

ИЗВЕШТАЈ О ОЦЕНИ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Напомена: Због међународног састава Комисије за оцену и одбрану дисертације, сви елементи Обрасца-11 као и сви подаци и вредновања преведени су и на енглески језик (британски стандард)

Remark: Because of the international composition of the PhD Thesis Defence Committee, all entries of Form-11 (as stipulated by the rules of the Senate of the UNS) as well as all data, findings and assessments are translated to (UK) English

I ПОДАЦИ О КОМИСИЈИ (Data on the PhD Thesis Defence Committee)

1. Датум и орган који је именовао комисију (Date and the body appointing of the Committee)

16.9.2020, Наставно-научно веће Природно-математичког факултета у Новом Саду
(16 September 2020, Teaching and Scientific Board of the Faculty of Sciences, UNS, Novi Sad)

2. Састав комисије са знаком имена и презимена сваког члана, звања, назива уже научне области за коју је изабран у звање, датума избора у звање и назив факултета, установе у којој је члан комисије запослен:

(The list of the members of the committee, specifying, for each member, the name and surname, the exact position within their respective academic system, date of appointment to the current position, and the name of the affiliated institution:)

- **др Розалија Мадарас Силађи**, редовни професор ПМФ-а у Новом Саду, ужа научна област *Алгебра и математичка логика*, изабрана 26.10.1999. – председник
(Dr. Rozalija Madaras Silađi, Full Professor of the Faculty of Sciences, UNS, Novi Sad, in the area of Algebra and Mathematical Logic, appointed on 26 October 1999 – chair of the Committee),
- **др Игор Долинка**, редовни професор ПМФ у Новом Саду, ужа научна област *Алгебра и математичка логика*, изабран 1.4.2008. – ментор,
(Dr. Igor Dolinka, Full Professor of the Faculty of Sciences, UNS, Novi Sad, in the area of Algebra and Mathematical Logic, appointed on 1 April 2008 – PhD thesis advisor),
- **др Петар Марковић**, редовни професор ПМФ у Новом Саду, ужа научна област *Алгебра и математичка логика*, изабран 1.7.2015. – члан,
(Dr. Petar Marković, Full Professor of the Faculty of Sciences, UNS, Novi Sad, in the area of Algebra and Mathematical Logic, appointed on 1 July 2015 – member)
- **др Никола Рушкуч**, редовни професор Школе за математику и статистику Универзитета Сент Ендрјуз, Сент Ендрјуз, Шкотска, Уједињено Краљевство, изабран 1.8.2004. – члан
(Dr. Nikola Ruškuc, Professor of Mathematics, School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews, St Andrews, Scotland, United Kingdom, appointed on 1 August 2004 – member)
- **dr James East**, ванредни професор Школе за компјутерске науке, науку о подацима и математику Универзитета Западног Сиднеја, Сиднеј, Аустралија, изабран 1.1.2016. – члан
(Dr. James East, Senior Lecturer in Pure Mathematics, School of Computer, Data and Mathematical Sciences, Western Sydney University, Sydney, Australia appointed on 1 January 2016 – member)

II ПОДАЦИ О КАНДИДАТУ (Data on the PhD candidate)

1. Име, име једног родитеља, презиме: (Name, name of one parent, surname:)

Ивана (Драган) Ђурђевић (Ivana (Dragan) Đurđević)

2. Датум рођења, општина, држава: (Date of birth, municipality, country:)

6. март 1991, Сомбор, Република Србија (6 March 1991, Sombor, Republic of Serbia)

3. Назив факултета, назив студијског програма дипломских академских студија – мастер и стечени стручни назив: (Name of the faculty, name of the completed MSc study programme and the academic qualification:)

Природно-математички факултет, Нови Сад
Мастер академске студије Математике, модул Теоријска математика
Дипломирани математичар - мастер

(Faculty of Sciences, Novi Sad
MSc in Mathematics, with a specialisation in Theoretical Mathematics)

4. Година уписа на докторске студије и назив студијског програма докторских студија: (The enrollment year to the PhD studies and the name of the corresponding study programme:)

2015, Докторске студије Математике (2015, PhD study programme in Mathematics)

III НАСЛОВ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ: (Title of the PhD thesis:)

Sandwich semigroups in locally small categories (Сендвич полугрупе у локално малим категоријама)

IV ПРЕГЛЕД ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ: (An overview of the thesis:)

Навести кратак садржај са назнаком броја страна поглавља, слика, шема, графикана и сл.
(Briefly list the contents, including the number of pages, chapters, pictures, tables, graphs, etc.)

Докторска дисертација кандидата Иване Ђурђевић написана је на енглеском језику, са кључном документацијском информацијом на српском и енглеском језику.

Дисертација је обима xiv+289 страна, формата А4. Након обавезних апстраката на енглеском и српском језику, следе, у "преамбули" Preface (Предговор), Acknowledgements (Изрази захвалности) и List of Figures (Списак слика, којих у дисертацији има укупно 46). Главни део рада састоји се од 5 поглавља, наиме 1.Introduction (Увод, 19 страна), 2.Sandwich semigroups (Сендвич полугрупе, 61 страна), 3.Sandwich semigroups of transformations (Сендвич полугрупе трансформација, 80 страна), 4.Sandwich semigroups of matrices (Сендвич полугрупе матрица, 36 страна) и 5.Sandwich semigroups of partitions (Сендвич полугрупе партиција, 48 страна). На крају дисертације следе главе Conclusion (Закључак), проширени извод на српском језику, Библиографија (од 131 јединице), Индекс, Индекс нотације, те кратка Биографија кандидата.

The examined PhD thesis of Ivana Đurđević is written in English language, with the key words documentation in Serbian and English.

The physical extent of the thesis is xiv+289 pages of standard A4 size. Following the compulsory abstracts in English and Serbian, the "preamble" also contains a Preface, an Acknowledgements section, and a List of figures (comprising 46 pictures in total). The main body of this work consists of 5 chapters, namely 1.Introduction (19 pages), 2.Sandwich semigroups (61 pages), 3.Sandwich semigroups of transformations (80 pages), 4.Sandwich semigroups of matrices (36 pages) and 5. Sandwich semigroups of partitions (48 pages). At the end, the thesis is completed by a Conclusion section, an Extended abstract in Serbian (again, a formal requirement), References (containing 131 entries), followed by an Index, and Index of notation and a short Biography of the candidate.

V ВРЕДНОВАЊЕ ПОЈЕДИНИХ ДЕЛОВА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ: (A detailed assessment of specific parts of the thesis:)

Идеја *сендвич полугрупе* је релативно једноставна, а, са становишта апстрактне алгебре, изузетно природна, па чуди како она није раније систематски изучавана. Наиме, неке од најзначајнијих примера полугрупа у литератури које, с једне стране, саме по себи представљају широко поље научног рада у теорији полугрупа, а са друге стране представљају главну "инспирацију" за апстрактна уопштавања, чине конкретни објекти из разних области математике. Ти објекти имају на углавном праволинијски начин дефинисану операцију компоновања која је асоцијативна, па тако резултују структуром полугрупе. На пример, такве су:

- *трансформације* (тоталне или парцијалне), функције неког скупа X у самог себе,
- *квadratне матрице*, схваћене као начин репрезентације ендоморфизама коначно-димензионалног векторског простора,
- графовски *дијаграми*, такође познати и као партиције, итд.

Међутим, проблем настаје када (природно дефинисане) операције композиције ових објеката покушамо да проширимо, на пример, на све функције, на све (правоугаоне) матрице, на дијаграме у којима домен и кодомен немају исту димензију, итд. У оваквим ситуацијама, композиција је само парцијално дефинисана - две функције можемо компоновати само ако се кодомен једне поклопи са доменом друге, а две матрице само ако се број колона прве поклопи са бројем врста друге. Начин да се овај проблем превазиђе води порекло из теорије прстена, кроз конструкцију тзв. Манових прстена. Наиме, потребно је конструисати погодну категорију C у којој ће објекти које посматрамо (функције, матрице, дијаграми,...) заправо чинити морфизме између неких објеката категорије C (за категорију, односно парцијалну полугрупу C кажемо да је *локално мала*, ако је за свака два њена објекта i, j класа морфизама $Hom(i, j)$ скуп). Сада, у општем случају, ако је $i \neq j$, није могуће компоновати два морфизма из $Hom(i, j)$. Но, ипак постоји згодан начин да хом-сет добије структуру полугрупе, а то је да се фиксира неки морфизам a из $Hom(j, i)$, те да се сада на $Hom(i, j)$ дефинише операција \bullet_a са

$$x \bullet_a y = xay$$

за све x, y из $Hom(i, j)$, што је поново морфизам из $Hom(i, j)$. На тај начин, дефинисали смо полугрупу ($Hom(i, j), \bullet_a$) коју зовемо *сендвич полугрупа* (у односу на елемент a).

Сличне идеје "сендвич операција" појављују се у разним областима математике и теоријског рачунарства, нпр. у теорији репрезентација, класичним групама, теорији категорија, теорији аутомата, топологији, рачунарској алгебри, итд. Почетне, рудиментарне резултате у вези сендвич полугрупа трансформација добио је Магил још средином 1970-их, али је много проблема у вези са њима остало нерешено. Стога је као главни циљ истраживачког пројекта који је у основи ове дисертације, и чији резултат она представља, било постављено систематско и детаљно изучавање структуре сендвич полугрупа, како у свом апстрактном, најопштијем облику, тако и у конкретним (већ поменути) локално малим категоријама. Овде се под "детаљним структурним изучавањем" подразумева одређивање свих релевантних алгебарских и комбинаторних инваријанти од интереса у општој и комбинаторној теорији полугрупа: нпр. карактеризација Гринових релација и одговарајућих предуређења, опис регуларних и идемпотентних елемената (укључујући све еnumerативне аспекте), израчунавање рангова (и идемпотентних рангова, где постоје) самих сендвич полугрупа, њихових регуларних потполугрупа и идемпотентно генерисаних потполугрупа, итд. За све ове полугрупе, успостављају се структурне теореме које их повезују за полугрупама ендоморфизама одређене категорије, које најчешће јесу полугрупе познате структуре (полугрупе трaнсформација, линеарни моноиди, дијаграм полугрупе).

Након уводног првог поглавља у коме се излажу идеје и концепти који су овде резимирани, у другом поглављу се излаже општа теорија сендвич полугрупа, односно онај део математичког материјала дисертације који не зависи од специфичности појединих категорија. Ово поглавље заправо представља приказ резултата рада [1] (види следећу рубрику овог извештаја). Након тога, у преостала три поглавља описани "програми" је систематски спроведен у три фамилије конкретних категорија - у категорији функција, категорији матрица и категорији дијаграма (партиција). Тако, треће поглавље кореспондира са радом [2], пето са радом [4], док се у четвртном поглављу, потпуности ради, излажу резултати рада Долинка и East-а из 2018. о категорији правоугаоних матрица.

У категоријама функција и матрица, све тражене инваријанте су потпуно одређене, тако да ова дисертација представља комплетну и дефинитивну референтну студију структуре одговарајућих

сендвич полугрупа. Но, када су у питању сендвич полугрупе које настају из категорија дијаграма, истраживања (која су презентована у раду [4], односно у петом поглављу ове дисертације) показала су суштински различито алгебарско понашање у односу на функције и матрице. Тако је поменути програм до краја реализован само у случају категорије Браурових дијаграма, док за друге типове дијаграма (опште партиције, парцијални Браурови, Моцкинови, Џонсови, парцијални Џонсови,...) више не важи својство МИ-доминације, које је било главно оруђе у одређивању свих тражених структурних и еnumerативних параметара посматраних сендвич полугрупа. Ово отвара нови простор за даља истраживања у будућности, али је јасно да аналогни проблеми (бар неки од њих) за друге дијаграм категорије садрже у себи тешкоће изузетно високе комплексности, што са становишта алгебре, тако и еnumerативне комбинаторике.

The idea of *sandwich semigroups* is relatively simple, yet exceptionally natural from the point of view of abstract algebra, so it is somewhat puzzling that it hasn't been tackled earlier in a completely systematic fashion. Namely, some of the most important examples of semigroups representing, by themselves, a wide area of study in semigroup theory, and, on the other hand, being a source of inspiration for abstract generalisations, are composed of concrete objects from various areas of mathematics. These objects usually have a more or less straightforwardly defined associative operation, thus resulting in a structure of a semigroup. For example, these are:

- *transformations* (total or partial ones), self-maps of a set X ,
- *square matrices*, viewed as endomorphisms of finite-dimensional vector spaces,
- graph-like *diagrams* (also known as partitions), etc.

However, a problem arises as soon as we try to extend these naturally defined composition operations on these objects to, say, arbitrary functions, all rectangular matrices, diagrams in which the sizes of the domain and the codomain are different, etc. In such a setting, the composition is only partially defined - basically, we can properly compose two function only if the codomain of the first coincides with the domain of the second; two matrices may be multiplied only if the number of columns of the first coincides with the number of rows of the second. The idea of how to overcome this problem originates in ring theory, in the construction of the so-called Munn rings. We need to construct a suitable category C where the considered objects (functions, matrices, diagrams,...) will in fact be morphisms between some objects of the category C . (For a category, i.e. a partial semigroup C we say that it is *locally small* if for any two of its objects i, j the class of morphisms $Hom(i, j)$ is a set.) Now, in general, if $i \neq j$, it is not possible to compose two morphisms from $Hom(i, j)$. However, there is a convenient way to endow these hom-sets with the structure of a semigroup: we should fix a morphism a from $Hom(j, i)$, and define an operation \bullet_a by

$$x \bullet_a y = xay$$

for all x, y from $Hom(i, j)$, which is again a morphism from $Hom(i, j)$. In this way, we have defined a semigroup $(Hom(i, j), \bullet_a)$ called the *sandwich semigroup* (with respect to the element a).

Similar ideas of "sandwich operations" appear in various areas of mathematics and theoretical computer science, such as representation theory, classical groups, category theory, automata theory, topology, computational algebra, etc. Some foundational results on sandwich semigroups of transformations were obtained by Magill in the mid-1970s, but his work left quite a number of related open problems. Hence, the main goal of the research project underlying the present thesis was to conduct a detailed and systematic study of the structure of sandwich semigroups, both on the most general, abstract level, and also in the already mentioned concrete categories. Here, by a "detailed and systematic study" we mean determining all the relevant algebraic and combinatorial invariants of interest in general and combinatorial semigroup theory. For example, these include characterisations of Green's relations and the corresponding pre-orders, the description of the regular and idempotent elements (including enumerative aspects), computing the ranks (and idempotent ranks, where applicable) of the sandwich semigroups themselves, their regular subsemigroups, idempotent-generated subsemigroups, etc. For these semigroups, structural theorems are established providing a connection to endomorphism semigroups of corresponding categories, which usually have a well-known structure (e.g. transformation semigroups, linear monoids, diagram semigroups).

Following the first chapter which introduces the ideas and concepts summarised here, the second chapter deals with the general theory of sandwich semigroups, that is, the part of the mathematical material of the thesis independent of the specifics of particular categories. This chapter is actually a presentation of the results of paper [1] (see publication list below). In the remaining three chapters, the "programme" just described is worked through three families of concrete categories - those of functions, matrices, and diagrams

(partitions). In this way, Chapter 3 corresponds to the results published in paper [2], Chapter 5 to the paper [4], while Chapter 4 presents, for completeness, the results of Dolinka and East from 2018. related to the category of rectangular matrices, by using the machinery introduced in Chapter 2.

In categories of functions and matrices, all the required invariants are completely determined, so that this thesis represents a comprehensive and definitive study of sandwich semigroups in these categories. However, turning to sandwich semigroups arising from diagram categories (with the related results represented in Chapter 5, i.e. paper [4]), the conducted research demonstrated a fundamentally different algebraic behaviour compared to those arising from functions and matrices. Thus, the described programme was completely realised only in the case of Brauer diagrams, while for the other types of diagrams (general partitions, partial Brauer, Motzkin, Jones, partial Jones,...) fail to yield the key property of MI-domination, which proved itself to be the main tool in determining all the desired structural and enumerative parameters of the considered sandwich semigroups. This opens up a wide space for further investigations in the future, but it is already clear that analogous problems (at least some of them) for other diagram categories entail difficulties of exceptionally high complexity, both from the viewpoint of algebra, and enumerative combinatorics as well.

VI СПИСАК НАУЧНИХ И СТРУЧНИХ РАДОВА КОЈИ СУ ОБЈАВЉЕНИ ИЛИ ПРИХВАЋЕНИ ЗА ОБЈАВЉИВАЊЕ НА ОСНОВУ РЕЗУЛТАТА ИСТРАЖИВАЊА У ОКВИРУ РАДА НА ДОКТОРСКОЈ ДИСЕРТАЦИЈИ: (The list of the scientific papers and results, published or accepted for publication, which are based on the research project for the present PhD thesis:)

- [1] I. Dolinka, I. Đurđev, J. East, P. Honyam, K. Sangkhanan, J. Sanwong, and W. Sommanee, *Sandwich semigroups in locally small categories I: Foundations*, Algebra Universalis **79** (2018), Article #75, 35 pages. [M22]
- [2] I. Dolinka, I. Đurđev, J. East, P. Honyam, K. Sangkhanan, J. Sanwong, and W. Sommanee, *Sandwich semigroups in locally small categories II: Transformations*, Algebra Universalis **79** (2018), Article #76, 53 pages. [M22]
- [3] I. Đurđev, *Sandwich semigroups in locally small categories*, International conference AAA94+NSAC 2017, Novi Sad, 2017, contributed talk. [M34]

Поред наведених референци, релевантно је поменути и рад који је у тренутку писања овог извештаја на рецензији у часопису категорије M23, а налази се на отвореном репозиторијуму arXiv.org:

(In addition to the listed references, it is pertinent to mention the following paper which is currently under review in an international journal of category M23, and is available at the open repository arXiv.org:)

- [4] I. Dolinka, I. Đurđev, and J. East, *Sandwich semigroups in diagram categories*, submitted, 50 pages.

VII ЗАКЉУЧЦИ ОДНОСНО РЕЗУЛТАТИ ИСТРАЖИВАЊА (Conclusions and results of the conducted research:)

Као што је раније речено, Поглавља 2,3 и 5 кореспондирају научним публикацијама кандидата на којима се заснива ова дисертација, па су тако и оригинални резултати истраживања презентовани у складу са тиме. У Поглављу 2 излажу се резултати везани за опште сендвич полугрупе произвољних локално малих категорија. Овде се као главни резултат најпре издваја Теорема 2.2.3 (карактеризација Гринових релација). Низ помоћних резултата који следе бави се Гриновим пред-уређењима, а затим се разматра појам стабилности, да би у Пропозицији 2.2.29 била описана својства тзв. P -скупова и преко њих дата карактеризација регуларних елемената сендвич полугрупа. Теорема 2.3.8 описује сендвич полугрупе и њихове регуларне потполугрупе преко структуре "pullback" производа. Теорема 2.3.12 даје основу за еnumerативне резултате у погледу Гринових класа и идемпотената, док су идемпотентно генерисане потполугрупе описане Теоремом 2.3.15. У погледу израчунавања рангова и идемпотентних рангова, главни резултати су оцене из Теорема 2.4.16 и 2.4.17 које под претпоставком МИ-доминације постају егзактне формуле.

Главни пример на којем се у Поглављу 3 специјализују ови општи резултати јесу категорије функција, парцијалних функција и парцијалних инјективних функција. Од многобројних резултата и примена издвајамо Теореме 3.1.34 и 3.1.39 које дају тачне вредности рангова разматраних сендвич полугрупа трансформација и идемпотентне рангове њихових идемпотентно генерисаних потполугрупа. Најзад, Поглавље 5 поново обилује оригиналним резултатима, али бисмо од њих издвојили Пропозицију 5.1.2 која даје елегантан опис свих Гринових релација, затим Пропозицију 5.3.8 која описује P -скупове у категорији Брауерових дијаграма (што омогућава опис регуларних елемената, све еnumerативне резултате итд.), и, на крају, по нашем мишљењу убедљиво најлепши резултат целе дисертације, Пропозицију 5.3.17 у којој се показује да, за разлику од других дијаграм категорија, категорија Брауерових дијаграма има својство МИ-доминације. Ова чињеница затим омогућава добијање резултата у смислу тачних рангова и идемпотентних рангова.

As already explained, Chapters 2,3, and 5 correspond, respectively, to the scientific publications of the candidate on which the present thesis is based, and the contributions are presented here accordingly. Chapter 2 contains the results about general sandwich semigroups in arbitrary locally small categories. As the most significant results, firstly we would like to single out Theorem 2.2.3 (a characterisation of Green's relations). This is followed by a series of auxiliary results dealing with Green's pre-orders and the notion of stability. Proposition 2.2.29 describe the properties of the so-called P -sets, which are then used to characterise the regular elements. Theorem 2.3.8 provides a structural description of sandwich semigroups and their regular subsemigroups via pullback products. Theorem 2.3.12 provides the stepping stone for the enumerative results related to Green's classes and idempotents, while the idempotent-generated subsemigroups are described by Theorem 2.3.15. The question of computing the ranks and idempotent ranks is tackled in Theorems 2.4.16 and 2.4.17 providing bounds which, under the assumption of MI-domination turn into exact formulae.

The motivating example where all these general results are specialised are the categories of functions, partial functions, and partial injections, considered in Chapter 3. From an abundance of results and applications, we single out Theorems 3.1.34 and 3.1.39 supplying exact values of ranks of the considered sandwich semigroups of transformations and idempotent ranks of their idempotent-generated subsemigroups. Finally, Chapter 5 is again a source of a number of new, original results; we would like only to mention Proposition 5.1.2 providing an elegant description of all Green's relations, Proposition 5.3.8 describing the P -sets in the category of Brauer diagrams (which in turn makes it possible to describe regular elements, establish all the enumerative results, etc.), and, last but not the least, in our opinion the most beautiful result of the whole thesis, Proposition 5.3.17 where it was shown that the category of Brauer diagrams has the property of MI-domination - a striking difference in comparison to other diagram categories. Once this fact is proved, it is possible to obtain results concerning the exact values of ranks and idempotent ranks.

VIII ОЦЕНА НАЧИНА ПРИКАЗА И ТУМАЧЕЊА РЕЗУЛТАТА ИСТРАЖИВАЊА (Evaluation of the presentation and interpretation of the results of research:)

Добијени резултати у дисертацији су актуелни у савременој теорији полугрупа као дисциплини апстрактне алгебре и на високом теоријском нивоу, оригинални су, квалитетни, и значајни за савремене токове науке што обезбеђује релевантност тезе. Комбинација алгебарских, комбинаторних и категоријских метода у истраживањима показују високу компетенцију кандидата, те способност овладавања и повезивања различитих области математике. Приказ свих резултата истраживања је добро организован по логичким целинама, формулација резултата је математички прецизна, а дате су и интересантне мотивације и илустрације кроз примере. Тумачење добијених резултата је коректно изведено, уз детаљну анализу која пружа одговоре на велики број питања.

The results presented in the thesis are highly relevant in the modern semigroup theory as a field of abstract algebra. These results are original and satisfy the highest standards of scientific quality, rigour, and significance within the contemporary research trends; all of these confirm the position of this thesis within the considered area. A combination of algebraic, combinatorial and category-theoretical methods used by the candidate demonstrates a high level of competence and ability to master and connect various areas of mathematical research. The presentation of the results is well-organised throughout all the chapters, the formulations of the results are mathematically precise, and these results are properly motivated and illustrated through interesting examples. The interpretation of the results is conducted correctly, along with a detailed analysis providing answers to numerous questions arising throughout the development of this project.

IX КОНАЧНА ОЦЕНА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ: (The final assessment:)

1. *Да ли је дисертација написана у складу са образложењем наведеним у пријави теме? (Is the thesis written in accordance with the elaboration of the research plan, given in the initial application?)*

Да. План истраживачког пројекта у основи дисертације, образложен у пријави теме, је доследно и кохерентно спроведен.
(Yes. The plan of the research project underlying this thesis, as described and discussed in the initial application, is consistently and coherently carried out.)

2. *Да ли дисертација садржи све битне елементе? (Does the thesis contain all the necessary elements?)*

Да. Дисертација садржи све битне елементе једне висококвалитетне докторске тезе из области теоријске математике.
(Yes. The thesis contains all the necessary elements of a high-quality doctoral dissertation in the area of theoretical mathematics.)

3. *По чему је дисертација оригиналан допринос науци? (What constitutes an original scientific contribution of the thesis?)*

Оригиналан допринос науци представља велики број нових математичких резултата (теорема) које заједно пружају један свеобухватан увид у теорију сендвич полугрупа, са нагласком на алгебарско-структурне и комбинаторне аспекте.
(The original scientific contribution of the thesis is a large number of new mathematical results (theorems) which provide a comprehensive insight to the theory of sandwich semigroups, with an emphasis on algebraic-structural and combinatorial aspects.)

4. *Недостаци дисертације и њихов утицај на резултат истраживања. (List the flaws, if any, of the thesis, and their impact to the obtained results.)*

Дисертација нема недостатака. (We find that the thesis has no flaws.)

X ПРЕДЛОГ: (The summary recommendation of the Committee:)

На основу укупне оцене дисертације, комисија предлаже да се докторска дисертација **прихвати**, а кандидату **одобри** одбрана.

Based on the summary assessment of the PhD thesis, the Defence Committee recommends **acceptance** of the submitted thesis and **authorisation** for appointing a date of the viva defence.

ПОТПИСИ ЧЛАНОВА КОМИСИЈЕ:

(Signatures of the Defence Committee members:)

др Розалија Мадарас Силађи
редовни професор ПМФ-а у Новом Саду
председник Комисије

др Игор Долинка
редовни професор ПМФ-а у Новом Саду
ментор

др Петар Марковић
редовни професор ПМФ-а у Новом Саду
члан

Dr. Nikola Ruškuc
Professor, University of St Andrews, UK
member

Dr. James East
Senior Lecturer, Western Sydney University,
Australia, *member*