UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI
FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Vlado Uljarević

# Poludistributivnost, Problem zadovoljenja uslova i jaki Maljcevljevi uslovi

- doktorska disertacija -

Novi Sad, 2020.

# Sadržaj

# Predgovor

## O disertaciji

Kongruencijska $\wedge$-poludistributivnost je rasprostranjen fenomen u univerzalnoj algebri i kao takva je našla brojne primjene u „čistoj" univerzalnoj algebri, ali i u teorijskom računarstvu, preciznije, u teoriji računske složenosti. Još preciznije, u Problemu zadovoljenja uslova. Takođe, u univerzalnoj algebri se ovo svojstvo, poput mnogih drugih strukturnih svojstava algebri i varijeteta, posmatralo i kroz prizmu karakterizacija Maljcevljevog tipa. U ovoj disertaciji ćemo prezentovati rezultate jednog istraživanja na tu temu. Treba naglasiti da ti, a i svi ostali rezultati vezani za Maljcevljeve karakterizacije kongurencijske $\wedge$-poludistributivnosti, imaju čisto univerzalno algebarski karakter, ali su ipak motivisani nekolicinom radova sa algebarskim pristupom u rješavanju Problema zadovoljenja uslova.

U svojoj doktorskoj disertaciji Jelena Jovanović (vidjeti [38] i [40]) je predstavila u određenom smislu optimalan jak Maljcevljev uslov za kongruencijsku $\wedge$-poludistributivnost lokalno konačnih varijeteta, koji će, prema terminologiji koju ćemo uvesti nešto kasnije, biti jedan *pristojan* Maljcevljev uslov. U ovoj disertaciji ćemo kao glavni rezultat prikazati karakterizaciju svih pristojnih Maljcevljevih uslova za kongruencijsku $\wedge$-poludistributivnost u lokalno konačnim varijetetima.

Sadržaj disertacije je podijeljen u pet glava.

U prvoj glavi prvo dajemo istorijat rezultata nastalih u toku izučavanja kongruencijske $\wedge$-poludistributivnosti, ali i Problema zadovoljenja uslova, konkretno hipoteze o dihotomiji istog. Zatim uvodimo osnovne pojmove i tvrđenja univerzalne algebre neophodne za dalji rad. Takođe, jedno posebno poglavlje posvećujemo teoriji pitomih kongruencija.

Druga glava je cijelim svojim dijelom posvećena Maljcevljevim uslovima. Dat je pregled nekoliko istorijski najvažnijih karakterizacija strukturnih svojstava varijeteta putem Maljcevljevih i jakih Maljcevljevih uslova. Zatim u nastavku predstavljamo i jake Maljcevljeve karakterizacije kongruencijske $\wedge$-

-poludistributivnosti u lokalno konačnim varijetetima. Za kraj su ostavljena pitanja i rezultati koji su predstavljali motivaciju za početak istraživanja koje je rezultiralo karakterizacijom koju smo spomenuli u drugom pasusu.

Treća glava je svojim najvećim dijelom prezentacija rada Libora Barta [4] o rješivosti Problema zadovoljenja uslova pomoću algoritama zasnovanih na provjeri uslova lokalne konzistencije. Razlog za to je taj što centralna teorema pomenutog rada igra značajnu ulogu u dokazivanju glavne teoreme ove disertacije.

U četvrtoj glavi se dokazuje da neki pristojan Maljcevljev uslov realizovan u kongruencijski $\wedge$-poludistributivnom lokalno konačnom varijetetu ako i samo ako je realizovan u određenoj četvoroelementnoj algebri. Stoga je prvi dio glave na neki način analiza relacija kojima su kodirani pristojni Maljcevljevi uslovi realizovani u toj algebri. Takođe, dajemo i efikasan algoritam za provjeru realizacije pristojnog Maljcevljevog uslova unutar pomenute algebre. Kao što smo već rekli, u ovom dijelu disertacije se koristi Bartoova teorema, čija upotreba u svrhu dokazivanja da je konkretan jak Maljcevljev uslov realizovan u kongruencijski $\wedge$-poludistributivnom varijetetu generiše probleme kombinatorne prirode. Konkretno, u pitanju su problemi Remzijevskog tipa, pa je jedno poglavlje posvećeno upravo jednoj takvoj lemi, koja je kasnije bitan korak u dokazu glavne teoreme.

U posljednjoj glavi bavimo se najslabijim netrivijalnim jakim Maljcevljevim uslovom. Prezentujemo jedan pokušaj optimizacije istog.

## Zahvalnica

Iskoristio bih priliku da izrazim zahvalnost članovima komisije na pažljivom čitanju disertacije i mnogobrojnim korisnim savjetima i sugestijama. Nadam se da mi ostali članovi neće zamjeriti, ali dvojici od njih se posebno moram zahvaliti. Bojan Bašić mi je od početka studija bio uzor po pitanju principijelnosti i matematičke preciznosti. Pored toga, zahvalan sam mu što mi je pružio podršku i motivisao me u periodu kada sam sumnjao u sebe. Najveću zahvalnost dugujem svom mentoru Petru Markoviću. Mislim da ne postoji osoba koja od njega nesebičnije dijeli svoje matematičko znanje. Ja sam imao sreću da sa njim sarađujem još od prve godine osnovnih studija i ova disertacija je plod te saradnje. Međutim, sada mogu slobodno reći da je meni lično mnogo bitnija njegova ljudska strana i činjenica da u njemu, pored mentora, imam i prijatelja.

Iako je ova disertacija na neki način potvrda da umijem bar donekle pronići u matematiku i njeno „ponašanje”, često uopšte nisam (bio) u stanju shvatiti druge ljude i njihove postupke. Srećom, moja dva najbolja druga (prvi od njih mi je i kum), Boka i Lujo, su u tome mnogo bolji od mene i nemali broj puta su me pažljivo saslušali i posavjetovali, pa koristim ovu priliku da im se zahvalim na tome.

Neizmjerno sam zahvalan svojim roditeljima, Krstu i Boriki, i bratu Filipu jer mi svemu daju smisao.

Na kraju, a prije svih, zahvalnost dugujem dvjema osobama koje nažalost nisu doživjele da pročitaju ovu zahvalnicu. Prva je moj nastavnik matematike iz osnovne škole, Relja Sudžum, koji me je spremio i odveo na prva takmičenja i bez kojeg se možda ne bih bavio matematikom. Druga je moj djed Božo, koji me je za života konstantno motivisao svojim neumornim pitanjem: „Kad će ta diploma?”.

Novi Sad, septembar 2020. Vlado Uljarević

Glava 1

# Uvod - osnovni pojmovi i istorijat

Mreža* $(L, \wedge, \vee)$ je *poludistributivna* ako za sve $x, y, z \in L$ važi

$$x \wedge y = x \wedge z \Rightarrow x \wedge y = x \wedge (y \vee z)$$

i

$$x \vee y = x \vee z \Rightarrow x \vee y = x \vee (y \wedge z).$$

Za mrežu koja ispunjava prvu (resp. drugu) implikaciju kažemo da je $\wedge$-*poludistributivna* (resp. $\vee$-*poludistributivna*). U ovoj tezi ćemo se baviti algebrama i varijetetima koji imaju $\wedge$-poludistributivne mreže kongruencija. Preciznije, centralna tema su sintaksne karakterizacije pomenutog svojstva u jednoj posebnoj, ali širokoj klasi varijeteta. Ove sintaksne karakterizacije su tzv. Maljcevljevi uslovi i njima ćemo se posebno baviti u drugoj glavi. Za sada je dovoljno reći su to skupovi identiteta na nekom jeziku.

## 1.1 Istorijat

### O kongruencijskoj $\wedge$-poludistributivnosti

Poludistributivnost je svojstvo koje je primjećeno tokom izučavanja slobodnih mreža. Naime, u [37] je dokazano da su slobodne mreže poludistributivne.

Oslanjajući se na rezultate V. Tejlora [59] i V. Nojmana [52] B. Jonson je u [36] dokazao egzistenciju slabog Maljcevljevog uslova koji karakteriše kongruencijsku $\wedge$-poludistributivnost. Taj rad je objavljen 1980. godine.

*vidjeti definiciju u okviru poglavlja 1.3.

G. Cedli je 1983. godine u [21] pronašao i konkretan takav uslov, što predstavlja prvu sintaksnu karakterizaciju ovog svojstva varijeteta. Sam uslov je bio u obliku prebrojive konjunkcije prebrojivih monotonih disjunkcija jakih Maljcevljevih uslova, što je i definicija slabog Maljcevljevog uslova, dok ćemo eksplicitnu definciju jakog Maljcevljevog uslova navesti u nastavku disertacije. D. Hobi i R. Makenzi su 1988. godine u [31] dokazali da se za lokalno konačne varijetete kongruencijska $\wedge$-poludistributivnost može okarakterisati putem Maljcevljevog uslova, ali njihov dokaz je bio čisto egzistencijalnog tipa. Isto to, ali u opštem slučaju, nezavisno dokazuju P. Liparini u [48], i K. Kerns i A. Sendrei u [43]. Nešto kasnije R. Vilard je u [63] izložio Maljcevljev uslov za opšti slučaj. M. Kožik, A. Krokin, M. Valeriot i R. Vilard su 2009. godine u [46][†] dali prvu jaku Maljcevljevu karakterizaciju kongruencijske $\wedge$-poludistributivnosti za lokalno konačne varijetete. Kada je u pitanju opšti slučaj, još uvijek nije poznato da li se pomenuto svojstvo može okarakterisati jakim Maljcevljevim uslovom.

Kongruencijska $\wedge$-poludistributivnost i varijeteti sa ovom osobinom su, nevezano za Maljcevljeve uslove, tokom prethodnih 30-ak godina intenzivno proučavani. Hobi i Makenzi su u pomenutoj monografiji [31] dokazali i da je ova osobina u slučaju lokalno konačnih varijeteta ekvivalentna nepostojanju pokrivanja tipova **1** i **2**, te da je ekvivalentna osobini kongruencijske neutralnosti (tj. komutator dvije kongruencije jednak je njihovom presjeku). Kongruencijska $\wedge$-poludistributivnost ekvivalentna je kongruencijskoj neutralnosti i u opštem slučaju, što je prezentovano u [43]. Takođe, poznato je da su Parkova [54] i restrikovana Kvakenbušova hipoteza [55] tačne ako se uvede dodatna pretpostavka da su posmatrani varijeteti kongruencijski $\wedge$-poludistributivni. Uz ovo ograničenje Parkovu hipotezu je potvrdio Vilard [63], dok je isti autor zajedno sa Kernsom u [44] dokazao restrikovanu Kvakenbušovu hipotezu uz pretpostavku kongruencijske $\wedge$-poludistributivnosti, kao što smo već naglasili. Vilard je zapravo uopštio dokaz [2] K. Bejkera u kom je Parkova hipoteza potvrđena u kongruencijski distributivnom slučaju. Upravo u [63] Vilard je na elegantan način iskoristio Maljcevljev uslov koji smo pomenuli u prethodnom pasusu. Za kraj poglavlja navedimo i činjenicu koja je vjerovatno i bila glavna motivacija za izučavanje kongruencijske $\wedge$-poludistributivnosti u prethodnoj deceniji, a o čemu će više riječi biti u nastavku disertacije. Naime, relacijske strukture za koje se Problem zadovoljenja uslova može efektivno rješavati algoritmima sa provjerom lokalne konzistencije su tačno one strukture čiji klon polimorfizama generiše kongruencijski $\wedge$-poludistributivan varijetet.

## O Problemu zadovoljenja uslova

*Problem odlučivosti* se definiše kao problem koji za specifičan ulazni skup

[†] rad je objavljen tek 2015. godine.

kao izlaz (ili odgovor) daje DA ili NE. *Problem zadovoljenja uslova* (ili kraće CSP[‡]) kao problem odlučivosti možemo definisati na više načina. U literaturi nailazimo na tri osnovne definicije i to preko:

– homomorfizama

– zadovoljivosti formule, ili

– vrijednosti promjenljivih.

Prva definicija predstavlja problem odlučivosti postojanja homomorfizma iz jedne relacijske strukture, koja predstavlja ulaz problema, u drugu fiksiranu relacijsku strukturu na istom jeziku. Druga ima logičku formu i u njoj se postavlja pitanje tačnosti formule prvog reda sačinjene od atomskih formula koristeći samo konjunkcije i egzistencijalni kvantifikator (tzv. *pozitivno-primitivna formula*). Treća definicija je ustvari i osnovna definicija Problema zadovoljenja uslova. Postavlja se pitanje da li postoji preslikavanje iz zadatog skupa promjenljivih u zadati skup dozvoljenih vrijednosti (domen), a da su pritom zadovoljeni neki unaprijed određeni lokalni uslovi.

CSP je, kao i svaki problem odlučivosti, u interesnoj sferi teorije računske složenosti. Temelje istraživanja CSP-a u tom polju postavio je T. Dž. Šefer [57], nakon što je dokazao da je problem postojanja homomorfizma iz relacijske strukture u dvoelementnu relacijsku strukturu na istom jeziku ili rješiv u polinomnom vremenu, ili je NP-kompletan. Isto važi i za polukompletne digrafove [3], kao i za neorijentisane grafove [30]. T. Feder i M. Vardi [26] su 1993. godine postavili hipotezu o CSP dihotomiji, koja postulira da se Šeferova teorema može uopštiti na proizvoljan konačan domen. A. Bulatov [13] je dokazao da je CSP dihotomija tačna za troelementne domene.

Najznačajniji napredak vezan za hipotezu o dihotomiji se desio nakon zasnivanja algebarskog pristupa u rješavanju iste. Prvi koraci ovakvog pristupa Problemu zadovoljenja uslova su napravljeni u [33] i [34], dok je znatan razvoj došao sa [17]. Suština leži u tome da složenost CSP-a zavisi od kompatibilnih operacija (tzv. *polimorfizmi*[§]) posmatrane relacijske strukture. Upravo je u [8] korišćen ovaj pristup, gdje su uopšteni grafovski rezultati iz prethodnog pasusa do digrafova bez izvora i ponora (tzv. *glatki grafovi*). U [17] je dokazano da je za relacijske strukture koje nemaju Tejlorov polimorfizam rješavanje CSP-a NP-kompletan problem, a kao hipoteza postavljeno da važi i suprotan smjer tvrđenja, odnosno da je za strukture sa Tejlorovim polimorfizmom CSP rješiv u polinomnom vremenu. Ovo se zove algebarska hipoteza o dihotomiji i jasno je da ona pojačava hipotezu Federa i Vardija jer postavlja i jasnu granicu između dvije klase složenosti. Nakon postavljanja algebarske hipoteze o dihotomiji pažnja je usmjerena na razvijanje

[‡]od engl. Constraint Satisfaction Problem.

[§]vidjeti definiciju u okviru poglavlju 1.3.

algoritama koji rade u polinomnom vremenu za što širu potklasu u okviru relacijskih struktura koje imaju Tejlorov polimorfizam.

Jedna vrsta polinomnih algoritama je razvijena u [16]. U pitanju je svojevrsna generalizacija Gausove eliminacije koja je u pomenutom radu rješavala problem u polinomnom vremenu za strukture sa Maljcevljevim polimorfizmom. Algoritam je uopšten u [22], da bi u [32] bila opisana najšira potklasa CSP-a na kojoj je ova vrsta algoritama primjenljiva.

Druga vrsta algoritama zasniva se na provjeravanju određene lokalne konzistencije uslova. Ovi algoritmi nas posebno zanimaju i njima ćemo se baviti u ovoj disertaciji, preciznije, u trećoj glavi iste. Svaku ulaznu strukturu (tačnije, njen skup uslova/relacija) je moguće u polinomnom vremenu modifikovati do potrebnog nivoa konzistencije, a da se pritom ne mijenja skup rješenja. Ono što predstavlja problem jeste to da konzistencija ne podrazumijeva i postojanje rješenja. Međutim, za veliku klasu relacijskih struktura konzistencija implicira postojanje rješenja i za takve strukture se kaže da imaju ograničenu (relacijsku) širinu.

B. Larouz i L. Zadori [47] dokazuju da ako struktura ima ograničenu širinu, onda algebra polimorfizama generiše kongruencijski $\wedge$-poludistributivan varijetet. Oni takođe postavljaju i pitanje da li važi i suprotna implikacija. Nakon više parcijalnih rezultata ([6],[15],[20],[45]) pozitivan odgovor daju L. Barto i M. Kožik [7]. Ovakvom karakterizacijom ograničene širine na značaju dobija kongruencijska $\wedge$-poludistributivnost, odnosno varijeteti čije mreže kongruencija imaju tu osobinu. Neki od radova koji su doprinijeli lakšem prepoznavanju kongruencijski $\wedge$-poludistributivnih algebri i varijeteta su [46], [40], [12]. Napomenimo još da je u [4] data karakterizacija ograničene širine sa optimalnim uslovima konzistencije i upravo se ta karakterizacija koristi u dokazu centralne teoreme treće glave.

Kada je u pitanju algebarska hipoteza o dihotomiji, prvo ju je 2016. godine D. Žuk potvrdio za relacijske strukutre sa najviše 7 elemenata, da bi 2017. godine upravo Žuk [64] i, nezavisno, Bulatov [14] najavili dokaze za sve konačne relacijske strukture.

## 1.2 Ukratko o relacijama i relacijskim strukturama

Neka je $X$ neprazan skup i $n$ prirodan broj. Proizvoljan podskup od $X^n$ naziva se *$n$-arna relacija* na $X$. Za relacije arnosti 1 kažemo da su *unarne*, arnosti 2 *binarne*, a arnosti 3 *ternarne* relacije.

Relacije $\emptyset$, $X^2$ i $\Delta_X = \{(x,x) : x \in X\}$ na nepraznom skupu $X$ nazivaju se *prazna relacija*, *puna relacija* i *dijagonalna relacija na skupu $X$*. Za binarne relacije $\rho, \sigma \subseteq X^2$ definišu se operacije:

- $\rho^{-1} = \{(y,x) : (x,y) \in \rho\}$ je *inverzna relacija* od $\rho$;
- $\rho \circ \sigma = \{(x,y) : (\exists z)((x,z) \in \rho \wedge (z,y) \in \sigma)\}$ je *kompozicija* $\rho$ i $\sigma$.

Binarna relacija $\rho$, $\rho \subseteq X^2$, je *refleksivna* ako $\Delta_X \subseteq \rho$, *irefleksivna* ako $\Delta_X \cap \rho = \emptyset$, *simetrična* ako $\rho^{-1} = \rho$, *antisimetrična* ako $\rho \cap \rho^{-1} \subseteq \Delta_X$ i *tranzitivna* ako $\rho \circ \rho \subseteq \rho$. Relacija $\rho_r = \rho \cup \Delta_X$ je *refleksivno zatvorenje* relacije $\rho$ i to je najmanja refleksivna relacija koja sadrži $\rho$. Slično, $\rho_s = \rho \cup \rho^{-1}$ je *simetrično zatvorenje* relacije $\rho$ i predstavlja najmanju simetričnu relaciju koja sadrži $\rho$. Takođe, može se pokazati da je relacija

$$\rho_t = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\underbrace{\rho \circ \cdots \circ \rho}_{n \text{ relacija}})$$

najmanja tranzitivna relacija koja sadrži $\rho$ i ona se naziva *tranzitivno zatvorenje* relacije $\rho$. Binarna relacija koja je refleksivna, simetrična i tranzitivna je *relacija ekvivalencije*. Ako je $\rho$ relacija ekvivalencije na skupu $X$, onda za $x \in X$ uvodimo

$$[x]_\rho = \{y \in X : (x, y) \in \rho\},$$

*klasu ekvivalencije* relacije $\rho$. Ponekad se koristi i oznaka $x/_\rho$. Primijetimo da je $\{[x]_\rho : x \in X\}$ jedna particija skupa $X$. Skup klasa ekvivalencije relacije $\rho$ se označava sa $X/\rho$. Jasno je da je za proizvoljnu binarnu relaciju $\rho$ relacija $\rho_{rst}$ najmanja relacija ekvivalencije koja je sadrži i u tom slučaju kažemo da je $\rho_{rst}$ *generisana* relacijom $\rho$.

Za relaciju $\rho \subseteq X^2$ koja je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna kažemo da je (*parcijalno*) *uređenje* ili *poredak* na skupu $X$. Tada skup $X$ zajedno sa relacijom $\rho$ formira strukturu $(X; \rho)$ koja se naziva *parcijalno uređen skup* ili *poset*[¶]. Ako je relacija samo refleksivna i tranzitivna, onda je ona *preduređenje* ili *pretporedak*.

Neka je $(P; \leq)$ parcijalno uređen skup i $\emptyset \neq A \subseteq P$. Za $a \in A$ kažemo da je *maksimalan element* skupa $A$ ako važi $(\forall x \in A)(a \leq x \Rightarrow a = x)$. Ukoliko za $a \in A$ važi $(\forall x \in A)(x \leq a)$, onda je $a$ *najveći element* skupa $A$. *Minimalan element* i *najmanji element* se definišu dualno. Za $Q \subseteq P$ sa $Q{\downarrow}$ označavamo skup $\{p \in P \colon (\exists q \in Q)\, p \leq q\}$, s tim da umjesto $\{q\}{\downarrow}$ pišemo samo $q{\downarrow}$. Ako je $Q{\downarrow} = Q$, onda je $Q$ *donji skup*. Dualno definišemo $Q{\uparrow}$, $q{\uparrow}$ i *gornji skup*. Definišimo i formalno skupove sa pridruženim relacijama.

*Relacijska struktura tipa* $(n_1, \ldots, n_m)$, gdje $m, n_1 \ldots, n_m \in \mathbb{N}$, je bilo koji skup $X$ sa pridruženim relacijama $R_1, \ldots, R_m$ pri čemu je $R_i \subseteq X^{n_i}$ za sve $i$, $1 \leq i \leq m$. Koristimo oznaku $\mathbb{X} = (X; R_1, \ldots, R_m)$. Skup $X$ se naziva *univerzum* ili *nosač* relacijske strukture, a brojevi $n_1, \ldots, n_m$ su *arnosti* odgovarajućih relacija.

Neka su $\mathbb{X} = (X; R_1, \ldots, R_m)$ i $\mathbb{Y} = (Y; S_1, \ldots, S_m)$ relacijske strukture istog tipa $(n_1, \ldots, n_m)$. Preslikavanje $f \colon X \to Y$ je *homomorfizam iz* $\mathbb{X}$ *u* $\mathbb{Y}$ ako za sve $i$, $1 \leq i \leq n$, i sve $(x_1, \ldots, x_{n_i}) \in X^{n_i}$ važi implikacija

$$(x_1, \ldots, x_{n_i}) \in R_i \Rightarrow (f(x_1), \ldots, f(x_{n_i})) \in S_i.$$

[¶]skraćeno od eng. partialy ordered set.

Ukoliko u prethodnom redu umjesto implikacije važi ekvivalencija, onda je to *jak homomorfizam iz* $\mathbb{X}$ u $\mathbb{Y}$. Injektivan homomorfizam se naziva *monomorfizam*, a injektivan jak homomorfizam je *utapanje*. Bijektivan jak homomorfizam je *izomorfizam*. Sa $\mathrm{Hom}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, $\mathrm{SHom}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, $\mathrm{Mono}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, $\mathrm{Emb}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ i $\mathrm{Iso}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ se obilježavaju redom skupovi homomorfizama, jakih homomorfizama, monomorfizama, utapanja i izomorfizama iz $\mathbb{X}$ u $\mathbb{Y}$.

Definišimo i jedan pojam o „lijepom slaganju funkcija i relacija". Ako je $X$ neprazan skup, $n$ i $m$ prirodni brojevi, $f\colon X^n \to X$ i $R \subseteq X^m$, onda kažemo da je relacija $R$ *kompatibilna sa* $f$, ili *invarijantna za* $f$, ako za sve $r_1, \dots, r_n \in R$ važi

$$(f(r_1(1), \dots, r_n(1)), \dots, f(r_1(m), \dots, r_n(m))) \in R.$$

## 1.3 Elementarna sintaksa i semantika univerzalne algebre

*Jezik* (ili *tip*) algebre je bilo koji skup simbola $\mathcal{F}$. Elementi skupa $\mathcal{F}$ su *funkcijski* (ili *operacijski*) *simboli*, a uz skup $\mathcal{F}$ uvijek je podrazumijevana i funkcija $ar\colon \mathcal{F} \to \mathbb{N}$ koja se naziva *funkcija arnosti*. Ako je $ar(f) = n$ za neki $f \in \mathcal{F}$ onda je *arnost* od $f$ jednaka $n$ i kažemo da je $f$ $n$-arni funkcijski simbol. Podskup $n$-arnih funkcijskih simbola jezika $\mathcal{F}$ obilježavamo sa $\mathcal{F}_n$, a za $i = 0, 1, 2, 3$, $\mathcal{F}_i$ nazivamo skupom konstantnih, unarnih, binarnih i ternarnih funkcijskih simbola, redom.

Za dati jezik $\mathcal{F}$, *algebra* $\mathbf{A}$ jezika $\mathcal{F}$ je uređeni par $\mathbf{A} = (A, \mathcal{F}^{\mathbf{A}})$, gdje je $A \neq \emptyset$ i $\mathcal{F}^{\mathbf{A}} = \{f^{\mathbf{A}} : f \in \mathcal{F}\}$, pri čemu je $f^{\mathbf{A}}$ preslikavanje iz $A^{ar(f)}$ u $A$, za sve $f \in \mathcal{F}$. Skup $A$ je *univerzum* ili *nosač* algebre $\mathbf{A}$, dok su operacije iz skupa $\mathcal{F}^{\mathbf{A}}$ *osnovne* ili *bazne* operacije algebre $\mathbf{A}$. *Poduniverzum* algebre $\mathbf{A} = (A, \mathcal{F}^{\mathbf{A}})$ je bilo koji podskup $B \subseteq A$ koji je zatvoren za bazne operacije iz $\mathcal{F}^{\mathbf{A}}$, tj. ako $f \in \mathcal{F}^{\mathbf{A}}$ i $a_1, \dots, a_{ar(f)} \in B$, onda $f(a_1, \dots, a_{ar(f)}) \in B$. Ako je $B$ neprazan poduniverzum algebre $\mathbf{A}$, onda je $\mathbf{B} = (B, \mathcal{F}^{\mathbf{B}})$ *podalgebra* algebre $\mathbf{A}$, u oznaci $\mathbf{B} \leq \mathbf{A}$, ako i samo ako za sve $f \in \mathcal{F}$ važi $f^{\mathbf{B}} = f^{\mathbf{A}} \restriction_{B^{ar(f)}}$. Drugim riječima, $\mathbf{B}$ je podalgebra od $\mathbf{A}$ ako $B \subseteq A$ i ako je je svaka bazna operacija algebre $\mathbf{B}$ restrikcija odgovarajuće bazne operacije algebre $\mathbf{A}$. Jasno je da ako je $\mathbf{B}$ podalgebra od $\mathbf{A}$ onda je $B$ poduniverzum algebre $\mathbf{A}$. Skup svih poduniverzuma algebre $\mathbf{A}$ označavamo sa $\mathrm{Sub}(\mathbf{A})$.

Ukoliko je $X \subseteq A$, jednostavno se provjerava da je presjek familije poduniverzuma koji sadrže $X$ takođe poduniverzum sa istom osobinom. Kako je ta familija neprazna, onda sa $\mathrm{Sg}^{\mathbf{A}}(X) = \bigcap\{S \in \mathrm{Sub}(\mathbf{A}) : X \subseteq S\}$ označavamo *poduniverzum algebre* $\mathbf{A}$ *generisan sa* $X$. Skup $\mathrm{Sg}^{\mathbf{A}}(X)$ je univerzum najmanje podalgebre od $\mathbf{A}$ čiji univerzum sadrži $X$ i tu podalgebru ćemo zvati *podalgebra generisana skupom* $X$, dok ćemo sam skup $X$ zvati *skup generatora*. Kažemo da je algebra *konačno generisana* ako ima konačan skup generatora, a da je *lokalno konačna* ako je svaka njena konačno generisana podalgebra konačna.

Relacija ekvivalencije $\theta$ na univerzumu algebre $\mathbf{A}$ jezika $\mathcal{F}$ je *kongruencija* ako ima svojstvo *kompatibilnosti*:

za svako $f \in \mathcal{F}_n$ i $a_i, b_i \in A$, takve da $a_i \theta b_i$ za $1 \leq i \leq n$, važi

$$f^{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n) \theta f^{\mathbf{A}}(b_1, \dots, b_n).$$

Skup svih kongruencija algebre $\mathbf{A}$ označavamo sa $\mathrm{Con}\mathbf{A}$. Svojstvo kompatibilnosti nam dozvoljava uvođenje količničke strukture na skupu klasa ekvivalencije $A/\theta$. *Količnička algebra* $\mathbf{A}/\theta$ je algebra sa univerzumom $A/\theta$, na istom jeziku kao $\mathbf{A}$ i čije bazne operacije zadovoljavaju

$$f^{\mathbf{A}/\theta}([a_1]_\theta, \dots, [a_n]_\theta) = [f^{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n)]_\theta,$$

gdje $a_1, \dots, a_n \in A$ i $f$ je $n$-arni operacijski simbol jezika.

*Mreža* je algebra $\mathbf{L} = (L, \wedge, \vee)$, gdje su $\wedge$ i $\vee$ binarne operacije koje za sve $x, y, z \in L$ ispunjavaju:

(M1) $x \wedge x = x$ i $x \vee x = x$; (idempotentnost)

(M2) $x \wedge y = y \wedge x$ i $x \vee y = y \vee x$; (komutativnost)

(M3) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ i $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$; (asocijativnost)

(M4) $x \wedge (x \vee y) = x$ i $x \vee (x \wedge y) = x$. (apsorpcija)

Ako na skupu $L$ definišemo relaciju $\leq$ sa

$$x \leq y \text{ ako i samo ako } x \wedge y = x,$$

za $x, y \in L$, onda je $L$ parcijalno uređen relacijom $\leq$. Kako mrežu možemo posmatrati kao parcijalno uređen skup onda, usvajajući notaciju parcijalnih uređenja, njen najmanji i najveći element (ako postoje) označavamo sa 0 i 1. Koristimo i oznaku $a < b$ ako je $a \leq b$ i $a \neq b$. Ako $a, b \in L$ onda $b$ *pokriva* $a$, ili $a$ *je pokriven sa* $b$, ako $a < b$, i ako iz $a \leq c \leq b$ slijedi $a = c$ ili $b = c$. U mreži sa 0 elementi koji pokrivaju 0 (ukoliko postoje) su *atomi*.

Neka $\theta_1, \theta_2 \in \mathrm{Con}\mathbf{A}$ i neka

$$\theta_1 \wedge \theta_2 := \theta_1 \cap \theta_2 \text{ i}$$
$$\theta_1 \vee \theta_2 := \theta_1 \cup (\theta_1 \circ \theta_2) \cup (\theta_1 \circ \theta_2 \circ \theta_1) \cup (\theta_1 \circ \theta_2 \circ \theta_1 \circ \theta_2) \cup \dots$$

Lako se provjerava da su na skupu kongruencija $\mathrm{Con}\mathbf{A}$ algebre $\mathbf{A}$ $\wedge$ i $\vee$ binarne operacije i da je algebra $(\mathrm{Con}\mathbf{A}, \wedge, \vee)$ mreža. Ovu mrežu ćemo zvati *mreža kongruencija* algebre $\mathbf{A}$ i označavati sa $\mathbf{Con}\mathbf{A}$.

Posmatrajući Con$\mathbf{A}$ kao parcijalno uređenje vidimo da je relacija $\leq$ ništa drugo nego relacija inkluzije $\subseteq$. Najmanji element ovog parcijalnog uređenja je dijagonalna relacija $\{(a,a) : a \in A\}$, koja se često uz ranije pomenuto $\Delta_A$ označava i sa $0_A$. Ako je potrebno naglasiti da je u pitanju kongruencija algebre $\mathbf{A}$ a ne neke druge algebre sa istim univerzumom, onda se koriste oznake $\Delta_{\mathbf{A}}$ i $0_{\mathbf{A}}$. Slično, najveći element je puna relacija $A \times A$ i nju označavamo sa $\nabla_A$ ili $1_A$, odnosno sa $\nabla_{\mathbf{A}}$ ili $1_{\mathbf{A}}$. Atom u mreži kongruencija algebre nazivamo i *minimalna kongruencija*, pri čemu skrećemo pažnju da to očigledno nije i minimalni element u smislu parcijalnog uređenja.

Ako je $\{\mathbf{A}_i \colon i \in I\}$ familija algebri na jeziku $\mathcal{F}$ onda je *(direktan) proizvod* te familije algebra $\mathbf{A} = \prod_{i\in I} \mathbf{A}_i$ na istom jeziku, sa univerzumom $\prod_{i\in I} A_i$ i tako da je za $f \in \mathcal{F}_n$ i sve $a_1, \ldots, a_n \in \prod_{i\in I} A_i$,

$$f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)(i) = f^{\mathbf{A}_i}(a_1(i), \ldots, a_n(i))$$

za $i \in I$.
Ako je $I = \{1, \ldots, n\}$ onda je u pitanju *konačan (direktan) proizvod* i pišemo $\mathbf{A}_1 \times \cdots \times \mathbf{A}_n$. Za proizvoljan $I$ i $\mathbf{A}_i = \mathbf{A}$ za sve $i \in I$, koristimo oznaku $\mathbf{A}^I$ za direktan proizvod, i to je *(direktan) stepen* algebre $\mathbf{A}$. Ako je još i $I = \{1, \ldots, n\}$, onda direktan stepen označavamo sa $\mathbf{A}^n$.

Nama će posebno bitni biti određeni poduniverzumi direktnog stepena algebre. Neka je $n \geq 2$ prirodan broj i $\mathbf{A}^n$ direktan stepen neke algebre $\mathbf{A}$. Za $\mathbf{a_1} = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1})$, $\mathbf{a_2} = (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n2}), \ldots, \mathbf{a_m} = (a_{1m}, a_{2m}, \ldots, a_{nm})$ iz skupa $A^n$ posmatramo poduniverzum od $\mathbf{A}^n$ generisan sa $\{\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_k}\}$:

$$Y = \mathrm{Sg}^{\mathbf{A}^n}\left(\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix}\right).$$

S jedne strane, ovaj poduniverzum zajedno sa restrikcijama baznih operacija algebre $\mathbf{A}^n$ predstavlja podalgebru $\mathbf{Y}$ algebre $\mathbf{A}^n$. Međutim, na sam skup $Y$ se može gledati i kao na $n$-arnu relaciju na skupu $A$ kompatibilnu sa operacijama algebre $\mathbf{A}$. Naime, ako je $f$ operacijski simbol arnosti $k$ jezika algebre $\mathbf{A}$ i $\mathbf{b_1} = (b_{11}, b_{21}, \ldots, b_{n1})$, $\mathbf{b_2} = (b_{12}, b_{22}, \ldots, b_{n2}), \ldots, \mathbf{b_k} = (b_{1k}, b_{2k}, \ldots, b_{nk})$ iz $Y$, onda je

$$f^{\mathbf{Y}}\left(\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{n2} \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{bmatrix}\right) = \begin{pmatrix} f^{\mathbf{A}}(b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{1k}) \\ f^{\mathbf{A}}(b_{21}, b_{22}, \ldots, b_{2k}) \\ \vdots \\ f^{\mathbf{A}}(b_{n1}, b_{n2}, \ldots, b_{nk}) \end{pmatrix} \in Y.$$

Dakle, skup $Y$ je zatvoren za bazne operacije algebre $\mathbf{A}$, a to znači da je zatvoren i za kompozicije istih, ili drugim riječima, zatvoren je za term operacije algebre $\mathbf{A}$, koje ćemo uskoro definisati.

Za algebre $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ na istom jeziku $\mathcal{F}$, preslikavanje $\varphi\colon A \to B$ je *homomorfizam* iz $\mathbf{A}$ u $\mathbf{B}$ ako važi

$$\varphi(f^{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathbf{B}}(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n))$$

za sve $f \in \mathcal{F}_n$, $n \geq 0$, i $a_1, \dots, a_n \in A$. Injektivni homomorfizam je *monomorfizam* ili *potapanje*, dok se homomorfizam koji je bijekcija naziva *izomorfizam*. Ako je $\varphi\colon A \to B$ je sirjektivni homomorfizam iz $\mathbf{A}$ u $\mathbf{B}$ onda je $\mathbf{B}$ *homomorfna slika* od $\mathbf{A}$.

Za klasu algebri $\mathcal{K}$ istog jezika definišemo klase $\mathsf{S}(\mathcal{K}), \mathsf{H}(\mathcal{K})$ i $\mathsf{P}(\mathcal{K})$ sa:

- $\mathbf{A} \in \mathsf{S}(\mathcal{K})$ ako i samo ako je $\mathbf{A}$ podalgebra neke algebre iz $\mathcal{K}$;
- $\mathbf{A} \in \mathsf{H}(\mathcal{K})$ ako i samo ako je $\mathbf{A}$ homomorfna slika neke algebre iz $\mathcal{K}$;
- $\mathbf{A} \in \mathsf{P}(\mathcal{K})$ ako i samo ako je $\mathbf{A}$ direktan proizvod neke neprazne familije algebri iz $\mathcal{K}$.

Mi ćemo koristiti još i klasu $\mathsf{P}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{K})$, klasu algebri koje su konačni direktni proizvodi algebri iz $\mathcal{K}$. Dakle, $\mathsf{S}, \mathsf{H}$ i $\mathsf{P}$ su operatori koji preslikavaju klase algebri u klase algebri. Klasa algebri $\mathcal{K}$ je *zatvorena* za operator $\mathsf{O}$ ako važi $\mathsf{O}(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{K}$.

Nepraznu klasu algebri istog jezika zatvorenu za operatore $\mathsf{S}, \mathsf{H}$ i $\mathsf{P}$ nazivamo *varijetet*. Kako je presjek klase varijeteta istog jezika (pri čemu je bitno napomenuti da je u ovom slučaju klasa baš skup, a ne prava klasa) takođe varijetet, i kako sve algebre istog jezika čine varijetet, onda za svaku klasu algebri $\mathcal{K}$ postoji najmanji varijetet koji sadrži $\mathcal{K}$. Takav varijetet se najčešće označava sa $\mathsf{V}(\mathcal{K})$ i naziva *varijetet generisan klasom* $\mathcal{K}$. Za varijetet kažemo da je *lokalno konačan* ako svaka njegova algebra lokalno konačna.

Teorema 1.1 (Tarski). *Za proizvoljnu klasu algebri* $\mathcal{K}$ *važi* $\mathsf{V}(\mathcal{K}) = \mathsf{HSP}(\mathcal{K})$.

Dokaz. Vidjeti [19]. □

Neka je $X$ skup promjenljivih i $\mathcal{F}$ jezik algebri disjunktan sa $X$. Induktivno definišemo $T_k$ sa:

1. $T_0 = X \cup \mathcal{F}_0$;
2. $T_{k+1} = T_k \cup \{f(t_1, \dots, t_n) : f \in \mathcal{F}_n \text{ i } t_1, \dots, t_n \in T_k\}$.

Na kraju, definišemo $T(X) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} T_k$, skup svih *terma na jeziku* $\mathcal{F}$ *nad skupom promjenljivih* $X$.

Napomenimo samo da za $t \in T(X)$ pišemo $t(x_1, \dots, x_n)$ kada hoćemo da naglasimo da je skup promjenljivih koje se pojavljuju u termu $t$ podskup od

$\{x_1,\dots,x_n\}$. Dakle, term $t$ je arnosti $n$ ako je broj različitih promjenljivih koje se eksplicitno pojavljuju u njemu najviše $n$.

Skup terma $T(X)$ je univerzum *term algebre* $\mathbf{T}(X) = (T(X), \mathcal{F}^{\mathbf{T}(X)})$, gdje je $f^{\mathbf{T}(X)}(t_1,\dots,t_n) = f(t_1,\dots,t_n)$ za svako $f \in \mathcal{F}_n$ i $t_1,\dots,t_n \in T(X)$.

Definisali smo $f^{\mathbf{A}}$, interpetaciju funkcijskog simbola $f$, a kako su termi samo nizovi simbola onda možemo induktivno definisati i njihovu interpretaciju. Za dati term $t(x_1,\dots,x_n)$ jezika $\mathcal{F}$ nad skupom promjenljivih $X$ i datu algebru $\mathbf{A}$ jezika $\mathcal{F}$, *interpretacija* terma $t$ u algebri $\mathbf{A}$ je preslikavanje $t^{\mathbf{A}}\colon A^n \to A$ defnisano tako da:

(i) ako je $t$ promjenljiva $x_i$, onda

$$t^{\mathbf{A}}(a_1,\dots,a_n) = a_i,$$

za $a_1,\dots,a_n \in A$, tj. $t^{\mathbf{A}}$ je $i$-ta projekcija;

(ii) ako je $t$ oblika $f(t_1(x_1,\dots,x_n),\dots,t_k(x_1,\dots,x_n))$, gdje $f \in \mathcal{F}_k$, onda je

$$t^{\mathbf{A}}(a_1,\dots,a_n) = f^{\mathbf{A}}(t_1^{\mathbf{A}}(a_1,\dots,a_n),\dots,t_k^{\mathbf{A}}(a_1,\dots,a_n)),$$

za $a_1,\dots,a_n \in A$.

Preslikavanje $p^{\mathbf{A}}$ je *term operacija* algebre $\mathbf{A}$ koja odgovara termu $p$. Napomenimo samo da različiti termi ne moraju nužno imati i različite odgovarajuće term operacije. Term operacija $p^{\mathbf{A}}$ arnosti *$n$ zavisi od $i$-te koordinate* ako postoje $a_1,\dots,a_i,\dots,a_n, a_i' \in A$ takvi da

$$p^{\mathbf{A}}(a_1,\dots,a_i,\dots,a_n) \neq p^{\mathbf{A}}(a_1,\dots,a_i',\dots,a_n).$$

Sve promjenljive iz skupa $\{x_1,\dots,x_n\}$ od kojih zavisi odgovarajuća term operacija terma $p(x_1,\dots,x_n)$ su *esencijalne promjenljive* te term operacije, dok su sve preostale promjenljive iz pomenutog skupa *pseudo promjenljive.*

Ako su $\mathbf{A}'$ i $\mathbf{A}''$ algebre sa istim univerzumom $A$, onda kažemo da su one *term-ekvivalentne* ako imaju iste skupove term operacija. Drugim riječima, one su term-ekvivalente ako za svaku term operaciju $p^{\mathbf{A}'}$ algebre $\mathbf{A}'$ postoji term operacija $q^{\mathbf{A}''}$ algebre $\mathbf{A}''$ takva da $p^{\mathbf{A}'} = q^{\mathbf{A}''}$ i obratno.

Jednostavnom indukcijom po složenosti terma se dokazuje da se, kada su u pitanju kongruencije i homomorfizmi, term operacije ponašaju isto kao i bazne operacije.

TEOREMA 1.2. *Za algebre $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ na jeziku $\mathcal{F}$ važi:*

(a) *Neka je $p$ $n$-arni term na jeziku $\mathcal{F}$, neka $\theta \in Con\mathbf{A}$ i $(a_i,b_i) \in \theta$ za $1 \le i \le n$. Tada je*

$$p^{\mathbf{A}}(a_1,\dots,a_n)\theta p^{\mathbf{A}}(b_1,\dots,b_n).$$

(b) *Ako je $p$ $n$-arni term na jeziku $\mathcal{F}$ i $\varphi\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ homomorfizam, onda*

$$\varphi(p^{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n)) = p^{\mathbf{B}}(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n))$$

*za $a_1, \dots, a_n \in A$.*

DOKAZ. Vidjeti [19]. □

Sada ćemo definisati još jednu vrstu operacija na algebri koja će nam trebati u narednom poglavlju – polinomne operacije. Neka je $\mathbf{A}$ algebra jezika $\mathcal{F}$ i $\mathcal{F}_0$ njegov skup simbola arnosti 0. Proširimo skup $\mathcal{F}_0$ dodavanjem simbola $a$ za svaki $a \in A$. Novi jezik označimo sa $\mathcal{F}_A$, a algebru $\mathbf{A}$ proširenu skupom konstanti sa $\mathbf{A}_A$. Dakle, algebra $\mathbf{A}_A$ je na jeziku $\mathcal{F}_A$. Termi na jeziku $\mathcal{F}_A$ su *polinomi* algebre $\mathbf{A}$. Odgovarajuće term-operacije se nazivaju *polinomne operacije* algebre $\mathbf{A}$, ali s obzirom na to da nam sintaksna struktura polinoma kao terma neće biti bitna, polinomne operacije ćemo zvati polinomima. Sada možemo reći da polinome dobijamo tako što u term operacijama algebre $\mathbf{A}$ neke promjenljive zamijenimo elementima algebre. U tom slučaju može doći do smanjivanja arnosti operacije, pa za arnost polinoma uzimamo broj promjenljivih koje nisu zamijenjene elementima algebre. Za $n \geq 0$ sa $\mathrm{Pol}_n\mathbf{A}$ označavamo $n$-arne polinome, a sa $\mathrm{Pol}\mathbf{A} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Pol}_n\mathbf{A}$ sve polinome algebre $\mathbf{A}$. Ako je $f$ polinom algebre $\mathbf{A}$ i ako je $U \subseteq A$ zatvoren za $f$, onda je jasno da je $f\restriction_U$ operacija na $U$. Sa $(\mathrm{Pol}\mathbf{A})\restriction_U$ označavamo skup svih $f\restriction_U$ takvih da $f \in \mathrm{Pol}\mathbf{A}$ i $U$ je zatvoren za $f$. Za dvije algebre kažemo da su *polinomno ekvivalentne* ako imaju isti skup polinomnih operacija.

Neka je $\mathcal{K}$ klasa algebri na istom jeziku i $X$ skup promjenljivih. Definišemo kongruenciju $\theta_{\mathcal{K}}(X)$ na $\mathbf{T}(X)$ sa

$$\theta_{\mathcal{K}}(X) = \bigcap \Phi_{\mathcal{K}}(X),$$

gdje je

$$\Phi_{\mathcal{K}}(X) = \{\phi \in \mathrm{Con}\mathbf{T}(X)\colon \mathbf{T}(X)/\phi \in \mathsf{S}(\mathcal{K})\};$$

a zatim definišemo $\mathbf{F}_{\mathcal{K}}(\overline{X})$, *$\mathcal{K}$-slobodnu algebru nad $\overline{X}$*, sa

$$\mathbf{F}_{\mathcal{K}}(\overline{X}) = \mathbf{T}(X)/\theta_{\mathcal{K}}(X),$$

gdje je

$$\overline{X} = [X]_{\theta_{\mathcal{K}}(X)}.$$

Elementi skupa $\overline{X}$ su *slobodni generatori* ove algebre.

*Identitet* jezika $\mathcal{F}$ nad skupom promjenljivih $X$ je izraz oblika $p \approx q$, gdje $p, q \in T(X)$. Ako je $\mathbf{A}$ algebra na jeziku $\mathcal{F}$ onda kažemo da $\mathbf{A}$ *zadovoljava* identitet $p \approx q$ (ili da je identitet *tačan* u $\mathbf{A}$, ili da *važi* u $\mathbf{A}$) ako $p^{\mathbf{A}} = q^{\mathbf{A}}$, i u tom slučaju koristimo oznaku

$$\mathbf{A} \models p \approx q.$$

Ako je $\mathcal{K}$ klasa algebri na istom jeziku, onda pišemo $\mathcal{K} \models p \approx q$ ako $\mathbf{A} \models p \approx q$ za sve $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$. Takođe, ako je $\Sigma$ neki skup identiteta, pišemo $\mathcal{K} \models \Sigma$ ako $\mathcal{K}$ zadovoljava svaki identitet iz $\Sigma$. Skup svih identiteta nad skupom promjenljivih $X$ koji važe na klasi $\mathcal{K}$ označavamo sa $\mathrm{Id}_X(\mathcal{K})$.

Rutinska je vježba dokazati po definiciji da važi $\mathrm{Id}_X(\mathcal{K}) = \mathrm{Id}_X(\mathsf{S}(\mathcal{K})) = \mathrm{Id}_X(\mathsf{H}(\mathcal{K})) = \mathrm{Id}_X(\mathsf{P}(\mathcal{K})) = \mathrm{Id}_X(\mathsf{V}(\mathcal{K}))$.

Za skup identiteta $\Sigma$ na nekom jeziku $\mathcal{F}$ sa $\mathrm{Mod}(\Sigma)$ označavamo klasu svih algebri na jeziku $\mathcal{F}$ koje zadovoljavaju $\Sigma$. Klasa algebri $\mathcal{K}$ za koju postoji skup identiteta $\Sigma$ takav da je $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Sigma)$ naziva se *jednakosna klasa*. U tom slučaju kažemo da je klasa $\mathcal{K}$ *definisana*, ili *aksiomatizovana*, sa $\Sigma$. Naredna teorema poistovjećuje jednakosne klase sa varijetetima.

TEOREMA 1.3 (Birhof, [19]). *$\mathcal{K}$ je jednakosna klasa ako i samo ako je $\mathcal{K}$ varijetet.*

Za neprazan skup $A$ sa $\mathcal{O}_n(A) := A^{A^n}$ označavamo skup svih $n$-arnih operacija na $A$, dok je $\mathcal{O}(A) := \bigcup\{\mathcal{O}_n(A) : n \in \mathbb{N}\}$ skup svih operacija na skupu $A$. Ako $n, m \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{O}_n(A)$ i $g_1, \ldots, g_n \in \mathcal{O}_m(A)$ onda sa $f(g_1, \ldots, g_n)$ označavamo $m$-arnu operaciju koja je definisana sa

$$(x_1, \ldots, x_m) \mapsto f(g_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, g_n(x_1, \ldots, x_m)).$$

Ova operacija se naziva *uopštena kompozicija* (odnosno *superpozicija*) $f$ sa $g_1, \ldots, g_n$.

Podskup $\mathcal{C}$ od $\mathcal{O}(A)$ je *klon* na $A$ ako sadrži sve projekcije i zatvoren je za uopštene kompozicije. Bitno je reći da se u tom slučaju i algebra $(A, \mathcal{C})$ takođe naziva klonom. Kao osnovni primjer klona možemo navesti klon term operacija neke algebre. Drugi važan primjer je klon polinomnih operacija. Za funkciju $f$ i relaciju $R$ skupa $A$ smo ranije rekli šta znači da je $R$ invarijantna za $f$ i u tom slučaju koristimo oznaku $f \triangleright R$. Oznaku $f \triangleright \mathcal{R}$ koristimo kada je $f \triangleright R$ za sve $R \in \mathcal{R}$, gdje je $\mathcal{R}$ neki skup relacija i tada kažemo i da je $f$ *polimorfizam* od $\mathcal{R}$. Slično, oznaka $\mathcal{F} \triangleright R$ nam kaže da je $f \triangleright R$ za sve $f \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(A)$. Ako je $m \in \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$ i $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(A)$ onda definišemo

$$\mathsf{Inv}^{[m]}(\mathcal{F}) := \{R \subseteq A^m : \mathcal{F} \triangleright R\} \text{ i}$$

$$\mathsf{Inv}(\mathcal{F}) := \bigcup\{\mathsf{Inv}^{[m]}(\mathcal{F}) : m \in \mathbb{N}\}.$$

Iz definicije je jasno da je $n$-arna relacija $R$ na skupu $A$ invarijantna u odnosu na operaciju $f$ ako i samo ako je $R$ poduniverzum algebre $(A, f)^n$, pa $\mathsf{Inv}(\mathcal{F}) = \mathsf{SP}_{\text{fin}}(\mathbf{A})$, gdje je $\mathbf{A} = (A, \mathcal{F})$. Ako je $\mathcal{R}$ neki skup relacija na skupu $A$ onda za $m \in \mathbb{N}$ definišemo

$$\mathsf{Pol}^{[m]}(\mathcal{R}) := \{f \in \mathcal{O}_m(A) : f \rhd \mathcal{R}\}$$

skup svih $m$-arnih polimorfizama od $\mathcal{R}$, i $\mathsf{Pol}(\mathcal{R}) := \bigcup\{\mathsf{Pol}^{[m]}(\mathcal{R} : m \in \mathbb{N}\}$ je skup svih polimorfizama od $\mathcal{R}$.

PROPOZICIJA 1.4 ([1]). *Neka je $A$ skup, neka su $\mathcal{R}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ skupovi nekih relacija na $A$ i neka su $\mathcal{F}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ skupovi nekih operacija na $A$. Važi:*

(1) $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2 \Rightarrow \mathsf{Pol}(\mathcal{R}_2) \subseteq \mathsf{Pol}(\mathcal{R}_1)$;

(2) $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \Rightarrow \mathsf{Inv}(\mathcal{F}_2) \subseteq \mathsf{Inv}(\mathcal{F}_1)$;

(3) $\mathcal{F} \subseteq \mathsf{Pol}(\mathsf{Inv}(\mathcal{F}))$;

(4) $\mathcal{R} \subseteq \mathsf{Inv}(\mathsf{Pol}(\mathcal{R}))$;

(5) $\mathsf{Pol}(\mathsf{Inv}(\mathsf{Pol}(\mathcal{R}))) = \mathsf{Pol}(\mathcal{R})$;

(6) $\mathsf{Inv}(\mathsf{Pol}(\mathsf{Inv}(\mathcal{F}))) = \mathsf{Inv}(\mathcal{F})$.

DOKAZ. (1)-(4) se dokazuju trivijalno po definiciji, dok (5) i (6) slijede iz (1)-(4). □

TEOREMA 1.5 ([11],[29]). *Neka je $A$ konačan skup i neka je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(A)$. Onda je $\mathsf{Pol}(\mathsf{Inv}(\mathcal{F}))$ klon i za svaki klon $\mathcal{C}'$ takav da je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}'$ važi*

$$\mathsf{Pol}(\mathsf{Inv}(\mathcal{F})) \subseteq \mathcal{C}'.$$

DOKAZ. Vidjeti posljedicu 4.3 u [1]. □

Bitno je napomenuti da se konačnost skupa $A$ ne može ukloniti iz uslova jer tvrđenje teoreme nije tačno za beskonačne skupove. Iz pomenute teoreme slijedi da je $\mathsf{Pol}(\mathsf{Inv}(\mathcal{F}))$ najmanji klon koji sadrži $\mathcal{F}$ i on se najčešće označava sa $\mathsf{Clo}(\mathcal{F})$. Takođe, još jedna jednostavna posljedica je da je svaki klon oblika $\mathsf{Pol}(\mathcal{R})$ za neki skup relacija $\mathcal{R}$. Posljednji dio gornje propozicije implicira da $\mathcal{F}$ i $\mathsf{Clo}(\mathcal{F})$ imaju isti skup invarijantnih relacija. Drugim riječima, ako je data algebra $\mathbf{A} = (A, \mathcal{F})$ i ako je $\mathbf{A}' = (A, \mathsf{Clo}(\mathcal{F}))$, onda je $\mathsf{SP}_{\text{fin}}(\mathbf{A}) = \mathsf{SP}_{\text{fin}}(\mathbf{A}')$.

## 1.4 Teorija pitomih kongruencija

Osamdesetih godina 20. vijeka D. Hobi i R. Makenzi su razvili i u [31] izložili *teoriju pitomih kongruencija*[‖]. Kao što se u uvodnoj glavi pomenute monografije navodi za osnovno otkriće se može reći da je to da mreža kongruencija konačne algebre određuje strukture te algebre, odnosno da se dosta informacija o algebri može dobiti na osnovu njenog lokalnog ponašanja. Definiše se pet vrsta pokrivanja u mreži kongruencija i svaki tip ima odgovarajuću vrstu algebre koja mu odgovara. Ispostavlja se da je nedostatak određenih tipova ekvivalentan određenim osobinama mreža kongruencija. U nastavku pravimo kratak pregled definicija i rezultata iz [31] sve sa ciljem da vidimo značaj kongruencijske $\wedge$-poludistributivnosti unutar teorije pitomih kongruencija. Mi ćemo zapravo najvećim dijelom navesti pregled kao u [18].

Definicija 1.6 ([18],[31]). Neka je $\mathbf{A}$ konačna algebra i $\alpha$ njena minimalna kongruencija.

(1) Podskup $U \subseteq A$ je *$\alpha$-minimalan skup* algebre $\mathbf{A}$ ako važi:

- $U = p(A)$ za neki unaran polinom $p(x)$ algebre $\mathbf{A}$ takav da postoji bar jedna $\alpha$-klasa na kojoj $p(x)$ nije konstantan, i
- $U$ je minimalan (u odnosu na inkluziju) skup sa prethodnom osobinom.

(2) Podskup $N \subseteq A$ je *$\alpha$-trag* od $A$ ako važi:

- $N = U \cap [a]_\alpha$ za neki $\alpha$-minimalan skup $U$ i $\alpha$-klasu $[a]_\alpha$, i
- $|N| > 1$.

Jasno je da $\alpha$-minimalan skup $U$ sadrži bar jedan $\alpha$-trag. *Tijelo* je unija svih $\alpha$-tragova minimalnog skupa $U$, a njegovi preostali elementi formiraju *rep* od $U$. Ispostavlja se da algebra na svim $\alpha$-tragovima indukuje uniformne strukture, a sada ćemo i tačno definisati pojam indukovane strukture.

Definicija 1.7 ([18],[31]). Neka je $\mathbf{A}$ algebra i $U \subseteq A$. Algebra *indukovana algebrom* $\mathbf{A}$ *na* $U$, u oznaci $\mathbf{A}{\restriction}_U$, je algebra sa univerzumom $U$, a čije su bazne operacije elementi skupa $(\mathrm{Pol}\mathbf{A}){\restriction}_U$.

Neka je $\mathbf{A}$ algebra i $B$ i $C$ neprazni podksupovi od $A$. Za skupove $B$ i $C$ kažemo da su *polinomno izomorfni u* $\mathbf{A}$, i pišemo $B \overset{\mathbf{A}}{\simeq} C$ ili samo $B \simeq C$, ako postoje $f, g \in \mathrm{Pol}_1\mathbf{A}$ takvi da

$$f(B) = C,\ g(C) = B,$$
$$g \circ f{\restriction}_B = id_B,\ f \circ g{\restriction}_C = id_C.$$

[‖]engl. tame congruence theory.

Koristimo oznaku $f\colon B \simeq C$ ako i samo ako $f \in \mathrm{Pol}_1\mathbf{A}$ i postoji $g \in \mathrm{Pol}_1\mathbf{A}$ takav da važe gornje jednakosti. U poglavlju 1.3 kod definicije algebre skup njenih operacija je bio indeksiran nekim jezikom i tu smo definisali tzv. *indeksiranu algebru*, ali u slučaju da skup operacija nije indeksiran nekim jezikom onda je u pitanju *neindeksirana algebra*. I za jedne i druge koristimo naziv „algebre”, s tim da u [31] autorima pogoduje upotreba neindeksiranih, dok će nama u ostatku disertacije biti korisnije indeksirane algebre. Za dvije neindeksirane algebre kažemo da su *izomorfne* ako se mogu indeksirati istim jezikom tako da one budu izomorfne u smislu indeksiranih algebri.

Teorema 1.8 ([18],[31]). *Neka je $\alpha$ minimalna kongruencija konačne algebre $\mathbf{A}$. Važe sljedeće implikacije:*

(a) *Ako su $U$ i $V$ $\alpha$-minimalni skupovi, onda su oni polinomno izomorfni, a indukovane algebre $\mathbf{A}{\restriction}_U$ i $\mathbf{A}{\restriction}_V$ izomorfne;*

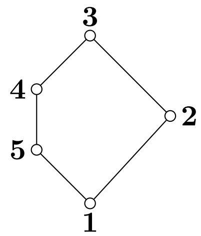
(b) *Ako su $N$ i $M$ $\alpha$-tragovi, onda su indukovane algebre $\mathbf{A}{\restriction}_N$ i $\mathbf{A}{\restriction}_M$ izomorfne;*

(c) *Ako je $N$ $\alpha$-trag, onda je indukovana algebra $\mathbf{A}{\restriction}_N$ polinomno ekvivalentna jednoj od sljedećih struktura:*

   (1) *Unarna algebra čije su osnovne operacije sve permutacije (unarni tip);*
   (2) *Jednodimenzionalni vektorski prostor nad konačnim poljem (afini tip);*
   (3) *Dvoelementna bulova mreža (Bulov tip);*
   (4) *Dvoelementna mreža (mrežni tip);*
   (5) *Dvoelementna polumreža (polumrežni tip).*

Sada svakoj minimalnoj kongruenciji $\alpha$ neke algebre možemo dodijeliti tip na osnovu strukture $\alpha$-tragova. Tipovi se označavaju masnim brojevima **1**, **2**, **3**, **4** i **5**, i odgovaraju rednim brojevima iz prethodne teoreme (**1** je unarni, **2** afini itd.). Ovu ideju je moguće na prirodan način koristiti i za parove $(\alpha, \beta)$ kongruencija algebre $\mathbf{A}$, pri čemu $\beta$ pokriva $\alpha$. Naime, možemo formirati količničku algebru $\mathbf{A}/\alpha$ i njenu kongruenciju $\beta/\alpha = \{([a]_\alpha, [b]_\alpha) : (a, b) \in \beta\}$. Kako $\beta$ pokriva $\alpha$ u mreži kongruencija algebre $\mathbf{A}$, slijedi da je $\beta/\alpha$ minimalna kongurencija algebre $\mathbf{A}/\alpha$, pa joj se može dodijeliti jedan od pet pomenutih tipova. Prolaskom kroz sve pokrivajuće parove kongruencija u algebri $\mathbf{A}$ dobijamo odgovarajući skup tipova koji ćemo označavati sa $typ(\mathbf{A})$. Za proizvoljnu klasu algebri $\mathcal{K}$ definišemo njen skup tipova $typ(\mathcal{K})$ kao uniju skupova tipova svih njenih konačnih članova.

Za konačnu algebru $\mathbf{A}$ (ili klasu $\mathcal{K}$) kažemo da *ispušta* tip $\mathbf{i}$, $\mathbf{1} \leq \mathbf{i} \leq \mathbf{5}$, ako se $\mathbf{i}$ ne nalazi u $typ(\mathbf{A})$ (ili $typ(\mathcal{K})$). U [31] se na skupu tipova definiše određeni poredak koji skup tipova čini mrežom. Kako se taj poredak definiše nećemo ovdje navoditi jer nam nije neophodan, a mreža se može vidjeti na slici ispod.




Neka je $\mathcal{I} = \{\{\mathbf{1}\}, \{\mathbf{1}, \mathbf{2}\}, \{\mathbf{1}, \mathbf{5}\}, \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{5}\}, \{\mathbf{1}, \mathbf{4}, \mathbf{5}\}, \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{5}\}\}$ familija pravih ideala $\mathcal{I}$ ove mreže. Za svaki $I \in \mathcal{I}$ se definiše klasa lokalno konačnih varijeteta $\mathcal{M}_I$ takvih da $\mathcal{V} \in \mathcal{M}_I$ ako i samo ako $typ(\mathcal{V}) \cap I = \emptyset$. Dakle, $\mathcal{V}$ pripada klasi $\mathcal{M}_I$ ako i samo ako ispušta tipove iz $I$. U devetoj glavi [31] za svaku od ovih klasa data je teorema koja karakteriše varijetete koji se nalaze u istima. Između ostalog, dokazuje se da je svaka od tih klasa definabilna Maljcevljevim uslovom (otuda i oznaka $\mathcal{M}_I$), o kojima će više riječi biti u sljedećoj glavi. Mi navodimo samo jedan od uslova za $\mathcal{M}_{\{\mathbf{1},\mathbf{2}\}}$.

Teorema 1.9 ([31, Teorema 9.10]). *Neka je $\mathcal{V}$ lokalno konačan varijetet. Sljedeći uslovi su ekvivalentni:*

(1) $\mathcal{V} \in \mathcal{M}_{\{\mathbf{1},\mathbf{2}\}}$;

(2) *$\mathcal{V}$ je kongruencijski $\wedge$-poludistributivan.*

Glava **2**

# Maljcevljevi uslovi

Sredinom prošlog vijeka A. I. Maljcev je u [49] izložio karakterizaciju jednog strukturnog svojstva varijeteta putem sintaksnog uslova. U pitanju je bilo svojstvo kongruencijske permutabilnosti. Od tada je za mnogobrojna svojstva varijeteta dokazano da su ekvivalentna sa sintaksnim uslovima koji se danas nazivaju (jaki) Maljcevljevi uslovi. Prije nego što pomenute uslove i formalno definišemo navešćemo prvih nekoliko najznačajnijih rezultata na tom polju.

Varijetet je *kongruencijski permutabilan* ako za svaku algebru $\mathbf{A}$ ovog varijeteta i svaki par kongruencija $\alpha, \beta \in \mathrm{Con}\mathbf{A}$ važi $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$.

TEOREMA 2.1 (Maljcevljev term). *Varijetet $\mathcal{V}$ je kongruencijski permutabilan ako i samo ako postoji term $p(x, y, z)$ na jeziku varijeteta $\mathcal{V}$ takav da $\mathcal{V}$ zadovoljava:*

$$p(x, x, y) \approx y \quad i \quad p(x, y, y) \approx x.$$

DOKAZ. Vidjeti teoremu 4 u [49]. □

Naredne dvije teoreme takođe karakterišu svojstva kongruencija varijeteta, ali se od gorepomenute Maljcevljeve karakterizacije bitno razlikuju po broju terma koji karakterišu posmatrano svojstvo. Prva je Jonsonova karakterizacija varijeteta sa distributivnim mrežama kongruencija iz [35].

Varijetet $\mathcal{V}$ je *kongruencijski distributivan* ako za svaku algebru $\mathbf{A}$ ovog varijeteta i svaku trojku kongruencija $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{Con}\mathbf{A}$ važi

$$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma).$$

Jednostavna vježba iz elementarne teorije mreža je da se pokaže da je gorenavedeni uslov ekvivalentan dualnom uslovu $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$.

TEOREMA 2.2 (Jonsonovi termi). *Varijetet $\mathcal{V}$ je kongruencijski distributivan ako i samo ako postoje $n \in \mathbb{N}$ i termi $d_0(x,y,z),\ldots,d_n(x,y,z)$ na jeziku varijeteta $\mathcal{V}$ takvi da $\mathcal{V}$ zadovoljava:*

$$\begin{aligned}
&d_0(x,y,z) \approx x,\\
&d_n(x,y,z) \approx z,\\
&d_i(x,y,x) \approx x \text{ za sve } i,\\
&d_i(x,x,y) \approx d_{i+1}(x,x,y) \text{ za sve parne } i,\\
&d_i(x,y,y) \approx d_{i+1}(x,y,y) \text{ za sve neparne } i.
\end{aligned}$$

Navodimo još i ekvivalentan uslov za kongruencijsku modularnost za koji je zaslužan A. Dej [23].

Varijetet $\mathcal{V}$ je *kongruencijski modularan* ako za svaku algebru $\mathbf{A}$ ovog varijeteta i svaku trojku kongruencija $\alpha,\beta,\gamma \in \mathrm{Con}\mathbf{A}$ važi[*]

$$((\alpha \wedge \gamma) \vee \beta) \wedge \gamma = (\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma).$$

TEOREMA 2.3 (Dejevi termi). *Varijetet $\mathcal{V}$ je kongruencijski modularan ako i samo ako postoje $n \in \mathbb{N}$ i termi $m_0(x,y,z,u),\ldots,m_n(x,y,z,u)$ na jeziku varijeteta $\mathcal{V}$ takvi da $\mathcal{V}$ zadovoljava:*

$$\begin{aligned}
&m_0(x,y,z,u) \approx x,\\
&m_n(x,y,z,u) \approx u,\\
&m_i(x,y,y,x) \approx x \text{ za sve } i,\\
&m_i(x,x,y,y) \approx m_{i+1}(x,x,y,y) \text{ za sve parne } i,\\
&m_i(x,y,y,z) \approx m_{i+1}(x,y,y,z) \text{ za sve neparne } i.
\end{aligned}$$

*Jak Maljcevljev uslov* je konačan skup identiteta na nekom jeziku. Pod *interpretacijom* jezika $\sigma$ u jeziku $\mathcal{F}$ podrazumijevamo preslikavanje koje svaki simbol $\bar{p} \in \sigma$ slika u term $p$ jezika $\mathcal{F}$ odgovarajuće arnosti. Algebra $\mathbf{A}$ (ili varijetet $\mathcal{V}$) jezika $\mathcal{F}$ *realizuje* jak Maljcevljev uslov $\Sigma$ na jeziku $\sigma$ ako postoji interpretacija jezika $\sigma$ u jeziku $\mathcal{F}$ takva da skup identiteta $\Sigma$ nad $\sigma$ postaje skup identiteta $\Sigma'$ u jeziku $\mathcal{F}$ koji su tačni u $\mathbf{A}$ (ili $\mathcal{V}$). Vidimo da se u slučaju realizacije jakog Maljcevljevog uslova za varijetet traži da postoji zajednička interpretacija jezika $\sigma$ u jeziku $\mathcal{F}$ za koju sve algebre varijeteta realizuju uslov $\Sigma$. Dakle, ako svaka algebra varijeteta realizuje neki jak Maljcevljev uslov to ne znači da ga i sam varijetet realizuje. Jak Maljcevljev uslov koji je realizovan u svakoj algebri je *trivijalan*. Napomenimo još da smo realizaciju umjesto za varijetet mogli definisati za proizvoljnu klasu, ali za naše potrebe je dovoljna definicija u okviru varijeteta. *Maljcevljev uslov* je niz $\{\Sigma_n : n \in \mathbb{N}\}$ jakih Maljcevljevih uslova takvih da svaki varijetet koji

[*]Modularnost se može izraziti i preko implikacije: $\alpha \subseteq \gamma \Rightarrow (\alpha \vee \beta) \wedge \gamma = \alpha \vee (\beta \wedge \gamma)$.

realizuje $\Sigma_n$ realizuje i $\Sigma_{n+1}$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Maljcevljev uslov $\{\Sigma_n : n \in \mathbb{N}\}$ je realizovan u $\mathcal{V}$ ako postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da $\mathcal{V}$ realizuje $\Sigma_n$.

Kažemo da je neko svojstvo $\mathcal{S}$ varijeteta *(jako) Maljcevljevo svojstvo* ako postoji (jak) Maljcevljev uslov $\Sigma$ takav da za svaki varijetet $\mathcal{V}$ važi da je $\Sigma$ realizovan u $\mathcal{V}$ ako i samo ako $\mathcal{V}$ ima svojstvo $\mathcal{S}$. Takođe, možemo se ograničiti, što ćemo u ovoj disertaciji uglavnom i raditi, samo na lokalno konačne varijetete. Dakle, $\mathcal{S}$ je jako Maljcevljevo svojstvo lokalno konačnih varijeteta ako i samo postoji jak Maljcevljev uslov $\Sigma$ takav da za svaki lokalno konačan varijetet $\mathcal{V}$ važi da je $\Sigma$ realizovan u $\mathcal{V}$ ako i samo ako $\mathcal{V}$ ima svojstvo $\mathcal{S}$.

Ako se vratimo na teoreme sa početka sekcije vidjećemo da je skup identiteta iz teoreme 2.1 jak Maljcevljev uslov, dok su preostala dva iz teorema 2.2 i 2.3 Maljcevljevi uslovi. Drugim riječima, svojstvo kongruencijske permutabilnosti je jako Maljcevljevo svojstvo, dok su kongruencijska distributivnost i kongruencijska modularnost Maljcevljeva svojstva varijeteta.

(Jak) Maljcevljev uslov je *linearan* ako nisuje dozvoljene kompozicije funkcijskih simbola njegovog jezika. Dakle, linearni jaki Maljcevljevi uslovi sastoje se samo od identiteta oblika $\bar{p}(x_1, \ldots, x_n) \approx z$ i $\bar{p}(x_1, \ldots, x_n) \approx \bar{q}(y_1, \ldots, y_m)$, pri čemu su $\bar{p}$ i $\bar{q}$ simboli jezika posmatranog uslova, dok su $x_1, \ldots, x_n, z, y_1, \ldots, y_m$ proizvoljne promjenljive među kojima može biti istih. Još jedna osobina Maljcevljevih uslova koja nam je bitna je idempotentnost. Maljcevljev uslov $\Sigma$ je *idempotentan* ako se za svaki simbol $\bar{p}$ njegovog jezika identitet $\bar{p}(x, \ldots, x) \approx x$ može izvesti iz $\Sigma$.

Naredno tvrđenje je opštepoznato; prvi put je vjerovatno viđeno u [60], bez dokaza.

PROPOZICIJA 2.4. *Za svaki linearan idempotentan jak Maljcevljev uslov $\Sigma$ postoji linearan idempotentan jak Maljcevljev uslov $\Sigma'$ sa jednim operacijskim simbolom takav da za svaki varijetet $\mathcal{V}$ važi da $\mathcal{V}$ realizuje $\Sigma$ ako i samo ako $\mathcal{V}$ realizuje $\Sigma'$.*

DOKAZ. Pretpostavimo da jezik $\Sigma$ sadrži simbole $f$ i $g$ arnosti $k$ i $n$, redom. Konstruisaćemo jak Maljcevljev uslov $\Sigma_1$ na sljedeći način. Zamjenjujemo $f$ i $g$ novim operacijskim simbolom $h$ arnosti $kn$ tako da:

(1) u svakom identitetu koji sadrži $f$, zamjenjujemo $f(x_1, \ldots, x_k)$ termom $h(x_1, \ldots, x_1, x_2, \ldots, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_k)$ (svaka od promjenljivih se pojavljuje $n$ puta);

(2) u svakom identitetu koji sadrži $g$, zamjenjujemo $g(x_1, \ldots, x_n)$ termom $h(x_1, \ldots, x_n, x_1, \ldots, x_n, \ldots, x_1, \ldots, x_n)$.

Ako $\mathcal{V}$ realizuje $\Sigma$, realizacija $\Sigma_1$ u $\mathcal{V}$ se dobija interpretacijom $h$ kao terma $f(g(x_1, \ldots, x_n), g(x_{n+1}, \ldots, x_{2n}), \ldots, g(x_{(k-1)n+1}, \ldots, x_{kn}))$. S druge strane, ako $\mathcal{V}$ realizuje $\Sigma_1$, realizacija $\Sigma$ u $\mathcal{V}$ koristi $h$-terme iz (1) i (2) kao interpretaciju za $f$ i $g$, redom.

Na ovaj način smo odstranili jedan operacijski simbol, pa nastavljajući postupak u jednom trenutku dobijamo jak Maljcevljev uslov sa samo jednim simbolom. $\square$

Napomena 2.5. Mi ćemo u ovoj disertaciji isključivo razmatrati idempotentne, linearne jake Maljcevljeve uslove sa jednim operacijskim simbolom i na skupu promjenljivih $\{x, y\}$. Već smo vidjeli da je dovoljno ograničiti se samo na linearne jake Maljcevljeve uslove sa jednim operacijskim simbolom, a sada ćemo detaljnije objasniti zašto je dovoljno razmatrati samo idempotentne jake Maljcevljeve uslove. $\triangle$

Uvešćemo prvo pojam *idempotentni redukt* varijeteta. Neka je $\mathcal{V}$ varijetet jezika $\mathcal{F}$. Prvo, formiramo jezik $\mathcal{F}'$ koji se sastoji samo od operacijskih simbola $f_t$ iste arnosti kao $t$, za sve idempotentne terme $t$ varijeteta $\mathcal{V}$. Sada za svaku algebru $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$ postoji algebra $\mathbf{A}^{id}$ jezika $\mathcal{F}'$,

$$\mathbf{A}^{id} = (A, \{t^{\mathbf{A}} : t \text{ je idempotentni term varijeteta } \mathcal{V}\}).$$

Na kraju, definišemo idempotentni redukt varijeteta $\mathcal{V}$ kao

$$\mathcal{V}^{id} = \mathsf{V}(\{\mathbf{A}^{id} : \mathbf{A} \in \mathcal{V}\}).$$

Mnogobrojna strukturna svojstva algebri i varijeteta se prenose na njihove idempotentne redukte. Recimo nije teško dokazati da je varijetet $\mathcal{V}$ kongruencijski distributivan (resp. modularan) ako i samo ako je $\mathcal{V}^{id}$ kongruencijski distributivan (resp. modularan). Ono što je nama od posebnog interesa je da ako je $\mathcal{V}$ lokalno konačan, onda je i $\mathcal{V}^{id}$ lokalno konačan, te da u slučaju lokalne konačnosti važi da je $\mathcal{V}$ kongruencijski $\wedge$-poludistributivan ako i samo ako je $\mathcal{V}^{id}$ kongruencijski $\wedge$-poludistributivan. Ova ekvivalencija će biti jasna nakon uvida u teoreme o karakterizaciji putem jakih Maljcevljevih uslova iz narednog poglavlja jer svaki od njih zahtijeva egzistenciju idempotentnih terma. Važi i više, ako je $\mathcal{V}$ lokalno konačan, onda $\mathcal{V}$ ispušta tip **1** (resp. tip **2**) ako i samo ako $\mathcal{V}^{id}$ ispušta tip **1** (resp. tip **2**). Tvrđenje posljednje rečenice nije jednostavno za dokazivanje i posljedica je tvrđenja devete glave iz [31]. Kako ćemo se baviti karakterizacijom ovog svojstva u lokalno konačnim varijetetima putem jakih Maljcevljevih uslova, dovoljno je ograničiti se na idempotentne lokalno konačne varijetete, odnosno možemo posmatrati samo idempotentne jake Maljcevljeve uslove.

Teorema 2.6 ([60]). *Neka je $\mathcal{V}$ proizvoljan varijetet. Postoji netrivijalan idempotentan jak Maljcevljev uslov $\Sigma$ takav da $\mathcal{V}$ realizuje $\Sigma$ ako i samo ako postoji netrivijalan idempotentan linearan jak Maljcevljev uslov $\Sigma'$ na jeziku sa jednim operacijskim simbolom i identitetima sa samo dvije promjenljive takav da $\mathcal{V}$ realizuje $\Sigma'$.*

DOKAZ. Vidjeti posljedicu 5.3 u [60]. □

Da budemo precizniji, ta posljedica kaže i da ovaj uslov može biti zapisan u obliku

$$\begin{aligned} t(x, x, \ldots, x) &\approx x, \\ t(a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,n}) &\approx t(b_{1,1}, b_{1,2}, \ldots, b_{1,n}), \\ t(a_{2,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{2,n}) &\approx t(b_{2,1}, b_{2,2}, \ldots, b_{2,n}), \\ &\vdots \\ t(a_{n,1}, a_{n,2}, \ldots, a_{n,n}) &\approx t(b_{n,1}, b_{n,2}, \ldots, b_{n,n}), \end{aligned}$$

gdje za sve $i, j$, $1 \leq i, j \leq n$, važi $a_{i,j}, b_{i,j} \in \{x, y\}$, $a_{i,i} = x$ i $b_{i,i} = y$.

Ovakav jak Maljcevljev uslov se naziva *Tejlorov uslov*. Ako varijetet $\mathcal{V}$ (ili algebra $\mathbf{A}$) realizuje Tejlorov uslov $\Sigma$, onda se term kojim se interpretira jedini operacijski simbol korišćen u $\Sigma$ naziva *Tejlorov term* varijeteta $\mathcal{V}$ (algebre $\mathbf{A}$). Za takav varijetet kažemo da je *Tejlorov varijetet*, a ako je u pitanju algebra, onda se ona naziva *Tejlorova algebra*. Za nastavak je bitno napomenuti da je iz same definicije Tejlorovog uslova jasno da isti ne može biti realizovan putem neke od projekcija. Takođe, prema teoremi 2.6, egzistencija Tejlorovog terma je Maljcevljevo svojstvo.

Jake Maljcevljeve uslove možemo porediti po sintaksnoj jačini tako što među njima uvedemo relaciju $\preceq$. Ako su $\Sigma_1$ i $\Sigma_2$ jaki Maljcevljevi uslovi, onda je:

$$\Sigma_1 \preceq \Sigma_2 \text{ ako i samo ako svaki varijetet koji realizuje } \Sigma_2 \text{ realizuje i } \Sigma_1.$$

Iz same definicije relacije $\preceq$ je jasno da je refleksivna i tranzitivna, tj. ona je pretporedak. Uslov $\Sigma_1$ je *sintaksno slabiji* (ili samo *slabiji*) od uslova $\Sigma_2$ ako je $\Sigma_1 \preceq \Sigma_2$. Takođe se može reći i da je uslov $\Sigma_2$ *jači* od uslova $\Sigma_1$. Ako za jake Maljcevljeve uslove $\Sigma_1$ i $\Sigma_2$ važi $\Sigma_1 \preceq \Sigma_2$ i $\Sigma_2 \preceq \Sigma_1$, onda kažemo da su oni *ekvivalentni* i pišemo $\Sigma_1 \sim \Sigma_2$. Identifikacijom ekvivalentnih uslova dobija se mreža koja je izomorfna tzv. *mreži interpretacijskih tipova varijeteta* iz [28]. Možemo vršiti poređenje i samo u okviru lokalno konačnih varijeteta i tada koristimo oznake $\preceq_{lk}$ i $\sim_{lk}$. Naravno, može se desiti da jaki Maljcevljevi uslovi koji nisu ekvivalentni u opštem slučaju budu ekvivalentni u lokalno konačnom.

Poglavlje završavamo jednom korisnom propozicijom.

PROPOZICIJA 2.7. *Ako su $\Sigma_1$ i $\Sigma_2$ jaki Maljcevljevi uslovi, onda $\Sigma_1 \preceq \Sigma_2$ ako i samo ako* $\mathrm{Mod}(\Sigma_2)$ *realizuje* $\Sigma_1$.

DOKAZ. Neka su $\sigma_1$ i $\sigma_2$ jezici uslova $\Sigma_1$ i $\Sigma_2$ redom, i pretpostavimo da važi $\Sigma_1 \preceq \Sigma_2$. Varijetet $\mathrm{Mod}(\Sigma_2)$ trivijalno realizuje uslov $\Sigma_2$, pa kako je $\Sigma_1 \preceq \Sigma_2$, onda on realizuje i $\Sigma_1$.

Pretpostavimo sada da varijetet $\mathrm{Mod}(\Sigma_2)$ realizuje $\Sigma_1$. Drugim riječima, postoji interpretacija $\tau_1$ jezika $\sigma_1$ u jeziku $\sigma_2$ koja je svjedok te realizacije. Neka je $\mathcal{V}$ proizvoljan varijetet nekog jezika $\mathcal{F}$ i neka $\mathcal{V}$ realizuje $\Sigma_2$. Sa $\tau_2$ označimo interpretaciju jezika $\sigma_2$ u jeziku $\mathcal{F}$ koja svjedoči toj realizaciji. Preslikavanje $\tau_2$ se prirodno proširuje na sve terme jezika $\sigma_2$ i to prošireno preslikavanje označimo sa $\tau_2'$. Kompozicija $\tau_2' \circ \tau_1$ je interpretacija jezika $\sigma_1$ u jeziku $\mathcal{F}$ i svjedoči realizaciji uslova $\Sigma_1$ u varijetetu $\mathcal{V}$. $\square$

## 2.1 Karakterizacije $\wedge$-poludistributivnosti u lokalno konačnim varijetetima

Ovdje ćemo izložiti neke Maljcevljeve karakterizacije svojstva kongruencijske $\wedge$-poludistributivnosti u lokalno konačnim varijetetima. Prvo definišimo nekoliko neophodnih pojmova.

Definicija 2.8. Neka je $t$ term arnosti $n > 1$ na jeziku $\mathcal{F}$ i neka su $\mathbf{A}$ i $\mathcal{V}$ algebra i varijetet takođe na jeziku $\mathcal{F}$.

- Term $t$ je *skoro jednoglasan*[†], ili kraće *nu-term* algebre $\mathbf{A}$ (ili varijeteta $\mathcal{V}$) ako $\mathbf{A}$ (ili $\mathcal{V}$) zadovoljava identitete

$$t(x, x, \ldots, x, y) \approx t(x, x, \ldots, y, x) \approx \cdots \approx t(y, x, \ldots, x, x) \approx x.$$

  Egzistenciju nu-terma arnosti $n$ u algebri $\mathbf{A}$ (varijetetu $\mathcal{V}$) označavamo sa $\mathbf{A} \models \mathrm{NU}(n)$ ($\mathcal{V} \models \mathrm{NU}(n)$).

- Term $t$ je *slabo skoro jednoglasan*[‡], ili kraće *wnu-term* algebre $\mathbf{A}$ (ili varijeteta $\mathcal{V}$) ako $\mathbf{A}$ (ili $\mathcal{V}$) zadovoljava idempotentnost i identitete

$$t(x, x, \ldots, x, y) \approx t(x, x, \ldots, y, x) \approx \cdots \approx t(y, x, \ldots, x, x).$$

  Egzistenciju wnu-terma arnosti $n$ u algebri $\mathbf{A}$ (varijetetu $\mathcal{V}$) označavamo sa $\mathbf{A} \models \mathrm{WNU}(n)$ ($\mathcal{V} \models \mathrm{WNU}(n)$).

Definicija 2.9. Neka je $\mathbf{R} = (R, +, \cdot, -, 0, 1)$ neki komutativan prsten sa jedinicom. Algebra $\mathbf{M} = (M, +, -, (r\cdot)_{r\in R}, 0)$ je *(lijevi*[§]*) modul nad prstenom* $\mathbf{R}$ (ili kraće $\mathbf{R}$-modul) ako je $(M, +, -, 0)$ Abelova grupa i za sve $r, s \in R$ važi:

(1) $r \cdot (x + y) \approx r \cdot x + r \cdot y$;

[†] engl. near unanimity.

[‡] engl. weak near unanimity.

[§] Desni modul se definiše na isti način samo što se u uslovima 1-4. $r$ i $s$ pišu sa desne strane $x$ i $y$, ali kako pretpostavljamo da je prsten komutativan lijevi i desni modul su isti, pa koristimo samo naziv $\mathbf{R}$-modul.

(2) $(r+s)\cdot x \approx r\cdot x + s\cdot x$;

(3) $r\cdot(s\cdot x)\approx (rs)\cdot x$;

(4) $1\cdot x\approx x$.

Za modul kažemo da je *netrivijalan* ako njegov univerzum ima bar dva elementa.

Ono što je iz definicije **R**-modula **M** jasno jeste da možemo dati jednostavan i praktičan opis terma pomenutog modula. Naime, za svaki term $t(x_1,\dots,x_n)$ postoje $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in R$ takvi da u **M** važi:

$$t(x_1,\dots,x_n)\approx \alpha_1\cdot x_1+\dots+\alpha_n\cdot x_n, \tag{$*$}$$

pri čemu $n$-torka $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in R^n$ ne mora biti jednoznačno određena. Ovakav opis terma modula nam omogućava da precizno opišemo i idempotentne terme modula. Term $t(x_1,\dots,x_n)$ idempotentan ako i samo ako elementi $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in R$ mogu biti odabrani tako da važi $\alpha_1+\dots+\alpha_n=1$.

Modul **M** je *vjeran* **R**-*modul* ako u njemu ne važi identitet $\alpha\cdot x\approx 0$ ni za jedan element $\alpha\in R\setminus\{0\}$. Lako se provjerava da je u slučaju vjernog modula $n$-torka $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in R^n$ iz ($*$) jednoznačno određena. Takođe, ukoliko uzmemo ideal $I=\{\alpha\in R : (\forall m\in M)\,\alpha\cdot m=0\}$, onda **R**-modul **M** na standardan način određuje **R**/$I$-modul $\overline{\mathbf{M}}$, pri čemu je $\overline{\mathbf{M}}$ vjeran **R**/$I$-modul. Elementi skupa $I$ ne utiču na term operacije u $\overline{\mathbf{M}}$, pa **M** i $\overline{\mathbf{M}}$ imaju iste term operacije tj. term-ekvivalenti su. Kako term-ekvivalentne algebre realizuju isti skup Maljcevljevih uslova, onda u nastavku svaki put kada radimo sa Maljcevljevim uslovima na modulu možemo bez umanjenja opštosti pretpostaviti da je isti i vjeran.

TEOREMA 2.10. *Neka je $\mathcal{V}$ lokalno konačan varijetet. Sljedeći uslovi su ekvivalentni:*

(1) *$\mathcal{V}$ je kongruencijski $\wedge$-poludistributivan;*

(2) *Postoji prirodan broj $m>1$ takav da $\mathcal{V}\models \mathrm{WNU}(k)$ za sve $k\geq m$;*

(3) *$\mathcal{V}$ realizuje idempotentan Maljcevljev uslov koji nije realizovan ni u jednom netrivijalnom varijetetu modula;*

(4) *$\mathcal{V}$ realizuje idempotentan i linearan jak Maljcevljev uslov takav da za proizvoljno konačno polje $\mathbb{F}$ on nije realizovan u varijetetu vektorskih prostora nad $\mathbb{F}$.*

DOKAZ. Za dokaz ekvivalencije (1) i (2) vidjeti [50], ekvivalencija (1) i (3) je dokazana u [41] (i to za proizvoljan varijetet, a ne samo lokalno konačan), a da je (4) ekvivalentno sa (1) dokazano je u [31]. □

Postojanje wnu-terma konkretne arnosti $k$ predstavlja jako Maljcevljevo svojstvo, pa je jasno da ekvivalencija (1) i (2) iz prethodne teoreme predstavlja Maljcevljevu karakterizaciju jer je neophodno da varijetet realizuje prebrojivo mnogo jakih Maljcevljevih uslova. Da je svojstvo kongruencijske $\wedge$-poludistributivnosti jako Maljcevljevo svojstvo u lokalno konačnim varijetetima dokazali su Kožik, Krokin, Valeriot i Vilard 2009. godine. Naime, oni su pokazali da su dovoljna dva wnu-terma arnosti 3 i 4.

TEOREMA 2.11 ([46, Teorema 2.8]). *Lokalno konačan varijetet $\mathcal{V}$ je kongruencijski $\wedge$-poludistributivan ako i samo ako $\mathcal{V}$ realizuje jak Maljcevljev uslov*

$$\begin{aligned} p(x,x,x,x) \approx q(x,x,x) &\approx x, \\ p(y,x,x,x) \approx p(x,y,x,x) \approx p(x,x,y,x) &\approx p(x,x,x,y) \\ \approx q(y,x,x) \approx q(x,y,x) &\approx q(x,x,y). \end{aligned} \tag{KKVW}$$

DOKAZ. Za implikaciju ($\Rightarrow$) vidjeti dokaz posljedice 3.40, dok se suprotna implikacija dokazuje na sličan način kao u narednoj posljedici. $\square$

Kao što vidimo klasa $\mathcal{M}_{\{\mathbf{1},\mathbf{2}\}}$ je definabilna i jakim Maljcevljevim uslovom, a prema [46] to je zapravo jedina takva od 6 klasa iz poglavlja 1.4. Jednostavna posljedica prethodne teoreme je sljedeći (neobjavljen) jak Maljcevljev uslov sa tri ternarna terma do koga su prvi došli Janko i Maroti.

POSLJEDICA 2.12 ([40]). *Lokalno konačan varijetet $\mathcal{V}$ je kongruencijski $\wedge$--poludistributivan ako i samo ako $\mathcal{V}$ realizuje jak Maljcevljev uslov*

$$\begin{gathered} r(x,x,x) \approx s(x,x,x) \approx t(x,x,x) \approx x, \\ r(x,x,y) \approx r(x,y,x) \approx r(y,x,x) \approx s(x,x,y) \\ \approx s(x,y,x) \approx t(x,y,x) \approx t(y,x,x), \\ s(x,y,y) \approx t(x,x,y). \end{gathered} \tag{JM}$$

DOKAZ. Pretpostavimo prvo da je $\mathcal{V}$ lokalno konačan i da je kongruencijski $\wedge$-poludistributivan. Za $r(x,y,z) = q(x,y,z)$, $s(x,y,z) = p(x,x,y,z)$ i $t(x,y,z) = p(x,y,z,z)$, iz prethodne teoreme dobijamo da $\mathcal{V}$ realizuje traženi jak Maljcevljev uslov.

Dokažimo sada da uslov (JM) nije realizovan ni u jednom netrivijalnom varijetetu modula. Pretpostavimo da je realizovan u vjernom $\mathbf{R}$-modulu $\mathbf{M}$ i neka je $r(x_1,x_2,x_3) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$, $s(x_1,x_2,x_3) = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3$ i $t(x_1,x_2,x_3) = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3$. Ubacivanjem $x = 0$ u drugi niz identiteta dobijamo da je $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \beta_2 = \beta_3 = \gamma_1 = \gamma_2 =: \alpha$. Iz posljednjeg identiteta za $y = 0$ dobijamo da $\beta_1 = 2\alpha$ što zajedno sa $r(x,x,x) = s(x,x,x) = x$ daje $3\alpha = 4\alpha = 1$. S jedne strane imamo da $\alpha = 4\alpha - 3\alpha = 1 - 1 = 0$, a s druge da je $3\alpha = 1$, pa zaključujemo da $0 = 1$ u $\mathbf{R}$. Dakle, $\mathbf{R}$ je trivijalan, pa iz $0 = 1$ u $\mathbf{R}$ slijedi da $x = 1x = 0x = 0$ u $\mathbf{M}$. Stoga je i $\mathbf{M}$ trivijalan, čime je dokaz završen. $\square$

Sljedeći rezultat je iz 2015. godine i za njega su zaslužni Jovanović, Marković, Makenzi i Mur. Pomenuti autori su se u [40] bavili optimizacijom jakih Maljcevljevih uslova i jedan od rezultata je karakterizacija putem jednog terma arnosti 4.

TEOREMA 2.13 ([40, Teorema 3.2]). *Lokalno konačan varijetet $\mathcal{V}$ je kongruencijski $\wedge$-poludistributivan ako i samo ako $\mathcal{V}$ realizuje jak Maljcevljev uslov*

$$\begin{aligned} t(x,x,x,x) &\approx x, \\ t(y,x,x,x) \approx t(x,y,x,x) &\approx t(x,x,y,x) \approx t(x,x,x,y) \\ \approx t(y,y,x,x) &\approx t(y,x,y,x) \approx t(x,y,y,x). \end{aligned} \tag{JMMM}$$

Jednostavna posljedica prethodne teoreme je i karakterizacija putem jakog Maljcevljevog uslova sa dva ternarna terma.

POSLJEDICA 2.14 ([40, Posljedica 3.3]). *Lokalno konačan varijetet $\mathcal{V}$ je kongruencijski $\wedge$-poludistributivan ako i samo ako $\mathcal{V}$ realizuje jak Maljcevljev uslov*

$$\begin{aligned} p(x,x,x) \approx q(x,x,x) &\approx x, \\ p(x,x,y) &\approx p(x,y,y), \\ p(x,y,x) \approx q(y,x,x) &\approx q(x,y,x) \approx q(x,x,y). \end{aligned} \tag{JMMM'}$$

Prema [40] gornji uslov je optimalan, odnosno ima najmanji mogući broj identiteta od svih jakih Maljcevljevih uslova sa dva ternarna terma koji karakterišu kongruencijsku $\wedge$-poludistributivnost lokalno konačnih varijeteta. Pored toga je dokazano i da nijedan jak Maljcevljev uslov sa jednim ternarnim i proizvoljnim brojem binarnih terma ne karakteriše kongruencijsku $\wedge$-poludistributivnost u lokalno konačnim varijetetima.

### 2.1.1 Motivacija za dalja izučavanja

Sada ćemo ukratko prezentovati problem koji je inicirao početak istraživanja čiji su rezultati i tema ove disertacije, kao i jedan rezultat koji je bio motivacija da se početne metode i rezultati dodatno uopšte.

Neka su $t$ i $s$ termi arnosti $n$ i $k$ redom, a $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ i $B = [b_{ij}]_{m\times k}$ matrice promjenljivih. Izraz $t[A] \approx s[B]$ predstavlja sistem od $m$ identiteta $t(a_{i1}, \dots, a_{in}) \approx s(b_{i1}, \dots, b_{ik})$, $1 \leq i \leq m$.

Koristeći ovaj način zapisivanja sistema identiteta možemo npr. reći da je neki term $w$ arnosti $n$ nu term ako i samo važi $w[C] \approx X$, gdje je $C$ matrica formata $n \times n$ koja na glavnoj dijagonali ima sve $y$ dok su svi ostali elementi $x$, a $X$ je matrica formata $n \times 1$ sa svim elementima jednakim $x$.

TEOREMA 2.15 ([9, Teorema 1.3]). *Lokalno konačan varijetet $\mathcal{V}$ je kongruencijski $\wedge$-poludistributivan ako i samo ako važi jedan od sljedeća dva ekvivalentna uslova:*

(I) *postoji $n \in \mathbb{N}$ i $n$-arni term $t$ na jeziku varijeteta $\mathcal{V}$ takav da $\mathcal{V}$ zadovoljava $t[A] \approx t[B]$ za $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ i $B = [b_{ij}]_{n\times n}$, gdje je $a_{ii} = x$ i $b_{ii} = y$ za sve $i$, i $a_{ij} = b_{ij} \in \{x, y\}$ za sve $i > j$.*

(II) *postoji $n \in \mathbb{N}$ i $n$-arni term $t$ na jeziku varijeteta $\mathcal{V}$ takav da $\mathcal{V}$ zadovoljava $t[A] \approx t[B]$ za $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ i $B = [b_{ij}]_{n\times n}$, gdje je $a_{ii} = x$ i $b_{ii} = y$ za sve $i$ i $a_{ij} = b_{ij} \in \{x, y\}$ za sve $i \neq j$.*

Term $t$ iz uslova (I) se naziva SD($\wedge$)-*term*[¶] varijeteta $\mathcal{V}$, dok se term iz uslova (II) naziva *jak* SD($\wedge$)-*term* varijeteta $\mathcal{V}$.

Na konferenciji Structure and Complexity in Universal Algebra održanoj u jesen 2016. godine u Nešvilu Ros Vilard je na svom predavanju između ostalog postavio i naredna dva pitanja.

Problem 2.16. Da li postoji prirodan broj $n$ takav da svaki lokalno konačan kongruencijski $\wedge$-poludistributivan varijetet ima SD($\wedge$)-term arnosti $n$? A jak SD($\wedge$)-term arnosti $n$?

Odgovor na prvo pitanje je potvrdan i to za $n = 4$. Traženi SD($\wedge$)-term je term $p(x_1, x_2, x_3, x_4) = t(x_4, x_3, x_2, x_1)$, gdje je $t$ term koji zadovoljava sistem (JMMM) iz teoreme 2.13. Da je to SD($\wedge$)-term vidimo iz

$$p\left(\begin{bmatrix} x & y & x & x \\ x & x & x & y \\ x & x & x & y \\ x & x & y & x \end{bmatrix}\right) \approx p\left(\begin{bmatrix} y & x & x & x \\ x & y & x & y \\ x & x & y & y \\ x & x & y & y \end{bmatrix}\right).$$

Takođe, jasno je da zbog pozicije (1,2) unutar matrice term $p$ nije i jak SD($\wedge$)-term, a može se dokazati i da nijedno drugo uređenje identiteta sistema ne daje jak SD($\wedge$)-term. Potvrdan odgovor i na drugi dio problema 2.16 slijedi iz naredne teoreme, koja je ustvari posljedica teoreme 4.34.

Teorema 2.17. *Lokalno konačan varijetet $\mathcal{V}$ je kongruencijski $\wedge$-poludistributivan ako i samo ako $\mathcal{V}$ realizuje jak Maljcevljev uslov*

$$\begin{aligned} t(x,x,x,x) &\approx x, \\ t(x,x,x,y) \approx t(x,x,y,x) &\approx t(x,y,x,x) \approx t(y,x,x,x) \\ &\approx t(y,y,x,x) \approx t(y,x,y,x) \approx t(y,x,x,y). \end{aligned} \tag{DMUZ}$$

Dokaz. Vidjeti dokaz teoreme 4.34. □

Term $t$ je jak SD($\wedge$)-term jer važi

$$t\left(\begin{bmatrix} x & x & x & y \\ y & x & x & x \\ y & x & x & x \\ y & x & x & x \end{bmatrix}\right) \approx t\left(\begin{bmatrix} y & x & x & y \\ y & y & x & x \\ y & x & y & x \\ y & x & x & y \end{bmatrix}\right).$$

[¶]SD je skraćeno od semidistributive, što je engleska riječ za poludistributivnost.

U nastavku predstavljamo uopštenje jednog smjera prethodne teoreme. U [12] Z. Brejdi je opisao čitavu jednu klasu terma koji postoje u svakom lokalno konačnom kongruencijski $\wedge$-poludistributivnom varijetetu, a među kojima su i termi koji zadovoljavaju (JMMM), odnosno (DMUZ). Termi iz [12] su indeksirani određenim presijecajućim familijama skupova, pa ćemo sada iste i definisati.

Definicija 2.18. Neka je $X$ neprazan konačan skup. Neprazna familija skupova $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X) \setminus \{X\}$ je *presijecajuća* ako svaka dva njena člana imaju neprazan presjek.

Za jednostavniju formulaciju teoreme nam je potrebna adekvatna notacija: ako $U \subseteq \{x_1, \ldots, x_k\}$, onda $x_i^U := y$ za $x_i \notin U$, a $x_i^U := x$ za $x_i \in U$. Ovo je baš suprotno notaciji koju ćemo koristiti u većem dijelu četvrte glave, ali to radimo da bismo u originalu citirali teoremu iz [12].

Teorema 2.19 ([12, Teorema 5]). *Neka je $\mathcal{V}$ lokalno konačan kongruencijski $\wedge$-poludistributivan varijetet. Postoji term $u(x, y)$ na jeziku varijeteta $\mathcal{V}$ takav da za svako $k \geq 2$, svaki skup promjenljivih $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$ i svaku maksimalnu presijecajuću familiju $\mathcal{F}$ na $X$, postoji idempotentan term $t_{\mathcal{F}}(x_1, \ldots, x_k)$ na jeziku varijeteta $\mathcal{V}$ takav da $\mathcal{V}$ zadovoljava*

$$t_{\mathcal{F}}(x_1^U, \ldots, x_k^U) \approx u(x, y)$$

*za sve $U \in \mathcal{F}$.*

Za term $t$ koji zadovoljava (DMUZ) možemo uzeti $t_{\mathcal{F}}$ iz prethodne teoreme za $\mathcal{F} = \{\{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,3,4\}, \{1,2,4\}, \{2,3,4\}\}$, dok za $\mathcal{F}' = \{\{1,4\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,3,4\}, \{1,2,4\}, \{2,3,4\}\}$ term $t_{\mathcal{F}'}$ zadovoljava (JMMM) iz teoreme 2.13.

U četvrtoj glavi će biti prezentovano uopštenje tehnike iz [40], kojim je takođe moguće dokazati teoremu 2.19, s tim da se usput dokazuje i karakterizacija jakih Maljcevljevih uslova koji važe u lokalno konačnim kongruencijski $\wedge$-poludistributivnim varijetetima putem realizacije u određenoj četvoroelementnoj algebri.

Glava **3**

# Ograničena širina

Ovdje najvećim dijelom izlažemo rezultate prezentovane u [4], s tim da su dokazi dosta detaljnije ispisani nego u pomenutom radu, a i u dio sa primjenama dodata je jedna važna posljedica.

## 3.1 Problem zadovoljenja uslova

U uvodnoj glavi smo naveli nekoliko načina definisanja Problema zadovoljenja uslova. Za naše potrebe najpogodniji je posljednji od navedenih - preko vrijednosti promjenljivih. S tim da mi nećemo koristiti standardnu verziju ove definicije gdje se instanca CSP-a sastoji od skupa promjenljivih $V$, domena $D$ i skupa uslova $\mathcal{C}$, u kome je svaku uslov oblika $(\mathbf{x}, R)$, pri čemu $\mathbf{x} \in V^k$ i $R \subseteq D^k$. Sam problem je pitanje postojanja preslikavanja $f\colon V \to D$ koje zadovoljava sve uslove, tj. $f(\mathbf{x}) \in R$ za svaki par $(\mathbf{x}, R)$.

Međutim, za naše potrebe je pogodnija verzija u kojoj umjesto relacija imamo funkcije. Uslovi u kojima dolazi do ponavljanja promjenljivih (to nam ne odgovara u slučaju funkcija) mogu biti zamijenjeni uslovima bez ponavljanja. Uzmimo recimo uslov $((x, y, y), R)$. Njega možemo zamijeniti parom uslova $((x, y, z), R)$, $((y, z), =)$, gdje je $z$ nova promjenljiva. Slično, poredak promjenljivih možemo mijenjati proizvoljno; npr. uslov $((x, y), R)$ zamijenimo uslovom $((y, x), R^{-1})$.

Definicija 3.1. *Instanca* CSP-a je uređena trojka $\mathcal{I} = (V, D, \mathcal{C})$, gdje je:

- $V$ je neprazan, konačan skup promjenljivih;
- $D$ je neprazan, konačan domen;
- $\mathcal{C}$ je neprazan, konačan skup uslova, gdje je svaki uslov $C$ podskup od $D^W$, za neki $W \subseteq V$.

Skup $W \subseteq V$ iz prethodne definicije naziva se *opseg* uslova $C$, a njegova kardinalnost je *arnost* uslova $C$. Instanca je *trivijalna* ako sadrži prazan skup kao uslov.

Postavlja se pitanje da li postoji *rješenje* instance $\mathcal{I}$, odnosno da li postoji funkcija $f\colon V \to D$ takva da je, za svaki uslov $C \in \mathcal{C}$ sa opsegom $W$, restrikcija $f{\restriction}_W$ u $C$. Razmatraćemo restrikciju problema tako da uslovi budu iz nekog unaprijed datog skupa relacija.

Definicija 3.2. *Jezik uslova*, u oznaci $\Gamma$, je skup relacija na konačnom skupu $D$ zajedno sa relacijom jednakosti. *Problem zadovoljenja uslova nad jezikom* $\Gamma$, u oznaci CSP($\Gamma$), je potklasa CSP problema definisana svojstvom da svaki uslov ima uređenje koje pripada $\Gamma$. Takođe, koristi se i oznaka CSP($\mathbb{D}$), gdje je $\mathbb{D}$ relacijska struktura $(D; \Gamma)$.

Pojasnimo ovaj dio '...definisana svojstvom da svaki uslov ima uređenje koje pripada $\Gamma$.':

Neka je $\mathcal{I}$ instanca CSP($\Gamma$) i neka je $C \subseteq D^W$ jedan njen uslov arnosti $n$. Na ovaj uslov možemo gledati kao na skup dozvoljenih preslikavanja skupa promjenljivih $W$ u domen $D$. Ako promjenljive skupa $W$ uredimo na neki način, onda datom uslovu implicitno odgovara jedna $n$-arna relacija $R$ na skupu $D$. Naime, skup $R \subseteq D^n$ sadrži sve uređene $n$-torke dozvoljenih vrijednosti za promjenljive iz $W$. Da bi $\mathcal{I}$ pripadalo klasi CSP($\Gamma$), mora postojati permutacija skupa $W$ (koja povlači i permutaciju elemenata unutar $n$-torki relacije $R$) takva da se od relacije $R$ dobija neka relacija iz $\Gamma$.

Navedena definicija nije standardna jer se u njoj ne traži da jezik sadrži relaciju jednakosti. Međutim, na osnovu [47] ubacivanje iste ne utiče niti na složenost problema, niti na (relacijsku) širinu.

## 3.2 Konzistencija

### 3.2.1 Relacijska širina

Relacijsku širinu $(k, l)$ je najjednostavnije definisati preko $(k, l)$-minimalne instance.

Definicija 3.3. Neka su $l \geq k > 0$ prirodni brojevi. Instanca $\mathcal{I} = (V, D, \mathcal{C})$ Problema zadovoljenja uslova je $(k, l)$-*minimalna* ako:

(M1) Svaki najviše $l$-elementni podskup skupa promjenljivih je sadržan u opsegu nekog uslova iz $\mathcal{C}$;

(M2) Za svaki $W \subseteq V$, $|W| \leq k$, i svaki par uslova $C_1$ i $C_2$ iz $\mathcal{C}$ čiji opsezi sadrže $W$, važi $C_1{\restriction}_W = C_2{\restriction}_W$.

Osobina (M1) se naziva *$l$-gustina*, a (M2) je *$k$-konzistentnost*. Dakle, instanca je $(k, l)$-minimalna ako je $l$-gusta i $k$-konzistentna. Za instancu koja je $(k, k)$-minimalna kažemo da je i *$k$-minimalna*.

Iz definicije $(k, l)$-minimalnosti je jasno da je $(k, l)$-minimalna instanca i $(k', l')$-minimalna za sve $l'$ i $k'$, $l' \geq k' > 0$, takve da je $k' \leq k$ i $l' \leq l$. Ono što je nama važno je to da za fiksirane $k$ i $l$ svaku instancu $\mathcal{I}$ Problema zadovoljenja uslova možemo u polinomnom vremenu transformisati u $(k, l)$-minimalnu instancu koja ima isti skup rješenja kao $\mathcal{I}$. To radimo pomoću sljedećeg jednostavnog algoritma:

1. Za svaki podskup $W \subset V$ kardinalnosti $l$, ukoliko $W$ nije opseg nekog uslova, dodamo uslov $D^W$.

2. Sljedeći proces ponavljati dok se ne stabilizuje: za svaki $W \subset V$, kardinalnosti najviše $k$, i svaki par uslova $C_1$ i $C_2$ čiji opsezi sadrže $W$, odstraniti iz $C_1$ i $C_2$ sve funkcije $f$ takve da $f\restriction_W \notin C_1\restriction_W \cap C_2\restriction_W$.

Iz samog algoritma je jasno da on rezultuje $(k, l)$-minimalnom instancom. Drugi korak iz opsega eliminiše samo funkcije koje se neće poklapati sa eventualnim rješenjem, pa dobijena instanca ima isti skup rješenja kao početna tj. *ekvivalentne* su. Takođe, rezultat ne zavisi od redoslijeda odstranjivanja funkcija, pa ćemo jedinstvenu instancu $\mathcal{J}$ dobijenu po završetku rada pomenutog algoritma zvati *$(k, l)$-minimalna instanca pridružena $\mathcal{I}$*.

Ukoliko je $\mathcal{J}$ trivijalna, onda $\mathcal{I}$ nema rješenja. Međutim, u suprotnom ne možemo u opštem slučaju zaključiti da početna instanca ima rješenje. Stoga, uvodimo sljedeću definiciju.

DEFINICIJA 3.4. Jezik uslova $\Gamma$ ima *relacijsku širinu* $(k, l)$ ako za svaku instancu $\mathcal{I}$ problema CSP($\Gamma$), $\mathcal{I}$ ima rješenje ukoliko je $(k, l)$-minimlana instanca pridružena $\mathcal{I}$ netrivijalna.

$\Gamma$ ima *relacijsku širinu* $k$ ako ima relacijsku širinu $(k, k)$, dok kažemo da $\Gamma$ ima *ograničenu relacijsku širinu* ako ima relacijsku širinu $(k, l)$ za neke $k$ i $l$.

Jasno je da, ako $\Gamma$ ima relacijsku širinu $(k, l)$, onda ima i $(k', l')$ relacijsku širinu za sve $k'$ i $l'$, $k' \geq k$, $l' \geq l$. U tom slučaju one probleme zadovoljenja uslova koji imaju ograničenu širinu možemo urediti u odnosu na najmanju relacijsku širinu koju imaju. Međutim, ispostavlja se da (objedinjujući nekoliko rezultata) ta hijerarhija značajno kolapsira.

TEOREMA 3.5 ([22, Teorema 1]). *Ako jezik uslova ima relacijsku širinu* 2, *onda ima i relacijsku širinu* 1.

TEOREMA 3.6 ([26]). *Ako jezik uslova ima relacijsku širinu* $(1, l)$ *za neko* $l$, *onda ima i relacijsku širinu* 1.

Objedinjujući prethodna dva rezultata, kao i glavni rezultat iz [4] (vidjeti posljedicu 3.39), dobijamo sljedeću teoremu.

TEOREMA 3.7 (Trihotomija relacijske širine). *Svaki jezik uslova* $\Gamma$ *ima tačno jednu od sljedećih osobina:*

(1) $\Gamma$ *ima relacijsku širinu* $1$*;*

(2) $\Gamma$ *ima relacijsku širinu* $(2,3)$ *i nema relacijsku širinu* $2$*, niti* $(1,l)$ *za* $l \geq 1$*;*

(3) $\Gamma$ *nema ograničenu relacijsku širinu.*

### 3.2.2 $(k,l)$-sistem

Svaka $(k,l)$-minimalna instanca $\mathcal{J}$ implicitno sadrži jedinstven uslov $P_W$ za svaki najviše $k$-elementni opseg $W$. Naime, za $W \subseteq V$, $|W| \leq k$, zbog osobine (M1) postoji uslov $C$ čiji opseg sadrži $W$, a zbog (M2) projekcija $P_W = C\restriction_W$ ne zavisi od izbora $C$. Štaviše, ovi indukovani uslovi i svaki uslov $C \subseteq D^U$ instance $\mathcal{J}$ imaju osobinu:

($k$**-unaprijed za** $C$) Za svaki $W \subseteq U$ kardinalnosti najviše $k$ i svako $f \in P_W$ postoji $g \in C$ takvo da je $g\restriction_W = f$ i $g\restriction_Z \in P_Z$, za sve $Z \subseteq U$, $|Z| \leq k$.

DEFINICIJA 3.8. Instanca $\mathcal{K} = (V, D, \{P_W : W \subseteq V,\ |W| \leq k\})$ se naziva $(k,l)$-*sistem* ako je $(P_W)\restriction_Z = P_Z$ za sve $Z, W \subseteq V$, $Z \subseteq W$, $|W| \leq k$ i $\mathcal{K}$ zadovoljava $k$-unaprijed osobinu za $D^U$ za svaki $U$ kardinalnosti $l$.

Instanca $\mathcal{I}$ je *kompatibilna sa* $(k,l)$-*sistemom* $\mathcal{K}$ ako $\mathcal{I}$ i $\mathcal{K}$ imaju isti skup promjenljivih, isti domen i $\mathcal{K}$ zadovoljava $k$-unaprijed osobinu za svaki uslov iz $\mathcal{I}$.

Sada ćemo pokušati da uspostavimo vezu između instance koja se dobija na kraju rada algoritma za $(k,l)$-minimalnost za ulaznu instancu $\mathcal{I}$ i $(k,l)$--sistema kompatibilnih sa $\mathcal{I}$.

TVRĐENJE 3.9. *Neka je* $\mathcal{J}$ $(k,l)$*-minimalna instanca pridružena instanci* $\mathcal{I}$ *i neka je* $\mathcal{K} = (V, D, \{P_W\})$ $(k,l)$*-sistem pridružen instanci* $\mathcal{J}$*. Sistem* $\mathcal{K}$ *je jednak najvećem (u odnosu na inkluziju uslova sa istim opsegom)* $(k,l)$*--sistemu* $\mathcal{K}' = (V, D, \{P'_W\})$ *kompatibilnom sa* $\mathcal{I}$*.*

DOKAZ. Sistem $\mathcal{K}'$ postoji jer je unija $(k,l)$-sistema kompatibilnih sa $\mathcal{I}$ $(k,l)$-sistem kompatibilan sa $\mathcal{I}$. Sistem $\mathcal{K}$ je kompatibilan sa $\mathcal{I}$, pa je $\mathcal{K} \leq \mathcal{K}'$. S druge strane, nijedno preslikavanje $g \in C$ koje dokazuje kompatibilnost $\mathcal{K}'$ sa $\mathcal{I}$ nije odstranjeno tokom rada algoritma za $(k,l)$-minimalnost, pa je $\mathcal{K}' \leq \mathcal{K}$ i samim tim $\mathcal{K} = \mathcal{K}'$. $\square$

PROPOZICIJA 3.10. *Neka je $\mathcal{I}$ instanca Problema zadovoljenja uslova i $l \geq k$ prirodni brojevi. Algoritam za $(k,l)$-minimalnost daje netrivijalnu instancu ako i samo ako postoji netrivijalan $(k,l)$-sistem kompataibilan sa $\mathcal{I}$.*

*Dakle, jezik uslova $\Gamma$ ima relacijsku širinu $(k,l)$ ako i samo ako svaka instanca* CSP($\Gamma$) *koja je kompatibilna sa netrivijalnim $(k,l)$-sistemom ima rješenje.*

## 3.3 Karakterizacija ograničene relacijske širine

Neka je $\Gamma$ jezik uslova na konačnom skupu $D$. Prema teoremi 1.5 skup $D$ zajedno sa sa svim polimorfizmima jezika $\Gamma$ formira klon polimorfizama $\mathbf{D}$.

DEFINICIJA 3.11. Jezik uslova $\Gamma$ je *jezgro* ako su svi njegovi unarni polimorfizmi bijekcije.

Naredna lema je u radu [47] dokazana za širinu, ali isto važi i za relacijsku širinu.

LEMA 3.12. (1) *Za sve $k$ i $l$, $k \leq l$, jezik uslova ima relacijsku širinu $(k,l)$ ako i samo njegovo jezgro ima relacijsku širinu $(k,l)$.*

(2) *Jezgro jezika uslova $\Gamma$ ima ograničenu relacijsku širinu ako i samo ako $\Gamma$ zajedno sa svim jednoelementnim unarnim relacijama ima ograničenu relacijsku širinu.*

Napravićemo vezu između ograničene širine i nekih algebarskih osobina klona polimorfizama. Konkretno, u pitanju je kongruencijska $\wedge$-poludistributivnost. Prvo se prisjetimo jedne od karakterizacija ove osobine, a koju smo naveli i kao dio teoreme 2.10.

TEOREMA 3.13. *Neka je $\mathbf{D}$ idempotentni klon sa konačnim univerzumom $D$. Varijetet $\mathsf{V}(\mathbf{D})$ je kongruencijski $\wedge$-poludistributivan ako i samo ako postoji prirodan broj $n$ takav da $\mathbf{D}$ ima wnu-term $t$ arnosti $m$ za sve $m \geq n$.*

Potreban uslov za ograničenu relacijsku širinu je da klon polimorfizama generiše kongruencijski $\wedge$-poludistributivan varijetet.

TEOREMA 3.14 ([47, Teorema 4.2]). *Neka je $\Gamma$ jezik uslova sa svim jednoelementnim unarnim relacijama i $\mathbf{D}$ njegov klon polimorfizama. Ako jezik $\Gamma$ ima ograničenu relacijsku širinu, onda je varijetet $\mathsf{V}(\mathbf{D})$ kongruencijski $\wedge$-poludistributivan.*

Prema [7], za konačne jezike uslova to je i dovoljan uslov.

TEOREMA 3.15 ([7, Teorema 1]). *Neka je $\Gamma$ konačan jezik uslova sa svim jednoelementnim unarnim relacijama i $\mathbf{D}$ njegov klon polimorfizama. Ako je $\mathsf{V}(\mathbf{D})$ kongruencijski $\wedge$-poludistributivan, onda $\Gamma$ ima ograničenu relacijsku širinu.*

U odjeljku sa posljedicama ćemo dokazati da prethodna teorema važi i u opštem slučaju, a ne samo za konačne jezike uslova.

Za kraj poglavlja definišemo Problem zadovoljenja uslova za algebre.

DEFINICIJA 3.16. Neka je $\mathbf{D}$ algebra. *Problem zadovoljenja uslova za algebru* $\mathbf{D}$, u oznaci CSP($\mathbf{D}$), je CSP restrikcija na instance gdje je svaki uslov poduniverzum nekog stepena algebre $\mathbf{D}$.

Ako je $\mathbf{D}$ algebra sa univerzumom $D$ a $\mathbb{D} = (D; \Gamma)$ relacijska struktura, pri čemu je $\Gamma \subseteq \mathsf{SP}_{fin}(\mathbf{D})$, onda kažemo i da je CSP($\mathbb{D}$) *kompatibilan sa* $\mathbf{D}$. Dakle, ako je CSP($\mathbb{D}$) kompatibilan sa $\mathbf{D}$ onda je svaka instanca CSP($\mathbb{D}$) ujedno i instanca CSP($\mathbf{D}$).

Klasa instanci Problema zadovoljenja uslova za algebru je invarijantna na algoritam za dobijanje $(k, l)$-minimalne instance.

LEMA 3.17. *Ako je* $\mathbf{D}$ *algebra i* $k \leq l$, *onda je* $(k, l)$*-minimalna instanca pridružena instanci* CSP($\mathbf{D}$) *takođe instanca* CSP($\mathbf{D}$).

DOKAZ. Dovoljno je dokazati da nakon primjene koraka 2 pomenutog algoritma novonastali uslovi ostaju poduniverzumi nekog stepena algebre $\mathbf{D}$. Neka je $W$ neki skup promjenljivih, a $C_1$ i $C_2$ uslovi u čijim opsezima je sadržan $W$. Takođe, pretpostavljamo da su $C_1$ i $C_2$ poduniverzumi stepena $\mathbf{D}$. Neka je $P = C_1\restriction_W \cap C_2\restriction_W$. Skup $P$ je presjek projekcija poduniverzuma stepena, pa je $P$ poduniverzum stepena algebre $\mathbf{D}$. Nakon uklanjanja nekih preslikavanja u koraku 2, dobijamo $C_i' = \{f \in C_i : f\restriction_W \in P\}$, što je poduniverzum stepena $\mathbf{D}$. □

## 3.4 Praške instance

Definisaćemo praške instance. Prije toga uvedimo nekoliko tehničkih pojmova. U narednoj definiciji, ali i ostatku ove glave, često ćemo koristiti notaciju $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$ za $n \in \mathbb{N}$.

DEFINICIJA 3.18. Neka je $\mathcal{I} = (V, D, \mathcal{C})$ 1-minimalna instanca Problema zadovoljenja uslova.

- *Putanja* dužine $k - 1 > 0$ od $x_1$ do $x_k$ je $(2k - 1)$-torka

  $$p = (x_1, C_1, x_2, C_2, \dots, x_{k-1}, C_{k-1}, x_k),$$

  gdje $x_i \in V$ za sve $i \in [k]$, $C_i \in \mathcal{C}$, i za sve $i \in [k-1]$ skup $\{x_i, x_{i+1}\}$ je u opsegu uslova $C_i$. Skup svih promjenljivih u $p$ označavamo sa $||p||$, tj. $||p|| = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$. Putanja je *zatvorena* ako je $x_1 = x_k$.

- $p$*-realizacija* u $\mathcal{I}$ je $(k - 1)$-torka $(f_1, \dots, f_{k-1})$ takva da, za sve $i \in [k-1]$, važi $f_i \in C_i$ i za sve $i < k - 1$, važi $f_i(x_{i+1}) = f_{i+1}(x_{i+1})$. Ova realizacija povezuje $f_1(x_1)$ i $f_{k-1}(x_k)$. Kažemo da $p$ *povezuje* $a \in P_x$ i $b \in P_y$ ako postoji $p$-realizacija koja povezuje $a$ i $b$.

- Za $X \subseteq V$, $x \in X$ i $a, b \in P_x$, kažemo da su $a$ i $b$ *povezani u* $X$ ako postoji putanja $p$ od $x$ do $x$ koja povezuje $a$ i $b$ tako da važi $||p|| \subseteq X$.
- Ako je $p$ putanja od $x$ do $y$ i $A \subseteq P_x$, definišemo podskup $A + p$ od $P_y$ sa
$$A + p = \{b \in P_y : (\exists a \in A)\ p \text{ povezuje } a \text{ i } b\}.$$
- Ako su $p = (x_1, C_1, \ldots, C_{k-1}, x_k)$ i $q = (y_1, C'_1, \ldots, C'_{l-1}, y_l)$ putanje takve da je $x_k = y_1$ definišemo $p+q = (x_1, C_1, \ldots, x_k = y_1, C'_1, \ldots, y_l)$ i $-p = (x_k, C_{k-1}, \ldots, C_1, x_1)$. Za zatvorenu putanju $p$ i prirodan broj $m$ koristimo oznaku $m \times p = \underbrace{p + p + \cdots + p}_{m}$.

Pisaćemo $A - p$ umjesto $A + (-p)$ i $A + p + q$ umjesto $(A + p) + q = A + (p + q)$. Sljedeće osobine proizilaze direktno iz definicije.

Propozicija 3.19. *Neka je $\mathcal{I} = (V, D, \mathcal{C})$ 1-minimalna instanca Problema zadovoljenja uslova. Neka $x, y \in V$, $A \subseteq P_x$, neka je $p$ putanja od $x$ do $y$ i $C$ uslov u čijem se opsegu nalazi $x$. Važi:*

(1) $P_x + p = P_y$;

(2) $A \subseteq A + p - p$;

(3) $A + (x, C, x) = A$.

Pređimo na definiciju glavnog pojma ove glave.

Definicija 3.20. Instanca $\mathcal{I} = (V, D, \mathcal{C})$ Problema zadovoljenja uslova je *praška instanca* ako je 1-minimalna i važi:

(P) za sve $x \in V$, svaku zatvorenu putanju $p$ od $x$ do $x$, i sve $a, b \in P_x$, ako su $a$ i $b$ povezani u $||p||$ onda postoji $k > 0$ tako da $k \times p$ povezuje $a$ i $b$.

Sljedeća lema nam daje odnos praške i $(2, 3)$-minimalne instance.

Lema 3.21. *Svaka $(2, 3)$-minimalna instanca je i praška instanca.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{I} = (V, D, \mathcal{C})$ $(2, 3)$-minimalna instanca. Na osnovu definicije svaka $(2, 3)$-minimalna instanca je i 1-minimalna, pa onda ostaje da dokažemo da važi osobina (P). Neka su $x \in V$, $a, b \in P_x$ i putanja $p = (x_1, C_1, \ldots, x_k)$ od $x$ do $x$ takvi da su $a$ i $b$ povezani u $||p||$. Dokaz zasnivamo na sljedećem tvrđenju.

Tvrđenje 3.22. *Ako je $\mathcal{I} = (V, D, \mathcal{C})$ $(2, 3)$-minimalna instanca, $x, y \in V$ i $c, d \in D$ tako da je $(c, d) = (h(x), h(y))$ za neko $h \in P_{\{x,y\}}$, onda svaka putanja $q = (x, C_1, \ldots, y)$ povezuje $c$ i $d$.*

DOKAZ. Neka su $x_1(=x), x_2, \ldots, x_l(=y)$ promjenljive koje se redom javljaju u putanji $q$ i neka je $c_1 = c, c_l = d, h_1 = h$. Na osnovu 2-unaprijed osobine za uslov $D^{\{x_1,x_2,x_l\}}$ postoji element $c_2 \in P_{x_2}$ takav da je $(c_1, c_2) = (g(x_1), g(x_2))$ za neko $g \in P_{\{x_1,x_2\}}$ i $(c_2, c_l) = (h_2(x_2), h_2(x_l))$ za neko $h_2 \in P_{\{x_2,x_l\}}$. Kako važi $C_1\restriction_{\{x_1,x_2\}} = P_{\{x_1,x_2\}}$, zaključujemo da postoji $f_1 \in C_1$ tako da $f_1(x_1) = c_1$ i $f_1(x_2) = c_2$. Analogno nalazimo $c_3 \in P_{x_3}$ i $f_2 \in C_2$ tako da $f_2(x_2) = c_2$ i $f_2(x_3) = c_3$ itd. sve dok nakon $l-1$ koraka ne dobijemo $q$-realizaciju $(f_1, \ldots, f_{l-1})$ koja povezuje $c$ i $d$. $\square$

Vratimo se na dokaz leme. Neka je $p' = (x_{i_1}, C_{j_1}, \ldots, x_{i_m})$ putanja koja unutar $||p||$ povezuje $a$ i $b$, pri čemu je $x_{i_1} = x_{i_m} = x$. Onda postoji $p'$-realizacija $(f'_1, \ldots, f'_{m-1})$. Sada možemo primijeniti gornje tvrđenje na $x_{i_1}, x_{i_2} \in V$ i $f'_1(x_{i_1})(=a)$ i $f'_1(x_{i_2})$, pa dobijamo da $p_1 = (x_1, C_1, \ldots, x_{i_2})$, početni segment putanje $p$, povezuje $a$ i $f'_1(x_{i_2})$. U sljedećem koraku dobijamo da $p_2 = (x_{i_2}, C_{i_2}, \ldots, x_{i_3})$ povezuje $f'_2(x_{i_2}) = f'_1(x_{i_2})$ i $f'_2(x_{i_3})$, pri čemu je $p_2$ takođe jedan segment od $p$ i nadovezuje se na $p_1$. Nastavljajući postupak dobijamo niz segmenata $p_1, \ldots, p_m$ od $p$ koji se nadovezuju jedan na drugi, pa konačno imamo da putanja $p_1 + \cdots + p_m = k \times p$, za neko $k > 0$, povezuje $a$ i $b$. $\square$

Sada dokazujemo neke korisne osobine praških instanci.

LEMA 3.23. *Neka je $\mathcal{I} = (V, D, \mathcal{C})$ praška instanca, $x \in V$, i $p$ zatvorena putanja od $x$ do $x$. Tada postoji $m > 0$ tako da za sve $k \geq m$ i sve $a, b \in P_x$, ako su $a$ i $b$ povezani u $||p||$, onda $k \times p$ povezuje $a$ i $b$.*

DOKAZ. Dovoljno je dokazati da takav $m$ postoji za $a = b \in P_x$. Kako je $\mathcal{I}$ praška instanca, na osnovu osobine (P) slijedi da postoji $l > 0$ takav da $l \times p$ povezuje $a$ sa samim sobom. Neka je $c \in P_x$ takav da $p$ povezuje $a$ i $c$, a $(l-1) \times p$ povezuje $c$ i $a$. Opet koristimo osobinu (P), ali ovaj put na elemente $a$ i $c$, te putanju $l \times p$. Dobijamo $l' > 0$ takav da $l' \times (l \times p) = (ll') \times p$ povezuje $a$ i $c$. Dakle, putanje $l \times p$ i $(l'l + l - 1) \times p$ povezuju $a$ i $a$. Kako su $l$ i $l'l + l - 1$ uzajamno prosti prirodni brojevi, slijedi tvrđenje. $\square$

LEMA 3.24. *Neka je $\mathcal{I} = (V, D, \mathcal{C})$ praška instanca, $x, y \in V$, $p$ putanja od $x$ do $y$, $q$ putanja od $y$ do $x$, $A \subseteq P_x, B \subseteq P_y$, i $C \in \mathcal{C}$ uslov u čijem opsegu je skup $\{x, y\}$. Ako je $A + p = B$ i $B + q = A$, onda je $A + (x, C, y) = B$.*

DOKAZ. Prvo ćemo dokazati da je svaki element iz $A + (x, C, y)$ povezan unutar $||q + p||$ sa nekim elementom iz $B$. Neka $a' \in A + (x, C, y)$. Onda postoje $a \in A$ i $f \in C$ takvi da je $f(x) = a$ i $f(y) = a'$. Pokazaćemo da postoji realizacija putanje $(y, C, x) + p$ koja povezuje $a'$ sa nekim elementom iz $B$. Međutim, to jasno slijedi iz činjenice da $(y, C, x)$ povezuje $a'$ i $a$, koji je dalje putanjom $p$ povezan sa nekim elementom iz $B$ jer važi $A + p = B$.

Na osnovu definicije praške instance ovo znači da za svaki element $a'$ skupa $A + (x, C, y)$ postoje $k > 0$ i $b \in B$ takvi da $k \times (q + p)$ povezuje $b$ i $a'$. Imajući u vidu da je $B + k \times (q + p) = B$ (ovo induktivno slijedi iz $B + q + p = B$) dobijamo da je $A + (x, C, y) \subseteq B$. Analogno zaključujemo da je $B + (y, C, x) \subseteq A$. Sada je $B \subseteq B + (y, C, x) - (y, C, x) \subseteq A + (x, C, y)$ i konačno imamo $A + (x, C, y) = B$. □

Dokažimo sada još dvije osobine praških instanci. U radu [7] 1-minimalne instance koje imaju te osobine i imaju samo binarne uslove, i to najviše jedan za svaki par promjenljivih, su autori zvali *slabe praške instance*. Tu je dokazana teorema analogna glavnoj teoremi koju ćemo dokazati u ovoj glavi.

LEMA 3.25. *Neka je $\mathcal{I} = (V, D, \mathcal{C})$ praška instanca. Važi:*

(P1) *Za svaku zatvorenu putanju $p$ od $x$ do $x$ i svaki $A \subseteq P_x$, ako je $A + p = A$, onda je $A + p - p = A$;*

(P2) *Za sve zatvorene putanje $p$ i $q$ od $x$ do $x$ i svaki $A \subseteq P_x$, ako je $A + p + q = A$, onda je $A + p = A$.*

DOKAZ. Za osobinu (P1) je dovoljno dokazati da $A + p - p \subseteq A$ jer smo ranije vidjeli da obratna inkluzija važi za sve 1-minimalne instance. Neka $a \in A + p - p$ i neka je $b \in A + p = A$ takav da $-p$ povezuje $b$ i $a$. Dakle, $b$ i $a$ su povezani u $||p||$, pa su onda na osnovu osobine praške instance povezani i putanjom $k \times p$, za neko $k > 0$. Kako uslov $A + p = A$ implicira $A + k \times p = A$, slijedi da $a \in A + k \times p = A$, pa je dokaz gotov.

Dokažimo sada osobinu (P2). Primijetimo da možemo direktno primijeniti lemu 3.24, čime dobijamo $A + (x, C, x) = B$ tj. $A + (x, C, x) = A + p$. Sada iz stava (3) propozicije 3.19 slijedi $A + p = A$.

□

## 3.5 Teorema o praškoj instanci - dokaz i posljedice

TEOREMA 3.26. *Ako je* $\mathbf{D}$ *idempotentni klon koji generiše kongruencijski $\wedge$-poludistributivan varijetet, onda svaka netrivijalna praška instanca Problema zadovoljenja uslova* CSP($\mathbf{D}$) *ima rješenje.*

Dokaz će se razlikovati u slučaju kad postoji $\mathbf{P}_x$ koji ima tzv. apsorbujući poduniverzum i kad takav $\mathbf{P}_x$ ne postoji, pa definišimo pojam apsorpcije i navedimo neke rezultate koje ćemo koristiti.

DEFINICIJA 3.27. Poduniverzum $A$ idempotentnog klona $\mathbf{P}$ je *apsorbujući* ako postoji operacija $t$ arnosti $n > 1$ algebre $\mathbf{P}$ takva da $t(a_1, \ldots, a_n) \in A$, za svaku $n$- torku $(a_1, \dots, a_n) \in P^n$ za koju je $|\{i \in [n] : a_i \notin A\}| \leq 1$. Apsorbujući poduniverzum A je *pravi* ako $\emptyset \neq A \neq P$.

Za operaciju $t$ iz prethodne definicije kažemo da je *svjedok apsorpcije*. Sljedeća teorema je ključna u dokazu glavne teoreme u slučaju da postoji određeni apsorbujući poduniverzum. U [9] autori su operaciju $t$ iz naredne teoreme zvali *tačkasta operacija*.

TEOREMA 3.28 ([9, Lema 2.12]). *Ako je* $\mathbf{P}$ *idempotentni klon koji generiše kongruencijski* $\wedge$*-poludistributivan varijetet, onda postoje operacija* $t$ *i elementi* $c_1, \dots, c_n, b \in P$ *takvi da je* $t(a_1, \dots, a_n) = b$ *za sve* $(a_1, \dots, a_n) \in P^n$ *za koje je* $|\{i \in [n] : a_i \neq c_i\}| \leq 1$.

DEFINICIJA 3.29. Podskup $R \subseteq P \times Q$ je *povezan* ako je njegova projekcija na prvu (resp. drugu) koordinatu jednaka $P$ (resp. $Q$) i ako je tranzitivno zatvorenje relacije (tj. najmanja tranzitivna relacija koja je sadrži)

$$\{(a, b) \in P^2 : (\exists c \in Q)\, (a, c), (b, c) \in R\}$$

jednako $P^2$.

U slučaju nepostojanja apsorbujućeg poduniverzuma koristimo rezultat iz [5].

TEOREMA 3.30 ([5, Teorema 2.3]). *Neka je* $\mathbf{D}$ *idempotentni klon koji generiše kongruencijski* $\wedge$*-poludistributivan varijetet i* $R$ *poduniverzum od* $\mathbf{D}^2$. *Neka su* $P$ *i* $Q$ *projekcije* $R$ *na prvu i drugu koordinatu, redom, a* $\mathbf{P}$ *i* $\mathbf{Q}$ *odgovarajuće podalgebre od* $\mathbf{D}$. *Ako ni* $P$ *ni* $Q$ *nemaju pravi apsorbujući poduniverzum i ako je* $R$ *povezan, onda je* $R = P \times Q$.

U pomenutom radu prethodna teorema je data u opštijem obliku. Naime, tvrđenje važi i kada je $\mathbf{D}$ Tejlorova algebra, a mi smo iskoristili da je $\mathbf{D}$ Tejlorova algebra ako i samo ako ima wnu-term operaciju i to da kongruencijski $\wedge$-poludistributivna algebra ima wnu-operaciju, što je sve dokazano u [50].

U dokazu koristimo i dvije tehničke leme.

LEMA 3.31. *Neka* $x, y \in V$ *i neka je* $p$ *putanja od* $x$ *do* $y$. *Važi:*

(1) *Skup* $S = \{(a, b) \in P_x \times P_y : p \text{ povezuje } a \text{ i } b\}$ *je poduniverzum od* $\mathbf{D}^2$ *i njegova projekcija na prvu (resp. drugu) koordinatu je* $P_x$ *(resp.* $P_y$*);*

(2) *Ako je* $s$ $k$*-arna operacija na* $\mathbf{D}$, $A_1, \dots, A_k, B \subseteq P_x$ *i* $s(a_1, \dots, a_k) \in B$ *za sve* $a_i \in A_i$, $i \in [k]$, *onda za sve* $a'_1, \dots, a'_k \in P_y$ *takve da* $a'_i \in A_i + p$, $i \in [k]$, *važi* $s(a'_1, \dots, a'_k) \in B + p$*;*

(3) *Ako je* $A$ *(apsorbujući) poduniverzum od* $\mathbf{P}_x$, *onda je* $A + p$ *(apsorbujući) poduniverzum od* $\mathbf{P}_y$.

DOKAZ. (1) Prvi dio se jednostavno dokazuje po definiciji, dok drugi slijedi iz stava (1) propozicije 3.19;

(2) Po definiciji;

(3) Slijedi iz (2).

□

LEMA 3.32. *Ako su $R$ i $S$ poduniverzumi od $\mathbf{D}^2$, onda je i njihova relacijska kompozicija $R \circ S$ takođe poduniverzum od $\mathbf{D}^2$.*

DOKAZ. Po definiciji. □

## Dokaz teoreme 3.26:

Ukratko, ideja dokaza je da postepeno smanjujemo prašku instancu sve dok skupovi $P_x$ ne budu jednoelementni. Onda je očigledno da je preslikavanje koje slika $x$ u jedini element skupa $P_x$ rješenje.

Neka je $\mathbf{D}$ idempotentni klon koji generiše kongruencijski $\wedge$-poludistributivan varijetet i neka je $\mathcal{I} = (V, D, \mathcal{C})$ praška instanca Problema zadovoljenja uslova CSP($\mathbf{D}$) takva da je $|P_x| > 1$ za neko $x \in V$.

Dokazaćemo da postoje $n$-arna operacija $t$ klona $\mathbf{D}$, neprazan $X \subseteq V$ i podskupovi $P_x^i \subseteq P_x$, $x \in V$, $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ takvi da je:

(D1) $P_x^0$ je pravi podskup od $P_x$ za svako $x \in X$, a $P_x^i = P_x$ za sve $x \in V \backslash X$, $i \in \{0, 1, \dots, n\}$;

(D2) $P_x^i$ je poduniverzum od $\mathbf{P}_x$ za sve $x \in V, i \in \{0, 1, \dots, n\}$;

(D3) $P_x^i + (x, C, y) = P_y^i$ za sve $x \in X, y \in V, i \in \{0, 1, \dots, n\}$ i svaki uslov $C \in \mathcal{C}$ čiji opseg sadrži skup $\{x, y\}$;

(D4) $t(a_1, \dots, a_n) \in P_x^0$ za sve $x \in V, a_1, \dots, a_n \in P_x$ takve da $a_i \in P_x^i$ osim za najviše jedno $i \in [n]$.

Kao što smo ranije naglasili način konstrukcije će u mnogome zavisiti od egzistencije apsorbujućeg poduniverzuma, pa posmatramo dva slučaja.

### Sa apsorpcijom

Pretpostavimo da postoji $z \in V$ tako da $\mathbf{P}_z$ ima pravi apsorbujući poduniverzum $E$. Neka je $t$ operacija algebre $\mathbf{P}_z$ koja je svjedok apsorpcije i neka je $n$ njena arnost. Definišimo binarnu relaciju $\leq$ na skupu svih uređenih parova $(A, x)$, takvi da je $x \in V$ i $A \subsetneq P_x$, sa

$$(A, x) \leq (B, y) \text{ ako i samo ako } B = A + p \text{ za neku putanju } p \text{ od } x \text{ do } y.$$

Definisana binarna relacija je pretporedak. Svaku binarnu relaciju možemo posmatrati kao digraf, što ćemo sada uraditi i uočićemo komponente jake povezanosti. Među njima na prirodan način uspostavljamo poredak tako što je komponenta $\mathcal{A}_1$ manja ili jednaka od komponente $\mathcal{A}_2$ ako i samo ako je svaki element iz $\mathcal{A}_1$ manji ili jednak od svakog elementa $\mathcal{A}_2$.

Označimo sa $\mathcal{M}$ maksimalnu komponentu pretporetka koja je veća ili jednaka od komponente u kojoj se nalazi par $(E, z)$.

LEMA 3.33. *Za sve $x \in V$, ako $(A, x), (B, x) \in \mathcal{M}$, onda je $A = B$.*

DOKAZ. Kako su $(A, x)$ i $(B, x)$ u istoj komponenti jake povezanosti važi $(A, x) \leq (B, x) \leq (A, x)$, pa postoje zatvorene putanje $p$ i $q$ od $x$ do $x$ takve da je $A + p = B$ i $B + q = A$. Onda je $A + p + q = A$, pa na osnovu (P2) iz leme 3.25 dobijamo $A = A + p = B$. □

Za $X$ ćemo uzeti skup svih promjenljivih koje se pojavljuju u parovima iz $\mathcal{M}$. Prethodna lema nam omogućava da za sve $x \in X$ definišemo $P_x^0 = P_x^1 = \cdots = P_x^n$ kao jedinstven skup $A \subseteq P_x$ takav da je $(A, x) \in \mathcal{M}$. Za $x \in V \setminus X$ definišemo $P_x^i = P_x$ za sve $i \in \{0, \ldots, n\}$.

Samo još treba da pokažemo da za ovako definisane pojmove važe osobine (D1)-(D4).

- (D1) je zadovoljena na osnovu konstrukcije.
- Za $x \in V \setminus X$ osobina (D2) trivijalno važi. Ako $x \in X$ onda za sve $i \in \{0, \ldots, n\}$ važi $P_x^i = E + p$, gdje je $p$ putanja od $z$ do $x$, pa je na osnovu leme 3.31 (3) skup $P_x^i$ (apsorbujući) poduniverzum od $\mathbf{P}_x$.
- Neka $x \in X, y \in V, i \in \{0, \ldots, n\}$, i neka je $C \in \mathcal{C}$ uslov čiji opseg sadrži $\{x, y\}$. Ako $y \in X$ onda je $(P_x^i, x) \leq (P_y^i, y) \leq (P_x^i, x)$, pa postoje putanja $p$ od $x$ do $y$ i putanja $q$ od $y$ do $x$ takve da je $P_x^i + p = P_y^i$ i $P_y^i + q = P_x^i$. Na osnovu leme 3.24 slijedi $P_x^i + (x, C, y) = P_y^i$. Ako ipak $y \in V \setminus X$ onda je $P_x^i + (x, C, y) = P_y = P_y^i$ jer bi u suprotnom (tj. ako $P_x^i + (x, C, y) \subsetneq P_y$) par $(P_x^i + (x, C, y), y)$ pripadao pretporetku definisanom u početku, i samim tim bi, zbog maksimalnosti $\mathcal{M}$, $y$ pripadao skupu $X$.
- Osobina (D4) trivijalno važi za $x \in V \setminus X$, dok smo u dokazu osobine (D2) naveli zašto je $P_x^i$ apsorbujući poduniverzum od $\mathbf{P}_x$, pa (D4) važi i za $x \in X$.

### Bez apsorpcije

Pretpostavimo da nijedan $\mathbf{P}_x$ nema pravi apsorbujući poduniverzum. Neka je $z \in V$ proizvoljna promjenljiva takva da je $|P_z| > 1$ i neka je $\sim$ maksimalna kongruencija na $\mathbf{P}_z$. Na osnovu teoreme 3.28 postoji $n$-arna operacija

$t$ na $\mathbf{P}_z$ i elementi $c_1, \dots, c_n, b \in P_z$ takvi da $t(a_1, \dots, a_n) = b$ za sve $n$-torke $(a_1, \dots, a_n)$, gdje $a_i \in P_z$ i $|\{i : a_i \neq c_i\}| \leq 1$.

Neka je $P_z^0 = b/_\sim$ i $P_z^i = c_i/_\sim$ za sve $i \in [n]$. Definišimo skup $X$ sa

$$X = \{x \in V : postoji\ putanja\ p_x\ od\ z\ do\ x\ takva\ da\ P_z^0 + p_x \subsetneq P_x\}.$$

Sljedeći korak je da fiksiramo putanje $p_x$ iz definicije skupa $X$ (ako ih ima više proizvoljno odaberemo jednu). Na kraju za $x \in X$ definišemo $P_x^i = P_z^i + p_x$ za sve $i \in \{0, \dots, n\}$, a za $x \in V \setminus X$ uzimamo $P_x^i = P_x$. Ostaje nam da dokažemo da važe osobine (D1) - (D4).

- Osobina (D1) slijedi iz konstrukcije.

- Za $x \in V \setminus X$ trivijalno važi (D2). Neka $x \in X$. Klon $\mathbf{D}$ je idempotentan, pa je $P_z^i$, kao $\sim$-klasa, poduniverzum, što na osnovu (3) iz leme 3.31 znači da je i $P_x^i$ poduniverzum.

- Za dokaz osobine (D3) nam je potrebno sljedeće tvrđenje, koje je jedna posljedica teoreme 3.30.

  Tvrđenje 3.34. *Za svako $x \in V$ i svaku putanju $p$ od $z$ do $x$ važi tačno jedan od stavova:*

  (1) *za sve $i, j \in \{0, \dots, n\}$ takve da je $P_z^i \neq P_z^j$, skupovi $P_z^i + p$ i $P_z^j + p$ su disjunktni;*

  (2) *$P_z^i + p = P_x$ za sve $i \in \{0, \dots, n\}$.*

  Dokaz. Označimo $S = \{(a, c) \in P_z \times P_x : p$ povezuje $a$ i $c\}$ i neka je $R = \sim \circ S = \{(a, c) \in P_z \times P_x : p$ povezuje neko $a' \sim a$ i $c\}$. Relacije $S$ i $\sim$ su poduniverzumi od $\mathbf{D}^2$, pa je na osnovu leme 3.32 i $R$ poduniverzum od $\mathbf{D}^2$. Takođe, projekcije $R$ na prvu i drugu koordinatu su $P_z$ i $P_x$, redom.

  Označimo sa $\beta$ tranzitivno zatvorenje binarne relacije $\{(a, c) \in P_z \times P_z : (\exists d \in P_x)\,(a, d), (b, d) \in R\}$. Drugim riječima, relacija $\beta$ je tranzitivno zatvorenje relacije $R \circ R^{-1}$. Ova relacija ekvivalencije je i kongruencija na osnovu leme 3.32, jer je $R \leq (\mathbf{P}_z)^2$ i $\beta = R \circ R^{-1} \circ R \dots$ (konačan broj kompozicija).

  Kako je $\sim$ maksimalna kongruencija i kako je $\sim \subseteq \beta$ važi $\beta = \sim$ ili $\beta = P_z \times P_z$. Pretpostavimo prvo da je $\beta = \sim$. Dokazaćemo da onda važi (1). Neka su $i, j \in \{0, \dots, n\}$ takvi da su $P_z^i$ i $P_z^j$ disjunktni. Pretpostavimo suprotno tj. da postoji $d \in P_x$ takav da $d \in P_z^i + p$ i $d \in P_z^j + p$. Onda postoje $a' \in P_z^i$ i $a'' \in P_z^j$ takvi da $p$ povezuje $a'$ i $a''$ sa $d$. Relacija $\sim$ je refleksivna, pa $(a', d), (a'', d) \in R$. Međutim, ovo znači da $(a', a'') \in \beta = \sim$, kontradikcija.

Sada ćemo dokazati da iz $\beta = P_z \times P_z$ slijedi (2). Na osnovu teoreme 3.30 važi $R = P_z \times P_x$, ali iz toga je očigledno da za svako $d \in P_x$ postoji $a \in P_z^i$ takav da $p$ povezuje $a$ i $d$, pa onda važi (2). □

Ako $x \in X$ i ako je $p = p_x$ onda važi (1), jer za $P_z^0$ važi $P_z^0 + p_x \subsetneq P_x$. Dakle, ako je $P_z^i \neq P_z^j$, onda su $P_x^i = P_z^i + p_x$ i $P_x^j = P_z^j + p_x$ disjunktni. Pokažimo da u tom slučaju za svako $i \in \{0, \dots, n\}$ važi $P_x^i - p_x = P_z^i$. Naime, u suprotnom bi postojao $a \in P_x^i - p_x$ takav da $a \notin P_z^i$, što implicira da $a \in P_z^j$ za neko $j \neq i$. Iz $a \in P_x^i - p_x$ slijedi da postoji $b \in P_x^i$ takav da putanja $-p_x$ povezuje $b$ sa $a$ tj. putanja $p_x$ povezuje $a$ sa $b$. Uz to imamo da $a \in P_z^j$ i $P_x^j = P_z^j + p_x$, pa dobijamo da $b \in P_x^j$, što je kontradikcija.

Neka $x \in X$, $y \in V$ i neka je $C \in \mathcal{C}$ uslov čiji opseg sadrži $\{x, y\}$. Ako $y \in V \setminus X$ onda $P_z^0 + p_x + (x, C, y) = P_y$. Ovo znači da za $p = p_x + (x, C, y)$ važi slučaj (2) iz prethodnog tvrđenja, pa je $P_z^i + p_x + (x, C, y) = P_y$. Kako je $P_x^i = P_z^i + p_x$, dobijamo $P_x^i + (x, C, y) = P_y = P_y^i$. Ako ipak $y \in X$, onda iz prethodnog pasusa znamo da je $P_x^i - p_x = P_z^i$ i $P_y^i - p_y = P_z^i$. Konačno, $P_x^i - p_x + p_y = P_y^i$ i $P_y^i - p_y + p_x = P_x^i$, pa na osnovu leme 3.24 zaključujemo da je $P_x^i + (x, C, y) = P_y^i$.

- Za $x \in V \setminus X$ osobina (D4) trivijalno važi. Ako je $x \in X$ onda koristimo (2) iz leme 3.31 za $p = p_x$, $B = P_z^0$ i $A_i = P_z^i$ za sve osim jedno $i$, za koje uzimamo $A_i = P_z$.

### Smanjivanje instance

Konačno smo u situaciji da možemo garantovati postojanje $n$-arne operacije $t$ na $\mathbf{D}$, nepraznog skupa $X \subseteq V$ i podskupova $P_x^i \subseteq P_x$, $i \in \{0, \dots, n\}$, $x \in V$, koji zadovoljavaju (D1)-(D4).

Za svako $i \in \{0, \dots, n\}$ definišemo instancu $\mathcal{I}^i = (V, D, \mathcal{C}^i)$ tako da je $\mathcal{C}^i = \{C^i \colon C \in \mathcal{C}\}$, gdje za uslov $C$ sa opsegom $W$ važi

$$C^i = \{f \in C : (\forall x \in W)\, f(x) \in P_x^i\}.$$

Za sve $i \in \{0, \dots, n\}$ i $x \in V$ skup $P_x^i$ je poduniverzum od $\mathbf{P}_x$, pa i od $\mathbf{D}$. Kako je $C$ univerzum podalgebre nekog stepena $\mathbf{D}$, onda i $C^i$ posjeduje tu osobinu, pa je $\mathcal{I}^i$ instanca Problema zadovoljenja uslova CSP($\mathbf{D}$), za svako $i \in \{0, \dots, n\}$.

Lema 3.35. *Za svako $i \in \{0, \dots, n\}$ instanca $\mathcal{I}^i$ je 1-minimalna i $P_x^{(\mathcal{I}^i)} = P_x^i$, za sve $x \in V$.*

Dokaz. Treba dokazati da za svaki uslov $C \in \mathcal{C}$ i svako $x$ koje se nalazi u opsegu $W$ uslova $C$, projekcija $A$ uslova $C^i$ na $x$ je jednaka $P_x^i$. Inkluzija $A \subseteq P_x^i$ je očigledna, pa nam ostaje da dokažemo da je $P_x^i \subseteq A$. Neka $a \in A$.

Razlikujemo slučajeve:

(i) Pretpostavimo prvo da $x \in X$. Neka je $f$ proizvoljan element iz $C$ takav da je $f(x) = a$. Zbog (D3) znamo da za svako $y \in W$ važi $P_x^i + (x, C, y) = P_y^i$, pa $f(y) \in P_y^i$. Slijedi da $f \in C^i$ i samim tim $a = f(x) \in A$.

(ii) Ako $x \notin X$ i ako postoji $y \in W \setminus X$, onda na osnovu (D3) i drugog dijela (D1), važi $P_y^i + (y, C, x) = P_x$. Analogno kao u (i) slijedi da $f \in C^i$, a odatle i $a \in A$.

(iii) Ako je $X \cap W = \emptyset$, iz drugog dijela (D1) imamo da je $C = C^i$, odnosno $A = P_x = P_x^i$.

□

Vratimo se smanjivanju instance, odnosno dokazu glavne teoreme. Ostaje da se dokaže da je $\mathcal{J} = \mathcal{I}^0$ praška instanca. Vodićemo računa o tome da li neka putanja u $\mathcal{I}$ ili u $\mathcal{I}^i$ za neko $i$. Naime, ako je $p = (x_1, C_1, x_2, C_2, \dots)$ putanja u $\mathcal{I}$ koristimo oznaku $p^i$ za odgovarajuću putanju u $\mathcal{I}^i$, tj. putanju $p^i = (x_1, C_1^i, x_2, C_2^i, \dots)$.

Neka $x \in X$, $a, b \in P_x^{(\mathcal{J})} = P_x^0$, neka je $p$ zatvorena putanja od $x$ do $x$, i pretpostavimo da su $a$ i $b$ povezani u $||p||$ unutar instance $\mathcal{I}$. Dokazaćemo da $k \times p^0$ povezuje $a$ i $b$ za neko $k$. Neka je $m$ prirodan broj iz leme 3.23. Dakle, ako su $a', b' \in P_x^0$ povezani u $||p||$, onda ih i putanja $m \times p$ povezuje.

Pretpostavimo prvo da $x \in V \setminus X$. Pokazaćemo da $nm \times p^0$ povezuje $a$ i $b$ tako što ćemo primjeniti operaciju $t$ na $n$-torku realizacija

$$\mathbf{f}^i = (f_{1,1}^i, \dots, f_{1,ml}^i, f_{2,1}^i, \dots, f_{2,ml}^i, \dots, f_{n,1}^i, \dots f_{n,ml}^i),\ i \in [n]$$

putanje $nm \times p$, gdje je $l$ dužina putanje $p$. Ove putanje konstruišemo na sljedeći način:

1. za svako $i \in [n]$, realizacija $\mathbf{f}^i$ počinje u $a$ i završava u $b$, odnosno $f_{1,1}^i(x) = a$ i $f_{n,ml}^i(x) = b$.

2. za sve $i, j \in [n]$, $i \neq j$, segment $(f_{j,1}^i, \dots, f_{j,ml}^i)$ je realizacija putanje $m \times p^i$.

Sada ćemo opisati postupak dobijanja realizacije $\mathbf{f}^i$. Kako $a \in P_x = P_x^i$, onda postoji $(i-1)m \times p^i$-realizacija $(f_{1,1}^i, \dots, f_{i-1,ml}^i)$ takva da je $f_{1,1}^i(x) = a$. Slično, postoji i $(n-i)m \times p^i$-realizacija $(f_{i+1,1}^i, \dots, f_{n,ml}^i)$ takva da je $f_{n,ml}^i = b$. Ostaje nam da popunimo $i$-ti segment. Neka je $a' = f_{i-1,ml}^i(x)$ i $b' = f_{i+1,1}^i(x)$ za $i \neq 1, n$, dok ćemo za $i = 1$ uzimati $a' = a$, a $b' = b$ za $i = n$. Putanja $-(i-1)m \times p$ povezuje $a'$ i $a$, putanja $(n-i)m \times p$ povezuje $b$ i $b'$, a kako su $a$ i $b$ povezani u $||p||$, slijedi da su $a'$ i $b'$ povezani u $||p||$ unutar instance $\mathcal{I}$. Onda putanja $m \times p$ povezuje $a'$ i $b'$. Neka je onda $(f^i_{i,1},\dots,f^i_{i,ml-1})$ jedna $m\times p$-realizacija koja povezuje $a'$ i $b'$ i ovim je konstrukcija $\mathbf{f}^i$ završena.

Neka je $f_{i,j}=t(f^1_{i,j},\dots,f^n_{i,j})$ za sve $i\in[n]$, $j\in[ml]$. Za svako $y$ iz domena preslikavanja $f_{i,j}$ i za svako $k\in[n]$, $k\neq i$, važi $f^k_{i,j}(y)\in P^i_y$, pa $f_{i,j}(y)\in P^0_y$ na osnovu (D4). Ovim smo dokazali da je $\mathbf{f}=(f_{1,1},\dots,f_{n,ml})$ realizacija putanje $nm\times p^0$. Uzimajući u obzir da je $t$ idempotentna operacija dobijamo da je $f_{1,1}(x)=t(f^1_{1,1},\dots,f^n_{1,1})(x)=t(a,\dots,a)=a$ i slično $f_{n,ml}(x)=b$, pa $nm\times p^0$ povezuje $a$ i $b$.

Ostaje nam još da isto dokažemo i u slučaju kad $x\in X$. Ako su sve promjenljive iz $||p||$ u skupu $X$, onda je zbog (D3), svaka realizacija $m\times p$ koja povezuje $a$ i $b$ ujedno i $m\times p^0$-realizacija. Pretpostavimo sada da postoji $y\in||p||$ koje nije u $X$. Neka je $p=p_1+p_2$, gdje putanja $p_2$ počinje u $y$. Postoje $a',b'\in P^0_y$ takvi da $p_1$ povezuje $a$ i $a'$, dok $p_2$ povezuje $b'$ i $b$. Sada primjenimo prethodni slučaj na putanju $p_2+p_1$i elemente $a'$ i $b'$. Oni su povezani u $||p_2+p_1||$, pa ih i putanja $mn\times(p_2+p_1)^0$ povezuje. Konačno, putanja $(p_1+mn\times(p_2+p_1)+p_2)^0=(mn+1)\times p^0$ povezuje $a$ i $b$, pa je dokaz glavne teoreme gotov.

### 3.5.1 Posljedice i odlučivanje ograničene širine

Počnimo sa jednom direktnom posljedicom teoreme o praškoj instanci i leme 3.21 koja kaže da je svaka (2,3)-minimalna instanca i praška instanca. Ovu posljedicu, ali u nešto izmijenjenom obliku, koristimo za dokaz glavne teoreme naredne glave.

Posljedica 3.36. *Ako je* $\mathbf{D}$ *idempotentni klon koji generiše kongruencijski* $\wedge$*-poludistributivan varijetet, onda svaka* $(2,3)$*-minimalna instanca* $\mathrm{CSP}(\mathbf{D})$ *ima rješenje.*

Već smo rekli da ako je $\mathrm{CSP}(\mathbb{D})$ kompatibilan sa algebrom $\mathbf{D}$ onda je svaka instanca $\mathrm{CSP}(\mathbb{D})$ instanca i $\mathrm{CSP}(\mathbf{D})$. U uvodnoj glavi smo vidjeli da ako je $\mathbf{D}=(D,\mathcal{F})$ i $\mathbf{D}'=(D,\mathsf{Clo}(\mathcal{F}))$, onda je $\mathsf{SP}_{\text{fin}}(\mathbf{D})=\mathsf{SP}_{\text{fin}}(\mathbf{D}')$. Sa CSP stanovišta to znači da je svaka $\mathrm{CSP}(\mathbf{D})$ instanca ujedno i $\mathrm{CSP}(\mathbf{D}')$ instanca.

Posljedica 3.37. *Neka je* $\mathbf{D}$ *konačna idempotentna algebra koja generiše kongruencijski* $\wedge$*-poludistributivan varijetet. Onda za svaki* $\mathrm{CSP}(\mathbb{D})$ *koji je kompatibilan sa* $\mathbf{D}$*, svaka netrivijalna* $(2,3)$*-minimalna instanca* $\mathrm{CSP}(\mathbb{D})$ *ima rješenje.*

Posljedica 3.38. *Neka je* $\Gamma$ *jezik uslova sa svim jednoelementnim unarnim relacijama i* $\mathbf{D}$ *njegov klon polimorfizama. Sljedeći uslovi su ekvivalentni:*

(1) $\mathsf{V}(\mathbf{D})$ *je kongruencijski* $\wedge$*-poludistributivan;*

(2) $\Gamma$ *ima relacijsku širinu* $(2,3)$*;*

(3) $\Gamma$ *ima ograničenu relacijsku širinu.*

Dokaz. Implikacija (2) $\Rightarrow$ (3) je trivijalna, dok (3) $\Rightarrow$ (1) slijedi iz teoreme 3.3. Ostaje nam da dokažemo implikaciju (1) $\Rightarrow$ (2). Neka je $\mathbf{D}$ klon koji generiše kongruencijski $\wedge$-poludistributivan varijetet i $\mathcal{I}$ instanca CSP($\Gamma$). Onda je $\mathcal{I}$ instanca CSP($\mathbf{D}$), pa je zbog leme 3.17, $(2,3)$-minimalna instanca $\mathcal{J}$ pridružena instanci $\mathcal{I}$ instanca CSP($\mathbf{D}$). Ako je $\mathcal{J}$ netrivijalna, onda na osnovu posljedice 3.36 ima rješenje, pa je dokaz gotov. □

Posljedica 3.39. *Neka je $\Gamma$ jezik uslova. Ako $\Gamma$ ima ograničenu relacijsku širinu, onda $\Gamma$ ima relacijsku širinu $(2,3)$.*

Dokaz. Neka je $\Gamma'$ jezgro jezika $\Gamma$ prošireno svim jednoelementnim unarnim relacijama i neka je $\mathbf{D}$ njegov klon polimorfizama. Na osnovu leme 3.12, $\Gamma'$ ima ograničenu relacijsku širinu, pa zbog teoreme 3.14 klon $\mathbf{D}$ generiše kongruencijski $\wedge$-poludistributivan varijetet. Konačno, zbog posljedice 3.38, $\Gamma'$ ima relacijsku širinu $(2,3)$, a samim tim i $\Gamma$ ima relacijsku širinu $(2,3)$. □

Prva posljedica u domenu jakih Maljcevljevih uslova za kongruencijsku $\wedge$-poludistributivnost bilo je naredno tvrđenje iz [46], a čiji smo dokaz najavili još u drugoj glavi.

Posljedica 3.40 ([46, Teorema 2.8]). *Svaki lokalno konačan kongruencijski $\wedge$-poludistributvan varijetet realizuje jak Maljcevljev uslov*

$$\begin{aligned} p(x,x,x,x) \approx q(x,x,x) \approx x,& \\ p(y,x,x,x) \approx p(x,y,x,x) \approx p(x,x,y,x) \approx q(x,x,x,y)& \qquad \text{(KKVW)} \\ \approx q(y,x,x) \approx q(x,y,x) \approx q(x,x,y).& \end{aligned}$$

Dokaz. Neka je $\mathcal{V}$ lokalno konačan kongruencijski $\wedge$-poludistributivan varijetet i $\mathcal{W}$ njegov idempotentni redukt. $\mathcal{W}$ je takođe lokalno konačan kongruencijski $\wedge$-poludistributivan varijetet koji mora biti i idempotentan. Sve term operacije u $\mathcal{W}$ su idempotentne i sve idempotentne su term operacije varijeteta $\mathcal{V}$ term operacije varijeteta $\mathcal{W}$, pa $\mathcal{V}$ realizuje (KKVW) ako i samo ako $\mathcal{W}$ realizuje (KKVW) bez identiteta za idempotenciju. Neka je $\mathbf{F}$ slobodna algebra u $\mathcal{W}$, slobodno generisana sa $x$ i $y$. Definišimo sada kompatibilne relacije $R$ i $S$:

$$R = \mathrm{Sg}^{\mathbf{F}^3}\left(\begin{bmatrix} y\\x\\x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x\\y\\x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x\\x\\y \end{bmatrix}\right),\ S = \mathrm{Sg}^{\mathbf{F}^4}\left(\begin{bmatrix} y\\x\\x\\x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x\\y\\x\\x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x\\x\\y\\x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x\\x\\x\\y \end{bmatrix}\right).$$

Neka je $n > 3|F|$ i $\mathbb{F} = (F; R, S)$. Definisaćemo $\mathcal{I} = (V, F, \mathcal{C})$ instancu CSP($\mathbb{F}$). Skup promjenljivih je $V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ a skup uslova $\mathcal{C}$ se sastoji od uslova oblika $R(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3})$ za sve troelementne podskupove

$\{x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}\} \subseteq V$ i $S(x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_3}, x_{j_4})$ za sve četvoroelementne podskupove $\{x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_3}, x_{j_4}\} \subseteq V$. Očigledno je da $R$ i $S$ imaju iste projekcije na bilo koji par koordinata, a to je $\mathrm{Sg}^{\mathbf{F}^2}([x,y]^T, [x,x]^T, [y,x]^T)$, kao i da je svaki troelementni skup promjenljivih u opsegu nekog uslova, pa je u pitanju (2,3)-minimalna instanca CSP($\mathbb{F}$). Na osnovu posljedice 3.37 $\mathcal{I}$ ima rješenje $f \in F^V$. Birali smo $n > 3|F|$, pa na osnovu Dirihleovog principa postoji $I \subseteq V$, $|I| = 4$, takav da je restrikcija $f\restriction_I$ konstantna. Recimo da je $f(x_i) = r(x,y) \in F$ za sve $x_i \in I$.

Funkcija $f$ je rješenje instance koja sadrži uslove $R$ i $S$ sa opsezima $J$ i $I$ redom, pri čemu je $J$ jedan troelementni podskup od $I$. Stoga, $(r(x,y), r(x,y), r(x,y)) \in R$ i $(r(x,y), r(x,y), r(x,y), r(x,y)) \in S$. Poduniverzum $R$ je generisan skupom $\{(y,x,x),(x,y,x),(x,x,y)\}$ a $S$ skupom $\{(y,x,x,x),(x,y,x,x),(x,x,y,x),(x,x,x,y)\}$, što znači da postoje termi $q$ i $p$ arnosti 3 i 4 redom, takvi da u $\mathbf{F}$ važe identiteti

$$p(y,x,x,x) \approx p(x,y,x,x) \approx p(x,x,y,x) \approx q(x,x,x,y) \approx r(x,y) \text{ i}$$
$$q(y,x,x) \approx q(x,y,x) \approx q(x,x,y) \approx r(x,y).$$

Konačno, $p$ i $q$ su traženi termi. $\square$

POSLJEDICA 3.41. *Postoji algoritam koji u polinomnom vremenu odlučuje da li je klon polimorfizama* $\mathbf{D}$ *datog jezika uslova* $\Gamma$ *sa svim jednoelementnim unarnim relacijama generiše kongruencijski* $\wedge$*-poludistributivan varijetet.*

DOKAZ. Algoritam koji ćemo prezentovati će u slučaju potvrdnog odgovora za izlaz imati par $(p,q)$ term operacija iz teoreme 2.11. Naravno, ulazni parametri su $D$ i $\Gamma$. Prvo formiramo CSP instancu $\mathcal{I} = (V, D, \mathcal{C})$ pri čemu je $V$ disjunktna unija $D^4$ i $D^3$. Sada funkciju $f\colon V \to D$ možemo poistovijetiti sa uređenim parom preslikavanja $(p\colon D^4 \to D, q\colon D^3 \to D)$.

Za svaku relaciju $R \in \Gamma$ arnosti $k$ i svaku trojku $\mathbf{a_1} = [a_{11}, \ldots, a_{1k}]^T$, $\mathbf{a_2} = [a_{21}, \ldots, a_{2k}]^T$, $\mathbf{a_3} = [a_{31}, \ldots, a_{3k}]^T$ iz $R$, u $\mathcal{C}$ dodajemo uslov

$$C_{R,\mathbf{a_1},\mathbf{a_2},\mathbf{a_3}} = \{f \in D^{\{(a_{11},a_{21},a_{31}),\ldots,(a_{1k},a_{2k},a_{3k})\}} : f(\mathbf{a_1},\mathbf{a_2},\mathbf{a_3}) \in R\}.$$

Na ovaj način postižemo da $q$ iz rješenja $(p,q)$ bude polimorfizam. Slično dodajemo i potrebne uslove za $p$. Takođe, potrebno je dodati i uslove vezane za identitete koje $p$ i $q$ zadovoljavaju. Recimo, za sve $a, b \in D$, u $\mathcal{C}$ dodajemo uslov

$$C_{a,b} = \{f \in D^{\{(a,a,a,b),(a,a,b)\}} \colon f(a,a,a,b) = f(a,a,b)\}.$$

Iz opisa uslova koje dodajemo jasno je da će veličina instance $\mathcal{I}$ biti polinomna u odnosu na veličinu ulaza. Takođe, $(p,q)$ je rješenje ako i samo ako su $p$ i $q$ wnu-polimorfizmi za koje važi $p(a,a,a,b) = q(a,a,b)$, što prema teoremi 2.11 znači da instanca $\mathcal{I}$ ima rješenje ako i samo ako je $\mathbf{D}$ kongruencijski $\wedge$-poludistributivan.

Sam algoritam nije komplikovan i glavna ideja je da se traži rješenje $f\colon V \to D$ postepenim fiksiranjem vrijednosti promjenljivih. Ako je $V = \{x_1, x_2, \dots\}$, onda u $k$-tom koraku algoritma koristimo $|D|$ puta, za svako $d \in D$, algoritam za $(2,3)$-minimalnost, pri čemu u svakom pokretanju algoritma dodajemo uslov $f(x_k) = d$. Ako algoritam za $(2,3)$-minimalnost za rezultat da netrivijalnu instancu, onda zadržavamo uslov $f(x_k) = d$ i prelazimo na naredni korak odnosno promjenljivu. U suprotnom, ako je za sve $d \in D$ rezultirajuća instanca trivijalna, onda se glavni algoritam zaustavlja i vraća negativan odgovor.

Ako algoritam da potvrdan odgovor sa izlazom $f = (p, q)$, onda to znači da je $\mathbf{D}$ kongruencijski $\wedge$-poludistributivan zbog teoreme 2.11. Takođe, posljedica 3.38 garantuje da će u slučaju da je $\mathbf{D}$ kongruencijski $\wedge$-poludistributivan algoritam za (2,3)-minimalnost doći do rješenja i samim tim glavni algoritam će na kraju dati potvrdan odgovor. $\square$

Posljedica 3.42. *Postoji polinomni algoritam koji odlučuje da li konačan jezik uslova $\Gamma$ koji je jezgro ima ograničenu relacijsku širinu.*

Dokaz. Prvo jezik uslova $\Gamma$ proširujemo svim jednoelementnim unarnim relacijama i novodobijeni jezik uslova označavamo sa $\Gamma'$. Ako je $\mathbf{D}$ klon polimorfizama jezika $\Gamma$ onda ćemo sa $\mathbf{D}'$ označiti klon polimorfizama jezika $\Gamma'$. Prema lemi 3.12 $\Gamma$ ima ograničenu relacijsku širinu ako i samo ako $\Gamma'$ ima ograničenu relacijsku širinu, a prema teoremi 3.38 $\mathbf{D}'$ je kongruencijski $\wedge$-poludistributivan ako i samo ako $\Gamma'$ ima ograničenu relacijsku širinu. Objedinjući ove dvije ekvivalencije zaključujemo da algoritam iz posljedice 3.41 daje odgovor i na ovo pitanje. $\square$

Glava 4

# Karakterizacija jakih Maljcevljevih uslova za $\wedge$-poludistributivnost

## 4.1 Pristojni Maljcevljevi uslovi

Kao što smo to naglasili u napomeni 2.5, razmatramo idempotentne, linearne jake Maljcevljeve uslove sa jednim operacijskim simbolom i na skupu promjenljivih $\{x, y\}$.

Definicija 4.1. Jak Maljcevljev uslov koji je linearan, idempotentan, i sadrži dvije promjenljive i jedan operacijski simbol, je *pristojan* Maljcevljev uslov.

Svaki term pristojnog Maljcevljevog uslova sa $n$-arnim operacijskom simbolom $f$ je ili $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, gdje $x_i \in \{x, y\}$, ili promjenljiva $x$ ili $y$. Ako izuzmemo identitet za idempotentnost, svako pojavljivanje $x$ možemo zamijeniti sa $f(x, x, \dots, x)$, a $y$ sa $f(y, y, \dots, y)$. To znači da sada možemo pretpostaviti da su svi termi identiteta pristojnog Maljcevljevog uslova, osim idempotentnosti, oblika $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, gdje $x_i \in \{x, y\}$. Vidjećemo da ovakav, ekvivalentan oblik početnog pristojnog Maljcevljevog uslova, na pogodan način možemo skupovno reprezentovati.

Fiksirajmo prebrojiv skup promjenljivih $Var = \{x_1, x_2, \dots\}$. Za dati podskup $U \subseteq Var$, uvodimo notaciju:

$$x_j^U := \begin{cases} y, & \text{ako } x_j \in U; \\ x, & \text{ako } x_j \notin U. \end{cases}$$

Definicija 4.2. Neka je $\Sigma$ pristojan Maljcevljev uslov sa operacijskim simbolom $f$ takvim da $n = ar(f)$, neka svi identiteti osim idempotentnosti iz $\Sigma$ imaju po dva pojavljivanja $f$ (po jedan u svakom termu identiteta), i neka je $X = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}\}$ neki $n$-elementni podskup od $Var$, gdje $i_1 < i_2 < \cdots < i_n$. Definišemo *reprezentaciju* $\Sigma$ *na* $X$, u oznaci $r_X(\Sigma)$, sa

$$r_X(\Sigma) := \{(U, V) \in \mathcal{P}(X)^2 : f(x_{i_1}^U, \ldots, x_{i_n}^U) \approx f(x_{i_1}^V, \ldots, x_{i_n}^V) \in \Sigma\}.$$

Iz prethodne definicije je jasno da za svaki $n$-elementni podskup od $Var$ pristojan Maljcevljev uslov ima po jednu reprezentaciju. S druge strane, svaka reprezentacija određuje jedinstven pristojan Maljcevljev uslov.

Definicija 4.3. Za datu relaciju $\epsilon$ na $\mathcal{P}(X)$, uvodimo relaciju $C(\epsilon) := \{(X \setminus U, X \setminus V) : (U, V) \in \epsilon\}$.

Naravno, ekvivalencija

$$(U, V) \in \epsilon \text{ ako i samo ako } (X \setminus U, X \setminus V) \in \epsilon$$

je tačna ako i samo ako $\epsilon = C(\epsilon)$.

Definicija 4.4. Neka je $\Sigma$ pristojan Maljcevljev uslov na jeziku sa jedinom operacijom $f$ i $X = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\}$ jedan $n$-elementni podskup od $Var$. Definišemo binarnu relaciju $\epsilon(\Sigma)$ na skupu $\mathcal{P}(X)$ kao relaciju ekvivalencije generisanu sa $r_X(\Sigma) \cup C(r_X(\Sigma))$.

Naredna lema opisuje uticaj pseudo promjenljivih (vidjeti definiciju u pododjeljku 1.3) na $\epsilon(\Sigma)$.

Lema 4.5. *Neka je* $\mathbf{A}$ *algebra i* $\Sigma$ *pristojan Maljcevljev uslov reprezentovan na* $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. $\mathbf{A}$ *realizuje* $\Sigma$ *interpretacijom jedinog operacijskog simbola* $f$ *kao* $\mathbf{A}$*-terma* $t(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$, *gdje je* $E = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\} \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$, *ako i samo ako* $\mathbf{A}$ *realizuje pristojan Maljcevljev uslov*

$$\Sigma' = \{f'(x_{i_1}^{U\cap E}, \ldots, x_{i_k}^{U\cap E}) \approx f'(x_{i_1}^{V\cap E}, \ldots, x_{i_k}^{V\cap E}) : (U, V) \in \epsilon(\Sigma)\}$$

*(podrazumijevamo idempotentnost* $f'$*). U tom slučaju,* $\epsilon(\Sigma')$ *je relacija ekvivalencije na skupu* $\mathcal{P}(E)$ *generisana sa* $\{(U \cap E, V \cap E) : (U, V) \in \epsilon(\Sigma)\}$.

Dokaz. Neka je $t'(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ neki $\mathbf{A}$-term takav da se interpretacijom $f$ kao $t'$ dobija realizacija $\Sigma$ u $\mathbf{A}$. Definišimo $\mathbf{A}$-term $t(x_1, \ldots, x_n) := t'(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$, tj. term sintaksno jednak termu $t'$ ali sa dodatnim pseudo promjenljivim. Ako $(U, V) \in \epsilon(\Sigma)$, onda $\mathbf{A} \models t(x_1^U, \ldots, x_n^U) \approx t(x_1^V, \ldots, x_n^V)$ ili, ekvivalentno, $\mathbf{A} \models t'(x_{i_1}^U, \ldots, x_{i_k}^U) \approx t'(x_{i_1}^V, \ldots, x_{i_k}^V)$. Za sve $j$, $1 \leq j \leq k$, imamo da $x_{i_j} \in E$, važi i $\mathbf{A} \models t'(x_{i_1}^{U\cap E}, \ldots, x_{i_k}^{U\cap E}) \approx t'(x_{i_1}^{V\cap E}, \ldots, x_{i_k}^{V\cap E})$. Posljednji zaključak, zajedno sa definicijom $\Sigma'$, implicira da $\mathbf{A}$ realizuje $\Sigma'$.

Dokažimo sada obratnu implikaciju. Pretpostavimo da $\mathbf{A}$ realizuje $\Sigma'$ interpretacijom $f'$ kao $\mathbf{A}$-terma $t'$. Neka je $f(x_1^U, \ldots, x_n^U) \approx f(x_1^V, \ldots, x_n^V)$

proizvoljan identitet iz $\Sigma$. Onda $(U, V) \in \epsilon(\Sigma)$ i, prema definiciji Maljcevljevog uslova $\Sigma'$,

$$\mathbf{A} \models t'(x_{i_1}^{U\cap E}, \ldots, x_{i_k}^{U\cap E}) \approx t'(x_{i_1}^{V\cap E}, \ldots, x_{i_k}^{V\cap E}).$$

Interpretacijom simbola $f$ kao $t(x_1, \ldots, x_n)$, terma istog kao $t'$ samo sa dodatnim pseudo promjenljivim, jasno je da važe jednakosti $t(x_1^U, \ldots, x_n^U) = t'(x_{i_1}^{U\cap E}, \ldots, x_{i_k}^{U\cap E})$ i $t(x_1^V, \ldots, x_n^V) = t'(x_{i_1}^{V\cap E}, \ldots, x_{i_k}^{V\cap E})$ jer su odgovarajući parovi terma sintaksno identični. Stoga, $\mathbf{A} \models t(x_1^U, \ldots, x_n^U) \approx t(x_1^V, \ldots, x_n^V)$, pa je $\Sigma$ realizovan u $\mathbf{A}$. □

U cilju lakšeg zapisa u nastavku koristimo sljedeću konvenciju: operacijski simbol pristojnog Maljcevljevog uslova $\Sigma$ biće $f$, operacijski simbol pristojnog Maljcevljevog uslova $\Sigma'$ biće $f'$, dok će $g$ biti operacijski simbol pristojnog Maljcevljevog uslova $\Pi$.

### 4.1.1 Pristojni Maljcevljevi uslovi u većinskoj algebri

Neka je $\mathbf{A} = (\{0, 1\}, m)$ jedinstvena dvoelementna algebra sa *većinskom*[*] operacijom $m$, tj.

$$\mathbf{A} \models m(x, x, y) \approx m(x, y, x) \approx m(y, x, x) \approx x.$$

U nastavku provjeravamo koji pristojni Maljcevljevi uslovi su realizovani u $\mathbf{A}$.

LEMA 4.6. *$\mathbf{A}$ realizuje pristojan Maljcevljev uslov $\Sigma$ reprezentovan na $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ ako i samo ako $\mathbf{A}$ realizuje pristojan Maljcevljev uslov $\Pi$ reprezentovan na $X$ takav da, za $\rho = \epsilon(\Pi)$:*

(1) $\epsilon(\Sigma) \subseteq \rho$;

(2) *$\rho$ ima tačno dvije klase ekvivalencije $[\emptyset]_\rho$ i $[X]_\rho$, i pri tome važi $[\emptyset]_\rho = \{X \setminus U : U \in [X]_\rho\}$ (dakle, $|[\emptyset]_\rho| = |[X]_\rho|$);*

(3) *$[\emptyset]_\rho$ je donji skup i $[X]_\rho$ gornji skup.*

*Takođe, isti term kojim interpretiramo $f$ u realizaciji $\Sigma$ možemo uzeti za term kojim ćemo interpretirati $g$ u realizaciji $\Pi$.*

DOKAZ. Smjer „zdesna nalijevo" slijedi iz $\epsilon(\Sigma) \subseteq \epsilon(\Pi)$, pa nam za dokaz ostaje samo suprotna implikacija. Neka je $t(x_1, \ldots, x_n)$ term na jeziku $\{m\}$ takav da se interpretirajući $f$ kao $t$ indukuje realizacija $\Sigma$ u $\mathbf{A}$. Pokažimo prvo da za svaki term $s(x_1, \ldots, x_n)$ na jeziku $\{m\}$ i svaku $n$-torku $(a_1, \ldots, a_n)$ takvu da $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq \{x, y\}$, važi da ili $\mathbf{A} \models s(a_1, \ldots, a_n) \approx x$ ili

[*]od engl. *majority*, a algebra $\mathbf{A}$ je *majority algebra*.

$\mathbf{A} \models s(a_1, \ldots, a_n) \approx y$. Dokaz sprovodimo indukcijom po složenosti terma $s$. Bazni slučaj je jasan, a ako $s = m(s_1, s_2, s_3)$, onda termi $s_i$ zadovoljavaju tvrđenje na osnovu indukcijske pretpostavke. Stoga, ili su bar dva od njih identički jednaki $x$ u $\mathbf{A}$, ili su bar dva od njih identički jednaki $y$ u $\mathbf{A}$. U oba slučaja, na osnovu identiteta koje zadovoljava većinska operacija slijedi tvrđenje i za $s$.

Pristojan Maljcevljev uslov $\Pi$ reprezentovan na $X$ definišemo kao

$$\Pi := \{g(x_1^U, \ldots, x_n^U) \approx x : \mathbf{A} \models t(x_1^U, \ldots, x_n^U) \approx x\}.$$

Očigledno, $\mathbf{A}$ realizuje $\Pi$ interpretacijom $g$ kao $t$. Takođe, $\epsilon(\Sigma) \subseteq \rho$ i $\rho = \epsilon(\Pi)$ ima tačno dvije klase ekvivalencije, $[\emptyset]_\rho$ i $[X]_\rho$ (važi $\mathbf{A} \not\models x \approx y$, pa je $[\emptyset]_\rho \neq [X]_\rho$ zbog idempotencije). Stoga, za sve $U \in \mathcal{P}(X)$, imamo $[U]_\rho \neq [X \setminus U]_\rho$ jer $(\emptyset, U) \in \rho$ implicira $(X \setminus \emptyset, X \setminus U) = (X, X \setminus U) \in \rho$. Iz prethodnog je jasno da $|[\emptyset]_\rho| = |[X]_\rho|$.

Dokažimo sada da je $[\emptyset]_\rho$ donji skup. Neka $U \in [\emptyset]_\rho$ i $V \subseteq U$. U tom slučaju imamo da $\mathbf{A} \models t(x_1^U, \ldots, x_n^U) \approx x$, pa treba dokazati da $\mathbf{A} \models t(x_1^V, \ldots, x_n^V) \approx x$. Dokaz izvodimo indukcijom po složenosti terma $t$. Ako je $t(x_1, \ldots, x_n)$ promjenljiva ili $m(x_i, x_j, x_k)$, tvrđenje očigledno važi. Pretpostavimo da tvrđenje važi za svaki term sa manje operacijskih simbola od terma $t(x_1, \ldots, x_n)$ i neka $\mathbf{A} \models t(x_1^U, \ldots, x_n^U) \approx x$. Onda je $t = m(t_1, t_2, t_3)$, pri čemu indukcijska hipoteza važi za $t_1(x_1, \ldots, x_n)$, $t_2(x_1, \ldots, x_n)$ i $t_3(x_1, \ldots, x_n)$. Kako važi $\mathbf{A} \models t_j(x_1^U, \ldots, x_n^U) \approx x$ ili $\mathbf{A} \models t_j(x_1^U, \ldots, x_n^U) \approx y$ za svako $j \in \{1, 2, 3\}$, i $m$ je većinska operacija, onda za bar dva $j$, važi $\mathbf{A} \models t_j(x_1^U, \ldots, x_n^U) \approx x$. Bez gubljenja opštosti pretpostavimo da $\mathbf{A} \models t_1(x_1^U, \ldots, x_n^U) \approx t_2(x_1^U, \ldots, x_n^U) \approx x$. Na osnovu indukcijske hipoteze,

$$\mathbf{A} \models t_1(x_1^V, \ldots, x_n^V) \approx t_2(x_1^V, \ldots, x_n^V) \approx x,$$

pa $\mathbf{A} \models t(x_1^V, \ldots, x_n^V) \approx m(x, x, ?) \approx x$, gdje $? \in \{x, y\}$. $[X]_\rho$ je gornji skup jer je komplement od $[\emptyset]_\rho$ u $\mathcal{P}(X)$. □

NAPOMENA 4.7. Pretpostavimo da je $\Sigma$ realizovan u $\mathbf{A}$ interpretacijom $f$ kao $\mathbf{A}$-terma $t(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$, gdje se svi $x_{i_j}$ pojavljuju u sintaksnom zapisu terma $t$. Onda za svaki $E$ takav da $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\} \subseteq E \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ postoji $\mathbf{A}$-term $t$ takav da se sve promjenljive iz $E$ pojavljuju u sintaksnom zapisu $t$ i $\mathbf{A}$ realizuje pristojan Maljcevljev uslov $\Pi$ reprezentovan na $E$ takav da $\rho = \epsilon(\Pi)$ zadovoljava (2)-(3) iz leme 4.6 i $\{(U \cap E, V \cap E) : (U, V) \in \epsilon(\Sigma)\} \subseteq \rho$ interpretacijom $g$ kao $t$. Ako je $E = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\}$, onda ovo lako slijedi iz lema 4.5 i 4.6. Za veće skupove $E$, dodajemo nove promjenljive $x$ koje su ustvari pseudo promjenljive jer se pojavljuju u termu $t' = m(t, t, x)$. △

LEMA 4.8. *Svaki pristojan Maljcevljev uslov $\Pi$ reprezentovan na $X$ takav da za $\rho = \epsilon(\Pi)$ važe (2) i (3) iz leme 4.6 je realizovan u $\mathbf{A}$.*

Dokaz. Primijetimo prvo da je dovoljno dokazati da ako je u $\mathbf{A}$ realizovan pristojan Maljcevljev uslov $\Pi$ takav da za $\rho = \epsilon(\Pi)$ važe uslovi (2) i (3) iz leme 4.6, onda je u $\mathbf{A}$ realizovan uslov $\Pi'$ takav da $\epsilon(\Pi') = \rho'$, gdje je relacija $\theta'$ takva da

$$[X]_{\rho'} = ([X]_\rho \setminus \{U\}) \cup \{X \setminus U\} \text{ i}$$
$$[\emptyset]_{\rho'} = ([\emptyset]_\rho \setminus \{X \setminus U\}) \cup \{U\}$$

za neki minimalan element $U$ iz $[X]_\rho$. Sukcesivnim primjenama ovog stava dobijamo da je tvrđenje leme tačno ako je tačno tvrđenje da je jedan pristojan Maljcevljev uslov sa istim osobinama realizovan u $\mathbf{A}$, što slijedi na osnovu prethodne leme. Naime, $\mathbf{A}$ realizuje neki pristojan Maljcevljev uslov, pa na osnovu prethodne leme realizuje i neki pristojan Maljcevljev uslov sa osobinama (2) i (3).

Neka su $\Pi, \Pi', \rho$ i $\rho'$ kao iz prethodnog pasusa i neka je $U$ neki minimalan element iz $[X]_\rho$. Pretpostavimo da je pristojan Maljcevljev uslov $\Pi$ realizovan u $\mathbf{A}$ putem nekog $\mathbf{A}$-terma $t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Takođe, neka je $U \times (X \setminus U) = \{(x_{i_1}, x_{j_1}), \ldots, (x_{i_k}, x_{j_k})\}$. Za sve $l$, $1 \leq l \leq k$, definišimo

$$t_l(x_1, \ldots, x_n) := t(x_1, \ldots, x_{i_l - 1}, x_{j_l}, x_{i_l + 1}, \ldots, x_n).$$

Zatim definišimo i niz $s_1, \ldots, s_k$ sa

$$s_1(x_1, \ldots, x_n) := t_1(x_1, \ldots, x_n) \quad \text{i}$$
$$s_l(x_1, \ldots, x_n) := m(t_l, t, s_{l-1})$$

za $2 \leq l \leq k$. Tvrdimo da je $\Pi'$ realizovan u $\mathbf{A}$ putem terma $s_k(x_1, \ldots, x_n)$. Kako $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_k} \in X \setminus U$, onda $x_{j_1}^U = x_{j_2}^U = \cdots = x_{j_k}^U = x$. Stoga,

$$\mathbf{A} \models t_l(x_1^U, \ldots, x_n^U) \approx t(x_1^{U \setminus \{x_{i_l}\}}, \ldots, x_n^{U \setminus \{x_{i_l}\}}) \approx x,$$

za sve $l$, $1 \leq l \leq k$, pri čemu drugi dio identiteta slijedi iz minimalnosti skupa $U$. Onda je i

$$\mathbf{A} \models s_1(x_1^U, \ldots, x_n^U) \approx \cdots \approx s_k(x_1^U, \ldots, x_n^U) \approx x.$$

Naravno, jasno je da sada važi $\mathbf{A} \models s_k(x_1^{X \setminus U}, \ldots, x_n^{X \setminus U}) \approx y$, pa ostaje da se pokaže da $\mathbf{A} \models s_k(x_1^V, \ldots, x_n^V) \approx t(x_1^V, \ldots, x_n^V)$ za $V \neq U, X \setminus U$. Pretpostavićemo da $U \cap V \neq \emptyset$ i $V \setminus U \neq \emptyset$ jer ako to nije slučaj, onda možemo posmatrati skup $X \setminus V$ umjesto $V$, a dovoljno je dokazati za jednog od njih. Dakle, postoji $l' \leq k$ takvo da $x_{i_{l'}} \in U \cap V$ i $x_{j_{l'}} \in V \setminus U$. Sada je $x_{i_{l'}}^V = x_{j_{l'}}^V = y$, iz čega slijedi $\mathbf{A} \models t_{l'}(x_1^V, \ldots, x_n^V) \approx t(x_1^V, \ldots, x_n^V)$, što dalje implicira

$$\mathbf{A} \models s_{l'}(x_1^V, \ldots, x_n^V) \approx \cdots \approx s_k(x_1^V, \ldots, x_n^V) \approx t(x_1^V, \ldots, x_n^V).$$

Ovim je dokaz završen. $\square$

Sljedeća definicija je o određenim relacijama ekvivalencije i igra ulogu presijecajućih familija iz [12] a koje smo uveli u definiciji 2.18. Koristićemo je za algoritamski rezultat sa kraja ove sekcije.

DEFINICIJA 4.9. Relacija ekvivalencije $\epsilon$ na $\mathcal{P}(X)$ je *0-1 razdvajajuća* ako ne postoje skupovi $U, V, W, Z$ u $\mathcal{P}(X)$ takvi da:

$(i)$ $U \,\epsilon\, V \,\epsilon\, W \,\epsilon\, Z$;

$(ii)$ $U \cap V = \emptyset$;

$(iii)$ $W \cup Z = X$.

LEMA 4.10. *Relacija ekvivalencije $\rho$ na $\mathcal{P}(X)$ koja zadovoljava* (2) *i* (3) *iz leme 4.6 je 0-1 razdvajajuća.*

DOKAZ. Pretpostavimo suprotno, da $\rho$ nije 0-1 razdvajajuća. Onda postoje $U, V, W, Z$ u $\mathcal{P}(X)$ takvi da važe uslovi $(i) - (iii)$ iz definicije 4.9. Pretpostavimo da $U, V, W, Z \in [\emptyset]_\rho$. Iz $(iii)$ imamo da $(X \setminus W) \subseteq Z$ i onda iz (3) leme 4.6 zaključujemo da $(X \setminus W) \in [\emptyset]_\rho$, pa $W \,\rho\, (X \setminus W)$, što je kontradikcija. Slučaj $U, V, W, Z \in [X]_\rho$ na sličan način vodi u kontradikciju sa $(ii)$ iz definicije 4.9. □

DEFINICIJA 4.11. Za datu relaciju ekvivalencije $\epsilon$ na $\mathcal{P}(X)$, definišemo binarnu relaciju $\preceq_\epsilon$ na $\mathcal{P}(X)/\epsilon$ sa $[U]_\epsilon \preceq_\epsilon [V]_\epsilon$ ako i samo ako postoje $U' \in [U]_\epsilon$ i $V' \in [V]_\epsilon$ takvi da $U' \subseteq V'$. Neka je $\leq_\epsilon$ tranzitivno zatvorenje od $\preceq_\epsilon$. Ako $[U]_\epsilon \leq_\epsilon [V]_\epsilon$ i $[V]_\epsilon \leq_\epsilon [U]_\epsilon$, onda kažemo da $[U]_\epsilon \sim_\epsilon [V]_\epsilon$.

Relacija $\leq_\epsilon$ je po definiciji refleksivna i tranzitivna, a $\sim_\epsilon$ je relacija ekvivalencije na $\mathcal{P}(X)/\epsilon$.

DEFINICIJA 4.12. Za datu relaciju $\epsilon$ na $\mathcal{P}(X)$, njeno *zatvorenje* $\overline{\epsilon}$ će biti $\{(U, V) : U, V \in \mathcal{P}(X) \text{ i } [U]_\epsilon \sim_\epsilon [V]_\epsilon\}$.

LEMA 4.13. *Za svaku relaciju ekvivalencije $\epsilon$ na $\mathcal{P}(X)$, njeno zatvorenje $\overline{\epsilon}$ je konveksno, odnosno ako $U \subseteq V \subseteq W \subseteq X$ i $(U, W) \in \overline{\epsilon}$, onda $(U, V) \in \overline{\epsilon}$. Štaviše, ako $\epsilon = C(\epsilon)$, onda za sve $U, V \subseteq X$, $[U]_\epsilon \leq_\epsilon [V]_\epsilon$ ako i samo ako $[X \setminus V]_\epsilon \leq_\epsilon [X \setminus U]_\epsilon$. Stoga, ako $\epsilon = C(\epsilon)$, onda $\overline{\epsilon} = C(\overline{\epsilon})$.*

DOKAZ. Neka je $U \subseteq V \subseteq W \subseteq X$ i $(U, W) \in \overline{\epsilon}$. Uslov $U \subseteq V$ implicira $[U]_\epsilon \leq_\epsilon [V]_\epsilon$, pa nam ostaje da dokažemo $[V]_\epsilon \leq_\epsilon [U]_\epsilon$. Iz $(U, W) \in \overline{\epsilon}$ imamo da $[W]_\epsilon \leq_\epsilon [U]_\epsilon$, a iz $V \subseteq W$ da $[V]_\epsilon \leq_\epsilon [W]_\epsilon$, pa je na osnovu tranzitivnosti $[V]_\epsilon \leq_\epsilon [U]_\epsilon$.

Pretpostavimo sada da $\epsilon = C(\epsilon)$. Kako je $\leq_\epsilon$ tranzitivno zatvorenje od $\preceq_\epsilon$, dovoljno je dokazati da $[U]_\epsilon \preceq_\epsilon [V]_\epsilon$ ako i samo ako $[X \setminus V]_\epsilon \preceq_\epsilon [X \setminus U]_\epsilon$. Po definiciji je $[U]_\epsilon \preceq_\epsilon [V]_\epsilon$ ako i samo ako postoje $U' \in [U]_\epsilon$ i $V' \in [V]_\epsilon$ takvi da $U' \subseteq V'$. Desna strana ekvivalencije iz prethodne rečenice je ekvivalentna sa tim da $(U', U) \in \epsilon$, $(V', V) \in \epsilon$ i $U' \subseteq V'$, što je opet ako i samo ako $(X \setminus U', X \setminus U) \in \epsilon$, $(X \setminus V', X \setminus V) \in \epsilon$ i $X \setminus V' \subseteq X \setminus U'$. Dakle, $[X \setminus V]_\epsilon \preceq_\epsilon [X \setminus U]_\epsilon$, što je i trebalo dokazati. Preostali dio tvrđenja leme slijedi direktno iz upravo pokazanog i definicije zatvorenja. $\square$

Naredna lema opisuje ulogu zatvorenja na algebri $\mathbf{A}$.

LEMA 4.14. *Neka je $\Sigma$ pristojan Maljcevljev uslov reprezentovan na $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ koji je realizovan u $\mathbf{A}$ interpretacijom operacijskog simbola kao $\mathbf{A}$-terma $t$. Onda za sve $U, V \in \mathcal{P}(X)$, ako $(U, V) \in \overline{\epsilon(\Sigma)}$, onda $\mathbf{A} \models t(x_1^U, \ldots, x_n^U) \approx t(x_1^V, \ldots, x_n^V)$.*

DOKAZ. Tvrdimo da ako $[U]_{\epsilon(\Sigma)} \leq_{\epsilon(\Sigma)} [V]_{\epsilon(\Sigma)}$ i $\mathbf{A} \models t(x_1^V, \ldots, x_n^V) \approx x$, onda $\mathbf{A} \models t(x_1^U, \ldots, x_n^U) \approx x$. Kako je $[U]_{\epsilon(\Sigma)} \leq_{\epsilon(\Sigma)} [V]_{\epsilon(\Sigma)}$, onda postoje $U = W_0, W_1, W_2, \ldots, W_{2k}, W_{2k+1} = V$ u $\mathcal{P}(X)$ takvi da za sve parne $i$, $0 \leq i < 2k+1$, važi $(W_i, W_{i+1}) \in \epsilon(\Sigma)$, a za sve neparne $i$, $0 \leq i < 2k+1$, važi $W_i \subseteq W_{i+1}$.

Indukcijom po $i$ dokazujemo da $\mathbf{A} \models t(x_1^{W_{2(k-i)+1}}, \ldots, x_n^{W_{2(k-i)+1}}) \approx x$. Baza indukcije je za $i = 0$ i to je $\mathbf{A} \models t(x_1^V, \ldots, x_n^V) \approx x$, što je pretpostavka. Pretpostavimo da tvrđenje važi za $i$. Kako $(W_{2(k-i)}, W_{2(k-i)+1}) \in \epsilon(\Sigma)$, zaključujemo da

$$\mathbf{A} \models t(x_1^{W_{2(k-i)}}, \ldots, x_n^{W_{2(k-i)}}) \approx t(x_1^{W_{2(k-i)+1}}, \ldots, x_n^{W_{2(k-i)+1}}) \approx x.$$

Još ranije, u dokazu leme 4.6, smo dokazali da je $[\emptyset]_{\epsilon(\Sigma)}$ donji skup, pri čemu je $[\emptyset]_{\epsilon(\Sigma)} = \{Z \subseteq X : \mathbf{A} \models t(x_1^Z, \ldots, x_n^Z) \approx x\}$. Kako $W_{2(k-i)} \in [\emptyset]_{\epsilon(\Sigma)}$ i $W_{2(k-i)-1} \subseteq W_{2(k-i)}$, dobijamo $W_{2(k-i)-1} \in [\emptyset]_{\epsilon(\Sigma)}$, tj.

$$\mathbf{A} \models t(x_1^{W_{2(k-i-1)+1}}, \ldots, x_n^{W_{2(k-i-1)+1}}) \approx x,$$

čime je dokaz indukcijom završen. Za $i = k$ imamo $\mathbf{A} \models t(x_1^U, \ldots, x_n^U) \approx x$.

Sada iz $(U, V) \in \overline{\epsilon(\Sigma)}$ slijedi $[U]_{\epsilon(\Sigma)} \leq_{\epsilon(\Sigma)} [V]_{\epsilon(\Sigma)}$ i $[V]_{\epsilon(\Sigma)} \leq_{\epsilon(\Sigma)} [U]_{\epsilon(\Sigma)}$, pa na osnovu tvrđenja iz prethodnog pasusa dokaza imamo

$$\mathbf{A} \models t(x_1^U, \ldots, x_n^U) \approx x \text{ ako i samo ako } \mathbf{A} \models t(x_1^V, \ldots, x_n^V) \approx x.$$

Kako za sve $W \subseteq X$, ili $\mathbf{A} \models t(x_1^W, \ldots, x_n^W) \approx x$, ili $\mathbf{A} \models t(x_1^W, \ldots, x_n^W) \approx y$, kompletirali smo dokaz da $\mathbf{A} \models t(x_1^U, \ldots, x_n^U) \approx t(x_1^V, \ldots, x_n^V)$. $\square$

Naredna lema uz lemu 4.6 predstavlja srž ovog poglavlja. U suštini ona daje jedan lako provjerljiv kriterijum za realizaciju pristojnih Maljcevljevih uslova u $\mathbf{A}$.

LEMA 4.15. *Neka je $\Sigma$ pristojan Maljcevljev uslov reprezentovan na $X$. $\mathbf{A}$ realizuje $\Sigma$ ako i samo ako je $\overline{\epsilon(\Sigma)}$ 0-1 razdvajajuća relacija ekvivalencije na $\mathcal{P}(X)$.*

DOKAZ. Neka $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ i označimo $\epsilon := \epsilon(\Sigma)$ i $\varepsilon := \overline{\epsilon(\Sigma)}$.

Dokažimo prvo smjer „$\Rightarrow$". Pretpostavimo da $\varepsilon$ nije 0-1 razdvajajuća relacija ekvivalencije na $\mathcal{P}(X)$. Onda postoje $U, V, W, Z \in \mathcal{P}(X)$ takvi da $[U]_\varepsilon = [V]_\varepsilon = [W]_\varepsilon = [Z]_\varepsilon$, $U \cap V = \emptyset$ i $W \cup Z = X$. Neka je $t(x_1, \dots, x_n)$ neki $\mathbf{A}$-term i pretpostavimo da $\mathbf{A}$ realizuje $\Sigma$ intepretacijom svoje operacije kao $t$. Ako $\mathbf{A} \models t(x_1^U, \dots, x_n^U) \approx y$, iz $U \cap V = \emptyset$ slijedi $V \subseteq X \setminus U$, pa $\mathbf{A} \models t(x_1^V, \dots, x_n^V) \approx x$, što protivrijeći $\mathbf{A} \models t(x_1^U, \dots, x_n^U) \approx t(x_1^V, \dots, x_n^V)$ koje dobijamo iz $(U, V) \in \varepsilon$ i leme 4.14. S druge strane, ako $\mathbf{A} \models t(x_1^U, \dots, x_n^U) \approx x$, onda $(U, W) \in \varepsilon$, $(U, Z) \in \varepsilon$ i lema 4.14 impliciraju

$$\mathbf{A} \models t(x_1^W, \dots, x_n^W) \approx t(x_1^Z, \dots, x_n^Z) \approx x,$$

ali $W \cup Z = X$ implicira $X \setminus W \subseteq Z$, pa

$$\mathbf{A} \models t(x_1^{X \setminus W}, \dots, x_n^{X \setminus W}) \approx x,$$

dok $\mathbf{A} \models t(x_1^W, \dots, x_n^W) \approx x$ implicira

$$\mathbf{A} \models t(x_1^{X \setminus W}, \dots, x_n^{X \setminus W}) \approx y,$$

kontradikcija. Stoga, ne postoji realizacija $\Sigma$ u $\mathbf{A}$.

Sada dokazujemo „$\Leftarrow$". Pretpostavimo

**(1)** $\varepsilon$ **je 0-1 razdvajajuća relacija ekvivalencije.**

Dokazaćemo još neka svojstva $\varepsilon$, koja će biti podebljana jer ćemo dokazati da se pomenuta svojstva prenose i na novu, veću relaciju ekvivalencije. Ako $[U]_\varepsilon \preceq_\varepsilon [V]_\varepsilon$, onda postoje $U', V' \subseteq X$ takvi da $[U]_\varepsilon = [U']_\varepsilon$, $[V']_\varepsilon = [V]_\varepsilon$ i $U' \subseteq V'$. Ovo znači da $[U]_\epsilon \sim_\epsilon [U']_\epsilon$, pa $[U]_\epsilon \leq_\epsilon [U']_\epsilon$, i slično $[V']_\epsilon \leq_\epsilon [V]_\epsilon$, što zajedno sa $U' \subseteq V'$ implicira $[U]_\epsilon \leq_\epsilon [V]_\epsilon$. Dakle, za $\leq_\varepsilon$, tranzitivno zatvorenje relacije $\preceq_\varepsilon$, mora da važi da $[U]_\varepsilon \leq_\varepsilon [V]_\varepsilon$ implicira $[U]_\epsilon \leq_\epsilon [V]_\epsilon$. Iz ovoga zaključujemo da, ako $[U]_\varepsilon \leq_\varepsilon [V]_\varepsilon$ i $[V]_\varepsilon \leq_\varepsilon [U]_\varepsilon$, onda $[U]_\epsilon \sim_\epsilon [V]_\epsilon$, pa $[U]_\varepsilon = [V]_\varepsilon$. Kako je $\leq_\varepsilon$ po definiciji refleksivna i tranzitivna, upravo smo dokazali

**(2)** $\mathbb{P} = (\mathcal{P}(X)/\varepsilon; \leq_\varepsilon)$ **je parcijalno uređen skup.**

Iz antisimetričnosti $\leq_\varepsilon$ slijedi da $[U]_\varepsilon \sim_\varepsilon [V]_\varepsilon$ ako i samo ako $\big([U]_\varepsilon \leq_\varepsilon [V]_\varepsilon$ i $[V]_\varepsilon \leq_\varepsilon [U]_\varepsilon\big)$ ako i samo ako $[U]_\varepsilon = [V]_\varepsilon$, pa važi i

**(3)** $\overline{\varepsilon} = \varepsilon$.

Najmanji element u $\mathbb{P}$ je $[\emptyset]_\varepsilon$, a najveći $[X]_\varepsilon$. Iz definicije 4.4 slijedi da $\epsilon = C(\epsilon)$, pa lema 4.13 implicira da važi

**(4)** $\varepsilon = C(\varepsilon)$.

Primjenom leme 4.13 na $\varepsilon$, dobijamo i posljednju osobinu

(**5**) **za sve** $U, V \subseteq X$**,** $[U]_\varepsilon \leq_\varepsilon [V]_\varepsilon$ **ako i samo ako** $[X \setminus V]_\varepsilon \leq_\varepsilon [X \setminus U]_\varepsilon$**.**

Kako je $\varepsilon$ 0-1 razdvajajuća, $[\emptyset]_\varepsilon \neq [X]_\varepsilon$. Pretpostavimo da postoje više od dvije $\varepsilon$-klase. Neka je $U_0 \subseteq X$ takav da je $[U_0]_\varepsilon$ minimalan u posetu $(\mathcal{P}(X)/\varepsilon \setminus \{[\emptyset]_\varepsilon\}; \leq_\varepsilon)$. U nastavku, koristeći prethodno dokazane osobine (1)-(5), dokazujemo da relacija ekvivalencije $\varepsilon'$, dobijena od $\varepsilon$ spajanjem klase $[\emptyset]_\varepsilon$ sa $[U_0]_\varepsilon$ i klase $[X]_\varepsilon$ sa $[X \setminus U_0]_\varepsilon$, takođe zadovoljava (1)-(5).

Osobina (**4**) $\varepsilon' = C(\varepsilon')$ slijedi iz $\varepsilon = C(\varepsilon)$ i $\{X \setminus U \colon U \in [\emptyset]_{\varepsilon'}\} = \{X \setminus U \colon U \in [\emptyset]_\varepsilon \cup [U_0]_\varepsilon\} = [X]_\varepsilon \cup [X \setminus U_0]_\varepsilon = [X]_{\varepsilon'}$. Iz osobine (**4**) i leme 4.13 slijedi da $\varepsilon'$ zadovoljava i (**5**). Da bismo dokazali da je relacija $\varepsilon'$ 0-1 razdvajajuća, osobinu **(1)**, dovoljno je provjeriti uslove za klase $[\emptyset]_{\varepsilon'}$ i $[X]_{\varepsilon'}$ jer su ostalo $\varepsilon$-klase. Kako $\varepsilon' = C(\varepsilon')$, dovoljno je provjeriti samo za $[\emptyset]_{\varepsilon'}$. Pretpostavimo da postoje skupovi $W, Z \in [\emptyset]_{\varepsilon'}$ takvi da $W \cup Z = X$. Kako je $\varepsilon$ 0-1 razdvajajuća, bar jedan od njih mora biti u $[U_0]_\varepsilon$, recimo da $W \in [U_0]_\varepsilon$. Iz $W \cup Z = X$ slijedi da $X \setminus W \subseteq Z$, pa $[X \setminus W]_\varepsilon \leq_\varepsilon [Z]_\varepsilon$. Važi $Z \in [\emptyset]_\varepsilon \cup [U_0]_\varepsilon$, pa zbog minimalnosti $[U_0]_\varepsilon$ slijedi da ili $[X \setminus W]_\varepsilon = [U_0]_\varepsilon = [W]_\varepsilon$, ili $[X \setminus W]_\varepsilon = [\emptyset]_\varepsilon$. Prvo je u kontradikciji sa tim da je $\varepsilon$ 0-1 razdvajajuća, pa zaključujemo da $[X \setminus W]_\varepsilon = [\emptyset]_\varepsilon$. Ovo implicira da $[W]_\varepsilon = [X \setminus \emptyset]_\varepsilon$, tj. $[U_0]_\varepsilon = [X]_\varepsilon$. Kako je $(\mathcal{P}(X)/\varepsilon; \leq_\varepsilon)$ parcijalno uređen skup sa najvećim elementom $[X]_\varepsilon$, a $[U_0]_\varepsilon = [X]_\varepsilon$ je minimalan, zaključujemo da $\mathcal{P}(X)/\varepsilon = \{[\emptyset]_\varepsilon, [X]_\varepsilon\}$, što nije slučaj. Za dokaz (**2**), moramo pokazati da je $\leq_{\varepsilon'}$ antisimetrična. Pretpostavimo da $[U]_{\varepsilon'} \leq_{\varepsilon'} [V]_{\varepsilon'}$ i $[V]_{\varepsilon'} \leq_{\varepsilon'} [U]_{\varepsilon'}$. Onda postoje $W_i, Z_j \subseteq X$ takvi da

$$U =: W_0 \;\varepsilon'\; W_1 \subseteq W_2 \;\varepsilon'\; W_3 \subseteq \cdots \subseteq W_{2k} \;\varepsilon'\; W_{2k+1} := V \text{ i}$$
$$V =: Z_0 \;\varepsilon'\; Z_1 \subseteq Z_2 \;\varepsilon'\; Z_3 \subseteq \cdots \subseteq Z_{2l} \;\varepsilon'\; Z_{2l+1} := U.$$

Ako nijedna od klasa $[W_i]_{\varepsilon'}$ i $[Z_j]_{\varepsilon'}$ nije ni $[\emptyset]_{\varepsilon'}$, ni $[X]_{\varepsilon'}$, zaključak slijedi iz antisimetričnosti $\leq_\varepsilon$. Bez umanjenja opštosti, pretpostavimo da $[W_{2i}]_{\varepsilon'} = [\emptyset]_{\varepsilon'}$. Induktivno dokazujemo da je za sve $j$, $j < 2i$, $[W_j]_{\varepsilon'} = [\emptyset]_{\varepsilon'}$. $W_{2i-1} \subseteq W_{2i}$ implicira da $[W_{2i-1}]_\varepsilon \leq_\varepsilon [W_{2i}]_\varepsilon \in \{[\emptyset]_\varepsilon, [U_0]_\varepsilon\}$. Minimalnost $[U_0]_\varepsilon$ implicira da $[W_{2i-1}]_\varepsilon \in \{[\emptyset]_\varepsilon, [U_0]_\varepsilon\}$, pa je $[W_{2i-2}]_{\varepsilon'} = [W_{2i-1}]_{\varepsilon'} = [\emptyset]_{\varepsilon'}$. Nastavljajući induktivni postupak dobijamo da $[U]_{\varepsilon'} = [\emptyset]_{\varepsilon'}$. Međutim, onda $[Z_{2l+1}]_{\varepsilon'} = [\emptyset]_{\varepsilon'}$, i isti induktivni argument primjenjen na $Z_j$ za rezultat ima $[V]_{\varepsilon'} = [Z_0]_{\varepsilon'} = [\emptyset]_{\varepsilon'}$. Dakle, $[U]_{\varepsilon'} = [V]_{\varepsilon'}$. Iz antisimetričnosti relacije $\leq_{\varepsilon'}$ slijedi $\overline{\varepsilon'} = \varepsilon'$, osobina (**3**), isto kao u slučaju $\varepsilon$.

Kako je $\varepsilon'$ 0-1 razdvajajuća, imamo $[\emptyset]_{\varepsilon'} \neq [X]_{\varepsilon'}$, i možemo nastaviti sa spajanjem klasa na ovaj način sve dok ne ostanu dvije. Neka je $\rho$ relacija dobijena na kraju ovog postupka. Kako smo počeli sa $\epsilon = \epsilon(\Sigma)$ i u svakom koraku povećavali relaciju ekvivalencije, važi $\epsilon \subseteq \rho$. Štaviše, $\rho$ ima tačno dvije klase ekvivalencije: $[\emptyset]_\rho$ i $[X]_\rho$, pa kako $\rho$ zadovoljava (**4**) $\rho = C(\rho)$, onda $[\emptyset]_\rho = \{X \setminus U : U \in [X]_\rho\}$. Ako $U \in [\emptyset]_\rho$ i $V \subseteq U$, onda $[\emptyset]_\rho \leq_\rho [V]_\rho \leq_\rho$

$[U]_\rho$, pa zbog osobine (**2**) relacije $\leq_\rho$ dobijamo da $[V]_\rho = [U]_\rho$. Dakle, $[\emptyset]_\rho$ je donji skup u odnosu na inkluziju, i kako je $[X]_\rho = \{X \setminus U : U \in [\emptyset]_\rho\}$, slijedi da je $[X]_\rho$ gornji skup. Svi uslovi leme 4.8 su ispunjeni, pa zaključujemo da $\mathbf{A}$ realizuje $\Sigma$. □

### 4.1.2 Pristojni Maljcevljevi uslovi u polumrežama

Neka je $\mathbf{B} = (\{0,1\}, \wedge)$ dvoelementna polumreža[†]. Opet razmatramo pristojne Maljcevljeve uslove, ali ovog puta one koji su realizovani u algebri $\mathbf{C} = (\{0,1\}, s)$, gdje $s(x,y,z) = x \wedge y \wedge z$ za sve $x,y,z \in \{0,1\}$, i $\wedge$ je polumrežna operacija iz $\mathbf{B}$. $\mathbf{B}$ i $\mathbf{C}$ su očigledno term ekvivalentne jer je i $x \wedge y = s(x,x,y)$. Sljedeća propozicija je dobro poznata i očigledna osobina algebre $\mathbf{C}$.

Propozicija 4.16. *Za svaki term $t(x_1,\dots,x_n)$ na jeziku $\{s\}$ postoji neprazan podskup $\{i_1,\dots,i_k\} \subseteq \{1,2,\dots,n\}$ takav da*

$$\mathbf{C} \models t(x_1,\dots,x_n) \approx x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_k}.$$

*$\{x_{i_1},\dots,x_{i_k}\}$ je skup promjenljivih koje se pojavljuju u sintaksnom zapisu terma $t$.*

Propozicija 4.16 implicira

Propozicija 4.17. *Za svaki term $t(x_1,\dots,x_n)$ na jeziku $\{s\}$ i podskup $U \subseteq \{x_1,\dots,x_n\}$:*

$$\begin{aligned}
&\mathbf{C} \models t(x_1^U,\dots,x_n^U) \approx x, \ \textit{kada } U \cap E = \emptyset,\\
&\mathbf{C} \models t(x_1^U,\dots,x_n^U) \approx y, \ \textit{kada } E \subseteq U, \ \textit{ili}\\
&\mathbf{C} \models t(x_1^U,\dots,x_n^U) \approx x \wedge y, \ \textit{kada } E \cap U \neq \emptyset \neq E \setminus U.
\end{aligned}$$

*Ovdje je $\emptyset \neq E \subseteq \{x_1,\dots,x_n\}$ jedinstven skup takav da $\mathbf{C} \models t \approx \bigwedge_{x_i \in E} x_i$.*

Iz gorenavedenih propozicija dolazimo do posljedice koja je analogon leme 4.6, ali za algebru $\mathbf{C}$.

Posljedica 4.18. *Neka je $\Sigma$ pristojan Maljcevljev uslov reprezentovan na $X$. Sljedeći uslovi su ekvivalentni:*

(1) $\mathbf{C}$ *realizuje* $\Sigma$.

(2) *Postoji podskup $E$, $\emptyset \neq E \subseteq X$, takav da se interpretacijom $f$ kao $\bigwedge_{x_i \in E} x_i$ indukuje realizacija $\Sigma$ u $\mathbf{C}$.*

[†] algebra sa jednom binarnom operacijom koja je idempotentna, komutativna i asocijativna.

(3) *Postoji podskup $E$, $\emptyset \neq E \subseteq X$, takav da* $\mathbf{C}$ *realizuje pristojan Maljcevljev uslov $\Pi$ reprezentovan na $E$ i tako da je:*

   (a) $\{(U \cap E, V \cap E) : (U, V) \in \epsilon(\Sigma)\} \subseteq \epsilon(\Pi)$ *i*

   (b) $\rho = \epsilon(\Pi)$ *ima tačno tri klase ekvivalencije i dvije od njih su* $[\emptyset]_\rho = \{\emptyset\}$ *i* $[E]_\rho = \{E\}$, *ili* $|E| = 1$ *i* $\rho$ *ima dvije klase ekvivalencije,* $\{\emptyset\}$ *i* $\{E\}$.

DOKAZ. (1) $\Leftrightarrow$ (2) slijedi iz propozicije 4.16.

(2) $\Rightarrow$ (3) Neka je $E = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\}$. (2) implicira da $\mathbf{A}$ realizuje pristojan Maljcevljev uslov $\Sigma'$ dobijen od $\Sigma$ posmatranjem promjenljivih iz $X \setminus E$ kao pseudo promjenljivih. Lema 4.5 implicira da $(a)$ važi ako $\rho$ zamijenimo sa $\epsilon(\Sigma')$. Prema propoziciji 4.17, $\mathbf{C} \models x_{i_1}^U \wedge \cdots \wedge x_{i_k}^U \approx y$ ako i samo ako $E \subseteq U$, i $\mathbf{C} \models x_{i_1}^U \wedge \cdots \wedge x_{i_k}^U \approx x$ ako i samo ako $U \cap E = \emptyset$, pa $[\emptyset]_{\epsilon(\Sigma')} = \{\emptyset\}$ i $[E]_{\epsilon(\Sigma')} = \{E\}$. Kako za sve $U, V \in \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset, E\}$, imamo

$$\mathbf{C} \models x_1^U \wedge \cdots \wedge x_n^U \approx x_1^V \wedge \cdots \wedge x_n^V \approx x \wedge y,$$

onda $\mathbf{C}$ realizuje pristojan Maljcevljev uslov $\Pi$ takav da važe (a) i (b). ($\Pi$ je dobijen od $\Sigma'$ spajanjem svih $\epsilon(\Sigma')$-klasa u jednu, osim $\{\emptyset\}$ i $\{E\}$).

(3) $\Rightarrow$ (1) Neka je $t$ $\mathbf{C}$-term kojim je interpretiran simbol $g$ u realizaciji $\Pi$ u $\mathbf{C}$. Na osnovu propozicije 4.16, postoji skup promjenljivih $E' \subseteq E$ takav da $\mathbf{C} \models t \approx \bigwedge_{x_i \in E'} x_i$. Uslov $[E]_\rho = \{E\}$ povlači da $E' = E$. Za pristojan Maljcevljev uslov $\Sigma'$, dobijen od $\Sigma$ posmatranjem svih promjenljivih van $E$ kao pseudo promjenljivih, iz leme 4.5 i $(a)$ slijedi da $\epsilon(\Sigma') \subseteq \rho = \epsilon(\Pi)$. Na kraju, interpretacijom $f'$ kao istog terma $t$ realizuje se $\Sigma'$, a zbog leme 4.5, (1) takođe važi. $\square$

Kao što smo vidjeli, prethodna posljedica je čisto egzistencijalnog karaktera. Prirodno se postavlja pitanje načina na koji dolazimo do skupa $E$. Označimo $\epsilon := \epsilon(\Sigma)$. Naravno, ako $(U, V) \in \epsilon$ i $V \cap E = \emptyset$, onda $U \cap E = \emptyset$. Drugim riječima, ako se $V$ sastoji isključivo od pseudo promjenljivih i $U \mathrel{\epsilon} V$, onda i $U$ ima istu osobinu. Drugi kriterijum je da ako $U \subseteq V_1 \cup \cdots \cup V_k$ i za sve $V_i$, važi $V_i \cap E = \emptyset$, onda $U \cap E = \emptyset$. U suštini, prvo isključujemo iz $E$ članove klase $[\emptyset]_\epsilon$, a zatim za svaki podskup do tog trenutka izbačenog skupa promjenljivih i sve skupove promjenljivih koji su u njegovoj $\epsilon$-klasi. Definišimo sada $D(\Sigma)$ da bude najmanji podskup od $X$ takav da:

*i)* $D(\Sigma){\downarrow}$ sadrži $[\emptyset]_\epsilon$ i

*ii)* $D(\Sigma){\downarrow}$ je unija nekih $\epsilon$-klasa.

Ako $E$ zadovoljava uslove iz (3) posljedice 4.18, onda pomenuti uslovi impliciraju da $X \setminus E$ zadovoljava *i)* i *ii)*. Štaviše, $X$ zadovoljava *i)* i *ii)*, i ako $D_1$ i $D_2$ zadovoljavaju *i)* i *ii)*, onda to važi i za $D_1 \cap D_2$, pa je $D(\Sigma)$ dobro definisan.

Naredna lema pokazuje da za skup $E$ iz posljedice 4.18 možemo uzeti $X \setminus D(\Sigma)$.

LEMA 4.19. *Ako* $\mathbf{C}$ *realizuje pristojan Maljcevljev uslov* $\Sigma$ *reprezentovan na* $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, *onda* $\mathbf{C}$ *realizuje* $\Sigma$ *interpretacijom* $f$ *kao* $\bigwedge\limits_{x_i \in X \setminus D(\Sigma)} x_i$.

DOKAZ. Označimo $E := X \setminus D(\Sigma)$ i neka $(U, V) \in \epsilon(\Sigma)$. Prvo, $U \cap E = \emptyset$ ako i samo ako $U \subseteq D(\Sigma)$ ako i samo ako $V \subseteq D(\Sigma)$ (jer je $D(\Sigma)$ unija $\epsilon$-klasa) ako i samo ako $V \cap E = \emptyset$. Takođe, iz $(U, V) \in \epsilon(\Sigma)$ imamo da $(X \setminus U, X \setminus V) \in \epsilon(\Sigma)$, pa $U \cap E = E$ ako i samo ako $X \setminus U \subseteq D(\Sigma)$ ako i samo ako $X \setminus V \subseteq D(\Sigma)$ ako i samo ako $V \cap E = E$. Dakle, relacija ekvivalencije na $E$ čije su jedine klase $\{\emptyset\}$, $\{E\}$ i $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset, E\}$ sadrži relaciju $\{(U \cap E, V \cap E) : (U, V) \in \epsilon(\Sigma)\}$. Prema posljedici 4.18 (3) $\Rightarrow$ (2), ovo znači da $\mathbf{C}$ realizuje $\Sigma$ interpretacijom $f$ kao $\bigwedge\limits_{x_i \in E} x_i$. □

U nastavku ćemo, za pristojan Maljcevljev uslov $\Sigma$ reprezentovan na $X$, označavati $E(\Sigma) := X \setminus D(\Sigma)$.

### 4.1.3 Pristojni Maljcevljevi uslovi u algebri D

Označimo $\mathbf{D} = \mathbf{A} \times \mathbf{C}$. Sljedeća lema predstavlja opis relacija kojima su reprezentovani jaki Maljcevljevi uslovi realizovani u algebri $\mathbf{D}$.

LEMA 4.20. *Ako* $\mathbf{D}$ *realizuje pristojan Maljcevljev uslov* $\Sigma$ *reprezentovan na* $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, *onda za* $E = E(\Sigma)$ *postoji pristojan Maljcevljev uslov* $\Pi$ *reprezentovan na* $E$ *takav da, za* $\rho = \epsilon(\Pi)$:

(1) $\{(U \cap E, V \cap E) : (U, V) \in \epsilon(\Sigma)\} \subseteq \rho$;

(2) $\rho$ *ima tačno četiri klase ekvivalencije,* $I$, $J$, $\{\emptyset\}$ *i* $\{E\}$, *gdje* $I = \{E \setminus U : U \in J\}$ *(stoga* $|I| = |J|$*), ili* $|E| = 1$, *i* $\rho$*-klase su* $\{\emptyset\}$ *i* $\{E\}$;

(3) $I \cup \{\emptyset\}$ *je donji skup u* $\mathcal{P}(E)$ *i* $J \cup \{E\}$ *gornji skup u* $\mathcal{P}(E)$.

DOKAZ. Neka je $\Sigma$ realizovan u $\mathbf{D}$ interpretacijom $f$ kao nekog $\mathbf{D}$-terma $t'$ i neka je $E'$ skup svih promjenljivih koje se pojavljuju u $t'$. Onda i $\mathbf{A}$ i $\mathbf{C}$ realizuju $\Sigma$ interpretacijom $f$ kao $t'$, pa prema napomenama prije leme 4.19, imamo $E' \subseteq E$. Koristeći term koji dodaje pseudo promjenljive u $\mathbf{A}$ kao u napomeni 4.7, možemo konstruisati term $t$ takav da $\mathbf{A} \models t \approx t'$ i da je skup promjenljivih koje se pojavljuju u $t$ baš $E$. Dakle, $\mathbf{A}$ realizuje $\Sigma$ interpretacijom $f$ kao $t$. Štaviše, $\mathbf{C} \models t \approx \bigwedge\limits_{x_i \in E} x_i$, pa prema lemi 4.19, $\mathbf{C}$ takođe realizuje $\Sigma$ interpretacijom $f$ kao $t$. Zbog toga, $\mathbf{D} = \mathbf{A} \times \mathbf{C}$ realizuje $\Sigma$ interpretacijom $f$ kao $t$.

Iz leme 4.6 slijedi da postoji pristojan Maljcevljev uslov $\Pi_1$ reprezentovan na $E$ koji je realizovan u $\mathbf{A}$ interpretacijom svog operacijskog simbola kao $t$ i tako da $\rho_1 := \epsilon(\Pi_1)$ zadovoljava uslov (2) pomenute leme, pri čemu u njoj $\rho_1$ igra ulogu $\rho$ i takođe, na osnovu leme 4.6 i leme 4.5 imamo

(1′) $\{(U \cap E, V \cap E) : (U, V) \in \epsilon(\Sigma)\} \subseteq \rho_1$.

Kako je $E$ skup promjenljivih koje se pojavljuju u sintaksnom zapisu terma $t$, onda $\mathbf{C} \models t \approx \bigwedge_{x_i \in E} x_i$. Zbog toga lema 4.19 i posljedica 4.18 garantuju postojanje pristojnog Maljcevljevog uslova $\Pi_2$ reprezentovanog na $E$ koji je realizovan u $\mathbf{C}$ interpretacijom svog operacijskog simbola kao $t$ i uslovi (a) i (b) iz posljedice 4.18 su ispunjeni (zamjenom $\rho$ iz njihove formulacije sa $\rho_2 := \epsilon(\Pi_2)$).

Kako term $t$ u $\mathbf{A}$ zadovoljava identitete implicirane sa $\rho_1$ i u $\mathbf{C}$ identitete implicirane sa $\rho_2$, onda u $\mathbf{D}$ ovaj term zadovoljava sve identitete implicirane sa $\rho_1 \cap \rho_2$. Sada označimo $I := [\emptyset]_{\rho_1} \setminus \{\emptyset\}$ i $J := [E]_{\rho_1} \setminus \{E\}$ i tvrđenje leme slijedi. □

Definicija 4.21. Pristojan Maljcevljev uslov $\Sigma$ reprezentovan na skupu $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, $n > 1$, takav da:

(1) $\epsilon(\Sigma)$ ima tačno četiri klase ekvivalencije, $I_\Sigma$, $J_\Sigma$, $\{\emptyset\}$ i $\{X\}$, gdje $I_\Sigma = \{X \setminus U : U \in J_\Sigma\}$ (dakle $|I_\Sigma| = |J_\Sigma|$),

(2) $I_\Sigma \cup \{\emptyset\}$ je donji skup u $\mathcal{P}(X)$ i $J_\Sigma \cup \{X\}$ je gornji skup u $\mathcal{P}(X)$ i

(3) $\epsilon(\Sigma)$ je 0-1 razdvajajuća na $\mathcal{P}(X)$

se naziva *kanonički* pristojan Maljcevljev uslov.

Napomena 4.22. Primijetimo da je svaki kanonički pristojan Maljcevljev uslov $\Sigma$ sintaksno ekvivalentan sa

$$\Sigma_1 = \{f(x_1^U, \dots, x_n^U) \approx f(x_1^V, \dots, x_n^V) : U, V \in I_\Sigma\}$$

(i idempotentnost), kao i sa

$$\Sigma_2 = \{f(x_1^U, \dots, x_n^U) \approx f(x_1^V, \dots, x_n^V) : U, V \in J_\Sigma\}$$

(i idempotentnost). Važi $I_\Sigma = \{(X \setminus U, X \setminus V) : (U, V) \in J_\Sigma\}$, pa su identiteti iz $\Sigma_1$ ekvivalentni sa identitetima iz $\Sigma_2$ kada međusobno zamijenimo promjenljive $x$ i $y$. $J_\Sigma$ je maksimalna familija podskupova od $X$ takva da svaki par skupova iz $J_\Sigma$ ima neprazan presjek (presijecajuća familija iz definicije 2.18). U našem slučaju će biti praktičnije da pretpostavimo da je svaki kanonički pristojan Maljcevljev uslov oblika $\Sigma_1$, pa ćemo to od ovog trenutka i uraditi. △

Lema 4.20 može biti biti formulisana i kao

POSLJEDICA 4.23. *Ako* **D** *realizuje pristojan Maljcevljev uslov* $\Sigma$ *reprezentovan na* $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ *onda za* $E = E(\Sigma)$, *važi ili* $|E| = 1$, *ili postoji kanonički pristojan Maljcevljev uslov* $\Pi$ *reprezentovan na* $E$ *takav da*

$$\{(U \cap E, V \cap E) : (U, V) \in \epsilon(\Sigma)\} \subseteq \epsilon(\Pi).$$

Takođe, za potrebe narednog potpoglavlja, izvodimo i sljedeću posljedicu.

POSLJEDICA 4.24. *Neka je* $\Sigma$ *pristojan Maljcevljev uslov reprezentovan na* $X$. *Označimo sa* $\epsilon'$ *relaciju ekvivalencije na* $\mathcal{P}(E(\Sigma))$ *generisanu skupom* $\{(U \cap E(\Sigma), V \cap E(\Sigma)) : (U, V) \in \epsilon(\Sigma)\}$. *Onda* **D** *realizuje* $\Sigma$ *ako i samo ako je* $\overline{\epsilon'}$ *0-1 razdvajajuća relacija ekvivalencije na* $\mathcal{P}(E(\Sigma))$.

DOKAZ. Prema dokazu leme 4.20, ako **D** realizuje $\Sigma$, onda realizuje i $\Sigma$ interpretacijom svoje operacije kao nekog terma $t$ tako da je skup promjenljivih koje se pojavljuju u $t$ skup $E(\Sigma)$. Prema lemi 4.5, to znači da **D** realizuje pristojan Maljcevljev uslov $\Sigma'$ reprezentovan na $E(\Sigma)$ tako da $\epsilon(\Sigma') = \epsilon'$. Sada iz leme 4.15 i činjenice da **A** realizuje $\Sigma'$ slijedi da je $\overline{\epsilon'}$ 0-1 razdvajajuća na $\mathcal{P}(E(\Sigma))$.

S druge strane, ako je $\overline{\epsilon'}$ 0-1 razdvajajuća na $\mathcal{P}(E(\Sigma))$, lema 4.15 implicira da je pristojan Maljcevljev uslov $\Sigma'$ reprezentovan na $E(\Sigma)$ koji je definisan sa $\epsilon'$ realizovan u **A**. Prema napomeni 4.7, postoji interpretacija operacijskog simbola kao nekog **A**-terma $t$ koji sadrži sve promjenljive iz $E(\Sigma)$ i realizuje $\Sigma'$. Iz leme 4.5 i definicija $\epsilon'$ znamo da interpretacijom operacije kao $t$ dobijamo realizaciju $\Sigma$ u **A**. Takođe, kako je $E(\Sigma)$ skup promjenljivih koje se pojavljuju u $t$, propozicija 4.17 i lema 4.19 impliciraju da se interpretacijom operacijskog simbola kao $t$ indukuje realizacija $\Sigma$ u **C**. Zato $\mathbf{D} = \mathbf{A} \times \mathbf{C}$ realizuje $\Sigma$. $\square$

### 4.1.4 Algoritam za provjeru realizacije pristojnog Maljcevljevog uslova u D

Objedinjujući dosadašnje zaključke izvedene u ovoj glavi moguće je konstruisati algoritam koji na efikasan način određuje da li algebra **D** realizuje pristojan Maljcevljev uslov $\Sigma$. Naravno, efikasnost podrazumijeva polinoman broj koraka u odnosu na veličinu ulaznih parametara. U nastavku opisujemo pomenuti algoritam koji je sukcesivna primjena sljedećih pet procedura.

**Procedura 1. Kodiranje** $\epsilon(\Sigma)$. Neka je $\Sigma$ pristojan Maljcevljev uslov na skupu promjenljivih $X$. Prvo ćemo linearno urediti skup $X$. Na ovaj način smo u mogućnosti da kodiramo sve podskupove $U \subseteq X$ kao elemente $\{0,1\}^{|X|}$. Konkretno, $U$ postaje riječ dužine $|X|$ čije je $i$-to slovo 1 ako i samo ako se $i$-ti element skupa $X$ nalazi u $U$. Sada uređujemo sve podskupove na sljedeći način: $U \leq V$ ako i samo ako je ili $|U| < |V|$, ili $|U| = |V|$ i riječ kojom je kodiran $U$ je leksikografski prije nego ili je ista kao riječ kojom je kodiran $V$. Primijetimo da $U \leq V$ ako i samo ako $X \setminus V \leq X \setminus U$ i da još

$\leq$ sadrži (proširuje) poredak inkluzije. Sada definišimo digraf $\Gamma(\Sigma)$ tako da je $U \to V$ ako i samo ako $U < V$, $(U, V) \in \epsilon(\Sigma)$ i $V$ je najveći element u odnosu na $\leq$ u svojoj $\epsilon(\Sigma)$-klasi. Dakle, $\epsilon(\Sigma)$ je relacija slabe povezanosti digrafa $\Gamma(\Sigma)$, pa sve što treba da uradimo je da dovoljno brzo i efektivno konstruišemo $\Gamma(\Sigma)$ iz $\Sigma$.

Za početak, za svaki identitet $t(x_1^U, \ldots, x_n^U) \approx t(x_1^V, \ldots, x_n^V) \in \Sigma$ u $\Gamma$ dodajemo grane $U \to V$ i $X \setminus V \to X \setminus U$, ako $U < V$, odnosno dvije grane u suprotnom smjeru ako $V < U$. Sada $\Gamma$ sadrži najviše $2|\Sigma|$ grana i relacija slabe povezanosti koja mu odgovara jednaka je $\epsilon(\Sigma)$.

Dalje, svaki put kada $U \to V$ i $U \to W$ u $\Gamma$ i $V < W$, brišemo granu $U \to V$ i dodajemo $V \to W$. Po završetku postupka, digraf i dalje ima $2|\Sigma|$ grana, njegova relacija slabe povezanosti je nepromijenjena, a izlazni stepen svakog čvora je i dalje najviše 1. Opisani postupak će se završiti, i to nakon kvadratnog broja koraka, ukoliko svaku primjenu vršimo za najmanji skup $U$ za koji takvi $V$ i $W$ postoje. Na ovaj način se izlazni stepen $U$ smanjuje sve dok ne postane 1, i neće se mijenjati u nastavku, pa onda prelazimo na sljedeći najmanji takav $U$ sve dok je to moguće.

Konačno, uvijek kada je $U \to V \to W$ u $\Gamma$, brišemo granu $U \to V$ i dodajemo $U \to W$. Ovaj korak može biti primijenjen na granu koja izlazi iz $U$ i na granu koja ulazi u $V$ najviše jednom, pa je broj ovih koraka najviše kvadratan u odnosu na $|\Gamma|$. Takođe, nakon primjene i dalje postoji jedna grana koja izlazi iz $U$ i jedna koja izlazi iz $V$. Po završetku postupka, broj grana i slaba povezanost ostaju nepromijenjeni, izlazni stepen svakog čvora je i dalje najviše 1, ali sada grana iz svakog $U$ ide ka najvećem skupu u njegovoj $\epsilon(\Sigma)$-klasi. Ovim je konstruisan $\Gamma(\Sigma)$.

**Procedura 2. Pronalaženje $D(\Sigma)$.** Za dati digraf $\Gamma$, implicitno je data i unarna operacija $^*$ na $\mathcal{P}(X)$: $U^* = V$ ako i samo ako je $V$ najveći element (u odnosu na $\leq$) u $[U]_{\epsilon(\Sigma)}$ ako i samo ako je ili $U \to V$ ili je izlazni stepen od $U$ jednak 0 i $V = U$.

Kada je $\Delta$ digraf na $\mathcal{P}(X)$, sa $[U]_\Delta$ obilježavamo komponentu slabe povezanosti koja sadrži $U$. Ako $\emptyset^* = \emptyset$, onda $D(\Sigma) = \emptyset$ i možemo završiti. U suprotnom, počinjemo sa $\Delta := \Gamma(\Sigma)$ i proširujemo klasu $[\emptyset]_\Delta$ koristeći se dvjema vrstama koraka sve dok ne dobijemo $D(\Sigma)$. Fiksiramo $V := \emptyset^*$, tj. $\emptyset \to V$ u $\Delta$.

U prvoj vrsti koraka, zatvaramo $[\emptyset]_\Delta$ za unije. Prvo provjeravamo da li $\bigcup\{U : U \to V\} \subseteq V$. Za to je potrebna provjera ako $U \to V$, da li $U \subseteq V$, pa je broj provjera jednak broju grana u $\Delta$. Ako $\bigcup\{U : U \to V\} \nsubseteq V$, definišemo $W := V \cup \bigcup\{U : U \to V\}$, novi digraf $\Delta$ dobijamo zamjenom svih grana $U \to V$ sa $U \to W^*$ i dodavanjem grane $V \to W^*$. Jasno je da $\Delta$ sada ima jednu granu više, kao i da su $[\emptyset]_\Delta$ i $[W]_\Delta$ spojeni u jednu klasu. Druga klasa može sadržati samo jedan element, pa broj koraka ove vrste ne možemo ograničiti brojem višeelementnih $\epsilon(\Sigma)$-klasa. Ovo je bitno jer graf $\Gamma(\Sigma)$, kao i identiteti u $\Sigma$, kodiraju samo višeelementne $\epsilon(\Sigma)$-klase, a preostali skupovi su implicitno u jednoelementnim klasama. Međutim, važi $|W^*| \geq |W| > |V|$, pa ova vrsta koraka može biti primijenjena najviše $|X|$ puta. Na kraju definišemo $V$ da bude $W^*$ i vratimo se provjeri da li $V = \bigcup\{U : U \to V\}$. Kada više nije moguće sprovesti prvu vrstu koraka, onda $V = \emptyset^*$ ispunjava da ako $U \to V$, onda $U \subseteq V$. Štaviše, broj višeelementnih $\Delta$-klasa se nije povećao.

Nakon što korak definisan u prethodnom pasusu nije više moguće primijeniti, prelazimo na drugu vrstu koraka. Korak počinje traženjem svih grana $U \to U^*$ u $\Delta$ takvih da $U^* \neq V$. Ako neka takva grana zadovoljava $U \subseteq V$ ili $U^* \subseteq V$, onda spajamo $[\emptyset]_\Delta$ i $[U]_\Delta$. U suštini, ako $\max\{U^*, V\} = V$, onda u novom grafu relacije $\Delta$ sve grane $W \to U^*$ zamijenimo sa $W \to V$ i dodamo granu $U^* \to V$. S druge strane, ako $\max\{U^*, V\} = U^*$, onda sve grane $W \to V$ zamijenimo sa $W \to U^*$, dodamo granu $V \to U^*$ i za novi $V$ stavimo $U^*$. Analizirajući potkorake koraka druge vrste jasno je da on može biti urađen u polinomnom vremenu od $|\Sigma|$. Štaviše, broj višeelementnih $\Delta$-klasa se smanjuje za jedan, pa kako je $\Gamma(\Sigma)$ imao najviše $2|\Sigma|$ takvih klasa, onda broj koraka druge vrste može biti ograničen linearnom granicom. Nakon spajanja $[\emptyset]_\Delta$ i $[U]_\Delta$, provjeravamo da li se može primjeniti prva vrsta koraka.

Na kraju dolazimo, u polinomnom vremenu od $|\Sigma|$ i $|X|$, do grafa $\Delta$ koji ispunjava: $[\emptyset]_\Delta$ je unija slabih komponenata od $\Gamma(\Sigma)$ (to su ustvari $\epsilon(\Sigma)$-klase), $\emptyset^* = \bigcup[\emptyset]_\Delta$ i za sve $U \to V$ u $\Delta$ za koje je ili $U \subseteq \emptyset^*$ ili $V \subseteq \emptyset^*$, onda $[U]_\Delta = [\emptyset]_\Delta$. $V := \emptyset^*$ ispunjava da je $V\downarrow$ (u odnosu na inkluziju) unija $\epsilon(\Sigma)$-klasa i da sadrži $[\emptyset]_{\epsilon(\Sigma)}$. Stoga je $D(\Sigma) \subseteq V$.

Sa druge strane, indukcijom po broju koraka dokazaćemo da $\bigcup[\emptyset]_\Delta \subseteq D(\Sigma)$. Baza indukcije jasno proizilazi iz $[\emptyset]_{\epsilon(\Sigma)} \subseteq D(\Sigma)\downarrow$. Pretpostavimo da je $\Delta$ dobijen od $\Delta'$ spajanjem $[\emptyset]_{\Delta'}$ sa $[U]_{\Delta'} = [U]_{\epsilon(\Sigma)}$. Ako je $\Delta$ dobijen od $\Delta'$ primjenom koraka prve vrste, onda je klasa $[\emptyset]_{\Delta'}$ spojena sa $[U]_{\Delta'} = [U]_{\epsilon(\Sigma)}$, gdje $U = \bigcup[\emptyset]_{\Delta'}$. Znamo da $[\emptyset]_{\Delta'} \subseteq D(\Sigma)\downarrow$ kao i da $U = \bigcup[\emptyset]_{\Delta'} \subseteq D(\Sigma)$, prema indukcijskoj pretpostavci. Kako je $D(\Sigma)\downarrow$ unija $\epsilon(\Sigma)$-klasa i kako je $[U]_{\epsilon(\Sigma)}$ jedna $\epsilon(\Sigma)$-klasa koja siječe $D(\Sigma)\downarrow$, zaključujemo da $[U]_{\Delta'} \subseteq D(\Sigma)\downarrow$. Stoga, $[\emptyset]_\Delta \subseteq D(\Sigma)\downarrow$, tj. $\bigcup[\emptyset]_\Delta \subseteq D(\Sigma)$. Ako je $\Delta$ dobijen od $\Delta'$ primjenom koraka druge vrste, onda je klasa $[\emptyset]_{\Delta'}$ spojena sa $[U]_{\Delta'} = [U]_{\epsilon(\Sigma)}$, gdje $U \subseteq \bigcup[\emptyset]_{\Delta'} \in [\emptyset]_{\Delta'}$. Prema indukcijskoj pretpostavci, imamo $\bigcup[\emptyset]_\Delta \subseteq D(\Sigma)$, pa $U \subseteq D(\Sigma)$. Kako je $D(\Sigma)\downarrow$ unija $\epsilon(\Sigma)$-klasa, ovo implicira $[U]_{\Delta'} = [U]_{\epsilon(\Sigma)} \subseteq D(\Sigma)\downarrow$, i kako znamo da $[\emptyset]_{\Delta'} \subseteq D(\Sigma)\downarrow$, opet zaključujemo da $[\emptyset]_\Delta \subseteq D(\Sigma)\downarrow$, tj. $\bigcup[\emptyset]_\Delta \subseteq D(\Sigma)$.

**Procedura 3. Restrikcija na $E(\Sigma)$.** Nakon nalaženja $D(\Sigma)$ dobijamo $E(\Sigma) = X \backslash D(\Sigma)$. Zatim graf $\Gamma(\Sigma)$ mijenjamo grafom $\Gamma'$ na $\mathcal{P}(E(\Sigma))$ takvim da $U \to V$ u $\Gamma'$ ako i samo ako postoji $U' \to V'$ u $\Gamma(\Sigma)$ tako da $U = U' \cap E(\Sigma)$ i $V = V' \cap E(\Sigma)$. $\Gamma'$ ima grana ne više nego $\Gamma(\Sigma)$, pa može biti konstruisan u linearnom broju koraka. Kako $(X \setminus U) \cap E(\Sigma) = E(\Sigma) \setminus (E(\Sigma) \cap U)$, zaključujemo da $U \to V$ u $\Gamma'$ ako i samo ako $E(\Sigma) \setminus V \to E(\Sigma) \setminus U$ u $\Gamma'$.

Takođe, relacija slabe povezanosti grafa $\Gamma'$ jednaka je relaciji ekvivalencije generisanoj sa $\{(U \cap E(\Sigma), V \cap E(\Sigma)) : (U, V) \in \epsilon\}$. Međutim, moguće je da $\Gamma'$ sadrži $U \to V \to W$ ili $U \to V$ i $U \to W$ tako da $V \neq W$. Iz tog razloga ovu proceduru završavamo primjenom procedure 1 na $\Gamma'$.

Procedura 3 za rezultat ima graf $\Gamma' = \Gamma(\epsilon')$, gdje je $\epsilon'$ relacija ekvivalencije na $\mathcal{P}(E(\Sigma))$ generisana sa $\{(U \cap E(\Sigma), V \cap E(\Sigma)) : (U, V) \in \epsilon(\Sigma)\}$. Prema posljedici 4.24, da li $\mathbf{D}$ realizuje $\Sigma$ zavisi od toga da li je relacija $\overline{\epsilon'}$ 0-1 razdvajajuća.

**Procedura 4. Pronalaženje $\overline{\epsilon'}$.** Problem sa kojim se suočavamo kod relacije $\overline{\epsilon'}$ je taj što su njene klase vjerovatno prevelike, odnosno njihova kardinalnost je eksponencijalna u funkciji od $|\Sigma|$. Međutim, znamo da su $\overline{\epsilon'}$-konveksne u odnosu na inkluziju, pa ćemo naći relaciju ekvivalencije $\epsilon''$ na $\mathcal{P}(E(\Sigma))$ takvu da je $\overline{\epsilon'}$ najmanja relacija ekvivalencije na $\mathcal{P}(E(\Sigma))$ koja sadrži $\epsilon''$ i čije klase su konveksne u odnosu na inkluziju. U suštini, $\epsilon''$-klase su višeelementne $\epsilon'$-klase koje se nalaze unutar iste $\overline{\epsilon'}$-klase.

Prvo dokazujemo da, ako su $[U]_{\epsilon'}$ i $[V]_{\epsilon'}$ dvije $\epsilon'$-klase, onda $[U]_{\epsilon'} \leq_{\epsilon'} [V]_{\epsilon'}$ ako i samo ako postoji konačan niz $[W_1]_{\epsilon'}, \ldots, [W_{k-1}]_{\epsilon'}$ višeelementnih $\epsilon'$--klasa takvih da $[U]_{\epsilon'} \preceq_{\epsilon'} [W_1]_{\epsilon'}$, $[W_{k-1}]_{\epsilon'} \preceq_{\epsilon'} [V]_{\epsilon'}$ i za sve $i$, $1 \leq i < k-1$, $[W_i]_{\epsilon'} \preceq_{\epsilon'} [W_{i+1}]_{\epsilon'}$. Definicija $\leq_{\epsilon'}$ je ista, osim što je dozvoljeno da neki od skupova $[W_i]_{\epsilon'}$ budu jednoelementne klase. Kakogod, ako $[W_i]_{\epsilon'} = \{W_i\}$, onda iz $[W_{i-1}]_{\epsilon'} \preceq_{\epsilon'} [W_i]_{\epsilon'} \preceq_{\epsilon'} [W_{i+1}]_{\epsilon'}$ (jedna od spoljašnjih klasa među ove tri može biti $[U]_{\epsilon'}$ ili $[V]_{\epsilon'}$) slijedi da postoje $Z_{i-1}$ i $Z_{i+1}$ u $\mathcal{P}(E(\Sigma))$ takvi da $[W_{i-1}]_{\epsilon'} = [Z_{i-1}]_{\epsilon'}$, $[W_{i+1}]_{\epsilon'} = [Z_{i+1}]_{\epsilon'}$ i $Z_{i-1} \subseteq W_i \subseteq Z_{i+1}$. Onda $[W_{i-1}]_{\epsilon'} \preceq_{\epsilon'} [W_{i+1}]_{\epsilon'}$ i $[W_i]_{\epsilon'}$ mogu biti izostavljeni iz niza koji svjedoči da $[U]_{\epsilon'} \leq_{\epsilon'} [V]_{\epsilon'}$. Stoga, kada su $[U]_{\epsilon'}$ i $[V]_{\epsilon'}$ dvije $\epsilon'$-klase, $[U]_{\epsilon'} \leq_{\epsilon'} [V]_{\epsilon'}$ a samim tim i $[U]_{\epsilon'} \sim_{\epsilon'} [V]_{\epsilon'}$ možemo naći koristeći samo visšeelementne $\epsilon'$--klase. Napominjemo da je dozvoljeno da $[U]_{\epsilon'}$ i $[V]_{\epsilon'}$ budu jednoelementne klase.

Dalje, primijetimo da, kada je $[U]_{\epsilon'}$ jednoelementna i $[U]_{\overline{\epsilon'}}$ to nije, onda postoje $V, W \in [U]_{\overline{\epsilon'}}$ takvi da $V \subseteq U \subseteq W$ i da su $[V]_{\epsilon'}$ i $[W]_{\epsilon'}$ višeelementne klase. Da bismo to razjasnili, primijetimo da $[U]_{\epsilon'}$ mora biti u relaciji $\sim_{\epsilon'}$ sa nekom drugom klasom $[U']_{\epsilon'}$, pa

$$U \subseteq W_1 \ \epsilon' \ W_1' \subseteq \ldots \ \epsilon' \ W_k' \subseteq U' \ \epsilon' \ U'' \subseteq Z_1 \ \epsilon' \ Z_1' \subseteq \ldots \ \epsilon' \ Z_l' \subseteq U.$$

Prema tome $Z_l' \subseteq U \subseteq W_1$, što je i traženo. Posebne slučajeve kada je $[U']_{\epsilon'}$ jednoelementna klasa, odnosno kada su $U'$ i $U$ uporedivi u odnosu na inkluziju, rješavamo na sličan način.

Stoga, ako identifikujemo koje višeelementne $\epsilon'$-klase su u $\sim_{\epsilon'}$ relaciji sa $[U]_{\epsilon'}$, onda je klasa $[U]_{\overline{\epsilon'}}$ njihovo konveksno zatvorenje. Sada sve što treba je da spojimo sve $\epsilon'$-klase koje su u $\sim_{\epsilon'}$ relaciji i dobijena relacija $\epsilon''$ će za svoje konveksno zatvorenje imati $\overline{\epsilon'}$.

Nakon što smo zaključili šta tačno treba uraditi, lako opisujemo proceduru za to. Napominjemo da je $[U]_{\epsilon'}$ višeelementna klasa ako i samo ako postoji grana $V \to W$ u grafu $\Gamma'$ takva da $U \in \{V, W\}$ i tada je $U^* = W$. Prvo kodiramo $\preceq_{\epsilon'}$ između višeelementnih $\epsilon'$-klasa pomoću digrafa u kome $U^* \rightsquigarrow V^*$ ako i samo ako postoje $U' \in [U]_{\epsilon'}$ i $V' \in [V]_{\epsilon'}$ takvi da $U' \subseteq V'$. Ovo postižemo provjerom inkluzije među svim parovima grana u $\Gamma'$ koji imaju različite izlazne čvorove.

Zatim svake dvije višeelementne $\epsilon'$-klase $[U]_{\epsilon'}$ i $[V]_{\epsilon'}$ spojimo ako i samo ako su $U^*$ i $V^*$ u istoj komponenti jake povezanosti u odnosu na $\rightsquigarrow$ (komponente jake povezanosti mogu biti određene u polinomnom vremenu korišćenjem nekim od klasičnih algoritama poput BFS[‡] pretrage u dubinu). Spajanje klasa $[U]_{\epsilon'}$ i $[V]_{\epsilon'}$ radimo istom metodom kao i ranije, ako $U^* < V^*$, modifikujemo $\Gamma'$ zamjenom svih grana oblika $W \to U^*$ sa $W \to V^*$ kao i dodavanjem grane $U^* \to V^*$. Broj zamjena je ograničen brojem višeelementnih $\epsilon'$-klasa, pa procedura za rezultat ima graf $\Gamma'' = \Gamma(\epsilon'')$ u polinomnom vremenu.

**Procedura 5. Provjera da li je $\overline{\epsilon'}$ 0-1 razdvajajuća.** Napomenimo da ako postoje $U, V, W, Z$ takvi da $U \ \overline{\epsilon'} \ V \ \overline{\epsilon'} \ W \ \overline{\epsilon'} \ Z$, i da $U \cap V = \emptyset$ i $W \cup Z = E(\Sigma)$, onda možemo pretpostaviti da su $[U]_{\epsilon'}$, $[V]_{\epsilon'}$, $[W]_{\epsilon'}$ i $[Z]_{\epsilon'}$ višeelementne klase. Naime, ako je $[U]_{\epsilon'}$ jednoelementna klasa, onda postoje višeelementne klase $[U']_{\epsilon'} \sim_{\epsilon'} [U]_{\epsilon'}$ takve da $U' \subseteq U$ (i slično za $V$), dok ako je $[W]_{\epsilon'}$ jednoelementna klasa, onda postoje višeelementne klase $[W']_{\epsilon'} \sim_{\epsilon'} [W]_{\epsilon'}$ takve da $W \subseteq W'$ (i slično za $Z$). Sve ovo slijedi iz zaključaka izvedenih u dokazu procedure 4.

Upravo smo pokazali da je $\overline{\epsilon'}$ 0-1 razdvajajuća ako i samo ako je $\epsilon''$ 0-1 razdvajajuća. Ostaje još jedno da se provjeri. Prolazimo kroz sve grane u $\Gamma''$ i provjeravamo da li takvi $U$, $V$, $W$ i $Z$ postoje među skupovima $U_1$, $U_2$, $U_3$, $U_4$ i $U_5$ takvim da $U_i \to U_5$ u $\Gamma''$ za sve $i$, $1 \leq i \leq 4$. Stoga, prema posljedici 4.24, znamo da li $\mathbf{D}$ realizuje $\Sigma$.

## 4.2 Remzijeva lema na posetu sa disjunktnošću

### 4.2.1 Poseti sa disjunktnošću i njihove reprezentacije

U ovom kratkom potpoglavlju uvodimo posebnu klasu poseta za koju ćemo uvoditi poseban tip uslova u CSP instanci iz narednog poglavlja.

Skup svih nepraznih podskupova skupa $X$ označavamo sa $\mathcal{P}(X)^+$. Relaciju disjunktnosti na $\mathcal{P}(X)^+$ označavamo sa $||$. Dakle, $A||B$ ako i samo ako $A \cap B = \emptyset$. Za proizvoljnu familiju $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)^+$, relacija *disjunktnosti* na $\mathcal{F}$ je simetrična relacija sa osobinom da $A||B$ implicira $A{\downarrow} \cap B{\downarrow} = \emptyset$ i da, ako $A||B$, $A' \subseteq A$ i $B' \subseteq B$, onda $A'||B'$. Prirodno se nameće sljedeća definicija parcijalno uređenog skupa (poseta) sa disjunktnošću.

[‡]skraćeno od engl. breadth first search.

Definicija 4.25. Neka je $\mathbb{P} = (P; \leq, ||)$ skup sa dvije binarne relacije. $\mathbb{P}$ je *poset sa disjunktnošću* ako je $\leq$ poredak na $P$, a $||$ simetrična relacija $P$ koja ispunjava:

(1) $a||b$ implicira $a{\downarrow} \cap b{\downarrow} = \emptyset$ i

(2) ako $a||b$, $a' \leq a$ i $b' \leq b$, onda $a'||b'$.

Sada dokazujemo da $(P; \leq, ||)$ možemo predstaviti kao familiju skupova. Dokazujemo za proizvoljne skupove, iako će za naše potrebe biti dovoljan konačan poset. Dokaz koji izlažemo predložen je od strane anonimnog recenzenta u toku recenzije [25].

Propozicija 4.26. *Za svaki poset sa disjunktnošću $\mathbb{P}$, postoje skup $X$ i familija $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)^+$ takvi da $\mathbb{P} \cong (\mathcal{F}; \subseteq, ||)$.*
*($||$ u $(\mathcal{F}; \subseteq, ||)$ označava baš disjunktnost skupova.)*

Dokaz. Neka je $\mathbb{A} = (\{0,1\}; \leq, D)$, gdje $D = \{(0,0), (1,0), (0,1)\}$ i neka $X := Hom(\mathbb{P}, \mathbb{A})$. Iz definicije karakteristične funkcije je jasno da je za proizvoljan gornji skup $U$ iz $\mathbb{P}$ njegova karakteristična funkcija kompatibilna sa poretkom, dok je kompatibilnost sa drugom relacijom uslovljena nepostojanjem $x, y \in U$ takvih da $x||y$. Naime, u suprotnom bi važilo da se $x$ i $y$ slikaju u 1, što bi bila kontradikcija jer $(1,1) \notin D$. Takođe, iz kompatibilnosti sa poretkom slijedi da su svi elementi skupa $X$ karakteristične funkcije gornjih skupova. Za $a, b \in P$, sa $s_a, s_{a,b} \in A^P$ označavamo karakteristične funkcije od $a{\uparrow}$ i $a{\uparrow} \cup b{\uparrow}$, redom. Sada znamo da $s_a \in X$ za sve $a \in P$, dok $s_{a,b} \in X$ kad je $a \not\parallel b$, ili $a = b$, na osnovu obrata definicije 4.25 (2).

Definišimo sada $\varphi \colon P \to \mathcal{P}(X)$ sa $\varphi(a) = \{f \in X : f(a) = 1\}$. Kako $s_a \in \varphi(a)$, onda $\varphi(a) \in \mathcal{P}(X)^+$. Ako $a \leq b$, onda za sve $s \in \varphi(a)$ važi $s(b) \geq s(a) = 1$, pa $s(b) = 1$ i $\varphi(a) \subseteq \varphi(b)$. Ako $a \nleq b$, onda $s_a \in \varphi(a) \setminus \varphi(b)$, pa $\varphi(a) \nsubseteq \varphi(b)$. Dakle, $\varphi$ je injektivna, a i $\varphi$ i njena inverzna funkcija su monotone. Ako $s \in \varphi(a) \cap \varphi(b)$, onda $(s(a), s(b)) = (1,1) \notin D$, pa $a \not\parallel b$ jer je $s$ homomorfizam. Ako $a \not\parallel b$, onda $s_{a,b} \in \varphi(a) \cap \varphi(b)$, pa $\varphi(a) \cap \varphi(b) \neq \emptyset$. Stoga, $\varphi$ je utapanje, pa je $\varphi(P)$ tražena familija $\mathcal{F}$. □

### 4.2.2 Monohromatska reprezentacija konačnih poseta sa disjunktnošću

U onome što slijedi biće nam potrebne osnove tzv. Remzijeve teorije. U [56] F. P. Remzi je dokazao da za proizvoljne prirodne brojeve $k$, $N$ i $n$, postoji prirodan broj $m$ takav da za bilo koji skup $X$ kardinalnosti $m$, ako su svi $k$-elementni podskupovi od $X$ obojeni sa $n$ boja onda postoji podskup kardinalnosti $N$ čiji su svi $k$-elementni podskupovi iste boje. Najmanji prirodan broj $m$ iz tvrđenja prethodne rečenice označavamo sa $R_k^n(N)$.

LEMA 4.27. *Za svaki konačan poset sa disjunktnošću $\mathbb{P}$ i svaki prirodan broj $n$ postoji prirodan broj $N$ takav da za svako bojenje $\mathcal{P}(N)^+$ u $n$ boja postoji monohromatska familija $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(N)^+$ takva da $\mathbb{P} \cong (\mathcal{F}; \subseteq, ||)$.*

DOKAZ. U dokazu koristimo skupovnu definiciju prirodnih brojeva tj. $M = \{0, 1, \ldots, M-1\}$. Takođe, skupovi kardinalnosti $k$ će biti *$k$-skupovi*, a bojenje sa $n$ boja *$n$-bojenje*. Kolekciju svih $k$-skupova skupa $X$ označimo sa $X^{[k]}$, a sve neprazne podskupove od $X$ kardinalnosti najviše $k-1$ sa $X^{[<k]}$. Takođe, za skup kažemo da je *$k$-monohromatski* ako su svi njegovi $k$-podskupovi iste boje, dok za bilo koji $K \subseteq \mathbb{N}$ kažemo da je skup *$K$-monohromatski* ako je $k$-monohromatski za sve $k \in K$.

Iz propozicije 4.26 znamo da postoje prirodan broj $M$ i familija $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(M)^+$ takvi da $\mathbb{P} \cong (\mathcal{G}; \subseteq, ||)$. Izabraćemo prirodan broj $N$ takav da za svako $n$-bojenje skupa $\mathcal{P}(N)^+$ postoji monohromatska familija $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(N)^+$ takva da $(\mathcal{P}(M)^+; \subseteq, ||) \cong (\mathcal{F}; \subseteq, ||)$. Ovo je dovoljno jer se $\mathbb{P}$ utapa u $(\mathcal{P}(M)^+; \subseteq, ||)$.

Definišimo $t_i$ sa $t_i = 2^{i \cdot M}$ za sve $i > 0$. Dokazaćemo da za $N$ možemo uzeti broj

$$N_{n,M} = R^n_{t_1}(R^n_{t_2}(\ldots(R^n_{t_{(M-1)n-1}}(R^n_{t_{(M-1)n}}(t_{(M-1)n+1})))\ldots)).$$

Neka je $A$ skup kardinalnosti $N_{n,M}$ i fiksirajmo jedno $n$-bojenje skupa $\mathcal{P}(A)^+$. $N_{n,M}$ je, po konstrukciji, dovoljno veliko da skup $A$ ima $t_1$-monohromatski podskup $A_1$ kardinalnosti

$$R^n_{t_2}(R^n_{t_3}(\ldots(R^n_{t_{(M-1)n}}(t_{(M-1)n+1}))\ldots)).$$

Slično dobijamo $t_2$-monohromatski podskup $A_2$ od $A_1$ čija je kardinalnost jednaka $R^n_{t_3}(\ldots(R^n_{t_{(M-1)n}}(t_{(M-1)n+1}))\ldots)$, i nastavljajući ovaj postupak dobijamo niz skupova $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_{(M-1)n+1} =: B'$. Skup $B'$ je $\{t_1, t_2, \ldots, t_{(M-1)n+1}\}$-monohromatski (on je $t_{(M-1)n+1}$-monohromatski jer $|B'| = t_{(M-1)n+1}$). Na osnovu Dirihleovog principa postoji

$$\{t_{i_1}, t_{i_2}, \ldots, t_{i_M}\} \subseteq \{t_1, t_2, \ldots, t_{(M-1)n+1}\}$$

pri čemu je $i_1 < i_2 < \cdots < i_M$ i svi podskupovi od $B'$ kardinalnosti $t_{i_1}, t_{i_2}, \ldots, t_{i_M}$ su iste boje. Izaberimo jedan $t_{i_M}$-elementni podskup od $B'$ i označimo ga sa $B$. Dakle, $B$ je iste boje kao i svaki njegov podskup kardinalnosti $t_{i_j}$, za sve $1 \leq j < M$.

Označimo $B^{[t_{i_j}]}$ sa $\mathcal{B}_j$ za sve $1 \leq j \leq M$. Za svaki $I \in \mathcal{P}(M)^+$, izabraćemo $D_I \in \mathcal{B}_{|I|}$ (specijalno $D_M = B$) i na taj način formirati familiju $\mathcal{F} = \{D_I : I \in \mathcal{P}(M)^+\}$. Primijetimo da je bilo koji $t_{i+1}$-skup dovoljno veliki da ima $\binom{M}{k} < 2^M$ disjunktnih podskupova kardinalnosti $t_i$ (za sve $k$, $0 \leq k \leq M$). $D_I$ biramo induktivno, počevši od $|I| = 1$, gdje samo uzimamo bilo kojih $M$ disjunktnih podskupova u $\mathcal{B}_1$. Ako su $D_J$ izabrani za sve skupove $J \in M^{[k-1]}$, za sve $I \in M^{[k]}$ definisaćemo i podskupove $E_I = \bigcup\{D_J : J \in I^{[k-1]}\}$. U sljedećem koraku biramo podskupove $E'_I \subseteq B$ takve da je $E'_I$ disjunktan sa svim $D_J$ za $|J| < k$, da su za različite $k$-podskupove $I_1$ i $I_2$ od $M$, skupovi $E'_{I_1}$ i $E'_{I_2}$ disjunktni, i da za svaki $I \in M^{[k]}$, važi $|E'_I| = t_{i_k} - |E_I|$. Ako možemo odabrati $E'_I$ tako da bude disjunktan sa $\bigcup\{E_J : J \in M^{[k]}\}$, onda će biti disjunktan i sa $\bigcup\{D_J : J \in M^{[<k]}\}$ jer je svaki $D_J$, gdje $J \in M^{[<k]}$, podskup nekog $E_K$, gdje $K \in M^{[k]}$. Naredni niz nejednakosti svjedoči da je skup $B$ dovoljno veliki da možemo izabrati po parovima disjunktne skupove $E'_I$:

$$|B| \geq t_{i_k+1} = 2^M t_{i_k} > \binom{M}{k} t_{i_k} = \sum_{I \in M^{[k]}} t_{i_k} =$$

$$\sum_{I \in M^{[k]}} (|E_I| + (t_{i_k} - |E_I|)) \geq \left|\bigcup\{E_I : I \in M^{[k]}\}\right| + \sum_{I \in M^{[k]}} (t_{i_k} - |E_I|).$$

Konačno, neka $D_I = E_I \cup E'_I$. Iz odabira skupova je jasno, a bitno nam je u nastavku, da $E'_I \cap D_J = \emptyset$ ako $J \neq I$ i $|J| \leq |I|$. Dakle, između ostalog važi i da, ako $I \neq J$, onda $D_I \neq D_J$.

Ostaje da se pokaže da je preslikavanje iz $\mathcal{P}(M)^+$ u $\mathcal{F}$, definisano sa $I \mapsto D_I$, izomorfizam $(\mathcal{P}(M)^+; \subseteq, ||)$ i $(\mathcal{F}; \subseteq, ||)$. Iz prethodnog pasusa je jasno da je ovo preslikavanje bijekcija, pa ostaje da se pokaže kompatibilnost sa relacijama. Zbog korektnosti zapisa označimo $D_\emptyset := \emptyset$. Dokazujemo prvo da $D_I \cap D_J = D_{I\cap J}$. Ako $J \subseteq I$, onda postoji niz skupova $J = J_1 \subseteq J_2 \subseteq \cdots \subseteq J_s = I$ takvih da $|J_{k+1}| = |J_k| + 1$, pa po konstrukciji $D_{J_k} \subseteq D_{J_{k+1}}$ za sve $k$, $1 \leq k < s$. Dakle, $D_J \subseteq D_I$. U opštem slučaju ovo znači da $D_{I\cap J} \subseteq D_I \cap D_J$. Obratnu inkluziju dokazujemo indukcijom po $|I| + |J|$. Pretpostavimo da $|I| \geq |J|$ i $J \nsubseteq I$. Bazni slučaj $|I| = |J| = 1$ je tačan jer $D_I \cap D_J = \emptyset$. Ako $|I| = k > 1$, onda je $E'_I$ disjunktan sa $D_J$ po konstrukciji, pa

$$D_I \cap D_J = E_I \cap D_J = \bigcup\{D_K : K \in I^{[k-1]}\} \cap D_J =$$

$$\bigcup\{D_K \cap D_J : K \in I^{[k-1]}\} = \bigcup\{D_{K\cap J} : K \in I^{[k-1]}\} \subseteq D_{I\cap J}.$$

Posljednja inkluzija slijedi iz toga da za sve $K \in I^{[k-1]}$, imamo $D_{K\cap J} \subseteq D_{I\cap J}$. Sada se jednostavno izvode sljedeća dva niza ekvivalencija:

$$I \subseteq J \Leftrightarrow I \cap J = I \Leftrightarrow D_{I\cap J} = D_I \Leftrightarrow D_I \cap D_J = D_I \Leftrightarrow D_I \subseteq D_J;$$

$$I||J \Leftrightarrow I \cap J = \emptyset \Leftrightarrow D_{I\cap J} = D_\emptyset \Leftrightarrow D_I \cap D_J = \emptyset \Leftrightarrow D_I||D_J,$$

iz kojih slijedi da je preslikavanje sa početka pasusa jak homomorfizam iz $(\mathcal{P}(M)^+; \subseteq, ||)$ u $(\mathcal{F}; \subseteq, ||)$, pa je dokaz gotov. $\square$

## 4.3 Kanonički pristojni Maljcevljevi uslovi su realizovani u svim lokalno konačnim kongruencijski $\wedge$-poludistributivnim varijetetima

Naredna teorema je generalizacija [40, Teorema 3.2]. Forma dokaza je ista, ali instanca Problema zadovoljenja uslova ima dosta komplikovaniji skup uslova.

TEOREMA 4.28. *Neka je $\Sigma$ kanonički pristojan Maljcevljev uslov. Svaki lokalno konačan kongruencijski $\wedge$-poludistributivan varijetet realizuje $\Sigma$.*

DOKAZ. Neka je $\mathcal{V}$ lokalno konačan kongruencijski $\wedge$-poludistributivan varijetet. Neka je $\mathcal{W}$ idempotentni redukt (ovaj pojam smo definisali u drugoj glavi) od $\mathcal{V}$. $\mathcal{W}$ je lokalno konačan, idempotentan, kongruencijski $\wedge$-poludistributivan varijetet. Sve term operacije u $\mathcal{W}$ su idempotentne i sve idempotentne term operacije varijeteta $\mathcal{V}$ su term operacije varijeteta $\mathcal{W}$, pa $\mathcal{V}$ realizuje $\Sigma$ ako i samo ako $\mathcal{W}$ realizuje $\Sigma'$, koji se sastoji od svih identiteta iz $\Sigma$, osim idempotencije.

Nadalje razmatramo $\Sigma'$ i njegovu reprezentaciju na $X = \{x_1, \dots, x_m\}$. Prema napomeni 4.22, $\Sigma'$ je sintaksno ekvivalentan kanoničkom pristojnom Maljcevljevom uslovu

$$\{f(x_1^U, \dots, x_m^U) \approx f(x_1^V, \dots, x_m^V) : U, V \in I_\Sigma\},$$

gdje $I_\Sigma \subseteq \mathcal{P}(X)$ zadovoljava $(1) - (3)$ definicije 4.21. Za svaki par skupova $U, V \in I_\Sigma$ važi $U \cup V \neq X$, što ćemo sada i pokazati. U suprotnom bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da $\emptyset \neq X \setminus V \subseteq U$, pa $X \setminus V \in I_\Sigma$ zbog (2). S druge strane, zbog (1), iz $V \in I_\Sigma$ slijedi $X \setminus V \in J_\Sigma$. Međutim, kako su $I_\Sigma$ i $J_\Sigma$ klase ekvivalencije relacije $\epsilon(\Sigma)$, važi $I_\Sigma \cap J_\Sigma = \emptyset$, pa je ovo nemoguće. Stoga, postoji bar jedan $x_i \in X \setminus (U \cup V)$, pa $x_i^U = x_i^V = x$. Definišimo poset sa disjunktnošću $\mathbb{P} = (I_\Sigma; \subseteq, ||)$. Fiksirajmo $k = |I_\Sigma|$ i $m = |X|$. Neka je $\mathbf{F}$ slobodna algebra varijeteta $\mathcal{W}$, slobodno generisana sa $x$ i $y$, i na kraju fiksirajmo broj $N$ iz tvrđenja leme 4.27 primijenjene na $\mathbb{P}$ i $n = |F|$.

Sada ćemo definisati neke poduniverzume od $\mathbf{F}^2$ (ekvivalentno, kompatibilne binarne relacije algebre $\mathbf{F}$) na isti način (do na permutaciju promjenljivih) kao u [40]:

$$E = \mathrm{Sg}^{\mathbf{F}^2}\left(\begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}\right),$$

$$\geq = \mathrm{Sg}^{\mathbf{F}^2}\left(\begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ y \end{bmatrix}\right),$$

$$G = \mathrm{Sg}^{\mathbf{F}^2}\left(\begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ y \end{bmatrix}\right).$$

Prije nego što nastavimo sa definisanjem dodatnih poduniverzuma, primijetimo da je $G$ jednaka $F \times F$. Naime, ako su $p(x,y), q(x,y) \in F$ proizvoljni, onda je

$$\begin{aligned} q^{\mathbf{F}^2}\left(p^{\mathbf{F}^2}\left(\begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}\right), p^{\mathbf{F}^2}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ y \end{bmatrix}\right)\right) &= q^{\mathbf{F}^2}\left(\begin{bmatrix} p(x,y) \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p(x,y) \\ y \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} p(x,y) \\ q(x,y) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Relaciju inverznu $\geq$ označavaćemo sa $\leq$, dok su $E$ i $G$ simetrične, pa su jednake svojim inverznim relacijama. Neka su sada $R_1 - R_{11}$ poduniverzumi od $\mathbf{F}^3$ definisani (skoro) isto kao u [40]:

$$R_1 = \mathrm{Sg}^{\mathbf{F}^3}\left(\begin{bmatrix} y \\ x \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ x \\ y \end{bmatrix}\right), \; R_2 = \mathrm{Sg}^{\mathbf{F}^3}\left(\begin{bmatrix} x \\ x \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ y \\ x \end{bmatrix}\right),$$

$$R_3 = \mathrm{Sg}^{\mathbf{F}^3}\left(\begin{bmatrix} x \\ x \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ x \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ y \\ x \end{bmatrix}\right),$$

$$R_4 = \mathrm{Sg}^{\mathbf{F}^3}\left(\begin{bmatrix} x \\ x \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ x \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ y \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ y \\ y \end{bmatrix}\right),$$

$$R_5 = \mathrm{Sg}^{\mathbf{F}^3}\left(\begin{bmatrix} x \\ x \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ y \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ y \\ y \end{bmatrix}\right),$$

$$R_6 = \mathrm{Sg}^{\mathbf{F}^3}\left(\begin{bmatrix} x \\ x \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ x \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ y \\ y \end{bmatrix}\right),$$

$$R_7 = \mathrm{Sg}^{\mathbf{F}^3}\left(\begin{bmatrix} x \\ x \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ y \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ x \\ y \end{bmatrix}\right),$$

$$R_8 = \mathrm{Sg}^{\mathbf{F}^3}\left(\begin{bmatrix} y \\ x \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ y \end{bmatrix}\right).$$

Definišimo još i relacije

$$\begin{aligned} R_9 &= \{[p,q,r]^T : [p,q]^T \in E\}, \\ R_{10} &= \{[p,q,r]^T : [p,q]^T \in \geq\} \ \text{ i} \\ R_{11} &= F \times F \times F. \end{aligned}$$

Primijetimo sljedeće činjenice u vezi projekcija gore definisanih relacija na parove koordinata:

- Projekcija $R_1$ na bilo koji par koordinata je $E$;

- Projekcija $R_2$ na posljednji par koordinata je $E$, dok su preostale dvije projekcije jednake $\geq$;

- Projekcija $R_3$ na prve dvije koordinate je $\geq$, dok su preostale dvije projekcije jednake $E$;

- Projekcija $R_4$ na bilo koji par koordinata je $\geq$;

- Projekcija $R_5$ na posljednji par koordinata je $G$, dok su preostale dvije projekcije jednake $\geq$;

- Projekcija $R_6$ na prve dvije koordinate je $G$, dok su preostale dvije projekcije jednake $\geq$;

- Projekcija $R_7$ na prve dvije koordinate je $\geq$, na prvu i posljednju $G$, dok je projekcija na posljednje dvije koordinate jednaka $E$;

- Projekcija $R_8$ na posljednje dvije koordinate je $G$, dok su preostale dvije projekcije jednke $E$;

- Sve projekcije $R_9, R_{10}$ i $R_{11}$ na bilo koji par koordinata su jednake $G = F \times F$, izuzev projekcije $R_9$ čija je projekcija na prve dvije koordinate $E$, i $R_{10}$, čija je projekcija na prve dvije koordinate $\geq$.

NAPOMENA 4.29. Relacije $R_1 - R_{11}$ smo mogli definisati i kao:

$$\begin{aligned}
R_1(x_1,x_2,x_3) &:= E(x_1,x_2) \wedge E(x_1,x_3) \wedge E(x_2,x_3),\\
R_2(x_1,x_2,x_3) &:= x_1 \geq x_2 \wedge x_1 \geq x_3 \wedge E(x_2,x_3),\\
R_3(x_1,x_2,x_3) &:= x_1 \geq x_2 \wedge E(x_1,x_3) \wedge E(x_2,x_3),\\
R_4(x_1,x_2,x_3) &:= x_1 \geq x_2 \wedge x_1 \geq x_3 \wedge x_2 \geq x_3,\\
R_5(x_1,x_2,x_3) &:= x_1 \geq x_2 \wedge x_1 \geq x_3 \wedge G(x_2,x_3),\\
R_6(x_1,x_2,x_3) &:= G(x_1,x_2) \wedge x_1 \geq x_3 \wedge x_2 \geq x_3,\\
R_7(x_1,x_2,x_3) &:= x_1 \geq x_2 \wedge G(x_1,x_3) \wedge E(x_2,x_3),\\
R_8(x_1,x_2,x_3) &:= E(x_1,x_2) \wedge E(x_1,x_3) \wedge G(x_2,x_3),\\
R_9(x_1,x_2,x_3) &:= E(x_1,x_2) \wedge G(x_1,x_3) \wedge G(x_2,x_3),\\
R_{10}(x_1,x_2,x_3) &:= x_1 \geq x_2 \wedge G(x_1,x_3) \wedge G(x_2,x_3),\\
R_{11}(x_1,x_2,x_3) &:= G(x_1,x_2) \wedge G(x_1,x_3) \wedge G(x_2,x_3).
\end{aligned}$$

Međutim, prvobitna definicija je bolja iz razloga što je takvim definisanjem jasno da je svaka projekcija na par koordinata baš neka od relacija $E$, $G$ i $\geq$, a ne neki njen podskup. Naime, u opštem slučaju to nije tačno. Ako uzmemo npr. $R'(x_1,x_2,x_3) := x_1 \geq x_2 \wedge E(x_1,x_3) \wedge G(x_2,x_3)$, onda se lako pokazuje da je $\pi_{\{2,3\}}(R')$ jednaka $E$, a ne $G$. △

Posljednja kompatibilna relacija koju ćemo definisati je $R_I$, poduniverzum od $\mathbf{F}^k$ generisan sa $\{\overline{a}_1,\dots,\overline{a}_m\}$ (podsjećanja radi, $m = |X|$ i $k = |I_\Sigma|$), gdje su $\overline{a}_i$ definisani na sljedeći način: Skupove iz $I_\Sigma$ indeksiramo tako da $I_\Sigma = \{U_1, U_2, \dots, U_k\}$ i $U_i \supseteq U_j \Rightarrow i \leq j$ (drugim riječima, ako $i < j$, onda $U_i \setminus U_j \neq \emptyset$). Zatim definišemo $\overline{a}_i(j) = x$ ako $x_i \notin U_j$ i $\overline{a}_i(j) = y$ ako $x_i \in U_j$, tj. $\overline{a}_i(j) = x_i^{U_j}$. Na kraju, $\overline{a}_i := [\overline{a}_i(1), \dots, \overline{a}_i(k)]^T$, pa $\overline{a}_i$ posmatramo kao vektor kolone elemenata iz $F$.

Razmotrimo šta su mogućnosti za $\pi_{\{i,j\}}(R_I)$ kad $1 \leq i < j \leq k$. Kako $U_i \cup U_j \neq X$ i $U_i \setminus U_j \neq \emptyset$, onda postoje $r, s$, $1 \leq r, s \leq m$, takvi da $\overline{a}_r(i) = x = \overline{a}_r(j)$, $\overline{a}_s(i) = y$ i $\overline{a}_s(j) = x$. Drugim riječima, $\pi_{\{i,j\}}(R_I)$ svakako sadrži vektore $[x,x]^T$ i $[y,x]^T$.

- Ako su $U_i$ i $U_j$ uporedivi, onda $U_i \supsetneq U_j \supsetneq \emptyset$, pa postoji $x_t \in U_i \cap U_j$ za neko $t$, $1 \leq t \leq m$, ali $U_j \setminus U_i = \emptyset$. Dakle, $\overline{a}_t(i) = y = \overline{a}_t(j)$, ali ne postoji $l$, $1 \leq l \leq m$, takav da $\overline{a}_l(i) = x$ i $\overline{a}_l(j) = y$, što će reći da je $\pi_{\{i,j\}}(\{\overline{a}_1, \dots, \overline{a}_m\}) = \{[x,x]^T, [y,x]^T, [y,y]^T\}$ i $\pi_{\{i,j\}}(R_I) = \geq$.

- Ako su $U_i$ i $U_j$ disjunktni, onda $U_i \cap U_j = \emptyset$, a je $U_j \setminus U_i$ neprazan (zbog $U_j \neq \emptyset$), pa postoji $t$, $1 \leq t \leq m$, takav da $\overline{a}_t(i) = x$ i $\overline{a}_t(j) = y$, ali ni za jedno $l$, $1 \leq l \leq m$, nije $\overline{a}_l(i) = y = \overline{a}_l(j)$. Dakle, važi $\pi_{\{i,j\}}(\{\overline{a}_1, \dots, \overline{a}_m\}) = \{[x,x]^T, [y,x]^T, [x,y]^T\}$ i $\pi_{\{i,j\}}(R_I) = E$.

- Ako $U_i$ i $U_j$ nisu ni uporedivi, ni disjunktni, onda $U_j \setminus U_i \neq \emptyset \neq U_i \cap U_j$, pa postoje $t, l$, $1 \leq t, l \leq m$, takvi da $\overline{a}_t(i) = x$, $\overline{a}_t(j) = y$ i $\overline{a}_l(i) = y = \overline{a}_l(j)$. Dakle, $\pi_{\{i,j\}}(\{\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_m\}) = \{[x,x]^T, [y,x]^T, [x,y]^T, [y,y]^T\}$ i $\pi_{\{i,j\}}(R_I) = G$.

Sada definišemo relacijsku strukturu $\mathbb{F} = (F; E, \geq, G, R_1, \ldots, R_{11}, R_I)$ i instancu $(V, F, \mathcal{C})$ od CSP($\mathbb{F}$). Prvo, neka je $Y$ konačan skup takav da $|Y| = N$, gdje je $N$ ranije određeno lemom 4.27, i neka $V = \mathcal{P}(Y)^+$.

U nastavku definišemo $\mathcal{C}$. Neka su $Z_1, Z_2 \in V$ različiti. Ako $Z_1 \supseteq Z_2$, dodajemo uslov $Z_1 \geq Z_2$ u $\mathcal{C}$. Ako $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$, dodajemo uslov $E(Z_1, Z_2)$ u $\mathcal{C}$. Konačno, ako $Z_1$ i $Z_2$ nisu ni uporedivi, ni disjunktni, dodajemo uslov $G(Z_1, Z_2)$ u $\mathcal{C}$.

Neka su $Z_1, Z_2, Z_3 \in V$ po parovima različiti i, pri tome, $i < j$ implicira $Z_i \nsubseteq Z_j$. U odnosu na relacije inkluzije i disjunktnosti skupovi $Z_1$, $Z_2$ i $Z_3$ međusobno mogu biti u sljedećim odnosima:

- Ako jedan od skupova sadrži preostala dva, onda $Z_1 \supseteq Z_2 \cup Z_3$, pa dodajemo uslov $R_2(Z_1, Z_2, Z_3)$, $R_4(Z_1, Z_2, Z_3)$, ili $R_5(Z_1, Z_2, Z_3)$ u $\mathcal{C}$, kad su $Z_2$ i $Z_3$ disjunktni, uporedivi ili ništa od navedenog (redom).

- Ako je jedan od skupova sadržan u preostala dva, onda $Z_3 \subseteq Z_1 \cap Z_2$ i $Z_1$ i $Z_2$ nisu disjunktni, što znači da ako su $Z_1$ i $Z_2$ uporedivi, onda je to prethodni slučaj, pa preostaje nam slučaj kad $Z_1$ i $Z_2$ nisu ni disjunktni ni uporedivi. Onda dodajemo $R_6(Z_1, Z_2, Z_3)$ u $\mathcal{C}$.

- Ako samo jedan par skupova možemo uporediti, recimo $Z_1 \supseteq Z_2$, onda je moguće da $Z_3$ siječe i $Z_1$ i $Z_2$, da $Z_3$ siječe $Z_1$, ali ne i $Z_2$ i da je $Z_3$ disjunktan i sa $Z_1$ i sa $Z_2$. U ovim slučajevima, dodajemo $R_{10}(Z_1, Z_2, Z_3)$, $R_7(Z_1, Z_2, Z_3)$, ili $R_3(Z_1, Z_2, Z_3)$ u $\mathcal{C}$ (redom).

- Konačno, pretpostavimo da nikoja dva od njih nisu uporediva. Ako su sva tri skupa po parovima disjunktni, dodajemo $R_1(Z_1, Z_2, Z_3)$ u $\mathcal{C}$. Ako je $Z_1$ disjunktan sa preostala dva, ali oni se sijeku, onda dodajemo $R_8(Z_1, Z_2, Z_3)$ u $\mathcal{C}$. Ako su $Z_1$ i $Z_2$ disjunktni, ali se preostala dva para sijeku, onda dodajemo $R_9(Z_1, Z_2, Z_3)$ u $\mathcal{C}$. Ako svaki par između $Z_1$, $Z_2$ i $Z_3$ ima neprazan presjek, onda dodajemo $R_{11}(Z_1, Z_2, Z_3)$ u $\mathcal{C}$.

Pokrili smo sve mogućnosti i za svaki podskup $\{Z_1, Z_2, Z_3\}$ uveden je odgovarajući uslov koji koji zavisi isključivo od relacija inkluzije i dsijunktnosti između $Z_1$, $Z_2$ i $Z_3$, pa je instanca 3-gusta. Takođe, kako su sve projekcije ternarnih uslova na parove koordinata baš binarni uslovi uvedeni za te parove koordinata, naša instanca je i 2-konzistentna.

Za kraj uvodimo još jedan tip uslova u $\mathcal{C}$. Za svaku familiju $\mathcal{F} = \{Z_1, \ldots, Z_k\} \subseteq \mathcal{P}(Y)^+$ takvu da $\mathbb{P} \cong (\mathcal{F}; \subseteq, ||)$ izaberemo jedan izomorfizam $\phi$. Zatim uvodimo uslov $R_I(\phi(U_1), \ldots, \phi(U_k))$ na $\mathcal{F}$. Naravno, dodavanje uslova ne narušava 3-gustinu instance. Dokazali smo da je $\pi_{\{i,j\}}(R_I)$ jedna od relacija $E$, $\geq$, $\leq$ ili $G$, u zavisnosti od međusobnog odnosa skupova $U_i$ i $U_j$, pa kako je $\phi$ izomorfizam u odnosu na pomenute odnose (inkluzija i disjunktnost), onda ni 2-konzistencija nije narušena dodavanjem ovih uslova u $\mathcal{C}$.

Upravo smo pokazali da je instanca $(V, F, \mathcal{C})$ problema CSP($\mathbb{F}$) netrivijalna i $(2, 3)$-minimalna, dok je $\mathbb{F}$ kompatibilna sa algebrom $\mathbf{F}$ koja generiše kongruencijski $\wedge$-poludistributivan varijetet. Sada primjenom teoreme 3.37 dobijamo da $(V, F, \mathcal{C})$ ima rješenje $g$.

Rješenje $g\colon V \to F$ je bojenje $V = \mathcal{P}(Y)^+$ u $|F| = n$ boja, pa kako $|Y| = N$, lema 4.27 garantuje egzistenciju monohromatske kopije $\mathbb{P}$ unutar $\mathcal{P}(Y)^+$. Dakle, postoji $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(Y)^+$ takva da $\mathbb{P} \cong (\mathcal{F}; \subseteq, ||)$ i $g{\restriction}_{\mathcal{F}}$ je konstantno. Neka je $g(Z) = u(x, y) \in F$ za sve $Z \in \mathcal{F}$. Znamo da je uslov $R_I$ određen na $\mathcal{F}$ u nekom poretku, pa smo upravo dokazali da $R_I$ sadrži konstantan vektor $[u, u, \ldots, u]^T$. Ovo dalje znači da postoji neki $\mathcal{W}$-term $t(x_1, \ldots, x_m)$ takav da

$$t^{\mathbf{F}^k}(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_m) = [u, u, \ldots, u]^T.$$

Kako se termi u $\mathbf{F}^k$ izračunavaju po koordinatama, ovo implicira da za sve $i$, $1 \leq i \leq k$,

$$t^{\mathbf{F}}(x_1^{U_i}, \ldots, x_m^{U_i}) = t^{\mathbf{F}}(\overline{a}_1(i), \ldots, \overline{a}_m(i)) = u(x, y).$$

Dakle, za sve $i, j$, $1 \leq i, j \leq k$,

$$\mathbf{F} \models t(x_1^{U_i}, \ldots, x_m^{U_i}) \approx t(x_1^{U_j}, \ldots, x_m^{U_j}). \qquad (\diamondsuit_{i,j})$$

Ali $\mathbf{F}$ je $\mathcal{W}$-slobodna algebra na $\{x, y\}$ i svaka od jednakosti ($\diamondsuit_{i,j}$) od promjenljivih sadrži samo $x$ i $y$, pa za sve $U, V \in I_\Sigma$,

$$\mathcal{W} \models t(x_1^U, \ldots, x_m^U) \approx t(x_1^V, \ldots, x_m^V).$$

Stoga, $\mathcal{W}$ realizuje $\Sigma'$, i kao što smo konstatovali u prvom pasusu ovog dokaza, to znači da $\mathcal{V}$ realizuje $\Sigma$. $\square$

U ostatku ovog poglavlja dokazaćemo neke rezultate koji se prirodno oslanjaju na i proizilaze iz teoreme 4.28, koja je centralni rezultat čitave četvrte glave.

Propozicija 4.30. *Kanonički pristojan Maljcevljev uslov $\Sigma$ reprezentovan na $X$ je Tejlorov uslov ako i samo ako za sve $x_i \in X$, $I_\Sigma \neq \mathcal{P}(X \setminus \{x_i\})^+$.*

Dokaz. Neka je $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Ako $I_\Sigma = \mathcal{P}(X \setminus \{x_i\})^+$, onda je $\Sigma$ realizovan sa $f(x_1, \ldots, x_n) = x_i$. Pretpostavimo sada da je za sve $x_i \in X$ ispunjeno $I_\Sigma \neq \mathcal{P}(X \setminus \{x_i\})^+$. Onda za sve $i, j$, $1 \leq i, j \leq n$, $\Sigma$ sadrži identitete $f(x_1^{\{x_i\}}, \ldots, x_n^{\{x_i\}}) \approx f(x_1^{\{x_j\}}, \ldots, x_n^{\{x_j\}})$, koji, zajedno sa idempotentnošću, svjedoče da je $f$ wnu-operacija. Kako je svaki wnu-term ujedno i Tejlorov term, onda je svaka realizacija $\Sigma$ Tejlorov term. $\square$

POSLJEDICA 4.31. *Neka je $\mathcal{V}$ lokalno konačan varijetet i $\Sigma$ kanonički pristojan Maljcevljev uslov reprezentovan na skupu $X$, $|X| \geq 4$, i $\Sigma$ je Tejlorov uslov. Onda $\mathcal{V}$ realizuje $\Sigma$ ako i samo ako je $\mathcal{V}$ kongruencijski $\wedge$-poludistributivan. Takođe, ovo su sve karakterizacije lokalno konačnih kongruencijski $\wedge$-poludistributivnih varijeteta preko kanoničkih pristojnih Maljcevljevih uslova.*

DOKAZ. Ako je $\Sigma$ kanonički pristojan Maljcevljev uslov reprezentovan na skupu $X$, $|X| \geq 4$, i $\Sigma$ je Tejlorov uslov, onda je $\Sigma$ realizovan u svim lokalno konačnim kongruencijski $\wedge$-poludistributivnim varijetetima, na osnovu teoreme 4.28. Štaviše, prema propoziciji 4.30, $I_\Sigma$ sadrži sve jednoelementne podskupove od $X$, a kako je $|X| \geq 4$, imamo da $I_\Sigma$ sadrži bar jedan dvoelementni skup, recimo $\{x_k, x_l\}$.

Neka je $\mathbf{R}$ proizvoljan prsten sa jedinicom, a $\mathbf{M}$ proizvoljan desni $\mathbf{R}$-modul. Pretpostavimo da $\mathbf{M}$ realizuje $\Sigma$. Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je $\mathbf{M}$ vjeran jer je $\mathbf{M}$ term-ekvivalentan $\mathbf{R}/I$ modulu, gdje je $I$ ideal definisan kao $I = \{\alpha \in R : (\forall x \in M)\, \alpha x = 0\}$. Prema pretpostavci, postoji term $t(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ koji realizuje sve identitete iz $\Sigma$. Važi

$$t(x_1^{\{x_i\}}, \ldots, x_n^{\{x_i\}}) = (\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \alpha_j) x + \alpha_i y,$$

pa za vrijednost $x = 0$, identiteti

$$t(x_1^{\{x_i\}}, \ldots, x_n^{\{x_i\}}) \approx t(x_1^{\{x_j\}}, \ldots, x_n^{\{x_j\}})$$

postaju $\mathbf{M} \models \alpha_i y \approx \alpha_j y$. Modul $\mathbf{M}$ je vjeran, pa za sve $i$, $1 \leq i \leq n$, imamo $\alpha_i = \alpha \in R$. Identitet

$$f(x_1^{\{x_1\}}, \ldots, x_n^{\{x_1\}}) \approx f(x_1^{\{x_k, x_l\}}, \ldots, x_n^{\{x_k, x_l\}}),$$

isto za vrijednost $x = 0$, postaje $\mathbf{M} \models 2\alpha y \approx \alpha y$, pa je opet zbog vjernosti modula, $\alpha = 0$. Međutim, konstatacija $\mathbf{M} \models t(x_1, \ldots, x_n) \approx 0$, i idempotentnost $t$ impliciraju $\mathbf{M} \models x \approx 0$, pa je modul $\mathbf{M}$ trivijalan. Kako je svaki modul koji realizuje $\Sigma$ trivijalan, prema ekvivalenciji (3) $\Leftrightarrow$ (1) teoreme 2.10, uslov $\Sigma$ je realizovan samo u kongruencijski $\wedge$-poludistributivnim varijetetima.

Ostaje nam da dokažemo da kanonički pristojni Maljcevljevi uslovi koji ili nisu Tejlorovi uslovi ili su reprezentovani na skupu sa manje od četiri promjenljive ne karakterišu kongruencijsku $\wedge$-poludistributivnost u lokalno konačnim varijetetima. Opet na osnovu ekvivalencije (3) $\Leftrightarrow$ (1) teoreme 2.10, dovoljno je dokazati da su takvi uslovi realizovani u Abelovoj grupi $\mathbf{Z}_2$. Oni uslovi $\Sigma$ koji nisu Tejlorovi uslovi su realizovani putem projekcije (ovi ne važi samo u $\mathbf{Z}_2$ već generalno), a oni uslovi $\Sigma$ koji su Tejlorovi, ali imaju manje od četiri promjenljive moraju biti ternarni wnu-term, a on je u $\mathbf{Z}_2$ realizovan sa $t(x, y, z) = x + y + z$. □

Sada dajemo nešto snažniju verziju teoreme 4.28. Sam rezultat nije toliko važan dio rada [25], ali smo željeli da pokažemo da je naša tehnika dovoljno jaka kao ona koju je Z. Brejdi predstavio u [12].

Teorema 4.32. *Neka je $\mathcal{V}$ lokalno konačan kongruencijski $\wedge$-poludistributivan varijetet. Onda postoji binarni $\mathcal{V}$-term $p(x, y)$ takav da za sve $n > 2$, svaki $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ i svaki kanonički pristojan Maljcevljev uslov $\Sigma$ reprezentovan na $X$, postoji realizacija $\Sigma$ u $\mathcal{V}$ u kojoj je $f$ interpretiran kao neki $\mathcal{V}$-term $t$ tako da $\mathcal{V} \models t(x_1^U, \ldots, x_n^U) \approx p(x, y)$ za sve $U \in I_\Sigma$.*

*Štaviše, $p(x, y)$ se može izabrati tako da $\mathcal{V} \models p(p(x, y), p(y, x)) \approx p(x, y)$.*

Dokaz. Takav term $p(x, y)$ bi, ako postoji, morao biti idempotentan jer su svi pristojni Maljcevljevi uslovi idempotentni. Kao u dokazu teoreme 4.28, koristimo idempotentni redukt od $\mathcal{V}$, varijetet $\mathcal{W}$. Neka je $\mathbf{F} = \mathbf{F}_\mathcal{W}(x, y)$ slobodna algebra i $|F| = n$.

Pretpostavimo suprotno. Neka je skup svih različitih binarnih $\mathcal{W}$-terma $\{p_1(x, y), \ldots, p_n(x, y)\}$ (drugim riječima, to je skup predstavnika elemenata algebre $\mathbf{F}$). Onda za sve $j$, $1 \leq j \leq n$, postoji pristojan Maljcevljev uslov $\Sigma_j$ reprezentovan na $X_j = \{x_{j,1}, \ldots, x_{j,m_j}\}$, određen sa $I_{\Sigma_j} = \{U_1^j, \ldots, U_{k_j}^j\} \subseteq \mathcal{P}^+(X_j)$, tako da za svaku realizaciju $\Sigma_j$ u $\mathcal{V}$, gdje neki $\mathcal{V}$-term $t$ interpretira operaciju iz $\Sigma_j$, važi $\mathcal{V} \not\models t(x_{j,1}^U, \ldots, x_{j,m_j}^U) \approx p_j(x, y)$ za neki $U \in I_{\Sigma_j}$.

Sada tvrdimo da za svaki kanonički pristojan Maljcevljev uslov $\Sigma$ reprezentovan na skupu $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$ postoji drugi pristojan Maljcevljev uslov $\Sigma'$, reprezentovan na skupu $Y = \{x_1, \ldots, x_l\}$, takav da $k < l$ i

$$\{p(x,y) : (\exists t)(\forall U \in I_\Sigma)\, \mathcal{W} \models t(x_1^U, \ldots, x_k^U) \approx p(x,y)\} \supseteq$$
$$\{p(x,y) : (\exists t)(\forall U \in I_{\Sigma'})\, \mathcal{W} \models t(x_1^U, \ldots, x_l^U) \approx p(x,y)\}.$$

Dokaz za $l = k + 1$: Definišimo $I_{\Sigma'}$ i $J_{\Sigma'}$ sa:

- za $U \in I_\Sigma$, neka $U, U \cup \{x_{k+1}\} \in I_{\Sigma'}$,
- za $U \in J_\Sigma$, neka $U, U \cup \{x_{k+1}\} \in J_{\Sigma'}$,
- $\{x_{k+1}\} \in I_{\Sigma'}$ i $X \in J_{\Sigma'}$.

$I_\Sigma \cup \{\emptyset\}$ je donji skup, pa je iz konstrukcije jasno da je to i $I_{\Sigma'} \cup \{\emptyset\}$. Takođe, $U \in I_{\Sigma'}$ ako i samo ako $Y \setminus U \in J_{\Sigma'}$, pa je $J_{\Sigma'} \cup \{Y\}$ gornji skup. Ako postoje $U, V \in I_{\Sigma'}$ takvi da $U \cup V = Y$, onda su $U \setminus \{x_{k+1}\}$ i $V \setminus \{x_{k+1}\}$ u $I_\Sigma$ i njihova unija je $X$, što je u kontradikciji sa pretpostavkom da je $\Sigma$ kanonički pristojan Maljcevljev uslov. Primijetimo da, ako $x_k \in U$ i $\emptyset \subsetneq U \subsetneq X$, onda

$U \in I_\Sigma$ ako i samo ako $U \cup \{x_{k+1}\} \in I_{\Sigma'}$ (ovo važi i u slučaju da $x_k \notin U$). Drugim riječima, ako je

$$\Sigma = \{f(x_1^U, \dots, x_k^U) \approx f(x_1^V, \dots, x_k^V) : U, V \in I_\Sigma\},$$

onda je

$$\Sigma' = \{f'(x_1^U, \dots, x_k^U, x_k^U) \approx f'(x_1^V, \dots, x_k^V, x_k^V) : U, V \in I_\Sigma\}.$$

Ovo znači da za svaku realizaciju $t$ uslova $\Sigma'$, term $t(x_1, x_2, \dots, x_k, x_k)$ predstavlja realizaciju $\Sigma$, čime je kompletiran dokaz u slučaju $l = k+1$.

Za $l > k+1$ induktivno dodajemo jednu po jednu promjenljivu. Sada možemo uvesti dodatnu pretpostavku za skupove na kojima su reprezentovani pristojni Maljcevljevi uslovi $\Sigma_j$. Konkretno da $i < j$ implicira $|X_i| < |X_j|$ jer ako to nije slučaj možemo u skup na kome je reprezentovan $\Sigma_j$ dodati još promjenljivih na osnovu tvrđenja prethodnog pasusa.

Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da su svi $X_j$ po parovima disjunktni i uzeti $X$ tako da $X_j \subseteq X$ za sve $j$, $1 \le j \le n$, i $|X| = 1 + 2\sum_{j=1}^{n} m_j =: m$. Važi $I_{\Sigma_j} \subseteq \mathcal{P}(X_j) \subseteq \mathcal{P}(X)$. Definišimo kanonički pristojan Maljcevljev uslov $\Sigma$ reprezentovan na $X$ sa

$$I_\Sigma = \{U \subseteq X : 1 \le |U| \le \sum_{j=1}^{n} m_j = \frac{m-1}{2}\}.$$

U nastavku modifikujemo dokaz teoreme 4.28 u kojem pokazujemo da $\mathcal{V}$ realizuje $\Sigma$, uz dodatni uslov koji je treba da ispunjava term $p(x, y)$. To ćemo uraditi na sljedeći način: zadržavamo relacije uslova $\ge$, $E$, $G$, $R_1 - R_{11}$ i $R_I$, skup $V$ promenljivih i uslove $\mathcal{C}$, ali ćemo dodati i nove relacije uslova i nove uslove. Prvo u jezik uslova dodajemo kompatibilne relacije $R_{I_j}$, $1 \le j \le n$. Za sve $j$, $1 \le j \le n$, $R_{I_j}$ je poduniverzum od $\mathbf{F}^{k_j}$ generisan sa $\{\overline{a}_1^j, \dots, \overline{a}_{m_j}^j\}$ tako da za sve $r$, $1 \le r \le m_j$ i sve $s$, $1 \le s \le k_j$, važi

$$\overline{a}_r^j(s) := \begin{cases} y, & \text{ako } \ x_{j,r} \in U_s^j; \\ x, & \text{inače.} \end{cases}$$

Sada uvodimo nove uslove sa odgovarajućim relacijama uslova $R_{I_j}$. Neka je $T$ skup promjenljivih na kome smo uveli uslov $R_I$ definisan izomorfizmom $\phi_T \colon (I_\Sigma; \subseteq, ||) \to (T; \subseteq, ||)$. Za svaki takav $T$ i sve $j$, $1 \le j \le n$, izabraćemo jedan podskup $S_j^T \subseteq T$ i uvesti $R_{I_j}$ na $S_j^T$. Podskupove $S_j^T \subseteq T$ biramo tako da

$$S_j^T = \{\phi_T(U) : U \subseteq X_j \subseteq X \text{ i } U \in I_{\Sigma_j}\}.$$

Jasno je da ovdje koristimo da $I_{\Sigma_j} \subseteq I_\Sigma$ jer su svi skupovi u $I_{\Sigma_j}$ „mali” podskupovi od $X$ (manji od $\frac{1}{2}|X|$ ). Uvodimo $R_{I_j}$ na $S_j^T$ na način koji je određen fiksiranim izomorfizmom $\phi_T\restriction_{I_{\Sigma_j}}$ između $(I_{\Sigma_j};\subseteq,||)$ i $(S_j^T;\subseteq,||)$. Važi $|S_j^T| = 2^{|X_j|-1} - 1$, što zajedno sa implikacijom $i < j \Rightarrow |X_i| < |X_j|$ daje da su skupovi $S_j^T$ i $S_{j'}^{T'}$ različiti za $j \neq j'$. Stoga se uslovi $R_{I_j}$ i $R_{i_{j'}}$ uvode na različitim opsezima pa neće nastati problem kada se dvije relacije uvode na istom opsegu. Ako postoje različiti $T$ i $T'$ takvi da $S_j^T = S_j^{T'} =: S$, onda biramo isti izomorfizam između $(I_{\Sigma_j};\subseteq,||)$ i $(S;\subseteq,||)$. Ovakav način odabira izomorfizma nam garantuje da relacija uslova na $S_j^T$ ne zavisi od $T$.

Kao što vidimo u odnosu na dokaz teoreme 4.28 mi smo dodavali nove uslove, pa je instanca i dalje 3-gusta. Restrikcija na par promjenljivih je uvijek binarni uslov određen inkluzijom i disjunktnošću, koji ne zavisi od početnog uslova, već samo međusobnog odnosa te dvije promjenljive. Dakle, instanca je i 2-konzistentna. Sada na osnovu teoreme 3.37 znamo da postoji rješenje $g$. Kao i ranije, koristeći lemu 4.27, znamo da se za neki skup promjenljivih $T$ na kome je uveden uslov $R_I$, sve promjenljive iz $T$ preslikavanjem $g$ slikaju u isti element $u \in F$. Elemenat $u$ je u $\mathcal{V}$ jednak jednom od $p_j(x,y)$, za neko $j$, $1 \leq j \leq n$. Međutim, svaki $R_{I_r}$ je uveden na nekom podskupu od $T$, pa je i uslov $R_{I_j}$ je uveden na skupu $S_j^T \subseteq T$. Zaključujemo da postoji neki $\mathcal{W}$-term $t(x_1,\ldots,x_{m_j})$ takav da $t^{\mathbf{F}^{k_j}}(\overline{a}_1^j,\ldots,\overline{a}_{m_j}^j) = [u,u,\ldots,u]^T$. Raspisujući prethodnu jednakost po koordinatama, za sve $U_i^j \in I_{\Sigma_j}$, dobijamo

$$t^{\mathbf{F}}(x_{j,1}^{U_i^j},\ldots,x_{j,m_j}^{U_i^j}) = t^{\mathbf{F}}(\overline{a}_1(i),\ldots,\overline{a}_{m_j}(i)) = u(x,y).$$

Stoga, $\mathcal{W}$ realizuje $\Sigma_j$, bez idempotencije, tako da

$$\mathcal{W} \models t(x_{j,1}^{U_i^j},\ldots,x_{j,m_j}^{U_i^j}) \approx u(x,y) = p_j(x,y)$$

za sve $U_i^j \in I_{\Sigma_j}$. Kako je $\mathcal{W}$ idempotentni redukt od $\mathcal{V}$, to implicira da $\mathcal{V} \models t(x_{j,1}^{U_i^j},\ldots,x_{j,m_j}^{U_i^j}) \approx p_j(x,y)$ za sve $U_i^j \in I_{\Sigma_j}$ i da je $t$ idempotentan term varijeteta $\mathcal{V}$. Međutim, ovo je kontradikcija sa izborom $\Sigma_j$.

Ostaje nam da dokažemo posljednji dio tvrđenja teoreme. Definišimo niz binarnih terma sa

$$p^{(1)}(x,y) := p(x,y) \text{ i } p^{(k+1)}(x,y) := p(p^{(k)}(x,y),p^{(k)}(y,x)).$$

Dokazaćemo da za sve $k \geq 1$, $p^{(k)}$ može zamijeniti $p$ iz prvog pasusa teoreme. Za $k = 1$ tvrđenje trivijalno važi, pa dokazujemo indukcijom po $k$.

Neka je $\Sigma$ pristojan Maljcevljev uslov na $X_n := \{x_1,\ldots,x_n\}$, gdje $n > 2$. Neka je $I_\Sigma$ familija podskupova od $X_n$ standardno pridružena $\Sigma$ i $t(x_1,\ldots,x_n)$ realizacija $\Sigma$ u $\mathcal{V}$ tako da za sve $U \in I_\Sigma$, imamo $\mathcal{V} \models t(x_1^U,\ldots,x_n^U) \approx p(x,y)$. Označimo $t^{(1)} := t$. Definišimo kanonički pristojan Maljcevljev uslov $\Sigma_{<n}$ reprezentovan na $X_{2n-1} = \{x_1,x_2,\ldots,x_{2n-1}\}$ sa

$$I_{\Sigma_{<n}} := \{U \subseteq X_{2n-1} : 1 \leq |U| < n\}.$$

Prema indukcijskoj pretpostavci primjenjenoj na uslov $\Sigma_{<n}$, postoji realizacija $\Sigma_{<n}$ putem $(2n-1)$-arnog $\mathcal{V}$-terma $q_n^{(k)}$ tako da za sve $U \in I_{\Sigma_{<n}}$, imamo

$$\mathcal{V} \models q_n^{(k)}(x_1^U, x_2^U, \dots, x_{2n-1}^U) \approx p^{(k)}(x, y).$$

Zarad kompaktnijeg zapisa, $x_i^s$ će označavati $x_i, x_i, \dots, x_i$, gdje se $x_i$ pojavljuje $s$ puta. Definišemo $t^{(k+1)}$:

$$\begin{aligned} t^{(k+1)}(x_1, \dots, x_n) := t(q_n^{(k)}(x_1^n, x_2, x_3, \dots, x_n), \\ q_n^{(k)}(x_1, x_2^n, x_3, \dots, x_n), \dots, q_n^{(k)}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n^n)). \end{aligned} \tag{$\clubsuit$}$$

Fiksirajmo proizvoljan $\emptyset \neq U \subsetneq X_n$. Važi

$$\begin{aligned} &\mathcal{V} \models q_n^{(k)}(x_1^U, \dots, x_{i-1}^U, (x_i^U)^n, x_{i+1}^U, \dots, x_n^U) \approx p^{(k)}(x, y) \\ &\text{akko } |U \cap (X_n \setminus \{x_i\})| + n|U \cap \{x_i\}| < n \text{ akko } x_i \notin U. \end{aligned}$$

S druge strane, analogno

$$\mathcal{V} \models q_n^{(k)}(x_1^U, \dots, x_{i-1}^U, (x_i^U)^n, x_{i+1}^U, \dots, x_n^U) \approx p^{(k)}(y, x) \text{ akko } x_i \in U.$$

Iz ($\clubsuit$) slijedi da je $t^{(k+1)}(x_1^U, \dots, x_n^U)$ u $\mathcal{V}$ jednako $t(x_1^U, \dots, x_n^U)$ u kom se $x$ zamijeni sa $p^{(k)}(x, y)$ i $y$ sa $p^{(k)}(y, x)$. Kako je $t$ realizacija $\Sigma$ u $\mathcal{V}$, sa dobijenom operacijom $p(x, y)$, slijedi da za sve $U \subseteq X_n$, važi

$$U \in I_\Sigma \text{ akko } \mathcal{V} \models t^{(k+1)}(x_1^U, \dots, x_n^U) \approx p(p^{(k)}(x, y), p^{(k)}(y, x)) = p^{(k+1)}(x, y),$$

čime je dokaz indukcijom kompletiran.

Neka je preslikavanje $\psi \colon \mathbf{F}^2 \to \mathbf{F}^2$ definisano sa

$$(a, b) \mapsto (p(a, b), p(b, a)).$$

Skup $F^2$ je konačan, pa postoji prirodan broj $l$ takav da je preslikavanje $\psi^l := \underbrace{\psi \circ \dots \circ \psi}_{l}$ idempotentno, tj. da važi $\psi^l \circ \psi^l = \psi^l$. Primijetimo da važi $\psi^l(x, y) = (p^{(l)}(x, y), p^{(l)}(y, x))$, pa iz $\psi^l \circ \psi^l = \psi^l$ projekcijom na prvu koordinatu dobijamo

$$\mathcal{V} \models p^{(l)}(p^{(l)}(x, y), p^{(l)}(y, x)) \approx p^{(l)}(x, y).$$

Konačno, za $p(x, y)$ možemo uzeti term $p^{(l)}(x, y)$. $\square$

Sada dokazujemo najelegantniju karakterizaciju kongruencijske $\wedge$-poludistributivnosti iz [12].

TEOREMA 4.33 ([12, Posljedica 1]). *Lokalno konačan varijetet $\mathcal{V}$ je kongruencijski $\wedge$-poludistributivan ako i samo ako realizuje sljedeći jak Maljcevljev uslov:*

$$\begin{aligned} f(x, x, x) \approx x, \\ f(f(x, x, y), f(x, x, y), f(y, y, x)) \approx f(x, x, y) \approx f(x, y, x) \approx f(y, x, x). \end{aligned} \tag{B}$$

DOKAZ. Smjer ($\Rightarrow$) slijedi direktno iz teoreme 4.32 primjenjene na kanonički pristojan Maljcevljev uslov $W$ reprezentovan na $\{x_1, x_2, x_3\}$ i dat skupom $I_W = \{\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}\}$. Svaka realizacija $W$ je ternarni wnu-term, dok posljednja rečenica teoreme 4.32 implicira da u $\mathcal{V}$ važi

$$f(f(x,x,y), f(x,x,y), f(y,y,x)) \approx p(p(x,y), p(y,x)) \approx p(x,y) \approx f(x,x,y).$$

Sada dokazujemo smjer ($\Leftarrow$). Neka je $\mathbf{R}$ komutativan prsten sa jedinicom i $\mathbf{M}$ proizvoljan $\mathbf{R}$-modul. Pretpostavimo da $\mathbf{M}$ realizuje (B) i bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je $\mathbf{M}$ vjeran. Postoji term $t(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i x_i$ koji realizuje sve identitete u (B). Evaluacijom $x = 0$, dobijamo $\alpha_1 y = \alpha_2 y = \alpha_3 y$ za sve $y$, a vjernost $\mathbf{M}$ implicira $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ u $\mathbf{R}$ (označimo $\alpha := \alpha_1$). Ukoliko stavimo $x = y$ u (B), dobijamo $3\alpha x = x$, pa je $3\alpha = 1$. Evaluacijom $x = 0$ dobijamo $\alpha^2 y + \alpha^2 y + 2\alpha^2 y = \alpha y$. Dakle, $\alpha(3\alpha + \alpha)y = \alpha y$, što implicira $\alpha(\alpha + 1)y = \alpha y$, odakle je dalje $\alpha^2 y + \alpha y = \alpha y$ i konačno $\alpha^2 y = 0y$, što znači da $\alpha^2 = 0$ iz osobine vjernosti modula. Međutim, onda $0 = 9\alpha^2 = (3\alpha)(3\alpha) = 1 \cdot 1 = 1$, što znači da za sve $x \in M$, važi $x = 1x = 0x = 0$, pa je $\mathbf{M}$ trivijalan. Kako je svaki idempotenti redukt modula koji realizuje $\Sigma$ trivijalan, prema teoremi 2.10, $\Sigma$ je realizovan samo u kongruencijski $\wedge$-poludistributivnim varijetetima. $\square$

## 4.4 Sinteza rezultata

Naredna teorema sumira najbitnije rezultate ove glave.

TEOREMA 4.34. *Neka je $\Sigma$ pristojan Maljcevljev uslov na skupu promjenljivih $X$. Sljedeći uslovi su ekvivalentni:*

(1) *Svaki lokalno konačan kongruencijski $\wedge$-poludistributivan varijetet realizuje $\Sigma$.*

(2) $\mathbf{D}$ *realizuje $\Sigma$.*

(3) *Postoji kanonički pristojan Maljcevljev uslov $\Pi$ reprezentovan na skupu $E \subseteq X$ takav da $\{(U \cap E, V \cap E) : (U, V) \in \epsilon(\Sigma)\} \subseteq \epsilon(\Pi)$.*

*Štaviše, u polinomnom vremenu od $|\Sigma|$ i $|X|$ možemo provjeriti da li su tri pomenuta uslova ispunjena.*

DOKAZ. (1) $\Rightarrow$ (2) $\mathsf{V}(\mathbf{D})$ je lokalno konačan jer je $\mathbf{D}$ konačan. Takođe, $\mathbf{D}$ generiše kongruencijski $\wedge$-poludistributivan varijetet. Naime, ako je $f$ simbol standardne operacije iz $\mathbf{D}$, lako se provjerava da za $q(x,y,z) = f(x,y,z)$ i $p(x,y,z,u) = f(x,y,f(x,z,u))$, identiteti (KKVW) važe u $\mathsf{V}(\mathbf{D})$, pa $\mathbf{D}$ generiše kongruencijski $\wedge$-poludistributivan varijetet.

(2) $\Rightarrow$ (3) Slijedi iz leme 4.20 za $E := E(\Sigma)$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Neka je $\mathcal{V}$ lokalno konačan kongruencijski $\wedge$-poludistributivan varijetet. Prema teoremi 4.28, $\mathcal{V}$ realizuje $\Pi$. Stoga, za $E = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\}$, $\mathcal{V}$ realizuje uslov

$$\Sigma' = \{g(x_{i_1}^{U\cap E}, \ldots, x_{i_k}^{U\cap E}) \approx g(x_{i_1}^{V\cap E}, \ldots, x_{i_k}^{V\cap E}) : (U, V) \in \epsilon(\Sigma)\}.$$

Na osnovu leme 4.5, $\mathcal{V}$ realizuje $\Sigma$ interpretacijom njegovog operacijskog simbola kao nekog terma na skupu promjenljivih $E$.

Napominjemo da je algoritam za provjeru (2) opisan u poglavlju 4.1.4. $\square$

Posljedica 4.35. *Neka je $\Sigma$ linearan, idempotentan jak Maljcevljev uslov u kom se pojavljuju tačno dvije promjenljive. Sljedeći uslovi su ekvivalentni:*

(1) *$\Sigma$ je realizovan u $\mathbf{D}$, ali nije ni u jednom netrivijalnom konačnom modulu.*

(2) *Ako je $\mathcal{V}$ lokalno konačan varijetet, onda $\mathcal{V}$ realizuje $\Sigma$ ako i samo ako je $\mathcal{V}$ kongruencijski $\wedge$-poludistributivan.*

Dokaz. (1) $\Rightarrow$ (2) Ako je $\Sigma$ realizovan u $\mathbf{D}$, onda možemo, prema propoziciji 2.4, uzeti pristojan Maljcevljev uslov $\Sigma'$, takav da je $\Sigma'$ realizovan u svakom varijetetu u kom je realizovan uslov $\Sigma$. Na osnovu teoreme 4.34, $\Sigma'$ je realizovan u svakom lokalno konačnom kongruencijski $\wedge$-poludistributivnom varijetetu i koristeći opet propoziciju 2.4, zaključujemo da je i $\Sigma$ realizovan u svakom lokalno konačnom kongruencijski $\wedge$-poludistributivnom varijetetu.

Pretpostavimo sada da lokalno konačan varijetet $\mathcal{V}$ realizuje $\Sigma$. Neka je $\mathcal{E} := \mathrm{Mod}(\Sigma)$. Prema pretpostavci (1), za proizvoljno konačno polje $\mathbb{F}$, jednodimenzionalni vektorski prostor ${}_{\mathbb{F}}\mathbf{V}$ nad $\mathbb{F}$ ne realizuje $\Sigma$. Varijetet ${}_{\mathbb{F}}\mathcal{V}$ svih vektorskih prostora nad $\mathbb{F}$ je generisan sa ${}_{\mathbb{F}}\mathbf{V}$, pa onda ni ${}_{\mathbb{F}}\mathcal{V}$ ne realizuje $\Sigma$. Konačno, $\mathcal{V}$ realizuje $\Sigma$, pa na osnovu implikacije (4) $\Rightarrow$ (1) teoreme 2.10, $\mathcal{V}$ je kongruencijski $\wedge$-poludistributivan.

(2) $\Rightarrow$ (1) Implikacija je tačna jer je $\mathsf{V}(\mathbf{D})$ kongruencijski $\wedge$-poludistributivan lokalno konačan varijetet, a $\mathsf{V}(\mathbf{M})$ nije, gdje je $\mathbf{M}$ proizvoljan netrivijalan konačan modul. $\square$

## 4.5 Problemi

Za kraj glave smo ostavili diskusiju o mogućim pravcima daljih istraživanja kada su u pitanju Maljcevljeve karakterizacije kongruencijske $\wedge$-poludistributivnosti.

Kao prirodan se nameće problem uklanjanja uslova ograničenja na dvije promjenljive u skupovima identiteta. U [12] autor je uspio da na elegantan način kodira problem kao instancu CSP-a i samim tim znatno skrati dokaz, dok je naš način koji smo prezentovali u ovoj glavi tehnički zahtjevniji i duži. S druge strane, metod iz [12] je sigurno ograničen na dvije promjenljive (vidjeti lemu 2 iz [12] i njen dokaz), a to nije tako i u našem slučaju. Naime, mi smo identitete kodirali pomoću relacija ekvivalencije koje su imale dvije klase ekvivalencije. Slično možemo uraditi i ako radimo sa više od dvije promjenljive; recimo, ako bismo koristili tri promjenljive, onda bi $f(x, y, y, z, x, z)$ bio kodiran kao relacija ekivivalencije sa klasama $C_x = \{x_1, x_5\}$, $C_y = \{x_2, x_3\}$ i $C_z = \{x_4, x_6\}$. Kako smo radili sa dvije promjenljive odnosno sa dvije klase ekvivalencije mogli smo vršiti kodiranje samo pomoću $C_y$ jer je bilo jasno da je $C_x$ njegov komplement. Međutim, dok smo u ovom slučaju trebali da uzmemo u obzir disjunktnost, inkluziju i „ništa od ta dva", u situaciji sa tri promjenljive se suočavamo sa mnogo više mogućih odnosa između dvije relacije ekvivalencije. Drugim riječima, Remzijev argument postaje dosta komplikovaniji. Sljedeći primjer isključuje mogućnost karakterizacije putem realizacije u algebri $\mathbf{D}$.

Primjer 1. Jaki Maljcevljevi uslovi

$$t(x, x, x, x) \approx x,$$
$$t(x, x, y, z) \approx t(y, z, y, x) \approx t(x, z, z, y)$$

i

$$t(x, x, x, x) \approx x,$$
$$t(x, x, y, z) \approx t(y, x, z, x) \approx t(y, z, x, y)$$

su realizovani u $\mathbf{D}$, ali nisu realizovani u svim lokalno konačnim kongruencijski $\wedge$-poludistributivnim varijetetima. $\triangle$

Gornji primjeri su otkriveni kompjuterskom pretragom u [40], gdje je i ostavljeno otvoreno pitanje da li su realizovani u svim lokalno konačnim kongruencijski $\wedge$-poludistributivnim varijetetima. Z. Brejdi u [12], i nezavisno M. Maroti (nije objavljeno), su dokazali da nisu.

Iako je prethodna diskusija indikator da je prilično težak, sljedeći problem navodimo kao prirodan nastavak.

Problem 4.36. Naći karakterizaciju svih linearnih jakih Maljcevljevih uslova koji su realizovani u svim lokalno konačnim kongruencijskim $\wedge$-poludistributivnim varijetetima.

Drugi, vjerovatno teži, i sigurno privlačniji, problem leži u izbacivanju uslova lokalne konačnosti. Najveći napredak u tom pravcu je rezultat M. Olšaka [53], o kom će više riječi biti u narednoj glavi.

Problem 4.37. Da li postoji jak Maljcevljev uslov $\Sigma$ takav da za sve varijetete $\mathcal{V}$ važi da je $\mathcal{V}$ kongruencijski $\wedge$-poludistributivan ako i samo ako $\mathcal{V}$ realizuje $\Sigma$?

Glava **5**

# O najslabijim jakim Maljcevljevim uslovima

U prvoj glavi smo definisali pretporedak $\preceq$ pomoću kojeg poredimo jake Maljcevljeve uslove i rekli smo da identifikacijom ekvivalentnih uslova možemo formirati mrežu interpretacijskih tipova. U [61] je dokazano da ova mreža nema atome. Međutim, ako se ograničimo na lokalno konačne varijetete i/ili na idempotentne jake Maljcevljeve uslove, onda to ne mora važiti jer u prvom slučaju mreža interpretacijskih tipova kolapsira, dok se u drugom posmatra njena podmreža.

Kao što smo vidjeli u drugoj glavi, Tejlor je u [60] dokazao da je egzistencija Tejlorovog terma najslabiji netrivijalan idempotentan Maljcevljev uslov, ali nije bilo poznato da li je to i jak Maljcevljev uslov, ili ekvivalentno, da li je to jedinstven atom podmreže mreže interpretacijskih tipova koja se sastoji od idempotentnih jakih Maljcevljevih uslova.

M. Sigers je 2009. godine dokazao da je egzistencija Tejlorovog terma jako Maljcevljevo svojstvo lokalno konačnih varijeteta.

Teorema 5.1 ([58]). *Lokalno konačan varijetet $\mathcal{V}$ je Tejlorov ako i samo ako realizuje jak Maljcevljev uslov*

$$\begin{aligned} s(x,x,x,x,x,x) &\approx x, \\ s(x,x,x,x,y,y) &\approx s(x,y,x,y,x,x), \\ s(y,y,x,x,x,x) &\approx s(x,x,y,x,y,x). \end{aligned} \tag{S}$$

Dokaz. Vidjeti dokaz teoreme 1.1 iz [58]. $\square$

Direktna posljedica je jaka Maljcevljeva karakterizacija lokalno konačnih varijeteta koji ispuštaju tip **1**, ili, prema notaciji iz poglavlja 1.4, klase $\mathcal{M}_{\{\mathbf{1}\}}$.

Posljedica 5.2. *Neka je $\mathcal{V}$ lokalno konačan varijetet. $\mathcal{V}$ ispušta tip* **1** *ako i samo ako realizuje jak Maljcevljev uslov* (S).

Dokaz. Slijedi iz teoreme 5.1 i teoreme 9.6 iz [31]. $\square$

Ubrzo nakon objavljivanja ovog rezultata primjećeno je da se dobijeni uslov može optimizovati koristeći glavnu teoremu iz [8], dok se [58] oslanja na nešto stariji i slabiji rezultat iz [30].

Teorema 5.3 ([42]). *Lokalno konačan varijetet $\mathcal{V}$ je Tejlorov ako i samo ako realizuje jak Maljcevljev uslov*

$$
\begin{gathered}
e(x,x,x,x) \approx x, \\
e(y,y,x,x) \approx e(y,x,y,x) \approx e(x,x,x,y).
\end{gathered} \tag{S'}
$$

Dokaz. Vidjeti dokaz teoreme 2.2 iz [42]. $\square$

U [42] je takođe pokazano da egzistencija Tejlorovog terma u lokalno konačnom slučaju nije definabilna jakim Maljcevljevim uslovom sa samo jednim termom arnosti manje od 4, pa term $e$ iz prethodne teoreme predstavlja optimalan jak Maljcevljev uslov za karakterizaciju pomenutih osobina lokalno konačnih varijeteta.

Na 92. po redu izdanju konferencije Arbeitstagung Allgemeine Algebra (AAA) u maju 2016. godine u Pragu najavljen je iznenađujući dokaz M. Olšaka da je egzistencija Tejlorovog terma jako Maljcevljevo svojstvo i u opštem slučaju. Sada ćemo navesti prvobitnu verziju Olšakove teoreme.

Definicija 5.4. Kažemo da varijetet $\mathcal{V}$ ima DL term $t$ ako je $t$ term arnosti 12 na jeziku varijeteta $\mathcal{V}$ takav da u $\mathcal{V}$ važe identiteti:

$$
\begin{gathered}
t(x,x,x,x,x,x,x,x,x,x,x,x) \approx x, \\
t(x,x,y,y,x,x,y,y,x,x,y,y) \approx t(x,x,y,y,y,y,x,x,y,y,x,x), \\
t(x,y,x,y,x,y,x,y,x,y,x,y) \approx t(y,x,y,x,x,y,x,y,y,x,y,x).
\end{gathered} \tag{O}
$$

Teorema 5.5 ([53]). *Varijetet ima Tejlorov term ako i samo ako ima DL term.*

Dokaz. Vidjeti dokaz teoreme 1.1 u [53]. $\square$

Kao i u slučaju Sigersovog uslova u lokalno konačnom slučaju, jedno od interesantnijih pitanja je bilo da li se dobijeni uslov može pojednostaviti. Autor ove disertacije je zajedno sa P. Đapićem radio na optimizaciji DL* terma i nastavku će biti predstavljeni dobijeni rezultati, a koji su objavljeni u [24].

Prvo dokazujemo da se arnost sa 12 može smanjiti na 10.

*skraćeno od engl. double loop.

LEMA 5.6. *Varijetet $\mathcal{V}$ ima DL term ako i samo ako realizuje sljedeći jak Maljcevljev uslov*

$$\begin{aligned} f(x,x,x,x,x,x,x,x,x,x) &\approx x, \\ f(x,x,y,y,x,x,y,y,x,x) &\approx f(x,x,y,y,y,y,x,x,y,y), \\ f(x,y,x,y,x,y,x,y,x,y) &\approx f(y,x,y,x,x,y,x,y,y,x). \end{aligned} \tag{PV1}$$

DOKAZ. Ukoliko $\mathcal{V}$ ima term $t$ sa jedanaest promjenljivih koji predstavlja realizaciju uslova (PV1), onda je taj isti term i DL term, pri čemu se dvanaesta promjenljiva DL terma ne pojavljuje u njegovom sintaksnom zapisu. Dakle, ostaje da se pokaže obratna implikacija.

Kao što smo ranije rekli, možemo pretpostaviti da je $\mathcal{V}$ idempotentan. Neka je $t$ DL term u $\mathcal{V}$ i neka je $\mathbf{F}$ slobodna algebra u $\mathcal{V}$, slobodno generisana sa $x$ i $y$. Neka

$$G = \mathrm{Sg}^{\mathbf{F}^4}\left(\begin{bmatrix} x\\x\\x\\y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x\\x\\y\\x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y\\y\\x\\y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y\\y\\y\\x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x\\y\\x\\x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x\\y\\y\\y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y\\x\\x\\x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y\\x\\y\\y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x\\y\\x\\y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x\\y\\y\\x \end{bmatrix}\right).$$

Definišimo neke elemente iz $F$:

$$\begin{aligned} a &= t(x,x,y,y,x,x,y,y,x,x,y,y), \\ \overline{a} &= t(y,y,x,x,x,x,y,y,x,x,y,y), \\ b &= t(x,y,x,y,x,y,x,y,x,y,x,y) \ \text{ i} \\ b' &= t(x,y,x,y,x,y,x,y,x,y,y,x). \end{aligned}$$

Iz (O) slijedi

$$\begin{aligned} a &= t(x,x,y,y,y,y,x,x,y,y,x,x), \\ \overline{a} &= t(y,y,x,x,y,y,x,x,y,y,x,x) \ \text{ i} \\ b &= t(y,x,y,x,x,y,x,y,y,x,y,x). \end{aligned}$$

Dokazaćemo da određeni vektori pripadaju $G$. Neka je $\overline{\varphi}$ automorfizam od $F$ koji proširuje preslikavanje $\varphi$ definisano sa $\varphi(x) = y$ i $\varphi(y) = x$. Kako $[x,y,x,x]^T, [y,x,x,x]^T \in G$, onda za sve $u \in F$, važi $[u, \overline{\varphi}(u), x, x]^T \in G$ zbog idempotencije. Slično, iz $[x,y,y,y]^T, [y,x,y,y]^T \in G$ i idempotencije slijedi da za sve $u \in F$, $[u, \overline{\varphi}(u), y, y]^T \in G$. Kako $\overline{\varphi}(a) = \overline{a}$ i $\overline{\varphi}(\overline{a}) = a$, dobijamo $[a, \overline{a}, x, x]^T$, $[\overline{a}, a, x, x]^T$, $[a, \overline{a}, y, y]^T$, $[\overline{a}, a, y, y]^T \in G$. Pretpostavljajući da $v = v(x,y) \in F$, idempotentnost terma $v$ implicira $[a, \overline{a}, v, v]^T, [\overline{a}, a, v, v]^T \in G$. Za pogodno odabrane $v$ dobijamo

$$\begin{bmatrix} a\\ \overline{a}\\ b\\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a\\ \overline{a}\\ b'\\ b' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \overline{a}\\ a\\ b\\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \overline{a}\\ a\\ b'\\ b' \end{bmatrix} \in G.$$

Direktnim izračunavanjem vidimo da su i sljedeći elementi u $G$:

$$t\left(\begin{bmatrix}x\\x\\y\\x\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x\\x\\x\\y\end{bmatrix},\begin{bmatrix}y\\y\\y\\x\end{bmatrix},\begin{bmatrix}y\\y\\x\\y\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x\\y\\x\\x\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x\\y\\y\\y\end{bmatrix},\begin{bmatrix}y\\x\\x\\x\end{bmatrix},\begin{bmatrix}y\\x\\y\\y\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x\\y\\y\\x\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x\\y\\x\\y\end{bmatrix},\begin{bmatrix}y\\x\\y\\y\end{bmatrix},\begin{bmatrix}y\\x\\x\\x\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}a\\a\\b\\b'\end{bmatrix}\in G,$$

$$t\left(\begin{bmatrix}x\\y\\x\\x\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x\\y\\y\\y\end{bmatrix},\begin{bmatrix}y\\x\\x\\x\end{bmatrix},\begin{bmatrix}y\\x\\y\\y\end{bmatrix},\begin{bmatrix}y\\x\\x\\x\end{bmatrix},\begin{bmatrix}y\\x\\y\\y\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x\\y\\x\\x\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x\\y\\y\\y\end{bmatrix},\begin{bmatrix}y\\x\\x\\x\end{bmatrix},\begin{bmatrix}y\\x\\y\\y\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x\\y\\x\\y\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x\\y\\y\\x\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}a\\\overline{a}\\b\\b'\end{bmatrix}\in G,$$

$$t\left(\begin{bmatrix}y\\x\\x\\x\end{bmatrix},\begin{bmatrix}y\\x\\y\\y\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x\\y\\x\\x\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x\\y\\y\\y\end{bmatrix},\begin{bmatrix}y\\x\\x\\x\end{bmatrix},\begin{bmatrix}y\\x\\y\\y\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x\\y\\x\\x\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x\\y\\y\\y\end{bmatrix},\begin{bmatrix}y\\x\\x\\x\end{bmatrix},\begin{bmatrix}y\\x\\y\\y\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x\\y\\x\\y\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x\\y\\y\\x\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}\overline{a}\\a\\b\\b'\end{bmatrix}\in G,$$

$$t\left(\begin{bmatrix}y\\y\\y\\x\end{bmatrix},\begin{bmatrix}y\\y\\x\\y\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x\\x\\y\\x\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x\\x\\x\\y\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x\\y\\x\\x\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x\\y\\y\\y\end{bmatrix},\begin{bmatrix}y\\x\\x\\x\end{bmatrix},\begin{bmatrix}y\\x\\y\\y\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x\\y\\y\\x\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x\\y\\x\\y\end{bmatrix},\begin{bmatrix}y\\x\\y\\y\end{bmatrix},\begin{bmatrix}y\\x\\x\\x\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}\overline{a}\\\overline{a}\\b\\b'\end{bmatrix}\in G.$$

Iz definicije poduniverzuma $G$ vidimo da je njegov generatorni skup zatvoren za transpoziciju posljednje dvije koordinate, što je jedan automorfizam od $\mathbf{F}^4$. Stoga je i $G$ zatvoren za transpoziciju posljednje dvije koordinate. Odatle dobijamo:

$$\begin{bmatrix}a\\a\\b'\\b\end{bmatrix},\begin{bmatrix}a\\\overline{a}\\b'\\b\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\overline{a}\\a\\b'\\b\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\overline{a}\\\overline{a}\\b'\\b\end{bmatrix}\in G.$$

Konačno, dejstvom $t$ na dvanaest dobijenih vektora iz $G$ dobijamo:

$$t\left(\begin{bmatrix}a\\a\\b\\b'\end{bmatrix},\begin{bmatrix}a\\a\\b'\\b\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\overline{a}\\\overline{a}\\b\\b'\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\overline{a}\\\overline{a}\\b'\\b\end{bmatrix},\begin{bmatrix}a\\\overline{a}\\b\\b\end{bmatrix},\begin{bmatrix}a\\\overline{a}\\b'\\b'\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\overline{a}\\a\\b\\b\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\overline{a}\\a\\b'\\b'\end{bmatrix},\begin{bmatrix}a\\\overline{a}\\b\\b'\end{bmatrix},\begin{bmatrix}a\\\overline{a}\\b'\\b\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\overline{a}\\a\\b\\b'\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\overline{a}\\a\\b'\\b\end{bmatrix}\right)\in G.$$

Prve dvije koordinate dobijenog vektora su međusobno jednake prema identitetu

$$t(x,x,y,y,x,x,y,y,x,x,y,y)\approx t(x,x,y,y,y,y,x,x,y,y,x,x),$$

dok su druge dvije međusobno jednake prema identitetu

$$t(x,y,x,y,x,y,x,y,x,y,x,y)\approx t(y,x,y,x,x,y,x,y,y,x,y,x).$$

Neka je onda pomenuti vektor $[c,c,d,d]^T$.

Dakle, postoji term $f$ sa deset promjenljivih, koji kad se primjeni na deset generatora od $G$, kao rezultat daje $[c, c, d, d]^T$. Napomenimo samo da je ovaj term implicitno dat našom konstrukcijom, ali je suviše „glomazan” da ga ovdje navodimo i eksplicitno. Vrijednost terma $f$ nakon evaluacije promjenljivih u $\mathbf{F}^4$ se računa po koordinatama, pa

$$f^{\mathbf{F}}(x, x, y, y, x, x, y, y, x, x) = c = f^{\mathbf{F}}(x, x, y, y, y, y, x, x, y, y)$$

i

$$f^{\mathbf{F}}(x, y, x, y, x, y, x, y, x, y) = d = f^{\mathbf{F}}(x, y, x, y, y, x, y, x, y, x).$$

Algebra $\mathbf{F}$ je $\mathcal{V}$-slobodna algebra, što implicira

$$\mathcal{V} \models f(x, x, y, y, x, x, y, y, x, x) \approx f(x, x, y, y, y, y, x, x, y, y)$$

i

$$\mathcal{V} \models f(x, y, x, y, x, y, x, y, x, y) \approx f(x, y, x, y, y, x, y, x, y, x).$$

Idempotentnost $f$ je zagarantovana u $\mathcal{V}$ (jer smo se, bez umanjenja opštosti, ograničili na idempotentne varijetete), $f$ realizuje jak Maljcevljev uslov koji smo i željeli da dokažemo. $\square$

Na kraju, dokazujemo da je moguće ukloniti još jednu promjenljivu, čime dolazimo do jake Maljcevljeve karakterizacije termom arnosti 9.

TEOREMA 5.7. *Varijetet $\mathcal{V}$ ima DL term ako i samo ako realizuje sljedeći jak Maljcevljev uslov*

$$\begin{aligned} f(x, x, x, x, x, x, x, x, x) &\approx x, \\ f(x, x, y, y, x, x, y, y, x) &\approx f(x, x, y, y, y, y, x, x, y), \\ f(x, y, x, y, x, y, x, y, x) &\approx f(y, x, y, x, x, y, x, y, y). \end{aligned} \tag{PV2}$$

DOKAZ. Slično kao u prethodnoj lemi, term koji predstavlja realizaciju jakog Maljcevljevog uslova (PV2) je ujedno i DL term, pa ostaje da se dokaže obratna implikacija.

Tehnika koju koristimo je ista kao u dokazu pomenute leme. Neka je $f$ term koji zadovoljava identitete (PV1) iz leme 5.6. Definišimo

$$H = \mathrm{Sg}^{\mathbf{F}^4}\left(\begin{bmatrix} x \\ x \\ x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ x \\ y \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ y \\ x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ y \\ y \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ y \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ x \\ x \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ x \\ y \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \\ y \end{bmatrix}\right).$$

Kao u dokazu leme 5.6, dovoljno je dokazati da $H$ sadrži vektor oblika $[u, u, v, v]^T$ za neke $u, v \in F$. Definišimo

$$\begin{aligned} a &= f(x, x, y, y, x, x, y, y, x, x), \\ b &= f(x, y, x, y, x, y, x, y, x, y) \ \text{ i} \\ c &= f(y, y, y, y, x, x, x, x, y, y). \end{aligned}$$

Iz (PV1) slijede jednačine

$$a = f(x,x,y,y,y,y,x,x,y,y) \text{ i}$$
$$b = f(y,x,y,x,x,y,x,y,y,x).$$

$H$ sadrži

$$f\left(\begin{bmatrix}x\\y\\x\\x\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x\\y\\x\\x\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x\\y\\y\\y\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x\\y\\y\\y\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x\\x\\x\\y\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x\\x\\x\\y\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x\\x\\y\\x\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x\\x\\y\\x\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x\\y\\x\\y\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x\\y\\x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x\\c\\a\\a\end{bmatrix}$$

i

$$f\left(\begin{bmatrix}y\\y\\x\\y\end{bmatrix},\begin{bmatrix}y\\y\\y\\x\end{bmatrix},\begin{bmatrix}y\\y\\x\\y\end{bmatrix},\begin{bmatrix}y\\y\\y\\x\end{bmatrix},\begin{bmatrix}y\\x\\x\\x\end{bmatrix},\begin{bmatrix}y\\x\\y\\y\end{bmatrix},\begin{bmatrix}y\\x\\x\\x\end{bmatrix},\begin{bmatrix}y\\x\\y\\y\end{bmatrix},\begin{bmatrix}y\\y\\x\\y\end{bmatrix},\begin{bmatrix}y\\y\\y\\x\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}y\\c\\b\\b\end{bmatrix}.$$

Konačno, $H$ sadrži

$$f\left(\begin{bmatrix}y\\c\\b\\b\end{bmatrix},\begin{bmatrix}y\\c\\b\\b\end{bmatrix},\begin{bmatrix}y\\c\\b\\b\end{bmatrix},\begin{bmatrix}y\\c\\b\\b\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x\\c\\a\\a\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x\\c\\a\\a\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x\\c\\a\\a\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x\\c\\a\\a\end{bmatrix},\begin{bmatrix}y\\c\\b\\b\end{bmatrix},\begin{bmatrix}y\\c\\b\\b\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}c\\c\\d\\d\end{bmatrix},$$

gdje $d = f(b,b,b,b,a,a,a,a,b,b)$. Ovo je tačno ono što smo i željeli dokazati, a ostatak je isti kao u lemi 5.6. □

Nakon uvida u teoremu 5.7 M. Olšak je uspio naći sljedeći jak Maljcevljev uslov sa termom arnosti 6.

Teorema 5.8 ([53]). *Varijetet $\mathcal{V}$ je Tejlorov ako i samo ako realizuje jak Maljcevljev uslov*

$$\begin{gathered} s(x,x,x,x,x,x) \approx x, \\ s(x,y,y,y,x,x) \approx s(y,x,y,x,y,x) \approx s(y,y,x,x,x,y). \end{gathered} \tag{O'}$$

Dokaz. Vidjeti dokaz teoreme 1.1 u [53]. □

Iako je jak Maljcevljev uslov (O') sintaksno jednostavniji od uslova (PV2) nije poznato da li je i slabiji. Naime, ako uslov (O') bez idempotencije zapišemo kao

$$\begin{aligned} &s(x,y,y,y,x,x) \approx \\ &s(y,x,y,x,y,x), \\ &s(y,x,y,x,y,x) \approx \\ &s(y,y,x,x,x,y), \end{aligned}$$

možemo vidjeti da se u njemu koriste dva vektora kolona koji imaju po dva $x$ i $y$, dok uslov (PV2) koristi samo jedan takav vektor. Još uvijek ne znamo koji je optimalni uslov u opštem slučaju. Primjećujemo da ako u termu $s$ iz (O') prve dvije promjenljive posmatramo kao pseudo promjenljive, onda je to u stvari term $e$ iz (S'), što term $e$ iz (S') čini dobrim kandidatom za optimalan najslabiji netrivijalan jak Maljcevljev uslov i u opštem slučaju.

# Literatura


[1] Aichinger, E.: Basics of Clone Theory. http://www.algebra.uni-linz.ac.at/Students/UniversalAlgebra/s11/clonebasics2.pdf (manuscript, 2011)

[2] Baker, K. A.: Finite equational bases for finite algebras in a congruence-distributive equational class. Advances in Math. **24** no. 3, 207–243 (1977)

[3] Bang-Jensen, J., Hell, P. , MacGillivray, G.: The Complexity of Colouring by Semicomplete Digraphs. SIAM J. Discrete Math. **1** (3), 281–298 (1988)

[4] Barto, L.: The collapse of the bounded width hierarchy. J. Logic Comput. **26**, 923–943 (2016)

[5] Barto, L., Kozik, M.: Absorbing subalgebras, cyclic terms and the constraint satisfaction problem. Logical Methods in Computer Science **8**/1:07, 1–26 (2012)

[6] Barto, L., Kozik, M.: Congruence distributivity implies bounded width. SIAM J. Comput. **39**, 1531–1542 (2009)

[7] Barto, L., Kozik, M.: Constraint satisfaction problems solvable by local consistency methods. Journal of the ACM **61** 1:03, 19 pp. (2014)

[8] Barto, L., Kozik, M., Niven, T.: The CSP dichotomy holds for digraphs with no sources and no sinks (a positive answer to a conjecture of Bang-Jensen and Hell). SIAM J. Comput. **38**, 1782–1802 (2009)

[9] Barto, L., Kozik, M., Stanovský, D.: Mal'tsev conditions, lack of absorption, and solvability. Algebra Universalis **74**, 185–206 (2015)

[10] Bergman, C.: Universal Algebra: Fundamentals and Selected Topics. Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton (2011)

[11] Bodnartchuk, V. G., Kaluznin L. A., Kotov, V. N. and Romov, B. A.; Galois theory for Post algebras 1-2., Kibernitika (Kiev) **3**, 1–10 (1969)

[12] Brady, Z.: Examples, Counterexamples, and Structure in Bounded Width Algebras. https://arxiv.org/pdf/1909.05901.pdf (manuscript, 2017)

[13] Bulatov, A.: A dichotomy theorem for constraints on a 3-element set. Journal of the ACM, **53**(1), 66–120 (2006)

[14] Bulatov, A.: A Dichotomy Theorem for Nonuniform CSPs. IEEE 58th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS), (2017)

[15] Bulatov, A.: Combinatorial problems raised from 2-semilattices. J. Algebra **298**, 2, 321–339 (2006)

[16] Bulatov, A., Dalmau, V.: A Simple Algorithm for Mal'tsev Constraints. SIAM J. Comput. **36**(1): 16–27 (2006)

[17] Bulatov, A., Jeavons, P., Krokhin, A.: Classifying the complexity of constraints using finite algebras. SIAM J. Comput. **34**(3), 720–742 (electronic) (2005)

[18] Bulatov, A., Valeriote, M.: Recent results on the algebraic approach to the CSP. Complexity of Constraints: An Overview of Current Research Themes, Springer-Verlag, 68–92 (2008)

[19] Burris, S., Sankappanavar, H. P.: A course in universal algebra. Graduate Texts in Mathematics, vol. 78. Springer, New York (1981)

[20] Carvalho, C., Dalmau, V., Marković, P., Maróti, M.: CD(4) has bounded width. Algebra Universalis **60**, 293–307(2009)

[21] Czedli, G.: A characterization for congruence semi-distributivity. In: Proc. Conf. Universal Algebra and Lattice Theory, Puebla (Mexico, 1982), Lecture Notes in Math., vol. 1004, pp. 104–110. Springer, New York (1983)

[22] Dalmau, V.: There are no pure relational width 2 constraint satisfaction problems. Information Processing Letter, **109**, 213–218, (2009)

[23] Day, A.: A characterization of modularity for congruence lattices of algebras. Canad. Math. Bull. **12**, 167–173 (1969)

[24] Đapić, P., Uljarević, V.: A note on the weakest Taylor term. Filomat **31**(18), 5885–5890 (2017)

[25] Draganić, N., Marković, P., Uljarević, V., Zahirović, S.: A characterization of idempotent strong Mal'cev conditions for congruence meet-semidistributivity in locally finite varieties. Algebra Universalis **79**, (2018)

[26] Feder, T., Vardi, M. Y.: The computational structure of monotone monadic snp and constraint satisfaction: a study through datalog and group theory. SIAM J. Comput. **28**, 117–126 (1998)

[27] Freese, R., McKenzie, R.: Commutator Theory for congruence modular varieties. London Math. Soc. Lecture Note Series, vol. 125. Cambridge University Press, Cambridge (1987)

[28] García, O. C., Taylor, W.: The lattice of interpretability types of varieties. Mem. Amer. Math. Soc. 50(305):v+125 (1984)

[29] Geiger, D.: Closed systems of functions and predicates, Pacific J. Math **27**, 95–100 (1968)

[30] Hell, P., Nešetřil, J.: On the complexity of $H$-colouring. J. Combin. Theory B **48**, 92–100 (1990)

[31] Hobby, D., McKenzie, R.: The structure of finite algebras. Contemporary Mathematics, vol. 76. American Mathematical Society, Providence (1988)

[32] Idziak, P., Marković, P., McKenzie, R., Valeriote, M., Willard, R.: Tractability and learnability arising from algebras with few subpowers. SIAM J. Comput. **39**(7): 3023–3037 (2010)

[33] Jeavons, P.: On the Algebraic Structure of Combinatorial Problems. Theoretical Computer Science, **200**: 185–204 (1998)

[34] Jeavons, P., Cohen, D., Gyssens, M.: Closure properties of constraints. Journal of the ACM **44**(4), 527–548 (1997)

[35] Jónsson, B.: Algebras whose congruence lattices are distributive. Math. Scand. **21**, 110–121 (1967)

[36] Jónsson, B.: Congruence varieties. Algebra Universalis **10**, 355–394 (1980)

[37] Jónsson B.: Sublattices of a free lattice. Canad. J. Math. **13**, 256–264 (1961)

[38] Jovanović, J.: Lokalno konačni varijeteti sa polu-distributivnom mrežom kongruencija. Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet. Doktorska disertacija. (2016)

[39] Jovanović, J.: On terms describing omitting unary and affine types. Filomat **27**, 183–199 (2013)

[40] Jovanović, J., Marković, P., McKenzie, R., Moore, M.: Optimal strong Mal'cev conditions for congruence meet-semidistributivity in locally finite varieties. Algebra Universalis **76**, 305–325 (2016).

[41] Kearnes, K., Kiss, E.: The shape of congruence lattices. Mem. Amer. Math. Soc., vol. 222, no. 1046. American Mathematical Society, Providence (2013)

[42] Kearnes, K., Marković, P., McKenzie, R.: Optimal strong Mal'cev conditions for omitting type **1** in locally finite varieties. Algebra Universalis **72**, 91–100 (2014)

[43] Kearnes, K., Szendrei, Á.: The relationship between two commutators. Internat. J. Algebra Comput. **8**, 497–531 (1998)

[44] Kearnes, K., Willard, R.: Residually finite, congruence meet-semidistributive varieties of finite type have a finite residual bound. Proc. Amer. Math. Soc. **127**, 2841–2850 (1999)

[45] Kiss, E., Valeriote, M.: On tractability and congruence distributivity. Log. Meth. Comput. Sci. 3, 2, 2:6, (electronic).

[46] Kozik, M., Krokhin, A., Valeriote, M. Willard, R.: Characterizations of several Maltsev conditions. Algebra Universalis **73**, 205–224 (2015)

[47] Larose, B., Zádori, L.: Bounded width problems and algebras. Algebra Universalis **56**, 439–466 (2007)

[48] Lipparini, P.: A characterization of varieties with a difference term, II: Neutral = meet semi-distributive. Canad. Math. Bull. **41**, 318–327 (1998)

[49] Mal'cev, A. I.: On the general theory of algebraic systems. Math. Sb. (N. S.) **35**, 3–20 (1954)

[50] Maróti, M., McKenzie, R.: Existence theorems for weakly symmetric operations. Algebra Universalis **59**, 463–489 (2008)

[51] McKenzie, R., McNulty, G., Taylor, W.: Algebras, lattices, varieties. Vol. I. The Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics Series, Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, Monterey (1987)

[52] Neumann, W.: On Mal'cev conditions. J. Austral. Math. Soc. **17**, 376–384 (1974)

[53] Olšák, M.: The weakest nontrivial idempotent equations. Bulletin of the London Mathematical Society **49**(6), 1028–1047 (2017)

[54] Park, R.: Equational classes of non-associative ordered algebras. Ph.D. dissertation. UCLA (1976)

[55] Quackenbush, R. W.: Equational classes generated by finite algebras. Algebra Universalis **1**, 265–266 (1971)

[56] Ramsey, F. P.: On a problem of formal logic. Proc. London Math. Soc. 30, Series 2, 264–286 (1930)

[57] Schaefer, T. J.: The Complexity of Satisfiability Problems. In Proceedings of the 10th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC78), 216–226 (1978)

[58] Siggers, M.: A strong Mal'cev condition for locally finite varieties omitting the unary type. Algebra Universalis **64**, 15–20 (2010)

[59] Taylor, W.: Characterizing Mal'cev conditions. Algebra Universalis **3** 351–397 (1973)

[60] Taylor, W.: Varieties obeying homotopy laws. Canadian J. Math. **29** 498–527 (1977)

[61] Taylor, W.: Some very weak identities. Algebra Universalis **25**, 27–35, (1988)

[62] Valeriote, M.: A subalgebra intersection property for congruence distributive varieties, Canadian J. Math. **61(2)** 451–464 (2009)

[63] Willard, R.: A finite basis theorem for residually finite, congruence meet-semidistributive varieties. J. Symb. Log. **65**, 187–200 (2000)

[64] Zhuk, D.: A Proof of CSP Dichotomy Conjecture. IEEE 58th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS), (2017)

# Kratka biografija

Vlado Uljarević je rođen 22. februara 1990. godine u Trebinju. Odrastao je u Bileći, gdje je 2005. godine završio Osnovnu školu „Sveti Sava" kao đak generacije, a 2009. godine i Gimnaziju „Golub Kureš". Tokom osnovnog i srednjoškolskog obrazovanja predstavljao je Bosnu i Hercegovinu na jednoj Juniorskoj Balkanskoj, dvije Balkanske i jednoj Međunarodnoj matematičkoj olimpijadi. Nakon završene srednje škole upisuje studije matematike na Departmanu za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu. Osnovne studije završava 2012. godine nakon čega upisuje i master studije matematike, modul teorijska matematika, takođe na Departmanu za matematiku i informatiku. U oktobru 2014. godine je odbranio master tezu pod nazivom *O glatkim grafovima kompatibilnim sa Tejlorovim operacijama.* U oktobru 2014. godine upisuje i doktorske studije, i zaključno sa julom 2019. položio je sve ispite predviđene planom i programom studija.

Od 1. februara 2015. godine radi kao asistent na Departmanu za matematiku i informatiku. Više puta je bio član komisija na srednjoškolskim takmičenjima iz matematike. Bio je zamjenik vođe ekipe Srbije na *8th Romanian Master of Mathematics* u Bukureštu, kao i na 35. Balkanskoj matematičkoj olimpijadi u Beogradu.

Član je naučnog projekta *Algebarske, logičke i kombinatorne metode sa primenama u teorijskom računarstvu.* Koautor je dva naučna rada koji su objavljeni u časopisima kategorije M22, a rezultate jednog od njih je kao pozvani predavač prezentovao na konferenciji *Trends in Universal Algebra* u Čengduu. Bio je član organizacionog odbora na konferencijama *AAA90* i *AAA94 + NSAC 2017* organizovanim na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu.

Novi Sad, 22. septembar 2020. Vlado Uljarević

**UNIVERZITET U NOVOM SADU**
**PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET**
**KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA**

| | |
|---|---|
| Redni broj: **RBR** | |
| Identifikacioni broj: **IBR** | |
| Tip dokumentacije: **TD** | Monografska dokumentacija |
| Tip zapisa: **TZ** | Tekstualni štampani materijal |
| Vrsta rada: **VR** | Doktorska disertacija |
| Autor: **AU** | Vlado Uljarević |
| Mentor: **MN** | Dr Petar Marković |
| Naslov rada: **NR** | Poludistributivnost, Problem zadovoljenja uslova i jaki Maljcevljevi uslovi |
| Jezik publikacije: **JP** | Srpski |
| Jezik izvoda: **JI** | Srpski/engleski |
| Zemlja publikovanja: **ZP** | Republika Srbija |
| Uže geografsko područje: **UGP** | Vojvodina |
| Godina: **GO** | 2020 |
| Izdavač: **IZ** | Autorski reprint |
| Mesto i adresa: **MA** | Novi Sad, Trg D. Obradovića 4 |
| Fizički opis rada (broj poglavlja/strana/lit.citata/ tabela/slika/grafika/priloga): **FO** | (5/114/64/0/1/0/0) |
| Naučna oblast: | Matematika |

**NO**

Naučna disciplina: Algebra i matematička logika, univerzalna algebra

**ND**

Predmetne odrednice, ključne reči: Maljcevljev uslov, kongruencijska poludistributivnost, varijetet, Problem zadovoljenja uslova, Remzijeva teorija

**PO**

**UDK**

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku, Novi Sad

**ČU**

Važna napomena:

**VN**

Izvod: U ovoj tezi opisujemo linearne, idempotentne, jake Maljcevljeve uslove za kongruencijsku $\wedge$-poludistributivnost u lokalno konačnim varijetetima.

U [40] je predstavljen jedan takav jak Maljcevljev uslov i tehnika koju su autori koristili je uopštenje jednog od glavnih rezultata iz [46]. Glavna razlika je u tome što jednostavna primjena Dirihleovog principa u [46] postaje dosta komplikovaniji argument Remzijevskog tipa u [40]. Mi ovdje dodatno uopštavamo taj argument i prezentujemo dokaz pomenute karakterizacije. Svi ovi radovi koriste snažan rezultat [4] L. Barta o rješivosti Problema zadovoljenja uslova metodama provjere lokalne konzistencije uslova, pa je treća glava teze posvećena detaljnoj prezentaciji tog rada. Takođe, dokazujemo da neki jak Maljcevljev uslov karakteriše kongruencijsku $\wedge$-poludistributivnost u lokalno konačnim varijetetima ako i samo ako je realizovan u određenoj četvoroelementnoj algebri.

Na kraju, bavimo se i problemom pronalaženja optimalnog jakog Maljcevljevog uslova koji karakteriše egzistenciju Tejlorovog terma u opštem slučaju. U [53] M. Olšak predstavio je iznenađujući rezultat da je egzistencija Tejlorovog terma jako Maljcevljevo svojstvo. Term iz prvobitne verzije [53] ima arnost 12, dok mi ovdje prezentujemo dokaz da se arnost može redukovati na 9.

**IZ**

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 12. 12. 2019.

**DP**
Datum odbrane:
**DO**
Članovi komisije: Predsednik: Dr Rozália Madarász Szilágyi, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Član: Dr Petar Đapić, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Član: Dr Bojan Bašić, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Član: Dr Slavko Moconja, docent Matematičkog fakulteta u Beogradu
Član: Dr Petar Marković, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
**KO**

**UNIVERSITY OF NOVI SAD**
**FACULTY OF SCIENCE**
**KEY WORDS DOCUMENTATION**

| | |
|---|---|
| Acession number: | |
| **ANO** | |
| Identification number: | |
| **INO** | |
| Document type: | Monograph type |
| **DT** | |
| Type of record: | Printed text |
| **TR** | |
| Contents code: | Ph.D. thesis |
| **CC** | |
| Author: | Vlado Uljarević |
| **AU** | |
| Mentor: | Petar Marković, Ph.D. |
| **MN** | |
| Title: | Semidistributivity, Constraint Satisfaction Problem and strong Mal'cev conditions |
| **TI** | |
| Language of text: | Serbian |
| **LT** | |
| Language of abstract: | Serbian/English |
| **LA** | |
| Country of publication: | Republic of Serbia |
| **CP** | |
| Locality of publication: | Vojvodina |
| **LP** | |
| Publication year: | 2020 |
| **PY** | |
| Publisher: | Author's reprint |
| **PU** | |
| Publication place: | Novi Sad, Trg D. Obradovića 4 |
| **PP** | |
| Physical description (chapters/pages/references/tables/ pictures/charts/supplements): | (5/114/64/0/1/0/0) |
| **PD** | |
| Scientific field: | Mathematics |
| **SF** | |
| Scientific discipline: | Algebra and mathematical logic, |

universal algebra

**SD**

Subject, key words: Mal'cev condition, congruence semidistributivity, variety, Constraint Satisfaction Problem, Ramsey theory

**SKW**

**UC**

Holding data: Library of Department of Mathematics and Informatics, Novi Sad

**HD**

Note:

**N**

Abstract: In this thesis we describe linear, idempotent, strong Mal'cev conditions for congruence $\wedge$-semidistributivity in locally finite varieties.

In [40] authors presented one such Mal'cev condition and technique they used is generalization of one result from [46]. Main difference is that simple application of Pigeonhole prinicple from [46] becomes much more complicated Ramsey style argument in [40]. Here we additionaly generalize that argument and we present the proof of above mentioned characterization. All these papers use deep result [4] by L. Barto on solvability of Constraint Satisfaction Problem by local consistency checking methods, so third chapter of this thesis is dedicated to detailed presentation of [4]. Also, we prove that some strong Mal'cev condition characterizes congruence $\wedge$-semidistributivity in locally finite varieties if and only if it is realized in certain four element algebra.

Finally, we work on the problem of finding optimal strong Mal'cev condition for existence of Taylor term in general case. In [53] M. Olšak presented suprising result that exisstence of Taylor term is strong Mal'cev property. The term from first version of [53] has arity 12, but here we prove that arity can be reduced to 9.

**AB**

Accepted on Scientific board on: December 12th 2019

**AS**

Defended:
**DE**

| | |
|---|---|
| Thesis Defend board: | President: Rozália Madarász Szilágyi, Ph.D., Full Professor, Faculty of Science, Novi Sad<br>Member: Petar Đapić, Ph.D., Associate Professor, Faculty of Science, Novi Sad<br>Member: Bojan Bašić, Ph.D., Associate Professor, Faculty of Science, Novi Sad<br>Member: Slavko Moconja, Ph.D., Assistant Professor, Faculty of Mathematics, Belgrade<br>Member: Petar Marković, Ph.D., Full Professor, Faculty of Science, Novi Sad |

**DB**

*Овај Образац чини саставни део докторске дисертације, односно докторског уметничког пројекта који се брани на Универзитету у Новом Саду. Попуњен Образац укоричити иза текста докторске дисертације, односно докторског уметничког пројекта.*

## План третмана података

| **Назив пројекта/истраживања** |
|---|
| Полудистрибутивност, Проблем задовољења услова и јаки Маљцевљеви услови |
| **Назив институције/институција у оквиру којих се спроводи истраживање** |
| а) Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду<br>б)<br>в) |
| **Назив програма у оквиру ког се реализује истраживање** |
| |
| **1. Опис података** |
| *1.1* Врста студије<br>*Укратко описати тип студије у оквиру које се подаци прикупљају*<br><u>У овој студији нису прикупљани подаци.</u><br><br>1.2 Врсте података<br>а) квантитативни<br>б) квалитативни<br><br>1.3. Начин прикупљања података<br>а) анкете, упитници, тестови<br>б) клиничке процене, медицински записи, електронски здравствени записи<br>в) генотипови: навести врсту ________________________________ |

г) административни подаци: навести врсту ________________________

д) узорци ткива: навести врсту__________________________________

ђ) снимци, фотографије: навести врсту______________________________

е) текст, навести врсту ____________________________________

ж) мапа, навести врсту _______________________________________

з) остало: описати ___________________________________________

1.3 Формат података, употребљене скале, количина података

1.3.1 Употребљени софтвер и формат датотеке:

a) Excel фајл, датотека ___________________

b) SPSS фајл, датотека ___________________

c) PDF фајл, датотека ____________________

d) Текст фајл, датотека ___________________

e) JPG фајл, датотека ____________________

f) Остало, датотека _____________________

1.3.2. Број записа (код квантитативних података)

а) број варијабли _____________________________________________________

б) број мерења (испитаника, процена, снимака и сл.) _______________________

1.3.3. Поновљена мерења

а) да

б) не

Уколико је одговор да, одговорити на следећа питања:

а) временски размак између поновљених мера је _______________________________

б) варијабле које се више пута мере односе се на __________________________________

в) нове верзије фајлова који садрже поновљена мерења су именоване као _____________

Напомене: _________________________________________________________________

*Да ли формати и софтвер омогућавају дељење и дугорочну валидност података?*

*а) Да*

*б) Не*

*Ако је одговор не, образложити* ________________________________________________

________________________________________________________________________

**2. Прикупљање података**

2.1 Методологија за прикупљање/генерисање података

2.1.1. У оквиру ког истраживачког нацрта су подаци прикупљени?

а) експеримент, навести тип ____________________________________________________

б) корелационо истраживање, навести тип __________________________________________

ц) анализа текста, навести тип __________________________________________________

д) остало, навести шта ________________________________________________________

*2.1.2 Навести врсте мерних инструмената или стандарде података специфичних за одређену научну дисциплину (ако постоје).*

________________________________________________________________________

________________________________________________________________________

2.2 Квалитет података и стандарди

2.2.1. Третман недостајућих података

а) Да ли матрица садржи недостајуће податке? Да Не

Ако је одговор да, одговорити на следећа питања:

а) Колики је број недостајућих података? ___________________________

б) Да ли се кориснику матрице препоручује замена недостајућих података? Да Не

в) Ако је одговор да, навести сугестије за третман замене недостајућих података

______________________________________________________________________________

2.2.2. На који начин је контролисан квалитет података? Описати

______________________________________________________________________________

______________________________________________________________________________

2.2.3. На који начин је извршена контрола уноса података у матрицу?

______________________________________________________________________________

______________________________________________________________________________

**3. Третман података и пратећа документација**

3.1. Третман и чување података

*3.1.1. Подаци ће бити депоновани у ___________________________________ репозиторијум.*

*3.1.2. URL адреса* ________________________________________________________________

*3.1.3. DOI* ______________________________________________________________________

*3.1.4. Да ли ће подаци бити у отвореном приступу?*

*а) Да*

*б) Да, али после ембарга који ће трајати до* ___________________________________

*в) Не*

*Ако је одговор не, навести разлог* ____________________________________________

*3.1.5. Подаци неће бити депоновани у репозиторијум, али ће бити чувани.*

*Образложење*

______________________________________________________________________________

________________________________________________________________________

3.2 Метаподаци и документација података

3.2.1. Који стандард за метаподатке ће бити примењен? ______________________________

3.2.1. Навести метаподатке на основу којих су подаци депоновани у репозиторијум.

________________________________________________________________________

________________________________________________________________________

*Ако је потребно, навести методе које се користе за преузимање података, аналитичке и процедуралне информације, њихово кодирање, детаљне описе варијабли, записа итд.*

________________________________________________________________________

________________________________________________________________________

________________________________________________________________________

________________________________________________________________________

3.3 Стратегија и стандарди за чување података

3.3.1. До ког периода ће подаци  бити чувани у репозиторијуму? ______________________

3.3.2. Да ли ће подаци бити депоновани под шифром? Да   Не

3.3.3. Да ли ће шифра бити доступна одређеном кругу истраживача? Да   Не

3.3.4. Да ли се подаци морају уклонити из отвореног приступа после извесног времена?

Да   Не

Образложити

________________________________________________________________________

________________________________________________________________________

## 4. Безбедност података и заштита поверљивих информација

Овај одељак МОРА бити попуњен ако ваши подаци укључују личне податке који се односе на учеснике у истраживању. За друга истраживања треба такође размотрити заштиту и сигурност података.

4.1 Формални стандарди за сигурност информација/података

Истраживачи који спроводе испитивања с људима морају да се придржавају Закона о заштити података о личности (*https://www.paragraf.rs/propisi/zakon_o_zastiti_podataka_o_licnosti.html*) и одговарајућег институционалног кодекса о академском интегритету.

4.1.2. Да ли је истраживање одобрено од стране етичке комисије? Да Не

Ако је одговор Да, навести датум и назив етичке комисије која је одобрила истраживање

______________________________________________________________________________

4.1.2. Да ли подаци укључују личне податке учесника у истраживању? Да Не

Ако је одговор да, наведите на који начин сте осигурали поверљивост и сигурност информација везаних за испитанике:

а) Подаци нису у отвореном приступу

б) Подаци су анонимизирани

ц) Остало, навести шта

______________________________________________________________________________

______________________________________________________________________________

## 5. Доступност података

*5.1. Подаци ће бити*

*а) јавно доступни*

*б) доступни само уском кругу истраживача у одређеној научној области*

*ц) затворени*

*Ако су подаци доступни само уском кругу истраживача, навести под којим условима могу да их користе:*

______________________________________________________________________________

_______________________________________________________________________________

*Ако су подаци доступни само уском кругу истраживача, навести на који начин могу приступити подацима:*

_______________________________________________________________________________

_______________________________________________________________________________

*5.4. Навести лиценцу под којом ће прикупљени подаци бити архивирани.*

_______________________________________________________________________________

**6. Улоге и одговорност**

*6.1. Навести име и презиме и мејл адресу власника (аутора) података*

_______________________________________________________________________________

*6.2. Навести име и презиме и мејл адресу особе која одржава матрицу с подацима*

_______________________________________________________________________________

*6.3. Навести име и презиме и мејл адресу особе која омогућује приступ подацима другим истраживачима*

_______________________________________________________________________________