

UNIVERZITET U BEOGRADU  
GRAĐEVINSKI FAKULTET

Petar R. Knežević

PREISACH-OV MODEL HISTEREZISA ZA  
ANALIZU KONSTRUKCIJA IZRAĐENIH OD  
ČELIKA SA IZRAŽENIM PLATOOM TEČENJA  
PRI CIKLIČNOM OPTEREĆENJU

doktorska disertacija

Beograd, 2020.

UNIVERSITY OF BELGRADE  
FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

Petar R. Knežević

PREISACH MODEL OF HYSTERESIS FOR THE  
ANALYSIS OF STRUCTURES MADE OF STEEL  
WITH PRONOUNCED YIELD PLATEAU UNDER  
CYCLIC LOADING

doctoral disertation

Belgrade, 2020.

Mentor:

dr Dragoslav Šumarac, redovni profesor, Građevinski fakultet, Univerzitet u Beogradu

Članovi komisije:

dr Dragoslav Šumarac, redovni profesor, Građevinski fakultet, Univerzitet u Beogradu

dr Rastislav Mandić, redovni profesor, Građevinski fakultet, Univerzitet u Beogradu

dr Zlatko Marković, redovni profesor, Građevinski fakultet, Univerzitet u Beogradu

dr Zoran Perović, docent, Građevinski fakultet, Univerzitet u Beogradu

dr Ćemal Dolićanin, profesor emeritus, Državni Univerzitet u Novom Pazaru, Departman za matematičke nauke

Zahvalnica:

Veliku zahvalnost dugujem svom mentoru, prof. dr Dragoslavu Šumarcu, na dragocenim savetima i velikoj pomoći u izradi ove doktorske disertacije.

Svoju zahvalnost dugujem i rukovodstvu Državnog Univerziteta u Novom Pazaru i kolegama sa studijskog programa Građevinarstvo, departmana Tehničkih nauka Državnog Univerziteta u Novom Pazaru, koji su me podržavali i pomagali u ovom radu.

Posebnu zahvalnost dugujem Laboratorijama Vojno Tehničkog Instituta u Beogradu i Državnog Univerziteta u Novom Pazaru na ukazanoj pomoći pri pripremi i realizaciji eksperimenata.

Zahvalan sam i svojoj porodici na pruženoj podršci, ohrabrenju i strpljenju kojim su mi dali snage i istrajnosti u ovom radu, a posebno svojoj supruzi Mileni i sinu Filipu, koji su uvek bili moj oslonac.

# PREISACH-OV MODEL HISTEREZISA ZA ANALIZU KONSTRUKCIJA IZRAĐENIH OD ČELIKA SA IZRAŽENIM PLATOOM TEČENJA PRI CIKLIČNOM OPTEREĆENJU

## Rezime

U ovoj doktorskoj disertaciji biće razmatrano elastoplastično ponašanje konstruktivnih mekih čelika pri velikim naprezanjima u plastičnoj oblasti. Biće pokazano da je osnovna karakteristika naponsko-deformacijskog dijagrama ove vrste čelika, formiranje horizontalnog platoa tečenja između zone elastičnosti i zone plastičnog ojačanja. Ovaj fenomen, koji se ispoljava u vidu lokalne nestabilnosti atomske rešetke (Lüders band) je samo karakteristika monotong naprezanja, dok kod ponovljenog naprezanja iščezava. Koristeći Preisach-ov histerezisni operator, razvijen je materijalni model, koji sa velikom tačnošću opisuje ponašanje ovih čelika pri monotonom aksijalnom naprezanju. Materijalni model u vidu analitičkog izraza za vezu dilatacija-napon veoma dobro aproksimira oblasti elastičnosti, horizontalnog platoa tečenja i plastičnog ojačanja, karakterističnih za konstruktivne meke čelike izložene ovoj vrsti naprezanja.

Na osnovu ovog početnog modela, razvijen je histerezisni model, koji u potpunosti definiše ciklično ponašanje konstruktivnih mekih čelika. Definišući trend liniju sastavljenu od pikova zatvorenih histerezisnih petlji maksimalnih amplituda do posmatranog vremenskog trenutka  $t$  (*backbone* kriva), a zatim i način formiranja unutrašnjih histerezisnih petlji, uzimajući u obzir efekte cikličnog ojačanja, histerezisni model je formiran. Ovi efekti će biti obuhvaćeni kroz promene vrednosti osnovnih materijalnih karakteristika (odgovarajućih modula elastičnosti i granica tečenja). Ovako formiran materijalni model, fenomenološki znatno bolje opisuje realno ponašanje materijala, od svih postojećih histerezisnih modela. Jednačine u metodi konačnih elemenata, za elasto-plastičnu analizu nosača čiji su elementi aksijalno napregnuti (npr. rešetkasti nosači) su definisane na osnovu ovog modela.

U ovoj disertaciji su postojeći modeli, koji definišu elastoplastično ponašanje konstruktivnih mekih čelika, nadograđeni kako bi definisali i efekte oštećenja u materijalu kroz dva različita Preisach-ova modela. U prvom modelu, pad krutosti u zoni oštećenja je modeliran implementacijom elastičnog elementa negativne krutosti u mehanički model. Za potrebe drugog pristupa, mehanički model je modifikovan pomoću elementa sa definisanom granicom kidanja. Oba modela su pogodna za definisanje oštećenja i pri monotonom i pri cikličnom naprezanju. Kod modela koji definišu ciklično ponašanje ovih vrsta čelika, oštećenje prouzrokuje pad napona unutar naponsko-deformacijske *backbone* krive, čime se kroz smanjenje površina unutrašnjih histerezisnih petlji, modelira i efekat cikličnog omekšanja za naprezanja koja prelaze granicu inicijacije oštećenja.

Osipanje energije pri formiranju histerezisnih petlji usled cikličnog naprezanja se manifestuje kroz histerezisne gubitke. Inkrementalni postupak na osnovu kojeg je moguće definisati ostvareni plastični rad, energetske gubitke i zarobljenu energiju, definisan je na osnovu predmetnog histerezisnog modela. Postupci se mogu definisati kako za modele bez oštećenja, tako i za modele sa oštećenjem, uz primenu odgovarajuće Preisach-ove funkcije.

Osnova za proširenje analize na gredne nosače je data kroz geometrijsku interpretaciju problema u formi Preisach-ove prizme. Za pravougaone poprečne preseke, izložene čistom savijanju prikazana je mogućnost proračuna momenata uz uvođenje pretpostavke o ravnim presecima. Osnovu proračuna predstavlja numerička integracija dijagrama deformacija po visini poprečnog preseka.

Posmatrani histerezisni modeli su izvedeni posmatrajući slučaj naprezanja u plastičnoj oblasti, ne uzimajući u obzir efekat zamora na pojavu i propagaciju oštećenja u materijalu. U ovoj disertaciji je na osnovu osobine nelokalne memorije Preisach-ovih modela, izvedena nova metoda za određivanje broja punih ciklusa za proizvoljnu istoriju opterećenja (*staircase* metoda). Implementacija ove metode, uz otklanjanje nedostataka postojećih metoda brojanja ciklusa, omogućava implementaciju efekta zamora u predmetni Preisach-ov model, kod analize konstrukcija opterećenih proizvoljnom istorijom opterećenja, kao i pojednostavljenje proračuna energetskih gubitaka uparivanjem histerezisnih petlji istih površina.

Za validaciju rezultata i određivanje materijalnih karakteristika modela koji je razvijen u disertaciji, poređeni su rezultati dobijeni predmetnim modelom sa rezultatima dobijenim eksperimentalnim putem. Eksperimenti su sprovedeni na cilindričnim uzorcima od konstruktivnih mekih čelika sa izraženim platoom tečenja u režimima monotonog i cikličnog naprezanja.

Ključne reči: meki čelik, ciklična plastičnost, histerezis, histerezisna petlja, oštećenje, Preisach-ov operator, broj ciklusa, zamor, nelinearna analiza, istorija opterećenja

Naučna oblast: Građevinarstvo

Uža naučna oblast: Tehnička mehanika i teorija konstrukcija

# PREISACH MODEL OF HYSTERESIS FOR THE ANALYSIS OF STRUCTURES MADE OF STEEL WITH PRONOUNCED YIELD PLATEAU UNDER CYCLIC LOADING

## Summary

In this doctoral dissertation, the elastoplastic behavior of structural mild steel under large deformations is explained. It will be shown that the stress-strain diagram's main characteristic of this steel type is the formation of a horizontal yield plateau between the elastic region and the plastic hardening region. This phenomenon, manifested in the form of local instability of the atomic lattice (Lüders band), is only a characteristic of monotonic loading, whereas in the case of alternating loading it disappears. Using Preisach's hysteresis operator, a material model was developed, describing with excellent accuracy the behavior of this type of steel under monotonic axial loading. The material model in the form of an analytical expression for the strain-stress relationship very well approximates the regions of elasticity, horizontal yield plateau, and plastic hardening characterized for structural mild steel under this type of loading.

Based on this initial model, the new model of hysteresis, fully defining the cyclic behavior of structural mild steel, was developed. Firstly the trend line composed from peaks of closed hysteresis loops with maximum amplitudes up to the observed time  $t$  (*backbone curve*) is defined and then also the formation of internal hysteresis loops, which takes into account the effects of cyclic hardening. These phenomena will be taken into account through changes in the values of the basic material characteristics (corresponding modulus of elasticity and yield limits). The material model formed on this way, is phenomenologically much better suited for the description of the real material behavior, than all existing hysteresis models. The finite element method equations for elastoplastic analysis of girders whose elements are axially loaded (eg trusses) are defined based on this model.

In this dissertation, the existing models defining the elastoplastic behavior of structural mild steel have been upgraded to describe the damage effects in the material through two different approaches. In the first Preisach model, the stiffness drop inside the damage zone is modeled by an elastic element of negative stiffness implemented into a mechanical model. For the second approach, the mechanical model was modified using an element with a defined limit of damage initiation. Both models are suitable for describing damage at both monotonic and cyclic stresses. In models that define the cyclic behavior of this steel type, the damage causes a drop within the stress-strain backbone curve. This stress drop, with a reduction of the surfaces of the internal hysteresis loops, also models the effect of cyclic softening for stresses beyond the initiation damage limit.

The energy dissipation during the formation of hysteresis loops due to cyclic stress is manifested through hysteresis losses. The incremental procedure based on which it is possible to define the realized plastic work, energy losses, and captured energy, was defined based on the suggested hysteresis model. Procedures can be defined for models with and without damages both, using the appropriate Preisach function.

The basis for extending the analysis to beam elements is given through a geometric interpretation of the problem in the form of a Preisach prism. For rectangular cross-sections, exposed to pure bending, the possibility of moments calculation is presented, based on the assumption of engineering beam theory (cross-section is perpendicular to a bending line). The basis of the calculation is the numerical integration of the deformations along with the height of the cross-section.

The observed hysteresis models were derived by looking at the case of large straining in plastic region, without considering the effect of fatigue on the appearance and propagation of the damage in the material. In this dissertation, based on the nonlocal memory property of the Preisach models, a new method for determining the number of full cycles for an arbitrary load history (*staircase* method) is determined. The implementation of this method, with the elimination of the existing cycle counting methods shortcomings, enables the implementation of the fatigue effect in the analysis of structures under load with arbitrary load history. Also, simplifying the calculation of energy losses by identifying and pairing hysteresis loops with the equivalent surfaces is provided.

To validate the results and determine material characteristics of the model used in this dissertation, the results obtained by the analyzed Preisach model were compared with experimental results. The experiments were conducted on cylindrical specimens made of structural mild steel with a pronounced yield plateau under monotonic and cyclic stress regimes.

Keywords: mild steel, cyclic plasticity, hysteresis, hysteresis loop, energy losses, damage, Preisach operator, number of cycles, fatigue, nonlinear analysis, load history

Scientific field: Civil engineering

Specific scientific field: Engineering mechanics and theory of structures



<b>1</b>	<b>TEORIJA I FENOMENI ELASTOPLASTIČNOSTI .....</b>	<b>1</b>
1.1	Uvod.....	1
1.2	Klasična teorija plastičnosti.....	2
1.3	Mikroplastičnost .....	4
1.4	Lüders band .....	6
1.5	Ciklična plastičnost.....	7
1.5.1	<i>Bauschinger-ov efekat .....</i>	9
1.5.2	<i>Ciklično ojačanje/omekšanje .....</i>	9
1.5.3	<i>Massing-ov efekat.....</i>	11
1.5.4	<i>Ciklično tečenje (Ratcheting).....</i>	12
1.5.5	<i>Neproporcionalno ciklično ojačanje.....</i>	12
<b>2</b>	<b>HISTEREZISNI OPERATORI .....</b>	<b>13</b>
2.1	Fenomeni i osobine histereza.....	13
2.2	Preisach-ov model histereza .....	15
2.2.1	<i>Geometrijska interpretacija Preisach-ovog modela .....</i>	16
2.2.2	<i>Definisanje Preisach-ove funkcije na osnovu histerezisne petlje .....</i>	19
<b>3</b>	<b>MODELIRANJE ELASTOPLASTIČNOG PONAŠANJA ČELIKA SA IZRAŽENIM PLATOOM TEČENJA PRIMENOM PREISACH-OVOG MODELA HISTEREZISA ....</b>	<b>21</b>
3.1	Preisach-ovi modeli za definisanje elastoplastičnog ponašanja materijala korišćenjem dilatacije kao ulaza.....	22
3.1.1	<i>Preisach-ov model za definisanje ponašanja idealno elastoplastičnih materijala.....</i>	22
3.1.2	<i>Preisach-ov model za definisanje ponašanja idealno elastoplastičnih materijala sa ojačanjem .....</i>	24
3.2	Preisach-ov model za definisanje elastoplastičnog ponašanja konstruktivnih mekih čelika pri monotonom naprezanju .....	25
3.2.1	<i>Omekšanje materijala pri monotonom naprezanju (necking) .....</i>	32
3.3	Preisach-ov model za definisanje elastoplastičnog ponašanja mekih čelika pri cikličnom jednoaksijalnom naprezanju .....	37
3.3.1	<i>Backbone kriva mekih konstruktivnih čelika pri cikličnom naprezanju.....</i>	38
3.3.2	<i>Definisanje unutrašnjih histerezisnih petlji i promene njihove geometrije.....</i>	39
3.3.3	<i>Ciklično naprezanje.....</i>	43
3.4	Primena metode konačnih elemenata kod opisivanja ponašanja aksijalno ciklično napregnutih nosača u domenu plastičnosti .....	45
3.5	Rešavanje sistema jednačina MKE i kriterijum konvergencije.....	48
<b>4</b>	<b>ELASTOPLASTIČNA ANALIZA AKSIJALNO NAPREGNUTIH ELEMENATA SA OŠTEĆENJEM PRI CIKLIČNOM OPTEREĆENJU .....</b>	<b>49</b>
4.1	Modeliranje oštećenja pomoću Preisach-ovog modela histereza sa elementom negativne krutosti.....	50
4.1.1	<i>Backbone kriva mekih konstruktivnih čelika sa oštećenjem pri cikličnom naprezanju .....</i>	50
4.1.2	<i>Ciklično ponašanje sa oštećenjem.....</i>	52
4.2	Modeliranje oštećenja pomoću Preisach-ovog modela histereza sa elementom granice kidanja $Y_D$ .....	54
<b>5</b>	<b>ENERGETSKI GUBICI I FENOMEN ZAROBLJENE ENERGIJE .....</b>	<b>58</b>
5.1	Uvod.....	58

5.2	Definisanje energetskih gubitaka pomoću Preisach-ovog modela histerezisa .....	58
<b>6</b>	<b>ELASTOPLASTIČNA ANALIZA GREDNIH NOSAČA OD KONSTRUKTIVNIH MEKIH ČELIKA PRIMENOM PREISACH-OVOG MODELA HISTEREZISA .....</b>	<b>61</b>
6.1	Uvod.....	61
6.2	Čisto savijanje pravougaonih poprečnih preseka .....	62
6.2.1	<i>Geometrijska interpretacija</i> .....	64
<b>7</b>	<b>ANALIZA ZAMORA MATERIJALA I METODE ODREĐIVANJA BROJA CIKLUSA PROIZVOLJNE ISTORIJE OPTEREĆENJA .....</b>	<b>69</b>
7.1	Metode za određivanje broja ciklusa pri proizvoljnoj istoriji opterećenja.....	69
7.1.1	<i>Metoda rezervoara</i> .....	71
7.1.2	<i>Metoda kišnog toka (Rainflow counting method RFC)</i> .....	72
7.2	Određivanje broja ciklusa pomoću Preisach-ovog histerezisnog operatora ( <i>Staircase</i> metoda) 76	
<b>8</b>	<b>EKSPERIMENTALNI REZULTATI.....</b>	<b>80</b>
8.1	Mehaničke karakteristike čelika .....	80
8.2	Geometrija uzoraka i oprema za ispitivanje .....	81
8.3	Ispitivanje pri monotonom aksijalnom naprezanju.....	82
8.4	Ispitivanje pri cikličnom aksijalnom naprezanju.....	85
<b>9</b>	<b>ZAKLJUČAK .....</b>	<b>89</b>
<b>10</b>	<b>LITERATURA.....</b>	<b>92</b>
	<b>BIOGRAFIJA AUTORA.....</b>	<b>98</b>

# 1 TEORIJA I FENOMENI ELASTOPLASTIČNOSTI

## 1.1 UVOD

Proračun konstruktivnih elemenata se sastoji iz dva koraka, gde prvi predstavlja određivanje spoljašnjih uticaja koji deluju na element, dok je drugi sračunavanje odgovora elementa na osnovu karakteristika materijala od kog je izrađen. Većina inženjerskih konstrukcija se dimenzioniše primenom teorije elastičnosti, gde se smatra da je veza između napona i deformacija linearna i proporcionalna materijalnoj konstanti  $E$ , odnosno modulu elastičnosti. Graničnu vrednost, pri dimenzionisanju elemenata teorijom elastičnosti, definiše tačka pri kojoj dolazi do nestanka linearne veze napona i dilatacije. Osnovni kriterijum i princip proračuna konstrukcija prema teoriji elastičnosti je dat sledećim izrazom:

$$\sigma = \varepsilon \cdot E \leq \sigma_T, \quad (1.1)$$

gde je:

$\sigma$  - računski napon u elementu usled spoljašnjih uticaja

$\varepsilon$  -dilatacija elementa, koja predstavlja meru deformacije

$E$  - modul elastičnosti materijala

$\sigma_T$  - napon pri kome dolazi do pojave plastičnih deformacija, napon tečenja.

Na ovaj način, kod velikog broja materijala, se zanemaruje znatna rezerva nosivosti, koja se nalazi u plastičnoj oblasti. Pojava plastičnih deformacija, nakon prelaska granice proporcionalnosti, odnosno dostizanja napona tečenja  $\sigma_T$ , je karakteristika duktilnih materijala. Optimizacija utroška ovakvih materijala, kod kojih često dolazi i do ojačanja nakon prelaska granice proporcionalnosti, zahteva precizniju analizu i korišćenje zakona i pretpostavki teorije plastičnosti. Dobro je poznato da se na ovaj način, kod pomenutih materijala, postiže najekonomičnije rešenje i dobija bolji uvid u njihovo ponašanje. Kod analize krutih materijala, teorija plastičnosti nema značajniju primenu, jer kod ovakvih materijala, nakon prelaska granice proporcionalnosti dolazi do pojave loma.

Teorija plastičnosti predstavlja proširenje teorije elastičnosti, čime se opisuje ponašanje materijala i u zoni elastičnosti i u zoni plastičnosti. Pojam plastičnost je nastao od grčkog glagola "πλάσσειν", što u prevodu znači "oblikovati" i služi za opisivanje materijala kod kojih dolazi do promene njihovog oblika pri nanošenju sile odgovarajućeg intenziteta, uz zadržavanje novog, deformisanog oblika nakon uklanjanja spoljašnjeg opterećenja. Osnovna razlika između elastičnih i plastičnih deformacija leži u tome što su plastične deformacije trajne, odnosno, ne nestaju nakon prestanka spoljašnjeg dejstva.

Kod većine konstruktivnih, mekih čelika pri monotonom naprezanju dolazi do pojave horizontalnog platoa u naponsko – deformacijskom dijagramu, koji isčezava prilikom cikličnog naprezanja. Kako je znatan broj čeličnih konstrukcija izrađen baš od ovih čelika, definisanje njihovog ponašanja, pri cikličnom opterećenju je od velikog značaja. Razvoj numeričkog modela koji definiše naponsko stanje elementa, kao izlazni parametar na osnovu deformacije kao ulaznog parametra, pri jednoaksijalnom naponskom stanju uz pojavu oštećenja, a usled cikličnog opterećenja, predstavlja predmet ove disertacije.

Iako se na osnovu veličine posmatranog prostora problemi mogu modelirati na mikro, mezo ili makro nivou, za razmatrani fenomen i inženjerski pristup problemu, u disertaciji će biti korišćeno makromodeliranje.

Možemo razlikovati tri pristupa teorije plastičnosti, od kojih je prvi i najzastupljeniji, pristup teorije platičnosti kontinuuma, ili klasična teorija plastičnosti. U nešto manjoj meri su zastupljene i teorija dislokacija u kojoj je korišćen kristalografski pristup (mikromodeliranje) i teorija disipacije.

## 1.2 KLASIČNA TEORIJA PLASTIČNOSTI

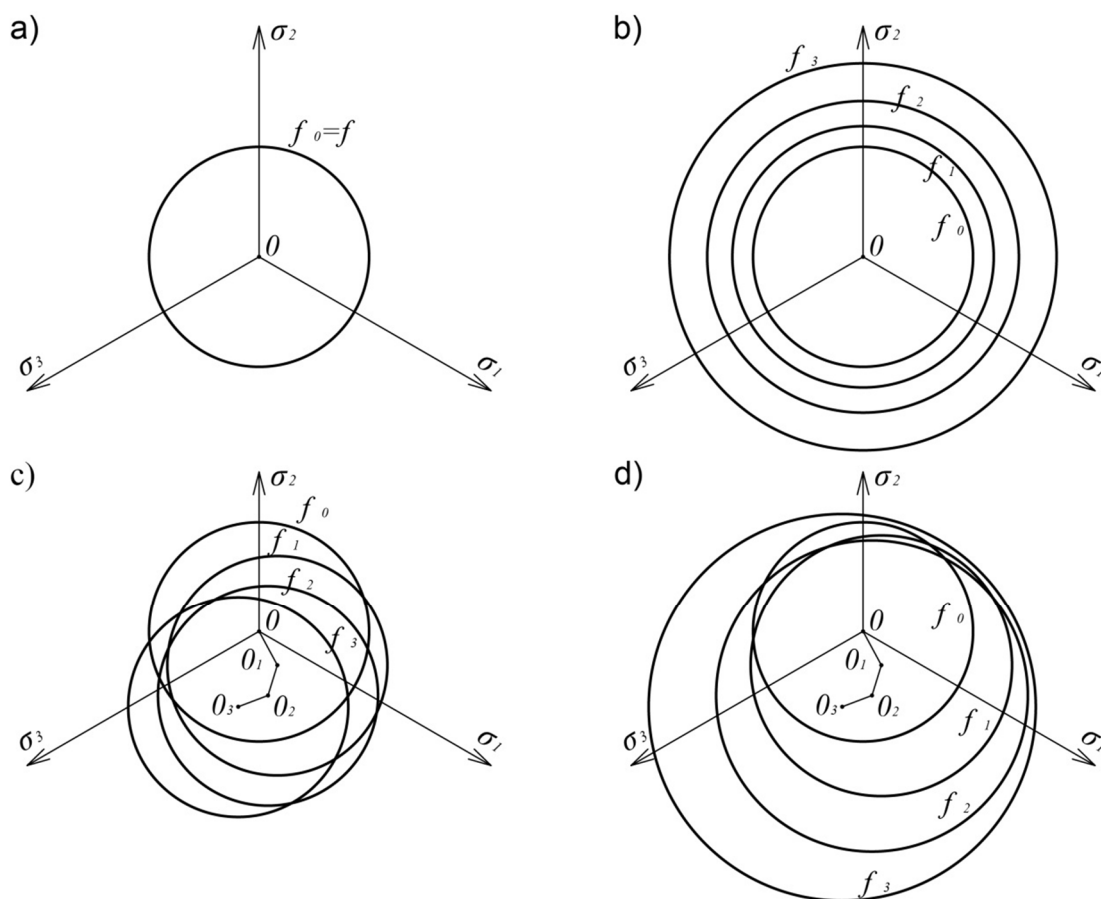
Usled potrebe za definisanjem kriterijuma nastanka nepovratnih deformacija i određivanja stvarne nosivosti materijala, definisana je klasična teorija plastičnosti, gde se pojava nastanka plastičnih deformacija definiše fenomenološki na makro nivou, bez posmatranja interakcija čestica materijala. Karakteristika ovog pristupa leži u definisanju uslova pri kom dolazi do plastičnih deformacija, tzv. granice ili uslova tečenja:

$$\sigma = \sigma(\varepsilon_p). \quad (1.2)$$

Na ovaj način se, u opštem slučaju, definiše da napon u nekoj tački zavisi od vrednosti plastične deformacije  $\varepsilon_p$ .

Začetnikom teorije plastičnosti smatra se Tresca, koji je u svom radu iz 1864. godine [1], prvi definisao uslov tečenja, a pod utiskom ranijeg Coulomb-ovog rada [2] iz oblasti mehanike tla. Sledeći kriterijum tečenja je definisao Von Mises [3], kome je prethodio Maxwell-ov neobjavljeni rad iz 1856. godine. Pionirima ove oblasti smatraju se i St. Venant, koji je 1870. godine definisao osnovne konstitutivne jednačine za telo koje se danas naziva kruto, idealno plastično telo, kao i Levy koji je kasnije te godine definisao jednodimenzionalnu jednačinu. 1924. Prandtl [4] proširuje dotadašnja zapažanja na dvodimenzionalne probleme, a Reuss [5] ide korak dalje i uvodi treću dimenziju.

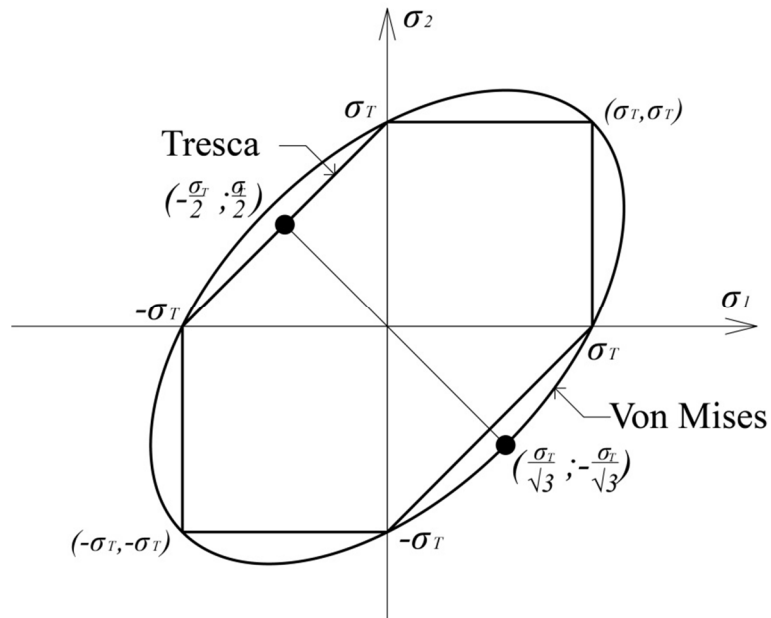
Sva dotadašnja zapažanja su se odnosila na idealno elasto-plastična tela uz nemogućnost definisanja ojačanja, zbog postojanje stacionarne površi tečenja. Kako bi se modeliralo ojačanje kod materijala, nakon prolaska granice tečenja, površ tečenja mora da pretrpi određene promene. Postoje dva osnovna tipa ojačanja, u zavisnosti od načina promene površi tečenja u naponsko-deformacijskom prostoru. Izotropno ojačanje nastaje usled centričnog širenja površi tečenja unutar naponsko-deformacijskog prostora. Ukoliko dođe do kontrakcije površi tečenja, onda govorimo o slabljenju materijala. Drugi tip ojačanja je kinematičko ojačanje, koje nastaje usled translacije površi tečenja. Na ovaj način je moguće opisati veliki broj efekata, koji se javljaju pri cikličnom naprezanju, kao što je Bauschinger-ov efekat. Zakonitost kontrakcije i translacije površi tečenja može biti linearna ili nelinearna, od čega zavisi konačan oblik i položaj površi tečenja. Ojačanje/slabljenje kod većine materijala se opisuje kombinacijom ova dva tipa ojačanja/slabljenja.



Slika 1.1. - Ojačanje materijala u zavisnosti od načina promene površi tečenja: a) Materijal bez ojačanja; b) Izotropno ojačanje; c) Kinematičko ojačanje; d) Kombinovano ojačanje

Linearno kinematičko ojačanje predložio je Prager [6], kod koga je translacija površi tečenja zavisila od vrste materijala i brzine promene efektivne plastične deformacije. Na osnovu prethodno spomenutih dela i Drucker-ovog rada [7] iz 1964. godine, izvedeni su modeli za opisivanje površi tečenja, kao što su Tresca-ina, Mises-ova, Mohr- Coulomb-ova, Drucker-Prager-ova površ tečenja, a koje se i danas najviše koriste. Iako su najstarije, površi tečenja koje je predložio Von Mises i Tresca (Slika 1.2), veoma tačno opisuju kvazi izotropno plastično ponašanje metala. Mohr-Coulomb-ova površ tečenja predstavlja modifikaciju Tresca-ine, dok je Drucker-Prager-ova modufikovana Mises-ova površ tečenja, tako da uzimaju u obzir različito ponašanje materijala pri zatezanju i pritisku.

Pored Prager-ovog modela, treba spomenuti i njegovu poboljšanu verziju, koju su predložili Armstrong i Frederick [8] koja omogućava nelinearnost naponsko-deformacijske krive, Wang-Ohno-ov model [9] sa multilinearnim ojačanjem, Mroz-ov model [10] sa velikim brojem promenljivih i nekoliko koncentrisanih površi za definisanje ojačanja, kao i Dafalis-Pop-ov model [11] koji koristi samo dve površi, ali vrši kontinualno variranje modula ojačanja.



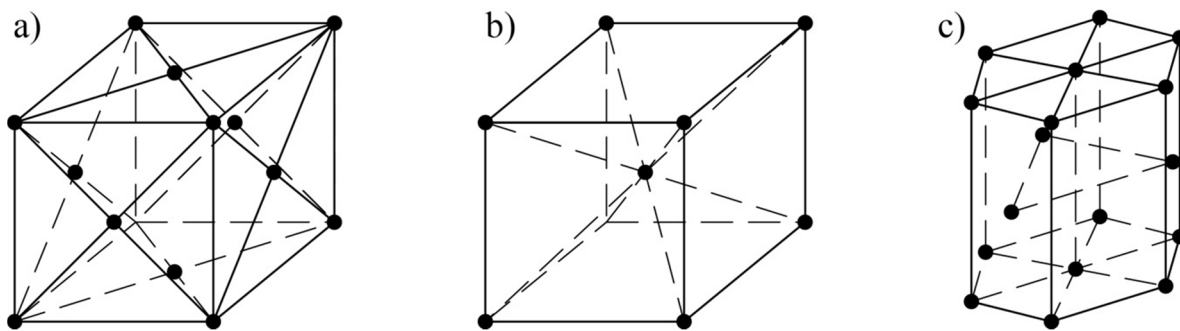
Slika 1.2 - Grafički prikaz osnovnih površi tečenja Misses-a i Tressca-e

### 1.3 MIKROPLASTIČNOST

U početku razvoja teorije plastičnosti, korišćeno je makro modeliranje problema, ne uzimajući u obzir pojave i interakcije između atoma materijala pri plastičnim deformacijama. Iako su makromodeliranje i klasična teorija plastičnosti, dovoljni za rešavanje većine tehničkih problema, određene pojave se mogu opisati jedino na nivou atomske rešetke, uz primenu mikroplastičnosti. Ponašanje mekih čelika pri cikličnom opterećenju, definisano u ovoj doktorskoj tezi, je fenomenološko, opisano na osnovu eksperimentalnih rezultata, bez definisanja oblika i načina promene površi tečenja. Međutim, nastanak i gubljenje platoa tečenja kod ovih čelika se može objasniti samo na mikro nivou.

Svi materijali se mogu podeliti na tri osnovne grupe: metale, keramiku i polimere uz kompozite kao dodatnu, izvedenu grupu nastalu kombinovanjem materijala iz prethodno spomenutih grupa. Metali mogu biti čisti ili u vidu legura, koje predstavljaju kombinaciju različitih jedinjenja metala i dodataka radi poboljšanja određenih karakteristika. Prema boji se dele na crne i obojene metale. Konstruktivni čelici spadaju u crne, legirane metale i karakteriše ih relativno velika čvrstoća i krutost, veoma dobra električna i termička provodljivost, dobra duktilnost, obradivost i otpornost na udare.

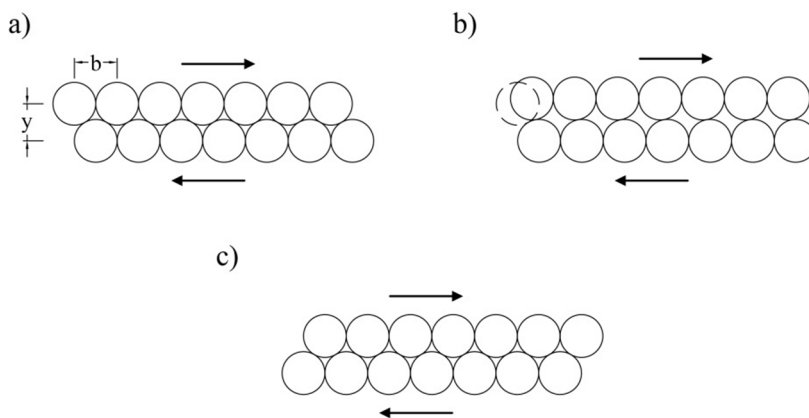
Mikromodeliranje u teoriji plastičnosti je primenjeno kako bi se što tačnije odredila nosivost duktilnih materijala. Metali, u svojoj uobičajenoj formi, predstavljaju polikristalne agregate, sastavljene od velikog broja kristala, koji predstavljaju trodimenzionalne nizove atoma, oblikovane u pravilne rešetke (kristalne rešetke). Atomi vibriraju oko fiksnih tačaka unutar kristalne rešetke, zadržavajući svoje mesto unutar rešetke uz pomoć sila kojim susedni atomi deluju na njega. Te sile mogu biti jonske, kovalentne ili metalne sile veze.



Slika 1.3 - Oblici kristalnih rešetki metala: a) kubna površinski orjentisana; b) kubna prostorno orjentisana; c) heksagonalna

Iako se u konstruktivnim čelicima mogu naći primese različitih metala i nemetala, najznačajnije veze između kristala nastaju usled metalnih sila veze. Ova veza je karakteristična za metale kod kojih se u poslednjoj ljusci mogu naći najviše tri elektrona. Usled relativno slabe veze ovih elektrona sa pozitivno naelektrisanim jezgrom atoma, oni mogu relativno lako da se odvoje od njega. Metalna veza nastaje kada se dva ovakva atoma nađu na relativno malom rastojanju, sa dovoljnom gustinom pakovanja, čime elektroni iz poslednje ljuske prelaze na drugi atom, pod uslovom da elektroni sa drugog atoma zauzmu njihovo mesto. Na ovaj način naelektrisanje atoma ostaje neutralno, a lako pokretljivi elektroni formiraju takozvani elektronski oblak unutar kristalne rešetke.

Na osnovu ispitivanja sprovedenih na metalima početkom XIX veka i teorijskih razmatranja čvrstoće metala na osnovu jačine međumolekularnih veza, došlo se do čvrstoća koje su oko 1000 puta veće od onih ostvarenih tokom ispitivanja. Razlog leži u tome što je materijal posmatran kao idealan, bez dislokacija u njemu. Nastanak plastičnih deformacija je upravo posledica klizanja u materijalu po ravnima dislokacija usled smičućeg napona. Elastično ponašanje ovih dislokacija prvi su uočili Volterra [12] i Love [13], dok je konstitutivne zakone elasto-plastične deformacije kristala prvi prikazao Taylor [14], a dodatno pojasnio Asaro [15]. Uprošćeni model plastične deformacije, prikazan na slici Slika 1.4, predstavlja razvoj dislokacije unutar jednog idealnog kristala i pogodan je za opisivanje izotropnog ponašanja. Pošto se metali sastoje iz većeg broja kristala različite granulometrije, za njihovo ponašanje bi se moglo reći da je anizotropno. Međutim, usled različite orijentacije kristala, koji formiraju složen sistem, ponašanje metala se može klasifikovati kao kvazi izotropno. Ova lažna izotropnost neće postojati ukoliko su kristali metala orijentisani u istom pravcu, što se može postići nekom od hladnih obrada.

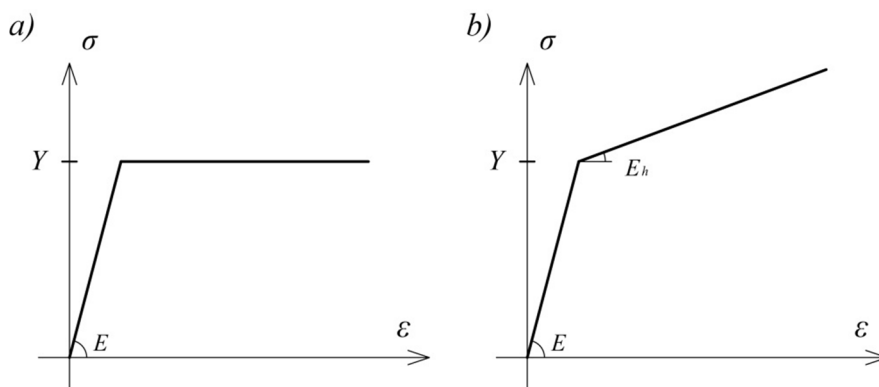


Slika 1.4 - Model razvoja dislokacije klizanjem

Ovaj pristup teoriji plastičnosti se pokazao kao veoma uspešan u razmatranju ponašanja anizotropnih materijala u zoni plastičnosti, kao i pri uzimanju u obzir efekata veličine uzorka. Naime, klasična teorija plastičnosti nije u stanju da razmatra ponašanje elemenata kod kojih veličina dislokacija nije zanemarljiva u odnosu na veličinu razmatranog elementa.

## 1.4 LÜDERS BAND

Zavisno od oblika dijagrama napon – deformacija, ponašanje materijala se može svrstati u više grupa. Osim krtih materijala, kod kojih gotovo da nema elastičnog odgovora prilikom njihovog naprezanja, veliki broj materijala poseduje izražen elastični region u kome je veza između napona i deformacija proporcionalna modulu elastičnosti  $E$ , koji predstavlja materijalnu konstantu. Linearna veza  $\sigma$ – $\epsilon$  dijagrama, važi sve do dostizanja napona na granici tečenja  $\sigma_T$ . U zavisnosti od njihovog ponašanja nakon dostizanja granice tečenja, elastični materijali se mogu podeliti na idealno elasto-plastične i idealno elasto-plastične materijale sa ojačanjem. Većina metala, pa i čelici, se na osnovu svojeg ponašanja nakon dostizanja granice tečenja  $\sigma_T$  mogu svrstati u ove dve grupe materijala. Njihovi radni  $\sigma$ – $\epsilon$  dijagrami su prikazani na slici Slika 1.5.



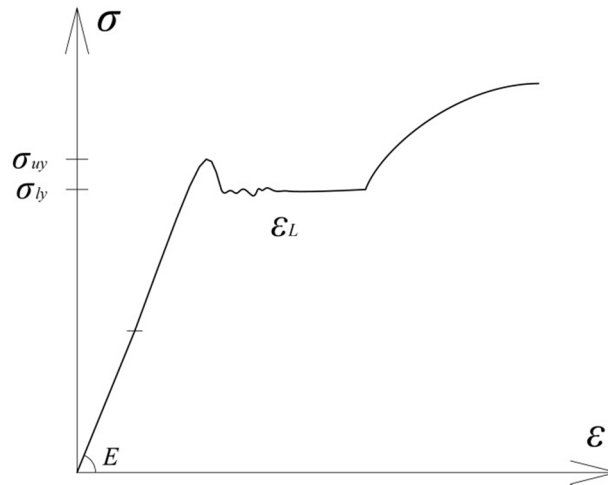
Slika 1.5 - Radni dijagram: a) Idealno elastoplastični materijal; b) Idealno elastoplastični materijal sa ojačanjem

Međutim, ponašanje slabo legiranih (mekih) čelika, niskougljeničnih čelika, nekih legura čelika (Al-Mg), kao i nekih obojenih metala, karakteriše nestabilna elasto-plastična tranzicija koja pogoršava obradivost i duktilnost ovih materijala. Ova pojava je posledica odvajanja slobodnih atoma (najčešće ugljenika ili nikla) i njihova ugradnja na mestima postojećih i novoformiranih dislokacija unutar rešetke koju formiraju atomi gvožđa [16].

Na osnovu radnog  $\sigma$ – $\epsilon$  dijagrama, ponašanje ovih materijala se prema [17] može klasifikovati kao ponašanje Tipa 4, koje predstavlja svojevrsnu kombinaciju idealno-elastoplastičnog i idealno elasto-plastičnog ponašanja sa ojačanjem. Početni deo dijagrama napon – deformacija je linearan i proporcionalan modulu elastičnosti  $E$ , sve do dostizanja napona  $\sigma_{ly}$ , koji se naziva gornja granica tečenja. Dostizanje date vrednosti, prati nagli pad napona na vrednost donje granice tečenja  $\sigma_{ly}$ , čemu sledi formiranje platoa tečenja, aproksimativne veličine 1%-3% ukupne dilatacije, prema [17]. Uzrok ovakvog ponašanja pomenutih čelika, leži u mikrostrukturi i atomskoj rešetki. Slobodni atomi ugljenika i azota, okružuju dislokaciju, prouzrokujući visok nivo napona potrebnog za njeno pokretanje unutar kristalne rešetke, odnosno  $\sigma_{ly}$ . Nakon pokretanja dislokacije, njeno kretanje se relativno lako nastavlja, obrazujući plato tečenja, sve dok ne dođe do nove pregrupacije atoma unutar kristalne rešetke.



Pomenuta pojava se naziva Lüders band, a dužina platoa tečenja – Lüder-ova dilatacija  $\varepsilon_L$ . Lüders band predstavlja lokalnu, nehomogenu deformaciju, koja, prouzrokuje razvoj platoa tečenja sve dok se Lüders band ne raširi po celom uzorku, nakon čega sledi ojačanje materijala i homogena deformacija.



Slika 1.6 - Pojava Lüders band-a pri monotonom zatezanju

Veličina gornje i donje granice tečenja, kao i Lüder-ove dilatacije zavisi od velikog broja parametara, kao što su veličina zrna čelika [18], brzina nanošenja deformacije i sadržaj ugljenika [19]. Povećanje brzine nanošenja opterećenja, odnosno deformacije, povećava dužinu platoa tečenja i ta zavisnost se može prikazati kao:

$$\varepsilon_L = \varepsilon_{L0} + A \log_{10} \dot{\varepsilon} . \quad (1.3)$$

Gde je:

$\varepsilon_{L0}$  - Lüder-ova dilatacija (dužina platoa tečenja) pri  $\dot{\varepsilon} = 1$ ,

$\dot{\varepsilon}$  - brzina nanošenja deformacije,

$A$  - materijalna konstanta.

Vrednost gornje granice tečenja  $\sigma_{uy}$ , kod ovih materijala, je veoma osetljiva na manje koncentracije napona, poravnanje uzorka unutar čeljusti, kao i na druge parametre, pa i rezultati ispitivanja pokazuju znatna osipanja. Iz ovog razloga se gornja granica tečenja zanemaruje, a za vrednost napona, pri kojoj dolazi do tranzicije iz elastične u plastičnu oblast, se uzima vrednost donje granice tečenja  $\sigma_{ly}$ . Tako da se ponašanje ovih materijala, sa dovoljnom tačnošću, može prikazati pomoću tri krive. Prva od njih predstavlja elastičnu oblast prikazanu pravom linijom nagiba  $E$ , druga horizontalni plato tečenja dužine  $\varepsilon_L$ , a treća predstavlja zonu ojačanja materijala sa nagibom  $E_h$ .

## 1.5 CIKLIČNA PLASTIČNOST

Elementi konstrukcija su u većini slučajeva izloženi opterećenju, čiji intenzitet varira u toku životnog veka konstrukcije. I pored toga, može se govoriti o kvazi statičkom opterećenju, ukoliko su brzine promene opterećenja dovoljno male da se vrednosti inercijalnih sila mogu zanemariti. Oscilacije intenziteta opterećenja u zoni elastičnosti, ukoliko ne razmatramo zamor materijala pri velikom broju

ciklusa, ne dovode do odstupanja od postulata teorije elastičnosti. Reverzibilno (ciklično) opterećenje intenziteta koji izaziva plastične deformacije u materijalu, prouzrokuje naponsko – deformacijsku sliku u obliku zatvorene ili otvorene petlje (histerezisa), pa se takvo ponašanje naziva i histerezisno ponašanje materijala pri cikličnom opterećenju.

Odgovor materijala pri cikličnom opterećenju, odnosno oblik i veličina petlje, zavise prvenstveno od vrste materijala, ali i od drugih faktora kao što su brzina nanošenja opterećenja i temperaturni uticaji. Zavisno od toga da li uzimaju u obzir brzinu nanošenja opterećenja ili ne, modeli ciklične plastičnosti se dele na:

- *rate-dependent* modele (modeli viskoplastičnosti),
- *rate-independent* modele.

Modeli viskoplastičnosti se koriste pri relativno velikim brzinama promene deformacija, kao i kada se modelira tečenje materijala pri visokim temperaturama, uglavnom višim od  $1/2$  temperature topljenja materijala. Ovakvo ponašanje materijala se najčešće definiše putem modela koji poseduju površ tečenja uz postojanje zakona njene promene, a koji uzima u obzir brzinu promene deformacije. Međutim, postoje i *rate-dependent* modeli bez površi tečenja, kod kojih se uvodi unutrašnja mera vremena i koji ne zavise od realnog vremena već od unutrašnje mere deformacije. Prve modele ovog tipa predložio je Valanis [20], a kasnije i Bodner [21].

Valanis-ov model poseduje mogućnost predstavljanja i *rate-independent* plastičnog ponašanja. Takvo ponašanje je karakteristično za relativno male brzine promene deformacije (do  $10s^{-1}$ ) i temperature niže od  $1/2$  temperature topljenja materijala. Temperature topljenja karakterističnih metala, su date u sledećoj tabeli:

Tabela 1.1 - Tačke topljenja različitih metala

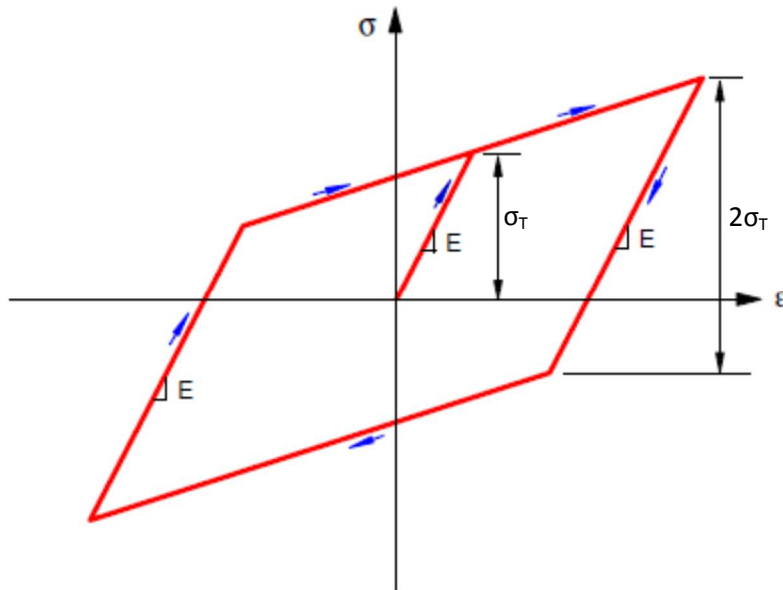
Vrsta metala	Oznaka	Tačka topljenja [C°]	Vrsta metala	Oznaka	Tačka topljenja [C°]
Aluminijum	Al	6600	Bakar	Cu	1083
Volfram	W	3370	Nikl	Ni	1452
Gvožđe	Fe	1539	Kalaj	Sn	232
Kobalt	Co	1490	Olovo	Pb	327
Magnezijum	Mg	641	Hrom	Cr	1550
Mangan	Mn	1242	Cink	Zn	419

Za većinu modela klasične plastičnosti, kao što su modeli predloženi u radovima [6],[8],[9] i [22], može se reći da ne poseduju nasledne funkcije, odnosno, da trenutno stanje materijala opisuje samo preko trenutnog stanja promenljivih, ne posmatrajući uticaj prethodne istorije opterećenja. Generalisana teorija plastičnosti Lubliner-a [23] takođe spada u ovu vrstu modela.

Drugi tip modela uzima u obzir i uticaj prethodne istorije opterećenja i za takve modele se može reći da poseduju efekat pamćenja (*memory effect*). U zavisnosti od toga da li model pamti celokupnu istoriju opterećenja ili samo njene karakteristične ekstreme, mogu se podeliti na modele sa lokalnom (*local*) i nelokalnom (*nonlocal*) memorijom. Histerezisni operatori poseduju efekat pamćenja. Pored Preisach-ovog modela, prikazanog u radovima Šumarca, Krajčinovića i Lubarde [24], [25], treba spomenuti i Bouc-Wenov model [26],[27], koji je jedan od najrasprostranjenijih histerezisnih operatora.

### 1.5.1 Bauschinger-ov efekat

Bauschinger-ov efekat je osnovni i dobro poznati efekat ciklične plastičnosti. Prilikom napreznja materijala u jednom smeru i prelaskom napona tečenja  $\sigma_T = \sigma_1$  dolazi do plastične deformacije materijala. Ukoliko, tako plastično deformisani materijal opteretimo u suprotnom smeru, ponovo će se javiti elastična veza napon-deformacija, sve do vrednosti  $\sigma_2$ , čija je apsolutna vrednost niža od početnog napona tečenja  $\sigma_T$ . Razlika ova dva napona, odnosno ostvareni elastični napon će iznositi  $\sigma_1 - \sigma_2 = 2\sigma_T$ . Bauschinger-ov efekat predstavlja pojavu povećanja granice tečenja u smeru plastičnog tečenja, a opadanja u suprotnom smeru [28], [29]. Ova široko rasprostranjena pojava se javlja i u metalima i predstavlja osnovu razvoja modela prikazanog u ovoj disertaciji.

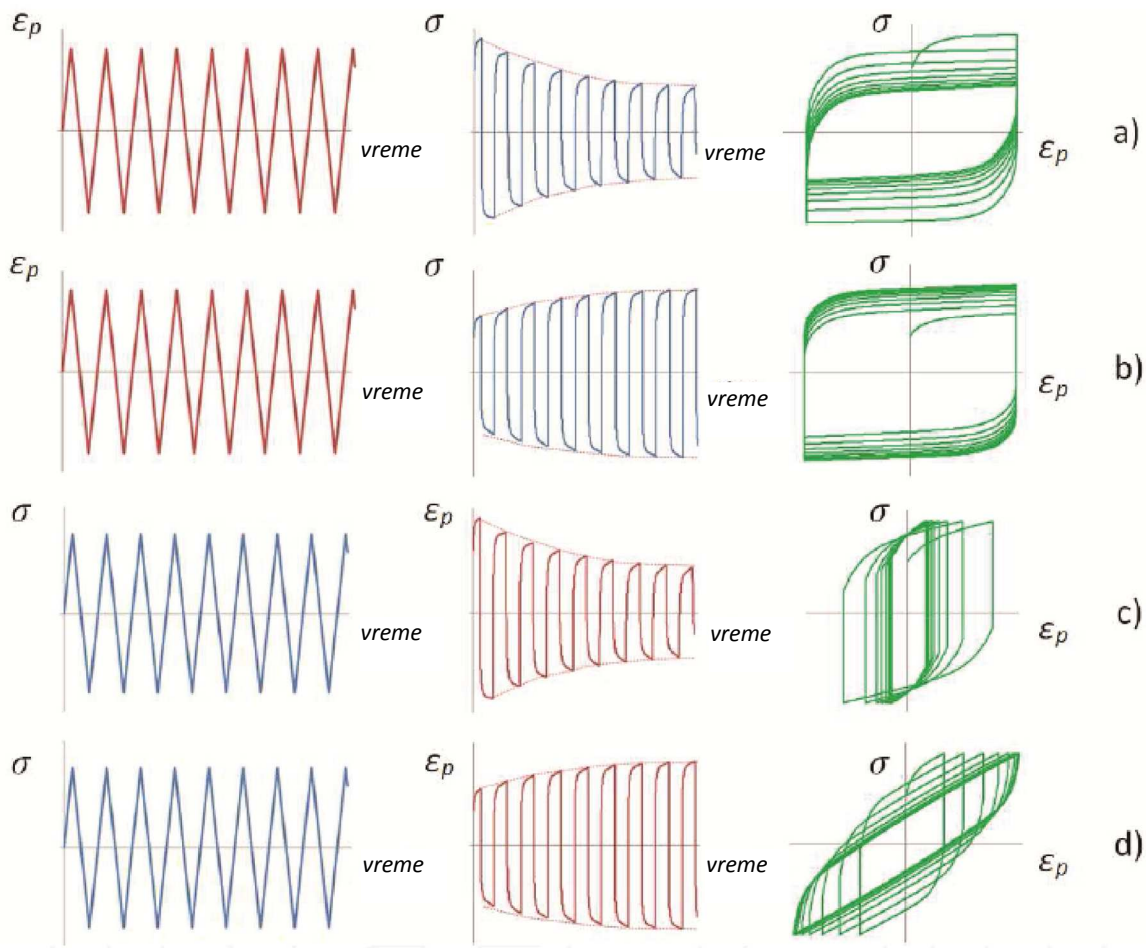


Slika 1.7 - Bauschinger-ov efekat

### 1.5.2 Ciklično ojačanje/omekšanje

Za početak treba napraviti razliku između ojačanja materijala pri monotonom napreznju i ojačanja pri cikličnom napreznju. Pri monotonom napreznju, nakon prelaska granice tečenja  $\sigma_T$  kod duktilnih materijala dolazi ili do razvoja horizontalnog platoa tečenja ili do daljeg prirasta napona pri povećanju deformacije. Ova poslednja pojava predstavlja (monotonno) ojačanje materijala, pa se materijali sa ovom osobinom nazivaju materijalima sa ojačanjem. Idealno ponašanje materijala bi pri punom ciklusu opterećenja dovelo do formiranja zatvorene histerezisne petlje.

Usled cikličnog napreznja, dolazi do narušavanja početnog odgovora materijala u vidu promena dimenzija narednih petlji u odnosu na početnu. Ova pojava predstavlja ciklično ojačanje/omekšanje i posledica je mikrostrukturnih promena u materijalu. Ove promene ne zavise samo od vrste materijala, odnosno njegove mikrostrukture (rasporeda atoma u kristalnoj rešetki, veličine, rasporeda i broja dislokacija) već i od prethodne istorije opterećenja. Čvrsti materijali omeškavaju, dok meki ojačavaju pri cikličnom napreznju, što se na naponsko-deformacijskom dijagramu ispoljava u vidu smanjenja, odnosno povećanja dimenzija histerezisne petlje. Prema [29] „Neki materijali pokazuju veoma jaku osobinu cikličnog ojačanja/omekšanja (nerđajući čelik, bakar), a neki manje očiglednu (konstruktivni čelici)“.

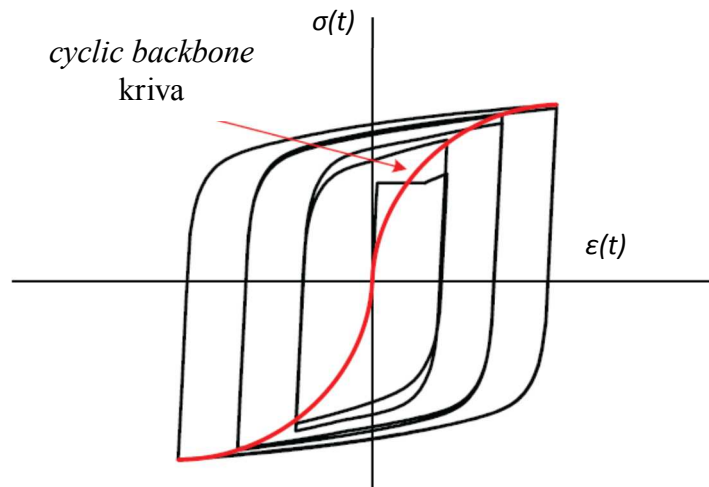


Slika 1.8 - a) Ciklično omekšanje  $\epsilon$ ; b) ciklično ojačanje pri konstantnoj amplitudi dilatacija; c) ciklično ojačanje  $\sigma$ ; d) ciklično omekšanje pri konstantnoj amplitude napona [29]

Pojava ojačanja/omekšanje je proces čiji intenzitet opada sa brojem ciklusa, sve do potpune saturacije uzorka. Međutim, moguće je da materijal u početnom opsegu naprezanja pokaže osobinu cikličnog ojačanja, dok kasnije ispolji osobinu cikličnog omekšanja. U radu [30] je pokazano da se ove pojave mogu modelirati promenom uslova tečenja čime se dobija izotropni model.

Ojačanje/omekšanje može biti i neproporcionalno usled izloženosti neproporcionalnom prirastu napona ili deformacije tokom vremena. Ova pojava je veoma zastupljena kod višeaksijalnih problema pri neproporcionalnom variranju glavnog napona.

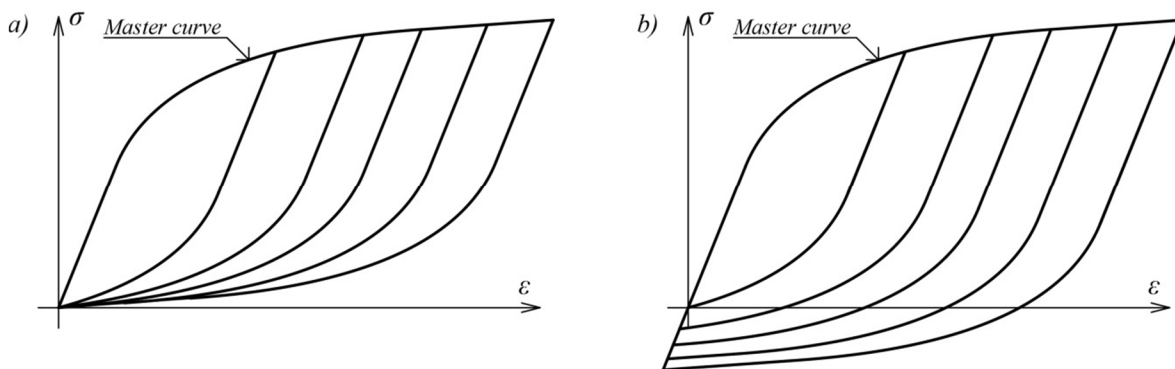
Na osnovu eksperimenata sprovedenih na uzorcima od konstruktivnih čelika, izloženih cikličnom naprezanju u zoni plastičnosti, prikazanih u radovima [31], [32] i [33], može se uočiti novi vid cikličnog ojačanja. Ovaj tip cikličnog ojačanja je karakterističan za napone u zoni plastičnosti i relativno mali broj ciklusa, pri čemu su efekti zamora materijala zanemarljivi. Pri svakom koraku opterećenja, nakon trenutka  $t$ , u kom je maksimalna dilatacija veća od maksimalne dilatacije do posmatranog trenutka  $\epsilon(t)$ , dolazi do transformacije oblika petlje i porasta granice tečenja materijala, što uzrokuje formiranje koncentrisanih petlji. Visina petlje zavisi od maksimalne dilatacije u prethodnoj istoriji opterećenja. Pikovi novoformiranih petlji obrazuju krivu koja se naziva „cyclic backbone“ kriva (Slika 1.9). Definisane ove pojave i njena implementacija u histerezisni model, predstavlja jedan od glavnih zadataka ove disertacije.



Slika 1.9 - Ciklično ojačanje konstruktivnih čelika (cyclic backbone kriva)

### 1.5.3 Masing-ov efekat

Ukoliko se naponsko-deformacijske histerezisne petlje materijala izloženog plastičnim deformacijama različitih amplituda, transliraju tako da imaju zajednički početak i uzlazne grane histerezisnih petlji se poklapaju, može se reći da razmatrani materijal poseduje Masing-ov tip ponašanja. Gornje, uzlazne grane krivih tada obrazuju krivu, nazvanu *master* kriva. Neki od metala pod određenim uslovima iskazuju Masing-ovo ponašanje, međutim ovaj tip ponašanja nije karakterističan za sve metale. Materijal Masing-ovog tipa ponašanja će imati jednake grane histerezisne petlje pri opterećenju i rasterećenju. To je posledica stabilnosti mikrostruktura i dislokacijskih podstruktura pri zamoru, usled kojih se pri cikličnom naprezanju, formiraju stabilne histerezisne petlje. Masing-ov efekat se eksperimentalno potvrđuje tako što se materijal izlaže cikličnom opterećenju punih ciklusa, različitih amplituda, a ostvarene histerezisne petlje se transliraju tako da im se vrhovi petlji pri pritisku (ređe pri zatezanju) postavljaju u koordinatni pocetak. Ukoliko sve grane petlji ostvarenih pri opterećenju ne obrazuju jednu glatku, *master* krivu, govorimo o non-Masing-ovom ponašanju.

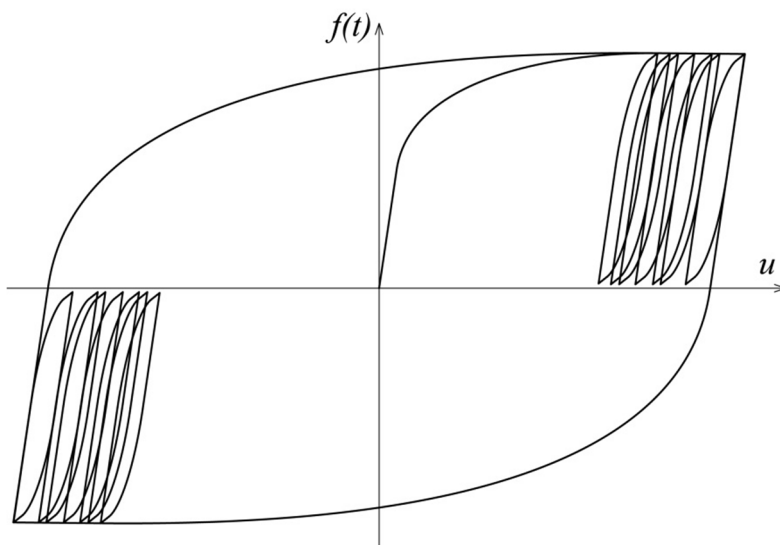


Slika 1.10 - a) Masing-ov tip ponašanja b) Non-Masing-ov tip ponašanja

Non –Masing-ov tip ponašanja je, uglavnom, posledica heterogenosti rasporeda dislokacija unutar materijala. Ukoliko se uzlazne grane histerezisnih petlji materijala non-Masing-ovog tipa ponašanja, poklope tako da formiraju jednu zajedničku krivu, počeci petlji neće biti u zajedničkoj tački, a ukoliko se počeci petlji lociraju u koordinatnom početku, uzlazne grane petlji neće formirati master krivu.

### 1.5.4 Ciklično tečenje (*Ratcheting*)

Ovaj fenomen nastaje kod elemenata ciklično opterećenih u zoni plastičnosti, u uslovima kontrolisanog napona. Predstavlja akumulaciju sekundarne deformacije pri cikličnom opterećenju, odnosno priraštaj deformacije, ciklus po ciklus, pri asimetričnom cikličnom opterećenju, sa naponima istog opsega.



Slika 1.11 - Ciklično tečenje

Ciklično tečenje je veoma složena pojava koju je veoma teško modelirati. Fenomen se javlja kod otvorenih histerezisnih petlji, kao posledica anizotropnog ponašanja materijala pri zatezanju i pritisku. Zavisi i od ojačanja/omekšanja materijala, veličine glavnog napona, oblika površi tečenja, temperature pri testiranju i proporcionalnosti opterećenja. U radu Jiang-a [28], o ovom cikličnom fenomenu su data sledeća zapažanja:

- opadanje intenziteta pojave cikličnog tečenja je česta pojava, koja je uslovljena povećanjem broja ciklusa,
- zavisi od prethodne istorije opterećenja, pa smer tečenja može biti različit od trenutnog smera glavnog napona
- opadanje intenziteta tečenja nije posledica izotropnog ponašanja materijala pri zatezanju i pritisku, pa ovaj fenomen ne može biti modeliran pomoću modela sa izotropnim ojačanjem,
- opadanje intenziteta tečenja zavisi od posebne vrste ojačanja (ojačanje cikličnog tečenja).

### 1.5.5 Nproporcionalno ciklično ojačanje

Ukoliko se odnos napon-dilatacija menja prema nekoj zakonitosti (proporcionalno) u toku vremena, onda govorimo o proporcionalnom opterećenju. Zatezanje, pritisak i čisto smicanje spadaju u kategoriju proporcionalnih opterećenja. Generalno, sve vrste opterećenja kod kojih se odnos napon-deformacija menja proporcionalno u svim pravcima, spadaju u ovu kategoriju. Višeaksijalna naprežanja, kod kojih se komponente tenzora napona (deformacija) menjaju proporcionalno, pripadaju ovoj grupi opterećenja. U suprotnom, opterećenje je nproporcionalno.

Neproporcionalno opterećenje ne prati određeni zakon promene i opisuje se krivom koja definiše način opterećenja (putanja opterećenja).

Ukoliko se prilikom dejstva neproporcionalnog opterećenja javi dodatno ciklično ojačanje, tu pojavu nazivamo neproporcionalnim cikličnim ojačanjem. Pokazano je da ova pojava zavisi od vrste materijala [34] i putanje opterećenja [35].

Putanja opterećenja u naponskom prostoru definisanom  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  i  $\sigma_3$  osama je prikazana linijom, čije se tačke definišu na osnovu ugla  $\Phi$  kako je prikazano na slici Slika 1.12. Prema [29], amplituda napona, uzimajući u obzir neproporcionalno ojačanje, se definiše kao:

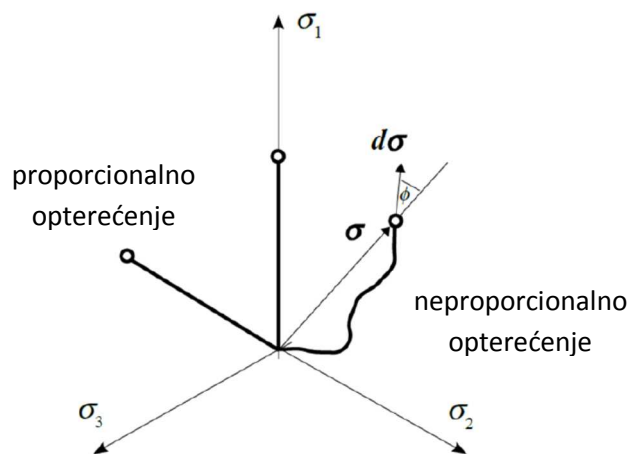
$$\sigma(\Phi) = (1 + \alpha\Phi)\sigma^p \quad (1.4)$$

Gde je:

$\sigma^p$  - ekvivalentna amplituda napona pri proporcionalnom opterećenju,

$\alpha$  - materijalni parametar,

$\Phi$  - parametar koji definiše neproporcionalno ojačanje.



Slika 1.12 - Putanje opterećenja za proporcionalno i neproporcionalno opterećenje [29]

Većina opterećenja koja se javljaju u inženjerskim problemima, spada u grupu neproporcionalnih opterećenja. Eksperimentalna posmatranja ove pojave se najčešće vrše pri ispitivanjima kod kojih se kombinuje aksijalno zatezanje i torzija pri različitim pravcima glavnih napona. Ekstremni uticaji se dobijaju kada su glavni pravci napona za torziju i zatezanje pod uglom od  $90^\circ$ .

## 2 HISTEREZISNI OPERATORI

### 2.1 FENOMENI I OSOBINE HISTEREZISA

Pojava histerezisa je karakteristična u mnogim oblastima kao što su mehanika [36], feromagnetizam [37], seizmologija [38], inženjerstvo [39], ekonomija [40] i biologiji [41]. Značenje ovog pojma se kod svih procesa može definisati različito, međutim, uopšteno značenje izraza histerezis (grč. ὑστέρησις = zakašnjen ) se odnosi na pojavu, čiji izlazni podaci  $f(t)$  (output) zavise od ulaza  $u(t)$  (input) i od istorije

pojave (puta promene). U fizici ga često srećemo u fenomenima kao što su plastičnost, trenje, feromagnetizam, superprovodljivost, filtracija, apsorpcija, a u novije vreme i kod opisivanja ponašanja legura sa efektom pamćenja oblika (*memory shape*).

Fenomen histerezis je često vezan za pojavu histerezisnih petlji, čime se stiče utisak da je formiranje petlji suština histerezisa. Petlja predstavlja poseban slučaj njegove pojave, koji se javlja kao posledica grananja odgovora sistema. Histerezis se onda može definisati kao nelinearnost sa memorijom, koja se otkriva kroz grananje odgovora.

Iako opisuju veliki broj fizičkih procesa, za histerezisne operatore se ne može reći da su fizičke, već fenomenološke prirode. Transformacija ulaznih parametara u izlazne se vrši bez tačnog poznavanja unutrašnjih pojava posmatranog procesa, već samo na osnovu karakteristika histerezisne petlje. Modeli time dobijaju opštu definiciju, nezavisnu od vrste procesa. Takav model se prema [42] naziva i „*black box*“ model.

Podela histerezisnih operatora se može izvršiti na osnovu više kriterijuma. Na osnovu uticaja brzine promene ulaznih parametara  $u(t)$ , definišemo *rate-independent* histerezisne operatore (vrednost odgovora ne zavisi od brzine vršenja promene ulaznih parametara) i *rate-dependent* operatore, za koje se može reći da ispoljavaju osobinu viskozne memorije [43]. Brzina promene *input*-a utiče na gotovo sve fizičke procese, međutim *rate-independent* operatori su našli široku primenu kod pojava kod kojih se efekat brzine može zanemariti (*static processes*).

Osobina kontinualnosti funkcije izlaza, u matematičkom smislu, histerezisne operatore deli na diskontinualne i kontinualne. Elementarni histerezisni operatori, koji se koriste pri formiranju Preisach-ovog modela, se svrstavaju u diskontinualne operatore, međutim, njihovim kombinovanjem se formira kontinualni model.

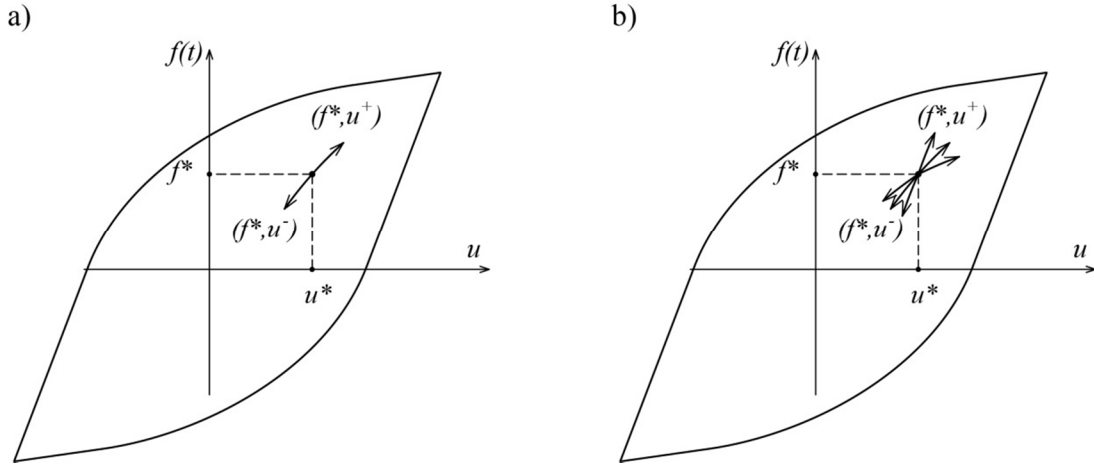
Pored navedenih osobina, histerezisne operatore definiše i osobina memorije, pa se može napraviti podela na operatore sa lokalnom i operatore sa nelokalnom memorijom. Histerezisne operatore sa lokalnom memorijom (*Markovian*) karakteriše svojstvo da vrednosti *input*-a  $u(t)$ , u nekom trenutku  $t \geq t_0$ , jedinstveno definišu vrednosti izlaznih podataka  $f(t)$  za svako  $t > t_0$ . Kod ovakvih operatora, istorija prethodnih promena ulaznih podataka ne utiče na trenutnu vrednost *output*-a, odnosno uticaj prethodnih događaja na buduće ponašanje se ispoljava samo preko trenutne vrednosti *input*-a. Svaka tačka na histerezisnoj petlji, definisanoj ovim tipom histerezisa je uniformno određena, gde je način promene unutar histerezisne petlje definisan tačno pomoću dve krive, jednom pri priraštaju, a drugom pri opadanju ulaza  $u(t)$ . Modeli klasične plastičnosti poseduju ovu osobinu. Histerezisni operatori sa nelokalnom memorijom (*non-Markovian*) pri definisanju trenutne vrednosti izlaznih podataka  $f(t)$  za svako  $t > t_0$ , uzimaju u obzir vrednosti trenutnih ulaznih podataka  $u(t)$ , kao i način njihove prethodne promene. Način promene ulaza se definiše pomoću vrednosti prethodnih ekstremuma istorije promene ulaznih parametara, kao:

$$f(t) = [F(u, f^0)](t) \quad \forall t \in [0; T]. \quad (2.1)$$

Gde je  $f^0 = [F(u, f^0)](0)$ .

Sledi da svaka tačka unutar histerezisne petlje ima beskonačno mnogo krivih, koje mogu da definišu buduće ponašanje sistema.





Slika 2.1 - a) Histerezisna kriva za operator sa lokalnom memorijom; b) Histerezisna kriva za operator sa nelokalnom memorijom

## 2.2 PREISACH-OV MODEL HISTEREZISA

Histerezisni fenomeni kod mnogih pojava u fizici, hemiji, biologiji pa i ekonomiji se mogu definisati putem Preisach-ovog modela. Prvobitno razvijen 1935. godine radi opisivanja histerezisa u feromagnetizmu, dobio je naziv po svom autoru [44], ali je ubrzo našao primenu i kod opisivanja drugih fenomena. Njegova primena u fizici definiše pojave kao što su feromagnetizam, plastičnost i filtracija kroz porozne sredine. Zbog opisivanja velikog broja fizičkih pojava, dugo je smatran za fizički operator, međutim M. Krasnoselski je u svom radu [45] odvojio ovaj model od njegove fizičke forme i prikazao ga kao čisto matematički model, čime je postao pogodan i za primenu u drugim oblastima, čije se pojave mogu definisati histerezisom. Najdetaljnija objašnjenja Preisach-ovog i ostalih histerezisnih modela se mogu pronaći u [43] i [46].

Preisach-ov model predstavlja mapiranje funkcije ulaznih podataka u funkciju izlaznih podataka. Osnovu ovog modela histerezisa čini elementarni nelinearni histerezisni operator, koji predstavlja diskontinualni operator sa lokalnom memorijom. Pošto vrednost *output*-a može imati samo dve vrednosti (+1 i -1) ovi operatori se nazivaju i *relay* operatori.

Ukoliko fiksiramo bilo koji par ulaznih podataka  $\rho =: (\alpha, \beta) \in R^2, \alpha > \beta$ , tada se za bilo koju kontinualnu ulaznu funkciju  $u: [0, T]$  i bilo koje vrednosti  $\xi \in \{-1, +1\}$  može definisati:

$$X_u(t) := \{\tau \in (0, t] | u(\tau) = \alpha \vee \beta\}, \quad (2.2)$$

$$\vartheta(0) = \begin{cases} -1 & \text{za } u(0) \leq \beta \\ \xi & \text{za } \beta < u(0) < \alpha, \\ +1 & \text{za } u(0) \geq \alpha \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\vartheta(t) = \begin{cases} -1 & \text{za } X_u(t) \neq 0 \wedge u(\max X_u(t)) = \beta \\ \vartheta(0) & \text{za } X_u(t) = 0 \\ +1 & \text{za } X_u(t) \neq 0 \wedge u(\max X_u(t)) = \alpha \end{cases} \quad \forall t \in (0, t]. \quad (2.4)$$

Na osnovu ovih definicija, a prema [43], elementarni histerezisni operator se definiše kao:

$$G_{\alpha,\beta} = C^0([0, T]) \times \{-1, 1\} \rightarrow BV(0, T). \quad (2.5)$$

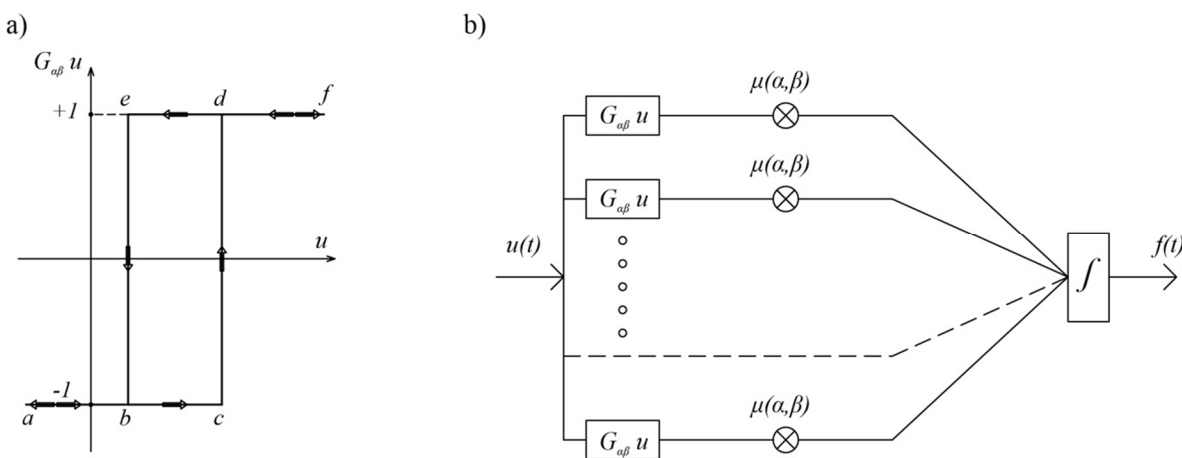
Ovako definisani elementarni histerezisni operator  $G_{\alpha,\beta}$  predstavlja diskontinualni operator sa lokalnom memorijom. Međutim, superpozicijom  $G_{\alpha,\beta}$  operatora unutar skupa  $\Gamma$ , formira se Preisach-ov histerezisni operator  $\hat{\Gamma}u(t)$ , kao kontinualni sistem beskonačno mnogo paralelno vezanih elementarnih operatora:

$$f(t) = \hat{\Gamma}u(t) = \iint_{\Gamma} G_{\alpha,\beta}u(t)d\mu(\alpha, \beta). \quad (2.6)$$

Gde  $\Gamma = \{\alpha, \beta \in R^2, \beta < \alpha\}$  predstavlja skup vrednosti graničnih pragova, a  $\mu(\alpha, \beta)$  težinsku funkciju prema kojoj su raspoređeni elementarni operatori. Konačnom zamenom granica i diferenciranjem funkcije  $\mu(\alpha, \beta)$  dobijamo konačnu matematičku formulaciju Preisach-ovog histerezisa:

$$f(t) = \hat{\Gamma}u(t) = \iint_{\alpha \geq \beta} G_{\alpha,\beta}u(t)\mu(\alpha, \beta)d\alpha d\beta. \quad (2.7)$$

Prethodna formulacija nam govori da se složeni Preisach-ov model  $\hat{\Gamma}$ , može rastaviti na proste histerezisne operatore  $G_{\alpha,\beta}$ . Iako  $G_{\alpha,\beta}$  operatori poseduju kvalitativnu osobinu lokalne memorije, posledica spajanja velikog (beskonačnog) broja ovih operatora sa istim kvalitativnim osobinama je formiranje Preisach-ovog modela sa osobinom nelokalne memorije.



Slika 2.2 – a) Elementarni histerezisni operator  $G_{\alpha,\beta}$ ; b) Formiranje konačnog odgovora kod Preisach-ovog modela histerezisa superpozicijom elementarnih histerezisnih operatora

Za razliku od klasičnih modela histerezisa sa nelokalnom memorijom, kod kojih vrednost odgovora zavisi od celokupne istorije opterećenja, Preisach-ov model poseduje ograničenu memoriju. Što znači da se kod Preisach-ovog, kao i kod Prandtl-ovog modela, može koristiti delimična memorija pobude, zbog njihovih *wiping-out* osobina.

### 2.2.1 Geometrijska interpretacija Preisach-ovog modela

Posmatrajući matematičku definiciju Preisach-ovog modela prikazanu jednačinom (2.7), može se zaključiti da uslov  $\alpha \geq \beta \rightarrow \alpha - \beta \geq 0$ , u prostoru  $\alpha - \beta$  definiše Preisach-ovu poluravan u kojoj je vrednost svakog operatora  $G_{\alpha,\beta}$  jednoznačno definisana koordinatama tačkaka  $(\alpha, \beta)$ . Ograničavajući Preisach-ovu poluravan, horizontalom i vertikalom sa kordinatama  $\alpha_0$  i  $\beta_0$ , koje predstavljaju granice integracije, tako da je  $\alpha_0 = -\beta_0$ , definišemo granični trougao, koji se naziva i Preisach-ov trougao. Uvodi se pretpostavka da je težinska funkcija  $\mu(\alpha, \beta)$  definisana samo unutar graničnog trougla, a da je van njega jednaka nuli.

Geometrijska interpretacija Preisach-ovog modela dobija na značaju, jer se pomoću nje izbegava računanje dvojnog integrala u jednačini (2.7). Određivanje njegove vrednosti se svodi na određivanje površine unutar Preisach-ovog trougla. Posmatrajući vrednosti elementarnih operatora, može se reći da se u proizvoljnom trenutku vremena, Preisach-ov trougao sastoji od tačaka u kojima su elementarni operatori „uključeni“ i tačaka u kojima su oni „isključeni“. Na osnovu ovog zapažanja, Preisach-ov model se može podeliti na dva nezavisna integrala, nad površinama  $A^+(t)$  i  $A^-(t)$ :

$$f(t) = \hat{\Gamma}u(t) = \iint_{A^+(t)} G_{\alpha,\beta}u(t)\mu(\alpha,\beta)d\alpha d\beta + \iint_{A^-(t)} G_{\alpha,\beta}u(t)\mu(\alpha,\beta)d\alpha d\beta. \quad (2.8)$$

A kako je:

$$\mu(\alpha,\beta)u(t) = 1 \quad \forall (\alpha,\beta) \in A^+, \quad (2.9)$$

$$\mu(\alpha,\beta)u(t) = -1 \quad \forall (\alpha,\beta) \in A^-,$$

način proračuna Preisach-ovog histerezisnog modela na osnovu njegove geometrijske interpretacije, se definiše kao:

$$f(t) = \hat{\Gamma}u(t) = \iint_{A^+(t)} \mu(\alpha,\beta)d\alpha d\beta - \iint_{A^-(t)} \mu(\alpha,\beta)d\alpha d\beta. \quad (2.10)$$

Može se primetiti da vrednost *output*-a, u nekom proizvoljnom trenutku vremena, zavisi od načina podele graničnog trougla na pozitivne i negativne setove  $A^+$  i  $A^-$ . Povećanje i smanjenje *input*-a dovodi do promene u ovoj preraspodeli i formiranja izlomljene krive  $L(t)$ , koja predstavlja granicu između ovih površina.

$$L(t) = \partial A^+(t) \cap A^-(t), \quad (2.11)$$

$$A^+(t) = \{(\alpha,\beta) \in \Gamma, \vartheta(t) = 1\}, A^-(t) = \{(\alpha,\beta) \in \Gamma, \vartheta(t) = -1\}.$$

Temena ove „*staircase*“ krive su ekstremne vrednosti ulaznih podataka, tako da  $L(t)$  kriva predstavlja memoriju ovog operatora. Mehanizam formiranja memorije u Preisach-ovom modelu je mehanizam promene oblika „*staircase*“ linije  $L(t)$ , koja se odvija na sledeći način. Ukoliko dolazi do monotonog povećanja  $u(t)$ ,  $L(t)$  linija se pomera na gore u Preisach-ovoj poluravni, a kada  $u(t)$  smanjuje vrednost,  $L(t)$  linija se pomera na levo.  $L(t)$  linija se prema tome sastoji iz segmenata paralelnih osama, gde je u slučaju monotonog povećanja  $u(t)$ , poslednji segment horizontalan, a u slučaju smanjenja  $u(t)$ , poslednji segment je vertikaln.

Osnovna osobina Preisach-ovog modela, koja će biti korišćena u daljim izvođenjima, proizilazi iz geometrijske interpretacije modela, a odnosi se na vrednosti izlaza kod potpuno saturisanih uzoraka. Posmatrajući izraz (2.10), mogu se definisati vrednosti *output*-a kod pozitivno saturisanih uzoraka  $f^+$  i vrednost *output*-a kod negativno saturisanih uzoraka  $f^-$ , kao:

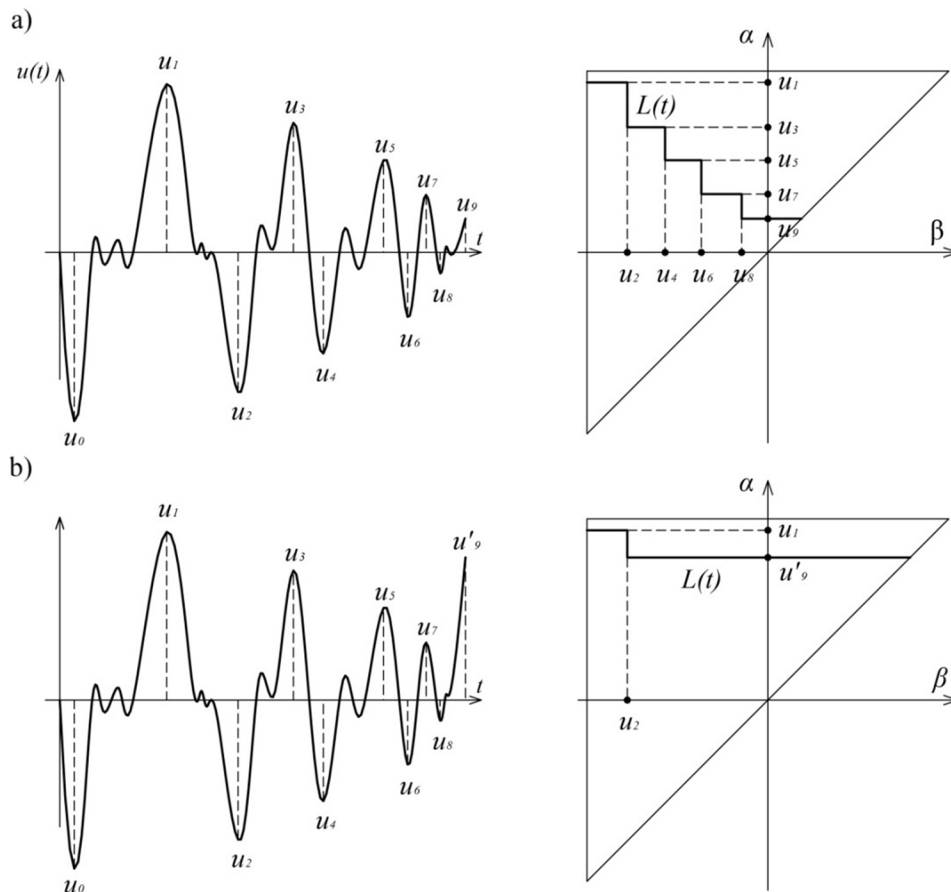
$$f^+ = \iint_T \mu(\alpha, \beta) d\alpha d\beta, \quad (2.12)$$

$$f^- = - \iint_T \mu(\alpha, \beta) d\alpha d\beta.$$

Integracija se vrši na celokupnoj površini Preisach-ovog trougla  $T$ , a odatle se lako može pokazati da je:

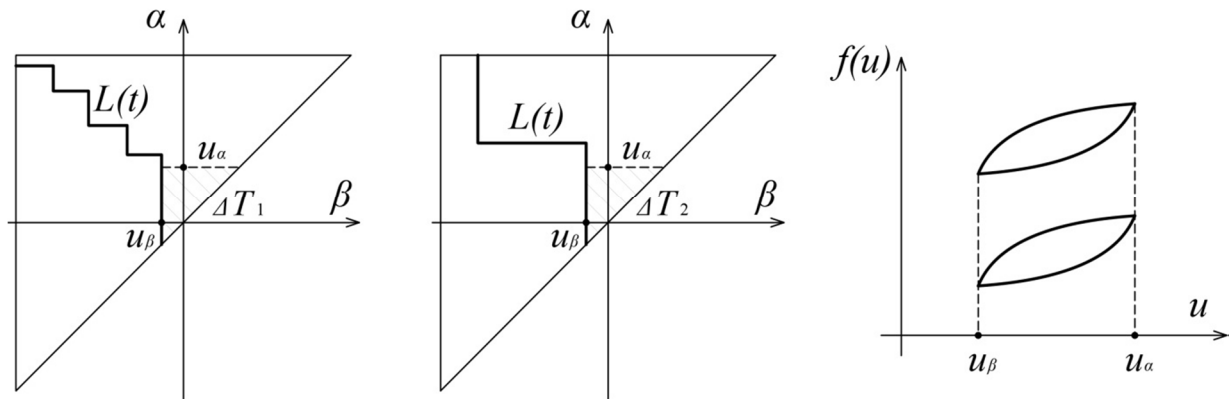
$$f^+ = f^-. \quad (2.13)$$

Osobina brisanja memorije kod Preisach-ovog modela (*Wiping-Out Property*) se takođe može definisati na osnovu geometrijske interpretacije ovog modela. Karakteristika ovog fenomena je da svaki lokalni maksimum briše temena linije  $L(t)$  čije su  $\alpha$  koordinate ispod tog maksimuma, a svaki lokalni minimum briše temena čije su  $\beta$  koordinate iznad tog minimuma. Samo alternativne vrednosti dominantnih ekstrema ulaznih podataka se pamte u Preisach-ovom modelu, dok se sve ostale brišu. Za Preisach-ov model se zato može reći da poseduje selektivnu memoriju. Elementarni histerezisni operatori poseduju lokalnu memoriju, ali se kombinovanjem velikog broja ovih operatora ostvaruje nelokalna memorija modela, koja pak ne zavisi od celokupne istorije opterećenja, već samo od dominantnih vrednosti ekstrema ulaza, a usled *wiping-out* efekta.



Slika 2.3 - *Wiping out property* pri proizvoljnim istorijama opterećenja

Kongruentnost predstavlja još jednu bitnu osobinu Preisach-ovog modela, koja se lako može pokazati putem geometrijske interpretacije modela. Ukoliko posmatramo dva stanja, definisana Preisach-ovim trouglovima  $T_1$  i  $T_2$ , u kojima *input* varira u istom rasponu, može se primetiti da su promene površina trouglova, u oba slučaja jednake ( $\Delta T_1 = \Delta T_2$ ), nezavisno od prethodnih istorija opterećenja. Odatle sledi da su i priraštaj *output*-a za dva stanja sa različitom prethodnom istorijom opterećenja međusobno jednaki  $\Delta f_1 = \Delta f_2$ . Posledica ove osobine je da sve manje petlje, koje su nastale variranjem *input*-a između istih dominantnih ekstremuma, imaju isti oblik i veličinu, ali različiti položaj unutar glavne petlje, koji zavisi od prethodne istorije opterećenja. Potpuno preklapanje ovih petlji bi mogli da se ostvari njihovom translacijom u pravcu *f*-ose.



Slika 2.4 - Osobina kongruentnosti

Osobine kongruentnosti i brisanja memorije, predstavljaju neophodne i dovoljne uslove da bi se histerezisna nelinearnost mogla definisati putem Preisach-ovog modela. Dokaz ove teoreme se može naći u [46].

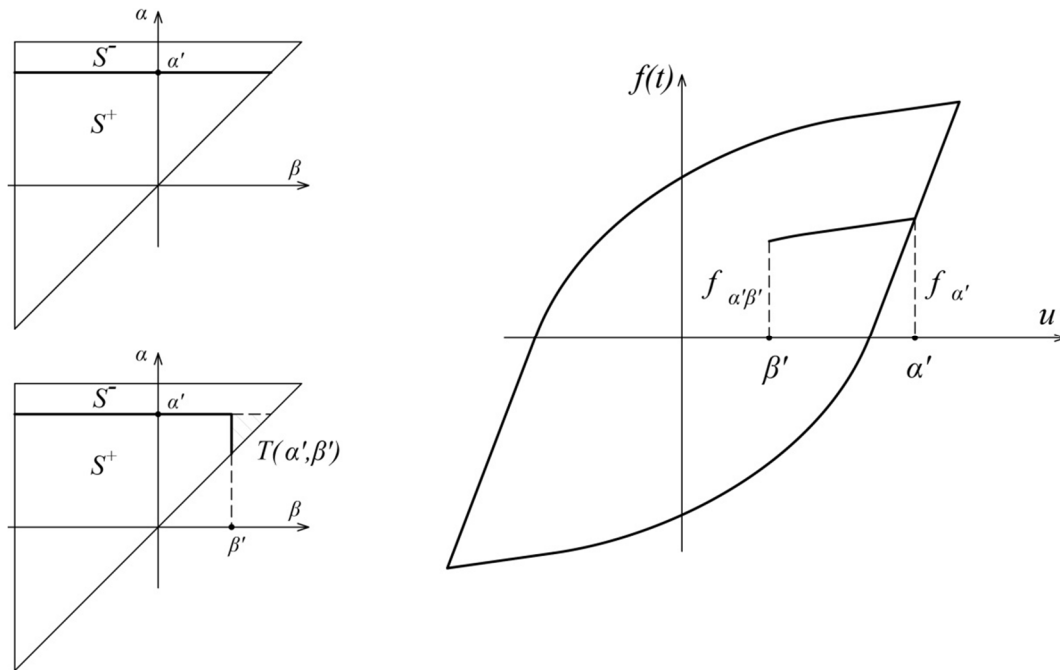
### 2.2.2 Definisane Preisach-ove funkcije na osnovu histerezisne petlje

Opisivanje bilo koje pojave putem Preisach-ovog modela, zahteva definisanje vrednosti Preisach-ove funkcije. Ovo predstavlja težak zadatak, koji se ne može sprovesti bez eksperimentalnih podataka na osnovu kojih se definiše oblik petlje i tranziciona kriva prvog reda.

Osnove definisanja Preisach-ove funkcije, koje će biti primenjene u ovoj doktorskoj disertaciji, su prikazane u [46]. Ukoliko posmatrani Preisach-ov model opteretimo do krajnjih granica integracije  $\alpha_0$  ili  $\beta_0$ , uzorak dovodimo do stanja potpune pozitivne ili negativne saturacije, kod kojih je vrednost *output*-a definisana izrazima u jednačini (2.12). Povećavanjem vrednosti *input*-a kod negativno saturisanih uzoraka, do vrednosti  $\alpha'$  formira se glavna rastuća grana histerezisne petlje, iznad koje ne može biti drugih delova petlje. Suprotno, povećanjem vrednosti *input*-a kod pozitivno saturisanih uzoraka, do vrednosti  $\beta'$  formira se glavna opadajuća grana histerezisne petlje, ispod koje ne može biti drugih delova petlje. Pomoću glavne rastuće i glavne opadajuće grane potpuno je definisana histerezisna petlja, jer prema osobini kongruencije, sve ostale grane moraju biti paralelne ovim glavnim granama.

Osnova definisanja Preisach-ove funkcije jeste poznavanje tranzicione krive prvog reda, koja se dobija pri prvoj promeni znaka *input*-a, sa glavne opadajuće ili glavne rastuće grane histerezisne petlje. Ukoliko polazimo od stanja negativne saturacije, kako je to učinjeno u [46], gde je uzorak opterećen do krajnje granice integracije  $\beta_0$ , povećanjem vrednosti *input*-a do vrednosti  $\alpha'$ , formiramo glavnu rastuću granu petlje, ostvarujući vrednost *output*-a  $f_\alpha$  u posmatranoj tački. Rasterećenjem uzorka do vrednosti

$\beta'$ , dolazi do promene znaka *input*-a i formiranja tranzicione krive prvog reda. Ostvarena vrednost *output*-a se obeležava sa  $f_{\alpha'\beta'}$ .



Slika 2.5 – Određivanje tranzicione krive prvog reda

Razlika izlaznih vrednosti se definiše kao:

$$\Delta f = f_{\alpha'\beta'} - f_{\alpha'} \quad (2.14)$$

Lako se pomoću geometrijske interpretacije Preisach-ovog modela može uočiti da pri rasterećenju, odnosno pri promeni ulaza iz  $\alpha'$  u  $\beta'$ , dolazi do uvećanja pozitivne površi  $A^+$  za površinu trougla  $\Delta T$  uz istovremeno umanjeње negativne površi  $A^-$  za istu površinu  $\Delta T$ . Uz ovo zapažanje, koristeći izraz (2.10) može se definisati promena vrednosti *output*-a na osnovu promene geometrije Preisach-ovog trougla:

$$\Delta f = -2 \iint_{\Delta T} \mu(\alpha, \beta) d\alpha d\beta, \quad (2.15)$$

ili kao:

$$\Delta f = \int_{\beta'}^{\alpha'} \left( \int_{\beta'}^{\alpha} \mu(\alpha, \beta) d\alpha \right) d\beta. \quad (2.16)$$

Konačno, diferenciranjem izraza (2.16), a uzimajući u obzir da  $f_{\alpha'}$  ne zavisi od vrednosti *input*-a  $\beta'$ , Preisach-ova funkcija se može definisati kao:

$$\mu(\alpha', \beta') = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_{\alpha', \beta'}}{\partial \alpha' \partial \beta'} \quad (2.17)$$

Prostom geometrijskom interpretacijom, može se pokazati da prvi izvod funkcije  $f_{\alpha', \beta'}$  po  $\beta'$  predstavlja nagib tangente tranzicione krive prvog reda u tački  $u = \beta'$ , čime prethodni izraz dobija sledeću formu:

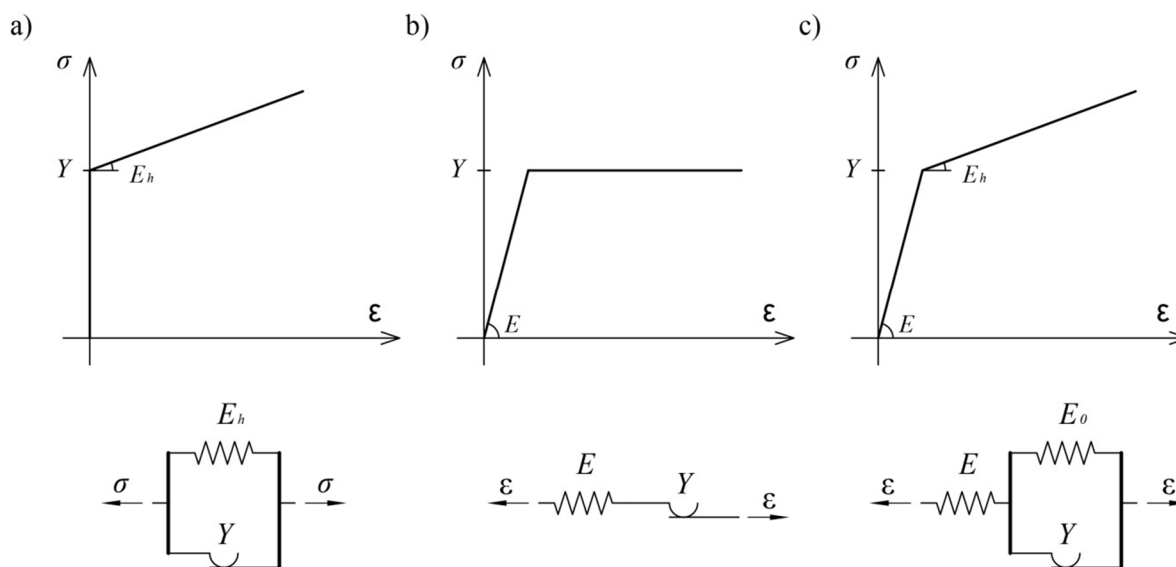
$$\mu(\alpha', \beta') = \frac{1}{2} \frac{\partial \tan \theta(\alpha', \beta')}{\partial \alpha'} \quad (2.18)$$

Ugao  $\theta(\alpha', \beta')$  predstavlja ugao između tangente tranzicione krive prvog reda u tački  $u = \beta'$  i pravca ose  $u$ .

### 3 MODELIRANJE ELASTOPLASTIČNOG PONAŠANJA ČELIKA SA IZRAŽENIM PLATOOM TEČENJA PRIMENOM PREISACH-OVOG MODELA HISTEREZISA

Osnovne osobine i definicije Preisach-ovog modela histereza su prikazane u prethodnom poglavlju 2. Prvobitno je razvijen radi definisanja pojava u magnetizmu, ali je veoma brzo pronašao primenu i u drugim granama fizike. Prve implementacije ovog modela u mehanici kontinuuma su se pojavile u radovima [24] i [25] kod opisivanja ponašanja duktilnih materijala pri cikličnom opterećenju. Modeli prikazani u ovim radovima definišu ponašanje:

- kruto-idealno plastičnih materijala sa linearnim ojačanjem,
- idealno elastoplastičnih materijala,
- idealno elastoplastičnih materijala sa linearnim ojačanjem.



Slika 3.1 - Radni dijagrami i mehanički modeli za: a) kruto idealno plastični materijal sa ojačanjem; b) idealno elastoplastični materijal; c) idealno elastoplastični materijal sa linearnim ojačanjem

Preisach-ov model, kako je već napomenuto, predstavlja mapiranje *input*-a u *output*, gde je vrednost izlaza jednoznačno određena trenutnom vrednošću ulaznih podataka i istorijom njene prethodne promene. Shodno tome, ne može se definisati Preisach-ov model za kruto-idealno plastične materijale, zbog nepostojanja jednoznačnosti veze između vrednosti *output*-a i *input*-a. Slična zapažanja, dobijena na osnovu posmatranja  $\sigma$ -  $\epsilon$  dijagrama pri monotonom naprezanju, nameću vrstu ulaza kod različitih Preisach-ovih modela.

Vertikalna grana unutar  $\sigma$ - $\varepsilon$  dijagrama, kod kruto-idealno plastičnih materijala sa linearnim ojačanjem, uslovljava da Preisach-ov model kao ulazne podatke koristi napone  $\sigma(t)$  i vrši preslikavanje tipa  $\sigma \rightarrow \varepsilon$ . Vrednosti dilatacija  $\varepsilon$  su jednoznačno definisane vrednostima napona  $\sigma$  u proizvoljnom trenutku  $t$ , dok suprotno ne važi.

Ponašanje idealno elastoplastičnog materijala definisano je  $\sigma$ - $\varepsilon$  dijagramom, sa horizontalnim platoom tečenja, koji se javlja kao posledica stacionarne vrednosti napona nakon dostizanja granice tečenja  $\sigma_T = Y$ . U tom slučaju, pri vrednosti napona  $\sigma(t) = Y$ , moguće su različite vrednosti dilatacija  $\varepsilon$ , što implicira da preslikavanje  $\sigma \rightarrow \varepsilon$  nije jednoznačno određeno. Zato se kod modela koji definiše ponašanje ovih materijala, dilatacija  $\varepsilon(t)$  nameće kao ulaz pri preslikavanju  $\varepsilon \rightarrow \sigma$ .

Jedini Preisach-ov model koji kao ulaz može koristiti i dilataciju  $\varepsilon(t)$  i napon  $\sigma(t)$  je model razvijen za definisanje ponašanja idealno elastoplastičnih materijala sa linearnim ojačanjem. Iako je radni dijagram i kod ovog, kao i kod ostalih postojećih modela, bilinearan, nepostojanje horizontalnih ili vertikalnih grana dijagrama omogućava jednoznačnu vezu između ulaza i izlaza, bilo da se radi o preslikavanju  $\varepsilon \rightarrow \sigma$  ili  $\sigma \rightarrow \varepsilon$ .

Uobičajeni ulazni podaci Preisach-ovih modela, korišćeni u elastoplastičnoj analizi materijala, mogu biti ili dilatacije  $\varepsilon$ , ili naponi  $\sigma$ , čime se kao rezultati analize dobijaju naponi  $\sigma$ , odnosno dilatacije  $\varepsilon$ . Preisach-ov model je na taj način definisan kao preslikavanje  $\varepsilon \rightarrow \sigma$  ili  $\sigma \rightarrow \varepsilon$ . Mogući su i alternativni oblici u kojima se kao *input* ili *output* javljaju sila  $P$  i pomeranje  $\Delta$ , ali je prvi pristup zastupljeniji.

Karakteristična pojava kod konstruktivnih mekih čelika pri monotonom naprezanju je pojava nazvana Lüders band, ranije definisana u odeljku 1.4. Kako nju karakteriše formiranje horizontalnog platoa tečenja, slično kao kod idealno elastoplastičnih materijala, opisivanje ponašanja mekih konstruktivnih čelika pri cikličnom opterećenju, kao predmet ove disertacije, će zahtevati razvoj novog Preisach-ovog modela koji će kao ulaz imati dilataciju  $\varepsilon(t)$ , a koju će mapirati u napon  $\sigma(t)$  kao izlaz. Shodno tome, osnovu za novi Preisach-ov model će činiti postojeći modeli za opisivanje ponašanja idealno elastoplastičnih materijala i idealno elastoplastičnih materijala sa linearnim ojačanjem.

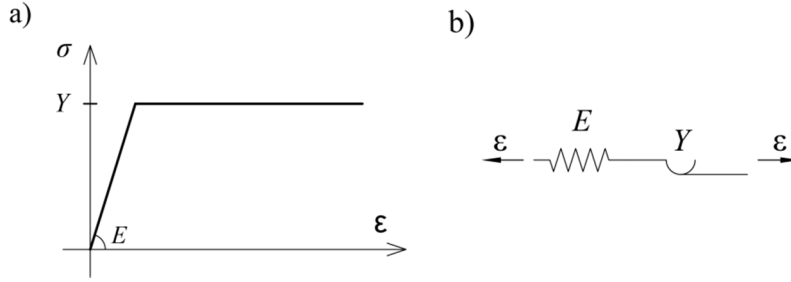
### **3.1 PREISACH-OVI MODELI ZA DEFINISANJE ELASTOPLASTIČNOG PONAŠANJA MATERIJALA KORIŠĆENJEM DILATACIJE KAO ULAZA**

#### **3.1.1 Preisach-ov model za definisanje ponašanja idealno elastoplastičnih materijala**

Primena Preisach-ovog modela pri opisivanju cikličnog ponašanja elastoplastičnog materijala je prvi put prikazana u [24] kod materijala kod kojih se nakon zone elastičnosti, razvija horizontalni plato tečenja bez pojave ojačanja u zoni plastičnosti. Zbog poklapanja načina ponašanja ovih materijala sa ponašanjem konstruktivnih mekih čelika pre pojave ojačanja u zoni plastičnosti, uz činjenicu da pomenuti model vrši preslikavanje tipa  $\varepsilon \rightarrow \sigma$ , ovaj model predstavlja dobru osnovu za dalji razvoj histerezisnog modela za opisivanje ponašanja konstruktivnih mekih čelika.

Kao što je i prikazano u radovima [24] i [25] mehanički model je predstavljen rednom vezom Hook-ovog elementa (elastična opruga) i Sent Venan-ovog (slip) elementa. Posmatrajući naponsko-deformacijski dijagram ovih materijala pri monotonom naprezanju, mogu se izvesti izrazi za Preisach-ovu funkciju i vrednost napona  $\sigma(t)$ .





Slika 3.2 – a) Idealno elastičnoplastično ponašanje materijala sa modulom elastičnosti  $E$  i granicom tečenja  $Y$ ; b) Mehanički model sastavljen od elastičnog i slip elementa redno vezanih [24]

Ukoliko funkciju izlaza  $f(t)$  (napon), pri rasterećenju, definišemo na osnovu slike Slika 3.2, kao:

$$f_{\alpha,\beta} = \begin{cases} f_{\alpha,\beta} = f_{\alpha} - E(\alpha - \beta)_1 & \text{za } \alpha - 2Y/E < \beta \leq \alpha, \\ -Y & \text{za } \beta \leq \alpha - 2Y/E. \end{cases} \quad (3.1)$$

Preisach-ova funkcija dobija oblik:

$$\mu(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_{\alpha,\beta}}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{E}{2} \cdot [\delta(\alpha - \beta) - \delta(\alpha - \beta - 2Y/E)]. \quad (3.2)$$

Napon  $\sigma(t)$  kod ovog Preisach-ovog modela za jedan materijalni kristal je dat sledećim izrazom:

$$\sigma(t) = \frac{E}{2} \left[ \int_{-\varepsilon_u}^{\varepsilon_u} G_{\alpha,\alpha} \varepsilon(t) d\alpha - \int_{2\varepsilon_1 - 2Y/E}^{\varepsilon_u} G_{\alpha,\alpha - 2Y/E} \varepsilon(t) d\alpha \right]. \quad (3.3)$$

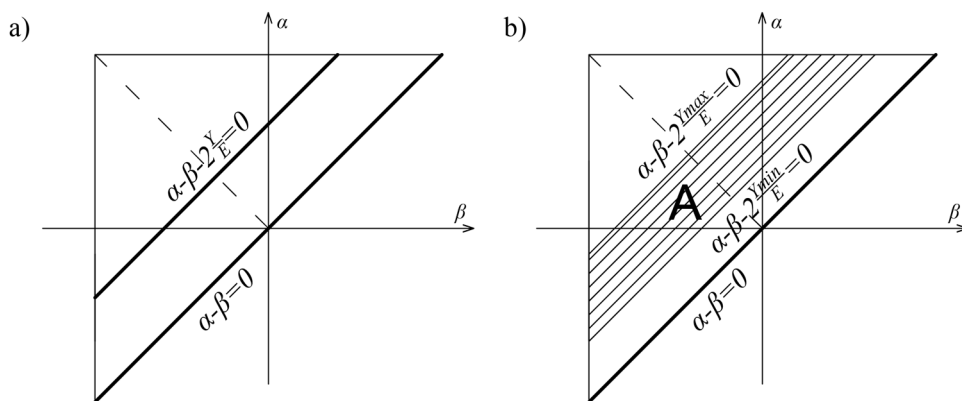
Paralelnom vezom beskonačnog broja mehaničkih modela sa slike Slika 3.2b, različitih granica tečenja  $Y_{\min} \leq Y \leq Y_{\max}$  i primenom uniformne funkcije raspodele  $p(Y) = \frac{Y_{\max} - Y_{\min}}{2}$ , definiše se izraz za napon polikristala kod idealno elastoplastičnih materijala:

$$\sigma(t) = \frac{E}{2} \left[ \int_{-\varepsilon_u}^{\varepsilon_u} G_{\alpha,\alpha} \varepsilon(t) d\alpha - \frac{1}{Y_{\max} - Y_{\min}} \int_{Y_{\min}}^{Y_{\max}} \int_{2Y/E - \varepsilon_u}^{\varepsilon_u} G_{\alpha,\alpha - 2Y/E} \varepsilon(t) d\alpha dY \right], \quad (3.4)$$

odnosno:

$$\sigma(t) = \frac{E}{2} \left[ \int_{-\varepsilon_u}^{\varepsilon_u} G_{\alpha,\alpha} \varepsilon(t) d\alpha - \frac{1}{Y_{\max} - Y_{\min}} \iint_A G_{\alpha,\beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta \right]. \quad (3.5)$$

Ovim se domen definisanosti Preisach-ovog trougla sa linije  $\alpha - \beta - 2Y/E = 0$  proširuje na površ  $A$  između linija  $\alpha - \beta - 2Y_{\min}/E = 0$  i  $\alpha - \beta - 2Y_{\max}/E = 0$ .

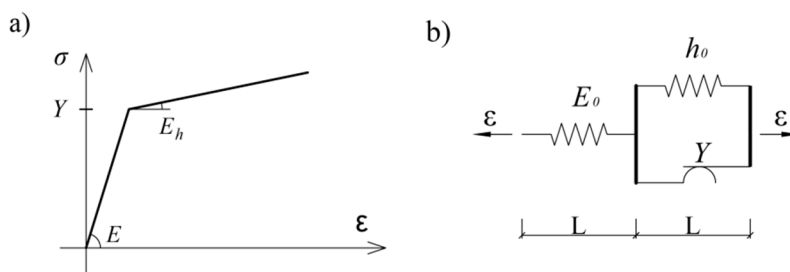


Slika 3.3 - Preisach-ov trougao za idealno elastoplastični materijal za: a) jedan kristal; b) polikristal

### 3.1.2 Preisach-ov model za definisanje ponašanja idealno elastoplastičnih materijala sa ojačanjem

Kao i u slučaju prethodnog modela, (poglavlje 3.1.1), primena ovog Preisach-ovog modela u mehanici kontinuuma je prvi put prikazana u [24] na materijalima kod kojih, nakon zone elastičnosti, dolazi do pojave ojačanja u zoni plastičnosti. Zbog pojave ojačanja kod konstruktivnih mekih čelika u zoni plastičnosti, a nakon formiranja horizontalnog platoa tečenja i istovetnosti tipa preslikavanja ( $\epsilon \rightarrow \sigma$ ), ovaj model u kombinaciji sa prethodnim (poglavlje 3.1.1), predstavljaju dobru osnovu za dalji razvoj histerezisnog modela za opisivanje ponašanja konstruktivnih mekih čelika.

Kao što je i prikazano u radovima [24] i [25] mehanički model je predstavljen paralelnom vezom Hook-ovog elastičnog elementa i Sent Venan-ovog elementa. Posmatrajući naponsko-deformacijski dijagram ovih materijala pri monotonom naprežanju, mogu se izvesti izrazi za Preisach-ovu funkciju i vrednost napona  $\sigma(t)$ .



Slika 3.4 – a) Idealno elastičnoplastično ponašanje materijala sa ojačanjem, modula elastičnosti  $E$ , modula ojačanja  $E_h$  i granice tečenja  $Y$ ; b) Mehanički troelementni model [24]

Ukoliko funkciju izlaza  $f(t)$  (napon), pri rasterećenju, definišemo na osnovu slike Slika 3.5, kao:

$$f_{\alpha,\beta} = \begin{cases} f_{\alpha,\beta} = f_{\alpha} - E(\alpha - \beta) & \text{za } \alpha - 2Y/E < \beta \leq \alpha \\ f_{\alpha,\beta} = f_{\alpha} - 2Y - E_h(\alpha - \beta - 2Y/E) & \text{za } \beta \leq \alpha - 2Y/E \end{cases} \quad (3.6)$$

uz vrednosti materijalnih konstanti mehaničkog modela sa slike Slika 3.4:

$$\begin{aligned}
E &= E_0(l+L)/l, \\
E_0 &= Eh/(E+h), \\
h &= h_0(l+L)/L.
\end{aligned}
\tag{3.7}$$

Preisach-ova funkcija dobija oblik:

$$\mu(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_{\alpha, \beta}}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{E}{2} \delta(\alpha - \beta) - \frac{E - E_h}{2} \delta(\alpha - \beta - 2\frac{Y}{E}).
\tag{3.8}$$

Napon  $\sigma(t)$  kod ovog Preisach-ovog modela za jedan materijalni kristal je definisan sledećim izrazom:

$$\sigma(t) = \frac{E}{2} \int_{-\varepsilon_u}^{\varepsilon_u} G_{\alpha, \alpha} \varepsilon(t) d\alpha - \frac{E - E_h}{2} \int_{2\varepsilon_1 - 2Y/E}^{\varepsilon_u} G_{\alpha, \alpha - 2Y/E} \varepsilon(t) d\alpha.
\tag{3.9}$$

Paralelnom vezom beskonačnog broja mehaničkih modela sa slike Slika 3.4a, različitih granica tečenja  $Y_{\min} \leq Y \leq Y_{\max}$  i primenom uniformne funkcije raspodele  $p(Y) = \frac{Y_{\max} - Y_{\min}}{2}$ , definiše se izraz za napon polikristala kod idealno elastoplastičnih materijala sa ojačanjem:

$$\sigma(t) = \frac{E}{2} \left[ \int_{-\varepsilon_u}^{\varepsilon_u} G_{\alpha, \alpha} \varepsilon(t) d\alpha - \frac{1}{2} \frac{E - E_h}{Y_{\max} - Y_{\min}} \int_{Y_{\min}}^{Y_{\max}} \int_{2Y/E - \varepsilon_u}^{\varepsilon_u} G_{\alpha, \alpha - 2Y/E} \varepsilon(t) d\alpha dY \right],
\tag{3.10}$$

odnosno:

$$\sigma(t) = \frac{E}{2} \left[ \int_{-\varepsilon_u}^{\varepsilon_u} G_{\alpha, \alpha} \varepsilon(t) d\alpha - \frac{1}{2} \frac{E - E_h}{Y_{\max} - Y_{\min}} \iint_A G_{\alpha, \beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta \right].
\tag{3.11}$$

Ovim se domen definisanosti Preisach-ovog trougla sa linije  $\alpha - \beta - 2Y/E = 0$  proširuje na površ  $A$  između linija  $\alpha - \beta - 2Y_{\min}/E = 0$  i  $\alpha - \beta - 2Y_{\max}/E = 0$ , kao kod prethodnog modela. Prema geometriji Preisach-ov trougao je istovetan trouglu prethodnog modela. Jedina razlika leži u vrednosti konstante kojom se množi površina domena  $A$ .

### 3.2 PREISACH-OV MODEL ZA DEFINISANJE ELASTOPLASTIČNOG PONAŠANJA KONSTRUKTIVNIH MEKIH ČELIKA PRI MONOTONOM NAPREZANJU

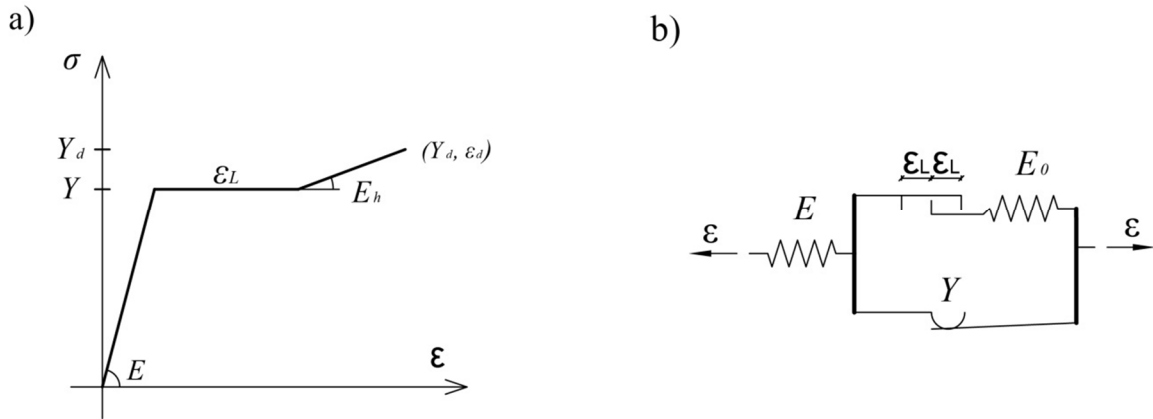
Postojanje horizontalnog platoa tečenja kod mekih konstruktivnih čelika, koje se jasno manifestuje pri monotonom opterećenju, nameće dilataciju kao ulaz kod Preisach-ovog modela histerezisa za definisanje elastoplastičnog ponašanja ovih čelika pri monotonom naprežanju. Jedini postojeći modeli koji koriste dilataciju kao *input*, prikazani na slikama Slika 3.1b i Slika 3.1c, su definisani na osnovu bilinearnih radnih dijagrama. Ponašanje mekih konstruktivnih čelika pri monotonom naprežanju, kako je navedeno u odeljku 1.4, karakteriše pojava zvana Lüders band. Sa slike Slika 1.6 se jasno može uočiti da se radni dijagram, ovih čelika pri monotonom naprežanju, sastoji iz tri glavna segmenta:

- elastična oblast do (donje) granice tečenja  $Y = \sigma_T$ ,
- horizontalni plato tečenja, dužine  $\varepsilon_L$ ,

- zona plastičnog ojačanja u obliku konkavne krivine.

Često se u literaturi ovakav fenomen naziva i ojačanje materijala sa odlaganjem (*delay*) i predstavlja trilinearnim radnim dijagramom. Osnovni princip kod modeliranja elastoplastičnog ponašanja se zasniva na definisanju analognog mehaničkog modela, određenog odgovarajućim setom algebarskih i/ili diferencijalnih jednačina. Mehanički model koji opisuje elastoplastične materijala sa ojačanjem uz odlaganje se sastoji od četiri osnovna elementa (Slika 3.5).

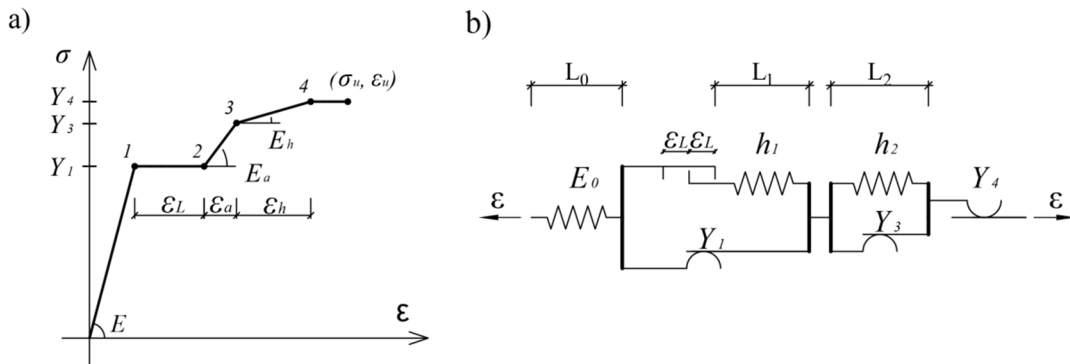
Ovaj materijalni model se konstruiše modifikacijom troelementnog modela, korišćenog za opisivanje ponašanja idealno elastoplastičnih materijala sa linearnim ojačanjem. Uvođenjem *delay* elementa, paralelno vezanog sa oprugom elastične karakteristike  $E_0$ , ostvaruje se odlaganje ojačanja nakon dostizanja granice tečenja  $Y$ . Odlaganje ojačanja, ostvareno na ovaj način, ima vrednost dužine platoa tečenja  $\varepsilon_L$  (Lüders strain).



Slika 3.5 – a) Trilinearni radni dijagram; b) Četvoroelementni materijalni model

Posledica njegove primene je nemogućnost definisanja konkavne krivine u zoni ojačanja. Ovakav model, sa pomenutim “nedostatkom” je primenljiviji kod definisanja ponašanja drugih vrsta materijala sa izraženim platoom tečenja i konstruktivnih elemenata poput dampera, dok je za opisivanje ponašanja mekih čelika pogodniji drugačiji model.

Konkavnost krive u zoni ojačanja, uz zadovoljavajuće slaganje sa eksperimentalnim rezultatima, se postiže aproksimacijom zone ojačanja pomoću tri prave, čime ukupni radni dijagram postaje petolinearan (*quintuple linear*). Ovo se postiže uvođenjem dodatnih elemenata u mehanički model, kako je prikazano na slici:



Slika 3.6- a) Petolinearni radni dijagram; b) Mehanički model

Elastoplastično ponašanje prikazano na slici Slika 1.6 je predstavljeno analognim modelom prikazanim na slici Slika 3.6b sastavljenim od sedam različitih elemenata, tri *Hook*-ova idealno elastični element, tri *Sent-Venan*-ova idealno plastična elementa i jednog *delay* elementa. Moduli elastičnosti *Hook*-ovih elemenata (opruga) u ovom analognom modelu su redom (sa leva na desno)  $E_0$ ,  $h_1$  i  $h_2$ , a dužina elemenata  $L_0$ ,  $L_1$  i  $L_2$ . Granice tečenja kod idealno plastičnih elemenata su  $Y_1$ ,  $Y_3$  i  $Y_4$ , redom unutar modela. *Delay* element omogućava odlaganje ojačanja, omogućavanjem praznog hoda u iznosu od  $\pm \varepsilon_L$ .

Imajući u vidu definiciju idealno elastičnog elementa, prema kojoj je ostvarena sila u opruzi proporcionalna krutosti opruge  $k$  i izduženju  $\Delta L$ :

$$F = k \cdot \Delta L \quad (3.12)$$

i način definisanja krutosti  $k$  aksijalno napregnutih opruga, na osnovu materijalne konstante  $E$ , dužine opruge  $L$  i površine poprečnog preseka opruge  $A$ :

$$k = \frac{EA}{L}, \quad (3.13)$$

može se napraviti linearna veza između napona  $\sigma$  i deformacije  $\varepsilon$ , na osnovu vrednosti modula elastičnosti opruge  $E$ . Ukoliko je  $n$  opruga različitih krutosti  $k_i$  redno ili paralelno vezano, formira se novi sistem, čija se krutost  $K$  može sračunati prema sledećim izrazima:

$$K = \sum_{i=1}^n k_i, \quad (3.14)$$

$$K = \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i} \right)^{-1}.$$

Na osnovu izraza (3.12)-(3.14) se mogu definisati konačne elastične karakteristike ovog modela:

$$\begin{aligned} E &= E_0(L_0 + L_1 + L_2)/L_0, \\ E_a &= E_0 \cdot E_1/(E_0 + E_1), \\ E_1 &= h_1(L_0 + L_1 + L_2)/L_1, \\ E_h &= E_0 \cdot E_1 \cdot E_2/(E_0 + E_1 + E_2), \\ E_2 &= h_2(L_0 + L_1 + L_2)/L_2. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Materijalni model je u potpunosti definisan materijalnim karakteristikama datim izrazom (3.15) i koordinatama karakterističnih tačaka 1, 2, 3 i 4, sračunatih prema:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= Y_1 & \varepsilon_1 &= Y_1/E, \\ \sigma_2 &= Y_1 & \varepsilon_2 &= Y_1/E + \varepsilon_L, \\ \sigma_3 &= Y_3 & \varepsilon_3 &= Y_1/E + \varepsilon_L + (Y_3 - Y_1)/E_a, \\ \sigma_4 &= Y_4 & \varepsilon_4 &= Y_1/E + \varepsilon_L + (Y_3 - Y_1)/E_a + (Y_4 - Y_3)/E_h. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Ovako definisan mehanički model, će poslužiti kao osnova za razvijanje Preisach-ovog modela, koji mapira deformaciju kao ulaz u napon kao konačni izlaz. Najteži zadatak kod definisanja Preisach-ovog modela histerezisa predstavlja određivanje Preisach-ove funkcije. Njeno definisanje će biti sprovedeno

na osnovu razmatranja datih u odeljku 2.2.2 i  $\sigma$ - $\varepsilon$  dijagrama prikazanog na slici Slika 3.6a, neophodnog za definisanje tranzicione krive prvog reda.

Ukoliko pretpostavimo da se pri rasterećenju formira isti oblik  $\sigma$ - $\varepsilon$  dijagrama, kao pri opterećenju, uz postojanje Bauschinger-ovog efekta, definisanog u odeljku 1.5.1, prvi korak pri rasterećenju predstavlja elastično rasterećenje pod nagibom  $E$ , nezavisno od toga iz koje tačke  $\sigma$ - $\varepsilon$  se kreće sa rasterećenjem. Kao posledica Bauschinger-ovog efekta, maksimalni napon elastičnog rasterećenja ima vrednost  $2Y_1$  od napona ostvarenog u tački početka rasterećenja. Data zapažanja predstavljaju prvi korak pri definisanju Preisach-ove funkcije:

$$f_{\alpha,\beta} = f_\alpha - E(\alpha - \beta) \quad \alpha - 2Y_1/E < \beta \leq \alpha. \quad (3.17)$$

Ukoliko uslov  $\alpha - \beta - 2Y_1/E \leq 0$ , više nije ispunjen, može doći do jednog od sledećih slučajeva, zavisno od vrednosti  $\beta$ :

$$f_{\alpha,\beta} = \begin{cases} f_\alpha - 2Y_1 & \text{za } \alpha - 2Y_1/E - 2\varepsilon_L < \beta \leq \alpha - 2Y_1/E \\ f_\alpha - 2Y_1 - E_a(\alpha - \beta - 2\varepsilon_L - 2Y_1/E) & \\ \text{za } \alpha - 2Y_1/E - 2(\varepsilon_L + \varepsilon_a) \leq \beta \leq \alpha - 2Y_1/E - 2\varepsilon_L & \\ f_\alpha - 2Y_1 - 2E_a\varepsilon_a - E_h \cdot (\alpha - \beta - 2Y_1/E - 2(\varepsilon_L + \varepsilon_a)) & \\ \text{za } \alpha - 2Y_1/E - 2(\varepsilon_L + \varepsilon_a + \varepsilon_h) \leq \beta \leq \alpha - 2Y_1/E - 2(\varepsilon_L + \varepsilon_a) & \\ f_\alpha - 2Y_4 & \text{za } \alpha - \varepsilon_u \leq \beta \leq \alpha - 2Y_1/E - 2(\varepsilon_L + \varepsilon_a + \varepsilon_h) \end{cases}. \quad (3.18)$$

Diferenciranjem izraza (3.18) po  $\beta$  definišu se nagibi svih delova petlje:

$$\frac{\partial f_{\alpha,\beta}}{\partial \beta} = E \cdot [H(\alpha - \beta) - H(\alpha - \beta - 2Y_1/E)] + E_a \cdot H(\alpha - \beta - 2Y_1/E - 2\varepsilon_L) + (E_h - E_a)H(\alpha - \beta - 2Y_1/E - 2(\varepsilon_L + \varepsilon_a)) - E_h H(\alpha - \beta - 2Y_1/E - 2(\varepsilon_L + \varepsilon_a + \varepsilon_h)) \quad (3.19)$$

Gde je sa  $H$  označena Heaviside-ova funkcija. Uvođenjem smena:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= Y_1/E, \\ \varepsilon_2 &= Y_1/E + \varepsilon_L, \\ \varepsilon_3 &= Y_1/E + (\varepsilon_L + \varepsilon_a), \\ \varepsilon_4 &= Y_1/E + (\varepsilon_L + \varepsilon_a + \varepsilon_h). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Diferenciranjem izraza (3.19) po  $\alpha$  može se definisati Preisach-ova funkcija:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f_{\alpha,\beta}}{\partial \alpha \partial \beta} &= E \cdot [\delta(\alpha - \beta) - \delta(\alpha - \beta - 2\varepsilon_1)] + E_a \cdot \delta(\alpha - \beta - 2\varepsilon_2) \\ &+ (E_h - E_a) \cdot \delta(\alpha - \beta - 2\varepsilon_3) - E_h \cdot \delta(\alpha - \beta - 2\varepsilon_4), \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \mu(\alpha, \beta) &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_{\alpha, \beta}}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{E}{2} \cdot [\delta(\alpha - \beta) - \delta(\alpha - \beta - 2\varepsilon_1)] + \frac{E_a}{2} \cdot \delta(\alpha - \beta - 2\varepsilon_2) \\ &+ \frac{E_h - E_a}{2} \delta(\alpha - \beta - 2\varepsilon_3) - \frac{E_h}{2} \cdot \delta(\alpha - \beta - 2\varepsilon_4). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Ovako određena Preisach-ova funkcija je definisana samo na pravama  $\alpha - \beta = 0$ ,  $\alpha - \beta - 2\varepsilon_1 = 0$ ,  $\alpha - \beta - 2\varepsilon_2 = 0$ ,  $\alpha - \beta - 2\varepsilon_3 = 0$  i  $\alpha - \beta - 2\varepsilon_4 = 0$ . Sa  $\delta$  je označena Dirac-ova delta funkcija, koja predstavlja prvi izvod Heaviside-ove funkcije.

Izraz za napon  $\sigma(t)$ , kao izlaz  $f(t)$ , usled deformacije  $\varepsilon(t)$  kao ulaza  $u(t)$ , se definiše uvrštavanjem Preisach-ove funkcije  $\mu(\alpha, \beta)$ , definisanu izrazom (3.22), u izraz (2.7):

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \frac{E}{2} \iint_{\alpha \geq \beta} \delta(\alpha - \beta) G_{\alpha, \beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta - \frac{E}{2} \iint_{\alpha \geq \beta} \delta(\alpha - \beta - 2\varepsilon_1) G_{\alpha, \beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta + \\ &\frac{E_a}{2} \iint_{\alpha \geq \beta} \delta(\alpha - \beta - 2\varepsilon_2) G_{\alpha, \beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta + \frac{E_h - E_a}{2} \iint_{\alpha \geq \beta} \delta(\alpha - \beta - 2\varepsilon_3) G_{\alpha, \beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta - \\ &\frac{E_h}{2} \iint_{\alpha \geq \beta} \delta(\alpha - \beta - 2\varepsilon_4) G_{\alpha, \beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Eliminisanje parametra  $\beta$  iz izraza (3.23) i prelazak na jednostruki integral, je moguće pošto je u prvom sabirku izraza  $\beta = \alpha$ , u drugom  $\beta = \alpha - 2\varepsilon_1$ , u trećem  $\beta = \alpha - 2\varepsilon_2$ , u četvrtom  $\beta = \alpha - 2\varepsilon_3$ , a u poslednjem  $\beta = \alpha - 2\varepsilon_4$ , čime se dobija izraz:

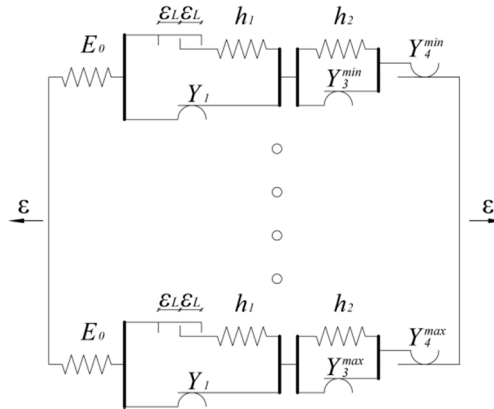
$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \frac{E}{2} \int_{-\varepsilon_u}^{\varepsilon_u} G_{\alpha, \alpha} \varepsilon(t) d\alpha - \frac{E}{2} \int_{2\varepsilon_1 - \varepsilon_u}^{\varepsilon_u} G_{\alpha, \alpha - 2\varepsilon_1} \varepsilon(t) d\alpha + \frac{E_a}{2} \int_{2\varepsilon_2 - \varepsilon_u}^{\varepsilon_u} G_{\alpha, \alpha - 2\varepsilon_2} \varepsilon(t) d\alpha + \\ &\frac{E_h - E_a}{2} \int_{2\varepsilon_3 - \varepsilon_u}^{\varepsilon_u} G_{\alpha, \alpha - 2\varepsilon_3} \varepsilon(t) d\alpha - \frac{E_h}{2} \int_{2\varepsilon_4 - \varepsilon_u}^{\varepsilon_u} G_{\alpha, \alpha - 2\varepsilon_4} \varepsilon(t) d\alpha. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Prvi sabirak izraza predstavlja napon pri elastičnoj deformaciji, dok je ostalim sabircima opisano plastično ponašanje materijala nakon dostizanja granice tečenja  $Y_l$ .

Prikazano rešenje predstavlja odgovor jednog kristala usled cikličnog jednoaksijalnog naprežanja. Prema Iwan-u [47], može se definisati novi model, koji predstavlja paralelnu vezu beskonačnog broja modela, kod kojih je izlaz definisan izrazom (3.24), a koji je prikazan na slici (Slika 3.7).

Paralelna veza modela je moguća usled korišćenja deformacije  $\varepsilon(t)$  kao ulaznog parametra. Za sistem od beskonačno paralelno povezanih modela, različitih napona tečenja  $Y_i^{\min} \leq Y_i \leq Y_i^{\max}$ , izraz za ukupni napon je:

$$\sigma(t) = \Sigma \int_{Y_i^{\min}}^{Y_i^{\max}} p(Y_i) \sigma(Y_i, t) dY_i . \quad (3.25)$$



Slika 3.7 - Paralelna veza beskonačno mnogo jediničnih modela sa različitim granicama tečenja  
 $Y_i^{\min} \leq Y_i \leq Y_i^{\max}$

U izrazu (3.25)  $\sigma(Y_i, t)$  predstavlja napon koji odgovara jediničnom elementu granice tečenja  $Y_i$ , a  $p(Y_i)$  predstavlja funkciju raspodele granice tečenja. Na ovaj način se materijal definiše kao polikristal, sastavljen od kristala različitih granica tečenja  $Y_i$ , ali istih modula elastičnosti  $E$ , dužina platoa tečenja  $\varepsilon_L$  i modula elastičnosti u zoni ojačanja  $E_a$  i  $E_h$ . Da bi model odgovarao realnom ponašanju mekih konstruktivnih čelika, prikazanom na slici Slika 1.6, uvodi se pretpostavka da su vrednosti granica tečenja  $Y_1 = const$  i  $Y_2 = const$  u svim paralelno povezanim modelima. Ukoliko se definiše da je funkcija raspodele ostalih vrednosti  $Y_i$  uniformna, kao u radovima [24], [25]:

$$p(Y_i) = \frac{1}{Y_i^{\max} - Y_i^{\min}} = const , \quad (3.26)$$

ukupni napon, usled deformacije kao ulaza, se dobija kao:

$$\sigma(t) = \frac{E}{2} \left[ \int_{-\varepsilon_u}^{\varepsilon_u} G_{\alpha, \alpha} \varepsilon(t) d\alpha - \int_{2\varepsilon_1 - \varepsilon_u}^{\varepsilon_u} G_{\alpha, \alpha - 2\varepsilon_1} \varepsilon(t) d\alpha + \frac{E_a}{E} \int_{2\varepsilon_2 - \varepsilon_u}^{\varepsilon_u} G_{\alpha, \alpha - 2\varepsilon_2} \varepsilon(t) d\alpha + \right. \\ \left. \frac{E_h - E_a}{E} p(Y_3) \int_{Y_3^{\min}}^{Y_3^{\max}} \int_{2\varepsilon_3 - \varepsilon_u}^{\varepsilon_u} G_{\alpha, \alpha - 2\varepsilon_3} \varepsilon(t) d\alpha dY_3 - \frac{E_h}{E} p(Y_4) \int_{Y_4^{\min}}^{Y_4^{\max}} \int_{2\varepsilon_4 - \varepsilon_u}^{\varepsilon_u} G_{\alpha, \alpha - 2\varepsilon_4} \varepsilon(t) d\alpha dY_4 \right] . \quad (3.27)$$

Pošto prvi sabirak izraza (3.27) ne zavisi od  $Y_i$ , na osnovu drugog je  $\alpha - \beta = 2\varepsilon_1$ , na osnovu trećeg  $\alpha - \beta = 2\varepsilon_2$ , na osnovu četvrtog  $\alpha - \beta = 2\varepsilon_3$ , a na osnovu petog  $\alpha - \beta = 2\varepsilon_4$ , uz smene u izrazu (3.20) ponovo se u izraz može uvesti  $\beta$ , sa smenom  $-d\beta \cdot (E_a/2) = dY_3$  i  $-d\beta \cdot (E_h/2) = dY_4$ , gde se negativan znak smene gubi na promeni granica integracije unutar trouglova:



$$\sigma(t) = \frac{E}{2} \left[ \int_{-\varepsilon_u}^{\varepsilon_u} G_{\alpha,\alpha} \varepsilon(t) d\alpha - \int_{2\varepsilon_1 - \varepsilon_u}^{\varepsilon_u} G_{\alpha,\alpha - 2\varepsilon_1} \varepsilon(t) d\alpha + \frac{E_a}{E} \int_{2\varepsilon_2 - \varepsilon_u}^{\varepsilon_u} G_{\alpha,\alpha - 2\varepsilon_2} \varepsilon(t) d\alpha \right] + \frac{E_a(E_h - E_a)}{4} p(Y_3) \iint_A G_{\alpha,\beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta - \frac{E_h^2}{4} p(Y_4) \iint_B G_{\alpha,\beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta. \quad (3.28)$$

Prvi deo izraza predstavlja napon pri elastičnoj deformaciji, koji se može sračunati kao:

$$\frac{E}{2} \int_{-\varepsilon_d}^{\varepsilon_d} G_{\alpha,\alpha} \varepsilon(t) d\alpha = \frac{E}{2} (\varepsilon - (-\varepsilon)) = E\varepsilon. \quad (3.29)$$

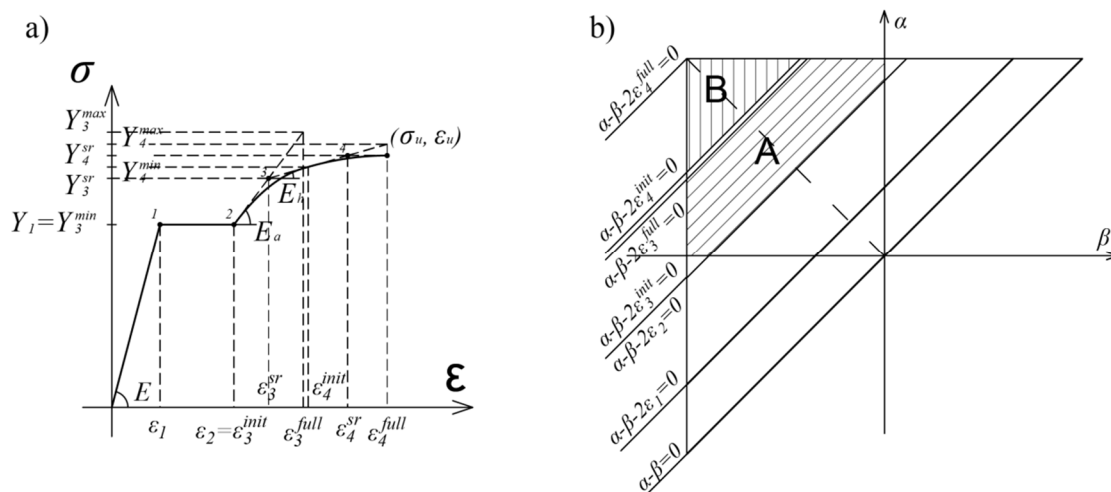
Domeni integracije u izrazu (3.28) predstavljaju površine traka između odgovarajućih pravih u ograničenom trouglu, jer je Preisach-ova funkcija samo tu i definisana. Domen  $A$  predstavlja površ između pravih  $\alpha - \beta = 2(\varepsilon_2 + (Y_3^{max} - Y_1)/E_a) = 2\varepsilon_3^{full}$  i  $\alpha - \beta = 2(\varepsilon_2 + (Y_3^{min} - Y_1)/E_a) = 2\varepsilon_3^{init}$ , a domen  $B$  površ između pravih  $\alpha - \beta = 2(\varepsilon_2 + (Y_3^{sr} - Y_1)/E_a + (Y_4^{max} - Y_3^{sr})/E_h) = 2\varepsilon_4^{full}$  i  $\alpha - \beta = 2(\varepsilon_2 + (Y_3^{sr} - Y_1)/E_a + (Y_4^{min} - Y_3^{sr})/E_h) = 2\varepsilon_4^{init}$ .

Preisach-ova funkcija za sistem sa beskonačno mnogo modela, paralelno povezanih je tada definisana kao:

$$\begin{aligned} \mu(\alpha, \beta) = & \frac{E}{2} \left\{ \delta(\alpha - \beta) - \delta(\alpha - \beta - 2\varepsilon_1) + \frac{E_a}{E} \delta(\alpha - \beta - 2\varepsilon_2) \right\} \\ & + \frac{E_a(E_h - E_a)}{4} p(Y_3) \left[ H(\alpha - \beta - 2\varepsilon_3^{init}) - H(\alpha - \beta - 2\varepsilon_3^{full}) \right] \\ & - \frac{E_h^2}{4} p(Y_4) \left[ H(\alpha - \beta - 2\varepsilon_4^{init}) - H(\alpha - \beta - 2\varepsilon_4^{full}) \right] \end{aligned} \quad (3.30)$$

Naponsko deformacijaska kriva pri monotonom opterećenju i odgovarajući Preisach-ov trougao za prethodno razmatrani model su prikazani na slici Slika 3.8.

Histerezisni model definisan izrazom (3.28) predstavlja opšte rešenje koje opisuje preslikavanje deformacije  $\varepsilon(t)$  kao ulaza u napon  $\sigma(t)$  kao izlaz, pri aksijalnom cikličnom naprežanju. Naime, pravilnim usvajanjem materijalnih karakteristika, model omogućava opisivanja cikličnog ponašanja pri aksijalnom naprežanju, i idealno elastoplastičnih materijala, i idealno elastoplastičnih materijala sa ojačanjem. Pošto može da zameni sve postojeće Preisach-ove modele koji vrše preslikavanje  $\varepsilon \rightarrow \sigma$ , za ovaj model se može reći da je opšti model mapiranja deformacije  $\varepsilon(t)$  u napon  $\sigma(t)$ , pri aksijalnom cikličnom naprežanju.



Slika 3.8 – a) Naponsko deformacijska kriva materijala za model definisan sa (3.28); b) Preisach-ov trougao za model materijala definisan izrazom (3.28)

### 3.2.1 Omekšanje materijala pri monotonom naprezanju (*necking*)

Potpuno opisivanje ponašanja materijala pri monotonom naprezanju, mora obuhvatiti i region nakon dostizanja maksimalnog napona (*ultimate stress*)  $\sigma_u$ . Napon se definiše kao mera prosečne sile  $P$  po jedinici površine  $A$ . Sve do dostizanja vrednosti maksimalnog napona  $\sigma_u$ , promene površine (kontrakcije) poprečnog preseka nema, ili je zanemarljiva.

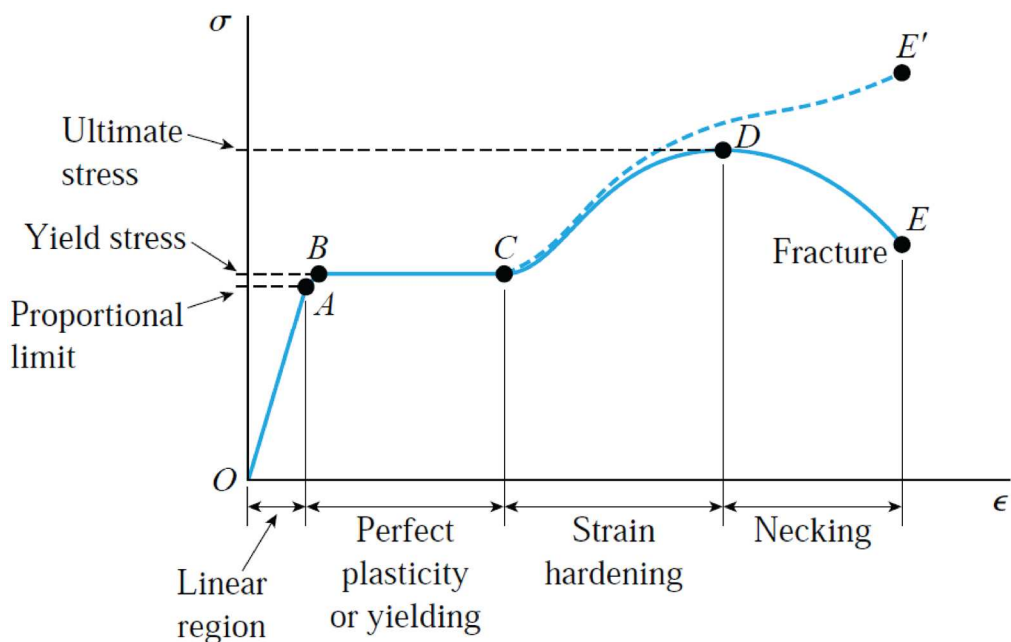
Ukoliko napon  $\sigma(t)$  definišemo kao odnos trenutne vrednosti sile  $P(t)$  i trenutne površine poprečnog preseka  $A(t)$ :

$$\sigma(t) = \frac{P(t)}{A(t)}. \quad (3.31)$$

tada govorimo o stvarnom naponu. Definisane stvarnog napona predstavlja težak zadatak, jer pored merenja podužnih deformacija zahteva i merenje poprečnih deformacija. Najčešće se napon definiše kao odnos sile  $P(t)$  i početne površine poprečnog preseka  $A_0$ , pa tada govorimo o inženjerskom naponu:

$$\sigma(t) = \frac{P(t)}{A_0}. \quad (3.32)$$

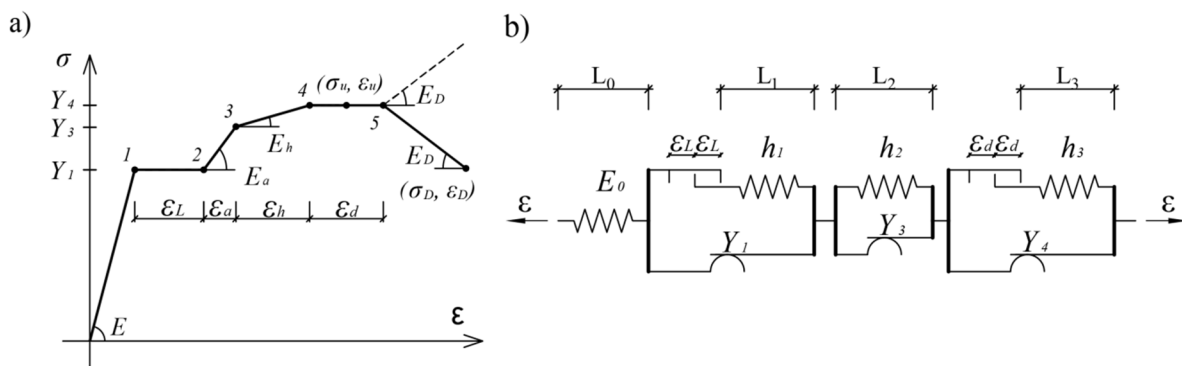
Poređenje ovih napona pri monotonom zatezanju je prikazano na slici Slika 3.9.



Slika 3.9 - Stvarni i inženjerski napon [48]

U analizi inženjerskih problema, najčešće se koristi definicija napona data sa (3.32). Eksperimentalni rezultati su pokazali da nakon dostizanja maksimalnog napona  $\sigma_u$  dolazi do formiranja horizontalnog platoa na  $\sigma$ - $\epsilon$  dijagramu, određene dužine  $\epsilon_d$ , a zatim do postepenog pada vrednosti napona (omekšanja), sve do granice loma ( $\sigma_D$ ,  $\epsilon_D$ ).

Opisivanje ovakvog ponašanja, karakterističnog za konstruktivne meke čelike, je moguće nadogradnjom modela definisanog na slici Slika 3.6, uvođenjem dodatnih elemenata u mehanički model, kako je prikazano na slici:



Slika 3.10- a) Radni dijagram sa oštećenjem; b) Mehanički model

Poslednja opruga u mehaničkom modelu predstavlja element negativne krutosti  $h_3$ . Pojam negativne krutosti, definiše mnoge fizičke procese i generalno predstavlja smanjenje sile pri povećanju deformacije. Iako je pojam definisan u novije vreme, karakteristika je velikog broja fenomena, kao što su omekšanja u materijalu usled oštećenja i nestabilnost pritisnutih elemenata (izvijanje). Osobina negativne krutosti je od velikog značaja u oblasti vibracija, pa je na osnovu nje razvijen veliki broj uređaja za prigušenje vibracija (dampera). Konstrukcija elemenata negativne krutosti predstavlja nekonvencijalan zadatak. Do sada su u primeni modeli na bazi opruga [49], kosih šipki [50], efekta izvijanja pritisnutog štapa [51], magneta [52] i elektromagneta [53]. Analiza sistema sa elementima

negativne krutosti, najčešće se sprovodi primenom standardnih metoda mehanike kontinuuma uz promenu znaka krutosti (modula) posmatranog elementa [54]. Ovaj pristup će biti primenjen i kod definisanja ovog mehaničkog modela. Primenom opruge negativne krutosti  $h_3$ , modul elastičnosti oštećenja  $E_D$  dobija negativnu vrednost [55], čime se ostvaruje pad napona usled omekšanja materijala.

Pored materijalnih karakteristika definisanih izrazom (3.15), materijalni model je određen i sa sledećim parametrima:

$$\begin{aligned} E_D &= E_0 \cdot E_1 \cdot E_2 \cdot E_3 / (E_0 + E_1 + E_2 + E_3), \\ E_3 &= h_3 (L_0 + L_1 + L_2 + L_3) / L_3. \end{aligned} \quad (3.33)$$

gde  $h_3$  predstavlja negativnu krutost poslednje opruge, a  $\varepsilon_d$  dužinu horizontlnog platoa nakon prekoračenja granice tečenja  $Y_4$ .

Ukoliko vrednosti funkcije *output*-a pri monotonom naprezanju, definisanu izrazima (3.17)-(3.18), označimo sa  $f_{\alpha,\beta}^m$  i promenimo donju granicu izraza (3.18)  $\varepsilon_u$  u  $\varepsilon_5$ , u skladu sa slikom Slika 3.10, tada je vrednost *output*-a  $f_{\alpha,\beta}^{mD}$  pri monotonom zatezanju sa oštećenjem determinisana kao:

$$f_{\alpha,\beta}^{mD} = \begin{cases} f_{\alpha,\beta}^m & \alpha - 2\varepsilon_5 < \beta \leq \alpha \\ f_{\alpha,\beta}^m + E_D(\alpha - 2\varepsilon_5) & -\varepsilon_D < \beta \leq \alpha - 2\varepsilon_5 \end{cases}. \quad (3.34)$$

Diferenciranjem izraza (3.34) po  $\beta$ , definišu se nagibi svih delova petlje:

$$\frac{\partial f_{\alpha,\beta}^{mD}}{\partial \beta} = \frac{\partial f_{\alpha,\beta}^m}{\partial \beta} + E_D \cdot H(\alpha - \beta - 2\varepsilon_5). \quad (3.35)$$

Uz smene prikazane u izrazu (3.20) i smenu:

$$\varepsilon_5 = Y_1 / E + (\varepsilon_L + \varepsilon_a + \varepsilon_h + \varepsilon_d). \quad (3.36)$$

diferenciranjem izraza (3.35) po  $\alpha$  može se definisati Preisach-ova funkcija:

$$\frac{\partial^2 f_{\alpha,\beta}^{mD}}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\partial^2 f_{\alpha,\beta}^m}{\partial \alpha \partial \beta} + E_D \cdot \delta(\alpha - \beta - 2\varepsilon_5), \quad (3.37)$$

$$\mu^{mD}(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_{\alpha,\beta}^{mD}}{\partial \alpha \partial \beta} = \mu^m(\alpha, \beta) + \frac{E_D}{2} \cdot \delta(\alpha - \beta - 2\varepsilon_5). \quad (3.38)$$

Ovako određena Preisach-ova funkcija je definisana samo na pravama  $\alpha - \beta = 0$ ,  $\alpha - \beta - 2\varepsilon_1 = 0$ ,  $\alpha - \beta - 2\varepsilon_2 = 0$ ,  $\alpha - \beta - 2\varepsilon_3 = 0$ ,  $\alpha - \beta - 2\varepsilon_4 = 0$  i  $\alpha - \beta - 2\varepsilon_5 = 0$ .

Izraz za napon  $\sigma(t)$ , kao izlaz  $f(t)$  usled deformacije  $\varepsilon(t)$  kao ulaza  $u(t)$ , se definiše na osnovu izraza (3.23), uključivanjem Preisach-ove funkcije  $\mu(\alpha, \beta)$ , definisane izrazom (3.38), u izraz (2.7):

$$\sigma^{mD}(t) = \sigma^m(t) + \frac{E_D}{2} \iint_{\alpha \geq \beta} \delta(\alpha - \beta - 2\varepsilon_5) G_{\alpha, \beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta. \quad (3.39)$$

Eliminisanje parametra  $\beta$  iz izraza (3.39) i prelazak na jednostruki integral, je moguće, slično kao u izrazu (3.24), pošto je u poslednjem sabirku izraza (3.39)  $\beta = \alpha - 2\varepsilon_5$ , čime se definiše izraz za napon:

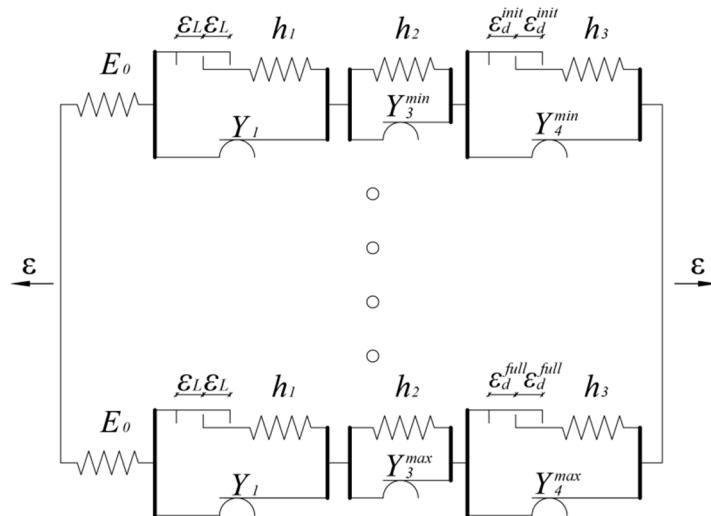
$$\begin{aligned} \sigma^{mD}(t) = & \frac{E}{2} \int_{-\varepsilon_D}^{\varepsilon_D} G_{\alpha, \alpha} \varepsilon(t) d\alpha - \frac{E}{2} \int_{2\varepsilon_1 - \varepsilon_D}^{\varepsilon_D} G_{\alpha, \alpha - 2\varepsilon_1} \varepsilon(t) d\alpha + \frac{E_a}{2} \int_{2\varepsilon_2 - \varepsilon_D}^{\varepsilon_D} G_{\alpha, \alpha - 2\varepsilon_2} \varepsilon(t) d\alpha + \\ & \frac{E_h - E_a}{2} \int_{2\varepsilon_3 - \varepsilon_D}^{\varepsilon_D} G_{\alpha, \alpha - 2\varepsilon_3} \varepsilon(t) d\alpha - \frac{E_h}{2} \int_{2\varepsilon_4 - \varepsilon_D}^{\varepsilon_D} G_{\alpha, \alpha - 2\varepsilon_4} \varepsilon(t) d\alpha + \frac{E_D}{2} \int_{2\varepsilon_5 - \varepsilon_D}^{\varepsilon_D} G_{\alpha, \alpha - 2\varepsilon_5} \varepsilon(t) d\alpha. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Prikazano rešenje predstavlja odgovor jednog kristala usled cikličnog jednoaksijalnog napreznja do loma. Prema Iwan-u [47], može se definisati novi model koji predstavlja paralelnu vezu beskonačnog broja modela, kod kojih je izlaz definisan izrazom (3.40), a koji je prikazan na slici Slika 3.11.

Za sistem od beskonačno paralelno povezanih modela, različitih napona tečenja  $Y_i^{\min} \leq Y_i \leq Y_i^{\max}$  i različitih karakteristika delay elemenata  $\varepsilon_d^{\text{init}} \leq \varepsilon_d \leq \varepsilon_d^{\text{full}}$  izraz za ukupni napon postaje:

$$\sigma^{mD}(t) = \Sigma \int_{Y_i^{\min}}^{Y_i^{\max}} p(Y_i) \sigma(Y_i, t) dY_i + \int_{\varepsilon_d^{\text{init}}}^{\varepsilon_d^{\text{full}}} p(\varepsilon_d) \sigma(\varepsilon_d, t) d\varepsilon_d. \quad (3.41)$$

U izrazu (3.41)  $\sigma(Y_i, t)$  predstavlja napon koji odgovara jediničnom elementu granice tečenja  $Y_i$ ,  $p(Y_i)$  je funkcija raspodele granice tečenja,  $\sigma(\varepsilon_d, t)$  predstavlja napon koji odgovara jediničnom elementu delay dilatacije  $\varepsilon_d$ , dok je  $p(\varepsilon_d)$  njena funkciju raspodele. Na ovaj način se materijal definiše kao polikristal, sastavljen od kristala različitih granica tečenja  $Y_i$  i dilatacija  $\varepsilon_d$ , ali istih modula elastičnosti  $E$ , dužina platoa tečenja  $\varepsilon_L$  i modula elastičnosti u zoni ojačanja  $E_a$  i  $E_h$ .



Slika 3.11 - Paralelna veza beskonačno mnogo jediničnih modela različitih materijalnih karakteristika ( $Y_i^{\min} \leq Y_i \leq Y_i^{\max}$  i  $\varepsilon_d^{\text{init}} \leq \varepsilon_d \leq \varepsilon_d^{\text{full}}$ )

Ukoliko se zadrži pretpostavka o konstantnim vrednostima granica tečenja  $Y_1 = \text{const}$  i  $Y_2 = \text{const}$  u svim paralelno povezanim modelima, kao i pretpostavka o uniformnosti funkcija raspodele ostalih vrednosti  $Y_i$  (izraz (3.25)), a uvodeći pretpostavku o uniformnosti funkcije raspodele dilatacije  $\varepsilon_d$ :

$$p(\varepsilon_d) = \frac{1}{\varepsilon_d^{full} - \varepsilon_d^{init}} = const, \quad (3.42)$$

ukupni izraz za napon  $\sigma^{mD}(t)$ , usled deformacije  $\varepsilon(t)$  kao ulaza, postaje:

$$\begin{aligned} \sigma^{mD}(t) = & \frac{E}{2} \left[ \int_{-\varepsilon_D}^{\varepsilon_D} G_{\alpha,\alpha} \varepsilon(t) d\alpha - \int_{2\varepsilon_1 - \varepsilon_D}^{\varepsilon_D} G_{\alpha,\alpha - 2\varepsilon_1} \varepsilon(t) d\alpha + \frac{E_a}{E} \int_{2\varepsilon_2 - \varepsilon_D}^{\varepsilon_D} G_{\alpha,\alpha - 2\varepsilon_2} \varepsilon(t) d\alpha + \right. \\ & \frac{E_h - E_a}{E} p(Y_3) \int_{Y_3^{\min}}^{Y_3^{\max}} \int_{2\varepsilon_3 - \varepsilon_D}^{\varepsilon_D} G_{\alpha,\alpha - 2\varepsilon_3} \varepsilon(t) d\alpha dY_3 - \frac{E_h}{E} p(Y_4) \int_{Y_4^{\min}}^{Y_4^{\max}} \int_{2\varepsilon_4 - \varepsilon_D}^{\varepsilon_D} G_{\alpha,\alpha - 2\varepsilon_4} \varepsilon(t) d\alpha dY_4 \\ & \left. + \frac{E_D}{E} p(\varepsilon_d) \int_{\varepsilon_d^{init}}^{\varepsilon_d^{full}} \int_{2\varepsilon_5 - \varepsilon_D}^{\varepsilon_D} G_{\alpha,\alpha - 2\varepsilon_5} \varepsilon(t) d\alpha d\varepsilon_d \right]. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Uz prethodne konstatacije za sabirke izraza (3.27) i dodatno zapažanje da je kod poslednjeg sabirka iz izraza (3.43),  $\alpha - \beta = 2\varepsilon_5$ , ponovo se u izraz može uvesti  $\beta$ , sa smenama kao kod izraza (3.28) i  $-d\beta/2 = d\varepsilon_d$ , gde se negativan znak smene gubi na promenu granica integracije unutar trouglova. Ukoliko vrednost napona iz izraza (3.28) označimo sa  $\sigma^m(t)$ , tada izraz za napon pri monotonom naprežanju, uz pojavu oštećenja, dobija oblik:

$$\sigma^{mD}(t) = \sigma^m(t) + \frac{E_D}{4} p(\varepsilon_d) \iint_C G_{\alpha,\beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta, \quad (3.44)$$

ili u razvijenom obliku:

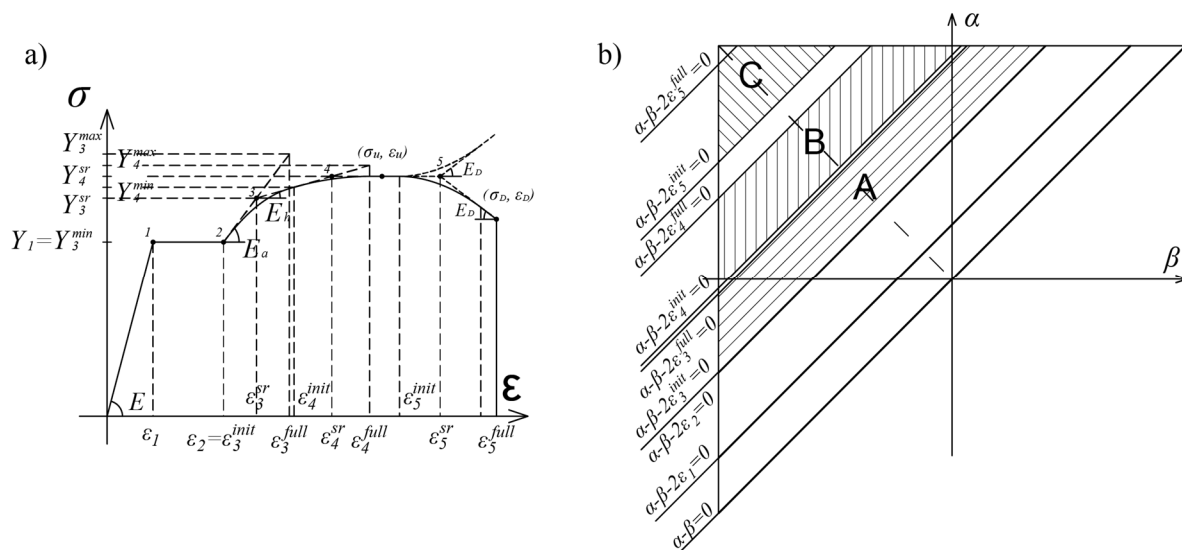
$$\begin{aligned} \sigma^{mD}(t) = & \frac{E}{2} \left[ \int_{-\varepsilon_u}^{\varepsilon_u} G_{\alpha,\alpha} \varepsilon(t) d\alpha - \int_{2\varepsilon_1 - \varepsilon_u}^{\varepsilon_u} G_{\alpha,\alpha - 2\varepsilon_1} \varepsilon(t) d\alpha + \frac{E_a}{E} \int_{2\varepsilon_2 - \varepsilon_u}^{\varepsilon_u} G_{\alpha,\alpha - 2\varepsilon_2} \varepsilon(t) d\alpha \right] + \\ & \frac{E_a(E_h - E_a)}{4} p(Y_3) \iint_A G_{\alpha,\beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta - \frac{E_h}{4} p(Y_4) \iint_B G_{\alpha,\beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta + \frac{E_D}{4} p(\varepsilon_d) \iint_C G_{\alpha,\beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Domeni integracije u izrazu (3.44) predstavljaju površine traka između odgovarajućih pravih u graničnom trouglu, jer je Preisach-ova funkcija samo tu definisana. Domeni  $A$  i  $B$  su prethodno definisani, dok domen  $C$  predstavlja površ između pravih  $\alpha - \beta = 2(\varepsilon_2 + (Y_3^{sr} - Y_1)/E_a + (Y_4^{sr} - Y_3^{sr})/E_h) + \varepsilon_d^{full} = 2\varepsilon_5^{full}$  i  $\alpha - \beta = 2(\varepsilon_2 + (Y_3^{sr} - Y_1)/E_a + (Y_4^{sr} - Y_3^{sr})/E_h) + \varepsilon_d^{init} = 2\varepsilon_5^{init}$ .

Ukoliko Preisach-ovu funkciju prikazanu izrazom (3.30) označimo sa  $\mu^m(\alpha, \beta)$ , tada izraz za Preisach-ova funkciju koja definiše napon pri monotonom naprežanju, uz pojavu oštećenja, dobija oblik:

$$\mu^{mD}(\alpha, \beta) = \mu^m(\alpha, \beta) + \frac{E_D}{4} \left[ H(\alpha - \beta - 2\varepsilon_5^{init}) - H(\alpha - \beta - 2\varepsilon_5^{full}) \right]. \quad (3.46)$$

Naponsko deformacijska kriva pri monotonom opterećenju do loma i odgovarajući Preisach-ov trougao za prethodno razmatrani model su prikazani na slici Slika 3.12.



Slika 3.12 - a) Naponsko deformacijska kriva materijala za model definisan sa (3.44);  
 b) Preisach-ov trougao za model materijala definisan izrazom (3.44)

Model definisan izrazom (3.44) u potpunosti definiše ponašanje konstruktivnih mekih čelika pri monotonom naprežanju sve do loma. Njime je potpuno opisano ponašanje u zoni elastičnosti, zoni plastičnosti i zoni loma ove vrste konstruktivnih čelika. Ponašanje drugih vrsta čelika pri aksijalnom monotonom naprežanju je moguće opisati pomoću ovog modela, pravilnim izborom materijalnih konstanti, kako je napomenuto na kraju poglavlja 3.1.

### 3.3 PREISACH-OV MODEL ZA DEFINISANJE ELASTOPLASTIČNOG PONAŠANJA MEKIH ČELIKA PRI CIKLIČNOM JEDNOAKSIJALNOM NAPREŽANJU

Formiranje horizontalnog platoa tečenja i pojava nazvana Lüders band predstavljaju karakteristično ponašanje mekih čelika pri monotonom naprežanju, kako je već prikazano u odeljku 1.4. Eksperimenti sprovedeni na mekim konstruktivnim čelicima pri cikličnom opterećenju, prikazani u radovima [19], [56] i [57], nam pokazuju da je pojava platoa tečenja karakteristika samo monotonog naprežanja, a da pri prvoj promeni smera opterećenja, uz ostvarenje plastičnih deformacija, dolazi do gubljenja platoa tečenja i potpune transformacije ponašanja materijala u idealno elastoplastično ponašanje sa ojačanjem.

Iako ciklično naprežanje čelika karakterišu razni fenomeni ciklične plastičnosti, definisani u odeljku 1.5, efekat cikličnog ojačanja/omekšanja predstavlja pojavu koja prouzrokuje modifikovanje površi tečenja u odnosu na monotono naprežanje, što kao posledicu ima promenu oblika i veličine histerezisnih petlji.

Predmet ove doktorske disertacije jeste razvoj Preisach-ovog histerezisnog modela, koji bi uspeo da opiše ciklično ponašanje mekih čelika, uzimajući u obzir pojavu iščezavanja platoa tečenja, koji se formira pri prvom koraku naprežanja, kao i promenu oblika i veličine histerezisne petlje. Model definisan izrazom (3.28) ne poseduje takve mogućnosti, pa je pogodan za definisanje ponašanja nekih drugih vrsta materijala kod kojih ne dolazi do iščezavanja horizontalnog platoa tečenja i kod kojih su efekti cikličnog ojačanja/omekšanja zanemarljivi. Međutim, nadogradnjom pomenutog modela moguće je definisati i realno ponašanje mekih čelika pri cikličnom naprežanju.

### 3.3.1 Backbone kriva mekih konstruktivnih čelika pri cikličnom naprezanju

U radovima [31]–[33], kao i rezultatima eksperimenata prikazanih u poglavlju 8, može se uočiti da pikovi histerezisnih petlji, pri cikličnom naprezanju, formiraju krivu koja se naziva *backbone* kriva. U navedenim radovima su dati analitički izrazi, kojima se opisuju ove krive za različite vrste čelika. Uočene su i sledeće pojave:

- Nakon dostizanja granice tečenja  $Y_l$  monotona kriva i *backbone* kriva se veoma razlikuju, usled efekta cikličnog ojačanja;
- *Backbone* kriva ne poseduje plato tečenja;
- Iako se razlikuju, obe krive asimptotski teže istoj vrednosti napona  $\sigma_u$ . [58].

U ovoj disertaciji *backbone* kriva će biti definisana na osnovu radnog dijagrama predmetnih čelika i materijalnog modela prikazanih na slici Slika 3.6, izuzimajući horizontalni plato formiran nakon dostizanja granice tečenja  $Y_l$  ( $\varepsilon_L=0$ ) i usvajanjem duplo većeg prirasta napona u zoni ojačanja, kao i njegovog pada u zoni omekšanja. Imajući u vidu da  $\sigma$ - $\varepsilon$  krive pri monotonom naprezanju, kao i *backbone* kriva teže tački sa koordinatama  $\sigma_u, \varepsilon_u$ , te vrednosti će ostati nepromenjene, dok se vrednosti dilatacija  $\varepsilon_a$  i  $\varepsilon_h$  smanjuju. Materijalne karakteristike *backbone* krive se određuju na osnovu  $\sigma$ - $\varepsilon$  krive dobijene pri monotonom zatezanju na sledeći način:

$$\begin{aligned}\bar{E}_a &= \zeta \cdot E_a, \\ \bar{E}_h &= \zeta \cdot E_h, \\ \bar{\varepsilon}_a &= \varepsilon_a / \zeta, \\ \bar{\varepsilon}_h &= \varepsilon_h / \zeta.\end{aligned}\tag{3.47}$$

Parametar  $\zeta$  predstavlja koeficijent korekcije, koji omogućava modeliranje različitog ponašanja konstruktivnih mekih čelika pri monotonom i cikličnom naprezanju.

Uz materijalne karakteristike prethodno definisane (3.47), modifikovani izrazi za napon (3.28), (3.29) i Preisach-ovu funkciju (3.30) mogu u potpunosti definisati *backbone* krivu:

$$\begin{aligned}\sigma^{bc}(t) &= \bar{\sigma}^m(t) \Big|_{\varepsilon_L=0}, \\ \mu^{bc}(\alpha, \beta) &= \bar{\mu}^m(\alpha, \beta) \Big|_{\varepsilon_L=0}.\end{aligned}\tag{3.48}$$

Gde je naponsko –deformacijski dijagram *backbone* krive definisan dilatacijama:

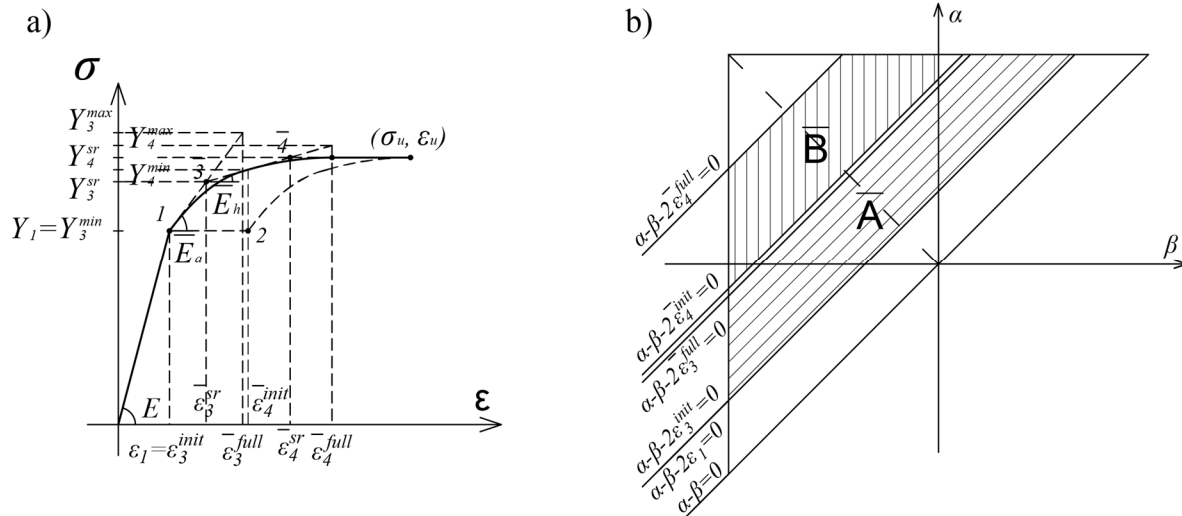
$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= Y_l / E = \varepsilon_2, \\ \bar{\varepsilon}_3 &= Y_l / E + \bar{\varepsilon}_a, \\ \bar{\varepsilon}_4 &= Y_l / E + (\bar{\varepsilon}_a + \bar{\varepsilon}_h).\end{aligned}\tag{3.49}$$

Vrednosti dilatacija  $\bar{\varepsilon}$  koje određuju *backbone* krivu su izražene u funkciji vrednosti dilatacija  $\varepsilon$  koje definišu naponsko – deformacijsku krivu pri monotonom aksijalnom naprezanju.

Na ovaj način dolazi do pomeranja zone ojačanja u odnosu na  $\sigma$ - $\varepsilon$  krivu pri monotonom naprezanju, čime Preisach-ov trougao koji definiše *backbone* krivu gubi međuprostor između prave  $\alpha$ - $\beta$ - $2Y_l/E=0$  i



domena  $\bar{A}$ . Radni dijagram *backbone* krive konstruktivnih mekih čelika, dobijen modifikacijom radnog dijagrama ovih čelika pri monotonom zatezanju, uz odgovarajući Preisach-ov trougao su prikazani na slici Slika 3.13. Sa slike se može jasno uočiti translacija domena integracije  $\bar{A}$  i  $\bar{B}$ .

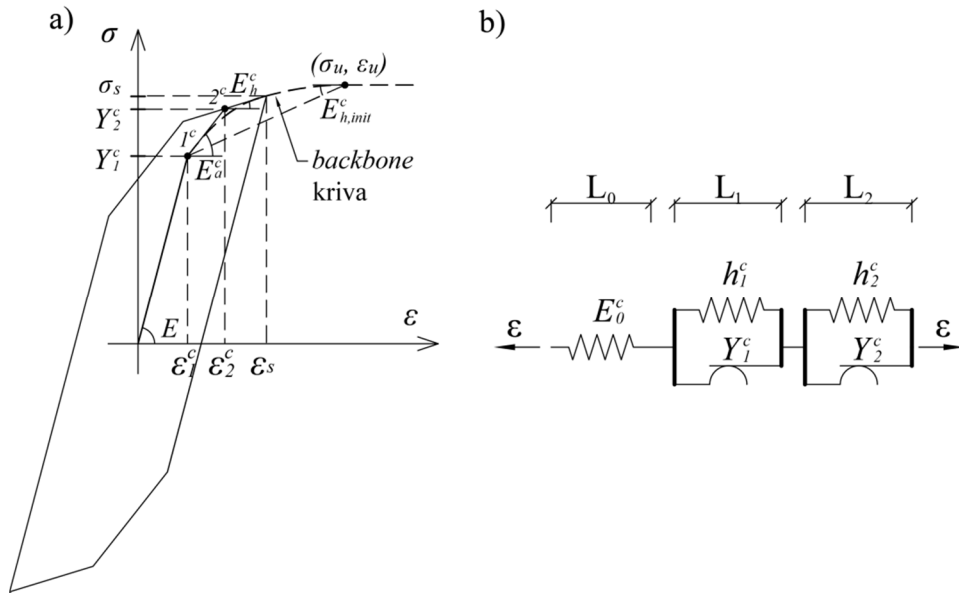


Slika 3.13 - a) Backbone kriva konstruktivnih mekih čelika pri cikličnom naprezanju;  
b) Preisach-ov trougao koji definiše backbone krivu konstruktivnih mekih čelika

### 3.3.2 Definisane unutrašnjih histerezisnih petlji i promene njihove geometrije

*Backbone* kriva definisana izrazom (3.48) i materijalnim karakteristikama (3.47), predstavlja obvojnici pikova svih unutrašnjih histerezisnih petlji. Pri formiranju histerezisnih petlji dolazi do promene njihovog oblika i veličine, zavisno od nivoa naprezanja. Prethodni model mora biti nadograđen kako bi uspeo da opiše ovakvo ponašanje materijala, koje se javlja kao posledica cikličnog ojačanja materijala. Određivanje parametara novog modela zahteva poznavanje tranzicione krive prvog reda. Tranziciona kriva prvog reda se definiše eksperimentalno, pri prvom rasterećenju uzorka. U ovoj disertaciji, rasterećenje uzorka će početi nakon dostizanja dilatacije od  $\epsilon=3\%$  pri zatezanju, što će biti prikazano u poglavlju 8.

Gruba aproksimacija unutrašnjih histerezisnih petlji, moguća je pomoću troelementnog modela [24], međutim, radi boljeg slaganja sa realnim ponašanjem materijala, biće korišćen petoelementni model sa trilinearnim radnim dijagramom, prikazanim na slici Slika 3.14.



Slika 3.14 – a) Formiranje unutrašnje histerezisne petlje; b) Mehanički model za opisivanje unutrašnjih petlji

Eksperimenti sprovedeni na konstruktivnim mekim čelicima su pokazali da pri cikličnom naprezanju, zavisno od nivoa naprezanja, dolazi do degradacije modula elastičnosti u zoni ojačanja. Istovremeno se povećava granica tečenja, čime petlje povećavaju svoju površinu. Pri definisanju modela, usvojene su sledeće pretpostavke:

- pretpostavka o linearnoj promeni modula elastičnosti u zoni ojačanja pri cikličnom naprezanju  $E_h^c$ , u zavisnosti od maksimalne vrednosti dilatacije, ostvarene pre poslednje promene znaka opterećenja:

$$E_h^c = E_{h,init}^c \frac{\varepsilon_u - \varepsilon_s}{\varepsilon_u - \varepsilon_1^c}, \quad (3.50)$$

- inicijalna vrednost modula ojačanja se definiše kao:

$$E_{h,init}^c = \frac{\sigma_u - Y_1^c}{\varepsilon_u - \varepsilon_1^c}, \quad (3.51)$$

- pretpostavka o konstantnoj vrednosti modula elastičnosti  $E^c$  i  $E_a^c$

Ekstremna vrednost dilatacije  $\varepsilon(t)$  do trenutka poslednje promene znaka opterećenja se definiše kao stepen saturisanosti uzorka:

$$\varepsilon_s = \max|\varepsilon(t)|. \quad (3.52)$$

Kako bi se obezbedio rast granice tečenja i rast visine petlje pri porastu stepena saturisanosti uzorka, uvodi se ograničenje vrednosti dilatacije  $\varepsilon_2^c \leq \varepsilon^*$ , gde je vrednost  $\varepsilon^*$  unapred definisana na osnovu eksperimentalnih rezultata ( $\varepsilon^* = 0,68\%$  za tip čelika S275). Postupak određivanja materijalnih karakteristika unutrašnjih histerezisnih petlji se može prikazati kroz dva algoritma:

### Algoritam I

- 1) sračunava se  $0 \leq E_h^c \leq E_{h,init}^c$  prema (3.50)
- 2) uvodi se pretpostavka da je  $\varepsilon_2^c < \varepsilon^*$ , a  $\varepsilon_1^c = const$
- 3) sračunava se  $\varepsilon_2^c$  prema:

$$\varepsilon_2^c = \varepsilon_1^c + \frac{\left( (\sigma_s - Y_1^c) - E_h^c (\varepsilon_s - \varepsilon_1^c) \right)}{E_a^c - E_h^c}, \quad (3.53)$$

- 4) sračunava se  $Y_2^c$  prema:

$$Y_2^c = E \varepsilon_1^c + E_a^c (\varepsilon_2^c - \varepsilon_1^c). \quad (3.54)$$

### Algoritam II

Ukoliko pretpostavka  $\varepsilon_2^c < \varepsilon^*$  nije ispunjena:

- 1) Ograničava se vrednost dilatacije  $\varepsilon_2^c$  na vrednost dilatacije  $\varepsilon^*$ .
- 2) Sračunava se  $Y_2^c$  prema:

$$Y_2^c = \sigma_s + E_h^c (\varepsilon_s - \varepsilon_2^c), \quad (3.55)$$

- 3) Sračunava se  $\varepsilon_1^c$  prema:

$$\varepsilon_1^c = \frac{(Y_2^c - E_a^c \varepsilon_2^c)}{E - E_a^c}, \quad (3.56)$$

- 4) Sračunava se  $Y_1^c$  prema:

$$Y_1^c = E \varepsilon_1^c. \quad (3.57)$$

Nezavisno od međusobnog odnosa dilatacija  $\varepsilon_2^c$  i  $\varepsilon^*$ , zakrivljenost  $\sigma$ - $\varepsilon$  dijagrama se postiže uvođenjem beskonačno mnogo elemenata prikazanih na slici Slika 3.14b, različitih granica tečenja  $Y_i^{c,min} \leq Y_i^c \leq Y_i^{c,max}$ , prema [47]. Uz pretpostavku o uniformnosti raspodele granica tečenja  $Y_i^c$ , mogu se definisati vrednosti početnih dilatacija:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^{c,init} &= \max(0; (3\varepsilon_1^c - \varepsilon_2^c)/2), \\ \varepsilon_2^{c,init} &= \max((\varepsilon_2^c + \varepsilon_1^c)/2; (3\varepsilon_2^c - \varepsilon_s)/2), \end{aligned} \quad (3.58)$$

krajnjih dilatacija  $\varepsilon_i^{c,full}$ :

$$\varepsilon_i^{c,full} = 2\varepsilon_i - \varepsilon_i^{c,init}, \quad (3.59)$$

kao i odgovarajućih napona  $\sigma_i^{c,init/full}$  i granica tečenja  $Y_i^{c,min/max}$ :

$$\begin{aligned} \sigma_i^{c,init/full} &= Y_i^c - (\varepsilon_i^c - \varepsilon_i^{c,init/full}) E_{i,left/right}^c, \\ Y_i^{c,min} &= \sigma_i^{c,init}, \\ Y_i^{c,max} &= 2Y_i^c - Y_i^{c,min}. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Gde  $E_{i,left/right}^c$  predstavljaju nagibe pravih levo i desno od tačke  $i^c$  (Slika 3.15 – a)). Na ovaj način karakteristike unutrašnjih histerezisnih petlji su u potpunosti određene. Sada je moguće definisati novi histerezisni model, koji opisuje ponašanje jednog kristala konstruktivnih mekih čelika pri cikličnom naprežanju u granicama  $-\varepsilon_s \leq \varepsilon \leq \varepsilon_s$ .

$$\begin{aligned} \sigma^c(t) &= \frac{E}{2} \iint_{\alpha \geq \beta} \delta(\alpha - \beta) G_{\alpha,\beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta + \frac{E_a^c - E}{2} \iint_{\alpha \geq \beta} \delta(\alpha - \beta - 2\varepsilon_1^c) G_{\alpha,\beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta + \\ &\frac{E_h^c - E_a^c}{2} \iint_{\alpha \geq \beta} \delta(\alpha - \beta - 2\varepsilon_2^c) G_{\alpha,\beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Prelaskom na jednostruki integral, gde je u prvom sabirku izraza  $\beta = \alpha$ , u drugom  $\beta = \alpha - 2\varepsilon_1^c$ , a u trećem  $\beta = \alpha - 2\varepsilon_2^c$  dobijamo:

$$\sigma^c(t) = \frac{E}{2} \int_{-\varepsilon_s}^{\varepsilon_s} G_{\alpha,\alpha} \varepsilon(t) d\alpha + \frac{E_a^c - E}{2} \int_{2\varepsilon_1^c - \varepsilon_s}^{\varepsilon_s} G_{\alpha,\alpha - 2\varepsilon_1^c} \varepsilon(t) d\alpha + \frac{E_h^c - E_a^c}{2} \int_{2\varepsilon_2^c - \varepsilon_s}^{\varepsilon_s} G_{\alpha,\alpha - 2\varepsilon_2^c} \varepsilon(t) d\alpha. \quad (3.62)$$

Prvi sabirak izraza predstavlja napon pri elastičnoj deformaciji, dok je drugim i trećim opisano ponašanje materijala nakon dostizanja granica tečenja  $Y_1^c$  i  $Y_2^c$ .

Prikazano rešenje predstavlja odgovor jednog kristala usled cikličnog jednoaksijalnog naprežanja. Paralelnom vezom beskonačnog broja prethodno izvedenih modela se definiše model za opisivanje ponašanja jednog polikristala:

$$\begin{aligned} \sigma^c(t) &= \frac{E}{2} \left[ \int_{-\varepsilon_s}^{\varepsilon_s} G_{\alpha,\alpha} \varepsilon(t) d\alpha + \frac{E_a^c - E}{E} p(Y_1^c) \int_{Y_1^{c,min}}^{Y_1^{c,max}} \int_{2\varepsilon_1^c - \varepsilon_s}^{\varepsilon_s} G_{\alpha,\alpha - 2\varepsilon_1^c} \varepsilon(t) d\alpha dY_1^c \right. \\ &\left. + \frac{E_h^c - E_a^c}{E} p(Y_2^c) \int_{Y_2^{c,min}}^{Y_2^{c,max}} \int_{2\varepsilon_2^c - \varepsilon_s}^{\varepsilon_s} G_{\alpha,\alpha - 2\varepsilon_2^c} \varepsilon(t) d\alpha dY_2^c \right]. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Pošto prvi sabirak izraza (3.63) ne zavisi od  $Y_i^c$ , na osnovu drugog je  $\alpha - \beta = 2\varepsilon_1^c$ , a na osnovu trećeg  $\alpha - \beta = 2\varepsilon_2^c$ , ponovo se u izraz može uvesti  $\beta$ , sa smenom  $-d\beta \cdot (E/2) = dY_1^c$  i  $-d\beta \cdot (E_a^c/2) = dY_2^c$ , gde se negativan znak smene gubi na promeni granica integracije unutar trouglova:

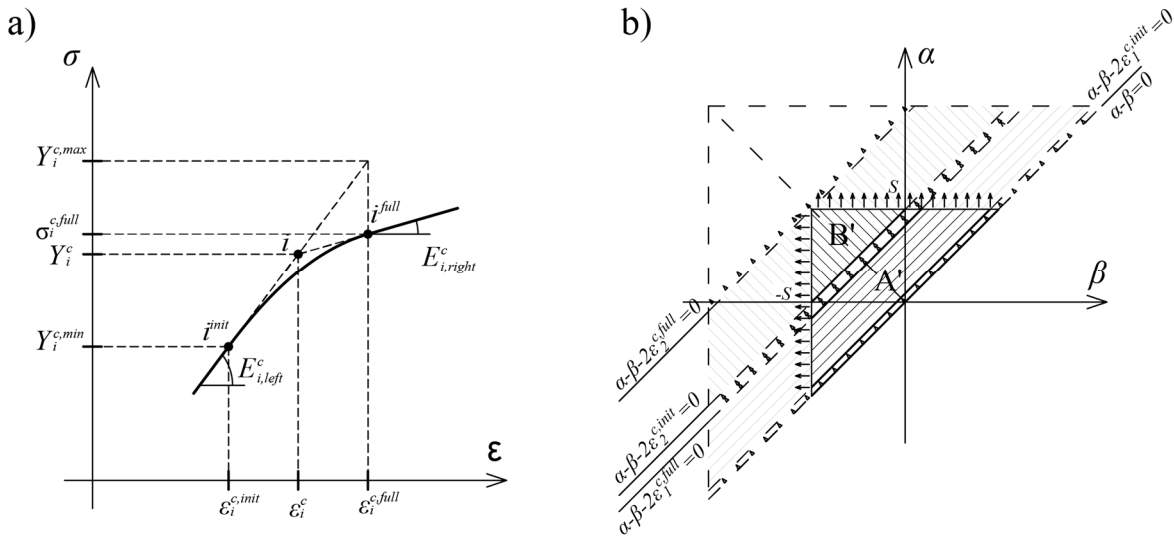
$$\begin{aligned} \sigma^c(t) = & \frac{E}{2} \int_{-\varepsilon_s}^{\varepsilon_s} G_{\alpha,\alpha} \varepsilon(t) d\alpha + \frac{E(E_a^c - E)}{4} p(Y_1^c) \iint_{A'} G_{\alpha,\beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta \\ & + \frac{E_a^c(E_h^c - E_a^c)}{4} p(Y_2^c) \iint_{B'} G_{\alpha,\beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Domeni integracije u izrazu (3.28) predstavljaju površine traka između odgovarajućih pravih u ograničenom trouglu, jer je Preisach-ova funkcija samo tu i definisana. Domen  $A'$  predstavlja površ između pravih  $\alpha - \beta = 2\varepsilon_1^{c,full}$  i  $\alpha - \beta = 2\varepsilon_1^{c,init}$ , a domen  $B'$  površ između pravih  $\alpha - \beta = 2\varepsilon_2^{c,full}$  i  $\alpha - \beta = 2\varepsilon_2^{c,init}$ .

Preisach-ova funkcija za sistem sa beskonačno mnogo modela koji opisuju unutrašnje histerezisne petlje, paralelno povezanih je onda definisana kao:

$$\begin{aligned} \mu^c(\alpha, \beta) = & \frac{E}{2} \delta(\alpha - \beta) + \frac{E(E_a^c - E)}{4} [H(\alpha - \beta - 2\varepsilon_1^{c,init}) - H(\alpha - \beta - 2\varepsilon_1^{c,full})] \\ & + \frac{E_a^c(E_h^c - E_a^c)}{4} [H(\alpha - \beta - 2\varepsilon_2^{c,init}) - H(\alpha - \beta - 2\varepsilon_2^{c,full})] \end{aligned} \quad (3.65)$$

Geometrijska interpretacija izraza (3.65) predstavlja novi Preisach-ov trougao promenljivih granica integracije ( $\pm\varepsilon_s$ ), kao i položaja i širina traka  $A'$  i  $B'$ . Položaj ovih domena integracije je definisana vrednostima napona  $Y_i^c$ , a njihova širina maksimalnim i minimalnim vrednostima ovih napona, odnosno početnim i krajnjim vrednostima dilatacija  $\varepsilon_i^c$ , kao što je prikazano na slici Slika 3.15.



Slika 3.15 - a) Materijalne karakteristike  $\sigma$ - $\varepsilon$  dijagrama u okolini tačke i unutrašnje petlje; b) Preisach-trougao za definisanje unutrašnjih histerezisnih petlji

### 3.3.3 Ciklično naprezanje

Ponašanje konstruktivnih mekih čelika pri monotonom aksijalnom naprezanju je jednoznačno definisano izrazom (3.28), bez uzimanja u obzir oštećenja nakon prekoračenja maksimalnog napona  $\sigma_u$ . Ciklično ponašanje ovih materijala predstavlja komplikovan problem koji se može opisati pomoću dva

prethodno izvedena modela. Način formiranja unutrašnjih petlji u granicama  $\pm\varepsilon_s$  je definisan izrazom (3.64), dok je tranzicija između unutrašnjih histerezisnih petlji različitih dimenzija definisana modelom koji opisuje *backbone* krivu (3.48). Data linija predstavlja trend liniju pikova unutrašnjih histerezisnih petlji, koji prekoračuju granice  $\pm\varepsilon_s$ .

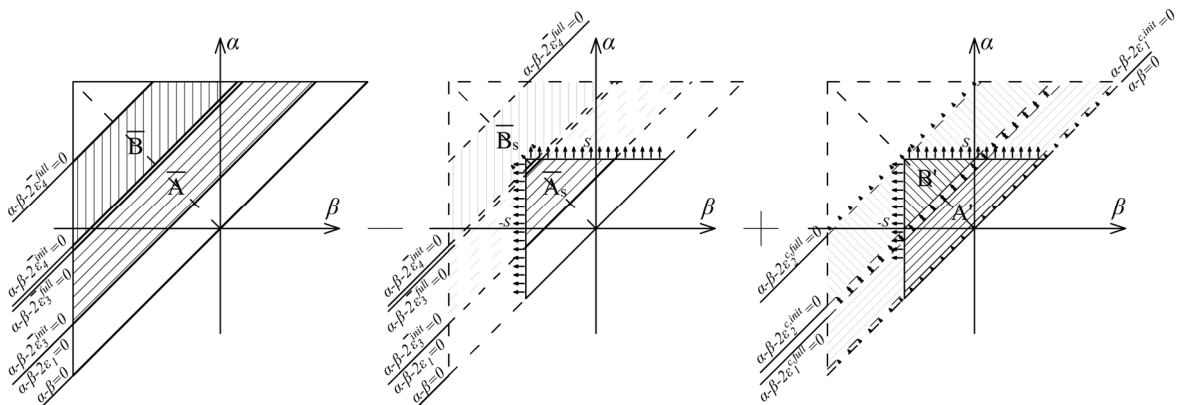
Ukoliko definišemo da je početna vrednost saturisanosti uzorka jednaka nuli ( $\varepsilon_s = 0$ ) tada se može reći da je ciklično ponašanje konstruktivnih mekih čelika određeno izrazom (3.64) za vrednosti dilatacija  $\varepsilon \leq \varepsilon_s$ , a pri prekoračenju vrednosti dilatacije  $\varepsilon_s$  napon  $\sigma(t)$  kao *output* usled deformacije  $\varepsilon(t)$  kao *input*-a se definiše pomoću (3.48). Preisac-ov model histerezisa, koji opisuje ponašanje mekih konstruktivnih čelika pri cikličnom naprezanju se dobija kombinovanjem ova dva modela u odgovarajućim granicama integracije, uz vođenje računa o preklapanju domena integracije u granicama  $\pm\varepsilon_s$ , koji se poništavaju drugim članom izraza:

$$\sigma(t) = \left( \sigma^{bc}(t) \Big|_{-\varepsilon_u}^{\varepsilon_u} - \sigma^{bc}(t) \Big|_{-\varepsilon_s}^{\varepsilon_s} \right) + \sigma^c(t) \Big|_{-\varepsilon_s}^{\varepsilon_s}. \quad (3.66)$$

U razvijenom obliku izraz se može prikazati u sledećoj formi:

$$\begin{aligned} \sigma(t) = & \frac{E}{2} \int_{-\varepsilon_u}^{\varepsilon_u} G_{\alpha,\alpha} \varepsilon(t) d\alpha + \frac{\bar{E}_a - E}{2} \int_{2\varepsilon_1 - \varepsilon_u}^{\varepsilon_u} G_{\alpha,\alpha - 2\varepsilon_1} \varepsilon(t) d\alpha + \\ & \frac{\bar{E}_a(\bar{E}_h - \bar{E}_a)}{4} p(Y_3) \iint_A G_{\alpha,\beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta - \frac{\bar{E}_h^2}{4} p(Y_4) \iint_B G_{\alpha,\beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta - \\ & \frac{\bar{E}_a(\bar{E}_h - \bar{E}_a)}{4} p(Y_3) \iint_{A_s} G_{\alpha,\beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta + \frac{\bar{E}_h^2}{4} p(Y_4) \iint_{B_s} G_{\alpha,\beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta - \\ & \frac{\bar{E}_a - E}{2} \int_{2\varepsilon_1 - \varepsilon_s}^{\varepsilon_s} G_{\alpha,\alpha - 2\varepsilon_1} \varepsilon(t) d\alpha dY_1 + \frac{E(E_a^c - E)}{4} p(Y_1^c) \iint_{A'} G_{\alpha,\beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta \\ & + \frac{E_a^c(\bar{E}_h^c - E_a^c)}{4} p(Y_2^c) \iint_{B'} G_{\alpha,\beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Preisach-ov trougao, koji predstavlja geometrijsku interpretaciju izraza (3.67) se može definisati na osnovu superpozicije tri Preisach-ova trougla, kako je prikazano na slici Slika 3.16.



Slika 3.16 – Formiranje Preisach-ovog trougla koji opisuje histerezisno ponašanje konstruktivnih mekih čelika pri cikličnom naprezanju

Prva četiri sabirka u izrazu (3.67) formiraju *I* Preisach-ov trougao koji definiše *backbone* krivu. Sledeća dva sabirka definišu *II* Preisach-ov trougao, koji predstavlja “*trougao brisanja*”, dok poslednja dva sabirka formiraju *III* Preisach-ov trougao, koji definiše formiranje unutrašnje histerezisne petlje. Domeni integraci  $\bar{A}_s$  i  $\bar{B}_s$  su ekvivalentni domenima integracije  $\bar{A}$  i  $\bar{B}$  u granicama  $\pm \varepsilon_s$ . Ista zapažanja se primenjuju i pri definisanju Preisach-ove funkcije predmetnog modela.

$$\begin{aligned}
\mu(\alpha, \beta) = & \frac{E}{2} \delta(\alpha - \beta) + \frac{\bar{E}_a - E}{2} \delta(\alpha - \beta - 2\varepsilon_1) \\
& + \frac{\bar{E}_a(\bar{E}_h - \bar{E}_a)}{4} [H(\alpha - \beta - 2\bar{\varepsilon}_3^{init}) - H(\alpha - \beta - 2\bar{\varepsilon}_3^{full})] \\
& - \frac{\bar{E}_h^2}{4} [H(\alpha - \beta - 2\bar{\varepsilon}_4^{init}) - H(\alpha - \beta - 2\bar{\varepsilon}_4^{full})] + \\
& \left| \begin{aligned} & \frac{E(E_a^c - E)}{4} [H(\alpha - \beta - 2\varepsilon_1^{c,init}) - H(\alpha - \beta - 2\varepsilon_1^{c,full})] - \\ & \frac{E_a^c(E_h^c - E_a^c)}{4} [H(\alpha - \beta - 2\varepsilon_2^{c,init}) - H(\alpha - \beta - 2\varepsilon_2^{c,full})] - \\ & \frac{\bar{E}_a - E}{2} \delta(\alpha - \beta - 2\varepsilon_1) - \frac{\bar{E}_a(\bar{E}_h - \bar{E}_a)}{4} [H(\alpha - \beta - 2\bar{\varepsilon}_3^{init}) - H(\alpha - \beta - 2\bar{\varepsilon}_3^{full})] + \\ & \frac{\bar{E}_h^2}{4} [H(\alpha - \beta - 2\bar{\varepsilon}_4^{init}) - H(\alpha - \beta - 2\bar{\varepsilon}_4^{full})] \end{aligned} \right. \quad (3.68)
\end{aligned}$$

### 3.4 PRIMENA METODE KONAČNIH ELEMENATA KOD OPISIVANJA PONAŠANJA AKSIJALNO CIKLIČNO NAPREGNUTIH NOSAČA U DOMENU PLASTIČNOSTI

Upotreba dilatacije  $\varepsilon(t)$ , kao ulaza, radi određivanja vrednosti napona  $\sigma(t)$ , pomoću Preisach-ovog histerezisnog modela, definisanog izrazom (3.66) uslovljava primenu koncepta matrice krutosti kod metode konačnih elemenata. Matrica fleksibilnosti nije primenljiva usled nemogućnosti obrade napona  $\sigma(t)$  kao ulaznog parametra kod ovog histerezisnog modela, što je posledica nepostojanja jednoznačne veze napona  $\sigma(t)$  i dilatacija  $\varepsilon(t)$ .

Jednačine konačnih elemenata se mogu definisati na osnovu [59], gde je prikazana formulacija nešto prostijeg Preisach-ovog modela za paralelnu vezu beskonačnog broja troelementnih modela. Ukoliko se posmatra samo aksijalno naprezanje i zanemare površinske i zapreminske sile, spoljašnje opterećenje može delovati samo u čvorovima sistema. Ukoliko se sa  $i=1,2,\dots,k$ , označe čvorovi sistema, gde je  $k$  ukupan broj čvorova, sa  $m=1,2,\dots,n$  štapovi sistema, gde je  $n$  ukupan broj štapova sistema, onda osnovna jednačina virtualnih pomeranja, koja sledi iz principa virtuelnog rada, za štap  $m$  ima oblik:

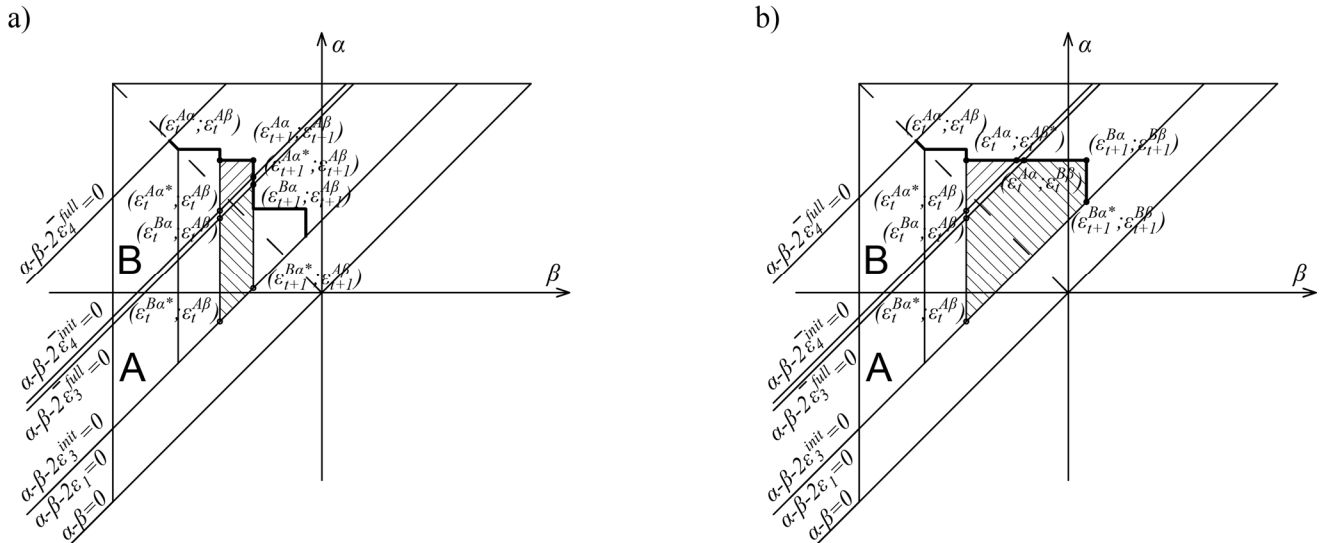
$$\sum_m \int_{V^{(m)}} \delta \varepsilon^{(m)T} \sigma^{(m)} dV^{(m)} = \sum_i \delta u^{iT} P^i \quad (3.69)$$

Gde je  $\sigma$  napon u stanju ravnoteže sa spoljašnjim koncentrisanim opterećenjem  $R^i$  koje deluje u čvoru  $i$ . Virtualna pomeranja i virtuelne deformacije su označene sa  $\delta u$ ,  $\delta \varepsilon$ , respektivno.

Za samo jedan element konstrukcije, zamenom (3.67) u (3.69), dobija se:

$$\begin{aligned}
& \int_V \delta \varepsilon^T \frac{E}{2} \left[ \int_{-\varepsilon_u}^{\varepsilon_u} G_{\alpha, \alpha} \varepsilon(t) d\alpha \right] dV + \int_V \delta \varepsilon^T \frac{\bar{E}_a - E}{2} \left[ \int_{2\varepsilon_1 - \varepsilon_u}^{\varepsilon_u} G_{\alpha, \alpha - 2\varepsilon_1} \varepsilon(t) d\alpha \right] dV + \\
& \int_V \delta \varepsilon^T \frac{\bar{E}_a (\bar{E}_h - \bar{E}_a)}{4} \left[ p(Y_3) \iint_A G_{\alpha, \beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta \right] dV - \int_V \delta \varepsilon^T \frac{\bar{E}_h^2}{4} \left[ p(Y_4) \iint_B G_{\alpha, \beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta \right] dV + \\
& \left| \int_V \delta \varepsilon^T \frac{\bar{E}_a (\bar{E}_a - \bar{E}_h)}{4} \left[ p(Y_3) \iint_{A_s} G_{\alpha, \beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta \right] dV + \int_V \delta \varepsilon^T \frac{\bar{E}_h^2}{4} \left[ p(Y_4) \iint_{B_s} G_{\alpha, \beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta \right] dV - \right. \quad (3.70) \\
& \left. \int_V \delta \varepsilon^T \frac{\bar{E}_a - E}{2} \left[ \int_{2\varepsilon_1 - \varepsilon_s}^{\varepsilon_s} G_{\alpha, \alpha - 2\varepsilon_1} \varepsilon(t) d\alpha dY_1 \right] dV + \int_V \delta \varepsilon^T \frac{E(E_a^c - E)}{4} \left[ p(Y_1^c) \iint_{A'} G_{\alpha, \beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta \right] dV - \right. \\
& \left. \int_V \delta \varepsilon^T \frac{E_a^c (E_h^c - E_a^c)}{4} \left[ p(Y_2^c) \iint_{B'} G_{\alpha, \beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta \right] dV = \sum_m \delta u^{iT} R^i. \right.
\end{aligned}$$

Osim prva dva sabirka, svi članovi izraza (3.70) se mogu predstaviti kao razlika pozitivnog  $A^+(t)$  i negativnog  $A^-(t)$  seta površina na odgovarajućem Preisach-ovom trouglu. Pošto se predmetni histerezni model predstavlja Preisach-ovim trouglom nastalim kombinovanjem tri različita Preisach-ova trougla, proračun površina se mora sprovesti za svaki trougao posebno. Domeni integracije (površine) Preisach-ovog trougla imaju oznake  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$  ili  $A'$ ,  $B'$ . Koristeći temena memorijske linije  $L(t)$ , svaka traka Preisach-ovog trougla se može podeliti na  $N$  paralelopipeda i (ili) trapeza. Proračun njihovih površina zavisi od položaja temena *staircase* linije unutar Preisach-ovog trougla, odnosno, od njihove pripadnosti određenom domenu integracije ( $A$  ili  $B$ ), kako je prikazano na slici Slika 3.17.



Slika 3.17 - Određivanje površina traka pri proizvoljnom obliku memorijske linije  $L(t)$ , kada temena trapeza pripadaju: a) istom domenu; b) različitim domenima

Prema tome se površine odgovarajućih domena  $A^{(+)}$ , za slučaj kada oba temena trapeza, koja leže na  $L(t)$  liniji, pripadaju domenu integracije  $A$ , mogu sračunati kao:



$$A^{(A)^+}(t) = \sum_{i=1}^N \left[ (\varepsilon_t^{A\beta} - \varepsilon_{t+1}^{A\beta}) (\varepsilon_{t+1}^{A\alpha} - \varepsilon_{t+1}^{A\alpha^*} + \varepsilon_t^{A\alpha} - \varepsilon_t^{A\alpha^*}) / 2 \right], \quad (3.71)$$

$$A^{(B)^+}(t) = \sum_{i=1}^N \left[ (\varepsilon_t^{B\beta} - \varepsilon_{t+1}^{B\beta}) (\varepsilon_{t+1}^{B\alpha} - \varepsilon_{t+1}^{B\alpha^*} + \varepsilon_t^{B\alpha} - \varepsilon_t^{B\alpha^*}) / 2 \right]. \quad (3.72)$$

Izraz (3.72) važi i u slučaju kada oba temena trapeza pripadaju prostoru između domena  $A$  i  $B$ , ali je u tom slučaju površina  $A^{(A)^+}(t) = 0$ . U slučaju da oba temena trapeza pripadaju domenu integracije  $B$ , koristi se izraz (3.71) uz promenu indeksa  $A \rightarrow B$ .

U specijalnom slučaju, kada jedno teme trapeza leži u domenu  $A$ , dok je drugo u domenu  $B$ , granične površine se računaju kao:

$$A_i^{(A)^+}(t) = (\varepsilon_t^{A\beta} - \varepsilon_t^{A\beta^*})^2 / 2, \quad (3.73)$$

$$A^{(B)^+}(t) = \left[ (\varepsilon_t^{A\beta} - \varepsilon_{t+1}^{B\beta}) (\varepsilon_{t+1}^{B\alpha} - \varepsilon_{t+1}^{B\alpha^*} + \varepsilon_t^{A\alpha} - \varepsilon_t^{B\alpha^*}) - (\varepsilon_t^{A\beta} - \varepsilon_t^{B\beta})^2 \right] / 2. \quad (3.74)$$

Imajući u vidu da se dvostruki integral u izrazima koji definišu Preisach-ov model može sračunati kao dvostruka promena površine unutar Preisach-ovog trougla, vrednosti izduženja i odgovarajuće dilatacije u plastičnom domenu se prema [60], definišu kao:

$$\int_{(\cdot)} G_{\alpha,\beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta = A^{(\cdot)^+}(t) - A^{(\cdot)^-}(t) = 2A^{(\cdot)^+}(t) = \frac{u_{pl}^{(\cdot)}}{L^2} = \varepsilon_{pl}^{(\cdot)}. \quad (3.75)$$

Uzimajući u obzir (3.75), izraz (3.70) postaje:

$$\begin{aligned} & \delta u^{(m)T} \left[ \int_{V^{(m)}} B^{(m)T} E B^{(m)} dV^{(m)} \right] \delta u^{(m)} + \delta u^{(m)T} \left[ \int_{V^{(m)}} B^{(m)T} \frac{\bar{E}_a - E}{2} B^{(m)} dV^{(m)} \right] \delta u_1^{(m)} + \\ & \delta u^{(m)T} \left[ p(Y_3) \int_{V^{(m)}} B^{(m)T} \frac{\bar{E}_a (\bar{E}_h - \bar{E}_a)}{4} dV^{(m)} \right] u_{pl}^{\bar{A}_3(m)} - \delta u^{(m)T} \left[ p(Y_4) \int_{V^{(m)}} B^{(m)T} \frac{\bar{E}_h^2}{4} dV^{(m)} \right] u_{pl}^{\bar{B}_3(m)} + \\ & \left|_{\alpha,\beta \leq \varepsilon_s} \delta u^{(m)T} \left[ p(Y_3) \int_{V^{(m)}} B^{(m)T} \frac{\bar{E}_a (\bar{E}_a - \bar{E}_h)}{4} dV^{(m)} \right] u_{pl}^{\bar{A}_3(m)} + \delta u^{(m)T} \left[ p(Y_4) \int_{V^{(m)}} B^{(m)T} \frac{\bar{E}_h^2}{4} dV^{(m)} \right] u_{pl}^{\bar{B}_3(m)} - \right. \quad (3.76) \\ & \delta u^{(m)T} \left[ \int_{V^{(m)}} B^{(m)T} \frac{\bar{E}_a - E}{2} dV^{(m)} \right] \delta u_1^{(m)} + \delta u^{(m)T} \left[ p(Y_1^c) \int_{V^{(m)}} B^{(m)T} \frac{E(E_a^c - E)}{4} dV^{(m)} \right] u_{pl}^{A(m)} + \\ & \delta u^{(m)T} \left[ p(Y_2^c) \int_{V^{(m)}} B^{(m)T} \frac{E_a^c (E_h^c - E_a^c)}{4} dV^{(m)} \right] u_{pl}^{B(m)} = \delta u^{iT} R^i. \end{aligned}$$

Gde virtualno pomeranje  $\delta u_i$  odgovara virtualnoj dilataciji  $\delta \varepsilon_i$ , a mtrica  $B$  predstavlja konstitutivnu mtricu, koja daje vezu između pomeranja i dilatacija kod aksijalnog naprezanja.

Pošto izrazi u zagradama predstavljaju svojevrsne matrice krutosti, izraz (3.76) se može zapisati u obliku:

$$\begin{aligned} & \left[ K_{el}^{(m)} \quad K_{1el}^{(m)} \right] \begin{bmatrix} \delta u^{(m)} \\ \delta u_1^{(m)} \end{bmatrix} + \left[ K_{pl}^{\bar{A}(m)} \quad K_{pl}^{\bar{B}(m)} \right] \begin{bmatrix} u_{pl}^{\bar{A}(m)} \\ u_{pl}^{\bar{B}(m)} \end{bmatrix} + \\ & \left[ K_{pl}^{\bar{A}_s(m)} \quad K_{pl}^{\bar{B}_s(m)} \quad K_{1el}^{(m)} \right] \begin{bmatrix} u_{pl}^{\bar{A}_s(m)} \\ u_{pl}^{\bar{B}_s(m)} \\ \delta u_1^{(m)} \end{bmatrix} + \left[ K_{pl}^{A(m)} \quad K_{pl}^{B(m)} \right] \begin{bmatrix} u_{pl}^{A(m)} \\ u_{pl}^{B(m)} \end{bmatrix} = \delta u^{iT} R^i. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Za skup konačnih elemenata, jednačina (3.77) se može dati u obliku:

$$K_{el}U + \bar{K}_{pl}\bar{U}_{pl} - \bar{K}_{pl}^s\bar{U}_{pl}^s + K'_{pl}U'_{pl} = R. \quad (3.78)$$

gde prva dva člana definišu *backbone* krivu, treći član predstavlja član „brisanja“, a poslednji, odgovor sistema pri formiranju unutrašnjih petlji. Rešavanje jednačine **Error! Reference source not found.** je moguće primenom iterativnog postupka. Sve veličine (vektori i matrice) u izrazu **Error! Reference source not found.** moraju biti transformisane u globalni koordinatni sistem pomoću matrice transformacije  $T$ :

$$T = \begin{bmatrix} \cos(x, X) & \cos(x, Y) & \cos(x, Z) \\ \cos(y, X) & \cos(y, Y) & \cos(y, Z) \\ \cos(z, X) & \cos(z, Y) & \cos(z, Z) \\ \cos(x, X) & \cos(x, Y) & \cos(x, Z) \\ \cos(y, X) & \cos(y, Y) & \cos(y, Z) \\ \cos(z, X) & \cos(z, Y) & \cos(z, Z) \end{bmatrix}, \quad (3.79)$$

gde su  $x, y, z$  ose lokalnog koordinatnog sistema, a  $X, Y, Z$  ose globalnog koordinatnog sistema. Elementi matrice transformacije predstavljaju kosinuse uglova između odgovarajućih osa.

### 3.5 REŠAVANJE SISTEMA JEDNAČINA MKE I KRITERIJUM KONVERGENCIJE

Pri rešavanju sistema jednačina, definisanih izrazom **Error! Reference source not found.**, koristi se iterativni postupak. Približno, numeričko rešenje će biti dobijeno primenom Newton-ove metode koja je takođe poznata kao Newton-Raphson-ova metoda. Iako se prvi put pojavila krajem XVII veka [61], ova metoda i dalje predstavlja osnovu za razvoj mnogih savremenih numeričkih metoda. Predstavlja način za brz pronalazak dobre aproksimativne vrednosti nula realne funkcije. Koristi ideju da se realna funkcija može aproksimirati tangentom na nju. Pogodnost metode za brzo dobijanje aproksimativnog rešenja leži u njenoj osobini kvadratne konvergencije u nekim slučajevima [62].

Ukoliko se izraz **Error! Reference source not found.** prikaže u kraćem obliku:

$$K_{el}U - K_{pl}U_{pl} = R, \quad (3.80)$$

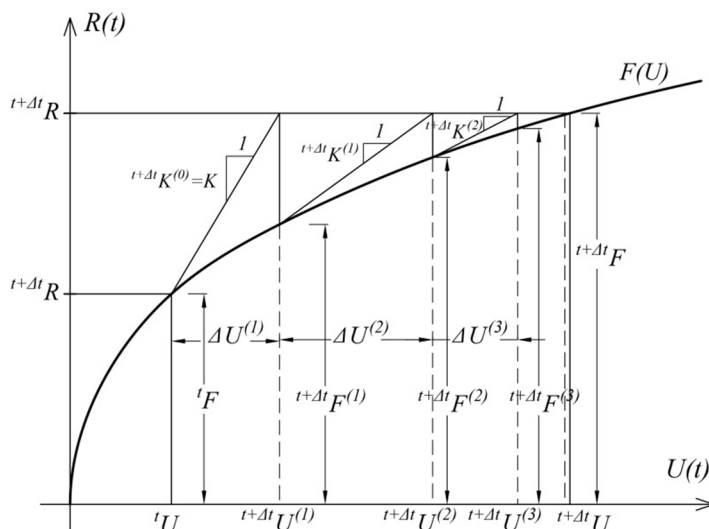
tada se rešenje iznalazi iterativnim postupkom, prikazanim u [60], prema izrazima:

$$K_{el}\Delta U^{(j)} = {}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}F^{(j-1)}, \quad (3.81)$$

$${}^{t+\Delta t}U^{(j)} = {}^{t+\Delta t}U^{(j-1)} + \Delta U^{(j)}, \quad (3.82)$$

$${}^{t+\Delta t}F^{(j)} = K_{el} {}^{t+\Delta t}U^{(j)} + K_{pl} {}^{t+\Delta t}U_{pl}^{(j)}, \quad (3.83)$$

gde  $j$  predstavlja redni broj iteracije. Interpretacija ovog iterativnog postupka je prikazana na slici Slika 3.18, gde se jasno uočava značenje veličina u izrazima (3.81)-(3.83).



Slika 3.18 - Newton - Raphson-ov iterativni postupak

Iteracije se ponavljaju dok se ne zadovolje uslovi konvergencije po rezidualnoj sili ((3.81)-(3.83)).

#### 4 ELASTOPLASTIČNA ANALIZA AKSIJALNO NAPREGNUTIH ELEMENATA SA OŠTEĆENJEM PRI CIKLIČNOM OPTEREĆENJU

„Oštećenje u materijalu je progresivan fizički proces usled kojeg dolazi do loma.“ [63]

Generalno, oštećenje materijala se manifestuje kroz pojavu i razvoj defekata u njemu. Defekti u materijalu mogu biti grubo klasifikovani u:

- tačkaste defekte u kristalnoj rešetki (praznine, međuprostori, nečistoće u vidu stranih atoma...),
- linijske defekte (dislokacije),
- površinski defekti (ravni klizanja i prsline) i
- zapreminski defekti (pore i šupljine).

Zavisno od veličine defekta, možemo razlikovati tri nivoa analize oštećenja:

- mikro nivo,
- mezo nivo i

- makro nivo.

Mikro nivo predstavlja analizu nastanka i razvoja mikroprslina na nivou kristalne rešetke. Vrste kristalnih rešetki, veze između atoma i načini formiranja i razvoja dislokacija su prikazani u odeljku 1.3. Oštećenja na mikro nivou nastaju usled kidanja međumolekularnih veza ili razvoja dislokacija, kako je prikazano na slici Slika 1.4.

Osobina elastičnosti svih materijala je direktna posledica međumolekularnih veza i relativnog pomeranja atoma, dok je pojava plastičnosti posledica pojave oštećenja na mikro nivou u vidu kidanja međuatomskih veza ili razvoja dislokacija. Spajanjem više dislokacija nastaju mikroprslinae.

Mezo nivo predstavlja analizu rasta i spajanja mikroprslina na reprezentativnom delu zapremine tela. Varijable oštećenja u mehanici kontinuuma se najčešće definišu na mezo nivou, preko konstitutivnih jednačina koje uzimaju u obzir reverzibilnost deformacije. Spajanjem više mikroprslina formiraju se prslinae u materijalu.

Makro nivo predstavlja analizu rasta prslina u materijalu i osnovni je pristup u mehanici oštećenja. Iako se neke pojave mogu opisati samo na mikro ili mezo nivou, makro nivo omogućava dovoljno tačnu i detaljnu analizu inženjerskih materijala i konstrukcija.

Na bilo kom od navedenih nivoa, oštećenje utiče na elastičnost materijala tako što povećanje oštećenja prouzrokuje opadanje osobina elastičnosti i reverzibilnosti deformacije materijala. Imajući u vidu ovu pojavu i koristeći makro pristup, u ovoj doktorskoj disertaciji će biti definisano oštećenje kod konstrukcija od konstruktivnih mekih čelika pri cikličnom opterećenju. U ovom poglavlju će biti razmatrana dva modela koja definišu oštećenje kod ovih vrsta čelika usled cikličnog aksijalnog naprežanja. Prvi model se bazira na modifikovanoj *backbone* krivi koja uzima u obzir pojavu oštećenja. Drugi model koristi pristup prikazan u [60], a zasniva se na uvođenju novog elementa u materijalni model, koji simulira oštećenje u materijalu koje se javlja pri zatezanju. Oba modela spadaju u Preisach-ove modele histerezisa.

## 4.1 MODELIRANJE OŠTEĆENJA POMOĆU PREISACH-OVOG MODELA HISTEREZISA SA ELEMENTOM NEGATIVNE KRUTOSTI

### 4.1.1 Backbone kriva mekih konstruktivnih čelika sa oštećenjem pri cikličnom naprežanju

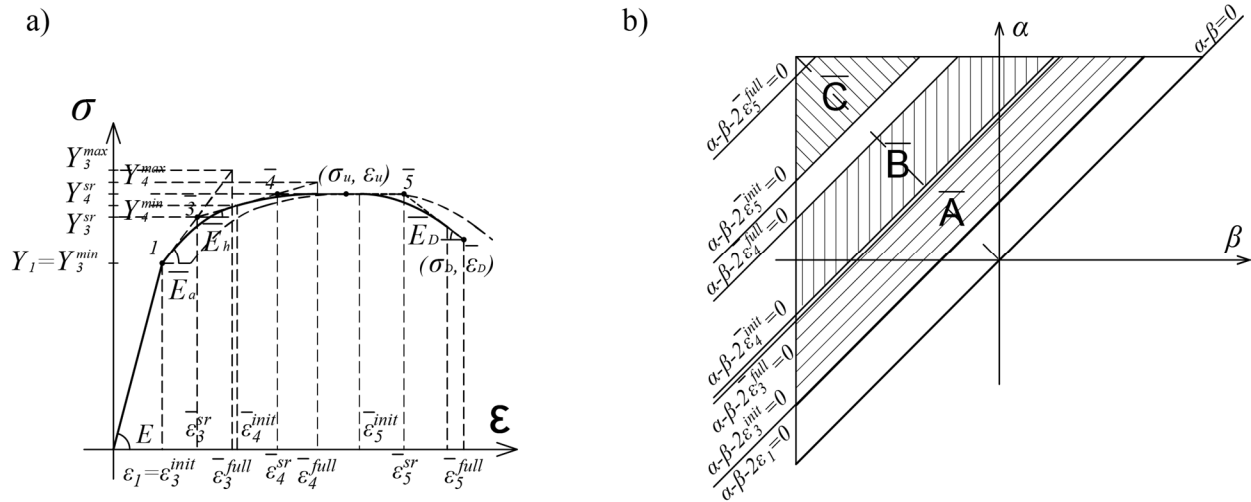
Pad napona u materijalu usled oštećenja, pri monotonom aksijalnom naprežanju je modeliran u odeljku 3.2.1. Definisane oštećenja kod cikličnog naprežanja, predstavlja kompleksniji problem. Granica kidanja materijala  $\sigma_D$  pri cikličnom naprežanju zavisi od količine akumulirane energije u materijalu. Efekat zamora materijala, kao posledica akumulacije deformacione energije, je uočljiv i u domenu elastičnosti pri velikom broju ciklusa opterećenja. Predmet ove disertacije predstavlja oštećenja pri malom broju ciklusa, a usled velikih plastičnih deformacija. Zbog toga će oštećenje biti modelirano kroz oštećenje *backbone* krive bez uzimanja u obzir broja ciklusa u prethodnoj istoriji opterećenja. Problematika velikog broja ciklusa će biti obrađena samo kroz razvoj metode za određivanje njihovog broja.

*Backbone* kriva pri cikličnom naprežanju bez oštećenja je definisana u odeljku 3.3.1. Oštećenje kod *backbone* krive će biti određeno na osnovu radnog dijagrama predmetnih čelika i materijalnog modela, koji su prikazani na slici Slika 3.12, izuzimajući horizontalni plato formiran nakon dostizanja granice tečenja  $Y_L$  ( $\epsilon_L=0$ ). Ovako definisani izrazi za napon (3.43), (3.44) i Preisach-ovu funkciju (3.46) u potpunosti definišu *backbone* krivu, odnosno:

$$\sigma^{bcD}(t) = \bar{\sigma}^{mD}(t) \Big|_{\varepsilon_L=0},$$

$$\mu^{bcD}(\alpha, \beta) = \bar{\mu}^{mD}(\alpha, \beta) \Big|_{\varepsilon_L=0}.$$
(4.1)

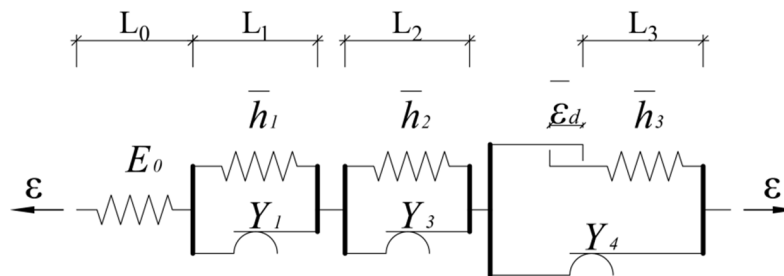
Na ovaj način dolazi do translacije celokupne nelinearne zone (ojačanja i omekšanja) u odnosu na  $\sigma$ - $\varepsilon$  krivu pri monotonom napreznju, čime Preisach-ov trougao koji definiše *backbone* krivu gubi međuprostor između prave  $\alpha$ - $\beta$ - $2Y_1/E=0$  i domena  $A$ .



Slika 4.1- - a) Backbone kriva konstruktivnih mekih čelika pri cikličnom napreznju sa oštećenjem;  
b) Preisach-ov trougao za backbone krivu sa oštećenjem

U tom slučaju vrednosti dilatacija  $\varepsilon_u$  i  $\varepsilon_D$  se translatorno pomeraju ka koordinatnom početku, dok naponi  $\sigma_u$  i  $\sigma_D$  zadržavaju vrednosti koje su imali pri monotonom napreznju.

Oštećenje u materijalu nastaje kao posledica kidanja međumolekularnih veza usled sile zatezanja. Ukoliko se zadrži pretpostavka o identičnom ponašanju materijala pri zatezanju i pritisku u zoni bez oštećenja, mehanički model koji definiše *backbone* krivu uz oštećenje pri zatezanju, je prikazan na slici Slika 4.2.



Slika 4.2 - Mehanički model za backbone krivu sa oštećenjem pri zatezanju

U odnosu na mehanički model sa slike Slika 3.10, *delay* element koji definiše horizontalni plato tečenja iščezava, dok se modifikacijom drugog *delay* elementa sprečava oštećenje materijala pri pritisku. Zakrivljenje  $\sigma$ - $\varepsilon$  dijagrama se postiže paralelnom vezom beskonačnog broja mehaničkih modela sa slike Slika 4.2.

#### 4.1.2 Ciklično ponašanje sa oštećenjem

I pri pojavi oštećenja se može smatrati da *backbone* kriva predstavlja trend liniju pikova unutrašnjih histerezisnih petlji. Kako do oštećenja u materijalu dolazi samo usled zatezanja, zona nakon dostizanja granice  $\varepsilon_u^c$  usled zatezanja i usled pritiska kod *backbone* krive se razlikuju. Između ovih trend linija (*backbone* krive) se formiraju stabilne histerezisne (unutrašnje) petlje.

Način formiranja ovih petlji je definisan u odeljku 3.3.2, za slučaj nepostojanja oštećenja. Ukoliko do oštećenja dođe, dolazi do smanjenja visine unutrašnjih petlji pri cikličnom naprezanju. Ovaj fenomen je omogućen ograničavanjem vrednosti modula ojačanja pri cikličnom naprezanju  $0 \leq E_h^c \leq E_{h,init}^c$  i modifikacijom uslova za primenu algoritma definisanja materijalnih karakteristika unutrašnjih petlji. Ukoliko je na početku formiranja ovih petlji  $\varepsilon_u^c < \varepsilon_s$  primenjuje se *Algoritam II*.

Modifikacijom izraza (4.1) redefinišemo Preisach-ov model za napon kod konstruktivnih mekih čelika usled cikličnog opterećenja. Različitost grana *backbone* krive, pri opterećenju (zatezanju) i rasterćenju (pritisku) se postiže dopunskim ograničenjem domena  $C$  i  $C'$  pomoću prave  $\alpha + \beta = 0$ .

Definisanje novog modela koji uzima u obzir oštećenje pri cikličnom naprezanju, moguće je na osnovu izraza (4.2):

$$\begin{aligned}
 \sigma(t) = & \frac{E}{2} \int_{-\varepsilon_D}^{\varepsilon_D} G_{\alpha,\alpha} \varepsilon(t) d\alpha + \frac{\bar{E}_a - E}{2} \int_{2\varepsilon_1 - \varepsilon_D}^{\varepsilon_D} G_{\alpha,\alpha-2\varepsilon_1} \varepsilon(t) d\alpha + \\
 & \frac{\bar{E}_a(\bar{E}_h - \bar{E}_a)}{4} p(Y_3) \iint_A G_{\alpha,\beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta - \frac{\bar{E}_h^2}{4} p(Y_4) \iint_B G_{\alpha,\beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta - \\
 & \frac{\bar{E}_a(\bar{E}_h - \bar{E}_a)}{4} p(Y_3) \iint_{A_s} G_{\alpha,\beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta + \frac{\bar{E}_h^2}{4} p(Y_4) \iint_{B_s} G_{\alpha,\beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta + \\
 & \frac{\bar{E}_D}{4} p(\varepsilon_d) \iint_C G_{\alpha,\beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta - \frac{\bar{E}_D}{4} p(\varepsilon_d) \iint_{C_s} G_{\alpha,\beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta - \\
 & \frac{\bar{E}_a - E}{2} \int_{2\varepsilon_1 - \varepsilon_s}^{\varepsilon_s} G_{\alpha,\alpha-2\varepsilon_1} \varepsilon(t) d\alpha dY_1 + \frac{E(E_a^c - E)}{4} p(Y_1^c) \iint_{A'} G_{\alpha,\beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta \\
 & + \frac{E_a^c(E_h^c - E_a^c)}{4} p(Y_2^c) \iint_{B'} G_{\alpha,\beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta,
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

ili u kraćem obliku:

$$\sigma(t) = \left( \sigma^{bcD}(t) \Big|_{-\varepsilon_D}^{\varepsilon_D} - \sigma^{bc}(t) \Big|_{-\varepsilon_s}^{\varepsilon_s} - \sigma^D(t) \Big|_{-\varepsilon_s^a}^{\varepsilon_s^a} \right) + \sigma^c(t) \Big|_{-\varepsilon_s}^{\varepsilon_s}. \tag{4.3}$$

Prvim članom izraza definisana je *backbone* kriva sa oštećenjem pri cikličnom naprezanju, na osnovu izraza (4.1), uz redefinisane domena integracije  $C$ . Drugi sabirak iz izraza (3.66) se raščlanjava na dva *trougla brisanja* sa granicama integracije  $\pm\varepsilon_s$  i  $\pm\varepsilon_s^a$ , gde je  $\varepsilon_s^a$  maksimalna vrednost izduženja (pri zatezanju) u prethodnoj istoriji opterećenja:

$$\varepsilon_s^\alpha = \max|\alpha| \quad (4.4)$$

Integracija nad domenom  $\bar{C}$  je data kao:

$$\iint_{\bar{C}} G_{\alpha,\beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta = \int_{\bar{\varepsilon}_d^{init}}^{\bar{\varepsilon}_d^{full}} \int_{2\bar{\varepsilon}_5 - \bar{\varepsilon}_D}^{\bar{\varepsilon}_D} G_{\alpha,\alpha-2\bar{\varepsilon}_5} H(\alpha + \beta) \varepsilon(t) d\alpha d\varepsilon_d, \quad (4.5)$$

dok je integracija nad domenom  $\bar{C}_S$  oblika:

$$\iint_{\bar{C}_S} G_{\alpha,\beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta = \int_{\bar{\varepsilon}_d^{init}}^{\bar{\varepsilon}_d^{full}} \int_{2\bar{\varepsilon}_5 - \bar{\varepsilon}_s^\alpha}^{\bar{\varepsilon}_s^\alpha} G_{\alpha,\alpha-2\bar{\varepsilon}_5} H(\alpha + \beta) \varepsilon(t) d\alpha d\varepsilon_d. \quad (4.6)$$

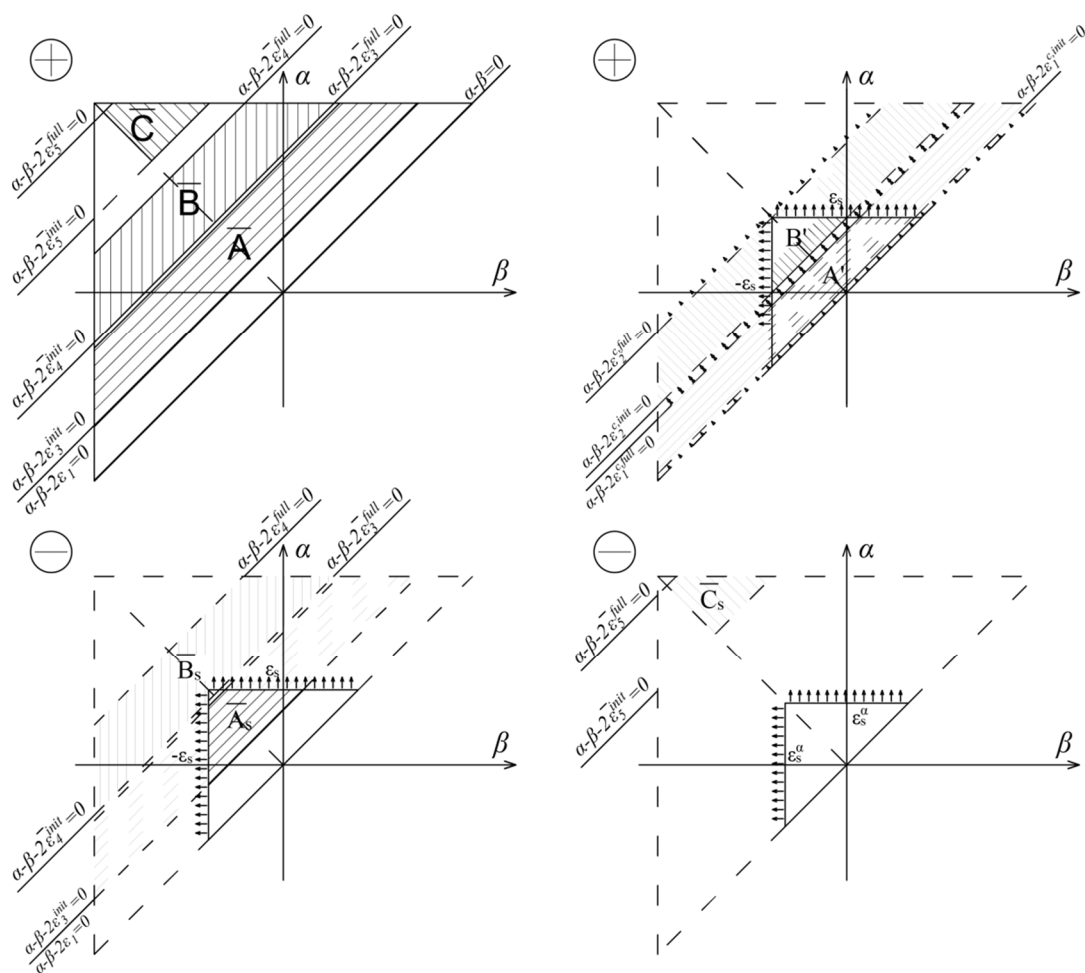
Preisach-ova funkcija  $\mu(\alpha, \beta)$  može biti definisana na isti način kao napon  $\sigma(t)$  u izrazu (4.3):

$$\mu(\alpha, \beta) = \left( \mu^{bcD}(\alpha, \beta) \Big|_{-\bar{\varepsilon}_D}^{\bar{\varepsilon}_D} - \mu^{bc}(\alpha, \beta) \Big|_{-\varepsilon_s}^{\varepsilon_s} - \mu^D(\alpha, \beta) \Big|_{-\varepsilon_s^\alpha}^{\varepsilon_s^\alpha} \right) + \mu^c(\alpha, \beta) \Big|_{-\varepsilon_s}^{\varepsilon_s}. \quad (4.7)$$

Oštećenje koje je određeno izrazom (4.1), mora biti redefinisano kako bi se uzelo u obzir različito ponašanje materijala pri pritisku i zatezanju.

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{E}_D}{4} \left[ H(\alpha - \beta - 2\bar{\varepsilon}_5^{init}) - H(\alpha - \beta - 2\bar{\varepsilon}_5^{full}) \right] - \\ & \frac{\bar{E}_D}{4} \left[ H(\alpha - \beta - 2\bar{\varepsilon}_5^{init}) - H(\alpha - \beta - 2\bar{\varepsilon}_5^{full}) \right] \cdot H(\alpha + \beta). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Odgovarajući Preisach-ov trougao, definisan na ovaj način, je prikazan na slici Slika 4.3.



Slika 4.3 - Preisach-ov trougao za ciklično naprezanje konstruktivnih mekih čelika sa oštećenjem

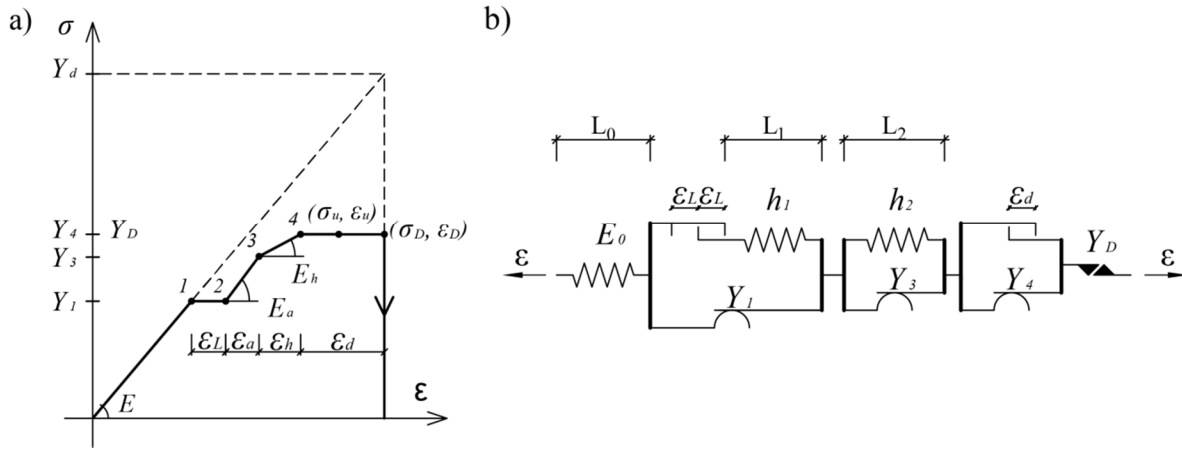
## 4.2 MODELIRANJE OŠTEĆENJA POMOĆU PREISACH-OVOG MODELA HISTEREZISA SA ELEMENTOM GRANICE KIDANJA $Y_D$

Opisivanje oštećenja pomoću Preisach-ovog histerezisnog modela kod konstruktivnih mekih čelika izloženih monotonom naprezanju je prikazano u odeljku 3.2.1. Modifikacijom pomenutog modela, *backbone* kriva sa oštećenjem, kao trend linija svih histerezisnih petlji pri cikličnom naprezanju, je definisana u odeljku 4.1.1. Kao osnova modela je poslužio mehanički model koji sadrži elastični element (opругu) negativne krutosti  $E_D$ .

Pojavu oštećenja u mekim čelicima je moguće opisati i posmatranjem novog mehaničkog modela sa granicom kidanja  $Y_D$ . Pomenuti pristup je već korišćen pri modeliranju oštećenja kod idealno elastoplastičnih materijala sa linearnim ojačanjem, kako je prikazano u [59] i [64].

Modeliranje elastoplastičnog odgovora mekih konstruktivnih čelika pri monotonom i cikličnom naprezanju je sprovedeno identično kao i u poglavlju 3. U ovom modelu, pojava oštećenja je opisana modifikacijom mehaničkog modela sa slike Slika 3.10, uvođenjem novog elementa koji simulira pojavu loma pri zatezanju usled prekoračenja granice kidanja  $Y_D$ . Mehanički model i odgovarajući naponsko-deformacijski dijagram su prikazani na sledećoj slici Slika 4.4.





Slika 4.4 - a) Radni dijagram konstruktivnih mekih čelika sa oštećenjem, gde potpuni lom nastaje pri deformaciji  $Y_D/E$ ; b) Jedinični model koji reprodukuje ponašanje pod a)

Materijalne karakteristike koje definišu elastoplastično ponašanje mehaničkog modela su prikazane u odeljku 3.1. Lom u materijalu nastaje pri vrednosti napona  $Y_D$ . Iako do loma u materijalu dolazi pri naponu koji je jednak maksimalnom naponu  $\sigma_u = Y_4$ , vrednost napona  $Y_D$  mora imati infinitezimalno veću vrednost od  $Y_4$ , kako bi se omogućilo formiranje platoa dužine  $\varepsilon_d$ , na naponsko deformacijskom dijagramu (Slika 4.4a):

$$Y_D = Y_4 + dY_4 \quad (4.9)$$

Ukoliko vrednost funkcije *output*-a pri monotonom naprezanju, definisana izrazima (3.17)-(3.18), zadrži oznaku  $f_{\alpha,\beta}^m$  uz promenu donje granice izraza (3.18)  $\varepsilon_u$  u  $\varepsilon_D$ , u skladu sa slikom Slika 4.4, tada je vrednost *output*-a  $f_{\alpha,\beta}^{mD}$ , pri monotonom zatezanju sa oštećenjem, determinisana kao:

$$f_{\alpha,\beta}^{mD} = \begin{cases} f_{\alpha,\beta}^m & \alpha < Y_d/E \\ f_{\alpha,\beta}^m - Y_D = 0 & \alpha \geq Y_d/E \end{cases} \quad (4.10)$$

Diferenciranjem izraza (4.10) po  $\beta$ , definišu se nagibi svih delova petlje:

$$\frac{\partial f_{\alpha,\beta}^{mD}}{\partial \beta} = \frac{\partial f_{\alpha,\beta}^m}{\partial \beta} - Y_D \cdot \delta(\alpha - Y_d/E). \quad (4.11)$$

Diferenciranjem izraza (4.11) po  $\alpha$  može se definisati Preisach-ova funkcija:

$$\mu^{mD}(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_{\alpha,\beta}^{mD}}{\partial \alpha \partial \beta} = \mu^m(\alpha, \beta) - Y_D \cdot \delta(Y_d/E - \alpha). \quad (4.12)$$

Ovako određena Preisach-ova funkcija je definisana samo na pravama  $\alpha - \beta = 0$ ,  $\alpha - \beta - 2\varepsilon_1 = 0$ ,  $\alpha - \beta - 2\varepsilon_2 = 0$ ,  $\alpha - \beta - 2\varepsilon_3 = 0$ ,  $\alpha - \beta - 2\varepsilon_4 = 0$  i  $\alpha = Y_d/E$ .

Uključivanjem Preisach-ove funkcije  $\mu(\alpha, \beta)$ , definisane sa (4.12) u (2.7) dobija se izraz za napon u jednom kristalu materijala:

$$\sigma^{mD}(t) = \sigma^m(t) - \frac{1}{2} \iint_{\alpha \geq \beta} Y_D \cdot \delta(\alpha - Y_d/E) G_{\alpha, \beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta. \quad (4.13)$$

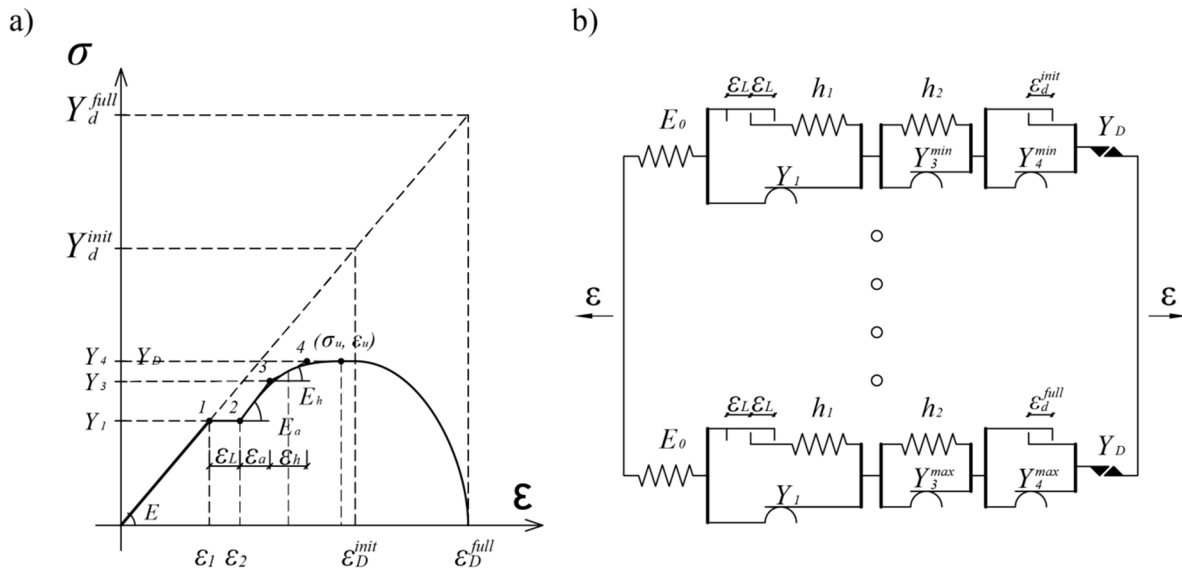
Napon u materijalnom polikristalu je moguće definisati ponovnim uvođenjem parametra  $\beta$  i paralelnom vezom beskončnog broja jediničnih kristala, različitih granica tečenja ( $Y_{min} < Y < Y_{max}$ ) kao u poglavlju 3. Usled horizontalnog segmenta  $\sigma$ - $\varepsilon$  dijagrama, koji prethodi lomu, materijalni kristali poseduju različite dilatacije pri lomu ( $\varepsilon_D^{init} \leq \varepsilon_D \leq \varepsilon_D^{full}$ ), ali konstantnu vrednost napona pri lomu  $Y_D$ , koja u slučaju polikristala teži vrednosti  $Y_4^{max}$ , odnosno naponu  $\sigma_u$  sa desne strane.

Dati fenomen se postiže varijacijom dužine pomeraja „delay“ elementa  $\varepsilon_d$  u mehaničkom modelu sa slike Slika 4.4b. Izraz za napon tada postaje:

$$\sigma^{mD}(t) = \sigma^m(t) - \frac{E \cdot Y_D}{2(Y_d^{full} - Y_d^{init})} \iint_D G_{\alpha, \beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta. \quad (4.14)$$

Prvi sabirak predstavlja elastoplastični odgovor polikristala materijala, definisan sa (3.28), dok drugi opisuje pojavu i razvoj oštećenja u materijalu.

Mehanički model koji definiše ponašanje ovako opisanog materijalnog polikristala, uz odgovarajući  $\sigma$ - $\varepsilon$  radni dijagram, je prikazan na slici Slika 4.5.

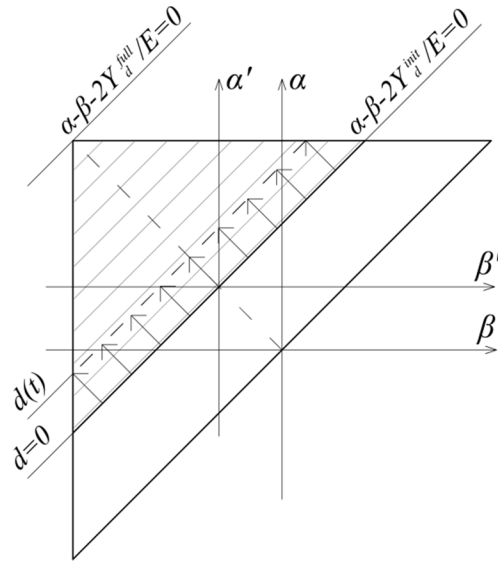


Slika 4.5 - a) Naponsko-deformacijski odnos u materijalu za model definisan sa (4.14);  
b) Paralelna veza beskonačno mnogo jediničnih modela sa različitim granicom tečenja i loma

Domeni integracije  $A$  i  $B$  su ranije određeni (Slika 3.8) i definišu elastoplastično ponašanje materijala. Domen integracije  $D$  definiše oštećenje u materijalu i predstavlja površinu trake između linija  $\alpha - \beta - 2Y_d^{init}/E = 0$  i  $\alpha - \beta - 2Y_d^{full}/E = 0$ , kako je prikazano na slici Slika 4.6. Oštećenje se na ovaj način definiše kroz degradaciju modula elastičnosti  $E$  i  $E_h$ .

Površina integracije u domenu  $D$  se smanjuje sa povećanjem deformacije usled translacije donje granice  $\alpha - \beta - 2Y_d^{init}/E = 0$ , a ograničena je i horizontalnom katetom trougla sa vrednošću ulaza pri

opterećenju  $\alpha = Y_d^{init} / E$ . Vertikalna granica u trouglu nema uticaja pošto do oštećenja dolazi samo pri zatezanju. Preisach-ov trougao koji definiše domen integracije  $D$  je prikazan na slici Slika 4.6.



Slika 4.6 - Preisach-ov trougao za domen integracije  $D$  sa promenljivom (kliznom) donjom graničnom pravom [60]

Skalarna veličina oštećenja  $d$ , prethodno definisana u [65], predstavlja odnos broja eliminisanih elemenata  $n$  i ukupnog broja elemenata  $N$  u materijalu, određena sledećim izrazom:

$$d = \frac{\varepsilon - Y_d^{full} / E}{Y_d^{full} / E - Y_d^{init} / E} \quad (4.15)$$

i kreće se u rasponu  $0 \leq d \leq 1$ , gde prava  $\alpha - \beta - 2Y_d^{init} / E = 0$  predstavlja inicijaciju oštećenja ( $d=0$ ), a prava,  $\alpha - \beta - 2Y_d^{full} / E = 0$  potpuno oštećenje materijala ( $d=1$ ).

Izraz za napon sa oštećenjem kod *backbone* krive ovog modela  $\sigma^{bcD}(t)$ , se lako definiše na osnovu izraza (4.1) i napomena datih u poglavlju 4.1.1, gde je napon kao izlaz pri monotonom naprezanju sa oštećenjem  $\sigma^{mD}(t)$ , određen pomoću (4.14). Isto važi i za Preisach-ovu funkciju.

Histerezisni model, koji definiše unutrašnje petlje kod cikličnog naprezanja, ostaje nepromenjen. Jedina razlika između dva modela prikazana u poglavljima 4.1 i 4.2 leži u modeliranju *backbone* krive i to u zoni oštećenja. Razlika se javlja kao posledica korišćenja različitih elemenata u mehaničkom modelu, pri modeliranju oštećenja. Iako je element sa granicom kidanja  $Y_D$  zastupljeniji, daje manje mogućnosti u pogledu oblikovanja zone oštećenja u odnosu na model kod koga je zona oštećenja modelirana oprugom negativne krutosti. Naime, kod modela sa negativnom krutošću, pored korigovanja širine nelinearne zone oštećenja, moguće je korigovati i nagib naponsko-deformacijskog dijagrama, čime model ostvaruje prednost u pogledu poklapanja rezultata sa realnim ponašanjem materijala, kako je prikazano u poglavlju 8. Numerički rezultati modela su pokazali veoma dobro slaganje sa eksperimentalnim rezultatima testova nad uzorcima izloženim monotonom zatezanju do loma.

## 5 ENERGETSKI GUBICI I FENOMEN ZAROBLJENE ENERGIJE

### 5.1 UVOD

Pojam histereza, koji definiše mnoge fizičke i fenomenološke pojave, je uglavnom vezan za pojavu histerezisne petlje, kako je već napomenuto u poglavlju 2. Međutim, histerezis se povezuje i sa određenim osipanjem energije koje se manifestuje kroz energetske gubitke. U elektromagnetizmu, kao prvoj oblasti primene histerezisnih modela, prvo su i razmatrani energetske gubici pri formiranju histerezisnih petlji. Charles Proteus Steinmetz je definisao energetske gubitke kod fenomena histereza u magnetizmu, kao površinu histerezisne petlje [66]. Zahvaljujući ovom zapažanju, određivanje histerezisnih gubitaka kod periodične promene *input*-a predstavlja relativno lak zadatak koji se zasniva na principu održanja energije. Međutim, istorija promene ulaznih podataka je u većini slučajeva proizvoljna, čime se formiraju nepotpune (otvorene) histerezisne petlje.

Analiza utrošene energije pri formiranju histerezisnih petlji za proizvoljnu istoriju promene ulaza je pored elektromagnetizma, veoma bitna i u oblasti mehanike kontinuuma. Određivanje energije ostvarene pri cikličnom naprezanju materijala za proizvoljnu istoriju pobude je dosta složeniji problem koji se ne može rešiti samo primenom principa o održanju energije. Rešavanje ovog problema se uglavnom vrši određivanjem energije zatvorene histerezisne petlje punog ciklusa, koja je “veštački” formirana pomoću nekih od metoda za brojanje ciklusa, kao što su *metoda rezervoara* i *metoda kišnog toka*. Tako definisane energije svakog punog ciklusa se najčešće sumiraju ne vodeći računa o redosledu pojave ciklusa.

Određivanje energetskih gubitaka pri formiranju histerezisnih petlji, za proizvoljnu istoriju pobude, se može izvršiti na osnovu Preisach-ovog histerezisnog operatora i njegove težinske funkcije  $\mu(\alpha, \beta)$ . Opšte rešenje je definisao Mayergoyz [46], dok je analiza disipacije energije u plastičnom domenu za troelementni model materijala prikazana u radu Lubarde, Šumarca i Krajčinovića [25].

### 5.2 DEFINISANJE ENERGETSKIH GUBITAKA POMOĆU PREISACH-OVOG MODELA HISTEREZISA

Ukupna količina rada u plastičnoj oblasti ili plastični rad  $W_p$ , pri cikličnom opterećenju, se ne troši u potpunosti na toplotne promene, već jedan deo energije ostaje zarobljen unutar materijala [25]. Ta energija  $W_L$  se naziva zarobljena (*locked-in*) energija.

$$W_p = Q + W_L. \quad (5.1)$$

Energiju infinitezimalnog dela definišemo u formi rada, pomoću ulaznih  $u(t)$  i izlaznih podataka  $f(t)$  histerezisnog operatora, prema [46], kao površ ispod funkcije  $f(u)$ :

$$\delta W = f du. \quad (5.2)$$

Za histerezisni model definisan izrazom (4.1), gde dilatacija  $\varepsilon(t)$  predstavlja *input*, a napon  $\sigma(t)$  *output*, integraljenjem izraza (5.2) u domenu plastičnosti naponsko-deformacijske krive (Slika 4.1a i Slika 3.14a), može se definisati plastični rad  $W_p$ , kao:

$$W_p = \int_{Y_{\min}/E}^{\varepsilon} \sigma d\varepsilon. \quad (5.3)$$

Vrednost  $\sigma_p$  se može odrediti putem geometrijske interpretacije Preisach-ovog modela, kao površina traka Preisach-ovog trougla (Slika 4.3), ograničenih ostvarenom dilatacijom  $\varepsilon$ .

Ukoliko se energetska gubici  $Q$  definišu pomoću Preisach-ovog histerezisnog modela, ukupni gubitak može biti prikazan kao suma gubitaka kod elementarnih histerezisnih operatora. Ostvareni gubitak kod jednog elementarnog histerezisnog operatora  $G_{\alpha,\beta}$ , pri punom ciklusu, na osnovu slike Slika 2.2, je:

$$q_{\text{cycle}} = 2(\alpha - \beta), \quad (5.4)$$

dok gubitak energije pri jednoj promeni *input-a* (*switch up* ili *switch down*) iznosi:

$$q = \alpha - \beta. \quad (5.5)$$

Kako se proizvod  $\mu(\alpha,\beta) \cdot G_{\alpha,\beta}$  može posmatrati kao pravougaona petlja sa vrednošću *output-a*  $\pm\mu(\alpha,\beta)$ , energetska gubitak kod ovakve petlje, pri jednoj promeni ulaza, se definiše kao proizvod  $\mu(\alpha,\beta) (\alpha-\beta)$ . Pošto Preisach-ov model histerezisa predstavlja skup velikog (beskonačnog) broja elementarnih histerezisnih operatora, ukupni energetska gubici se dobijaju sumiranjem energetskih gubitaka svih elementarnih histerezisnih operatora. Ovo se postiže integraljenjem na domenu  $\Omega$  na kome je došlo do promene vrednosti ulaza unutar Preisach-ovog trougla. Energetska gubici na nivou poprečnog preseka su tada definisani kao:

$$Q = \iint_{\Omega} |\mu(\alpha, \beta)| (\alpha - \beta) d\alpha d\beta. \quad (5.6)$$

Sračunavanje dvostrukog integrala u izrazu (5.6) se svodi na određivanje zapremine koja je u  $\alpha$ - $\beta$  ravni ograničena površinom  $\Omega$ , dok u  $z$  pravcu ima vrednost  $(\alpha-\beta)$ . Najlakši način za evaluaciju vrednosti izraza (5.6) je korišćenje geometrijske interpretacije vrednosti Preisach-ove funkcije  $\mu(\alpha,\beta)$ .

Energija zarobljena u materijalu (*locked-in energy*)  $W_L$  se definiše kao razlika plastičnog rada  $W_p$  i energetskog gubitka  $Q$ :

$$W_L = W_p - Q. \quad (5.7)$$

Inkrementalni postupak određivanja energetskih gubitaka  $Q$ , prikazan u [60], se može primeniti i pri proračunu plastičnog rada  $W_p$ , a samim tim i za proračun zarobljene energije  $W_L$ , na osnovu sledećih izraza:

$$\begin{aligned} Q^{i+1} &= Q^i + \Delta Q^{i+1}, \\ W_p^{i+1} &= W_p^i + \Delta W_p^{i+1}, \\ W_L^{i+1} &= W_L^i + \Delta W_L^{i+1}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

gde  $( )^i$  predstavlja ukupnu vrednost veličine ( $Q$ ,  $W_p$  i  $W_L$ ) do trenutka  $i$ , a  $\Delta( )^{i+1}$  promenu veličine pri jednoj promeni parametra  $\alpha$  i  $\beta$  od vremenskog trenutka  $i$  do vremenskog trenutka  $i+1$ . Treba

napomenuti da do promene navedenih veličina dolazi samo ukoliko dođe do promene oblika stepenaste linije  $L(t)$ , odnosno do promene površine setova unutar Preisach-ovog trougla.

Vrednost plastičnog rada  $W_p$  je jednaka nuli sve do dostizanja granice tečenja  $Y_l$  pri dilataciji  $\varepsilon_l$ . Kako plastični rad  $W_p$  predstavlja površ ispod  $\sigma$ - $\varepsilon$  dijagrama, njegova vrednost pri monotonom naprezanju se može dobiti kao:

$$W_p = (\varepsilon - \varepsilon_1) \cdot Y_3^{\min} + W_p^{\Omega}. \quad (5.9)$$

Gde je površina  $\Omega$  formirana od odgovarajućih delova domena integracije  $A$ ,  $B$  i  $C$ . Ista zapažanja se mogu primeniti i na ciklično naprezanje, korišćenjem adekvatnih granica integracije i vrednosti materijalnih konstanti.

Uz pomoć Preisach-ove funkcije, određene izrazom (4.1) i Preisach-ovog trougla prikazanog na slici Slika 4.3, a koristeći izraz (5.3), može se definisati vrednost plastičnog rada ostvarenog nad domenom plastične deformacije  $\bar{A}$ , od trenutka pojave plastičnih deformacija do trenutka  $t$  ( $\varepsilon_1 \leq \varepsilon(t) \leq \varepsilon_3^{\text{full}}$ ):

$$\Delta W_p^{\bar{A}} = \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon} \alpha d\varepsilon = (\varepsilon - \varepsilon_1) \cdot Y_3^{\min} + \frac{E_a(E_h - E_a)}{6} \frac{(\varepsilon - \varepsilon_1)^3}{Y_3^{\max} - Y_3^{\min}}. \quad (5.10)$$

Energetski gubici  $Q$  su sračunati na osnovu izraza (5.6) i Preisach-ove funkcije (4.1):

$$\Delta Q^{\bar{A}} = \frac{E_a(E_h - E_a)}{6} \frac{(\varepsilon - \varepsilon_1)^3}{Y_3^{\max} - Y_3^{\min}} \left( 1 + \frac{3\varepsilon_1}{\varepsilon - \varepsilon_1} \right). \quad (5.11)$$

Razlika izraza (5.10) i (5.11) predstavlja zarobljenu energiju  $W_L$ :

$$\Delta W_L^{\bar{A}} = (\varepsilon - \varepsilon_1) \cdot Y_{\min} - \frac{E_a(E_h - E_a)}{2} \cdot \frac{\varepsilon_1(\varepsilon - \varepsilon_1)^2}{Y_3^{\max} - Y_3^{\min}}. \quad (5.12)$$

Ukoliko dilatacija  $\varepsilon(t)$  dostigne vrednost  $\varepsilon(t) \geq Y_3^{\max} / E$ , energije usled promene površi trake  $\bar{A}$  iznose:

$$W_p^{\bar{A}} = W_p^{\bar{A}^0} + (\varepsilon - \varepsilon_3^{\text{full}}) Y_3^{\max} + \frac{E_a(E_h - E_a)}{2} (\varepsilon - \bar{\varepsilon}_3^{\text{full}}) (\varepsilon + \bar{\varepsilon}_3^{\text{full}}), \quad (5.13)$$

$$Q^{\bar{A}} = Q^{\bar{A}^0} + \frac{E_a(E_h - E_a)}{2} (\varepsilon - \bar{\varepsilon}_3^{\text{full}}) (\varepsilon_1 + \bar{\varepsilon}_3^{\text{full}}), \quad (5.14)$$

$$W_L^{\bar{A}} = W_L^{\bar{A}^0} + (\varepsilon - \bar{\varepsilon}_3^{\text{full}}) Y_3^{\max} + \frac{E_a(E_h - E_a)}{2} (\varepsilon - \bar{\varepsilon}_3^{\text{full}}) (\varepsilon + \varepsilon_1), \quad (5.15)$$

gde  $(\dots)_L^{\bar{A}^0}$  predstavljaju energetske vrednosti dobijene pomoću izraza (5.10), (5.11) i (5.12) za vrednost dilatacije  $\varepsilon = \bar{\varepsilon}_3^{\text{full}}$ .

Prirast dilatacija iznad vrednosti  $\varepsilon(t) \geq \bar{\varepsilon}_4^{\text{mit}}$  prouzrokuje uključivanje i domena integracije  $\bar{B}$  Preisach-ovog trougla (Slika 4.3) u proračun vrednosti energija i rada. Energetski priraštaji za vrednosti dilatacije  $\varepsilon(t) \leq \bar{\varepsilon}_4^{\text{mit}}$  se tako mogu definisati kao:

$$\Delta W_p^{\bar{B}} = \int_{\varepsilon_4^{init}}^{\varepsilon} \sigma_p d\varepsilon = (\varepsilon - \bar{\varepsilon}_4^{full}) \cdot Y_4^{\min} + \frac{E_h^2}{6} \frac{(\varepsilon - \bar{\varepsilon}_4^{init})^3}{Y_4^{\max} - Y_4^{\min}}, \quad (5.16)$$

$$\Delta Q^{\bar{B}} = \frac{E_h^2}{6} \frac{(\varepsilon - \bar{\varepsilon}_4^{init})^3}{Y_4^{\max} - Y_4^{\min}} \left( 1 + \frac{3\bar{\varepsilon}_4^{init}}{\varepsilon - \bar{\varepsilon}_4^{init}} \right), \quad (5.17)$$

$$\Delta W_L^{\bar{B}} = (\varepsilon - \bar{\varepsilon}_4^{init}) \cdot Y_4^{\min} - \frac{E_h^2}{2} \cdot \frac{\bar{\varepsilon}_4^{init} (\varepsilon - \bar{\varepsilon}_4^{init})^2}{Y_4^{\max} - Y_4^{\min}}. \quad (5.18)$$

Ukoliko dilatacija  $\varepsilon(t)$  dostigne vrednost  $\varepsilon(t) \geq \bar{\varepsilon}_4^{full}$ , priraštaji energija usled promene površi trake  $\bar{B}$  iznose:

$$\Delta W_p^{\bar{B}} = W_p^{\bar{B}^0} + (\varepsilon - \bar{\varepsilon}_4^{full}) Y_4^{\max} + \frac{E_h^2}{2} (\varepsilon - \bar{\varepsilon}_4^{full}) (\varepsilon + \bar{\varepsilon}_4^{full}), \quad (5.19)$$

$$\Delta Q^{\bar{B}} = Q^{\bar{B}^0} + \frac{E_h^2}{2} (\varepsilon - \bar{\varepsilon}_4^{full}) (\bar{\varepsilon}_4^{init} + \bar{\varepsilon}_4^{full}), \quad (5.20)$$

$$\Delta W_L^{\bar{B}} = W_L^{\bar{B}} + (\varepsilon - \bar{\varepsilon}_4^{full}) Y_4^{\max} + \frac{E_h^2}{2} (\varepsilon - \bar{\varepsilon}_4^{full}) (\varepsilon + \bar{\varepsilon}_4^{init}), \quad (5.21)$$

gde su  $( )^{\bar{B}}$  energije dobijene pomoću izraza (5.19), (5.20) i (5.21) za vrednost dilatacije  $\varepsilon = \varepsilon_4^{full}$

Prirast deformacija iznad vrednosti  $\varepsilon(t) \geq \bar{\varepsilon}_5^{init}$  prouzrokuje uključivanje i domena integracije  $\bar{C}$  Preisach-ovog trougla (Slika 4.3) u proračun energija i rada. Energetski priraštaji se u tom slučaju mogu sračunati na isti način kao u prethodnim izrazima, koristeći odgovarajuće granice domena i vrednosti materijalnih karakteristika. Uključivanje domena integracije (...) u proračun energija jednostavno prouzrokuje anuliranje vrednosti ostvarenih promenom površina unutar traka  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$  i  $\bar{C}$ .

Plastični rad  $W_p$ , energetski gubici  $Q$  i zarobljena energija  $W_L$  se na sličan način mogu definisati i kod modela sa oštećenjem definisanim izrazom (4.14), uz korišćenje odgovarajuće Preisach-ove funkcije.

## 6 ELASTOPLASTIČNA ANALIZA GREDNIH NOSAČA OD KONSTRUKTIVNIH MEKIH ČELIKA PRIMENOM PREISACH-OVOG MODELA HISTEREZISA

### 6.1 UVOD

U prethodnim poglavljima je definisano preslikavanje dilatacije  $\varepsilon(t)$ , kao ulaza, u napon  $\sigma(t)$  kod konstruktivnih mekih čelika izloženih aksijalnom cikličnom naprezanju, bez pojave oštećenja (izraz (3.67)) i pri pojavi oštećenja (izraz (4.1) ili (4.14)), na nivou jednog vlakna koje je sastavljeno od velikog (beskonačnog) broja kristala. Kako je kod aksijalno napregnutih preseka, raspodela dilatacija  $\varepsilon(t)$  unutar poprečnog preseka konstantna, prethodno izvedeni izrazi i razmatranja u poglavljima 3, 3.4 i 5 važe na nivou celog poprečnog preseka, odnosno vrednost napona je konstantna u svim vlaknima poprečnog preseka

Raspodela dilatacija unutar poprečnog preseka grednih nosača opterećenih na savijnje je promenljiva po visini poprečnog preseka. Samim tim je za određivanje naponskog stanja unutar poprečnog preseka

potrebno definisati vrednost napona u svakom njegovom vlaknu. S obzirom da je i kod savijanja linijskih nosača naponsko stanje jednoaksijalno, Preisach-ov model se lako može proširiti i primeniti i na gredne nosače. Uvedena je Euler-Bernoulli-jeva hipoteza o ravnim presecima, čime se pretpostavlja linearna promena dilatacija po visini poprečnog preseka, koja se javlja kao posledica zanemarenja smičućih deformacija.

Prva razmatranja u oblasti elastoplastične analize linijskih nosača opterećenih na savijanje primenom Preisach-ovog modela su data u radu [67], gde je razmatrano savijanje u poprečnim presecima linijskih elemenata od idealno elastoplastičnog materijala. Razmatrano je čisto savijanje simetričnih poprečnih preseka (pravougaoni i I presek), čisto savijanje nesimetričnog (trougaonog) poprečnog preseka, kao i savijanje simetričnog (pravougaonog) poprečnog preseka usled simultanog dejstva aksijalnog izduženja  $\varepsilon_0(t)$  i promene krivine  $\kappa(t)$ . Proširenje primene Preisach-ovog modela na probleme savijanja sandučastih poprečnih preseka prikazano je u radovima [68] i [69].

Polazeći od opšteg izraza za određivanje napona  $\sigma(t)$  pomoću Preisach-ovog modela histerezisa, definisanog na osnovu izraza (2.7):

$$\sigma(t) = \iint_{\alpha \geq \beta} G_{\alpha\beta} \varepsilon(t) \mu(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \quad (6.1)$$

i izraza za dilataciju  $\varepsilon(t)$  usled simultanog dejstva aksijalnog izduženja  $\varepsilon_0(t)$  i promene krivine  $\kappa(t)$ , u slučaju savijanja oko ose  $z$  u koordinatnom sistemu  $z$ - $y$ :

$$\varepsilon(t) = \kappa(t) \cdot y + \varepsilon_0(t), \quad (6.2)$$

mogu se definisati vrednosti presečnih sila kao:

$$M(t) = \int_a^b y \sigma(y, t) b(y) dy, \quad (6.3)$$

$$N(t) = \int_a^b \sigma(y, t) b(y) dy. \quad (6.4)$$

Gde su  $a$  i  $b$  rastojanja najudaljenijih vlakana poprečnog preseka od neutralne ose  $n$ - $n$ .

## 6.2 ČISTO SAVIJANJE PRAVOUGAONIH POPREČNIH PRESEKA

U ovoj disertaciji će biti razmatran slučaj čistog savijanja pravougaonih poprečnih preseka od konstruktivnih mekih čelika. Pri čistom savijanju oko jedne ose ( $z$ -ose), dilatacija vlakna unutar poprečnog preseka predstavlja proizvod krivine poprečnog preseka  $\kappa(t)$  i udaljenosti vlakna  $y$  od neutralne linije  $n$ - $n$ . Normalna sila  $N(t)$ , definisana izrazom (6.4), je za ovaj vid naprezanja identički jednaka nuli. Kod pravougaonih poprečnih preseka, usled njihove simetrije, neutralna linija  $n$ - $n$  prolazi kroz središte preseka, pa granice integracije u izrazu (6.3) za moment savijanja  $M(t)$ , iznose  $b = -a = h/2$ , dok širina poprečnog preseka predstavlja konstantnu veličinu  $b(y) = const$ .

Zamenom (4.3) u (6.3) može se definisati izraz za određivanje momenta savijanja  $M(t)$  pravougaonog poprečnog preseka pri čistom savijanju uz pomoć Preisach-ovog modela histerezisa i Preisach-ove funkcije definisane izrazom (4.7):



$$\begin{aligned}
M(t) = & \int_{-h/2}^{h/2} yb(y) \left[ \frac{E}{2} \int_{-\varepsilon_D}^{\varepsilon_D} G_{\alpha,\alpha} \varepsilon(t) d\alpha + \frac{\bar{E}_a - E}{2} \int_{2\varepsilon_1 - \varepsilon_D}^{\varepsilon_D} G_{\alpha,\alpha-2\varepsilon_1} \varepsilon(t) d\alpha + \right. \\
& \frac{\bar{E}_a (\bar{E}_h - \bar{E}_a)}{4} p(Y_3) \iint_A G_{\alpha,\beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta - \frac{\bar{E}_h^2}{4} p(Y_4) \iint_B G_{\alpha,\beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta - \\
& \frac{\bar{E}_a (\bar{E}_h - \bar{E}_a)}{4} p(Y_3) \iint_{A_s} G_{\alpha,\beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta + \frac{\bar{E}_h^2}{4} p(Y_4) \iint_{B_s} G_{\alpha,\beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta + \\
& \frac{\bar{E}_D}{4} p(\varepsilon_d) \iint_C G_{\alpha,\beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta - \frac{\bar{E}_D}{4} p(\varepsilon_d) \iint_{C_s} G_{\alpha,\beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta - \\
& \frac{\bar{E}_a - E}{2} \int_{2\varepsilon_1 - \varepsilon_s}^{\varepsilon_s} G_{\alpha,\alpha-2\varepsilon_1} \varepsilon(t) d\alpha dY_1 + \frac{E(E_a^c - E)}{4} p(Y_1^c) \iint_{A'} G_{\alpha,\beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta \\
& \left. + \frac{E_a^c (\bar{E}_h^c - E_a^c)}{4} p(Y_2^c) \iint_{B'} G_{\alpha,\beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta \right] dy.
\end{aligned} \tag{6.5}$$

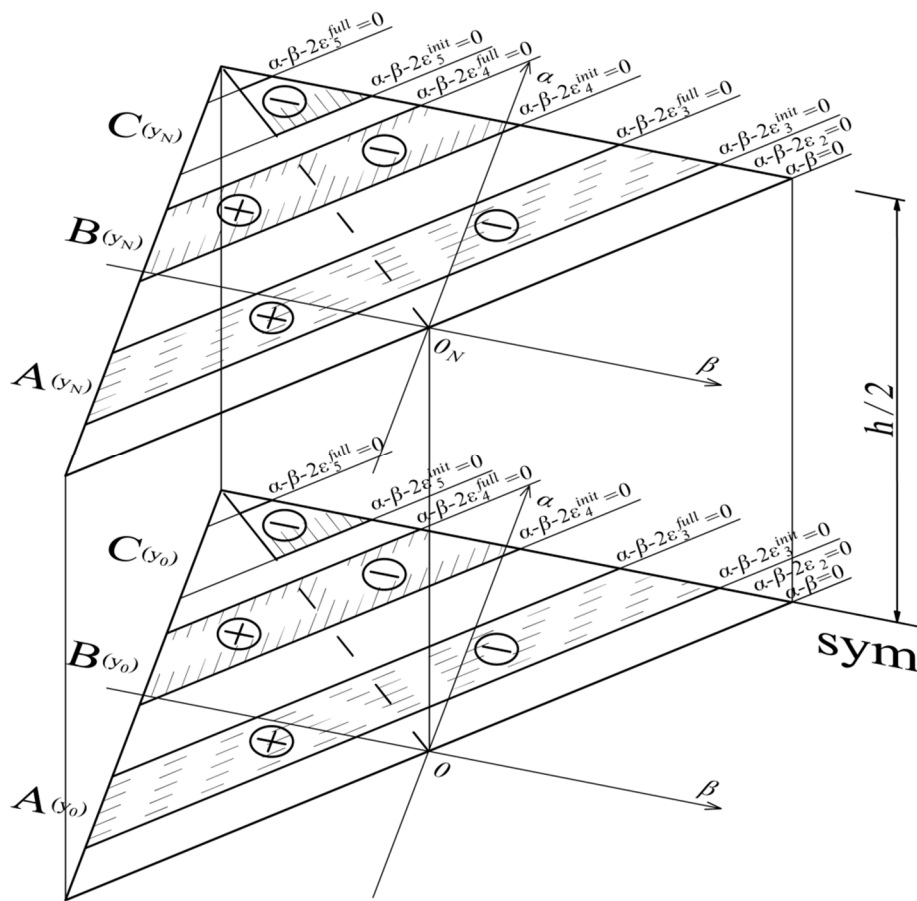
Prvi sabirak u prethodnom izrazu predstavlja vrednost momenta pri elastičnoj analizi:

$$M_e(t) = E \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b(y) \cdot \kappa(t) dy = EI \kappa(t), \tag{6.6}$$

dok ostali članovi obuhvataju uticaje deformacija u ravni poprečnog preseka, nakon prelaska granice elastičnosti.

Kao što je već napomenuto, naponsko stanje jednog vlakna je definisano jednim Preisach-ovim trouglom, ali da bi se naponsko stanje definisalo na nivou celog poprečnog preseka, za svako vlakno je potrebno definisati odgovarajući Preisach-ov trougao. Na taj način se formira takozvana Preisach-ova prizma (Slika 6.1) u kojoj su sadržani svi Preisach-ovi trouglovi po visini poprečnog preseka. Preisach-ovi trouglovi su definisani u  $\alpha$ - $\beta$  ravni, dok je Preisach-ova prizma definisana u  $\alpha$ - $\beta$ - $y$  prostoru.

Promena zapremine Preisach-ove prizme, predstavlja normalnu silu  $N(t)$  u poprečnom preseku, pri savijanju. Kod čistog savijanja simetričnih preseka, usled jednakih promena zapremina iznad i ispod neutralne linije  $n$ - $n$ , normalna sila  $N(t)$  je identički jednaka nuli, što zadovoljava definiciju ovog tipa naprezanja.



Slika 6.1 - Preisach-ova prizma kod preseka opterećenih na čisto savijanje

Analitičko rešenje u zatvorenom obliku, izraza (6.5) je veoma komplikovano, usled složenosti samog modela (Preisach-ovog tougla) i činjenice da materijalne karakteristike  $E_h^c$  i  $Y_i^c$  nisu konstantne po visini preseka već zavise od ekstremne vrednosti dilatacije u prethodnoj istoriji opterećenja posmatranog vlakna  $\varepsilon^i(t) = \kappa^i(t)y$  (poglavlje 3.3.2). Pojednostavljenje problema je moguće uvođenjem pretpostavke da ove materijalne karakteristike ne zavise od ekstremne vrednosti dilatacije u posmatranom vlaknu, već od ekstremne vrednosti dilatacije, do posmatranog trenutka  $t$ , u vlaknu najudaljenijem od neutralne ose  $n-n$ . Na ovaj način promene zapremina unutar Preisach-ove prizme predstavljaju piramide čiju osnovu čini Preisach-ov trougao vlakna na udaljenosti  $h/2$  od neutralne linije  $n-n$ . Uvedeno pojednostavljenje daje nešto veće presečne sile ( $N$  i  $M$ ) čime smo na strani sigurnosti, dok ivični naponi, koji su ujedno i ekstremni imaju tačne vrednosti.

Veću tačnost vrednosti momenata  $M(t)$  je moguće postići numeričkom integracijom izraza (6.5).

Numerička integracija izraza (6.5), uz uvođenje pretpostavke o uniformnosti materijalnih karakteristika po visini razmatranog domena, gde vrednosti  $E_h^c$  i  $Y_i^c$  zavisi od ekstremne dilatacije najudaljenijeg vlakna u posmatranom domenu, isključuje rešavanje komplikovanih zapreminskih integrala, ali daje približno rešenje čija tačnost zavisi od veličine podele preseka po visini. Dati pristup je prikazan u [60].

### 6.2.1 Geometrijska interpretacija

Široka primena Preisach-ovog modela je posledica i jednostavnosti njegove upotrebe zahvaljujući geometrijskoj interpretaciji modela. Geometrijska interpretacija naponsko deformacijskog stanja

jednog vlakna, aksijalno napregnutog, je predstavljena u formi Preisach-ovog trougla. Promena naponsko-deformacijskog stanja je definisana preko promene pozitivnih i negativnih površina unutar Preisach-ovog trougla. Naponsko deformacijsko stanje na nivou celog poprečnog preseka se lako može definisati zbog uniformnosti ovih vrednosti po visini poprečnog preseka.

Kao što je već napomenuto, usled promene dilatacija po visini poprečnog preseka, a samim tim i različitih vrednostu napona, dolazi do formiranja Preisach-ove prizme kod savijanja. Normalna sila  $N(t)$  je definisana promenom pozitivnih i negativnih zapremina unutar Preisach-ove prizme na osnovu izraza (6.4).

Na osnovu izraza (6.3) možemo definisati i momenat savijanja  $M(t)$  kao proizvod promene zapremine Preisach-ove prizme i rastojanja težišta te zapremine od neutralne linije  $n-n$  (u slučaju savijanja, neutralne ravni  $n-n$ ). Zapremine unutar Preisach-ove prizme mogu imati proizvoljan oblik, međutim, formiranje ovih proizvoljnih zapremina (tela) se vrši oduzimanjem dve ili više piramida. Piramide se formiraju tako da su im bazisi površine unutar Preisach-ovog trougla, najudaljenijeg od  $n-n$  ravni (ravan  $y=\pm h/2$ ). Pošto je poznato da je težište piramide  $h_T$ :

$$h_T = \frac{H}{4}. \quad (6.7)$$

Gde je  $H$  visina piramide merena od njene baze. Udaljenost težišta zapremine od neutralne ravni  $n-n$ , neophodne za sračunavanje momenta  $M(t)$ , iznosi:

$$y_R(t) = \frac{h}{2} - h_T. \quad (6.8)$$

Problem određivanja presečnih sila se svodi na problem određivanja zapremina tela formiranih unutar Preisach-ove prizme prilikom opterećenja i rasterećenja. Postavljanjem koordinatnog početka Dekartovog pravouglog sistema  $\beta-\alpha-y$  u kordinatni početak neutralne ravni, njena  $y_0$  koordinata postaje  $y_0=0$ , a  $y_N$  kordinata najudaljenijeg vlakna,  $y_N=h/2$ . Opšti skalarni oblik ravni, koje ograničavaju tela unutar Preisach-ove prizme, je:

$$A\beta + B\alpha + Cy + D = 0. \quad (6.9)$$

Ukoliko je ravan paralelna sa jednom od osa, koeficijent uz promenljivu te ose će biti jednak nuli, a ukoliko ravan sadrži koordinatni početak, koeficijent  $D$  će biti identički jednak nuli. Preisach-ova prizma je u  $y$  pravcu ograničena ravnima:

$$y = \pm h/2. \quad (6.10)$$

Do trenutka nanošenja opterećenja segmenti pozitivne i negativne zapremine u Preisach-ovoj prizmi, predstavljaju prizme ograničene samo ravnima paralenim  $y$  osi:

$$\psi_{\alpha-\beta} : \quad \alpha - \beta = 0, \quad (6.11)$$

$$\psi_{\alpha-\beta-2\varepsilon_3^{init}} : \quad \alpha - \beta - 2\varepsilon_3^{init} = 0, \quad (6.12)$$

$$\psi_{\alpha-\beta-2\varepsilon_3^{full}} : \quad \alpha - \beta - 2\varepsilon_3^{full} = 0, \quad (6.13)$$

$$\psi_{\alpha-\beta-2\varepsilon_4^{init}} : \quad \alpha - \beta - 2\varepsilon_4^{init} = 0, \quad (6.14)$$

$$\psi_{\alpha-\beta-2\varepsilon_4^{full}} : \quad \alpha - \beta - 2\varepsilon_4^{full} = 0, \quad (6.15)$$

$$\psi_{\alpha-\beta-2\varepsilon_5^{init}} : \quad \alpha - \beta - 2\varepsilon_5^{init} = 0, \quad (6.16)$$

$$\psi_{\alpha-\beta-2\varepsilon_5^{full}} : \quad \alpha - \beta - 2\varepsilon_5^{full} = 0, \quad (6.17)$$

$$\psi_{\alpha+\beta} : \quad \alpha + \beta = 0, \quad (6.18)$$

i ravnima definisanim sa (6.10). Zbog simetrije poprečnog preseka, na dalje će biti razmatrana samo gornja polovina Preisach-ove prizme, visine  $h/2$ .

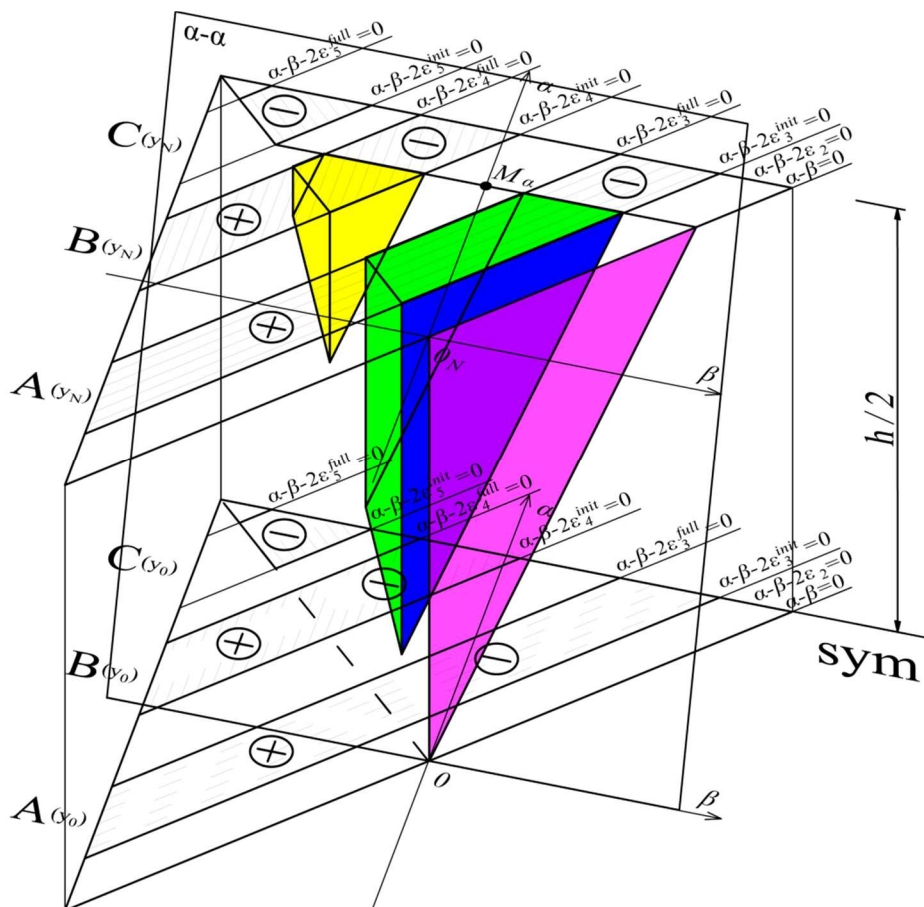
### Opterećenje

Ravan  $\alpha$ - $\alpha$  koja svojom rotacijom oko  $\beta$  ose definiše promenu negativnih zapremina Preisach-ove prizme u pozitivne prilikom opterećenja, sadrži  $\beta$  osu i prolazi kroz tačku  $M_\alpha$  sa koordinatama  $M_\alpha(0; \varepsilon_\alpha; h/2)$ . Segmentni oblik jednačine ravni  $\alpha$ - $\alpha$  je u tom slučaju definisan kao:

$$\varepsilon_\alpha y - \frac{h}{2} \alpha = 0. \quad (6.19)$$

Površina trougla koji leži u ravni  $\psi_{\alpha-\beta}$  unutar Preisach-ove prizme, ograničena ravnima  $\alpha$ - $\alpha$ ,  $\psi_{\alpha+\beta}$  i  $y=+h/2$  predstavlja elastični odgovor sistema. Plastični odgovor sistema predstavlja promenu zapremina unutar Preisach-ove prizme. U prvom koraku opterećenja zapremine su definisane ravnima  $\alpha$ - $\alpha$ ,  $\psi_{\alpha+\beta}$  i nekom od ravni određenih izrazima (6.12) do (6.17), kako je prikazano na slici Slika 6.2.

Visina piramide se lako određuje zamenom vrednosti koordinate  $\alpha$  projekcije vrha piramide na ravan  $y=h/2$ , u izraz (6.10) koji definiše ravan  $\alpha$ - $\alpha$ . Projekcija vrha piramide se u slučaju prvog koraka opterećenja, nalazi u ravni  $\psi_1$  i predstavlja tačku baze piramide sa najmanjom  $\alpha$  koordinatom. Položaj vrha piramide se zatim određuje na osnovu izraza (6.8).



Slika 6.2 - Promena zapremina unutar Preisach-ove prizme pri prvom koraku opterećenja

### Rasterećenje

Ravan  $\beta\text{-}\beta$  koja svojom rotacijom oko  $\alpha$  ose definiše promenu pozitivnih zapremina Preisach-ove prizme u negativne, prilikom rasterećenja, sadrži  $\alpha$  osu i prolazi kroz tačku  $M_\beta$  sa koordinatama  $M_\beta(\varepsilon_\beta; 0; h/2)$ . Segmentni oblik jednačine ravni  $\beta\text{-}\beta$  je u tom slučaju definisan kao:

$$\varepsilon_\beta y - \frac{h}{2} \beta = 0. \quad (6.20)$$

Površina trougla koji leži u ravni  $\psi_{\alpha\text{-}\beta}$  unutar Preisach-ove prizme, ograničena ravnima  $\alpha\text{-}\alpha$ ,  $\beta\text{-}\beta$  i  $y=+h/2$  predstavlja elastični odgovor sistema. Plastični odgovor sistema predstavlja promenu zapremina unutar Preisach-ove prizme. U prvom koraku rasterećenja razlikujemo dva slučaja promene zapremina unutar Preisach-ove prizme.

U slučaju kada ravan  $\beta\text{-}\beta$  seče prizme iz domena plastičnosti Preisach-ove prizme, pre ravni  $\psi_{\alpha\text{-}\beta}$ , dolazi do formiranja kosih piramida, čiji se vrh mora tražiti u preseku ravni  $\alpha\text{-}\alpha$ ,  $\beta\text{-}\beta$  i odgovarajuće ravni  $\psi$  definisane izrazima (6.12) do (6.17).

Ukoliko jednačine ravni (6.12) do (6.17) predstavimo u obliku:

$$\psi_K : \quad \alpha - \beta - K = 0, \quad (6.21)$$

tada se koordinate vrha razmatrane piramide sračunavaju na osnovu izraza:

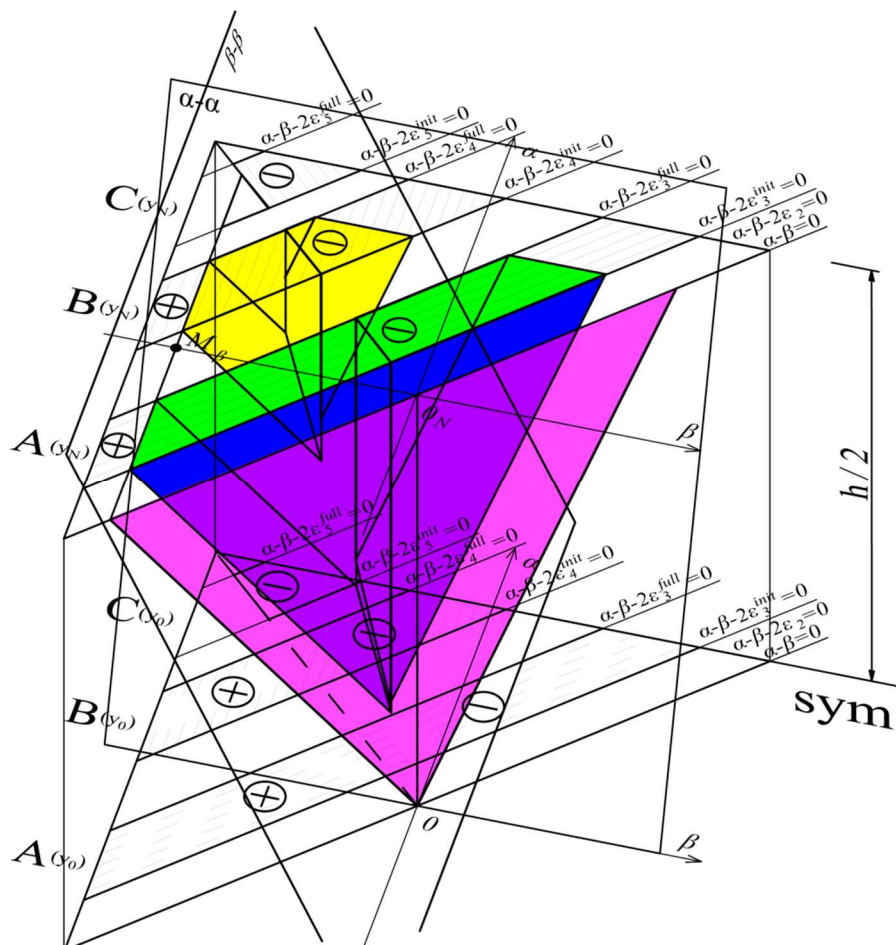
$$\alpha = K \frac{\varepsilon_\alpha}{\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta}, \quad (6.22)$$

$$\beta = K \frac{\varepsilon_\beta}{\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta}, \quad (6.23)$$

$$H = y = K \frac{h}{2(\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta)}. \quad (6.24)$$

Na osnovu izraza (6.6), (6.7) i (6.8), može se odrediti promena momenta savijanja  $\Delta M(t)$ .

U slučaju kada ravan  $\beta$ - $\beta$  seče piramide iz domena plastičnosti Preisach-ove prizme, nakon ravni  $\psi_{\alpha+\beta}$ , dolazi do formiranja dva seta pravih piramida, kako je prikazano na slici Slika 6.3. Prebrisane zapremine pre vertikalne ravni  $\psi_{\alpha+\beta}$ , su iste kao i pri koraku opterećenja, tako da se ne moraju ponovo računati, dok se zapremine nakon ravni  $\psi_{\alpha+\beta}$ , sračunavaju na sličan način kao pri prvom koraku opterećenja. Nove zapremine su tada definisane ravnima  $\beta$ - $\beta$ ,  $\psi_{\alpha+\beta}$  i nekom od ravni definisanih izrazima (6.12) do (6.17), kako je prikazano na slici:



Slika 6.3 - Promena zapremina unutar Preisach-ove prizme pri prvom koraku rasterećenja

Analogno postupcima pri prvim koracima opterećenja i rasterećenja, promene zapremina unutar Preisach-ove prizme se mogu definisati i za sve ostale korake opterećenja i rasterećenja.

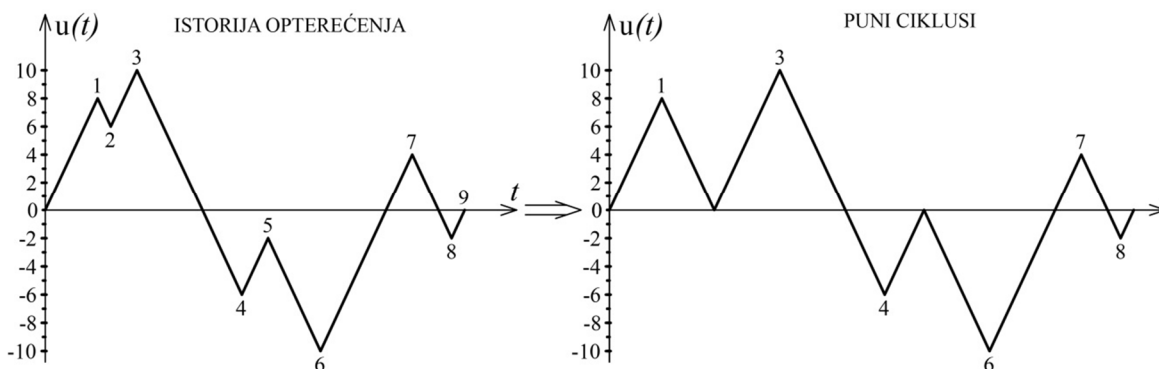
## 7 ANALIZA ZAMORA MATERIJALA I METODE ODREĐIVANJA BROJA CIKLUSA PROIZVOLJNE ISTORIJE OPTEREĆENJA

Pri definisanju cikličnog ponašanje konstruktivnih mekih čelika (poglavlja 3, 3.4 i 6) i odgovarajućih energetske fenomena (poglavlje 5), nije uzet u obzir efekat zamora materijala pri velikom broju ciklusa naprezanja. Naime, analizirano je ponašanje materijala pri malom broju ciklusa naprezanja, gde do loma dolazi usled prekoračenja granice kidanja u materijalu ( $\sigma_D$ ,  $\epsilon_D$ ). Zamor u materijalu se može definisati kao fenomen na mikroskopskom nivou, a manifestuje se kroz razvoj oštećenja u konstruktivnom elementu ili konstrukciji. Ovo slabljenje u materijalu se dešava i pri konstantnom naponu, ali naročito pri cikličnom naprezanju. Različiti tipovi konstrukcija su tokom svog upotrebnog veka izloženi opterećenjima ciklične prirode (mostovi, vetrenjače...), pa je zbog učestalosti takvog opterećenja i dužina upotrebnog veka konstrukcija, efekat zamora veoma bitan pri projektovanju građevinskih konstrukcija. Njegov značaj je uočljiv i u drugim granama privrede, što se može videti u [70]. Veliki doprinos praktičnoj analizi zamora dao je *Wöhler* [71] kroz eksperimentalno definisane *S-N* krive, koje predstavljaju zavisnost opsega napona *S* i broja ciklusa opterećenja do loma *N*. Ovaj način definisanja otpornosti elemenata na zamor je zadržao primenu i danas. Primena ovog principa je ranije bila ograničena na istorije cikličnog opterećenja konstantne amplitude, međutim primena i razvoj metoda određivanja broja ciklusa je omogućila rešavanje problema sa proizvoljnom istorijom naprezanja.

### 7.1 METODE ZA ODREĐIVANJE BROJA CIKLUSA PRI PROIZVOLJNOJ ISTORIJI OPTEREĆENJA

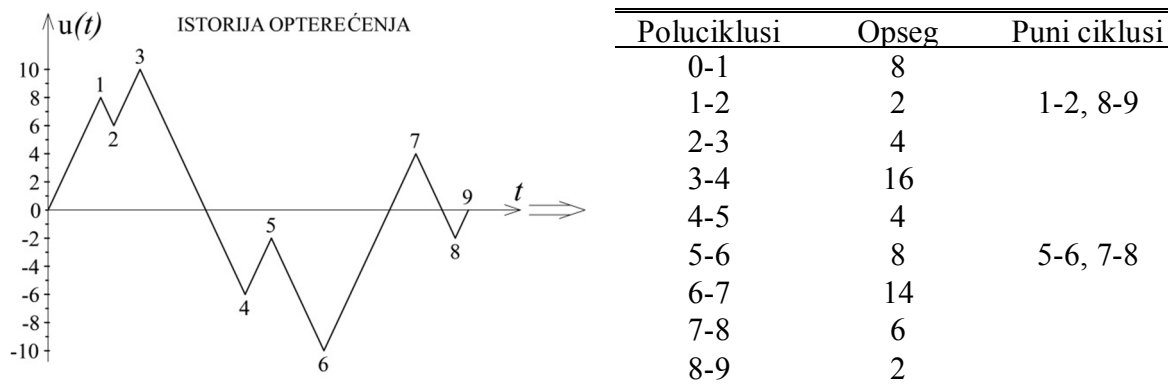
Ukoliko se kao najznačajniji iskorak u analizi zamora materijala može izdvojiti definisanje *Wöhler*-ovih *S-N* krivih, drugi po značaju je doprinos *Palmgren*-a [72] i *Miner*-a [73] na osnovu čijih razmatranja je definisano pravilo linearne akumulacije oštećenja, koje je i danas u širokoj upotrebi. Zajedno sa metodama određivanja broja ciklusa pri proizvoljnoj istoriji opterećenja, čine osnovna sredstva pri praktičnoj analizi zamora materijala. Razvijeno je više metoda za određivanje broja ciklusa, gde je svaka našla primenu u rešavanju određenog tipa problema. Svrha svake metode je da istoriju opterećenja sa promenljivim amplitudama prikaže kroz skup istorija opterećenja konstantne amplitude. Treba napomenuti da pre primene bilo koje metode određivanja broja ciklusa, istorije opterećenja se filtriraju, tako da se iz realnih istorija opterećenja zadržavaju samo vrednosti lokalnih ekstrema. Generalno, sve postojeće metode se mogu svrstati u tri grupe:

*Peak counting* metode se fokusiraju na pikove unutar istorija opterećenja i identifikuju sve maksimume i minimume u njima [74]–[76]. Ova metoda rastavlja stvarnu istoriju opterećenja na pune cikluse, ali ima osobinu da uvećava neke male opsege opterećenja, koji onda znatno odstupaju od stvarnih. Još jedan nedostatak metode leži u prekidu glavnog ciklusa pri prolasku nultog nivoa, čime se najveći opsezi unutar istorije opterećenja ne uzimaju u obzir. Primena ove metode daje tačne rezultate jedino kod specifičnih istorija opterećenja i nema širu upotrebu. Primena *Peak Counting* metode za proizvoljnu istoriju opterećenja je prikazana na slici Slika 7.1.



Slika 7.1 - Peak Counting metoda određivanja broja ciklusa

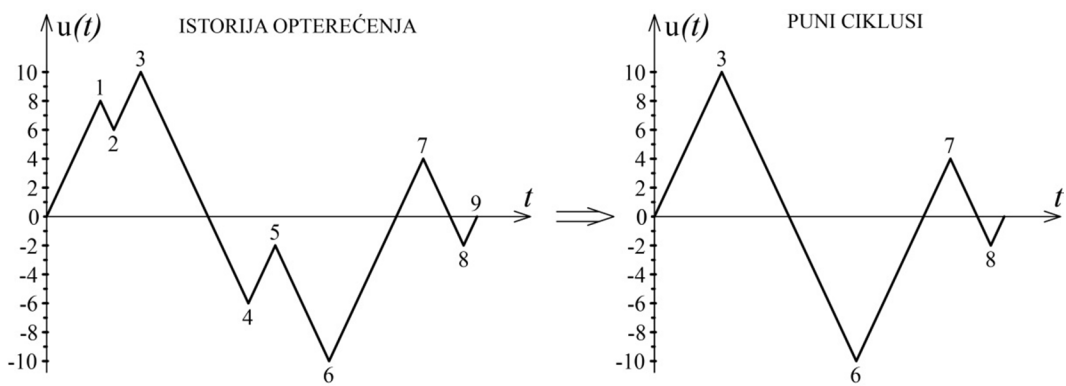
Range counting metode identifikuju polucikluse unutar istorija opterećenja između relativnih vrednosti maksimuma i minimuma [74]–[76]. Svaki poluciklus se zatim uparuje sa poluciklusom istog opsega, ali suprotnog znaka (pravca) formirajući puni ciklus datog opsega. Osnovni problem ove metode predstavlja nemogućnost uparivanja svih poluciklusa usled različitih amplituda. Takođe kod određenih oblika istorija opterećenja, može se desiti da opsezi velikih amplituda ne budu brojani usled pružanja prednosti opsezima malih amplituda. I pored ovih bazičnih nedostataka, metode koje spadaju u ovu grupu, kao što su *metoda rezervoara* i *metoda kišnog toka*, danas imaju najširu primenu. Ove metode uz postprocesne algoritme obrade ostatka (reziduuma) istorije opterećenja, do sada su predstavljale najbolji i najprimenjivaniji način dekompozicije istorija opterećenja na pune cikluse.



Slika 7.2 - Range Counting metoda određivanja broja ciklusa

Level crossing metode uključuju uspostavljanje nekoliko nivoa (granica) opterećenja. Broj prelazaka preko ovih prethodno definisanih granica pri prirastu opterećenja, određuje broj ciklusa. Srednja vrednost kao ni broj pikova ne mogu biti određeni na osnovu ove metode. Takođe se zanemaruju ciklusi pri kojima se ne prelazi prethodno definisana granica. Često se za granicu usvaja nulta vrednost opterećenja, pa se metoda tada naziva *Zero level crossing metoda*.





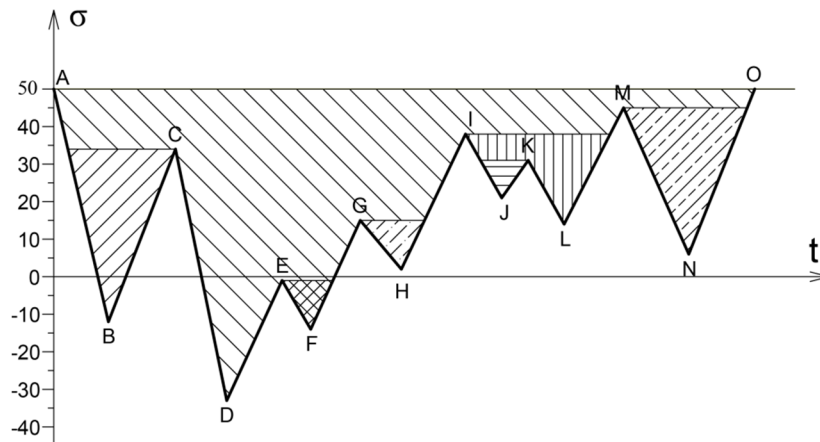
Slika 7.3 – Zero level crossing metoda određivanja broja ciklusa

### 7.1.1 Metoda rezervoara

Određivanje broja ciklusa metodom rezervoara se koristi za kratke vremenske intervale i jednostavnije istorije opterećenja. Zbog svoje jednostavnosti je pogodna za ručni proračun [77]. Metoda predstavlja grafičku interpretaciju metode kišnog toka sa kojom je ekvivalentna u pogledu rezultata [78].

Istorija opterećenja se predstavlja grafički, tako da je na ordinati opseg ulaza (najčešće napon), a na apscisi vreme. Posmatrani deo istorije opterećenja počinje i završava se sa istom vrednošću maksimuma, koja je ujedno i globalni maksimum. Tako prikazana istorija opterećenja predstavlja rezervoar u koji se sipa tečnost sve dok se potpuno ne ispunji. Zatim se rezervoar “probuši” u tački sa najnižom kotom (globalni minimum). Na taj način je definisan prvi ciklus sa odgovarajućim maksimumom (gornji nivo tečnosti pre isticanja) i minimumom (tačka kroz koju se vrši isticanje). Nakon toga, ostaju manji rezervoari, koji su i dalje ispunjeni tečnošću. Postupak se ponavlja za svaki rezervoar tako što se bira sledeći po veličini minimum.

Metod rezervoara, se nameće kao veoma korisna alatka pri određivanju broja ciklusa kod inženjerske analize zamora konstruktivnih elemenata. Međutim, njegova primena se ograničava na veoma proste i kratke istorije opterećenja, što je dovoljno za brzi, „ručni“ proračun konstrukcija. Pored jednostavnosti samog algoritma metode, prednost metode leži u odsustvu „ostatka“ u istoriji opterećenja, što nije slučaj kod metode kišnog toka. Efektivnost primene metode rezervoara prilikom ekstradicije punih ciklusa iz proizvoljne istorije opterećenja se može uočiti na primeru sa slike Slika 7.4.



Slika 7.4 – Primena metode rezervoara za proizvoljnu istoriju opterećenja

Tabela 7.1- Proizvoljna istorija opterećenja

Tačka	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
Vreme	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Napon	50	-12	34	-33	-1	-14	15	2	38	21	31	14	45	6	50

Tabela 7.2 - Rezultati primene metode rezervoara

Tačka crpljenja	D	F	B	H	N	L	J
Tačka najvišeg nivoa vode	A	E	C	G	M	I	K
Opseg napona	83	13	46	13	39	24	10

### 7.1.2 Metoda kišnog toka (*Rainflow counting method RFC*)

Ciklično opterećenje proizvoljno promenljive amplitude, predstavlja najčešći vid opterećenja koje prouzrokuje zamor kod konstrukcija, a metod kišnog toka najzastupljeniji metod određivanja broja ciklusa takvog opterećenja. Njegova rasprostranjenost i prihvaćenost se ogleda u fizičkoj prirodi punog ciklusa, koji je predstavljen zatvorenim histerezisnom petljom na dijagramu napon-dilatacija.

Koncept ove metode prvi su dali *Matsuishi* i *Endo* [79], pri čemu je napravljena analogija sa kišnom kapi, koja teče niz red nadstrešnica. Navedena metoda je razvijena tako da broji polucikluse, a zatim ih uparuje u pune cikluse (*range counting* metoda). Započeti tok (poluciklus) se završava ukoliko je zadovoljen jedan od kriterijuma:

- tok započet u lokalnom maksimumu (vrh) pada na novi tok započet u lokalnom maksimumu, većem od onog iz kojeg je prvobitni tok započeo;
- tok započet u lokalnom minimumu (uvala) pada na novi tok započet u lokalnom minimumu, manjem od onog iz kojeg je prvobitni tok započeo;
- tok ispada van istorije opterećenja;
- tok nailazi na već započeti tok.

Navedeni algoritam zahteva poznavanje celokupne istorije opterećenja, čime ne omogućava trenutnu obradu podataka i potražuje veliku memoriju za skladištenje istih. Kako bi se navedeni nedostaci eliminisali, razvijeno je više algoritama od kojih su najpoznatiji:

- kriterijum tri tačke,
- kriterijum četiri tačke..

Ovi algoritmi i njihove varijacije se zasnivaju na trenutnoj analizi istorije opterećenja i izvlačenja punih ciklusa iz nje, gde se pun ciklus manifestuje kao zatvorena histerezisna petlja.

**Kriterijum tri tačke** predstavlja uvod u nešto složeniji, ali češće korišćeni algoritam metode kišnog toka sa kriterijumom četiri tačke. Osnova metode je definisanje tačaka  $P_i$ ,  $P_{i+1}$ , i  $P_{i+2}$ , koje predstavljaju lokalne ekstreme u nizu tačaka dužine  $M$ . Nakon toga definišu se i opsezi kao algebarska razlika vrednosti u tačkama  $i$ ,  $i+1$  i  $i+2$ . Ukoliko navedeni opseg ispunjava kriterijum tri tačke:

$$Y = |P_{i+1} - P_i| \leq X = |P_{i+2} - P_{i+1}|, \quad (7.1)$$

gde je:

$i=1, 2, 3, \dots, M-2$ , a  $M$  - dužina razmatrane serije podataka,

dati opseg, formiran od vrednosti u tačkama  $P_i$  i  $P_{i+1}$  se skladišti u memoriju kao pun ciklus, a zatim briše iz istorije opterećenja. Nastala praznina unutar istorije opterećenja se popunjava povezivanjem preostalih susednih tačaka.

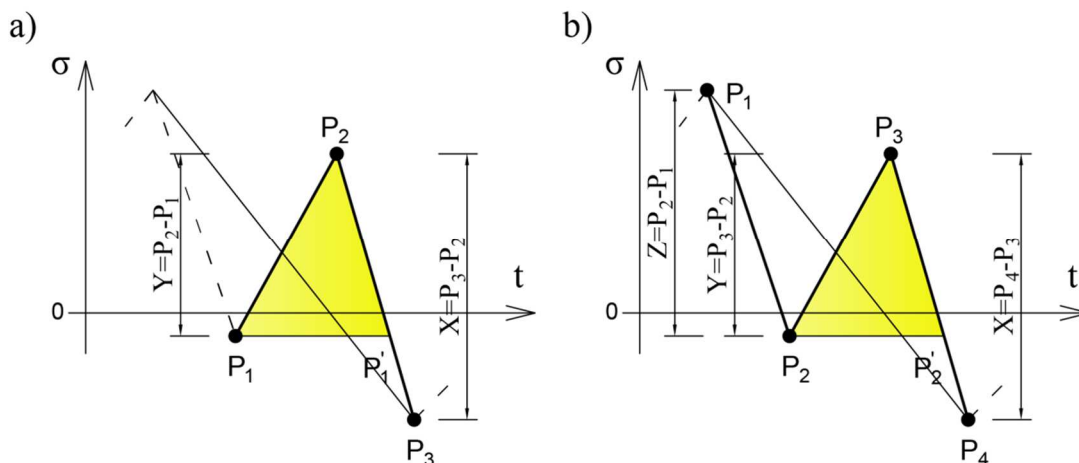
**Kriterijum četiri tačke** predstavlja modifikaciju kriterijuma tri tačke, uz uvođenje dodatne tačke  $P_{i+3}$  u algoritam za određivanje broja ciklusa. Nakon ovoga se definišu opsezi kao algebarska razlika vrednosti u tačkama  $i+1$ ,  $i+2$  i  $i+3$ . Navedeni opseg se skladišti, a tačke brišu iz istorije opterećenja, ukoliko opseg ispunjava sledeći kriterijum četiri tačke:

$$Z = |P_{i+1} - P_i| \geq Y = |P_{i+2} - P_{i+1}| \leq X = |P_{i+3} - P_{i+2}|. \quad (7.2)$$

Gde je:

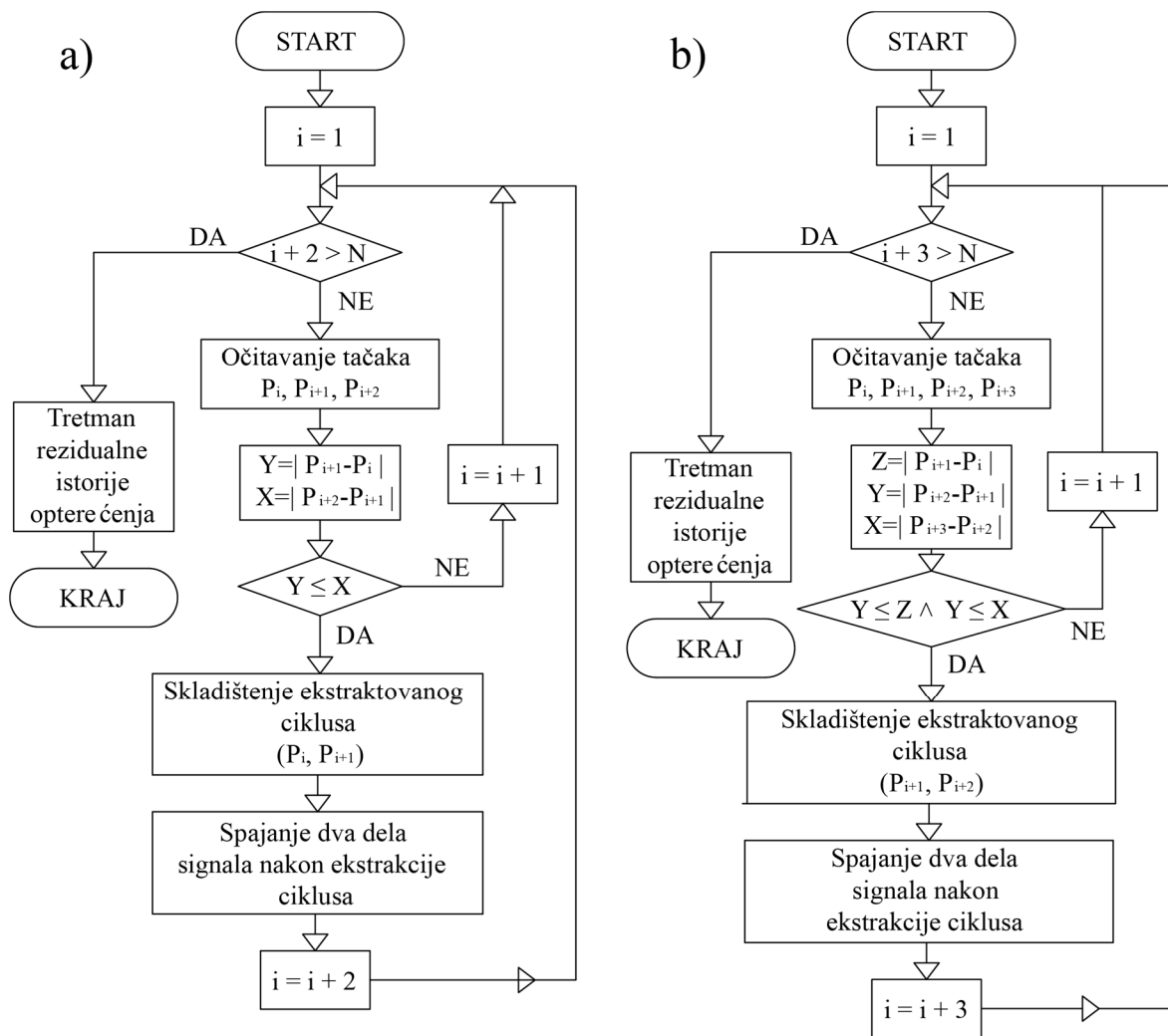
$i = 1, 2, 3, \dots, M - 3$ , a  $M$  - dužina razmatrane serije podataka.

Grafički prikaz kriterijuma sa tri i četiri tačke metode kišnog toka je prikazan na slici Slika 7.5.



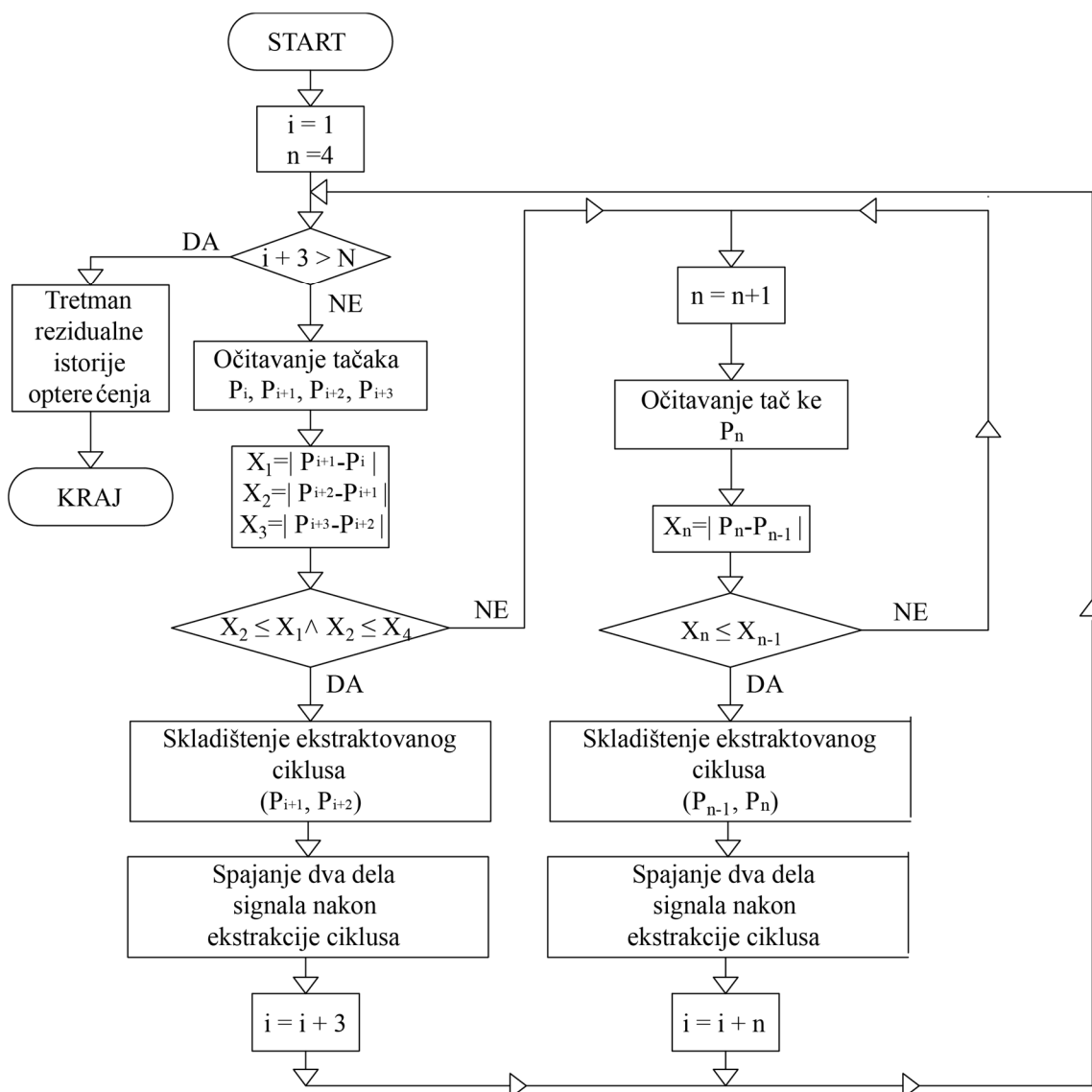
Slika 7.5 - Metoda kišnog toka: a) kriterijum tri tačke; b) kriterijum četiri tačke

Izrazi (7.1) i (7.2) daju mogućnost definisanja algoritama pogodnih za računarsku obradu serije podataka. Takvi algoritmi definisani u [80] su prikazani na slici Slika 7.6.



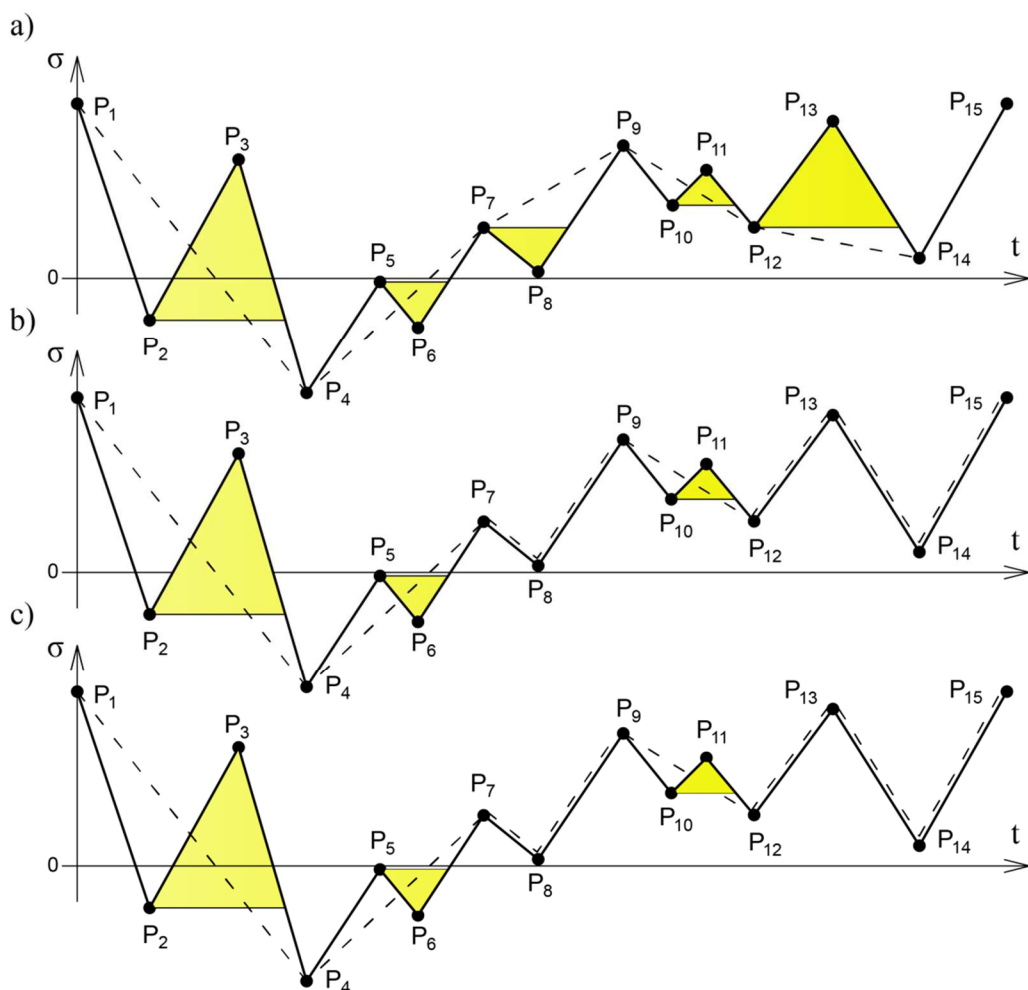
Slika 7.6 – Algoritam metode kišnog toka: a) kriterijum tri tačke; b) kriterijum četiri tačke

Modifikacija kriterijuma četiri tačke je moguća dodavanjem i pete tačke u algoritam proračuna [80], čime se postiže veća brzina obrade istorije opterećenja, ali se takođe zahteva i veća memorija za skladištenje podataka. Novodefinisani kriterijum zapravo predstavlja kriterijum  $4+1$  tačke, koji se sprovodi ukoliko kriterijum 4 tačke nije ispunjen. Dato razmatranje se može proširiti i na  $4+n$  tačaka, gde se dodatno ubrzava sprovođenje algoritma brojanja ciklusa, ali se takođe povećavaju zahtevi u pogledu memorije neophodne za obradu podataka, pošto se u istom trenutku obrađuju vrednosti u  $4+n$  tačaka. Algoritam  $4+n$  tačaka dobijen nadogradnjom algoritma sa  $4+1$  tačkom, definisanim u [80] je prikazan na slici Slika 7.7.



Slika 7.7 - Algoritam metode kišnog toka - kriterijum n tačaka

Bez obzira koji kriterijum metode kišnog toka je primenjen, neminovno se pojavljuje ostatak od neizbrojanih ciklusa. Metode obrade ovih reziduuma su prikazane u [81]. Iako slični, različiti kriterijumi kod metode kišnog toka, daju različite rezultate pri ekstrakciji punih ciklusa iz proizvoljne istorije opterećenja. Zbog koraka pri pokretanju novog algoritma ( kriterijum tri tačke  $i+2$ , kriterijum četiri tačke  $i+3$  i kriterijum pet tačaka  $i+n$ ) može doći do preskakanja pojedinih punih ciklusa pri prvom prolasku predmetne istorije opterećenja kroz algoritam, a samim tim i različitog reziduuma. Poređenje različitih kriterijuma i njihovih reziduuma je prikazano na slici ..



Slika 7.8 - Metoda kišnog toka poređenje rezultata kriterijuma: a) tri tačke; b) četiri tačke; c) pet tačaka

Metoda kišnog toka predstavlja nelinearni numerički algoritam, a ne matematičku funkciju [82]. Korišćenje algoritama kišnog toka je ograničeno na naknadnu obradu rezultata. Pošto algoritmi ove metode zahtevaju serije podataka (tačkica), a ne samo trenutna merenja, ova metoda nije pogodna za *real-time* obradu podataka, već se češće koristi kao postprocesna alatka. Alternativne metode kišnog toka su u primeni kod stohastičkih procesa [83] i spektralnih metoda [84].

## 7.2 ODREĐIVANJE BROJA CIKLUSA POMOĆU PREISACH-OVOG HISTEREZISNOG OPERATORA (*STAIRCASE* METODA)

Preisach-ov histerezisni operator, kao kontinualni *rate-independent* operator je našao svoju primenu i kod procene oštećenja usled zamora materijala. Njegova čisto matematička forma omogućava njegovu primenu u realnom vremenu, za razliku od metode kišnog toka koja je ograničena na naknadnu obradu podataka. Podudarnost rezultata ova dva pristupa je prikazana u [85] i [86]. Osnova procene oštećenja  $D_{ac}$  je i dalje *Palmegreen-Miner*-ova jednačina u modifikovanom obliku [82]:

$$D_{ac}(s) = \sum_{\alpha \geq \beta} \frac{c(s)(\alpha, \beta)}{N(\alpha, \beta)} = Var(P(\alpha, \beta)). \quad (7.3)$$

Gde je:

$c(s)$ -broj ciklusa određen metodom kišnog toka,

$N(\alpha, \beta)$  – broj ciklusa do loma,

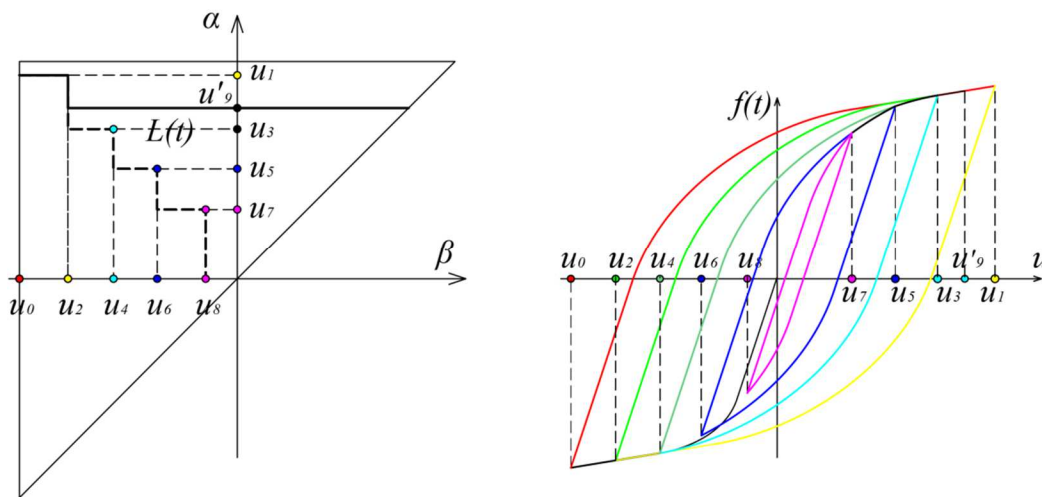
$Var(P(\alpha, \beta))$  – varijacija Preisach-ove funkcije do loma u materijalu usled  $N(\alpha, \beta)$  ciklusa.

Prethodni izraz omogućava kompatibilnost između metode kišnog toka i Preisach-ovog histerezisnog operatora. Proračun energetskih gubitaka  $Q$  i zarobljene energije, prikazan u poglavlju 5, bi se znatno uprostio izdvajanjem histerezisnih petlji istih veličina iz proizvoljnih istorija opterećenja. RFC metoda principijelno identifikuje opsege, koji odgovaraju zatvorenim histerezisnim petljama. Međutim, kako bi se uzela u obzir cela istorija opterećenja, zahteva se obrada velikog broja tačaka, a ukoliko se koristi neki od pojednostavljenih algoritama (tri tačke, četiri tačke...) javlja se rezidualna istorija opterećenja, koja se naknadno obrađuje. U oba slučaja postoji opasnost od pogrešnog uparivanja poluciklusa.

Preisach-ov model i njegova geometrijska interpretacija u vidu Preisach-ovog trougla predstavljaju izvrstan način izdvajanja punih zatvorenih ciklusa iz proizvoljne istorije opterećenja, zahvaljujući svojim osobinama *wiping-out property* i kongruentnosti.

Selektivna memorija Preisach-ovog histerezisnog modela, kao posledica *wiping-out* svojstva prouzrokuje brisanje punih ciklusa iz istorije opterećenja. U svakom trenutku  $t$ , neupareni poluciklusi su memorisani pomoću linije  $L(t)$  (Poglavlje 2.2) u Preisach-ovom trouglu. Linija  $L(t)$  predstavlja stepenastu liniju čija temena predstavljaju odgovarajuće polucikluse. Prednost ovakvog zapisa istorije opterećenja u odnosu na RFC metodu je što tačke  $L(t)$  linije sadrže podatke o dva parametra odgovarajućeg poluciklusa (min, max), dok se kod RFC može detektovati samo opseg poluciklusa.

Do formiranja punog ciklusa i njegovog brisanja iz istorije opterećenja do posmatranog trenutka  $t$ , dolazi prebrisavanjem temena  $L(t)$  linije. Na slici Slika 7.9 je prikazan Preisach-ov trougao sa memorijskom linijom  $L(t)$  i odgovarajućim histerezisnim petljama za filtriranu istoriju opterećenja prikazanu na slici Slika 2.3b.

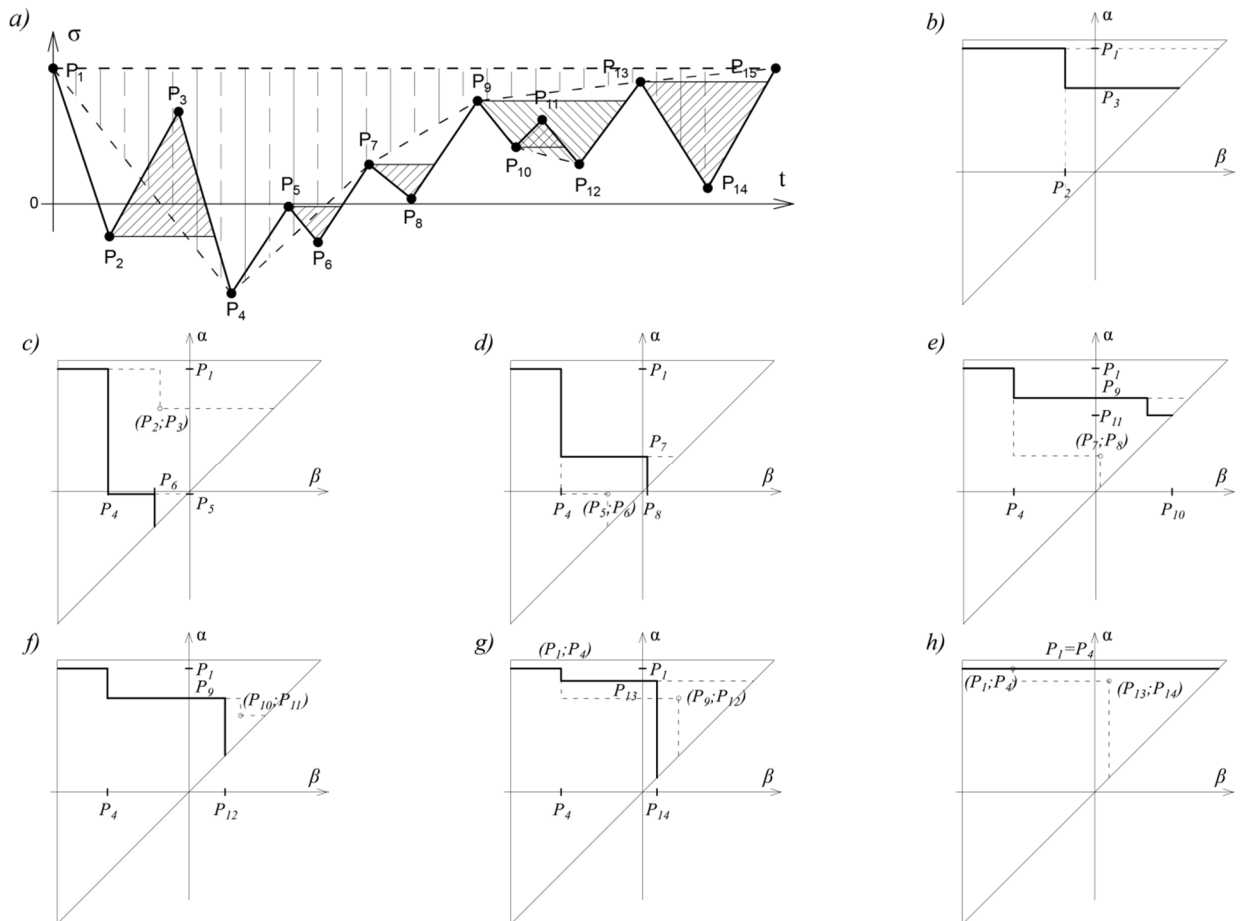


Slika 7.9 – Osobina brojanja punih ciklusa kod Preisach-ovog trougla (Staircase metoda)

Prebrisavanjem temena linije  $L(t)$  formiraju se puni ciklusi opsega  $|u_7-u_8|$ ,  $|u_5-u_6|$ ,  $|u_3-u_4|$ , dok su poluciklusi  $u_1-u_2$  i  $u_2-u_9$  neupareni. Promena ulaza  $u(t)$  briše segmente  $L(t)$  linije, a veća vrednost na segmentu  $L(t)$  linije, u pravcu promene ulaza definiše opseg punog ciklusa. Preisach-ov model poseduje još jednu prednost u odnosu na RFC metodu, a to je mogućnost identifikovanja i memorisanja

ekstremne vrednosti ulaza u istoriji opterećenja do posmatranog trenutka  $t$ . Kako je usvojeno u poglavljima 3-6, a verifikovano eksperimentom u poglavlju 8, kod mekih konstruktivnih čelika se površina histerezisnih petlji, pri istim vrednostima krajnjih dilatacij, menja u zavisnosti od vrednosti ekstremne dilatacije do posmatranog trenutka  $t$ . Uz pomoć ove osobine Preisach-ov model histerezisa razlikuje histerezisne petlje istih amplituda, ali različitih materijalnih karakteristika, čime vrši brojanje potpunih, simetričnih petlji, istih površina. Na ovaj način se na određen način uzima u obzir redosled pojave ciklusa u istoriji opterećenja, što nije bilo moguće kod ostalih metoda.

Primena ove *staircase* metode pri ekstrakciji punih ciklusa će biti prikazana na primeru sa slike Slika 7.8. Pošto istorija opterećenja započinje sa maksimalnom vrednošću napona i tokom cele istorije ne dolazi do prekoračenja ove maksimalne vrednosti  $P_1$ , nema promene materijalnih karakteristika petlji, što je i uslov za dalje poređenje ove metode sa metodom kišnog toka, koja ne poseduje mogućnost razlikovanja histerezisnih petlji prema drugom parametru osim po svom opsegu. Na slici Slika 7.10a je punom linijom prikazana istorija opterećenja, dok je isprekidanom označena rezidualna istorija opterećenja sastavljena od neuparenih ciklusa i ona ima konačan oblik, što znači da dalja obrada ne bi dovela do njene redukcije. Šrafirane površine predstavljaju ekstraktovane pune cikluse. Promena memorijske *staircase* linije  $L(t)$  pri koracima opterećenja i rasterećenja je prikazana na slikama Slika 7.10b-h.

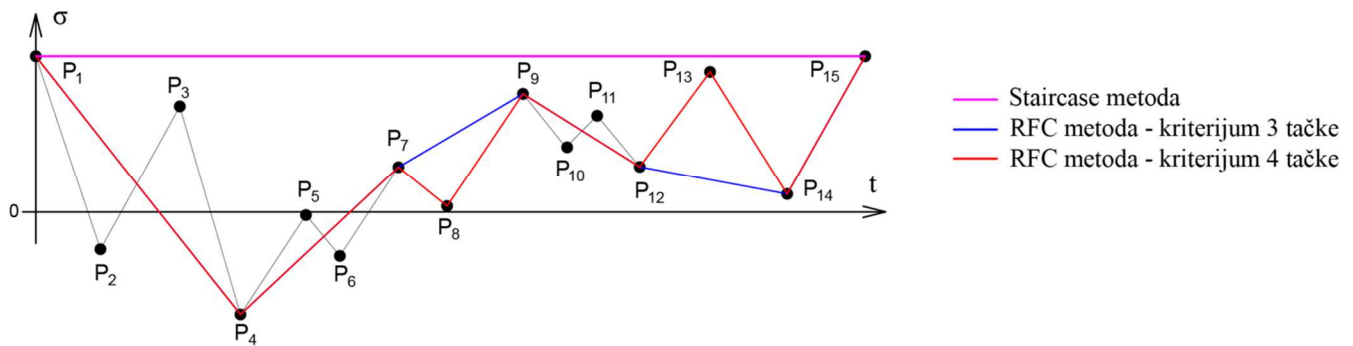


Slika 7.10 - Staircase metoda brojanja ciklusa: a) rezultati primene metode na proizvoljnoj istoriji opterećenja; b)-h) koraci opterećenja i rasterećenja

Poređenje *staircase* i *rainflow* metode, ne uzimajući u obzir nedostatke *RFC* metode u pogledu neuzimanja u obzir efekata cikličnog ojačanja, je najbolje slikovito predstaviti kroz poređenje



rezidualnih istorija opterećenja nastalih nakon prvog prolaska istorije opterećenja sa slike *Slika 7.8* kroz algoritam metode za brojanje ciklusa.



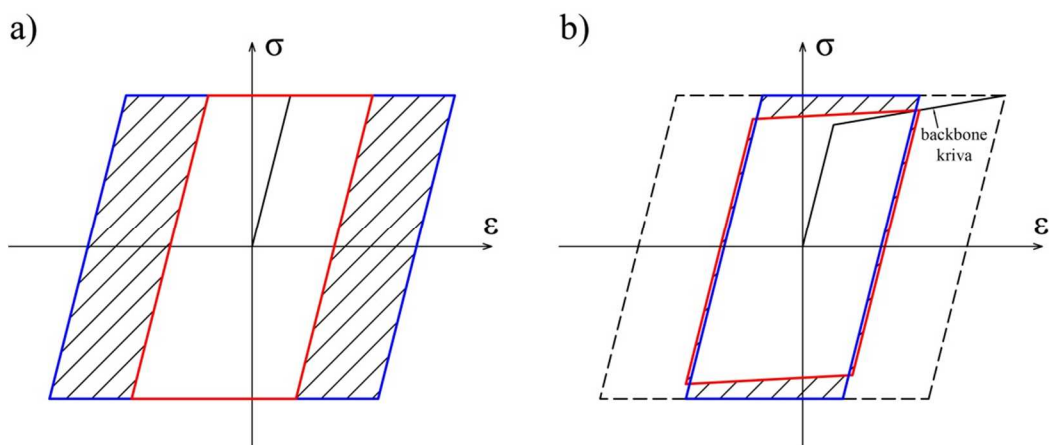
*Slika 7.11 - Poređenje reziduuma kod Staircase metode i RFC metode*

Sa slike *Slika 7.11* se može uočiti da reziduum za posmatranu istoriju opterećenja ne postoji kod primene *staircase* metode, dok se javlja kod RFC metode. Potpuna eliminacija reziduuma kod RFC metode sa kriterijumom 3 tačke je moguća uz dodatna dva prolaska istorije opterećenja kroz algoritam određivanja broja ciklusa, dok kod kriterijuma 4 tačke to nije moguće. Minimalni reziduum koji ostaje nakon ovog kriterijuma sadrži tri tačke (dva poluciklusa), koje su nedovoljne za pokretanje novog koraka algoritma sa 4 tačke.

Iako je u većini literature, otpornost materijala, pri zamoru izražena u funkciji broja ciklusa do loma  $N$  i opsega napona  $\Delta\sigma$ , tačnije opisivanje problema kod konstruktivnih mekih čelika bi se postiglo posmatranjem zavisnosti  $\Delta\varepsilon-N$ , usled pojave horizontalnog platoa u okolini maksimalnog napona  $\sigma_u$ . Horizontalni plato kod konstruktivnih mekih čelika, kao i kod idealno elastoplastičnih materijala, omogućava formiranje histerezisnih petlji istih opsega napona, a različitih površina, usled čega nema jednakosti u radovima ostvarenih pri formiranju histerezisnih petlji. Pogrešno uparivanje ciklusa usled različitih površina ciklusa je greška koja se može javiti primenom RFC metode kod analize cikličnog ponašanja materijala. Ova pojava je karakteristična za idealno elastoplastične materijale i konstruktivne meke čelike, ali ne i za idealno elastoplastične materijale sa ojačanjem, ukoliko se izuzme efekat cikličnog ojačanja. Različite vrste ulaza mogu da prouzrokuju različita odstupanja u površinama histerezisnih petlji, kako je prikazano na slici *Slika 7.12*.

Pored navedenih prednosti u odnosu na najprimenjivaniju metodu određivanja broja ciklusa (RFC metoda), *staircase* metoda prevazilazi nedostatke uočene i kod ostalih metoda. Ovo je posledica primene geometrijske interpretacije Preisach-ovog modela histerezisa kod *staircase* metode.

Pošto osnova *staircase* metode leži u fizičkoj prirodi punog ciklusa, koji je predstavljen zatvorenom histerezisnom petljom na  $\sigma-\varepsilon$  dijagramu, ne postoji mogućnost promena veličina opsega, kao što je slučaj sa *peak counting* metodama. Takođe, svi ciklusi ostaju neprekinuti. U odnosu na *range counting* metode, *staircase* metoda ne formira polucikluse, pa ne postoji mogućnost neuparivanja istih. Prilikom formiranja punih ciklusa ne pruža se prednost opsezima na osnovu veličine opsega, već samo prema vremenu nastanka. Podaci na početku i kraju istorije opterećenja ne moraju biti globalni maksimumi, ni imati iste vrednosti, kao što je slučaj kod metode rezervoara.



Slika 7.12 – Moguće grške RFC metode pri uparivanju punih ciklusa istog opsega: a) napona  $\sigma(t)$  kao ulaza kod idealno elastoplastičnih materijala; b) dilatacije  $\varepsilon(t)$  kao ulaza kod konstruktivnih mekih čelika

## 8 EKSPERIMENTALNI REZULTATI

### 8.1 MEHANIČKE KARAKTERISTIKE ČELIKA

Vrste čelika koje se koriste na području EU i njihov način obeležavanja su definisani standardom [87], dok su materijalne karakteristike za različite vrste elemenata u zavisnosti od njihovog oblika i dimenzija, propisane standardima [88] i [89].

Radi preciznog određivanja parametara koji definišu materijalni model, sprovedene su dve vrste eksperimenata:

- monotoni aksijalni testovi zatezanja uzoraka do kidanja,
- testovi sa cikličnim aksijalnim naprežanjem uzoraka, u režimu kontrolisanog izduženja.

Ispitivanja sprovedena tokom izrade ove doktorske disertacije su izvršena na uzorcima izrađenim od klasa čelika najčešće korišćenih na području EU, a kod kojih je izražen plato tečenja. Monotoni aksijalni testovi su sprovedeni na uzorcima čelika klasa S235, S275 i S355, dok su testovi pri cikličnom naprežanju sprovedeni samo na uzorcima od čelika klase S275, čije su vrednosti mehaničkih karakteristika iz srednjeg dela opsega u odnosu na sve tri klase. Materijalne karakteristike pri sobnoj temperaturi (20°C), čelika od kojih su izrađeni uzorci za ispitivanje su definisane standardom [89] i prikazane u sledećim tabelama:

Tabela 8.1 – Vrednosti minimalnih granica tečenja čelika  $Y$  [MPa] pri sobnoj temperaturi

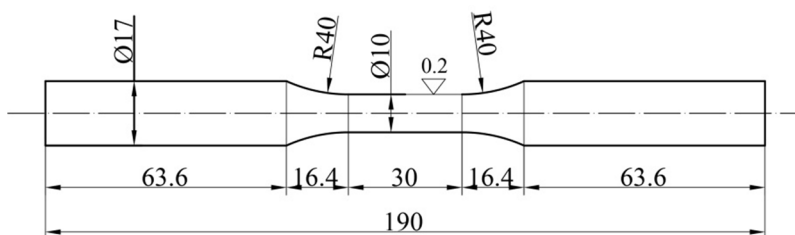
Vrsta čelika	Nominalna debljina $t$ [mm]					
	$t \leq 16$	$16 < t \leq 40$	$40 < t \leq 63$	$63 < t \leq 80$	$80 < t \leq 100$	$100 < t \leq 150$
S235	235	225	215	215	215	195
S275	275	265	255	245	235	225
S355	355	345	335	325	315	295

Tabela 8.2 - Vrednosti granica kidanja čelika [MPa] pri sobnoj temperaturi

Vrsta čelika	Nominalna debljina t [mm]		
	t ≤ 3	3 < t ≤ 100	100 < t ≤ 150
S235	360-510	360-510	350-500
S275	430 - 580	410 - 560	400 - 540
S355	510 - 680	470 - 630	450 - 600

## 8.2 GEOMETRIJA UZORAKA I OPREMA ZA ISPITIVANJE

Svi eksperimenti su sprovedeni na uzorcima od konstruktivnog mekog čelika pri sobnoj temperaturi  $t=20^{\circ}\text{C}$ . Uzorci su cilindričnog oblika, ukupne dužine 190mm i kružnog poprečnog preseka mernog dela, prečnika  $d=10\text{mm}$ . Dimenzije uzoraka za testiranje su prikazane na slici Slika 8.1. Uzorci su pripremljeni prema standardu [90], uz obezbeđivanje završne obrade površine uzoraka radi eliminisanja uticaja hrapavosti površina.



Slika 8.1 - Dimenzije uzoraka za testiranje

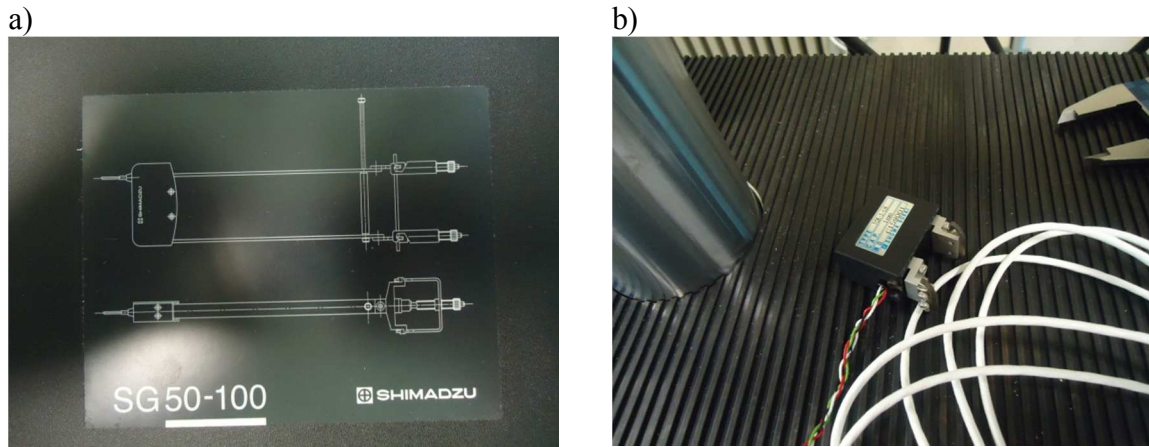
Pri ispitivanju je korišćena univerzalna mašina za testiranje zamora materijala pri pritisku i zatezanju SHIMADZU ServoPulser na Vojno-Tehničkom Institutu u Beogradu. Mašina obezbeđuje krutu konfiguraciju, dobro poravnanje čeljusti, kao i njihovu bočnu nepomerljivost.



Slika 8.2 – Konfiguracije opreme za testiranje

Za merenje podužnih dilatacija je korišćen ekstenzometar SHIMATZU SG 50-100 kod monotonih aksijalnih testova i SHOWA-SOKI TCK-1-IF kod testova pri cikličnom naprežanju, mernih dužina 25mm.

Konstrukcija ekstenzometra SHIMADZU SG 50-100 omogućava merenje velikih dilatacija koje prethode pojavi loma u uzorku. Veličina ovih izduženja (20% - 50%) je posledica dobre duktilnosti ovih čelika.



Slika 8.3 – Merna oprema (ekstenzometri) korišćeni za merenje izduženja uzoraka pri: a) monotonim testovima; b) cikličnim testovima

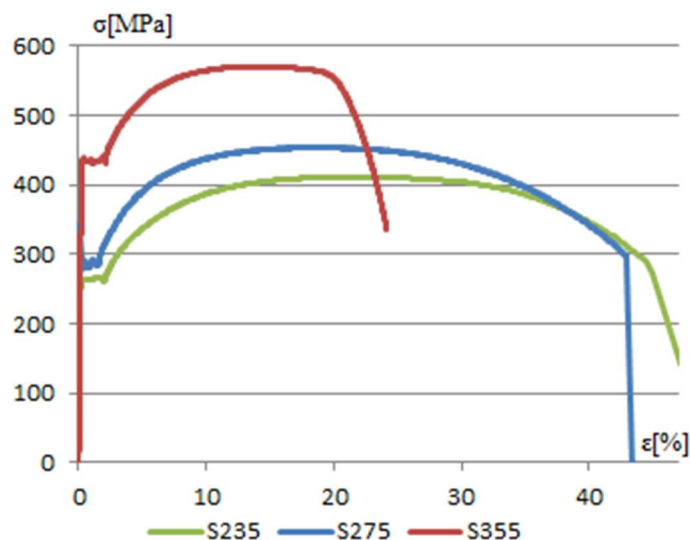
### 8.3 ISPITIVANJE PRI MONOTONOM AKSIJALNOM NAPREZANJU

Monotoni aksijalni testovi su sprovedeni na uzorcima dimenzija sa slike Slika 8.1. Ispitivanja su izvršena na uzorcima sve tri klase konstruktivnih mekih čelika, radi određivanja njihovih mehaničkih karakteristika i verifikacije modela (3.44). Uzorci klase čelika S235 nose oznaku I, uzorci klase S355, oznaku II, dok svi uzorci čelika klase S275 imaju oznaku III ispred svog rednog broja. Uzorci su izloženi zatezanju do loma, sa konstantnom brzinom nanošenja izduženja od 3mm/min.



Slika 8.4 - Izgled uzoraka pre i nakon testa

Rezultati testova uz međusobno poređenje rezultata monotonih aksijalnih testova za sve tri klase konstruktivnih mekih čelika su prikazani na slici Slika 8.5:



Slika 8.5 - Rezultati ispitivanja uzoraka čelika S235, S275 i S355

Rezultati testova zadovoljavaju standard [89] i u potpunosti prikazuju karakteristično ponašanje ovih vrsta čelika pri monotonom zatezanju. Kod sve tri klase čelika je uočljiva zona elastičnosti, formiranje horizontalnog platoa tečenja, zona ojačanja, kao i zona omekšanja (oštećenja) koja prethodi lomu. Više klase čelika pokazuju prirast granice tečenja, vrednosti maksimalnog napona, granice loma, ali i smanjenje duktilnosti.

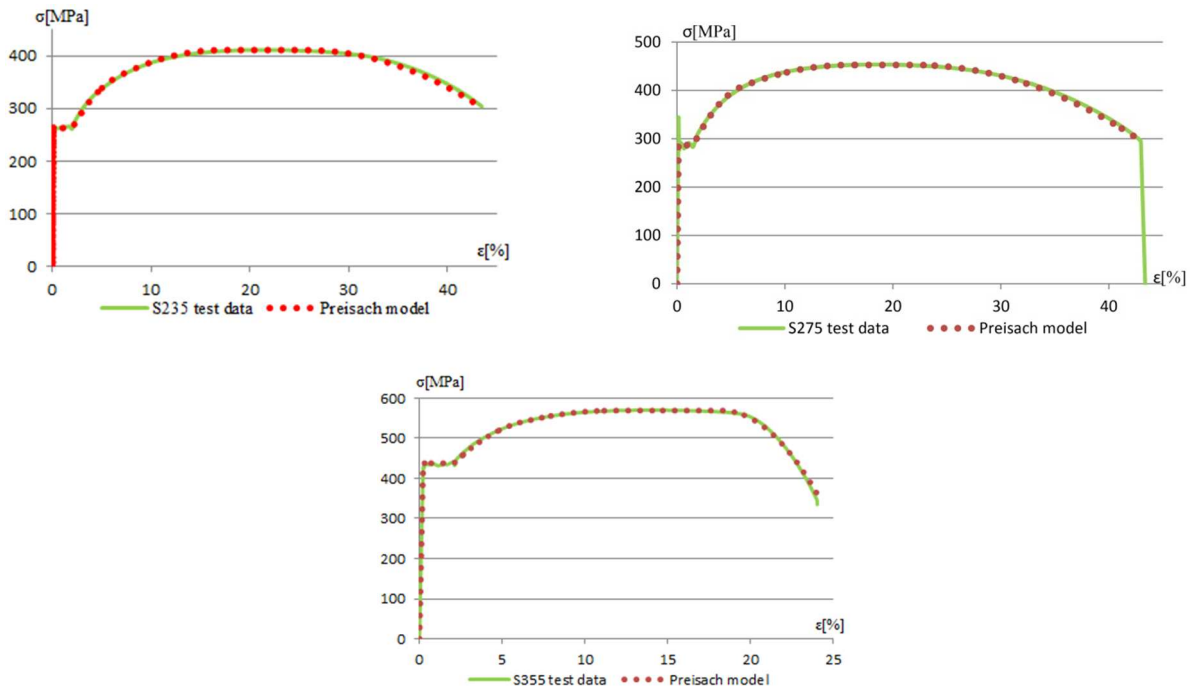
Vrednosti osnovnih mehaničkih karakteristika za sve tri klase konstruktivnih mekih čelika sa izraženim platoom tečenja (S235, S275 i S355), dobijene kao rezultati sprovedenih monotonih aksijalnih testova, su prikazane u tabeli Tabela 8.3. Ove vrednosti u potpunosti definišu model, predstavljen izrazom (3.44).

Tabela 8.3 – Osnovne materijalne karakteristike za definisanje Preisach-ovog modela

Klasa čelika		1	2	3 <sup>init</sup>	3 <sup>full</sup>	4 <sup>init</sup>	4 <sup>full</sup>	5 <sup>init</sup>	5 <sup>full</sup>	D
S235	Y [MPa]	263.03	263.03	263.03	360.086	360.086	411.008	411.008	304.241	304.241
	ε [%]	0.105	2.029	2.029	6.579	6.579	17.131	25.78	43.509	43.509
	E=219.89GPa		E <sub>a</sub> =3.3GPa		E <sub>h</sub> =0.966GPa		E <sub>D</sub> =-1.21GPa			
S275	Y [MPa]	286.857	286.857	286.857	407.439	407.439	452.563	452.563	297.564	297.564
	ε [%]	0.13146	1.5171	1.5171	5.9809	5.9809	15.980	21.991	42.837	42.837
	E=218.202GPa		E <sub>a</sub> =4.5GPa		E <sub>h</sub> =0.9026GPa		E <sub>D</sub> =-1.487GPa			
S355	Y [MPa]	437.98	437.978	436.95	541.206	548.238	569.234	569.234	370.850	360.71
	ε [%]	0.220	1.8705	2.091	6.359	6.999	11.741	18.277	23.923	24.605
	E=198.58GPa		E <sub>a</sub> =4.0GPa		E <sub>h</sub> =0.885GPa		E <sub>D</sub> =-7.027GPa			

Validacija Preisach-ovog modela, materijalnih karakteristika datih u tabeli Tabela 8.3 je izvršena kroz poređenje numeričkih rezultata sa rezultatima eksperimenata (Slika 8.6).





Slika 8.6 - Verifikacija modela kroz poređenje sa rezultatima eksperimenta

Poređenje rezultata pokazuje veoma dobro slaganje  $\sigma$ - $\varepsilon$  dijagrama dobijenih eksperimentalno i vrednosti sračunatih korišćenjem Preisach-ovog model definisanog sa (3.44) [55]. Poklapanje rezultata eksperimenata i Preisach-ovog modela je uočljivo u svim zonama napreznja materijala (zona elastičnosti, zona razvoja horizontalnog platoa tečenja, zona plastičnog ojačanja i zona oštećenja ili loma). Model ne može da predvidi i opiše pojavu gornje granice tečenja  $\sigma_{uy}$ , ali su njene vrednosti i pojava zanemarljive kod rešavanja inženjerskih problema.

Modeli, koji definišu aksijalno ponašanje konstruktivnih mekih čelika, a koji su prikazani u poglavljima 3.2.1 i 4.2, se koriste pri definisanju *backbone* krive kod cikličnog napreznja. Jedina razlika između dva prikazana modela je u načinu definisanja oštećenja. Verifikacija modela definisanog u poglavlju 4.2 će stoga biti sprovedena poređenjem sa eksperimentalnim rezultatima, samo u zoni oštećenja.

Izraz (4.13), u skladu sa slikom Slika 4.5, se može prikazati i u sledećem obliku:

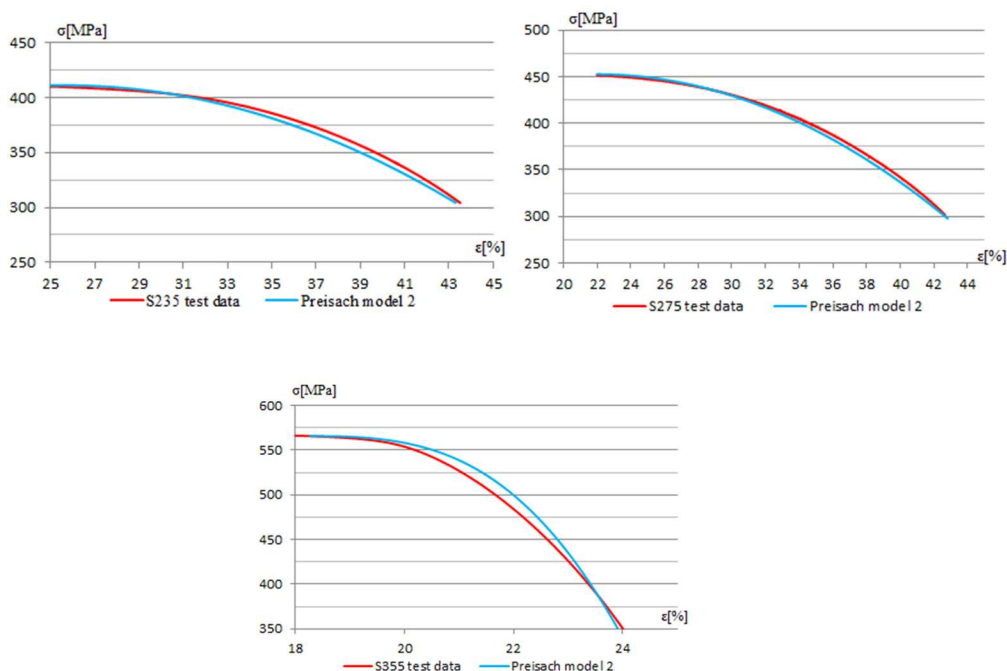
$$\sigma^{mD}(t) = \sigma^m(t) - \frac{Y_D}{2(\varepsilon_D^{full} - \varepsilon_D^{init})} \iint_D G_{\alpha,\beta} \varepsilon(t) d\alpha d\beta. \quad (8.1)$$

Definisanje oštećenja kod ovog Preisach-ovog modela se bazira na poznavanju tri materijalna parametra, koji su za različite klase konstruktivnih mekih čelika, prikazane u tabeli Tabela 8.4.

Tabela 8.4 - Parametri za definisanje oštećenja kod Preisach-ovog modela sa granicom kidanja  $Y_D$

Klasa čelika	$Y_D$ [MPa]	$\varepsilon_D^{init}$ [%]	$\varepsilon_D^{full}$ [%]
S235	411.008	25.78	368354.77
S275	452.563	21.991	12706.91
S355	565.67	18.277	118189.89

Poređenje Preisach-ovog modela definisanog izrazom (4.13) i eksperimentalnih rezultata, u zoni oštećenja, je prikazano na slici Slika 8.7.



Slika 8.7-Poređenje eksperimentalnih rezultata sa Preisach-ovim modelom (4.13) u zoni oštećenja

Može se uočiti (Slika 8.7) da Preisach-ov model definisan izrazom (4.13) pruža zadovoljavajuća slaganja sa eksperimentalnim rezultatima. Veća odstupanja u odnosu na rezultate testova su uočljiva kod viših klasa čelika (klasa S355) usled strmijeg nagiba  $\sigma$ - $\varepsilon$  krive u zoni oštećenja. Ovaj nedostatak je posledica malog broja parametara, koji definišu model u ovoj zoni, što nije slučaj sa modelom definisanim izrazom (3.43).

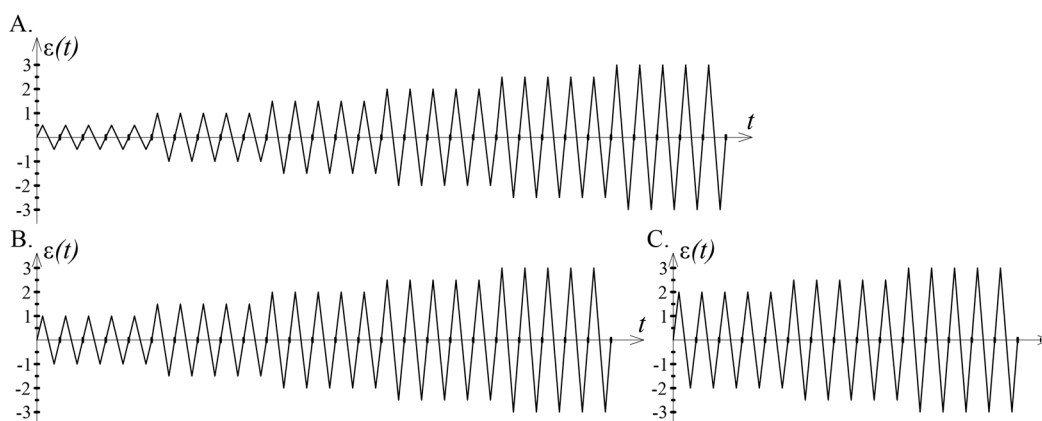
## 8.4 ISPITIVANJE PRI CIKLIČNOM AKSIJALNOM NAPREZANJU

Ukupno 6 uzoraka izrađenih od konstruktivnog čelika klase S275 je izloženo cikličnom naprezanju, sa ciljem određivanja osnovnih parametara, koji opisuju ciklično ponašanje ove klase čelika. Po dva uzorka za ispitivanje su izložena istom režimu naprezanja. Ukupno tri različita režima naprezanja su sprovedena nad uzorcima pri ispitivanju. Svaka istorija naprezanja se sastoji iz blokova od po 5 simetričnih, punih ciklusa (Slika 8.8). Brzina nanošenja opterećenja je konstantna pri svim testovima i iznosi 0.1 Hz. Režim ispitivanja sa brojem ciklusa za sve uzorke podvrgnute cikličnom naprezanju je prikazan u tabeli:

Tabela 8.5 - Režim ispitivanja uzoraka

$\varepsilon$ [%]		$\pm 0.5$	$\pm 1$	$\pm 1.5$	$\pm 2$	$\pm 2.5$	$\pm 3$	
Broj ciklusa	III-3	5	5	5	5	5	5	A.
	III-4	5	5	5	5	5	5	
	III-5	/	5	5	5	5	5	B.
	III-6	/	5	5	5	5	5	
	III-7	/	/	/	5	5	5	C.
	III-8	/	/	/	5	5	5	

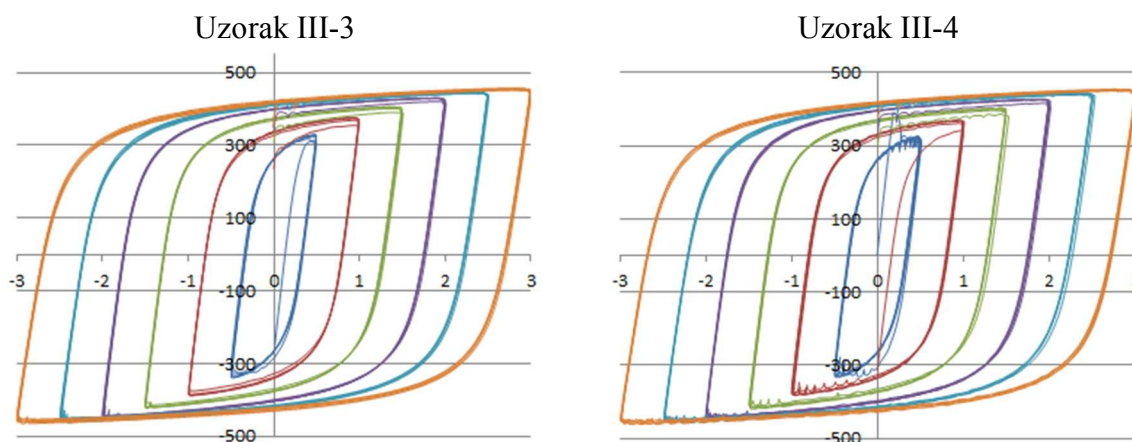
Grafički prikaz tri različite istorije naprezanja u vidu promene dilatacije  $\varepsilon$  kao ulaza u funkciji vremena  $t$ , je prikazan na slici Slika 8.8:



Slika 8.8 - Istorije naprezanja

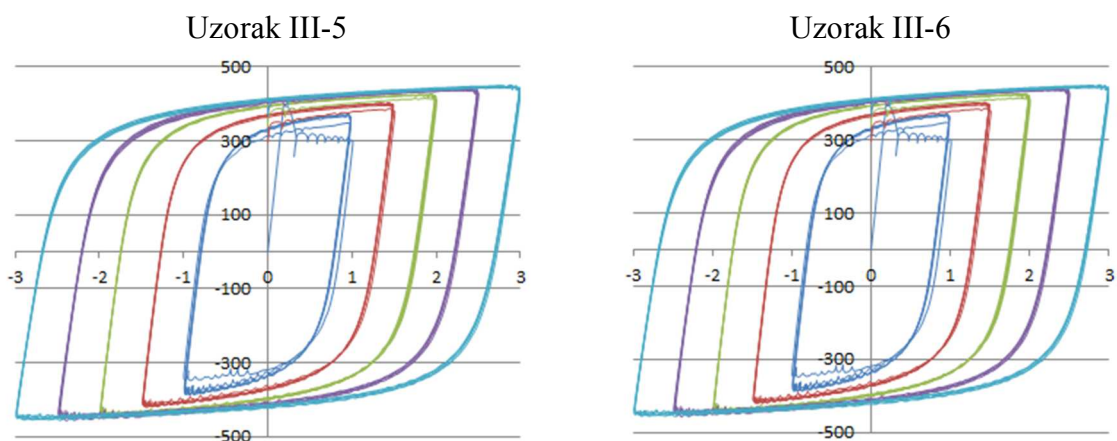
Date istorije naprezanja B i C predstavljaju “skraćanje” istorije naprezanja A, odnosno svaka istorija naprezanja se formira na osnovu pređašnje ( $A \rightarrow B \rightarrow C$ ) izostavljanjem prvih koraka, odnosno opsega. Međutim, poslednji opsezi cikličnog naprezanja su istovetni, kod svih istorija naprezanja. Ovako formirane istorije naprezanja omogućavaju prikaz zavisnosti ponašanja materijala od vrednosti amplituda ciklusa ostvarenih u prethodnoj istoriji naprezanja.

Rezultati ispitivanja uzoraka, grupisanih prema režimima naprezanja su prikazani na sledećim slikama:

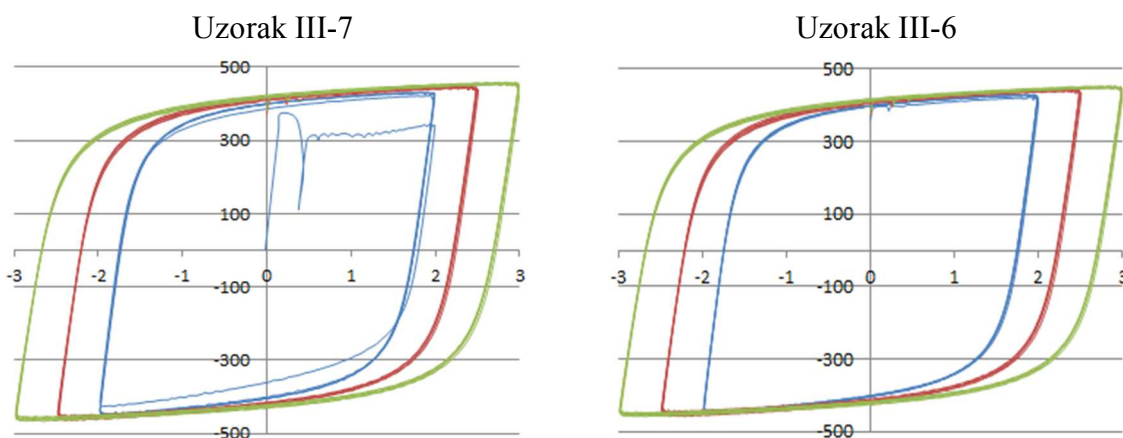


Slika 8.9 - Rezultati ispitivanja za istoriju naprezanja A.



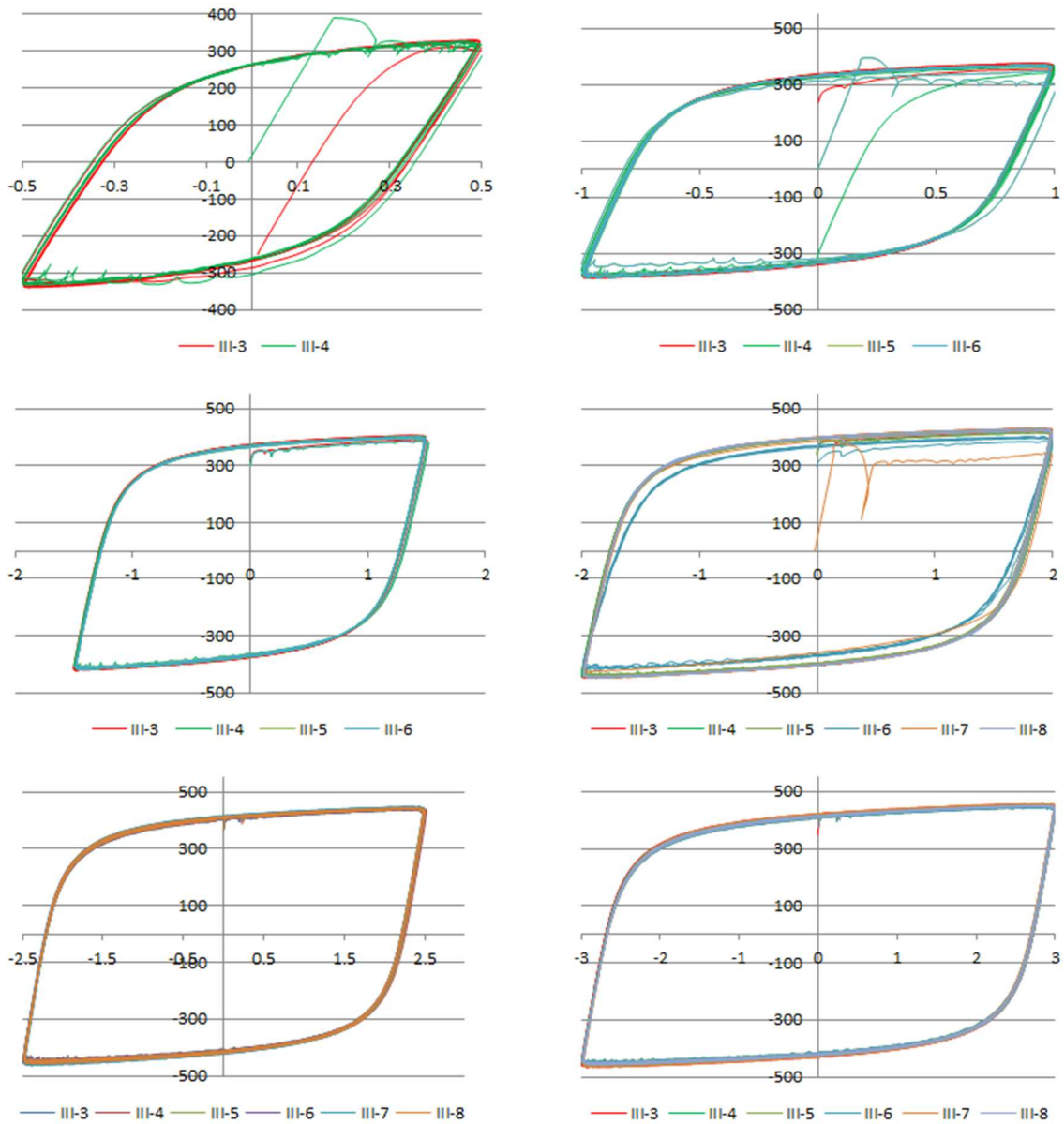


Slika 8.10 - Rezultati ispitivanja za istoriju naprezanja B.



Slika 8.11- Rezultati ispitivanja za istoriju naprezanja C.

Rezultati eksperimenata nad uzorcima izloženih istim istorijama naprezanja su pokazali veoma dobra slaganja. Ispitivanja su pokazala divergenciju ponašanja materijala pri cikličnom naprezanju u odnosu na ponašanje materijala pri monotonom naprezanju. Lokalna nestabilnost u vidu platoa tečenja iščezava, a naponi su veći za iste vrednosti dilatacija kod cikličnog naprezanja u odnosu na monotono, kao posledica cikličnog ojačanja. Pošto su istorije naprezanja formirane od blokova ciklusa konstantnih amplituda, ustrojenih tako da svaki naredni blok ima veću amplitudu naprezanja, svaki lokalni ekstremum istorije naprezanja (Slika 8.8) će predstavljati maksimalnu dilataciju u određenom trenutku  $max\epsilon(t)$ . Poređenje histerezisnih petlji istih amplituda, formiranih pri različitim istorijama opterećenja je prikazano na slici Slika 8.12.

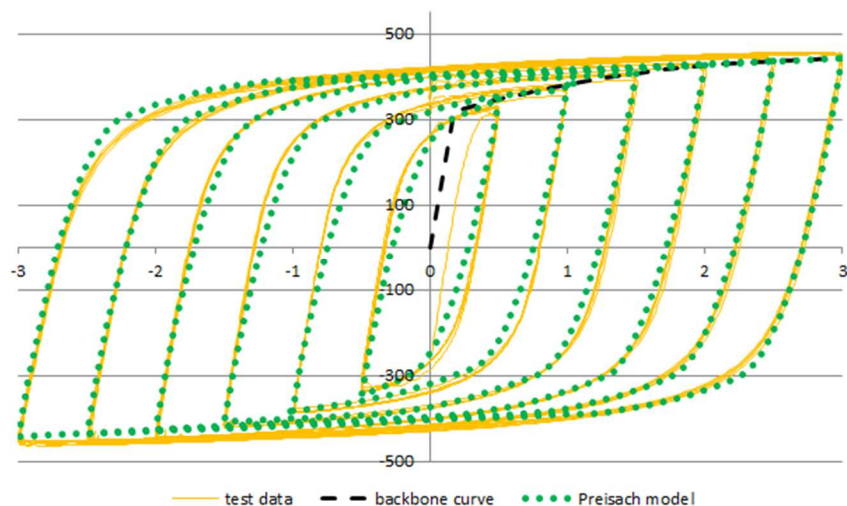


Slika 8.12 - Međusobno poređenje histerezisnih petlji istih amplituda kod različitih uzoraka

Ekspерименти su pokazali izvanredno poklapanje histerezisnih petlji pri različitim dilatacijama  $\pm\varepsilon(t)$ , nezavisno od istorije napreznjanja ( $A$ ,  $B$  ili  $C$ ). Ova pojava je posledica činjenice da dilatacija  $\varepsilon(t)$  pri kojoj su formirane histerezisne petlje, predstavlja maksimalnu dilataciju u posmatranoj istoriji opterećenja do trenutka  $t$ . Ovim se dokazuje pretpostavka da materijalne karakteristike, koje definišu oblik histerezisnih petlji, pri cikličnom napreznjanju, zavise samo od klase čelika i vrednosti maksimalne dilatacije u istoriji opterećenja do posmatranog trenutka  $t$ .

Kroz pikove formiranih histerezisnih petlji, se može provući trend linija, koja predstavlja *backbone* krivu. Ova kriva se može konstruisati na osnovu materijalnih karakteristika dobijenih aksijalnim monotonim testovima, izuzimajući plato tečenja i usvajajući dvostruko brži prirast napona u zoni ojačanja materijala, kao i dvostruko brži pad napona u zoni omekšanja, za isti prirast dilatacije  $\varepsilon(t)$ .

Poređenje numeričkog modela sa rezultatima eksperimenata je prikazano na slici Slika 8.13.



Slika 8.13 - Poređenje rezultata eksperimenata i numeričkog modela pri cikličnom naprezanju

Backbone kriva, definisana Preisach-ovim modelom (3.48), je pokazala dobro slaganje sa trend linijom formiranom pomoću pikova histerezijskih petlji, dobijenih eksperimentalnim putem, a prikazanih na slici Slika 8.12. Poređenje rezultata je izvršeno van zone oštećenja.

Poređenje vrednosti dobijenih primenom Preisach-ovog modela, definisanog izrazom (4.3), i rezultata eksperimenata su pokazala neznatna odstupanja u zoni nelinearnog ojačanja. Model daje nešto niže vrednosti napona pri manjim amplitudama naprezanja, dok su pri većim amplitudama i vrednosti napona neznatno više u odnosu na eksperimentalne rezultate. Kako su odstupanja mala, može se zaključiti da predloženi model daje zadovoljavajuća rešenja pri definisanju ponašanja konstruktivnih mekih čelika izloženih cikličnom naprezanju.

## 9 ZAKLJUČAK

Fenomen histerezisa karakteriše znatan broj fizičkih pojava. Preisach-ov model kao histerezijsni model je našao primenu kod opisivanja velikog broja ovih pojava. U oblasti mehanike kontinuuma je kao prvu primenu našao kod opisivanja ponašanja duktilnih materijala izloženih cikličnom naprezanju, kako je prikazano u radovima [24] i [25]. Ovi bazični modeli su poslužili kao osnova za izvođenje Preisach-ovog histerezijsnog modela, koji uzima u obzir oštećenje kod materijala [59]. Svi ovi modeli su korišćeni kao polazna tačka u ovoj disertaciji, pri razvoju novog kompleksnijeg Preisach-ovog modela za definisanje cikličnog ponašanja elemenata konstrukcija izrađenih od konstruktivnih mekih čelika. Ovu vrstu čelika karakteriše pojava platoa tečenja nakon prekoračenja granice tečenja i ulaska materijala u zonu plastičnosti pri monotonom naprezanju. Pošto se postojeći Preisach-ovi modeli baziraju na bilinearnim naponsko-deformacijskim dijagramima, u nemogućnosti su da opišu složeno ponašanje ovih tipova čelika.

Novi Preisach-ov model za definisanje ponašanja konstruktivnih mekih čelika pri monotonom naprezanju, koji koristi dilataciju kao ulazni parametar, je razvijen. Mogućnost modeliranja pojave horizontalnog platoa tečenja (Lüders band fenomen), kao i realnijeg opisivanja ponašanja materijala u zoni plastičnog ojačanja, nameću primenu ovog modela pri opisivanju monotonog ponašanja konstruktivnih čelika klasa S235, S275 i S355 [55]. Model zasnovan na petolinearnom radnom dijagramu je pokazao veoma dobra slaganja sa eksperimentalnim rezultatima monotonih testova sa

zetezanjem uzoraka. Izvedeni model za opisivanje ponašanja konstruktivnih mekih čelika pri monotonom naprezanju predstavlja jedini model iz familije Preisach-ovih modela, koji može tačno da opiše sve zone ponašanja ove vrste čelika pri monotonom naprezanju.

Na osnovu Preisach-ovog modela za opisivanje monotonog ponašanja konstruktivnih mekih čelika, u ovoj doktorskoj disertaciji definisan je histerezisni model, koji definiše ciklično ponašanje ovog tipa čelika izloženog jednoaksijalnom naprezanju. Superpozicijom dva modela od kojih prvi definiše trend liniju formiranu od pikova histerezisnih petlji, dok drugi definiše formiranje unutrašnjih naponsko-deformacijskih petlji, uzete su u obzir najbitniji fenomeni ciklične plastičnosti. Pojave poput non-Masing-ovo ponašanje i ciklično ojačanje su obuhvaćene ovim modelom, dok kod postojećih Preisach-ovih modela to nije bilo moguće. Novi model poseduje mogućnost detektovanja različitosti površina histerezisnih petlji istih opsega, a različitih maksimalnih dilatacija u prethodnoj istoriji opterećenja. Ovaj efekat se postiže zahvaljujući prirodi novoformiranog modela i samoj osobini memorije Preisach-ovog operatora.

Pojava oštećenja u materijalu je opisana na dva različita načina uz pomoć Preisach-ovog modela. Odgovor materijala u zoni oštećenja je prvo modeliran primenom relativno novog pristupa uz primenu elementa negativne krutosti. Drugi pristup podrazumeva uvođenje elementa sa unapred definisanom granicom loma u mehanički model. Prvi model je demonstrirao veoma dobra slaganja sa eksperimentalnim rezultatima. Poređenje dva modela je pokazalo da i drugi model ima zadovoljavajuću tačnost, uz neznatno veća odstupanja u slučaju strmijeg pada naponsko deformacijske krive u zoni oštećenja. Prvi model svoju bolju preciznost duguje većem broju parametara, koji ga definišu, na uštrb svoje kompleksnosti u odnosu na drugi model. Kod oba modela je ispunjena pretpostavka da se oštećenja u materijalu javljaju samo pri zatezanju, a ne i pritisku, uz mogućnost definisanja rešenja u zatvorenom analitičkom obliku. Računski efikasna analiza je omogućena kroz primenu geometrijske interpretacije za oba modela u vidu Preisach-ovih trouglova.

Problem proračuna energija ostvarenih prilikom formiranja histerezisnih petlji usled cikličnog naprezanja konstruktivnih mekih čelika je obrađen u ovoj disertaciji. Izrazi za ukupan plastični rad i energetske gubitke, pri ovakvom režimu naprezanja, su analitički definisani. Zarobljena energija u materijalu, koja se troši na promenu strukture materijala, a proračunava kao razlika plastičnog rada i energetskih gubitaka, je takođe definisana za slučaj cikličnog naprezanja konstruktivnih mekih čelika.

Problem cikličnog savijanja grednih nosača izrađenih od konstruktivnih mekih čelika moguće je definisati pomoću predmetnog modela. Za najjednostavniji slučaj, pravog savijanja pravougaonih poprečnih preseka, prikazana je geometrijska interpretacija analitičkog rešenja u vidu Preisach-ovih prizmi. Složenost Preisach-ovog modela uz varijaciju dilatacija po visini poprečnog preseka, nameće numeričku integraciju napona po visini preseka, kao najracionalniji način za proračun analitičkog rešenja. Definisane rešenja za druge, složenije poprečne preseke, kao i za složeno savijanje, zahteva dalja istraživanja i razvoj modela uz eksperimentalno definisanje načina promene dilatacija po visini poprečnog preseka.

Problem zamora materijala nije obuhvaćen nijednim od postojećih Preisach-ovih modela. Za potrebe analize uticaja zamora na ponašanje ciklično napregnutih elemenata konstrukcija u funkciji broja ciklusa, razvijena je potpuno nova metoda za određivanje broja ciklusa u proizvoljnoj istoriji opterećenja. Ova (*Staircase*) metoda vrši ekstrakciju punih ciklusa iz proizvoljne istorije opterećenja, zahvaljujući sposobnosti prepoznavanja zatvorenih histerezisnih petlji, koje poseduje Preisach-ov histerezisni model i njegove osobine memorije. Predložena metoda je poređena sa metodama kišnog toka i rezervoar metodom, koje su ujedno najprimenjivnije u praksi. Poređenje rezultata primene ovih metoda je pokazalo da je *Staircase* metoda znatno brža i tačnija. Razvijenu metodu karakteriše potpuna

eliminacija analize reziduuma istorije opterećenja, gde su svi puni ciklusi ekstraktovani u prvom koraku primene ove metode. To nije slučaj sa drugim metodama, koje iziskuju dodatnu obradu reziduuma istorije opterećenja. Jedini nedostatak, koji se može javiti pri primeni ove metode kod karakterističnih oblika istorije opterećenja, je pojava velikog broja tačaka, koje se obrađuju u posmatranom trenutku. To je osobina i ostalih metoda, koja se javlja kod istorija opterećenja, koje u sebi ne sadrže pune cikluse. Pored navedenih osobina, pokazano je da *Staircase* metoda poseduje viši nivo memorije od svih postojećih metoda za određivanje broja ciklusa. Osobina pamćenja maksimalne dilatacije, ostvarane do posmatranog trenutka, pruža mogućnost razlikovanja histerezisnih petlji koje imaju iste vrednosti opsega, ali petlje različitih površina. Na ovaj način se uzima u obzir redosled nastanka ciklusa. Ova osobina omogućava brži proračun histerezisnih energija pri proizvoljnoj istoriji opterećenja, uz prethodnu ekstrakciju punih ciklusa, sa zadržavanjem tačnosti proračuna. Nažalost, poređenje rezultata sa vrednostima iz postojećih širokoprimenjivanih *S-N* krivih za različite detalje kod čeličnih konstrukcija, nije moguće, jer su rezultati ovih krivih izraženi samo u funkciji opsega napona i broja ostvarenih ciklusa. Za ostvarenje punog kapaciteta ove metode, potrebno je definisati nove eksperimentalne rezultate, gde se pored broja ciklusa do loma i njihovog opsega, beleže i maksimalne deformacije do posmatranog trenutka formiranja punog ciklusa u posmatranoj istoriji opterećenja.

Verifikacija modela je sprovedena kroz poređenje sa rezultatima eksperimenata. Za potrebe ove doktorske disertacija sprovedena su dva seta eksperimenata. Monotonom aksijalnom zatezanju su izloženi uzorci od konstruktivnih mekih čelika sa izraženim platoom tečenja, klasa S235, S275, S355, koje su najprimenjivnije na našem i podneblju EU. Eksperimenti sprovedeni pri konstantnoj brzini nanošenja dilatacija su pokazali formiranje svih karakterističnih zona u naponsko-deformacijskom dijagramu (zona elastičnosti, zona horizontalnog tečenja, zona plastičnog ojačanja i zona oštećenja). Eksperimenti pri cikličnom naprezanju su sprovedeni na čeliku klase S275 sa mehaničkim karakteristikama iz srednjeg opsega u odnosu na ostale dve klase. Nanošenjem opterećenja konstantne male brzine, su eliminisani dinamički uticaji. Ispitivanja su sprovedena na po dva uzorka za tri različite istorije opterećenja. Histerezisne petlje sa istim vrednostima amplituda dilatacije i istim maksimalnim dilatacijama do posmatranog trenutka, su pokazale odlično slaganje, za sve režime naprezanja. Koristeći izmerene rezultate eksperimenata pri monotonom naprezanju uz određene zakonitosti uočene pomoću eksperimenata pri cikličnom naprezanju, histerezisni model je formiran. Poređenje rezultata ovog Preisach-ovog modela sa eksperimentalnim rezultatima je pokazalo izuzetno dobro slaganje.

## 10 LITERATURA

- [1] Henri Tresca, “Sur l’e coulement des corps solides soumis a de fortes pression,” *Comptes Redus Hebd Seances L’Academies Sci*, vol. 59, pp. 754–758, 1864.
- [2] Charles de Augustin de Columb, *M’em Math Phys*, vol. 7, 1773.
- [3] Richard von Mises, “Mechanik der Festen Korper im plastisch deformablen Zustand,” *Göttin Nachr Math Phys*, vol. 1, pp. 582–592, 1913.
- [4] W. Prandtl and A. Grimm, “Über die Aufsuchung des Elementes Nr. 61,” *Z. Für Anorg. Allg. Chem.*, vol. 136, no. 1, pp. 283–288, Jun. 1924, doi: 10.1002/zaac.19241360125.
- [5] A. Reuss, “Berücksichtigung der elastischen Formänderung in der Plastizitätstheorie,” *ZAMM - J. Appl. Math. Mech. Z. Für Angew. Math. Mech.*, vol. 10, no. 3, pp. 266–274, Jan. 1930, doi: 10.1002/zamm.19300100308.
- [6] William Prager, “A New Method of Analyzing Stresses and Strains in Work-Hardening Plastic Solids,” *J. Appl. Mech.*, vol. 23, pp. 493–496, 1956.
- [7] D. C. Drucker, “On uniqueness in the theory of plasticity,” *Q. Appl. Math.*, vol. 14, no. 1, pp. 35–42, 1956, doi: 10.1090/qam/77386.
- [8] C. O. Frederick and P. J. Armstrong, “A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect,” *Mater. High Temp.*, vol. 24, no. 1, pp. 1–26, Jan. 2007, doi: 10.1179/096034007X207589.
- [9] N. Ohno and J.-D. Wang, “Kinematic hardening rules with critical state of dynamic recovery, part I: formulation and basic features for ratchetting behavior,” *Int. J. Plast.*, vol. 9, no. 3, pp. 375–390, Jan. 1993, doi: 10.1016/0749-6419(93)90042-O.
- [10] Z. Mróz, “On the description of anisotropic workhardening,” *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 15, pp. 163–175, May 1967, doi: 10.1016/0022-5096(67)90030-0.
- [11] F. Dafalias and E.P. Popov, “Plastic internal variables formalism of cyclic plasticity,” *ASME J Appl Mech*, vol. 98, p. 645/651, 1976.
- [12] V. Volterra, “Sur l’équilibre des corps élastiques multiplement connexes,” *Ann. Sci. L’École Norm. Supér.*, vol. 24, pp. 401–517, 1907.
- [13] Augustus Edward Hough Love, “A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity,” *Camb. Univ. Press Camb. UK*, 1927.
- [14] G. I. Taylor and F. R. S., “The mechanism of plastic deformation of crystals. Part I.—Theoretical,” *Proc R Soc Lond A*, vol. 145, no. 855, pp. 362–387, Jul. 1934, doi: 10.1098/rspa.1934.0106.
- [15] R. J. Asaro, “Crystal Plasticity,” *J. Appl. Mech.*, vol. 50, no. 4b, pp. 921–934, Dec. 1983, doi: 10.1115/1.3167205.

- [16] N. Raghu, N. Srinivasan, and B. Venkatraman, "Study On The Deformation Band Characteristics In Mild Steel Using Digital Image Correlation," *J. Multidiscip. Eng. Sci. Technol. JMEST*, vol. 1, no. 3, pp. 400–403, Jan. 2014.
- [17] Richard W. Hertzberg, *Deformation and Fracture Mechanics of Engineering Materials*, 4th ed. United States of America: John Wiley & Sons. Inc, 1996.
- [18] Y. T. Zhang, T. Ao, W. Jiao, and Y. H. Cui, "Prediction of the Lüders band in fine grained steel strips under uniaxial tension," *Comput. Mater. Sci.*, vol. 41, no. 4, pp. 547–552, Feb. 2008, doi: 10.1016/j.commatsci.2007.05.011.
- [19] F. Yoshida, "A constitutive model of cyclic plasticity," *Int. J. Plast.*, vol. 16, no. 3, pp. 359–380, Jan. 2000, doi: 10.1016/S0749-6419(99)00058-3.
- [20] K. Valanis, "A Theory of Viscoplasticity without a Yield Surface. Part 1. General Theory," *Arch Mech*, vol. 23, p. 30, Dec. 1970.
- [21] S. R. Bodner, "Review of Unified Elastic-Viscoplastic Theory," in *Unified Constitutive Equations for Creep and Plasticity*, K. Miller, Alan K. Miller., Ed. Elsevier, 1986, pp. 273–301.
- [22] J. L. Chaboche, "On some modifications of kinematic hardening to improve the description of ratchetting effects," *Int. J. Plast.*, vol. 7, no. 7, pp. 661–678, Jan. 1991, doi: 10.1016/0749-6419(91)90050-9.
- [23] J. Lubliner, "A simple model of generalized plasticity," *Int. J. Solids Struct.*, vol. 28, no. 6, pp. 769–778, Jan. 1991, doi: 10.1016/0020-7683(91)90155-9.
- [24] A. V. Lubarda, D. Sumarac, and D. Krajcinovic, "Hysteretic response of ductile materials subjected to cyclic loads," *Recent Adv. Damage Mech. Plast. ASME Publ. AMD*, vol. 123, pp. 145–157, 1992.
- [25] V. A. Lubarda, D. Sumarac, and D. Krajcinovic, "Preisach model and hysteretic behaviour of ductile materials," *Eur. J. Mech. Solids*, vol. 12, no. 4, pp. 445–470, 1993.
- [26] R. Bouc, "A Mathematical Model for Hysteresis," *Acta Acust. United Acust.*, vol. 24, no. 1, pp. 16–25, Jan. 1971.
- [27] Y. K. Wen, "Method for Random Vibration of Hysteretic System," *ASCE J Eng Mech Div*, vol. 102, Apr. 1976.
- [28] Y. Jiang and J. Zhang, "Benchmark experiments and characteristic cyclic plasticity deformation," *Int. J. Plast.*, vol. 24, no. 9, pp. 1481–1515, Sep. 2008, doi: 10.1016/j.ijplas.2007.10.003.
- [29] R. Halama, J. Sedlák, and M. Šofer, "Phenomenological Modelling of Cyclic Plasticity," 2012, doi: 10.5772/35902.
- [30] S. K. Paul, S. Sivaprasad, S. Dhar, and S. Tarafder, "Key issues in cyclic plastic deformation: Experimentation," *Mech. Mater.*, vol. 43, no. 11, pp. 705–720, Nov. 2011, doi: 10.1016/j.mechmat.2011.07.011.

- [31] Fangxin Hu, Gabghi Shi, and Yongjiu Shi, “Constitutive model for full-range elasto-plastic behavior of structural steels with yield plateau: Formulation and implementation,” *Eng. Struct.*, vol. 171, pp. 1059–1070, Sep. 2018, doi: 10.1016/j.engstruct.2016.02.037.
- [32] P. D. Versaillot, “Effects of cyclic loading on the mechanical properties of steel”, Master Thesis, Politechnica University of Timișoara, Timișoara, 2017.
- [33] Yongjiu Shi, Wang Meng, and Wang Yuangang, “Experimental and constitutive model study of structural steel under cyclic loading,” *J. Constr. Steel Res.*, vol. 67, no. 8, pp. 1185–1197, Aug. 2011, doi: 10.1016/j.jcsr.2011.02.011.
- [34] Doong S.H., Socie D.F., and Robertson I.M., “Dislocation substructures and nonproportional hardening,” *ASME J Eng Mater Technol*, vol. 112, pp. 456–464, 1990, doi: 10.1115/1.2903357.
- [35] Krempl E. and Lu H., “The Hardening and Rate-Dependent Behavior of Fully Annealed AISI Type 304 Stainless Steel Under Biaxial In-Phase and Out-of-Phase Strain Cycling at Room Temperature,” *J. Eng. Mater. Technol.*, vol. 106, no. 4, pp. 376–382, 1984.
- [36] P. R. Dahl, “Solid Friction Damping of Mechanical Vibrations,” *AIAA J.*, vol. 14, pp. 1675–1682, Dec. 1976, doi: 10.2514/3.61511.
- [37] D. C. Jiles and D. L. Atherton, “Theory of ferromagnetic hysteresis,” *J. Magn. Magn. Mater.*, vol. 61, pp. 48–60, Sep. 1986, doi: 10.1016/0304-8853(86)90066-1.
- [38] H. Sucuoglu and M. A. Erberik, “Energy-based hysteresis and damage models for deteriorating systems,” *Earthq. Eng. Struct. Dyn.*, vol. 33, pp. 69–88, Nov. 2003, doi: 10.1002/eqe.338.
- [39] B. Jayawardhana, H. Logemann, and E. P. Ryan, “PID control of second-order systems with hysteresis,” *Int. J. Control*, vol. 81, no. 8, pp. 1331–1342, Aug. 2008, doi: 10.1080/00207170701772479.
- [40] W. Franz, “Hysteresis in Economic Relationships: An Overview,” in *Hysteresis Effects in Economic Models*, 1990, pp. 1–17.
- [41] J. J. Tyson and B. Novak, “Regulation of the eukaryotic cell cycle: molecular antagonism, hysteresis, and irreversible transitions,” *J. Theor. Biol.*, vol. 210, no. 2, pp. 249–263, May 2001, doi: 10.1006/jtbi.2001.2293.
- [42] Mohammed Ismail, Fayçal Ikhrouane, and José Rodellar, “The Hysteresis Bouc-Wen Model, a Survey,” *Arch Comput Methods Eng*, no. 16, pp. 16: 161–188, 2009, doi: 10.1007/s11831-009-9031-8.
- [43] A. Visintin, “Mathematical models of hysteresis,” in *Modelling and Optimization of Distributed Parameter Systems Applications to engineering*, Springer, Boston, MA, 1996, pp. 71–80.
- [44] F. Preisach, “Über die magnetische Nachwirkung,” *Z Phys*, vol. 94, pp. 277–302, 1935.
- [45] M. Krasnoselskii and A. Pokrovskii, “Systems with Hysteresis,” *Nauka Mosc.*, 1983.
- [46] I. D. Mayergoyz, *Mathematical Models of Hysteresis*. New York: Springer-Verlag, 1991.
- [47] W. D. Iwan, “On a Class of Models for the Yielding Behavior of Continuous and Composite Systems,” *J. Appl. Mech.*, vol. 34, no. 3, pp. 612–617, Sep. 1967, doi: 10.1115/1.3607751.



- [48] J. M. Gere, *Mechanics of Materials*, 6th edition. Belmont, CA: Thomson-Engineering, 2003.
- [49] A. Carrella, M. J. Brennan, and T. P. Waters, “Static analysis of a passive vibration isolator with quasi-zero-stiffness characteristic,” *J. Sound Vib.*, vol. 301, no. 3–5, pp. 678–689, Apr. 2007, doi: 10.1016/j.jsv.2006.10.011.
- [50] L. Thanh Danh and K. K. Ahn, “Active pneumatic vibration isolation system using negative stiffness structures for a vehicle seat,” *J. Sound Vib.*, vol. 333, pp. 1245–1268, Feb. 2014, doi: 10.1016/j.jsv.2013.10.027.
- [51] D. L. Platus, “Negative-stiffness-mechanism vibration isolation systems,” in *Vibration Control in Microelectronics, Optics, and Metrology*, 1992, vol. 1619, pp. 44–54, doi: 10.1117/12.56823.
- [52] A. Carrella, M. J. Brennan, T. P. Waters, and K. Shin, “On the design of a high-static-low-dynamic stiffness isolator using linear mechanical springs and magnets,” *J. Sound Vib.*, vol. 315 (3), pp. 712–720, Aug. 2008, doi: 10.1016/j.jsv.2008.01.046.
- [53] N. Zhou and K. Liu, “A tunable high-static–low-dynamic stiffness vibration isolator,” *J. Sound Vib.*, vol. 329, pp. 1254–1273, Apr. 2010, doi: 10.1016/j.jsv.2009.11.001.
- [54] R. S. Lakes, “Extreme Damping in Composite Materials with a Negative Stiffness Phase,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 86, no. 13, pp. 2897–2900, Mar. 2001, doi: 10.1103/PhysRevLett.86.2897.
- [55] Petar Knežević, Dragoslav Šumarac, Zoran Perović, Ćemal Dolićanin, and Zijah Burzić, “A Preisach Model for Monotonic Tension Response of Structural Mild Steel with Damage,” *Period. Polytech. Civ. Eng.*, vol. 64, no. 1, pp. 296–303, 2020, doi: <https://doi.org/10.3311/PPci.14809>.
- [56] C. Shen, E. Mizuno, and T. Usami, “Generalized two-surface model for structural steels under cyclic loading,” *Doboku Gakkai Ronbunshu*, vol. 10, pp. 23–33, Jul. 1993, doi: 10.2208/jscej.1993.471\_23.
- [57] Y. Shi, M. Wang, and Y. Wang, “Experimental and constitutive model study of structural steel under cyclic loading,” *J. Constr. Steel Res.*, vol. 67, no. 8, pp. 1185–1197, Aug. 2011, doi: 10.1016/j.jcsr.2011.02.011.
- [58] L. A. M. Mendes and L. M. S. S. Castro, “A simplified reinforcing steel model suitable for cyclic loading including ultra-low-cycle fatigue effects,” *Eng. Struct.*, vol. 68, pp. 155–164, Jun. 2014, doi: 10.1016/j.engstruct.2014.02.031.
- [59] D. Šumarac and Z. Perovic, “Cyclic plasticity of trusses,” *Arch. Appl. Mech.*, vol. 85, Dec. 2014, doi: 10.1007/s00419-014-0954-7.
- [60] Zoran B. Perović, “Elastoplastična analiza rešetkastih nosača sa oštećenjem pri cikličnom opterećenju,” Beograd, 2016.
- [61] Isach Newton, “Methodus Fluxionem et Serierum Infinitarum,” 1671 1664.
- [62] A. Dontchev and L. Qi, “Quadratic Convergence of Newton’s Method for Convex Interpolation and Smoothing,” *Constr. Approx.*, vol. 19, Nov. 2000, doi: 10.1007/s00365-002-0513-2.
- [63] J. Lemaitre, *A Course on Damage Mechanics*, 2nd ed. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1996.

- [64] Z. Perović and D. Šumarac, “Elastoplastic damage analysis of trusses subjected to cyclic loading,” *Zb. Rad. Građev. Fak. Subot.*, no. 24, pp. 77–83, 2014, doi: 10.14415/zbornikGFS24.007.
- [65] L. Kachanov, “Time of the Rupture Process under Creep Conditions,” *Izv. Akad. Nauk SSSR Otd. Teckhnicheskikh Nauk*, vol. 8, pp. 26–31, 1958.
- [66] C. P. Steinmetz, “On the law of hysteresis,” *Proc. IEEE*, vol. 72, no. 2, pp. 197–221, Feb. 1984, doi: 10.1109/PROC.1984.12842.
- [67] D. Sumarac and S. Stosic, “The Preisach model for the cyclic bending of elasto-plastic beams,” *Eur. J. Mech. Solids*, vol. 15, no. 1, pp. 155–172, 1996.
- [68] D. Šumarac and Z. Petrašković, “Hysteretic behavior of rectangular tube (box) sections based on Preisach model,” *Arch. Appl. Mech.*, vol. 82, no. 10, pp. 1663–1673, Oct. 2012, doi: 10.1007/s00419-012-0663-z.
- [69] D. Sumarac, B. Medjo, and N. Trisovic, “Hysteretic behavior modeling of elastoplastic materials,” *Theor. Appl. Mech.*, vol. 35, no. 1–3, pp. 287–304, 2008, doi: 10.2298/TAM0803287S.
- [70] W. Schütz, “A history of fatigue,” *Eng. Fract. Mech.*, vol. 54, no. 2, pp. 263–300, May 1996, doi: 10.1016/0013-7944(95)00178-6.
- [71] August Wöhler, “Versuche Über die Festigkeit der Eisenbahnwagenachsen,” *Z. Für Bauwes.*, vol. 10, pp. 160–161, 1860.
- [72] Arvid Palmgren, “Die Lebensdauer von Kugellagern,” *Z. Vereines Dtsch. Ingenieure*, vol. 68, no. 14, pp. 339–341, 1924.
- [73] M. A. Miner, “Cumulative damage in fatigue,” *J. Appl. Mech.*, vol. 12, no. 3, pp. 159–164, 1945.
- [74] C. A. Mercer and J. Livesey, “Statistical counting methods as a means of analysing the load histories of light bridges,” *J. Sound Vib.*, vol. 27, no. 3, pp. 399–410, Apr. 1973, doi: 10.1016/S0022-460X(73)80354-2.
- [75] J. Schijve, *The Analysis of Random Load-time Histories with Relation to Fatigue Tests and Life Calculations: This Report Has Been Presented as a Paper to the 2nd. ICAF-AGARD Symposium, Paris, 16, 17 and 18 May, 1961*. Nationaal Lucht- en Ruimtevaartlaboratorium, 1960.
- [76] N. E. Dowling, “Fatigue Failure Predictions for Complicated Stress-Strain Histories,” ILLINOIS UNIV AT URBANA DEPT OF THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS, T/AM-337, Jan. 1971.
- [77] P. Knežević and M. Milanović, “ODREĐIVANJE BROJA CIKLUSA ZA ZADATU ISTORIJU OPTEREĆENJA PRI ANALIZI ZAMORA PREMA EVROKODU,” *Zb. Rad. Građev. Fak.*, vol. 31, no. 28, pp. 23–33, 2015, doi: 10.14415/zbornikGFS28.02.
- [78] P. W. Hoadley, K. H. Frank, and J. A. Yura, “Estimation of the Fatigue Life of a Test Bridge from Traffic Data,” p. 141.
- [79] Matsuishi M. and Endo T., “Fatigue of metals subjected to varying stress,” *Jpn. Soc. Mech. Eng.*, 1968.

- [80] Petar Knežević, Dragoslav Šumarac, and Milivoje Milanović, “Primena metode kišnog toka pri određivanju broja ciklusa usled cikličnog opterećenja promenljive amplitude,” *12th Int. Sci. Prof. Conf. Contemp. Theory Pract. Constr. Univ. Banja Luka*, pp. 107–114, 2016.
- [81] G. Marsh *et al.*, “Review and application of Rainflow residue processing techniques for accurate fatigue damage estimation,” *Int. J. Fatigue*, vol. 82, pp. 757–765, Jan. 2016, doi: 10.1016/j.ijfatigue.2015.10.007.
- [82] J. J. B. Berglind, R. Wisniewski, and M. Soltani, “Fatigue load modeling and control for wind turbines based on hysteresis operators,” in *2015 American Control Conference (ACC)*, Chicago, IL, USA, 2015, pp. 3721–3727, doi: 10.1109/ACC.2015.7171908.
- [83] Sobczyk K., “Stochastic models for fatigue damage of materials,” *Adv. Appl. Probab.*, pp. 652–673, 198.
- [84] N. W. M. Bishop, “Vibration fatigue analysis in the finite element environment,” *XVI Encuentro Grupo Esp. Fract. Spain*, 1999.
- [85] M. Brokate, K. Dreßler, and P. Krejčí, “Rainflow counting and energy dissipation for hysteresis models in elastoplasticity,” *Eur. J. Mech. Solid*, vol. 15, no. 4, pp. 705–737, 1996.
- [86] M. Brokate and J. Sprekels, “Phase Transitions and Hysteresis,” in *Hysteresis and Phase Transitions*, Springer, New York, NY, 1996, pp. 150–174.
- [87] “Eurocode 3: Design of steel structures - Part 1-1: General rules and rules for buildings.” CEN, May-2005.
- [88] “EN10025-1- Hot Rolled products of structural steels, Brussels, Belgium.” CEN, 2004.
- [89] “EN10025-2- Hot Rolled products of structural steels, Brussels, Belgium.” CEN, 2004.
- [90] E08 Committee, “Test Method for Strain-Controlled Fatigue Testing,” ASTM International.

## BIOGRAFIJA AUTORA

Petar Knežević je rođen 20.07.1988. u Novom Pazaru. U Lešku (AP Kosovo i Metohija) je završio osnovnu školu „Stana Bačanin“, kao đak generacije i nosilac diplome “Vuk Stefanović Karadžić” za učenike osnovnih škola. Srednju Arhitektonsko tehničku školu je završio u Beogradu sa prosekom 5.00 uz nagradu za đaka generacije.

Osnovne akademske studije na Građevinskom fakultetu u Beogradu upisao je školske 2007/08. godine, a diplomirao je 2011. godine na Modulu Konstrukcije, sa prosečnom ocenom 9.37. Sintezni projekat pod naslovom „Projekat stambeno poslovne zgrade  $P_0+P_r+8$ “ (mentor prof. dr Dušan Najdanović) odbranio je na Katedri za materijale i konstrukcije sa ocenom 10 (deset) i time stekao zvanje diplomiranog inženjera građevinarstva. Diplomске akademske (master) studije na Građevinskom fakultetu u Beogradu upisao je školske 2011/2012. godine, a diplomirao je 2012. godine na Modulu Konstrukcije, sa prosečnom ocenom 9.71. Master rad pod naslovom „Idejni projekat dvorane za male sportove“ (mentor prof. dr Dejan Bajić) odbranio je na Katedri za materijale i konstrukcije sa ocenom 10 (deset) i time stekao zvanje master inženjera građevinarstva.

Petar je dobitnik nagrade iz fonda prof. Dušana Krajčinovića za izuzetne rezultate na predmetima Katedre za tehničku mehaniku i Teoriju konstrukcija u školskoj 2009/2010.

Doktorske akademske studije na Građevinskom fakultetu u Beogradu upisao je školske 2013/2014. godine. Položio je sve ispite predviđene nastavnim planom sa prosečnom ocenom 9.75. U zvanje saradnika u nastavi na Državnom Univerzitetu u Novom Pazaru, izabran je u junu 2013. godine, gde je angažovan na predmetima Metod konačnih elemenata, Stabilnost konstrukcija, Teorija površinskih nosača, Dinamika konstrukcija i Ispitivanje konstrukcija. U zvanje asistenta na studijskom programu Građevinarstvo, izabran u februaru 2016. godine.

Učestvovao je akreditaciji Laboratorije za građevinske materijale „prof. dr Vera Nikolić-Stanojević“ na Državnom univerzitetu u Novom Pazaru, kao Lice odgovorno za kvalitet i odgovorni stručnjak.

Koautor je dva rada objavljena u međunarodnom časopisu sa SCI liste, četiri rada objavljenih u domaćim naučnim časopisima, kao i pet radova objavljenih u zbornicima međunarodnih naučnih skupova.

.Govori i piše engleski jezik i poznaje osnove ruskog jezika.

**Prilog 1.**

## **Izjava o autorstvu**

Potpisani-a     Petar Knežević    

Broj indeksa     905/13    

### **Izjavljujem**

da je doktorska disertacija pod naslovom

**PREISACH- OV MODEL HISTERZISA ZA ANALIZU KONSTRUKCIJA IZRAĐENIH OD ČELIKA SA IZRAŽENIM PLATOOM TEČENJA PRI CIKLIČNOM OPTEREĆENJU**

- rezultat sopstvenog istraživačkog rada,
- da predložena disertacija u celini ni u delovima nije bila predložena za dobijanje bilo koje diplome prema studijskim programima drugih visokoškolskih ustanova,
- da su rezultati korektno navedeni i
- da nisam kršio/la autorska prava i koristio intelektualnu svojinu drugih lica.

**Potpis doktoranda**

U Beogradu, \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_



### Prilog 3.

## Izjava o korišćenju

Ovlašćujem Univerzitetsku biblioteku „Svetozar Marković“ da u Digitalni repozitorijum Univerziteta u Beogradu unese moju doktorsku disertaciju pod naslovom:

PREISACH- OV MODEL HISTERZISA ZA ANALIZU KONSTRUKCIJA IZRAĐENIH OD ČELIKA SA IZRAŽENIM PLATOOM TEČENJA PRI CIKLIČNOM OPTEREĆENJU

koja je moje autorsko delo.

Disertaciju sa svim prilogima predao/la sam u elektronskom formatu pogodnom za trajno arhiviranje.

Moju doktorsku disertaciju pohranjenu u Digitalni repozitorijum Univerziteta u Beogradu mogu da koriste svi koji poštuju odredbe sadržane u odabranom tipu licence Kreativne zajednice (Creative Commons) za koju sam se odlučio/la.

1. Autorstvo
2. Autorstvo – nekomercijalno
3. Autorstvo – nekomercijalno – bez prerade
4. Autorstvo – nekomercijalno – deliti pod istim uslovima
5. Autorstvo – bez prerade
6. Autorstvo – deliti pod istim uslovima

(Molimo da zaokružite samo jednu od šest ponuđenih licenci, kratak opis licenci dat je na poleđini lista).

**Potpis doktoranda**

U Beogradu, \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

1. Autorstvo - Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, i prerade, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence, čak i u komercijalne svrhe. Ovo je najslobodnija od svih licenci.
2. Autorstvo – nekomercijalno. Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, i prerade, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence. Ova licenca ne dozvoljava komercijalnu upotrebu dela.
3. Autorstvo - nekomercijalno – bez prerade. Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, bez promena, preoblikovanja ili upotrebe dela u svom delu, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence. Ova licenca ne dozvoljava komercijalnu upotrebu dela. U odnosu na sve ostale licence, ovom licencom se ograničava najveći obim prava korišćenja dela.
4. Autorstvo - nekomercijalno – deliti pod istim uslovima. Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, i prerade, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence i ako se prerada distribuira pod istom ili sličnom licencom. Ova licenca ne dozvoljava komercijalnu upotrebu dela i prerada.
5. Autorstvo – bez prerade. Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, bez promena, preoblikovanja ili upotrebe dela u svom delu, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence. Ova licenca dozvoljava komercijalnu upotrebu dela.
6. Autorstvo - deliti pod istim uslovima. Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, i prerade, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence i ako se prerada distribuira pod istom ili sličnom licencom. Ova licenca dozvoljava komercijalnu upotrebu dela i prerada. Slična je softverskim licencama, odnosno licencama otvorenog koda.