УНИВЕРЗИТЕТ У НИШУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Владислава М. Миленковић

Карактеристични геометријски објекти и пројективна пресликавања Ајзенхартових простора и уопштења

Докторска дисертација

Ниш, 2020.

UNIVERSITY OF NIŠ
FACULTY OF SCIENCES AND MATHEMATICS

Vladislava M. Milenković

Characteristic Geometric Objects and Projective Mappings of Eisenhart Spaces and Generalizations

Doctoral Dissertation

Niš, 2020.

Подаци о докторској дисертацији

Ментор:	др Милан Златановић, ванредни професор, Природно-математички факулет, Универзитет у Нишу
Наслов:	Карактеристични геометријски објекти и пројективна пресликавања Ајзенхартових простора и уопштења
Резиме:	Ова дисертација се бави генералисаним Ајнштајновим просторима, Ајзенхарт-Римановим просторима, Ајзенхарт-Келеровим просторима, Ајзенхарт-Келеровим просторима треће врсте и просторима са несиметричном афином конексијом. Тензори Ајнштајновог типа су посматрани у генералисаним Ајнштајновим просторима. Пронађене су неке релације које задовољавају тензори Ајнштајновог типа. Разматрана су геодезијска пресликавања Т-повезаних генералисаних Ајнштајнових простора на Риманов простор. Изучавана су геодезијска пресликавања између Ајзенхарт-Римановог и Ајзенхарт-Келеровог простора треће врсте, при чему је посебно разматран случај када ови простори имају једнаке торзије у одговарајућим тачкама. Разматрана су холоморфно пројективна пресликавања између Ајзенхарт-Келерових простора, а као њихов специјалан случај разматрана су и еквиторзиона холоморфно пројективна пресликавања. Добијени су инваријантни геометријски објекти, који представљају генерализације холоморфно пројективног тензора. Изучавана су скоро геодезијска пресликавања друге врсте у случају простора са несиметричном афином конексијом. Пронађен је нови облик основне једначине скоро геодезијских пресликавања друге врсте помоћу Нијенхуисовог тензора. Уведени су Нијенхуисови тензори прве и друге врсте и добијене су неке релације које они задовољавају. Изучавана су и бихоломорфно пројективна и еквиторзиона бихоломорфно пројективна пресликавања између Ајзенхарт-Риманових простора. Добијене су неке релације и неки инваријантни геометријски објекти.
Научна област:	Математичке науке
Научна дисциплина:	Диференцијална геометрија
Кључне речи:	простори несиметричне афине конексије, генералисани Риманови простори, генералисани Келерови простори, геодезијска пресликавања, скоро геодезијска пресликавања, холоморфно пројективна пресликавања, бихоломорфно пројективна пресликавања, Ајнштајнови тензори, тензор Нијенхуиса, инваријантни геометријски објекти
УДК:	514.763.2+514.763.4/.5+514.764.2/.4+514.774
CERIF класификација:	P150 Геометрија, алгебарска топологија
Тип лиценце Креативне заједнице:	**CC BY-NC-ND**

Data on Doctoral Dissertation

Doctoral Supervisor:	Milan Zlatanović, PhD, associate professor at Faculty of Sciences and Mathematics, University of Niš
Title:	Characteristic Geometric Objects and Projective Mappings of Eisenhart Spaces and Generalizations
Abstract:	The thesis deals with generalized Einstein spaces, Eisenhart-Riemannian spaces, Eisenhart-Kählerian spaces, Eisenhart-Kählerian spaces of the third type and spaces with non-symetric affine connection. Einstein type tensors are represented in the generalized Einstein spaces. Some relations of Einstein type tensors are obtained. Also, geodesic mappings of T-connected generalized Einstein spaces onto Riemannian space are considered. Geodesic mappins between Eisenhart-Riemannian space and Eisenhart-Kählerian space of the third type were studied, and specially the case when these spaces have the same torsion at corresponding points. Also, holomorphically projective mappings of two Eisenhart-Kählerian spaces were considered, and specially the case of equitorsion holomorphically projective mappings. We obtain quantites that are generalizations of the holomorphically projective tensor i.e. they are invariants. Almost geodesic mappings of the second type of spaces with non-symmetric affine connection are considered. A new form of the basic equation of almost geodesic mappings was found using the Nijenhuis tensor. Nijenhuis tensors of the first and second kind were introduced. Some relations of Nijenhuis tensors are obtained. Biholomorphically projective mappings and equitorsion biholomorphically projective mappings of two Eisenhart-Riemannian spaces were considered. Some relations and some ivariant geometric objects are obtained.
Scientific Field:	Mathematics
Scientific Discipline:	Differential geometry
Key Words:	non-symmetric affine connection spaces, generalized Riemannian spaces, generalized Kählerian spaces, geodesic mappings, almost geodesic mappings, holomorphically projective mappings, biholomorphically projective mappings, Einstein type tensors, Nijenhuis tensor, invariant geometric objects
UDC:	514.763.2+514.763.4/.5+514.764.2/.4+514.774
CERIF Classification:	P150 Geometry, algebraic topology
Creative Commons License Type:	**CC BY-NC-ND**

Прилог 4/1

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, **РБР**:	
Идентификациони број, **ИБР**:	
Тип документације, **ТД**:	монографска
Тип записа, **ТЗ**:	текстуални
Врста рада, **ВР**:	докторска дисертација
Аутор, **АУ**:	Владислава М. Миленковић
Ментор, **МН**:	Милан Љ. Златановић
Наслов рада, **НР**:	Карактеристични геометријски објекти и пројективна пресликавања Ајзенхартових простора и уопштења
Језик публикације, **ЈП**:	српски
Језик извода, **ЈИ**:	енглески
Земља публиковања, **ЗП**:	Србија
Уже географско подручје, **УГП**:	Србија
Година, **ГО**:	2020.
Издавач, **ИЗ**:	ауторски репринт
Место и адреса, **МА**:	Ниш, Вишеградска 33.
Физички опис рада, **ФО**: (поглавља/страна/ цитата/табела/слика/графика/прилога)	5/115/128/0/0/0/0
Научна област, **НО**:	математика
Научна дисциплина, **НД**:	диференцијална геометрија
Предметна одредница/Кључне речи, **ПО**:	простори несиметричне афине конексије, генералисани Риманови простори, генералисани Келерови простори, геодезијска пресликавања, скоро геодезијска пресликавања, холоморфно пројективна пресликавања, бихоломорфно пројективна пресликавања, Ајнштајнови тензори, тензор Нијенхуиса, инваријантни геометријски објекти
УДК	514.763.2+514.763.4/.5+514.764.2/.4+514.774
Чува се, **ЧУ**:	библиотека
Важна напомена, **ВН**:	

Извод, **ИЗ**:	Ова дисертација се бави генералисаним Ајнштајновим просторима, Ајзенхарт-Римановим просторима, Ајзенхарт-Келеровим просторима, Ајзенхарт-Келеровим просторима треће врсте и просторима са несиметричном афином конексијом. Тензори Ајнштајновог типа су посматрани у генералисаним Ајнштајновим просторима. Пронађене су неке релације које задовољавају тензори Ајнштајновог типа. Разматрана су геодезијска пресликавања T-повезаних генералисаних Ајнштајнових простора на Риманов простор. Изучавана су геодезијска пресликавања између Ајзенхарт-Римановог и Ајзенхарт-Келеровог простора треће врсте, при чему је посебно разматран случај када ови простори имају једнаке торзије у одговарајућим тачкама. Разматрана су холоморфно пројективна пресликавања између Ајзенхарт-Келерових простора, а као њихов специјалан случај разматрана су и еквиторзиона холоморфно пројективна пресликавања. Добијени су инваријантни геометријски објекти, који представљају генерализације холоморфно пројективног тензора. Изучавана су скоро геодезијска пресликавања друге врсте у случају простора са несиметричном афином конексијом. Пронађен је нови облик основне једначине скоро геодезијских пресликавања друге врсте помоћу Nијенхуисовог тензора. Уведени су Nијенхуисови тензори прве и друге врсте и добијене су неке релације које они задовољавају. Изучавана су и бихоломорфно пројективна и еквиторзиона бихоломорфно пројективна пресликавања између Ајзенхарт-Риманових простора. Добијене су неке релације и неки инваријантни геометријски објекти.
Датум прихватања теме, **ДП**:	07.5.2018.
Датум одбране, **ДО**:	
Чланови комисије, **КО**: Председник:	
Члан:	
Члан, ментор:	

Образац Q4.09.13 - Издање 1

Прилог 4/2

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, **ANO**:	
Identification number, **INO**:	
Document type, **DT**:	monograph
Type of record, **TR**:	textual
Contents code, **CC**:	doctoral dissertation
Author, **AU**:	Vladislava M. Milenković
Mentor, **MN**:	Milan Lj. Zlatanović
Title, **TI**:	Characteristic Geometric Objects and Projective Mappings of Eisenhart Spaces and Generalizations
Language of text, **LT**:	Serbian
Language of abstract, **LA**:	English
Country of publication, **CP**:	Serbia
Locality of publication, **LP**:	Serbia
Publication year, **PY**:	2020.
Publisher, **PB**:	author's reprint
Publication place, **PP**:	Niš, Višegradska 33.
Physical description, **PD**: (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)	5/115/128/0/0/0/0
Scientific field, **SF**:	mathematics
Scientific discipline, **SD**:	differential geometry
Subject/Key words, **S/KW**:	non-symmetric affine connection spaces, generalized Riemannian spaces, generalized Kählerian spaces, geodesic mappings, almost geodesic mappings, holomorphically projective mappings, biholomorphically projective mappings, Einstein type tensors, Nijenhuis tensor, invariant geometric objects
UC	514.763.2+514.763.4/.5+514.764.2/.4+514.774
Holding data, **HD**:	library
Note, **N**:	

Abstract, **AB**:	The thesis deals with generalized Einstein spaces, Eisenhart-Riemannian spaces, Eisenhart-Kählerian spaces, Eisenhart-Kählerian spaces of the third type and spaces with non-symetric affine connection. Einstein type tensors are represented in the generalized Einstein spaces. Some relations of Einstein type tensors are obtained. Also, geodesic mappings of T-connected generalized Einstein spaces onto Riemannian space are considered. Geodesic mappins between Eisenhart-Riemannian space and Eisenhart-Kählerian space of the third type were studied, and specially the case when these spaces have the same torsion at corresponding points. Also, holomorphically projective mappings of two Eisenhart-Kählerian spaces were considered, and specially the case of equitorsion holomorphically projective mappings. We obtain quantites that are generalizations of the holomorphically projective tensor i.e. they are invariants. Almost geodesic mappings of the second type of spaces with non-symmetric affine connection are considered. A new form of the basic equation of almost geodesic mappings was found using the Nijenhuis tensor. Nijenhuis tensors of the first and second kind were introduced. Some relations of Nijenhuis tensors are obtained. Biholomorphically projective mappings and equitorsion biholomorphically projective mappings of two Eisenhart-Riemannian spaces were considered. Some relations and some ivariant geometric objects are obtained.
Accepted by the Scientific Board on, **ASB**:	07.5.2018.
Defended on, **DE**:	
Defended Board, **DB**: President:	
Member:	
Member, Mentor:	

Образац Q4.09.13 - Издање 1

Предговор

Риманова геометрија (у ширем смислу) је теорија Римановог простора. Основе Риманове геометрије је поставио још Б. Риман у свом раду *"О претпоставкама, које леже у основама геометрије"*, у коме су изложене само идеје. Даље су Риманову геометрију развили други математичари, посебно Ричи, а затим и Ајнштајн у вези са теоријом релативности. Ајнштајн је 1916. године објавио своју Општу теорију релативности, у којој се као простор у коме се одвијају физичке појаве узима јединствени просторно-временски континуум, у коме је метрика одређена са

$$(ds)^2 = g_{ij}dx^i dx^j, \quad g_{ij}(x) = g_{ji}(x), \quad i, j = 1, 2, 3, 4,$$

при чему g_{ij} зависе од распореда маса у простору. Дакле, са математичке тачке гледишта, простор Опште теорије релативности је Риманов простор R_4. Тачка (x^1, x^2, x^3, x^4) у Општој теорији релативности се зове *догађај*, јер је са прве три координате одређено *место*, а четвртом *време*.

Мотивација за проучавање простора несиметричне афине конексије потиче од Ајнштајна. Наиме, Ајнштајн није био задовољан Општом теоријом релативности, па је, почев од 1923. године, радио на проналажењу Јединствене теорије поља, која би обухватила гравитационо и електромагнетно поље. У даљим радовима је користио комплексан основни тензор g_{ij}, чији је реални део симетричан, а имагинарни антисиметричан по индексима i, j. У Ајнштајновим радовима [14–17] се симетрични део афине конексије односи на гравитацију, док се тензор торзије односи на електомагнетизам. Након Ајнштајна, допринос теорији простора несиметричне афине конексије је дао и Л. П. Ајзенхарт, који је увео дефиницију генералисаног Римановог простора [18]. Генералисан Риманов простор у смислу Ајзенхартове дефиниције је N-димензиона диференцијабилна многострукост снабдевена несиметричним основним тензором g_{ij}. Такве просторе овде називамо Ајзенхарт-Римановим просторима. Теоријом простора несиметричне афине конексије су се даље бавили или се и даље баве Ф. Граиф [21], С. Бохнер [10], К. Нитеску [70], М. Првановић [79–82], С. М. Минчић [45, 47–57], М. С. Станковић [57, 59, 74, 75, 91, 93–98, 105], Љ. С. Велимировић [61, 65, 66, 100], М. Љ. Златановић [98, 102, 120, 121, 124, 125] и многи други.

Многи проблеми који се односе на просторе несиметричне афине конексије и на генералисане Риманове просторе, као њихов специјалан случај, су и данас остали неразјашњени, а отворена су и многа нова питања. Користећи познате резултате који се односе на просторе симетричне и несиметричне афине конексије, Риманове и Ајзенхарт-Риманове просторе, али и на пресликавања ових простора, у овој дисертацији су уопштени неки појмови и пронађени неки нови резултати. Дисертација се састоји из пет глава:

1. Увод,

2. Генералисани Ајнштајнови тензори,

3. Уопштења Келерових простора,

4. Неке основне једначине скоро геодезијских пресликавања другог типа,

5. Бихоломорфно пројективна пресликавања.

Прва глава је уводног карактера. У њој су наведени познати појмови и резултати који су нам потребни за даљи рад.

Друга глава се заснива на резултатима који су добијени у радовима [109, 111]. Разматрана су нека уопштења Ајнштајновог тензора

$$E^i_j = R^i_j - \frac{1}{2}\delta^i_j R,$$

тј. дефинисани су Ајнштајнови тензори прве, друге, треће и четврте врсте у случају Ајзенхарт-Римановог простора и добијене су релације аналогне релацији $E^i_{j;i} = 0$, где је са $(;)$ означено коваријантно диференцирање у односу на $\Gamma^i_{\underline{jk}}$. У овој глави су посматрани и генералисани Ајнштајнови простори прве и друге врсте и геодезијска пресликавања T-повезаних генералисаних Ајнштајнових простора.

У трећој глави, која је заснована на радовима [126, 127], су разматрана уопштења (елиптичких) Келерових простора. Посматрани су Ајзенхарт-Келерови простори GK_N, који су дефинисани као N-димензиони Ајзенхарт-Риманови простори са несиметричним метричким тензором g_{ij} и скоро комплексном структуром F^i_j, за коју важе релације [96]

$$
\begin{aligned}
&F^h_p F^p_i = -\delta^h_i\,,\\
&g_{\underline{pq}} F^p_i F^q_j = g_{\underline{ij}}, \quad g^{\underline{ij}} = g^{\underline{pq}} F^i_p F^j_q,\\
&F^h_{i\underset{\theta}{|}j} = 0, \quad (\theta = 1,2),
\end{aligned}
$$

где је са $\underset{\theta}{|}$ означено коваријантно диференцирање врсте $\theta = 1,2$, у односу на метрички тензор g_{ij}, као и Ајзенхарт-Келерови простори треће врсте $G\underset{3}{K}_N$, који су N-димензиони Ајзенхарт-Риманови простори са несиметричним метричким тензором g_{ij} и скоро комплексном структуром F^i_j, за коју важе релације [119]

$$
\begin{aligned}
&F^h_p F^p_i = -\delta^h_i\,,\\
&g_{\underline{pq}} F^p_i F^q_j = g_{\underline{ij}}, \quad g^{\underline{ij}} = g^{\underline{pq}} F^i_p F^j_q,\\
&F^h_{i\underset{3}{|}j} = 0,\\
&F^h_{i;j} = 0,
\end{aligned}
$$

где је $\underset{3}{|}$ коваријантни извод треће врсте у односу на несиметричну конексију Γ^i_{jk}. Добијени су потребни и довољни услови да пресликавање $f : GR_N \to G\underset{3}{\overline{K}}_N$ буде геодезијско, као и потребни и довољни услови да пресликавање $f : GR_N \to G\underset{3}{\overline{K}}_N$ буде еквиторзионо геодезијско. Изучавана су холоморфно пројективна пресликавања Ајзенхарт-Келерових простора и пронађени су инваријантни геометријски објекти еквиторзионог холоморфно пројективног пресликавања $f : GK_N \to G\overline{K}_N$.

Четврта глава се базира на резултатима који су добијени у [110]. Разматрана су скоро геодезијска пресликавања другог типа простора GA_N са несиметричном афином конексијом на простор $G\overline{A}_N$ са несиметричном афином конексијом. Дефинисани су Нијенхуисови тензори прве и друге врсте у простору $G\overline{A}_N$, пронађене су неке релације које ови тензори задовољавају, као и потребни и довољни услови да простор несиметричне афине конексије допушта пресликавање $\underset{1}{\pi}_2(e), e \neq 0$, тј. пресликавање $\underset{2}{\pi}_2(e), e \neq 0$.

Пета глава је посвећена бихоломорфно пројективним пресликавањима Ајзенхарт-Риманових простора. Успостављене су бихоломорфно пројективне везе између одговарајућих тензора кривине Ајзенхарт-Риманових простора GR_N и $G\overline{R}_N$. Као последице ових веза, добијене су и еквиторзионе бихоломорфно пројективне везе између одговарајућих тензора кривине Ајзенхарт-Риманових простора GR_N и $G\overline{R}_N$. На крају, одређен је Томасов еквиторзиони бихоломорфно пројективни параметар, који је инваријантан геометријски објекат еквиторзионог бихоломорфно пројективног пресликавања.

Дисертација је урађена под менторством проф. др Милана Златановића. Овом приликом му се захваљујем на великој помоћи коју ми је пружио у току израде дисертације, пратећи читав ток израде, као и на корисним примедбама и сугестијама, које су допринеле коначном изгледу дисертације.

Користим прилику да се захвалим и проф. др Љубици Велимировић на подршци коју ми је пружила током студија, као и на корисним примедбама и сугестијама.

Овом приликом се захваљујем и проф. др Зорану Ракићу који је, поред бројних других обавеза, прихватио да буде члан комисије за одбрану ове дисертације.

Посебну захвалност дугујем својој породици на разумевању, одрицању и подршци коју ми је несебично пружала приликом израде ове дисертације.

Ниш, 10.12.2019. Владислава М. Миленковић

Садржај

ГЛАВА 1

Увод

У овом делу ћемо изложили већ познате основне резултате везане за теорију диференцијабилне многострукости. Детаљнија објашњења се могу наћи у књигама [2, 11, 12, 18, 39, 43, 62, 63, 87, 88, 117, 118].

1.1 Диференцијабилне многострукости

Нека је $\mathcal{M}^N$ произвољан скуп, чије елементе зовемо тачкама и нека за сваку тачку $P \in \mathcal{M}^N$ постоји подскуп U_P, $P \in U_P \subset \mathcal{M}^N$, који се по закону φ пресликава узајамно једнозначно и непрекидно на отворен подскуп Еуклидског[1] простора E^N. Тада је

$$\varphi(P) = x = (x^1 \ldots, x^N) \in E^N. \tag{1.1.1}$$

У овом случају су x^i координате тачке $P \in \mathcal{M}^N$ и означавамо

$$P(x^1, \ldots, x^N) = P(x).$$

Подскуп U_P је околина тачке P, а пар (U_P, φ) називамо *локалним координатним системом.* Под претпоставком да су испуњени одређени услови, $\mathcal{M}^N$ се на овај начин може прекрити околинама и ако је (U'_P, φ') други локални координатни систем за исту тачку P, тј. $P \in U_P \cap U'_P$, биће $x^{i'}$ друге локалне координате за тачку P, при чему претпостављa-

[1] $E\upsilon\kappa\lambda\epsilon\iota\delta\eta\varsigma$, Еуклид из Александрије, антички математичар

мо да у E^N постоји пресликавање

$$\lambda : \varphi(U_P \cap U'_P) \to \varphi'(U_P \cap U'_P), \tag{1.1.2}$$

такво да је

$$\lambda : \varphi(P) \to \varphi'(P), \quad \text{тј.} \quad \lambda : (x^1, \dots, x^N) \to (x^{1'}, \dots, x^{N'}). \tag{1.1.3}$$

Наведеном пресликавању одговара трансформација локалних координата

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1, \dots, x^N), \quad i' = 1', \dots, N'. \tag{1.1.4}$$

Ако претпоставимо да је пресликавање λ узајамно једнозначно и непрекидно, тада постоји инверзно пресликавање λ^{-1}, па из (1.1.4) следи

$$x^i = x^i(x^{1'}, \dots, x^{N'}), \quad i = 1, \dots, N. \tag{1.1.5}$$

Сада можемо дати дефиницију диференцијабилне многострукости.

Дефиниција 1.1.1. [62,63] *Скуп $\mathcal{M}^N$, заједно са скупом $\{(U_P, \varphi)\}$ локалних координатних система, при чему функције* $(1.1.4), (1.1.5)$ *за трансформацију локалних координата имају непрекидне парцијалне изводе свакога реда и*

$$\mathcal{J} = \frac{\partial(x^1, \dots, x^N)}{\partial(x^{1'}, \dots, x^{N'})} \neq 0, \tag{1.1.6}$$

зове се **диференцијабилна многострукост**. *Број N је* **димензија** *диференцијабилне многострукости $\mathcal{M}^N$.*

Аналогно дефиницији криве у E^N, дефинише се крива на $\mathcal{M}^N$:

Дефиниција 1.1.2. [62, 63] **Крива** *на диференцијабилној многострукости $\mathcal{M}^N$ је скуп тачака у $\mathcal{M}^N$, чије су координате функције једног реалног параметра t:*

$$x^i = x^i(t), \quad t \in (a, b) \subset \mathbb{R}, \tag{1.1.7}$$

под условом да нису сви dx^i/dt истовремено једнаки нули.

1.2 Тангентни простор многострукости

Постоји више начина да се дефинише појам тангентног вектора на многострукости. Најпре ћемо навести *алгебарску дефиницију* тангентног вектора диференцијабилне многострукости $\mathcal{M}^N$ у тачки P.

Дефиниција 1.2.1. [44, 63] *Нека је $\mathcal{F}(\mathcal{M}^N)$ скуп свих диференцијабилних функција на многострукости $\mathcal{M}^N$.* **Тангентни вектор** *диференцијабилне многострукости, у тачки P те многострукости, је свако пресликавање*

$$X_P : \mathcal{F}(\mathcal{M}^N) \to R, \tag{1.2.1}$$

које задовољава релације

$$X_P(\alpha f + \beta g) = \alpha X_P(f) + \beta X_P(g), \tag{1.2.2}$$

$$X_P(fg) = X_P(f)g(P) + f(P)X_P(g), \tag{1.2.3}$$

где је $\alpha, \beta \in R$, а $f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{M}^N)$. Тачка P је **почетак вектора** *X_P.*

Укратко можемо да кажемо да су тангентни вектори диференцирања на скаларним функцијама.

Тангентни вектор у тачки $P \in \mathcal{M}^N$ је могуће дефинисати и на следећи начин (*физичка дефиниција*):

Дефиниција 1.2.2. [44] **Тангентни вектор** *у тачки $P \in \mathcal{M}^N$ је N-торка реалних бројева $(a^1, ..., a^N)$ у локалном координатном систему $x^1, ..., x^N$, тако да је у било ком другом координатном систему $\widetilde{x}^1, ..., \widetilde{x}^N$, исти вектор дат одговарајућом N-торком $(\widetilde{a}^1, ..., \widetilde{a}^N)$, при чему је*

$$\widetilde{a}^i = \sum_j \frac{\partial \widetilde{x}^i}{\partial x^j}\Big|_P a^j.$$

Дакле, тангентни вектори су елементи простора R^N чије се координате при промени координатног система трансформишу на специјалан начин.

У литератури се срећемо и са *геомертијском дефиницијом* тангентног вектора у тачки $P \in \mathcal{M}^N$:

Дефиниција 1.2.3. [63] **Тангентни вектор** *на многострукости* $\mathcal{M}^N$ *у тачки* $P \in \mathcal{M}^N$ *је класа еквиваленције диференцијабилних кривих*

$$c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathcal{M}^N$$

које испуњавају услов $c(0) = P$*, где је класа еквиваленције* $\sim$ *одређена са*

$$c \sim c^* \Leftrightarrow (\varphi \circ c)(0) = (\varphi \circ c^*)(0),$$

за сваки локални координатни систем (U, φ) *који садржи тачку* P*.*

Дакле, тангентни вектори су тангенте кривих које леже на многострукости.

Дефиниција 1.2.4. [63] *Векторски простор чији су елементи сви тангентни вектори са почетком у тачки* $P \in \mathcal{M}^N$ *назива се* **тангентни простор многострукости** $\mathcal{M}^N$ *и означаваћемо га са* $T_P(\mathcal{M}^N)$*.*

База $(\partial_i) = \left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right)$ простора $T_P(\mathcal{M}^N)$ јесте *координатна (природна) база*. Произвољан вектор v, у овој бази, се може записати у облику $v = v^\alpha \partial_\alpha$, где су v^i компоненте вектора v у односу на базу (∂_i) и где смо користили Ајнштајнову[2] конвенцију о сабирању[3].

Линеарно пресликавање

$$\omega : T_P(\mathcal{M}^N) \to R,$$

у тачки P, јесте *коваријантни вектор (ковектор или* 1*-форма)*.

Диференцијали (dx^i) координатних функција у тачки P чине базу дуалног (котангентног) простора $T_P^*(\mathcal{M}^N)$.

[2] Albert Einstein (1879-1955, теоријски физичар)

[3] **Ајнштајнова конвенција**: Ако се један индекс у неком члану (сабирку) јавља истовремено као доњи и као горњи, по том индексу се подразумева сабирање и без знака Σ.

1.3 Тензори

Тензорски рачун, као математички апарат, има велику примену у Општој теорији релативности, механици, техници и диференцијалној геометрији, тј. поједине величине везане за наведене дисциплине су тензори (тензори деформације, напона, тренутне угаоне брзине, вискозности, Ајнштајнов тензор,...). Тензорски рачун се често назива и Ричијев[4] рачун[5] у част италијанског математичара који је у XIX веку први увео два закона трансформације и ознаке са горњим и доњим индексима. Сам појам *тензор* је први користио Ајнштајн 1916. године. У наставку ћемо најпре дати неке дефиниције тензора.

По свим аргументима линеарно пресликавање

$$t_s^r : \underbrace{T_P^*(\mathcal{M}^N) \times \ldots \times T_P^*(\mathcal{M}^N)}_{r \text{ пута}} \times \underbrace{T_P(\mathcal{M}^N) \times \ldots \times T_P(\mathcal{M}^N)}_{s \text{ пута}} \to R, \qquad (1.3.1)$$

где су простори $T_P(\mathcal{M}^N)$ и $T_P^*(\mathcal{M}^N)$ генерисани базама (∂_i) и (dx^i), зове се *тензор типа* (r, s). Општије, важи:

Дефиниција 1.3.1. [63] *Ако је V векторски простор димензије N и V^* њему дуални простор тада је по свим аргументима линеарно пресликавање*

$$t_s^r : \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{r \text{ пута}} \times \underbrace{V \times \ldots \times V}_{s \text{ пута}} \to R \qquad (1.3.2)$$

тензор типа (r, s) *над векторским простором V контраваријантног степена r и коваријантног степена s.*

Скуп свих тензора типа (r, s) над векторским простором V означавамо са $\mathcal{T}_s^r(V)$. Тензори који припадају скупу $\mathcal{T}_0^r(V)$ су *контраваријантни тензори.* Специјалан случај контраваријантних тензора чине *контраваријантни вектори* (1-*форме*) који припадају скупу $\mathcal{T}_0^1(V)$. Тензори који припадају скупу $\mathcal{T}_s^0(V)$ су *коваријантни тензори.* Као специјалан случај коваријантних тензора посматрамо елементе скупа $\mathcal{T}_1^0(V)$, које називамо *коваријантним векторима*, тј. *линеарним формама.*

[4]Gregorio Ricci-Curbastro (1853-1925, италијански математичар)
[5]Ricci-calculus

Дефиниција 1.3.2. [63] *Систем* $T^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}$ *је* **тензор** *типа* (r,s) *ако при трансформацији координата* (1.1.4) *важи закон трасформације*

$$T^{i'_1\dots i'_r}_{j'_1\dots j'_s}=x^{i'_1}_{i_1}\dots x^{i'_r}_{i_r}x^{j_1}_{j'_1}\dots x^{j_s}_{j'_s}T^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}, \tag{1.3.3}$$

где смо означили $x^{i'}_i=\dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}$, $x^i_{i'}=\dfrac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}$.

Скуп тензора истог типа је линеаран векторски простор над пољем реалних бројева, при чему је унутрашња операција сабирања тензора, а спољашња операција множења тензора скаларом. Осим операција сабирања односно одузимања које су дефинисане само за тензоре истог типа, могућа је операција множења два тензора произвољног типа, при чему је производ тензора типа (r,s) и тензора типа (p,q) тензор типа $(r+p,s+q)$.

Дефиниција 1.3.3. *Нека је* A *тензор типа* $(1,1)$, $A_P:T_P(\mathcal{M}^N)\to T_P(\mathcal{M}^N)$. **Контракција (траг)** *је одређена релацијом*

$$CA\big|_P=\mathrm{Tr}(A_P)=\sum_i\langle A_Pe_i,e_i\rangle, \tag{1.3.4}$$

где је $\langle,\rangle$ *скаларни производ,* $e_1,...,e_N$ *ортонормирана база за* $T_P(\mathcal{M}^N)$. *У произвољној бази* $b_1,...,b_N$ *таквој да је* $Ab_j=\sum\limits_i A^i_jb_i$, *траг се може изразити формулом* $\sum\limits_i A^i_i$.

Нека је A *тензор типа* $(1,s)$. *Тада је за свако* $i\in\{1,...,s\}$ *и фиксиране* $X_j, j\neq i$, *одређена контракција* C_iA *релацијом*

$$C_iA(X_1,...,X_{i-1},X_{i+1},...X_s)=\sum_{j=1}^N\langle A(X_1,...,X_{i-1},e_j,X_{i+1},...X_s),e_j\rangle. \tag{1.3.5}$$

Контракција (траг) тензора A *типа* $(1,s)$ *је тензор* C_iA *типа* $(0,s-1)$.

Напомена 1.3.1. *Уобичајена употреба трага матрице нема смисла у случају тензора типа* $(0,2)$. *У том случају посматрамо траг њему придруженог тензора типа* $(1,1)$. *Ако је* A *тензор типа* $(0,2)$ *и њему придружени* *тензор* A^* *типа* $(1,1)$, *који је дефинисан релацијом*

$$A(X,Y) = \langle A^*X, Y\rangle = g(A^*X, Y),$$

онда дефинишемо $\operatorname{Tr}_g A = \operatorname{Tr} A^*$.

Напомена 1.3.2. *Ако користимо Ричијеву нотацију,* $\operatorname{Tr}(A^i_j)$ *се означава са* A^i_i.

1.4 Афина конексија и простори афине конексије

Иако су сви тангентни простори изоморфни међу собом, не постоји правило којим се успоставља веза измађу вектора тангентних простора различитих и блиских тачака. Такво правило се мора додатно успоставити и назива се *конексија (повезаност)*.

Сагласно општој идеји локалности у диференцијалној геометрији, питање конексије сводимо на проблем проглашавања парова вектора из суседних тангентних простора за међусобно паралелне векторе. Другачије речено, локално је конексија пресликавање вектора из $T_P(\mathcal{M}^N)$ у векторе суседних тангентних простора.

Дефиниција 1.4.1. [63] **Афина конексија** *на многострукости* $\mathcal{M}^N$ *је пресликавање* ∇, *које пару* (X,Y) *векторских поља придружује векторско поље* $\nabla_Y X$ *тако да важи:*

$\mathcal{A}_1 :\ \nabla_Y(X_1 + X_2) = \nabla_Y X_1 + \nabla_Y X_2,$

$\mathcal{A}_2 :\ \nabla_Y(fX) = (Yf)\cdot X + f\cdot \nabla_Y X,$

$\mathcal{A}_3 :\ \nabla_{Y_1+Y_2} X = \nabla_{Y_1} X + \nabla_{Y_2} X,$

$\mathcal{A}_4 :\ \nabla_{fY} X = f\cdot \nabla_Y X.$

Векторско поље $\nabla_{\partial_k}\partial_j$, у локалним координатама $(x^1\dots,x^N)$, по базним векторима ∂_i могуће је разложити као

$$\nabla_{\partial_k}\partial_j = L^\alpha_{jk}\partial_\alpha, \tag{1.4.1}$$

где су L^i_{jk} *коефицијенти афине конексије* ∇, који описују начин на који се базни вектори мењају од тачке до тачке. Применом једначине (1.4.1) на функције x^i добија се да је

$$(\nabla_{\partial_k}\partial_j)(x^i) = L^\alpha_{jk}\frac{\partial x^i}{\partial x^\alpha} = L^\alpha_{jk}\delta^i_\alpha = L^i_{jk}. \tag{1.4.2}$$

Дефиниција 1.4.2. [63] *Диференцијабилна многострукост $\mathcal{M}^N$, на којој је дефинисана афина конексија ∇, назива се* **простор афине конексије**.

У случају да се у простору $(\mathcal{M}_N, \nabla)$ са координата x^i у локалној карти $(\mathcal{U}, \varphi)$ пређе на координате $x^{i'}$ у локалној карти $(\mathcal{U}', \varphi')$, у тачкама пресека $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}'$ ће важити веза

$$L^{i'}_{j'k'} = x^{i'}_i x^j_{j'} x^k_{k'} L^i_{jk} + x^{i'}_i x^i_{j'k'}, \tag{1.4.3}$$

као и инверзна веза

$$L^i_{jk} = x^i_{i'} x^{j'}_j x^{k'}_k L^{i'}_{j'k'} + x^i_{i'} x^{i'}_{jk}, \tag{1.4.4}$$

где смо означили

$$x^{i'}_i = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \quad \text{и} \quad x^i_{j'k'} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}. \tag{1.4.5}$$

Дефиниција 1.4.3. *Нека су X и Y два диференцијабилна векторска поља на многострукости $\mathcal{M}^N$ и нека је $f : \mathcal{M}^N \to R$ диференцијабилна функција, тј. нека је $f \in \mathcal{F}(\mathcal{M}^N)$. Релацијом*

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)) \tag{1.4.6}$$

се дефинише векторско поље $[X, Y]$ које називамо **комутатором** *векторских поља X и Y.*

Дефиниција 1.4.4. *Геометијски објекат $\overset{0}{\nabla}_Y X$, одређен релацијом*

$$\overset{0}{\nabla}_Y X = \frac{1}{2}(\nabla_Y X + \nabla_X Y - [X, Y]), \tag{1.4.7}$$

је **симетрични део** *афине конексије ∇.*

Координатна форма симетричног дела афине конексије је

$$L^i_{\underline{jk}} = \frac{1}{2}(L^i_{jk} + L^i_{kj}) \tag{1.4.8}$$

и назива се *симетрични део коефицијента афине конексије* L^i_{jk}.

Дефиниција 1.4.5. *Геометијски објекат* $T(X,Y)$, *одређен релацијом*

$$T(X,Y) = \frac{1}{2}(\nabla_Y X - \nabla_X Y + [X,Y]), \tag{1.4.9}$$

је антисиметрични део тј. **тензор торзије** *афине конексије* ∇.

Координатна форма антисиметричног дела афине конексије је

$$L^i_{\underset{\vee}{jk}} = \frac{1}{2}(L^i_{jk} - L^i_{kj}) \tag{1.4.10}$$

и назива се *антисиметрични део коефицијента афине конексије* L^i_{jk}.

За афину конексију ∇ важи

$$\nabla_Y X = \overset{0}{\nabla}_Y X + T(X,Y), \tag{1.4.11}$$

тј. коефицијент афине конексије L^i_{jk} може бити представљен у облику

$$L^i_{jk} = L^i_{\underline{jk}} + L^i_{\underset{\vee}{jk}}. \tag{1.4.12}$$

У Ајнштајновим радовима [14–17] се симетрични део $\overset{0}{\nabla}_Y X$ афине конексије ∇ односи на гравитацију, док се тензор торзије $T(X,Y)$ односи на електомагнетизам.

Афина конексија ∇ је *симетрична* ако за свака два векторска поља X и Y из $\mathcal{M}^N$ важи

$$\nabla_X Y = \nabla_Y X.$$

Тада, за коефицијенте афине конексије важи $L^i_{jk} = L^i_{kj}$. Простор снабдевен симетричном афином конексијом означавамо са A_N и називамо *простором симетричне афине конексије.*

Ако функције L^i_{jk} нису симетричне по доњим индексима, осим ∇ могућа је и конексија $\widetilde{\nabla}$, где у (1.4.1) уместо L^i_{jk} имамо L^i_{kj}. За конексије ∇ и $\widetilde{\nabla}$ кажемо да су једна другој *дуалне*, тј. да је ∇ (а самим тим и $\widetilde{\nabla}$) *несиметрична афина конексија.* Простор снабдевен несиметричном афином конексијом означавамо са GA_N и називамо *простором несиметричне афине конексије.*

Допринос теорији простора, како симетричне, тако и несиметричне, афине конексије су својим радом дали и још увек дају многи математичари. Изучавањем простора симетричне афине конексије бавили су се Н. С. Синјуков [87], Ј. Микеш са коауторима [3–9, 23, 33, 34, 38, 39, 41, 43, 44, 114], В. Ф. Каган [30] као и многи други, док су просторе несиметричне афине конексије изучавали Л. П. Ајзенхарт [18], Ф. Граиф [21], С. Бохнер [10], К. Нитеску [70], М. Првановић [79–82], С. М. Минчић [45, 47–57], М. С. Станковић [57, 59, 74, 75, 91, 93–98, 105], Љ. С. Велимировић [61, 65, 66, 100], М. Љ. Златановић [98, 102, 120, 121, 124, 125] и многи други.

На основу афине конексије простора GA_N, имајући у виду несиметричност коефицијента афине конексије L^i_{jk}, дефинисане су четири врсте коваријантног диференцирања [48, 50, 53]. На пример, за тензор a^i_j у GA_N имамо

$$\underset{1}{\nabla}_k a^i_j = a^i_{j\underset{1}{|}k} = a^i_{j,k} + L^i_{pk}a^p_j - L^p_{jk}a^i_p, \tag{1.4.13}$$

$$\underset{2}{\nabla}_k a^i_j = a^i_{j\underset{2}{|}k} = a^i_{j,k} + L^i_{kp}a^p_j - L^p_{kj}a^i_p, \tag{1.4.14}$$

$$\underset{3}{\nabla}_k a^i_j = a^i_{j\underset{3}{|}k} = a^i_{j,k} + L^i_{pk}a^p_j - L^p_{kj}a^i_p, \tag{1.4.15}$$

$$\underset{4}{\nabla}_k a^i_j = a^i_{j\underset{4}{|}k} = a^i_{j,k} + L^i_{kp}a^p_j - L^p_{jk}a^i_p, \tag{1.4.16}$$

при чему запета означава парцијално диференцирање $\dfrac{\partial}{\partial x^k}$. Уколико је $T(X,Y)=0$, релације (1.4.13), (1.4.14), (1.4.15) и (1.4.16) се своде на

$$\nabla_k a^i_j = a^i_{j;k} = a^i_{j,k} + L^i_{\underline{pk}}a^p_j - L^p_{\underline{jk}}a^i_p. \tag{1.4.17}$$

Постоји један Ричијев идентитет изведен на основу коваријантног диференцирања (1.4.17). На основу тог Ричијевог идентитета добијен је један тензор кривине, који је у простору GA_N дат релацијом [39, 43, 44, 87]

$$R(X;Y,Z)=\overset{0}{\nabla}_Z\overset{0}{\nabla}_Y X-\overset{0}{\nabla}_Y\overset{0}{\nabla}_Z X-\overset{0}{\nabla}_{[Y,Z]}X. \tag{1.4.18}$$

Користећи четири врсте коваријантног диференцирања (1.4.13), (1.4.14), (1.4.15) и (1.4.16), С. М. Минчић је, на многострукоси са несиметричном афином конексијом, посматрао разне идентитете Ричијевог типа и показао да је међу дванаест тензора кривине, који се јављају у овим идентитетима, њих пет линеарно независних [48–51, 53, 56]. Навешћемо операторски облик пет линеарно независних тензора кривине на многострукости са несиметричном афином конексијом, које ћемо користити у наставку:

$$\begin{aligned}
\underset{1}{R}(X;Y,Z)&=\underset{1}{\nabla}_Y\underset{1}{\nabla}_Z X-\underset{1}{\nabla}_Z\underset{1}{\nabla}_Y X-\underset{1}{\nabla}_{[Y,Z]}X,\\
\underset{2}{R}(X;Y,Z)&=\underset{2}{\nabla}_Y\underset{2}{\nabla}_Z X-\underset{2}{\nabla}_Z\underset{2}{\nabla}_Y X-\underset{2}{\nabla}_{[Y,Z]}X,\\
\underset{3}{R}(X;Y,Z)&=\underset{2}{\nabla}_Y\underset{1}{\nabla}_Z X-\underset{1}{\nabla}_Z\underset{2}{\nabla}_Y X+\underset{2}{\nabla}_{\underset{1}{\nabla}_Z Y}X-\underset{1}{\nabla}_{\underset{2}{\nabla}_Y Z}X,\\
\underset{4}{R}(X;Y,Z)&=\underset{2}{\nabla}_Y\underset{1}{\nabla}_Z X-\underset{1}{\nabla}_Z\underset{2}{\nabla}_Y X+\underset{2}{\nabla}_{\underset{2}{\nabla}_Z Y}X-\underset{1}{\nabla}_{\underset{1}{\nabla}_Y Z}X,\\
\underset{5}{R}(X;Y,Z)&=\frac{1}{2}\big(\underset{1}{\nabla}_Y\underset{1}{\nabla}_Z X-\underset{2}{\nabla}_Z\underset{1}{\nabla}_Y X+\underset{2}{\nabla}_Y\underset{2}{\nabla}_Z X-\underset{1}{\nabla}_Z\underset{2}{\nabla}_Y X\\
&\quad+\underset{1}{\nabla}_{[Z,Y]}X+\underset{2}{\nabla}_{[Z,Y]}X\big).
\end{aligned} \tag{1.4.19}$$

1.5 Ајзенхарт-Риманови простори

Наведимо најпре дефиницију Римановог[6] простора:

Дефиниција 1.5.1. [62,63] *Диференцијабилна многострукост R_N у чијим тачкама су задате функције*

$$g_{ij}(x^1,\dots,x^N)=g_{ji}(x^1,\dots,x^N) \tag{1.5.1}$$

тако да је дуж криве у R_N

$$(ds)^2=g_{ij}dx^idx^j, \tag{1.5.2}$$

[6] Georg Fredrich Bernahard Riemann (1826-1866, немачки математичар)

где је

$$det(g_{ij}) \equiv |g_{ij}| \neq 0, \tag{1.5.3}$$

зове се **Риманова многострукост** *или* **Риманов простор**.

Риманова геометрија (у ширем смислу) је теорија Римановог простора. Основе Риманове геометрије је поставио још Б. Риман у свом раду *"О претпоставкама, које леже у основама геометрије"*, у коме су изложене само идеје [86]. Даље су Риманову геометрију развили други математичари, посебно Ричи, а затим и Ајнштајн у вези са теоријом релативности. Наиме, Ајнштајн је 1905. године изложио своју специјалну теорију релативности, у којој се простор и време посматрају као јединствен просторно-временски континуум, тј. као 4-димензиони псеудоеуклидски простор у коме је I квадратна форма

$$(ds)^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 - (cdt)^2, \tag{1.5.4}$$

где су x^i просторне координате, c-брзина светлости, t-време.

Ајнштајн је 1916. године објавио своју Општу теорију релативности, у којој се као простор у коме се одвијају физичке појаве узима опет јединствени просторно-временски континуум, у коме је метрика одређена са

$$(ds)^2 = g_{ij}dx^i dx^j, \quad g_{ij}(x) = g_{ji}(x), \quad i, j = 1, 2, 3, 4, \tag{1.5.5}$$

при чему сада g_{ij} нису константе као у (1.5.4), већ зависе од распореда маса у простору. Дакле, са математичке тачке гледишта, простор Опште теорије релативности је Риманов простор R_4. Тачка (x^1, x^2, x^3, x^4) у Општој теорији релативности се зове *догађај*, јер је са прве три координате одређено *место*, а четвртом *време*.

До генерализације Римановог простора долазимо изостављањем услова симетричности основног тензора g_{ij}. Наиме, генералисан Риманов простор GR_N, у смислу Ајзенхартове[7] дефиниције [19], је диференцијабилна N-димензиона многострукост, снабдевена несиметричним основним тензором g_{ij}. Основни тензор можемо да представимо као збир

[7] Luther Pfahler Eisenhart (1876-1965, амерички математичар)

симетричног дела $g_{\underline{ij}}$ и антисиметричног дела $g_{\underset{\vee}{ij}}$, где је

$$g_{\underline{ij}} = \frac{1}{2}(g_{ij} + g_{ji}) = \frac{1}{2}g_{(ij)}, \quad g_{\underset{\vee}{ij}} = \frac{1}{2}(g_{ij} - g_{ji}) = \frac{1}{2}g_{<ij>}, \tag{1.5.6}$$

при чему $\underline{ij}$ и (ij) означавају, редом, симетризацију са дељењем и симетризацију без дељења по индексима i и j, док $\underset{\vee}{ij}$ и $< ij >$ означавају, редом, антисиметризацију са дељењем и антисиметризацију без дељења по индексима i и j.

Теоријом генералисаних Риманових простора бавили су се или се још увек баве многи аутори [13, 19, 20, 58, 64, 65, 67, 68, 76–78, 89, 90, 99, 103, 113, 120, 123]. Надаље ћемо генералисане Риманове просторе називати *Ајзенхарт-Римановим просторима.*

Спуштање и дизање индекса је дефинисано тензорима $g^{\underline{ij}}$ и $g_{\underline{ij}}$, редом, где је $g^{\underline{ij}}$ одређено са

$$g^{\underline{ij}} g_{\underline{jk}} = \delta^i_k, \tag{1.5.7}$$

а δ^i_k је Кронекеров[8] δ-симбол.

Генералисани Кристофелови[9] симболи прве врсте простора GR_N су дати формулом

$$\Gamma_{i.jk} = \frac{1}{2}(g_{ji,k} - g_{jk,i} + g_{ik,j}), \tag{1.5.8}$$

где је, на пример, $g_{ij,k} = \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$. Коефицијенти конексије простора GR_N су генералисани Кристофелови симболи друге врсте

$$\Gamma^i_{jk} = g^{\underline{ip}}\Gamma_{p.jk}, \tag{1.5.9}$$

где је $||g^{\underline{ij}}|| = ||g_{\underline{ij}}||^{-1}$ и $g_{\underline{ij}} = \frac{1}{2}(g_{ij} + g_{ji})$, уз претпоставку да је $\det ||g_{ij}|| \neq 0$, $\det ||g_{\underline{ij}}|| \neq 0$. У општем случају је $\Gamma^i_{jk} \neq \Gamma^i_{kj}$. Симетричан и антисиметричан део за Γ^i_{jk} су дати формулама

$$\Gamma^i_{\underline{jk}} = \frac{1}{2}(\Gamma^i_{jk} + \Gamma^i_{kj}), \quad \Gamma^i_{\underset{\vee}{jk}} = \frac{1}{2}(\Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}). \tag{1.5.10}$$

[8]Leopold Kronecker (1823-1891, немачки математичар)
[9]Elwin Bruno Cristoffel (1829-1900, немачки математичар)

Величина $\Gamma^i_{\underline{jk}}$, која одговара симертичном тензору $g_{\underline{ij}}$, је *конексија Леви-Чивита*[10]. Величину $T^i_{jk} = \Gamma^i_{\underset{\vee}{jk}}$ називамо *тензором торзије* простора GR_N. Очигледно,

$$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{\underline{jk}} + T^i_{jk}. \tag{1.5.11}$$

Напомена 1.5.1. *Ајзенхарт-Риманов простор GR_N представља специјалан случај простора GA_N, у коме су коефицијенти конексије генералисани Кристофелови симболи друге врсте.*

Употреба несиметричног основног тензора и несиметричне конексије је постала нарочито актуелна након објављивања Ајнштајнових радова [14–17]. Ови радови се везују за зачетак Јединствене теорије поља, где је симетричан део $g_{\underline{ij}}$ основног тензора g_{ij} у вези са гравитацијом, а антисиметричан део $g_{\underset{\vee}{ij}}$ са електромагнетизмом.

Теорема 1.5.1. [29] *Нека је GR_N Ајзенхарт-Риманов простор снабдевен основним тензором g_{ij}, $\Gamma^i_{\underline{jk}}$ конексија Леви-Чивита која одговара тензору $g_{\underline{ij}}$. Нека је Γ^i_{jk} линеарна конексија са торзијом T^i_{jk}. Тада је Γ^i_{jk} јединствено одређено формулом*

$$\Gamma_{i.jk} = \Gamma_{i.\underline{jk}} + \frac{1}{2}\Big[T_{i.jk} + T_{k.ij} - T_{j.ki}\Big] - \frac{1}{2}\Big[g_{\underline{ik};j} + g_{\underline{ij};k} - g_{\underline{kj};i}\Big], \tag{1.5.12}$$

где је $T_{k.ij} := g_{\underline{kp}} T^p_{ij}$.

Лако се уочава да је једначину (1.5.8) могуће записати у облику

$$\begin{aligned}
\Gamma_{i.jk} &= \frac{1}{2}(g_{ji,k} - g_{jk,i} + g_{ik,j}) \\
&= \frac{1}{2}(g_{\underline{ji},k} - g_{\underline{jk},i} + g_{\underline{ik},j}) + \frac{1}{2}(g_{\underset{\vee}{ji},k} - g_{\underset{\vee}{jk},i} + g_{\underset{\vee}{ik},j}) \\
&= \Gamma_{i.\underline{jk}} + \frac{1}{2} dg_{ijk},
\end{aligned} \tag{1.5.13}$$

при чему је $\Gamma_{i.\underline{jk}}$ конексија Леви-Чивита која одговара симетричном тензору $g_{\underline{ij}}$, а dg_{ijk} је одређено релацијом $dg_{ijk} = g_{\underset{\vee}{ji},k} - g_{\underset{\vee}{jk},i} + g_{\underset{\vee}{ik},j}$. На основу једначине (1.5.13), видимо да је симетрични део метричког тензора коваријантно константан, као и да је торзија $T_{i.jk}$ одређена једначином $T_{i.jk} = \frac{1}{2} dg_{ijk}$.

[10] Tulio Levi-Civita (1873-1941, италијански математичар)

У Ајзенхарт-Римановом простору постоје четири врсте коваријантног диференцирања [48, 53]. На пример, за тензор $a^{i_1\dots i_A}_{j_1\dots j_B}$ у GR_N имамо

$$a^{i_1\dots i_A}_{j_1\dots j_B\underset{1}{|}k}=a^{i_1\dots i_A}_{j_1\dots j_B,k}+\sum_{p=1}^{A}\Gamma^{i_p}_{\alpha k}a^{i_1\dots i_{p-1}\alpha i_{p+1}\dots i_A}_{j_1\dots j_B}-\sum_{q=1}^{B}\Gamma^{\alpha}_{j_q k}a^{i_1\dots i_A}_{j_1\dots j_{q-1}\alpha j_{q+1}\dots j_B},\tag{1.5.14}$$

$$a^{i_1\dots i_A}_{j_1\dots j_B\underset{2}{|}k}=a^{i_1\dots i_A}_{j_1\dots j_B,k}+\sum_{p=1}^{A}\Gamma^{i_p}_{k\alpha}a^{i_1\dots i_{p-1}\alpha i_{p+1}\dots i_A}_{j_1\dots j_B}-\sum_{q=1}^{B}\Gamma^{\alpha}_{k j_q}a^{i_1\dots i_A}_{j_1\dots j_{q-1}\alpha j_{q+1}\dots j_B},\tag{1.5.15}$$

$$a^{i_1\dots i_A}_{j_1\dots j_B\underset{3}{|}k}=a^{i_1\dots i_A}_{j_1\dots j_B,k}+\sum_{p=1}^{A}\Gamma^{i_p}_{\alpha k}a^{i_1\dots i_{p-1}\alpha i_{p+1}\dots i_A}_{j_1\dots j_B}-\sum_{q=1}^{B}\Gamma^{\alpha}_{k j_q}a^{i_1\dots i_A}_{j_1\dots j_{q-1}\alpha j_{q+1}\dots j_B},\tag{1.5.16}$$

$$a^{i_1\dots i_A}_{j_1\dots j_B\underset{4}{|}k}=a^{i_1\dots i_A}_{j_1\dots j_B,k}+\sum_{p=1}^{A}\Gamma^{i_p}_{k\alpha}a^{i_1\dots i_{p-1}\alpha i_{p+1}\dots i_A}_{j_1\dots j_B}-\sum_{q=1}^{B}\Gamma^{\alpha}_{j_q k}a^{i_1\dots i_A}_{j_1\dots j_{q-1}\alpha j_{q+1}\dots j_B},\tag{1.5.17}$$

при чему запета означава парцијално диференцирање $\dfrac{\partial}{\partial x^k}$. Уколико је $T^i_{jk}=0$, релације (1.5.14), (1.5.15), (1.5.16) и (1.5.17) се своде на

$$a^{i_1\dots i_A}_{j_1\dots j_B|k}=a^{i_1\dots i_A}_{j_1\dots j_B,k}+\sum_{p=1}^{A}\Gamma^{i_p}_{\underline{k\alpha}}a^{i_1\dots i_{p-1}\alpha i_{p+1}\dots i_A}_{j_1\dots j_B}-\sum_{q=1}^{B}\Gamma^{\alpha}_{\underline{k j_q}}a^{i_1\dots i_A}_{j_1\dots j_{q-1}\alpha j_{q+1}\dots j_B}.\tag{1.5.18}$$

Доказано је да у Ајзенхарт-Римановом простору GR_N важе наредне теореме:

Теорема 1.5.2. [50] *Нека је $\underline{g}=det(g_{\underline{ij}})$. Тада у Ајзенхарт-Римановом простору GR_N важи:*

$$\Gamma^p_{pi}=\Gamma^p_{ip}=\frac{\partial}{\partial x^k}\ln\sqrt{|\underline{g}|}.\tag{1.5.19}$$

Теорема 1.5.3. [50] *У Ајзенхарт-Римановом простору GR_N, тензор $g_{\underline{ij}}$ је коваријантно константан у односу на све четири врсте коваријантног диференцирања, тј. задовољава једначину*

$$g_{\underline{ij}\underset{\nu}{|}k}=0,\ \nu=1,\dots,4.\tag{1.5.20}$$

Теорема 1.5.4. [50] *У Ајзенхарт-Римановом простору GR_N, тензор $g^{\underline{ij}}$ је коваријантно константан у односу на прву и другу врсту коваријантног диференцирања, тј. задовољава једначину*

$$g^{\underline{ij}}{}_{\underset{\nu}{|}m} = 0,\ \nu = 1, 2. \tag{1.5.21}$$

Приметимо да, на основу Теореме 1.5.2., за тензор торзије важи [50]

$$T^p_{pi} = T^p_{ip} = 0. \tag{1.5.22}$$

С. Минчић је разматрао дванаест тензора кривине у Ајзенхарт-Римановом простору GR_N. Доказао је да је пет од њих линеарно независно [53] и увео је следећу нотацију:

$$\mathcal{A} = \Gamma^i_{\underset{\vee}{jm};n},\ \mathcal{A}' = \Gamma^i_{\underset{\vee}{jn};m},\ \mathcal{B} = \Gamma^\alpha_{\underset{\vee}{jm}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{\alpha n}},\ \mathcal{B}' = \Gamma^\alpha_{\underset{\vee}{jn}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{\alpha m}},\ \mathcal{C} = \Gamma^\alpha_{\underset{\vee}{mn}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{\alpha j}}, \tag{1.5.23}$$

где је са (;) означен коваријантни извод у односу на симетричну метричку конексију $\Gamma^i_{\underline{jm}}$. У том случају, сваки од ових дванаест тензора кривине може да буде представљен у облику

$$\mathcal{K} = R + \alpha\mathcal{A} + \alpha'\mathcal{A}' + \beta\mathcal{B} + \beta'\mathcal{B}' + \gamma\mathcal{C}, \tag{1.5.24}$$

где је

$$\begin{aligned}
&(\alpha, \beta, \alpha', \beta', \gamma) \in \{(1, 1, -1, -1, 0), (-1, 1, 1, -1, 0), (1, -1, 1, 1, -2),\\
&(1, -1, 1, 1, 2), (0, -1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1, 0), (0, -1, 0, -1, 0),\\
&\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right), (-1, -3, 1, -1, 0),\\
&(-1, 1, 1, 3, 0), (1, 1, -1, 3, 0), (1, -3, -1, -1, 0)\},
\end{aligned} \tag{1.5.25}$$

а R је одговарајући тензор кривине у односу на симетричну метричку конексију $\Gamma^i_{\underline{jm}}$, тј.

$$R^i_{jmn} = \Gamma^i_{\underline{jm};n} - \Gamma^i_{\underline{jn};m} + \Gamma^p_{\underline{jm}}\Gamma^i_{\underline{pn}} - \Gamma^p_{\underline{jn}}\Gamma^i_{\underline{pm}}. \tag{1.5.26}$$

У овом раду ћемо разматрати пет независних тензора кривине [81],

$$
\begin{aligned}
\underset{1}{R}{}^i_{jmn} &= \Gamma^i_{jm,n} - \Gamma^i_{jn,m} + \Gamma^p_{jm}\Gamma^i_{pn} - \Gamma^p_{jn}\Gamma^i_{pm},\\
\underset{2}{R}{}^i_{jmn} &= \Gamma^i_{mj,n} - \Gamma^i_{nj,m} + \Gamma^p_{mj}\Gamma^i_{np} - \Gamma^p_{nj}\Gamma^i_{mp},\\
\underset{3}{R}{}^i_{jmn} &= \Gamma^i_{jm,n} - \Gamma^i_{nj,m} + \Gamma^p_{jm}\Gamma^i_{np} - \Gamma^p_{nj}\Gamma^i_{pm} + \Gamma^p_{mn}(\Gamma^i_{pj} - \Gamma^i_{jp}),\\
\underset{4}{R}{}^i_{jmn} &= \Gamma^i_{jm,n} - \Gamma^i_{nj,m} + \Gamma^p_{jm}\Gamma^i_{np} - \Gamma^p_{nj}\Gamma^i_{pm} + \Gamma^p_{nm}(\Gamma^i_{pj} - \Gamma^i_{jp}),\\
\underset{5}{R}{}^i_{jmn} &= \frac{1}{2}(\Gamma^i_{jm,n} + \Gamma^i_{mj,n} - \Gamma^i_{jn,m} - \Gamma^i_{nj,m}\\
&\quad + \Gamma^p_{jm}\Gamma^i_{pn} - \Gamma^p_{jn}\Gamma^i_{mp} + \Gamma^p_{mj}\Gamma^i_{pn} - \Gamma^p_{nj}\Gamma^i_{pm}).
\end{aligned}
\tag{1.5.27}
$$

Означавајући коваријантно диференцирање у односу на $\Gamma^i_{\underline{jm}}$ знаком ";", за тензоре кривине имамо [45]:

$$
\begin{aligned}
\underset{1}{R}{}^i_{jmn} &= R^i_{jmn} + T^i_{jm;n} - T^i_{jn;m} + T^p_{jm}T^i_{pn} - T^p_{jn}T^i_{pm},\\
\underset{2}{R}{}^i_{jmn} &= R^i_{jmn} + T^i_{jn;m} - T^i_{jm;n} + T^p_{jm}T^i_{pn} - T^p_{jn}T^i_{pm},\\
\underset{3}{R}{}^i_{jmn} &= R^i_{jmn} + T^i_{jm;n} + T^i_{jn;m} - T^p_{jm}T^i_{pn} + T^p_{jn}T^i_{pm} - 2T^i_{pj}T^p_{mn},\\
\underset{4}{R}{}^i_{jmn} &= R^i_{jmn} + T^i_{jm;n} + T^i_{jn;m} - T^p_{jm}T^i_{pn} + T^p_{jn}T^i_{pm} + 2T^i_{pj}T^p_{mn},\\
\underset{5}{R}{}^i_{jmn} &= R^i_{jmn} + T^p_{jm}T^i_{pn} + T^p_{jn}T^i_{pm}.
\end{aligned}
\tag{1.5.28}
$$

Контракцијом по индексима i и n у тензору кривине прве врсте $\underset{1}{R}{}^i_{jmn}$ простора GR_N добијамо Ричијев тензор прве врсте

$$
\underset{1}{R}{}_{jm} = \underset{1}{R}{}^p_{jmp} = R_{jm} + T^p_{jm;p} + T^p_{jq}T^q_{mp},
\tag{1.5.29}
$$

док контракцијом по индексима i и n у тензорима кривине $\underset{2}{R}{}^i_{jmn}$, $\underset{3}{R}{}^i_{jmn}$, $\underset{4}{R}{}^i_{jmn}$, $\underset{5}{R}{}^i_{jmn}$, редом, добијамо Ричијеве тензоре друге, треће, четврте и пете врсте [56]

$$
\begin{aligned}
\underset{2}{R}_{jm} &= \underset{2}{R}^p_{jmp} = R_{jm} - T^p_{jm;p} + T^p_{jq}T^q_{mp}, \\
\underset{3}{R}_{jm} &= \underset{3}{R}^p_{jmp} = R_{jm} + T^p_{jm;p} - T^p_{jq}T^q_{mp}, \\
\underset{4}{R}_{jm} &= \underset{4}{R}^p_{jmp} = R_{jm} + T^p_{jm;p} + 3T^p_{jq}T^q_{mp}, \\
\underset{5}{R}_{jm} &= \underset{5}{R}^p_{jmp} = R_{jm} + T^p_{jq}T^q_{pm}.
\end{aligned} \tag{1.5.30}
$$

где је $R_{jm} = R^p_{jmp}$ Ричијев тензор у односу на симетричну конексију $\Gamma^i_{\underline{jm}}$.

С. М. Минчић је у раду [54], на основу дванаест тензора кривине, дефинисао и дванаест коваријантних тензора кривине у Ајзенхарт-Римановом простору GR_N. Сагласно претходној нотацији, на основу пет независних тензора кривине $\underset{\theta}{R}^i_{jmn}$, $\theta = 1, ..., 5$, дефинисани су одговарајући коваријантни тензори кривине

$$
\underset{\theta}{R}_{ijmn} = g_{\underline{ip}} \underset{\theta}{R}^p_{jmn}, \ \theta = 1, ..., 5. \tag{1.5.31}
$$

У раду [54] је доказано да су коваријантни тензори кривине $\underset{1}{R}_{ijmn}$ и $\underset{2}{R}_{ijmn}$ антисиметрични по индексима i и j, као и по индексима m и n, тј. доказано је да важе релације

$$
\underset{1}{R}_{ijmn} = -\underset{1}{R}_{jimn} = -\underset{1}{R}_{ijnm}, \tag{1.5.32}
$$

$$
\underset{2}{R}_{ijmn} = -\underset{2}{R}_{jimn} = -\underset{2}{R}_{ijnm}. \tag{1.5.33}
$$

Коваријантни тензори кривине $\underset{3}{R}_{ijmn}$ и $\underset{4}{R}_{ijmn}$ су антисиметрични само по индексима i и j, тј. важе релације [54]

$$
\underset{3}{R}_{ijmn} = -\underset{3}{R}_{jimn}, \ \underset{3}{R}_{ijmn} \neq -\underset{3}{R}_{ijnm}, \tag{1.5.34}
$$

$$
\underset{4}{R}_{ijmn} = -\underset{4}{R}_{jimn}, \ \underset{4}{R}_{ijmn} \neq -\underset{4}{R}_{ijnm}, \tag{1.5.35}
$$

док коваријантни тензор кривине $\underset{5}{R}_{ijmn}$ није антисиметричан ни по индексима i и j, ни по индексима m и n, тј. [54]

$$
\underset{5}{R}_{ijmn} \neq -\underset{5}{R}_{jimn}, \ \underset{5}{R}_{ijmn} \neq -\underset{5}{R}_{ijnm}. \tag{1.5.36}
$$

1.6 Тензор деформације и основне релације између тензора кривине

Нека су дати Ајзенхарт-Риманови простори GR_N и $G\overline{R}_N$ и пресликавање $f : GR_N \to G\overline{R}_N$. Ако тачка M у простору GR_N има локалне координате (x^i), њој одговарајућа тачка $\overline{M}$ по пресликавању f има локалне координате $(\overline{x}^i) = (f^i(x^1, ..., x^N))$, $i = 1, ..., N$, при чему функције $f^i(x^1, ..., x^N)$ припадају класи $C^r, r > 2$, и $\det\left(\dfrac{\partial f^i}{\partial x^i}\right) \neq 0$.

Просторе GR_N и $G\overline{R}_N$ ћемо посматрати у заједничком, по пресликавању f, координатном систему. Нека су Γ^h_{ij} и $\overline{\Gamma}^h_{ij}$ коефицијенти конексије простора GR_N и $G\overline{R}_N$ у одговарајућим тачкама $M(x)$ и $\overline{M}(x)$, редом, и нека је

$$\overline{\Gamma}^h_{ij}(x) = \Gamma^h_{ij}(x) + P^h_{ij}(x). \tag{1.6.1}$$

Тада је $P^h_{ij}(x)$ тензор који називамо тензором деформације коефицијента конексије Γ простора GR_N при пресликавању f.

У Ајзенхарт-Римановом простору GR_N имамо пет линеарно независних тензора кривине $\underset{\alpha}{R}{}^i{}_{jmn}$, $\alpha = 1, ..., 5$, који су дефинисани релацијама (1.5.27). Наредним теоремама ћемо успоставити везу између одговарајућих тензора кривине простора GR_N и $G\overline{R}_N$.

Теорема 1.6.1. [96] *Веза између тензора кривине прве врсте простора GR_N и $G\overline{R}_N$ дата је релацијом*

$$\underset{1}{\overline{R}}{}^i{}_{jmn} = \underset{1}{R}{}^i{}_{jmn} + P^i_{jm\underset{1}{|}n} - P^i_{jn\underset{1}{|}m} + P^p_{jm}P^i_{pn} - P^p_{jn}P^i_{pm} + 2T^p_{mn}P^i_{jp}, \tag{1.6.2}$$

где је P^h_{ij} тензор деформације коефицијента конексије пресликавања f, а T^h_{ij} тензор торзије конексије Γ.

Теорема 1.6.2. [96] *Веза између тензора кривине друге врсте простора GR_N и $G\overline{R}_N$ дата је релацијом*

$$\underset{2}{\overline{R}}{}^i{}_{jmn} = \underset{2}{R}{}^i{}_{jmn} + P^i_{mj\underset{2}{|}n} - P^i_{nj\underset{2}{|}m} + P^p_{mj}P^i_{np} - P^p_{nj}P^i_{mp} + 2T^p_{nm}P^i_{pj}, \tag{1.6.3}$$

где је P^h_{ij} тензор деформације коефицијента конексије пресликавања f, а T^h_{ij} тензор торзије конексије Γ.

Теорема 1.6.3. [96] *Веза између тензора кривине треће врсте простора GR_N и $G\overline{R}_N$ дата је релацијом*

$$\underset{3}{\overline{R}}{}^i_{jmn} = \underset{3}{R}{}^i_{jmn} + P^i_{jm\underset{2}{|}n} - P^i_{nj\underset{1}{|}m} + P^p_{jm}P^i_{np} - P^p_{nj}P^i_{pm} + 2P^p_{nm}(T^i_{pj} + P^i_{\underset{\vee}{pj}}), \quad (1.6.4)$$

где је P^h_{ij} тензор деформације коефицијента конексије пресликавања f, а T^h_{ij} тензор торзије конексије Γ.

Теорема 1.6.4. [96] *Веза између тензора кривине четврте врсте простора GR_N и $G\overline{R}_N$ дата је релацијом*

$$\underset{4}{\overline{R}}{}^i_{jmn} = \underset{4}{R}{}^i_{jmn} + P^i_{jm\underset{2}{|}n} - P^i_{nj\underset{1}{|}m} + P^p_{jm}P^i_{np} - P^p_{nj}P^i_{pm} + 2P^p_{mn}(T^i_{pj} + P^i_{\underset{\vee}{pj}}), \quad (1.6.5)$$

где је P^h_{ij} тензор деформације коефицијента конексије пресликавања f, а T^h_{ij} тензор торзије конексије Γ.

Теорема 1.6.5. [96] *Веза између тензора кривине пете врсте простора GR_N и $G\overline{R}_N$ дата је релацијом*

$$\begin{aligned}\underset{5}{\overline{R}}{}^i_{jmn} = \underset{5}{R}{}^i_{jmn} + \frac{1}{2}(&P^i_{jm\underset{3}{|}n} - P^i_{jn\underset{4}{|}m} + P^i_{mj\underset{4}{|}n} - P^i_{nj\underset{3}{|}m} \\ &+ P^p_{jm}P^i_{pn} - P^p_{jn}P^i_{mp} + P^p_{mj}P^i_{np} - P^p_{nj}P^i_{pm}),\end{aligned} \quad (1.6.6)$$

где је P^h_{ij} тензор деформације коефицијента конексије пресликавања f.

1.7 Системи парцијалних диференцијалних једначина Кошијевог типа

Системи парцијалних диференцијалних једначина имају велику примену у диференцијалној геометрији. Од посебног значаја су системи парцијалних диференцијалних једначина за коваријантни извод на многострукостима [39, 43, 87, 119].

Нека је D конвексан подскуп реалног n-димензионог простора R^n и нека су $F_i^p(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^N)$, $i = 1, \ldots, n$, $p = 1, \ldots, N$, функције дефинисане на скупу $\widetilde{D} \subset D \times R^N$ непрекидне по x и диференцијабилне по y на $\widetilde{D}$.

Дефиниција 1.7.1. *Систем парцијалних диференцијалних једначина*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y^p(x)}{\partial x^i} = F_i^p(x, y(x)), \quad p = 1, \ldots, N, i = 1, \ldots, n, \\ y^p(x_0) = y_0^p \end{cases} \tag{1.7.1}$$

је **Кошијевог**[11] **типа**, *где су* $y(x) = (y^1(x), \ldots, y^N(x))$ *непознате функције и* $x_0 \in D$. *Услов* $y^p(x_0) = y_0^p$ *је* **почетни (Кошијев) услов**.

У случају да је почетна вредност

$$y^p(x^0) = y_0^p, \quad p = 1, \ldots, N, \tag{1.7.2}$$

где је $x_0 \in D$ и $(x_0, y_0^p) \in \widetilde{D}$, систем (1.7.1) има највише једно решење

$$y^p = y^p(x^1, \ldots, x^n), \tag{1.7.3}$$

класе C^1 тако да је $(x, y(x)) \in \widetilde{D}$. Одавде закључујемо да опште решење система (1.7.1) зависи од r реалних параметара, где је $r \leq N$.

Нека је $F_i^p(x, y) \in C^1(\widetilde{D})$ и нека се решење тражи за $y^p \in C^2(D)$. Услови интеграбилности система парцијалних диференцијалних једначина (1.7.1) су

$$\frac{\partial^2 y^p(x)}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial^2 y^p(x)}{\partial x^k \partial x^j} = 0, \tag{1.7.4}$$

тј.

$$\frac{\partial F_j^p(x, y)}{\partial x^k} + \frac{\partial F_j^p(x, y)}{\partial y^q} \frac{\partial y^q}{\partial x^k} - \frac{\partial F_k^p(x, y)}{\partial x^j} - \frac{\partial F_k^p(x, y)}{\partial y^q} \frac{\partial y^q}{\partial x^j} = 0. \tag{1.7.5}$$

Услов (1.7.5) је задовољен за свако решење система (1.7.1), при чему је $x \in D$ произвољно. Дати услов је испуњен и за почетну вредност (1.7.2).

[11] Augustin-Louis Cauchy (1789-1957, француски математичар)

У систему (1.7.1) је, уместо парцијалног извода, могуће изабрати коваријантни извод. Због тога можемо да посматрамо систем парцијалних диференцијалних једначина у тензорском облику.

Нека је $D \subset R^N$ координатни домен у GR_N. Систем парцијалних диференцијалних једначина Кошијевог типа за коваријантни извод врсте ν, $\nu = 1, \dots, 4$, од M непознатих тензорских поља $\underset{\sigma}{\mathcal{T}}{}^{i_1\dots i_{p_\sigma}}_{j_1\dots j_{q_\sigma}}(x)$, $\sigma = 1, \dots, M$ типа (p_σ, q_σ) је систем облика

$$\underset{\sigma}{\mathcal{T}}{}^{i_1\dots i_{p_\sigma}}_{j_1\dots j_{q_\sigma}\underset{\nu}{|}k}(x) = F^{i_1\dots i_{p_\sigma}}_{j_1\dots j_{q_\sigma}k}(x, \underset{1}{\mathcal{T}}, \dots, \underset{M}{\mathcal{T}}),\ i_1, \dots, i_{p_\sigma}, j_1, \dots, j_{q_\sigma}, k = 1, \dots, N. \quad (1.7.6)$$

Уопштени идентитети Ричијевог типа за тензор $\mathcal{T}$ у Ајзенхарт-Римановом простору GR_N су:

$$\begin{aligned} \underset{\sigma}{\mathcal{T}}{}^{i_1\dots i_{p_\sigma}}_{j_1\dots j_B\underset{1}{|}mn} - \underset{\sigma}{\mathcal{T}}{}^{i_1\dots i_{p_\sigma}}_{j_1\dots j_{q_\sigma}\underset{1}{|}nm} &= \sum_{\alpha=1}^{p_\sigma} \underset{1}{R}{}^{i_\alpha}_{pmn}\binom{p}{i_\alpha}\underset{\sigma}{\mathcal{T}}{}^{\cdots}_{\cdots} - \sum_{\beta=1}^{q_\sigma} \underset{1}{R}{}^{p}_{j_\beta mn}\binom{j_\beta}{p}\underset{\sigma}{\mathcal{T}}{}^{\cdots}_{\cdots} \\ &- 2T^p_{mn}\mathcal{T}^{i_1\dots i_{p_\sigma}}_{j_1\dots j_{q_\sigma}\underset{1}{|}p}, \end{aligned} \quad (1.7.7)$$

$$\begin{aligned} \underset{\sigma}{\mathcal{T}}{}^{i_1\dots i_{p_\sigma}}_{j_1\dots j_{q_\sigma}\underset{2}{|}mn} - \underset{\sigma}{\mathcal{T}}{}^{i_1\dots i_{p_\sigma}}_{j_1\dots j_{q_\sigma}\underset{2}{|}nm} &= \sum_{\alpha=1}^{p_\sigma} \underset{2}{R}{}^{i_\alpha}_{pmn}\binom{p}{i_\alpha}\underset{\sigma}{\mathcal{T}}{}^{\cdots}_{\cdots} - \sum_{\beta=1}^{q_\sigma} \underset{2}{R}{}^{p}_{j_\beta mn}\binom{j_\beta}{p}\underset{\sigma}{\mathcal{T}}{}^{\cdots}_{\cdots} \\ &+ 2T^p_{mn}\underset{\sigma}{\mathcal{T}}{}^{i_1\dots i_{p_\sigma}}_{j_1\dots j_{q_\sigma}\underset{2}{|}p}, \end{aligned} \quad (1.7.8)$$

$$\begin{aligned} \underset{\sigma}{\mathcal{T}}{}^{i_1\dots i_{p_\sigma}}_{j_1\dots j_{q_\sigma}\underset{3}{|}mn} - \underset{\sigma}{\mathcal{T}}{}^{i_1\dots i_{p_\sigma}}_{j_1\dots j_{q_\sigma}\underset{3}{|}nm} &= \sum_{\alpha=1}^{p_\sigma} \underset{1}{R}{}^{i_\alpha}_{pmn}\binom{p}{i_\alpha}\underset{\sigma}{\mathcal{T}}{}^{\cdots}_{\cdots} - \sum_{\beta=1}^{q_\sigma} \underset{2}{R}{}^{p}_{j_\beta mn}\binom{j_\beta}{p}\underset{\sigma}{\mathcal{T}}{}^{\cdots}_{\cdots} \\ &- 2T^p_{mn}\mathcal{T}^{i_1\dots i_{p_\sigma}}_{j_1\dots j_{q_\sigma}\underset{3}{|}p}, \end{aligned} \quad (1.7.9)$$

$$\begin{aligned} \underset{\sigma}{\mathcal{T}}{}^{i_1\dots i_{p_\sigma}}_{j_1\dots j_{q_\sigma}\underset{4}{|}mn} - \underset{\sigma}{\mathcal{T}}{}^{i_1\dots i_{p_\sigma}}_{j_1\dots j_{q_\sigma}\underset{4}{|}nm} &= \sum_{\alpha=1}^{p_\sigma} \underset{2}{R}{}^{i_\alpha}_{pmn}\binom{p}{i_\alpha}\underset{\sigma}{\mathcal{T}}{}^{\cdots}_{\cdots} - \sum_{\beta=1}^{q_\sigma} \underset{1}{R}{}^{p}_{j_\beta mn}\binom{j_\beta}{p}\underset{\sigma}{\mathcal{T}}{}^{\cdots}_{\cdots} \\ &+ 2T^p_{mn}\underset{\sigma}{\mathcal{T}}{}^{i_1\dots i_{p_\sigma}}_{j_1\dots j_{q_\sigma}\underset{4}{|}p}, \end{aligned} \quad (1.7.10)$$

где смо означили

$$\binom{p}{i_\alpha}\underset{\sigma}{\mathcal{T}}{}^{\cdots}_{\cdots} = \underset{\sigma}{\mathcal{T}}{}^{i_1\ldots i_{\alpha-1}p i_{\alpha+1}\ldots i_{p_\sigma}}_{j_1\ldots j_{q_\sigma}},$$

$$\binom{j_\beta}{p}\underset{\sigma}{\mathcal{T}}{}^{\cdots}_{\cdots} = \underset{\sigma}{\mathcal{T}}{}^{i_1\ldots i_{p_\sigma}}_{j_1\ldots j_{\beta-1}p j_{\beta+1}\ldots j_{q_\sigma}},$$

а тензори $\underset{1}{R}{}^i_{jmn}$ и $\underset{2}{R}{}^i_{jmn}$ су одређени релацијом (1.5.27).

1.8 Геодезијске линије и геодезијска пресликавања простора A_N

Геодезијске линије спајају, најкраћим путевима, различите тачке простора афине конексије. Дакле, геодезијске линије простора афине конексије представљају еквивалент правама у Еуклидском простору.

Дефиниција 1.8.1. [63] *Векторско поље* $X(t)$ *се* **паралелно померa** *дуж криве* $l : (a, b) \to \mathcal{M}^N$ *ако заједно са тангентним векторским пољем* $\lambda = \lambda(t) = \dfrac{dl}{dt}$ *задовољава једначину* $\nabla_\lambda X = 0$.

Дефиниција 1.8.2. [44,63,87] *Крива* l *простора симетричне афине конексије* A_N *чији тангентни вектор паралелном померању дуж криве* l *остаје тангентни вектор је* **геодезијска линија**.

Тангентни вектор λ задовољава диференцијалну једначину

$$\frac{d\lambda^i}{dt} + L^i_{\underline{pq}}\lambda^p\lambda^q = \rho\lambda^i. \tag{1.8.1}$$

Дефиниција 1.8.3. [44, 87] *Дифеоморфизам* $f : A_N \to \overline{A}_N$ *је* **геодезијско пресликавање** *ако сваку геодезијску линију простора* A_N *преводи у геодезијску линију простора* $\overline{A}_N$.

Ако су $L^i_{\underline{jk}}$ и $\overline{L}^i_{\underline{jk}}$ коефицијенти афиних конексија простора A_N и $\overline{A}_N$, редом, тада је

$$\overline{L}^i_{\underline{jk}} = L^i_{\underline{jk}} + P^i_{\underline{jk}},$$

где је $P^i_{\underline{jk}}$ симетричан тензор који називамо тензором деформације геодезијског пресликавања f. Одавде, на основу (1.8.1), важи релација

$$P^i_{\underline{pq}}\lambda^p\lambda^q = 2\psi\lambda^i,$$

где је $\psi = \dfrac{1}{2}(\overline{\rho} - \rho)$. Основна једначина геодезијског пресликавања $f : A_N \to \overline{A}_N$ је

$$\overline{L}^i_{\underline{jk}} = L^i_{\underline{jk}} + \psi_j\delta^i_k + \psi_k\delta^i_j\,, \tag{1.8.2}$$

где је ψ_i коваријантни вектор.

Томасов[12] пројективни параметар и Вејлов[13] тензор пројективне кривине су инваријантни геометријски објекти при геодезијском пресликавању $f : A_N \to \overline{A}_N$ [87].

Томасов пројективни параметар је одређен релацијом

$$\Pi(X,Y) = \overset{0}{\nabla}_Y X - \frac{1}{N+1}\left(\mathrm{Tr}\{U \to \overset{0}{\nabla}_X UY\} + \mathrm{Tr}\{U \to \overset{0}{\nabla}_Y UX\}\right), \tag{1.8.3}$$

тј. у координатама

$$\Pi^h_{ij} = L^h_{\underline{ij}} - \frac{1}{N+1}(L^p_{\underline{ip}}\delta^h_j + L^p_{\underline{jp}}\delta^h_i\,), \tag{1.8.4}$$

док је Вејлов тензор пројективне кривине дифинисан релацијом

$$\begin{aligned} W(X,Y,Z) = R(X;Y,Z) &+ \frac{1}{N+1}\Big(Ric(Y,Z) - Ric(Z,Y)\Big)X \\ &+ \frac{1}{N^2-1}\Big(\big(N\,Ric(X,Z) + Ric(Z,X)\big)Y \\ &- \big(N\,Ric(X,Y) + Ric(Y,X)\big)Z\Big), \end{aligned} \tag{1.8.5}$$

где су $R(X;Y,Z)$ и $Ric(X,Y) = \mathrm{Tr}\{U \to R(X;Y,U)\}$ тензор кривине и Ричијев тензор, редом, у односу на симетрични део афине конексије. У координатном облику, Вејлов тензор пројективне кривине је одређен

[12]Tracy Yerkes Thomas (1885-1955, немачки математичар и физичар)
[13]Hermann Klaus Hugo Weyl (1873-1941, италијански математичар)

релацијом [87]

$$W^i_{jmn} = R^i_{jmn} + \frac{1}{N+1} R_{<mn>} + \frac{N}{N^2-1}\delta^i_{<m} R_{jn>} + \frac{1}{N^2-1}\delta^i_{<m} R_{n>j}. \quad (1.8.6)$$

У случају Риманових простора, једначине (1.8.5) и (1.8.6), се редукују, редом, на

$$W(X,Y,Z) = R(X;Y,Z) + \frac{1}{N-1}\big(Ric(X,Z)Y - Ric(X,Y)Z\big), \quad (1.8.7)$$

$$W^i_{jmn} = R^i_{jmn} + \frac{1}{N-1}\delta^i_{<m} R_{jn>}. \quad (1.8.8)$$

1.9 Геодезијске линије и геодезијска пресликавања простора $\mathbf{GA_N}$

Посматрајмо криву l која је, у простору несиметричне афине конексије GA_N, одређена једначинама [44, 63, 87]

$$x^i = x^i(t), \ (i = 1, ..., N). \quad (1.9.1)$$

Кажемо да је крива l *геодезијска линија* простора GA_N ако за тангентно векторско поље $\lambda^h(t)$ те криве важи

$$\lambda^h{}_{\underset{\theta}{|}p}(t)\lambda^p(t) = \rho(t)\lambda^h(t), \quad (\theta = 1,2; h = 1, ..., N). \quad (1.9.2)$$

Тада се у односу на обе врсте коваријантног диференцирања добија иста једначина

$$\frac{d\lambda^h(t)}{dt} + L^h_{pq}(x)\lambda^p(t)\lambda^q(t) = \rho(t)\lambda^h(t),$$

при чему је $\rho(t)$ инваријанта, а $\lambda^h(t) = \dfrac{dx^h}{dt}$, па имамо

$$\frac{d^2x^h(t)}{dt^2} + L^h_{pq}(x)\lambda^p(t)\lambda^q(t) = \rho(t)\frac{dx^h}{dt}, \quad (h,p,q = 1, ..., N), \quad (1.9.3)$$

тј. важи:

Теорема 1.9.1. *Потребан и довољан услов да крива l простора GA_N буде геодезијска линија јесте да функције* (1.9.1) *задовољавају систем диференцијалних једначина* (1.9.3).

Параметар τ за који тангентни вектор $\widetilde{\lambda}^h(\tau)$ уместо једначина облика (1.9.2) задовољава једначине облика

$$\widetilde{\lambda}^h_{\underset{\theta}{|p}}(\tau)\widetilde{\lambda}^p(\tau) = 0, \quad (\theta = 1, 2; h = 1, ..., N),$$

називамо природним параметром геодезијске линије.

Теорема 1.9.2. *Потребан и довољан услов да крива l простора GA_N буде геодезијска линија јесте да функције*

$$\widetilde{x}^h = \widetilde{x}^h(\tau), \ \ (h = 1, ..., N),$$

при чему је τ природни параметар, задовољавају систем диференцијалних једначина

$$\frac{d^2\widetilde{x}^h}{dt^2} + L^h_{pq}(\widetilde{x})\frac{d\widetilde{x}^p}{dt}\frac{d\widetilde{x}^q}{dt} = 0. \tag{1.9.4}$$

Релацијом (1.9.4) је задат систем обичних диференцијалних једначина другог реда. На основу познатог става из теорије диференцијалних једначина, за дате почетне услове

$$\widetilde{x}^h(\tau_0) = \widetilde{x}^h_0, \ \frac{d\widetilde{x}^h}{d\tau}(\tau_0) = \widetilde{\lambda}^h_0$$

у простору GR_N тај систем има јединствено решење, тј. важи:

Теорема 1.9.3. *Кроз дату тачку $M_0(\widetilde{x}^h_0)$ простора GA_N, у датом правцу $\widetilde{\lambda}^h_0$, постоји тачно једна геодезијска линија.*

Пресликавање $f : GA_N \to G\overline{A}_N$ је *геодезијско пресликавање* ако сваку геодезијску линију простора GA_N преводи у геодезијску линију простора $G\overline{A}_N$.

У [57, 96] је доказано да је пресликавање $f : GA_N \to G\overline{A}_N$ геодезијско ако и само ако коефицијенти конексије L^h_{ij} и $\overline{L}^h_{ij}$ простора GA_N и $G\overline{A}_N$, редом, задовољавају једначину

$$\overline{L}^h_{ij} = L^h_{ij} + \psi_i\delta^h_j + \psi_j\delta^h_i + \xi^h_{ij}, \tag{1.9.5}$$

где је ψ_i вектор, а ξ^h_{ij} антисиметричан тензор.

Ако су ∇ и $\overline{\nabla}$ афине конексије простора GA_N и $G\overline{A}_N$, редом, једначина (1.9.5) се, помоћу оператора, може представити на следећи начин

$$\overline{\nabla}_Y X = \nabla_Y X + \psi(X)Y + \psi(Y)X + \xi(X, Y). \tag{1.9.6}$$

Ако је $L^i_{\underset{\vee}{jk}} = 0$, тј. $T(X, Y) = 0$, једначине (1.9.5) и (1.9.6) постају, редом,

$$\overline{L}^h_{\underline{ij}} = L^h_{\underline{ij}} + \psi_i\delta^h_j + \psi_j\delta^h_i, \tag{1.9.7}$$

$$\overset{0}{\overline{\nabla}}_Y X = \overset{0}{\nabla}_Y X + \psi(X)Y + \psi(Y)X. \tag{1.9.8}$$

1.10 Еквиторзиона геодезијска пресликавања простора $\mathbf{GA_N}$

Ако претпоставимо да су тензори торзије простора GA_N и $G\overline{A}_N$ једнаки, у заједничком по пресликавању координатном систему, такво пресликавање називамо *еквиторзионим* геодезијским пресликавањем простора GA_N на $G\overline{A}_N$. Основна једначина еквиторзионог геодезијског пресликавања $f : GA_N \to G\overline{A}_N$ је [96]

$$\overline{L}^h_{ij} = L^h_{ij} + \psi_i\delta^h_j + \psi_j\delta^h_i, \tag{1.10.1}$$

тј. у операторском облику

$$\overline{\nabla}_Y X = \nabla_Y X + \psi(X)Y + \psi(Y)X. \tag{1.10.2}$$

У радовима [59, 96, 102, 121] су добијене инваријанте еквиторзионог геодезијског пресликавања простора GA_N, које су изведене из тензора кривине (1.5.27).

ГЛАВА 2

Генералисани Ајнштајнови тензори

У Општој Теорији Релативности важну улогу има Ајнштајнов тензор E^i_j, који је у Римановом простору дефинисан у односу на тензор кривине R^i_{jmn} са [62]

$$E^i_j = R^i_j - \frac{1}{2}\delta^i_j R, \tag{2.0.1}$$

где је $R = g^{\underline{ij}} R_{ij}$, $R^i_j = g^{\underline{ip}} R_{pj}$. Ајнштајнов тензор E^i_j задовољава релацију

$$E^i_{j;i} = 0. \tag{2.0.2}$$

У овој глави ће бити разматрана нека уопштења Ајнштајновог тензора у случају Ајзенхарт-Римановог простора, као и релације које су аналогне релацији (2.0.2).

2.1 Ајнштајнов тензор прве врсте

Полазећи од идентитета Бјанкијевог[1] типа [45]

$$\underset{mnv}{Cicl}\, \underset{1}{R}{}^i_{jmn\underset{1}{|}v} = 2\,\underset{mnv}{Cicl}\, T^p_{mn} \underset{1}{R}{}^i_{jpv}, \tag{2.1.1}$$

тј.

$$\underset{1}{R}{}^i_{jmn\underset{1}{|}v} + \underset{1}{R}{}^i_{jnv\underset{1}{|}m} + \underset{1}{R}{}^i_{jvm\underset{1}{|}n} = 2(T^p_{mn}\underset{1}{R}{}^i_{jpv} + T^p_{nv}\underset{1}{R}{}^i_{jpm} + T^p_{vm}\underset{1}{R}{}^i_{jpn}), \tag{2.1.2}$$

[1] Luighi Bianchi (1856-1928, италијански математичар)

композицијом са $g_{\underline{ih}}$ у (2.1.2) и користећи особине антисиметрије [47,54]

$$\underset{1}{R}_{ijmn} = -\underset{1}{R}_{jimn}, \quad \underset{1}{R}_{ijmn} = -\underset{1}{R}_{ijnm}, \tag{2.1.3}$$

добијамо

$$\underset{1}{R}_{hjmn\underset{1}{|}v} + \underset{1}{R}_{hjnv\underset{1}{|}m} + \underset{1}{R}_{hjvm\underset{1}{|}n} = 2(T^p_{mn}\underset{1}{R}_{hjpv} + T^p_{nv}\underset{1}{R}_{hjpm} + T^p_{vm}\underset{1}{R}_{hjpn}). \tag{2.1.4}$$

Одавде, композицијом са $g^{\underline{hn}}g^{\underline{jm}}$, једначина (2.1.4) постаје

$$(\underset{1}{R}^m_v - \frac{1}{2}\delta^m_v \underset{1}{R})_{\underset{1}{|}m} = g^{\underline{jm}}(2T^p_{vn}\underset{1}{R}^n_{jpm} - T^p_{mn}\underset{1}{R}^n_{jpv}), \tag{2.1.5}$$

где је $\underset{1}{R}^m_v = g^{\underline{mp}}\underset{1}{R}_{pv}$, а $\underset{1}{R} = g^{\underline{pq}}\underset{1}{R}_{pq}$.

Дефиниција 2.1.1. *Тензор* $\underset{1}{E}^m_v = \underset{1}{R}^m_v - \frac{1}{2}\delta^m_v \underset{1}{R}$ *називамо* **Ајнштајновим тензором прве врсте**.

На овај начин је доказана теорема која следи:

Теорема 2.1.1. [109] *Ајнштајнов тензор прве врсте* $\underset{1}{E}^m_v$ *задовољава релацију*

$$\underset{1}{E}^m_{v\underset{1}{|}m} = g^{\underline{jm}}(2T^p_{vn}\underset{1}{R}^n_{jpm} - T^p_{mn}\underset{1}{R}^n_{jpv}). \tag{2.1.6}$$

Аналогно, полазећи од идентитета [45]

$$\underset{mnv}{Cicl}\,\underset{1}{R}^i_{jmn\underset{2}{|}v} = 2\underset{mnv}{Cicl}\,(T^p_{jm}\underset{1}{R}^i_{pnv} + T^p_{mn}\underset{1}{R}^i_{jvp} + T^i_{mp}\underset{1}{R}^p_{jnv}), \tag{2.1.7}$$

добијамо да важи наредна теорема:

Теорема 2.1.2. [109] *Ајнштајнов тензор прве врсте* $\underset{1}{E}^m_v$ *задовољава релацију*

$$\underset{1}{E}^m_{v\underset{2}{|}m} = g^{\underline{jm}}(T^p_{nj}\underset{1}{R}^n_{pvm} + T^p_{nv}\underset{1}{R}^n_{jpm} + T^p_{vj}\underset{1}{R}_{pm} + T^p_{jm}\underset{1}{R}_{pv}). \tag{2.1.8}$$

Полазећи од идентитета Бјанкијевог типа [47]

$$\underset{mnv}{Cicl}\,\underset{1}{R}^i_{jmn\underset{3}{|}v} = 2\underset{mnv}{Cicl}\,(T^p_{jm}\underset{1}{R}^i_{pnv} + T^p_{mn}\underset{1}{R}^i_{jvp}), \tag{2.1.9}$$

добијамо теорему:

Теорема 2.1.3. [111] *Ајнштајнов тензор прве врсте* $\underset{1}{E}{}^m_v$ *задовољава релацију*

$$\underset{1}{E}{}^m_{v\underset{3}{|}m} = g^{\underline{jm}}(T^p_{nj}\underset{1}{R}{}^n_{pvm} + T^p_{mn}\underset{1}{R}{}^n_{jpv} + 2T^p_{nv}\underset{1}{R}{}^n_{jpm} + T^p_{jm}\underset{1}{R}{}_{pv} + T^p_{vj}\underset{1}{R}{}_{pm}). \tag{2.1.10}$$

Аналогно, полазећи од идентитета Бјанкијевог типа [47]

$$\underset{mnv}{Cicl}\,\underset{1}{R}{}^i_{jmn\underset{4}{|}v} = 2\underset{mnv}{Cicl}\,(T^i_{mp}\underset{1}{R}{}^p_{jnv} + T^p_{mn}\underset{1}{R}{}^i_{jpv}), \tag{2.1.11}$$

добијамо да важи теорема:

Теорема 2.1.4. [111] *Ајнштајнов тензор прве врсте* $\underset{1}{E}{}^m_v$ *задовољава релацију*

$$\underset{1}{E}{}^m_{v\underset{4}{|}m} = g^{\underline{jm}}(3T^p_{vn}\underset{1}{R}{}^n_{jpm} + 2T^p_{nm}\underset{1}{R}{}^n_{jpv}). \tag{2.1.12}$$

Како у Ајзенхарт-Римановом простору GR_N, за приозвољан тензор a^i_j типа $(1,1)$, важе релације [45]

$$a^i_{j\underset{1}{|}k} = a^i_{j;k} + T^i_{pk}a^p_j - T^p_{jk}a^i_p, \tag{2.1.13}$$

$$a^i_{j\underset{2}{|}k} = a^i_{j;k} + T^i_{kp}a^p_j - T^p_{kj}a^i_p, \tag{2.1.14}$$

$$a^i_{j\underset{3}{|}k} = a^i_{j;k} + T^i_{pk}a^p_j - T^p_{kj}a^i_p, \tag{2.1.15}$$

$$a^i_{j\underset{4}{|}k} = a^i_{j;k} + T^i_{kp}a^p_j - T^p_{jk}a^i_p. \tag{2.1.16}$$

на основу Теорема 2.1.1. – 2.1.4., редом, добијамо:

Последица 2.1.1. *Ајнштајнов тензор прве врсте* $\underset{1}{E}{}^m_v$ *задовољава релацију*

$$\underset{1}{E}{}^m_{v;m} = g^{\underline{jm}}(2T^p_{vn}\underset{1}{R}{}^n_{jpm} - T^p_{mn}\underset{1}{R}{}^n_{jpv} + T^p_{vm}(\underset{1}{R}{}_{jp} - \frac{1}{2}g_{\underline{jp}}\underset{1}{R})).$$

Последица 2.1.2. *Ајнштајнов тензор прве врсте* $\underset{1}{E}{}^m_v$ *задовољава релацију*

$$\underset{1}{E}{}^m_{v;m} = g^{\underline{jm}}(T^p_{nj}\underset{1}{R}{}^n_{pvm} + T^p_{nv}\underset{1}{R}{}^n_{jpm} + T^p_{vj}\underset{1}{R}{}_{pm} + T^p_{jm}\underset{1}{R}{}_{pv} + T^p_{mv}(\underset{1}{R}{}_{jp} - \frac{1}{2}g_{\underline{jp}}\underset{1}{R})).$$

Последица 2.1.3. *Ајнштајнов тензор прве врсте* $\underset{1}{E}{}^m_v$ *задовољава релацију*

$$\underset{1}{E}{}^m_{v;m} = g^{\underline{jm}}(T^p_{nj}\underset{1}{R}{}^n_{pvm}+T^p_{mn}\underset{1}{R}{}^n_{jpv}+2T^p_{nv}\underset{1}{R}{}^n_{jpm}+T^p_{jm}\underset{1}{R}{}_{pv}+T^p_{vj}\underset{1}{R}{}_{pm}+T^p_{mv}(\underset{1}{R}{}_{jp}-\frac{1}{2}g_{\underline{jp}}\underset{1}{R})).$$

Последица 2.1.4. *Ајнштајнов тензор прве врсте* $\underset{1}{E}{}^m_v$ *задовољава релацију*

$$\underset{1}{E}{}^m_{v;m} = g^{\underline{jm}}(3T^p_{vn}\underset{1}{R}{}^n_{jpm} + 2T^p_{nm}\underset{1}{R}{}^n_{jpv} + T^p_{vm}(\underset{1}{R}{}_{jp} - \frac{1}{2}g_{\underline{jp}}\underset{1}{R})).$$

2.2 Ајнштајнов тензор друге врсте

Полазећи од идентитета Бјанкијевог типа [45]

$$\underset{mnv}{Cicl}\,\underset{2}{R}{}^i_{jmn\underset{1}{|}v} = 2\underset{mnv}{Cicl}\,(T^p_{mj}\underset{2}{R}{}^i_{pnv} + T^p_{mn}\underset{2}{R}{}^i_{jpv} + T^i_{mp}\underset{2}{R}{}^p_{jvn}), \tag{2.2.1}$$

на основу особина антисиметрије [54]

$$\underset{2}{R}{}_{ijmn} = -\underset{2}{R}{}_{jimn}, \quad \underset{2}{R}{}_{ijmn} = -\underset{2}{R}{}_{ijnm},$$

добијамо

$$(\underset{2}{R}{}^m_v - \frac{1}{2}\delta^m_v\,\underset{2}{R})_{\underset{1}{|}m} = g^{\underline{jm}}(T^p_{jn}\underset{2}{R}{}^n_{pvm} + T^p_{vn}\underset{2}{R}{}^n_{jpm} + T^p_{jv}\underset{2}{R}{}_{pm} + T^p_{mj}\underset{2}{R}{}_{pv}), \tag{2.2.2}$$

где је $\underset{2}{R}{}^m_v = g^{\underline{mp}}\underset{2}{R}{}_{pv}$, $\underset{2}{R} = g^{\underline{pq}}\underset{2}{R}{}_{pq}$.

Дефиниција 2.2.1. *Тензор* $\underset{2}{E}{}^m_v = \underset{2}{R}{}^m_v - \frac{1}{2}\delta^m_v\,\underset{2}{R}$ *називамо* **Ајнштајновим тензором друге врсте.**

На основу претходног разматрања, можемо да формулишемо следећу теорему:

Теорема 2.2.1. [109] *Ајнштајнов тензор друге врсте* $\underset{2}{E}{}^m_v$ *задовољава релацију*

$$\underset{2}{E}{}^m_{v\underset{1}{|}m} = g^{\underline{jm}}(T^p_{jn}\underset{2}{R}{}^n_{pvm} + T^p_{vn}\underset{2}{R}{}^n_{jpm} + T^p_{jv}\underset{2}{R}{}_{pm} + T^p_{mj}\underset{2}{R}{}_{pv}). \tag{2.2.3}$$

Теорема 2.2.2. [109] *Ајнштајнов тензор друге врсте* $\underset{2}{E}{}^m_v$ *задовољава релацију*

$$\underset{2}{E}{}^m_{v\underset{2}{|}m} = g^{\underline{jm}}(T^p_{mn}\underset{2}{R}{}^n_{jpv} + 2T^p_{nv}\underset{2}{R}{}^n_{jpm}). \tag{2.2.4}$$

Доказ. На основу идентитета Бјанкијевог типа [45]

$$\underset{mnv}{Cicl}\,\underset{2}{R}{}^i_{jmn\underset{2}{|}v} = 2\underset{mnv}{Cicl}\,T^p_{mn}\underset{2}{R}{}^i_{jvp}, \tag{2.2.5}$$

тј.

$$\underset{2}{R}{}^i_{jmn\underset{2}{|}v} + \underset{2}{R}{}^i_{jnv\underset{2}{|}m} + \underset{2}{R}{}^i_{jvm\underset{2}{|}n} = 2(T^p_{mn}\underset{2}{R}{}^i_{jvp} + T^p_{nv}\underset{2}{R}{}^i_{jmp} + T^p_{vm}\underset{2}{R}{}^i_{jnp}), \tag{2.2.6}$$

након композиције релације (2.2.6) са $g_{\underline{ih}}$ и употребе особина антисиметрије [47, 54]

$$\underset{2}{R}{}_{ijmn} = -\underset{2}{R}{}_{jimn}, \quad \underset{2}{R}{}_{ijmn} = -\underset{2}{R}{}_{ijnm},$$

добијамо

$$\underset{2}{R}{}_{hjmn\underset{2}{|}v} + \underset{2}{R}{}_{hjnv\underset{2}{|}m} + \underset{2}{R}{}_{hjvm\underset{2}{|}n} = 2(T^p_{mn}\underset{2}{R}{}_{hjvp} + T^p_{nv}\underset{2}{R}{}_{hjmp} + T^p_{vm}\underset{2}{R}{}_{hjnp}). \tag{2.2.7}$$

Композицијом релације (2.2.7) са $g^{\underline{hn}}g^{\underline{jm}}$ добијамо

$$(\underset{2}{R}{}^m_v - \frac{1}{2}\delta^m_v\underset{2}{R})_{\underset{2}{|}m} = g^{\underline{jm}}(T^p_{mn}\underset{2}{R}{}^n_{jpv} + 2T^p_{nv}\underset{2}{R}{}^n_{jpm}), \tag{2.2.8}$$

тј.

$$\underset{2}{E}{}^m_{v\underset{2}{|}m} = g^{\underline{jm}}(T^p_{mn}\underset{2}{R}{}^n_{jpv} + 2T^p_{nv}\underset{2}{R}{}^n_{jpm}). \tag{2.2.9}$$

□

Аналогно, полазећи од идентитета Бјанкијевог типа [47]

$$\underset{mnv}{Cicl}\,\underset{2}{R}{}^i_{jmn\underset{3}{|}v} = 2\underset{mnv}{Cicl}\,(T^i_{pm}\underset{2}{R}{}^p_{jnv} + T^p_{mn}\underset{2}{R}{}^i_{jvp}), \tag{2.2.10}$$

$$\underset{mnv}{Cicl}\,\underset{2}{R}{}^i_{jmn\underset{4}{|}v} = 2\underset{mnv}{Cicl}\,(T^p_{mj}\underset{2}{R}{}^i_{pnv} + T^p_{mn}\underset{2}{R}{}^i_{jpv}), \tag{2.2.11}$$

добијамо, редом, да важе наредне теореме:

Теорема 2.2.3. [111] *Ајнштајнов тензор друге врсте* $\underset{2}{E}{}^m_v$ *задовољава релацију*

$$\underset{2}{E}{}^m_{v\underset{3}{|}m} = g^{\underline{jm}}(2T^p_{mn}\underset{2}{R}{}^n_{jpv} + 3T^p_{nv}\underset{2}{R}{}^n_{jpm}). \tag{2.2.12}$$

Теорема 2.2.4. [111] *Ајнштајнов тензор друге врсте* $\underset{2}{E}{}^m_v$ *задовољава релацију*

$$\underset{2}{E}{}^m_{v\underset{4}{|}m} = g^{\underline{jm}}(T^p_{jn}\underset{2}{R}{}^n_{pvm} + 2T^p_{nm}\underset{2}{R}{}^n_{jpv} + 2T^p_{vn}\underset{2}{R}{}^n_{jpm} + T^p_{jv}\underset{2}{R}{}_{pm} + T^p_{mj}\underset{2}{R}{}_{pv}). \tag{2.2.13}$$

Имајући у виду релације (2.1.13), (2.1.14), (2.1.15), (2.1.16), на основу Теорема 2.2.1.-2.2.4., редом, добијамо:

Последица 2.2.1. *Ајнштајнов тензор друге врсте* $\underset{2}{E}{}^m_v$ *задовољава релацију*

$$\underset{2}{E}{}^m_{v;m} = g^{\underline{jm}}(T^p_{jn}\underset{2}{R}{}^n_{pvm} + T^p_{vn}\underset{2}{R}{}^n_{jpm} + T^p_{jv}\underset{2}{R}{}_{pm} + T^p_{mj}\underset{2}{R}{}_{pv} + T^p_{vm}(\underset{2}{R}{}_{jp} - \frac{1}{2}g_{\underline{jp}}\underset{2}{R})).$$

Последица 2.2.2. *Ајнштајнов тензор друге врсте* $\underset{2}{E}{}^m_v$ *задовољава релацију*

$$\underset{2}{E}{}^m_{v;m} = g^{\underline{jm}}(T^p_{mn}\underset{2}{R}{}^n_{jpv} + 2T^p_{nv}\underset{2}{R}{}^n_{jpm} + T^p_{mv}(\underset{2}{R}{}_{jp} - \frac{1}{2}g_{\underline{jp}}\underset{2}{R})).$$

Последица 2.2.3. *Ајнштајнов тензор друге врсте* $\underset{2}{E}{}^m_v$ *задовољава релацију*

$$\underset{2}{E}{}^m_{v;m} = g^{\underline{jm}}(2T^p_{mn}\underset{2}{R}{}^n_{jpv} + 3T^p_{nv}\underset{2}{R}{}^n_{jpm} + T^p_{mv}(\underset{2}{R}{}_{jp} - \frac{1}{2}g_{\underline{jp}}\underset{2}{R})).$$

Последица 2.2.4. *Ајнштајнов тензор друге врсте* $\underset{2}{E}{}^m_v$ *задовољава релацију*

$$\underset{2}{E}{}^m_{v;m} = g^{\underline{jm}}(T^p_{jn}\underset{2}{R}{}^n_{pvm}+2T^p_{nm}\underset{2}{R}{}^n_{jpv}+2T^p_{vn}\underset{2}{R}{}^n_{jpm}+T^p_{jv}\underset{2}{R}{}_{pm}+T^p_{mj}\underset{2}{R}{}_{pv}+T^p_{mv}(\underset{2}{R}{}_{jp}-\frac{1}{2}g_{\underline{jp}}\underset{2}{R})).$$

2.3 Ајнштајнов тензор треће врсте

Након композиције са $g_{\underline{ih}}g^{\underline{hn}}g^{\underline{jm}}$ идентитета Бјанкијевог типа за тензор $\underset{3}{R}{}^i_{jmn}$ [47]

$$\begin{aligned}\underset{mnv}{Cicl}\,\underset{3}{R}{}^i_{jmn\underset{1}{|}v} &= 2\underset{mnv}{Cicl}\big(T^i_{jm;nv} + T^i_{jp}T^p_{mn;v} + T^i_{pm}(\underset{3}{R}{}^p_{jnv} - T^p_{jv;n})\\ &+ T^p_{mj}(\underset{3}{R}{}^i_{pnv} - T^i_{pv;n}) + T^p_{mn}(\underset{3}{R}{}^i_{jpv} - T^i_{jv;p} - T^s_{jp}T^i_{sv} + T^s_{jv}T^i_{sp})\big),\end{aligned} \tag{2.3.1}$$

уз поштовање особине антисиметрије [54]

$$\underset{3}{R}{}_{ijmn} = -\underset{3}{R}{}_{jimn}, \tag{2.3.2}$$

добијамо

$$\begin{aligned}(\underset{3}{R}{}^m_v - \frac{1}{2}\delta^m_v\,\underset{3}{R})_{\underset{1}{|}m} &= g^{\underline{jm}}\big(T^n_{mj;nv} + T^n_{vj;mn} + T^n_{jp}(\underset{3}{R}{}^p_{nvm} - T^p_{nv;m} - T^p_{vm;n})\\ &+ T^n_{vp}(\underset{3}{R}{}^p_{jmn} + 2\underset{3}{R}{}^p_{jnm} - T^p_{jn;m} - T^p_{jm;n} - T^s_{jn}T^p_{sm} + T^s_{jm}T^p_{sn})\\ &+ T^p_{mj}(\underset{3}{R}{}^n_{pnv} + T^n_{pv;n}) + T^p_{jv}(\underset{3}{R}{}_{pm} + T^s_{mn} + T^n_{sp}) + T^p_{mn}(T^s_{jp}T^n_{sv} - T^s_{jv}T^n_{sp})\big),\end{aligned} \tag{2.3.3}$$

при чему је $\underset{3}{R}{}^m_v = g^{\underline{mp}}\underset{3}{R}{}_{pv}$, $\underset{3}{R} = g^{\underline{pq}}\underset{3}{R}{}_{pq}$.

Дефиниција 2.3.1. *Тензор* $\underset{3}{E}{}^m_v = \underset{3}{R}{}^m_v - \frac{1}{2}\delta^m_v\underset{3}{R}$ *називамо* **Ајнштајновим тензором треће врсте.**

На основу претходног излагања, важи теорема:

Теорема 2.3.1. [111] *Ајнштајнов тензор треће врсте* $\underset{3}{E}{}^m_v$ *задовољава релацију*

$$\begin{aligned}\underset{3}{E}{}^m_{v\underset{1}{|}m} &= g^{\underline{jm}}\big(T^n_{mj;nv} + T^n_{vj;mn} + T^n_{jp}(\underset{3}{R}{}^p_{nvm} - T^p_{nv;m} - T^p_{vm;n})\\ &+ T^n_{vp}(\underset{3}{R}{}^p_{jmn} + 2\underset{3}{R}{}^p_{jnm} - T^p_{jn;m} - T^p_{jm;n} - T^s_{jn}T^p_{sm} + T^s_{jm}T^p_{sn})\\ &+ T^p_{mj}(\underset{3}{R}{}^n_{pnv} + T^n_{pv;n}) + T^p_{jv}(\underset{3}{R}{}_{pm} + T^s_{mn} + T^n_{sp}) + T^p_{mn}(T^s_{jp}T^n_{sv} - T^s_{jv}T^n_{sp})\big).\end{aligned} \tag{2.3.4}$$

Аналогно, полазећи од идентитета Бјанкијевог типа [47]

$$\begin{aligned}
&\underset{mnv}{Cicl}\,\underset{3}{R}{}^i_{jmn\underset{2}{|}v} = 2\underset{mnv}{Cicl}\big(T^i_{jm;nv} + T^i_{jp}T^p_{mn;v}\\
&+ T^i_{mp}(\underset{3}{R}{}^p_{jnv} - R^p_{jnv} - T^p_{jn;v} + T^p_{sj}T^s_{nv})\\
&+ T^p_{jm}(\underset{3}{R}{}^i_{pnv} - R^i_{pnv} - T^i_{pn;v} + T^i_{sp}T^s_{nv}) + T^p_{mn}(\underset{3}{R}{}^i_{jvp} - T^i_{jv;p})\big),
\end{aligned}\tag{2.3.5}$$

добијамо да важи:

Теорема 2.3.2. [111] *Ајнштајнов тензор треће врсте* $\underset{3}{E}{}^m_v$ *задовољава релацију*

$$\begin{aligned}
\underset{3}{E}{}^m_{v\underset{2}{|}m} = g^{\underline{jm}}\big(&T^n_{mj;nv} + T^n_{vj;mn} + T^p_{mj}(\underset{3}{R}{}^n_{pnv} + R_{pv} + T^n_{sp} + T^s_{nv})\\
&+ T^n_{pm}(R^p_{njv} + \underset{3}{R}{}^p_{jnv} + \underset{3}{R}{}^p_{nvj} + 2T^p_{vj;n} + T^p_{sj}T^s_{nv})\\
&+ T^n_{pv}(R^p_{jnm} - \underset{3}{R}{}^p_{jmn} + T^p_{sj}T^s_{mn})\\
&+ T^p_{vj}(\underset{3}{R}_{pm} + R^n_{pnm} - \underset{3}{R}{}^n_{mnp} + T^n_{sp}T^s_{mn})\big).
\end{aligned}\tag{2.3.6}$$

Полазећи од идентитета Бјанкијевог типа [47]

$$\begin{aligned}
&\underset{mnv}{Cicl}\,\underset{3}{R}{}^i_{jmn\underset{3}{|}v} = 2\underset{mnv}{Cicl}\big(T^i_{jm;nv} + T^i_{jp}T^p_{mn;v}\\
&+ T^i_{pm}(R^p_{jnv} + T^p_{jn;v}) + T^p_{jm}(R^i_{pnv} - \underset{1}{R}{}^i_{pnv} + T^i_{pn;v})\\
&+ T^p_{mn}(2R^i_{jvp} - \underset{1}{R}{}^i_{jvp} + T^i_{jv;p} + T^s_{jp}T^i_{sv} + T^s_{jv}T^i_{sp})\big),
\end{aligned}\tag{2.3.7}$$

коришћењем особина антисиметрије (2.1.3), (2.3.2) и [47, 116],

$$R^i_{jmn} = -R^i_{jnm},\tag{2.3.8}$$

долазимо до теореме:

Теорема 2.3.3. [111] *Ајнштајнов тензор треће врсте* $\underset{3}{E}{}^m_v$ *задовољава релацију*

$$\begin{aligned}
&\underset{3}{E}{}^m_{v\underset{3}{|}m} = g^{\underline{jm}}\big(T^n_{mj;nv} + T^n_{vj;mn} + T^p_{nm}(3R^n_{jvp} - \underset{1}{R}{}^n_{jvp} + T^s_{jp}T^n_{sv} + T^s_{jv}T^n_{sp})\\
&+ T^p_{vn}(3R^n_{jmp} + 2T^n_{jm;p} + T^s_{jp}T^n_{sm} + T^s_{jm}T^n_{sp}) + T^p_{jm}R_{pv}\\
&+ T^p_{mv}(R_{pj} - 2R_{jp} + \underset{1}{R}_{jp} + T^n_{jp;n} + T^s_{jn}T^n_{sp}) + T^p_{nj}(R^n_{pvm} + 2T^n_{pv;m})\big).
\end{aligned}\tag{2.3.9}$$

Аналогно, на основу идентитета [47]

$$\begin{aligned}
\underset{mnv}{Cicl}\, \underset{3}{R}{}^{i}_{jmn\underset{4}{|}v} &= 2\underset{mnv}{Cicl}\big(T^i_{jm;nv} + T^i_{jp}T^p_{mn;v} \\
&+ T^i_{mp}(R^p_{jnv} - \underset{1}{R}{}^p_{jnv} + T^p_{jn;v}) + T^p_{jm}(R^i_{pnv} + T^i_{pn;v}) \\
&+ T^p_{mn}(2R^i_{jpv} - \underset{1}{R}{}^i_{jpv} + 2T^i_{jp;v} - T^i_{jv;p} - T^s_{jp}T^i_{sv} - T^s_{jv}T^i_{sp})\big),
\end{aligned} \tag{2.3.10}$$

добијамо наредну теорему:

Теорема 2.3.4. [111] *Ајнштајнов тензор треће врсте* $\underset{3}{E}{}^m_v$ *задовољава релацију*

$$\begin{aligned}
\underset{3}{E}{}^m_{v\underset{4}{|}m} &= g^{\underline{jm}}\big(T^n_{mj;nv} + T^n_{vj;mn} + T^p_{mj}R_{pv} \\
&+ T^n_{pj}(3R^p_{mnv} - R^p_{nvm} - 2\underset{1}{R}{}^p_{mnv} + 4T^p_{mn;v} + 2T^p_{vm;n} + T^s_{mn}T^p_{vs} + T^s_{mn}T^p_{ns}) \\
&+ T^n_{pv}(3R^p_{jmn} + 2\underset{1}{R}{}^p_{jnm} + 2T^p_{jm;n} + T^p_{nj;m} + T^s_{jn}T^p_{sm} + T^s_{jm}T^p_{sn}) \\
&+ T^p_{mv}(R_{pj} + 2R_{jp} - \underset{1}{R}{}_{jp} + T^n_{pj;m} + 2T^n_{jp;n} + T^s_{nj}T^n_{sp})\big).
\end{aligned} \tag{2.3.11}$$

Имајући у виду релације (2.1.13), (2.1.14), (2.1.15), (2.1.16), на основу Теорема 2.3.1.-2.3.4., редом, добијамо:

Последица 2.3.1. *Ајнштајнов тензор треће врсте* $\underset{3}{E}{}^m_v$ *задовољава релацију*

$$\begin{aligned}
\underset{3}{E}{}^m_{v;m} = g^{\underline{jm}}\big(&T^n_{mj;nv} + T^n_{vj;mn} + T^n_{jp}(\underset{3}{R}{}^p_{nvm} - T^p_{nv;m} - T^p_{vm;n}) \\
&+ T^n_{vp}(\underset{3}{R}{}^p_{jmn} + 2\underset{3}{R}{}^p_{jnm} - T^p_{jn;m} - T^p_{jm;n} - T^s_{jn}T^p_{sm} + T^s_{jm}T^p_{sn}) \\
&+ T^p_{mj}(\underset{3}{R}{}^n_{pnv} + T^n_{pv;n}) + T^p_{jv}(\underset{3}{R}{}_{pm} + T^s_{mn} + T^n_{sp}) \\
&+ T^p_{mn}(T^s_{jp}T^n_{sv} - T^s_{jv}T^n_{sp}) + T^p_{vm}(\underset{3}{R}{}_{jp} - \frac{1}{2}g_{\underline{jp}}\underset{3}{R})\big).
\end{aligned}$$

Последица 2.3.2. *Ајнштајнов тензор треће врсте* $\underset{3}{E}{}^m_v$ *задовољава релацију*

$$\begin{aligned}
\underset{3}{E}{}^m_{v;m} = g^{\underline{jm}}\big(&T^n_{mj;nv} + T^n_{vj;mn} + T^p_{mj}(\underset{3}{R}{}^n_{pnv} + R_{pv} + T^n_{sp} + T^s_{nv}) \\
&+ T^n_{pm}(R^p_{njv} + \underset{3}{R}{}^p_{jnv} + \underset{3}{R}{}^p_{nvj} + 2T^p_{vj;n} + T^p_{sj}T^s_{nv}) \\
&+ T^n_{pv}(R^p_{jnm} - \underset{3}{R}{}^p_{jmn} + T^p_{sj}T^s_{mn}) + T^p_{mv}(\underset{3}{R}{}_{jp} - \frac{1}{2}g_{\underline{jp}}\underset{3}{R}) \\
&+ T^p_{vj}(\underset{3}{R}{}_{pm} + R^n_{pnm} - \underset{3}{R}{}^n_{mnp} + T^n_{sp}T^s_{mn})\big).
\end{aligned}$$

Последица 2.3.3. *Ајнштајнов тензор треће врсте* $\underset{3}{E}{}^m_v$ *задовољава релацију*

$$\begin{aligned}\underset{3}{E}{}^m_{v;m} = g^{\underline{jm}}\big(&T^n_{mj;nv} + T^n_{vj;mn} + T^p_{nm}(3R^n_{jvp} - \underset{1}{R}{}^n_{jvp} + T^s_{jp}T^n_{sv} + T^s_{jv}T^n_{sp})\\ &+ T^p_{vn}(3R^n_{jmp} + 2T^n_{jm;p} + T^s_{jp}T^n_{sm} + T^s_{jm}T^n_{sp}) + T^p_{jm}R_{pv} + T^p_{mv}(\underset{3}{R}_{jp} - \frac{1}{2}g_{\underline{jp}}\underset{3}{R})\\ &+ T^p_{mv}(R_{pj} - 2R_{jp} + \underset{1}{R}_{jp} + T^n_{jp;n} + T^s_{jn}T^n_{sp}) + T^p_{nj}(R^n_{pvm} + 2T^n_{pv;m})\big).\end{aligned}$$

Последица 2.3.4. *Ајнштајнов тензор треће врсте* $\underset{3}{E}{}^m_v$ *задовољава релацију*

$$\begin{aligned}\underset{3}{E}{}^m_{v;m} = g^{\underline{jm}}\big(&T^n_{mj;nv} + T^n_{vj;mn} + T^p_{mj}R_{pv} + T^p_{vm}(\underset{3}{R}_{jp} - \frac{1}{2}g_{\underline{jp}}\underset{3}{R})\\ &+ T^n_{pj}(3R^p_{mnv} - R^p_{nvm} - 2\underset{1}{R}{}^p_{mnv} + 4T^p_{mn;v} + 2T^p_{vm;n} + T^s_{mn}T^p_{vs} + T^s_{mn}T^p_{ns})\\ &+ T^n_{pv}(3R^p_{jmn} + 2\underset{1}{R}{}^p_{jnm} + 2T^p_{jm;n} + T^p_{nj;m} + T^s_{jn}T^p_{sm} + T^s_{jm}T^p_{sn})\\ &+ T^p_{mv}(R_{pj} + 2R_{jp} - \underset{1}{R}_{jp} + T^n_{pj;m} + 2T^n_{jp;n} + T^s_{nj}T^n_{sp})\big).\end{aligned}$$

2.4 Ајнштајнов тензор четврте врсте

Полазећи од идентитета Бјанкијевог типа [47]

$$\begin{aligned}&\underset{mnv}{Cicl}\,\underset{4}{R}{}^i_{jmn\underset{1}{|}v} = 2\underset{mnv}{Cicl}\big(T^i_{jm;nv} + T^i_{pj}T^p_{mn;v}\\ &+ T^i_{pm}(\underset{3}{R}{}^p_{jnv} - T^p_{jv;n}) + T^p_{mj}(\underset{3}{R}{}^i_{pnv} - T^i_{pv;n})\\ &+ T^p_{mn}(\underset{3}{R}{}^i_{jvp} - 2T^i_{jp;v} - T^i_{jv;p} - 3T^s_{jp}T^i_{sv} + 3T^s_{jv}T^i_{sp} + 4T^s_{pv}T^i_{sj})\big),\end{aligned} \tag{2.4.1}$$

након композиције са $g_{\underline{ih}}g^{\underline{hn}}g^{\underline{jm}}$ и употребе особина антисиметрије (2.3.2) и [47, 54]

$$\underset{4}{R}_{ijmn} = -\underset{4}{R}_{jimn}, \tag{2.4.2}$$

добијамо

$$
\begin{aligned}
&(\underset{4}{R}{}^m_v - \frac{1}{2}\delta^m_v \underset{4}{R})_{\underset{1}{|}m} = g^{\underline{jm}}\big(T^n_{mj;nv} + T^n_{vj;mn} + T^p_{jm}(\underset{3}{R}{}^n_{pnv} - T^n_{pv;n})\\
&+ T^n_{jp}(\underset{3}{R}{}^p_{mnv} - \underset{3}{R}{}^p_{mvn} - \underset{3}{R}{}^p_{nvm} + 4T^p_{mn;v} + T^p_{vm;n} + T^p_{nv;m}\\
&+ 3T^s_{mn}T^p_{sv} - 3T^s_{mv}T^p_{sn} - 4T^s_{nv}T^p_{sm})\\
&+ T^n_{pv}(3T^p_{jn;m} + T^p_{jm;n} - 2\underset{3}{R}{}^p_{jmn} + 3T^s_{jn}T^p_{sm} - 3T^s_{jm}T^p_{sn} - 4T^s_{nm}T^p_{sj})\\
&+ T^p_{jv}(\underset{3}{R}{}_{pm} + \underset{3}{R}{}^n_{mnp} - 2T^n_{mp;n} + 3T^s_{mn}T^n_{sp} + 4T^s_{pn}T^n_{sm})\big),
\end{aligned}
\tag{2.4.3}
$$

где је $\underset{4}{R}{}^m_v = g^{\underline{mp}}\underset{4}{R}{}_{pv}$, $\underset{4}{R} = g^{\underline{pq}}\underset{4}{R}{}_{pq}$.

Дефиниција 2.4.1. *Тензор* $\underset{4}{E}{}^m_v = \underset{4}{R}{}^m_v - \frac{1}{2}\delta^m_v \underset{4}{R}$ *називамо* **Ајнштајновим тензором четврте врсте**.

На основу претходног излагања, важи:

Теорема 2.4.1. [111] *Ајнштајнов тензор четврте врсте* $\underset{4}{E}{}^m_v$ *задовољава релацију*

$$
\begin{aligned}
&\underset{4}{E}{}^m_{v\underset{1}{|}m} = g^{\underline{jm}}\big(T^n_{mj;nv} + T^n_{vj;mn} + T^p_{jm}(\underset{3}{R}{}^n_{pnv} - T^n_{pv;n})\\
&+ T^n_{jp}(\underset{3}{R}{}^p_{mnv} - \underset{3}{R}{}^p_{mvn} - \underset{3}{R}{}^p_{nvm} + 4T^p_{mn;v} + T^p_{vm;n} + T^p_{nv;m}\\
&+ 3T^s_{mn}T^p_{sv} - 3T^s_{mv}T^p_{sn} - 4T^s_{nv}T^p_{sm})\\
&+ T^n_{pv}(3T^p_{jn;m} + T^p_{jm;n} - 2\underset{3}{R}{}^p_{jmn} + 3T^s_{jn}T^p_{sm} - 3T^s_{jm}T^p_{sn} - 4T^s_{nm}T^p_{sj})\\
&+ T^p_{jv}(\underset{3}{R}{}_{pm} + \underset{3}{R}{}^n_{mnp} - 2T^n_{mp;n} + 3T^s_{mn}T^n_{sp} + 4T^s_{pn}T^n_{sm})\big).
\end{aligned}
\tag{2.4.4}
$$

Аналогно, из идентитета [47]

$$
\begin{aligned}
&\underset{mnv}{Cicl}\,\underset{4}{R}{}^i_{jmn\underset{2}{|}v} = 2\underset{mnv}{Cicl}\,\big(T^i_{jm;nv} + T^i_{pj}T^p_{mn;v}\\
&+ T^i_{mp}(\underset{3}{R}{}^p_{jnv} - R^p_{jnv} - T^p_{jn;v}) + T^p_{jm}(\underset{3}{R}{}^i_{pnv} - R^i_{pnv} - T^i_{pn;v})\\
&+ T^p_{mn}(\underset{3}{R}{}^i_{jvp} - T^i_{jv;p} - 2T^i_{jp}v + 3T^s_{jp}T^i_{sv} - 3T^s_{jv}T^i_{sp} + 4T^i_{sj}T^s_{vp})\big),
\end{aligned}
\tag{2.4.5}
$$

на основу (2.3.8), (2.3.2) и (2.4.2), добијамо теорему:

Теорема 2.4.2. [111] *Ајнштајнов тензор четврте врсте* $\underset{4}{E}{}^{m}_{v}$ *задовољава релацију*

$$
\begin{aligned}
&\underset{4}{E}{}^{m}_{v\underset{2}{|}m} = g^{\underline{jm}}\big(T^{n}_{mj;nv} + T^{n}_{vj;mn} + T^{p}_{mj}(\underset{3}{R}{}^{n}_{pnv} + R_{pv})\\
&+ T^{n}_{jp}(R^{p}_{mnv} + R^{p}_{nvm} - \underset{3}{R}{}^{p}_{mnv} - \underset{3}{R}{}^{p}_{nvm} - \underset{3}{R}{}^{p}_{mvn}\\
&+ 4T^{p}_{mn;v} + 2T^{p}_{nv;m} - 3T^{s}_{mn}T^{p}_{sv} + 3T^{s}_{mv}T^{p}_{sn} - 4T^{p}_{sm}T^{s}_{vn})\\
&+ T^{n}_{vp}(R^{p}_{jmn} - 2T^{p}_{jn;m} + 3T^{s}_{mv}T^{p}_{sn} - 4T^{p}_{sm}T^{s}_{vn})\\
&+ T^{p}_{vj}(\underset{3}{R}_{pm} - \underset{3}{R}{}^{n}_{mnp} - R_{pm} - T^{n}_{pm;n} + 2T^{n}_{mp;n} + 3T^{s}_{mn}T^{n}_{sp} - 4T^{n}_{sm}T^{s}_{np})\big).
\end{aligned}
\tag{2.4.6}
$$

На основу идентитета Бјанкијевог типа [47]

$$
\begin{aligned}
&\underset{mnv}{Cicl}\,\underset{4}{R}{}^{i}_{jmn\underset{3}{|}v} = 2\underset{mnv}{Cicl}\,\big(T^{i}_{jm;nv} + T^{i}_{jp}T^{p}_{mn;v}\\
&+ T^{i}_{pm}(R^{p}_{jnv} + T^{p}_{jn;v}) + T^{p}_{jm}(R^{i}_{pnv} - \underset{1}{R}{}^{i}_{pnv} + T^{i}_{pn;v})\\
&+ T^{p}_{mn}(2R^{i}_{jvp} - \underset{1}{R}{}^{i}_{jvp} + T^{i}_{jv;p} - 2T^{i}_{jp;v} - T^{s}_{jv}T^{i}_{sp} - T^{s}_{jp}T^{i}_{sv})\big),
\end{aligned}
\tag{2.4.7}
$$

и особина антисиметрије (2.1.3), (2.3.8) и (2.4.2) [47, 116], добијамо да важи:

Теорема 2.4.3. [111] *Ајнштајнов тензор четврте врсе* $\underset{4}{E}{}^{m}_{v}$ *задовољава релацију*

$$
\begin{aligned}
&\underset{4}{E}{}^{m}_{v\underset{3}{|}m} = g^{\underline{jm}}\big(T^{n}_{mj;nv} + T^{n}_{vj;mn} + T^{p}_{jm}(\underset{1}{R}_{pv} - R_{pv})\\
&+ T^{n}_{jp}(R^{p}_{mnv} - R^{p}_{nvm} - 2R^{p}_{mvn} + \underset{1}{R}{}^{p}_{nvm} + \underset{1}{R}{}^{p}_{mvn}\\
&+ 4T^{p}_{mn;v} + 2T^{p}_{vm;n} + T^{s}_{mv}T^{p}_{sn} + T^{s}_{mn}T^{p}_{sv})\\
&+ T^{p}_{nv}(\underset{1}{R}{}^{n}_{jmp} - 3R^{n}_{jmp} - 2T^{n}_{jm;p} + T^{n}_{jp;m} + T^{s}_{jm}T^{n}_{sp} + T^{s}_{jp}T^{n}_{sm})\\
&+ T^{p}_{vj}(R_{pm} + 2R_{mp} - \underset{1}{R}_{pm} - \underset{1}{R}_{mp} + T^{n}_{pm;n} + 2T^{n}_{mp;n} + T^{s}_{mn}T^{n}_{sp})\big).
\end{aligned}
\tag{2.4.8}
$$

Аналогно, на основу идентитета [47]

$$
\begin{aligned}
&\underset{mnv}{Cicl}\,\underset{4}{R}{}^i_{jmn\underset{4}{|}v} = 2\underset{mnv}{Cicl}\,\big(T^i_{jm;nv} + T^i_{pj}T^p_{mn;v} \\
&+ T^i_{mp}(R^p_{jnv} - \underset{1}{R}{}^p_{jnv} + T^p_{jn;v}) + T^p_{mj}(R^i_{pnv} + T^i_{pn;v}) \\
&+ T^p_{mn}(2R^i_{jvp} - \underset{1}{R}{}^i_{jvp} - T^i_{jv;p} + T^s_{jv}T^i_{sp} + T^s_{jp}T^i_{sv})\big),
\end{aligned}
\tag{2.4.9}
$$

добијамо да важи:

Теорема 2.4.4. [111] *Ајнштајнов тензор четврте врсте* $\underset{4}{E}{}^m_v$ *задовољава релацију*

$$
\begin{aligned}
&\underset{4}{E}{}^m_{v\underset{4}{|}m} = g^{\underline{jm}}\big(T^n_{mj;nv} + T^n_{vj;mn} + T^p_{mj}R^p_{jmn} \\
&+ T^n_{jp}(R^p_{nvm} - R^p_{mnv} - 2R^p_{jvn} + \underset{1}{R}{}^p_{mvn} + \underset{1}{R}{}^p_{mnv} \\
&+ 2T^p_{nv;m} - T^s_{mn}T^p_{sn} - T^s_{mn}T^p_{sv}) + T^n_{vp}(R^p_{jmn} - 2T^p_{jm;n} + T^s_{jn}T^p_{sm}) \\
&+ T^p_{jv}(R_{pm} - 2R_{mp} + \underset{1}{R}{}_{mp} + T^n_{pm;n} + T^s_{mn}T^n_{sp})\big).
\end{aligned}
\tag{2.4.10}
$$

Имајући у виду релације (2.1.13), (2.1.14), (2.1.15), (2.1.16), на основу Теорема 2.4.1.-2.4.4., редом, добијамо:

Последица 2.4.1. *Ајнштајнов тензор четврте врсте* $\underset{4}{E}{}^m_v$ *задовољава релацију*

$$
\begin{aligned}
\underset{4}{E}{}^m_{v;m} = g^{\underline{jm}}\big(&T^n_{mj;nv} + T^n_{vj;mn} + T^p_{jm}(\underset{3}{R}{}^n_{pnv} - T^n_{pv;n}) \\
&+ T^n_{jp}(\underset{3}{R}{}^p_{mnv} - \underset{3}{R}{}^p_{mvn} - \underset{3}{R}{}^p_{nvm} + 4T^p_{mn;v} + T^p_{vm;n} + T^p_{nv;m} \\
&+ 3T^s_{mn}T^p_{sv} - 3T^s_{mv}T^p_{sn} - 4T^s_{nv}T^p_{sm}) + T^p_{vm}(\underset{4}{R}{}_{jp} - \frac{1}{2}g_{\underline{jp}}\underset{4}{R}) \\
&+ T^n_{pv}(3T^p_{jn;m} + T^p_{jm;n} - 2\underset{3}{R}{}^p_{jmn} + 3T^s_{jn}T^p_{sm} - 3T^s_{jm}T^p_{sn} - 4T^s_{nm}T^p_{sj}) \\
&+ T^p_{jv}(\underset{3}{R}{}_{pm} + \underset{3}{R}{}^n_{mnp} - 2T^n_{mp;n} + 3T^s_{mn}T^n_{sp} + 4T^s_{pn}T^n_{sm})\big).
\end{aligned}
$$

Последица 2.4.2. *Ајнштајнов тензор четврте врсте* $\underset{4}{E}{}^m_v$ *задовољава релацију*

$$
\begin{aligned}
\underset{4}{E}{}^m_{v;m} = g^{\underline{jm}}\big(&T^n_{mj;nv} + T^n_{vj;mn} + T^p_{mj}(\underset{3}{R}{}^n_{pnv} + R_{pv})\\
&+ T^n_{jp}(R^p_{mnv} + R^p_{nvm} - \underset{3}{R}{}^p_{mnv} - \underset{3}{R}{}^p_{nvm} - \underset{3}{R}{}^p_{mvn}\\
&+ 4T^p_{mn;v} + 2T^p_{nv;m} - 3T^s_{mn}T^p_{sv} + 3T^s_{mv}T^p_{sn} - 4T^p_{sm}T^s_{vn})\\
&+ T^n_{vp}(R^p_{jmn} - 2T^p_{jn;m} + 3T^s_{mv}T^p_{sn} - 4T^p_{sm}T^s_{vn}) + T^p_{mv}(\underset{4}{R}{}_{jp} - \frac{1}{2}g_{\underline{jp}}\underset{4}{R})\\
&+ T^p_{vj}(\underset{3}{R}{}_{pm} - \underset{3}{R}{}^n_{mnp} - R_{pm} - T^n_{pm;n} + 2T^n_{mp;n} + 3T^s_{mn}T^n_{sp} - 4T^n_{sm}T^s_{np})\big).
\end{aligned}
$$

Последица 2.4.3. *Ајнштајнов тензор четврте врсе $\underset{4}{E}{}^m_v$ задовољава релацију*

$$
\begin{aligned}
\underset{4}{E}{}^m_{v;m} = g^{\underline{jm}}\big(&T^n_{mj;nv} + T^n_{vj;mn} + T^p_{jm}(\underset{1}{R}{}_{pv} - R_{pv})\\
&+ T^n_{jp}(R^p_{mnv} - R^p_{nvm} - 2R^p_{mvn} + \underset{1}{R}{}^p_{nvm} + \underset{1}{R}{}^p_{mvn}\\
&+ 4T^p_{mn;v} + 2T^p_{vm;n} + T^s_{mv}T^p_{sn} + T^s_{mn}T^p_{sv}) + T^p_{mv}(\underset{4}{R}{}_{jp} - \frac{1}{2}g_{\underline{jp}}\underset{4}{R})\\
&+ T^p_{nv}(\underset{1}{R}{}^n_{jmp} - 3R^n_{jmp} - 2T^n_{jm;p} + T^n_{jp;m} + T^s_{jm}T^n_{sp} + T^s_{jp}T^n_{sm})\\
&+ T^p_{vj}(R_{pm} + 2R_{mp} - \underset{1}{R}{}_{pm} - \underset{1}{R}{}_{mp} + T^n_{pm;n} + 2T^n_{mp;n} + T^s_{mn}T^n_{sp})\big).
\end{aligned}
$$

Последица 2.4.4. *Ајнштајнов тензор четврте врсте $\underset{4}{E}{}^m_v$ задовољава релацију*

$$
\begin{aligned}
\underset{4}{E}{}^m_{v;m} = g^{\underline{jm}}\big(&T^n_{mj;nv} + T^n_{vj;mn} + T^p_{mj}R^p_{jmn} + T^p_{vm}(\underset{4}{R}{}_{jp} - \frac{1}{2}g_{\underline{jp}}\underset{4}{R})\\
&+ T^n_{jp}(R^p_{nvm} - R^p_{mnv} - 2R^p_{jvn} + \underset{1}{R}{}^p_{mvn} + \underset{1}{R}{}^p_{mnv}\\
&+ 2T^p_{nv;m} - T^s_{mn}T^p_{sn} - T^s_{mn}T^p_{sv}) + T^n_{vp}(R^p_{jmn} - 2T^p_{jm;n} + T^s_{jn}T^p_{sm})\\
&+ T^p_{jv}(R_{pm} - 2R_{mp} + \underset{1}{R}{}_{mp} + T^n_{pm;n} + T^s_{mn}T^n_{sp})\big).
\end{aligned}
$$

Напомена 2.4.1. *У случају Риманових простора, тензори кривине $\underset{\theta}{R}{}^i_{jmn}$ $(\theta = 1,2,3,4)$ се своде на тензор R^i_{jmn}, док се генералисани Ајнштајнови тензори $\underset{\theta}{E}{}^m_v$ $(\theta = 1,2,3,4)$ своде на Ајнштајнов тензор E^m_v. Такође, у том случају, све четири врсте коваријантног диференцирања $\underset{\theta}{|}$ $(\theta = 1,2,3,4)$ постају коваријантни извод (;) у односу на $\Gamma^i_{\underline{jm}}$, а једначине* (2.1.6), (2.1.8), (2.1.10), (2.1.12), (2.2.3), (2.2.4), (2.2.12), (2.2.13), (2.3.4), (2.3.6), (2.3.9), (2.3.11), (2.4.4), (2.4.6), (2.4.8), (2.4.10) *се своде на познату једначину* (2.0.2).

2.5 Геодезијска пресликавања Т-повезаних генералисаних Ајнштајнових простора

Ајнштајнов простор V_N је Риманов простор у коме је основни метрички тензор g_{jm} симетричан, а Ричијев тензор R_{jm} задовољава релацију [72, 73]

$$R_{jm} = K \cdot g_{jm}, \quad K = const. \tag{2.5.1}$$

Након контранције, из (2.5.1) добијамо $K = \dfrac{R}{N}$.

Ајнштајнови простори представљају симетричне космолошке моделе. У Општој Теорији Релативности, Ајнштајнове једначине гравитационог поља повезују закривљеност простор-времена са енергијом и импулсом све материје на следећи начин

$$R_{jm} - \frac{1}{2} R g_{jm} + \Lambda g_{jm} = G T_{jm}. \tag{2.5.2}$$

У релацији (2.5.2) прва два сабирка представљају Ајнштајнов тензор, Λ је космолошка константа, T_{jm} је тензор енергије-импулса, а G је гравитациона константа.

У случају генералисаних Риманових простора ћемо дефинисати *генералисане Ајнштајнове просторе врсте* θ на следећи начин [109]:

Дефиниција 2.5.1. Генералисани Ајнштајнов простор врсте θ $(\theta = 1, 2)$ *је генералисани Риманов простор у коме за Ричијев тензор врсте* θ *важи*

$$\underset{\theta}{R}_{jm} = \underset{\theta}{K} \cdot g_{jm} \quad (\theta = 1, 2), \tag{2.5.3}$$

где су $\underset{\theta}{K}$ *константе. Генералисани Ајнштајнов простор врсте* θ $(\theta = 1, 2)$ *означавамо са* $G\underset{\theta}{V}_N$.

Из (1.5.29), за симетричан и антисиметричан део тензора $\underset{1}{R}_{jm}$, добијамо

$$\underset{1}{R}_{\underline{jm}} = R_{jm} + T^p_{jq} T^q_{mp} \quad \text{и} \quad \underset{1}{R}_{\underset{\vee}{jm}} = T^p_{jm;p}, \tag{2.5.4}$$

па важи наредна теорема:

Теорема 2.5.1. [109] *У генералисаном Ајнштајновом простору прве врсте* $G\underset{1}{V}_N$ *важи:*

$$R_{jm} + T^p_{jq}T^q_{mp} = \underset{1}{K}\, g_{\underline{jm}} \quad \textit{и} \quad T^p_{jm;p} = \underset{1}{K}\, g_{\underset{\vee}{jm}}, \tag{2.5.5}$$

где је R_{jm} *Ричијев тензор у односу на симетрични део* $g_{\underline{jm}}$ *тензора* g_{jm}, T^i_{jk} *је тензор торзије,* $g_{\underset{\vee}{jm}}$ *је антисиметрични део тензора* g_{jm}, *а* $\underset{1}{K}$ *је константа.*

Аналогно, за генералисани Ајнштајнов тензор друге врсте важи:

Теорема 2.5.2. [109] *У генералисаном Ајнштајновом простору друге врсте* $G\underset{2}{V}_N$ *важи:*

$$R_{jm} + T^p_{jq}T^q_{mp} = \underset{2}{K}\, g_{\underline{jm}} \quad \textit{и} \quad T^p_{jm;p} = -\underset{2}{K}\, g_{\underset{\vee}{jm}}, \tag{2.5.6}$$

где је R_{jm} *Ричијев тензор у односу на симетрични део* $g_{\underline{jm}}$ *тензора* g_{jm}, T^i_{jk} *је тензор торзије,* $g_{\underset{\vee}{jm}}$ *је антисиметрични део тензора* g_{jm}, *а* $\underset{2}{K}$ *је константа.*

Напомена 2.5.1. *У случају Римановог простора, када је основни метрички тензор симетричан, тензор торзије је једнак нули и тада се услови* (2.5.5) *и* (2.5.6) *своде на* (2.5.1).

Дефиниција 2.5.2. *Ајзенхарт-Риманов простор* GR_N *је* **Т-повезан** *ако тензор торзије* T^i_{jm} *задовољава услов*

$$T^p_{jq}T^q_{mp} = \mu g_{\underline{jm}}, \quad \mu = const. \tag{2.5.7}$$

Није тешко закључити да важи тврђење:

Лема 2.5.1. [109] *Ако је генералисан Ајнштајнов простор* $G\underset{\theta}{V}_N$, $(\theta = 1, 2)$ *Т-повезан, тада важи:*

$$R_{jm} = \underset{\theta}{\mu}\, g_{\underline{jm}}, \tag{2.5.8}$$

где је R_{jm} *Ричијев тензор у односу на* $g_{\underline{jm}}$, *а* $\underset{\theta}{\mu} = \underset{\theta}{K} - \mu$ *су константе.*

Због тога важи и следећа теорема:

Теорема 2.5.3. [109] *За генералисани Ајнштајнов тензор* $\underset{\nu}{E}{}^m_v$ *врсте* ν $(\nu = 1,2)$ *у генералисаном Ајнштајновом простору* $G\underset{\theta}{V}_N$ *врсте* θ $(\theta = 1,2)$ *важе релације:*

$$\underset{\nu}{E}{}^m_v = \left(\underset{\theta}{K} - \frac{1}{2}\right)\delta^m_v + \underset{\theta}{K} g^{\underline{pm}} g_{\underset{\vee}{pv}}, \quad (\theta = 1,2;\ \nu = 1,2), \tag{2.5.9}$$

где су $\underset{\theta}{R}$ *скаларне кривине.*

Ајнштајнови простори су затворена класа за геодезијска пресликавања, тј. важи

Теорема 2.5.4. [32, 43] *Ако Ајнштајнов простор* V_N *допушта нетривијално геодезијско пресликавање на* $\overline{R}_N$*, тада је* $\overline{R}_N$ *Ајнштајнов простор.*

У општем случају, придружени простор, са симетричним основним метричким тензором $g_{\underline{jm}}$, генералисаног Ајнштајновог простора врсте θ $(\theta = 1,2)$, није Ајнштајнов простор. У складу са Лемом 2.5.1., закључујемо да је придружени простор T-повезаног генералисаног Ајнштајновог простора врсте $(\theta = 1,2)$, Ајнштајнов простор, тј. важи теорема:

Теорема 2.5.5. [109] *Ако* T*-повезан генералисани Ајнштајнов простор* $G\underset{\theta}{V}_N$ *врсте* θ $(\theta = 1,2)$ *допушта нетривијално геодезијско пресликавање на Риманов простор* $\overline{R}_N$*, онда је* $\overline{R}_N$ *Ајнштајнов простор.*

ГЛАВА 3

Уопштења Келерових простора

3.1 Келерови простори

Келерове[1] просторе је најпре разматрао руски математичар П. А. Широков под називом A-простори, а независно од њега је исте просторе разматрао и немачки математичар Е. Келер, у чију част су поменути простори добили име. Након тога, многи аутори су се бавили Келеровим просторима и њиховим пресликавањима $[1, 22, 31, 37, 42, 71, 82, 84, 85, 85, 87, 112, 117, 119]$.

Дефиниција 3.1.1. Келеров простор *K_N је N-димензионални Риманов простор са метричким тензором g_{ij}, у коме постоји скоро комплексна структура F_i^h, тако да важи*

$$F_p^h F_i^p = -\delta_i^h\,, \tag{3.1.1}$$

$$g_{pq} F_i^p F_j^q = g_{ij}, \quad g^{ij} = g^{pq} F_p^i F_q^j, \tag{3.1.2}$$

$$F_{i;j}^h = 0, \tag{3.1.3}$$

где је $(;)$ коваријантно диференцирање у односу на g_{ij}.

Претходно дефинисан простор K_N се у литератури среће и под називом *елиптички Келеров простор.* Осим елиптичких дефинисани су и *хиперболички* и *параболички* Келерови простори.

[1] Erich Kähler (1906-2000, немачки математичар)

Дефиниција 3.1.2. Хиперболички Келеров простор *је N-димензионални Риманов простор са метричким тензором g_{ij}, у коме постоји скоро комплексна структура F_i^h, тако да важи*

$$F_p^h F_i^p = \delta_i^h, \tag{3.1.4}$$

$$g_{pq} F_i^p F_j^q = g_{ij}, \quad g^{ij} = g^{pq} F_p^i F_q^j, \tag{3.1.5}$$

$$F_{i;j}^h = 0, \tag{3.1.6}$$

где је $(;)$ коваријантно диференцирање у односу на g_{ij}.

Дефиниција 3.1.3. Параболички Келеров простор *је N-димензионални Риманов простор са метричким тензором g_{ij}, у коме постоји скоро комплексна структура F_i^h, тако да важи*

$$F_p^h F_i^p = 0, \tag{3.1.7}$$

$$g_{pq} F_i^p F_j^q = g_{ij}, \quad g^{ij} = g^{pq} F_p^i F_q^j, \tag{3.1.8}$$

$$F_{i;j}^h = 0, \tag{3.1.9}$$

где је $(;)$ коваријантно диференцирање у односу на g_{ij}.

Димензија N претходно наведених Келерових простора је парна. Овде ћемо проучавати нека уопштења (елиптичког) Келеровог простора.

3.2 Ајзенхарт-Келерови простори

У случају несиметричне конексије имамо четири врсте коваријантног диференцирања тензора и скоро комплексна структура може да буде коваријантно константна у односу на сваку врсту коваријантног диференцирања, што је омогућило уопштавање Келерових простора [60, 92, 100, 101, 104, 106, 107, 119, 122, 128].

Посматраћемо најпре генералисани Келеров простор који је одређен наредном дефиницијом.

Дефиниција 3.2.1. [96] **Генералисани Келеров простор** GK_N *је N-димензиони Ајзенхарт-Риманов простор са несиметричним метричким тензором g_{ij} и скоро комплексном структуром F^i_j, за коју важи*

$$F^h_p F^p_i = -\delta^h_i\,, \tag{3.2.1}$$

$$g_{\underline{pq}} F^p_i F^q_j = g_{\underline{ij}}, \quad g^{\underline{ij}} = g^{\underline{pq}} F^i_p F^j_q, \tag{3.2.2}$$

$$F^h_{i\underset{\theta}{|}j} = 0, \quad (\theta = 1, 2), \tag{3.2.3}$$

где је са $\underset{\theta}{|}$ означено коваријантно диференцирање врсте $\theta = 1, 2$, у односу на метрички тензор g_{ij}.

Овакве просторе ћемо надаље називати *Ајзенхарт-Келеровим просторима.*

На основу услова (3.2.1) директно следи

$$F^p_i T^h_{pj} - F^h_p T^p_{ij} = 0, \quad g^{\underline{ip}} F^p_j + g_{\underline{pj}} F^p_i = 0, \quad g^{\underline{ip}} F^j_p + g^{\underline{pj}} F^i_p = 0. \tag{3.2.4}$$

Тада очигледно важе релације

$$F_{ij} = -F_{ji}, \quad F^{ij} = -F^{ji}, \tag{3.2.5}$$

где је $F_{ji} = F^p_j g_{\underline{pi}}$, $F^{ji} = F^j_p g^{\underline{pi}}$.

Лако се доказује да важи наредно тврђење.

Лема 3.2.1. [127] *Скоро комплексна структура F^i_j Ајзенхарт-Келеровог простора GK_N задовољава релације*

$$F^h_{i;j} = 0, \quad F^h_{i\underset{3}{|}j} = 2F^h_p T^p_{ij}, \quad F^h_{i\underset{4}{|}j} = 2F^p_i T^h_{jp}, \tag{3.2.6}$$

при чему је T^h_{ij} тензор торзије простора GK_N, док је ; коваријантни извод у односу на $\Gamma^i_{\underline{jk}}$.

Теорема 3.2.1. [127] *За Ричијев тензор R_{ij}, који је добијен на основу тензора кривине* (1.5.26), *важи*

$$R_{jk} = F^p_j F^q_k R_{pq}. \tag{3.2.7}$$

На основу Теореме 3.2.1. доказујемо да важи наредна, веома битна теорема:

Теорема 3.2.2. [119, 127] *Уопштен Ричијев тензор $K_{(jm)}$ простора GK_N задовољава релацију*

$$K_{(jm)} = F^p_j F^q_m R_{(pq)} + 2(\beta' + \gamma)(F^p_j F^q_m T^r_{ps} T^s_{rq} - T^p_{jq} T^q_{pm}). \tag{3.2.8}$$

Доказ. Генералисани Риманов тензор кривине K^i_{jmn} може да буде представљен у облику (1.5.24), тј.

$$\begin{aligned} K^i_{jmn} = {} & R^i_{jmn} + \alpha T^i_{jm;n} + \alpha' T^i_{jn;m} + \beta T^p_{jm} T^i_{pn} + \beta' T^p_{jn} T^i_{pm} + \gamma T^p_{mn} T^i_{pj}, \\ & \alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Контракција по индексима i и n у претходној једначини, даје нам

$$K_{jm} = R_{jm} + \alpha T^p_{jm;p} + (\beta' + \gamma) T^p_{jq} T^q_{pm}. \tag{3.2.9}$$

Симетризацијом по индексима j, m, из једначине (3.2.9), имамо

$$K_{(jm)} = R_{(jm)} - 2(\beta' + \gamma) T^p_{jq} T^q_{pm} = 2(R_{jm} - (\beta' + \gamma) T^p_{jq} T^q_{pm}). \tag{3.2.10}$$

Одавде, на основу Теореме 3.2.1. и услова (3.2.7), добијамо (3.2.8), чиме је теорема доказана. □

Заменом услова (3.2.3) у Дефиницији 3.2.1., добијена је још једна генерализација Келерових простора.

Дефиниција 3.2.2. [119] *Ајзенхарт-Риманов N-димензиони простор са несиметричним метричким тензором g_{ij} називамо* **генералисаним Келеровим простором треће врсте** $\underset{3}{GK_N}$ *ако у њему постоји скоро комплексна структура F^i_j таква да важи*

$$F^h_p F^p_i = -\delta^h_i, \tag{3.2.11}$$

$$g_{\underline{pq}} F^p_i F^q_j = g_{\underline{ij}}, \quad g^{\underline{ij}} = g^{\underline{pq}} F^i_p F^j_q, \tag{3.2.12}$$

$$F^h_{i \underset{3}{|} j} = 0, \tag{3.2.13}$$

$$F^h_{i;j} = 0, \tag{3.2.14}$$

где је $\underset{3}{|}$ *коваријантни извод треће врсте у односу на несиметричну конексију* Γ^i_{jk}, *а са* $(;)$ *је означено коваријантно диференцирање у односу на* $\Gamma^i_{\underline{jk}}$.

Надаље ћемо овакве просторе називати *Ајзенхарт-Келеровим просторима треће врсте.*

На основу (3.2.11) и (3.2.12), добијамо да важи

$$F_{ij} = -F_{ji},\ F^{ij} = -F^{ji},$$

где је $F_{ji} = F^p_j g_{\underline{pi}}$, $F^{ji} = F^j_p g^{\underline{pi}}$. На основу наведених запажања, добијамо наредну теорему:

Теорема 3.2.3. [119, 127] *За скоро комплексну структуру* F^i_j *простора* $G\underset{3}{K}_N$ *важе релације*

$$F^h_{i\underset{1}{|}j} = 2F^h_p T^p_{ji}, \quad F^h_{i\underset{2}{|}j} = 2F^p_i T^h_{jp}, \quad F^h_{i\underset{4}{|}j} = 0, \tag{3.2.15}$$

где је T^h_{ij} *тензор торзије.*

3.3 Геодезијска пресликавања

Теорија геодезијских пресликавања Риманових простора, простора афине конексије, као и њихових уопштења, је веома актуелна последњих деценија. У последње време је нарочито актуелно изучавање геодезијских пресликавања у случају специјалних простора [13, 24–26, 32, 33, 35, 36, 39, 43, 57–59, 98, 99, 102, 119, 120, 122, 128]. Овај одељак је посвећен геодезијском пресликавању $f : GR_N \to G\underset{3}{\overline{K}}_N$.

Дефиниција 3.3.1. *Дифеоморфизам* $f : GR_N \to G\underset{3}{\overline{K}}_N$ *је* **геодезијско пресликавање** *ако геодезијске линије простора* GR_N *пресликава у геодезијске линије простора* $G\underset{3}{\overline{K}}_N$.

У одговарајућим тачкама M и $\overline{M}$ можемо да ставимо

$$\overline{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + P^i_{jk}, \quad (i, j, k = 1, ..., N), \tag{3.3.1}$$

где је P^i_{jk} тензор деформације конексије Γ простора GR_N сагласно пресликавању $f : GR_N \to G\underset{3}{\overline{K}}_N$.

Теорема 3.3.1. [58] *Потребан и довољан услов да пресликавање*

$$f : GR_N \to G\underset{3}{\overline{K}}_N$$

буде геодезијско јесте да тензор деформације P^i_{jk} *из релације* (3.3.1) *има облик*

$$P^i_{jk} = \delta^i_j\,\psi_k + \delta^i_k\,\psi_j + \xi^i_{jk}, \tag{3.3.2}$$

где је

$$\psi_i = \frac{1}{N+1}(\overline{\Gamma}^\alpha_{i\alpha} - \Gamma^\alpha_{i\alpha}), \quad \xi^i_{jk} = P^i_{\underset{\vee}{jk}} = \frac{1}{2}(P^i_{jk} - P^i_{kj}). \tag{3.3.3}$$

Приметимо да у простору $G\underset{3}{K}_N$ важе наредне једначине:

$$T^\alpha_{i\alpha} = 0, \quad \xi^\alpha_{i\alpha}(x) = 0, \quad F^\alpha_\alpha = 0. \tag{3.3.4}$$

Пример 3.3.1. [126] *Конструисаћемо геодезијско пресликавање* $f : GR_N \to G\underset{3}{\overline{K}}_N$. *Нека је Ајзенхарт-Риманов простор одређен основним метричким тензором* $g_{ij} = g_{\underline{ij}} + g_{\underset{\vee}{ij}}$, *где је*

$$(g_{\underline{ij}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{x^1}x^3 & e^{x^1}x^2 \\ 0 & 0 & e^{x^1}x^2 & e^{x^1}(x^2+x^3) \end{bmatrix} \tag{3.3.5}$$

$$(g_{\underset{\vee}{ij}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{x^1}x^3 & e^{x^1}x^2 \\ 0 & 0 & e^{x^1}x^2 & e^{x^1}(x^2+x^3) \end{bmatrix} \tag{3.3.6}$$

Нека је

$$(\overline{g}_{\underline{ij}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^3 & x^2 \\ 0 & 0 & x^2 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.3.7}$$

симетрични део основног метричког тензора, а

$$(\overline{F}^h_i) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.3.8}$$

скоро комплексна структура простора $G\underset{3}{\overline{K}}_4$. *Тада су испуњени услови* (3.2.11), (3.2.12) *и* (3.2.14). *Ако* $\overline{T}^h_{ij}$ *изаберемо тако да важи*

$$\overline{T}^h_{pj}\overline{F}^p_i - \overline{T}^p_{ji}\overline{F}^h_p = 0,$$

онда је испуњен и услов (3.2.13), *тј.* $G\underset{3}{\overline{K}}_4$ *је* 4*-димензиони Ајзенхарт-Келеров простор треће врсте. Ако је пресликавање* $f : GR_N \to G\underset{3}{\overline{K}}_N$ *геодезијско, тада је*

$$\begin{aligned} &\psi_k = \frac{1}{5}(\overline{\Gamma}^p_{kp} - \Gamma^p_{kp}), k = 1, ..., 4, \text{ где је} \\ &\overline{\Gamma}^p_{kp} = \frac{\partial}{\partial x^k}\ln\sqrt{det(\overline{g}_{ij})} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^k}\ln(x^3 - (x^2)2), \\ &\Gamma^p_{kp} = \frac{\partial}{\partial x^k}\ln\sqrt{det(g_{\underline{ij}})} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^k}[x^1 + \frac{1}{2}\ln(x^2x^3 - (x^2)^2) + (x^3)^2]. \end{aligned} \tag{3.3.9}$$

□

Ј. Микеш је са коауторима у раду [39] обезбедио потребне и довољне услове за постојање геодезијског пресликавања Римановог простора на Келеров простор.

Теорема 3.3.2. [39] *Риманов простор* R_N *допушта нетривијално геодезијско пресликавање на простор* $\overline{K}_N$ *ако и само ако, у заједничком по координатама систему* x, *у односу на пресликавање, важе услови*

$$\overline{g}_{ij;k} = 2\psi_k\overline{g}_{ij} + \psi_i\overline{g}_{jk} + \psi_j\overline{g}_{ik}, \tag{3.3.10}$$

$$\overline{F}^h_{i;k} = \overline{F}^h_k\psi_i - \delta^h_k\overline{F}^\alpha_i\psi_\alpha, \tag{3.3.11}$$

где је $\psi_i \neq 0$, *а за тензоре* $\overline{g}_{ij}$ *и* $\overline{F}_i^h$ *важи:*

$$det(\overline{g}_{ij}) \neq 0, \quad \overline{F}_\alpha^h \overline{g}_{\alpha j} + \overline{F}_j^\alpha \overline{g}_{\alpha i} = 0, \quad \overline{F}_\alpha^h \overline{F}_i^\alpha = -\delta_i^h. \tag{3.3.12}$$

Тада су $\overline{g}_{ij}$ *и* $\overline{F}_i^h$ *метрички тензор и скоро комплексна структура простора* $\overline{K}_N$*, редом.*

Мотивисани Теоремом 3.3.2., у наставку ћемо успоставити одговарајуће потребне и довољне услове за постојање геодезијског пресликавања простора GR_N на $G\underset{3}{\overline{K}}_N$ у односу на све четири врсте коваријантног диференцирања.

Теорема 3.3.3. [119, 126] *Ајзенхарт-Риманов простор* GR_N *допушта нетривијално геодезијско пресликавање на Ајзенхарт-Келеров простор* $G\underset{3}{\overline{K}}_N$ *ако и само ако, у заједничком по координатама систему* x *у односу на пресликавање, важе услови*

$$\overline{g}_{ij\underset{1}{|}k} = \overline{g}_{ij\underset{\vee 1}{||}k} + 2\psi_k \overline{g}_{ij} + \psi_i \overline{g}_{jk} + \psi_j \overline{g}_{ik} + \xi_{ik}^p \overline{g}_{pj} + \xi_{jk}^p \overline{g}_{ip}, \tag{3.3.13}$$

$$\overline{F}^h_{i\underset{1}{|}k} = \overline{F}^h_{i\underset{1}{||}k} + \overline{F}_k^h \psi_i - \delta_k^h \overline{F}_i^p \psi_p - \xi_{pk}^h \overline{F}_i^p + \xi_{ik}^p \overline{F}_p^h, \tag{3.3.14}$$

у односу на прву врсту коваријантног диференцирања, при чему је $\psi_i \neq 0$*, а тензори* $\overline{g}_{ij}$ *и* $\overline{F}_i^h$ *задовољавају услове:*

$$det(\overline{g}_{\underline{ij}}) \neq 0, \quad \overline{F}_i^\alpha \overline{g}_{\underline{\alpha j}} + \overline{F}_j^\alpha \overline{g}_{\underline{\alpha i}} = 0, \quad \overline{F}_\alpha^h \overline{F}_i^\alpha = -\delta_i^h. \tag{3.3.15}$$

Тада су $\overline{g}_{ij}$ *и* $\overline{F}_i^h$ *метрички тензор и скоро комплексна структура простора* $G\underset{3}{\overline{K}}_N$*, редом.*

Доказ. Једначина (3.3.13) обезбеђује постојање геодезијског пресликавања Ајзенхарт-Римановог простора GR_N на Ајзенхарт-Риманов простор $G\overline{R}_N$ са метричким тензором $\overline{g}_{ij}$ у односу на прву врсту коваријантног диференцирања.

Формула (3.3.14) имплицира коваријантну константност структуре $\overline{F}_i^h$ у $G\overline{R}_N$ у односу на трећу врсту коваријантног диференцирања. Услови (3.3.15) гарантују да су $\overline{g}_{ij}$ и $\overline{F}_i^h$ метрички тензор и скоро комплексна структура простора $G\underset{3}{\overline{K}}_N$, редом.

Тензор деформације је одређен једначином (3.3.2), тј.

$$\overline{\Gamma}^h_{ij} - \Gamma^h_{ij} = \psi_i \delta^h_j + \psi_j \delta^h_i + \xi^h_{ij}. \tag{3.3.16}$$

За структуру $\overline{F}$, важе наредне једначине:

$$\overline{F}^h_{i\underset{1}{|}k} = \overline{F}^h_{i,k} + \Gamma^h_{pk}\overline{F}^p_i - \Gamma^p_{ik}\overline{F}^h_p, \quad \overline{F}^h_{i\underset{2}{|}k} = \overline{F}^h_{i,k} + \Gamma^h_{kp}\overline{F}^p_i - \Gamma^p_{ki}\overline{F}^h_p. \tag{3.3.17}$$

Заменом Γ^h_{ij}, на основу (3.3.16), у (3.3.17), добијамо

$$\begin{aligned}
\overline{F}^h_{i\underset{1}{|}k} &= \overline{F}^h_{i,k} + (\overline{\Gamma}^h_{pk} - \psi_p\delta^h_k - \psi_k\delta^h_p - \xi^h_{pk})\overline{F}^p_i - (\overline{\Gamma}^p_{ik} - \psi_i\delta^p_k - \psi_k\delta^p_i - \xi^p_{ik})\overline{F}^h_p \\
&= \overline{F}^h_{i,k} + \overline{\Gamma}^h_{pk}\overline{F}^p_i - \psi_p\delta^h_k\overline{F}^p_i - \psi_k\delta^h_p\overline{F}^p_i - \xi^h_{pk}\overline{F}^p_i - \overline{\Gamma}^p_{ik}\overline{F}^h_p + \psi_i\delta^p_k\overline{F}^h_p + \psi_k\delta^p_i\overline{F}^h_p + \xi^p_{ik}\overline{F}^h_p \\
&= \overline{F}^h_{i\underset{1}{||}k} - \psi_p\delta^h_k\overline{F}^p_i - \psi_k\delta^h_p\overline{F}^p_i - \xi^h_{pk}\overline{F}^p_i + \psi_i\delta^p_k\overline{F}^h_p + \psi_k\delta^p_i\overline{F}^h_p + \xi^p_{ik}\overline{F}^h_p \\
&= \overline{F}^h_{i\underset{1}{||}k} - \psi_p\delta^h_k\overline{F}^p_i - \psi_k\overline{F}^h_i - \xi^h_{pk}\overline{F}^p_i + \psi_i\overline{F}^h_k + \psi_k\overline{F}^h_i + \xi^p_{ik}\overline{F}^h_p \\
&= \overline{F}^h_{i\underset{1}{||}k} - \psi_p\delta^h_k\overline{F}^p_i + \psi_i\overline{F}^h_k - \xi^h_{pk}\overline{F}^p_i + \xi^p_{ik}\overline{F}^h_p,
\end{aligned}$$

где су $|$ и $||$ коваријантни изводи у GR_N и $G\underset{3}{\overline{K}}_N$, редом. □

Теорема 3.3.4. [119, 126] *Ајзенхарт-Риманов простор GR_N допушта нетривијално геодезијско пресликавање на Ајзенхарт-Келеров простор треће врсте $G\underset{3}{\overline{K}}_N$ ако и само ако, у заједничком по координатама систему x у односу на пресликавање, важе услови*

$$\overline{g}_{ij\underset{2}{|}k} = \overline{g}_{ij\underset{\vee 2}{||}k} + 2\psi_k\overline{g}_{ij} + \psi_i\overline{g}_{jk} + \psi_j\overline{g}_{ik} + \xi^p_{ki}\overline{g}_{pj} + \xi^p_{kj}\overline{g}_{ip}, \tag{3.3.18}$$

$$\overline{F}^h_{i\underset{2}{|}k} = \overline{F}^h_{i\underset{2}{||}k} + \overline{F}^h_k\psi_i - \delta^h_k\overline{F}^p_i\psi_p - \xi^h_{kp}\overline{F}^p_i + \xi^p_{ki}\overline{F}^h_p, \tag{3.3.19}$$

у односу на другу врсту коваријантног диференцирања, при чему је $\psi_i \neq 0$, а тензори $\overline{g}_{ij}$ и $\overline{F}^h_i$ задовољавају услове:

$$det(\overline{g}_{\underline{ij}}) \neq 0, \quad \overline{F}^\alpha_i\overline{g}_{\underline{\alpha j}} + \overline{F}^\alpha_j\overline{g}_{\underline{\alpha i}} = 0, \quad \overline{F}^h_\alpha\overline{F}^\alpha_i = -\delta^h_i. \tag{3.3.20}$$

Тада су $\overline{g}_{ij}$ и $\overline{F}^h_i$ метрички тензор и скоро комплексна структура простора $G\underset{3}{\overline{K}}_N$, редом.

Доказ. У простору GR_N за другу врсту коваријантног диференцирања важи:

$$\begin{aligned}
\overline{F}^h_{i\underset{2}{|}k} &= \overline{F}^h_{i,k} + (\overline{\Gamma}^h_{kp} - \psi_k\delta^h_p - \psi_p\delta^h_k - \xi^h_{kp})\overline{F}^p_i - (\overline{\Gamma}^p_{ki} - \psi_k\delta^p_i - \psi_i\delta^p_k - \xi^p_{ki})\overline{F}^h_p \\
&= \overline{F}^h_{i,k} + \overline{\Gamma}^h_{kp}\overline{F}^p_i - \psi_k\delta^h_p\overline{F}^p_i - \psi_p\delta^h_k\overline{F}^p_i - \xi^h_{kp}\overline{F}^p_i - \overline{\Gamma}^p_{ki}\overline{F}^h_p + \psi_k\delta^p_i\overline{F}^h_p + \psi_i\delta^p_k\overline{F}^h_p + \xi^p_{ki}\overline{F}^h_p \\
&= \overline{F}^h_{i\underset{2}{||}k} - \psi_k\delta^h_p\overline{F}^p_i - \psi_p\delta^h_k\overline{F}^p_i - \xi^h_{kp}\overline{F}^p_i + \psi_k\delta^p_i\overline{F}^h_p + \psi_i\delta^p_k\overline{F}^h_p + \xi^p_{ki}\overline{F}^h_p \\
&= \overline{F}^h_{i\underset{2}{||}k} - \psi_k\overline{F}^h_i - \psi_p\delta^h_k\overline{F}^p_i - \xi^h_{kp}\overline{F}^p_i + \psi_k\overline{F}^h_i + \psi_i\overline{F}^h_k + \xi^p_{ki}\overline{F}^h_p \\
&= \overline{F}^h_{i\underset{2}{||}k} + \psi_i\overline{F}^h_k - \psi_p\delta^h_k\overline{F}^p_i - \xi^h_{kp}\overline{F}^p_i + \xi^p_{ki}\overline{F}^h_p.
\end{aligned}$$

□

На сличан начин добијамо одговарајуће резултате за трећу и четврту врсту коваријантног диференцирања:

Теорема 3.3.5. [119, 126] *Ајзенхарт-Риманов простор GR_N допушта нетривијално геодезијско пресликавање на Ајзенхарт-Келеров простор треће врсте $G\underset{3}{\overline{K}}_N$ ако и само ако, у заједничком по координатама систему x у односу на пресликавање, важе услови*

$$\overline{g}_{ij\underset{3}{|}k} = \overline{g}_{ij\underset{\vee 3}{||}k} + 2\psi_k\overline{g}_{ij} + \psi_i\overline{g}_{jk} + \psi_j\overline{g}_{ik} + \xi^p_{ik}\overline{g}_{pj} + \xi^p_{kj}\overline{g}_{ip}, \tag{3.3.21}$$

$$\overline{F}^h_{i\underset{3}{|}k} = \psi_i\overline{F}^h_k - \psi_p\delta^h_k\overline{F}^p_i - \xi^h_{pk}\overline{F}^p_i + \xi^p_{ki}\overline{F}^h_p, \tag{3.3.22}$$

у односу на трећу врсту коваријантног диференцирања, при чему је $\psi_i \neq 0$, а тензори $\overline{g}_{ij}$ и $\overline{F}^h_i$ задовољавају услове:

$$det(\overline{g}_{\underline{ij}}) \neq 0, \quad \overline{F}^\alpha_i\overline{g}_{\underline{\alpha j}} + \overline{F}^\alpha_j\overline{g}_{\underline{\alpha i}} = 0, \quad \overline{F}^h_\alpha\overline{F}^\alpha_i = -\delta^h_i. \tag{3.3.23}$$

Тада су $\overline{g}_{ij}$ и $\overline{F}^h_i$ метрички тензор и скоро комплексна структура простора $G\underset{3}{\overline{K}}_N$, редом.

Теорема 3.3.6. [119, 126] *Ајзенхарт-Риманов простор GR_N допушта нетривијално геодезијско пресликавање на Ајзенхарт-Келеров простор $G\underset{3}{\overline{K}}_N$ ако и само ако, у заједничком по координатама систему x у односу на* *пресликавање, важе услови*

$$\overline{g}_{ij\underset{4}{|}k} = \overline{g}_{ij\underset{\vee 4}{||}k} + 2\psi_k\overline{g}_{ij} + \psi_i\overline{g}_{jk} + \psi_j\overline{g}_{ik} + \xi^p_{ki}\overline{g}_{pj} + \xi^p_{jk}\overline{g}_{ip}, \tag{3.3.24}$$

$$\overline{F}^h_{i\underset{4}{|}k} = \psi_i\overline{F}^h_k - \psi_p\delta^h_k\overline{F}^p_i - \xi^h_{kp}\overline{F}^p_i + \xi^p_{ik}\overline{F}^h_p, \tag{3.3.25}$$

у односу на четврту врсту коваријантног диференцирања, при чему је $\psi_i \neq 0$*, а тензори* $\overline{g}_{ij}$ *и* $\overline{F}^h_i$ *задовољавају услове:*

$$det(\overline{g}_{\underline{ij}}) \neq 0, \quad \overline{F}^\alpha_i\overline{g}_{\underline{\alpha j}} + \overline{F}^\alpha_j\overline{g}_{\underline{\alpha i}} = 0, \quad \overline{F}^h_\alpha\overline{F}^\alpha_i = -\delta^h_i. \tag{3.3.26}$$

Тада су $\overline{g}_{ij}$ *и* $\overline{F}^h_i$ *метрички тензор и скоро комплексна структура простора* $G\underset{3}{\overline{K}}_N$*, редом.*

3.4 Еквиторзиона геодезијска пресликавања

Еквиторзиона пресликавања имају значајну улогу у теорији геодезијских, конформних и холоморфно пројективних трансформација између два простора несиметричне афине конексије [58, 92, 97, 101–103, 106, 107, 119–121, 123, 128].

Дефиниција 3.4.1. [58] *Пресликавање* $f : GR_N \to G\underset{3}{\overline{K}}_N$ *је* **еквиторзионо геодезијско пресликавање** *ако су тензори торзија простора* GR_N *и* $G\underset{3}{\overline{K}}_N$ *једнаки у заједничком координатном систему. Тада, на основу* (3.3.1), (3.3.2) *и* (3.3.16) *важи*

$$\overline{T}^h_{ij} - T^h_{ij} = \xi^h_{ij} = 0. \tag{3.4.1}$$

У случају еквиторзионих пресликавања Теореме 3.3.3.-3.3.6. постају:

Теорема 3.4.1. [119, 126] *Ајзенхарт-Риманов простор* GR_N *допушта нетривијално еквиторзионо геодезијско пресликавање на Ајзенхарт-Келеров простор* $G\underset{3}{\overline{K}}_N$ *ако и само ако, у заједничком по координатама систему* x *у односу на пресликавање, важе услови*

$$\overline{g}_{\underline{ij}\underset{1}{|}k} = 2\psi_k\overline{g}_{\underline{ij}} + \psi_i\overline{g}_{\underline{jk}} + \psi_j\overline{g}_{\underline{ik}}, \tag{3.4.2}$$

$$\overline{F}^h_{\substack{i|k\\1}} = \overline{F}^h_{\substack{i||k\\1}} + \overline{F}^h_k\psi_i - \delta^h_k\overline{F}^p_i\psi_p, \tag{3.4.3}$$

у односу на прву врсту коваријантног диференцирања, при чему је $\psi_i \neq 0$, *а тензори* $\overline{g}_{ij}$ *и* $\overline{F}^h_i$ *задовољавају услове:*

$$det(\overline{g}_{\underline{ij}}) \neq 0, \quad \overline{F}^\alpha_i\overline{g}_{\underline{\alpha j}} + \overline{F}^\alpha_j\overline{g}_{\underline{\alpha i}} = 0, \quad \overline{F}^h_\alpha\overline{F}^\alpha_i = -\delta^h_i. \tag{3.4.4}$$

Тада су $\overline{g}_{ij}$ *и* $\overline{F}^h_i$ *метрички тензор и скоро комплексна структура простора* $G\underset{3}{\overline{K}}_N$, *редом.*

Теорема 3.4.2. [119, 126] *Ајзенхарт-Риманов простор* GR_N *допушта нетривијално еквиторзионо геодезијско пресликавање на Ајзенхарт-Келеров простор* $G\underset{3}{\overline{K}}_N$ *ако и само ако, у заједничком по координатама систему* x *у односу на пресликавање, важе услови*

$$\overline{g}_{\substack{\underline{ij}|k\\2}} = 2\psi_k\overline{g}_{\underline{ij}} + \psi_i\overline{g}_{\underline{jk}} + \psi_j\overline{g}_{\underline{ik}}, \tag{3.4.5}$$

$$\overline{F}^h_{\substack{i|k\\2}} = \overline{F}^h_{\substack{i||k\\2}} + \overline{F}^h_k\psi_i - \delta^h_k\overline{F}^p_i\psi_p, \tag{3.4.6}$$

у односу на другу врсту коваријантног диференцирања, при чему је $\psi_i \neq 0$, *а тензори* $\overline{g}_{ij}$ *и* $\overline{F}^h_i$ *задовољавају услове:*

$$det(\overline{g}_{\underline{ij}}) \neq 0, \quad \overline{F}^\alpha_i\overline{g}_{\underline{\alpha j}} + \overline{F}^\alpha_j\overline{g}_{\underline{\alpha i}} = 0, \quad \overline{F}^h_\alpha\overline{F}^\alpha_i = -\delta^h_i. \tag{3.4.7}$$

Тада су $\overline{g}_{ij}$ *и* $\overline{F}^h_i$ *метрички тензор и скоро комплексна структура простора* $G\underset{3}{\overline{K}}_N$, *редом.*

Теорема 3.4.3. [119, 126] *Ајзенхарт-Риманов простор* GR_N *допушта нетривијално еквиторзионо геодезијско пресликавање на Ајзенхарт-Келеров простор треће врсте* $G\underset{3}{\overline{K}}_N$ *ако и само ако, у заједничком по координатама систему* x *у односу на пресликавање, важе услови*

$$\overline{g}_{\substack{\underline{ij}|k\\3}} = 2\psi_k\overline{g}_{\underline{ij}} + \psi_i\overline{g}_{\underline{jk}} + \psi_j\overline{g}_{\underline{ik}}, \tag{3.4.8}$$

$$\overline{F}^h_{\substack{i|k\\3}} = \psi_i\overline{F}^h_k - \psi_p\delta^h_k\overline{F}^p_i, \tag{3.4.9}$$

у односу на трећу врсту коваријантног диференцирања, при чему је $\psi_i \neq 0$, *а тензори* $\overline{g}_{ij}$ *и* $\overline{F}^h_i$ *задовољавају услове:*

$$det(\overline{g}_{\underline{ij}}) \neq 0, \quad \overline{F}^\alpha_i \overline{g}_{\underline{\alpha j}} + \overline{F}^\alpha_j \overline{g}_{\underline{\alpha i}} = 0, \quad \overline{F}^h_\alpha \overline{F}^\alpha_i = -\delta^h_i. \tag{3.4.10}$$

Тада су $\overline{g}_{ij}$ *и* $\overline{F}^h_i$ *метрички тензор и скоро комплексна структура простора* $G\underset{3}{\overline{K}}_N$, *редом.*

Теорема 3.4.4. [119, 126] *Ајзенхарт-Риманов простор* GR_N *допушта нетривијално еквиторзионо геодезијско пресликавање на Ајзенхарт-Келеров простор треће врсте* $G\underset{3}{\overline{K}}_N$ *ако и само ако, у заједничком по координатама систему* x *у односу на пресликавање, важе услови*

$$\overline{g}_{\underline{ij}\underset{4}{|}k} = 2\psi_k \overline{g}_{\underline{ij}} + \psi_i \overline{g}_{jk} + \psi_j \overline{g}_{\underline{ik}}, \tag{3.4.11}$$

$$\overline{F}^h_{i\underset{4}{|}k} = \psi_i \overline{F}^h_k - \psi_p \delta^h_k \overline{F}^p_i, \tag{3.4.12}$$

у односу на четврту врсту коваријантног диференцирања, при чему је $\psi_i \neq 0$, *а тензори* $\overline{g}_{ij}$ *и* $\overline{F}^h_i$ *задовољавају услове:*

$$det(\overline{g}_{\underline{ij}}) \neq 0, \quad \overline{F}^\alpha_i \overline{g}_{\underline{\alpha j}} + \overline{F}^\alpha_j \overline{g}_{\underline{\alpha i}} = 0, \quad \overline{F}^h_\alpha \overline{F}^\alpha_i = -\delta^h_i. \tag{3.4.13}$$

Тада су $\overline{g}_{ij}$ *и* $\overline{F}^h_i$ *метрички тензор и скоро комплексна структура простора* $G\underset{3}{\overline{K}}_N$, *редом.*

3.5 Холоморфно пројективна пресликавања

Познато је да не постоји нетривијално геодезијско пресликавање између два Келерова простора које очувава структуру F^h_i. Због тога су, као уопштење геодезијских линија, уведене аналитички планарне криве. Уопштавајући нотацију аналитички планарних кривих Келерових простора [71, 87, 117], долазимо до аналогне нотације у случају Ајзенхарт-Келерових простора GK_N:

Дефиниција 3.5.1. *У Ајзенхарт-Келеровом простору GK_N, крива која је дата у параметарском облику*

$$x^h = x^h(t), \quad (h = 1, 2, \cdots, N) \tag{3.5.1}$$

је **аналитички планарна** *ако задовољава:*

$$\lambda^h{}_{\underset{\theta}{|}p}\lambda^p = a(t)\lambda^h + b(t)F_p^h\lambda^p, \quad (\theta = 1, 2) \tag{3.5.2}$$

где је $\lambda^h = dx^h/dt$, док су $a(t)$ и $b(t)$ функције параметра t.

Коваријантни изводи првог и другог типа у (3.5.2) задовољавају једначину

$$\lambda^h{}_{\underset{1}{|}p}\lambda^p = \frac{d\lambda^h}{dt} + \Gamma^h_{pq}\lambda^p\lambda^q = \lambda^h{}_{\underset{2}{|}p}\lambda^p.$$

Дакле, аналитички планарне криве Ајзенхарт-Келеровог простора су облика

$$\frac{d\lambda^h}{dt} + \Gamma^h_{pq}\lambda^p\lambda^q = a(t)\lambda^h + b(t)F_p^h\lambda^p. \tag{3.5.3}$$

Нека су GK_N и $G\overline{K}_N$ два N-димензиона генералисана Келерова простора са скоро комплексним структурама F_i^h и $\overline{F}_i^h$, редом, при чему је

$$\overline{F}_i^h = F_i^h \tag{3.5.4}$$

у заједничком координатном систему одређеном пресликавањем

$$f : GK_N \to G\overline{K}_N.$$

Дефиниција 3.5.2. *Дифеоморфизам $f : GK_N \to G\overline{K}_N$ је* **аналитички планарно (холоморфно пројективно) пресликавање**, *ако аналитички планарне криве простора GK_N слика у аналитички планарне криве простора $G\overline{K}_N$.*

Холоморфно пројективна пресликавања Ајзенхарт-Келерових простора су изучавана у [100, 101, 104, 106, 107, 119, 124].

Означимо са

$$P^h_{ij} = \overline{\Gamma}^h_{ij} - \Gamma^h_{ij} \tag{3.5.5}$$

тензор деформације конексије холоморфно пројективног пресликавања f простора GK_N и $G\overline{K}_N$, при чему су Γ^h_{ij} и $\overline{\Gamma}^h_{ij}$ Кристофелови симболи наведених простора, редом. Аналитички планарне криве простора GK_N и $G\overline{K}_N$ су, редом, дате једначинама

$$\frac{d\lambda^h}{dt} + \Gamma^h_{pq}\lambda^p\lambda^q = a(t)\lambda^h + b(t)F^h_p\lambda^p,\ \frac{d\lambda^h}{dt} + \overline{\Gamma}^h_{pq}\lambda^p\lambda^q = \overline{a}(t)\lambda^h + \overline{b}(t)F^h_p\lambda^p.$$

Одузимањем претходних једначина, добијамо

$$(\overline{\Gamma}^h_{pq} - \Gamma^h_{pq})\lambda^p\lambda^q = \psi(t)\lambda^h + \sigma(t)F^h_p\lambda^p,$$

где је $\psi(t) = \overline{a}(t) - a(t),\ \sigma(t) = \overline{b}(t) - b(t)$. Можемо да ставимо

$$\psi(t) = \psi_p\lambda^p,\ \sigma(t) = \sigma_q\lambda^q.$$

Сада је

$$(\overline{\Gamma}^h_{pq} - \Gamma^h_{pq} - \psi_p\delta^h_q - \sigma_p F^h_q)\lambda^p\lambda^q = 0,$$

одакле закључујемо да важи наредна веза међу конексијама датих простора:

$$\overline{\Gamma}^h_{ij} = \Gamma^h_{ij} + \psi_i\delta^h_j + \psi_j\delta^h_i + \sigma_i F^h_j + \sigma_j F^h_i + \xi^h_{ij}, \tag{3.5.6}$$

где је ξ^h_{ij} антисиметрични тензор. У једначини (3.5.6) бирамо вектор σ_i, тако да задовољава $\sigma_i = -\psi_p F^p_i$. На тај начин, добијамо

$$\overline{\Gamma}^h_{ij} = \Gamma^h_{ij} + \psi_i\delta^h_j + \psi_j\delta^h_i - \psi_p F^p_i F^h_j - \psi_p F^p_j F^h_i + \xi^h_{ij}. \tag{3.5.7}$$

Последња једначина нам даје везу између коефицијената конексије Ајзенхарт-Келерових простора GK_N и $G\overline{K}_N$ за холоморфно пројективно пресликавање $f:\ GK_N \to G\overline{K}_N$.

У простору GK_N важе релације

$$\overline{g}_{ij\underset{1}{|}k} = \overline{g}_{ij,k} - \Gamma^p_{ik}\overline{g}_{pj} - \Gamma^p_{jk}\overline{g}_{ip}, \quad \overline{g}_{ij\underset{2}{|}k} = \overline{g}_{ij,k} - \Gamma^p_{ki}\overline{g}_{pj} - \Gamma^p_{kj}\overline{g}_{ip}. \tag{3.5.8}$$

На основу (3.5.7), имамо

$$\begin{aligned}
\overline{g}_{ij\underset{1}{|}k} &= \overline{g}_{ij,k} - \Gamma^p_{ik}\overline{g}_{pj} - \Gamma^p_{jk}\overline{g}_{ip}\\
&= \overline{g}_{ij,k} - (\overline{\Gamma}^p_{ik} - \psi_{(i}\delta^p_{k)} + \psi_q F^q_{(i}F^p_{k)} - \xi^p_{ik})\overline{g}_{pj}\\
&- (\overline{\Gamma}^p_{jk} - \psi_{(j}\delta^p_{k)} + \psi_q F^q_{(j}F^p_{k)} - \xi^p_{jk})\overline{g}_{ip}\\
&= \overline{g}_{ij,k} - \overline{\Gamma}^p_{ik}\overline{g}_{pj} + \psi_{(i}\delta^p_{k)}\,\overline{g}_{pj} - \psi_q F^q_{(i}F^p_{k)}\overline{g}_{pj} + \xi^p_{ik}\overline{g}_{pj}\\
&- \overline{\Gamma}^p_{jk}\overline{g}_{ip} + \psi_{(j}\delta^p_{k)}\,\overline{g}_{ip} - \psi_q F^q_{(j}F^p_{k)}\overline{g}_{ip} + \xi^p_{jk}\overline{g}_{ip}\\
&= \overline{g}_{ij\underset{1}{||}k} + \psi_{(i}\delta^p_{k)}\,\overline{g}_{pj} - \psi_q F^q_{(i}F^p_{k)}\overline{g}_{pj} + \xi^p_{ik}\overline{g}_{pj} + \psi_{(j}\delta^p_{k)}\,\overline{g}_{ip} - \psi_q F^q_{(j}F^p_{k)}\overline{g}_{ip} + \xi^p_{jk}\overline{g}_{ip}\\
&= \overline{g}_{ij\underset{\vee 1}{||}k} + 2\psi_k\overline{g}_{ij} + \psi_i\overline{g}_{kj} + \psi_j\overline{g}_{ik} - \psi_q F^q_{(i}F^p_{k)}\overline{g}_{pj} - \psi_q F^q_{(j}F^p_{k)}\overline{g}_{ip} + \xi^p_{ik}\overline{g}_{pj} + \xi^p_{jk}\overline{g}_{ip},
\end{aligned}$$

На исти начин, добијамо да важе релације

$$\overline{g}_{ij\underset{2}{|}k} = \overline{g}_{ij\underset{\vee 2}{||}k} + 2\psi_k\overline{g}_{ij} + \psi_i\overline{g}_{kj} + \psi_j\overline{g}_{ik} - \psi_q F^q_{(k}F^p_{i)}\overline{g}_{pj} - \psi_q F^q_{(k}F^p_{j)}\overline{g}_{ip} + \xi^p_{ki}\overline{g}_{pj} + \xi^p_{kj}\overline{g}_{ip}.$$

На основу претходно доказаних чињеница, можемо да формулишемо наредну теорему:

Теорема 3.5.1. [119,127] *(а) Пресликавање $f : GK_N \to G\overline{K}_N$ је холоморфно пројективно ако и само ако у заједничком по пресликавању координатном систему, Кристофелови симболи друге врсте датих простора задовољавају релацију* (3.5.7). *(б) Ако је пресликавање $f : GK_N \to G\overline{K}_N$ холоморфно пројективно, тада важе једначине:*

$$\overline{g}_{ij\underset{1}{|}k} = \overline{g}_{ij\underset{\vee 1}{||}k} + 2\psi_k\overline{g}_{ij} + \psi_i\overline{g}_{kj} + \psi_j\overline{g}_{ik} - \psi_q F^q_{(i}F^p_{k)}\overline{g}_{pj} - \psi_q F^q_{(j}F^p_{k)}\overline{g}_{ip} + \xi^p_{ik}\overline{g}_{pj} + \xi^p_{jk}\overline{g}_{ip},$$

$$\overline{g}_{ij\underset{2}{|}k} = \overline{g}_{ij\underset{\vee 2}{||}k} + 2\psi_k\overline{g}_{ij} + \psi_i\overline{g}_{kj} + \psi_j\overline{g}_{ik} - \psi_q F^q_{(k}F^p_{i)}\overline{g}_{pj} - \psi_q F^q_{(k}F^p_{j)}\overline{g}_{ip} + \xi^p_{ki}\overline{g}_{pj} + \xi^p_{kj}\overline{g}_{ip},$$

где $(|)$ *и* $(||)$, *означавају коваријантне изводе простора GK_N и $G\overline{K}_N$, редом. Такође, ако важи једна од претходних једначина, тада је f холоморфно пројективно пресликавање и важи и друга једначина.*

3.6 Инваријантни геометријски објекти холоморфно пројективних пресликавања

У овом одељку проналазимо геометријске објекте који су инваријантни у односу на холоморфно пројективна пресликавања два Ајзенхарт-Келерова простора. Како у општем случају није могуће генерализовати холоморфно пројективни тензор кривине, то ћемо урадити за специјалан случај холоморфно пројективних пресликавања два генералисана Келерова простора.

Дефиниција 3.6.1. *Пресликавање* $f : GK_N \to G\overline{K}_N$ *је* **еквиторзионо холоморфно пројективно пресликавање** *ако су тензори торзије Ајзенхарт-Келерових простора* GK_N *и* $G\overline{K}_N$ *једнаки у заједничком по пресликавању* f *координатном систему.*

Тада, на основу (3.5.7), закључујемо да важи

$$\xi^i_{jk} = 0. \tag{3.6.9}$$

Веза између главних тензора кривине $\overline{K}$ и K простора $G\overline{K}_N$ и GK_N, за холоморфно пројективно пресликавање је дата једначином

$$\begin{aligned}\overline{K}^i_{jmn} &= K^i_{jmn} + P^i_{\underline{jm};n} - P^i_{\underline{jn};m} + P^p_{\underline{jm}}P^i_{\underline{pn}} - P^p_{\underline{jn}}P^i_{\underline{pm}}\\ &+ \alpha(P^i_{\underline{pn}}T^p_{jm} - P^p_{\underline{jn}}T^i_{pm} - P^p_{\underline{mn}}T^i_{jp}) + \alpha'(P^i_{\underline{pm}}T^p_{jn} - P^p_{\underline{jm}}T^i_{pn} - P^p_{\underline{nm}}T^i_{jp}).\end{aligned} \tag{3.6.10}$$

На основу (3.5.7), претходна једначина постаје

$$
\begin{aligned}
&\overline{K}^i_{jmn} = K^i_{jmn} + \psi_{j;n}\delta^i_m + \psi_{m;n}\delta^i_j - \psi_{p;n}F^p_jF^i_m - \psi_{p;n}F^p_mF^i_j\\
&- \psi_{j;m}\delta^i_n - \psi_{n;m}\delta^i_j - \psi_{p;m}F^p_jF^i_n - \psi_{p;m}F^p_nF^i_j\\
&+ (\psi_j\delta^p_m + \psi_m\delta^p_j - \psi_qF^q_jF^p_m - \psi_qF^q_mF^p_j)(\psi_p\delta^i_n + \psi_n\delta^i_p - \psi_rF^r_pF^i_n - \psi_rF^r_nF^i_p)\\
&- (\psi_j\delta^p_n + \psi_n\delta^p_j - \psi_qF^q_jF^p_n - \psi_qF^q_nF^p_j)(\psi_m\delta^i_p + \psi_p\delta^i_m - \psi_rF^r_pF^i_m - \psi_rF^r_mF^i_p)\\
&+ \alpha(\psi_n\delta^i_p + \psi_p\delta^i_n - \psi_qF^q_pF^i_n - \psi_qF^q_nF^i_p)T^p_{jm}\\
&- \alpha(\psi_j\delta^p_n + \psi_n\delta^p_j - \psi_qF^q_jF^p_n - \psi_qF^q_nF^p_j)T^i_{pm}\\
&+ \alpha'(\psi_m\delta^i_p + \psi_p\delta^i_m - \psi_qF^q_pF^i_m - \psi_qF^q_mF^i_p)T^p_{jn}\\
&- \alpha'(\psi_j\delta^p_m + \psi_m\delta^p_j - \psi_qF^q_jF^p_m - \psi_qF^q_mF^p_j)T^i_{pn}\\
&- (\alpha+\alpha')(\psi_n\delta^p_m + \psi_m\delta^p_n - \psi_qF^q_mF^p_n - \psi_qF^q_nF^p_m)T^i_{jp},
\end{aligned}
$$

Узимајући у обзир чињеницу да је ψ_i градијент вектор, имамо да је $\psi_{i;j} = \psi_{j;i}$. Тада, на основу једначине (3.2.4), важи

$$
\begin{aligned}
\overline{K}^i_{jmn} &= K^i_{jmn} + \delta^i_m\,\psi_{jn} - \delta^i_n\,\psi_{jm} + F^p_j(F^i_n\psi_{pm} - F^i_m\psi_{pn})\\
&+ F^i_j(F^p_n\psi_{pm} - F^p_m\psi_{pn}) - (\alpha+\alpha')\psi_nT^i_{jm} + \alpha\psi_p\delta^i_n\,T^p_{jm}\\
&- (\alpha-\alpha')\psi_jT^i_{nm} - (\alpha'+\alpha)\psi_mT^i_{jn} + \alpha'\psi_p\delta^i_m\,T^p_{jn}\\
&+ (\alpha-\alpha')\psi_qF^q_jF^p_nT^p_{nm} - \alpha\psi_qF^q_pF^i_nT^p_{jm} - \alpha'\psi_qF^q_pF^i_mT^p_{jn}\\
&+ (\alpha+\alpha')(\psi_qF^q_mF^p_n + \psi_qF^q_nF^p_m)T^i_{jp},
\end{aligned}
\tag{3.6.11}
$$

где је означено

$$\psi_{ij} = \psi_{i;j} - \psi_i\psi_j + \psi_p\psi_qF^p_iF^q_j. \tag{3.6.12}$$

Контракцијом по индексима i и n у једначини (3.6.11), на основу тога што у Ајзенхарт-Келеровом простору важи $F^p_p = 0$ и $T^p_{ip} = 0$, добијамо

$$
\begin{aligned}
\overline{K}_{jm} &= K_{jm} - N\psi_{jm} - 2F^p_jF^q_m\psi_{pq} + N\alpha\psi_pT^p_{jm}\\
&+ \alpha\psi_qF^q_jF^p_rT^r_{pm} + \alpha\psi_qF^q_rF^p_jT^r_{pm} + \alpha\psi_qF^q_mF^p_rT^r_{jp} + \alpha\psi_qF^q_rF^p_mT^r_{jp}.
\end{aligned}
\tag{3.6.13}
$$

Симетризацијом по индексима j и m, на основу претходне једначине имамо

$$\overline{K}_{(jm)} = K_{(jm)} - 2N\psi_{jm} - 4F^p_jF^q_m\psi_{pq}. \tag{3.6.14}$$

Користећи једначину (3.2.8), која важи за тензор $\overline{K}_{(jm)}$, долазимо до

$$\begin{aligned}\overline{K}_{(jm)} &= F_j^p F_m^q (R_{(pq)} - 2N\psi_{pq} - 4F_p^r F_q^s \psi_{rs}) \\ &+ 2(\beta' + \gamma)(F_j^p F_m^q T_{ps}^r T_{rq}^s - T_{jq}^p T_{pm}^q).\end{aligned} \tag{3.6.15}$$

Узимајући у обзир да је пресликавање еквиторзионо, добијамо

$$\begin{aligned}\overline{K}_{(jm)} &= F_j^p F_m^q K_{(pq)} - 2NF_j^p F_m^q \psi_{pq} - 4\psi_{jm} \\ &+ 2(\beta' + \gamma)(F_j^p F_m^q T_{ps}^r T_{rq}^s - T_{jq}^p T_{pm}^q).\end{aligned} \tag{3.6.16}$$

Сагласно једначинама (3.2.8), (3.6.14) и (3.6.16), важи

$$\psi_{pq} F_j^p F_m^q = \psi_{jm}. \tag{3.6.17}$$

Заменом (3.6.17) у (3.6.14), имамо

$$\overline{K}_{(jm)} - K_{(jm)} = 2(N+2)\psi_{jm}. \tag{3.6.18}$$

Елиминацијом ψ_{jm} из претходне једначине, користећи једначину

$$\overline{\Gamma}_{pj}^p - \Gamma_{pj}^p = (N+2)\psi_j,$$

где је ψ_j одређено, добијамо

$$\mathcal{HP}\overline{\mathcal{W}}_{jmn}^i = \mathcal{HP}\mathcal{W}_{jmn}^i, \tag{3.6.19}$$

где је

$$\begin{aligned}\mathcal{HPW}^i_{jmn} = K^i_{jmn} &+ \frac{1}{2(N+2)}\Big(\delta^i_m K_{(jn)} - \delta^i_n K_{(jm)}\\
&+ F^p_j(F^i_n K_{(pm)} - F^i_m K_{(pn)}) + F^i_j(F^p_n K_{(pm)} - F^p_m K_{(pn)})\Big)\\
&+ \frac{1}{N+2}\Big(- (\alpha+\alpha')\Gamma^s_{\underline{sn}} T^i_{jm} + \alpha\Gamma^s_{\underline{sp}}\delta^i_n T^p_{jm} - (\alpha-\alpha')\Gamma^s_{\underline{sj}} T^i_{nm}\\
&- (\alpha'+\alpha)\Gamma^s_{\underline{sm}} T^i_{jn} + \alpha'\Gamma^s_{\underline{sp}}\delta^i_m T^p_{jn}\\
&+ (\alpha-\alpha')\Gamma^s_{\underline{sq}} F^q_j F^p_n T^p_{nm} - \alpha\Gamma^s_{\underline{sq}} F^q_p F^i_n T^p_{jm} - \alpha'\Gamma^s_{\underline{sq}} F^q_p F^i_m T^p_{jn}\\
&+ (\alpha+\alpha')(\Gamma^s_{\underline{sq}} F^q_m F^p_n + \Gamma^s_{\underline{sq}} F^q_n F^p_m) T^i_{jp}\Big)\end{aligned} \tag{3.6.20}$$

геометријски објекат простора GK_N. Наравно, $\mathcal{HP}\overline{\mathcal{W}}^i_{jmn}$ је објекат простора $G\overline{K}_N$. Према томе, закључујемо да важи наредна теорема:

Теорема 3.6.1. [119, 127] *Геометријски објекат $\mathcal{HPW}^i_{jmn}$ одређен формулом* (3.6.20) *је инваријанта еквиторзионог холоморфно пројективног пресликавања $f : GK_N \to G\overline{K}_N$.*

У општем случају, геометријски објекат $\mathcal{HPW}^i_{jmn}$ простора GK_N није тензор, па га због тога називамо *еквиторзиони холоморфно пројективни параметар*. Није тешко закључити да важи наредно тврђење:

Теорема 3.6.2. [119, 127] *Еквиторзиони холоморфно пројективни параметар*
$\mathcal{HPW}^i_{jmn}$ одређен формулом (3.6.20) *је тензор ако и само ако је $\alpha = \alpha' = 0$.*

Од дванаест тензора кривине (1.5.24), (1.5.25), њих пет је независно [53]. Добијамо их када је

$$\begin{aligned}(\alpha,\beta,\alpha',\beta',\gamma) \in &\{(1,1,-1,-1,0), (-1,1,1,-1,0),\\
&(1,-1,1,1,-2), (1,-1,1,1,2), (0,1,0,1,0)\}.\end{aligned} \tag{3.6.21}$$

Ако је, на пример, $(\alpha,\beta,\alpha',\beta',\gamma) = (1,1,-1,-1,0)$ добијамо тензор кривине

$$\underset{1}{R} = R + \mathcal{A} - \mathcal{A}' + \mathcal{B} - \mathcal{B}',$$

где су $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}'$ одређени помоћу (1.5.23). У том случају, за холоморфно пројективни параметар добијамо

$$
\begin{aligned}
\underset{1}{\mathcal{HPW}}{}^i_{jmn} = \underset{1}{R}{}^i_{jmn} &+ \frac{1}{2(N+2)}\Big(\delta^i_m \underset{1}{R}{}_{(jn)} - \delta^i_n \underset{1}{R}{}_{(jm)} \\
&+ F^p_j(F^i_n \underset{1}{R}{}_{(pm)} - F^i_m \underset{1}{R}{}_{(pn)}) + F^i_j(F^p_n \underset{1}{R}{}_{(pm)} - F^p_m \underset{1}{R}{}_{(pn)})\Big) \\
&+ \frac{1}{N+2}\Big(\Gamma^s_{\underline{sp}}\delta^i_n T^p_{jm} - 2\Gamma^s_{\underline{sj}} T^i_{nm} + \Gamma^s_{\underline{sp}}\delta^i_m T^p_{jn} + 2\Gamma^s_{\underline{sq}} F^q_j F^p_n T^p_{nm} \\
&- \Gamma^s_{\underline{sq}} F^q_p F^i_n T^p_{jm} + \Gamma^s_{\underline{sq}} F^q_p F^i_m T^p_{jn}\Big).
\end{aligned}
\tag{3.6.22}
$$

Од пет независних тензора кривине $\underset{\theta}{R}{}^i_{jmn}$, $(\theta = 1, ..., 5)$, једино у случају тензора

$$\underset{5}{R} = R + \mathcal{B} + \mathcal{B}'$$

инваријантни геометријски објекат

$$
\begin{aligned}
\underset{5}{\mathcal{HPW}}{}^i_{jmn} = \underset{5}{R}{}^i_{jmn} &+ \frac{1}{N+2}\Big(\delta^i_m \underset{5}{R}{}_{jn} - \delta^i_n \underset{5}{R}{}_{jm} \\
&+ F^p_j(F^i_n \underset{5}{R}{}_{pm} - F^i_m \underset{5}{R}{}_{pn}) + F^i_j(F^p_n \underset{5}{R}{}_{pm} - F^p_m \underset{5}{R}{}_{pn})\Big)
\end{aligned}
\tag{3.6.23}
$$

је тензор. Напоменимо да су геометрјски објекти (3.6.20) тензори у случају три од дванаест тензора кривине.

ГЛАВА 4

Неке основне једначине скоро геодезијских пресликавања другог типа

4.1 Скоро геодезијска пресликавања

Геодезијске и скоро геодезијске линије играју веома битну улогу у геометрији и физици. Концепт геодезијских пресликавања међу просторима са афином конексијом без торзије увео је Н. С. Синјуков [87]. Велики допринос теорији геодезијских и скоро геодезијских пресликавања дали су В. Е. Березовски [3–9], Ј. Микеш [24–28, 35, 36, 40, 89], С. М. Минчић [58, 59], Љ. С. Велимировић [102, 115], М. С. Станковић [13, 74, 91, 97–99, 105, 108], М. Љ. Златановић [69, 120–122] и многи други аутори.

Генерализацијом концепта геодезијских пресликавања у случају Риманових и афиних простора, Синјуков је увео следећу нотацију [87]:

Дефиниција 4.1.1. *Криву* $l : x^h = x^h(t)$ *називамо* **скоро геодезијском линијом** *уколико њен тангентни вектор* $\lambda^h(t) = dx^h/dt \neq 0$ *задовољава једначине*

$$\overline{\lambda}^h_{(2)} = \overline{a}(t)\lambda^h + \overline{b}(t)\overline{\lambda}^h_{(1)}, \quad \overline{\lambda}^h_{(1)} = \lambda^h_{||p}\lambda^p\,, \quad \overline{\lambda}^h_{(2)} = \overline{\lambda}^h_{(1)||p}\lambda^p\,,$$

где су $\overline{a}(t)$ и $\overline{b}(t)$ функције параметра t, док је са $||$ означено коваријантно диференцирање у односу на конексију у $\overline{A}_N$.

Дефиниција 4.1.2. *Пресликавање f афиног простора A_N на простор $\overline{A}_N$ је* **скоро геодезијско пресликавање** *ако сваку геодезијску линију простора A_N преводи у скоро геодезијску линију простора $\overline{A}_N$.*

Н. С. Синјуков [87] је у случају простора без торзије разликовао три типа скоро геодезијских пресликавања π_1, π_2, π_3, при чему је класификацију извршио у односу на тензор деформације конексије. В. Е. Березовски и J. Микеш су показали да су π_1, π_2 и π_3 једини типови скоро геодезијских пресликавања у случају афино повезаних многострукости без торзије чија је димензија већа од пет [4, 44].

На диференцијабилној многострукости са несиметричном афином конексијом L^i_{jk} постоје две врсте коваријантног диференцирања за вектор:

$$\lambda^h_{\underset{1}{|}m} = \lambda^h_{,m} + L^h_{pm}\lambda^p, \quad \lambda^h_{\underset{2}{|}m} = \lambda^h_{,m} + L^h_{mp}\lambda^p.$$

Из тог разлога, у случају простора са несиметричном афином конексијом, је могуће дефинисати две врсте скоро геодезијских линија и две врсте скоро геодезијских преликавања.

Дефиниција 4.1.3. *Крива $l : x^h = x^h(t)$ је скоро геодезијска линија прве врсте ако њен тангентни вектор $\lambda^h(t) = dx^h/dt \neq 0$ задовољава једначине*

$$\underset{1}{\overline{\lambda}}^h{}_{(2)} = \underset{1}{\overline{a}}(t)\lambda^h + \underset{1}{\overline{b}}(t)\underset{1}{\overline{\lambda}}^h{}_{(1)}, \quad \underset{1}{\overline{\lambda}}^h{}_{(1)} = \lambda^h_{\underset{1}{||}p}\lambda^p, \quad \underset{1}{\overline{\lambda}}^h{}_{(2)} = \underset{1}{\overline{\lambda}}^h{}_{(1)\underset{1}{||}p}\lambda^p, \tag{4.1.1}$$

где су $\underset{1}{\overline{a}}(t)$ и $\underset{1}{\overline{b}}(t)$ функције параметра t.

Дефиниција 4.1.4. *Крива $l : x^h = x^h(t)$ је скоро геодезијска линија друге врсте ако њен тангентни вектор $\lambda^h(t) = dx^h/dt \neq 0$ задовољава једначине*

$$\underset{2}{\overline{\lambda}}^h{}_{(2)} = \underset{2}{\overline{a}}(t)\lambda^h + \underset{2}{\overline{b}}(t)\underset{2}{\overline{\lambda}}^h{}_{(1)}, \quad \underset{2}{\overline{\lambda}}^h{}_{(1)} = \lambda^h_{\underset{2}{||}\alpha}\lambda^\alpha, \quad \underset{2}{\overline{\lambda}}^h{}_{(2)} = \underset{2}{\overline{\lambda}}^h{}_{(1)\underset{2}{||}\alpha}\lambda^\alpha, \tag{4.1.2}$$

где су $\underset{2}{\overline{a}}(t)$ и $\underset{2}{\overline{b}}(t)$ функције параметра t.

Дефиниција 4.1.5. *Пресликавање f простора GA_N на простор са несиметричном афином конексијом $G\overline{A}_N$ је* скоро геодезијско пресликавање прве врсте *ако сваку геодезијску линију простора GA_N преводи у скоро геодезијску линију првог типа простора $G\overline{A}_N$.*

Дефиниција 4.1.6. *Пресликавање f простора GA_N на простор са несиметричном афином конексијом $G\overline{A}_N$ је* скоро геодезијско пресликавање друге врсте *ако сваку геодезијску линију простора GA_N преводи у скоро геодезијску линију другог типа простора $G\overline{A}_N$.*

За коефицијенте конексије L^h_{ij}, $\overline{L}^h_{ij}$ простора GA_N, $G\overline{A}_N$, $(N > 2)$, редом, важи

$$\overline{L}^h_{ij} = L^h_{ij} + P^h_{ij}, \tag{4.1.3}$$

где је P^h_{ij} тензор деформације.

Синјуков [87] је, за афине просторе без торзије, представио скоро геодезијска пресликавања π_2 помоћу услова

$$b = \frac{b_{\gamma\delta}\lambda^\gamma\lambda^\delta}{\sigma_\alpha\lambda^\alpha},$$

где је $\sigma_\alpha\lambda^\alpha \neq 0$. Тада је тензор деформације

$$P^h_{ij} = \psi_i\delta^h_j + \psi_j\delta^h_i + \sigma_i F^h_j + \sigma_j F^h_i, \tag{4.1.4}$$

где су ψ_i, σ_i вектори, а F^h_i тензор.

Аналогно, скоро геодезијска пресликавања прве врсте афиног простора су другог типа $\underset{1}{\pi}_2$, ако функција $\underset{1}{b}$ задовољава услов [61]:

$$\underset{1}{b} = \frac{\underset{1}{b}_{\gamma\delta}\lambda^\gamma\lambda^\delta}{\sigma_\alpha\lambda^\alpha},$$

где је $\sigma_\alpha\lambda^\alpha \neq 0$. Тада је

$$P^h_{ij} = \psi_i\delta^h_j + \psi_j\delta^h_i + \sigma_i F^h_j + \sigma_j F^h_i + \xi^h_{ij}, \tag{4.1.5}$$

$$\begin{aligned} F^h_{\underset{1}{i|j}} + F^h_{\underset{1}{j|i}} + F^h_p F^p_i \sigma_j + F^h_p F^p_j \sigma_i + \xi^h_{pi} F^p_j + \xi^h_{pj} F^p_i \\ = \mu_i F^h_j + \mu_j F^h_i + \nu_i \delta^h_j + \nu_j \delta^h_i \,, \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

где су ψ_i, σ_i вектори, F^h_i је тензор, $P^h_{\underset{\vee}{ij}} = \xi^h_{ij}$ је антисиметрични тензор, а μ_i, ν_i су коваријантни вектори.

Услови (4.1.5) и (4.1.6) представљају основне једначине пресликавања $\underset{1}{\pi}_2$.

Скоро геодезијско пресликавање друге врсте је другог типа $\underset{2}{\pi}_2$, ако функција $\underset{2}{b}$ задовољава услов

$$\underset{2}{b} = \frac{\underset{2}{b}_{\gamma\delta} \lambda^\gamma \lambda^\delta}{\sigma_\alpha \lambda^\alpha},$$

где је $\sigma_\alpha \lambda^\alpha \neq 0$. Аналогно, добијамо

$$\begin{aligned} F^h_{\underset{2}{i|j}} + F^h_{\underset{2}{j|i}} + F^h_p F^p_i \sigma_j + F^h_p F^p_j \sigma_i + \xi^h_{ip} F^p_j + \xi^h_{jp} F^p_i \\ = \mu_i F^h_j + \mu_j F^h_i + \nu_i \delta^h_j + \nu_j \delta^h_i \,, \end{aligned} \tag{4.1.7}$$

где су μ_i, ν_i коваријантни вектори.

Услови (4.1.5) и (4.1.7) су основне једначине пресликавања $\underset{2}{\pi}_2$.

Пресликавање $\underset{1}{\pi}_2$ има *својство реципроцитета* ако је његово инверзно пресликавање $\underset{1}{\pi}_2^{-1}$ типа $\underset{1}{\pi}_2$ и $\underset{1}{\pi}_2^{-1}$ одговара истом афинору F^h_i. Како за инверзно пресликавање $\underset{1}{\pi}_2^{-1} : G\overline{A}_N \to GA_N$ важи

$$\overline{P}^h_{ij} = -P^h_{ij},$$

то у (4.1.5) можемо да ставимо

$$\overline{\psi}_i = -\psi_i, \quad \overline{\sigma}_i = -\sigma_i, \quad \overline{F}^h_i = F^h_i, \quad \overline{\xi}^h_{ij} = -\xi^h_{ij}.$$

Пресликавање $\underset{1}{\pi}_2$ има својство реципроцитета ако и само ако афинор F^h_i простора $G\overline{A}_N$ задовољава једначину облика (4.1.6), тј.

$$F^h_{\underset{1}{i||j}} - F^h_p F^p_{(i} \sigma_{j)} - \xi^h_{p(i} F^p_{j)} = \overline{\mu}_{(i} F^h_{j)} + \overline{\nu}_{(i} \delta^h_{j)}, \tag{4.1.8}$$

где (ij) означава симетризацију без дељења у односу на i и j, а $\underset{1}{||}$ је коваријантно диференцирање прве врсте у $G\overline{A}_N$. Прелазећи у (4.1.8) на коваријантно диференцирање прве врсте у GA_N, долазимо до

$$F^h_p F^p_{(i}\sigma_{j)} + \xi^h_{p(i}F^{\alpha}_{j)} = \overline{\overline{\mu}}_{(i}F^h_{j)} + \overline{\overline{\nu}}_{(i}\delta^h_{j)}, \tag{4.1.9}$$

где су вектори $\overline{\overline{\mu}}_i$, $\overline{\overline{\nu}}_i$ изражени помоћу μ_i, ν_i, $\overline{\mu}_i$, $\overline{\nu}_i$, ψ_i, σ_i, F^h_i. Како је $\sigma \neq 0$, долазимо до

$$F^h_s F^s_i = p\delta^h_i + qF^h_i, \tag{4.1.10}$$

где су p и q инваријанте.

На основу претходно наведених чињеница, добијена је теорема:

Теорема 4.1.1. [61] *Релацијом* (4.1.10) *је изражен потребан и довољан услов да пресликавање* $\underset{1}{\pi}_2 : GA_N \to G\overline{A}_N$ *има својство реципроцитета.*

Скоро геодезијско пресликавање $\underset{1}{\pi}_2 : GA_N \to G\overline{A}_N$ које има својство реципроцитета је окарактерисано једначинама (4.1.5),

$$F^h_p F^p_i = e\delta^h_i \qquad (e = \pm 1, 0) \tag{4.1.11}$$

и

$$F^h_{(i\underset{1}{|}j)} + \xi^h_{p(i}F^p_{j)} = \mu_{(i}F^h_{j)} + \nu_{(i}\delta^h_{j)}. \tag{4.1.12}$$

Ово пресликавање означавамо [61]

$$\underset{1}{\pi}_2(e) : GA_N \to G\overline{A}_N.$$

Аналогно, скоро геодезијско пресликавање $\underset{2}{\pi}_2 : GA_N \to G\overline{A}_N$ које има својство реципроцитета је окарактерисано једначинама (4.1.5), (4.1.11) и

$$F^h_{(i\underset{2}{|}j)} + \xi^h_{ip}F^p_j + \xi^h_{jp}F^p_i = \mu_{(i}F^h_{j)} + \nu_{(i}\delta^h_{j)} \tag{4.1.13}$$

и означено је [61]

$$\underset{2}{\pi}_2(e) : GA_N \to G\overline{A}_N.$$

4.2 Тензор Нијенхуиса и простор симетричне афине конексије

На многострукости $\mathcal{M}_N$ простора A_N са симетричном афином конексијом Γ^i_{jk} можемо да дефинишемо нову афину конексију $\overline{\Gamma}^i_{jk}$ без торзије. Нека је $\overline{A}_N$ простор са афином конексијом $\overline{\Gamma}^i_{jk}$. Нека је [87]

$$\overline{\Gamma}^h_{ij} = \Gamma^h_{ij} + \Theta^h_{ij}, \tag{4.2.1}$$

где је Θ^h_{ij} симетричан тензор. Из (4.2.1), у простору $\overline{A}_N$, добијамо

$$F^h_{i|j} = F^h_{i,j} + \Theta^h_{jp}F^p_i - \Theta^p_{ji}F^h_p, \tag{4.2.2}$$

при чему $|$ означава коваријантно диференцирање у односу на конексију у $\overline{A}_N$.

Скоро геодезијско пресликавање $\pi_2 : A_N \to \overline{A}_N$ које има својство реципроцитета је одређено једначином аналогном једначини (4.1.4) и једначинама

$$F^h_p F^p_i = e\delta^h_i \quad (e = \pm 1, 0), \tag{4.2.3}$$

$$F^h_{(i,j)} = \mu_{(i}F^h_{j)} + \nu_{(i}\delta^h_{j)}, \tag{4.2.4}$$

где су μ_i и ν_i вектори. Након сређивања, из (4.2.2) добијамо

$$2F^h_{i,j} = \frac{1}{2}eF^h_p(F^q_i\overline{B}^p_{qj} - F^q_j\overline{B}^p_{qi}) + \overline{B}^h_{ij} + \overline{N}^h_{ji}, \tag{4.2.5}$$

где је означено

$$\overline{N}^h_{ji} = F^h_{j|i} - F^h_{i|j} - \frac{1}{2}eF^h_p(F^k_i(F^p_{k|j} - F^p_{j|k}) - F^k_j(F^p_{k|i} - F^p_{i|k})), \tag{4.2.6}$$

$$\overline{B}^h_{ij} = \mu_{(i}F^h_{j)} + \nu_{(i}\delta^h_{j)}. \tag{4.2.7}$$

Тензор торзије или Нијенхуисов[1] тензор e-структуре је дефинисан

[1] Albert Nijenhuis (1926-2015, холандско-амерички математичар)

формулом [87]

$$N^h_{kj} = \left(\frac{\partial F^h_p}{\partial x^j} - \frac{\partial F^h_j}{\partial x^p}\right) F^p_k - \left(\frac{\partial F^h_p}{\partial x^k} - \frac{\partial F^h_k}{\partial x^p}\right) F^p_j. \tag{4.2.8}$$

Упоређујући (4.2.8) са (4.2.6), долазимо до [87]

$$2\overline{N}^h_{ji} = eN^h_{jp}F^p_i. \tag{4.2.9}$$

Као резултат диференцирања услова (4.2.3) у A_N, добијамо релацију

$$F^h_{p,i}F^p_j + F^h_p F^p_{j,i} = 0. \tag{4.2.10}$$

Заменом (4.2.10) у (4.2.4), поштујући релације (4.2.6) и

$$\overline{N}^h_{pi}F^p_j + F^h_p\overline{N}^p_{ji} = 0, \tag{4.2.11}$$

добијамо

$$\nu_i + \mu_p F^p_i = 0. \tag{4.2.12}$$

На основу (4.2.6), (4.2.9), (4.2.12) и (4.2.4), коначно добијамо

$$F^h_{i,j} = \nu_i\delta^h_j + \mu_i F^h_j + \frac{e}{4}N^h_{ip}F^p_j, \tag{4.2.13}$$

чиме је доказана теорема која следи.

Теорема 4.2.1. [87] *Потребан и довољан услов да простор симетричне афине конексије A_N допушта пресликавање $\pi_2(e \neq 0)$, јесте да постоји структура F^h_i која испуњава услове* (4.2.3) *и* (4.2.13)*, при чему су ν_i и μ_i повезани релацијом* (4.2.12)*, а N^h_{ip} тензор Нијенхуиса.*

4.3 Тензор Нијенхуиса и простор несиметричне афине конексије

Тензор Нијенхуиса N^h_{kj} је у простору GA_N, са несиметричном афином конексијом, дефинисан формулом (4.2.8), тј.

$$N^h_{kj} = \left(\frac{\partial F^h_p}{\partial x^j} - \frac{\partial F^h_j}{\partial x^p}\right) F^p_k - \left(\frac{\partial F^h_p}{\partial x^k} - \frac{\partial F^h_k}{\partial x^p}\right) F^p_j .$$

4.3.1 Нијенхуисов тензор прве врсте

На основу релације (4.1.3), у простору $G\overline{A}_N$ добијамо

$$F^h_{\underset{1}{i||j}} = F^h_{\underset{1}{i|j}} + P^h_{pj} F^p_i - P^p_{ij} F^h_p . \tag{4.3.1}$$

Једначину (4.1.12) можемо да представимо у облику

$$P^h_{pj} F^p_i + P^h_{pi} F^p_j - P^p_{ij} F^h_p - P^p_{ji} F^h_p - \xi^h_{pi} F^p_j - \xi^h_{pj} F^p_i = \underset{1}{B}{}^h_{ij}, \tag{4.3.2}$$

где је

$$\underset{1}{B}{}^h_{ij} = F^h_{\underset{1}{i||j}} + F^h_{\underset{1}{j||i}} - \mu_{(i} F^h_{j)} - \nu_{(i} \delta^h_{j)} . \tag{4.3.3}$$

Нека је $e \neq 0$. Композицијом једначине (4.3.2) са F^i_k, поштујући (4.1.11), добијамо

$$\underset{1}{B}{}^h_{pj} F^p_k = e P^h_{kj} + P^h_{pq} F^p_j F^q_k - P^p_{qj} F^h_p F^q_k - P^p_{jq} F^h_p F^q_k - \xi^h_{pq} F^p_j F^q_k - e \xi^h_{kj} . \tag{4.3.4}$$

Симетризацијом по индексима j, k, и заменом израза $P^p_{qj} F^q_k + P^p_{qk} F^q_j$ на основу релација (4.3.2) и (4.1.11), долазимо до:

$$\begin{aligned} \underset{1}{B}{}^h_{pj} F^p_k + \underset{1}{B}{}^h_{pk} F^p_j + \underset{1}{B}{}^p_{kj} F^h_p &= P^h_{pq}(F^p_j F^q_k + F^p_k F^q_j) - \xi^p_{qk} F^q_j F^h_p - \xi^p_{qj} F^q_k F^h_p \\ &\quad - P^p_{jq} F^q_k F^h_p - P^p_{kq} F^q_j F^h_p - \xi^h_{pq}(F^p_j F^q_k + F^p_k F^q_j). \end{aligned} \tag{4.3.5}$$

Композицијом релације (4.3.5) са F^k_i, поштујући (4.1.11), добијамо

$$
\begin{aligned}
e\underset{1}{B}{}^h_{ij} + \underset{1}{B}{}^h_{pk}F^p_jF^k_i + \underset{1}{B}{}^p_{kj}F^h_pF^k_i &= e(P^h_{pi} + P^h_{ip})F^p_j \\
&- (\xi^p_{qk} + P^p_{kq})F^q_jF^h_pF^k_i - e(\xi^p_{ij} + P^p_{ji})F^h_p,
\end{aligned}
\tag{4.3.6}
$$

тј.

$$
e\underset{1}{B}{}^h_{ij} + (\underset{1}{B}{}^h_{pk}F^p_j + \underset{1}{B}{}^p_{kj}F^h_p)F^k_i = 2eP^h_{\underline{ip}}F^p_j - P^p_{\underline{kq}}F^q_jF^h_pF^k_i - eP^p_{\underline{ji}}F^h_p. \tag{4.3.7}
$$

Алтернацијом по индексима i, j, на основу симетрије тензора $\underset{1}{B}{}^h_{ij}$ и релације (4.3.1), имамо:

$$
\begin{aligned}
F^h_{i\underset{1}{|}j} &= F^h_{i\underset{1}{||}j} - \underset{1}{B}{}^h_{ij} + e((\underset{1}{B}{}^h_{pk}F^p_j + \underset{1}{B}{}^p_{kj}F^h_p)F^k_i - (\underset{1}{B}{}^h_{pk}F^p_i + \underset{1}{B}{}^p_{ki}F^h_p)F^k_j) \\
&+ 2P^h_{\underline{jp}}F^p_i - P^h_{\underline{ip}}F^p_j - P^p_{\underline{ij}}F^h_p + \xi^h_{jp}F^p_i + \xi^p_{ij}F^h_p + eP^p_{\underline{kq}}F^h_p(F^q_jF^k_i - F^q_iF^k_j).
\end{aligned}
\tag{4.3.8}
$$

Заменом тензора $\underset{1}{B}{}^h_{ij}$, на основу једначине (4.3.3), претходна релација постаје

$$
\begin{aligned}
F^h_{i\underset{1}{|}j} &= F^h_{i\underset{1}{||}j} - 2F^h_{j\underset{1}{||}i} + \underset{1}{\overline{N}}{}^h_{ji} + \underset{1}{\overline{B}}{}^h_{ij} + \underset{1}{\overline{S}}{}^h_{ij} + P^h_{jp}F^p_i - P^p_{ji}F^h_p \\
&+ \frac{1}{2}eF^h_p(F^k_i(3F^p_{k\underset{1}{||}j} + F^p_{j\underset{1}{||}k}) - F^k_j(3F^p_{k\underset{1}{||}i} + F^p_{i\underset{1}{||}k})),
\end{aligned}
\tag{4.3.9}
$$

где је означено

$$
\underset{1}{\overline{N}}{}^h_{ji} = F^h_{j\underset{1}{||}i} - F^h_{i\underset{1}{||}j} - \frac{1}{2}eF^h_p(F^k_i(F^p_{k\underset{1}{||}j} - F^p_{j\underset{1}{||}k}) - F^k_j(F^p_{k\underset{1}{||}i} - F^p_{i\underset{1}{||}k})), \tag{4.3.10}
$$

$$
\underset{1}{\overline{B}}{}^h_{ij} = \mu_{(i}F^h_{j)} + \nu_{(i}\delta^h_{j)}, \tag{4.3.11}
$$

$$
\begin{aligned}
\underset{1}{\overline{S}}{}^h_{ij} &= \mu_p\delta^h_{<i}F^p_{j>} + \mu_{<i}F^h_{j>} - e\nu_pF^p_{<j}F^h_{i>} + \nu_{<i}\delta^h_{j>} \\
&- P^h_{\underline{ip}}F^p_j + P^h_{\underline{jp}}F^p_i + eP^p_{kq}F^h_pF^q_{<j}F^k_{i>}.
\end{aligned}
\tag{4.3.12}
$$

Дефиниција 4.3.1. *Тензор* $\underset{1}{\overline{N}}{}^h_{ji}$*, који је одређен релацијом* (4.3.10) *у простору* $G\overline{A}_N$*, називамо* **Нијенхуисовим тензором прве врсте**.

Нијенхуисов тензор прве врсте можемо да представимо и у облику

$$
\begin{aligned}
\underset{1}{\overline{N}}{}^h_{ji} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F^h_j}{\partial x^i} - \frac{\partial F^h_i}{\partial x^j} + e\left(\frac{\partial F^h_p}{\partial x^q} - \frac{\partial F^h_q}{\partial x^p}\right)F^p_i F^q_j\right)& \\
+ F^h_p \overline{L}^p_{\underset{\vee}{ij}} + F^p_j \overline{L}^h_{\underline{ip}} - F^p_i \overline{L}^h_{\underline{pj}} + eF^h_s F^p_i F^q_j \overline{L}^s_{\underset{\vee}{qp}}.&
\end{aligned}
\tag{4.3.13}
$$

Упоређивањем релације (4.2.8) са претходним везама за тензор $\underset{1}{\overline{N}}{}^h_{ji}$, долазимо до наредне теореме

Теорема 4.3.1. [110] *У простору несиметричне афине конексије, формулом*

$$
\begin{aligned}
\underset{1}{\overline{N}}{}^h_{ji} = \frac{1}{2}eN^h_{jp}F^p_i + e\left(\frac{\partial F^h_p}{\partial x^q} - \frac{\partial F^f_q}{\partial x^p}\right)F^p_i F^q_j - F^h_p \overline{L}^p_{\underset{\vee}{ji}}& \\
- F^p_i \overline{L}^h_{\underline{pj}} + F^p_j \overline{L}^h_{\underline{pi}} - eF^h_s F^p_i F^q_j \overline{L}^s_{\underset{\vee}{pq}}&
\end{aligned}
\tag{4.3.14}
$$

је дата веза између Nijенхуисовог тензора N^h_{ji} и Nijенхуисовог тензора прве врсте $\underset{1}{\overline{N}}{}^h_{ji}$.

На основу услова (4.1.11), добијамо релацију

$$
F^h_{\underset{1}{p|i}} F^p_j + F^h_p F^p_{\underset{1}{j|i}} = 0. \tag{4.3.15}
$$

Заменом (4.3.15) у (4.1.12) поштујући везу (4.3.10), добијамо

$$
\begin{aligned}
(4+N)\mu_p F^p_i + e\mu_i F^p_p + (3N-2)e\nu_i + \nu_p F^p_i - F^q_i(2F^s_p F^p_{\underset{1}{s|q}} + F^p_s F^s_{\underset{1}{q|p}})& \\
-e(F^p_{\underset{1}{p|i}} + F^p_{\underset{1}{i|p}}) - (1+e)P^h_{\underline{jh}}F^j_i - eP^h_{\underline{ip}}F^p_h + eP^p_{hi}F^h_p = 0.&
\end{aligned}
\tag{4.3.16}
$$

На основу (4.3.10), (4.3.14), (4.3.16) и (4.1.12), коначно долазимо до

$$
\begin{aligned}
F^h_{\underset{1}{i|j}} = \frac{1}{2}eN^h_{jp}F^p_i - \frac{1}{2}e\left(\frac{\partial F^h_p}{\partial x^q} - \frac{\partial F^h_q}{\partial x^p}\right)F^p_{<j}F^q_{i>} - F^h_p \overline{L}^p_{\underset{\vee}{ji}} - F^p_i \overline{L}^h_{\underline{pj}} + F^p_j \overline{L}^h_{\underline{pi}}& \\
- eF^h_s F^p_i F^q_j \overline{L}^s_{\underset{\vee}{pq}} - \frac{1}{2}eF^h_p\left(F^k_i(3F^p_{\underset{1}{k|j}} + F^p_{\underset{1}{j|k}}) - F^k_j(3F^p_{\underset{1}{k|i}} + F^p_{\underset{1}{i|k}})\right)& \\
+ \mu_{(i}F^h_{j)} + \nu_{(i}\delta^h_{j)} + \mu_p\delta^h_{<i}F^p_{j>} + \mu_{<i}F^h_{j>} - e\nu_p F^p_{<j}F^h_{i>} + \nu_{<i}\delta^h_{j>}& \\
- P^h_{\underline{ip}}F^p_j + P^h_{\underline{jp}}F^p_i + P^h_{jp}F^p_i - P^p_{ji}F^h_p + eP^p_{kq}F^h_p F^q_{<j}F^k_{i>}.&
\end{aligned}
\tag{4.3.17}
$$

На основу претходног разматрања, можемо да формулишемо следећу теорему.

Теорема 4.3.2. [110] *Потребан и довољан услов да простор несиметричне афине конексије* GA_N *допушта пресликавање* $\underset{1}{\pi}_2(e), e \neq 0$ *јесте да постоји структура* F^h_i *која задовољава услове* (4.1.11) *и* (4.3.17), *при чему су* ν_i *и* μ_i *повезани релацијом* (4.3.16).

4.3.2 Нијенхуисов тензор друге врсте

Полазећи од једначине (4.1.3), у простору $G\overline{A}_N$, добијамо

$$F^h_{i\underset{2}{||}j} = F^h_{i\underset{2}{|}j} + P^h_{jp}F^p_i - P^p_{ji}F^h_p. \tag{4.3.18}$$

Једначину (4.1.13) можемо да запишемо у облику

$$P^h_{jp}F^p_i + P^h_{ip}F^p_j - P^p_{ji}F^h_p - P^p_{ij}F^h_p - \xi^h_{ip}F^p_j - \xi^h_{jp}F^p_i = \underset{2}{B}{}^h_{ij}, \tag{4.3.19}$$

где је

$$\underset{2}{B}{}^h_{ij} = F^h_{i\underset{2}{||}j} + F^h_{j\underset{2}{||}i} - \mu_{(i}F^h_{j)} - \nu_{(i}\delta^h_{j)}. \tag{4.3.20}$$

Нека је $e \neq 0$. Композицијом једначине (4.3.19) са F^i_k, узимајући у обзир (4.1.11), имамо

$$\underset{2}{B}{}^h_{pj}F^p_k = eP^h_{jk} + P^h_{qp}F^p_jF^q_k - P^p_{jq}F^h_pF^q_k - P^p_{qj}F^h_pF^q_k - \xi^h_{qp}F^p_jF^q_k - e\xi^h_{kj}. \tag{4.3.21}$$

Симетризацијом по индексима j,k, заменом израза $P^p_{jq}F^q_k + P^p_{kq}F^q_j$ на основу једначина (4.3.19) и (4.1.11), добијамо

$$\begin{aligned}\underset{2}{B}{}^h_{pj}F^p_k + \underset{2}{B}{}^h_{pk}F^p_j + \underset{2}{B}{}^p_{kj}F^h_p &= P^h_{qp}(F^p_jF^q_k + F^p_kF^q_j) - \xi^p_{kq}F^q_jF^h_p - \xi^p_{jq}F^q_kF^h_p \\ &- P^p_{qj}F^q_kF^h_p - P^p_{qk}F^q_jF^h_p - \xi^h_{qp}(F^p_jF^q_k + F^p_kF^q_j).\end{aligned} \tag{4.3.22}$$

Композицијом претходне релације са F^k_i, узимајући у обзир релацију (4.1.11), долазимо до

$$\begin{aligned} e\underset{2}{B}{}^h_{ij} + \underset{2}{B}{}^h_{pk}F^p_jF^k_i + \underset{2}{B}{}^p_{kj}F^h_pF^k_i &= e(P^h_{ip}+P^h_{pi})F^p_j \\ &- (\xi^p_{kq}+P^p_{qk})F^q_jF^h_pF^k_i - e(\xi^p_{ji}+P^p_{ij})F^h_p, \end{aligned} \tag{4.3.23}$$

тј.

$$e\underset{2}{B}{}^h_{ij} + (\underset{2}{B}{}^h_{pk}F^p_j + \underset{2}{B}{}^p_{kj}F^h_p)F^k_i = 2eP^h_{\underline{ip}}F^p_j - P^p_{\underline{qk}}F^q_jF^h_pF^k_i - eP^p_{\underline{ij}}F^h_p. \tag{4.3.24}$$

Алтернацијом по индексима i, j, на основу симетрије тензора $\underset{2}{B}{}^h_{ij}$ и релације (4.3.18), имамо:

$$\begin{aligned} F^h_{i\underset{2}{|}j} = F^h_{i\underset{2}{||}j} - \underset{2}{B}{}^h_{ij} &+ e((\underset{2}{B}{}^h_{pk}F^p_j + \underset{2}{B}{}^p_{kj}F^h_p)F^k_i - (\underset{2}{B}{}^h_{pk}F^p_i + \underset{2}{B}{}^p_{ki}F^h_p)F^k_j) \\ + 2P^h_{\underline{pj}}F^p_i - P^h_{\underline{pi}}F^p_j &- P^p_{ij}F^h_p + \xi^h_{pj}F^p_i + eP^p_{\underline{qk}}F^h_p(F^q_jF^k_i - F^q_iF^k_j). \end{aligned} \tag{4.3.25}$$

Заменом тензора $\underset{2}{B}{}^h_{ij}$ на основу релације (4.3.20), претходна веза постаје

$$\begin{aligned} F^h_{i\underset{2}{|}j} &= F^h_{i\underset{2}{||}j} - 2F^h_{j\underset{2}{||}i} + \underset{2}{\overline{N}}{}^h_{ji} + \underset{2}{\overline{B}}{}^h_{ij} + \underset{2}{\overline{S}}{}^h_{ij} + P^h_{pj}F^p_i - P^p_{ij}F^h_p \\ &+ \frac{1}{2}eF^h_p(F^k_i(3F^p_{k\underset{2}{||}j} + F^p_{j\underset{2}{||}k}) - F^k_j(3F^p_{k\underset{2}{||}i} + F^p_{i\underset{2}{||}k})), \end{aligned} \tag{4.3.26}$$

при чему смо користили следећу нотацију:

$$\underset{2}{\overline{N}}{}^h_{ji} = F^h_{j\underset{2}{||}i} - F^h_{i\underset{2}{||}j} - \frac{1}{2}eF^h_p(F^k_i(F^p_{k\underset{2}{||}j} - F^p_{j\underset{2}{||}k}) - F^k_j(F^p_{k\underset{2}{||}i} - F^p_{i\underset{2}{||}k})), \tag{4.3.27}$$

$$\underset{2}{\overline{B}}{}^h_{ij} = \mu_{(i}F^h_{j)} + \nu_{(i}\delta^h_{j)}, \tag{4.3.28}$$

$$\begin{aligned} \underset{2}{\overline{S}}{}^h_{ij} &= \mu_p\delta^h_{<i}F^p_{j>} + \mu_{<i}F^h_{j>} - e\nu_pF^p_{<j}F^h_{i>} + \nu_{<i}\delta^h_{j>} \\ &- P^h_{\underline{ip}}F^p_j + P^h_{\underline{jp}}F^p_i + eP^p_{\underline{qk}}F^h_pF^q_{<j}F^k_{i>}. \end{aligned} \tag{4.3.29}$$

Дефиниција 4.3.2. *Тензор* $\underset{2}{\overline{N}}{}^h_{ji}$*, који је одређен релацијом* (4.3.27) *у простору* $G\overline{A}_N$*, називамо* **Нијенхуисовим тензором друге врсте***.*

Нијенхуисов тензор друге врсте $\underset{2}{\overline{N}}{}^h_{ji}$ можемо да представимо у следећем облику:

$$\begin{aligned}\underset{2}{\overline{N}}{}^h_{ji} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F^h_j}{\partial x^i} - \frac{\partial F^h_i}{\partial x^j} + e\left(\frac{\partial F^h_p}{\partial x^q} - \frac{\partial F^h_q}{\partial x^p}\right)F^p_i F^q_j\right)\\ &+ F^h_p \overline{L}^p_{\underset{\vee}{ji}} + F^p_j \overline{L}^h_{\underline{ip}} - F^p_i \overline{L}^h_{\underline{pj}} + eF^h_s F^p_i F^q_j \overline{L}^s_{\underset{\vee}{pq}}.\end{aligned} \tag{4.3.30}$$

Упоређивањем релација (4.2.8) и (4.3.30), добијамо теорему:

Теорема 4.3.3. [110] *Веза између Нијенхуисовог тензора N^h_{ji} и Нијенхуисовог тензора друге врсте $\underset{2}{\overline{N}}{}^h_{ji}$ је, у простору несиметричне афине конексије, одређена формулом*

$$\begin{aligned}\underset{2}{\overline{N}}{}^h_{ji} &= \frac{1}{2}eN^h_{jp}F^p_i + e\left(\frac{\partial F^h_p}{\partial x^q} - \frac{\partial F^f_q}{\partial x^p}\right)F^p_i F^q_j - F^h_p \overline{L}^p_{\underset{\vee}{ij}}\\ &- F^p_j \overline{L}^h_{\underline{pi}} + F^p_i \overline{L}^h_{\underline{pj}} - eF^h_s F^p_i F^q_j \overline{L}^s_{\underset{\vee}{qp}}.\end{aligned} \tag{4.3.31}$$

На основу услова (4.1.11), добијамо релацију

$$F^h_{p\underset{2}{|}i}F^p_j + F^h_p F^p_{j\underset{2}{|}i} = 0. \tag{4.3.32}$$

Заменом израза (4.3.32) у (4.1.13), узимајући у обзир (4.3.27), добијамо

$$\begin{aligned}&(4+N)\mu_p F^p_i + e\mu_i F^p_p + (3N-2)e\nu_i + \nu_p F^p_i + F^q_i(2F^s_p F^p_{s\underset{2}{|}q} - F^p_s F^s_{q\underset{2}{|}p})\\ &\quad + e(F^p_{p\underset{2}{|}i} + F^p_{i\underset{2}{|}p}) - (1+e)P^h_{\underline{jh}}F^j_i - eP^h_{\underline{ip}}F^p_h + eP^p_{hi}F^h_p = 0.\end{aligned} \tag{4.3.33}$$

На крају, на основу (4.3.27), (4.3.31), (4.3.33) и (4.1.13), долазимо до

$$\begin{aligned}F^h_{i\underset{2}{|}j} &= \frac{1}{2}eN^h_{jp}F^p_i - \frac{1}{2}e\left(\frac{\partial F^h_p}{\partial x^q} - \frac{\partial F^h_q}{\partial x^p}\right)F^p_{<i}F^q_{j>} - F^h_p \overline{L}^p_{\underset{\vee}{ij}} - F^p_i \overline{L}^h_{\underline{pj}} + F^p_j \overline{L}^h_{\underline{pi}}\\ &- eF^h_s F^p_i F^q_j \overline{L}^s_{\underset{\vee}{qp}} - \frac{1}{2}eF^h_p(F^k_i(3F^p_{k\underset{2}{|}j} + F^p_{j\underset{2}{|}k}) - F^k_j(3F^p_{k\underset{2}{|}i} + F^p_{i\underset{2}{|}k}))\\ &+ \mu_{(i}F^h_{j)} + \nu_{(i}\delta^h_{j)} + \mu_p\delta^h_{<j}F^p_{i>} + \mu_{<j}F^h_{i>} - e\nu_p F^p_{<i}F^h_{j>} + \nu_{<j}\delta^h_{i>}\\ &- P^h_{\underline{ip}}F^p_j + P^h_{\underline{jp}}F^p_i + P^h_{jp}F^p_i - P^p_{ji}F^h_p + eP^p_{kq}F^h_p F^q_{<i}F^k_{j>}.\end{aligned} \tag{4.3.34}$$

Узимајући у обзир претходно разматрање, можемо да формулишемо следећу теорему.

Теорема 4.3.4. [110] *Потребан и довољан услов да простор несиметричне афине конексије* GA_N *допушта пресликавање* $\underset{2}{\pi}2(e), e \neq 0$ *јесте да постоји структура* F_i^h *која задовољава услове* (4.1.11) *и* (4.3.34), *при чему је веза између* ν_i *и* μ_i *дата релацијом* (4.3.33).

Напомена 4.3.1. *У случају простора симертичне афине конексије* A_N, *све четири врсте коваријантног диференцирања* $\underset{\theta}{|}$ $(\theta = 1, 2, 3, 4)$ *се своде на коваријантни извод* (;) *у односу на конексију простора* A_N. *У том случају се Нијенхуисови тензори прве и друге врсте своде на тензор* $\overline{N}^h_{kj}$, *а једначине* (4.3.14) *и* (4.3.31) *постају* (4.2.9).

4.3.3 Још неке особине Нијенхуисових тензора

Посматрајући дефиниције Нијенхуисовог теннзора прве врсте $\underset{1}{\overline{N}}{}^h_{ji}$ и Нијенхуисовог тензора друге врсте $\underset{2}{\overline{N}}{}^h_{ji}$, примећујемо да су ови тензори антисиметрични, тј. важе релације

$$\underset{1}{\overline{N}}{}^h_{ji} = -\underset{1}{\overline{N}}{}^h_{ij}, \tag{4.3.35}$$

$$\underset{2}{\overline{N}}{}^h_{ji} = -\underset{2}{\overline{N}}{}^h_{ij}. \tag{4.3.36}$$

Теорема 4.3.5. *За Нијенхуисов теннзор прве врсте* $\underset{1}{\overline{N}}{}^h_{ji}$ *и Нијенхуисов тензор друге врсте* $\underset{2}{\overline{N}}{}^h_{ji}$ *важи:*

$$\begin{aligned}\underset{1}{\overline{N}}{}^h_{ji} + \underset{2}{\overline{N}}{}^h_{ji} = \frac{\partial F^h_j}{\partial x^i} - \frac{\partial F^h_i}{\partial x^j} + e\left(\frac{\partial F^h_p}{\partial x^q} - \frac{\partial F^h_q}{\partial x^p}\right) F^p_i F^q_j \\ + 2F^p_j \overline{L}^h_{\underline{ip}} - 2F^p_i \overline{L}^h_{\underline{pj}} + 2eF^h_s F^p_i F^q_j \overline{L}^s_{\underset{\vee}{pq}}.\end{aligned} \tag{4.3.37}$$

Доказ. Сабирањем релација (4.3.13) и (4.3.30), добијамо везу између Нијенхуисових тензора прве и друге врсте (4.3.37). □

Теорема 4.3.6. *За Нијенхуисов тензор прве врсте* $\underset{1}{\overline{N}}{}^h_{ji}$ *и Нијенхуисов тензор друге врсте* $\underset{2}{\overline{N}}{}^h_{ji}$ *важи:*

$$\underset{1}{\overline{N}}{}^h_{ji} - \underset{2}{\overline{N}}{}^h_{ji} = 2F^h_p \overline{L}^p_{\underset{\vee}{ij}}. \tag{4.3.38}$$

Доказ. Ако од релације (4.3.13) одузмемо (4.3.30), долазимо до једначине (4.3.38). □

ГЛАВА 5

Бихоломорфно пројективна пресликавања

Нека је GR_N Ајзенхарт-Риманов простор са несиметричним метричким тензором g_{ij} и структурним афинором $F_i^h \neq a\delta_i^h$, при чему је a скаларна инваријанта.

Дефиниција 5.0.3. *Криву l задату једначинама*

$$x^i = x^i(t),\ (i = 1, ..., N), \tag{5.0.1}$$

при чему је t реалан параметар, називамо **бихоломорфно пројективном врсте** θ $(\theta = 1, 2)$ *ако је дуж ње задовољено:*

$$\lambda^h{}_{\underset{\theta}{|}p}(t)\lambda^p(t) = a(t)\lambda^h(t) + b(t)F_p^h\lambda^p(t) + c(t)\overset{2}{F}{}_p^h\lambda^p(t), \tag{5.0.2}$$

где су $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ произвољне функције параметра t, $\lambda^i(t) = \dfrac{dx^i}{dt}$, $\overset{2}{F}{}_p^h = F_q^h F_p^q$.

Нека су GR_N и $G\overline{R}_N$ Ајзенхарт-Риманови простори са задатим афинорним структурама F_i^h и $\overline{F}_i^h$, редом, при чему је $F_i^h = \overline{F}_i^h$ у заједничком по пресликавању $f : GR_N \to G\overline{R}_N$ координатном систему.

Дефиниција 5.0.4. *Пресликавање $f : GR_N \to G\overline{R}_N$ називамо* **бихоломорфно пројективним врсте** θ $(\theta = 1, 2)$ *ако бихоломорфно пројективне* *криве врсте θ ($\theta = 1, 2$) простора GR_N преводи у бихоломорфно пројективне криве врсте θ простора $G\overline{R}_N$.*

Како је

$$\lambda^h{}_{\underset{1}{|}p}\lambda^p = \frac{d\lambda^h}{dt} + \Gamma^h_{pq}\lambda^p\lambda^q = \lambda^h{}_{\underset{2}{|}p}\lambda^p,$$

закључујемо да се бихоломорфно пројективне криве прве и друге врсте поклапају, па ћемо их звати само *бихоломорфо пројективним кривама.* Дакле, бихоломорфно пројективне криве простора GR_N и $G\overline{R}_N$, редом, дефинишемо једначинама

$$\frac{d\lambda^h}{dt} + \Gamma^h_{pq}\lambda^p\lambda^q = a\lambda^h + bF^h_p\lambda^p + c\overset{2}{F}{}^h_p\lambda^p, \tag{5.0.3}$$

$$\frac{d\lambda^h}{dt} + \overline{\Gamma}^h_{pq}\lambda^p\lambda^q = \overline{a}\lambda^h + \overline{b}F^h_p\lambda^p + \overline{c}\overset{2}{F}{}^h_p\lambda^p, \tag{5.0.4}$$

где су a, b, c, $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ произвољне функције параметра t, $\lambda^i = \dfrac{dx^i}{dt}$, Γ^h_{pq} и $\overline{\Gamma}^h_{pq}$ коефицијенти конексије простора GR_N и $G\overline{R}_N$, редом, $\overset{2}{F}{}^h_p = F^h_q F^q_p$.

На основу једначина (5.0.3) и (5.0.4), добијамо

$$(\overline{\Gamma}^h_{pq} - \Gamma^h_{pq})\lambda^p\lambda^q = \psi\lambda^h + \sigma F^h_p\lambda^p + \tau\overset{2}{F}{}^h_p\lambda^p, \tag{5.0.5}$$

где смо означили $\psi = \overline{a} - a$, $\sigma = \overline{b} - b$, $\tau = \overline{c} - c$.

Нека је $\psi = \psi_p\lambda^p$, $\sigma = \sigma_p\lambda^p$, $\tau = \tau_p\lambda^p$. Сада имамо

$$(\overline{\Gamma}^h_{pq} - \Gamma^h_{pq} - \psi_p\delta^h_q - \sigma_p F^h_q - \tau_p\overset{2}{F}{}^h_q)\lambda^p\lambda^q = 0. \tag{5.0.6}$$

Одавде је

$$\overline{\Gamma}^h_{ij} = \Gamma^h_{ij} + \psi_{(i}\delta^h_{j)} + \sigma_{(i}F^h_{j)} + \tau_{(i}\overset{2}{F}{}^h_{j)} + \xi^h_{ij}, \tag{5.0.7}$$

где је (ij) симетризација без дељења по индексима i, j, а ξ^h_{ij} је произвољан антисиметричан тензор.

5.1 Основне релације између тензора кривине

Нека је

$$P^h_{ij} = \overline{\Gamma}^h_{ij} - \Gamma^h_{ij} \tag{5.1.1}$$

тензор деформације конексије при бихоломорфно пројективном пресликавању $f : GR_N \to G\overline{R}_N$. Тада је, на основу (5.0.7),

$$P^h_{ij} = \psi_{(i}\delta^h_{j)} + \sigma_{(i}F^h_{j)} + \tau_{(i}\overset{2}{F}{}^h_{j)} + \xi^h_{ij}. \tag{5.1.2}$$

У овом одељку ћемо успоставити везе између одговарајућих тензора кривине простора GR_N и $G\overline{R}_N$.

Према (1.5.27), (1.6.2), (5.1.1) и (5.1.2) за тензор кривине прве врсте важи:

$$\begin{aligned}
\underset{1}{\overline{R}}{}^i{}_{jmn} &= \underset{1}{R}{}^i{}_{jmn} + (\psi_{j\underset{1}{|}n} - \psi_j\psi_n - \psi_p\sigma_{(j}F^p_{n)} - \psi_p\tau_{(j}\overset{2}{F}{}^p_{n)})\delta^i_m \\
&- (\psi_{j\underset{1}{|}m} - \psi_j\psi_m - \psi_p\sigma_{(j}F^p_{m)} - \psi_p\tau_{(j}\overset{2}{F}{}^p_{m)})\delta^i_n + (\psi_{m\underset{1}{|}n} - \psi_{n\underset{1}{|}m})\delta^i_j \\
&- \psi_p(\xi^p_{jn}\delta^i_m - \xi^p_{jm}\delta^i_n) + \xi^i_{jm\underset{1}{|}n} - \xi^i_{jn\underset{1}{|}m} + \sigma_j(\sigma_{<n}\overset{2}{F}{}^i_{m>} + \tau_{<n}\overset{3}{F}{}^i_{m>}) \\
&+ \tau_j(\sigma_{<n}\overset{3}{F}{}^i_{m>} + \tau_{<n}\overset{4}{F}{}^i_{m>}) + \tau_m\overset{2}{F}{}^i_{j\underset{1}{|}n} - \tau_n\overset{2}{F}{}^i_{j\underset{1}{|}m} + \tau_{j\underset{1}{|}n}F^i_m - \tau_{j\underset{1}{|}m}F^i_n \\
&+ \sigma_j F^i_{<m\underset{1}{|}n>} + \tau_j\overset{2}{F}{}^i_{<m\underset{1}{|}n>} + \sigma_{j\underset{1}{|}n}F^i_m - \sigma_{j\underset{1}{|}m}F^i_n + \sigma_{m\underset{1}{|}n}F^i_j - \sigma_{n\underset{1}{|}m}F^i_j \\
&+ \tau_{m\underset{1}{|}n}\overset{2}{F}{}^i_j - \tau_{n\underset{1}{|}m}\overset{2}{F}{}^i_j + \sigma_m F^i_{j\underset{1}{|}m} - \sigma_n F^i_{j\underset{1}{|}m} + \xi^p_{jm}\xi^i_{pn} - \xi^p_{jn}\xi^i_{pm} \\
&+ \sigma_p(\sigma_j F^p_{<m}F^i_{n>} + \sigma_{<m}F^i_{n>}F^p_j + \tau_j\overset{2}{F}{}^p_{<m}F^i_{n>} + \tau_{<m}F^i_{n>}\overset{2}{F}{}^p_j) \\
&+ \tau_p(\sigma_j F^p_{<m}\overset{2}{F}{}^i_{n>} + \sigma_{<m}\overset{2}{F}{}^i_{n>}F^p_j + \tau_j\overset{2}{F}{}^p_{<m}\overset{2}{F}{}^i_{n>} + \tau_{<m}\overset{2}{F}{}^i_{n>}\overset{2}{F}{}^p_j) \\
&+ (\sigma_{(p}F^i_{n)} + \tau_{(p}\overset{2}{F}{}^i_{n)})\xi^p_{jm} + (\sigma_{(j}F^p_{m)} + \tau_{(j}\overset{2}{F}{}^p_{m)})\xi^i_{pn} - (\sigma_{(j}F^p_{n)} + \tau_{(j}\overset{2}{F}{}^p_{n)})\xi^i_{pm} \\
&- (\sigma_{(p}F^i_{m)} + \tau_{(p}\overset{2}{F}{}^i_{m)})\xi^p_{jn} + 2\psi_j\xi^i_{mn} \\
&+ 2T^p_{mn}(\psi_{(j}\delta^i_{p)} + \sigma_{(j}F^i_{p)} + \tau_{(j}\overset{2}{F}{}^i_{p)} + \xi^i_{jp}),
\end{aligned} \tag{5.1.3}$$

где је (ij) симетизација без дељења, а $< ij >$ антисиметризација без дељења по индексима i и j, и где смо означили

$$\overset{2}{F}{}^h_j = F^h_p F^p_j,\ \overset{3}{F}{}^h_j = F^h_p F^p_q F^q_j,\ \overset{4}{F}{}^h_j = F^h_p F^p_q F^q_r F^r_j. \tag{5.1.4}$$

Дакле, важи:

Теорема 5.1.1. *Бихоломорфно пројективна веза између тензора кривине прве врсте Ајзенхарт-Римановихпростора GR_N и $G\overline{R}_N$ одређена је релацијом* (5.1.3)*, где је T^h_{ij} тензор торзије конексије и где смо означавали сагласно са* (5.1.4).

На основу (1.5.27), (1.6.3), (5.1.1) и (5.1.2) за тензор кривине друге врсте важи:

$$\begin{aligned}
\underset{2}{\overline{R}}{}^i_{jmn} &= \underset{2}{R}{}^i_{jmn} + (\psi_{j\underset{2}{|}n} - \psi_j\psi_n - \psi_p\sigma_{(j}F^p_{n)} - \psi_p\tau_{(j}\overset{2}{F}{}^p_{n)})\delta^i_m \\
&- (\psi_{j\underset{2}{|}m} - \psi_j\psi_m - \psi_p\sigma_{(j}F^p_{m)} - \psi_p\tau_{(j}\overset{2}{F}{}^p_{m)})\delta^i_n + (\psi_{m\underset{2}{|}n} - \psi_{n\underset{2}{|}m})\delta^i_j \\
&- \psi_p(\xi^p_{nj}\delta^i_m - \xi^p_{mj}\delta^i_n) + \xi^i_{mj\underset{2}{|}n} - \xi^i_{nj\underset{2}{|}m} + \sigma_j(\sigma_{<n}\overset{2}{F}{}^i_{m>} + \tau_{<n}\overset{3}{F}{}^i_{m>}) \\
&+ \tau_j(\sigma_{<n}\overset{3}{F}{}^i_{m>} + \tau_{<n}\overset{4}{F}{}^i_{m>}) + \tau_m\overset{2}{F}{}^i_{j\underset{2}{|}n} - \tau_n\overset{2}{F}{}^i_{j\underset{2}{|}m} + \tau_{j\underset{2}{|}n}\overset{2}{F}{}^i_m - \tau_{j\underset{2}{|}m}\overset{2}{F}{}^i_n \\
&+ \sigma_j F^i_{<m\underset{2}{|}n>} + \tau_j\overset{2}{F}{}^i_{<m\underset{2}{|}n>} + \sigma_{j\underset{2}{|}n}F^i_m - \sigma_{j\underset{2}{|}m}F^i_n + \sigma_{m\underset{2}{|}n}F^i_j - \sigma_{n\underset{2}{|}m}F^i_j \\
&+ \tau_{m\underset{2}{|}n}\overset{2}{F}{}^i_j - \tau_{n\underset{2}{|}m}\overset{2}{F}{}^i_j + \sigma_m F^i_{j\underset{2}{|}m} - \sigma_n F^i_{j\underset{2}{|}m} + \xi^p_{mj}\xi^i_{np} - \xi^p_{nj}\xi^i_{mp} \\
&+ \sigma_p(\sigma_j F^p_{<m}F^i_{n>} + \sigma_{<m}F^i_{n>}F^p_j + \tau_j\overset{2}{F}{}^p_{<m}F^i_{n>} + \tau_{<m}F^i_{n>}\overset{2}{F}{}^p_j) \\
&+ \tau_p(\sigma_j F^p_{<m}\overset{2}{F}{}^i_{n>} + \sigma_{<m}\overset{2}{F}{}^i_{n>}F^p_j + \tau_j\overset{2}{F}{}^p_{<m}\overset{2}{F}{}^i_{n>} + \tau_{<m}\overset{2}{F}{}^i_{n>}\overset{2}{F}{}^p_j) \\
&+ (\sigma_{(p}F^i_{n)} + \tau_{(p}\overset{2}{F}{}^i_{n)})\xi^p_{mj} + (\sigma_{(j}F^p_{m)} + \tau_{(j}\overset{2}{F}{}^p_{m)})\xi^i_{np} - (\sigma_{(j}F^p_{n)} + \tau_{(j}\overset{2}{F}{}^p_{n)})\xi^i_{mp} \\
&- (\sigma_{(p}F^i_{m)} + \tau_{(p}\overset{2}{F}{}^i_{m)})\xi^p_{nj} + 2\psi_j\xi^i_{nm} \\
&+ 2T^p_{nm}(\psi_{(j}\delta^i_{p)} + \sigma_{(j}F^i_{p)} + \tau_{(j}\overset{2}{F}{}^i_{p)} + \xi^i_{pj}),
\end{aligned} \tag{5.1.5}$$

где је (ij) симетизација без дељења, а $< ij >$ антисиметризација без дељења по индексима i и j, и где су $\overset{2}{F}{}^h_j$, $\overset{3}{F}{}^h_j$ и $\overset{4}{F}{}^h_j$ одређени релацијом (5.1.4).

Дакле, важи

Теорема 5.1.2. *Бихоломорфно пројективна веза између тензора кривине друге врсте Ајзенхарт-Римановиx простора* GR_N *и* $G\overline{R}_N$ *одређена је релацијом* (5.1.5), *где је* T^h_{ij} *тензор торзије конексије и где смо означавали сагласно са* (5.1.4).

Узимајући у обзир релације (1.5.27), (1.6.4), (5.1.1) и (5.1.2), за тензор кривине треће врсте имамо:

$$
\begin{aligned}
\underset{3}{\overline{R}}{}^i_{jmn} &= \underset{3}{R}{}^i_{jmn} + (\psi_{j\underset{2}{|}n} - \psi_j\psi_n - \psi_p\sigma_{(j}F^p_{n)} - \psi_p\tau_{(j}\overset{2}{F}{}^p_{n)})\delta^i_m \\
&- (\psi_{j\underset{1}{|}m} - \psi_j\psi_m - \psi_p\sigma_{(j}F^p_{m)} - \psi_p\tau_{(j}\overset{2}{F}{}^p_{m)})\delta^i_n + (\psi_{m\underset{2}{|}n} - \psi_{n\underset{1}{|}m})\delta^i_j \\
&- \psi_p(\xi^p_{nj}\delta^i_m - \xi^p_{mj}\delta^i_n) + \xi^i_{jm\underset{2}{|}n} - \xi^i_{nj\underset{1}{|}m} + \sigma_j(\sigma_{<n}\overset{2}{F}{}^i_{m>} + \tau_{<n}\overset{3}{F}{}^i_{m>}) \\
&+ \tau_j(\sigma_{<n}\overset{3}{F}{}^i_{m>} + \tau_{<n}\overset{4}{F}{}^i_{m>}) + \tau_m\overset{2}{F}{}^i_{j\underset{2}{|}n} - \tau_n\overset{2}{F}{}^i_{j\underset{1}{|}m} + \tau_{j\underset{2}{|}n}\overset{2}{F}{}^i_m - \tau_{j\underset{1}{|}m}\overset{2}{F}{}^i_n \\
&+ \sigma_j(F^i_{m\underset{2}{|}n} - F^i_{n\underset{1}{|}m}) + \tau_j(\overset{2}{F}{}^i_{m\underset{2}{|}n} - \overset{2}{F}{}^i_{n\underset{1}{|}m}) + \sigma_{j\underset{2}{|}n}F^i_m - \sigma_{j\underset{1}{|}m}F^i_n \\
&+ \sigma_{m\underset{2}{|}n}F^i_j - \sigma_{n\underset{1}{|}m}F^i_j + \tau_{m\underset{2}{|}n}\overset{2}{F}{}^i_j - \tau_{n\underset{1}{|}m}\overset{2}{F}{}^i_j + \sigma_m F^i_{j\underset{2}{|}n} - \sigma_n F^i_{j\underset{1}{|}m} \\
&+ \sigma_p(\sigma_j F^p_{<m}F^i_{n>} + \sigma_{<m}F^i_{n>}F^p_j + \tau_j\overset{2}{F}{}^p_{<m}F^i_{n>} + \tau_{<m}F^i_{n>}\overset{2}{F}{}^p_j) \\
&+ \tau_p(\sigma_j F^p_{<m}\overset{2}{F}{}^i_{n>} + \sigma_{<m}\overset{2}{F}{}^i_{n>}F^p_j + \tau_j\overset{2}{F}{}^p_{<m}\overset{2}{F}{}^i_{n>} + \tau_{<m}\overset{2}{F}{}^i_{n>}\overset{2}{F}{}^p_j) \\
&+ (\sigma_{(p}F^i_{n)} + \tau_{(p}\overset{2}{F}{}^i_{n)})\xi^p_{mj} + (\sigma_{(j}F^p_{m)} + \tau_{(j}\overset{2}{F}{}^p_{m)})\xi^i_{np} - (\sigma_{(j}F^p_{n)} + \tau_{(j}\overset{2}{F}{}^p_{n)})\xi^i_{pm} \\
&- (\sigma_{(p}F^i_{m)} + \tau_{(p}\overset{2}{F}{}^i_{m)})\xi^p_{nj} + 2\psi_j\xi^i_{nm} + \xi^p_{jm}\xi^i_{np} - \xi^p_{nj}\xi^i_{mp} \\
&+ 2(\psi_{(n}\delta^p_{m)} + \sigma_{(n}F^p_{m)} + \tau_{(n}\overset{2}{F}{}^p_{m)} + \xi^p_{nm})(T^i_{pj} + \xi^i_{pj}),
\end{aligned}
\tag{5.1.6}
$$

где је (ij) симетизација без дељења, а $< ij >$ антисиметризација без дељења по индексима i и j, и где су $\overset{2}{F}{}^h_j$, $\overset{3}{F}{}^h_j$ и $\overset{4}{F}{}^h_j$ одређени релацијом (5.1.4).

Дакле, важи

Теорема 5.1.3. *Бихоломорфно пројективна веза између тензора кривине треће врсте Ајзенхарт-Риманових простора* GR_N *и* $G\overline{R}_N$ *одређена је релацијом* (5.1.6), *где је* T^h_{ij} *тензор торзије конексије и где смо означавали сагласно са* (5.1.4).

На основу релација (1.5.27), (1.6.5), (5.1.1) и (5.1.2), за тензор кривине четврте врсте имамо:

$$
\begin{aligned}
\underset{4}{\overline{R}}{}^i_{jmn} &= \underset{4}{R}{}^i_{jmn} + (\psi_{j\underset{2}{|}n} - \psi_j\psi_n - \psi_p\sigma_{(j}F^p_{n)} - \psi_p\tau_{(j}\overset{2}{F}{}^p_{n)})\delta^i_m \\
&- (\psi_{j\underset{1}{|}m} - \psi_j\psi_m - \psi_p\sigma_{(j}F^p_{m)} - \psi_p\tau_{(j}\overset{2}{F}{}^p_{m)})\delta^i_n + (\psi_{m\underset{2}{|}n} - \psi_{n\underset{1}{|}m})\delta^i_j \\
&- \psi_p(\xi^p_{nj}\delta^i_m - \xi^p_{mj}\delta^i_n) + \xi^i_{jm\underset{2}{|}n} - \xi^i_{nj\underset{1}{|}m} + \sigma_j(\sigma_{<n}\overset{2}{F}{}^i_{m>} + \tau_{<n}\overset{3}{F}{}^i_{m>}) \\
&+ \tau_j(\sigma_{<n}\overset{3}{F}{}^i_{m>} + \tau_{<n}\overset{4}{F}{}^i_{m>}) + \tau_m\overset{2}{F}{}^i_{j\underset{2}{|}n} - \tau_n\overset{2}{F}{}^i_{j\underset{1}{|}m} + \tau_{j\underset{2}{|}n}\overset{2}{F}{}^i_m - \tau_{j\underset{1}{|}m}\overset{2}{F}{}^i_n \\
&+ \sigma_j(F^i_{m\underset{2}{|}n} - F^i_{n\underset{1}{|}m}) + \tau_j(\overset{2}{F}{}^i_{m\underset{2}{|}n} - \overset{2}{F}{}^i_{n\underset{1}{|}m}) + \sigma_{j\underset{2}{|}n}F^i_m - \sigma_{j\underset{1}{|}m}F^i_n \\
&+ \sigma_{m\underset{2}{|}n}F^i_j - \sigma_{n\underset{1}{|}m}F^i_j + \tau_{m\underset{2}{|}n}\overset{2}{F}{}^i_j - \tau_{n\underset{1}{|}m}\overset{2}{F}{}^i_j + \sigma_m F^i_{j\underset{2}{|}n} - \sigma_n F^i_{j\underset{1}{|}m} \\
&+ \sigma_p(\sigma_j F^p_{<m}F^i_{n>} + \sigma_{<m}F^i_{n>}F^p_j + \tau_j\overset{2}{F}{}^p_{<m}F^i_{n>} + \tau_{<m}F^i_{n>}\overset{2}{F}{}^p_j) \\
&+ \tau_p(\sigma_j F^p_{<m}\overset{2}{F}{}^i_{n>} + \sigma_{<m}\overset{2}{F}{}^i_{n>}F^p_j + \tau_j\overset{2}{F}{}^p_{<m}\overset{2}{F}{}^i_{n>} + \tau_{<m}\overset{2}{F}{}^i_{n>}\overset{2}{F}{}^p_j) \\
&+ (\sigma_{(p}F^i_{n)} + \tau_{(p}\overset{2}{F}{}^i_{n)})\xi^p_{mj} + (\sigma_{(j}F^p_{m)} + \tau_{(j}\overset{2}{F}{}^p_{m)})\xi^i_{np} - (\sigma_{(j}F^p_{n)} + \tau_{(j}\overset{2}{F}{}^p_{n)})\xi^i_{pm} \\
&- (\sigma_{(p}F^i_{m)} + \tau_{(p}\overset{2}{F}{}^i_{m)})\xi^p_{nj} + 2\psi_j\xi^i_{nm} + \xi^p_{jm}\xi^i_{np} - \xi^p_{nj}\xi^i_{mp} \\
&+ 2(\psi_{(n}\delta^p_{m)} + \sigma_{(n}F^p_{m)} + \tau_{(n}\overset{2}{F}{}^p_{m)} + \xi^p_{mn})(T^i_{pj} + \xi^i_{pj}),
\end{aligned}
\tag{5.1.7}
$$

где је (ij) симетизација без дељења, а $<ij>$ антисиметризација без дељења по индексима i и j, и где су $\overset{2}{F}{}^h_j$, $\overset{3}{F}{}^h_j$ и $\overset{4}{F}{}^h_j$ одређени релацијом (5.1.4).

Дакле, важи

Теорема 5.1.4. *Бихоломорфно пројективна веза између тензора кривине четврте врсте Ајзенхарт-Риманових простора* GR_N *и* $G\overline{R}_N$ *одређена је релацијом* (5.1.7), *где је* T^h_{ij} *тензор торзије конексије и где смо означавали сагласно са* (5.1.4).

На основу релација (1.5.27), (1.6.6), (5.1.1) и (5.1.2), за тензор кривине пете врсте имамо:

$$\begin{aligned}
\underset{5}{\overline{R}}{}^i_{jmn} &= \underset{5}{R}{}^i_{jmn} + 2\psi_j T^i_{mn} + 2\psi_n T^i_{mj} + \frac{1}{2}(\psi_{j\underset{3}{|}n} + \psi_{j\underset{4}{|}n})\delta^i_m \\
&+ \frac{1}{2}(\psi_{m\underset{3}{|}n} - \psi_{n\underset{3}{|}m} + \psi_{m\underset{4}{|}n} - \psi_{n\underset{4}{|}m})\delta^i_j - \frac{1}{2}(\psi_{j\underset{3}{|}m} + \psi_{j\underset{4}{|}m})\delta^i_n \\
&+ (\psi_p \sigma_{(j} F^p_{n)} + \psi_p \tau_{(j} \overset{2}{F}{}^p_{n)} - \psi_j \psi_n)\delta^i_m + \frac{1}{2}\sigma_m(F^i_{j\underset{3}{|}n} + F^i_{j\underset{4}{|}n}) \\
&- (\psi_p \sigma_{(j} F^p_{m)} + \psi_p \tau_{(j} \overset{2}{F}{}^p_{m)} - \psi_j \psi_m)\delta^i_n - \frac{1}{2}\sigma_n(F^i_{j\underset{3}{|}m} + F^i_{j\underset{4}{|}m}) \\
&+ \frac{1}{2}F^i_j(\sigma_{m\underset{3}{|}n} - \sigma_{n\underset{3}{|}m} - \sigma_{n\underset{4}{|}m} + \sigma_{m\underset{4}{|}n}) + \frac{1}{2}F^i_m(\sigma_{j\underset{3}{|}n} + \sigma_{j\underset{4}{|}n}) \\
&+ \frac{1}{2}\overset{2}{F}{}^i_j(\tau_{m\underset{3}{|}n} - \tau_{n\underset{3}{|}m} - \tau_{n\underset{4}{|}m} + \tau_{m\underset{4}{|}n}) + \frac{1}{2}\overset{2}{F}{}^i_m(\tau_{j\underset{3}{|}n} + \tau_{j\underset{4}{|}n}) \\
&+ \frac{1}{2}\sigma_j(F^i_{m\underset{3}{|}n} - F^i_{n\underset{3}{|}m} - F^i_{n\underset{4}{|}m} + F^i_{m\underset{4}{|}n}) + \frac{1}{2}\tau_m(\overset{2}{F}{}^i_{j\underset{3}{|}n} + \overset{2}{F}{}^i_{j\underset{4}{|}n}) \\
&+ \frac{1}{2}\tau_j(\overset{2}{F}{}^i_{m\underset{3}{|}n} - \overset{2}{F}{}^i_{n\underset{3}{|}m} - \overset{2}{F}{}^i_{n\underset{4}{|}m} + \overset{2}{F}{}^i_{m\underset{4}{|}n}) - \frac{1}{2}\tau_n(\overset{2}{F}{}^i_{j\underset{3}{|}m} + \overset{2}{F}{}^i_{j\underset{4}{|}m}) \\
&- \frac{1}{2}F^i_n(\sigma_{j\underset{3}{|}m} + \sigma_{j\underset{4}{|}m}) - \frac{1}{2}\overset{2}{F}{}^i_n(\tau_{j\underset{3}{|}m} + \tau_{j\underset{4}{|}m}) \\
&+ \sigma_p(\sigma_j F^p_{<m} F^i_{n>} + \sigma_{<m} F^i_{n>} F^p_j + \tau_j \overset{2}{F}{}^p_{<m} F^i_{n>} + \tau_{<m} F^i_{n>} \overset{2}{F}{}^p_j) \\
&+ \tau_p(\sigma_j F^p_{<m} \overset{2}{F}{}^i_{n>} + \sigma_{<m} \overset{2}{F}{}^i_{n>} F^p_j + \tau_j \overset{2}{F}{}^p_{<m} \overset{2}{F}{}^i_{n>} + \tau_{<m} \overset{2}{F}{}^i_{n>} \overset{2}{F}{}^p_j) \\
&+ \sigma_j(\sigma_{<n} \overset{2}{F}{}^i_{m>} + \tau_{<n} \overset{3}{F}{}^i_{m>}) + \tau_j(\sigma_{<n} \overset{3}{F}{}^i_m + \tau_{<n} \overset{4}{F}{}^i_{m>}) \\
&+ \frac{1}{2}(\xi^i_{jm\underset{3}{|}n} - \xi^i_{nj\underset{3}{|}m} - \xi^i_{jn\underset{4}{|}m} + \xi^i_{mj\underset{4}{|}n}) + \xi^p_{jm}\xi^i_{pn} - \xi^p_{jn}\xi^i_{mp},
\end{aligned} \tag{5.1.8}$$

где је (ij) симетизација без дељења, а $< ij >$ антисиметризација без дељења по индексима i и j, и где су $\overset{2}{F}{}^h_j$, $\overset{3}{F}{}^h_j$ и $\overset{4}{F}{}^h_j$ одређени релацијом (5.1.4).

Дакле, важи

Теорема 5.1.5. *Бихоломорфно пројективна веза између тензора кривине пете врсте Ајзенхарт-Римановых простора* GR_N *и* $G\overline{R}_N$ *одређена је релацијом* (5.1.8), *где је* T^h_{ij} *тензор торзије конексије и где смо означавали сагласно са* (5.1.4).

5.2 Еквиторзионо бихоломорфно пројективно пресликавање

Преликавање $f : GR_N \to G\overline{R}_N$ је *еквиторзионо бихоломорфно пројективно пресликавање* ако су тензори торзије простора GR_N и $G\overline{R}_N$ једнаки у заједничком по пресликавању f координатном систему. Тада, на основу (5.1.1) и (5.1.2), уочавамо да је антисиметрични део тензора деформације једнак нули, тј. важи

$$\xi^h_{ij} = 0. \tag{5.2.1}$$

Тада релација (5.1.2) постаје

$$P^h_{ij} = \psi_{(i}\delta^h_{j)} + \sigma_{(i}F^h_{j)} + \tau_{(i}\overset{2}{F}{}^h_{j)}. \tag{5.2.2}$$

Узимајући у обзир релацију (5.2.1), веза (5.1.3) између тензора кривине прве врсте Ајзенхарт-Риманових простора GR_N и $G\overline{R}_N$ постаје

$$\begin{aligned}
\underset{1}{\overline{R}}{}^i_{jmn} &= \underset{1}{R}{}^i_{jmn} + (\psi_{j\underset{1}{|}n} - \psi_j\psi_n - \psi_p\sigma_{(j}F^p_{n)} - \psi_p\tau_{(j}\overset{2}{F}{}^p_{n)})\delta^i_m \\
&- (\psi_{j\underset{1}{|}m} - \psi_j\psi_m - \psi_p\sigma_{(j}F^p_{m)} - \psi_p\tau_{(j}\overset{2}{F}{}^p_{m)})\delta^i_n + (\psi_{m\underset{1}{|}n} - \psi_{n\underset{1}{|}m})\delta^i_j \\
&+ \sigma_j(\sigma_{<n}\overset{2}{F}{}^i_{m>} + \tau_{<n}\overset{3}{F}{}^i_{m>}) + \tau_j(\sigma_{<n}\overset{3}{F}{}^i_{m>} + \tau_{<n}\overset{4}{F}{}^i_{m>}) + \tau_m\overset{2}{F}{}^i_{j\underset{1}{|}n} - \tau_n\overset{2}{F}{}^i_{j\underset{1}{|}m} \\
&+ \tau_{j\underset{1}{|}n}F^i_m - \tau_{j\underset{1}{|}m}F^i_n + \sigma_jF^i_{<m\underset{1}{|}n>} + \tau_j\overset{2}{F}{}^i_{<m\underset{1}{|}n>} + \sigma_{j\underset{1}{|}n}F^i_m - \sigma_{j\underset{1}{|}m}F^i_n \\
&+ \sigma_{m\underset{1}{|}n}F^i_j - \sigma_{n\underset{1}{|}m}F^i_j + \tau_{m\underset{1}{|}n}\overset{2}{F}{}^i_j - \tau_{n\underset{1}{|}m}\overset{2}{F}{}^i_j + \sigma_mF^i_{j\underset{1}{|}m} - \sigma_nF^i_{j\underset{1}{|}m} \\
&+ \sigma_p(\sigma_jF^p_{<m}F^i_{n>} + \sigma_{<m}F^i_{n>}F^p_j + \tau_j\overset{2}{F}{}^p_{<m}F^i_{n>} + \tau_{<m}F^i_{n>}\overset{2}{F}{}^p_j) \\
&+ \tau_p(\sigma_jF^p_{<m}\overset{2}{F}{}^i_{n>} + \sigma_{<m}\overset{2}{F}{}^i_{n>}F^p_j + \tau_j\overset{2}{F}{}^p_{<m}\overset{2}{F}{}^i_{n>} + \tau_{<m}\overset{2}{F}{}^i_{n>}\overset{2}{F}{}^p_j) \\
&+ 2T^p_{mn}(\psi_{(j}\delta^i_{p)} + \sigma_{(j}F^i_{p)} + \tau_{(j}\overset{2}{F}{}^i_{p)}),
\end{aligned} \tag{5.2.3}$$

па важи наредна теорема:

Теорема 5.2.1. *Еквиторзиона бихоломорфно пројективна веза између тензора кривине прве врсте Ајзенхарт-Римановихпростора GR_N и $G\overline{R}_N$ одређена је релацијом* (5.2.3)*, где је T^h_{ij} тензор торзије конексије и где смо означавали сагласно са* (5.1.4)*.*

Веза између тензора кривине друге врсте (5.1.5) Ајзенхарт-Риманових простора GR_N и $G\overline{R}_N$, након примене релације (5.2.1), постаје

$$
\begin{aligned}
\underset{2}{\overline{R}}{}^i_{jmn} &= \underset{2}{R}{}^i_{jmn} + (\psi_{j\underset{2}{|}n} - \psi_j\psi_n - \psi_p\sigma_{(j}F^p_{n)} - \psi_p\tau_{(j}\overset{2}{F}{}^p_{n)})\delta^i_m \\
&- (\psi_{j\underset{2}{|}m} - \psi_j\psi_m - \psi_p\sigma_{(j}F^p_{m)} - \psi_p\tau_{(j}\overset{2}{F}{}^p_{m)})\delta^i_n + (\psi_{m\underset{2}{|}n} - \psi_{n\underset{2}{|}m})\delta^i_j \\
&+ \sigma_j(\sigma_{<n}\overset{2}{F}{}^i_{m>} + \tau_{<n}\overset{3}{F}{}^i_{m>}) + \tau_j(\sigma_{<n}\overset{3}{F}{}^i_{m>} + \tau_{<n}\overset{4}{F}{}^i_{m>}) + \tau_m\overset{2}{F}{}^i_{j\underset{2}{|}n} - \tau_n\overset{2}{F}{}^i_{j\underset{2}{|}m} \\
&+ \tau_{j\underset{2}{|}n}\overset{2}{F}{}^i_m - \tau_{j\underset{2}{|}m}\overset{2}{F}{}^i_n + \sigma_jF^i_{<m\underset{2}{|}n>} + \tau_j\overset{2}{F}{}^i_{<m\underset{2}{|}n>} + \sigma_{j\underset{2}{|}n}F^i_m - \sigma_{j\underset{2}{|}m}F^i_n \\
&+ \sigma_{m\underset{2}{|}n}F^i_j - \sigma_{n\underset{2}{|}m}F^i_j + \tau_{m\underset{2}{|}n}\overset{2}{F}{}^i_j - \tau_{n\underset{2}{|}m}\overset{2}{F}{}^i_j + \sigma_mF^i_{j\underset{2}{|}m} - \sigma_nF^i_{j\underset{2}{|}m} \\
&+ \sigma_p(\sigma_jF^p_{<m}F^i_{n>} + \sigma_{<m}F^i_{n>}F^p_j + \tau_j\overset{2}{F}{}^p_{<m}F^i_{n>} + \tau_{<m}F^i_{n>}\overset{2}{F}{}^p_j) \\
&+ \tau_p(\sigma_jF^p_{<m}\overset{2}{F}{}^i_{n>} + \sigma_{<m}\overset{2}{F}{}^i_{n>}F^p_j + \tau_j\overset{2}{F}{}^p_{<m}\overset{2}{F}{}^i_{n>} + \tau_{<m}\overset{2}{F}{}^i_{n>}\overset{2}{F}{}^p_j) \\
&+ 2T^p_{nm}(\psi_{(j}\delta^i_{p)} + \sigma_{(j}F^i_{p)} + \tau_{(j}\overset{2}{F}{}^i_{p)}).
\end{aligned} \tag{5.2.4}
$$

Дакле, важи

Теорема 5.2.2. *Еквиторзиона бихоломорфно пројективна веза између тензора кривине друге врсте Ајзенхарт-Риманових простора GR_N и $G\overline{R}_N$ одредјена је релацијом* (5.2.4)*, где је T^h_{ij} тензор торзије конексије и где смо означавали сагласно са* (5.1.4)*.*

Веза између тензора кривине треће врсте (5.1.6) Ајзенхарт-Риманових простора GR_N и $G\overline{R}_N$, на основу релације (5.2.1), постаје

$$
\begin{aligned}
\underset{3}{\overline{R}}{}^i_{jmn} = \underset{3}{R}{}^i_{jmn} &+ (\psi_{j\underset{2}{|}n} - \psi_j\psi_n - \psi_p\sigma_{(j}F^p_{n)} - \psi_p\tau_{(j}\overset{2}{F}{}^p_{n)})\delta^i_m \\
&- (\psi_{j\underset{1}{|}m} - \psi_j\psi_m - \psi_p\sigma_{(j}F^p_{m)} - \psi_p\tau_{(j}\overset{2}{F}{}^p_{m)})\delta^i_n + (\psi_{m\underset{2}{|}n} - \psi_{n\underset{1}{|}m})\delta^i_j \\
&+ \sigma_j(\sigma_{<n}\overset{2}{F}{}^i_{m>} + \tau_{<n}\overset{3}{F}{}^i_{m>}) + \tau_j(\sigma_{<n}\overset{3}{F}{}^i_{m>} + \tau_{<n}\overset{4}{F}{}^i_{m>}) \\
&+ \tau_m\overset{2}{F}{}^i_{j\underset{2}{|}n} - \tau_n\overset{2}{F}{}^i_{j\underset{1}{|}m} + \tau_{j\underset{2}{|}n}\overset{2}{F}{}^i_m - \tau_{j\underset{1}{|}m}\overset{2}{F}{}^i_n + \sigma_j(F^i_{m\underset{2}{|}n} - F^i_{n\underset{1}{|}m}) \\
&+ \tau_j(\overset{2}{F}{}^i_{m\underset{2}{|}n} - \overset{2}{F}{}^i_{n\underset{1}{|}m}) + \sigma_{j\underset{2}{|}n}F^i_m - \sigma_{j\underset{1}{|}m}F^i_n \\
&+ \sigma_{m\underset{2}{|}n}F^i_j - \sigma_{n\underset{1}{|}m}F^i_j + \tau_{m\underset{2}{|}n}\overset{2}{F}{}^i_j - \tau_{n\underset{1}{|}m}\overset{2}{F}{}^i_j + \sigma_mF^i_{j\underset{2}{|}n} - \sigma_nF^i_{j\underset{1}{|}m} \\
&+ \sigma_p(\sigma_jF^p_{<m}F^i_{n>} + \sigma_{<m}F^i_{n>}F^p_j + \tau_j\overset{2}{F}{}^p_{<m}F^i_{n>} + \tau_{<m}F^i_{n>}\overset{2}{F}{}^p_j) \\
&+ \tau_p(\sigma_jF^p_{<m}\overset{2}{F}{}^i_{n>} + \sigma_{<m}\overset{2}{F}{}^i_{n>}F^p_j + \tau_j\overset{2}{F}{}^p_{<m}\overset{2}{F}{}^i_{n>} + \tau_{<m}\overset{2}{F}{}^i_{n>}\overset{2}{F}{}^p_j) \\
&+ 2(\psi_{(n}\delta^p_{m)} + \sigma_{(n}F^p_{m)} + \tau_{(n}\overset{2}{F}{}^p_{m)})T^i_{pj},
\end{aligned}
\tag{5.2.5}
$$

па можемо да формулишемо теорему:

Теорема 5.2.3. *Еквиторзиона бихоломорфно пројективна веза између тензора кривине треће врсте Ајзенхарт-Римановых простора GR_N и $G\overline{R}_N$ одређена је релацијом* (5.2.5)*, где је T^h_{ij} тензор торзије конексије и где смо означавали сагласно са* (5.1.4)*.*

Узимајући у обзир релацију (5.2.1), веза (5.1.7) између тензора кривине четврте врсте Ајзенхарт-Риманових простора GR_N и $G\overline{R}_N$ постаје

$$
\begin{aligned}
\overline{\underset{4}{R}}{}^i_{jmn} &= \underset{4}{R}{}^i_{jmn} + (\psi_{j\underset{2}{|}n} - \psi_j\psi_n - \psi_p\sigma_{(j}F^p_{n)} - \psi_p\tau_{(j}\overset{2}{F}{}^p_{n)})\delta^i_m \\
&- (\psi_{j\underset{1}{|}m} - \psi_j\psi_m - \psi_p\sigma_{(j}F^p_{m)} - \psi_p\tau_{(j}\overset{2}{F}{}^p_{m)})\delta^i_n + (\psi_{m\underset{2}{|}n} - \psi_{n\underset{1}{|}m})\delta^i_j \\
&+ \sigma_j(\sigma_{<n}\overset{2}{F}{}^i_{m>} + \tau_{<n}\overset{3}{F}{}^i_{m>}) + \tau_j(\sigma_{<n}\overset{3}{F}{}^i_{m>} + \tau_{<n}\overset{4}{F}{}^i_{m>}) \\
&+ \tau_m\overset{2}{F}{}^i_{j\underset{2}{|}n} - \tau_n\overset{2}{F}{}^i_{j\underset{1}{|}m} + \tau_{j\underset{2}{|}n}\overset{2}{F}{}^i_m - \tau_{j\underset{1}{|}m}\overset{2}{F}{}^i_n + \sigma_j(F^i_{m\underset{2}{|}n} - F^i_{n\underset{1}{|}m}) \\
&+ \tau_j(\overset{2}{F}{}^i_{m\underset{2}{|}n} - \overset{2}{F}{}^i_{n\underset{1}{|}m}) + \sigma_{j\underset{2}{|}n}F^i_m - \sigma_{j\underset{1}{|}m}F^i_n \\
&+ \sigma_{m\underset{2}{|}n}F^i_j - \sigma_{n\underset{1}{|}m}F^i_j + \tau_{m\underset{2}{|}n}\overset{2}{F}{}^i_j - \tau_{n\underset{1}{|}m}\overset{2}{F}{}^i_j + \sigma_mF^i_{j\underset{2}{|}n} - \sigma_nF^i_{j\underset{1}{|}m} \\
&+ \sigma_p(\sigma_jF^p_{<m}F^i_{n>} + \sigma_{<m}F^i_{n>}F^p_j + \tau_j\overset{2}{F}{}^p_{<m}F^i_{n>} + \tau_{<m}F^i_{n>}\overset{2}{F}{}^p_j) \\
&+ \tau_p(\sigma_jF^p_{<m}\overset{2}{F}{}^i_{n>} + \sigma_{<m}\overset{2}{F}{}^i_{n>}F^p_j + \tau_j\overset{2}{F}{}^p_{<m}\overset{2}{F}{}^i_{n>} + \tau_{<m}\overset{2}{F}{}^i_{n>}\overset{2}{F}{}^p_j) \\
&+ 2(\psi_{(n}\delta^p_{m)} + \sigma_{(n}F^p_{m)} + \tau_{(n}\overset{2}{F}{}^p_{m)})T^i_{pj}.
\end{aligned}
\tag{5.2.6}
$$

Дакле, важи:

Теорема 5.2.4. *Еквиторзиона бихоломорфно пројективна веза између тензора кривине четврте врсте Ајзенхарт-Риманових простора GR_N и $G\overline{R}_N$ одређена је релацијом* (5.2.6)*, где је T^h_{ij} тензор торзије конексије и где смо означавали сагласно са* (5.1.4)*.*

Полазећи од релације (5.1.8), којом је дата веза између тензора кривине пете врсте Ајзенхарт-Риманових простора GR_N и $G\overline{R}_N$, након примене релације (5.2.1), добијамо

$$
\begin{aligned}
\underset{5}{\overline{R}}{}^i_{jmn} &= \underset{5}{R}{}^i_{jmn} + 2\psi_j T^i_{mn} + 2\psi_n T^i_{mj} + \frac{1}{2}(\psi_{j\underset{3}{|}n} + \psi_{j\underset{4}{|}n})\delta^i_m \\
&+ \frac{1}{2}(\psi_{m\underset{3}{|}n} - \psi_{n\underset{3}{|}m} + \psi_{m\underset{4}{|}n} - \psi_{n\underset{4}{|}m})\delta^i_j - \frac{1}{2}(\psi_{j\underset{3}{|}m} + \psi_{j\underset{4}{|}m})\delta^i_n \\
&+ (\psi_p \sigma_{(j} F^p_{n)} + \psi_p \tau_{(j} \overset{2}{F}{}^p_{n)} - \psi_j \psi_n)\delta^i_m + \frac{1}{2}\sigma_m (F^i_{j\underset{3}{|}n} + F^i_{j\underset{4}{|}n}) \\
&- (\psi_p \sigma_{(j} F^p_{m)} + \psi_p \tau_{(j} \overset{2}{F}{}^p_{m)} - \psi_j \psi_m)\delta^i_n - \frac{1}{2}\sigma_n (F^i_{j\underset{3}{|}m} + F^i_{j\underset{4}{|}m}) \\
&+ \frac{1}{2}F^i_j(\sigma_{m\underset{3}{|}n} - \sigma_{n\underset{3}{|}m} - \sigma_{n\underset{4}{|}m} + \sigma_{m\underset{4}{|}n}) + \frac{1}{2}F^i_m(\sigma_{j\underset{3}{|}n} + \sigma_{j\underset{4}{|}n}) \\
&+ \frac{1}{2}\overset{2}{F}{}^i_j(\tau_{m\underset{3}{|}n} - \tau_{n\underset{3}{|}m} - \tau_{n\underset{4}{|}m} + \tau_{m\underset{4}{|}n}) + \frac{1}{2}\overset{2}{F}{}^i_m(\tau_{j\underset{3}{|}n} + \tau_{j\underset{4}{|}n}) \\
&+ \frac{1}{2}\sigma_j(F^i_{m\underset{3}{|}n} - F^i_{n\underset{3}{|}m} - F^i_{n\underset{4}{|}m} + F^i_{m\underset{4}{|}n}) + \frac{1}{2}\tau_m(\overset{2}{F}{}^i_{j\underset{3}{|}n} + \overset{2}{F}{}^i_{j\underset{4}{|}n}) \\
&+ \frac{1}{2}\tau_j(\overset{2}{F}{}^i_{m\underset{3}{|}n} - \overset{2}{F}{}^i_{n\underset{3}{|}m} - \overset{2}{F}{}^i_{n\underset{4}{|}m} + \overset{2}{F}{}^i_{m\underset{4}{|}n}) - \frac{1}{2}\tau_n(\overset{2}{F}{}^i_{j\underset{3}{|}m} + \overset{2}{F}{}^i_{j\underset{4}{|}m}) \\
&- \frac{1}{2}F^i_n(\sigma_{j\underset{3}{|}m} + \sigma_{j\underset{4}{|}m}) - \frac{1}{2}\overset{2}{F}{}^i_n(\tau_{j\underset{3}{|}m} + \tau_{j\underset{4}{|}m}) \\
&+ \sigma_p(\sigma_j F^p_{<m} F^i_{n>} + \sigma_{<m} F^i_{n>} F^p_j + \tau_j \overset{2}{F}{}^p_{<m} F^i_{n>} + \tau_{<m} F^i_{n>} \overset{2}{F}{}^p_j) \\
&+ \tau_p(\sigma_j F^p_{<m} \overset{2}{F}{}^i_{n>} + \sigma_{<m} \overset{2}{F}{}^i_{n>} F^p_j + \tau_j \overset{2}{F}{}^p_{<m} \overset{2}{F}{}^i_{n>} + \tau_{<m} \overset{2}{F}{}^i_{n>} \overset{2}{F}{}^p_j) \\
&+ \sigma_j(\sigma_{<n} \overset{2}{F}{}^i_{m>} + \tau_{<n} \overset{3}{F}{}^i_{m>}) + \tau_j(\sigma_{<n} \overset{3}{F}{}^i_m + \tau_{<n} \overset{4}{F}{}^i_{m>}),
\end{aligned}
\tag{5.2.7}
$$

тј. важи:

Теорема 5.2.5. *Еквиторзиона бихоломорфно пројективна веза између тензора кривине пете врсте Ајзенхарт-Римановихпростора* GR_N *и* $G\overline{R}_N$ *одређена је релацијом* (5.2.7), *где је* T^h_{ij} *тензор торзије конексије и где смо означавали сагласно са* (5.1.4).

5.3 Томасов еквиторзиони бихоломорфно пројективни параметар

У (5.2.2) векторе σ_i и τ_i можемо да изаберемо тако да је

$$\sigma_i = -\psi_p \overset{2}{F}{}^p_i, \ \tau_i = \psi_i F^p_p.$$

Тада је

$$\overline{\Gamma}^h_{ij} - \Gamma^h_{ij} = \psi_{(i}\delta^h_{j)} - \psi_p \overset{2}{F}{}^p_{(i} F^h_{j)} + \psi_{(i} \overset{2}{F}{}^h_{j)} F^p_p. \tag{5.3.1}$$

Контракцијом по индексима h и i у (5.3.1), уз претпоставку да важи

$$\mathrm{Tr}(F^2) = 0, \text{ тј. } \overset{2}{F}{}^p_p = F^p_q F^q_p = 0 \tag{5.3.2}$$

и

$$\overset{3}{F}{}^h_j = F^h_p F^p_q F^q_j = e\delta^h_j \ \ (e = \pm 1, 0), \tag{5.3.3}$$

добијамо

$$\psi_j = \frac{1}{N+1-e}(\overline{\Gamma}^p_{\underline{p}j} - \Gamma^p_{\underline{p}j}). \tag{5.3.4}$$

Заменом (5.3.4) у (5.3.1) добијамо

$$\begin{aligned} &\overline{\Gamma}^h_{ij} - \frac{1}{N+1-e}\left(\overline{\Gamma}^p_{\underline{p}i}\delta^h_j + \overline{\Gamma}^p_{\underline{p}j}\delta^h_i - \overline{\Gamma}^q_{\underline{q}p}\overset{2}{F}{}^p_{(i}F^h_{j)} + (\overline{\Gamma}^p_{\underline{p}i}\overset{2}{F}{}^h_j + \overline{\Gamma}^p_{\underline{p}j}\overset{2}{F}{}^h_i)F^q_q\right) \\ &= \Gamma^h_{ij} - \frac{1}{N+1-e}\left(\Gamma^p_{\underline{p}i}\delta^h_j + \Gamma^p_{\underline{p}j}\delta^h_i - \Gamma^q_{\underline{q}p}\overset{2}{F}{}^p_{(i}F^h_{j)} + (\Gamma^p_{\underline{p}i}\overset{2}{F}{}^h_j + \Gamma^p_{\underline{p}j}\overset{2}{F}{}^h_i)F^q_q\right). \end{aligned} \tag{5.3.5}$$

Ако означимо

$$\begin{aligned} \mathcal{HT}^h_{ij} = \Gamma^h_{ij} - \frac{1}{N+1-e}\Big(&\Gamma^p_{\underline{p}i}\delta^h_j + \Gamma^p_{\underline{p}j}\delta^h_i - \Gamma^q_{\underline{q}p}\overset{2}{F}{}^p_{(i}F^h_{j)} \\ &+ (\Gamma^p_{\underline{p}i}\overset{2}{F}{}^h_j + \Gamma^p_{\underline{p}j}\overset{2}{F}{}^h_i)F^q_q\Big), \end{aligned} \tag{5.3.6}$$

релација (5.3.5) може да се представи у облику

$$\overline{\mathcal{HT}}^h_{ij} = \mathcal{HT}^h_{ij}, \tag{5.3.7}$$

при чему је $\overline{\mathcal{HT}}^h_{ij}$ објекат облика (5.3.6) простора $G\overline{R}_N$. Величина $\mathcal{HT}^h_{ij}$ није тензор и зваћемо је *Томасовим еквиторзионим бихоломорфно пројективним параметром.*

Теорема 5.3.1. *Величине* (5.3.6) *су инваријанте еквиторзионог бихоломорфно пројективног пресликавања Ајзенхарт-Риманових простора са једнаким структурним афинорима под условом да важе релације* (5.3.2) *и* (5.3.3).

Литература

[1] A. V. Aminova, D. A. Kalinin, *Quantization of Kählerian manifolds admitting H-projective mappings*, Tensor (N. S.) 56 (1) (1995), 1–11.

[2] T. P. Andjelić, *Tenzorski račun*, Naučna kniga, Beograd, 1991.

[3] V. E. Berezovski, J. Mikeš, *On the classification of almost geodesic mappings of affine connected spaces*, Proc. of Conf. Diff. Geom. and Appl., 1988, Dubrovnik, Yugoslavia, Novi Sad (1989), 41–48.

[4] V. E. Berezovski, J. Mikeš, *On a Classification of Almost Geodesic Mappings of Affine Connection Spaces*, Acta Univ. Palacki. Olomuc., Fac. rer. nat., Mathematica 35 (1996), 21–24.

[5] V. E. Berezovski, J. Mikeš, *On Special Almost Geodesic Mappings of Type* π_1 *of Spaces with Affine Connection*, Acta Univ. Palacki. Olomuc., Fac. rer. nat., Mathematica 43 (2004), 21–26.

[6] V.E. Berezovski, J. Mikeš, *Almost geodesic mappings of spaces with affine connection*, J. Math. Sci., Vol. 207, No. 3, (2015), 389–409.

[7] V. E. Berezovski, J. Mikeš, *Almost Geodesic Mappings of Type* π_1 *onto Generalized Ricci-symmetric Spaces* (in Russian), Kazan. Gos. Univ. Uchen. Zap. Ser. Fiz.-Mat. Nauki, 2009, Volume 151, Book 4, 9–14.

[8] V. E. Berezovski, J. Mikeš, *Canonical almost geodesic mappings of the first type of manifolds with affine connection* (in Russian), Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., 2014, Number 2, 3–8.

[9] V. E. Berezovski, J. Mikeš, A. Vanžurová, *Fundamental PDE's of the Canonical Almost Geodesic Mappings of Type* $\widetilde{\pi}_1$, Bull. Malays. Math. Sci. Soc., Ser. 2, (2014), Vol. 37, No. 3, 647–659.

[10] S. Bochner, K. Yano, *Tensor-fields in non-symmetric connections*, Annals of Mathematics, Vol. 56, 3, (1952), 504–519.

[11] S. Capozziello, C. Stornaiolo, *Torsion tensor and its geometric interpretation*, Ann. Fond. Louis de Broglie 32 (2-3)(2007), 195–214.

[12] M. P. do Carmo, *Riemannian geometry*, Bikhäuser, Boston-Basel-Berlin, 1992.

[13] M. S. Ćirić, M. Lj. Zlatanović, M. S. Stanković, Lj. S. Velimirović, *On geodesic mappings of equidistant generalized Riemannian spaces*, Applied Mathematics and Computation 218, 12 (2012), 6648–6655.

[14] A. Einstein, *A Generalization of the Relativistic Theory of Gravitation*, Annals of Mathematics, Princeton, 46, (1945), 576–584.

[15] A. Einstein, *Bianchi Identities in the Generalized Theory of Gravitation*, Canadian Journal of Mathematics, 2, (1950), 120–128.

[16] A. Einstein, *Relativistic Theory of the Non-symmetric field*, Appendix II in the Book: The Meaning of Relativity 5^{th} edit., Princeton, 49, 1955.

[17] A. Einstein, *Die Grundlagen der allgemeinen Relativitäts − teorie*, Annale der Physic, 49, (1916), 769.

[18] L. P. Eisenhart, *Non-Riemannian geometry*, New York, 1927.

[19] L. P. Eisenhart, *Generalized Riemannian spaces*, Proceeding of the National Academy of Sciences of the USA, Vol. 37, (1951), 311–315.

[20] L. P. Eisenhart, *Generalized Riemannian spaces, Part II*, Proceeding of the National Academy of Sciences of the USA, Vol. 38, (1952), 505–508.

[21] F. Graiff, *Formule di commutazione e trasporto ciclico nei recenti spazi di Einstein*, Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. Mat. Natur., III., Ser., 87 (1954), No. 1, 105–110.

[22] I. Hinterleitner, *Holomorphically projective mappings of (pseudo-)Kählerian manifolds preserve the class of differentiability*, Filomat 30 (11) (2016), 3115–3122.

[23] I. Hinterleitner, J. Mikeš, *On F-planar mappings of spaces with affine connections,* Note di Matematica, 27, No.1, (2007), 111-118.

[24] I. Hinterleitner, J. Mikeš, *Geodesic mappings and Einstein Spaces*, Geometric Methods in Physics, Trends in Mathematics, (2013), 331–335.

[25] I. Hinterleitner, J. Mikeš, *Geodesic Mappings of (Pseudo-) Riemannian Manifolds Preserve Class of Differentiability*, Miskolc Mathematical Notes HU ISSN 1787-2405 Vol. 14 (2013), No. 2, 575–582.

[26] I. Hinterleitner, J. Mikeš, *Fundamental Equations of Geodesic Mappings and their Generalizations*, J. Math. Sci. (N. Y.) 174 (5) (2011), 537-554.

[27] I. Hinterleitner, J. Mikeš, P. Peška, *Fundamental Equations of F-planar Mappings*, Lobachevskii J. Math. 38 (4) (2017), 653–659.

[28] I. Hinterleitner, J. Mikeš, P. Peška, *On F_2^ε-Planar Mappings of (Pseudo-) Riemannian Manifolds*, Archivum Mathematicum (Brno), Tomus 50 (2014), 287–295.

[29] S. Ivanov, M. Zlatanović, *Connections on Non-symmetric (Generalized) Riemannian Manifold and Gravity*, Classical and Quantum Gravity, Vol. 33, No. 7, 075016 (2016).

[30] В. Ф. Каган, *Субпроективные пространства*, М.: Физматгиз, 1961.

[31] P. Majhi, U. C. De, *A note on anti-Kähler manifolds*, Indian J. Math. 55 (2013), no. 2, 185–193.

[32] J. Mikeš, *Geodesic mappings of Einstein spaces*, Math. Notes 28, 922–923, (1981); translation from Mat. Zametki 28, (1980), 935–938.

[33] J. Mikeš, *Geodesic Mappings of Affine Connected and Riemannian Spaces*, J. Math. Sci., New York, 78, 3 (1996), 311–333.

[34] J. Mikeš, *Holomorphically projective mappings and their generalizations*, J. Math. Sci., New York, 89, 3 (1998), 1334–1353.

[35] J. Mikeš, *On geodesic mappings of Einstein spaces* (In Russian), Mat. zametki, 28, (1980), 313–317.

[36] J. Mikeš, *On geodesic and holomorphic-projective mappings of generalized m-recurrent Riemannian spaces*, Sibirsk. Mat. Zh., 33 (5), (1992), 215.

[37] J. Mikeš, *On holomorphically projective mappings of Kählerian spaces*, Ukr. Geom. Sb. 23 (1980), 90–98.

[38] J. Mikeš, *Special F-planar mappings of affinely connected spaces onto Riemannian spaces*, Moscow Univ. Math. Bull. 49 (3) (1994), 15–21.

[39] J. Mikeš, V. Kiosak, A. Vanžurová, *Geodesic Mappings of Manifolds with Affine Connection*, Palacký University, Olomouc, 2008.

[40] J. Mikeš, O. Pokorná, G. Starko, *On almost geodesic mappings* $\pi_2(e)$ *onto Riemannian spaces*, Rendiconti del circolo matematico di Palermo, Serie II, Suppl. 72 (2004), 151–157.

[41] J. Mikeš, N. S. Sinyukov, *On quasiplanar mappings of spaces of affine connection,* Sov. Math., 27 (1), (1983), 63–70.

[42] J. Mikeš, G. A. Starko, *K-koncircular vector fields and holomorphically projective mappings on Kählerian spaces,* Rend. del Circolo di Palermo, 46, (1997), 123–127.

[43] J. Mikeš, A. Vanžurová, I. Hinterleitner, *Geodesic Mappings and Some Generalizations*, Palacký University, Olomouc, 2009.

[44] J. Mikeš, E. Stepanova, A. Vanžurová et al., *Differential Geometry of Special Mappings*, Palacký University, Olomouc, 2015.

[45] S. M. Minčić, *Bianchi type identities in the space of nonsymmetric affine connection*, Collection of scientific papers of the Faculty of Science, Kragujevac, Vol. 16, (1994), 53–60.

[46] S.M. Minčić, *Some characteristics of curvature tensors of non-symmetric affine connexion*, 12th Yugoslav Geometric Seminar (Novi Sad, 1998), Novi Sad J. Math., Vol. 6, No. 3, (1997), 169–183.

[47] S. M. Minčić, *New Bianchi type identities in the space of nonsymmetric affine connection*, Facta universitatis, Niš, Vol. 10, (1995), 35–43.

[48] S. M. Minčić, *Ricci identities in the space of non-symmetric affine connection*, Matematički Vesinik, 10(25), Vol. 2, (1973), 161–172.

[49] S. M. Minčić, *On curvature tensors and pseudotensors of the spaces with non-symmetric affine connection*, Mathematica Balkanica, 4, 76, (1974), 427–430.

[50] С. М. Минчић, *Генералисани Риманови простори*, докторска дисертација, Природно-Математички Факултет, Нови Сад, 1975.

[51] S. M. Minčić, *Curvature tensors of the space of non-symmetric affine connexion, obtained from the curvature pseudotensors*, Matematički Vesnik, 13, (28), (1976), 421–435.

[52] S. M. Minčić, *New commutation formulas in the non-symmetric affine connection space*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) 22 (36) (1977), 189–199.

[53] S. M. Minčić, *Independent curvature tensors and pseudotensors of spaces with non-summetric affine connexion*, Colloquia Mathematica Societatis János Bolayai, 31, Differential Geometry, Budapest (Hungary), (1979), 445–460.

[54] S. M. Minčić, *Symmetry properties of curvature tensors of the space with non-symmetric affine connexion and generalized Riemannian space*, Zbornik radova Filozofskog fakulteta, Serija Matematika, Niš, 1 (11) (1987), 69–78.

[55] S. M. Minčić, *Some characteristics of curvature tensors of non-symmetric affine connexion*, 12th Yugoslav Geometrical Seminar (Novi Sad, 1998), Novi Sad J. Math., Vol. 6, No. 3, (1999), 169–183.

[56] S.M. Minčić, *On Ricci type identities in manifolds with non-symmetric affine connection*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.), 94(108), (2013), 205–217.

[57] S. M. Minčić, M. S. Stanković, *On geodesic mappings of general affine connection spaces and of generalized Riemannian spaces*, Matematički vesnik, 49 (1997), 27–33.

[58] S. M. Minčić, M. S. Stanković, *Equitorsion geodesic mappings of generalized Rimannian spaces*, Publications de L'Institut Mathématique, 61 (75) (1997), 97–104.

[59] S. M. Minčić, M. S. Stanković, *New special geodesic mappings of general affine connection spaces*, Filomat, 14 (2000), 19–31.

[60] S. M. Minčić, M. S. Stanković, Lj. S. Velimirović, *Generalized Kahlerian Spaces*, Filomat 15 (2001), 167–174.

[61] S. M. Minčić, M. S. Stanković, Lj. S. Velimirović, *Generalized Riemannian Spaces and Spaces of Non-symmetric Affine Connection*, Faculty of Science and Mathematics Niš, 2013.

[62] S. M. Minčić, Lj. S. Velimirović, *Tenzorski račun*, Faculty of Science and Mathematics, Niš, 2009.

[63] S. M. Minčić, Lj. S. Velimirović, *Diferencijalna geometrija mnogostrukosti*, Faculty of Science and Mathematics, Niš, 2011.

[64] S. M. Minčić, Lj. S. Velimirović, M. S. Stanković, *Integrability conditions of derivational equations of a submanifold of a generalized Riemannian space*, Applied Mathematics and Computation, 01 (2014) 226, 3–9.

[65] S. M. Minčić, Lj. S. Velimirović, M. S. Stanković, *New Integrability Conditions of Derivational Equations of a Submanifold in a Generalized Riemannian Space*, Filomat, 24:4 (2010), 137–146.

[66] S. M. Minčić, Lj. S. Velimirović, M. S. Stanković, *On spaces with non-symmetric affine connection, containing subspaces without torsion*, Applied Mathematics and Computation, 01(2013); 219(9): 4346–4353.

[67] S. M. Minčić, Lj. S. Velimirović, M. S. Stanković, *Integrability conditions of derivational equations of a submanifold of a generalized Riemannian space*, Applied Mathematics and Computation, 226, 01(2014), 3–9.

[68] R. S. Mishra, *Subspaces of a generalized Riemannian space*, Bull. Acad. Roy. Belgique, (1954), 1058–1071.

[69] M. S. Najdanović, M. Lj. Zlatanović, I. Hinterleitner, *Conformal and Geodesic Mappings of Generalized Equidistant Spaces*, Publications de L'Institut Mathématique, Nouvelle série, tome 98 (112) (2015), 71–84.

[70] C. Nitescu, *Bianchi identities in a Non-symmetric Connection Space*, The Bulletin of the Politehnic Institute of Jassy, (N. S.) 20 (24) (1974), Fasc. 1-2, Sect. I, 69–72.

[71] T. Otsuki, Y. Tasiro, *On curves in Kählerian spaces*, Math. J. Okayama Univ. 4 (1) (1954), 57–78.

[72] A. Z. Petrov, *Einstein spaces*, M., GIFML, 1961.

[73] A. Z. Petrov, *New methods in the general theory of relativity*, M., Nauka, 1966.

[74] M. Z. Petrović, M. S. Stanković, *Special almost geodesic mappings of the first type of non-symmetric affine connection spaces*, Bull. Malays. Math. Sci. Soc., Ser. 2, 2015, Vol. 40, No. 3, 1353–1362.

[75] M. Z. Petrović, M. S. Stanković, *On almost geodesic mappings of the second type between manifolds with non-symmetric linear connection*, Filomat, accepted for publication.

[76] M. Prvanović, *Equations de Gauss d'un sous-espace plongé dans l'espase Riemannien généralisé*, Buletin de La Classe des Sciences de L'academie Royal de Belguiqe, (1955), 615–621.

[77] M. Prvanović, *Konformne i projektivne transformacije generalisanih Riemanovih prostora u smislu T. Takasu-a*, Godišnjak Filozofskog Fakulteta, Novi Sad, knjiga III (1958), 265–272.

[78] M. Prvanović, *Une connexion non-symétrique associée a l'espace Riemannien*, Publications de L'Institut Mathématique, N. S., Vol. 19 (24), (1970), 53–64.

[79] M. Prvanović, *On pseudo metric semi-symmetric connections*, Publications de L'Institut Mathématique, N. S., Vol. 18 (32), (1975), 157–164.

[80] M. Prvanović, *Holomorphically semi-symmetric connexion*, Zbornik radova Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu knjiga 9 (1979), 91–99.

[81] М. Прванович, *Четыре тензора кривиыны несимметрической связности*, Из зборнике 150 лет геометрии Лобачевского Касань, 1976, Москва 1977, 199–205.

[82] M. Prvanović, *A note on holomorphically projective transformations of the Kähler space*, Tensor, N. S., Vol. 35, (1981), 99–104.

[83] M. Prvanović, *Some special product semisymmetric and some special holomorphically semisymmetric F-connections*, Publications de L'Institut Mathématique, N. S., Vol. 35 (49), (1984), 139–152.

[84] M. Prvanović, *Complex conformal connection on the locally conformal Kähler manifolds*, Kragujevac Journal of Mathematics, 25 (2003), 127–138.

[85] M. Prvanović, *Locally conformally Kähler manifolds of constant type and J-invariant curvature tensor*, Facta Universitatis, Series: Mechanics, Automatic Control and Robotics, Vol.3, No.14, (2003), 791–804.

[86] B. Riemann, *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, (1854), Ges. Math. Werke, Leipzig, (1892), reproduced by Dover Publications (1953), 272–287.

[87] Н. С. Синюков, *Геодезические Отображения Римановых Пространств*, Москва, "Наука", 1979.

[88] J. A. Shouten, D. J. Struik, *Introduction into new Methods in Differential Geometry*, Gostekhizdat: Moscow-Leningrad, 1939.

[89] V.S. Sobchuk, J. Mikeš, O. Pokorná, *On almost geodesic mappings π_2 between semisymmetric Riemannian spaces*, Novi Sad J. Math., Vol. 29, No. 3, (1999), 309–312.

[90] В. С. Собчук, *Почти геодезические отображения Римановых пространств на симметрические Римановы пространства*, Матем. заметки, 17 No5, 1975, 757–763.

[91] M. S. Stanković, *Almost geodesic mappings of the first type of affine spaces*, Novi Sad J. Math., Vol. 29, No. 3, (1999), 313–323.

[92] M. S. Stanković, *Equitorsion holomorphically projective mappings of generalized Kählerian space of the first kind*, Czechoslovak Math. J. 60 (3) (2010), 635–653.

[93] M. S. Stanković, *First type almost geodesic mappings of general affine connection spaces*, Novi Sad J. Math., 29 No. 3, (1999), 313–323.

[94] M. S. Stanković, *On a canonic almost geodesic mappings of the second type of affine spaces*, Filomat 13, (1999), 105–114.

[95] M. S. Stanković, *On a special almost geodesic mappings of the third type of affine spaces*, Novi Sad J. Math., 31 No. 2, (2001), 125–135.

[96] М. С. Станковић, *Нека пресликавања простора несиметричне афине конексије*, докторска дисертација, Универзитет у Нишу, Природно-математички факултет, 2001.

[97] M. S. Stanković, *Special equitorsion almost geodesic mappings of the third type of non-symmetric affine connection spaces*, Appl. Math. and Computation, 244 (2014), 695–701.

[98] M. S. Stanković, M. S. Ćirić, M. Lj. Zlatanović, *Geodesic mappings of equiaffine and anti-equiaffine general affine connection spaces preserving torsion*, Filomat, Vol. 26, No. 3 (2012), 439–451.

[99] M. S. Stanković, S. M. Minčić, *New special geodesic mappings of generalized Riemannian space*, Publications de L'Institut Mathématique, N. S., Vol. 67 (81), (2000), 92–102.

[100] M. S. Stanković, S. M. Minčić, Lj. S. Velimirović, *On Holomorphically Projective Mappings of Generalized Kahlerian Spaces*, Matematicki Vesnik 54 (2002), 195–202.

[101] M. S. Stanković, S. M. Minčić, Lj. S. Velimirović, *On equitorsion holomorphically projective mappings of generalised Kahlerian spaces*, Czechoslovak Mathematical Journal, 54 (129) (2004), No. 3, 701–715.

[102] M. S. Stanković, S. M. Minčić, Lj. S. Velimirović, M. Lj. Zlatanović, *On equitorsion geodesic mappings of general affine connection spaces*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 124 (2010), 77–90.

[103] M. S. Stanković, Lj. S. Velimirović, S. M. Minčić, M. Lj. Zlatanović, *Equitorsion conform mappings of generalized Riemannian spaces*, Matematički Vesnik, 61 (2009), 119–129.

[104] M. S. Stanković, Lj. S. Velimirović, M. Lj. Zlatanović, *Some relation in the generalized Kahlerian spaces of the second kind*, Filomat 23:2 (2009), 82–89.

[105] M. S. Stanković, N. O. Vesić, *Some relations in non-symmetric affine connection spaces with regard to a special almost geodesic mappings of the third type*, Filomat, 29:9 (2015), 1941–1951.

[106] M. S. Stanković, M. Lj. Zlatanović, Lj. S. Velimirović, *Equitorsion holomorphically projective mappings of generalized Kahlerian space of the first kind*, Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 60, No. 3 (2010), 635–653.

[107] M. S. Stanković, M. Lj. Zlatanović, Lj. S. Velimirović, *Equitorsion holomorphically projective mappings of generalized Kahlerian space of the second kind*, International Electronic Journal of Geometry, Vol. 3, No. 2 (2010), 26–39.

[108] M. S. Stanković, M. Lj. Zlatanović, N. O. Vesić, *Basic Equations of G-Almost Geodesic Mappings of the Second Type, Which Have the Property of Reciprocity*, Czech Mathematical Journal, (2015) Vol. 65, No. 3, 787–799.

[109] **V. M. Stanković**, *Certain properties of generalized Einstein spaces*, Filomat 32:13 (2018), 4803-4810.

[110] **V. M. Stanković**, *New form of the basic equations of almost geodesic mappings of the second type*, Mediterranean Journal of Mathematics, accepted for publication.

[111] **V. M. Stanković**, *Some relations of Einstein type tensors in generalized Riemannian space*, submitted.

[112] M. Škodová, J. Mikeš, O. Pokornaá, *On holomorphically projective mappings from equiaffine symmetric and recurrent spaces onto Kähleian spaces*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 75 (2005), 309–316.

[113] T. Takasu, *Generalized Riemannian geometry*, The Yokohama Mathematical Journal, Vol. V, No. 2 (1957), 115–169.

[114] H. Vavříková, J. Mikeš, O. Pokorná, G. Starko, *On Fundamental Equations of Almost Geodesic Mappings of Type* $\pi_2(e)$, Russ. Math. 51, No. 1, 8–12 (2007); translation from Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mat. 2007, No. 1, 10–15 (2007).

[115] N. O. Vesić, Lj. S. Velimirović, M. S. Stanković, *Some Invariants of Equitorsion Third Type Almost Geodesic Mappings*, Mediterranean Journal of Mathematics, Vol. 13, No. 6, 4581–4590.

[116] C. E. Weatherburn, *An Introduction to Reimannian Geometry and Tensor Calculus* Cambridge Univ. Press, 1950.

[117] K. Yano, *Differential geometry on complex and almost complex spaces,* Pergamon Press, New York, 1965.

[118] K. Yano, S. Bochner, *Curvature and Betti numbers,* Princeton, New Jersey, 1953.

[119] M. Lj. Zlatanović, *Ekvitorziona preslikavanja prostora nesimertične afine koneksije*, doktorska disertacija, Univerzitet u Nišu, Prirodno-matematički fakultet, 2010.

[120] M. Lj. Zlatanović, *On equitorsion geodesic mappings of general affine connection spaces onto generalized Riemannian spaces*, Applied Mathematics Letters, Vol. 24, No. 5, (2011), 665–671.

[121] M. Lj. Zlatanović, *New projective tensors for equitorsion geodesic mappings*, Applied Mathematics Letters, Vol. 25, No. 5, (2012), 890–897.

[122] M. Lj. Zlatanović, I. Hinterleitner, M. S. Najdanović, *Geodesic mappings onto Kahlerian spaces of the first kind*, Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 64, No. 4, (2014), 1113–1122.

[123] M. Lj. Zlatanović, I. Hinterleitner, M. Najdanović, *On Equitorsion Concircular Tensors of Generalized Riemannian Spaces*, Filomat 28:3 (2014), 463–471.

[124] M. Lj. Zlatanović, S. M. Minčić, Lj. S. Velimirović, *On Integrability Conditions of Derivation Equations in a Subspace of Assymetric Affine Connection Space*, Filomat 29:10 (2015), 2421–2427.

[125] M. Lj. Zlatanović, S. M. Minčić, **V. M. Stanković**, *New integrability conditions of derivation equations in a subspace of asymmetric affine connection space*, Miskolc Mathematical Notes, Vol. 18 (2017), No. 1, 525-536

[126] M. Lj. Zlatanović, **V. M. Stanković**, *Geodesic mapping onto Kählerian space of the third kind*, J. Math. Anal. Appl., Vol. 450 (2017), 480–489.

[127] M. Lj. Zlatanović, **V. M. Stanković**, *Some invariants of holomorphically projective mappings of generalized Kählerian spaces*, J. Math. Anal. Appl., Vol. 458 (2018), 601–610.

[128] M. Lj. Zlatanović, Lj. S. Velimirović, M. S. Stanković, *Necessary and sufficient conditions for equitorsion geodesic mapping*, J. Math. Anal. Appl., Vol. 435 (2016), 578–592.

Биографија

Владислава Миленковић (Станковић) је рођена 26.1.1991. године у Лесковцу. Основну школу "Радован Ковачевић - Максим" у Лебану заврила је 2005. године као носилац Вукове дипломе. Гимназију "Бора Станковић" у Нишу, природно-математички смер, заврила је 2009. године са одличним успехом.

Основне академске студије је уписала 2009. године на департману за математику Природно-математичког факултета у Нишу, које је завршила 2013. године са просечном оценом 8,88. Исте године је уписала мастер академске студије на Природно-математичком факултету у Нишу, студијски програм Математика, које је завршила 2015. године са просечном оценом 9,00. Мастер рад на тему "Тензорска анализа у теорији релативности", под менторством проф. др Љубице Велимировић одбранила је 30.10.2015. године. Докторске академске студије на Природно-математичком факултету у Нишу уписала је 2015. године. Све испите предвиђене наставним планом и програмом докторских академских студија положила је са оценом 10 (десет) и добила сагласност о усвајању теме докторске дисертације под називом "Карактеристични геометријски објекти и пројективна пресликавања Ајзенхартових простора и уопштења".

У школској 2015/2016. години је радила као професор математике у СТШ "Вожд Карађорђе" у Лебану и професор информатике у ОШ "Радован Ковачевић- Максим" у Лебану. Ментор је награђеног ученика на Републичком такмичењу из програмирања за ученике основних школа одржаном 2016. године. У школским 2016/2017. и 2017/2018. радила је као професор математике у СТШ "Вожд Карађорђе" у Лебану и ОШ "Радован Ковачевић- Максим" у Лебану и била ангажована да, као студент докторских студија, држи вежбе из предмета: Аналитичка геометрија (ОАС Математика), Геометрија (ОАС Географија), Диференцијална геометрија, Нееуклидске геометрије, Тензорски рачун (МАС Математика) на Природно-математичком факултету у Нишу.

Библиографија

Владислава Миленковић (Станковић) је, самостално или у коауторству, публиковала пет научних радова у часописима који су на *SCI* листи:

1. M. Lj. Zlatanović, **V. M. Stanković**, *Geodesic mapping onto Kählerian space of the third kind*, J. Math. Anal. Appl., Vol. 450 (2017), 480–489. -**M21**

2. M. Lj. Zlatanović, **V. M. Stanković**, *Some invariants of holomorphically projective mappings of generalized Kählerian spaces*, J. Math. Anal. Appl., Vol. 458 (2018), 601–610. - **M21**

3. **V. M. Stanković**, *New form of the basic equations of almost geodesic mappings of the second type*, Mediterranean Journal of Mathematics, accepted for publication. - **M21**

4. **V. M. Stanković**, *Certain properties of generalized Einstein spaces*, Filomat 32:13 (2018), 4803-4810. - **M22**

5. M. Lj. Zlatanović, S. M. Minčić, **V. M. Stanković**, *New integrability conditions of derivation equations in a subspace of asymmetric affine connection space*, Miskolc Mathematical Notes, Vol. 18 (2017), No. 1, 525-536. - **M23**

ИЗЈАВА О АУТОРСТВУ

Изјављујем да је докторска дисертација, под насловом

КАРАКТЕРИСТИЧНИ ГЕОМЕТРИЈСКИ ОБЈЕКТИ И ПРОЈЕКТИВНА ПРЕСЛИКАВАЊА АЈЗЕНХАРТОВИХ ПРОСТОРА И УОПШТЕЊА

која је одбрањена на Природно-математичком факултету Универзитета у Нишу:

- резултат сопственог истраживачког рада;
- да ову дисертацију, ни у целини, нити у деловима, нисам пријављивао/ла на другим факултетима, нити универзитетима;
- да нисам повредио/ла ауторска права, нити злоупотребио/ла интелектуалну својину других лица.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци, који су у вези са ауторством и добијањем академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада, и то у каталогу Библиотеке, Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Нишу, као и у публикацијама Универзитета у Нишу.

У Нишу, 10.12. 2019 .

Потпис аутора дисертације:

Владислава Миленковић

Владислава М. Миленковић

ИЗЈАВА О ИСТОВЕТНОСТИ ШТАМПАНОГ И ЕЛЕКТРОНСКОГ ОБЛИКА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Наслов дисертације:

КАРАКТЕРИСТИЧНИ ГЕОМЕТРИЈСКИ ОБЈЕКТИ И ПРОЈЕКТИВНА ПРЕСЛИКАВАЊА АЈЗЕНХАРТОВИХ ПРОСТОРА И УОПШТЕЊА

Изјављујем да је електронски облик моје докторске дисертације, коју сам предао/ла за уношење у **Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу,** истоветан штампаном облику.

У Нишу, 10. 12. 2019.

Потпис аутора дисертације:

Владислава Миленковић

Владислава М. Миленковић

ИЗЈАВА О КОРИШЋЕЊУ

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Никола Тесла“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу унесе моју докторску дисертацију, под насловом:

КАРАКТЕРИСТИЧНИ ГЕОМЕТРИЈСКИ ОБЈЕКТИ И ПРОЈЕКТИВНА ПРЕСЛИКАВАЊА АЈЗЕНХАРТОВИХ ПРОСТОРА И УОПШТЕЊА

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском облику, погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију, унету у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу, могу користити сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons), за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство **(CC BY)**
2. Ауторство – некомерцијално **(CC BY-NC)**
3. **Ауторство – некомерцијално – без прераде (CC BY-NC-ND)**
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима **(CC BY-NC-SA)**
5. Ауторство – без прераде **(CC BY-ND)**
6. Ауторство – делити под истим условима **(CC BY-SA)**

У Нишу, 10. 12. 2019.

Потпис аутора дисертације:

Владислава Миленковић

Владислава М. Миленковић