УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
Машински факултет

ВЕЋУ ДОКТОРСКИХ СТУДИЈА

Предмет: Реферат о урађеној докторској дисертацији кандидата **Бошка П. Цветковића, дипл. инж. маш.**, студента Докторских студија

Одлуком број 905/2 од 20.05.2021 године, именовани смо за чланове Комисије за преглед, оцену и одбрану докторске дисертације кандидата Бошка П. Цветковића под насловом

„Пројектовање савремених система управљања робота применом развојних програмабилних система и савремене теорије рачуна нецелог реда“.

После прегледа достављене Дисертације и других пратећих материјала и разговора са Кандидатом, Комисија је сачинила следећи

Р Е Ф Е Р А Т

1. УВОД

1.1. Хронологија одобравања и израде дисертације

Кандидат Бошка П. Цветковић, дипл. инж. маш., уписао је прву годину докторских студија на Машинском факултету Универзитета у Београду школске 2010/2011 године.
Кандидату је одобрено мировање статуса студента на Докторским студијама у трајању од два семестра у школској 2011/12 години (бр.решења 9/16528 од 21.09.2012. године), и у школској години 2019/20 (решење 1395/1 од 30.09.2020.године), односно одобрено му је и продужење статуса студента на Докторским студијама у трајању од два семестра у школској 2017/18 години (решење 2206/1 од 03.10.2017 године), у школској 2018/19 години (решење 1990/1 од 12.09.2019. године), и у школској 2020/21 години (решење 1070/1 од 14.06.2021.године).
. Кандидат је поднео захтев за одобрење теме докторске дисертације број 2523/1 од 16.10.2017 године на Катедри за механику Машинског факултета Универзитета у Београду. Кандидат је за ментора предложио др Михаила Лазаревића, редовног професора Машинског факултета у Београду. На основу сагласности Катедре за механику број 2523/2 од 31.10.2017 године, Наставно-научно веће Машинског факултета у Београду донело је 09.11.2017 године Одлуку број 2523/3 о именовању Комисије за оцену подобности теме и кандидата за израду докторске дисертације и научне заснованости теме докторске дисертације у саставу:

- др Михаило Лазаревић, редовни професор (ментор), Машински факултет, Универзитет у Београду,

- др др Немања Зорић, доцент, Машински факултет, Универзитет у Београду,
- др Томислав Шекара, ванредни професор, Електротехнички факултет, Универзитет у Београду,

Веће научних области техничких наука Универзитета у Београду донело је Одлуку број 61206-5088/2-17 од 25.12.2017 године којом се даје сагласност на предлог теме докторске дисертације кандидата Бошка Цветковића, дипл. инж. маш., под насловом: **„Пројектовање савремених система управљања робота применом развојних програмабилних система и савремене теорије рачуна нецелог реда“**.

На основу обавештења редовног проф. др Михаила Лазаревића да је кандидат Бошко Цветковић, дипл. инж. маш., завршио докторску дисертацију под насловом: **„Пројектовање савремених система управљања робота применом развојних програмабилних система и савремене теорије рачуна нецелог реда “** и предлога Катедре за механику број 905/1 од 17.05.2021 године, Наставно-научно веће Машинског факултета у Београду је на седници одржаној 20.05.2021 године донело Одлуку број 905/2 којом се именују чланови Комисије за преглед, оцену и одбрану докторске дисертације у саставу:

- др Михаило Лазаревић, редовни професор (ментор), Машински факултет, Универзитет у Београду,
- др Радиша Јовановић, редовнии професор, Машински факултет, Универзитет у Београду
- др Немања Зорић, ванредни професор, Машински факултет, Универзитет у Београду
- др Петар Мандић, доцент, Машински факултет, Универзитет у Београду
- др Томислав Шекара, редовни професор, Електротехнички факултет, Универзитет у Београду

1.2. Научна област дисертације

Докторска дисертација под насловом **„Пројектовање савремених система управљања робота применом развојних програмабилних система и савремене теорије рачуна нецелог реда“** припада области техничких наука **- машинство**, ужој научној области - Механика, за коју је Машински факултет Универзитета у Београду матичан. Ментор др Михаило Лазаревић је редовни професор на Катедри за механику Машинског факултета Универзитета у Београду. Као аутор или коаутор до сада је публиковао 32 рада на SCI листи.

1.3. Биографски подаци о кандидату

Кандидат, Бошко Цветковић, дипломирани инжењер машинства и студент Докторских студија на Машинском факултету Универзитета у Београду, рођен је у Београду, 30. 3. 1976 године. Основну школу „Милица Павловић“ на Врачару завршио је 1990. године а Математичку гимназију „Вељко Влаховић“ у Београду 1994. године. Током школовања постизао је запажене резултате на градским и републиким такмичењима из математике и физике. Добитник је више награда, међу којима су и *„Михаило Петровић-Алас“, „Светозар Марковић“* и *„Никола Тесла*“. Дипломирао је на Машинском факултету у Београду, одсек за

Аутоматско управљање, 2007. године са просечном оценом 7.89. Дипломски рад у области система аутоматског управљања под називом „*Динамичка анализа линерних сингуларних система са позиција примене генералисаних инверзија*“, одбранио је са оценом 10. Дипломске студије завршио је по старом наставном плану и програму.

Докторске студије уписао је школске 2010/2011. године на Машинском факултету Универзитета у Београду, ментор, проф. др Михаило Лазаревић, Катедра за Механику). У оквиру Докторских студија на предмету „Механика робота“ више пута је са студентима мастер студија изводио лабораторијске вежбе, у овиру којих је рађено на развојним плочама Arduino и већем броју сензора, као и на LEGO роботу.

Од 2007. године до почетка 2021. године био је запослен у компанији „Stucke Elektronik GmbH“ где је радио на пословима програмирања у више програмских језика (C#, C, C++, PHP, MySQL, HTML, Javascript, Java) под Windows оперативним системом и на развоју PLC уређаја и програмирања истих у програмском језику Keil C. Развијао је софтверска решења за компаније Hyundai, Alstom, Eaton. Од 2012. до 2014. године радио је на позицији консултанта на пројекту ДИЛС Министарства рада и социјалне политике Владе Србије уз подршку Светске банке. Сврха пројекта је била пружање унапређених услуга на локалном новоу. Задужење је било техничка супервизија имплементације решења на пројекту и учествовање на састанцима одбора за имплементацију решења. Од 2021. запослен је у програмерској компанији EPTI на позицији VPE (Vice President of Engineering)

Члан је Менсе Србија и *Mensa International* од 1996. године. Одслужио је редован војни рок од септембра 2003. до јуна 2004. године у Суботици. Кандидат је завршио вишемесечне међународно признате пословне курсеве NLP Bussiness Practicioner, NLP Master Practicioner и Врхунски комуникатор и добио сертификате истих.

Такође, током школовања завршио је велики број курсева енглеског језика по програму Кембриџ универзитета и курсеве немачког језика по програму Гете универзитета, тако да кандидат активно користи енглески и немачки језик, (читање, писање и комуникација).

Бошко Цветковић је аутор и коаутор 12 научно - стручних радова.

2. ОПИС ДИСЕРТАЦИЈЕ

2.1. Садржај дисертације

Докторска дисертација кандидата Бошка Цветковића, дипл. инж. маш., под насловом **“Пројектовање савремених система управљања робота применом развојних програмабилних система и савремене теорије рачуна нецелог реда“** је документ формата А4, штампан једнострано, написан на српском језику, ћириличним писмом. Написана је на укупно 105 нумерисаних страна укључујући Прилоге и Литературу која садржи 119 референци. Илустрована је са 55 слика, садржи 209 нумерисаних израза, и 6 табела.

Докторска дисертација садржи следећа Поглавља:

1. Увод;
2. Везано кретање хватаљке роботског система;

3. Итеративно управљање путем учења роботских система;
4. Хардверско управљање NeuroArm роботском руком;
5. Управљање NeuroArm роботском руком генерисано у програмском окружењу;
6. Закључак и научни доприноси дисертације;

Осим наведеног, докторска дисертација садржи резиме на српском и енглеском језику, садржај, биографију аутора, Изјаву о ауторству, Изјаву о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада и Изјаву о коришћењу.

2.2. Кратак приказ појединачних поглавља

Прво поглавље, поред прегледа литературе, наводе се предмет и циљеви истраживања докторске дисертације који се односе на развој нових интелигентних управљања роботских система применом итеративног управљања путем учења фракционог (нецелог) реда. Са друге стране, за практичну имплементацију и реализацију сложених алгоритама управљања, потребно је узети у обзир карактеристике хардверског и софтверског дела управљачког система тако да је у наставку дат осврт и на избор и имплементацију одговарајућег ембедид система *(embedded system*) потребног за управљање роботском руком NeuroArm. На крају поглавља приказује се основна структура рада са кратким описом садржаја поглавља.

Друго поглавље бави се моделовањем роботских система са више степени слободе у решавању контактних проблема. За извођење математичког модела роботског манипулатора коришћен је тзв. Родригов приступ, која је заснована на примени Родригове матрице трансформација координата. Коришћењем овог приступа, могуће је на јединствен начин одредити основне геометријске и динамичке параметре разматраног система, као и кинематичке величине потребне за добијање диференцијалних једначина кретања механичког система у коваријантном облику. Посебна пажња у овом поглављу посвећена је математичком моделу везаног кретања роботског система применом Лагранжевих једначина друге врсте у коваријантном облику где су посебно одређене генералисане силе услед реакције веза која намеће радно окружење (површ, линија). Затим су применом Лагранж-Даламберовог принципа у генералисаним координатама такође презентоване и добијене диференцијалне једначине везаног кретања роботског система у облику Лагранжевих једначина друге врсте у коваријантном облику са Лагражевим множитељима. На крају поглавља показан је и дат поступак одређивања Јакобијана при везаном кретању врха хватаљке роботског система.

Треће поглавље посвећено је оригиналним резултатима који се односе на примену интелигентог управљања које је засновано на итеративном управљању путем учења (ИУУ), и то линеаризованим роботским системом целог реда применом закона ИУУ PD^2D^{α} нецелог реда у отвореној спрези. Затим је уведен и предложен у отвореној-затвореној спрези ИУУ нецелог реда једним сингуларним динамичким системом нецелог реда. У наставку приказани су резултати симулације управљања датим сингуларним системом. На крају овог поглавља, примењен је погодно одабрани ИУУ у отвореној-затвореној спрези нецелог реда PD^{μ}/PD типа у циљу управљања NeuroArm роботском руком. Такође су представљени и одговарајући резултати симулације где је коришћен линеаризовани математички модел NeuroArm роботске руке.

Четврто поглавље бави се разматрањем хардеверског управљања NeuroArm роботском руком, односно избором и имплементацијом хардверских решења за управљање NeuroArm роботске руке. Постављени су задаци које NeuroArm роботска рука мора да извршава да би се на основу тога изабрала развојна плоча која задовољава све те задатке. Дат је шематски приказ управљачке плоче која је развијена за потребе NeuroArm роботске руке са описом могућности, дато је објашњење зашто је изабран RTOS оперативни систем, приказ програмског алата EDICOPT за програмирање логике рада мотора, и на крају поглавља приказано је експериментално тестирање Maxon мотора који је у склопу NeuroArm роботске руке.

Пето поглавље се односи на проблематику решавања управљања NeuroArm роботском руком у датом програмском кружењу, комуникације са путем Modbus протокола, начинима управљања у реалном времену који су примењени и тестирани, као и предностима и могућностима даљинског управљања у реалном времену.

Шесто поглавље садржи закључке и научне доприносе дисертације.

На крају докторске дисертације дато је и три прилога где је приказан шематски приказ преосталих делова управљачке плоче, модел Maxon мотора у *Matlab*-у и *Simulink*-у, резултати експерименталног тестирања Maxon мотора NeuroArm роботске руке, као и један део кода за комуникацију са NeuroArm роботом и програмирањем рада мотора у EDICOPT програмском окружењу.

3. ОЦЕНА ДИСЕРТАЦИЈЕ

3.1. Савременост и оригиналност

Докторска дисертација под насловом **„Пројектовање савремених система управљања робота применом развојних програмабилних система и савремене теорије рачуна нецелог реда“** кандидата Бошка Цветковића, дипл. инж. маш., представља наставак актуелног истраживања превасходно у области управљања као и моделовања роботских система у решавању везаног кретања истог. Истраживања у области напредног управљања роботских система су веома значајна и актуелна. Приликом синтезе управљања датих система коришћена је савремена математичка теорија нецелог реда (фракциони рачун), која има све већу примену у техници у последњих пар деценија. При формирању математичког модела датог роботског система при везаном кретању истог примењен је савремени Родригов приступ, чија је предност то што је веома погодан за примену на рачунару, па се поступак моделовања сложених система са три и више степени слободе знатно поједностављује и убрзава, а могућност појаве грешке у моделу се знатно смањује. Управљање разматраним роботским системом који се може представити као одговарајући сингуларни динамички систем за случај везаног кретања, представља актуелан проблем у савременој литератури, и то је управо једна од истраживачких области ове тезе. Оригинални приступ за решавање задатка напредног управљања разматраних динамичких (роботских) система огледа се у примени итеративног управљања путем учења (ИУУ) нецелог реда за случај линеаризованих роботских система целог реда као и за класу линеарних сингуларних система нецелог реда.

У оквиру докторске дисертације примењени су савремени истраживачки поступци и лабораторијска мерења уз коришћење најновијих софтверских решења за нумеричке симулације и реализацију управљања робота у реалним условима.

Оригиналност добијених резултата у оквиру дисертације потврђују радови који су публиковани и саопштени на међународним научним скуповима или објављени у светском часопису.

3.2. Осврт на референтну и коришћену литературу

Током израде докторске дисертације коришћени су референтни и актуелни литературни извори из релевантних области и то пре свега радови из научних часописа и са међународних конференција, као и одговарајућа монографска литература. Прегледом цитиране литературе у уводном делу дисертације закључује се да је кандидат Бошко Цветковић дао актуелни приказ постојеће и референтне литературе. Дат је преглед релевантних резултата из области моделовања роботских система, савремене теорије интелигентног управљања применом итеративног управљања путем учења (ИУУ), теорије фракционог (нецелог) рачуна са акцентом на примену на ИУУ са циљем напредног управљања датим роботским системима.

Такође, дат је и одговарајући осврт на литературу која се односи на примену ембедид система *(embedded system*) у циљу хардверске интеграције и адекватне софтверске подршке а све у циљу решавања задатака управљања датих роботских система. О актуелности коришћене литературе говори и чињеница да је већина наведених радова публикована у претходних десет година, а поред радова из врхунских међународних часописа, анализирани су и радови објављени на водећим светским конференцијама.

3.3. Опис и адекватност примењених научних метода

Резултати приказани у овој докторској дисертацији добијени су применом следећих научних метода (теорија) добро познатих научној и стручној јавности:

- Методе аналитичке механике;
- Методе математичкoг моделирања;
- Теорија рачуна нецелог реда;
- Савремене методе теорије управљања системом (ИУУ)
- Експерименталне методе испитивања
- Компаративне методе, упоређивање експерименталних резултата са резултатима нумеричких симулација,

које су током истраживања примењене на адекватан начин.

3.4. Применљивост остварених резултата

Добијени резултати у оквиру докторске дисертације поред научне вредности имају и значајну практичну примену у решавању задатака управљања датим роботским системом - NeuroArm роботском руком пошто је комплетно развијен и имплементиран нови управљачки систем. Такође, остварене нове алгоритме управљања ИУУ нецелог реда је могуће применити за управљање другим динамичким системима уз незнатну модификацију истих. Због тога, резултати докторске дисертације имају примену како у синтези напредних алгоритама управљања роботских система засновани на теорији нецелог реда, тако и у практичној реализацији управљања роботских система у реалним условима.

3.5. Оцена достигнутих способности кандидата за самостални научни рад

Кандидат Бошко Цветковић (који је током студија био запослен у привреди) је током израде докторске дисертације показао да је самосталан у постављању, препознавању и решавању научно-истраживачких задатака као и да успешно влада научно-истраживачким методама. Поседује широко знање из области теоријске механике и управљања система, као и изузетно познавање и примену савремених софтверских алата. Резултати докторске дисертације доказ су способности кандидата за самостални научно-истраживачки рад. Кроз рад на дисертацији кандидат је стекао потреба знања за претрагу и одабир референтне литературе, као и за писање научних радова, што је потврђено бројним ауторским и коауторским радовима.

4. ОСТВАРЕНИ НАУЧНИ ДОПРИНОС

4.1. Приказ остварених научних доприноса

Оригинални научни допринос кандидата Бошка Цветковића и његовог доктората под називом **„Пројектовање савремених система управљања робота применом развојних програмабилних система и савремене теорије рачуна нецелог реда“** је синтеза једног новог напредног управљања датом класом динамичких линеаризованих роботских система применом интелигентног робусног ИУУ нецелог реда, у отвореној грани, типа PD^2D. Овде се може истаћи чињеница да у научно-стручној литератури постоји изузетно мали број алгоритама ИУУ нецелог реда који су примењени за динамичке системе који нису нецелог реда већ целог реда чиме горе наведен резултат добија на још већем значају. Формулисана је и доказана теорема која се односи на конвергенцију предложеног ИУУ нецелог реда типа PD^2D^{α} чиме су добијени довољни услови конвергенције. Овај научни допринос приказан је у потпоглављу 3.2, на странама од 20-32 докторске дисертације а објављени су у раду [1] (одељак 4.3 Верификација научних доприноса), у часопису Filomat категорије М22, доступан на линку http://journal.pmf.ni.ac.rs/ filomat/index.php/filomat/article/view/15185/0 на коме је кандидат први аутор и једини докторанд. Часопис не даје на увид јавности одмах већ са закашњењем од две године, али се зато у прилогу реферата даје рад са заглављем часописа и броја у коме је објављен.

Остали битни доприноси доктората су:

- Решен је задатак робусног управљања датим сингуларним системом нецелог реда који поседује параметарску неизвесност применом ИУУ нецелог реда у отворено-затвореној спрези типа P/PD^{α}. Формулисана и доказана одговарајућа теорема где су изведени су довољни услови за конвергенцију предложеног алгоритма ИУУ нецелог реда. Овај допринос приказан је у потпоглављу 3.3 на странама од 32-42 докторске дисертације. Међународно је научно верификован у раду [2] (одељак 4.3 Верификација научних доприноса), категорије М33, на коме је кандидат први аутор.

– Пројектован је и имплементиран нови управљачки систем за управљање NeuroArm роботском руком (до свих седам мотора у исто време) за рад у реалном времену. У циљу реализације хардверског управљања роботским системом са седам степени слободе спроведен је избор хардвера тзв. ембедид система тј. изабрана је развојна плоча *Beaglebone Black* и по први пут коришћен софтверски пакет EDICOPT, Института Михаило Пупин, за имплементацију сложених алгоритама управљања на оптималан начин. Овај допринос приказан је у Поглављу 4 на странама од 52- 65 докторске дисертације. Међународно је верификован у конференцијском раду [3] категорије М33, (одељак 4.3 Верификација научних доприноса), на коме је кандидат први аутор и објављен је у часопису *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering,* доступан на линку https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/393/1/012110.

4.2. Критичка анализа резултата истраживања

На основу прегледа релевантне научне литературе и сагледавања постојећих решења из области ове докторске дисертације, комисија констатује да су приказани резултати истраживања нови, изузетно значајни и научно утемељени. Истовремено, на основу увида у задате циљеве истраживања и резултате представљене у докторској дисертацији, констатујемо да су пружени одговори на сва релевантна питања и да су решени проблеми са којима се кандидат сусрео у току истраживања. Развијени одговарајући модел роботског система у случају везаног кретања као и напредни алгоритми итеративног управљања путем учења уз адекватну софтверску и хардверску подршку имају велику примењивост у области напредног управљања робота у реалном времену.

4.3. Верификација научних доприноса

Научни доприноси предметне докторске дисертације су верификовани следећим радовима:

Категорија М20:

[1] **B. P. Cvetković,** M. P. Lazarević, *Fractional-order iterative learning control for robotic arm – PD^2D^α typ*e, Filomat 35:1 (2021), pp.1–10. https://doi.org/10.2298/FIL2101001C. (**IF=0.848**) (ISSN: 2406-0933 On line; 0354-5180 Print) (**категорија М22**)

Категорија М30:

[2] **B. P.Cvetković**, Lazarević M., Djurović N., Mandić P.: *Open-closed loop fractional-order iterative learning control for singular fractional-order system*, -International Conference on Fractional Differentiation and its Application, 18-20 July 2016, Novi Sad, Serbia, pp.404-414, ISBN: 978-86-7892-830-7. (**категорија М33**)

[3] **B. P.Cvetković**, V. Nešić, M. Lazarević, P. Mandić, P. Marić и M. Dragović, *Advanced hardware control for seven DOFs robotic arm-neuro arm*, (KOD 2018) published in IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 393 (2018) 012110 pp.1/8, doi:10.1088/1757-899X/393/1/012110. (**категорија М33**)

5. ЗАКЉУЧАК И ПРЕДЛОГ

На основу детаљног прегледа и анализе докторске дисертације, Комисија за преглед, оцену и одбрану докторске дисертације констатује да је докторска дисертација под називом

„Пројектовање савремених система управљања робота применом развојних програмабилних система и савремене теорије рачуна нецелог реда“.

кандидата **Бошка Цветковића**, дипл. инж. маш,урађена према свим стандардима у научно-истраживачком раду, као и да испуњава све услове предвиђене Законом о високом образовању и да је у складу са Статутом и Правилником о докторским студијама Машинског факултета Универзитета у Београду. На основу резултата и закључака приказаних у докторској дисертацији, Комисија констатује да је кандидат **Бошко Цветковић**, дипл. инж. маш., успешно завршио докторску дисертацију у складу са предвиђеним предметом и постављеним циљевима истраживања. Кандидат је дошао до оригиналних научних резултата који су успешно и верификовани.

Комисија за оцену и одбрану докторске дисертације закључила је да докторска дисертација под називом **„Пројектовање савремених система управљања робота применом развојних програмабилних система и савремене теорије рачуна нецелог реда“** представља оригиналан и вредан научни рад са научним доприносима у области машинства, ужа научна област Механика, па сходно члану 37. Правилника о докторским студијама Машинског факултета Универзитета у Београду. Стога Комисија предлаже Наставно-научном већу Машинског факултета у Београду да Реферат прихвати, дисертацију стави на увид јавности и упути Реферат на коначно усвајање Већу научних области техничких наука Универзитета у Београду, а да се након тога кандидат **Бошко Цветковић**, дипл. инж. маш., позове на јавну одбрану дисертације.

У Београду, 10.06. 2021. год.

ЧЛАНОВИ КОМИСИЈЕ

____

др Михаило Лазаревић, редовни професор, ментор
Универзитет у Београду, Машински факултет

____

др Радиша Јовановић, редовни професор
Универзитет у Београду, Машински факултет

____

др Немања Зорић, ванредни професор
Универзитет у Београду, Машински факултет

____

др Петар Мандић, доцент
Универзитет у Београду, Машински факултет

____

др Томислав Шекара, редовни професор
Универзитет у Београду, Електротехнички факултет

Filomat 35:1 (2021), 1–10
https://doi.org/10.2298/FIL2101001C

Published by Faculty of Sciences and Mathematics,
University of Niš, Serbia
Available at: http://www.pmf.ni.ac.rs/filomat

Fractional-Order Iterative Learning Control for Robotic Arm-PD^{2}D$^\alpha$ Type

Boško P. Cvetković[a], Mihailo P. Lazarević[a]

[a]*University of Belgrade, Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade 11120, Serbia*

Abstract. In this paper, a new open-loop PD^{2}D$^\alpha$ type a fractional order iterative learning control (ILC) is studied for joint space trajectory tracking control of a linearized uncertain robotic arm. The robust convergent analysis of the tracking errors has been done in time domain where it is theoretically proven that the boundednesses of the tracking error are guaranteed in the presence of model uncertainty. The convergence of the proposed open-loop ILC law is proven mathematically using Gronwall integral inequality for a linearized robotic system and sufficient conditions for convergence and robustness are obtained.

1. INTRODUCTION

The science of robotics has grown tremendously over the past twenty years, fueled by rapid advances in computer and sensor technology, as well as theoretical advances in control theory, [1]. At present time, the vast majority of robot applications deal with industrial robot arms operating in factory environments. Robots are being deployed to accomplish tasks having strict requirements of accuracy, precision, repeatability, mass production and quality in addition to ease of human effort and cost-effectiveness, [2]. The investigation into the modeling of the dynamics and control of the robotic systems and mechanisms has been an active topic of research which is stimulated by the different applications and by the increasing demand for better performance of robotic systems, [3].

Taking advantage of the fact that robot manipulators are generally used in repetitive tasks, iterative learning control (ILC) schemes [4-7] have been proposed for robot manipulators in the past three decades to enhance the tracking accuracy from operation to operation for given systems. Also, various version ILC strategies are proposed for different type dynamical systems [8-12] that utilize given objective systems data and past information in the form of repetitions to track a reference trajectory over finite time intervals without detail modeling. The basic idea of ILC is to improve the current tracking performance by fully taking advantage of the past control experience. Since the structure of ILC can be viewed as a feedforward control methodology in the time domain and it is simple and easy to implement, the ILC method is suitable for designing a nonlinear tracking control system [13,14]. Also, many classical ILC algorithms have a restriction that involves the assumption that the coupling matrix [CB] has a full-column rank where B denotes the control matrix and C denotes the output matrix of state space for the linearized system. To

2010 *Mathematics Subject Classification*. 93C99
Keywords. iterative learning control, fractional-order; robot, convergence, tracking control
Received: 28 December 2020; Revised: 06 February 2021; Accepted: 17 February 2021
Communicated by Miodrag Spalević
This work was supported by the Ministry of Education, Science and Technological Development of the Republic of Serbia under the project 451-03-68/2020-14/200105, and partially supported by the SerbianItalian bilateral project ADFOCMEDER.
Email addresses: boskocvetkovic@gmail.com (Boško P. Cvetković), mlazarevic@mas.bg.ac.rs (Mihailo P. Lazarević)

overcome this lack, we introduced [14], open-closed ILC PIDD2/PID type which successfully resolves this drawback.

Recently, increasing attention is dedicated to fractional differential equations and their applications in various science and engineering fields [15-17]. Moreover, increasing attention has been dedicated to fractional calculus (FC) and its application in the control and modeling of fractional-order systems [18-20].

Also, the application of ILC to the fractional-order system has become a new topic, [21-27] it does not only retains the advantages of the classical ILC, but also offers potential for better performances in a variety of complex physical processes. For example, a fractional-order D-type ILC algorithm was proposed in the frequency domain [21], and PDα type ILC in the time domain [22]. Most of the existing fractional-order ILC (FOILC) methods for fractional-order systems only focus on the regular and a few singular systems of fractional order.

On the other hand, in many practical robotic control applications, the robotic systems can be presented as nonlinear or linearized integer order dynamic systems. So, there is a difficulty to apply fractional order ILC scheme to integer order system. Recently, authors [28] proposed PDα type FOILC schemes for already obtained integer-order model (given as linear time-varying mechanical system) which is more practical for control practice. Motivated by the search for new FOILC law and their application to mechanical systems, the new open-loop PD^{2}D$^\alpha$-type FOILC law for a class of linearized robotic systems is suggested. Particularly, term D2 in the proposed FOILC serves to overcome well-known restriction the coupling matrix $[CB] = 0$ for a linear or linearized system [29], [30]. Sufficient conditions are derived in the time domain which are our main contributions. Consequently, one may conclude proposed FOILC type is good basis for further real-time robot control application.

"*Preliminaries*" section presents some of the norms and definitions of fractional derivative that are considered in this contribution. In "*Main results*" section, first problem formulation is stated and then convergence results for the proposed open-loop PD^{2}D$^\alpha$-type learning law are given. Finally, the "Conclusion" section concludes this contribution.

2. PRELIMINARIES

2.1. Notations, the λ-norm

In this paper, the following norms are adopted [6] for n -dimensional Euclidean space R^n : sup-norm $\|x\|_\infty = \sup_{1\le i\le n} |x_i|$, $x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$ matrix norm as $\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le m}(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|)$, $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ where $\|A\|_\infty$ denotes the infinite norm of a matrix. Particularly, the standard λ -norm for a real function $g(t), (t \in [0,T]), g : [0,T] \to \Re^n$ is defined as:

$$\|g(t)\|_\lambda = \sup_{t\in[0,T]} e^{-\lambda t}\|g(t)\|,\ \lambda > 0 \tag{1}$$

Especially when is norm $\|(.)\|_\infty$, it follows $\|Ax\|_\infty \le \|A\|_\infty \|x\|_\infty$. Also, for the previous norms, one can easily prove that the λ-norm is equivalent to the ∞ -norm.

(i) *Property 1*: λ norm has the next property

$$\begin{aligned} &\sup_{t\in[0,T]} e^{-\lambda t} \int_0^t \|g(.)\| e^{a(t-\tau)} d\tau = \sup_{t\in[0,T]} \int_0^t e^{-\lambda t} e^{\lambda\tau} e^{a(t-\tau)} e^{-\lambda\tau} \|g(.)\|\tau d\tau \\ &\le \|g(.)\|_\lambda \sup_{t\in[0,T]} \int_0^t e^{(a-\lambda)(t-\tau)} d\tau \le \|g(.)\|_\lambda \frac{1-e^{-(a-\lambda)T}}{\lambda - a} \le \frac{1}{\lambda - a}\|g(.)\|_\lambda \end{aligned} \tag{2}$$

Before presenting the main results, we first introduce the following Lemma 2.1 [6].

Lemma 2.1. *[6] Suppose a real positive series $\{q_k\}_1^\infty$ satisfies*

$$q_k \le \rho q_{k-1} + \tilde{\varepsilon} \tag{3}$$

where $\rho \geq 0, \tilde{\varepsilon} > 0$ *and* $p < 1$. *Then the following holds:*

$$\lim_{k\to\infty} q_k \leq \tilde{\varepsilon}/(1-\rho) \tag{4}$$

One can notice that in case of $\tilde{\varepsilon} = 0, \lim_{k\to\infty} q_k \to 0$.

Lemma 2.2. *(Bellman-Gronwall inequality) [31] Let* $f_1(t), g_1(t)$ *, and* $h_1(t)$ *be nonnegative continuous functions in the interval* $[0,T]$. *Moreover, if there is a nonnegative constant a such that left inequality holds, then the right inequality also holds.*

$$f(t) \leq h(t) + \int_0^t af(\tau)d\tau + \int_0^t g(\tau)d\tau, \Rightarrow f(t) \leq h(t) + \int_0^t \exp(a\cdot(t-\tau))[ah(\tau)+g(\tau)]d\tau \tag{5}$$

2.2. Preliminary notes on fractional calculus

The theory of fractional order calculus can be traced back to 300 years ago, and now, it plays role in modern science particularly in the field of control engineering [16,32]. In the present section, we shortly review some basic definitions and properties of Riemann-Liouville (RL) and Caputo fractional operators [16,17]. Let $f(.) \in AC[a,b]$ be a continuous function over the finite interval $[a,b]$ having the first derivative almost everywhere in $[a,b]$, being integrable, that is, it is in $L^1[a,b]$. Also, the space $AC^m([a,b])$is the space of functions with continuous $m-1$ derivatives on $[a,b]$, and m-th derivative in $L^1[a,b]$. The definition of RL fractional integral of order μ is described by:

$$_aI_t^{\mu} f(t) =_a D_t^{-\mu} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_a^t (t-\tau)^{\mu-1} f(\tau)d\tau,\ \mu \in R^+ \tag{6}$$

where $\Gamma(.)$ is the well-known Euler's gamma function, which is defined by $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-z}t^{z-1}dt$. The RL operator $_aI_t^{\mu}(.)$ possesses the semigroup property, i.e. $_aI_t^{\mu} \cdot_a I_t^{\xi} =_a I_t^{\mu+\xi}$ The RL derivative of the fractional order μ of a function $f(t)$ is given as

$$^{RL}_{\ a}D_t^{\mu} f(t) = D^n(_aI_t^{-(n-\mu)} f(t)) = \frac{d^n}{dt^n}(_aI_t^{-(n-\mu)} f(t)) = \frac{1}{\Gamma(n-\mu)}\frac{d^n}{dt^n}[\int_a^t (t-\tau)^{n-\mu-1} f(\tau)d\tau], \tag{7}$$

where $n-1 \leq \mu < n \in Z^+$ and $D^n(.) = d^n(.)/dt^n, n \in \mathbb{N}$ is the classical n-order derivative. If we introduce $n = [\mu] \in \mathbb{N}$ which stands for integer part of μ , and $\alpha = (\mu-[\mu]) \in (0,1)$ it follows next form for RL fractional order:

$$^{RL}_{\ a}D_t^{\mu} f(t) =^{RL}_{\ a} D_t^{[\mu]+\alpha} f(t) =^{RL}_{\ a} D_t^{n+\alpha} f(t) = \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}(_aI_t^{-(1-\alpha)} f(t)) \tag{8}$$

Also, the definition of Caputo derivative of fractional order μ is introduced [16,17] as follows:

$$^{C}_{a}D_t^{\mu} f(t) =_a D_t^{\mu-n} D^n f(t) =_a I_t^{n-\mu}(f^{(n)}(t)) = \frac{1}{\Gamma(n-\mu)}\int_a^t (t-\tau)^{n-\mu-1} f^{(n)}(\tau)d\tau, \tag{9}$$

where $n-1 < \mu < n \in Z^+$. Also, we have:

$$^{C}_{a}D_t^{\mu} f(t) =_a D_t^{\mu-[\mu]-1} D^{[\mu]+1} f(t) =_a I_t^{n+1-\mu}(f^{(n+1)}(t)) =_a I_t^{1-\alpha}(f^{(n+1)}(t)) \tag{10}$$

In this case $n = 1$, for $0 \leq \alpha < 1$ we obtain:

$$\begin{aligned} ^{RL}_{\ a}D_t^{\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}[\int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} f(\tau)d\tau,] \\ ^{C}_{a}D_t^{\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}[\int_a^t (t-\tau)^{-\alpha}\frac{df(\tau)}{dt}d\tau,] \end{aligned} \tag{11}$$

In the following sections, D^{α} will denote ${}_{C}D_{t}^{\alpha}$, ${}^{RL}D_{t}^{\alpha}{}_{to}^{C}D_{t}^{\alpha}$ for the brevity of notation. If $f(0) = 0$, we can easily prove that in case $a = t_0$ it yields:

$$ {}_{t_0}D_t^{-\alpha}({}_{t_0}D_t^{\alpha} f(t)) = f(t) \tag{12} $$

3. MAIN RESULTS

3.1. Problem formulation

It is well known that many different schemes of robot control exist in literature. Here we consider robot arm control, where dynamics of our robot can be obtained using the procedure for symbolic form computation of the complete dynamics of a robotic system with kinematic chain structures based on the Rodriquez approach, [33]. Differential equations of a robotic system can be presented in the covariant form of Lagrange equations with corresponding external generalized forces. Moreover, the robot arm dynamics can be obtained in compact form as:

$$ a(q)\ddot{q} + (N(q,\dot{q}) - Q^{g}) = a(q)\ddot{q} + n(q,\dot{q}) = Q^{m} \tag{13} $$

where $a(q) = [a_{\alpha\beta}] \in R^{nxn}$ denotes inertia matrix, $N(q,\dot{q})$ is the matrix that includes centrifugal and Coriolis effects, and Q^{g} and $Q^{m} = U$ are gravity term and motor torque vectors, respectively [2]. Here, a model based fractional order control scheme is introduced and implemented, which includes the application of the feedback linearization technique [34]. As result one can linearize the dynamics of robot as

$$ \ddot{q}(t) = u(t) \tag{14} $$

where $u(t)$is the new control signal, or in the case of the existence of the model uncertainty $\eta = \eta(t)$, we have:

$$ \ddot{q}(t) = u(t) + \eta(t) \tag{15} $$

or in state-space

$$ \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + D\eta(t) \ , A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2nx2n} , B = D = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}_{2nx2n} \tag{16} $$

$$ y(t) = Cx(t) = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}_{nx2n} \cdot x(t) \tag{17} $$

We introduce the following assumptions:

A1. The desired trajectories $y_d(t)$, $x_d(t)$ are continuously differentiable on $[0,T]$ Al is a reasonable assumption that makes possible calculating $\dot{e}_i(t) = \dot{y}_d(t) - \dot{y}_i(t), \ddot{e}_i(t) = C\delta\ddot{x}_i(t) = C(\ddot{x}_d(t) - \ddot{x}_i(t)), e_i^{\alpha}(t) = C\delta e_i^{\alpha}(t)$.

A2. The system (16), (17) is causal. Specifically, the existence of unique bounded control input $u_d(t)$ and $x_d(t)$ makes the output of the system (17) to be $u_d(t)$, i.e.

$$ \dot{x}_d(t) = Ax_d(t) + Bu_d(t), \tag{18} $$

$$ y_d(t) = Cx_d(t), \tag{19} $$

A3. The initial resetting conditions hold for all iterations, i.e.

$$ x_i(0) = x_d(0), \ i = 0, 1, 2 \ldots, \tag{20} $$

Assumption A3. restricts the initial states or the initial outputs in each repetition operation should be equal with the desired initial ones so one can achieve a perfect tracking, from the beginning demands the perfect initial condition, that is, $\forall i, \delta x_i(0) = x_d(0) - x_i(0) = 0, e_i(0) = y_d(0) - y_i(0) = 0$. Many practical control problems require such a perfect tracking over the entire transient period including the initial one.

A4. The uncertainty $\eta_i(t) \in R^n$, is uniformly bounded. In the sequel, we use positive constant d_η , to denote the upper bounds for $\eta_i(t)$, i.e, $\forall t \in [0, T]$ and $\forall i \to \|\eta_i(t)\| \leq d_\eta$ Assumption 4. puts the boundedness restrictions of the $\eta_i(t)$ on given time interval $\forall t \in [0, T]$. Based on contraction mapping, all existing ILC methods require Assumption 4. The reason is as follows. ILC methodology tries to use as little system prior knowledge as possible in its design, and the lack of such system knowledge, however, gives rise to a difficulty in designing a suitable (stable) closed-loop controller.

3.2. *Convergence results*

3.2.1. *Open-loop PD^2D^α learning law*

As we stated previously, many ILC laws have a restriction which involves the assumption that the coupling matrix [CB] has a full-column rank where B denotes the control matrix and C denotes the output matrix of state space for the linearized system (18),(19). To resolve this drawback, as well as improving the performance of robot control taking into account the properties of fractional operators we consider the following open-loop $\mathrm{PD^2D^\alpha}$ learning law, see Figure 1:

$$u_{i+1}(t) = u_i(t) + \Gamma_1 \ddot{e}_i(t) + R_1 e_i(t) + R_2 e_i^{(\alpha)}(t) \tag{21}$$

where $e_i(t) = y_d(t) - y_i(t)$ is the trajectory tracking error in $i-$ th iteration, $e_{i+1}(t) = y_d(t) - y_{i+1}(t)$ is the trajectory tracking error in $i+1-$ th iteration. r_1 , $R_1, R_2 \in R^{nxn}$ denote open-closed-loop positive-definite diagonal learning matrices ,i.e. $R_{(.)} = diag(r_{(.)1}, r_{(.)2}, \ldots, r_{(.)n}), \Gamma_{(.)} = diag(g_{(.)1}, g_{(.)2}, \ldots, g_{(.)n})$.

Lemma 3.1. *For the system (16), (17) and the reference system (18), (19) then there exists a sufficient large λ satisfying*

$$\|\delta x_i^{(\alpha)}(t)\|_\lambda \leq \rho_0' \|\delta u_i(t)\|_\lambda + \varepsilon_\eta \tag{22}$$

where $o(\lambda^{-1}) = \dfrac{(1-e^{-\lambda T})}{\lambda} \leq \dfrac{1}{\lambda}$ and $\rho_0' = \rho_0 + h_0 o(\lambda^{-1}), \varepsilon_\eta = (h_1 + h_2 T) d_\eta$, ρ_0 , h_0 , h_1 , h_2 , d_η some positive constants.

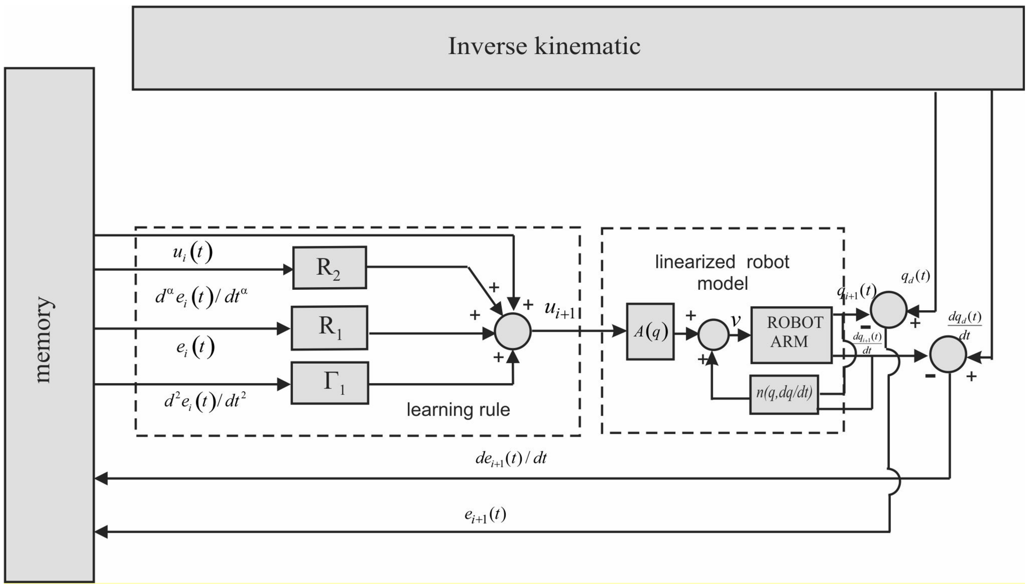

Figure 1: Block diagram of the open-loop PD^2D^α *law* for the robot control

Proof.
We can obtain the solution of equation (17), that is, the state response $x_i(t)$ is expressed by

$$\begin{aligned} x_i(t) &= \Phi(t)x_i(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu_i(\tau)d\tau + \int_0^t \Phi(t-\tau)D\eta_i(\tau)d\tau \\ &= g_i(t) + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu_i(\tau)d\tau + \int_0^t \Phi(t-\tau)D\eta_i(\tau)d\tau \end{aligned} \tag{23}$$

as well as output response $y_i(t)$

$$y_i(t) = Cx_i(t) \tag{24}$$

Where $g_i(t) \in R^r$ and $\Phi(t-\tau) \in R^{rxr}$ are continuously differentiable in t and τ, and $x_i(0)$ is an initial condition of state variable $x_i(t)$ for the i-th iteration. In similar manner, we have solution for the equation (18),

$$x_d(t) = g_d(t) + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu_d(\tau)d\tau \tag{25}$$

Applying α-th order fractional derivative to the (25), (27) we obtain:

$$x_d^{(\alpha)}(t) = g_d^{(\alpha)}(t) + \lim_{\tau\to t-0}[{}_\tau D_t^{\alpha-1}\Phi(t-\tau)Bu_d(\tau)] - \int_0^t {}_\tau D_t^\alpha \Phi(t-\tau)Bu_d(\tau)d\tau \tag{26}$$

Let

$$\begin{aligned} &\delta x_i = x_d(t) - x_i(t),\ \delta\dot{x}_i = \dot{x}_d(t) - \dot{x}_i(t) \\ &\delta u_i = u_d(t) - u_i(t),\ \delta\dot{u}_i = \dot{u}_d(t) - \dot{u}_i(t) \end{aligned} \tag{27}$$

$$D^\alpha(\delta x_i(t)) = \delta x_i^{(\alpha)} = x_d^{(\alpha)}(t) - x_i^{(\alpha)}(t) \tag{28}$$

Also, it follows from (26)-(28) it yields, [35]:

$$\begin{aligned} \delta x_i^{(\alpha)}(t) = x_d^{(\alpha)}(t) - x_i^{(\alpha)}(t) = g_d^{(\alpha)}(t) - g_i^{(\alpha)}(t) + \lim_{\tau\to t-0}[{}_\tau D_t^{\alpha-1}\Phi(t-\tau)Bu_d(\tau)] - \\ \lim_{\tau\to t-0}[{}_\tau D_t^{\alpha-1}\Phi(t-\tau)Bu_i(\tau)] + \int_\tau^t {}_\tau D_t^\alpha\Phi(t-\tau)Bu_d(\tau)d\tau - \int_\tau^t {}_\tau D_t^\alpha\Phi(t-\tau)Bu_i(\tau)d\tau \\ - \lim_{\tau\to t-0}[{}_\tau D_t^{\alpha-1}\Phi(t-\tau)D\eta_i(\tau)] - \int_0^t {}_\tau D_t^\alpha\Phi(t-\tau)D\eta_i(\tau)d\tau \end{aligned} \tag{29}$$

Taking into account assumption A3, it follows:

$$g_d^{(\alpha)}(t) - g_i^{(\alpha)}(t) = 0. \tag{30}$$

Hence, expression (29) takes the form:

$$\begin{aligned} \delta x_i^{(\alpha)}(t) &= \tau^{D_t^{\alpha-1}}(\Phi(t-\tau))B|_{\tau=t}\delta u_i(t) + \int_0^t {}_\tau D^\alpha\Phi(t-\tau)B\delta u_i(\tau)d\tau \\ &-[{}_\tau D_t^{\alpha-1}\Phi(t-\tau)D\eta_i(\tau)|_{\tau=t}] - \int_0^t {}_\tau D^\alpha\Phi(t-\tau)D\eta_i(\tau)d\tau \end{aligned} \tag{31}$$

Taking $\lambda-$ norm of (31) it yields:

$$\|\delta x_i^{(\alpha)}(t)\|_\lambda \le \sup_{0\le t\le T}\|{}_\tau D_t^{\alpha-1}\Phi(t-\tau)B|_{\tau=t}\|_\infty\|\delta u_i(t)\|_\lambda + \sup_{0\le t,\tau\le T}\|{}_\tau D_t^{\alpha}\Phi(t-\tau)B\|_\infty\int_0^t e^{-\lambda t}\cdot\|\delta u_i(\tau)\|_\infty d\tau$$
$$+\sup_{0\le t\le T}\|{}_\tau D_t^{\alpha-1}\Phi(t-\tau)D\|_\infty\|\eta_i(t)\|_\infty + \sup_{0\le t,\tau\le T}\|{}_\tau D_t^{\alpha}\Phi(t-\tau)D\|_\infty\int_0^t e^{-\lambda t}\|\eta_i(\tau)\|_\infty d\tau$$
$$\|\delta x_i^{(\alpha)}(t)\|_\lambda \le \sup_{0\le t\le T}\|{}_\tau D_t^{\alpha-1}\Phi(t-\tau)B|_{\tau=t}\|_\infty\|\delta u_i(t)\|_\lambda \tag{32}$$
$$+\sup_{0\le t,\tau\le T}\|{}_\tau D_t^{\alpha}\Phi(t-\tau)B\|_\infty\int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}\cdot\sup_{0\le\tau\le T}e^{-\lambda\tau}\|\delta u_i(\tau)\|_\infty d\tau$$
$$+\sup_{0\le t\le T}\|{}_\tau D_t^{\alpha-1}\Phi(t-\tau)D\|_\infty\cdot d_\eta + \sup_{0\le t,\tau\le T}\|{}_\tau D_t^{\alpha}\Phi(t-\tau)D\|_\infty\int_0^t e^{-\lambda t}d_\eta d\tau$$

or

$$\|\delta x_i^{\alpha}(t)\|_\lambda \le \rho_0\|\delta u_i(t)\|_\lambda + h_0\cdot\|\delta u_i(\tau)\|_\lambda\sup_{0\le t\le T}\int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}\cdot d\tau + h_1 d_\eta + h_2 d_\eta\cdot\sup_{0\le t\le T}\int_0^t e^{-\lambda t}d\tau$$
$$\|\delta x_i^{\alpha}(t)\|_\lambda \le \rho_0\|\delta u_i(t)\|_\lambda + h_0\|\delta u_i(\tau)\|_\lambda O(\lambda^{-1}) + h_1 d_\eta + h_2 d_\eta T \tag{33}$$

where

$$\rho_0 = \sup_{0\le t\le T}\|{}_\tau D_t^{\alpha-1}\Phi(t-\tau)B|_{\tau=t}\|_\infty, h_0 = \sup_{0\le t,\tau\le T}\|{}_\tau D_t^{\alpha}\Phi(t-\tau)B\|_\infty,$$
$$h_1 = \sup_{0\le t\le T}\|{}_\tau D_t^{\alpha-1}\Phi(t-\tau)D\|_\infty\ ,\ h_2 = \sup_{0\le t,\tau\le T}\|{}_\tau D_t^{\alpha}\Phi(t-\tau)D\|_\infty \tag{34}$$
$$o(\lambda^{-1}) = \frac{(1-e^{-\lambda T})}{\lambda} \le \frac{1}{\lambda},\ \|\eta_i(t)\|_\infty \le d_\eta$$

Thus, we have:

$$\|\delta x_i^{\alpha}(t)\|_\lambda \le \rho_0'\|\delta u_i(t)\|_\lambda + \varepsilon_\eta \tag{35}$$

where

$$\rho_0 = \rho_0 + h_0 O(\lambda^{-1})\ ,\ \varepsilon_\eta = (h_1 + h_2 T)d_\eta \tag{36}$$

This completes the proof.

A sufficient condition for convergence of a proposed open-loop ILC is given by the Theorem 3.2 and proved as follows.

Theorem 3.2. *Considering system (16), (17) under assumptions A1-A4 . If*

$$\rho + \tilde{\rho}_0 < 1 \tag{37}$$

where $\rho = \|(I - \Gamma_1 CAB)\|_\infty$, $\tilde{\rho}_0 = \beta_3\cdot\rho_0 = \|R_2 C\|\cdot\sup_{0\le t\le T}\|{}_\tau D_t^{\alpha-1}(\Phi(t-\tau)B|_{\tau=t}\|_\infty$ *, then, the open-loop* PD^2D^α *learning law (21) guarantees that when* $i\to\infty$ *bounds of the tracking errors* $\|x_d(t) - x_i(t)\|$, $\|y_d(t) - y_i(t)\|$ *, and* $\|u_d(t) - u_i(t)\|$ *converge asymptotically into the specified bounds. The bounds* $\tilde{\varepsilon}_x, \tilde{\varepsilon}_y, \tilde{\varepsilon}_u$ *are given by* $\tilde{\varepsilon}_u = \dfrac{1}{1-\tilde{\rho}}\tilde{\varepsilon}$, $\tilde{\varepsilon}_x = d_1 d_\eta T + bO(\lambda_1^{-1})\dfrac{1}{1-\tilde{\rho}}\tilde{\varepsilon}$, $\tilde{\varepsilon}_y = c\cdot\tilde{\varepsilon}_x$ *where* $\tilde{\rho} = \rho + \beta_3(\rho_0 + h_0 O(\lambda^{-1})) + \beta_1 bO(\lambda_1^{-1})$, $\tilde{\varepsilon} = \beta_1 d_1 d_\eta T + \beta_2 d_\eta + \beta_3\varepsilon_\eta$

Proof: Note that the tracking error and its derivatives integer and fractional can be obtained:

$$\begin{aligned} e_i = C\delta x_i\ ,\ e_i^{(\alpha)} = C\delta x_i^{(\alpha)}\ ,\ \dot{e}_i = C\delta\dot{x}_i = C(A\delta x_i + B\delta u_i - D\eta_j) \\ \ddot{e}_i = C\delta_i\ddot{x}_i = CA^2\delta x_i + CAB\delta u_i - CD\dot{\eta}_i - CAD\eta_i \end{aligned} \tag{38}$$

According to the proposed ILC law (21), we obtain

$$\delta u_{i+1}(t) = u_d(t) - u_{i+1}(t) = \delta u_i(t) - \Gamma_1\ddot{e}_i(t) - R_1 e_i(t) - R_2 e_i^{(\alpha)}(t) \tag{39}$$

Substituting (38) into (39) we can get

$$\delta u_{i+1}(t) = [I - \Gamma_1 CAB]\delta u_j(t) - (\Gamma_1 CA^2 + R_1 C)\delta x_i(t) - R_2 C\delta x_i^{(\alpha)}(t) + \Gamma_1 CAD\eta_i(t) + \Gamma_1 CD\dot{\eta}_i(t) \tag{40}$$

One can observe, that in our case that the matrices CAB,CAD have a full column rank and the matrices CB, CD have not a full column rank, $([C][B] = 0)$, $([C][D] = 0)$. From previous eq. (28), we get:

$$\delta u_{i+1}(t) = [I - \Gamma_1 CAB]\delta u_i(t) - (\Gamma_1 CA^2 + R_1 C)\delta x_i(t) - R_2 C\delta x_i^{(\alpha)}(t) + \Gamma_1 CAD\eta_i(t) \tag{41}$$

Taking the standard norm for equation (41) and using the condition of Theorem 3.2 as well as assumption A4 we have

$$||\delta u_{i+1}(t)|| \leq \rho||\delta u_i(t)|| + ||[\Gamma_1 CA^2 + R_1 C]||||\delta x_i(t)|| + ||\Gamma_1 CAD||||\eta_i(t)|| + ||R_2 C||||\delta x_i^{(\alpha)}(t)|| \tag{42}$$

Then we can arrive

$$||\delta u_{i+1}(t)|| \leq \rho||\delta u_i(t)|| + \beta_1||\delta x_i(t)|| + \beta_2 d_\eta + \beta_3||\delta x_i^{(\alpha)}(t)|| \tag{43}$$

where

$$\beta_1 = ||[\Gamma_1 CA^2 + R_1 C]||\ ,\ \beta_2 = ||\Gamma_1 CAD||\ ,\ \beta_3 = ||R_2 C|| \tag{44}$$

Also, we have from (17) and (38)

$$\delta x_i = \int_0^t (A\delta x_i(\tau) + B\delta u_i(\tau) - D\eta_i(\tau))d\tau \tag{45}$$

Taking the norm on the both sides of(33) it follows:

$$||\delta x_i|| = \int_0^t (a||\delta x(\tau)|| + b||\delta u_i(\tau)|| + d_1||\eta_i(\tau)||\mu\tau \tag{46}$$

where $a = ||A||$, $b = ||B||$, $d_1 = ||D||$. From assumption A4, we have:

$$d_1\int_0^t (||\eta_i(\tau)||\, d\tau \leq d_1 \cdot d_\eta T \tag{47}$$

which implies that

$$||\delta x_i|| \leq d_1 d_\eta T + \int_0^t (a||\delta x(\tau)|| + b||\delta u_i(\tau)||\, d\tau \tag{48}$$

Applying the Bellman-Grownwall lemma [28], we obtain

$$||\delta x_i|| \leq d_1 d_\eta T e^{at} + \int_0^t e^{a(t-\tau)} b||\delta u_i(\tau)||d\tau \tag{49}$$

and multiplying the previous inequality by $e^{-\lambda t}$, $\lambda > a$ and taking the λ-norm, we get

$$\|\delta x_i\|_\lambda \leq d_1 d_\eta T + \frac{1 - e^{(a-\lambda)T}}{\lambda - a} b\|\delta u_i\|_\lambda \leq d_1 d_\eta T + bo(\lambda_1^{-1})\|\delta u_j\|_\lambda \, , O(\lambda_1^{-1}) = \frac{1}{\lambda - a} \tag{50}$$

Taking into account (43), and applying the λ-norm, we have

$$\|\delta u_{i+1}(t)\|_\lambda \leq \rho\|\delta u_i(t)\|_\lambda + \beta_1\|\delta x_i(t)\|_\lambda + \beta_2 d_\eta + \beta_3\|\delta x_i^{(\alpha)}(t)\|_\lambda \tag{51}$$

Now, linking (22), (50) with (51), we can get

$$\|\delta u_{i+1}(t)\|_\lambda \leq \rho\|\delta u_i(t)\|_\lambda + \beta_1(d_1 d_\eta T + bO(\lambda_1^{-1})\|\delta u_i\|_\lambda) + \beta_2 d_\eta + \beta_3(\rho_0' \, \|\delta u_i(t)\|_\lambda + \varepsilon_\eta) \tag{52}$$

$$\|\delta u_{i+1}(t)\|_\lambda \leq \tilde{\rho}\|\delta u_i(t)\|_\lambda + \tilde{\varepsilon} \tag{53}$$

where are

$$\tilde{\rho} = \rho + \beta_3(\rho_0 + h_0 O(\lambda^{-1})) + \beta_1 bO(\lambda_1^{-1}), \tilde{\varepsilon} = \beta_1 d_1 d_\eta T + \beta_2 d_\eta + \beta_3 \varepsilon_\eta \tag{54}$$

Since $\rho + \beta_3\rho_0 < 1$ by assumption, it is possible to choose λ sufficiently large so that $\tilde{\rho} < 1$. Therefore, according to Lemma 2.1, it implies that:

$$\lim_{i\to\infty} \|\delta u_i\|_\lambda \leq \frac{1}{1-\tilde{\rho}}\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}_u \tag{55}$$

Submitting eq. (55) into eq. (59), as well as into eq. (38) we have

$$\begin{aligned} &\lim_{i\to\infty} \|\delta x_i\|_\lambda \leq d_1 d_\eta T + bO(\lambda_1^{-1})(\frac{1}{1-\tilde{\rho}}\tilde{\varepsilon}) = \tilde{\varepsilon}_x, \\ &\lim_{i\to\infty} \|e_i\|_\lambda \leq c(d_1 d_\eta T + bO(\lambda_1^{-1})(\frac{1}{1-\tilde{\rho}}\tilde{\varepsilon})) = \tilde{\varepsilon}_y \end{aligned} \tag{56}$$

This concludes the proof.

Remark 3.3. *In the case of without disturbance and uncertainty of the system, $\xi_i(t) = 0, \eta_i(t) = 0$. i.e d_ξ , d_η , $d_{\eta\alpha}$ tend to zero, these bounds also tend to zero. Namely, one can obtain when $i \to \infty$ the bounds of the tracking errors $\|x_d(t) - x_i(t)\|$, $\|y_d(t) - y_i(t)\|$, $\|u_d(t) - u_i(t)\|$, converge asymptotically to zero. Proof is similar with the proof of Theorem 3.2, taking into account $\xi_i(t) = 0, \eta_i(t) = 0$, i.e. $\varepsilon = \delta = 0$.*

$$\lim_{i\to\infty} \|\delta u_i\|_\lambda = 0 \tag{57}$$

According to the existence and uniqueness theorem of integer-order differential equation, it is obtained that

$$\lim_{i\to\infty} y_i(t) = y_d(t) \tag{58}$$

4. Conclusion

In this article, we studied the tracking problem of the robotic arm via ILC. For the first time the open-loop PD^2D^α type fractional-order ILC law is proposed for a given linearized robotic arm. The proposed FOILC scheme for the already obtained integer-order model of robotic arm is more practical for control practice. In particular, the sufficient conditions for the robust convergence in time domain of the proposed FOILC were defined, by the corresponding theorem, and proved. For analysis, it is found that the sufficient conditions of convergence not only depend on all of system dynamics, but also rely on learning matrices.

References

[1] Kurdila J.A, Ben-Tzvi P. Dynamics and Control of Robotic Systems,John Wiley & Sons,NJ, USA, 2020.
[2] Siciliano B., Sciavicco L., Villani L.,OrioloG. Robotics, Springer-Verlag, London, 2009.
[3] Lynch M. K., Park C.F.,Modern Robotics Mechanics, Planning, and Control, Cambridge University Press, Cambridge 2017.
[4] Uchiyama M. Formulation of high-speed motion pattern of a mechanical arm by trial. Trans Soc Inst Cont Eng. 1978; 14:706-712.
[5] Arimoto S, Kawamura S. Bettering operation of robots by learning. J Robotic Syst. 1984;1:123-140.
[6] Ahn HS, Moore K and Chen Y. Iterative learning control robustness and monotonic convergence for interval systems. 1st ed.London:Springer-Verlag London Limited, 2007.
[7] Xu JX, Panda SK, Lee TH.Real-time Iterative Learning Control, Design and Applications. 1st ed. London: Springer-Verlag, 2009.
[8] Tan KK, Dou H, Chen Y, et al. High precision linear motor control via relay-tuning and iterative learning based on zero-phase Eltering. IEEE Transactions on Control Systems Technology 9(2): 244–253,2001.
[9] Hou,Z.,Xu,J.,Yan,J.An iterative learning approach for density control of freeway traffic low via ramp metering. Transportation Research-PartC.16(1),71–97(2008)
[10] Meng,D.,Jia.Y.,Du.J,Zhang,J.On iterative learning algorithms for the formation control of nonlinear multi-agent systems.Automatica.50(1),291-295(2014)
[11] FravoliniMand Fabietti P. An iterative learning strategy for the auto-tuning of the feedforward and feedback controller in type-l diabetes. Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering 17(13): 1464-1482.2014.
[12] Y. Zhang, J.Wei, H. Wang, J. Liu,Adaptive Fuzzy Iterative Learning Control of Robotic Systems with Time-delay Outputs and Input Dead Zone via Observer, Filomat 32:5 (2018), 1571-1580
[13] Isao T and Hunag PH. Iterative Learning Control for Trajectory Tracking of Robot Manipulators. International Journal of Automation and Smart Technology, 7(3) 133-139, 2017.
[14] Lazarević P.M,Mandić D. P., Ostojić S. Further results on advanced robust iterative learning control and modeling of robotic systems, Proc IMechE Part C: J Mechanical Engineering Science 0(0) 1-16, 2020. DOI: 10.1177/0954406220965996.
[15] Podlubny I., Fractional Differential Equations. Academic Press, San Diego,1999.
[16] Kilbas, AA, Srivastava, H, Trujillo, JJ: Theory and Applications of Fractional Differential Equations. North-Holland Mathematics Studies, Elsevier, Amsterdam, NEDERLAND, 2006, Vol.204.
[17] Nakhushev A. M., Fractional Calculus and Its Applications, FIZMATLIT, Moscow, 2003 (in Russian).
[18] Monje C.A, Chen Y. Q, Vinagre B. M, Xue D. Y, Feliu-Batlle V. Fractional-order Systems and Controls: Fundamentals and Applications. London:Springer-Verlag, 2010.
[19] Bahaa G.,Fractional Optimal Control Problem for Differential System with Control Constraints, Filomat 30:8 (2016), 2177–2189, DOI 10.2298/FIL1608177B
[20] Petras I.(Ed.) Handbook of Fractional Calculus with Applications,Vol. 6: Applications in Control, Boston: Walter de Gruyter GmbH,2019.
[21] Chen Y.Q, Moore K.L., On type iterative learning control, In Proc. 40th IEEE Conference on Decision and Control, Orlando, FL USA,pp.4451-4456,2001.
[22] Lazarević,P.M., PD^{α} -type iterative learning control for fractional LTI system-16th Int.Cong. CHISA 2004, G2.9, Praha,Czech Republic, 22-26, August, 2004.
[23] Li Y., Chen Y.Q., Ahn H.S., Fractional-order iterative learning control for fractional-order linear systems,Asian J. Contro1,13 (1), 54 – 63, 2011.
[24] Lazarević P.M, P.Mandić, Feedback-feedforward iterative learning control for fractional-order uncertain time delay system-PD alpha type, ICFDA'14 Catania, 23-25 June 2014, IE86, 2014.
[25] Liu X., Yanfang Li Y., Yanmin Liu Y.,The convergence of iterative leaming control for some fractional system,Advances in Difference Equations (2017), 2017:132.
[26] Lazarević M and Panagiotis T. Robust second-order PDalpha type iterative learning control for a class of uncertain fractional order singular systems,J Vibrat. Control 2016; 22: 2004-2018. doi:10.1177/1077546314562241
[27] Wang X,Wang J., Shen D., Zhou Y.Convergence analysis for iterative learning control of conformable fractional differential equations. Math Meth Appl Sci. 2018;(41):8315-8328. https://doi.org/ 10.1002/mma.5291.
[28] Zhao Y., Zhou F., Wang D., Li Y., Design and Analysis of Fractional Order PDalpha-Type Iterative Learning Control , IFAC PapersOnLine 50-1 (2017) 8077–8083.
[29] Li Y., Chen Y. Q., Ahn S., Tian G., A survey on fractional-order iterative learning control, J. Optim. Theory Appl. 1, 156 (2013), 127-140.
[30] Lazarević M., Iterative Learning Control of Integer and Noninteger Order: an Overview, Scientific Technical Review, 2014,Vol.64,No.1,pp.35-47
[31] Xiaoe, Zhao J., Convergence monotonicity and speed comparison of iterative learning control algorithms for nonlinear systems,IMA Journal of Mathematical Control and Information (2013) 30, 473–486 doi:10.1093/imamci/dns034
[32] Kochubei A and Luchko Y.(Eds.) Handbook of Fractional Calculus with Applications,vol.1: Basic Theory, Boston:Walter de Gruyter GmbH, 2019.
[33] Čović V., Lazarević M., Robot Mechanics, Belgrade, Faculty of Mechanical Engineering (in Serbian), 2009.
[34] Slotine J.J., Li, Applied nonlinear control. Vol. 199: Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ.,1991.
[35] Zhao Y, Zhou F., Wang Y. ·Li Y., Fractional-order iterative learning control with initial state learning design , Nonlinear Dyn (2017) 90:1257–1268 DOI 10.1007/s11071-017-3724-6.