UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
INSTITUT ZA MATEMATIKU

Vjekoslav M. Budimirović

PRILOG TEORIJI POLUPRSTENA

doktorska disertacija

Novi Sad, 2001.

Želim da izrazim veliku zahvalnost profesoru dr Svetozaru Miliću i profesoru dr Branimiru Šešelji na stručnoj pomoći i ohrabrenjima koja su me podsticala da istrajem pri izradi ove disertacije.
Takođe se zahvaljujem i profesoru dr Siniši Crvenkoviću na korisnim savetima i podršci u radu.

Sadržaj

Glava 1

Uvod

Pored, sada već klasičnih, teorija grupa, prstena, polja i drugih, u poslednje vreme se u matematičkim istraživanjima intenzivno proučavaju i oslabljene algebarske strukture, odnosno strukture sa manjim brojem aksioma. U takve strukture dolaze: polugrupe (semigrupe), kvazigrupe, skoroprsteni, poluprsteni i druge. Ističemo neke poznate monografije tzv. oslabljenih struktura navedene pod referencama [25], [39], [49] i [73]. Osnovna istraživanja u ovakvim strukturama, između ostalog, sastoje se u uopštavanju nekih važnih teorema klasičnih teorija. Takođe, što je rađeno i u ovom radu, daje se karakterizacija nekih klasa oslabljenih struktura pomoću unije klasičnih struktura. Uopšte, opis neke klase struktura često se daje pomoću drugih poznatih struktura.

Poluprsteni spadaju među algebarske strukture koje su trenutno u centru algebarskih istraživanja u svetu. Razlog je njihova primena u teorijskom računarstvu i teoriji rasplinutih (fuzzy) skupova. Taj značaj u teorijskom smislu potvrđuju brojni radovi i dve nedavno objavljene monografije:

J.S. Golan, *The theory of semirings with applications in mathematics and theoretical computer sciences,* Longman Scientific & Technical, Harlow, 1992.

U. Hebish, H.J. Weinert, *Semirings, Algebraic theory and applications in computer sciences,* World Scientific, Singapore-London-New Jersey-Hong Kong, 1999.

Poluprsteni su „krenuli" kao apstraktna algebarska struktura od interesa za istraživače u teoriji brojeva zainteresovanih za generalizaciju svojstava prirodnih brojeva i od teorije prstena sa ciljem da se izvrši generalizacija algebarskih svojstava skupa ideala komutativnog prstena. Ostali interesantni primeri poluprstena brzo su se pojavili u, praktično, svim oblastima matematike. Univerzalni algebristi ih predstavljaju kao univerzalnu (2, 2)-algebru. Sa druge strane proučavaoci teorijskog računarstva pronašli su poluprstene koji su korektna osnova za proučavanje automata i formalnih jezika. Svi ovi različiti interesi doveli su do toga da različiti autori razmatraju poluprstene iz različitih perspektiva. Otuda terminologija, oznake i čak bazične definicije nisu uvek usaglašene.

Poluprsten je algebarska struktura $(S, +, \cdot)$, sa dve binarne operacije u kojoj su $(S, +)$ i $(S, \cdot)$ polugrupe (tj. obe operacije su asocijativne) i druga je distributivna prema prvoj sa obe strane. Po pojedinim autorima prva operacija je komutativna, a zahteva se i neutralni element u odnosu na prvu, a kod nekih i u odnosu na drugu operaciju.

Iako su veoma prirodna struktura (primer su prirodni brojevi u odnosu na sabiranje i množenje), poluprsteni se tek odnedavno intenzivno izučavaju. Prvo su korišćeni u izučavanju ideala u teoriji prstena, zatim u rešavanju problema optimizacije. Sada se koriste u teoriji kodiranja i automata, u opisivanju baza podataka i drugim oblastima teorijskog računarstva. Druga aktuelna oblast primene je teorija rasplinutih (fuzzy) struktura. Kolekcija svih rasplinutih skupova na nosaču A, pri čemu je skup vrednosti jedinični interval realne prave, ima strukturu poluprstena u odnosu na operacije izvedene iz uopštenja unije i preseka. Pokazuje se da rasplinute strukture značajno zavise upravo od svojstava spomenutog poluprstena.

Kao što je rečeno dosta radova iz teorije poluprstena se odnosi na rasplinute strukture ([3], [34], [52], [53], [86]). Na poluptstenima su definisani L-fuzzy ideali, L-fuzzy k-ideali i fuzzy kongruencije na sledeći način.

Ako je $(S,+,\cdot)$ aditivno komutativan poluprsten sa nulom i multiplikativnom jedinicom, $(L,\wedge,\vee)$ kompletno distributivna mreža i $\mu : S \rightarrow L$ proizvoljan L-fuzzy podskup od S. Tada se μ zove L-**fuzzy levi ideal** od S ako, za sve $x,y \in S$:
(i) $\mu(x+y) \geq min\{\mu(x),\mu(y)\}$ i
(ii) $\mu(xy) \geq \mu(y)$.
Prethodno važi akko za bilo koje $t \in L$ skup $\mu_t = \{x \in S \mid \mu(x) \geq t\}$ je prazan ili levi ideal od S. Slično L-fuzzy levom se definišu i L-fuzzy desni, odnosno L-fuzzy dvostrani ideal. Kažemo da je L-fuzzy levi ideal poluprstena $(S,+,\cdot)$ L-**fuzzy levi k-ideal** ako, za sve $x,y \in S$ je $\mu(y) \geq min\{\mu(x),\ \mu(x+y)\}$ ili $\mu(y) \geq min\{\mu(x),\ \mu(y+x)\}$. Komutativno regularni poluprsteni su okarakterisani preko svojstava njihovih fuzzy ideala.

Na aditivno komutativnom poluprstenu $(S,+,\cdot)$ sa nulom definisane su i fuzzy relacije. Preslikavanje $\alpha : S \times S \rightarrow [0,1]$ je **fuzzy ekvivalencija** ako
(1) $\alpha(x,x) = sup\{\alpha(y,z) \mid y,z \in S\}$,
(2) $\alpha(x,y) = \alpha(y,x)$,
(3) $\alpha(x,y) \geq sup\{min(\alpha(x,z),\alpha(z,y)) \mid z \in S\}$.
Fuzzy ekvivalencija za koju važi
$\alpha(a+c,b+d) \geq min(\alpha(a,b),\alpha(c,d))$ i $\alpha(ac,bd) \geq min(\alpha(a,b),\alpha(c,d))$
zove se **fuzzy kongruencija** na S. Fuzzy kongruencije su definisane u radu [33].

Drugi pravac istraživanja posvećen je svojstvima klase $M_n(S)$ kvadratnih matrica nad poluprstenom S ([38], [65], [66]). Najčešće je ispitivan aditivno i multiplikativno komutativan poluprsten sa nulom i multiplikativnom jedinicom. Uveden je pojam polu-invertibilne matrice. Za matricu $A \in M_n(S)$ kažemo da je **polu-invertibilna** ako postoje $A_1, A_2 \in M_n(S)$ tako da $I_n + AA_1 = AA_2$ i $I_n + A_1A = A_2A$. Dato je nekoliko neophodnih uslova za polu-invertibilnost kvadratnih matrica nad poluprstenima.

Poslednjih godina više autora ([6], [9], [45], [55]) je istraživalo polumodule, koje su definisali, po ugledu na module, na sledeći način. Neka je $(M,+)$ Abelova grupa

i $(S, +, \cdot)$ aditivno komutativan poluprsten sa nulom i multiplikativnom jedinicom. Tada se M naziva **desnim S-polumodulom** ako je dato preslikavanje od $M \times S$ na M tako da je za $x, y \in M$ i $a, b \in S$:
(i) $(x + y)a = xa + ya$,
(ii) $x(a + b) = xa + xb$,
(iii) $x(ab) = (xa)b$.
Slično kao kod modula definisani su i pojmovi projektivnog i injektivnog S-polumodula. Kažemo da je S-polumodul Q **injektivan** ako za svaki monomorfizam $\alpha : A \to B$ i svaki homomorfizam $\varphi : A \to Q$ postoji homomorfizam $\mu : B \to Q$ takav da je $\varphi = \mu\alpha$. Kažemo da je S-polumodul P **projektivan** ako za svaki epimorfizam $\beta : B \to C$ i svaki homomorfizam $\psi : P \to C$ postoji homomorfizam $\lambda : P \to B$, takav da je $\psi = \beta\lambda$. Date su karakteristike poluprstena S sa injektivnim i projektivnim S-polumodulima. Na ovaj način se došlo do uopštenja nekih teorema iz teorije prstena.

Takođe se razmatraju regularni poluprsteni ([80]) kao poluprsteni čija je aditivna polugrupa regularna. Dati su uslovi regularnosti za komutativne poluprstene preko k-ideala, gde pod **k-idealom** podrazumevamo ideal I za koji važi: Ako je $a \in I$ i $a + b \in I$ ili $b + a \in I$, onda je $b \in I$.

Takođe su razmatrani čvrsti varijeteti poluprstena ([32]). Varijetet V algebri istog tipa zove se **čvrst** ako svaki identitet u V je ujedno i **hiperidentitet**, tj. ako za svaku zamenu operacijskih simbola koji se pojavljuju u jednakosti $s = t$, termima odgovarajuće arnosti, rezultujući identitet važi u V. Dokazano je da postoje tačno tri netrivijalna čvrsta varijeteta poluprstena, varijetet svih pravougaonih poluprstena, varijetet V_{NID} svih normalnih, idempotentnih i distributivnih poluprstena i podvarijetet V_{NID} koji je definisan aditivnom jednakošću $(x + y)(y + x) = xy + yx$.

Kako su $(S, +)$ i $(S, \cdot)$ polugrupe, jasno je da je teorija poluprstena tesno vezana sa teorijom polugrupa. U radu se koriste osnovni pojmovi iz polugrupa kao na primer podpolugrupa, polugrupa generisana nekim skupom, regularna polugrupa i drugi. Kako su ti pojmovi poznati iz elementarnog kursa algebre, nećemo ih definisati u ovom radu. Podsetimo se samo da je polugrupa $(S, \cdot)$ **regularna** ako je ispunjeno $(\forall a \in S)(\exists x \in S)(a = axa)$. Pomenimo još da, ukoliko je podpolugrupa A polugrupe S grupa, kažemo da je A **podgrupa polugrupe S**.

U radu se istražuje jedna klasa polugrupa, tzv. p-polugrupa. Kažemo da je polugrupa $(S, +)$ **p-polugrupa** $(p \in N)$ ako $(\forall x)(\exists y)(x + py + x = y \wedge py + x + py = x)$. Kako je svaka p-polugrupa unija grupa, to se javlja potreba za korišćenjem pojmova i rezultata teorije grupa. Najčešće se pojavljuju cikličke, Klajnova, kvaternionska i uopštena kvaternionska grupa. Ako grupa ima jednočlani generatorni skup, onda takvu grupu zovemo **ciklička grupa**.

Klajnova grupa je grupa data sledećom tablicom.

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Kvaternionska grupa je grupa data sledećom tablicom.

$\cdot$	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
-1	-1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
i	i	$-i$	-1	1	k	$-k$	$-j$	j
$-i$	$-i$	i	1	-1	$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	$-k$	k	-1	1	i	$-i$
$-j$	$-j$	j	k	$-k$	1	-1	$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	-1	1
$-k$	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	1	-1

Uopštena kvaternionska grupa je grupa

$$Q_{8k} = [\{a,b\}] = \{e, a, 2a, ..., (4k-1)a, b, a+b, 2a+b, ..., (4k-1)a+b\}$$

za koju važe sledeće jednakosti: $4ka = e$, $2b = 2ka$, $3b = 2ka + b$, $b + 2ma = 2ma + b$ $(m \in N)$, $b + (2n+1)a = (2k+2n+1)a + b$ $(n \in N_0)$.

Definišemo još neke pojmove koji se u radu koriste. Neka je $(S_i, +_i)$, $i \in I$, data familija grupa i označimo sa S skup svih funkcija definisanih na skupu I tako da za svako $i \in I$ vrednost funkcije u i je element iz S_i. Ako je po definiciji $(a+b)(i) = a(i)+b(i)$, $i \in I$, onda je S grupa koja se zove **direktan proizvod** grupa $S_i, i \in I$, koju označavamo sa $S = \prod_{i \in I} S_i$. Specijalno, ako je $I = \{1, 2, ..., n\}$, pišemo $S = S_1 \times S_2 \times ... \times S_n$, kao i $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$. Neka su $(S_1, *_1)$ i $(S_2, *_2)$ polugrupe. Preslikavanje $h : S_1 \to S_2$ je **homomorfizam polugrupe** S_1 u polugrupu S_2 ukoliko važi $(\forall a, b \in S_1) h(a *_1 b) = h(a) *_2 h(b)$. Kažemo da je homomorfizam h **izomorfizam** ako je h bijekcija.

U radu sa p-polugrupama je korišćena aditivna notacija zato što je aditivna polugrupa p-poluprstena p-polugrupa. Zapravo **p-poluprsten** je i definisan tako da mu je aditivna polugrupa p-polugrupa i još je $4px^2 = 4px$ za sve x iz p-poluprstena. Neprazan podskup T poluprstena $(S, +, \cdot)$ je **podpoluprsten** od S ako za sve

$a, b \in T$ je ispunjeno $a + b \in T$ i $a \cdot b \in T$. Presek proizvoljne neprazne familije podpoluprstena poluprstena S jeste podpoluprsten tog poluprstena. Neka je $A \neq \emptyset$ neprazan podskup poluprstena S. Presek svih podpoluprstena poluprstena S, koji sadrže skup A, označavamo sa $[A]$ i zovemo **podpoluprsten generisan skupom** A. Jasno je da je podpoluprsten $[A]$ najmanji podpoluprsten (u odnosu na inkluziju) poluprstena S koji sadrži skup A. Ako je $[A] = S$, onda skup A zovemo **generatorni skup** poluprstena S. Ako je poluprsten S konačan, onda broj elemenata poluprstena S zovemo **red poluprstena**. Kažemo da je poluprsten **komutativan** ako mu je multiplikativna operacija komutativna. Poluprsten, čija multiplikativna polugrupa ima jedinicu, zove se **poluprsten sa jedinicom**. Ako u poluprstenu $(S, +, \cdot)$ aditivna operacija ima neutralni element 0 i ako je uz to $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$ za sve $x \in S$, onda poluprsten zovemo **poluprsten sa nulom**. Kažemo da je poluprsten **regularan** ako mu je aditivna polugrupa regularna. Poluprsten $(S, +, \cdot)$ se zove **Bulov** ako je $a^2 = a$ za sve $a \in S$. Neka su $(S_1, +_1, \cdot_1)$ i $(S_2, +_2, \cdot_2)$ poluprsteni. Preslikavanje $h : S_1 \to S_2$ je **homomorfizam poluprstena** S_1 u poluprsten S_2 ako je ispunjeno $h(a +_1 b) = h(a) +_2 h(b)$ i $h(a \cdot_1 b) = h(a) \cdot_2 h(b)$ za sve $a, b \in S_1$. Ako je homomorfizam h bijekcija, onda ga zovemo **izomorfizam**. Poluprsten, čija je aditivna polugrupa grupa, ovde zovemo **pretprsten**. Podpoluprsten nekog poluprstena koji je pretprsten zvaćemo **pod-pretprsten.**

Prvi korak u radu je bio pokušaj uopštavanja pojma anti-inverzne polugrupe. Pojam anti-inverzne polugrupe je uveden u radu [10]. Dva elementa a i b polugrupe S su **uzajamno anti-inverzni** ako $aba = b$ i $bab = a$. Polugrupa S zove se **anti-inverzna** ako svaki element iz S ima anti-inverzni element u S. Sa $\mathcal{A}$ označimo klasu anti-inverznih polugrupa. U radu [10] dokazane su sledeće teoreme.
Teorema 1 [10] Neka je S polugrupa. Tada

$$S \in \mathcal{A} \iff (\forall x \in S)(\exists y \in S)(x^2 = y^2, yx = x^3y, x^5 = x).$$

Teorema 2 [10] Neka je S polugrupa. Tada

$$S \in \mathcal{A} \iff (\forall x \in S)(\exists y \in S)(x^2 = y^2, x^2 = (xy)^2, x^5 = x).$$

Neka je A_a oznaka za skup svih anti-inverznih elemenata elementa a anti-inverzne polugrupe S.
Teorema 3 [10] Neka je S anti-inverzna polugrupa i $a \in S$. Tada za svaki podskup $I_a \subset A_a$, $GI_a = [a \cup I_a]$ je podgrupa od S.
Posledica 1 [10] (i) Ako skup I_a ima tačno jedan element i $a \notin A_a$, onda GI_a je kvaternionska grupa.
(ii) Ako $a \in I_a$ i I_a ima tačno dva elementa, tj. $I_a = \{a, b\}$, onda GI_a je Klajnova grupa ili ciklička grupa reda 2.

U ovom radu je uopšten pojam anti-inverzne polugrupe. Naime, ovde je uveden pojam p-polugrupe. Za $p = 1$ p-polugrupa je anti-inverzna polugrupa. Rezultati iz radova [10] i [59] se dobijaju iz odgovarajućih teorema u ovom radu uzimajući da je $p = 1$. Anti-inverzne polugrupe su pokrivene grupama koje mogu biti kvaternionska, Klajnova ili ciklička grupa reda 2. Međutim, p-polugrupe su pokrivene širom klasom grupa. Takođe je dokazano da je polugrupa, koja je pokrivena grupama iz te klase, p-polugrupa. Za neke vrednosti parametra p, klasa p-polugrupa je varijetet, dok za neke to nije slučaj. U radu je uveden i pojam p-poluprstena. Detaljno su ispitani Bulovi p-poluprsteni. Takođe su odredjene vrednosti parametra p za koje je klasa p-poluprstena varijetet.

U Glavi 2 se uvodi pojam p-polugrupe. Neka je $(S,+)$ polugrupa i $p \in N$, tada relaciju, u oznaci τ_p, polugrupe S definišemo na sledeći način:

$$x\tau_p y \iff x + py + x = y \ \land \ py + x + py = x.$$

Ako je $x\tau_p y$ za $x, y \in S$, onda py zovemo **p-element** elementa x. Polugrupu $(S,+)$ zovemo p-polugrupa ako svaki element ima svoj p-element. Klasu svih p-polugrupa označavamo sa Π_p. Dakle,

$$S \in \Pi_p \iff (\forall x \in S)(\exists y \in S)(x\tau_p y).$$

Klasa p-polugrupa je opisana polugrupnim formulama i taj opis je dat Teoremama 2.1.1. i 2.1.3. Ističemo da je Teoremom 2.3.1. i njenom posledicom dokazano da je svaka p-polugrupa pokrivena grupama. Pri tome, u te grupe dolaze: ciklička grupa C_k, reda k, Klajnova četvorna grupa K_4, direktni proizvod cikličkih grupa $C_k \times C_2 \times C_2$ i uopštena kvaternionska grupa Q_{8k}, reda $8k$ (za $k = 1$ je Q_8 kvaternionska grupa). Za posebne vrednosti p opisane su klase grupa u oznaci Γ'_p, Γ''_p i Γ'''_p (strana 38). Na taj način klase grupa, kojima je pokrivena proizvoljna p-polugrupa, efektivno su opisane Teoremama 2.5.1., 2.5.2., 2.5.3., 2.5.4. i 2.6.3. Takođe i obratno, Lemama 2.7.1.,2.7.2. i 2.7.3. je dokazano da svaka polugrupa, koja je unija grupa iz neke od klasa $\Gamma'_p, \Gamma''_p, \Gamma'''_p$, je p-polugrupa. Specijalno za $p = 1$ dobijaju se rezultati iz radova [10] i [59].

U Glavi 3 se uvodi pojam p-poluprstena. Neka je $(S,+,\cdot)$ poluprsten i $p \in N$, tada relacija, u oznaci θ_p, poluprstena S definisana je na sledeći način:

$$x\theta_p y \iff x + py + x = y \ \land \ py + x + py = x \ \land \ 4px^2 = 4px,$$

tj.

$$x\theta_p y \iff x\tau_p y \ \land \ 4px^2 = 4px.$$

Ako je $x\theta_p y$ za $x, y \in S$, onda py zovemo **p-element** elementa x. Poluprsten $(S,+,\cdot)$ zovemo **p-poluprsten** ako svaki element ima svoj p-element. Klasa svih p-poluprstena je označena sa Σ_p. Dakle,

$$S \in \Sigma_p \iff (\forall x \in S)(\exists y \in S)(x\theta_p y).$$

Klasa p-poluprstena je opisana poluprstenskim formulama i taj opis je dat Teoremom 3.1.1. Poluprsten, čija je aditivna polugrupa grupa, ovde smo nazvali pretprsten. Teoremom 3.2.1. i njenom posledicom je dokazano da je svaki p-poluprsten pokriven pretprstenima. U radu su posebno razmatrani Bulovi p-poluprsteni. Tako, Teoremom 3.3.1. je dokazano da je svaki Bulov p-poluprsten pokriven komutativnim Bulovim prstenima sa jedinicom. Za te prstene uvedene su oznake: $\overline{C}_k$ ako je aditivna grupa ciklička, $\overline{K}_4$ ako je aditivna grupa Klajnova i $\overline{C}_{2,2,2}$ ako je aditivna grupa $C_2 \times C_2 \times C_2$. Za posebne vrednosti p opisane su klase prstena u oznaci $\overline{\Gamma}'_p$ i $\overline{\Gamma}''_p$ (strana 58). Na taj način klase prstena, kojima je pokriven proizvoljan Bulov p-poluprsten, efektivno su opisane Teoremom 3.4.1. Takođe i obratno, Teoremom 3.4.2. je dokazano da proizvoljan Bulov poluprsten, koji je unija prstena iz neke od opisanih klasa, je Bulov p-poluprsten.

U Glavi 4 se ispituje zatvorenost klase p-polugrupa kao i klase p-poluprstena za operatore H, S i P, tj. za homomorfne slike, podstrukture i direktne proizvode. Dokazano je da je, za svako $p \in N$, svaka od ovih klasa zatvorena za H i P. Dati su i uslovi pod kojima važi zatvorenost za S. Pokazano je da, za p parno ili $p = 4k + 3$ $(k \in N_0)$, klasa p-polugrupa i klasa p-poluprstena su varijeteti. Dati su i odgovarajući identiteti.

Glava 2

p-polugrupe

U ovoj glavi opisane su klase p-semigrupa za proizvoljno p iz N. Taj opis je semigrupnim formulama u potpunosti dat teoremama 2.1.1. i 2.1.3. Teoremom 2.3.1. i njenom posledicom je dokazano da je svaka p-semigrupa pokrivena grupama. Te klase grupa su u potpunosti opisane teoremama 2.5.1., 2.5.2., 2.5.3., 2.5.4. i 2.6.3. Specijalno za $p = 1$ dobijaju se rezultati iz [10] i [59].

2.1 Osnovne definicije i tvrdjenja

Neka je $(S, +)$ semigrupa i $p \in N$. Relaciju, u oznaci τ_p, semigrupe S uvodimo na sledeći način:

$$x\tau_p y \Longleftrightarrow x + py + x = y \wedge py + x + py = x.$$

Ako je $x\tau_p y$ za $x, y \in S$, onda py zovemo p-element elementa x.

Lema 2.1.1. *Neka je $x\tau_p y$ u semigrupi S. Tada važi:*

1^o $2x = (p+1)y$

2^o $py + x = (2p+1)x + p^2y$

3^o $(4p+1)x = x$.

Dokaz. 1^o $\quad 2x = py + x + py + x = py + y = (p+1)y$

2^o

$$\begin{aligned} py + x &= p(x + py + x) + x \\ &= x + py + x + x + py + x + \cdots + x + py + x + x \\ &= x + p(py + 2x) = x + p(py + (p+1)y) \\ &= x + p(2p+1)y = x + p(p+1)y + p^2y \\ &= x + p(2x) + p^2y = (2p+1)x + p^2y. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
3^o \quad x &= py + x + py = (2p+1)x + p^2y + py \\
&= (2p+1)x + p(p+1)y = (2p+1)x + p(2x) = (4p+1)x. \ \square
\end{aligned}
$$

Lema 2.1.2. *Neka su $x, y \in S$, $p \in N$ i neka je $(4p+1)x = x$ i $2x = (p+1)y$. Tada važi $(p+1)y = (p+1)(2p+1)y$.*

Dokaz. Na osnovu pretpostavke imamo

$$(p+1)y = 2x = (4p+1)x + x = (2p+1)(2x) = (2p+1)(p+1)y. \ \square$$

Lema 2.1.3. *Neka su $x, y \in S$, $p \in N$ i neka je $(\forall a \in S)\ (4p+1)a = a$. Tada*

$$2x = (p+1)y \Longrightarrow y = (2p^2 + 2p + 1)y.$$

Dokaz. Kako je $(2p^2+2p+1)y = (p+1)y + (2p^2+p)y$, na osnovu pretpostavki i Leme 2.1.2. imamo

$$
\begin{aligned}
(2p^2+2p+1)y &= (p+1)(2p+1)y + (2p^2+p)y = p(4p+1)y + (3p+1)y \\
&= py + (3p+1)y = (4p+1)y = y. \ \square
\end{aligned}
$$

Tvrdjenje 2.1.1. *Neka je $x\tau_p y$ u semigrupi S. Tada važi*

(i) $y + x = 3x + py$

(ii) $y + x + y = 5x$

(iii) $x + y + x = (3p+2)y$

(iv) $2(x+y) = 6x$.

Dokaz. (i) Na osnovu Leme 2.1.1. imamo

$$
\begin{aligned}
y + x &= x + py + x + x = x + py + (p+1)y = x + (p+1)y + py \\
&= x + 2x + py = 3x + py.
\end{aligned}
$$

(ii) $y + x + y = y + py + x + py + y = 2x + x + 2x = 5x$.
(iii) Na osnovu Tvrdjenja 2.1.1. pod (i) i Leme 2.1.1. imamo

$$x + y + x = x + 3x + py = 2(2x) + py = 2(p+1)y + py = (3p+2)y.$$

(iv) Na osnovu Tvrdjenja 2.1.1. pod (ii) imamo

$$2(x+y) = x + y + x + y = x + 5x = 6x. \ \square$$

Definicija 2.1.1. *Semigrupu $(S,+)$ zovemo p-*__semigrupa__ *ako svaki element ima svoj p-element.*

Klasu svih p-semigrupa označimo sa Π_p. Dakle,

$$S \in \Pi_p \Longleftrightarrow (\forall x \in S)(\exists y \in S)(x\tau_p y).$$

Teorema 2.1.1. *Neka je S semigrupa. Tada*

$$S \in \Pi_p \Longleftrightarrow (\forall x \in S)(\exists y \in S)(2x = (p+1)y,\ py+x = (2p+1)x+p^2y,\ (4p+1)x = x).$$

Dokaz. Neka je $S \in \Pi_p$. Tada, na osnovu Leme 2.1.1., neposredno sledi desna strana ekvivalencije.

Obratno, neka za proizvoljan $x \in S$ i njegov postojeći $y \in S$ važi

$$2x = (p+1)y,\ py + x = (2p+1)x + p^2y \text{ i } (4p+1)x = x.$$

Tada, koristeći Lemu 2.1.3., dobijamo

$$\begin{aligned} x + py + x &= x + (2p+1)x + p^2y = (p+1)(2x) + p^2y \\ &= (p+1)(p+1)y + p^2y = (2p^2 + 2p + 1)y = y. \end{aligned}$$

Dalje imamo

$$\begin{aligned} py + x + py &= (2p+1)x + p^2y + py = (2p+1)x + p(p+1)y \\ &= (2p+1)x + p(2x) = (4p+1)x = x. \end{aligned}$$

Dakle, $S \in \Pi_p$. □

Kažemo da element x polugrupe $(S,+)$ ima **svoju jedinicu** e_x ako je $x + e_x = e_x + x = x$.

Posledica 2.1.1. (i) *Svaka p-semigrupa je regularna semigrupa.*
(ii) *Svaki element x p-semigrupe ima svoju jedinicu e_x, gde je $e_x = 4px$.*
(iii) *U p-semigrupi S svi elementi y koji su u relaciji τ_p sa x imaju istu jedinicu.*
(iv) *Ako je u p-semigrupi $2px = e_x$ i $x\tau_p y$, onda $py + x = x + p^2y$.*

Dokaz. (i) Iz $(4p+1)x = x$ sledi $x = x + (4p-1)x + x$ za svako x.
(ii) Iz $(4p+1)x = x$ imamo $x + 4px = 4px + x = x$, pa je $e_x = 4px$.
(iii) Neka je $x\tau_p y$. Dokažimo da je $e_x = e_y$. Koristeći Lemu 2.1.3. imamo

$$\begin{aligned} 4px &= 2p(2x) = 2p(p+1)y = (2p^2 + 2p - 1)y + y \\ &= (2p^2 + 2p - 1)y + (4p+1)y = (2p^2 + 2p + 1)y + (4p-1)y = 4py. \end{aligned}$$

(iv) Neka je $2px = e_x$ i $x\tau_p y$. Tada na osnovu Leme 2.1.1. imamo

$$py + x = (2p+1)x + p^2y = 2px + x + p^2y = x + p^2y. \ \square$$

Teorema 2.1.2. *Neka je $x\tau_p y$ u p-semigrupi S. Za proizvoljan prirodni broj k imamo:*

(i) $2kx + y = y + 2kx$

(ii) $x + 2ky = 2ky + x$

Dokaz. (i) $2kx + y = k(p+1)y + y$ (Lema 2.1.1.) $= y + 2kx$.
(ii) Koristeći $2k$ puta Tvrdjenje 2.1.1. pod (i) kao i Lemu 2.1.1. imamo

$$\begin{aligned}
2ky + x &= (2k-1)y + y + x = (2k-1)y + 3x + py = (2k-1)y + x + 2x + py \\
&= (2k-1)y + x + (p+1)y + py = (2k-1)y + x + (2p+1)y \\
&= \cdots = x + 2k(2p+1)y = x + k(4p+1)y + ky = x + 2ky. \ \square
\end{aligned}$$

Teorema 2.1.3. *Neka je S semigrupa. Tada*

$$S \in \Pi_p \Longleftrightarrow (\forall x \in S)(\exists y \in S)(2x = (p+1)y,\ 2x = 2(x+py),\ (4p+1)x = x).$$

Dokaz. Neka je $S \in \Pi_p$. Tada za proizvoljno $x \in S$ postoji $y \in S$ da je $x\tau_p y$. Za te x i y, prema Teoremi 2.1.1., imamo $2x = (p+1)y$ i $(4p+1)x = x$. Dalje imamo $2(x+py) = x + py + x + py = y + py = 2x$.

Obratno, na osnovu pretpostavke $2x = (p+1)y$ i $(4p+1)x = x$ i Leme 2.1.3. imamo $y = (2p^2 + 2p + 1)y$. Sada dokažimo da je $e_x = e_y$. Imamo

$$\begin{aligned}
e_x &= 4px = 2p(2x) = 2p(p+1)y = (2p^2 + 2p - 1)y + y \\
&= (2p^2 + 2p - 1)y + (4p+1)y = (2p^2 + 2p + 1)y + (4p-1)y \\
&= y + (4p-1)y = 4py = e_y.
\end{aligned}$$

Koristeći i pretpostavku $2x = 2(x+py)$ imamo

$$\begin{aligned}
x + py + x &= x + py + x + e_x = x + py + x + 4py = x + py + x + py + 3py \\
&= 2(x+py) + 3py = 2x + 3py = (p+1)y + 3py = y.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
py + x + py &= e_y + py + x + py = 4px + py + x + py \\
&= (4p-1)x + x + py + x + py = (4p-1)x + 2(x+py) \\
&= (4p-1)x + 2x = x. \ \square
\end{aligned}$$

2.2 O p-elementima p-semigrupa

Označimo sa A_a skup svih p-elemenata elementa a p-semigrupe S, tj. $A_a = \{pb \mid a\tau_p b\}$.

Teorema 2.2.1. *Neka je $S \in \Pi_p$. Tada za svako a iz S je*

$$A_a = A_{(2p+1)a}.$$

Dokaz. Neka $pb \in A_a$. Tada, koristeći se Teoremom 2.1.2., imamo

$$pb + (2p+1)a + pb = pb + 2pa + a + pb = 2pa + pb + a + pb = 2pa + a = (2p+1)a.$$

Takodje

$$\begin{aligned}(2p+1)a + pb + (2p+1)a &= 2pa + a + pb + a + 2pa = 2pa + b + 2pa \\ &= 2pa + 2pa + b = e_a + b = b.\end{aligned}$$

Dakle, $A_a \subset A_{(2p+1)a}$.

Obratno, neka je $pb \in A_{(2p+1)a}$. Tada je $(2p+1)a\tau_p b$. Dokažimo da je $a\tau_p b$, tj. da $pb \in A_a$. Na osnovu Teoreme 2.1.1. dosta je da dokažemo da je $2a = (p+1)b$ i $pb + a = (2p+1)a + p^2b$. Primenjujući Teoremu 2.1.1. imamo:

$$\begin{aligned}1^o \quad 2a &= 4pa + 2a = 2(2p+1)a = (p+1)b. \\ 2^o \quad pb + a &= pb + (2p+1)a + 2pa = (2p+1)(2p+1)a + p^2b + 2pa \\ &= (2p+1)a + 2p(2p+1)a + p^2b + 2pa \\ &= (2p+1)a + 2pa + p^2b + 2pa.\end{aligned}$$

Na osnovu 1^o dalje imamo

$$\begin{aligned}pb + a &= (2p+1)a + p(p+1)b + p^2b + p(p+1)b \\ &= (2p+1)a + 2p(p+1)b + p^2b = (2p+1)a + 2p(2a) + p^2b \\ &= (2p+1)a + e_a + p^2b = (2p+1)a + p^2b.\end{aligned}$$

Znači, na osnovu Teoreme 2.1.1., imamo $a\tau_p b$, tj. $pb \in A_a$. Dakle, $A_{(2p+1)a} \subset A_a$. Time je teorema dokazana. □

Lema 2.2.1. *Neka je $S \in \Pi_p$ i $x, y \in S$. Tada*

$$x\tau_p y \Longrightarrow x\tau_p(2x + py).$$

Dokaz. Neka je $x\tau_p y$. Tada

$$\begin{aligned}x + p(2x + py) + x &= x + p((p+1)y + py) + x = x + 2p^2y + py + x \\ &= 2p^2y + x + py + x \quad (\text{Teorema } 2.1.2.) \\ &= 2p^2y + y = 2p^2y + (4p+1)y = (2p^2 + 2p + 1)y + 2py \\ &= y + 2py \quad (\text{Lema } 2.1.3.) = (p+1)y + py = 2x + py.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(2x+py)+x+p(2x+py) &= p((p+1)y+py)+x+p((p+1)y+py) \\ &= 2p^2y+py+x+py+2p^2y = 2p^2y+x+2p^2y \\ &= (2p^2-p)y+py+x+py+(2p^2-p)y \\ &= (2p^2-p)y+x+(2p^2-p)y = \cdots = x. \ \Box \end{aligned}$$

Lema 2.2.2. *Neka je $S \in \Pi_p$ i $x \in S$. Tada*

$$x\tau_p x \Longrightarrow px = x \wedge 2x = e_x.$$

Dokaz. Neka je $x\tau_p x$. Tada

$$x = px + x + px = x + px + x + (p-1)x = x + (p-1)x = px.$$

Kako je $px + x + px = x$ i $px = x$, to imamo

$$2x = x + x = (px + x + px) + px = 4px = e_x. \ \Box$$

Lema 2.2.3. *Neka je $x\tau_p y$ u p-semigrupi S i $k \in N$. Tada važi $4ky = 8kx$.*

Dokaz. $4ky = ky + 3ky = k(4p+1)y + 3ky = 4k(p+1)y$
$= 4k(2x)$ (Lema 2.1.1.) $= 8kx$. $\Box$

Lema 2.2.4. *Neka je $x\tau_p y$ u semigrupi S. Neka je k najmanji prirodni broj takav da je $kx = e_x$. Tada*

$$qx = e_x \Longrightarrow k \mid q.$$

Dokaz. Neka je $qx = e_x$. Primetimo da q-ovi postoje, recimo $q = 4p$. Pretpostavimo da se k ne sadrži u q. Kako je $q = k_1k + k_0$, gde je $k_0 < k$, to imamo $qx = (k_1k + k_0)x = k_1(kx) + k_0x = e_x + k_0x = k_0x$. To je u suprotnosti sa pretpostavkom. Dakle, $k \mid q$. $\Box$

2.3 Podgrupe p-semigrupe

Neka je T neprazan podskup semigrupe S. Sa $[T]$ označavamo podsemigrupu semigrupe S generisanu skupom T. Kao što je rečeno podpolugrupa polugrupe S koja je grupa zove se podgrupa grupe S.

Tvrđenje 2.3.1. *Neka je $S \in \Pi_p$ i $a \in S$. Tada je $[a]$ grupa.*

Dokaz. Tvrđenje se dobija neposredno iz činjenice da je u p-polugrupi $(4p+1)x = x$ za svako $x \in S$. $\Box$

Teorema 2.3.1. *Neka je $S \in \Pi_p$ i $a \in S$. Tada za svaki podskup $I_a \subseteq A_a$ je $GI_a = [a \cup I_a]$ podgrupa od S.*

Dokaz. Neka je $x \in GI_a$. Tada je $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, gde je $x_i \in a \cup I_a$

$(i = 1, 2, \cdots, n)$. Pri tome je

$$x_i = \begin{cases} pa_i, & x_i \neq a,\ pa_i \in I_a \\ a, & x_i = a. \end{cases}$$

Uočimo x' oblika $x' = x'_n + x'_{n-1} + \cdots + x'_1$, gde je

$$x'_i = \begin{cases} 3pa_i, & x_i \neq a,\ pa_i \in I_a \\ (4p-1)a, & x_i = a,\ (i = 1, 2, \cdots, n). \end{cases}$$

Jasno da je x' iz GI_a. Kako za svako $i = 1, 2, \cdots, n$ je $x_i + x'_i = e_a$ i $x_i + e_a = x_i$, to je $x + x' = e_a$. Slično je $x' + x = e_a$, pa je GI_a grupa. □

Posledica 2.3.1. *Svaka p-semigrupa S je oblika* $S = \bigcup_{a \in S} GI_a$. *Drugim rečima svaka p-semigrupa pokriva se grupama.* □

Lema 2.3.1. *Neka je* $x\tau_p y$ *u p-semigrupi* S. *Tada*

(i) Ako je p paran broj, onda $p^2 y = e_x$.

(ii) Ako je p neparan broj, onda $p^2 y = py$.

Dokaz. (*i*) Kako je p paran broj, imamo $p^2 y = \left(\frac{p}{2}\right)^2 (4y) = \left(\frac{p}{2}\right)^2 (8x)$ (Lema 2.2.3.) $= \frac{p}{2}(4px) = e_x$.

(*ii*) Razlikujemo dva slučaja: $p = 4p_1 + 1$ i $p = 4p_2 + 3$, gde je $p_1, p_2 \in N_0$. Za prvi slučaj imamo $p^2 y = (4p_1 + 1)(py) = p_1(4py) + py = e_y + py = py$. U drugom slučaju imamo $p^2 y = (4p_2 + 3)py = p_2(4py) + 3py = e_y + 3py = 3py$. Kako je S p-semigrupa, to postoji $z \in S$ tako da je $y\tau_p z$. Zato imamo

$$\begin{aligned} 3py &= p(2y) + py = p(p+1)z + py = p(4p_2 + 4)z + py \\ &= (p_2 + 1)(4pz) + py = e_z + py = py. \end{aligned}$$

Dakle, $p^2 y = py$. □

Lema 2.3.2. *Neka je* $pb \in A_a$, $I_a = \{pb\}$, *gde je a iz p-semigrupe* S. *Tada*

$$GI_a = \{e_a, a, 2a, \cdots, (k-1)a, pb, a + pb, 2a + pb, \cdots, (k-1)a + pb\},$$

gde je k najmanji prirodni broj takav da je $ka = e_a$.

Dokaz. Kako je $pb + a = (2p+1)a + p^2 b$, koristeći Lemu 2.3.1. imamo da je $pb + a = (2p+1)a$ ili $pb + a = (2p+1)a + pb$. Ako je $pb + a = (2p+1)a$, onda

$2pb = 2p(a + pb + a) = 2p(a + (2p + 1)a) = (p + 1)(4pa) = e_a$.
Ako je $pb + a = (2p + 1)a + pb$, onda

$$\begin{aligned} 2pb &= p(b + b) = p(a + pb + a + b) = p(a + (2p + 1)a + pb + b) \\ &= p(a + (2p + 1)a + 2a) = 2p^2a + 4pa = 2p^2a. \end{aligned}$$

Iz prethodnih jednakosti imamo $3pb = pb$ ili $3pb = 2pa^2 + pb$. Takodje je $4pb = e_a$. Zato je svaki element iz GI_a jednog od sledećih oblika: $e_a, ma, pb, na + pb$, gde su m i n prirodni brojevi manji od k. □

Teorema 2.3.2. *Neka je $pb, pc \in A_a$, $pb \neq pc$, $I_a = \{pb\}$, $I'_a = \{pc\}$, gde je a iz p-semigrupe S. Tada važi:*

(i) Ako je $pc = ma + pb$ za neko $m \in N$, onda je $GI_a = GI'_a$.

(ii) Ako je $pc \neq ma + pb$ za sve $m \in N$, onda je $GI_a \cap GI'_a = \{e_a, a, 2a, \cdots, (k-1)a\}$, gde je k najmanji prirodni broj takav da je $ka = e_a$.

Dokaz. (i) Neka je $pc = ma + pb$ za neko $m \in N$. Tada je $pc \in GI_a$, pa je $GI'_a \subset GI_a$. Kako za bilo koje $m \in N$ postoji $l \in N$ tako da je $m < 4lp$, to imamo

$$pb = e_a + pb = (4lp - m)a + ma + pb = (4lp - m)a + pc,$$

pa je $pb \in GI'_a$. Dakle, $GI_a \subset GI'_a$.

(ii) Neka je $pc \neq ma + pb$ za sve $m \in N$. Pretpostavimo da GI_a i GI'_a imaju osim e_a i ta $(t \in N$ i $t \leq k - 1)$ još neki zajednički element, tj. neka je $m_1a + pb = m_2a + pc$. Tada je $(4p - m_2)a + m_1a + pb = (4p - m_2)a + m_2a + pc$, odnosno $(4p + m_1 - m_2)a + pb = 4pa + pc$. Zato je $pc = (4p + m_1 - m_2)a + pb$, što je u suprotnosti sa pretpostavkom da je $pc \neq ma + pb$ za sve $m \in N$. Dakle, $GI_a \neq GI'_a$ i

$$GI_a \cap GI'_a = \{e_a, a, 2a, \cdots, (k-1)a\}. \ \square$$

2.4 Osobine p-semigrupe kada je p neparan broj

Sledeća razmatranja se odnose na p-semigrupe kod kojih je p neparan broj.

Lema 2.4.1. *Neka je $x\tau_p y$ u p-semigrupi i p neparan broj. Tada je $2px = 2py$.*

Dokaz. Razlikujemo dva slučaja i to $p = 4p_1 + 1$ i $p = 4p_2 + 3$ $(p_1, p_2 \in N_0)$. Ako je $p = 4p_1 + 1$, onda je

$$2px = p(p + 1)y = (4p_1 + 1 + 1)py = p_1(4py) + 2py = e_x + 2py = 2py.$$

Ako je $p = 4p_2 + 3$, onda je

$$2px = p(p+1)y = p(4p_2+3+1)y = (p_2+1)(4py) = e_x.$$

Pošto je $y\tau_p z$ za neko z iz p-semigrupe, to, slično prethodnom, imamo $2py = e_y$. Kako je $e_x = e_y$ (Posledica 2.1.1. pod (iii)), to konačno imamo $2px = 2py$. □

Tvrdjenje 2.4.1. *Neka je x proizvoljni element p-semigrupe i p neparan broj. Tada je $p^2x = px$.*

Dokaz. Ako je p oblika $4p_1 + 1$ $(p_1 \in N_0)$, onda je

$$p^2x = (4p_1+1)(px) = p_1(4px) + px = e_x + px = px.$$

Neka je p oblika $4p_2 + 3$ $(p_2 \in N_0)$. Pošto je x iz p-semigrupe, to postoji y tako da je $x\tau_p y$. Zato je $2px = p(p+1)y = p(4p_2+3+1)y = (p_2+1)(4py) = e_x$. Dalje imamo

$$p^2x = (4p_2+3)(px) = p_2(4px) + 2px + px = e_x + e_x + px = px. \ \square$$

Lema 2.4.2. *Neka je $x\tau_p y$ u p-semigrupi i p neparan broj. Tada važi $p(x+py) = px + py$.*

Dokaz. Kako je $2(x+py) = 2x$ (Teorema 2.1.3.), imamo

$$p(x+py) = \frac{p-1}{2}2(x+py) + x + py = \frac{p-1}{2}(2x) + x + py = px + py. \ \square$$

Iz Leme 2.1.1., Leme 2.3.1. i Leme 2.4.1. neposredno se dobija sledeća posledica.

Posledica 2.4.1. *Neka je $x\tau_p y$ u p-semigrupi i p neparan broj. Tada važi:*

(i) $py + x = (2p+1)x + py$

(ii) $py + x = x + 3py$. □

Posledica 2.4.2. *Neka je $x\tau_p y$ u p-semigrupi, p neparan broj i $m \in N$. Tada važi*

$$py + (2m+1)x = (2p+2m+1)x + py.$$

Dokaz. Na osnovu Teoreme 2.1.2. i Posledice 2.4.1. imamo

$$\begin{aligned} py + (2m+1)x &= py + 2mx + x = 2mx + py + x = 2mx + (2p+1)x + py \\ &= (2p+2m+1)x + py. \ \square \end{aligned}$$

Lema 2.4.3. *Neka je $x\tau_p y$ u p-semigrupi i p neparan broj. Tada je $2y = (2p+4)x$.*

Dokaz. Neka je $x\tau_p y$. Tada imamo

$$\begin{aligned} 2y &= x+py+x+x+py+x = x+py+2x+py+x \\ &= x+2x+py+py+x \text{ (Teorema 2.1.2.)} = 3x+2py+x \\ &= 3x+x+2py = 4x+2px \text{ (Lema 2.4.1.)} = (2p+4)x. \ \square \end{aligned}$$

Posledica 2.4.3. *Neka je $x\tau_p y$ i $x\tau_p z$ u p-semigrupi i p neparan broj. Tada je $2y = 2z$.* $\square$

Lema 2.4.4. *Neka je x proizvoljan element p-semigrupe i p neparan broj. Tada važi*

$$x\tau_p x \Longleftrightarrow 2x = e_x.$$

Dokaz. Neka je $x\tau_p x$. Prema Lemi 2.2.2. je $2x = e_x$. Obratno, ako je $2x = e_x$, onda je

$$px = \frac{p-1}{2}(2x) + x = \frac{p-1}{2}e_x + x = x,$$

jer je p neparan broj. Zato je $x+px+x = x+x+x = e_x + x = x$ kao i $px+x+px = x+x+x = x$. Dakle, $x\tau_p x$. $\square$

Lema 2.4.5. *Neka je $x\tau_p y$ u p-semigrupi i p neparan broj. Tada*

$$x\tau_p(x+py) \Longleftrightarrow px = x.$$

Dokaz. Neka je $x\tau_p(x+py)$. Tada je

$$2x = (p+1)(x+py) = \frac{p+1}{2}(x+py+x+py) = \frac{p+1}{2}(x+x) = (p+1)x.$$

Zato je $2x + (4p-1)x = (p+1)x + (4p-1)x$, odnosno $(4p+1)x = 4px + px$. Iz poslednje jednakosti imamo $x = e_x + px$, tj. $x = px$.

Obratno, neka je $px = x$. Koristeći Lemu 2.4.2. i Posledicu 2.4.1. dobijamo

$$\begin{aligned} x+p(x+py)+x &= x+px+py+x = x+px+(2p+1)x+py \\ &= x+3px+x+py = x+3px+px+py \\ &= x+4px+py = x+py. \end{aligned}$$

Dalje imamo

$$\begin{aligned} p(x+py) + x + p(x+py) &= px+py+x+px+py = px+py+x+x+py \\ &= px+2x+py+py \text{ (Teorema 2.1.2.)} = px+2px+2py \\ &= x+2px+2px \text{ (Lema 2.4.1.)} = (4p+1)x = x. \end{aligned}$$

Iz prethodnog imamo $x\tau_p(x+py)$. □

Posledica 2.4.4. *Neka je S p-semigrupa i p neparan broj. Tada*

$$(x\tau_p y \Longrightarrow x\tau_p(x+py)) \Longrightarrow S \in \Pi_1.$$

Dokaz. Neka je $x\tau_p y \Longrightarrow x\tau_p(x+py)$. Prema Lemi 2.4.5. je $(\forall x)(px = x)$. Kako je $S \in \Pi_p$, to za svako $x \in S$ postoji $y \in S$ tako da $x\tau_p y$, pa je

$$x+y+x = x+py+x = y \quad \text{i} \quad y+x+y = py+x+py = x.$$

Dakle, $S \in \Pi_1$. □

Tvrdjenje 2.4.2. *Neka je $x\tau_p y$ u p-semigrupi S i p neparan broj. Tada je $px\tau_1 py$.*

Dokaz. Neka je $x\tau_p y$. Koristeći Posledicu 2.4.2. dobijamo

$$px+py+px = px+(2p+p)x+py = 4px+py = py.$$

Koristeći Lemu 2.4.1. i Posledicu 2.4.2. dobijamo

$$py+px+py = (2p+p)x+py+py = 3px+2py = 3px+2px = 4px+px = px. \ \square$$

Tvrđenje 2.4.3. *Neka je a iz p-semigrupe S i p neparan broj i neka je $2pa \neq e_a$. Tada važi*

$$px, py \in A_a \Longrightarrow px+py \notin A_a.$$

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $px, py, px+py \in A_a$. Tada postoji $z \in S$ tako da je $pz = px+py$ i $z = a+pz+a$, odnosno $z = a+px+py+a$. Koristeći Posledicu 2.4.1. i Posledicu 2.4.2. dobijamo

$$\begin{aligned} z &= a+px+py+a = a+px+(2p+1)a+py = a+(2p+(2p+1))a+px+py \\ &= 2a+4pa+px+py = 2a+px+py = (p+1)z+pz = (2p+1)z. \end{aligned}$$

Pošto je $z = (2p+1)z$, to imamo
$2pz = z+(2p-1)z = (2p+1)z+(2p-1)z = 4pz = e_a$.
Prema Lemi 2.4.1. je $2pa = 2pz$, pa je $2pa = e_a$, što je u suprotnosti sa pretpostavkom da je $2pa \neq e_a$. Dakle, $px+py \notin A_a$. □

Tvrđenje 2.4.4. *Neka je a iz p-semigrupe S, p neparan broj i $px, py \in A_a$. Tada važi*

$$2pa = e_a \wedge px+py = py+px \Longleftrightarrow px+py \in A_a.$$

Dokaz. Neka je $2pa = e_a$ i $px+py = py+px$. Prema Posledici 2.4.1. je $px+a = (2p+1)a+px$ i pošto je $2pa = e_a$, to je $px+a = a+px$. Slično je $py+a = a+py$. Koristeći još i Tvrdjenje 2.4.1. imamo

$p(2a + px + py) = p(2a) + p^2x + p^2y = e_a + px + py = px + py$.
Element $2a + px + py$ označimo sa z. Iz prethodnih jednakosti je $pz = px + py$, pa je

$$a + pz + a = a + px + py + a = 2a + px + py = z.$$

Koristeći Lemu 2.4.1. dalje imamo

$$pz + a + pz = px + py + a + px + py = a + 2px + 2py = a + 2pa + 2pa = (4p + 1)a = a.$$

Dakle, $px + py \in A_a$.

Obratno, neka je $px + py \in A_a$, tj. postoji z tako da je $pz = px + py$ i $a\tau_p z$. Prema Lemi 2.4.1. je $2(px + py) = 2pa$, pa imamo

$$\begin{aligned} a + px + py + a &= a + px + py + (px + py + a + px + py) \\ &= a + 2(px + py) + a + px + py \\ &= a + 2pa + a + px + py = 2a + px + 2pa + py. \end{aligned}$$

Ako na obe strane prethodne jednakosti dodamo sa desne strane py, dobijamo $a + px + py + a + py = 2a + px + 2pa + 2py$, odakle je

$$a + px + a = 2a + px + 2pa + 2pa = (p + 1)x + px + e_a = (2p + 1)x,$$

odnosno $x = (2p + 1)x$.Iz poslednje jednakosti imamo $2px = e_a$. Zato je, prema Lemi 2.4.1., $2pa = 2px = 2py = 2pz = e_a$. Kako je $2pz = 2(px + py)$, to je $px + py + px + py = e_a$. Dalje je $px + (px + py + px + py) + py = px + e_a + py$, odnosno $2px + py + px + 2py = px + py$. Pošto je $2px = 2py = e_a$, to je $py + px = px + py$, pa je teorema u potpunosti dokazana. □

Tvrđenje 2.4.5. *Neka je $x\tau_p y$ u p-semigrupi, p neparan broj i $r \in N$. Tada važi*

$$2rx + py \in A_x \Longleftrightarrow 4rx = e_x.$$

Dokaz. Neka je $2rx + py \in A_x$. Tada je $(2rx + py) + x + (2rx + py) = x$, odakle, koristeći Teoremu 2.1.2., dobijamo $4rx + py + x + py = x$. Kako je $py + x + py = x$, to imamo $4rx + x = x$. Ako na obe strane poslednje jednakosti dodamo $(4p - 1)x$, dobijamo da je $4rx = e_x$.

Obratno, neka je $4rx = e_x$. Prema Teoremi 2.1.2. imamo

$$(2rx + py) + x + (2rx + py) = 2rx + 2rx + py + x + py = 4rx + x = x.$$

Koristeći Posledicu 2.4.1. (i) dobijamo

$$x + (2rx + py) + x = x + 2rx + (2p + 1)x + py = 2(p + r + 1)x + py.$$

Ostaje još da dokažemo da je $p(2(p + r + 1)x + py) = 2rx + py$.
Koristeći Lemu 2.3.1. (ii) iz prethodne jednakosti dobijamo

$p(2(p+r+1)x+py) = 2p(px)+2r(px)+2px+py$.
Pošto je $p = 2p_1+1$ za neko $p_1 \in N_0$, imamo

$$\begin{aligned} p(2(p+r+1)x+py) &= 2(2p_1+1)(px)+2r(2p_1+1)x+2px+py \\ &= p_1(4px)+2px+p_1(4rx)+2rx+2px+py \\ &= e_x+2px+e_x+2rx+2px+py = 2px+2rx+2px+py \\ &= 4px+2rx+py = 2rx+py. \end{aligned}$$

Dakle, $2rx+py \in A_x$. □

Tvrđenje 2.4.6. *Neka je $x\tau_p y$ u p-semigrupi i neka je $p = 4p_1+1$ ($p_1 \in N_0$) i $r \in N$. Tada važi*

$$(2r-1)x+py \in A_x \Longleftrightarrow 4(2r-1)x = e_x.$$

Dokaz. Neka je $(2r-1)x+py \in A_x$. Tada je $((2r-1)x+py)+x+((2r-1)x+py) = x$, odakle se, na osnovu Teoreme 2.1.2. (i), dobija $(4r-1)x+2py = x$. Prema Lemi 2.4.1. je $2py = 2px$, pa je $(4r-1)x+2px = x$. Ako na obe strane poslednje jednakosti dodamo $(4p-1)x$, dobijamo $(4r-2)x+2px+4px = 4px$, odnosno $(4r-2)x+2px = e_x$. Dalje je $2((4r-2)x+2px) = 2e_x$, tj. $4(2r-1)x = e_x$.

Obratno, neka je $4(2r-1)x = e_x$. Prema Teoremi 2.1.2. i Lemi 2.4.1. imamo

$$\begin{aligned} &((2r-1)x+py)+x+((2r-1)x+py) = (2r-1)x+2rx+py+py \\ = \ &(4r-1)x+2py = (4r-1)x+2px = 2(2r-1)x+2px+x. \end{aligned}$$

Neka je k najmanji prirodni broj takav da je $4kx = e_x$. Prema Lemi 2.2.4. je $k \mid (2r-1)$ i $k \mid p$. Pošto su $2r-1$ i p neparni prirodni brojevi, to postoje brojevi $k_1, k_2 \in N_0$, takvi da je $2r-1 = k(2k_1+1)$ i $p = k(2k_2+1)$. Zato je

$$\begin{aligned} 2(2r-1)x+2px+x &= 2k(2k_1+1)x+2k(2k_2+1)x+x \\ &= k_1(4kx)+k_2(4kx)+4kx+x = e_x+e_x+e_x+x = x. \end{aligned}$$

Dakle, $((2r-1)x+py)+x+((2r-1)x+py) = x$. Dalje je

$$x+((2r-1)x+py)+x = x+((2r-1)x+(2p+1)x+py = (2r+2p+1)x+py.$$

Koristeći Teoremu 2.1.2. i Lemu 2.4.2. dobijamo

$$\begin{aligned} p((2r+2p+1)x+py) &= p(2r+2p)x+p(x+py) = 2rpx+2p(px)+px+py \\ &= 2rpx+(4p_1+1)(2px)+px+py \\ &= 2rpx+2px+px+py = (2r-1)(px)+4px+py \\ &= (2r-1)(4p_1+1)x+py \\ &= p_1(4(2r-1)x)+(2r-1)x+py \\ &= e_x+(2r-1)x+py = (2r-1)x+py. \end{aligned}$$

Dakle, $(2r-1)x+py \in A_x$. □

Teorema 2.4.1. *Neka je S p-semigrupa i p neparan broj. Svaki element iz S ima jedinstven p-element u S ako i samo ako je $(p+1)x = x$ za sve $x \in S$.*

Dokaz. Neka je $(p+1)x = x$ za sve $x \in S$. Tada je

$$x + p(2x) + x = (p+1)x + (p+1)x = x + x = 2x.$$

Dalje imamo

$$\begin{aligned} p(2x) + x + p(2x) &= 3px + (p+1)x = 3px + x = 2px + (p+1)x \\ &= 2px + x = px + (p+1)x = px + x = x, \end{aligned}$$

pa x ima p-element $2px$. Pretpostavimo da x ima još neki p-element različit od $2px$, tj. neka postoji $y \in S$ tako da je $x\tau_p y$ i $py \neq 2px$. Tada je $2px = p(2x) = p(p+1)y = py$, što je suprotno pretpostavci da je $2px \neq py$. Dakle, svaki element iz S ima jedinstven p-element u S.

Obratno, neka je py jedinstven p-element od $x \in S$. Prema Lemi 2.2.1. je $x\tau_p(2x+py)$, pa je $p(2x+py) = py$. Kako je $p = 2p_1 + 1$ za neko $p_1 \in N_0$, to je

$$\begin{aligned} p(2x+py) &= p((p+1)y + py) = (2p+1)py = (4p_1+3)py \\ &= p_1(4py) + 3py = e_y + 3py = 3py. \end{aligned}$$

Na osnovu prethodnog je $3py = py$, pa je $4py = 2py$, odnosno $2py = e_y$. Iz poslednje jednakosti i Posledice 2.4.1. (ii) dobijamo da je $py + x = x + py$. Dalje je

$$\begin{aligned} x + y &= (py + x + py) + (x + py + x) = py + y + py + x \\ &= 2py + y + x = e_y + y + x = y + x. \end{aligned}$$

Iz jednakosti $2py = e_y$, na osnovu Leme 2.4.1. i Posledice 2.1.1. (iii), imamo $2px = e_x$. Dalje imamo $x + p(2x) + x = 2x$ i $p(2x) + x + p(2x) = x$. Kako je p-element jedinstven, to je $2px = py = e_x$. Iz jednakosti $x + py + x = y$ i $py = e_x$ dobijamo da je $y = 2x$. Koristeći jednakosti $y = 2x$, $py = e_x$ i $x + y = y + x$ dobijamo

$$\begin{aligned} x + p(px+y) + x &= x + p^2x + py + x = x + (2p_1+1)px + e_x + x \\ &= px + p_1(2px) + 2x = px + e_x + y = px + y. \end{aligned}$$

Takodje imamo

$$\begin{aligned} &p(px+y) + x + p(px+y) = p^2x + py + x + p^2x + py \\ &= px + e_x + x + px + e_x = 2px + x = e_x + x = x. \end{aligned}$$

Zbog jedinstvenosti p-elementa je $p(px+y) = py = e_x$. Kako je $p(px+y) = px$, to je $px = e_x$. Zato je $(p+1)x = x$, čime je teorema dokazana. □

Teorema 2.4.2. *Neka je S p-semigrupa i p neparan broj. Svaka dva elementa iz S su u relaciji τ_p ako i samo ako je S Abelova grupa čiji su svi elementi sami sebi grupni inverzi.*

Dokaz. Neka je $x\tau_p y$ za sve $x, y \in S$. Tada je $x\tau_p x$, pa je, prema Lemi 2.2.2., $px = x$ i $2x = e_x$. Prema Posledici 2.1.1. (iii) e_x je jedinica semigrupe S, pa je možemo označiti sa e. Iz $2x = e$ sledi da je $-x = x$. Kako je $px = x$, $py = y$ i prema Posledici 2.4.1. (ii) $py + x = x + 3py$, to je $y + x = x + y$, pa je grupa S Abelova.

Obratno, neka je S Abelova grupa, takva da je $-x = x$. Tada za sve $x \in S$ je $2x = e$, gde je e jedinica grupe S, pa, za bilo koje $y \in S$, imamo $py = \frac{p-1}{2}(2y) + y = e + y = y$. Zato je

$$x + py + x = x + y + x = 2x + y = e + y = y$$

i

$$py + x + py = y + x + y = x + 2y = x + e = x.$$

Dakle, bilo koja dva elementa iz S su u relaciji τ_p. □

2.5 O strukturi podgrupa p-semigrupe kada je p neparan broj

Neka je a proizvoljni element p-semigrupe S, p neparan broj i neka $a \notin A_a$. U nastavku rada ćemo ispitivati grupu GI_a, gde I_a ima tačno jedan element pb, tj. $I_a = \{pb\}$, odnosno $GI_a = [\{a, pb\}]$. Dalje ćemo sa k označavati najmanji prirodni broj takav da je $ka = e_a$.

Lema 2.5.1. *Neka je a proizvoljni element p-semigrupe, p neparan broj i k najmanji prirodni broj takav da je $ka = e_a$ i neka $a \notin A_a$. Tada je $k \mid 4p$ i $k > 2$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $k = 1$. Tada je $a = e_a$, pa je $a \in A_a$, što je u suprotnosti sa pretpostavkom da $a \notin A_a$. Dakle, $k \neq 1$. Pretpostavimo sada da je $k = 2$, tj. $2a = e_a$. Tada je $pa = a + \frac{p-1}{2}(2a) = a + \frac{p-1}{2}e_a = a$, pa je $a \in A_a$, što je suprotno pretpostavci da $a \notin A_a$. Dakle, $k > 2$. Prema Lemi 2.2.4. je $k \mid p$. □

Posledica 2.5.1. *Neka je a proizvoljni element p-semigrupe, p neparan broj, k najmanji prirodni broj takav da je $ka = e_a$ i neka $a \notin A_a$. Tada za neko $k_1 \mid p$ je $k = k_1$ ili $k = 2k_1$ ili $k = 4k_1$ i pri tome je $k > 2$.* □

Teorema 2.5.1. *Neka je a proizvoljni element p-semigrupe, p neparan broj, k* *najmanji prirodni broj takav da je* $ka = e_a$ *i neka* $a \notin A_a$*. Tada za* $k = 4k_1$ $(k_1 \mid p)$ *i* $I_a = \{pb\}$ *imamo da je*

$$GI_a = \{e_a, a, 2a, \cdots, (k-1)a, pb, a+pb, 2a+pb, \cdots, (k-1)a+pb\}$$

tj. to je uopštena kvaternionska grupa.

Dokaz. Na osnovu Posledice 2.4.1. (i) i Leme 2.4.1. imamo $pb + a = (2p+1)a + pb$, $2pb = 2pa$, $3pb = 2pa + pb$ i $4pb = e_a$. Zato je

$$GI_a = \{e_a, a, 2a, \cdots, (k-1)a, pb, a+pb, 2a+pb, \cdots, (k-1)a+pb\}.$$

Dokažimo da su svi elementi GI_a različiti.

(1) Pošto je k najmanji prirodni broj takav da je $ka = e_a$, to je $\{e_a, a, 2a, \cdots, (k-1)a\}$ ciklička podgrupa grupe GI_a, pa je $ma \neq na$ za sve medjusobno različite $m, n \leq k$.

(2) Dokažimo sada da je $pb \neq e_a$. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $pb = e_a$. Tada je $b = a + pb + a = a + e_a + a = 2a$. Dalje imamo $e_a = pb = p(2a) = 2pa$, pa je $k \mid 2p$, odnosno $4k_1 \mid 2p$, što je nemoguće jer je p neparan broj. Dakle, $pb \neq e_a$.

(3) Dokažimo sada da je $pb \neq ma$, za bilo koji prirodni broj m manji od k. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $pb = ma$ za neki prirodni broj m. Tada je $a = pb + a + pb = ma + a + ma = (2m+1)a$. Dalje imamo $ka = (k-1)a + a = (k-1)a + (2m+1)a = ka + 2ma$. Pošto je $ka = e_a$, to je i $2ma = e_a$. Po pretpostavci $a \notin A_a$, pa je $pb \neq a$. Zato je $2 < 2m < 2k$, pa je $2m = k = 4k_1$. Iz poslednje jednakosti je $m = 2k_1$, pa je $pb = 2k_1 a$. Dalje imamo $b = a + pb + a = a + 2k_1 a + a = 2(k_1+1)a$, odakle je $pb = p(2(k_1+1)a) = 2(k_1+1)(pa)$. Prema Posledici 2.5.1. je $k_1 \mid p$, pa je k_1 neparan broj. Zato je $4 \mid 2(k_1+1)$, pa je $pb = 2(k_1+1)(pa) = e_a$, što je nemoguće prema (2). Dakle $pb \neq ma$ za bilo koji prirodni broj m manji od k.

(4) Dokažimo sada da je $ma + pb \neq e_a$ za bilo koji prirodni broj m manji od k. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $ma + pb = e_a$ za neki prirodni broj m. Tada je

$$pb = e_a + pb = ma + pb + pb = ma + 2pb = ma + 2pa = (m+2p)a,$$

što je nemoguće prema (3). Dakle, $ma + pb \neq e_a$ za bilo koji prirodni broj m.

(5) Dokažimo sada da je $ma + pb \neq na$ ako su m i n prirodni brojevi manji od k. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $ma + pb = na$ za neke prirodne brojeve m i n manje od k. Tada je

$$pb = 4pa + pb = (4p-m)a + ma + pb = (4p-m)a + na = (4p+n-m)a,$$

što je nemoguće prema (3). Dakle, $ma + pb \neq na$ za bilo koje prirodne brojeve m i n manje od k.

(6) Dokažimo sada da je $ma + pb \neq pb$ za bilo koji prirodni broj m manji od k. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $ma + pb = pb$ za neki prirodni broj m manji od k. Tada je

$$ma = ma + 4pb = ma + pb + 3pb = pb + 3pb = e_a,$$

što je u suprotnosti sa pretpostavkom da je k najmanji prirodni broj takav da je $ka = e_a$. Dakle, $ma + pb \neq pb$ za bilo koji prirodni broj m manji od k.

(7) Ostaje još da dokažemo da je $ma + pb \neq na + pb$ ako su m i n različiti prirodni brojevi manji od k. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $ma + pb = na + pb$ za neke prirodne brojeve m i n manje od k. Tada je

$$na = na + 4pb = na + pb + 3pb = ma + pb + 3pb = ma,$$

što je nemoguće prema (1). Dakle, $ma + pb \neq na + pb$ ako su m i n različiti prirodni brojevi manji od k. □

Na osnovu (1)-(7) svi elementi skupa GI_a su medjusobno različiti. Za $k = 4$ grupa GI_a je kvaternionska, pa je za $k > 4$, GI_a uopštena kvaternionska grupa.

Uopštenu kvaternionsku grupu ćemo označavati sa Q_{8q} (q je neparan broj) a kvaternionsku sa Q_8. Navodimo primer grupe Q_{24}. Taj primer je izložen u okviru tabela 2.5.1.(a), 2.5.1.(b), 2.5.1.(c), i 2.5.1.(d). Prva tabela sadrži prvih šest kolona tablice operacije. Svaka sledeća tabela sadrži narednih šest kolona tablice operacije (to je uradjeno iz tehničkih razloga).

Tabela 2.5.1.(a)

$+$	e_a	a	$2a$	$3a$	$4a$	$5a$
e_a	e_a	a	$2a$	$3a$	$4a$	$5a$
a	a	$2a$	$3a$	$4a$	$5a$	$6a$
$2a$	$2a$	$3a$	$4a$	$5a$	$6a$	$7a$
$3a$	$3a$	$4a$	$5a$	$6a$	$7a$	$8a$
$4a$	$4a$	$5a$	$6a$	$7a$	$8a$	$9a$
$5a$	$5a$	$6a$	$7a$	$8a$	$9a$	$10a$
$6a$	$6a$	$7a$	$8a$	$9a$	$10a$	$11a$
$7a$	$7a$	$8a$	$9a$	$10a$	$11a$	e_a
$8a$	$8a$	$9a$	$10a$	$11a$	e_a	a
$9a$	$9a$	$10a$	$11a$	e_a	a	$2a$
$10a$	$10a$	$11a$	e_a	a	$2a$	$3a$
$11a$	$11a$	e_a	a	$2a$	$3a$	$4a$
pb	pb	$7a+pb$	$2a+pb$	$9a+pb$	$4a+pb$	$11a+pb$
$a+pb$	$a+pb$	$8a+pb$	$3a+pb$	$10a+pb$	$5a+pb$	pb
$2a+pb$	$2a+pb$	$9a+pb$	$4a+pb$	$11a+pb$	$6a+pb$	$a+pb$
$3a+pb$	$3a+pb$	$10a+pb$	$5a+pb$	pb	$7a+pb$	$2a+pb$
$4a+pb$	$4a+pb$	$11a+pb$	$6a+pb$	$a+pb$	$8a+pb$	$3a+pb$
$5a+pb$	$5a+pb$	pb	$7a+pb$	$2a+pb$	$9a+pb$	$4a+pb$
$6a+pb$	$6a+pb$	$a+pb$	$8a+pb$	$3a+pb$	$10a+pb$	$5a+pb$
$7a+pb$	$7a+pb$	$2a+pb$	$9a+pb$	$4a+pb$	$11a+pb$	$6a+pb$
$8a+pb$	$8a+pb$	$3a+pb$	$10a+pb$	$5a+pb$	pb	$7a+pb$
$9a+pb$	$9a+pb$	$4a+pb$	$11a+pb$	$6a+pb$	$a+pb$	$8a+pb$
$10a+pb$	$10a+pb$	$5a+pb$	pb	$7a+pb$	$2a+pb$	$9a+pb$
$11a+pb$	$11a+pb$	$6a+pb$	$a+pb$	$8a+pb$	$3a+pb$	$10a+pb$

Tabela 2.5.1.(b)

$+$	$6a$	$7a$	$8a$	$9a$	$10a$	$11a$
e_a	$6a$	$7a$	$8a$	$9a$	$10a$	$11a$
a	$7a$	$8a$	$9a$	$10a$	$11a$	e_a
$2a$	$8a$	$9a$	$10a$	$11a$	e_a	a
$3a$	$9a$	$10a$	$11a$	e_a	a	$2a$
$4a$	$10a$	$11a$	e_a	a	$2a$	$3a$
$5a$	$11a$	e_a	a	$2a$	$3a$	$4a$
$6a$	e_a	a	$2a$	$3a$	$4a$	$5a$
$7a$	a	$2a$	$3a$	$4a$	$5a$	$6a$
$8a$	$2a$	$3a$	$4a$	$5a$	$6a$	$7a$
$9a$	$3a$	$4a$	$5a$	$6a$	$7a$	$8a$
$10a$	$4a$	$5a$	$6a$	$7a$	$8a$	$9a$
$11a$	$5a$	$6a$	$7a$	$8a$	$9a$	$10a$
pb	$6a + pb$	$a + pb$	$8a + pb$	$3a + pb$	$10a + pb$	$5a + pb$
$a + pb$	$7a + pb$	$2a + pb$	$9a + pb$	$4a + pb$	$11a + pb$	$6a + pb$
$2a + pb$	$8a + pb$	$3a + pb$	$10a + pb$	$5a + pb$	pb	$7a + pb$
$3a + pb$	$9a + pb$	$4a + pb$	$11a + pb$	$6a + pb$	$a + pb$	$8a + pb$
$4a + pb$	$10a + pb$	$5a + pb$	pb	$7a + pb$	$2a + pb$	$9a + pb$
$5a + pb$	$11a + pb$	$6a + pb$	$a + pb$	$8a + pb$	$3a + pb$	$10a + pb$
$6a + pb$	pb	$7a + pb$	$2a + pb$	$9a + pb$	$4a + pb$	$11a + pb$
$7a + pb$	$a + pb$	$8a + pb$	$3a + pb$	$10a + pb$	$5a + pb$	pb
$8a + pb$	$2a + pb$	$9a + pb$	$4a + pb$	$11a + pb$	$6a + pb$	$a + pb$
$9a + pb$	$3a + pb$	$10a + pb$	$5a + pb$	pb	$7a + pb$	$2a + pb$
$10a + pb$	$4a + pb$	$11a + pb$	$6a + pb$	$a + pb$	$8a + pb$	$3a + pb$
$11a + pb$	$5a + pb$	pb	$7a + pb$	$2a + pb$	$9a + pb$	$4a + pb$

Tabela 2.5.1.(c)

$+$	pb	$a+pb$	$2a+pb$	$3a+pb$	$4a+pb$	$5a+pb$
e_a	pb	$a+pb$	$2a+pb$	$3a+pb$	$4a+pb$	$5a+pb$
a	$a+pb$	$2a+pb$	$3a+pb$	$4a+pb$	$5a+pb$	$6a+pb$
$2a$	$2a+pb$	$3a+pb$	$4a+pb$	$5a+pb$	$6a+pb$	$7a+pb$
$3a$	$3a+pb$	$4a+pb$	$5a+pb$	$6a+pb$	$7a+pb$	$8a+pb$
$4a$	$4a+pb$	$5a+pb$	$6a+pb$	$7a+pb$	$8a+pb$	$9a+pb$
$5a$	$5a+pb$	$6a+pb$	$7a+pb$	$8a+pb$	$9a+pb$	$10a+pb$
$6a$	$6a+pb$	$7a+pb$	$8a+pb$	$9a+pb$	$10a+pb$	$11a+pb$
$7a$	$7a+pb$	$8a+pb$	$9a+pb$	$10a+pb$	$11a+pb$	pb
$8a$	$8a+pb$	$9a+pb$	$10a+pb$	$11a+pb$	pb	$a+pb$
$9a$	$9a+pb$	$10a+pb$	$11a+pb$	pb	$a+pb$	$2a+pb$
$10a$	$10a+pb$	$11a+pb$	pb	$a+pb$	$2a+pb$	$3a+pb$
$11a$	$11a+pb$	pb	$a+pb$	$2a+pb$	$3a+pb$	$4a+pb$
pb	$6a$	a	$8a$	$3a$	$10a$	$5a$
$a+pb$	$7a$	$2a$	$9a$	$4a$	$11a$	$6a$
$2a+pb$	$8a$	$3a$	$10a$	$5a$	e_a	$7a$
$3a+pb$	$9a$	$4a$	$11a$	$6a$	a	$8a$
$4a+pb$	$10a$	$5a$	e_a	$7a$	$2a$	$9a$
$5a+pb$	$11a$	$6a$	a	$8a$	$3a$	$10a$
$6a+pb$	e_a	$7a$	$2a$	$9a$	$4a$	$11a$
$7a+pb$	a	$8a$	$3a$	$10a$	$5a$	e_a
$8a+pb$	$2a$	$9a$	$4a$	$11a$	$6a$	a
$9a+pb$	$3a$	$10a$	$5a$	e_a	$7a$	$2a$
$10a+pb$	$4a$	$11a$	$6a$	a	$8a$	$3a$
$11a+pb$	$5a$	e_a	$7a$	$2a$	$9a$	$4a$

Tabela 2.5.1.(d)

$+$	$6a+pb$	$7a+pb$	$8a+pb$	$9a+pb$	$10a+pb$	$11a+pb$
e_a	$6a+pb$	$7a+pb$	$8a+pb$	$9a+pb$	$10a+pb$	$11a+pb$
a	$7a+pb$	$8a+pb$	$9a+pb$	$10a+pb$	$11a+pb$	pb
$2a$	$8a+pb$	$9a+pb$	$10a+pb$	$11a+pb$	pb	$a+pb$
$3a$	$9a+pb$	$10a+pb$	$11a+pb$	pb	$a+pb$	$2a+pb$
$4a$	$10a+pb$	$11a+pb$	pb	$a+pb$	$2a+pb$	$3a+pb$
$5a$	$11a+pb$	pb	$a+pb$	$2a+pb$	$3a+pb$	$4a+pb$
$6a$	pb	$a+pb$	$2a+pb$	$3a+pb$	$4a+pb$	$5a+pb$
$7a$	$a+pb$	$2a+pb$	$3a+pb$	$4a+pb$	$5a+pb$	$6a+pb$
$8a$	$2a+pb$	$3a+pb$	$4a+pb$	$5a+pb$	$6a+pb$	$7a+pb$
$9a$	$3a+pb$	$4a+pb$	$5a+pb$	$6a+pb$	$7a+pb$	$8a+pb$
$10a$	$4a+pb$	$5a+pb$	$6a+pb$	$7a+pb$	$8a+pb$	$9a+pb$
$11a$	$5a+pb$	$6a+pb$	$7a+pb$	$8a+pb$	$9a+pb$	$10a+pb$
pb	e_a	$7a$	$2a$	$9a$	$4a$	$11a$
$a+pb$	a	$8a$	$3a$	$10a$	$5a$	e_a
$2a+pb$	$2a$	$9a$	$4a$	$11a$	$6a$	a
$3a+pb$	$3a$	$10a$	$5a$	e_a	$7a$	$2a$
$4a+pb$	$4a$	$11a$	$6a$	a	$8a$	$3a$
$5a+pb$	$5a$	e_a	$7a$	$2a$	$9a$	$4a$
$6a+pb$	$6a$	a	$8a$	$3a$	$10a$	$5a$
$7a+pb$	$7a$	$2a$	$9a$	$4a$	$11a$	$6a$
$8a+pb$	$8a$	$3a$	$10a$	$5a$	e_a	$7a$
$9a+pb$	$9a$	$4a$	$11a$	$6a$	a	$8a$
$10a+pb$	$10a$	$5a$	e_a	$7a$	$2a$	$9a$
$11a+pb$	$11a$	$6a$	a	$8a$	$3a$	$10a$

Teorema 2.5.2. *Neka je a proizvoljni element p-semigrupe, p neparan broj, k najmanji prirodni broj takav da je $ka = e_a$ i neka $a \notin A_a$. Tada za $k = 2k_1$ $(k_1 \mid p)$ i $I_a = \{pb\}$ imamo da je:*

(1) $GI_a = \{e_a, a, 2a, \cdots, (k-1)a, pb, a+pb, 2a+pb, \cdots, (k-1)a+pb\}$ i $GI_a \simeq C_{k_1} \times C_2 \times C_2'$, gde je C_{k_1} ciklička grupa reda k_1 a C_2 i C_2' cikličke grupe reda dva, ili

(2) $GI_a = \{e_a, a, 2a, \cdots, (k-1)a\}$ tj. ciklička grupa reda k.

Dokaz. Prema Posledici 2.5.1. je $k_1 \mid p$, pa je $k \mid 2p$. Zato je $2pa = e_a$. Pošto je $2pa = 2pb$, to je i $2pb = e_a$. Iz jednakosti $2pa = e_a$ i $pb + a = (2p+1)a + pb$ dobijamo $pb + a = a + pb$. Prema Lemi 2.3.2. je

$$GI_a = \{e_a, a, 2a, \cdots, (k-1)a, pb, a+pb, 2a+pb, \cdots, (k-1)a+pb\}.$$

Dokažimo prvo da je $pb = ma$ samo ako je $m = k_1$. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $pb = ma$ i $m \neq k_1$. Uzmimo prvo da je m paran broj, tj. $m = 2m_1$ $(m_1 \in N)$. Tada je

$$\begin{aligned} b &= a + pb + a = a + ma + a = (m+2)a \quad \text{i} \\ pb &= p(m+2)a = p(2m_1+2)a = (m_1+1)(2pa) = (m_1+1)e_a = e_a. \end{aligned}$$

Pošto je $pb = ma$, to je $ma = e_a$. Kako je $m < k$, to je $ma = e_a$ protivrečno pretpostavci da je k najmanji prirodni broj takav da je $ka = e_a$. Dakle, ne postoji paran prirodni broj m takav da je $pb = ma$. Uzmimo sada da je m neparan broj manji od k i $m \neq k_1$, tj. $m = 2m_2 + 1$ $(m_2 \in N)$. Tada je $b = (m+2)a$ i $pb = p(m+2)a = p(2m_2+3)a = (m_2+1)(2pa) + pa = e_a + pa = pa$. Dakle, $pb = pa = ma$. Pošto je $k_1 \mid p$ i p je neparan broj, to postoji $k_2 \in N_0$ tako da je $p = k_1(2k_2+1)$. Zato je $pa = k_1(2k_2+1)a = k_2(2k_1 a) + k_1 a = e_a + k_1 a = k_1 a$. Iz poslednjih jednakosti sledi da je $ma = k_1 a$. Dalje imamo $(m+k_1)a = ma + k_1 a = k_1 a + k_1 a = ka = e_a$. Kako je $1 < m < 2k_1$, to je $k_1 + 1 < m + k_1 < 3k_1$. Zato je $m + k_1 = 2k_1$, odnosno $m = k_1$. Dakle, ako je $pb = k_1 a$, onda je $GI_a = \{e_a, a, 2a, \cdots, (k-1)a\}$ ciklička grupa reda k.

Ako je $pb = e_a$, onda je takodje $GI_a = \{e_a, a, 2a, \cdots, (k-1)a\}$ ciklička grupa reda k.

Neka je $pb \neq e_a$ i $pb \neq k_1 a$. Dokažimo da je u ovom slučaju $GI_a = \{e_a, a, 2a, \cdots, (k-1)a, pb, a+pb, 2a+pb, \cdots, (k-1)a+pb\}$ i $GI_a \simeq C_{k_1} \times C_2 \times C_2'$, gde je c_{k_1} ciklička grupa reda k_1 a C_2 i C_2' cikličke grupe reda 2. Po pretpostavci je $pb \neq e_a$ i $pb \neq k_1 a$. Takodje smo dokazali da je $pb \neq ma$ za $m \neq k_1$. Da su ostali elementi GI_a različiti dokazuje se isto kao što je uradjeno u Teoremi 2.5.1.

Dokažimo još da je $GI_a \simeq C_{k_1} \times C_2 \times C_2'$. Uzmimo da je

$$C_{k_1} = \{e_a, 2a, 4a, 6a, \cdots, 2(k_1-1)a\}, \quad C_2 = \{e_a, k_1 a\} \quad \text{i} \quad C_2' = \{e_a, pb\}.$$

Neposredno je jasno da je C_{k_1} ciklička grupa reda k_1, a C_2 i C_2' su cikličke grupe reda 2. Definišimo preslikavanje f skupa $C_{k_1} \times C_2 \times C_2'$ u skup GI_a na sledeći način: $f(x, y, z) = x + y + z$. Pošto je $a + pb = pb + a$, to je grupa GI_a komutativna. Zato je

$$\begin{aligned} & f((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) = f(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ = \; & (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = (x_1 + y_1 + z_1) + (x_2 + y_2 + z_2) \\ = \; & f(x_1, y_1, z_1) + f(x_2, y_2, z_2), \end{aligned}$$

pa je preslikavanje f homomorfizam. Dokažimo sada da je svaki element skupa GI_a slika nekog elementa skupa $C_{k_1} \times C_2 \times C_2'$. Neka je x iz skupa GI_a. Ako je $x = e_a$, onda je $x = e_a + e_a + e_a = f(e_a, e_a, e_a)$. Ako je $x = 2ma$ $(1 \leq m \leq k_1 - 1)$, onda je $x = 2ma + e_a + e_a = f(2ma, e_a, e_a)$. Ako je $x = (2m-1)a$ $(1 \leq m \leq k_1)$, onda je

$$\begin{aligned} x &= (2m-1)a + e_a = (2m-1)a + 2k_1 a = (2m + k_1 - 1)a + k_1 a + e_a \\ &= f((2m + k_1 - 1)a, k_1 a, e_a). \end{aligned}$$

Ako je $x = pb$, onda je $x = e_a + e_a + pb = f(e_a, e_a, pb)$. Ako je $x = 2ma + pb$ $(1 \leq m \leq k_1 - 1)$, onda je $x = 2ma + e_a + pb = f(2ma, e_a, pb)$. Ako je $x = (2m-1)a + pb$ $(1 \leq m \leq k_1)$, onda je

$$\begin{aligned} x &= (2m-1)a + e_a + pb = (2m-1)a + 2k_1 a + pb \\ &= (2m + k_1 - 1)a + k_1 a + pb = f((2m + k_1 - 1)a, k_1 a, pb). \end{aligned}$$

Dakle, preslikavanje f je "*na*".

Dokažimo još da je preslikavanje f "1 - 1". Neka je (x, y, z) iz skupa $C_{k_1} \times C_2 \times C_2'$. Element (x, y, z) je nekog od sledećih oblika:
$(e_a, e_a, e_a), (e_a, e_a, pb), (e_a, k_1 a, e_a), (e_a, k_1 a, pb), (2ma, e_a, e_a), (2ma, e_a, pb),$
$(2ma, k_1 a, e_a), (2ma, k_1 a, pb)$, gde je $1 \leq m \leq k_1 - 1$. Dalje imamo:

$$\begin{aligned} & f(e_a, e_a, e_a) = e_a, \quad f(e_a, e_a, pb) = pb, \quad f(e_a, k_1 a, e_a) = k_1 a, \\ & f(e_a, k_1 a, pb) = k_1 a + pb, \quad f(2ma, e_a, e_a) = 2ma, \quad f(2ma, e_a, pb) = 2ma + pb, \\ & f(2ma, k_1 a, e_a) = (2m + k_1)a, \quad f(2ma, k_1 a, pb) = (2m + k_1)a + pb. \end{aligned}$$

Da bismo dokazali da su svi elementi na desnim stranama jednakosti različiti, dovoljno je dokazati da je $(2m_1 + k_1)a \neq (2m_2 + k_1)a$ za $m_1 \neq m_2$, jer je za ostale slučajeve to neposredno jasno ili se dokazuje slično ovome. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $(2m_1 + k_1)a = (2m_2 + k_1)a$ i $m_1 \neq m_2$. Dalje imamo

$$\begin{aligned} 2m_1 a &= 2m_1 a + e_a = 2m_1 a + 2k_1 a = (2m_1 + k_1)a + k_1 a = (2m_2 + k_1)a + k_1 a \\ &= 2m_2 a + 2k_1 a = 2m_2 a + e_a = 2m_2 a, \end{aligned}$$

što je u suprotnosti sa pretpostavkom da su $2m_1 a$ i $2m_2 a$ različiti elementi $(2 \leq$

$2m_1, 2m_2 \leq k-1$). Dakle, preslikavanje f je "1 - 1". Na osnovu dokazanog zaključujemo da je preslikavanje f izomorfizam. Time je teorema dokazana. □

Navodimo primer grupe izomorfne sa $C_3 \times C_2 \times C_2'$. Primer je izložen u dve tabele od kojih prva sadrži prvih šest, a druga ostalih šest kolona.

Tabela 2.5.2.(a)

$+$	e_a	a	$2a$	$3a$	$4a$	$5a$
e_a	e_a	a	$2a$	$3a$	$4a$	$5a$
a	a	$2a$	$3a$	$4a$	$5a$	e_a
$2a$	$2a$	$3a$	$4a$	$5a$	e_a	a
$3a$	$3a$	$4a$	$5a$	e_a	a	$2a$
$4a$	$4a$	$5a$	e_a	a	$2a$	$3a$
$5a$	$5a$	e_a	a	$2a$	$3a$	$4a$
pb	pb	$a+pb$	$2a+pb$	$3a+pb$	$4a+pb$	$5a+pb$
$a+pb$	$a+pb$	$2a+pb$	$3a+pb$	$4a+pb$	$5a+pb$	pb
$2a+pb$	$2a+pb$	$3a+pb$	$4a+pb$	$5a+pb$	pb	$a+pb$
$3a+pb$	$3a+pb$	$4a+pb$	$5a+pb$	pb	$a+pb$	$2a+pb$
$4a+pb$	$4a+pb$	$5a+pb$	pb	$a+pb$	$2a+pb$	$3a+pb$
$5a+pb$	$5a+pb$	pb	$a+pb$	$2a+pb$	$3a+pb$	$4a+pb$

Tabela 2.5.2.(b)

$+$	pb	$a+pb$	$2a+pb$	$3a+pb$	$4a+pb$	$5a+pb$
e_a	pb	$a+pb$	$2a+pb$	$3a+pb$	$4a+pb$	$5a+pb$
a	$a+pb$	$2a+pb$	$3a+pb$	$4a+pb$	$5a+pb$	pb
$2a$	$2a+pb$	$3a+pb$	$4a+pb$	$5a+pb$	pb	$a+pb$
$3a$	$3a+pb$	$4a+pb$	$5a+pb$	pb	$a+pb$	$2a+pb$
$4a$	$4a+pb$	$5a+pb$	pb	$a+pb$	$2a+pb$	$3a+pb$
$5a$	$5a+pb$	pb	$a+pb$	$2a+pb$	$3a+pb$	$4a+pb$
pb	e_a	a	$2a$	$3a$	$4a$	$5a$
$a+pb$	a	$2a$	$3a$	$4a$	$5a$	e_a
$2a+pb$	$2a$	$3a$	$4a$	$5a$	e_a	a
$3a+pb$	$3a$	$4a$	$5a$	e_a	a	$2a$
$4a+pb$	$4a$	$5a$	e_a	a	$2a$	$3a$
$5a+pb$	$5a$	e_a	a	$2a$	$3a$	$4a$

Teorema 2.5.3. *Neka je a proizvoljni element p-semigrupe, p neparan broj, $k \neq 1$ najmanji prirodni broj takav da je $ka = e_a$ i neka $a \notin A_a$. Tada za $k = k_1$ $(k_1 \mid p)$ i $I_a = \{pb\}$ imamo da je*

$$GI_a = \{e_a, a, 2a, \cdots, (k-1)a, pb, a+pb, 2a+pb, \cdots, (k-1)a+pb\}$$

tj. ciklička grupa generisana sa $a + pb$.

Dokaz. Ako je $pb = e_a$, onda je $GI_a = \{e_a, a, 2a, \cdots, (k-1)a\}$ ciklička grupa generisana sa $a + pb$.

Neka je $pb \neq a$. Pošto je $k \mid p$ i $ka = e_a$, to je $pa = e_a$. Kako je $2pa = 2pb$ i $pb + a = (2p+1)a + pb$, to je $2pa = 2pb = e_a$ i $pb + a = a + pb$. Prema Lemi 2.3.2. je

$$GI_a = \{e_a, a, 2a, \cdots, (k-1)a, pb, a+pb, 2a+pb, \cdots, (k-1)a+pb\}.$$

Dokažimo da su svi elementi GI_a različiti.

Dokažimo prvo da je $pb \neq ma$ $(1 < m < p)$. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $pb = ma$. Tada je $b = a + pb + a = a + ma + a = (m+2)a$. Dalje je $pb = p(m+2)a = (m+2)e_a = e_a$, što je suprotno pretpostavci da je $pb \neq e_a$. Dakle, $pb \neq ma$. Da su ostali elementi različiti dokazuje se isto kao što je uradjeno u Teoremi 2.5.1.

Dokažimo još da je GI_a ciklička grupa generisana sa $a + pb$. Ako je m paran broj, onda je $mpb = e_a$, a ako je m neparan broj, onda je $mpb = pb$. Kako je $pb + a = a + pb$, to imamo:

1) $e_a = (2k)(a + pb)$

2) $pb = k(a + pb)$

3) Ako je m paran broj, $ma = m(a + pb)$.

4) Ako je m neparan broj, $ma = (m + k)(a + pb)$.

5) Ako je m paran broj, $ma + pb = (m + k)(a + pb)$.

6) Ako je m neparan broj, $ma + pb = m(a + pb)$.

Dakle, GI_a je ciklička grupa reda $2k$ generisana sa $a + pb$. □

Navodimo primer cikličke grupe C_{2p}. Primer je izložen u dve tabele od kojih prva sadrži prvih p, a druga ostalih p kolona.

Tabela 2.5.3.(a)

$+$	e_a	a	$2a$	$3a$	$\cdots$	$(p-1)a$
e_a	e_a	a	$2a$	$3a$	$\cdots$	$(p-1)a$
a	a	$2a$	$3a$	$4a$	$\cdots$	e_a
$2a$	$2a$	$3a$	$4a$	$5a$	$\cdots$	a
$3a$	$3a$	$4a$	$5a$	$6a$	$\cdots$	$2a$
$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$
$(p-1)a$	$(p-1)a$	e_a	a	$2a$	$\cdots$	$(p-2)a$
pb	pb	$a+pb$	$2a+pb$	$3a+pb$	$\cdots$	$(p-1)a+pb$
$a+pb$	$a+pb$	$2a+pb$	$3a+pb$	$4a+pb$	$\cdots$	pb
$2a+pb$	$2a+pb$	$3a+pb$	$4a+pb$	$5a+pb$	$\cdots$	$a+pb$
$3a+pb$	$3a+pb$	$4a+pb$	$5a+pb$	$6a+pb$	$\cdots$	$2a+pb$
$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$
$(p-1)a+pb$	$(p-1)a+pb$	pb	$a+pb$	$2a+pb$	$\cdots$	$(p-2)a+pb$

Tabela 2.5.3.(b)

$+$	pb	$a+pb$	$2a+pb$	$3a+pb$	$\cdots$	$(p-1)a+pb$
e_a	pb	$a+pb$	$2a+pb$	$3a+pb$	$\cdots$	$(p-1)a+pb$
a	$a+pb$	$2a+pb$	$3a+pb$	$4a+pb$	$\cdots$	pb
$2a$	$2a+pb$	$3a+pb$	$4a+pb$	$5a+pb$	$\cdots$	$a+pb$
$3a$	$3a+pb$	$4a+pb$	$5a+pb$	$6a+pb$	$\cdots$	$2a+pb$
$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$
$(p-1)a$	$(p-1)a+pb$	pb	$a+pb$	$2a+pb$	$\cdots$	$(p-2)a+pb$
pb	e_a	a	$2a$	$3a$	$\cdots$	$(p-1)a$
$a+pb$	a	$2a$	$3a$	$4a$	$\cdots$	e_a
$2a+pb$	$2a$	$3a$	$4a$	$5a$	$\cdots$	a
$3a+pb$	$3a$	$4a$	$5a$	$6a$	$\cdots$	$2a$
$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$
$(p-1)a+pb$	$(p-1)a$	e_a	a	$2a$	$\cdots$	$(p-2)a$

Teorema 2.5.4. *Neka je a proizvoljni element p-semigrupe, p neparan broj,* $a \in A_a$ *i* $I_a = \{pb\}$. *Tada imamo:*

(1) Ako je $a = pb = e_a$, *onda je* $GI_a = \{e_a\}$ *ciklička grupa reda jedan;*

(2) Ako je $a = e_a$ *i* $pb \neq e_a$, *onda je* $GI_a = \{e_a, pb\}$ *ciklička grupa reda dva;*

(3) Ako je $a \neq e_a$ *i* $pb = e_a$, *onda je* $GI_a = \{e_a, a\}$ *ciklička grupa reda dva;*

(4) Ako je $a \neq e_a$ *i* $pb \neq e_a$, *onda je* $GI_a = \{e_a, a, pb, a + pb\}$ *Klajnova grupa.*

Dokaz. (1) Tvrdjenje je neposredno jasno.

(2) Neka je $a = e_a$ i $pb \neq e_a$. Prema Lemi 2.4.1. i Lemi 2.4.4. je $2pb = e_a$, pa je $GI_a = \{e_a, pb\}$.

(3) Neka je $a \neq e_a$ i $pb = e_a$. Prema Lemi 2.4.4. je $2a = e_a$, pa je $GI_a = \{e_a, a\}$.

(4) Neka je $a \neq e_a$ i $pb \neq e_a$. Prema Lemi 2.4.1. i Lemi 2.4.4. je $2a = e_a$ i $2pb = e_a$. Koristeći još i Posledicu 2.4.1. (i) zaključujemo da je $pb + a = a + pb$. Dakle, $GI_a = \{e_a, a, pb, a + pb\}$. Dajemo tablicu grupe GI_a iz koje se vidi da je grupa GI_a Klajnova. □

Tabela 2.5.4.

$+$	e_a	a	pb	$a+pb$
e_a	e_a	a	pb	$a+pb$
a	a	e_a	$a+pb$	pb
pb	pb	$a+pb$	e_a	a
$a+pb$	$a+pb$	pb	a	e_a

Tvrdjenje 2.5.1. *Neka je x proizvoljan element p-semigrupe i* $p = 4p_1 + 3$ $(p_1 \in N_0)$. *Tada je* $2px = e_x$.

Dokaz. Prema Tvrdjenju 2.4.1. je $p^2x = px$, pa imamo

$$2px = px + p^2x = px + (4p_1 + 3)(px) = (p_1 + 1)(4px) = e_x. \quad \square$$

Posledica 2.5.2. Neka je $x\tau_p y$ u p-semigrupi i $p = 4p_1 + 3$ $(p_1 \in N_0)$. Tada je $x + y = y + x$.

Dokaz. Neka je $x\tau_p y$. Tada imamo

$$x + y = x + (x + py + x) = 2x + py + x = (p+1)y + py + x = 2py + y + x = y + x. \quad \square$$

Neposredno iz Posledice 2.5.1. i Tvrdjenja 2.5.1. dobijamo sledeću posledicu.

Posledica 2.5.3. *Neka je a proizvoljni element p-semigrupe,* $p = 4p_1 + 3$ $(p_1 \in N_0), k$ *najmanji prirodni broj takav da je* $ka = e_a$ *i neka* $a \notin A_a$. *Tada za neko* $k_1 \mid p$ *je* $k = k_1$ *ili* $k = 2k_1$ *i pri tome je* $k > 2$. □

2.6 Podgrupe p-semigrupe kada je p paran broj

Sledeća razmatranja se odnose na p-semigrupe kod kojih je p paran broj.

Lema 2.6.1. *Neka je* $x\tau_p y$ *u p-semigrupi i p paran broj. Tada važi:*

(1) $2y = 4x$

(2) $2py = e_x$

(3) $py = 2px$

(4) $y = (2p+2)x$

(5) $x + y = y + x$

(6) $x + py = py + x$

(7) $p(x + py) = px$.

Dokaz. Neka je $x\tau_p y$.

(1) Pošto je p paran broj, na osnovu Teoreme 2.1.2. imamo $2y = y + x + py + x$ $= y + py + 2x = 2x + 2x = 4x$.

(2) Na osnovu (1) je $2py = 4px = e_x$.

(3) Kako je p paran broj, na osnovu (1) imamo $py = \frac{p}{2}(2y) = \frac{p}{2}(4x) = 2px$.

(4) Na osnovu (3) imamo $y = x + py + x = x + 2px + x = (2p+2)x$.

(5) Prema (4) imamo $x + y = x + (2p+2)x = (2p+2)x + x = y + x$.

(6) Jednakost $x + py = py + x$ je neposredna posledica (5).

(7) Pošto je p paran broj, na osnovu Teoreme 2.1.2. imamo $p(x + py) = px + p^2y$. Prema Lemi 2.3.1. (i) je $p^2y = e_x$, pa je $p(x + py) = px$. □

Teorema 2.6.1. *Neka je S semigrupa i p paran broj . Tada*

$$S \in \Pi_p \Longleftrightarrow (\forall x \in S)((4p+1)x = x).$$

Dokaz. Neka je $S \in \Pi_p$. Prema Teoremi 2.1.1. je $(\forall x \in S)((4p+1)x = x)$.

Obratno, neka je $(\forall x \in S)((4p+1)x = x)$. Uzmimo da je $y = (2p+2)x$ i dokažimo da je $x\tau_p y$. Neka je $p = 2p_1 (p_1 \in N)$. Tada imamo

$$\begin{aligned} x + py + x &= x + p(2p+2)x + x = x + p(4p_1+2)x + x \\ &= p_1(4px) + (2p+2)x = e_x + y = y. \end{aligned}$$

Dalje imamo

$$py + x + py = p(2p+2)x + x + p(2p+2)x = (p+1)(4px) + x = e_x + x = x.$$

Dakle, $x\tau_p y$. □

Teorema 2.6.2. *Neka je $x\tau_p y$ u p-semigrupi i p paran broj. Tada su sledeći uslovi medjusobno ekvivalentni:*

(*i*) $x\tau_p(x + py)$

(*ii*) $x\tau_p x$

(*iii*) $x = e_x$.

Dokaz. (*i*) $\Longrightarrow$ (*iii*). Neka je $x\tau_p(x+py)$. Prema Lemi 2.6.1. (4) je $x + py = (2p+2)x$. Takodje prema Lemi 2.6.1. (3) je $py = 2px$, pa je $x + py = (2p+1)x$. Zato je $(2p+2)x = (2p+1)x$, odakle je $x = e_x$.

(*iii*) $\Longrightarrow$ (*i*). Neka je $x = e_x$. Prema Lemi 2.6.1. (3) je $py = e_x$, pa je $x\tau_p(x+py)$.

(*ii*) $\Longrightarrow$ (*iii*). Neka je $x\tau_p x$. Na osnovu Leme 2.6.1. (2) i (4) je $2px = e_x$ i $x = (2p+2)x$, odakle je $x = 2x$, odnosno $x = e_x$.

(*iii*) $\Longrightarrow$ (*ii*). Neka je $x = e_x$. Neposredno je jasno da je tada $x\tau_p x$. □

Teorema 2.6.3. *Neka je a proizvoljni element p-semigrupe, p paran broj, k najmanji prirodni broj takav da je $ka = e_a$ i $I_a = \{pb\}$. Tada je $GI_a = \{e_a, a, 2a, \cdots, (k-1)a\}$ ciklička grupa reda k.*

Dokaz. Prema Lemi 2.6.1. postoji tačno jedno b tako da je $a\tau_p b$. Prema istoj lemi je $pb = 2pa$, pa je $A_a = \{2pa\}$. Zato je $GI_a = \{e_a, a, 2a, \cdots, (k-1)a\}$ ciklička grupa reda k. □

Neposredno iz Teoreme 2.6.2. i Teoreme 2.6.3. dobija se sledeća posledica.

Posledica 2.6.1. *Neka je a proizvoljni element p-semigrupe, p paran broj i $a \in A_a$. Tada je $GI_a = \{e_a\}$.* □

2.7 Opis grupa koje pokrivaju p-semigrupe

Sa C_k označimo cikličku grupu reda k, sa K_4 Klajnovu četvornu grupu, sa $C_k \times C_2 \times C_2$ direktni proizvod cikličkih grupa i sa Q_{8k} uopštenu kvaternionsku grupu reda $8k$, gde je $k \in N$. Specijalno za $k = 1$ imamo da je Q_8 kvaternionska grupa.

Definišimo klase grupa $\Gamma'_p, \Gamma''_p, \Gamma'''_p$ i to:

(i) Za $p = 4p_1 + 1$ ($p_1 \in N_0$) klasu Γ'_p na sledeći način

$$\begin{aligned} G \in \Gamma'_p \iff & (\exists k \in N)(k \mid p \wedge (G = C_k \vee G = C_{2k} \vee G = K_4 \\ \vee & \quad G = C_k \times C_2 \times C_2 \vee G = Q_{8k})). \end{aligned}$$

(ii) Za $p = 4p_2 + 3$ ($p_2 \in N_0$) klasu Γ''_p na sledeći način

$$G \in \Gamma''_p \iff (\exists k \in N)(k \mid p \wedge (G = C_k \vee G = C_{2k} \vee G = K_4 \vee G = C_k \times C_2 \times C_2)).$$

(iii) Za $p = 2p_3$ ($p_3 \in N$) klasu Γ'''_p na sledeći način

$$G \in \Gamma'''_p \iff (\exists k \in N)(k \mid p \wedge (G = C_k \vee G = C_{2k} \vee G = C_{4k})).$$

Za druge vrednosti parametra p klase Γ'_p, Γ''_p i Γ'''_p su prazni skupovi.

Lema 2.7.1. *Neka je S semigrupa koja je unija grupa iz klase Γ'_p, tj. $S = \bigcup\{G \mid G \in \Gamma'_p\}$. Tada je $S \in \Pi_p$.*

Dokaz. Neka je S semigrupa, $p = 4p_1 + 1$ ($p_1 \in N_0$), $S = \bigcup\{G \mid G \in \Gamma'_p\}$ i $x \in S$. U zavisnosti od toga kakvoj grupi pripada element x razlikujemo pet slučajeva.

1) Neka je $x \in C_k$ i $k \mid p$. Kako je

$$C_k = \{e, a, 2a, \cdots, (k-1)a\}$$

za neko $a \in S$, razlikujemo dva slučaja.

a) Ako je $x = e$, za y uzmimo da je $y = e$. Tada imamo $x + py + x = e + pe + e = e = y$ kao i $py + x + py = pe + e + pe = e = x$. Dakle, $x\tau_p y$.

b) Neka je $x = ma, 1 \leq m \leq k-1$. Za y uzmimo da je $y = 2x = 2ma$. Tada imamo

$$\begin{aligned} x + py + x &= ma + p(2ma) + ma = 2ma + k_1 k(2ma) = 2ma + k_1 m(2ka) \\ &= 2ma + e = 2ma = y \end{aligned}$$

za neko $k_1 \in N$, kao i

$$\begin{aligned} py + x + py &= p(2ma) + ma + p(2ma) = ma + m(4pa) \\ &= ma + m(4k_1 ka) = ma + e = ma = x. \end{aligned}$$

Dakle, $x\tau_p y$.

2) Neka je $x \in C_{2k}$ i $k \mid p$. Kako je

$$C_{2k} = \{e, a, 2a, \cdots, (2k-1)a\}$$

za neko $a \in S$, razlikujemo dva slučaja.

a) Ako je $x = e$ za y uzmimo da je $y = e$. Slično kao u 1) pod a) imamo $x\tau_p y$.

b) Neka je $x = ma$, $1 \leq m \leq 2k-1$. Za y uzmimo da je $y = 2x = 2ma$. Slično kao u 1) pod b) imamo $x\tau_p y$.

3) Neka je $x \in K_4$. Za y uzmimo da je $y = x$. U Klajnovoj grupi je $x + x = e$, pa je $px = \frac{p-1}{2}(2x) + x = \frac{p-1}{2}e + x = x$. Dalje imamo $x + py + x = x + px + x = x + x + x = x = y$ kao i $py + x + py = px + x + px = x + x + x = x$. Dakle, $x\tau_p y$.

4) Neka je $x \in C_k \times C_2 \times C_2'$ i $k \mid p$, gde je $C_k = \{e_1, a_1, 2a_1, \cdots, (k-1)a_1\}$, $C_2 = \{e_2, a_2\}$ i $C_2' = \{e_3, a_3\}$ za neke $a_1, a_2, a_3 \in S$. Razlikujemo dva slučaja.

a) Neka je x nekog od sledećih oblika: (e_1, e_2, e_3), (e_1, e_2, a_3), (e_1, a_2, e_3), (e_1, a_2, a_3). U svakom slučaju je $2x = (e_1, e_2, e_3)$. Za y uzmimo da je $y = 2x = (e_1, e_2, e_3)$. Tada imamo $x + py + x = x + p(e_1, e_2, e_3) + x = 2x = (e_1, e_2, e_3)$ kao i $py + x + py = p(e_1, e_2, e_3) + x + p(e_1, e_2, e_3) = x$. Dakle, $x\tau_p y$.

b) Neka je x nekog od sledećih oblika: (ma_1, e_2, e_3), (ma_1, e_2, a_3), (ma_1, a_2, e_3), (ma_1, a_2, a_3), gde je $1 \leq m \leq k-1$. U svakom slučaju je $2x = (2ma_1, e_2, e_3)$. Za y uzmimo da je $y = 2x = (2ma_1, e_2, e_3)$. Tada imamo

$$\begin{aligned} x + py + x &= x + p(2ma_1, e_2, e_3) + x = x + (2mpa_1, e_2, e_3) + x \\ &= x + (2mk_1ka_1, e_2, e_3) + x = x + (e_1, e_2, e_3) + x = 2x = y, \end{aligned}$$

kao i

$$\begin{aligned} py + x + py &= p(2ma_1, e_2, e_3) + x + p(2ma_1, e_2, e_3) \\ &= (2pma_1, e_2, e_3) + x + (2pma_1, e_2, e_3) \\ &= (2mk_1ka_1, e_2, e_3) + x + (2mk_1ka_1, e_2, e_3) \\ &= (e_1, e_2, e_3) + x + (e_1, e_2, e_3) = x \end{aligned}$$

za neko $k_1 \in N$. Dakle, $x\tau_p y$.

5) Neka je $x \in Q_{8k}$, $k \mid p$, gde je

$$Q_{8k} = \{e, a, 2a, \cdots, (4k-1)a, b, a+b, 2a+b, \cdots, (4k-1)a+b\}$$

za neke $a, b \in S$. Poznato je da za elemente a i b iz Q_{8k} važe sledeće jednakosti: $4ka = e$, $2b = 2ka$, $3b = 2ka + b$, $4b = e$, $b + 2ma = 2ma + b$

$(m \in N)$, $b+(2n+1)a = (2k+2n+1)a+b$, $(n \in N_0)$. Kako je $p = (2k_1+1)k$ i $p = 4p_1 + 1$ $(k_1, p_1 \in N_0)$, to imamo:

$$\begin{aligned}
&2pa = 2(2k_1+1)ka = k_1(4ka) + 2ka = e + 2ka = 2ka = 2b,\\
&2pa + b = 2b + b = 3b,\\
&4pa = 2b + 2b = 4b = e,\\
&b + (2n+1)a = (2k+2n+1)a + b = (2p+2n+1)a + b,\\
&pb = (4p_1+1)b = p_1(4b) + b = e + b = b.
\end{aligned}$$

Da bismo dokazali da je $x\tau_p y$ za neko $y \in S$, razlikovaćemo šest slučajeva.

a) Ako je $x = e$ za y uzmimo da je $y = e$. Slično kao u 1) pod *a*) imamo $x\tau_p y$.

b) Ako je $x = 2ma$ $(m \in N)$ za y uzmimo da je $y = 4ma + 2b$. Tada imamo

$$\begin{aligned}
x + py + x &= 2ma + p(4ma + 2b) + 2ma = 2ma + m(4pa) + 2pb + 2ma\\
&= 2ma + e + 2b + 2ma = 2ma + 2ma + 2b = 4ma + 2b = y,\\
py + x + py &= p(4ma + 2b) + 2ma + p(4ma + 2b)\\
&= m(4pa) + 2pb + 2ma + m(4pa) + 2pb\\
&= e + 2b + 2ma + e + 2b = 2b + 2ma + 2b\\
&= 2ma + 2b + 2b = 2ma + e = 2ma = x.
\end{aligned}$$

Dakle, $x\tau_p y$.

c) Ako je $x = (2n+1)a$, $(n \in N_0)$ za y uzmimo da je $y = (2p+4n+2)a+b$. Tada imamo

$$\begin{aligned}
x + py + x &= (2n+1)a + p((2p+4n+2)a + b) + (2n+1)a\\
&= (2n+1)a + p(2p+4n+2)a + pb + (2n+1)a\\
&= (2n+1)a + 2p^2a + n(4pa) + 2pa + b + (2n+1)a\\
&= (2n+1)a + (4p_1+1)(2pa) + e + 2pa + b + (2n+1)a\\
&= (2n+1)a + 2p_1(4pa) + 2pa + 2pa + b + (2n+1)a\\
&= (2n+1)a + e + e + b + (2n+1)a = (2n+1)a\\
&+ (2p+2n+1)a + b = (2p+4n+2)a + b = y,\\
py + x + py &= p((2p+4n+2)a + b) + (2n+1)a + p((2p+4n+2)a + b)\\
&= 2p^2a + n(4pa) + 2pa + pb + (2n+1)a + 2p^2a + n(4pa)\\
&+ 2pa + pb = (4p_1+1)(2pa) + e + 2pa + b + (2n+1)a\\
&+ (4p_1+1)(2pa) + e + 2pa + b = 2p_1(4pa) + 2pa + 2pa + b\\
&+ (2n+1)a + 2p_1(4pa) + 2pa + 2pa + b\\
&= e + e + b + (2n+1)a + e + e + b = b + (2n+1)a + b\\
&= (2p+2n+1)a + b + b = (2p+2n+1)a + 2pa\\
&= 4pa + (2n+1)a = e + (2n+1)a = x.
\end{aligned}$$

Dakle, $x\tau_p y$.

d) Ako je $x = b$, za y uzmimo da je $y = pa$. Tada imamo

$$\begin{aligned}
x + py + x &= b + p(pa) + b = b + (4p_1 + 1)(pa) + b \\
&= b + p_1(4pa) + pa + b = b + e + pa + b = b + pa + b \\
&= (2p + p)a + b + b = 3pa + 2pa = pa = y, \\
py + x + py &= p(pa) + b + p(pa) = pa + b + pa = pa + (2p + p)a + b \\
&= 4pa + b = b = x.
\end{aligned}$$

Dakle, $x\tau_p y$.

e) Ako je $x = 2ma + b$, $(m \in N)$ za y uzmimo da je $y = (4m + p)a$. Tada imamo

$$\begin{aligned}
x + py + x &= 2ma + b + p(4m + p)a + 2ma + b \\
&= 2ma + b + m(4pa) + p^2a + 2ma + b \\
&= 2ma + b + e + pa + 2ma + b = 2ma + 2ma + b + pa + b \\
&= 4ma + (2p + p)a + b + b = 4ma + 3pa + 2pa \\
&= 4ma + pa = y, \\
py + x + py &= p(4m + p)a + 2ma + b + p(4m + p)a \\
&= m(4pa) + p^2a + 2ma + b + m(4pa) + p^2a \\
&= e + pa + 2ma + b + e + pa = pa + 2ma + (2p + p)a + b \\
&= 4pa + 2ma + b = 2ma + b = x.
\end{aligned}$$

Dakle, $x\tau_p y$.

f) Ako je $x = (2n+1)a + b$, $(n \in N_0)$ za y uzmimo da je $y = (p + 4n + 2)a$. Tada imamo

$$\begin{aligned}
x + py + x &= (2n + 1)a + b + p(p + 4n + 2)a + (2n + 1)a + b \\
&= (2n + 1)a + b + p^2a + n(4pa) + 2pa + (2n + 1)a + b \\
&= (2n + 1)a + b + pa + e + 2pa + (2n + 1)a + b \\
&= (2n + 1)a + b + 3pa + (2n + 1)a + b \\
&= (2n + 1)a + (3p + 2n + 1)a + b + b = (3p + 4n + 2)a + 2pa \\
&= (p + 4n + 2)a = y, \\
py + x + py &= p(p + 4n + 2)a + (2n + 1)a + b + p(p + 4n + 2)a \\
&= p^2a + n(4pa) + 2pa + (2n + 1)a + b + p^2a + n(4pa) + 2pa \\
&= pa + e + 2pa + (2n + 1)a + b + pa + e + 2pa \\
&= 3pa + (2n + 1)a + b + 3pa \\
&= 3pa + (2n + 1)a + (2p + 3p)a + b = 8pa + (2n + 1)a + b \\
&= (2n + 1)a + b = x.
\end{aligned}$$

Dakle, $x\tau_p y$. Time je dokaz leme završen. □

Lema 2.7.2. *Neka je S semigrupa koja je unija grupa iz klase Γ''_p, tj. $S = \bigcup\{G \mid G \in \Gamma''_p\}$. Tada je $S \in \Pi_p$.*

Dokaz. Dokaz je sličan dokazu Leme 2.7.1. □

Lema 2.7.3. *Neka je S semigrupa koja je unija grupa iz klase Γ'''_p, tj. $S = \bigcup\{G \mid G \in \Gamma'''_p\}$. Tada je $S \in \Pi_p$.*

Dokaz. Neka je S semigrupa, $p = 2p_3$, $(p_3 \in N)$, $S = \bigcup\{G \mid G \in \Gamma'''_p\}$ i $x \in S$. Razlikujemo dva slučaja.

a) Ako je $x = e$ za y uzmimo da je $y = e$. Slično kao u 1) pod *a*) Leme 2.7.1. imamo $x\tau_p y$.

b) Ako je $x = ma$ $(1 \le m \le k-1) \vee 1 \le m \le 2k-1 \vee 1 \le m \le 4k-1)$ za y uzmimo da je $y = 2mpa + 2ma$. Tada imamo

$$\begin{aligned}
x + py + x &= ma + p(2mpa + 2ma) + ma = ma + 2mp^2a + 2mpa + ma \\
&= 2ma + mp_1(4pa) + 2mpa = 2mpa + 2ma = y, \\
py + x + py &= p(2mpa + 2ma) + ma + p(2mpa + 2ma) \\
&= 2mp^2a + 2mpa + ma + 2mp^2a + 2mpa \\
&= (mp + m)(4pa) + ma = e + ma = x.
\end{aligned}$$

Dakle, $x\tau_p y$. □

Na osnovu Teoreme 2.5.1, Teoreme 2.5.2, Teoreme 2.5.3, Teoreme 2.5.4, Teoreme 2.6.3, Leme 2.7.1, Leme 2.7.2 i Leme 2.7.3 neposredno se dobija sledeća teorema.

Teorema 2.7.1. *Neka je S semigrupa. Tada*

1) Za $p = 4p_1 + 1$ $(p_1 \in N_0)$ imamo

$$S \in \Pi_p \iff S = \bigcup\{G \mid G \in \Gamma'_p\}$$

2) Za $p = 4p_2 + 3$ $(p_2 \in N_0)$ imamo

$$S \in \Pi_p \iff S = \bigcup\{G \mid G \in \Gamma''_p\}$$

3) Za $p = 2p_3$ $(p_3 \in N)$ imamo

$$S \in \Pi_p \iff S = \bigcup\{G \mid G \in \Gamma'''_p\}$$

Ustvari Teoremu 2.7.1 možemo iskazati i na sledeći način.

Neka je S semigrupa. Tada važi

$$S \in \Pi_p \iff S = \bigcup\{G \mid G \in \Gamma'_p\} \vee S = \bigcup\{G \mid G \in \Gamma''_p\} \vee S = \bigcup\{G \mid G \in \Gamma'''_p\}.$$

2.8 Neki primeri p-polugrupa

Prvo pitanje koje se nameće u radu sa p-polugrupama je da li je skup Π_p neprazan. Odgovor sledi iz činjenice da su sve grupe iz klasa Γ'_p, Γ''_p i Γ'''_p ujedno i p-polugrupe.

Drugo pitanje je da li, pored p-grupa, postoje i p-polugrupe koje nisu grupe iz klasa Γ'_p, Γ''_p i Γ'''_p. Odgovor je i u ovom slučaju potvrdan. Jednostavan primer takve p-polugrupe je bilo koja idempotentna polugrupa (traka). Neposredno je jasno da je svaki element trake u relaciji τ_p sa samim sobom. Drugi jednostavan primer je polugrupa $(S,+)$ u kojoj je po definiciji $x+y=x$ za sve $x,y \in S$. U ovoj polugrupi je $x\tau_p x$ za sve $x \in S$.

Kako se, u zavisnosti od parametra p, svaka p-polugrupa može predstaviti kao unija grupa iz klasa Γ'_p, Γ''_p, odnosno Γ'''_p, može se postaviti pitanje da li su te grupe disjunktne ili imaju neprazan presek. Odgovor bi bio da neke od tih grupa imaju neprazan presek, dok su druge disjunktne. Navodimo primer p-polugrupe (p neparan broj) koja se može predstaviti kao unija grupa iz klase Γ'_p. Operacija p-polugrupe $(S,+)$ je data sledećim tablicama.

$+$	e	a	pb	pc
e	e	a	pb	pc
a	a	e	$a+pb$	$a+pc$
pb	pb	$a+pb$	e	$pb+pc$
pc	pc	$a+pc$	$pb+pc$	e
$pb+pc$	$pb+pc$	$a+pb+pc$	pc	pb
$a+pb$	$a+pb$	pb	a	$a+pb+pc$
$a+pc$	$a+pc$	pc	$a+pb+pc$	a
$a+pb+pc$	$a+pb+pc$	$pb+pc$	$a+pc$	$a+pb$

$+$	$pb+pc$	$a+pb$	$a+pc$	$a+pb+pc$
e	$pb+pc$	$a+pb$	$a+pc$	$a+pb+pc$
a	$a+pb+pc$	pb	pc	$pb+pc$
pb	pc	a	$a+pb+pc$	$a+pc$
pc	pb	$a+pb+pc$	a	$a+pb$
$pb+pc$	e	$a+pc$	$a+pb$	a
$a+pb$	$a+pc$	e	$pb+pc$	pc
$a+pc$	$a+pb$	$pb+pc$	e	pb
$a+pb+pc$	a	pc	pb	e

Iz tablica dobijamo da je $S = \bigcup_{i=1}^{3} G_i$, gde su $G_1 = \{e, a, pb, a + pb\}$, $G_2 = \{e, a, pc, a + pc\}$ i $G_3 = \{e, a, pb + pc, a + pb + pc\}$ Klajnove grupe čiji je presek neprazan, tj. $G_1 \cap G_2 \cap G_3 = \{e, a\}$. Polugrupa S takođe je grupa, ali nije iz klasa Γ'_p, Γ''_p, odnosno Γ'''_p. Nije teško zaključiti da je $S \simeq C_2^1 \times C_2^2 \times C_2^3$, gde su $C_2^1 = \{e, a\}, C_2^2 = \{e, pb\}$ i $C_2^3 = \{e, pc\}$ cikličke grupe reda dva.

Na kraju dajemo konstrukciju disjunktne unije p-grupa koja je p-polugrupa ali nije grupa. Neka su date p-grupe $(S_i, +_i)$, $i = 1, 2, .., n$ i neka je $S = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$. Na skupu S definišimo operaciju $+$ na sledeći način. Neka je $x_i \in S_i$ i $x_j \in S_j$, $i, j = 1, 2, ..., n$. Tada je

$$x_i + x_j = \begin{cases} x_i +_i x_j, & \text{ako } i = j \\ x_j, & \text{ako } i < j \\ x_i, & \text{ako } i > j \end{cases}$$

Nije teško zaključiti da je $(S, +)$ p-polugrupa, koja, naravno, nije grupa.

Glava 3

p-poluprsteni

U ovoj glavi razmatraju se klase p-poluprstena za proizvoljno p iz N. Izmedju ostalog dokazano je da je svaki p-poluprsten pokriven pretprstenima, tj. podpoluprstenima čija je aditivna polugrupa grupa (Teorema 3.2.1. i Posledica 3.2.1.). Dalje, posebno su razmatrani Bulovi p-poluprsteni za koje je dokazano da su pokriveni prstenima. Te klase prstena su u potpunosti opisane Teoremama 3.4.1. i 3.4.2.

3.1 Osnovne definicije i tvrdjenja

Neka je $(S,+,\cdot)$ poluprsten i $p \in N$. Relaciju, u oznaci θ_p, poluprstena S uvodimo na sledeći način

$$x\theta_p y \Longleftrightarrow x + py + x = y \ \wedge \ py + x + py = x \ \wedge \ 4px^2 = 4px,$$

tj. $x\theta_p y \Longleftrightarrow x\tau_p y \ \wedge \ 4px^2 = 4px$. Ako je $x\theta_p y$ za $x, y \in S$, onda py zovemo p-**element** elementa x.

Definicija 3.1.1. *Poluprsten $(S,+,\cdot)$ zovemo p-***poluprsten** *ako svaki element ima svoj p-element.*

Klasu svih p-poluprstena označimo sa Σ_p. Dakle,

$$S \in \Sigma_p \Longleftrightarrow (\forall x \in S)(\exists y \in S)(x\theta_p y).$$

Teorema 3.1.1. *Neka je S poluprsten. Tada*

$$\begin{aligned} S \in \Sigma_p \quad \Longleftrightarrow \quad & (\forall x \in S)(\exists y \in S)(2x = (p+1)y \ \wedge \ py + x = (2p+1)x + p^2 y \\ \wedge \quad & (4p+1)x = x \ \wedge \ 4px^2 = 4px). \end{aligned}$$

Dokaz. Teorema 3.1.1. je neposredna posledica Teoreme 2.1.1. za semigrupe. □

Posledica 3.1.1. (i) *Svaki p-poluprsten je regularan poluprsten.*

(ii) Svaki element x p-poluprstena ima svoju aditivnu jedinicu e_x, gde je $e_x = 4px$.

(iii) U p-poluprstenu svi elementi y koji su u relaciji θ_p sa x imaju istu aditivnu jedinicu.

(iv) Ako je u p-poluprstenu $2px = e_x$ i $x\theta_p y$, onda $py + x = x + p^2y$. □

Teorema 3.1.2. *Neka je S poluprsten za koji važi $x^{n+1} = x$ $(n \in N)$ za sve $x \in S$. Tada*

$$\begin{aligned} S \in \Sigma_p \quad \Longleftrightarrow \quad & (\forall x \in S)(\exists y \in S)(2x = (p+1)y \ \wedge \ y + x = x + y \\ \wedge \quad & (2p+1)x = x \ \wedge \ 2px^2 = 2px). \end{aligned}$$

Dokaz. Neka je $S \in \Sigma_p$. Tada za svaki $x \in S$ postoji $y \in S$ tako da je $x\theta_p y$. Prema Teoremi 3.1.1. je $(p+1)y = 2x$, $(4p+1)x = x$ i $py + x = (2p+1)x + p^2y$. Kako je $x^{n+1} = x$, to imamo

$$2x = (x+x)^{n+1} = x^{n+1} + x^{n+1} + \cdots + x^{n+1} = x + x + \cdots + x = 2^{n+1}x.$$

Dakle, $2x = 2^{n+1}x$. Kako je $4px = e_x$, to je $4k(px) = e_x$ za sve $k \in N$, pa i za $k = 2^{n-1}$. Zato je $4p(2^{n-1}x) = e_x$, odnosno $p(2^{n+1}x) = e_x$. Dalje je $p(2x) = e_x$. Iz poslednje jednakosti dobijamo $(2p+1)x = x$. Ako je p neparan broj, onda je, prema Lemi 2.3.1.(ii), $p^2y = py$, pa je $py + x = (2p+1)x + p^2y = x + py$. Dalje imamo

$$x + y = x + (x + py + x) = (x + py + x) + x = y + x.$$

Ako je p paran broj,onda je takodje $x + y = y + x$ prema Lemi 2.6.1.(5). Dalje je

$$2px^2 = x \cdot (2px) = x \cdot e_x = x \cdot (4px) = 4px^2 = 4px = 2px.$$

Obratno, neka za $x \in S$ postoji $y \in S$ tako da je $2x = (p+1)y$, $y + x = x + y$, $(2p+1)x = x$ i $2px^2 = 2px$, tada je $(4p+1)x = (2p+1)x + 2px = x + 2px = x$. Iz jednakosti $2x = (p+1)y$ sledi $4x = 2(p+1)y = (2p+1)y + y = y + y = 2y$, odakle je $4px = 2py$. Dalje imamo

$$\begin{aligned} py + x + py &= 2py + x = 4px + x = x, \\ x + py + x &= 2x + py = (p+1)y + py = (2p+1)y = y. \end{aligned}$$

Imamo još da je $4px^2 = 2(2px^2) = 2(2px) = 4px$, pa je $S \in \Sigma_p$. □

Lema 3.1.1. *Neka je $a\theta_p b$ u p-poluprstenu i $m \in N$. Tada važi:*

(i) $a \cdot e_a = e_a \cdot a = e_a$.

(ii) $e_a^2 = e_a$.

(iii) $e_a \cdot pb = pb \cdot e_a = e_a$.

(iv) $4pa^m = e_a$.

(v) $a^m + e_a = e_a + a^m = a^m$.

(vi) $4p(pb)^m = e_a$.

(vii) $(pb)^m + e_a = e_a + (pb)^m = (pb)^m$.

Dokaz. Neka je $a\theta_p b$. Tada imamo:

(i) $a \cdot e_a = a \cdot 4pa = 4pa^2 = 4pa = e_a$. Slično je $e_a \cdot a = e_a$.

(ii) $e_a^2 = 4pa \cdot e_a = 4p(a \cdot e_a) = 4pe_a = e_a$.

(iii) $e_a \cdot pb = 4e_a \cdot pb = e_a \cdot 4pb = e_a \cdot e_a = e_a$. Slično je $pb \cdot e_a = e_a$.

Za $m = 1$ sve formule $(iv) - (vii)$ su trivijalne. Neka je $m \geq 2$. Tada imamo:

(iv) $4pa^m = a^m + a^m + \cdots + a^m = a^{m-1} \cdot (a + a + \cdots + a) = a^{m-1}(4pa) = a^{m-1} \cdot e_a = e_a$.

(v) $a^m + e_a = a^m + 4pa^m = (4p+1)a^m = a^m$. Slično je $e_a + a^m = a^m$.

(vi) $$\begin{aligned} 4p(pb)^m &= (pb)^m + (pb)^m + \cdots + (pb)^m = (pb)^{m-1} \cdot (pb + pb + \cdots + pb) \\ &= (pb)^{m-1} \cdot 4p(pb) = (pb)^{m-1} \cdot p(4pb) = (pb)^{m-1} \cdot e_a = e_a. \end{aligned}$$

(vii) $(pb)^m + e_a = (pb)^m + 4p(pb)^m = (4p+1)(pb)^m = (pb)^m$. □

Tvrdjenje 3.1.1. *Neka je S p-poluprsten i p neparan broj. Svaka dva elementa iz S su u relaciji θ_p ako i samo ako je S prsten čiji su svi elementi sami sebi grupni aditivni inverzi.*

Dokaz. Neka je $x\theta_p y$ za sve $x, y \in S$. Prema Teoremi 2.4.2. S je prsten čiji su svi elementi sami sebi grupni aditivni inverzi.

Obratno, neka je S prsten čiji su svi elementi sami sebi grupni aditivni inverzi. Prema Teoremi 2.4.2. za sve $x, y \in S$ je $x + py + x = y$ i $py + x + py = x$. Pošto je $e = 2z$ za sve $z \in S$, gde je e aditivna jedinica prstena, to imamo $2(2px^2) = e$, odnosno $4px^2 = e = 4px$. Dakle, bilo koja dva elementa iz S su u relaciji θ_p. □

3.2 Pod-pretprsteni p-poluprstena

Poluprsten kod koga je aditivna semigrupa grupa zovemo pretprsten. Sa B_a označimo skup svih p-elemenata elementa a, a sa GI_a podpoluprsten generisan sa $a \cup I_a$, gde je $I_a \subseteq B_a$, tj. $GI_a = [a \cup I_a]$.

Lema 3.2.1. *Neka je S p-poluprsten i a proizvoljan element iz S. Tada je podpoluprsten poluprstena S generisan sa a pretprsten.*

Dokaz. Neposredno je jasno da je svaki element x podpoluprstena $[a]$ oblika $x = a^{m_1} + a^{m_2} + \cdots + a^{m_k}$, gde je $m_i \in N, i = 1, 2, ..., k$. Prema Lemi 3.1.1.$(v)$

imamo $x + e_a = e_a + x = x$. Uočimo element x' oblika

$$x' = (4p-1)a^{m_k} + (4p-1)a^{m_{k-1}} + \cdots + (4p-1)a^{m_1}.$$

Tada imamo

$$\begin{aligned}
x + x' &= a^{m_1} + \cdots + a^{m_k} + (4p-1)a^{m_k} + (4p-1)a^{m_{k-1}} + \cdots + (4p-1)a^{m_1} \\
&= a^{m_1} + a^{m_2} + \cdots + a^{m_{k-1}} + 4pa^{m_k} + (4p-1)a^{m_{k-1}} + \cdots + (4p-1)a^{m_1} \\
&= a^{m_1} + a^{m_2} + \cdots + a^{m_{k-1}} + e_a + (4p-1)a^{m_{k-1}} + \cdots + (4p-1)a^{m_1} \\
&= \cdots = e_a.
\end{aligned}$$

Slično je $x' + x = e_a$, pa je aditivna semigrupa podpoluprstena $[a]$ grupa, tj. podpoluprsten $[a]$ je pretprsten. □

Lema 3.2.2. *Neka je $a\theta_p b_i$ $(i = 1, 2, ..., m)$ u p-poluprstenu i neka je $x = a_1a_2...a_m$, gde je $a_i = a$ ili $a_i = pb_i$ $(i = 1, 2, ..., m)$. Tada je $4px = e_x = e_a$ i $x+e_a = e_a+x = x$, gde je $e_a = 4pa$.*

Dokaz. Neka je $x = a_1a_2...a_m$. Tada je

$$\begin{aligned}
e_x &= 4px = a_1a_2...a_m + a_1a_2...a_m + \cdots + a_1a_2...a_m \\
&= a_1a_2...a_{m-1}(a_m + a_m + \cdots + a_m) = a_1a_2...a_{m-1} \cdot 4pa_m \\
&= a_1a_2...a_{m-1} \cdot e_a = \cdots = e_a \ (Lema 3.1.1.).
\end{aligned}$$

Dalje je $x + e_a = x + e_x = x$. Slično je $e_a + x = x$. □

Teorema 3.2.1. *Neka je S p-poluprsten i $a \in S$. Tada za svaki skup $I_a \subseteq B_a$, $GI_a = [a \cup I_a]$ je pretprsten.*

Dokaz. Neka je S p-poluprsten i $a \in S$. Ako je $I_a = \emptyset$, onda je $GI_a = [a]$ pretprsten prema Lemi 3.2.1.

Neka je $I_a \neq \emptyset$. Neposredno je jasno da su svi elementi x iz GI_a oblika

$$x = a_1^1a_2^1...a_{m_1}^1 + a_1^2a_2^2...a_{m_2}^2 + \cdots + a_1^ka_2^k...a_{m_k}^k,$$

gde je $a_i^j = a$ ili $a_i^j = pb_i^j \in I_a$; $i = 1, 2, ..., m_j$; $j = 1, 2, ..., k$; tj. $x = x_1+x_2+\cdots+x_k$, gde je $x_i = a_1^ia_2^i...a_{m_i}^i$, $i = 1, 2, ..., k$. Prema Lemi 3.2.2. je $4px_i = e_a$ i $x_i + e_a = e_a + x_i = x_i$, $i = 1, 2, ..., k$. Dakle, $x + e_a = e_a + x = x$. Neka je

$$x' = (4p-1)x_k + (4p-1)x_{k-1} + \cdots + (4p-1)x_1.$$

Tada imamo

$$\begin{aligned}
x + x' &= x_1 + x_2 + \cdots + x_k + (4p-1)x_k + (4p-1)x_{k-1} + \cdots + (4p-1)x_1 \\
&= x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1} + 4px_k + (4p-1)x_{k-1} + \cdots + (4p-1)x_1 \\
&= x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1} + e_a + (4p-1)x_{k-1} + \cdots + (4p-1)x_1 \\
&= x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1} + (4p-1)x_{k-1} + \cdots + (4p-1)x_1 \\
&= \cdots = e_a.
\end{aligned}$$

Slično je $x' + x = e_a$, pa je GI_a pretprsten. □

Posledica 3.2.1. *Svaki p-poluprsten S je oblika*

$$S = \bigcup_{a \in S} GI_a. \; \square$$

Drugim rečima svaki p-poluprsten se pokriva potprstenima.

Tvrdjenje 3.2.1. *Neka je $x\theta_p y$ u poluprstenu S i neka je $z^{n+1} = z$ $(n \in N)$ za sve $z \in S$. Tada je*

$$\{x^n \cdot py,\ py \cdot x^n,\ x^n \cdot py \cdot x^n\} \subset B_x.$$

Dokaz. Neka je $x\theta_p y$. Tada imamo

$$x^n \cdot py + x + x^n \cdot py = x^n \cdot py + x^{n+1} + x^n \cdot py = x^n \cdot (py + x + py) = x^n \cdot x = x,$$

$$x + x^n \cdot py + x = x^{n+1} + x^n \cdot py + x^{n+1} = x^n \cdot (x + py + x) = x^n \cdot y$$

Dalje imamo

$$p(x^n y) = x^n y + x^n y + \cdots + x^n y = x^n \cdot (y + y + \cdots + y) = x^n \cdot py.$$

Iz dokazanih jednakosti imamo $x^n \cdot py \in B_x$. Slično je $py \cdot x^n \in B_x$. Dokažimo još da je $x^n \cdot py \cdot x^n \in B_x$. Kako je $x^{2n+1} = x^{n+1} \cdot x^n = x \cdot x^n = x$, to je

$$\begin{aligned} x^n \cdot py \cdot x^n + \quad x \quad + x^n \cdot py \cdot x^n &= x^n \cdot py \cdot x^n + x^{2n+1} + x^n \cdot py \cdot x^n \\ &= x^n \cdot (py + x + py) \cdot x^n = x^n \cdot x \cdot x^n = x^{2n+1} = x. \end{aligned}$$

Takodje imamo

$$x + x^n \cdot py \cdot x^n + x = x^{2n+1} + x^n \cdot py \cdot x^n + x^{2n+1} = x^n \cdot (x + py + x) \cdot x^n = x^n y x^n$$

kao i

$$p(x^n y x^n) = x^n y x^n + x^n y x^n + \cdots + x^n y x^n = x^n \cdot (y + y + \cdots + y) \cdot x^n = x^n \cdot py \cdot x^n.$$

Iz poslednjih jednakosti imamo $x^n \cdot py \cdot x^n \in B_x$ □

Sledeće tvrdjenje je neposredna posledica Tvrđenja 2.4.4. i Teoreme 3.1.2.

Tvrdjenje 3.2.2. *Neka je S p-poluprsten u kojem je $z^{n+1} = z$ $(n \in N)$ za sve $z \in S$, p neparan broj i $py, pz \in B_x$. Tada važi*

$$py + pz = pz + py \Longleftrightarrow py + pz \in B_x. \; \square$$

3.3 Bulovi p-poluprsteni

Poluprsten $(S, +, \cdot)$ zovemo **Bulov** ako je $a^2 = a$ za sve $a \in S$.

Tvrdjenje 3.3.1. *Neka je S Bulov poluprsten i p neparan broj. Svaka dva elementa iz S su u relaciji θ_p ako i samo ako je S komutativan Bulov prsten čiji su svi elementi sami sebi grupni aditivni inverzi.*

Dokaz. Neka su svaka dva elementa iz S u relaciji θ_p. Prema Tvrdjenju 3.1.1. S je prsten čiji su svi elementi sami sebi grupni aditivni inverzi. Pošto je S Bulov poluprsten, to za bilo koje $x, y \in S$ imamo

$$x + y = (x + y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2 = x + xy + yx + y = x + y + xy + yx.$$

Kako je $(S, +)$ grupa, to je $xy + yx = e$, gde je e jedinica grupe $(S, +)$. Pošto je svaki element sam sebi grupni aditivni inverz imamo $xy = yx$. Dakle, prsten S je komutativan.

Obrat tvrdjenja sledi neposredno iz Tvrdjenja 3.1.1. □

Tvrdjenje 3.3.2. *Neka su x i y elementi Bulovog p-poluprstena S. Tada važi:*
(*i*) $x\theta_p y \Longrightarrow x\theta_1 y$.
(*ii*) *Ako je p neparan broj, onda* $x\theta_p y \Longleftrightarrow x\theta_1 y$

Dokaz. (*i*) Neka je $x\theta_p y$. Kako je p-poluprsten S Bulov, imamo $2x = (x + x)^2 = 4x^2 = 4x$, pa je $x = (4p + 1)x = 2x + x = 3x$, tj. $3x = x$. Ako je p neparan broj, onda je $py = (p - 1)y + y = 2y + y = 3y = y$. Prema prethodnom imamo $x+y+x = x+py+x = y$ i $y+x+y = py+x+py = x$, tj. $x\theta_1 y$. Ako je p paran broj, onda je $py = 2y$. Kako je $(p + 1)y = 2x$, to je $2y + y = 2x$, odnosno $3y = 2x$. Pošto je $3y = y$, imamo $y = 2x$. Dalje je $x + y + x = x + 2x + x = 4x = 2x = y$ i $y + x + y = 2x + x + 2x = 5x = x$, tj. $x\theta_1 y$.

(*ii*) Prema (*i*) imamo $x\theta_p y \Longrightarrow x\theta_1 y$. Neka je p neparan broj i $x\theta_1 y$. Kako je $3x = x$ i $px = (p - 1)x + x = 2x + x = 3x$, to je $px = x$. Prema tome $x + py + x = x + y + x = y$ i $py + x + py = y + x + y = x$, odnosno $x\theta_p y$. □

Lema 3.3.1. Neka je $a\theta_p b$ u Bulovom p-poluprstenu. Tada važi:

(*i*) $2a = 2b = e_a$

(*ii*) $pb + a = a + pb$

(*iii*) $pb \cdot a = a \cdot pb$

(*iv*) $a + a \cdot pb = a \cdot pb + a$

(*v*) $pb + a \cdot pb = a \cdot pb + a$

Dokaz. Neka je $a\theta_p b$. Tada imamo:

(i) $2a = (a+a)^2 = 4a^2 = 4a = 6a = \cdots = 4pa = e_a$. Slično je $2b = e_b = e_a$. Dakle, $2a = 2b = e_a$.

(ii) Ako je p neparan broj, onda je $p^2 b = pb$ (Lema 2.3.1. (ii)), pa je $pb + a = (2p+1)a + p^2 b = a + pb$. Ako je p paran broj, onda je, prema Lemi 2.6.1.(6), $pb + a = a + pb$.

(iii) $a + pb = (a+pb)^2 = a^2 + a \cdot pb + pb \cdot a + (pb)^2 = a + a \cdot pb + pb \cdot a + pb$. Prema Teoremi 3.2.1. za $I_a = \{pb\}$, GI_a je potprsten čija je aditivna jedinica $e = 2a$. Zato je $a \cdot pb + pb \cdot a = e$, odakle je $pb \cdot a = a \cdot pb$.

(iv) $a + a \cdot pb = a^2 + a \cdot pb = a \cdot (a + pb) = a \cdot (pb + a) = a \cdot pb + a^2 = a \cdot pb + a$.

(v) $pb + a \cdot pb = (pb)^2 + a \cdot pb = (pb + a) \cdot pb = (a + pb) \cdot pb = a \cdot pb + (pb)^2 = a \cdot pb + pb$. □

Teorema 3.3.1. *Neka je $a\theta_p b$ u Bulovom p-poluprstenu i $I_a = \{pb\}$. Tada je GI_a komutativan Bulov prsten sa jedinicom $a + pb + a \cdot pb$.*

Dokaz. Prema Teoremi 3.2.1. GI_a je Bulov potprsten. Koristeći Lemu 3.3.1. imamo da je GI_a komutativan prsten. Prema istoj lemi je

$$GI_a = \{e_a,\ a,\ pb,\ a \cdot pb,\ a + pb,\ a + a \cdot pb,\ pb + a \cdot pb,\ a + pb + a \cdot pb\}$$

Dalje imamo

- $e_a \cdot (a + pb + a \cdot pb) = e_a$,
- $a \cdot (a + pb + a \cdot pb) = a + a \cdot pb + a \cdot pb = a + e_a = a$,
- $pb \cdot (a + pb + a \cdot pb) = a \cdot pb + pb + a \cdot pb = pb + e_a = pb$,
- $(a \cdot pb) \cdot (a + pb + a \cdot pb) = a \cdot pb + a \cdot pb + a \cdot pb = a \cdot pb + e_a = a \cdot pb$,
- $(a + pb) \cdot (a + pb + a \cdot pb) = a + a \cdot pb + a \cdot pb + a \cdot pb + pb + a \cdot pb$ $= a + pb + e_a = a + pb$,
- $(a + a \cdot pb) \cdot (a + pb + a \cdot pb) = a + a \cdot pb + a \cdot pb + a \cdot pb + a \cdot pb + a \cdot pb$ $= a + a \cdot pb + e_a = a + a \cdot pb$,
- $(pb + a \cdot pb) \cdot (a + pb + a \cdot pb) = a \cdot pb + pb + a \cdot pb + a \cdot pb + a \cdot pb + a \cdot pb$ $= pb + a \cdot pb + e_a = pb + a \cdot pb$,
- $(a + pb + a \cdot pb) \cdot (a + pb + a \cdot pb) = a + pb + a \cdot pb$.

Dakle, GI_a je prsten sa jedinicom $a + pb + a \cdot pb$. □

3.4 Opis prstena koji pokrivaju Bulove p-poluprstene

Neka je a proizvoljni element Bulovog p-poluprstena S. Dalje ćemo ispitivati potprsten GI_a, gde I_a ima tačno jedan element pb, tj. $I_a = \{pb\}$, odnosno $GI_a = [\{a, pb\}]$. Takodje ćemo opisati prstene koji pokrivaju Bulove p-poluprstene.

Teorema 3.4.1. *Neka je $a\theta_p b$ u Bulovom p-poluprstenu i $I_a = \{pb\}$. Tada imamo:*

(1) Ako je $a = pb = e_a$, onda je $GI_a = \{e_a\}$ i $(GI_a, +)$ je ciklička grupa reda jedan.

(2) Ako je $a = e_a \neq pb$, onda je $GI_a = \{e_a, pb\}$ i $(GI_a, +)$ je ciklička grupa reda dva.

(3) Ako je $pb = e_a \neq a$, onda je $GI_a = \{e_a, a\}$ i $(GI_a, +)$ je ciklička grupa reda dva.

(4) Ako je $a + pb = e_a$, $a \neq e_a$ i $pb \neq e_a$, onda je $GI_a = \{e_a, a\}$ i $(GI_a, +)$ je ciklička grupa reda dva.

(5) Ako je $a \cdot pb = e_a$, $a \neq e_a$, $pb \neq e_a$ i $a + pb \neq e_a$, onda je $GI_a = \{e_a, a, pb, a + pb\}$ i $(GI_a, +)$ je Klajnova grupa.

(6) Ako je $a + a \cdot pb = e_a$, $a \neq e_a, pb \neq e_a$, $a \cdot pb \neq e_a$ i $a + pb \neq e_a$, onda je $GI_a = \{e_a, a, pb, a + pb\}$ i $(GI_a, +)$ je Klajnova grupa.

(7) Ako je $pb + a \cdot pb = e_a$, $a \neq e_a$, $pb \neq e_a$, $a \cdot pb \neq e_a$, $a + pb \neq e_a$ i $a + a \cdot pb \neq e_a$, onda je $GI_a = \{e_a, a, pb, a + pb\}$ i $(GI_a, +)$ je Klajnova grupa.

(8) Ako je $a + pb + a \cdot pb = e_a$, $a \neq e_a$, $pb \neq e_a$, $a \cdot pb \neq e_a$, $a + pb \neq e_a$, $a + a \cdot pb \neq e_a$ i $pb + a \cdot pb \neq e_a$, onda je $GI_a = \{e_a, a, pb, a + pb\}$ i $(GI_a, +)$ je Klajnova grupa.

(9) Ako je $a \neq e_a$, $pb \neq e_a$, $a \cdot pb \neq e_a$, $a + pb \neq e_a$, $a + a \cdot pb \neq e_a$, $pb + a \cdot pb \neq e_a$ i $a + pb + a \cdot pb \neq e_a$, onda je

$$GI_a = \{e_a, a, pb, a \cdot pb, a + pb, a + a \cdot pb, pb + a \cdot pb, a + pb + a \cdot pb\}$$

i $(GI_a, +)$ je izomorfna sa $C_2 \times C_2' \times C_2''$.

Dokaz. Tvrdjenja (1), (2) i (3) su neposredno jasna.

Operacije $+$ i $\cdot$ su date tablicama 3.4.1.(a) i 3.4.1.(b) za slučaj (1), 3.4.2.(a) i 3.4.2.(b) za slučaj (2) i 3.4.3.(a) i 3.4.3.(b) za slučaj (3).

Tabela 3.4.1.(a)

$+$	e_a
e_a	e_a

Tabela 3.4.1.(b)

$\cdot$	e_a
e_a	e_a

Tabela 3.4.2.(a)

$+$	e_a	pb
e_a	e_a	pb
pb	pb	e_a

Tabela 3.4.2.(b)

$\cdot$	e_a	pb
e_a	e_a	e_a
pb	e_a	pb

Tabela 3.4.3.(a)

$+$	e_a	a
e_a	e_a	a
a	a	e_a

Tabela 3.4.3.(b)

$\cdot$	e_a	a
e_a	e_a	e_a
a	e_a	a

(4) Neka je $a+pb = e_a$, $a \neq e_a$ i $pb \neq e_a$. Tada imamo $pb = pb+e_a = pb+a+pb = a$, pa je $GI_a = \{e_a, a\}$.

(5) Neka je $a \cdot pb = e_a$, $a \neq e_a$, $pb \neq e_a$ i $a + pb \neq e_a$. Tada imamo $a + a \cdot pb = a$, $pb + a \cdot pb = pb$ i $a + pb + a \cdot pb = a + pb$. Ako bi bilo $pb = a$, onda bismo imali $a = a^2 = a \cdot pb = e_a$, što je u suprotnosti sa pretpostavkom da je $a \neq e_a$. Dakle, $pb \neq a$. Ako bi bilo $a + pb = a$, onda bismo imali $pb = e_a + pb = 2a + pb = a+(a+pb) = a+a = e_a$, što nije moguće. Dakle, $a+pb \neq a$. Ako bi bilo $a+pb = pb$, onda bismo imali $a = a+e_a = a+2pb = (a+pb)+pb = pb+pb = e_a$, što je nemoguće, pa je $a + pb \neq pb$. Dakle, $GI_a = \{e_a, a, pb, a + pb\}$. Iz tablice se vidi da je $(GI_a, +)$ Klajnova grupa. Operacije $+$ i $\cdot$ su date tablicama 3.4.4.(a) i 3.4.4.(b).

Tabela 3.4.4.(a)

$+$	e_a	a	pb	$a+pb$
e_a	e_a	a	pb	$a+pb$
a	a	e_a	$a+pb$	pb
pb	pb	$a+pb$	e_a	a
$a+pb$	$a+pb$	pb	a	e_a

Tabela 3.4.4.(b)

$\cdot$	e_a	a	pb	$a+pb$
e_a	e_a	e_a	e_a	e_a
a	e_a	a	e_a	a
pb	e_a	e_a	pb	pb
$a+pb$	e_a	a	pb	$a+pb$

(6) Neka je $a+a\cdot pb=e_a$, $a\neq e_a$, $pb\neq e_a$, $a\cdot pb\neq e_a$, i $a+pb\neq e_a$. Tada imamo $a\cdot pb=e_a+a\cdot pb=(a+a\cdot pb)+a\cdot pb=a+e_a=a$, $pb+a\cdot pb=pb+a=a+pb$ i $a+pb+a\cdot pb=a+pb+a=e_a+pb=pb$. Ako bi bilo $pb=a$, onda bismo imali $a+pb=a+a=e_a$, što je u suprotnosti sa pretpostavkom $a+pb\neq e_a$, pa je $pb\neq a$. Ako bi bilo $a+pb=a$, onda bismo imali $pb=e_a+pb=2a+pb=a+(a+pb)=a+a=e_a$, što nije moguće, pa je $a+pb\neq a$. Ako bi bilo $a+pb=pb$, onda bismo imali $a=a+e_a=a+2pb=(a+pb)+pb=pb+pb=e_a$, što je nemoguće, pa je $a+pb\neq pb$. Dakle, $GI_a=\{e_a,a,pb,a+pb\}$. Iz tablice se vidi da je $(GI_a,+)$ Klajnova grupa. Operacije $+$ i $\cdot$ su date tablicama 3.4.4.(a) i 3.4.5.

Tabela 3.4.5.

$\cdot$	e_a	a	pb	$a+pb$
e_a	e_a	e_a	e_a	e_a
a	e_a	a	a	e_a
pb	e_a	a	pb	$a+pb$
$a+pb$	e_a	e_a	$a+pb$	$a+pb$

(7) Neka je $pb+a\cdot pb=e_a$, $a\neq e_a$, $pb\neq e_a$, $a\cdot pb\neq e_a$, $a+pb\neq e_a$ i $a+a\cdot pb\neq e_a$. Tada imamo $a\cdot pb=e_a+a\cdot pb=2pb+a\cdot pb=pb+(pb+a\cdot pb)=pb+e_a=pb$, $a+a\cdot pb=a+pb$ i $a+pb+a\cdot pb=a+pb+pb=a+e_a=a$. Slično kao u (6) dokazuje se da je $pb\neq a$, $a+pb\neq a$ i $a+pb\neq pb$. Dakle, $GI_a=\{e_a,a,pb,a+pb\}$. Iz tablice se vidi da je $(GI_a,+)$ Klajnova grupa. Operacije $+$ i $\cdot$ su date tablicama 3.4.4.(a) i 3.4.6.

Tabela 3.4.6.

$\cdot$	e_a	a	pb	$a+pb$
e_a	e_a	e_a	e_a	e_a
a	e_a	a	pb	$a+pb$
pb	e_a	pb	pb	e_a
$a+pb$	e_a	$a+pb$	e_a	$a+pb$

(8) Neka je $a+pb+a\cdot pb=e_a$, $a\neq e_a$, $pb\neq e_a$, $a\cdot pb\neq e_a$, $a+pb\neq e_a$, $a+a\cdot pb\neq e_a$ i $pb+a\cdot pb\neq e_a$. Tada imamo $a\cdot pb=e_a+a\cdot pb=(a+pb+a\cdot pb)+a\cdot pb=a+pb+e_a=a+pb$, $a+a\cdot pb=a+a+pb=e_a+pb=pb$ i $pb+a\cdot pb=pb+a+pb=a+e_a=a$. Slično kao u (6) dokazuje se da je $pb\neq a$, $a+pb\neq a$ i $a+pb\neq pb$. Dakle, $GI_a=\{e_a,a,pb,a+pb\}$. Iz tablice se vidi da je $(GI_a,+)$ Klajnova grupa. Operacije $+$ i $\cdot$ su date tablicama 3.4.4.(a) i 3.4.7.

Tabela 3.4.7.

$\cdot$	e_a	a	pb	$a+pb$
e_a	e_a	e_a	e_a	e_a
a	e_a	a	$a+pb$	pb
pb	e_a	$a+pb$	pb	a
$a+pb$	e_a	pb	a	$a+pb$

(9) Neka je $a \neq e_a$, $pb \neq e_a$, $a \cdot pb \neq e_a$, $a+pb \neq e_a$, $a+a\cdot pb \neq e_a$, $pb+a\cdot pb \neq e_a$ i $a+pb+a\cdot pb \neq e_a$. Slično ako u (6) dokazuje se da je $pb \neq a$, $a+pb \neq a$ i $a+pb \neq pb$. Dokažimo da su i svi ostali elementi GI_a medjusobno različiti. Pretpostavimo suprotno, tj. da su bar dva medjusobno jednaki. Tada imamo:

- Ako je $a \cdot pb = a$, onda je $a + a\cdot pb = a + a = e_a$.
- Ako je $a + a\cdot pb = a$, onda je $a\cdot pb = e_a + a\cdot pb = 2a + a\cdot pb = a + (a + a\cdot pb) = a + a = e_a$.
- Ako je $pb + a\cdot pb = a$, onda je $a + pb + a\cdot pb = a + a = e_a$.
- Ako je $a+pb+a\cdot pb = a$, onda je $pb+a\cdot pb = 2a+pb+a\cdot pb = a+(a+pb+a\cdot pb) = a + a = e_a$.
- Ako je $a \cdot pb = pb$, onda je $a\cdot pb + pb = pb + pb = e_a$.
- Ako je $a + a\cdot pb = pb$, onda je $a + pb + a\cdot pb = 2pb = e_a$.
- Ako je $pb+a\cdot pb = pb$, onda je $a\cdot pb = e_a+a\cdot pb = pb+(pb+a\cdot pb) = pb+pb = e_a$.
- Ako je $a+pb+a\cdot pb = pb$, onda je $a+a\cdot pb = 2pb+a+a\cdot pb = pb+(a+pb+a\cdot pb) = pb + pb = e_a$.
- Ako je $a \cdot pb = a + pb$, onda je $a + pb + a\cdot pb = a\cdot pb + a\cdot pb = e_a$.
- Ako je $a+a\cdot pb = a+pb$, onda je $pb+a\cdot pb = 2a+pb+a\cdot pb = a+pb+a+a\cdot pb = a + pb + a + pb = e_a$.
- Ako je $pb+a\cdot pb = a+pb$, onda je $a+a\cdot pb = 2pb+a+a\cdot pb = pb+a\cdot pb+a+pb = a + pb + a + pb = e_a$.
- Ako je $a + pb + a\cdot pb = a + pb$, onda je $a\cdot pb = 2(a + pb) + a\cdot pb = a + pb + (a + pb + a\cdot pb) = a + pb + a + pb = e_a$.
- Ako je $a + a\cdot pb = a\cdot pb$, onda je $a = a + 2(a\cdot pb) = (a + a\cdot pb) + a\cdot pb = a\cdot pb + a\cdot pb = e_a$.

- Ako je $pb + a \cdot pb = a \cdot pb$, onda je $pb = pb + 2(a \cdot pb) = (pb + a \cdot pb) + a \cdot pb = a \cdot pb + a \cdot pb = e_a$.
- Ako je $a + pb + a \cdot pb = a \cdot pb$, onda je $a + pb = a + pb + 2(a \cdot pb) = (a + pb + a \cdot pb) + a \cdot pb = a \cdot pb + a \cdot pb = e_a$.
- Ako je $pb + a \cdot pb = a + a \cdot pb$, onda je $a + pb = a + pb + 2(a \cdot pb) = pb + a \cdot pb + a + a \cdot pb = a + a \cdot pb + a + a \cdot pb = e_a$.
- Ako je $a + pb + a \cdot pb = a + a \cdot pb$, onda je $pb = pb + 2(a + a \cdot pb) = (a + pb + a \cdot pb) + a + a \cdot pb = a + a \cdot pb + a + a \cdot pb = e_a$.
- Ako je $a + pb + a \cdot pb = pb + a \cdot pb$, onda je $a = a + 2(pb + a \cdot pb) = a + pb + a \cdot pb + pb + a \cdot pb = pb + a \cdot pb + pb + a \cdot pb = e_a$.

Znači, u svim slučajevima dobijaju se tvrdjenja koja su u suprotnosti sa pretpostavkom. Dakle,

$$GI_a = \{e_a, a, pb, a + pb, a \cdot pb, a + a \cdot pb, pb + a \cdot pb, a + pb + a \cdot pb\}.$$

Dokažimo još da je grupa $(GI_a, +)$ izomorfna sa $C_2 \times C_2' \times C_2''$. Uzmimo da je $C_2 = \{e_a, a\}$, $C_2' = \{e_a, pb\}$ i $C_2'' = \{e_a, a \cdot pb\}$. Neposredno je jasno da su C_2, C_2' i C_2'' cikličke grupe reda dva. Definišimo preslikavanje f skupa $C_2 \times C_2' \times C_2''$ u skup GI_a na sledeći način: $f(x, y, z) = x + y + z$. Pošto je grupa $(GI_a, +)$ komutativna, imamo

$$\begin{aligned} f((x_1, y_1, z_1) &+ (x_2, y_2, z_2)) = f(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ &= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = (x_1 + y_1 + z_1) + (x_2 + y_2 + z_2) \\ &= f(x_1, y_1, z_1) + f(x_2, y_2, z_2), \end{aligned}$$

gde je (x_1, y_1, z_1), $(x_2, y_2, z_2) \in C_2 \times C_2' \times C_2''$. Dakle, preslikavanje f je homomorfizam. Dokažimo sada da je svaki element skupa GI_a slika nekog elementa skupa $C_2 \times C_2' \times C_2''$. Za elemente skupa GI_a imamo:

- $e_a = e_a + e_a + e_a = f(e_a, e_a, e_a)$,
- $a = a + e_a + e_a = f(a, e_a, e_a)$,
- $pb = e_a + pb + e_a = f(e_a, pb, e_a)$,
- $a + pb = a + pb + e_a = f(a, pb, e_a)$,
- $a \cdot pb = e_a + e_a + a \cdot pb = f(e_a, e_a, a \cdot pb)$,
- $a + a \cdot pb = a + e_a + a \cdot pb = f(a, e_a, a \cdot pb)$,
- $pb + a \cdot pb = e_a + pb + a \cdot pb = f(e_a, pb, a \cdot pb)$,

- $a + pb + a \cdot pb = f(a, pb, a \cdot pb)$.

Dakle, preslikavanje f je „na". Iz navedenih jednakosti neposredno je jasno da preslikavanje f je „1 - 1", dakle, bijekcija. Sada je jasno da je preslikavanje f izomorfizam. Operacije $+$ i $\cdot$ su date tablicama 3.4.8.(a), 3.4.8.(b), 3.4.9.(a) i 3.4.9.(b).

Tabela 3.4.8.(a)

$+$	e_a	a	pb	$a+pb$
e_a	e_a	a	pb	$a+pb$
a	a	e_a	$a+pb$	pb
pb	pb	$a+pb$	e_a	a
$a+pb$	$a+pb$	pb	a	e_a
$a \cdot pb$	$a \cdot pb$	$a + a \cdot pb$	$pb + a \cdot pb$	$a + pb + a \cdot pb$
$a + a \cdot pb$	$a + a \cdot pb$	$a \cdot pb$	$a + pb + a \cdot pb$	$pb + a \cdot pb$
$pb + a \cdot pb$	$pb + a \cdot pb$	$a + pb + a \cdot pb$	$a \cdot pb$	$a + a \cdot pb$
$a + pb + a \cdot pb$	$a + pb + a \cdot pb$	$pb + a \cdot pb$	$a + a \cdot pb$	$a \cdot pb$

Tabela 3.4.8.(b)

$+$	$a \cdot pb$	$a + a \cdot pb$	$pb + a \cdot pb$	$a + pb + a \cdot pb$
e_a	$a \cdot pb$	$a + a \cdot pb$	$pb + a \cdot pb$	$a + pb + a \cdot pb$
a	$a + a \cdot pb$	$a \cdot pb$	$a + pb + a \cdot pb$	$pb + a \cdot pb$
pb	$pb + a \cdot pb$	$a + pb + a \cdot pb$	$a \cdot pb$	$a + a \cdot pb$
$a+pb$	$a + pb + a \cdot pb$	$pb + a \cdot pb$	$a + a \cdot pb$	$a \cdot pb$
$a \cdot pb$	e_a	a	pb	$a+pb$
$a + a \cdot pb$	a	e_a	$a+pb$	pb
$pb + a \cdot pb$	pb	$a+pb$	e_a	a
$a + pb + a \cdot pb$	$a+pb$	pb	a	e_a

Tabela 3.4.9.(a)

$\cdot$	e_a	a	pb	$a+pb$
e_a	e_a	e_a	e_a	e_a
a	e_a	a	$a \cdot pb$	$a + a \cdot pb$
pb	e_a	$a \cdot pb$	pb	$pb + a \cdot pb$
$a+pb$	e_a	$a + a \cdot pb$	$pb + a \cdot pb$	$a+pb$
$a \cdot pb$	e_a	$a \cdot pb$	$a \cdot pb$	e_a
$a + a \cdot pb$	e_a	$a + a \cdot pb$	e_a	$a + a \cdot pb$
$pb + a \cdot pb$	e_a	e_a	$pb + a \cdot pb$	$pb + a \cdot pb$
$a + pb + a \cdot pb$	e_a	a	pb	$a+pb$

Tabela 3.4.9.(b)

$\cdot$	$a\cdot pb$	$a+a\cdot pb$	$pb+a\cdot pb$	$a+pb+a\cdot pb$
e_a	e_a	e_a	e_a	e_a
a	$a\cdot pb$	$a+a\cdot pb$	e_a	a
pb	$a\cdot pb$	e_a	$pb+a\cdot pb$	pb
$a+pb$	e_a	$a+a\cdot pb$	$pb+a\cdot pb$	$a+pb$
$a\cdot pb$	$a\cdot pb$	e_a	e_a	$a\cdot pb$
$a+a\cdot pb$	e_a	$a+a\cdot pb$	e_a	$a+a\cdot pb$
$pb+a\cdot pb$	e_a	e_a	$pb+a\cdot pb$	$pb+a\cdot pb$
$a+pb+a\cdot pb$	$a\cdot pb$	$a+a\cdot pb$	$pb+a\cdot pb$	$a+pb+a\cdot pb$

□

Sa $\overline{C}_k$ označimo komutativne prstene sa jedinicom reda k čija je aditivna grupa ciklička, sa $\overline{K}_4$ komutativne prstene sa jedinicom čija je aditivna grupa Klajnova i sa $\overline{C}_{2,2,2}$ komutativne prstene sa jedinicom čija je aditivna grupa $C_2 \times C_2 \times C_2$.

Definišimo klase komutativnih prstena sa jedinicom i to:

(i) Za $p = 2p_1 + 1$, $(p_1 \in N_0)$ klasu $\overline{\Gamma}'_p$ na sledeći način:

$$R \in \overline{\Gamma}'_p \Longleftrightarrow R = \overline{C}_1 \vee R = \overline{C}_2 \vee R = \overline{K}_4 \vee R = \overline{C}_{2,2,2}.$$

(ii) Za $p = 2p_2$ $(p_2 \in N)$ klasu $\overline{\Gamma}''_p$ na sledeći način:

$$R \in \overline{\Gamma}''_p \Longleftrightarrow R = \overline{C}_1 \vee R = \overline{C}_2.$$

Za druge vrednosti parametra p klase $\overline{\Gamma}'_p$ i $\overline{\Gamma}''_p$ su prazni skupovi.

Pošto je u Bulovom poluprstenu $4pa^2 = 4pa$, za svako a, na osnovu Teorema 2.7.1, 3.3.1 i 3.4.1 dobijamo sledeću teoremu.

Teorema 3.4.2. *Nekla je S Bulov poluprsten. Tada*

(1) *Za $p = 2p_1 + 1$, $(p_1 \in N_0)$ važi*

$$S \in \Sigma_p \Longleftrightarrow S = \bigcup\{R \mid R \in \overline{\Gamma}'_p\}.$$

(2) *Za $p = 2p_2$, $(p_2 \in N)$ važi*

$$S \in \Sigma_p \Longleftrightarrow S = \bigcup\{R \mid R \in \overline{\Gamma}''_p\}. \ \square$$

Ustvari teoremu možemo iskazati i na sledeći način.

Neka je S Bulov poluprsten. Tada za $p \in N$ važi

$$S \in \Sigma_p \Longleftrightarrow S = \bigcup\{R \mid R \in \overline{\Gamma}'_p\} \vee S = \bigcup\{R \mid R \in \overline{\Gamma}''_p\}.$$

3.5 Neki primeri p-poluprstena

U ovoj glavi je dokazano da se svaki p-poluprsten može predstaviti kao unija pretprstena. U opštem slučaju ti pretprsteni nisu potpuno opisani. Oni su potpuno opisani u slučaju Bulovog p-poluprstena. Bulov p-poluprsten je pokriven pretprstenima koji su ustvari prsteni. U vezi sa ovim se mogu postaviti dva pitanja. Jedno pitanje bi bilo da li postoje p-poluprsteni koji nisu Bulovi i drugo da li u pokrivaču mogu biti i pretprsteni koji nisu prsteni. Na oba pitanja odgovor je potvrdan. Sledećim tablicama dajemo primer p-poluprstena $(S, +, \cdot)$ za $p = 6k + 3$ $(k \in N_0)$ koji nije Bulov. Prva tabela sadrži prvih pet, a druga preostale četiri kolone operacije $+$. Treća tabela sadrži prvih pet, a četvrta preostale četiri kolone operacije $\cdot$ (to je uradjeno iz tehničkih razloga).

Tabela 1

$+$	e_a	a	$2a$	a^2	$2a^2$
e_a	e_a	a	$2a$	a^2	$2a^2$
a	a	$2a$	e_a	$a+a^2$	$a+2a^2$
$2a$	$2a$	e_a	a	$2a+a^2$	$2a+2a^2$
a^2	a^2	$a+a^2$	$2a+a^2$	$2a^2$	e_a
$2a^2$	$2a^2$	$a+2a^2$	$2a+2a^2$	e_a	a^2
$a+a^2$	$a+a^2$	$2a+a^2$	a^2	$a+2a^2$	a
$a+2a^2$	$a+2a^2$	$2a+2a^2$	$2a^2$	a	$a+a^2$
$2a+a^2$	$2a+a^2$	a^2	$a+a^2$	$2a+2a^2$	$2a$
$2a+2a^2$	$2a+2a^2$	$2a^2$	$a+2a^2$	$2a$	$2a+a^2$

Tabela 2

$+$	$a+a^2$	$a+2a^2$	$2a+a^2$	$2a+2a^2$
e_a	$a+a^2$	$a+2a^2$	$2a+a^2$	$2a+2a^2$
a	$2a+a^2$	$2a+2a^2$	a^2	$2a^2$
$2a$	a^2	$2a^2$	$a+a^2$	$a+2a^2$
a^2	$a+2a^2$	a	$2a+2a^2$	$2a$
$2a^2$	a	$a+a^2$	$2a$	$2a+a^2$
$a+a^2$	$2a+2a^2$	$2a$	$2a^2$	e_a
$a+2a^2$	$2a$	$2a+a^2$	e_a	a^2
$2a+a^2$	$2a^2$	e_a	$a+2a^2$	a
$2a+2a^2$	e_a	a^2	a	$a+a^2$

Tabela 3

$\cdot$	e_a	a	$2a$	a^2	$2a^2$
e_a	e_a	e_a	e_a	e_a	e_a
a	e_a	a^2	$2a^2$	a	$2a$
$2a$	e_a	$2a^2$	a^2	$2a$	a
a^2	e_a	a	$2a$	a^2	$2a^2$
$2a^2$	e_a	$2a$	a	$2a^2$	a^2
$a+a^2$	e_a	$a+a^2$	$2a+2a^2$	$a+a^2$	$2a+2a^2$
$a+2a^2$	e_a	$2a+a^2$	$a+2a^2$	$a+2a^2$	$2a+a^2$
$2a+a^2$	e_a	$a+2a^2$	$2a+a^2$	$2a+a^2$	$a+2a^2$
$2a+2a^2$	e_a	$2a+2a^2$	$a+a^2$	$2a+2a^2$	$a+a^2$

Tabela 4

$\cdot$	$a+a^2$	$a+2a^2$	$2a+a^2$	$2a+2a^2$
e_a	e_a	e_a	e_a	e_a
a	$a+a^2$	$2a+a^2$	$a+2a^2$	$2a+2a^2$
$2a$	$2a+2a^2$	$a+2a^2$	$2a+a^2$	$a+a^2$
a^2	$a+a^2$	$a+2a^2$	$2a+a^2$	$2a+2a^2$
$2a^2$	$2a+2a^2$	$2a+a^2$	$a+2a^2$	$a+a^2$
$a+a^2$	$2a+2a^2$	e_a	e_a	$a+a^2$
$a+2a^2$	e_a	$a+2a^2$	$2a+a^2$	e_a
$2a+a^2$	e_a	$2a+a^2$	$a+2a^2$	e_a
$2a+2a^2$	$a+a^2$	e_a	e_a	$2a+2a^2$

U ovom poluprstenu je $x\theta_p(2x)$ za sve $x \in S$.

Neka je $(S,+)$ uopštena kvaternionska grupa, koja, naravno, nije komutativna. Neka je polugrupa S generisana sa a i pb, tj. $S = [\{a, pb\}]$. Bilo koji element iz S je oblika $ma + n(pb)$ $(m, n \in N_0,\ p = 4k+1,\ k \in N)$. Uzimamo da je po definiciji $0a = e$ i $0(pb) = e$. Na skupu S definišimo operaciju " $\cdot$ " na sledeći način:

$$(m_1a + n_1pb) \cdot (m_2a + n_2pb) = (m_1 + n_1)(m_2 + n_2)(2pa).$$

Neposrednom proverom dobijamo da je $(S, +, \cdot)$ p-poluprsten, koji je pretprsten, ali nije prsten. Sledećim tablicama dajemo primer jednog takvog pretprstena.

$+$	e	a	$2a$	$3a$	b	$a+b$	$2a+b$	$3a+b$
e	e	a	$2a$	$3a$	b	$a+b$	$2a+b$	$3a+b$
a	a	$2a$	$3a$	e	$a+b$	$2a+b$	$3a+b$	b
$2a$	$2a$	$3a$	e	a	$2a+b$	$3a+b$	b	$a+b$
$3a$	$3a$	e	a	$2a$	$3a+b$	b	$a+b$	$2a+b$
b	b	$3a+b$	$2a+b$	$a+b$	$2a$	a	e	$3a$
$a+b$	$a+b$	b	$3a+b$	$2a+b$	$3a$	$2a$	a	e
$2a+b$	$2a+b$	$a+b$	b	$3a+b$	e	$3a$	$2a$	a
$3a+b$	$3a+b$	$2a+b$	$a+b$	b	a	e	$3a$	$2a$

$\cdot$	e	a	$2a$	$3a$	b	$a+b$	$2a+b$	$3a+b$
e	e	e	e	e	e	e	e	e
a	e	$2a$	e	$2a$	$2a$	e	$2a$	e
$2a$	e	e	e	e	e	e	e	e
$3a$	e	$2a$	e	$2a$	$2a$	e	$2a$	e
b	e	$2a$	e	$2a$	$2a$	e	$2a$	e
$a+b$	e	e	e	e	e	e	e	e
$2a+b$	e	$2a$	e	$2a$	$2a$	e	$2a$	e
$3a+b$	e	e	e	e	e	e	e	e

Glava 4

Varijeteti p-polugrupa i p-poluprstena

U ovoj glavi se ispituje zatvorenost klase p-polugrupa kao i klase p-poluprstena za operatore H, S i P, tj. za homomorfne slike, podstrukture i direktne proizvode. Teoremama 4.1.1., 4.1.2., 4.2.1. i 4.2.2. je dokazano da je, za svako $p \in N$, svaka od ovih klasa zatvorena za H i P. Dati su i uslovi pod kojima važi zatvorenost za S. Pokazano je da, za p parno ili $p = 4k + 3$ ($k \in N_0$) klasa p-polugrupa i klasa p-poluprstena su varijeteti. Odgovarajući identiteti su dati teoremama 4.1.6. i 4.2.4.

4.1 Operatori H, S i P u klasi p-polugrupa

Ispitajmo sada zatvorenost klase p-polugrupa za operacije H,S i P za razne vrednosti p.

Teorema 4.1.1. *Homomorfna slika p-polugrupe je p-polugrupa.*

Dokaz. Neka je f homomorfizam koji preslikava p-polugrupu $(S_1, +)$ na polugrupu $(S_2, +)$ i neka je $x_2 \in S_2$. Tada postoji $x_1 \in S_1$ tako da je $f(x_1) = x_2$. Kako je S_1 p-polugrupa, to postoji $y_1 \in S_1$ za koje je $x_1 \tau_p y_1$, tj. $x_1 + py_1 + x_1 = y_1$ i $py_1 + x_1 + py_1 = x_1$. Tada za $y_2 = f(y_1)$ imamo:
$x_2 + py_2 + x_2 = f(x_1) + pf(y_1) + f(x_1) = f(x_1 + py_1 + x_1) = f(y_1) = y_2,$
$py_2 + x_2 + py_2 = pf(y_1) + f(x_1) + pf(y_1) = f(py_1 + x_1 + py_1) = f(x_1) = x_2,$
pa je, $(S_2, +)$ p-polugrupa. □

Teorema 4.1.2. *Neka je S_i, $i \in I$ familija polugrupa i $p \in N$. Tada $S = \prod(S_i, i \in I)$ je p-polugrupa akko S_i je p-polugrupa za svako $i \in I$.*

Dokaz. Neka je $(S_i, +), i \in I$ familija p-polugrupa i $x \in S$. Tada, za sve $i \in I$, postoje $a_i \in S_i$, tako da je $x(i) \tau_p a_i$. Uzmimo da je $a \in S$ funkcija za koju je $a(i) = a_i$ za sve $i \in I$. Dalje je

$(x+pa+x)(i) = x(i)+pa(i)+x(i) = x(i)+pa_i+x(i) = a_i = a(i)$, $i \in I$. Dakle, $x+pa+x = a$.

Takodje imamo $(pa+x+pa)(i) = pa(i)+x(i)+pa(i) = pa_i+x(i)+pa_i = x(i)$, pa je, $pa+x+pa = x$. Dakle, $x\tau_p a$.

Obratno, neka je $S = \prod_{i\in I} S_i$ p-polugrupa. Tada za proizvoljno $x \in S$, postoji $a \in S$, tako da je $x\tau_p a$, odnosno $x+pa+x = a$ i $pa+x+pa = x$. Neka su $x_i \in I, i \in I$, proizvoljni elementi polugrupa S_i. Uzmimo da je $x \in S$ funkcija za koju je $x(i) = x_i$ za sve $i \in I$. Tada postoji $a \in S$ tako da je $x\tau_p a$. Dalje je $(x+pa+x)(i) = a(i)$ i $(pa+x+pa)(i) = x(i)$, odnosno $x(i)+pa(i)+x(i) = a(i)$ i $pa(i)+x(i)+pa(i) = x(i)$ za sve $i \in I$. Kako je $x(i) = x_i$ za sve $i \in I$, to je $x_i+pa(i)+x_i = a(i)$ i $pa(i)+x_i+pa(i) = x_i$. Dakle, za svaki $x_i \in S_i$, $i \in I$ postoji $a(i) \in S_i$, tako da je $x_i\tau_p a(i)$, pa su sve polugrupe S_i, $i \in I$ p-polugrupe. □

Posledica 4.1.1. *Klasa p-polugrupa ($p \in N$) je zatvorena za operacije H i P.* □

U onome što sledi daćemo potrebne i dovoljne uslove pod kojima je podpolugrupa p-polugrupe takodje p-polugrupa.

Teorema 4.1.3. *Neka je p neparan prirodni broj. Svaka podpolugrupa p-polugrupe S je p-polugrupa ako i samo ako je $2px = e_x$ za sve $x \in S$.*

Dokaz. Neka je svaka podpolugrupa p-polugrupe S p-polugrupa i neka je x bilo koji element proizvoljne p-podpolugrupe A polugrupe S. Ako je k najmanji prirodni broj, takav da je $kx = e_x$, onda, prema Lemi 2.2.4., je $k \mid 4p$. Polugrupa $\langle x\rangle = \{e_x, x, 2x, ..., (k-1)x\}$ je podpolugrupa polugrupe A. Kako je $\langle x\rangle$ p-polugrupa, to postoji $r \in \{0,1,2,...,k-1\}$ tako da je $y = rx$ ($0x = e_x$) i $x\tau_p y$. Dakle, imamo: $x+p(rx)+x = rx$, $p(rx)+x+p(rx) = x$. Iz druge jednakosti je $r(2px)+x = x$, odnosno $r(2px) = e_x$. Ako je r neparan broj, onda je $2px = e_x$. Ako je $r = 0$, iz prve jednakosti je $2x = e_x$, pa je $2px = e_x$. Razmotrimo još slučaj kada je r paran broj. Ako je $r = 4r_0$ ($r_0 \in N$), iz jednakosti $x+p(rx)+x = rx$ imamo: $rpx+2x = rx$, $r_0(4px)+2x = rx$, $2x = rx$. Kako su elementi cikličke grupe $\langle x\rangle$ medjusobno različiti i $r = 4r_0 \neq 2$, to zaključujemo da r ne može biti oblika $4r_0$. Neka je, dakle, $r = 4r_2+2$ ($r_2 \in N_0$). Tada iz jednakosti $x+p(rx)+x = rx$ dobijamo: $r(px)+2x = rx$, $(4r_2+2)(px)+2x = (4r_2+2)x$, $r_2(4px)+2px+2x = 4r_2x+2x$, $2px+2x = 4r_2x+2x$, $2px+2x+(4p-2)x = 4r_2x+2x+(4p-2)x$, $2px+4px = 4r_2x+4px$, $2px = 4r_2x$, $p(2px) = p(4r_2x)$, $\frac{p-1}{2}(4px)+2px = r_2(4px)$, $2px = e_x$. Dakle, u svakom slučaju je $2px = e_x$.

Obratno, neka je $2px = e_x$ za sve $x \in S$. Neka je x proizvoljni element bilo koje podpolugrupe A p-polugrupe S. Uzmimo da je $y = 2x$. Jasno je da je $y \in A$. Dalje imamo:

$x+py+x = x+p(2x)+x = 2x+2px = 2x = y$,
$py+x+py = p(2x)+x+p(2x) = x$, pa je $x\tau_p y$. Dakle, podpolugrupa A je

p-polugrupa. □

Teorema 4.1.4. *Neka je p paran prirodni broj ili $p = 4k + 3$ ($k \in N_0$), i S p-polugrupa. Tada svaka podpolugrupa od S je p-polugrupa.*

Dokaz. Neka je $p = 4k + 3$ ($k \in N_0$). Prema Tvrdjenju 2.5.1. je $2px = e_x$ za sve $x \in S$, pa je, prema Teoremi 4.1.3., svaka podpolugrupa p-polugrupe S takodje p-polugrupa.

Neka je p paran prirodni broj i neka je x bilo koji element proizvoljne podpolugrupe A od S. Tada je $y = 2px + 2x$ takodje iz polugrupe A. Kako je p paran broj, to je $p(2px) = e_x$, pa imamo:

$$\begin{aligned} py + x + py &= p(2px + 2x) + x + p(2px + 2x) \\ &= p(2px) + 2px + x + p(2px) + 2px \\ &= 2px + x + 2px = 4px + x = x, \end{aligned}$$

$$x + py + x = x + p(2px + 2x) + x = p(2px) + 2px + 2x = 2px + 2x = y.$$

Dakle, podpolugrupa A je p-polugrupa. □

Posledica 4.1.2. *Neka je p paran prirodni broj ili $p = 4k + 3$ ($k \in N_0$). Tada je klasa p-polugrupa zatvorena za operator S.* □

Na osnovu predhodnog imamo sledeću teoremu.

Teorema 4.1.5. *Ako je p paran prirodni broj ili $p = 4k + 3$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$), onda klasa p-polugrupa je varijetet.* □

Dajemo eksplicitne opise varijeteta.

Teorema 4.1.6. *Neka je $\Im$ varijetet polugrupa. Tada važi:*

(a) Ako je $p = 4k + 3$ ($k \in N_0$) onda je Π_p jednakosna klasa odredjena identitetom

$$(2p + 1)x = x;$$

(b) Ako je p paran prirodni broj, onda je Π_p jednakosna klasa odredjena identitetom

$$(4p + 1)x = x.$$

Dokaz. (a) Neka je $S \in \Pi_p$. Prema Lemi 2.5.1. je $2px = e_x$, odnosno $(2p+1)x = x$ za sve $x \in S$.

Obratno, neka je $(\forall x \in S)((2p+1)x = x)$. Uzmimo da je $y = 2x$ i dokažimo da je $x\tau_p y$. Dalje imamo:

$$\begin{aligned} x + py + x &= x + p(2x) + x = x + (2p+1)x = x + x = y, \\ py + x + py &= p(2x) + x + p(2x) = 2px + (2p+1)x = 2px + x = x. \end{aligned}$$

Dakle, $S \in \Pi_p$.

(*b*) Tvrdjenje se dobija neposredno iz Teoreme 2.6.1. □

Ako je $p = 4k+1$ $(k \in N_0)$, onda klasa Π_p nije varijetet, pošto nije zatvorena za operator S. Zapravo, ako

$$S = \{e, a, 2a, ..., (4p-1)a, b, a+b, 2a+b, ..., (4p-1)a+b\}$$

je uopštena kvaternionska grupa, onda ona ima svojstvo $2pa \neq e$. Prema Lemi 2.7.1. polugrupa S je p-polugrupa. Otuda, prema Teoremi 4.1.3., klasa Π_p za $p = 4k+1$ $(k \in N_0)$ nije varijetet. Primetimo da postoje polugrupe u klasi Π_p koje zadovoljavaju uslove Teoreme 4.1.3. Takva je npr. ciklička grupa $\{e_a, a\}$.

4.2 Operatori H, S i P u klasi p-poluprstena

Ispitajmo sada zatvorenost klase p-poluprstena za operacije H,S i P za razne vrednosti p.

Teorema 4.2.1. *Homomorfna slika p-poluprstena je p-poluprsten.*

Dokaz. Neka je f homomorfizam koji preslikava p-poluprsten $(S_1, +, \cdot)$ na poluprsten $(S_2, +, \cdot)$ i neka je $x_2 \in S_2$. Slično kao u Teoremi 4.1.1. se dokazuje da postoji $y_2 \in S_2$, tako da je $x_2 \tau_p y_2$. Dalje je

$$\begin{aligned} 4px_2^2 &= 4p(f(x))^2 = 4p(f(x) \cdot f(x)) = 4pf(x \cdot x) \\ &= 4pf(x^2) = f(4px^2) = f(4px) = 4pf(x) = 4px_2, \end{aligned}$$

pa je $x_2 \theta_p y_2$. □

Teorema 4.2.2. *Neka je $\{S_i, i \in I\}$ familija p-poluprstena i $p \in N$. Tada $S = \prod_{i \in I} S_i$ je p-poluprsten ako i samo ako S_i je p-poluprsten za svako $i \in I$.*

Dokaz. Neka su $(S_i, +, \cdot), i \in I$, p-poluprsteni i $x \in S$. Slično kao u Teoremi 4.1.2. se dokazuje da postoji $a \in S$ tako da je $x\tau_p a$. Dalje je $(4px^2)(i) = 4px^2(i) = 4px(i) = (4px)(i)$ za sve $i \in I$, pa je $4px^2 = 4px$. Dakle, $x\theta_p a$.

Obratno, neka je $S = \prod_{i \in I} S_i$ p-poluprsten. Slično kao u Teoremi 4.1.2. se dokazuje da za sve $x_i \in S_i, i \in I$ postoje $a(i) \in S_i$ tako da je $x_i \tau_p a(i)$. Kako je $4px^2 = 4px$, to je $(4px^2)(i) = (4px)(i)$, odnosno $4px^2(i) = 4px(i)$, za sve $i \in I$. Dakle, $x_i \theta_p a(i)$ za sve $i \in I$, pa su svi polupršteni $S_i, i \in I$, p-polupršteni. $\square$

Posledica 4.2.1. *Klasa p-poluprstena* $(p \in N)$ *je zatvorena za operacije H i P.* $\square$

Teorema 4.2.3. *Neka je p paran prirodni broj ili* $p = 4k+3$ $(k \in N_0)$ *i S p-poluprsten. Tada svaki podpoluprsten od S je p-poluprsten.*

Dokaz. Ako je $(S, +, \cdot)$ p-poluprsten, onda je $(S, +)$ p-polugrupa. Ako je $(A, +, \cdot)$ podpoluprsten p-poluprstena $(S, +, \cdot)$, onda je $(A, +)$ podpolugrupa p-polugrupe $(S, +)$. Prema Teoremi 4.1.4. je $(A, +)$ p-polugrupa. Pošto je $4px^2 = 4px$ za sve $x \in S$, to je $(A, +, \cdot)$ p-poluprsten. Dakle, svaki podpoluprsten p-poluprstena S takodje je p-poluprsten. $\square$

Posledica 4.2.2. *Klasa* Σ_p *p-poluprstena, za paran prirodni broj p ili* $p = 4k+3$ $(k \in N_0)$ *je varijetet.* $\square$

Teorema 4.2.4. *Ako je p paran prirodni broj, onda* Σ_p *je jednakosna klasa odredjena identitetima* $(4p+1)x = x$ *i* $4px^2 = 4px$. *Ako je* $p = 4k+3$ $(k \in N_0)$, *onda* Σ_p *je jednakosna klasa odredjena identitetima* $(2p+1)x = x$ *i* $4px^2 = 4px$. $\square$

Literatura

[1] Adhikari M.R., Sen M.K., Weinert H.J., *On k-regular semirings,* Bull. Cal. Math. Soc. 88 (1996), 141-144.

[2] Ashan J., Shabir M., Weinert H.J., *Characterizations of semirings by P-injective and projective semimodules*, Comm. Algebra 26 (1998), no.7, 2199-2209.

[3] Ahsan J., *Semirings characterized by their fuzzy ideals*, J. Fuzzy Math. 6 (1998). no.1, 181-192.

[4] Ahsan J., *Fully idempotent semirings,* Proc. Japan Acad., Ser. A 69 (1993), 185-188.

[5] Ahsan J.,*Semirings with projective ideals*, Math. Jap. 38 (1993), 271-276.

[6] Ahsan J., Shabir M., Weinert H.J. *Characterizations of semirings by p-injective and projective semimodules*, Comm. Algebra, to appear.

[7] Alarcon F.E., Anderson D.D., *Commutative semirings and their lattices of ideals*, Houston J. Math. 20 (1994), 571-590.

[8] Allen P.J., *A fundamental theorem of homomorphisms for semirings*, Proc. Amer. Math. Soc. 21 (1969), 412-416.

[9] Althani H.M.J., *A note on projective semimodules*, Kobe J. Math. 12 (1995), 89-94.

[10] Bogdanović S., Milić S., Pavlović V., *Anti-inverse semigroups*, Publ. Inst. Math. (Beograd) 24(38) (1978), 19-28.

[11] Bogdanović S., *Semigroups with a sistem of subsemigroups*, University of Novi Sad, Institute of mathematich, 1985.

[12] Bogdanović S., *On extensions of semirings determined by partial homomorphisms*, Zbornik radova Filozofskog fakulteta u Nišu 10 (1986), 185-188.

[13] Bogdanović S., *Inflations of semigroups and semirings*, Zbornik radova Filozofskog fakulteta u Nišu, Serija matematika 1 (11), (1987), 1-9.

[14] Bogdanović S., *Inflations of a union of groups*, Mat. vesnik 37 (1985), pp. 351-353.

[15] Budimirović V., *Inflation of t-semirings*, Novi Sad J. Math., (u štampi)

[16] Budimirović V., Šešelja B., *Operators H, S and P in the classes of p-semigroups and p-semirings*, to appear.

[17] Budimirović V., *On a class of semigroups covered by groups*, to appear.

[18] Budimirović V., *O regularnim Bulovim poluprstenima*, magistarski rad, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, 1987.

[19] Budimirović V., *O idealima poluprstena*, Zbornik saopštenja sa simpozijuma za nastavnike viših škola, Beograd, 1986.

[20] Budimirović B., Budimirović, V., *O „kadak"-strukturama*, Zbornik radova nastavnika viših škola, Beograd, 1980.

[21] Bugenhagen T. G., *A comparison of three definitions of ideal in semirings*, The University of Tennesse, 1959.

[22] Chaudhari R., Gupta V., *Weak primary decomposition theorem for right Noetherian semirings*, Indian J. Pure Appl. Math. 25 (1994), 647-654.

[23] Cherubini A. and Varisco A., *Semigroups and rings whose proper one-sided ideals are power joined*, Czechoslovak Mathematical Journal, 34 (109), Praha, 1984.

[24] Clarke G. T., *Semigroups varietes of inflations of a union of groups*, Semigroups Forum, 23 no.4 (1981), pp. 311-319.

[25] Clifford A. H. and Preston G. B., *The Algebraic Theory of Semigroups*, Amer. Math. Soc., 1964.

[26] Craven T.C., *Orderings on semirings*, Semigroup Forum 43 (1991), 45-52.

[27] Crvenković S., *Basis class of one class of semigroups*, Proceedings of the I Algebraic Conference(Skopje,1980), pp. 87-89, University of Skopje, 1980.

[28] Crvenković S., Milić S., *Proper subsemigroups of a semigroup*, Proceedings of the II Algebraic Conference(Novi Sad, 1981), pp. 141-148, University of Novi Sad, 1982.

[29] Crvenković S., Milić S., *Basis class for some classes of semigroups*, "Semigroups" (Szeged, 1981), Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, Vol. 39, pp. 157-162, North-Holland, 1985.

[30] Dašić V., *Skoro-prsteni s defektom distributivnosti*, doktorska disertacija, Univerzitet u Sarajevu, Prirodno- matematički fakultet, Sarajevo, 1979.

[31] Dašić V., *Algebra*, NIO „Univerzitetska riječ", Titograd, 1987.

[32] Denecke K., Hounnon H., *All Solid Varieties of Semirings*, to appear.

[33] Dutta T.K., Biswas B.K., *Fuzzy Congruence and Quotient Semiring*, J. Fuzzy Math. 4 (1996), 737-748.

[34] Dutta T.K., Biswas B.K., *Structure of fuzzy ideals of semirings*, Bull. Calcutta Math. Soc. 89 (1997),no.4, 271-284.

[35] Galbiati J. L. e Veronesi M. L., *Sui semianelli di Boole*, Instituto Lombardo (Rend- Sc.) A 114, 73-88, 1980.

[36] Ghosh Sh., *A characterization of ring congruences on semirings*, Soochow J. Math. 19 (1993), 305-312.

[37] Ghosh Sh., *Another note on the least lattice congruence on semirings*, Soochow J. Math. 39 (1980), 357-362.

[38] Ghosh Sh., *Matrices over semirings*, Inform. Sci. 90 (1996), no. 1-4, 221-230.

[39] Golan J.S., *The Theory of Semirings with Applications in Mathematich and Theoretical Computer Science*, (Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics 54, Longman Sci. Tech., Harlow, 1992).

[40] Golan J.S., *Semirings of Formal Series over Hypermonoids: Some Interesting Cases*, Kyungpook Math. J. 36 (1996), 107-111.

[41] Golan J.S., Wang H., *On embedding in complete semirings*, Comm. Algebra 24 (1996),no.9, 2945-2962.

[42] Grilet P., *Semirings with a completely simple additive semigroup*, J. Austral. Math. Soc., 20 (1975), 257-267.

[43] Gunawardena J., *An introduction to idempotency*, Idempotency, 1-49, Publ. Newton Inst., 11, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.

[44] Hall M., *The Theory of Groups*, New York, 1959.

[45] Hall M., Pianskool S., *Injectivity for cancellative semimodules*, SEA Bull. Math. 20 (1996), 85-93.

[46] Hebisch U., Weinert H.J., *On the rank of semimodules over semirings*, Collect. Math. 46 (1995), 83-95.

[47] Hebisch U., Weinert H.J., *Semirings and Semifields*, Handbook of Algebra, Vol. I, (North-Holland, Amsterdam, 1996).

[48] Hebisch U., Weinert H.J., *Radical Theory for Semirings*, Quaestiones Mathematicae 20 (1997), 647-661.

[49] Hebisch U., Weinert H.J., *Semirings, Algebraic Theory and Applications in Computer Science*, World Scientific, Singapore-London-New Jersey-Hong Kong, 1999.

[50] Howie J. M., *An introduction to semigroup theory*, Academic Press, London, 1976.

[51] Iseki K., *Ideal Theory of Semirings*, Kobe University, 1956.

[52] Jun Y.B., Negers J., Kim H.S., *On L-fuzzy ideals in semirings I*, Czechoslovak Math. J. 48 (123) (1998), no.4, 669-675.

[53] Jun Y.B., Negers J., Kim H.S., *On L-fuzzy ideals in semirings II*, Czechoslovak Math. J. 49 (124) (1999), no.1, 127-133.

[54] Karvellas P. H., *Inversive semirings*, J. Austral. Math. Soc., 18 (1974), 277-288.

[55] Katsov Y., *Tensor products and injective envelopes of semimodules over additively regular semirings*, Algebra Colloq. 4 (1997), no.2, 121-131.

[56] Kečkić D. J. and Milić S., *On commuting generalized inverses in semigroups*, Publ. Inst. Math. (Beograd) 65(79) (1999), 103-107.

[57] Marcel E., *Free two-sided join-semirings*, to appear.

[58] Milić S., *On some classes of n-ary anti-inverse semigroups*, Macedonian Academy of sciences and arts, Proceedings of the symposium n-ary structures, Skopje, 1982.

[59] Milić S., *On some classes of semigroups*, Algebraic conference, Skopje, 1980.

[60] Milić S., *O n-anti-inverznim semigrupama*, Zbornik radova Prirodno - matematičkog fakulteta, br.9, Novi Sad, (1979), 161-167.

[61] Milić S. and Bogdanović S., *On a class of anti-inverse semigroups*, Publications de l'institut matematique, Nouvelle serie, tome 25 (39), (1979), pp. 95-100.

[62] Milić S., *Inflation of algebras*, Procedings of the conference „Algebra an Logic", Sarajevo, 1987.

[63] Milić S. and Bogdanović S., *Inflations of semigroups*, Publ. Inst. Math. 41 (55), 1987.

[64] Milić S., *Elementi algebre*, Beograd, 1995.

[65] Minoux M., *A generalization of the all minors matrix tree theorem to semirings*, Discrete Math. 199 (1999), no.1-3, 139-150.

[66] Minoux M., *Bideterminants, arborescences and extension of the matrix-tree theorem to semirings*, Discrete Math. 171 (1997), no.1-3, 191-200.

[67] Morak B., *Zur Radikaltheorie fur Halbringe*, Diss. TU Bergakademie Freiberg, Freiberg, 1997.

[68] Mukherjee T.K., Sen M. K., Ghosh S., *On left p-Euclidean semirings*, Bull. Cal. Math. Soc. 88 (1996), 101-106.

[69] Neal H. McCoy, *The Theory of Rings*, The macmillan company, New York, 1964.

[70] Perić V., *Algebra I i II*, Svjetlost, Sarajevo, 1980.

[71] Petrich M., *Introduction to semigroups*, Merrill Publ. Comp., Columbus, 1973.

[72] Petrich M., *Lectures in semigroups*, J. Wiley, London, 1977.

[73] Pilz G., *Near-Rings*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1977.

[74] Prešić S. B., *Elementi matematičke logike*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1968.

[75] Prešić S. i Prešić M., *Uvod u matematičku logiku*, Matematički institut, Beograd, 1979.

[76] Putcha M. S., *Rings which are semilattices of archimedean semigroups*, Semigroup Forum 23, (1981), 1-5.

[77] Rodriquez G., *Sugli apliamenti ideali di una classe di semianelli*, Rend. Ist. Lomb., Cl. Sc. (A) 106 (1972), 869-896.

[78] Rotman J., *The Theory of Groups*, an Introduction, Allyn and Bacon, Boston, 1973.

[79] Sharp J. C., *Anti-regular semigroups*, Preliminary report, Notices Amer. Math. Soc., vol. 24. No.2 (1977), pp-A-266.

[80] Sen M.K., Mukhopadhyay P., *von Neumannian regularity in semirings*, Kyungpook Math. J. 35 (1995), no 2, 249-258.

[81] Song S.Z., *On spanning column rank of matrices over semirings*, Bull. Korean Math. Soc. 32 (1995), 337-342.

[82] Šešelja B., Tepavčević A., *A note on CIP-varietes*, Algebra Univers. (u štampi).

[83] Wang H., *On characters of semirings*, Houston J. Math. 23 (1997), no.3, 391-405.

[84] Weinert H. J., *A concept of characteristic for semigroups and semirings*, Acta Math. Acad. Sci. Math., Szeged, 41 (1979), 445-456.

[85] Weinert H. J., Hebich U., *Halbringe*, Teubner Studinbucher Mathematic, B. G. Teubner, Stutgart, 1993.

[86] Weinert H. J., Sen M.K., Adhikari M.R., *One-sided k-ideals and h-ideals in semirings*, Math. Pannonica 7 (1996), 147-162.

[87] Zeng K. *Remarks on closed semimodules and quotient semimodules*, SEA Bull. Math. 20 (1996), 75-79.

UNIVERZITET U NOVOM SADU

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD
Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ
Vrsta rada: Doktorska disertacija
VR
Autor: Vjekoslav Budimirović
AU
Mentor: prof. dr Branimir Šešelja
MN

Naslov rada: Prilog teoriji poluprstena
NR

Jezik publikacije: srpski(Latinica)
JP
Jezik izvoda: S/EN
JI
Zemlja publikovanja: SR Jugoslavija
ZP
Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP
Godina: 2001.
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad
MA
Fizički opis rada: 4 poglavlja/72 strane/87 lit citata/24 tabele/0 slika/ 0 grafika/0 priloga
FO
Naučna oblast: Matematika
NO
Naučna disciplina: Algebra
ND

Predmetna odrednica/Ključne reči: poluprsten, polugrupa, grupa, p-polugrupa, p-poluprsten, pretprsten, prsten, izomorfizam poluprstena, varijetet
PO

UDK
Čuva se: Biblioteka Instituta za matematiku
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod: Poluprsten je algebarska struktura $(S, +, \cdot)$ sa dve binarne operacije u kojoj su $(S, +)$ i $(S, \cdot)$ polugrupe i druga je distributivna prema prvoj sa obe strane. U radu su uvedeni pojmovi p-polugrupe kao i p-poluprstena. Kažemo da je polugrupa $(S, +)$ p-polugrupa ako $(\forall x \in S)(\exists y \in S)(x+py+x = y, py+x+py = x)$. Poluprsten $(S, +.\cdot)$ zovemo p-poluprsten ako $(\forall x \in S)(\exists y \in S)(x + py + x = y, py + x + py = x, 4px^2 = 4px)$. Dokazano je da je svaka p-polugrupa pokrivena grupama koje su u potpunosti opisane. Takođe je pokazano da su p-poluprsteni pokriveni pretprstenima. Za $p = 4k + 3$ ($k \in N_0$) ili p paran broj p-polugrupe, odnosno p-poluprsteni su varijeteti.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN Veća:
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
(Naučni stepen/ime i prezime/zvanje/fakultet)
KO

Predsednik:
Član:
Član:
Član:
Član:

UNIVERSITY OF NOVI SAD

FACULTY OF NATURAL SCIENCES & MATHEMATICS

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: Monographie type
DT
Type of record: Text printed material
TR
Contents code: DSc degree thesis
CC
Author: Vjekoslav Budimirović
AU
Mentor: prof. dr Branimir Šešelja
MN

Title: Prilog teoriji poluprstena
TI

Language of text: serbian (latinic)
LT
Language of abstract: s/en
LA
Country of publication: Yugoslavia
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2001.
PY

Publisher:
PU
Publ. place: Novi Sad
PP
Physical description: 4 chapters/72 pages/87 literature/24 tables/ 0 pictures/0

graps/0 additional lists
PD
Scientific field: Mathematics
SF
Scientific discipline: Algebra
SD

Subject/Key words: semiring, semigroup, group, p-semigroup, p-semiring, prering, ring, isomorphism of semiring, variety
SKW

UC:
Holding data: Biblioteka Instituta za matematiku
HD

Note:
N

Abstract: A semiring $(S,+,\cdot)$ is an algebric structure with two binary operations in which $(S,+)$ and $(S,\cdot)$ are semigroups, and the second operation is two-side distributive with respect to the first one. In the present paper notions of p-semigroup and p-semiring are introduced. We say that a semigroup $(S,+)$ is a p-semigroup if $(\forall x\in S)(\exists y\in S)(x+py+x=y, py+x+py=x)$. A semiring $(S,+,\cdot)$ is called a p-semiring if $(\forall x\in S)(\exists y\in S)(x+py+x=y, py+x+py=x, 4px^2=4px)$. It is proved that each p-semigroup is covered by groups which are completely described. It is also proved that p-semirings are covered by prering. For $p=4k+3$ $(k\in N_0)$ or for even p, the class of p-semigroups, respectively of p-semirings are varieties.
AB

Accepted by the Scientific Board on:
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board:

(Degree/name/surname/title/faculty)
DB

President:
Member:
Member:
Member:
Member: