



УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ФАКУЛТЕТ ТЕХНИЧКИХ НАУКА У
НОВОМ САДУ



Борис Јаковљевић

**Оптимално и субоптимално
подешавање параметара робусних
линеарних регулатора нецелог реда**

ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА

Нови Сад, 2015.



УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ • ФАКУЛТЕТ ТЕХНИЧКИХ НАУКА
21000 НОВИ САД, Трг Доситеја Обрадовића 6

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, РБР :	
Идентификациони број, ИБР :	
Тип документације, ТД :	
Тип записа, ТЗ :	
Врста рада, ВР :	Докторска дисертација
Аутор, АУ :	Борис Јаковљевић
Ментор, МН :	проф. др Зоран Јеличић
Наслов рада, НР :	Оптимално и субоптимално подешавање параметара робусних линеарних регулатора нецелог реда
Језик публикације, ЈП :	српски
Језик извода, ЈИ :	српски
Земља публикавања, ЗП :	Србија
Уже географско подручје, УГП :	
Година, ГО :	2015.
Издавач, ИЗ :	
Место и адреса, МА :	
Физички опис рада, ФО : (поглавља/страна/ цитата/табела/слика/графика/прилога)	9 поглавља, 149 стране, 81 цитата, 15 табела, 74 слика, 1 прилог
Научна област, НО :	Електротехничко и рачунарско инжењерство
Научна дисциплина, НД :	Аутоматика и управљање системима
Предметна одредница/Кључне речи, ПО :	Линеарни регулатори, ПИД регулатори, ФПИД регулатори, ДОПИД регулатори, робусност, оптимизација, клизни режим
УДК	
Чува се, ЧУ :	Библиотека Факултета техничких наука, Универзитета у Новом Саду, Нови Сад
Важна напомена, ВН :	
Извод, ИЗ :	Рад је посвећен робусном управљању системима чији је линеарни регулатор и/или динамика нецелог реда, као и управљачким проблемима где регулатор нецелог реда у себи поседује и линеарну и нелинеарну динамику, а који управља процесима чија динамика може бити и линеарна и нелинеарна.
Датум прихватања теме, ДП :	19.07.2013.
Датум одбране, ДО :	14.07.2015.
Чланови комисије, КО :	Председник: проф. др Бранко Ковачевић
	Члан: проф. др Душан Петровачки
	Члан: др Милан Рапаић, доцент
	Члан: проф. др Филип Кулић
	Члан: др Томислав Шекара, ванр. проф.
	Члан, ментор: проф. др Зоран Јеличић
	Потпис ментора



UNIVERSITY OF NOVI SAD • FACULTY OF TECHNICAL SCIENCES
21000 NOVI SAD, Trg Dositeja Obradovića 6

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, ANO :	
Identification number, INO :	
Document type, DT :	
Type of record, TR :	
Contents code, CC :	
Author, AU :	Boris Jakovljević
Mentor, MN :	Zoran Jeličić, PhD, full professor
Title, TI :	Optimal and suboptimal parameter tuning of robust, linear controllers of noninteger order
Language of text, LT :	Serbian
Language of abstract, LA :	Serbian
Country of publication, CP :	Serbia
Locality of publication, LP :	
Publication year, PY :	2015.
Publisher, PB :	
Publication place, PP :	
Physical description, PD : <small>(chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)</small>	9 chapters, 149 pages, 81 references, 15 tables, 74 pictures, 1 appendix
Scientific field, SF :	Electrical and computing engineering
Scientific discipline, SD :	Automation and Control Systems
Subject/Key words, S/KW :	Linear controllers, PID controllers, FPID controllers, DOPID controllers, robustness, optimization, sliding mode control
UC	
Holding data, HD :	Library of Faculty of Technical Sciences, University of Novi Sad, Novi Sad
Note, N :	
Abstract, AB :	The thesis is dedicated to robust control systems problems with linear controllers and/or process dynamics of noninteger order, as well as control issues with combination of linear and nonlinear controllers of noninteger order that control either linear or nonlinear systems.
Accepted by the Scientific Board on, ASB :	19.07.2013.
Defended on, DE :	14.07.2015.
Defended Board, DB :	
President:	Branko Kovačević, PhD, full professor
Member:	Dušan Petrovački, PhD, professor Emeritus
Member:	Milan Rapaić, PhD, assistant professor
Member:	Filip Kulić, PhD, full professor
Member:	Tomislav Šekara, PhD, associate professor
Member, Mentor	Zoran Jeličić, PhD, full professor
	Mentor's sign

*Mojoj majci, ocu, bratu, dedi, babi, mojoj devojci,
divnim prijateljima i kolegama*

Sadržaj

Sadržaj	i
1 Uvod	1
2 Frakcioni račun - osnove	6
2.1 Grinvald-Letnikovljevi frakcioni izvod i integral	7
2.2 Riman-Ljuvilov frakcioni integral	8
2.3 Riman-Ljuvilov frakcioni izvod	10
2.4 Kaputov frakcioni izvod	13
3 Primeri realnih frakcionih sistema	16
3.1 Beskonačni poluprovodnik RC tipa	16
3.2 Model provođenja toplote kroz poluprovodnički element . .	19
3.3 Frakcioni modeli u farmakokinetici	20
4 Tipovi regulatora	22
4.1 PID regulator	24
4.2 Frakcioni PID regulator (FPID)	28
4.3 PID regulator distribuiranog reda (DOPID)	32
5 Zahtevi pri projektovanju regulatora	38
5.1 Ocena kvaliteta regulacije	41
5.2 Kriterijumi optimalnosti	49
5.3 Formulacija optimizacionog problema	55
6 Optimizacioni problemi	56
6.1 Optimizacioni problem 1 (DOPID)	58
6.2 Optimizacioni problem 2 (DOPID)	59
6.3 Optimizacioni problem 3 (DOPID)	59
6.4 Optimizacioni problem 4 (DOPID)	60

6.5	Optimizacioni problem 5 (DOPID)	61
6.6	Optimizacioni problem 6 (DOPID)	61
6.7	Optimizacioni problem 7 (DOPID)	62
6.8	Optimizacioni problem 8 (DOPID)	63
6.9	Optimizacioni problem 9 (DOPID)	63
6.10	Optimizacioni problem 10 (FPID)	64
6.11	Optimizacioni problem 11 (FPID)	65
7	Rezultati	67
7.1	Rezultati optimizacionog problema 1	67
7.2	Rezultati optimizacionog problema 2	77
7.3	Rezultati optimizacionog problema 3	81
7.4	Rezultati optimizacionog problema 4	83
7.5	Rezultati optimizacionog problema 5	86
7.6	Rezultati optimizacionog problema 6	89
7.7	Rezultati optimizacionog problema 7	91
7.8	Rezultati optimizacionog problema 8	95
7.9	Rezultati optimizacionog problema 9	98
7.10	Rezultati optimizacionog problema 10	101
7.11	Rezultati optimizacionog problema 11	106
8	Upravljanje procesima sa dinamikom necelog reda po- moću kliznog režima	117
8.1	Osnove kliznog režima	118
8.2	Frakcioni regulator klizog režima za nelinearne sisteme ne- celog reda sa jednim ulazom	123
9	Zaključak	135
A	Osnovni matematički pojmovi i definicije	138
A.1	Integralne transformacije i neke specijalne funkcije	138
	Bibliografija	142

GLAVA 1

Uvod

Ova disertacija predstavlja rezultat višegodišnjeg naučno-istraživačkog rada autora na problemima optimalnog upravljanja, nelinearnog upravljanja, frakcionog računa i razvoju upravljačkih algoritama zasnovanih na primeni frakcionog računa u teoriji sistema [1], [2], [3]. Prema dostupnoj literaturi, istraživanja obuhvaćena ovom tezom i predloženi algoritmi upravljanja predstavljaju originalni doprinos teoriji upravljanja sistemima sa necehom (frakcionom) dinamikom. Ključni rezultati disertacije su naučno-stručno verifikovani i publikovani u međunarodnim časopisima [3], [4], predstavljeni na međunarodnim konferencijama [1], [2], [5] i na domaćim naučnim skupovima [6], [7]. Neki od predloženih algoritama i postupaka numeričke optimizacije, originalno formulisani u duhu teorije frakcionog računa, po prvi put se sreću u ovoj tezi.

Po svojoj strukturi rad je podeljen u dve celine. U okviru prve celine razmatrano je linearno upravljanje sistemima čiji je linearni regulator i/ili dinamika necelog reda, dok je drugi deo rada posvećen nelinearnom upravljanju sistemima necelog reda čija dinamika može biti i linearna i nelinearna. U okviru prvog dela disertacije prikazano je jedno moguće uopštenje linearnih regulatora, koje po svojoj strukturi predstavlja regulator distribuiranog reda, odnosno regulator koji pod znakom integrala obuhvata sve diferencijalno-integralne operacije reda od -1 do 1. Zbog toga što ovaj regulator u svojim graničnim slučajevima predstavlja klasičan PID [8], [9], [10] nazvali smo ovo uopštenje distribuiranim PID regulatorom (DOPID), mada je sama stuktura znatno složenija. Ideja o razvoju regulatora sa necelim izvodima i integratorima koji po svojoj strukturi liče na PID regulator, nije nova. Prvi ovakav regulator predložio je Podlubny u radovima 1994. godine u Slovačkoj akademiji nauka [11],

te na konferenciji 1997. godine u [12] i u priznatom međunarodnom časopisu [13] 1999. godine. Sledi niz drugih radova koji se bave samo podešavanjem parametara [14], [15] i praktičnim značajem ovakvog profila upravljanja [16], [17] bez značajnih izmena u samoj strukturi upravljačkog algoritma. Otprilike u isto vreme kada i autor, Žou (*Zhou*) je sa kolegama [18] predložio uopšteniju distribuiranu strukturu PI regulatora, bez detaljne studije o optimalnom izboru parametara novouvedenog regulatora. Interesantno je primetiti da su osnovnu ideju za distribuirano uopštenje konvencionalnog PI i PID regulatora Žou (*Zhou*) i autor respektivno našli u radovima iz frakcionih oscilatora profesora Atanackovića [19]. Nakon zatvaranja povratne sprege matematička struktura dejstva PID regulatora uporediva je sa oscilatorom, što široko gledano može dobro da objasni veliki broj osobina ovog zakona upravljanja.

Pored nove generalisane distribuirane strukture u okviru disertacije predložena je i implementaciona šema ovog, ni malo jednostavnog, zakona upravljanja [1]. Posebna pažnja je posvećena optimalnom izboru parametara DOPID regulatora i to iz perspektive kriterijuma optimalnosti i ograničenja koji treba da obezbede željeni kvalitet regulacije, pre svega robusnost regulatora na poremećaje i varijacije modela. Značajna je i sama numerička studija problema i transformacija optimizacionog problema iz dinamičkog u statički prostor, odnosno transformacija iz vremenskog u frekvencijski domen. Ovi rezultati su prema najboljim saznanjima autora originalni i naučno verifikovani [1], [6], [7]. U postavljanju kriterijuma optimalnosti i ograničenja, autor je imao uzor u prethodnim studijama [20], [21], [22], [23], [24], međutim treba napomenuti da frakciona struktura problema, odnosno postojanje necelih diferencijatora nužno nameće modifikacije optimizacionih problema, koje su po prvi put predstavljene u ovom radu. Namera autora bila je da na sveobuhvatan način predstavi optimizacione probleme, koji su karakteristični za sisteme sa necelom dinamikom i da povuče paralelu sa metodama za podešavanje parametara klasičnog PID regulatora, koje su već dobro poznate u inženjerskoj praksi. Predloženi algoritmi i optimizacioni problemi su verifikovani kroz niz test primera (funkcija prenosa), ali i na većem broju realnih problema, čija je dinamika obrađena u posebnom poglavlju.

Radovi na ovim istraživanjima su podržani i kroz projekat Ministarstva prosvete, nauke i tehnološkog razvoja Vlade Republike Srbije pod nazivom „Inteligentni nadzorno-upravljački sistem za rano otkrivanje i eliminaciju neželjenih stanja i promena na uređajima, opremi i procesima procesne industrije“, ugovor broj TR32018.

Drugi deo rada je posvećen nelinearnom upravljanju sistemom sa necelom dinamikom. Konkretno, razmatrano je upravljanje uz oslonac na teoriju

kliznih režima [25], [26], [27], [28] kada se sistem modeluje diferencijalnim jednačinama necelog reda. Na neki način predloženo upravljanje predstavlja proširenje studije iz prvog dela rada, jer se u upravljačkoj petlji nalaze linearni i nelinearni PI regulator u svom izvornom obliku. Ovakva studija upravljanja sistemima necelog reda je u potpunosti originalna i naučno verifikovana [3]. Sam problem je izložen u nekim delovima možda i previše detaljno, u želji da se ova teorija nelinearnog upravljanja na pravi način prikaže i da prelaz na primenu u frakcionim sistemima bude intuitivan i prirodan. Ovaj deo rada predstavlja celinu, sa perspektivom razvoja pravila i algoritama, koji bi pojednostavili upotrebu u inženjerskoj praksi po uzoru na [29].

Laboratorijska istraživanja na ovom problemu su sprovedena u laboratoriji Centra za inteligentno i napredno upravljanje Fakulteta tehničkih nauka u Novom Sadu i na Departmanu za inženjering u elektrici i elektronici (*Dipartimento di Ingegneria Elettrica ed Elettronica (DIEE)*) u Kaljariju, Italija u okviru projekta IPA CEFAIC i projekta bilateralne saradnje Srbije i Italije - Novi robusni metodi otkrivanja grešaka u radu dinamičkih sistema sa neodređenim modelim sa promenama u proizvodnji i skladištenju energije iz obnovljivih izvora.

U uvodnom delu disertacije (Poglavlje 1) jasno su prikazani osnovni ciljevi istraživanja.

U drugom poglavlju ove teze date su osnove frakcionog računa potrebne za razumevanje koncepta diferencijatora i integratora necelog reda koji predstavljaju gradivne elemente razmatranih robusnih regulatora, kako linearnih tako i nelinearnih. Prikazane su definicije, teoreme i osobine potrebne za dublje razumevanje svih fenomena karakterističnih za dinamičke upravljačke sisteme necelog reda. Detaljno su razmatrani pristupi bazirani na Grinvald-Letnjikovoj, Riman-Ljuvilovoj i Kaputovoj definiciji frakcionih diferencijatora, kao i odgovarajuće osobine u svakom od ovih pristupa. Naglašen je značaj početnih uslova na probleme koji obuhvataju diferencijatore necelog reda u duhu teorije linearnih sistema.

U okviru poglavlja 3 dat je kratak pregled realnih frakcionih procesa i matematičkih modela istih. Počelo se od specifičnih uopštenja poznatih iz teorije kola, preko parcijalnih diferencijalnih jednačina provođenja toplote, do sistema sa memorijom u oblasti farmakokinetike. Ovaj pregled pokazuje ne samo značaj sistema čija se dinamika opisuje diferencijalnim jednačinama necelog reda, već i kontinuitet u istraživanjima autora.

U poglavlju 4 dat je detaljan prikaz linearnih regulatora, koji su predmet istraživanja u okviru ove teze. Detaljno i veoma pregledno data je struktura linearnih regulatora, počevši od klasičnog PID regulatora, zatim frakcionog

PID regulatora (FPID) i regulatora distribuiranog reda (DOPID), koji se u specijalnim slučajevima može svesti na klasični ili frakcioni PID. Struktura i izvedba distribuiranog regulatora predstavlja originalni doprinos autora, koji prema našim najboljim saznanjima nije razmatran u dostupnoj literaturi. Posebno interesantno predstavljeno je uopštavanje linearnih regulatora po složenosti i broju stepeni slobode, odnosno parametara za njihovo podešavanje. Sa stanovišta praktične implementacije od značaja su dve strukture DOPID-a, jedna sa ekvidistantnim frakcionim koracima, a druga proizvoljnije strukture sa širom slobodom u izboru reda frakcionih diferintegratora. Originalno rešenje za niskopropusni filter, koji je izveden iz same forme DOPID regulatora, upotpunilo je uopštavanje klasičnog PID-a i sigurno predstavlja vredan i verifikovan naučno-stručni rezultat ove teze.

U poglavlju 5 dat je sveobuhvatan pregled kvantitativnih i kvalitativnih kriterijuma za ocenu ponašanja robusnih sistema automatskog upravljanja. Detaljno je analiziran uticaj poremećaja i neodređenosti modela na kvalitet regulacije. Svi pokazatelji, bilo oni dati intuitivno (opisno) ili matematički rigidno, prevedeni su u kriterijume optimalnosti i/ili ograničenja, čime je omogućena optimizaciona studija problema, tačnije, izračunavanje optimalnog, odnosno suboptimalnog upravljanja u slučaju kada je profil upravljačkog signala unapred poznat. Treba istaći da jednoznačno preslikavanje kriterijuma i ograničenja karakterističnih za „obične“ linearne sisteme u odgovarajuće kriterijume i ograničenja karakteristične za frakcione linearne sisteme nije uvek moguće, te je potrebno izvršiti njihovu kvantitativnu modifikaciju. Ove modifikacije, prema najboljim saznanjima autora, nisu do sada obrađivane u literaturi i predstavljaju doprinos autora ovoj oblasti teorije sistema upravljanja. Posebno je važan deo u radu u kome se problem iz sfere dinamičke optimizacije prevodi u statičku, transformacijom iz vremenskog u frekvencijski domen.

U poglavlju 6 dat je skup sistema koji se najčešće koriste za testiranje linearnih regulatora celog i necelog reda. Ovaj test skup obogaćen je sistemima opisanim u poglavlju 3 ove teze. U okviru ovog poglavlja jednoznačno je definisano 11 optimizacionih problema, koji proizilaze iz prethodnog poglavlja. Moramo napomenuti da ovako pregledan i širok pristup dat u duhu teorije optimalnog upravljanja nismo sretali u literaturi.

U poglavlju 7 dati su rezultati svih optimizacionih problema definisanih u prethodnom poglavlju. Numerička studija je veoma detaljna, a rezultati su predstavljeni kroz tabele i grafikone na osnovu kojih je analiziran kvalitet dobijenog odziva i upravljačkog signala za optimalni regulator za određeni problem i određeni proces. Interesantno je primetiti da dobijeni rezultati u izboru optimalnih parametara regulatora često konvergiraju konvencionalnom PID regu-

latoru, posebno kod sistema kod kojih postoji složena dinamika celog reda, a da se kvalitet regulacije frakcionih sistema češće kvalitativno unapređuje regulatorima necelog reda. Ova činjenica grubo ukazuje da je poništavanje dinamike imanentna karakteristika ovako projektovanih optimalnih i suboptimalnih regulatora. Sa druge strane, frakcioni regulator u svojoj uopštenoj DOPID strukturi dozvoljava postizanje kompromisa između potiskivanja poremećaja i robusnosti sistema, odnosno da se složeni kriterijumi optimalnosti, koji sadrže suprotstavljene ocene kvaliteta, bolje zadovoljavaju primenom regulatora sa više stepeni slobode u formi DOPID-a. Ovo takođe predstavlja originalan zaključak rada, koji se nije mogao naći u dostupnoj literaturi.

U poglavlju 8 projektovana je jedna klasa nelinearnih regulatora, u duhu teorije kliznih režima, a koja se pokazala kao uspešna u problemima upravljanja sistemima beskonačne dinamike. Predložena je originalna struktura regulatora, koja u sebi sadrži paralelnu vezu klasičnog linearnog PI regulatora i nelinearnog PI regulatora. Ova studija predstavlja svojevrsno uopštenje pristupa iz prethodnih poglavlja ovog rada na nelinearno suboptimalno upravljanje klasom sistema sa necelom dinamikom. Pristup i rezultati iz ovog poglavlja predstavljaju originalni i verifikovani doprinos autora teoriji upravljanja sistemima necelog reda.

Zaključak je dat u poglavlju 9. Rezimirana su osnovna dostignuća i naglašeni su ključni rezultati istraživanja.

Frakcioni račun - osnove

Frakcioni račun (*fractional calculus*) predstavlja klasičnu oblast matematike koja je posvećena diferenciranju i integraciji necelog reda. U najširem smislu pod operatorima necelog reda se podrazumevaju operatori diferenciranja i integracije koji mogu biti realni, pa čak i kompleksni. Koreni frakcionog računa se protežu sve do početaka klasičnog diferencijalnog računa, dok se kao trenutak nastanka frakcionog računa vodi veoma poznata prepiska između G. V. Lajbnica i Markiza Lopitala iz 1695. godine, gde se razmatralo značenje simbola $\frac{(d)^{1/2}}{(dt)^{1/2}}$ [30]. Međutim, frakcioni račun je ušao u nešto širu primenu tek u poslednjih nekoliko decenija. Zaslužnim za to se između ostalih svakako mogu smatrati Oldham i Španijer koji su 1974. godine objavili [31], zatim Miler i Ros sa monografijom [32], te Podlubni [33] i Mikele Kaputo sa [34]

U svakodnevnom govoru se podrazumeva da se pod integralima i izvodima podrazumevaju samo oni klasični, celobrojni izvodi prvog, drugog i viših redova, te jednostruki, dvostruki i višestruki integrali. Međutim frakcioni račun uvodi pojmove ovih istih operatora ali kada njihovi redovi nisu celobrojni, npr. 0.5-ti izvod. Operatori frakcionog diferenciranja i integracije se mogu ukomponovati u frakcione diferencijalne jednačine pomoću kojih se mogu modelovati sistemi koji nisu mogli biti uspešno modelovani klasičnim diferencijalnim računom.¹

U okviru ovog poglavlja će biti dat osvrt na neke od osnovnih elemenata i pristupa u radu sa frakcionim računom i frakcionim operatorima. Na početku će biti definisane neke od funkcija neophodnih za rad sa frakcionim

¹Ovu činjenicu prvi put samo napominjemo. Posebna celina će biti posvećena procesima koji se uspešno modeluju sistemima necelog reda.

operatorima, te će biti dat pregled nekih osobina frakcionih operatora. Biće razmatrani različiti pristupi definisanju frakcionih operatora, ali svakako samo oni najzastupljeniji u literaturi poput Riman - Ljuvilovog, Grinvald - Letnjikovog i Kaputovog. S obzirom na to da su u svim primerima koje ćemo razmotriti svi početni uslovi jednaki nuli, što je obično i pretpostavka u teoriji linearnih sistema automatskog upravljanja, definicije Riman-Ljuvila i Kaputa su od centralnog značaja u ovom radu i njih ćemo koristiti u najvećem broju primera koji slede.

Takođe će biti date neke transformacije osnovnih operatora integracije i diferenciranja, kao i neke njihove osobine u kompleksnom domenu (S-domenu).

2.1 Grinvald-Letnikovljev frakcioni izvod i integral

Do definicije Grinvald-Letnikovih operatora dolazi se kroz pristup koji omogućava unifikaciju n -tog izvoda i n -strukog integrala. Definicija klasičnog izvoda

$$f'(t) = \frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t - \Delta t)}{\Delta t}, \quad (2.1)$$

gde je f funkcija čiji se izvod traži, a t nezavisna promenljiva, poslužila je kao inspiracija za definiciju Grinvald-Letnikovljevog frakcionog izvoda. Da bismo ovo pokazali, definišimo drugi klasični izvod

$$f''(t) = \frac{d^2 f}{dt^2} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t - \Delta t) + f(t - 2\Delta t)}{(\Delta t)^2}, \quad (2.2)$$

te i treći klasični izvod

$$f'''(t) = \frac{d^3 f}{dt^3} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t) - 3f(t - \Delta t) + 3f(t - 2\Delta t) - f(t - 3\Delta t)}{(\Delta t)^3}, \quad (2.3)$$

da bismo došli i do n -tog klasičnog izvoda

$$f^n(t) = \frac{d^n f}{dt^n} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} \frac{f(t - \Delta t(n - i))}{(\Delta t)^n}, \quad (2.4)$$

gde $\binom{n}{i}$ predstavlja binomni koeficijent definisan sa

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{i} = \frac{\Gamma(n+1)}{i! \Gamma(n-i+1)}. \quad (2.5)$$

Funkcija $\Gamma(\cdot)$ je definisana u dodatku A jednačinom (A.7). Sledeći intuitivnu logiku lako je ustanoviti odakle inspiracija za definiciju Grinvald-Letnjikovljevog diferintegrala u formi

$${}^GL_0 D_t^\alpha f = \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ m\Delta t = t}} \frac{1}{\Delta t^\alpha} \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{\alpha}{i} f(t - i\Delta t). \quad (2.6)$$

gde je GL oznaka da je u pitanju Grinvald-Letnjikovljev operator, D predstavlja operator izvoda, α predstavlja red diferenciranja, f je funkcija koja se diferencira, dok donji levi i desni subskripti predstavljaju početni i krajnji terminal, respektivno. Ako je α pozitivan broj tada prethodni izraz predstavlja frakcioni izvod, dok za negativne vrednosti α prethodni izraz odgovara frakcionom integralu. Grinvald-Letnjikov pristup se često primenjuje pri numeričkoj interpretaciji frakcionih operatora i numeričkom rešavanju frakcionih diferencijalnih jednačina.

2.2 Riman-Ljuvilov frakcioni integral

Polazeći od Košijeve formule za izračunavanje n -tostrukog integrala funkcije f u granicama od 0 do t , tj.

$$\begin{aligned} {}_0 I_t^n f &= \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n dt_{n-1} \dots dt_1 \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t f(\tau) (t-\tau)^{n-1} d\tau, \end{aligned} \quad (2.7)$$

gde $(n-1)!$ označava *faktorijel* prirodnog broja n

$$(n-1)! = (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1. \quad (2.8)$$

Možemo definisati Riman-Ljuvilov frakcioni integral ${}^{RL}_0 I_t^\alpha f$ pomoću formule (2.7) tako što, umesto na ceo broj n , primenjujemo istu formulu na neki proizvoljan realan broj α

$${}^{RL}_0 I_t^\alpha f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t f(\tau) (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau. \quad (2.9)$$

Faktorijel se generalizuje pomoću Ojlerove gama-funkcije (A.7). Pošto se za sve dalje analize koriste operatori u formi ${}_0 I_t^\alpha f$ i ${}_0 D_t^\alpha f$, bez gubljenja značenja

obeležavaćemo ih i sa $I^\alpha f$ i $D^\alpha f$. Napominjemo da se, kada govorimo o integralima necelog reda, podrazumeva da funkcije na koje se oni primenjuju pripadaju Lebegovom prostoru \mathcal{L}_p za neko $p \in [1, \infty]$ [30]. Takođe, u daljnjoj analizi biće posmatrane samo kauzalne funkcije, tj. one funkcije kod kojih je funkcija jednaka nuli ako je argument manji od nule.

Frakcioni integral (2.9) se može posmatrati i kao konvolucija funkcije koja se integriše i kernela, tj. jezgra k_α definisanog kao

$$k_\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}. \quad (2.10)$$

Važno je napomenuti da se obe ove funkcije razmatrane u slučaju Riman - Ljuvilovog integrala smatraju kauzalnim. Ovakav način interpretacije frakcionog Riman-Ljuvilovog integrala pogodan je iz perspektive njegovog fizičkog razumevanja, tj. može se izvući zaključak da se različitim vrednostima funkcije u trenutku τ dodeljuje različit značaj koji je određen vrednošću kernela k_α u trenutku $t - \tau$. Prethodna činjenica nam govori da se na osnovu kernela funkcije može zaključiti kolika istorija funkcije će biti uzeta u obzir. Za vrednosti $\alpha \in (0, 1)$ kernel funkcija se ponaša kao opadajuća funkcija, tako da je očigledno da u tom slučaju veći značaj na trenutnu vrednost frakcionog integrala imaju skorije vrednosti funkcije, dok je u slučaju kad je $\alpha > 1$ slučaj obrnut. Od interesa za tematiku ove doktorske disertacije su neke definicije i važnije osobine Riman-Ljuvilovog frakcionog integrala koje će biti navedene u nastavku.

Definicija 2.1.

$${}^{RL}I_t^0 f = f(t) \quad (2.11)$$

Pored ove definicije navešćemo i neke osnovne osobine Riman - Ljuvilovog frakcionog integrala. Osobine navodimo bez dokaza. Dokazi ovih osobina mogu se pronaći u [30], [35], [33].

1. Za proizvoljne funkcije f i g i proizvoljne realne konstante ϕ i γ važi

$${}^{RL}I_t^\alpha (\phi f + \gamma g) = \phi {}^{RL}I_t^\alpha f + \gamma {}^{RL}I_t^\alpha g. \quad (2.12)$$

2. Frakcioni integral zadovoljava osobinu polugrupe

$${}^{RL}I_t^\alpha {}^{RL}I_t^\beta f = {}^{RL}I_t^\beta {}^{RL}I_t^\alpha f = {}^{RL}I_t^{\alpha+\beta} f. \quad (2.13)$$

Neka je $F(s)$ Laplasova transformacija funkcije $f(t)$ u formi (??)

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad (2.14)$$

gde je s kompleksna promenljiva, tj. Laplasova promenljiva. $F(s)$ je definisana za one vrednosti s za koje je funkcija $|f(t)e^{-st}|$ integrabilna nad skupom pozitivnih realnih brojeva [30].

Može se pokazati da je operator frakcione integracije u kompleksnom domenu $s^{-\alpha}$, odnosno da je

$$\mathcal{L}\{ {}_0^{RL}I_t^\alpha f \} = \frac{1}{s^\alpha} F(s). \quad (2.15)$$

Osobina (2.15) je jedna od centralnih u studiji problema u okviru ove teze. U graničnim slučajevima, prethodni izraz se svodi na celobrojni integral. Za kasniju analizu ponašanja frakcionih sistema važno je primetiti da je amplitudska karakteristika integratora reda α

$$|(j\omega)^{-\alpha}|_{dB} = -20\alpha \log(\omega) \quad [dB]. \quad (2.16)$$

Sa druge strane, fazna karakteristika integratora reda α je

$$\arg\{(j\omega)^{-\alpha}\} = -\alpha \frac{\pi}{2} \quad [rad]. \quad (2.17)$$

Ove osobine logično slede iz (2.15).

2.3 Riman-Ljuvilov frakcioni izvod

Za celobrojne diferintegratore važi [35]

$$D^n f = I^{m-n} D^m f, \quad (2.18)$$

gde je D operator diferenciranja, a I operator integracije. Ako ovu činjenicu primenimo pod pretpostavkom da je neko α proizvoljan realan broj veći od nula i ako je $n = \lceil \alpha \rceil$ prvi ceo broj veći od α , Riman - Ljuvilov izvod reda α možemo definisati kao

$${}_0^{RL}D_t^\alpha f = \frac{d^n}{dt^n} I_t^{n-\alpha} f. \quad (2.19)$$

Prethodni izraz možemo zapisati i kao

$${}_0^{RL}D_t^\alpha f = D^n {}_0I_t^{n-\alpha} f = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{-n+\alpha+1}} d\tau. \quad (2.20)$$

Ukoliko posmatramo interval $0 < \alpha < 1$, tada se prethodna definicija svodi na

$${}^{RL}D_t^\alpha f = \frac{d}{dt} {}_0I_t^{1-\alpha} f = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau. \quad (2.21)$$

Slično kao i u prethodnom poglavlju, slede neke od važnijih osobina Riman-Ljuvilovog frakcionog izvoda

1. ${}^{RL}D_t^0 f = f$,
2. Za proizvoljne funkcije f i g i proizvoljne realne konstante ϕ i γ važi

$${}^{RL}D_t^\alpha (\phi f + \gamma g) = \phi {}^{RL}D_t^\alpha f + \gamma {}^{RL}D_t^\alpha g. \quad (2.22)$$

3. Za svako $n > \alpha$ i $n \in \mathbf{Z}$ važi

$${}^{RL}D_t^n {}_0I_t^{n-\alpha} f = {}^{RL}D_t^\alpha f. \quad (2.23)$$

na osnovu osobine polugrupe frakcionog integratora i činjenice da je celobrojno diferenciranje leva inverzna funkcija celobrojnog integraljenja.

4. Frakcioni izvod ne zadovoljava osobinu polugrupe u istom smislu kao frakcioni integral

$${}^{RL}D_t^\alpha {}^{RL}D_t^\beta f = {}^{RL}D_t^{\alpha+\beta} f - \sum_{j=1}^{n(\beta)} \frac{f^{(n(\beta)-j)}(0)}{\Gamma(1-j-\alpha)} t^{-j-\alpha}, \quad (2.24)$$

gde je

$$f_{n-\alpha}^{(n-j)}(t) = \frac{d^{n-j}}{dt^{n-j}} {}^{RL}I_t^{n-\alpha} f. \quad (2.25)$$

U ovom slučaju važi

$${}^{RL}D_t^\alpha {}^{RL}D_t^\beta f \neq {}^{RL}D_t^\beta {}^{RL}D_t^\alpha f, \quad (2.26)$$

$${}^{RL}D_t^\alpha {}^{RL}D_t^\beta f \neq {}^{RL}D_t^{\alpha+\beta} f, \quad (2.27)$$

te nije zadovoljeno svojstvo polugrupe. Međutim, ako znamo da postoji funkcija $g \in L_1[a, b]$ takva da važi $f = {}^{RL}I_t^{(\alpha+\beta)} g$, onda važi

$${}^{RL}D_t^\alpha {}^{RL}D_t^\beta f = {}^{RL}D_t^\beta {}^{RL}D_t^\alpha f, \quad (2.28)$$

$${}^{RL}D_t^\alpha {}^{RL}D_t^\beta f = {}^{RL}D_t^{\alpha+\beta} f, \quad (2.29)$$

Znači, svojstvo polugrupe u slučaju frakcionog izvoda strožije je od svojstva polugrupe frakcionog integrala.

5. Slično kao kod celobrojnih izvoda, Riman - Ljuvilov frakcioni izvod je levi inverzni operator za Riman - Ljuvilov frakcioni integral istog stepena

$${}^RL D_t^\alpha {}^RL I_t^\alpha f = {}^RL I_t^0 f = f(t), \quad (2.30)$$

dok obrnuto nije slučaj.

Treba primetiti da za razliku od celobrojnih izvoda koji predstavljaju operatore koji opisuju ponašanje samo u okolini tačke u kojoj se izvod definiše, frakcioni izvodi uzimaju u obzir celu istoriju funkcije.

Analogno sa celobrojnim diferenciranjem putem Lajbnicovog pravila može se izračunati izvod proizvoda dve funkcije [33]

$${}^RL D_t^\alpha [f(t)g(t)] = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha}{j} \frac{d^j}{dt^j} f(t) {}^RL D_t^{\alpha-j} g(t). \quad (2.31)$$

2.3.1 Pristup rešavanju frakcionih diferencijalnih jednačina

Pri rešavanju običnih diferencijalnih jednačina ¹ često se pribegava transformaciji iz vremenskog u kompleksni domen, iz prostog razloga što se u kompleksnom domenu rešavanje diferencijalnih jednačina iz vremenskog domena svodi na rešavanje algebarskih jednačina. Takođe, važno je napomenuti da se često frakcioni izvodi i integrali jednim imenom nazivaju frakcionim difintegralima i zapisuju se u formi ${}^RL D_t^\alpha$, gde se frakcionim integratorima smatraju oni operatori kod kojih je $\alpha < 0$, a frakcionim diferencijatorima oni kod kojih je $\alpha > 0$.

Ako uzmemo u obzir da je $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, tada je Laplasova transformacija α -tog diferintegrala

$$\mathcal{L}\{{}^RL D_t^\alpha f\} = s^\alpha F(s) - \sum_{j=0}^{n(\alpha)-1} s^j \left(\lim_{t \rightarrow 0} {}^RL D_t^{\alpha-j-1} f \right). \quad (2.32)$$

Kada $\alpha \in (0, 1)$, prethodni izraz postaje

$$\mathcal{L}\{{}^RL D_t^\alpha f\} = s^\alpha F(s) - ({}^RL D_t^{\alpha-1} f)|_{t \rightarrow 0}. \quad (2.33)$$

¹Od sada pa nadalje obične diferencijalne jednačine su linearne, sa konstantnim koeficijentima sa celobrojnim izvodima

Za konstante koje se javljaju sa desne strane u prethodnim jednačinama možemo reći da predstavljaju početne uslove koje moramo specificirati. Ovi početni uslovi nemaju jasno fizičko tumačenje kao kod običnih diferencijalnih jednačina. Ovo predstavlja jednu od najvećih mana Riman - Ljuvilovog pristupa frakcionom računu [33]. Zbog toga se često u slučaju da je potrebno rešavati neki fizički problem prelazi na Kaputov pristup, jer se u tom pristupu početni uslovi mogu jasno fizički interpretirati. Više o analizi početnih uslova kod različitih frakcionih operatora i nešto drugačijem pristupu za njihovu analizu može se videti u [36]. Svakako, ukoliko pretpostavimo da su početni uslovi jednaki nuli, izraz (2.33) svodi se na

$$\mathcal{L}\{ {}_0^{RL}D_t^\alpha f \} = s^\alpha F(s). \quad (2.34)$$

2.4 Kaputov frakcioni izvod

Iako je Riman - Ljuvilov pristup sa matematičke strane bio adekvatan, problem se javljao pri modelovanju stvarnih fizičkih sistema frakcionim jednačinama, usled nemogućnosti fizičke interpretacije početnih uslova kod Riman - Ljuvilovog pristupa. Ovo je bilo vrlo očigledno u problemima modelovanja viskoelastičnih pojava [37], kao i u klasičnoj mehanici [38].

Kaputov izvod je definisan prvi put šezdesetih godina prošlog veka [39], [40]. Za razliku od Riman - Ljuvilovog izvoda gde se prvo primenjuje frakcioni izvod, pa frakcioni integral, kod Kaputov-og izvoda ove dve operacije menjaju mesta, pa se Kaputov izvod može definisati kao

$${}_0^C D_t^\alpha f = {}_0 I_t^{n-\alpha} D^n f = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \left(\frac{d}{d\tau}\right)^n \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{-n+\alpha+1}} d\tau, \quad (2.35)$$

odnosno

$${}_0^C D_t^\alpha f = {}_0 I_t^{n-\alpha} \frac{d^n}{dt^n} f, \quad (2.36)$$

dok u slučaju ako posmatramo interval $\alpha \in (0, 1)$, Kaputov izvod definišemo kao

$${}_0^C D_t^\alpha f = {}_0 I_t^{1-\alpha} \frac{d}{dt} f = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\dot{f}(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau. \quad (2.37)$$

Naravno, u svim prethodnim izrazima $n = [\alpha]$, tj. n je prvi ceo broj veći od α .

Ukoliko $\alpha \rightarrow n$, Kaputov izvod postaje konvencionalni n -ti celobrojni izvod funkcije $f(t)$, pod uslovom da je $n - 1 < \alpha < n$ i funkcija $f(t)$ ima $n + 1$

neprekidan i ograničen izvod na intervalu $[0, T]$ za svako $T > 0$. Onda možemo tvrditi

$${}^C D_t^\alpha f = f^{(n)}(t). \quad (2.38)$$

Kaputov izvod se može definisati preko Riman-Ljuvilovog izvoda [30]

$${}^C D_t^\alpha f = {}_0 D_t^\alpha \left[f(t) - \sum_{j=0}^{n(\alpha)-1} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} t^j \right], \quad (2.39)$$

odnosno

$${}^C D_t^\alpha f = {}_0 D_t^\alpha f(t) - \sum_{j=0}^{n(\alpha)-1} \frac{f^{(j)}(0)}{\Gamma(j - \alpha + 1)} t^{j-\alpha}. \quad (2.40)$$

U nastavku ćemo dati neke od osobina Kaputovog frackionog izvoda

1. Kaputov izvod konstante je 0, dok je Riman - Ljuvilov izvod ${}_0 D_t^\alpha C = \frac{C t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$,
2. Ako je f neprekidna i $\alpha > 0$ važi

$${}^C D_t^\alpha {}_0 I_t^\alpha f = f. \quad (2.41)$$

3. Iako Kaputov frakcioni izvod ne zadovoljava svojstvo polugrupe, za svako celobrojno n važi

$${}^C D_t^\alpha \frac{d^n}{dt^n} f = {}^C D_t^{\alpha+n} f. \quad (2.42)$$

4. Važi osobina linearnosti, tj. za proizvoljne funkcije f i g i proizvoljne realne konstante ϕ i γ važi

$${}^C D_t^\alpha (\phi f + \gamma g) = \phi {}^C D_t^\alpha f + \gamma {}^C D_t^\alpha g. \quad (2.43)$$

Laplasova transformacija Kaputovog izvoda je

$$\mathcal{L}\{{}^C D_t^\alpha f\} = s^\alpha F(s) - \sum_{j=0}^{n(\alpha)-1} s^{\alpha-j-1} f^{(j)}(0), \quad (2.44)$$

što bi interpretirano za slučaj $\alpha \in (0, 1)$ značilo

$$\mathcal{L}\{{}^C D_t^\alpha f\} = s^\alpha F(s) - s^{\alpha-1} f(0). \quad (2.45)$$

Može se primetiti da, ukoliko se smatra da su svi početni uslovi jednaki nuli, Kaputov i Riman - Ljuvilov frakcioni izvod postaju identični. U ovom slučaju i svi frakcioni operatori poseduju svojstvo polugrupe. Takođe je očigledno da ovakva definicija izvoda u smislu Kaputa predstavlja osnovu za studiju frakcionih diferencijalnih jednačina u duhu poglavlja 2.3.1.

Primeri realnih frakcionih sistema

U ovom poglavlju će biti dat prikaz nekoliko procesa koji se opisuju diferencijalnim jednačinama necelog reda. Veoma popularna oblast primene frakcionog računa je bioinženjering [41], kao i njemu srodne grane poput farmakokinetike [42], [43], [44].

3.1 Beskonačni poluprovodnik RC tipa

U ovom potpoglavlju biće izveden frakcioni model beskonačnog provodnika RC tipa [45], [46]. Pođimo od jednačina koje opisuju ponašanje sistema sa slike 3.1

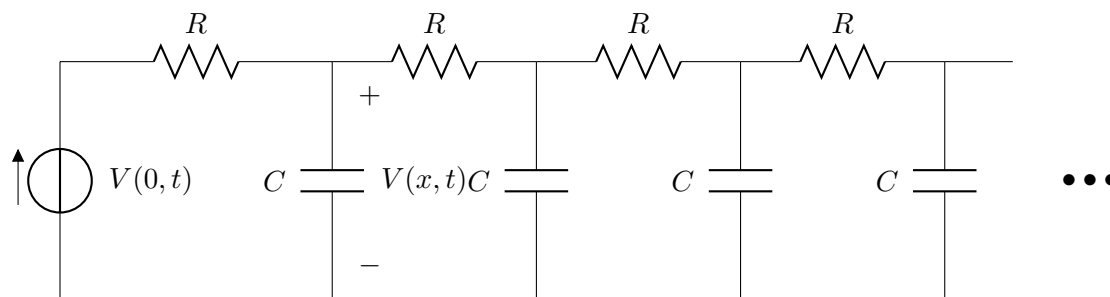
$$\frac{\partial V(x, t)}{\partial x} = Ri(x, t), \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = C \frac{\partial V(x, t)}{\partial t}. \quad (3.2)$$

Diferenciranjem jednačine (3.2) po x i ubacivanjem u (3.1) dobija se

$$\frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2} = RC \frac{\partial V(x, t)}{\partial t}. \quad (3.3)$$

Ovo je parcijalna diferencijalna jednačina po dve promenljive, x i t . Naravno, ustanovljene su konvencionalne oznake, gde R predstavlja otpornost elementa,



Slika 3.1: Beskonačni poluprovodnik RC tipa

i struju kroz neki element, C kapacitivnost, a V napon na nekom elementu. Neka su dati početni i granični uslovi $V(0, t) = V_0$ i $\lim_{x \rightarrow \infty} V(x, t) = 0$. Posle primene Laplasove transformacije po t , u obeležju \mathcal{L}_t dobijamo

$$\frac{\partial^2 \hat{V}(s, x)}{\partial x^2} = RCs \hat{V}(s, x). \quad (3.4)$$

Rešenje ove parcijalne diferencijalne jednačine po x je

$$\hat{V}(s, x) = C_1 e^{\sqrt{RCs}x} \hat{V}(s, x) + C_2 e^{-\sqrt{RCs}x} \hat{V}(s, x). \quad (3.5)$$

Posmatrajmo ponašanje sistema u početnoj i u krajnjoj tački, tj.

$$\hat{V}(s, 0) = C_1 + C_2, \quad (3.6)$$

$$\hat{V}(s, \infty) = C_1 e^{\sqrt{RCs}\infty} + C_2 e^{-\sqrt{RCs}\infty}. \quad (3.7)$$

Funkcija $\hat{V}(s, t)$ treba da bude ograničena jer je u pitanju fizička veličina, u konkretnom slučaju napon, stoga član $C_1 e^{\sqrt{RCs}\infty} \hat{V}(s, x)$ treba biti jednak nuli da bi ukupan napon bio ograničen. Oдавde sledi da je $C_1 = 0$, pa iz (3.6) dobijamo

$$\hat{V}(s, 0) = C_2, \quad (3.8)$$

Po izračunavanju koeficijenata C_1 i C_2 dobijamo opšti oblik $\hat{V}(s, x)$ kao

$$\hat{V}(s, x) = \hat{V}(s, 0) e^{-\sqrt{RCs}x}. \quad (3.9)$$

Diferenciranjem po x imamo

$$\frac{d}{dx} \hat{V}(s, x) = -\sqrt{RCs} \hat{V}(s, 0) e^{-\sqrt{RCs}x}, \quad (3.10)$$

odnosno

$$\frac{1}{\sqrt{s}} \frac{d}{dx} \hat{V}(s, x) = -\sqrt{RC} \hat{V}(s, x) . \quad (3.11)$$

Prethodna jednačina sadrži elemente koji predstavljaju funkcije više promenljivih, stoga izvod iz prethodne jednačine posmatramo kao parcijalni izvod, pa važi

$$\frac{1}{\sqrt{s}} \frac{\partial}{\partial x} \hat{V}(s, x) = -\sqrt{RC} \hat{V}(s, x) . \quad (3.12)$$

Ukoliko primenimo inverznu Laplasovu transformaciju po vremenu t u oznaci \mathcal{L}_t^{-1} dobijamo

$$\frac{\partial}{\partial x} V(x, t) = -\sqrt{RC} \frac{d^{0.5}}{dt^{0.5}} V(x, t) , \quad (3.13)$$

odnosno

$$\frac{\partial}{\partial x} V(x, t) = -\sqrt{RC_0} D_t^{1/2} V(x, t) . \quad (3.14)$$

Ako sad uvrstimo jednačinu (3.2) dobijamo izraz

$$i(x, t) = -\sqrt{\frac{R}{C_0}} D_t^{1/2} V(x, t) , \quad (3.15)$$

koji predstavlja konačni model beskonačnog poluprovodnika RC tipa.

3.1.1 Efikasnija realizacija frakcionog integratora preko složenije lestvičaste strukture

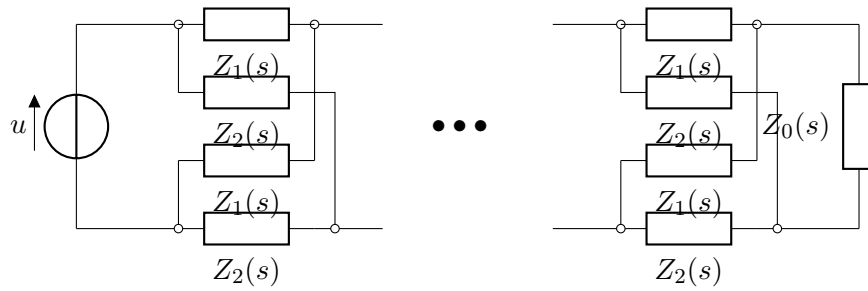
U ovom potpoglavlju biće obrađena fizička realizacija frakcionog integratora putem ukrštene lestvičaste strukture sa slike 3.2 koju je postavio Šekara u [45],[47]. Lestvičasta struktura naizgled podseća na onu iz Poglavlja 3.1 gde je opisan beskonačni poluprovodnik RC tipa.

Oznake Z_0 , Z_1 i Z_2 predstavljaju impedanse elemenata koji se nalaze na datom mestu u kolu, dok u predstavlja naponski izvor. Ulazna impedansa $Z_n(s)$ za n ćelija lestvičaste strukture sa slike 3.2, dobija se korišćenjem α -parametara kaskadne veze četvoropola osnovne ćelije [45] kao

$$Z_n(s) = \frac{\sqrt{Z_1(s)Z_2(s)} Z_0(s) + \beta \sqrt{Z_1(s)Z_2(s)}}{\beta Z_0(s) + \sqrt{Z_1(s)Z_2(s)}} \quad (3.16)$$

gde je $\beta = \frac{1-q^n}{1+q^n}$, a $q = \frac{Z_1(s)+Z_2(s)-2\sqrt{Z_1(s)Z_2(s)}}{Z_1(s)+Z_2(s)+2\sqrt{Z_1(s)Z_2(s)}}$. Ako se uzme da broj ćelija $n \rightarrow \infty$, dobija se da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n(s) = \sqrt{Z_1(s)Z_2(s)} = Z(s) . \quad (3.17)$$



Slika 3.2: Struktura realizacije frakcionog integratora preko složenije lestvičaste strukture

Ovakva realizacija moguća je za $n \geq 10$. U specijalnom slučaju kada posmatramo RC kolo, gde je $Z_1(s) = \frac{1}{sC}$ i $Z_2(s) = R$, dobijamo

$$Z(s) = \sqrt{\frac{R}{C}} \frac{1}{\sqrt{s}}. \quad (3.18)$$

Uzimajući u obzir da je impedansa $Z(s) = \frac{U(s)}{I(s)}$ i primenjujući inverznu Laplasovu transformaciju na poslednji izraz dobija se

$$i(t) = \sqrt{\frac{C}{R}} {}_0D_t^{1/2} u(t), \quad (3.19)$$

što predstavlja jednačinu promene struje u vremenu. Važno je napomenuti da $Z_0(s)$ mora biti konačna vrednost i da od nje zavisi kvalitet frakcionog integratora.

3.2 Model provođenja toplote kroz poluprovodnički element

Klasična jednačina toplotnog provođenja toplotnog fluksa data je sa [46]

$$c\rho \frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} = k \frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial x^2}, \quad (3.20)$$

gde je Q temperatura poprečnog preseka, c specifična toplota, ρ gustina, a k koeficijent toplotne provodljivosti. Neka je temperatura na jednom kraju provodnika data sa $Q(0,t) = 0$, a na drugom $Q(\infty,t) = 0$ i neka je $Q(x,0) = 0$.

Posle primene Laplasove transformacije po t na izraz, u obeležju \mathcal{L}_t dobijamo

$$k \frac{\partial^2 \hat{Q}(s, x)}{\partial x^2} = \rho c s \hat{Q}(s, x). \quad (3.21)$$

Slično kao i u postupku u poglavlju (3.1), zbog činjenice da $Q(s, \infty)$ mora biti konačno, dobijamo

$$\hat{Q}(s, x) = \hat{Q}(s, 0) e^{-\sqrt{\frac{c\rho s}{k}} x}. \quad (3.22)$$

Diferenciranjem poslednjeg izraza po x dobijamo

$$\frac{d}{dx} \hat{Q}(s, x) = -\sqrt{\frac{c\rho s}{k}} \hat{Q}(s, 0) e^{-\sqrt{\frac{c\rho s}{k}} x}, \quad (3.23)$$

odnosno imajući u vidu (3.22),

$$\frac{d}{dx} \hat{Q}(s, x) = -\sqrt{\frac{c\rho s}{k}} \hat{Q}(s, x). \quad (3.24)$$

Ukoliko na izraz (3.24) primenimo inverznu Laplasovu transformaciju po vremenu t u oznaci \mathcal{L}_t^{-1} dobijamo

$$\frac{\partial}{\partial x} Q(x, t) = -\sqrt{\rho c} \frac{d^{0.5}}{dt^{0.5}} Q(x, t), \quad (3.25)$$

odnosno

$$\frac{\partial}{\partial x} Q(x, t) = -\sqrt{\rho c_0} D_t^{1/2} Q(x, t). \quad (3.26)$$

3.3 Frakcioni modeli u farmakokinetici

Frakcioni račun našao je primenu u modelovanju u farmakokinetici kroz dvokompartmentalne modele (modele sa dva pregratka) gde se klasični dvokompartmentalni modeli koji su celobrojne prirode zamenjuju frakcionim modelima koji omogućuju prenos memorije, tj. istorije o biološkom procesu iz jednog pregratka u drugi, uz očuvanje mase [42], [43], [44].

3.3.1 Nelinearni frakcioni dvokompartmentalni model

U ovom poglavlju će biti razmatran nelinearni frakcioni dvokompartmentalni model. Ovakav model biološkog sistema posle paravaskularne primene leka razmatran je u [44]. Ako razmotrimo sistem u kome je prvi pregradak

(kompartman) mesto primene leka, kao što je digestivni trakt, mišić ili potkožno tkivo, a drugi pregradak plazma ili neki drugi region u telu u kome se lek uniformno raspoređuje kao u plazmi, takav sistem može se opisati sistemom običnih diferencijalnih jednačina [42]

$$\dot{q}_1(t) = -k_{21}q_1(t) , \quad (3.27)$$

$$\dot{q}_2(t) = k_{21}q_1(t) - k_{02}q_2(t) , \quad (3.28)$$

gde je sa q_1 obeležena količina leka u prvom pregradku, a sa q_2 količina leka u drugom pregradku, a sa k_{21} i k_{02} konstante specifične za svaku individuu ponaosob. Ranije je u literaturi Popović sa kolegama pokazao da frakcioni modeli bolje opisuju biološke sisteme nego celobrojni, što je i pokazano kroz analizu višepregradnih modela [42].

Sada ćemo posmatrati frakcioni model koji odgovara celobrojnom datom jednačinama (3.27) i (3.28). Takav analogni frakcioni model dat je u formi

$$\tau_1^{\alpha_1-1} {}_0D_t^{\alpha_1} q_1(t) = -k_{21}f(q_1(t), t) , \quad (3.29)$$

$$\tau_2^{\alpha_2-1} {}_0D_t^{\alpha_2} q_2(t) = k_{21}f(q_1(t), t) - k_{02}q_2(t) , \quad (3.30)$$

gde su τ_1 i τ_2 karakteristična vremena za svaki pregradak, α_1 i α_2 konstante u opsegu od 0 do 1, a k_{21} i k_{02} konstante specifične za svaku individuu ponaosob. Neka su inicijalne količine u pregradcima $q_1(0) = d_1$ i $q_2(0) = 0$. Bez gubljenja opštosti pretpostavićemo da je $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ i $\tau_1 = \tau_2 = \tau$.

Veoma važna činjenica koju moramo razmotriti je očuvanje mase u procesu transfera leka između pregradaka. Naime, ukoliko ne postoji odlivanje leka u spoljnu sredinu (npr. $k_{02} = 0$), ukupna količina leka mora biti očuvana. Stoga treba da važi $q_1(t) + q_2(t) = q_1(0) = const$. Postavljanjem $k_{02} = 0$ i uz već navedenu pretpostavku $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, sabiranjem jednačina (3.29) i (3.30) dobijamo

$${}_0D_t^\alpha q_1(t) - {}_0D_t^\alpha q_2(t) = 0 , \quad (3.31)$$

odnosno

$${}_0D_t^\alpha (q_1(t) + q_2(t)) = 0 . \quad (3.32)$$

Uz činjenicu iz odeljka 2.4 da je Kaputov izvod konstante jednak nuli dobijamo

$$q_1(t) + q_2(t) = q_1(0) . \quad (3.33)$$

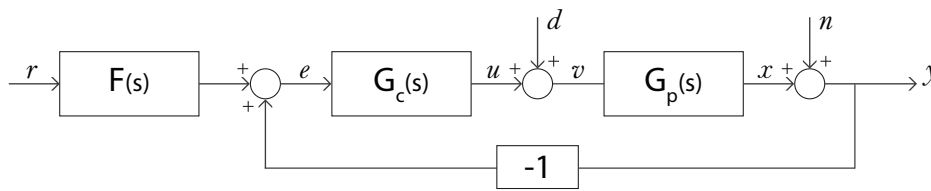
Na ovaj način smo dokazali očuvanje mase u procesu transfera leka kod frakcionih dvokompartmentalnih modela.

Tipovi regulatora

U okviru ovog poglavlja detaljno ćemo objasniti strukturu regulatora sa necelim izvodima i to sa jednim, dva i “beskonačno” mnogo necelih izvoda. Pokazaće se da je klasični PID regulator u stvari specijalni (granični) slučaj regulatora sa necelim izvodima. Radi preciznosti, kada kažemo PID regulator, mislimo i na sve njegove podtipove kao što su P, PI, PD regulator.

U savremenoj teoriji sistema automatskog upravljanja proporcionalno - integralno - diferencijalni (PID) regulator zauzima veoma značajno mesto. Svakako je najzastupljeniji u procesnoj industriji, gde se njime upravlja sa preko 90 % upravljačkih petlji [48]. PID regulator, kao što i samo njegovo ime kaže, čine tri odvojena člana: proporcionalno, integralno i diferencijalno dejstvo. Razvojem teorije upravljanja i pojavom novih pravaca u matematici kao što je frakcioni račun došlo je i do razvoja novih upravljačkih algoritama koji se mogu posmatrati kao generalizacija klasičnog PID algoritma. Prva modifikacija klasičnog PID algoritma predstavlja frakcioni PID (FPID) algoritam koji ima klasičan proporcionalni član, a integralni i diferencijalni članovi su necelog tipa. Ukoliko bismo dalje generalizovali ovakav regulator, možemo dobiti PID regulator distribuiranog reda, odnosno distribuirani PID regulator (DOPID), tj. regulator koji u sebi obuhvata sve izvode od minus prvog do prvog reda, u opštem slučaju kontinualno po svim izvodima, a u praktičnoj implementaciji diskretno. Struktura za implementaciju DOPID regulatora je originalni doprinos autora [1].

Regulatori čine integralni deo sistema automatskog upravljanja, stoga ih treba posmatrati kao deo njega. Jedna od opštijih struktura sistema automatskog upravljanja data je na slici 4.1. Od regulatora se najčešće očekuje



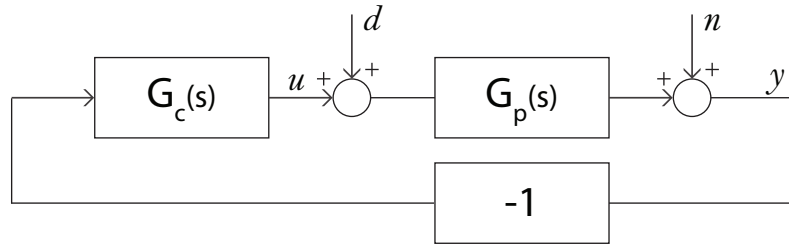
Slika 4.1: Blok dijagram sistema automatskog upravljanja gde $G_p(s)$ predstavlja funkciju prenosa procesa, $G_c(s)$ predstavlja deo regulatora u povratnoj sprezi, dok $F(s)$ predstavlja deo regulatora u direktnoj grani. Poremećaj je obeležen sa d , šum merenja sa n , upravljački signal sa u i izlaz sistema sa y .

da omogući praćenje referentnog signala, da umanjí efekte poremećaja koji se javljaju u sistemu, da smanji uticaj šuma merenja i da omogući da se ne osete efekti varijacije procesa, tj. da sistem bude što robusniji po ovom pitanju. Kada se govori o svim ovim zahtevima treba imati u vidu da je ispunjenje svih ovih zahteva istovremeno često nemoguće, stoga treba voditi računa o najboljem kompromisu u ostvarivanju istih. Naravno, izlišno je i napominjati činjenicu da je neophodno da sistem ostane stabilan prilikom zadovoljavanja postavljenih zahteva na njegovo ponašanje. Kvalitativna ocena ponašanja sistema je posebna celina u ovom radu, gde će se ovde navedeni raznorodni kriterijumi matematički kvantifikovati kao kriterijumi optimalnosti i ograničenja na upravljanje i ostale procesne promenljive. Kod novouvedenog regulatora interesantno je primetiti i razmatrati mogućnost sagledavanja da li se svi njegovi polovi nalaze u levoj poluravni.

Posmatrajući blok dijagram sa slike 4.1 može se zaključiti da su ulazi u sistem upravljačka promenljiva u , poremećaj d i šum merenja n . Mereni signal y predstavlja izlaz sistema. Regulator koji u ovom slučaju čine dva bloka $F(s)$ i $G_c(s)$ poseduje dva ulaza, mereni signal y i referentni signal r , dok izlaz regulatora predstavlja upravljačka promenljiva u . Naravno, deo ovakvog sistema čine i dve procesne promenljive x i y , kao i promenljiva v koja predstavlja upravljački signal pod uticajem poremećaja. Promenljiva e predstavlja signal greške.

U okviru ove teze razmatran je odziv na poremećaj sistema bez uticaja predfiltra reference u direktnoj grani. Samim tim blok dijagram sistema automatskog upravljanja koji će biti analiziran u nastavku teze dat je na slici 4.2.

Izlaz sistema zavisi kako od funkcije prenosa regulatora, tako i od funkcije



Slika 4.2: Proces $G_p(s)$ sa regulatorom $G_c(s)$. Poremećaj je obeležen sa d , šum merenja sa n , upravljački signal sa u i izlaz sistema sa y .

prenosa procesa i može biti iskazan kao

$$Y(s) = \frac{G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)}D(s). \quad (4.1)$$

Pretpostavimo da je poremećaj u vremenskom domenu sporo promenljiva veličina koja se prikazuje kao konstanta, a njena Laplasova transformacija je $D(s) = \frac{1}{s}$. Takođe, važno je napomenuti i da je $n = 0$, tj. da ne postoji šum merenja u sistemu.

4.1 PID regulator

Kao što je već rečeno, PID regulator je svakako jedan od najpopularnijih upravljačkih algoritama uopšte. Razlog njegove popularnosti je svakako jednostavnost njegove strukture, činjenica da nije potrebno precizno poznavati model procesa kojim se upravlja da bi se regulator isprojektovao, kao i relativno mali broj parametara koje treba podesiti. Svako od dejstava regulatora ima određenu ulogu. Da bi se jednostavno objasnilo svako od dejstava pojedinačno, potrebno je poći od dvopoložajnog regulatora, koji kao osnovnu manu ima čestu promenu amplitude upravljanja između dve vrednosti, odnosno oscilacije u upravljačkom signalu. Ovaj problem se ublažava uvođenjem histerezisa u dvopoložajni regulator. Međutim, na ovaj način se problem ne eliminiše u potpunosti. Zato se umesto dvopoložajnog regulatora sa histerezisom uvodi regulator sa samo proporcionalnim dejstvom P, da bi eliminisao ovaj problem u potpunosti. Međutim, njegovim uvođenjem se javlja greška u ustaljenom stanju. Ukoliko se na P regulator doda integralni član, moguće je eliminisati grešku u ustaljenom stanju. Integralni član I daje upravljački signal koji je srazmeran integralu greške u vremenu. Iako uvođenje integralnog dejstva eliminiše grešku u ustaljenom stanju na konstantan ulaz, može

se poremetiti stabilnost sistema u povratnoj sprezi. Dalje je moguće uvesti i diferencijalno dejstvo koje je jednako izvodu greške upravljačkog signala u vremenu. Ono je u stanju da poboljša stabilnost sistema u povratnoj sprezi. Osnovni oblik PID regulatora paralelne strukture u Laplasovom domenu dat je kao

$$G_{pid}(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s . \quad (4.2)$$

Ukoliko u formu regulatora uvedemo i filter prvog reda, PID regulator ima sledeću formu

$$G_{pid}(s) = \frac{k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s}{sT_f + 1} . \quad (4.3)$$

Uloga ovog filtra je da priguši dejstvo poremećaja na visokim frekvencijama. Iz sledećeg izraza se lako može primetiti da je pojačanje klasičnog PID-a u formi (4.3)

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s}{sT_f + 1} = \frac{k_d}{T_f} . \quad (4.4)$$

PID regulator može se naći u raznim oblicima i može biti različitih struktura. Što se tiče struktura PID regulatora, sigurno su najpoznatije serijska i paralelna struktura PID regulatora, koje sadrže osnovna dejstva regulatora raspoređena u formi koja odgovara njihovim imenima, tj. u serijskoj strukturi sva dejstva su serijski vezana, dok su u paralelnoj vezana u paraleli. Svakako, kod komercijalnih regulatora, češće se koristi serijska struktura. Takođe, PID regulator se može naći i u raznim svojim oblicima, kao što su P regulator, PI regulator, PD regulator, kao i sam PID regulator. Kao što i njihova imena govore, ovi regulatori poseduju neka od dejstava koja čine opšti oblik PID regulatora. Tip regulatora koji je potreban za upravljanje sistemom zavisi od procesa kojim se upravlja.

Da bi se mogla razumeti osnovna ideja ovog teksta, daćemo logičko uopštenje osnova PID regulatora datog sa (4.2), pa sve do DOPID regulatora koji je osnovni element ove teze. Neke od matematičkih aparata ovde uvodimo *ad hoc*, ali mislimo da je ovo poglavlje od centralnog značaja za razumevanje teze. Sva formalna matematička izvođenja i osobine biće nakanadno dati.

Prvu teorijsku analizu klasičnog PID regulatora dao je još 1922. godine Nikolas Minorski [49]. Funkcija prenosa regulatora u formi

$$G_{pid}(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s . \quad (4.5)$$

ne sadrži u sebi filter koji mu je potreban da bi vodio računa o funkciji osetljivosti, odnosno o osetljivosti na šum merenja. Proširenje ovog regulatora koje

direktno ograničava pojačanje regulatora na visokim frekvencijama dato je sa

$$G_{pid}(s) = \frac{k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s}{sT_f + 1}, \quad (4.6)$$

tako da poslednji izraz predstavlja logičko proširenje (4.5). Podlubni 1999. godine [13] uopštava klasičan PID na frakcioni PID regulator (FPID) koji ima integrator i diferencijator necelog reda i predstavlja regulator koji je fleksibilniji u odnosu na klasični PID regulator i ima dva stepene slobode više. Ovaj regulator dat je u formi

$$G_c(s) = k_p + k_i \frac{1}{s^\alpha} + k_d s^\beta. \quad (4.7)$$

Kao i u pristupu kod konvencionalnog PID regulatora i u ovom slučaju potrebno je voditi računa o osetljivosti regulatora na visokofrekventni šum merenja. U okviru istraživanja u sklopu ove disertacije razmatrani su oblici filtra u više varijanti, gde je na prvom mestu razmatran FPID regulator dat u formi

$$G_c(s) = \frac{k_p + k_i \frac{1}{s^\alpha} + k_d s^\beta}{T_f s^\gamma + 1}. \quad (4.8)$$

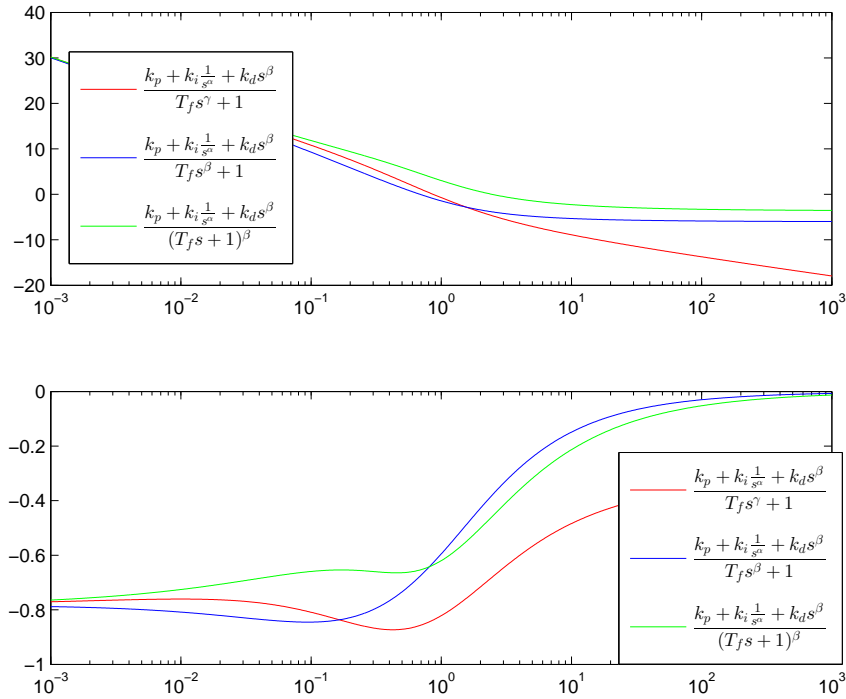
Kroz postupak optimizacije slobodnih parametara regulatora, uključujući tu i stepene integratora, diferencijatora i filtra, utvrđeno je da se najbolji rezultati dobijaju kada je red diferencijatora jednak redu filtra, tj. po prethodnoj notaciji $\beta = \gamma$. Posmatranjem frekvencijske karakteristike regulatora datog u formi

$$G_c(s) = \frac{k_p + k_i \frac{1}{s^\alpha} + k_d s^\beta}{T_f s^\beta + 1}, \quad (4.9)$$

mogu se primetiti vršne vrednosti kako na amplitudskoj, tako i na faznoj karakteristici, stoga je daljnja analiza pokazala da najbolju frekvencijsku karakteristiku daje regulator u formi

$$G_c(s) = \frac{k_p + k_i \frac{1}{s^\alpha} + k_d s^\beta}{(T_f s + 1)^\beta}. \quad (4.10)$$

Uporedna analiza frekvencijskih karakteristika poslednja tri regulatora data je na slici 4.3. Pre dalje generalizacije PID regulatora potrebno je spomenuti uvođenje pojmova integratora/diferencijatora distribuiranog reda [50], da bi se na osnovu toga mogla nastaviti dalja generalizacija PID regulatora, koja nas dovodi do DOPID regulatora koji je u formi distribuiranog PI regulatora



Slika 4.3: Amplitudska i frekvencijska karakteristika regulatora u formi (4.8), (4.9), (4.10)

predložio Žou sa kolegama u [18], gde je regulator u osnovnoj formi dat kao integral koji pokriva sve izvode od minus prvog do nultog reda

$$G_{dopid}(s) = \int_{r_{min}}^{r_{max}} f(\alpha) s^{\alpha} d\alpha, \quad (4.11)$$

gde se $f(\alpha)$ može uopštiti kao bilo koje preslikavanje $(-\infty, \infty)$ na \mathbb{R} , dok α predstavlja celi ili neceli red integratora ili diferencijatora, tj. diferintegratora. r_{min} i r_{max} , $r_{min} < r_{max}$, redom predstavljaju donju i gornju granicu integracije. Regulator sličnog oblika koji uzima u obzir i frakcione diferencijatore, odnosno gde integral iz (4.11) pokriva sve izvode od minus prvog do prvog reda, je predložen od strane autora ove disertacije. Na taj način je distribuirani PI regulator proširen na distribuirani PID regulator. Oblik ovog

regulatora za implementaciju prvi je predložio autor ove teze. Taj oblik je u formi

$$G_{\text{DOPID}}(s) \approx G_{\text{DOPID},N}(s) = \sum_{i=0}^{N-1} k_i s^{-1+i\Delta\alpha}, \quad (4.12)$$

gde su k_i su proizvoljni realni brojevi, N predstavlja neparan ceo broj veći od 1, a $\Delta\alpha = \frac{2}{N-1}$. Ukoliko se u obzir uzme i filter koji ograničava visokofrekventni šum, odnosno funkciju osetljivosti na šum merenja, dobija se DOPID regulator u formi

$$G_{\text{DOPID}}(s) \approx G_{\text{DOPID},N}(s) = \frac{1}{sT_f + 1} \sum_{i=0}^{N-1} k_i s^{-1+i\Delta\alpha}, \quad (4.13)$$

gde je $T_f > 0$. Poslednji izraz predstavlja centralni upravljački algoritam analiziran u okviru ove doktorske teze.

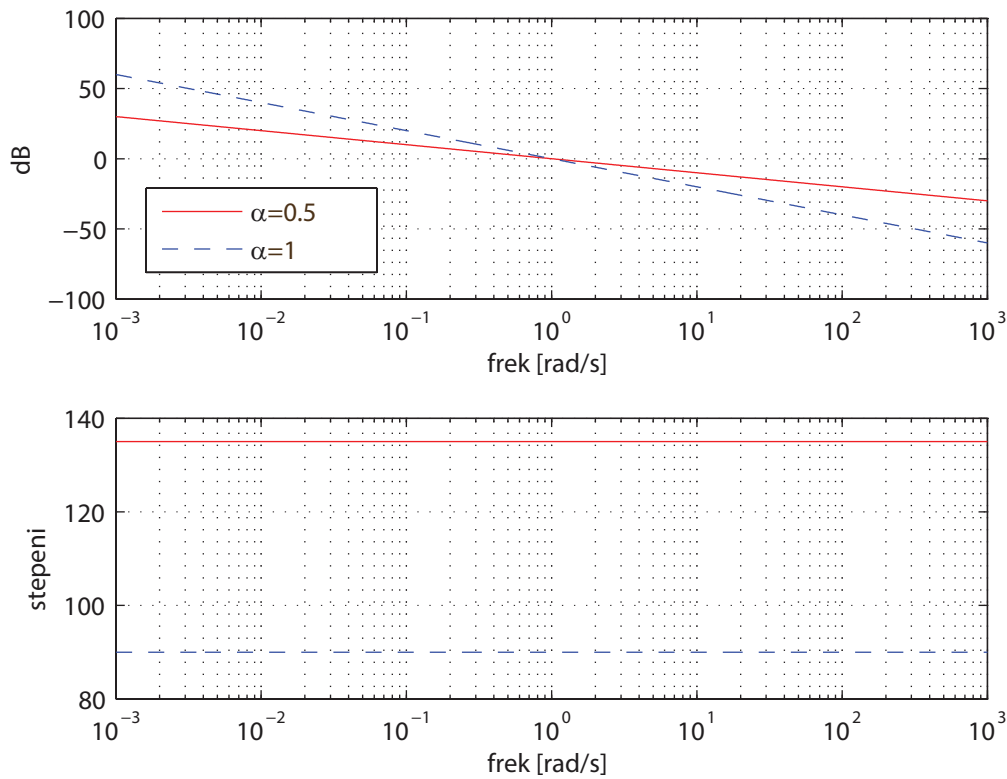
4.2 Frakcioni PID regulator (FPID)

Veliki broj istraživanja koja analiziraju strukture kontrolera i podešavanja parametara regulatora usmeren je na činjenicu da se omogući veća fleksibilnost, bolje performanse i adekvatnije metode podešavanja regulatora. Prvu verziju frakcionog PID regulatora predložio je Podlubni [33]. Podlubnijev frakcioni regulator je svakako omogućio veliki napredak u malopre navedenom smeru. Frakcioni PID regulator predstavlja generalizaciju klasičnog PID regulatora. Ukoliko sadrži i filter koji ograničava pojačanje šuma frakcioni PID regulator može biti prikazan na sledeći način

$$G_c(s) = \frac{k_p + k_i \frac{1}{s^\alpha} + k_d s^\beta}{(T_f s + 1)^\beta}. \quad (4.14)$$

Frakcioni PID ili PID regulator necelog reda u poređenju sa klasičnim PID regulatorom ima još dva stepena slobode, red integracije α i red diferenciranja β . Na ovaj način se komplikuje struktura regulatora, ali se omogućava veća fleksibilnost, naročito u studiji robusnosti sistema. Potrebno je naglasiti da se na robusnost može uticati promenom reda integralnog člana i diferencijalnog člana. Klasični integrator obara amplitudsku karakteristiku 20 db/dec, dok faznu spušta za $\pi/2$ rad. Za razliku od njega frakcioni integrator obara amplitudsku karakteristiku $\alpha \cdot 20$ db/dec, dok faznu spušta za $\alpha \cdot \pi/2$ rad. Ovo je ilustrovano na slici 4.4.

Sa druge strane frakcioni diferencijator podiže amplitudsku karakteristiku $\alpha \cdot 20$ db/dec, dok faznu karakteristiku podiže za $\alpha \cdot \pi/2$ rad.



Slika 4.4: Izgled frekvencijske karakteristike za integrator reda 0.5 i integrator reda 1

Geometrijska i fizička interpretacija frakcione integracije i frakcione diferencijacije mogu se naći u [51]. Zbog svih navedenih osobina frakcionog PID-a veliki broj istraživanja posvećen je ovom regulatoru u smislu robusnosti, performansi sistema, kao i metoda podešavanja parametara regulatora [17], [52], [53], [54].

4.2.1 Analiza greške u ustaljenom stanju kod sistema upravljanih FPID-om

Ukoliko klasičan PID upravlja sistemom kao na slici 4.2, upravljačka petlja će imati nultu grešku u ustaljenom stanju ako je u zatvorenoj povratnoj sprezi sistem stabilan i ako je integralno dejstvo različito od nule. Slično se može

pokazati i kod frakcionog PID regulatora.

Ako za sistem na slici 4.2 pretpostavimo da je integralno dejstvo kontrolera reda α i ako je $d = \text{const.}$ možemo pokazati da je za $\alpha > 0$ i $n = 0$ (slučaj bez šuma merenja) greška u ustaljenom stanju jednaka nuli. Prema drugoj graničnoj teoremi [55], [56] greška u ustaljenom stanju stabilne upravljačke petlje u slučaju da je poremećaj tipa jediničnog odskočnog signala je

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{G_p(s)}{1 + G_p(s)G_c(s)} . \quad (4.15)$$

Model procesa i kontrolera možemo zapisati u formi

$$G_c(s) = \frac{k_i}{s^\alpha} \frac{1 + \frac{k_p}{k_i} s^\alpha + \frac{k_d}{k_i} s^{\alpha+\beta}}{(sT_f)^\beta + 1} = \frac{k_i}{s^\alpha} G_{c0}(s) , \quad (4.16)$$

sa funkcijom prenosa procesa u obliku

$$G_p(s) = \frac{k_p}{s^\gamma} G_{p0}(s) , \quad (4.17)$$

gde je $G_{c0}(0) = G_{p0}(0) = 1$ i gde su α i γ stepeni astatizma regulatora i procesa redom. Koeficijenti k_i i k_p su (u ovom kontekstu) poznati kao Bodeova pojačanja. Ukoliko zamenimo (4.16) i (4.17) u (4.15), dobijamo

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{k_p s^\alpha}{s^{\alpha+\gamma} + k_i k_p} = 0 . \quad (4.18)$$

što ustvari dokazuje da se greška eliminiše za svako $\alpha > 0$.

4.2.2 Oblik asimptotske anvelope

Kako je prikazano u prethodnom potpoglavlju postojanje bilo kog astatizma, odnosno beskonačnog statičkog pojačanja na nultoj frekvenciji, može da eliminiše grešku u ustaljenom stanju kod sistema stabilnih u zatvorenoj povratnoj sprezi sa konstantnim ulazom. Pitanje koje želimo da otvorimo u ovom poglavlju jeste uticaj reda astatizma na asimptotsku dinamiku prelaznog režima, što će u poglavlju koje sledi i kvantitativno biti opisano. Može se pokazati da smanjenjem reda astatizma u granicama od 0 do 1 i odziv sistema sporije prilazi nuli. Da bi se analiziralo ponašanje anvelope odziva u prelaznom režimu, mora se razmotriti sistem sa slike 4.2 sa $d = 1$ i $n = 0$ ¹.

¹Analiza se odnosi na ponašanje sistema u ustaljenom stanju, s tim da je sistem stabilan u otvorenoj povratnoj sprezi]

Sad se može analizirati kvalitativni odziv anvelope, ako bez gubljenja opštosti razmatramo slučaj

$$G_c(s) = \frac{k_i}{s^\alpha}, \quad G_p(s) = \frac{k_p}{s^\gamma}. \quad (4.19)$$

Laplasova transformacija izlaza sistema u zatvorenoj povratnoj sprezi je

$$Y(s) = \frac{G_p(s)}{1 + G_r(s)G_p(s)} \frac{1}{s} = \frac{k_p s^{\alpha-1}}{s^{\alpha+\gamma} + k_c k_p}. \quad (4.20)$$

Inverzna Laplasova transformacija dobijenog izraza se može pronaći primenom dvoparametarske Mitag-Lefflerove (*Mittag-Leffler*) funkcije $E_{\rho,\mu}$. Sledeći par parametara Laplasove transformacije se odnosi na sve pozitivne $\rho > 0$, $\mu > 0$ i proizvoljno kompleksni broj a [33],

$$\mathcal{L} \{ t^{\mu-1} E_{\rho,\mu}(at^\rho) \} = \frac{s^{\rho-\mu}}{s^\rho - a}. \quad (4.21)$$

Odavde sledi da je inverzna Laplasova transformacija izraza (4.20)

$$y(t) = k_p t^\gamma E_{\gamma+\alpha,\gamma+1}(-k_i k_p t^{\gamma+\alpha}). \quad (4.22)$$

Dvoparametarska Mitag-Lefflerova funkcija $E_{\rho,\mu}(x)$ ima sledeću asimptotsku karakteristiku za $\rho < 2$ i velike negativne vrednosti x [30],

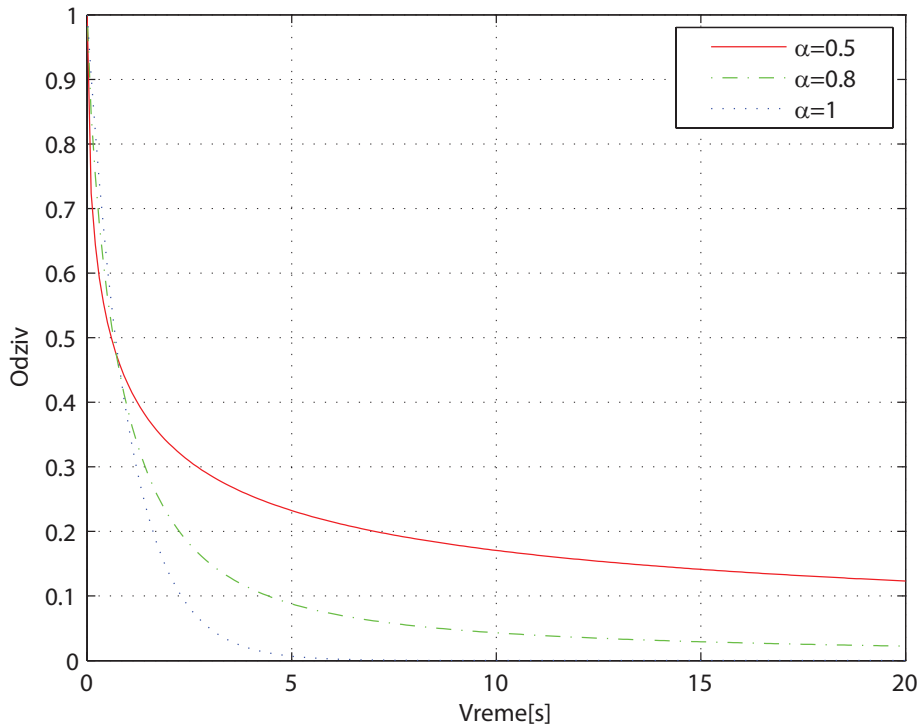
$$E_{\rho,\mu}(x) = - \sum_{k=1}^N \frac{x^{-k}}{\Gamma(\mu - \rho k)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{N+1}}\right), \quad (4.23)$$

što važi za bilo koji ceo broj N . Ukoliko se uzme da je $N = 1$ i uvrštavajući (4.23) u (4.22), za velike vrednosti t dobija se

$$y(t) = \frac{1}{k_i \Gamma(1 - \alpha) t^\alpha} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^{2(\gamma+\alpha)}}\right). \quad (4.24)$$

Izraz (4.24) pokazuje da je izlaz sistema asimptotski proporcionalan funkciji $t^{-\alpha}$. Posledično, sa smanjenjem α smanjuje se asimptotska performansa sistema u zatvorenoj povratnoj sprezi. Ova analiza je prikazana na slici 4.5.

Napomena 4.1. Iako možda nije očigledno iz (4.24), za $\alpha = 1$ sistem se ponaša eksponencijalno asimptotski. Posmatranjem parametra $\rho < 2$, za jedinu celobrojnu vrednost na intervalu $(0, 2)$ tj. za $\rho = 1$ zaključujemo da u jednačini (4.23) deo $\Gamma(\mu - \rho k) \rightarrow \infty$, pa se ceo izraz (4.23) ponaša kao $\mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{N+1}}\right)$ koji teži kao e^{-t} .



Slika 4.5: Asimptotska anvelopa odziva u zatvorenoj povratnoj sprezi (4.22) za različite vrednosti parametra α . U svim slučajevima bez gubljenja opštosti uzeto je $k_i = k_p = 1$ i $\gamma = 0$

4.3 PID regulator distribuiranog reda (DOPID)

U jednom od prethodnih poglavlja intuitivno smo uveli DOPID. Formalna definicija, osobine i mogućnosti implementacije DOPID-a razmatrani su u okviru ovog poglavlja. DOPID regulator možemo posmatrati kao najuopšteniji oblik regulatora forme slične PID-u. U najopštijem slučaju DOPID se može opisati kao

$$G_{dopid}(s) = \int_{r_{min}}^{r_{max}} f(\alpha) s^\alpha d\alpha . \quad (4.25)$$

gde se $f(\alpha)$ može uopštiti kao bilo koje preslikavanje $(-\infty, \infty)$ na \mathbb{R} , dok α predstavlja celi ili neceli red integratora ili diferencijatora, tj. diferintegratora. r_{min} i r_{max} , $r_{min} < r_{max}$, redom predstavlja donju i gornju granicu integracije. Donja i gornja granica integracije mogu biti izabrane da pokriju bilo koji interval ili podinterval na realnoj osi. Da bi se uzele u obzir samo dobre osobine poznate kod klasičnog PID regulatora, logično bi bilo da se granice DOPID-a postave od -1 do 1. Naravno, ovo podrazumeva i uzimanje u obzir svih mogućih vrednosti u tom opsegu. Na ovaj način je moguće i porediti regulator ovog tipa u raznim svojim izvedbama sa regulatorima PID tipa. Iz prethodno navedenog razloga, DOPID koji je adekvatan u smislu strukture klasičnom PID-u može biti definisan kao

$$G_{dopid}(s) = \int_{-1}^1 f(\alpha) s^\alpha d\alpha . \quad (4.26)$$

U praktičnoj implementaciji DOPID regulatora opredelili smo se da unapred definišemo profil podintegralne funkcije iz (4.26), odnosno da diskretizujemo ceo integral pomoću Njutn-Kotesovih (*Newton-Cotes*) formula [57], tj. da integraciju vršimo sa unapred definisanim čvorovima koji mogu biti ekvidistantni i neekvidistantni. Interesantno je primetiti da u slučaju kada se $f(\alpha)$ iz (4.26) izabere kao tri delta impulsa u tačkama -1, 0 i 1 dobijamo klasičan PID regulator.

4.3.1 DOPID sa diferintegratorima čiji su stepeni ekvidistantni

Ako se pretpostavi da je DOPID u obliku (4.26) uvođenjem neparnog celog broja $N > 1$ i pozitivnog koraka dužine $\Delta\alpha = \frac{2}{N-1}$, možemo vršiti integraciju po delovima pa DOPID dobijamo kao

$$\begin{aligned} G_{DOPID}(s) &= \sum_{i=0}^{N-2} \int_{-1+i\Delta\alpha}^{-1+(i+1)\Delta\alpha} f(\alpha) s^\alpha d\alpha \\ &= \sum_{i=0}^{N-2} f_i \int_{-1+i\Delta\alpha}^{-1+(i+1)\Delta\alpha} s^\alpha d\alpha , \end{aligned} \quad (4.27)$$

za neko realno f_i koje je sporo promenljivo između čvorova integracije, tj. važi $f(\alpha) \approx f(i\Delta\alpha)$, $\alpha \in [i\Delta\alpha, (i+1)\Delta\alpha]$. Eksplicitnom integracijom po

podintervalima određenog reda dobijamo

$$\begin{aligned}
 G_{\text{DOPID}}(s) &= \sum_{i=0}^{N-2} f_i \frac{s^{-1+(i+1)\Delta\alpha} - s^{-1+i\Delta\alpha}}{\ln s} \\
 &= \frac{1}{\ln s} \left(\underbrace{-f_0}_{k_0} s^{-1} + \underbrace{(f_0 - f_1)}_{k_1} s^{-1+\Delta\alpha} + \dots + \underbrace{f_{N-1}}_{k_{N-1}} s \right) \\
 &= \frac{1}{\ln s} \sum_{i=0}^{N-1} k_i s^{-1+i\Delta\alpha}. \tag{4.28}
 \end{aligned}$$

gde je $\ln(\cdot)$ prirodni logaritam, a k_i su novi parametri zavisni od f_i i od parametrizirajuće funkcije $f(\alpha)$.

Iz izraza (4.28) vidi se da je DOPID regulator izražen kao paralelna veza jednog broja frakcionih diferintegratora, vezanih serijski sa logaritamskim filtrom¹. Prvi član sume iz prethodnog izraza je $k_0 s^{-1}$, poslednji $k_{N-1} s$, a iz razloga što je N neparno, srednji (centralni) član je $k_{\frac{N-1}{2}}$, što kao posledicu ima da DOPID u sebi sadrži klasični integral, klasični diferencijator i klasični proporcionalni član. DOPID iz izraza (4.28) sadrži određen broj simetrično raspoređenih frakcionih integrala i diferencijatora oko proporcionalnog člana.

Sam inverzni logaritamski filter poseduje nulto statičko pojačanje, što se lako vidi iz $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{\ln s} = 0$. Astatičko ponašanje DOPID-a u formi (4.28) je generalno sačuvano zbog $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^\alpha \ln s} = \infty$ za svako $\alpha > 0$, međutim problem sa inverznim logaritamskim filtrom je u tome što on značajno smanjuje pojačanje na niskim frekvencijama, posledično slabeći mogućnost potiskivanja poremećaja na ustaljenom stanju.

Integral (apsolutne) greške na poremećaj tipa jedinične odskočne funkcije postaje beskonačan kad je regulator oblika (4.28).² Dodatno, iako je pojačanje inverznog logaritamskog filtra na visokim frekvencijama jednako nuli, on ne teži nuli brže od s^{-1} . Kao posledica toga $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{\ln s} = \infty$, a pojačanje na visokim frekvencijama DOPID regulatora (4.28) postaje beskonačno i samim tim je i osetljivost na šum merenja neograničena.

¹Zanimljivo je primetiti da iz same strukture DOPID-a proizilazi postojanje filtra koji inače predstavlja modifikaciju osnovnog PID algoritma, međutim izraz $\frac{1}{\ln s}$ nije moguće u ovakvom obliku direktno implementirati, već će se on u daljoj analizi svesti na konvencionalni niskopropusni filter prvog reda

²Kriterijum optimalnosti IAE koji će biti uveden izrazom (5.11) nije konačan.

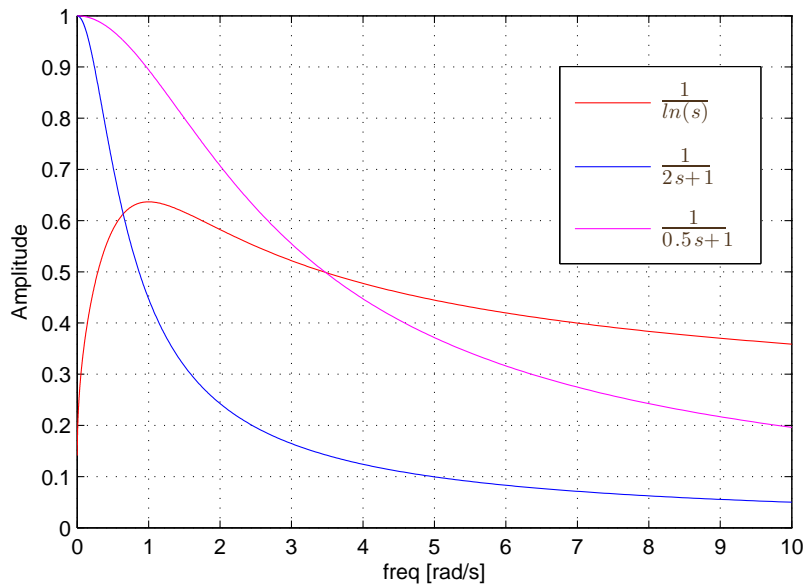
Da bi se izbegle malopre navedene loše osobine inverznog logaritamskog filtra, može se uvesti njegova aproksimacija kroz klasičan filter prvog reda

$$\frac{1}{\ln s} \rightarrow \frac{1}{sT_f + 1}, \quad T_f > 0. \quad (4.29)$$

Filtar prvog reda ima jedinično statičko pojačanje, dok njegovo pojačanje na visokim frekvencijama opada kao s^{-1} . Kao posledica ovoga, ne smanjuje se astatičko ponašanje koje uvodi klasični integrator, uz to omogućavajući ograničenu osetljivost na šum merenja. Filtar prvog reda se može smatrati kao aproksimacija inverznog logaritamskog filtra na *srednjim* frekvencijama, tj. za dato $\omega_f > 0$ može se uvek pronaći T_f takvo da važi

$$|\ln(j\omega_f)| = |j\omega_f T_f + 1|. \quad (4.30)$$

Na slici 4.6 vidi se frekvencijska karakteristika logaritamskog filtra i filtara



Slika 4.6: Frekvencijske karakteristike logaritamskog filtra i dva filtra prvog reda sa vremenskim konstantama $T_f = 2$ i $T_f = 0.5$

prvog reda, odakle je jasno da se uvek može pronaći T_f koje nam omogućava da se logaritamski filter zameni klasičnim filtrom prvog reda na odgovarajućoj frekvenciji. Svakako, treba imati u vidu i činjenicu da je implementacija filtra

prvog reda mnogo jednostavnija od implementacije inverznog logaritamskog filtra. Sada se DOPID može zapisati kao

$$G_{\text{DOPID}}(s) \approx G_{\text{DOPID},N}(s) = \frac{1}{sT_f + 1} \sum_{i=0}^{N-1} k_i s^{-1+i\Delta\alpha}, \quad (4.31)$$

gde je $T_f > 0$, k_i su proizvoljni realni brojevi, N predstavlja neparan ceo broj veći od 1, a $\Delta\alpha = \frac{2}{N-1}$. Za $N = 3$ predloženi metod za implementaciju DOPID regulatora redukuje ovaj regulator na klasični PID sa filtrom prvog reda, gde je k_0 integralno, k_1 proporcionalno i k_2 diferencijalno pojačanje. Funkcije prenosa ovakvog DOPID regulatora sa npr. 5 i 7 diferintegratora, tj. $N = 5$ i $N = 7$ su date kao

$$G_{\text{DOPID},5}(s) = \frac{1}{sT_f + 1} \left(k_0 \frac{1}{s} + k_1 \frac{1}{\sqrt{s}} + k_2 + k_3 \sqrt{s} + k_4 s \right), \quad (4.32)$$

$$G_{\text{DOPID},7}(s) = \frac{1}{sT_f + 1} \left(k_0 \frac{1}{s} + k_1 \frac{1}{s^{2/3}} + k_2 \frac{1}{s^{1/3}} + k_3 + k_4 s^{1/3} + k_5 s^{2/3} + k_6 s \right). \quad (4.33)$$

Kroz niz numeričkih eksperimenata došli smo do DOPID-ova sa 5 i 7 diferintegratora kao regulatora kod kojih je ostvaren najbolji kompromis između kvaliteta regulacije i složenosti u implementaciji regulatora.¹

4.3.2 DOPID sa proizvoljno raspoređenim diferintegratorima

Namera nam je da ista pravila integracije primenimo i ovde kao i u poglavlju 4.3.1, ne vodeći računa da su intervali u kojima računamo integral ekvidistantni, dobijamo

$$\begin{aligned} G_c(s) &= \sum_{i=0}^{N-2} \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(\alpha) s^\alpha d\alpha \\ &= \sum_{i=0}^{N-2} f_i \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} s^\alpha d\alpha, \end{aligned} \quad (4.34)$$

za neko realno f_i koje je sporo promenljivo između čvorova integracije, tj. važi $f(\alpha) \approx f(i\Delta\alpha)$, $\alpha \in [i\Delta\alpha, (i+1)\Delta\alpha]$. N predstavlja ceo broj, takav da važi

¹Potpuno nezavisno i u drugom kontekstu u numeričkoj interpretaciji frakcionih izvoda u radovima [58], [59] red aproksimacije frakcionog izvoda je isto bio 5 i 7.

$N > 1$ i $\alpha_0 = -1$, $\alpha_{N-1} = 1$ i tačno jedno $\alpha_i = 0$, $i \in (1, 2, \dots, N-2)$. Takva struktura omogućava da DOPID u formi (4.34) ima sve članove kao klasični PID, tj. integralno, proporcionalno i diferencijalno dejstvo. Naravno, ukoliko je $N > 3$, DOPID je dodatno obogaćen i članovima necelog reda.

Dalje se od izraza (4.34) integracijom po podintervalima dobija

$$\begin{aligned} G_c(s) &= \sum_{i=0}^{N-1} f_i \frac{s^{\alpha_{i+1}} - s^{\alpha_i}}{\ln s} \\ &= \frac{1}{\ln s} \left(\underbrace{-f_0 s^{-1}}_{k_0} + \underbrace{(f_0 - f_1) s^{\alpha_1}}_{k_1} + \dots + \underbrace{f_{N-1} s}_{k_{N-1}} \right) \\ &= \frac{1}{\ln s} \sum_{i=0}^{N-1} k_i s^{\alpha_i} . \end{aligned} \quad (4.35)$$

Slično kao kod regulatora (4.28) i kod regulatora (4.35) se javljaju problemi nemogućnosti ograničavanja šuma merenja i beskonačnog integrala greške zbog inverznog logaritamskog filtra. Tako i u ovom slučaju postaje razumno aproksimirati inverzni logaritamski filter, filtrom prvog reda.

Po uvođenju filtra prvog reda DOPID (4.35) postaje

$$G_c(s) \approx G_{c,N}(s) = \frac{1}{sT_f + 1} \sum_{i=0}^{N-1} k_i s^{\alpha_i} . \quad (4.36)$$

DOPID struktura (4.36) eliminiše grešku u ustaljenom stanju u konačnom vremenu, obezbeđujući konačnu vrednost kako integrala greške (IE), tako i integrala apsolutne greške (IAE).¹ Ovakva struktura takođe i ograničava visokofrekventni šum merenja.

Ukoliko se želi implementirati DOPID regulator u formi (4.36) sa, na primer, 5 diferintegratora, tj. $N = 5$ dobija se

$$G_{c,5}(s) = \frac{1}{sT_f + 1} \left(k_0 \frac{1}{s} + k_1 \frac{1}{s^{0.7}} + k_2 + k_3 s^{0.4} + k_4 s \right) . \quad (4.37)$$

DOPID regulatori implementirani u formi (4.36) imaju tu prednost da se stepeni diferintegratora mogu koncentrisati oko klasičnog diferencijatora, integratora ili proporcionalnog člana, na taj način naglašavajući njihovo dejstvo u skladu sa partikularnim zahtevima regulacije.

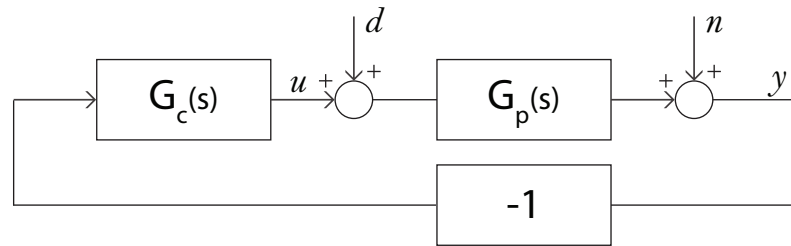
¹Pretpostavljamo da su čitaocu poznati termini IE, IAE. Detalji će biti naknadno objašnjeni.

Zahtevi pri projektovanju regulatora

U najvećem broju tehničkih sistema i problema, zahtevi koji se postavljaju pri projektovanju ovih sistema ili rešavanju problema, najčešće se matematički formulišu kroz kriterijume optimalnosti i prateća ograničenja. Nije ni malo jednostavno postaviti adekvatan kriterijum ako su zahtevi raznorodni, a često i kontradiktorni. Tako, na primer, kvalitet regulacije u ustaljenom režimu veoma često suprotno utiče na ponašanje sistema u prelaznom režimu. Takođe, dva naizgled veoma slična problema, eliminacija poremećaja i ostvarivanje zadate referentne vrednosti mogu imati potpuno različita rešenja u smislu upravljačkih signala, što svakako predstavlja manu jer se ova dva problema ne mogu nezavisno posmatrati, pošto čine deo jednog sistema.

Namera nam je da u okviru ovog poglavlja eksplicitno iskažemo veliki broj različitih zahteva pri regulaciji, ne bismo li na osnovu njihove jasne fizičke interpretacije nedvosmisleno matematički iskazali adekvatne kriterijume optimalnosti i njihova ograničenja. Bez obzira što je ova oblast jedna od najeksploatisanijih u teoriji upravljačkih sistema, mislimo da je uputno u ovom radu da to i detaljno prikažemo, posebno imajući u vidu da fizički procesi kojima se opisuju sistemi opisani običnim diferencijalnim jednačinama i frakcionim diferencijalnim jednačinama nisu uvek komplementarni. Zbog toga, u formalnoj interpretaciji kriterijuma optimalnosti i ograničenja postoje izvesne razlike koje su prema najboljim saznanjima autora prvi put ovde detaljno izložene, te ovi rezultati predstavljaju originalan doprinos autora [1], [2].

U nastavku teksta, pojam mera performansi se često zamenjuje pojmom



Slika 5.1: Proces $G_p(s)$ sa regulatorom $G_c(s)$. Poremećaj je obeležen sa d , šum merenja sa n , upravljački signal sa u i izlaz sistema sa y .

kvantitativni pokazatelj kvalitativnog ponašanja sistema, a termin kriterijum optimalnosti je rezervisan za samu optimizacionu studiju problema i on u sebi može da sadrži više različitih mera performansi.

Zahtevi pri projektovanju regulatora koji će biti analizirani u okviru ove teze odnose se na sistem prikazan na slici 5.1. Interesantno je napomenuti da poremećaj d ne mora izričito da deluje na ulaz procesa nego može da utiče na proces na razne načine. U okviru ove teze bez gubitka opštosti posmatraćemo samo ulazne poremećaje.¹ Što se tiče samog potiskivanja poremećaja ovaj problem je u suštini ono što predstavlja osnovni zadatak kvalitetnog upravljanja, naročito u procesnoj industriji. Kod sistema sa kontrolom kretanja, naglasak je na praćenju referentne vrednosti. Potiskivanje poremećaja se odnosi na ponašanje sistema u ustaljenom stanju. Od značaja je napomenuti da poremećaji koji se javljaju u sistemu najčešće proističu iz signala u kojima dominiraju niske frekvencije, dok na primer signali koji predstavljaju šumove merenja čine najčešće visokofrekventni signali koji imaju nultu srednju vrednost. Šum merenja se ubacuje u sistem upravo putem povratne sprege i kviri informacije o procesnoj promenljivoj koje senzor daje.

Važno je napomenuti da pri analizi ponašanja sistema, odnosno pri projektovanju optimalnih regulatora, da je proces često pod uticajem aktuatora, bili oni ventili, motori ili nešto treće. Aktuatori često u sebi poseduju povratnu spregu i treba voditi računa da, ukoliko je dinamika aktuatora značajna, je treba posmatrati zajedno sa dinamikom procesa, naročito u slučaju ako dinamika aktuatora dominira nad dinamikom procesa.

Imajući u vidu sve ranije navedene činjenice, mogu se posmatrati neki od signala od interesa sa slike 4.1. Naime procesna promenljiva x u Laplasovom

¹Kod linearnih sistema svi poremećaji se mogu svesti na ulazne.

domenu X može se izraziti kao

$$X = \frac{G_p}{1 + G_c G_p} D + \frac{G_c G_p F}{1 + G_c G_p} R - \frac{G_c G_p}{1 + G_c G_p} N, \quad (5.1)$$

gde su D , R i N Laplasove transformacije signala d , r i n respektivno. Druga procesna promenljiva, tj. izlaz sistema y , odnosno Y u Laplasovom domenu je jednostavno

$$Y = X + N, \quad (5.2)$$

odnosno

$$Y = \frac{G_p}{1 + G_c G_p} D + \frac{G_c G_p F}{1 + G_c G_p} R - \frac{1}{1 + G_c G_p} N, \quad (5.3)$$

dok se upravljačka promenljiva u , odnosno U u Laplasovom domenu može izraziti kao

$$U = -\frac{G_c G_p}{1 + G_c G_p} D + \frac{G_c F}{1 + G_c G_p} R - \frac{G_c}{1 + G_c G_p} N. \quad (5.4)$$

Posmatranjem izraza (5.1), (5.3) i (5.4) može se primetiti da uz članove D , R i N stoji ukupno 6 funkcija prenosa u sva tri izraza. Te funkcije su sledeće

$$\frac{G_c G_p F}{1 + G_c G_p}, \quad (5.5)$$

$$\frac{G_c F}{1 + G_c G_p}, \quad (5.6)$$

$$\frac{G_c G_p}{1 + G_c G_p}, \quad (5.7)$$

$$\frac{G_c}{1 + G_c G_p}, \quad (5.8)$$

$$\frac{G_p}{1 + G_c G_p}, \quad (5.9)$$

$$\frac{1}{1 + G_c G_p}. \quad (5.10)$$

Ovih 6 gore navedenih funkcija se u literaturi često nazivaju "Banda šestice" ("Gang of six"). Funkcije (5.5) i (5.6) predstavljaju odzive procesnih promenljivih i upravljanja na referentni signal, dok funkcije (5.7) i (5.8) predstavljaju iste signale samo bez uključenog filtra u direktnoj grani, tj. kad je

funkcija prenosa filtra $F = 1$, odnosno za ove dve funkcije postoji povratna sprega sa čistim signalom greške. Funkcija (5.9) predstavlja reakciju procesne promenljive X i izlaza Y na poremećaj, dok funkcija (5.10) predstavlja reakciju upravljačkog signala na šum merenja. Ako razmatramo sistem koji ima dva stepena slobode, znači i regulator i filter u direktnoj grani, onda se može primetiti da, u poređenju sa sistemom koji ima jedan stepen slobode, se u zatvorenoj povratnoj sprezi dobijaju odzivi koji su brži i koji su često bez preskoka. Sa druge strane, ovakav odziv zahteva značajan upravljački napor, dok to kod sistema sa jednim stepenom slobode nije slučaj. Takođe, sistemi sa filtrom u direktnoj grani često imaju veći propusni opseg i nemaju rezonantni vrh u frekventijskom domenu. Nasuprot ovome, sistemi koji imaju filter u direktnoj grani imaju dosta veće pojačanje na visokim frekvencijama unoseći na taj način šum merenja u sistem.

Ukoliko zanemarimo filter F u direktnoj grani, kojim se direktno utiče na referencu sistema, i ukoliko posmatramo samo odziv sistema na poremećaj, umesto malopre definisanih šest funkcija ponašanje sistema možemo opisati sa tačno četiri funkcije, tj. (5.7) i (5.8), (5.9), (5.10), koje se u ovom slučaju nazivaju “banda četvork” (“*Gang of four*”). Ove četiri funkcije će biti definisane u nastavku poglavlja.

5.1 Ocena kvaliteta regulacije

Da bi se za regulator koji upravlja procesom moglo reći da je kvalitetan bez obzira na njegovu strukturu on svakako mora zadovoljiti sledeće zahteve:

1. Regulator mora biti takav da se poremećaj u sistemu mora “brzo” priгуšiti;
2. Regulator mora biti takav da bez obzira na razumnu nepreciznost modela ne dolazi do nestabilnosti sistema;
3. Regulator mora biti takav da se aktuator ne troši previše.

Prvi zahtev se odnosi na činjenicu da se u gotovo svakom sistemu vrlo lako može desiti poremećaj, to jest neka nagla promena ponašanja sistema usled nekog spoljnog faktora. U analizi sistema uglavnom se takvi poremećaji posmatraju kao niskofrekventni poremećaji. Ukoliko se takav poremećaj desi, regulator treba da bude u stanju da odreaguje na takav način da sistem nesmetano nastavi da se ponaša kao i pre pojave poremećaja. Utoliko je bolje

ako regulator uspe ovu akciju da obavi relativno brzo. Ovaj zahtev se direktno odnosi na performanse sistema. Performanse sistema opisuju se nekim kvantitativnim pokazateljima kvaliteta sistema koji mogu biti veoma različiti. Najčešći kvantitativni pokazatelj performansi sistema je integral apsolutne greške (IAE) koji se definiše kao

$$IAE = \int_0^{\infty} |e(t)| dt. \quad (5.11)$$

Vrlo je intuitivna fizička predstava malopre navedene mere performanse sistema. Bezmalo jednako zastupljen kriterijum za kvantitativno merenje kvaliteta sistema predstavlja Integral greške (IE) koji se definiše kao

$$IE = \int_0^{\infty} e(t) dt. \quad (5.12)$$

Ove dve mere performansi sistema su u uskoj sprezi, a čak se za njih može tvrditi i da su približno jednake ukoliko se govori o sistemima koji se ne ponašaju oscilatorno. Takođe, opšte je poznato da je za slučaj kada je regulator u formi klasičnog PID regulatora, vrednost IE obrnuto proporcionalna integralnom dejstvu regulatora k_i .

Naravno, moguće je uvesti i druge kvantitativne mere kvaliteta sistema. Prvo ćemo uvesti funkciju osetljivosti na poremećaj [8]

$$S_v(s) = \frac{G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)}, \quad (5.13)$$

koja predstavlja jednu od funkcija iz “bande četvorke”, konkretno (5.8). Ova funkcija pokazuje zavisnost signala poremećaja i izlaza sistema.

Ukoliko se razmatra izlaz sistema u zavisnosti od poremećaja oblika odskočne funkcije, narednu meru kvaliteta odziva možemo posmatrati kao poseban slučaj kvantitativne mere kvaliteta sistema (5.13). Ta kvantitativna ocena kvaliteta odziva u smislu potiskivanja niskofrekventnih poremećaja se definiše kao

$$J_v = \max_{s \geq 0} \left| \frac{1}{s} S_v(s) \right| = \max_{s \geq 0} \left| \frac{\frac{G_p(s)}{s}}{1 + G_c(s)G_p(s)} \right|. \quad (5.14)$$

Ova mera predstavlja alternativu u frekvencijskom domenu gore pomenutim merama performansi. Kada regulator u sebi poseduje integralno dejstvo, važi $G_c(s)G_p(s) \gg 1$ i $\frac{G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)} \approx G_c(s)^{-1} \approx \frac{s}{k_i}$ u niskofrekventnom opsegu.

Na osnovu prethodne činjenice, vidi se da je $J_v \approx 1/k_i$, što važi bez obzira na model procesa kojim se upravlja. Takođe, postoji bliska povezanost između J_v i k_i . Kako k_i predstavlja presek sa frekvencijskom osom niskofrekventne asimptote funkcije osetljivosti na poremećaj $|S_v(j\omega)|$, a $1/J_v$ predstavlja presek frekvencijske ose sa tangentom na $|S_v(j\omega)|$ u istom pravcu ove dve vrednosti su obično veoma bliske. Prednost J_v u odnosu na k_i je u činjenici da se k_i odnosi samo na niskofrekventni opseg, dok se J_v odnosi na niskofrekvencijski i srednjefrekvencijski opseg [24].

Interesantna činjenica je da se mera performansi J_v sa malim modifikacijama može posmatrati kao ograničenje na rezonantni vrh frekvencijske karakteristike. Definišimo ovu meru performanse kao

$$Q_v(j\omega) = S_v(j\omega) \frac{1}{j\omega}. \quad (5.15)$$

Jasno je da je $Q_v(0) = \frac{1}{k_i}$. Takođe, očigledna je veza između $J_v(j\omega)$ i $Q(j\omega)$

$$J_v(j\omega) = \max_{\omega \geq 0} |Q_v(j\omega)|. \quad (5.16)$$

Sada možemo definisati kvantitativnu meru kvaliteta sistema Q [21]

$$Q = \frac{\max_{\omega \geq 0} Q_v(j\omega)}{Q(0)} = \max_{\omega \geq 0} \left| \frac{k_i \frac{G_p(j\omega)}{j\omega}}{1 + G_c(j\omega)G_p(j\omega)} \right|_{\omega=\omega_q}. \quad (5.17)$$

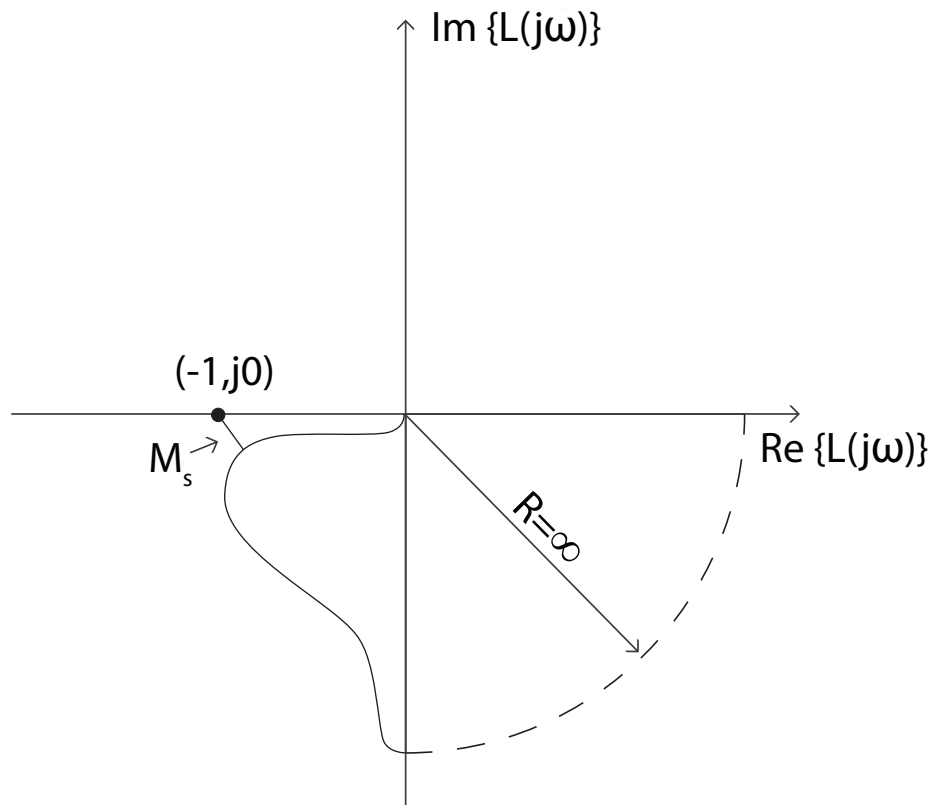
Q predstavlja funkciju koja ograničava rezonantni vrh frekvencijske karakteristike sistema. Ograničavajući $Q \approx 1.01$ moguće je dobiti “male”, tj. prihvatljive vrednosti IAE. Vrednost $Q = 1.01$ je dobijena eksperimentalno pomoću velikog broja simulacija [21].

Drugi zahtev odnosi se na robusnost sistema pod uticajem pogrešnih pretpostavki o modelu sistema. Najčešća mera robusnosti sistema jeste maksimalna osetljivost M_s koja se definiše kao

$$M_s = \max_{\omega \geq 0} \left| \frac{1}{1 + G_c(j\omega)G_p(j\omega)} \right|_{\omega=\omega_s}. \quad (5.18)$$

M_s predstavlja inverznu vrednost minimalne udaljenosti Nikvistove krive od kritične tačke $(-1, 0j)$. Obično se u širem opsegu uzima da su adekvatne vrednosti maksimalne osetljivosti između 1 i 2, mada se u dosta slučajeva pokazalo da se najbolje performanse za većinu sistema dobijaju pri vrednostima M_s između 1.7 i 2. U velikom broju slučajeva maksimalna osetljivost

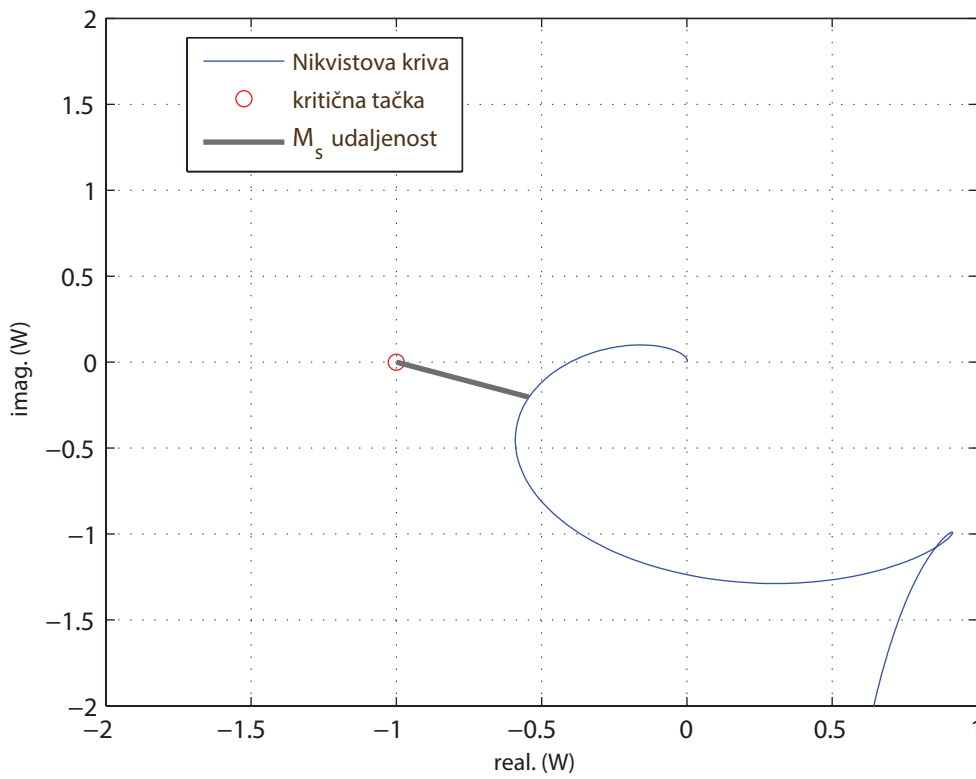
predstavlja dovoljnu meru robusnosti sistema na srednjim frekvencijama. Alternativne mere kao što su pretek faze ψ_m i pretek pojačanja G_m , eliminisane su u daljim analizama, tako da se M_s često može posmatrati kao ekskluzivna mera robusnosti. Razlog zašto se maksimalna osetljivost često uzima kao ekskluzivna mera robusnosti je ilustrovan na slici 5.2, odakle se vidi da iako sistem ima velik pretek faze i pojačanja, da je vrednost maksimalne osetljivosti prilično mala i da je iz tog razloga sistem prilično lako destabilizovati.



Slika 5.2: Nikvistova kriva proizvoljne funkcije povratnog prenosa sa velikim pretekom faze i pojačanja, a malom vrednosti M_s .

Druga značajna mera robusnosti sistema je maksimalna komplementarna osetljivost M_p koja se definiše kao

$$M_p = \max_{\omega \geq 0} \left| \frac{G_c(j\omega)G_p(j\omega)}{1 + G_c(j\omega)G_p(j\omega)} \right|_{\omega=\omega_p}. \quad (5.19)$$



Slika 5.3: Grafički prikaz Maksimalne osetljivosti M_s za proizvoljan proces

Ova mera se dodaje u kvalitativnu analizu ponašanja sistema po pitanju robusnosti na srednjefrekvencijskom opsegu ukoliko se želi postići veće prigušenje sistema ili dobiti veći pretek faze bez dobijanja sporijeg odziva. Ovo se naročito odnosi na nestabilne procese koje u sebi imaju integralni član.

Treći zahtev koji se nameće na sistem podrazumeva da promena upravljanja sistema ne sme biti nagla, niti bi samo upravljanje trebalo često da osciluje. U određivanju optimalnog regulatora koji ispunjava neke od ranije pomenutih zahteva ili performansi, te performanse se najčešće uzimaju kao kriterijum optimalnosti. Naravno, ne mora jedan pokazatelj ponašanja da čini kriterijum optimalnosti, već je moguće i forimirati isti kombinacijom više mera performansi sistema. Da bi se ispunio treći uobičajeni zahtev nametnut na sistem, često se modifikuje kriterijum optimalnosti koji u sebi sadrži pokazatelje ponašanja poput (5.12) ili (5.11). U tom slučaju, novoformirani

kriterijum optimalnosti koji eksplicitno zavisi od signala upravljanja može da izgleda npr. kao

$$IEU = \int_0^{\infty} |e(t)^2 + \rho u(t)^2| dt. \quad (5.20)$$

U ovako formiranom kriterijumu optimalnosti, ρ predstavlja koeficijent koji kažnjava promenu upravljanja. Za $\rho < 1$, pridajemo veći značaj signalu greške, za $\rho = 1$ dajemo isti značaj signalu greške i upravljačkom signalu, dok za $\rho > 1$ pridajemo veći značaj upravljačkom signalu. Podrazumeva se da su e , ρ i u fizički usaglašene veličine. Sa stanovišta primene u praksi veliki intezitet upravljanja, kao i nagle promene upravljačke veličine dovode do “trošenja” akutuatora, velike potrošnje energije, a sa stanovišta PID upravljanja znatno otežavaju predikciju primenom D dejstva. Napominjemo da određivanje parametra ρ predstavlja problem sam za sebe [60].

Naredna važna karakteristika je međusobni uticaj D dejstva i šuma merenja koji se javlja na visokim frekvencijama, a za kvantitativnu ocenu tog šuma obično se koristi funkcija iz “bande četvorke” (5.8) u frekvencijskom domenu gde se razmatra njeno ponašanje na visokim frekvencijama. S tim u vezi, definiše se maksimalna osetljivost na šum merenja kao

$$M_n = \max_{\omega \geq 0} \left| \frac{-G_c(j\omega)}{1 + G_c(j\omega)G_p(j\omega)} \right| \quad (5.21)$$

Vrednost M_n , u stvari, predstavlja maksimalnu vrednost funkcije prenosa od signala šuma merenja do upravljačkog signala. Veoma lako je pokazati da za regulator koji ima u sebi klasično diferencijalno dejstvo, filter prvog reda ograničava pojačanje šuma merenja na razumnu meru. Važno je napomenuti da je funkcija prenosa od šuma do upravljačkog signala

$$G_{un}(s) = \frac{U(s)}{N(s)} \Big|_{D(s)=0} = \frac{-G_c(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)}. \quad (5.22)$$

Dalje, ako se razmotri ponašanje ove funkcije prenosa kako frekvencija raste i na osnovu (4.4) lako se može dobiti

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G_{un}(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{-\frac{k_d}{T_f}}{1 + \frac{k_d}{T_f}G_p(j\omega)} = -\frac{k_d}{T_f}. \quad (5.23)$$

Kao što je već napomenuto, izraz (5.22) predstavlja funkciju osteljivosti na šum merenja. Znak minus ispred pojačanja na visokim frekvencijama je zbog

negativne povratne sprege. Poznata je činjenica da za sistem koji poseduje regulator oblika (4.3) i proces (velika većina industrijskih procesa je u pitanju) osetljivost na šum merenja raste sa porastom frekvencije. Stoga, može se izvesti sledeći identitet

$$M_n = \max_{\omega \geq 0} |G_{un}(s)|, \quad (5.24)$$

tj.

$$M_n = \frac{k_d}{T_f}. \quad (5.25)$$

Poslednji izraz pokazuje da filtar reda istog kao i diferencijalno dejstvo ograničava pojačanje šuma na visokim frekvencijama na tačno $\frac{k_d}{T_f}$. Postoje tvrđenja da je za regulator tipa klasičnog PID-a potrebno imati filtar drugog reda [9]. Naravno, treba voditi računa o tome da uvođenje filtara višeg reda ima negativan uticaj na robusnost sistema.

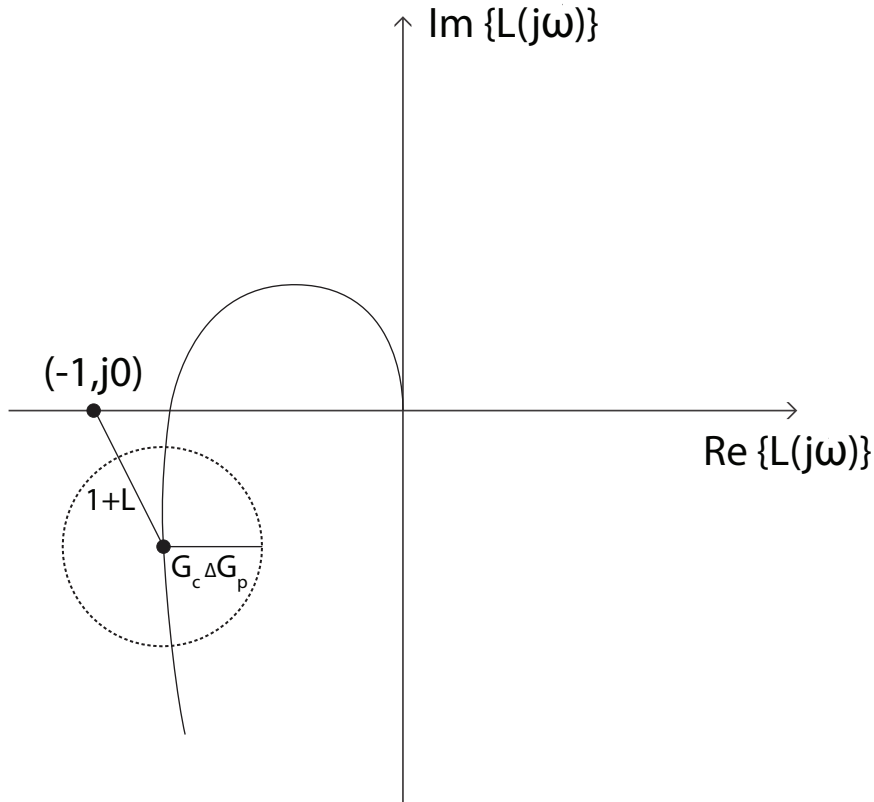
5.1.1 Varijacije procesa

Pod varijacijom sistema u opštem slučaju podrazumevamo promene u parametrima $G_p(s)$, $D(s)$, $N(s)$ koje nisu bile predviđene pretpostavljenim matematičkim modelom. U ovom odeljku biće razmatran relativni uticaj varijacije procesa na ukupnu dinamiku sistema, odnosno na projektovanje regulatora u slučaju da varijacije procesa postoje. Kao i u prethodnom poglavlju, pokušaćemo kvantitativno da opišemo promene u $G_p(s)$, $D(s)$, $N(s)$ i da to transformišemo u kvantitativnu meru koja će biti deo kriterijuma optimalnosti, odnosno ograničenje pri projektovanju regulatora. Cilj nam je da meru performanse (5.18) jednostavno prebacimo u formu koja će nam biti pogodna za dalju analizu. Osetljivost sistema u zatvorenoj povratnoj sprezi umnogome zavisi od varijacija u dinamici procesa. Naravno, najveća mana sistema u zatvorenoj povratnoj sprezi je nestabilnost sistema. Kao što je već ranije napomenuto, najveća osetljivost funkcije definisana je kao (5.18), odnosno M_s i predstavlja inverznu vrednost minimalne udaljenosti Nikvistove krive od kritične tačke $(-1, 0j)$. U slučaju varijacije procesa umesto procesa G_p posmatraćemo proces $G_p + \Delta G_p$, gde ΔG_p predstavlja promenu, tj. varijaciju procesa. Tada se funkcija povratnog prenosa menja, pa je umesto $G_p G_c$ označavamo sa $G_c \Delta G_p + G_c G_p$. $L(j\omega)$ predstavlja amplitudno-fazno frekvencijsku karakteristiku sistema, odnosno Nikvistovu krivu na intervalu učestanosti od 0 do ∞ . Rastojanje od kritične tačke $(-1, 0j)$ do bilo koje tačke L na krivi $L(j\omega)$ je $|1 + L|$. Nikvistova kriva procesa sa perturbacijma neće dostići kri-

tičnu tačku $(-1, 0j)$ ako važi

$$|G_c \Delta G_p| < |1 + L|. \quad (5.26)$$

Ovo je ilustrovano na slici 5.4.



Slika 5.4: Nikvistova kriva procesa i dozvoljena varijacija procesa za koju sistem ostaje stabilan

Naravno, podrazumeva se da ovaj uslov mora da važi za sve tačke na Nikvistovoj krivi. Moguće je posednji uslov zapisati kao

$$\frac{|G_c \Delta G_p|}{|G_c G_p|} < \frac{|1 + L|}{|L|}, \quad (5.27)$$

odnosno

$$\frac{|\Delta G_p|}{|G_p|} < \frac{1}{M_p}, \quad (5.28)$$

tako da se iz poslednje jednačine jasno vidi opravdanje za uvođenje maksimuma komplementarne funkcije osetljivosti kao direktne mere robusnosti sistema na varijacije u procesu, koja garantuje da sistem neće postati nestabilan ukoliko nije zadovoljen poslednji uslov.

Lako se može zaključiti da varijacije procesa mogu biti velike na onim frekvencijama na kojim je funkcija komplementarne osetljivosti mala i obrnuto, tj. varijacije procesa mogu biti male tamo gde je funkcija komplementarne osetljivosti velika.

5.2 Kriterijumi optimalnosti

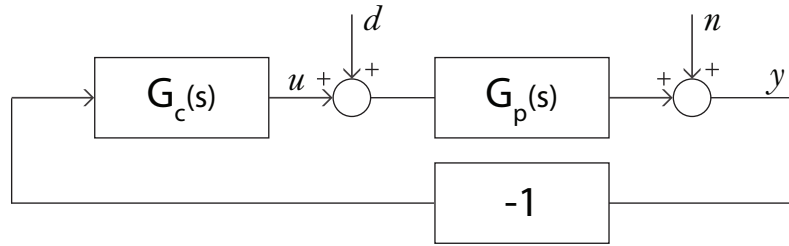
U okviru ovog poglavlja i nekih koje slede želimo da vidimo da li sa stanovišta projektovanja optimalnih regulatora (optimalnih parametara regulatora) postoje modifikacije u kvantitativnim merama kvaliteta poput IAE, IE, M_s , M_n , M_p pod pretpostavkom da su G_p i G_c necelog reda. Sigurno je da se po pitanju zahteva u smislu kvaliteta ponašanja sistema neće ništa promeniti (5.1). Cilj ovog poglavlja je da vidimo da li će matematička formulacija problema pretrpeti neku izmenu u slučaju postojanja frakcione dinamike. Prema najboljem saznanju autora, ovakva analiza ne postoji u dostupnoj literaturi i ovo predstavlja svojevrsni originalni doprinos u ovoj oblasti [1], [2]. Primera radi pokazali smo da je optimizacija integrala greške IE obrnuto proporcionalna optimizaciji integralnog pojačanja k_i . Pitanje je da postojanje necelih izvoda na integratoru drugačije definiše optimizacioni problem.

5.2.1 IAE i IE

Uzimajući u obzir činjenice iznesene u odeljku 5.1 za projektovanje optimalnog regulatora, potrebno je odlučiti se koji od zahteva regulator treba da zadovolji. U svakom slučaju, bez obzira kakav optimalan regulator treba da bude potrebno je formirati kriterijum optimalnosti, kao i ograničenja koja treba da budu postavljena pred regulator, odnosno sistem kojim regulator upravlja.

U literaturi, najčešće korišćeni kriterijumi optimalnosti su između ostalih minimizacija integrala apsolutne greške - IAE, te minimizacija integrala greške - IE koji se vrlo često poistovećuje sa maksimizacijom integralnog pojačanja kod regulatora oblika sličnih PID regulatoru.

Svakako, IAE ima veoma jasnu fizičku interpretaciju i predstavljen je izrazom (5.11). Takva činjenica se može izneti i za IE, koji je dat sa (5.12).



Slika 5.5: Proces $G_p(s)$ sa regulatorom $G_c(s)$. Poremećaj je obeležen sa d , šum merenja sa n , upravljački signal sa u i izlaz sistema sa y .

Ova dva kriterijuma optimalnosti u obliku (5.11) i (5.12) eksplicitno zavise od vremena. Sa aspekta rešavanja optimizacionih problema postoje poteškoće ukoliko sam optimizacioni problem zavisi i od vremena i od njegove analize u frekvencijskom domenu (deo koji može da se uvede npr. kroz ograničenja). Zaista, ovo je u praksi i najčešći slučaj. Stoga je potrebno, ukoliko je moguće, svesti kriterijum optimalnosti koji zavisi eksplicitno od vremena na optimizaciju nekog parametra koji je vremenski nezavisan.

Posmatrajmo sistem automatskog upravljanja sa slike 5.5 i pretpostavimo bez gubljenja opštosti da je regulator u formi frakcionog PID-a, koja je svakako opštija od klasičnog PID regulatora, dat u obliku (4.16) sa funkcijom prenosa procesa u obliku (4.17), gde je α red integratora, takav da $\alpha \in \mathbb{R}$. Ukoliko sada za sistem sa slike 5.5 pretpostavimo da su $n = 0$ i $d = 1$ tada možemo tvrditi

$$I^\delta E = \lim_{t \rightarrow \infty} {}_0I_t^\delta e = \begin{cases} 0 & \delta < \alpha \\ -\frac{1}{k_i} & \delta = \alpha \\ -\infty & \delta > \alpha \end{cases}, \quad (5.29)$$

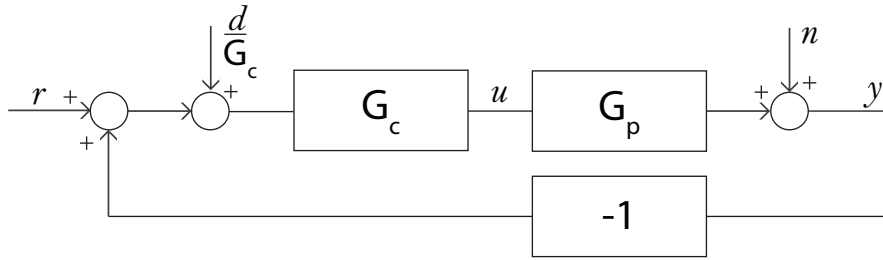
gde je δ neki realan broj.

Ova tvrdnja proističe iz činjenice da se uz pretpostavke (4.16) i (4.17) može pokazati da važi

$$Y(s) = \frac{k_p s^{\alpha-1} G_{p0}(s)}{s^{\alpha+\gamma} + k_i k_p G_{c0}(s) G_{p0}(s)}. \quad (5.30)$$

Tada se na osnovu Druge granične teoreme Laplasove transformacije i činjenice da je Laplasova transformacija frakcionog integrala stepena δ

$$\mathcal{L}\{{}_0I_t^\delta y; s\} = \frac{1}{s^\delta} Y(s). \quad (5.31)$$



Slika 5.6: Proces G_p sa regulatorom G_c . Izmenjen blok dijagram sa slike 5.5 da bi se poremećaj smestio u superpoziciju sa signalom reference.

lako može pokazati

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} {}_0I_t^\delta y &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s^\delta} \frac{k_p s^{\alpha-1} G_{p0}(s)}{s^{\alpha+\gamma} + k_i k_p G_{c0}(s) G_{p0}(s)} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{k_i} s^{\alpha-\delta}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Veoma je lako poslednji izraz povezati sa klasičnim PID regulatorom, naravno uzimajući u obzir da je kod njega u pitanju $\delta = 1$ tj. da se prethodni izraz svodi na graničnu vrednost (*limes*) klasičnog integrala. Uzimajući u obzir da je red astatizma kod klasičnog PID regulatora jednak $\alpha = 1$, jasno je da se u tom slučaju dobija

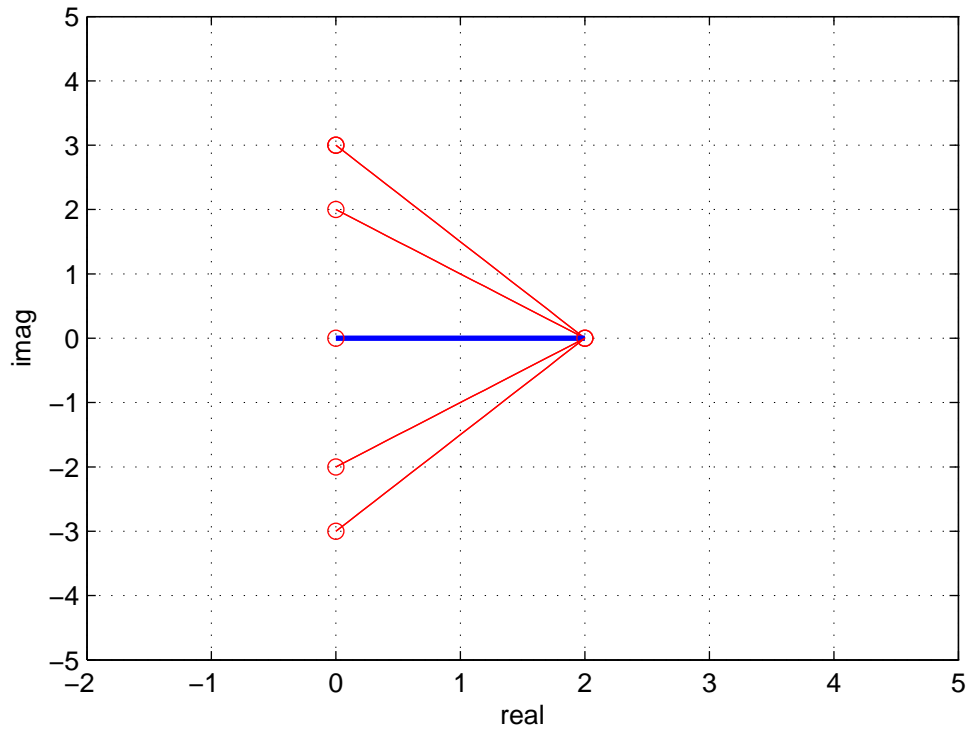
$$IE = \frac{1}{k_i}. \quad (5.33)$$

Što se tiče regulatora distribuiranog reda (DOPID-a), bilo u formi (4.31) ili (4.36), najznačajniji inegrator je reda 1 što govori da i za DOPID važi (5.33).

5.2.2 Maksimizacija proporcionalnog dejstva

Razmatrajući sistem sa slike 5.5, može se doći do zaključka da, ukoliko se poremećaj d postavi u superpoziciju sa referentnim signalom, dobijamo da se signal poremećaja mora posmatrati u formi d/G_c da bi sistem posedovao istu funkciju prenosa kao i do sada. Ova modifikacija je ilustrovana na slici 5.6.

Zbog toga što je zadatak kvalitetnog regulatora da potisne poremećaj u odnosu na referentni signal, jasno je da je potrebno da regulator ima što veće vrednosti na svim frekvencijama uz pretpostavku da sistem automatskog upravljanja ostaje stabilan. Regulator G_c će svakako za neku vrednost ω_m imati minimalno potiskivanje poremećaja. Ukoliko se ta vrednost učini što većom, regulator će svakako imati bolje karakteristike.



Slika 5.7: Vrednost amplitude za različite vrednosti pojačanja dejstava klasičnog PID regulatora: plava linija označava najmanju vrednost amplitude.

Razmotrimo sad regulator u formi klasičnog PID regulatora datog izrazom (4.2). Jasno je da se minimalna vrednost amplitude ovakvog regulatora dobija za vrednost regulatora kod koga je imaginarni deo jednak nuli,

$$\min |G_{pid}(j\omega_m)| = \min \left| k_p + \frac{k_i}{j\omega_m} + k_d j\omega_m \right|, \quad (5.34)$$

tj.

$$\min |G_{pid}(j\omega_m)| = \min \left| k_p + j \left(k_d \omega_m - \frac{k_i}{\omega_m} \right) \right|. \quad (5.35)$$

Iz poslednjeg izraza vidi se da je minimalna vrednost amplitude regulatora jednaka tačno k_p i to na frekvenciji

$$\omega_m = \sqrt{\frac{k_i}{k_d}}. \quad (5.36)$$

Isto je ilustrovano na slici 5.7, gde je plavom bojom obeležena najmanja vrednost amplitude PID regulatora (4.2), tj. ona vrednost koju regulator ima na frekvenciji na kojoj je vrednost imaginarnog dela jednaka nuli. Crvenom bojom su obeležene neke od ostalih vrednosti amplitude regulatora na frekvencijama gde je imaginarni deo različit od nule.

Iz prethodne analize jasno se vidi da maksimizacija proporcionalnog dejstva kod klasičnog PID regulatora može značajno popraviti karakteristike sistema u smislu potiskivanja poremećaja.

5.2.3 Maksimizacija amplitudske karakteristike regulatora

Na osnovu analize iznete u odeljku 5.2, očigledno je da PID regulator treba da ima što veću vrednost amplitude na svim frekvencijama da bi što više potisnuo poremećaj u sistemu. Isti zaključak može se izvesti i za FPID i DOPID regulatore, što jasno proizilazi iz činjenice da ukoliko se za sistem automatskog upravljanja sa slike 4.2 poremećaj d postavi u superpoziciju sa referentnim signalom, tada se taj signal mora posmatrati kao d/G_c da bi funkcija prenosa od izlaza do signala poremećaja imala istu formu kao u osnovnom obliku, tj. da bi se zadržalo stanje $Y(s) = \frac{G_p(s)}{1+G_r(s)G_p(s)}D(s)$. Svakako, na osnovu ove činjenice, jasno je da bez obzira na oblik regulatora njegova amplitudska karakteristika treba biti što veća na svim frekvencijama, da bi regulator što bolje potiskivao poremećaj, naravno uz ograničenje da sistem automatskog upravljanja ostane stabilan.

Da bi pronašli frekvenciju za koju regulator ima minimalnu vrednost amplitude, za razliku od klasičnog PID regulatora, kod FPID i DOPID regulatora ne možemo eksplicitno posmatrati realni i imaginarni deo funkcije prenosa regulatora u frekvencijskom domenu iz razloga što ovi regulatori poseduju članove koji nemaju čisto imaginarne delove, već npr. $(j\omega)^\alpha$. Posledično, kod ovih regulatora, ne možemo eliminisati eksplicitnu zavisnost u kriterijumu optimalnosti od frekvencije kao kod klasičnog PID regulatora, gde možemo maksimizovati k_p . U ovom slučaju moramo maksimizovati minimum amplitude regulatora na svim frekvencijama, tj.

$$KritOpt = \max(\min(|G_c(j\omega)|)) . \quad (5.37)$$

5.2.4 Maksimizacija linearne kombinacije pokazatelja ponašanja

Još jedan kompleksni kriterijum optimalnosti može biti maksimizacija linearne kombinacije kriterijuma performansi, naime kombinacija maksimizacije integralnog pojačanja i propusnog opsega sistema u zatvorenoj povratnoj sprezi. Ovaj kriterijum može se definisati kao

$$J_c = \sigma k_i + (1 - \sigma)\omega_s, \quad (5.38)$$

gde je ω_s frekvencija na kojoj se ostvaruje maksimalna vrednost funkcije osetljivosti. Izraz (5.38) može se posmatrati kao kriterijum koji ostvaruje kompromis između performansi sistema poput IE i robusnosti sistema. Podešavanjem ponderišućeg parametra σ koji uzima vrednosti između 0 i 1 ostvaruje se različita vrednost odnosa između ovih mera sistema. Suštinski, ovaj problem se može posmatrati tako da pravilan izbor parametra σ obezbeđuje minimalno IE uz zadovoljavanje ograničenja na robusnost sistema.

5.2.5 Maksimizacija linearne kombinacije amplitudske karakteristike regulatora i propusnog opsega

Moguće je uvesti još jedan alternativni kriterijum kao što je

$$J_c = \max \left\{ \sigma \min(|G_c(j\omega)|) + (1 - \sigma)\omega_s \right\}. \quad (5.39)$$

Ovaj kriterijum predstavlja linearnu kombinaciju već ranije pomenutog kriterijuma maksimizacije amplitudske karakteristike regulatora i maksimizacije propusnog opsega. Kao i kod ostalih kombinovanih kriterijuma predstavljenih do sada u ovoj disertaciji, σ predstavlja faktor uticaja bilo jednog bilo drugog dela ove linearne kombinacije. Naravno, ukoliko je $\sigma = 1$, kriterijum se svodi na maksimizaciju amplitudske karakteristike regulatora, a ukoliko je $\sigma = 0$ kriterijum se svodi na maksimizaciju propusnog opsega. Svakako je neophodno odabrati takvo σ da se ostvari najbolji kompromis između mera performansi i robusnosti koje u optimizaciju mogu biti uključeni i kroz ograničenja.

5.2.6 Frekvencijski kriterijum kao alternativa uobičajenim vremenskim kriterijumima

Optimizacioni problem može se postaviti na dva načina, u vremenskom i u frekvencijskom domenu, a numerička studija problema u vremenskom domenu

je značajno teža, stoga smo se opredelili da numeričku studiju problema sprovedemo na kvantitativnim pokazateljima kvaliteta u frekvencijskom domenu gde god je to bilo moguće. U radu [24] je uveden jedan ovakav kriterijum koji predstavlja frekvencijsku alternativu uobičajenim kriterijumima u vremenskom domenu poput IAE i IE. Ovaj kriterijum je već definisan u sklopu ove disertacije kao (5.14). Svakako, poput kriterijuma u vremenskom domenu i ovde je potrebno minimizovati predloženi kriterijum.

5.3 Formulacija optimizacionog problema

Svi prethodno spomenuti kriterijumi optimalnosti obično se u analizi i projektovanju optimalnih regulatora ne razmatraju nezavisno od nekih ograničenja na mere performanse sistema i na mere robusnosti sistema. Još jednom napominjemo da je rezultat projektovanja kvalitetnog regulatora takav regulator koji u pravoj meri ostvaruje kompromis između performansi i robusnosti sistema. U zavisnosti od vrste kompromisa koji je poželjno ostvariti pri projektovanju optimalnih regulatora, uzimaju se u obzir različite kombinacije kriterijuma optimalnosti i ograničenja. Svakako, elementi koji su već navedeni kao mere performansi i robusnosti poput maksimalne osetljivosti na šum merenja M_n , maksimalne osetljivosti M_s , maksimalne komplementarne osetljivosti M_p , ograničenja na rezonantni vrh Q dodaju se kao ograničenja u postavljenu optimizacioni problem. Važno je voditi računa i o tome da za sam postupak projektovanja optimalnog regulatora, u zavisnosti od kriterijuma optimalnosti, treba da se uzimaju samo neka od ograničenja koja se mogu razmatrati u teoriji problema. Na primer, ukoliko se razmatra kriterijum (??) mogu se u optimizacioni problem uvesti ograničenja na M_s i na M_n , dok se recimo ograničenje na Q ne mora uvoditi zbog mogućnosti samog kriterijuma (??), odnosno njegovog dela koji se odnosi na negativan odziv, da smanji rezonantni vrh. Nasuprot tome, za kriterijum IAE je poželjno uzeti npr. ograničenja na M_s , M_n i Q ili M_s , M_n i M_p . Takođe, moguće je u procesu projektovanja regulatora uvesti i neka ograničenja koja su jednostavnija, a odnose se na ograničavanje parametara regulatora sa donje ili gornje strane. Uprkos uvođenju svih ovih ograničenja, moguće je da se dobije optimalni regulator koji saopštava optimalnu vrednost sistemu, ali da sistem bude nestabilan u zatvorenoj sprezi. Iz ovoga razloga je potrebno i o tome voditi računa. Svakako se mogu razmatrati različite mere stabilnosti sistema koje obezbeđuju da je sistem u zatvorenoj povratnoj sprezi stabilan.

Optimizacioni problemi

U ovom odeljku biće dat pregled optimizacionih problema i njihove postavke. Takođe, neki od postupaka optimizacije će biti detaljno objašnjeni.

U našim razmatranjima polazimo od raznorodnih funkcija prenosa i struktura regulatora (PID, FPID, DOPID). Cilj nam je da u pretpostavljenom profilu upravljanja odredimo optimalne vrednosti parametara (konstante regulatora i redove diferintegratora). Pri tome, definisaćemo 11 optimizacionih problema, gde su pokazatelji ponašanja sistema iz Poglavlja 5 korišćeni kao kriterijumi optimalnosti i/ili ograničenja. Tako npr. u prvom optimizacionom problemu maksimizujemo pojačanje proporcionalnog člana DOPID regulatora pod ograničenjima na M_s i Q .

Da bi se mogao analizirati kvalitet nekog regulatora, potrebno je videti njegov uticaj na široku klasu procesa. Procesi obuhvaćeni ovim istraživanjem

su sledeći:

$$\begin{aligned}
 G_{p1}(s) &= \frac{1}{(s+1)^4}, \\
 G_{p2}(s) &= \frac{1}{\prod_{k=0}^3 (0.7^k s + 1)}, \\
 G_{p3}(s) &= \frac{e^{-5s}}{(s+1)^3}, \\
 G_{p4}(s) &= \frac{-\ln(s)}{s(s+1)}, \\
 G_{p5}(s) &= \frac{1}{s(s+1)^4}, \\
 G_{p6}(s) &= \frac{1}{\prod_{k=0}^3 s(0.7^k s + 1)}, \\
 G_{p7}(s) &= \frac{e^{-5s}}{s(s+1)^3}, \\
 G_{p8}(s) &= \frac{1}{\sqrt{s}(s+1)^2}, \\
 G_{p9}(s) &= \frac{1}{\cosh(\sqrt{2s})}, \\
 G_{p10}(s) &= \frac{-\ln(s)}{s}, \\
 G_{p11}(s) &= \frac{-(1-s)\ln(s)}{(s+1)^3}, \\
 G_{p12}(s) &= \frac{-(1-s)\ln(s)}{(s+1)^2}, \\
 G_{p13}(s) &= \frac{(0.5s + 0.1\sqrt{s} - 1)\ln(s)}{(\sqrt{s} + 1)^3}.
 \end{aligned}$$

Prva tri procesa predstavljaju proces sa uporedivim uticajem vremenskog i faznog kašnjenja, proces sa dominantnim uticajem faznog kašnjenja, te proces sa dominantnim uticajem vremenskog kašnjenja. Ovi procesi su najčešće korišćeni za evaluaciju klasičnih PID regulatora pri njihovom projektovanju, a mogu se pronaći i u radovima [20], [24], [61]. Ostali procesi predstavljaju

različite frakcione procese za koje se očekuje da DOPID regulator ima bolja svojstva u odnosu na klasični PID regulator. Beskonačno dimenzioni procesi koji imaju članove $e^{-\sqrt{s}}$ i $\cosh(s)$ su česti u opisu sistema sa distribuiranim parametrima [62], [63], dok se procesi koji sadrže logaritamski član $\ln(s)$ u funkciji prenosa mogu naći u procesima distribuiranog reda [64].

Moguće je razmotriti široku klasu optimizacionih problema, koji sadrže različitu kombinaciju zahteva koji su postavljeni pred regulator. Neki od njih će biti navedeni u nastavku.

6.1 Optimizacioni problem 1 (DOPID)

Potrebno je projektovati optimalni regulator u formi

$$G_{\text{DOPID},7}(s) = \frac{1}{sT_f + 1} \left(k_0 \frac{1}{s} + k_1 \frac{1}{s^{2/3}} + k_2 \frac{1}{s^{1/3}} + k_3 + k_4 s^{1/3} + k_5 s^{2/3} + k_6 s \right),$$

koji eliminiše poremećaj tipa jediničnog odskočnog signala za sistem sa slike 4.2. Optimizacioni problem je u formi

$$\max_{k_0, k_1, \dots, k_6, \omega_q, \omega_s} k_3, \quad (6.1)$$

sa ograničenjima

$$\text{sistem u zatvorenoj povratnoj sprezi je stabilan,} \quad (6.2)$$

$$T_f = \frac{k_d}{M_n^{\max}}, \quad (6.3)$$

$$M_s = \left| \frac{1}{1 + G_c(j\omega)G_p(j\omega)} \right|_{\omega=\omega_s} \leq M_s^{\max}, \quad (6.4)$$

$$Q = \left| \frac{k_i \frac{G_p(j\omega)}{j\omega}}{1 + G_c(j\omega)G_p(j\omega)} \right|_{\omega=\omega_q} \leq Q^{\max}, \quad (6.5)$$

$$k_i \geq k_i^{\min}, i \in \{0, \dots, N-1\}. \quad (6.6)$$

U ovakvoj formi pojačanje DOPID regulatora k_3 odgovara pojačanju proporcionalnog člana, tako da ovaj optimizacioni problem predstavlja maksimizaciju proporcionalnog člana.

6.2 Optimizacioni problem 2 (DOPID)

Optimizacioni problem 2 predstavlja projektovanje optimalnog regulatora u formi

$$G_{\text{DOPID},7}(s) = \frac{1}{sT_f + 1} \left(k_0 \frac{1}{s} + k_1 \frac{1}{s^{2/3}} + k_2 \frac{1}{s^{1/3}} + k_3 + k_4 s^{1/3} + k_5 s^{2/3} + k_6 s \right),$$

koji eliminiše poremećaj tipa jediničnog odskočnog signala za sistem sa slike 4.2. Optimizacioni problem je u formi

$$\max_{k_0, k_1, \dots, k_6, \omega_q, \omega_s} k_0, \quad (6.7)$$

sa ograničenjima

$$\text{sistem u zatvorenoj povratnoj sprezi je stabilan,} \quad (6.8)$$

$$T_f = \frac{k_d}{M_n^{\max}}, \quad (6.9)$$

$$M_s = \left| \frac{1}{1 + G_c(j\omega)G_p(j\omega)} \right|_{\omega=\omega_s} \leq M_s^{\max}, \quad (6.10)$$

$$Q = \left| \frac{k_i \frac{G_p(j\omega)}{j\omega}}{1 + G_c(j\omega)G_p(j\omega)} \right|_{\omega=\omega_q} \leq Q^{\max}, \quad (6.11)$$

$$k_i \geq k_i^{\min}, i \in \{0, \dots, N-1\}. \quad (6.12)$$

U ovakvoj formi pojačanje DOPID regulatora k_0 odgovara pojačanju klasičnog integralnog člana, tako da se ovaj optimizacioni problem može shvatiti kao maksimizacija klasičnog integralnog člana regulatora odnosno minimizacija integrala greške (IE).

6.3 Optimizacioni problem 3 (DOPID)

U okviru ovog optimizacionog problema potrebno je projektovati optimalni regulator u formi

$$G_{\text{DOPID},7}(s) = \frac{1}{sT_f + 1} \left(k_0 \frac{1}{s} + k_1 \frac{1}{s^{2/3}} + k_2 \frac{1}{s^{1/3}} + k_3 + k_4 s^{1/3} + k_5 s^{2/3} + k_6 s \right),$$

koji eliminiše poremećaj tipa jediničnog odskočnog signala za sistem sa slike 4.2. Optimizacioni problem može biti zapisan u formi

$$\max_{k_0, k_1, \dots, k_6, \omega_p, \omega_s} k_3, \quad (6.13)$$

sa ograničenjima

sistem u zatvorenoj povratnoj sprezi je stabilan, (6.14)

$$T_f = \frac{k_d}{M_n^{\max}}, \quad (6.15)$$

$$M_s = \left| \frac{1}{1 + G_c(j\omega)G_p(j\omega)} \right|_{\omega=\omega_s} \leq M_s^{\max}, \quad (6.16)$$

$$M_p = \max_{\omega \geq 0} \left| \frac{G_c(j\omega)G_p(j\omega)}{1 + G_c(j\omega)G_p(j\omega)} \right|_{\omega=\omega_p} \leq M_p^{\max}, \quad (6.17)$$

$$k_i \geq k_i^{\min}, i \in \{0, \dots, N-1\}. \quad (6.18)$$

Pojačanje DOPID regulatora k_3 odgovara pojačanju proporcionalnog člana, stoga se ovaj optimizacioni problem može razumeti kao maksimizacija proporcionalnog člana.

6.4 Optimizacioni problem 4 (DOPID)

Ideja je da se projektuje optimalni regulator oblika

$$G_{\text{DOPID},7}(s) = \frac{1}{sT_f + 1} \left(k_0 \frac{1}{s} + k_1 \frac{1}{s^{2/3}} + k_2 \frac{1}{s^{1/3}} + k_3 + k_4 s^{1/3} + k_5 s^{2/3} + k_6 s \right),$$

koji eliminiše poremećaj tipa jediničnog odskočnog signala za sistem sa slike 4.2. Možemo formulisati optimizacioni problem kao

$$\max_{k_0, k_1, \dots, k_6, \omega_p, \omega_s} k_0, \quad (6.19)$$

sa ograničenjima

sistem u zatvorenoj povratnoj sprezi je stabilan, (6.20)

$$T_f = \frac{k_d}{M_n^{\max}}, \quad (6.21)$$

$$M_s = \left| \frac{1}{1 + G_c(j\omega)G_p(j\omega)} \right|_{\omega=\omega_s} \leq M_s^{\max}, \quad (6.22)$$

$$M_p = \max_{\omega \geq 0} \left| \frac{G_c(j\omega)G_p(j\omega)}{1 + G_c(j\omega)G_p(j\omega)} \right|_{\omega=\omega_p} \leq M_p^{\max}, \quad (6.23)$$

$$k_i \geq k_i^{\min}, i \in \{0, \dots, N-1\}. \quad (6.24)$$

Pojačanje DOPID regulatora k_0 odgovara pojačanju klasičnog integralnog člana, stoga ovaj optimizacioni problem se može shvatiti kao maksimizacija klasičnog integralnog člana, odnosno minimizacija integrala greške (IE).

6.5 Optimizacioni problem 5 (DOPID)

Zahteva se projektovanje optimalnog regulatora u formi

$$G_{\text{DOPID},7}(s) = \frac{1}{sT_f + 1} \left(k_0 \frac{1}{s} + k_1 \frac{1}{s^{2/3}} + k_2 \frac{1}{s^{1/3}} + k_3 + k_4 s^{1/3} + k_5 s^{2/3} + k_6 s \right),$$

koji eliminiše poremećaj tipa jediničnog odskočnog signala za sistem sa slike 4.2. Optimizacioni problem možemo zapisati u obliku

$$\min_{k_0, k_1, \dots, k_6, \omega_q, \omega_s} IAE, \quad (6.25)$$

sa ograničenjima

$$\text{sistem u zatvorenoj povratnoj sprezi je stabilan,} \quad (6.26)$$

$$T_f = \frac{k_d}{M_n^{\max}}, \quad (6.27)$$

$$M_s = \left| \frac{1}{1 + G_c(j\omega)G_p(j\omega)} \right|_{\omega=\omega_s} \leq M_s^{\max}, \quad (6.28)$$

$$Q = \left| \frac{k_i \frac{G_p(j\omega)}{j\omega}}{1 + G_c(j\omega)G_p(j\omega)} \right|_{\omega=\omega_q} \leq Q^{\max}, \quad (6.29)$$

$$k_i \geq k_i^{\min}, i \in \{0, \dots, N-1\}. \quad (6.30)$$

6.6 Optimizacioni problem 6 (DOPID)

Ideja je projektovanje optimalnog regulatora u formi

$$G_{\text{DOPID},7}(s) = \frac{1}{sT_f + 1} \left(k_0 \frac{1}{s} + k_1 \frac{1}{s^{2/3}} + k_2 \frac{1}{s^{1/3}} + k_3 + k_4 s^{1/3} + k_5 s^{2/3} + k_6 s \right),$$

koji eliminiše poremećaj tipa jediničnog odskočnog signala za sistem sa slike 4.2. Optimizacioni problem je oblika

$$\min_{k_0, k_1, \dots, k_6, \omega_p, \omega_s} IAE, \quad (6.31)$$

sa ograničenjima

sistem u zatvorenoj povratnoj sprezi je stabilan, (6.32)

$$T_f = \frac{k_d}{M_n^{\max}}, \quad (6.33)$$

$$M_s = \left| \frac{1}{1 + G_c(j\omega)G_p(j\omega)} \right|_{\omega=\omega_s} \leq M_s^{\max}, \quad (6.34)$$

$$M_p = \max_{\omega \geq 0} \left| \frac{G_c(j\omega)G_p(j\omega)}{1 + G_c(j\omega)G_p(j\omega)} \right|_{\omega=\omega_p} \leq M_p^{\max}, \quad (6.35)$$

$$k_i \geq k_i^{\min}, i \in \{0, \dots, N-1\}. \quad (6.36)$$

6.7 Optimizacioni problem 7 (DOPID)

Potrebno je projektovati optimalni regulator oblika

$$G_{\text{DOPID},7}(s) = \frac{1}{sT_f + 1} \left(k_0 \frac{1}{s} + k_1 \frac{1}{s^{2/3}} + k_2 \frac{1}{s^{1/3}} + k_3 + k_4 s^{1/3} + k_5 s^{2/3} + k_6 s \right),$$

koji eliminiše poremećaj tipa jediničnog odskočnog signala za sistem sa slike 4.2. Ovaj problem možemo zapisati kao

$$\max_{k_0, k_1, \dots, k_6, \omega_q, \omega_s} \min(|G_c(j\omega)|), \quad (6.37)$$

uz ograničenja

sistem u zatvorenoj povratnoj sprezi je stabilan, (6.38)

$$T_f = \frac{k_d}{M_n^{\max}}, \quad (6.39)$$

$$M_s = \left| \frac{1}{1 + G_c(j\omega)G_p(j\omega)} \right|_{\omega=\omega_s} \leq M_s^{\max}, \quad (6.40)$$

$$Q = \left| \frac{k_i \frac{G_p(j\omega)}{j\omega}}{1 + G_c(j\omega)G_p(j\omega)} \right|_{\omega=\omega_q} \leq Q^{\max}, \quad (6.41)$$

$$k_i \geq k_i^{\min}, i \in \{0, \dots, N-1\}. \quad (6.42)$$

6.8 Optimizacioni problem 8 (DOPID)

Optimizacioni problem 8 predstavlja projektovanje optimalnog regulatora oblika

$$G_{\text{DOPID},7}(s) = \frac{1}{sT_f + 1} \left(k_0 \frac{1}{s} + k_1 \frac{1}{s^{2/3}} + k_2 \frac{1}{s^{1/3}} + k_3 + k_4 s^{1/3} + k_5 s^{2/3} + k_6 s \right),$$

koji eliminiše poremećaj tipa jediničnog odskočnog signala za sistem sa slike 4.2. Optimizacioni problem je u formi

$$\max_{k_0, k_1, \dots, k_6, \omega_q, \omega_s} \sigma k_0 + (1 - \sigma) \omega_s, \quad (6.43)$$

sa ograničenjima

$$\text{sistem u zatvorenoj povratnoj sprezi je stabilan,} \quad (6.44)$$

$$T_f = \frac{k_d}{M_n^{\max}}, \quad (6.45)$$

$$M_s = \left| \frac{1}{1 + G_c(j\omega)G_p(j\omega)} \right|_{\omega=\omega_s} \leq M_s^{\max}, \quad (6.46)$$

$$Q = \left| \frac{k_i \frac{G_p(j\omega)}{j\omega}}{1 + G_c(j\omega)G_p(j\omega)} \right|_{\omega=\omega_q} \leq Q^{\max}, \quad (6.47)$$

$$k_i \geq k_i^{\min}, i \in \{0, \dots, N - 1\}. \quad (6.48)$$

Ovde je opet značajna stavka izbor parametra σ jer se različitim odabirom tog parametra ostvaruje različit tip kompromisa između IE i veličine propusnog opsega.

6.9 Optimizacioni problem 9 (DOPID)

Ideja je projektovati optimalni regulator u formi (4.36), gde je $N = 7$, koji eliminiše poremećaj tipa jediničnog odskočnog signala za sistem sa slike 4.2. Optimizacioni problem se može dati u formi

$$\max_{k_0, k_1, \dots, k_6, \omega_q, \omega_s} k_3, \quad (6.49)$$

uz ograničenja

sistem u zatvorenoj povratnoj sprezi je stabilan, (6.50)

$$T_f = \frac{k_d}{M_n^{\max}}, \quad (6.51)$$

$$M_s = \left| \frac{1}{1 + G_c(j\omega)G_p(j\omega)} \right|_{\omega=\omega_s} \leq M_s^{\max}, \quad (6.52)$$

$$Q = \left| \frac{k_i \frac{G_p(j\omega)}{j\omega}}{1 + G_c(j\omega)G_p(j\omega)} \right|_{\omega=\omega_q} \leq Q^{\max}, \quad (6.53)$$

$$k_i \geq k_i^{\min}, i \in \{0, \dots, N-1\}. \quad (6.54)$$

Treba napomenuti da su u ovom slučaju u stvari optimizovana tri DOPID regulatora, prvi koji ima najviše članova koncentrisanih oko integralnog dejstva, zatim onaj koji ima najviše članova koncentrisanih oko proporcionalnog člana, te onaj koji ima najviše članova koncentrisanih oko diferencijalnog dejstva. Cilj je bio utvrditi kako koji od ovih regulatora utiče na svojstva sistema u smislu robusnosti i performansi, odnosno da li se izborom diferencijalnog regulatora na ovaj način može naglasiti uticaj nekog od dejstava.

6.10 Optimizacioni problem 10 (FPID)

Potrebno je projektovati optimalni regulator u formi

$$G_c(s) = \frac{k_p + k_i \frac{1}{s^\alpha} + k_d s^\beta}{(T_f s + 1)^\beta},$$

koji eliminiše poremećaj tipa jediničnog odskočnog signala za sistem sa slike 4.2. Ovaj problem možemo postaviti u formi

$$\max_{k_p, k_i, k_d, \omega_q, \omega_s} \sigma k_i + (1 - \sigma) \omega_s, \quad (6.55)$$

uz ograničenja

sistem u zatvorenoj povratnoj sprezi je stabilan, (6.56)

$$T_f = \frac{k_d}{M_n^{\max}}, \quad (6.57)$$

$$M_s = \left| \frac{1}{1 + G_c(j\omega)G_p(j\omega)} \right|_{\omega=\omega_s} \leq M_s^{\max}, \quad (6.58)$$

$$Q = \left| \frac{k_i \frac{G_p(j\omega)}{j\omega}}{1 + G_c(j\omega)G_p(j\omega)} \right|_{\omega=\omega_q} \leq Q^{\max}, \quad (6.59)$$

$$k_i \geq k_i^{\min}, i \in \{0, \dots, N-1\}. \quad (6.60)$$

Usled nemogućnosti regulatora, koji nema celobrojni integrator, da ostvari konačnu vrednost IAE, u ovom optimizacionom problemu razmatran je regulator koji ima celobrojni integrator, a frakcioni diferencijator. Takođe, diferencijator je sa gornje strane ograničen stepenom 2, omogućujući mu se na taj način uloga kompenzatora.

6.11 Optimizacioni problem 11 (FPID)

Potrebno je projektovati optimalni regulator u formi

$$G_c(s) = \frac{k_p + k_i \frac{1}{s^\alpha} + k_d s^\beta}{(T_f s + 1)^\beta},$$

koji eliminiše poremećaj tipa jediničnog odskočnog signala za sistem sa slike 4.2. Optimizacioni problem je u formi

$$\max_{k_p, k_i, k_d, \omega_q, \omega_s} k_i, \quad (6.61)$$

sa ograničenjima

sistem u zatvorenoj povratnoj sprezi je stabilan, (6.62)

$$T_f = \frac{k_d}{M_n^{\max}}, \quad (6.63)$$

$$M_s = \left| \frac{1}{1 + G_c(j\omega)G_p(j\omega)} \right|_{\omega=\omega_s} \leq M_s^{\max}, \quad (6.64)$$

$$Q = \left| \frac{k_i \frac{G_p(j\omega)}{j\omega}}{1 + G_c(j\omega)G_p(j\omega)} \right|_{\omega=\omega_q} \leq Q^{\max}, \quad (6.65)$$

$$k_i \geq k_i^{\min}, i \in \{0, \dots, N - 1\}. \quad (6.66)$$

Slično kao kod prethodnog optimizacionog problema, zbog nemogućnosti regulatora koji nema celobrojni integrator, da ostvari konačnu vrednost IAE, u ovom optimizacionom problemu razmatran je regulator koji ima celorojni integrator, a frakcioni diferencijator. Takođe, uvedeno je ograničenje za diferencijator sa gornje strane da njegov stepen ne može biti veći od 1.

Rezultati

7.1 Rezultati optimizacionog problema 1

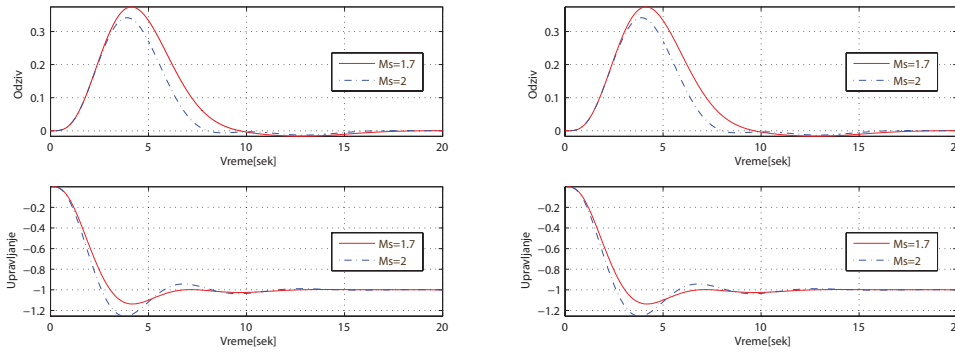
U ovom odeljku biće dati rezultati za problem iz odeljka 6.1. Projektovan je optimalni DOPID regulator za procese G_{p1} - G_{p12} .

Rezultati su predstavljeni kroz simulacije za iste vrednosti M_n^{max} i $Q^{max} = 1.01$ za Q definisano kao (5.17). M_s^{max} uzima vrednosti 1.7 i 2 u svim slučajevima.

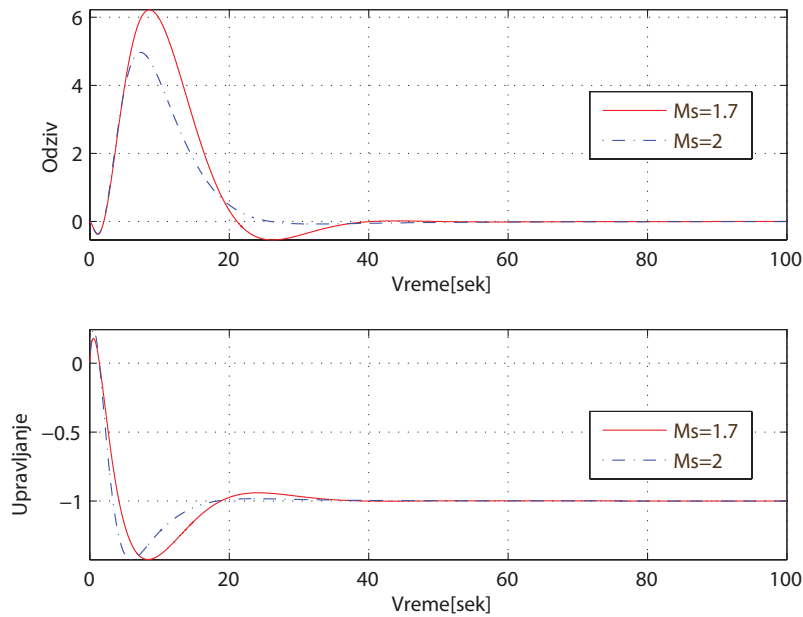
Iz tabele 7.1 može se zaključiti da optimalni DOPID teži optimalnom klasičnom PID regulatoru za celobrojne procese G_{p1} , G_{p2} , G_{p3} . Slika 7.1 prikazuje odzive i upravljačke signale za proces G_{p1} koji je upravljao optimalnim DOPID-om (levo) i optimalnim klasičnim PID-om (desno). Odzivi

Tabela 7.1: Rezultati optimizacije parametara DOPID regulatora za procese G_{p1} - G_{p4} za $M_n^{max} = 20$ i $Q^{max} = 1.01$

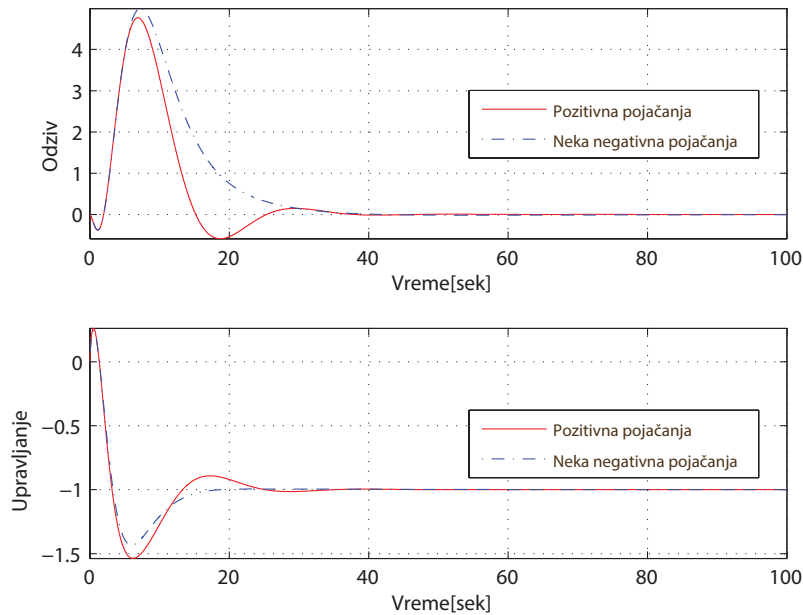
Proces	k_0	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	T_f	M_s^{max}	IAE
G_{p1}	0.67	1.22e-11	8.34e-12	1.80	4.36e-11	7.64e-4	2.12	0.10	1.7	1.64
G_{p1}	0.84	9.17e-13	1.08e-13	2.23	1.47e-12	4.55e-4	2.52	0.12	2.0	1.30
G_{p2}	1.26	1.52e-7	1.77e-8	2.10	8.82e-9	1.35e-3	1.47	7.35e-2	1.7	0.86
G_{p2}	1.58	8.90e-14	6.56e-14	2.60	2.63e-013	1e-3	1.75	8.76e-2	2.0	0.69
G_{p3}	0.13	1.17e-11	6.59e-13	0.51	1.82e-11	2.30e-3	0.99	4.93e-2	1.7	8.22
G_{p3}	0.15	1.47e-12	1e-13	0.63	3.29e-12	2e-3	1.13	5.60e-2	2.0	7.47
G_{p4}	2.07e-2	1.35e-12	8.76e-13	0.18	8e-12	6.53e-12	0.37	1.82e-2	1.7	60.87
G_{p4}	3.10e-2	6.70e-10	1.62e-10	0.23	1.08e-9	4.91e-10	0.44	2.20e-2	2.0	40.48
$G_{p4}(V2)$	1.67e-2	6.59e-3	-0.03	1.91e-1	8.75e-3	7.49e-3	3.06e-1	1.53e-2	1.7	70.48
$G_{p4}(V2)$	2.08e-2	4.45e-3	-0.03	2.43e-1	1.04e-2	5.76e-3	4.02e-1	2e-2	2.0	52.16



Slika 7.1: Odziv sistema (gore levo) i upravljački signal (dole levo) na poremećaj tipa jediničnog odskočnog signala za proces G_{p1} upravljani DOPID-om i odziv sistema (gore desno) i upravljački signal (dole desno) na poremećaj tipa jediničnog odskočnog signala za proces G_{p2} upravljani klasičnim PID-om za različite vrednosti M_s^{max} i $M_n^{max} = 20$ i $Q^{max} = 1.01$



Slika 7.2: Odziv sistema (gore) i upravljački signal (dole) na poremećaj tipa jediničnog odskočnog signala za proces G_{p4} upravljani DOPID-om za različite vrednosti M_s^{max} i $M_n^{max} = 20$ i $Q^{max} = 1.01$; Sva pojačanja DOPID-a su pozitivna osim $k_1 > -0.03$ i $k_2 > -0.03$



Slika 7.3: Odziv sistema (gore) i upravljački signal (dole) na poremećaj tipa jediničnog odskočnog signala za proces G_{p4} za vrednosti $M_s^{max} = 2$, $M_n^{max} = 20$ i $Q^{max} = 1.01$ sa DOPID-om koji ima sva pozitivna pojačanja poređenim sa DOPID-om koji ima pojačanja $k_1 > -0.03$ i $k_2 > -0.03$, dok su mu ostala pozitivna

sistema upravljanih DOPID-om i klasičnim PID-om gotovo su identični. Za potrebe projektovanja optimalnog regulatora maksimizacijom proporcionalnog dejstva, ograničenja u obliku (6.6) su takođe razmatrana. Rezultati predstavljeni u tabeli 7.1 i na slici 7.1 su dobijeni za regulator kod koga su sva pojačanja diferintegratora veća od nule. Slična ograničenja su nametnuta i za klasični PID regulator. U slučaju da se pojačanja koja su različita od pojačanja klasičnog integratora, proporcionalnog člana i diferencijalnog člana, puste da budu manja od nule, dobijaju se oscilatorniji odzivi. Stoga se na ovaj način ne ostvaruje nikakav boljitak u odnosu na klasičan PID regulator. Odzivi procesa G_{p2} i G_{p3} nisu prikazani na slikama iz razloga što su ostvareni slični odzivi u smislu poistovećivanja DOPID regulatora sa klasičnim PID-om, što se vidi i iz tabele 7.1.

Sa druge strane, nešto drugačije ponašanje dobijeno je kada se projektuje optimalni DOPID za frakcioni proces G_{p4} . Ako su sva pojačanja DOPID regulatora pozitivna, on po svojoj strukturi teži klasičnom PID regulatoru.

Međutim, ukoliko dozvolimo da neka pojačanja budu manja od nule, naime $k_1 > -0.03$ i $k_2 > -0.03$, odzivi postaju manje fluktuirajući. Ovo se može videti na slici 7.3, dok su odzivi i upravljački signali procesa G_{p4} , uz ograničenje $M_s = 2$ i činjenicu da je nekim pojačanjima dozvoljeno da budu negativna, dati na slici 7.2. Donje granice ograničenja k_1 i k_2 su dobijene empirijski. Zaključeno je da manje vrednosti pojačanja dovode do odziva koji su više fluktuirajući.

U tabeli 7.1, G_{p4} predstavlja proces kod koga su sva pojačanja DOPID regulatora ograničena da budu pozitivna, $G_{p4}(V_2)$ predstavlja proces kod koga su pojačanja koja su različita od k_1 i k_2 pozitivna, dok su ova dva pojačanja ograničena da ne budu manja od granične vrednosti -0.03. Slična notacija će biti korišćena i za ilustraciju procesa G_{p9} .

Dalja analiza projektovanja optimalnog DOPID regulatora maksimizacijom proporcionalnog pojačanja se biće obavljena na sledećem test skupu procesa:

$$G_{p5}(s) = \frac{1}{s(s+1)^4},$$

$$G_{p6}(s) = \frac{1}{\prod_{k=0}^3 s(0.7^k s + 1)},$$

$$G_{p7}(s) = \frac{e^{-5s}}{s(s+1)^3},$$

$$G_{p8}(s) = \frac{1}{\sqrt{s}(s+1)^2},$$

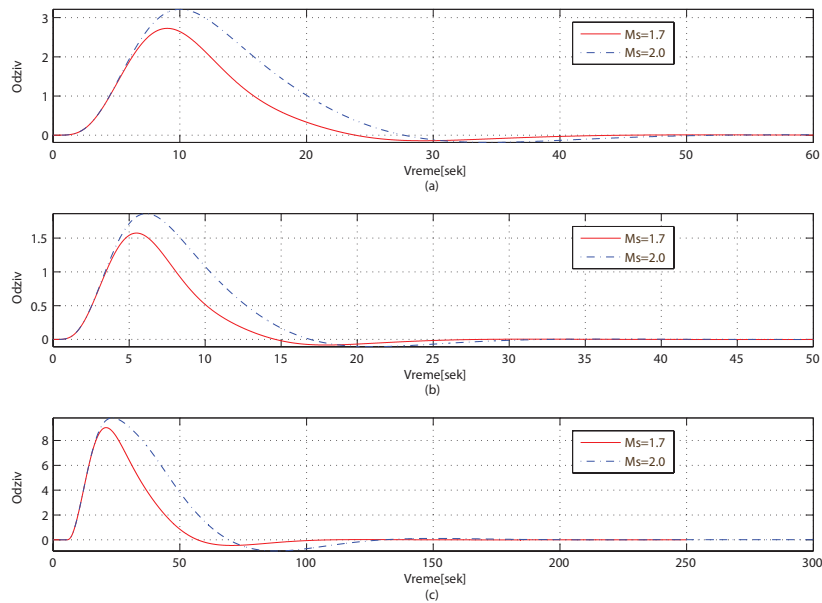
$$G_{p9}(s) = \frac{1}{\cosh(\sqrt{2s})}.$$

Procesi $G_{p5}(s)$, $G_{p6}(s)$ i $G_{p7}(s)$ predstavljaju procese $G_{p1}(s)$, $G_{p2}(s)$ i $G_{p3}(s)$ sa astatičnim ponašanjem, dok su procesi $G_{p8}(s)$ i $G_{p9}(s)$ procesi necelog reda. Tabela 7.2 prikazuje parametre DOPID regulatora dobijene PSO optimizacijom datog optimizacionog problema za procese $G_{p5}(s)$ - $G_{p9}(s)$

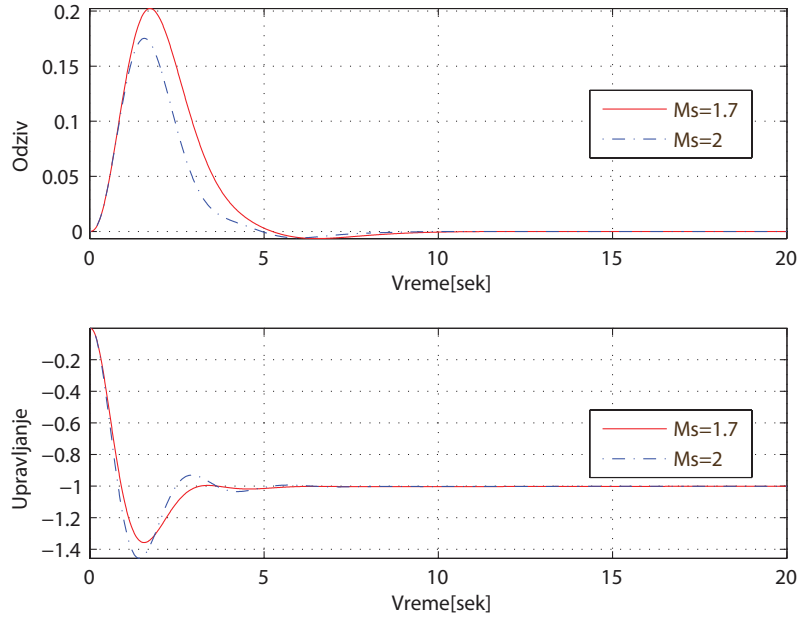
Za celobrojne procese sa astatizmom G_{p5} - G_{p7} vrednosti svih pojačanja su ograničene sa donje strane na nulu. U suprotnom, odzivi koji su dobijani su bili lošiji u smislu stabilnosti i performansi. Ovi odzivi su prikazani na slici 7.4 i u tabeli 7.2, iz koje se jasno vidi da nema smisla uvoditi DOPID za celobrojne procese, pošto za ove procese optimalni DOPID teži optimalnom klasičnom PID regulatoru.

Tabela 7.2: Rezultati optimizacije parametara DOPID regulatora za procese $G_{p5} - G_{p9}$ za vrednosti ograničenja $M_n^{max} = 20$ i $Q^{max} = 1.01$

Proces	k_0	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	T_f	M_s^{max}	IAE
G_{p5}	2.66e-2	4.10e-12	5.10e-12	0.30	1.25e-11	3.263e-3	0.70	3.51e-2	1.7	42.36
G_{p5}	3.89e-2	5.22e-14	6.59e-14	0.37	8.08e-13	2.61e-3	0.87	4.35	2.0	28.86
G_{p6}	7.49e-2	5.57e-7	1.92e-6	0.50	2.48e-6	2.86e-3	0.789	3.94e-2	1.7	15.13
G_{p6}	0.11	1.87e-7	2.86e-6	0.63	1.83e-7	2.32e-3	0.97	4.86e-2	2.0	10.30
G_{p7}	3.23e-3	7.04e-4	3.94e-7	7.90e-2	1.62e-2	5.37e-3	0.37	1.83e-2	1.7	364.16
G_{p7}	4.92e-3	3.94e-8	8.30e-8	0.11	2.19e-3	5.58e-3	0.40	2.02e-2	2.0	228.30
G_{p8}	2.39	4.38e-11	1.74e-11	4.44	6.70e-11	1.18e-10	3.06	0.15	1.7	0.46
G_{p8}	3.14	3.31e-12	2.42e-12	5.48	2.87e-12	8.60e-10	3.65	0.18	2.0	0.34
G_{p9}	11.25	1.66e-12	4.22e-13	4.64	2.36e-13	4.63e-3	0.48	2.38e-2	1.7	0.10
G_{p9}	14.48	4.49e-10	5.97e-12	5.64	1.19e-11	3.76e-3	0.58	2.88e-2	2.0	7.73e-2
$G_{p9}(V_2)$	11.10	-0.03	-0.03	4.66	2.61e-12	7.44e-13	0.47	2.37e-2	1.7	0.10
$G_{p9}(V_2)$	14.40	-0.03	-0.03	5.66	1.09e-10	2.76e-12	0.57	2.83e-2	2.0	7.73e-2



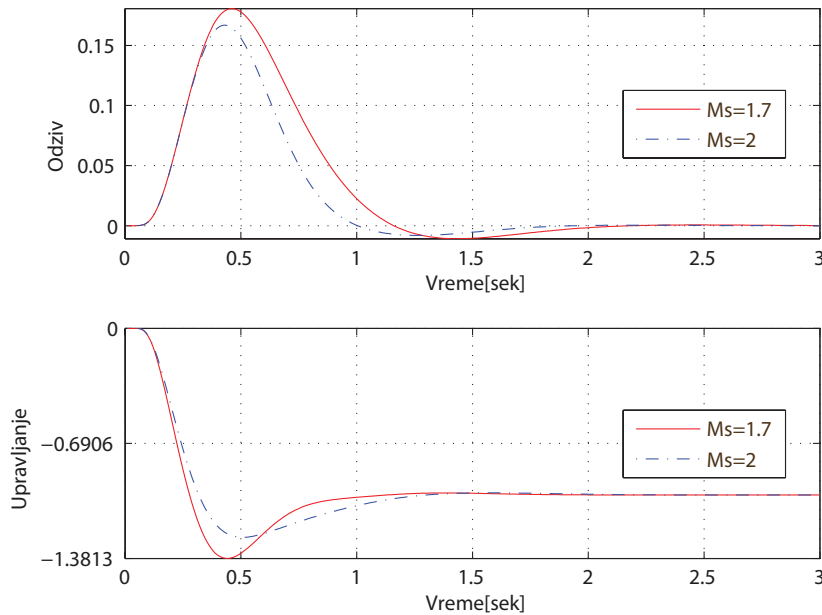
Slika 7.4: Odziv sistema na jedinični odskočni poremećaj za procese a) G_{p5} ; b) G_{p6} ; c) G_{p7} , upravljanih od strane DOPID za različite vrednosti M_s^{max} , $M_n^{max} = 20$ i $Q^{max} = 1.01$



Slika 7.5: Odziv sistema (gore) i upravljački signal (dole) na jedinični odskočni poremećaj za proces G_{p8} za različite vrednosti M_s^{max} i $M_n^{max} = 20$, $Q^{max} = 1.01$ sa svim pojačanjima DOPID-a ograničenim da su pozitivna

Tabela 7.3: Rezultati optimizacije parametara klasičnog PID regulatora za frakcione procese G_{p4} , G_{p8} , G_{p9} za $M_n^{max} = 20$ i $Q^{max} = 1.01$

Proces	k_i	k_p	k_d	T_f	M_p	IAE	M_s^{max}
G_{p4}	2.08e-2	0.18	0.37	1.83e-2	1.90	60.87	1.7
G_{p4}	3.11e-2	0.23	0.44	2.2e-2	2.01	40.49	2.0
G_{p8}	2.33	4.43	3.11	0.16	1.44	0.47	1.7
G_{p8}	3.17	5.48	3.66	0.18	1.73	0.34	2.0
G_{p9}	11.25	4.64	0.48	2.38e-2	1.33	0.10	1.7
G_{p9}	14.48	5.64	0.58	2.88e-2	1.45	7.73e-2	2.0



Slika 7.6: Odziv sistema (gore) i upravljački signal (dole) na jedinični odskočni poremećaj za proces G_{p9} za različite vrednosti M_s^{max} i $M_n^{max} = 20$, $Q^{max} = 1.01$; Sva pojačanja DOPID-a su pozitivna sem $k_1 > -0.03$ i $k_2 > -0.03$

Proces G_{p9} može se analizirati na sličan način kao proces G_{p4} . Omogućavajući da vrednosti pojačanja diferintegratora koja su različita od onih koja su strukturalno jednaka k_i , k_p i k_d budu manja od nule, konkretno ograničavajući vrednosti k_1 i k_2 sa donje strane na vrednost -0.03 ($k_1/qeq - 0.03$, $k_2/qeq - 0.03$), dobijaju se zanemarljivo bolji odzivi. Granična vrednost -0.03 utvrđena je empirijski kroz veliki broj simulacija. Niže vrednosti ovog ograničenja rezultuju osilatornijim odzivom. Takođe, slični rezultati se dobijaju dopuštanjem da vrednosti pojačanja k_4 i k_5 budu manja od nule, odnosno ograničena sa donje strane nekim negativnim brojem, manjim od 0.1 po apsolutnoj vrednosti. U tabeli 7.2 G_{p9} predstavlja proces za koji su sva pojačanja DOPID-a ograničena da budu pozitivna, dok $G_{p9}(V_2)$ predstavlja proces za koji su pojačanja diferintegratora DOPID-a različita od k_1 i k_2 pozitivna, a ova dva pojačanja su ograničena da ne budu manja od -0.03 . Može se zaključiti da ni za ovaj proces nema smisla uvoditi DOPID umesto klasičnog PID-a.

Za fracioni proces G_{p8} najbolji odzivi dobijeni se kada su sve vrednosti pojačanja DOPID-a ograničene sa donje strane na nulu, a sa gornje su sve

vrednosti pojačanja slobodne. U slučaju da su neka ili sva pojačanja ograničena da na neki način uzimaju i negativne vrednosti, dobijaju se odzivi koji su lošiji u smislu granica stabilnosti i mera robusnosti. Stoga se za ovaj proces mogu izvući isti zaključci kao i za celobrojne procese, tj. optimalni DOPID strukturalno gravitira prema optimalnom klasičnom PID-u.

Poređenjem mera performansi i robusnosti sistema upravljanih DOPID regulatorom i klasičnim PID regulatorom, koje nisu direktno uključene u proces optimizacije, vidi se da se dosta robusniji regulator dobija za proces G_{p4} . To se vidi analizom vrednosti komplementarne osetljivosti M_p , koja je manja za DOPID regulator. Sa druge strane mera performanse poput IAE raste za ovaj i slične procese. Zanimljivo je da su za proces G_{p9} ove razlike zanemarljive, stoga ih nema smisla uzimati u razmatranje.

Za frakcione procese G_{p4} i G_{p9} DOPID sa nekim negativnim pojačanjima je poređen sa klasičnim PID-om. Kao i za proces G_{p8} , nisu ostvareni neki pomaci ukoliko se ograniče neka pojačanja diferintegratora da budu manja od neke negativne konstante. Iz ovog razloga samo DOPID sa pozitivnim pojačanjima je poređen sa klasičnim PID-om, ali se, kao što je već pokazano, dobija da se eliminišu članovi koji su različiti od klasičnog integratora, proporcionalnog člana i diferencijatora. Rezultati analize mera performansi i robusnosti koje nisu direktno uključeni u proces optimizacije dati su u tabeli 7.4.

Daljnja analiza uključuje sliku 7.7, koja pokazuje uporedne odzive za proces $G_{p10}(s) = \frac{-\ln(s)}{s}$ kojim se upravlja klasičnim PID-om i DOPID-om. Odzivi su dobijeni uz sledeća ograničenja: $M_s^{max} = 2$, $Q^{max} = 1.01$ i $M_n^{max} = 0.8$. Dobijeni su sledeći rezultati za proces upravljani DOPID regulatorom: $k_0 = 7.23e - 3$, $k_1 = 1.26e - 3$, $k_2 = -1.91e - 2$, $k_3 = 0.22$, $k_4 = 1.22e - 10$, $k_5 = 2.15e - 11$, $k_6 = 4.92e - 2$, $T_f = 6.15e - 2$, $M_n = 0.80$, $M_p = 1.73$, $IAE = 143.68$, $IE = 140.08$; a za proces upravljani klasičnim PID-om: $k_i = 1.22e - 2$, $k_p = 0.12$, $k_d = 0.10$, $T_f = 0.13$, $M_n = 0.80$, $M_p = 2.15$, $IAE = 110.53$, $IE = 82.44$. k_1 i k_2 u slučaju DOPID regulatora su bili ograničeni sa donje strane da ne budu manj od -0.02. Zbog nemogućnosti da se ostvari "lep" odziv za ograničenje $M_n^{max} = 20$ kao kod drugih procesa, prikazan je rezultat za $M_n^{max} = 0.8$.

Napomena 7.1. Performanse sistema u zatvorenoj povratnoj sprezi za procese G_{p4} i G_{p8} do G_{p10} analizirane su metodom kompleksne integracije, pogledati [65]. Kod za ove numeričke metode može se pronaći na http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/39035-numerical-inverse-laplace-transform/content/html/example_inversions.html.

Tabela 7.4: Poređenje indeksa performansi i robusnosti DOPID i PID regulatora za frakcione procese G_{p4}, G_{p8}, G_{p9} za vrednosti ograničenja $M_n^{max} = 20$ i $Q^{max} = 1.01$; Notacija $G_{p4}(V_2)$ i $G_{p9}(V_2)$ se odnosi na rezultate za procese G_{p4} i G_{p9} kontrolisane sa DOPID-om gde su pojačanja k_1 i k_2 ograničena da ne budu manja od neke negativne konstante, dok su druga pojačanja ograničena da budu pozitivna

Tip regulatora	Proces	M_p	IAE	M_s^{max}
PID	G_{p4}	1.90	60.87	1.7
DOPID	$G_{p4}(V_2)$	1.71	70.48	1.7
PID	G_{p4}	2.01	40.49	2
DOPID	$G_{p4}(V_2)$	1.60	52.16	2
PID	G_{p8}	1.44	0.47	1.7
DOPID	G_{p8}	1.45	0.46	1.7
PID	G_{p8}	1.73	0.34	2
DOPID	G_{p8}	1.73	0.34	2
PID	G_{p9}	1.33	0.10	1.7
DOPID	$G_{p9}(V_2)$	1.32	0.10	1.7
PID	G_{p9}	1.45	7.73e-2	2
DOPID	$G_{p9}(V_2)$	1.46	7.72e-2	2

U nastavku ovog poglavlja biće analizirani procesi G_{p11}, G_{p12} i G_{p13} koji su nekarakteristični procesi necelog reda kod kojih je dobijen odziv pokazatelj da je opravdano uvoditi DOPID regulator u formi (4.31).

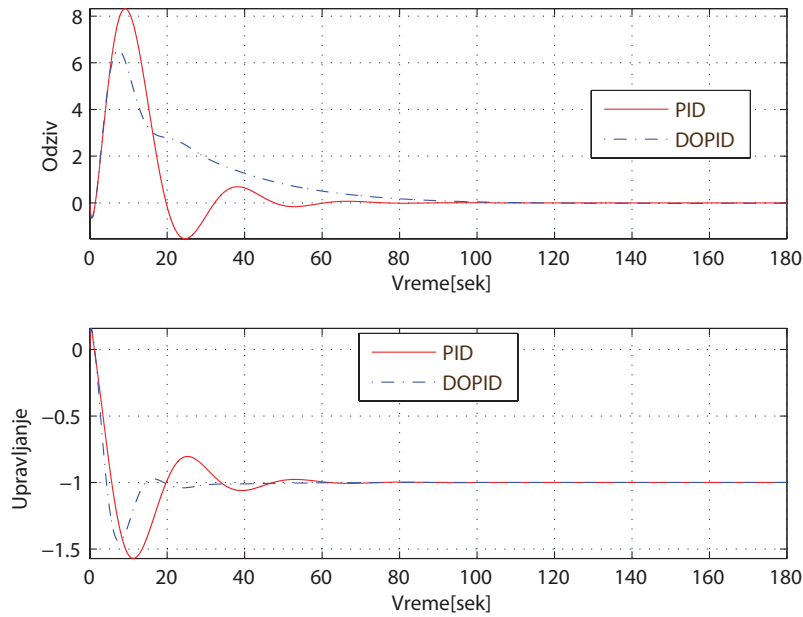
Sva pojačanja diferintegratora različita od onih koja su analogna klasičnom proporcionalnom, integralnom i diferencijalnom dejstvu su slobodna, dok su ona koja odgovaraju ovim klasičnim analogijama pozitivna.

Tabela 7.5 prikazuje optimalne vrednosti parametara klasičnog PID regulatora i DOPID regulatora za procese G_{p11}, G_{p12} i G_{p13} dobijene rešavanjem optimizacionog problema 1.

Sa slike 7.8 se vidi da je odziv za DOPID regulator brži i da ima manju vrednost IAE. Takođe, upravljački signal za DOPID regulator je gladak, bez značajnih fluktuacija. Vrednost M_p je nešto manja za klasični PID regulator.

Kao i kod prethodnog procesa, za proces G_{p12} DOPID regulator pokazao se kao bolji u smislu bržeg i glatkijeg odziva. Samim tim i ovde je mera performansi IAE na strani DOPID regulatora, dok je M_p opet nešto manje za klasični PID regulator.

S druge strane, kod procesa G_{p13} je odziv za klasični PID regulator bolji u smislu brzine, manjeg preskoka i manje vrednosti IAE. Jedino je parametar



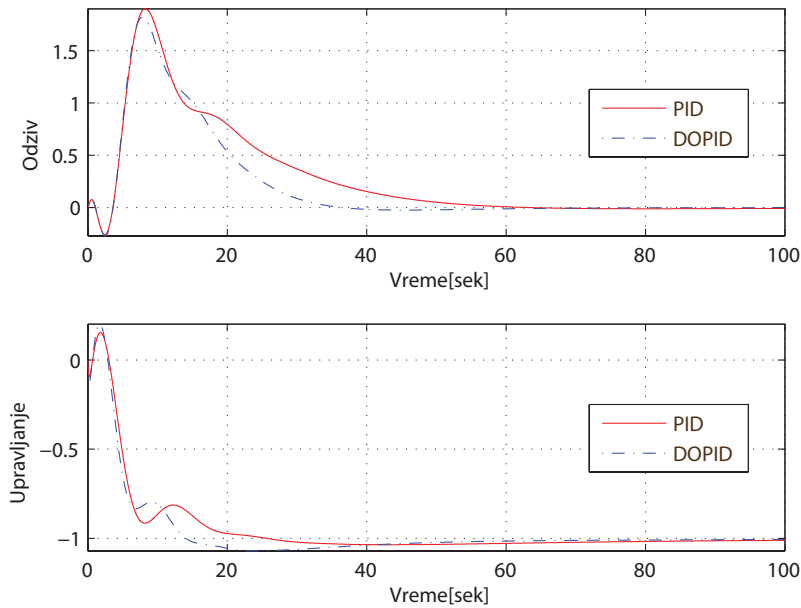
Slika 7.7: Odziv sistema za proces G_{p10} upravljani klasičnim PID-om i DOPID-om za ograničenja $M_s^{max} = 2$, $M_n^{max} = 0.8$ i $Q^{max} = 1.01$

Tabela 7.5: Rezultati optimizacije parametara PID i DOPID regulatora za optimizacioni problem 1, za procese $G_{p11}, G_{p12}, G_{p13}$, za vrednosti ograničenja $M_n^{max} = 20$ i $Q^{max} = 1.01$; Rezultati za običan PID regulator su obeleženi sa *

Proc.	k_0	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	T_f	M_s^{max}	IAE	M_p
G_{p11}	4.96e-2	-2.15e-3	2.53e-2	3.17e-1	-3.58e-2	4.81e-3	6.22e-1	3.11e-2	2	22.33	1.06
G_{p11} *	3.68e-1	/	/	3.78e-1	/	/	4.85e-1	1.89e-2	2	29.37	1.03
G_{p12}	8.19e-2	7.09e-3	4.14e-3	3.61e-1	1.23e-2	7.35e-4	2.74e-1	1.37e-2	2	14.48	1.13
G_{p12} *	4.07e-2	/	/	3.68e-1	/	/	8.70e-2	4.35e-3	2	27.07	1.04
G_{p13}	1.01e-1	-4.34e-2	5.55e-1	5.51e-1	7.03e-1	-4.55e-2	5.69e-2	2.84e-3	2	10.09	1.22
G_{p13} *	2.73e-1	/	/	1.66	/	/	6.17e-1	3.08e-2	2	4.17	1.39

M_p u ovom slučaju na strani DOPID regulatora.

Napomena 7.2. U okviru numeričke analize problema, u sklopu ove disertacije, izabran je pristup definisanja DOPID regulatora, kao i celog optimizacionog problema u frekventnom domenu, gde god je to bilo moguće. Ove probleme je moguće strukturirati i u vremenskom domenu, odnosno kroz si-



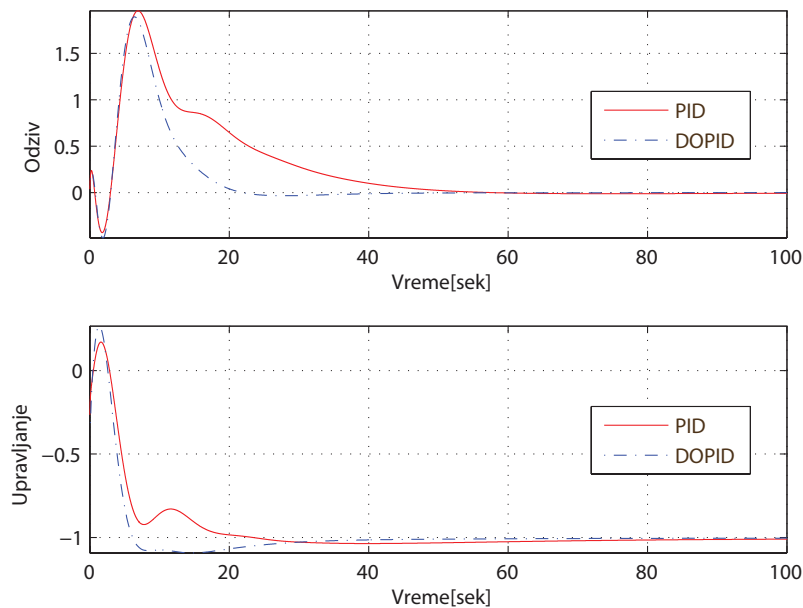
Slika 7.8: Odziv sistema i upravljački signal za optimizacioni problem 1, za proces G_{p11} upravljani klasičnim PID-om i DOPID-om za ograničenja $M_s^{max} = 2$, $M_n^{max} = 20$ i $Q^{max} = 1.01$

steme diferencijalnih jednačina, koje se numerički mogu rešavati na razne načine, kao npr. aproksimiranjem frakcione diferencijalne jednačine koja opisuje problem sistemom običnih diferencijalnih jednačina, koristeći ekspanzionu formulu Atanackovića i Stankovića [66], [67].

7.2 Rezultati optimizacionog problema 2

U okviru ovog potpoglavlja biće dati rezultati za problem iz odeljka 6.2. Projektovan je optimalni DOPID regulator za procese G_{p4} , G_{p11} , G_{p12} i G_{p13} . U ovom segmentu prikazani su samo ovi procesi, zato što su se oni pokazali kao afirmativni u postupku projektovanja optimalnog DOPID regulatora u prethodno analiziranom optimizacionom problemu, dok su optimalni DOPID regulatori za ostale procese koji su navedeni u odeljku 6.2 pokazali slično ponašanje kao klasičan PID regulator.

U procesu optimizacije, parametri regulatora su slobodni, tj. mogu da



Slika 7.9: Odziv sistema i upravljački signal za optimizacioni problem 1, za proces G_{p12} upravljani klasičnim PID-om i DOPID-om za ograničenja $M_s^{max} = 2$, $M_n^{max} = 20$ i $Q^{max} = 1.01$

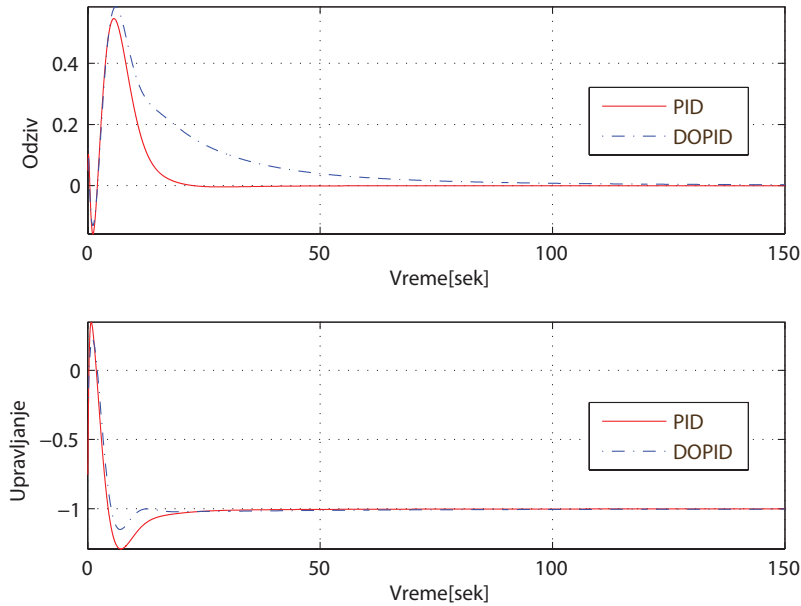
uzmu sve vrednosti na skupu realnih brojeva.

Analiza pokazuje da postoji potreba za projektovanjem optimalnog DOPID regulatora za neke necele procese zato što se za tako projektovani optimalni regulator dobijaju “bolji” odzivi (manje fluktuirajući¹, više robusni) nego za optimalni klasični PID regulator.

Uopšteni zaključak za ovaj optimizacioni problem je da rezultat veoma zavisi od procesa kojim se upravlja, u smislu da se za neke procese dobijaju rezultati koji su bolji po pitanju mera performansi za DOPID regulator, dok se sa druge strane za neke procese dobijaju bolji rezultati za klasični PID regulator po istom tom pitanju. U tim slučajevima mera robusnosti M_p je svakako bolja za regulator koji ima lošiju meru performanse.

Posmatrajući proces G_{p4} , može se videti da optimalni DOPID daje manje fluktuirajući odziv u odnosu na klasičan PID, uopšte nema oscilacija i manji mu je preskok. Sa druge strane, odziv kod DOPID-a je mnogo sporiji, a

¹Pojam fluktuirajući se odnosi na odzive koji nisu čisto prigušeni, a ni oscilatorni, nego eventualno imaju neki mali prebačaj i/ili podbačaj referentne veličine



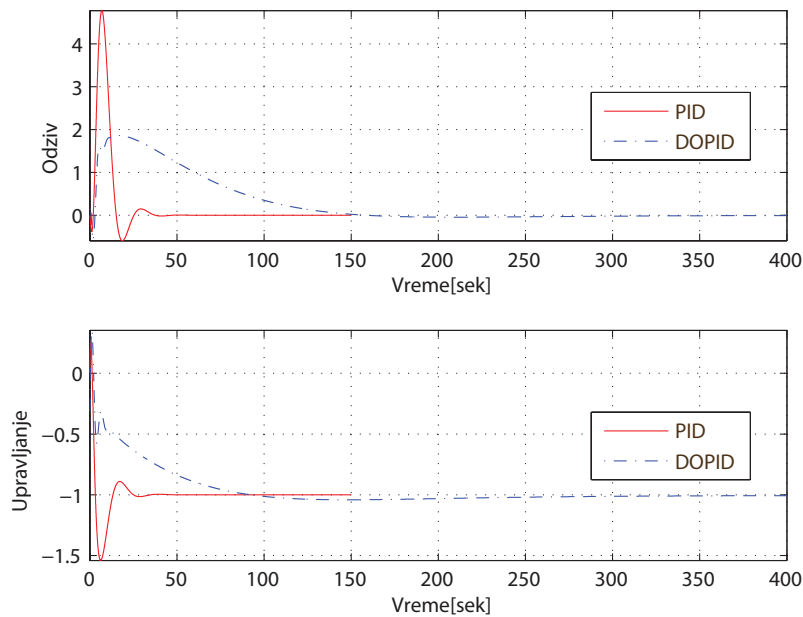
Slika 7.10: Odziv sistema i upravljački signal za optimizacioni problem 1, za proces G_{p13} upravljani klasičnim PID-om i DOPID-om za ograničenja $M_s^{max} = 2$, $M_n^{max} = 20$ i $Q^{max} = 1.01$

Tabela 7.6: Rezultati optimizacije parametara PID i DOPID regulatora za procese $G_{p4}, G_{p11}, G_{p12}, G_{p13}$, za vrednosti ograničenja $M_n^{max} = 20$ i $Q^{max} = 1.01$; Rezultati za običan regulator su obeleženi sa *

Proc.	k_0	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	T_f	M_s^{max}	IAE	M_p
G_{p4}	8.77e-3	3.07e-3	-3.07e-2	2.45e-1	8.97e-3	-1.47e-4	0.41	2.07e-2	2	126.57	1.40
G_{p4}^*	3.11e-2	/	/	2.28e-1	/	/	4.39e-1	2.19e-2	2	40.52	2.02
G_{p11}	6.14e-2	7.90e-3	4.23e-2	2.19e-1	2.15e-2	-5.74e-4	6.66e-01	3.33e-2	2	19.61	1.16
G_{p11}^*	4.05e-2	/	/	3.84e-1	/	/	2.8e-1	1.39e-2	2	26.78	1.06
G_{p12}	7.04e-2	2.65e-1	-7.65e-1	1.26	-5.11e-1	4.42e-4	5.00e-01	2.5e-2	2	18.32	1.42
G_{p12}^*	4.50e-2	/	/	3.79e1	/	/	1.71e-1	8.53e-3	2	24.70	1.03
G_{p13}	3.79e-1	-6.09e-2	3.81e-1	1.39	-3.10e-1	6.38e-1	7.77e-1	3.88e-2	2	3.46	1.68
G_{p13}^*	2.10e-1	/	/	1.37	/	/	1.07e-2	5.34e-4	2	5.29	1.38

samim tim je i IAE mnogo veće. Posmatrajući meru robusnosti M_p vidi se da je DOPID i po ovom pitanju značajnije bolji od klasičnog PID-a.

Na osnovu tabele 7.6 i slike 7.12 može se zaključiti da proces G_{p11} ima nešto sporiji odziv za klasičan PID, međutim odziv je manje fluktuirajući za klasičan PID, rezonantni vrh je dominantniji kod DOPID-a, a sistem je nešto



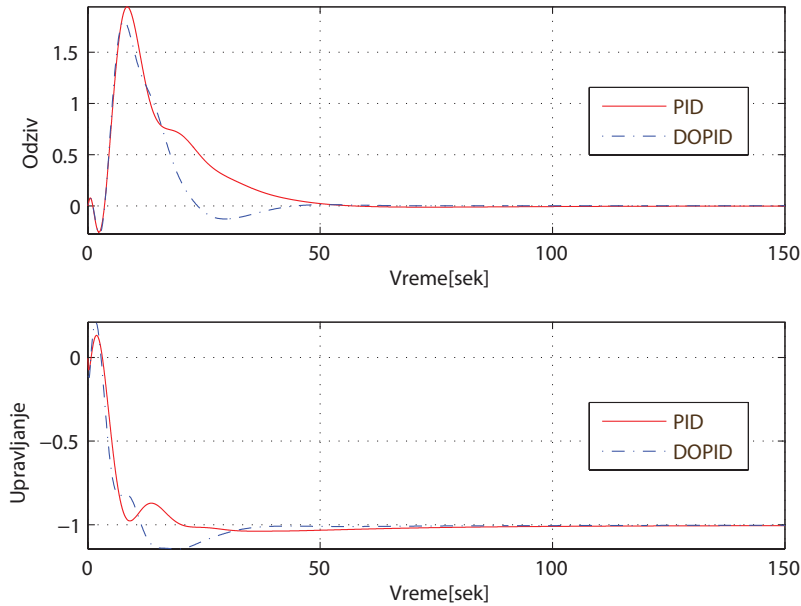
Slika 7.11: Odziv sistema i upravljački signal za proces G_{p4} upravljani klasičnim PID-om i DOPID-om za ograničenja $M_s^{max} = 2$, $M_n^{max} = 20$ i $Q^{max} = 1.01$

robusniji ako je upravljani klasičnim PID-om, dok je vrednost IAE manja kad je sistem upravljani optimalnim DOPID-om.

Dalje se može analizirati proces G_{p12} . Upravljanje DOPID-om daje više fluktuirajući odziv sa naglašenim prebačajem pri potiskivanju poremećaja, dok PID daje finiji odziv bez prebačaja. Običan PID pokazao se kao robusniji posmatranjem maksimalne komplementarne osetljivosti M_p , dok je vrednost IAE značajno manja za DOPID. Ova poslednja dva parametra će se u većini analiza preplitati, što je normalno, jer se pri projektovanju optimalnog regulatora očekuje da se ostvari određeni kompromis između njih.

Što se tiče analize procesa G_{p13} može se zaključiti slično ponašanje kao kod prethodnog procesa, sa naglaskom na to da je preskok običnog PID-a značajnije veći od DOPID-a, ali ovo se dešava svakako na uštrb činjenice da je prebačaj pri potiskivanju poremećaja očigledan kod DOPID-a, dok ne postoji kod klasičnog PID-a.

Pošto ovaj kriterijum predstavlja maksimizaciju integralnog člana, može se primetiti da se po tom osnovu veća vrednost proporcionalnog člana dobija za sisteme G_{p11} , G_{p12} i G_{p13} za DOPID regulator, dok je obrnut slučaj za G_{p4} .



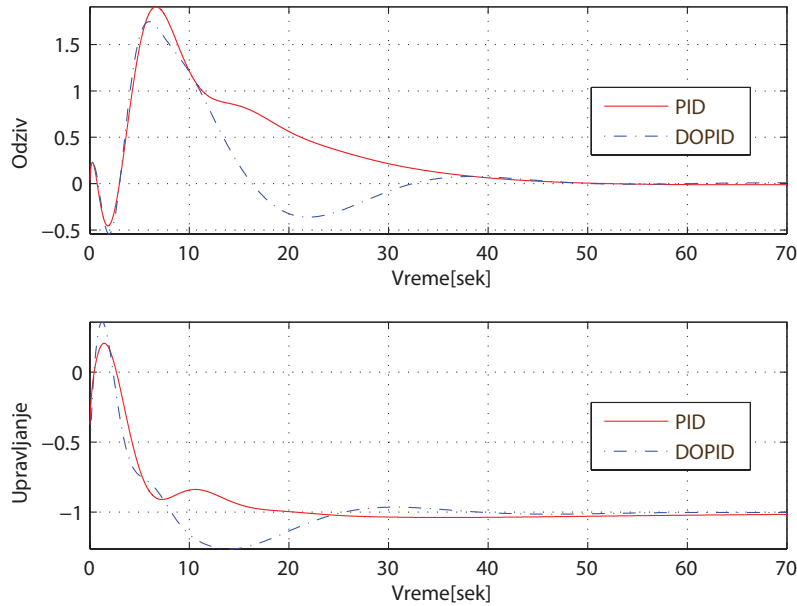
Slika 7.12: Odziv sistema i upravljački signal za proces G_{p11} upravljani klasičnim PID-om i DOPID-om za ograničenja $M_s^{max} = 2$, $M_n^{max} = 20$ i $Q^{max} = 1.01$

7.3 Rezultati optimizacionog problema 3

U ovom potpoglavlju biće dati rezultati optimizacije za optimizacioni problem definisan u odeljku 6.3. Analizirani su procesi G_{p4} , G_{p11} , G_{p12} i G_{p13} . Prikazani su samo ovi procesi zato što su se oni pokazali kao afirmativni u postupku projektovanja optimalnog DOPID regulatora u prethodno analiziranom optimizacionom problemu, dok su optimalni DOPID regulatori za ostale procese koji su navedeni u odeljku 6.3 pokazali slično ponašanje kao klasičan PID regulator.

U procesu optimizacije nikakva ograničenja nisu nametnuta nad parametre regulatora.

Ukoliko se posmatra proces G_{p4} može se videti da klasični PID regulator daje manje fluktuirajući odziv u odnosu na DOPID. Kod klasičnog PID regulatora uopšte nema oscilacija, nema prebačaja pri eliminisanju poremećaja. Sa druge strane, odziv kod klasičnog PID-a je nešto sporiji, a samim tim je i vrednost IAE je mnogo veća, dok je vrednost IAE za sistem upravljani DOPID regulatorom manja od vrednosti IAE za klasičan PID.



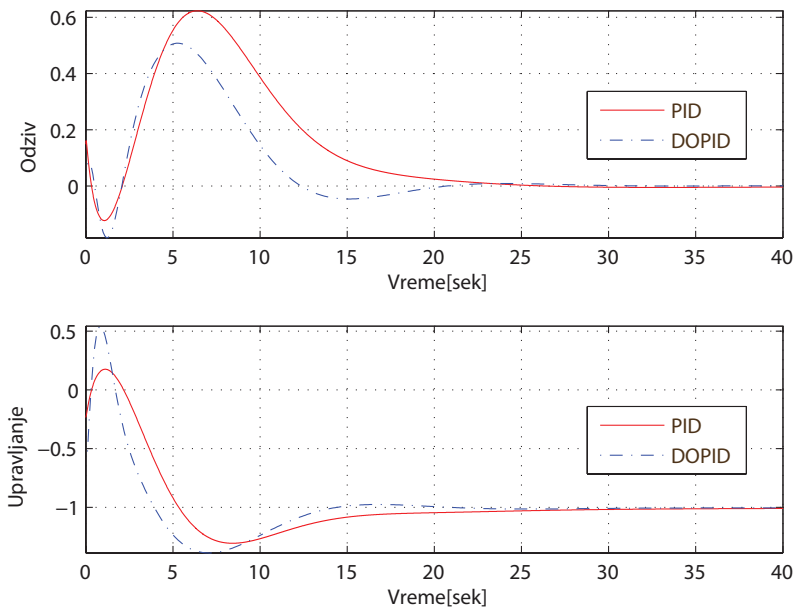
Slika 7.13: Odziv sistema i upravljački signal za proces G_{p12} upravljani klasičnim PID-om i DOPID-om za ograničenja $M_s^{max} = 2$, $M_n^{max} = 20$ i $Q^{max} = 1.01$

Tabela 7.7: Rezultati optimizacije parametara PID i DOPID regulatora za optimizacioni problem 3, za procese $G_{p4}, G_{p11}, G_{p12}, G_{p13}$, za vrednosti ograničenja $M_n^{max} = 20$ i $M_p = 1.3$; Rezultati za običan PID regulator su obeleženi sa *

Proc.	k_0	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	T_f	M_s^{max}	IAE	M_p
G_{p4}	2.30e-2	-2.11e-2	-2.23e-2	2.17e-1	4e-2	4.97e-3	4.07e-1	2.03e-2	2	99.52	1.3
G_{p4}^*	7.27e-3	/	/	2.07e-1	/	/	4.81e-1	2.40e-2	2	138.48	1.3
G_{p11}	3.82e-2	-8.86e-2	5.91e-2	3.53e-1	-4.08e-1	-6.20e-1	4.65e-1	2.32e-2	2	78.12	1.3
G_{p11}^*	9e-2	/	/	3.86e-1	/	/	4.85e-1	2.42e-2	2	15.37	1.3
G_{p12}	7.27e-2	2.24e-1	-7.49e-1	1.32	-4.93e-1	-6.80e-2	5.13e-1	2.57e-2	2	18.42	1.3
G_{p12}^*	1.05e-1	/	/	3.76e-1	/	/	2.88e-1	1.44e-2	2	13.48	1.3
G_{p13}	1.64e-1	-5.72e-2	3.88e-1	1.62	-2.72e-1	7.84e-2	1.00	5.02e-2	2	6.88	1.3
G_{p13}^*	1.85e-1	/	/	1.43	/	/	1.07e-2	5.34e-4	2	5.88	1.3

Na osnovu tabele 7.7 i slike 7.16, interesantno je da je za proces G_{p11} u svakom pogledu bolji odziv postignut klasičnim PID regulatorom. Štaviše, parametar po kome je vršena optimizacija, proporcionalno pojačanje (njegova maksimizacija), veći je kod običnog PID-a.

Što se tiče procesa G_{p12} , odzivi su mnogo sličniji nego kod procesa G_{p11} ,



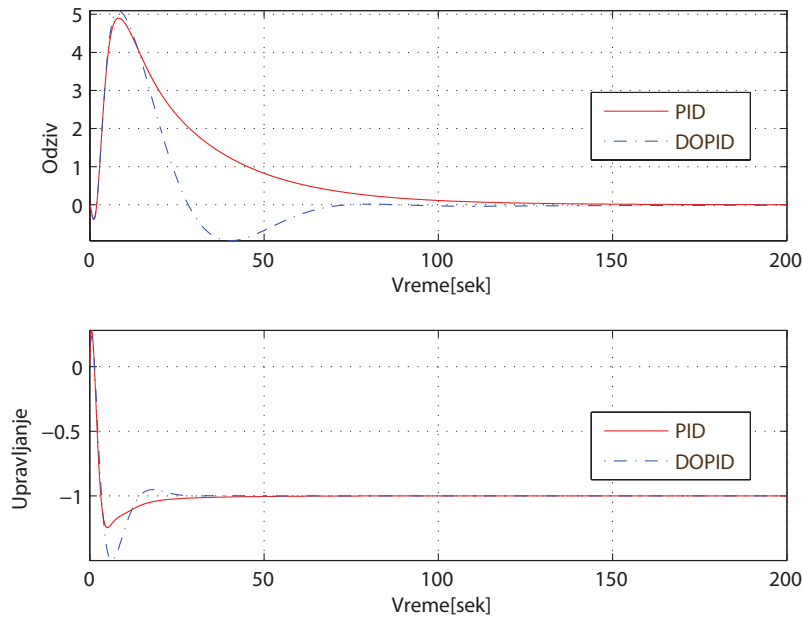
Slika 7.14: Odziv sistema i upravljački signal za proces G_{p13} upravljani klasičnim PID-om i DOPID-om za ograničenja $M_s^{max} = 2$, $M_n^{max} = 20$ i $Q^{max} = 1.01$

iako je i ovde klasični PID postigao bolje rezultate u smislu manjeg prebačaja referentne veličine, bržeg odziva i manje vrednosti IAE. Sa druge strane, vrednost proporcionalnog pojačanja je značajno veća za DOPID regulator, što je i kriterijum koji se analizira.

Posmatranjem rezultata za proces G_{p13} može se zaključiti da se kod klasičnog PID regulatora dobija nefluktirajući odziv dok se kod DOPID regulatora dobija odziv sa prebačajem referentne veličine pri eliminaciji poremećaja. IAE je nešto bolje kod klasičnog PID regulatora, dok je vrednost proporcionalnog člana veća za DOPID regulator.

7.4 Rezultati optimizacionog problema 4

Ovde ćemo dati rezultate optimizacije za optimizacioni problem definisan u odeljku 6.4. Kao i u nekoliko prethodnih analiza projektovan je optimalni DOPID regulator za procese G_{p4} , G_{p11} , G_{p12} i G_{p13} iz razloga što su se ovi procesi pokazali kao afirmativni u postupku projektovanja optimalnog DO-



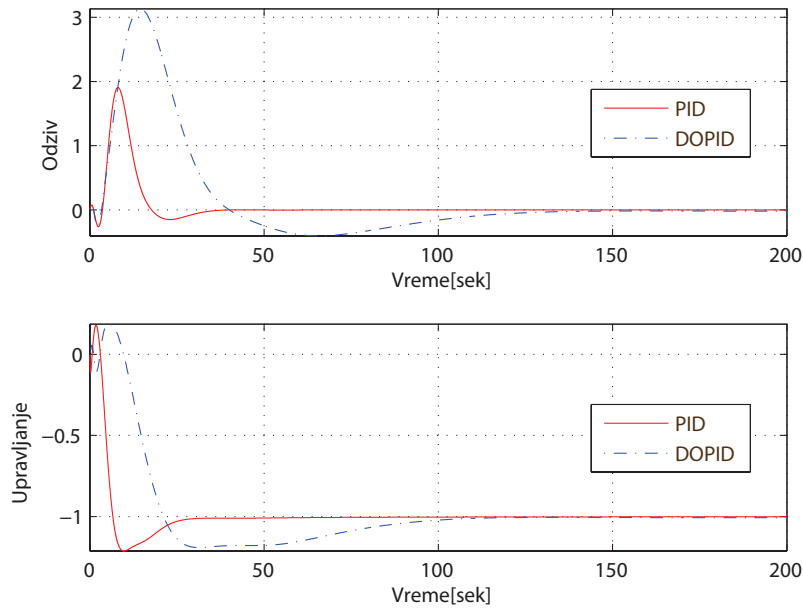
Slika 7.15: Odziv sistema i upravljački signal za optimizacioni problem 3, za proces G_{p4} upravljani klasičnim PID-om i DOPID-om za ograničenja $M_s^{max} = 2$, $M_n^{max} = 20$ i $M_p = 1.3$

PID regulatora za optimizacione probleme razmtrane do sada u sklopu ove disertacije.

Napominjemo da su parametri regulatora bili slobodni u procesu optimizacije.

Tabela 7.8: Rezultati optimizacije parametara PID i DOPID regulatora za optimizacioni problem 4, za procese $G_{p4}, G_{p11}, G_{p12}, G_{p13}$, za vrednosti ograničenja $M_n^{max} = 20$ i $M_p = 1.3$; Rezultati za običan PID regulator su obeleženi sa *

Proc.	k_0	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	T_f	M_s^{max}	IAE	M_p
G_{p4}	2.30e-2	-2.11e-2	-2.23e-2	2.17e-1	4.00e-2	4.98e-3	4.07e-1	2.03e-2	2	44.40	1.3
G_{p4}^*	1.14e-2	/	/	1.75e-1	/	/	5.22e-1	2.61e-2	2	88.41	1.3
G_{p11}	6.93e-2	1.57e-2	5.29e-2	2.19e-1	-4.79e-2	-2.10e-3	7.56e-1	3.78e-2	2	19.52	1.3
G_{p11}^*	9.17e-2	/	/	3.77e-1	/	/	5.58e-1	2.79e-2	2	15.77	1.3
G_{p12}	1.60e-1	-1.65e-1	5.73e-3	6.17e-01	-2.57e-2	-3.15e-1	4.63e-1	2.31e-2	2	17.44	1.3
G_{p12}^*	1.05e-1	/	/	3.76e-1	/	/	2.88e-1	1.44e-2	2	13.47	1.3
G_{p13}	1.63e-1	-6.16e-2	4.00e-1	1.60	-2.50e-01	6.79e-2	9.91e-01	4.96e-2	2	6.56	1.3
G_{p13}^*	1.85e-1	/	/	1.43	/	/	1.07e-2	5.34e-4	2	5.86	1.3



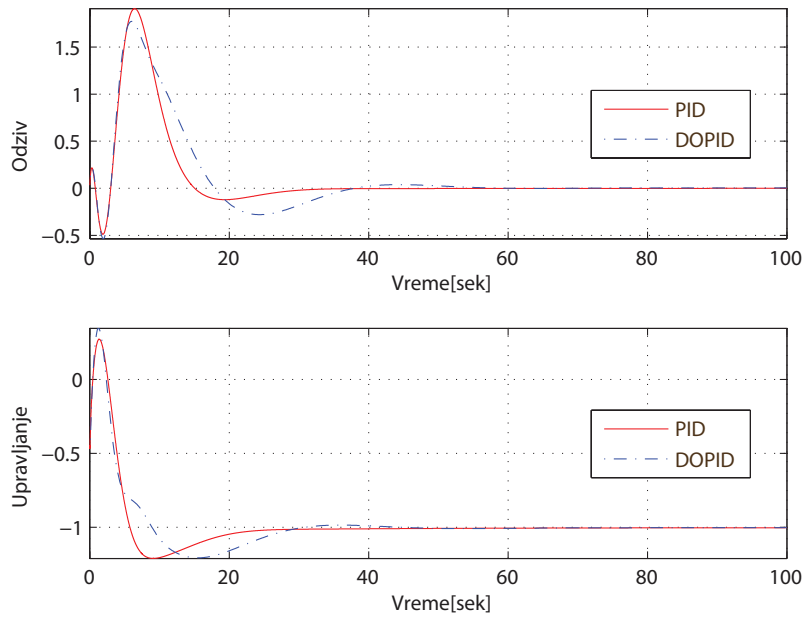
Slika 7.16: Odziv sistema i upravljački signal za optimizacioni problem 3, za proces G_{p11} upravljani klasičnim PID-om i DOPID-om za ograničenja $M_s^{max} = 2$, $M_n^{max} = 20$ i $M_p = 1.3$

Razmatrajući odziv za proces G_{p4} možemo zaključiti da su rezultati koji su dobijeni za DOPID u svakom slučaju bolji od onih dobijenih za klasičan PID u smislu brzine odziva, fluktuacije i IAE, s tim da je čak i kriterijum maksimizacija integralnog dejstava bolji za DOPID nego za klasičan PID kod ovog procesa.

Što se tiče procesa G_{p11} , odzivi su prilično slični i za DOPID i za PID, s tim da je za PID nešto brži i nešto manje fluktuirajući odziv. Za klasičan PID je takođe i IAE nešto manje, a i integralno dejstvo je nešto veće.

Slično prethodnom procesu, za proces G_{p12} odzivi su slični za DOPID i za PID regulator. Nešto je manji prebačaj referentne veličine kod klasičnog PID-a, a samim tim je i vrednost IAE nešto manja. Sa druge strane vrednost integralnog pojačanja je nešto veća za DOPID, a samim tim je i vrednost IE nešto manja za isti regulator, pošto su ove dve veličine direktno povezane.

Proces G_{p13} daje nešto drugačije odzive i za DOPID i za PID u poređenju sa drugim procesima. Naime, ni proces upravljani PID-om, ni onaj upravljani DOPID-om nemaju fluktuirajuće odzive. U oba slučaja dobijaju se odzivi koji



Slika 7.17: Odziv sistema i upravljački signal za optimizacioni problem 3, za proces G_{p12} upravljani klasičnim PID-om i DOPID-om za ograničenja $M_s^{max} = 2$, $M_n^{max} = 20$ i $M_p = 1.3$

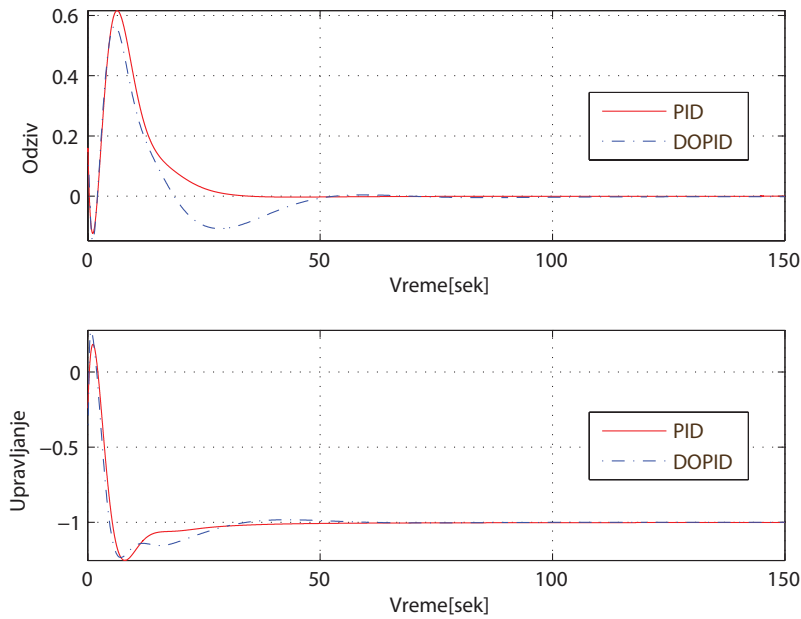
su veoma spori. Proces upravljani PID-om je doduše nešto brži, dok proces upravljani DOPID-om nešto brže odreaguje na poremećaj na samom početku, tj. ima nešto manji preskok. Kod ovog procesa integralno dejstvo je nešto veće za klasični PID, a takođe je i IAE nešto manje.

7.5 Rezultati optimizacionog problema 5

Ovo potpoglavlje predstavlja deo teze gde su dati rezultati optimizacije parametara regulatora za problem definisan u odeljku 6.5. Prikazana je analiza odziva i upravljačkih signala za procese G_{p4} , G_{p11} , G_{p12} i G_{p13} upravljanih DOPID i PID regulatorima, kao i kod većine prethodno razmatranih problema.

I ovde napominjemo da su u procesu optimizacije parametri regulatora bili slobodni.

Što se tiče procesa G_{p4} možemo zaključiti da je odziv koji je dobijen za PID brži, ima manji preskok i manju vrednost IAE, dok je mera robusnosti



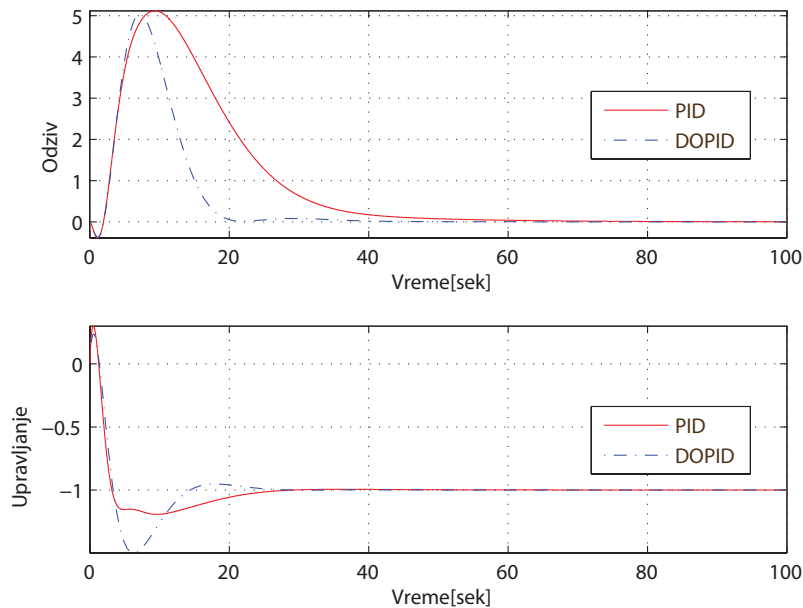
Slika 7.18: Odziv sistema i upravljački signal za optimizacioni problem 3, za proces G_{p13} upravljani klasičnim PID-om i DOPID-om za ograničenja $M_s^{max} = 2$, $M_n^{max} = 20$ i $M_p = 1.3$

Tabela 7.9: Rezultati optimizacije parametara PID i DOPID regulatora za optimizacioni problem 5, za procese $G_{p4}, G_{p11}, G_{p12}, G_{p13}$, za vrednosti ograničenja $M_n^{max} = 20$ i $Q^{max} = 1.01$; Rezultati za običan PID regulator su obeleženi sa *

Proc.	k_0	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	T_f	M_s^{max}	IAE	M_p
G_{p4}	8.80e-3	3.07e-3	-3.06e-2	2.45e-1	8.96e-3	-8.88e-5	4.14e-1	2.07e-2	2	120.88	1.40
G_{p4}^*	2.50e-2	/	/	2.03e-1	/	/	5.02e-1	2.51e-2	2	45.80	1.65
G_{p11}	5.01e-2	1.78e-3	4.10e-4	3.73e-1	7.66e-4	4.29e-3	4.56e-1	2.28e-2	2	22.06	1.05
G_{p11}^*	3.83e-2	/	/	3.85e-1	/	/	2.81e-1	1.41e-2	2	28.21	1.05
G_{p12}	5.48e-2	2.56e-2	-1.10e-1	5.12e-1	-1.22e-1	-1.70e-2	4.18e-1	2.09e-2	2	21.51	1.07
G_{p12}^*	4.07e-2	/	/	3.66e-1	/	/	7.66e-2	3.83e-3	2	27.08	1.04
G_{p13}	3.63e-1	-5.69e-2	3.51e-1	1.41	-2.63e-1	6.14e-1	7.44e-1	3.72e-2	2	3.43	1.60
G_{p13}^*	2.92e-1	/	/	1.75	/	/	8.83e-1	4.41e-2	2	3.94	1.36

M_p manja za DOPID kontroler, što dovodi do zaključka da je proces koji je upravljan DOPID kontrolerom robusniji.

Poređenjem odziva procesa G_{p11} upravljani klasičnim PID-om i DOPID regulatorom, može se zaključiti da je neznatno “bolji” odziv onaj dobijen DO-

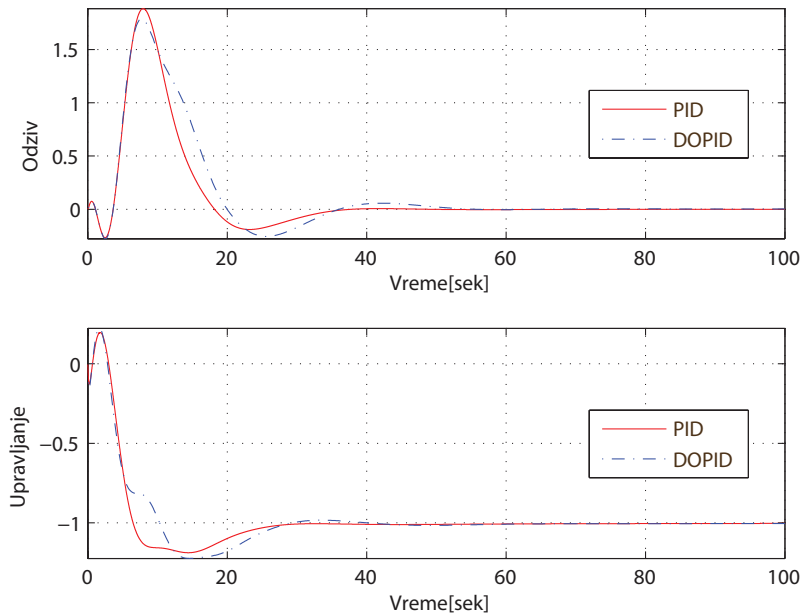


Slika 7.19: Odziv sistema i upravljački signal za optimizacioni problem 4, za proces G_{p4} upravljani klasičnim PID-om i DOPID-om za ograničenja $M_s^{max} = 2$, $M_n^{max} = 20$ i $M_p = 1.3$

PID regulatorom, u smislu da je nešto brži i da ima nešto manju vrednost integrala apsolutne greške, a samim tim i manju vrednost kriterijuma optimalnosti. Vrednost pokazatelja robusnosti je ista u oba slučaja.

Takođe i za proces G_{p12} odzivi su veoma slični za DOPID i za PID regulator, s tim da je nešto očigledniji manji preskok kod DOPID regulatora. Pored toga može se i uočiti činjanica da kod DOPID regulatora postoji mali prebačaj referentne veličine posle reakcije sistema uslovljene regulatorom, dok je vrednost IAE, tj. kriterijuma optimalnosti u ovom slučaju takođe na strani DOPID regulatora, tj. ta vrednost je kod DOPID-a nešto manja. Vrednost M_p je neznatno manja za sistem upravljan sa klasičnim PID regulatorom.

Analizirajući proces G_{p13} vidimo da je značajno manji preskok kod DOPID regulatora, kao i da je i vrednost IAE za isti regulator nešto manja nego za klasičan PID. Sa druge strane, postoji mali prebačaj pri vraćanju sistema u referentnu vrednost kod DOPID regulatora, dok kod klasičnog PID-a to nije slučaj. Mera robusnosti M_p je značajno manja za klasični PID regulator.



Slika 7.20: Odziv sistema i upravljački signal za optimizacioni problem 4, za proces G_{p11} upravljani klasičnim PID-om i DOPID-om za ograničenja $M_s^{max} = 2$, $M_n^{max} = 20$ i $M_p = 1.3$

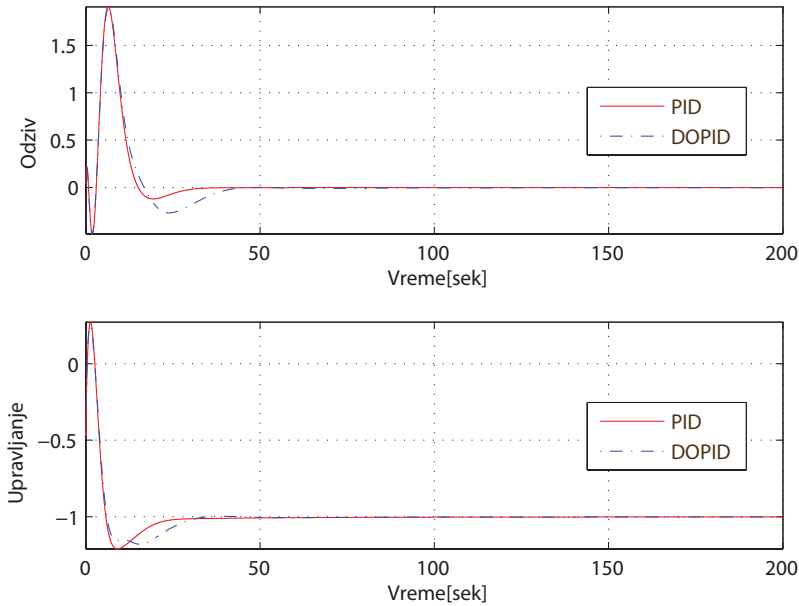
7.6 Rezultati optimizacionog problema 6

U ovom potpoglavlju biće dati rezultati optimizacije za problem predstavljen u odeljku 6.6. Projektovan je optimalni DOPID regulator za procese G_{p4} , G_{p11} , G_{p12} i G_{p13} , kao i kod većine prethodno razmatranih problema.

U procesu optimizacije, parametri regulatora su slobodni.

Razmatrajući proces G_{p4} može se videti da je odziv koji je dobijen za PID bez prebačaja kod povratka sistema na referentnu vrednost, dok je sistem upravljani DOPID-om, iako sa prebačajem, nešto brži. Vrednost parametra IAE koji je i osnovni kriterijum optimalnosti u ovom slučaju je nešto manja kod DOPID regulatora.

Poređenjem odziva procesa G_{p11} upravljani klasičnim PID-om i DOPID regulatorom može se zaključiti da su odzivi skoro jednaki za oba regulatora. Neznatno je finiji odziv za DOPID regulator, a samim tim poseduje i manju vrednost integrala apsolutne greške, tj. manju vrednost kriterijuma optimalnosti.

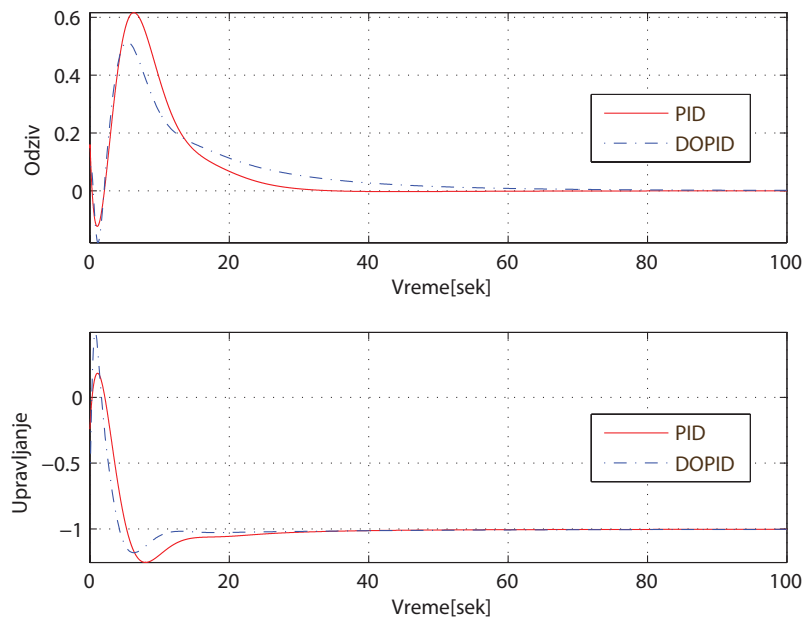


Slika 7.21: Odziv sistema i upravljački signal za optimizacioni problem 4, za proces G_{p12} upravljani klasičnim PID-om i DOPID-om za ograničenja $M_s^{max} = 2$, $M_n^{max} = 20$ i $M_p = 1.3$

Tabela 7.10: Rezultati optimizacije parametara PID i DOPID regulatora za optimizacioni problem 6, za procese $G_{p4}, G_{p11}, G_{p12}, G_{p13}$, za vrednosti ograničenja $M_n^{max} = 20$ i $M_p = 1.3$; Rezultati za običan PID regulator su obeleženi sa *

Proc.	k_0	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	T_f	M_s^{max}	IAE	M_p
G_{p4}	1.49e-2	6.55e-3	-4.91e-2	2.33e-1	3.20e-2	-1.60e-2	4.55e-1	2.27e-2	2	83.42	1.3
G_{p4}^*	1e-2	/	/	1.98e-1	/	/	4.96e-1	2.48e-2	2	100.57	1.3
G_{p11}	8.08e-2	8.06e-3	9.43e-3	3.76e-1	-8.79e-4	-4.37e-2	4.70e-1	2.35e-2	2	14.92	1.3
G_{p11}^*	8.30e-2	/	/	3.69e-1	/	/	3.53e-1	1.76e-2	2	16.09	1.3
G_{p12}	5.92e-2	-2.18e-2	6.13e-2	7.63e-2	-1.39e-1	2.89e-1	2.54e-1	1.27e-2	2	31.08	1.3
G_{p12}^*	8.64e-2	/	/	3.08e-1	/	/	8.23e-2	4.11e-3	2	15.80	1.3
G_{p13}	4.24e-1	-5.02e-1	-6.04e-2	2.32	-6.16e-1	5.74e-1	4.63e-1	2.31e-2	2	7.08	1.3
G_{p13}^*	1.85e-1	/	/	1.43	/	/	9.98e-3	4.99e-4	2	5.87	1.3

Što se tiče procesa G_{p12} , odziv sistema upravljanog DOPID regulatorom je fluktuirajući, dok sistem upravljan klasičnim PID-om ima mali prebačaj i odmah potom ulazi u ustaljeno stanje. Takođe, sistem upravljan PID regulatorom je i brži, a i vrednost IAE je dosta manje kod ovog regulatora.

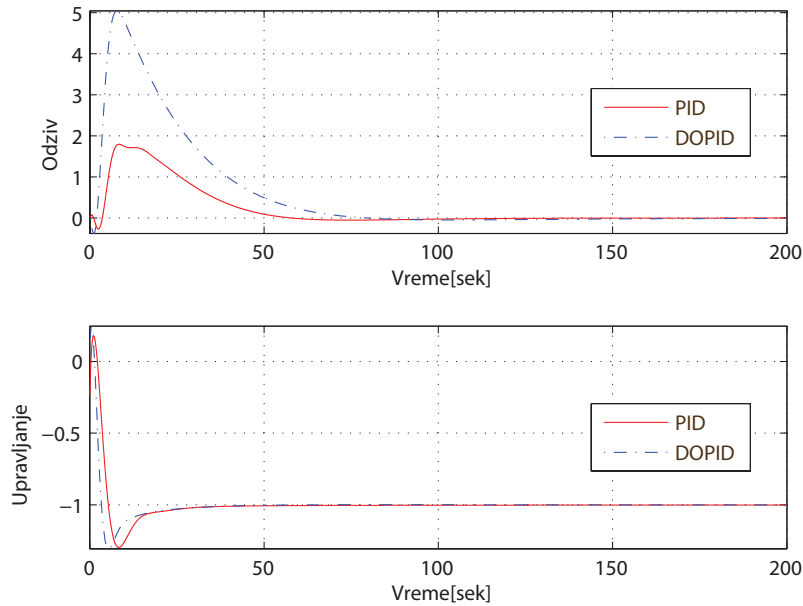


Slika 7.22: Odziv sistema i upravljački signal za optimizacioni problem 4, za proces G_{p13} upravljani klasičnim PID-om i DOPID-om za ograničenja $M_s^{max} = 2$, $M_n^{max} = 20$ i $M_p = 1.3$

Kod procesa G_{p13} možemo primetiti da je odziv sa DOPID regulatorom fluktuirajući, dok kod odziva sa PID regulatorom čak ne postoji ni prebačaj pri povratku na referentnu vrednost. Preskok je nešto manji kod DOPID regulatora, dok sistem sa PID-om nešto brže ulazi u ustaljeno stanje. Vrednost kriterijuma optimalnosti IAE je manja za klasičan PID regulator. Takođe, vidimo da je značajno manji preskok kod DOPID regulatora, kao i da je vrednost IAE za isti regulator nešto manja nego za klasičan PID. Sa druge strane, postoji mali prebačaj pri vraćanju sistema u referentnu vrednost kod DOPID regulatora, dok kod klasičnog PID-a to nije slučaj. Mera robusnosti M_p je značajno manja za klasični PID regulator.

7.7 Rezultati optimizacionog problema 7

Rezultati optimizacije parametara DOPID i klasičnog PID regulatora za optimizacioni problem definisan u potpoglavlju 6.7 biće dati u ovom odeljku.



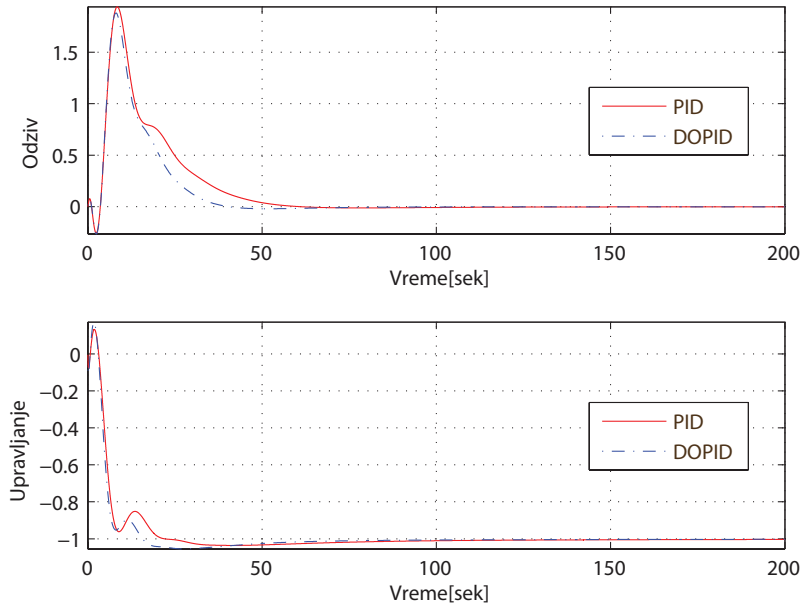
Slika 7.23: Odziv sistema i upravljački signal za optimizacioni problem 5, za proces G_{p4} upravljani klasičnim PID-om i DOPID-om za ograničenja $M_s^{max} = 2$, $M_n^{max} = 20$ i $Q^{max} = 1.01$

Kao i do sada, projektovan je optimalni DOPID regulator za procese G_{p4} , G_{p11} , G_{p12} i G_{p13} . Za ostale procese koji su navedeni u odeljku 6.1 optimalni DOPID regulatori konvergirali su ka klasičnim PID regulatorima, u smislu da su pojačanja diferintegratora koja su različita od standardnih pojačanja klasičnog PID regulatora težila nuli.

I u ovom postupku optimizacije dopušteno je da parametri regulatora ostanu slobodni.

Posmatrajući sliku 7.31 možemo primetiti da odziv sistema za proces G_{p4} upravljani DOPID-om nema fluktuacija, dok klasični PID daje mali prebačaj pri eliminisanju poremećaja. Oba regulatora daju odziv koji se približno istom brzinom vraća u ustaljeno stanje. Vrednost IAE je nešto manja za klasičan PID, nego za DOPID regulator, dok je vrednost pokazatelja M_p nešto manja za DOPID. Takođe je i ukupan kriterijum optimalnosti nešto bolji za DOPID regulator, za koji je vrednost kriterijuma 0.211, dok je za klasičan PID 0.209.

Kod procesa G_{p11} , situacija je potpuno drugačija nego kod procesa G_{p4} . Ovde klasičan PID daje odziv bez fluktuacija, s tim da je odziv kod klasič-



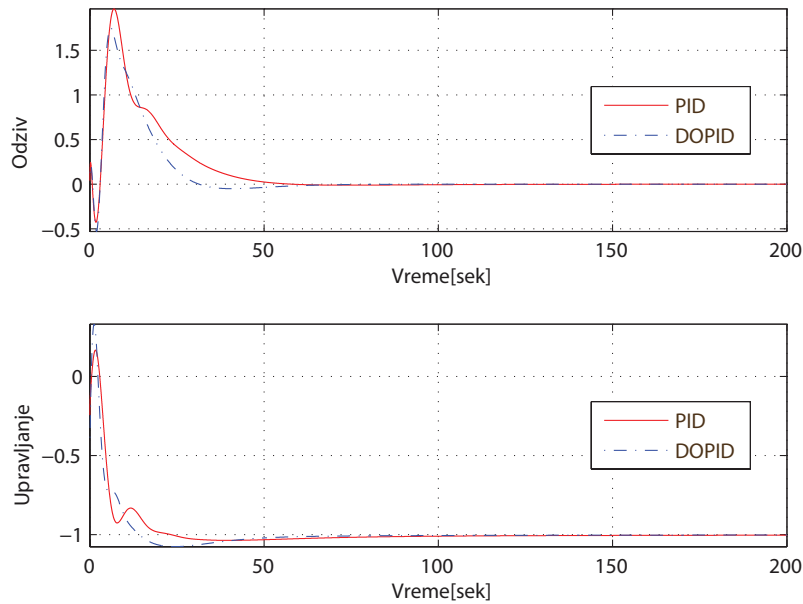
Slika 7.24: Odziv sistema i upravljački signal za optimizacioni problem 5, za proces G_{p11} upravljani klasičnim PID-om i DOPID-om za ograničenja $M_s^{max} = 2$, $M_n^{max} = 20$ i $Q^{max} = 1.01$

Tabela 7.11: Rezultati optimizacije parametara PID i DOPID regulatora za optimizacioni problem 7, za procese $G_{p4}, G_{p11}, G_{p12}, G_{p13}$, za vrednosti ograničenja $M_n^{max} = 20$ i $Q^{max} = 1.01$; Rezultati za običan PID regulator su obeleženi sa *

Proc.	k_0	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	T_f	M_s^{max}	IAE	M_p
G_{p4}	2.08e-2	4.45e-3	-3.00e-2	2.43e-1	1.04e-2	5.67e-3	4.02e-1	2.01e-2	2	52.24	1.59
G_{p4}^*	5.07e-2	/	/	1.30e-1	/	/	6.83e-1	3.42e-2	2	46.44	1.70
G_{p11}	6.26e-2	2.61e-2	6.81e-2	2.12e-1	-3.87e-3	-2.89e-1	7.59e-1	3.79e-2	2	21.30	1.56
G_{p11}^*	3.68e-2	/	/	3.84e-1	/	/	3.78e-1	1.89e-2	2	29.37	1.03
G_{p12}	6.95e-2	2.37e-1	-7.63e-1	1.31	-4.86e-1	-6.87e-2	5.13e-1	2.57e-2	2	18.36	1.3
G_{p12}^*	4.18e-2	/	/	3.77e-1	/	/	1.44e-1	7.20e-3	2	26.45	1.03
G_{p13}	2.97e-1	-5.90e-2	4.46e-1	1.44	-5.50e-1	9.08e-1	6.01e-1	3.00e-2	2	3.73	1.49
G_{p13}^*	2.72e-1	/	/	1.66	/	/	6.14e-2	3.07e-2	2	4.17	1.39

nog PID-a za nijansu sporiji. Vrednost IAE je nešto manja za DOPID, dok je vrednost pokazatelja M_p drastično manja za klasičan PID. Kod procesa G_{p11} dosta je veća vrednost kriterijuma optimalnosti za klasičan PID, nego za DOPID, naime 0.383 naspram 0.211, respektivno.

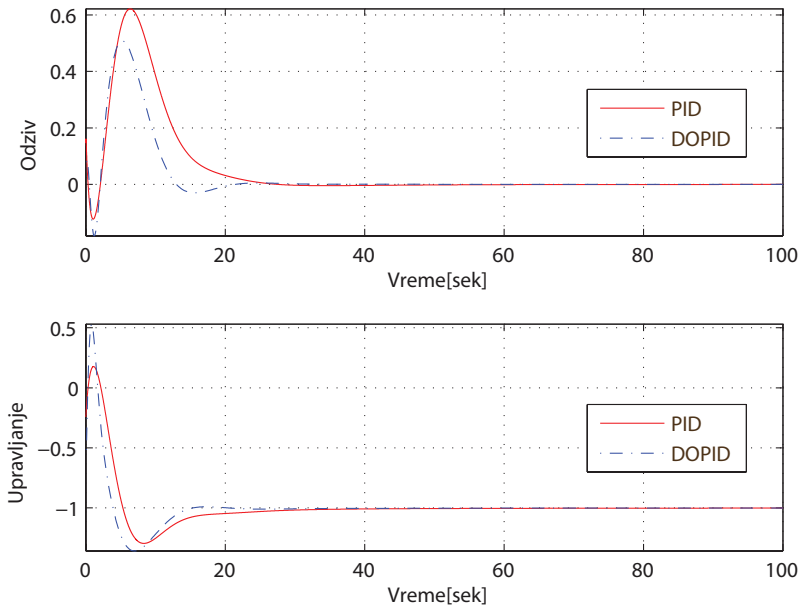
Slično prethodnom procesu i za proces G_{p12} odzivi su slični za DOPID



Slika 7.25: Odziv sistema i upravljački signal za optimizacioni problem 5, za proces G_{p12} upravljani klasičnim PID-om i DOPID-om za ograničenja $M_s^{max} = 2$, $M_n^{max} = 20$ i $Q^{max} = 1.01$

i za PID regulator. Klasični PID regulator omogućava prigušen odziv, dok kod DOPID regulatora postoje određene fluktuacije. Brzina odziva je gotovo identična za oba regulatora. Kao i kod prethodnog razmatranog procesa, vrednost IAE za DOPID je nešto manja nego za klasičan PID regulator, dok je razlika po pitanju M_p manje drastična nego kod prethodnog procesa, ali opet u korist klasičnog PID-a kod koga je vrednost $M_p = 1.03$, naspram $M_p = 1.3$ kod DOPID regulatora.

Za proces G_{p13} se dobijaju najslabiji odzivi za DOPID i PID, s tim da nešto manji preskok ima DOPID, dok je neznatno brži klasičan PID. Vrednost IAE je nešto manja za DOPID, dok je mera robusnosti M_p kvalitetnija za klasičan PID. Sam kriterijum optimalnosti je veći za DOPID, naime on je 1.77 za DOPID, dok je 1.66 za klasični PID.



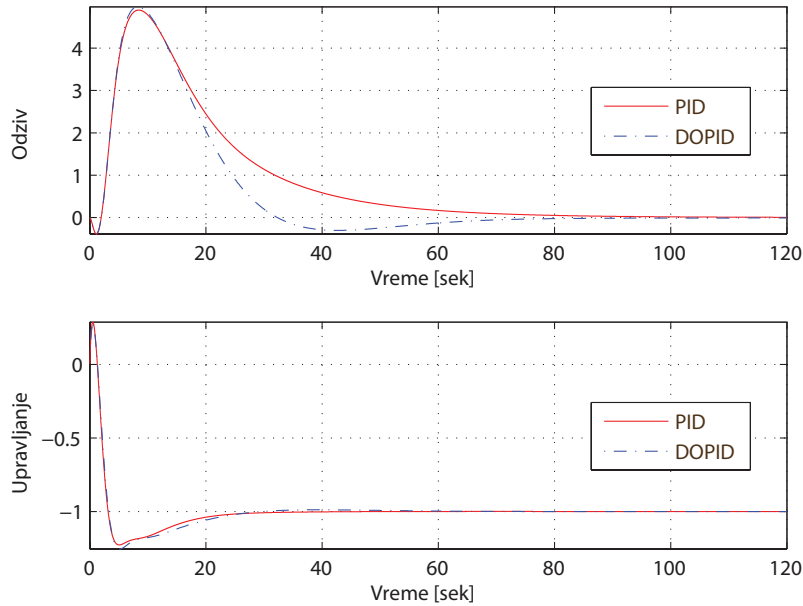
Slika 7.26: Odziv sistema i upravljački signal za optimizacioni problem 5, za proces G_{p13} upravljani klasičnim PID-om i DOPID-om za ograničenja $M_s^{max} = 2$, $M_n^{max} = 20$ i $Q^{max} = 1.01$

7.8 Rezultati optimizacionog problema 8

Optimizacioni problem definisan u odeljku 6.8 poslužio je za projektovanje optimalnog DOPID regulatora za upravljanje procesima G_{p4} , G_{p11} , G_{p12} i G_{p13} . Analiza rezultata optimizacije detaljno je prikazana u ovom odeljku. Takođe, projektovan je i optimalni PID regulator u svrhu poređenja kvaliteta regulacije sa optimalnim DOPID regulatorom.

Koeficijent ω je menjan u rasponu od 0.3 do 1 i na osnovu subjektivnog utiska je izabran za svaki primer onaj koji je davao rezultate koji su najbolji u smislu kompromisa između pokazatelja performansi i robusnosti sistema. Za razmatrane procese u postupku optimizacije najbolji rezultati postignuti su za parametre $\omega = 0.8$, $\omega = 0.6$, $\omega = 0.8$, $\omega = 0.7$, respektivno za procese G_{p4} , G_{p11} , G_{p12} i G_{p13} . U procesu optimizacije parametri regulatora nisu bili ograničeni.

Sa slike 7.35 vidi se da se za proces G_{p4} dobija manje fluktuirajući odziv za DOPID regulator, uz činjenicu da je i preskok značajno manji. Takođe,



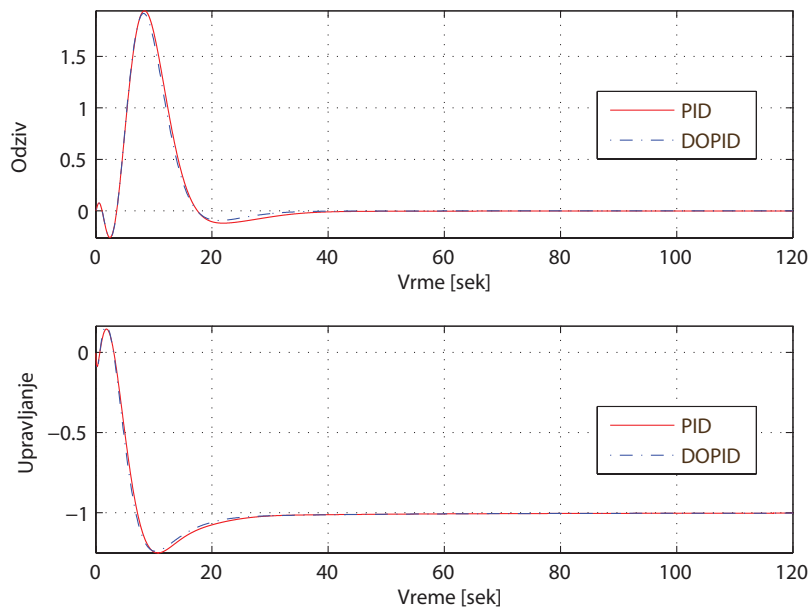
Slika 7.27: Odziv sistema i upravljački signal za optimizacioni problem 6, za proces G_{p4} upravljani klasičnim PID-om i DOPID-om za ograničenja $M_s^{max} = 2$, $M_n^{max} = 20$ i $M_p = 1.3$

Tabela 7.12: Rezultati optimizacije parametara PID i DOPID regulatora za optimizacioni problem 8, za procese $G_{p4}, G_{p11}, G_{p12}, G_{p13}$, za vrednosti ograničenja $M_n^{max} = 20$ i $Q^{max} = 1.01$; Rezultati za običan PID regulator su obeleženi sa *

Proc.	k_0	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	T_f	M_s^{max}	IAE	M_p
G_{p4}	8.77e-3	3.07e-3	-3.07e-2	2.45e-1	8.97e-3	-1.47e-4	4.14e-1	2.07e-2	2	121.26	1.40
G_{p4}^*	1.73e-2	/	/	1.58e-1	/	/	2.72e-1	1.36e-2	2	76.19	2.15
G_{p11}	6.14e-2	7.90e-3	4.23e-2	2.19e-1	2.15e-2	-5.75e-4	6.66e-1	3.33e-2	2	19.76	1.16
G_{p11}^*	3.57e-2	/	/	3.80e-1	/	/	4.07e-1	2.03e-2	2	30.29	1.03
G_{p12}	8.64e-2	3.82e-1	-1.28	2.01	-2.90e-1	-1.11	1.06	5.31e-2	2	15.39	1.41
G_{p12}^*	4.07e-2	/	/	3.78e-1	/	/	2.33e-1	1.17e-2	2	27.20	1.03
G_{p13}	3.77e-1	-6.07e-2	3.81e-1	1.38	-3.10e-1	6.38e-1	7.77e-1	3.88e-2	2	3.47	1.67
G_{p13}^*	2.85e-1	/	/	1.72	/	/	7.58e-1	3.79e-2	2	4.01	1.38

prebačaj kod potiskivanja poremećaja ne postoji kod DOPID regulatora. Oba regulatora, PID i DOPID, eliminišu poremećaj za približno isto vreme. Vrednost IAE je nešto manja za klasičan PID regulator, dok je komplementarna osetljivost kao mera robusnosti značajno bolja kod DOPID regulatora.

Što se tiče procesa G_{p11} , sa slike 7.36 se može videti da su oba regulatora

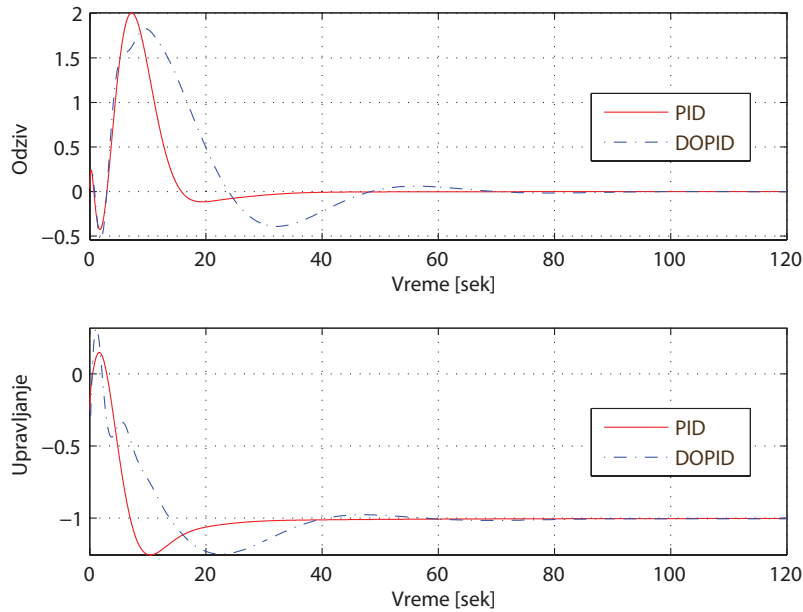


Slika 7.28: Odziv sistema i upravljački signal za optimizacioni problem 6, za proces G_{p11} upravljani klasičnim PID-om i DOPID-om za ograničenja $M_s^{max} = 2$, $M_n^{max} = 20$ i $M_p = 1.3$

veoma slična po pitanju brzine odziva i preskoka, dok se jedina značajnija razlika manifestuje u tome što kod klasičnog PID regulatora ne postoji prebačaj pri vraćanju na referentnu vrednost, dok kod DOPID regulatora postoji mali prebačaj. Vrednost IAE je nešto manja kod DOPID regulatora, dok je mera performanse M_p nešto bolja kod klasičnog PID regulatora.

Kod procesa G_{p12} , čiji su odziv i upravljanje za klasičan PID i DOPID regulator prikazani na slici 7.37, jasno se vidi velika sličnost u odzivima kao za prethodno razmatran proces G_{p11} . Vrednost IAE je značajno manja za DOPID regulator, dok je vrednost M_p dosta manja za klasičan PID regulator.

Što se tiče procesa G_{p13} , na slici 7.38 može se videti da je odziv sistema sa klasičnim PID-om nešto bolji u smislu da ne postoji prebačaj pri eliminisanju poremećaja. S druge strane, DOPID daje bolje rezultate u smislu vrednosti IAE, ali kao što je često slučaj, sistem sa klasičnim PID-om je bolji po pitanju robusnosti posmatrajući parametar M_p .



Slika 7.29: Odziv sistema i upravljački signal za optimizacioni problem 6, za proces G_{p12} upravljani klasičnim PID-om i DOPID-om za ograničenja $M_s^{max} = 2$, $M_n^{max} = 20$ i $M_p = 1.3$

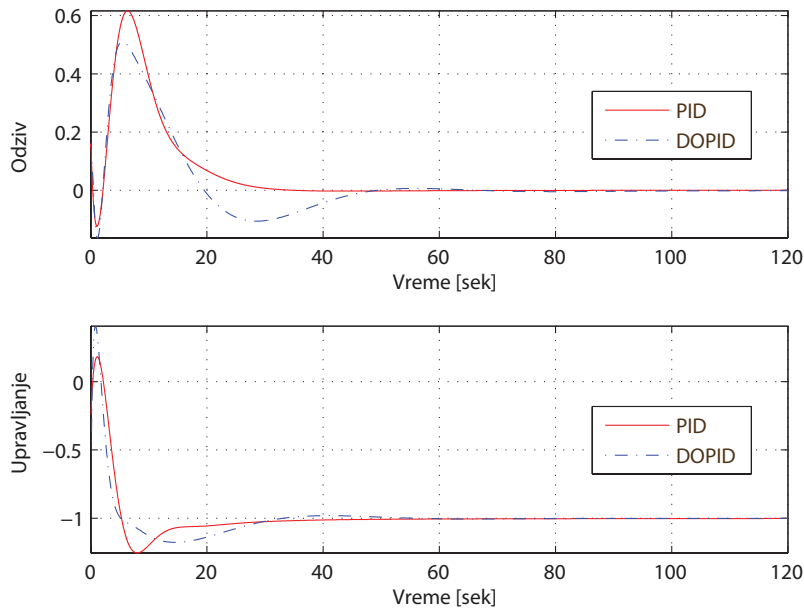
7.9 Rezultati optimizacionog problema 9

U slučaju ovog optimizacionog problema razmatran je samo jedan proces. Optimalni DOPID je projektovan za sistem $G_{p4}(s) = \frac{-\ln(s)}{s(s+1)}$ sa ograničenjima na maksimalnu osetljivost $M_s^{max} = 2$, maskimalnu osetljivost na šum merenja $M_n^{max} = 20$ i uz ograničenje na rezonantni vrh $Q^{max} = 1.01$.

Optimizacija je vršena kao i za sve optimizacione probleme do sad GPSO algoritmom [68] gde su parametri optimizacije 200 čestica i 1000 iteracija.

Naravno, kao i kod drugih procedura mimo optimizacije je razmatrana vrednost mere robusnosti - maskimalne komplementarne osetljivosti, kao i vrednosti IAE i IE kao mera performansi.

U suštini ovde su razmatrana tri optimizaciona postupka, jer se gore navedena procedura koristi da bi se projektovala tri različita optimalna DOPID regulatora. Tako projektovani regulatori su poređeni sa optimalnim klasičnim PID regulatorom. Prvi DOPID regulator je takve strukture da su frakcioni



Slika 7.30: Odziv sistema i upravljački signal za optimizacioni problem 6, za proces G_{p13} upravljani klasičnim PID-om i DOPID-om za ograničenja $M_s^{max} = 2$, $M_n^{max} = 20$ i $M_p = 1.3$

diferintegratori ovog kontrolera koncentrisani oko integralnog člana

$$G_{c1}(s) = \frac{1}{sT_f + 1} \left(k_0 \frac{1}{s} + k_1 \frac{1}{s^{0.9}} + k_2 \frac{1}{s^{0.8}} + k_3 + k_4 \frac{1}{s^{0.7}} + k_5 \frac{1}{s^{0.6}} + k_6 s \right). \quad (7.1)$$

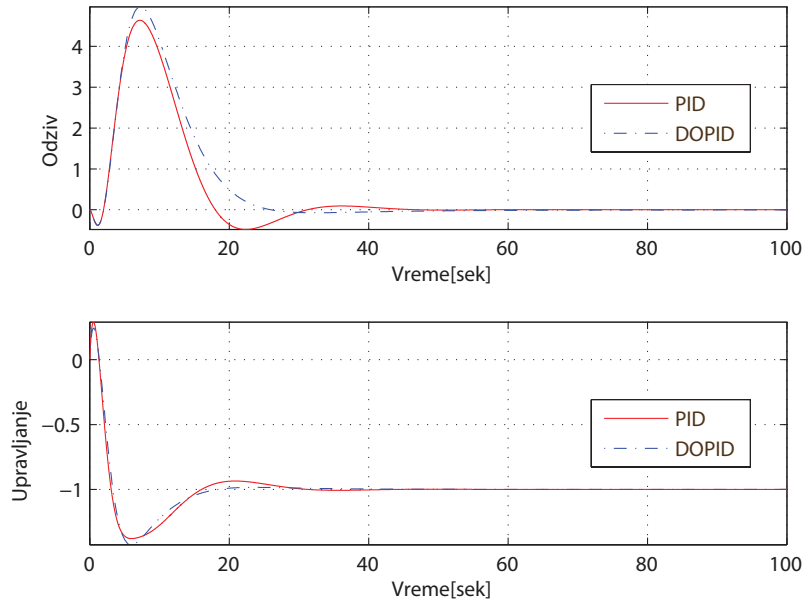
Drugi DOPID regulator je strukture

$$G_{c2}(s) = \frac{1}{sT_f + 1} \left(k_0 \frac{1}{s} + k_1 \frac{1}{s^{0.2}} + k_2 \frac{1}{s^{0.1}} + k_3 + k_4 s^{0.1} + k_5 s^{0.2} + k_6 s \right), \quad (7.2)$$

gde se jasno vidi da su članovi necelog reda DOPID regulatora koncentrisani oko čistog proporcionalnog člana.

Treći i poslednji DOPID regulator ima takvu strukturu da su mu neceli diferintegratori koncentrisani oko čistog diferencijalnog člana

$$G_{c3}(s) = \frac{1}{sT_f + 1} \left(k_0 \frac{1}{s} + k_1 s^{0.9} + k_2 s^{0.8} + k_3 + k_4 s^{0.7} + k_5 s^{0.6} + k_6 s \right). \quad (7.3)$$



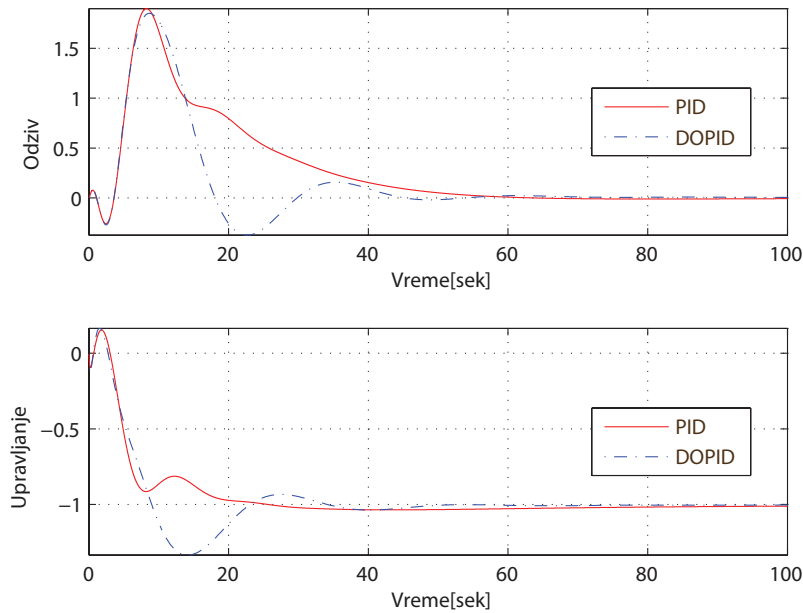
Slika 7.31: Odziv sistema i upravljački signal za optimizacioni problem 7, za proces G_{p4} upravljani klasičnim PID-om i DOPID-om za ograničenja $M_s^{max} = 2$, $M_n^{max} = 20$ i $Q^{max} = 1.01$

Tabela 7.13: Parametri klasičnog PID regulatora i DOPID regulatora G_{c1} , G_{c2} , G_{c3} kao rezultata optimizacije za proces G_{p1} sa ograničenjima $M_s^{max} = 2$, $M_n^{max} = 20$ i $Q^{max} = 1.01$

Regulator	k_0	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	T_f	M_p	IAE	IE
PID	3.11e-2	/	/	0.228	/	/	0.44	2.20e-2	2.01	40.488	32.182
G_{c1}	2.63e-2	4.56e-3	2.95e-2	2.06e-1	-4.53e-4	-1.22e-2	5.14e-1	2.57e-2	2.45	50.85	27.50
G_{c2}	1.67e-3	9.40e-3	-2.39e-2	7.06e-2	-5e-2	9.39e-2	5.50e-1	2.75e-2	1.12	650.58	601.53
G_{c3}	3.11e-2	1.50e-3	-6.73e-4	2.29e-1	7.48e-5	-1.63e-3	4.46e-1	2.23e-2	1.99	40.39	32.14

Rezultati optimizacije za sva tri DOPID regulatora su prikazani u tabeli 7.13 i na slici 7.39.

Treba naglasiti da su kod svih optimalnih DOPID regulatora pojačanja diferintegratora koji su različiti od onih koji predstavljaju čisto integralni član, čisto proporcionalni i čisto diferencijalni član ograničena da budu veći od -0.05 , dok su ona pojačanja koja su analogna pojačanjima kod klasičnog PID-a ograničena da budu pozitivna. Ova granica je određena eksperimentalno jer manje vrednosti pojačanja ovih diferintegratora rezultuju sa lošijim



Slika 7.32: Odziv sistema i upravljački signal za optimizacioni problem 7, za proces G_{p11} upravljani klasičnim PID-om i DOPID-om za ograničenja $M_s^{max} = 2$, $M_n^{max} = 20$ i $Q^{max} = 1.01$

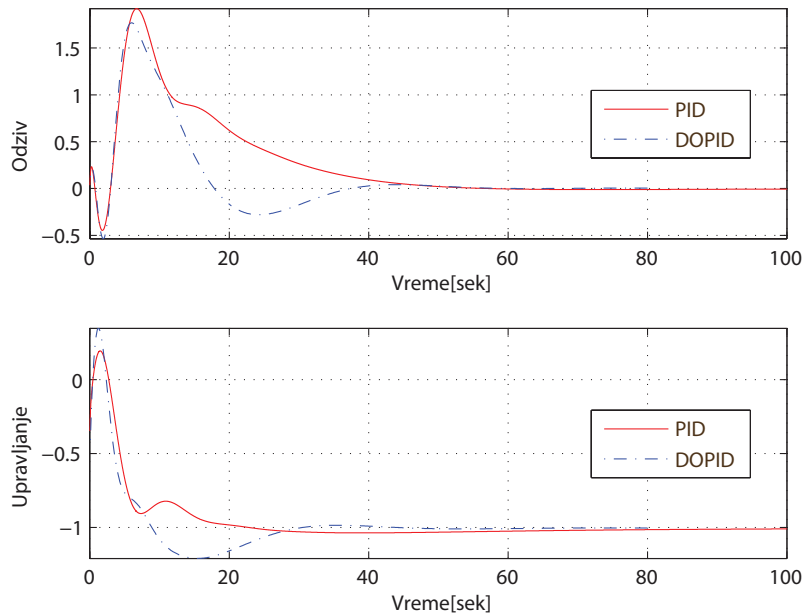
odzivom.

Jasno je da se biranjem reda diferintegratora može dobiti različit tip odziva. Za DOPID regulator G_{c3} , gde je najveći broj njegovih članova oko čistog diferencijalnog člana dobijaju se najniže vrednosti mera performansi IAE i IE. Sa druge strane, najbolja vrednost mere robusnosti M_p je dobijena za DOPID regulator G_{c2} . Takođe, za ovaj regulator je dobijen najmanje fluktuirajući odziv, ali i najsporiji, sa najlošijom merom performanse IAE.

7.10 Rezultati optimizacionog problema 10

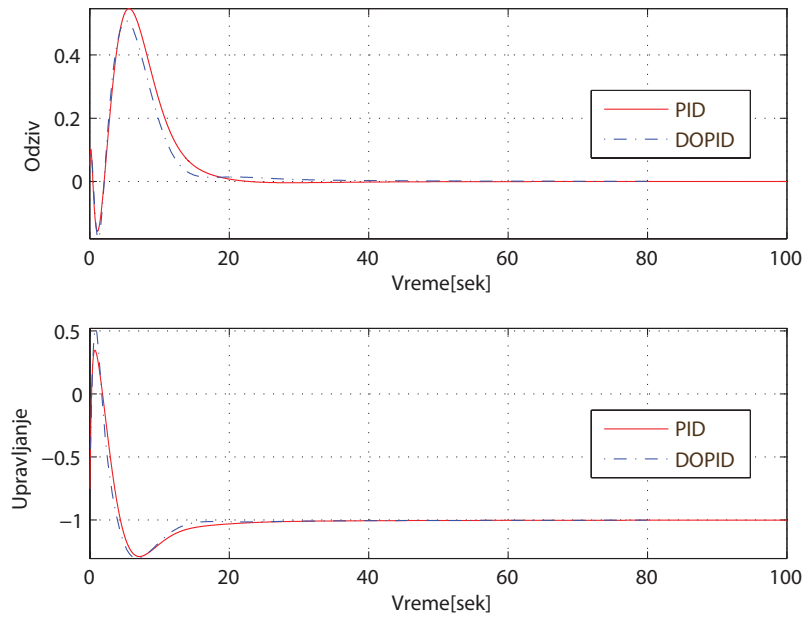
U ovom odeljku biće dati rezultati za problem definisan u odeljku 6.10. Ovde je prvi put, u okviru ove disertacije, projektovan optimalni FPID regulator za procese G_{p1} - G_{p4} .

Kao početna pogađanja optimizacionih parametara uzeti su rezultati dobijeni za optimalni klasični PID. Prvobitno je postupak optimizacije obavljen na



Slika 7.33: Odziv sistema i upravljački signal za optimizacioni problem 7, za proces G_{p12} upravljani klasičnim PID-om i DOPID-om za ograničenja $M_s^{max} = 2$, $M_n^{max} = 20$ i $Q^{max} = 1.01$

taj način da je stepenu diferencijalnog člana dozvoljeno da bude u granicama od 0 do 2. Za većinu analiziranih procesa je optimalni regulator dobijen za vrednost stepena diferenciranja koja je veća od 1.5. Međutim, iako su rezultati zadovoljavali sva ograničenja koja su postavljena, odzivi koji su dobijani su bili prilično oscilatorni. Potom je kroz veliki broj simulacija ustanovljeno je da je za gornju vrednost reda diferenciranja 1.5 optimalni regulator uvek težio toj vrednosti. Granica 1.5 je utvrđena empirijski. Ovako ponašanje je bilo očekivano s obzirom da se regulator ponaša kao kompenzator i da teži da ima što veći red diferenciranja kako bi obezbedio što manju vrednost IAE i IE. Na osnovu ove analize izveden je zaključak da za parametre optimizacije treba uzeti samo pojačanja članova regulatora, dok red diferenciranja treba držati fiksnim. Naravno, već je ranije objašnjena potreba za fiksiranjem reda integracije na 1 zbog obezbeđivanja konačne vrednosti IAE. U sklopu simulacija parametar β , koji predstavlja red diferenciranja, bio je fiksiran na četiri vrednosti, naime $\beta = 0.8$, $\beta = 1$, $\beta = 1.2$ i $\beta = 1.4$. Ove vrednosti su izabrane iskustveno da bi se kroz simulacije izvukli razumni zaključci o kvalitetu



Slika 7.34: Odziv sistema i upravljački signal za optimizacioni problem 7, za proces G_{p13} upravljani klasičnim PID-om i DOPID-om za ograničenja $M_s^{max} = 2$, $M_n^{max} = 20$ i $Q^{max} = 1.01$

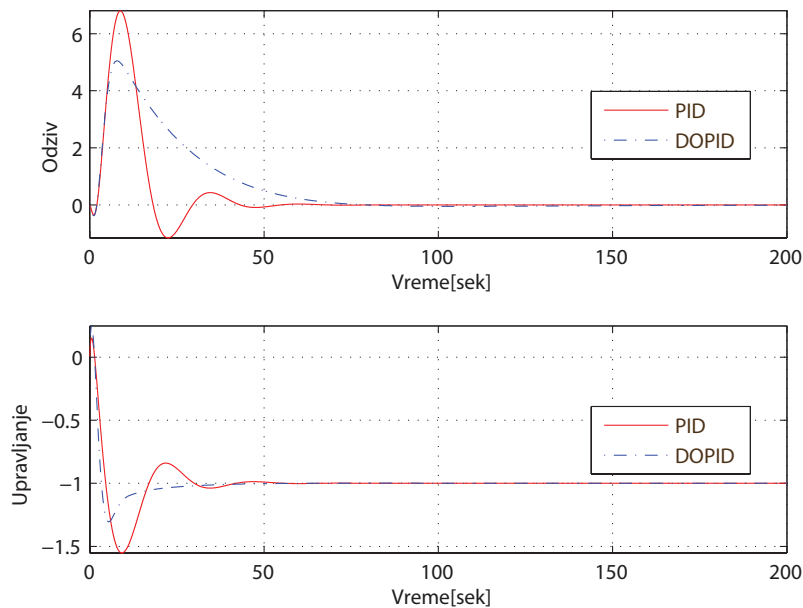
regulatora. Sa druge strane, važno je i traženje kompromisa između vrednosti IE i propusnog opsega, stoga je parametar σ koji omogućava različit tip kompromisa bio fiksiran na tri vrednosti, naime $\sigma = 0.5$, $\sigma = 0.6$ i $\sigma = 0.7$. Svi eksperimenti su obavljani za fiksne vrednosti $M_n^{max} = 20$, $M_s^{max} = 2$ i $Q = 1.01$. Tabela 7.14 prikazuje rezultate dobijene optimizacijom analiziranih procesa.

Za proces G_{p1} najmanje fluktuirajući odzivi su dobijeni za $\beta = 1$, ali poređenjem mera performansi i robusnosti, IAE i M_p , koje nisu eksplicitno uključene u optimizaciju, ustanovljeno je da FPID regulator za vrednost $\beta = 1.2$ daje najbolje rezultate, tj. najbolji kompromis između robusnosti i vrednosti IAE. Poređenjem raznih vrednosti parametra σ , najbolji rezultati u smislu odziva su ostvareni za $\sigma = 0.6$. Za vrednost $\beta = 1.4$ odzivi već počinju bivati prilično fluktuirajući. Slike 7.40 i 7.41 pokazuju odzive sistema za proces G_{p1} i različite varijante FPID regulatora.

Za proces G_{p2} dobijeni su slični rezultati kao i za proces G_{p1} , sa malom razlikom da je čak i maksimalna komplementarna osetljivost M_p manja za

Tabela 7.14: Rezultati optimizacije parametara FPID regulatora dobijenih za ograničenja $M_n = 20$, $M_s = 2$, $Q = 1.01$ i fiksni red integracije $\alpha = 1$

Proces	σ	k_p	k_i	k_d	T_f	β	M_p	IAE
G_{p1}	0.5	1.6237	0.5708	2.2087	0.0636625	0.8	1.28697	1.905
G_{p1}	0.6	1.64694	0.59842	2.06743	0.0586141	0.8	1.2937	1.825
G_{p1}	0.7	1.65873	0.635452	1.80927	0.0496126	0.8	1.30901	1.7149
G_{p1}	0.5	2.21507	0.806591	2.78641	0.139321	1	1.30278	1.37299
G_{p1}	0.6	2.23268	0.828854	2.65466	0.132733	1	1.31843	1.3185
G_{p1}	0.7	2.2362	0.837464	2.59126	0.129563	1	1.32674	1.30102
G_{p1}	0.5	3.01741	1.01464	3.83016	0.252245	1.2	1.26762	1.193
G_{p1}	0.6	3.04851	1.03021	3.7695	0.248911	1.2	1.28105	1.182
G_{p1}	0.7	3.04856	1.03027	3.76957	0.248915	1.2	1.28107	1.182
G_{p1}	0.5	4.33059	1.11137	5.05256	0.374284	1.4	1.57758	1.201
G_{p1}	0.6	4.33065	1.1114	5.05264	0.374288	1.4	1.57761	1.201
G_{p1}	0.7	4.38989	1.12039	5.00377	0.371699	1.4	1.62411	1.19838
G_{p2}	0.5	1.92359	1.11713	1.59777	0.0424723	0.8	1.31946	0.978
G_{p2}	0.6	1.93839	1.17567	1.45298	0.037717	0.8	1.33324	0.930
G_{p2}	0.7	1.93452	1.2033	1.36376	0.0348447	0.8	1.34361	0.905
G_{p2}	0.5	2.57825	1.53564	1.88091	0.0940456	1	1.33095	0.719
G_{p2}	0.6	2.58772	1.55704	1.83842	0.0919212	1	1.34038	0.7061
G_{p2}	0.7	2.59546	1.58874	1.75611	0.0878055	1	1.36051	0.692
G_{p2}	0.5	3.51794	1.93768	2.29741	0.164756	1.2	1.32774	0.633
G_{p2}	0.6	3.56063	1.97475	2.22977	0.160704	1.2	1.3887	0.628
G_{p2}	0.7	3.57359	1.98691	2.19754	0.158765	1.2	1.41717	0.628
G_{p2}	0.5	4.51216	1.90109	2.90077	0.251802	1.4	1.4328	0.692
G_{p2}	0.6	4.8892	2.03089	2.82083	0.246826	1.4	1.60438	0.656
G_{p2}	0.7	4.88931	2.031	2.82091	0.246831	1.4	1.60442	0.655
G_{p3}	0.5	0.471209	0.125026	0.956909	0.0223769	0.8	1.00038	8.784
G_{p3}	0.6	0.479279	0.126774	0.93209	0.0216538	0.8	1.00068	8.643
G_{p3}	0.7	0.492277	0.129738	0.883049	0.0202392	0.8	1.00158	8.391
G_{p3}	0.5	0.523357	0.129291	1.45209	0.0726047	1	1.00788	8.71617
G_{p3}	0.6	0.52336	0.129299	1.45212	0.0726061	1	1.00788	8.716
G_{p3}	0.7	0.613868	0.146191	1.2578	0.0628899	1	1.01464	7.393
G_{p3}	0.5	0.578169	0.133574	2.00037	0.146803	1.2	1.02764	8.785
G_{p3}	0.6	0.749922	0.158338	1.98412	0.145808	1.2	1.05617	7.063
G_{p3}	0.7	0.762703	0.160143	1.97075	0.144989	1.2	1.06526	6.967
G_{p3}	0.5	0.862	0.155739	2.13159	0.20206	1.4	1.25701	7.721
G_{p3}	0.6	0.877368	0.156499	2.13523	0.202307	1.4	1.27751	7.710
G_{p3}	0.7	0.882368	0.156	2.1411	0.202307	1.4	1.27751	7.709
G_{p4}	0.5	0.115808	0.008029	0.42306	0.008067	0.8	1.24848	137.43
G_{p4}	0.6	0.121685	0.009077	0.412603	0.007818	0.8	1.2639	121.645
G_{p4}	0.7	0.124343	0.00958613	0.407507	0.007698	0.8	1.27222	115.237
G_{p4}	0.5	0.129749	0.0105794	0.555606	0.0277803	1	1.33603	112.74
G_{p4}	0.6	0.150335	0.0140354	0.544238	0.0272119	1	1.39603	85.44
G_{p4}	0.7	0.150335	0.0140355	0.544238	0.0272119	1	1.39603	85.44
G_{p4}	0.5	0.197752	0.0202008	0.59688	0.05358	1.2	1.76259	65.584
G_{p4}	0.6	0.183257	0.0178949	0.597539	0.05363	1.2	1.7118	73.76
G_{p4}	0.7	0.150161	0.012941	0.598794	0.05372	1.2	1.60794	101.137
G_{p4}	0.5	0.149225	0.011142	0.561252	0.07789	1.4	2.03128	124.90
G_{p4}	0.6	0.196672	0.0163285	0.566467	0.078413	1.4	2.2548	86.13
G_{p4}	0.7	0.196672	0.0163285	0.566467	0.07841	1.4	2.2548	86.13

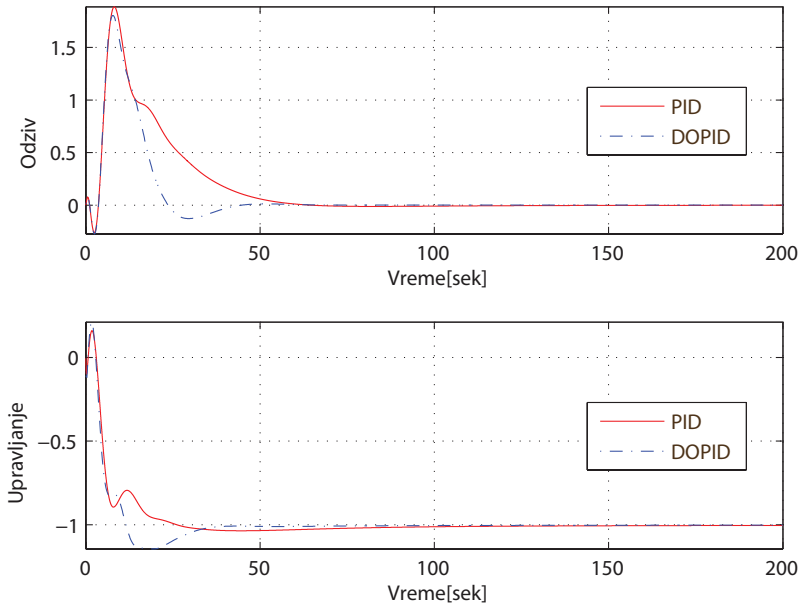


Slika 7.35: Odziv sistema i upravljački signal za optimizacioni problem 8 za proces G_{p4} upravljani klasičnim PID-om i DOPID-om za ograničenja $M_s^{max} = 2$, $M_n^{max} = 20$ i $Q^{max} = 1.01$

$\beta = 1$. Očekivani rezultati su dobijeni povećanjem parametra β , jer je vrednost IAE istovremeno opadala. Takođe, vrednost pokazatelja M_p je bila najmanja za $\beta = 0.8$. Što se tiče razmatranja odziva u zavisnosti od parametra σ , najbolji odzivi su dobijeni za $\sigma = 0.6$. Na slikama 7.42 i 7.43 mogu se videti odzivi vezani za proces G_{p2} .

Što se tiče procesa G_{p3} , teško je odrediti koji od odziva za $\beta = 1$ ili za $\beta = 1.2$ je manje fluktuirajući. Poređenjem drugih indikatora može se primetiti da je regulator za vrednost parametra $\beta = 1$ nešto robusniji, dok odziv sistema sa FPID regulatorom sa parametrom $\beta = 1.2$ ima nešto manju vrednost IAE. Što se tiče analize za ovaj proces po parametru σ , za vrednosti $\sigma = 0.7$ i $\sigma = 0.6$ ne postoje značajne razlike. Odzivi za proces G_{p3} se mogu videti na slikama 7.44 i 7.45.

Frakcioni proces G_{p4} prikazuje najmanje fluktuirajuće ponašanje za red diferenciranja $\beta = 0.8$ sa parametrom $\sigma = 0.5$. Čak je i pokazatelj robusnosti M_p bio najbolji za vrednost $\beta = 0.8$, dok je jedino vrednost IAE bila nešto manja za regulator sa diferencijatorom reda $\beta = 1.2$. Odzivi vezani za ovaj



Slika 7.36: Odziv sistema i upravljački signal za optimizacioni problem 8 za proces G_{p11} upravljani klasičnim PID-om i DOPID-om za ograničenja $M_s^{max} = 2$, $M_n^{max} = 20$ i $Q^{max} = 1.01$

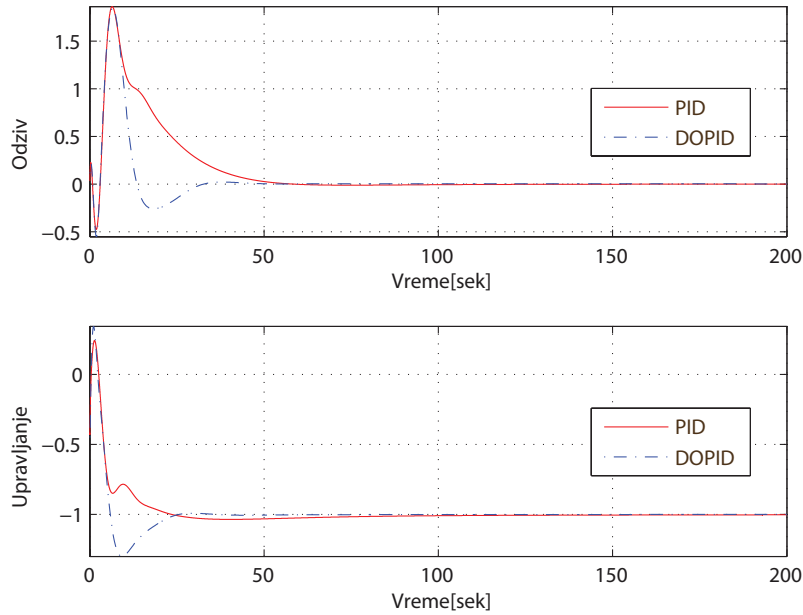
proces mogu se videti na slikama 7.46 i 7.47.

7.11 Rezultati optimizacionog problema 11

U okviru ovog potpoglavlja biće dati rezultati optimizacije za optimizacioni problem predstavljen u potpoglavlju 6.11. Slično kao i za većinu analiziranih problema do sada, projektovan je optimalni DOPID regulator za procese G_{p4} , G_{p11} , G_{p12} i G_{p13} .

U procesu optimizacije parametri regulatora nisu bili ograničeni. Kod FPID regulatora red integratora je fiksiran i jednak je jedinici. Time se obezbeđuje konačna vrednost IAE kod sistema u kojima je upravljački algoritam FPID regulator. Parametar β nije fiksiran i kreće se u opsegu između 0 i 1.5.

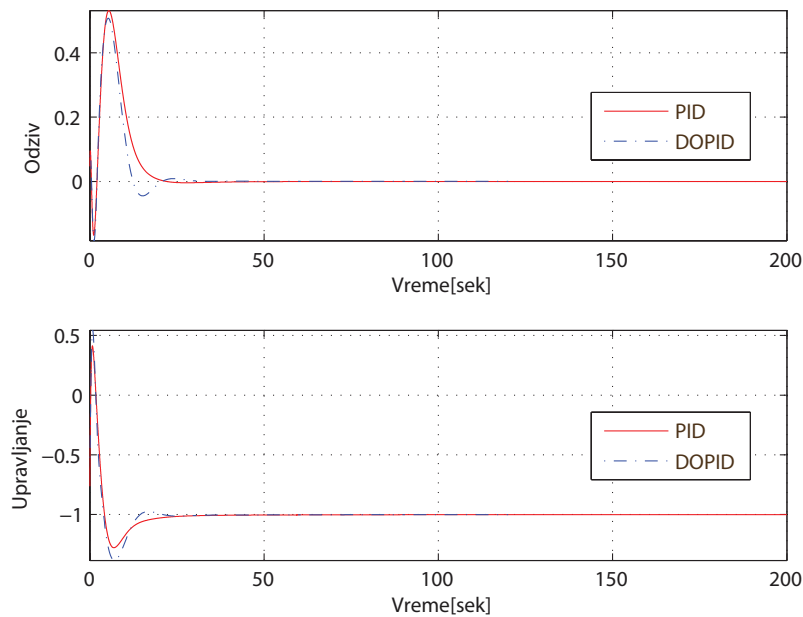
Sa slike 7.48 vidi se da se za proces G_{p4} dobija veoma sličan odziv i za FPID i za klasični PID regulator. U principu, sistem je fluktuirajući i za oba regulatora ima prilično loš pokazatelj robusnosti M_p , zanemarljivo lošiji za



Slika 7.37: Odziv sistema i upravljački signal za optimizacioni problem 8 za proces G_{p12} upravljani klasičnim PID-om i DOPID-om za ograničenja $M_s^{max} = 2$, $M_n^{max} = 20$ i $Q^{max} = 1.01$

Tabela 7.15: Rezultati optimizacije parametara PID i DOPID regulatora za optimizacioni problem 11, za procese G_{p4} , G_{p11} , G_{p12} , G_{p13} , za vrednosti ograničenja $M_n^{max} = 20$ i $Q^{max} = 1.01$; Rezultati za običan PID regulator su obeleženi sa *

Proces	k_p	k_i	k_d	T_f	β	M_p	IAE
G_{p4}	2.62e-1	3.60e-2	5.04e-1	3.19e-2	1.07	2.10	36.03
G_{p4*}	2.28e-1	3.11e-2	4.39e-1	2.20e-2	1	2.02	40.52
G_{p11}	4.88e-1	6.66e-2	5.62e-1	7.42e-2	1.37	1.25	16.46
G_{p11*}	3.84e-1	4.05e-2	2.78e-1	1.39e-2	1	1.05	26.78
G_{p12}	3.98e-1	5.18e-2	1.59e-1	1.68e-2	1.18	1.07	21.61
G_{p12*}	3.79e-1	4.50e-2	1.71e-1	8.53e-3	1	1.03	24.70
G_{p13}	1.40	2.12e-01	5.52e-2	2.38e-3	9.75e-1	1.37	5.24
G_{p13*}	1.37	2.10e-1	1.07e-2	5.35e-4	1	1.38	5.28



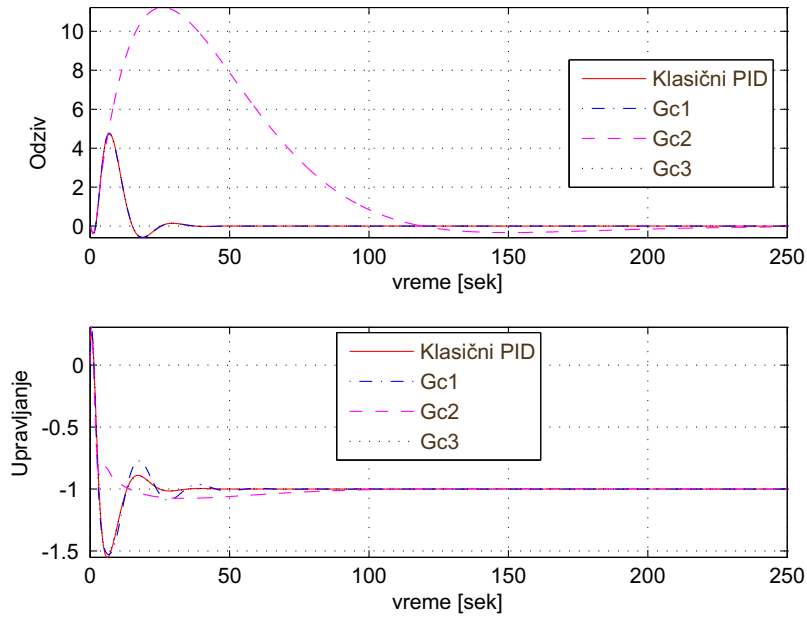
Slika 7.38: Odziv sistema i upravljački signal za optimizacioni problem 8 za proces G_{p13} upravljani klasičnim PID-om i DOPID-om za ograničenja $M_s^{max} = 2$, $M_n^{max} = 20$ i $Q^{max} = 1.01$

FPID regulator, koji sa druge strane ima nešto bolju vrednost IAE.

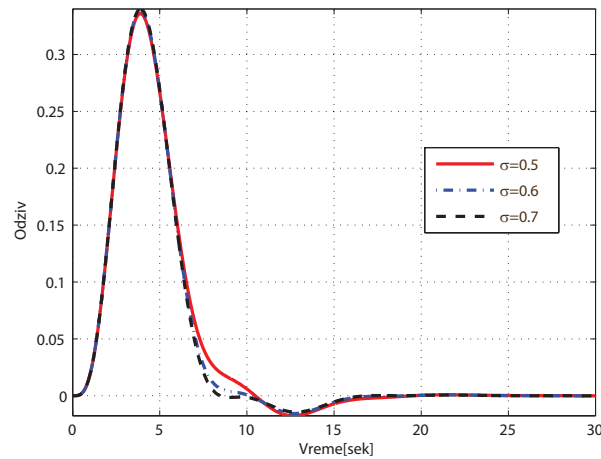
Odziv procesa G_{p11} može se videti na slici 7.49. Može se primetiti da je odziv sistema sa FPID regulatorom brži, ima nešto manji preskok i manju vrednost IAE. Iz tabele 7.15 vidi se da je vrednost mere robusnosti na strani klasičnog PID regulatora.

Za proces G_{p12} su slični odzivi za oba regulatora, klasični PID i FPID. FPID se pokazao neznatno bolji u smislu brzine odziva i manje vrednosti IAE, dok je klasični PID nešto robusniji. Oba regulatora obezbeđuju nefluktuirajući odziv.

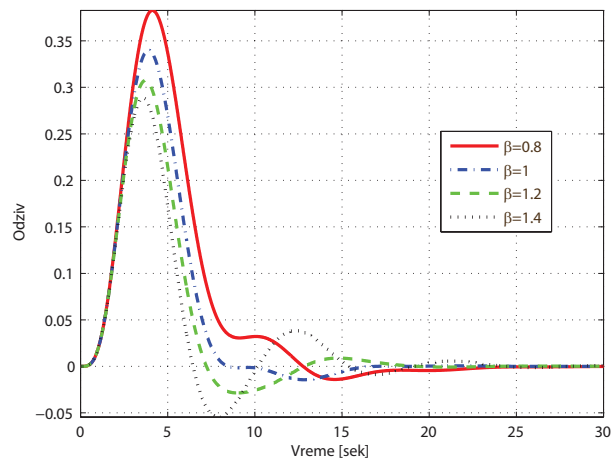
Odzivi procesa G_{p13} , prikazani na slici 7.51 su veoma slični, međutim kada se analizira tabela 7.15 za ovaj proces vidi se da je FPID neznatno bolji i po pitanju mere performanse IAE i po pitanju mere robusnosti M_p . Ovo nije bio slučaj kod ostalih procesa, tako da bi se moglo reći da postoji prednost u svakom pogledu, tj. i u smislu mera performansi i u smislu mera robusnosti za određenu klasu procesa, konkretno u ovom slučaju, proces G_{p13} kada se upravlja FPID regulatorom.



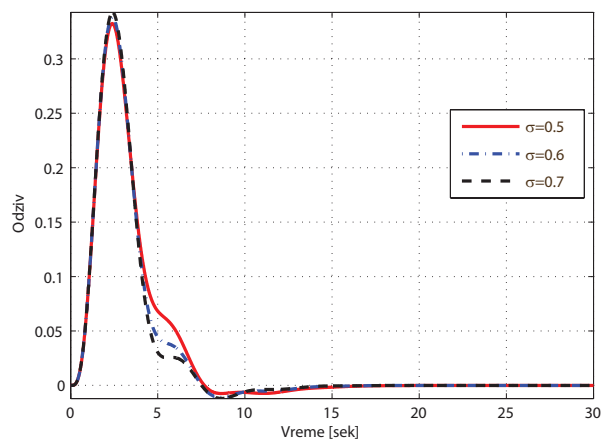
Slika 7.39: Odziv sistema (gore) i upravljački sistem (dole) na poremećaj tipa odskočnog signala za proces G_{p4} za $M_s^{max} = 2$, $M_n^{max} = 20$ i $Q^{max} = 1.01$ za regulatore: klasični PID, $G_{c1}(s)$, $G_{c2}(s)$ i $G_{c3}(s)$



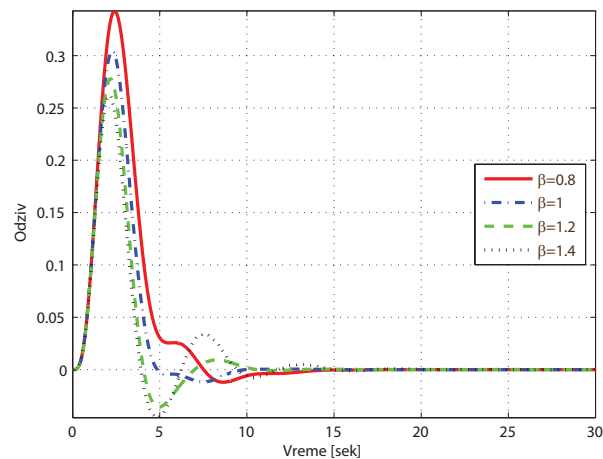
Slika 7.40: Odziv sistema na jedinični odskočni poremećaj za proces G_{p1} kontrolisan FPID-om za različite vrednosti σ i $M_s = 2$, $M_n = 20$, $Q = 1.01$ i $\beta = 1$



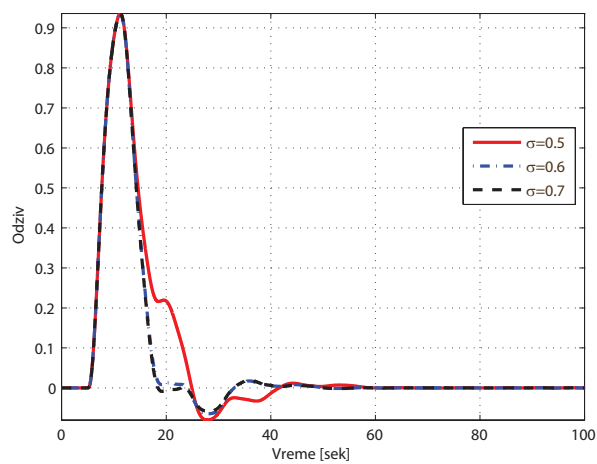
Slika 7.41: Odziv sistema na jedinični odskočni poremećaj za proces G_{p1} kontrolisan FPID-om za različite vrednosti β i $M_s = 2$, $M_n = 20$, $Q = 1.01$ i $\sigma = 0.7$



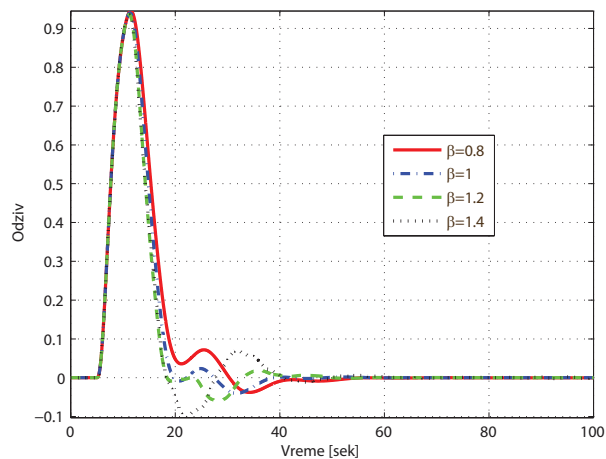
Slika 7.42: Odziv sistema na jedinični odskočni poremećaj za proces G_{p2} kontrolisan FPID-om za različite vrednosti σ i $M_s = 2$, $M_n = 20$, $Q = 1.01$ i $\beta = 0.8$



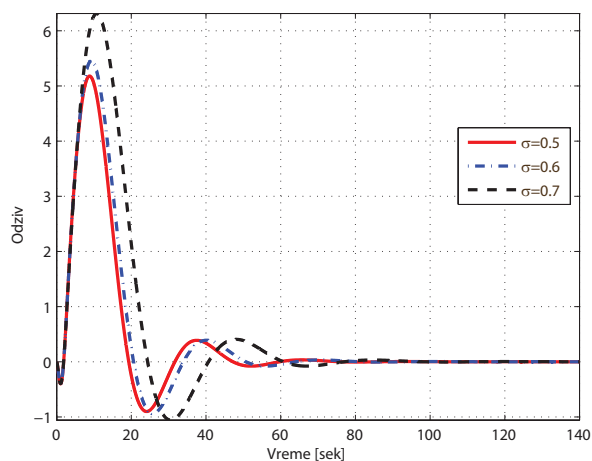
Slika 7.43: Odziv sistema na jedinični odskočni poremećaj za proces G_{p2} kontrolisan FPID-om za različite vrednosti β i $M_s = 2$, $M_n = 20$, $Q = 1.01$ i $\sigma = 0.7$



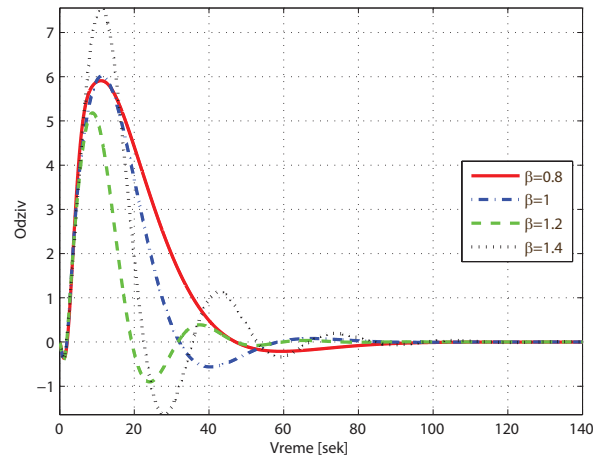
Slika 7.44: Odziv sistema na jedinični odskočni poremećaj za proces G_{p3} kontrolisan FPID-om za različite vrednosti σ i $M_s = 2$, $M_n = 20$, $Q = 1.01$ i $\beta = 1.2$



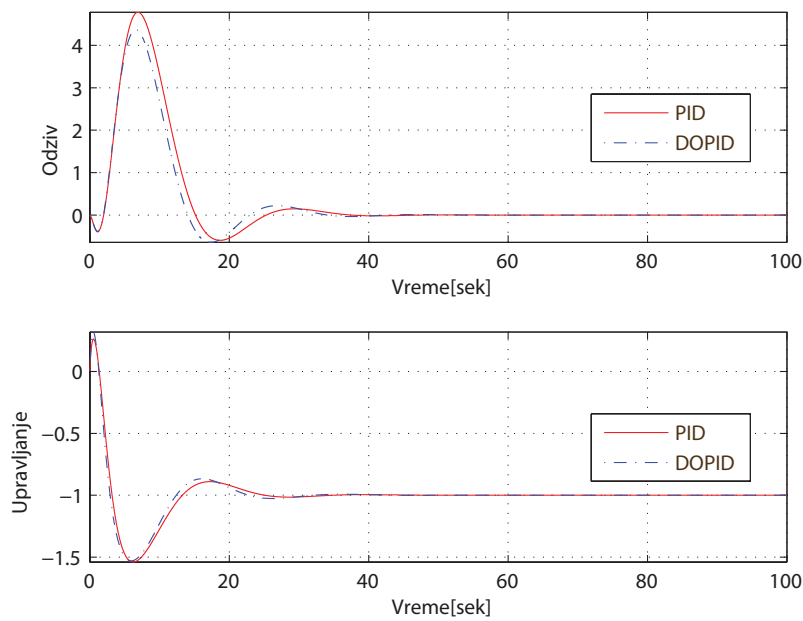
Slika 7.45: Odziv sistema na jedinični odskočni poremećaj za proces G_{p3} kontrolisan FPID-om za različite vrednosti β i $M_s = 2$, $M_n = 20$, $Q = 1.01$ ind $\sigma = 0.7$



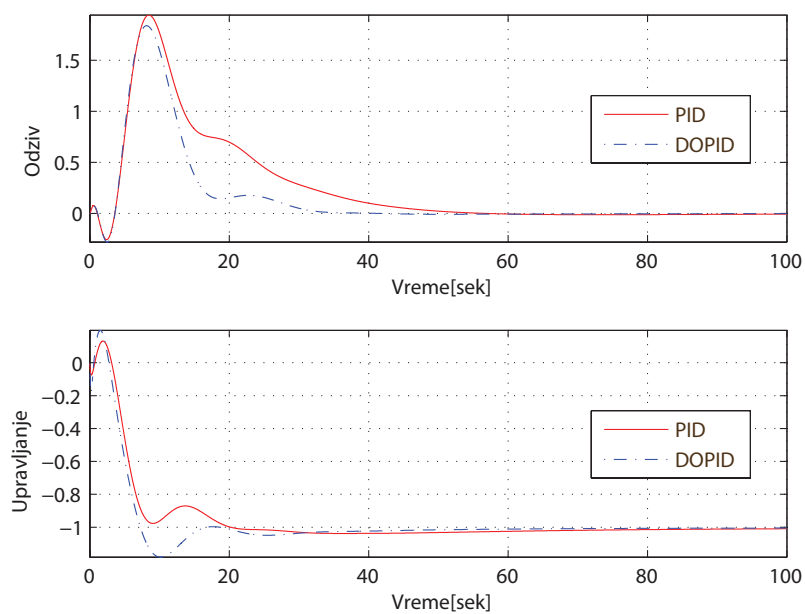
Slika 7.46: Odziv sistema na jedinični odskočni poremećaj za proces G_{p4} kontrolisan FPID-om za različite vrednosti σ i $M_s = 2$, $M_n = 20$, $Q = 1.01$ i $\beta = 1.2$



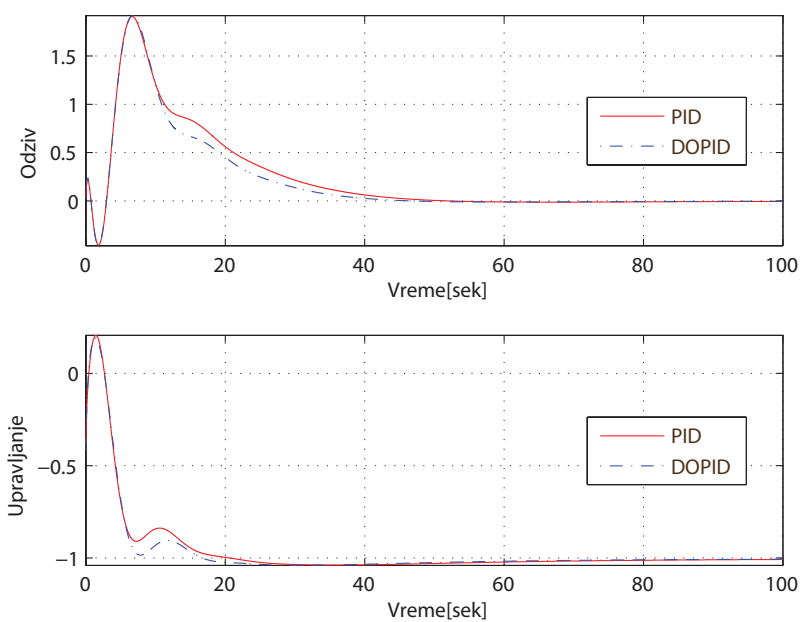
Slika 7.47: Odziv sistema na jedinični odskočni poremećaj za proces G_{p4} kontrolisan FPID-om za različite vrednosti β i $M_s = 2$, $M_n = 20$, $Q = 1.01$ i $\sigma = 0.5$



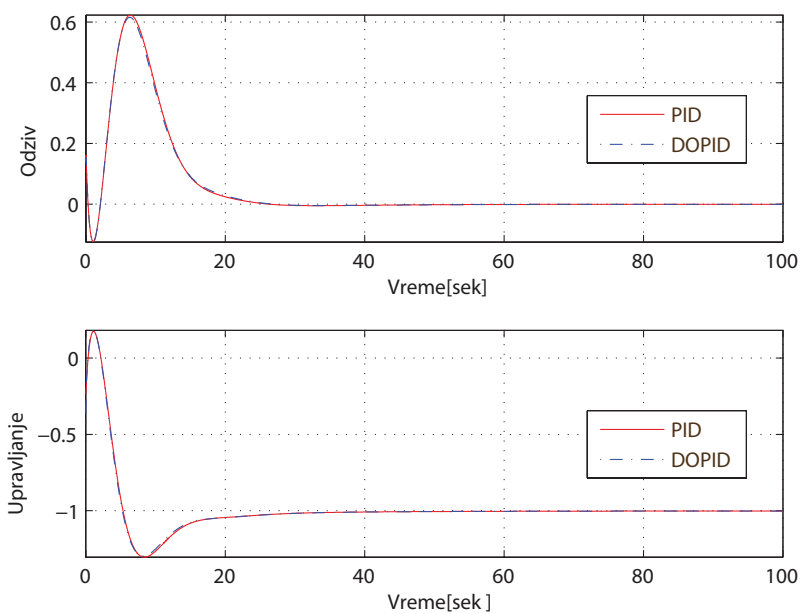
Slika 7.48: Odziv sistema i upravljački signal za optimizacioni problem 11 za proces G_{p4} upravljani klasičnim PID-om i FPID-om za ograničenja $M_s^{max} = 2$, $M_n^{max} = 20$ i $Q^{max} = 1.01$



Slika 7.49: Odziv sistema i upravljački signal za optimizacioni problem 11 za proces G_{p11} upravljani klasičnim PID-om i FPID-om za ograničenja $M_s^{max} = 2$, $M_n^{max} = 20$ i $Q^{max} = 1.01$



Slika 7.50: Odziv sistema i upravljački signal za optimizacioni problem 11 za proces G_{p12} upravljani klasičnim PID-om i FPID-om za ograničenja $M_s^{max} = 2$, $M_n^{max} = 20$ i $Q^{max} = 1.01$



Slika 7.51: Odziv sistema i upravljački signal za optimizacioni problem 11 za proces G_{p13} upravljani klasičnim PID-om i FPID-om za ograničenja $M_s^{max} = 2$, $M_n^{max} = 20$ i $Q^{max} = 1.01$

Upravljanje procesima sa dinamikom necelog reda pomoću kliznog režima

Nastavljamo studiju sistema necelog reda sa poremećajem pri čemu se nismo ograničili na linearne sisteme, već smo teoriju uopštili na nelinearnu dinamiku procesa, a pretpostavka koja je uvedena u prethodnim poglavljima u vezi sa konstantnim vrednostima poremećaja, u poglavljima koja slede je mnogo manje rigidna. Predložen je zakon upravljanja koji predstavlja proširenje konvencionalnog PI regulatora (Poglavlje 4) obogaćenog i takozvanim nelinearnim PI regulatorom u skladu sa dinamikom sistema koji rešavamo. Ovaj pristup predstavlja vredan, originalan doprinos studiji upravljanja sistemima necelog reda koji se prvi put javlja u [3].

U ovom poglavlju biće data analiza upravljanja nelinearnim procesima sa dinamikom necelog reda putem kliznog režima (*sliding mode control*). Do sada je centralna tema ove teze bilo podešavanje parametara linearnih regulatora sličnih PID regulatoru, tj. njegovih uopštenja poput FPID regulatora i DO-PID regulatora. Projektovani su takvi regulatori da budu robusni u smislu potiskivanja poremećaja pod uticajem netačnosti modela, te šuma merenja. Ove generalizacije pokazale su se kao pogodne za upravljanje procesima koji u sebi imaju dinamiku necelog reda.

Razmotrimo sada još jednu klasu modela, nelinearne modele koji se mogu zapisati na različite načine. Svakako jedan od najčešće korišćenih zapisa vremenski nepromenljivih nelinearnih modela je u formi lanca integratora Bru-

novskog [69]

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n &= f(x) + g(x)u. \end{aligned} \tag{8.1}$$

Linearni regulatori poput klasičnog PID regulatora i njegovih raznih modifikacija nisu pogodni za upravljanje ovakvom klasom procesa, jer ne uspevaju da ostvare zadovoljavajuće performanse, poput nemogućnosti eliminisanja greške u ustaljenom stanju i slično. Za upravljanje ovakvom klasom procesa veoma pogodnim se pokazao klizni režim koji je razvijen još pedesetih godina prošlog veka [29], [70], [71]. Vremenom se pokazao veoma uspešnim po pitanju robusnosti u smislu netačnosti modela i uticaja poremećaja na sistem, uz činjenicu da je klizni režim veoma jednostavan. Klizni režim predstavlja nelinearni upravljački algoritam koji je u svojoj osnovi nekontinualan i koji omogućava visokofrekventno prebacivanje između više upravljačkih vrednosti. Ovakvo ponašanje dovodi do neželjenih oscilacija na izlazu sistema, tj. treperenja (*chattering*)¹. Takođe, ovakav regulator je nemoguće izvesti pomoću mehaničkih sistema [72]. Ovakvo ponašanje originalnih regulatora kliznog režima do sada se eliminisalo na različite načine, poput uključivanja prekidnog upravljačkog signala u dinamiku observera, na taj način eliminišući direktan uticaj prekida na proces kojim se upravlja [25], [73], te eliminišući prekide putem glatkih aproksimacija funkcije znaka [74] ili čak na taj način što se upravljački signal koji je diskontinualan integrali po vremenu i tako se dobija neprekidan upravljački signal [26],[75]. Poslednji pristup najčešće je vezan za algoritme drugog reda kliznog režima (2-SMC), koji su pogodniji za eliminisanje neželjenih oscilacija sistema (treperenja) uz mnogo striktnija ograničenja na granice tačnosti modela procesa.

8.1 Osnove kliznog režima

Posmatrajmo nelinearan sistem u formi (8.1) [69]. Cilj kliznog režima je da obezbedi da promenljive stanja sistema nakon konačnog vremena zadovolje relaciju

$$s(x) = \sum_{i=1}^n c_i x_i = \sum_{i=0}^n c_i x_1^{i-1} = 0. \tag{8.2}$$

¹Podsećamo da je jedan od zahteva kvalitetnog upravljanja upravo minimizacija naglih promena upravljačke vrednosti, te je ovom problemu u okviru ove studije nelinearnih sistema posvećena posebna pažnja.

koja ne zavisi od modela posmatranog procesa i uticaja spoljašnjeg poremećaja. To praktično znači da se nakon konačnog vremena T sistem u zatvorenoj povratnoj sprezi ponaša kao linearan, autonoman sistem reda $n - 1$ čiju dinamiku biramo izborom parametara c_i . Na taj način klizni režim svodi problem upravljanja sistemom (8.1) na problem održavanja skalarne promenljive $s(x)$ na nuli. Ovaj deo problema se u teoriji kliznog režima naziva faza klizanja. U teoriji kliznog režima po zatvaranju povratne sprege javljaju se dve faze upravljanja sistemom, gde druga faza predstavlja fazu dostizanja, čije je ponašanje opisano dinamikom

$$\dot{s} = \sum_{i=0}^n c_i \dot{x}_i, \quad (8.3)$$

koja je nelinearna, nepoznata pod uticajem poremećaja, ali skalarna.

Da bismo približili čitaocu klizni režim posmatrajmo model sistema u obliku

$$\dot{x} = u + d, \quad (8.4)$$

gde je u upravljanje, a d poremećaj u sistemu. Pretpostavimo da je upravljački signal u obliku

$$u = -|x|^\alpha \text{sign}(x) \quad (8.5)$$

Pronađimo sad odgovarajuću funkciju Ljapunova pomoću koje možemo dokazati asimptotsku stabilnost sistema (8.4). Pretpostavimo funkciju Ljapunova u obliku

$$V = |x|. \quad (8.6)$$

Prvi izvod ove funkcije je

$$\dot{V} = \text{sign}(x)\dot{x} = \text{sign}(x)(-|x|^\alpha \text{sign}(x) + d), \quad (8.7)$$

odnosno

$$\dot{V} = -|x|^\alpha + \text{sign}(x)d. \quad (8.8)$$

Iz poslednjeg izraza može se zaključiti da bi bio zadovoljen uslov $\dot{V} < 0$, odnosno da je sistem asimptotski stabilan, treba da važi da je $|d| < |x|^\alpha$. Čak i da se deo dinamike procesa nalazi u poremećaju, npr. $d = ax$, dovoljno je da je $a < \frac{|x|^\alpha}{x}$. Slično se može pokazati i izborom neke druge funkcije Ljapunova poput $V = \frac{1}{2}x^2$.

Navešćemo i jedan primer sistema drugog reda u obliku

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (8.9)$$

$$\dot{x}_2 = u + d, \quad (8.10)$$

gde je u upravljački signal, a d signal poremećaja. Sada treba pronaći kliznu promenljivu u obliku (8.2), tj. takvu da se promenljive stanja sistema nakon konačnog vremena nađu na mnogostrukosti koja je opisana tom kliznom promenljivom. U ovom konkretnom slučaju pretpostavljamo kliznu promenljivu u obliku

$$s = x_2 + cx_1 = 0 . \quad (8.11)$$

Iz (8.11) vidi se da je $x_2 = -cx_1$, odnosno $\dot{x}_1 + cx_1 = 0$ za neko $t > T$, gde je T konačan trenutak u vremenu. Tada je očigledno da će, ukoliko je zadovoljena jednačina (8.11), posle nekog konačnog vremena promenljive stanja iščezava u nulu na način

$$x_1(t) = x_1(T)e^{-c(t-T)}, \quad (8.12)$$

$$x_2(t) = -cx_1(T)e^{-c(t-T)} . \quad (8.13)$$

Sada moramo razmotriti kakvo treba da bude upravljanje da bi sistem došao do mnogostrukosti $s(x)$ u konačnom vremenu. Posmatrajmo sad prvi izvod od $s(x)$, koji je opisan jednačinom

$$\dot{s} = \dot{x}_2 + c\dot{x}_1 = u + d + cx_2 . \quad (8.14)$$

Pretpostavimo upravljanje u obliku

$$u = -cx_2 - K^2 \text{sign}(s) , \quad (8.15)$$

gde je K neka proizvoljna konstanta različita od 0. Tada je dinamika klizne mnogostrukosti opisana sa

$$\dot{s} = -K^2 \text{sign}(s) + d . \quad (8.16)$$

Da bismo utvrdili stabilnost klizne promenljive, pretpostavimo funkciju Ljapunova u obliku $V = \frac{1}{2}s^2$. Sada je lako videti da je prvi izvod funkcije Ljapunova

$$\dot{V} = s\dot{s} = -sK^2 \text{sign}(s) + sd . \quad (8.17)$$

Da bi sistem bio stabilan, mora da važi $\dot{V} \leq 0$, pa iz ovog uslova i jednačine (8.17) proizilazi

$$d < \frac{K^2 |s|}{s} . \quad (8.18)$$

Zaključak koji proizilazi iz prethodne analize upravljanja kliznim režimom je da je dovoljno ograničiti model procesa ili model poremećaja u određenoj

meri da bi sistem bio stabilan. Naravno, potrebno je voditi računa o kompromisu između striktnosti ograničenja i kvaliteta upravljanja. ¹

8.1.1 Klizni režim drugog reda

Na osnovu do sada izloženih činjenica jasno je da klizna promenljiva mora biti relativnog stepena jedan u odnosu na upravljački signal, što znači da se eksplicitno mora pojaviti upravljačka promenljiva u jednačini prvog izvoda izlaza sistema po promenljivim stanja [76]. Dinamika klizne promenljive se u opštoj formi može zapisati kao

$$\dot{s} = \phi(x, e, t) + g(x)u, \quad (8.19)$$

uz ograničenja na neodređenosti u modelu i upravljanju $|\phi(x, e, t)| < \Phi(x, e, t)$. Klizni režim drugog reda (2-SMC) uveden je devedesetih godina prošlog veka u cilju poboljšavanja performansi kliznog režima prvog reda. Veliki broj naučnih radova i publikacija pokazao je opravdanost uvođenja kliznog režima drugog reda [77], [78]. Osnovna njegova prednost je što 2-SMC može da stabilizuje sisteme kod kojih je relativni stepen klizne promenljive u odnosu na upravljački signal dva, odnosno njegova dinamika je u opštem obliku

$$\ddot{s} = \phi(x, e, t) + g(x)w. \quad (8.20)$$

U ovom obliku algoritam je diskontinualan. Međutim, treba primetiti da svaka klizna promenljiva koja je relativnog stepena dva u odnosu na upravljački signal, ujedno jeste relativnog stepena jedan u odnosu na izvod upravljačkog signala. Naime,

$$\ddot{s} = \frac{d}{dt}\phi(x, e, t) + \left(\frac{d}{dt}g(x)\right)u + g(x)\dot{u}. \quad (8.21)$$

odnosno,

$$\ddot{s} = \rho(x, u, e, t) + g(x)\dot{u}. \quad (8.22)$$

Napomena 8.1. Napominjemo da je posle integraljenja diskontinualnog signala \dot{u} , upravljački signal koji se nalazi na ulazu u proces kontinualan. Mana ovog pristupa je što ograničenja postavljena na neodređenosti modela ili poremećaja moraju biti striktnija u odnosu na ona vezana za klasični klizni režim.

¹Da bi se redukovao problem treperenja često je potrebno uvesti upravljanje u formi $u = -x \frac{x}{|x|+\epsilon}$, gde je $0 < \epsilon \ll 1$. Funkcija upravljanja u ovom obliku predstavlja glatku aproksimaciju funkcije znaka.

Alternativni pristup kliznom režimu između ostalih predstavlja i superuvrćući (STW - *super-twisting*) algoritam predstavljen od strane Ari Levanta (*Arie Levant*) [75]. Prednost ovog pristupa je da on funkcioniše za klizne promenljive relativnog reda jedan, uz blaža ograničenja, slična kao i u klasičnom kliznom režimu prvog reda, ali uz jednu veliku prednost, a to je da daje kontinualan upravljački signal za razliku od klasičnog kliznog režima prvog reda. Ovaj algoritam može se shvatiti kao uopštenje klasičnog linearnog PI regulatora, što je i ilustrovano na slikama 8.1 i 8.2. Dinamika klizne promenljive je ista kao kod kliznog režima prvog reda, tj.

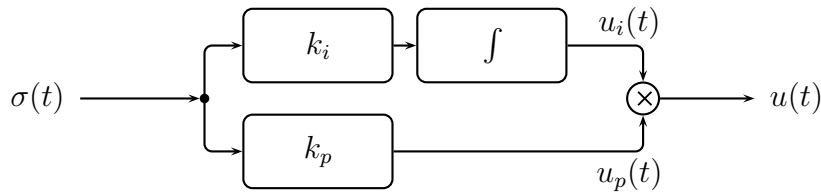
$$\dot{s} = \phi(x, e, t) + g(x)u, \quad (8.23)$$

uz ograničenja

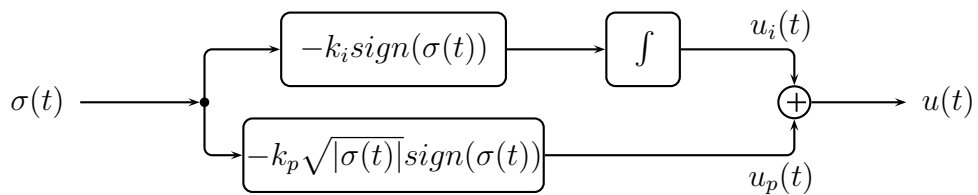
$$\left| \frac{d}{dt}\phi(x, e, t) + \left(\frac{d}{dt}g(x)\right)u \right| \leq K, \quad 0 < G_1 \leq g(x) \leq G_2. \quad (8.24)$$

Stabilizirajući upravljački zakon u ovom slučaju glasi

$$u = -k_p\sqrt{|s|}\text{sign}(s) + \dot{u}_{int}, \quad \dot{u}_{int} = -k_i\text{sign}(s). \quad (8.25)$$



Slika 8.1: Blok dijagram klasičnog PI regulatora



Slika 8.2: Blok dijagram superuvrćućeg regulatora

U nastavku će biti razmatran frakcioni nelinearni model dat u formi Brunovskog (Brunovsky) [69].

8.2 Frakcioni regulator klizog režima za nelinearne sisteme necelog reda sa jednim ulazom

U ovom odeljku biće dat jedan pristup upravljanju nelinearnih frakcionih sistema srazmernog reda čiji model nije precizno poznat. Takav jedan sistem može biti dat preko dinamičkog modela na sledeći način

$$\begin{aligned} {}^C D^\alpha x_i &= x_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \\ {}^C D^\alpha x_n &= f(x, t) + u(t) + \psi(t). \end{aligned} \tag{8.26}$$

gde je $\alpha \in (0, 1)$ srazmerni red diferenciranja, vektor $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)] \in \mathbb{R}^n$ predstavlja vektor unutrašnjih procesnih promenljivih (pseudo-stanja), $u(t) \in \mathbb{R}$ predstavlja upravljanje, $\psi(t) \in \mathbb{R}$ predstavlja egzogeni poremećaj, dok je $f(t, x) : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ nelinearna funkcija koja predstavlja član strujanja (*drift term*). Interesantno je primetiti da se umesto klasičnih stanja sistema u modelu (8.26) javljaju pseudo-stanja. Ovakav izraz uveden je iz prostog razloga što su u pitanju frakcioni sistemi koji su beskonačno dimenzionalni, tako da bi i njihov skup stanja trebalo da bude beskonačne kardinalnosti, pa ih je stoga nepravilno zvati klasičnim stanjima sistema [79]. U kontekstu modela (8.26) Kaputova definicija je pravi izbor kada se analiziraju robusne upravljačke strategije. Takođe je važno napomenuti da ukoliko se uticaj istorije procesa ne uzme direktno u obzir, moguće ga je uključiti kroz poremećaj $\psi(t)$ koji treba da zadovolji sledeću pretpostavku

Pretpostavka 1. *Neka postoji a priori poznata konstanta M i vremenski trenutak $t_\psi \geq 0$ takav da važi*

$$\frac{d\psi(t)}{dt} \leq M, \quad t \geq t_\psi. \tag{8.27}$$

Pretpostavimo sad da postoji član strujanja $f(x, t)$ neprecizno dat sa estimacijom $\hat{f}(x, t)$. Sada razliku između estimacije i stvarne vrednosti možemo zapisati u formi

$$\epsilon(x, t) = f(x, t) - \hat{f}(x, t). \tag{8.28}$$

Uvedimo sad i pretpostavku

Pretpostavka 2. Neka postoji a priori poznata konstanta W i vremenski trenutak $t_\epsilon \geq 0$ takav da važi

$$\frac{d\epsilon(x, t)}{dt} \leq W, \quad t \geq t_\epsilon. \quad (8.29)$$

Takođe, neka je data i dovoljno glatka trajektorija x_{1r} . Sada vektor referentnih promenljivih pseudo-stanja možemo zapisati kao

$$\begin{aligned} x_r(t) &= [x_{1r}, x_{2r}, \dots, x_{nr}]^T \\ &= [x_{1r}, {}^C D^\alpha x_{2r}, \dots, {}^C D^\alpha x_{(n-1)r}]^T \\ &= [x_{1r}, {}^C D^{1,\alpha} x_{1r}, \dots, {}^C D^{n-1,\alpha} x_{1r}]^T. \end{aligned} \quad (8.30)$$

Prethodni izraz dobija se uz činjenicu da Kaputov izvod možemo zapisati na način ${}^C D^\alpha f(t) = {}^C D^{1,\alpha} f(t)$ i korišćenjem definicije

Definicija 8.1. Sekvencijalni Kaputov izvod reda $\alpha \in (0, 1)$ i višestrukost $n \in \mathbb{N}$ signala $f(t)$ u nekom vremenskom trenutku $t \geq 0$ se definiše kao n -tostruki ponovljeni Kaputov izvod reda α , odnosno

$${}^C D^{n,\alpha} f_t = \underbrace{{}^C D^\alpha {}^C D^\alpha \dots {}^C D^\alpha}_{n \text{ puta}} f(t). \quad (8.31)$$

iz [3]. Uzimajući u obzir ove dve činjenice i definiciju modela u obliku (8.26) može se zaključiti

$$\begin{aligned} x_{2r} &= {}^C D^\alpha x_{1r}, \\ x_{3r} &= {}^C D^\alpha x_{2r} = {}^C D^\alpha {}^C D^\alpha x_{1r} = {}^C D^{2,\alpha} x_{1r}, \\ &\vdots \\ x_{nr} &= {}^C D^\alpha x_{(n-1)r} = {}^C D^{n-1,\alpha} x_{1r}, \end{aligned} \quad (8.32)$$

odakle se dobija oblik (8.30). Referentna trajektorija x_{1r} treba da zadovolji sledeće ograničenje glatkosti

Pretpostavka 3. Neka postoji a priori poznata konstanta X_r i vremenski trenutak $t_\gamma \geq 0$ takav da važi

$${}^C D^{n-1,\alpha} x_{1r}(t) \leq X_r, \quad t \geq t_\gamma. \quad (8.33)$$

Sada se greška praćenja referentne trajektorije može definisati kao

$$e(t) = [e_1(t), e_2(t), \dots, e_n(t)] = x(t) - x_r(t). \quad (8.34)$$

Cilj upravljanja je pronaći takav upravljački zakon koji može da odvede vektor praćenja greške $e(t)$ sistema u zatvorenoj povratnoj sprezi u poreklo (nulto stanje) bez obzira na netačnosti modela i perturbacije. Dinamika greške praćenja referentne trajektorije se sada na osnovu prethodnih izraza može predstaviti u obliku

$$\begin{aligned} {}^C D^\alpha e_i &= e_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \\ {}^C D^\alpha e_n &= f(x, t) + u(t) + \psi(t) - {}^C D^{n,\alpha} x_{1r}(t). \end{aligned} \quad (8.35)$$

Uvedimo sada klizajuću promenljivu necelog reda

$$\sigma(t) = I^{(1-\alpha)} \left[e_n(t) + \sum_{i=1}^{n-1} c_i e_i(t) \right], \quad (8.36)$$

gde su konstante c_1, c_2, \dots, c_{n-1} izabrane tako da svi koreni p_i polinoma

$$P(s) = s^{(n-1)} + \sum_{i=0}^{n-2} c_{i+1} s^i = \prod_{i=1}^{n-1} (s - p_i), \quad (8.37)$$

zadovolje relaciju

$$\alpha \frac{\pi}{2} < \arg(p_i) \leq \pi. \quad (8.38)$$

U slučaju da je $\alpha = 1$ argumenti polinoma se nalaze u drugom kvadrantu kompleksne ravni, odnosno sistem koji ima karakterističan polinom u obliku (8.37) ima sve stabilne polove. Sada ćemo dati analizu stabilnosti sistema (8.35) koji se kreće po kliznoj višestrukosti $\sigma(t) = 0$ kroz sledeću lemu

Lema 8.1. *Razmotrimo sistem (8.26). Neka klizajuća promenljiva počne da teži ka nuli posle nekog konačnog vremenskog trenutka t_1 , odnosno*

$$\sigma(t) = 0, \quad t \geq t_1, \quad t_1 < \infty, \quad (8.39)$$

i neka parametri c_i iz (8.36) zadovoljavaju jednačine (8.37) i (8.38). Tada važi sleći uslov

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_i(t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (8.40)$$

Dokaz. Definišimo veličinu

$$\xi(t) = e_n(t) + \sum_{i=1}^{n-1} c_i e_i(t). \quad (8.41)$$

Ako se prisetimo leme iz [3] koja glasi

Lema 8.2. *Razmotrimo proizvoljan signal $z(t) \in \mathbb{R}$. Neka je $\beta \in (0, 1)$. Ako postoji vremenski trenutak $T > \infty$ takav da važi $I^\alpha z(t) = 0, \quad \forall t \geq T$ onda važi i $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$,*

i uzmemo slučaj $\beta = 1 - \alpha$ i $z(t) = \xi(t)$, možemo zaključiti da prilazak nultom stanju u konačnom vremenu klizajuće promenljive garantuje da signal $\xi(t)$ asimptotski teži nuli. Sada iz izraza (8.41) dobijamo

$$e_n(t) = - \sum_{i=1}^{n-1} c_i e_i(t) + \xi(t), \quad (8.42)$$

gde je

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = 0. \quad (8.43)$$

Ukoliko sada prepisemo prvih $n - 1$ jednačina iz (8.35) kao

$$\begin{aligned} {}^C D^\alpha e_i &= e_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n - 2 \\ {}^C D^\alpha e_{n-1} &= - \sum_{i=1}^{n-1} c_i e_i(t) + \xi(t), \end{aligned} \quad (8.44)$$

može se primetiti da poslednji izraz predstavlja frakcioni sistem smanjenog reda u odnosu na (8.26) i da ovaj izraz sadrži asimptotski opadajući ulazni signal $\xi(t)$. Na osnovu jednačina (8.37) i (8.38) dobija se da je sistem (8.44) Mittag-Leffler stabilan [27], stoga nam osobina opadanja ulaznog člana (8.43) govori isto i za promenljive pseudo-greški $e_i(t)$ gde je $i = 1, 2, \dots, n - 1$. Na osnovu svega iznesenog i iz (8.42), zaključujemo da $e_n(t)$ takođe asimptotski opada. Ovim je završen dokaz leme. \square

Sada je potrebno da pronađemo upravljački zakon u obliku

$$u(t) = w^p(t) + u^i(t) + u^{eq}(t), \quad (8.45)$$

gde je $u^p(t)$ kombinovani linearni/nelinearni proporcionalni član dat sa

$$u^p(t) = -k_1 \sigma - k_2 |\sigma|^{1/2} \text{sign}(\sigma), \quad (8.46)$$

a $u^i(t)$ predstavlja kombinovani linearni/nelinearni integralni član dat sa

$$\dot{u}^i(t) = -k_3\sigma - k_4 \text{sign}(\sigma), \quad u^i(0) = 0. \quad (8.47)$$

Član u^{eq} biće definisan naknadno. Važno je primetiti da se postavkom koeficijenata k_2 i k_4 na nulu dobija klasični PI regulator, dok se postavkom koeficijenata k_1 i k_3 na nulu dobija super-uvrćući (*super-twisting* -STW regulator) regulator kliznog režima drugog reda. Postoje sličnosti između PI regulatora i STW regulatora, u smislu da oba poseduju statičku komponentu, što je čisto pojačanje kod PI regulatora, a nelinearno pojačanje sa beskonačnim nagibom u nuli za STW regulator. Takođe, oba poseduju integralnu komponentu, što je čisti integral greške za PI regulator, a integral funkcije znaka greške za STW kontroler. Za upravljanje klasom frakcionih procesa definisanih preko (8.26) korišćićemo kombinaciju PI regulatora i regulatora kliznog režima sa frakcionom klizajućom promenljivom σ . Sad ćemo navesti teoremu i njen dokaz koja nam na osnovu prethodno iznesenih pretpostavki i novouvedenog oblika člana upravljačke funkcije $u^{eq}(t)$ dokazuje asimptotsko opadanje pseudo-stanja $x(t)$.

Teorema 8.1. *Posmatrajmo sistem (8.26) zajedno sa klizajućom promenljivom definisanu sa (8.36), (8.37), (8.38) i neka je pretpostavka 1 na snazi. Onda upravljački zakon dat sa (8.45)-(8.47), te sa članom*

$$u^{eq}(t) = -\hat{f}(x, t) - \sum_{i=1}^{n-1} c_i e_{i+1}(t) + {}^C D^{n,\alpha} x_{1r}(t), \quad (8.48)$$

i parametrima koji se biraju prema obrascu

$$k_1 > 0, \quad k_2 > 2\sqrt{\rho}, \quad k_4 > \rho, \quad (8.49)$$

$$k_3 > k_1^2 \frac{k_2^2 + \frac{5}{2}[(\frac{1}{4}k_2^2 - \rho) + k_2k_4]}{(\frac{1}{4}k_2^2 - \rho) + k_2k_4}. \quad (8.50)$$

gde je

$$\rho > M + W, \quad (8.51)$$

omogućava asimptotsko opadanje pseudo-stanja $x(t)$.

Dokaz. Na osnovu definicije (2.19), ako se uzme da je $n = 1$ i $f(t) = e_n(t) + \sum_{i=1}^{n-1} c_i e_i(t)$ i korišćenjem osobine linearnosti operatora Riman-Ljuvilovog fra-

kcionog izvoda, može se izvesti

$$\frac{d}{dt}\sigma(t) = {}^{RL}D^\alpha \left[e_n(t) + \sum_{i=1}^{n-1} c_i e_i(t) \right] = {}^{RL}D^\alpha e_n(t) + \sum_{i=1}^{n-1} c_i {}^{RL}D^\alpha e_i(t). \quad (8.52)$$

Sada na osnovu odnosa između Riman-Ljuvilovog i Kaputovog izvoda (2.40) prethodni izraz možemo zapisati kao

$$\frac{d}{dt}\sigma(t) = {}^C D^\alpha e_n(t) + \sum_{i=1}^{n-1} c_i {}^C D^\alpha e_i(t) + \varphi(t), \quad (8.53)$$

gde je

$$\varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{e_n(0) + \sum_{i=1}^{n-1} c_i e_i(0)}{t^\alpha} = \frac{K_0}{t^\alpha} \quad (8.54)$$

a konstanta K_0 definisana je sa

$$K_0 = \frac{e_n(0) + \sum_{i=1}^{n-1} c_i e_i(0)}{\Gamma(1-\alpha)}. \quad (8.55)$$

Sada se sistem jednačina (8.26) može zameniti u (8.53) pa se dobija

$$\frac{d}{dt}\sigma(t) = f(x, t) + u(t) + \psi(t) + \sum_{i=1}^{n-1} c_i e_{i+1}(t) + \varphi(t) - {}^C D^{n,\alpha} x_{1r}(t). \quad (8.56)$$

Iako je poremećaj oblika (8.54) i svi njegovi izvodi neograničeni za $t = 0$, prvi izvod po vremenu

$$\frac{d}{dt}\varphi(t) = -\frac{\alpha K_0}{t^{\alpha+1}} \quad (8.57)$$

je ograničen na bilo kom intervalu $t \in [t_1, \infty)$, $t_1 > 0$ kao

$$\left| \frac{d}{dt}\varphi(t) \right| \leq \frac{\alpha K_1}{t_1^{\alpha+1}} \equiv \Psi_1, \quad K_1 = \left| e_n(0) + \sum_{i=1}^{n-1} c_i e_i(0) \right|. \quad (8.58)$$

Ukoliko zamenimo upravljački signal iz jednačina (8.45) - (8.48) dobijamo

$$\frac{d}{dt}\sigma = -k_1\sigma - k_2|\sigma|^{1/2} \text{sign}(\sigma) + u^i(t) + \psi(t) + \varphi(t) + \varepsilon(\mathbf{x}, t) \quad (8.59)$$

$$\frac{d}{dt}u^i = -k_3\sigma - k_4 \text{sign}(\sigma) \quad (8.60)$$

Ako sad definišimo promenljivu

$$z(\mathbf{x}, t) = u^i(t) + \psi(t) + \varphi(t) + \varepsilon(\mathbf{x}, t), \quad (8.61)$$

prethodni izraz za upravljanje (8.59) možemo zapisati u obliku

$$\frac{d}{dt}\sigma = -k_1\sigma - k_2|\sigma|^{1/2}\text{sign}(\sigma) + z(\mathbf{x}, t) \quad (8.62)$$

$$\frac{d}{dt}z = -k_3\sigma - k_4\text{sign}(\sigma) + \frac{d}{dt}\psi(t) + \frac{d}{dt}\varphi(t) + \frac{d}{dt}\varepsilon(\mathbf{x}, t). \quad (8.63)$$

Sada po pretpostavkama 1 i 2 i jednačini (8.58) perturbacioni članovi u (8.61) zadovoljavaju jednačinu

$$\left| \frac{d}{dt}\psi(t) + \frac{d}{dt}\varphi(t) + \frac{d}{dt}\varepsilon(\mathbf{x}, t) \right| \leq M + \Psi_1 + W, \quad t \geq \max\{t_\psi, t_\varepsilon\} > 0. \quad (8.64)$$

Perturbacioni član $\varphi(t)$ asimptotski opada ka nuli (nestaje u vremenu) sa svojim izvodom $\frac{d}{dt}\varphi(t)$, stoga se može reći da postoji konačan vremenski trenutak $t_2 > t_1 > 0$ takav da važi

$$\left| \frac{d}{dt}\psi(t) + \frac{d}{dt}\varphi(t) + \frac{d}{dt}\varepsilon(\mathbf{x}, t) \right| \leq \rho, \quad t \geq t > t_2, \quad (8.65)$$

pa važi relacija (8.51) ako se zanemari granica po $\frac{d}{dt}\varphi(t)$.

Stabilost sistema (8.62) - (8.64) dokazana je u Teoremi 5. u radu [80] kroz definiciju funkcije Ljapunova koja je pozitivno definitna i data u formi

$$V = \xi^T \Pi \xi, \quad \xi = \begin{bmatrix} |\sigma|^{1/2}\text{sign}(\sigma) \\ \sigma \\ z \end{bmatrix}, \quad \Pi = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (4k_4 + k_2^2) & k_1k_2 & -k_2 \\ k_1k_2 & 2k_3 + k_1^2 & -k_1 \\ -k_2 & -k_1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (8.66)$$

Ispostavlja se da je sistem sa svojim trajektorijama globalno asimptotskim stabilan, jer se na osnovu prethodno spomenute Teoreme 5. u radu [80] i uslova za podešavanje parametara (8.49) - (8.51) dobija da postoji pozitivna konstanta γ_1 takva da važi

$$\frac{d}{dt}V \leq -\gamma_1\sqrt{V}, \quad t \geq t_2. \quad (8.67)$$

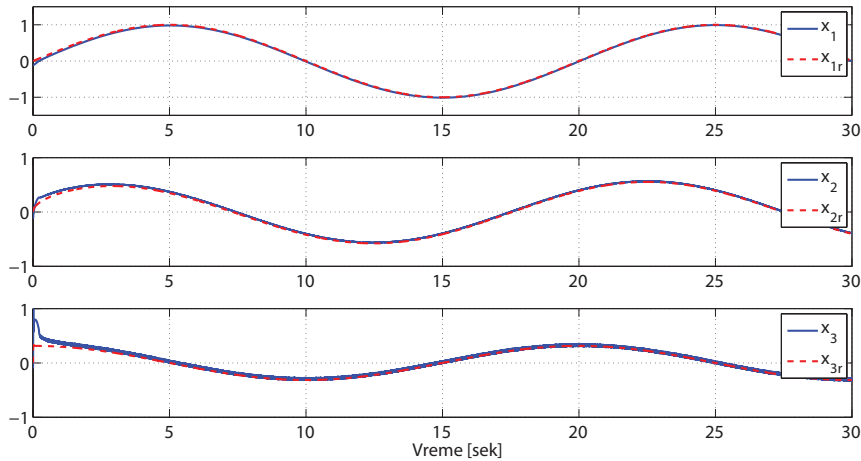
Poslednja jednačina garantuje globalnu konvergenciju u konačnom vremenu funkcije Ljapunova u nulu, pa samim tim garantuje isto i za promenljive $\sigma(t)$ i $z(t)$. Na osnovu (8.59) može se zaključiti konvergencija u konačnom vremenu u nulu izvoda $\frac{d}{dt}\sigma(t)$. Asimptotska konvergencija pseudo-stanja $x(t)$ posredno sledi iz Leme 8.2. \square

8.2.1 Primer upravljanja kombinovanim PI regulatorom i regulatorom u kliznom režimu

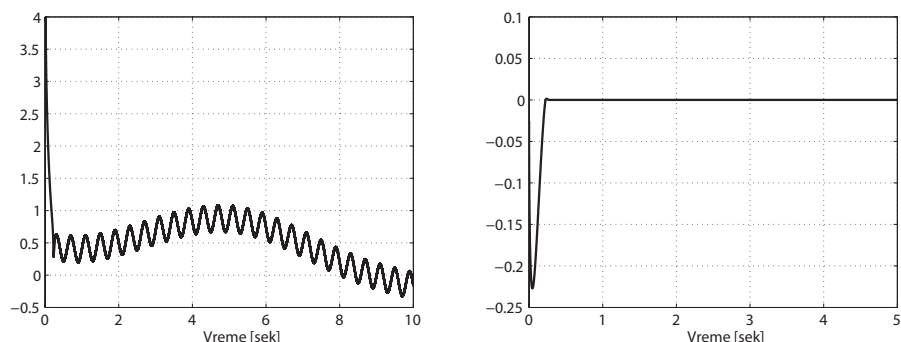
Posmatrajmo sada sistem u obliku (8.26) sa sledećim parametrima: broj dimenzija sistema $n = 3$, frakcioni red sistema $\alpha = 0.5$ i funkcijom sistema $f(\mathbf{x}, t) = x_1^2 \sqrt{|x_2|} + x_3 |x_3|$. Neka je ulazni poremećaj dat kao $\psi(t) = 0.2 \sin(5\pi t)$. Primitimo da je ova funkcija beskonačno puta neprekidno diferencijabilna. Takođe, neka je referenca data kao $x_{1r} = \sin(0.1\pi t)$.

Sada je potrebno da projektujemo kombinovani regulator oblika (8.45) - (8.48), uz pretpostavku da je $\hat{f}(\mathbf{x}, t) = 0$, tj. da je totalno nepoznat model nelinearne funkcije $f(\mathbf{x}, t)$.

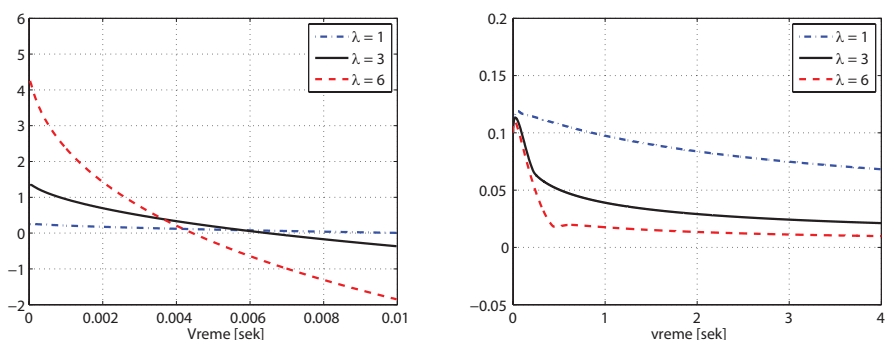
Polinom $P(\cdot)$ (8.37) izabran je tako da ima dvostruku nulu u $p = -\lambda = -3$, odakle je $c_1 = \lambda^2 = 9$ i $c_2 = 2\lambda = 6$. Gornja granica po pretpostavci 1 je $M = 4$. Gornju granicu iz pretpostavke 2 W nije lako dobiti analitički, ali eksperimentalno putem pokušaja i pogreški je dobijena vrednost $W = 5$. Odatle se za konstantnu ρ dobija vrednost $\rho = 9$ pomoću koje se podešavaju parametri regulatora prema ranije datim pravilima podešavanja. Dobijeni su sledeći parametri: $k_2 = 7$, $k_4 = 10$, $k_1 = 1$, $k_3 = 4$. Rezultati simulacije za gore navedene attribute i početne uslove $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = -0.1$ prikazani su na slikama 8.3 i 8.4.



Slika 8.3: Slučaj sa jednim ulazom sa merenjima bez šuma. Komponente pseudo-stanja i njihove reference.



Slika 8.4: Slučaj sa jednim ulazom sa merenjima bez šuma. (Levo) Upravljački signal. (Desno) Klizna promenljiva σ .



Slika 8.5: Slučaj sa jednim ulazom sa šumom merenja za različite vrednosti parametra λ . (Levo) Upravljački signal $u(t)$ na početku. (Desno) Greška praćenja e_1 prve komponente pseudo-stanja.

Praćenje reference u zatvorenoj povratnoj sprezi prikazano je na slici 8.3, gde su prikazana pseudo-stanja i njihovi referentni profili. Upravljački signal prikazan je na levoj polovini slike 8.4. Klizna promenljiva σ je prikazana na desnom delu slike 8.4, odakle je očigledna konvergencija klizajuće mnogostrukosti u konačnom vremenu.

Pojava vršne vrednosti u inicijalnom trenutku upravljačkog signala predmet je slike 8.4. Ova pojava je proizvod upravljačke komponente $u^{eq}(t)$ i zavisna je od izbora vrednosti parametra λ . Promenom parametra λ , amplitude vršnih vrednosti se menjaju, konkretno, sa povećanjem ovog parametra i amplitude vršnih vrednosti rastu, što je prikazano na levom delu slike 8.5. Istovremeno, vrednost parametra λ utiče i na brzinu konvergencije grešaka pra-

ćenja pseudo-stanja, tj. što je veće λ , to je i brzina konvergencije veća. Ovo ponašanje prikazano je na desnom delu slike 8.5. Takvo ponašanje zahteva pronalaženje kompromisa između amplituda vršnih vrednosti u upravljačkom signalu i brzine konvergencije grešaka praćenja pseude-stanja.

Sada ćemo uporediti performanse regulatora analiziranog u ovoj tezi sa šemom kliznog režima predloženog od strane Valério i Sá da Costa u [81]. Osetljivost na šum merenja biće takođe predmet poređenja. Pristup predložen u Odeljku 3 u [81] biće prilagođen problemu razmatranom do sada. Iz te perspektive, klizna promenljiva poprima oblik

$$\bar{\sigma}(t) = \left({}^C D_t^\beta + \lambda \right)^{(n-1)\frac{\alpha}{\beta}} e(t), \quad (8.68)$$

gde je β proizvoljan koeficijent takav da važi $\alpha/\beta \in \mathbb{N}$. Postupak razmatran u okviru ove teze posmatra klizajuću promenljivu kao funkciju grešaka praćenja pseudo-stanja, pa stoga klizajuću promenljivu (8.68) možemo posmatrati na isti način ukoliko izaberemo $\beta = \alpha$. Upravljački zakon iz [81] dat je u obliku

$$u(t) = u^{sm}(t) + u^{eq}(t), \quad (8.69)$$

tako da uz gore pomenuti uslov $\beta = \alpha$, ekvivalentna komponenta upravljanja postaje ista kao (8.48). Sa druge strane, komponenta kliznog režima ima oblik

$$u^{sm}(t) = -k_5 {}_0 I_t^{1-\alpha} \text{sign}(\bar{\sigma}), \quad (8.70)$$

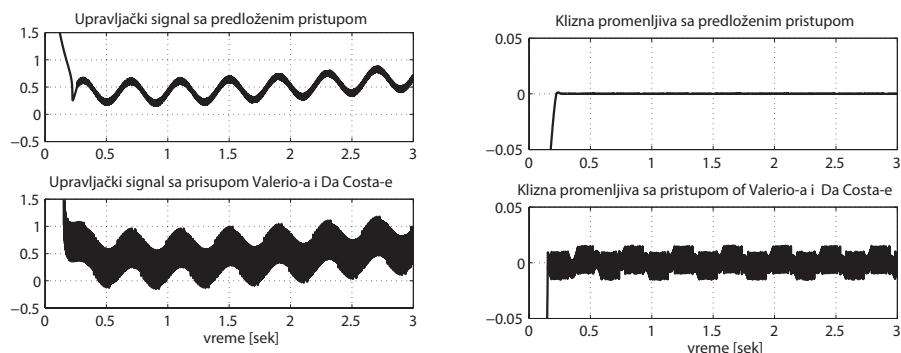
gde $k_5 > 0$ mora biti izabrano tako da bude dovoljno veliko, da bi se zadovoljila granica tačnosti.

Na slici 8.6 upoređena je upravljačka šema iz ove teze i odgovarajuća klizna promenljiva sa onima iz [81]. Izabrani su isti sledeći parametri u obe upravljačke šeme: $k_3 = k_5 = 10$, $\lambda = 3$. Simulacije su izvršene sa vremenom odabiranja od $T = 0.001s$. Sa slike 8.6 vidi se da je algoritam iz ove teze dao bolje rezultate u smislu glatkoće upravljačkog signala, kao i veću preciznost u održavanju sistema na klizajućoj mnogostrukosti.

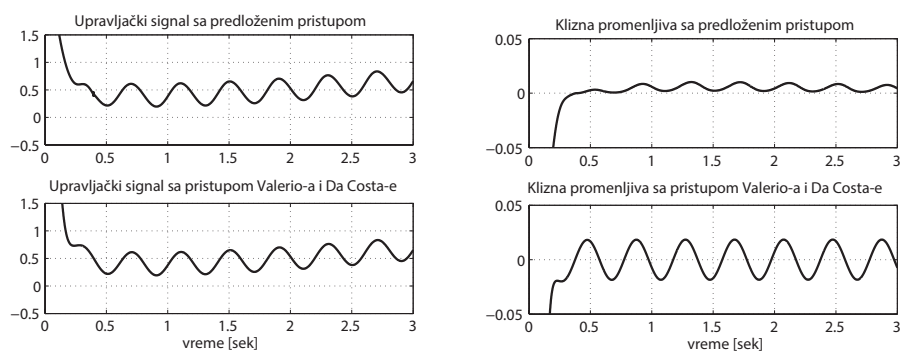
Da bi se poboljšala glatkoća upravljačkog signala, koršićena je modifikacija glatke funkcije znaka predložena u [81] i data u formi

$$\text{soft_sign}_\theta(s) = \begin{cases} \frac{s}{\theta} & |s| < \theta \\ \text{sign}(s) & |s| \geq \theta \end{cases} \quad (8.71)$$

Po uvođenju ove modifikacije, dobijeni su glatkiji upravljački signali, što je prikazano na levom delu slike 8.7. Iako su upravljački signali sada uporediviji,



Slika 8.6: Slučaj sa jednim ulazom bez šuma merenja. Poređenje upravljačkog signala i klizajuće promenljive.

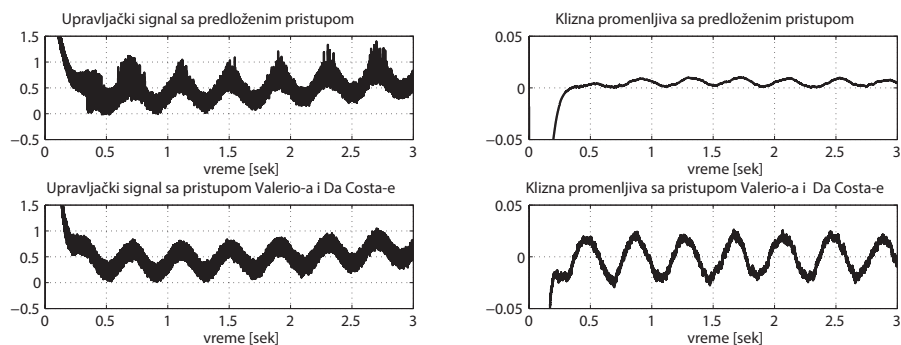


Slika 8.7: Slučaj sa jednim ulazom bez šuma merenja i glatkom funkcijom znaka sa $\theta = 0.25$. (Levo) Upravljački signal. (Desno) Klizna promenljiva.

algoritam koji je analiziran u okviru ove teze daje rezultate koji su precizniji u smislu ponašanja klizne promenljive, što je prikazano na desnom delu slike 8.7.

Posmatrajmo slučaj sa merenjima koja su zašumljena, tako što uvedemo uniformno raspoređen proizvoljan šum maksimalne amplitude 0.01, koji ćemo dodati na pseudo-stanja. Na slici 8.8 vidi se upravljački signal i klizna promenljiva za ovaj slučaj. Nivo treperenja je približan u oba slučaja, dok je kretanje klizne promenljive preciznije za regulator razmatran u okviru ove teze.

Na osnovu ove analize jasno je da upravljački algoritam koji predstavlja kombinaciju PI regulatora i regulatora kliznog režima daje bolje rezultate u smislu glatkoće upravljačkog signala i veće preciznosti u kretanju klizajuće promenljive po kliznoj višestrukosti. Analizirani algoritam takođe umanjuje



Slika 8.8: Slučaj sa jednim ulazom sa uniformnim šumom merenja i glatkom funkcijom znaka sa $\theta = 0.25$. (Levo) Upravljački signalo (Desno) Klizne promenljive.

efekat treperenja i ne daje ništa lošije rezultate u poređenju sa ranije razmatranim algoritmima u smislu propagacije šuma na ulaz procesa. Najveća mana ovog algoritma jeste to da je potrebno uvesti striktnija ograničenja na nepreciznosti modela.

Zaključak

Ova doktorska teza u potpunosti je posvećena primeni optimalnih i suboptimalnih regulatora necelog reda u upravljanju linearnim i klasom nelinearnih sistema. Ključni rezultati disertacije su naučno-stručno verifikovani i publikovani u međunarodnim časopisima [3], [4], predstavljeni na međunarodnim konferencijama [1], [2], [5], [6] i na domaćim naučnim skupovima [7].

Sa stanovišta dinamike sistema kojima se upravlja, rad je podeljen u dve celine. U okviru prve celine razmatrano je linearno upravljanje sistemima čiji je linearni regulator i/ili dinamika necelog reda, dok je drugi deo problema činilo upravljanje sistemima necelog reda čija dinamika može biti i linearna i nelinearna uz oslonac na teoriju kliznih režima.

U okviru prvog dela disertacije, prikazano je jedno moguće uopštenje linearnih regulatora, koje po svojoj strukturi predstavlja regulator distribuiranog reda, odnosno regulator koji pod znakom integrala obuhvata sve diferencijalno-integralne operacije reda od -1 do 1 (4.26). U okviru disertacije predložena je takođe i implementaciona šema ovog zakona upravljanja [1], u obliku (4.31), gde je uvođenje niskopropusnog filtra u samu strukturu regulatora originalno implementaciono rešenje predloženo od strane autora. Analizirane su osobine regulatora u formi (4.31) i utvrđeno je da red diferencijatora mora biti jednak redu filtra, što se može vrlo intuitivno preslikati i na FPID regulator. Ovakvo ponašanje ilustrovano i u radu [2]. Vršena je optimizacija parametara DOPID regulatora i to iz perspektive kriterijuma optimalnosti i ograničenja koji treba da obezbede željeni kvalitet regulacije, pre svega kvalitet odziva u slučaju poremećaja i robusnost na varijacije modela i šum merenja. Problemi koji se po prirodi odnose na vremenski domen razmatrani su u svom alternativnom

obliku u frekvencijskom domenu. Rezultati dobijeni na ovaj način su prema najboljim saznanjima autora originalni i naučno verifikovani [1], [6], [7]. Iako je u postavljanju optimizacionih problema inspiracija proizišla iz [20], [21], [22], [23], [24], frakciona struktura problema, odnosno postojanje necelih diferencijalnih jednačina nametalo je modifikacije optimizacionih problema, koje su po prvi put predstavljene u ovom radu, kroz npr. (5.37). Predloženi algoritmi i optimizacioni problemi testirani su na test skupu funkcija prenosa, uobičajenih u razmatranjima kvaliteta klasičnih PID regulatora kada su u pitanju procesi celobrojne dinamike, a takođe i test skupu funkcija procesa koje su se pokazale interesantnim u pogledu dinamike beskonačnog reda.

Drugi problem kome je posvećen deo ovog rada odnosio se na nelinearno upravljanje sistemom sa necelom dinamikom. Analizirano je upravljanje uz oslonac na teoriju kliznih režima [25], [26], [27], [28], kada se sistem modeluje diferencijalnim jednačinama necelog reda koje poseduju i nelinearnu dinamiku. Na svojevrsan način ovakvo nelinearno upravljanje predstavlja proširenje studije iz prvog dela rada, jer se u upravljačkoj petlji nalaze linearni i nelinearni PI regulator u svom izvornom obliku, kao i upravljačka struktura koja u sebi sadrži frakcionu dinamiku. Ovo svakako predstavlja u potpunosti originalan i naučno verifikovan doprinos autora [3].

Istraživanja u sklopu ove disertacije potpomogao je projekat Ministarstva prosvete, nauke i tehnološkog razvoja Vlade Republike Srbije pod nazivom „Inteligentni nadzorno-upravljački sistem za rano otkrivanje i eliminaciju neželjenih stanja i promena na uređajima, opremi i procesima procesne industrije“, ugovor broj TR32018.

Laboratorijska istraživanja na ovom problemu sprovedena su u laboratoriji Centra za inteligentno i napredno upravljanje Fakulteta tehničkih nauka u Novom Sadu i na Departmanu za inženjering u elektrici i elektronici (*Dipartimento di Ingegneria Elettrica ed Elettronica (DIEE)*) u Kaljariju u Italiji u okviru projekta IPA CEFAIC i projekta bilateralne saradnje Srbije i Italije - "Novi robusni metodi otkrivanja grešaka u radu dinamičkih sistema sa neodređenim modelim sa promenama u proizvodnji i skladištenju energije iz obnovljivih izvora".

U okviru rada date su i mogućnosti praktične inženjerske primene predloženih algoritama upravljanja i načini implementacije ovih upravljačkih struktura. Dalje testiranje van laboratorijskog okruženja sigurno predstavlja pravac budućeg rada iz oblasti teze. Takođe, razmatrani su i drugi kriterijumi optimalnosti, koji mogu da zadovolje veoma specifične uslove vezane za kontrolu oscilatornosti i znaka greške regulacije, no ovi rezultati pored njihovog praktičnog značaja moraju biti dodatno uobličeni u formi koja omogućuje njihovu

punu implementaciju. Kako i uvek u teoriji linearnih regulatora, posebno PID upravljanja, moguće su dodatne modifikacije kriterijuma optimalnosti i ograničenja, što je sigurno predmet budućih istraživanja.

Osnovni matematički pojmovi i definicije

U okviru ovog dodatka biće dat pregled osnovnih definicija, teorema, osobina i drugih matematičkih alata koji su neophodni za dublje razumevanje materije od interesa. Neki delovi su možda dati suviše detaljno, ali namera nam je da ova teza bude celovit tekst u okviru koje se nalaze svi neophodni elementi za puno razumevanje iste.

A.1 Integralne transformacije i neke specijalne funkcije

Među integralnim transformacijama dve koje su svakako od velikog značaja su Furijeova i Laplasova transformacija. Pojam Furijeove transformacije se uvodi iz razloga razmatranja aperiodičnih ulaznih signala, odnosno njihove analize i sinteze u frekventnom domenu. Ovakvi aperiodični signali se pomoću Furijeove transformacije mogu predstaviti beskonačnim “zbirom” (integralom) prostoperiodičnih funkcija, gde su elementi tog “zbira” imaju beskonačno male amplitude i gde je razlika učestanosti dva susedna člana “zbira” beskonačno mala. Pošto kod sistema automatskog upravljanja često ponašanje sistema pre određenog vremenskog trenutka nije od značaja možemo reći da se funkcija čije ponašanje razmatramo ponaša kao $f(t) = 0$, za $t < 0$, pa se takvi sistemi nazivaju kauzalnim sistemima. Sada možemo definisati Furijeovu transforma-

ciju za kauzalne sisteme kao

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt, \quad (\text{A.1})$$

gde je $f(t)$ podintegralna funkcija čiju Furijeovu transformaciju tražimo i koja zadovoljava uslov da ispunjava Dirihleove uslove u svakom konačnom intervalu i da integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt, \quad (\text{A.2})$$

ima konačnu vrednost, što predstavlja dovoljan, ali ne i potreban uslov postojanja Furijeove transformacije [56].

Ukoliko funkcije čije ponašanje želimo da razmotrimo ne zadovoljavaju uslov konvergencije integrala (A.2), mora se uvesti faktor konvergencije $e^{-\sigma t}$, gde σ predstavlja realan, pozitivan i dovoljno velik broj, takav da integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)e^{-\sigma t}| dt, \quad (\text{A.3})$$

ima konačnu vrednost. Tada možemo uvesti pojam Laplasove transformacije kao

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt. \quad (\text{A.4})$$

Integralne transformacije su veoma značajne zato što omogućavaju lakše rešavanje pojedinih matematičkih problema, prevođenjem jednačina iz jednog u drugi oblik, npr. diferencijalnih u algebarske jednačine.

Uvešćemo i pojam Laplasove konvolucije funkcija f i g

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)dt, x > 0. \quad (\text{A.5})$$

Laplasova konvolucija zadovoljava osobine komutativnosti, asocijativnosti, distributivnosti i asocijativnosti sa množenjem skalarom koje su definisane teoremom

Teorema A.1. *Neka su f, g, h funkcije koje su definisane na prostoru $L_1 \in \mathbb{R}$ i $a \in \mathbb{C}$. Tada važe sledeće osobine:*

1. Komutativnost - $f * g = g * f$
2. Asocijativnost - $f * (g * h) = (f * g) * h$
3. Distributivnost - $f * (g + h) = f * g + f * h$
4. Asocijativnost sa množenjem skalarom - $a(f * g) = (af) * g = f * (ag)$

Takođe, važno je spomenuti i činjenicu da ukoliko za dve funkcije f i g postoji Laplasova transformacija da važi

$$\mathcal{L}(f * g)(x) = \mathcal{L}(f)(x) \cdot \mathcal{L}(g)(x), \quad (\text{A.6})$$

tj. da je Laplasova transformacija konvolucije dve funkcije proizvod Laplasovih transformacija svake od njih ponaosob.

U nastavku će biti uvedene neke specijalne funkcije koje su značajne za dalju analizu frakcionog računa.

A.1.1 Ojlerova Gama funkcija

Definicija A.1. Za $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ Ojlerova Gama funkcija se definiše kao

$$\Gamma(z) = \begin{cases} \int_0^x t^{z-1} e^{-t} dt & \operatorname{Re}(z) > 0 \\ \frac{\Gamma(z+1)}{z} & \operatorname{Re}(z) \leq 0 \end{cases}. \quad (\text{A.7})$$

Ovde ćemo napomenuti samo neke osobine Gama funkcije koje su od interesa za dalje razmatranje tematike. Za $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z), \quad (\text{A.8})$$

te za $n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(n) = (n - 1)!, \quad (\text{A.9})$$

Dokazi ovih osobina se mogu naći u literaturi, a između ostalih u [33].

A.1.2 Beta funkcija

Beta funkcija se definiše kao

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p + q)}, \quad (\text{A.10})$$

gde $p, q \in \mathbb{C}$. Neke od nainteresantnijih osobina Beta funkcije su

1. $B(p, q) = B(q, p)$
2. $B(p, q) = B(p + 1, q) + B(p, q + 1)$
3. $B(p, q + 1) = \frac{q}{p}B(p + 1, q) = \frac{q}{p+q}B(p, q)$

A.1.3 Mitag-Lefflerova funkcija

Mitag-Lefflerova funkcija može biti jednoparametarska i dvoparametarska. Jednoparametarska Mitag-Lefflerova funkcija se definiše kao

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (\text{A.11})$$

gde je $\alpha > 0$ i $z \in \mathbb{C}$. Sa druge strane dvoparametarska Mitag-Lefflerova funkcija se definiše kao

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (\text{A.12})$$

gde su $\alpha, \beta > 0$ i $z \in \mathbb{C}$. Interesantno je napomenuti da je Mitag-Lefflerova funkcija generalizacija eksponencijalne funkcije, tj. eksponencijalna funkcija je specijalni slučaj Mitag-Lefflerove funkcije. Jedna od najvažnijih osobina Mitag-Lefflerove funkcije je

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(t^\alpha z) dt = \frac{1}{1-z} \quad (\text{A.13})$$

za $|z| < 1$. Takođe, interesantno je da je Laplasova transformacija funkcije $t^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha,\beta}^{(k)}(\pm z t^\alpha)$

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} t^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha,\beta}^{(k)}(\pm z t^\alpha) dt = \frac{k! p^{\alpha - \beta}}{(p^\alpha \mp a)^{k+1}} \quad (\text{A.14})$$

sa tim da je $Re(p) > |a|^{\frac{1}{\alpha}}$ i da je $E_{\alpha,\beta}^{(k)}(y) = \frac{d^k}{dy^k} E_{\alpha,\beta}(y)$.

Bibliografija

- [1] Boris Jakovljević, Milan R. Rapaić, Zoran D. Jeličić, and Tomislav Šekara. Optimization of distributed order fractional pid controller under constraints on robustness and sensitivity to measurement noise. In *International Conference on Fractional Differentiation and Its Applications (ICFDA)*, 2014.
- [2] Boris Jakovljević, Milan R. Rapaić, Zoran D. Jeličić, and Tomislav Šekara. Optimization of fractional pid controller by maximization of the criterion that combines the integral gain and closed-loop system bandwidth. In *System Theory, Control and Computing (ICSTCC), 2014 18th International Conference*, 2014.
- [3] B. Jakovljević, A. Pisano, M. Rapaić, and E. Usai. On the sliding-mode control of fractional-order nonlinear uncertain dynamics. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2015.
- [4] T. Atanacković, B. Jakovljević, and M. Petković. On the optimal shape of a column with partial elastic foundation. *European Journal of Mechanics. A: Solids*, 29:283–289, 2010.
- [5] Marko Bošković, Tomislav Šekara, Boris Jakovljević, and Milan R. Rapaić. Rational approximations to design controllers for unstable processes, including dead-time. In *Proceedings of 10th Symposium on Industrial Electronics INDEL*, pages 200 – 204, 2014.
- [6] Boris Jakovljević, Milan R. Rapaić, Mirna Kapetina, and Tomislav Šekara. Usporedna analiza performansi jedne klase linearnih optimalnih regulatora celog i necelog reda. In *Medjunarodni naučno-stručni simpozijum Infoteh-Jahorina*, 2014.

-
- [7] Boris Jakovljević, Željko Kanović, Milan R. Rapaić, and Zoran D. Jeličić. Analiza performansi linearnih sistema sa frakcionim astatizmom. In *ETTRAN*, 2013.
- [8] Karl J. Åström and Tore Hägglund. *PID Controllers: Theory, Design, and Tuning*. ISA: The Instrumentation, Systems, and Automation Society, 1995. ISBN-13: 978-1556175169.
- [9] Karl J. Åström and Tore Hägglund. *Advanced PID control*. ISA-The Instrumentation, Systems, and Automation Society, 2006.
- [10] Karl J. Åström and Björn Wittenmark. *Computer Controlled Systems – Theory and Design*. Prentice-Hall, 3 edition, 1997.
- [11] Igor Podlubny. Fractional-order systems and fractional-order controllers. *Slovak Academy of Sciences, Institute of Experimental Physics*, 1994.
- [12] I. Podlubny, L. Dorcak, and I. Kostial. On fractional derivatives, fractional-order dynamic system and pid-controllers. In *Proceedings of the 36th conference on decision and control 5*, pages 4985–4990, 1997.
- [13] Igor Podlubny. Fractional order systems and $PI^\alpha D^\mu$ controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(1):208–214, 1999.
- [14] C. Yeroglu and N. Tan. Note on fractional-order proportional-integral-differential controller design. *Control Theory & Applications, IET*, 5(17):1978 – 1989, 2011.
- [15] D. Valerio and J. Sa da Costa. Introduction to single-input, single-output fractional control. *IET Control Theory and Applications*, 5(8):1033–1057, 2010.
- [16] Y. Luo, H. Chao, L. Di, and Y. Q. Chen. Lateral directional fractional order PI^α control of a small fixed-wing unmanned aerial vehicles: controller designs and flight tests. *IET Control Theory and Applications*, 18(5):2156 – 2167, 2011.
- [17] Y. Jin, Y. Q. Chen, and D. Xue. Time-constant robust analysis of a fractional order [proportional derivative] controller. *IET Control Theory and Applications*, 2011.

-
- [18] Fengyu Zhou, Yang Zhao, Yan Li, and YangQuan Chen. Design, implementation and application of distributed order pi control. *ISA Transactions*, 2013.
- [19] T. Atanacković, M. Budinčević, and S. Pilipović. On a fractional distributed-order oscillator. *JOURNAL OF PHYSICS A: MATHEMATICAL AND GENERAL*, 38:6703 – 6713, 2005.
- [20] T. B. Šekara and M. R. Mataušek. Optimization of PID controller based on maximization of the proportional gain under constraints on robustness and sensitivity to measurement noise. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(1), 2009.
- [21] T. B. Šekara and M. R. Mataušek. Revisiting the Ziegler - Nichols process dynamics characterization. *Journal of Process Control*, 20:360–363, 2010.
- [22] H. Panagopoulos., Karl J. Åström, and Tore Hägglund. Design of PID controllers based on constrained optimization. *IEEE Proceedings of Control Theory and Applications*, 2002.
- [23] Olof Garpinger. *Design of Robust PID Controllers with Constrained Control Signal Activity*. PhD thesis, Department of Automatic Control, Lund University, 2009.
- [24] Birgitta Kristiansson and Bengt Lennartson. Evaluation and simple tuning of PID controllers with high-frequency robustness. *Journal of Process Control*, 16:91 – 102, 2006.
- [25] V. I. Utkin. *Sliding modes in Control and Optimization*. Springer Verlag, Berlin, 1992.
- [26] G. Bartolini, A. Ferrara, A. Levant, and E. Usai. *Variable Structure Systems, Sliding Mode and Nonlinear Control*, chapter On second order sliding mode controllers, pages 329–350. Springer Verlag, 1999.
- [27] Alessandro Pisano, Milan R. Rapaic, Zoran D. Jelcic, and Elio Usai. Sliding order mode approaches to the robust regulation of linear multi-variable fractional order systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 20(18):2045–2056, 2010.

- [28] Milan R. Rapaic, Zoran D. Jelicic, Alessandro Pisano, and Elio Usai. Second order sliding modes and soft computing techniques for fault detection. *Proceedings of the 8th European Workshop on Advanced Control and Diagnosis (ACD 2110)*, 2010.
- [29] Čedomir Milosavljević. *Teorija automatskog upravljanja - 2*. Univerzitet u Istočnom Sarajevu, Elektrotehnički fakultet, 2007.
- [30] Anatoly A. Kilbas, Hari M. Srivastava, and Juan J. Trujillo. *Theory and applications of fractional differential equations*. Elsevier, Boston, 2006.
- [31] Keith B. Oldham and Jerome Spanier. *The fractional calculus - Theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order*. Academic Press Inc., San Diego, 1974.
- [32] Kenneth S. Miller and Berthram Ross. *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*. John Wiley and Sons, New York, 1993.
- [33] Igor Podlubny. *Fractional differential equations*. Academic Press, San Diego, 1999.
- [34] Michele Caputo. *Elasticita e dissipazione*. Bologna, Zanichelli, 1969.
- [35] Marc Weilbeer. *Efficient Numerical Methods for Fractional Differential Equations and their Analytical Background*. PhD thesis, Von der Carl-Friedrich-Gau -Fakultät für Mathematik und Informatik der Technischen Universität Braunschweig, 2005.
- [36] Carl F. Lorenzo and Tom T. Hartley. Initialization, conceptualization and application in the generalized fractional calculus. Technical report, NASA Center for Aerospace Information, December 1998.
- [37] Bogoljub Stankovic and Teodor M. Atanackovic. On a model of a viscoelastic rod. *Fractional Calculus & Applied Analysis*, 4:501–522, 2001.
- [38] J. Sabatier, Ohm Parkash Agrawal, and J. A. Tenreiro Machado. *Advances in fractional calculus*. Springer-Verlag, 2007.
- [39] Michele Caputo. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent I. *Ann. Geofis.*, 19:383 – 393, 1966.

-
- [40] Michele Caputo. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent II. *Geophysical Journal of Royal Astronomical Society*, 13(5):529 – 539, 1967.
- [41] Richar L. Magin. *Fractional Calculus in Bioengineering*. Begell House, Inc., 2006.
- [42] Jovan K Popović, Milica T. Atanacković, Ana S. Pilipović, Milan R. Rapaić, Stevan Pilipović, and Teodor M. Atanacković. A new approach to the compartmental analysis in pharmacokinetics: fractional time evolution of diclofenac. *Journal of Pharmacokinetics and Pharmacodynamics*, 37:119–134, 2010.
- [43] Jovan K Popović, Milica T. Atanacković, Ana S. Pilipović, Milan R. Rapaić, Stevan Pilipović, and Teodor M. Atanacković. Remarks on the mass balance for multi-compartmental models; a nonlinear compartmental model. *Journal of Pharmacokinetics and Pharmacodynamics*, 37:217–220, 2010.
- [44] Jovan K Popović, Diana Dolićanin, Milan R. Rapaić, Stevan L. Popović, Stevan Pilipović, and Teodor M. Atanacković. A nonlinear two compartmental fractional derivative model. *European Journal of Drug Metabolism and Pharmacokinetics*, 36(4):189 – 196, 2011.
- [45] Tomislav Šekara. *Frakcioni sistemi upravljanja*. Elektrotehnicki fakultet u Istocnom Sarajevu, 2011.
- [46] Shantanu Das. *Functional Fractional Calculus for System Identification and Controls*. Springer, 2008.
- [47] Tomislav Šekara. *Frakcione transformacije sa primenom u sisistemi automatike i električnim kolima*. PhD thesis, Elektrotehnički fakultet u Beogradu, 2006.
- [48] Karl J. Åström and Tore Hägglund. The future of PID control. *Control Engineering Practice*, 9:1163–1175, 2001.
- [49] Nicolas Minorsky. Directional stability of automatically steered bodies. *Journal of the American Society for Naval Engineers*, 34(2):280 – 309, 1922.
- [50] Yan Li, Hu Sheng, and Yang Quan Chen. On distributed order integrator/differentiator. *Signal Processing*, 91(5):1079–1084, 2011.

- [51] Igor Podlubny. Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 5(4):367–386, 2002.
- [52] Fabrizio Padula and Antonio Visioli. Tuning rules for optimal pid and fractional-order pid controllers. *Journal of Process Control*, 21:69–81, 2011.
- [53] K. Akbari Moornani and M. Haeri. Robustness in fractional proportional integral derivative-based closed-loop systems. *IET Control Theory and Applications*, 4(10):1933 – 1944, 2010.
- [54] F. Padula and A. Visioli. Optimal tuning rules for proportional-integral-derivative and fractional-order proportional-integral-derivative controllers for integral and unstable processes. *IET Control Theory and Applications*, 6(6):776 – 786, 2012.
- [55] J. L. Schiff. *The Laplace Theorem: Theory and applications*. Springer, 1999.
- [56] Milić R. Stojić. *Sistemi automatskog upravljanja*. Stilos, Beograd, 2006.
- [57] C. W. Ueberhuber. *Numerical Computation 2: Methods, Software, and Analysis*. Springer-Verlag, 1997.
- [58] Zoran D. Jeličić and Nebojsa D. Petrovački. Optimality conditions and a solution scheme for fractional optimal control problems. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 38:571–581, 2009.
- [59] Milan R. Rapaić and Zoran D. Jeličić. Optimal control of a class of fractional heat diffusion systems. *Nonlinear Dynamics*, 62:39–51, 2010.
- [60] Milan R. Rapaić and Zoran D. Jeličić. *Projektovanje linearnih regulatora i estimatora u prostoru stanja*. FTN Izdavaštvo, Novi Sad, 2014.
- [61] H. Panagopoulos and Karl J. Åström. PID control design and H_∞ loop shaping. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 10:1249–1261, 2000.
- [62] Richard Herrmann. *FRACTIONAL CALCULUS: An Introduction for Physicists*. World Scientific Publishing, 2011.

-
- [63] M. West, M. Bologna, and P. Grigorini. *Physics of fractional calculus*. Springer-Verlag, 2003.
- [64] Hu Sheng, YangQuan Chen, and TianShuang Qiu. *Fractional Processes and Fractional-Order Signal Processing*. Springer, 2011.
- [65] Joseph Abate and Ward Whitt. A unified framework for numerically inverting laplace transforms. *INFORMS Journal on Computing*, 2006.
- [66] Teodor M. Atanackovic and Bogoljub Stankovic. On a class of differential equations with left and right fractional derivatives. *ZAMM*, 87(7):537–546, 2007.
- [67] Teodor M. Atanackovic and Bogoljub Stankovic. An expansion formula for fractional derivatives. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 7:365–378, 2004.
- [68] Ž. Kanović, M. R. Rapaić, and Z. D. Jeličić. Generalized particle swarm optimization algorithm - theoretical and empirical analysis with application in fault detection. *Applied Mathematics and Computation*, 217(24):10175–10186, 2011.
- [69] P .B. Kahn and Y. Zarmi. *Nonlinear Dynamics: Exploration through Normal Forms*. Wiley, New York, 1998.
- [70] Boban Veselić Čedomir Milosavljević, Branislava Peruničić-Draženočić. Sups - sistemi upravljanja promjenljive strukture 50 godina istraživanja i primene kliznih režima. In *INFOTEH-JAHORINA*, volume 9, pages 1–12, 2010.
- [71] K. David Young, Vadim I. Utkin, and Ümit Özgüner. A control engineer’s guide to sliding mode control. *IEEE Transactions on Control Systems Technologies*, 7(3):328–342, 1999.
- [72] G. Bartolini, A. Pisano, E. Usai, and A. Levant. On the robust stabilization of nonlinear uncertain systems with incomplete state availability. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 122(4):738 – 745, 2000.
- [73] G. Bartolini and P. Pydynowsky. An improved chattering free vsc scheme for uncertain dynamical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41:1220–1226, 1996,.

-
- [74] J. J. Slotine and Li W. *Applied Nonlinear Control*. Prentice-Hall International, Englewood Cliffs, New Jersey, 1991.
- [75] A. Levant. Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *International Journal of Control*, 58:1247–1263, 1993.
- [76] Hassan K. Khalil. *Nonlinear systems*. Prentice Hall, 2001.
- [77] Alessandro Pisano, Milan R. Rapaić, Zoran D. Jeličić, and Elio Usai. Second-order sliding mode approaches to disturbance estimation and fault detection in fractional-order systems. In *Proceedings of the 18th IFAC Triennial World Congress IFAC WC 2011*, pages 2436–2441, 2011.
- [78] Alessandro Pisano, Milan R. Rapaić, Zoran D. Jeličić, and Elio Usai. On second-order sliding mode control of fractional-order dynamics. *Proceedings of the 2010 American Control Conference (ACC 2010)*, pages 6680 – 6685, 2010.
- [79] A. Pisano, M. R. Rapaić, E. Usai E, and Z. D. Jeličić. Continuous finite-time stabilization for some classes of fractional order dynamics. In *Proceedings of the 12th International Workshop on Variable Structure Systems*, pages 16–21, 2012.
- [80] M. O. Efe and C. A. Kasnaköglu. Fractional adaptation law for sliding mode control. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 22:968–986, 2008.
- [81] D. Valerio and J. S da Costa. Fractional sliding-mode control of mimo nonlinear non-commensurable plants. *Journal of Vibration and Control*, 20(7):1052–1065, 2014.

Biografija autora

Boris Jakovljević je rođen 22.07.1982. godine u Novim Sadu. Završio je osnovnu školu „Dušan Radović“ u Novom Sadu, posle čega upisuje matematičko – ogleđno odeljenje u gimnaziji „Jovan Jovanović Zmaj“ u istom gradu. Po završetku gimnazije upisuje 2001. godine Fakultet tehničkih nauka, odsek Elektrotehnika i računarstvo, smer Automatika i upravljanje sistemima, gde diplomira 2007. godine sa temom “Analiza stabilnosti i regulacija linearnih vremenski nepromenljivih sistema sa transportnim kašnjenjem“. Na ovaj način stiče objedinjenu diplomu osnovnih i master studija i zvanje diplomirani inženjer – master elektrotehnike i računarstva. Po završetku ovih studija upisuje doktorske studije na matičnom fakultetu, odnosno na matičnom odseku i smeru. Istovremeno postaje i saradnik u nastavi na Katedri za automatiku i upravljanje sistemima Fakulteta tehničkih nauka. Tokom rada na katedri menja zvanje u asistent 2009. godine i drži veći broj predmeta među kojima su Metode optimizacije, Upravljački sistemi u realnom vremenu, Nelinearni upravljački sistemi, Adaptivno i napredno upravljanje, Tehnologije upravljačkih sistema, Modeliranje, simulacija i upravljanje, te Sistemi automatskog upravljanja. U isto vreme izlaže radove na domaćim i međunarodnim, naučnim i stručnim skupovima, te u naučnim časopisima. Autor je dva rada sa SCI liste kategorizacije M21. Dobitnik je nagrade *Anatoly A. Kilbas Award* na IEEE konferenciji International Conference on Fractional Differentiation and Its Applications (ICFDA'14), održanoj u Kataniji, u Italiji, u Junu, 2014. godine. Takođe, učestvovao je u izradi više naučnih i stručnih projekata na Katedri.