



УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ФАКУЛТЕТ ТЕХНИЧКИХ НАУКА У
НОВОМ САДУ



Ненад Граховац

**Анализа дисипације енергије
у проблемима судара
два или више тела**

ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА

Нови Сад, 2011.

Пролог

Предмет разматрања ове докторске тезе је анализа дисипације енергије у проблемима судара два или више тела. Претпоставља се да свако тело може да клизи по правој линији у присуству сувог трења и да се међусобни контакт тела остварује посредством лаког вискоеластичног штапа. При томе се сила трења моделира неглатком вишевредносном функцијом, а вискоеластични штап као стандардно фракционо линеарно вискоеластично тело. Наиме, конститутивне једначине које описују вискоеластични штап укључују фракционе изводе, тј. изводе произвољног реалног реда и ограничења на коефицијенте која следе из Клаузиус-Дијемове неједнакости. Предложени модел укључује два облика дисипације енергије, и то *ab initio* кроз конститутивне једначине које описују вискоеластичне материјале, а затим и због присуства сувог трења као строго дисипативног процеса. Фракциони тип дисипације који прати међусобни контакт два тела, описан нелокалним изводима, и модел дисипације који прати клизање сваког од тела, а који укључује суво трење описано неглатким вишевредносним функцијама, заједно доводе до диференцијалних једначина кретања механичког система датих у форми вишевредносних диференцијалних једначина произвољног реалног реда. Ради се о нелинеарним једначинама при чему је узрок нелинеарности присуство сувог трења у систему. Добијене једначине кретања представљају фракционо уопштење обичних диференцијалних једначина типа Филипова чије се интензивно проучавање, започето у другој половини двадесетог века, веома интензивно наставља и данас. Конвексикација прекидних десних страна фракционих тј. диференцијалних једначина произвољног реалног реда која се постиже изабраним моделом за силу трења обезбеђује коректан модел потпуног заустављања система после судара у коначном времену. То је веома важно јер се различитим избором улазних параметара у систему, а на основу основне аксиоме динамике, принципа одређености Њутн-Лапласа и изабраних модела дисипације, решавањем вишевредносних диференцијалних једначина произвољног реалног реда, добија читав низ различитих сценарија судара који готово у потпуности прате оно што показују експерименти. Довољан број параметара у моделу судара, довољан број једначина и потпуно нови метод нумеричке анализе којим се повезују алгоритми за решавање фракционих диференцијалних једначина са алгоритмима неглатке анализе, доводе до теорије судара у којој нема баш никаквих коефицијената судара. Наиме, стандардно фракционо вискоеластично тело се све чешће појављује као изабрани, термодинамички конзистентни, модел за опис реолошких својстава како нових материјала, еластомера и полимера, тако и ткива од којих су сачињени живи организми. Конкретне вредности параметара у конститутивним једначинама које се добијају на основу релативно једноставних експеримената омогућавају примену предложеног модела у различитим реалним ситуацијама и у техничким али и у биолошким системима.

Следи преглед резултата у оквиру којих је постављен проблем а затим и поступак његовог решавања.

Модел судара о коме је реч спада у домен теорије судара Херцовог типа, односно

динамике крутог тела са вискоеластичним слојем, в. Сонг и др. [2001, 83]¹. Наиме, када механички систем - материјална тачка, систем материјалних тачака, или тело - који се налази у кретању тренутно ступи у контакт са неком препреком, у смислу да се на истом месту нађу две тачке са различитим брзинама, настаје специфични физичко механички процес који се назива судар. Специфичности ове појаве су врло велике контактне силе које трају кратко време и појава деформација у околини тачке контакта са препреком. Наиме, судар реалних тела је веома компликован феномен који је изузетно сложен за разумевање и анализу, јер га прате промене атрибута кретања, еластична и пластична деформација, појава и простирање таласа унутар тела, лом, звук, загревање. Због великог значаја у инжењерским применама теорија судара привлачи велику пажњу научника још од средине 17. века када је у једној научној дебати, мотивисаној од стране Краљевског друштва у Лондону, постављено питање да ли круто тело уопште може да се одбије при судару. Од тада судар постаје предмет интересовања великих имена тога доба нпр. Лајбниц, Њутн, Бернули, Хајгенс, Кориолис, да се спомену само неки, су се мање или више бавили анализом судара. Опажања показују да тела након судара могу да остану спојена или да се раздвоје. Такође је познато да ако се нека кугла пусти да без почетне брзине, са фиксне висине, падне на под, она се од пода може одбити али тако да се никада после одбијања не може попети на висину са које је кренула. При томе се, упоређивањем кретања пре и после судара, лако закључи да је брзина кугле после судара мања од њене брзине пре судара. Даље расуђивање води до кинетичке енергије која се током судара претвара у друге облике енергије тако да јој се после судара увек смањује вредност. Као пример прелаза кинетичке енергије током судара у топлотну могу да послуже експерименти којима је Прон почетком 21. века утврдио да при судару металне кугле пречника 3 мм са металном плочом дебљине 0.85 мм са кинетичком енергијом од 0.27 џула, температура мерена на супротној страни плоче наспрам контактне тачке порасте за 7 степени целзиуса за мање од стотинке секунде, в. Спасић [2011, 84]. Слично са неке висине испуштена пластелинска кугла се при удару у под деформише и уопште не одбије, а сијалица поломи, што се обично и чује, дакле судар је појава која обавезно укључује дисипацију енергије. Детаљан преглед теорија судара може се наћи у монографији Брољата [1999, 16] у којој се може наћи преко хиљаду референци из прегледне литературе као и приказ теорије судара у до тада актуелним уџбеницима и монографијама. Са овде постављеним проблемом анализе судара се може повезати велики број радова. Поменуће се само неки, нпр. рад Келера [1986, 55] о судару са трењем у коме се уводе две скале мерења времена једна за кретање до и после судара и друга за анализу судара, рад Гојала и др. [1994, 44], у коме се наглашава непостојање свеобухватне и елегантне формулације која би укључила све феномене који прате судар, и посебно проблем детекције тренутка остваривања контакта који у рачунским симулацијама троши велики део времена, те чињеница да Кулоново

¹Бројеви у угластим заградама означавају годину публикације и редни број у списку референци на крају тезе.

трење није довољно да укључи велику количину изгубљене енергије за врло кратко време трајања судара, затим рад Иванова [1995, 51] у коме се даје преглед теорије вишеструких судара. Различите генерализације Херцове теорије могу се наћи у раду Бучер и Сигелман [2000, 20], као и у радовима Атанацковића и Спасића [1999, 4], [2001, 85] који се баве анализом сценарија који могу наступити после судара. Наиме, класична Херцова теорија судара познаје само сценарио у коме се тела после судара раздвајају. Генерализација те теорије у којој се поред еластичне у разматрање уводи и адхезивна сила између тела у контакту може да предвиди сценарио у коме тела после судара остају спојена. Упркос томе, тај модел није реалистичан јер у њему постоје први интегрални енергијског типа тако да нема дисипације енергије. Са нешто другачијим приступом, названим фракциони вискоеластични прилагодљиви модел контакта-судара, дисипација енергије је узета од самог почетка али је потврђен само сценарио раздвајања, в. рад Атанацковића и Спасића [2004, 6]. Рад о коме је реч је само један у низу радова којима је после серије резултата Беглија и Торвика из осамдесетих година прошлога века, започела примена фракционог рачуна у решавању инжењерских проблема, в. Бајер и Кемфле [1995, 15], Енелунд и Лезетр [1999, 34], Розикин и Шитикова [2010, 78]. Поменути радови су само део из велике класе радова у којима се фракциони рачун и посебно фракционе диференцијалне једначине тј. диференцијалне једначине произвољног реалног реда, представљају као математички апарат којим се изузетно добро описују вискоеластична својства нових материјала присутних у савременим конструкцијама, што је од изузетног значаја за практичне примене. Паралелно са тим алатом, у исто време започиње нагли развој неглатке математичке анализе, а тиме и развој неглатке мехнике, о чему говоре референце дате у раду Демјанова [2002, 28], или монографијама Фајфера и Глокера [1996, 73], Фремона [2002, 38] и Глокера [2001, 41]. Неглатка динамика је тема којом се баве Пидбуф и Керафел [2000, 75], Матросов [2001, 67], Штудер и Глокер [2007, 89], Бастејн и Ламарк [2007, 12], Маркеев [2008, 66], Бастејн и Шацман [2008, 13], Акари и Брољато [2008, 1]. Важно је напоменути да се тек употребом неглатких вишевердносних функција дошло до модела који коректно описује заустављање механичких система у коначном времену, чиме се избегавају проблеми сингуларног времена, видети Леин и Нијмејер [2004, 62], Брољата и коаутора [2002, 17], или Флореса и др. [2010, 36]. На овом месту треба истаћи да је према раду Попа [2000, 77] моделирање реалних практичних неглатких феномена узрокованих кинематичким везама или физичким ефектима, као што су зазори, трење, судар, прво је било посматрано као грешка и дуго времена је било занемаривано. Касније су ови феномени анализирани тако да су се користиле глатке апроксимације које често нису одговарале физици проблем, а тек од недавно се кроз рафиниране и тачније моделе неглатки ефекти коректно узимају у обзир. Повезивање диференцијалних једначина са изводима произвољног реалног реда са појмовима неглатке анализе предмет је више радова Ел-Саједа и Ибрахима [1995, 32], [2001, 33], затим Уахаба [2008, 70], Кихона и Салема [2010, 24], Цернее [2010, 23], Данце [2010, 25] и [2011, 26]. Најзад у раду Граховац и коаутори [2011, 47] проучена је вишевердносна диференцијална једначина произвољног

реалног реда као модел за удар у непокретну преграду чије решавање за исте почетне услове, а различите вредности параметара у систему потврђује сва три сценарија судара која показују ексерименти. Наиме, при удару у зид тело може да се одбије, или да се заустави у коначном времену и то или у прилазној или у фази пошто се одбило од зида. Сва три сценарија обезбеђена су коректним избором како физичког тако и математичког модела. Изабрани модел садржи круто тело са фракционим вискоеластичним слојем које може да клизи у присуству сувог трења. Термодинамичку конзистентност модела у вискоеластичном слоју обезбеђују ограничења на коефицијенте која следе из Клаузиус-Дијемове неједнакости, в. Атанацковић [2002, 5]. Решење проблема коректног прелаза са једног модела на други, што као строго дисипативни процес захтева суво трење, урађено је као што то препоручује Гарнер [2001, 94] увођењем слек варијабле, као монотон опадајуће са нулом ограничене независно променљиве, са којом управљање прекидним моделима различитих фаза кретања не захтева много рачунарског времена. Како је за судар два и више тела којима се бави ова теза одабран исти модел дисипације енергије као у поменутом раду Граховца и коаутора, то ће се у анализи која следи применити слична методологија. Напомиње се да се сада ради о проблему са већим бројем степени слободе кретања што значајно усложњава како квалитативну тако и нумеричку анализу јер се значајно повећава број комбинација различитих кретања која у зависности од параметара у систему могу да настану после судара, доводећи до значајног повећања броја могућих сценарија судара.

Теза је структурирана на следећи начин. Први део је припремни материјал, и он се састоји од четири секције. У првој се кратко приказују теорије судара Херцовог типа, за идеалан случај без трења. Набројани су и анализирани различити модели контактних сила пре свега са аспекта дисипације енергије. Друга секција је посвећена анализи судара Фремоновим приступом, и то на примеру судара две масе које се крећу транслаторно, праволинијски, по истој линији. Тај приступ такође даје предвиђања онога што показују ексерименти, мада остаје питање којим ексериментима се добијају нумеричке вредности коефицијената који се појављују у псеудопотенцијалима дисипације. У трећој секцији кратко се приказује динамички модел контакта крутог тела са вискоеластичним слојем са подлогом, а у четвртој различити модели за силу сувог трења. У другом делу тезе поставља се проблем судара два тела која се крећу транслаторно, тако што клизе по истој линији у присуству сувог трења, и тако што се њихов међусобни контакт при судару остварује посредством вискоеластичног штапа. Проблем који је формулисан у облику Кошијевог проблема за систем спрегнутих више вредносних диференцијалних једначина произвољног реалног реда је преведен у бездимензијску форму, а затим применом Лапласових трансформација у форму Кошијевог проблема за две спрегнуте диференцијално-интегралне инклузије, која је погодна за квалитативну анализу и доказ егзистенције решења. Еквивалентни неглатки систем типа Филипова који укључује фракционе изводе је решен стандардним фракционим апроксимацијама коришћеним заједно са две монотон-опадајуће, са нулом ограничене независно променљиве са којима се проширени систем стања при променама смера кретања тела само у једној

итерацији интеграла да би се добили тренуци када се остварују једнакости у постављеним унилатерлним ограничењима. Затим је, пратећи могуће сценарије, за различите вредности улазних параметара који се појављују у моделу вискоеластичног штапа и различите вредности коефицијента трења одређено стање система непосредно након судара. У трећем делу анализира се исти модел кретања и исти модел дисипације али за случај вишеструког судара три тела. Са новим бројем степени слободе, додавањем још једног тела, за различите вредности улазних параметра, сада је могућ много већи број сценарија после иницијације судара, при чему решавање комбинаторног проблема за сваки сценарио захтева формиран динамички модел као и идентификацију услова при којима се дати модел примењује. Неки од резултата које даје у овој тези предложени приступ анализе судара три тела, упоређени су са резултатима који се добијају Фремоновим приступом. Најзад, у четвртом делу сумирани су добијени резултати и наведени правци којима се може наставити овде започето истраживање.

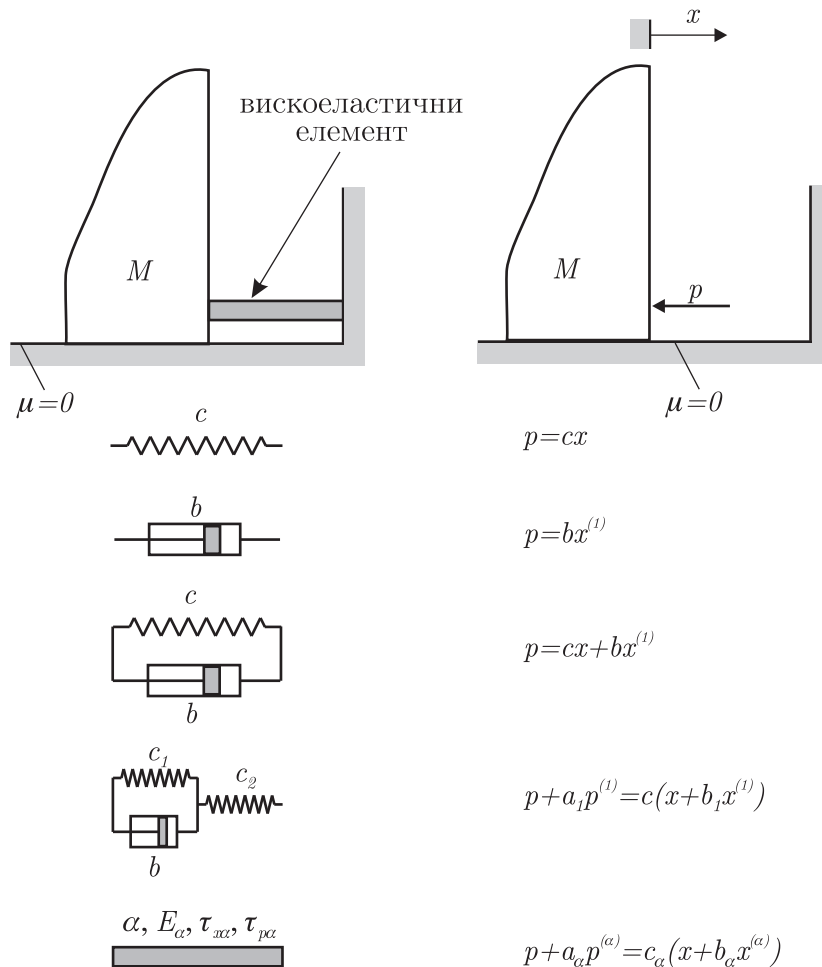
Садржај

Пролог	i
1. Припремни материјал	1
1.1. Приказ теорије судара Херцовог типа	1
1.2. Фремонов модел за судар два крута тела	6
1.3. Динамички модел контакта крутог тела са вискоеластичним слојем	9
1.4. Модели сувог трења	11
2. Проблем судара два тела	16
2.1. Формулација проблема	16
2.2. Егзистенција решења	20
2.3. Комбинаторна анализа	22
2.4. Нумерички метод	26
2.5. Резултати и дискусија	30
3. Проблем судара три тела	37
3.1. Фремонов приступ за судар три кугле	37
3.2. Приступ круто тело са вискоеластичним слојем и сувим трењем	40
3.3. Нумеричке симулације судара три тела	44
4. Закључак	48

1. Припремни материјал

1.1. Приказ теорије судара Херцовог типа

Приликом судара реалних тела локално, у зони контакта, долази до њиховог деформисања. Као веома једноставан пример може да послужи паркирање аутомобила неприлагођеном брзином, при којем може да се оштети само мали део у зони тачке контакта са околином, док је преостали део практично неоштећен. Када је теорија судара у питању, дуго времена деформације које настају у судару нису узимане у обзир. Наиме, тела у контакту су моделирана као крута што представља идеализацију која води до упоређивања стања система пре судара са стањем после судара уз увођење различитих коефицијента судара, чије су се вредности претпостављале унапред, а са којима би добијени систем једначина био решив. Судар је моделиран алгебарским једначинама што је са аспекта једноставности било привлачно за инжењере. Међутим са аспекта примене такви модели нису били употребљиви јер је за предвиђање исхода било потребно знати вредност уведених коефицијента унапред. Експериментална опажања говоре да ти коефицијенти могу зависити од више различитих параметара нпр. масе, облика, величине, брзине контактне тачке непосредно пре судара, в. монографију Киљчевског [1976, 59], или већ поменути рад Гојал и др. [1994, 44]. Посебно, у судару три тела претпоставка да су сва три тела крута доводи до некоректно постављеног математичког задатка и искључује могућност јединственог решења проблема, в. Иванов [1995, 51] и Спасић и Атанацковић [2001, 85]. Метод деформације (утискивања) као модел судара се везује за име Даламбера и средину 18. века. У примени на судар два тела тај метод је више реалистичан него модел са крутим телима, али и математички сложенији. Крајем 19. века немачки физичар Хајнрих Херц је развио теорију контакта два тела према којој су деформације тела изван веома мале зоне контакта занемарљиве, док локално у зони контакта постоје деформације. При томе се контакт два тела моделира нелинеарном опругом. Херц је као пример представио проблем судара два тела са сферним додирним површинама, в. радове Вилађа [1996, 92], Бондареве [1969, 18] и [1970, 19] или пак монографију Стронга [2000, 88]. Различите генерализације Херцове теорије, познате као теорије Херцовог типа, у суштини говоре да се тело сматра крутим осим локално, у околини тачке контакта, где се може претпоставити да постоји вискоеластични слој нанет на крути корпус. Пропорција ова два објекта грубо се може исказати речима да је круто тело вагон а вискоеластични слој одбојник вагона. Додавање вискоеластичног елемента/слоја крутом телу и то у тачки контакта са другим телом, служи да се на основу својстава тог додатог слоја могу увести претпоставке о зависности контактне силе од атрибута кретања, чиме би проблем судара постао решив само на основу Њутн-Ојлерових аксиома и принципа одређености Њутн-Лапласа, а све то без увођења додатних коефицијента. У зависности од механичких својстава тог слоја односно елемената додатих крутом телу може се говорити о различитим моделима теорија судара Херцовог типа. Неколико таквих модела ће бити разматрано на једноставном примеру удара крутог тела у непокретни зид, видети сл. 1.1.



Слика 1.1. Различити модели контактних сила

Нека се круто тело, масе M , креће транслаторно, по глаткој подлози, и нека у тренутку $t = 0$ при брзини $v_0 > 0$ удари у непокретну масивну преграду. При томе нека се контакт оствари посредством штапа који се униаксијално деформише. Нека координата x мери деформацију у контактної зони и нека је $p = p(t)$ контактна сила која се јавља у судару. У почетном тренутку анализе судара $t = 0$ важи $x(0) = 0$ и $x^{(1)}(0) = v_0$. Потребно је одредити брзину тела након судара, време трајање судара као и деформације које су настале током судара. Модел који описује судар своди се на Кошијев проблем

$$Mx^{(2)} = -p, \quad x(0) = 0, \quad x^{(1)}(0) = v_0. \quad (1.1)$$

где се диференцијална једначина кретања добија применом основне аксиоме динамике а почетни услови применом принципа одређености Њутн-Лапласа. У овом моделу постоје две непознате величине x и p . Да би се решио постављени проблем судара број једначина и број непознатих морају бити исти. Другим речима треба претпоставити неку везу између силе и деформације коју та сила изазива, p и x . Када би се таква веза знала, решавањем

потављеног Кошијевог проблема, би се нашло и кретање које настаје после тренутка судара и контактна сила као функција времена. Време трајања судара T се даље налази из услова $p(T) = 0$. Налажење максималне вредности силе p и деформације x више није проблем. Важно је напоменути се као механички систем овде посматрају заједно и тело и преграда у коју тело удара тако да је контактна сила p унутрашња сила у систему коју треба одредити експериментално и сагласно другом закону термодинамике. Ево неколико различитих случајева за додати слој:

Случај 1: Хуков модел идеално еластичног тела $p = cx$

Контакт између тела и преграде се остварује посредством линеарне опруге крутости c . У питању је идеалан случај који не укључује дисипацију енергије. Као резултат интеграције диференцијалних једначина кретања уз задате почетне услове добија се да се тело после судара одбија истом брзином v_0 . Како је енергија после судара иста као и енергија пре судара $E_K(0) = E_K(T)$ каже се да је судар идеално еластичан. Примери судара две и три кугле код којих је контакт моделиран на овај начин могу се наћи на у књизи Брољата [1999, 16]. Важно је напоменути да овакав модел не одговара реалности, пре свега јер експерименти већ више од 300 година пажљиво урађени за широк дијапазон чврстих тела показују да напон није линеарна функција дилатације, в. Бел [1973, 14].

Случај 2: Идеално пластично тело $p = bx^{(1)}$

Нека се контакт тела и непокретног зида остварује помоћу линеарне пригушнице која може да послужи као модел идеално пластичног тела. У овом случају сила у пригушници је пропорционална брзини клипа у односу на цилиндар. Обично се каже да је сила вискозног трења пропорционална брзини деформације и уведе се коефицијент пропорционалности/пригушења b . Интеграцијом Кошијевог проблема добија се да након судара брзина тела остаје истог смера и да је у лимесу када $T \rightarrow \infty$, једнака нули, што значи да тело и масивна преграда остају у контакту, па се каже да је судар идеално пластичан. Сада је целокупна кинетичка енергија потрошена у судару, тј. модел укључује дисипацију енергије, међутим проблем је предвиђено бесконачно дуго време трајања судара што уопште не одговара опажањима, јер сваки судар траје врло кратко.

Јасно је да су претходна два случаја две крајности (идеализације) и дају интервал могућих брзина после судара. Ако је тај интервал јако широк и не задовољава анализу реалног инжењерског проблема потребно је описати контактну силу са више физичких параметара. Ту се одмах поставља питање минимума броја физичких параметара у моделу који би предвиђао оно што показују експерименти, в. Брољато [1999, 16].

Случај 3: Келвин-Војтов модел вискоеластичног тела $p = cx + bx^{(1)}$

Када се паралелно вежу линеарна опруга крутости c и линеарна пригушница са коефицијентом пригушења b добија се Келвин Војтов модел вискоеластичног тела. Кошијев проблем се може решити аналитички. Време трајања судара је коначан број и одређује се из једначине $cx(T) + bx^{(1)}(T) = 0$. У прилог реалистичности овог модела иде и чињеница да је $|v(T)| < v_0$ тако да постоји дисипација енергије у судару тј.

4 Докторска дисертација

$E_K(T) < E_K(0)$. Примена Келвин-Војтовог модела у анализи судара приказана је у раду Бучера и Сиглмана [2000, 20]. Посебно треба истаћи његову применљивост у анализи и реконструкцији саобраћајних незгода. На пример у књизи Хуанга [2002, 50] наводе се нумеричке вредности коефицијента c и b експериментално утврђене за различите типове аутомобила. На овај модел судара аутомобила Хуанг реферише као на метод еквивалентног вискоеластичног пригушења. Његова примена у анализи саобраћајних незгода је релативно једноставна чак и при косим делимично фронталним сударима. Ни један од три наведена случаја не задовољава ограничења која намеће други закон термодинамике. Зато треба користити другачије моделе.

Случај 4: Зенеров модел $p + a_1 p^{(1)} = c(x + b_1 x^{(1)})$

Када се на претходни модел редно веже још једна опруга крутости c_2 добија се модел стандардог линеарно вискоеластичног тела који се још назива и Зенеров модел. Коефицијенти модела задовољавају ограничења која намеће други закон термодинамике, $c > 0$, $a_1 > 0$ и $b_1 > a_1$. Веза између коефицијената a_1 , c и b_1 и параметара c_1 , c_2 и b са слике се може наћи у већ цитираном раду Бучера и Сиглмана. Константе a_1 и b_1 се називају времена релаксације а термодинамичка ограничења говоре да је време релаксације деформације дуже од времена релаксације силе. Зенеров модел укључује дисипацију енергије од самог почетка. Већој разлици $b_1 - a_1$ одговара већа дисипација енергије. Математички апарат решавања Кошијевог проблема у овом случају је сложенији јер сила p није експлицитно изражена алгебарском функцијом x . У овом случају се уводи допунски почетни услов да је у почетном тренутку штап неоптерећен $p(0) = 0$, тако да се Кошијев проблем може записати форми три диференцијалне једначине првог реда које се могу решавати уобичајеним процедурама. С друге стране у овом случају се применом Лапласових трансформација сила p може изразити помоћу функције x и интеграла конволуције експоненцијалне функције и функције x као што је то показано у раду Атанацковића и Спасића [2004, 6]. На овај начин као модел судара појављује се Кошијев проблем у облику интегро-диференцијалне једначине. Да би се овај модел могао применити у реалним ситуацијама потребно је знати податке о вредностима константи a_1 , c и b_1 за конкретне материјале. И те вредности све више постају доступне јер се до њих може доћи релативно једноставним експериментима, о чему ће бити речи у анализи следећег случаја.

Случај 5: Модификовани Зенеров модел $p + a_\alpha p^{(\alpha)} = c(x + b_\alpha x^{(\alpha)})$

Нове конструкције захтевају нове материјале који захтевају нове реолошке моделе. Показало се да замена првог извода у конститутивној једначини која повезује силу p и померање x Зенеровог модела изводом по времену произвољног реалног реда, нпр. α , где је $0 < \alpha < 1$ што и оправдава алтернативни термин *фракциони*, доводи до коректног описа реолошких својстава великог броја реалних материјала, пре свега еластомера и полимера. Бегли и Торвик су осамдесетих година прошлога века то потврдили на преко 160 испитиваних материјала, в. Клидек [2009, 60]. Као и код Зенеровог модела параметри

модела задовољавају слична ограничења типа неједнакости која следе из другог закона термодинамике. Дисипација енергије је укључена *ab initio*, она расте и са порастом α и са порастом разлике релаксационих константи $b_\alpha - a_\alpha$, димензије секунд на степен α , в. Спасић и Хараламбакис [2002, 86]. Математички апарат је у овом случају још компликованији јер укључује изводе и интеграле произвољног реалног реда, видети монографије Самка и коаутора [1993, 80], Олдхама и Спанијера [1974, 68] или пак Килбаса и др. [2006, 58]. Примена овог модела у анализи судара детаљно је приказана је у раду Атанацковића и Спасића [2004, 6]. За његову употребу у реалним ситуацијама потребно је одредити параметре модела за различите материјале. За одређивање параметара модела могу се користити експерименти типа релаксације напона или пузања, што је детаљније описано у радовима Петровић и др. [2005, 72], Данкуц и др. [2010, 27] или Граховац и Жигић [2010, 46]. Више о примени фракционог рачуна у решавању савремених проблемима кретања чврстих тела може се наћи у прегледном раду Росикина и Шитикове [2010, 78].

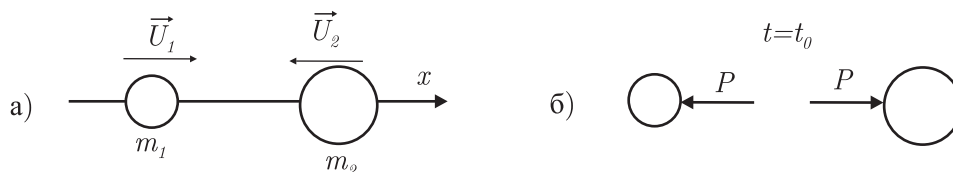
На овом месту треба нагласити три ствари. Прво као резултат решавања Кошијевог проблема овде се брзина тела на крају судара налази интеграцијом. Дељењем те вредности са почетном брзином овде се Њутнов коефицијент судара *израчунава*. Он се не узима унапред што би био случај да је тело чији се судар у преграду анализира било апсолутно круто. Друго, сваки од предложених модела се може користити за анализу судара два или више тела. И најзад треће, нити један од 5 предложених модела вискоеластичног тела не може предвидети сценарио у коме долази до заустављања тела након судара у коначном времену, а што експерименти и опажања предвиђају. Останак тела у контакту после судара предвиђа Херцов модел контакта еластичних тела у присуству адхезивних сила, в. Џонсон [1985, 52]. Примена тог модела на судар две еластичне кугле поред сценарија раздвајања предвиђа и сценарио у коме две кугле после судара остају спојене, в. Атанацковић и Спасић [1999, 4]. Модел са адхезивном силом је примењен и на проблем колинеарног судара три еластичне кугле, в. Спасић и Атанацковић [2001, 85], у коме се даје 5 различитих сценарија која могу да настану после судара: сва три тела могу да остану заједно после судара, прво и друго остају заједно а треће се одваја, прво се одбија друго и треће остају заједно, и сва три тела могу да се раздвоје после судара (у различитом редоследу). Упркос добром предвиђању сценарија судара помоћу Херцовог модела са адхезивном силом његов основни недостатак је што у анализи судара није узета у обзир дисипација енергије.

Један од начина да се за систем приказан на сл. 1.1 предвиди сценарио у коме се тело не одваја од зида после судара, јесте увођење претпоставке да тело клизи по храпавој подлози. То је урађено у раду Граховац и коаутори [2011, 47] о коме је већ било речи. Основна хипотеза ове дисертације је да се модел дисипације и нумерички приступ из поменутог рада може применити и на случај судара два и више тела. Пре него што се приступи разради те хипотезе даће се један другачији приступ анализи судара крутих тела. Ради се Фремоновом моделу развијеном у оквирима неглатке механике, в. књигу Фремона [2003, 39], са нешто другачијим математичким алатом. Кратак приказ Фремоновог приступа послужиће као основа за компарацију тог са приступом који се развија у овој тези.

1.2. Фремонов модел за судар два крута тела

Потпуно другачији приступ анализи судара крутих тела, који даје и сценарио раздвајања и сценарио у коме тела после судара остају заједно, развијен је крајем прошлог и почетком овог века. Тела у судару се посматрају као крута, међутим систем који та тела чине је деформабилан јер са променом растојања између тачака различитих крутих тела у систему, и сам систем мења облик, дакле систем је деформабилан иако тела која га чине нису. Контактни импулси при судару између тела у систему су унутрашња дејства тј. врло велике унутрашње силе концентрисане у врло кратком периоду времена. За та унутрашња дејства потребна је конститутивна релација коју треба одредити из експеримената и која треба да задовољи први и други закон термодинамике. И у овом приступу важи да је трајање судара врло кратко у поређењу са трајањем целокупног кретања, односно да је судар тренутна појава, да се при судару не мењају генерализане координате и да су генерализане брзине прекидне функције ограничене варијације.

Нека систем чине две круте кугле, маса m_1 и m_2 редом, које могу да се крећу транслаторно у правцу x осе без трења у временском интервалу $[t_1, t_2]$ како је то приказано на сл. 1.2а. Нека се кугле крећу једна према другој брзинама \vec{U}_1 и \vec{U}_2 и нека до судара дође у тренутку t_0 . Кретање система до тренутка t_0 се неће разматрати већ ће се анализирати само судар кугли. Познате величине су брзине кугли непосредно пре судара U_1^- и U_2^- а потребно је одредити стање система непосредно након судара односно брзине U_1^+ и U_2^+ .



Слика 1.2. а) Систем од две круте кугле пре судара, б) Декомпозиција система у тренутку судара.

Нека су $[U_i](t_0) = U_i^+(t_0) - U_i^-(t_0)$, $i = 1, 2$, могући скокови брзине до којих долази при судару. Полазећи од основне аксиоме динамике са убрзањем узетим у смислу дистрибуција, видети Спасић [2011, 84], за сваку од кугли са сл. 1.2б, добијају се следеће једначине кретања кугли у тренутку судара t_0

$$\begin{aligned} m_1 [U_1] &= -P \\ m_2 [U_2] &= P, \end{aligned} \quad (1.2)$$

видети књиге Брољата [1999, 16], или Кеча и Теодорескуа [1978, 54] или пак рад Фремона [2006, 40], у којима се исте једначине изводе из принципа виртуалног рада.

Из једначина кретања (1.2) следи да за време судара важи закон одржања количине кретања система, $m_1 [U_1] + m_2 [U_2] = 0$, што је последица непостојања спољашњих ударних

импулса. С друге стране јасно је да две једначине (1.2) садрже 3 непознате величине и да је у принципу потребна још једна једначина са којом би проблем постао решив. До те једначине ће се доћи применом аргумената неглатке механике и то увођењем псеудопотенцијала дисипације са којим се конститутивна једначина пише на уобичајени начин у форми инклузије, и комбинаторном анализом свих могућих сценарија. Уз све то наравно користи се горе поменути Фремонов приступ. Дакле, иако су кугле круте, растојање између њих, или релативно растојање једне у односу на другу, се мења, па је систем који оне чине деформабилан. Нека је брзина деформације система D релативна брзина кугле 1 у односу на куглу 2, тј.

$$D = D(U) = U_1 - U_2. \quad (1.3)$$

Да би се одредило стање система непосредно после судара треба познавати закон промене унутрашњег ударног импулса P у судару. Концепт увођења конститутивне релације за унутрашњи ударни импулс је приказан у раду Фремона [2001, 37]. Претпоставља се да ударни импулс P зависи од брзине деформације и да се добија из псеудопотенцијала дисипације Ψ

$$\Psi(D^+ + D^-) = \frac{1}{2}k(D^+ + D^-)^2 + I_-((D^+ + D^-) - D^-), \quad (1.4)$$

који се састоји од глатког дела $\frac{1}{2}k(D^+ + D^-)^2$ и неглатког дела $I_-((D^+ + D^-) - D^-)$, где је I_- индикаторска функција скупа \mathbb{R}^- дефинисана са $I_-(X) = 0$ за $X \leq 0$ и $I_-(X) = \infty$ за $X > 0$. Треба нагласити да псеудопотенцијал дисипације Ψ задовољава други закон термодинамике као и услов да при контакту нема продирања једне кугле у другу. Функција Ψ је конвексна, позитивна $\Psi(D^+ + D^-) \geq 0$ и задовољава услов $\Psi(0) = 0$. Коефицијент k је позитивни физички параметар који зависи од физичких својстава тела која се сударају и одређује се експериментално. Унутрашњи ударни импулс P припада скупу који представља суб-диференцијал псеудопотенцијала дисипације

$$P \in \partial\Psi(D^+ + D^-). \quad (1.5)$$

Заменом (1.4) у једначину (1.5) добија се ударни импулс P у следећој форми

$$P(D^+ + D^-) = k((U_1^+ + U_1^-) - (U_2^+ + U_2^-)) + \partial I_-(U_1^+ - U_2^+). \quad (1.6)$$

У наставку рада ће се посматрати специјалан случај судара две кугле у коме је кугла 2 пре судара мировала, $U_2^- = 0$, а кугла 1 се кретала ка њој, $U_1^- > 0$. Тада се систем једначина кретања у тренутку судара (1.2) може написати у следећем облику

$$\begin{aligned} m_1(U_1^+ - U_1^-) &= -k(U_1^+ - U_2^+ + U_1^-) - H, \\ m_2(U_2^+ - U_2^-) &= k(U_1^+ - U_2^+ + U_1^-) + H, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где је $H = \partial I_-(U_1^+ - U_2^+) \geq 0$, јер је субдиференцијал уведене индикаторске функције I_- дат са $\partial I_-(X) = 0$ за $X < 0$, $\partial I_-(X) = [0, \infty)$ за $X = 0$ и $\partial I_-(X) = \emptyset$ за $X > 0$. Решење система (1.7) се добија за два различита случаја.

Случај 1: Раздвајање после судара

Кугле се после судара раздвајају ако је $U_1^+ - U_2^+ < 0$, због чега следи да је $H = 0$, па се решавањем система (1.7) добијају брзине кугли непосредно после судара у зависности од маса, брзине непосредно пре судара и параметра k

$$\begin{aligned} U_1^+ &= \frac{2m_1k}{m_1m_2+k(m_1+m_2)}U_1^- \\ U_2^+ &= \frac{(m_1-m_2)k+m_1m_2}{m_1m_2+k(m_1+m_2)}U_1^- \end{aligned} \quad (1.8)$$

Изрази (1.8) представљају решење проблема судара ако и само ако је испуњен услов $U_2^+ > U_1^+$, односно да важи $m_1m_2 > k(m_1 + m_2)$.

Случај 2: Кугле остају заједно после судара

Контакт кугли после судара значи да је $U_1^+ = U_2^+ = Y$ и да је H позитивно. Из једначина (1.7) добија се решење у следећем облику

$$\begin{aligned} Y &= \frac{m_1}{m_1+m_2}U_1^- \\ H &= \frac{m_1m_2-k(m_1+m_2)}{m_1+m_2} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Ово је решење ако и само ако је $H > 0$, што значи да је $m_1m_2 > k(m_1 + m_2)$.

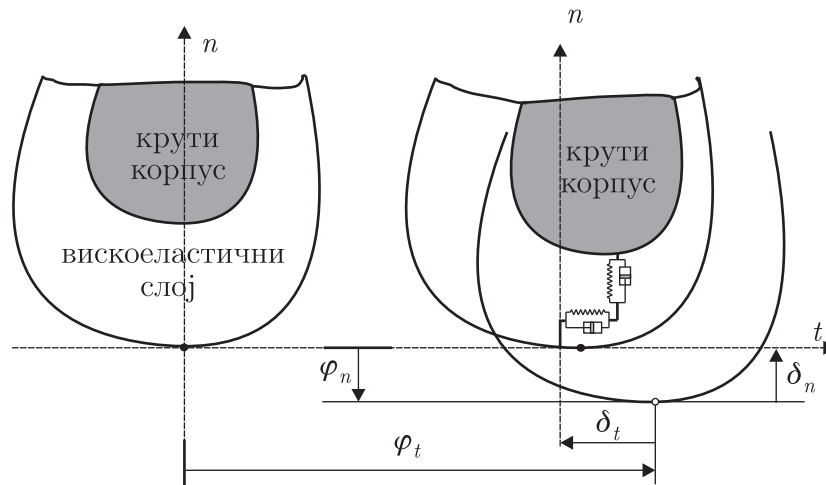
За проблем судара две кугле описан једначинама кретања (1.2) и конститутивним законом (1.5) постоји само једно решење. Кугле су после судара или раздвајају или остају у контакту и настављају да се крећу као једно тело што је сагласно закону одржања количине кретања. Овај приступ судару крутих тела укључује дисипацију енергије током судара, с тим да се псеудопотенцијал дисипације могао бирати и другачије и са више константи (које такође треба одредити из експеримената) о чему се говори у монографијама Фремон [2002, 38] или Фремон [2003, 39]. Баш то је и главни проблем у примени овог занимљивог принципа - одређивање параметра k . Отворена су питања, из каквих експеримената се могу утврдити вредности константи које улазе у псеудопотенцијал дисипације, као и да ли се за различите класе проблема судара (судар крутих тела различитих облика, чеони или кос судар, равански или просторни проблем судара) морају вршити експерименти различитог типа. Упркос тим отвореним питањима Фремонов приступ је веома важан јер проблеме судара поставља у шири контекст. Више детаља о топлотним ефектима судара две кугле али и о судару чврстог тела и флуида може се наћи у раду Фремона [2006, 40].

Једноставност одређивања параметара у конститутивној једначини за реалне материјале у случају теорије судара Херцовог типа у којој се крутом телу у зони контакта додаје вискоеластични слој је определила приступ којим ће се судар два и више тела анализирати у овој тези. За илустрацију је одабран релативно једноставан модел кретања

са униаксијалном деформацијом, мада се може размишљати и сложенијим моделима кретања у равни о чему говори следећа секција.

1.3. Динамички модел контакта крутог тела са вискоеластичним слојем

Познато је да се у класичној теорији судара која подразумева да су тела крута, не може одредити стање система након судара само на основу стања система пре судара већ да је потребно увести тзв. коефицијент успостављања (Њутнов или Поасонов) који даје везу између стања система (брзине или импулси) пре и после судара, видети књигу Фајфера и Глокера [1996, 73]. Такође је познато да у раванским проблемима судара са трењем може доћи до енергетске противречности да за одређене вредности параметара у моделу кинетичка енергија после судара буде већа од кинетичке енергије пре судара. Зато се препоручују модели који ће од самог почетка бити сагласни са Клаузиус-Дијемовом неједнакости. У овој секцији ће бити кратко приказан контактни модел у коме се тело представља са крутом целином око које се налази танак деформабилан слој чија је маса занемарљива, као што је приказано на сл. 1.3. Модел крутог тела са вискоеластичним слојем детаљно је анализиран у раду Сонга и др. [2001, 83], али за само за случај тела Келвин-Војтовог типа. Тај рад је и послужио као мотивација за проблем који се овде решава, с тим да је уместо вискоеластичног слоја Келвин-Војтовог типа овде употребљен термодинамички конзистентан модел вискоеластичног тела - модифицирани Зенеров модел.



Слика 1.3. Контактни модел за круто тело са вискоеластичним слојем.

Претпоставља се да је кретање крутог тела описано са величинама стања $(r, r^{(1)})$ где $r \in \mathbb{R}^N$ представља вектор генерализаних координата а N је број степени слободe система. Поред кретања крутог тела у зони контакта су могуће мале (локалне) деформације вискоеластичног слоја који је додат на крути корпус тела које се разматра. Маса тог

додатог слоја се занемарује. На сл. 1.3 је приказана контактна зона крутог корпуса коме је додат вискоеластични слој. Нека је (φ_t, φ_n) померање контактне тачке у односу на тачку примарног контакта одређено кретањем крутог тела као да нема вискоеластичног слоја. Стварно померање контактне тачке дато је са $(\varphi_t + \delta_t, \varphi_n + \delta_n)$, где су (δ_t, δ_n) мере деформације вискоеластичног слоја у тангентном и нормалном правцу, в. сл. 1.3. Сада се контактне силе могу повезати са деформацијама деформабилног слоја у тангентном и нормалном правцу (δ_t, δ_n) , њиховим (првим) изводима по времену $(\delta_n^{(1)}, \delta_t^{(1)})$ и материјалним својствима деформабилног слоја. На пример, у тачки контакта силе реакције везе између два тела у нормалном и тангентном правцу могу се моделирати на следећи начин

$$f_n = C_n(\delta_n) + B_n(\delta_n, \delta_n^{(1)}), \quad (1.10)$$

$$f_t = C_t(\delta_t) + B_t(\delta_t, \delta_t^{(1)}), \quad (1.11)$$

где C_n и C_t представљају функције крутости а B_n и B_t функције пригушења у нормалном и тангентном правцу, респективно. Ове функције зависе од геометрије и својстава материјала тела у контакту и могу бити и нелинеарне. Овај приступ решавању контактних проблема, у које спада и проблем судара, повећева димензију проблема за број уведених мера деформације додатог слоја неопходних за претпоставку о структури контактних сила у сваком контакту, а због могућности истовремених контаката и потребе моделирања сваког контакта проблем избора модела контактних сила добија на тежини. Са друге стране добре стране овог приступа су што више нема тешкоћа по питању егзистенције и јединствености решења, в. књигу Фајфера и Глокера [1996, 73], што је много реалистичнији и може боље описати реалне физичке појаве. За употребу неког модела не треба бити пресудна само његова једноставност него и чињеница какве он резултате даје и колико ти резултати одговарају опажањима, а наравно и у којој мери су ти резултати применљиви.

Најједноставнији вискоеластични модел је Келвин-Војтов модел, в. сл. 1.3

$$C_{t,n} = c_{t,n}\delta, \quad B_{t,n} = b_{t,n}\delta^{(1)}, \quad (1.12)$$

где су $c_{t,n}$ крутости а $b_{t,n}$ коефицијенти пригушења у нормалном или тангентном правцу и о њиховом одређивању се говори у књизи Џонсона [1985, 52]. За пример једног нелинеарног модела приказаће се модел предложен у раду Ханта и Крослија [1975, 49] у следећем облику

$$C_{t,n} = c_{t,n}\delta^\chi, \quad B_{t,n} = \frac{3}{2}\varsigma c_{t,n}\delta^\chi\delta^{(1)}, \quad (1.13)$$

где χ и ς зависе од материјала контактних тела и од локалне геометрије. Напомиње се да се у оквиру изложене теорије, као модел вискоеластичног слоја, могу искористити и нпр. раније помињани Зенеров или модификовани Зенеров модел вискоеластичног тела.

У овој тези је као модел вискоеластичног тела, уркос томе што није уопште једноставан за употребу, изабран модификовани Зенеров модел јер добро описује реалне материјале, видети рад Катание и Сорентина [2007, 22]. Као што кажу Бегли и Торвик, који су иницирали диференцијалне једначине произвољног реалног реда као доминантни модел за опис природе, предност конститутивних једначина са фракционим изводима је у њиховом добром опису реалног понашања реалних материјала, и истовременом останку у домену физички линеарне теорије.

Веза на месту контакта крутих тела са вискоеластичним слојем може бити и храпава, видети рад Сонга и др. [2001, 83], па је за коректан физички модел потребно адекватно моделирати и силу трења о чему ће сада бити више речи.

1.4. Модели сувог трења

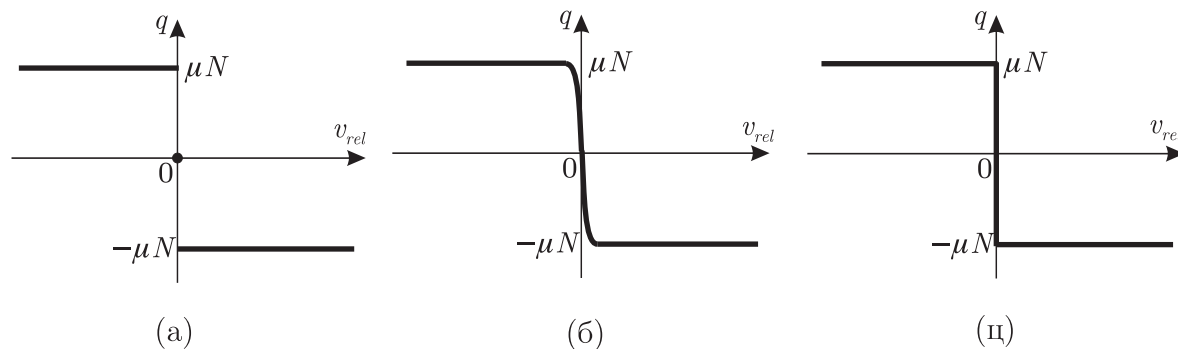
Суво трење има веома важну улогу у анализи кретања механичких система. Због присуства сувог трења механички системи могу доћи у стање мировања у коначном времену. Суво трење је негде веома пожељно, нпр. кочioni системи, гудачки инструменти, док је негде веома непожељно, призматични и обртни спојеви елемената различитих механизма и лежачеви. Такође суво трење је узрок вибрација типа приљубљивање-клизање (на енглеском *stick-slip*) у кочицама, и при контакту точкова вагона и шина. Извор је и нежељене буке. Трење је и делимично абразиван процес јер долази до хабања контактних површина. У трибологији суво трење се дефинише као сила која се опире релативном кретању између површина тела у контакту. Иако површине тела у макроскопском опажању изгледају глатке и равне оне су микроскопски неравне. Наиме, гледано под микроскопом површине су храпаве са неравнинама чије су димензије неколико десетина микрометара. Стварни контакт између површина се остварује само тамо где се додирују избочине обе контактне површине. Стварна контактна површина је много мања од видљиве површине контакта.

На силу трења значајно утиче подмазивање контактних површина тако што је смањује. Сила трења q је приближно пропорционална стварној контактної површини односно пропорционална је нормалној сили притиска N , $|q| = \mu N$, у случају да је релативна брзина контактних површина $v_{rel} \neq 0$. Јасно је да са већом притиском силом долази до интензивнијег спрезања избочина контактних површина што повећава отпор релативном клизању једне површине у односу на другу. Коефицијент пропорционалности μ назива се коефицијент трења клизања и креће се у границама од нуле до бесконачно. Ова веза између нормалне и тангенте пројекције контактне силе је експериментално проверавана од стране Амонтона док је Кулон разматрао утицај релативне брзине клизања и смер силе трења. Он је тврдио да коефицијент трења не зависи од релативне брзине клизања и да сила трења има смер супротан релативној брзини клизања што је релација данас позната као Кулонов закон. Он прави јасну разлику између приљубљивања и клизања тела у контакту. Тела се приљубљују једно уз друго када је релативна брзина једнака нули, што представља тзв. стик фазу. Ако се тела крећу једно у односу на друго па је

релативна брзина различита од нуле, онда је реч о фази клизања тзв. слип фази.

Први покушај да се конструише генерална теорија кретања механичких система са Кулоновим трењем везан је за познатог француског математичара и политичара Пенлевеа и потиче са краја 19. века. Анализирајући различите реалне проблеме са сувим трењем он је открио да постоје ситуације када динамичке једначине кретања немају решење или када оно није јединствено. Овај феномен је назван парадокс Пенлевеа и до данашњих дана је веома интересантан научницима који се баве механиком, видети књигу Ана [2003, 3]. У први мах помислило се да Кулонов закон трења није сагласан са основним принципима класичне механике, али је касније постало јасно да проблем прави претпоставка да је тело круто.

Моделирање сувог трења уопште није тривијалан посао јер је сила трења дуалне природе. Наиме, када тела у контакту мирују сила трења обезбеђује равнотежу као део главног вектора и главног момента за изабрану тачку свих спољашњих сила које делују на тело и има статус реакције везе. Међутим када започне клизање, и даље током клизања, сила трења има статус активне/задате силе која се супротставља кретању. У литератури се среће неколико различитих модела Кулонове силе трења, в. сл. 1.4.



Слика 1.4. Модели сувог трења.

На сл. 1.4а приказан је Кулонов модел који се веома често користи због своје једноставности. Диференцијалне једначине кретања система са овим моделом имају прекидне десне стране јер је сила трења q је прекидна функција која се израчунава на следећи начин

$$q(v_{rel}) = \begin{cases} -\mu N, & v_{rel} > 0, \\ 0, & v_{rel} = 0, \\ \mu N, & v_{rel} < 0. \end{cases} \quad (1.14)$$

У овом моделу сила трења ће бити једнака нули ако нема релативног кретања између тела у контакту, што не мора бити тачно, јер већ и пример заустављања обичног линерног осцилатора на храпавој подлози, у положају у коме опруга остаје напрегнута, говори да сила трења може бити већа од нуле и када је релативна брзина клизања једнака

нули. Модел (а) је једноставан, међутим он не описује добро стање система у фази приљубљивања тј. фази заустављања кретања.

Модел трења приказан на сл. 1.4б описује силу трења као глатку непрекидну функцију релативне брзине v_{rel} на целом домену на следећи начин

$$q(v_{rel}) = -\frac{2}{\pi} \arctan(\varepsilon v_{rel}) \mu N \quad (1.15)$$

где је ε константа која одређује нагиб криве у околини тачке $v_{rel} = 0$, за коју се претпоставља $\varepsilon \gg 0$. Могу се користити и друге функције које на неки начин регуларизују модел са сл. 1.4а. Са овим моделом кретање се описује диференцијалним једначинама са глатким (непрекидним) десним странама али због великог нагиба у околини тачке $v_{rel} = 0$ њихово решавање са аспекта нумеричке анализе уопште није једноставно јер је често везано за проблеме нумеричке нестабилности. Као ни претходни ни овај модел коректно не описује фазу приљубљивања.

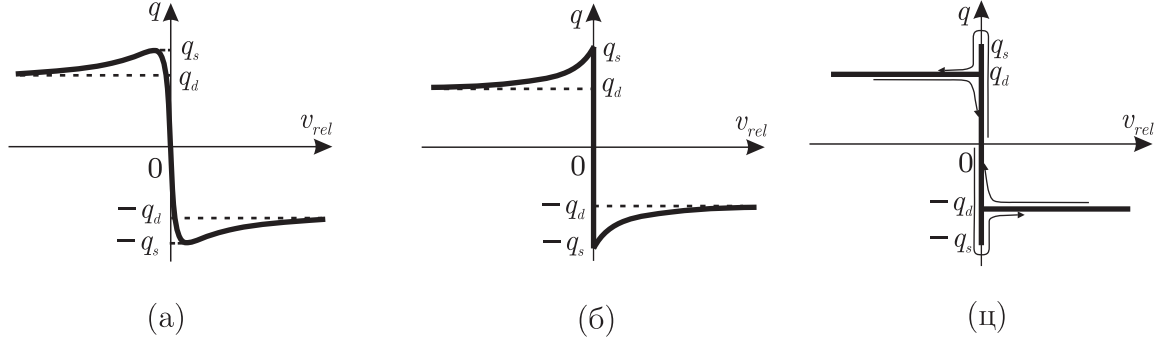
Модел силе трења који укључује неглатке вишевердносне функције, приказан на сл. 1.4ц, коректно описује кретање система у фази заустављања. Сила трења се моделира на исти начин као у случају (а) за вредности релативне брзине клизања различите од нуле, док за случај да је релативна брзина клизања једнака нули узима вредности на скупу, наиме

$$q(v_{rel}) \in \begin{cases} -\mu N, & v_{rel} > 0, \\ [-\mu N, \mu N], & v_{rel} = 0, \\ \mu N, & v_{rel} < 0. \end{cases} \quad (1.16)$$

Треба приметити да је овако дефинисано q скоро свуда функција осим када је $v_{rel} = 0$ где сила трења може имати било коју вредност из интервала $[-\mu N, \mu N]$ а која ће то бити вредност зависи од осталих сила које делују на тело. Зато се каже да је сила трења у овом случају моделирана неглатком вишевердносном функцијом или мултифункцијом (у обзир долазе и називи мултифункција од енглеског *multifunction*, или скраћено *multis*, или пак функција која узима вредност на скупу од енглеског *set-valued function*). Употребом овог модела за силу трења диференцијалне једначине кретања механичких система прелазе у форму диференцијалних инклузија, видети књигу Леина и Нијмејера [2004, 62]. Концепт решавања диференцијалних једначина са прекидним десним странама је развио Филипов шездесетих година прошлога века. Тај концепт се примењује и данас. Са аспекта нумеричке анализе овај модел захтева употребу сложених техника интеграције диференцијалних једначина са прекидним десним странама које су развијене у неглаткој механици, за потребе анализе кретања динамичких система са унилатералним ограничењима, в. монографију Акари и Брољато [2008, 1].

Класичан Кулонов модел трења може да се прошири увођењем појмова статичког μ_s и динамичког коефицијента трења μ_d , при чему је $\mu_s > \mu_d$, тако да се говори о статичкој сили трења и динамичкој сили трења. У мировању интензитет силе трења је мањи или једнак

$q_s = \mu_s N$ а при кретању је једнак $q_d = \mu_d N$. Смањење силе трења због повећења брзине клизања се назива Стрибеков ефекат, који може да буде узрок нестабилности кретања механичких система. На сл. 1.5 су приказана три модела трења која узимају у обзир Стрибеков ефекат.



Слика 1.5. Модели сувог трења који укључују и Стрибеков ефекат.

На сл. 1.5а је приказан модел којим је сила трења описна као глатка функција следећим изразом

$$q(v_{rel}) = -\frac{2}{\pi} \arctan(\varepsilon v_{rel}) \left[\frac{q_s - q_d}{1 + \gamma |v_{rel}|} + q_d \right], \quad (1.17)$$

где су ε и γ константе које задовољавају следеће услове $\varepsilon \gg 0$ и $\gamma > 0$. Коментари који се односе на модел трења са сл. 1.4б важе и у овом случају. Модел трења који укључује и Стрибеков ефекат и неглатке вишевердносне функције је приказан на сл. 1.5б, а сила трења је описана следећим изразом

$$q(v_{rel}) \in \begin{cases} -\frac{q_s - q_d}{1 + \gamma |v_{rel}|} - q_d, & v_{rel} > 0 \\ [-q_s, q_s], & v_{rel} = 0 \\ \frac{q_s - q_d}{1 + \gamma |v_{rel}|} + q_d, & v_{rel} < 0. \end{cases} \quad (1.18)$$

Стик фаза је у моделу са сл. 1.5б коректно описана али у моделу фигуришу три параметра (μ_s , μ_d , и γ) што овај модел чини сложенијим у односу на модел са слике 1.4ц где као параметар фигурише само један коефицијент трења μ .

Модел трења приказан на сл. 1.5ц је познат под називом модел статичког трења (од енглеског *stiction friction model* при чему је реч *stiction* кованица од (*static friction*), а сила трења је дата са

$$q(v_{rel}) \in \begin{cases} -q_d, & v_{rel} > 0, \\ [-q_s, q_s], & v_{rel} = 0, \\ q_d, & v_{rel} < 0. \end{cases} \quad (1.19)$$

Модел са сл. 1.5ц адекватно описује фазу заустављања и хистерезис који се везује за силу трења. Наиме, прелазак из фазе мировања у фазу клизања одвија се достизањем вредности q_s а затим преласком на вредност q_d . При заустављању сила трења са q_d силази на вредност која је мања од q_d , (никако не пролази q_s). Важно је напоменути да, анализирајући хистерезис силе трења, Фајфер и Глокер [1996, 73] и Глокер [2001, 41] препоручују да се у инжењерским проблемима не праве разлике између динамичког и статичког коефицијента трења, што ће и овде бити усвојено. Математичко оправдање за то, са аспекта јединствености решења диференцијалне инклузије која одговара закону трења датом у облику неглатке вишевредносне функције са сл. 1.4ц, може се наћи у књизи Лејна и Нијмејера [2004, 62].

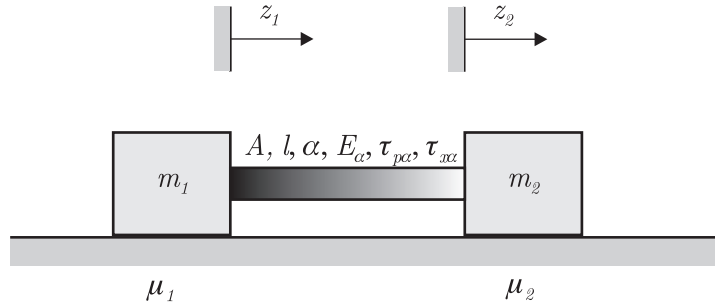
Постоји још неколико у литератури веома често сретаних нешто сложенијих модела трења, као што су нпр. Далов модел, видети рад Пенестрија и др. [2007, 71], Армстронгов модел, Лу Гре модел. Ови модели су у раду Келија и Ламаса [1999, 56] упоређивани са резултатима експеримената. Осим Кулоновог закона трења уведеног помоћу неглатке вишевредносне функције, фазу приљубљивања могу добро описати Карнопов модел, видети рад Карнопа [1985, 53], и еласто-пластични модел трења представљен у раду Дупонта и др. [2004, 31].

Најзад са циљем да модел трења буде што је могуће једноставнији али и коректан у смислу предвиђања онога што показују експерименти, пре свега сценарија у коме се тела после судара заустављају у коначном времену, у овој тези усвојиће се модел који силу трења дефинише као неглатку вишевредносну функцију.

2. Проблем судара два тела

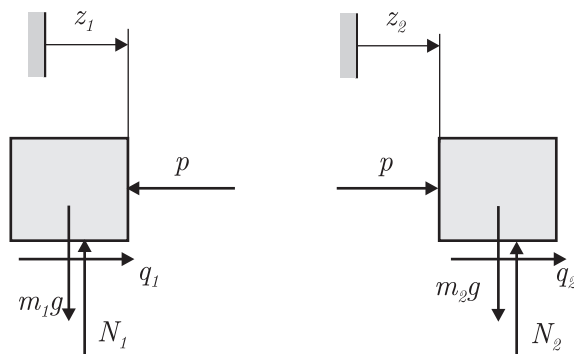
2.1. Формулација проблема

Разматра се систем од два крута тела/блока, маса редом m_1 и m_2 , која се могу кретати транслаторно по хоризонталној храпавој површини са коефицијентима трења редом μ_1 и μ_2 . Нека је положај тих тела у непокретним координатним системима одређен координатама z_1 , и z_2 као што је приказано на сл. 2.1.



Слика 2.1. Систем који се разматра.

Положају приказаном на сл. 2.1 одговара тренутак $t = 0$, у коме тело 1 брзином v_0 удара у тело 2 које се налази у стању мировања. За тело 1 чврсто је везан вискоеластични штап занемарљиве масе који је у тренутку $t = 0$ недеформисан и неоптерећен. Непосредно после контакта вискоеластичног штапа и тела 2 долази до појаве унутрашње силе штапу p . Осим тога у контакту сваког блока са храпавом хоризонталном површином постоји силе трења q_i , $i = 1, 2$, видети сл. 2.2.



Слика 2.2. Декомпозиција система.

За сваки блок основна аксиома динамике и принцип одређености Њунт-Лапласа дају диференцијалне једначине кретања и одговарајуће почетне услове:

$$\begin{aligned} m_1 z_1^{(2)} &= -p + q_1, \\ m_2 z_2^{(2)} &= p + q_2, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} z_1(0) &= 0, \quad z_1^{(1)}(0) = v_0, \quad p(0) = 0, \\ z_2(0) &= 0, \quad z_2^{(1)}(0) = 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $(\cdot)^{(k)} = d^k(\cdot)/dt^k$ означава k -ти извод по времену t , $k \in \mathbb{N}$.

Систем једначина (2.1) има 5 непознатих величина тако да је потребно 3 конститутивне релације за његово решавање. Треба приметити да непосредно после судара важи

$$\begin{aligned} z_1(h) &= z_1(0) + z_1^{(1)}(0)h + O_2 = v_0 h \\ z_2(h) &= z_2(0) + z_2^{(1)}(0)h + O_2 = 0 \\ z_1(h) &> z_2(h) \end{aligned}$$

што значи да штап започиње да се деформише. Нека се униаксијална, изотермна деформација вискоеластичног штапа мери координатом x уведеном следећом релацијом

$$x = z_1 - z_2, \quad (2.3)$$

и нека се тај вискоеластични штап, дужине l и површине попречног пресека A , моделира као стандардно фракционо линеарно вискоеластично тело. У том случају конститутивна једначина одговара модификованом Зенеровом моделу

$$p + \tau_{p\alpha} p^{(\alpha)} = \frac{E_\alpha A}{l} (x + \tau_{x\alpha} x^{(\alpha)}), \quad (2.4)$$

где је α реалан број ($0 < \alpha \leq 1$), E_α је модул еластичности, $\tau_{p\alpha}$ и $\tau_{x\alpha}$ су константе релаксације димензија [време] $^\alpha$. У једначинама (2.4), ознака $(\cdot)^{(\alpha)}$, стоји за α -ти извод произвољног реалног реда који се узима у стандардној Риман-Лјувилловој форми

$$\frac{d^\alpha[u(t)]}{dt^\alpha} = u^{(\alpha)} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t u(\xi) (t-\xi)^{-\alpha} d\xi \right],$$

где је Γ ознака за Ојлерову Гама функцију. Из дефиниције фракционог извода или прецизније извода произвољног реалног реда јер α може бити нпр. $\alpha = \sqrt{2} - 1$, се види да је то нелокални оператор и да ће у једначини (2.4) бити укључена комплетна историја деформације. Коефицијенти у модификованом Зенеровом моделу не могу бити произвољни већ морају задовољити следеће неједнакости

$$E_\alpha > 0, \quad \tau_{p\alpha} > 0, \quad \tau_{x\alpha} > \tau_{p\alpha}. \quad (2.5)$$

које су последица другог закона термодинамике, тј. Клаузијус-Дијемове неједнакости, видети рад Атанацковића [2002, 5]. У специјалним случајевима када је $\alpha = 1$ конститутивна

једначина (2.4) представља модел стандардног линеарног вискоеластичног тела (Зенеров модел) у коме су константе $\tau_{p\alpha}$, $\tau_{x\alpha}$, времена релаксације, а када се замени $\tau_{p\alpha} = 0$ добија се конститутивна једначина која одговара модификованом Келвин Војтовом моделу. Ако коефицијенти модела испуњавају следећи услов $\tau_{x\alpha} = \tau_{p\alpha}$, добија се Хуков модел идеално еластичног тела.

Од свих модела за силу трења о којима је било речи, одабраће се форма у облику неглатких вишевредносних функција. Сагласно томе Кулонов закон у две контактне површине са силе трења q_i , $i = 1, 2$ је

$$-q_i \in \mu_i N_i \text{Sgn}(z_i^{(1)}), \quad i = 1, 2, \quad (2.6)$$

где су μ_i , $i = 1, 2$ коефицијенти трења клизања, N_i , $i = 1, 2$, су нормалне реакције хоризонталне површине које су једнаке тежинама блокова $m_i g$, $i = 1, 2$ респективно, и где је $\text{Sgn}(u)$ неглатка вишевредносна функција чији је аргумент брзина клизања, дефинисана на следећи начин

$$\text{Sgn}(u) = \begin{cases} \{1\}, & \text{ако је } u > 0 \\ [-1, 1], & \text{ако је } u = 0 \\ \{-1\}, & \text{ако је } u < 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

На овом месту треба напоменути три ствари. Прво, сагласно (2.7) изрази (2.6) представљају конвексикацију израза (1.14) при чему случај $u > 0$ одговара клизању у једну страну, $u < 0$ клизању у другу страну, а $u = 0$ фази заустављања/приљубљивања која сада дозвољава нетривијалну вредност силе трења у случају исчезавања релативног кретања. С друге стране конститутивне релације (2.6) су се, пратећи разматрања из секције 1.2, могле писати и у форми која укључује псеудопотенцијал силе трења на следећи начин

$$-q_i \in \mu_i N_i \partial \left| z_i^{(1)} \right|, \quad i = 1, 2. \quad (2.8)$$

Трећа ствар тиче се избора нумеричке вредности коефицијента трења. Наиме, опсег могућих вредности коефицијента трења у проблемима судара је веома широк, те вредности се или уводе хипотетички, или бирају као за несударни процес, в. монографију Голдшмита [2001, 42]. У овој тези те вредности бираће се као за несударни процес јер је конститутивном једначином (2.4) са ограничењима (2.5) такође укључена дисипација енергије, а како се препоручује у раду Гојал и др. [1994, 44].

Судар два тела траје све до тренутка T . У том тренутку или контактна сила p постаје једнака нули $p(T) = 0$, што одговара раздвајању после кога блокови могу да наставе да се крећу или да се зауставе, или брзине оба блока постају једнаке нули с тим да је контактна сила већа од нуле, тј. $z_i^{(1)}(T) = 0$, $i = 1, 2$ и $p(T) > 0$. Јасно је да случају $p(T) > 0$ штап остаје укљештен између блокова, што је обезбеђено једнаким силама трења на његовим крајевима. Тада би сила у вискоеластичном штапу била утравнотежена са силама трења

тако да неравнине на хоризонталној подлози више не дозвољавају померање крајева штапа. Тада би у штапу наступио неки процес релаксације напона, који се овде неће разматрати јер је у моделу вискоеластичног штапа, сагласно теоријама Херцовог типа, занемарена маса штапа. На основу израза (2.6), (2.7) за приљубљивање важи ($z_i^{(1)} = 0 \implies |q_i| \leq \mu_i N_i$), а клизање удесно ($z_i^{(1)} > 0 \implies q_i = -\mu_i N_i$) и клизање улево ($z_1^{(1)} < 0 \implies q_1 = \mu_1 N_1$). Јасно је да са повећењем коефицијента трења сваки блок тежи ка заустављању тј. стик фази. Исчезавање кретања у тренутку завршетка судара је и мотивисало усвајање силе трења у форми неглатке вишевредносне функције. Треба приметити да сила трења при заустављању било ког од блокова може имати било коју вредност из интервала $[-\mu_i, \mu_i]$, видети књигу Глокера [2001, 41].

Пратећи разматрања из рада Граховац и коаутори [2011, 47], сада се може дискутовати неколико различитих комбинација/сценарија за кретање система после судара. Блок 2 уопште не мора да се покрене. Оба блока по радвајању могу да наставе да се крећу удесно, или по раздвајању блок 2 да настави удесно а блок 1 промени смер и крене улево. После судара током клизања један од блокова може да се заустави, а други да настави да се креће (блок 2 удесно, а блок 1 после промене смера кретања улево). Оба блока могу да се зауставе и то или у фази прилажења или у фази када је већ започето раздвајање. Логично је и претпоставити да, после судара, тј. за $t > T$, оба блока могу да наставе кретање удесно крећући се као целина, в. Атанацковић и Спасић [1999, 4] или Фремон [2003, 39]. У том случају су после судара блокови у контакту ($p(t) > 0$) и у релативној равнотежи ($z_1^{(1)}(t) = z_2^{(1)}(t)$), при чему је вискоеластични штап деформисан, укљештен између два крута блока, и не мења више своју дужину. И тада би наступила релаксација напона, која се овде неће разматрати. Више речи о овој последњој могућности ће бити у секцији 2.3. У сваком од могућих сценарија блок 1 увек остаје лево од блока 2 јер кроз њега не може да прође, што је исто као у Фремоновом приступу. За фиксиране параметре у систему, испитивање о ком од могућих сценарија је реч, може се утврдити израчунавањем дисипације енергије током кретања, која је дата следећим изразом

$$\Delta = \int_0^T \left[p \left(z_1^{(1)} - z_2^{(1)} \right) + \mu_1 N_1 \left| z_1^{(1)} \right| + \mu_2 N_2 \left| z_2^{(1)} \right| \right] dt \quad (2.9)$$

Дакле, као модел судара два тела предлаже се Кошијев проблем дат у облику система неглатких вишевредносних диференцијалних једначина проивољног реалног реда, насталог спрезањем једначина од (2.1) до (2.6) при чему је дисипација енергије у судару дата изразом (2.9). Описани модел судара припада класи теорија судара Херцовог типа, или општије теорији кретања крутих тела са вискоеластичним слојем у присуству сувог трења. Напомиње се да се на овај начин избегава увођење било каквих коефицијента судара априори, на нивоу хипотезе, јер се он израчунава из решења постављеног Кошијевог проблема. Сам проблем о коме је реч се не може решити у затвореној форми. Пре нумеричког решавања проблем ће се превести у бездимензијску форму.

Прво ће увести бездимензијске величине и то силе, координате и време са

$$\bar{p} = \frac{p}{m_1 g}, \quad \bar{q}_i = \frac{q_i}{m_1 g}, \quad \bar{x} = \frac{x E_\alpha A}{m_1 g l}, \quad \bar{z}_i = \frac{z_i E_\alpha A}{m_1 g l}, \quad \bar{t} = t \sqrt{\frac{E_\alpha A}{m_1 l}}, \quad (2.10)$$

а затим и однос маса, релаксационе константе, те почетна брзина

$$\rho = \frac{m_2}{m_1}, \quad \bar{\tau}_{p\alpha} = \tau_{p\alpha} \left(\frac{E_\alpha A}{m_1 l} \right)^{\frac{\alpha}{2}}, \quad \bar{\tau}_{x\alpha} = \tau_{x\alpha} \left(\frac{E_\alpha A}{m_1 l} \right)^{\frac{\alpha}{2}}, \quad \xi = \frac{v_0}{g} \sqrt{\frac{E_\alpha A}{m_1 l}}, \quad (2.11)$$

помоћу којих се из једначина (2.1) - (2.4) добија бездимензијска форма једначина које описују судар два са слике 2.1.

$$\begin{aligned} z_1^{(2)} &= -p + q_1, & z_2^{(2)} &= \frac{p}{\rho} + q_2, \\ z_1^{(1)}(0) &= 0, & z_1^{(1)}(0) &= \xi, & z_2(0) &= 0, & z_2^{(1)}(0) &= 0, & p(0) &= 0, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$p + \tau_{p\alpha} p^{(\alpha)} = x + \tau_{x\alpha} x^{(\alpha)}, \quad (2.13)$$

$$-q_i \in \mu_i \text{Sgn} \left(z_i^{(1)} \right), \quad i = 1, 2. \quad (2.14)$$

У овим једначинама изостављена је цртица изнад сваке бездимензијске величине а изводи су дати по бездимензијском времену. Са том напоменом ће ограничења на параметре модела (2.5)_{2,3} при бездимензионисању остати непромењена.

2.2. Егзистенција решења

Основни циљ овог рада је решавање система једначина (2.12) - (2.14) заједно са ограничењима (2.5)_{2,3}, што је систем који спада у класу фракционих диференцијалних једначина са неглатким вишеверносним функцијама. Тај систем се може приказати у компактнијој, и са аспекта математичке анализе погоднијој, форми за коју постоји резултат о егзистенцији решења. Процедура која води том циљу је примена Лапласове трансформације на конститутивну једначину (2.13). Када се уведу слике $X = X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} x(t) dt$ и $P = P(s) = \mathcal{L}\{p(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} p(t) dt$, једначина (2.13) се трансформише у простору слика у израз

$$P = \frac{1 + \tau_{x\alpha} s^\alpha}{1 + \tau_{p\alpha} s^\alpha} X, \quad (2.15)$$

где је коришћена стандардна форма за Лапласову трансформацију извода функције u реда α , тј. $u^{(\alpha)}$ у облику

$$\mathcal{L}\{u^{(\alpha)}\} = s^\alpha U - \left[\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\int_0^t \frac{u(\eta) d\eta}{(t-\eta)^{\alpha-1}} \right) \right] \Big|_{t=0},$$

са $\mathcal{L}\{u(t)\} = U = U(s)$, и где израз у загради тежи нули ако је $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t)$ ограничен, в. Олдхам и Спаниер [1974, 68]. На овом месту уобичајено је урадити инверзну трансформацију једначине (2.15) са циљем да се добије веза између $p(t)$ и $x(t)$. За то постоје 4 типичне форме, в. Горенфло и Маинарди [1997, 43] и Маинардфи и Горенфло [2000, 65], на пример једна од њих даје

$$p(t) = \frac{\tau_{x\alpha}}{\tau_{p\alpha}} x(t) + \frac{1}{\tau_{p\alpha}} \left(1 - \frac{\tau_{x\alpha}}{\tau_{p\alpha}}\right) \int_0^t e_{\alpha,\alpha} \left(t - \eta, \frac{1}{\tau_{p\alpha}}\right) x(\eta) d\eta, \quad (2.16)$$

где $e_{\alpha,\beta}(t; \lambda)$ означава генерелисану Митаг-Лефлерову функцију $e_{\alpha,\beta}(t; \lambda) \equiv E_{\alpha,\beta}(-\lambda t^\alpha) / t^{1-\beta}$ са $E_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n / \Gamma(\alpha n + \beta)$, видети рад Горенфла и Маинардија [1997, 43]. У претходном изразу препознаје се зависност силе у вискоеластичном штапу од историје деформације. Заменом једначине (2.16) са (2.3) и израза (2.14) у Кошијев проблем (2.12) добија модел за проблем судара два тела у облику Кошијевог проблема за две спрегнуте интегро-диференцијалне инклузије

$$z_1^{(2)} + \frac{\tau_{x\alpha}}{\rho\tau_{p\alpha}} x + \frac{1}{\rho\tau_{p\alpha}} \left(1 - \frac{\tau_{x\alpha}}{\tau_{p\alpha}}\right) \int_0^t e_{\alpha,\alpha} \left(t - \eta, \frac{1}{\tau_{p\alpha}}\right) (z_1(\eta) - z_2(\eta)) d\eta \in -\mu_1 \text{Sgn} \left(z_1^{(1)}\right), \quad \text{а.е. на } [0, T],$$

$$z_2^{(2)} - \frac{\tau_{x\alpha}}{\rho\tau_{p\alpha}} x - \frac{1}{\rho\tau_{p\alpha}} \left(1 - \frac{\tau_{x\alpha}}{\tau_{p\alpha}}\right) \int_0^t e_{\alpha,\alpha} \left(t - \eta, \frac{1}{\tau_{p\alpha}}\right) (z_1(\eta) - z_2(\eta)) d\eta \in -\mu_2 \text{Sgn} \left(z_2^{(1)}\right), \quad \text{а.е. на } [0, T],$$

$$z_1(0) = 0, \quad z_1^{(1)}(0) = \xi, \quad z_2(0) = 0, \quad z_2^{(1)}(0) = 0, \quad (2.17)$$

где ознака а.е стоји за својство скоро свуда. Међутим може се урадити и другачије. Наиме, елементарним трансформацијама израз (2.15) се може приказати у еквивалентној форми

$$P = Xs \left[\frac{1}{s} + \frac{(\tau_{x\alpha} - \tau_{p\alpha}) s^{\alpha-1}}{1 + \tau_{p\alpha}} \right]. \quad (2.18)$$

Иверзијом израза (2.18) добија се следећа веза између силе у вискоеластичном штапу и разлике апсолутних брзина блокова

$$p(t) = \int_0^t \left[1 + \left(\frac{\tau_{x\alpha}}{\tau_{p\alpha}} - 1 \right) e_\alpha \left(t - \eta, \frac{1}{\tau_{p\alpha}} \right) \right] [v_1(\eta) - v_2(\eta)] d\eta. \quad (2.19)$$

где у интегралу конволуције $e_\alpha(t; \lambda)$ означава функцију Митаг-Лефлеровог типа дефинисану са

$$e_\alpha(t; \lambda) = MLE_\alpha(-\lambda t^\alpha), \quad (2.20)$$

при чему је MLE_α Митаг-Лефлерова функција која се израчунава из

$$MLE_\alpha(t) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} t^n \Gamma(\alpha n + 1), & \text{za } 0 < t \leq t_r \\ -\sum_{j=1}^{\infty} t^{-j} \Gamma(1 - \alpha j), & \text{za } t > t_r, \end{cases} \quad (2.21)$$

и где се тренутак прелаза од једног на други ред, t_r , одређује из неког унапред прописаног критеријума. Напомиње се да осим приказаног начина израчунавања Митаг-Лефлерове функције постоји и низ других, видети нпр. радове Дителм и др. [2005, 29] и Сезболд и Хилфер [2008, 82] да се спомену тек неки.

Са изразом (2.19) и напоменом да су $v_i = z_i^{(1)}$, $i = 1, 2$ и $v_i^{(1)} = z_i^{(2)}$, $i = 1, 2$ основни проблем (2.12) - (2.14) прелази у облик Кошијевог проблема за интегро-диференцијалну инклузију по брзинама блокова

$$\begin{aligned} v_1^{(1)} &\in -\mu_1 \text{Sgn} v_1 - \int_0^t \left[1 + \left(\frac{\tau_{x\alpha}}{\tau_{p\alpha}} - 1 \right) e_\alpha \left(t - \eta, \frac{1}{\tau_{p\alpha}} \right) \right] [v_1(\eta) - v_2(\eta)] d\eta, \quad \text{a.e. на } [0, T], \\ v_2^{(1)} &\in -\mu_2 \text{Sgn} v_2 + \frac{1}{\rho} \int_0^t \left[1 + \left(\frac{\tau_{x\alpha}}{\tau_{p\alpha}} - 1 \right) e_\alpha \left(t - \eta, \frac{1}{\tau_{p\alpha}} \right) \right] [v_1(\eta) - v_2(\eta)] d\eta, \quad \text{a.e. на } [0, T], \\ v_1(0) &= \xi, \quad v_2(0) = 0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Доказ егзистенције решења за Кошијев проблем (2.22) у простору апсолутно-непрекидних функција на $[0, T]$, $T < \infty$ може се наћи у књизи Агарвала [2001, 2], в. Теорему 2.1. са стране 270.

Сада је припрема урађена и може се прећи на нумеричку анализу проблема, која ће бити спроведена на оригиналном систему (2.12) - (2.14).

2.3. *Комбинаторна анализа*

У основи треба приметити да диференцијалне једначине у којима фигурише сила трења, у принципу, имају прекидну десну страну, па овај проблем припада класи кретања неглатких механичких система, којима је својствено присуство различитих фаза кретања, и где у свакој фази важи одговарајући динамички модел. Због тога се стандардни концепти теорије динамичких система најчешће и не могу директно применити у овим случајевима, в. Кунце [2008, 61] или Тарнер [2001, 94]. И разматрања из секције 1.2 наводе на потребу комбинаторне анализе која треба да укључи све комбинације могућих кретања система после судара. Један од најважнијих проблема те комбинаторне анализе је идентификација свих сценарија, па свих могућих сценарија, и најзад одређивање тренутака у којима долази до прелаза са једног динамичког модела на други. Са аспекта процене дисипације енергије, због присуства сувог трења, потребна је велика прецизност у одређивању тих тренутака,

уз напомену да се и време за њено остваривање мора минимизирати. Наравно све постаје сложеније због присуства нелокалних оператора којима се моделира дисипације енергије у вискоеластичном штапу.

Да би се одредило решење проблема судара два тела описаног једначинама (2.12) - (2.14) са ограничењима (2.5)_{2,3}, на конститутивну једначину (2.13) у основи ће се применити нумерички метод из књиге Подлубнија [1999, 76], који је базиран на еквивалентности Риман-Лјувиллове и Грунвалд-Летникове дефиниције фракционог извода, и то за широку класу функција које се појављују у реалним физичким и инжењерским проблемима. С друге стране у моделирању сувог трења коришћена је неглатка вишевердносна функција $\text{Sgn}(z_i^{(1)})$ која се у неглаткој механици обично декомпоује на две унилатерал-примитивне функције да би се у резултату после дискретизације времена добио линеарни комплементарни проблем на нивоу брзине - импулси који би пратила комбинаторна еволуција, в. Флорес и други 2010 или пак Фајфер и Глокер 1995. То значи да ће се утврдити све могуће комбинације кретања, а затим из почетних услова, а уз праћење услова под којима важи свака од комбинација, одредити са којом комбинацијом систем започиње кретање, а затим и редослед која се комбинација наставља на претходну. Како је овде формулација проблема дата другачије, на нивоу убрзања - силе, примениће се и другачији алгоритам. Наиме, као и у раду Граховац и коаутори [2011, 47]., примениће се алгоритам слек варијабле за обичне диференцијалне једначине развијен у раду Тарнера [2001, 94]. Тарнеров алгоритам се примењује у класи проблема код којих је кретање подељено у две фазе са различитим динамичким моделима који су везани неким унилатералним ограничењем, тако да систем има дисконтинуитете у примени различитих модела кретања за које су подаци о тренутку прелаза са једног на други непознати унапред. Силе трења дефинисане са (2.14) проблем судара два тела сврставају у ову класу. Прелаз са кретања блока у једну страну на кретање у другу страну или заустављање долази у тренутку t^* , који је непознат, и одговара тренутку када је брзина блока једнака нули. Увођењем слек варијабле, што стоји за монотono-опадајућу са нулом ограничену варијаблу, као нове независно променљиве уместо времена, прелази се у проширени простор стања где се у једном кораку интеграције израчунава тачна вредност t^* када треба прећи са једног динамичког модела на други. Број таквих динамичких модела/модова кретања и прелази са једног мода на други чине да процедура која се предлаже у овој тези значајно одступа од уобичајеног поступка интеграције диференцијалних једначина кретања механичких система. Ево о чему се ради.

Блок 1 као део система приказаног на сл. 2.1 може да се креће на начине као је приказано у табели 1, где уз одговарајуће модове стоје и уведени и симболи ради једноставнијег означавања, те контактна сила и брзина блока у тренутку завршетка судара.

Исто тако могућа кретања/модови за блок 2 су, в. табелу 2

Напомиње се да је изабраним моделом везе са подлогом, в. сл. 2.2, искључена могућност да и блок 2 може да се креће улево. Такође, верикална црта у табели 2 значи да

Табела 1. Могући исходи кретања блока 1

Блок 1	симбол	сила	брзина
клизи удесно	\rightsquigarrow	$p(T) = 0$	$z_1^{(1)}(T) > 0$
клизи удесно па улево	\leftarrow	$p(T) = 0$	$z_1^{(1)}(T) < 0$
клизи удесно па стане	\dashv	$p(T) = 0 \vee p(T) > 0$	$z_1^{(1)}(T) = 0$
клизи удесно па улево па стане	\vdash	$p(T) = 0 \vee p(T) > 0$	$z_1^{(1)}(T) = 0$
клизи удесно истом брзином као блок 2	\Rightarrow	$p(T) > 0$	$z_1^{(1)}(T) > 0$

Табела 2. Могући исходи кретања блока 2

Блок 2	симбол	сила	брзина
клизи удесно	\rightsquigarrow	$p(T) = 0$	$z_2^{(1)}(T) > 0$
клизи удесно па стане	\dashv	$p(T) = 0 \vee p(T) > 0$	$z_2^{(1)}(T) = 0$
мирује од самог почетка	$ $	$p(T) = 0 \vee p(T) > 0$	$z_2^{(1)}(T) = 0$
клизи удесно истом брзином као блок 1	\Rightarrow	$p(T) > 0$	$z_2^{(1)}(T) > 0$

блок 2 није ни започео кретање после иницијалног судара, тј. $z_2^{(1)}(t) = 0$, за $0 \leq t \leq T$, што је у принципу могуће. Кретања блокова из табела 1 и 2 се могу комбиновати као што се, одговарајућим симболима, показује у табели 3 где је идентификовано једанаест могућих сценарија.

Табела 3. Могући сценарији судара
2 тела

Сценарио судара два тела		Блок 2			
		\rightsquigarrow	\dashv	$ $	\Rightarrow
Б	\rightsquigarrow	1			
л	\leftarrow	2	3	4	
о	\dashv	5	6	7	
к	\vdash	8	9	10	
1	\Rightarrow				11

Сагласно идентификацијама/бројевима датим у табели 3 после иницијалног судара, када треће у контактним површинама и присуство другог блока започињу промену атрибута кретања првог тела, може се појавити следећих 11 сценарија.

Сценарио 1:

Блок 2 започиње кретање, Кошијев проблема се нумерички интегрални до испуњења следећих услова $p[T] = 0$, $z_1^{(1)}(T) > 0$, $z_2^{(1)}(T) > 0$ и $z_2^{(1)}(T) > z_1^{(1)}(T)$.

Сценарио 2:

Блок 2 започиње кретање, Кошијев проблем се интегрални, затим блок 1 мења смер кретања, наставља се интеграција до испуњења услова $p(T) = 0$, $z_1^{(1)}(T) < 0$, $z_2^{(1)}(T) > 0$.

Сценарио 3:

Блок 2 започиње кретање, Кошијев проблем се интегрални, затим блок 1 мења смер кретања, наставља се интеграција, блок 2 се зауставља и тада важи $p(T) = 0$, $z_1^{(1)}(T) < 0$, $z_2^{(1)}(T) = 0$.

Сценарио 4:

Блок 2 није започео кретање, нити ће се уопште кретати, Кошијев проблем се интегрални, затим блок 1 мења смер, наставља се интеграција до тренутка T када важи $p(T) = 0$, $z_1^{(1)}(T) < 0$, $z_2^{(1)}(T) = 0$.

Сценарио 5:

Блок 2 започиње кретање, Кошијев проблем се интегрални, блок 1 се зауставља, блок 2 наставља да клизи, тј. $p(T) = 0$, $z_1^{(1)}(T) = 0$, $z_2^{(1)}(T) > 0$.

Сценарио 6:

Блок 2 започиње кретање, Кошијев проблем се интегрални, један од блокова се зауставља, а затим и други, тако да блокови остају у контакту, наиме $p(T) > 0$, $z_1^{(1)}(T) = 0$, $z_2^{(1)}(T) = 0$.

Сценарио 7:

Блок 2 није започео кретање, нити ће се уопште кретати, Кошијев проблем се интегрални, блок 1 се зауставља у прилазној фази, $p(T) > 0$, $z_1^{(1)}(T) = 0$, $z_2^{(1)}(T) = 0$.

Сценарио 8:

Блок 2 започиње кретање, Кошијев проблем се интегрални, блок 1 мења смер кретања, да би се нешто касније зауставио, а блок 2 наставио клизање, $p(T) = 0$, $z_1^{(1)}(T) = 0$, $z_2^{(1)}(T) > 0$.

Сценарио 9:

Блок 2 започиње кретање, Кошијев проблем се интегрални, блок 1 мења смер кретања, интеграција се наставља, затим се заустављају оба блока и при томе остају у контакту, тј. $p(T) > 0$, $z_1^{(1)}(T) = 0$, $z_2^{(1)}(T) = 0$.

Сценарио 10:

Блок 2 није започео кретање, нити ће се уопште кретати, Кошијев проблем се интегрални, блок 1 мења смер кретања, интеграција се наставља док се блок 1 не заустави, односно $p(T) > 0$, $z_1^{(1)}(T) = 0$, $z_2^{(1)}(T) = 0$.

Сценарио 11:

Као што је раније наговештено, може се претпоставити да, после судара, тј. за $t > T$, оба блока могу да наставе кретање удесно крећући се као целина. Дакле, блок 2 започиње

кретање, Кошијев проблем се интегрални, брзине блокова у једном тренутку постају исте, блокови су у контакту посредством вискоеластичног штапа и настављају клизање са истом брзином, а то је $p(T) > 0$, $z_1^{(1)}(T) = z_2^{(1)}(T) > 0$.

На овом месту могу се напоменути три ствари. Прво, сценарији означени бројевима 4,7 и 10 у табели 3 у потпуности одговарају сценаријима из рада Граховац и др. [2011, 47]. Друго, раздвајање блокова после судара је описано бројевима 1,2,3,4,5 и 8, док бројеви 6,7,9 и 10 одговарају сценаријима у којима тела остају заједно. Најзад, као трећа напомена говори да се сценарио под бројем 11 у табели 3 не може остварити за изабрани модел вискоеластичног тела. Наиме, ако тела након судара остају у контакту и крећу се истим брзинама, нема промене дужине вискоеластичног штапа јер је сагласно (2.3), $x = x_C = const$, па се заменом у конститутивну једначину (2.4) добија

$$p + \tau_{p\alpha} p^{(\alpha)} = x_C + \tau_{x\alpha} \frac{x_C t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}. \quad (2.23)$$

У том случају су и убрзања блокова иста па се из једначина кретања (2.1) добија

$$\frac{p}{\rho} - \mu_2 Sgn(z_2^{(1)}) = -p - \mu_1 Sgn(z_1^{(1)}). \quad (2.24)$$

То значи да је и

$$p = \frac{\rho(\mu_2 - \mu_1)}{1 + \rho} = p_C = const, \quad (2.25)$$

па кад се (2.25) уврсти у (2.23) добија се да важи

$$p_C + \tau_{p\alpha} \frac{p_C t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} = x_C + \tau_{x\alpha} \frac{x_C t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad (2.26)$$

односно

$$\frac{p_C}{x_C} = 1 + \frac{(\tau_{x\alpha} - \tau_{p\alpha}) t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{1}{1 + \frac{\tau_{p\alpha} t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}}. \quad (2.27)$$

Последња релација, као количник две константне величине може бити испуњена само у случају да је $\tau_{x\alpha} = \tau_{p\alpha}$, а што је услов супротан ограничењу (2.5)₃ које диктира Клаузиус-Дијемова неједнакост, па се могућност сценарија 11 одбацује. Исто тврђење следи и из чињенице да је својство релаксације напона штапова код којих је заустављен процес деформације, природно, в. Тројер и др. [2011, 93] тако да је нужна промена унутрашње силе која више не може бити константна, а што је супротно (2.25).

2.4. *Нумерички метод*

У овој секцији приказаће се елементи поступка којим се сваки од горе наведених сценарија потврђује нумеричком анализом. У оквиру припреме за нумеричку интеграцију

Кошијевог проблема, прво се елиминише нехомогени почетни услов (2.12)₃ увођењем нових променљивих $y_1(t) = z_1(t) - \xi t$, и $y_2(t) = z_2(t)$, тако да се уместо система једначина (2.12) - (2.14) добија следећи систем

$$\begin{aligned} y_1^{(2)} &= -p + q_1, & y_2^{(2)} &= \frac{p}{\rho} + q_2, \\ y_1(0) &= 0, & y_1^{(1)}(0) &= 0, & y_2(0) &= 0, & y_2^{(1)}(0) &= 0, & p(0) &= 0, \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$p + \tau_{p\alpha} p^{(\alpha)} = y_1 + \xi t - y_2 + \tau_{x\alpha} (y_1^{(\alpha)} - y_2^{(\alpha)}) + \frac{\tau_{x\alpha} \xi \Gamma(2)}{\Gamma(2-\alpha)} t^{1-\alpha}, \quad (2.29)$$

$$-q_1 \in \mu_1 \text{Sgn} \left(y_1^{(1)} + \xi \right), \quad -q_2 \in \mu_2 \text{Sgn} \left(y_2^{(1)} \right), \quad (2.30)$$

у коме се препознају основна својства Риман-Лјувиловог фракционог извода, в. Олдхам и Спаниер [1974, 68]. Затим се уводи дискретно време са кораком интеграције h , ($t_m = mh$, $m = 0, 1, 2, \dots$). За први и други извод функције користе се стандардне апроксимације: $y_m^{(1)} = (y_{m+1} - y_m) / h$, и $y_m^{(2)} = (y_{m+1} - 2y_m + y_{m-1}) / h^2$, в. Ортега и Реинболт [1970, 69]. Извод реалног реда $u_m^{(\alpha)}$ се узима у облику $h^{-\alpha} \sum_{j=0}^m \omega_j u_{m-j}$, with ω_j где се коефицијенти ω_j израчунавају према рекурентним релацијама $\omega_0 = 1$ и $\omega_j = (1 - (\alpha + 1) / j) \omega_{j-1}$, ($j = 1, 2, 3, \dots$), што се сагласно терминологији из књиге Подлубнија назива фракциона диференцна апроксимација првог реда.

Иницирање алгорита интеграције је исто за сваки сценарио: из почетних услова (2.28)_{2,3,5,6,7} следи да за $m = 0$ важи $y_{1,0} = y_{2,0} = p_0$, док за $m = 1$ важи $y_{1,1} = y_{2,1} = 0$, а из конститутивне једначине (2.29), сагласно фракционим диференцим апроксимацијама првог реда добија следи

$$p_1 = \frac{1}{1 + \tau_{p\alpha} h^{-\alpha}} \xi \left[h + \tau_{x\alpha} \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2-\alpha)} (h)^{1-\alpha} \right].$$

За $m > 1$, сила у вискоеластичном штапу се у свакој фази алгорита рачуна на следећи начин:

$$\begin{aligned} p_m &= \frac{1}{1 + \tau_{p\alpha} h^{-\alpha}} \left\{ \xi \left[mh + \tau_{x\alpha} \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2-\alpha)} (mh)^{1-\alpha} \right] + (y_{1,m} - y_{2,m}) (1 + \tau_{x\alpha} h^{-\alpha}) + \right. \\ &\quad \left. + h^{-\alpha} \sum_{j=1}^m \left[\omega_j^{(\alpha)} (\tau_{x\alpha} (y_{1,m-j} - y_{2,m-j}) - \tau_{p\alpha} p_{m-j}) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

што се добија дискретизацијом конститутивне једначине (2.29), док за нове координате координате, за $m = 1, 2, 3, \dots$ важи

$$y_{1,m+1} = \begin{cases} 2y_{1,m} - y_{1,m-1} - h^2 (p_m + \mu_1) & y_{1,m+1} > y_{1,m} - m\xi h \\ 2y_{1,m} - y_{1,m-1} - h^{*2} (p_m + \mu_1) & m > m_p \quad y_{1,m+1} < y_{1,m} - m\xi h^* \end{cases} \quad (2.32)$$

$$y_{2,m+1} = \begin{cases} 2y_{2,m} - y_{2,m-1} + h^2 \left(\frac{p_m}{\rho} - \mu_2 \right) & m > m_d \wedge y_{2,m+1} > y_{2,m} \\ 2y_{2,m} - y_{2,m-1} + h^{*2} \left(\frac{p_m}{\rho} - \mu_2 \right) & m > m_p \wedge y_{2,m+1} > y_{2,m}. \end{cases} \quad (2.33)$$

Сада ће се објаснити изрази (2.32) и (2.33) и увођење слек варијабли којима се управља прелазом од првог реда (2.32) на други, као и одређују тренуци у којима се заустављају блокови. Тај прелаз и заустављање блокова, може а не мора да се догоди, а што зависи од улазних параметара система: почетне брзине блока 1, односа маса блокова, параметара вискоеластичног штапа и коефицијената трења.

Први ред у (2.32) је интеграција једначине кретања блока 1 при клизању удесно тј.

$$y_{1,m}^{(2)} = -p_m - \mu_1, \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.34)$$

при чему се користи (2.31), а што важи све док је испуњен услов

$$y_{1,m}^{(1)} + \xi > 0. \quad (2.35)$$

На блок 2 почеће да делује сила p_m која изазива појаву силе трења, међутим блок 2 ће остати у стању мировања све док сила трења не пређе своју граничну вредност

$$p_m > \rho\mu_2, \quad (2.36)$$

када блок 2 започиње кретање удесно. Ако је то предвиђено сценаријом, што може а не мора да се догоди, тј. ако се наруши услов (2.36) нпр. за $m = m_d$, тада се заједно са (2.34) интегрални и једначина кретања другог блока

$$y_{2,m}^{(2)} = \frac{p_m}{\rho} - \mu_2, \quad m = m_d + 1, m_d + 2, \dots \quad (2.37)$$

Током интеграције поред услова (2.35) потребно је проверавати и услов

$$y_{2,m}^{(1)} > 0, \quad (2.38)$$

који важи за клизање блока 2 удесно. Овај сегмент описан је у првом реду (2.33).

Даље се бројач m се повећава тако да се на основу свих израчунатих вредности обе координате и силе израчунава вредност контактне силе у следећој итерацији према (2.31) да би се та вредност уврстила у (2.34) и (2.37) понављајући поступак све док или у неком тренутку $t = T$ контактна сила $p(T)$ постане једнака нули, када важи $z_1^{(1)}(T) = y^{(1)} + \xi < z_2^{(1)}(T) = y^{(2)} > 0$, што одговара сваком од сценарија раздвајања, или се не наруше услови (2.35) или (2.38). Јасно је да због оба типа дисипације енергије може доћи до нарушавања услова (2.35) и (2.38). Очигледно се прелаз у алгоритму од првог на други ред у (2.32) догађа у тренутку када је брзина клизања блока 1 једнака нули. Потребно је наћи тај тренутак, а затим и испитати да ли ће блок 1 наставити

клизање у другу страну или се зауставити. Дакле, нека се прво наруши услов (2.35). Тада је потребно да се запамти последња вредност m пре нарушавања услова (2.35), и одговарајући тренутак времена t . Нека бројач/индекс m_P и тренутак t_{m_P} одговарају тренутку непосредно пре нарушавања услова (2.35). На овом месту се уводи слек варијабла $\kappa = y_{1,m}^{(1)} + \xi$ и коришћењем Ојлеровог метода у проширеном простору стања, сагласно Тарнеровом алгоритму, у једном кораку/итерацији се добија временски тренутак t_1^* који одговара услову $\kappa^* = 0$, у следећем облику

$$t_1^* = t_{m_P} + \frac{1}{-p_{m_P} - \mu_1}(\kappa^* - \kappa_0), \quad (2.39)$$

где је $\kappa_0 = y_{1,m_1}^{(1)} + \xi$.

Да би се добило стање система у тренутку $t = t_1^*$ од тренутка t_{m_P} потребно је поновити поступак интеграције али сада са кораком $h_1 = t_1^* - t_{m_P} < h$, што због примене Грунвалд-Летникове шеме са фиксним кораком на неки начин представља проблем. Уместо тога, имајући у виду да је трајање судара релативно кратко, поновиће се интеграција од почетног тренутка $t = 0$ са новим кораком $h^* = h + h_1/m_P$, тако да ће се после m_P понављања стићи до тренутка t_1^* у коме је испуњен услов за промену динамичког модела и у коме је познато стање система, добијено узимањем у обзир историје деформације, које претходи евентуалном наставку кретања. Наиме, ако није сва почетна енергија система ишчезла, даље се на израчунато стање у тренутку t_1^* редно наставља кретање по моделу са другим смером силе трења за блок 1, при чему су почетни услови новог кретања једнаки крајњим условима претходног, в. Спасић 2011. Другим речима, брзина блока 1 $z_1^{(1)}$ у тренутку t_1^* је једнака нули, а пре него што се настави даље, треба проверити услов да ли је сила у вискоеластичном штапу већа од граничне силе трења коју сада треба узети са супротним знаком, тј. проверити да ли је

$$|p(t_1^*)| > |q_1(t_1^*)|. \quad (2.40)$$

Ако је тај услов испуњен, започиње кретање у супротном смеру, а ако није блок 1 се зауставља, сила трења као неглатка вишевредносна функција је мања од граничне вредности и једнака сили у вискоеластичном штапу. За одређивање кретања блока 1 улево користи се други ред у (2.32) тј. модел

$$y_{1,m}^{(2)} = -p_m + \mu_1, \quad m = m_P + 1, m_P + 2, \dots \quad (2.41)$$

заједно са (2.37), који важи под условом

$$y_{1,m}^{(1)} + \xi < 0, \quad (2.42)$$

при чему је корак интеграције h^* . При кретању блока 1 улево сила трења је на граничној вредности, а штап се релаксира, тако да сила у штапу може постати мања од граничне

силе трења што би водило заустављању блока 1. Наиме ако се наруши услов (2.42), тада је потребно запамтити последњу вредност бројача m пре нарушавања услова (2.42) као и одговарајући временски тренутак t , нека су то m_R и t_{m_R} , а затим још једном увести слек варијаблу κ али овај пута за модел (2.41) да би се одредио тренутак када му брсина постаје нула t_2^* . Тренутак у коме је блок 1 ушао у фазу приљубљивања, тј. зауставио се, дат је са

$$t_2^* = t_{m_R} + \frac{1}{-p_{m_R} + \mu_1} (\kappa^* - \kappa_1), \quad (2.43)$$

где су $\kappa_1 = y_{1,m_R}^{(1)} + \xi$ и $\kappa^* = 0$. Бројач m се даље повећава и наставља се са интеграцијом само једначине (2.37) са $m = m_R + 1, m_R + 2, \dots$, јер блок 1 остаје у стик фази, због тога што нема спољашњих сила које могу променити његов положај. Слична разматрања важе и за кретање блока 2 удесно. Наиме, када се наруши услов (2.38), забележе се вредности m и временског тренутка t непосредно пре нарушавања услова (2.38), нпр. m_3 и t_{m_3} а затим се уведе нова слек варијабла $\nu = y_{2,m}^{(1)}$ за контакт блока 2, и понови процедура за одређивање временског тренутка t_3^* ,

$$t_3^* = t_{m_3} + \frac{1}{-\mu_2 + \frac{p_{m_3}}{\rho}} (\nu^* - \nu_0) \quad (2.44)$$

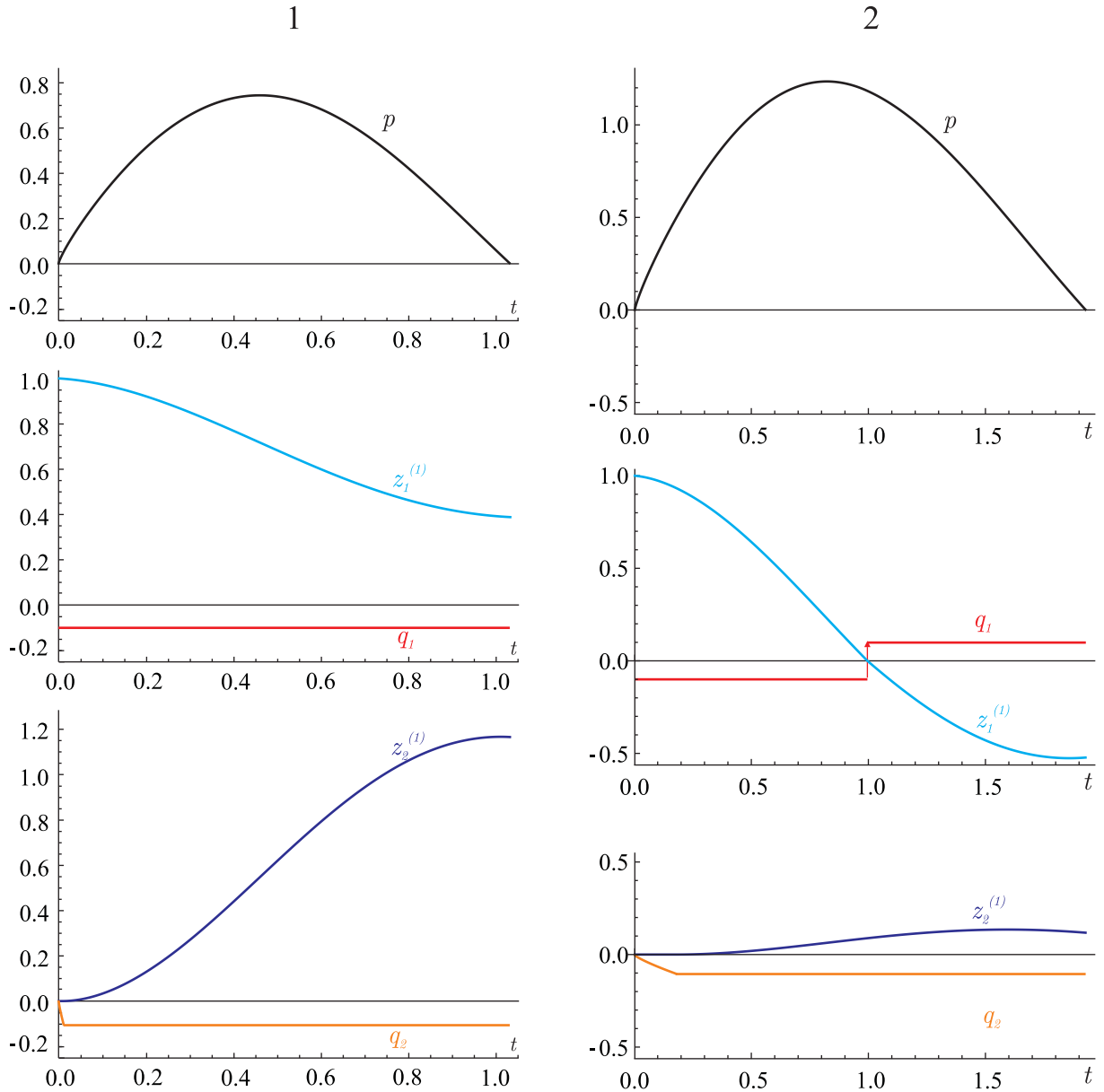
где су $\nu_0 = y_{2,m_3}^{(1)}$ и $\nu^* = 0$.

Нумеричка имплементација алгоритма урађена је у програмском пакету *Mathematica*, а резултати њеног извршавања за различите вредности улазних параметара предмет су наредне секције.

2.5. Резултати и дискусија

Нумерички експерименти потврдили су могуће сценарије судара два тела. При томе је сваки експеримент иницијално урађен са једним кораком, а затим поновљен са другим, (мањим) како би се добиле овде приказане значајне цифре. У свим израчунавањима константе вискоеластичног штапа (2.4) су преузете из рада Фенандера [1998, 35], бездимензијска почетна брзина ξ је једнака 1 а почетна вредност корака интеграције је 10^{-3} . Вредности коефицијента трења су претпостављене као код процеса у којима нема судара. На сл. 2.3 је приказано решење система једначина (2.12) до (2.14) за $\alpha = 0.23$, $\tau_{p\alpha} = 0.004$, $\tau_{x\alpha} = 1.183$ и за два скира коефицијената трења μ_1 , μ_2 и односа маса ρ .

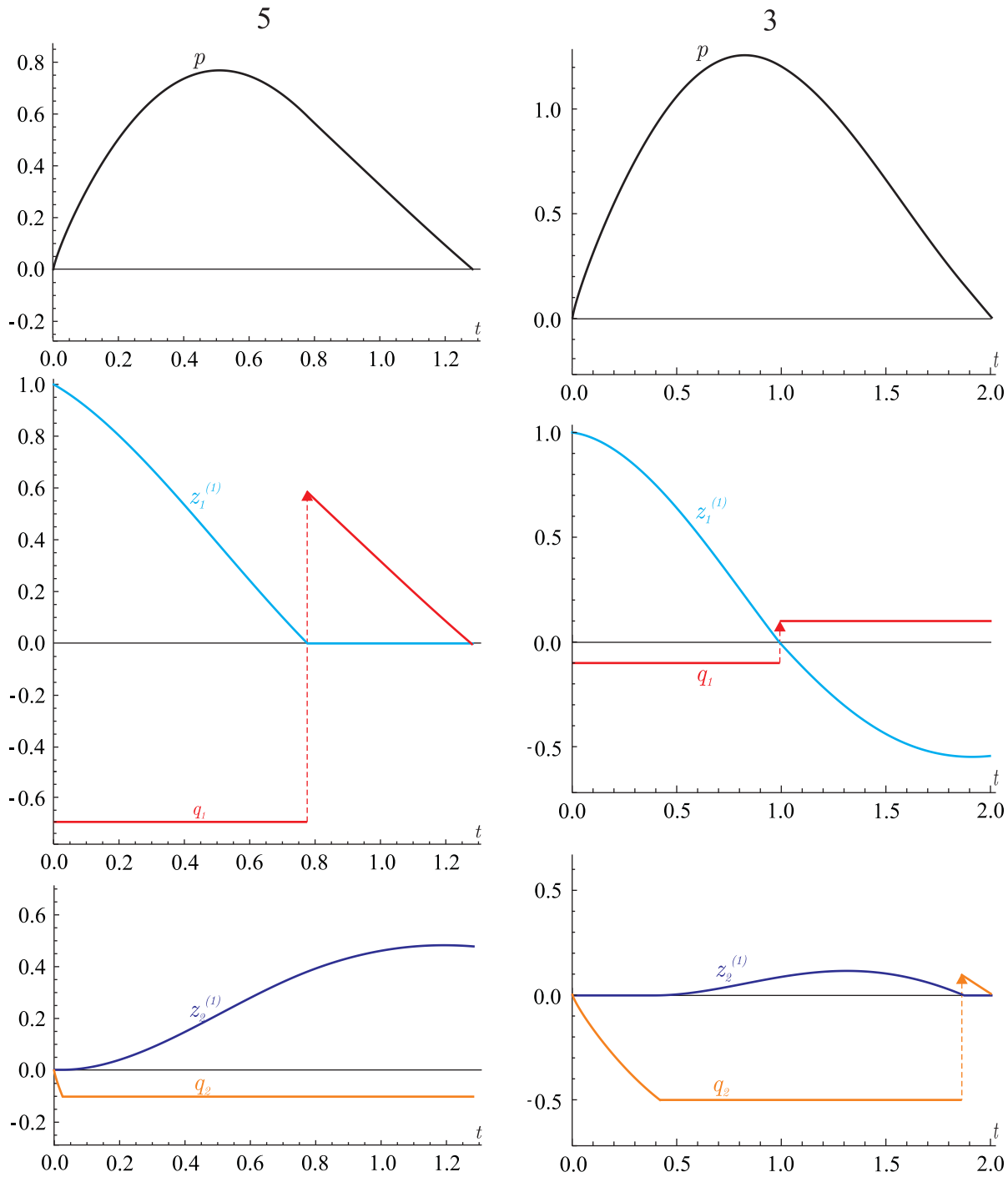
Сценарио раздвајања 1 се добија за $\mu_1 = \mu_2 = 0.1$ и $\rho = 0.4$. Време трајања судара је $T = 1.033$, у том тренутку брзине блокова су истог смера и износе $z_1^{(1)}(T) = 0.394$, $z_2^{(1)}(T) = 1.154$. Ако је $\mu_1 = \mu_2 = 0.1$ и $\rho = 5$ блокови ће се раздвојити након $T = 1.934$ са брзинама супротних смерова $z_1^{(1)}(T) = -0.522$, $z_2^{(1)}(T) = 0.118$ што одговара сценарију 2. За случај када је $\mu_1 = 0.7$, $\mu_2 = 0.1$ и $\rho = 1$ судар се завршава у тренутку $T = 1.283$ а стање система након судара одређено је са $z_1^{(1)}(T) = 0$, $z_2^{(1)}(T) = 0.476$ и то одговара сценарију 5. Сценарио раздвајања блокова после судара 3 се добија за $\mu_1 = 0.1$, $\mu_2 = 0.5$ и $\rho = 1.8$ и тада је



Слика 2.3. Атрибути током судара за $\alpha = 0.23$, $\tau_{p\alpha} = 0.004$, $\tau_{x\alpha} = 1.183$ и $\rho = 0.4$, $\mu_1 = \mu_2 = 0.1$ (сл. 1), $\rho = 5$, $\mu_1 = \mu_2 = 0.1$ (сл. 2).

време трајања судара $T = 2.004$ а блокови у том тренутку имају брзине $z_1^{(1)}(T) = -0.544$, $z_2^{(1)}(T) = 0$ респективно. На сликама 2.3 и 2.4 треба приметити да се сила трења током судара, скоковито мења и да у фази приљубљивања може имати било коју вредност између граничних што је сагласно разматрањима из монографије Глокера [2001, 41].

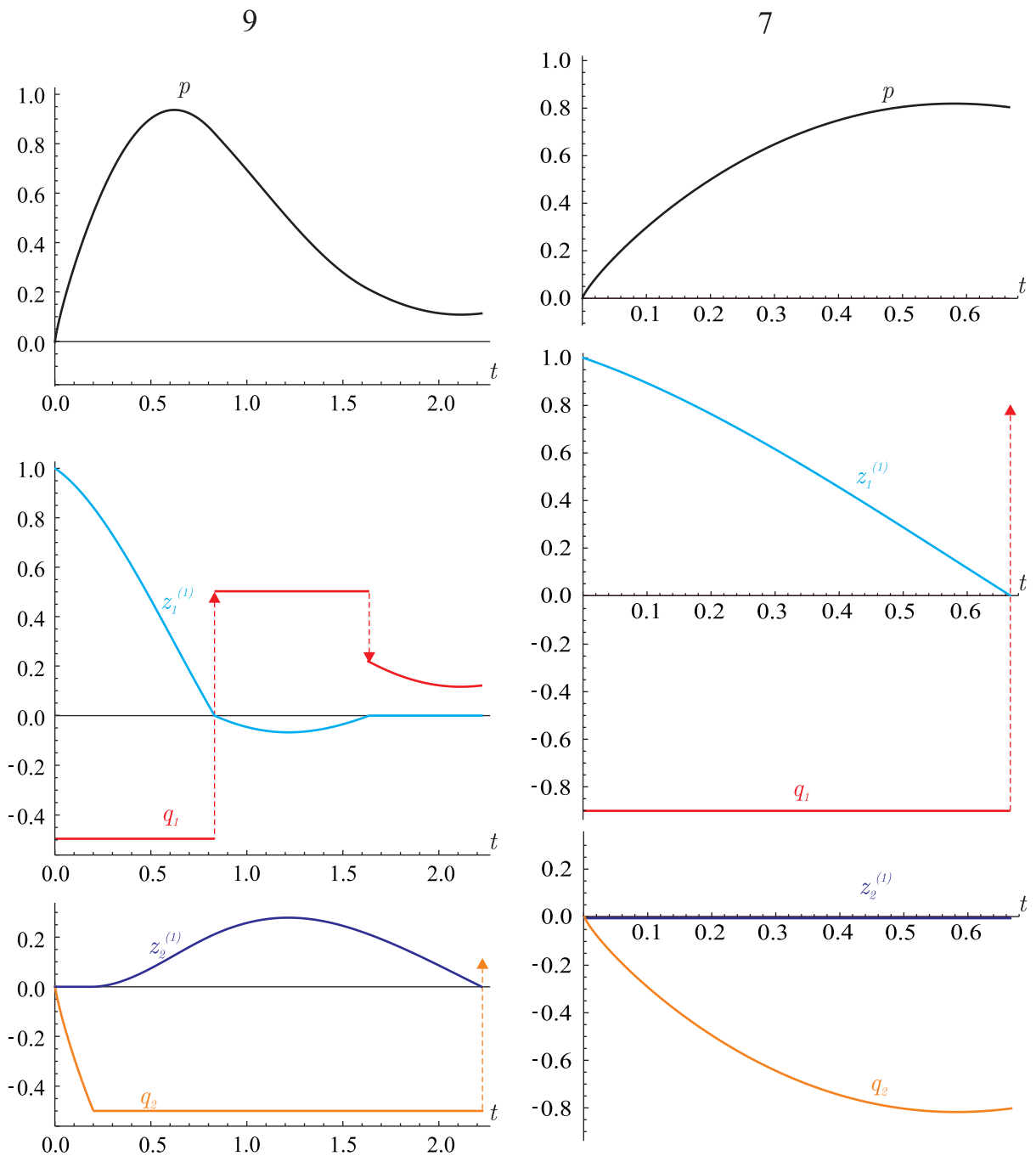
На сл. 2.5 су приказана решења за $\alpha = 0.23$, $\tau_{p\alpha} = 0.004$, $\tau_{x\alpha} = 1.183$ и два скупа улазних података (ρ , μ_1 и μ_2). У случају да је $\rho = 1$, $\mu_1 = \mu_2 = 0.5$ добија се да судар завршава после $T = 2.004$ и да су тада блокови у равнотежи што значи да су на крају судара силе трења



Слика 2.4. Атрибути током судара за $\alpha = 0.23$, $\tau_{p\alpha} = 0.004$, $\tau_{x\alpha} = 1.183$ и $\rho = 1$, $\mu_1 = 0.7$, $\mu_2 = 0.1$ (сц. 5), и $\rho = 1.8$, $\mu_1 = 0.5$, $\mu_2 = 0.1$ (сц. 3).

q_1 и q_2 једнаке сили у вискоеластичном штапу p и износе 0.115. До заустављања је дошло у фази раздвајања што представља сценарио 9. За $\rho = 4$, $\mu_1 = \mu_2 = 0.9$ у положај равнотеже блокови ће доспети у фази приближавања за време $T = 0.667$, што одговара сценарију 7.

На крају судара контактна сила $p(T) = 0.804$, а сила трења на блоку 1 у тренутку T има скок од -0.9 до $q_1(T) = 0.804$.



Слика 2.5. Атрибути током судара за $\alpha = 0.23$, $\tau_{p\alpha} = 0.004$, $\tau_{x\alpha} = 1.183$ и $\rho = 1$, $\mu_1 = \mu_2 = 0.5$ (сц. 9) и $\rho = 4$, $\mu_1 = \mu_2 = 0.9$ (сц. 7).

У табели 4 је приказано како се мења стање система након судара у зависности од промене коефицијента трења μ_2 за задате вредности $\alpha = 0.23$, $\tau_{p\alpha} = 0.004$, $\tau_{x\alpha} = 1.183$, $\rho = 1$.

Види се да се повећењем μ_2 повећева дисипација енергије у судару и да ће за $\mu_2 > 0.6$ тела након судара остати у контакту.

Табела 4. Атрибути судара за $\mu_1 = 0.4$, $\rho = 1$, $\alpha = 0.23$, $\tau_{p\alpha} = 0.004$ и $\tau_{x\alpha} = 1.183$ и за различите вредности коефицијента трења μ_2

μ_2	0	0.01	0.1	0.2	0.4	0.6	0.9
p_{\max}	0.831	0.834	0.864	0.897	0.956	1.007	1.059
$t_{p\max}$	0.545	0.547	0.564	0.584	0.623	0.664	0.722
x_{\max}	0.363	0.365	0.380	0.395	0.425	0.451	0.480
$t_{x\max}$	0.625	0.627	0.646	0.668	0.712	0.757	0.823
T	1.241	1.248	1.323	1.422	1.717	2.156	2.884
$z_1^{(1)}(T)$	0	0	0	0	0	0	0
$z_2^{(1)}(T)$	0.662	0.655	0.590	0.506	0.277	0	0
$p(T)$	0	0	0	0	0	0.142	0.014
$q_1(T)$	0	0	0	0	0	0.142	0.014
$q_2(T)$	0	-0.01	-0.1	-0.2	-0.4	-0.142	-0.014
$\Delta(T)$	0.281	0.286	0.326	0.372	0.462	0.5	0.5

Сви сценарији за судар два тела су нумерички потврђени и за $\alpha = 0.49$, $\tau_{p\alpha} = 5 \times 10^{-8}$, $\tau_{x\alpha} = 0.886$. Да би се испитао утицај почетног корака интеграције на резултате добијене предложеном нумеричком процедуром, он је смањен на 10^{-4} а затим су поновљени нумерички експерименти и резултати се слажу на трећу децималу. Као што је и очекивано у случају када $m_2 \rightarrow \infty$ потврђују се резултати приказани у раду Граховца и др. [2011, 47], док се за случај када нема сувог трења резултати из прве колоне табеле 4 поклапају са резултатима приказаним у раду Атанацковића и Спасића [2004, 6].

Са повећањем реда извода α повећева се дисипација у вискоеластичном штапу, видети табеле 5 и 6 где је приказано стање након судара за $\mu_1 = 0.1$, $\mu_2 = 0.1$, два различита вискоеластична материјала и променљив однос маса ρ . У табелама се такође може видети да се за исту вредност односа маса, нпр. $\rho = 0.8$ предвиђају два различита сценарија, 2 за вискоеластични елемент са $\alpha = 0.23$ а 5 за $\alpha = 0.49$.

У табелама 5 и 6 се може видети и утицај односа маса ρ на стање система након судара. Повећањем масе m_2 примећује се да систем тежи ка сценарију у коме блок 2 неће ни започети кретање.

Табела 5. Атрибути судара за $\mu_1 = 0.1$, $\mu_2 = 0.4$, $\alpha = 0.23$, $\tau_{p\alpha} = 0.004$ и $\tau_{x\alpha} = 1.183$ и за различите вредности односа маса ρ

ρ	0.2	0.5	0.8	1	1.25	2	2.5	5
p_{\max}	0.627	0.890	1.028	1.090	1.146	1.238	1.265	1.277
$t_{p\max}$	0.362	0.541	0.641	0.687	0.731	0.814	0.845	0.867
x_{\max}	0.259	0.388	0.458	0.489	0.519	0.568	0.584	0.592
$t_{x\max}$	0.416	0.618	0.730	0.782	0.832	0.924	0.960	0.968
T	0.820	1.222	1.461	1.590	1.715	1.959	2.031	2.041
$z_1^{(1)}(T)$	0.589	0.184	-0.038	-0.144	-0.262	-0.508	-0.607	-0.956
$z_2^{(1)}(T)$	1.321	0.909	0.622	0.475	0.327	0.026	0	0
$p(T)$	0	0	0	0	0	0	0	0
$q_1(T)$	-0.1	-0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
$q_2(T)$	-0.4	-0.4	-0.4	-0.4	-0.4	-0.4	0	0
$\Delta(T)$	0.152	0.276	0.345	0.377	0.399	0.370	0.316	0.283

У вези поређења овог приступа са Фремоновим који је кратко приказан у секцији 1.2, могу се напоменути две ствари. Прво овде предложени приступ покрива оба сценарија која предвиђа фремонов приступ. Истина број могућих сценарија о којима се говори у овој тези је много већи од два, међутим и систем који се овде анализира је битно другачији. Тела нису само крута као у примеру Фремона већ имају и вискоеластични слој, а и клизе у присуству сувог трења, тако да не важи интеграл количине кретања о коме је било речи у поменутој секцији. Најзад, друга напомена тиче се примене. За Фремонов приступ потребно је одређивање константи које улазе у псеудопотенцијал дисипације што захтева посебне експерименте. Број тих константи може да варира јер је класа функција које могу да буду глатки део псеудопотенцијала прилично широка. Проблем се опет своди на решавање алгебарских једначина уз комбинаторну анализу. У приступу који је предложен у овој тези број константи је фиксиран - 4 за опис вискоеластичног штапа и 2 коефицијента трења - а уз то оне се одређују из типизираних и релативно једноставних експеримената, што свакако представља предност. Цена која се за ту предност плаћа је решавање неглатких вишевредносних диференцијалних једначина произвољног реалног реда. Истина је да еволуција електронских рачунара и необична, широко распрострањена доступност њихових ресурса, ту цену из дана у дан обара, тако да предност алгебарских у односу на диференцијалне једначине постаје све мања.

Најзад, из резултата приказаних у овој секцији, види се да предложени приступ

Табела 6. Атрибути судара за $\mu_1 = 0.1$, $\mu_2 = 0.4$, $\alpha = 0.49$, $\tau_{p\alpha} = 5 \times 10^{-8}$ и $\tau_{x\alpha} = 0.886$ и за различите вредности односа маса ρ

ρ	0.2	0.5	0.8	1	1.25	2	2.5	5
p_{\max}	0.553	0.768	0.882	0.933	0.98	1.055	1.073	1.075
$t_{p\max}$	0.286	0.460	0.561	0.609	0.655	0.743	0.776	0.782
x_{\max}	0.240	0.377	0.454	0.490	0.523	0.580	0.596	0.598
$t_{x\max}$	0.417	0.644	0.773	0.833	0.891	1.000	1.042	1.050
T	0.819	1.284	1.559	1.771	1.980	2.219	2.199	2.196
$z_1^{(1)}(T)$	0.630	0.248	0	-0.066	-0.173	-0.418	-0.483	-0.488
$z_2^{(1)}(T)$	1.111	0.738	0.467	0.307	0.145	0	0	0
$p(T)$	0	0	0	0	0	0	0	0
$q_1(T)$	-0.1	-0.1	0	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
$q_2(T)$	-0.4	-0.4	-0.4	-0.4	-0.4	0	0	0
$\Delta(T)$	0.178	0.333	0.413	0.451	0.472	0.413	0.383	0.381

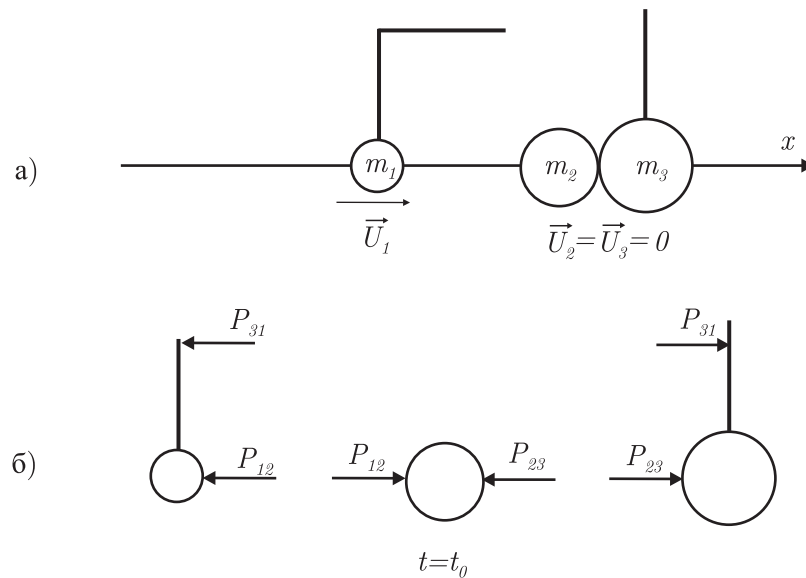
на једнозначан начин, за фиксиране вредности улазних параметара, одређује атрибуте који описују судар два тела. При томе се покрива велики број различитих сценарија које предвиђају експерименти. Та чињеница није без значаја за примене у различитим областима инжењерства, нпр. код механизма у којима је треће неизбежно а судари се често срећу, различитим роботима-манипулаторима, код вођица у којима постоје зазори, затим у реконструкцији саобраћајних незгода, машина за дозирање итд., о чему говоре радови Попа [2000, 77], Штефана [2009, 87], Дуартеа и Мачада [2009, 30], Ванђија [2009, 90], Флореса и коаутора [2010, 36], или књиге Фајфера и Глокера [1996, 73], те Хуанга, [2002, 50] при чему би листа могла бити много дужа.

3. Проблем судара три тела

Аргументи анализе судара два тела се могу користити и у анализи судара три тела. Овде ће се дати само илустрација тог става јер навођење свих корака и детаља анализе судара три тела, као и свих могућих сценарија за тај систем, далеко превазилази оквире ове тезе. Овај део тезе је више илустрација примењивости предложеног приступа на систем са једним степеном слободне кретања више. И за ту илустрацију од користи може бити Фремонов приступ.

3.1. Фремонов приступ за судар три кугле

Посматра се систем који чине три круте кугле маса m_1 , m_2 и m_3 које без обртања и без трења могу да се крећу дуж x осе, в. сл. 3.1а. Проблем је детаљно анализиран у књизи Фремона [2002, 38] док ће у овој тези бити приказани само најзначајнији резултати, тј. проблем како се за познато стање система непосредно пре судара одређује стање непосредно након судара.



Слика 3.1. а) Вишеструки судар кугли које се крећу праволинијски, б) Ударни импулси који делују на кугле (декомпозиција система).

Посматрани систем је деформабилан јер се растојања између кугли током кретања мењају тако да систем мења свој облик. Брзине деформација су

$$\begin{aligned} D_{12} &= U_1 - U_2, \\ D_{23} &= U_2 - U_3, \\ D_{31} &= U_3 - U_1. \end{aligned} \tag{3.1}$$

где D_{ij} ($i \neq j; i, j = 1, 2, 3$) представљају релативне брзине између кугли “ i ” и “ j ”. Нека су: P_{12} ударни импулс између кугли “1” и “2”, P_{23} ударни импулс између кугли “2” и “3”, P_{31} ударни импулс између кугли “1” и “3” (нема контакта кугли 1 и 3, али претпоставка је постоји међусобна интеракција и ове две кугле, нпр. лаки штап од кугле 1 контактира лаки штап везан за куглу 3).

У наставку ће се решавати проблем у коме су масе кугли једнаке $m_1 = m_2 = m_3 = m$. Узимајући ово у обзир, на основу дистрибуцијског модела судара добијају се следеће једначине

$$\begin{aligned} m[U_1] &= -P_{12} - P_{31} \\ m[U_2] &= -P_{23} + P_{12} \\ m[U_3] &= P_{13} + P_{23}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где су скоковите промене брзина кугли означене са $[U_i] = U_i^+ - U_i^-$, $i = 1, 2, 3$. Псеудопотенцијал дисипације на основу којег се добија веза између ударних импулса и брзина деформације према аналогiji са (1.4) је усвојен у следећем облику

$$\Psi_1(D_{12}, D_{23}, D_{31}) = \frac{1}{2}k(D_{12})^2 + \frac{1}{2}k(D_{23})^2 + \frac{1}{2}\nu(D_{31})^2 + I_-(D_{12}^+) + I_-(D_{23}^+), \quad (3.3)$$

при чему функција Ψ_1 задовољава исте услове као и псеудопотенцијал дисипације Ψ у секцији 1.2 ове тезе. Уведене индикаторске функције изражавају услове да нема продирања једне кугле у другу. Коefицијенти k и ν се одређују експериментално. Ударни импулси се добијају инклузијом, примењеном на суб-диференцијал псеудопотенцијала дисипације Ψ_1 и то доводи до израза

$$\begin{aligned} P_{12}(D_{12}^+ + D_{12}^-) &= k((U_1^+ + U_1^-) - (U_2^+ + U_2^-)) + \partial I_-(U_1^+ - U_2^+) \\ P_{23}(D_{23}^+ + D_{23}^-) &= k((U_2^+ + U_2^-) - (U_3^+ + U_3^-)) + \partial I_-(U_2^+ - U_3^+) \\ P_{13}(D_{13}^+ + D_{13}^-) &= \nu((U_3^+ + U_3^-) - (U_1^+ + U_1^-)), \end{aligned} \quad (3.4)$$

Нека кугла 1 удара у две преостале кугле, које се мирују и додирују се, наиме нека је пре судара: $U_1^- > 0$ и $U_2^- = U_3^- = 0$. У овом случају једначине кретања (3.2) заједно са (3.4) су

$$\begin{aligned} m(U_1^+ - U_1^-) &= -k(U_1^+ + U_1^- - U_2^+) - A + \nu(U_3^+ - U_1^+ - U_1^-) \\ mU_2^+ &= -k(U_2^+ - U_3^+) - B + k(U_1^+ + U_1^- - U_2^+) + H \\ mU_3^+ &= -\nu(U_3^+ - U_1^+ - U_1^-) + k(U_2^+ - U_3^+) + W, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где је $H = \partial I_-(U_1^+ - U_2^+)$ а $W = \partial I_-(U_2^+ - U_3^+)$. Решење система (3.5) за различите вредности масе m и параметара k и ν се добија у четири различита облика.

Случај 1: Кугле 1 и 2 су у контакту док се кугла 3 одвојила

У овом случају важи да је H позитивно, $U_1^+ = U_2^+$ и $W = 0$ јер је $U_2^+ - U_3^+ < 0$. Решавањем система једначина (3.5) добијају се следеће вредности брзине кугли после судара и импулса

$$\begin{aligned}
 U_1^+ &= U_2^+ = \frac{m+k}{2m+3k+3\nu} U_1^- \\
 U_3^+ &= \frac{k+3\nu}{2m+3k+3\nu} U_1^- \\
 H &= \frac{m^2-3k^2-6k\nu}{2m+3k+3\nu} U_1^-
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Изрази (3.6) представљају решење проблема вишеструког судара ако и само ако важе следећа два услова: $H > 0$ и $U_3^+ > U_2^+$, а они ће важити за $m^2 - 3k^2 - 6k\nu > 0$ и $3\nu > m$.

Случај 2: Након судара све кугле остају у контакту

У овом случају величине H и W морају бити позитивне, $U_1^+ = U_2^+ = U_3^+ > 0$. Решавањем система једначина (3.5) добијају се следеће вредности брзине кугли после судара и импулса

$$\begin{aligned}
 U_1^+ &= U_2^+ = U_3^+ = \frac{m+k}{2m+3k+3\nu} U_1^- \\
 H &= \frac{k+3\nu}{2m+3k+3\nu} U_1^- \\
 W &= \frac{m^2-3k^2-6k\nu}{2m+3k+3\nu} U_1^-
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Ово су решења постављеног проблема судара три кугле ако и само ако су испуњени следећи услови: $\nu < \frac{m}{3}$ и $\nu < \frac{2m}{3} - k$.

Случај 3: Кугла 2 се одваја од кугле 1 и наставља да се креће заједно са куглом 3

Након судара постоји контакт између кугли 2 и 3 па је $W > 0$ и $U_2^+ = U_3^+ > U_1^+$, а због раздвајања кугле 1 важи да је $H = 0$. Узимајући ово у обзир решен је систем (3.5) и добијена су следећа решења

$$\begin{aligned}
 U_1^+ &= \frac{m+k}{2m+3k+3\nu} U_1^- \\
 U_2^+ &= U_3^+ = \frac{k+3\nu}{2m+3k+3\nu} U_1^- \\
 W &= \frac{m^2-3k^2-6k\nu}{2m+3k+3\nu} U_1^-
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Да би изрази (3.8) били решења вишеструког судара морају бити испуњена следећа два услова: $\nu < k$ и $\nu < \frac{2m}{3} - k$.

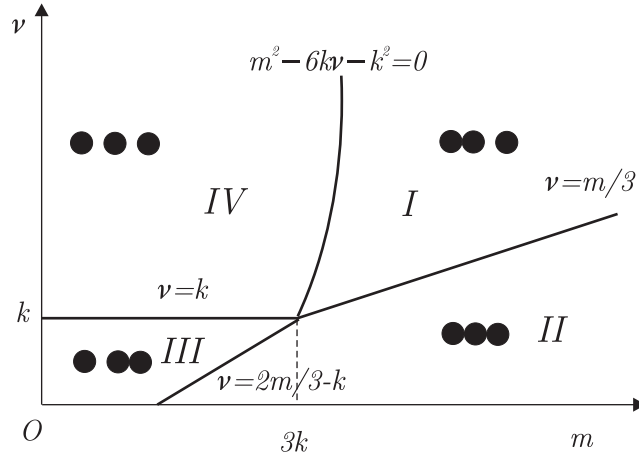
Случај 4: Раздвајање после судара, нема контакта између кугли

Након судара све кугле се крећу независно једна од друге, нема контакта између њих па је $H = W = 0$, а брзине задовољавају следећи услов $U_3^+ > U_2^+ > U_1^+$. Решење система (3.5) у овом случају је

$$\begin{aligned}
 U_1^+ &= \frac{m+k}{2m+3k+3\nu} U_1^- \\
 U_2^+ &= \frac{k+3\nu}{2m+3k+3\nu} U_1^- \\
 U_3^+ &= \frac{m^2-3k^2-6k\nu}{2m+3k+3\nu} U_1^-
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

где морају бити испуњени следећи услови: $\nu > k$ и $m_2 - 3k_2 - 6k\nu < 0$.

Ако се фиксира коефицијент k , у координатном систему Omv се могу графички приказати области параметара система које одговарају различитим сценаријима вишеструког судара три кугле. Одговарајуће области су приказане на сл. 3.2.

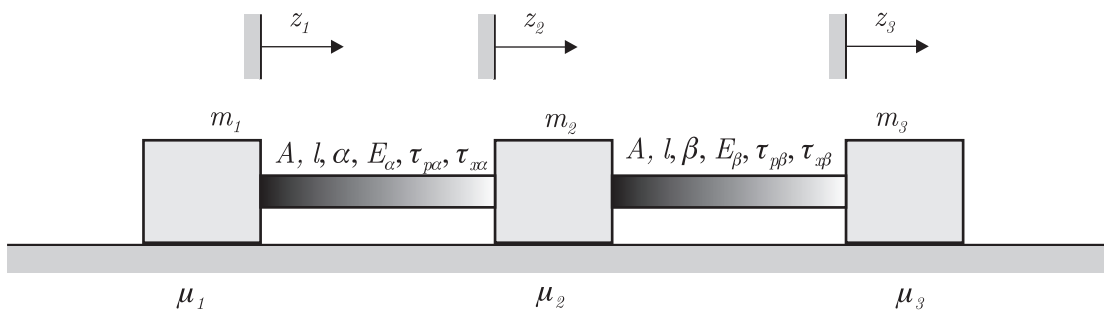


Слика 3.2. Графички приказ могућих сценарија вишеструког судара три кугле у зависности од масе кугли m и коефицијента ν за фиксирану вредност коефицијента k (добијено Фремоновим приступом).

Треба приметити да се употребом Фремоновог приступа на проблем вишеструког судара три тела укључује дисипација енергије али да питање избора коефицијената у псеудопотенцијалу дисипације и даље остаје отворено.

3.2. Приступ круто тело са вискоеластичним слојем и сувим трењем

На систем који се састоји од два блока који се крећу по храпавој подлози, проучаван у поглављу 2, додаје се још један крути блок за који је везан вискоеластични штап, в. 3.3.



Слика 3.3. Проблем судара три тела.

Извођење једначина кретања које описују вишеструки судар три тела се врши на потпуно исти начина као и у случају два тела што је детаљно описано у поглављу 2 овог рада. Систем једначина које описују вишеструки судар три тела у димензијском облику заједно са почетним условима је

$$\begin{aligned}
 m_1 z_1^{(2)} &= -p_1 + q_1, \\
 m_2 z_2^{(2)} &= p_1 - p_2 + q_2, \\
 m_3 z_3^{(2)} &= p_2 + q_3,
 \end{aligned}
 \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}
 z_1(0) &= 0, \quad z_1^{(1)}(0) = v_0, \quad p_1(0) = 0, \\
 z_2(0) &= 0, \quad z_2^{(1)}(0) = 0, \quad p_2(0) = 0, \\
 z_3(0) &= 0, \quad z_3^{(1)}(0) = 0,
 \end{aligned}
 \tag{3.11}$$

где су p_1 и p_2 контактне силе а $q_i, i = 1, 2, 3$, представљају силе трења, видети сл. 3.4. Силе трења и силе у вискоеластичним штаповима су описане на следећи начин

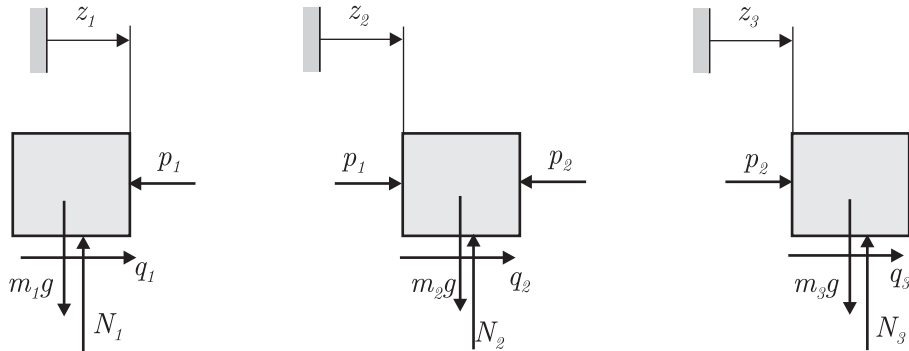
$$-q_i \in \mu_i m_i g \operatorname{Sgn} \left(z_i^{(1)} \right), \quad i = 1, 2, 3,
 \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}
 p_1 + \tau_{p\alpha} p_1^{(\alpha)} &= \frac{E_\alpha A}{l} (x_1 + \tau_{x\alpha} x_1^{(\alpha)}), \quad x_1 = z_1 - z_2, \\
 p_2 + \tau_{p\beta} p_2^{(\beta)} &= \frac{E_\beta A}{l} (x_2 + \tau_{x\beta} x_2^{(\beta)}), \quad x_2 = z_2 - z_3,
 \end{aligned}
 \tag{3.13}$$

при чему коефицијенти модификованог Зенеровог модела морају задовољити следеће неједнакости

$$E_\alpha > 0, \quad E_\beta > 0, \quad \tau_{p\alpha} > 0, \quad \tau_{p\beta} > 0, \quad \tau_{x\alpha} > \tau_{p\alpha}, \quad \tau_{x\beta} > \tau_{p\beta},
 \tag{3.14}$$

које су последица другог закона термодинамике.



Слика 3.4. Декомпонован систем три тела.

Да би се проблем превео у бездимензијску форму уводе се следеће бездимензијске величине

$$\bar{p}_j = \frac{p_j}{m_1 g}, \quad \bar{q}_i = \frac{q_i}{m_1 g}, \quad \bar{x}_j = \frac{x_j E_\alpha A}{m_1 g t}, \quad \bar{z}_i = \frac{z_i E_\alpha A}{m_1 g t}, \quad \bar{t} = t \sqrt{\frac{E_\alpha A}{m_1 t}}, \quad (3.15)$$

$$\varepsilon = \frac{E_\beta}{E_\alpha}, \quad \rho_1 = \frac{m_2}{m_1}, \quad \rho_2 = \frac{m_3}{m_1}, \quad \bar{\tau}_{p\gamma} = \tau_{p\gamma} \left(\frac{E_\alpha A}{m_1 t} \right)^{\frac{\gamma}{2}}, \quad \bar{\tau}_{x\gamma} = \tau_{x\gamma} \left(\frac{E_\alpha A}{m_1 t} \right)^{\frac{\gamma}{2}}, \quad \xi = \frac{v_0}{g} \sqrt{\frac{E_\alpha A}{m_1 t}},$$

Проблем вишеструког судара три тела у бездимензијској форми је описан следећим једначинама

$$\begin{aligned} z_1^{(2)} &= -p_1 + q_1, \quad z_1(0) = 0, \quad z_1^{(1)}(0) = \xi, \quad p_1(0) = 0, \\ z_2^{(2)} &= \frac{p_1}{\rho_1} - p_2 + q_2, \quad z_2(0) = 0, \quad z_2^{(1)}(0) = 0, \quad p_2(0) = 0, \\ z_3^{(2)} &= \frac{p_2}{\rho_2} + q_3, \quad z_3(0) = 0, \quad z_3^{(1)}(0) = 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$p + \tau_{p\alpha} p^{(\alpha)} = z_1 - z_2 + \tau_{x\alpha} (z_1 - z_2)^{(\alpha)}, \quad (3.17)$$

$$p + \tau_{p\beta} p^{(\beta)} = z_2 - z_3 + \tau_{x\beta} (z_2 - z_3)^{(\beta)},$$

$$-q_i \in \mu_i \text{Sgn} \left(z_i^{(1)} \right), \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.18)$$

уз рестрикције на коефицијенте Зенеровог модела (3.14)_{3,4,5,6}.

За решавање проблема вишеструког судара три тела описаног једначинама (3.16)-(3.18), са ограничењима (3.14)_{3,4,5,6} примениће се нумерички метод из књиге Подлубнија [1999, 76], заједно са методом слек варијабле приказане у раду Тарнера [2001, 94]. Детаљи примене ова два метода на проблем судара два тела су приказани у поглављу 2 ове тезе. За проблем вишеструког судара три тела ће се приказати нумерички алгоритам са посебним освртом на сегменте који се нису појављивали у анализи судара два тела. Због нехомогености почетног услова (3.16)₃ потребно је увести смену променљивих на следећи начин: $y_1(t) = z_1(t) - \xi t$, $y_2(t) = z_2(t)$ и $y_3(t) = z_3(t)$. После смене променљивих систем (3.16)-(3.18) постаје

$$\begin{aligned} y_1^{(2)} &= -p_1 + q_1, \quad y_1(0) = 0, \quad y_1^{(1)}(0) = 0, \quad p_1(0) = 0, \\ y_2^{(2)} &= \frac{p_1}{\rho_1} - p_2 + q_2, \quad y_2(0) = 0, \quad y_2^{(1)}(0) = 0, \quad p_2(0) = 0, \\ y_3^{(2)} &= \frac{p_2}{\rho_2} + q_3, \quad y_3(0) = 0, \quad y_3^{(1)}(0) = 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$p + \tau_{p\alpha} p^{(\alpha)} = y_1 - y_2 + \xi t + \tau_{x\alpha} (y_1^{(\alpha)} - y_2^{(\alpha)} + \frac{\xi \Gamma(2)}{\Gamma(2-\alpha)} t^{1-\alpha}), \quad (3.20)$$

$$p + \tau_{p\beta} p^{(\beta)} = y_2 - y_3 + \tau_{x\beta} (y_2^{(\beta)} - y_3^{(\beta)}),$$

$$\begin{aligned} -q_1 &\in \mu_1 \text{Sgn} \left(y_1^{(1)} + \xi \right), \\ -q_i &\in \mu_i \text{Sgn} \left(y_i^{(1)} \right), \quad i = 2, 3. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Применом нумеричког метода предложеног у књизи Подлубнија [1999, 76] добијају се алгоритми за израчунавање контактних сила p_1 и p_2 , за $m > 0$:

$$p_{1,m} = \frac{1}{1 + \tau_{p\alpha} h^{-\alpha}} \left\{ \xi \left[mh + \tau_{x\alpha} \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2-\alpha)} (mh)^{1-\alpha} \right] + (y_{1,m} - y_{2,m}) (1 + \tau_{x\alpha} h^{-\alpha}) + \right. \\ \left. + h^{-\alpha} \sum_{j=1}^m \left[\omega_j^{(\alpha)} (\tau_{x\alpha} (y_{1,m-j} - y_{2,m-j}) - \tau_{p\alpha} p_{1,m-j}) \right] \right\} \quad (3.22)$$

$$p_{2,m} = \frac{1}{1 + \tau_{p\beta} h^{-\beta}} \left\{ +\epsilon (y_{2,m} - y_{3,m}) (1 + \tau_{x\beta} h^{-\beta}) + \right. \\ \left. + \epsilon h^{-\beta} \sum_{j=1}^m \left[\omega_j^{(\beta)} \left(\tau_{x\beta} (y_{2,m-j} - y_{3,m-j}) - \frac{\tau_{p\beta}}{\epsilon} p_{2,m-j} \right) \right] \right\}. \quad (3.23)$$

Из почетних услова следи $y_{1,0} = y_{2,0} = y_{3,0} = y_{1,1} = y_{2,1} = y_{3,1} = p_{1,0} = p_{2,0}$. У проблему вишеструког судара три тела, за свако тело постоје две једначине кретања у зависности од смера његовог кретања. Комбинаторна анализа могућих сценарија судара сада је знатно сложенија. И тело 1 и тело 2 могу да мењају смер кретања, а тело три може или да се креће удесно или да се заустави или да не крене уопште. Ни тело 2 не мора да крене уопште. За реализацију алгоритма сада су потребне три слек варијабле за изразе који одређују смер силе трећа, тј. $y_1^{(1)} + \xi$, $y_2^{(1)}$ и $y_3^{(1)}$. Кретање тела 1 у зависности од смера описују једначине

$$\begin{aligned} y_{1,m}^{(2)} &= -p_{1,m} - \mu_1, & y_{1,m}^{(1)} + \xi &> 0, \\ y_{1,m}^{(2)} &= -p_{1,m} + \mu_1, & y_{1,m}^{(1)} + \xi &< 0, \end{aligned} \quad (3.24)$$

тело 2 може да се креће према следећим једначинама

$$\begin{aligned} y_{2,m}^{(2)} &= -\frac{p_{1,m}}{\rho_1} - p_{2,m} - \mu_2, & y_{2,m}^{(1)} &> 0, \\ y_{2,m}^{(2)} &= -\frac{p_{1,m}}{\rho_1} - p_{2,m} + \mu_2, & y_{2,m}^{(1)} &< 0, \end{aligned} \quad (3.25)$$

а кретање тела 3 описује једначина

$$y_{3,m}^{(2)} = \frac{p_{2,m}}{\rho_2} - \mu_3, \quad y_{3,m}^{(1)} > 0, \quad (3.26)$$

Приликом интеграције сваки пут при промени смера кретања блока 1 или 2 или заустављања било ког блока потребно је применити метод слек варијабле као што је то детаљно приказано у поглављу 2. Сада се дисипација енергије током вишеструког колинеарног судара три тела се израчунава из изрази

$$\Delta = \int_0^T \left[p_1 \left(z_1^{(1)} - z_2^{(1)} \right) + p_2 \left(z_2^{(1)} - z_3^{(1)} \right) + \mu_1 \left| z_1^{(1)} \right| + \mu_2 \rho_1 \left| z_2^{(1)} \right| + \mu_3 \rho_2 \left| z_3^{(1)} \right| \right] dt. \quad (3.27)$$

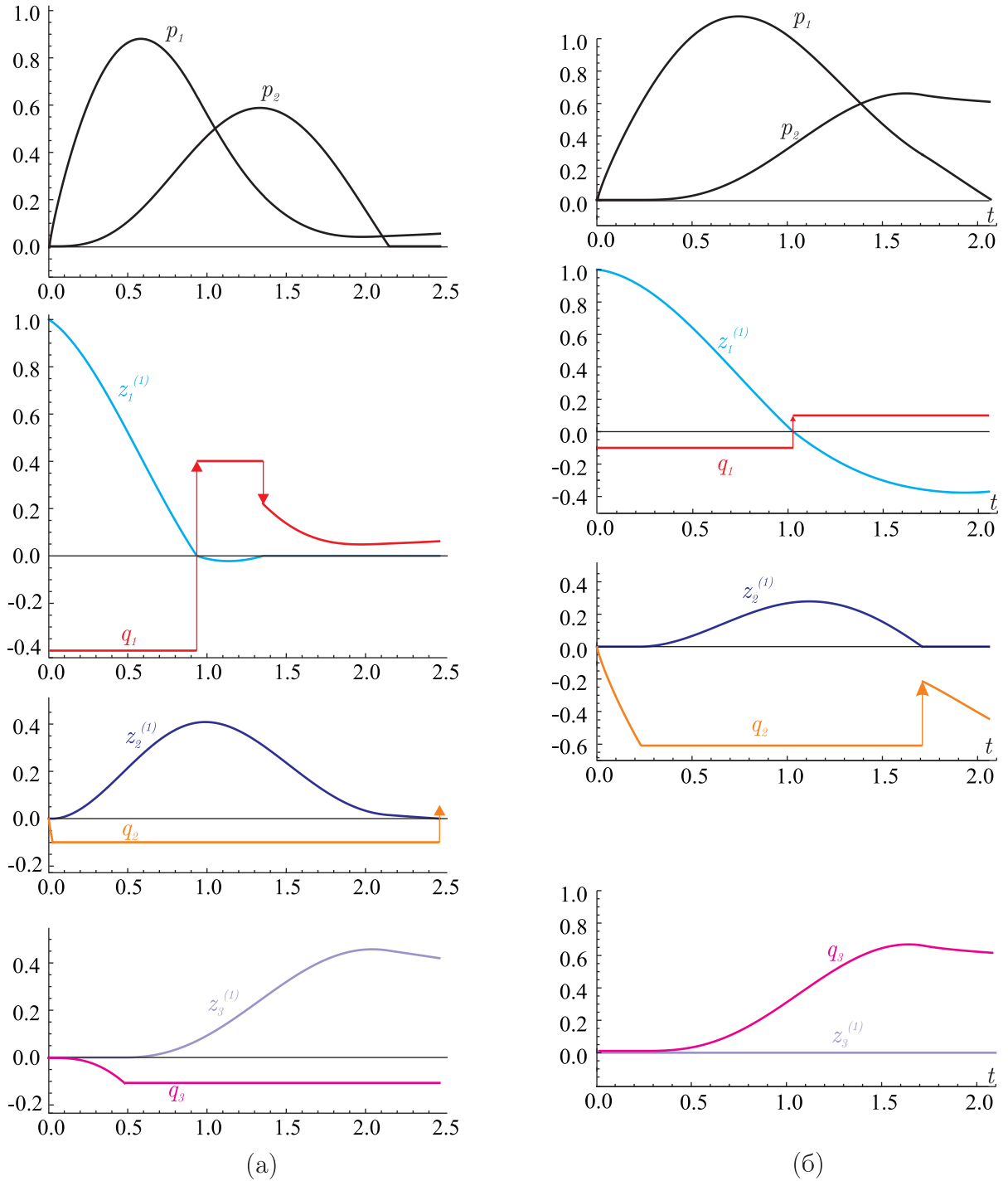
где је T време трајања судара. Тела након судара тела могу наставити да клизају прва два или лево или десно а треће само десно, или се могу заустављати у различитим фазама кретања, а тела 2 и 3 ни не морају започети кретање. У овом случају постоји много више различитих сценарија судара него у случају судара два тела али се сви они могу предвидети предложеним моделом судара само избором вредности улазних параметара система $(\alpha, \beta, \tau_{p\alpha}, \tau_{p\beta}, \tau_{x\alpha}, \tau_{x\beta}, \rho_1, \rho_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3)$.

3.3. *Нумеричке симулације судара три тела*

Нумеричке симулације вишеструког координатног судара три тела према Херцовој теорији су урађене за различите вредности параметара система и верификовано је осамнаест из скупа могућих сценарија од којих ће само неколико карактеристичних бити графички приказано. Ови сценарији укључују да се блокови 1 и 2 после судара могу кретати улево, удесно или могу мировати док блок три може мировати или се кретати удесно. Такође било која два блока могу остати после судара у контакту и да тај контакт може бити остварен или у прилазној фази или у фази раздвајања. У свим симулацијама почетни корак интеграције је $h = 0.001$ а бездимензијска почетна брзина блока 1, $\xi = 1$. Такође су коришћена два вискоеластична материја као и код проблема судара два тела. Сва запажања о дисипацији енергије, сили трења и брзинама блокова после судара из секције 2.5 важе и у овом случају. Четири сценарија која предвиђа Фремонов приступ, анализирана у секцији 3, појављују се и овде, уз напомену да је много већи број сценарија у овом приступу последица другачијег модела у коме постоји суво трење па не важи закон одржања количине кретања. Треба напоменути да према Херцовој теорији било која од три, два тела након судара могу остати у контакту, али да се не могу кретати са истом брзином, што је последица Клаузиус-Дијемове неједнакости. На сл. 3.5 приказују се резултати два нумеричка експеримента.

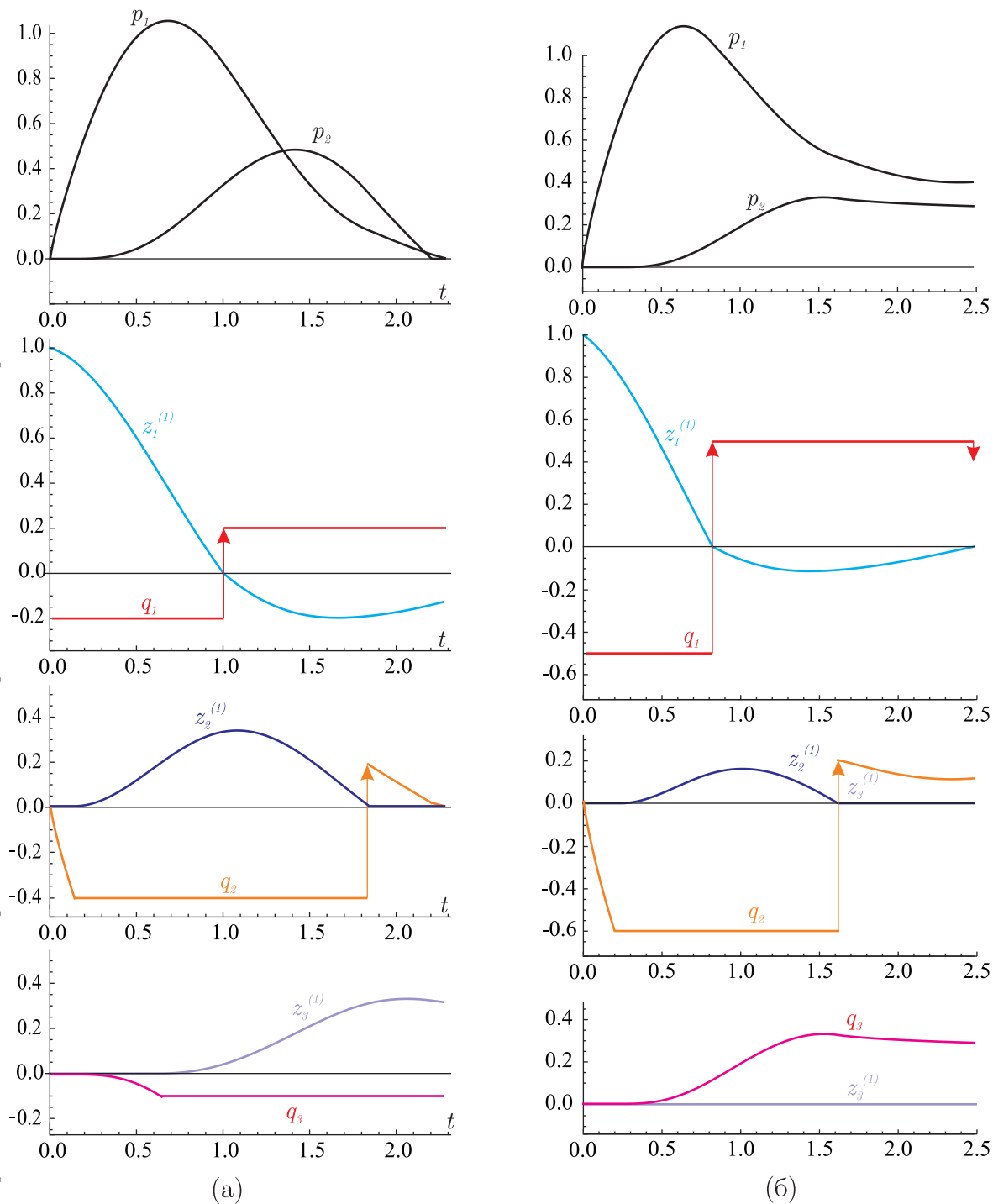
У нумеричким експериментима оба вискоеластична штапа су истих својстава тј. $\alpha = \beta = 0.23$, $\tau_{p\alpha} = \tau_{p\beta} = 0.004$, $\tau_{x\alpha} = \tau_{x\beta} = 1.183$. Сценарио код кога након судара блокови 1 и 2 остају у равнотежи и при томе су у контакту а блок 3 одлази удесно је приказан на сл. 3.5а, и остварује се за $\rho_1 = \rho_2 = 1$, $\mu_1 = 0.4$, $\mu_2 = 0.2$ и $\mu_3 = 0.1$. Време трајања судара $T = 2.487$ а брзине блокова након судара износе: $z_1^{(1)}(T) = 0$, $z_2^{(1)}(T) = 0$ и $z_3^{(1)}(T) = 0.408$ а контактне силе су $p_1(T) = 0.048$ и $p_2(T) = 0$. За случај када је $\mu_1 = 0.1$, $\mu_2 = 0.6$, $\mu_3 = 0.9$ и $\rho_1 = \rho_2 = 1$, судар се завршава у тренутку $T = 2.061$, док стање система након судара одређују брзине $z_1^{(1)}(T) = -0.370$, $z_2^{(1)}(T) = 0$ и $z_3^{(1)}(T) = 0$ и силе $p_1(T) = 0$ и $p_2(T) = 0.468$. Графички приказ се може видети на сл. 3.5б.

Сценарио у коме се догађа раздвајање сва три блока приказује слика fig21а. Судар траје $T = 2.27$, параметри на основу којих се долази до овог сценарија су $\mu_1 = 0.2$, $\mu_2 = 0.4$, $\mu_3 = 0.1$ и $\rho_1 = \rho_2 = 1$. Стање система након судара одређено је са брзинама $z_1^{(1)}(T) = -0.127$, $z_2^{(1)}(T) = 0$ и $z_3^{(1)}(T) = 0.317$ као и силама $p_1(T) = p_2(T) = 0$. И на крају ће се анализирати случај где су $\mu_1 = 0.5$, $\mu_2 = 0.6$, $\mu_3 = 0.9$ и $\rho_1 = \rho_2 = 1$, који одговара сценарију када су после судара сви блокови у равнотежи и у контакту што значи да је $z_1^{(1)}(T) = z_2^{(1)}(T) = z_3^{(1)}(T) = 0$



Слика 3.5. Атрибути током судара за $\alpha = \beta = 0.23$, $\tau_{p\alpha} = \tau_{p\beta} = 0.004$, $\tau_{x\alpha} = \tau_{x\beta} = 1.183$ и а) $\rho_1 = \rho_2 = 1$, $\mu_1 = 0.4$, $\mu_2 = 0.2$ и $\mu_3 = 0.1$, б) $\rho = 1$, $\mu_1 = \mu_2 = 0.5$ и б) $\mu_1 = 0.1$, $\mu_2 = 0.6$, $\mu_3 = 0.9$ и $\rho_1 = \rho_2 = 1$.

и да су контактне силе $p_1(T) = 0.342$ и $p_2(T) = 0.243$. Трајање судара $T = 2.488$, а зависност контактних сила и брзина блокова је приказана на сл. 3.6б. Овај сценарио судара одговара



Слика 3.6. Атрибути током судара за $\alpha = \beta = 0.23$, $\tau_{p\alpha} = \tau_{p\beta} = 0.004$, $\tau_{x\alpha} = \tau_{x\beta} = 1.183$ и а) $\mu_1 = 0.2$, $\mu_2 = 0.4$, $\mu_3 = 0.1$ и $\rho_1 = \rho_2 = 1$, б) $\rho = 1$, $\mu_1 = \mu_2 = 0.5$ и б) $\mu_1 = 0.5$, $\mu_2 = 0.6$, $\mu_3 = 0.9$ и $\rho_1 = \rho_2 = 1$.

експерименталним предвиђањима. Користећи Фремонов приступ поменути сценарио није било могуће предвидети али зато Херцова теорија судара са вискоеластичним слојем уз

суво треће као модел дисипације енергије предвиђа овакав сценарио, што представља и један од најважнијих резултата ове тезе.

4. Закључак

У овој тези разматран је проблем судара два тела, која могу да клизе по хоризонталној линији у присуству сувог трења, и тако да се међусобни контакт тела остварује се посредством вискоелеастичног штапа чији модел укључује нецеле изводе Риман-Љувиловог типа, а коефицијенти у моделу задовољавају ограничења која диктира други закон термодинамике. Суво трење моделирано је неглатким вишеверносним функцијама. Посебно својство предложеног приступа је укључивање дисипације енергије од самог почетка. Иначе сам метод спада у оквире Херцове теорије судара односно теорије кретања крутог тела са вискоелеастичним слојем.

Са аспекта математичке анализе проблем је прво представљен у форми Кошијевог проблема за систем типа неглатких вишеверносних диференцијалних једначина произвољног реалног реда. Затим је применом Лапласове трансформације проблем је сведен на облик Кошијевог проблема за две спрегнуте интегро-диференцијалне инклузије (2.22), за који постоји резултат о егзистенцији решења. У том кораку приказана зависност силе од брзине деформације у вискоелеастичном штапу, исказана интегралом конволуције (2.19), је сасвим нова.

Детаљно је у секцији 2.3 урађена комбинаторна анализа могућих сценарија судара. Од 11 идентификованих, један је одбачен као последица разматрања везаних за изабрани модел вискоелеастичног тела, а за преосталих 10 развијен је алгоритам нумеричког решавања. Сам нумерички алгоритам је такође потпуно нов. Сам алгоритам је базиран на обичним и стандардним фракционим диференцијалним апроксимацијама укључених извода заједно са употребом слек варијабле као замене за време, а што је значајно поједноставило налажење тренутака у којима систем треба прекључити са једног динамичког модела на други.

Урађене су нумеричке симулације судара за различите односа маса сударајућих тела, параметре вискоелеастичног тела, као и коефицијенте трења. Предложени модел судара предвиђа готово све сценарије судара два тела која показују експерименти: неколико типова раздвајања тела након судара и неколико типова у којима се тела после судара заустављају. Као специјалан случај у раду се добијају резултати из рада Граховац и коаутори [2011, 47], у коме је наговештена коректност модела сувог трења који укључује неглатке вишеверносне функције у предвиђању заустављања тела после судара у коначном времену.

Приказани су резултати симулација за проблем судара два тела графички и табеларно и анализиран је утицај параметара система на његово понашање након судара. Ови резултати говоре у прилог коректног нумеричког поступка који повезује алат за нелокалне операторе са алатом развијеним за неглатке вишеверносне функције, на један сасвим нов начин. Резултати нумеричких симулација су показали да се помоћу овог модела могу добити реална предвиђања о исходу судара што може бити од користи за читав низ инжењерских примена. Резултати приказани на сликама и у табелама из секције 2.5 су потпуно нови.

Оваквим приступом се избегава увођење коефицијента успостављања на нивоу хипотезе јер се проблем решава једнозначно интеграцијом постављеног Кошијевог проблема.

Метод коришћен у тези је упоређиван са Фремоновим приступом, који се базира на решавању алгебарских једначина, али за који је потребно одређивање константи које улазе у псеудопотенцијал дисипације посебним експериментима. Број тих константи може да варира јер је класа функција које могу да буду глатки део псеудопотенцијала дисипације прилично широка. У приступу који је предложен у овој тези број константи је фиксиран - четири за опис вискоеластичног штапа плус два коефицијента трења. Те константе се одређују из типизираних и релативно једноставних експеримената, што свакако представља предност. Цена која се за ту предност плаћа је решавање неглатких вишевредносних диференцијалних једначина произвољног реалног реда. Предност решавања алгебарских у односу на диференцијалне једначине постаје све мања јер постоје пакети који комплексне математичке проблеме чине релативно једноставним. Један такав пакет је и овде коришћен.

Пратећи разматрања из рада Сонга и др. [2001, 83], овде усвојени приступ се може уопштити и на раванске проблеме као замена за класичан приступ у оквирима неглатке динамике који подразумева да су тела крута и у коме се унапред уводе коефицијенти судара у нормалном и тангентном правцу који се комплементирају Кулоновим законом трења, видети Флорес и коаутори [2010, 36].

Посебно је значајна примена предложеног модела у анализи и реконструкцији саобраћајних незгода, видети радове Ванђија [2009, 90], Вере и др. [1995, 91] и Штефана [2009, 87], јер се ту појављује један од веома тешких проблема да се на основу делимичног познавања стања система након судара процени стање система пре судара, за шта је реалистичност модела судара од посебне важности.

Када је судар два тела у питању, будућа разматрања која су у непосредној вези са темом и циљевима ове докторске тезе, би се могла одвијати у три правца. Прво се може говорити о побољшању овде коришћене нумеричке процедуре која обједињује атрибуте нецело и неглатко. Корисна разматрања о овом проблему се могу наћи у радовима Дитхелма и др. [2005, 29] и Карпентијерија и др. [2011, 21]. Друга надоградња овог рада би могла кренути у смеру експерименталних истраживања са којима би се упоредили резултати нумеричких симулација. Као пример ће се навести радови Хана и Гилмора [1993, 48] и Фајфера [2005, 74] у којима су помоћу веома брзих видео камера добијени експериментални подаци о величинама стања у судару, које би било zgodно упоредити са предвиђањима овог модела. И на крају, као једном од могућих праваца даљих истраживања, интересантно би било анализирати увођење контролне променљиве - управљања - у систем, са циљем формулације проблема оптималног управљања којим се захтева остваривање (или избегавање) једног одређеног из скупа могућих сценарија судара који је пожељан (или непожељан) за дату апликацију. Припрема за решавање и овог проблема је већ урађена у радовима Балеануа и др. [2009, 9] и Балеануа и Трухиља

[2010, 10].

Најзад, проблем је постављен и нумерички решен и за случај судара три тела. Предложени приступ дозвољава уопштење на случај n тела али се комбинаторна анализа тада значајно усложњава.

Литература

- [1] Acary, V. & Brogliato B. [2008] *Numerical Methods for Nonsmooth Dynamical Systems*, (Springer, Berlin).
- [2] Agarwal, R. P., Meehan, M. & O'Regan D. [2001] *Nonlinear Integral Equations and Inclusions*, (Nova Science, Huntington).
- [3] Anh, L. X. [2003] *Dynamics of mechanical systems with Coulomb friction*, (Springer, Berlin).
- [4] Atanackovic, T. M. & Spasic D. T. [1999] "On the impact of elastic bodies with adhesive forces," *Meccanica* **34**, 367–377.
- [5] Atanackovic, T. M. [2002] "A modified Zener model of viscoelastic body," *Continuum Mechanics and Thermodynamics* **14**, 137–148.
- [6] Atanackovic, T. M. & Spasic D. T. [2004] "On viscoelastic compliant contact-impact models," *Transactions of ASME Journal of Applied Mechanics* **71**, 134–138.
- [7] Bagley, R. L. & Torvik P. J. [1986] "On the fractional calculus model of viscoelastic behavior," *Journal of Rheology* **30**, 133–155.
- [8] Baleanu, D. & Trujillo, J. J. [2008] "On exact solutions of a class of fractional Euler-Lagrange equations," *Nonlinear Dynamics* **52**, 331–335.
- [9] Baleanu, D., Defterli, O. & Agrawal, O. P. [2009] "A central difference numerical scheme for fractional optimal control problems," *Journal of Vibration and Control* **15**, 583–597.
- [10] Baleanu, D. & Trujillo, J. J. [2010] "A new method of finding the fractional Euler-Lagrange and Hamilton equations within Caputo fractional derivatives," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* **15**, 1111–1115.
- [11] Baleanu, D., Agarwal, R. P., Mustafa, O. G. & Cosulschi, M. [2011] "Asymptotic integration of some nonlinear differential equations with fractional time derivative," *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **44**, art. no. 055203.
- [12] Bastien, J. & Lamarque C. [2007] "Non smooth dynamics of mechanical systems with history term," *Nonlinear Dynamics* **47**, 115–128.
- [13] Bastien, J. & Schatzman M. [2008] "Indeterminacy of a dry friction problem with viscous damping involving stiction," *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics* **88**, 243–255.
- [14] Bell, F. [1973] "The Experimental Foundations of Solid Mechanics," *Encyclopedia of Physics Vol. VIa/1, Mechanics of Solids I*, ed. Truesdell, C. (Springer-Verlag, Berlin).
- [15] Beyer, H. & Kempfle S. [1995] "Definition of physically consistent damping laws with fractional derivatives," *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics* **75**, 623–635.
- [16] Brogliato, B. [1999] *Nonsmooth mechanics*, (Springer, London).
- [17] Brogliato, B., Dam, A., Paoli, L., Genot F. & Abadie, M. [2002] "Numerical simulation of finite dimensional multibody nonsmooth mechanical systems," *Applied Mechanics Reviews* **55**, 107–150.
- [18] Bondareva, V. F. [1969] "The Effect of an Axisymmetric Normal Loading on an Elastic

- Sphere,” *Prikl. Math. Mekh.* **33**, 1001–1005.
- [19] Bondareva, V. F. [1970] “Contact Problem for an Elastic Sphere,” *Prikl. Math. Mekh.* **35**, 37–45.
- [20] Butcher, E. A. & Segalman D. J. [2000] “Characterizing damping and restitution in compliant impacts via modified K-V and higher-order linear viscoelastic models,” *ASME J. Appl. Mech.* **67**, 831–834.
- [21] Carpinteri, A., Cornetti, P. & Saporita, A. [2011] “A fractional calculus approach to nonlocal elasticity,” *Eur. Phys. J. Special Topics* **193**, 193–204.
- [22] Catania, G. & Sorrentino, S. [2007] “Analytical modelling and experimental identification of viscoelastic mechanical systems,” *Advances in Fractional Calculus: Theoretical developments and application in physics and engineering*, eds. Sabatier, J. et al. (Springer, Dordrecht), pp. 403–416.
- [23] Cernea, A. [2010] “Continuous version of Fillipov’s theorem for fractional differential inclusions,” *Nonlinear Analysis* **72**, 204–208.
- [24] Cichon, M. & Salem H. A. H. [2010] “Set-valued system of fractional differential equations with hysteresis,” *Applied Mathematics and Computation* **215**, 3824–3829.
- [25] Danca, M. F. [2010] “Chaotic behavior of a class of discontinuous dynamical systems of fractional-order,” *Nonlinear Dynamics* **60**, 525–534.
- [26] Danca, M. F. [2011] “Approach of a class of discontinuous dynamical systems of fractional order: existence of the solutions,” to appear in *International Journal of Bifurcation and Chaos* paper ref. IJBC-D-10-00311.
- [27] Dankuc, D. V., Kovincic, N. I. & Spasic, D. T. [2010] “A new model for middle ear structures with fractional type dissipation pattern,” *Proceedings of FDA’10. The 4th IFAC Workshop Fractional Differentiation and its Applications.*, eds. Podlubny, I. et al. (Badajoz, Spain), Article No FDA10_156.
- [28] Demyanov, V. F. [2002] “The rise of nonsmooth analysis: its main tools,” *Cybernetics and System Analysis* **38**, 527–547.
- [29] Diethelm, K., Ford, N. J., Freed, A. D. & Luchko, Yu. [2005] “Algorithms for the fractional calculus: A selection of numerical methods,” *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **194**, 743–773.
- [30] Duarte, F. & Machado J. A. T. [2009] “Describing Function of Two Masses with Backlash,” *Nonlinear Dynamics* **56**, 409–413.
- [31] Dupont, P., Armstrong, B. & Hayward, V. [2004] “Elasto-plastic friction model: Contact compliance and stiction,” *Electrical Engineering* **2**, 1072–1077.
- [32] El-Sayed, A. M. A. & Ibrahim A. G. [1995] “Multivalued fractional differential equations,” *Applied Mathematics and Computation* **68**, 15–25.
- [33] El-Sayed, A. M. A. & Ibrahim A. G. [2001] “Set-valued integral equations of fractional-orders,” *Applied Mathematics and Computation* **118**, 113–121.
- [34] Enelund, M. & Lesieutre, G. A. [1999] “Time domain modeling of damping using anelastic displacement fields and fractional calculus,” *Int. J. of Solids and Structures* **36**, 4447–4472.

- [35] Fenander, A.[1998] “A fractional derivative railpad model included in a railway track model,” *J. Sound Vibr* **212**, 889–903.
- [36] Flores, P., Leine, R. & Glocker, Ch.[2010] “Modeling and analysis of planar rigid multibody systems with translational clearance joints based on the non-smooth dynamics approach,” *Multibody System Dynamics* **23**, 165–190.
- [37] Frémond, M. [2001] “Internal constraints in mechanics,” *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **359**, 2309–2326.
- [38] Frémond, M. [2002] *Non-smooth thermo-mechanics*, (Springer, Berlin).
- [39] Frémond, M. [2003] *Collision mechanics*, (Department of Civil Engineering, University of Rome, “Tor Vergata”, Rome).
- [40] Frémond, M. [2006] “Collisions. Thermal effects. Collisions of deformable solids and collisions of solids and fluids,” *ISM Nonsmooth mechanics of solids*, eds. Haslinger, J. & Stavroulakis G. E. (Springer, Wien), pp. 1–44.
- [41] Glocker, Ch. [2001] *Set-Valued Force Laws, Dynamics of Non-Smooth Systems*, (Springer, Berlin).
- [42] Goldsmith, W. [2001] *Impact*, (Dover Publications, New York).
- [43] Gorenflo, R. & Mainardi, F. [1997] “Fractional calculus: integral and differential equations of fractional order,” *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*, eds. Carpinteri, A. & Mainardi F. (Springer, Wien), pp. 223–276.
- [44] Goyal, S., Pinson, E. N. & Sinden, F. W. [1994] “Simulation of dynamics of interacting rigid bodies including friction part I: General problem and contact model,” *Engineering with Computers* **10**, 162–174.
- [45] Grahovac, N. M., Zigic, M. M. & Spasic, D. T. [2007] “On multiple impact with fractional type if dissipation,” *Proceedings of 1 st International Congress of Serbian Society of Mechanics*, (Kopaonik, Serbia), pp. –.
- [46] Grahovac, N. M. & Zigic M. M. [2010] “Modelling of the hamstring muscle group by use of fractional derivatives,” *Computers and Mathematics with Applications* **59**, 1695 – 1700.
- [47] Grahovac, N. M., Zigic, M. M. & Spasic, D. T. [2011] “On impact scripts with both fractional and dry friction type of dissipation,” *International Journal of Bifurcation and Chaos*, прихваћен за штампу.
- [48] Han, I. & Gilmore B. J. [1993] “Multy-body impact motion with friction - Analysis, simulation and experimental validation,” *Transactions of ASME Journal of Mechanical Design* **115**, 412–422.
- [49] Hant, K. H. & Crossley F. R. E. [1993] “Coefficient of restitution interpreted as damping in vibroimpact,” *ASME Journal of Applied Mechanics* **42**, 440–445.
- [50] Huang, M. [2002] *Vehicle crash mechanics*, (CRC Press, Boca Raton).
- [51] Ivanov, A. P. [1995] “On multiple impacts,” *Prikl. Math. Mekh.* **59**, 930–946.
- [52] Johnson, K. L. [1985] *Contact mechanics*, (Cambrige University Press, New York).
- [53] Karnopp D.[1985] “Computer simulation of stick-slip friction in mechanical dynamic systems,” *ASME J. of Dynamic Systems Measurement and Control mech* **107**, 100–103.

- [54] Kech, V. & Teodoresku, P. [1978] *Vvedenie v teoriju obobshchennyh funkciy s prilozhenijami v tehniku*, (Мир, Москва) превод са румунског.
- [55] Keller, J. B. [1986] "Impact with friction," *ASME J. Appl. mech* **53**, 1–4.
- [56] Kelly, R. & Llamas, J. [1999] "Determination of viscous and Coulomb friction by using velocity responses to torque ramp inputs," *Proceedings of the 1999 IEEE International Conference on Robotics & Automatization*, (Detroit, USA), pp. 1740–1745.
- [57] Kilbas, A. A. & Marzan S. A. [2005] "Nonlinear differential equations with the Caputo fractional derivative in the space of continuously differentiable functions," *Differential Equations* **41**, 84–89.
- [58] Kilbas, A. A., Srivastava H. M. & Trujillo J. J. [2006] *Theory and applications of fractional differential equations*, (Elsevier, The Netherlands).
- [59] Kilchevski, N. A. [1976] *Dynamic Contact of Solid Bodies*, (Naukova Dumka).
- [60] Klimek, M. [2009] *On solutions of linear fractional differential equations of a variational type*, (Czestochowa).
- [61] Kunze, M. [2008] *Non-Smooth Dynamical Systems*, (Springer, Berlin).
- [62] Leine, R., & Nijmeijer H. [2004] *Dynamics and bifurcation of non-smooth mechanical systems*, (Springer, Berlin).
- [63] Leine, & Van de Wouw, N. [2005] "Dry friction induced attractivity of equilibrium sets in mechanical multibody systems," *Proceedings of DETC ASME*, (Long Beach, USA), pp. –.
- [64] Machado, J. A. T. & Galhano A. M. S. [2008] "Statistical Fractional Dynamics," *Transactions of ASME Journal of Computational and Nonlinear Dynamics* **3**, 021201-1 – 021201-5.
- [65] Mainardi, F. & Gorenflo, R. [2000] "On Mittag-Leffler-type functions in fractional evolution processes," *Journal of Computational and Applied mathematics* **118**, 283–299.
- [66] Markeev, A. P. [2008] "The dynamics of a rigid body colliding with a rigid surface," *Regular and Chaotic Dynamics* **13**, 96–129.
- [67] Matrosov, I. V. [2001] "Unique solvability of the equations of motion of a mechanical system with dry friction," *Differential Equations* **37**, 778–786.
- [68] Oldham, K. B. & Spanier, J. [1974] *The fractional calculus*, (Academic Press, New York).
- [69] Ortega J. M. & Rheinboldt W. C. [1970] *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables (Classics in Applied Mathematics, 30)*, (Academic Press, New York).
- [70] Ouahab, A. [2008] "Some results for fractional boundary value problem of differential inclusions," *Nonlinear Analysis* **69**, 3877–3896.
- [71] Pennestri, E., Valentini, P. P. & Vita, A. [2007] "Multibody dynamics simulation of planar linkages with Dahl friction," *Multibody System Dynamics* **17**, 321–347.
- [72] Petrovic, L.J. M., Spasic, D. T. & Atanackovic, T. M. [2005] "On a mathematical model of a human root dentin," *Dental Materials* **21**, 125–128.
- [73] Pfeiffer, F. & Glocker, Ch. [1996] *Multibody dynamics with unilateral contacts*, (John Willey, New York).
- [74] Pfeiffer, F. [2005] "Experiments for impacts with friction," *Proceedings ENOC 2005, Fifth EUROMECH Nonlinear Dynamisc Conference*, (Eindhoven, Netherlands), pp. 375–378.

- [75] Piedboeuf, J. & Carufel J. [2000] “Friction and stick-slip in robots: Simulation and experimentation,” *Multibody System Dynamics* **4**, 341–354.
- [76] Podlubny, I. [1999] *Fractional differential equations*, (Academic Press, San Diego).
- [77] Popp, K. [2000] “Non-smooth mechanical systems,” *J. Appl. Maths Mechs* **64**, 765–772.
- [78] Rossikhin, Y. A. & Shitikova M. V. [2010] “Application of fractional calculus for dynamic problems of solid mechanics: Novel trends and recent results,” *Applied Mechanics Reviews* **63**, 010801-1–52.
- [79] Salem, H. A. H. [2011] “Global monotonic solutions of multi term fractional differential equations,” *Applied Mathematics and Computation* **217**, 6597–6603.
- [80] Samko, S. G., Kilbas A. A. & Marichev, O. I. [1993] *Fractional Integrals and Derivatives*, (Gordon and Breach, Amsterdam.).
- [81] Schmidt, A. & Gaul L. [2006] “On a critique of a numerical scheme for the calculation of fractionally damped dynamical systems,” *Mechanics Research Communications* **33**, 99–107.
- [82] Seybold, H. & Hilfer, R. [2008] “Numerical algorithm for calculating the generalized Mittag-Leffler function,” *Journal on Numerical analysis* **47**, 69–88.
- [83] Song, P., Kraus, P., Kumar, V. & Dupont, P. [2001] “Analysis of rigid body dynamic models for simulation of systems with frictional contacts,” *Transactions of ASME Journal of Applied Mechanics* **68**, 118–128.
- [84] Спасић, Д. Т. [2011] *Механика: основе, опште и проширења*, (у припреми).
- [85] Spasic, D. T. & Atanackovic T. M. [2001] “A model for three spheres in colinear impact,” *Archive of Applied Mechanics (Ingenieur-Archive)* **71**, 327–340.
- [86] Spasic, D. T. & Charalambakis, N. C. [2002] “Forced vibrations with fractional type of dissipation,” *Proceedings of the International Conference on Nonsmooth/Nonconvex Mechanics with Applications in Engineering*, (Thessaloniki), pp. 323–330.
- [87] Steffan, H. [2009] “Accident reconstruction methods,” *Vehicle system dynamics* **47**, 1049–1073.
- [88] Stronge, W. J. [2000] *Impact mechanics*, (Cambridge University Press, San Cambridge).
- [89] Studer, Ch. & Glocker Ch. [2007] “Solving normal cone inclusion problems in contact mechanics by iterative methods,” *Journal of System Design and Dynamics* **1**, 458–467.
- [90] Vangi, D. [2009] “Energy loss in vehicle oblique impact,” *Int. J. Impact Engineering* **36**, 512–521.
- [91] Vera, C., Aparacio, F. & San Roman, J. L. [1995] “Theoretical model for the computer analysis of vehicle collisions,” *Safety Science* **19**, 179–189.
- [92] Villagio, P. [1996] “The Rebound of an Elastic Sphere Against a Rigid Wall,” *ASME J Appl Mech* **63**, 259–263.
- [93] Troyer, K. L., Estep, D. & Puttlitz, C. M. [2011] “Viscoelastic Effects During Loading Play an Integral Role in Soft Tissue Mechanics,” *Acta Biomaterialia*, прихваћен за штампу (DOI: 10.1016/j.actbio.2011.07.035).
- [94] Turner, J. D. [2001] “On the simulation of discontinuous functions,” *Transactions of ASME*

Journal of Applied Mechanics **68**, 751–757.



УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ • ФАКУЛТЕТ ТЕХНИЧКИХ НАУКА
21000 НОВИ САД, Трг Доситеја Обрадовића 6

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, РБР :	
Идентификациони број, ИБР :	
Тип документације, ТД :	Монографска публикација
Тип записа, ТЗ :	Штампани материјал
Врста рада, ВР :	Докторска дисертација
Аутор, АУ :	Ненад Граховац
Ментор, МН :	проф. др Драган Спасић
Наслов рада, НР :	Анализа дисипације енергије у проблемима судара два или више тела
Језик публикације, ЈП :	Српски (ћирилица)
Језик извода, ЈИ :	Српски (ћирилица) / енглески
Земља публикавања, ЗП :	Србија
Уже географско подручје, УГП :	Војводина
Година, ГО :	2011.
Издавач, ИЗ :	Ауторски репринт
Место и адреса, МА :	21000 Нови Сад, Трг Доситеја Обрадовића 6
Физички опис рада, ФО : (поглавља/страна/ цитата/табела/слика/графика/прилога)	4 / 56+6 / 94 / 6 / 16 / 0 / 0
Научна област, НО :	Механика
Научна дисциплина, НД :	Механика
Предметна одредница/Кључне речи, ПО :	Судар / фракциони извод, суво трење, вишевердносна функција, диференцијално интегрална инклузија
УДК	
Чува се, ЧУ :	Библиотека Факултета техничких наука, 21000 Нови Сад, Трг Доситеја Обрадовића 6
Важна напомена, ВН :	
Извод, ИЗ :	Анализиран је судар два тела као и дисипација енергије укључена кроз механизам сувог трења моделираног неглатком вишевердносном функцијом и кроз деформацију вискоеластичног штапа чији модел укључује фракционе изводе. Проблем судара два тела је приказан у форми Кошијевог проблема који припада класи неглатких вишевердноских диференцијалних једначина произвољног реалног реда. Кошијев проблем је решен нумеричким поступком заснованим на Тарнеровом алгоритму. Испитано је кретање система и дисипација енергије за разне вредности улазних параметара. Показано је да се уведене методе могу применити и на проблем судара три тела.
Датум прихватања теме, ДП :	
Датум одбране, ДО :	
Чланови комисије, КО :	Председник: Академик Теодор Атанацковић
	Члан: проф. др Србољуб Симић
	Члан: проф. др Драгослав Кузмановић
	Члан: др Душан Зорица
	Члан, ментор: проф. др Драган Спасић



KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, ANO :	
Identification number, INO :	
Document type, DT :	Monographic publication
Type of record, TR :	Textual material, printed
Contents code, CC :	Phd thesis
Author, AU :	Nenad Grahovac
Mentor, MN :	Prof. dr Dragan Spasić
Title, TI :	Analysis of energy dissipation in the impact problems of two or more bodies
Language of text, LT :	Serbian (Cyrilic)
Language of abstract, LA :	Serbian (Cyrilic) / English
Country of publication, CP :	Serbia
Locality of publication, LP :	Vojvodina
Publication year, PY :	2011.
Publisher, PB :	Autor reprint
Publication place, PP :	21000 Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 6
Physical description, PD : <small>(chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)</small>	4 / 56+6 / 94 / 6 / 16 / 0 / 0
Scientific field, SF :	Mechanics
Scientific discipline, SD :	Mechanics
Subject/Key words, S/KW :	Impact / fractional derivatives, set-valued dry friction, integro-differential inclusion
UC	
Holding data, HD :	The library of the Faculty of technical sciences, 21000 Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 6
Note, N :	
Abstract, AB :	Impact of two bodies was analyzed as well as energy dissipation, which was included through dry friction phenomena modelled by a set-valued function, and through deformation of a viscoelastic rod modelled by fractional derivatives. The impact problem was presented in the form of the Cauchy problem that belongs to a class of set-valued fractional differential equations. The Cauchy problem was solved by the numerical procedure based on Turner's algorithm. Behaviour and energy dissipation of the system was investigated for different values of input parameters. It was shown that suggested procedure can be applied on the problem of impact of three bodies.
Accepted by the Scientific Board on, ASB :	
Defended on, DE :	
Defended Board, DB :	President: Academician Teodor Atanacković
	Member: Prof. dr Srbojjub Simić
	Member: Prof. dr Dragoslav Kuzmanović
	Member: dr Dušan Zorica
	Member, Mentor: Prof. dr Dragan Spasić
	Mentor's sign