eta^2}(0, 0)$. Koristeći (5.53)₁ i (6.8) zaključujemo

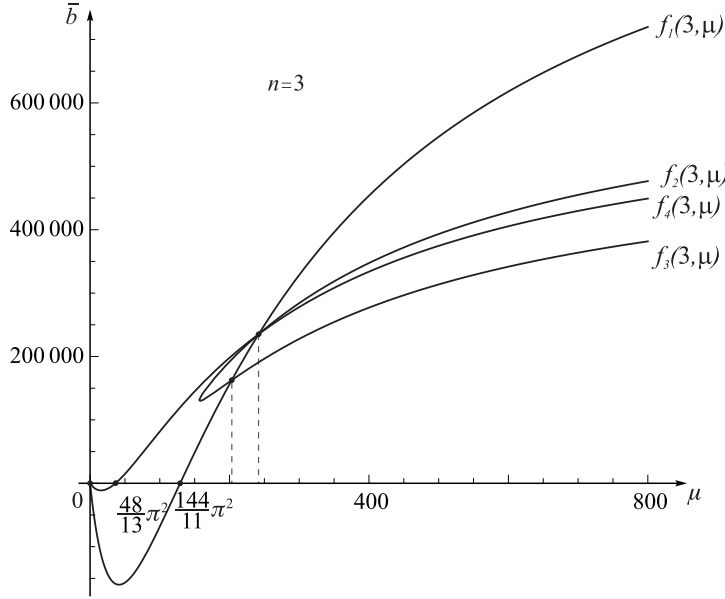
$$\text{sgn} \left[\frac{\partial^2 \bar{\Lambda}}{\partial \eta^2}(0, 0) \right] = \text{sgn} \left[2 \frac{ps - qr}{a_1q - a_2p} \right] = \begin{cases} 1 & \text{ako } A_1 A_3 = 1 \\ -1 & \text{ako } A_1 A_3 = -1 \end{cases} .$$

Na osnovu (6.11), uslov

$$\frac{\partial^2 \bar{\Lambda}}{\partial \eta^2}(0, 0) > 0, \quad (6.12)$$

implicira da je sekundarna grana $\Gamma_{2\bar{a}}^{B_1}$ je superkritična, dok uslov

$$\frac{\partial^2 \bar{\Lambda}}{\partial \eta^2}(0, 0) < 0, \quad (6.13)$$



Slika 14: Oblasti u kojima su vrednosti $a_1q - a_2p$, $a_1s - a_2r$ i $ps - qr$ različitih znakova u zavisnosti od smičuće krutosti i nelinearnosti podloge za $n = 3$

vodi ka subkritičnosti sekundarne grane $\Gamma_{2\bar{a}}^{B_1}$.

Kako bi opisali poslekritično ponašanje štapa, neophodno je odrediti i poziciju tačaka sekundarnih bifurkacija na primarnoj grani $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_1}$. To možemo izračunati koristeći uslov $\eta = 0$ jer on implicira $\beta = 0$. Dakle, koristeći (5.50)₁, (6.11) mogu se odrediti ove tačke u obliku

$$\lambda_{sb}^{B_1} = \lambda_n^* + \nu^2 \bar{\Lambda}(\nu, 0) = \lambda_n^* + \frac{b_2p - b_1q}{a_1q - a_2p} \Delta \bar{a} + O(\Delta \bar{a}^2). \quad (6.14)$$

Poslekritični ugib ose štapa koji odgovara grani $\Gamma_{2\bar{a}}^{B_1}$, sledi iz (5.54) i ima oblik

$$\bar{y}^{(B_1)} = \pm \nu \left[\bar{\xi}_0 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial \eta^2}(0, 0) \eta^2 \right] \bar{y}_1 + \nu \eta \bar{y}_2 + O(\nu^3, \nu^2 \eta^2, \nu \eta^4). \quad (6.15)$$

Koeficijenti u (6.15) su određeni jednačinama (5.36), (5.50), (5.53). Jednačina (6.15) je veoma važna jer u bliskoj okolini dvostrukih sopstvenih vrednosti daje ugib ose štapa koji je numeričkim metodima veoma teško odrediti. Razlog za to je postojanje više veoma bliskih rešenja koje je teško numerički razlikovati. Pored ovoga, iz jednačine (6.15) se mogu formirati i približna rešenja koja se mogu koristiti za određivanje nepoznatih graničnih uslova pri numeričkom određivanju deformacija.

Napominjemo, poslekritični ugib ose štapa koji odgovara sekundarnoj bifurkaciji $\Gamma_{2\bar{a}}^{B_1}$ sledi iz (6.15), prvo fiksiranjem male vrednost za ν , što fizički znači da smo fiksirali linearnu krutost podloge \bar{a} . Zatim, daljim menjanjem vrednosti parametra η u okolini nule, a u jednačini (6.15), dobijamo poslekritični ugib ose štapa za položaje ravnoteže koji odgovaraju grani $\Gamma_{2\bar{a}}^{B_1}$ neposredno posle sekundarnog grananja.

6.2.2 Sekundarna grana $\Gamma_{2\bar{a}}^{B_2}$

Sekundarna grana bifurkacije $\Gamma_{2\bar{a}}^{B_2}$ je određena sa (5.61), t.j.

$$\lambda = \lambda_n^* + \nu^2 \left[\tilde{\Lambda}_0 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{\Lambda}}{\partial \xi^2}(0, 0) \xi^2 \right] + O(\nu^4, \nu^2 \xi^4), \quad (6.16)$$

Ponovo, za fiksirano ali malo ν , (6.16) predstavlja vilastu bifurkaciju. Kako bi našli odgovarajući tip ove sekundarne bifurkacije sada je potrebno odrediti znak $\frac{\partial^2 \tilde{\Lambda}}{\partial \xi^2}(0, 0)$. Koristeći (5.60) i (6.8) dobijamo

$$\operatorname{sgn} \left[\frac{\partial^2 \tilde{\Lambda}}{\partial \xi^2}(0, 0) \right] = \operatorname{sgn} \left[2 \frac{ps - qr}{a_2 r - a_1 s} \right] = \begin{cases} 1 & \text{ako } A_2 A_3 = -1 \\ -1 & \text{ako } A_2 A_3 = 1 \end{cases}. \quad (6.17)$$

Na osnovu (6.17), a razmišljajući na sličan način kao u prethodnom slučaju, (6.16) pokazuje da u slučaju kada je

$$\frac{\partial^2 \tilde{\Lambda}}{\partial \xi^2}(0, 0) > 0, \quad (6.18)$$

grana $\Gamma_{2\bar{a}}^{B_2}$ odgovara superkritičnoj bifurkaciji, dok za

$$\frac{\partial^2 \tilde{\Lambda}}{\partial \xi^2}(0, 0) < 0, \quad (6.19)$$

grana $\Gamma_{2\bar{a}}^{B_2}$ odgovara subkritičnoj bifurkaciji. Položaj tačaka sekundarnih bifurkacija na primarnoj grani $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_2}$ možemo izračunati koristeći uslov $\xi = 0$ jer on implicira $\alpha = 0$. Dakle, iz (6.16), (5.57) i (5.59) mogu se odrediti ove tačke

$$\lambda_{sb}^{B_2} = \lambda_n^* + \nu^2 \tilde{\Lambda}(\nu, 0) = \lambda_n^* + \frac{b_2 r - b_1 s}{a_1 s - a_2 r} \Delta \bar{a} + O(\Delta \bar{a}^2). \quad (6.20)$$

Ugib ose štapa koji odgovara grani $\Gamma_{2\bar{a}}^{B_2}$ je dat sa (5.61) kao

$$\bar{y}^{(B_2)} = \nu \xi \bar{y}_1 \pm \nu \left[\tilde{\eta}_0 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{\eta}}{\partial \xi^2}(0, 0) \xi^2 \right] \bar{y}_2 + O(\nu^3, \nu^2 \xi^2, \nu \xi^4). \quad (6.21)$$

Koeficijenti u (6.21) su određeni jednačinama (5.36), (5.57) i (5.60). U ovom slučaju rešenja poslekritičnih ugiba ose štapa koji odgovaraju sekundarnoj bifurkaciji $\Gamma_{2\bar{a}}^{B_2}$ se dobijaju tako što se fiksira mala vrednost od ν a zatim menja se parametar ξ u jednačini (6.21).

6.3 Poslekritično ponašanje elastičnog štapa

Osnovni cilj ovog dela je da sumira do sada izvedene rezultate lokalne nelinearne bifurkacione analize. Konkretno, formiraće se bifurkacioni dijagrami, odrediti poslekritični ugibi ose štapa i utvrdiće se stabilnost svih položaja ravnoteže.

Na osnovu dosad predstavljenog sledi da poslekritično ponašanje štapa zavisi od vrednosti veličina n , \bar{b} i μ . U onome što sledi analiziraće se uticaj \bar{b} i μ za slučajeve $n = 1$, $n = 2$ i $n = 3$. Za svaki od ova tri slučaja, u zavisnosti od veličina \bar{b} i μ , dobiće se po jedanaest različitih poslekritičnih ponašanja elastičnog štapa. Analizom, kao u slučajevima $n = 1$, $n = 2$ i $n = 3$, se može pokazati da je u slučaju $n \geq 4$ poslekritično ponašanje kvalitativno isto kao i u slučaju kada je $n = 3$.

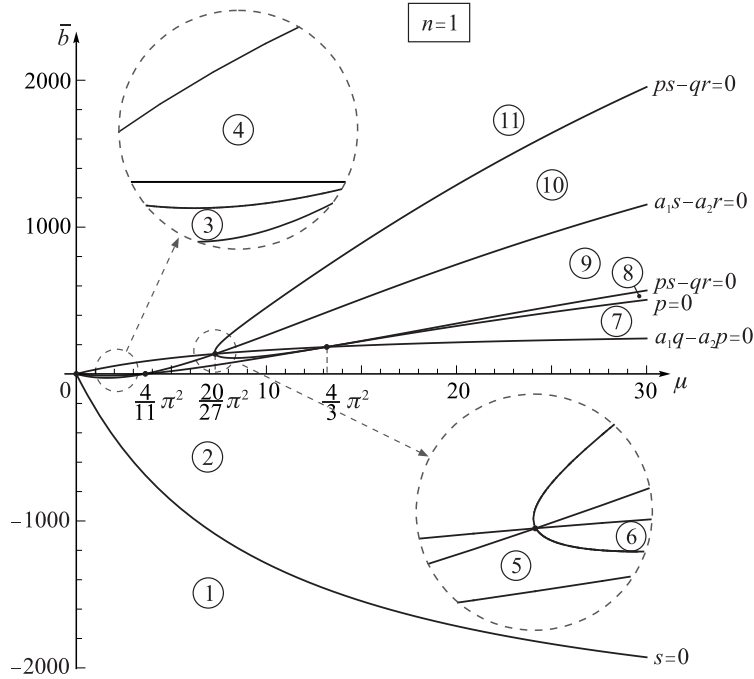
Napominjemo se da je pozicija bifurkacionih tačaka na trivijalnoj i primarnim granama u bifurkacionim dijagramima samo kvalitativno prikazana zbog zavisnosti ovih pozicija od veličina \bar{b} i μ . Takođe, sve krive na Slikama 15-17 imaju horizontalne asimptote. Pored toga na svim bifurkacionim dijagramima datim u Dodatku A pune linije i isprekidane linije označavaju stabilne i nestabilne grane, respektivno.

Slučaj $n = 1$. Rezultati predstavljeni na Slikama 7, 9, i 12 sumirani su i dati na slici 15, koja pokazuje da postoji 11 oblasti koje određuju različita poslekritična ponašanja štapa u okolini dvostrukih sopstvenih vrednosti.

Koristeći (5.36), (5.50), (5.53), (5.60), (5.57), (5.68), (5.69), (5.65), (5.66), (5.64), (5.65), (5.62), (5.71), (5.75), (6.2), (6.6), (6.12), (6.13), (6.18), (6.19) možemo odrediti tip bifurkacija i stabilnost primarnih i sekundarnih grana. Tako dobijeni rezultati su dati u Tabeli 1.

Iz Tabele 1 sledi :

a) Grana $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_1}$ je superkritična u oblastima 4, 5, 6, 8, 9, 10 and 11 i subkritična u oblastima 1, 2, 3 i 7. Za $\Delta\bar{a} < 0$, ova grana je stabilna u oblastima 4, 5, 6, 8, 9, 10 i 11 dok je u ostalima nestabilna. Sa druge strane, za $\Delta\bar{a} > 0$, grana $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_1}$ je nestabilna u svim oblastima.



Slika 15: Oblasti koje odgovaraju različitim poslekritičnim ponašanjima štapa u zavisnosti od smičuće krutosti i nelinearnosti podloge za $n = 1$

b) U oblasti 1 grana $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_2}$ je subkritična dok je u ostalim oblastima ova grana superkritična. Ako je $\Delta\bar{a} > 0$, tada je ova grana nestabilna unutar oblasti 1 i stabilna u ostalim oblastima. Za $\Delta\bar{a} < 0$, $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_2}$ je nestabilna u svim oblastima.

c) Grana $\Gamma_{2\bar{a}}^{B_1}$ je superkritična u oblastima 1, 2, 3, 4, 5, 9 i 10 dok je subkritična u oblastima 6, 7, 8 i 11. Bitno je napomenuti da se za $\Delta\bar{a} > 0$, ova grana javlja u oblastima 1, 2, 3, 4, 5 i 6 dok se za $\Delta\bar{a} < 0$ ista se javlja u 7, 8, 9, 10 i 11. Uzimajući ovo u obzir, analiza pokazuje da je za $\Delta\bar{a} > 0$, ova grana je stabilna u oblasti 6 dok je nestabilna u oblastima 1, 2, 3, 4 i 5. Ako je $\Delta\bar{a} < 0$, tada je grana $\Gamma_{2\bar{a}}^{B_1}$ stabilna u oblastima 9 i 10, a nestabilna u oblastima 7, 8, i 11.

d) Grana $\Gamma_{2\bar{a}}^{B_2}$ je superkritična u oblastima 3, 4, 6, 9 i 11 i subkritična u oblastima 1, 2, 5, 7, 8 i 10. Za $\Delta\bar{a} > 0$, grana $\Gamma_{2\bar{a}}^{B_2}$ se javlja u oblastima 1, 2, 5, 6, 7, 8, i 9 dok se za $\Delta\bar{a} < 0$ ista javlja u oblastima 3, 4, 10 i 11. Takođe, ako je $\Delta\bar{a} > 0$, tada je ova grana stabilna u oblastima 6 i 9, dok se u oblastima 1, 2, 5, 7 i 8 gubi stabilnost. Sa druge strane, ako je $\Delta\bar{a} < 0$, grana $\Gamma_{2\bar{a}}^{B_2}$ je stabilna u oblasti 10 i nestabilna u oblastima 3, 4 i 11.

Dosadašnja analiza pokazuje da je stabilnost sekundarnih grana moguća

Tabela 1: Stabilnost i tip primarnih i sekundarnih grana po oblastima za $n = 1$: superkritičan (sup), subkritičan (sub), stabilan (stab), nestabilan (nestab), oblast (ob)

Primarne i sekundarne grane za $n = 1$									
ob	$\Delta\bar{a}$	tip	$\Gamma_{1\bar{a}}^{B_1}$ stabilnost	tip	$\Gamma_{1\bar{a}}^{B_2}$ stabilnost	tip	$\Gamma_{2\bar{a}}^{B_1}$ stabilnost	tip	$\Gamma_{2\bar{a}}^{B_2}$ stabilnost
1	$\Delta\bar{a} > 0$	sub	nestab	sub	nestab	sup	nestab	sub	nestab
	$\Delta\bar{a} < 0$	sub	nestab	sub	nestab	-	-	-	-
2	$\Delta\bar{a} > 0$	sub	nestab	sup	stab	sup	nestab	sub	nestab
	$\Delta\bar{a} < 0$	sub	nestab	sup	nestab	-	-	-	-
3	$\Delta\bar{a} > 0$	sub	nestab	sup	stab	sup	nestab	-	-
	$\Delta\bar{a} < 0$	sub	nestab	sup	nestab	-	-	sup	nestab
4	$\Delta\bar{a} > 0$	sup	nestab	sup	stab	sup	nestab	-	-
	$\Delta\bar{a} < 0$	sup	stab	sup	nestab	-	-	sup	nestab
5	$\Delta\bar{a} > 0$	sup	nestab	sup	stab	sup	nestab	sub	nestab
	$\Delta\bar{a} < 0$	sup	stab	sup	nestab	-	-	-	-
6	$\Delta\bar{a} > 0$	sup	nestab	sup	stab	sub	stab	sup	stab
	$\Delta\bar{a} < 0$	sup	stab	sup	nestab	-	-	-	-
7	$\Delta\bar{a} > 0$	sub	nestab	sup	stab	-	-	sub	nestab
	$\Delta\bar{a} < 0$	sub	nestab	sup	nestab	sub	nestab	-	-
8	$\Delta\bar{a} > 0$	sup	nestab	sup	stab	-	-	sub	nestab
	$\Delta\bar{a} < 0$	sup	stab	sup	nestab	sub	nestab	-	-
9	$\Delta\bar{a} > 0$	sup	nestab	sup	stab	-	-	sup	stab
	$\Delta\bar{a} < 0$	sup	stab	sup	nestab	sup	stab	-	-
10	$\Delta\bar{a} > 0$	sup	nestab	sup	stab	-	-	-	-
	$\Delta\bar{a} < 0$	sup	stab	sup	nestab	sup	stab	sub	stab
11	$\Delta\bar{a} > 0$	sup	nestab	sup	stab	-	-	-	-
	$\Delta\bar{a} < 0$	sup	stab	sup	nestab	sub	nestab	sup	nestab

samo u oblastima 6,9 i 10. To znači da su sekundarne grane stabilne u slučaju tvrde nelinearne podloge i velikih vrednosti smičuće krutosti. Napominjemo da je poslekritično ponašanje koje se odnosi na oblasti 3, 5 i 6 moguće samo ako su prisutni i smičući efekat i nelinearnost podloge. Takođe iz c) i d) sledi da sekundarne grane formiraju zatvorene petlje u oblastima 1, 2, 5, 6, 10 i 11.

Za sve oblasti bifurkacioni dijagrami su na osnovu Tabele 1, (6.1),(6.5), (6.14) i (6.20) prikazani na Slikama A1 - A3 koje se nalaze u Dodatku A. Iz bifurkacionih dijagrama datih na Slikama A1 - A3 sledi značajan broj interesantnih činjenica vezanih za lokalne bifurkacije. Navešćemo sada neke od njih. Iz jednačina (6.2), (6.6), (6.8), (6.10), (6.17) i Slika A1 - A3 sledi da su tipovi bifurkacija odgovarajućih primarnih i sekundarnih grana u oblastima 1 i 11 suprotnog tipa. Zapravo, sekundarne grane koje odgovaraju oblastima 1 i 11 se pojavljuju kada veličina $\Delta\bar{a}$ menja znak. Preciznije, sekundarna

grana koja odgovara oblasti 1 je nestabilna i formira zatvorenu petlju samo za $\Delta\bar{a} > 0$ (Slika A1). Sa druge strane u oblasti 11 sekundarne grane su takođe nestabilne ali one formiraju zatvorenu petlju za $\Delta\bar{a} < 0$ (Slika A3). Iz gore navedenog i Slike 15 možemo videti da za proizvoljnu veličinu μ , promena \bar{b} od $-\infty$ do ∞ (\bar{b} na primer prolazi kroz oblasti 1, 2, 3, 4 i 11), pomera sekundarnu granu iz slučaja $\Delta\bar{a} > 0$ u slučaj $\Delta\bar{a} < 0$ i menja tip bifurkacije. Napominjemo da oblasti 1, 2, 7, 8, 9, 10 i 11 opisuju poslekritično ponašanje klasičnog Bernuli-Ojlerovog štapa na nelinearnoj elastičnoj podlozi ($\mu \rightarrow \infty$), dok oblast 2 opisuje klasičan Bernuli-Ojlerov štap na linearnoj elastičnoj podlozi ($\bar{b} = 0, \mu \rightarrow \infty$). Treba napomenuti da se rezultati dobijeni u [33] i [46], a gde je posmatran klasični Bernuli-Ojlerov štap na linearno elastičnoj podlozi, u potpunosti slažu sa ponašanjem određenim u oblasti 2.

Oblasti 2 i 4 pokazuju uticaj smičuće krutosti na poslekritično ponašanje štapa na linearno elastičnoj podlozi, gde je uzet u obzir samo efekat smicanja ($\bar{b} = 0$). Preciznije rečeno, promenom veličine μ od ∞ do 0, pojavljuju se dva interesantna svojstva. Prvo, grane $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_1}$ i $\Gamma_{2\bar{a}}^{B_2}$ menjaju tip bifurkacije iz subkritičnog tipa u superkritičan tip. Drugo, smanjenjem smičuće krutosti μ od ∞ do 0 nestaje zatvorena petlja koju su pravile sekundarne grane bifurkacije $\Gamma_{2\bar{a}}^{B_1}$ i $\Gamma_{2\bar{a}}^{B_2}$ za $\Delta\bar{a} > 0$ i formira se sekundarna grana $\Gamma_{2\bar{a}}^{B_1}$ za $\Delta\bar{a} > 0$ i sekundarna grana $\Gamma_{2\bar{a}}^{B_2}$ za $\Delta\bar{a} < 0$. Ponašanje unutar oblasti 2 i 4, zajedno sa ranije izvedenom teorijom, potvrđuje rezultate pokazane u [48], gde je analizirano izvijanje štapa na linearnoj elastičnoj podlozi pri dvostrukoj sopstvenoj vrednosti. Pri tome je uzet u obzir efekat smicanja. Slike 15, A1, A2, A3 i Tabela 1 određuju uticaj smicanja za $\bar{b} \neq 0$. Tako, kao interesantnost, napominjemo da za dovoljno veliko $|\bar{b}|$ (podloga je veoma tvrda ili veoma meka) smičuća krutost neće menjati poslekritično ponašanje u kvalitativnom smislu, pošto krive na Slici 15 imaju horizontalne asimptote.

Kao što je ranije pokazano oblici poslekritičnih ugiba ose štapa koji odgovaraju primarnim bifurkacijama $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_1}, \Gamma_{1\bar{a}}^{B_2}$ nasleđuju svojstva simetrije i antisimetrije linearnih rešenja \mathbf{x}_1 i \mathbf{x}_2 za svako n ((5.42) i (5.43)). Dakle, poslekritični ugibi ose štapa imaju približno oblike date sa (5.16)_{1,2}. To znači da u slučaju $n = 1$ rešenja koja odgovaraju $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_1}$ imaju osu simetrije koja je vertikalna (normalna na osu štapa pre deformacije) i prolazi kroz sredinu štapa. Sa druge strane rešenja koja odgovaraju $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_2}$ su antisimetrična u koordinatnom sistemu definisanom osom štapa u nedeformisanom položaju i osom koja je vertikalna i prolazi kroz sredinu štapa. Međutim, jedan od važnijih ciljeva ove disertacije je prezentacija poslekritičnih ugiba ose štapa koji odgovaraju sekundarnim bifurkacijama u okolini dvostrukih sopstvenih vrednosti (mešovita rešenja). Tako za granu $\Gamma_{2\bar{a}}^{B_1}$ približno rešenje koje sledi iz (6.15) ima oblik

$$\bar{y}^{(B_1)} = \pm \nu \left[\bar{\xi}_0 + \frac{1}{2} \frac{a_2 r - a_1 s}{a_1 q - a_2 p} \frac{1}{\bar{\xi}_0} \eta^2 \right] \sin n\pi t + \nu \eta \sin (n+1) \pi t, \quad (6.22)$$

dok iz (6.21) sledi približno rešenje za granu $\Gamma_{2\bar{a}}^{B_2}$ kao

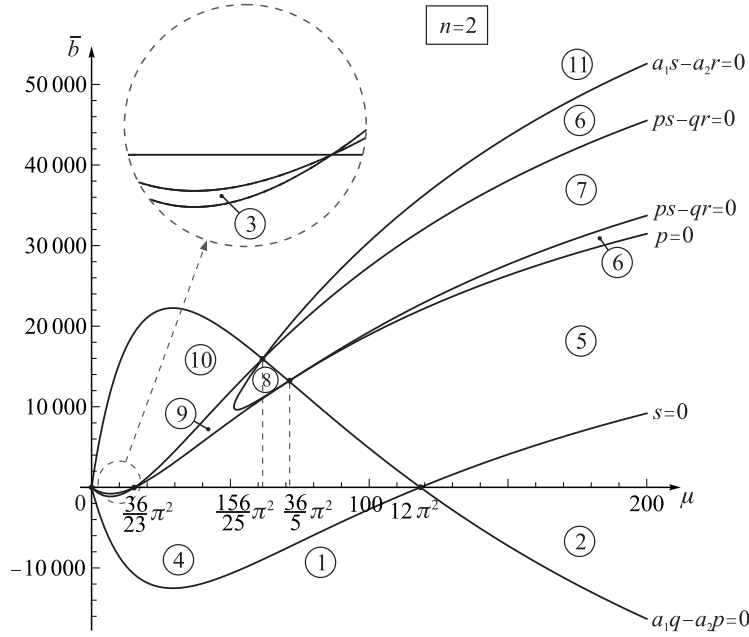
$$\bar{y}^{(B_2)} = \nu \xi \sin n\pi t \pm \nu \left[\tilde{\eta}_0 + \frac{1}{2} \frac{a_1 q - a_2 p}{a_2 r - a_1 s} \frac{1}{\tilde{\eta}_0} \xi^2 \right] \sin (n+1) \pi t. \quad (6.23)$$

Za $n = 1$ i svaku od 11 oblasti sa Slike 15 određeni su približni poslekritični ugibi ose štapa koji odgovaraju sekundarnim bifurkacijama. Tako dobijeni dijagrami dati su u Dodatku B, Slike B1 - B4. Konkretno, prvo je fiksirana je mala vrednost parametra ν (fizički to znači da je određeno $\Delta\bar{a}$) a zatim je za po tri male vrednosti parametara η i ξ (ovi parametri određuju po tri ravnotežna položaja na sekundarnim granama) u svakoj oblasti nacrtan poslekritični ugib ose štapa za obe sekundarne grane. Analiza dijagrama sa slika B1 - B4 pokazuje da na poslekritični ugib ose štapa $\bar{y}^{(B_1)}$ koji odgovara grani $\Gamma_{2\bar{a}}^{B_1}$ dominantan uticaj ima simetričan deo dat sa $\sin \pi t$ (vidi (6.22)) dok antisimetrični deo dat sa $\sin 2\pi t$ ima mali uticaj i služi da "naruši" simetriju. Za granu $\Gamma_{2\bar{a}}^{B_2}$ situacija je obrnuta i dominantan uticaj na poslekritični ugib ose štapa $\bar{y}^{(B_2)}$ ima antisimetričan deo dat sa $\sin 2\pi t$ (vidi (6.23)), dok simetrični deo dat sa $\sin \pi t$ ima mali uticaj i služi da "naruši" antisimetriju. Važno je napomenuti da su poslekritični ugibi ose štapa koji odgovaraju sekundarnim bifurkacijama kvalitativno u skladu sa rezultatima [33].

Slučaj $n = 2$. Na slici 16 dato je 11 oblasti koje određuju poslekritično ponašanje elastičnog štapa. Interesantno je primetiti da u ovom slučaju oblast 6 nije povezana.

Ponovo koristeći (5.36), (5.50), (5.53), (5.60), (5.57), (5.68), (5.69), (5.65), (5.66), (5.64), (5.65), (5.62), (5.71), (5.75), (6.2), (6.6), (6.12), (6.13), (6.18), (6.19) možemo odrediti tip bifurkacija i stabilnost primarnih i sekundarnih grana. Tako dobijeni rezultati su dati u Tabeli 2.

Poređenjem rezultata datih u Tabeli 1 i Tabeli 2 pokazuje se da oblasti 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 i 11 na Slici 16 opisuju isto poslekritično ponašanje kao i oblasti 1, 3, 2, 7, 8, 9, 6, 5, 4 i 11 na Slici 15, respektivno. Tako da se, umesto oblasti 10 koja se pojavljuje za slučaj $n = 1$, pojavljuje nova oblast 2 za slučaj $n = 2$. Za sve oblasti bifurkacioni dijagrami su na osnovu Tabele 2, (6.1), (6.5), (6.14) i (6.20) prikazani na Slikama A4 -A6 u Dodatku A.



Slika 16: Oblasti koje odgovaraju različitim poslekritičnim ponašanjima štapa u zavisnosti od smičuće krutosti i nelinearnosti podloge za $n = 2$

Nova oblast 2 je grafički opisana na slici A4 gde se vidi da su grane $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_1}$ i $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_2}$ subkritične i nestabilne. Posmatrajući sekundarne grane zaključuje se da je grana $\Gamma_{2\bar{a}}^{B_1}$ subkritična i pojavljuje se za $\Delta\bar{a} < 0$ dok je grana $\Gamma_{2\bar{a}}^{B_2}$ takođe subkritična ali se pojavljuje za $\Delta\bar{a} > 0$. Obe sekundarne grane, $\Gamma_{2\bar{a}}^{B_1}$ i $\Gamma_{2\bar{a}}^{B_2}$ su nestabilne.

Ponovo se napominje da sekundarne grane mogu biti stabilne samo u slučaju tvrde nelinearne podloge (oblasti 7 i 8 na Slici 16 i A5). Međutim, u ovom slučaju nelinearna podloga mora biti tvrđa nego u slučaju $n = 1$. Takođe, poslekritično ponašanje štapa koje odgovara oblastima 3, 8 i 9 je moguće samo ako su prisutni i nelinearna podloga i smičući efekat.

Kao što je pokazano u slučaju $n = 1$ svaki prelaz iz oblasti 1 u oblast 11, za fiksno μ (Slika 16), menja tip bifurkacije u oblasti 1 u suprotni tip bifurkacije u oblasti 11. Takođe, sekundarne grane koje se pojavljuju za $\Delta\bar{a} > 0$ u oblasti 1 pojavljuju se i u oblasti 11 za $\Delta\bar{a} < 0$. U ovom slučaju oblasti 1, 2, 5, 6, 7 i 11 opisuju poslekritično ponašanje klasičnog Bernuli-Ojlerovog štapa na nelinearnoj elastičnoj podlozi ($\mu \rightarrow \infty$). Sa druge strane ponašanje štapa u oblasti 2 opisuje poslekritično ponašanje klasičnog Bernuli-Ojlerovog štapa na linearnoj elastičnoj podlozi ($\bar{b} = 0, \mu \rightarrow \infty$). Tako dobijeni rezultati slažu se sa rezultatima dobijenim u [46] i u ovom slučaju.

Tabela 2: Stabilnost i tip primarnih i sekundarnih grana po oblastima za $n = 2$: superkritičan (sup), subkritičan (sub), stabilan (stab), nestabilan (nestab), oblast (ob)

Primarne i sekundarne grane za $n = 2$									
Ob	$\Delta\bar{a}$	tip	$\Gamma_{1\bar{a}}^{B_1}$	$\Gamma_{1\bar{a}}^{B_2}$		$\Gamma_{2\bar{a}}^{B_1}$		$\Gamma_{2\bar{a}}^{B_2}$	
			stabilnost	tip	stabilnost	tip	stabilnost	tip	stabilnost
1	$\Delta\bar{a} > 0$	sub	nestab	sub	nestab	sup	nestab	sub	nestab
	$\Delta\bar{a} < 0$	sub	nestab	sub	nestab	-	-	-	-
2	$\Delta\bar{a} > 0$	sub	nestab	sub	nestab	-	-	sub	nestab
	$\Delta\bar{a} < 0$	sub	nestab	sub	nestab	sub	nestab	-	-
3	$\Delta\bar{a} > 0$	sub	nestab	sup	stab	sup	nestab	-	-
	$\Delta\bar{a} < 0$	sub	nestab	sup	nestab	-	-	sup	nestab
4	$\Delta\bar{a} > 0$	sub	nestab	sup	stabilan	sup	nestab	sub	nestab
	$\Delta\bar{a} < 0$	sub	nestab	sup	nestab	-	-	-	-
5	$\Delta\bar{a} > 0$	sub	nestab	sup	stab	-	-	sub	nestab
	$\Delta\bar{a} < 0$	sub	nestab	sup	nestab	sub	nestab	-	-
6	$\Delta\bar{a} > 0$	sup	nestab	sup	stab	-	-	sub	nestab
	$\Delta\bar{a} < 0$	sup	stab	sup	nestab	sub	nestab	-	-
7	$\Delta\bar{a} > 0$	sup	nestab	sup	stab	-	-	sup	stab
	$\Delta\bar{a} < 0$	sup	stab	sup	nestab	sup	stab	-	-
8	$\Delta\bar{a} > 0$	sup	nestab	sup	stab	sub	stab	sup	stab
	$\Delta\bar{a} < 0$	sup	stab	sup	nestab	-	-	-	-
9	$\Delta\bar{a} > 0$	sup	nestab	sup	stab	sup	nestab	sub	nestab
	$\Delta\bar{a} < 0$	sup	stab	sup	nestab	-	-	-	-
10	$\Delta\bar{a} > 0$	sup	nestab	sup	stab	sup	nestab	-	-
	$\Delta\bar{a} < 0$	sup	stab	sup	nestab	-	-	sup	nestab
11	$\Delta\bar{a} > 0$	sup	nestab	sup	stab	-	-	-	-
	$\Delta\bar{a} < 0$	sup	stab	sup	nestab	sub	nestab	sup	nestab

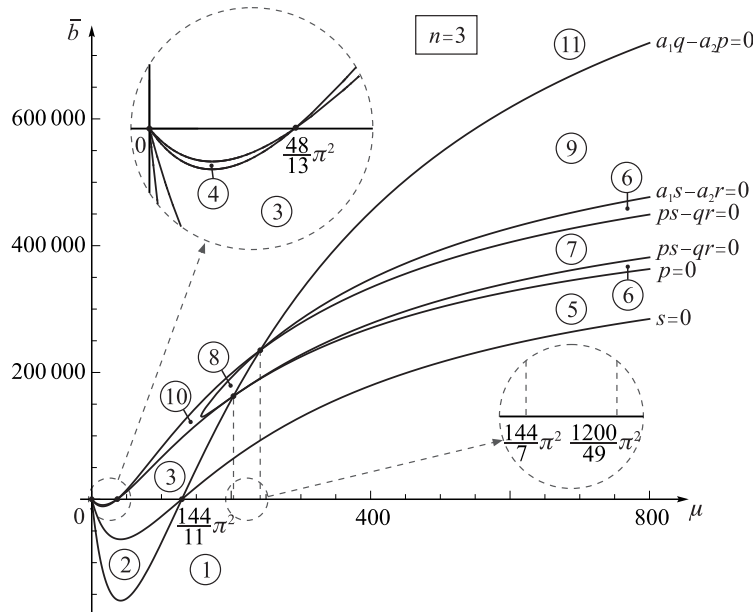
U ovom slučaju uticaj efekta smicanja na poslekritično ponašanje štapa, za $b = 0$ (štap oslonjen na linearnu elastičnu podlogu, gde se uzima u obzir efekat smicanja), je opisan oblastima 2, 4 i 10. Preciznije, oblasti 4 i 10 vode ka istom ponašanju kao i oblasti 2 i 4 u slučaju $n = 1$. Međutim, za jako velike vrednosti μ poslekritično ponašanje odgovara oblasti 2 (Slike 16, A4) i ovaj fenomen se nije pojavio u slučaju $n = 1$. U oblastima 2, 4 i 10 ponašanje štapa se slaže sa rezultatima pokazanim u [48]. Slike 16 i A4-A6 pokazuju uticaj smicanja za $b \neq 0$. I u ovom slučaju kada je nelinearnost podloge dominantna ($|\bar{b}|$ je dovoljno veliko) smičuća krutost ne može promeniti poslekritično ponašanje u kvalitativnom smislu.

Za $n = 2$ i svaku od 11 oblasti sa Slike 16 određeni su poslekritični ugibi ose štapa koji odgovaraju sekundarnim bifurkacijama. Tako dobijeni dijagrami dati su u Dodatku B, Slike B5 -B8. Praktično, ponovljen je postupak iz slučaja

$n = 1$. Sada Slike B5-B8 pokazuju da na poslekritični ugib ose štapa $\bar{y}^{(B_1)}$ koji odgovara grani $\Gamma_{2\bar{a}}^{B_1}$ dominantan uticaj ima antisimetričan deo $\sin 2\pi t$ (vidi (6.22)) dok simetrični deo $\sin 3\pi t$ ima ponovo mali uticaj i služi da "naruši" antisimetriju. Za granu $\Gamma_{2\bar{a}}^{B_2}$ situacija je takođe obrnuta te dominantan uticaj na poslekritični ugib ose štapa $\bar{y}^{(B_2)}$ ima simetričan deo $\sin 3\pi t$ (vidi (6.23)), dok antisimetrični deo $\sin 2\pi t$ ima mali uticaj i služi da "naruši" simetriju.

Slučaj $n = 3$. Oblasti koje odgovaraju ovom slučaju pokazane su na Slici 17. Isto kao i u slučaju $n = 2$ postoji 11 oblasti, pri čemu oblast 6 ponovo nije povezana (Slika 17).

Kao u prethodna dva slučaja (5.36), (5.50), (5.53), (5.60), (5.57), (5.68), (5.69), (5.65), (5.66), (5.64), (5.65), (5.62), (5.71), (5.75), (6.2), (6.6), (6.12), (6.13), (6.18), (6.19) opisuju tip bifurkacija i stabilnost primarnih i sekundarnih grana. U ovom slučaju rezultati su dati u Tabeli 3.



Slika 17: Oblasti koje odgovaraju različitim poslekritičnim ponašnjima štapa u zavisnosti od smičuće krutosti i nelinearnosti podloge za $n = 3$

Slično kao u prethodnom slučaju može se uočiti veza između slučajeva $n = 2$ i $n = 3$. Naime, međusobnim poređenjem rezultata datih u Tabeli 2 i Tabeli 3 uočava se da oblasti 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 i 11 na Slici 17 opisuju isto poslekritično ponašanje štapa kao i oblasti 2, 1, 4, 3, 5, 6, 7, 8, 11, 9 i 10

Tabela 3: Stabilnost i tip primarnih i sekundarnih grana po oblastima za $n = 3$: superkritičan (sup), subkritičan (sub), stabilan (stab), nestabilan (nestab), oblast (ob)

Primarne i sekundarne grane za $n = 3$									
Ob	$\Delta\bar{a}$	tip	$\Gamma_{1\bar{a}}^{B_1}$ stabilnost	tip	$\Gamma_{1\bar{a}}^{B_2}$ stabilnost	tip	$\Gamma_{2\bar{a}}^{B_1}$ stabilnost	tip	$\Gamma_{2\bar{a}}^{B_2}$ stabilnost
1	$\Delta\bar{a} > 0$	sub	nestab	sub	nestab	-	-	sub	nestab
	$\Delta\bar{a} < 0$	sub	nestab	sub	nestab	sub	nestab	-	-
2	$\Delta\bar{a} > 0$	sub	nestab	sub	nestab	sup	nestab	sub	nestab
	$\Delta\bar{a} < 0$	sub	nestab	sub	nestab	-	-	-	-
3	$\Delta\bar{a} > 0$	sub	nestab	sup	stab	sup	nestab	sub	nestab
	$\Delta\bar{a} < 0$	sub	nestab	sup	nestab	-	-	-	-
4	$\Delta\bar{a} > 0$	sub	nestab	sup	stab	sup	nestab	-	-
	$\Delta\bar{a} < 0$	sub	nestab	sup	nestab	-	-	sup	nestab
5	$\Delta\bar{a} > 0$	sub	nestab	sup	stab	-	-	sub	nestab
	$\Delta\bar{a} < 0$	sub	nestab	sup	nestab	sub	nestab	-	-
6	$\Delta\bar{a} > 0$	sup	nestab	sup	stab	-	-	sub	nestab
	$\Delta\bar{a} < 0$	sup	stab	sup	nestab	sub	nestab	-	-
7	$\Delta\bar{a} > 0$	sup	nestab	sup	stab	-	-	sup	stab
	$\Delta\bar{a} < 0$	sup	stab	sup	nestab	sup	stab	-	-
8	$\Delta\bar{a} > 0$	sup	nestab	sup	stab	sub	stab	sup	stab
	$\Delta\bar{a} < 0$	sup	stab	sup	nestab	-	-	-	-
9	$\Delta\bar{a} > 0$	sup	nestab	sup	stab	-	-	-	-
	$\Delta\bar{a} < 0$	sup	stab	sup	nestab	sub	nestab	sup	nestab
10	$\Delta\bar{a} > 0$	sup	nestab	sup	stab	sup	nestab	sub	nestab
	$\Delta\bar{a} < 0$	sup	stab	sup	nestab	-	-	-	-
11	$\Delta\bar{a} > 0$	sup	nestab	sup	stab	sup	nestab	-	-
	$\Delta\bar{a} < 0$	sup	stab	sup	nestab	-	-	sup	nestab

na Slici 16, respektivno. Tako da u smislu poslekritičnog ponašanja štapa iste oblasti, koje se javljaju u slučaju $n = 2$, se javljaju i u ovom slučaju. Međutim, položaji i veličine oblasti se razlikuju od onih u slučaju $n = 2$. (Slike 16 i 17).

U ovom slučaju su za sve oblasti bifurkacioni dijagrami su na osnovu Tabele 3, (6.1),(6.5), (6.14) i (6.20) prikazani na Slikama A7-A9. Kao posledicu toga ponovo sekundarne grane mogu biti stabilne samo u slučaju tvrde nelinearne elastične podloge (vidi oblasti 7 i 8 na Slici 17 i A8). Takođe, i u ovom slučaju postoje oblasti 2, 4, 8 i 10, čije je poslekritično ponašanje moguće ostvariti samo ako je i podloga nelinearna i ako je prisutan efekat smicanja.

Kao i u prethodna dva slučaja primarna i sekundarna grana u oblastima 1 i 11 imaju suprotan tip bifurkacija (Slike A7 i A9). Međutim, poslekritično ponašanje u oblasti 1 i 11 se razlikuje od ponašanja istih oblasti koje odgovaraju slučajevima $n = 1$ i $n = 2$. Kao specijalne slučajeve navodimo da oblasti

1, 5, 6, 7, 9 i 11 opisuju poslekritično ponašanje klasičnog Bernuli-Ojlerovog štapa na nelinearnoj elastičnoj podlozi ($\mu \rightarrow \infty$) dok oblast 1 kvalitativno odgovara klasičnom Bernuli-Ojlerovom štapa na linearno elastičnoj podlozi ($\bar{b} = 0, \mu \rightarrow \infty$). Ovde dobijeni rezultati za poslekritično ponašanje štapa u oblasti 1 se slažu sa poslekritičnim ponašanjem dobijenim u [46].

Za $\bar{b} = 0$ (štap na linearno elastičnoj podlozi, gde je uzet u obzir efekat smicanja) uticaj smicajne krutosti μ na sekundarnu bifurkaciju je kvalitativno isti kao u slučaju $n = 2$, dok za $\bar{b} \neq 0$, uticaj smicanja sledi sa Slika 17, A7-A9. Kao i u prethodna dva slučaja, smičuća krutost ne može kvalitativno da promeni poslekritično ponašanje štapa ako je $|\bar{b}|$ dovoljno veliko (Silka 17).

Za $n = 3$ i svaku od 11 oblasti sa Slike 17 poslekritični ugibi ose štapa koji odgovaraju sekundarnim bifurkacijama dati na dijagramima u Dodatku B, Slike B9-B12. Slike B9-B12 sada pokazuju da na poslekritični ugib ose štapa $\bar{y}^{(B_1)}$ koji odgovara grani $\Gamma_{2\bar{a}}^{B_1}$ ponovo kao i za slučaj $n = 1$, dominantan uticaj ima simetričan deo dat sa $\sin 3\pi t$ (vidi (6.22)) dok antisimetrični deo dat sa $\sin 4\pi t$ ima mali uticaj i "narušava" simetriju. Za granu $\Gamma_{2\bar{a}}^{B_2}$ dominantan uticaj na poslekritični ugib ose štapa $\bar{y}^{(B_2)}$ ima antisimetričan deo dat sa $\sin 4\pi t$ (vidi (6.23)) dok simetrični deo dat sa $\sin 3\pi t$ ima mali uticaj i služi da "naruši" antisimetriju.

Na osnovu analize prethodna tri slučaja može se zaključiti da je poslekritično ponašanje štapa veoma kompleksno. Data analiza pokazuje da nelinearnost elastične podloge ima znatno veći uticaj nego smičuća krutost prilikom ovako kompleksnog ponašanja štapa. Uočena su neka interesantna svojstva u prethodna tri slučaja. U okviru analize pojavljuju se i tri specijalna slučaja: klasičan Bernuli-Ojlerov štap na linearno elastičnoj podlozi ($\bar{b} = 0, \mu \rightarrow \infty$), klasičan Bernuli-Ojlerov štap na nelinearno elastičnoj podlozi ($\bar{b} \neq 0, \mu \rightarrow \infty$), i štap sa efektom smicanja ($\bar{b} = 0, \mu \neq \infty$) na linearno elastičnoj podlozi. Napominjemo da je analiza klasičnog Bernuli-Ojlerovog štapa na nelinearnoj elastičnoj podlozi data u [27], [49] i [32]. Međutim, u ovim radovima korištene su linearne geometrijske relacije kao i različiti pomoćni parametri, tako da nije moguće porediti te rezultate sa onima koji su dati ovoj disertaciji.

7 Zaključak i pravci daljih istraživanja

U ovoj disertaciji je analizirano poslekritično ponašanje elastičnog pritisnutog štapa koji se celom dužinom oslanja na nelinearnu elastičnu podlogu. Konstitutivne jednačine su odabrane tako da uzimaju u obzir efekte savijanja i smicanja. Štap je na jednom kraju oslonjen na nepokretan a na drugom na pokretan zglobni oslonac. Dobijeni rezultati su generalizacija rezultata [48]. Konkretno, analizirano je poslekritično ponašanje pri vrednostima pomoćnog parametra \bar{a} za koje su sopstvene vrednosti u blizini dvostrukih sopstvenih vrednosti. Takođe, umesto linearne elastične podloge koristila se nelinearna. Sa druge strane dobijene rezultate možemo posmatrati i kao uopštenje rezultata [33] u smislu uvođenja efekata nelinearnosti podloge i smicanja. Glavni rezultati ove disertacije su :

1. Izveden je sistem jednačina koji se sastoji od dve nelinearne diferencijalne jednačine drugog reda (4.16) i (4.17) koje opisuju deformaciju štapa. Takođe, određena je totalna potencijalna energija, kao i najmanja opterećenja (5.13) koja odgovaraju dvostrukim sopstvenim vrednostima.

2. Korišćenjem Ljapunov-Šmitove metode napisane su dve bifurkacione jednačine za koje je pokazano da poseduju svojstvo dvostruke Z_2 simetrije. Na osnovu ovih jednačina određen je opšti oblik primarnih i sekundarnih bifurkacionih grana. Takođe, formirani su dovoljni uslovi za stabilnost i nestabilnost primarnih i sekundarnih grana.

3. Analiza poslekritičnog ponašanja štapa je izvedena pod pretpostavkom da su nedegenerativni uslovi (5.37) zadovoljeni kao i da je $\Delta\bar{a} \neq 0$. Utvrđeno je da postoje dve primarne grane $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_1}$ i $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_2}$ za svako $n \in \mathbb{N}$ i \bar{a} koje je u okolini \bar{a}_n^* . Pokazano je da je primarna grana $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_1}$ superkritična za $\bar{b} > \bar{b}_1^{B_1}$ i subkritična za $\bar{b} < \bar{b}_1^{B_1}$ (Slika 7). Takođe je, iako u opštem slučaju tip bifurkacije zavisi kako od smičuće krutosti tako i od nelinearnosti elastične podloge, pokazano da je za $\bar{b} > \bar{b}_2^{B_1}$ primarna grana $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_1}$ superkritičnog tipa za sve vrednosti smičuće krutosti, dok je za $\bar{b} < \bar{b}_3^{B_1}$ ista primarna grana subkritična za sve vrednosti smičuće krutosti (Slika 7). Napominjemo da se ovaj efekat nije pojavio kod slučaja gde je podloga linearno elastična. Što se tiče stabilnosti pokazano je da je grana $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_1}$ nestabilna za $\bar{b} < \bar{b}_1^{B_1}$, dok slučaj kada je $\bar{b} > \bar{b}_1^{B_1}$ vodi ka stabilnosti $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_1}$ za $\Delta\bar{a} < 0$ i nestabilnosti grane $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_1}$ za $\Delta\bar{a} > 0$ (Slika 7).

Grana $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_2}$ je superkritična za $\bar{b} > \bar{b}_1^{B_2}$ i subkritična za $\bar{b} < \bar{b}_1^{B_2}$ (Slike 9 i 10). Za svaku vrednost smičuće krutosti, uslovi $n = 1$ i $\bar{b} > 0$ vode ka superkritičnoj bifurkaciji dok se za $n = 1$ i $\bar{b} < \bar{b}_2^{B_2} < 0$ pojavljuje samo subkritična bifurkacija (Slika 9). Sa druge strane, za slučaj $n \geq 2$ se pokazuje da se za $\bar{b} > \bar{b}_3^{B_2}$ pojavljuju samo superkritične bifurkacije, dok se za $\bar{b} < \bar{b}_4^{B_2}$ po-

javljuju samo subkritične bifurkacije (Slika 10). Pomenuti rezultati pokazuju da smičuća krutost ne utiče na tip bifurkacije ako je $|\bar{b}|$ dovoljno veliko (nelinearna elastična podloga je veoma meka ili tvrda). Stabilnost $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_2}$ sledi sa Slika 9 i 10. Naime, ako je $\Delta\bar{a} > 0$ tada je grana $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_2}$ stabilna za $\bar{b} > \bar{b}_1^{B_2}$ i nestabilna za $\bar{b} < \bar{b}_1^{B_2}$. Sa druge strane grana $\Gamma_{1\bar{a}}^{B_2}$ je uvek nestabilna za $\Delta\bar{a} < 0$.

Treba napomenuti da za obe primarne grane, povećanje nelinearnosti podloge \bar{b} od $-\infty$ do ∞ ima svojstvo da promeni subkritičnu u superkritičnu bifurkaciju za svaku vrednost smičuće krutosti μ i za svako $n \in \mathbb{N}$. Takođe, u slučaju $\bar{a} = \bar{a}_n^*$ ($\Delta\bar{a} = 0$) mogu se javiti dve ili četiri primarne grane.

4. Za $n = 1, 2, 3$ određeni su tipovi bifurkacije i stabilnost sekundarnih grana $\Gamma_{2\bar{a}}^{B_1}$ i $\Gamma_{2\bar{a}}^{B_2}$ što predstavlja značajan originalni doprinos ove disertacije. Rezultati su pokazali da sekundarne grane mogu biti superkritične kao i subkritične. Takođe, uočeno je da je za $n > 3$ poslekritično ponašanje štapa kvalitativno isto kao i u slučaju $n = 3$.

Kao dokaz složenosti poslekritičnog ponašanja primećeno je da za svako $n \in \mathbb{N}$ postoji jedanaest različitih poslekritičnih ponašanja u zavisnosti od smičuće krutosti μ i nelinearnosti elastične podloge \bar{b} (Slike 15-17). Slike 15-17 otkrivaju da nelinearnost elastične podloge ima veći uticaj na mogućnost pojave novih poslekritičnih ponašanja nego smičuća krutost. Međutim, za svako $n \in \mathbb{N}$, postoji nekoliko poslekritičnih ponašanja koje su moguća samo ako su prisutni i smičića krutost i nelinearnost podloge. Uočavanje ovih ponašanja štapa je takođe jedan od originalnih doprinosa disertacije. Pored navedenih rezultata, primećen je još jedan efekat. Naime, smičuća krutost ne može promeniti poslekritično ponašanje kvalitativno ako je $|\bar{b}|$ dovoljno veliko (nelinearna podloga je veoma meka ili tvrda).

Pokazano je da sekundarne grane $\Gamma_{2\bar{a}}^{B_1}$, $\Gamma_{2\bar{a}}^{B_2}$, mogu biti stabilne samo za nelinearnu tvrdu elastičnu podlogu (videti oblasti 6, 9 i 10 za $n = 1$, oblasti 7 i 8, za $n = 2, 3$). Ovo je takođe novi interesantni efekat. Kako bi detaljno opisali poslekritično ponašanje štapa, za $n = 1, 2, 3$ formirani su i bifurkacioni dijagrami za svaku oblast sa Slika 15-17 i dati u Dodatku A.

5. Za svaku oblast sa Slika 15-17 određeni su analitički približni poslekritični ugibi ose štapa koji odgovaraju sekundarnim granama $\Gamma_{2\bar{a}}^{B_1}$ i $\Gamma_{2\bar{a}}^{B_2}$. Rezultati predstavljeni u Dodatku B, otkrivaju način na koji su formirana mešovita rešenja nelinearnog problema, kao i način na koji se narušavaju osobine simetrije i antisimetrije rešenja koja odgovaraju primarnim granama.

Napomenimo da će rezultati ovde prezentovani pomoći inženjerima u boljem razumevanju fizičkih fenomena koji dovode do gubitka stabilnosti a vezani su za pojavu sekundarnih bifurkacija. Na taj način oni će biti u mogućnosti da sigurnije i jeftinije projektuju konstrukcione elemente. Takođe dobijeni rezul-

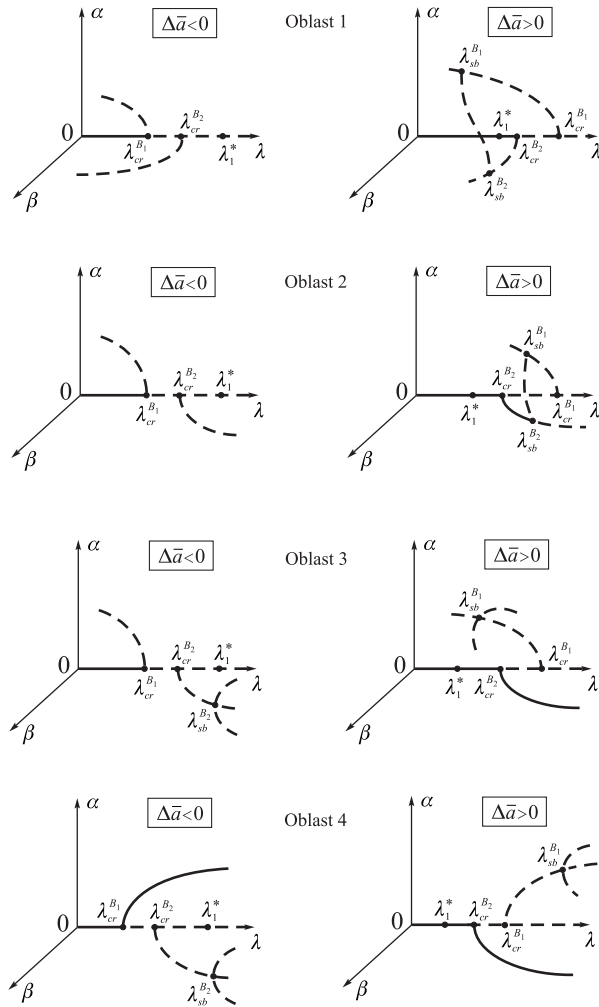
tati mogu, kao polazna osnova, biti veoma korisni prilikom analize globalnih bifurkacija.

Na kraju ove disertacije navodimo i neke moguće pravce daljih istraživanja. Kao prvo, mogle bi se koristiti nelinearne konstitutivne jednačine. Pri tome bi se mogao uzeti u obzir i efekat kompresibilnosti. Na taj način bi poslekritično ponašanje štapa postalo još složenije. Drugi mogući pravac bi bio određen korišćenjem drugačijeg tipa elastične podloge. Takođe, jedan od izazovnijih pravaca bi svakako bio i onaj u kom bi se uvelo drugačije opterećenje i efekat viskoznosti a zatim analizirala stabilnost dinamičkim metodom.

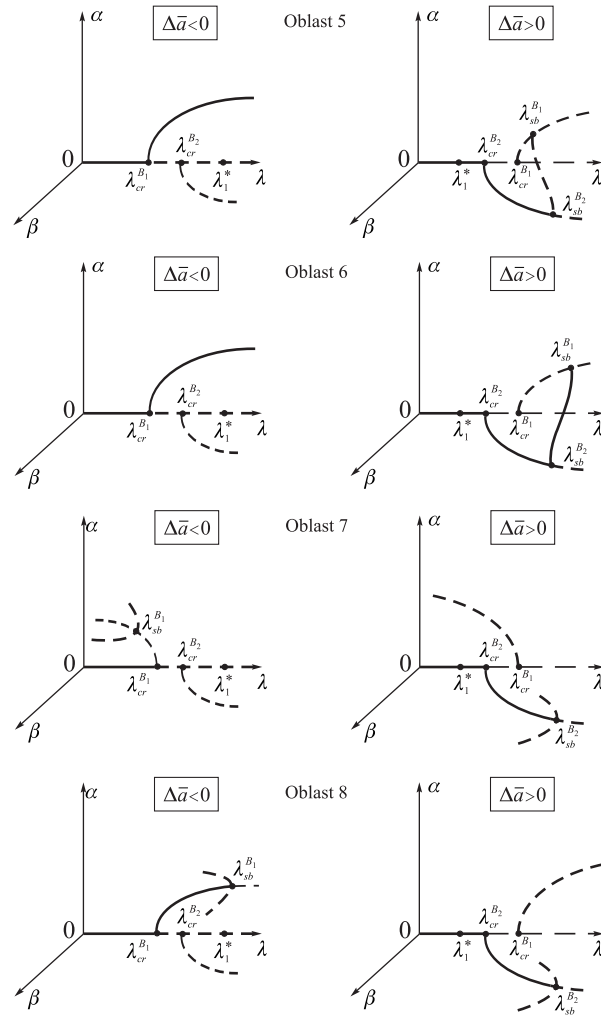
8 Dodatak A

8.1 Bifurkacioni dijagrami za $n = 1$

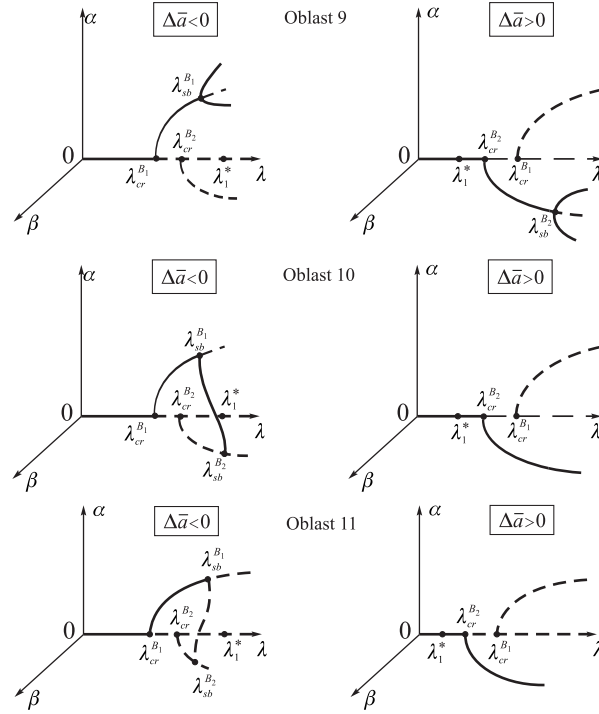
8.1.1 Slika A1 - Bifurkacioni dijagrami za oblasti 1-4



8.1.2 Slika A2 - Bifurkacioni dijagrami za oblasti 5-8

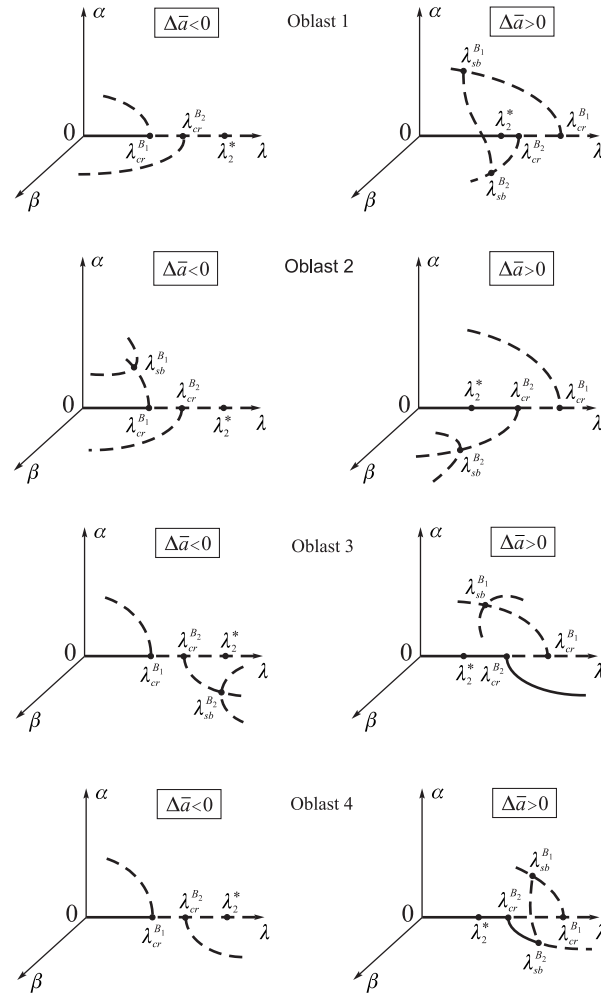


8.1.3 Slika A3 - Bifurkacioni dijagrami za oblasti 9-11

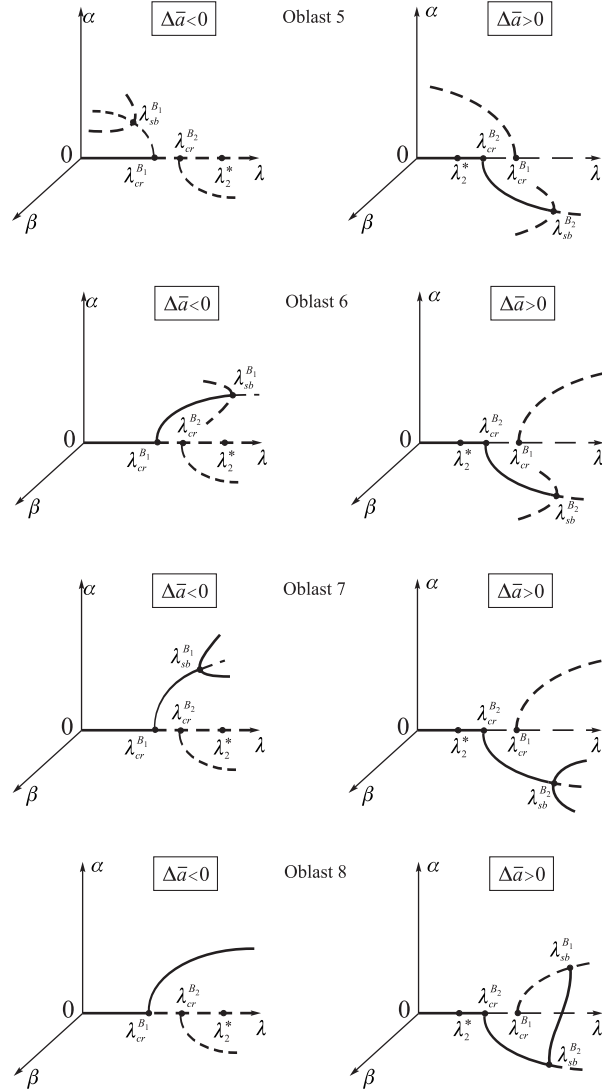


8.2 Bifurkacioni dijagrami za $n = 2$

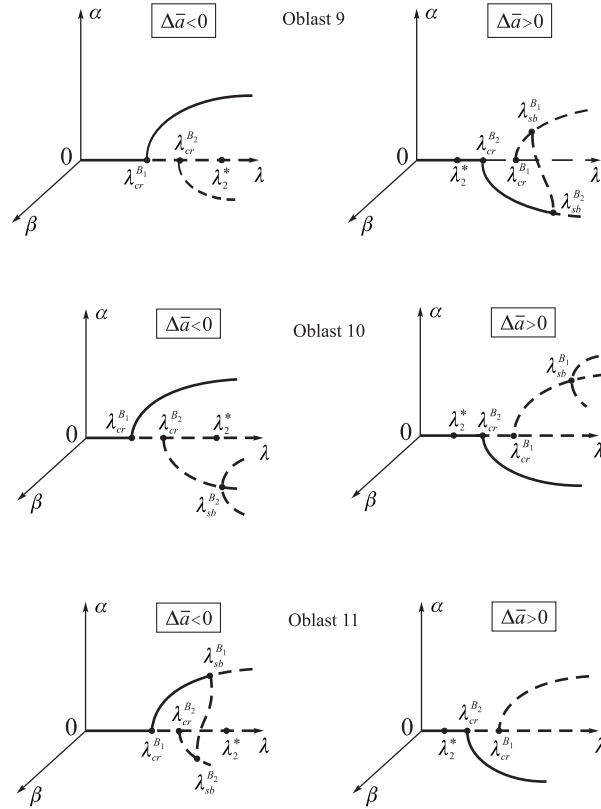
8.2.1 Slika A4 - Bifurkacioni dijagrami za oblasti 1-4



8.2.2 Slika A5 - Bifurkacioni dijagrami za oblasti 5-8

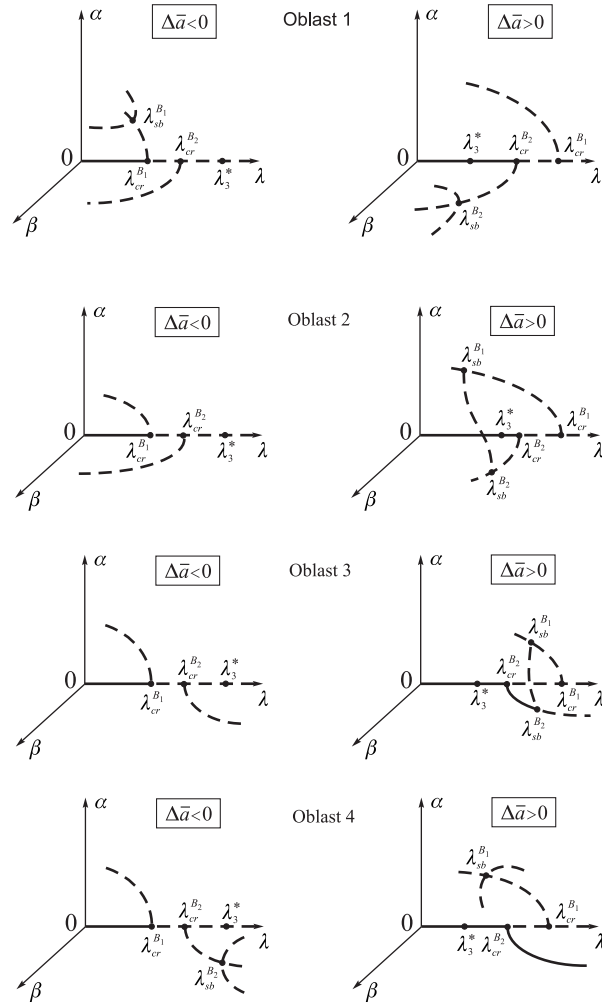


8.2.3 Slika A6 - Bifurkacioni dijagrami za oblasti 9-11

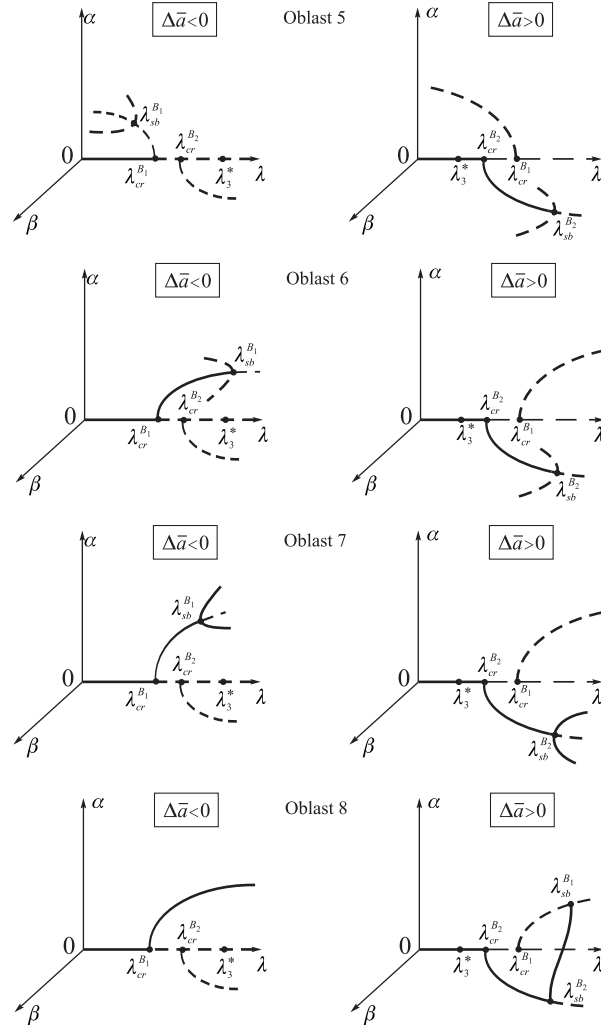


8.3 Bifurkacioni dijagrami za $n = 3$

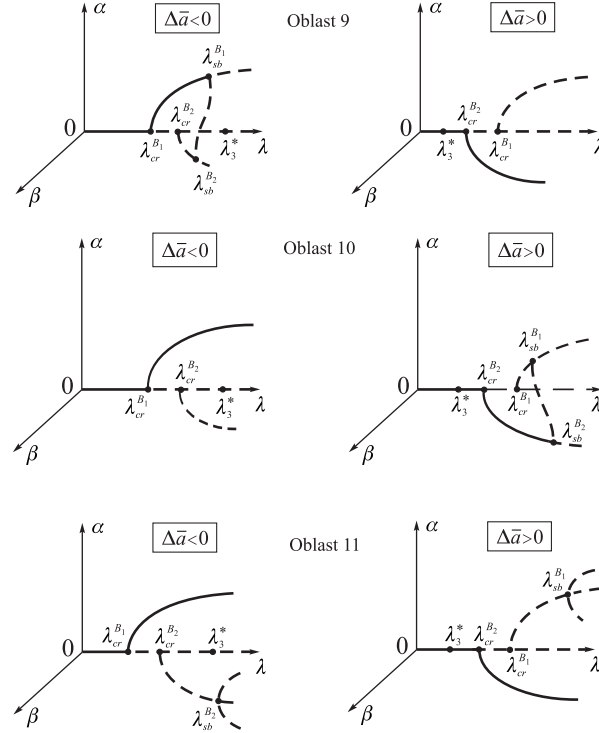
8.3.1 Slika A7 - Bifurkacioni dijagrami za oblasti 1-4



8.3.2 Slika A8 - Bifurkacioni dijagrami za oblasti 5-8



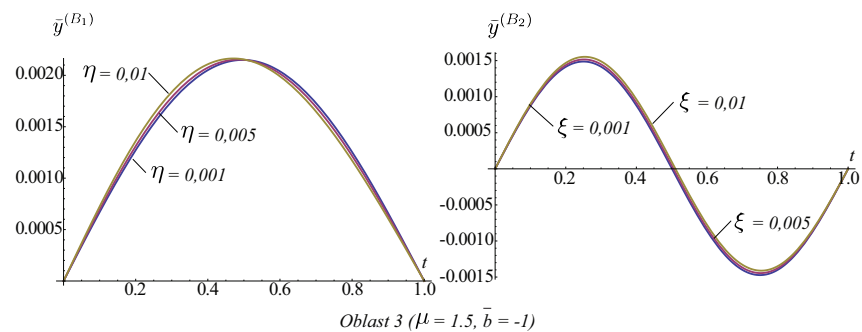
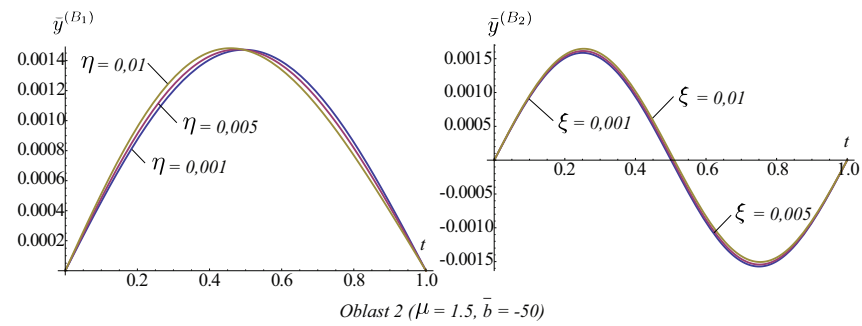
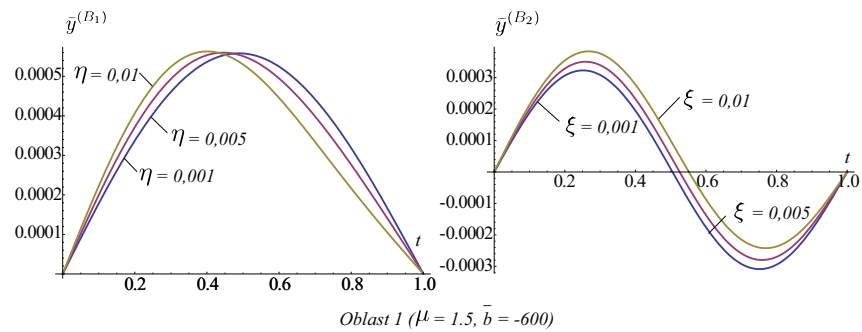
8.3.3 Slika A9 - Bifurkacioni dijagrami za oblasti 9-11



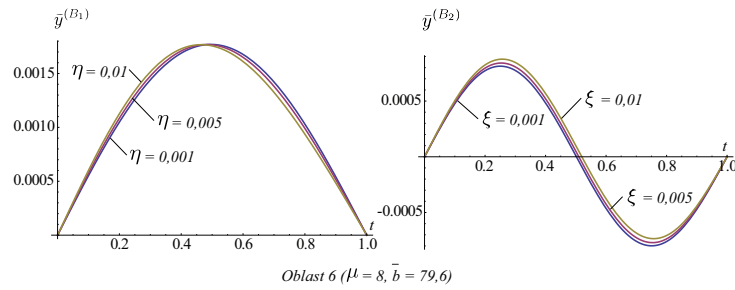
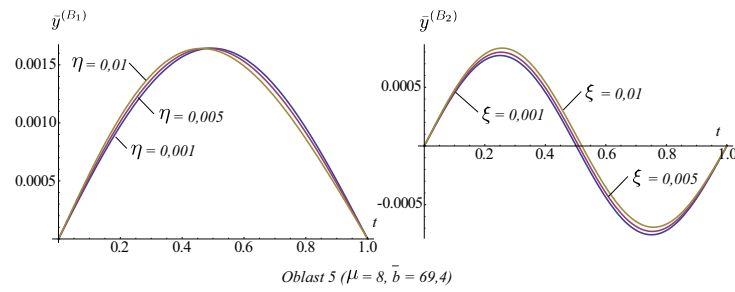
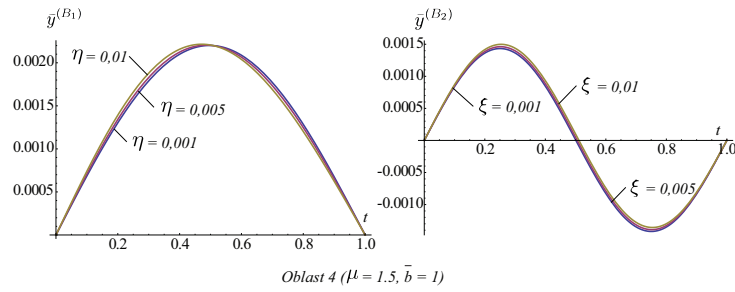
9 Dodatak B

9.1 Poslekritični ugibi ose štapa za $n = 1$

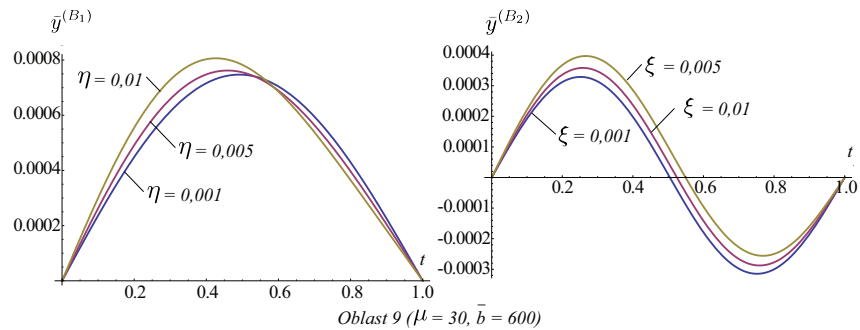
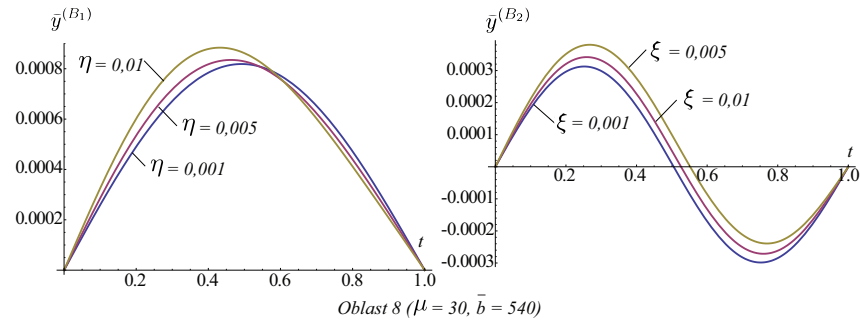
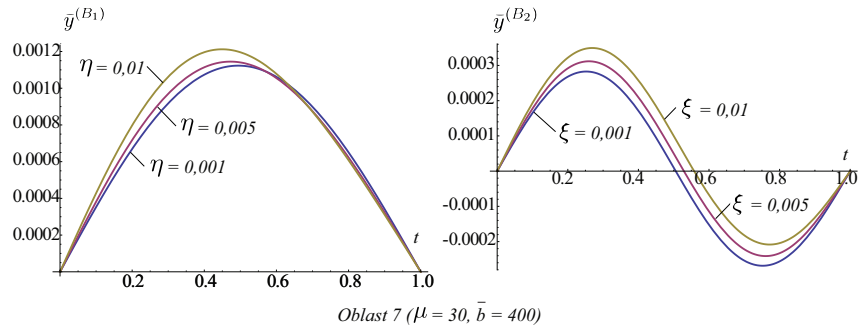
9.1.1 Slika B1 - Poslekritični ugibi ose štapa koji odgovaraju sekundarnim granama za oblasti 1-3



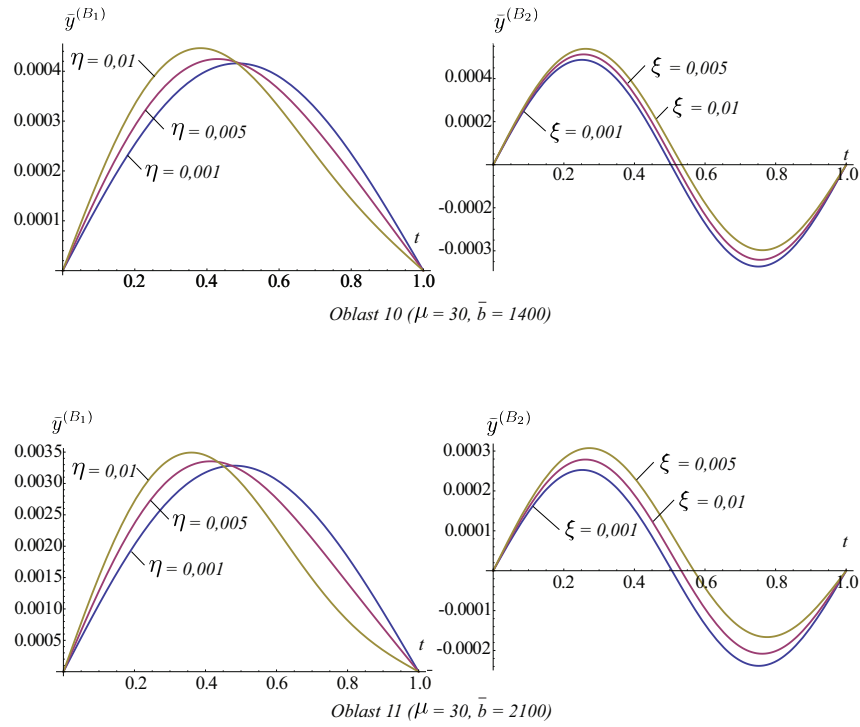
9.1.2 Slika B2 - Poslekritični ugibi ose štapa koji odgovaraju sekundarnim granama za oblasti 4-6



9.1.3 Slika B3 - Poslekritični ugibi ose štapa koji odgovaraju sekundarnim granama za oblasti 7-9

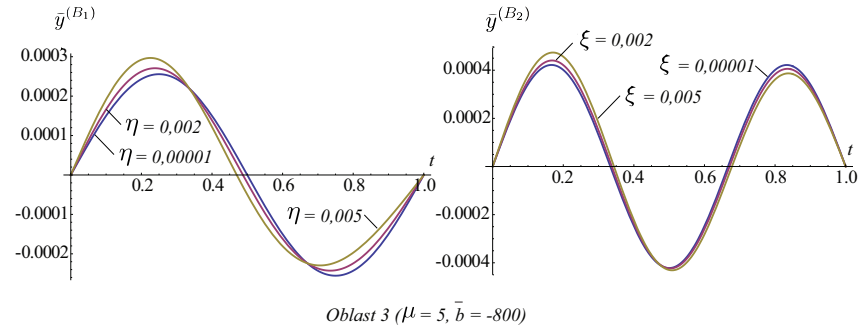
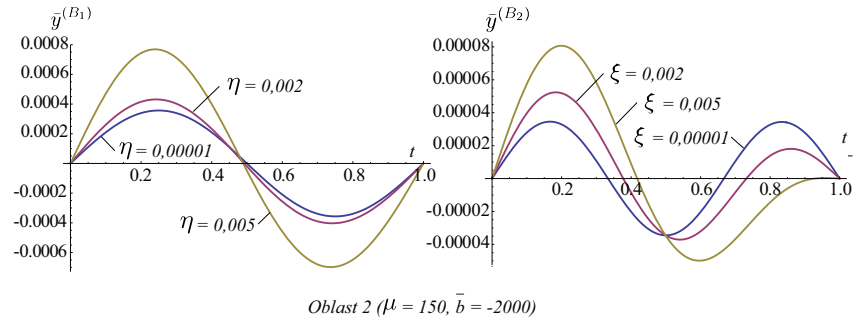
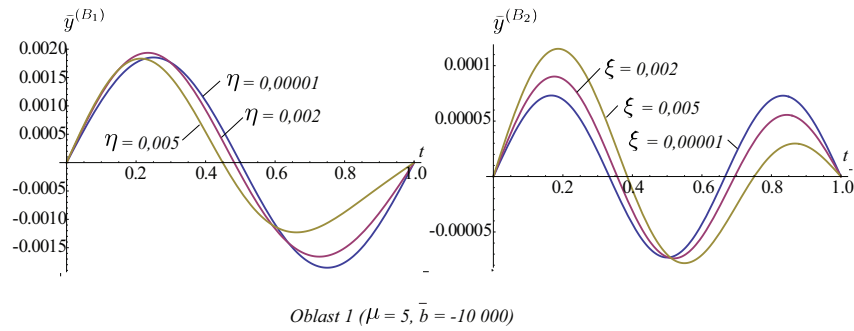


9.1.4 Slika B4 - Poslekritični ugibi ose štapa koji odgovaraju sekundarnim granama za oblasti 10-11

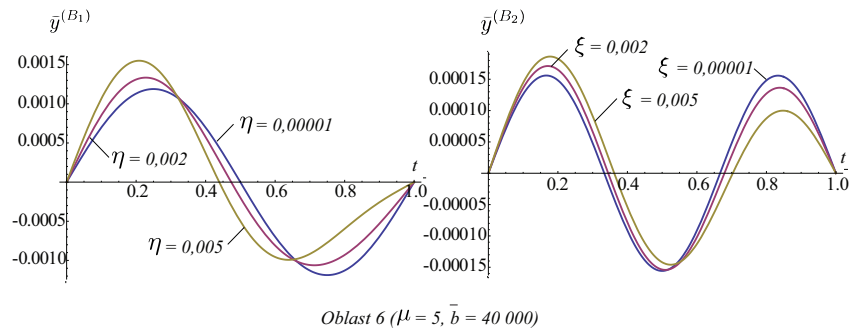
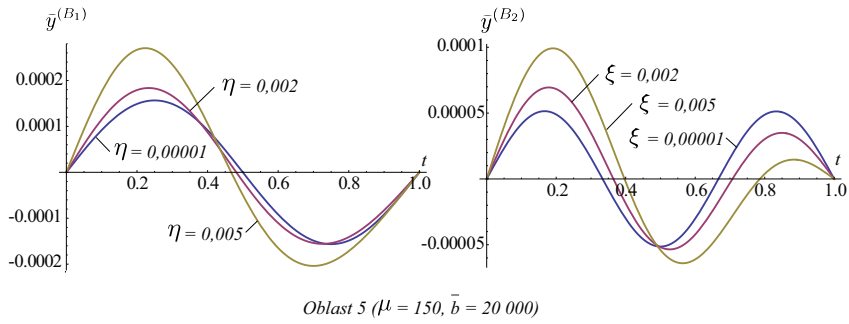
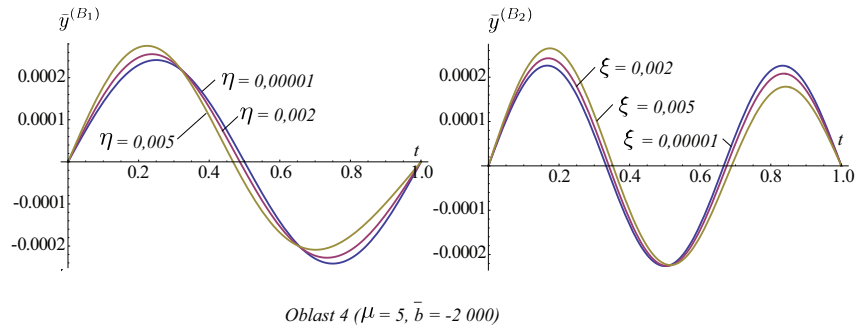


9.2 Poslekritični ugibi ose štapa za $n = 2$

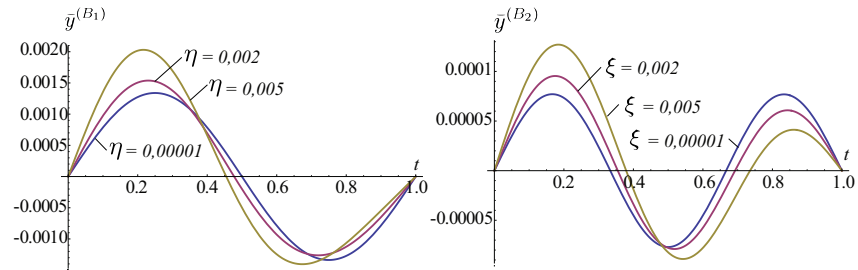
9.2.1 Slika B5 - Poslekritični ugibi ose štapa koji odgovaraju sekundarnim granama za oblasti 1-3



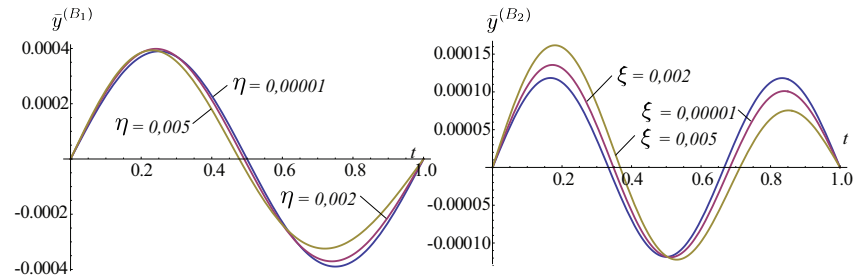
9.2.2 Slika B6 - Poslekritični ugibi ose štapa koji odgovaraju sekundarnim granama za oblasti 4-6



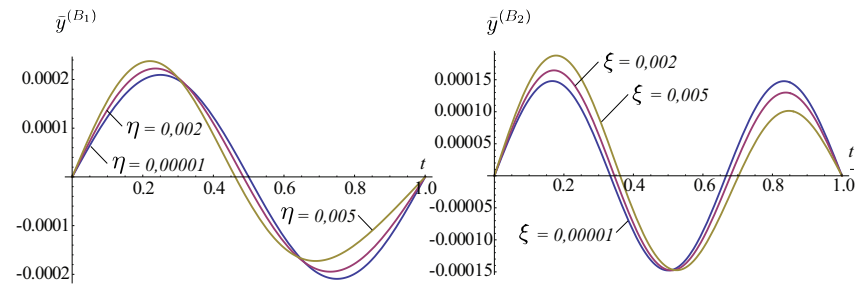
9.2.3 Slika B7 - Poslekritični ugibi ose štapa koji odgovaraju sekundarnim granama za oblasti 7-9



Oblast 7 ($\mu = 150, \bar{b} = 30\ 000$)

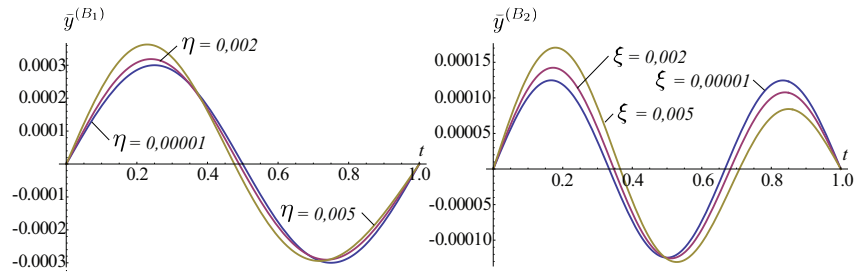


Oblast 8 ($\mu = 60, \bar{b} = 12\ 000$)

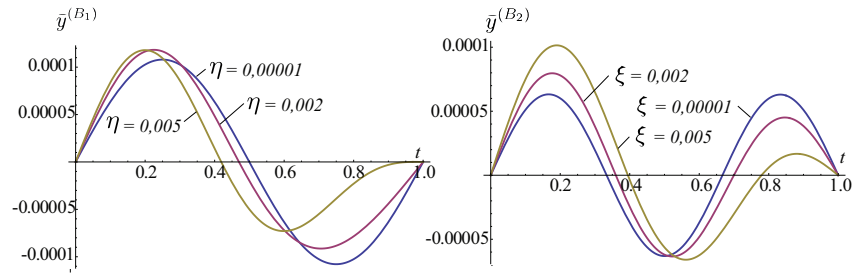


Oblast 9 ($\mu = 40, \bar{b} = 6\ 000$)

9.2.4 Slika B8 - Poslekritični ugibi ose štapa koji odgovaraju sekundarnim granama za oblasti 10-11



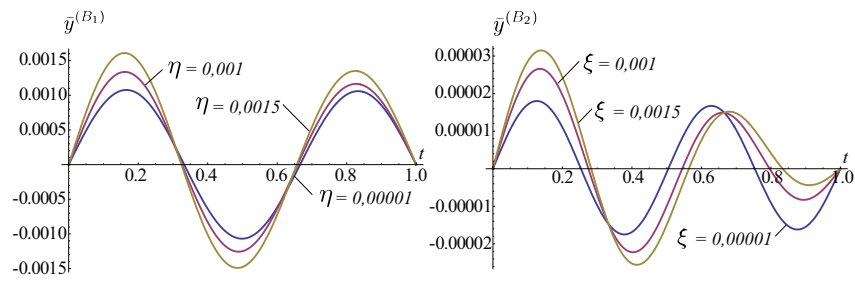
Oblast 10 ($\mu = 5, \bar{b} = 2\ 000$)



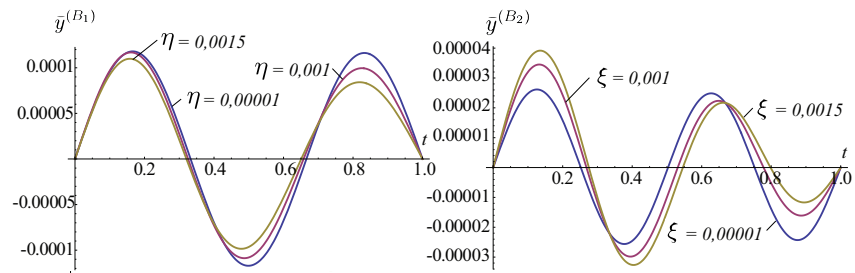
Oblast 11 ($\mu = 5, \bar{b} = 50\ 000$)

9.3 Poslekritični ugibi ose štapa za $n = 3$

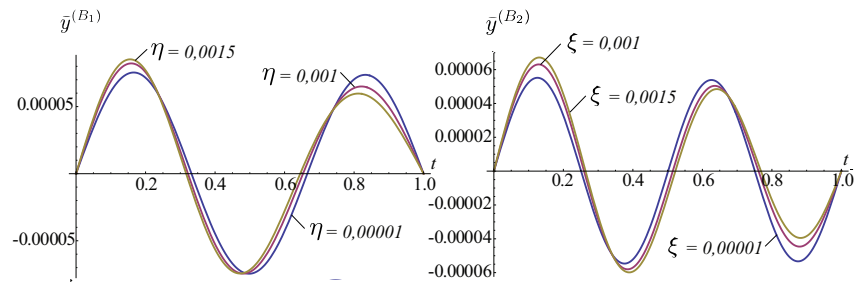
9.3.1 Slika B9 - Poslekritični ugibi ose štapa koji odgovaraju sekundarnim granama za oblasti 1-3



Oblast 1 ($\mu = 15$, $\bar{b} = -150\,000$)

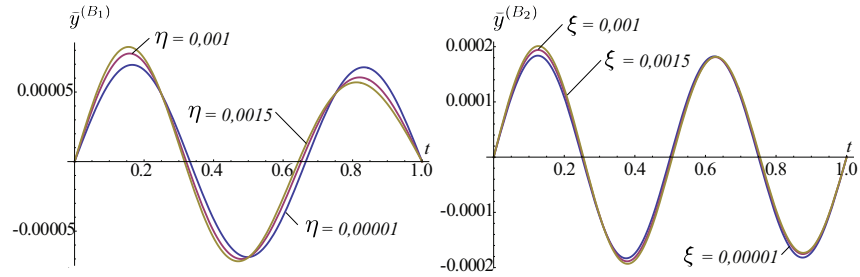


Oblast 2 ($\mu = 15$, $\bar{b} = -75\,000$)

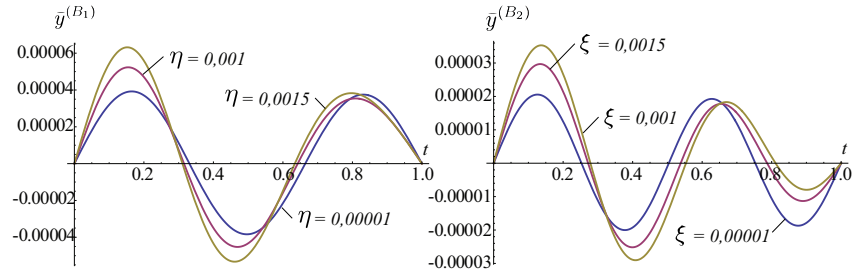


Oblast 3 ($\mu = 15$, $\bar{b} = -25\,000$)

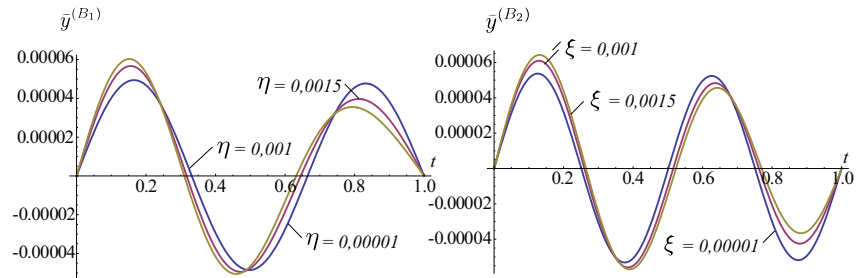
9.3.2 Slika B10 - Poslekritični ugibi ose štapa koji odgovaraju sekundarnim granama za oblasti 4-6



Oblast 4 ($\mu = 15, \bar{b} = -10\ 000$)

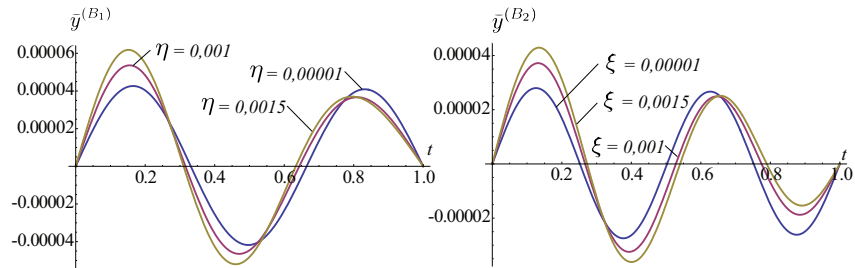


Oblast 5 ($\mu = 600, \bar{b} = 300\ 000$)

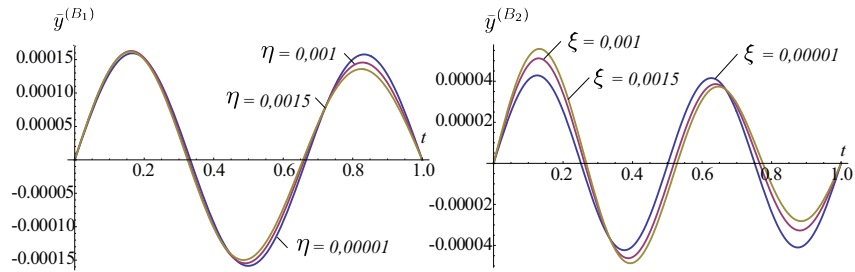


Oblast 6 ($\mu = 600, \bar{b} = 420\ 000$)

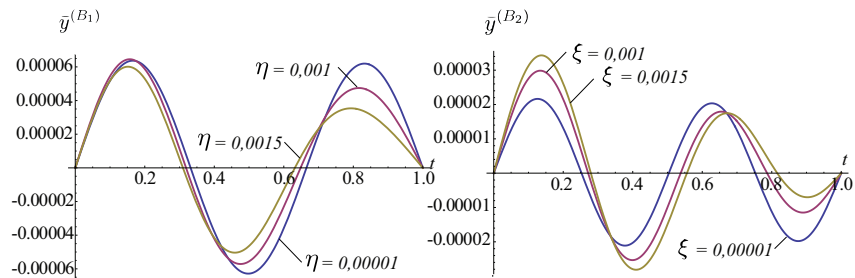
9.3.3 Slika B11 - Poslekritični ugibi ose štapa koji odgovaraju sekundarnim granama za oblasti 7-9



Oblast 7 ($\mu = 600$, $\bar{b} = 350\ 000$)

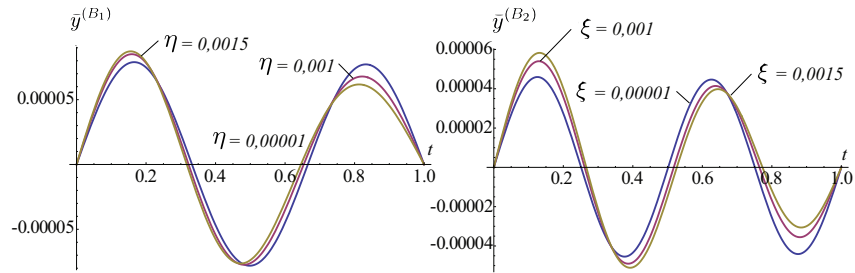


Oblast 8 ($\mu = 200$, $\bar{b} = 175\ 000$)

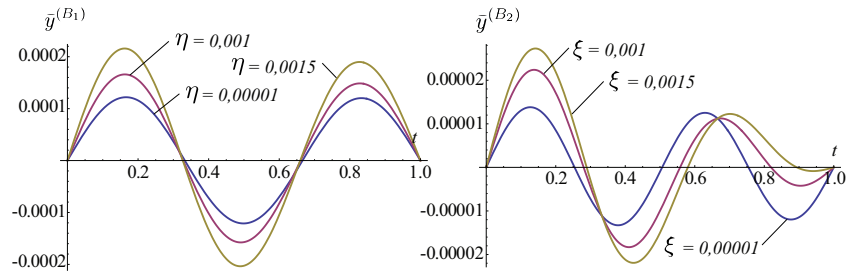


Oblast 9 ($\mu = 600$, $\bar{b} = 500\ 000$)

9.3.4 Slika B12 - Poslekritični ugibi ose štapa koji odgovaraju sekundarnim granama za oblasti 10-11



Oblast 10 ($\mu = 150, \bar{b} = 125\ 000$)



Oblast 11 ($\mu = 600, \bar{b} = 650\ 000$)

10 Dodatak C

10.1 Teorema o implicitnoj funkciji

Cilj je odgovoriti na pitanje da li za sistem

$$\begin{aligned} F^1(x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^n) &= 0, \\ &\vdots \\ F^n(x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^n) &= 0. \end{aligned}$$

postoje f^i funkcije

$$\begin{aligned} y^1 &= f^1(x^1, \dots, x^m), \\ &\vdots \\ y^n &= f^n(x^1, \dots, x^m). \end{aligned}$$

koje ga lokalno zadovoljavaju. Ako uvedemo oznake

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (x^1, \dots, x^m), & \mathbf{y} &= (y^1, \dots, y^n), \\ \mathbf{F} &= (F^1, \dots, F^n), & \mathbf{f} &= (f^1, \dots, f^n), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{\mathbf{x}}\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial x^m} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial F^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial F^n}{\partial x^m} \end{bmatrix} (\mathbf{x}, \mathbf{y}), \\ d_{\mathbf{y}}\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial y^n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial F^n}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial F^n}{\partial y^n} \end{bmatrix} (\mathbf{x}, \mathbf{y}), \\ d_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^m} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial x^m} \end{bmatrix} (\mathbf{x}), \end{aligned}$$

prema [1] možemo formulirati sledeću teoremu o implicitnoj funkciji:

Teorema C1. Neka je $A \subset \mathbb{R}^{m+n}$ otvoren skup i neka za neko $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ važi $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in A$. Ako su zadovoljeni uslovi:

- a) $\mathbf{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ je neprekidna funkcija,
- b) $\mathbf{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{0}$,
- c) parcijalni diferencijali $d_{\mathbf{y}}\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ i $d_{\mathbf{x}}\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ su definisani na skupu A i svi njihovi elementi $\frac{\partial F^i}{\partial y^j}$ $i, j = 1, \dots, n$ i $\frac{\partial F^i}{\partial x^k}$ $i = 1, \dots, n$ $k = 1, \dots, m$ su neprekidni (ovo znači da $\mathbf{F} \in C^1(A, \mathbb{R}^n)$),

d) $\det d_{\mathbf{y}}\mathbf{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \neq 0$,
 tada postoji okolina $W = U \times V$ tačke (\mathbf{a}, \mathbf{b}) i jednoznačno određena neprekidno difrencijabilna funkcija $\mathbf{f} : U \rightarrow V$ za koju važi da je $\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$ kao i

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) &= \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in U, \\ d_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}) &= -[d_{\mathbf{y}}\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}))]^{-1} d_{\mathbf{x}}\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})). \end{aligned}$$

Takođe važi da ako $\mathbf{F} \in C^q(A, \mathbb{R}^n)$ za $q \in \mathbb{N}$ tada i $\mathbf{f} \in C^q(U, \mathbb{R}^n)$.

Navedimo sada teoremu o implicitnoj funkcije kada se umesto prostora \mathbb{R}^m i \mathbb{R}^n pojavljuju proizvoljni Banahovi prostori. U tu svrhu posmatrajmo preslikavanje $F : U \times V \rightarrow Z$ gde su U i V otvoreni podskupovi Banahovih prostora X i Y , t.j. $U \subset X, V \subset Y$. Teorema o implicitnoj funkciji sada glasi [22]:

Teorema C2. Pretpostavimo da je zadovoljeno

- a) neko $(x_0, y_0) \in U \times V$ i zadovoljava $F(x_0, y_0) = 0$,
- b) preslikavanje F je neprekidno t.j. $F \in C(U \times V, Z)$,
- c) postoji Frešev izvod od F po x i on je neprekidan, t.j. $D_x F \in C(U \times V, L(X, Z))$, gde je $L(X, Z)$ Banahov prostor ograničenih linearnih operatora koji preslikavaju $X \rightarrow Z$,
- d) operator $D_x F(x_0, y_0) : X \rightarrow Z$ ima ograničeni inverzni operator.

Tada postoji okolina $U_1 \times V_1$ u $U \times V$ tačke (x_0, y_0) i preslikvanje $f : V_1 \rightarrow U_1 \subset X$ takvo da vazi $f(y_0) = x_0$ i za svako $y \in V_1$ vazi

$$F(f(y), y) = 0.$$

Pored toga f je neprekidno na V_1 , t.j. $f \in C(V_1, X)$ i svako rešenje jednačine $F(x, y) = 0$ u $U_1 \times V_1$ je oblika $(f(y), y)$. Dodatno, ako je preslikavanje F , k puta ($k \geq 1$) neprekidno diferencijabilno na $U \times V$, t.j. $F \in C^k(U \times V, Z)$, tada je takođe preslikavanje f , k puta neprekidno diferencijabilno na V_1 , t.j. $f \in C^k(V_1, X)$.

Literatura

- [1] Adnađević, D., Kadelburg, Z., 1994. Matemtička analiza II, Nauka, Beograd
- [2] Alfutov, N.A., Balmont, V., Evseev, E., 2013. Stability of Elastic Structures. Springer, Berlin, Heidelberg.
- [3] Antman, S.S., 1995. Nonlinear Problems of Elasticity. Springer, New York.
- [4] Atanackovic, T. M., 1997. Stability Theory of Elastic Rods. World Scientific, Singapore.
- [5] Bauer L., Keller H. B., Reiss E. L., 1975. Multiple eigenvalues lead to secondary bifurcation. SIAM Rev. 17, 101-122.
- [6] Bazant Z., Cedolin L., Stability of Structures, Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories, World Scientific, NEW JERSEY, 2010.
- [7] Budiansky B..1974. Theory of buckling and postbuckling behaviour of elastic structures, Advances in Appl. Mech., 14 , 1-65.
- [8] Buzano, E., 1986. Secondary bifurcations of a thin rod under axial compression. SIAM J. Math. Anal. 17, 312-321.
- [9] Chow S.N., Hale J. H., 1982. Methods of bifurcation theory. Springer, Berlin.
- [10] Domokos, G., 1994. Global description of elastic bars. ZAMM 74, T289-T291.
- [11] Euler L., 1744. Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minimive Proprietate (Appendix, De Curvis Elasticis), Marcum Michaelem Bousquet, Lausanne and Geneve
- [12] Glavardanov, V. B., Maretic, R. B., 2014. Secondary bifurcation of a compressible rod with spring supports. European Journal of Mechanics A/Solids 46, 72-83.
- [13] Glavardanov, V. B., Maretic, R. B., Zigic, M.,M., Grahovac, N.M., 2017. Secondary bifurcation of a shearable rod with nonlinear spring supports. European Journal of Mechanics A/Solids, 66, 433-445.

- [14] Glavardanov, V.B., Grahovac, N.M., Berecki, A.D., Zigic, M.M., 2020. The influence of foundation nonlinearity on the post-buckling behavior of a shearable rod near double eigenvalues, *International Journal of Solids and Structures* 203, 236–248
- [15] Golubitsky M, Schaeffer D., 1985. *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, vol 1. Springer-Verlag, New York.
- [16] Haragus, M., Iooss, G., 2011. *Local Bifurcations, Center Manifolds, and Normal Forms in Infinite-Dimensional Dynamical Systems*, Springer, London
- [17] Hetenyi, M., 1946. *Beams on Elastic Foundations*. University of Michigan Press, Michigan.
- [18] Hunt, G. W., Everall, P. R., 1999. Arnold tongues and mode-jumping in the supercritical post-buckling of an archetypal elastic structure. *Proc. R. Soc. Lond. A* 455, 125-140.
- [19] Iooss, G., Joseph, D.D., 1981. *Elementary Stability and Bifurcation Theory* Springer-Verlag, New-York
- [20] Izydoreka, M., Janczewskaa, J., Waterstraatb, N., Zgorzelskaa, A., 2018. Bifurcation of equilibrium forms of an elastic rod on a two-parameter Winkler foundation, *Nonlinear Anal. RWA.* 38, 451-463.
- [21] Keller, J.B., Antman, S. (Eds.), 1969. *Bifurcation Theory and Nonlinear Eigenvalue Problems*, Benjamin, New-York
- [22] Kielhofer, H., 2004. *Bifurcation Theory: An Introduction with Applications to PDEs*. Springer-Verlag, New York.
- [23] Koiter, W.T., 1945.. *On the Stability of elastic equilibrium*, thesis, Delft.(in Dutch), English translation: AFFDL-TR-70-25 1970.
- [24] Koiter, W.T., 1976. Current trends in the theory of buckling. In: Budiansky, B. (Ed.), *Proceedings of IUTAM Symposium. Buckling of Structures*, June 17e24, Cambridge,MA/USA. Springer, Berlin, pp. 1-16.
- [25] Mailybaev, A. A., Seyranian A. P., 2008. Bifurcations of equilibria in potential systems at bimodal critical points. *Journal of Applied Mechanics*, 75, 021016.

- [26] Mohammadi, H., Mahzoon, M., Mohammadi, M., Mohammadi, M., 2014. Postbuckling instability of nonlinear nanobeam with geometric imperfection embedded in elastic foundation. *Nonlinear Dyn.* 76, 2005-2016.
- [27] Oyesanya, M. O., 1993. End Shortening Relation and Stability of Columns on Nonlinear Foundation. *J. Appl. Mech.* 60, 1050-1052.
- [28] Oyesanya, M. O., 2005. Symmetry and secondary bifurcation of elastic structures. *Mechanics Research Communications* 32, 121-137.
- [29] Olhoff, N., Seyranian A. P., 2008. Bifurcation and post-buckling analysis of bimodal optimum columns. *International Journal of Solids and Structures* 45, 3967-3995.
- [30] Potier-Ferry, M., 1978. Bifurcation et stabilité pour des systemes dérivant d'un potentiel, *J. Mécanique*, 17, 579-608.
- [31] Potier-Ferry, M., 1982. On the mathematical foundations of elastic stability theory I, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 78 , 55-72
- [32] Potier-Ferry, M., 1983. Amplitude modulation, phase modulation and localization of buckling patterns. In J. M. T. Thompson G. W. Hunt (Eds.) *Collapse: the buckling of structures in theory and practice*. Cambridge University Press.
- [33] Rehlicki, L. Z., Janev, M.B., Novakovic, B. N., Atanackovic, T. M., 2018. On Post-Critical Behavior of a Beam on an Elastic Foundation, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 18, 1850082-1 - 1850082-23
- [34] Sattinger, D.H., 1973. *Topics in Stability and Bifurcation Theory*, Lecture Notes in Math 309, Springer-Verlag, Berlin
- [35] Schaeffer, D., Golubitsky, M., 1979. Boundary Conditions and Mode Jumping in the Buckling of a Rectangular Plate. *Commun. Math. Phys.* 69, 209-236.
- [36] Simitzes, G., J., Hodges, D.H., 2006. *Fundamentals of Structural Stability*. Butterworth-Heinemann, Amsterdam.
- [37] Shearer, M., 1980. Secondary bifurcation near a double eigenvalue. *SIAM J. Math. Anal.* 11, 365-389.

- [38] Strang, G., 2016. Introduction to Linear Algebra, Cambridge Press, Wellesley
- [39] Supple, W. J., 1967. Coupled branching configurations in the elastic buckling of symmetric structural systems. *Int. J. Mech. Sci.* 9, 97-112.
- [40] Thongyotheea, C., Chucheeesakul, S., 2013. Postbuckling behaviors of nanorods including the effects of nonlocal elasticity theory and surface stress. *J. Appl. Phys.* 114(24), 243507-243514.
- [41] Thompson, J.M.T., Hunt, G.W., 1973. A General Theory for Elastic Stability, Wiley, New-York
- [42] Timoshenko, S. P., Gere, J. M., 1961. Theory of elastic stability. 2nd ed. McGraw-Hill, New York.
- [43] Timoshenko, S. P., 1953. History of Strength of Materials. McGraw-Hill, New York
- [44] Triantafyllidis, N., Peek, R., 1992. On stability and the worst imperfection shape in solids with nearly simultaneous eigenmodes. *International Journal of Solids and Structures*, 29(18), 2281-2299.
- [45] Troger, H., Steindl, A., 1991. Nonlinear Stability and Bifurcation Theory. Springer-Verlag, Wien.
- [46] Wicks, P. J., 1987. Compound Buckling of Elastically Supported Struts. *J. Eng. Mech.*, 113, 1861 -1879.
- [47] Wu, B., 1995. Secondary Buckling of an Elastic Strut under Axial Compression. *Z. angew. Math. Mech.* 75, 741 -751.
- [48] Wu, B., 1995. Influence of shear deformation on buckling of elastically supported beams, *Archiv of Applied Mechanics*, 65, 133-141.
- [49] Wu, B., 1997. Some remarks on secondary bifurcation in elastic systems with double Z_2 symmetries. *Mechanics Research Communications* 24, 17-26.
- [50] Wu, B., 1998a. Secondary buckling of an elastic column with spring-supports at clamped ends. *Archive of Applied Mechanics* 68, 342-351.
- [51] Wu, B., 1998b. Secondary buckling of an elastic column with a central elastic support. *Mechanics Research Communications* 25, 479-486.

- [52] Yang, G., Bradford, M. A., 2015. Antisymmetric post-buckling localization of an infinite column on a nonlinear foundation with softening. *Int. J. Str. Stab. Dyn.* 15, 1540028-1540048.
- [53] Zeidler, E., 1995. *Applied Functional Analysis. Main Principles and Their Applications.* Springer, New York.
- [54] Zorica, D., Challamel, N., Janev, M., Atanackovic, T.M., 2017. Buckling and postbuckling of a heavy compressed nanorod on elastic foundation. *J. Nanomech. Micromech.* 7(3), 04017004-1-6.

Овај Образац чини саставни део докторске дисертације, односно докторског уметничког пројекта који се брани на Универзитету у Новом Саду. Попуњен Образац укоричити иза текста докторске дисертације, односно докторског уметничког пројекта.

План третмана података

Назив пројекта/истраживања
Утицај смицања на секундарне бифуркације штапа ослоњеног на нелинеарну еластичну подлогу - докторска дисертација
Назив институције/институција у оквиру којих се спроводи истраживање
а) Факултет техничких наука б) в)
Назив програма у оквиру ког се реализује истраживање
Утицај смицања на секундарне бифуркације штапа ослоњеног на нелинеарну еластичну подлогу - докторска дисертација
1. Опис података
<p><i>1.1 Врста студије</i></p> <p><i>Укратко описати тип студије у оквиру које се подаци прикупљају</i></p> <p><i>У овој студији нису прикупљани подаци</i></p> <p><i>1.2 Врсте података</i></p> <p>а) квантитативни б) квалитативни</p> <p><i>1.3. Начин прикупљања података</i></p> <p>а) анкете, упитници, тестови б) клиничке процене, медицински записи, електронски здравствени записи в) генотипови: навести врсту _____ г) административни подаци: навести врсту _____</p>

д) узорци ткива: навести врсту _____

ђ) снимци, фотографије: навести врсту _____

е) текст, навести врсту _____

ж) мапа, навести врсту _____

з) остало: описати _____

1.3 Формат података, употребљене скале, количина података

1.3.1 Употребљени софтвер и формат датотеке:

а) Excel фајл, датотека _____

б) SPSS фајл, датотека _____

в) PDF фајл, датотека _____

г) Текст фајл, датотека _____

д) JPG фајл, датотека _____

е) Остало, датотека _____

1.3.2. Број записа (код квантитативних података)

а) број варијабли _____

б) број мерења (испитаника, процена, снимака и сл.) _____

1.3.3. Поновљена мерења

а) да

б) не

Уколико је одговор да, одговорити на следећа питања:

а) временски размак између поновљених мера је _____

б) варијабле које се више пута мере односе се на _____

в) нове верзије фајлова који садрже поновљена мерења су именоване као _____

Напомене: _____

Да ли формати и софтвер омогућавају дељење и дугорочну валидност података?

а) Да

б) Не

Ако је одговор не, образложити _____

2. Прикупљање података

2.1 Методологија за прикупљање/генерисање података

2.1.1. У оквиру ког истраживачког нацрта су подаци прикупљени?

а) експеримент, навести тип _____

б) корелационо истраживање, навести тип _____

ц) анализа текста, навести тип _____

д) остало, навести шта _____

2.1.2 Навести врсте мерних инструмената или стандарде података специфичних за одређену научну дисциплину (ако постоје).

2.2 Квалитет података и стандарди

2.2.1. Третман недостајућих података

а) Да ли матрица садржи недостајуће податке? Да Не

Ако је одговор да, одговорити на следећа питања:

а) Колики је број недостајућих података? _____

б) Да ли се кориснику матрице препоручује замена недостајућих података? Да Не

в) Ако је одговор да, навести сугестије за третман замене недостајућих података

2.2.2. На који начин је контролисан квалитет података? Описати

2.2.3. На који начин је извршена контрола уноса података у матрицу?

3. Третман података и пратећа документација

3.1. Третман и чување података

3.1.1. Подаци ће бити депоновани у _____ репозиторијум.

3.1.2. URL адреса _____

3.1.3. DOI _____

3.1.4. Да ли ће подаци бити у отвореном приступу?

а) Да

б) Да, али после ембарга који ће трајати до _____

в) Не

Ако је одговор не, навести разлог _____

3.1.5. Подаци неће бити депоновани у репозиторијум, али ће бити чувани.

Образложење

3.2. Метаподаци и документација података

3.2.1. Који стандард за метаподатке ће бити примењен? _____

3.2.1. Навести метаподатке на основу којих су подаци депоновани у репозиторијум.

Ако је потребно, навести методе које се користе за преузимање података, аналитичке и процедуралне информације, њихово кодирање, детаљне описе варијабли, записа итд.

3.3 Стратегија и стандарди за чување података

3.3.1. До ког периода ће подаци бити чувани у репозиторијуму? _____

3.3.2. Да ли ће подаци бити депоновани под шифром? Да Не

3.3.3. Да ли ће шифра бити доступна одређеном кругу истраживача? Да Не

3.3.4. Да ли се подаци морају уклонити из отвореног приступа после извесног времена?

Да Не

Образложити

4. Безбедност података и заштита поверљивих информација

Овај одељак МОРА бити попуњен ако ваши подаци укључују личне податке који се односе на учеснике у истраживању. За друга истраживања треба такође размотрити заштиту и сигурност података.

4.1 Формални стандарди за сигурност информација/података

Истраживачи који спроводе испитивања с људима морају да се придржавају Закона о заштити података о личности (https://www.paragraf.rs/propisi/zakon_o_zastiti_podataka_o_licnosti.html) и

одговарајућег институционалног кодекса о академском интегритету.

4.1.2. Да ли је истраживање одобрено од стране етичке комисије? Да Не

Ако је одговор Да, навести датум и назив етичке комисије која је одобрила истраживање

4.1.2. Да ли подаци укључују личне податке учесника у истраживању? Да Не

Ако је одговор да, наведите на који начин сте осигурали поверљивост и сигурност информација везаних за испитанике:

- a) Подаци нису у отвореном приступу
 - б) Подаци су анонимизирани
 - ц) Остало, навести шта
-
-

5. Доступност података

5.1. Подаци ће бити

- a) јавно доступни*
- б) доступни само уском кругу истраживача у одређеној научној области*
- ц) затворени*

Ако су подаци доступни само уском кругу истраживача, навести под којим условима могу да их користе:

Ако су подаци доступни само уском кругу истраживача, навести на који начин могу приступити подацима:

5.4. Навести лиценцу под којом ће прикупљени подаци бити архивирани.

6. Улоге и одговорност

6.1. Навести име и презиме и мејл адресу власника (аутора) података

6.2. Навести име и презиме и мејл адресу особе која одржава матрицу с подацима

6.3. Навести име и презиме и мејл адресу особе која омогућује приступ подацима другим истраживачима
