УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ **ОБРАЗАЦ 6.**

ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

ИЗВЕШТАЈ О ОЦЕНИ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

I ПОДАЦИ О КОМИСИЈИ

1. Датум и орган који је именовао комисију: Наставно-научно веће Природно-математичког факултета у Новом Саду, 15. oktobra 2020.

2. Састав комисије са назнаком имена и презимена сваког члана, звања, назива уже научне области за коју је изабран у звање, датума избора у звање и назив факултета, установе у којој је члан комисије запослен:

   1) ***др Розалија Мадарас Силађи****, редовни професор, Алгебра и математичка логика, 26. 10. 1999 , Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду, председник комисије*
   2) ***др Петар Марковић****, редовни професор, Алгебра и математичка логика, 1.7.2015, Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду, ментор*
   3) ***др Петар Ђапић****, ванредни професор, Алгебра и математичка логика, 1.6.2018, Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду*
   4) ***др Бојан Башић****, ванредни професор, Дискретна математика, 1.4.2018, Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду*
   5) ***др Славко Моцоња****, доцент, Алгебра и математичка логика, 8.2.2016, Математички факултет, Универзитет у Београду*

II ПОДАЦИ О КАНДИДАТУ

1. Име, име једног родитеља, презиме: *Владо (Крсто) Уљаревић*

2. Датум рођења, општина, држава: *22.02.1990. Требиње, Босна и Херцеговина*

3. Назив факултета, назив студијског програма дипломских академских студија – мастер и стечени стручни назив
   Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду
   Студијски програм: МА Математика
   Стечено звање: Мастер математичар

4. Година уписа на докторске студије и назив студијског програма докторских студија
   2014, МД Математика
5. Назив факултета, назив мастер рада, научна област и датум одбране:
   Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду, О глатким графовима компатибилним са Тејлоровим операцијама, Алгебра и математичка логика, 27. октобар 2014.

6. Научна област из које је стечено академско звање магистра наука:
   -

III НАСЛОВ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ:

Полудистрибутивност, Проблем задовољења услова и јаки Маљцевљеви услови
(Semidistributivity, Constraint Satisfaction Problem and strong Mal'cev conditions)

IV ПРЕГЛЕД ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ:

Докторска дисертација написана је на српском језику, латиничним писмом, на 114 страна у Б5 формату, и подељена је у пет глава. Дисертација садржи 64 библиографске јединице и једну слику.

Прва глава је уводног типа, и састоји се од четири секције. У секцији 1.1 говори се о историјату два централна појма у дисертацији: конгруенцијске ∧-полудистрибутивности која се у дисертацији карактерише, као и Проблема задовољења услова који је основа метода коришћеног за ту карактеризацију. У секцији 1.2 наводе се дефиниције и основне особине релацијских структура, а у секцији 1.3 основе универзалне алгебре, области која истражује алгебарске (операцијске) структуре. Секција 1.4 наводи неке основне резултате теорије питомих конгруенција.

Друга глава, која има уводни део и једну секцију, бави се Маљцевљевим условима. У питању су синтаксни услови који описују разна својства класа алгебарских структура. У уводном делу главе говори се о обичним и јаким Маљцевљевим условима уопштено, а у секцији 2.1 говори се о претходно познатим карактеризацијама конгруенцијске ∧-полудистрибутивности помоћу Маљцевљевих услова. Те карактеризације ова дисертација уопштава и побољшава.

Трећа глава детаљно испитује Проблеме задовољења услова коначне ширине. Ова глава се у потпуности састоји из резултата рада

L. Barto, *The collapse of the bounded width hierarchy*, Journal of Logic and Computation 26/3 (2016), 923-943.

Трећа глава се састоји из пет секција. Секција 3.1 дефинише Проблем задовољења услова. Секција 3.2 дефинише ограничену ширину користећи релацијску ширину (k,l) и дефинише (k,l)-систем. У тој секцији наводи се и резултат Л. Барта да су једине могуће релацијске ширине (1,1), (2,3) и неограничена. Секција 3.3 наводи раније карактеризације ограничене ширине помоћу конгруенцијске ∧-полудистрибутивности. Секција 3.4 бави се дефиницијом и основним особинама прашких инстанци. Секција 3.5 доказује Теорему о прашкој инстанци и неке њене последице. Теорема о прашкој инстанци Л. Барта је и главни резултат треће главе.

Четврта глава састоји се од пет секција. Секција 4.1 бави се „пристојним“ Маљцевљевим условима уопштено, као и у три мале алгебре **A**, **C** и **D** које све генеришу конгруенцијски ∧-полудистрибутивне варијетете. Доказан је потребан и довољан услов да пристојан Маљцевљев услов важи у **D** – важи акко се исти може добити као део „каноничког“ пристојног Маљцевљевог услова. Секција 4.2 доказује комбинаторну лему Ремзијевог типа о парцијално уређеним скуповима са релацијом дисјунктности. У секцији 4.3 доказује се централни резултат дисертације, да је сваки канонички пристојан Маљцевљев услов реализован у сваком локално коначном конгруенцијски ∧-полудистрибутивном варијетету алгебри. У доказу се користе Теорема о прашкој инстанци из секције 3.5 и комбинаторна лема из секције 4.2. До краја секције 4.3 доказују се последице те главне теореме, као и једно њено појачање. То појачање омогућава још једну карактеризацију конгруенцијски ∧-полудистрибутивних локално коначних варијетета алгебри, овог пута помоћу јаког Маљцевљевог услова који није пристојан, али је врло једноставан. Секција 4.4 даје синтезу главних резултата главе, да пристојан Маљцевљев услов важи у сваком локално коначном конгруенцијски ∧-полудистрибутивном варијетету алгебри акко важи у алгебри **D**. Секција 4.5 бави се даљим правцима истраживања и отвореним проблемима.

Пета глава бави се Маљцевљевим карактеризацијама Тејлорових варијетета. М. Олшак је пронашао прву јаку Маљцевљеву карактеритзацију, а аутор је поједноставио и појачао тај чувени резултат.

V ВРЕДНОВАЊЕ ПОЈЕДИНИХ ДЕЛОВА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ:

Прва глава:

Прва глава је уводна. Секција 1.1 даје историјат и у њој се предмет истраживања (конгруенцијска ∧-полудистрибутивност) ставља у контекст претходних радова на ту тему, почевши од дефиниције конгруенцијске ∧-полудистрибутивности варијетета почетком 1980-их. Затим се на исти начин третира и један од главних алата који ће бити коришћен у тези, Проблем задовољења услова. У секцијама 1.2 и 1.3 на концизан и систематичан начин дефинишу се основни појмови из релацијских структура и универзалне алгебре као и теореме универзалне алгебре, без доказа, које ће касније бити коришћене у дисертацији. Скоро сав материјал обрађен у те две секције се ради на ПМФ у Новом Саду у мастер курсу из Универзалне алгебре, но овде су пробрани они делови који ће бити коришћени касније у дисертацији. Посебно се обраћа пажња на Галоа везу Pol-Inv која повезује релације и операције релацијом компатибилности, а такође се уводи и нотација преко вектор колона и матрица која ће бити од помоћи у главним резултатима тезе. Уз сваку теорему која се наводи без доказа даје се референца где се доказ може наћи. Коначно, секција 1.4 даје преглед неких релевантних резултата из Теорије питомих конгруенција, која се на ПМФ у Новом Саду изучава током предмета Универзална алгебра 2 на докторским студијама. Резултати наведени у секцији 1.4 нису неопходни за доказе касније у тези, али повезују конгруенцијску ∧-полудистрибутивност са другим особинама локално коначних варијетета и тако мотивишу изучавање конгруенцијске ∧-полудистрибутивности.

Друга глава:

Друга глава је такође прегледна, али се и уводе потребне дефиниције специфичне за најужу тему истраживања. Ова глава бави се Маљцевљевим условима. У уводном делу главе дефинишу се Маљцевљеви услови, јаки Маљцевљеви услови, линеарни Маљцевљеви услови и идемпотентни Маљцевљеви услови. Затим се наводе класичне теореме Маљцева, Јонсона и Деја као најпознатији примери Маљцевљевих услова. Онда се доказује Тејлорова пропозиција да се линеарни идемпотентни Маљцевљеви услови могу еквивалентно изразити помоћу само једне операције, а затим се наводи и зашто је довољно ограничити се на испитивање идемпотентних Маљцевљевих услова. Наводи се и пример Тејлорових терма, код којих је довољно испитивати Маљцевљеве услове са само две променљиве. Коначно, дефинише се предуређење (јаких) Маљцевљевих услова по снази, тзв. мрежа типова интерпретабилности, као и по снази на локално коначним варијететима, где је могуће упоредити по снази неке глобално неупоредиве Маљцевљеве услове.

Секција 2.1

У овој секцији дају се карактеризације конгруенцијске ∧-полудистрибутивности помоћу Маљцевљевих услова које су познате из ранијих радова. У случају општих варијетета наводи се карактеризација Виларда помоћу Маљцевљевог услова који није јак, док се у случају локално коначних варијетета наводе четири карактеризације помоћу јаких Маљцевљевих услова.

Подсекција 2.1.1

Овде се наводи проблем који је поставио Р. Вилард 2016. Тај проблем је мотивисао истраживање у овој тези, и кандидат га је, са коауторима, решио теоремом доказаном у раној фази истраживања Маљцевљевих услова за конгруенцијски ∧-полудистрибутивне варијетете. Мада је теорема 2.17 која Вилардов проблем решава оригиналан допринос кандидата, у овој подсекцији се наводи без доказа, јер је главни резултат тезе много општији и теорема 2.17 је врло специјалан случај тог резултата. Подсекција 2.1.1 завршава се навођењем резултата З. Брејдија који је независно, потпуно другачијим методама, успео да докаже мање-више исти резултат као кандидат.

Трећа глава:

Ова глава бави се искључиво Проблемима задовољења услова ограничене ширине и то резултатима Л. Барта из рада

L. Barto, *The collapse of the bounded width hierarchy*, Journal of Logic and Computation 26/3 (2016), 923-943.

У том раду Барто истражује верзију ширине звану релацијска ширина (k,l). Од многих карактеризација ограничене ширине које су доказали Барто, Кожик и Булатов, ова је најновија, најјача и једина довољно јака за потребе кандидатовог истраживања. Наиме, без обзира на арност релација услова, овај приступ своди истраживање ширине на бинарне и тернарне пројекције тих релација.

Секција 3.1.

У овој секцији дефинише се проблем задовољења услова и језик услова. Како не постоји стандардна дефиниција, него се користи неколико (углавном еквивалентних), у зависности од потребе, кандидат је морао да прецизира дефиниције које ће користити.

Секција 3.2.

Ова секција дели се на две подсекције.

Подсекција 3.2.1

У овој подсекцији дефинише се (k,l)-минимална инстанца и доказује се да се свака инстанца Проблема задовољења услова може у полиномним времену свести на еквивалентну (k,l)-минималну инстанцу. Затим се дефинише релацијска ширина (k,l), наводе се теореме из литературе помоћу којих се елиминишу неке могућности за релацијску ширину, и онда се наводи теорема о трихотомији релацијске ширине: или је ширина (1,1), или је (2,3) или није ограничена. Теорема о трихотомији непосредно следи из претходно наведених и Теореме о прашкој инстанци која ће бити обрађена у секцији 3.5, јер потоња има за последицу да сваки Проблем задовољења услова који има ограничену релацијску ширину има ширину највише (2,3).

Подсекција 3.2.2

У овој подсекцији, користећи појам (k,l)-система, свођење инстанце Проблема задовољења услова на еквивалентну (k,l)-минималну изражава се кроз инстанце које имају мале арности релација, највише k. Овај корак је потребан да би се посматрале само релације мале арности.

Секција 3.3

У овој секцији наводе се теореме Лароуза и Задорија, односно Барта и Кожика, које заједно дају да је релацијска структура на коначном језику ограничене релацијске ширине акко алгебра компатибилних идемпотентних операција генерише конгруенцијски ∧-полудистрибутиван варијетет. Такође, доказује се да се алгебра компатибилних операција не мења, само можда добија нове операције, ако пређемо са инстанце на еквивалентну (k,l)-минималну инстанцу.

Секција 3.4

Овде се уводе прашке инстанце. Прво се дефинишу и доказују неке особине путања кроз променљиве инстанце Проблема задовољења услова. На основу тих путања дефинишу се прашке инстанце. Прашке инстанце су (1,1)-минималне, али су ослабљење (2,3)-минималних инстанци, што се детаљно доказује. Секцију завршавају три техничке леме које посматрају скупове свих елемената повезаних одређеним путањама кроз променљиве.

Секција 3.5

У овој секцији доказује се главни резултат треће главе, Теорема о прашкој инстанци. У питању је резултат који каже да, ако је **A** идемпотентна коначна алгебра која генерише конгруенцијски ∧-полудистрибутиван варијетет, онда свака нетривијална прашка инстанца компатибилна са **A** има решење. Доказ се дели на случајеве у којима постоји апсорпција и у којима апсорпција не постоји, па се стога уводи појам апсорпције. Доказ је исписан врло детаљно и пажљиво на шест страна, а користи само пар чињеница из литературе које нису претходно доказане у тези: постојање извесне терм операције у конгруенцијски ∧-полудистрибутивним варијететима коју су доказали Барто, Кожик и Становски, као и резултат Барта и Кожика о постојању извесног апсорбујућег комплетног бипартитног подграфа неких бирпартитних графова компатибилних са Тејлоровом операцијом. Након доказа Теореме о прашкој инстанци, доказују се њене последице. Прво се доказују последице из класификације ограничене ширине које воде ка Теореми о трихотомији наведеној у подсекцији 3.2.1. Глава се завршава доказом једног од претходно наведених јаких Маљцевљевих услова за конгруенцијску ∧-полудистрибутивност, као и неких алгоритамски лако проверљивих критеријума за конгруенцијску ∧-полудистрибутивност и за ограничену ширину.

Четврта глава:

Ова глава садржи само оригиналне резултате кандидата који су објављени у раду [1].

Секција 4.1

Ова секција посвећена је врсти Маљцевљевих услова који ће се скоро искључиво истраживати даље у тези. То су јаки, идемпотентни, линеарни Маљцевљеви услови са једном операцијом и две променљиве. Нека од ових ограничења су природна, на основу теорема наведених на почетку друге главе, док су линеарност и ограничење на две променљиве уведени због лакшег рада. Маљцевљеве услове са свим овим особинама зову се *пристојни* Маљцевљеви услови. Одмах после дефиниције доказује се лема која дозвољава свођење тих услова на есенцијалне променљиве.

Подсекција 4.1.1

У овој подсекцији у потпуности се описује који пристојни Маљцевљеви услови важе у двоелементној алгебри са „већинском" операцијом.

Подсекција 4.1.2

У овој подсекцији у потпуности се описује који пристојни Маљцевљеви услови важе у двоелементној полумрежи.

Подсекција 4.1.3

У овој подсекцији у потпуности се описује који пристојни Маљцевљеви услови важе у четвороелементној алгебри **D** која је производ двоелементне већинске алгебре и двоелементне полумреже. Дефинише се „канонички" пристојан Маљцевљев услов и доказује се да је пристојан Маљцевљев услов реализован у **D** акко се, после свођења на есенцијалне променљиве, може наћи као подскуп неког каноничког пристојног Маљцевљевог услова.

Подсекција 4.1.4

У овој подсекцији се даје алгоритам који проверава да ли неки пристојан Маљцевљев услов важи у **D**. Алгоритам успева да у полиномном времену пронађе и елиминише неесенцијалне променљиве, а затим да у полиномном времену открије да ли је добијени пристојан Маљцевљев услов подскуп неког каноничког.

Секција 4.2

Подсекција 4.2.1

У овој подсекцији испитују се парцијално уређени скупови са једном додатном бинарном релацијом која се назива дисјункција. Особине које дисјункција и уређење треба да имају инспирисане су релацијама инклузије и дисјункције међу подскуповима неког скупа. Доказује се да се сваки парцијално уређен скуп са дисјункцијом може репрезентовати као фамилија неких подскупова неког скупа са природним уређењем и дисјункцијом.

Подсекција 4.2.2

У овој подсекцији доказује се комбинаторна лема Ремзијевог типа која каже да за сваки парцијално уређен скуп са дисјункцијом $\mathcal{F}$ и свако n, постоји довољно велики скуп A такав да, ако је партитивни скуп P(A) обојен у n боја, онда постоји монохроматска подфамилија од P(A) која је изоморфна са $\mathcal{F}$ као парцијално уређен скуп са дисјункцијом.

Секција 4.3

Ова секција почиње доказом теореме 4.28, главне теореме целе дисертације, да је сваки канонички пристојан Маљцевљев услов реализован у сваком локално коначном конгруенцијски $\wedge$-полудистрибутивном варијетету. Идеја доказа је да се терм који тај канонички пристојан Маљцевљев услов реализује проналази као део решења одређеног Проблема задовољења услова $\mathcal{P}$. Проблем $\mathcal{P}$ је (2,3)-минималан и задат на скупу променљивих које су репрезентоване као непразни подскупови неког великог скупа. Како су релације $\mathcal{P}$ компатибилне са операцијама конгруенцијски $\wedge$-полудистрибутивног варијетета, на основу локалне конзистенције и Теореме о прашкој инстанци из треће главе добија се да $\mathcal{P}$ има решење. То решење даје неко пресликавање проблема у скуп свих идемпотентних бинарних терма нашег варијетета, дакле коначан скуп фиксне величине n. Дакле, бојимо непразне подскупове великог скупа (променљиве) у бинарне операције (боје). Из великог броја променљивих и комбинаторне леме доказане у подсекцији 4.2.2 следи да унутар сваког решења проблема $\mathcal{P}$ мора постојати део који реализује канонички пристојан Маљцевљев услов који желимо да реализујемо**.**

Секција се наставља последицом која каже да је канонички пристојан Маљцевљев услов потребан и довољан за конгруенцијску $\wedge$-полудистрибутивност акко је Тејлоров. Затим се теорема 4.28 појачава једном техничком теоремом, да за сваки локално коначан варијетет постоји бинаран терм („боја") која се за сваки канонички Маљцевљев услов може искористити као решење њему придруженог Проблема задовољења услова. Овај резултат се потом користи за доказ З. Брејдијеве Маљцевљеве карактеризације конгуенцијске $\wedge$-полудистрибутивности помоћу једног врло једноставног тернарног Маљцевљевог услова који није линеаран.

Секција 4.4

Ова секција састоји се од две теореме које синтетизују резултате доказане у четвртој глави. Једна каже да је пристојан Маљцевљев услов реализован у сваком локално коначном конгруенцијски ∧-полудистрибутивном варијетету акко је реализован у четвороелементној алгебри **D**, а друга да је пристојан Маљцевљев услов потребан и довољан за конгруенцијску ∧-полудситрибутивност у локално коначним варијететима акко је реализован у **D**, али ни у једном нетривијалном модулу.

Секција 4.5

Ова секција бави се отвореним проблемима и даљим правцима истраживања.

Пета глава:

Ова глава бави се јаким Маљцевљевим карактеризацијама Тејлорових варијетета. Од раније су биле познате Маљцевљеве карактеризације Тејлорових варијетета, као и јаке Маљцевљеве карактеризације локално коначних Тејлорових варијетета, а Олшак је на конференцији 2016. најавио јаку Маљцевљеву карактеризацију општих Тејлорових варијетета. При том, Олшак је користио терм са 12 променљивих. Кандидат је у раду [2] успео да докаже да се три променљиве у Олшаковом терму могу сматрати неесценцијалним, па је стога успео да докаже исту карактеризацију помоћу синтактички јачег јаког Маљцевљевог услова са девет променљивих. Тим доказом, који је релативно кратак и синтактички, бави се пета глава.

Општи закључак:

Укупно узев, главни резултат тезе постигнут у четвртој глави је модеран, тежак и значајан математички резултат, достојан једне јаке докторске дисертације. Резултат из пете главе такође показује техничку зрелост кандидата.

Тест на плагијаризам:

Према правилима Универзитета, текст дисертације тестиран је на плагијаризам коришћењем софтвера iThenticate. Софтвер је пријавио око 10% преклапања текста дисертације с текстом дисертације:

J.Jovanović, Lokalno konačni varijeteti sa polu-distributivnom mrežom kongruencija, Beograd, 2016.

(што је очекивано, будући да се ова дисертација директно наставља на резултате дисертације Ј. Јовановић и уопштава их), док је за све остале изворе преклапање мање од 1%.

VI СПИСАК НАУЧНИХ И СТРУЧНИХ РАДОВА КОЈИ СУ ОБЈАВЉЕНИ ИЛИ ПРИХВАЋЕНИ ЗА ОБЈАВЉИВАЊЕ НА ОСНОВУ РЕЗУЛТАТА ИСТРАЖИВАЊА У ОКВИРУ РАДА НА ДОКТОРСКОЈ ДИСЕРТАЦИЈИ

[1] Nemanja Draganić, Petar Marković,Vlado Uljarević, Samir Zahirović, *A characterization of idempotent strong Mal'cev conditions for congruence meet-semidistributivity in locally finite varieties*, Algebra Universalis 79, Article number: 53 (2018), 34 pp.
https://doi.org/10.1007/s00012-018-0533-9
(рад у међународном часопису категорије М22)

[2] Petar Đapić,Vlado Uljarević, *A Note on the Weakest Taylor Term*, Filomat 31:18 (2017), 5885–5890.
https://doi.org/10.2298/FIL1718885D
(рад у међународном часопису категорије М22)

VII ЗАКЉУЧЦИ ОДНОСНО РЕЗУЛТАТИ ИСТРАЖИВАЊА

Оригинални резултати добијени у овом раду могу се поделити у две класе. У једну спадају резултати који се односе на локално коначне конгруенцијски ∧-полудистрибутивне варијетете, и који се обрађују у четвртој глави. Другу класу чине резултати о Тејлоровим варијететима који су обрађени у петој глави.

Резултати из четврте главе су у потпуности класификовали све пристојне Маљцевљеве услове који важе у локално коначним конгруенцијски ∧-полудистрибутивним варијететима, а остаје као отворен правац истраживања да се исто покуша са нелинеарним јаким Маљцевљевим условима, и/или онима са више од две променљиве. Још значајније би било уопштење на опште варијетете, али јака Маљцевљева карактеризација конгруенцијске ∧-полудистрибутивноати је изгледа врло тежак проблем.

У вези резултата пете главе, Олшак је накнадно пронашао још простији јак Маљцевљев услов за Тејлорове варијетете, али остаје отворено питање да ли се и тај услов може додатно упростити.

VIII ОЦЕНА НАЧИНА ПРИКАЗА И ТУМАЧЕЊА РЕЗУЛТАТА ИСТРАЖИВАЊА

Комисија даје позитивну оцену за начин приказа и тумачење резултата истраживања кандидату Владу Уљаревићу.

IX КОНАЧНА ОЦЕНА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ:

Комисија сматра да је дисертација написана у складу са пријавом теме и садржи све битне елелементе који се траже од једне докторске дисертације. Дисертација даје оригиналан научни допринос изучавању Маљцевљевих услова за две значајне класе варијетета.

X ПРЕДЛОГ:

На основу укупне оцене дисертације, комисија предлаже да се докторска дисертација прихвати, а кандидату Владу Уљаревићу одобри одбрана.

____

др Розалија Мадарас Силађи

____

др Петар Марковић

____

др Петар Ђапић

____

др Бојан Башић

____

др Славко Моцоња