



УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ФАКУЛТЕТ ТЕХНИЧКИХ НАУКА У
НОВОМ САДУ



Драго Жарковић

**Нови конститутивни модел бетона
формулисан према неспрегнутој
комбинацији теорија пластичности –
механика оштећења**

ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА

Нови Сад, 2021.



УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ • ФАКУЛТЕТ ТЕХНИЧКИХ НАУКА
21000 НОВИ САД, Трг Доситеја Обрадовића 6

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, РБР:	
Идентификациони број, ИБР:	
Тип документације, ТД:	Монографска документација
Тип записа, ТЗ:	Текстуални штампани материјал
Врста рада, ВР:	Докторска дисертација
Аутор, АУ:	Драго Жарковић
Ментор, МН:	др Владимир Вукобратовић
Наслов рада, НР:	Нови конститутивни модел бетона формулисан према неспрегнутој комбинацији теорија пластичности – механика оштећења
Језик публикације, ЈП:	Српски
Језик извода, ЈИ:	Српски / Енглески
Земља публиковања, ЗП:	Република Србија
Уже географско подручје, УГП:	АП Војводина
Година, ГО:	2021.
Издавач, ИЗ:	Ауторски репринт
Место и адреса, МА:	Факултет техничких наука, Трг Доситеја Обрадовића 6, 21000 Нови Сад
Физички опис рада, ФО: (поглавља/страна/ цитата/табела/слика/графика/прилога)	7 / 151 / 216 / 5 / 73 / 0 / 2
Научна област, НО:	Грађевинско инжењерство
Научна дисциплина, НД:	Бетонске конструкције
Предметна одредница/Кључне речи, ПО:	Конститутивни модел бетона, Пластичност-оштећење, Прслине, Омекашање, Зависност од мреже, Коначни елементи
УДК	
Чува се, ЧУ:	Библиотека Факултета техничких наука, Нови Сад
Важна напомена, ВН:	
Извод, ИЗ:	У оквиру ове докторске дисертације формулисан је нови конститутивни модел бетона за локалну анализу, према неспрегнутој комбинацији теорије пластичности и механике оштећења. Увођењем секундарне површи течења у формулацију је обухваћен есенцијални аспект понашања бетона, затварања прслина и поновно отварање постојећих прслина при цикличном дејству. Модел је тестиран на нивоу реалних конструкцијских примера и његове перформансе су демонстриране.
Датум прихватања теме, ДП:	10.09.2020.
Датум одбране, ДО:	
Чланови комисије, КО:	Председник: др Радомир Фолић, професор емеритус
	Члан: др Саша Стошић, ванредни професор
	Члан: др Данијел Кукарас, ванредни професор
	Члан: др Зоран Брујић, ванредни професор
	Члан, ментор: др Владимир Вукобратовић, доцент



KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, ANO :		
Identification number, INO :		
Document type, DT :	Monographic publication	
Type of record, TR :	Textual printed material	
Contents code, CC :	PhD thesis	
Author, AU :	Drago Žarković	
Mentor, MN :	Vladimir Vukobratović, PhD	
Title, TI :	A new uncoupled damage – plasticity constitutive model of concrete	
Language of text, LT :	Serbian	
Language of abstract, LA :	Serbian / English	
Country of publication, CP :	Republic of Serbia	
Locality of publication, LP :	Vojvodina	
Publication year, PY :	2021.	
Publisher, PB :	Author's reprint	
Publication place, PP :	Faculty of Technical Sciences, Trg Dositeja Obradovića 6, 21000 Novi Sad	
Physical description, PD : <small>(chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)</small>	7 / 151 / 216 / 5 / 73 / 0 / 2	
Scientific field, SF :	Civil engineering	
Scientific discipline, SD :	Concrete structures	
Subject/Key words, S/KW :	Concrete constitutive model, Plasticity-damage, Cracking, Softening, Mesh dependence, Finite elements	
UC		
Holding data, HD :	Library of Faculty of Technical Sciences, Novi Sad	
Note, N :		
Abstract, AB :	In this doctoral dissertation a new uncoupled constitutive model of concrete for local analysis is formulated, based on combination theory of plasticity – damage mechanics. Introducing the secondary yield surface in the formulation, enabled ability to include essential aspect of concrete behaviour, closure of cracks and reopening of existing cracks in cyclic loading. The model is tested on structural level, and its capabilities are demonstrated.	
Accepted by the Scientific Board on, ASB :	10.09.2020.	
Defended on, DE :		
Defended Board, DB :	President: PhD Radomir Folić, profesor emeritus	
	Member: PhD Saša Stošić, associate professor	
	Member: PhD Danijel Kukaras, associate professor	Mentor's sign
	Member: PhD Zoran Brujić, associate professor	
	Member, Mentor: PhD Vladimir Vukobratović, assistant professor	

За моје синове Стефана и Филипа, супругу Сандру, родитеље и породицу.

РЕЗИМЕ

Нови конститутивни модел бетона формулисан према неспрегнутој комбинацији теорија пластичности – механика оштећења

У оквиру ове докторске дисертације формулисан је нови конститутивни модел бетона за локалну анализу, према неспрегнутој комбинацији теорије пластичности и механике оштећења. Одабрана функција течења у делу према теорији пластичности је јединствено адаптирана, са одвојеним променљивама ојачања које одговарају меридијанима притиска и затезања у простору главних напона, са циљем да се може описати независно ојачање материјала при цикличном дејству. Увођењем секундарне површи течења у формулацију је обухваћен есенцијални аспект понашања бетона, затварања прслина и поновно отварање постојећих прслина при цикличном дејству. Део модела према механици оштећења је формулисан растављањем на позитивни и негативни део тензора напона, односно увођењем два оштећења по затезању и притиску. Увођењем специфичне експоненцијалне функције за правило пораста оштећења се обезбедио адекватан одговор модела, на страни притиска и затезања, при преласку тачке носивости. Дата функција је адаптирана према чврстоћи бетона, како би се симулирало дуктилније понашање бетона нижих класа, односно кртије понашање бетона виших класа, без увођења додатних параметара модела. Формулацијом модела је обезбеђен независан одговор при моделирању конструкције различитим величинама мреже коначних елемената.

Модел је у кодиран у програмски језик и тестиран на нивоу интеграционе тачке за најразличитије историје оптерећења, а такође је изведена и тангентна материјална матрица модела, која је тестирана на једноставном елементу, у смислу контроле стопе конвергенције приликом њеног коришћења при нелинеарној анализи. Осим овога, модел је имплементиран у комплетан софтвер за анализу конструкција методом коначних елемената *Matrix 3D*, што је омогућено чињеницом да је аутор дисертације уједно аутор и софтвера за нелинеарну анализу. На овај начин је модел тестиран на нивоу реалних конструкцијских примера и његове перформансе су демонстриране. Будући да аутор има комплетну контролу над кодом софтвера омогућена је и детаљна анализа конвергенције

системна нелинеарних једначина, и утицај појединих параметара на успешност конвергенције.

Кључне речи: Конститутивни модел бетона, Пластичност-оштећење, Прслине, Омекшање, Зависност од мреже, Коначни елементи

Област: Грађевинско инжењерство

УНО: Конструкције у грађевинарству

ABSTRACT**A new uncoupled damage – plasticity constitutive model of concrete**

In this doctoral dissertation a new uncoupled constitutive model of concrete for local analysis is formulated, based on combination theory of plasticity – damage mechanics. Chosen yield function in the plasticity part is uniquely adapted, with separate hardening variables corresponding to compression and tension meridians in primal stress space, with the aim of simulating independent hardening in cyclic loading. Introducing the secondary yield surface in the formulation, enabled ability to include essential aspect of concrete behaviour, closure of cracks and reopening of existing cracks in cyclic loading. Damage part of the model is formulated by splitting stress tensor to positive and negative part and introducing two damage variables for tension and compression. Introduction of specific exponential function for damage enabled adequate response of model in compression and tension in softening part. This function is adjusted according to concrete strength, so the ductile behaviour of lower strength class, as well as brittle behaviour of higher strength class, is provided without introducing additional parameters of model. Finite element mesh size independence is also included in the constitutive model.

Model is coded in programming language and tested on the integration point level for different loading histories. Also, the tangent stiffness matrix of the model is derived and tested on a simple element, in a sense of convergence rate for non-linear analysis. Besides, constitutive model is implemented in a complete software for the structural analysis Matrix 3D, which is enabled by the fact that author of the dissertation is the author of the software also. This way model is tested on structural level, and its capabilities are demonstrated. Since the author has the complete control of the code of the software, detailed analysis of convergence of non-linear system of equations is enabled, as well as influence of the individual parameters on convergence.

Key words: Concrete constitutive model, Plasticity-damage, Cracking, Softening, Mesh dependence, Finite elements

Field: Civil and Structural Engineering

Subdivision: Concrete Structures

САДРЖАЈ

Резиме.....	i
Abstract	iii
Садржај.....	iv
Листа симбола	vi
Списак слика.....	viii
Списак тебела	xi
1. Увод.....	1
1.1. Предмет истраживања	2
1.2. Потреба за истраживањем.....	3
1.3. Преглед владајућих ставова у подручју истраживања	4
1.4. Полазишта и хипотезе	4
1.5. Кратак преглед докторске дисертације.....	5
2. Преглед постојеће литературе.....	6
2.1. Увод.....	6
2.2. Понашање бетона према експерименталним истраживањима	7
2.2.1. Бетон изложен једноаксијалном напонском стању.....	8
2.2.2. Бетон изложен биаксијалном и триаксијалном напонском стању.....	11
2.3. Конститутивни модели бетона	18
2.3.1. Емпиријски модели	19
2.3.2. Линеарно еластични модели	20
2.3.3. Нелинеарно еластични модели.....	25
2.3.4. Модели засновани на теорији пластичности	27
2.3.5. Модели према теорији пластичности у простору дилатација.....	32
2.3.6. Модели према ендохроној теорији	32
2.3.7. Модели према теорији лома и механици оштећења	32
2.3.8. Модели микро равни (<i>microplane</i>)	36
2.3.9. Модели засновани на комбинацији пластичност-оштећење.....	37
2.4. Дискусија	47
3. Предложени конститутивни модел бетона	50
3.1. Увод.....	50
3.2. Део према теорији пластичности.....	50
3.2.1. Површ течења	50
3.2.2. Ојачање материјала	52
3.2.3. Правило течења	56
3.2.4. Секундарна површ течења.....	57
3.3. Део према механици оштећења	60

3.4. Верификација према експерименталним подацима из литературе.....	65
3.4.1. Једноаксијални одговор	65
3.4.2. Триаксијални и биаксијални одговор	68
4. Нумеричка имплементација	74
4.1. Увод.....	74
4.2. Развијени компјутерски програм.....	75
4.3. Стратегија решавања нелинеарних једначина	79
4.3.1. Њутн-Рапсонова метода	79
4.3.2. Метода дужине лука.....	80
4.3.3. Нова предложена процедура	82
4.4. Нумеричка интеграција конститутивних једначина.....	83
4.4.1. Тангентна еласто-пластична материјална матрица.....	83
4.4.2. Прелазак изван и повратак на површ течења	84
4.5. Конзистентна тангентна материјална матрица крутости.....	85
4.5.1. Део према теорији пластичности	85
4.5.2. Део према механици општећења.....	88
4.5.3. Стопа конвергенције изведене матрице	90
5. Нумерички примери	92
5.1. Једноаксијални тест при затезању	92
5.2. Савијање греде са засеком оптерећењем у три тачке.....	98
5.3. Савијање греде са засеком оптерећењем у четири тачке	100
5.3.1. Анализа конвергенције	105
5.4. Савијање греде са подужном арматуром на затегнутој страни.....	107
5.5. Циклично оптерећен чвор греда – стуб	109
5.6. Кратки елемент оптерећен вертикалним дејством	113
6. Закључци и правци даљег истраживања	123
6.1. Закључци.....	123
6.2. Правци даљег истраживања	126
7. Литература	129
Додатак А: Функције течерња у моделима заснованим на теорији пластичности.....	148
Додатак Б: Изводи функција модела	149
Б.1. Извод инваријанте напона J по вектору ефективних напона σ	149
Б.2. Извод функције течења f по инваријантама напона σ_v , ρ и θ	150
Б.3. Извод функције течења f по променљивама ојачања	150
Б.4. Извод вектора правила течења b по вектору напона σ	151

ЛИСТА СИМБОЛА

A'	константа ојачања
D	еластична материјална матрица крутости
D_t	тангентна еласто-пластична материјална матрица крутости
D_{td}	тангентна еласто-пластично-оштећење материјална матрица крутости
G_{ft}	енергија лома бетона
P	вектор унутрашњих чворних сила
Q	вектор спољашњих чворних сила
T_1, T_2	матрице трансформације у простору напона
a	вектор нормале на површ течења
b	вектор нормале на правило течења
d_c, d_t	правило пораста оштећења по притиску и затезању
f	функција површи течења
f_{bc}	биаксијална чврстоћа бетона при притиску
f_c	једноаксијална чврстоћа бетона на притисак
f_{dc}, f_{dt}	критеријум оштећења по притиску и затезању
f_t	једноаксијална чврстоћа бетона на затезање
g	правило течења
q	вектор чворних померања
q_{hi}	параметри ојачања
r	девијаторска дужина
x_h, x_s	дуктилност ојачања и омекшања материјала
σ	вектор напона
σ_p	вектор главних напона
σ_{pt}, σ_{pt}	позитивни и негативни део вектора главних напона
σ_{ij}	тензор напона
σ_v	хидростатички притисак
δ_{ij}	Кронекер делта
ϵ	вектор еластичних дилатација
ϵ_{ij}	тензор дилатација
ϵ_p	вектор пластичних дилатација
ϵ_{ps}	норма вектора пластичних дилатација, $\epsilon_{ps} = \ \epsilon_p\ $
$\tilde{\epsilon}_c, \tilde{\epsilon}_t$	еквивалентна дилатација притиска и затезања
ϵ_Q	норма резидуала вектора чворних сила

K_{rc}, K_{rt}	променљиве ојачања материјала по притиску и затезању
λ	умножак уз аплицирано оптерећење
ξ	хидростатичка дужина
θ	Лодов угао

СПИСАК СЛИКА

Сл. 1 Понашање бетона при једнооксијалном монотонном и цикличном притиску, према [155]	9
Сл. 2 Понашање бетона при једнооксијалном цикличном затезању, према [205].....	10
Сл. 3 Резултати биаксијалних и триаксијалних тестова у простору главних напона, према [26, 80, 107, 125, 135, 136, 213]	12
Сл. 4 Резултати биаксијалних и триаксијалних тестова у Хај-Вестергардовим координатама, према [26, 80, 107, 125, 135, 136, 213]	13
Сл. 5 Резултати биаксијалних и триаксијалних тестова у Хај-Вестергардовим координатама, груписани према θ углу, према [26, 80, 107, 125, 135, 136, 213].....	15
Сл. 6 Површ лома и иницијална линеарно-еластична зона у простору главних напона	15
Сл. 7 Понашање бетона при биаксијалним тестовима притиска, према [106, 107].....	16
Сл. 8 Промена запреминске дилатације при биаксијалним тестовима притиска, према [106, 107]	16
Сл. 9 Понашање бетона при триаксијалним тестовима притиска, према [26].....	17
Сл. 10 Понашање бетона при биаксијалним и триаксијалним тестовима притиска, према [80]	17
Сл. 11 Понашање бетона при хидростатичком притиску а) и једнооксијални одговор бетона након оптерећења хидростатичким притиском до означеног нивоа б), према [49]	18
Сл. 12 Понашање бетона при триаксијалном и једнооксијалном цикличном притиску, према [155]	19
Сл. 13 Облик дијаграма омекшања материјала према [95]	36
Сл. 14 Једнооксијални дијаграм напон-дилатација конститутивних модела [145]	37
Сл. 15 Упоређење одговора модела при цикличном напрезању	47
Сл. 16 Тестови савијањем: а) оптерећењем у 4 тачке; б) и ц) за комбиновани мод I и II формирања прслине, према [51].....	49
Сл. 17 Примарна површ течења при вредностима $q_{h1} = 1$ и $q_{h2} = 1$	52
Сл. 18 Ојачање примарне површи течења при вредностима $k_{pc} = 0.0, 0.3$ и 1.0	53
Сл. 19 Ојачање примарне површи течења при промени вредности k_{pt}	54
Сл. 20 Вредности $k_{pt,max}$ у зависности од чврстоће бетона (а) и промена q_{h2} у зависности од k_{pt} и q_{h1} (б).....	55
Сл. 21 Промена x_h према σ_v за: а) $f_c=30$ МПа, $f_t=3$ МПа; б) $f_c=50$ МПа, $f_t=3.5$ МПа.....	56
Сл. 22 Одговор ефективни напон-дилатација при: а) једнооксијалном затезању; б) једнооксијалном притиску	57
Сл. 23 Одговор ефективни напон-дилатација при растерећењу: а) $\epsilon_{M,max}=0.25\%$; б) $\epsilon_{M,max}=0.50\%$	58
Сл. 24 Одговор ефективни напон-дилатација у циклусу растерећење - оптерећење: а) једнооксијално; б) биаксијално	59
Сл. 25 Облик функције пораста оштећења	62

Сл. 26 Одговор номинални напон-дилатација при: а) једнооксијалном затезању; б) једнооксијалном притиску	63
Сл. 27 Одговор номинални напон-дилатација при: а) растерећењу; б) циклусима растерећење – оптерећење	64
Сл. 28 Одговор модела из тренутне студије и другог карактеристичног модела [77, 202] из области пластичност-оштећење при циклусима затезање-притисак.....	64
Сл. 29 Упоређење одговора модела са експерименталним подацима [199] при једнооксијалном притиску	66
Сл. 30 Упоређење одговора модела са експерименталним подацима [155] при једнооксијалном цикличном притиску	66
Сл. 31 Упоређење одговора модела са експерименталним подацима [205] при једнооксијалном цикличном затезању	67
Сл. 32 Упоређење одговора модела са експерименталним подацима [205] при једнооксијалном цикличном затезању са преласком на притисак.....	68
Сл. 33 Упоређење одговора модела са експерименталним подацима [26] при триаксијалном притиску са једнаким бочним притисцима, $f_c = 41.9$ МПа	69
Сл. 34 Упоређење одговора модела са експерименталним подацима [26] при триаксијалном притиску са једнаким бочним притисцима, $f_c = 60.6$ МПа	69
Сл. 35 Упоређење одговора модела са експерименталним подацима [26] при триаксијалном притиску са једнаким бочним притисцима, $f_c = 60.6$ МПа	70
Сл. 36 Упоређење одговора модела са експерименталним подацима [80] при триаксијалном притиску са различитим бочним притисцима, $f_c = 61.0$ МПа.....	71
Сл. 37 Упоређење одговора модела са експерименталним подацима [80] при триаксијалном притиску са различитим бочним притисцима, $f_c = 72.0$ МПа.....	71
Сл. 38 Упоређење одговора модела са експерименталним подацима [106, 107] при биаксијалном притиску	72
Сл. 39 Упоређење одговора модела са експерименталним подацима [155] при триаксијалном цикличном притиску	73
Сл. 40 Троугаони КЕ: а) LST елемент; б) са 9 степени слободе; ц) суперелемент.....	76
Сл. 41 Примери локалног просторног моделирања у Matrix 3D програму: а) чвор стуб-греда, б) пробој стуба кроз плочу	77
Сл. 42 Приказ итерација алгоритма за генерисање мреже КЕ у Matrix 3D програму.....	78
Сл. 43 Итерације у једном инкременту: а) Њутн-Рапсонове, б) метода дужине лука.....	80
Сл. 44 Итеративна уназад-Ојлер процедура	84
Сл. 45 3Д модел (а) и сила – померање одговор (б) модела за анализу стопе конвергенције.....	90
Сл. 46 3Д модел за једнооксијално затезање	93
Сл. 47 Одговор модела напон-померање при једнооксијалном монотоним затезању	94
Сл. 48 Приказ расподеле дилатација и напона при једнооксијалном монотоним затезању	95
Сл. 49 Приказ оштећења d_t при једнооксијалном монотоним затезању	96

Сл. 50 Одговор модела напон-померање при једнооксијалном цикличном затезању, тип II према [46, 205].....	97
Сл. 51 Одговор модела напон-померање при једнооксијалном цикличном затезању, тип IV	98
Сл. 52 Приказ оштећења d_t при савијању греде са засеком	99
Сл. 53 Одговор модела напон-померање при савијању греде са засеком	100
Сл. 54 Одговор модела сила-померање при савијању греде са засеком оптерећене у четири тачке – K1	101
Сл. 55 Приказ оштећења d_t при савијању греде са засеком оптерећене у четири тачке – K1-M1.....	102
Сл. 56 Упоређење зоне оштећења при савијању греде са засеком оптерећене у четири тачке – K1-M1	103
Сл. 57 Одговор модела сила-померање при савијању греде са засеком оптерећене у четири тачке – K2	104
Сл. 58 Упоређење зоне оштећења при савијању греде са засеком оптерећене у четири тачке – K2-M1	104
Сл. 59 Схематски приказ итерација модела K2-M1 у простору $\ Q\ -\ q\ $ коришћењем: а) само методе дужине лука; б) дужине лука уз линијско претраживање; ц) дужина лука уз линијско претраживање и полу-инкремент.....	105
Сл. 60 Детаљни схематски приказ итерација модела K2-M1 у простору $\ Q\ -\ q\ $ коришћењем: а) само методе дужине лука; б) дужине лука уз линијско претраживање; ц) дужина лука уз линијско претраживање и полу-инкремент	107
Сл. 61 Геометријске карактеристике греде из [180]	107
Сл. 62 Експериментални и нумерички одговор сила-померање најмање греде из [180]	108
Сл. 63 Изглед прслина греде из [180].....	109
Сл. 64 Приказ неупросеченог оштећења d_t при нумеричкој анализи најмање греде из [180]	110
Сл. 65 Геометријски подаци о носачу из [33] (а) и приказ модела у програму Matrix 3D (б)	111
Сл. 66 Експериментални и нумерички одговор сила-померање циклично оптерећеног носача стуб-греда.....	112
Сл. 67 Приказ оштећења d_t при анализи циклично оптерећеног носача стуб-греда	114
Сл. 68 Геометријски подаци о носачу из [67] и карактеристични облици лома.....	115
Сл. 69 Нумерички одговор сила-померање модела #23, #25 и #26 према [67]	116
Сл. 70 Приказ оштећења d_t при анализи модела #23-M125 и #23-M250	118
Сл. 71 Приказ напона у влакнастом елементу главне затегнуте арматуре модела #23-M250 и карактеристични пресек на месту прслине (а) и приказ напона по влакнима у том пресеку (б).....	119
Сл. 72 Приказ оштећења d_t при анализи модела #25-M125 и #25-M250	120
Сл. 73 Приказ оштећења d_t при анализи модела #26-M125 и #26-M250	122

СПИСАК ТЕБЕЛА

Таб. 1: Параметри модела и подешавања нелинеарне анализе.....	91
Таб. 2: Анализа конвергенције модела С и Т	91
Таб. 3: Механичке карактеристике мешавина бетона из [68].....	101
Таб. 4: Преглед резултата анализе модела К2-М1 различитим методама.....	106
Таб. 5: Механичке карактеристике материјала за разматрана три носача из [67]	115
Таб. А 1: Преглед функција површи течења у моделима заснованим на теорији пластичности.....	148

1. УВОД

Армирани бетон је један од најраспрострањенијих материјала у грађевинарству. Чине га бетон, који има релативно високу чврстоћу на притисак, али ниску чврстоћу на затезање, и уграђене челичне шипке, арматура, које прихватају утицаје затезања. Армирани бетон одликују економичност, носивост и крутост, што га чини добром опцијом за избор материјала при пројектовању разних типова објеката, стамбених и инжењерских, попут мостова, нуклеарних електрана, расхладних торњева и др.

Главни циљ при пројектовању армиранобетонских елемената је постизање сигурности и економичности, као и постизање прихватљивих социолошких ефеката, задовољења захтева по питању заштите животне средине. Процес димензионисања се уобичајено спроводи употребом линеарно-еластичне анализе за одређивање унутрашњих сила елемента, на основу којих се затим одређује потребна арматура елемента и њен распоред према одговарајућем стандарду. Овакав поступак у највећем броју случајева даје поуздане резултате у погледу носивости и употребљивости. Када су у питању објекти, за које, у случају отказа конструкције може да дође до значајних људских и економских губитака, често је потребно спровести нелинеарну анализу како би се дошло до детаљнијих података о носивости елемената и понашању елемената након лома.

Понашање армиранобетонских конструкција је једним делом одређено понашањем самог бетона. Кључне карактеристике понашања бетона су: различита чврстоћа при различитим једноаксијалним, биаксијалним и триаксијалним напонским стањима, омекшавање материјала и промена запремине. Конститутивни модел је математичка релација која описује везе напон-деформација материјала, тј. приказује карактеристике чврстоће и деформације материјала при различитим нивоима напрезања. Од пресудног значаја је одабрани начин упросечавања микроскопских карактеристика материјала, тј. начин на који се прелази са великог броја микроскопских степени слободе на само оне који се појављују у моделима континуума на макроскопском нивоу. Сваки модел континуума је апроксимација веома компликоване стварне структуре. Дакле, поред тога што је формирање софистицираног конститутивног модела значајан задатак у механици континуума, такође је битно установити које појаве на микроскопском нивоу су релевантне за поједине карактеристике материјала посматраног на макроскопском нивоу. Основне карактеристике понашања бетона су установљене експерименталним анализама узорака који су изложени специфичним, релативно једноставним стањима

оптерећења. Механика континуума представља основу за развијање аналитичког модела који описује основне карактеристике понашања бетона. Механика оштећења је погодна за развијање конститутивног модела који обухвата омекшавање материјала, али је немогуће обухватити промене запремине и неповратне деформације материјала. Применом теорија еластичности и пластичности је могуће обухватити промену запремине, неповратне деформације и омекшавање материјала.

1.1. Предмет истраживања

Формирање конститутивних модела бетона је предмет истраживања већ деценијама. Комплексно понашање бетона, које је директно повезано са чињеницом да је композитни материјал, не може увек бити верно приказано кроз конститутивно модерирање материјала. У овој докторској дисертацији је акценат на формирању конститутивног модела бетона који је заснован на комбинацији теорије пластичности и механике оштећења. Конститутивни модел формиран на овај начин, до одређене мере, може да опонаша макроскопско понашање материјала, какав је бетон. Осим тога, веома важно је да модел буде применљив и употребљив у смислу једноставне идентификације улазних параметара, за које је пожељно да се добијају на основу стандардизованих тестова, односно карактеристика бетона.

Механика оштећења континуума је у великом мери коришћена за моделирање понашања бетона, а пре њеног успостављања су коришћене теорија еластичности и теорија пластичности. Будући да се коришћењем појединих теорија могу остварити одговарајући резултати за поједине аспекте понашања бетона, у овој докторској дисертацији је одабрана комбинација теорије пластичности и механике оштећења како би било могуће обухватити конкретно и неповратне дилатације, уз помоћ теорије пластичности, и деторијацију материјала, механиком оштећења. Појаве на микроскопском нивоу су описане променљивама које карактеришу стање материјала на макроскопском нивоу, у смислу стања оштећења и пластичних деформација.

Када се примењују модели материјала са омекшањем, неизбежне су одређене потешкоће приликом нелинеарне анализе методом коначних елемената. Пре свега јављају се потешкоће у конвергенцији система једначина, јер равнотежни пут има оштре заокрете на дијаграму сила-померање. Осим овога, за одређене конфигурације система у геометријском и напонском смислу, може се јавити пролом уназад, као и ситуације у којима равнотежни пут може да има два или чак више могућих различитих решења. У овој докторској дисертацији су анализирани могућности унапређења конвергенције при

анализи система који су моделирани материјалом који омекшава. Осим овога, код оваквих система, локализација деформације се одвија на најмањем простору који је одређен дискретизацијом система – у зони процеса лома. У овој ситуацији одговор система постаје зависан од мреже коначних елемената. У оквиру ове дисертације је предложено решење за проблеме зависности глобалног одговора од мреже коначних елемената увођењем коригованог модула омекшања према величини коначног елемента.

У периоду од 2009. године до данас аутор тезе је развијао сопствени компјутерски програм за нумеричку анализу конструкција методом коначних елемената. У програму је могуће извршити линеарну или нелинеарну анализа конструкција, сачињених од линијских, површинских и просторних коначних елемената. За готово све типове нелинеарне анализе је од есенцијалног значаја познавање тангентне материјалне матрице за тренутно стање материјала. Из овог разлога посебан акценат је дат на извођење конзистентне материјалне матрице за развијени материјални модел до најситнијих детаља, уз формирање конкретних функција компјутерског кода, како би развијени материјални модел бетона могао бити примењен и у другим софтверима за анализу конструкција.

1.2. Потреба за истраживањем

Познавање понашање армиранобетонских објеката, код којих у случају отказа конструкције може да дође до значајних људских и економских губитака, као и понашања значајнијих објеката попут облакодера, или мостова на оптерећења експлозија и удара је од великог значаја у инжењерској пракси. За неке од наведених случајева експериментално проучавање понашања на стварним моделима је веома скупо, а за неке је чак и тешко изводљиво. Из ових разлога, инжењерска пракса је у сталној потрази за верификованим нелинеарним моделима бетона, уз помоћ којих би се могли формирати сетови виртуалних одговора за одређене поменуте ситуације, из којих би се даље могло изучавати и унапредити понашање датог типа конструкције и формирати смернице за инжењерску праксу.

Нелинеарно понашање бетона се одликује следећим обележјима:

1. појава прелина праћена са смањењем носивости бетона на затезање,
2. опадање смичуће носивости у равни прелине са повећањем ширине прелине (ефекат уклињавања агрегата),
3. анизотропија услед присуства прелина,
4. ефекти затварања прелина при растерећењу,

5. пад крутости,
6. ојачање материјала пре достизања граничне носивости при притиску,
7. омекшање материјала, зависно од триаксијалног напонског стања, у зони после достизања граничне носивости при притиску,
8. запреминска експанзија,
9. трајне деформације при напрезањима притиском,
10. течење,
11. скупљање и
12. зависност одговора од брзине нашошења оптерећења.

Ограничен је број модела који су у могућности да симулирају све од наведених аспеката нелинеарног понашања бетона. Поготово је упитно да ли постоји и један нелинеарни конститутивни модел у комерцијалној употреби који је у могућности да симулира све наведене аспекте. У том смислу, нема никакве дилеме да је потреба за истраживањем у овој области веома актуелна. Нови конститутивни модел бетона, који би потенцијално могао да обухвати све наведене аспекте нелинеарног понашања 1-9, би допринео истраживању у овој области. Посебно значајна би била могућност примене оваквог модела у комерцијалним софтверима.

1.3. Преглед владајућих ставова у подручју истраживања

Коришћење комбинација теорије пластичности и механике оштећења при формулацији конститутивних модела бетона највише обећава у погледу могућности описивања већине аспеката нелинеарног понашања бетона. У оквиру поглавља 2.3 ове докторске дисертације је приказан детаљан преглед модела разврстан према математичкој формулацији, а у оквиру поглавља 2.4 је изложена дискусија о одабиру формулација модела из литературе.

1.4. Полазишта и хипотезе

Основна хипотеза докторске дисертације гласи: Могуће је формулисати конститутивни модел бетона заснован на неспрегнутој комбинацији теорије пластичности и механике оштећења. Овим моделом су обухваћени кључни аспекти нелинеарног понашања бетона: појава прелина, ефекти затварања прелина при растерећењу, пад крутости, ојачање материјала пре достизања носивости по притиску, омекшање материјала зависно од триаксијалног стања напрезања, запреминска експанзија и трајне деформације при оптерећењу притиском.

Моделом из ове докторске дисертације нису обухваћени ефекти опадања смичуће носивости у равни прслине, анизотропија услед присуства прслина, као ни реолошке карактеристике скупљање и течење, ни зависност одговора бетона од брзине наношења оптерећења.

1.5. Кратак преглед докторске дисертације

У првом поглављу ове докторске дисертације су дефинисани предмет, потреба, значај и циљеви истраживања. Постављена је основна хипотеза и описана је методологија истраживања, као и применљивост предметног истраживања.

У другом поглављу приказан је преглед стања и истраживања у посматраној области. Ово поглавље је подељено у четири целине: увод, понашање бетона према експерименталним истраживањима, конститутивни модели бетона и дискусија, у којој је констатован значај одабира математичке формулације при формирању конститутивних модела.

У трећем поглављу је детаљно изложена математичка формулација новог конститутивног модела за бетон. Будући да се ради о конститутивном моделу који је заснован на комбинацији две математичке формулације, два подпоглавља су посвећена двема теоријама, делу формулације према теорији пластичности, у којем су обрађени сви аспекти модела: две површи течења и правила течења, ојачање материјала итд., и делу формулације према механици оштећења у којем је такође детаљно изложена формулација. Коначно, верификацијом према експерименталним подацима су приказане могућности и перформансе развијеног конститутивног модела.

Четврто поглавље је посвећено нумеричкој имплементацији модела. Ово поглавље је подељено у пет целина: увод, развијени компјутерски програм, стратегија решавања нелинеарних једначина, нумеричка интеграција конститутивних једначина и конзистентна материјална матрица крутости.

У петом поглављу су приказани нумерички примери прорачуна елемената конструкције уз помоћ развијеног модела у софтверу за анализу конструкција. Истакнут је значај могућности имплементације модела у софтвер за анализу, као и значај потенцијалне могућности имплементације модела у друге софтвере.

У шестом поглављу је дат објективан суд о резултатима, као и уочени обећавајући правци наставка истраживања, док седмо поглавље представља преглед коришћене литературе.

2. ПРЕГЛЕД ПОСТОЈЕЋЕ ЛИТЕРАТУРЕ

2.1. Увод

Анализа конструкција савременим нумеричким методама, најчешће се односи на анализу методом коначних елемената, било линеарну или нелинеарну. Како би нелинеарна анализа била извршена неопходно је да конститутивни модел, који описује физичке карактеристике разматраног материјала, буде дефинисан [22]. Уколико се разматра бетон, иако су се последњих деценија појавили бројни модели у литератури, не постоји генералан став о избору модела за нелинеарне анализе.

Према радовима [41, 178] многи конститутивни модели за анализу армиранобетонских конструкција су предложени у литератури и према размери анализе они могу бити подељени на:

- моделе за локалну анализу чворних зона или других геометријски специфичних зона (микро модели), у две или три димензије, где је укључен софистициран конститутивни модел за бетон, конститутивни модел за челичну арматуру и модел везе челик-бетон (адхезија). Овакви модели изискују густо генерисану мрежу коначних елемената и подложни су проблемима у конвергенцији због омекшања материјала и, према [41], овакав приступ тешко може бити употребљен при анализи објеката у целини;
- моделе средње размере (дискретне), који подразумевају поделу зидова и плоча на нивое (лејере) и поделу линијских елемената на влакна. У оваквим моделима користе се поједностављени конститутивни модели оба материјала, челика и бетона, а модел везе челик-бетон може бити обједињен у пластичном понашању челика;
- моделе за анализу објекта као целине или главних оквира објекта (глобалне), који подразумевају глобални модел за елементе (греде, стубове) уз нелинеарне зглобне везе елемената. Овакви модели обухватају нелинеарни одговор на нивоу конструкције као целине.

Подела према размери је такође приказана и у [200] где су дефинисана четири нивоа у којима се описују инжењерски материјали:

- метарски ниво, на којем се решавају проблеми из праксе;
- милиметарски ниво, на којем се материјал може сматрати да је хомоген са такозваним "ефективним" карактеристикама;

- микрометарски ниво, на којем је могуће посматрати поликристале и продукте хидратације;
- нанометарски ниво, на којем се одвијају молекуларни и атомски процеси.

Глобални модели према првој подели, би одговарали метарском нивоу из друге поделе, локални (микро) модели би одговарали милиметарском нивоу, док би се дискретни могли класификовати као прелазни између метарског и милиметарског нивоа у другој подели. У оквиру ове дисертације све анализе ће се односити на локалне моделе.

Конститутивне моделе бетона је могуће поделити и према математичкој формулацији према следећем [7, 200]:

- Емпиријски модели
- Линеарно еластични модели
- Нелинеарно еластични модели
- Модели засновани на теорији пластичности
- Модели према теорији пластичности у простору дилатација
- Модели према ендохроној теорији
- Модели према теорији лома и механици оштећења
- Модели микро равни (microplane)
- Модели засновани на комбинацији пластичност-оштећење

У наставку рада ће, након описа понашања бетона према експерименталним запажањима, бити представљен преглед материјалних модела бетона из литературе, са посебним акцентом на моделе засноване на теорији пластичности, механици оштећења и комбинацији пластичност-оштећење.

2.2. Понашање бетона према експерименталним истраживањима

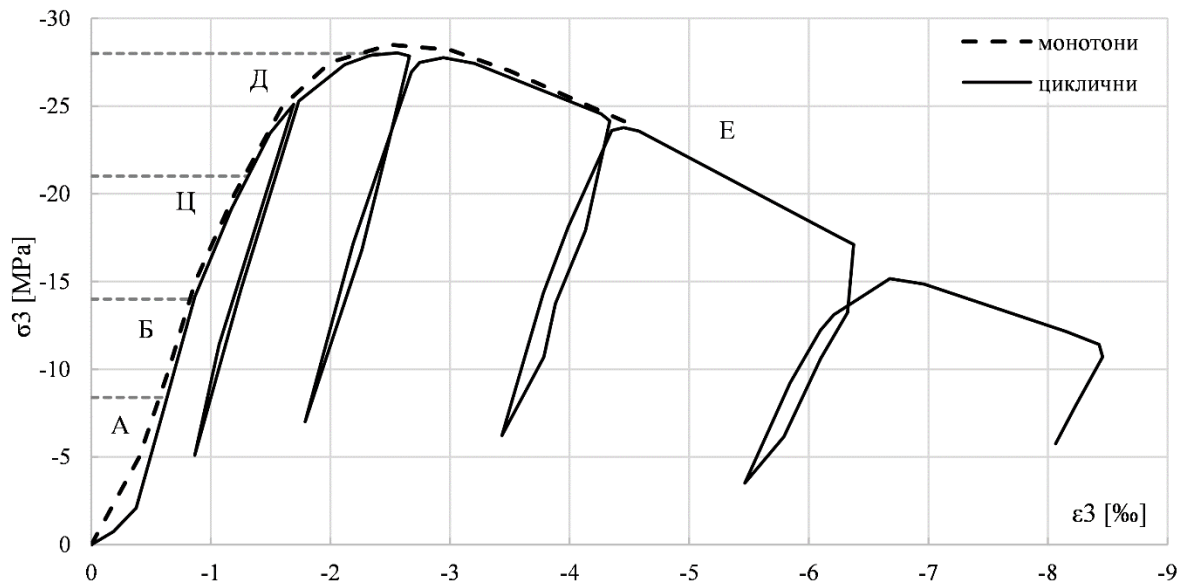
Узимањем у обзир физичког механизма понашања материјала олакшавамо развој нумеричког модела за предвиђање одговора материјала, а такође се поједностављује и формулација модела. Физички модел понашања бетона је најевидентнији на основу обраде података из експерименталних анализа материјала, у којима је узорак изложен оптерећењу са једноставном променом током времена. У овом поглављу су приказани најважнији механички аспекти бетона, према експерименталним резултатима доступним у литератури. Приказани механички аспекти ће бити основа за разматрање конститутивног моделирања бетона. Сама структура бетона у смислу типа цемента, водо-цементног фактора, облика и величине зрна агрегата и сл. такође утичу на

механичко понашање бетона [145], али се у оквиру овог рада они неће разматрати, тј. материјал ће бити сматран континуумом са иницијално изотропним понашањем.

2.2.1. Бетон изложен једнооксијалном напонском стању

Понашање бетона је изразито нелинеарно, било да се ради о притиску или затезању. Карактеристичан одговор бетона изложен једнооксијалном монотоним и цикличним притиску је приказан на Сл. 1. Кључне карактеристике одговора бетона при монотоним оптерећењу су следећи:

- однос напон-дилатација је линеарно еластичан до око 30% чврстоће на притисак (зона А), јер при краткорочним оптерећењима микропрлине у прелазној зони остају стабилне (прлине не пропагирају под константним оптерећењем);
- у зони од 30% до 50% чврстоће на притисак долази до благог пада крутости материјала (зона Б) због значајне појаве прлине и раста прлина у прелазној зони, али прлине су стабилне;
- у зони од 50% до 75% чврстоће на притисак долази до даљег пада крутости материјала (зона Ц) који је делом условљен појавом прлина у хидратисаној цементној пасти (ХЦП) и појавом нестабилних прлина (прлине пропагирају под константним оптерећењем);
- у зони преко 75% чврстоће на притисак долази до прираста дилатације при константном оптерећењу (зона Д) што је узроковано растом прлина у прелазној зони и ХЦП, као и формирањем непрекидних прлина;
- за дилатације веће од дилатације која одговара достигању чврстоће на притисак, чврстоћа је смањена (зона Е), што је узроковано појавом већег броја непрекидних прлина паралелних са правцем напрезања.



Сл. 1 Понашање бетона при једноосијалном монотоним и цикличним притиску, према [155]

Што се тиче цикличног одговора при притиску, који је такође приказан на Сл. 1, кључне карактеристике су следеће:

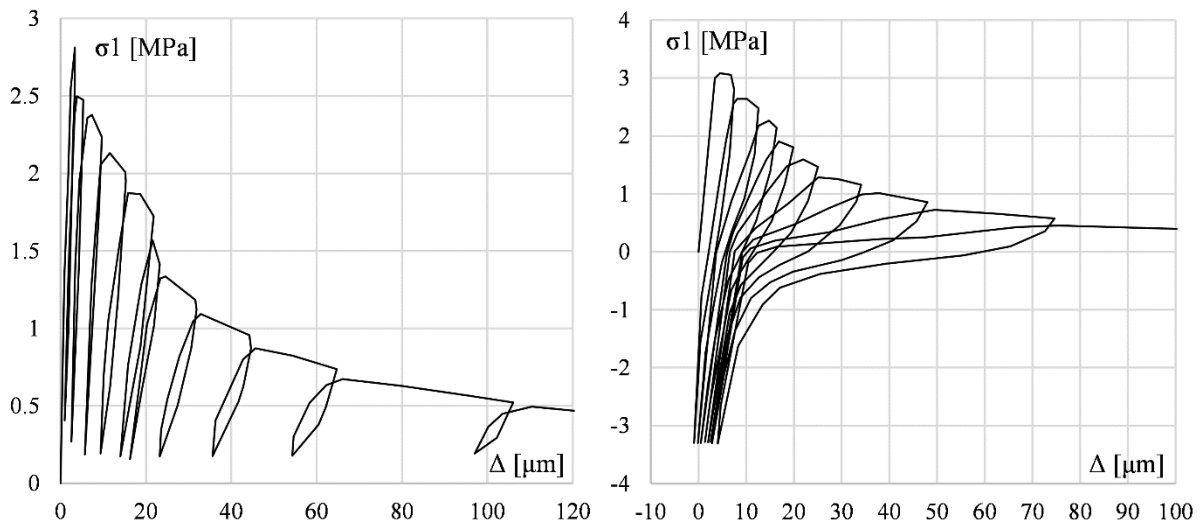
- при повећању дилатације одговарајући напон прати криву напон-дилатација као при монотоним повећању дилатације;
- при умереном нивоу дилатација крутост при растерећењу и оптерећењу је приближно једнака модулу еластичности, а с порастом нивоа дилатација крутост опада.

Одговор бетона при једноосијалном затезању се значајно разликује од одговора при притиску. Пре свега, чврстоћа бетона при затезању је 10 до 20 пута нижа од чврстоће бетона при притиску, што је директна последица нижих механичких карактеристика прелазне зоне ХЦП у непосредној околини зрна агрегата. Постојеће микропрлине остају непромењене при нивоима напрезања до око 60 до 80% од граничне чврстоће при затезању, што се и може сматрати границом еластичног понашања бетона при затезању. Повећавањем оптерећења, микропрлине у прелазној зони расту и спајају се, а појављују се микропрлине у ХЦП. Даљим повећавањем оптерећења формира се непрекидна прлина која спаја микропрлине у прелазној зони и ХЦП, што доводи до губитка носивости.

На Сл. 2 је приказан карактеристичан одговор бетона оптерећеног на једноосијално циклично затезање. Кључне карактеристике одговора бетона су:

- одговор бетона је практично линеарно-еластичан до достизања чврстоће на затезање и одговара појави малог броја стабилних микропрлина у прелазној зони;

- оптерећењем бетона на дилатације које одговарају прекорачењу чврстоће на затезање долази до развијања континуалних система прлина у прелазној зони и ХЦП;
- у зони где дилатације прелазе вредност, која одговара чврстоћи бетона на затезање, крутост бетона је значајно мања од иницијалног модула еластичности. Смањена крутост бетона је последица формираних прлина, које остају отворене док је бетон оптерећен затезањем.



Сл. 2 Понашање бетона при једноосијалном цикличном затезању, према [205]

Анализирајући одговор бетона при притиску и затезању приметно је понашање бетона које се одликује пластичним (заосталим) деформацијама. Ове пластичне деформације би могле бити сматране последицом пластичног течења бетона при континуалном оптерећењу, слично макроскопском понашању метала. Ипак, последица пластичне деформације је потпуно различита у односу на метале, код којих је то клизање у микроскопској структури. Код бетона пластичне деформације су последица трења при извлачењу агрегата и фрагмената, проклизавања у контакту између ХЦП и агрегата када су формиране макро прлине и само дробљење ХЦП [145].

При излагању бетона монотонно растућем оптерећењу смицања долази до лома бетона при затезању у правцу главног напона затезања, односно до формирања прлина управно на поменути правац. Дефинисање одговора бетона изложеног оптерећењу смицања се формира преко анализе одговора при излагању притиску и затезању. Армиранобетонски системи могу бити изложени смицању дуж већ формиране равни прлине, када се одговор значајно разликује од одговора при притиску и затезању. Пренос смицања, за мање ширине формираних прлина, је примарно омогућен

контактом агрегата. Дакле, капацитет контакта значајно зависи од ширине формиране прслине.

Уколико се дефинише запреминска дилатација, као збир дилатација у три правца главних напона ($\varepsilon_v = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$), може се посматрати зависност напона и запреминске дилатације бетона изложеног притиску. Показано је да ХЦП не експандира при оптерећењу притиском, али због композитне природе бетона повећање запремине је ипак присутно при одређеним нивоима напрезања и повезано је са повећањем микропрслина. У поглављу 2.2.2 је приказана, између осталог, промена запреминске дилатације при једнооксијалном оптерећењу притиском ($\sigma_3/\sigma_2/\sigma_1 = -1/0/0$).

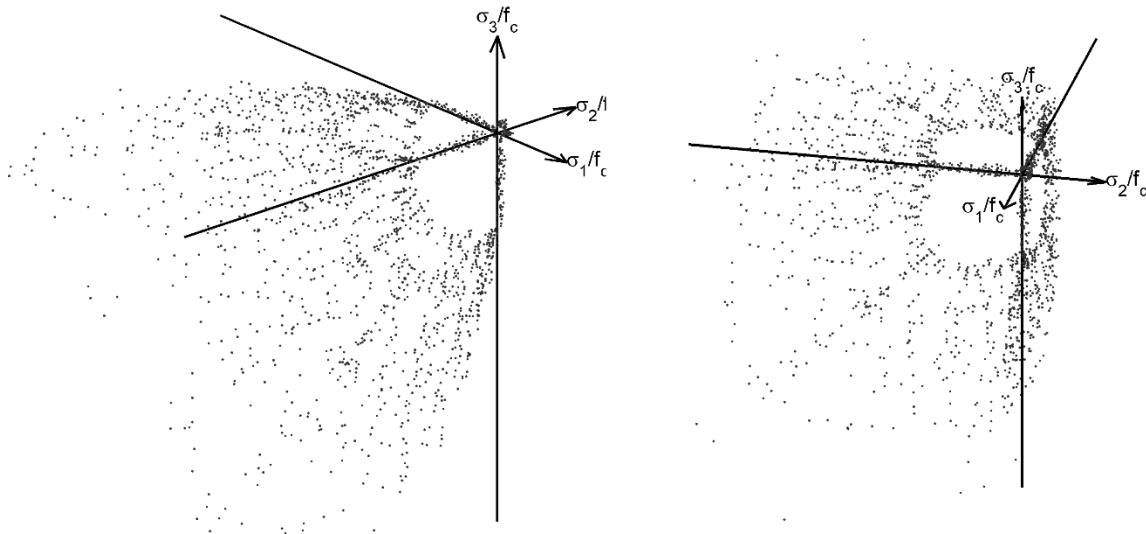
2.2.2. Бетон изложен биаксијалном и триаксијалном напонском стању

Будући да је бетон у армиранобетонским конструкцијама најчешће изложен сложенем напонском стању, није довољно развијање конститутивног модела само за понашања при једнооксијалном стању напрезања. Истраживања понашања бетона изложеног биаксијалном и триаксијалном оптерећењу су резултовала моделима понашања бетона који се одликују површима течења, односно иницијалном еластичном зоном у простору главних напона, као и са површи лома. На Сл. 3 су приказани резултати биаксијалних и триаксијалних испитивања бетона [26, 80, 107, 125, 135, 136, 213] у смислу тачака у простору главних напона, који одговарају напонима при лому узорака. Осовине одговарају нормализованим вредностима напона са чврстоћом бетона при притиску. До одређене мере је приметно да тачке образују површ, која се назива површ лома, а која је затворена са стране затезања, а отвара се према негативном смеру хидростатичког притиска. Хидростатичка оса је она којој одговарају вредности напона $\sigma_3 = \sigma_2 = \sigma_1$.

Будући да главни напони задовољавају услов $\sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1$, јасно је да ће се тачке, које одговарају лому, налазити на једној шестини поменуте површи, односно уколико се посматра из правца хидростатичке осе угао од 60° . Из тог разлога резултати на Сл. 3 су копирани пет пута са пермутованим осама како би се формирала комплетна површ.

За претпоставку о изотропном понашању израз који дефинише површ лома може бити дефинисан преко инваријанти напона, најчешће I_1 , J_2 и J_3 , и/или вредности главних напона σ_3 , σ_2 , σ_1 . Инваријанте напона су преко главних напона дефинисане следећим изразима:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\
 I_2 &= \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_1 \cdot \sigma_3 \\
 I_3 &= \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3
 \end{aligned}
 \tag{1}$$



Сл. 3 Резултати биаксијалних и триаксијалних тестова у простору главних напона, према [26, 80, 107, 125, 135, 136, 213]

Девијаторски део тензора напона је дефинисан одузимањем хидростатичког притиска од тензора напона, према следећем изразу:

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{I_1}{3} \cdot \delta_{ij} \tag{2}$$

у којем је δ_{ij} Кронекер делта. Коначно, инваријанте девијаторског дела напона су преко инваријанти напона дефинисане према следећем:

$$\begin{aligned}
 J_1 &= 0 \\
 J_2 &= \frac{1}{3} \cdot I_1^2 - I_2 \\
 J_3 &= \frac{2}{27} \cdot I_1^3 - \frac{1}{3} \cdot I_1 \cdot I_2 + I_3
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

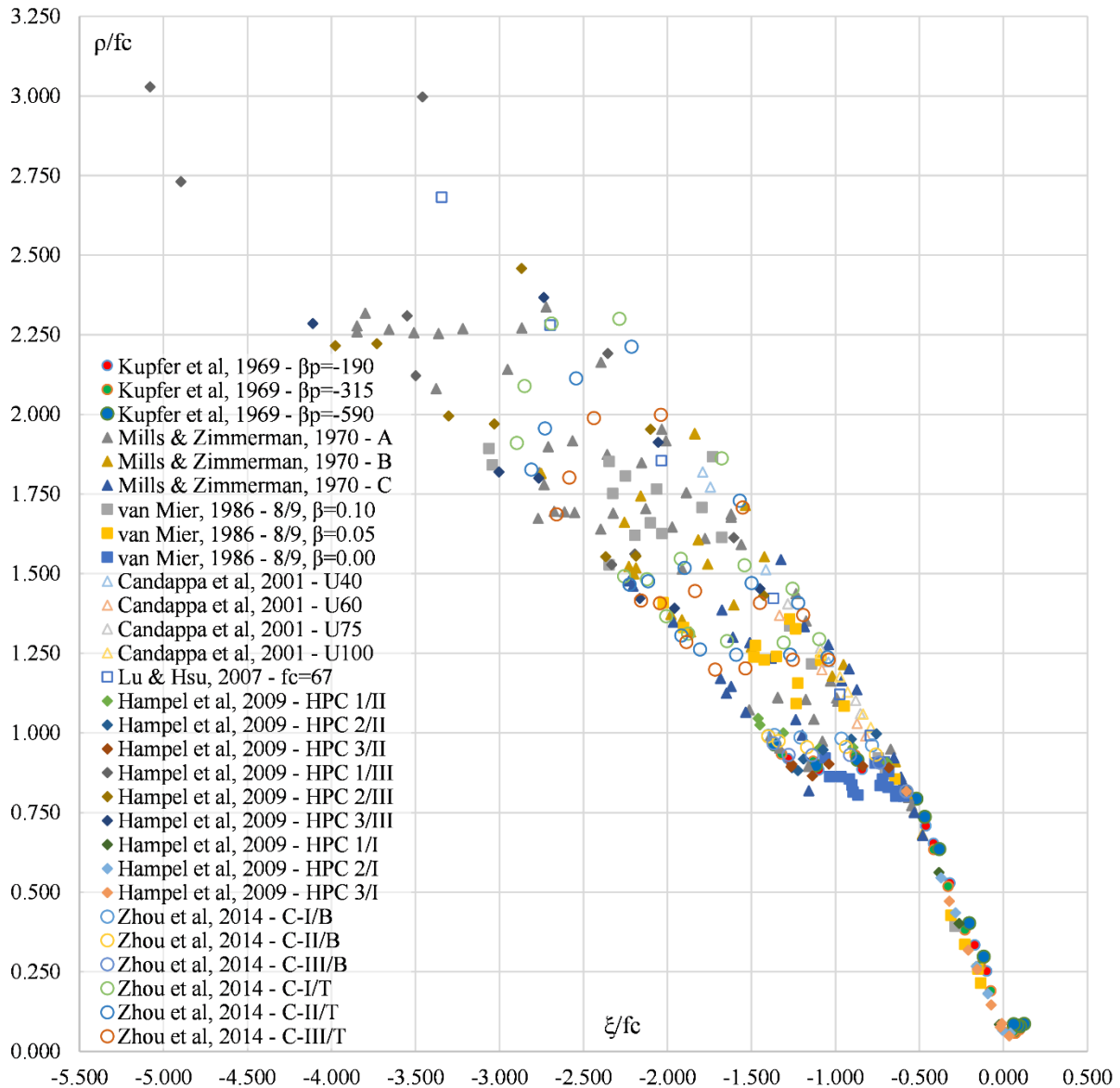
Површ лома може бити дефинисана и преко октаедарских напона, који су преко инваријанти дефинисани следећим изразом:

$$\sigma_{oct} = \frac{1}{3} \cdot I_1, \quad \tau_{oct} = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot J_2} \tag{4}$$

Чешће је површ дефинисана преко Лодових z, r, θ , односно Хај-Вестергардових координата ξ, ρ, θ ($z = \xi, r = \rho$), које су представљене следећим изразима:

$$\xi = \frac{I_1}{\sqrt{3}}, \quad \rho = \sqrt{2 \cdot J_2}, \quad \cos(3 \cdot \theta) = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{J_3}{\sqrt{J_2^3}} \tag{5}$$

Поменуте тестове из радова [26, 80, 107, 125, 135, 136, 213] је могуће приказати у простору Хај-Вестергардових координата, такође нормализованих са чврстоћом бетона при притиску, што је и приказано на Сл. 4. На Сл. 4 се може уочити да порастом ξ/f_c координате у негативном смеру, која одговара порасту хидростатичког притиска, тачке формирају благо закривљени облик у простору $\xi/f_c - \rho/f_c$.



Сл. 4 Резултати биаксијалних и триаксијалних тестова у Хај-Вестергардовим координатама, према [26, 80, 107, 125, 135, 136, 213]

Када се приказани резултати даље изолују према вредностима θ угла, који одговара отклону од σ_3 осе, посматрано у правцу хидростатичке осе (у девијатосерском пресеку), тачке се готово идеално групишу у закривљене линије (погледати Сл. 5), које практично одговарају меридијанима површи лома за одређени θ угао. Карактеристични су:

- меридијан затезања $\theta = 0^\circ$, којем одговарају:

- центрично затезање

$$\sigma_3, \sigma_2 = 0, \sigma_1 = f_t \rightarrow I_1 = f_t, J_2 = \frac{f_t^2}{3}, J_3 = \frac{2 \cdot f_t^3}{27} \rightarrow \cos(3 \cdot \theta) = 1$$

- биаксијални притисак

$$\sigma_3, \sigma_2 = -f_{bc}, \sigma_1 = 0 \rightarrow I_1 = -2 \cdot f_{bc}, J_2 = \frac{f_{bc}^2}{3}, J_3 = \frac{2 \cdot f_{bc}^3}{27} \rightarrow \cos(3 \cdot \theta) = 1$$

- меридијан притиска $\theta = 60^\circ$, којем одговарају:

- центрични притисак

$$\sigma_3 = -f_c, \sigma_2 = 0, \sigma_1 = 0 \rightarrow I_1 = -f_c, J_2 = \frac{f_c^2}{3}, J_3 = \frac{-2 \cdot f_c^3}{27} \rightarrow \cos(3 \cdot \theta) = -1$$

- триаксијални притисак са једнаким бочним притисцима

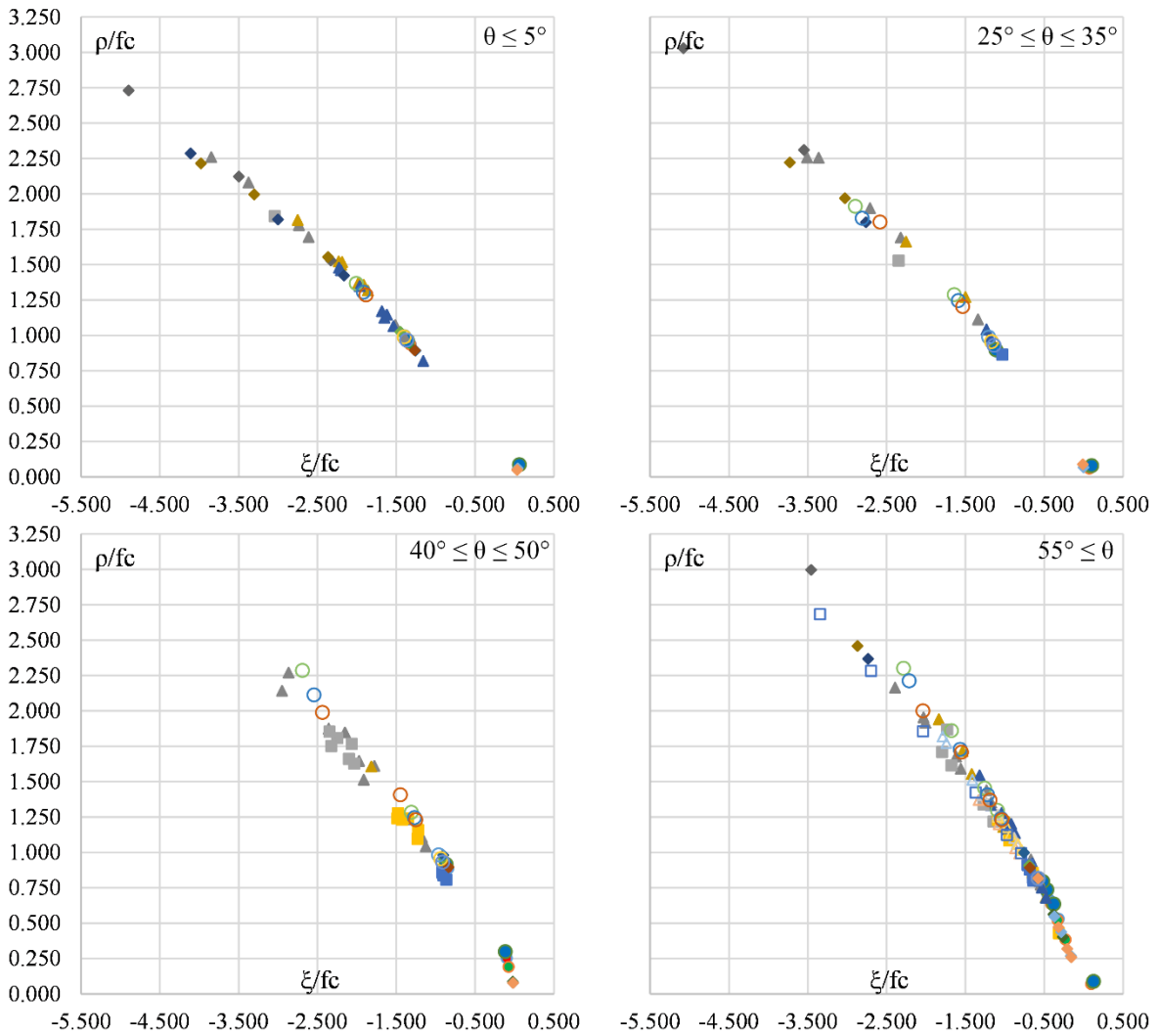
$$\sigma_3 = -f_{c1}, \sigma_2 = -f_{c2}, \sigma_1 = -f_{c2} \rightarrow I_1 = -f_{c1} - 2 \cdot f_{c2}, J_2 = \frac{(f_{c1} - f_{c2})^2}{3},$$

$$J_3 = \frac{-2 \cdot (f_{c1} - f_{c2})^3}{27} \rightarrow \cos(3 \cdot \theta) = -1$$

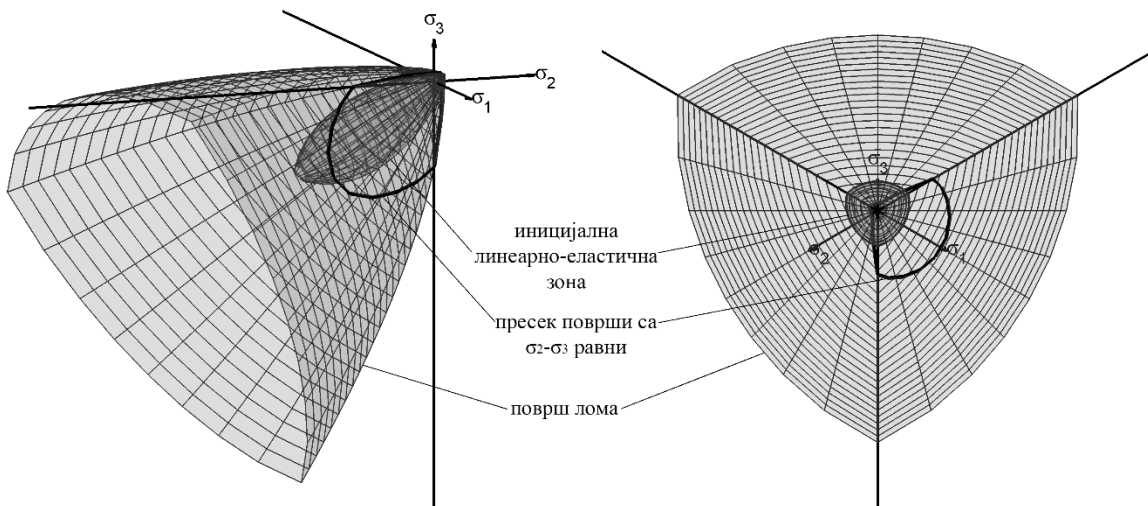
Карактеристичан облик површи лома који одговара приказаним резултатима је приказан на Сл. 6. Осим, већ поменутих закривљених меридијана, који се отварају према негативном смеру хидростатичке осе, карактеристично је и да површ, посматрано у девијаторским пресецима, има израженије троугаони облик при темењу, на страни затезања, а померањем дуж хидростатичке осе у негативном смеру, девијаторски пресек практично тежи кружном облику.

На Сл. 6 је приказан и пресек са равни $\sigma_3 - \sigma_2$, што одговара биаксијалним испитивањима. Резултати биаксијалних испитивања ће бити приказани детаљније у наставку текста.

Већ је напоменуто, у поглављу 2.2.1, да је линеарно еластично понашање бетона, при напрезању притиском, карактеристично за нивое напрезања до око 30% од чврстоће при притиску, а при напрезању затезањем практично до нивоа чврстоће при затезању. Узимајући ово у обзир, облик иницијалне линеарно-еластичне зоне коју ограничава површ, такође приказана на Сл. 6, је таква да са стране затезања практично додирује површ лома, за разлику од стране притиска.



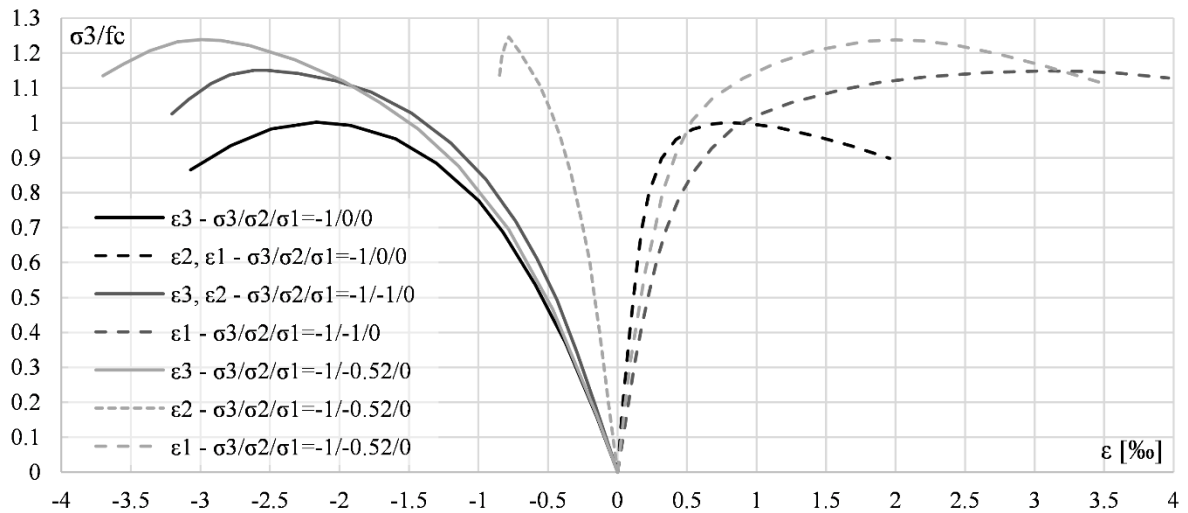
Сл. 5 Резултати биаксијалних и триаксијалних тестова у Хај-Вестергардовим координатама, груписани према θ углу, према [26, 80, 107, 125, 135, 136, 213]



Сл. 6 Површ лома и иницијална линеарно-еластична зона у простору главних напона

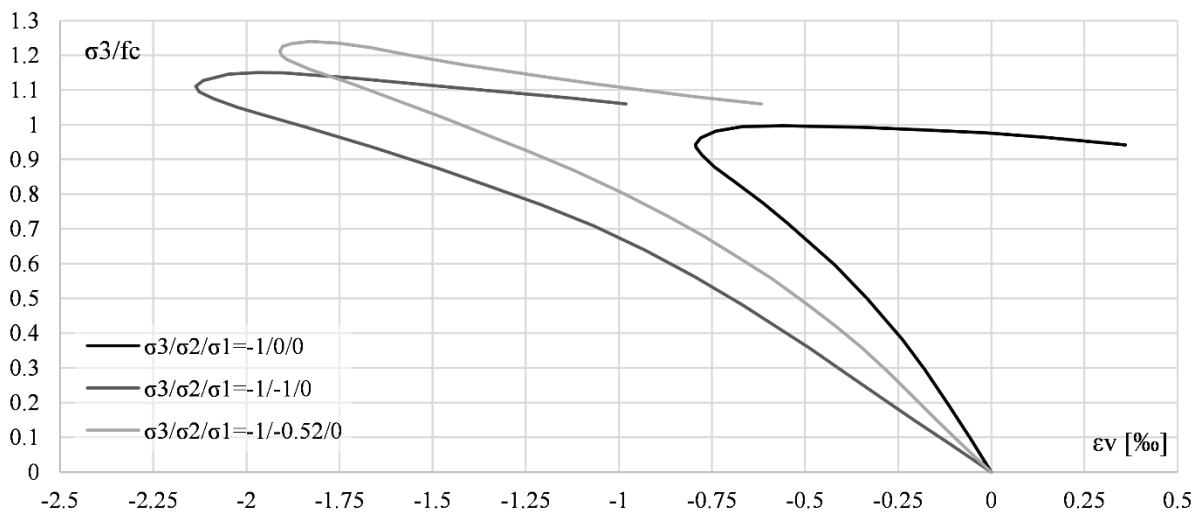
Како се и може закључити из облика површи лома, чврстоће бетона при биаксијалном и триаксијалном напрезању притиском су веће од једноаксијалне. Са друге

стране, чврстоће бетона при биаксијалним и триаксијалним напрезањима затезањем, је незнатно мања од једноаксијалне чврстоће при затезању. Детаљнији приказ, у смислу σ - ϵ , одговора при биаксијалним тестовима Купфера [106, 107] је приказан на Сл. 7. Уочава се пораст чврстоће за око 16% при односу напрезања $\sigma_3/\sigma_2/\sigma_1=-1/-1/0$, односно и до око 25% при односу $\sigma_3/\sigma_2/\sigma_1=-1/-0.52/0$. Осим тога приметан је пораст и дилатације при достизању граничне чврстоће, како за примарни тако и за секундарни правац.



Сл. 7 Понашање бетона при биаксијалним тестовима притиска, према [106, 107]

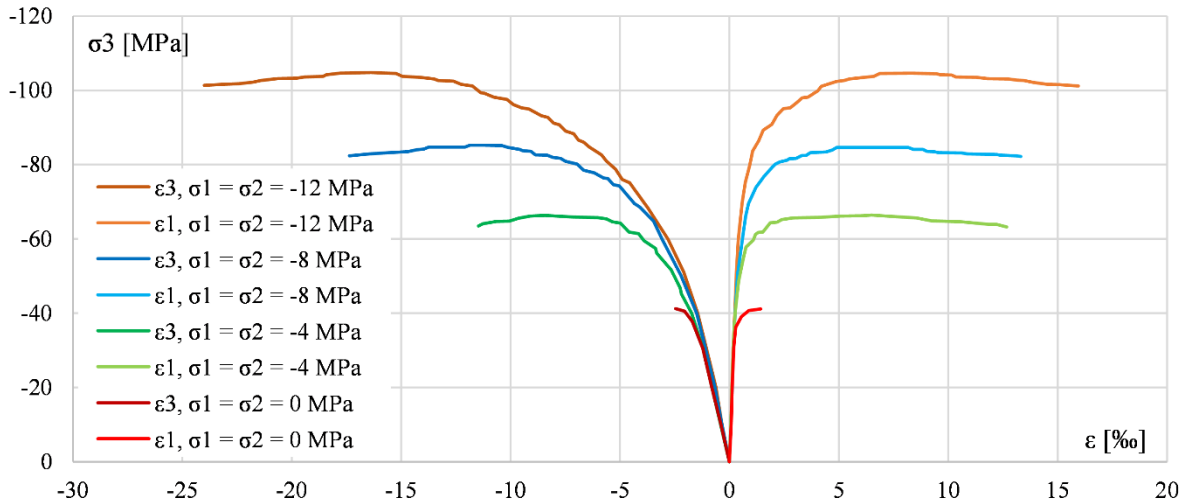
Промена запреминске дилатације је приказана на слици Сл. 8, где се уочава слична тенденција, контракција праћена експанзијом, као при једноаксијалном напрезању, али са израженијом променом запремине.



Сл. 8 Промена запреминске дилатације при биаксијалним тестовима притиска, према [106, 107]

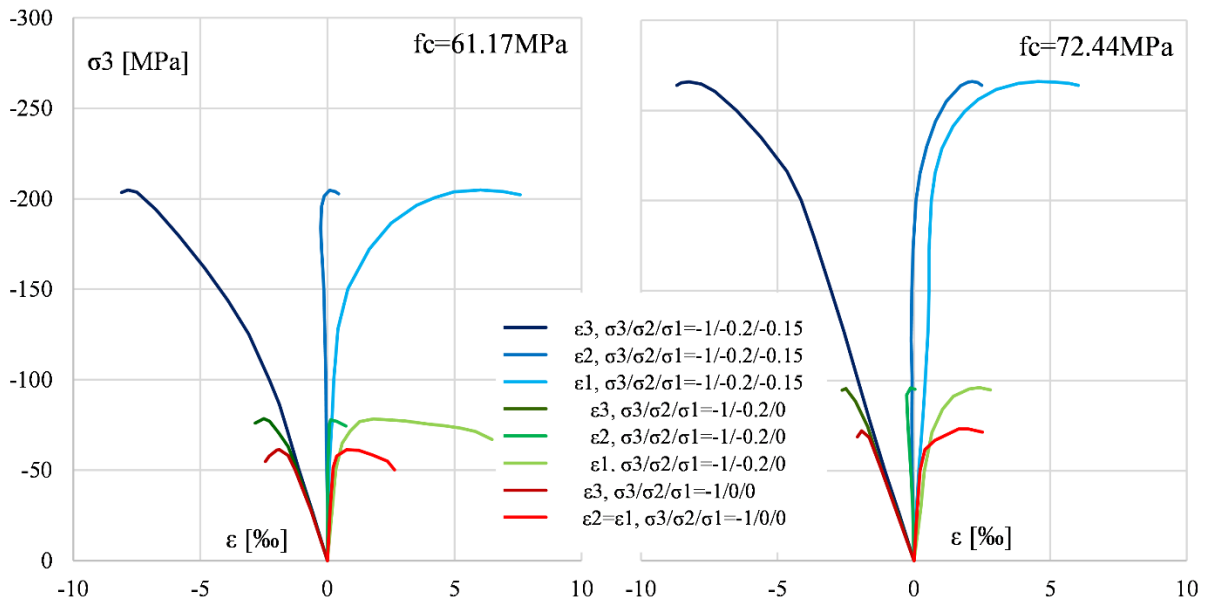
Триаксијални σ - ϵ одговор при оптерећењу притиском, уз једнаке вредности бочног притиска, према резултатима тестова из [26] је приказан на Сл. 9. Једноаксијални одговор је означен као $\sigma_2=\sigma_1=0MPa$, а одговори при триаксијалним тестовима су означени

одговарајућим вредностима бочног притиска. Са ε_3 је означена примарна, а са ε_1 бочна дилатација. Са Сл. 9 се може уочити да је пораст чврстоће готово удвостручена, а дилатација при достизању чврстоће петоструко повећана, при вредностима бочног притиска од 20% примарног.



Сл. 9 Понашање бетона при триаксијалним тестовима притиска, према [26]

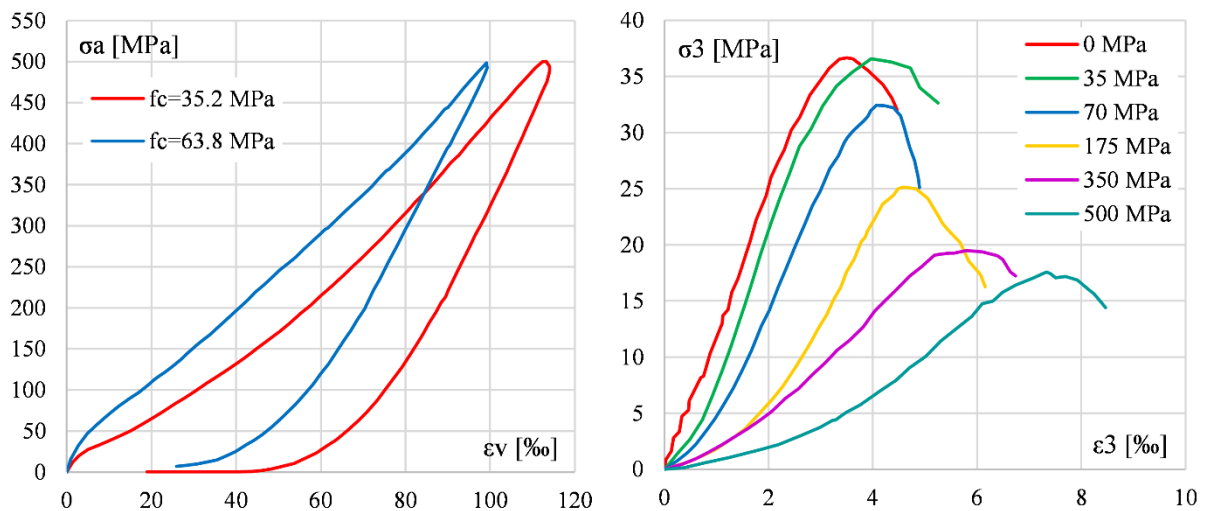
На слици Сл. 10 су поред резултата једноаксијалних и биаксијалних тестова приказани и резултати при триаксијалном оптерећењу са различитим нивоима бочног притиска. И у овом случају је уочљив вишеструки пораст чврстоће уз присуство бочног притиска.



Сл. 10 Понашање бетона при биаксијалним и триаксијалним тестовима притиска, према [80]

При хидростатичком оптерећењу бетона, одговор се одликује појавом пластичних деформација при достизању око 90% једноаксијалне чврстоће при притиску, као и

изразито нелинеарним одговором при завршетку фазе растеређења, како је и приказано на Сл. 11а. Мера оштећења у бетону, настала при хидростатичком оптерећењу, је приказана на Сл. 11б, где се може уочити да при десетоструко већој вредности хидростатичког притиска од једноаксијалне чврстоће при притиску, након растеређења, чврстоћа бетона постаје дупло мања. У исто време дилатација при достизању максималног напона је дупло већа.



Сл. 11 Понашање бетона при хидростатичком притиску а) и једноаксијални одговор бетона након оптерећења хидростатичким притиском до означеног нивоа б), према [49]

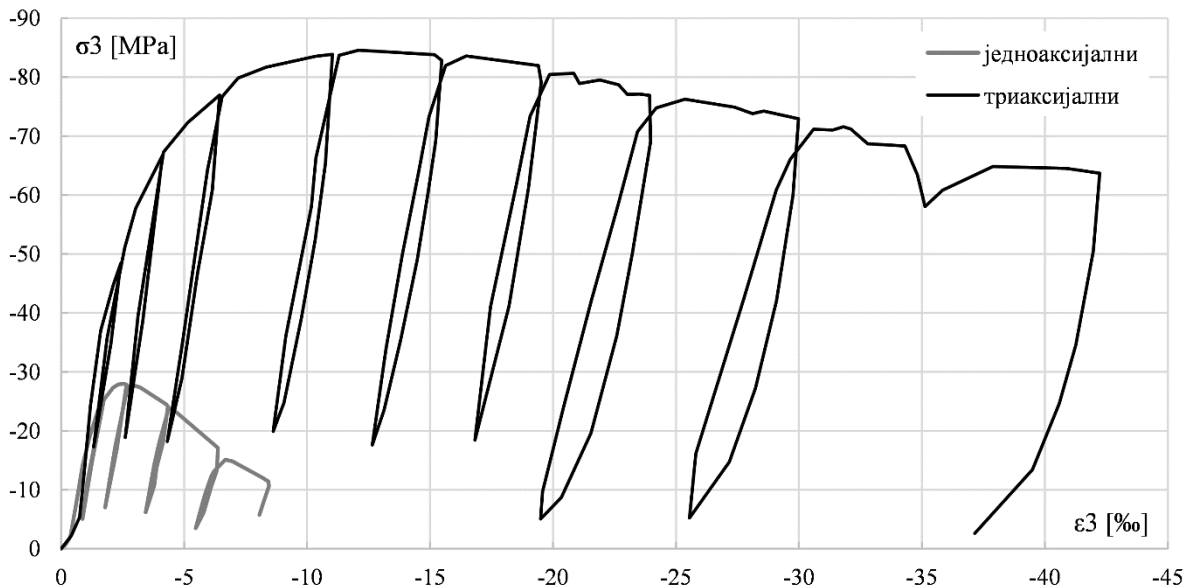
Одговор бетона при цикличном триаксијалном притиску је приказан на Сл. 12, где је уједно сивом бојом приказан и једноаксијални одговор, ради поређења. Приметно је да циклични одговор анVELOпом прати облик монотоног, као и да крутост при растеређењу практично одговара иницијалној крутости.

2.3. Конститутивни модели бетона

Конститутивни модел бетона би у идеалној ситуацији требало да обухвата све поменуте физичке карактеристике материјала. Треба напоменути да су приказане карактеристике материјала макроскопске, односно да оне не осликавају у свим ситуацијама шта се одвија на микроскопском нивоу материјала, што је недостатак у макроскопском приступу формирања конститутивног модела [145]. Иако је велики број конститутивних модела бетона предложен у литератури и коришћен у истраживањима и пракси, сви они имају ограничења у смислу домена проблема у којима могу да се успешно користе.

У наставку ће следити преглед конститутивних модела из литературе, разврстан према њиховој математичкој формулацији. За сваки од модела ће бити сагледане предности и недостаци, односно ограничења за који тип проблема могу и не могу да се

користе. У прегледу који следи акценат ће бити на моделима заснованим на теорији пластичности, механици оштећења и комбинацији пластичност-оштећење.



Сл. 12 Понашање бетона при триаксијалном и једноаксијалном цикличном притиску, према [155]

2.3.1. Емпиријски модели

Емпиријски конститутивни модели су засновани на бројним експерименталним испитивањима, на основу којих се дефинишу функције које описују неке аспекте понашања материјала. Када се прича о експерименталним истраживањима на бетону, већ код најједноставнијих, једноаксијалних, тестова наилази на потешкоће, попут испитивања понашања материјала након достизања граничне носивости [7]. Из прегледа су изостављени резултати и предложени модели са рециклирани агрегатом и свакако бетони са разним додацима влакана, као и бетони са додатком експандираног полистирена. Што се тиче триаксијалних тестова изостављени су модели предложени за ситуације ојачања ФРП тракама и слични.

Емпиријске модели се могу разврстати у више подгрупа у зависности од тога који аспект понашања бетона описују, према следећем: једноаксијалне, биаксијалне и триаксијалне релације нормални напон-дилатација, релације напон-дилатација које описују циклично понашање, функције у вези са смичућим напонима и проклизавањем у равни прслине и др. Када се прича о једноаксијалним релацијама, поред бројних модела из 20-ог и почетка 21-ог века, где су само неки од њих [16, 25, 31, 54, 102, 114, 131, 132, 163, 177, 184, 193], приметна је тежња и у данашњици да се што детаљније опише једноаксијално понашање бетона оваквим релацијама [35, 78, 144, 165]. У раду [144] је приказан преглед релација и чак и њихова подела према типу функције:

- функције са константним E_i/E_0 ;
- функције са варијабилним E_i/E_0 и засноване су на функцији Саргина [37];
- функције са варијабилним E_i/E_0 и засноване су на функцији Поповића [163],

где је E_i иницијални, а E_0 секантни Јангов модул еластичности који одговара достизању чврстоће при притиску.

Што се тиче биаксијалних релација, чувени су радови аутора Купфер и сарадници [106, 107], а проналазе се радови и новијег датума попут [38, 73]. Триаксијалне релације подразумевају изразе за чврстоћу бетона у зависности од нивоа бочног притиска, а уводи се и појам површи лома. Бројни су радови из 20-ог и почетка 21-ог века, где су само неки од њих [3, 5, 12, 71, 72, 101, 121, 136, 155, 171, 172, 192], а проналазе се радови и новијег датума [94, 105, 120, 173, 182, 196, 214].

Код цикличних релација је карактеристична дефиниција грана растерећења и грана поновног оптерећења. Детаљан преглед цикличних модела је приказан у [50]. Само неки од радова старијег датума су [8, 23, 52, 63, 176, 205], али и у овој области се проналазе радови у данашње време [4, 64, 100, 120, 174, 181].

У анализи смичућих релација предњаче радови Колинса и групе аутора Зу и Ху, где су само неки од радова из области [86, 154, 191, 215]. Приметна је тежња и описа смичућег проклизавања равни прслине, односно ефекта уклињавања агрегата у отвореној прслини [24].

2.3.2. Линеарно еластични модели

Линеарно еластични модели су најједноставнији конститутивни модели за представљање понашања бетона. Материјал се сматра линеарно еластичним до достизања чврстоће при притиску или затезању, након чега је подразумевано крто понашање (пад напона на нулу). Што се тиче понашања при затезању, линеарно еластична веза релативно добро одговара експерименталним опажањима, али при оптерећењу притиском, а поготово при биаксијалним или триаксијалним стањима напрезања изразито нелинеарно понашање бетона је уочљиво, а самим тим и моделирање линеарно еластичним конститутивним моделом је неадекватно. Такође, понашање при цикличном оптерећењу није могуће приказати оваквим моделом. Ипак, линеарно еластични модели су неопходни при формулацији модела према теорији пластичности за еласто-пластичне моделе [37].

Линеарно еластична веза напон-дилатација у матричној нотацији је дефинисана према следећем:

$$\{\sigma\} = [D] \cdot \{\varepsilon\} \quad (6)$$

где су σ и ε вектори напона и дилатација, редом, а D је еластична материјална матрица.

Према експерименталним опажањима понашања бетона при биаксијалним и триаксијалним стањима напрезања може се закључити да није адекватно поставити границе чврстоће при притиску и затезању независно од напонског стања. Интеракција чврстоће бетона у зависности од стања напрезања је омогућено формулисањем површи лома, која је могуће формулисати у тродимензионалном простору главних напона:

$$f(\sigma_p) = 0 \quad (7)$$

На овакав начин није једноставно дефинисати површ лома, будући да није очигледна веза главних напона са експерименталним подацима чврстоће бетона при биаксијалним и триаксијалним испитивањима. Алтернативан начин дефинисања површи лома је преко три главне инваријанте тензора напона:

$$f(I_1, I_2, I_3) = 0 \quad (8)$$

или преко прве инваријанте тензора напона и две инваријанте девијаторског дела напона:

$$f(I_1, J_2, J_3) = 0 \quad (9)$$

где се испоставља да је друга варијанта погоднија.

Преглед површи лома за бетон је детаљно приказано у [36] за раздобље до 1980. Површи су подељене према броју параметара потребних за њихово дефинисање и разликују се од једно- до пето-параметарских.

Од **једно-параметарских** модела проналази се:

- критеријум максималног затезућег напона (Ранкинов), којим је могуће дефинисати крти лом по затезању;
- критеријум смичућег напона: Треска где је максимални смичући напон кључна променљива и вон Мизес у коме је октаедарски смичући напон кључна променљива.

Дво-параметарски модели су:

- Мор-Кулонов критеријум, површ хексагоналног облика, у којем парови параметара могу бити (c, ϕ) , (f_c, f_t) или (f_c, ϕ) , где су c и ϕ кохезија и угао унутрашњег трења, редом;
- Друкер-Прагеров критеријум, који је глатка површ, апроксимација Мор-Кулоновог површи, а настао је модификацијом вон Мизесовог критеријума и има облик конуса са кружницама у девијаторској равни. Недостаци ове површи су што меридијани прави, а девијаторски пресеци су кружног облика;

Генерализацију Друкер-Прагеровог је могуће извести: (1) претпостављањем параболичне везе r на ζ , али да девијаторски пресеци остају кружни или (2) остављањем линеарне везе $r - \zeta$, али да се у попречном пресеку укључи зависност од θ . На овај начин су настали **тро-параметарски** модели:

- Бреслер-Пистеров критеријум [20] је дефинисан преко просечних нормалних и смичућих напона према следећем:

$$\frac{\tau_a}{f_c} = A - B \cdot \frac{\sigma_a}{f_c} + C \cdot \left(\frac{\sigma_a}{f_c} \right)^2 \quad (10)$$

Меридијани су закривљени према функцији квадратне параболе, за коју се испоставља да задовољавајуће добро апроксимира експерименталне резултате. Утицај θ је занемарен. Параметри A , B и C се одређују према типским тестовима чврстоће на притисак f_c , чврстоће на затезање f_t и према чврстоћи при биаксијалном притиску f_{bc} .

- Вилам-Ванке критеријум [201] је дефинисан према следећем:

$$f(\sigma_a, \tau_a, \theta) = \frac{1}{z} \cdot \frac{\sigma_a}{f_c} + \frac{1}{r(\theta)} \cdot \frac{\tau_a}{f_c} - 1, \quad r(0^\circ) = r_t, \quad r(60^\circ) = r_c \quad (11)$$

Девијаторски пресек површи је у овом критеријуму није кружни, јер је уведен параметар r растојања до површи у девијаторском пресеку (радијус елипсе), зависно од θ . Меридијани су прави, тако да површ лома одговара ниским нивоима напрезања по притиску. И у овом случају се параметри модела одређују према вредностима f_c , f_t и f_{bc} .

- Ли-Хармон критеријум [119] је дефинисан преко три површи, за зону лома по затезању ($I_l > 0$) и две зоне по притиску ($-f_c \leq I_l \leq 0$ и $I_l \leq -f_c$):

$$\begin{aligned}
f_1 &= (\sigma_1 - f_t) \cdot (\sigma_2 - f_t) \cdot (\sigma_3 - f_t) = 0 \\
f_2 &= \frac{f_t \cdot (f_t + f_c)}{f_c^2} \cdot I_1^2 + f_t \cdot I_1 - I_2 + \frac{1}{f_t} \cdot I_3 - f_t^2 \\
f_3 &= \frac{1}{3} \cdot I_1^2 + \frac{f_{bc}^2 - f_c^2}{6 \cdot f_{bc} - 3 \cdot f_c} \cdot I_1 - I_2 + \frac{1}{f_t} \cdot I_3 + \frac{f_c \cdot f_{bc} \cdot (f_{bc} - 2 \cdot f_c)}{6 \cdot f_{bc} - 3 \cdot f_c}
\end{aligned} \tag{12}$$

Као кључни недостатак у овој формулацији треба навести да површ није глатка.

- Менетреј-Вилам критеријум [134] је представљен изразом:

$$\begin{aligned}
f(\xi, \rho, \theta) &= \left(\sqrt{1.5} \cdot \frac{\rho}{f_c} \right)^2 + m \cdot \left(\frac{\rho}{\sqrt{6} \cdot f_c} \cdot r(\theta, e) + \frac{\xi}{\sqrt{3} \cdot f_c} \right) - 1 = 0, \\
\text{где је } m &= 3 \cdot \frac{f_c^2 - f_t^2}{f_c \cdot f_t} \cdot \frac{e}{e+1}, \quad 0.5 < e \leq 1.0
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\text{и } r(\theta, e) = \frac{4 \cdot (1 - e^2) \cdot \cos^2 \theta + (2 \cdot e - 1)^2}{2 \cdot (1 - e^2) \cdot \cos \theta + (2 \cdot e - 1) \cdot \sqrt{4 \cdot (1 - e^2) \cdot \cos^2 \theta + 5 \cdot e^2 - 4 \cdot e}}$$

Критеријум је настао унапређењем израза за стенске масе [84] и подразумева површ која је глатка, са закривљеним меридијанима и девијаторским пресецима који се мењају од троугаоних ка кружним са порастом хидростатичког притиска. Поред чврстоће на притисак f_c и чврстоће на затезање f_t , ексцентричност e се може одредити на основу чврстоћи при биаксијалном притиску f_{bc} и показано је да уобичајено узима вредности $0.5 < e \leq 0.6$.

Од четворо-параметарских модела проналазе се:

- Отосенов критеријум [151, 152], формулисан према механичкој аналогiji са сферичном мембраном која је придржана на ивици једнакостраничним троуглом и представљен је према следећем:

$$f(I_1, J_2, \cos 3\theta) = A \cdot \frac{J_2}{f_c^2} + \lambda \cdot \frac{\sqrt{J_2}}{f_c} + B \cdot \frac{I_1}{f_c} - 1 = 0 \tag{14}$$

где су A и B параметри, а λ је функција од $\cos 3\theta$, веће је од нуле и дефинисано је следећим изразом:

$$\lambda = \begin{cases} k_1 \cdot \cos \left[\frac{1}{3} \cdot \cos^{-1} (k_2 \cdot \cos 3\theta) \right], & \text{за } \cos 3\theta \geq 0 \\ k_1 \cdot \cos \left[\frac{1}{3} \cdot \pi - \frac{1}{3} \cdot \cos^{-1} (-k_2 \cdot \cos 3\theta) \right], & \text{за } \cos 3\theta \leq 0 \end{cases} \tag{15}$$

у којем су k_1 параметар величине, а k_2 параметар облика. Параметри се одређују на основу чврстоће на притисак f_c , чврстоће на затезање f_t , према чврстоћи при биаксијалном притиску f_{bc} и дефинисањем једне тачке кроз коју ће пролазити меридијан притиска, нпр. $(\xi/f_c, r/f_c) = (-5, 4)$ према [152]. Овако дефинисана површ је глатка и конвексна са изузетком почетног чвора (темена), меридијани су параболични са асимптотским правцем негативног хидростатичког притиска, а девијаторски пресек се мења од приближно троугаоног до приближно кружног са порастом негативног хидростатичког притиска.

- Рејманов критеријум, према [36], у којем су меридијани притиска дефинисани као параболичне функције према:

$$\frac{\xi}{f_c} = a \cdot \left(\frac{r_c}{f_c} \right)^2 + b \cdot \left(\frac{r_c}{f_c} \right) + c \quad (16)$$

а остали меридијани су афини са меридијаном притиска према следећем:

$$r = \phi(\theta_0) \cdot r_c \quad (17)$$

У изразу (17) угао $\theta_0 = 60^\circ - \theta$ и мери се од негативне σ_3 осе. У домену $-60^\circ \leq \theta_0 \leq 60^\circ$ функција $\phi(\theta_0)$ је дефинисана према следећем:

$$\phi(\theta_0) = \begin{cases} \frac{r_t}{r_c} & \text{за } \cos(\theta_0) \leq \frac{r_t}{r_c} \\ \frac{1}{\cos(\theta_0) + \sqrt{(r_c^2/r_t^2 - 1) \cdot (1 - \cos^2(\theta_0))}} & \text{за } \cos(\theta_0) > \frac{r_t}{r_c} \end{cases} \quad (18)$$

На овај начин је девијаторски пресек дефинисан од делом праве линије, а делом благо закривљене. Рејман је користио однос $r_t/r_c = 0.635$ за овај модел [36]. Ова површ има закривљене меридијане и глатку површ дуж меридијана затезања, али као недостатак се наводи прелом површи дуж меридијана притиска. Осим тога, овај критеријум је валидан искључиво за стања притиска.

- Хси-Тинг-Ченов критеријум, према [36], укључује инваријанте напона I_1 и J_2 и максимални главни напон σ_1 :

$$f(I_1, J_2, \sigma_1) = a \cdot \frac{J_2}{f_c^2} + b \cdot \frac{\sqrt{J_2}}{f_c} + c \cdot \frac{\sigma_1}{f_c} + d \cdot \frac{I_1}{f_c} - 1 = 0 \quad (19)$$

и чини га комбинација од генералног октаедарског и Ранкиновог критеријума максималног затезућег напона. Меридијани ове површи су закривљени, а девијаторски пресеци нису кружни. По одређеним аспектима овај критеријум личи

на Отосенов и Рејманов. Параметри се одређују на основу чврстоће на притисак f_c , чврстоће на затезање $f_t = 0.1 \cdot f_c$, према чврстоћи при биаксијалном притиску $f_{bc} = 1.15 \cdot f_c$ и дефинисањем једне тачке кроз коју ће пролазити меридијан притиска, $(\sigma_{oct}/f_c, \tau_{oct}/f_c) = (-1.95, 1.6)$ према [36]. Као мањкавост овог критеријума треба издвојити прелом површи дуж меридијана притиска.

Пето-параметарски критеријум је предложен у [201] као унапређење тро-параметарског Вилијам-Ванке критеријума са два додатна параметра, како би се дефинисали закривљени меридијани и девијаторски пресеци елиптичног типа. На овај начин је модификовани Вилијам-Ванке критеријум могуће применити и на напонска стања високог притиска. Меридијани затезања и притиска су дефинисани према следећем:

$$\frac{\tau_{at}}{f_c} = \frac{r_t}{\sqrt{5} \cdot f_c} = a_0 - a_1 \cdot \frac{\sigma_a}{f_c} + a_2 \cdot \left(\frac{\sigma_a}{f_c} \right)^2 \quad \text{за } \theta = 0^\circ$$

$$\frac{\tau_{ac}}{f_c} = \frac{r_c}{\sqrt{5} \cdot f_c} = b_0 - b_1 \cdot \frac{\sigma_a}{f_c} + b_2 \cdot \left(\frac{\sigma_a}{f_c} \right)^2 \quad \text{за } \theta = 60^\circ$$
(20)

Дефинисањем заједничке тачке меридијана $\sigma_{m0} / f_c = \rho$ која одговара хидростатичком затезању, број параметара се своди на пет. Коначно меридијани су спојени елипсоидном површи, дефинисањем израза за r у зависности од σ_m преко r_t и r_c према следећем:

$$r(\sigma_m, \theta) = \frac{2 \cdot r_c \cdot (r_c^2 - r_t^2) \cdot \cos \theta + r_c \cdot (2 \cdot r_t - r_c) \cdot \sqrt{4 \cdot (r_c^2 - r_t^2) \cdot \cos^2 \theta + 5 \cdot r_t^2 - 4 \cdot r_t \cdot r_c}}{4 \cdot (r_c^2 - r_t^2) \cdot \cos^2 \theta + (r_c - 2 \cdot r_t)^2} \quad (21)$$

Овако дефинисана површ је глатка са меридијанима облика квадратне параболе и девијаторски пресеци се мењају од приближно троугаоних ка кружним са порастом хидростатичког притиска. Параметри се одређују на основу чврстоће на притисак f_c , чврстоће на затезање f_t , према чврстоћи при биаксијалном притиску f_{bc} и дефинисањем по једне тачке кроз коју ће пролазити меридијан притиска и меридијан затезања.

2.3.3. Нелинеарно еластични модели

Што се тиче формулације нелинеарно еластичних модела разликују се два основна приступа (1) тотални опис материјала у секантној формулацији и (2) инкрементални (диференцијални) опис материјала у форми тангентне везе напон-деформација. Од тоталних конститутивних веза разликујемо везе Кошијевог типа и Гриновог (хипереластичног) типа [37].

У моделима Коши еластичног типа тренутно стање напона је јединствено описано тренутним стањем дилатација, односно:

$$\sigma_{ij} = F_{ij}(\varepsilon_{kl}) \quad (22)$$

Модели описани на овај начин су реверзибилни и независни од историје напрезања. У општем случају, када су напони јединствено одређени из дилатација и обрнуто, ова веза није нужно тачна [37]. Осим тога, реверзибилност и независност од историје напрезања енергије дилатације и комплементарне енергије није загарантована. Функције густине енергије дилатације ($W(\varepsilon_{ij})$) и густине комплементарне енергије дилатације ($\Omega(\varepsilon_{ij})$) су дефинисане према следећем:

$$W(\varepsilon_{ij}) = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} \cdot d\varepsilon_{ij}, \quad \Omega(\sigma_{ij}) = \int_0^{\sigma_{ij}} \varepsilon_{ij} \cdot d\sigma_{ij} \quad (23)$$

Модели Коши еластичног типа могу да генеришу енергију у одређеним циклусима оптерећење-растерећење и потенцијално да крше законе термодинамике, што је неприхватљиво у физичком смислу [37]. Разликује се неколико типова модела:

- модели са растављеним секантним модулом компресије K_s и модулом смицања G_s , засновани на октаедарским напонима и дилатацијама, где су неки од модела [32, 102, 106];
- модели са увезаним модулом компресије K_s и модулом смицања G_s [102];
- модели са растављеним секантним Јанговим модулом E_s и Поасоновим коефицијентом смицања ν_s , од којих је најзначајнији Отосенов модел [151, 152]. Отосенов модел је дефинисан преко индекса нелинеарности $\beta = \sigma_3 / \sigma_{3f}$ који је функција позиције тачке напона унутар површи лома (растојање до површи), изразом за секантни E_s , који је заснован на изразу Саргина и изразом за секантни ν_s . Овај модел је имплементиран у развијени рачунарски програм и неке од његових могућности су приказане кроз рад [207].

Као природан след, настали су модели Гриновог (хипереластичног) типа који подразумевају постојање функција $W(\varepsilon_{ij})$ и $\Omega(\varepsilon_{ij})$ таквих да је задовољено следеће:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma_{ij}} \quad (24)$$

На овај начин је обезбеђено да енергија не буде генерисана током циклуса и да су закони термодинамике увек задовољени. Изразом (24) је дефинисана један-на-један веза тренутних напона и дилатација у следећем облику:

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl}, \quad \varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \cdot \sigma_{kl} \quad (25)$$

где су $D_{ijkl}(\varepsilon_{mn})$ и $S_{ijkl}(\sigma_{mn})$ тензори четвртог реда који зависе од тренутног стања дилатација и напона, редом. Треба напоменути и Друкеров постулат стабилних материјала, односно захтев јединствености и стабилности хипереластичних материјала, који је испуњен конвексношћу $W=const.$ и $\Omega=const.$ површи у простору дилатација и напона, редом. Ово је еквивалентно подразумевано и позитивном дефинитношћу Хесијан матрица H_{ijkl} и H'_{ijkl} , које су дефинисане према следећем:

$$\dot{\sigma}_{ij} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \cdot \dot{\varepsilon}_{kl} = H_{ijkl} \cdot \dot{\varepsilon}_{kl}, \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}} \cdot \dot{\sigma}_{kl} = H'_{ijkl} \cdot \dot{\sigma}_{kl} \quad (26)$$

У којима су $\dot{\sigma}_{ij}$ и $\dot{\varepsilon}_{ij}$ тензори инкремента напона и дилатације, редом [37].

Диференцијална (хипоеластична) формулација се користи за опис материјала где стање напона зависи од тренутног стања дилатација, али и од путање напона којом се дошло до тог стања. Везе напона и дилатације су у овом случају дефинисане у инкременталном облику тензорима D_{ijkl} и S_{ijkl} . Разликује је се неколико типова хипоеластичних модела [37]:

- модели настали растављањем инкремента напона на запремински и девијаторски део и дефинисањем нелинеарне промене модула компресије K и модула смицања G , попут [140];
- модели за биаксијална стања напрезања, у којима се правци главних напона поклапају са правцима ортотропије, попут [122];
- претходно поменути ортотропни модели који су унапређени са дефинисањем цикличног понашања, као и монотоног са концептом еквиваленте једноаксијалне дилатације, попут [52, 60];
- модели првог реда, у којима су тензори D_{ijkl} и S_{ijkl} линеарне функције параметара, напона или дилатације, попут [45];
- модели у којима су тензори D_{ijkl} и S_{ijkl} функције инваријанти, поред напона или дилатације, а који се називају модели варијабилног модула. Један од примера је [143].

2.3.4. Модели засновани на теорији пластичности

Показано је у поглављу 2.2 је да бетон при оптерећењу притиском тече попут дуктилних материјала на површи течења, пре достизања дилатације при којој се дробе.

Што се тиче понашања при затезању, оно је суштински линеарно еластично до лома и не јавља се пластична дилатација при лому. Понашање при притиску се одликује линеарно еластичним понашањем до границе пропорционалности, а даљим повећањем напрезања, услед појава микропрелина, материјал се одликује нелинеарним понашањем све до достизања идеално пластичног. Нелинеарна деформација је суштински пластична, будући да се при растерећењу само један део од укупне деформације враћа. Дакле, укупна дилатација може бити представљана као сума еластичне ε_e и пластичне дилатације ε_p :

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p \quad (27)$$

Понашање материјала унутар зоне пропорционалности је описано линеарно еластичним (поглавље 2.3.2), а нелинеарно понашање према теорији пластичности је описано дефинисањем: површи течења, ојачања материјала и правила течења.

2.3.4.1. Површ течења

Површ течења је петодимензионална површ у шестодимензионалном простору напона и уобичајено се приказује у простору главних напона. Напонским стањима која се налазе унутар површи течења одговара еластично понашање, а напонским стањима која се налазе на површи течења одговара пластично понашање. Даљом деформацијом материјала, напонско стање остаје на површи течења, али сама површ може мењати свој облик или величину, јер напонска стања изван површи течења нису допустива.

Површ течења је иницијално затворена са негативне стране хидростатичке осе, када дефинише границу пропорционалности, а њеним ширењем и отварањем у правцу негативне хидростатичке осе се практично поклапа са површи лома при достизању чврстоће материјала. Неке од површи дефинисане на овај начин су [21, 79, 81, 89, 99, 124, 148]. Алтернативно, уместо дефинисања отварања површи према негативној хидростатичкој осе, у литератури су предложене површи-поклопци (*cap surface*) које дефинишу границу на негативној хидростатичкој осе, као што је предложено у [130, 172, 175].

У Додатку А су табеларно приказане најзначајније функције површи течења, пронађене у литератури, повезане са конститутивним моделима заснованим на теорији пластичности. Могу се уочити различите формулације у простору главних напона, али и у трансформисаним напонским просторима, затим функције дефинисане преко инваријанти напона, средњих напона или функције у Хај-Вестергардовима

координатама. Приметан је и одређени број површи течења које су настале модификацијом површи лома, приказаних у поглављу 2.3.2, или других. Треба истаћи и да је половина приказаних функција настала после 2000-те године.

2.3.4.2. Ојачање материјала

Нелинеарни део понашања бетона у зони између пропорционалности и идеално пластичног понашања, може бити описан увођењем теорије ојачања у пластичности, на бази дилатације или рада. Дефинише се иницијална површ течења (површ границе еластичности), унутар које је, како је већ речено, понашање материјала еластично. Када се новонастало стање напрезања налази изван иницијалне површи течења, дефинише се нова површ, променом облика претходне, која ће заменити зону еластичног понашања материјала. У исто време, свака промена површи течења је праћена акумулацијом пластичне деформације материјала.

Један од начина је дефинисање површи течења умањењем површи лома, што за резултат даје сразмерну расподелу еласто-пластичне зоне између површи течења и површи лома. Овај случај одговара изотропном ојачању – уједначеном ширењу површи течења у свим правцима, вођен једном променљивом ојачања, као што је коришћено у радовима [21, 83, 149]. Променљива ојачања се најчешће одређује према облику криве напон-дилатација при једноаксијалном притиску.

Будући да је показано у поглављу 2.2 да се бетон понаша готово линеарно при напрезању затезањем, а нелинеарна зона наступа на око $0.35 \cdot f_c$ по притиску, настале су неуниформне функције ојачања, попут оних у [81, 164]. У практичном смислу уводи се правило q_h којим се скалирају сабирци у функцији течења повезани са хидростатичким притиском I_1 , ζ и сл. Уобичајено је да ово правило буде вођено променљивом κ у функцији еквивалентне пластичне дилатације ε_{ps} . Иновативно, у [76] је предложена променљива ојачања κ у функцији норме запреминског дела вектора пластичне дилатације, која је у инкременталном облику дефинисана према следећем:

$$\dot{\kappa}(\dot{\varepsilon}_p) = \dot{\varepsilon}_{p,v} = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot \dot{\varepsilon}_p \quad (28)$$

Овакав приступ је коришћен и у [156, 157], где је правило q_h дефинисано у елиптичном облику према:

$$q_h(\kappa) = q_h(\varepsilon_{ps,v}) = q_{h0} + (1 - q_{h0}) \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon_{ps,v,t} - \varepsilon_{ps,v}}{\varepsilon_{ps,v,t}} \right)^2}, \quad \varepsilon_{ps,v,t} = \frac{f_c}{E_e} \cdot (1 - 2 \cdot \nu) \quad (29)$$

Посебна пажња је посвећена и анализи q_{h0} које дефинише иницијацију пластичних деформација у зависности од чврстоће бетона при притиску, према следећем:

$$q_{h0} = \frac{f_c^{1.855}}{60 \cdot f_c} \quad (30)$$

У [130] је предложена следеће правило за q_h :

$$q_h(\tau_{oct}) = q_{h0} + (1 - q_{h0}) \cdot \left| \frac{q_{h0} - \tau_{oct} / \tau_{oct}^f}{q_{h0} - 1} \right| \quad (31)$$

и израз за q_{h0} :

$$q_{h0} = 1 - \exp\left(\frac{-f_c}{80}\right) \quad (32)$$

У сличном облику је дефинисано правило за q_h у [79], где је d_h параметар дуктилности, којим се обухвата утицај бочног притиска у триаксијалном стању на трајну деформабилност материјала:

$$q_h(\varepsilon_{ps}, d_h) = q_{h0} + (1 - q_{h0}) \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon_{ps}}{d_h} \cdot \left(2 - \frac{\varepsilon_{ps}}{d_h}\right)}, \quad (33)$$

$$d_h = \begin{cases} 1/a_d + b_d \cdot \sigma_a^{c_d} & \text{за } \sigma_a \geq 0 \\ \exp(e_d + f_d/|\sigma_a| + g_d \cdot \ln(|\sigma_a|)) + h_d & \text{за } \sigma_a < 0 \end{cases}$$

Правило ојачања у функцији девијаторског дела пластичне дилатације $\varepsilon_{p,d}$ је предложено у [124]:

$$q_h(\kappa) = \frac{\kappa}{1 + \beta_1 \cdot \kappa - \beta_1} + (1 - \beta_1) \cdot (1 - \kappa) \cdot \kappa, \quad \kappa(\varepsilon_{ps,d}) = \frac{\varepsilon_{ps,d}}{\varepsilon_{ps,d0}} \quad (34)$$

У [161] правило ојачања је дато у функцији запреминског дела пластичне дилатације:

$$q_h(\kappa) = q_{h0} + (1 - q_{h0}) \cdot \frac{r_1 \cdot \kappa}{r_1 - 1 + \kappa^{r_1}}, \quad \kappa(\varepsilon_{ps,v}) = \frac{\varepsilon_{ps,v}}{\varepsilon_{ps,v0}}, \quad r_1 = \frac{4}{3 + q_{h0}} \quad (35)$$

Правило ојачања у функцији девијаторског дела пластичне дилатације $\varepsilon_{p,d}$ је предложено и у [198]:

$$q_h(\kappa) = \frac{A^3 \cdot \kappa + (D - 1) \cdot \kappa^2}{1 + (A^3 - 2) \cdot \kappa + D \cdot \kappa^2}, \quad \kappa(\varepsilon_{ps,d}) = \frac{\varepsilon_{ps,d}}{\varepsilon_{ps,d0}} \quad (36)$$

2.3.4.3. Правило течења

Правило течења дефинише смер вектора пластичне дилатације ε_p при свакој промени облика површи течења. Разликује се асоцијативно правило течења, где је смер вектора пластичне дилатације ε_p управан на површ течења f у датој тачки и неасоцијативна правила течења, где је смер ε_p управан на функција пластичног потенцијала g . Неасоцијативна пластичност је управо карактеристична за материјале попут бетона или геомеханичке материјале. Треба напоменути да се неасоцијативном пластичношћу крше Друкерови постулати стабилности материјала, али је показано у [110, 111] да се материјал понаша стабилно упркос томе.

Поред радова у којима су модели формулисани на бази асоцијативне пластичности, функција пластичног потенцијала g се кроз литературу често усвајала у облику Друкер-Прагеровог израза, као што се проналази у [81, 149]. У [164] је предложена модификација површи течења, приказане у поглављу 2.3.4.1, према следећем:

$$g = \left((1-\kappa) \cdot \frac{\sigma_1^2}{f_c^2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{f_c} \right)^2 + \kappa^2 \cdot \frac{m_g}{f_c} - \kappa^2 \cdot c_0 \quad (37)$$

Квадратна форма g је предложена у [76]:

$$g = -A \cdot \left(\frac{\rho}{\sqrt{q_h(\kappa)}} \right)^2 - B \cdot \frac{\rho}{\sqrt{q_h(\kappa)}} + \frac{\xi}{\sqrt{q_h(\kappa)}} \quad (38)$$

Функција пластичног потенцијала g произвољног реда n и зависна од Лодовог угла θ је предложена у [156, 157]:

$$g = A \cdot \left(\frac{\rho}{q_h \cdot \sqrt{q_s} \cdot f_c} \right)^n + \left(C + \frac{1}{2} \cdot (B - C) \cdot (1 - \cos 3\theta) \right) \cdot \frac{\rho}{q_h \cdot \sqrt{q_s} \cdot f_c} + \frac{\xi}{q_h \cdot \sqrt{q_s} \cdot f_c} - a \quad (39)$$

У [79, 124] је усвојена функција g у истом облику као функција f , приказана у поглављу 2.3.4.1. Квадратна функција зависна од Лодовог угла θ је предложена у [161]:

$$g = \left(B + \frac{1}{2} \cdot (A - B) \cdot (1 - \cos 3\theta) \right) \cdot \left(\frac{\rho}{q_h \cdot \sqrt{q_s} \cdot f_c} \right)^2 + \left(1 + \frac{1}{2} \cdot (\alpha_{p0} - 1) \cdot (1 - \cos 3\theta) \right) \cdot \frac{\xi}{q_h \cdot \sqrt{q_s} \cdot f_c} \quad (40)$$

2.3.5. Модели према теорији пластичности у простору дилатација

Иако је теорија пластичности у простору напона распрострањена у инжењерској пракси, одређене мањкавости оваквог приступа су присутне [7]:

- за материјале који омекшавају не постоји јасан критеријум да ли се материјал оптерећује или растерећује, јер у оба случаја напони опадају, односно површ течења се сужава;
- за многе формулације при достизању тачке максималне чврстоће, модул еластичности износи нула, када се не могу очекивати поуздани резултати.

Ови недостаци могу бити елиминисани коришћењем формулације у простору дилатација. Друкеров постулат стабилности, који је основа за теорију пластичности у простору напона, престаје да важи у зони омекшања материјала, где слабији критеријум предложен у [88] обезбеђује основу за формулацију у простору дилатација. На основу овог рада, формулисана је теорија пластичности у простору дилатација [141].

Детаљан преглед модела бетона и формулација новог модела се проналази у дисертацији [203], а неки од предложених модела са приказани у [65, 137]. У литератури новијег датума се не проналазе радови у овој формулацији.

2.3.6. Модели према ендохроној теорији

Модели формулисани према ендохроној теорији подразумевају континуално нееластично понашање без потребе за дефинисањем површи течења, увођењем параметра који зависи од акумулиране нееластичне дилатације. Модел је развијен од стране Валаниса [186–189], а проширен у смислу моделирања бетона од Бажанта [9, 11, 14]. Проналази се анализа стабилности и јединствености ових модела у [168] где је указано на одређене потешкоће које се јављају при коришћењу ендохроних модела, као и критичка анализа у раду [166]. Ни у овој формулацији се не проналазе радови новијег датума.

2.3.7. Модели према теорији лома и механици оштећења

Модели према теорији лома и механици оштећења су засновани на концепту пропагирања и спајања микропрелина у бетону, које су присутне чак и пре аплицирања напрезања. Раније формулације модела су уобичајено биле формулисане према теорији пластичности у комбинацији са теоријом лома, нпр. [55, 56, 62, 85]. Друга класа модела се ослања на коришћење променљивих стања материјала d , које квантификују оштећење у зависности од историје напрезања [7].

Променљива оштећења, за одређени правац са нормалом \mathbf{n} , је дефинисана према следећем:

$$d_n = \frac{A - \bar{A}}{A} \quad (41)$$

где је A површина разматраног елемента у пресеку који одговара нормали \mathbf{n} , а \bar{A} је ефективна површина преко које се преноси напрезање. У општем случају, када су присутне пррлине произвољне оријентације, d је функција од \mathbf{n} , што значи да је d тензорског облика, а уколико се постави хипотеза изотропије d је скаларног облика. Концептом ефективних напона се дефинише веза ефективних напона са номиналним према следећем [115]:

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - d} \quad (42)$$

Модели засновани на механици оштећења су уобичајено формулисани у термодинамичким оквирима, иако у принципу модели могу бити дефинисани, просто, везом номинални напон-дилатација и критеријумом оштећења. Чак и овако дефинисани модели могу бити накнадно верификовани у погледу прихватљивости у термодинамичким оквирима коришћењем Клаусис-Дуемове неједнакости [145].

Коришћењем саме механике оштећења, без комбинације са теоријом пластичности, може се верно описати понашање бетона у режиму омекшавања, за монотоне историје оптерећења, када је небитно колика је заостала деформација. Овакви модели су уобичајено дефинисани везом напон-дилатација уз критеријум оштећења и/или правило пораста оштећења. Практично све моделе из ове групе је могуће сврстати у три категорије према правилу пораста оштећења:

- модели са дефинисаним правилу пораста оштећења, попут [18, 66, 95, 153, 158, 159];
- модели у којима се правило пораста оштећења добија из потенцијала дисипације [116, 117];
- модели у којима је имплицитно дефинисано правило пораста оштећења [42, 43, 153].

У [133] предложен је следећи критеријум оштећења:

$$f_d(\boldsymbol{\varepsilon}, D, K_0) = \tilde{\varepsilon} - K(d), \quad \tilde{\varepsilon} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (\langle \varepsilon_{pi} \rangle_+)^2} \quad (43)$$

где $K(d)$ одговара највишем нивоу оштећења достигнутом до датог тренутка, а иницијално узима вредност K_0 . Укупно оштећење је дефинисано као тежинска сума оштећења по затезању и притиску према следећем:

$$d = \alpha_t \cdot d_t + \alpha_c \cdot d_c, \quad d_i = 1 - \frac{(1 - A_i) \cdot K_0}{\tilde{\varepsilon}} - \frac{A_i}{\exp(B_i \cdot (\tilde{\varepsilon} - K_0))}, \quad i = t, c \quad (44)$$

Алтернативно оваквом скаларном моделу, предложен је модел са одвојеним скаларним оштећењима по затезању и притиску, d_t и d_c . У овом случају су дефинисане по два одвојена критеријума оштећења и два правила оштећења у сличног облика попут (43), односно (44). Овакав модел одвојено обухвата оштећење по затезању и притиску и на тај начин верније осликава понашање бетона при цикличном напрезању.

Термодинамичким приступом је формулисан модел у [179] где је функција течења:

$$f = \sqrt{Y_i \cdot \bar{Y}_i} - Y_c / b \quad (45)$$

а, гранична функција оштећења дефинисана према следећем:

$$F_d = \sqrt{\bar{Y}_i \cdot \bar{Y}_i} - Y_c, \quad \bar{Y}_i = b \cdot Y_i \quad (46)$$

где су Y_i конјугати термодинамичке силе, b је параметар мапирања на функцију течења f , а Y_c одговара иницијацији оштећења. Правило пораста оштећења је дефинисано имплицитно, коришћењем асоцијативног правила течења и индекса оптерећења L :

$$\dot{d}_i = L \cdot \frac{\partial f}{\partial Y_i}, \quad L = \frac{c}{H} \cdot \frac{\partial f}{\partial Y_j} \cdot \dot{Y}_j, \quad c = \begin{cases} 1 & \text{за } f = 0 \text{ и } \partial f / \partial Y_j \cdot \dot{Y}_j > 0 \\ 0 & \text{у супротном} \end{cases} \quad (47)$$

У овом моделу гранична површ је усвојена као фиксна, како би се обезбедила ненегативна акумулација оштећења.

Модификацијом Отосенове површи [151] је дефинисана гранична површ у [194], таква да се скупља са порастом акумулираног оштећења:

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{\sigma}, \bar{d}) &= A \cdot J_2 + \lambda \cdot K \cdot \sqrt{J_2} + K^2 \cdot B \cdot I_1 - K^2 \cdot g(\bar{d}) \\ F(\boldsymbol{\sigma}, \bar{d}) &= A \cdot J_2 + \lambda \cdot \sqrt{J_2} + B \cdot I_1 - g(\bar{d}) \end{aligned} \quad (48)$$

а правило оштећења је дато имплицитно, слично изразу (47).

У [66] су приказане одвојени критеријуми оштећења по затезању и притиску:

$$\begin{aligned} f_{dt} &= \sqrt{\bar{\sigma}_t \cdot D^{-1} \cdot \bar{\sigma}_t} - r_t \\ f_{dc} &= \sqrt{\sqrt{3} \cdot (K \cdot \bar{\sigma}_{oct,c} + \bar{\tau}_{oct,c})} - r_c \end{aligned} \quad (49)$$

и правила пораста оштећења:

$$\begin{aligned} d_t &= 1 - r_{t,0}/r_t \cdot \exp\left(A_t \cdot (1 - r_{t,0}/r_t)\right) \\ d_c &= 1 - r_{c,0}/r_c \cdot (1 - A_c) - A_c \cdot \exp\left(B_c \cdot (1 - r_{c,0}/r_c)\right) \end{aligned} \quad (50)$$

Изотропни модел оштећења, са имплицитно дефинисаним правилом пораста оштећења, заснован на две површи течења је предложен у [42, 43], где су површи дефинисане према следећем:

$$\begin{aligned} f_t &= J_2 - a_t \cdot I_1 + b_t \cdot r_t(d_t) \cdot I_1 - k_t \cdot r_t^2(d_t) \cdot (1 - \alpha \cdot d_c) \\ f_c &= J_2 + a_c \cdot I_1^2 + b_c \cdot r_c(d_c) \cdot I_1 - k_c \cdot r_c^2(d_c) \\ r_i &= \begin{cases} 1 - \frac{1 - \sigma_{ei}/\sigma_{0i}}{d_{0i}^2} \cdot (d_{0i} - d_i)^2 & \text{за } d_i < d_{0i} \\ \left(1 - \left(\frac{d_i - d_{0i}}{1 - d_{0i}}\right)^{c_i}\right)^{0.75} & \text{за } d_i \geq d_{0i} \end{cases}, \quad i = t, c \end{aligned} \quad (51)$$

У [95, 158] је предложен следећи критеријум оштећења за скаларни модел:

$$f_d(\varepsilon, \kappa) = \tilde{\varepsilon} - \kappa, \quad \tilde{\varepsilon} = \frac{1}{E} \sqrt{\sum_{i=1}^3 (\langle \sigma_{pi} \rangle_+)^2} \quad (52)$$

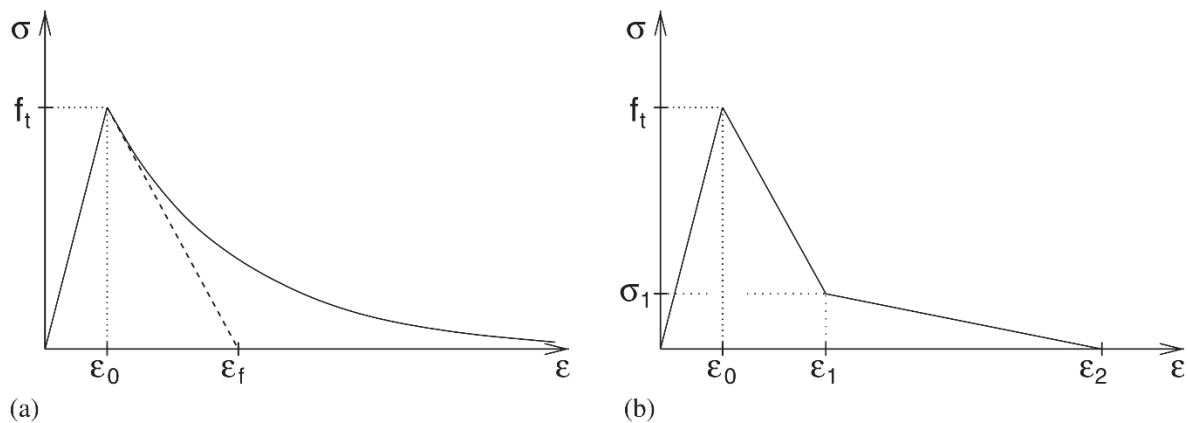
где κ одговара еквивалентној дилатацији $\tilde{\varepsilon}$ при највишем нивоу оштећења достигнутом до датог тренутка. Правило пораста оштећења је дефинисано на два начина, као експоненцијално и билинеарно. Експоненцијално правило је следећег облика:

$$d = \begin{cases} 0 & \text{за } \kappa \leq \varepsilon_0 \\ 1 - \frac{\varepsilon_0}{\kappa} \cdot \exp\left(-\frac{\kappa - \varepsilon_0}{\varepsilon_f - \varepsilon_0}\right) & \text{за } \kappa > \varepsilon_0 \end{cases} \quad (53)$$

у коме је ε_0 дилатација при највишем напону, дефинисана преко једноаксијалне чврстоће и модула еластичности, а ε_f је параметар који утиче на нагиб опадајуће гране дијаграма омекшања материјала, према слици Сл. 13. Билинеарно правило је дефинисано према следећем:

$$d = \begin{cases} 0 & \text{за } \kappa \leq \varepsilon_0 \\ \frac{\varepsilon_1 - \sigma_1/E}{\varepsilon_1 - \varepsilon_0} \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\kappa}\right) & \text{за } \varepsilon_0 \leq \kappa \leq \varepsilon_1 \\ 1 - \frac{\sigma_1/E}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \cdot \left(\frac{\varepsilon_2}{\kappa} - 1\right) & \text{за } \varepsilon_1 \leq \kappa \leq \varepsilon_2 \\ 1 & \text{за } \varepsilon_2 \leq \kappa \end{cases} \quad (54)$$

и такође је приказано на Сл. 13.



Сл. 13 Облик дијаграма омекшања материјала према [95]

Приказани модели, засновани искључиво на механици лома, су само покушаји да се опише понашање бетона при напрезању затезањем и притиском, без посебног обраћања пажње на макроскопске карактеристике понашања материјала [145]. Будући да је дисипација енергије додељена оштећењу, модели пропуштају да опишу неповратне деформације материја, што, срећом, долази до изражаја тек при цикличним историјама напрезања. Комбиновањем теорије пластичности и механике оштећења је начин да се опишу битне макроскопске карактеристике понашања бетона, о чему ће бити речи у наредним поглављима.

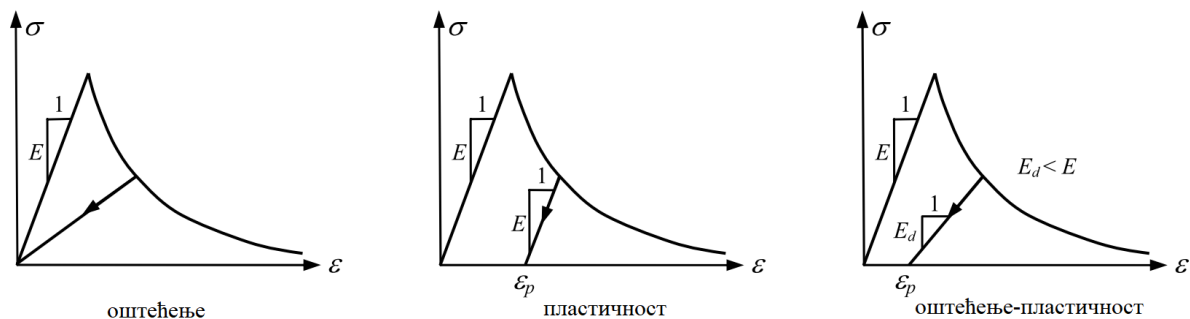
2.3.8. Модели микро равни (*microplane*)

Модели микро равни су конститутивни модели у којима је макроскопско понашање описано механиком микроструктуре. Практично једини модел из ове категорије који је развијен до нивоа имплементације је *Microplane* модел развијен од Бажанта и сарадника [10]. Иницијално, овакав тип модела је био формулисан за метале, а Бажант и остали су развили моделе за бетон и грануларне материјале [30, 69]. У овој групи материјалних модела веза напона и дилатација је дефинисане преко вектора, за разлику осталих модела где је веза тензор другог реда. Макроскопске дилатације и напони су одређени као сума ових вектора у свим равнима различитих оријентација, уз претпоставку одређених статичких и кинематичких ограничења. Неколико верзија *Microplane* модела је развијено до данас. Последња верзија је модела је М7 [28, 29]. Међу доступним верзијама М4 [13, 27, 118, 185] је најзаступљенија при нелинеарној анализи бетонских елемената и конструкција. Овим моделом је могуће симулирати механички одговор бетонских конструкција за произвољна напонска стања, што је показано у литератури, а проналазе

се радови новијег датума где се испитују перформансе модела са рачунарског аспекта [87].

2.3.9. Модели засновани на комбинацији пластичност-оштећење

Комбиновање теорије пластичности и механике оштећења у формирању конститутивних модела бетона је есенцијални приступ којим је могуће обухватити феноменолошке карактеристике бетона, приказане у поглављу 2.2 – неповратне дилатације и деторијацију материјала (погледати Сл. 14). Концептом ефективних напона је формиран пут којим је могуће повезати оштећење и еластичност. Спрезање оштећења и пластичности може бити имплицитно изведено кроз функцију течења и критеријум оштећења [6, 19, 40, 44, 82, 91, 92, 112, 113, 127, 128, 146, 147, 167, 190, 195, 206], где је чврстоћа бетона опадајућа функција променљиве оштећења d . На овај начин је омогућено коришћење различите функције течења и критеријума оштећења. Функција течења је уобичајено дефинисана у простору ефективних напона уз правило ојачања које дефинише њену еволуцију, док правило омекшавања уобичајено контролише пораст оштећења. Спрезањем функције течења и критеријума оштећења је дефинисано свеобухватно понашање, ојачање и омекшање материјала, али будући да су функције различите често је тешко дефинисати њихову корелацију [145, 197].



Сл. 14 Једноаксијални дијаграм напон-дилатација конститутивних модела [145]

Алтернативно овом приступу, само једно од наведеног, критеријум оштећења [66] или функција течења [74, 75, 77, 103, 112, 116, 123, 126, 139, 194, 202], може бити коришћено за контролу процеса дисипације енергије. У првом случају, када се користи критеријум оштећења за контролу дисипације енергије, потребно је дефинисати правило течења за пластичну дилатацију. У другом случају, при коришћењу функције течења за контролу дисипације, ниво оштећења је исказан у функцији унутрашњих променљивих које контролишу процес течења. Сама иницијација оштећења је исказана једноставним критеријумом оштећења. Пластичност се сматра активним механизмом деформације, а дисипација енергије праћена порастом оштећења пасивним механизмом, односно

оштећење може да се деси искључиво након одређеног нивоа пластичне деформације. Овакав приступ је очигледно једноставнији при формулисању модела, него имплицитно повезивање функције течења и критеријума оштећења [145, 197].

Кратак приказ неких од модела је приказан у наставку. Будући да модела из ове групе има много, где је у овом прегледу обухваћено 30 модела, а то свакако нису сви модели из групе који постоје, преглед сваког од модела дат је у најкраћем могућем приказу. Конкретно, обрађена је пажња на део формулације према теорији пластичности – функцију течења и правило течења, и на део који се тиче механике оштећења – критеријум оштећења и правило пораста оштећења.

2.3.9.1. Модел Лублинер и сарадници (1989.)

У моделу [126] функција течења је дефинисана према следећем:

$$f = \frac{1}{1-\alpha} \cdot \left(\sqrt{3 \cdot J_2} + \alpha \cdot I_1 + \beta \cdot \langle \sigma_1 \rangle - \gamma \cdot \langle -\sigma_1 \rangle \right) \quad (55)$$

где су α , β и γ бездимензионалне константе, док је правило течења је Мор-Кулоновог облика. Критеријум оштећења није нужно дефинисан, а правило пораста оштећења је дато у инкременталном облику према следећем:

$$\dot{d}_i = \phi_i \cdot \langle k_i \cdot \dot{\varepsilon} \rangle \quad (56)$$

где је k_i вектор у простору напона, а ϕ_i је позитивни скалар.

2.3.9.2. Модел Јаздани-Шрејер (1990.)

Површ течења у моделу приказаном у [206] је вон Мизесовог облика, као и правило течења. Оштећење је дефинисано преко тензора четвртог реда, критеријумом оштећења у следећем облику:

$$f_d = \frac{1}{2} \cdot \sigma^+ : \sigma^+ + \frac{\omega}{2} \cdot \sigma^- : \frac{\sigma^- \otimes \sigma^-}{\sigma^- : \sigma^-} + \omega \cdot (S^- + \beta \cdot S^+) : \sigma + \frac{\omega}{2} \cdot \alpha \cdot \mu \cdot H(-\bar{\lambda}) \cdot \sigma : \sigma - \frac{9 \cdot \omega \cdot \alpha}{2} \cdot H(-\bar{\lambda}) \cdot \sigma_a^2 - \frac{1}{2} \cdot t^2(k) \quad (57)$$

где су α , β , ω и μ параметри модела, а k је мера акумулираног оштећења.

2.3.9.3. Модел Абу-Лебдех-Војаџис (1993.)

Површ течења је у моделу [1] дефинисана модификацијом Отосенове површи (14) према следећем:

$$f = \left(A + 0.52 \cdot B \cdot \left(2.53 - \sqrt{-\ln(\varepsilon_1)} \right) \right) \cdot J_2 + \lambda \cdot \sqrt{J_2} + B \cdot I_1 - 1, \quad \varepsilon_1 < 1 \quad (58)$$

и сужава се конзистентно са порастом максималне главне дилатације ε_l . Критеријум оштећења је такође облика Отосенове површи (14) уз увођење зависности од параметра оштећења. Оштећење је дефинисано тензорима четвртог реда, одвојено за затезање и притисак, и правило пораста оштећења је дато у следећем облику:

$$\dot{d}_{ij,l} = \frac{1}{h_l} \cdot \left(A_l^2 \cdot S_{ij} \cdot S_{mn} \cdot \dot{\sigma}_{mn} + B_l^2 \cdot S_{ij} \cdot \dot{\sigma}_{mn} + A_l \cdot B_l \cdot \left(\delta_{ij} \cdot S_{mn} \cdot \dot{\sigma}_{mn} + S_{ij} \cdot \dot{\sigma}_{mn} \right) \right) \quad (59)$$

где је $l = t, c$ (затезање, притисак).

2.3.9.4. Модел Ли-Фенвс (1998.)

Модел Ли-Фенвс [112, 113] је можда и највише коришћен модел из ове групе, будући да је имплементиран у комерцијални софтвер Абакус. У овом моделу, површ течења је дефинисана на бази Лублинере [126] и дата је према следећем:

$$f = \frac{1}{1-\alpha} \cdot \left(\alpha \cdot I_1 + \sqrt{3 \cdot J_2} + \beta(\boldsymbol{\kappa}) \cdot \langle \sigma_1 \rangle \right) - c_c(\boldsymbol{\kappa}), \quad \beta(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{c_c(\boldsymbol{\kappa})}{c_t(\boldsymbol{\kappa})} \cdot (1-\alpha) - (1+\alpha) \quad (60)$$

где је α параметар који зависи од једноаксијалне и биаксијалне чврстоће при притиску, c_t и c_c су кохезиони параметри по затезању и притиску, а $\boldsymbol{\kappa}$ је променљива стања материјала. Правило течења је усвојено Друкер-Прагеровог облика. Функција оштећења је дефинисана према следећем:

$$d = 1 - \left(1 - d_c(\boldsymbol{\kappa}) \right) \cdot \left(1 - s(\bar{\sigma}) \cdot d_t(\boldsymbol{\kappa}) \right), \quad s(\bar{\sigma}) = s_0 + (1 - s_0) \cdot r(\bar{\sigma}) \quad (61)$$

где је r тежински фактор, s_0 дефинише минималну вредност за s , а d_t и d_c су одвојени нивои оштећења по затезању и притиску, који су дефинисани у следећем облику:

$$d_l = 1 - \left(\frac{1}{a_l} \cdot \left(1 + a_l - \sqrt{\phi_l(\boldsymbol{\kappa}_l)} \right) \right)^{d_l/b_l}, \quad l = t, c \quad (62)$$

Променљива стања материјала је дефинисана у инкременталном облику према следећем:

$$\dot{\boldsymbol{\kappa}}_l = \frac{1}{g_l} \cdot f_l(\boldsymbol{\kappa}_l) \cdot \dot{\varepsilon}_{ps}, \quad l = t, c, \quad \boldsymbol{\kappa} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\kappa}_t \\ \boldsymbol{\kappa}_c \end{bmatrix} \quad (63)$$

2.3.9.5. Модел Адеси-Марфия-Сако (2002.)

У моделу приказаном у [2] коришћена је асоцијативна пластичност са функцијом течења следећег облика:

$$f = 3 \cdot J_2 + (f_c - f_t) \cdot I_1 - f_c \cdot f_t + q, \quad q = -\chi \cdot \alpha \quad (64)$$

где је q термодинамичка сила повезана са унутрашњом променљивом α преко параметра ојачања χ . Критеријум оштећења је дефинисан следећим изразом:

$$f_d = (Y - 1) - (a \cdot Y + K) \cdot d, \quad a = \alpha_t \cdot a_t + \alpha_c \cdot a_c, \quad K = \alpha_t \cdot \frac{K_t}{Y_{0t}} + \alpha_c \cdot \frac{K_c}{Y_{0c}} \quad (65)$$

где су K_t , K_c , a_t и a_c параметри материјала, Y је еквивалентна деформација одређена према изразу:

$$Y = \frac{Y_t}{Y_{0t}} + \frac{Y_c}{Y_{0c}}, \quad Y_t = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \langle e_{e,i}(\varepsilon_{ep}) \rangle^2}, \quad Y_c = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \langle e_i(\varepsilon_p) \rangle^2} \quad (66)$$

У изразу (66) Y_{0t} и Y_{0c} су граничне вредности еквивалентне деформације по затезању и притиску.

2.3.9.6. Модел Цеферсона (2003.)

Модел приказан у [92] осим аспекта пластичност-оштећење, обухвата и правило раздвајања односно поновног остваривања контакта у равни формиране прслине. Функција течења је дефинисана комбинацијом Лубинерове (55) и Вилам-Варнке (11) и дата је следећим изразом:

$$f = \sqrt{J_2} \cdot \rho_c \cdot \frac{2 \cdot \cos^2 \theta + b^2}{\cos \theta + b \cdot \sqrt{2 \cdot \cos^2 \theta + c^2}} + \left(\alpha + \frac{\gamma}{3} \right) \cdot I_1 \cdot Z - f_c \cdot Z \cdot (1 - \alpha) \quad (67)$$

у којем се параметри модела одређују на основу једнооксијалне и биаксијалне чврстоће бетона. Правило течења је дефинисано увођењем параметра дилатације ψ којим се постиже боље подударање са експерименталним подацима:

$$g = \sqrt{J_2} \cdot \rho_c \cdot \frac{2 \cdot \cos^2 \theta + b^2}{\cos \theta + b \cdot \sqrt{2 \cdot \cos^2 \theta + c^2}} + \left(\alpha + \frac{\gamma}{3} \right) \cdot I_1 \cdot Z \cdot \psi - f_c \cdot Z \cdot \psi \cdot (1 - \alpha) \quad (68)$$

У изразима (67) и (68) Z је параметар ојачања/омекшања по трењу, за који је усвојена јединствена функција како би се обезбедио гладак прелаз у превојној тачки. Критеријум оштећења је дат према следећем изразу:

$$f_d = \frac{e_r}{2} \cdot \left(1 + \left(\frac{\mu_\varepsilon}{r_\zeta} \right)^2 \right) + \frac{1}{2 \cdot r_\zeta^2} \cdot \sqrt{(r_\zeta^2 - \mu_\varepsilon^2)^2 \cdot e_r^2 + 4 \cdot r_\zeta^2 \cdot (e_s^2 + e_t^2)} - \zeta \quad (69)$$

и дефинисан је у простору локалних дилатација равни прслине e_r , e_s , и e_t .

2.3.9.7. Модел Џејсон и сарадници (2004.)

У моделу приказаном у [91] коришћена је асоцијативна пластичност уз функцију течења коју су предложили Еце и Вилам [62], а део модела према механици оштећења је изведен према раду Мазарса и Пјодие-Кабота [133] (изрази (43) и (44)).

2.3.9.8. Модел Крајцих-Полих (2004.)

Модел приказан у [104] је дефинисан функцијом течења и критеријумом оштећења, које су облика Друкер-Прагерове, а правило течења је дефинисано као асоцијативно.

2.3.9.9. Модел Салари и сарадници (2004.)

И у моделу приказаном у [167] коришћена је израз Друкер-Прагера за површ течења, као и за правило течења. Критеријум оштећења је дефинисан следећим изразом:

$$f_d = Y_v - r(d), \quad r(d) = r_0 \cdot (1-d)^{p-1} \quad (70)$$

у којем је Y_v запремински део термодинамичке силе оштећења, а r_0 и p се одређују према једнооксијалном тесту затезањем.

2.3.9.10. Модел Џејсон и сарадници (2006.)

У моделу приказаном у [90] коришћена је асоцијативна пластичност, а функција течења је дефинисана преко нормализованих инваријанти ефективног напона ($\bar{\xi}$, $\bar{\rho}$, θ), према следећем изразу:

$$f = \bar{\rho}^2 - \frac{\hat{k}(\bar{\xi}, k_h) \cdot \bar{\rho}_c^2(\bar{\xi})}{r^2(\bar{\xi}, \theta)} \quad (71)$$

у којем је \hat{k} функција ојачања. Део модела према механици оштећења је изведен према раду Мазарса и Пјодие-Кабота [133] (изрази (43) и (44)) уз ситне модификације.

2.3.9.11. Модел Контрафато-Куомо (2006.)

Модел приказан у [44] је дефинисан функцијом течења која има следећи облик:

$$f = \max(f_1, f_2, f_3) \quad (72)$$

где је функцијом f_1 обухваћена зона триаксијалног притиска и облика је Отосенове функције (14), f_2 је критеријум за зону затезања, а f_3 је поклопац површи по хидростатичком притиску. Правило течења је дефинисано као асоцијативно.

2.3.9.12. Модел Грасл-Јиражек (2006.)

Модел приказан у [75], касније назван *CDPM1* (*concrete damage-plasticity model*), је дефинисан функцијом течења која је изведена модификацијом критеријума Менетреј-Вилам (13) увођењем бездимензионалне променљиве q_h која је функција променљиве ојачања κ_p , и дата је према следећем:

$$f = \left((1 - q_h(\kappa_p)) \cdot \left(\frac{\bar{\rho}}{\sqrt{6} \cdot f_c} + \frac{\bar{\sigma}_v}{f_c} \right)^2 + \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\bar{\rho}}{f_c} \right)^2 + m_0 \cdot q_h^2(\kappa_p) \cdot \left(\frac{\bar{\rho}}{\sqrt{6} \cdot f_c} \cdot r(\cos \bar{\theta}) + \frac{\bar{\sigma}_v}{f_c} \right) - q_h^2(\kappa_p) \quad (73)$$

у којој r одређује облик у девијаторским пресецима (13), а m_0 је параметар трења. Правило течења је дато следећим изразом:

$$g = \left((1 - q_h(\kappa_p)) \cdot \left(\frac{\bar{\rho}}{\sqrt{6} \cdot f_c} + \frac{\bar{\sigma}_v}{f_c} \right)^2 + \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\bar{\rho}}{f_c} \right)^2 + q_h^2(\kappa_p) \cdot \left(\frac{m_0 \cdot \bar{\rho}}{\sqrt{6} \cdot f_c} + \frac{m_g(\bar{\sigma}_v)}{f_c} \right) \quad (74)$$

у којој је m_g функција која контролише однос запреминског и девијаторског дела правца течења. Критеријум оштећења је дефинисан следећим изразом:

$$f_d = \tilde{\varepsilon} - \kappa_d, \quad \dot{\tilde{\varepsilon}} = \begin{cases} 0 & \text{за } \kappa_p < 1 \\ \dot{\varepsilon}_{pv} / x_s(\bar{\sigma}_v) & \text{за } \kappa_p \geq 1 \end{cases} \quad (75)$$

Правило пораста оштећења је дефинисано у експоненцијалном облику и дато је следећим изразом:

$$d = 1 - \exp(-\kappa_d / \varepsilon_f) \quad (76)$$

у којем ε_f одређује иницијални нагиб гране омекшања (погледати Сл. 13).

2.3.9.13. Модел Цицкели и сарадници (2007.)

Модел приказан у [40] подразумева модификовану функцију течења Лублинера (55) и Ли-Фенвса (60), а правило течења је облика Друкер-Прагера. Критеријум оштећења је следећег облика:

$$d_{t/c} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot Y_{ij,t/c} \cdot L_{ijkl,t/c} \cdot Y_{ij,t/c}} - K_{t/c}(\varphi_{eq,t/c}) \quad (77)$$

у којем је Y_{ij} прираст потрошње енергије, а тензор L_{ijkl} је усвојен као јединични, тј. оштећење је усвојено као изотропно.

2.3.9.14. Модел Војнађис и сарадници (2008.)

Формулација модела приказаног у [195] је практично идентична са [40] уз разлику што је модел формулисан као анизотропан.

2.3.9.15. Модел Омиди-Лотфи (2010.)

У моделу приказаном у [150] коришћена је Лублинерова функција течења (55), а правило течења је усвојено као Друкер-Прагер хиперболичко, како би се избегла тачка сингуларитета на позитивној страни хидростатичке осе:

$$g = \sqrt{\beta_H^2 + 2 \cdot \bar{J}_2} + \alpha_p \cdot \bar{I}_1 \quad (78)$$

Правило пораста оштећења је усвојено у експоненцијалном облику.

2.3.9.16. Модел Занг-Веи (2010.)

За модел приказан у [210] део према пластичности је формулисан идентично као модел Ли-Фенвс (60). Критеријуми оштећења за затезање и притисак су дати у следећем облику:

$$f_{d,t/c} = Y_{t/c} - r_{t/c} \quad (79)$$

где је Y прираст потрошње енергије, а r је тренутна граница оштећења. Правило пораста оштећења је преузето из рада [66], а дато је изразом (50).

2.3.9.17. Модел Грасл и сарадници (2013.)

Модел приказан у [77], назван *CDPM2*, је практично унапређење модела *CDPM1* [75], приказаног у поглављу 2.3.9.12, увођењем, између осталог, две променљиве оштећења по затезању и притиску и две променљиве повезане са ојачањем материјала q_{h1} и q_{h2} . Функција течења је сада дата према следећем:

$$f = \left((1 - q_{h1}(\kappa_p)) \cdot \left(\frac{\bar{\rho}}{\sqrt{6} \cdot f_c} + \frac{\bar{\sigma}_v}{f_c} \right) + \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\bar{\rho}}{f_c} \right)^2 + m_0 \cdot q_{h1}^2(\kappa_p) \cdot q_{h2}(\kappa_p) \cdot \left(\frac{\bar{\rho}}{\sqrt{6} \cdot f_c} \cdot r(\cos \bar{\theta}) + \frac{\bar{\sigma}_v}{f_c} \right) - q_{h1}^2(\kappa_p) \cdot q_{h2}^2(\kappa_p) \quad (80)$$

а правило течења је идентично изразу (74), с тим што q_{h1} фигурише уместо q_h у изразу. Критеријуми оштећења по затезању и притиску је дефинисан слично изразу (75) и дати су према следећем:

$$f_{dt} = \tilde{\varepsilon}_t(\bar{\sigma}_t) - k_{dt}, f_{dc} = \alpha_c \cdot \tilde{\varepsilon}_c(\bar{\sigma}) - k_{dc} \quad (81)$$

Треба напоменути и да је еквивалента дилатација усвојена различито у односу на [75]. Правило пораста оштећења по затезању је дефинисано као билинеарно и дато је следећим изразом:

$$d_t = \begin{cases} 1 - \frac{f_t \cdot w_{f1} + h \cdot \varepsilon_i \cdot (\sigma_1 - f_t)}{E \cdot k_{dt} \cdot w_{f1}} & \text{za } 0 < h \cdot \varepsilon_i \leq w_{f1} \\ 1 - \frac{\sigma_1 \cdot (w_f - w_{f1}) - (h \cdot \varepsilon_i - w_{f1}) \cdot \sigma_1}{E \cdot k_{dt} \cdot (w_f - w_{f1})} & \text{za } w_{f1} < h \cdot \varepsilon_i \leq w_f \\ 1 & \text{za } w_f < h \cdot \varepsilon_i \end{cases} \quad (82)$$

док је правило пораста оштећења по притиску дефинисано у експоненцијалном.

2.3.9.18. Модел Гернеј-Милард-Франсен (2013.)

Површ течења је, у моделу приказаном у [70], дефинисана као комбинација Друкер-Прагоерове и Ранкинове, а правило течења је Друкер-Прагерово. Правило пораста оштећења за затезање и притисак је дефинисан следећим изразима:

$$d_t = 1 - \left(\frac{1}{2} \cdot \exp(-a_t \cdot k_t) + \frac{1}{2} \cdot \exp(-6 \cdot a_t \cdot k_t) \right), \quad d_c = 1 - \exp(-a_c \cdot k_c) \quad (83)$$

где су k_t и k_c ефективне пластичне дилатације, а a_t и a_c су параметри модела.

2.3.9.19. Модел Ксу и сарадници (2013.)

У моделу приказаном у [204], површ течења и правило течења је облика функције Хси-Тинг-Чен, која је дата изразом (19). Правило пораста оштећења, у инкременталном облику, је дато следећим изразом:

$$\dot{d}_{t/c} = \frac{w \cdot r_{t/c} \cdot f_c \cdot \kappa}{(1 - d_{t/c})^2} \cdot \left(\frac{\varepsilon_{e,v}}{D} + \frac{\varepsilon_{e,pl}}{C} + \frac{\sqrt{3} \cdot \tilde{\varepsilon}_e \cdot f_c}{4 \cdot A \cdot \sqrt{J_2}} + \frac{\sqrt{3} \cdot \tilde{\varepsilon}_e}{2 \cdot B} \right) \quad (84)$$

У којем је w параметар модела, r су тежински коефицијенти оштећења, а κ је параметар чврстоће.

2.3.9.20. Модел Валентини и сарадници (2013.)

Модел приказан у [190] је унапређење модела Грасл-Јиражек, приказаног у поглављу 2.3.9.12, искључиво у погледу унапређења правила пораста оштећења. Оно је промењено тако да се добије гладак прелаз при достизању носивости материјала и дато је следећим изразом:

$$d = 1 - X(\sigma_{a,d}) \cdot \frac{1}{(1 + \kappa_d / \varepsilon_{ft})^2} - (1 - X(\sigma_{a,d})) \cdot \exp\left(-\left(\frac{\kappa_d}{\varepsilon_{fc}}\right)^2\right) \quad (85)$$

2.3.9.21. Модел Ма-Чен (2016.)

Модел приказан у [129] је изведен према моделу Ли-Фенвс, приказаном у поглављу 2.3.9.4, и имплементацији тог модела у комерцијални софтвер Абакус.

2.3.9.22. Модел Цеферсон и сарадници (2016.)

Модел из [93] представља унапређење модела приказаног у поглављу 2.3.9.6. Унапређење се односи искључиво на правило раздвајања односно поновног остваривања контакта у равни формиране прслине, тако да су остали аспекти модела идентични са претходним.

2.3.9.23. Модел Ксенос-Грасл (2016.)

У [202] је додатно унапређен модел *CDPM2*, приказан у поглављу 2.3.9.17, у смислу увођења нелокалне формулације и експоненцијалног правила пораста оштећења по затезању.

2.3.9.24. Модел Ву и сарадници (2017.)

У раду [197] је дефинисан оквир за развијање спрегнутих модела пластичност-оштећење. Што с тиче бетона предложен је модел са функцијом течења облика параболичне Друкер-Прагерове, а правило пораста оштећења је дато према следећем, у инкременталном облику:

$$\dot{d} = 2 \cdot \lambda \cdot \frac{r_d \cdot (q^2 - \alpha \cdot p)}{\beta \cdot \chi_D} \quad (86)$$

У изразу (86) r_d је бездимензионални параметар, у функцији стања напрезања и променљивих стања, а χ_D је конјугат дисипативне енергије оштећења.

2.3.9.25. Едалат-Бехбахани и сарадници (2017.)

У раду [58] је приказан модел у којем је комбинација пластичност-оштећење искоришћена за понашања бетона при напрезањима притиска, а модел фиксних размазаних прслина за понашање при напрезањима затезања. Функција течења је изведена према пето-параметарској Вилам-Ванке и дата је следећим изразом:

$$f = \sqrt{\left(\frac{\bar{I}_1}{\sqrt{3} \cdot c} - \frac{\sqrt{2} \cdot b}{c} \cdot \sqrt{\bar{J}_2}\right) \cdot \bar{\sigma}_c(\kappa_{cl}) - \frac{2 \cdot a}{c} \cdot \bar{J}_2 - \bar{\sigma}_c(\kappa_{cl})} \quad (87)$$

у којем су a , b и c параметри површи течења, а κ_{cl} је променљива ојачања. У моделу је коришћена је асоцијативна пластичност. Правило пораста оштећења је дефинисано у експоненцијалном облику, према моделу Гернеј-Милард-Франсен, који је приказан у поглављу 2.3.9.18, израз (83).

2.3.9.26. Модел Данешјар-Гаемијан (2017.)

Модел приказан у [51] подразумева ортотропно оштећење, формулисано на бази микро-равни. Искористићена функција течења је из модела Ли-Фенвс (поглавље 2.3.9.4, израз (60)), а правило течења је усвојено Друкер-Прагеровог облика. Критеријум оштећења је усвојен према моделу Цицкели и сарадници (поглавље 2.3.9.13, израз (77)), али је за разлику од поменутог, овај модел формулисан као анизотропан.

2.3.9.27. Модел Сарикаја-Еркмен (2019.)

Функција течења је у раду [169] усвојена као Менетреј-Вилам (13), док је правило течења усвојено према [76], које је дато изразом (38). Правило пораста оштећења је изведено према [75], које је дато изразом (76).

2.3.9.28. Модел Полиоти-Баиран (2019.)

Модел приказан у [162] подразумева функција течења из модела Ли-Фенвс (поглавље 2.3.9.4, израз (60)), а правило течења је усвојено Друкер-Прагеровог облика.

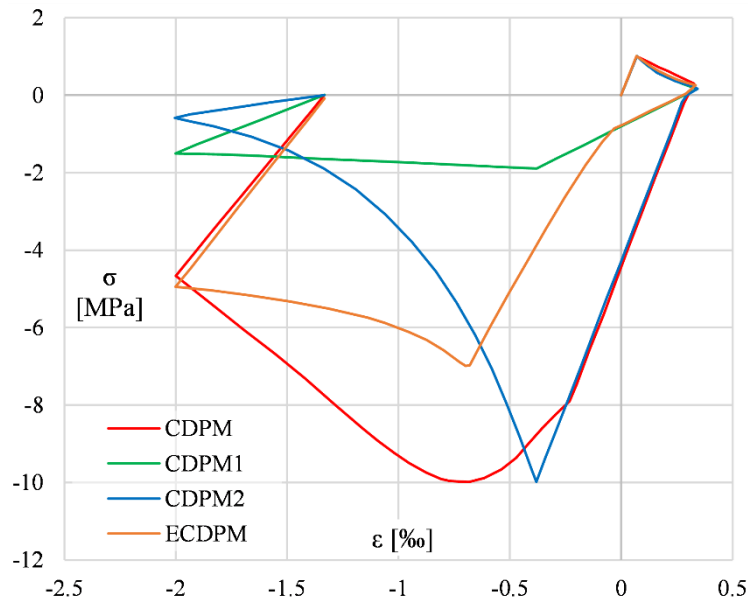
2.3.9.29. Модел Мохамеди-Ву (2019.)

Модел приказан у [138] такође подразумева функција течења из модела Ли-Фенвс (поглавље 2.3.9.4, израз (60)), а правило течења је усвојено Друкер-Прагеровог облика.

2.3.9.30. Модел Какаванд-Тачироглу (2019.)

У раду [98] су издвојена три модела из литературе: Ли-Фенвс [112, 113] (*CDPM*), Грасл-Јиражек [75] (*CDPM1*) и Грасл и сарадници [77] (*CDPM2*), за које је написано да су најзаступљенији при симулацијама цикличног моделирања понашања бетона. Такође је представљен и нови конститутивни модел *ECDP* (*Enhanced concrete damage plasticity*), којим је унапређен модел *CDPM2* у погледу обухватања утицаја претходног оштећења по притиску/затезању на понашање у затезању/притиску. Формулација модела подразумева практично унапређење *CDPM2* [77] модела где је растављање оштећења на затезање и притисак дефинисано преко стања дилатација, за разлику од напонског стања у ранијим моделима. На овај начин је омогућено до одређене мере обухватање ефеката затварања и отварања прслина у бетону при цикличном оптерећењу. На Сл. 15 је приказано упоређење одговора модела *CDPM*, *CDPM1*, *CDPM2* и *ECDP* при цикличном

једнооксијалном напрезању вођеном дилатацијом. На слици се уочавају недостаци модела *CDPM* и *CDPM2* у смислу заостале пластичне деформације, односно необухватања ефекта затварања прелина при преласку из затезања у притисак. Модел *CDPM1* је формулисан са једним скаларним оштећењем, те у том смислу при преласку на страну притиска не долази до повећања носивости. Предности *ECDP* модела, у смислу обухватања ефекта затварања прелина и повећања носивости при преласку на страну притиска, су евидентне са слике.



Сл. 15 Упоредњење одговора модела при цикличном напрезању

2.4. Дискусија

Одабир одговарајућег модела за инжењерске потребе је условљен конкретним потребама и типу напрезања у датом елементу. Једноставни модели дају одговарајуће резултате у релевантним случајевима, нпр. модели засновани искључиво на механици оштећења су одговарајући уколико је присутно монотono растуће оптерећење. Свакако да ово није увек случај, тако да су често неопходни свеобухватнији модели који могу верно приказати макроскопско понашање бетона.

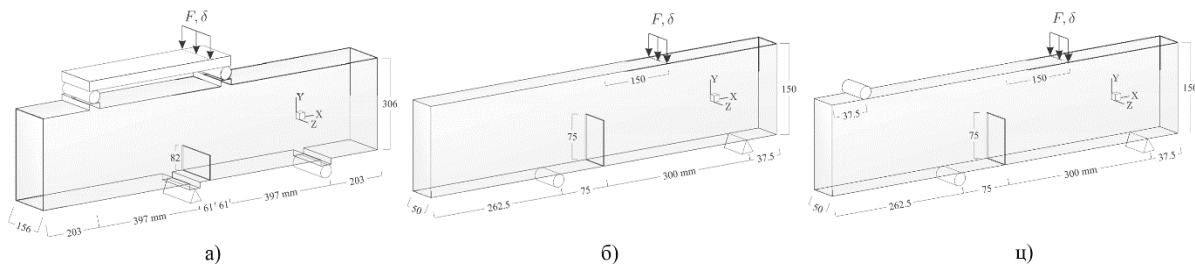
Што се тиче прегледа модела из поглавља 2.3, може се навести неколико запажања. Пре свега испоставља се да су модели засновани на комбинацији теорија пластичности-механика оштећења најактуелнији, будући да развој нових модела из ове групе, новијег датума не јењава, за разлику од осталих група. Приметно је и да се често експлоатишу претходно дефинисане функције са или без одређених модификација при дефинисању нових конститутивних модела. Конкретно, ако се прича о функцији течења, било да посматрамо области пластичност-оштећење или само теорију пластичности, велики број

пута су експлоатисане функције течења приказане у моделу Ли-Фенвс израз (60), затим Менетреј-Вилам израз (13) и пето-параметарска Вилам-Ванке израз (20), док су у неколико случајева Хси-Тинг-Ченова израз (19) и Отосенова израз (14), па чак и Друкер-Прагерова. Што се тиче правила течења, осим неколико модела који су формулисани као асоцијативни, од преосталих велики проценат користи правило течења облика Друкер-Прагерове или хиперболичке Друкер-Прагерове функције. Оштећење је најчешће дефинисано као скаларно или преко два скалара, затезања и притиска, а у само неколико модела се сусрећемо са ортотропним моделима оштећења. Критеријум оштећења код неспрегнутих модела, је често дефинисан као разлика захтева (чето датог као еквивалента дилатација) и тренутног стања. Правило пораста оштећења је најчешће дефинисано у неком од облика експоненцијалне функције, а у неколико случајева и као билинеарна функција.

Перформансе модела из овог прегледа, на нивоу интеграционе тачке, су готово по правилу приказане и упоређене са доступним експерименталним подацима на једнооксијалним тестовима при притиску и затезању, затим при биаксијалном притиску према подацима Купфера [106, 107] и триаксијалним тестовима. Перформансе модела који припадају групи пластичност-оштећење су приказане и упоређене са цикличним тестовима једнооксијалним при притиску и затезању, затим са триаксијалним цикличним тестовима при притиску, а само неки од модела су упоређени са цикличним тестовима са преласком из зоне затезање у притисак или обрнуто. Управо ово и јесте мањкавост модела формулисаних према комбинацији теорија пластичности-механика оштећења, где се јављају велике неповратне (пластичне) деформације при цикличном затезању уз повратак ка зони притиска. Односно, у овој ситуацији модели не успевају да опонашају затварање прслине при преласку на страну притиска. Модели који и овај ефекат успевају да обухвате су модел Џеферсон из 2003. (поглавље 2.3.9.6), Џеферсон и сарадници из 2016. (поглавље 2.3.9.22) и Едалат-Бехбахани и сарадници из 2017. (поглавље 2.3.9.25) где су ефекти отварања и затварања прслина дефинисани као додатак на комбинацију теорије пластичности и механике оштећења. Ефекти отварања и затварања прслина су обухваћени формулацијом у комбинацији пластичност – оштећење у моделу Какаванд-Тацироглу из 2019. (поглавље 2.3.9.30).

Што се тиче анализе перформанси модела на конструкцијском нивоу, она се не проналази у свим радовима. Разлог за то би свакако могао да буде чињеница да модел мора бити имплементиран у неки од софтвера за нелинеарну анализу конструкција, било

комерцијални или некомерцијални, где су у сваком случају поставља питање колико могућности је остављено у софтверу за имплементацију новог материјалног модела од стране корисника. Друга опција би свакако могла да буде развијање сопственог окружења, у којем би се материјални модел могао применити при анализи методом коначних елемената. У сваком случају, оно што се проналази у готово свим радовима где је анализиран нови модел на конструкцијском нивоу, јесте савијање неармиране греде са засеком оптерећењем у три тачке. Како је наведено у [145], стандардизовани тест неармиране греде са засеком оптерећењем у три тачке је једини опште прихваћен тест за анализу карактеристика лома бетона. Оваквим тестом је инициран искључиво мод I формирања прслина (отварање прслине). Проналазе се упоређења и са цикличним оптерећењем на оваквој греди. Од осталих тестова проналази се тест савијањем оптерећењем греде са засеком у четири тачке (видети Сл. 16а), којим се тестира могућност модела да формира прслину по закривљеном путу. Затим два типа теста савијања за комбиновани мод I и II формирања прслине (отварање и смицање прслине), где су оба теста на греди са препустом, која има засек у пољу, али не на средини распона. Разлика у два типа теста је у непостављању или постављању вертикалног ослоња, који спречава одизање препуста греде (видети Сл. 16б и Сл. 16ц). Осим ових тестова на специјално осмишљеним елементима, проналазе се упоређења понашања модела при анализи армиранобетонских греда, стубова, сеизмичких зидова и др.



Сл. 16 Тестови савијањем: а) оптерећењем у 4 тачке; б) и ц) за комбиновани мод I и II формирања прслине, према [51]

3. ПРЕДЛОЖЕНИ КОНСТИТУТИВНИ МОДЕЛ БЕТОНА

3.1. Увод

У оквиру ове дисертације формулисан је конститутивни модел бетона заснован на комбинацији теорије пластичности и механике оштећења и формулација ће бити приказана у наставку. Одабрани приступ је последица чињенице да модели формулисани на тај начин имају потенцијал да обухвате готово све аспекте нелинеарног одговора материјала какав је бетон.

3.2. Део према теорији пластичности

У оквиру ове студије, као основа је искоришћена функција течења бетона, коју су предложили Еце и Вилам [62], а настала је модификацијом критеријума Менетреј-Вилам (13). Поменута функција течења је унапређена како би било могуће обухватити феномен одвојеног ојачања материјала при оптерећењу притиском и затезањем, што ће бити приказано у наредним поглављима. Правило течења материјала је усвојено Друкер-Прагеровог облика. Осим овога, уведена је и додатна, секундарна, површ течења, која се активира искључиво у еластичној зони понашања примарне површи, са циљем да се обухвати феномен затварања прслина и поновног отварања постојећих прслина. Дакле модел је дефинисан са две површи течења, али будући да се секундарна површ активира искључиво у зони еластичног понашања унутар примарне површи, ова формулација практично није према теорији мулти-пластичности, која подразумева симултано постојање две или више површи, као нпр. критеријуми са површима поклопцима.

3.2.1. Површ течења

Функција течења бетона, коју су предложили Еце и Вилам [62] је приказана у следећем облику:

$$f = \left((1-k) \cdot \left(\frac{\bar{\rho}}{\sqrt{6} \cdot f_c} + \frac{\bar{\sigma}_v}{f_c} \right)^2 + \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\bar{\rho}}{f_c} \right)^2 + m \cdot k^2 \cdot \left(\frac{\bar{\rho}}{\sqrt{6} \cdot f_c} \cdot r(\bar{\theta}, e) + \frac{\bar{\sigma}_v}{f_c} \right) - k^2 \cdot c$$

$$\text{где је } m = 3 \cdot \frac{f_c^2 - f_t^2}{f_c \cdot f_t} \cdot \frac{e}{e+1}, \quad 0.5 < e \leq 1.0 \quad (88)$$

$$\text{и } r(\theta, e) = \frac{4 \cdot (1 - e^2) \cdot \cos^2 \theta + (2 \cdot e - 1)^2}{2 \cdot (1 - e^2) \cdot \cos \theta + (2 \cdot e - 1) \cdot \sqrt{4 \cdot (1 - e^2) \cdot \cos^2 \theta + 5 \cdot e^2 - 4 \cdot e}}$$

где k параметар контролише ојачање површи и узима вредност од иницијалне k_0 до 1, e је параметар ексцентричности, а $r(\theta, e)$ контролише облик у девијаторским пресецима.

Како би, осим једноаксијалној чврстоћи при притиску и једноаксијалној чврстоћи при затезању, ова површ одговарала и биаксијалној чврстоћи при притиску f_{bc} , параметар ексцентричности e се усваја према следећем изразу:

$$e = \frac{1 + \varepsilon}{2 - \varepsilon}, \text{ где је } \varepsilon = \frac{f_t}{f_{bc}} \cdot \frac{f_{bc}^2 - f_c^2}{f_c^2 - f_t^2} \quad (89)$$

како је приказано у [77].

У оквиру ове дисертације израз (88) је модификован у следећи облик:

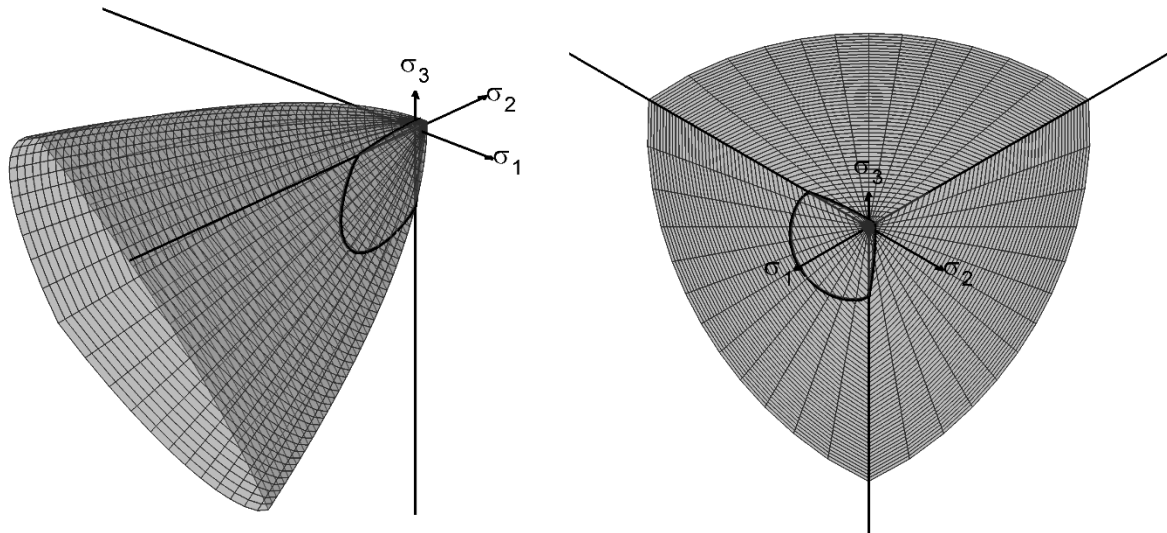
$$f = \left((1 - q_{h1}) \cdot \left(\frac{\bar{\rho}}{\sqrt{6} \cdot f_c} + \frac{\bar{\sigma}_V}{f_c} \right)^2 + \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\bar{\rho}}{f_c} \right)^2 + m \cdot q_{h1}^2 \cdot \left(\frac{\bar{\rho}}{\sqrt{6} \cdot f_c} \cdot r(\bar{\theta}, e_{h2}) + \frac{\bar{\sigma}_V}{f_c} \right) - q_{h1}^2$$

где је $m = 3 \cdot \frac{f_c^2 - f_t^2}{f_c \cdot f_t} \cdot \frac{e}{e+1}$, $0.5 < e \leq 1.0$, $e_{h2} = q_{h2} \cdot e$ (90)

$$\text{и } r(\theta, e_{h2}) = \frac{4 \cdot (1 - e_{h2}^2) \cdot \cos^2 \theta + (2 \cdot e_{h2} - 1)^2}{2 \cdot (1 - e_{h2}^2) \cdot \cos \theta + (2 \cdot e_{h2} - 1) \cdot \sqrt{4 \cdot (1 - e_{h2}^2) \cdot \cos^2 \theta + 5 \cdot e_{h2}^2 - 4 \cdot e_{h2}}}$$

где су q_{h1} и q_{h2} бездимензионалне величине задужене за ојачање површи по притиску и затезању, редом, и биће дефинисане и објашњене у наредним поглављима. Дакле, примарна површ је обликом потпуно аналогна површи предложеној у Еце и Вилам [62], а њене предности се огледају у унапређеној функционалности у смислу ојачања материјала, што ће бити објашњено у наставку.

На Сл. 17 је приказан облик примарне површи течења у простору главних напона при вредности бездимензионалних величина $q_{h1} = 1$ и $q_{h2} = 1$, што одговара достизању чврстоће материјала. На слици је назначен и пресек површи са равни σ_2 - σ_3 , односно критеријум лома материјала при раванском напрезању. Може се уочити да је површ глатка, са закривљеним меридијанима и да у девијаторским пресецима тежи од троугаоног, ка облику кружнице при померању ка хидростатичком притиску.



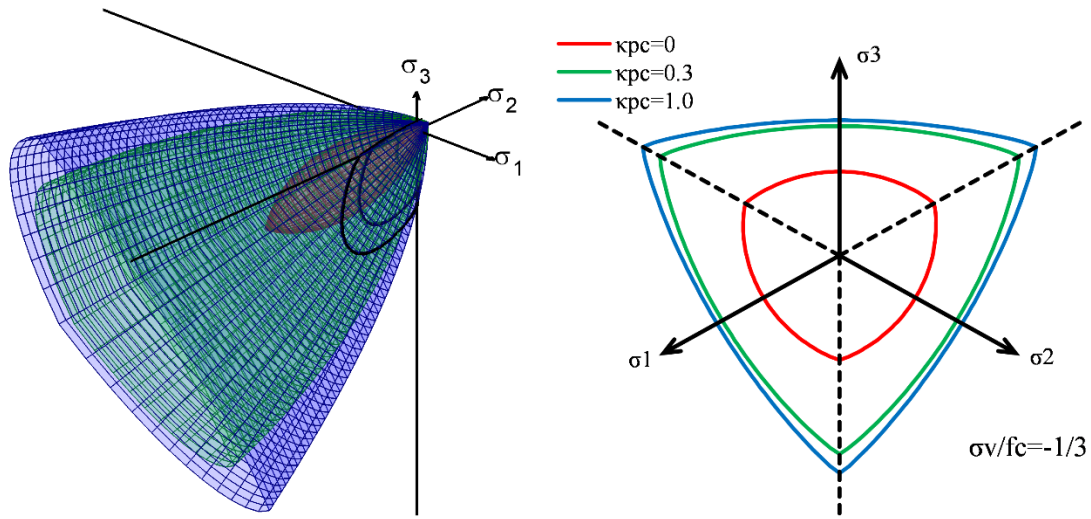
Сл. 17 Примарна површ течења при вредностима $q_{h1} = 1$ и $q_{h2} = 1$

3.2.2. Ојачање материјала

Бездимензионалне величине q_{h1} и q_{h2} дефинишу ојачање површи по притиску и затезању, редом. Величина q_{h1} је дефинисана преко променљиве ојачања материјала по притиску κ_{pc} , према следећем:

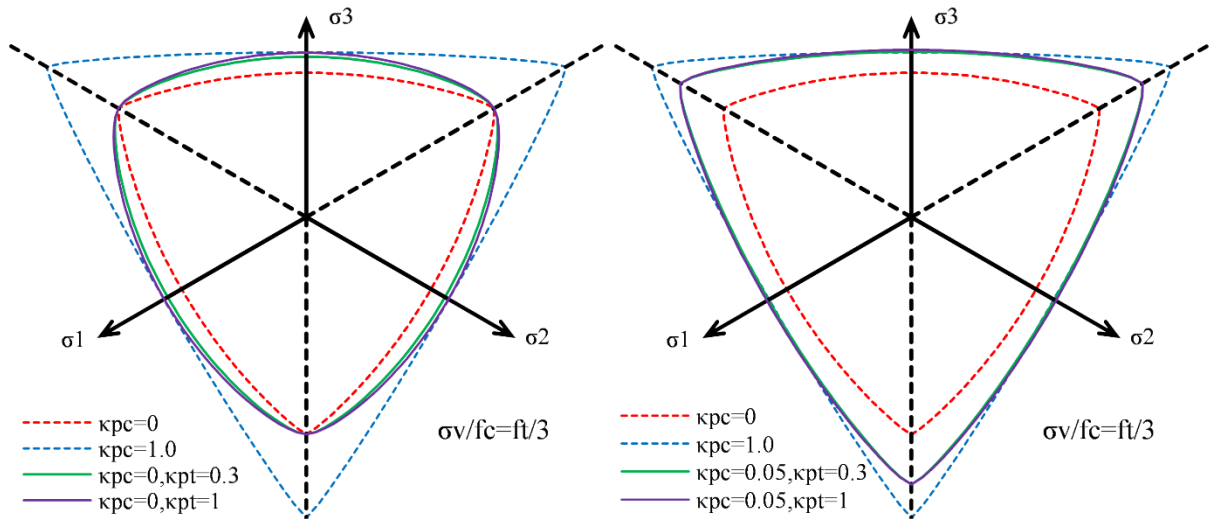
$$\begin{aligned} q_{h1} &= q_{h0} + (1 - q_{h0}) \cdot \sqrt{\kappa_{pc} \cdot (2 - \kappa_{pc})} && \text{за } \kappa_{pc} < 1 \\ q_{h1} &= 1 && \text{за } \kappa_{pc} \geq 1 \end{aligned} \quad (91)$$

где израз за $\kappa_{pc} < 1$ одговара приказаном у [62], а може се уочити да за вредности κ_{pc} веће од 1 површ течења не ојачава, односно да је дефинисана као савршено пластична. У изразу (91) q_{h0} одговара иницијацији ојачања материјала, односно иницијално еластичној зони понашања и генерално може бити усвојено 0.3. На Сл. 18 је приказана еволуција површи течења, при вредностима променљиве ојачања $\kappa_{pc} = 0.0, 0.3$ и 1.0 у тродимензионалном простору главних напона и девијаторски облик за вредност $\sigma_v/f_c = -1/3$, која одговара достизању једноаксијалне чврстоће при притиску.



Сл. 18 Ојачање примарне површи течења при вредностима $\kappa_{rc} = 0.0, 0.3$ и 1.0

Формулација одвојеног ојачања површи по притиску и затезању почива на чињеници да су једноаксијални притисак и једноаксијално затезање на различитим меридијанима површи течења. Дакле, идеја је да се ојачање површи по једноаксијалном затезању врши мењањем параметра ексцентричности e_{h2} , чијом променом ће површ ојачавати у зони меридијана $\theta = 0^\circ$, а меридијан $\theta = 60^\circ$ ће остати непромењен. Подједнако је важна и чињеница да је ојачање површи у зони затезања мало и готово безначајно. У том смислу, прихватљиво је да ојачањем по притиску површ ојачава и у зони меридијана затезања. При цикличном оптерећењу притиском до достизања чврстоће, праћеним затезањем, овај одговор до достизања затезне чврстоће ће бити без ојачања, што је прихватљиво у погледу експерименталних запажања. На Сл. 19 је приказана промена облика површи течења у девијаторском пресеку за вредност $\sigma_v/f_c = f_t/3$, која одговара достизању једноаксијалне чврстоће при затезању. Може се уочити да је ојачање у зони меридијана $\theta = 0^\circ$ тако формулисано да површ никада не излази из свог оквира који одговара максимално ојачаној површи, односно за $\kappa_{rc} = 1.0$.



Сл. 19 Ојачање примарне површи течења при промени вредности κ_{pt}

Израз за бездимензионалну променљиву q_{h2} је дата у следећем облику:

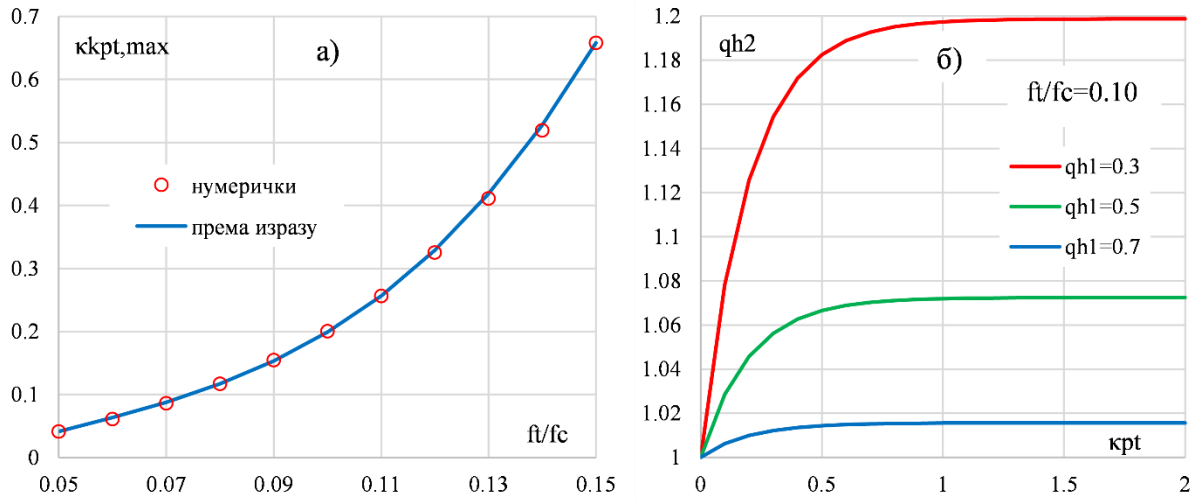
$$q_{h2} = 1 + \kappa_{pt,max} \cdot \left(1 - \exp(-\kappa_{pt} \cdot k_{\kappa_{pt}})\right) \cdot \frac{(1 - q_{h1})^3}{(1 - q_{h0})^3} \quad \text{за } \kappa_{pc} < 1 \quad (92)$$

$$q_{h2} = 1 \quad \text{за } \kappa_{pc} \geq 1$$

где $1 + \kappa_{pt,max}$ представља максималну вредност q_{h2} , која одговара максималној вредности параметра ексцентричности e_{h2} , за коју површ при меридијану $\theta = 0^\circ$ не излази изван оквира, који одговара максимално ојачаној површи. У изразу (92) параметар $k_{\kappa_{pt}}$ је усвојен вредности 5.0. Будући да не постоји решење у затвореном облику за $\kappa_{pt,max}$, вредност је апроксимирана следећим изразом:

$$\kappa_{pt,max} = 413.4962 \cdot \left(\frac{f_t}{f_c}\right)^3 - 63.6406 \cdot \left(\frac{f_t}{f_c}\right)^2 + 5.4576 \cdot \left(\frac{f_t}{f_c}\right) - 0.1241 \quad (93)$$

а подударање датог израза са нумерички добијеним резултатима је приказано на Сл. 19а. Нумерички резултати су добијени варирањем параметра q_{h2} до изједначавања вредности критеријума течења (90) у тачки која одговара једноосијалном затезању на површи која је максимално ојачана, тј. за $q_{h1} = q_{h2} = 1$. На Сл. 20б је приказана промена q_{h2} променљиве са порастом променљиве ојачања κ_{pt} за однос чврстоћа бетона $f_t/f_c = 0.10$. Може се уочити да вредност q_{h2} на Сл. 20б тежи ка вредности $1 + \kappa_{pt,max}$ са Сл. 19а за одговарајуће f_t/f_c .



Сл. 20 Вредности $\kappa_{pt,max}$ у зависности од чврстоће бетона (а) и промена q_{h2} у зависности од κ_{pt} и q_{h1} (б)

Променљиве ојачања материјала по притиску κ_{pc} и затезању κ_{pt} су дефинисане у инкременталном облику:

$$\dot{\kappa}_{pc} = \alpha_c(\bar{\sigma}) \cdot \frac{\dot{\epsilon}_{ps}}{x_h}, \quad \dot{\kappa}_{pt} = (1 - \alpha_c(\bar{\sigma})) \cdot \frac{\dot{\epsilon}_{ps}}{x_h} \quad (94)$$

где је α_c променљива уведена за потребе разликовања стања напрезања притиска и затезања, како је предложено у раду [77], а x_h је мера дуктилности ојачања материјала. Променљива α_c је дефинисана следећим изразом:

$$\alpha_c = \sum_{i=1}^3 \frac{\bar{\sigma}_{pc,i} \cdot (\bar{\sigma}_{pt,i} + \bar{\sigma}_{pc,i})}{\|\bar{\sigma}_p\|^2} \quad (95)$$

и узима вредности од 0 до 1, где 0 одговара чистом затезању, а 1 чистом притиску. Мера дуктилности ојачања материјала x_h је дефинисана према следећем:

$$x_h = A_h \cdot \frac{\log(R_h^{B_h} + 1)}{B_h} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{3} - \bar{\theta}\right) \right)^{1+8 \cdot \left(\frac{\pi}{6} - \left|\bar{\theta} - \frac{\pi}{6}\right|\right)} \quad (96)$$

где су A_h и B_h параметри, а променљива R_h је дефинисана следећим изразом:

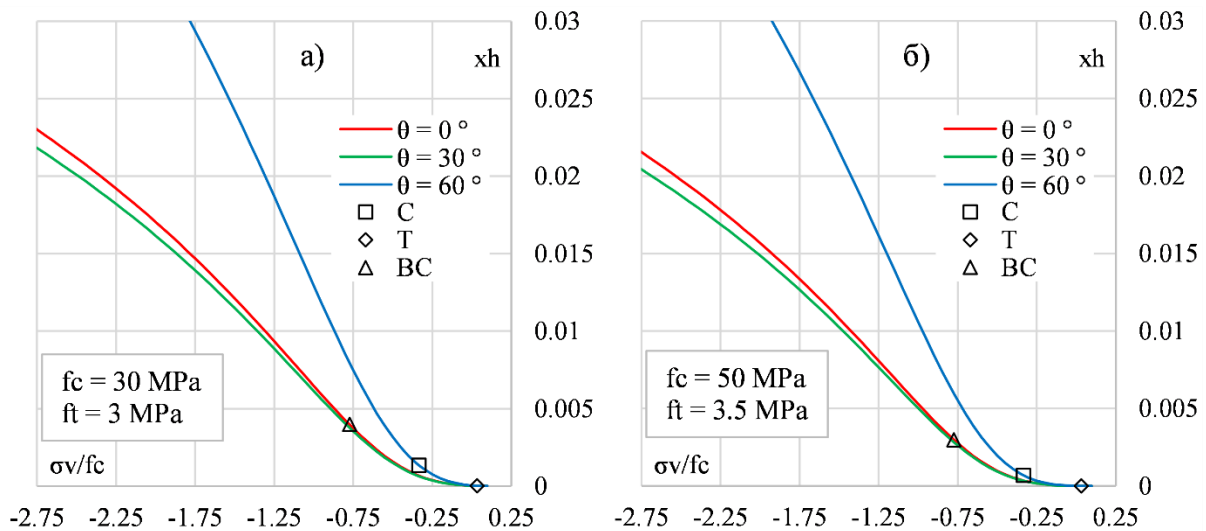
$$R_h(\bar{\sigma}_v) = -\frac{\bar{\sigma}_v}{f_c} + \frac{2}{m_0} \quad \text{за } \sigma_v \leq \frac{f_t}{3} \quad (97)$$

$$R_h(\bar{\sigma}_v) = -\frac{f_t}{3 \cdot f_c} + \frac{2}{m_0} \quad \text{за } \sigma_v > \frac{f_t}{3}$$

Параметри ојачања A_h и B_h су дефинисани преко једнооксијалне чврстоће бетона према следећем:

$$A_h = 0.104 - 0.00022 \cdot f_c, \quad B_h = 3.05 + 0.012 \cdot f_c, \quad \text{где је } f_c \text{ у МПа} \quad (98)$$

На Сл. 21 је приказана промена мере дуктилности ојачања материјала x_h у зависности од хидростатичког притиска σ_v . Уочљиво је да је други део израза (96), у којем фигурише Лодов угао $\bar{\theta}$, уведен за умањење вредности x_h у зони меридијана $\bar{\theta} = 30^\circ$, што је приказано зеленом бојом на Сл. 21. На слици се могу уочити и тачке које одговарају достизању чврстоће једноосијалног притиска (C), затезања (T) и биаксијалног притиска (BC).



Сл. 21 Промена x_h према σ_v за: а) $f_c=30$ MPa, $f_t=3$ MPa; б) $f_c=50$ MPa, $f_t=3.5$ MPa

3.2.3. Правило течења

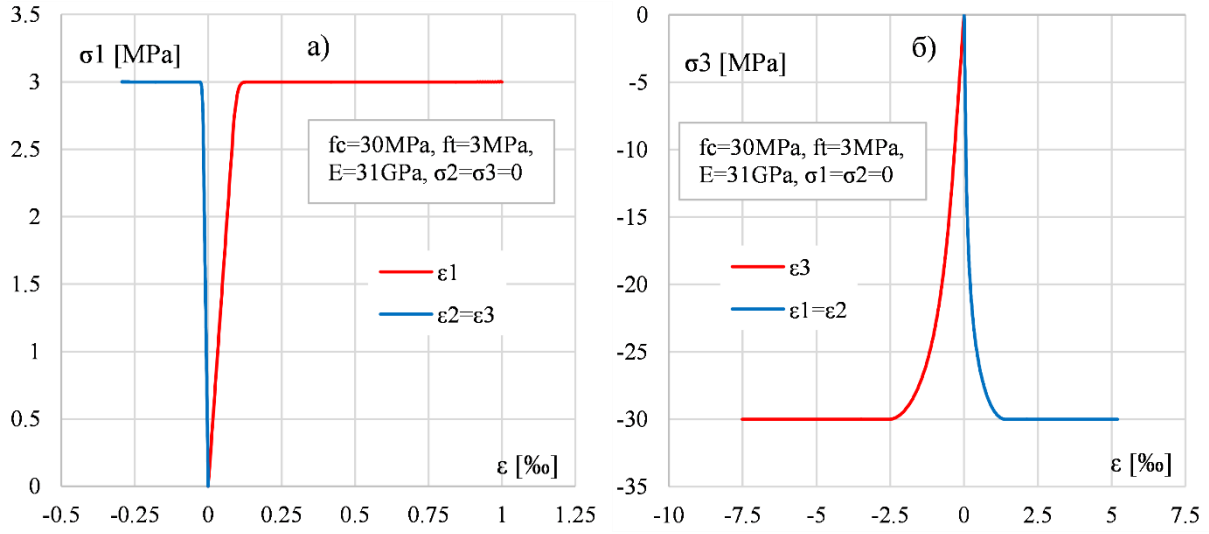
Правило течења је усвојено у облику критеријума Друкер-Прагера и дефинисано је следећим изразом:

$$g = A_g(\alpha_c) \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \bar{\sigma}_v + \bar{\rho}, \quad A_g(\alpha_c) = 1 - 0.7 \cdot \alpha_c \quad (99)$$

где параметар A_g узима вредности од 0.3 до 1.0 за напонска стања притиска, односно затезања. Показало се да ове вредности веома добро одговарају смеру вектора пластичне дилатације за различита напонска стања, што ће и бити показано у поглављу 3.4.

Обухватајући формулацију приказану у поглављима 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3, односно формулацију еласто-пластичног понашања које се односи на примарну површ течења, приказан је карактеристичан одговор модела на Сл. 22. На слици је приказан одговор у смислу дијаграма напон-примарна дилатација и напон-бочна дилатација, при једноосијалном оптерећењу затезањем и при једноосијалном оптерећењу притиском. Уочљиво је да, пре свега, максимални напон одговара прописаним параметрима чврстоће при затезању, односно притиску у смислу дефинисане површи течења. Затим, уочава се разлика у ојачању материјала при оптерећењу притиском и затезањем, коју контролише

мера дуктилности χ_n . И коначно, могу се приметити односи примарне и бочне дилатације у пластичној зони, за коју је задужено правило течења.



Сл. 22 Одговор ефективни напон-дилатација при: а) једноаксијалном затезању; б) једноаксијалном притиску

3.2.4. Секундарна површ течења

Секундарна површ течења, је уведена са циљем да се обухвати феномен затварања прслина и поновног отварања постојећих прслина, што је приказано на Сл. 2. Коришћењем једне површи према теорији пластичности, није могуће обухватити ефекте затварања прслина, односно пластична дилатација не може бити анулирана. У том смислу је уведена секундарна површ, која се активира искључиво у еластичној зони понашања примарне површи. Ова површ има задатак да практично анулира постојећу пластичну дилатацију, приликом растерећења. Будући да се у овим ситуацијама вредности напона у тродимензионалном простору главних напона мењају од позитивних ка негативним, односно, посматрано преко Хај-Вестергардових координата, запреминска дилатација σ_v се креће од позитивне вредности ка нули, као логичан избор за ову површ се намеће раван која је управна на хидростатички правац. Односно, ова површ одговара девијаторским пресецима. У том смислу секундарна површ има крајње једноставан облик:

$$f_2 = A_{f2} \cdot \bar{\sigma}_v - q_{h3} \cdot f_t, \text{ где је } A_{f2} = \frac{\max(\Delta \epsilon_{i,j=1,2,3})}{\left| \max(\Delta \epsilon_{i,j=1,2,3}) \right|} \quad (100)$$

где је A_{f2} параметар којим се контролишу позитивна и негативна страна површи, у зависности од тренутног инкремента дилатације, а q_{h3} је бездимензионална величина која контролише ојачање.

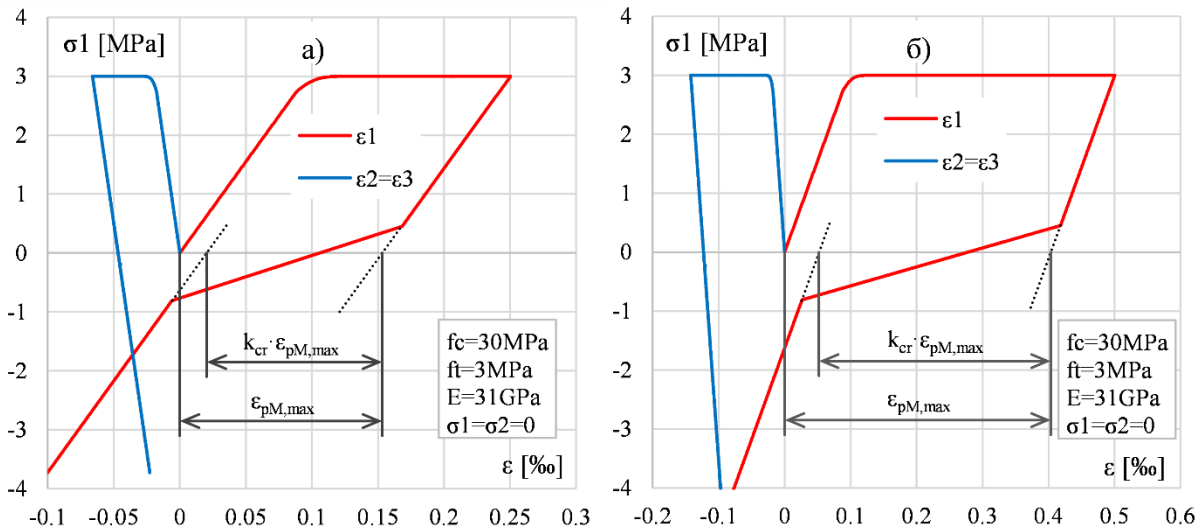
Бездимензионална величина q_{h3} је дефинисана преко променљиве ојачања материјала за прслину κ_{pcr} , према следећем:

$$\begin{aligned} q_{h3} &= q_{h30} + (q_{h31} - q_{h30}) \cdot \kappa_{pcr} & \text{за } \kappa_{pcr} < 1 \\ q_{h3} &= q_{h31} & \text{за } \kappa_{pcr} \geq 1 \end{aligned} \quad (101)$$

где су вредности q_{h30} и q_{h31} усвојене према следећем:

$$\begin{aligned} q_{h30} &= -0.05, \quad q_{h31} = 1.00 & \text{за } A_{f2} = -1 \\ q_{h30} &= 0.02, \quad q_{h31} = 1/3 & \text{за } A_{f2} = 1 \end{aligned} \quad (102)$$

Секундарна површ се активира при растерећењу у ситуацијама када постоји тренутна позитивна пластична дилатација. Конкретно се посматра вредност пластичне дилатације која одговара алгебарски максималној компоненти инкремента дилатације, $\Delta \varepsilon_{i,i=1,2,3}$. Нека вредност ове компоненте буде означена са $\Delta \varepsilon_M$. Овако дефинисана површ се деактивира, по анулирању дела компоненте пластичне дилатације ε_{pM} , конкретно $k_{cr} \cdot \varepsilon_{pM,max} = \varepsilon_{crM,max}$, где је $\varepsilon_{pM,max}$ максимална вредност позитивне пластичне дилатације током анализе, а k_{cr} је усвојено 0.87 у оквиру ове студије, према приказаним резултатима у [46, 205]. Ово значи да је при растерећењу 87% позитивне пластичне дилатације анулирано, а затим се секундарна површ деактивира и еластично понашање унутар иницијалне површи се наставља, како је приказано на Сл. 23.



Сл. 23 Одговор ефективни напон-дилатација при растерећењу: а) $\varepsilon_{M,max}=0.25\%$; б) $\varepsilon_{M,max}=0.50\%$

На сличан начин, при поновном оптерећењу, секундарна површ се активира у ситуацијама у којима постоји позитивна вредност $\varepsilon_{pM,max}$.

Променљива ојачања материјала κ_{pcr} је дефинисана у инкременталном облику, према следећем изразу:

$$\dot{\kappa}_{pcr} = \frac{\dot{\varepsilon}_{ps}}{x_{h2}} \quad (103)$$

где је x_{h2} мера дуктилности ојачања материјала за секундарну површ, која је дефинисана према следећем:

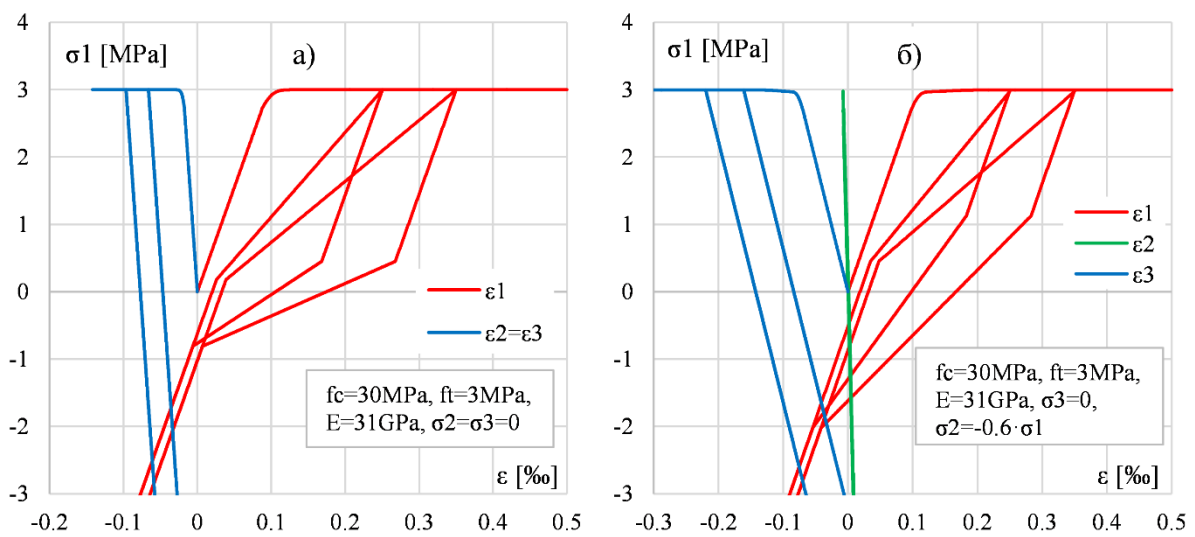
$$\begin{aligned} x_{h2} &= 7.5 \cdot \varepsilon_{crM, \max} && \text{за } \Delta \varepsilon_M < 0 \text{ (растерећење)} \\ x_{h2} &= k_{crt} \cdot k_{crc} \cdot \varepsilon_{crM, \max} && \text{за } \Delta \varepsilon_M > 0 \text{ (оптерећење)} \end{aligned} \quad (104)$$

У изразу (104) параметри k_{crt} и k_{crc} су уведени како би било могуће обухватити отварање прслине при општим триаксијалним стањима напона, а дефинисани су према следећим изразима:

$$\begin{aligned} k_{crt} &= 1 && \text{за } \max(\bar{\sigma}_N, \bar{\sigma}_O) \leq 0 \\ k_{crt} &= 1 - 0.5 \cdot \frac{\max(\bar{\sigma}_N, \bar{\sigma}_O)}{\bar{\sigma}_M} && \text{за } \max(\bar{\sigma}_N, \bar{\sigma}_O) > 0 \end{aligned} \quad (105)$$

$$\begin{aligned} k_{crc} &= 1 && \text{за } \min(\bar{\sigma}_N, \bar{\sigma}_O) \leq 0 \\ k_{crc} &= 1 - 3.0 \cdot \frac{\min(\bar{\sigma}_N, \bar{\sigma}_O)}{\bar{\sigma}_M} && \text{за } \min(\bar{\sigma}_N, \bar{\sigma}_O) > 0 \end{aligned} \quad (106)$$

У изразима (105) и (106) индекс M је дефинисан у раније у овом поглављу, а индекси N и O представљају преостале две компоненте нормалног напона из вектора ефективног напона $\bar{\sigma}$. Приказ циклуса растерећење – оптерећење је приказан на Сл. 24, где се уочава да и при триаксијалним стањима напона, са дефинисаним ојачањем при оптерећењу, напон тежи тачки растерећења из претходног циклуса.



Сл. 24 Одговор ефективни напон-дилатација у циклусу растерећење - оптерећење: а) једноаксијално; б) биаксијално

Коначно, правило течења секундарне површи је усвојено са идејом да смер вектора пластичне дилатација буде такав, да се при растерећењу симултано затворе прслине у сва три правца нормалних напона, уколико су отворене. Јасно је да се за једноаксијално затезање овај правац поклапа са правцем примарног напона, односно површ правила течења би била раван управна на овај правац. При биаксијалном затезању правац би требало да буде у равни одговарајућа два напона, са вредностима компоненти вектора које су пропорционалне односу вредности одговарајућих елемената ϵ_{cr} вектора. При триаксијалном затезању правац би требало да буде такав да су компоненте вектора пропорционалне односу вредности одговарајућих елемената ϵ_{cr} вектора. Површ која испуњава ове услове, односно чији извод по напону (правац нормале), испуњава поменуте услове је раван дефинисана на следећи начин:

$$g_2 = A_f \cdot (k_{cr1} \cdot \bar{\sigma}_{i,i=1} + k_{cr2} \cdot \bar{\sigma}_{i,i=2} + k_{cr3} \cdot \bar{\sigma}_{i,i=3}) \quad (107)$$

где је A_f дефинисано изразом (100), а k_{cri} представља однос $\epsilon_{pi,max}$ и $\epsilon_{pM,max}$ и записано је у следећем облику:

$$k_{cri} = \left. \begin{array}{l} \frac{\epsilon_{pi,max}}{\max(\epsilon_{pi,max,i=1,2,3})} \quad \text{за } (\Delta\epsilon_M > 0 \ \& \ \Delta\epsilon_i > 0) \parallel (\Delta\epsilon_M < 0 \ \& \ \Delta\epsilon_i < 0) \\ k_{cri} = 0 \quad \text{за } (\Delta\epsilon_M > 0 \ \& \ \Delta\epsilon_i < 0) \parallel (\Delta\epsilon_M < 0 \ \& \ \Delta\epsilon_i > 0) \end{array} \right\} \text{за } i = 1, 2, 3 \quad (108)$$

Дакле, вредности k_{cri} су различите од нуле за правце у којима је присутна позитивна пластична дилатација током анализе $\epsilon_{pi,max}$ и којима се стање, растерећење или оптерећење, поклапа са стањем правца означеног са M .

3.3. Део према механици оштећења

Део модела према механици оштећења је дефинисан преко критеријума оштећења и правила пораста оштећења. Оштећење је описано са две скаларне вредности d_t и d_c које одговарају оштећењу по затезању и притиску, редом, и узимају вредности од 0, што одговара неоштећеном материјалу, до 1 што одговара потпуно оштећеном материјалу. Веза номиналних и ефективних напона је дефинисана следећим изразом:

$$\sigma = (1 - d_t) \cdot \bar{\sigma}_t + (1 - d_c) \cdot \bar{\sigma}_c \quad (109)$$

а веза ефективних напона и дилатација према следећем:

$$\bar{\sigma} = \mathbf{D} \cdot (\epsilon - \epsilon_p) \quad (110)$$

У изразу (109) $\bar{\sigma}_t$ и $\bar{\sigma}_c$ представљају позитивни и негативни део тензора ефективних напона и одређени су из главних ефективних напона $\bar{\sigma}_p$, према следећем:

$$\bar{\sigma}_\psi = \langle \bar{\sigma}_p \rangle_+, \quad \bar{\sigma}_{\psi'} = \langle \bar{\sigma}_p \rangle_- \quad (111)$$

где су $\langle \cdot \rangle_+$ и $\langle \cdot \rangle_-$ позитиван и негативан оператор, дефинисани као $\langle x \rangle_+ = \max(x, 0)$ и $\langle x \rangle_- = \min(x, 0)$.

Критеријум оштећења је дефинисан, као и у неколицини других модела, као разлика захтева, тј. еквиваленте дилатације $\tilde{\epsilon}$, и тренутног стања k_d . Критеријум оштећења по затезању је дефинисан следећим изразом:

$$f_{dt} = \tilde{\epsilon}_t - k_{dt} \quad (112)$$

а еквивалентна дилатација по затезању $\tilde{\epsilon}_t$ је дефинисана у инкременталном облику према следећем:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\epsilon}}_t &= 0 & \text{за } k_{pt} < 1 \\ \dot{\tilde{\epsilon}}_t &= (1 - \alpha_c) \cdot \dot{\epsilon}_{ps} & \text{за } k_{pt} \geq 1 \end{aligned} \quad (113)$$

У изразу (113) променљива α_c је дефинисана према изразу (95). Променљива тренутног стања k_{dt} се срачунава према изразу (112), уз услове оптерећења и растерећења критеријума оштећења, који гласе

$$f_{dt} \leq 0, \quad \dot{k}_{dt} \geq 0, \quad \dot{k}_{dt} \cdot f_{dt} = 0 \quad (114)$$

Критеријум оштећења по притиску је дефинисан следећим изразом:

$$f_{dc} = \tilde{\epsilon}_c - k_{dc} \quad (115)$$

док је еквивалентна дилатација по притиску $\tilde{\epsilon}_c$ дефинисана у инкременталном облику према следећем:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\epsilon}}_c &= 0 & \text{за } k_{pc} < 1 \\ \dot{\tilde{\epsilon}}_c &= \frac{\alpha_c \cdot \dot{\epsilon}_{ps}}{x_s} & \text{за } k_{pc} \geq 1 \end{aligned} \quad (116)$$

Променљива тренутног стања k_{dc} се срачунава према изразу (115), уз услове оптерећења и растерећења критеријума оштећења:

$$f_{dc} \leq 0, \quad \dot{k}_{dc} \geq 0, \quad \dot{k}_{dc} \cdot f_{dc} = 0 \quad (117)$$

У изразу (116) x_s је мера дуктилности омекшања материјала и дефинисана је према следећем:

$$x_s = \frac{250 \cdot \ln(R_s^{3.9} + 1)}{3.9} \quad (118)$$

где је променљива R_s (слично као и R_h , израз (97)) дефинисана следећим изразом:

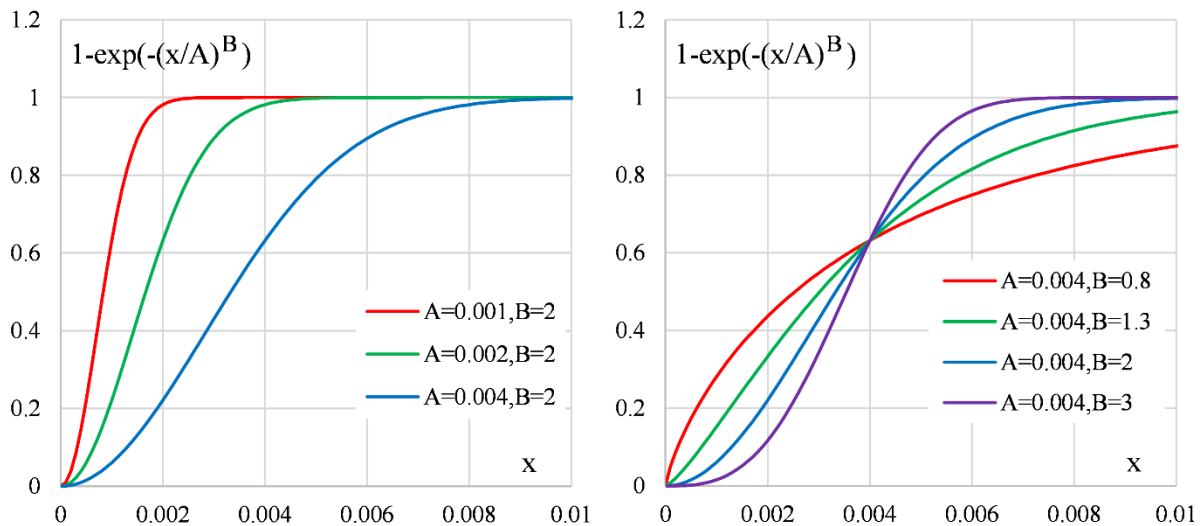
$$R_s(\bar{\sigma}_v) = -\frac{\bar{\sigma}_v}{f_c} + \frac{2}{m_0} \quad (119)$$

Увођењем мере дуктилности омекшања x_s је омогућено дефинисање различитог прираста еквивалентне дилатације по притиску $\tilde{\epsilon}_c$ за различита триаксијална стања.

Правило пораста оштећења по затезању је дефинисано према следећем:

$$d_t = 1 - \exp\left(-\left(\frac{L_{el} \cdot k_{dt}}{A_{dt}}\right)^{B_{dt}}\right) \quad (120)$$

где су A_{dt} и B_{dt} параметри, а L_{el} је ширина зоне у којој се дешава оштећење, односно величина коначног елемента у моделима локалног типа. Облик функције из изрази (120) је такав да се за d_t узима вредности од 0 до 1, са експоненцијалном тежњом ка 1 за вредност k_{dt} од $+\infty$. Функција је приказана на Сл. 25, на којој се могу уочити утицај A и B параметара на облик. Облик функције је погодан за обухватање оштећења по затезању и притиску.



Сл. 25 Облик функције пораста оштећења

Параметри A_{dt} и B_{dt} су усвојени тако да површина испод криве, одговара параметру енергије лома G_{ft} [46, 95, 109]. Будући да интеграл приказане функције није могуће решити у затвореном облику, како би се изједначавањем са G_{ft} дошло до

одговарајућих вредности параметара A_{dt} и B_{dt} , интеграл је решен нумерички, а параметри су усвојени према следећем:

$$A_{dt} = 1.26584 \cdot 10^{-3} \cdot G_{Ft}^2 + 9.50480 \cdot 10^{-5} \cdot G_{Ft} + 7.51119 \cdot 10^{-6}, B_{dt} = 0.90 \quad (121)$$

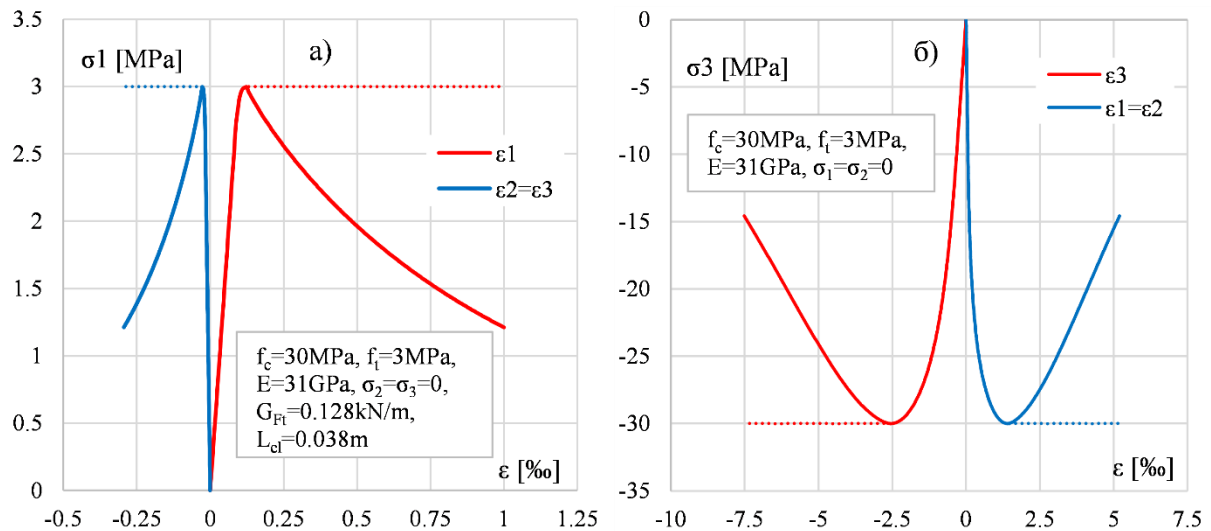
Правило пораста оштећења по притиску, слично изразу за пораст оштећења по затезању (120), је дефинисано следећим изразом:

$$d_c = 1 - \exp\left(-\left(\frac{k_{dc}}{A_{dc}}\right)^{B_{dc}}\right) \quad (122)$$

у којем су A_{dc} и B_{dc} параметри усвојени у зависности од чврстоће бетона при притиску, према следећем:

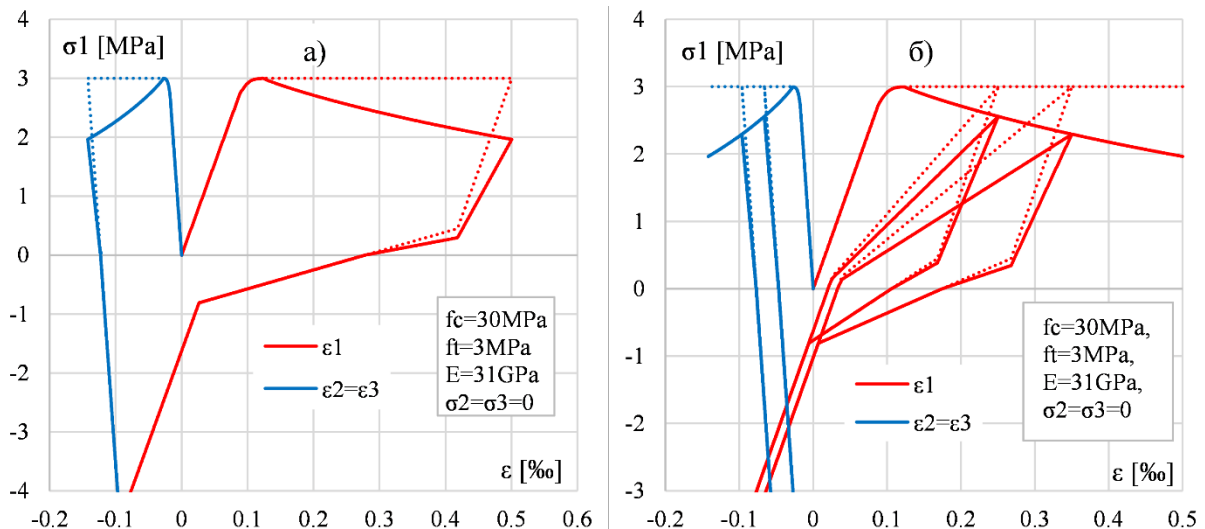
$$A_{dc} = 0.00205 - 0.000011 \cdot f_c, B_{dc} = 1.85 - 0.0053 \cdot f_c, \text{ где је } f_c \text{ у МПа} \quad (123)$$

На Сл. 26 је приказан карактеристичан одговор модела при једноосијалном напрезању затезањем и притиском, као надоградња приказаног еласто-пластичног одговора са Сл. 22. Пуним линијама су означени номинални напони, а тачкасто ефективни напони.



Сл. 26 Одговор номинални напон-дилатација при: а) једноосијалном затезању; б) једноосијалном притиску

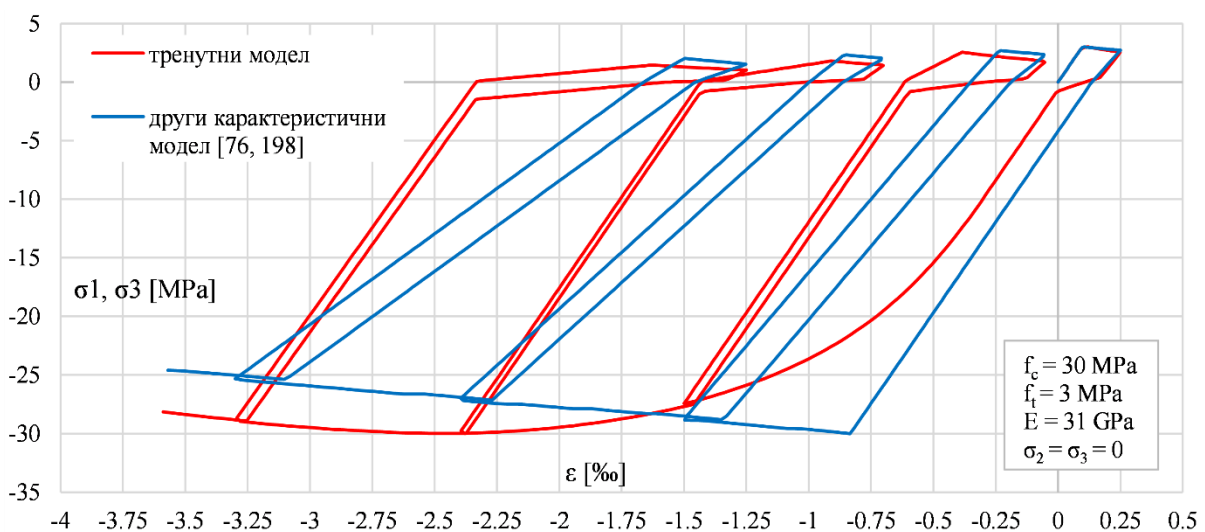
Карактеристичан одговор модела при једноосијалном затезању уз растерећење је приказан на Сл. 27а, као надоградња еласто-пластичног одговора са Сл. 23б, а одговор при цикличном једноосијалном оптерећењу је приказан на Сл. 27б. Пуним линијама су означени номинални напони, а тачкасто ефективни напони.



Сл. 27 Одговор номинални напон-дилатација при: а) растерећењу; б) циклусима растерећење – оптерећење

На Сл. 28 је приказан одговор модела при цикличном оптерећењу затезање-притисак, који је упоређен са другим моделом из категорије пластичност-оштећење, конкретно моделом ЦДПМ2 из [77, 202]. Предности модела из ове студије су следеће:

- предност могућности одвојеног ојачања површи течења по затезању и притиску, упоређено са моделом са јединственим ојачањем површи, где након ојачања по затезању модел има линеарно еластичан одговор до вредности чврстоће при притиску;
- предност анулирања пластичне дилатације која одговара затварању прелине, а која је уочљива одмах у првом циклусу из преласка затезања у притисак;
- предност могућности модела да симулира отварање постојеће прелине.



Сл. 28 Одговор модела из тренутне студије и другог карактеристичног модела [77, 202] из области пластичност-оштећење при циклусима затезање-притисак

3.4. Верификација према експерименталним подацима из литературе

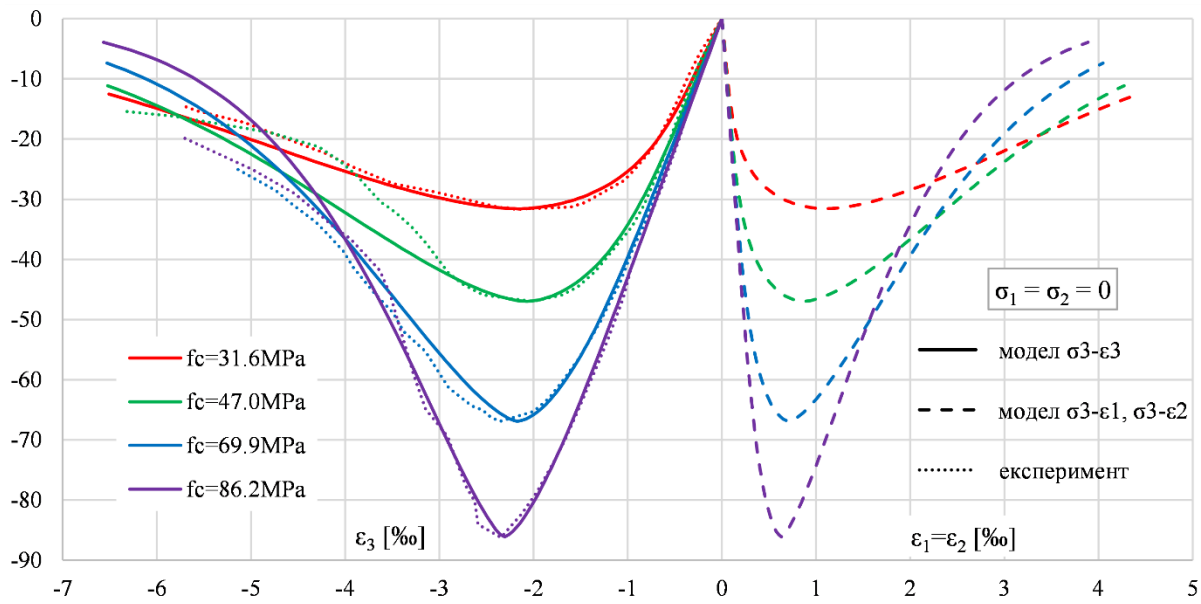
У овом поглављу су приказани нумерички примери понашања приказаног модела бетона, за различита напонска стања и историје оптерећења. Резултати су упоређени са доступним експерименталним подацима из литературе.

Конститутивни модел у нелинеарној анализи методом коначних елемената даје одговор напонског стања за задати инкремент дилатација, а на основу претходног напонског стања и стања променљивих историје материјала. С друге стране, експериментални подаци су по правилу дати за дефинисана напонска стања: једнооксијална, биоксијална или триоксијална. У том смислу, за потребе ове верификације, формирана је специјална функција компјутерског кода, која ће на модел аплицирати инкрементално дилатацију, а затим итеративно кориговати тај иницијални инкремент дилатације, док напонски одговор не буде жељеног облика.

3.4.1. Једнооксијални одговор

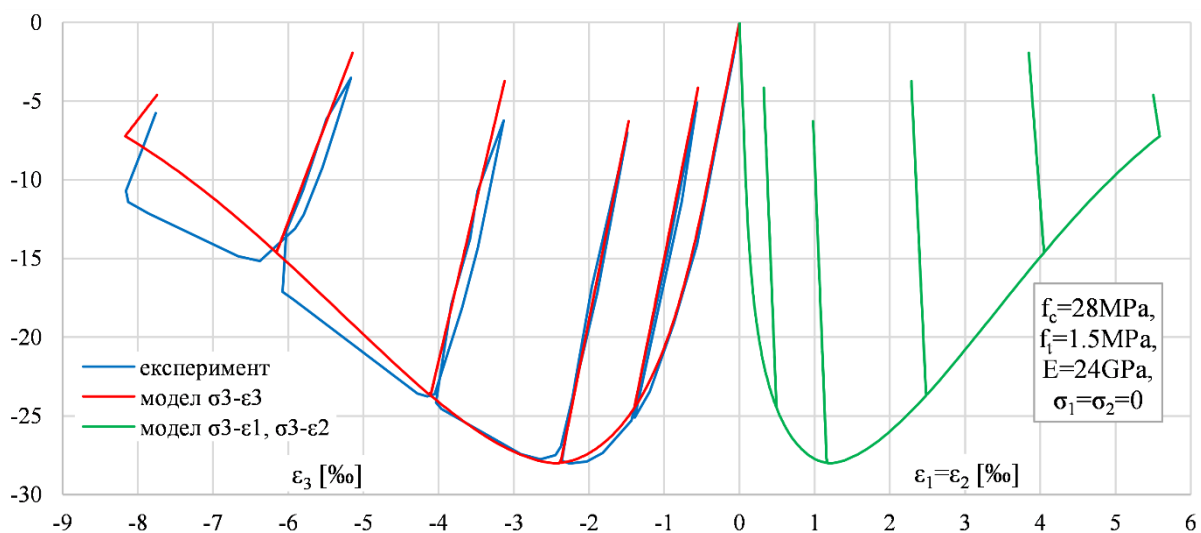
За прво упоређење су одабрани експериментални подаци из [199], у којима се проналази одговор бетона различитих чврстоћа при једнооксијалном оптерећењу притиском. На Сл. 29 је приказано упоређење експерименталних резултата са одговором модела за бетоне са чврстоћом при притиску 31.6, 47.0, 69.9 и 86.2 МПа. Управо ови параметри су коришћени за f_c при нумеричким симулацијама, а модул еластичности је усвојен 32.0, 37.0, 40.0 и 43.0 GPa, редом. На слици се уочава веома добро поклапање одговора σ_3 - ε_3 са кривама добијеним при експерименталном испитивању, што потврђује адекватно усвојене параметре зависне од f_c :

- који контролишу ојачање материјала, израз (98) – почетни део криве до места достигања чврстоће материјала;
- који контролишу правило пораста оштећења, израз (123) – други део криве омекшања материјала.



Сл. 29 Упоредње одговора модела са експерименталним подацима [199] при једноосијалном притиску

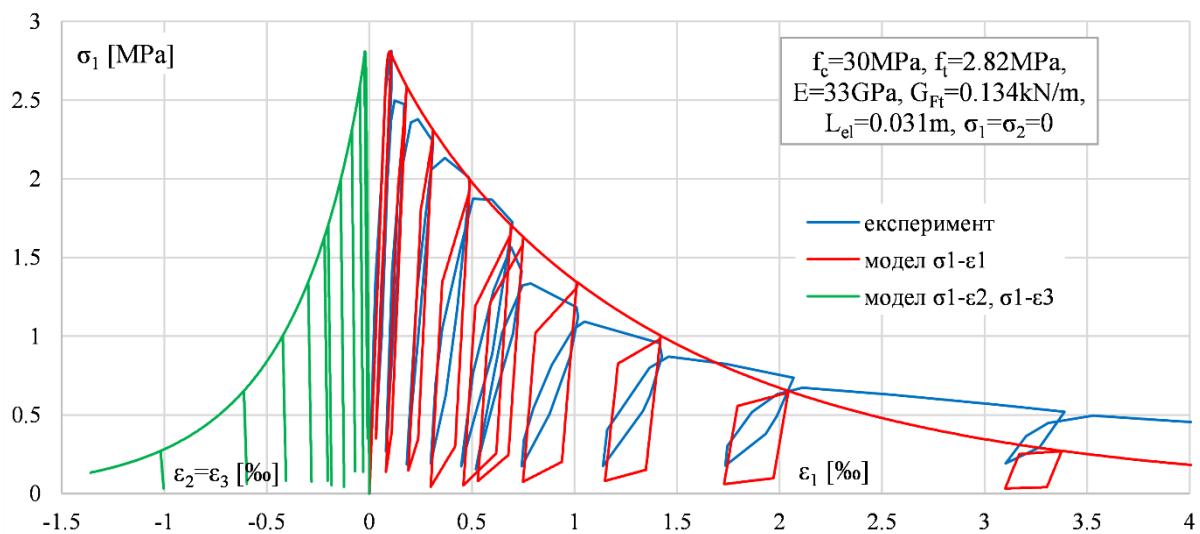
Једноосијални циклични одговор модела је упоређен са експерименталним резултатима из [155]. На Сл. 30 су приказане криве напон – примарна дилатација и напон – бочна дилатација добијене уз помоћ модела, и упоређене су са доступним експерименталним резултатима [155]. За модел су усвојени параметри $f_c = 28.0$ МПа, $f_t = 1.5$ МПа и $E = 24.0$ ГПа. Поред задовољавајућег подударанја у смислу дела криве у којој материјал ојачава, дилатације при достизању чврстоће при притиску и омекшавајућег дела криве, веома добро подударанје се може уочити и у смислу крутости при растерећењу и оптерећењу.



Сл. 30 Упоредње одговора модела са експерименталним подацима [155] при једноосијалном цикличном притиску

Упоредње одговора модела са експерименталним подацима при једноосијалном цикличном затезању је приказано на Сл. 31. Резултати су преузети из [205], где су дате

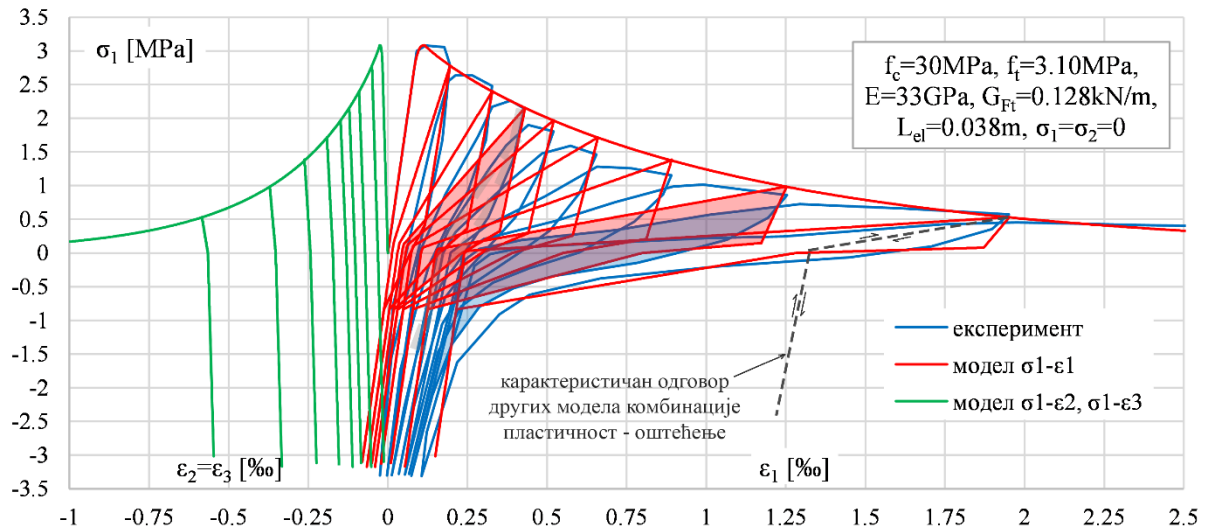
криве напон – померање. За потребе овог поређења, померања су преформулисана у дилатације, тако да циљани модул еластичности на напон – дилатација дијаграму износи 33 GPa. Карактеристична ширина зоне оштећења у тој ситуацији се добија 31 mm. Коришћени параметри модела су $f_c = 30.0$ MPa, $f_t = 2.82$ MPa, $E = 33.0$ GPa, $G_{Ft} = 0.134$ kN/m и $L_{el} = 31$ mm. Одговор пре достизања чврстоће при затезању и дилатација при достизању чврстоће се задовољавајуће подударају, док се облик дијаграма омекшања не подудара идеално у целости. Оно што је битно је да је иницијални нагиб задовољавајућег облика и са се енергија лома подудара. Осим овога и утрошена енергија у циклусима растерећење – оптерећење је већа за 14.3% у моделу.



Сл. 31 Упоређење одговора модела са експерименталним подацима [205] при једноаксијалном цикличном затезању

На Сл. 32 је такође приказан одговор модела при једноаксијалном цикличном затезању, упоређен са резултатима из [205], али са преласком напона у притисак до вредности $-f_t$. Коришћени параметри модела су $f_c = 30.0$ MPa, $f_t = 3.10$ MPa, $E = 33.0$ GPa, $G_{Ft} = 0.128$ kN/m и $L_{el} = 38$ mm. На овом примеру се најбоље осликавају предности овако формулисаног модела у погледу обухватања ефекта затварања и поновног отварања прслина. И у овом примеру утрошена енергија у циклусима растерећење – оптерећење је већа у моделу, и то за 37.6%, што је последица облика почетних неколико циклуса. На слици су засенчени трећи и седми циклус модела и експеримента, где се уочава поменута разлика у почетним циклусима. Имајући у виду бенефит могућности моделирања затварања и отварања прслина, где би класичан модел комбинације пластичност – оштећење имао одговор при оптерећењу притиском последњег, осмог, циклуса са Сл. 32 на 1.00 до 1.25%, као и чињеницу да би такав модел имао нулту потрошњу енергије

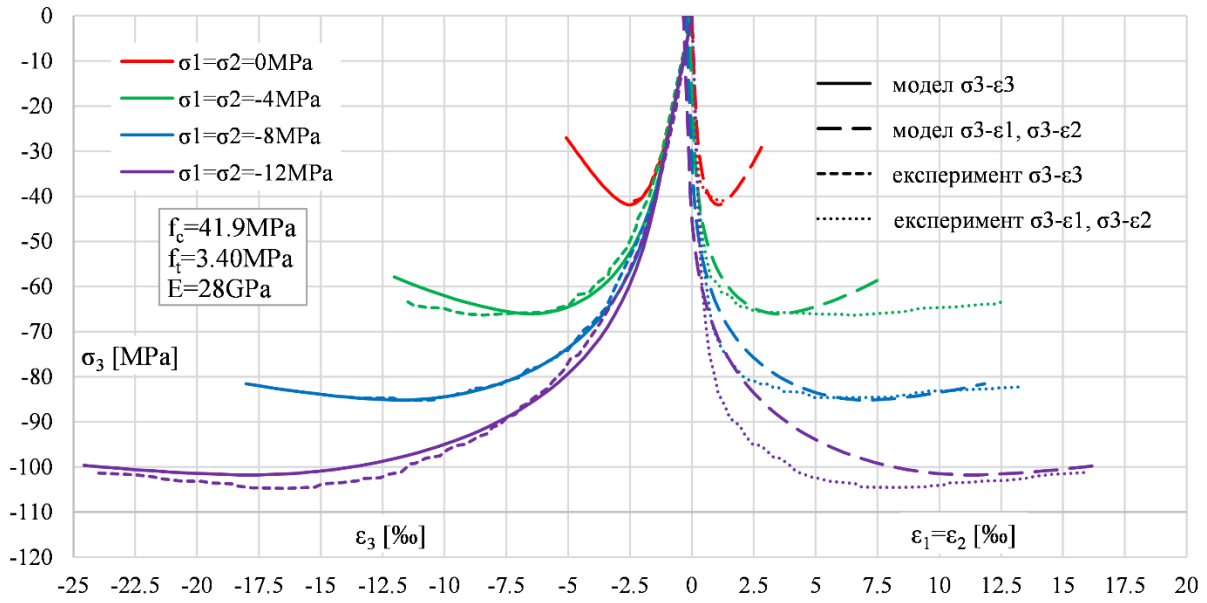
унутар једног циклуса (линија растеређење – оптерећење је идентична), ова разлика у потрошњи енергије тренутног модела није од примарног значаја.



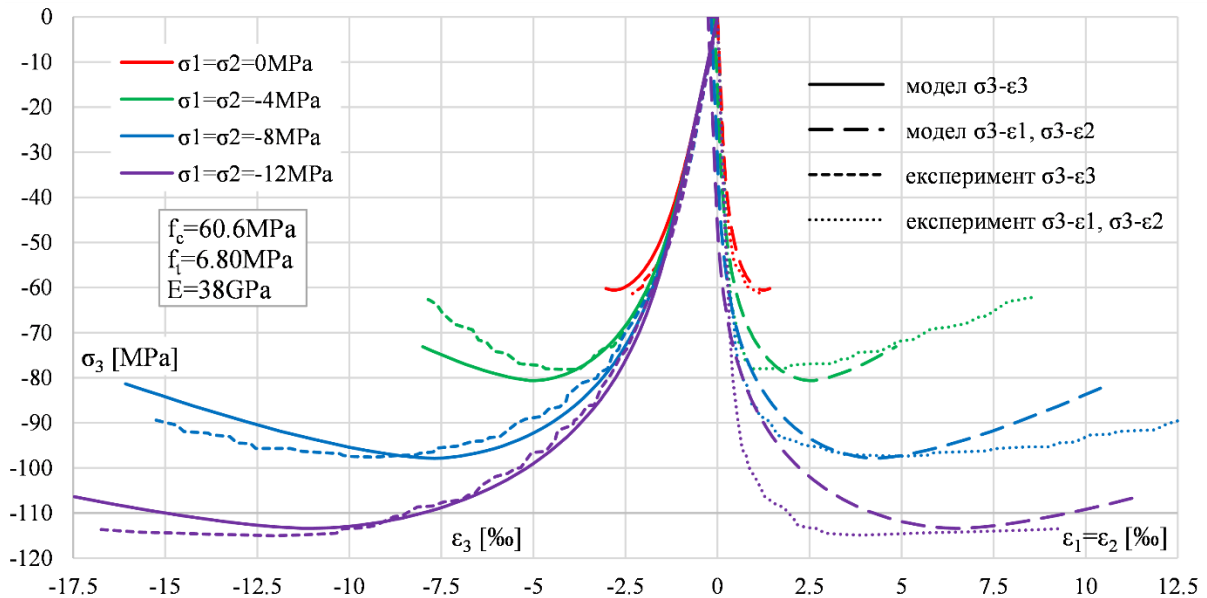
Сл. 32 Упоређење одговора модела са експерименталним подацима [205] при једноаксијалном цикличном затезању са преласком на притисак

3.4.2. Триаксијални и биаксијални одговор

За упоређење одговора модела са триаксијалним тестовима одабрани су подаци из [26], где је извршено једноаксијално и триаксијално испитивање бетона са једнаким вредностима бочних притисака. Резултати упоређења су приказани на Сл. 33 за бетон једноаксијалне чврстоће 41.9 МПа, где су коришћени параметри $f_c = 41.9$ МПа, $f_t = 3.40$ МПа и $E = 28.0$ GPa, затим на Сл. 34 за бетон чврстоће 60.6 МПа, са параметрима $f_c = 60.6$ МПа, $f_t = 6.80$ МПа и $E = 38.0$ GPa и на Сл. 35 за бетон чврстоће 73.1 МПа, са параметрима $f_c = 73.1$ МПа, $f_t = 6.20$ МПа и $E = 40.0$ GPa. Пре свега се може уочити веома добар одговор у погледу вредности чврстоће материјала при триаксијалним стањима напрезања, за шта је задужен одабрани критеријум течења, односно лома.

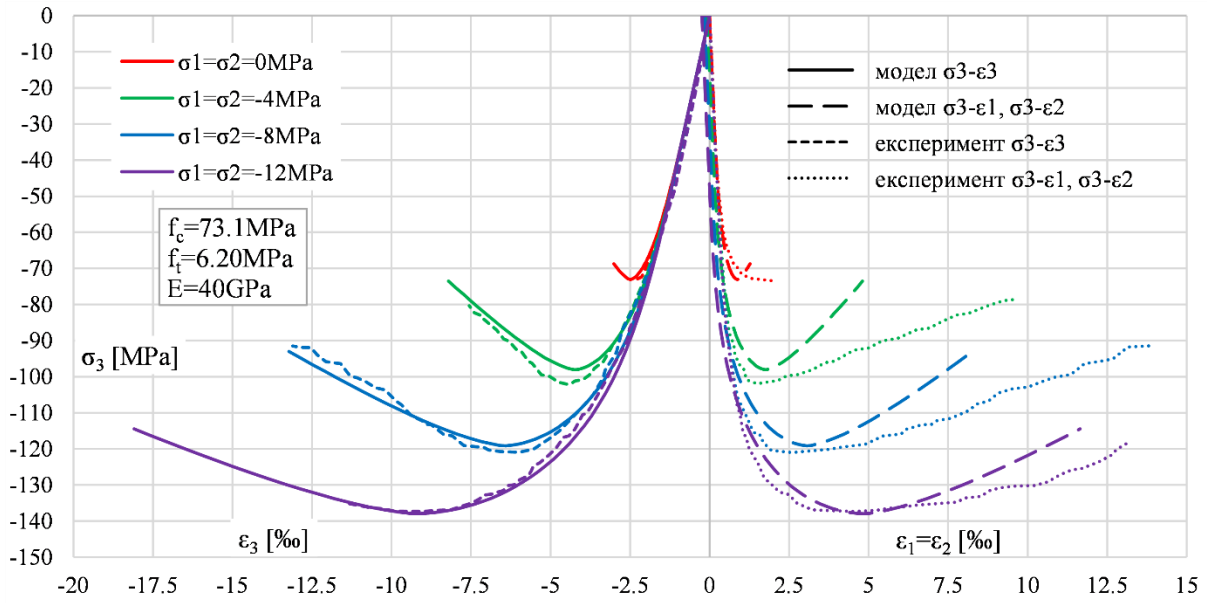


Сл. 33 Упоредње одговора модела са експерименталним подацима [26] при триаксијалном притиску са једнаким бочним притисцима, $f_c = 41.9 \text{ MPa}$



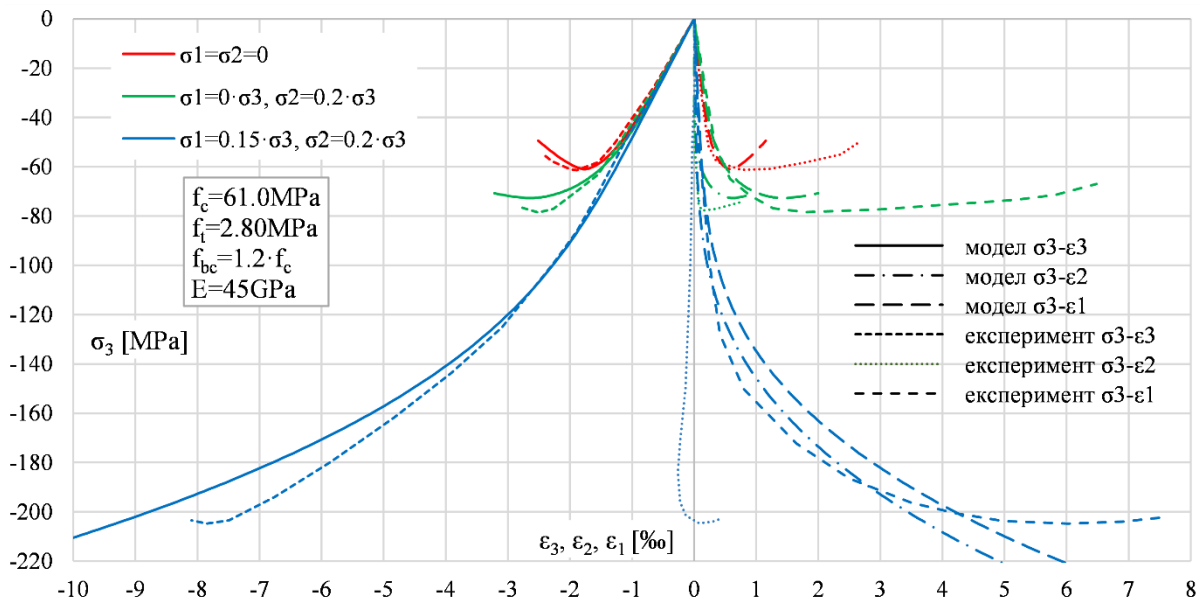
Сл. 34 Упоредње одговора модела са експерименталним подацима [26] при триаксијалном притиску са једнаким бочним притисцима, $f_c = 60.6 \text{ MPa}$

Осим овога, приметан је и задовољавајући однос примарне и секундарне дилатације за различита напрезања, у фази пре достизања чврстоће, као и у каснијој фази, где је кључан одабир функције правила течења. Коначно, правило ојачања материјала уз одабрану меру дуктилности ојачања и правило пораста оштећења уз одабрану меру дуктилности омекшања, потврђују адекватан одабир у тренутној формулацији уколико се посматра облик одговора пре достизања чврстоће, дилатација при достизању чврстоће и одговор после достизања чврстоће при триаксијалном стању напрезања.

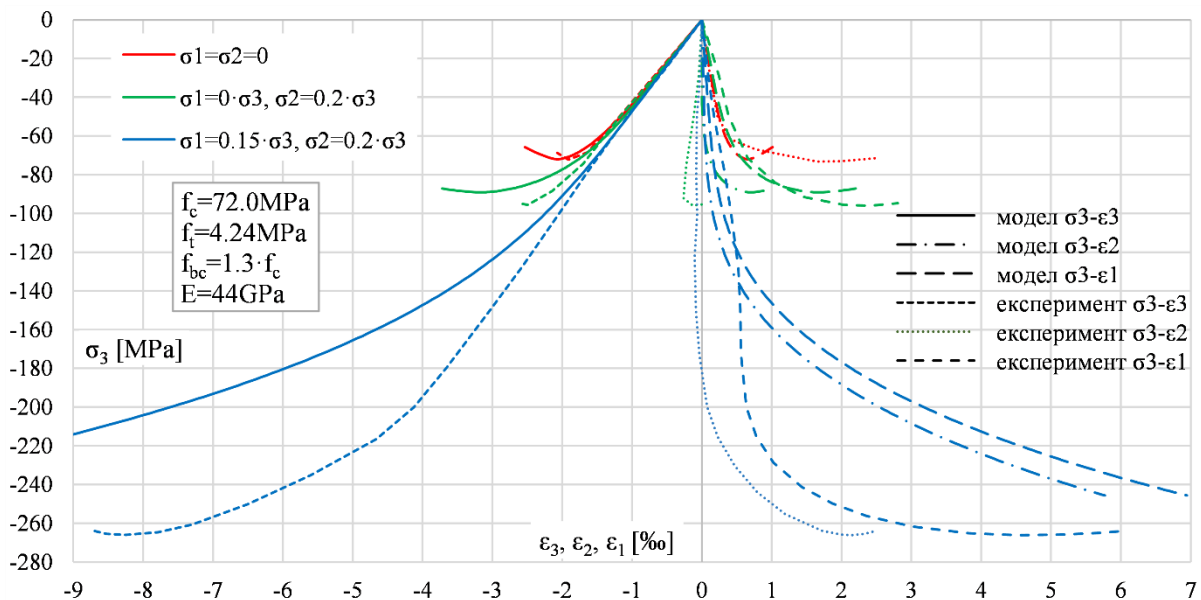


Сл. 35 Упоређење одговора модела са експерименталним подацима [26] при триаксијалном притиску са једнаким бочним притисцима, $f_c = 60.6 \text{ MPa}$

Поређење са триаксијалним тестовима при различитим вредностима бочних притисака су приказани на Сл. 36 и Сл. 37. Експериментални резултати су преузети из [80] и приказани су резултати једноаксијалног теста, биаксијалног теста и теста са различитим бочним притисцима. Резултати упоређења на Сл. 36 су за бетон једноаксијалне чврстоће 61.17 MPa , где су коришћени параметри $f_c = 61.0 \text{ MPa}$, $f_t = 2.80 \text{ MPa}$, $E = 45.0 \text{ GPa}$ и биаксијална чврстоћа при притиску је у овој ситуацији усвојена $1.20 \cdot f_c$, односно различито од препоруке $1.16 \cdot f_c$, према Купферу и сарадницима [106, 107]. Резултати на Сл. 37 одговарају бетону чврстоће 72.44 MPa и коришћени су параметри $f_c = 72.0 \text{ MPa}$, $f_t = 4.24 \text{ MPa}$ и $E = 44.0 \text{ GPa}$ и $f_{bc} = 1.30 \cdot f_c$. У оба случаја једноаксијални и биаксијални одговор модела се задовољавајуће подударују, а при триаксијалном је чврстоћа прецењена, што су недостаци усвојене површи течења, односно лома, док ојачање материјала и правило течења имају задовољавајући облик.



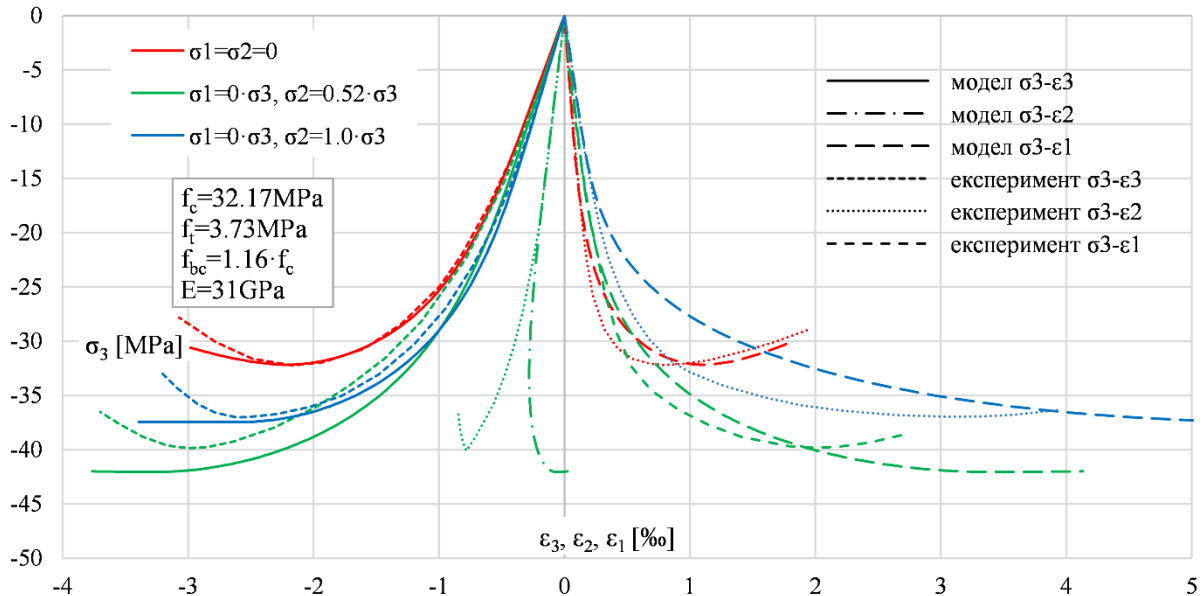
Сл. 36 Упоредње одговора модела са експерименталним подацима [80] при триаксијалном притиску са различитим бочним притисцима, $f_c = 61.0 \text{ MPa}$



Сл. 37 Упоредње одговора модела са експерименталним подацима [80] при триаксијалном притиску са различитим бочним притисцима, $f_c = 72.0 \text{ MPa}$

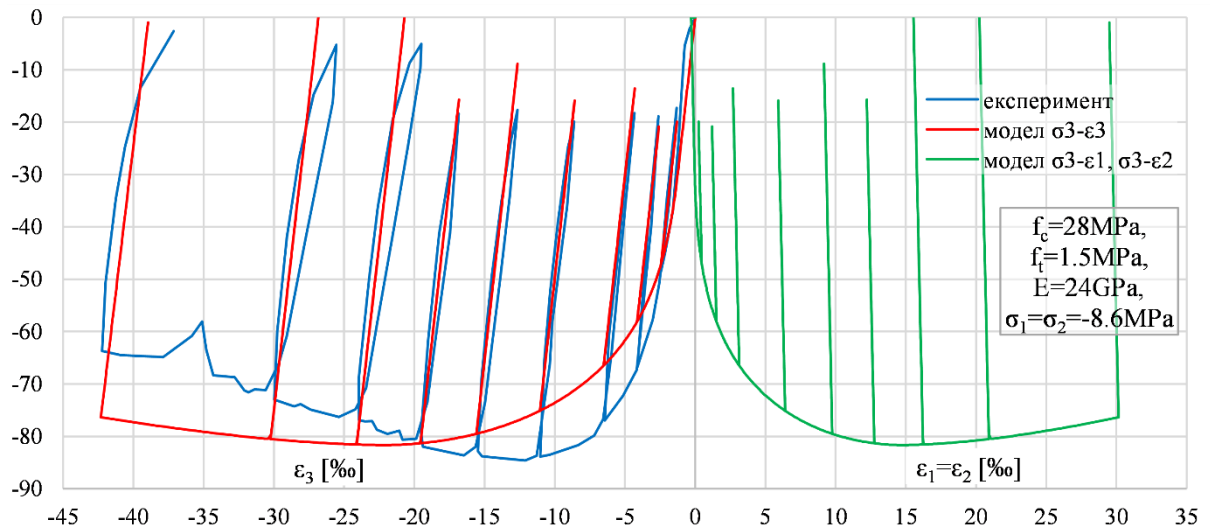
На Сл. 38 је приказан одговор модела при биаксијалном оптерећењу са једнаком и различитом вредношћу бочног притиска и упоређен је са експерименталним резултатима [106, 107]. Може се уочити веома добро поклапање резултата добијених моделом са експерименталним резултатима у погледу чврстоће и ојачања материјала. На слици је приказано једноаксијално напрезање црвеном бојом, биаксијално са једнаким бочним притиском плавом бојом и биаксијално са вредношћу бочног напона 52% од примарног напона са зеленом бојом. Треба напоменути да последње одговара меридијану за који је

$\theta = 30^\circ$, где до изражаја долази додатак у изразу (96), о којем је било речи у поглављу 3.2.2.



Сл. 38 Упоредње одговора модела са експерименталним подацима [106, 107] при биаксијалном притиску

Као последње поређење у оквиру овог поглавља приказан је одговор модела при цикличном триаксијалном оптерећењу притиском на Сл. 39. Резултати су преузети из [155], а коришћени су параметри као и при једноаксијалној анализи приказаној на Сл. 30, будући да се ради о истом експерименталном узорку. Приметно је не тако добро поклапање са експерименталним подацима у смислу ојачања материјала, иако је кроз претходне примере показано да је ојачање и мера дуктилности ојачања адекватно усвојена, као што се може видети на Сл. 33-Сл. 37. Крутост при растерећењу и оптерећењу се готово идеално поклапа, што потврђује добар избор у смислу идеално пластичног понашања површи течења.



Сл. 39 Упоређење одговора модела са експерименталним подацима [155] при триаксијалном цикличном притиску

4. НУМЕРИЧКА ИМПЛЕМЕНТАЦИЈА

4.1. Увод

Нумеричка имплементација игра значајну улогу при развијању конститутивних модела материјала [145]. У оквиру овог рада имплементација подразумева примену методе за решавање диференцијалних једначина у механици континуума, где је употребљена метода коначних елемената (МКЕ), као и инкорпорацију формулисаног конститутивног модела у ове једначине. МКЕ подразумева поделу система на мање, једноставније делове, који се називају коначни елементи (КЕ). Ова подела се постиже дискретизацијом у простору, односно генерисањем мреже са коначним бројем тачака и као резултат проблем механике континуума је представљен системом алгебарских једначина.

Увођењем нелинеарног конститутивног модела у проблем, решење МКЕ система алгебарских једначина се мора пронаћи методама нелинеарне анализе, што подразумева инкрементални поступак, а будући да је бетон материјал који омекшава, то додатно компликује процес [209]. Јављају се потешкоће у конвергенцији система, будући да КЕ који улазе у режим омекшања отпуштају унутрашњу силу уз појаву негативне крутости, која утиче на позитивну дефинитност матрице крутости система. Равнотежни пут има оштре заокрете на дијаграму сила-померање, услед стрмог нагиба гране омекшања бетона по затезању. Осим овога, за одређене конфигурације система у геометријском и напонском смислу, може се јавити пролом уназад, који карактерише смањење глобалног померања у даљем процесу аплицирања оптерећења при нелинеарној анализи. Исто тако, могу се јавити ситуације у којима равнотежни пут може да има два или чак више могућих различитих решења којима је могуће да се равнотежни пут настави. Све ове ситуације напрежу модул за решење система алгебарских једначина (*solver*) до крајњих граница његових могућности и по правилу класичне методе, попут Њутн-Рапсонових итерација, па чак и метода дужине лука (*arc-length*) са линијским претраживањем (*line search*), неће довести до конвергенције при решавању оваквог система.

Приликом анализе система који су моделирани материјалом који омекшава, локализација деформације се одвија на најмањем простору који је одређен дискретизацијом система. Овај простор се назива зона процеса лома. За последицу, ова локализација деформације производи глобални одговор система, који је зависан од мреже коначних елемената, а потрошња енергије у зони процеса лома може постати блиска нули са прогушћењем мреже коначних елемената [42, 159]. У овој докторској

дисертацији је предложено решење за проблеме зависности глобалног одговора од мреже коначних елемената као и нулту потрошњу енергије, увођењем коригованог модула омекшања према величини коначног елемента.

У раздобљу од 2009. године до данас аутор тезе је развијао сопствени компјутерски програм за нумеричку анализу конструкција методом коначних елемената, назван *Matrix 3D* [96, 97, 207, 209]. У програму је могућа анализа конструкција сачињених од линијских, површинских и просторних коначних елемената, где су у оквиру линијских развијени и влакнасти (*fiber*) елемент стуб-греда, а у оквиру површинских слојевита љуска (*layered shell*). Од постојећих нелинеарних материјалних модела формиран су неки од значајнијих, попут вон Мизесовог, Манегото-Пинто за челик, CDPМ2 за бетон, Отосенов, Јасинов и др. Нелинеарну анализу је могуће извршити Њутн-Рапсоновим итерацијама, линијским претраживањем, методом дужине лука, а доступне су и динамичке методе имплицитна Њумаркова и експлицитна, као и инкрементална динамичка анализа (*IDA*). За све поменуте анализе, осим експлицитне, од есенцијалног значаја је познавање тангентне материјалне матрице за тренутно стање материјала. Из овог разлога посебан акценат ће бити на извођењу конзистентне материјалне матрице за развијени материјални модел, уз формирање конкретних функција компјутерског кода, како би развијени материјални модел бетона могао бити примењен и у другим софтверима за анализу конструкција.

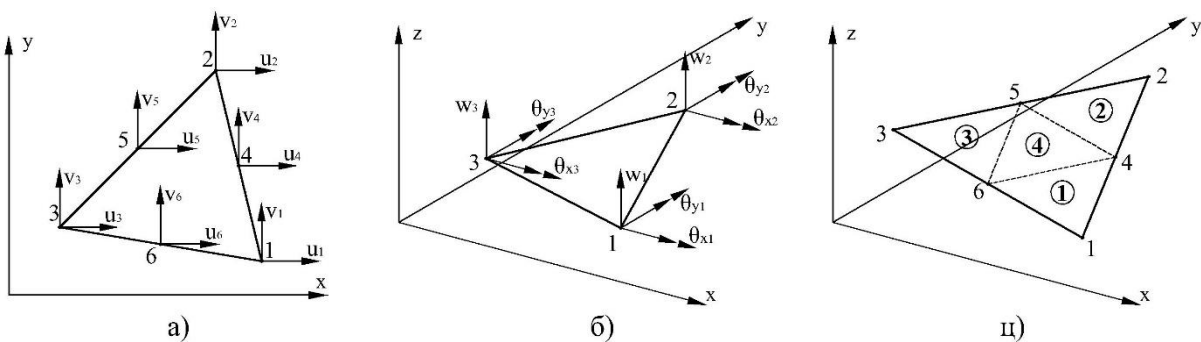
4.2. Развијени компјутерски програм

Компјутерски програм *Matrix 3D* [96, 97, 207, 209] је настао као надоградња рада аутора, на мањем програму за анализу линијских система, такође сачињеном од стране аутора, у раздобљу од 2006. до 2009. године и који је представљао и дипломски-мастер рад 2009. године. За потребе креирања овог новог програма комплетан код је рашчлањен и прекуцан у нове функције и већ од 2010. године *Matrix 3D* је функционалан. Програм је комплетно кодиран у *Matlab* програмском језику, али је паралелно са развојем преведен у обиму око 20% на *C++* под *Visual Studio*-ом, како би потенцијално у једном тренутку радио одвојено од *Matlab* платформе. Компјутерски програм *Matrix 3D*, иако је написан под *Matlab*-ом, има потпуно независан визуелни кориснички интерфејс и у глобалу све функције су кодиране искључиво базичним елементима програмског језика, што и омогућава прелазак и прекуцавање кода у други програмски језик.

Matrix 3D програм је заснован на МКЕ и обухвата линеарну и нелинеарну анализу тродимензионалних, просторних система сачињених од линијских површинских и

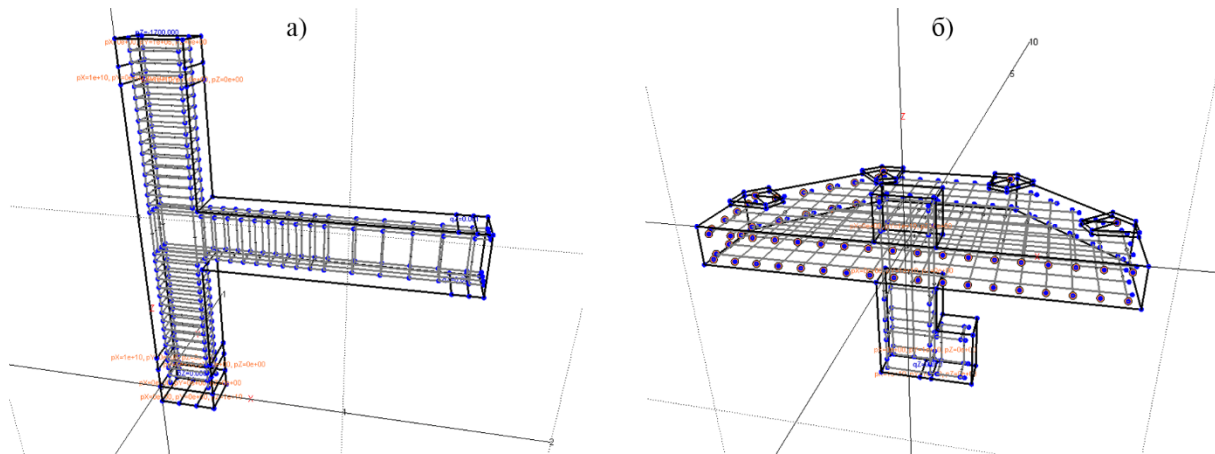
просторних елемената. Од линијских елемената имплементиран је класични елемент греде, према Ојлер-Бернулијевој теорији, као и влакнасти (*fiber*) елемент стуб-греда према раду Филипоу-а, чија имплементација и перформансе у *Matrix 3D* програму су детаљно приказани у [96].

Дискретизација система површинским КЕ у програму подразумева употребу троугаоних елемената са 3 чвора у теменима троугла или 6 чворова у теменима и срединама страна троугла. У мембранском смислу напрезања троугао са 3 чвора је елемент са константном дилатацијом, *CST*, који је и најједноставнији дводимензионални коначни елемент, а елемент са 6 чворова је са линеарном променом дилатације (Сл. 40а), *LST*, где се у оба случаја подразумева 2 степена слободне померања по чвору [170]. У флексионом смислу одабран је троугао са 9 степени слободне [216], који је приказан на Сл. 40б и као такав је коришћен за потребе троугаоног елемента са 3 чвора, а елемент са 6 чворова је формиран као суперелемент сачињен од 4 оваква троугла, према Сл. 40ц. У оквиру површинских троугаоних КЕ имплементирани су слојевите љуске (*layered shell*) према [183, 212], где је могуће применити различите материјалне моделе, за сваки слој, и на тај начин симулирати површинске бетонске носаче, са слојевима арматуре.



Сл. 40 Троугаони КЕ: а) *LST* елемент; б) са 9 степени слободне; ц) суперелемент

Од просторних КЕ у *Matrix 3D* програму су имплементирани тетраедар са 4 чвора у теменима и тетраедар са 10 чворова, од чега су 4 у теменима тетраедра, а преосталих 6 на срединама страница. Први је у литератури познат као линеарни, а други као квадратни тетраедар, према степену полинома које су интерполационе функције. Имплементацијом просторних коначних елемената, је омогућено локално моделирање, односно представљање волумена бетона тетраедарским КЕ, а арматурне шипке је могуће моделирати линеарним елементима или чак влакнастим нелинеарним елементима, уколико се очекује пластификација арматуре при анализи (Сл. 41).



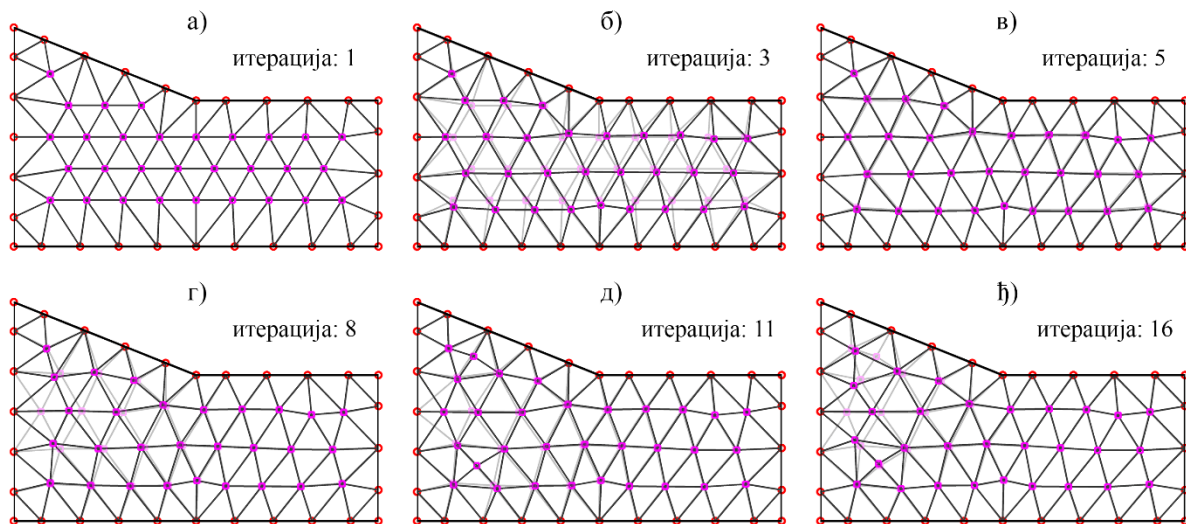
Сл. 41 Примери локалног просторног моделирања у *Matrix 3D* програму: а) чвор стуб-греда, б) пробој стуба кроз плочу

Ослањање модела у *Matrix 3D* програму је могуће извести тачкастим, линијским и површинским опругама, с тим што је чак при нелинеарној анализи могуће по потреби активирати или деактивирати одређене опруге. Уколико се узме пример са Сл. 41а, у којем је иницијално било потребно аплицирати аксијално оптерећење на стуб, а затим циклично померање краја греде, уз укљештење врха стуба, опција активирања/деактивирања опруга је незаметљива. Осим опруга, имплементирани су и тачкасти елементи везе (*link*), како линеарни, тако и нелинеарни са различитим правилима понашања: мултилинеарним, хистерезисним и др.

Од материјалних модела, осим линеарно еластичних, имплементиран је нелинеарно еластични Отосенов модел бетона [151, 152], вон Мизесов модел, и ЦДПМ2 модел бетона [77, 202], који су применљиви на просторне коначне елементе, као и различите варијанте мултилинеарних модела за бетон и челик, затим хистерезисни Јасинов модел за бетон, Манегото-Пинто-Филипоу за челик и ауторов билинеарни хистерезисни модел са оштећењем, који су применљиви на влакнасте линијске коначне елементе.

За потребе формирања мреже коначних елемената кодиран је алгоритам који генерише троугаону мрежу на затвореним полигонима, односно површинским носачима, као и алгоритам за тетрадарску мрежу на призматичним просторним облицима. Алгоритам се заснива на формирању решеткастог носача сачињеног од простих штапова, у којем штапови представљају странице троугла/тетраедра, а чворови су чворови будуће мреже коначних елемената. Иницијално је мрежа формирана од правилно распоређених чворова унутар затвореног полигона, као што је приказано на Сл. 42а, а контура полигона је проглашена непомерљивим ослонцима (кругови на слици). Штапови су распоређени према *Delunay triangulation* алгоритму [53]. На овакав систем су затим у чворове итеративно аплициране силе, интензитета и смера таквог да сваки од штапова тежи да

достигне жељену величину KE . Осим тога и сама крутост штапова који нису идеалне дужине, тј. једнаки величини KE , је пропорционално мања према овом одступању у дужини. На овај начин се постиже већа крутост, односно, мања деформабилност делова решетке у којој су штапови задовољавајуће распоређени. Коначно алгоритмом је предвиђено искључивање одређених штапова, уколико је њихова дужина мања од предефинисаног параметра, када се они мењају чвором на месту средине тог штапа, као и додавање новог чвора на дугачке штапове, чија дужина је већа од предефинисаног параметра (погледати Сл. 42в-ђ). Итерације се обустављају када померања решетке постану мања од жељене толеранције. На Сл. 42 је светлије приказан облик решетке из претходне приказане итерације, ради лакшег упоређења, дакле на Сл. 42б из итерације 1, на Сл. 42в из итерације 3 итд.



Сл. 42 Приказ итерација алгоритма за генерисање мреже KE у *Matrix 3D* програму

Решење система је могуће пронаћи линеарном или нелинеарном анализом, као и статичком или динамичком анализом. Само решење непознатог вектора померања \mathbf{q} , за дату матрицу крутости \mathbf{k} и вектор спољног оптерећења \mathbf{Q} , у основној једначини МКЕ:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{Q} \quad (124)$$

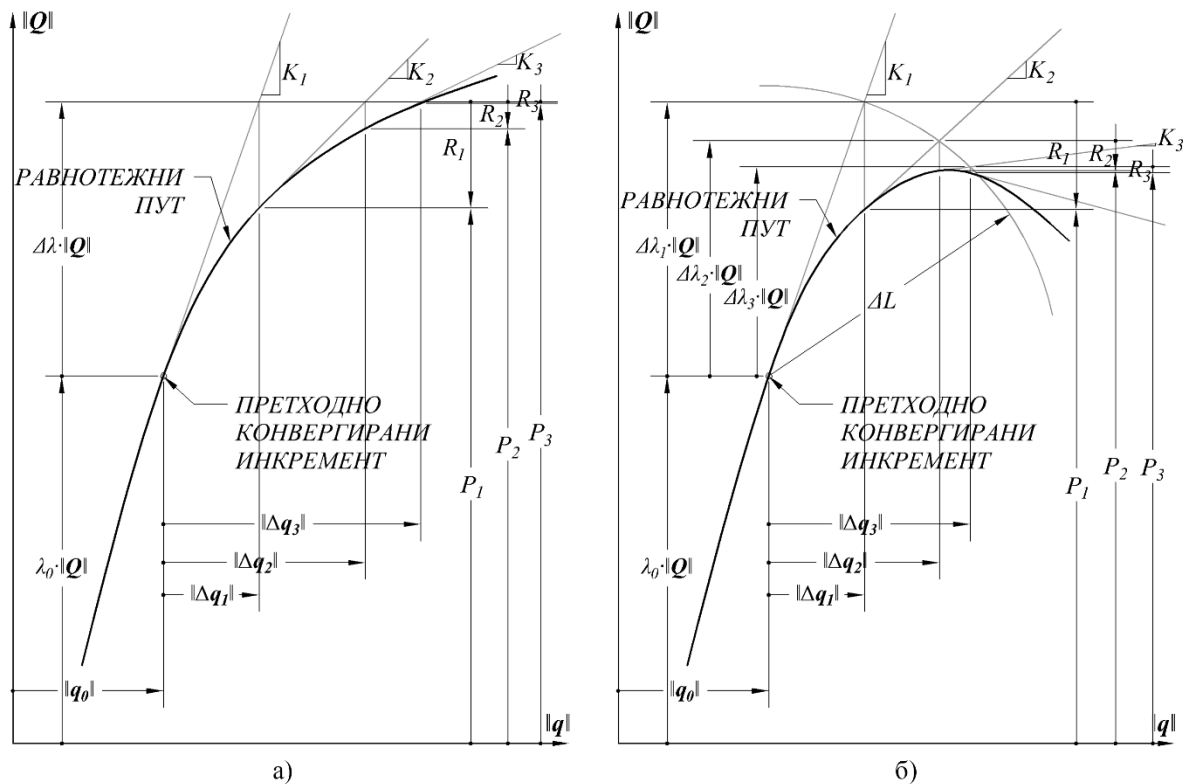
се проналази уграђеном функцијом *mldivide* у *Matlab*-у, која је посебно оптимизирана за све типове проблема. На основу решења померања су даље одређени утицаји у коначним елементима. За потребе нелинеарне анализе оптерећење је аплицирано у инкрементима и решење је могуће пронаћи у секантној формулацији, када се у сваком инкременту аплицира тотално оптерећење уз секантну крутост, као и у уобичајеној тангентној формулацији, где сваком инкременту одговара тренутна тангента крутост, и ново стање померања се акумулира на претходно. У тангентној формулацији су имплементиране

методе за решавање нелинеарних система једначина, Њутн-Рапсонова метода, линијско претраживање (*line search*), метода дужине лука (*arc-length*), а предложена је и метода за унапређење конвергенције при решавању оваквих проблема. Динамичку анализу је могуће извршити експлицитном методом централне разлике и имплицитном Њумарковом методом [39].

4.3. Стратегија решавања нелинеарних једначина

4.3.1. Њутн-Рапсонова метода

Увођењем нелинеарног конститутивног модела у проблем, решење МКЕ система алгебарских једначина се мора пронаћи методама нелинеарне анализе, што подразумева инкрементално проналажење решења [209]. Инкремент оптерећења је аплициран на систем, чија је крутост срачуната на основу тренутног стања материјала у коначним елементима, односно њиховим интеграционим тачкама (ИТ). Резултат анализе система са аплицираним инкрементом оптерећења, је инкремент вектора померања система $\Delta \mathbf{q}$, на основу којег се срачунава инкремент дилатација у свим ИТ. Овај инкремент дилатација за ИТ је даље употребљен за срачунавање новог стања материјала на основу претходно конвергираног стања. Резултат ове анализе је или (1) еластични одговор или (2) одговор са пластичним дилатацијама са или без промене оштећења. У случају прве опције претпоставка о крутости елемента је била добра, односно матрицу крутости система \mathbf{k} није потребно мењати, што је значајно у погледу ефикасности, односно трајању прорачуна. При другој опцији неопходно је срачунавање нове тангентне материјалне матрице за ИТ, односно промена матрице крутости система \mathbf{k} . Ново стање напона КЕ одговара унутрашњим силама, које су састављене у вектор унутрашњих сила система \mathbf{P} . Вектор \mathbf{P} је затим упоређен са вектором аплицираног оптерећењем до датог инкремента $\lambda \cdot \mathbf{Q}$, односно њихова разлика представља неизбалансиран (резидулани) вектор оптерећења \mathbf{R} (погледати Сл. 43а). Норма према сили ϵ_Q може бити искоришћена за праћење грешке при итерацијама, а дефинисана је као однос норми $\|\mathbf{R}\|$ и $\lambda \cdot \|\mathbf{Q}\|$. Уколико је мера грешке ϵ_Q већа од жељене толеранције, Њутн-Рапсонове (ЊР) итерације се настављају у тренутном инкременту са аплицираним вектором $-\mathbf{R}$ као оптерећењем до достизања конвергенције или максималног прописаног броја ЊР итерација.



Сл. 43 Итерације у једном инкременту: а) Њутн-Рапсонове, б) метода дужине лука

Материјални модели који су дефинисани са омекшањем проузрокују значајне потешкоће при конвергенцији у ЊР итерацијама [209]. КЕ који улазе фазу омекшања проузрокују опадање унутрашњих сила система и локализацију дилатација. Као резултат суседни КЕ, односно њихове ИТ, улазе у фазу растеређења. У зависности од броја суседних КЕ, односно величине зоне која улази у фазу растеређења, глобални одговор система може бити са проломом уназад. Доласком на превојну тачку равнотежног пута, инкременти који су засновани на аплицираној сили морају бити промењени на инкременте вођење померањем. Уколико је присутан и пролом уназад још софистицираније методе морају бити коришћене, попут методе дужине лука (погледати Сл. 436).

4.3.2. Метода дужине лука

У методи дужине лука је уведена додатна једначина ограничења [47, 209] чиме је омогућена контрола померања заједно са променом инкремента аплицираног оптерећења $\Delta\lambda$ у итерацијама. На овај начин равнотежни пут је могуће пратити чак и ако је присутан пролом уназад и корак је у сваком инкременту идентичне дужине на норма силе-норма померања дијаграму. Контролном једначином је у исто време обезбеђено да померање система не постане несразмерно велико у једном инкременту, уз модификацију аплицираног оптерећења у инкременту. На Сл. 436 се може видети да

класичним ЊР итерацијама без редукције $\Delta\lambda$ равнотежни пут не би могао да буде пронађен. Крисфилдова сферична метода дужине лука [47], која подразумева једначину ограничења у облику хипер-елипсе у простору сила-вишедимензионално померање, постаје суштински кружница уколико се посматра простор норма силе-норма померања, $\|\mathbf{Q}\|-\|\mathbf{q}\|$. Према Крисфилду [47], дужина лука је дефинисана следећим изразом:

$$\Delta L = \sqrt{\|\Delta\mathbf{q}\|^2 + \Delta\lambda^2 \cdot \psi^2 \cdot \|\mathbf{Q}\|^2} \quad (125)$$

где је фактор ψ којим се скалира осовина оптерећења, како би била сразмерна осовини померања.

Будући да је једначина ограничења облика кружнице, она практично пресеца тренутни тангентни правац у две тачке, што за последицу има потешкоћу у смислу избора одговарајуће тачке и на почетку инкремента, односно у предикторској фази, и касније током итерација у коректорској фази. Кључно је да се одабере тачка за коју ће систем наставити са оптерећењем, односно неће ући у фазу растерећења. У оквиру ове студије, поменути избор је направљен према скаларном производу вектора на дијаграму равнотежног пута, како је приказано у [209]. У предикторској фази одабир одговарајуће тачке пресека је према већој вредности скаларног производа вектора претходно конвергираног инкремента ($\|\Delta\mathbf{q}_0\|, \Delta\lambda_0 \cdot \|\mathbf{Q}\|$) и позитивне и негативне пробе за $\Delta\lambda$ са одговарајуће срачунатим $\Delta\mathbf{q}$ према следећем:

$$\Delta\mathbf{q}' \cdot \Delta\mathbf{q}_0 + \psi^2 \cdot \Delta\lambda_0 \cdot \Delta\lambda \cdot (\mathbf{Q}' \cdot \mathbf{Q}) \Leftrightarrow (-\Delta\mathbf{q})' \cdot \Delta\mathbf{q}_0 + \psi^2 \cdot \Delta\lambda_0 \cdot (-\Delta\lambda) \cdot (\mathbf{Q}' \cdot \mathbf{Q}) \quad (126)$$

На овај начин је обезбеђено да се следећим кораком наставља оптерећење система на равнотежном путу. У коректорској фази је одабир направљен према скаларном производу, пробног инкремента ($i = 1$ и 2) са претходно конвергираним, што је дефинисано следећим изразом:

$$(\Delta\mathbf{q} + \delta\lambda_i \cdot \delta\mathbf{q}_1 + \delta\mathbf{q}_2)' \cdot \Delta\mathbf{q}_0 + \psi^2 \cdot \Delta\lambda_0 \cdot (\Delta\lambda + \delta\lambda_i) \cdot (\mathbf{Q}' \cdot \mathbf{Q}), \quad i = 1, 2 \quad (127)$$

где је $\delta\lambda_i \cdot \delta\mathbf{q}_1 + \delta\mathbf{q}_2$ инкремент померања $\delta\mathbf{q}$ у ЊР итерацији, а $\delta\lambda_i$ је инкремент умношка оптерећења у итерацији.

У ситуацијама када је присутан материјални модел са омекшањем, у зависности од нагиба омекшавајуће гране материјалног модела, могу да се јаве оштри заокрети у равнотежном путу система. Присуство пролома уназад ове заокрете може учинити још оштријим и у том смислу приказана процедура за одабир следеће тачке равнотежног пута у коректорској фази и даље може да закаже. У неким ситуацијама коришћење адаптивних

метода може се утицати на адекватан избор тачке равнотежног пута и бољу конвергенцију.

4.3.3. Нова предложена процедура

У оквиру рада на овој дисертацији аутор је развио процедуру за унапређење конвергенције система, у којима је присутан материјални модел са омекшањем и она је презентована и тестирана у оквиру рада [209] у часопису *Finite Elements in Analysis and Design*. Основна идеја ове процедуре, која је названа полу-инкремент (*semi-increment*), је у проналажењу одговарајућег решења у инкременту, у ситуацијама када се у две узастопне итерације јавља инкремент померања који је супротног знака. Односно, ово су ситуације у којима делује да итерације осцилују око потенцијалног решења. Претпоставља се да је потенцијално решење између две последње итерације и усваја се само парцијални, делимични, инкремент померања и то онај за који је најнижа вредност мере грешке по сили ϵ_Q . Процедура је примењена у коректорској фази и састоји се од следећег:

1. Снимљен је инкремент вектора померања из претходне итерације $\delta \mathbf{q}_{pr}$.
2. Проналази се вредност апсолутног максимума померања из вектора текућег инкремента померања $\delta \mathbf{q}$ и упоређује се са одговарајућом вредношћу из $\delta \mathbf{q}_{pr}$ вектора. Уколико се знак ове две вредности разликује, претпоставља се да је потенцијално решење између ова два и процедура је иницирана.
3. Пробни инкремент вектора померања у итерацији је усвојен према следећем:

$$\delta \mathbf{q}_{tr} = k_{si} \cdot \delta \mathbf{q} \quad (128)$$

где је k_{si} фактор који узима вредности од 1.0 до 0.1 са кораком -0.1 .

4. Пробни инкремент вектора померања је срачунат према следећем:

$$\Delta \mathbf{q}_{tr} = \Delta \mathbf{q} + \delta \mathbf{q}_{tr} \quad (129)$$

и одговарајућа норма грешке по сили ϵ_Q је срачуната.

5. Процедура се прекида када наредна вредност ϵ_Q постане већа од текуће и тренутни пробни инкремент померања је усвојен.

Треба напоменути да је радијус кружнице ΔL нарушен у овој процедури у одређеној мери, али то је практично неважно, посебно имајући у виду да је постигнута конвергенција.

4.4. Нумеричка интеграција конститутивних једначина

Ово је кључни корак нумеричке имплементације конститутивног модела, будући да је у директној вези са стабилношћу нумеричког решења. Пре свега овде треба напоменути да је материјални модел из ове дисертације формулисан према неспрегнутој комбинацији теорије пластичности и механике оштећења, где је функција течења коришћена за контролу дисипације енергије. Пластичност је усвојена за активни механизам деформације, а оштећење за пасивни, односно оштећење може да се деси искључиво након достизања одређеног нивоа пластичне деформације. Нумеричку интеграцију конститутивних једначина модела према теорији пластичности је, стога могуће решити независно од механике оштећења.

4.4.1. Тангентна еласто-пластична материјална матрица

За дефинисану површ течења f и неасоцијативно правило течења g , инкремент пластичне дилатације је дефинисан према следећем изразу [48]:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \dot{\lambda} \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \right) = \dot{\lambda} \cdot \mathbf{b} \quad (130)$$

где је $\dot{\lambda}$ позитивна константа, уобичајено названа умножак пластичне дилатације, $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ је вектор ефективних напона (из тог разлога је означен са цртицом изнад), \mathbf{b} је вектор нормале на функцију правила течења. Веза инкремента напона $\dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}$ са инкрементом дилатације $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ је дефинисана према следећем:

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} = \mathbf{D} \cdot (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p) = \mathbf{D} \cdot (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\lambda} \cdot \mathbf{b}) \quad (131)$$

где је \mathbf{D} еластична материјална матрица, је $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ инкремент дилатације, а $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p$ је пластични део инкремента дилатације. Како би дошло до пластичног течења напони морају остати на површи течења. Уз увођење изотропног ојачања на бази дилатације кроз параметар A' , може се записати услов тангентности инкремента напона на површ течења према следећем:

$$\dot{f} = \frac{\partial f^T}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} - A' \cdot \dot{\lambda} = \mathbf{a}^T \cdot \dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} - A' \cdot \dot{\lambda} = 0 \quad (132)$$

Коначно, множењем са \mathbf{a}^T са леве стране једначину (131) и заменом у (132) добијамо израз за умножак пластичне дилатације:

$$\dot{\lambda} = \frac{\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{b} + A'} \quad (133)$$

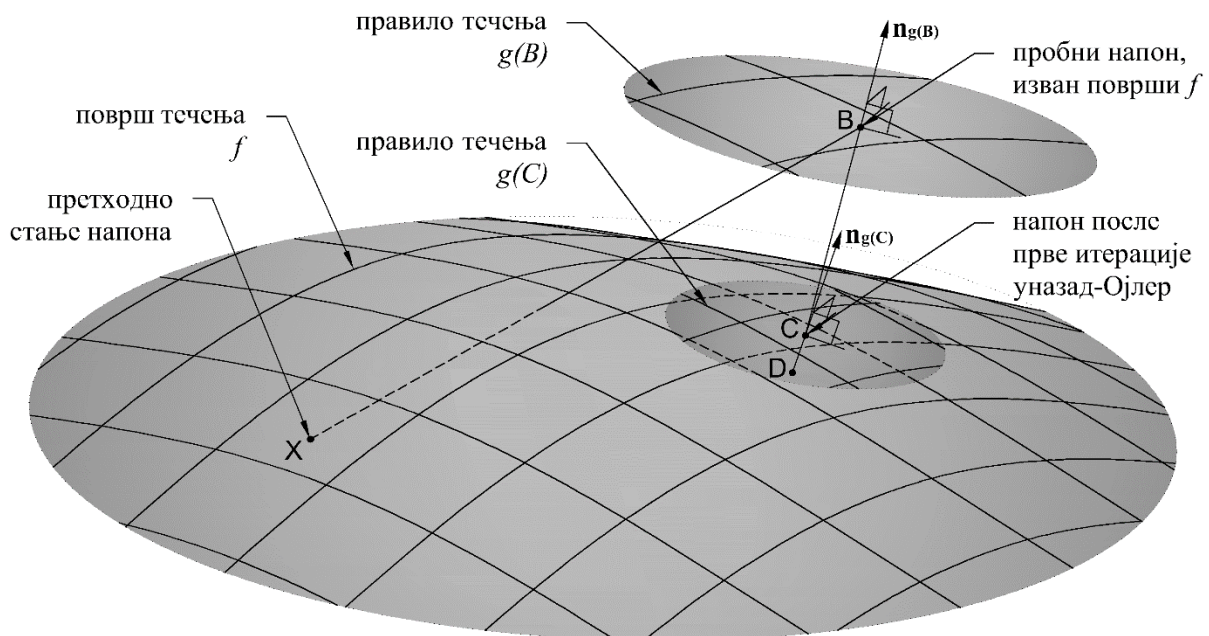
Заменом израза (133) у (131) добијамо израз за тангентну еласто-пластичну материјалну матрицу \mathbf{D}_{tm} :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}_{tm} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{D} \cdot \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{D}}{\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{b} + A'} \right) \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (134)$$

која у општем случају није симетрична.

4.4.2. Прелазак изван и повратак на површ течења

Према Крисфилду [48], прелазак еластичног (пробног) инкремента напона изван површи течења се у одређеном броју нумеричких поступака решава проналажењем тачке пресека вектора напона са површи течења, који се само за неке површи (попут вон Мизесове) може одредити тачно. Постоје процедуре када прорачун тачке пресека није неопходан. За дати пробни напон (тачка B), који је изван површи течења, предиктор решења (тачка C) може бити усвојен према унапред-Ојлер процедури или уназад-Ојлер процедури као нормала на површ течења у тачки B код асоцијативног правила течења, односно нормала на функцију правила течења код неасоцијативног (Сл. 44), али у општем случају овај напон неће бити на површи течења. Грешке приликом прорачуна поступком унапред-Ојлер могу бити значајно умањене увођењем нпр. суб-инкрементације, тј. поделом на мање инкременте.



Сл. 44 Итеративна уназад-Ојлер процедура

У овом раду је усвојена итеративна уназад-Ојлер процедура, што је шематски приказано на Сл. 44, за случај неасоцијативног правила течења. Уназад-Ојлер процедура је заснована на једначини:

$$\bar{\sigma}_C = \bar{\sigma}_B - \Delta\lambda \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{b}_C \quad (135)$$

и у општем случају, ова почетна процена резултујућег напона σ_C не задовољава функцију течења, па је неопходно применити итеративну процедуру, сукцесивно од тачке C. Разлика између тренутног напона у итерацији и напона уназад-Ојлер процедуре је дефинисана следећим изразом:

$$\mathbf{r} = \bar{\sigma} - (\bar{\sigma}_B - \Delta\lambda \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{b}) \quad (136)$$

и тежиће нули, а коначни напон ће задовољавати функцију течења, $f = 0$. Развојем у непотпуни Тејлоров ред добијамо нови резидулани напон \mathbf{r}_n [48]:

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{r} + \dot{\bar{\sigma}} + \dot{\lambda} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{b} + \Delta\lambda \cdot \mathbf{D} \cdot \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \bar{\sigma}} \cdot \dot{\bar{\sigma}} \quad (137)$$

и његовим изједначавањем са нулом добијамо израз за инкремент напона:

$$\dot{\bar{\sigma}} = - \left(\mathbf{I} + \Delta\lambda \cdot \mathbf{D} \cdot \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \bar{\sigma}} \right)^{-1} \cdot (\mathbf{r} + \dot{\lambda} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{b}) = -\mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{r} - \dot{\lambda} \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{b} \quad (138)$$

Развојем у непотпуни Тејлоров ред функције течења и изједначавањем са нулом добијамо нову вредност функције течења f_n :

$$f_n = f + \frac{\partial f^T}{\partial \bar{\sigma}} \dot{\bar{\sigma}} + \frac{\partial f^T}{\partial \varepsilon_{ps}} \dot{\varepsilon}_{ps} = f + \mathbf{a}^T \cdot \dot{\bar{\sigma}} + A' \cdot \dot{\lambda} = 0 \quad (139)$$

одакле се добија израз за инкремент умношка пластичне дилатације:

$$\dot{\lambda} = \frac{f - \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{r}}{\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{b} + A'} \quad (140)$$

4.5. Конзистентна тангентна материјална матрица крутости

4.5.1. Део према теорији пластичности

Према Крисфилду [48], коришћењем тангентне еласто-пластична материјалне матрице, дефинисане једначином (134) која је неконзистентна са уназад-Ојлер процедуром, нарушава се квадратни прираст конвергенције Њутн-Рапсонових итерација. Увођењем конзистентне тангентне еласто-пластичне материјалне матрице, значајно се побољшава конвергенција Њутн-Рапсонових итерација.

Диференцијацијом израза (135) добија се:

$$\dot{\bar{\sigma}} = \mathbf{D} \cdot \dot{\varepsilon} - \dot{\lambda} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{b} - \Delta\lambda \cdot \mathbf{D} \cdot \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \bar{\sigma}} \cdot \dot{\bar{\sigma}} \quad (141)$$

Решавањем израза (141) по инкременту напона $\dot{\bar{\sigma}}$ добија се:

$$\dot{\bar{\sigma}} = - \left(\mathbf{I} + \Delta\lambda \cdot \mathbf{D} \cdot \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \bar{\sigma}} \right)^{-1} \cdot \mathbf{D} \cdot (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\lambda} \cdot \mathbf{b}) = -\mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{D} \cdot (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\lambda} \cdot \mathbf{b}) = -\mathbf{R} \cdot (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\lambda} \cdot \mathbf{b}) \quad (142)$$

Коначно, веза инкремента напона са инкрементом дилатације преко конзистентне тангентне еласто-пластичне материјалне матрице \mathbf{D}_t је дефинисана следећим изразом:

$$\dot{\bar{\sigma}} = \mathbf{D}_t \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{R}}{\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{b} + A'} \right) \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (143)$$

Вектор нормалне на површ тешења \mathbf{a} , која је дефинисана изразом (132), за модел из ове студије је дат према следећем:

$$\mathbf{a} = \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} = \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_v} \cdot \frac{\partial \bar{\sigma}_v}{\partial \bar{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \bar{\rho}} \cdot \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \bar{\theta}} \cdot \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{\sigma}} = \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_v} \cdot \frac{\partial \bar{\sigma}_v}{\partial \bar{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \bar{\rho}} \cdot \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial \bar{\theta}} \cdot \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{\sigma}} \cdot \frac{\partial \bar{J}}{\partial \bar{\sigma}} \quad (144)$$

где су изводи Хај-Вестергардових координата по вектору ефективних напона дефинисани према следећем:

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_v}{\partial \bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} -\frac{(\bar{\sigma}_y - 2 \cdot \bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_z)}{3 \cdot \bar{\rho}} \\ -\frac{(\bar{\sigma}_x - 2 \cdot \bar{\sigma}_y + \bar{\sigma}_z)}{3 \cdot \bar{\rho}} \\ -\frac{(\bar{\sigma}_x - 2 \cdot \bar{\sigma}_z + \bar{\sigma}_y)}{3 \cdot \bar{\rho}} \\ \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\bar{\rho}} \\ \frac{2 \cdot \tau_{yz}}{\bar{\rho}} \\ \frac{2 \cdot \tau_{zx}}{\bar{\rho}} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{J}} = -\frac{1}{3 \cdot \sqrt{1 - J^2}}, \quad \frac{\partial \bar{J}}{\partial \bar{\sigma}} \text{ у Додатку Б.1} \quad (145)$$

Изводи функције површи течења f (израз (90)) по инваријантама напона, односно Хај-Вестергардових координатама су дати у наставку:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_v}, \frac{\partial f}{\partial \bar{\rho}}, \frac{\partial f}{\partial \bar{\theta}} \text{ у Додатку Б.2} \quad (146)$$

Вектор нормале на функцију правила течења g (израз (99)), који је означен са \mathbf{b} , дефинисан је према следећем:

$$\mathbf{b} = \frac{\partial g}{\partial \bar{\sigma}} = \frac{\partial g}{\partial \bar{\sigma}_v} \cdot \frac{\partial \bar{\sigma}_v}{\partial \bar{\sigma}} + \frac{\partial g}{\partial \bar{\rho}} \cdot \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{\sigma}} \quad (147)$$

у којем су изводи функције правила течења g (израз (99)) по инваријантама напона, односно Хај-Вестергардових координата дефинисани следећим изразом:

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{\sigma}_v} = \frac{\sqrt{6}}{2 \cdot f_c} \cdot A_g(\alpha_c), \quad \frac{\partial g}{\partial \bar{\rho}} = \frac{1}{f_c} \quad (148)$$

а изводи Хај-Вестергардових координата по вектору ефективних напона су дефинисани изразом (145).

Константа ојачања A' је дефинисана следећим изразом:

$$A' = -\frac{1}{\Delta \lambda} \cdot \frac{\partial f}{\partial \kappa_{pc}} \cdot \Delta \kappa_{pc} - \frac{1}{\Delta \lambda} \cdot \frac{\partial f}{\partial \kappa_{pt}} \cdot \Delta \kappa_{pt} \quad (149)$$

где је промена променљивих ојачања κ_{pc} и κ_{pt} дефинисана изразом (94), а изводи функције течења по променљивама ојачања су дати према следећем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \kappa_{pc}} \text{ у Додатку Б.3} & \quad \frac{\partial f}{\partial \kappa_{pt}} \text{ у Додатку Б.3} & \quad \text{за } \kappa_{pc} < 1 \\ \frac{\partial f}{\partial \kappa_{pc}} = 0 & \quad \frac{\partial f}{\partial \kappa_{pt}} = 0 & \quad \text{за } \kappa_{pc} \geq 1 \end{aligned} \quad (150)$$

Коначно, извод вектора нормале на функцију правила течења \mathbf{b} , по вектору ефективних напона је дефинисан према следећем:

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \bar{\sigma}} \text{ у Додатку Б.4} \quad (151)$$

чиме су дефинисани сви елементи конзистентне тангентне еласто-пластичне материјалне матрице \mathbf{D}_t за примарну површ течења.

Конзистентна тангентна материјална матрица крутости за секундарну површ течења \mathbf{D}_{t2} је дефинисана изразима у наставку. Вектор нормале на секундарну површ течења \mathbf{a}_2 , која је дефинисана изразом (100), је знатно једноставнијег облика у односу на примарну површ, будући да је површ равна. Израз за вектор нормале је \mathbf{a}_2 дефинисан према следећем:

$$\mathbf{a}_2 = \frac{\partial f_2}{\partial \bar{\sigma}} = \frac{\partial f_2}{\partial \bar{\sigma}_v} \cdot \frac{\partial \bar{\sigma}_v}{\partial \bar{\sigma}} + \frac{\partial f_2}{\partial \bar{\rho}} \cdot \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{\sigma}} = A_{f_2} \cdot \frac{\partial \bar{\sigma}_v}{\partial \bar{\sigma}} + 0 \cdot \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{\sigma}} \quad (152)$$

у којем је $\partial \bar{\sigma}_v / \partial \bar{\sigma}$ дефинисано изразом (145). Вектор правила течења \mathbf{b}_2 , односно нормала на функцију правила течења g_2 (израз (107)), је дефинисан следећим изразом:

$$\mathbf{b}_2 = \frac{\partial g_2}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} = A_{f2} \cdot \begin{bmatrix} k_{cr1} \\ k_{cr2} \\ k_{cr3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (153)$$

Извод вектора нормале на функцију правила течења \mathbf{b}_2 , по вектору ефективних напона је матрица нула, димензија 6 пута 6.

Константа ојачања за секундарну површ A_2' је дефинисана следећим изразом:

$$A_2' = -\frac{1}{\Delta \lambda} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \kappa_{pcr}} \cdot \Delta \kappa_{pcr} = -\frac{1}{\Delta \lambda} \cdot f_t \cdot (q_{h30} - q_{h31}) \cdot \Delta \kappa_{pcr}, \text{ за } \kappa_{pcr} < 1 \quad (154)$$

4.5.2. Део према механици оштећења

Конзистентна материјална матрица према механици оштећења је изведена аналогно поступку приказаном у [211], који је примењен од аутора и у раду [209]. Диференцирањем вектора ефективних напона $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ и вектора номинални напона $\boldsymbol{\sigma}$ по вектору дилатација $\boldsymbol{\varepsilon}$ дефинисана је конзистентна тангентна материјална матрица за део еласто-пластичност \mathbf{D}_t и еласто-пластичност-оштећење \mathbf{D}_{td} :

$$\mathbf{D}_t = \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \mathbf{D}_{td} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (155)$$

односно њихова веза:

$$\mathbf{D}_{td} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \mathbf{D}_t \quad (156)$$

Матрица извода номиналних по ефективним напонима $\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}} / \partial \boldsymbol{\sigma}$ у изразу (156) је изведена диференцирањем израза (109):

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} = (1 - d_t) \cdot \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}_t}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} + (1 - d_c) \cdot \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}_c}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_t \cdot \frac{\partial d_t}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_c \cdot \frac{\partial d_c}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \quad (157)$$

где је матрица извода позитивног дела вектора ефективних напона по вектору ефективних напона $\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}_t / \partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}$ дефинисана према следећем:

$$\left. \begin{aligned} [\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}_t / \partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}]_{j,1:6} &= H \left([\sigma_p]_j \right) \cdot [I]_{j,1:6} && \text{за } i = 1, 2, 3 \\ [\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}_t / \partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}]_{j,1:6} &= [I]_{j,1:6}, \text{ ако је } [\bar{\sigma}_t]_k \neq 0 \text{ \& } [\bar{\sigma}_t]_l \neq 0 \\ [\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}_t / \partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}]_{j,1:6} &= 0, \text{ ако је } [\bar{\sigma}_t]_k = 0 \text{ \& } [\bar{\sigma}_t]_l = 0 \\ [\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}_t / \partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}]_{j,1:6} &= 0.5 \cdot [I]_{j,1:6}, \text{ ако је } ([\bar{\sigma}_t]_k = 0 \mid [\bar{\sigma}_t]_l = 0) \text{ \& } ([\bar{\sigma}_c]_k \neq 0 \mid [\bar{\sigma}_c]_l \neq 0) \end{aligned} \right\} \text{ за } j = 4, 5, 6 \quad (158)$$

У изразу (158) вредностима $j = 4, 5$ и 6 одговарају k индекси $1, 2$ и 3 и l индекси $2, 3$ и 1 , редом. Са $H(x)$ је означена Хевисајдова функција, која узима вредности 0 или 1 , у зависности да ли је x мање или веће од 0 . Дакле, матрица извода вектора негативног дела ефективног напона по вектору ефективног напона $\partial \bar{\sigma}_c / \partial \bar{\sigma}$ је дијагонална, будући да су изводи различитих праваца нуле, а вредности елемената на главној дијагонали су $1.0, 0.5$ или 0.0 . Аналогно приказаном, је дефинисана и матрица извода вектора негативног дела ефективног напона по вектору ефективног напона $\partial \bar{\sigma}_c / \partial \bar{\sigma}$ према следећем:

$$\left. \begin{aligned} [\partial \bar{\sigma}_c / \partial \bar{\sigma}]_{i, 1:6} &= H\left(-[\sigma_p]_i\right) \cdot [I]_{i, 1:6} && \text{за } i = 1, 2, 3 \\ [\partial \bar{\sigma}_c / \partial \bar{\sigma}]_{j, 1:6} &= [I]_{j, 1:6}, \text{ ако је } [\bar{\sigma}_c]_k \neq 0 \ \& \ [\bar{\sigma}_c]_l \neq 0 \\ [\partial \bar{\sigma}_c / \partial \bar{\sigma}]_{j, 1:6} &= 0, \text{ ако је } [\bar{\sigma}_c]_k = 0 \ \& \ [\bar{\sigma}_c]_l = 0 \\ [\partial \bar{\sigma}_c / \partial \bar{\sigma}]_{j, 1:6} &= 0.5 \cdot [I]_{j, 1:6}, \text{ ако је } ([\bar{\sigma}_c]_k = 0 \mid [\bar{\sigma}_c]_l = 0) \ \& \ ([\bar{\sigma}_t]_k \neq 0 \mid [\bar{\sigma}_t]_l \neq 0) \end{aligned} \right\} \text{ за } j = 4, 5, 6 \quad (159)$$

Вектор извода оштећења по затезању по ефективним напонима $\partial d_t / \partial \bar{\sigma}$ је дефинисан следећим изразом:

$$\frac{\partial d_t}{\partial \bar{\sigma}} = \frac{\partial d_t}{\partial k_{dt}} \cdot \frac{\partial k_{dt}}{\partial \tilde{\varepsilon}_t} \cdot \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_t}{\partial \varepsilon_{ps}} \cdot \frac{\partial \varepsilon_{ps}}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{\sigma}} \quad (160)$$

где је члан $\partial d_t / \partial k_{dt}$ добијен диференцирањем израза (120):

$$\frac{\partial d_t}{\partial k_{dt}} = \frac{B_{dt} \cdot L_{el} \cdot \exp\left(-\left(\frac{k_{dt} \cdot L_{el}}{A_{dt}}\right)^{B_{dt}}\right) \cdot \left(\frac{k_{dt} \cdot L_{el}}{A_{dt}}\right)^{B_{dt}-1}}{A_{dt}} \quad (161)$$

Члан $\partial k_{dt} / \partial \tilde{\varepsilon}_t$ у изразу (160) је према (112) и (114) једнак јединици, члан $\partial \tilde{\varepsilon}_t / \partial \varepsilon_{ps}$ је према (113) једнак $1 - \alpha_c$, а члан $\partial \varepsilon_{ps} / \partial \varepsilon$ износи $L \varepsilon_{pp} / L \varepsilon_{psp}$, где последњи индекс p означава да се ради о координатном систему главних напона. Коначно, члан $\partial \varepsilon / \partial \bar{\sigma}$ је према дефиницији (155) једнак инверзној тангентној конзистентној еласто-пластичној материјалној матрици \mathbf{D}_t^{-1} , која је такође у координатном систему главних напона у изразу (160).

Аналогно изразу (160), вектор извода оштећења по притиску по ефективним напонима $\partial d_c / \partial \bar{\sigma}$ је дефинисан према следећем:

$$\frac{\partial d_c}{\partial \bar{\sigma}} = \frac{\partial d_c}{\partial k_{dc}} \cdot \frac{\partial k_{dc}}{\partial \tilde{\varepsilon}_c} \cdot \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_c}{\partial \varepsilon_{ps}} \cdot \frac{\partial \varepsilon_{ps}}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{\sigma}} \quad (162)$$

Члан $\partial k_{dc} / \partial \tilde{\varepsilon}_c$ у изразу (162) је према (115) и (117) једнак 1 , члан $\partial \tilde{\varepsilon}_c / \partial \varepsilon_{ps}$ је према (116) једнак α_c / x_s , док су остали чланови у претходном параграфу већ дефинисани.

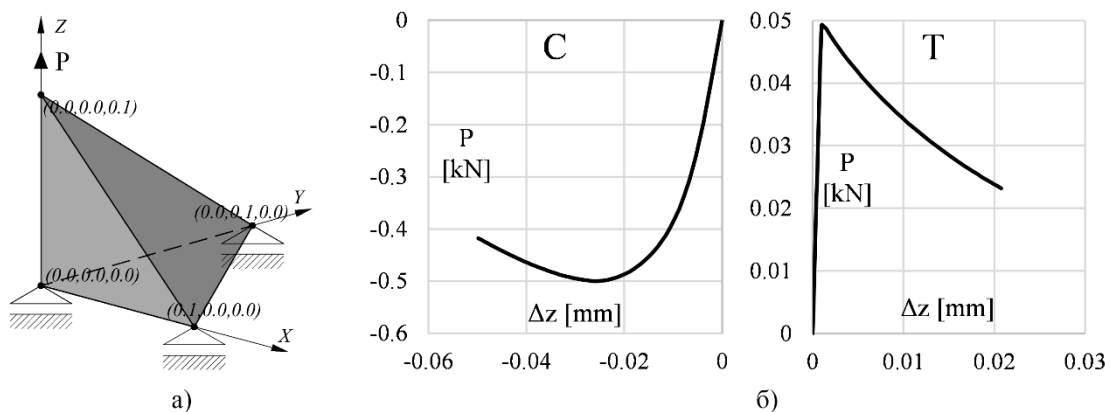
Коначно, узимајући у обзир да је део према оштећењу изведен у координатном систему главних напона, те да га је потребно трансформисати у основни координатни систем, конзистентна тангентна материјална матрица која узима у обзир и механику оштећења, а добијена је на основу еласто-пластичне материјалне матрице, има следећи облик:

$$\mathbf{C}_{td} = \mathbf{T}_1^{-1} \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot (\mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{C}_t \cdot \mathbf{T}_2^{-1}) \right) \cdot \mathbf{T}_2 \quad (163)$$

где су \mathbf{T}_1 и \mathbf{T}_2 матрице трансформације у функцији косинуса углова између координатног система главних напона и основног координатног система.

4.5.3. Стопа конвергенције изведене матрице

За потребе верификације изведене конзистентне материјалне матрице, формиран је једноставан модел од само једног коначног елемента, како је приказано на Сл. 45а. Коначни елемент је линеарни тетраедар, са четири чвора. Оптерећење је аплицирано у једном чвору, као притисак (C) и затезање (T), како би се тестирао само еласто-пластични одговор са ојачањем, као и одговор у комбинацији пластичност-оштећење. Дијаграм сила – померање два модела је приказан на Сл. 45б. За потребе анализе резултата у току прорачуна уведена је променљива прорачунски процес (ПП) која означава псеудо време тока прорачуна при статичкој анализи (што би одговарало времену у току прорачуна при динамичкој анализи).



Сл. 45 3Д модел (а) и сила – померање одговор (б) модела за анализу стопе конвергенције

Коришћени параметри модела и подешавања нелинеарне анализе су приказани у Таб. 1. Будући да се тестира стопа конвергенције модела, иницијална толеранција за норму према сили $\epsilon_{Q,toli}$ је дефинисана са прилично ниском вредношћу, а коефицијент k_{tol} којим се повећава толеранција у току анализе је подешен на 0, како би толеранција била фиксирана на $\epsilon_{Q,toli}$ вредност.

Таб. 1: Параметри модела и подешавања нелинеарне анализе

Параметри модела			Параметри нелинеарне анализе		
Параметар	Опис	Вредност	Параметар	Опис	Вредност
f_t	Чврстоћа при затезању	3.00 МПа	N_{incr}	Број инкремената	100
f_c	Чврстоћа при притиску	30.00 МПа	NR_{max}	Максимални број Њутн-Рапсонових итерација	20
f_{bc}	Биаксијална чврстоћа при притиску	34.80 МПа	$\epsilon_{Q,tol}$	Иницијална толеранција за конвергенцију	1e-15
E	Модул еластичности	31.0 GPa	k_{tol}	Коефицијент толеранције за конвергенцију	0
G_{Ft}	Енергија лома	0.10 kN/m			

Стопа конвергенције изведене тангентне материјалне матрице је анализирана кроз промену вредности норме према сили ϵ_Q у итерацијама. Резултати анализе за по четири инкремента оптерећења, од два модела C и T су приказани у Таб. 2. За приказане инкременте дата је промена променљиве ојачања k_{pc} , односно k_{pt} , као и промена оштећења d_c и d_t , за моделе C и T , редом. Из табеле је евидентно да је постигнута задовољавајућа стопа конвергенције коришћењем ове тангентне материјалне матрице. Максимални број итерација код C модела је девет, што је и приказано у табели и овај инкремент одговара почетку пластификације. У каснијим инкрементима број итерације је опадао, да би коначно 80% инкремената конвергирало у три итерације. Модел T је конвергирао у 4 до 7 итерација по инкрементима.

Таб. 2: Анализа конвергенције модела C и T

Модел	C				T			
	ПП	0.03	0.10	0.30	0.70	0.23	0.24	0.29
$\Delta k_{pc} / \Delta k_{pt}$	0.043	0.041	0.034	0.030	0.011	0.082	2.068	1.703
$\Delta d_c / \Delta d_t$	0.0000	0.0000	0.0015	0.0070	0.0000	0.0000	0.0189	0.0063
Итерација	ϵ_Q							
1	0.00106	7.47e-07	4.40e-08	1.04e-09	1.07e-05	1.82e-05	1.41e-07	1.81e-08
2	2.06e-05	2.14e-09	8.33e-15	2.19e-13	5.77e-10	1.44e-09	1.45e-10	1.39e-10
3	5.20e-07	6.44e-12	4.63e-22	3.35e-19	5.56e-16	6.43e-12	8.81e-12	6.80e-12
4	1.27e-08	1.93e-14				9.29e-15	5.24e-13	3.28e-13
5	3.13e-10	5.79e-17				1.34e-17	3.06e-14	1.25e-14
6	7.72e-12						1.27e-15	6.98e-17
7	1.90e-13							
8	4.68e-15							
9	1.15e-16							

5. НУМЕРИЧКИ ПРИМЕРИ

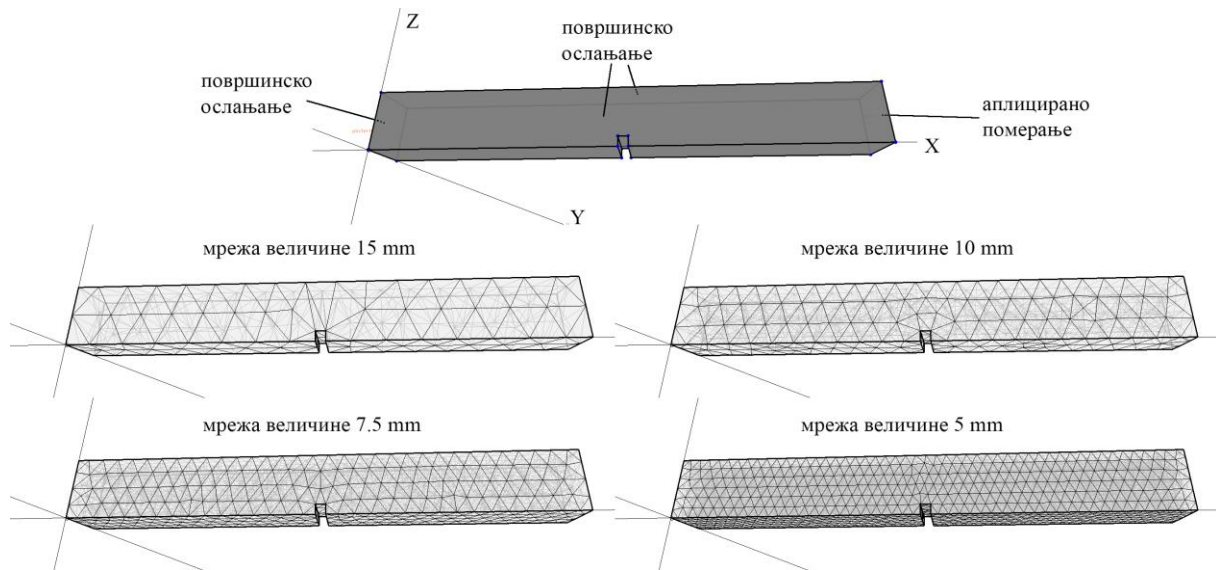
Перформансе конститутивног модела, који је формулисан у оквиру ове дисертације, су приказане кроз нумеричке примере у овом поглављу. Већ је истакнуто колики је значај могућности имплементације конститутивног модела у софтвер за нумеричку анализу, заснован на методи коначних елемената. Тестирањем модела на конкретним примерима се недвосмислено приказују могућности модела, при решавању проблема, за које је модел предвиђен.

Нумерички примери у овом поглављу су одабрани тако да се провере сви предвиђени аспекти понашања модела, односно да се испита могућност модела да адекватно симулира ситуације за које је предвиђен. Приказани су примери од најједноставнијих, тј. од једнооксијалног монотоног затезање елемента са засеком, преко цикличног затезања, којим се тестира могућност модела да симулира затварање и отварање прслина, затим савијање греде са засеком, оптерећењем у три или четири тачке, до коначно симулација на конструкцијским примерима, циклично оптерећеном чвору греда-стуб и монотонно оптерећеним кратким елементима.

5.1. Једнооксијални тест при затезању

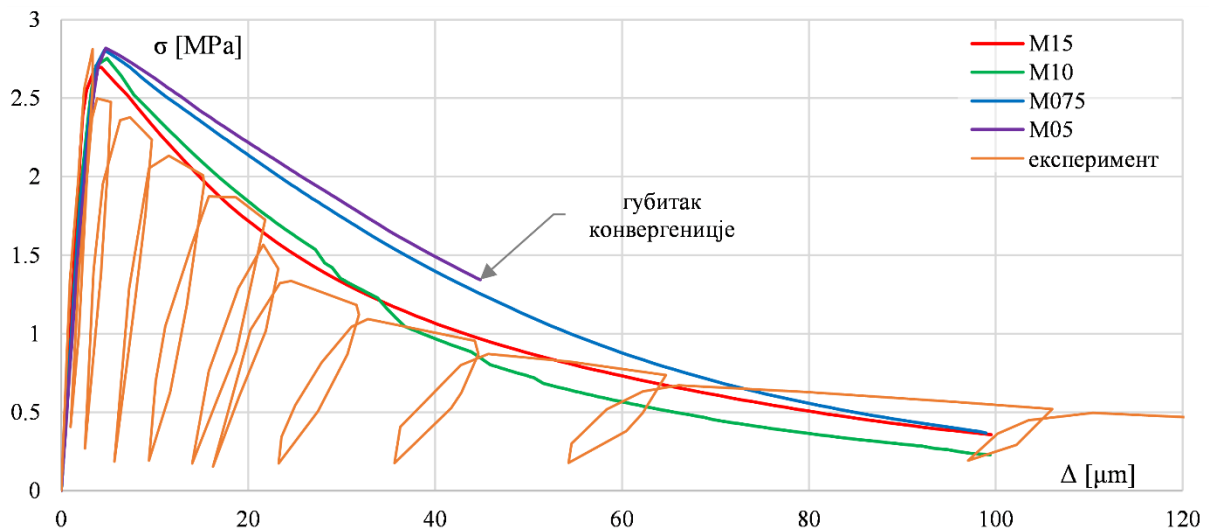
Понашање конститутивног модела из ове дисертације при тродимензионалном моделирању елемената напрегнутих на једнооксијално затезање је испитано упоређењем са експерименталним подацима из рада [46, 205]. За дате експерименталне податке модел је тестиран на нивоу интеграционе тачке и упоређење је приказано у оквиру поглавља 3.4.1, на Сл. 31 и Сл. 32. У овом поглављу, 3Д модел елемента, описан у раду [46, 205], је оформљен у програму Matrix 3D. Елемент геометријски одговара квадрату ширине 50 mm, висине 60 mm и дужине 250 mm са засеком ширине 5 mm на средини дужине елемента, тако да је попречни пресек редукован на 50 mm са 50 mm. У програму Matrix 3D моделирана је четвртина елемента, будући да су присутне две подужне осе симетрије, са циљем да се смањи број коначних елемената, односно број једначина при нелинеарној статичкој анализи, а самим тим и убрза процес прорачуна. Приказане карактеристике коришћеног бетона у експерименту су $f_c = 47.1$ МПа, $f_t = 3.20$ МПа и $E = 39.27$ ГПа и дате вредности су и коришћене при моделирању као параметри модела, осим што је затезна чврстоћа усвојена $f_t = 2.82$ МПа, будући да је та вредност и приказана у раду при тесту цикличног затезања. Коришћена вредност енергије лома при затезању је $G_{Ft} = 0.134$ kN/m.

У првој фази је моделирано монотono растуће издужење елемента до вредности 0.1 mm, са циљем да се испитају усвојени параметри модела. Осим иницијалне крутости елемента и једнооксијалне чврстоће, неопходно је потврдити да је адекватан опадајући део дијаграма сила – померање, а такође и да ли је одговор модела независан од густине мреже коначних елемената. У том смислу 4 варијанте густине мреже коначних елемената за овај модел су генерисане: 15, 10, 7.5 и 5 mm и приказане на Сл. 46, а према величини коначних елемената су усвојене и ознаке модела M15, M10, M075 и M05.



Сл. 46 3Д модел за једнооксијално затезање

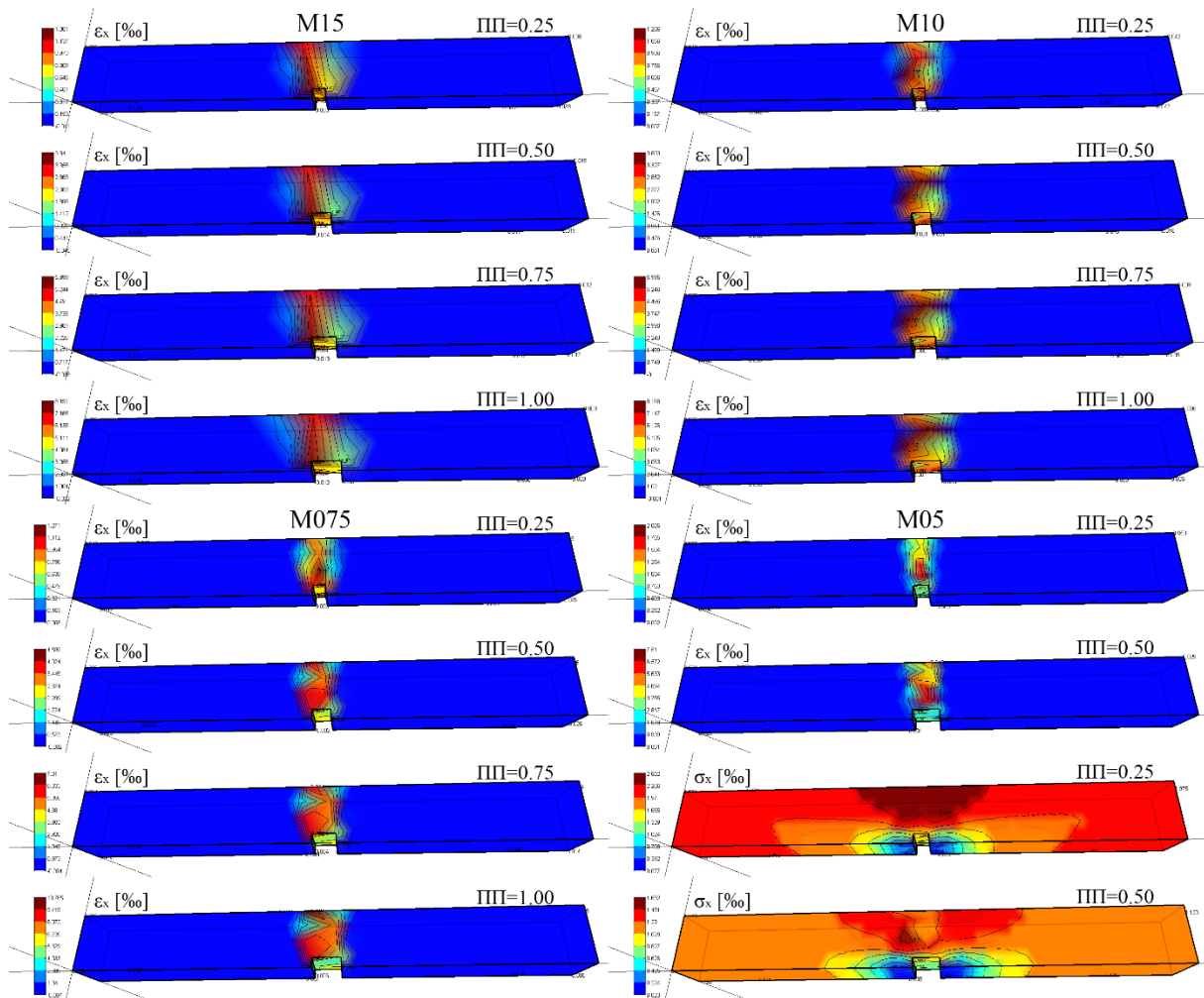
Одговор модела при једнооксијалном монотonom затезању је приказан на Сл. 47 у облику дијаграма напон – померање. Напон на дијаграму је конвертован из тоталног аплицираног оптерећења, дељењем са површином ослабљеног попречног пресека на месту засека. Будући да је померање у оквиру експерименталних података у [46, 205] на апсциси мерено уређајем на дужини 35 mm у зони засека на елементу, померање на овом дијаграму је дефинисано као размицање две тачке модела удаљене 35 mm, симетрично у односу на засек. У поређењем резултата приметно је да се иницијална крутост, практично идеално поклапа, а носивост елемента је, очекивано, прецизније одређена са гушћом поделом на коначне елементе. Носивост, односно напон при максималном оптерећењу се разликује у односу на дефинисаних 2.82 МПа за -4.4%, -2.4%, -0.5% и -0.1%, за моделе M15, M10, M075 и M05, редом. Посматрањем омекшавајућег дела дијаграма напон – померање за моделе, може се уочити да модели имају упоредиву негативну крутост и дијаграм показује да модели приближно одговарају дефинисаном понашању према задатој енергији лома (погледати Сл. 31).



Сл. 47 Одговор модела напон-померање при једноаксијалном монотонном затезању

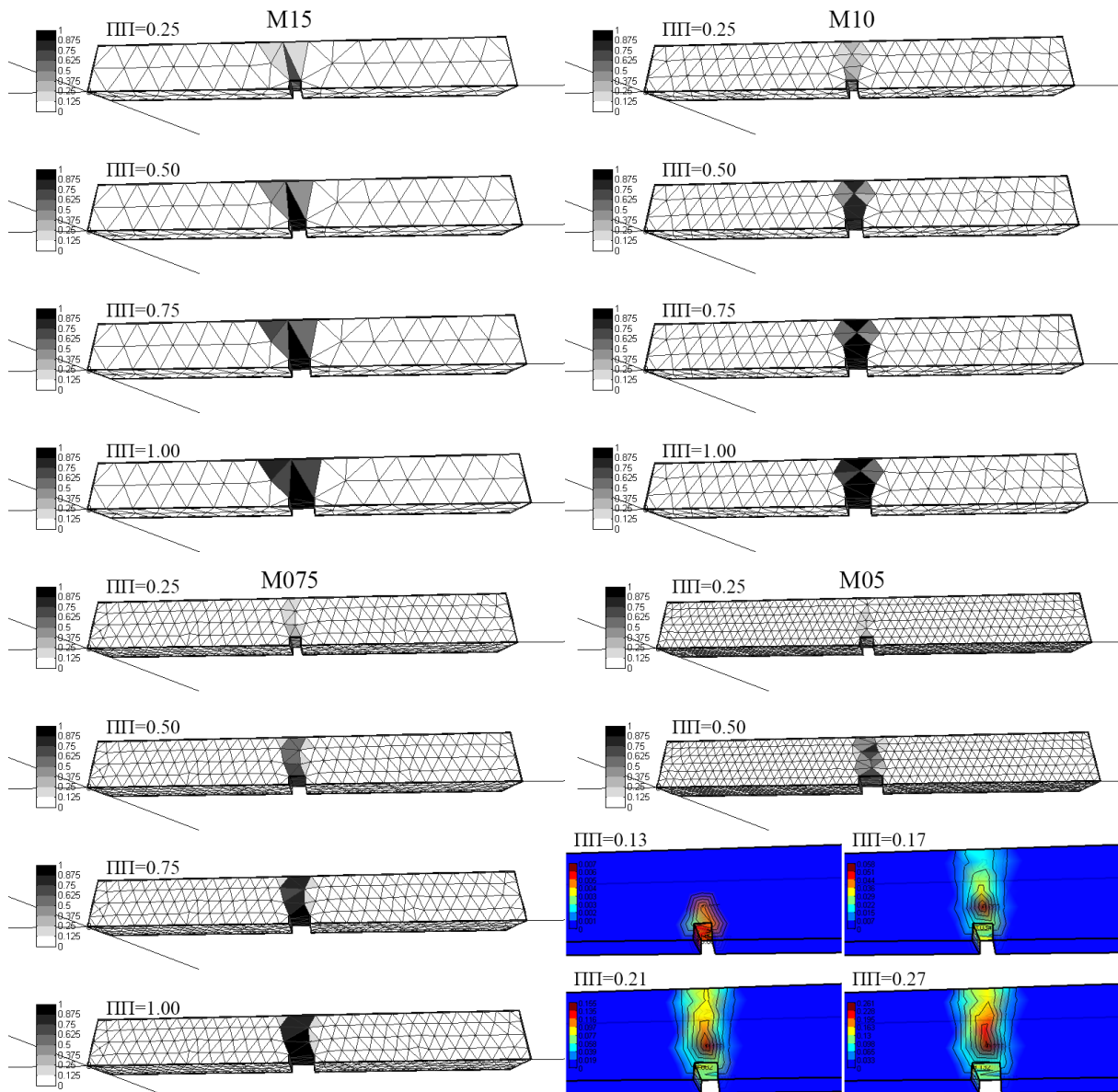
На Сл. 48 је приказана упросечена расподела подужних дилатација за вредности $III = 0.25, 0.50, 0.75$ и 1.00 за моделе M15, M10 и M075, а за модел M05 је приказана расподела подужних дилатација и напона, за $III = 0.25$ и 0.50 где је модел изгубио конвергенцију. Вредности дилатација за одговарајуће III су упоредиве за приказане моделе.

Расподела оштећења по затезању d_t за моделе M15, M10, M075 и M05 је приказана на Сл. 49. Оштећење није упросечено између суседних елемената, односно вредности су приказане по коначним елементима и одговарају стању интеграционе тачке датог елемента. Бела боја одговара неоштећеним елементима, односно вредности $d_t = 0$, а црна боја потпуном оштећењу, односно $d_t = 1$. Могу се уочити упоредиве вредности d_t за одговарајуће III вредности модела. Будући да је конвергирао до вредности $III = 0.50$, за модел M05 је приказано пропагирање оштећења упросечено за вредности $III = 0.13, 0.17, 0.21$ и 0.27 . Може се уочити да је оштећење иницирано на месту засека, а да се несиметрично шири по висини пресека, што је и забележено и приказано при експерименталном испитивању [46]. Са слике се уочава и да је зона оштећења практично ширине једног коначног елемента, односно да се оштећење локализује, како је и очекивано, и на тај начин симулира појаву прслине у тој зони модела.



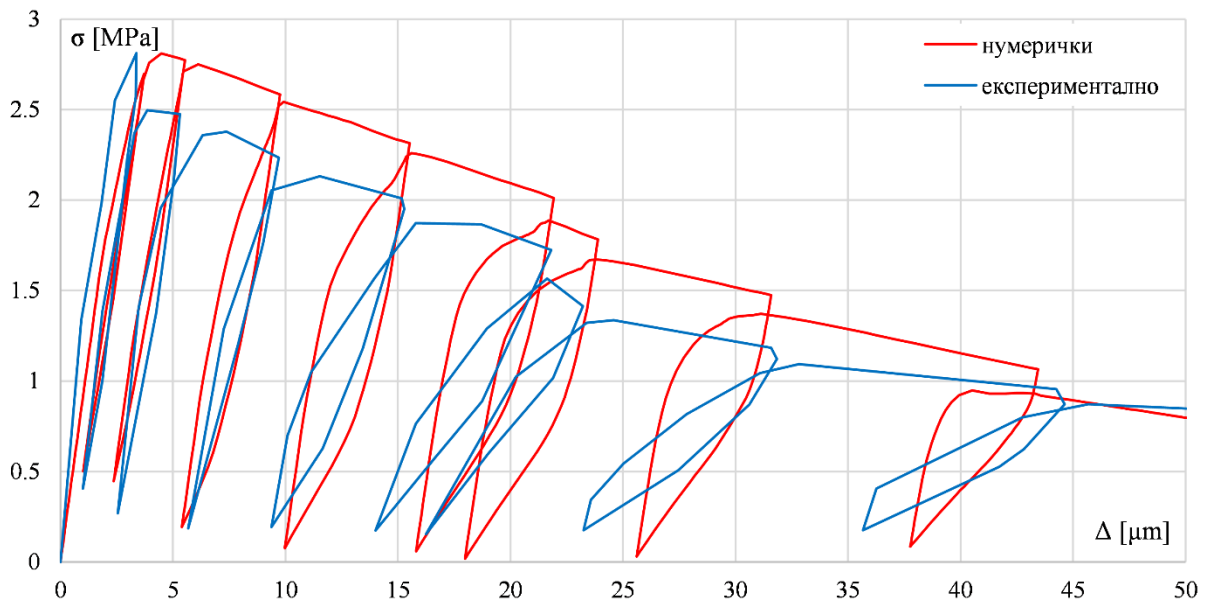
Сл. 48 Приказ расподеле дилатација и напона при једноосијалном монотонном затезању

За потребе тестирања понашања модела из ове дисертације при цикличном дејству, одабран је модел M075, будући да од модела који су успешно конвергирали има најситнију поделу на коначне елементе. У програму Matrix 3D није могуће аплицирано померање контролисати на дужини 35 mm уз засек, што је објашњено у претходном тексту, већ је могуће контролисати померање на месту где је и аплицирано, односно на крају носача. У том смислу аплицирани су такви циклуси померања на крају носача, да за резултат максимално блиско опонашају циклусе померања у зони засека према експерименталним подацима. Симулирана су два типа теста, тест означен са II и IV у радовима [46, 205]. Први тест се односи на циклично оптерећење затезањем узорка са засеком са растерећењем до нуле, а други на циклично оптерећење узорка затезањем, а затим наизменично притиском до вредности, која приближно одговара $-f$.



Сл. 49 Приказ оштећења d , при једноаксијалном монотонном затезању

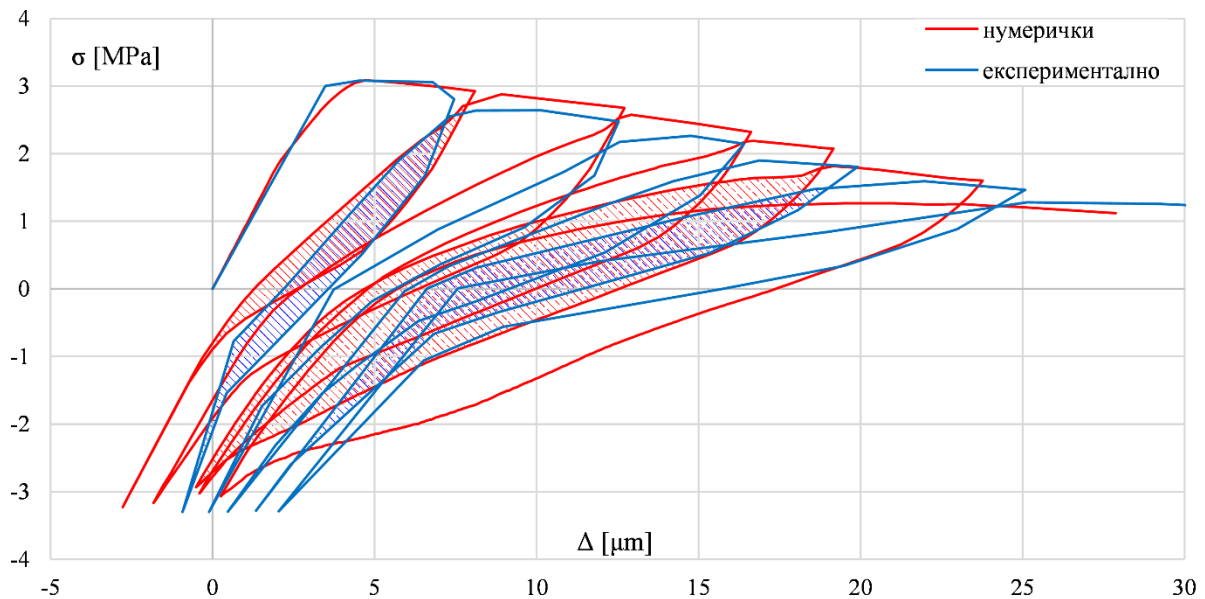
Нумеричка симулација одговора напон-померање при цикличном тесту, означеном са II, је упоређена са експерименталним резултатима на Сл. 50. Већ при монотонном тесту је уочено да модел благо прецењује носивост на опадајућем делу дијаграма у почетној фази, док је у каснијој фази подударане практично идеално. Подударане одговора модела са експерименталним при растерећењу и оптерећењу је веома добро у почетна четири циклуса. Битно је напоменути да за разлику од других модела заснованих на комбинацији пластичност – оштећење, модел из ове дисертације троши енергију у овим циклусима. У каснијим циклусима је приметно да модел прецењује крутост при оптерећењу и растерећењу, а самим тим је и енергија утрошена у циклусима до одређене мере већа у односу на експеримент.



Сл. 50 Одговор модела напон-померање при једноосијалном цикличном затезању, тип II према [46, 205]

Анализом одговора модела на нивоу интеграционе тачке, који је приказан на Сл. 31, може се закључити да је прецењена крутост при растерећењу и оптерећењу у циклусима последица управо формулације овог модела. Слично понашање се може уочити и при следећем тесту, означеном са IV у [46, 205]. Упоређење одговора при нумеричком моделирању са експерименталним подацима, у облику дијаграма напон – померање је приказано на Сл. 51. У овом моделу је за разлику од монотоног теста и теста II, усвојена једноосијална чврстоћа $f_t = 3.10$ МПа и енергија лома при затезању је $G_{Ft} = 0.128$ kN/m, према приказаном одговору из радова [46, 205]. Одговор модела је задовољавајући и у овој ситуацији, а посебно је добро подударале почетних циклуса и то у свим аспектима – крутост при растерећењу, крутост при оптерећењу, утрошена енергија у циклусу и заостала деформација при максималном притиску. У каснијим циклусима је утрошена енергија знатно већа у односу на експеримент, иако се крутост при оптерећењу и заостала деформација и у овим циклусима готово идеално подудара. Чак и почетна крутост при растерећењу је добро предвиђена, али у каснијој фази растерећења и преласка на страну оптерећења притиском, носивост је прецењена. Детаљнијом анализом оваквог модела по понашању појединачних интеграционих тачака, утврђено је да се код неколицине тачака јавља напонско – деформацијско стање у којем је присутно и израженије смицање, односно клизање. Ово стање ремети до одређене мере понашање модела у смислу секундарне површи лома, која је задужена за обухватање ефеката затварања и отварања прслина, а која је формулисана као девијаторска равна према нормалним пластичним дилатацијама, уз занемарење смицања. Сам узрок појаве смицања у оваквом моделу би могао да буде повезан са типом коначног

елемента (тетраедар) и обликом мреже. На жалост, у програму *Matrix 3D* у тренутку писања ове дисертације ово није могуће потврдити, односно није могуће моделирање другим типом просторних коначних елемената.



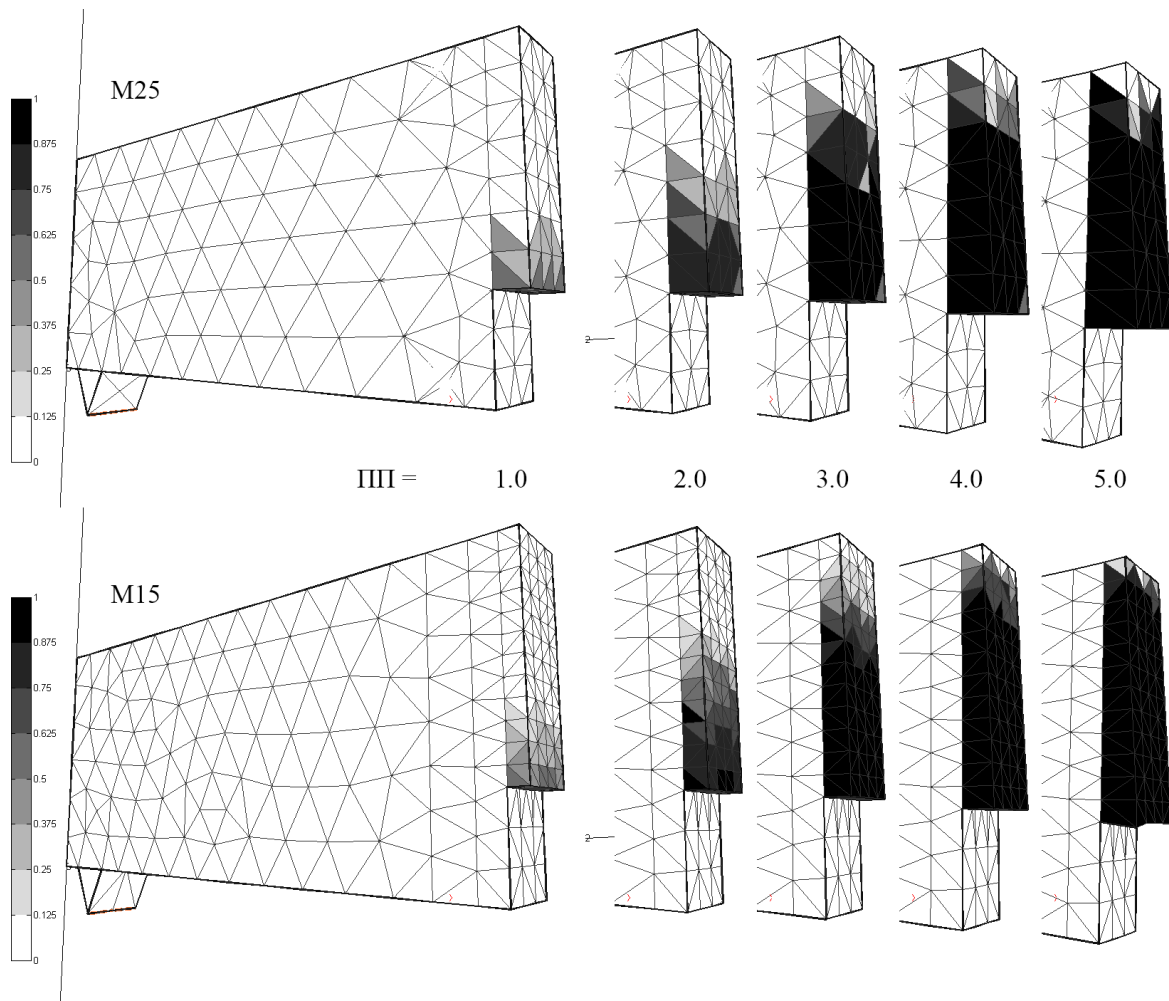
Сл. 51 Одговор модела напон-померање при једноаксијалном цикличном затезању, тип IV

5.2. Савијање греде са засеком оптерећењем у три тачке

Понашање модела из дисертације при моделирању савијане греде са засеком је упоређено са резултатима из [160], где су приказани резултати тестирања три типа неармираних греда. Греде су тестиране на савијање оптерећењем са три силе, циклично. Типови греда су означени са *S1*, *S2* и *S3*, где су одговарајући распони 254 mm, 508 mm и 1016 mm, висине пресека 63.5 mm, 127 mm и 254 mm, редом, а ширина пресека је иста за сва три типа и износи 127 mm. Засек на средини распона је висине 30% од висине греде, док ширина засека није специфицирана. Од механичких карактеристика бетона приказани су једноаксијална чврстоћа при притиску f_{cm} која износи 39.0 и 71 MPa и модул еластичности са вредностима 35.5 GPa и 42.0 GPa, за две коришћене класе бетона означене са *C1* и *C2*. За носаче сачињене од бетона *C2* су приказани резултати теста у виду дијаграма сила – померање. У том смислу у програму *Matrix 3D* је моделирана греда означена са *S3*, као греду највећег распона, од бетона означеног са *C2*, тако да су коришћени параметри модела: $f_c = 71.0$ MPa, $f_t = 3.80$ MPa, $E = 42.0$ GPa и $G_{Ft} = 0.040$ kN/m. Моделирана је једна четвртина носача захваљујући двама осама симетрије. Тестиране су две густине мреже коначних елемената 25 и 15 mm, а половина ширине засека у моделу је усвојена према величини коначног елемента у зони засека. Ослоначка зона је моделирана тространом призмом са еластичним материјалом, како би

се симулирало линијско ослањање, а да у исто време не дође до концентрације напрезања у тој зони.

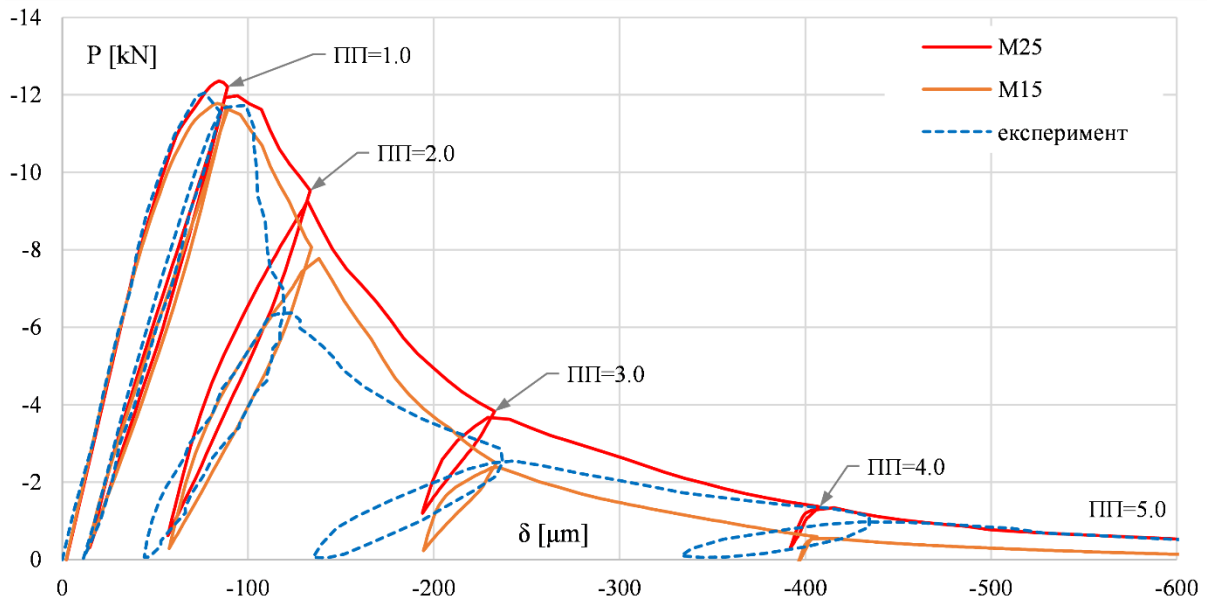
На Сл. 52 је приказана расподела оштећења по затезању d_t у различитим фазама прорачуна (III) на деформисаном моделу. Вредности III од 1.0, 2.0, 3.0 и 4.0 одговарају померању модела на почетку растерећења у циклусима, а вредност 5.0 одговара крајњем померању при симулацији од 0.6 mm. Осим очекиваног пораста зоне оштећења из корена засека по висини греде током симулације, може се уочити да су вредности d_t упоредиве у одговарајућим фазама прорачуна за две приказане мреже коначних елемената.



Сл. 52 Приказ оштећења d_t при савијању греде са засеком

Упоређење одговора сила – померање модела са експерименталним резултатима је приказано на Сл. 53. Слично резултатима у претходном поглављу, носивост модела у почетној зони омекшања је благо прецењена, али се даљом деформацијом носивост изједначава, и енергија лома тежи дефинисаној вредности за обе приказане мреже коначних елемената. Циклични одговор и у овој ситуацији веома добро предвиђа крутост при растерећењу, крутост при оптерећењу и утрошену енергију по циклусу у почетним

циклусима. У каснијим циклусима, када је оштећење веће од 0.60, крутост модела при растерећењу и оптерећењу је прецењена, односно модел би тек даљим растерећењем показао пад крутости услед активације секундарне равни течења.



Сл. 53 Одговор модела напон-померање при савијању греде са засеком

5.3. Савијање греде са засеком оптерећењем у четири тачке

Експериментални резултати тестирања греда са засеком оптерећењем у четири тачке је преузето из [68]. У овом раду су детаљно изложени сви подаци, у вези са тестираним носачима у геометријском и механичком смислу, коришћеном апаратуром за мерење, као и сами резултати тестирања. Носач у статичком смислу одговара греди са препустом, која у пољу има засек, а не на средини распона и оптерећена је силама различитог интензитета у пољу, и на препусту. На овај начин, осим што је инициран комбиновани мод I и II формирања прслина, могуће је утицати и на трајекторију прслине. У раду су тестирана два гранична случаја према крутости ослонца на месту наношења силе на препусту: крутост износи нула ($K1$) и крутост износи бесконачно ($K2$). У раду су приказани резултати за три типа греде у геометријском смислу, где је у оквиру овог поглавља понашање модела упоређено са носачем дужине 67.5 cm, ширине 5 cm и висине 15 cm. Засек је ширине 2 mm и просечен је до половине висине носача. Осим овога, узорци су справљани од пет мешавина бетона, за које су приказане све кључне механичке карактеристике и приказане су у Таб. 3.

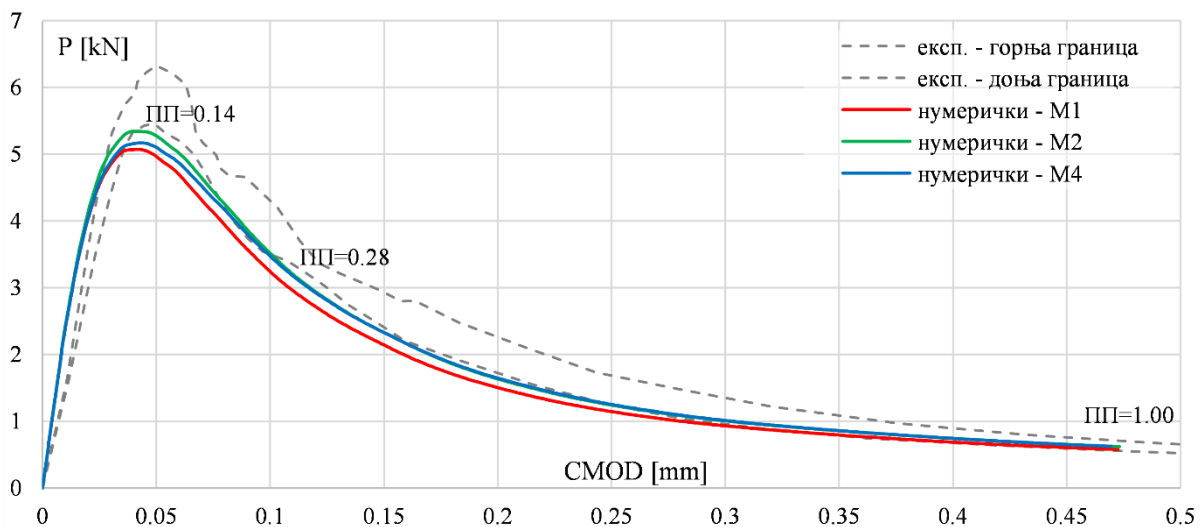
У програму Matrix 3D је моделирана половина носача, захваљујући вертикалној подужној равни симетрије. Засек је усвојен ширине 10 mm, како би се избегла потреба за генерисањем мреже коначних елемената величине мање од те димензије, будући да је

упитна могућност реалне презентације хетерогеног материјала попут бетона овако малим коначним елементима [15]. Коришћена су три сета параметра материјалног модела, који одговарају мешавинама $M1$, $M2$ и $M4$ из Таб. 3. Параметри коришћени у симулацијама, су управо параметри представљени у Таб. 3.

Таб. 3: Механичке карактеристике мешавина бетона из [68]

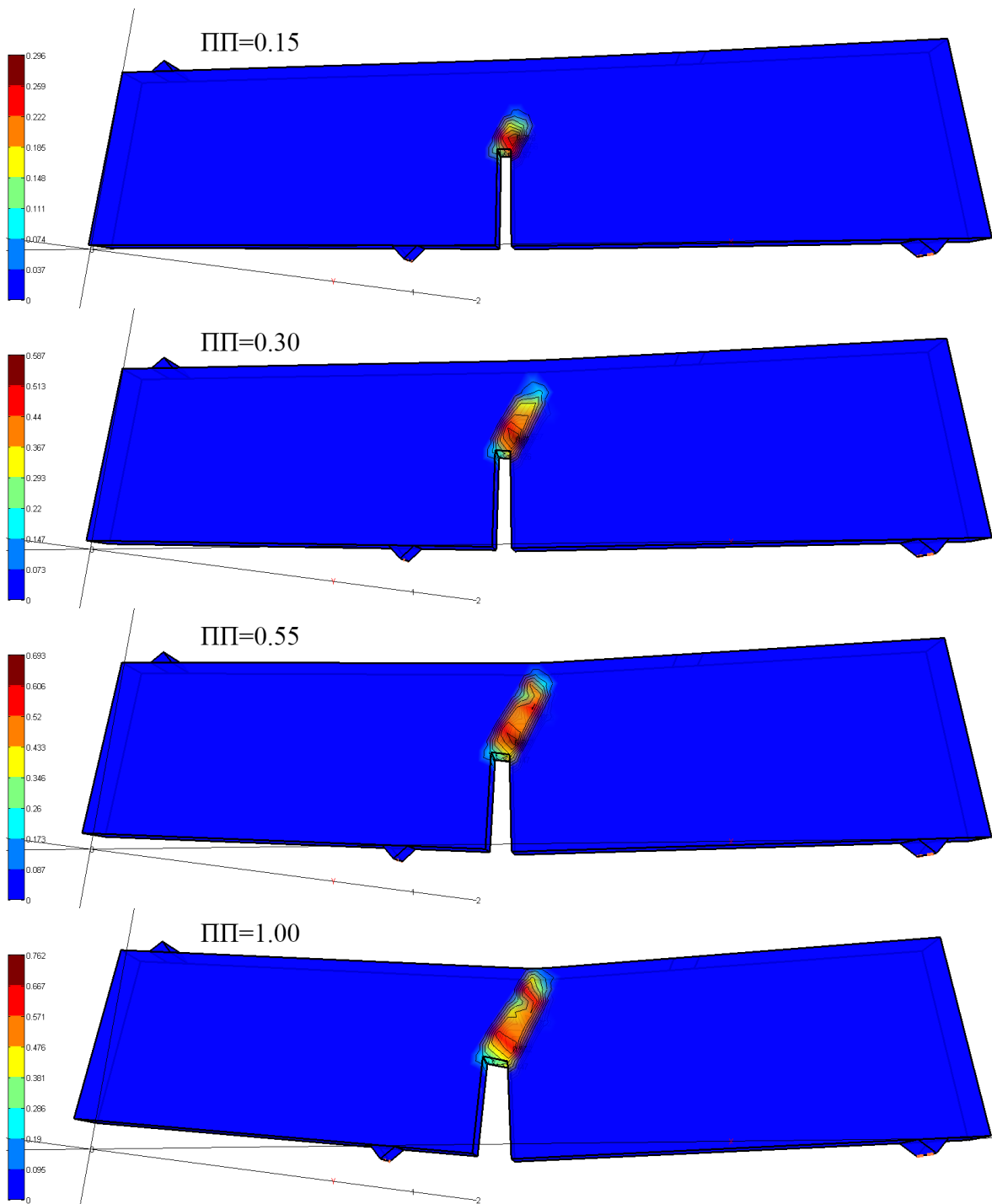
Мешавина	f_c [MPa]	f_t [MPa]	G_{ft} [kN/m]	E [GPa]
M1	54.0	3.0	0.069	38.0
M2	56.0	3.2	0.070	38.0
M3	56.0	2.8	0.061	38.0
M4	61.0	3.0	0.075	39.0
M5	57.0	3.0	0.069	39.0

Упоредње одговора нумеричког модела типа KI са експерименталним резултатима, у виду дијаграма сила – размицање у равни засека ($CMOD$ – *crack mouth opening displacement*), је приказано на Сл. 54. Нумеричке симулације за тип KI су показале задовољавајуће подударане резултата, са благо већом крутошћу у почетној фази, пре превојне тачке на дијаграму, као и благо потцењену носивост на превојној тачки и у каснијој фази, али уз веома добро предвиђену крутост при омекшању. Одабрани су параметри материјала $M1$, $M2$ и $M4$ како би се видео утицај повећања f_t ($M2$), као и повећања G_{ft} ($M4$) на одговор модела.



Сл. 54 Одговор модела сила-померање при савијању греде са засеком оптерећене у четири тачке – KI

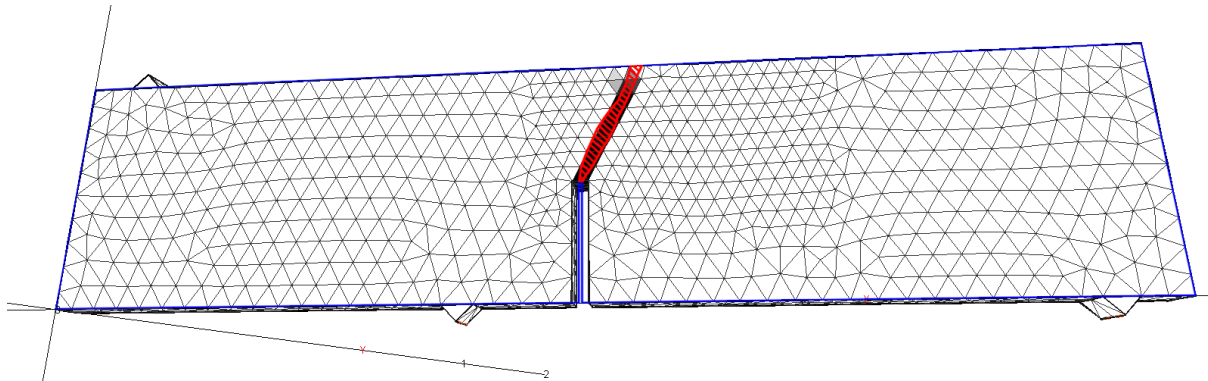
На Сл. 55 је приказана упросечена вредност оштећења по затезању d_t на деформисаном моделу. Пропагирање зоне оштећења је приказано у четири фазе прорачуна $III = 0.15, 0.30, 0.55$ и 1.00 , а прорачунски процес III је назначен и на дијаграму сила – померање, на Сл. 54, због лакшег сагледавања понашања.



Сл. 55 Приказ оштећења d_t при савијању греде са засеком оптерећене у четири тачке – $KI-MI$

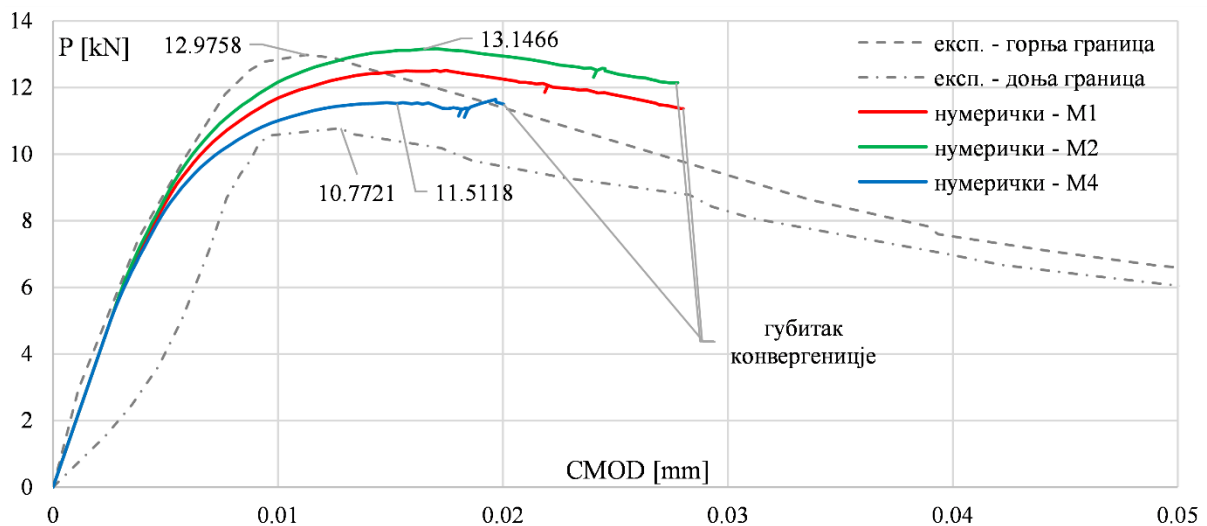
На Сл. 56 је приказано упоређење зоне оштећења по затезању добијене при симулацији модела $KI-MI$, са експерименталним резултатима. Оштећење по затезању d_t је приказано неупросечено за вредност $ПП = 1.00$, где бела боја означава KE са вредности d_t од нула, а црна боја са вредности један, односно неоштећени и потпуно оштећени. Плавом бојом је означена контура елемента са ширином засека према подацима из [68], а црвеном бојом је означена зона у којој су се јавиле прслине према експерименталним анализама. Може се уочити идеално подударње ових зона, а битно је приметити, због

разлога који ће бити накнадно објашњен, да је мрежа коначних елемената таква, да правац зоне оштећења према експериментима одговара правцу једног реда КЕ у тетраедарској мрежи.



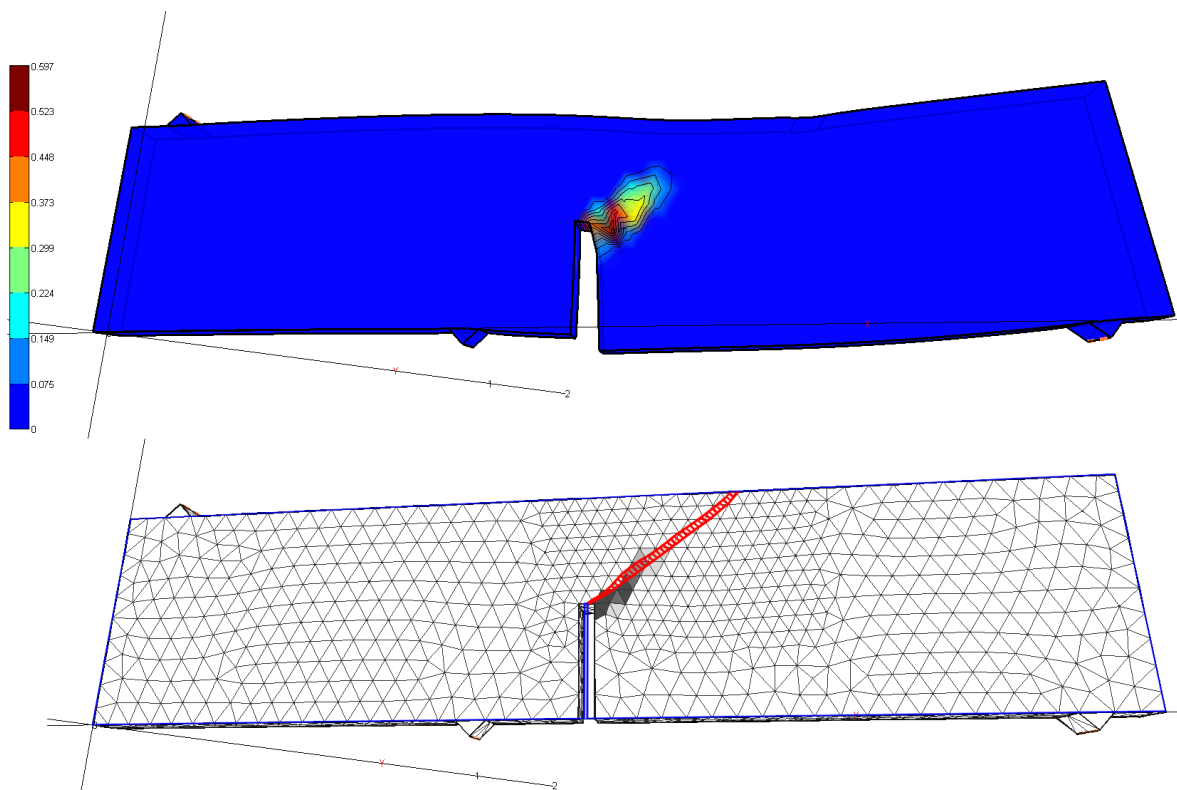
Сл. 56 Упоредње зоне оштећења при савијању греде са засеком оптерећене у четири тачке – $K1-M1$

Резултати нумеричке анализе модела означеног са $K2$ су приказани у облику дијаграма сила – померање $CMOD$ на Сл. 57. И на овој слици су приказане горња и доња граница резултата при експерименталном испитивању. Иницијална крутост при анализи $K2$ модела се практично идеално подудара са експерименталном, за разлику од $K1$ (Сл. 54). Приказана доња граница према [68], је према ауторовом мишљењу резултат несавршености самог експерименталног испитивања, будући да се иницијална крутост драстично разликује у односу на горњу границу. Носивост је такође задовољавајуће предвиђена нумеричким симулацијама, са грешкама +1.3% за горњу и +6.9% за доњу границу. Померање $CMOD$ при достизању превојне тачке је око 50% веће при нумеричкој анализи, али треба имати у виду да је засек моделиран ширине 10 mm, а у експерименту је био 2 mm, што свакако може да утиче на резултат анализе. Приликом све три нумеричке симулације $M1$, $M2$ и $M4$ систем је изгубио конвергенцију, што ће бити детаљније описано у поглављу 5.3.1.



Сл. 57 Одговор модела сила-померање при савијању греде са засеком оптерећене у четири тачке – K2

На Сл. 58 је приказана упросечена и неупросечена зона оштећења за модел K2-M1 у фази прорачуна када је модел изгубио конвергенцију. Упросечена зона оштећења по затезању је приказана на деформисаном моделу на горњој слици. Неупросечена зона оштећења је приказана на доњој слици, на којој је оштећење по коначним елементима упоређено са зоном формирања прслина према експерименталним подацима (црвена боја на слици). Може се уочити да и за K2 модел зона формирања оштећења практично идеално одговара експерименталним подацима.

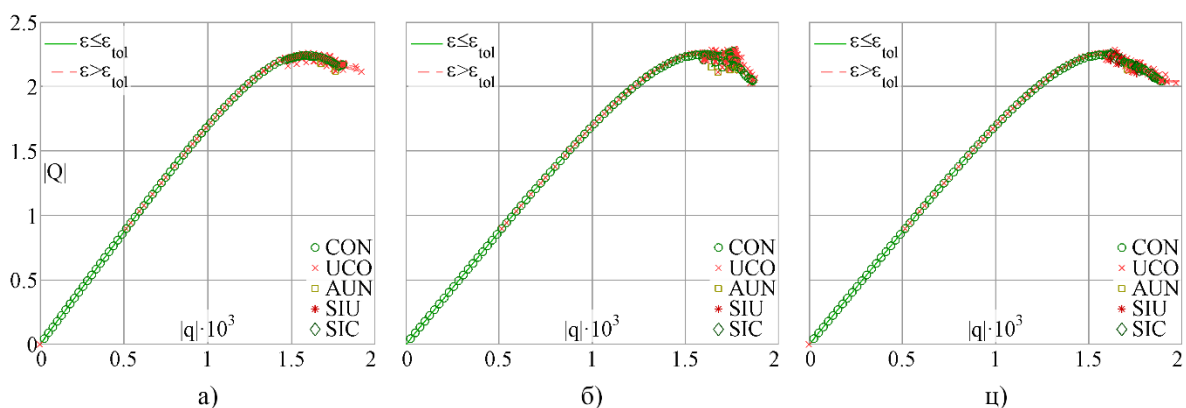


Сл. 58 Упоређење зоне оштећења при савијању греде са засеком оптерећене у четири тачке – K2-M1

5.3.1. Анализа конвергенције

Анализа конвергенције система који су моделирани са материјалом који омекшава и унапређење конвергенције оваквих модела је детаљно анализирано од стране аутора у раду [209], где је између осталог показане могућности унапређења конвергенције коришћењем процедуре полу-инкремент.

За модел $K2$ приликом све три нумеричке симулације $M1$, $M2$ и $M4$ систем је изгубио конвергенцију и то за $ПП = 0.841$, 0.854 и 0.727 , редом, уз коришћење методе дужине лука (AL) и линијског претраживања (LS) уз процедуру полу-инкремент (SI). Дејство на овим моделима је аплицирано као сила резултанте 12.5 kN која одговара половини моделираног носача, што одговара 25 kN за носач, будући да је максимална вредност силе према експерименту мања од тога. Детаљну анализу успешности итерација је могуће посматрати у простору норма силе-норма померања $\|Q\|-\|q\|$ (погледати поглавље 4.3.2). На Сл. 59 су приказане тачке итерација у простору $\|Q\|-\|q\|$ за модел $K2-M1$. Успешно конвергиране итерације су означене са CON , неуспешно конвергиране са UCO , појава вештачког растеређења са AUN и коначно неуспешно и успешно конвергиране итерације у којима је активирана процедура полу-инкремент са SIU и SIC , редом. На слици се може уочити побољшање у смислу напретка у току прорачуна укључивањем линијског претраживања и полу-инкремента, те ће у наставку бити дат и детаљнији приказ.



Сл. 59 Схематски приказ итерација модела $K2-M1$ у простору $\|Q\|-\|q\|$ коришћењем: а) само методе дужине лука; б) дужине лука уз линијско претраживање; ц) дужина лука уз линијско претраживање и полу-инкремент

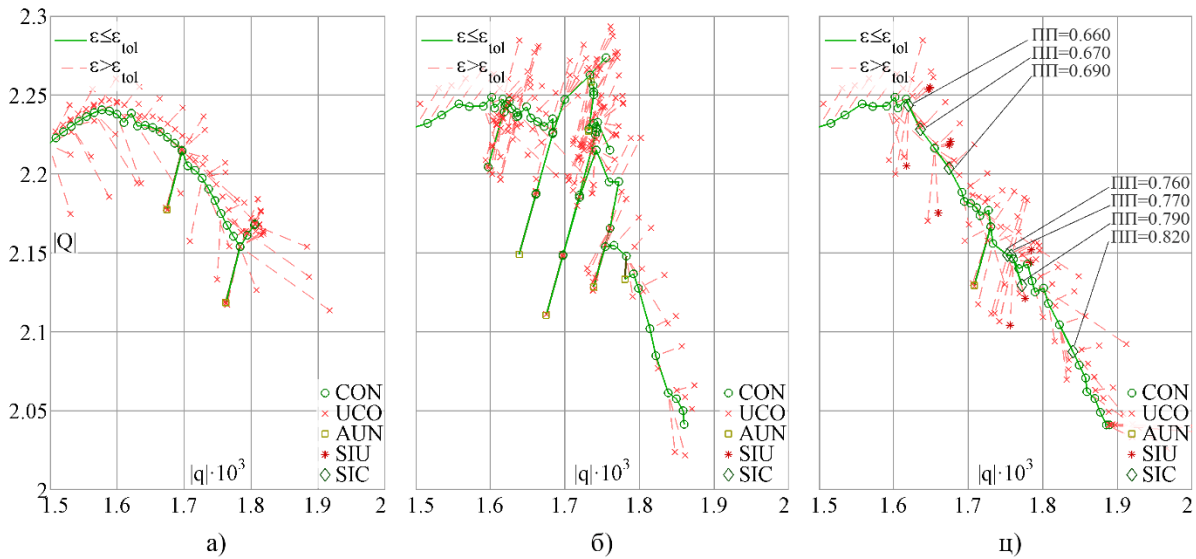
У Таб. 4 је представљен преглед резултата анализе модела $K2-M1$ различитим методама, где је евидентан напредак у погледу прорачунског процеса када су уз методу дужине лука (AL), укључени само линијско претраживање (LS) или још и процедура полу-инкремент (SI). Такође, може се уочити да је у комбинацији AL, LS појава вештачког

растерећења још израженија у односу на AL само, а самим тим је и вредност III необјективна, будући да вредност III расте у итерацији у којој се јавило вештачко растерећење, као и у наредној у којој се, по правилу, прорачун враћа у равнотежни пут на којем се наставља оштећење модела. Утрошено време прорачуна је очекивано веће у комбинацији AL,LS будући да је потребно више пута извршити анализу стања интеграционих тачака у једној итерацији. У табели се може видети да коришћењем комбинације AL,LS,SI појава вештачког растерећења је значајно мања, као и утрошено време, будући да је процедура полу-инкремент задржала прорачун на равнотежном путу уз мањи број итерација.

Таб. 4: Преглед резултата анализе модела $K2-M1$ различитим методама

Коришћена метода	Коначни III	Укупни број итерација	Број конвергираних итерација	Број појава вештачког растерећења	Утрошено време [s]
AL	0.6869	237	96	2	174
AL,LS	1.0000	337	123	6	450
AL,LS,SI	0.8411	244	100	1	305

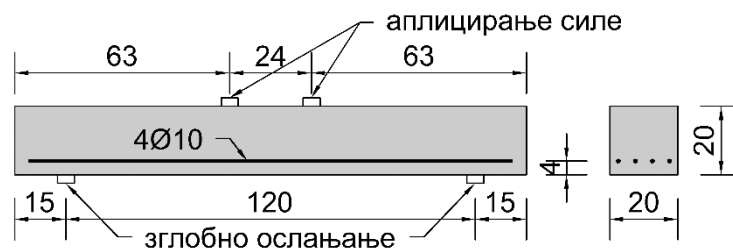
На Сл. 60 је приказан детаљнији схематски приказ итерација у зони при и након превојне тачке на дијаграму сила-померање. На овој слици се, у односу на претходну, лакше могу уочити ситуације вештачког растерећења и проблема које су она проузроковала у AL,LS . По ауторовом мишљењу, будући да се код модела $K2$, зона оштећења не поклапа са једним редом коначних елемената, као код модела $K1$, долази до појаве бифуркације, односно до ситуације где би равнотежни пут могао бити настављен на два или чак више начина, у зависности од међусобног нивоа оштећења суседних елемената. Евидентно је да је процедура полу-инкремент веома повољно утицала на прорачунски процес, будући да је у кључним деловима, $III = 0.66, 0.67$ и 0.69 , где су се при комбинацији AL,LS јавила вештачка растерећења, процедура је задржала равнотежни пут на жељеном току, где се процес оштећења наставља.



Сл. 60 Детаљни схематски приказ итерација модела $K2-M1$ у простору $|Q|$ - $|q|$ коришћењем: а) само методе дужине лука; б) дужине лука уз линијско претраживање; ц) дужина лука уз линијско претраживање и полу-инкремент

5.4. Савијање греде са подужном арматуром на затегнутој страни

Могућност моделирања армиранобетонских елемената моделом из ове дисертације је приказана на примеру греде, која је армирана само подужним шипкама на затегнутој страни. Експериментални подаци су преузети из [180] где су приказани резултати испитивања греде три величине, а у оквиру овог поглавља је анализирана најмања од њих, чија је геометрија приказана на Сл. 61. Механичке карактеристике бетона одговарају бетону $C 35/45$, а граница течења челика је 500 MPa . Носач је оптерећен до лома са две концентрисане силе.

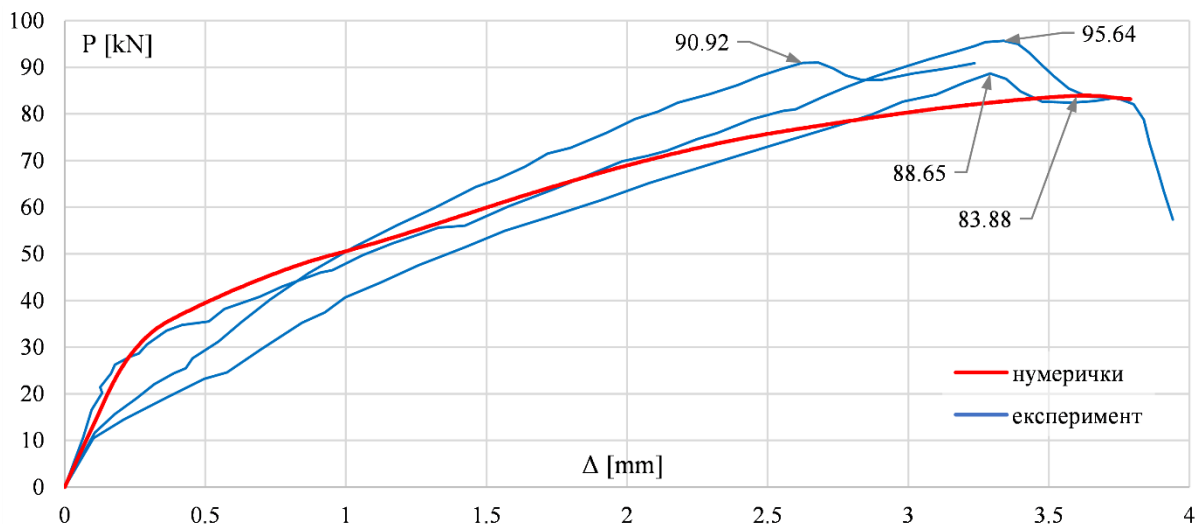


Сл. 61 Геометријске карактеристике греде из [180]

У програму *Matrix 3D* је моделирана четвртина носача, захваљујући двома вертикалним равнима симетрије. Бетон је моделиран тетраедарским коначним елементима величине 17 mm у делу носача где је очекивана појава прлина, односно у средњем делу греде између ослонаца, а у преосталом делу греде елементи су величине 35 mm . Арматура је моделирана линијским коначним елементима, линеарно еластичним са модулом еластичности 200 GPa . Будући да су арматурне шипке праве са шест степени слободе померања и обртања, а просторни елементи са 3 степена слободе померања,

шипкама је спречена ротација око подужне осе, како систем не би био лабилан. За тетрадеарске КЕ усвојени су следећи параметри модела: $f_c = 34.0$ МПа, $f_t = 3.20$ МПа, $E = 34.00$ ГПа и $G_{Ft} = 0.100$ кН/м, према препорукама Еврокода 2 [61] за класу бетона С 35/45.

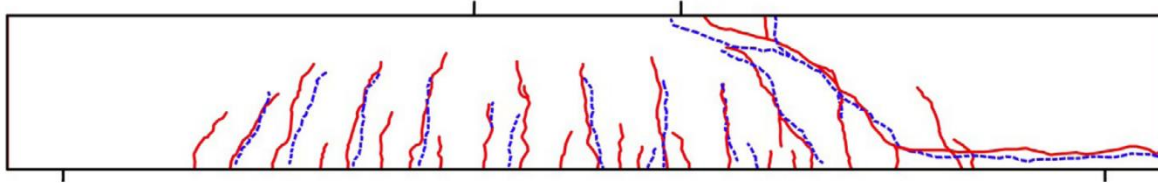
На Сл. 62 је приказан експериментални и нумерички одговор сила – померање за најмању греду из [180]. Експеримент је поновљен три пута, те су доступни подаци приказани за сва три случаја на слици. Може се уочити начелно веома добро подудараре резултата нумеричке анализе са експерименталним и то у смислу иницијалне крутости, носивости при појави прелина, крутости након појаве прелина и достигнутој носивости и одговарајућој деформацији. Треба приметити и да је присутно значајно одступање резултата три геометријски и механички исте греде, где се појава прелина у смислу носивости разликује око 100%, а достигнута носивост 7.9%. Нумерички одговор носача се готово идеално подудара са једним од експерименталних до пред фазу достизања носивости греде. Разлике нумерички добијене носивости греде у односу на експерименталне резултате су -5.7, -8.4 и -14.0%. Јасно је да променом параметара f_t , који је усвојен према Еврокод 2 [61] и параметра G_{Ft} може да се значајно утиче на одговор носача и да би резултати могли идеално да се подударе.



Сл. 62 Експериментални и нумерички одговор сила-померање најмање греде из [180]

На Сл. 63 је приказан изглед прелина најмање греде из [180] након тестирања, где су црвеном и плавом бојом приказане једна односно друга бочна страна греде. Доминантна је коса прелина од зоне наношења оптерећења, према ослонцу, под нагибом оквирно 45° . Осим тога битно је приметити да се прелина наставља дуж подужне арматуре, преко ослонца. Осим овог оштећења, формиране су прелине, вертикалне у

средњој зони греде, конкретно три значајније и једна нешто мања, као и прслина уз поменуту доминантну косу прслину.

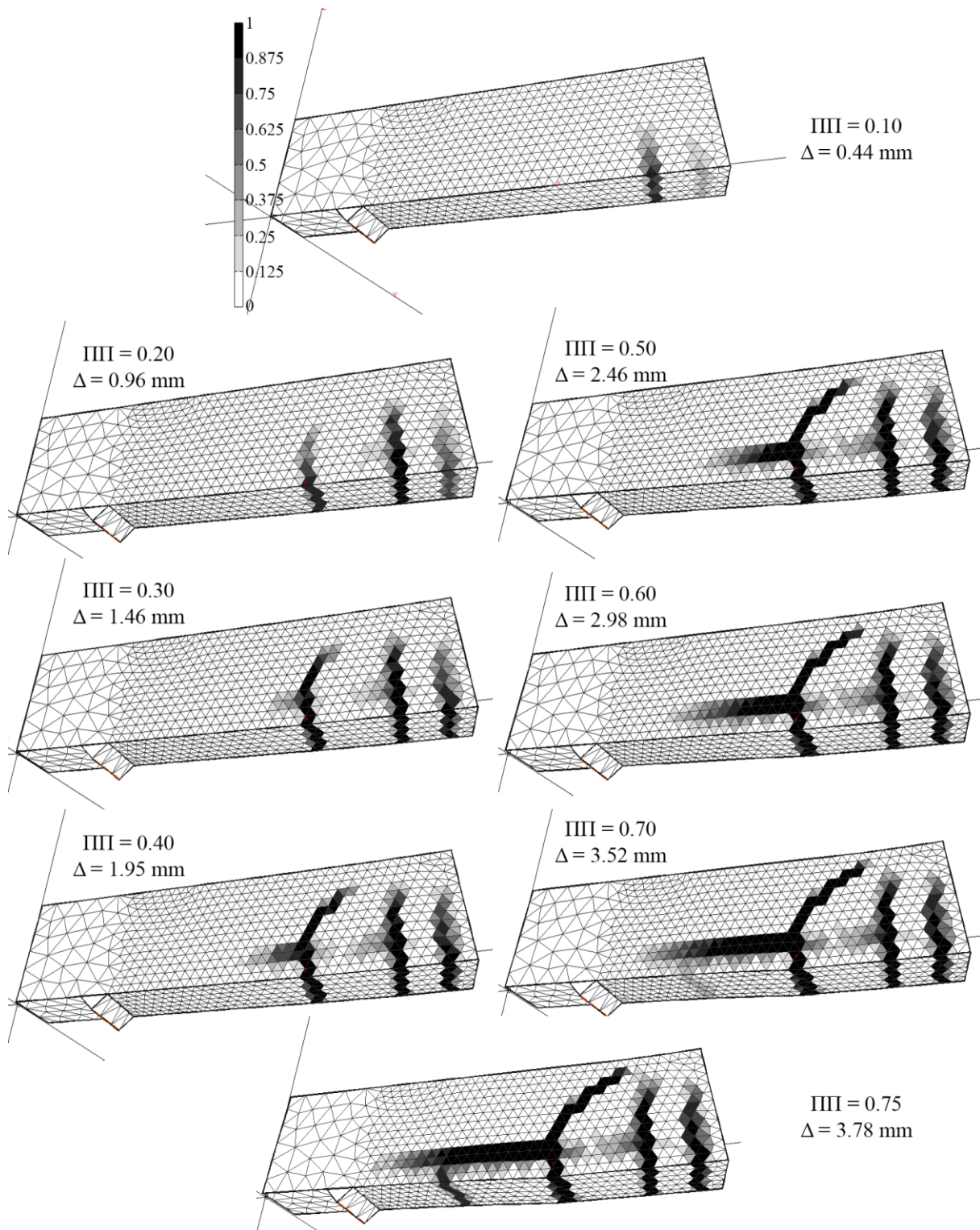


Сл. 63 Изглед прслина греде из [180]

Распоред оштећења према нумеричкој анализи, на разматраној греди је приказан на Сл. 64. Оштећење по затезању d_t на греди је приказано неупросечено, односно оштећење интеграционе тачке сваког елемента одговара нијанси боје на његовој страници. Бела боја одговара неоштећеним елементима, а црна боја елементима у којима оштећење тежи јединици. Може се уочити да распоред оштећења у потпуности одговара приказаним прслинама на Сл. 63, односно десној страни на слици по којој је наступио лом при експерименталној анализи. Присутно је косо локализована зона оштећења, која се простире правцем приближно 45° од места доношења оптерећења, као и две вертикалне зоне оштећења на средини носача, односно на моделираној половини греде. Коначно, јасно се уочава се и оштећење дуж подужне арматуре, као и формирање додатне прслине уз поменуту косу прслину.

5.5. Циклично оптерећен чвор греда – стуб

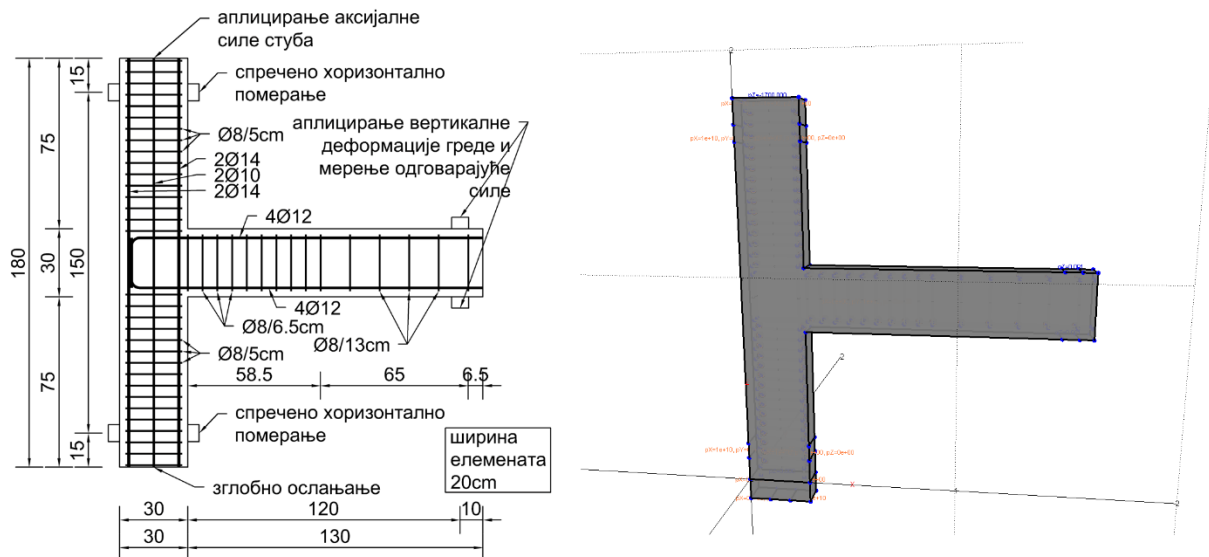
У овом поглављу су приказане перформансе модела из ове дисертације при симулацији понашања циклично оптерећених армиранобетонских елемената. Експериментални подаци су преузети из [33], где је приказано испитивање чворне зоне греда – стуб, са и без укрштених арматурних шипки у зони чвора. За потребе испитивања могућности симулирања понашања оваквог елемента, одабран је носач без укрштених шипки у чвору, чија је геометрија приказана на Сл. 65а. Од механичких карактеристика носача у раду [33] дата је средња чврстоћа бетона при притиску 34 МПа и затезна чврстоћа арматуре 580 МПа. На стуб је иницијално аплицирана нормална сила у износу 5% од одговарајуће носивости, односно 102 kN, а затим је циклично померана греда на означеном месту, по два пуна циклуса до циљаног померања од 6 mm, 20 mm, 40 mm, 60 mm и 80 mm.



Сл. 64 Приказ неупросеченог оштећења d_i при нумеричкој анализи најмање греде из [180]

Нумерички модел носача је приказан на Сл. 65б. Моделирана је половина носача, захваљујући присуству вертикалне равни симетрије. Све арматурне шипке су моделиране линијским елементима са линеарно еластичним понашањем. Параметри за материјални модел бетона су усвојени према препорукама Еврокода 2 [61], будући да је у раду приказана само средња чврстоћа бетона при притиску. Усвојени су следећи

параметри модела: $f_c = 34.0$ МПа, $f_t = 2.63$ МПа, $E = 31.76$ ГПа и $G_{Ft} = 0.100$ кН/м. На модел је у првом инкременту аплицирано једнакоподељено оптерећење на горњем крају стуба у износу од 1700 кН/м², а затим је у 400 инкремената по комплетном циклусу аплицирано померање краја греде. Искоришћена је могућност софтвера да по завршеном иницијалном инкременту активира еластично ослањање на горњем крају стуба.

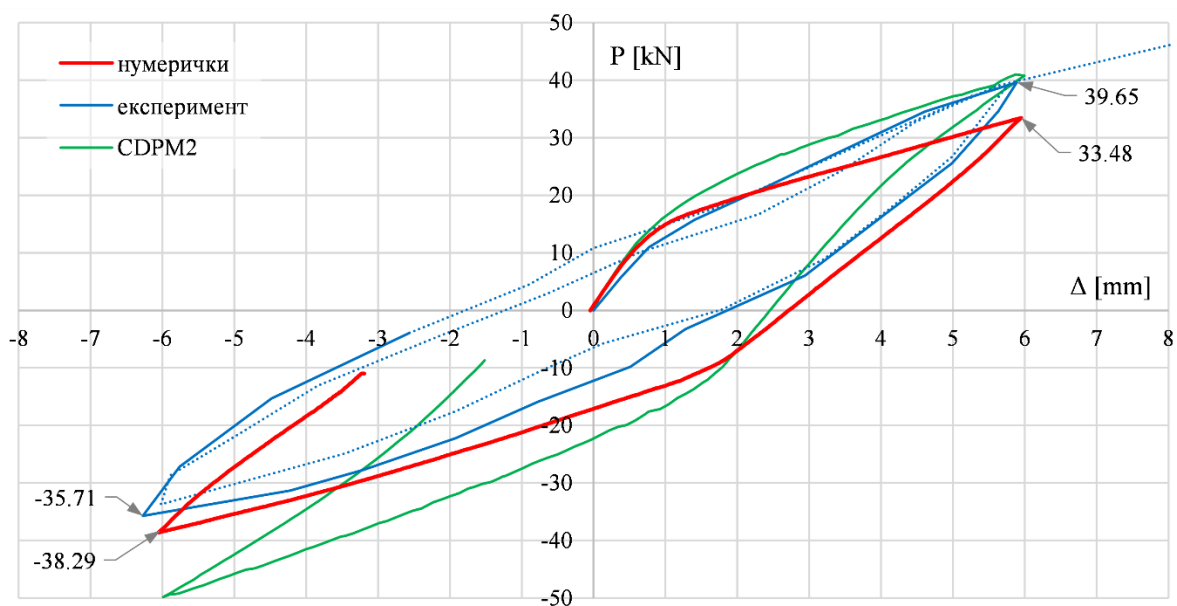


Сл. 65 Геометријски подаци о носачу из [33] (а) и приказ модела у програму Matrix 3D (б)

Мрежа коначних елемената је генерисана величине 25 mm у чворној зони и до половине греде, у којој је очекивана појава прслина, а у остатку носача 50 mm. Модел има 4180 чворова, 19433 тетрадарских коначних елемената, 661 линијски елемент и 14379 степени слободе. Нелинеарна анализа модела је прекинута због губитка конвергенције, пре завршетка првог циклуса. Утрошено време на прорачун до тог тренутка је 50 сати и 22 минута.

На Сл. 66 је приказан одговор сила-померање циклично оптерећеног носача стуб-греда. Црвеном бојом је означен одговор при нумеричкој анализи, а плавом бојом експериментални према подацима из [33]. Пуном плавом линијом је означен први циклус, а испрекиданом други циклус и наставак криве у трећем циклусу. На слици је упоредно приказан и одговор модела Грасл и сарадници [77] (*CDPM2*), који је изложен у раду [208]. Нумерички одговор модела из ове дисертације веома добро прати експериментални. Иницијална крутост је идеално предвиђена, као и крутости при растерећењу првог и другог полу-циклуса и оптерећењу другог полу-циклуса. Једино значајније одступање у крутости се уочава при оптерећењу првог полу-циклуса, након формирања првих прслина. Самим тим и носивост на крају првог полу-циклуса се разликује за -15.6% . У погледу носивости на крају првог полу-циклуса *CDPM2* модел се

боље показао. Носивост према моделу из дисертације на крају другог полу-циклауса је боље предвиђена у односу на први, и грешка је +7.2%. У овој ситуацији модел *CDPM2* прави грешку преко 40%. Добро предвиђање носивости и крутости модела, за разлику од *CDPM2*, је управо из разлога постојања дефинисаног понашања при затварању прслина. Може се уочити да тенденција опадања крутости у потпуности прати експериментална запажања, док се код *CDPM2* модела јавља нижа иницијална крутост при растеређењу, које прати пораст крутости, будући да интеграционе тачке прелазе на страну притиска. Осим тога, пластична деформација се не поништава код *CDPM2* модела, тако да је при овој симулацији вођеној померањем носивост прецењена на крају другог полу-циклауса.



Сл. 66 Експериментални и нумерички одговор сила-померање циклично оптерећеног носача стуб-греда

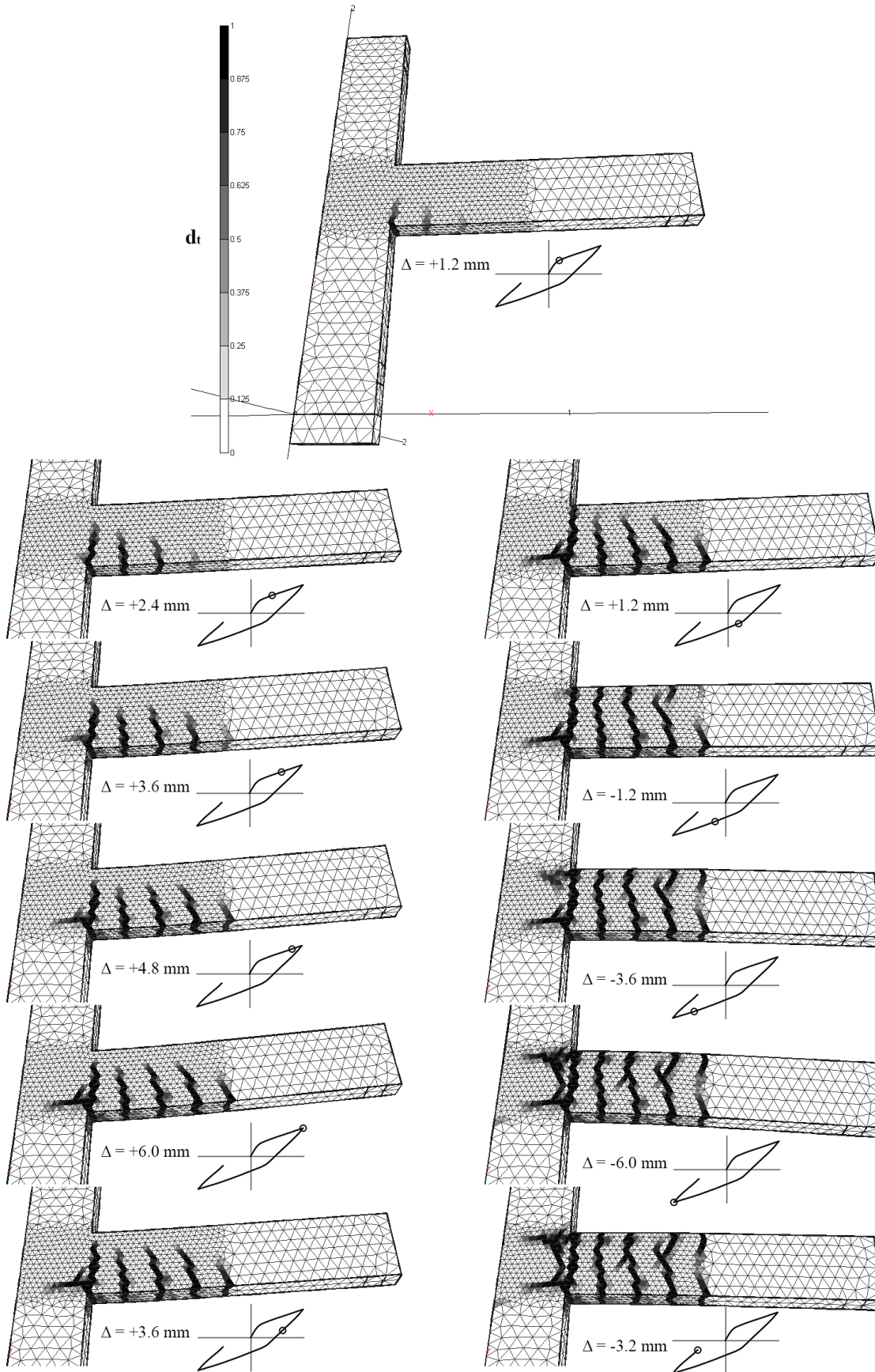
На Сл. 67 је приказано стање оштећења d_t у коначним елементима у различитим фазама прорачуна. На слици се пре свега може уочити да је оштећење локализовано на уске зоне једног коначног елемента, како је и очекивано. Дакле, јасно се могу дефинисати места формирања појединих прслина. У иницијалној фази је формирано оштећење/прслина уз стуб, док се у наставку анализе формирају још 4 изражене локализоване зоне оштећења дуж греде. У даљој фази оштећење из иницијалне зоне уз стуб се шири ка чвору. За дати носач у раду [33] се проналази само једна слика, непознато из које фазе, али врло вероватно по завршеном испитивању. Изражена је прслина уз стуб, дуж греде су прслине на позицијама сваке друге узенгије, што значи на 13 cm отприлике, а комплетан заштитни слој бетона у зони чвора је отпао. По ауторовом мишљењу, нумеричка анализа из студије у доброј мери опонаша ово стање носача, будући да су на греди уз иницијалну прслину уз стуб формиране још 4 изражене зоне оштећења на

укупној дужини од 60 cm, односно са растојањем од око 15 cm. Такође, зона оштећења се проширила ка чвору, што би могло да одговара забележеном отпадању заштитног слоја, али свакако би било интересантно да је нумеричка анализа конвергирала ка каснијим циклусима.

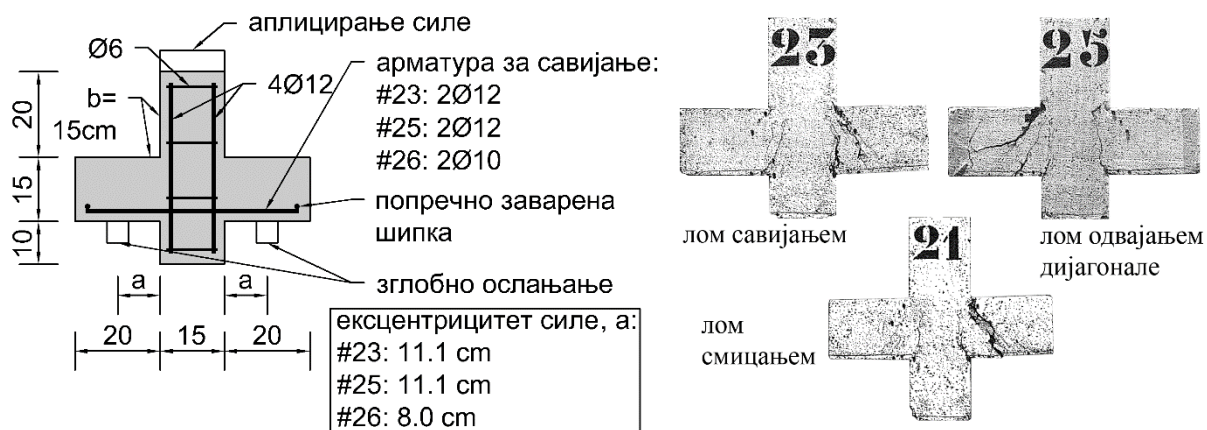
5.6. Кратки елемент оптерећен вертикалним дејством

У оквиру овог поглавља је, кроз пример кратког елемента, приказана примена модела из дисертације на прорачуну практичних инжењерских проблема, који су у оквиру Еврокода 2 [61] засновани на поједностављеним моделима, заснованим на методи притиснутих штапова и затега. Примери кратког елемента су преузети из [67], где је приказана експериментална анализа различитих носача у геометријском и материјалном смислу. Овај рад је одабран из разлога што се армирање кратких елемента одликује једноставношћу, а варирањем геометријских и механичких параметра су постигнуте три различите врсте лома носача. Од арматуре самог кратког елемента постављене су искључиво главне шипке за прихватање савијања, јер је испитивана могућност замене остатка арматурних шипки са додатком челичних иглица у свежу бетонску масу, односно утицањем на механичке карактеристике бетона. Из серије испитаних носача одабрана су три, као представници сваког од три типа лома, како би се испитала могућност модела за предвиђање отказа кратког елемента.

Геометријске карактеристике разматраних кратких елемената су приказане на Сл. 68, као и детаљи арматуре и ексцентрицитет силе на кратком елементу. На слици су такође приказани и карактеристични типови лома који су приказани у [67]: лом савијањем, у коме се јавља пластификација главне арматуре за савијање, затим лом одвајањем дијагонале, где се главна дијагонална прслина формира изван места аплицирања силе на кратком елементу и коначно лом смицањем, у коме се главна дијагонална прслина формира испред места аплицирања силе на кратком елементу.



Сл. 67 Приказ оштећења d , при анализи циклично оптерећеног носача стуб-греда



Сл. 68 Геометријски подаци о носачу из [67] и карактеристични облици лома

Механичке карактеристике бетона су приказане у [67] као чврстоћа при притиску мерена на узорку облика коцке димензије 10 и 15 cm, и чврстоћа цепања на узорку облика цилиндра. Дате чврстоће су конвертоване према препорукама Еврокода 2 [61] и пратећих стандарда и усвојене су вредности представљене у Таб. 5. У мешавину од које је сачињен носач #23 је додато 2% челичних влакана и на тај начин су побољшане механичке карактеристике бетона. Енергија лома је претпостављена, услед недостатка података. У Таб. 5 су представљене и карактеристике арматурних шипки коришћених за разматрана три носача, граница течења и затезна чврстоћа.

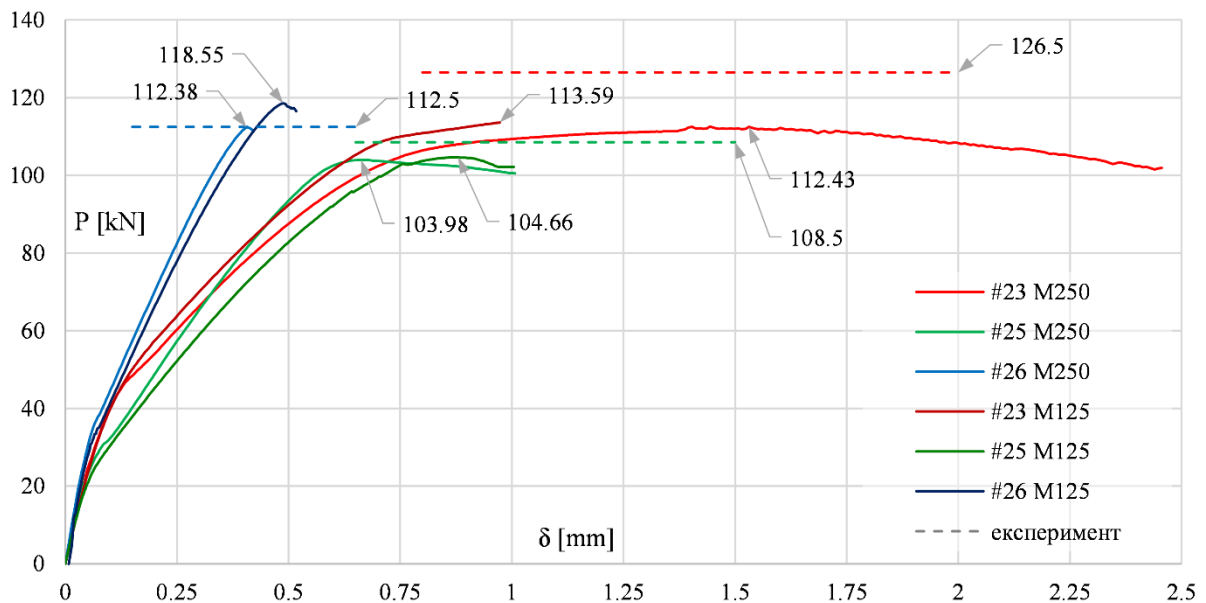
Таб. 5: Механичке карактеристике материјала за разматрана три носача из [67]

Бетон					Арматура		
Носач	f_c [MPa]	f_t [MPa]	G_{ft} [kN/m]	E [GPa]	Пречник	f_y [MPa]	f_u [MPa]
#23	26.36	4.61	0.100	29.42	Ø8	451	666
#25	28.60	2.72	0.050	30.15	Ø10	454	658
#26	28.60	2.72	0.050	30.15	Ø12	452	684

Захваљујући двама равнима симетрије, моделирана је само четвртина носача. Бетон је моделиран тетраедарским КЕ чији су чворови постављени у ортогоналном распореду, будући да се показало да долази до унапређења у конвергенцији модела за овако генерисану мрежу. Варирана је и густина мреже КЕ такође ради испитивања утицаја на конвергенцију система, и приказани су резултати за мрежу величине 25 и 12.5 mm. Арматурне шипке су моделиране линијским коначним елементима са линеарно еластичним понашањем, осим зона у којима је очекивана пластификација челика где је моделирано билинеарно еласто-пластично понашање влакана пресека, према приказаним параметрима у Таб. 5.

На Сл. 69 је приказан нумерички одговор модела сила – померање за носаче #23, #25 и #26 из [67] за две густине мреже КЕ. Експериментални одговор сила – померање

није приказан, јер је мерење померања у раду приказано као разлика померања пресе и опорца, односно обухвата све додатне елементе ослонца, и износи и преко 4 mm у просеку. У том смислу, на слици је испрекиданом линијом означена само гранична носивост добијена при експерименталном испитивању. Разлике нумеричког предвиђања граничне носивости у односу на експерименталне резултате су -11.1% и -10.2% за моделе #23 M250 и M125, редом, затим -8.8% и -6.9% за моделе #25 и коначно -0.1% и $+5.4\%$ за моделе #26. Треба напоменути да модел #23-M125 није конвергирао до краја и разлика од -10.2% је дата за тачку на којој је изгубљена конвергенција. Уколико се узме у обзир облик сила – померање одговора #23-M250 модела, као и чињеница да #23-M125 модел показује већу носивост, за очекивати је да би носивост била предвиђена са разликом од максимално 5%. Суштински је постигнуто задовољавајуће подударане са експерименталним резултатима у погледу носивости.

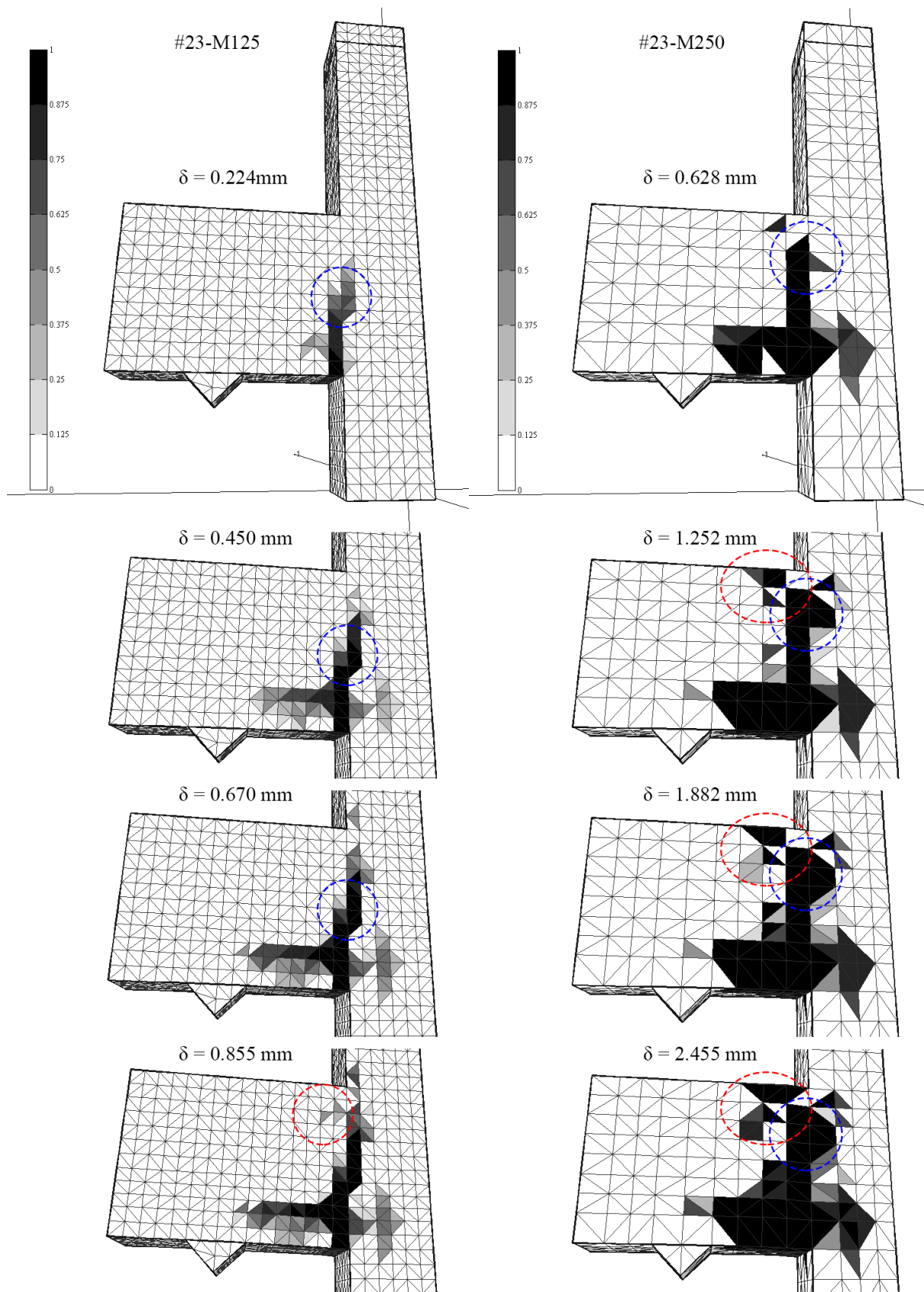


Сл. 69 Нумерички одговор сила-померање модела #23, #25 и #26 према [67]

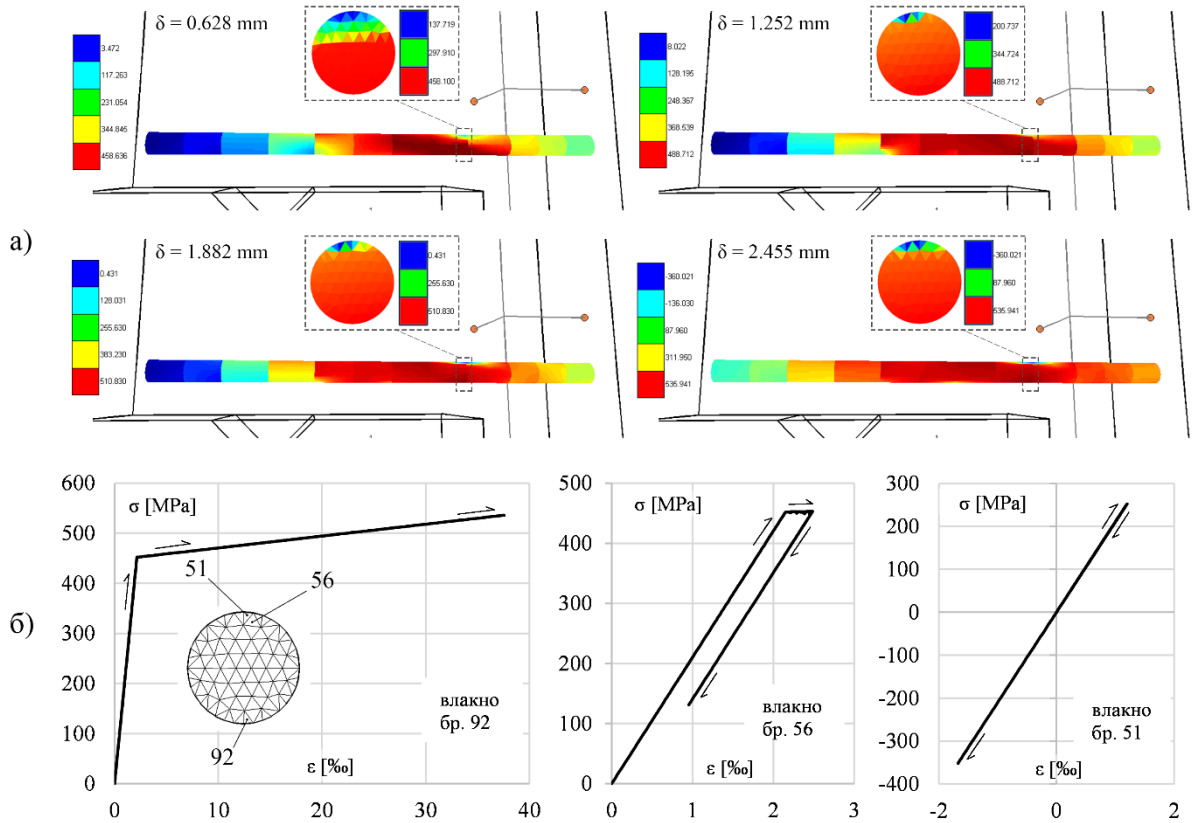
О подударану резултата у погледу померању модела приказаних на Сл. 69 се може судити искључиво у квалитативном смислу, будући да су експериментални резултати померања практично неупотребљиви квантитативно. Како је и очекивано за лом савијањем, који је био присутан код модела #23, где долази до пластификације главне арматуре за пријем савијања, експериментално и нумеричко испитивање је показало најдуктилније понашање. С друге стране, експериментални резултати указују на то да је најкртији лом одвајањем дијагонале, док при нумеричкој анализи, очигледно са Сл. 69, лом смицањем који је присутан код модела #26 је кртији од модела #25 који је достигао лом одвајањем дијагонале.

На Сл. 70 је приказано неупросечено оштећење по затезању d_t у различитим фазама нелинеарне анализе модела #23-M125 и #23-M250. Може се уочити да је суштински формирана једна локализована зона оштећења, боље уочљива на моделу са ситнијом мрежом КЕ. Зона оштећења се проширивала на коначне елементе практично вертикално у току анализе, до пред крај анализе где је ширење благо укосо према стубу, што је означено плавом бојом на слици. Овакво оштећење се може и уочити на Сл. 68 при експерименталном испитивању. Друга коса прслина која се простира на притиснутој страни кратког елемента се не појављује изражено у нумеричкој анализи модела M125, а до одређене мере је уочљива на моделу M250 и означена је са црвеном бојом на Сл. 70. Треба имати у виду да је слика са експерименталног испитивања на Сл. 68 настала после лома носача. Сlike последње фазе нумеричке анализе одговарају губитку конвергенције два модела и у том смислу је и израженије оштећење M250 модела, који је конвергирао даље од превојне тачке на сила – померање дијаграму. Из свега наведеног, може се закључити да је носивост носача достигнута формирањем континуиране косе прслине на притиснутој страни кратког елемента, што је моделом и предвиђено.

Нумерички модел је потврдио да је дошло до пластификације главне затегнуте арматуре. На слици Сл. 71а су приказани напони ивичних влакана влакнастих коначних елемената главне затегнуте арматуре у различитим фазама прорачуна. Црвеном бојом су приказана влакна са најизраженијим затезањем, и у том смислу се може уочити да главна арматура није центрично затегнута, односно да напонско стање арматурне шипке одговара елементу који је деформисан у двојној кривини. Издвојен је карактеристичан пресек на месту формиране прслине и приказано је напонско стање у одговарајућим фазама. На Сл. 71б је приказано напонско – деформацијско стање датог пресека кроз приказ одговора три карактеристична влакна. Може се уочити да формирањем прслине у бетону арматурни челик из фазе ексцентричног затезања прелази у фазу савијања.

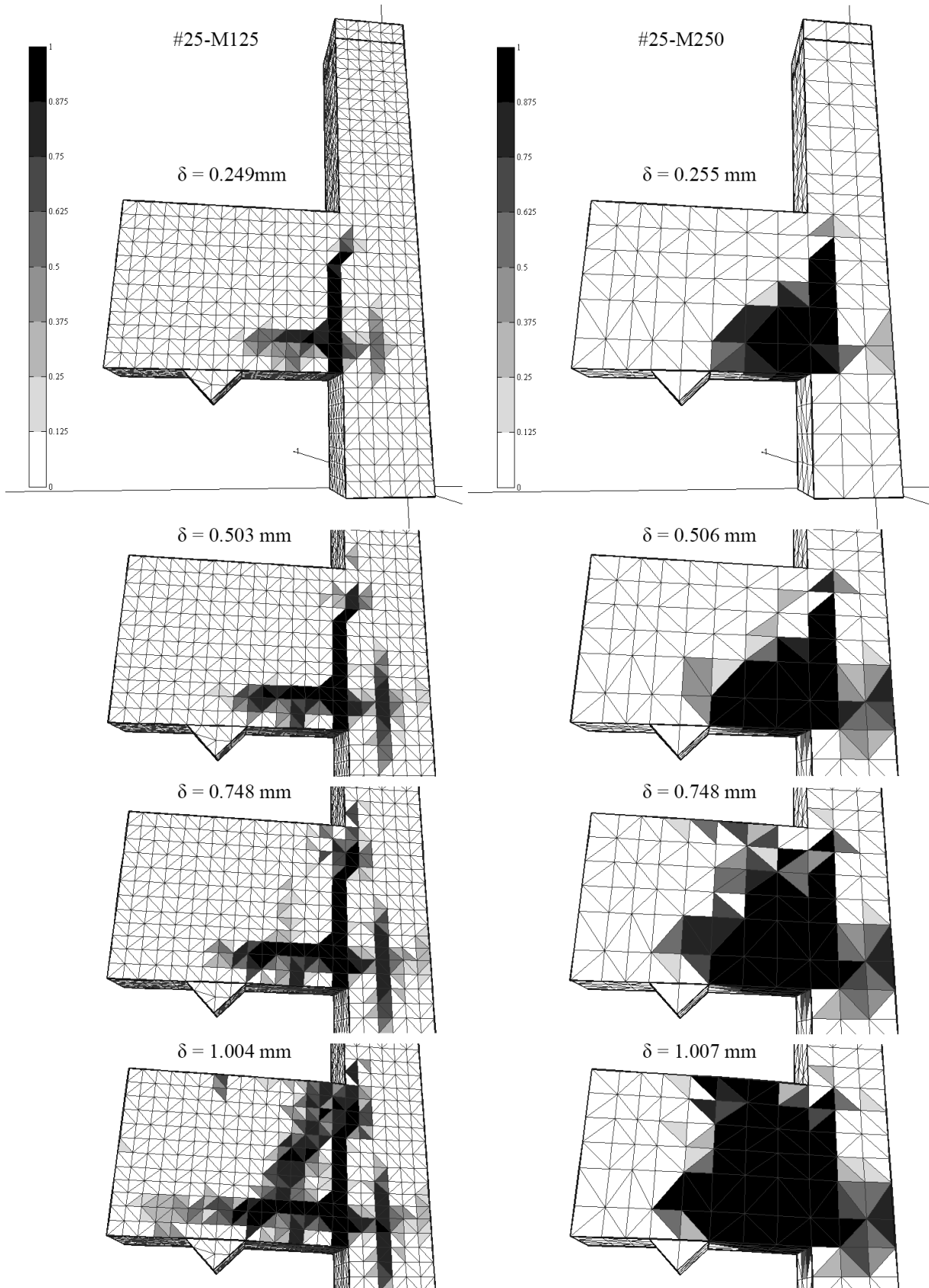


Сл. 70 Приказ оштећења d_i при анализи модела #23-M125 и #23-M250



Сл. 71 Приказ напона у влакнастом елементу главне затегнуте арматуре модела #23-M250 и карактеристични пресек на месту прслине (а) и приказ напона по влакнима у том пресеку (б)

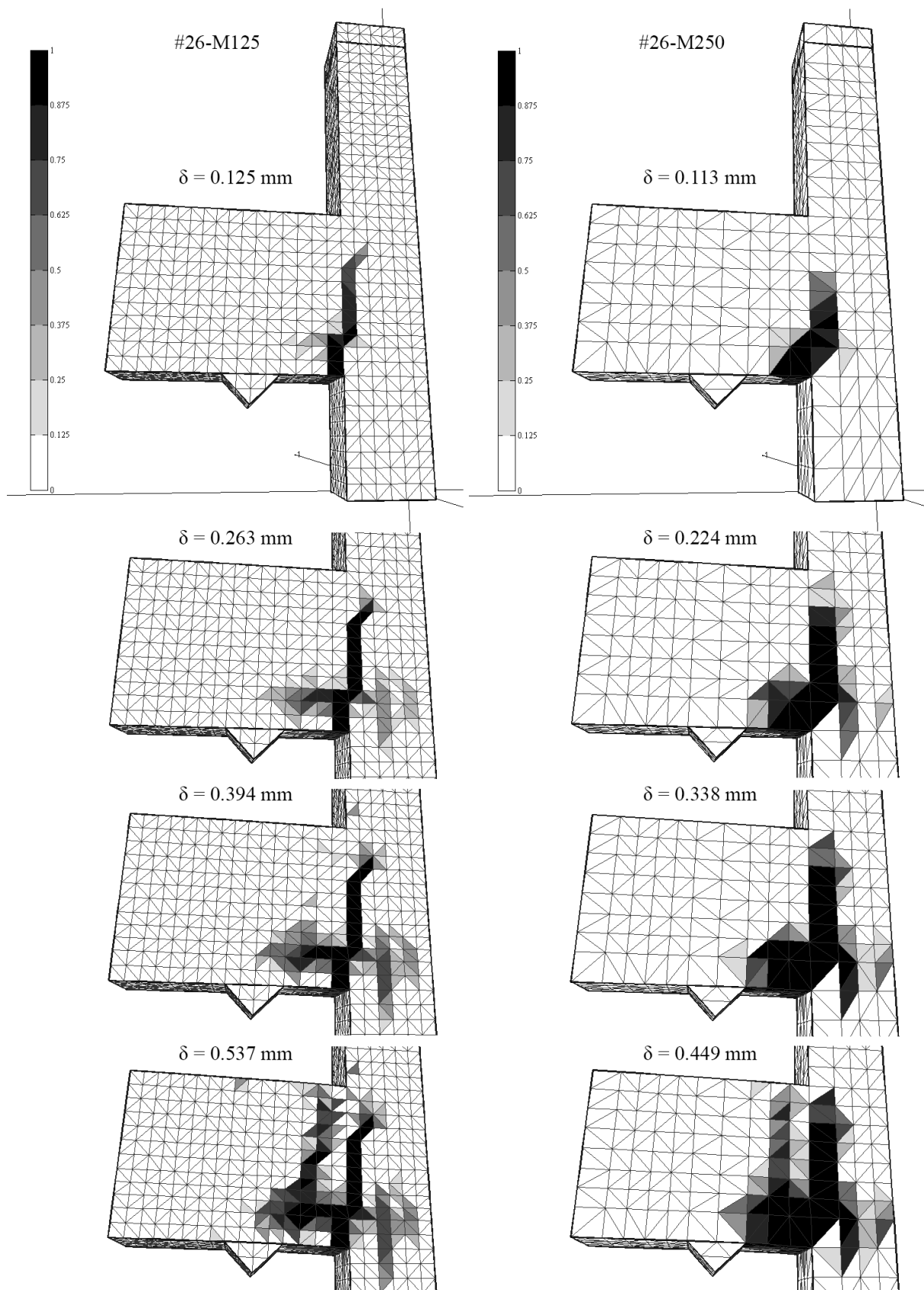
Неупросечено оштећење модела #25-M125 и #25-M250 у различитим фазама прорачуна је приказано на Сл. 72. При експерименталном испитивању овај носач је доживео лом одвајањем дијагонале, али је суштински присутна вертикална до благо закошена прслина уз стуб са затегнуте стране кратког елемента. Нумеричка анализа је показала да се и код овог носача ова благо закошена прслина формирала у старту, а да до лома носача долази формирањем косе прслине са притиснуте стране кратког елемента. Ова коса прслина је донекле стрмија у односу на експерименталну анализу, али ипак одвајање дијагонале се може препознати кроз пропацирање прслине дуж главне затегнуте арматуре. Код модела са крупнијом мрежом КЕ нису изражене две прслине, већ је присутна обједињена зоне оштећења.



Сл. 72 Приказ оштећења d_i при анализи модела #25-M125 и #25-M250

На Сл. 73 је приказано неупросечено оштећење по коначним елементима, у различитим фазама прорачуна, при анализи модела #26-M125 и #26-M250. При

експерименталном испитивању носача #26 је дошло до лома смицањем. На Сл. 68 није приказан изглед носача #26 након лома, зато што таква слика не постоји у [67]. Уместо овога, приказан је други карактеристичан носач, код којег је дошло до лома смицањем. Лом смицањем, осим вертикалне/благо закошене прслине уз стуб која се појављује и код претходно приказаних носача, подразумева и косо формирану прслину која се пружа од притиснуте стране кратког елемента до испред места аплицирања силе. Оба модела, са крупнијом и ситнијом мрежом коначних елемената, су успешно предвидела овако достигнути лом носача. Јасно се могу уочити локализоване зоне оштећења уз стуб у ранијој фази анализе, као и закошено оштећење у каснијој фази, с чијом појавом и долази до лома носача.



Сл. 73 Приказ оштећења d_i при анализи модела #26-M125 и #26-M250

6. ЗАКЉУЧЦИ И ПРАВЦИ ДАЉЕГ ИСТРАЖИВАЊА

6.1. Закључци

У оквиру ове докторске дисертације формулисан је нови конститутивни модел бетона за локалну анализу, заснован на комбинацији теорије пластичности и механике оштећења. Прегледом постојеће литературе су потврђене две кључне чињенице:

- Иако је у прошлости развијен веома велики број конститутивних модела, и практично је готово немогуће сагледати све моделе, развој нових конститутивних модела је веома актуелна област. Научно-истраживачка и инжењерска пракса су у непрекидној потрази за новим и свеобухватнијим моделима, којима би потенцијално било могуће симулирати све аспекте нелинеарног понашања материјала какав је бетон.
- Од свих наведених типова конститутивних модела, разврстаних према математичкој формулацији, модели формулисани према комбинацији теорије пластичности и механике оштећења су најактуелнији, и прегледом литературе се испоставља да развој нових модела у овој области не јењава. Испоставило се да ова област највише обећава у погледу могућности обухватања практично свих аспеката нелинеарног понашања бетона.

Формулација новог конститутивног модела бетона је детаљно изложена у оквиру трећег поглавља ове докторске дисертације. Као и код већине других модела, у формулацији овог модела су искоришћени одређени постојећи изрази, који су адаптирани и унапређени, како би се верније описало понашање материјала. За функција течења је одабрана једна од најраспрострањенијих при формулацији других модела за описивање триаксијалног стања лома бетона. Међутим, ова функција је јединствено адаптирана, са одвојеним променљивама ојачања које одговарају меридијанима притиска и затезања, а све са циљем да се може описати независно ојачање материјала при цикличном понашању. Код скоро свих других модела, при цикличном оптерећењу, прелазак на једну страну преко границе носивости (затезање или притисак) исцрпи ојачање површи, те је одговор модела при повратку по правилу линеарано-еластичан до достизања носивости супротне стране.

Увођењем секундарне површи течења у формулацију је обухваћен есенцијални аспект понашања бетона, а то је затварање прслина и поновно отварање постојећих прслина при цикличном дејству. У литератури су доступна само три друга модела у

којима се мање или више успешно обухвата овај аспект понашања бетона. С друге стране, у литератури не постоји модел у којем је затварање и отварање прслина решено увођењем секундарне површи, а како се показало у оквиру верификације према експерименталним резултатима овај притуп се показао као подобан.

Део модела према механици оштећења је формулисан растављањем на позитивни и негативни део тензора напона, односно увођењем два оштећења по затезању и притиску. Иако је овај принцип општеприхваћен и код већине других модела из исте области, будући да обезбеђује независно оштећење материјала по затезању и притиску, у исто време је немогуће обухватити ортотропију при формирању прслина, која је извесно присутна код бетона. Ово необухватање ефеката ортотропије није пресудан недостатак приликом моделирања понашања конструкција које су изложене већини уобичајених ситуација оптерећења.

Увођењем специфичне експоненцијалне функције за правило пораста оштећења се обезбедио адекватан одговор модела, на страни притиска и затезања, при преласку тачке носивости. Осим тога, дата функција је адаптирана према чврстоћи бетона, како би се симулирало дуктилно понашање бетона нижих класа, односно кртије понашање бетона виших класа, које је забележено при експерименталним испитивањима, без увођења додатних параметара модела. Исто тако, овом функцијом је обезбеђено и понашање независно од густине мреже коначних елемената којима се моделира носач, као и различита дуктилност одговора при различитим триаксијалним стањима напрезања.

Може се констатовати следеће:

- Развијени конститутивни модел је формулисан према неспрегнутој комбинацији теорије пластичности и механике оштећења, будући да се испоставило да овај тип формулације модела пре свега пружа највеће могућности у смислу обухватања већине аспеката нелинеарног понашања материјала какав је бетон, а у исто време, неспрегнута комбинација ове две теорије је далеко једноставнија и погоднија за формулацију од спрегнуте комбинације.
- За употребу конститутивног модела је довољно дефинисање само 4 параметра, од којих су сви јасне механичке карактеристике материјала: чврстоћа при притиску, чврстоћа при затезању, модул еластичности и енергија лома материјала. У поређењу са свим другим моделима, овај избор параметара, који је директно везан за механичке карактеристике материјала који се моделира, делује адекватно. У

недостатку појединих података, могу се чак употребити препоруке разних правилника за остале параметре, само на основу чврстоће при притиску.

- Формулисани модел обухвата већину аспеката нелинеарног понашања материјала попут бетона: појава прслина праћена са смањењем носивости бетона по затезању, ефекте затварања прслина при растерећењу, пад крутости, ојачање материјала пре достизања граничне носивости при притиску, затим омекшање материјала, зависно од триаксијалног напонског стања, у зони после достизања граничне носивости при притиску, запреминска експанзија и трајне деформације при напрезањима притиском. Ефекти нелинеарног понашања бетона који нису обухваћени овим моделом су: опадање смичуће носивости у равни прслине са повећањем ширине прслине (ефекат уклињавање агрегата) и анизотропија услед присуства прслина. Осим овога, реолошке карактеристике течење и скупљање бетона, као и зависност одговора од брзине наношења оптерећења нису били предмет истраживања у оквиру ове докторске дисертације.
- Ефекти затварања прслина и поновног отварања постојећих прслина су, иновативно за ову област модела, формулисани увођењем секундарне површи течења. Показало се да овакав приступ даје веома добре резултате, али у исто време оставља простор за унапређење будући да је ово пионирски покушај у развоју конститутивних модела са овом идејом.
- За праћење одговора модела пре и после достизања чврстоће, при притиску или затезању, није потребно увођење никаквих додатних параметара који утичу на карактеристике одговора. Нелинеарни одговор модела је у потпуности дефинисан преко базичних механичких карактеристика материјала, а у исто време у зависности од триаксијалног стања напрезања.
- Формулацијом модела је обезбеђен објективан одговор при моделирању конструкције различитим густинама мреже коначних елемената. Ова величина коначних елемената, за разлику од већине популарних комерцијалних софтвера и модела који су у употреби, се аутоматски преузима из генерисане мреже коначних елемената у *Matrix 3D* софтверу, тако да ни у овом случају није потребна никаква интервенција корисника. Осим тога, величина коначних елемената, захваљујући овом аутоматизму, чам може бити различита у оквиру истог носача, а да то не утиче на функционалност модела, односно одговор ће и даље бити независан од генерисане мреже.

- Формулисани модел је у потпуности кодиран у програмски језик и тестиран на нивоу интеграционе тачке за најразличитије историје оптерећења, где се потврдило да развијене процедуре попут уназад-Ојлер задовољавајуће функционишу, а сам одговор се веома добро подудара са експерименталним запажањима.
- За дати модел је до најситнијих детаља изведена и исписана тангентна материјална матрица, која је конзистентна са Њутн-Распоновим итерацијама у процесу нелинеарне анализе носача методом коначних елемената. Изведена материјална матрица је тестирана на једноставном елементу, у смислу контроле стопе конвергенције приликом њеног коришћења, при нелинеарној анализи, и потврђен је веома висок ниво стопе конвергенције.
- Осим што је модел кодиран у програмски језик и тестиран на нивоу интеграционе тачке, такође је и имплементиран у комплетан софтвер за анализу конструкција методом коначних елемената. Ово је омогућено извођењем тангентне материјалне матрице модела, али и чињеницом да је аутор дисертације уједно аутор и комплетног софтвера за нелинеарну анализу. На овај начин је модел тестиран на нивоу реалних конструкцијских примера и његове перформансе су демонстриране. Осим тога, будући да аутор има комплетну контролу над кодом софтвера омогућена је и детаљна анализа конвергенције модела, и утицај појединих параметара на успешност конвергенције.

6.2. Правци даљег истраживања

Развој конститутивних модела материјала, а нарочито за материјал какав је бетон, је веома актуална тема, већ дуги низ деценија. Научно-истраживачка, али и инжењерска пракса су у константној потрази за бољим и свеобухватнијим моделима за потребе моделирања нелинеарног понашања бетона. У том смислу, потпуно је јасно да се развој конститутивних модела за бетон може очекивати и у будућности. У оквиру ове докторске дисертације су предложени неки основни принципи за решавање одређених проблема при развоју доброг конститутивног модела бетона, а свакако да је остало још много простора да се овај модел унапреди, или чак да се ови принципи искористе за развој нових модела који ће још успешније описивати нелинеарно понашање материјала какав је бетон.

У оквиру закључака овог рада, таксативно су наведени аспекти нелинеарног понашања бетона који нису обухваћени овим моделом, а такође су наведени и аспекти

понашања који у оквиру ове докторске дисертације нису разматрани. У том смислу, обухватање неких од ових аспеката, у оквиру потенцијалног новог и унапређеног, модела, би се могао сматрати правцем даљег испитивања.

Конкретно, обухватање опадање смичуће носивости у равни прслине са повећањем ширине прслине, односно ефекта уклињавања агрегата, није обухваћено моделом, будући да у оквирима ове формулације није могуће описати овакав феномен. Иако сам пад смичуће носивости при отварању прслина, делује као ефекат који по дефиницији треба да се опише механиком оштећења, поставља се питање на који начин описати повећање носивости при поновном затварању прслина, будући да механика оштећења не подразумева повратак интегритета.

Други аспект нелинеарног понашања бетона који није обухваћен моделом је анизотропија у материјалу услед присуства прслина. Овај аспект је на неки начин уско повезан са претходно наведеним ефектом уклињавања агрегата, али осим наведеног проблема, за увођење саме анизотропије нема значајних препрека. Довољно је оштећење материјала описати са тензором, уместо са две променљиве оштећења, што би наравно значајно компликовало формулацију модела.

Осим ових аспеката нелинеарног понашања бетона који нису обухваћени, у претходном поглављу су наведени и реолошки аспекти понашања бетона и утицај брзине наношења оптерећења на одговор, који нису разматрани у оквиру ове докторске дисертације. По ауторовом мишљењу, увођењем ефеката скупљања, течења и/или утицаја брзине наношења оптерећења на одговор модела је практично тема за нову докторску дисертацију. А унапређењем овог модела, или неког другог модела, или чак формирањем новог модела, којим би се обухватили и ови ефекти, би се свакако веома допринело истраживању у области формирања конститутивних модела. Као једна од примена ових конститутивних модела за локалну употребу, наведена је анализа при оптерећењу од експлозија или удара возилима у конструкцију, где је веома битно описати понашање модела у зависности од брзине наношења оптерећења.

Осим самог унапређења функционалности модела, сваки даљи рад на представљању, популаризацији и омогућавању ширем кругу корисника да овај модел користи, представља потенцијални правац даљег рада. Модел је имплементиран у *Matrix 3D* програм, који је доступан у научно-истраживачке сврхе у овом тренутку, али рад на комерцијализацији овог софтвера би значајно допринео могућности употребе развијеног модела. Такође, будући да је аутор упознат и са другим популарним програмским

језицима, осим *Matlab*-а под којим је написан *Matrix 3D*, у плану је кодирање функција модела у *C++* и *C#* програмске језике, и постављање датих функција на персонални блог аутора зарад јавне доступности. Као достижан циљ се поставља и формирање функција кода који ће бити применљиве у *OpenSees* програмском пакету, будући да је исти веома популаран алат за нелинеарну анализу конструкција, и отвореног је типа.

7. ЛИТЕРАТУРА

1. Abu-Lebdeh TM, Voyiadjis GZ (1993) Plasticity-Damage Model for Concrete under Cyclic Multiaxial Loading. *J Eng Mech* 119:1465–1484. doi: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1993)119:7(1465)
2. Addessi D, Marfia S, Sacco E (2002) A plastic nonlocal damage model. *Comput Methods Appl Mech Eng* 191:1291–1310. doi: 10.1016/S0045-7825(01)00325-5
3. Ansari F, Li Q (1998) High-strength concrete subjected to triaxial compression. *ACI Mater J* 95:747–755
4. Aslani F, Jowkarmeimandi R (2012) Stress–strain model for concrete under cyclic loading. *Mag Concr Res* 64:673–685. doi: 10.1680/macr.11.00120
5. Attard MM, Setunge S (1996) Stress strain relationship of confined and unconfined concrete. *ACI Mater J* 93:432–442. doi: 10.14359/9847
6. Ayhan B, Jehel P, Brancherie D, Ibrahimbegovic A (2013) Coupled damage-plasticity model for cyclic loading: Theoretical formulation and numerical implementation. *Eng Struct* 50:30–42. doi: 10.1016/j.engstruct.2012.11.012
7. Babu RR, Benipal GS, Singh AK (2005) Constitutive Modelling of Concrete : an Overview. *Asian J Civ Eng* 6:211–246. doi: 10.3166/rfgc.7.911-971
8. Bahn BY, Hsu TTC (1998) Stress-strain behavior of concrete under cyclic loading. *ACI Mater J* 95:178–193
9. Bažant ZP (1978) Endochronic inelasticity and incremental plasticity. *Int J Solids Struct* 14:691–714. doi: 10.1016/0020-7683(78)90029-X
10. Bažant ZP (1984) Microplane Model For Strain-controlled Inelastic Behaviour. *Mech Eng Mater* 45–59
11. Bažant ZP, Bhat P (1976) Endochronic theory of inelasticity and failure of concrete. *J Eng Mech Div* 102:701–721
12. Bažant ZP, Byung H (1982) Strain-rate effect in rapid triaxial loading of concrete. *J Eng Mech Div* 108:764–782
13. Bažant ZP, Caner FC, Carol I, Adley MD, Akers SA (2000) MicroPlane Model M4 for Concrete. *ASCE J* 126:944–953

14. Bažant ZP, Ching-Long Shieh (1978) Endochronic model for nonlinear triaxial behavior of concrete. *Nucl Eng Des* 47:305–315. doi: 10.1016/0029-5493(78)90074-2
15. Bažant ZP, Oh BH (1983) Crack band theory for fracture of concrete. *Matériaux Constr* 16:155–177. doi: 10.1007/BF02486267
16. Bazant ZP, Sener S, Prat PC (1988) Size effect tests of torsional failure of plain and
17. Bigoni D, Piccolroaz A (2004) Yield criteria for quasibrittle and frictional materials. *Int J Solids Struct* 41:2855–2878. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2003.12.024
18. Bobiński J, Tejchman J (2005) Modelling of concrete behaviour with a non-local continuum damage approach. *Arch Hydroengineering Environ Mech* 52:243–263
19. Bobiński J, Tejchman J (2006) Modeling of Strain Localization in Quasi-Brittle Materials With a Coupled Elasto-Plastic-Damage Model. *J Theor Appl Mech* 767–782
20. Bresler B, Pister KS (1958) Strength of Concrete Under Combined Stresses
21. Buyukozturk O (1977) Nonlinear analysis of reinforced concrete structures. *Comput Struct* 7:149–156
22. Buyukozturk O, Shareef SS (1985) Constitutive modeling of concrete in finite element analysis. *Comput Struct* 21:581–610. doi: 10.1016/0045-7949(85)90135-X
23. Buyukozturk O, Tseng T-M (1983) Concrete in biaxial cyclic compression. *J Struct Eng* 110:461–476
24. Calvi PM, Bentz EC, Collins MP (2017) Pure mechanics crack model for shear stress transfer in cracked reinforced concrete. *ACI Struct J* 114:545–554. doi: 10.14359/51689460
25. Campione G, La Mendola L (2001) Stress-strain behavior in compression of lightweight fiber reinforced concrete under monotonic and cyclic loads. *Trans Built Environ* 57:387–396
26. Candappa DC, Sanjayan JG, Setunge S (2001) Complete Triaxial Stress-Strain Curves of High-Strength Concrete. *J Mater Civ Eng* 13:209–215. doi: 10.1061/(ASCE)0899-1561(2001)13:3(209)
27. Caner FC, Bažant ZP (2000) Microplane Model M4 for Concrete. II: Algorithm and Calibration. *J Eng Mech* 126:954–961. doi: 10.1061/(ASCE)0733-

- 9399(2000)126:9(954)
28. Caner FC, Bažant ZP (2012) Microplane Model M7 for Plain Concrete. I: Formulation. *J Eng Mech* 139:1714–1723. doi: 10.1061/(asce)em.1943-7889.0000570
 29. Caner FC, Bažant ZP (2012) Microplane Model M7 for Plain Concrete. II: Calibration and Verification. *J Eng Mech* 139:1724–1735. doi: 10.1061/(asce)em.1943-7889.0000571
 30. Carol I, Prat PC, Bažant ZP (1992) New explicit microplane model for concrete: Theoretical aspects and numerical implementation. *Int J Solids Struct* 29:1173–1191. doi: 10.1016/0020-7683(92)90141-F
 31. Carreira DJ, Chu K-H (1986) Stress-Strain Relationship for Reinforced Concrete in Tension. *ACI J Proc* 83:21–28
 32. Cedolin L, Crutzen Jr YR, Dei Poli S (1977) Triaxial stress-strain relationship for concrete. *J Eng Mech* 103:423–439
 33. Chalioris CE, Karayannis CG, Favvata MI (2007) Cyclic testing of reinforced concrete beam-column joints with crossed inclined bars. *WIT Trans Modelling Simul* 46:623–632. doi: 10.2495/CMEM070621
 34. Channakeshava C, Sundara Raja Iyengar KT (1988) Elasto-plastic Cracking Analysis of Reinforced Concrete. *J Struct Eng* 114:2421–2438. doi: 10.1061/(ASCE)0733-9445(1988)114:11(2421)
 35. Chen P, Liu C, Wang Y (2018) Size effect on peak axial strain and stress-strain behavior of concrete subjected to axial compression. *Constr Build Mater* 188:645–655. doi: 10.1016/j.conbuildmat.2018.08.072
 36. Chen W-F (2007) *Plasticity in reinforced concrete*, Reprint. McGraw-Hill, New York
 37. Chen W-F, Saleeb AF (1994) *Constitutive Equations for Engineering Materials*, Second, re. Elsevier Science B.V., Amsterdam
 38. Cho JY, Kim NS, Cho NS, Choun YS (2004) Stress-Strain Relationship of Reinforced Concrete Subjected to Biaxial Tension. *ACI Struct J* 101:202–208. doi: 10.14359/13017
 39. Chopra AK (1995) *Dynamics of structures: theory and applications to earthquake engineering*. Prentice Hall, Inc., New Jersey

-
40. Cicekli U, Voyiadjis GZ, Abu Al-Rub RK (2007) A plasticity and anisotropic damage model for plain concrete. *Int J Plast* 23:1874–1900. doi: 10.1016/j.ijplas.2007.03.006
 41. Combescure C, Dumontet H, Voltaire F (2013) Homogenised constitutive model coupling damage and debonding for reinforced concrete structures under cyclic solicitations. *Int J Solids Struct* 50:3861–3874. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2013.07.021
 42. Comi C (2001) Non-local model with tension and compression damage mechanisms. *Eur J Mech A/Solids* 20:1–22. doi: 10.1016/S0997-7538(00)01111-6
 43. Comi C, Perego U (2001) Fracture energy based bi-dissipative damage model for concrete. *Int J Solids Struct* 38:6427–6454. doi: 10.1016/S0020-7683(01)00066-X
 44. Contrafatto L, Cuomo M (2006) A framework of elastic-plastic damaging model for concrete under multiaxial stress states. *Int J Plast* 22:2272–2300. doi: 10.1016/j.ijplas.2006.03.011
 45. Coon MD, Evans RJ (1972) Incremental constitutive laws and their associated failure criteria with application to plain concrete. *Int J Solids Struct* 8:1169–1183. doi: 10.1016/0020-7683(72)90030-3
 46. Cornelissen HAW, Hordijk DA, Reinhardt HW (1986) Experimental determination of crack softening characteristics of normalweight and lightweight concrete. *Heron* 31:45–56
 47. Crisfield MA (1991) *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. John Wiley & sons, Chichester
 48. Crisfield MA (1996) *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, volume 2 Advanced Topics, Second Edition*
 49. Cui J, Hao H, Shi Y, Li X, Du K (2017) Experimental study of concrete damage under high hydrostatic pressure. *Cem Concr Res* 100:140–152. doi: 10.1016/j.cemconres.2017.06.005
 50. Dabbagh H, Aslani F (2009) A comparative study on the cyclic constitutive models of concrete. In: *4th International Conference on Construction Materials – Performance, Innovations and Structural Implications (ConMat'09)*. Nagoya, Japan, pp 163–170
 51. Daneshyar A, Ghaemian M (2017) Coupling microplane-based damage and continuum
-

- plasticity models for analysis of damage-induced anisotropy in plain concrete. *Int J Plast* 95:216–250. doi: 10.1016/j.ijplas.2017.04.011
52. Darwin D, Pecknold DA (1977) Analysis of cyclic loading of plane R C structures. *Comput Struct* 7:137–147. doi: 10.1016/0045-7949(77)90068-2
53. Delaunay B (1934) Sur la sphère vide. A la mémoire de Georges Voronoï. *Bull l'Académie des Sci l'URSS* 793–800
54. Desayi P, Krishnan S (1964) Equation for the Stress-Strain Curve of Concrete. *ACI J Proc* 61:345–350
55. Dougill JW (1975) Some remarks on path independence in the small in plasticity. *Q Appl Math* 33:233–243. doi: 10.1090/qam/99663
56. Dougill JW (1976) On stable progressively fracturing solids. *J Appl Math Phys* 27:423–437. doi: 10.1007/BF01594899
57. Du X-L, Lu D-C, Gong Q-M, Zhao M (2009) Nonlinear Unified Strength Criterion for Concrete under Three-Dimensional Stress States. *J Eng Mech* 136:51–59. doi: 10.1061/(asce)em.1943-7889.0000055
58. Edalat-Behbahani A, Barros JAO, Ventura-Gouveia A (2017) Three dimensional plastic-damage multidirectional fixed smeared crack approach for modelling concrete structures. *Int J Solids Struct* 115–116:104–125. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2017.03.006
59. Elnashai AS, Nicholson RW (1986) Some Restrictions on Lehigh-Purdue Concrete Plasticity Model. *J Eng Mech* 112:217–221. doi: 10.1061/(asce)0733-9399(1986)112:2(217)
60. Elwi AA, Murray DW (1979) A 3D Hypoelastic Concrete Constitutive Relationship. *J Eng Mech* 105:623–641
61. EN 1992-1-1 (2004) Eurocode 2: Design of concrete structures - Part 1-1: General rules and rules for buildings. European Committee for Standardization, Brussels
62. Etse G, Willam KJ (1994) Fracture Energy Formulation for Inelastic Behavior of Plain Concrete. *J Eng Mech* 120:1983–2011. doi: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1994)120:9(1983)
63. Fafitis A, Shah SP (1986) Constitutive Model for Biaxial Cyclic Loading of Concrete. *J*

- Eng Mech 112:760–775
64. Fallah Pour A, Ozbakkaloglu T, Vincent T (2018) Simplified design-oriented axial stress-strain model for FRP-confined normal- and high-strength concrete. *Eng Struct* 175:501–516. doi: 10.1016/j.engstruct.2018.07.099
 65. Farahat AM, Kawakami M, Ohtsu M (1995) Strain-space plasticity model for the compressive hardening-softening behaviour of concrete. *Constr Build Mater* 9:45–59. doi: 10.1016/0950-0618(95)92860-J
 66. Faria R, Oliver J, Cervera M (1998) A strain-based plastic viscous-damage model for massive concrete structures. *Int J Solids Struct* 35:1533–1558. doi: 10.1016/S0020-7683(97)00119-4
 67. Fattuhi NI (1990) Strength of SFRC Corbels Subjected to Vertical Load. *J Struct Eng* 116:701–718. doi: 10.1061/(ASCE)0733-9445(1990)116:3(701)
 68. Gálvez JC, Elices M, Guinea G V., Planas J (1998) Mixed mode fracture of concrete under proportional and nonproportional loading. *Int J Fract* 94:267–284. doi: 10.1023/A:1007578814070
 69. Gambarova PG, Floris C (1986) Microplane model for concrete subject to plane stresses. *Nucl Eng Des* 97:31–48. doi: 10.1016/0029-5493(86)90069-5
 70. Gernay T, Millard A, Franssen JM (2013) A multiaxial constitutive model for concrete in the fire situation: Theoretical formulation. *Int J Solids Struct* 50:3659–3673. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2013.07.013
 71. Gerstle KH (1981) Simple Formulation of Triaxial Concrete Behavior. *ACI J Proc* 78:382–387. doi: 10.14359/10523
 72. Gerstle KH, Aschl H, Bellotti R, Bertacchi P, Kotsovos MD, Ko H-Y, Linse D, Newman JB, Rossi P, Schickert G, Taylor MA, Traina LA, Winkler H, Zimmerman RM (1980) Behavior of concrete under multiaxial stress states. *J Eng Mech Div* 106:1383–1403
 73. Gokulnath C, Varaprasad D, Saravanan U (2019) A three dimensional constitutive model for plain cement concrete. *Constr Build Mater* 203:456–468. doi: 10.1016/j.conbuildmat.2019.01.109
 74. Grassl P (2009) On a damage–plasticity approach to model concrete failure. *Proc Inst*

- Civ Eng - Eng Comput Mech 162:221–231. doi: 10.1680/eacm.2009.162.4.221
75. Grassl P, Jirásek M (2006) Damage-plastic model for concrete failure. *Int J Solids Struct* 43:7166–7196. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2006.06.032
76. Grassl P, Lundgren K, Gylltoft K (2002) Concrete in compression: A plasticity theory with a novel hardening law. *Int J Solids Struct* 39:5205–5223. doi: 10.1016/S0020-7683(02)00408-0
77. Grassl P, Xenos D, Nyström U, Rempling R, Gylltoft K (2013) CDPM2: A damage-plasticity approach to modelling the failure of concrete. *Int J Solids Struct* 50:3805–3816. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2013.07.008
78. Guo L, Guo X, Hong J, Wang Y (2017) Constitutive relation of concrete containing meso-structural characteristics. *Results Phys* 7:1155–1160. doi: 10.1016/j.rinp.2017.03.005
79. Hammoud R, Boukhili R, Yahia A (2013) Unified Formulation for a Triaxial Elastoplastic Constitutive Law for Concrete. *Materials (Basel)* 6:4226–4248. doi: 10.3390/ma6094226
80. Hampel T, Speck K, Scheerer S, Ritter R, Curbach M (2009) High-Performance Concrete under Biaxial and Triaxial Loads. *J Eng Mech* 135:1274–1280. doi: 10.1061/(asce)0733-9399(2009)135:11(1274)
81. Han DJ, Chen WF (1987) Constitutive Modeling in Analysis of Concrete Structures. *J Eng Mech* 113:577–593. doi: 10.1061/(asce)0733-9399(1987)113:4(577)
82. Hansen NR, Schreyer HL (1994) A thermodynamically consistent framework for theories of elastoplasticity coupled with damage. *Int J Solids Struct* 31:359–389. doi: 10.1016/0020-7683(94)90112-0
83. Hibbitt HD (1987) A simplified model for concrete at low confining pressures. *Nucl Eng Des* 104:313–320. doi: 10.1016/0029-5493(87)90209-3
84. Hoek E, T. B (1980) Empirical strength criterion for rock masses. *J. Geotech. Eng. Div.* 106:1013–1035
85. Hsieh SS, Ting EC, Chen WF (1982) A plastic-fracture model for concrete. *Int J Solids Struct* 18:181–197. doi: 10.1016/0020-7683(82)90001-4

-
86. Hsu TTC, Mo YL (2010) Unified Theory of Concrete Structures
 87. Huang LC, Li J, Tue N V., Němeček J, Püschel T (2017) Numerical aspects of microplane constitutive models for concrete. *Appl Math Model* 41:530–548. doi: 10.1016/j.apm.2016.09.006
 88. Il'iusin AA (1961) On the postulate of plasticity. *J Appl Math Mech* 25:746–752. doi: 10.1016/0021-8928(61)90044-2
 89. Imran I, Pantazopoulou SJ (2001) Plasticity Model for Concrete under Triaxial Compression. *J Eng Mech* 127:281–290. doi: 10.1061/(ASCE)0733-9399(2001)127:3(281)
 90. Jason L, Huerta A, Cabot GP (2006) An Elastic Plastic Damage Formulation For Concrete : Application To Elementary And Structural Tests. *Comput Methods Appl Mech Eng* 195:7077–7092
 91. Jason L, Pijaudier-Cabot G, Huerta A, Crouch R, Ghavamian S (2004) An elastic plastic damage formulation for the behavior of concrete. *Fract Mech Concr Struct* 549–556
 92. Jefferson AD (2003) Craft - A plastic-damage-contact model for concrete. I. Model theory and thermodynamic considerations. *Int J Solids Struct* 40:5973–5999. doi: 10.1016/S0020-7683(03)00390-1
 93. Jefferson AD, Mihai IC, Tenchev R, Alnaas WF, Cole G, Lyons P (2016) A plastic-damage-contact constitutive model for concrete with smoothed evolution functions. *Comput Struct* 169:40–56. doi: 10.1016/j.compstruc.2016.02.008
 94. Jiang C, Wu YF, Jiang JF (2017) Effect of aggregate size on stress-strain behavior of concrete confined by fiber composites. *Compos Struct* 168:851–862. doi: 10.1016/j.compstruct.2017.02.087
 95. Jirásek M, Rolshoven S, Grassl P (2004) Size effect on fracture energy induced by non-locality. *Int J Numer Anal Methods Geomech* 28:653–670. doi: 10.1002/nag.364
 96. Jovanović Đ, Žarković D, Brujić Z, Lađinović Đ (2017) Fiber beam-column element implementation in academic cad software Matrix 3D. *Build Mater Struct* 60:57–77. doi: 10.5937/grmk1702057J
 97. Jovanović, Žarković D, Vukobratović V, Brujić Z (2019) Hysteresis model for beam-to-
-

- column connections of steel storage racks. *Thin-Walled Struct* 142. doi: 10.1016/j.tws.2019.04.056
98. Kakavand MRA, Taciroglu E (2019) An Enhanced Damage-Plasticity Model for Predicting the Cyclic Behavior of Plain Concrete under Multiaxial Loading Conditions. *Front Struct Civ Eng*
99. Kang HD, Willam KJ (1999) Localization Characteristics of Triaxial Concrete Model. *J Eng Mech* 125:941–950. doi: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1999)125:8(941)
100. Karpenko NI, Eryshev VA, Latysheva E V. (2015) Stress-strain diagrams of concrete under repeated loads with compressive stresses. *Procedia Eng* 111:371–377. doi: 10.1016/j.proeng.2015.07.103
101. Khaloo AR, Ahmad SH (1989) Behavior of High-Strength Concrete Under Torsional Triaxial Compression. *ACI Mater J* 86:550–558
102. Kotsovos MD, Newman JB (1978) Generalized stress-strain relations for concrete. *J Eng Mech Div* 845–856
103. Krätzig WB, Pölling R (1998) Elasto-plastic damage-theories and elasto-plastic fracturing-theories – a comparison. *Comput Mater Sci* 13:117–131. doi: 10.1016/S0927-0256(98)00052-4
104. Krätzig WB, Pölling R (2004) An elasto-plastic damage model for reinforced concrete with minimum number of material parameters. *Comput Struct* 82:1201–1215. doi: 10.1016/j.compstruc.2004.03.002
105. Kristombu Baduge S, Mendis P, Ngo T, Portella J, Nguyen K (2018) Understanding failure and stress-strain behavior of very-high strength concrete (>100 MPa) confined by lateral reinforcement. *Constr Build Mater* 189:62–77. doi: 10.1016/j.conbuildmat.2018.08.192
106. Kupfer HB, Hilsdorf HK (1973) Behavior of Concrete under Biaxial Stresses. *J Eng Mech Div* 99:853–866
107. Kupfer HB, Hilsdorf HK, Rusch H (1969) Behavior of Concrete Under Biaxial Stresses. *ACI J Proc* 66:656–666
108. Labbane M, Saha NK, Ting EC (1993) Yield criterion and loading function for concrete

- plasticity. *Int J Solids Struct* 30:1269–1288. doi: 10.1016/0020-7683(93)90016-Z
109. Lacidogna G, Accornero F, Corrado M, Carpinteri A (2013) Crushing and fracture energies in concrete specimens monitored by Acoustic Emission. *Proc 8th Int Conf Fract Mech Concr Concr Struct Fram 2013* 1726–1736
110. Lade P V., Nelson RB, Ito YM (1987) Nonassociated Flow and Stability of Granular Materials. *J Eng Mech* 113:1302–1318. doi: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1987)113:9(1302)
111. Lade P V., Nelson RB, Ito YM (1988) Instability of Granular Materials with Nonassociated Flow. *J Eng Mech* 114:2173–2191. doi: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1988)114:12(2173)
112. Lee J, Fenves GL (1998) Plastic-Damage Model for Cyclic Loading of Concrete Structures. *J Eng Mech* 124:892–900. doi: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1998)124:8(892)
113. Lee J, Fenves GL (1998) A plastic-damage concrete model for earthquake analysis of dams. *Earthq Eng Struct Dyn* 27:937–956. doi: 10.1002/(SICI)1096-9845(199809)27:9<937::AID-EQE764>3.0.CO;2-5
114. Lee Y, Willam KJ (1995) Experimental observations of concrete behavior under uniaxial compression. *Fract Mech Concr Struct* 397–414
115. Lemaitre J (1984) How to use damage mechanics. *Nucl Eng Des* 80:233–245. doi: 10.1016/0029-5493(84)90169-9
116. Lemaitre J (1996) *A Course on Damage Mechanics*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg
117. Lemaitre J, Chaboche J-L (1990) *Damage mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge
118. Li J, Tue N V., Caner FC (2013) Microplane constitutive model M4L for concrete. II: Calibration and validation. *Comput Struct* 128:146–159. doi: 10.1016/j.compstruc.2013.06.009
119. Li L, Harmon TG (1990) Three-Parameter Failure Criterion for Concrete. *J Mater Civ Eng* 2:215–222. doi: 10.1061/(ASCE)0899-1561(1990)2:4(215)
120. Li P, Wu YF (2016) Stress-strain behavior of actively and passively confined concrete

- under cyclic axial load. *Compos Struct* 149:369–384. doi: 10.1016/j.compstruct.2016.04.033
121. Li Q, Ansari F (2000) High-strength concrete in triaxial compression by different sizes of specimens. *ACI Struct J* 97:684–689
122. Liu TC, Nilson AH, Slate FO (1972) Biaxial stress-strain relations for concrete. *J Struct Div ASCE* 98:1025–1034
123. Liu XS, Ning JG, Tan YL, Gu QH (2016) Damage constitutive model based on energy dissipation for intact rock subjected to cyclic loading. *Int J Rock Mech Min Sci* 85:27–32. doi: 10.1016/j.ijrmms.2016.03.003
124. Lu D, Du X, Wang G, Zhou A, Li A (2016) A three-dimensional elastoplastic constitutive model for concrete. *Comput Struct* 163:41–55. doi: 10.1016/j.compstruc.2015.10.003
125. Lu X, Hsu C-TT (2007) Tangent Poisson's ratio of high-strength concrete in triaxial compression. *Mag Concr Res* 59:69–77. doi: 10.1680/macr.2007.59.1.69
126. Lubliner J, Oliver J, Oller S, Oñate E (1989) A plastic-damage model for concrete. *Int J Solids Struct* 25:299–326. doi: 10.1016/0020-7683(89)90050-4
127. Luccioni B, Oller S, Danesi R (1996) Coupled plastic-damaged model. *Comput Methods Appl Mech Eng* 129:81–89. doi: 10.1016/0045-7825(95)00887-X
128. Luccioni BM, Rougier VC (2005) A plastic damage approach for confined concrete. *Comput Struct* 83:2238–2256. doi: 10.1016/j.compstruc.2005.03.014
129. Ma C, Chen WZ (2016) Three-dimensional elastoplastic damage concrete model by dissipation-based arc-length method. *Adv Struct Eng* 19:1949–1962. doi: 10.1177/1369433216649391
130. Majewski S, Wandzik G (2009) MWW3 Model for Concrete – Adjustment of Failure and Yield Surfaces for Use in Computational FEM System MAFEM3D. *Archit Civ Eng enviroment* 2/2009:33–44
131. Mander JB, Priestley MJN, Park R (1988) Theoretical Stress-Strain Model for Confined Concrete. *J Struct Eng* 114:1804–1826. doi: 10.1061/(ASCE)0733-9445(1988)114:8(1804)

-
132. Mander JB, Priestley MJN, Park R (1988) Observed Stress-Strain Behavior of Confined Concrete. *J Struct Eng* 114:1827–1849. doi: 10.1061/(ASCE)0733-9445(1988)114:8(1827)
 133. Mazars J, Pijaudier-Cabot G (1989) Continuum Damage Theory—Application to Concrete. *J Eng Mech* 115:345–365. doi: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1989)115:2(345)
 134. Menetrey P, Willam KJ (1995) Triaxial Failure Criterion for Concrete and its Generalization. *ACI Struct J* 92:311–318. doi: 10.14359/1132
 135. van Mier JGM (1986) Fracture of Concrete Under Complex Stress. *Heron* 31:1–90
 136. Mills LL, Zimmerman RM (1970) Compressive Strength of Plain Concrete Under Multiaxial Loading Conditions. *ACI J Proc* 67:802–807. doi: 10.14359/7310
 137. Mizuno E, Hatanaka S (1992) Compressive Softening Model for Concrete. *J Eng Mech* 118:1546–1563. doi: 10.1061/(asce)0733-9399(1992)118:8(1546)
 138. Mohammadi M, Wu YF (2019) Modified plastic-damage model for passively confined concrete based on triaxial tests. *Compos Part B Eng* 159:211–223. doi: 10.1016/j.compositesb.2018.09.074
 139. Mozaffari N, Voyiadjis GZ (2016) Coupled gradient damage - Viscoplasticity model for ductile materials: Phase field approach. *Int J Plast* 83:55–73. doi: 10.1016/j.ijplas.2016.04.003
 140. Murray D (1979) Octahedral based incremental stress-strain matrices. *J Eng Mech Div* 105:501–513
 141. Naghdi PM, Trapp JA (1975) The significance of formulating plasticity theory with reference to loading surfaces in strain space. *Int J Eng Sci* 13:785–797. doi: 10.1016/0020-7225(75)90080-4
 142. Najjar Y., Zaman M., Faruque M. (1990) Elasto-plastic constitutive modeling of plain concrete and an optimization procedure for parameter evaluation. *Comput Geotech* 9:185–208. doi: 10.1016/0266-352X(90)90013-L
 143. Nelson I, Baladi G (1977) Outrunning Ground Shock Computed with Different Models. *J Eng Mech Div* 103:377–393
 144. Nematzadeh M, Salari A, Ghadami J, Naghipour M (2016) Stress-strain behavior of
-

- freshly compressed concrete under axial compression with a practical equation. *Constr Build Mater* 115:402–423. doi: 10.1016/j.conbuildmat.2016.04.045
145. Nguyen GD (2005) A thermodynamic approach to constitutive modelling of concrete using damage mechanics and plasticity theory. Thesis 1–243. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2007.11.001
146. Nguyen GD, Houlsby GT (2008) A coupled damage–plasticity model for concrete based on thermodynamic principles: Part I: model formulation and parameter identification. *Int J Numer Anal Methods Geomech* 32:353–389. doi: 10.1002/nag.627
147. Nguyen GD, Korsunsky AM (2008) Development of an approach to constitutive modelling of concrete: Isotropic damage coupled with plasticity. *Int J Solids Struct* 45:5483–5501. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2008.05.029
148. Nielsen MP, Hoang LC (2016) *Limit Analysis and Concrete Plasticity*. CRC Press
149. Ohtani YC, Chen W (1987) Hypoelastic-Perfectly Plastic Model for Concrete Materials. *J Eng Mech* 113:1840–1860. doi: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1987)113:12(1840)
150. Omidi O, Lotfi V (2010) Finite element analysis of concrete structures using plastic-damage model in 3-d implementation. *Int J Civ Eng* 8:187–203
151. Ottosen NS (1977) A Failure Criterion for Concrete. ASCE, *J Eng Mech* 103:527–535. doi: 10.1017/CBO9781107415324.004
152. Ottosen NS (1980) *Nonlinear finite element analysis of concrete structures*. Risø National Laboratory, Roskilde
153. Ozbolt J, Ananiev S (2007) Scalar damage model for concrete without explicit evolution law. 1–8
154. Pang XB, Hsu TTC (1996) Fixed angle softened truss model for reinforced concrete. *ACI Struct J* 93:197–207
155. Pantazopoulou I, Imran, J S (1996) Experimental study of plain concrete under triaxial stress. *ACI Mater J* 93
156. Papanikolaou VK, Kappos AJ (2007) Confinement-sensitive plasticity constitutive model for concrete in triaxial compression. *Int J Solids Struct* 44:7021–7048. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2007.03.022

157. Papanikolaou VK, Kappos AJ (2008) Constitutive model for concrete in triaxial compression and applications in finite element analysis of R/C bridge piers. 6th GRACM Int Congr Comput Mech 19–21
158. Patzák B, Jirásek M (2001) Consistent tangent stiffness for nonlocal material models. *Solids, Struct Coupled Probl Eng* 80:1279–1293
159. Peerlings RHJ (1999) Enhanced damage modelling for fracture and fatigue. Technische Universiteit Eindhoven
160. Perdikaris PC, Romeo A (1992) Effect of size and compressive strength on the fracture energy of plain concrete. In: Bazant ZP (ed) 1st International Conference on Fracture Mechanics of Concrete Structures, Measurements of Damage and Size effect, FRAMCOS. Elsevier Applied Science, Breckenridge, Colorado, USA, pp 550–555
161. Piscesa B, Attard MM, Samani AK, Tangaramvong S (2017) Plasticity constitutive model for stress-strain relationship of confined concrete. *ACI Mater J* 114:361–371. doi: 10.14359/51689428
162. Poliotti M, Bairán JM (2019) A new concrete plastic-damage model with an evolutive dilatancy parameter. *Eng Struct* 189:541–549. doi: 10.1016/j.engstruct.2019.03.086
163. Popovics S (1973) A numerical approach to the complete stress-strain curve of concrete. *Cem Concr Res* 3:583–599
164. Pramono E, Willam KJ (1989) Fracture Energy-Based Plasticity Formulation of Plain Concrete. *J Eng Mech* 115:1183–1204. doi: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1989)115:6(1183)
165. Prasad BKR, Saha RK, Gopalakrishnan AR (2010) Fracture behavior of plain concrete beams – experimental verification of one parameter model. *ICCES* 14:65–83
166. Rivlin RS (1981) Some comments on the endochronic theory of plasticity. *Int J Solids Struct* 17:231–248. doi: 10.1016/0020-7683(81)90078-0
167. Salari MR, Saeb S, Willam KJ, Patchet SJ, Carrasco RC (2004) A coupled elastoplastic damage model for geomaterials. *Comput Methods Appl Mech Eng* 193:2625–2643. doi: 10.1016/j.cma.2003.11.013
168. Sandler IS (1978) On the Uniqueness and Stability of Endochronic Theories of Material

- Behavior. *J Appl Mech* 45:263–266. doi: 10.1115/1.3424285
169. Sarikaya A, Erkmen RE (2019) A plastic-damage model for concrete under compression. *Int J Mech Sci* 150:584–593. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2018.10.042
170. Sekulović M (1988) *Metod konačnih elemenata*. Građevinska knjiga, Beograd
171. Selby RG, Vecchio FJ (1997) A constitutive model for analysis of reinforced concrete solids. *Can J Civ Eng* 24:460–470. doi: 10.1139/196-135
172. Sfer D, Carol I, Gettu R, Etse G (2002) Study of the Behavior of Concrete under Triaxial Compression. *J Eng Mech* 128:156–163. doi: 10.1061/(ASCE)0733-9399(2002)128:2(156)
173. Shirmohammadi F, Esmaeily A, Kiaeipour Z (2015) Stress-strain model for circular concrete columns confined by FRP and conventional lateral steel. *Eng Struct* 84:395–405. doi: 10.1016/j.engstruct.2014.12.005
174. Sima JF, Roca P, Molins C (2008) Cyclic constitutive model for concrete. *Eng Struct* 30:695–706. doi: 10.1016/j.engstruct.2007.05.005
175. Simo JC, Ju JW (1987) Strain- and stress-based continuum damage models-I. Formulation. *Int J Solids Struct* 23:821–840. doi: 10.1016/0020-7683(87)90083-7
176. Sinha BP, Gerstle KH, Tulin LG (1964) Stress-Strain Relations for Concrete Under Cyclic Loading. *ACI J Proc* 61:195–212
177. Smith GM, Young LE (1956) Ultimate Flexural Analysis Based on Stress-Strain Curves of Cylinders. *ACI J Proc* 53
178. Spacone E, Filippou FC, Taucer FF (1996) Fibre beam-column model for non-linear analysis of R/C frames: Part I. Formulation. *Earthq Eng Struct Dyn* 25:711–726
179. Suaris W, Ouyang C, Fernando VM (1990) Damage Model for Cyclic Loading of Concrete. *J Eng Mech* 116:1020–1035. doi: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1990)116:5(1020)
180. Syroka-Korol E, Tejchman J, Mróz Z (2014) FE analysis of size effects in reinforced concrete beams without shear reinforcement based on stochastic elasto-plasticity with non-local softening. *Finite Elem Anal Des* 88:25–41. doi: 10.1016/j.finel.2014.05.005
181. Tasnimi AA, Lavasani HH (2011) Uniaxial constitutive law for structural concrete

- members under monotonic and cyclic loads. *Sci Iran* 18:150–162. doi: 10.1016/j.scient.2011.03.025
182. Tijani IA, Wu YF, Lim CW (2019) Aggregate size effects and general static loading response on mechanical behavior of passively confined concrete. *Constr Build Mater* 205:61–72. doi: 10.1016/j.conbuildmat.2019.01.164
183. To CWS, Wang B (1998) Hybrid strain-based three-node flat triangular laminated composite shell elements for vibration analysis. *J Sound Vib* 211:277–291. doi: 10.1006/jsvi.1997.1373
184. Tsai WT (1988) Uniaxial Compressional Stress-Strain Relation of Concrete. *J Struct Eng* 114:2133–2136. doi: 10.1061/(ASCE)0733-9445(1988)114:9(2133)
185. Tue N V., Li J, Caner FC (2013) Microplane constitutive model M4L for concrete. I: Theory. *Comput Struct* 128:219–229. doi: 10.1016/j.compstruc.2013.06.008
186. Valanis KC (1971) A theory of viscoplasticity without a yield surface. *Arch Mech Stossowanej* 23:517–551
187. Valanis KC (1978) Fundamental Consequences of a New Intrinsic Time Measure. *Plasticity as a Limit of the Endochronic Theory*. Washington, D.C.
188. Valanis KC, Lee CF (1982) Some recent developments of the endochronic theory with applications. *Nucl Eng Des* 69:327–344. doi: 10.1016/0029-5493(82)90181-9
189. Valanis KC, Read HE (1986) An endochronic plasticity theory for concrete. *Mech Mater* 5:277–295. doi: 10.1016/0167-6636(86)90024-4
190. Valentini B, Theiner Y, Aschaber M, Lehar H, Hofstetter G (2013) Single-phase and multi-phase modeling of concrete structures. *Eng Struct* 47:25–34. doi: 10.1016/j.engstruct.2012.04.039
191. Vecchio FJ, Collins MP (1986) The Modified Compression-Field Theory for Reinforced Concrete Elements Subjected to Shear. *ACI J Proc* 83:219–231
192. Vecchio FJ, Selby RG (1991) Toward Compression-Field Analysis of Reinforced Concrete Solids. *J Struct Eng* 117:1740–1758. doi: 10.1061/(asce)0733-9445(1991)117:6(1740)
193. van Vliet MRA, van Mier JGM (1995) Softening Behaviour of Concrete Under Uniaxial

- Compression. *Fract Mech Concr Struct* 383–396
194. Voyiadjis GZ, Abu-Lebdeh TM (1993) Damage Model for Concrete Using Bounding Surface Concept. *J Eng Mech* 119:1865–1885. doi: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1993)119:9(1865)
195. Voyiadjis GZ, Taqieddin ZN, Kattan PI (2008) Anisotropic damage-plasticity model for concrete. *Int J Plast* 24:1946–1965. doi: 10.1016/j.ijplas.2008.04.002
196. Vu NS, Yu B, Li B (2017) Stress-strain model for confined concrete with corroded transverse reinforcement. *Eng Struct* 151:472–487. doi: 10.1016/j.engstruct.2017.08.049
197. Vu VD, Mir A, Nguyen GD, Sheikh AH (2017) A thermodynamics-based formulation for constitutive modelling using damage mechanics and plasticity theory. *Eng Struct* 143:22–39. doi: 10.1016/j.engstruct.2017.04.018
198. Wang G, Lu D, Du X, Zhou X, Cao S (2018) A true 3D frictional hardening elastoplastic constitutive model of concrete based on a unified hardening/softening function. *J Mech Phys Solids* 119:250–273. doi: 10.1016/j.jmps.2018.06.019
199. Wee TH, Chin MS, Mansur MA (1996) Stress-Strain Relationship of High-Strength Concrete in Compression. *J Mater Civ Eng* 8:70–76. doi: 10.1061/(ASCE)0899-1561(1996)8:2(70)
200. Willam KJ (2004) Constitutive Models for Engineering Materials. *Encycl Phys Sci Technol* 3:603–633. doi: 10.1016/b0-12-227410-5/00135-6
201. Willam KJ, Warnke ED (1975) Constitutive model for the triaxial behaviour of concrete. *Proc Int Assoc Bridg Struct Eng ISMES, Bergamo* 19:30
202. Xenos D, Grassl P (2016) Modelling the failure of reinforced concrete with nonlocal and crack band approaches using the damage-plasticity model CDPM2. *Finite Elem Anal Des* 117–118:11–20. doi: 10.1016/j.finel.2016.04.002
203. Xing Y (1993) Constitutive Equation for Concrete Using Strain-Space Plasticity Model. Faculty of New Jersey Institute of Technology
204. Xu Q, Chen J, Li J, Xu G (2013) Coupled elasto-plasticity damage constitutive models for concrete. *J Zhejiang Univ Sci A* 14:256–267. doi: 10.1631/jzus.a1200196
205. Yankelevsky DZ, Reinhardt HW (1989) Uniaxial Behavior of Concrete in Cyclic

- Tension. *J Struct Eng* 115:166–182
206. Yazdani S, Schreyer HL (1990) Combined Plasticity and Damage Mechanics Model for Plain Concrete. *J Eng Mech* 116:1435–1450. doi: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1990)116:7(1435)
207. Žarković D, Brujić Z, Lađinović Đ (2016) Application of ottosen's constitutive model to flexural failure of rc beams. In: E-GTZ zbornik radova / proceedings, Broj 3. pp 261–268
208. Žarković D, Jovanović Đ, Brujić Z, Lađinović Đ (2018) CDPМ2 Model betona u formulaciji 3D konačnih elemenata pri cikličnom opterećenju. In: 15. Kongres Društva Građevinskih Konstruktera – DGKS. Zlatibor, pp 349–358
209. Žarković D, Jovanović Đ, Vukobratović V, Brujić Z (2019) Convergence improvement in computation of strain-softening solids by the arc-length method. *Finite Elem Anal Des* 164:55–68. doi: 10.1016/j.finel.2019.06.005
210. Zhang H, Wei D (2010) Fracture and Damage Behaviors of Concrete in the Fractal Space. *J Mod Phys* 01:48–58. doi: 10.4236/jmp.2010.11006
211. Zhang J, Li J (2016) Semi-implicit algorithm for elastoplastic damage models involving energy integration. *Adv Mater Sci Eng* 2016. doi: 10.1155/2016/5289642
212. Zhang YX, Bradford MA, Gilbert RI (2006) A new triangular layered plate element for the non-linear analysis of reinforced concrete slabs. *Commun Numer Methods Eng* 22:699–709. doi: 10.1002/cnm.840
213. Zhou JJ, Pan JL, Leung CKY, Li ZJ (2014) Experimental study on mechanical behavior of high performance concrete under multi-axial compressive stress. *Sci China Technol Sci* 57:2514–2522. doi: 10.1007/s11431-014-5716-9
214. Zhou YW, Wu YF (2012) General model for constitutive relationships of concrete and its composite structures. *Compos Struct* 94:580–592. doi: 10.1016/j.compstruct.2011.08.022
215. Zhu RRH, Hsu TTC (2002) Poisson effect in reinforced concrete membrane elements. *ACI Struct J* 99:631–640
216. Zienkiewicz OC, Taylor RL (2000) *The Finite Element Method, Volume 2: Solid*

Mechanics, Fifth. Butterworth-Heinemann, Oxford

ДОДАТАК А: ФУНКЦИЈЕ ТЕЧЕРЊА У МОДЕЛИМА ЗАСНОВАНИМ НА ТЕОРИЈИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Таб. А 1: Преглед функција површи течерња у моделима заснованим на теорији пластичности

Референца	Функција површи течерња	Напомена
Буукозтурк, О. [21]	$f = 3 \cdot \sqrt{\left(3 \cdot J_2 + \bar{\sigma} \cdot J_1 + \frac{1}{5} \cdot J_1^2\right)} - \bar{\sigma}$	
Lehigh-Purdue [59]	$f = \frac{K^2/3 \cdot J_2 - K^2/36 \cdot I_1^2 + l/36 \cdot I_1^2 + \beta/3 \cdot I_1 - \tau^2}{1 - \alpha/3 \cdot I_1}$	
Хан-Чен [81]	$f = \sqrt{2 \cdot J_2} - k(\sigma_a, k_0) \cdot r_f, r_f \text{ према (21)}$	
Хибит [83]	$f_c = \sqrt{3 \cdot q^2 - a_0 \cdot \tau_c \cdot p} - \tau_c, f_i = \hat{q} - \left(3 - b_0 \cdot \frac{\sigma_1}{f_i}\right) \cdot \hat{p} - \left(2 - \frac{b_0}{3} \cdot \frac{\sigma_1}{f_i}\right) \cdot \sigma_1$	две површи
Чанкашава [34]	$f = \left(1 - 0.14 \cdot \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) \cdot \sigma_1 \cdot \sqrt{1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^2} - f_c$	биаксијална
Прамоно-Вилам [164]	$f = \left((1 - \kappa) \cdot \frac{\sigma_1^2}{f_c^2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{f_c}\right)^2 + \kappa^2 \cdot m_0 \cdot \frac{\sigma_1}{f_c} - \kappa^2 \cdot c_0$	
Најар [142]	$f = r^2 - \left(\alpha \cdot J_1^n - \frac{J_1^{2n}}{\beta} + k^2\right) \cdot \sqrt{\cos\left(\frac{1}{3} \cdot \cos^{-1}(\exp(-\gamma \cdot J_1) \cos(3 \cdot \theta))\right)}$	
Лабане-Саха-Тинг [108]	$f = \frac{\sqrt{3 \cdot J_2}}{1 - r(\sigma) \cdot \sigma_a / f_c} - \tau \text{ или } f = \frac{a \cdot I_1 + b \cdot \sqrt{J_2}}{1 - r(\sigma) \cdot \sigma_a / f_c} - \tau$	модификације вон Мизеса и Друкер-Прагера
Канг-Вилам [99]	$f = f_f + f_h + f_s, f_f = \frac{\rho \cdot r(\theta, e)}{f_c} - \frac{\rho_1}{f_c} \cdot \left(\frac{\xi - \xi_0}{\xi_1 - \xi_0}\right)^\alpha, r(\theta, e) \text{ према (13),}$ $f_h = -\frac{\rho_1}{f_c} \cdot \left(\left(\frac{\xi - \xi_1}{\xi_0 - \xi_1}\right)^\alpha - 1\right), f_s = \frac{\rho_1}{f_c} \cdot (1 - c) \cdot \left(\frac{\xi_0}{\xi_0 - \xi_1}\right)^\alpha \cdot \left(\frac{\xi_c - \xi}{\xi_c}\right)^\alpha$	функције лома f_f , ојачања f_h и омекшања f_s
Имран-Пантазопулоу [89]	$f = a \cdot \frac{J_2}{k \cdot f_c} + b \cdot \sqrt{J_2} + c \cdot k \cdot \sigma_1 + d \cdot k \cdot I_1 + E_{mc} \cdot \frac{1 - k}{k \cdot f_c} \cdot I_1^2 - k \cdot f_c$	модификација Хси-Тинг-Чен [36]
Грасл-Лундгрен-Гилтоф [76]	$f = \left(\sqrt{1.5} \cdot \frac{\rho}{f_c}\right)^2 + q_h(\kappa) \cdot m \cdot \left(\frac{\rho}{\sqrt{6}} \cdot r(\theta, e) + \frac{\xi}{\sqrt{3}}\right) - q_h(\kappa) \cdot q_s(\kappa)$	модификација Менетреј-Вилам [134]
Бигони-Пиколроаз [17]	$f = -M \cdot p_c \cdot \sqrt{(\Phi - \Phi^m) \cdot (2 \cdot (1 - \alpha) \cdot \Phi + \alpha)} + q \cdot \cos\left(\beta \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} \cdot \cos^{-1}(\gamma \cdot \cos(3 \cdot \theta))\right),$ $\Phi = \frac{p + c}{p_c + c}$	
Папаниколау-Капос [156, 157]	$f = \left(\sqrt{1.5} \cdot \frac{\rho}{q_h(\kappa) \cdot f_c}\right)^2 + m \cdot \left(\frac{\rho}{\sqrt{6} \cdot q_h(\kappa) \cdot f_c} \cdot r(\theta, e) + \frac{\xi}{\sqrt{3} \cdot q_h(\kappa) \cdot f_c}\right) - q_s(\kappa)$	модификација Менетреј-Вилам [134]
Hamoud-Boukhili-Yahia [79]	$f = \left((1 - k) \cdot \left(\frac{\sigma_a + \rho \cdot r(\theta)}{f_c} + \frac{\rho \cdot r(\theta)}{b_f \cdot f_c}\right)^2 + a^{1/\alpha_f} \cdot \frac{\rho \cdot r(\theta)}{f_c}\right)^{\alpha_f} + \frac{k^{\beta_f} \cdot m_f}{f_c} \cdot \left(\sigma_a + \frac{\rho \cdot r(\theta)}{b_f}\right) - k^{\beta_f} \cdot c$	модификација Еце-Вилам [62]
Ду-Лу [57, 124, 198]	$f = \alpha \cdot \sqrt{\bar{I}_1^2 - 3 \cdot \bar{I}_2} + \frac{2 \cdot (1 - \alpha) \cdot \bar{I}_1}{3 \cdot \sqrt{(\bar{I}_1 \cdot \bar{I}_2 - \bar{I}_3) / (\bar{I}_1 \cdot \bar{I}_2 - 9 \cdot \bar{I}_3)} - 1} - M_f \cdot H(\varepsilon_d^p) \cdot \bar{p}$	дефинисан у трансформисаном простору напона
Пискеза и остали [161]	$f = \left(\sqrt{1.5} \cdot \frac{\rho}{q_h(\kappa) \cdot f_c}\right)^2 + m \cdot \alpha \cdot \left(\frac{\rho}{\sqrt{6} \cdot q_h(\kappa) \cdot f_c} \cdot r(\theta, e) + \frac{\xi}{\sqrt{3} \cdot q_h(\kappa) \cdot f_c}\right) - q_s(\kappa)$	модификација Менетреј-Вилам [134]

$$\frac{\partial J}{\partial \sigma_{xz}} = - \left(\frac{(3 \cdot 3^{(1/2)} \cdot (2 \cdot \sigma_{xy} \cdot \sigma_{yz} - 2 \cdot \sigma_y \cdot \sigma_{xz} + (2 \cdot \sigma_{xz} \cdot (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)) / 3)) / (2 \cdot ((\sigma_{xy}^2 - \sigma_x \cdot \sigma_z - \sigma_y \cdot \sigma_z - \sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2 + (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 / 3)^{3/2})) + (9 \cdot 3^{(1/2)} \cdot \sigma_{xz} \cdot (\sigma_{xy}^2 - \sigma_x \cdot \sigma_z - \sigma_y \cdot \sigma_z - \sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2 + (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 / 3)^{1/2}) \cdot ((\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \cdot (\sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_x \cdot \sigma_z + \sigma_y \cdot \sigma_z - \sigma_{xy}^2 - \sigma_{xz}^2 - \sigma_{yz}^2)) / 3 + \sigma_x \cdot \sigma_{yz}^2 + \sigma_y \cdot \sigma_{xz}^2 + \sigma_z \cdot \sigma_{xy}^2 - (2 \cdot (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^3) / 27 - \sigma_x \cdot \sigma_y \cdot \sigma_z - 2 \cdot \sigma_{xy} \cdot \sigma_{xz} \cdot \sigma_{yz}}{(2 \cdot ((\sigma_{xy}^2 - \sigma_x \cdot \sigma_z - \sigma_y \cdot \sigma_z - \sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2 + (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 / 3)^{3/2}))} \right) / (3 \cdot (1 - J^2)^{1/2});$$

Б.2. Извод функције течења f по инваријантима напона σ_v , ρ и θ

У наставку је приказан извод функције течења f по инваријантима напона σ_v , ρ и θ :

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_v} = (m_0 \cdot qh1^2) / fc + (4 \cdot ((qh1 - 1) \cdot (\sigma_v / fc + (6^{(1/2)} \cdot \rho) / (6 \cdot fc))^2 - (2^{(1/2)} \cdot 3^{(1/2)} \cdot \rho) / (2 \cdot fc)) \cdot (qh1 - 1) \cdot (\sigma_v / fc + (6^{(1/2)} \cdot \rho) / (6 \cdot fc))) / fc;$$

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = (6^{(1/2)} \cdot m_0 \cdot qh1^2 \cdot r) / (6 \cdot fc) - 2 \cdot ((qh1 - 1) \cdot (\sigma_v / fc + (6^{(1/2)} \cdot \rho) / (6 \cdot fc))^2 - (2^{(1/2)} \cdot 3^{(1/2)} \cdot \rho) / (2 \cdot fc)) \cdot ((2^{(1/2)} \cdot 3^{(1/2)}) / (2 \cdot fc) - (6^{(1/2)} \cdot (qh1 - 1) \cdot (\sigma_v / fc + (6^{(1/2)} \cdot \rho) / (6 \cdot fc))) / (3 \cdot fc));$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = (6^{(1/2)} \cdot m_0 \cdot qh1^2 \cdot \rho \cdot (((\cos(\theta)^2 \cdot (4 \cdot e^2 \cdot qh2^2 - 4) - (2 \cdot e \cdot qh2 - 1)^2) \cdot (\sin(\theta) \cdot (2 \cdot e^2 \cdot qh2^2 - 2) + (\cos(\theta) \cdot \sin(\theta) \cdot (4 \cdot e^2 \cdot qh2^2 - 4) \cdot (2 \cdot e \cdot qh2 - 1))) / (5 \cdot e^2 \cdot qh2^2 - \cos(\theta)^2 \cdot (4 \cdot e^2 \cdot qh2^2 - 4) - 4 \cdot e \cdot qh2)^{(1/2)})) / (\cos(\theta) \cdot (2 \cdot e^2 \cdot qh2^2 - 2) - (2 \cdot e \cdot qh2 - 1) \cdot (5 \cdot e^2 \cdot qh2^2 - \cos(\theta)^2 \cdot (4 \cdot e^2 \cdot qh2^2 - 4) - 4 \cdot e \cdot qh2)^{(1/2)})^2 - (2 \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\theta) \cdot (4 \cdot e^2 \cdot qh2^2 - 4)) / (\cos(\theta) \cdot (2 \cdot e^2 \cdot qh2^2 - 2) - (2 \cdot e \cdot qh2 - 1) \cdot (5 \cdot e^2 \cdot qh2^2 - \cos(\theta)^2 \cdot (4 \cdot e^2 \cdot qh2^2 - 4) - 4 \cdot e \cdot qh2)^{(1/2)}))) / (6 \cdot fc);$$

Б.3. Извод функције течења f по променљивама ојачања

У наставку су приказани извод функције течења f по променљивама ојачања материјала по притиску k_{pc} и затезању k_{pt} , за случај $k_{pc} < 1$:

$$\frac{\partial f}{\partial k_{pc}} = ((2 \cdot k_{pc} - 2) \cdot (qh0 - 1) \cdot (2 \cdot ((qh1 - 1) \cdot (\sigma_v / fc + (6^{(1/2)} \cdot \rho) / (6 \cdot fc))^2 - (2^{(1/2)} \cdot 3^{(1/2)} \cdot \rho) / (2 \cdot fc)) \cdot (\sigma_v / fc + (6^{(1/2)} \cdot \rho) / (6 \cdot fc))^2 - 2 \cdot qh1 + (2 \cdot m_0 \cdot qh1 \cdot (\sigma_v + (6^{(1/2)} \cdot r \cdot \rho) / 6)) / fc)) / (2 \cdot (-k_{pc} \cdot (k_{pc} - 2))^{(1/2)}) + (6^{(1/2)} \cdot k_{ptmax} \cdot m_0 \cdot qh1^2 \cdot \rho \cdot ((4 \cdot e \cdot (2 \cdot e \cdot qh2 - 1) - 8 \cdot e^2 \cdot qh2 \cdot \cos(\theta)^2) / (\cos(\theta) \cdot (2 \cdot e^2 \cdot qh2^2 - 2) - (2 \cdot e \cdot qh2 - 1) \cdot (5 \cdot e^2 \cdot qh2^2 - \cos(\theta)^2 \cdot (4 \cdot e^2 \cdot qh2^2 - 4) - 4 \cdot e \cdot qh2)^{(1/2)}) + ((\cos(\theta)^2 \cdot (4 \cdot e^2 \cdot qh2^2 - 4) - (2 \cdot e \cdot qh2 - 1)^2) \cdot ((2 \cdot e \cdot qh2 - 1) \cdot (4 \cdot e - 10 \cdot e^2 \cdot qh2 + 8 \cdot e^2 \cdot qh2 \cdot \cos(\theta)^2)) / (2 \cdot (5 \cdot e^2 \cdot qh2^2 - \cos(\theta)^2 \cdot (4 \cdot e^2 \cdot qh2^2 - 4) - 4 \cdot e \cdot qh2)^{(1/2)}) - 2 \cdot e \cdot (5 \cdot e^2 \cdot qh2^2 - \cos(\theta)^2 \cdot (4 \cdot e^2 \cdot qh2^2 - 4) - 4 \cdot e \cdot qh2)^{(1/2)} + 4 \cdot e^2 \cdot qh2 \cdot \cos(\theta))) / (\cos(\theta) \cdot (2 \cdot e^2 \cdot qh2^2 - 2) - (2 \cdot e \cdot qh2 - 1) \cdot (5 \cdot e^2 \cdot qh2^2 - \cos(\theta)^2 \cdot (4 \cdot e^2 \cdot qh2^2 - 4) - 4 \cdot e \cdot qh2)^{(1/2)})^2) \cdot (2 \cdot k_{pc} - 2) \cdot (\exp(-k_{kpt} \cdot k_{pt}) - 1) \cdot ((-k_{pc} \cdot (k_{pc} - 2))^{(1/2)} \cdot (qh0 - 1) - qh0 + 1)^2) / (4 \cdot fc \cdot (-k_{pc} \cdot (k_{pc} - 2))^{(1/2)} \cdot (qh0 - 1)^2);$$

$$\frac{\partial f}{\partial k_{pt}} = (6^{(1/2)} \cdot k_{kpt} \cdot k_{ptmax} \cdot m_0 \cdot qh1^2 \cdot \rho \cdot \exp(-k_{kpt} \cdot k_{pt}) \cdot ((4 \cdot e \cdot (2 \cdot e \cdot qh2 - 1) - 8 \cdot e^2 \cdot qh2 \cdot \cos(\theta)^2) / (\cos(\theta) \cdot (2 \cdot e^2 \cdot qh2^2 - 2) - (2 \cdot e \cdot qh2 - 1) \cdot (5 \cdot e^2 \cdot qh2^2 - \cos(\theta)^2 \cdot (4 \cdot e^2 \cdot qh2^2 - 4) - 4 \cdot e \cdot qh2)^{(1/2)}) + ((\cos(\theta)^2 \cdot (4 \cdot e^2 \cdot qh2^2 - 4) - (2 \cdot e \cdot qh2 - 1)^2) \cdot ((2 \cdot e \cdot qh2 - 1) \cdot (4 \cdot e - 10 \cdot e^2 \cdot qh2 + 8 \cdot e^2 \cdot qh2 \cdot \cos(\theta)^2)) / (2 \cdot (5 \cdot e^2 \cdot qh2^2 - \cos(\theta)^2 \cdot (4 \cdot e^2 \cdot qh2^2 - 4) - 4 \cdot e \cdot qh2)^{(1/2)}) - 2 \cdot e \cdot (5 \cdot e^2 \cdot qh2^2 - \cos(\theta)^2 \cdot (4 \cdot e^2 \cdot qh2^2 - 4) - 4 \cdot e \cdot qh2)^{(1/2)} + 4 \cdot e^2 \cdot qh2 \cdot \cos(\theta))) / (\cos(\theta) \cdot (2 \cdot e^2 \cdot qh2^2 - 2) - (2 \cdot e \cdot qh2 - 1) \cdot (5 \cdot e^2 \cdot qh2^2 - \cos(\theta)^2 \cdot (4 \cdot e^2 \cdot qh2^2 - 4) - 4 \cdot e \cdot qh2)^{(1/2)})^2) \cdot (\exp(-k_{kpt} \cdot k_{pt}) - 1) \cdot ((-k_{pc} \cdot (k_{pc} - 2))^{(1/2)} \cdot (qh0 - 1) - qh0 + 1)^2) / (4 \cdot fc \cdot (-k_{pc} \cdot (k_{pc} - 2))^{(1/2)} \cdot (qh0 - 1)^2);$$

Овај Образац чини саставни део докторске дисертације, односно докторског уметничког пројекта који се брани на Универзитету у Новом Саду. Попуњен Образац укоричити иза текста докторске дисертације, односно докторског уметничког пројекта.

План третмана података

Назив пројекта/истраживања
Нови конститутивни модел бетона формулисан према неспрегнутој комбинацији теорија пластичности – механика оштећења
Назив институције/институција у оквиру којих се спроводи истраживање
а) Факултет техничких наука, Универзитет у Новом Саду б) в)
Назив програма у оквиру ког се реализује истраживање
1. Опис података
<p>1.1 Врста студије</p> <p><i>Укратко описати тип студије у оквиру које се подаци прикупљају</i></p> <p>У овој студији нису прикупљани подаци.</p> <hr/> <hr/> <hr/>
<p>1.2 Врсте података</p> <p>а) квантитативни б) квалитативни</p>
<p>1.3. Начин прикупљања података</p> <p>а) анкете, упитници, тестови</p>

б) клиничке процене, медицински записи, електронски здравствени записи

в) генотипови: навести врсту _____

г) административни подаци: навести врсту _____

д) узорци ткива: навести врсту _____

ђ) снимци, фотографије: навести врсту _____

е) текст, навести врсту _____

ж) мапа, навести врсту _____

з) остало: описати _____

1.3 Формат података, употребљене скале, количина података

1.3.1 Употребљени софтвер и формат датотеке:

а) Excel фајл, датотека _____

б) SPSS фајл, датотека _____

в) PDF фајл, датотека _____

г) Текст фајл, датотека _____

д) JPG фајл, датотека _____

е) Остало, датотека _____

1.3.2. Број записа (код квантитативних података)

а) број варијабли _____

б) број мерења (испитаника, процена, снимака и сл.) _____

1.3.3. Поновљена мерења

а) да

б) не

Уколико је одговор да, одговорити на следећа питања:

а) временски размак између поновљених мера је _____

б) варијабле које се више пута мере односе се на _____

в) нове верзије фајлова који садрже поновљена мерења су именоване као _____

Напомене: _____

Да ли формати и софтвер омогућавају дељење и дугорочну валидност података?

a) Да

б) Не

Ако је одговор не, образложити _____

2. Прикупљање података

2.1 Методологија за прикупљање/генерисање података

2.1.1. У оквиру ког истраживачког нацрта су подаци прикупљени?

a) експеримент, навести тип _____

б) корелационо истраживање, навести тип _____

ц) анализа текста, навести тип _____

д) остало, навести шта _____

2.1.2 Навести врсте мерних инструмената или стандарде података специфичних за одређену научну дисциплину (ако постоје).

2.2 Квалитет података и стандарди

2.2.1. Третман недостајућих података

a) Да ли матрица садржи недостајуће податке? Да Не

Ако је одговор да, одговорити на следећа питања:

a) Колики је број недостајућих података? _____

б) Да ли се кориснику матрице препоручује замена недостајућих података? Да Не

в) Ако је одговор да, навести сугестије за третман замене недостајућих података

2.2.2. На који начин је контролисан квалитет података? Описати

2.2.3. На који начин је извршена контрола уноса података у матрицу?

3. Третман података и пратећа документација

3.1. Третман и чување података

3.1.1. Подаци ће бити депоновани у _____ репозиторијум.

3.1.2. URL адреса _____

3.1.3. DOI _____

3.1.4. Да ли ће подаци бити у отвореном приступу?

- a) Да
- б) Да, али после ембарга који ће трајати до _____
- в) Не

Ако је одговор не, навести разлог _____

3.1.5. Подаци неће бити депоновани у репозиторијум, али ће бити чувани.

Образложење

3.2 Метаподаци и документација података

3.2.1. Који стандард за метаподатке ће бити примењен? _____

3.2.1. Навести метаподатке на основу којих су подаци депоновани у репозиторијум.

Ако је потребно, навести методе које се користе за преузимање података, аналитичке и процедуралне информације, њихово кодирање, детаљне описе варијабли, записа итд.

3.3 Стратегија и стандарди за чување података

3.3.1. До ког периода ће подаци бити чувани у репозиторијуму? _____

3.3.2. Да ли ће подаци бити депоновани под шифром? Да Не

3.3.3. Да ли ће шифра бити доступна одређеном кругу истраживача? Да Не

3.3.4. Да ли се подаци морају уклонити из отвореног приступа после извесног времена?

Да Не

Образложити

4. Безбедност података и заштита поверљивих информација

Овај одељак МОРА бити попуњен ако ваши подаци укључују личне податке који се односе на учеснике у истраживању. За друга истраживања треба такође размотрити заштиту и сигурност

података.

4.1 Формални стандарди за сигурност информација/података

Истраживачи који спроводе испитивања с људима морају да се придржавају Закона о заштити података о личности (https://www.paragraf.rs/propisi/zakon_o_zastiti_podataka_o_licnosti.html) и одговарајућег институционалног кодекса о академском интегритету.

4.1.2. Да ли је истраживање одобрено од стране етичке комисије? Да Не

Ако је одговор Да, навести датум и назив етичке комисије која је одобрила истраживање

4.1.2. Да ли подаци укључују личне податке учесника у истраживању? Да Не

Ако је одговор да, наведите на који начин сте осигурали поверљивост и сигурност информација везаних за испитанике:

- а) Подаци нису у отвореном приступу
- б) Подаци су анонимизирани
- ц) Остало, навести шта

5. Доступност података

5.1. Подаци ће бити

- а) јавно доступни
- б) доступни само уском кругу истраживача у одређеној научној области
- ц) затворени

Ако су подаци доступни само уском кругу истраживача, навести под којим условима могу да их користе:

Ако су подаци доступни само уском кругу истраживача, навести на који начин могу приступити подацима:

5.4. Навести лиценцу под којом ће прикупљени подаци бити архивирани.

6. Улоге и одговорност

6.1. Навести име и презиме и мејл адресу власника (аутора) података

6.2. Навести име и презиме и мејл адресу особе која одржава матрицу с подацима

6.3. Навести име и презиме и мејл адресу особе која омогућује приступ подацима другим истраживачима
