Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-Matematički fakultet
Departman za matematiku i informatiku

Konvolucione i distribucione C-polugrupe

doktorska disertacija

Kandidat:
mr Marko Kostić

Mentor:
dr Stevan Pilipović

Novi Sad, 2004.

Sadržaj

0. Uvod

Ova disertacija je nastala na osnovu radova koje je autor napisao u toku prethodnih godina. Zbog obima izložene materije, disertacija je pisana u formi naučnog rada i namenjena je specijalistima u oblasti apstraktnih diferencijalnih jednačina u Banachovim prostorima. Ovaj deo teorije operatora je povezan sa mnogim drugim disciplinama, navedimo neke: teorija uopštenih funkcija, kompleksna analiza, teorija integralnih transformacija, pogotovu teorija vektorsko-vrednosne Laplaceove transformacije, obične i parcijalne diferencijalne jednačine, teorija parcijalno uredjenih Banachovih prostora, teorija funkcionalnih jednačina, teorija verovatnoće, teorija mreža itd.
Disertacija je pre svega orjentisana na analizu slabo postavljenih Cauchyjevih problema, tj. problema koji se ne mogu rešiti primenom klasične teorije C_0-polugrupa operatora. Analiziraćemo stoga mnoge druge operatorske familije koje vode do rešenja odgovarajućih parcijalnih diferencijalnih jednačina. Krenimo hronološki. Početkom teorije C_0-polugrupa smatra se Hille-Yosidina teorema koja je dokazana 1948. godine. Nakon toga je došlo do velike ekspanzije date teorije. Za teoriju C_0-polugrupa videti monografije [36] i [74]. Teorija distribucionih polugrupa operatora datira od rada Lionsa objavljenog 1960. godine. U sedmoj dekadi prošlog veka radovima Brezisa, Barbua, Crandalla, Miyadere i drugih je nastala teorija nelinearnih C_0-polugrupa i ona je bazirana na monotonim i disipativnim operatorima u Banachovim prostorima, videti monografije [10] i [69]. Autor tek želi da se posveti ovom delu teorije operatora i on nije uključen u ovu disertaciju. Otprilike u isto vreme, radovima Bealsa, Chazaraina, Komatsua, Ōuchia, Emami-Rada, Cioranescu i drugih postavljene su osnove teorije ultradistribucionih i hiperfunkcionih polugrupa operatora.
Integrisane polugrupe operatora je uveo Arendt 1987. godine i to je označilo novi početak u teoriji slabo postavljenih Cauchyjevih problema. Najveće primene date teorije dali su W. Arendt, M. Hieber i F. Neubrander i ona je upotrebljena u analizi velikog broja diferencijalnih i pseudodiferencijalnih jednačina u Banachovim prostorima. Sedam godina nakon toga, 1994. godine, Cioranescu i Lumer su definisali prirodna uopštenja integrisanih polugrupa-konvolucione polugrupe. One su se pokazale jačim sredstvom u analizi Cauchyjevih problema od distribucionih, ultradistribucionih i integrisanih polugrupa. Teorija je još u nastanku, što pokazuje rad [48]. Čini se da nije dobro ispitana veza konvolucionih polugrupa i samoadjungovanih operatora; prostori uopštenih funkcija koji prirodno odgovaraju ovakvoj vrsti problema su definisani u [65] na 'iznudjen' način, gde su nazvani prostorima novih distribucija. Teorija asimptotske Laplaceove transformacije, razvijena od strane Neubrandera i Lumera, nije pokazala željeni rezultat u analizi datih problema. Stoga možemo konstatovati da je teorija konvolucionih polugrupa još nedovoljno jasna.
Veoma elegantna i naizgled jednostavna, teorija C-polugrupa se pokazala veoma korisnom. C-polugrupe su definisane nezavisno radom Daviesa i Panga sa jedne i DaPrata sa druge strane i to krajem osamdesetih godina prošlog veka. Iako su teoretski mnogo jače od integrisanih polugrupa, C-polugrupe nisu našle takvu primenu kao integrisane polugrupe. Trenutno se datom disciplinom bavi veliki broj matematičara, pomenimo deLaubenfelsa, Zhenga, Kunstmanna, Strauba, Wanga itd. Ovde ćemo naglasiti da je zapravo pravi tvorac teorije C-polugrupa Beals koji ih je implicitno konstruisao još 1971. godine. DaPrato je 1966. godine definisao i polugrupe reda $r > 0$ i danas se date klase polugrupa izlažu kao deo

teorije eksponencijalno ograničenih C-polugrupa. Do današnjih dana nije data dobra veza izmedju polugrupa reda $r > 0$ i integrisanih polugrupa.
Lokalno integrisane polugupe i lokalne C-polugrupe su uvedene 1990. godine u radu Tanake i Okazawe. Mnogo lepši pristup lokalno integrisanim polugrupama je dat 1994. godine u [2], gde su date veze Lionsovih distribucionih polugrupa i lokalnih integrisanih polugrupa. Neguste distribucione polugrupe su definisane u radovima Kunstmanna 1999. godine i Wanga 1997. godine, gde je ponovo ispitivana veza distribucionih polugrupa sa lokalno integrisanim polugrupama. U ovoj disertaciji ćemo proučavati klasu C-distribucionih polugrupa i na taj način dobiti ekstenzije rezultata Kunstmanna i Wanga. Izložimo sada osnovne delove ove disertacije.
Prvi deo disertacije je nastao kao deo zajedničkog rada sa Profesorom Stevanom Pilipovićem, čovekom koji je možda jedini čitao moje radove. Još jednom se zahvaljujem na tome. Taj deo je posvećen analizi konvolucionih, ultradistribucionih i hiperfunkcionih polugrupa. U drugom delu, definišemo i sistematski proučavamo C-distribucione polugrupe i njihove veze sa lokalno integrisanim C-polugrupama ([58]). U trećem poglavlju dajemo bez dokaza osnovne rezultate vezane za $[r]$-polugrupe, klasu negustih distribucionih polugrupa koja predstavlja ekstenziju glatkih distribucionih polugrupa Balabana i Emami-Rada. Nakon toga dajemo analizu distribucionih kosinus funkcija, njenih veza sa integrisanim kosinus funkcijama, lokalnim C-kosinus funkcijama i jednačinama konvolucionog tipa. Neki rezultati vezani za analitičke integrisane polugrupe su dati u sledećoj sekciji. U poslednja dva poglavlja proučavamo konvolucione C-polugrupe, konvolucione C-kosinus funkcije, ultradistribucione i hiperfunkcione sinuse, kao i njihove veze sa analitičkim konvolucionim polugrupama. Dato je puno primera koji ilustruju apstraktne rezultate.
Zahvaljujem se svima koji su imali posrednog ili neposrednog uticaja na mene u izradi ove disertacije. Izražavam posebnu zahvalnost Profesorima Stevanu Pilipoviću, Milošu Kuriliću, Marku Nedeljkovu, Bogoljubu Stankoviću, Jizhou Zhangu, C.J.K. Battyu, Francisco Periagu i Berndu Straubu, mojoj porodici, Marijani Milutinović, Sekulić Milanu, Draganu i Radu, Radojčić Milenku i Mileni, Stojsavljević Aleksandru i Vasić Darku.

1. Konvolucione, ultradistribucione i hiperfunkcione polugrupe

Najveći deo ovog poglavlja ćemo posvetiti proučavanju klase eksponencijalno ograničenih konvolucionih polugrupa. Analiza date klase, koja se u nekim aspektima esencijalno razlikuje od klase eksponencijalno ograničenih integrisanih polugrupa, je detaljno izvršena primenom Laplaceove transformacije. Suštinski, ovo poglavlje čine dva dela. Prvi deo čine teoreme koje daju strukturne osobine uvedene klase i njegovi najznačajniji delovi se odnose na aditivne perturbacije generatora eksponencijalno ograničenih konvolucionih polugrupa i na analizu globalnih konvolucionih polugrupa koje su polinomski ograničene. U drugom delu su date veze lokalnih i eksponencijalno ograničenih konvolucionih polugrupa sa ultradistribucionim i (Fourierovim) hiperfunkcionim polugrupama. Uvedena je klasa eksponencijalnih ultradistribucionih polugrupa i data je veza te klase sa eksponencijalnim konvolucionim polugrupama. Na osnovu razmatranja iz [52] i [92] su definisane i neke nove klase ultradistribucionih polugrupa koje nemaju analogone u teoriji distribucionih polugrupa.

1.1. Uvod

Konvolucione polugrupe ([17]-[20], [65]) predstavljaju prirodna uopštenja integrisanih polugrupa za koje je literatura dosta bogata i jedan njen deo je naveden u referencama. Najpre ćemo dati definiciju lokalne konvolucione K-polugrupe.

Definicija 1.1.1. Neka je A zatvoren linearan operator i neka je K lokalno integrabilna funkcija na $[0,\tau)$, $0<\tau\leq\infty$. Ako postoji jako neprekidna familija operatora $(S_K(t))_{t\in[0,\tau)}=\{S_K(t):\, t\in[0,\tau)\}$ takva da je $S_K(t)Ax=AS_K(t)x$, $x\in D(A)$, $\int_0^t S_K(s)x\,ds\in D(A)$, $x\in E$, $(t\in[0,\tau))$ i

$$A\int_0^t S_K(s)x\,ds=S_K(t)x-\Theta(t)x,\ x\in E,\quad \text{gde je } \Theta(t):=\int_0^t K(s)\,ds, \qquad (1)$$

onda S_K zovemo (lokalnom) K-konvolucionom polugrupom, K-polugrupom kraće, generisanom sa A i A nazivamo generatorom od S_K.

Neposredna posledica Definicije 1.1.1 je činjenica da ako A generiše K-konvolucionu polugrupu $(S_K(t))_{t\in[0,\tau)}$, onda $S_K(t)x\in\overline{D(A)}$, $t\in[0,\tau)$, $x\in E$.
Primetimo da u Definiciji 1.1.1 ne zahtevamo da je K neprekidna funkcija na $[0,\tau)$; ova pretpostavka je navedena u Definiciji 1.3.1 u [65]. Ako je $K\neq 0$ u $L^1_{loc}([0,\tau))$, onda je jasno da je polugrupa S_K nedegenerisana, tj.

$$\text{ako je } S_K(t)x=0 \text{ za sve } t\in[0,\tau), \text{ onda je } x=0.$$

Ako je $K=0$ s.s. na $[0,\tau)$, onda je sa $S_K(t)=0$, $0\leq t<\tau$, data K-konvoluciona polugrupa na $[0,\tau)$ i svaki zatvoren linearan operator je njen generator. Jasno je da je ovo patološki slučaj tako da ćemo u nastavku pretpostaviti: $K\neq 0$ u $L^1_{loc}([0,\tau))$.
Takodje, Θ je apsolutno neprekidna funkcija na $[0,\tau)$ čiji je izvod K skoro svuda na $[0,\tau)$.
Ako je $[0,\tau)=[0,\infty)$, u nastavku ćemo često koristiti sledeći uslov:

(P1)

- K je eksponencijalno ograničena funkcija, tj. K je lokalno integrabilna na $[0,\infty)$ i $|K(t)| \leq Me^{\beta t}$, $t \in [0,\infty)$, s.s. za neko $M > 0$ i $\beta \geq 0$;
- $\tilde{K}(\lambda) \neq 0$, $Re\lambda > \beta$, gde je $\tilde{K}(\lambda)$ Laplaceova transformacija od K.

Označimo sa $\mathcal{LT}(\mathbb{C})$ skup svih Laplaceovih transformacija eksponencijalno ograničenih funkcija.
Ako je u Definiciji 1.1.1, $K(t) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}$, $t \in [0,\tau)$, $k \in \mathbb{N}$, onda je $\{S_K(t) : t \in [0,\tau)\}$ k-puta integrisana polugrupa generisana sa A.
Korišćenjem (samo) Definicije 1.1.1 se mogu dati neki funkcionalni zakoni koji važe za operatore polugrupe S_K. Dobro je poznato da S_K zadovoljava 'polugrupovno' svojstvo (videti na primer [65]):

$$S_K(t)S_K(s) = \left[\int_0^{t+s} - \int_0^{t} - \int_0^{s}\right] K(t+s-r)S_K(r)dr, \quad 0 \leq t,\ s,\ t+s < \tau.$$

Sledeća definicija biće uporedjena sa rezultatima iz [58] i ona je neophodna za dalji rad.

Definicija 1.1.2. Neka je A zatvoren linearan operator i neka je $C \in L(E)$ injektivan operator. Pretpostavimo $0 < \tau \leq \infty$ i $k \in \mathbb{N}$. Ako postoji jako neprekidna operatorska familija $(S(t))_{t\in[0,\tau)}$ takva da je $S(t)Ax = AS(t)x$, $x \in D(A)$, $CS(t) = S(t)C$, $\int_0^t S(s)xds \in D(A)$, $x \in E$, $t \in [0,\tau)$ i

$$A\int_0^t S(s)xds = S(t)x - \frac{t^k}{k!}Cx, \ x \in E, \ t \in [0,\tau), \tag{2}$$

onda je A subgenerator lokalne k-puta integrisane C-polugrupe $(S(t))_{t\in[0,\tau)}$.

Propozicija 2.4 u [58] daje

$$S(t)S(s) = \left[\int_0^{t+s} - \int_0^{t} - \int_0^{s}\right] \frac{(t+s-r)^{k-1}}{(k-1)!} S(r)Cdr, \quad 0 \leq t,\ s,\ t+s < \tau, \tag{3}$$

i $(S(t))_{t\in[0,\tau)}$ je k-puta integrisana C-polugrupa u smislu Definicije 2.1 iz [58].
Generalno, subgenerator nije jedinstven; medjutim, ako je $C = I$ tada je subgenerator jedinstven i to je zapravo generator k-puta integrisane polugrupe $(S(t))_{t\in[0,\tau)}$ (pogledati Definiciju 1.1.1).
Podsetimo se da je (integralni) generator k-puta integrisane C-polugrupe $(S(t))_{t\in[0,\tau)}$ dat sa:

$$\{(x,y) \in E^2 : S(t)x - \frac{t^k}{k!}Cx = \int_0^t S(s)yds, \ t \in [0,\tau)\},$$

i on je ekstenzija subgeneratora A (u Definiciji 1.1.2). Ako je $CA \subset AC$, tada je generator od $(S(t))_{t\in[0,\tau)}$ jednak $C^{-1}AC$ ([58]).

Pretpostavimo da je $(S(t))_{t\geq 0}$ globalna k-puta integrisana C-polugrupa u smislu Definicije 2.1 iz [58]. Ako je A generator od $(S(t))_{t\geq 0}$, tada je pokazano [55] da je $S(t)A \subset AS(t)$, $t \geq 0$ i da je $\int_0^t S(s)xds \in D(A)$, $x \in E$, $t \geq 0$. Takodje, (2) važi i $C^{-1}AC = A$. Nije jasno kako dokazati data tvrdjenja u lokalnom slučaju.

Semigrupovno svojstvo se može upotrebiti za drugi način definisanja konvolucionih polugrupa. Zbog konzistentnosti ćemo dati samo 'novu' definiciju globalne K-konvolucione polugrupe.

Definicija 1.1.1'. Jako neprekidna familija operatora $(S(t))_{t\geq 0}$ je (globalna) K-konvoluciona polugrupa na E, ako su zadovoljeni sledeći uslovi:

(a) $S(0) = 0$,

(b) $S(t)S(s)x = \left[\int_0^{t+s} - \int_0^t - \int_0^s\right] K(t+s-r)S(r)xdr,\ x \in E,\ t,\ s \geq 0.$

Polugrupa $S(\cdot)$ je nedegenerisana ako $S(t)x = 0$ za sve $t \in [0,\infty)$ povlači $x = 0$. Za nedegenerisanu K-konvolucionu polugrupu možemo definisati njen generator A na sledeći nacin:

$$A := \left\{(x,y) \in E^2 : S(t)x - \Theta(t)x = \int_0^t S(s)yds,\ t \in [0,\infty)\right\}.$$

Lako se pokazuje da je A zatvoren linearan operator u E.

Propozicija 1.1.3. *Neka je $K \neq 0$ u $L^1_{loc}([0,\infty))$. Ako je A zatvoren linearan operator i ako je $(S(t))_{t\geq 0}$ nedegenerisana jako neprekidna familija operatora, onda je $(S(t))_{t\geq 0}$ K-konvoluciona polugrupa generisana sa A u smislu Definicije 1.1.1 ako i samo ako je $(S(t))_{t\geq 0}$ K-konvoluciona polugrupa generisana sa A u smislu Definicije 1.1.1'.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $(S(t))_{t\geq 0}$ K-konvoluciona polugrupa generisana sa A u smislu Definicije 1.1.1. Na osnovu prethodnih razmatranja, $(S(t))_{t\geq 0}$ zadovoljava polugrupovno svojstvo. Evidentno je da je $S(0) = 0$. Označimo $A_1 := \left\{(x,y) \in E^2 : S(t)x - \Theta(t)x = \int_0^t S(s)yds,\ t \in [0,\infty)\right\}$. Ako je $(x,y) \in A_1$, onda je $S(t)x - \Theta(t)x = \int_0^t S(s)yds$, i na osnovu toga, $A\int_0^t S_K(s)xds = \int_0^t S(s)yds$, $t \geq 0$. Kako je A zatvoren operator, ovo daje $A(S(t)x) = S(t)y$, tj. $A(\Theta(t)x + \int_0^t S(s)yds) = S(t)y$, $t \geq 0$. Sada $\Theta \neq 0$ (u prostoru neprekidnih funkcija definisanih na $[0,\infty)$) i $\int_0^t S(s)yds \in D(A)$, $t \geq 0$, impliciraju $x \in D(A)$. Dakle, $S(t)Ax = S(t)y$, $t \geq 0$ i $Ax = y$. Kako je $S(\cdot)$ nedegenerisana jako neprekidna familija operatora koja komutira sa A, lako je videti da je $A \subset A_1$. Dokazali smo da je $A = A_1$. Pretpostavimo da A generiše K-konvolucionu polugrupu $(S(t))_{t\geq 0}$ u smislu Definicije 1.1.1'. Kako $S(t)$ i $S(s)$ komutiraju za sve t, $s \geq 0$ (videti (b) iz Definicije 1.1.1'), jasno je da je $S(t)A \subset AS(t)$, $t \geq 0$. Ponavljajući doslovno dokaz Teoreme 2.4 iz [92], deo (iii) $\to$ (ii), sa K umesto $\frac{(\cdot)^{k-1}}{(k-1)!}$, lako se dobija (1), što završava dokaz propozicije.

Zapažanje. Situacija je mnogo komplikovanija ako je $\tau < \infty$. Tada polugrupovno svojstvo važi za sve $0 \leq t,\ s,\ t+s < \tau$ i ovo može imati neke veoma neprijatne posledice. Primetimo da definicija lokalno integrisanih polugrupa u [92] kao i deo pomenute Teoreme 2.4 iz [92] sadrže grešku: $t+s < \tau$ je činjenica koja je morala biti razmotrena. Na kraju ove diskusije navedimo pitanje koje se prirodno nameće: da li su navedene definicije ekvivalentne ako je $\tau < \infty$? U nastavku ovog poglavlja ćemo uvek koristiti Definiciju 1.1.1.

Primetimo takodje da ne zahtevamo u Definiciji 1.1.1 da je funkcija K kernel, tj.

$$(\forall u \in C([0,\tau) : E))(\int_0^\tau K(t-s)u(s)ds \equiv 0 \Rightarrow u \equiv 0).$$

Slična pretpostavka za K je razmatrana u [19]. Na osnovu Titchmarshove teoreme, ([6], str. 106), uslov $0 \in \operatorname{supp} K$ povlači da je K kernel. Ako A generiše K-polugrupu na $[0,\tau)$ tada postoji rešenje odgovarajućeg Θ-konvolucionog problema (videti treću celinu). Jedinstvenost je automatski zadovoljena ako je K kernel. To se može izvesti na isti način kao i u Teoremi 2.4 u [92].
Primetimo da su funkcije

$$K_\delta(t) := \frac{1}{2\pi i}\int_{r-i\infty}^{r+i\infty} e^{\lambda t-\lambda^\delta} d\lambda,\ t \geq 0,\ 0 < \delta < 1,\ r > 0,\ (1^\delta = 1)$$

kerneli (videti [6], str. 107). U Primeru 1.5.3 konstruisaćemo globalnu (polinomski) ograničenu $K_{1/2}$-polugrupu. Primetimo da je $K_{1/2}(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-\frac{1}{4t}}$, $t \geq 0$. Na isti način se mogu konstruisati globalne (polinomski) ograničene K_δ-polugrupe, za neko $\delta \in (0,1)$.

1.2. Globalne eksponencijalno ograničene K-polugrupe

Najvažnija veza izmedju globalnih eksponencijalno ograničenih K-polugrupa i Laplaceove transformacije je sadržana u našoj prvoj teoremi.

Teorema 1.2.1. *Neka je A zatvoren linearan operator i neka je $(S(t))_{t\geq 0}$ jako neprekidna, eksponencijalno ograničena familija operatora u $L(E)$. Neka funkcija $K : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ zadovoljava* (P1). *Sledeći iskazi su ekvivalentni.*

(i) *$(S(t))_{t\geq 0}$ je K-polugrupa generisana sa A.*

(ii) *Postoji $\omega > 0$ takvo da je $\{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda > \omega\} \subset \rho(A)$ i*

$$R(\lambda : A) = \frac{1}{\tilde{K}(\lambda)}\int_0^\infty e^{-\lambda t}S_K(t)dt,\ Re\lambda > \omega.$$

Dokaz. (i) $\to$ (ii) Pretpostavimo da je za neko $\beta \geq 0$ i $\omega_1 > 0$,

$$|K(t)| \leq Me^{\beta t},\ |S_K(t)| \leq M_1e^{\omega_1 t},\ t \geq 0 \text{ s.s.}$$

Stavimo

$$\omega = \max(\omega_1,\beta),\ R_\lambda := \frac{1}{\tilde{K}(\lambda)}\int_0^\infty e^{-\lambda t}S_K(t)dt,\ Re\lambda > \omega.$$

Neka je $Re\lambda > \omega$. Tada je

$$(\lambda - A)R_\lambda x = \frac{\lambda}{\tilde{K}(\lambda)} \int_0^\infty e^{-\lambda t} S_K(t)x dt - \frac{1}{\tilde{K}(\lambda)} A \int_0^\infty e^{-\lambda t} S_K(t)x dt$$
$$= \frac{\lambda}{\tilde{K}(\lambda)} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left[A \int_0^t S_K(s)x ds + \Theta(t)x \right] dt$$
$$- \frac{1}{\tilde{K}(\lambda)} A \left[e^{-\lambda t} \int_0^t S_K(s)x ds \Big|_{t=0}^{\infty} + \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_0^t S_K(s)x ds dt \right]$$
$$= \frac{\lambda}{\tilde{K}(\lambda)} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \Theta(t)x dt = x, \ x \in E.$$

Kako je $R_\lambda A \subset A R_\lambda$, imamo $\lambda \in \rho(A)$ i $R(\lambda : A) = R_\lambda$.
(ii) $\to$ (i) Neka je $x \in E$ i $Re\lambda > \omega$ za neko $\lambda \in \mathbb{C}$. Jasno,

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} S_K(t)x dt = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_0^t S_K(s)x ds dt,$$

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_0^t S_K(s)x ds dt \in D(A).$$

Takodje,

$$A \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_0^t S_K(s)x ds dt = \frac{\tilde{K}(\lambda)}{\lambda} AR(\lambda : A)x$$

$$= \tilde{K}(\lambda)R(\lambda : A)x - \frac{\tilde{K}(\lambda)}{\lambda} x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}[S_K(t)x - \Theta(t)x]dt.$$

Koristeći inverznu formulu za Laplaceovu transformaciju kao u [91], Teorema 1.10, i zatvorenost operatora A, lako je pokazati $\int_0^t S_K(s)x ds \in D(A)$, $t \geq 0$, i

$$A \int_0^t S_K(s)x ds = S_K(t)x - \Theta(t)x, \ t \geq 0.$$

Ponavljajući još jednom navedene argumente, iz

$$A \int_0^\infty e^{-\lambda t} S_K(t)x dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S_K(t)Ax dt$$

($x \in D(A)$ je fiksiran, $Re\lambda > \omega$), sledi $S_K(t)A \subset AS_K(t)$, $t \geq 0$.

Iskoristićemo neke rezultate iz [11] da pokažemo da operator $-\Delta$ sa Dirichletovim ili Neumannovim graničnim uslovima u $L^2[0,\pi]$ generiše polinomski ograničenu K-polugrupu za neku eksponencijalno ograničenu funkciju K koja zadovoljava $0 \in \operatorname{supp} K$, ali ne i (P1). Stoga dajemo sledeće uopštenje Teoreme 1.2.1.

Teorema 1.2.2. *Neka je K eksponencijalno ograničena funkcija.*

(i) *Ako je* $(S_K(t))_{t\geq 0}$ *eksponencijalno ograničena* K*-polugrupa generisana sa* A*, tada postoji* $\omega \geq \beta$ *takvo da je* $\{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda > \omega,\ \tilde{K}(\lambda) \neq 0\} \subset \rho(A)$ *i*

$$R(\lambda : A) = \frac{1}{\tilde{K}(\lambda)} \int_0^\infty e^{-\lambda t} S_K(t)dt,\ Re\lambda > \omega,\ \tilde{K}(\lambda) \neq 0. \tag{4}$$

(ii) *Neka je* $(S_K(t))_{t\geq 0}$ *jako neprekidna, eksponencijalno ograničena familija operatora. Pretpostavimo da je* A *zatvoren linearan operator tako da za neko* $\omega \geq \beta$ *važi* (4) *i* $\{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda > \omega,\ \tilde{K}(\lambda) \neq 0\} \subset \rho(A)$*. Tada je* $(S_K(t))_{t\geq 0}$ *eksponencijalno ograničena* K*-polugrupa generisana sa* A*.*

Dokaz. Dokaz za (i) je već dat u prethodnoj teoremi. Dokažimo (ii). Kako smo pretpostavili da je $K(t) \neq 0$, za s.s. $t \in [0, \infty)$, imamo

$$\{z \in \mathbb{C} : Rez \geq \omega\} = \overline{\{z \in \mathbb{C} : Rez > \omega,\ \tilde{K}(z) \neq 0\}}.$$

Neka je $\lambda \in \{z \in \mathbb{C} : Rez > \omega,\ \tilde{K}(z) \neq 0\}$. Fiksirajmo $x \in E$. Kao u dokazu Teoreme 1.2.1, dobijamo

$$A \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_0^t S_K(s)xdsdt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}[S_K(t)x - \Theta(t)x]dt.$$

Koristeći zatvorenost operatora A, prethodna formula ostaje tačna za sve $\lambda \in \mathbb{C}$ sa $Re\lambda > \omega$. Primena Teoreme 1.10 iz [91] daje (1). Slicno, ako je $x \in D(A)$, tada je za sve $\lambda \in \mathbb{C}$ sa $Re\lambda > \omega$ i $\tilde{K}(\lambda) \neq 0$,

$$A \int_0^\infty e^{-\lambda t} S_K(t)xdt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S_K(t)Axdt.$$

Kao i malopre, prethodna jednakost je tačna za sve $\lambda \in \{z \in \mathbb{C} : Rez > \omega\}$ i primenom Teoreme 1.10 iz [91] imamo $S_K(t)A \subset AS_K(t),\ t \geq 0$.

Propozicija 1.2.3. *Neka je* A *generator eksponencijalno ograničene* K*-polugrupe* $(S_K(t))_{t\geq 0}$ *i* $z \in \mathbb{C}$*. Ako funkcija*

$$\lambda \mapsto \frac{\tilde{K}(\lambda) - \tilde{K}(\lambda + z)}{\tilde{K}(\lambda + z)},\ Re\lambda > \gamma,\ (za\ neko\ \gamma > 0),$$

pripada $\mathcal{LT}(\mathbb{C})$*, tada je* $A - z$ *generator eksponencijalno ograničene* K*-polugrupe.*

Dokaz. Neka F zadovoljava $|F(t)| \leq Me^{\omega t},\ t \geq 0$ i

$$\frac{\tilde{K}(\lambda) - \tilde{K}(\lambda + z)}{\tilde{K}(\lambda + z)} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} F(t)dt,\ Re\lambda > \gamma.$$

Definišimo

$$S_{K,z}(t) := e^{-tz} S_K(t) + \int_0^t F(t-s)e^{-zs} S_K(s)ds,\ t \in [0, \infty).$$

Tada je $(S_{K,z}(t))_{t\geq 0}$ jako neprekidna, eksponencijalno ograničena familija operatora. Standardan račun

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-\lambda t}S_{K,z}(t)xdt &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\left[e^{-tz}S_K(t)x+\int_0^t F(t-s)e^{-zs}S_K(s)xds\right]dt\\ &= \int_0^\infty e^{-(\lambda+z)t}S_K(t)xdt+\int_0^\infty e^{-(\lambda+z)t}S_K(t)xdt\int_0^\infty e^{-\lambda t}F(t)dt\\ &= \tilde{K}(\lambda+z)\left[1+\tfrac{\tilde{K}(\lambda)-\tilde{K}(\lambda+z)}{\tilde{K}(\lambda+z)}\right]R(\lambda+z:A)x=\tilde{K}(\lambda)R(\lambda+z:A)x\\ &= \tilde{K}(\lambda)R(\lambda:A-z)x,\ x\in E,\ Re\lambda>\omega_0;\ \text{za neko}\ \omega_0>0,\end{aligned}$$

pokazuje da $A-z$ generiše K-polugrupu $(S_{K,z}(t))_{t\geq 0}$.

Zapažanje. Ovaj rezultat je generalizacija Propozicije 1.3 iz [3]. Lako je videti da uslove date propozicije zadovoljava funkcija $K=\mathcal{L}^{-1}(\frac{p_m(\lambda)}{p_k(\lambda)})$, gde su p_k i p_m polinomi stepena k i m, respektivno, i $k>m$.

U nastavku ćemo proširiti lokalno integrabilne funkcije na $(0,\infty)$ nulom na $(-\infty,0]$ tako da je konvolucija njihovih ekstenzija f i g, $f*g=\int_{-\infty}^{\infty}f(\cdot-t)g(t)dt$, jednaka $f*_0 g(x):=\int_0^x f(x-t)g(t)dt,\ x\geq 0$ (i nuli za $x\leq 0$).

Zapažanje. Pretpostavimo da je $a\in C([0,\tau))$, $0<\tau\leq\infty$ i da A generiše K-polugrupu S_K na $[0,\tau)$. Definišimo $S_{K,a}:=a*_0 S_K$. Tada je $S_{K,a}$ $(a*_0 K)$-polugrupa (na $[0,\tau)$) generisana sa A. Ovo je direktna posledica Definicije 1.1.1 i nekih elementarnih osobina vektorsko-vrednosnih funkcija (videti, na primer, [6], Poglavlje 1).

Koristeci čuvenu Arendt-Widderovu teoremu ([1]), lako je pokazati sledeću propoziciju.

Propozicija 1.2.4. *Neka je K eksponencijalno ograničena funkcija i neka je A zatvoren linearan operator.*
(i) *Tada je A generator eksponencijalno ograničene Θ-polugrupe $(S_\Theta(t))_{t\geq 0}$ koja zadovoljava uslov*

$$\lim_{\sigma\to 0}\sup_{h\leq\sigma}\frac{\|S_\Theta(t+h)-S_\Theta(t)\|}{h}\leq Me^{\omega t},\ t\geq 0,\ \textit{za neko}\ M,\ \omega>0,$$

ako i samo ako postoji $a\geq\max\{\omega,\beta\}$ takvo da je ispunjeno

$$\{\lambda\in\mathbb{C}:Re\lambda>a,\ \tilde{K}(\lambda)\neq 0\}\subset\rho(A)\ i$$

$$\left\|\frac{d^k}{d\lambda^k}[\tilde{K}(\lambda)R(\lambda:A)]\right\|\leq\frac{Mk!}{(Re\lambda-\omega)^{k+1}},\ k\in\mathbb{N}_0,\ Re\lambda>a,\ \tilde{K}(\lambda)\neq 0.\quad (5)$$

(ii) *Pretpostavimo da je A gusto definisan. Tada A generiše eksponencijalno ograničenu K-polugrupu $(S_K(t))_{t\geq 0}$ koja zadovoljava $\|S_K(t)\|\leq Me^{\omega t}$, $t\geq 0$, ako i samo ako postoji $a\geq\max\{\omega,\beta\}$ takvo da je $\{\lambda\in\mathbb{C}:Re\lambda>a,\ \tilde{K}(\lambda)\neq 0\}\subset\rho(A)$ i da (5) važi.*

Za gusto definisani operator A oznacimo sa A^* njegov adjungovani operator. Poznato je da važi ([6]): $R(\lambda:A)^*=R(\lambda:A^*)$ za sve $\lambda\in\rho(A)=\rho(A^*)$; ako pretpostavimo dodatno da je Banachov prostor E refleksivan, onda je i A^*

takodje gusto definisan. Takodje, dobro je poznato da je preslikavanje $B \mapsto B^*$ linearna izometrija prostora $L(E)$ i $L(E^*)$. Na osnovu ovoga i prethodne propozicije odmah imamo sledeći rezultat; istorijski gledano, rezultati ovog tipa su zasnovani još na radovima Hilla i Phillipsa koji su definisali 'sun-dual' polugrupu date C_0-polugrupe.

Propozicija 1.2.5. *Pretpostavimo da je K eksponencijalno ograničena funkcija i da je A gusto definisani generator eksponencijalno ograničene K-konvolucione polugrupe na E. Tada A^* generiše eksponencijalno ograničenu Θ-konvolucionu polugrupu E^*. Ako je prostor E refleksivan, tada A^* generiše eksponencijalno ograničenu K-konvolucionu polugrupu na E^*.*

U narednoj teoremi ćemo dati karakterizaciju polinomski ograničenih konvolucionih polugrupa. Uslov $\beta = 0$ će igrati važnu ulogu u drugom delu teoreme. Zbog jednostavnosti ćemo posmatrati samo slučaj kada K zadovoljava (P1); zainteresovanog čitaoca upućujemo na [48] za odgovarajuću analizu u opštem slučaju. Ona je bazirana na principima analitičkog produženja u Banachovim prostorima.

Propozicija 1.2.6. *Pretpostavimo da K zadovoljava* (P1).

(i) *Neka je $(S_K(t))_{t\geq 0}$ K-polugrupa sa $\|S_K(t)\| \leq M(t^k + t^m)$, $t \geq 0$, za neko $M > 0$ i k, $m \in \mathbb{N}_0$. Ako je A generator od S_K tada važi*

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda > \beta\} \subset \rho(A) \ i \tag{6}$$

$$\left\|\tilde{K}(\lambda)R(\lambda : A)\right\| \leq M\left[\frac{k!}{(Re\lambda)^{k+1}} + \frac{m!}{(Re\lambda)^{m+1}}\right], \ Re\lambda > \beta. \tag{7}$$

(ii) *Ako je A zatvoren linearan operator koji ispunjava uslove* (6) *i* (7), *za neke $\beta \geq 0$, $M > 0$ i k, $m \in \mathbb{N}_0$, tada je A generator globalne $(K *_0 t)$-polugrupe koja je $O(e^{\beta t}(t^{k+2} + t^{m+2}))$ rasta.*

Koristićemo Landauov simbol "veliko O" što znači $\|S_{K *_0 t}(t)\| \leq Ce^{\beta t}(t^{k+2} + t^{m+2})$, $t \geq 0$, za neko $C > 0$. Kasnije ćemo koristiti i "malo o."

Dokaz. Dokaz za (i) je jednostavan tako da ga nećemo ovde dati. Da bi pokazali (ii), pretpostavimo da je $a > \beta$ proizvoljan realan broj. Definišimo

$$S(t) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{\lambda t}\frac{\tilde{K}(\lambda)}{\lambda^2}R(\lambda : A)d\lambda, \ t \geq 0.$$

Na osnovu Cauchyjeve formule, data definicija ne zavisi od $a > \beta$. Lako se pokazuje da je $(S(t))_{t\geq 0}$ jako neprekidna familija operatora i da je:

$$\|S(t)\| \leq \frac{Me^{at}}{2}\left[\frac{k!}{a^{k+2}} + \frac{m!}{a^{m+2}}\right], \ t \geq 0. \tag{8}$$

Upotreba istih argumenata kao u Teoremi 1.12 u [91] pokazuje da je $(S(t))_{t\geq 0}$ $(K *_0 t)-$polugrupa generisana sa A. Neka je $t > 0$ fiksiran. Cauchyjeva formula povlači

$$S(t) = \tfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{\beta+\frac{1}{t}-i\infty}^{\beta+\frac{1}{t}+i\infty} e^{\lambda t}\tfrac{\tilde{K}(\lambda)}{\lambda^2}R(\lambda : A)d\lambda.$$

Stavljajući $a = \beta + \frac{1}{t}$ u (8), imamo

$$||S(t)|| \leq Me(\frac{e^{\beta t}k!t^{k+2}}{2(\beta t+1)^{k+2}} + \frac{e^{\beta t}m!t^{m+2}}{2(\beta t+1)^{m+2}}), \ t \geq 0.$$

Ovo završava dokaz. Ako je $\beta > 0$ tada je takodje ispunjeno $||S(t)|| = O(e^{\beta t})$.

U nastavku ćemo dati primere odgovarajućih konvolucionih polugrupa na puno funkcionalnih prostora. Mnoge od tih polugrupa su polinomski ograničene.
Kao što prethodni deo ove celine pokazuje, mnoga strukturna svojstva integrisanih polugrupa važe i za konvolucione polugrupe. Neke karakterizacije globalnih konvolucionih polugrupa koje imaju $O(t^k + 1)$ rast, mogu se pokazati na isti način kao u [28]; aproksimacija eksponencijalno ograničenih konvolucionih polugrupa se može dati kao u [61] i [88]. Detalji i odgovarajuća tvrdjenja će stoga biti izostavljeni.
Klasa konvolucionih grupa zadržava skoro sve osobine klase konvolucionih polugrupa tako da neće biti ovde detaljno razmotrena. Jedna od najvažnijih razlika je povezanost konvolucionih grupa sa jednačinama drugog reda. O ovome će se u generalnijem kontekstu govoriti nešto kasnije.
U nastavku ćemo često koristiti sledeće jednostavno tvrdjenje (to je zapravo Teorema 1.12 iz [91]):

Propozicija A *Neka je $a > 0$ i neka je $f : \{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda > a\} \to E$ analitička funkcija takva da je $||f(\lambda)|| \leq M|\lambda|^r$, $Re\lambda > a$, za neko $r \in \mathbb{R}$ i $M > 0$.*
Tada

$$(\forall \alpha > 1)(\exists h_\alpha \in C([0,\infty); E), \ h_\alpha(0) = 0)(\exists M_\alpha > 0)$$

$$||h_\alpha(t)|| \leq M_\alpha e^{at}, \ t \geq 0, \quad i \ f(\lambda) = \lambda^{r+\alpha} \int_0^\infty e^{-\lambda t} h_\alpha(t)dt, \ Re\lambda > a.$$

Direktna posledica Propozicije A je sledeći rezultat:

Posledica 1.2.7. *Neka je K eksponencijalno ograničena funkcija i neka je A zatvoren linearan operator koji zadovoljava $\{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda > \omega, \ \tilde{K}(\lambda) \neq 0\} \subset \rho(A)$, za neko $\omega > \beta$. Pretpostavimo da postoji analitička funkcija $\Upsilon : \{z \in \mathbb{C} : Rez > \omega\} \to \mathbb{C}$ takva da je $\Upsilon(\lambda) = \tilde{K}(\lambda)R(\lambda : A)$, $Re\lambda > \omega$, $\tilde{K}(\lambda) \neq 0$. Ako je*

$$||\Upsilon(\lambda)|| \leq M_0|\lambda|^r, \ Re\lambda > \omega,$$

za neko $M_0 > 0$ i $r \geq -1$, tada za svako $\alpha > 1$ postoji neprekidna funkcija $S : [0,\infty) \to L(E)$ sa $S(0) = 0$ i $M_1 > 0$ tako da je

$$||S(t)|| \leq M_1 e^{\omega t}, \ t \geq 0, \quad i \ R(\lambda : A) = \frac{\lambda^{\alpha+r}}{\tilde{K}(\lambda)} \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)dt, \ Re\lambda > \omega, \ \tilde{K}(\lambda) \neq 0.$$

Dakle, A je generator eksponencijalno ograničene $\left(K *_0 \frac{t^{\alpha+r-1}}{\Gamma(\alpha+r)}\right)$-polugrupe.

Dokaz. Primena Propozicije A daje da za svako $\alpha > 1$ postoji neprekidna funkcija $S : [0,\infty) \to L(E)$ i $M_1 > 0$ tako da je $||S(t)|| \leq M_1 e^{\omega t}$, $t \geq 0$, i

$$\Upsilon(\lambda) = \lambda^{\alpha+r} \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)dt, \ Re\lambda > \omega.$$

Na osnovu Teoreme 1.2.2, $(S(t))_{t\geq 0}$ je eksponencijalno ograničena $\left(K *_0 \frac{t^{\alpha+r-1}}{\Gamma(\alpha+r)}\right)$-polugrupa generisana sa A.

Zapažanje. Stavimo za $\alpha > 0$, $f_\alpha(t) = H(t)t^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$, $t \in \mathbb{R}$, gde je H Heavisideova funkcija. Ovo je lokalno integrabilna funkcija. Ako je $\alpha \leq 0$ tada je dobro poznato da je $f_\alpha = (f_{\alpha+N})^{(N)}$, gde je $N \in \mathbb{N}$ takvo da je $\alpha + N > 0$, distribucija i to posebno važi za $\alpha \in -\mathbb{N}_0$, $f_\alpha = \delta^{(-\alpha)}$. Takodje, za svako $\alpha \in \mathbb{R}$ imamo $\mathcal{L}(f_\alpha)(z) = 1/z^\alpha$, $Rez > 0$. Ovo je razlog za pretpostavku $r \geq -1$ u Posledici 1.2.7.
Umesto pretpostavke $r \geq -1$, moguće je dati jedan slabiji uslov: $g * f_{\alpha+r}$ je lokalno integrabilna funkcija (videti Definiciju 1.1.1). U ovom slučaju, tvrdjenje Posledice 1.2.7 ostaje u važnosti.

Zapažanje. Pretpostavimo da A generiše eksponencijalno ograničenu k-puta integrisanu polugrupu, $k \in \mathbb{N}$. Tada je $\|R(\lambda : A)\| \leq M|\lambda|^k$, $Re\lambda > \omega$, za neko $\omega > 0$. Ako je K eksponencijalno ograničena funkcija takva da je $\left|\tilde{K}(\lambda)\right| \leq \frac{M_1}{|\lambda|^{k+1}}$, $Re\lambda > \omega$, tada Posledica 1.2.7 povlači da A takodje generiše eksponencijalno ograničenu $(K *_0 f_{\alpha-1})$-polugrupu za sve $\alpha > 1$. Ovo implicira da apstraktni Cauchyjev problem

$$\begin{cases} u \in C^1([0,\infty); E) \cap C([0,\infty),; D(A)) \\ u'(t) = Au(t) + (K *_0 f_\alpha)(t)x, \ t \geq 0, \\ u(0) = 0, \end{cases}$$

ima jedinstveno rešenje za sve $x \in E$ i $\alpha > 1$. Naše zapažanje se može uporediti sa Posledicom 3.2.11 u [6].

Za dalji rad su nam neophodni neki osnovni pojmovi iz teorije ultradistribucija. Neka je $(M_p)_{p\in\mathbb{N}_0}$ niz pozitivnih brojeva takav da je $M_0 = 1$ i da su ispunjeni sledeci uslovi:
$(M.1)$ $M_p^2 \leq M_{p+1}M_{p-1}$, $p \in \mathbb{N}$,
$(M.2)$ $\sup_{p+q=n} M_pM_q \leq AH^nM_n$, $n \in \mathbb{N}$ (za neke $A, H > 0$),
$(M.3)'$ $\sum_{p=1}^{\infty} M_{p-1}/M_p < \infty$.

Niz $(p!^s)_p$, $s > 1$, zadovoljava sve navedene uslove. Asocirana funkcija niza M_p je definisana sa $M(\rho) := \sup_{p\in\mathbb{N}} \ln \rho^p/M_p$, $\rho > 0$; $M(0) := 0$, i ona igra važnu ulogu u Laplaceovoj transformaciji ultradistribucija. Ako je $\lambda \in \mathbb{C}$, onda definišemo $M(\lambda) := M(|\lambda|)$. Više detalja ćemo dati nešto kasnije, sada nam je uvedena notacija potrebna za sledeću jednostavnu posledicu.

Posledica 1.2.8. *Neka je A zatvoren linearan operator takav da je $\{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda > \omega\} \subset \rho(A)$ i da za neko $\tilde{r} \in \mathbb{R}$ i svako $q \in \mathbb{R}$ postoji $C_0 > 0$ takvo da je*

$$||R(\lambda : A)|| \leq C_0|\lambda|^q e^{M(\tilde{r}|\lambda|)}, \ Re\lambda > \omega.$$

Pretpostavimo da K zadovoljava (P1) *i da je $\alpha > 1$ kao i da za sve $r \geq \tilde{r}$ i neko $p \in \mathbb{R}$ postoje $a > 0$ i $C > 0$ takvi da je*

$$|\tilde{K}(\lambda)| \leq C|\lambda|^p e^{-M(r|\lambda|)}, \ Re\lambda > a.$$

Tada je A generator eksponencijalno ograničene K-polugrupe.

1.3. Θ-konvolucioni Cauchyjev problem

Definicija 1.3.1. Θ-konvolucioni Cauchyjev problem

$$(\Theta):\begin{cases} u\in C^1([0,\tau);E)\cap C([0,\tau);D(A)) \\ u'(t)=Au(t)+\Theta(t)x,\ 0\leq t<\tau \\ u(0)=0 \end{cases}$$

je dobro postavljen ako za sve $x\in E$ postoji jedinstveno rešenje za (Θ). Ako je $\tau=\infty$, tada je (Θ) eksponencijalno dobro postavljen ako je dobro postavljen i ako je svako rešenje od (Θ) eksponencijalno ograničeno. Ovde je $D(A)$ opremljen graf normom $\|x\|_A=\|x\|+\|Ax\|$.

Čak i u slucaju $K=f_k$, $k\in\mathbb{N}$, dobra postavljenost (Θ) problema ne implicira eksponencijalno dobru postavljenost za (Θ), videti [2], Poglavlje 5.
Sledeća propozicija uopštava Propoziciju 5.3 datu u radu [2].

Propozicija 1.3.2. (i) *Pretpostavimo da K zadovoljava* (P1) *i da je za svako* $\varepsilon>0$

$$\frac{1}{|\tilde{K}(\lambda)|}=O(e^{\varepsilon|\lambda|}),\ \lambda\to+\infty. \tag{9}$$

Ako A generiše eksponencijalno ograničenu K-polugrupu, tada je (Θ) *eksponencijalno dobro postavljen.*

(ii) *Neka je $K\in L^1_{loc}([0,\infty))$. Ako je* (Θ) *eksponencijalno dobro postavljen, tada A generiše eksponencijalno ograničenu Θ-polugrupu.*

Dokaz. (i) Pretpostavimo najpre da je S_K K-polugrupa generisana sa A. Tada je

$$u(t,x):=\int_0^t S_K(s)x ds,\ t\geq 0,\ x\in E,$$

eksponencijalno ograničeno rešenje za (Θ). Jedinstvenost je posledica Ljubićeve teoreme (videti na primer [2]), mada se mogu iskoristiti i argumenti dati u Lemi 1.1 i Teoremi 1.2 datih u četvrtom poglavlju knige [74], jer gustina operatora A nije upotrebljena u njihovom dokazu. Uslov (9) je potreban da bi se pokazalo da je za svako $\sigma>0$,

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{||R(\lambda:A)||}{e^{\sigma\lambda}}=0.$$

Jedinstvenost (Θ)-problema za $x=0$ sledi kao u [74]; jasno, to implicira da je (Θ)-problem dobro postavljen.

(ii) Pretpostavimo sada da je (Θ) eksponencijalno dobro postavljen i da K zadovoljava navedeni uslov. Definišimo $S_\Theta(t)x:=u(t,x)$, $t\geq 0$, $x\in E$, gde je u resenje za (Θ). Jasno,

$$A\int_0^t S_\Theta(s)x ds=S_\Theta(t)x-\int_0^t\Theta(s)x ds,\ t\geq 0.$$

Koristeći iste argumente kao u dokazu Propozicije 5.3 u [2] imamo neprekidnost preslikavanja $t\mapsto u(t)$. Na osnovu prethodne definicije, za svako $x\in E$ postoje

$M_x,\ \omega_x > 0$ takvi da je

$$||S_\Theta(t)x|| \leq M_x e^{\omega_x t},\ t \geq 0.$$

Upotrebom principa globalne eksponencijalne ograničenosti datog u Propoziciji 5.4 u [2], može se pokazati da je S_Θ globalno eksponencijalno ograničena. Kao u Propoziciji 3.1(c) u [2], imamo $S_\Theta(t)A \subset AS_\Theta(t),\ t \geq 0$. Dakle, $(S_\Theta(t))_{t\geq 0}$ je Θ-polugrupa generisana sa A.

Zapažanje. Ako je (Θ) eksponencijalno dobro postavljen i ako je K eksponencijalno ograničena funkcija, tada je $\lambda \mapsto \tilde{K}(\lambda)R(\lambda : A),\ Re\lambda > a$ Laplaceova transformacija jako neprekidne familije operatora $(S(t))_{t\geq 0}$, koja ne mora biti eksponencijalno ograničena. Verifikacija ovog tvrdjenja se može dobiti kao u [3]. Primetimo da u ovom slučaju $\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)dt$ postoji u poluravni (videti [3]).

Navedimo sada još neke komentare vezane za dobru postavljenost (Θ)-problema. Pretpostavimo da je (Θ) dobro postavljen i $0 < \tau \leq \infty$. Tada postoji jedinstvena nedegenerisana jako neprekidna funkcija $S : [0,\tau) \to L(E)$ takva da je za sve $x \in E$, $\int\limits_0^t S(s)xds \in D(A)$ i da važi (1). Dokaz je analogan dokazima Propozicije 2.3 u [2] i Teoreme 2.4, $(i) \to (ii)$, [92]. Koristeći iste argumente kao u Teoremi 2.4, [92], $(ii) \to (iii)$, imamo $S(t)A \subset AS(t),\ t \in [0,\tau)$. Dakle, ako je (Θ) dobro postavljen za A $(0 < \tau \leq \infty)$, onda A generiše (lokalnu) K-polugrupu na $[0,\tau)$.

Dalje, pretpostavimo da je (Θ) dobro postavljen i $K \in C^k([0,\tau);\ \mathbb{C}),\ k \in \mathbb{N}$. Tada za sve $x \in D(A^{k+1})$ postoji jedinstveno rešenje sledećeg problema

$$(\Theta_k) : \begin{cases} u \in C^1([0,\tau);E) \cap C([0,\tau);D(A)) \\ u'(t) = Au(t) + \frac{d^k}{dt^k}K(t)x \\ u(0) = \sum\limits_{i=0}^{k-1} K^{(i)}(0)A^{k-1-i}x. \end{cases}$$

Dokaz će biti dat kasnije u slučaju konvolucionih C-polugrupa.

1.4. Perturbacije

Sledeća teorema je prvi značajniji rezultat ove disertacije. Ona uopštava perturbacionu teoremu za generatore eksponencijalno ograničenih integrisanih polugrupa u Banachovim prostorima (videti [70] i [71]).

Teorema 1.4.1. *Pretpostavimo da A generiše K-polugrupu $(S_K(t))_{t\geq 0}$ koja zadovoljava $\|S_K(t)\| \leq Me^{\omega t}$, $t \geq 0$, za neko $\omega \in \mathbb{R}$ i $M > 0$. Pretpostavimo da je $B \in L(\overline{D(A)})$ i da je $R(\lambda : A)B = BR(\lambda : A)$, za sve dovoljno velike $\lambda \in \mathbb{R}$. Pretpostavimo i:*

1. *Postoji nenegativan ceo broj n_0 takav da je* $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \|R(\lambda : A)^{n_0+1}\| = 0.$

2.

(a) $\Gamma_n \in \mathcal{LT}(\mathbb{C})$, *gde je* $\Gamma_n = \tilde{K}\frac{d^n}{dz^n}(1/\tilde{K})$, $n \in \mathbb{N}$;

(b) *Postoje* $C > 0$ *i* $\gamma \in \mathbb{R}$ *takvi da je* $\sup_{n\geq 1} \|e^{-\gamma t}K_n\|_\infty \leq C$, *gde je* $K_n = \mathcal{L}^{-1}(\Gamma_n)$.

Tada je $A + B$ *generator eksponencijalno ograničene* K*-polugrupe* $(S_K^B(t))_{t\geq 0}$, *date sa*

$$S_K^B(t) := e^{tB}S_K(t) + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{i}\frac{B^i}{i!}(-1)^n\binom{i}{n}\int_0^t K_n(t-s)s^{i-n}S_K(s)ds.$$

Važi i sledeća procena: $\left\|S_K^B(t) - e^{tB}S_K(t)\right\| = O(te^{(\|B\|+\max(\omega,\gamma))t})$.

Sledeći uslov povlači ispunjenost uslova 1. Specijalno, dati uslov važi za funkcije $K = f_{k-1}$, $k \in \mathbb{N}$, što je trivijalno proveriti.

Lema 1.4.2. *Pretpostavimo da postoji nenegativan ceo broj* n_0 *takav da je*

$$\left|\frac{d^i}{d\lambda^i}\left[\frac{1}{\tilde{K}(\lambda)}\right]\right| = o(\lambda^{n_0-i+1}),\ \lambda \to +\infty,\ i = 0, \ldots, n_0.$$

Tada je

$$\|R(\lambda : A)^{n_0+1}\| \to 0,\ \lambda \to +\infty.$$

Dokaz. Neka je $x \in E$. Jasno, za sve dovoljno velike vrednosti λ važi

$$\begin{aligned}\|n_0!R(\lambda : A)^{n_0+1}x\| &= \left\|\frac{d^{n_0}}{d\lambda^{n_0}}\left[\frac{1}{\tilde{K}(\lambda)}\int_0^\infty e^{-\lambda t}S_K(t)xdt\right]\right\| \\ &= \left\|\sum_{i=0}^{n_0}\binom{n_0}{i}(-1)^{n_0-i}\frac{d^i}{d\lambda^i}\left[\frac{1}{\tilde{K}(\lambda)}\right]\int_0^\infty e^{-\lambda t}t^{n_0-i}S_K(t)xdt\right\| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n_0}\binom{n_0}{i}Mo(\lambda^{n_0-i+1})\frac{(n_0-i)!}{(\lambda-\omega)^{n_0-i+1}}\|x\|.\end{aligned}$$

Dakle, (λ dovoljno veliko)

$$\|R(\lambda : A)^{n_0+1}\| \leq M_1\sum_{i=0}^{n_0}\frac{1}{i!}\frac{o(\lambda^{n_0-i+1})}{(\lambda-\omega)^{n_0-i+1}},\ \text{za neko } M_1 > 0.$$

Zapažanje. Uslove Teoreme 16 zadovoljava funkcija $K = \mathcal{L}^{-1}(\frac{a}{p_k(\lambda)})$, gde je p_k polinom stepena $k \in \mathbb{N}$ i $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Tada je $n_0 = k$ i $K_n \equiv 0$, $n \geq k+1$.

Sada ćemo pokazati da uslovi perturbacione teoreme važe i za široku klasu funkcija koja je blisko povezana sa teorijom pseudodiferencijalnih operatora i specijalno sa hipoeliptičnim glatkim simbolima.

Zapažanje. Neka je $n_0 > 1$ i neka je P analitička funkcija na $\{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda > \lambda_0\}$ za neko $\lambda_0 \geq 1$. Pretpostavimo da je $P(\lambda) \neq 0$, $Re\lambda > \lambda_0$, i da postoji $C > 0$ sa:

$$|P(\lambda)| \geq C|\lambda|^{n_0},\ Re\lambda > \lambda_0, \tag{10}$$

$$\left|\frac{d^i}{d\lambda^i}P(\lambda)\right| \leq C|\lambda|^{-i}|P(\lambda)|,\ Re\lambda > \lambda_0,\ i \in \mathbb{N}, \tag{11}$$

$$\frac{P'}{P} \in \mathcal{LT}(\mathbb{C}). \tag{12}$$

Pokazaćemo da uslov 2. važi za funkciju $K = \mathcal{L}^{-1}(1/P)$.
Najpre, pretpostavka (10) i Propozicija A (sa $\alpha = n_0$) impliciraju postojanje funkcije $K \in C([0,\infty); E)$, $K(0) = 0$, takve da je $K(t) \leq Me^{\lambda_0 t}$, $t \geq 0$, za neko $M > 0$ i

$$\mathcal{L}(K)(\lambda) = 1/P(\lambda),\ Re\lambda > \lambda_0.$$

Kako smo već pretpostavili (12), sa notacijom $K_j = \mathcal{L}^{-1}(\Gamma_j) = \mathcal{L}^{-1}(P^{(j)}/P)$, $j = 2,3,...$, (funkcija $P^{(j)}/P$ je element skupa $\mathcal{LT}(\mathbb{C})$ za sve prirodne brojeve $j \geq 2$; naime, pretpostavka (11) povlači

$$|P^{(j)}(\lambda)/P(\lambda)| \leq C|\lambda|^{-j},\ Re\lambda > \lambda_0,$$

i treba samo primeniti Propoziciju A da bi zaključili (a)) je dovoljno pokazati da postoji $C_1 > 0$ takvo da je

$$|K_j(t)| = |\mathcal{L}^{-1}(\frac{P^{(j)}(\lambda)}{P(\lambda)})(t)| \leq C_1 e^{\lambda_0 t},\ t \geq 0,\ j = 2,3,.... \tag{13}$$

Neka je $\bar{\lambda}_0 > \lambda_0$. Stavimo za $j = 2,3,...$

$$K_j(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\bar{\lambda}_0 - i\infty}^{\bar{\lambda}_0 + i\infty} e^{\mu t}\frac{P^{(j)}(\mu)}{P(\mu)}d\mu,\ t \geq 0.$$

Tada je (za $j \geq 2$),

$$|K_j(t)| \leq \frac{1}{2\pi}e^{\bar{\lambda}_0 t}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{C}{(\bar{\lambda}_0^2 + s^2)^{j/2}}ds \leq C/2\pi e^{\bar{\lambda}_0 t}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\bar{\lambda}_0^2 + s^2)}ds,\ t \geq 0.$$

Puštajući $\bar{\lambda}_0 \to \lambda_0$, imamo (13) i (b).

Napomenimo da se u teoriji pseudodiferencijalnih operatora glatki simbol P naziva hipoeliptičan ako i samo ako važi uslov (10) (sa dodatnom pretpostavkom: $|P(\lambda)| \leq |\lambda|^r$, $r \in \mathbb{R}$) dok uslov (11) važi za sve $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq M\}$ i neko $M > 0$.

Dokaz Teoreme 1.4.1. Označimo $R_\lambda = R(\lambda : A)$, ako $\lambda \in \rho(A)$. Lema 1.4.2 daje $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \|(BR_\lambda)^{n_0+1}\| = 0$. Stoga je $1 \in \rho((BR_\lambda)^{n_0+1})$ i $1 \in \rho(BR_\lambda)\cap\rho(A+B)$ za sve dovoljno velike λ.
Koristeći 2., lako je proveriti da je $(S_K^B(t))_{t\geq 0}$ dobro definisana, jako neprekidna i eksponencijalno ograničena familija operatora. Račun

$$R(\lambda : A+B)x = R_\lambda(1 - BR_\lambda)^{-1}x = \sum_{i\geq 0} B^i R_\lambda^{i+1}x$$
$$= \sum_{i\geq 0} B^i \tfrac{(-1)^i}{i!}\tfrac{d^i}{d\lambda^i}\left[\tfrac{1}{K(\lambda)}\int_0^\infty e^{-\lambda t}S_K(t)xdt\right]$$
$$= \sum_{i\geq 0}\tfrac{(-1)^i}{i!}B^i(\tfrac{(-1)^i}{K(\lambda)}\int_0^\infty e^{-\lambda t}t^i S_K(t)xdt$$
$$+ \sum_{n=1}^{i}(-1)^{i-n}\tbinom{i}{n}\tfrac{d^n}{d\lambda^n}\left[\tfrac{1}{K(\lambda)}\right]\int_0^\infty e^{-\lambda t}t^{i-n}S_K(t)xdt)$$
$$= \tfrac{1}{K(\lambda)}\int_0^\infty e^{-\lambda t}e^{tB}S_K(t)xdt$$
$$+ \sum_{i\geq 1}\tfrac{(-1)^i}{i!}B^i\sum_{n=1}^{i}(-1)^{i-n}\tbinom{i}{n}\tfrac{d^n}{d\lambda^n}\left[\tfrac{1}{K(\lambda)}\right]\int_0^\infty e^{-\lambda t}t^{i-n}S_K(t)xdt$$

$= \frac{1}{\tilde{K}(\lambda)}(\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}e^{tB}S_K(t)xdt$

$+\sum\limits_{i\geq 1}\sum\limits_{n=1}^{i} \frac{(-1)^n}{i!}B^i\binom{i}{n}\tilde{K}(\lambda)\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[\frac{1}{\tilde{K}(\lambda)}\right]\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}t^{i-n}S_K(t)xdt)$

$= \frac{1}{\tilde{K}(\lambda)}(\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}e^{tB}S_K(t)xdt$

$+\sum\limits_{i\geq 1}\sum\limits_{n=1}^{i} \frac{(-1)^n}{i!}B^i\binom{i}{n}\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}((\cdot)^{i-n}S_K(\cdot)x *_0 K_n)(t)dt)$

$= \frac{1}{\tilde{K}(\lambda)}\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}S_K^B(t)xdt,\ x\in E,\ \lambda$ dovoljno veliko,

implicira da je $(S_K^B(t))_{t\geq 0}$ eksponencijalno ograničena K-polugrupa generisana sa $A+B$. Da bi pokazali nejednakost iz drugog dela teoreme, možemo bez smanjenja opštosti pretpostaviti $\omega \geq \gamma$. Korišćenje sledećih procena

$\left\|S_K^B(t) - e^{tB}S_K(t)\right\| \leq CM\sum\limits_{i\geq 1}\sum\limits_{n=1}^{i}\frac{\|B\|^i}{i!}\binom{i}{n}\int\limits_0^t e^{\gamma(t-s)}s^{i-n}e^{\omega s}ds$

$\leq CMe^{\gamma t}\sum\limits_{i\geq 1}\sum\limits_{n=1}^{i}\frac{\|B\|^i}{i!}\binom{i}{n}\int\limits_0^t s^{i-n}e^{(\omega-\gamma)s}ds$

$\leq CMe^{\gamma t}\sum\limits_{i\geq 1}\sum\limits_{n=1}^{i}\frac{\|B\|^i}{i!}\binom{i}{n}t^{i-n+1}e^{(\omega-\gamma)t} \leq CMe^{\omega t}\sum\limits_{i\geq 1}\sum\limits_{n=1}^{i}\frac{\|B\|^i}{i!}\binom{i}{n}t^{i-n+1}$

$\leq CMte^{\omega t}\sum\limits_{i\geq 1}\frac{\|B\|^i}{i!}t^i\sum\limits_{n=1}^{i}\binom{i}{n}t^{-n} \leq CMte^{\omega t}\sum\limits_{i\geq 1}\frac{\|B\|^i}{i!}t^i\frac{(t+1)^i}{t^i} \leq \overline{C}te^{(\|B\|+\omega)t},\ t>0,$

završava dokaz.

Zapažanje. Pretpostavka 1. se može zameniti sa:
1°: postoji prirodan broj n takav da je $1\in\rho((BR(\lambda:A))^n)$, za sve dovoljno velike $\lambda\in\mathbb{R}$.

Stavljajući $k\in\mathbb{N}$, $K(t)=\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}$, $M=k!$, $\omega=1$, $n_0=k+1$ i

$$K_n(t) = \begin{cases} 0 & ,\ n>k \\ n\binom{k}{n}t^{n-1} & ,\ 1\leq n\leq k \end{cases}$$

dobijamo

Posledica 1.4.3. *Neka je A generator k-puta integrisane polugrupe $(S(t))_{t\geq 0}$ koja zadovoljava $\|S(t)\|\leq Me^{\omega t}$, $t\geq 0$ (za neko $\omega, M>0$). Pretpostavimo da za $B\in L(\overline{D(A)})$ važi $R(\lambda:A)B=BR(\lambda:A)$, za sve dovoljno velike $\lambda\in\mathbb{R}$. Tada $A+B$ generiše eksponencijalno ograničenu k-puta integrisanu polugrupu $(S^B(t))_{t\geq 0}$, datu sa*

$$S^B(t) = e^{tB}S(t) + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{i}\frac{B^i}{i!}(-1)^n n\binom{i}{n}\binom{k}{n}\int\limits_0^t (t-s)^{n-1}s^{i-n}S(s)ds,\ t\geq 0.$$

Lako je pokazati da se prethodna formula može zapisati u sledećem vidu:

$$S^B(t) = e^{tB}S(t) + \sum_{i\geq 1}\binom{k}{i}(-B)^i\int\limits_0^t \frac{(t-s)^{i-1}}{(i-1)!}e^{Bs}S(s)ds,\ t\geq 0.$$

Napomenimo da se u [91] mogu pronaći perturbacioni rezultati za generatore eksponencijalno ograničenih integrisanih polugrupa u sekvencijalno kompletnim lokalno konveksnim prostorima. Oni su jednostavne preformulacije odgovarajućih rezultata u slučaju da je prostor E Banachov. I naš rezultat se može lako preformulisati u ovom svetlu; zbog jednostavnosti su detalji ovde izostavljeni.

1.5. Primeri eksponencijalno ograničenih K-polugrupa

U ovom delu ćemo dati puno primera eksponencijalno ograničenih konvolucionih polugrupa. U narednom primeru operator A je povezan sa 'obrnutom talasnom jednačinom' na L^p prostorima. Analiza date jednačine na L^2 prostorima nije nimalo jednostavnija od odgovarajuće analize na L^p prostorima, što nije slučaj sa velikom klasom jednačina medju koje spada i Schrödingerova jednačina.

Primer 1.5.1. Neka je $A := -\Delta$ na $E = L^2[0,\pi]$ sa Dirichletovim ili Neumannovim graničnim uslovima. Stavimo

$$h(\lambda) := \frac{1}{\lambda^2}\prod_{n=0}^{\infty}\frac{n^2-\lambda}{n^2+\lambda},\ Re\lambda > 0.$$

Lako je na osnovu Propozicije A zaključiti da postoji eksponencijalno ograničena neprekidna funkcija K takva da je $\tilde{K}(\lambda) = h(\lambda)$, $Re\lambda > 0$. Bäumer je pokazao u [11] sledeću procenu

$$||\tilde{K}(\lambda)R(\lambda : A)|| \leq \frac{C + |\frac{1}{\lambda}|}{|\lambda|^2},\ \text{ako je } Re\lambda > 0,\ \tilde{K}(\lambda) \neq 0.$$

Takodje, funkcija

$$\lambda \mapsto \tilde{K}(\lambda)R(\lambda : A),\ Re\lambda > 0 \text{ i } \tilde{K}(\lambda) \neq 0,$$

se može analitički produžiti na desnu poluravan funkcijom $\Upsilon : \{z \in \mathbb{C} : Rez > 0\} \to \mathbb{C}$ koja zadovoljava

$$|\Upsilon(\lambda)| \leq \frac{C + |\frac{1}{\lambda}|}{|\lambda|^2},\ Re\lambda > 0.$$

Propozicija A implicira da postoji neprekidna funkcija $S_K : [0,\infty) \to L(E)$ takva da je za sve $\varepsilon > 0$, $||S_K(t)|| = O(e^{\varepsilon t})$ i

$$\Upsilon(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}S_K(t)dt,\ Re\lambda > 0.$$

Na osnovu dokaza Teoreme 1.12 u [91], za svako $r > 0$ imamo

$$S_K(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{r-i\infty}^{r+i\infty} e^{\lambda t}\Upsilon(\lambda)d\lambda,\ t \geq 0.$$

Fiksirajmo $t > 0$. Sa $r = 1/t$ dobijamo $||S_K(t)|| \leq C(1+t^3)$, gde konstanta $C > 0$ ne zavisi od t. Teorema 1.2.2 daje: $(S_K(t))_{t\geq 0}$ je polinomski ograničena K-polugrupa generisana sa A.

Na osnovu toga zaključujemo da odgovarajuća 'backwards heat equation' na $L^2[0,\pi]$ može biti razmotrena u kontekstu eksponencijalno ograničenih konvolucionih polugrupa. Analiza date jednačine se može dati korišćenjem regularizacionih metoda i lokalnih C-polugrupa (za ovaj pristup videti [65], Primer 1.4.4, str. 79).
Da izbor oblasti definisanosti operatora A nekada predstavlja suštinsko pitanje pokazuje i rezultat da $-\Delta$ i domenom $W^{2,p}(\Omega)\bigcap W_0^{1,p}(\Omega)$ ($1 \leq p < \infty$, Ω je neprazan otvoren ograničen skup u $\mathbb{R}^n$) generiše celu C-grupu na $L^p(\Omega)$ za neki injektivni operator $C \in L(L^p(\Omega))$ ([23], Primer 8.6).

Sada ćemo pokazati da se analiza nekih nehomogenih Schrödingerovih jednačina na L^p prostorima može lakše uraditi primenom eksponencijalnih konvolucionih polugrupa nego primenom teorije integrisanih polugrupa. U sledećem primeru nije upotrebljena nijedna teorema koja se odnosi na dobru postavljenost nehomogenog apstraktnog Cauchyjevog problema. Ukoliko se dati problem rešava teorijom integrisanih polugrupa, onda je neophodno upotrebiti takvu vrstu teorema.

Primer 1.5.2. Neka je $E = L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, k, $n \in \mathbb{N}$, $k \geq n\left|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right|$.
Dobro je poznato ([7]) da Schrödingerov operator $A = i\Delta$ sa maksimalnim distribucionim domenom u E zadovoljava $\sigma(A) \subset i\mathbb{R}$ i $\|R(\lambda : A)\| \leq M\frac{|\lambda|^k}{|Re\lambda|^{k+1}}$, $Re\lambda \neq 0$.
U cilju jednostavnosti, pretpostavićemo u nastavku: $p = 3$ i $1 \leq n \leq 6$.
Izaberimo $K(t) = \sin t$. Lako je pokazati: $\left\|\tilde{K}(\lambda)R(\lambda : A)\right\| \leq \frac{M_1}{|\lambda|}$, $Re\lambda \geq 1$.
Upotrebom Posledice 1.2.7 lako se pokazuje da A generiše eksponencijalno ograničenu $(1-\cos t)$-polugrupu na $L^3(\mathbb{R}^n)$. Propozicija 1.2.3 i Teorema 1.4.1 povlače da operator $A + z + B$ takodje generiše eksponencijalno ograničenu $(1-\cos t)$-polugrupu na $L^3(\mathbb{R}^n)$, gde je $Bf = \psi * f$, $f \in L^3(\mathbb{R}^n)$ i $\psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ je fiksiran. Stoga problem

$$(P): \begin{cases} u \in C^1([0,\infty); L^3(\mathbb{R}^n)) \cap C([0,\infty); W^{2,3}(\mathbb{R}^n)) \\ u_t(t,x) = (i\Delta_x)u(t,x) + zu(t,x) + \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x-y)u(t,y)dy + (t - \sin t)f(x) \\ u(0,x) = 0,\ x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

ima jedinstveno rešenje za sve $\psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $z \in \mathbb{C}$, $f \in L^3(\mathbb{R}^n)$ i $1 \leq n \leq 6$.

Naredni primer Kunstmanna ([51]) je ovde neznatno promenjen i upotrebljen za primenu Posledice 1.2.8. Nizovi $(M_p)_p$ su ovde nešto drugačiji u odnosu na originalnu verziju Kunstmanna.

Primer 1.5.3. Neka je $(M_p)_p$ niz pozitivnih brojeva koji zadovoljava $(M.1)$, $(M.2)$, $(M.3)'$ i $M(0) = 1$.
Definišimo

$$E_{M_p} := \left\{ f \in C^\infty[0,1] : \|f\|_{M_p} := \sup_{p\geq 0} \frac{\|f^{(p)}\|_\infty}{M_p} < \infty \right\},$$

i

$$A_{M_p} := -d/ds, \quad D(A_{M_p}) = \{f \in E_{M_p} : f' \in E_{M_p}, f(0) = 0\}.$$

Moguće je iskoristiti slične argumente kao u Primeru 1.6 iz [51] da se pokaže da A_{M_p} nije stacionarno gust operator. Dakle, A_{M_p} ne može biti generator (lokalne) integrisane polugrupe. Na osnovu Teoreme 3.5 date u [51], A_{M_p} ne može generisati (DSG). Važi

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda \geq 0\} \subset \rho(A_{M_p}) \text{ i}$$

$$||R(\lambda : A_{M_p})|| \leq Ce^{M(\tilde{r}|\lambda|)}, \; Re\lambda \geq 0, \quad \text{za neke } C, \; \tilde{r} > 0.$$

Posledica 1.2.8 implicira da je A_{M_p} generator eksponencijalno ograničene K-polugrupe, gde je K bilo koja funkcija koja zadovoljava (P1) i

$$|\tilde{K}(\lambda)| = O(e^{-M(r|\lambda|)}), \; |\lambda| \to \infty, \text{ za neko } r > \tilde{r}.$$

Ako je $M_p = p!^2$, $p \in \mathbb{N}_0$, onda asocirana funkcija $M(\cdot)$ zadovoljava procenu $e^{M(x)} \leq e^{m_1|x|^{1/2}}$, $x \geq 0$, za neko $m_1 > 0$ ([41]).
1. Funkcija $K(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{a^2}{4t}}$, $t > 0$ je ograničena i glatka na $(0, \infty)$. Njena Laplaceova transformacija je data sa $\tilde{K}(\lambda) = e^{-a\sqrt{\lambda}}$, $Re\lambda > 0$ ($\sqrt{1} = 1$). Standardni argumenti daju

$$||\tilde{K}(\lambda)R(\lambda : A)|| \leq Ce^{(m_1 - \frac{a\sqrt{2}}{2})|\lambda|^{1/2}}, \; Re\lambda > 0.$$

Posledica 1.2.7 pokazuje da je u slučaju $m_1 < \frac{a\sqrt{2}}{2}$, A_{M_p} generator eksponencijalno ograničene K−polugrupe $(S_K(t))_{t\geq 0}$ na E_{M_p}. U radu [48] je pokazano $||S_K(t)|| = O(t^k)$, $k \in \mathbb{N}_0$; specijalno, $(S_K(t))_{t\geq 0}$ je globalna ograničena K-polugrupa.
Slično, ako je $m_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, tada A_{M_p} generiše polinomski ograničenu $(K *_0 f_\alpha)$−polugrupu na E_{M_p} za sve $\alpha > 1$.
2. U ovom primeru možemo upotrebiti i specijalnu funkciju $erfc(\frac{1}{2\sqrt{t}})$, $t > 0$, gde je $erfc(t) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_t^\infty e^{-x^2} dx$ ($t \in \mathbb{R}$) dobro poznata komplementarna funkcija greške ([48]). Primetimo da je

$$erfc(\frac{1}{2\sqrt{t}}) = \int_0^t K_{1/2}(s)ds, \; t \geq 0$$

i da je ispunjena asimptotska formula

$$erfc(t) \sim \frac{e^{-t^2}}{t\sqrt{\pi}}(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n t^{2n}}), \; t \to +\infty;$$

zbog toga je

$$erfc(\frac{1}{2\sqrt{t}}) \sim \frac{2\sqrt{t}e^{-\frac{1}{4t}}}{\sqrt{\pi}}(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)!!(-2t)^n), \; t \to 0+.$$

Primer 1.5.4. Pretpostavimo sada da je $M_p = p!$. Tada $(M.3)'$ ne važi, ali ćemo nastaviti da razmatramo Banachov prostor $E = E_{p!}$ i zatvoren linearan operator $A = A_{p!}$ na njemu, gde je notacija potpuno ista kao u prethodnom primeru. Neka je C injektivni operator u $L(E)$. Primetimo da je (videti, na primer, [41]) E potprostor prostora svih funkcija analitičkih u nekoj okolini zatvorenog intervala $[0,1]$. U nastavku nećemo pretpostaviti da je $R(C)$ gust u E.

Pokazaćemo da A ne može biti infinitezimalni generator neke $C-$polugrupe, iako je $\{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda > 0\} \subset \rho(A)$ i $||R(\lambda : A)|| \leq Me^{|\lambda|}$, $Re\lambda > 0$.
Pretpostavimo da je A generator C-polugrupe $(S(t))_{t\geq 0}$ na E. Poznato je da tada mora biti ispunjena sledeća jednakost

$$A\int_0^t S(s)f ds = S(t)f - Cf, \; t \geq 0, \; f \in E.$$

Neka je $f \in D(A)$ i $u_f(t,x) := [S(t)f](x)$, $t \geq 0$, $x \in [0,1]$. Lako je videti da je u_f rešenje sledećeg problema

$$(P): \begin{cases} u \in C^1([0,\infty) \times [0,1]) \\ u_x + u_t = 0 \\ u(0,x) = [Cf](x). \end{cases}$$

Ovaj problem se može rešiti elementarnim metodama karakteristika; tako dobijamo

$$[S(t)f](x) = \begin{cases} 0 & , \; 0 \leq x \leq t \\ [Cf](x-t) & , \; 1 \geq x > t. \end{cases}$$

Ovo povlači $[Cf]^{(i)}(0) = 0$, za sve $i \in \mathbb{N}_0$ i $f \in D(A)$. Dakle, $Cf = 0$ za sve $f \in D(A)$, što je kontradikcija sa injektivnošću operatora C.

Primetimo da je konstrukcija eksponencijalnih konvolucionih polugrupa u prethodnom primeru nemoguća (videti [48] i [56], str. 40).

1.6. Ultradistribucione polugrupe

Čitaoca najpre upućujemo na [21], [15], [41] i [42] za različite pristupe teoriji ultradistribucija. Ako (M.1), (M.2) i (M.3)' važe za niz $(M_p)_p$, tada definišemo ultradiferencijabilne funkcije Beurlingovog, respektivno, Roumieuovog tipa, na sledeći način $\mathcal{D}^{(M_p)} = \mathcal{D}^{(M_p)}(\mathbb{R}) = \text{ind}\lim_{K \subset\subset \mathbb{R}} \mathcal{D}_K^{(M_p)}$, respektivno, $\mathcal{D}^{\{M_p\}} = \mathcal{D}^{\{M_p\}}(\mathbb{R}) = \text{ind}\lim_{K \subset\subset \mathbb{R}} \mathcal{D}_K^{\{M_p\}}$, gde je $\mathcal{D}_K^{(M_p)} = \text{proj}\lim_{h \to \infty} \mathcal{D}_K^{M_p,h}$, respektivno, $\mathcal{D}_K^{\{M_p\}} = \text{ind}\lim_{h \to 0} \mathcal{D}_K^{M_p,h}$ ($K \subset\subset \mathbb{R}$ označava kompaktan podskup od $\mathbb{R}$) i

$$\mathcal{D}_K^{M_p,h} = \{\phi \in C^\infty : \text{supp}\,\phi \subset K, \; ||\phi||_{M_p,h} < \infty\},$$

$$||\phi||_{M_p,h} = \sup\{\frac{h^p|\phi^{(s)}(x)|_\infty}{M_p}, \; x \in K, \; s \in \mathbb{N}_0\}.$$

Koristićemo notaciju $*$ za oba slučaja zagrada; označimo dalje
$\mathcal{D}'^*(E) := L(\mathcal{D}^*(\mathbb{R}); E)$ prostor neprekidnih linearnih funkcija iz $\mathcal{D}^*(\mathbb{R})$ sa vrednostima u E; $\mathcal{D}_0^*$ označava potprostor od $\mathcal{D}'^*(E)$ koji čine ultradistribucije $*$-klase i nosača sadržanog u $[0,\infty)$, dok $\mathcal{E}_0'^*$ označava prostor ultradistribucija $*$-klase koje imaju kompaktan nosač sadržan u $[0,\infty)$. Analiza datih prostora je izložena u [41] i [42].

Kako će nam u daljem radu biti neophodna strukturna reprezentacija ultradistribucija sa jednotačkastim nosačem ([42]), pretpostavićemo umesto uslova $(M.3)'$ nešto jači uslov $(M.3)$:

$(M.3)$ $\sum_{q=p+1}^{\infty} M_{q-1}/M_q \leq ApM_p/M_{p+1}$, $p \in \mathbb{N}$ (za neko $A > 0$).

Definisaćemo L-ultradistribucione polugrupe parafrazirajući pionirski rad Lionsa [60] i ultradistribucione polugrupe u smislu radova Kunstmanna [52] i Wanga [92].

Definicija 1.6.1. Element $\mathcal{G} \in \mathcal{D}'^*_+(L(E))$ je L-ultradistribuciona polugrupa $*-$klase ako su ispunjeni sledeći uslovi:

$$(U.1): \quad \mathcal{G}(\phi * \psi, \cdot) = \mathcal{G}(\phi, \ \mathcal{G}(\psi, \cdot)), \ \phi, \ \psi \in \mathcal{D}^*_0;$$

$$(U.2): \quad \mathcal{N}(\mathcal{G}) := \bigcap_{\phi \in \mathcal{D}^*_0} \mathcal{N}(\mathcal{G}(\phi, \cdot)) = \{0\}$$

$$(U.3): \quad \mathcal{R}(\mathcal{G}) := \bigcup_{\phi \in \mathcal{D}^*_0} R(\mathcal{G}(\phi, \cdot)) \text{ je gust u } E;$$

$$(U.4): \ (\forall x \in \mathcal{R}) \ (\exists u \in C([0, \infty); \ E))(u(0) = x) \ \mathcal{G}(\phi, x) = \int_0^\infty \phi(t)u(t)dt, \ \phi \in \mathcal{D}^*.$$

Lako je pokazati da je za svako $\mathcal{G} \in \mathcal{D}'^*_+(L(E))$ uslov

$$(U.5): \quad \operatorname{supp} \mathcal{G}(\cdot, x) \not\subseteq \{0\} \text{ za sve } x \in E \setminus \{0\},$$

ekvivalentan sa $(U.2)$.

Definicija 1.6.2. Neka je $\mathcal{G} \in \mathcal{D}'^*_+(L(E))$. Ako je ispunjen sledeći uslov:

$$(U.6): \quad \mathcal{G}(\phi *_0 \psi, \cdot) = \mathcal{G}(\phi, \ \mathcal{G}(\psi, \cdot)), \ \phi, \ \psi \in \mathcal{D}^*,$$

onda $\mathcal{G}$ nazivamo predultradistribucionom polugrupom $*$-klase, pre-(UDSG) kraće. Ako $(U.6)$ i $(U.2)$ važe za $\mathcal{G}$, onda $\mathcal{G}$ nazivamo ultradistribucionom polugrupom $*$-klase, (UDSG) kraće. Ako je $\mathcal{G}$ pre-(UDSG) $*$-klase, onda kažemo da je $\mathcal{G}$ gusta ako dodatno zadovoljava uslov $(U.3)$.

Kao u distribucionom slučaju, ako $(U.3)$ važi, tada su $(U.1)$, $(U.2)$ i $(U.4)$ ekvivalentni sa $(U.6)$ i $(U.2)$.
Ako je $\mathcal{G}$ pre-(UDSG) $*$-klase, tada je $\mathcal{N}(\mathcal{G})$ zatvoren potprostor u E.
U nastavku pišemo i $\mathcal{G}(\varphi)$ za $\mathcal{G}(\varphi, \cdot)$. Naredni primer je baziran na Primeru 2.3 u [52].

Primer 1.6.3. Neka je E Banachov prostor i neka je T ograničen linearan operator na E takav da postoje $C > 0$ i $L > 0$, resp., za sve $L > 0$ postoji $C > 0$, sa $||T^p|| \leq C\frac{L^p}{M_p}$, $p \in \mathbb{N}_0$. Tada je sa

$$\mathcal{G}(\phi) := \sum_{p=0}^{\infty} \phi^{(p)}(0)T^{p+1}, \ \phi \in \mathcal{D}^*,$$

data pre-(UDSG) $*$-klase koja zadovoljava $\mathcal{N}(\mathcal{G}) = E$. Provera je trivijalna i detalji su izostavljeni. Jasno, uslov $(U.5)$ ne važi. Primetimo da ne zahtevamo da je T nilpotentan operator kao u Primeru 2.3 u [52].

Lako je konstruisati operator T sa navedenim osobinama. Stavimo $M_p = p!^s$, $p \in \mathbb{N}_0$, gde je $s > 1$, $E = l_\infty$ i $T((x_n)_n) := (x_{n+1}/n^s)_n$, $(x_n)_n \in l_\infty$, $s > 1$. Tada je $\|T^p\| = p!^{-s}$, $p \in \mathbb{N}_0$. Definišimo $\mathcal{G}$ kao gore. Tada je $\mathcal{G}$ pre-(UDSG) Beurlingove klase i T nije nilpotentan operator.

Na primer, E. Borelova teorema za ultradiferencijabilne funkcije (videti [77]) implicira da postoji funkcija $f \in \mathcal{D}^*$ takva da je

$$f^{(n)}(0) = a_n \in \mathbb{C},\ n < n_0,\ a_n = 0,\ n \geq n_0.$$

Sada smo u mogućnosti da damo teoremu koja kompletno opisuje ponašanje neke pre-(UDSG) $*$-klase na njenom kernel prostoru $\mathcal{N}(\mathcal{G})$. Dokaz naredne propozicije je sličan dokazu Leme 2.2 iz [52]; izložićemo ga ovde u cilju kompletnosti.

Propozicija 1.6.4. *Neka je $\mathcal{G}$ pre-(UDSG) $*$-klase i $G := \mathcal{G}(\cdot)|_{\mathcal{N}(\mathcal{G})}$. Tada je G pre-(UDSG) $*$-klase na $\mathcal{N}(\mathcal{G})$ i postoji $T \in L(\mathcal{N}(\mathcal{G}))$ takav da postoje $C > 0$ i $L > 0$, resp., za sve $L > 0$ postoji $C > 0$, takvi da je*

$$\|T^{j+1}\| \leq C\frac{L^j}{M_j},\ j \in \mathbb{N}_0 \quad i\ G = \sum_{j=0}^{\infty} \delta^j \otimes (-1)^j T^{j+1}.$$

Dokaz. Jasno je da (U.6) implicira da je $\mathcal{N}(\mathcal{G})$ invarijanto u odnosu na $\mathcal{G}$ i da je G pre-(UDSG) $*$-klase na $\mathcal{N}(\mathcal{G})$ sa $\mathcal{N}(G) = \mathcal{N}(\mathcal{G})$. Lako je proveriti da je $\operatorname{supp} G \subset \{0\}$ i primena Teoreme 4.8 iz [42] daje postojanje niza $(T_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ u $L(E)$ takvog da postoje $C > 0$ i $L > 0$, resp., za sve $L > 0$ postoji $C > 0$, takvi da je

$$\|T_j\| \leq C\frac{L^j}{M_j},\ j \in \mathbb{N}_0,\ \text{ i } G = \sum_{j=0}^{\infty} \delta^j \otimes T_j.$$

Na osnovu (U.6) i

$$(\phi *_0 \varphi)^{(j)}(0) = \sum_{k=0}^{j-1} \phi^{(k)}(0)\varphi^{(j-1-k)}(0),\ \text{za sve } j \in \mathbb{N},$$

lako je pokazati

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{j-1}(-1)^j\phi^{(k)}(0)\varphi^{(j-1-k)}(0)T_j x = \sum_{j,k=0}^{\infty}(-1)^{j+k}\phi^{(j)}(0)\varphi^{(k)}(0)T_jT_k x,$$

za sve $x \in \mathcal{N}(\mathcal{G})$ i ϕ, $\varphi \in \mathcal{D}^*$. Izaberimo $\phi \in \mathcal{D}^*$ sa $\phi(0) = 1$ i $\phi^{(j)}(0) = 0$, $j \in \mathbb{N}$; dobijamo

$$\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\varphi^{(j-1)}(0)T_j x = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\varphi^{(j)}(0)T_0T_j x,\ x \in \mathcal{N}(\mathcal{G}),\ \varphi \in \mathcal{D}^*.$$

Sada možemo izabrati niz $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ u $\mathcal{D}^*$ sa $\varphi_k^{(j)}(0) = \delta_{jk}$, j, $k \in \mathbb{N}_0$, da bi zaključili $T_k = (-1)^k T_0^{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$, što završava dokaz.

Ako je $\mathcal{G}$ (UDSG) $*$-klase, onda je njena ekstenzija na $T \in \mathcal{E}_0'^*$ data sa:

$$\mathcal{G}(T) = \{(x,y) \in E \times E;\ \forall \phi \in \mathcal{D}_0^* : \mathcal{G}(T * \phi)x = \mathcal{G}(\phi)y\}.$$

Jasno, $\mathcal{G}(\delta) = I$ i $\mathcal{G}(T)$, $T \in \mathcal{E}_0'^*$, je zatvoren linearan operator.
Infinitezimalni generator za $\mathcal{G}$ je definisan sa $A := \mathcal{G}(-\delta')$.
Kako je za sve $\varphi \in \mathcal{D}_0^*$, $\varphi_+ := \varphi \mathbf{1}_{[0,\infty)} \in \mathcal{E}_0'^*$, definicija za $\mathcal{G}(\varphi_+)$ je jasna. ($\mathbf{1}_{[0,\infty)}$ je karakteristična funkcija intervala $[0,\infty)$).
Ako je $\mathcal{G}$ pre-(UDSG) $*$-klase, onda se njen 'adjoint' $\mathcal{G}^*$, može definisati na prirodan način i to je takodje pre-(UDSG) $*$-klase.
Ultradistribucione polugrupe imaju niz istih strukturnih osobina kao i odgovarajuće distribucione polugrupe; ovde ćemo se pretežno bazirati na razlikama izmedju datih klasa polugrupa.
Najpre, generatori distribucionih polugrupa moraju biti stacionarno gusti, dok ovo više nije tačno za generatore ultradistribucionih polugrupa. Takodje, rezolventni skupovi generatora ultradistribucionih polugrupa ne moraju sadržati eksponencijalne (logaritamske) regione u smislu [16] i njihove rezolvente ne moraju biti polinomski ograničene. Medjutim, kao što smo i napomenuli, situacija nije baš tako jednostavna. Postoji generator A (eksponencijalne) (UDSG) $*$-klase čiji rezolventni skup sadrži poluravan takav da on ne generiše distribucionu polugrupu.
Sada ćemo dati nekoliko rezultata koji se sa neznatnim promenama mogu dokazati kao u distribucionom slucaju (videti [52], [44], [41]) tako da su njihovi dokazi izostavljeni. Sledeće dve teoreme važe i u Beurlingovom i u Roumieovom slučaju.

Teorema 1.6.5. *Neka je $\mathcal{G}$ pre-(UDSG) $*$-klase, $F = E/\mathcal{N}(\mathcal{G})$ i neka je q odgovarajuće kanoničko preslikavanje $q : E \to E/\mathcal{N}(\mathcal{G})$.*
(a) *Neka je $H \in L(\mathcal{D}^*, L(F))$ definisano sa $q\mathcal{G}(\varphi) = H(\varphi)q$ za sve $\varphi \in \mathcal{D}^*$. Tada je H (UDSG) $*$-klase u F.*
(b) $\overline{\langle \mathcal{R}(\mathcal{G}) \rangle} = \overline{\mathcal{R}(\mathcal{G})}$, *gde je $\langle \mathcal{R}(\mathcal{G}) \rangle$ linearni potprostor u E generisan sa $\mathcal{R}(\mathcal{G})$.*
(c) *Pretpostavimo da $\mathcal{G}$ nije gusta. Stavimo $R = \overline{\mathcal{R}}$ i $H = \mathcal{G}_{|R}$. Tada je H gusta pre-(UDSG) $*$-klase na R.*
(d) *'Adjoint' $\mathcal{G}(\cdot)^*$ od $\mathcal{G}$ je pre-(UDSG) $*$-klase na E^* sa $\mathcal{N}(\mathcal{G}^*) = \overline{\mathcal{R}(\mathcal{G})}^{\circ}$. ($\overline{\mathcal{R}(\mathcal{G})}^{\circ}$ je polara od $\overline{\mathcal{R}(\mathcal{G})}$.)*
(e) *Ako je E refleksivan, tada je $\mathcal{N}(\mathcal{G}) = \overline{\mathcal{R}(\mathcal{G}^*)}^{\circ}$.*
(f) *$\mathcal{G}^*$ je (UDSG) $*$-klase na E^* ako i samo ako je $\mathcal{G}$ gusta pre-(UDSG) $*$-klase, za proizvoljan Banachov prostor E. Ako je E refleksivan, tada je $\mathcal{G}^*$ gusta pre-(UDSG) $*$-klase na E^* ako i samo ako je $\mathcal{G}$ (UDSG) $*$-klase.*
(g) *$\mathcal{G}$ je (UDSG) $*$-klase ako i samo ako važe (U.1), (U.2) i (U.8), gde je*

$$(U.8): \quad \mathcal{G}(\varphi_+) = \mathcal{G}(\varphi),\ \varphi \in \mathcal{D}^*.$$

(h) $\mathcal{N}(\mathcal{G}) \bigcap \langle \mathcal{R}(\mathcal{G}) \rangle = \{0\}$.

Teorema 1.6.6. *Neka je $\mathcal{G}$ (UDSG) $*$-klase i S, $T \in \mathcal{E}_0'^*$, $\varphi \in \mathcal{D}_0^*$, $\psi \in \mathcal{D}^*$; $x \in E$. Tada je*
(a) $(\mathcal{G}(\varphi)x, \mathcal{G}(\underbrace{T * \ldots * T}_{m} * \varphi)x) \in \mathcal{G}(T)^m$, $m \in \mathbb{N}$.
(b) $\mathcal{G}(S)\mathcal{G}(T) \subset \mathcal{G}(S * T)$, $\mathcal{G}(S)\mathcal{G}(T) = D(\mathcal{G}(S * T)) \cap D(\mathcal{G}(T))$ *i*

$$\mathcal{G}(S) + \mathcal{G}(T) \subset \mathcal{G}(S + T).$$

(c) $(\mathcal{G}(\psi)x,\ \mathcal{G}(-\psi')x - \psi(0)x) \in \mathcal{G}(-\delta')$.
(d) *Ako je $\mathcal{G}$ gusta onda je njen generator gusto definisan.*

Teorema 1.6.5 nam omogućava da definišemo generator neke pre-(UDSG) $*$-klase.

Definicija 1.6.7. Neka je $\mathcal{G}$ pre-(UDSG) $*$-klase. Generator A od $\mathcal{G}$ je generator ultradistribucione polugrupe H u $F := E/\mathcal{N}(\mathcal{G})$, koja je data u Teoremi 1.6.5(a).

Slučaj kada je $\mathcal{G}$ (UDSG) $*$-klase nije isključen: tada možemo jednostavno identifikovati E sa F.
Generator neke pre-(UDSG) $*$-klase je zatvoren linearan operator iz F u F i ovo je nešto drugačije od definicije generatora neke pre-(DSG) date u [40]. Naime, prema Definiciji 1 i Posledici 2 iz [40], generator neke pre-(DSG) u E je zatvoren linearan operator iz E u F.
Cilj narednog dela je posmatranje apstraktnog Cauchyjevog problema kao sistema konvolucionih jednačina. U distribucionom slučaju, analiza takvih problema je predstavljena u radu [52] u slučaju kada operator A nije obavezno gusto definisan. U ultradistribucionom slučaju, javljaju se problemi i analiza takvih problema nije jednostavna. Najpre ćemo dati definiciju ultradistribucionog fundamentalnog resenja koja zapravo predstavlja ultradistribucioni analogon Definicije 3.9 iz [52]. U njoj je konvolucija vektorsko-vrednosnih ultradistribucija uzeta u smislu Posledice 3.6 iz [53].

Definicija 1.6.8. Neka je D takodje Banachov prostor i $\mathcal{P} \in \mathcal{D}'^*_+(L(D,E))$. Ultradistribuciono fundamentalno rešenje za $\mathcal{P}$ je element $\mathcal{G} \in \mathcal{D}'^*_+(L(E,D))$ sa sledećim osobinama:

$$\mathcal{P} * \mathcal{G} = \delta \otimes I_E \text{ i } \mathcal{G} * \mathcal{P} = \delta \otimes I_D.$$

Kao i u distribucionom slučaju, ultradistribuciono fundamentalno resenje za $\mathcal{P} \in \mathcal{D}'^*_+(L(D,E))$ je jedinstveno.
Sledeća teorema je ultradistribucioni analogon Teoreme 3.10 iz [52]. Iz nje će biti potpuno jasno zašto smo definisali generator neke pre-(UDSG) $*$-klase.

Teorema 1.6.9. *Neka je A zatvoren operator u E. Ako A generiše (UDSG) $\mathcal{G}$ $*$-klase, onda je $\mathcal{G}$ ultradistribuciono fundamentalno rešenje za $\mathcal{P} := \delta' \otimes I - \delta \otimes A \in \mathcal{D}'^*_+(L(D(A),E))$, gde je $D(A)$ opremljen graf normom i I označava inkluziono preslikavanje iz $D(A)$ u E. Obratno, ako je $\mathcal{G} \in \mathcal{D}'^*_+(L(E,D(A)))$ ultradistribuciono fundamentalno rešenje za $\mathcal{P}$, tada je $\mathcal{G}$ pre-(UDSG) $*$-klase generisana zatvorenjem operatora*

$$\mathcal{A} = \{(q(x), q(y)) : (x,y) \in A\}.$$

Dokaz. Ako A generiše (UDSG) $\mathcal{G}$ $*$-klase, tada Teorema 1.6.6(c) implicira da je $\mathcal{G}$ ultradistribuciono fundamentalno rešenje za $\mathcal{P}$. Koristeći iste argumente kao u Teoremi 3.10 ([52]), lako je pokazati da ako je $\mathcal{G} \in \mathcal{D}'^*_+(L(E,D(A)))$ ultradistribuciono fundamentalno rešenje za $\mathcal{P}$, tada je $\mathcal{G}$ pre-(UDSG) $*$-klase u E. Ovde ćemo pokazati samo da je generator od $\mathcal{G}$ zatvorenje operatora $\mathcal{A}$.

Pokažimo najpre da je operator $\mathcal{A}$ zatvoriv. Pretpostavimo da je $(x_n)_n$ niz u $D(A)$ takav da je $q(x_n) \to 0$ i $\mathcal{A}(q(x_n)) \to q(y)$, $n \to \infty$, za neko $y \in E$. Ove pretpostavke povlače egzistenciju podniza $(x_{n_k})_k$ od $(x_n)_n$ sa: $\inf\limits_{z\in\mathcal{N}(\mathcal{G})} \|x_{n_k}+z\| < 1/k$, i $\inf\limits_{z\in\mathcal{N}(\mathcal{G})} \|Ax_{n_k}-y+z\| < 1/k$, $k \in \mathbb{N}$. Stoga postoje dva niza $(z_k)_k$ i $(z_k^1)_k$ u $\mathcal{N}(\mathcal{G})$ takva da je $\|x_{n_k}+z_k\| < 1/k$, i $\|Ax_{n_k}-y+z_k^1\| < 1/k$, $k \in \mathbb{N}$. Neka je $\phi \in \mathcal{D}_+^*$ fiksirana ultradistribuciona funkcija $*$-klase sa nosačem u $[0,\infty)$. Kako je $\mathcal{G}$ ultradistribuciono fundamentalno rešenje za $\mathcal{P}$, tada je $\mathcal{G}(\phi)Ax_n = -\mathcal{G}(\phi')x_n$, $n \in \mathbb{N}$. Imamo:

$$\|-\mathcal{G}(\phi)y\| = \|\mathcal{G}(\phi)(Ax_{n_k}-y+z_k^1)-\mathcal{G}(\phi)(Ax_{n_k}+z_k^1)\| \leq \|\mathcal{G}(\phi)\|/k+\|\mathcal{G}(\phi)Ax_{n_k}\|$$

$$= \|\mathcal{G}(\phi)\|/k + \|\mathcal{G}(-\phi')(x_{n_k}+z_k)\| \leq \|\mathcal{G}(\phi)\|/k + \|\mathcal{G}(\phi')\|/k, \text{ za sve } k \in \mathbb{N}.$$

Puštajući $k \to \infty$, dobijamo $q(y) = 0$, što pokazuje da je $\mathcal{A}$ zatvoriv operator u F. Pretpostavimo da $\mathcal{A}_1$ generiše $\mathcal{G}$. Ako $(q(x), q(y))$ pripada zatvorenju operatora $\mathcal{A}$ za neke x, $y \in E$, tada postoji niz $((x_n, y_n))_n$ u A takav da je $(q(x_n), q(y_n)) \to (q(x), q(y))$, $n \to \infty$, u F^2. Koristeći iste argumente kao malopre, imamo egzistenciju podniza $(x_{n_k})_k$ od $(x_n)_n$ i dva niza $(z_k)_k$ i $(z_k^1)_k$ u $\mathcal{N}(\mathcal{G})$ takva da je $\|x_{n_k} - x + z_k\| < 1/k$ i $\|y_{n_k} - y + z_k^1\| < 1/k$, za sve prirodne brojeve k. Neka je $\phi \in \mathcal{D}_+'^*$ fiksirana. Ako je $\varphi \in \mathcal{D}_+'^*$, tada važi:

$$\|\mathcal{G}(\varphi)(\mathcal{G}(-\phi')x - \mathcal{G}(\phi)y)\|$$

$$= \|\mathcal{G}(\varphi)[\mathcal{G}(\phi')(x_{n_k}-x+z_k)-\mathcal{G}(\phi')(x_{n_k}+z_k)+\mathcal{G}(\phi)(y_{n_k}-y+z_k^1)-\mathcal{G}(\phi)(y_{n_k}+z_k^1)]\|$$

$$= \|\mathcal{G}(\varphi)[\mathcal{G}(\phi')(x_{n_k}-x+z_k)+\mathcal{G}(\phi)(y_{n_k}-y+z_k^1)]\| \leq (\|\mathcal{G}(\varphi*_0\phi)\|+\|\mathcal{G}(\varphi*_0\phi')\|)/k,$$

za sve $k \in \mathbb{N}$.
Dakle, $\mathcal{G}(-\phi')x - \mathcal{G}(\phi)y \in \mathcal{N}(\mathcal{G})$, tj., $H(-\phi')q(x) = H(\phi)q(y)$, za sve $\phi \in \mathcal{D}_+'^*$, i $\mathcal{A}_1$ sadrži zatvorenje operatora $\mathcal{A}$. To povlači da je $\mathcal{D}_+'^*(D(\overline{\mathcal{A}}))$ izomorfan potprostoru od $\mathcal{D}_+'^*(D(\mathcal{A}_1))$. Prvi deo teoreme povlači da je H ultradistribuciono fundamentalno rešenje za $P := \delta' \otimes \mathbf{I} - \delta \otimes \mathcal{A}_1$, gde $\mathbf{I}$ označava inkluziono preslikavanje iz $D(\mathcal{A}_1)$ u F. Primenjujući iste argumente kao u Teoremi 3.10 u [52], imamo $D(\mathcal{A}_1) = D(\overline{\mathcal{A}})$, što završava dokaz.

Zapažanje. U distribucionom slučaju, ako je $\mathcal{G}$ fundamentalno rešenje za $\mathcal{P}$ u smislu Definicije 3.9 iz [52], tada je $\mathcal{G}$ (DSG), tj., važi i: $\mathcal{N}(\mathcal{G}) = \{0\}$. Generalno govoreći, ovo nije tačno u ultradistribucionom slučaju. Dobro je poznato da postoji Banachov prostor E, zatvoren linearan operator A u E i ultradistribuciono fundamentalno rešenje $\mathcal{G}$ za $\mathcal{P}$ takvo da je $\operatorname{supp}\mathcal{G} = \{0\}$, što automatski daje $\mathcal{N}(\mathcal{G}) = E$. Takav primer je prva konstruisala Cioranescu. Napomenimo, ako je $\mathcal{G}$ ultradistribuciono fundamentalno rešenje za $\mathcal{P}$ koje je takodje i (UDSG) $*$-klase, tada je operator $\mathcal{A}$ definisan u prethodnoj teoremi obavezno zatvoren. Nije jasno da li isto tvrdjenje važi ako je $\mathcal{G}$ samo ultradistribuciono fundamentalno rešenje za $\mathcal{P}$.
Objasnićemo sada zašto ultradistribuciono fundamentalno rešenje $\mathcal{G}$ za $\mathcal{P}$ ne mora biti (UDSG) $*$-klase. Ako pratimo dokaz Teoreme 3.10 iz [52], onda moramo koristiti Teoremu 4.8 iz [42] koja tvrdi da je nosač elementa iz $\mathcal{D}'^*(E)$ podskup od $\{0\}$ ako i samo ako je isti oblika $\sum_{i=0}^{\infty} a_i\delta^{(i)} \otimes x_i$ gde je, za neko $L > 0$ i neko $C > 0$, resp., za svako $L > 0$ postoji $C > 0$, tako da je ispunjen uslov $|a_i| \leq C\frac{L^p}{M_p}$, $p \in \mathbb{N}$.

Osnovni problem je da li identitet

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \delta^{(k)} \otimes A x_k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k \delta^{(k+1)} \otimes x_k = \delta \otimes x \tag{14}$$

povlači $a_k = 0$, $k \in \mathbb{N}_0$. U distribucionom slučaju, prethodna suma je konačna i uslov $(U.4)$ važi. Za ultradistribucije, u opštem slučaju, nemamo $a_k = 0$, $k \in \mathbb{N}_0$. Preciznije, postoje nizovi $(a_k)_k, a_k \neq 0, k \in \mathbb{N}_0$ i $(x_k)_k$ takvi da je ispunjen uslov (14). To je pokazao Pilipović u [48] korišćenjem problema momenta ([29]-[30]) i Hankelove transformacije.

U nastavku, ultradistribuciono fundamentalno rešenje za

$$\mathcal{P} := \delta' \otimes I_{D(A)} - \delta \otimes A \in \mathcal{D}'^*_+(L(D(A), E))$$

ćemo jednostavno zvati ultradistribuciono fundamentalno rešenje za A.
Sledeća teorema je u slučaju gustih distribucionih polugrupa pokazana u [60].

Teorema 1.6.10. *Neka je $T \in \mathcal{D}'^*_+(E)$ i neka je A gusto definisan zatvoren operator. Pretpostavimo da jednačina*

$$-Au + \frac{\partial}{\partial t} u = T, \ u \in \mathcal{D}'^*_+(D(A)),$$

ima jedinstveno rešenje koje neprekidno zavisi od T tako da ako je $\operatorname{supp} T \subset [\alpha, \infty)$, *tada* $\operatorname{supp} u \subset [\alpha, \infty)$. *Pretpostavimo takodje da za $T = \delta$ odgovarajuće rešenje u zadovoljava*

$$\operatorname{supp} u(\cdot, x) \not\subseteq \{0\}, \ x \in E \setminus \{0\}.$$

Tada je A generator L-ultradistribucione polugrupe $*-$klase.

Dokaz. Dokaz je sličan dokazu Teoreme 5.1 u [60]. Ovde samo treba primetiti da moramo koristiti dobro poznato tvrdjenje Schwartza koje se odnosi na translaciono invarijantne linearne operatore. Kako je preslikavanje $H : u \to -Au + \frac{\partial}{\partial t} u$ izomorfizam $\mathcal{D}'^*_+(D(A))$ i $\mathcal{D}'^*_+(E)$ i kako H komutira sa translacijom, sledi da je H konvolucioni operator, tj. postoji $\mathcal{G} \in \mathcal{D}'^*_+(E)$ sa vrednostima u $L(E; D(A))$ takvo da je $H(T) = \mathcal{G} * T$.
Mora se upotrebiti i Teorema 4.8 iz [42].
Sa ove dve izmene, ostaje samo da se ponovi dokaz Lionsa. Jedina esencijalna novina je postojanje uslova koji garantuje $(U.2)$, o čemu je vec bilo govora.

1.7. Temperirane ultradistribucione polugrupe

U ovom delu ćemo definisati i proučiti temperirane ultradistribucione polugrupe i dati neke nove rezultate za L-ultradistribucione polugrupe. Najpre, (videti [78]), prostori temperiranih ultradistribucija Beurlingovog odnosno Roumieuovog tipa su duali sledećih test prostora

$$\mathcal{S}^{(M_p)}(\mathbb{R}) := \operatorname{proj} \lim_{k \to \infty} \mathcal{S}^{M_p,k}(\mathbb{R}), \quad \text{resp.,} \quad \mathcal{S}^{\{M_p\}}(\mathbb{R}) := \operatorname{ind} \lim_{k \to 0} \mathcal{S}^{M_p,k}(\mathbb{R}),$$

gde je $\mathcal{S}^{M_p,k}(\mathbb{R}) := \{\phi \in \mathcal{C}^\infty; \ ||\phi||_k < \infty\}$, $k > 0$,

$$||\phi||_k := \sup\{\frac{k^{\alpha+\beta}}{M_\alpha M_\beta}(1 + |t|^2)^{\beta/2} |\phi^{(\alpha)}(t)|; \ t \in \mathbb{R}, \ \alpha, \ \beta \in \mathbb{N}_0\}.$$

Zainteresovanog čitaoca upučujemo na [33] za analizu datih prostora.

Definicija 1.7.1. Pretpostavimo da je A zatvoren operator i da je $\mathcal{G}$ ultradistribuciono fundamentalno rešenje za A. Kažemo da je $\mathcal{G}$ eksponencijalno ultradistribuciono fundamentalno rešenje za A ako je $e^{-\xi\cdot}\mathcal{G} \in \mathcal{S}'^*_+(L(E, D(A)))$, za neko $\xi \in \mathbb{R}$.

Definicija 1.7.2. Neka je $\xi_0 \in \mathbb{R}$. Tada je

$$\mathcal{SE}^*_{\xi_0}(\mathbb{R}) := \{\phi \in C^\infty(\mathbb{R});\ e^{\xi t}\phi \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}),\ \xi > \xi_0\}.$$

Definišimo konvergenciju u ovom prostoru na sledeći način:

$$\phi_n \to 0 \text{ u } \mathcal{SE}^*_{\xi_0} \text{ ako } e^{\xi\cdot}\phi_n \to 0 \text{ u } \mathcal{S}^*(\mathbb{R}) \text{ za sve } \xi > \xi_0.$$

Definišimo dalje $\mathcal{B}^*_{\xi_0}$ kao prostor ultradistribucija $T \in \mathcal{D}'^*(\mathbb{R})$ takvih da je $T*\phi \in \mathcal{SE}^*_{\xi_0}$ za sve $\phi \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R})$.

Definicija 1.7.3. $L-$ ultradistribuciona polugrupa $\mathcal{G}$ $*-$ klase je eksponencijalnog rasta, EL-ultradistribuciona polugrupa $*-$ klase, ako, pored uslova $(U.1)$ – $(U.4)$ važi i uslov $(U.6)$:

$$(U.6):\quad (\exists \xi_0 \in \mathbb{R})(\forall \xi > \xi_0)(e^{-\xi\cdot}\mathcal{G} \in \mathcal{S}'^*(L(E))).$$

Dodavajući uslov $(U.6)$ na $(U.5)$, resp. $(U.5)$ i $(U.2)$, dobijamo odgovarajuće klase pre-(UDSG) resp., (UDSG), eksponencijalnog rasta označene sa pre-(EUDSG), resp., (EUDSG).

Primetimo da postoji eksponencijalno ograničena n-puta integrisana polugrupa čiji generator nije gusto definisan. Njen n-ti distribucioni izvod je negusta eksponencijalna distribuciona polugrupa (videti na primer [6]).
Neka je $\mathcal{G}$ EL-ultradistribuciona polugrupa $*-$klase. Jasno je da $\mathcal{G}$ ima ekstenziju na $\mathcal{SE}^*_{\xi_0}(\mathbb{R})$:

$$\langle \mathcal{G}, \phi\rangle =_{\mathcal{S}'^*} \langle e^{-\xi\cdot}\mathcal{G}, e^{\xi\cdot}\phi\rangle_{\mathcal{S}^*},\ \xi > \xi_0.$$

Takodje, imamo $e^{-\xi t}\mathcal{G} \in \mathcal{S}'^*_+$, $\xi > \xi_0$.
Neka je $\psi \in \mathcal{SE}^*_{\xi_0}(\mathbb{R})$. Tada je $\psi_+ = \psi\mathbf{1}_{[0,\infty)} \in \mathcal{B}^*_{\xi_0}$ i $\langle \mathcal{G}, \psi\rangle = \mathcal{G}(\psi_+)$. Ovaj operator je gusto definisan u E.
Pretpostavimo da je $\lambda \in \mathbb{C}$; $Re\lambda > \xi_0$ i da $w \in \mathcal{E}^*$ zadovoljava $w = 0$ na $(-\infty, -a)$ i $w = 1$ na $[0, \infty)$. Jasno,

$$(0,\infty) \ni t \mapsto w(t)e^{-\lambda t} \text{ pripada } \mathcal{SE}^*_{\xi_0}(\mathbb{R}) \text{ i}$$

$$\mathcal{G}(e^{-\lambda t}) = \langle \mathcal{G}, w(t)e^{-\lambda t}\rangle,\ Re\lambda > \xi_0,$$

ne zavisi od w. Kao posledicu imamo da je Laplaceova transformacija od $\mathcal{G}$ definisana sa

$$\mathcal{L}(\mathcal{G})(\lambda) = G(\lambda) = \mathcal{G}(e^{-\lambda t}),\ Re\lambda > \xi_0,$$

analitička funkcija u oblasti $Re\lambda > \xi_0$.
Na osnovu [41], cela funkcija P oblika $P(\lambda) = \sum_{p=0}^\infty a_p\lambda^p$, $\lambda \in \mathbb{C}$, je klase (M_p), respektivno, klase $\{M_p\}$, ako postoje $k > 0$ i $C > 0$, resp., za svako $k > 0$ postoji $C > 0$, takvo da je $|a_p| \leq Ck^p/M_p$, $p \in \mathbb{N}$. Odgovarajući ultradiferencijabilni operator $P(d/dt) = \sum_{p=0}^\infty a_p d^p/dt^p$ je (M_p)-klase, respektivno

$\{M_p\}$-klase. Primetimo da smo stavili d/dt umesto $-id/dt$ koji se češce koristi ([41]). Naša notacija je prilagodjena upotrebi Laplaceove transformacije.

Teorema 1.7.4. *Neka je $f : \{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda > a\} \to E$ analitička i neka je $||f(\lambda)|| \le C|P(\lambda)|$, $Re\lambda > a$ za neko $C > 0$ i neki ultradiferencijalni operator P $*-$klase sa osobinom $|P(\lambda)| > 0$, $Re\lambda > a$. Tada*

$$(\forall\alpha > 1)(\exists h \in C(\mathbb{R}^+; E))(h(0) = 0)$$

takvo da je

$$||h(t)|| = O(e^{at}),\ t \ge 0 \ i \ f(\lambda) = \lambda^\alpha P(\lambda)\int_0^\infty e^{-\lambda t}h(t)dt,\ Re\lambda > a. \tag{15}$$

Dokaz. Neka je $\bar{a} > a$ i

$$h(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\bar{a}-i\infty}^{\bar{a}+i\infty} \frac{e^{\mu t}}{\mu^\alpha P(\mu)} f(\mu)d\mu,\ t \ge 0.$$

Za pogodno izabrano $C_1 > 0$ imamo

$$||h(t)|| \le C_1 e^{\bar{a}t}\int_{\bar{a}-i\infty}^{\bar{a}+i\infty} \frac{d\mu}{|\mu|^\alpha},\ t \ge 0.$$

Sada (15) sledi puštanjem da $\bar{a} \to a$. Dalje, za $\bar{a} > Re\lambda > a$,

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}h(t)dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\Big(\frac{1}{2\pi i}\int_{\bar{a}-i\infty}^{\bar{a}+i\infty} \frac{e^{\mu t}}{\mu^\alpha P(\mu)} f(\mu)d\mu\Big)dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\bar{a}-i\infty}^{\bar{a}+i\infty}\Big(\int_0^\infty e^{-(\lambda-\mu)t}dt\Big)\frac{f(\mu)}{\mu^\alpha P(\mu)}d\mu = \frac{1}{2\pi i}\int_{\bar{a}-i\infty}^{\bar{a}+i\infty}\frac{f(\mu)/(\mu^\alpha P(\mu))}{\lambda-\mu}d\mu$$

$$= \frac{f(\lambda)}{\lambda^\alpha P(\lambda)} + \lim_{r\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(r)}\frac{f(\mu)/(\mu^\alpha P(\mu))}{\lambda-\mu}d\mu = \frac{f(\lambda)}{\lambda^\alpha P(\lambda)},$$

gde je $\gamma(r) = \{\bar{a} + re^{i\theta};\ -\pi/2 \le \theta \le \pi/2\}$. Na osnovu Cauchyjeve formule

$$h(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\bar{a}-i\infty}^{\bar{a}+i\infty}\frac{f(\mu)d\mu}{\mu^\alpha P(\mu)} = \frac{1}{2\pi i}\lim_{r\to\infty}\int_{\gamma(r)}\frac{f(\mu)}{\mu^\alpha P(\mu)}d\mu = 0.$$

Sada smo u mogućnosti da formulišemo ultradistribucionu verziju Teoreme 6.1 iz [60].

Teorema 1.7.5. *Neka je A zatvoren gusto definisan operator. Tada A generiše EL-ultradistribucionu polugrupu $*-$klase ako i samo ako su ispunjeni sledeći uslovi:*

(i) *Postoji $a > 0$ takvo da je za $Re\lambda > a$ operator $-A + \lambda : D(A) \to E$ izomorfizam;*

(ii) *Stavimo $R(\lambda) = R(\lambda : A)$, $Re\lambda > a$. Postoji ultrapolinom P $*-$klase sa osobinom da je $|P(\lambda)| > 0$, $Re\lambda > a$, kao i $C > 0$ takvo da je*

$$||R(\lambda)|| \le C|P(\lambda)|,\ Re\lambda > a.$$

(iii) *$R(\lambda)$ je Laplaceova transformacija od $\mathcal{G}$ koje zadovoljava $(U.5)$.*

Dokaz. ($\leftarrow$) Neka je $\alpha \in \mathbb{N}$, $\alpha > 1$. Na osnovu Teoreme 1.7.4, imamo

$$R(\lambda) = \lambda^\alpha P(\lambda) \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)dt, \; Re\lambda > a,$$

gde je S neprekidno, $S(0) = 0$ i $||S(t)|| \leq Ce^{at}$, $t \geq 0$. Ovo daje $R(\lambda) = \mathcal{L}(\mathcal{G})(\lambda)$, $Re\lambda > a$, gde je $\mathcal{G} = D^\alpha P(D)S$, i $e^{-\xi \cdot}\mathcal{G} \in \mathcal{S}'^*_+(\mathbb{R})$, $\xi > a$. Takodje imamo

$$(\delta \otimes (-A) + \delta' \otimes I_E) * \mathcal{G} = \delta \otimes I_E,$$

$$\mathcal{G} * (\delta \otimes (-A) + \delta' \otimes I_{D(A)}) = \delta \otimes I_{D(A)}$$

i na osnovu (iii), $\mathcal{G}$ je EL-ultradistribuciona polugrupa $*-$klase.

($\rightarrow$) Neka je $\Omega(t) = e^{-\lambda t}$, $t \in \mathbb{R}$, $Re\lambda > \xi_0$ i $E_\lambda = \Omega_+$. Tada je $(\delta' + \lambda\delta) * E_\lambda = \delta$. Neka je $\phi \in \mathcal{D}_0^*$ i $x \in E$. Imamo

$$\mathcal{G}((\delta' + \lambda\delta) * E_\lambda * \phi)x = \mathcal{G}(\phi)x,$$

$$\mathcal{G}(\delta' * E_\lambda * \phi)x + \lambda\mathcal{G}(E_\lambda * \phi)x = \mathcal{G}(\delta')\mathcal{G}(E_\lambda * \phi)x + \lambda G(\lambda)\mathcal{G}(\phi)x.$$

Dakle,

$$-A(G(\lambda)\mathcal{G}(\phi)x) + \lambda G(\lambda)\mathcal{G}(\phi)x = \mathcal{G}(\phi)x.$$

Koristeći standardne argumente imamo $(-A + \lambda)G(\lambda) = I$. Izračunavajuci $||w(t)e^{-\lambda t}||_k$ za neko k, resp., za svako k, i koristeći odgovarajući ultrapolinom, dobijamo $||G(\lambda)|| \leq C|P(\lambda)|$, $Re\lambda > a$. Pokažimo ovo u Beurlingovom slučaju. Koristeći posledicu od (M.1), $M_{\alpha-i}M_i \leq M_\alpha$, i, $\alpha \in \mathbb{N}_0$, $i \leq \alpha$, imamo da je za neke C, C_1, $C_2 > 0$ i $k \in \mathbb{N}$:

$$|G(\lambda)| \leq C \sup_{\alpha,\beta \in \mathbb{N}_0,\, t \in \mathbb{R}} \left| \frac{k^{\alpha+\beta} t^\beta \sum_{i=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{i} w^{(\alpha-i)}(t)\lambda^i e^{-\lambda t}}{M_\alpha M_\beta} \right|$$

$$\leq C_1 |w|_{2k} \sup_{\beta \in \mathbb{N}_0,\, t \in \mathbb{R}} \frac{k^\beta t^\beta e^{-\lambda t}}{M_\beta} \sup_i \frac{2k^i \lambda^i}{M_i} \leq C_2 e^{M(2k|\lambda|)}.$$

Koristeći činjenicu da postoji ultrapolinom P takav da je $e^{M(2k|\lambda|)} \leq P(|\lambda|)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, dokaz teoreme je završen. Odgovarajuće ocene za Roumieov slučaj slede kao u Primeru 1.8.1 datom kasnije.

Zapažanje. Pretpostavimo da je A zatvoren linearan operator koji nije obavezno gusto definisan. Ako važe uslovi (i) i (ii) prethodne teoreme, tada je $\mathcal{G}$ (definisano na isti način kao u dokazu date teoreme) eksponencijalno ultradistribuciono rešenje za A. Ako takodje važi (iii) onda je $\mathcal{G}$ (EUDSG) generisana sa A. Postavićemo sledeće pitanje: Da li uslov ($\rightarrow$) prethodne teoreme važi ako A nije gusto definisan?

Sada nije teško formulisati veze eksponencijalnih konvolucionih polugrupa sa eksponencijalnim ultradistribucionim fundamentalnim rešenjima i eksponencijalnim ultradistribucionim polugrupama. Diskusija je ostavljena zainteresovanom čitaocu.

1.8. Ultradistribucione polugrupe (nastavak)

Nastavićemo da razmatramo uslove (M.1), (M.2) i (M.3). Svrha uslova (M.3) je strukturna teorema za (UDSG) kao i eksplicitna forma polugrupa.
Stavimo $m_p = M_p/M_{p-1}$, $p \in \mathbb{N}$. Sledeće tvrdjenje je posledica rezultata iz [41] i [43] (Teorema 4.7). Preformulisaćemo tvrdjenja kako koristimo d/dx umesto $-id/dx$ (u [41]).
Neka je $T \in \mathcal{D}'^{*}_{+}(X)$. Tada za svako $a > 0$ postoji ultradiferencijalni operator $(M_p)-$klase, formalnog oblika

$$P_L(d/dt) = \prod_{p=1}^{\infty}(1 + \frac{L^2}{m_p^2}d^2/dt^2) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p d^p/dt^p, \tag{16}$$

gde je $L > 0$ konstanta, resp., $\{M_p\}-$klase, formalno oblika

$$P_{L_p}(d/dt) = \prod_{p=1}^{\infty}(1 + \frac{L_p^2}{m_p^2}d^2/dt^2) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p d^p/dt^p, \tag{17}$$

gde je $(L_n)_n$ niz koji monotono opada ka 0, i neprekidna funkcija $f : (-a, a) \to X$ takva da je $\mathcal{D}^{(M_p)}((-a, a))$, resp., $\mathcal{D}^{\{M_p\}}((-a, a))$

$$T = P_L(-id/dt)f,$$

u (M_p)-slučaju, resp. $T = P_{L_p}(-id/dt)f$ u $\{M_p\}$-slučaju.

Zapažanje. Prethodna tvrdjenja takodje važe za ultradiferencijalne operatore

$$\bar{P}_L(d/dt) = \prod_{p=1}^{\infty}(1 + \frac{L}{m_p}d/dt) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p d^p/dt^p, \ L > 0$$

$$\bar{P}_{L_p}(d/dt) = \prod_{p=1}^{\infty}(1 + \frac{L_p}{m_p}d/dt) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p d^p/dt^p,$$

$(L_p)_p$ je niz koji monotono opada ka 0 (videti Teoremu 10.3 u [41]).

Primer 1.8.1. Primeri koji slede su dati na osnovu ocena ultradiferencijalnih operatora datih u [41] u Poglavljima 4 i 10, Propozicijama 4.5, 4.6 i Teoremama 10.1, 10.2.

Beurlingov slučaj.
Neka je P_L oblika (16). Tada postoje C, $C_1 > 0$, L_1, $L_2 > 0$ takvi da je

$$e^{2M(L|\zeta|)} \leq |P_L(\zeta)| \leq Ce^{M(L_1|\zeta|)}, \ \zeta \in \mathbb{C}$$

i $|a_p| \leq C_1 L_2^p / M_p$, $p \in \mathbb{N}_0$.
Stavimo $\tilde{K}(\lambda) = P_L^{-1}(-i\lambda)$, $Re\lambda > 0$. Primetimo,

$$\mathcal{L}(P_L(-id/dt)\phi)(\lambda) = P_L(-i\lambda)\mathcal{L}(\phi(\lambda)), \ Re\lambda > 0, \ \phi \in \mathcal{D}^*([0, \infty)).$$

Dalje imamo

$$C^{-1}e^{-M(L_1|\lambda|)} \leq |\tilde{K}(\lambda)| \leq e^{-2M(L|\lambda|)}, \ Re\lambda > 0.$$

Vratimo se na Primer 1.5.3. Operator $A = -d/dx$ i prostor $E_{p!^{1/\gamma}}$ su isti kao u datom primeru. Koristeći iste argumente kao u Primeru 1.5.3, A generiše eksponencijalno ograničenu K-polugrupu. Označimo je sa S.
Može se pokazati da je

$$S(t,u) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{e^{it\xi}\hat{u}(\xi)}{P_L(\xi)}\right),\ u \in E_{p!^{1/\gamma}},\ t \geq 0.$$

Sada imamo

$$\mathcal{G} = \mathcal{L}_L^{-1}(1/\tilde{K}) * S = \mathcal{L}^{-1}(P_L) * S$$

i ovo daje

$$\mathcal{G}(\phi)(u) = \langle P_L(-id/dt)S(t,u)(\cdot), \phi(t)\rangle = \langle u(\cdot - t), \phi(t)\rangle,\ \phi \in \mathcal{D}^{(M_p)}(\mathbb{R}),\ u \in E_{p!^{1/\gamma}}.$$

Dakle, $\mathcal{G}$ je negusta ultradistribuciona polugrupa eksponencijalnog rasta, (EU-DSG), Beurlingove klase generisana sa A.
Primetimo da date ocene za $\tilde{K}$ daju eksponencijalno dobru postavljenost (Θ)-problema.

Roumieuov slučaj.
Neka je sada $(L_p)_p$ niz koji striktno opada ka nuli i neka je P_{L_p} definisana sa (17). Tada za svako $L > 0$ postoji $C > 0$ takvo da je

$$|P_{L_p}(\xi)| \leq Ce^{M(L|\xi|)},\ \xi \in \mathbb{R},$$

i (sa drugim $C, L > 0$) $|a_p| \leq CL^p/M_p$, $p \in \mathbb{N}_0$. Dalje, postoji "subordinate function" $\varepsilon(\rho)$, $\rho \geq 0$, ([41]: ovo je rastuća funkcija takva da je $\rho(0) = 0$ i $\varepsilon(\rho)/\rho \to 0$ kada $\rho \to \infty$)

$$e^{2M(\varepsilon(|\xi|))} \leq |P_{L_p}(\xi)|,\ \xi \in \mathbb{R}.$$

Sa $\tilde{K}(\lambda) = P_{L_p}^{-1}(-i\lambda)$, $Re\lambda > 0$, imamo

$$|\tilde{K}(\lambda)| \leq Ce^{-2M(\varepsilon(|\lambda|))},\ Re\lambda > 0.$$

Ponovo, sa $A = -d/dx$ i $E = E_{p!^{1/\gamma}}$, A generiše eksponencijalno ograničenu K-polugrupu. Označimo je sa S. Tada je

$$\mathcal{G} := \mathcal{L}^{-1}(1/\tilde{K}) * S = \mathcal{L}^{-1}(P_{L_p}(\lambda)) * S = P_{L_p}(-id/dx)S$$

negusta eksponencijalna ultradistribuciona polugrupa Roumieuove klase generisana sa A.
Ponovo ocene za $\tilde{K}$ daju eksponencijalno dobru postavljenost (Θ)-problema.

Sledeći primer pokazuje razliku izmedju L-ultradistribucionih polugrupa i ultradistribucionih polugrupa. Parafraziraćemo samo jedan Primer iz [52].

Primer 1.8.2. Neka su A i E kao u prethodnom primeru. Izaberimo $x \in E$ i $x^* \in (D(A))^\circ$ sa $\langle x^*, x\rangle = 1$. Sa $\mathcal{G}$ definisanim kao u prethodnom primeru i

$$G := \mathcal{G} + \delta \otimes \langle x^*, \cdot\rangle x$$

imamo: G zadovoljava $(U.1)$, $(U.2)$, $(U.4)$, ali ne i $(U.5)$.

1.9. Strukturne teoreme za (UDSG)

Kao u [43] i [53], definišemo Ω^* kao podskup od $\mathbb{C}$ koji sadrži region sledeće forme
$\Omega_0^{(M_p)} := \{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda \geq M(k|\lambda|) + C\}$, za neko $k > 0$, $C > 0$, resp.,
$\Omega_0^{\{M_p\}} := \{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda \geq M(k|\lambda|) + C_k\}$, za svako $k > 0$ i odgovarajuće $C_k > 0$.
Koristeći pristup Kunstmanna i Wanga za (DSG) i Komatsua [43] za ultradistribucione polugrupe, pokazaćemo sledeću teoremu.

Teorema 1.9.1. *Označimo sledeće iskaze:*
(a) *A generiše (UDSG) $*$−klase $\mathcal{G}$.*
(a)' *A generiše (UDSG) $*$−klase $\mathcal{G}$ koja se može neprekidno proširiti na $\mathcal{S}^*$.*
(b) *A generiše (UDSG) $*$−klase $\mathcal{G}$ takvu da za sve $a > 0$, $\mathcal{G}$ ima formu $\mathcal{G} = P_L^a(-id/dt)S_K^a$ na $\mathcal{D}^{(M_p)}((-\infty,\ a))$ u (M_p)−slučaju, resp., $\mathcal{G} = P_{L_p}^a(-id/dt)S_K^a$ u $\{M_p\}$−slučaju, gde je $S_K^a : (-\infty,\ a) \to L(E, D(A))$ neprekidna i $S_K^a(t) = 0$, $t \leq 0$.*
(b)' *A generiše (UDSG) $*$−klase $\mathcal{G}$ takvu da za sve $a > 0$, $\mathcal{G}$ ima formu $\mathcal{G} = P_L^a(-id/dt)S_K^a$ na $\mathcal{S}^{(M_p)}(\mathbb{R})$ u (M_p)−slučaju, resp., $\mathcal{G} = P_{L_p}^a(-id/dt)S_K^a$ u $\{M_p\}$−slučaju, gde je $S_K^a : (-\infty,\ a) \to L(E, D(A))$ neprekidna i $S_K^a(t) = 0$, $t \leq 0$.*
(c) *za svako $a > 0$, A je generator lokalne K_a-polugrupe S_K^a na $[0, a)$, gde je $K_a = \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{P_L^a(-i\lambda)})$ u (M_p)−slučaju, resp., $K_a = \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{P_{L_n}^a(-i\lambda)})$ u$\{M_p\}$-slučaju, i $\{P_L^a : a > 0\}$ je skup ultradiferencijalnih operatora koji zadovoljava:*

$$P_L^a S_K^a = P_L^b S_K^b,\ na\ \mathcal{D}'^{(M_p)}((-\infty, \min(a, b))),\ a,\ b \in (0, \infty).$$

(c)' *za svako $a > 0$, A je generator globalne K_a-polugrupe S_K^a na $[0, a)$, gde je $K_a = \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{P_L^a(-i\lambda)})$ u (M_p)−slučaju, resp., $K_a = \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{P_{L_n}^a(-i\lambda)})$ u$\{M_p\}$-slučaju.*
(d) *postoji ultradistribuciono fundamentalno rešenje za A, $\mathcal{G}$, takvo da je $\mathcal{N}(\mathcal{G}) = \{0\}$.*
(d)' *postoji ultradistribuciono fundamentalno rešenje za A, $\mathcal{G}$.*
Jasno, (a)' → (a), (b)' → (b), (c)' → (c), (b) → (a) i (b') → (a)'.
Važi: (a)' → (c)', (a) ⇔ (d), (c) → (d)', (d) → (e).
Specijalno, ako je $\mathcal{G}$ (UDSG) generisana sa A, tada
(e) *$\rho(A) \supset \Omega^*$ i*

$$||R(\lambda : A)|| \leq Ce^{M(k|\lambda|)},\ \lambda \in \Omega^{(M_p)},$$

za neko $k > 0$ i $C > 0$ u (M_p)-slučaju, resp.,

$$||R(\lambda : A)|| \leq C_k e^{M(k|\lambda|)},\ \lambda \in \Omega^{\{M_p\}},$$

za svako $k > 0$ i odgovarajuće $C_k > 0$ u $\{M_p\}$-slučaju.

Pitanje. Da li se generatori ultradistribucionih polugrupa mogu kompletno spektralno okarakterisati ?

Dokaz. Ekvivalencija (a) ↔ (d) je dokazana i (d) → (e) je posledica analize date u [43]. Jasno, (b) → (a). Pokažimo (a)' → (c)'. Potrebna nam je sledeća lema; za dokaz videti [48]. Jasno je šta znaci $P_L(-id/dt)$.

Lema 1.9.2. *Preslikavanja*

$$P_L(id/dt) : \mathcal{S}^{(M_p)}([0,\infty)) \to \mathcal{S}^{(M_p)}([0,\infty)), \quad \phi \mapsto P_L(id/dt)\phi,$$

$$P_{L_p}(id/dt) : \mathcal{S}^{\{M_p\}}([0,\infty)) \to \mathcal{S}^{\{M_p\}}([0,\infty)), \quad \phi \mapsto P_{L_p}(id/dt)\phi,$$

su neprekidne linearne bijekcije.

Pokažimo (a)' → (c)' u Beurlingovom slucaju. Dokaz u Roumieovom slučaju se izvodi slično. Na osnovnu strukturne teoreme za temperirane ultradistribucije vai:

$$\mathcal{G}(\psi) = \langle \psi,\ P_L(-id/dt)S(t,\cdot)\rangle,\ \psi \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}),$$

gde je

$$e^{-M(k|\xi|)}|S(\xi,x)| < \infty,\ \xi \in \mathbb{R},\ x \in E.$$

Kako je $A\mathcal{G}(\phi)x = -\mathcal{G}(\phi')x - \phi(0)x$; $x \in E$, $\phi \in \mathcal{S}^{(M_p)}$, $x \in E$, i kako je $1 = P_L(-id/dt)\mathcal{L}^{-1}(1/P_L(-i\cdot))$ u smislu ultradistribucija, za $\phi \in \mathcal{S}^{(M_p)}(\mathbb{R})$, imamo:

$$A\mathcal{G}(\phi)x = \langle \phi, P_L(-id/dt)AS(\cdot)x\rangle = -\langle \phi', P_L(-id/dt)S(\cdot)x\rangle - \phi(0)x,$$

za sve $\phi \in \mathcal{S}^{(M_p)}(\mathbb{R})$ i $x \in E$. Stoga je $(\phi \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}))$

$$\langle \phi'(t), (P_L(-id/dt)A\int_0^t S(s,x)ds - P_L(-id/dx)S(t,x)$$

$$+\int_0^t \mathcal{L}^{-1}(1/P_L(-i\cdot))(s)xds)\rangle$$

$$= \langle P_L(id/dt)\phi'(t), (A\int_0^t S(s,x)ds - S(t,x) + \int_0^t \mathcal{L}^{-1}(1/P_L(-i\cdot))(t)x)\rangle.$$

Pretpostavimo da za $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ i $\phi \in \mathcal{S}^{(M_p)}(\mathbb{R})$ važi $\varphi = P_L(id/dt)\phi$. Upotreba Leme 1.9.2 daje:

$$A\int_0^t S(s,x)ds - S(t,x) + \int_0^t \mathcal{L}^{-1}(1/P_L(-i\cdot))(s)xds = const,\ a > t > 0, \quad (18)$$

u smislu Beurlingovih ultradistribucija na $(0,\ \infty)$. Za $x = 0$, (18) implicira $const = 0$. Kako je leva strana od (18) neprekidna na $\mathbb{R}$ imamo (1), sa datim K i S_K. Ovo daje (a)' → (c)'.
Pokažimo (c) → (d)'. Definišimo $\mathcal{G}$ na $\mathcal{D}^{(M_p)}((-\infty,\ a))$ (za sve $a > 0$)

$$\mathcal{G} := P_L^a(-id/dt)S_K^a.$$

Tada je $\mathcal{G}$ neprekidno linearno preslikavanje iz $\mathcal{D}^{(M_p)}((-\infty,\infty))$ u $L(E)$ koje komutira sa A. Imamo i $\operatorname{supp}\mathcal{G} \subset [0,\infty)$; izbor K_a daje

$$\mathcal{G}(-\phi')x - A\mathcal{G}(\phi)x = -\sum_{p\geq 0} a_p(-i)^p \int_0^a \phi^{(p+1)}(s)S_K^a(s)xds$$

$$-\sum_{p\geq 0} a_p(-i)^p \int_0^a \phi^{(p)}(s)AS_K^a(s)xds = -\sum_{p\geq 0} a_p(-i)^p \int_0^a \phi^{(p+1)}(s)S_K^a(s)xds$$

$$+\sum_{p\geq 0} a_p(-i)^p \int_0^a \phi^{(p+1)}(s)(S_K^a(s)x - \Theta_a(s)x)ds$$

$$= \sum_{p\geq 0} a_p(-i)^p \int_0^a \phi^{(p)}(s)K_a(s)xds = \phi(0)x$$

za pogodan niz $(a_p)_p$ i sve $\phi \in \mathcal{D}^{(M_p)}((-\infty,\ a))$, $x \in E$. Dobijamo: $\mathcal{G} \in \mathcal{D}'^{(M_p)}(L(E, D(A)))$ je ultradistribuciono fundamentalno rešenje za A.

1.10. Hiperfunkcione polugrupe

Navedimo najpre osnovna svojstva hiperfunkcija i Fourierovih hiperfunkcija ([38]).
Neka je Ω otvoren u $\mathbb{C}$ i neka Ω sadrži $I \subset \mathbb{R}$ kao zatvoren podskup. $\mathcal{O}(\Omega)$ je prostor svih E-vrednosnih holomorfnih funkcija na Ω. Tada je prostor E-vrednosnih hiperfunkcija na I definisan sa $\mathcal{B}(I;E) := \mathcal{O}(\Omega \setminus I)/\mathcal{O}(\Omega)$. Ako je $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus I)$, tada je $f + \mathcal{O}(\Omega) \in \mathcal{B}(I;E)$; taj element ćemo označiti sa $[f(z)]$ i f ćemo zvati definicionom funkcijom za $[f(z)]$. Korespodencija $I \to \mathcal{B}(I;E)$ obrazuje 'flabby sheaf' i nosač se definiše na klasičan način. Skup svih hiperfunkcija čiji je nosač sadržan u kompaktu $K \subset I$ je označen sa $\Gamma_K(I, \mathcal{B}(E)) = \mathcal{B}[K](E)$. To je takodje dual prostora $\mathcal{A}(K)$ koji se sastoji od funkcija holomorfnih u nekoj otvorenoj okolini skupa K; $\mathcal{A}(K)$ je opremljen sa topologijom uniformne konvergencije na kompaktnim okolinama skupa K. Za više informacija o hiperfunkcijama videti [73] i [37]. Primetimo da ako je nosač hiperfunkcije $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}, E)$ sadržan u $\{a\}$, tada

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^{(n)}(\cdot - a)x_n, \; x_n \in E,$$

gde je $\lim_{n\to\infty}(n!||x_n||_E)^{1/n} = 0$.
Neka je $\mathbf{D}$ radijalna kompaktifikacija za $\mathbb{R}$ i $I_\nu = (-1/\nu,\ 1/\nu)$, $nu > 0$, $\delta > 0$. Prostor $\tilde{\mathcal{O}}^{-\delta}(\mathbf{D} + iI_\nu)$ je definisan kao potprostor od $\mathcal{O}(\mathbf{R} + iI_\nu)$ sa osobinom da za svako $K \subset\subset I_\nu$ i $\varepsilon > 0$, postoji $C > 0$ takvo da je $|F(z)| \leq Ce^{-(\delta-\varepsilon)|Rez|}$, $z \in \mathbb{R} + iK$. Sada definišemo

$$\mathcal{P} := \text{ ind } \lim_n \tilde{\mathcal{O}}^{-1/n}(\mathbf{D} + iI_n)$$

i njegov dual je prostor Fourierovih hiperfunkcija $\mathcal{P}' = \mathcal{Q}(\mathbf{D})$.
Obavezno, $\mathcal{B}[K](E) \subset \mathcal{Q}(\mathbf{D})$ i inkluziono preslikavanje je neprekidno.
Citirajući [38], operator $P(D)$ koji ima formu $P(D) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k D^k$ je lokalni operator ako je $\lim_{k\to\infty}(|b_k|k!)^{1/k} = 0$. Glavna strukturna teorema za $\mathcal{Q}(\mathbf{D})$ govori da svako $f \in \mathcal{Q}(\mathbf{D})$ ima formu $f = P(D)F$, gde je $P(D)$ lokalni operator i F je neprekidna sporo rastuća funkcija, tj. za svako $\varepsilon > 0$ postoji $C_\varepsilon > 0$ takvo da je $|F(t)| \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon|t|}$, $t \in \mathbb{R}$.
Definišimo dve klase polugrupa, Fourierove hiperfunkcione polugrupe i hiperfunkcione polugrupe.

Definicija 1.10.1. Element $\mathcal{G} \in \mathcal{D}'^*_+(L(E))$ je hiperfunkciona polugrupa, (HSG) kraće, (resp., Fourierova hiperfunkciona polugrupa, (FHSG) kraće) ako je

$$(H.1): \quad \mathcal{G}(\phi *_0 \psi, \cdot) = \mathcal{G}(\phi,\ \mathcal{G}(\psi, \cdot)),\ \phi,\ \psi \in \mathcal{P} \text{ (resp., } \phi,\ \psi \in \mathcal{A}),$$

$$(H.2): \quad \cap_{\phi\in\mathcal{P}} \mathcal{N}(\mathcal{G}(\phi, \cdot)) = \{0\} \text{ (resp., } \cap_{\phi\in\mathcal{A}} \mathcal{N}(\mathcal{G}(\phi, \cdot) = \{0\}).$$

Ako je ispunjen i uslov

$$(H.3): \quad \text{Linearno zatvorenje } \mathcal{R} \text{ od } \bigcup_{\phi\in\mathcal{P}} R(\mathcal{G}(\phi, \cdot))$$

(resp., $\bigcup_{\phi\in\mathcal{A}} R(\mathcal{G}(\phi, \cdot))$) je gust u E, onda je $\mathcal{G}$ gusta (HSG) (resp., (FHSG)).

Slična tvrdjenja kao za eksponencijalno ograničene ultradistribucione polugrupe Roumieovog tipa važe i za (Fourierove) hiperfunkcione polugrupe. Glavna razlika je sadržana u sledećoj lemi gde umesto Laplaceove transformacije koristimo Fourier-Laplaceovu transformaciju:

Lema 1.10.2. *Preslikavanje*

$$P^h_{L_p}(id/dt) : \mathcal{P} \to \mathcal{P}, \quad \phi \mapsto P^h_{L_p}(id/dt)\phi$$

je neprekidna linearna bijekcija.

Za dokaz date leme videti [48]. Kao u ultradistribucionom slučaju, imamo:

Teorema 1.10.3. *Označimo:*
(a) A generiše (FHSG) označenu sa $\mathcal{G}$.
(b) A generiše (FHSG) $\mathcal{G}$ takvu da je $\mathcal{G} = P^h_{L_p}(-id/dt)S_K$, gde je $S_K : \mathbb{R} \to L(E)$ je neprekidno, eksponencijalno ograničeno i $S_K(t) = 0$, $t \leq 0$.
(c) A je generator globalne K-polugrupe $(S_K(t))_{t\geq 0}$, gde je $K = \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{P^h_{L_p}(-i\lambda)})$.
(d) A generiše (FHSG) $\mathcal{G}$ koja ima formu $\mathcal{G} = P^h_{L_p}(-id/dx)S_K$, gde je $S_K : \mathbb{R} \to L(E)$ neprekidno, $S_K(t) = 0$, $t \leq 0$ i to je K-polugrupa sa $K = \mathcal{L}^{-1}(1/P^h_{L_p}(-i\lambda))$.
(e) Problem

$$(\delta \otimes (-A) + \delta' \otimes I_E) * \mathcal{G} = \delta \otimes I_E, , \quad \mathcal{G} * (\delta \otimes (-A) + \delta' \otimes I_{D(A)}) = \delta \otimes I_{D(A)}$$

ima jedinstveno rešenje $\mathcal{G} \in \mathcal{Q}_+(L(E, D(A)))$ sa $\mathcal{N}(\mathcal{G}) = \{0\}$.
(e)' potpuno isto kao (e) samo bez uslova $\mathcal{N}(\mathcal{G}) = \{0\}$.
Važi: (a) $\to$ (c), (a) $\Leftrightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (d), (c) $\to$ (e)'.
Specijalno, ako je $\mathcal{G}$ (FHSG) generisana sa A, tada važi (f), gde je
(f) postoji $b > 0$ takvo da je

$$\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda > b\}$$

i za svako $\varepsilon > 0$ postoji $C_\varepsilon > 0$ takvo da je

$$||R(\lambda : A)|| \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon|\lambda|}, \ Re\lambda > b.$$

Teorema 1.10.4. *Označimo:*
(a) A generiše (HSG) $\mathcal{G}$.
(b) Problem

$$(\delta \otimes (-A) + \delta' \otimes I_E) * \mathcal{G} = \delta \otimes I_E, , \quad \mathcal{G} * (\delta \otimes (-A) + \delta' \otimes I_{D(A)}) = \delta \otimes I_{D(A)}$$

ima jedinstveno rešenje $\mathcal{G} \in \mathcal{Q}_+(L(E, D(A)))$ koje zadovoljava $\mathcal{N}(\mathcal{G}) = \{0\}$.
Važi: (a) $\Leftrightarrow$ (b). Specijalno, ako je $\mathcal{G}$ (HSG) generisana sa A, tada važi (c), gde je:

(c) za svako $\varepsilon > 0$ postoje $C_\varepsilon > 0$ i $K_\varepsilon > 0$ takvi da je

$$\rho(A) \supset \Omega_\varepsilon := \{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda \geq \varepsilon|\lambda| + C_\varepsilon\} \ i$$
$$||R(\lambda : A)|| \leq K_\varepsilon e^{\varepsilon|\lambda|}, \ \lambda \in \Omega_\varepsilon.$$

Napomenimo samo da je implikacija $(b) \to (c)$ dokazana u [73].
Sada ćemo uporediti hiperfunkcione polugrupe sa konvolucionim polugrupama.

Teorema 1.10.5. *Pretpostavimo da K zadovoljava* (P1) *i da je $(S_K(t))_{t\in[0,\tau)}$, $0<\tau\leq\infty$, (lokalna) K-polugrupa generisana sa A. Neka za sve $\varepsilon>0$ postoji $\varepsilon_0\in(0,\tau\varepsilon)$ and $T_\varepsilon>0$ takvo da je*

$$\frac{1}{|\tilde{K}(\lambda)|}\leq T_\varepsilon e^{\varepsilon_0|\lambda|},\ \lambda\in\Omega_\varepsilon\cap\{\lambda\in\mathbb{C}:Re\lambda>\beta\}.$$

Tada za svako $\varepsilon>0$ postoje $\overline{C}_\varepsilon>0$ i $\overline{K}_\varepsilon>0$ takvi da je

$$\Omega_\varepsilon^1=\{\lambda\in\mathbb{C}:Re\lambda\geq\varepsilon|\lambda|+\overline{C}_\varepsilon\}\subset\rho(A)\ i$$

$$||R(\lambda:A)||\leq\overline{K}_\varepsilon e^{\varepsilon_0|\lambda|},\ \lambda\in\Omega_\varepsilon^1.$$

Dokaz. Neka su M i β kao u (P1) i neka je $\varepsilon>0$ fiksiran. Izaberimo $t\in(0,\tau)$ takvo da je $\varepsilon_0<\varepsilon t$ i stavimo

$$R(\lambda,t):=\frac{1}{\tilde{K}(\lambda)}\int_0^t e^{\lambda s}S_K(s)ds,\ Re\lambda>\beta,\ t\in[0,\tau).$$

Kao u Teoremi 1.3.1 u [65], dobijamo

$$(\lambda I-A)R(\lambda,t)=I-\frac{1}{\tilde{K}(\lambda)}[e^{-\lambda t}S_K(t)+\int_t^\infty e^{-\lambda s}K(s)Ids]:=I-B_t(\lambda),\ Re\lambda>\beta.$$

Neka su $\beta_1\in(\beta,\infty)$ i $\delta\in(0,1)$ fiksirani. Definišimo

$$\overline{C}_\varepsilon:=\beta_1+C_\varepsilon+|\beta-ln\frac{\delta}{T_\varepsilon(e^{\beta t}||S_K(t)||+\frac{M}{Re\lambda-\beta})}|$$

i $\overline{K}_\varepsilon:=|\int_0^t e^{-\lambda s}S_K(s)ds|\frac{T_\varepsilon}{1-\delta}$. Za sve $\lambda\in\Omega_\varepsilon^1$, imamo

$$\begin{aligned}||B_t(\lambda)||&\leq\frac{1}{|\tilde{K}(\lambda)|}[e^{-Re\lambda t}||S_K(t)||+M\int_t^\infty e^{(\beta-Re\lambda)s}ds]\\&\leq\frac{1}{|\tilde{K}(\lambda)|}[e^{-Re\lambda t}||S_K(t)||+M\frac{e^{(\beta-Re\lambda)t}}{Re\lambda-\beta}]\\&\leq T_\varepsilon e^{\varepsilon_0|\lambda|}e^{(\beta-Re\lambda)t}(e^{\beta t}||S_K(t)||+\frac{M}{Re\lambda-\beta})\\&\leq T_\varepsilon(e^{\beta t}||S_K(t)||+\frac{M}{Re\lambda-\beta})e^{\varepsilon_0|\lambda|+(\beta-Re\lambda)t}\leq\delta.\end{aligned}$$

Kako $R(\lambda,t)$ i $B_t(\lambda)$ komutiraju sa A, važi $\Omega_\varepsilon^1\subset\rho(A)$ i

$$||R(\lambda,A)||=||R(\lambda,t)(I-B_t(\lambda))^{-1}||\leq\frac{1}{|\tilde{K}(\lambda)|}|\int_0^t e^{-\lambda s}S_K(s)ds|\frac{1}{1-\delta}$$

$$\leq \overline{K}_\varepsilon e^{\varepsilon_0|\lambda|} \leq \overline{K}_\varepsilon e^{\varepsilon\tau|\lambda|}, \ \lambda \in \Omega_\varepsilon^1.$$

Dokazali smo i sledeću propoziciju.

Propozicija 1.10.6. *Neka je $0 \neq K \in L^1_{loc}([0,\tau))$, za neko $0 < \tau \leq 1$ i neka A generiše K-polugrupu $(S_K(t))_{t\in[0,\tau)}$. Ako se K moze produžiti do funkcije K_1 u $L^1_{loc}([0,\infty))$ tako da za K_1 važi* (P1) *i da njena Laplaceova transformacija ima iste procene kao u Teoremi* 1.10.5, *tada postoji hiperfunkciono fundamentalno rešenje za A.*

Za dokaz sledeće teoreme videti [48].

Teorema 1.10.7. *Pretpostavimo da za svako $\varepsilon > 0$ postoje $C_\varepsilon > 0$ i $M_\varepsilon > 0$ takvi da je $\Omega_\varepsilon \subset \rho(A)$ i*

$$||R(\lambda : A)|| \leq M_\varepsilon e^{\varepsilon|\lambda|}, \ \lambda \in \Omega_\varepsilon.$$

(a) *Neka je K eksponencijalno ograničena funkcija i neka za K važi: Postoji $\varepsilon_0 > 0$ takvo da za sve $\varepsilon > 0$ postoji $T_\varepsilon > 0$ sa*

$$|\tilde{K}(\lambda)| \leq T_\varepsilon e^{-\varepsilon_0|\lambda|}, \ \lambda \in \Omega_\varepsilon. \tag{19}$$

Ako je $\tau > 0$ i ako je $K_{|[0,\tau)} \neq 0$ ($K_{|[0,\tau)}$ je restrikcija na $[0,\tau)$), tada A generiše lokalnu K-polugrupu na $[0,\tau)$.
(b) *Pretpostavimo da je K eksponencijalno ograničena funkcija, $\tau > 0$ i $K_{|[0,\tau)} \neq 0$. Pretpostavimo da za svako $\varepsilon > 0$ postoje $T_\varepsilon > 0$ i $\varepsilon_0 \in (\varepsilon(1+\tau), \infty)$ tako da* (19) *važi. Tada A generiše lokalnu K-polugrupu na $[0,\tau)$.*

Veze izmedju hiperfunkcionih i C-polugrupa su prilično komplikovane. Sledeći primer Bealsa ([13]), u našoj verziji, pokazuje da postoji gusto definisani operator A na $H^2(\mathbb{C}_+)$ koji nije subgenerator (lokalne) integrisane C-polugrupe.

Primer 1.10.8. Neka je $\psi(t) = \frac{t}{\ln(t+1)}$, $t > 0$, $\psi(0) = 1$. Tada je ψ nenegativna, neprekidna, konkavna funkcija na $[0,\infty)$ i važi $\psi(t) \to \infty$, $\frac{\psi(t)}{t} \to 0$, $t \to \infty$, kao i

$$\int_1^\infty \frac{\psi(t)}{t^2} dt = \infty.$$

Jasno, za svako $\varepsilon > 0$ postoji $C_\varepsilon > 0$ tako da je $\varepsilon t + C_\varepsilon \geq \psi(t)$, $t \geq 0$. Neka je A zatvoren, gusto definisan operator na $E := H^2(\mathbb{C}_+)$ takav da je

$$\Omega(\psi) := \{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda \geq \psi(|Im\lambda|)\} \subset \rho(A) \text{ i}$$
$$||R(\lambda : A)|| \leq \frac{M}{1 + Re\lambda}, \ \lambda \in \Omega(\psi),$$

i da za svako $\tau \in (0,\infty)$ ne postoji rešenje problema

$$\begin{cases} u \in C((0,\tau); D(A)) \cap C^1([0,\tau); E)), \\ u'(t) = Au(t), \ t \in (0,\tau), \\ u(0) = x, \end{cases}$$

osim u slučaju $x = 0$. Egzistencija takvog operatora je pokazana u Teoremi 2' u [13]. Kako je $\rho(A) \neq \emptyset$, imamo $\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} D(A^n)} = E$. Pretpostavimo da je A

subgenerator lokalne k-puta integrisane C-polugrupe na $[0,\tau)$, za neki injektivni operator $C \in L(E)$ i $k \in \mathbb{N}$. Tada problem

$$\begin{cases} u \in C([0,\tau); D(A)) \cap C^1([0,\tau); E)), \\ u'(t) = Au(t), \; t \in [0,\tau), \\ u(0) = x, \end{cases}$$

ima jedinstveno rešenje za sve $x \in C(D(A^{k+1}))$ ([58]). Dakle, $C(D(A^{k+1})) = \{0\}$ i ovo je kontradikcija. Zbog toga A ne generiše C-distribucionu polugrupu ([44]). Medjutim, lako je pokazati $\Omega_\varepsilon \subset \Omega_\psi \subset \rho(A)$. Rezolventa je ograničena na Ω_ψ i zbog toga postoji hiperfunkciono fundamentalno rešenje za A.

Primer 1.10.9. Neka je $E = L^2(\mathbb{R})$ i

$$Af(x) = (x + ix)f(x), \; x \in \mathbb{R}, \; f \in E,$$

sa maksimalnim domenom u E. Lako je pokazati: $\sigma(A) = \{x + ix : x \in \mathbb{R}\}$ i $||R(\lambda : A)|| \leq \frac{2^{1/2}}{|Re\lambda - Im\lambda|}$, $\lambda \in \rho(A)$. Dakle, ne postoji hiperfunkciono (ultradistribuciono, distribuciono) fundamentalno rešenje za A. Lako je proveriti da je A generator C-polugrupe

$$T(t)f(x) := e^{x(1+i)t - x^2} f(x), \; x \in \mathbb{R}, \; f \in E, \; t \geq 0,$$

gde je $C = T(0)$. Polugrupa $T(\cdot)$ se može proširiti do cele C-grupe ([23]).

2. C-distribucione polugrupe

U ovom poglavlju ćemo proučiti klasu C-distribucionih polugrupa. Za $C = I$, data klasa se svodi na klasu distribucionih polugrupa Kunstmanna i Wanga. Dokazaćemo veze C-distribucionih polugrupa i lokalno integrisanih C-polugrupa, definisaćemo takodje eksponencijalne C-distribucione polugrupe i dati njihove veze sa eksponencijalnim integrisanim C-polugrupama. Poseban deo ćemo posvetiti i analizi gustih C-distribucionih polugrupa.
Neka je C injektivan operator na Banachovom prostoru E i neka je $n \in \mathbb{N}_0$. U ovom poglavlju koristićemo definiciju lokalne n -puta integrisane C-polugrupe $(T_n(t))_{t\in[0,\tau)}$ iz [58]; u prethodnom poglavlju smo diskutovali veze takve definicije sa Definicijom 1.1.2. Ako je $n = 0$, to je lokalna C-polugrupa. Pretpostavićemo u nastavku da je data polugrupa nedegenerisana. Podsetimo se, operatorska familija $(T(t))_{t\in[0,\tau)}$ $(T(t) \in L(E))$ je nedegenerisana ako:

$$T(t)x = 0, \text{ za sve } t \in [0, \tau), \text{ povlači } x = 0.$$

(Integralni) generator A lokalne n-puta integrisane C-polugrupe $(T_n(t))_{t\in[0,\tau)}$ je dat sa

$$\{(x, y) \in E \times E : T_n(t)x - \frac{t^n}{n!}Cx = \int_0^t T_n(s)y\,ds,\ t \in [0, \tau)\}.$$

To je zatvoren linearan operator. Ako je $(T_0(t))_{t\geq 0}$ C-polugrupa, njen infinitezimalni generator je definisan sa

$$A = \left\{ (x, y) \in E \times E \ :\ \lim_{t\to 0+} \tfrac{T_0(t)x - Cx}{t} = Cy \right\},$$

i to je zatvoren linearan operator koji zadovoljava $C^{-1}AC = A$. Pokazaćemo da se infinitezimalni generator C-polugrupe $(T_0(t))_{t\geq 0}$ poklapa sa njenim integralnim generatorom. Ako je $\overline{R(C)} = E$, tada se u definiciji generatora A jaki limit može zameniti sa slabim limitom ([18]).
C rezolventni skup za A, $\rho_C(A)$, je skup svih kompleksnih brojeva λ takvih da je $\lambda I - A$ injektivan i da je $R(C) \subset R(\lambda I - A)$.
Ako je $C = I$, dobijamo lokalno integrisane polugrupe.
Neka je $n \in \mathbb{N}_0$. Apstraktni Cauchyjev problem:

$$(\mathcal{C}_{n+1}(\tau)) : \begin{cases} u \in C([0, \tau); D(A)) \cap C^1([0, \tau); E)), \\ u'(t) = Au(t) + \frac{t^n}{n!}Cx,\ t \in [0, \tau) \\ u(0) = 0, \end{cases}$$

je C-dobro postavljen ako za svako $x \in E$ postoji jedinstveno rešenje za $\mathcal{C}_{n+1}(\tau)$.

2.1. Elementarne osobine C-distribucionih polugrupa

Pretpostavimo $\mathcal{G} \in \mathcal{D}_0'(L(E))$ i $C\mathcal{G} = \mathcal{G}C$. Ako $\mathcal{G}$ takodje zadovoljava uslov

$$\text{(C.D.S.1)} \quad \mathcal{G}(\varphi *_0 \psi)C = \mathcal{G}(\varphi)\mathcal{G}(\psi),\ \varphi,\ \psi \in \mathcal{D},$$

gde je $\varphi *_0 \psi(t) = \int_0^t \varphi(t-u)\psi(u)du,\ t \in \mathbb{R}$, onda $\mathcal{G}$ zovemo C-preddistribucionom polugrupom, pre-(C-DSG) kraće. Ako pored toga važi i uslov

$$\text{(C.D.S.2)}\quad \mathcal{N}(\mathcal{G}) := \bigcap_{\varphi \in \mathcal{D}_0} Kern\mathcal{G}(\varphi) = \{0\},$$

onda je $\mathcal{G}$ C-distribuciona polugrupa, (C-DSG) kraće. $\mathcal{G}$ je gusta pre-(C-DSG), ako je ispunjeno (C.D.S.1) i

$$\text{(C.D.S.3)}\quad \mathcal{R}(\mathcal{G}) := \bigcup_{\varphi \in \mathcal{D}_0} Im\mathcal{G}(\varphi) \text{ je gust u } E.$$

Ova definicija, sa $C = I$, je uvedena u [52] i [92]. Jasno, ako je $\mathcal{G}$ pre-(C-DSG), tada je $\mathcal{G}(\varphi)\mathcal{G}(\psi) = \mathcal{G}(\psi)\mathcal{G}(\varphi),\ \varphi,\ \psi \in \mathcal{D}$. Takodje, u ovom slucaju, $\mathcal{N}(\mathcal{G})$ je zatvoren potprostor u E. Kao u [52], možemo pokazati sledeću propoziciju koja daje strukturu pre-(C-DSG) na njenom kernel prostoru. Dokaz je izostavljen.

Propozicija 2.1.1. *Neka je $\mathcal{G}$ pre-*(C-DSG). *Označimo $N = \mathcal{N}(\mathcal{G})$; G_1 je restrikcija od $\mathcal{G}$ na N, ($G_1 = \mathcal{G}_{|N}$). Ispunjeno je:*
Postoji jedinstven skup operatora $T_0, T_1, ..., T_m \in L(E)$ takav da je

$$G_1 = \sum_{j=1}^{m} \delta^{(j)} T_j,\ T_i C^i = (-1)^i T_0^{i+1},\ i = 0, 1, ..., m-1 \text{ i } T_0 T_m = T_0^{m+2} = 0.$$

Zapažanje. Ako je $C = I$, imamo $T_i = (-1)^i T_0^{i+1}$, $i = 0, 1, \ldots, m$ i T_0 je nazvan u [52] **kernel operatorom** za $\mathcal{G}$. U ovom slučaju postoji pre-(DSG) $\mathcal{G}$ sa $\mathcal{N}(\mathcal{G}) = E$ ([52]).

Sledeća propozicija takodje može biti pokazana kao u [52].

Propozicija 2.1.2. *Neka je $\mathcal{G}$ pre-*(C-DSG), *$F = E/\mathcal{N}(\mathcal{G})$ i neka je q odgovarajuće kanoničko preslikavanje $q : E \to E/\mathcal{N}(\mathcal{G})$.*
1. *Neka je $H \in L(\mathcal{D}, L(F))$ definisana sa $q\mathcal{G}(\varphi) = H(\varphi)q$, za sve $\varphi \in \mathcal{D}$ i neka je $\tilde{C}$ linearan operator u F definisan sa $\tilde{C}q = qC$. Tada je $\tilde{C} \in L(F)$ injektivan operator i H je ($\tilde{C}$-*DSG) *u F.*
2. *$C(\overline{\langle \mathcal{R}(\mathcal{G})\rangle}) \subset \overline{\mathcal{R}(\mathcal{G})}$, gde je $\langle \mathcal{R}(\mathcal{G})\rangle$ linearno zatvorenje za $\mathcal{R}(\mathcal{G})$.*
3. *Pretpostavimo da je $\mathcal{G}$ negusta i da je $C\overline{\mathcal{R}(\mathcal{G})} = \overline{\mathcal{R}(\mathcal{G})}$. Stavimo $R = \overline{\mathcal{R}}$ i $H = \mathcal{G}_{|R}$. Tada je H gusta pre-(C_1-*DSG) *u R, sa $C_1 = C_{|R}$.*
4. *Pretpostavimo $\overline{R(C)} = E$. Tada je adjoint $\mathcal{G}(\cdot)^*$ pre-(C^*-*DSG) *u E^* i važi $\mathcal{N}(\mathcal{G}^*) = \overline{\mathcal{R}(\mathcal{G})}^{\circ}$.*
5. *Ako je E refleksivan i $\overline{R(C)} = E$, tada je $\mathcal{N}(\mathcal{G}) = \overline{\mathcal{R}(\mathcal{G}^*)}^{\circ}$.*
6. *Pretpostavimo $\overline{R(C)} = E$. Onda je $\mathcal{G}^*$ (C^*-*DSG) *u E^* ako i samo ako je $\mathcal{G}$ gusta pre-*(C-DSG), *za proizvoljno E. Ako je E refleksivan, tada je $\mathcal{G}^*$ gusta pre- (C^*-*DSG) *u E^* ako i samo ako je $\mathcal{G}$* (C-DSG).

Dokaz. Dajemo samo detaljan dokaz za 1. Najpre, pokažimo da definicija od $\tilde{C}(q(x))$ ne zavisi od izbora klase $q(x)$. Pretpostavka $q(x) = q(y)$, tj. $\mathcal{G}(\varphi)(x - y) = 0,\ \varphi \in \mathcal{D}_0$ i $C\mathcal{G} = \mathcal{G}C$, impliciraju $\mathcal{G}(\varphi)(Cx - Cy) = 0,\ \varphi \in \mathcal{D}_0$ i $\tilde{C}(q(x)) = \tilde{C}(q(y))$. Sada je jasno da je $\tilde{C}$ linearan operator u F. Pokažimo da je $\tilde{C}$ neprekidan operator. Pretpostavimo $x \in E$. Tada je $\left\|\tilde{C}(q(x))\right\| =$

$\inf_{y\in\mathcal{N}(\mathcal{G})} \|Cx+y\|$. Fiksirajmo $y \in \mathcal{N}(\mathcal{G})$. Primenjujući ponovo $C\mathcal{G} = \mathcal{G}C$, imamo $Cy \in \mathcal{N}(\mathcal{G})$. Dakle, $\left\|\tilde{C}(q(x))\right\| \le \|Cx + Cy\| \le \|C\| \, \|x+y\|$; ovo daje $\left\|\tilde{C}(q(x))\right\| \le \|C\| \, \|q(x)\|$, $\tilde{C} \in L(F)$ i $\left\|\tilde{C}\right\| \le \|C\|$. Pretpostavimo $\tilde{C}(q(x)) = 0$. Tada je $Cx \in \mathcal{N}(\mathcal{G})$ i $C\mathcal{G}(\varphi)x = 0$, $\varphi \in \mathcal{D}_0$. Kako je C injektivan operator, dobijamo $x \in \mathcal{N}(\mathcal{G})$ i $q(x) = 0$. Zbog toga je $\tilde{C} \in L(F)$ injektivan. Direktno se proverava da H zadovoljava ($\tilde{C}$.D.S.1) i $\tilde{C}H = H\tilde{C}$. Neka je $H(\varphi)q(x) = 0$, $\varphi \in \mathcal{D}_0$, tj. $\mathcal{G}(\varphi)x \in \mathcal{N}(\mathcal{G})$, $\varphi \in \mathcal{D}_0$. Ovo daje $\mathcal{G}(\psi)\mathcal{G}(\varphi)x = 0$, $C\mathcal{G}(\varphi * \psi)x = 0$ i $\mathcal{G}(\varphi * \psi)x = 0$, φ, $\psi \in \mathcal{D}_0$. Izaberimo regularizacioni niz (ρ_n) u $\mathcal{D}_0$ da dobijemo $\mathcal{G}(\varphi)x = \lim_{n\to\infty} \mathcal{G}(\varphi * \rho_n)x = 0$, $\varphi \in \mathcal{D}_0$; dakle, $q(x) = 0$ i dokaz je kompletiran.

Neka je $\mathcal{G}$ (C-DSG) i neka je $T \in \mathcal{E}_0'(\mathbb{C})$, tj. T je skalarno-vrednosna distribucija sa kompaktnim nosačem sadržanim u $[0,\infty)$. Definišimo $G(T)$ na potprostoru od E sa

$$y = G(T)x \text{ ako i samo ako } \mathcal{G}(T * \varphi)x = \mathcal{G}(\varphi)y, \ \varphi \in \mathcal{D}_0.$$

Označimo domen operatora $G(T)$ sa $D(G(T))$. Linearnost i zatvorenost operatora $G(T) : D(G(T)) \to E$ se lako proveravaju. Imamo $G(\delta) = I$.
Infinitezimalni generator neke (C-DSG) je definisan sa $A := G(-\delta')$.
Kako je za $\psi \in \mathcal{D}$, $\psi_+ := \psi \mathbf{1}_{[0,\infty)} \in \mathcal{E}_0'(\mathbb{C})$, ($\mathbf{1}_{[0,\infty)}$ je Heavisideova funkcija), definicija za $G(\psi_+)$ je jasna. Primetimo da se C ne nalazi u definiciji operatora $G(T)$. Pravi razlog ovog izbora će se videti nešto kasnije. Definišimo zbog toga i operator $G_C(T)$ ($T \in \mathcal{E}_0'(\mathbb{C})$) na sledeći način

$$G_C(T) = \{(x,y) \in E \times E \ : \mathcal{G}(T * \varphi)Cx = \mathcal{G}(\varphi)y, \ \varphi \in \mathcal{D}_0\}.$$

Na osnovu (C.D.S.2) $G_C(T)$ je funkcija; obavezno, $G_C(T)$ je zatvoren linearan operator. Važi $G_C(\delta) = C$ i $G(T)C = G_C(T)$, $T \in \mathcal{E}_0'(\mathbb{C})$.

Propozicija 2.1.3. Neka je $\mathcal{G}$ (C-DSG). Tada je $G(\psi_+)C = \mathcal{G}(\psi)$, $\psi \in \mathcal{D}$.

Dokaz. Operator $G(T)$ komutira sa $\mathcal{G}(\varphi)$ i sa C za sve $T \in \mathcal{E}_0'$ i $\varphi \in \mathcal{D}$. Skup $\mathcal{R}(\mathcal{G})$ je podskup od $D(G(T))$. Neka je $x \in E$. Jasno,

$$\begin{gathered} G(\psi_+)Cx = \mathcal{G}(\psi)x \\ \Updownarrow \\ \mathcal{G}(\psi_+ * \varphi)Cx = \mathcal{G}(\varphi)\mathcal{G}(\psi)x, \ \varphi \in \mathcal{D}_0, \\ \Updownarrow \\ \mathcal{G}(\psi_+ * \varphi)Cx = \mathcal{G}(\varphi *_0 \psi)Cx, \ \varphi \in \mathcal{D}_0, \\ \Updownarrow \\ \mathcal{G}(\varphi *_0 \psi - \varphi * \psi_+)Cx = 0, \ \varphi \in \mathcal{D}_0. \end{gathered}$$

Primetimo, ako je $\eta \in \mathcal{D}_{(-\infty,0]}$ tada neprekidnost preslikavanja $\mathcal{G}$ implicira $\lim_{h\to 0-} \mathcal{G}(\tau_h \eta)x = \mathcal{G}(\eta)x = 0$, za sve $x \in E$. Kako je $\eta := \varphi *_0 \psi - \varphi * \psi_+ \in \mathcal{D}_{(-\infty,0]}$, dokaz je završen.

Koristeći iste argumente kao u Lemi 3.6 datoj u [52], imamo:

Propozicija 2.1.4. *Neka je* S, $T \in \mathcal{E}_0'$, $\varphi \in \mathcal{D}_0$, $\psi \in \mathcal{D}$ *i* $x \in E$. *Tada*
1. $(\mathcal{G}(\varphi)x, \ \mathcal{G}(\underbrace{T * \ldots * T}_{m} * \varphi)x) \in G(T)^m$, $m \in \mathbb{N}$.

2. $G(S)G(T) \subset G(S * T)$ *i* $D(G(S)G(T)) = D(G(S * T)) \cap D(G(T))$; $G(S) + G(T) \subset G(S + T)$.
3. $(\mathcal{G}(\psi)x,\ \mathcal{G}(-\psi')x - \psi(0)Cx) \in G(-\delta')$.
4. *Ako je $\mathcal{G}$ gusta onda je njen generator gusto definisan.*

Primer 1. 1. Ako je A infinitezimalni generator C-polugrupe $(T(t))_{t\geq 0}$ tada je sa

$$\mathcal{G}(\varphi) = \int_0^\infty T(t)\varphi(t)dt,\ \varphi \in \mathcal{D},$$

data (C-DSG) generisana sa A.

Dokaz. Pokazaćemo samo da je A generator za $\mathcal{G}$. Dobro je poznato: $C^{-1}AC = A$, $T(t)C = CT(t)$, $T(t)A \subset AT(t)$, $t \geq 0$. Pretpostavimo sada $(x, y) \in C^{-1}AC = A$. Tada je ispunjeno

$$A\int_0^t T(s)Cxds = T(t)Cx - C^2x \quad \text{i}$$

$$\int_0^t T(s)ACxds = T(t)Cx - C^2x,\ t \geq 0.$$

Dobijamo $\int_0^t T(s)Cyds = CT(t)x - C^2x$ i $\int_0^t T(s)yds = T(t)x - Cx,\ t \geq 0$. Treba pokazati

$$-\int_0^\infty \varphi'(t)T(t)xdt = \int_0^\infty \varphi(t)T(t)ydt,\ \varphi \in \mathcal{D}_0.$$

Ovo sledi iz

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \varphi(t)T(t)ydt &= -\int_0^\infty \varphi'(t)\int_0^t T(s)ydsdt = -\int_0^\infty \varphi'(t)[T(t)x - Cx]dt \\ &= -\int_0^\infty \varphi'(t)T(t)xdt.\end{aligned}$$

Dobijamo $(x, y) \in B$, gde je B generator od $\mathcal{G}$. Pretpostavimo $(x, y) \in B$. Tada je $-\int_0^\infty \varphi'(t)T(t)xdt = \int_0^\infty \varphi(t)T(t)ydt$ i $\int_0^\infty \varphi'(t)T(t)xdt = \int_0^\infty \varphi'(t)\int_0^t T(s)ydsdt,\ \varphi \in \mathcal{D}_0$. Dakle, $T(t)x - \int_0^t T(s)yds = const$ i $\int_0^t T(s)yds = T(t)x - Cx,\ t \geq 0$. Stoga je

$$A\int_0^t T(s)xds = \int_0^t T(s)yds,\ t \geq 0.$$

Kako je A zatvoren, imamo $T(t)x \in D(A)$ i $AT(t)x = T(t)y$, za sve $t \geq 0$. Ovo daje $(x, y) \in C^{-1}AC = A$.

2. Ako je $\mathcal{G}$ (DSG) sa generatorom A i $\mathcal{G}C = C\mathcal{G}$, tada je $\mathcal{G}C$ (C-DSG) sa generatorom A.

Ilustrujmo 1. sa konkretnim primerom.

3. (Primer 6.1, [27]) Neka je multiplikativni operator A definisan sa

$$Af(z) = zf(z), \quad D(A) = \left\{f \in E = L^2(\mathbb{C}) \ : \ zf(z) \in E\right\}.$$

Tada je A generator $C-$polugrupe

$$T(t)f := e^{zt-|z|^2}f(z), \ t \geq 0, \ f \in E,$$

gde je $Cf(z) = e^{-|z|^2}f, \ f \in E$. Poznato je $\|T(t)\| = e^{\frac{t^2}{4}}, \ t \geq 0$ i $\sigma(A) = \mathbb{C}$. Zbog toga je sa

$$\mathcal{G}(\varphi)f(z) := \int_0^\infty \varphi(t)e^{zt-|z|^2}f(z)dt, \ \varphi \in \mathcal{D}, \ f \in E, \ z \in \mathbb{C},$$

data gusta (C-DSG) generisana sa A.

2.2. Relacije sa integrisanim C-polugrupama

U ovoj sekciji ćemo dokazati najvažnije relacije izmedju C-distribucionih polugrupa, apstraktnog problema $\mathcal{C}_{n+1}(\tau)$ i integrisanih C-polugrupa. Počinjemo sa sledećom teoremom.

Teorema 2.2.1. *Neka je $\mathcal{G}$ (C-DSG) generisana sa A. Tada postoji $\tau > 0$, $n \in \mathbb{N}$ i nedegenerisana operatorska familija $(W(t))_{t\in[0,\tau)}$ tako da je:*

(a) $A\int_0^t W(s)xds = W(t)x - \frac{t^n}{n!}Cx, \ t \in [0, \tau), \ x \in E,$

(b) $CA \subset AC, \ W(t)A \subset AW(t), \ CW(t) = W(t)C, \ t \in [0, \tau).$

(c) *$W(\cdot)$ je lokalna n-puta integrisana C-polugrupa generisana sa A $(= C^{-1}AC)$. Takodje, problem $\mathcal{C}_{n+1}(\tau)$ je C-dobro postavljen za A i za svako $\tau' > 0$, postoje n', $l \in \mathbb{N}$ tako da je $\mathcal{C}_{n'}(\tau')$ C^l-dobro postavljen A.*

Dokaz. Imamo $A\mathcal{G}(\varphi)x = -\mathcal{G}(\varphi')x - \varphi(0)Cx$, za sve $\varphi \in \mathcal{D}$ i $x \in E$, što povlači da je $\mathcal{G}$ neprekidno linearno preslikavanje iz $\mathcal{D}$ u $L(E, D(A))$. Kao u Teoremi 7.2 datoj u [2] zaključujemo da postoji $\tau > 0$, $n \in \mathbb{N}$ i neprekidna funkcija $W : [-\tau, \ \tau] \to L(E, D(A))$ tako da je

$$\mathcal{G}(\varphi)x = (-1)^n \int_{-\tau}^{\tau} \varphi^{(n)}(t)W(t)xdt$$

za sve $x \in E$, $\varphi \in \mathcal{D}_{(-\tau,\tau)}$. Imamo i supp$W \subset [0, \tau]$, kao i

$(-1)^n \int_0^\tau \varphi^{(n)}(t)AW(t)xdt = A\mathcal{G}(\varphi)x$

$= \mathcal{G}(-\varphi')x - \varphi(0)Cx = (-1)^{n+1}\int_0^\tau \varphi^{(n+1)}(t)W(t)xdt - \varphi(0)Cx$; dobijamo

$$\int_0^\tau \varphi^{(n+1)}(t)\left[\int_0^t AW(s)xds - W(t)x\right]dt = 0, \text{ za sve } \varphi \in \mathcal{D}_{[0,\tau)},\ x \in E.$$

Stoga je

$$\int_0^t AW(s)xds - W(t)x = \sum_{j=0}^{n} t^j B_j x,\ t \in [0,\tau),$$

za neke operatore $B_j \in L(E)$, $j = 0,1,\ldots,n$. Kao u Teoremi 3.8 u [92] dobijamo $B_j = 0$, $j = 0,1,\ldots,n-1$ i $B_n = -\frac{t^n}{n!}C$, što daje

$$(2.1)\qquad \int_0^t AW(s)xds = W(t)x - \frac{t^n}{n!}Cx;\ t \in [0,\tau),\ x \in E.$$

Zbog $C\mathcal{G} = \mathcal{G}C$ i komutiranja operatora A sa C (videti sledeće zapažanje) i $\mathcal{G}(\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{D}$, ostatak dela (b) se dobija slično. (c) je jednostavna posledica Propozicije 2.4, Teoreme 2.5 i Teoreme 4.1 iz [58].

Zapažanje. 1. Neka je $\mathcal{G}$ (C-DSG) generisana sa A. Tada je $C^{-1}AC = A$.

Dokaz. Neka je $(x,y) \in A$. Imamo $\mathcal{G}(-\varphi\prime)x = \mathcal{G}(\varphi)y$, $C\mathcal{G}(-\varphi\prime)x = C\mathcal{G}(\varphi)y$ i $\mathcal{G}(-\varphi\prime)Cx = \mathcal{G}(\varphi)Cy$, $\varphi \in \mathcal{D}_0$. Zbog toga je $(Cx,Cy) \in A$ i $A \subset C^{-1}AC$. Pretpostavimo $(x,y) \in C^{-1}AC$. Zaključujemo $ACx = Cy$ i $\mathcal{G}(-\varphi\prime)Cx = \mathcal{G}(\varphi)Cy$, $\varphi \in \mathcal{D}_0$. Na osnovu $C\mathcal{G} = \mathcal{G}C$ i injektivnosti operatora C, imamo $\mathcal{G}(-\varphi\prime)x = \mathcal{G}(\varphi)y$, $\varphi \in \mathcal{D}_0$. Dobili smo $(x,y) \in A$ i $C^{-1}AC = A$.

2. Pretpostavimo da je $\mathcal{G}$ (C-DSG) generisana sa A. Tada za svako $\tau' > 0$, postoje n', $l \in \mathbb{N}$ tako da je $\mathcal{C}_{n'}(\tau')$ C^l-dobro postavljen za A. Zbog $C^{-1}AC = A$, imamo $C^{-n}AC^n = A$, $n \in \mathbb{N}_0$. Primenjujući ponovo Propoziciju 2.4 i Teoremu 2.5 iz [58], imamo da za sve $\tau' > 0$, postoje n'', $l \in \mathbb{N}$ tako da je A $(= C^{-l}AC^l)$ generator n''-puta integrisane C^l-polugrupe na $[0,\tau')$.

Teorema 2.2.2. *Pretpostavimo da postoji niz* $\langle(p_k,\tau_k)\rangle$ *(*$p_k \in \mathbb{N}_0$, $\tau_k \in (0,\infty)$; $k \in \mathbb{N}_0$*) takav da je* $\lim_{k\to\infty}\tau_k = \infty$ *i da je* $\mathcal{C}_{p_k+1}(\tau_k)$ *C-dobro postavljen za A. Ako je* $CA \subset AC$*, tada* $C^{-1}AC$ *generiše* (C-DSG).

Dokaz. Jasno, možemo pretpostaviti $\tau_k < \tau_{k+1}$ i $p_k \geq 2$, $k \in \mathbb{N}_0$. Neka je $(W_{p_k}(t))_{t\in[0,\tau_k)}$ lokalna p_k-puta integrisana C-polugrupa generisana sa $C^{-1}AC$. Ovde je W_{p_k} data Teoremom 2.5 u [58]. Kako je svaka (lokalno) integrisana C-polugrupa jedinstveno odredjena njenim generatorom (videti Propoziciju 1.3 u [55]), imamo:

$$\text{za } p_{k_1} = p_{k_2}:\ W_{p_{k_1}}(t) = W_{p_{k_2}}(t)\ ,\ 0 \leq t \leq \min(\tau_{k_1},\tau_{k_2}),$$

$$\text{za } p_{k_1} < p_{k_2}:\ W_{p_{k_2}}(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{p_{k_2}-p_{k_1}-1}}{(p_{k_2}-p_{k_1}-1)!}W_{p_{k_1}}(s)ds,\ 0 \leq t \leq \min(\tau_{k_1},\tau_{k_2}),$$

$$\text{za } p_{k_1} > p_{k_2} \ : \ W_{p_{k_1}}(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{p_{k_1}-p_{k_2}-1}}{(p_{k_1}-p_{k_2}-1)!} W_{p_{k_2}}(s)ds, \ 0 \le t \le \min(\tau_{k_1}, \tau_{k_2}).$$

Zbog toga je sledeća definicija nezavisna od $k \in \mathbb{N}_0$. Stavimo $\varphi \in \mathcal{D}_{(-\infty,\tau_k)}$. Definišimo sada

$$\mathcal{G}(\varphi)x := (-1)^{p_k} \int_0^\infty \varphi^{(p_k)}(t) W_{p_k}(t)x dt, \ x \in E.$$

Imamo $\mathcal{G} \in \mathcal{D}_0'(L(E))$ i $\mathcal{G}C = C\mathcal{G}$. Za sve $x \in E$ i $\varphi, \ \psi \in \mathcal{D}_{(-\infty,\tau_k)}$ sa

$\operatorname{supp}\varphi + \operatorname{supp}\psi \subset (-\infty, \tau_k)$, dobijamo

$$\mathcal{G}(\varphi)\mathcal{G}(\psi)x$$
$$= \int_0^\infty \varphi^{(p_k)}(t) \int_0^\infty \psi^{(p_k)}(s) W_{p_k}(t) W_{p_k}(s) x ds dt$$
$$= \int_0^\infty \varphi^{(p_k)}(t) \int_0^\infty \psi^{(p_k)}(s) \left[\left(\int_t^{t+s} - \int_0^s \right) \frac{(t+s-r)^{p_k-1}}{(p_k-1)!} W_{p_k}(r) Cx dr \right] ds dt$$
$$= -\int_0^\infty \varphi^{(p_k)}(t)$$
$$\int_0^\infty \psi^{(p_k-1)}(s) \frac{d}{ds} \left[\left(\int_t^{t+s} - \int_0^s \right) \frac{(t+s-r)^{p_k-1}}{(p_k-1)!} W_{p_k}(r) Cx dr \right] ds dt$$
$$= -\int_0^\infty \varphi^{(p_k)}(t) \int_0^\infty \psi^{(p_k-1)}(s)$$
$$\left[\left(\int_t^{t+s} - \int_0^s \right) \frac{(t+s-r)^{p_k-2}}{(p_k-2)!} W_{p_k}(r) Cx dr - \frac{t^{p_k-1}}{(p_k-1)!} W_{p_k}(s) Cx \right] ds dt$$
$$= -\int_0^\infty \varphi^{(p_k)}(t) \int_0^\infty \psi^{(p_k-1)}(s) \left[\left(\int_t^{t+s} - \int_0^s \right) \frac{(t+s-r)^{p_k-2}}{(p_k-2)!} W_{p_k}(r) Cx dr \right] ds dt$$
$$+(-1)^{p_k} \varphi(0) \int_0^\infty \psi^{(p_k-1)}(s) W_{p_k}(s) Cx ds.$$

Primenjujući iste argumente dovoljan broj puta,

$$\mathcal{G}(\varphi)\mathcal{G}(\psi)x$$
$$= (-1)^{p_k} \Big(\int_0^\infty \varphi^{(p_k)}(t) \int_0^\infty \psi(s) W_{p_k}(t+s) Cx ds dt$$
$$+ \sum_{j=0}^{p_k-1} \varphi^{(j)}(0) \int_0^\infty \psi^{(p_k-1-j)}(s) W_{p_k}(s) Cx ds \Big)$$
$$= (-1)^{p_k} \Big(\int_0^\infty \varphi^{(p_k)}(t) \int_t^\infty \psi(t-s) W_{p_k}(s) Cx ds dt$$
$$+ \sum_{j=0}^{p_k-1} \varphi^{(j)}(0) \int_0^\infty \psi^{(p_k-1-j)}(s) W_{p_k}(s) Cx ds \Big)$$
$$= (-1)^{p_k} \int_0^\infty \left[(\varphi^{(p_k)} *_0 \psi)(s) + \sum_{j=0}^{p_k-1} \varphi^{(j)}(0) \psi^{(p_k-1-j)}(s) \right] W_{p_k}(s) Cx ds$$

$$= (-1)^{p_k} \int_0^\infty (\varphi *_0 \psi)^{(p_k)}(s) W_{p_k}(s) Cx ds = \mathcal{G}(\varphi *_0 \psi) Cx, \ x \in E.$$

Dakle, (C.D.S.1) važi. Pretpostavimo da $x \in E$ zadovoljava $\mathcal{G}(\varphi)x = 0$, $\varphi \in \mathcal{D}_{[0,\tau_k]}$ i neko $k \in \mathbb{N}$. Dobijamo

$$W_{p_k}(t)x = \sum_{j=0}^{p_k-1} t^j z_j, \ t \in [0, \tau_k),$$

za neke $z_j \in E$, $j = 0, 1, \ldots, p_k - 1$. Koristeći zatvorenost operatora A i relaciju

$$A \int_0^t W_{p_k}(s) x ds = W_{p_k}(t)x - \frac{t^{p_k}}{(p_k)!} Cx, \ t \in [0, \tau_k),$$

lako se pokazuje $z_j = 0$, $j = 0, 1, \ldots, p_k - 1$. Dakle, $x = 0$ i (C.D.S.2) važi. Pokažimo da je $C^{-1}AC$ generator od $\mathcal{G}$. Pretpostavimo $(x, y) \in C^{-1}AC$ i $\varphi \in \mathcal{D}_{[0,\tau_k)}$ za neko $k \in \mathbb{N}$. Tada je

$$\mathcal{G}(-\varphi')x = (-1)^{p_k+1} \int_0^\infty \varphi^{(p_k+1)}(t) W_{p_k}(t) x dt$$

$$= (-1)^{p_k+1} \int_0^\infty \varphi^{(p_k+1)}(t) \left[\frac{t^{p_k}}{p_k!} Cx + \int_0^t W_{p_k}(s) y ds \right] dt$$

$$= (-1)^{p_k+1} \int_0^\infty \varphi^{(p_k+1)}(t) \int_0^t W_{p_k}(s) y ds dt = \mathcal{G}(\varphi) y,$$

i $C^{-1}AC \subset B$, gde je B generator od $\mathcal{G}$. Pretpostavimo sada $(x, y) \in B$. Tada je

$$(-1)^{p_k+1} \int_0^\infty \varphi^{(p_k+1)}(t) W_{p_k}(t) x dt$$

$$= (-1)^{p_k} \int_0^\infty \varphi^{(p_k)}(t) W_{p_k}(t) y dt$$

$$= (-1)^{p_k+1} \int_0^\infty \varphi^{(p_k+1)}(t) \int_0^t W_{p_k}(s) y ds dt, \ \varphi \in \mathcal{D}_{[0,\tau_k)}.$$

Zbog toga,

$$\left[W_{p_k}(t)x - \int_0^t W_{p_k}(s) y ds \right] = \sum_{j=0}^{p_k} t^j z_j, \ t \in_{[0,\tau_k)}, \tag{2.2}$$

za neke $z_j \in E$, $j = 0, 1, \ldots, p_k$. Stavimo $t = 0$ da dobijemo $z_0 = 0$. Koristeći (2.2) imamo:

$$\frac{d}{dt} W_{p_k}(t)x - W_{p_k}(t)y = \sum_{j=1}^{p_k} j t^{j-1} z_j \quad \text{i}$$

$$\begin{aligned} & AW_{p_k}(t)x + \frac{t^{p_k-1}}{(p_k-1)!}Cx - A\int_0^t W_{p_k}(s)y\,ds - \frac{t^{p_k}}{p_k!}Cy \\ = & \sum_{j=1}^{p_k} j t^{j-1} z_j, \ t \in [0, \tau_k). \end{aligned}$$

Dakle,

$$A\sum_{j=1}^{p_k} t^j z_j = \sum_{j=1}^{p_k} j t^{j-1} z_j - \frac{t^{p_k-1}}{(p_k-1)!}Cx + \frac{t^{p_k}}{p_k!}Cy, \ t \in [0, \tau_k). \tag{2.3}$$

Kako je A zatvoren, diferencirajući obe strane od (2.3) dovoljan broj puta dobijamo $z_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots, p_k - 1$ i $z_{p_k} = \frac{Cx}{p_k!}$. Ovo daje

$$W_{p_k}(t)x - \int_0^t W_{p_k}(s)y\,ds = \frac{t^{p_k}}{p_k!}Cx, \ t \in [0, \tau_k),$$

i zbog toga $(x, y) \in C^{-1}AC$. Dokaz je kompletiran.

Zapažanja 1. Ako je $C = I$, dovoljno je pretpostaviti da je $\mathcal{C}_{k+1}(\tau_0)$ dobro postavljen za neko $k \in \mathbb{N}$ i $\tau_0 > 0$. Tada je $\mathcal{C}_{2k+1}(2\tau_0)$ dobro postavljen (videti Teoremu 4.1, [2]). Ovo je netačno za proizvoljno injektivno C; napomenimo da $C-$dobra postavljenost za $\mathcal{C}_{k+1}(\tau_0)$ daje C^2-dobru postavljenost za $\mathcal{C}_{2k+1}(2\tau_0)$ (videti [58]). Primetimo da postoje (štamparske ?!) greške u dokazu Teoreme 4.1 u [58]. Glavna formula ([58]) mora biti zapisana na sledeći način:

$$T_{2k}(t) = S_k(\tau_0)S_k(t - \tau_0) + \sum_{m=0}^{k-1} \frac{1}{m!}(\tau_0^m T_{2k-m}(t - \tau_0) + (t - \tau_0)^m T_{2k-m}(\tau_0)),$$

i u drugoj formuli moramo pisati " $0 \leq m < k$" umesto " $0 \leq m \leq k$".

2. Ako je $\rho(A) \neq \emptyset$, $CA \subset AC$ i ako važe uslovi Teoreme 2.2, tada $C^{-1}AC = A$ generiše (C-DSG).

Ovim smo pokazali i sledeći rezultat.

Propozicija 2.2.3. (a) *Neka je $\mathcal{G}$* (C-DSG). *Tada postoje $\tau > 0$, $n \in \mathbb{N}$ i lokalna n-puta integrisana C-polugrupa $(W_n(t))_{t\in[0,\tau)}$ tako da je $\mathcal{G} = W_n^{(n)}$ u distribucionom smislu na $(-\infty, \tau)$.*

(b) *Neka je $(W_n(t))_{t\geq 0}$ n-puta integrisana C-polugrupa. Tada je $\mathcal{G} := W_n^{(n)}$* (C-DSG); *W_n i $\mathcal{G}$ imaju iste generatore, $n \in \mathbb{N}_0$.*

Zapažanje. Na osnovu dokaza datog u Primeru 1. 1, imamo sledeće: ako je A infinitezimalni generator C-polugrupe $(T(t))_{t\geq 0}$, tada je

$$C^{-1}AC = \left\{ (x,y) \in E \times E : T(t)x - Cx = \int_0^t T(s)yds,\ t \geq 0 \right\},$$

i integralni generator za $(T_t)_{t\geq 0}$ je $C^{-1}AC = A$.
Sledeća lema se pokazuje kao u slučaju integrisanih polugrupa.

Lema 2.2.4. *Neka je $(S(t))_{t\in[0,\tau)}$ n-puta integrisana C-polugrupa generisana sa A, $0 < \tau \leq \infty$, $n \in \mathbb{N}$. Ako je $x \in D(A^k)$ za neko $k \in \mathbb{N}$ sa $k \leq n$, onda važi*

$$\frac{d^k}{dt^k}S(t)x = S(t)A^k x + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{t^{n-i-1}}{(n-i-1)!}CA^{k-i-1}x,\ t \in [0,\tau).$$

Podsetimo se da je n-puta integrisana $C-$polugrupa $(W_n(t))_{t\geq 0}$ eksponencijalno ograničena ako postoje $M > 0$ i $\omega \in \mathbb{R}$ tako da je $\|W_n(t)\| \leq Me^{\omega t}$, $t \geq 0$.

Definicija 2.2.5. *$C-$distribuciona polugrupa G je eksponencijalna $C-$distribuciona polugrupa ako postoji $\varepsilon \in \mathbb{R}$ takvo da je $e^{-\varepsilon t}\mathcal{G} \in \mathcal{S}'(L(E))$.*

Teorema 2.2.6. *Neka je A zatvoren linearan operator. Važi:*

(a) *A je generator eksponencijalne $C-$distribucione polugrupe $\mathcal{G}$ ako i samo ako*

(b) *postoji $n \in \mathbb{N}$ takvo da je A generator eksponencijalno ograničene n-puta integrisane $C-$polugrupe $(W_n(t))_{t\geq 0}$.*

Dokaz. (b) $\to$ (a) Neka je A generator polugrupe $(W_n(t))_{t\geq 0}$ takve da je $\|W_n(t)\| \leq Me^{\omega t}$, $t \geq 0$. Propozicija 2.2.3 povlači da je $\mathcal{G} := W_n^{(n)}$ (C-DSG) generisana sa A. Za sve $\varepsilon > 0$ i $\varphi \in \mathcal{D}$ imamo

$$\left\|\langle e^{-(\omega+\varepsilon)t}\mathcal{G},\varphi\rangle\right\| \leq M \int_0^\infty e^{\omega t} \left|(e^{-(\omega+\varepsilon)\cdot}\varphi)^{(n)}(t)\right| dt$$

$$\leq M\ 2^n \int_0^\infty e^{\omega t} \sum_{i=0}^n |\omega+\varepsilon|^{n-i} e^{-(\omega+\varepsilon)t} \left|\varphi^{(i)}(t)\right| dt \leq M_1 \int_0^\infty e^{-\varepsilon t} \sum_{i=0}^n \left|\varphi^{(i)}(t)\right| dt$$

$$\leq \frac{M_1}{\varepsilon} \sum_{i=0}^n p_{0,i}(\varphi),$$

za pogodnu konstantu M_1 nezavisnu od φ, gde je $p_{0,i}(\psi) = \left|\psi^{(i)}\right|_\infty$, $\psi \in \mathcal{S}$, neprekidna seminorma na $\mathcal{S}$. Dobijamo $e^{-(\omega+\varepsilon)t}\mathcal{G} \in \mathcal{S}'(L(E))$, ako je $\varepsilon > 0$.
(a) $\to$ (b) Pretpostavimo da je $\mathcal{G}$ $C-$distribuciona polugrupa generisana sa A i da je $e^{-\varepsilon t}\mathcal{G} \in \mathcal{S}'(L(E))$. Jasno, $e^{-\varepsilon t}\mathcal{G}$ je (C-DSG) generisana sa $A - \varepsilon I$. Za svako fiksno $\varphi \in \mathcal{D}$, imamo

$$A\,\langle e^{-\varepsilon t}\mathcal{G},\, \varphi\rangle\, x = \langle e^{-\varepsilon t}\mathcal{G}, -\varphi'\rangle\, x + \varepsilon\,\langle e^{-\varepsilon t}\mathcal{G},\, \varphi\rangle\, x - \varphi(0)Cx,$$

što daje $e^{-\varepsilon t}\mathcal{G} \in \mathcal{S}'(L(E, D(A)))$. Sada možemo primeniti Teoremu 2.1.2 iz [65] da zaključimo da postoje $n \in \mathbb{N}$, $r > 0$ i neprekidna funkcija $V : \mathbb{R} \to L(E, D(A))$ čiji je nosač sadrzan u $[0,\infty)$ tako da je

$$\langle e^{-\varepsilon t}\mathcal{G},\varphi\rangle\, x = (-1)^n \int_0^\infty V(t)\varphi^{(n)}(t)xdt,$$

za sve $\varphi \in \mathcal{D}$, $x \in E$ i $|V(t)| \leq Mt^r$, $t \geq 0$. Slično kao u Teoremi 2.2.1, dobijamo da je $(V(t))_{t\geq 0}$ $n-$puta integrisana $C-$polugrupa generisana sa $C^{-1}(A-\varepsilon I)C = A - \varepsilon I$. Definišimo

$$W_n(t) := e^{\varepsilon t}V(t) + \int_0^t e^{\varepsilon s}p_n(t-s)V(s)ds, \ 0 \leq t < \infty,$$

gde je p_n polinom stepena $(n-1)$ takav da je

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}(-\varepsilon)^i \lambda^{-i} = \int_0^\infty e^{-\lambda t}p_n(t)dt, \quad \lambda > 0.$$

Na osnovu standardnog perturbacionog argumenta (kao u Lemi 3.2 datoj u [2]), $(W_n(t))_{t\geq 0}$ je eksponencijalno ograničena $n-$puta integrisana $C-$polugrupa generisana sa A.

Zapažanje. Dobro je poznato da ukoliko je A (integralni) generator (lokalne) $n-$puta integrisane $C-$polugrupe $(T_n(t))_{t\in[0,\tau)}$, $n \in \mathbb{N}_0$, tada je $C^{-1}AC = A$ ([55]). Primetimo da ne zahtevamo $\overline{D(A)} = E$ u prethodnoj teoremi.

Sada ćemo razmotriti klasičan slučaj: $\rho(A) \neq \emptyset$ i $C = R(\lambda : A)^k$, $\lambda \in \rho(A)$. Za dalji rad nam je neophodna sledeća lema.

Lema 2.2.7. *Neka je A zatvoren operator , $\lambda \in \rho(A)$, n, $k \in \mathbb{N}_0$, $0 < \tau \leq \infty$. Tada su sledeća tvrdjenja ekvivalentna:*
(a) $\mathcal{C}_{n+k+1}(\tau)$ *je I-dobro postavljen za A,*
(b) $\mathcal{C}_{n+1}(\tau)$ *je $R(\lambda : A)^k-$dobro postavljen za A.*

Dokaz. Ako je $k = 0$, dokaz je trivijalan. Pretpostavimo $k \in \mathbb{N}$.
(a) $\rightarrow$ (b) Neka je $(S_{n+k}(t))_{t\in[0,\tau)}$ kao u Propoziciji 2.3 u [2]. Lako se pokazuje ($x \in D(A^k)$ je fiksan) da je

$$u(t) := \int_0^t S(s)A^k x ds + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{t^{n+k-i}}{(n+k-i)!}A^{k-1-i}x, \ t \in [0,\tau),$$

rešenje problema

$$\begin{cases} u \in C([0,\tau), D(A)) \cap C^1([0,\tau), E)), \\ u'(t) = Au(t) + \frac{t^n}{n!}x, \ t \in [0,\tau), \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

Stoga problem $\mathcal{C}_{n+1}(\tau)$ (sa $C = R(\lambda : A)^k$) ima rešenje za sve $x \in E$. Jedinstvenost sledi iz dobre postavljenosti problema $\mathcal{C}_{n+k+1}(\tau)$ za $x = 0$.
(b) $\rightarrow$ (a) Ako je $\mathcal{C}_{n+1}(\tau)$ $R(\lambda : A)^k-$dobro postavljen za A, tada problem

$$\begin{cases} u \in C([0,\tau), D(A)) \cap C^1([0,\tau), E)) \\ u'(t) = Au(t), \ t \in [0,\tau) \\ u(0) = R(\lambda : A)^k x, \end{cases}$$

ima jedinstveno rešenje za sve $x \in D(A^{n+1})$ (videti [58]). Primena Propozicije 3.3 u [2] završava dokaz.

Propozicija 2.2.8. *Neka je A zatvoren linearan operator i $\lambda \in \rho(A)$. Tada su sledeći iskazi ekvivalentni:*
(a) *A generiše* (DSG),
(b) *A generiše $R(\lambda : A)^k$-distribucionu polugrupu za sve $k \in \mathbb{N}_0$,*
(c) *A generiše $R(\lambda : A)^k$-distribucionu polugrupu za neko $k \in \mathbb{N}_0$.*

Dokaz. (a) $\to$ (b) Neka je $\overline{G}$ (DSG) generisana sa A. Kako je $\overline{G}A \subset A\overline{G}$ ([52]), imamo da je $\mathcal{G} := \overline{G}R(\lambda : A)^k$ $R(\lambda : A)^k$-distribuciona polugrupa generisana sa A. Implikacija (b) $\to$ (c) je trivijalna. Ako A generiše $R(\lambda : A)^k$-distribucionu polugrupu za neko $k \in \mathbb{N}_0$, tada primena Teoreme 2.2.1 povlači postojanje prirodnog broja n i realnog broja $\tau > 0$ tako da je problem $\mathcal{C}_{n+1}(\tau)$ $R(\lambda : A)^k$-dobro postavljen za A. Sada možemo primeniti Lemu 2.2.7 kao i Teoremu 3.8 u [92] da pokažemo da A generiše (DSG).

Posledica 2.2.9. *Pretpostavimo da je problem $\mathcal{C}_{n+1}(\tau)$ $R(\lambda : A)^k$ – dobro postavljen za A, n, $k \in \mathbb{N}_0$, $0 < \tau \leq \infty$, $\lambda \in \rho(A)$. Tada A generiše* (DSG).

Za terminologiju integrisanih C-kosinus funkcija videti [94].

Propozicija 2.2.10. *Neka je A subgenerator n–puta integrisane C–kosinus funkcije $(C_n(t))_{t\geq 0}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Tada je operator $\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{C}$ generator $\mathcal{C}$-distribucione polugrupe u E^2, gde je* $\mathcal{A} := \begin{pmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{pmatrix}$ *i* $\mathcal{C} := \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$.

Dokaz. Najpre, poznato je $C_n(t)C = CC_n(t)$, $t \geq 0$ i $CA \subset AC$ (videti [94]). Na osnovu toga imamo $\mathcal{C}\mathcal{A} \subset \mathcal{A}\mathcal{C}$, tj. $\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$. Definišimo

$$W_{n+1}(t) := \begin{pmatrix} \int_0^t C_n(s)ds & \int_0^t (t-s)C_n(s)ds \\ C_n(t) - \frac{t^n}{n!}C & \int_0^t C_n(s)ds \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t < \infty.$$

Lako je pokazati da je $(W_{n+1}(t))_{t\geq 0}$ jako neprekidna operatorska familija koja zadovoljava $W_{n+1}(t)\mathcal{C} = \mathcal{C}W_{n+1}(t)$, $0 \leq t < \infty$. Fiksirajmo x i $y \in E$. Tada je

$$\mathcal{A}\int_0^t W_{n+1}(s)\binom{x}{y}ds = \mathcal{A}\begin{pmatrix} \int_0^t (t-s)C_n(s)xds + \int_0^t \frac{(t-s)^2}{2}C_n(s)yds \\ \int_0^t C_n(s)xds - \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}Cx + \int_0^t (t-s)C_n(s)yds \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \int_0^t C_n(s)xds - \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}Cx + \int_0^t (t-s)C_n(s)yds \\ A\left[\int_0^t (t-s)C_n(s)xds + \int_0^t \frac{(t-s)^2}{2}C_n(s)yds\right] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \int_0^t C_n(s)xds - \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}Cx + \int_0^t (t-s)C_n(s)yds \\ C_n(t)x - \frac{t^n}{n!}Cx + \int_0^t C_n(s)yds - \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}Cy \end{pmatrix}$$

$$= W_{n+1}(t)\binom{x}{y} - \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\mathcal{C}\binom{x}{y}, \quad t \geq 0.$$

Pretpostavimo $(x\ y)^T \in D(\mathcal{A})$. Tada je $x \in D(A)$ i

$$W_{n+1}(t)\binom{x}{y} = \begin{pmatrix} \int_0^t C_n(s)xds + \int_0^t (t-s)C_n(s)yds \\ C_n(t)x - \frac{t^n}{n!}Cx + \int_0^t C_n(s)yds \end{pmatrix}.$$

Zbog $x \in D(A)$, sledi $C_n(s)x \in D(A)$, $s \geq 0$. Dakle, $W_{n+1}(t)\binom{x}{y} \in D(\mathcal{A})$, $t \geq 0$ i

$$\begin{aligned} \mathcal{A}W_{n+1}(t)\binom{x}{y} &= \begin{pmatrix} C_n(t)x - \frac{t^n}{n!}Cx + \int_0^t C_n(s)yds \\ \int_0^t C_n(s)Axds + A\int_0^t (t-s)C_n(s)yds \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C_n(t)x - \frac{t^n}{n!}Cx + \int_0^t C_n(s)yds \\ \int_0^t C_n(s)Axds + C_n(t)y - \frac{t^n}{n!}Cy \end{pmatrix} \\ &= W_{n+1}(t)\binom{y}{Ax} = W_{n+1}(t)\mathcal{A}\binom{x}{y}. \end{aligned}$$

Zaključujemo $W_{n+1}(t)\mathcal{A} \subset \mathcal{A}W_{n+1}(t)$, $t \geq 0$. Na osnovu Propozicije 2.4 i Teoreme 2.5 u [58], $(W_{n+1}(t))_{t\geq 0}$ je $(n+1)$−put integrisana $\mathcal{C}$-polugrupa u E^2 generisana sa $\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{C}$. Propozicija 2.2.3 kompletira dokaz.

Zapažanje. Neka je A zatvoren operator i neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{C}$ kao u prethodnom tvrdjenju. Tada je

$$CA \subset AC \Leftrightarrow \mathcal{C}\mathcal{A} \subset \mathcal{A}\mathcal{C} \text{ i } C^{-1}AC = A \Leftrightarrow \mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{C} = \mathcal{A}.$$

Napomenimo da primeri dati u [94] mogu poslužiti za konstrukciju neeksponencijalnih C-distribucionih polugrupa. Na kraju navedimo da je problem poboljšanja Teoreme 2.2.2 otvoren.

2.3. Guste C-distribucione polugrupe

Razmotrimo nekoliko novih uslova za element $\mathcal{G} \in \mathcal{D}_0'(L(E))$:

(d_1): $\mathcal{G}(\varphi * \psi)C = \mathcal{G}(\varphi)\mathcal{G}(\psi)$, φ, $\psi \in \mathcal{D}_0$,

(d_2): isti kao i (C.D.S.2)

(d_3): $\mathcal{R}(\mathcal{G})$ je gust u E

(d_4): za sve $x \in \mathcal{R}(\mathcal{G})$ postoji funkcija $u_x \in C([0,\infty) : E)$ takva da je

$$u_x(0) = Cx \quad \text{i} \quad \mathcal{G}(\varphi)x = \int_0^\infty \varphi(t)u_x(t)dt, \ \varphi \in \mathcal{D}.$$

(d_5): ako (d_2) važi, onda (d_5) znači $G(\varphi_+)C = \mathcal{G}(\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{D}$.

Propozicija 2.3.1. *Neka je $\mathcal{G} \in \mathcal{D}_0'(L(E))$ i $\mathcal{G}C = C\mathcal{G}$. Tada je $\mathcal{G}$* (C-DSG) *ako i samo ako važe (d_1), (d_2) i (d_5).*

Dokaz. Neka (d_1), (d_2) i (d_5) važe. Treba pokazati samo (C.D.S.1). Lako se proverava da $G(T)$ komutira sa $\mathcal{G}(\eta)$ i C, za sve $T \in \mathcal{E}_0'$, $\eta \in \mathcal{D}_0$, ako pretpostavimo samo (d_1) i (d_2). Slično, u ovom slučaju imamo $\mathcal{R}(\mathcal{G}) \subset D(G(T))$,

$T \in \mathcal{E}'_0$. Neka je φ, $\psi \in \mathcal{D}$ i $x \in E$. Račun

$$\begin{gathered}
\mathcal{G}(\varphi *_0 \psi)Cx = \mathcal{G}(\varphi)\mathcal{G}(\psi)x \\
\Updownarrow \\
\mathcal{G}(\varphi *_0 \psi)Cx = G(\varphi_+)CG(\psi_+)Cx \\
\Updownarrow \\
\forall \eta \in \mathcal{D}_0 : \mathcal{G}(\varphi_+ * \eta)CG(\psi_+)Cx = \mathcal{G}(\eta)\mathcal{G}(\varphi *_0 \psi)Cx \\
\Updownarrow \\
\forall \eta \in \mathcal{D}_0 : \mathcal{G}(\varphi_+ * \eta)CG(\psi_+)Cx = \mathcal{G}(\eta)G((\varphi *_0 \psi)_+)C^2x \\
\Updownarrow \\
\forall \beta, \eta \in \mathcal{D}_0 : \mathcal{G}((\varphi *_0 \psi)_+ * \beta)\mathcal{G}(\eta)C^2x = \mathcal{G}(\beta)\mathcal{G}(\varphi_+ * \eta)CG(\psi_+)Cx \\
\Updownarrow \\
\forall \beta, \eta \in \mathcal{D}_0 : \mathcal{G}(\varphi_+ * (\beta * \psi_+))\mathcal{G}(\eta)C^2x = \mathcal{G}(\beta)\mathcal{G}(\varphi_+ * \eta)CG(\psi_+)Cx \\
\Updownarrow \\
\forall \beta, \eta \in \mathcal{D}_0 : \mathcal{G}(\beta * \psi_+)G(\varphi_+)\mathcal{G}(\eta)C^2x = \mathcal{G}(\beta)\mathcal{G}(\varphi_+ * \eta)CG(\psi_+)Cx \\
\Updownarrow \\
\forall \beta, \eta \in \mathcal{D}_0 : \mathcal{G}(\beta)G(\psi_+)G(\varphi_+)\mathcal{G}(\eta)C^2x = \mathcal{G}(\beta)\mathcal{G}(\varphi_+ * \eta)CG(\psi_+)Cx \\
\Updownarrow \\
\forall \eta \in \mathcal{D}_0 : G(\psi_+)G(\varphi_+)\mathcal{G}(\eta)C^2x = \mathcal{G}(\varphi_+ * \eta)CG(\psi_+)Cx \\
\Updownarrow \\
G(\varphi_+)CG(\psi_+)Cx = G(\psi_+)G(\varphi_+)C^2x \\
\Updownarrow \\
G(\varphi_+)G(\psi_+)C^2x = G(\psi_+)G(\varphi_+)C^2x \\
\Updownarrow \\
G((\varphi * \psi)_+)C^2x = G((\psi * \varphi)_+)C^2x
\end{gathered}$$

daje rezultat, gde ćemo samo primetiti da (d_1) i (d_2) impliciraju

$$G(S)G(T) \subset G(S * T),\ D(G(S)G(T)) = D(G(S * T)) \cap D(G(T)),\ T,\ S \in \mathcal{E}'_0.$$

Parafrazirajuci Lionsa [60], uvodimo regularne C-distribucione polugrupe.

Definicija 2.3.2. Regularna C-distribuciona polugrupa, (C-DSGL) kraće, je element $\mathcal{G} \in \mathcal{D}'_0(L(E))$ koji zadovoljava (d_1), (d_2), (d_3), (d_4) i $\mathcal{G}C = C\mathcal{G}$.

Pokažimo da svaka regularna C-distribuciona polugrupa zadovoljava (d_5).

Propozicija 2.3.3. *Neka je* $\mathcal{G}$ (C-DSGL). *Tada je* $\mathcal{G}$ (C-DSG).

Dokaz. Neka je $\varphi \in \mathcal{D}$ i $x \in E$. Kako je $G(\varphi_+)$ zatvoren linear operator, možemo pretpostaviti $x \in \mathcal{R}(\mathcal{G})$ da bi pokazali $(Cx, \mathcal{G}(\varphi)x) \in G(\varphi_+)$. Neka je $(\rho_n)_{n \geq 0}$ $\mathcal{D}_0$-niz takav da $\rho_n \to \delta$, $n \to \infty$. Neka je u_x funkcija data sa (d_4). Za sve $\eta \in \mathcal{D}_0$ dobijamo

$$\begin{aligned}
& \mathcal{G}(\rho_n)\mathcal{G}(\varphi_+ * \eta)Cx = \mathcal{G}((\varphi_+ * \rho_n) * \eta)C^2x = \mathcal{G}(\eta)C\mathcal{G}(\varphi_+ * \rho_n)x \\
= \ & \mathcal{G}(\eta)C \int_0^\infty (\varphi_+ * \rho_n)(t)u_x(t)dt \to \mathcal{G}(\eta)C\mathcal{G}(\varphi)x,\ n \to \infty, \text{ i}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{G}(\rho_n)\mathcal{G}(\varphi_+ * \eta)Cx = \mathcal{G}(\varphi_+ * \eta * \rho_n)C^2x \to \mathcal{G}(\varphi_+ * \eta)C^2x,\ n \to \infty.$$

Dakle, $\mathcal{G}(\varphi_+ * \eta)Cx = \mathcal{G}(\eta)\mathcal{G}(\varphi)x$, $\eta \in \mathcal{D}_0$, i (d_5) važi.

Zapažanje. Čak i u slučaju $C = I$, (d_1), (d_2) i (d_4) ne povlače (C.D.S.1), videti [52].

Propozicija 2.3.4. *Neka je* $\mathcal{G}$ (C-DSG) *generisana sa* A. *Tada postoji* $\varepsilon > 0$ *takav da za svako* $x \in D_\infty(A)$ *postoji funkcija* u_x *koja zadovoljava*

$$\begin{cases} u_x \in C^\infty([0,\varepsilon] : E), \\ \mathcal{G}(\varphi)x = \int\limits_0^\infty \varphi(t)u_x(t)dt, \ \varphi \in \mathcal{D}_{[0,\varepsilon]}, \\ u_x(0) = Cx. \end{cases}$$

Dokaz. Neka je $\mathcal{G}(\varphi) = (-1)^n \int\limits_0^{s_0} \varphi^{(n)}(t)W_n(t)dt$ na $(-\infty, s_0)$, za neku n-puta integrisanu C-polugrupu $(W_n(t))_{t\in[0,s_0)}$ generisanu sa A i $n \in \mathbb{N}$. Definišimo $\varepsilon := \frac{s_0}{2}$ i

$$u_x(t) := \frac{d^n}{dt^n}W_n(t)x, \ 0 \le t \le \varepsilon.$$

Na osnovu Leme 2.2.4, imamo

$$u_x(t) = W_n(t)A^n x + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{t^{n-i-1}}{(n-i-1)!}CA^{n-i-1}x, \ 0 \le t \le \varepsilon.$$

Kako je $x \in D_\infty(A)$, važi $u_x \in C^\infty([0,\varepsilon] : E)$. Štaviše, $u_x(0) = Cx$ i rezultat sledi primenom parcijalne integracije.

Zapažanje. Neka su $\mathcal{G}$ i A kao u prethodnom tvrdjenju. Tada je $CD_\infty(A) \subset \overline{\mathcal{R}(\mathcal{G})}$. Ovo sledi iz Propozicije 2.3.4 i regularizacionog niza (ρ_n) u $\mathcal{D}_0$ koji zadovoljava supp $\rho_n \subset \left[0, \frac{1}{n}\right]$, $n \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo sada: $\rho(A) \neq \emptyset$, $D(A)$ i $\mathcal{R}(C)$ su gusti u E. Tada je $\overline{D_\infty(A)} = E$ i stoga $\overline{CD_\infty(A)} = E$; sledi da je $\mathcal{G}$ gusta. Koristeći iste metode kao u [52], ovo je ekvivalentno sa: $\mathcal{G}^*$ je (C^*-DSG) u E^*. Pokazali smo sledeću propoziciju.

Propozicija 2.3.5. *Neka je* $\mathcal{G}$ (C-DSG) *generisana sa* A . *Tada je* $CD_\infty(A) \subset \overline{\mathcal{R}(\mathcal{G})}$. *Pretpostavimo dodatno* $\rho(A) \neq \emptyset$ i $\overline{R(C)} = E$. *Tada su sledeća tvrdjenja ekvivalentna:*
(a) $\mathcal{G}$ *je gusta,*
(b) A *je gusto definisan,*
(c) $\mathcal{G}^*$*je* (C*-DSG) *u* E^*.

Ako je $x \in \mathcal{R}(\mathcal{G})$, možemo pokazati sledeće.

Propozicija 2.3.6. *Neka je* $\mathcal{G}$ (C-DSG). *Tada* $\mathcal{G}$ *zadovoljava* (d_4).

Dokaz. Neka je $x = \mathcal{G}(\psi)y$, $\psi \in \mathcal{D}_0$, $y \in E$. Tada imamo

$$\mathcal{G}(\varphi)x = \mathcal{G}(\varphi)\mathcal{G}(\psi)y = \mathcal{G}(\varphi *_0 \psi)Cy = \mathcal{G}\left(\int\limits_0^\infty \varphi(t)\tau_t\psi dt\right)Cy$$
$$= \int\limits_0^\infty \varphi(t)\mathcal{G}(\tau_t\psi)Cydt, \ \varphi \in \mathcal{D}.$$

Funkcija $u_x : t \to \mathcal{G}(\tau_t\psi)Cy$ ima tražene osobine.

Navedimo neke primere C-distribucionih polugrupa. Očigledno je da primeri (integrisanih) C-polugrupa mogu poslužiti za konstrukciju C-distribucionih polugrupa.

Primer 2.3.7. Neka je P ograničen projektor na E i $PC = CP$. Definišimo

$$\mathcal{G}(\varphi) := \int_0^\infty \varphi(t)dtPC, \ \varphi \in \mathcal{D}.$$

Tada je $\mathcal{G}$ pre-(C-DSG). Takodje, $\mathcal{N}(\mathcal{G}) = KernP$.

Primer 2.3.8. Neka je $E := L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$. Pretpostavimo da je C injektivan operator na E i da je ispunjeno:

$$C(f * g) = f * Cg, \ f \in L^1(\mathbb{R}), \ g \in L^p(\mathbb{R}),$$

tj. C je translaciono invarijantan. Definišimo

$$\mathcal{G}(\varphi)f := \varphi_+ * Cf, \ \varphi \in \mathcal{D}, \ f \in E.$$

Tada je $\mathcal{G}$ (C-DSG) na E. Njen generator je operator $-d/dx$ sa maksimalnim distribucionim domenom. Specijalno, možemo uzeti:
1. $Cf = a * f$, za bilo koje $a \in L^1(\mathbb{R})$ takvo da je C "1 – 1",
2. $C = R(\lambda : A)$, za bilo koji diferencijalni operator $A : D(A) \to E$ sa nepraznim rezolventnim skupom, gde je

$$D(A) := \{f \in E : \sum_{j=0}^{k} a_j D^j f \in E \text{ distribuciono } \} \text{ i } Af := \sum_{j=0}^{k} a_j D^j f,$$

za neke $a_j \in \mathbb{C}$, $j = 0, 1, \ldots, k$, $\lambda \in \rho(A)$. Ako je $\overline{R(C)} = E$ tada je $\mathcal{G}$ (C-DSGL).

Primer 2.3.9. Neka je $E := C[0,1]$ i $Cf(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} f(s)ds$, $f \in E$, $t \in [0,1]$, $k \in \mathbb{N}$. Tada je C ograničen injektivan operator na E. Definišimo

$$\mathcal{G}(\varphi)f(t) := \int_0^t \varphi(t-s)Cf(s)ds, \ \varphi \in \mathcal{D}, \ f \in E, \ t \in [0,1].$$

Tada je $\mathcal{G}$ C-distribuciona polugrupa na E generisana operatorom $-d/dx$ sa maksimalnim domenom.

Primer 5.3(b) u [95] može poslužiti za konstrukciju eksponencijalnih $(I + \Delta)^{-r}$-distribucionih polugrupa (za neko $r \geq 0$) na $L^p(\mathbb{R}^n)$, $BUC(\mathbb{R}^n)$ i $C_0(\mathbb{R}^n)$.
U [96] je pokazano da ukoliko ograničena analitička polugrupa $(T(z))_{Rez>0}$ na $L^2(\boldsymbol{\Omega})$ ($\boldsymbol{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ je otvoren neprazan skup) zadovoljava Gausovu ocenu reda m i ako je A_p generator njene konzistentne polugrupe na $L^p(\boldsymbol{\Omega})$ $(1 \leq p < \infty)$, tada iA_p generiše $(I - A_p)^{-\alpha}$-polugrupu $(S_p(t))_{t \geq 0}$ na $L^p(\boldsymbol{\Omega})$ tako da važi $||S_p(t)|| \leq M(1 + t^{2n|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}|})$, $t \geq 0$, gde je $\alpha > 2n\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right|$. Dakle, iA_p generiše eksponencijalnu $(I - A_p)^{-\alpha}$-distribucionu polugrupu.
Zainteresovanog čitaoca upućujemo na monografiju [23] za primere globalnih C-polugrupa i njihovu primenu u Petrovkiĭ korektnim sistemima diferencijalnih jednačina. Za primenu C-polugrupa u analizi Shilov korektnih paraboličnih sistema diferencijalnih jednačina u Banachovim prostorima videti [97]. Takodje, C-distribucione polugrupe se mogu upotrebiti i u analizi obrnute talasne jednačine na $L^p(\boldsymbol{\Omega})$, gde je $\boldsymbol{\Omega}$ otvoren neprazan podskup od $\mathbb{R}^n$ sa glatkim rubom.

3. $[r]$-polugrupe

U ovoj sekciji ćemo samo navesti rezultate i primere klase $[r]$-distribucionih polugrupa proučavanih u [45]. Data klasa je u bliskim vezama sa mnogim drugim klasama polugrupa. Najpre, glatke distribucione polugrupe i glatke distribucione polugrupe eksponencijalnog rasta su proučavane u radovima Balabana i Emami-Rada i predstavljaju specijalne slučajeve $[r]$-polugrupa. Klasa distribucionih polugrupa reda $(r,0)$ je analizirana u radu Wanga i svodi se na klasu $[r,0]$-polugrupa definisanih nešto kasnije. Sa druge strane, $[r]$-polugrupe predstavljaju specijalni slučaj jakih distribucionih polugrupa analiziranih u [67]. Poseban značaj za uvodjenje $[r]$-polugrupa je i njihova primena u teoriji regularizovanih funkcionalnih računa; posebno ćemo prezentovati primenu na guste semispektralne distribucije, funkcionalni račun koji je opisao glatke distribucione polugrupe.
Poseban deo ćemo posvetiti primerima $[r]$-polugrupa.

3.1. $[r]$-polugrupe: osnovne strukturne osobine

Neka je $r \geq 0$ i $k \in \mathbb{N}_0$. Stavimo

$$p_{rk}(\varphi) := \sum_{i=0}^{k} \left\| e^{rt} t^i \varphi^{(i)} \right\|_{L^1([0,\infty))}; \; q_{rk}(\varphi) := \sum_{i=0}^{k} \left\| t^i (e^{rt}\varphi)^{(i)} \right\|_{L^1([0,\infty))}, \; \varphi \in \mathcal{D}_+.$$

Poznato je da je ([45]) inkluziono preslikavanje $id : (\mathcal{D}_+, p_{rk}) \to (\mathcal{D}_+, q_{rk})$ neprekidno preslikavanje izmedju normiranih prostora. Neka su T_{rk} i D_{rk} kompletiranja prostora $(\mathcal{D}_+, p_{rk})$ i $(\mathcal{D}_+, q_{rk})$, respektivno. Označimo $h_\lambda(t) = e^{-\lambda t} H(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Tada je $h_\lambda(t)$ element prostora T_{rk} i D_{rk} za sve $\lambda \in \mathbb{C}$ sa $Re\lambda > r$. U [45] je pokazano da su T_{rk} i D_{rk} algebre za konvolucioni proizvod $*_0$.

Definicija 3.1.1. Neka je $r \geq 0$, $k \in \mathbb{N}_0$. Distribuciona polugrupa G je $[r,k]$-polugrupa, respektivno, $\{r,k\}$-polugrupa ako se G može proširiti do neprekidnog linearnog preslikavanja iz T_{rk}, respektivno D_{rk}, u $L(E)$. Kažemo da je G $[r]$-polugrupa, resp., $\{r\}$-polugrupa ako je G $[r,k]$-polugrupa, resp., $\{r,k\}$-polugrupa za neko $k \in \mathbb{N}_0$.

Svaka $\{r,k\}$-polugrupa je takodje $[r,k]$-polugrupa, $r \geq 0$, $k \in \mathbb{N}_0$. Pokazaćemo da za svako $r > 0$, postoji gusto definisani operator A takav da je A generator $[r,1]$-polugrupe i da A nije generator $\{r,k\}$-polugrupe za bilo koje $k \in \mathbb{N}_0$.
Klase $[r,0]$-polugrupa, $\{r,0\}$-polugrupa i $(r,0)$-polugrupa Wanga se poklapaju, $r \geq 0$. Potreban i dovoljan uslov da zatvoren linearan operator A bude generator $[r,0]$-polugrupe, $r \geq 0$, je: $(r,\infty) \subset \rho(A)$ i za neko $M > 0$

$$\left\| \frac{d^n}{d\lambda^n}[R(\lambda : A)] \right\| \leq \frac{Mn!}{(\lambda - r)^{n+1}}, \; \lambda > r, \; n \in \mathbb{N}_0.$$

Zbog toga je svaki Hille-Yosidin operator (videti [6], Definicija 3.5.1) generator $[r,0]$-polugrupe za neko $r \geq 0$.

Osnovna strukturna teorema za klasu gustih $\{r,k\}$-polugrupa je sledeća teorema koja je dokazana u [45].

Teorema 3.1.2. *Neka je $r \geq 0$, $k \in \mathbb{N}_0$ i neka je $D(A)$ gust u E. Tada su sledeći iskazi ekvivalentni.*
(a) *A je generator $\{r,k\}$-polugrupe G.*
(b) *$A - r$ je generator eksponencijalno ograničene k-puta integrisane polugrupe $(S(t))_{t\geq 0}$ takve da je $\|S(t)\| = O(t^k)$.*
(c) *$(r,\infty) \subset \rho(A)$ i postoji konstanta $M > 0$ takva da je*

$$\left\| \frac{d^j}{d\lambda^j}\left[\frac{R(\lambda + r : A)}{\lambda^k}\right]\right\| \leq M\frac{(k+j)!}{\lambda^{k+j+1}}, \quad \lambda > 0,\ j+1 \in \mathbb{N}.$$

(d) *$r - A$ poseduje glatku semispektralnu distribuciju reda k.*

Primer 3.1.3 ([45]). Neka je $r \geq 0$, $1 < p < \infty$, $p \neq 2$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq n\left|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right|$. Tada je $A := i\Delta + r$ sa maksimalnim distribucionim domenom generator $\{r, k+2\}$-polugrupe na $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Propozicija 3.1.4. *Pretpostavimo da je G $[r,k]$-polugrupa generisana sa A, $r \geq 0$, $k \in \mathbb{N}_0$. Tada je:*
(a) *$G(\varphi)A \subset AG(\varphi)$, $\varphi \in T_{rk}$.*
(b) *Ako je G gust, tada je G^* $[r,k]$-polugrupa u E^* generisana sa A^*.*
Isto važi ako je "$[r,k]$" zamenjeno sa "$\{r,k\}$" (i T_{rk} sa D_{rk}).

Zainteresovanog čitaoca upućujemo na [67] za definiciju i osobine jakih distribucionih polugrupa. Specijalno, poznato je da je svaka $[r]$-polugrupa jaka distribuciona polugrupa i da njen generator A zadovoljava $n(A) \leq 1$. Štaviše, ako je prostor E refleksivan, tada je svaka $[r]$-polugrupa gusta. Lema 1.5 u [51] i sledeća propozicija takodje daju ocenu $n(A) \leq 1$, ako A generiše $[r]$-polugrupu.

Propozicija 3.1.5. *Neka je A generator $[r,k]$-polugrupe, $r \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$. Tada je $\{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda > r\} \subset \rho(A)$ i postoji $M > 0$ takvo da je za sve $n \in \mathbb{N}$ i $\lambda \in \mathbb{C}$ sa $Re\lambda > r$:*

$$\|R(\lambda : A)^n\| \leq \frac{Mn(n+1)\cdots(n+k-1)|\lambda|^k}{(Re\lambda - r)^{n+k}}.$$

3.2. Relacije sa integrisanim polugrupama

Dve osnovne veze $[r]$-polugrupa i integrisanih polugrupa su date u sledećim teoremama.

Teorema 3.2.1. *Pretpostavimo m, $m - k \in \mathbb{N}_0$ i $r > 0$. Tada je:*
(a) *Ako je A generator k-puta integrisane polugrupe $(S(t))_{t\geq 0}$ takve da je*

$$\|S(t)\| = O(e^{rt}(t^k + t^m)),$$

tada je A generator $[r,m]$-polugrupe.
(b) *Ako je $A - r$ generator k-puta integrisane polugrupe $(W(t))_{t\geq 0}$ takve da je $\|W(t)\| = O(t^k + t^m)$, tada je A generator $[r,m]$-polugrupe.*

Teorema 3.2.2. *Pretpostavimo da je A generator $[r,k]$-polugrupe G, $r \geq 0$, $k \in \mathbb{N}_0$. Tada je deo od $A - r$ u $\overline{D(A)}$, resp., $\overline{\mathcal{R}(G)}$, generator k-puta integrisane polugrupe $(S(t))_{t\geq 0}$ u $\overline{D(A)}$, resp., $\overline{\mathcal{R}(G)}$, takve da je $\|S(t)\| = O(t^k + t^{2k})$.*

Upotrebom integrisanih polugrupa su u [45] pokazani i sledeći rezultati.

Propozicija 3.2.3. *Neka je A generator $[r,k]$ -polugrupe G, $r \geq 0$, $k \in \mathbb{N}_0$. Tada važi:*
(a) *G je reda (w,k) za sve $w > r$.*
(b) *$C_{k+2}(\infty)$ je dobro postavljen za A.*

Teorema 3.2.4. *Neka je A zatvoren linearan operator takav da je $\{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda > r\} \subset \rho(A)$, za neko $r \geq 0$. Ako je*

$$\|R(\lambda : A)\| \leq M\frac{|\lambda|^k}{(Re\lambda - r)^{k+1}}, \quad Re\lambda > r,$$

za neko $k \in \mathbb{N}_0$ i $M > 0$, tada je A generator $(k+2)$-puta integrisane polugrupe $(S(t))_{t\geq 0}$ rasta $O(e^{rt}t^{k+2})$ i A je generator $[r, k+2]$-polugrupe. Ako je $r > 0$, tada je $\|S(t)\| = O(e^{rt}t^{k+1})$.

Teorema 3.2.5. *Neka je A generator $[r,\ k]$-polugrupe za neko $r > 0$ i $k \in \mathbb{N}_0$. Tada je A generator $(k+2)$-puta integrisane polugrupe $(S(t))_{t\geq 0}$ koja je $O(e^{rt}t^{k+2})$ i $O(e^{rt}t^{k+1})$ rasta.*

Teorema 3.2.6. *Neka je A zatvoren linearan operator i $r \geq 0$. Tada su sledeći iskazi ekvivalentni.*
(a) *A je generator $[r]$-polugrupe.*
(b) *Postoje $k \in \mathbb{N}$ i $M > 0$ takvi da je*

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda > r\} \subset \rho(A) \ i$$

$$\|R(\lambda : A)\| \leq M\frac{|\lambda|^k}{(Re\lambda - r)^{k+1}}, \ Re\lambda > r.$$

(c) *Postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je A generator k-puta integrisane polugrupe $(S(t))_{t\geq 0}$ takve da je $\|S(t)\| = O(e^{rt}t^k)$.*

Teorema 3.2.7. *Neka je A zatvoren linearan operator i $r \geq 0$. Sledeće je ekvivalentno.*
(a) *A je generator $\{r\}$-polugrupe.*
(b) *Postoje $k \in \mathbb{N}$ i $M > 0$ tako da je*

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda > r\} \subset \rho(A) \ i$$

$$\|R(\lambda : A)\| \leq M\frac{|\lambda - r|^k}{(Re\lambda - r)^{k+1}}, \ Re\lambda > r.$$

(c) *Postoji $k \in \mathbb{N}$ takvo da $A - r$ generiše k-puta integrisanu polugrupu $(S(t))_{t\geq 0}$ koja je $O(t^k)$ rasta.*

Stoga se Teorema 6 u [9] može upotrebiti za konstrukciju $\{r\}$-polugrupa. U [45] su takodje date veze k-puta integrisanih polugrupa rasta $O(t^k + t^m)$, $k,\ m \in \mathbb{N}_0$, sa distribucionim polugrupama.

Perturbacioni rezultat za integrisane polugrupe je upotrebljen u dokazu sledećih rezultata.

Propozicija 3.2.8. *Pretpostavimo da je* $\overline{D(A)} = E$ *i da je* A *generator* $[0,k]$-*polugrupe. Ako je* $B \in L(E)$ *i* $BA \subset AB$, *tada je* $A+B$ *generator* $[2\|B\|, k+1]$-*polugrupe.*

Propozicija 3.2.9. *Pretpostavimo da je* $\overline{D(A)} = E$ *i da je* A *generator* $[r,k]$-*polugrupe,* $r \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$. *Ako je* $B \in L(E)$ *i* $BA \subset AB$, $B \neq -r$, *tada je* $A+B$ *generator* $[2\|B+r\|, 2k+1]$-*polugrupe.*

Propozicija 3.2.10. (a) *Neka je Agenerator* $\{r,k\}$-*polugrupe,* $r \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$. *Neka je* B *kao u prethodnoj propoziciji. Tada je* $A+B$ *generator* $[r, k+1]$-*polugrupe.*
(b) *Ako je* A *generator glatke distribucione polugrupe reda* $k \in \mathbb{N}$, *tada je za sve* $z \in \mathbb{C}$ *operator* $A+z$ *generator* $[2|z|, k+1]$-*polugrupe.*
(c) *Ako je* A *generator guste* $[r,k]$-*polugrupe, tada je za sve* $z \in \mathbb{C}$ *sa* $z \neq -r$, *operator* $A+z$ *generator* $[2|z+r|, 2k+1]$-*polugrupe.*

3.3. Relacije sa funkcionalnim računima

Već smo napomenuli da su distribucione i $[r]$-polugrupe upotrebljene u [45] u analizi semispektralnih distribucija i funkcionalnih računa deLaubenfelsa i Jazara. Potrebna nam je sledeća definicija.

Definicija 3.3.1 ([24]). Označimo sa $\mathcal{A}$ prostor svih Laplaceovih transformacija funkcija iz Schwartzovog prostora $\mathcal{S}$, opremljenog sledećim sistemom seminormi

$$\|g\|_{j,k} := \|t^j \varphi^{(k)}(t)\|_{L^1([0,\infty))}, \; j, \; k \in \mathbb{N}_0, \; g = \mathcal{L}(\varphi) \in \mathcal{A}.$$

Glatka semispektralna distribucija za A je neprekidni algebarski homomorfizam $f : \mathcal{A} \to L(E)$, takav da je
(i) $\{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda < 0\} \subset \rho(A)$ i $f\left(\frac{1}{\lambda - \cdot}\right) = R(\lambda : A)$ kada je $Re\lambda < 0$ i
(ii) $f\left(g\left(\frac{\cdot}{n}\right)\right)x \to x$, $n \to \infty$, za sve $x \in E$ i $g \in \mathcal{A}$ takve da je $g(0) = 1$.

Ako je A gusto definisani generator globalne k-puta integrisane polugrupe rasta $O(t^k(1+t^n))$, za neke n, $k \in \mathbb{N}_0$, tada $-A$ poseduje glatku semispektralnu distribuciju na osnovu Teoreme 3.2 u [24].

Teorema 3.3.2. *Pretpostavimo da je* $D(A)$ *gust u* E *i* m, $k \in \mathbb{N}$, $m \geq k$. *Tada su sledeći iskazi ekvivalentni.*
(a) A *je generator* (DSG) G *koja zadovoljava za neko* $C > 0$,

$$\|G(\varphi)\| \leq C\|(t^k + t^m)\varphi^{(k)}\|_1, \; \varphi \in \mathcal{D}.$$

(b) A *je generator* k-*puta integrisane polugrupe* $(S(t))_{t \geq 0}$ *sa* $\|S(t)\| = O(t^k + t^m)$.
(c) $-A$ *poseduje glatku semispektralnu distribuciju* f *takvu da je za neko* $C > 0$

$$\|f(\hat{\varphi})\| \leq C\|(t^k + t^m)\varphi^{(k)}\|_1, \; \varphi \in \mathcal{D}. \text{ (Podsetimo se, } \hat{\varphi} = \mathcal{L}(\varphi).)$$

U [45] je pokazana sledeća karakterizacija operatora koji poseduju glatke semispektralne distribucije: Neka $-A$ poseduje glatku semispektralnu distribuciju f. Tada je A gusto definisan.

Teorema 3.3.3. *Neka je A zatvoren, gusto definisan operator u E i neka je $r > 0$. Tada su sledeći iskazi ekvivalentni.*
(a) *A je generator $[r]$-polugrupe.*
(b) *$r - A$ poseduje glatku semispektralnu distribuciju f takvu da je*

$$\|f(\hat{\varphi})\| \leq C\|(t^k + t^m)\varphi^{(k)}\|_1, \ \varphi \in \mathcal{D},$$

za neke k, $m \in \mathbb{N}$ sa $m \geq k$ i neko $C > 0$.
(c) *A je generator k-puta integrisane polugrupe $(S(t))_{t\geq 0}$ takve da je*

$$\|S(t)\| = O(e^{rt}(t^k + t^m)),$$

za neko k, $m \in \mathbb{N}$ sa $m \geq k$.
(d) *$A-r$ je generator k-puta integrisane polugrupe $(W(t))_{t\geq 0}$ takve da je $\|W(t)\| = O(t^k + t^m)$, za neke k, $m \in \mathbb{N}$ sa $m \geq k$.*

Podsetimo se ([24]), ako su n, $k \in \mathbb{N}$, tada je

$$W^{1,n}([0,\infty)) := \{F \in C^{n-1}([0,\infty)) : F^{(j)} \in L^1([0,\infty)) \text{ za } j = 0, 1, \ldots, n\}$$

i

$$\mathcal{A}_{n,k} = \{g = \mathcal{L}(F) : (1+t)^k F(t) \in W^{1,n}([0,\infty))\}.$$

Uvedimo normu na $\mathcal{A}_{n,k}$

$$\|f\|_{\mathcal{A}_{n,k}} = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!}\|(1+t)^k F^{(j)}(t)\|_{L^1([0,\infty))}, \ f = \mathcal{L}(F) \in \mathcal{A}_{n,k}.$$

U sledećoj propoziciji, $\mathcal{A}_{n,k}$ funkcionalni račun je uzet u smislu Definicije 1.1 date u [24].

Propozicija 3.3.4. *Neka je A generator $[r,k]$-polugrupe, $r \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$. Tada važi:*
(a) *A je generator $R(r+1 : A)^{k+2}$-polugrupe $(C(t))_{t\geq 0}$ takve da je $\|C(t)\| = O(e^{rt}(1 + t^{k+1}))$.*
(b) *$r - A$ poseduje $\mathcal{A}_{k+2,n}$ funkcionalni račun za sve $n \in \mathbb{N}$ sa $n \geq k+1$.*

3.4. Primeri

Prvi primer je izveden iz analize graničnih vrednosti analitičkih polugrupa koja je data u [5].

Primer 3.4.1. Neka je $1 < p < \infty$. Označimo sa J_p Riemann-Liouvilleovu polugrupu na $L^p((0,1))$;

$$(J_p(z)f)(x) := \frac{1}{\Gamma(z)}\int_0^x (x-y)^{z-1} f(y)dy, \ f \in L^p((0,1)), \ x \in (0,1), \ Rez > 0.$$

Neka je A_p generator za J_p. U [5] je pokazano da operator iA_p generiše C_0-grupu $(T_p(t))_{t\in\mathbb{R}}$ na $L^p((0,1))$ takvu da je $\|T_p(t)\| = O((1+t^2)e^{|t|\frac{\pi}{2}})$, $t \in \mathbb{R}$. Propozicija 3.4.3 implicira da je sa

$$G_p(\varphi) := \int_0^\infty \varphi(t)T_p(t)dt,\ \varphi \in \mathcal{D},$$

definisana gusta $[\frac{\pi}{2}, 2]$-polugrupa u $L^p((0,1))$ generisana sa iA_p. Evidentno, $-iA_p$ takodje generiše gustu $[\frac{\pi}{2}, 2]$-polugrupu na $L^p((0,1))$.

U sledećem primeru E je modifikacija L^p prostora.

Primer 3.4.2 ([28]). Neka je $1 \leq p < \infty$ i neka je $m : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ merljiva funkcija takva da je

$$(\sup_{s\in\mathbb{R}} \frac{m(s-t)}{m(s)})^{\frac{1}{p}} \leq M(1+t^k),\ t \geq 0, \tag{20}$$

za neko $k \in \mathbb{N}$ i $M > 0$. Fiksirajmo $r > 0$. Sa

$$(T_p(t)f)(x) := e^{rt}f(x+t),\ x \in \mathbb{R},\ t \geq 0,\ f \in L^p(\mathbb{R},\ m(x)dx),$$

je definisana C_0-polugrupa $(T_p(t))_{t\geq 0}$ na $L^p(\mathbb{R},\ m(x)dx)$ takva da je

$$\|T_p(t)\| = e^{rt}(\sup_{s\in\mathbb{R}} \tfrac{m(s-t)}{m(s)})^{\frac{1}{p}} = O(e^{rt}(1+t^k)).$$

Dakle, sa $G_p(\varphi) := \int_0^\infty \varphi(t)T_p(t)dt$, $\varphi \in \mathcal{D}$, je definisana gusta $[r,k]$-polugrupa na $L^p(\mathbb{R},\ m(x)dx)$. Ako je m pozitivan polinom, tada je (20) ispunjen za neko $k \in \mathbb{N}$ i $M > 0$.

Primer 3.4.3 ([6]). Neka je $r > 0$ fiksiran i

$$E := \{f \in C([0,\infty)) : \lim_{x\to\infty} \tfrac{f(x)}{x+1} = 0\},$$
$$\|f\| := \sup_{x\geq 0} \tfrac{|f(x)|}{x+1},\quad f \in E,$$
$$(T(t)f)(x) := f(x+t),\quad f \in E,\ t \geq 0,\ x \geq 0.$$

Tada je $(T(t))_{t\geq 0}$ C_0-polugrupa na E i $\|T(t)\| = t+1$, $t \geq 0$, videti Primer 5.4.5 u [6]. Njen generator A je operator $\frac{d}{dx}$ sa maksimalnim dimenom u E. Na osnovu toga, sa

$$G(\varphi) := \int_0^\infty \varphi(t)e^{rt}T(t)dt,\ \varphi \in \mathcal{D},$$

je definisana gusta $[r,1]$-polugrupa na E generisana sa $A+r$. Pretpostavimo da je G $\{r,k\}$-polugrupa za neko $k \in \mathbb{N}$. Tada A generiše k-puta integrisanu polugrupu $(S(t))_{t\geq 0}$ na E takvu da je $\|S(t)\| \leq Mt^k$, $t \geq 0$, za neko $M > 0$. Kako je $S(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!}T(s)ds$, $t \geq 0$, sledi

$$\sup_{x\geq 0} \frac{\left|\int_0^t \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} f(x+s)ds\right|}{x+1} \leq Mt^k \sup_{x\geq 0} \tfrac{|f(x)|}{x+1},\quad f \in E,\ t \geq 0.$$

Izaberimo $f(\cdot) = \sqrt{\cdot}$ da zaključimo

$$\int_0^t \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!}\sqrt{s}ds \leq \sup_{x\geq 0}\frac{\left|\int_0^t \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!}\sqrt{x+s}ds\right|}{x+1} \leq Mt^k/2,\ t \geq 0.$$

Ovo je kontradikcija. Štaviše, za svako $k \in \mathbb{N}_0$ operator A generiše k-puta integrisanu polugrupu $(S(t))_{t\geq 0}$ na E takvu da je $||S(t)|| = O(t^k+t^{k+1})$. Primetimo da ne postoji konstanta $\alpha \in [0, k+1)$ takva da je $||S(t)|| = O(t^k + t^\alpha + 1)$.

Takodje smo pokazali:

Neka je $r \geq 0$ i $k \in \mathbb{N}$. Tada ne postoji konstanta $M > 0$ takva da je

$$||e^{rt}t\varphi'||_1 \leq Mq_{rk}(\varphi),\ \varphi \in \mathcal{D}_+.$$

Primer 3.4.4. Pretpostavimo da je A generator k-puta integrisane polugrupe $(S(t))_{t\geq 0}$ na E. Ako postoji $a > 0$ takvo da je $||Ax|| \leq a\,||x||$, $x \in D(A)$, tada je A generator $[a, k+1]$-polugrupe. Kako je

$$A\int_0^t S(s)xds = S(t)x - \tfrac{t^k}{k!}x,\ t \geq 0, x \in E,$$

imamo

$$||S(t)x|| \leq \tfrac{t^k}{k!}\,||x|| + a\int_0^t ||S(s)x||\,ds,\ t \geq 0, x \in E.$$

Gronwallova nejednakost daje

$$||S(t)x|| \leq \tfrac{t^k}{k!}\,||x|| + ae^{at}\int_0^t e^{-as}\tfrac{s^k}{k!}\,||x||\,ds,\ t \geq 0, x \in E.$$

Stoga je $||S(t)|| = O(e^{at}(t^k + t^{k+1}))$ i A generiše $[a, k+1]$-polugrupu.

Pokažimo da za svako $r > 0$ i $k \in \mathbb{N}$ postoji gusta $[r, k]$-polugrupa koja nije $[r, k-1]$-polugrupa.

Primer 3.4.5. Neka je $r > 0$ i neka za $T \in L(E)$ vazi $T^{k+1} = 0$, za neko $k \in \mathbb{N}$. Definišimo

$$T(t) := e^{rt}\sum_{i=0}^{k}\frac{T^i t^i}{i!},\ t \geq 0.$$

Tada je $(T(t))_{t\geq 0}$ C_0-polugrupa generisana sa $T+r$. Takodje, $||T(t)|| = O(e^{rt}(1+t^k))$ i $T + r$ generiše gustu $[r, k]$-polugrupu.
Izaberimo sada $E := \mathbb{R}^{k+1}$ sa sup-normom i stavimo

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}) := (x_2, \ldots, x_{k+1}, 0),\ x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \ldots, k+1.$$

Tada je $T^{k+1} = 0$ i $T + r$ generiše gustu $[r, k]$-polugrupu G. Pretpostavimo da je G $[r, k-1]$-polugrupa. Tada T generiše $(k-1)$-put integrisanu polugrupu $(S(t))_{t\geq 0}$ takvu da je $||S(t)|| = O(t^{k-1} + t^{2k-2})$. Ako je $k = 1$, to znači da T generiše ograničenu C_0-polugrupu. Tada je kontradikcija neminovna, jer je $||e^{-rt}T(t)|| = 1 + t + \ldots + \frac{t^k}{k!}$, $t \geq 0$. Ako je $k > 1$, tada je

$$S(t)(x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}) = \int_0^t \frac{(t-s)^{k-2}}{(k-2)!}e^{-rs}T(s)(x_1, x_2, \ldots, x_{k+1})ds.$$

Direktan račun pokazuje $||S(t)|| = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + \ldots + \frac{t^{2k-1}}{(2k-1)!}$, $t \geq 0$. Ovo je kontradikcija sa $||S(t)|| = O(t^{k-1} + t^{2k-2})$.

Napomenimo na kraju da analiza Petrovsky korektnih sistema diferencijalnih jednačina data u [97] može biti upotrebljena za konstrukciju $[r]$-polugrupa.

4. Distribucione kosinus funkcije

Integrisane kosinus funkcije su uvedene 1989. godine u radu Arendta i Kellermanna [4]. Nakon toga su definisane α-puta integrisane kosinus funkcije i one su proučavane od strane mnogo autora. U zadnjem poglavlju ovog rada ćemo proučiti osnovne strukturne osobine K-konvolucionih C-kosinus funkcija, klase koja objedinjuje mnoge postojeće operatorske familije vezane za jednačine drugog reda. U ovom delu sistematski proučavamo distribucione kosinus funkcije, njihove veze sa lokalnim integrisanim polugrupama, lokalnim C-kosinus funkcijama, stacionarno gustim operatorima i jednačinama konvolucionog tipa. Uvešćemo i eksponencijalne distribucione kosinus funkcije i dati njihove veze sa eksponencijalno ograničenim integrisanim kosinus funkcijama. Jednostavni spektralni uslovi karakterišu generatore datih polugrupa. U zadnjem delu ovog poglavlja daćemo odgovarajuće primere distribucionih kosinus funkcija na puno funkcionalnih prostora.

4.1. Preliminaries

Kao i u prethodnim poglavljima, E označava netrivijalan kompleksan Banachov prostor i $L(E) = L(E, E)$ je prostor ograničenih linearnih operatora iz E u E. Neka je $K \subset \mathbb{R}$. Tada je $\mathcal{D}_K$ potprostor od $\mathcal{D}$ koji se sastoji od test funkcija čiji je nosač sadržan u K. Neka je $\alpha \in \mathcal{D}_{[-2,-1]}$ fiksirana test funkcija takva da je $\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x)dx = 1$. Onda, sa α izabranom na ovaj način, za svako fiksno $\varphi \in \mathcal{D}$ definišemo $I(\varphi) \in \mathcal{D}$ na sledeći način

$$I(\varphi)(x) := \int_{-\infty}^{x} [\varphi(t) - \alpha(t) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u)du]dt, \ x \in \mathbb{R}.$$

Primetimo da je $\frac{d}{dx}I(\varphi)(x) = \varphi(x) - \alpha(x) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u)du$, $x \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{D}$. Sada za $G \in \mathcal{D}'(L(E))$ definišemo G^{-1} na sledeći nacin $G^{-1}(\varphi) := -G(I(\varphi))$, $\varphi \in \mathcal{D}$. Jasno, $G^{-1} \in \mathcal{D}'(L(E))$ i $(G^{-1})' = G$; preciznije,

$$-G^{-1}(\varphi') = G(I(\varphi')) = G(\int_{-\infty}^{\cdot} [\varphi'(t) - \alpha(t) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(u)du]dt)$$

$$= G(\int_{-\infty}^{\cdot} \varphi'(t)dt) = G(\varphi), \ \varphi \in \mathcal{D}.$$

Fiksirajmo funkciju $\varphi \in \mathcal{D}$ sa supp$\varphi \subset (-\infty, 0)$. Naš izbor funkcije α daje $\frac{d}{dx}I(\varphi)(x) = 0$, $x > a$, za pogodno $a \in (-\infty, 0)$. Zbog toga, supp$I(\varphi) \subset (-\infty, 0)$. Na osnovu toga sledi: supp$G \subset [0, \infty) \Rightarrow$ supp$G^{-1} \subset [0, \infty)$. Podsetimo se, distribucije δ i δ' su definisane sa $\delta(\varphi) = \varphi(0)$, $\delta'(\varphi) = -\varphi'(0)$, $\varphi \in \mathcal{D}$. Za $\varphi \in \mathcal{D}$ i $f \in \mathcal{D}'$, ili za $\varphi \in \mathcal{E}$ i $f \in \mathcal{E}'$, definišemo konvoluciju $f * \varphi$ na uobičajen nacin $(f * \varphi)(t) := f(\varphi(t - \cdot))$, $t \in \mathbb{R}$. Sledeća bilinearna preslikavanja su hiponeprekidna: $* : \mathcal{D}' \times \mathcal{D} \to \mathcal{E}$, $* : \mathcal{E}' \times \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ i $* : \mathcal{E}' \times \mathcal{E} \to \mathcal{E}$. Za $f \in \mathcal{D}'$, ili za $f \in \mathcal{E}'$, definišemo $\check{f}$ na sledeci nacin: $\check{f}(\varphi) := f(\varphi(-\cdot))$, $\varphi \in \mathcal{D}$ $(\varphi \in \mathcal{E})$. Generalno, konvolucija dve distribucije f, $g \in \mathcal{D}'$, $f * g \in \mathcal{D}'$, je definisana sa $(f*g)(\varphi) = g(\check{f}*\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{D}$. Hiponeprekidnost sledećih bilinearnih preslikavanja je obavezna: $* : \mathcal{D}' \times \mathcal{D}' \to \mathcal{D}'$, $* : \mathcal{E}' \times \mathcal{D}' \to \mathcal{D}'$ i $* : \mathcal{E}' \times \mathcal{E}' \to \mathcal{E}'$. Imamo i $\mathrm{supp}(f * g) \subset \mathrm{supp} f + \mathrm{supp} g$. Poznato je: $f * \varphi \in \mathcal{D}_0$, ako je $f \in \mathcal{E}'_0$ i $\varphi \in \mathcal{D}_0$. Integrisane kosinus funkcije uvodimo kao u [47].

Definicija 4.1.1. Neka je A zatvoren operator, $\alpha \geq 0$, $0 < \tau \leq \infty$. Ako postoji jako neprekidna operatorska familija $(C_\alpha(t))_{t\in[0,\tau)}$ $(C_\alpha(t) \in L(E)$, $0 \leq t < \tau)$ takva da je:

(i) $C_\alpha(t)A \subset AC_\alpha(t)$, $t \in [0,\tau)$ i

(ii) za sve $x \in E$ i $t \in [0,\tau)$:

$$\int_0^t (t-s)C_\alpha(s)x\,ds \in D(A) \text{ i}$$
$$A\int_0^t (t-s)C_\alpha(s)x\,ds = C_\alpha(t)x - \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}x,$$

tada je $(C_\alpha(t))_{t\in[0,\tau)}$ (lokalna) α-puta integrisana kosinus funkcija i A je generator od $(C_\alpha(t))_{t\in[0,\tau)}$.

Sledeća propozicija će biti dokazana u generalnijem slučaju u predzadnjem poglavlju i zbog toga je dokaz izostavljen.

Propozicija 4.1.2. *Neka je $(C_\alpha(t))_{t\geq 0}$ jako neprekidna, eksponencijalno ograničena operatorska familija i neka je A zatvoren operator. Tada je A generator α-puta integrisane kosinus funkcije $(C_\alpha(t))_{t\geq 0}$ ako i samo ako postoji $\omega > 0$ takvo da je $(\omega^2,\infty) \subset \rho(A)$ i*

$$\lambda R(\lambda^2 : A)x = \lambda^\alpha \int_0^\infty e^{-\lambda t}C_\alpha(t)x\,dt\ ,\ \lambda > \omega,\ x \in E.$$

Definicija 4.1.1 automatski nameće sledeće pitanje: ako je $(C_\alpha(t))_{t\in[0,\tau)}$ (lokalna) α-puta integrisana kosinus funkcija, koje je njeno 'semigrupovno' svojstvo? U ovom radu ćemo dati odgovor kada je $\alpha = n \in \mathbb{N}$. Esencijalno, odgovor je sadržan u [94], gde je analizirano semigrupovno svojstvo integrisanih C-kosinus funkcija. Ponavljajući doslovno argumente date u [94], dobijamo:

$$2C(t)C(s)x = \frac{1}{(n-1)!}[(-1)^n \int_0^{|t-s|} (|t-s|-r)^{n-1}C(r)x\,dr +$$
$$[\int_0^{t+s} - \int_0^t - \int_0^s](t+s-r)^{n-1}C(r)x\,dr$$
$$+ \int_0^t (s-t+r)^{n-1}C(r)x\,dr + \int_0^s (t-s+r)^{n-1}C(r)x\,dr]\ ,\ 0 \leq t,\ s,\ t+s < \tau,\ x \in E.$$

Dakle, ako je $(C_n(t))_{t\in[0,\tau)}$ n-puta integrisana kosinus funkcija, tada je $C_n(t)C_n(s) = C_n(s)C_n(t)$, $0 \le t,\ s < \frac{\tau}{2}$. Uskoro ćemo pokazati da je ovo tačno i za sve $(t,s) \in [0,\tau) \times [0,\tau)$. Zainteresovanog čitaoca upućujemo na [99] za više detalja koji se odnose na semigrupovno svojstvo α-integrisanih polugrupa. Eksponencijalna verzija sledeće propozicije je dobro poznata; pokažimo sada tvrdjenje u, generalno gledano, lokalnom slučaju. Tada je upotreba Laplaceove transformacije eksponencijalno ograničenih funkcija nemoguća.

Propozicija 4.1.3. *Neka je A zatvoren operator, $\alpha \ge 0$, $0 < \tau \le \infty$. Tada su sledeća tvrdjenja ekvivalentna:*

(i) *A je generator α-puta integrisane kosinus funkcije $(C_\alpha(t))_{t\in[0,\tau)}$ u E.*

(ii) *Operator $\mathcal{A} \equiv \begin{pmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{pmatrix}$ je generator $(\alpha+1)$-put integrisane polugrupe $(S_{\alpha+1}(t))_{t\in[0,\tau)}$ u E^2.*

U ovom slučaju, imamo

$$S_{\alpha+1}(t) = \begin{pmatrix} \int_0^t C_\alpha(s)ds & \int_0^t (t-s)C_\alpha(s)ds \\ C_\alpha(t) - \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}I & \int_0^t C_\alpha(s)ds \end{pmatrix},\ 0 \le t < \tau.$$

Dokaz. (i) $\to$ (ii) Lako je pokazati da je $(S_{\alpha+1}(t))_{t\in[0,\tau)}$ jako neprekidna operatorska familija u E^2 i da je $S_{\alpha+1}(t)\mathcal{A} \subset \mathcal{A}S_{\alpha+1}(t)$, $0 \le t < \tau$. Štaviše,

$$\mathcal{A}\int_0^t S_{\alpha+1}(s)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ds = \mathcal{A}\int_0^t \begin{pmatrix} \int_0^s C_\alpha(r)xdr + \int_0^s (s-r)C_\alpha(r)ydr \\ C_\alpha(s)x - \frac{s^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}x + \int_0^s C_\alpha(r)ydr \end{pmatrix} ds$$

$$= \mathcal{A}\begin{pmatrix} \int_0^t (t-s)C_\alpha(s)xds + \int_0^t \frac{(t-s)^2}{2}C_\alpha(s)yds \\ \int_0^t C_\alpha(s)xds - \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)}x + \int_0^t (t-s)C_\alpha(s)yds \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \int_0^t C_\alpha(s)xds - \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)}x + \int_0^t (t-s)C_\alpha(s)yds \\ C_\alpha(t)x - \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}x + \int_0^t C_\alpha(s)yds - \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)}y \end{pmatrix}$$

$$= S_{\alpha+1}(t)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ 0 \le t < \tau,\ x,\ y \in E.$$

(ii) $\to$ (i) Neka je $S_{\alpha+1}(t) = \begin{pmatrix} S^1_{\alpha+1}(t) & S^2_{\alpha+1}(t) \\ S^3_{\alpha+1}(t) & S^4_{\alpha+1}(t) \end{pmatrix}_{t\in[0,\tau)}$ i $S^i_{\alpha+1}(t) \in L(E)$, $i \in \{1,2,3,4\}$, $0 \le t < \tau$. Kako je $S_{\alpha+1}\mathcal{A} \subset \mathcal{A}S_{\alpha+1}$, imamo

$$S^1_{\alpha+1}(t)x + S^2_{\alpha+1}(t)y \in D(A),$$

$$S^1_{\alpha+1}(t)y + S^2_{\alpha+1}(t)Ax = S^3_{\alpha+1}(t)x + S^4_{\alpha+1}(t)y,$$

$$S^3_{\alpha+1}(t)y + S^4_{\alpha+1}(t)Ax = A(S^1_{\alpha+1}(t)x + S^2_{\alpha+1}(t)y),\ 0 \le t < \tau,\ x \in D(A),\ y \in E.$$

Dakle, $S^3_{\alpha+1}(t)x = S^2_{\alpha+1}(t)Ax$, $x \in D(A)$ i $S^3_{\alpha+1}(t)y = AS^2_{\alpha+1}(t)y$, $y \in E$, $0 \leq t < \tau$. Stoga za svako $x \in D(A)$, imamo $S^3_{\alpha+1}(t)Ax = AS^2_{\alpha+1}(t)Ax = AS^3_{\alpha+1}(t)x$. Dakle, $S^3_{\alpha+1}(t)A \subset AS^3_{\alpha+1}(t)$, $t \in [0,\tau)$ i $(S^3_{\alpha+1} + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}I)_{t\in[0,\tau)}$ je jako neprekidna operatorska familija. Račun izveden iz

$$\mathcal{A} \int_0^t S_{\alpha+1}(s)\binom{x}{y}ds = S_{\alpha+1}(t)\binom{x}{y} - \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)}\binom{x}{y},$$

daje

$$\int_0^t S^3_{\alpha+1}(s)xds + \int_0^t S^4_{\alpha+1}(s)yds = S^1_{\alpha+1}(t)x + S^2_{\alpha+1}(t)y - \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)}x \text{ i}$$

$$A\left[\int_0^t S^1_{\alpha+1}(s)xds + \int_0^t S^2_{\alpha+1}(s)yds\right] = S^3_{\alpha+1}(t)x + S^4_{\alpha+1}(t)y - \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)}y$$

za sve $0 \leq t < \tau$, x, $y \in E$. Stoga je $\int_0^t S^3_{\alpha+1}(s)xds = S^1_{\alpha+1}(t)x - \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)}x$ i $A\int_0^t S^1_{\alpha+1}(s)xds = S^3_{\alpha+1}(t)x$, za sve $0 \leq t < \tau$ i $x \in E$. Kao posledicu, imamo

$$A\left[\int_0^t (t-s)(S^3_{\alpha+1}(s)x + \frac{s^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}x)ds\right] = A\left[\int_0^t (t-s)(\frac{d}{dv}S^1_{\alpha+1}(v)x)_{v=s}ds\right]$$

$$= A\int_0^t S^1_{\alpha+1}(s)xds = \left[S^3_{\alpha+1}(t)x + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}x\right] - \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}x$$

za sve $0 \leq t < \tau$, $x \in E$ i A je generator α-puta integrisane kosinus funkcije $(S^3_{\alpha+1}(t) + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}I)_{t\in[0,\tau)}$. Jasno je da važi $S^1_{\alpha+1}(t) = S^4_{\alpha+1}(t)$ i $S^2_{\alpha+1}(t) = \int_0^t S^1_{\alpha+1}(s)ds$, $0 \leq t < \tau$.

Primetimo, ako je $\tau = \infty$, tada je C_α eksponencijalno ograničena ako i samo ako je $S_{\alpha+1}$ eksponencijalno ograničena.

Posledica 4.1.4. *Svaka α-puta integrisana kosinus funkcija $(C_\alpha(t))_{t\in[0,\tau)}$ $(\alpha \geq 0)$ je jedinstveno odredjena njenim generatorom.*

Sada možemo pokazati sledeću propoziciju.

Propozicija 4.1.5. *Neka je A generator n-puta integrisane kosinus funkcije $(C_n(t))_{t\in[0,\tau)}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Tada je $C_n(t)C_n(s) = C_n(s)C_n(t)$, $0 \leq t, s < \tau$.*

Dokaz. Iz datih pretpostavki sledi da je operator $\mathcal{A}$ generator $(n+1)$-put integrisane polugrupe $(S_{n+1}(t))_{t\in[0,\tau)}$. Na osnovu Teoreme 4.1 u [2], $\mathcal{A}$ generiše $(2n+2)$-puta integrisanu polugrupu $(S_{2n+2}(t))_{t\in[0,2\tau)}$. Dakle, A generiše $(2n+1)$-put integrisanu kosinus funkciju $(C_{2n+1}(t))_{t\in[0,2\tau)}$ takvu da je

$C_{2n+1}(t)C_{2n+1}(s)=C_{2n+1}(s)C_{2n+1}(t)$, $0\le t,\ s<\tau$. Posledica 4.1.4 implicira $C_{2n+1}(t)=\int\limits_0^t\frac{(t-u)^n}{n!}C_n(u)du$, $0\le t<\tau$ i zbog toga je

$$\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\frac{d^{n+1}}{ds^{n+1}}\left[\int\limits_0^t\frac{(t-u)^n}{n!}C_n(u)xdu\int\limits_0^s\frac{(s-u)^n}{n!}C_n(u)xdu\right]$$

$$=\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\frac{d^{n+1}}{ds^{n+1}}\left[\int\limits_0^s\frac{(s-u)^n}{n!}C_n(u)xdu\int\limits_0^t\frac{(t-u)^n}{n!}C_n(u)xdu\right]$$

za sve $0\le t,\ s<\tau$ i $x\in E$. Dakle, $C_n(t)C_n(s)=C_n(s)C_n(t)$, $0\le t,\ s<\tau$.

Ponovimo sledeću definiciju Kunstmanna.

Definicija 4.1.6 ([51]). Neka je A zatvoren operator. Tada je A stacionarno gust ako i samo ako

$$n(A):=\inf\{k\in\mathbb{N}_0:(\forall n\ge k)\ D(A^n)\subset\overline{D(A^{n+1})}\}<\infty.$$

Zapažanja ([51]). 1. Ako je $\overline{D(A)}=E$ i $\rho(A)\neq\emptyset$, tada je $n(A)=0$. Gusto definisani operator ne mora biti stacionarno gust.
2. Ako je $\rho(A)\neq\emptyset$ tada je $n(A)=\inf\{k\in\mathbb{N}_0:D(A^k)\subset\overline{D(A^{k+1})}\}$.

Ako je A zatvoren operator, koristićemo sledeću notaciju $D_\infty(A):=\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}_0}D(A^n)$.
Neka je A zatvoren operator u E. Tada je $D(\mathcal{A}^n)=D(A^{\lceil\frac{n}{2}\rceil})\times D(A^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor})$, $n\in\mathbb{N}_0$ i $D_\infty(\mathcal{A})=D_\infty(A)\times D_\infty(A)$. Ovde je $\lceil\frac{n}{2}\rceil$ ($\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$) najmanji ceo broj $\ge\frac{n}{2}$ ($>\frac{n}{2}-1$).

Za dokaz sledeće leme videti [47].

Lema 4.1.7. *Neka je A zatvoren operator. Tada je A stacionarno gust ako i samo ako je $\mathcal{A}$ stacionarno gust. U tom slučaju $n(\mathcal{A})=2n(A)$.*

Propozicija 4.1.8. *Neka je A generator n-puta integrisane kosinus funkcije $(C_n(t))_{t\in[0,\tau)}$, $0<\tau\le\infty$. Tada je $n(A)\le\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor$.*

Dokaz. Operator $\mathcal{A}$ je generator $(n+1)$-put integrisane polugrupe $(S_{n+1}(t))_{t\in[0,\tau)}$. Primena Posledice 1.8 iz [51] daje $n(\mathcal{A})\le n+1$. Lema 4.1.7 kompletira dokaz.

Dobro poznato tvrdjenje da generator (lokalne) kosinus funkcije $(C_0(t))_{t\in[0,\tau)}$ mora biti gusto definisan sledi direktno iz prethodne propozicije. Primetimo da postoji eksponencijalno ograničena jedan put integrisana kosinus funkcija čiji generator A nije gust, videti Primer 3.15.5 u [6]. Za dato A, operator $\mathcal{A}$ generiše dva puta integrisanu polugrupu i važi $n(\mathcal{A})=2$. Na kraju, primetimo da je za svako $\lambda\in\mathbb{C}$, ispunjeno: $\lambda\in\rho(\mathcal{A})\Leftrightarrow\lambda^2\in\rho(A)$.

4.2. Elementarne osobine distribucionih kosinus funkcija

Definicija 4.2.1. Element $G \in \mathcal{D}_0'(L(E))$ je preddistribuciona kosinus funkcija, pre-(DCF) kraće, ako je

$$(DCF_1): \qquad G^{-1}(\varphi *_0 \psi) = G^{-1}(\varphi)G(\psi) + G(\varphi)G^{-1}(\psi), \ \varphi, \ \psi \in \mathcal{D};$$

G je distribuciona kosinus funkcija, (DCF) kraće, ako dodatno zadavoljava

$$(DCF_2): \qquad x = y = 0 \text{ ako i samo ako je } G(\varphi)x + G^{-1}(\varphi)y = 0, \text{ za sve } \varphi \in \mathcal{D}_0.$$

Pre-(DCF) G je gusta ako je $\mathcal{R}(G) := \bigcup\limits_{\varphi \in \mathcal{D}_0} ImG(\varphi)$ gust u E.

(DCF_2) povlači $\bigcap\limits_{\varphi \in \mathcal{D}_0} KernG(\varphi) = \{0\}$ i $\bigcap\limits_{\varphi \in \mathcal{D}_0} KernG^{-1}(\varphi) = \{0\}$. Iz Definicije 4.2.1 sledi: ako je G pre-(DCF), tada je $G(\varphi) = 0$ za sve $\varphi \in \mathcal{D}_{(-\infty,\, 0]}$. Nije jasno da li uslov ($\bigcap\limits_{\varphi \in \mathcal{D}_0} KernG(\varphi) \supset$) $\bigcap\limits_{\varphi \in \mathcal{D}_0} KernG^{-1}(\varphi) = \{0\}$ povlači (DCF_2). Sledeće tvrdjenje je zasnovano na Propoziciji 4.1.3.

Propozicija 4.2.2. *Pretpostavimo $G \in \mathcal{D}_0'(L(E))$. Tada je G pre-*(DCF) *u E ako i samo ako je* $\mathcal{G} \equiv \begin{pmatrix} G & G^{-1} \\ G' - \delta & G \end{pmatrix}$ *pre-*(DSG) *u E^2. $\mathcal{G}$ je* (DSG) *ako i samo ako je G pre-*(DCF) *i zadovoljava $(DCF)_2$.*

Dokaz. Kako je $\alpha \in \mathcal{D}_{[-2,-1]}$, imamo $\mathcal{G} \in \mathcal{D}_0'(L(E^2))$. Jednostavan račun pokazuje da $\mathcal{G}$ zadovoljava (qd_1) ako i samo ako važe sledeći uslovi:
1. $G^{-1}(\varphi *_0 \psi) = G^{-1}(\varphi)G(\psi) + G(\varphi)G^{-1}(\psi)$,
2. $G(\varphi *_0 \psi) = G(\varphi)G(\psi) + G^{-1}(\varphi)(G' - \delta)(\psi)$,
3. $G'(\varphi *_0 \psi) = (G' - \delta)(\varphi)G(\psi) + G(\varphi)(G' - \delta)(\psi)$, $\varphi, \ \psi \in \mathcal{D}$.

Kako je $(\varphi *_0 \psi)' = \varphi' *_0 \psi + \varphi(0)\psi = \varphi *_0 \psi' + \psi(0)\varphi$, $\varphi, \ \psi \in \mathcal{D}$, lako se proverava da 2. i 3. mogu biti dobijeni iz 1. Naime, pretpostavimo da 1. važi. Tada je

$$\begin{aligned} G(\varphi *_0 \psi) &= -G^{-1}((\varphi *_0 \psi)') = -G^{-1}(\varphi *_0 \psi' + \psi(0)\varphi) \\ &= -(G^{-1}(\varphi)G(\psi') + G(\varphi)G^{-1}(\psi') + \delta(\psi)G^{-1}(\varphi)) \\ &= G^{-1}(\varphi)G'(\psi) + G(\varphi)G(\psi) - \delta(\psi)G^{-1}(\varphi), \ \varphi, \ \psi \in \mathcal{D}, \end{aligned}$$

i 2. važi. Slično, 3. sledi iz 2., što pokazuje račun

$$\begin{aligned} G'(\varphi *_0 \psi) &= -G((\varphi *_0 \psi)') = -G(\varphi' *_0 \psi + \varphi(0)\psi) \\ &= -(G(\varphi')G(\psi) + G^{-1}(\varphi')(G' - \delta)(\psi) + \delta(\varphi)G(\psi)) \\ &= (G' - \delta)(\varphi)G(\psi) + G(\varphi)(G' - \delta)(\psi), \ \varphi, \ \psi \in \mathcal{D}. \end{aligned}$$

Takodje, $\mathcal{G}$ zadovoljava (d_2) ako i samo ako G zadovoljava (DCF_2). Pretpostavimo da (d_2) važi za $\mathcal{G}$. Dokažimo da G zadovoljava (DCF_2). Pretpostavimo da je za neke fiksne $x, \ y \in E$ ispunjeno $G(\varphi)x + G^{-1}(\varphi)y = 0$, $\varphi \in \mathcal{D}_0$. Tada je

$$(G' - \delta)(\varphi)x + G(\varphi)y = -G(\varphi')x - \varphi(0)x - G^{-1}(\varphi')y = 0, \ \varphi \in \mathcal{D}_0.$$

Kako za $\mathcal{G}$ važi (d_2), sledi $x = y = 0$.

(DCF_1) i (DCF_2) se mogu interpretirati kao adiciona formula $\sin(\alpha+\beta) \equiv \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ i linearna nezavisnost funkcija $\cos(\cdot)$ i $\sin(\cdot)$, respektivno.

Propozicija 4.2.3. *Neka je* $G \in \mathcal{D}'_0(L(E))$. *Tada je* G (DCF) *ako i samo ako* (DCF_2) *važi i*

$$\text{(01)} \qquad G^{-1}(\varphi * \psi_+) = G^{-1}(\varphi)G(\psi) + G(\varphi)G^{-1}(\psi), \quad \varphi \in \mathcal{D}_0, \ \psi \in \mathcal{D}.$$

Dokaz. Pretpostavimo da je G (DCF). Tada je $\mathcal{G}$ (DSG) u E^2 i stoga imamo $\mathcal{G}(\psi_+) = \mathcal{G}(\psi)$, $\psi \in \mathcal{D}$. Zbog toga je

$$\begin{pmatrix} G(\varphi * \psi_+) & G^{-1}(\varphi * \psi_+) \\ (G' - \delta)(\varphi * \psi_+) & G(\varphi * \psi_+) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} G(\varphi) & G^{-1}(\varphi) \\ (G' - \delta)(\varphi) & G(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G(\psi) & G^{-1}(\psi) \\ (G' - \delta)(\psi) & G(\psi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

za sve $\varphi \in \mathcal{D}_0$, $\psi \in \mathcal{D}$, x, $y \in E$. Izaberimo $x = 0$ da dobijemo (01). Pretpostavimo sada da (DCF_2) i (01) važe. Tada $\mathcal{G}$ zadovoljava (d_2). Pretpostavka (01) implicira $G^{-1}(\varphi * \psi) = G^{-1}(\varphi)G(\psi) + G(\varphi)G^{-1}(\psi)$, φ, $\psi \in \mathcal{D}_0$ i na osnovu toga,

$$G(\varphi * \psi) = G(\varphi)G(\psi) + G^{-1}(\varphi)(G' - \delta)(\psi),$$

$$(G' - \delta)(\varphi * \psi) = (G' - \delta)(\varphi)G(\psi) + G(\varphi)(G' - \delta)(\psi), \quad \varphi, \ \psi \in \mathcal{D}_0.$$

Pokazali smo da (d_1) važi za $\mathcal{G}$. Tada je

$$\begin{aligned} \text{(02)} \qquad G(\varphi * \psi_+) &= -G^{-1}((\varphi *_0 \psi_+)') = -G^{-1}(\varphi' *_0 \psi_+ + \varphi(0)\psi_+) \\ &= -[G^{-1}(\varphi')G(\psi) + G(\varphi')G^{-1}(\psi)] = G(\varphi)G(\psi) + G'(\varphi)G^{-1}(\psi), \end{aligned}$$

za sve $\varphi \in \mathcal{D}_0$, $\psi \in \mathcal{D}$. Kako je $(\varphi *_0 \psi_+)' = (\varphi *_0 (\psi')_+) + \psi(0)\varphi$, $\varphi \in \mathcal{D}_0$, $\psi \in \mathcal{D}$, dobijamo

$$\begin{aligned} \text{(03)} \qquad G(\varphi *_0 \psi_+) &= -G^{-1}((\varphi *_0 \psi_+)') = -G^{-1}(\varphi *_0 (\psi')_+ + \psi(0)\varphi) \\ &= -[G^{-1}(\varphi)G(\psi') + G(\varphi)G^{-1}(\psi')] - \psi(0)G^{-1}(\varphi) \\ &= G(\varphi)G(\psi) + G^{-1}(\varphi)(G' - \delta)(\psi), \quad \varphi \in \mathcal{D}_0, \ \psi \in \mathcal{D}, \text{ i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(04)} \quad (G' - \delta)(\varphi * \psi_+) &= G'(\varphi * \psi_+) = -G((\varphi *_0 \psi_+)') = -G(\varphi' *_0 \psi_+) \\ &\overset{(03)}{=} -[G(\varphi')G(\psi) + G^{-1}(\varphi')(G' - \delta)(\psi)] \\ &= (G' - \delta)(\varphi)G(\psi) + G(\varphi)(G' - \delta)(\psi), \end{aligned}$$

za sve $\varphi \in \mathcal{D}_0$, $\psi \in \mathcal{D}$. Dakle, (d_5) važi za $\mathcal{G}$ i $\mathcal{G}$ je (DSG) u E^2. Ostatak dokaza sledi iz Propozicije 4.2.2.

Propozicija 4.2.4. *Neka je* $G \in \mathcal{D}_0'(L(E))$. *Tada je* G *pre-*(DCF) *ako i samo ako*

$$(05) \qquad G^{-1}(\varphi)(G' - \delta)(\psi) = (G' - \delta)(\varphi)G^{-1}(\psi), \ \varphi, \ \psi \in \mathcal{D}.$$

Dokaz. Pokazali smo da je G pre-(DCF) u E ako i samo ako je $\mathcal{G}$ pre-(DSG) u E^2. Upotrebom Propozicije 2 u [40] bilo koji od ova dva uslova je takodje ekvivalentan sa

$$(06) \qquad \mathcal{G}(\varphi')\mathcal{G}(\psi) - \mathcal{G}(\varphi)\mathcal{G}(\psi') = \psi(0)\mathcal{G}(\varphi) - \varphi(0)\mathcal{G}(\psi), \ \varphi, \ \psi \in \mathcal{D}.$$

Kao u dokazima Propozicije 4.2.2 i Propozicije 4.2.3, pokazujemo da (06) važi ako i samo ako (05) važi.

Definicija 4.2.5. Ako je G (DCF), tada je njen generator A dat sa

$$\{(x, y) \in E^2 : (\forall \varphi \in \mathcal{D}_0) \ G^{-1}(\varphi'')x = G^{-1}(\varphi)y\}.$$

Zbog (DCF_2), A je funkcija i lako je proveriti da je A zatvoren linearan operator u E.

Lema 4.2.6. *Neka je* A *generator* (DCF) G. *Tada je* $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, *gde je* $\mathcal{A} \equiv \begin{pmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{pmatrix}$ *i* $\mathcal{B}$ *je generator od* $\mathcal{G}$.

Dokaz. Neka je $(\binom{x}{y}, \binom{u}{v}) \in \mathcal{A}$. Tada je $x \in D(A)$, $y = u$ i $Ax = v$. Na osnovu Definicije 4.2.5,

$$-(G(\varphi')x + G^{-1}(\varphi')y) = G(\varphi)u + G^{-1}(\varphi)v, \text{ i}$$

$$-(G'(\varphi')x + G(\varphi')y) = G'(\varphi)u + G(\varphi)v, \ \varphi \in \mathcal{D}_0.$$

Ovo daje $-\mathcal{G}(\varphi')\binom{x}{y} = \mathcal{G}(\varphi)\binom{u}{v}$, $\varphi \in \mathcal{D}_0$ i $(\binom{x}{y}, \binom{u}{v}) \in \mathcal{B}$.

Zapažanje. 1. $(x, y) \in A \Leftrightarrow (\binom{x}{0}, \binom{0}{y}) \in \mathcal{B}$. 2. Pokazaćemo nešto kasnije $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

Sledeća propozicija je od suštinskog značaja za analizu relacija (DCF) sa lokalno integrisanim kosinus funkcijama; za njen dokaz je važan uslov (DCF_2).

Propozicija 4.2.7. *Neka je* G (DCF) *generisana sa* A. *Tada je*
1. $(G(\psi)x, \ G(\psi'')x + \psi'(0)x) \in A$, $\psi \in \mathcal{D}$, $x \in E$.
2. $(G^{-1}(\psi)x, -G(\psi')x - \psi(0)x) \in A$, $\psi \in \mathcal{D}$, $x \in E$.
3. $G(\psi)A \subset AG(\psi)$, $\psi \in \mathcal{D}$.
4. $G^{-1}(\psi)A \subset AG^{-1}(\psi)$, $\psi \in \mathcal{D}$.

Dokaz. Neka su x, $y \in E$.

1. Važe sledeće ekvivalencije:

$$
\begin{gathered}
(G(\psi)x,\ y) \in A \\
\Updownarrow \\
G'(\varphi)G(\psi)x = G^{-1}(\varphi)y,\ \varphi \in \mathcal{D}_0 \\
\Updownarrow \\
G'(\varphi *_0 \psi)x - G(\varphi)G'(\psi)x + \psi(0)G(\varphi)x = G^{-1}(\varphi)y,\ \varphi \in \mathcal{D}_0 \\
\Updownarrow \\
-G(\varphi *_0 \psi' + \psi(0)\varphi)x - G(\varphi)G'(\psi)x + \psi(0)G(\varphi)x = G^{-1}(\varphi)y,\ \varphi \in \mathcal{D}_0 \\
\Updownarrow \\
-G(\varphi *_0 \psi')x - G(\varphi)G'(\psi)x = G^{-1}(\varphi)y,\ \varphi \in \mathcal{D}_0 \\
\Updownarrow \\
-[G(\varphi)G(\psi')x + G^{-1}(\varphi)(G'(\psi')x - \psi'(0)x)] - G(\varphi)G'(\psi)x = G^{-1}(\varphi)y,\ \varphi \in \mathcal{D}_0 \\
\Updownarrow \\
G(\varphi)[-G(\psi')x - G'(\psi)x] + G^{-1}(\varphi)[-G'(\psi')x + \psi'(0)x - y] = 0,\ \varphi \in \mathcal{D}_0 \\
\Updownarrow \\
y = G(\psi'')x + \psi'(0)x.
\end{gathered}
$$

2. Upotrebom 1. dobijamo

$$
AG^{-1}(\psi)x = -A\left\langle G(\cdot), \int_{-\infty}^{\cdot} [\psi(t) - \alpha(t)\int_{-\infty}^{\infty} \psi(u)du]xdt\right\rangle
$$

$$
= -G((\int_{-\infty}^{\cdot} [\psi(t) - \alpha(t)\int_{-\infty}^{\infty} \psi(u)du]dt)'')x
$$

$$
= -(\int_{-\infty}^{\cdot} [\psi(t) - \alpha(t)\int_{-\infty}^{\infty} \psi(u)du]dt)'(0)x = -G(\psi')x - \psi(0)x \ ; \text{ zbog}
$$

$$
(\int_{-\infty}^{\cdot} [\psi(t) - \alpha(t)\int_{-\infty}^{\infty} \psi(u)du]dt)''(t) = \psi'(t),\ t \in [0,\infty) \text{ i}
$$

$$
(\int_{-\infty}^{\cdot} [\psi(t) - \alpha(t)\int_{-\infty}^{\infty} \psi(u)du]dt)'(0) = \psi(0).
$$

3. Neka je $x \in D(A)$. Tada $(\binom{x}{0}, \binom{0}{Ax}) \in \mathcal{B}$ i Lema 3.6 u [52] daje

$$
\mathcal{G}(\psi)\begin{pmatrix}0\\ Ax\end{pmatrix} = -\mathcal{G}(\psi')\begin{pmatrix}x\\ 0\end{pmatrix} - \psi(0)\begin{pmatrix}x\\ 0\end{pmatrix},
$$

dobijamo $G(\psi)Ax = G(\psi'')x + \psi'(0)x$. Dakle, 3. je posledica od 1. i 4. sledi direktno iz 3.

4.3. Relacije sa integrisanim kosinus funkcijama, konvolucionim jednačinama i lokalnim C-kosinus funkcijama; eksponencijalne (DCF)

Osnovne veze distribucionih kosinus funkcija i lokalno integrisanih kosinus funkcija date su u Teoremi 4.3.1, Teoremi 4.3.2 i Teoremi 4.3.6. U dokazu sledeće teoreme koristimo i argumente date u dokazu Teoreme 7.2 u [2].

Teorema 4.3.1. *Neka je A generator* (DCF) *G. Tada postoje $\tau > 0$, $n \in \mathbb{N}$ i lokalna n-puta integrisana kosinus funkcija $(C_n(t))_{t\in[0,\tau)}$ generisana sa A.*

Dokaz. Za svako $\varphi \in \mathcal{D}$ i $x \in E$, imamo $AG(\varphi)x = G(\varphi'')x + \varphi'(0)x$. Ovo implicira da je G neprekidno linearno preslikavanje iz $\mathcal{D}$ u $L(E, D(A))$, gde je $D(A)$ opremljen graf normom. Na osnovu Teoreme 2.1.1 u [65], postoji $\tau > 0$, $n \in \mathbb{N}$ i neprekidna funkcija $C_n : [-\tau, \tau] \to L(E, D(A))$ takva da je

$$G(\varphi)x = (-1)^n \int_{-\tau}^{\tau} \varphi^{(n)}(t)C_n(t)x\,dt,$$

za sve $x \in E$, $\varphi \in \mathcal{D}_{(-\tau,\ \tau)}$. Važi i supp$C_n \subset [0, \tau]$, kao i

$$(-1)^n \int_0^{\tau} \varphi^{(n)}(t)AC_n(t)x\,dt = AG(\varphi)x = G(\varphi'')x + \varphi'(0)x$$

$$= (-1)^{n+2} \int_0^{\tau} \varphi^{(n+2)}(t)C_n(t)x\,dt + \varphi'(0)x,$$

za sve $x \in E$, $\varphi \in \mathcal{D}_{(-\tau,\ \tau)}$. Dakle, postoje $B_0, \ldots, B_{n+1} \in L(E)$ takvi da je

$$\int_0^t A(t-s)C_n(s)x\,ds - C_n(t)x = \sum_{j=0}^{n+1} t^j B_j x, \ x \in E, \ t \in [0, \tau). \text{ Stoga je,}$$

$$(-1)^{n+2} \int_0^{\tau} \varphi^{(n+2)}(t) \sum_{j=0}^{n+1} t^j B_j x\,dt = \varphi'(0)x, \ \varphi \in \mathcal{D}_{(-\tau,\ \tau)}, \ x \in E, \ \text{ tj.}$$

$$(-1)^{n+2} \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^{j+1} j! \varphi^{(n+1-j)}(0) B_j x = \varphi'(0)x, \ \varphi \in \mathcal{D}_{(-\tau,\ \tau)}, \ x \in E.$$

Izaberimo niz $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ u $\mathcal{D}_{(-\tau,\ \tau)}$ sa $\varphi_k^{(j)}(0) = \delta_{jk}$, $j,\ k \in \mathbb{N}_0$, da zaključimo: $B_j = 0$, $j \in \{0, 1, \ldots, n+1\} \setminus \{n\}$, $B_n = \frac{(-1)}{n!} I$ i

$$A \int_0^t (t-s)C_n(s)x\,ds = C_n(t)x - \frac{t^n}{n!}x, \ x \in E, \ t \in [0, \tau).$$

Kako $G(\varphi)$ komutira sa A, $\varphi \in \mathcal{D}$, postoje $F_0, \ldots, F_{n-1} \in L(E)$ takvi da je

$$AC_n(t)x - C_n(t)Ax = \sum_{j=0}^{n-1} t^j F_j x, \ x \in D(A), \ t \in [0, \tau).$$

Koristeći iste argumente kao u prvom delu dokaza dobijamo $F_j = 0$, $0 \leq j \leq n-1$ i $(C_n(t))_{t\in[0,\tau)}$ je lokalna n-puta integrisana kosinus funkcija generisana sa A.

Primetimo da je dokaz sledeće teoreme esencijalno isti kao u Teoremi 7.2 datoj u disertaciji Keyantua i specijalno u radu [2]. Ova teorema je neznatno modifikovana od strane Wanga [92], gde je on izbacio uslove vezane za gustinu operatora A. U radu [52], Kunstmann je dato tvrdjenje pokazao na potpuno drugačiji način.

Teorema 4.3.2. *Neka je A generator (lokalne) n-puta integrisane kosinus funkcije $(C_n(t))_{t\in[0,\tau)}$. Tada je A generator* (DCF).

Dokaz. Jasno, $\mathcal{A}$ je generator $(n+1)$-put integrisane semigrupe $(S_{n+1}(t))_{t\in[0,\tau)}$ u E^2, gde je S_{n+1} data u Propoziciji 4.1.3. Na osnovu toga, za svako $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}$ je generator $(2^k(n+1))$-puta integrisane polugrupe $(S_{2^k(n+1)}(t))_{t\in[0,2^k\tau)}$ u E^2. Označimo

$$S_{2^k(n+1)}(t) = \begin{pmatrix} S^1_{2^k(n+1)}(t) & S^2_{2^k(n+1)}(t) \\ S^3_{2^k(n+1)}(t) & S^4_{2^k(n+1)}(t) \end{pmatrix}, \ 0 \leq t < 2^k\tau.$$

Dokaz Propozicije 4.1.3 daje:

$$S^1_{2^k(n+1)}(t) = S^4_{2^k(n+1)}(t),\ S^2_{2^k(n+1)}(t) = \int_0^t S^1_{2^k(n+1)}(s)ds \ \text{ i}$$

$$S^3_{2^k(n+1)}(t) = \frac{d}{dt}S^1_{2^k(n+1)}(t) - \frac{t^{2^k(n+1)-1}}{(2^k(n+1)-1)!}I,\ 0 \leq t < 2^k\tau.$$

Za svako $\varphi \in \mathcal{D}$, izaberimo $k \in \mathbb{N}$ takvo da je $\varphi \in \mathcal{D}_{(-\infty,\ 2^k\tau)}$. Definišimo

$$\mathcal{G}(\varphi)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := (-1)^{2^k(n+1)} \int_0^\infty \varphi^{(2^k(n+1))}(t) S_{2^k(n+1)}(t)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} dt,\ x, y \in E \ \text{ i}$$

$$G(\varphi)x := (-1)^{2^k(n+1)} \int_0^\infty \varphi^{(2^k(n+1))}(t) S^1_{2^k(n+1)}(t)x dt,\ x \in E.$$

Lako je pokazati da date definicije ne zavise od $k \in \mathbb{N}$. Štaviše, $\mathcal{G}$ je (DSG) u E^2 generisana sa $\mathcal{A}$; videti dokaz Teoreme 3.8 u [92]. Neka je $\varphi \in \mathcal{D}_{(-\infty,\ 2^k\tau)}$ i $x \in E$. Tada je

$$G^{-1}(\varphi)x = -G(I(\varphi))x = -\int_0^\infty (I(\varphi))^{(2^k(n+1))}(t) S^1_{2^k(n+1)}(t)x dt$$

$$= -\int_0^\infty (\varphi^{(2^k(n+1)-1)}(t) - \alpha^{(2^k(n+1)-1)}(t) \int_{-\infty}^\infty \varphi(u)du) S^1_{2^k(n+1)}(t)x dt$$

$$= -\int_0^\infty \varphi^{(2^k(n+1)-1)}(t) S^1_{2^k(n+1)}(t)x dt = \int_0^\infty \varphi^{(2^k(n+1))}(t) \int_0^t S^1_{2^k(n+1)}(s)x ds dt$$

$$= \int_0^\infty \varphi^{(2^k(n+1))}(t) S^2_{2^k(n+1)}(t) x dt, \text{ i}$$

$$(G' - \delta)(\varphi)x = -\int_0^\infty \varphi^{(2^k(n+1)+1)}(t) S^1_{2^k(n+1)}(t) x dt - \varphi(0)x$$

$$= \int_0^\infty \varphi^{(2^k(n+1))}(t) \frac{d}{dt} S^1_{2^k(n+1)}(t) x dt - \int_0^\infty \varphi^{(2^k(n+1))}(t) \frac{t^{2^k(n+1)-1}}{(2^k(n+1)-1)!} x dt$$

$$= \int_0^\infty \varphi^{(2^k(n+1))}(t) S^3_{2^k(n+1)}(t) x dt.$$

Dalje imamo $\mathcal{G}(\varphi) = \begin{pmatrix} G(\varphi) & G^{-1}(\varphi) \\ (G' - \delta)(\varphi) & G(\varphi) \end{pmatrix}$, $\varphi \in \mathcal{D}$. Na osnovu Propozicije 4.2.2, sledi da je $\mathcal{G}$ (DCF). Ako je G generisana sa B, tada je

$$(x, y) \in B \Leftrightarrow (\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}) \in \mathcal{A} \Leftrightarrow (x, y) \in A.$$

Pokazali smo i sledeća tvrdjenja.

Propozicija 4.3.3. *Neka je A generator n-puta integrisane kosinus funkcije $(C_n(t))_{t\geq 0}$. Tada je $G = C_n^{(n)}$* (DCF) *generisana sa A.*

Propozicija 4.3.4. *Neka je G* (DCF) *generisana sa A. Tada postoje $\tau > 0$, $n \in \mathbb{N}$ i lokalna n-puta integrisana kosinus funkcija $(C_n(t))_{t\in[0,\tau)}$ generisana sa A takva da je $G = C_n^{(n)}$ u distribucionom smislu na $(-\infty,\ \tau)$.*

Razmotrimo nekompletni apstraktni Cauchyjev problem (ACP_2):

$$(ACP_2) : \begin{cases} u''(t) = Au(t),\ 0 \leq t < \tau, \\ u(0) = x,\ u'(0) = y. \end{cases}$$

Podsetimo se ([94]), funkcija $t \mapsto v(t)$ koja pripada prostoru $C([0, \tau) : E)$ je n-puta integrisano mild rešenje problema (ACP_2) u $(x, y) \in E^2$ ako je za sve $t \in [0, \tau)$, $\int_0^t (t - s)v(s)ds \in D(A)$ i

$$A \int_0^t (t - s)v(s)ds = v(t) - \frac{t^n}{n!}x - \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}y,\ t \in [0, \tau).$$

Koristeći iste argumente kao u [94], možemo pokazati:

Propozicija 4.3.5. *Neka je A zatvoren operator. Tada su sledeći iskazi ekvivalentni:*
(i) *A je generator n-puta integrisane kosinus funkcije $(C_n(t))_{t\in[0,\tau)}$.*
(ii) *Za sve $(x, y) \in E^2$ postoji jedinstveno n-puta integrisano mild rešenje za (ACP_2).*

Logaritamski region $\tilde{\Lambda}_{\alpha,\ \beta}$ i eksponencijalni region $E(\alpha,\ \beta)$ su definisani na sledeći način:

$$\tilde{\Lambda}_{\alpha,\ \beta} = \{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda \geq \alpha + \beta ln(1 + |\lambda|)\},\ \alpha,\ \beta > 0,$$

$$E(\alpha,\ \beta) = \{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda \geq \beta,\ |Im\lambda| \leq e^{\alpha Re\lambda}\},\ \alpha,\ \beta > 0.$$

Teorema 4.3.6. *Neka je A zatvoren operator. Tada su sledeći iskazi ekvivalentni:*
1. *A je generator* (DCF).
2. *Postoje $\tau > 0$ i $n \in \mathbb{N}$ takvi da je A generator n-puta integrisane kosinus funkcije na* $[0,\ \tau)$.
3. *Za svako $\tau > 0$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takvo da je A generator n-puta integrisane kosinus funkcije na* $[0,\ \tau)$.
4. *Operator* $\mathcal{A} \equiv \begin{pmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{pmatrix}$ *je generator* (DSG) *u* E^2.
5. *Za svako $\tau > 0$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takvo da za sve $(x, y) \in E^2$ postoji jedinstveno n-puta integrisano mild rešenje za* (ACP_2).
6. $\rho(A) \neq \emptyset$, *A je stacionarno gust i operator $\mathcal{A}_\infty$ generiše C_0-polugrupu u* $D_\infty(\mathcal{A})$.
7. *Postoje konstante $\alpha,\ \beta,\ M > 0$ i $n \in \mathbb{N}_0$ tako da je*

$$\tilde{\Lambda}^2_{\alpha,\beta} := \{\lambda^2 : \lambda \in \tilde{\Lambda}_{\alpha,\beta}\} \subset \rho(A) \ \ i$$

$$\|R(\lambda : A)\| \leq M(1 + |\lambda|)^n\ ,\ \lambda \in \tilde{\Lambda}^2_{\alpha,\beta}.$$

Dokaz. Implikacija 1. $\to$ 2. je Teorema 4.3.1 i implikacija 2. $\to$ 1. je Teorema 4.3.2. Pretpostavimo da je 2. tačno. Tada je operator $\mathcal{A}$ generator $(n+1)$-put integrisane polugrupe $(S_{n+1}(t))_{t\in[0,\tau)}$ u E^2. Na osnovu Teoreme 4.11 u [52], $\mathcal{A}$ generiše (DSG) u E^2 i 4. važi. Ako 4. važi, tada za sve $\tau > 0$ postoji $n \in \mathbb{N}_0$ tako da operator $\mathcal{A}$ generiše $(n+1)$-put integrisanu polugrupu $(S_{n+1}(t))_{t\in[0,\tau)}$ u E^2 i 3. sledi iz Leme 4.1.3. Implikacija 3. $\to$ 2. je trivijalna. Ekvivalencija 3. i 5. je Propozicija 4.3.5. Dakle, pokazali smo: 1. $\leftrightarrow$ 2. $\leftrightarrow$ 3. $\leftrightarrow$ 4. $\leftrightarrow$ 5. Ekvivalencija 4. i 6. sledi iz Teoreme 3.5 u [51] i Leme 4.1.7 i ekvivalencija 4. i 7. je jednostavna primena Posledice 3.12 u [52], gde treba samo primetiti da je $\|R(\cdot : \mathcal{A})\|_{L(E^2)}$ polinomski ograničena na $\tilde{\Lambda}_{\alpha,\ \beta}$ ako i samo ako je $\|R(\cdot : A)\|_{L(E)}$ polinomski ograničena na $\tilde{\Lambda}^2_{\alpha,\ \beta}$.

Zapažanje. Razlika izmedju logaritamskog i eksponencijalnog regiona je ovde nebitna. Preciznije, možemo zameniti 7. sa:
7'. Postoje konstante $\alpha,\ \beta,\ M > 0$ i $n \in \mathbb{N}_0$ takve da je:

$$E^2(\alpha,\ \beta) := \{\lambda^2 : \lambda \in E(\alpha,\ \beta)\} \subset \rho(A) \ \ \text{i}$$

$$\|R(\lambda : A)\| \leq M(1 + |\lambda|)^n\ ,\ \lambda \in E^2(\alpha,\ \beta).$$

Zainteresovanog čitaoca upućujemo na [47].

Teorema 4.3.6 pokazuje da generatori distribucionih kosinus funkcija zadovoljavaju veoma restriktivne spektralne uslove. Specijalno, ako A generiše (DCF), tada rezolventni skup operatora A sadrži desnu poluravan i rezolventa je na njoj polinomski ograničena. Ovo nas vodi do sledećeg rezultata.

Propozicija 4.3.7. *Neka je A generator* (DCF). *Tada postoji $n \in \mathbb{N}_0$ tako da A generiše globalnu eksponencijalno ograničenu n-puta integrisanu polugrupu.*

Propozicija 4.3.8. *Neka je A zatvoren operator takav da A i $-A$ generišu* (DSG). *Tada A^2 generiše* (DCF).

Dokaz. Bez smanjenja opštosti, možemo pretpostaviti da postoje $\alpha,\ \beta > 0$ tako da su $\|R(\cdot : A)\|_{L(E)}$ i $\|R(\cdot : -A)\|_{L(E)}$ polinomski ograničene na $\tilde{\Lambda}_{\alpha,\ \beta}$. Zaključujemo $\tilde{\Lambda}^2_{\alpha,\ \beta} \subset \rho(A^2)$ i $2\lambda R(\lambda^2 : A^2) = R(\lambda : A) + R(\lambda : -A)$, $\lambda \in \tilde{\Lambda}_{\alpha,\ \beta}$. Jasno, $\left\|R(\cdot : A^2)\right\|_{L(E)}$ je polinomski ograničena na $\tilde{\Lambda}^2_{\alpha,\ \beta}$. Teorema 4.3.6 kompletira dokaz.

Istaknimo sada veze (DCF) sa jednačinama konvolucionog tipa. Konvolucija vektorsko-vrednosnih distribucija je u ovom radu uzeta u smislu Propozicije 1.1 u [52].

Propozicija 4.3.9. *Pretpostavimo da su X, Y i Z Banachovi prostori i da je $b : X \times Y \to Z$ bilinearno, neprekidno preslikavanje. Tada postoji jedinstveno bilinearno, separatno neprekidno preslikavanje $*_b : \mathcal{D}'_0(X) \times \mathcal{D}'_0(Y) \to \mathcal{D}'_0(Z)$ takvo da je*

$$(S \otimes x) *_b (T \otimes y) = S * T \otimes b(x, y),$$

za sve $S,\ T \in \mathcal{D}'_0$ i $x \in X$, $y \in Y$. Ovo prelikavanje je i neprekidno.

Teorema 4.3.10. *Neka je A zatvoren operator i $G \in \mathcal{D}'_0(L(E))$. Tada je G* (DCF) *generisana sa A ako i samo ako je $G \in \mathcal{D}'_0(L(E, D(A)))$,*

$$G * P = \delta' \otimes Id_{D(A)} \text{ i } P * G = \delta' \otimes Id_E,$$

gde je $D(A)$ opremljen graf normom, $P := \delta'' \otimes I - \delta \otimes A \in \mathcal{D}'_0(L(D(A), E))$ i I označava inkluziju $D(A) \to E$.

Dokaz. Ako A generiše (DCF) G, tada Propozicija 4.2.7 daje traženu implikaciju. Pretpostavimo sada da $G \in \mathcal{D}'_0(L(E, D(A)))$ ispunjava $G * P = \delta' \otimes Id_{D(A)}$ i $P * G = \delta' \otimes Id_E$.
Označimo $\mathcal{G} = \begin{pmatrix} G & G^{-1} \\ G' - \delta & G \end{pmatrix}$. Kako je supp$G \subset [0, \infty)$ sledi supp$G^{-1} \subset [0, \infty)$. Tada je supp$\mathcal{G} \subset [0, \infty)$. Ako je $x \in E$, tada pretpostavke $G * P = \delta' \otimes Id_{D(A)}$ i $P * G = \delta' \otimes Id_E$ impliciraju 1. Propozicije 4.2.7 i $G(\varphi)Ax = G(\psi'')x + \psi'(0)x$, $\varphi \in \mathcal{D}$, $x \in D(A)$. Na osnovu dokaza Propozicije 4.2.7, imamo

$$AG^{-1}(\varphi)x = -G(\varphi')x - \varphi(0)x,\ \varphi \in \mathcal{D},\ x \in E \ \text{ i}$$

$$G^{-1}(\varphi)Ax = -G(\varphi')x - \varphi(0)x,\ \varphi \in \mathcal{D},\ x \in E.$$

Sada se pravolinijski pokazuje $\mathcal{G} \in \mathcal{D}'_0(L(E^2, D(\mathcal{A})))$, gde je $D(\mathcal{A})$ opremljen graf normom. Neka je $x \in D(A)$. Tada je

$$-\mathcal{G}(\varphi')\binom{x}{y} - \mathcal{G}(\varphi)\mathcal{A}\binom{x}{y} = -\mathcal{G}(\varphi')\binom{x}{y} - \mathcal{G}(\varphi)\binom{y}{Ax}$$

$$= \begin{pmatrix} -G(\varphi')x - G^{-1}(\varphi')y - G(\varphi)y - G^{-1}(\varphi)Ax \\ -G'(\varphi')x + \varphi'(0)x - G(\varphi')y - G'(\varphi)y + \varphi(0)y - G(\varphi)Ax \end{pmatrix} = \varphi(0)\binom{x}{y},\ \varphi \in \mathcal{D}.$$

Slično, ako $x,\ y \in E$, tada je $-\mathcal{G}(\varphi')\binom{x}{y} - \mathcal{A}\mathcal{G}(\varphi)\binom{x}{y} = \varphi(0)\binom{x}{y}$, $\varphi \in \mathcal{D}$. To daje

$$\mathcal{G} * P_1 = \delta \otimes Id_{D(\mathcal{A})} \text{ i } P_1 * \mathcal{G} = \delta \otimes Id_{E^2},$$

gde je $P_1 := \delta' \otimes Id - \delta \otimes \mathcal{A} \in \mathcal{D}'_0(L(D(\mathcal{A}), E^2))$ i Id označava inkluziju $D(\mathcal{A}) \to E^2$. Na osnovu dokaza Teoreme 3.10 u [52], dobijamo da je $\mathcal{G}$ (DSG) u E^2 generisana sa $\mathcal{A}$. Dakle, G je (DCF). Ako je B generator od G, imamo

$$(x, y) \in B \Leftrightarrow (\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}) \in \mathcal{A} \Leftrightarrow (x, y) \in A.$$

Posledica 4.3.11. *Neka je $G \in \mathcal{D}'_0(L(E))$. Tada je G (DCF) u E generisana sa A ako i samo ako je $\mathcal{G} \equiv \begin{pmatrix} G & G^{-1} \\ G' - \delta & G \end{pmatrix}$ (DSG) u E^2 generisana sa $\mathcal{A} \equiv \begin{pmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{pmatrix}$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je G (DCF) generisana sa A. Onda je $\mathcal{G}$ (DSG) u E^2. Ako je P kao u prethodnoj teoremi, imamo

$$G * P = \delta' \otimes Id_{D(A)} \text{ i } P * G = \delta' \otimes Id_E.$$

Tada dokaz Teoreme 4.3.10 implicira da je generator od $\mathcal{G}$ jednak $\mathcal{A}$. Obratno, ako je $\mathcal{G}$ (DSG) generisana sa $\mathcal{A}$, tada je G (DCF). Lako je proveriti da je generator od G zapravo A.

Direktno iz Propozicije 4.3.11 i Posledice 2 date u [40] sledi:

Posledica 4.3.12. *Svaka distribuciona kosinus funkcija je jedinstveno odredjena svojim generatorom.*

Analizirajmo relacije (DCF) sa lokalnim C-kosinus funkcijama. Za uvod u, sada već možemo reći teoriju, lokalnih C-kosinus funkcija videti [80]. Navedimo samo sledeće tvrdjenje dato u [80]:

Propozicija 4.3.13. *Neka je A zatvoren operator sa $\rho(A) \neq \emptyset$, $0 < \tau \leq \infty$. Sledeće je ekvivalentno:*
1. *A je generator (lokalne) C-kosinus funkcije $[0, \tau)$,*
2. *$CA \subset AC$ i problem (ACP_2) ima jedistveno (jako) rešenje koje pripada prostoru $C^2([0, \tau) : E) \cap C([0, \tau) : D(A))$ za sve x, $y \in C(D(A))$, gde je $D(A)$ opremljen graf normom.*

Propozicija 4.3.14. *Neka je A zatvoren operator; $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \rho(A)$, $0 < \tau \leq \infty$. Tada je*
A generator $2n$-puta integrisane kosinus funkcije $[0, \tau)$
ako i samo ako je
A generator $R(\lambda : A)^n$-kosinus funkcije na $[0, \tau)$.

Dokaz. Ako A generiše $2n$-puta integrisanu kosinus funkciju $(C_{2n}(t))_{t \in [0,\tau)}$ na $[0, \tau)$, tada operator $\mathcal{A}$ generiše $(2n+1)$-put integrisanu polugrupu $(S_{2n+1}(t))_{t \in [0,\tau)}$. Imamo i $\rho(\mathcal{A}) \neq \emptyset$ i upotreba Propozicije 3.3 u [1] daje: za sve $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}^T \in D(\mathcal{A}^{2n+2}) = D(A^{n+1}) \times D(A^{n+1})$ postoji jedinstvena funkcija $U \in C^1([0, \tau) : E^2) \cap C([0, \tau) : D(\mathcal{A}))$ koja zadovoljava $U'(t) = \mathcal{A}U(t)$, $0 \leq t < \tau$ i $U(0) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}^T$. Označimo $U(t) = \begin{pmatrix} u(t) & v(t) \end{pmatrix}^T$, $0 \leq t < \tau$. Lako je proveriti da je u jedinstveno jako rešenje za (ACP_2) i $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}^T \in D(A^{n+1}) \times D(A^{n+1})$. Primena Propozicije 4.3.13 povlači da A generiše (lokalnu) $R(\lambda : A)^n$-kosinus funkciju na $[0, \tau)$. Pretpostavimo da A generiše (lokalnu) $R(\lambda : A)^n$-kosinus funkciju $(\overline{C}_0(t))_{t \in [0,\tau)}$. Neka su x, $y \in D(A^{n+1})$ fiksirani i neka je u

jako rešenje problema (ACP_2) dato Propozicijom 4.3.13. Definišimo $U(t) := \begin{pmatrix} u(t) & u'(t) \end{pmatrix}^T$, $0 \leq t < \tau$. Pravolinijski se proverava da je U jedinstvena funkcija sa sledećim osobinama

$$\begin{cases} U \in C([0,\tau) : D(\mathcal{A})) \cap C^1([0,\tau) : E^2)) \\ U'(t) = \mathcal{A}U(t),\ t \in [0,\tau) \\ U(0) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}^T. \end{cases}$$

Kako je $\rho(\mathcal{A}) \neq \emptyset$, $\mathcal{A}$ generiše lokalnu $(2n+1)$-put integrisanu polugrupu $(S_{2n+1}(t))_{t\in[0,\tau)}$ u E^2 na osnovu [1, Propozicija 3.3]. Propozicija 4.1.3 završava dokaz.

Posledica 4.3.15. *Neka je A zatvoren operator. Tada su sledeći iskazi ekvivalentni:*
1. *A generiše* (DCF),
2. *$\rho(A) \neq \emptyset$ i postoje $n \in \mathbb{N}$ i $\tau \in (0,\infty]$ tako da je A generator $R(\lambda : A)^n$-kosinus funkcije $[0,\tau)$, za sve $\lambda \in \rho(A)$,*
3. *$\rho(A) \neq \emptyset$ i postoje $\lambda \in \rho(A)$, $n \in \mathbb{N}$ i $\tau \in (0,\infty]$ tako da je A generator $R(\lambda : A)^n$-kosinus funkcije $[0,\tau)$.*

Napomenimo da se na osnovu Teoreme 4.3.6 mogu konstruisati neki novi ekvivalentni iskazi u prethodnoj posledici. Analizirajmo sada eksponencijalne (DCF). Ponovimo najpre definiciju eksponencijalne (DSG).

Definicija 4.3.16. Distribuciona polugrupa G je eksponencijalna distribuciona polugrupa, (EDSG) kraće, ako postoji $\varepsilon \in \mathbb{R}$ tako da je $e^{-\varepsilon t}G \in \mathcal{S}'(L(E))$.

Definicija 4.3.17. Distribuciona kosinus funkcija G je eksponencijalna distribuciona kosinus funkcija, (EDCF) kraće, ako je $\mathcal{G} \equiv \begin{pmatrix} G & G^{-1} \\ G' - \delta & G \end{pmatrix}$ (EDSG) u E^2.

Podsetimo se da je C_0-polugrupa $(T(t))_{t\geq 0}$ u Fréchetovom prostoru X kvaziuniformno neprekidna ako postoji $a \geq 0$ takvo da je skup $\{\exp(-a\cdot)T(t) : t \geq 0\}$ podjednako neprekidan; videti [91] za osnove teorije jednoparametarskih polugrupa operatora u lokalno konveksnim prostorima.

Teorema 4.3.18. *Neka je A zatvoren operator. Tada su sledeća tvrdjenja ekvivalentna.*
1. *A je generator* (EDCF) *u E.*
2. *Operator $\mathcal{A}$ je generator* (EDSG) *u E^2.*
3. *A je generator globalne eksponencijalno ograničene n-puta integrisane kosinus funkcije za neko $n \in \mathbb{N}$.*
4. *Postoje konstante $\omega, M > 0$ i $k \in \mathbb{N}$ takve da je*

$$\Pi_\omega := \{x + iy : x > \omega^2 - \frac{y^2}{4\omega^2}\} \subset \rho(A) \quad i$$

$$\|R(\lambda : A)\| \leq M|\lambda|^k\ ,\ \lambda \in \Pi_\omega.$$

5. *$\rho(A) \neq \emptyset$, A je stacionarno gust i operator $\mathcal{A}_\infty$ je generator kvazi-uniformno neprekidne C_0-polugrupe u $D_\infty(\mathcal{A})$.*

Dokaz. Implikacija 1. $\to$ 2. sledi direktno iz Posledice 4.3.11. Obratno, pretpostavimo da je $\mathcal{G}$ (DSG) u E^2 generisana sa $\mathcal{A}$ i da je $e^{-\varepsilon t}\mathcal{G} \in \mathcal{S}_0'(L(E^2))$. Jasno, $e^{-\varepsilon t}\mathcal{G}$ je (DSG) u E^2 generisana sa $\mathcal{A} - \begin{pmatrix} \varepsilon I & 0 \\ 0 & \varepsilon I \end{pmatrix}$. Za sve $\varphi \in \mathcal{D}$ i $x,\ y \in E$, imamo (videti Lemu 3.6 u [52])

$$\mathcal{A}\,\langle e^{-\varepsilon t}\mathcal{G},\varphi\rangle \tbinom{x}{y} = \langle e^{-\varepsilon t}\mathcal{G}, -\varphi'\rangle \tbinom{x}{y} + \varepsilon\,\langle e^{-\varepsilon t}\mathcal{G},\varphi\rangle \tbinom{x}{y} - \varphi(0)\tbinom{x}{y};$$

to daje $e^{-\varepsilon t}\mathcal{G} \in \mathcal{S}'(L(E^2, D(\mathcal{A})))$. Možemo primeniti Teoremu 2.1.2 u [65] da dobijemo da postoje $n \in \mathbb{N}$, $r > 0$ i neprekidna funkcija $\bar{S}_{n+1} : \mathbb{R} \to L(E^2, D(\mathcal{A}))$ čiji ji nosač sadržan u $[0,\infty)$, tako da je

$$\langle e^{-\varepsilon t}\mathcal{G}, \varphi\rangle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (-1)^{n+1} \int_0^\infty \varphi^{(n+1)}(t)\bar{S}_{n+1}(t)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} dt,$$

za sve $\varphi \in \mathcal{D}$, $x,\ y \in E$ i $|\bar{S}_{n+1}(t)| \leq Mt^r$, $t \geq 0$. Slično kao u [1, Teorema 7.2], imamo da je $(\bar{S}_{n+1}(t))_{t\geq 0}$ $(n+1)$-put integrisana polugrupa generisana sa $\mathcal{A} - \begin{pmatrix} \varepsilon I & 0 \\ 0 & \varepsilon I \end{pmatrix}$. Standardni perturbacioni argument (kao u [1, Lema 3.2]) pokazuje da je $\mathcal{A}$ generator globalne eksponencijalno ograničene $(n+1)$-put integrisane polugrupe $(S_{n+1}(t))_{t\geq 0}$. Primetimo ovde da Propozicija 4.1.3 povlači 2. $\to$ 3. Da bi pokazali da 2. implicira 1., možemo primeniti argumente date u završnom delu dokaza Teoreme 4.3.2. Naime, lako je videti

$$\mathcal{G}(\varphi) = (-1)^{n+1} \int_0^\infty \varphi^{(n+1)}(t)S_{n+1}(t)dt,\ \varphi \in \mathcal{D}.$$

Definišimo G sa

$$G(\varphi)x := (-1)^{(n+1)} \int_0^\infty \varphi^{(n+1)}(t)S^1_{(n+1)}(t)x dt,\ x \in E,\ \varphi \in \mathcal{D},$$

sa istom notacijom kao u dokazu Teoreme 4.3.2. Tada je G (EDCF) generisana sa A i 1. važi. Pretpostavimo da je 3. tačno. Tada je $\mathcal{A}$ generator eksponencijalno ograničene $(n+1)$-put integrisane polugrupe $(S_{n+1}(t))_{t\geq 0}$. Jasno, sa

$$\mathcal{G}(\varphi) := (-1)^{n+1} \int_0^\infty \varphi^{(n+1)}(t)S_{n+1}(t)dt,\ \varphi \in \mathcal{D},$$

je definisana (EDSG) G u E^2 generisana sa $\mathcal{A}$ i 2. je ispunjeno. Ekvivalencija 2. i 5. je posledica Leme 4.1.7 i Teoreme 3.6 u [51]. Ako 2. važi, tada postoji $\omega > 0$ takvo da je $\{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda > \omega\} \subset \rho(\mathcal{A})$ i da je $\|R(\cdot : \mathcal{A})\|$ polinomski ograničena na $\{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda > \omega\}$. Zbog toga je $\Pi_\omega = \{\lambda^2 : \lambda \in \mathbb{C},\ Re\lambda > \omega\}$ sadržan u $\rho(A)$ i $\|R(\cdot : A)\|$ je polinomski ograničena na Π_ω. Dakle, 4. važi. Pretpostavimo da je 4. tačno. Tada je $\{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda > \omega\} \subset \rho(\mathcal{A})$ i $\|R(\cdot : \mathcal{A})\|$ je polinomski ograničena na $\{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda > \omega\}$. Primenjujući Propoziciju

A, imamo da $\mathcal{A}$ generiše eksponencijalno ograničenu $(n+1)$-put integrisanu polugrupu za neko $n \in \mathbb{N}$ i Propozicija 4.1.3 implicira 3.

Sledeći rezultat može biti iznenadjujući:

Propozicija 4.3.19. *Neka je G (DCF). Tada je G (EDCF) ako i samo ako postoji $\varepsilon \in \mathbb{R}$ takvo da je $e^{-\varepsilon t}G^{-1} \in \mathcal{S}_0'(L(E))$.*

Dokaz. Podsetimo se, topologija na $\mathcal{S}$ je data familijom seminormi

$$\|\psi\|_{\alpha,\beta} := \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^\alpha \psi^{(\beta)}(x)| \ , \quad \alpha,\ \beta \in \mathbb{N}_0,\ \psi \in \mathcal{S}.$$

Pretpostavljajući da je G (EDCF), postoje $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $M > 0$ i α, $\beta \in \mathbb{N}_0$ takvi da

$$\| \langle e^{-\varepsilon t}G, \varphi \rangle x + \langle e^{-\varepsilon t}G^{-1}, \varphi \rangle y \| + \| \langle e^{-\varepsilon t}(G' - \delta), \varphi \rangle x + \langle e^{-\varepsilon t}G, \varphi \rangle y \|$$

$$\leq M \|\varphi\|_{\alpha,\beta}(\|x\| + \|y\|)$$

važi za sve $\varphi \in \mathcal{D}$ i x, $y \in E$. Izaberimo $x = 0$ da dobijemo $e^{-\varepsilon t}G^{-1} \in \mathcal{S}_0'(L(E))$. Pretpostavimo $e^{-\varepsilon t}G^{-1} \in \mathcal{S}_0'(L(E))$. Tada postoje $M > 0$ i α, $\beta \in \mathbb{N}_0$ tako da je

$$\|G^{-1}(e^{-\varepsilon t}\varphi)\| \leq M\|\varphi\|_{\alpha,\ \beta},\ \varphi \in \mathcal{D}. \text{ Imamo}$$

$$\|(e^{-\varepsilon t}G)(\varphi)\| = \|G(e^{-\varepsilon t}\varphi)\| = \|G^{-1}(-\varepsilon e^{-\varepsilon t}\varphi + e^{-\varepsilon t}\varphi')\|$$

$$\leq M|\varepsilon|\|\varphi\|_{\alpha,\ \beta} + M\|\varphi'\|_{\alpha,\ \beta} \leq M|\varepsilon|\|\varphi\|_{\alpha,\ \beta} + M\|\varphi\|_{\alpha,\ \beta+1},\ \ \varphi \in \mathcal{D}.$$

To daje $e^{-\varepsilon t}G \in \mathcal{S}_0'(L(E))$; slično, $e^{-\varepsilon t}(G' - \delta) \in \mathcal{S}_0'(L(E))$ i dobijamo

$$e^{-\varepsilon t}\begin{pmatrix} G & G^{-1} \\ G' - \delta & G \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_0'(L(E^2)).$$

Primenom Teoreme 4.3.18 i Teoreme 3.3 date u [99], imamo direktno:

Propozicija 4.3.20. *Neka je A gusto definisan operator. Ako je A generator* (EDCF) *u E, tada je adjoint A^* od A generator* (EDCF) *u E^*.*

Navedimo perturbacionu teoremu za generatore α-puta integrisanih kosinus funkcija.

Teorema 4.3.21 ([99, Teorema 3.1]). *Neka je A generator eksponencijalno ograničene 2α-puta integrisane kosinus funkcije $(C_{2\alpha}(t))_{t\geq 0}$ za neko $\alpha \geq 0$. Ako je $B \in L(E)$ i $R(B) \subset D(A^{\lceil \alpha \rceil})$, tada je $A + B$ generator eksponencijalno ograničene 2α-puta integrisane kosinus funkcije $(C_{2\alpha}^B(t))_{t\geq 0}$.*

Primetimo da $R(B) \subset D(A^{\lceil \alpha \rceil})$ nije ispunjeno ako je $\alpha > 0$ i $B = aI$, $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Stoga ćemo postaviti i delimično odgovoriti na pitanje: ako je A generator eksponencijalno ograničene α-puta integrisane kosinus funkcije za neko $\alpha > 0$, da li isto važi i za $A - aI$?

Propozicija 4.3.22. *Pretpostavimo da je A generator eksponencijalno ograničene α-puta integrisane kosinus funkcije $(C_\alpha(t))_{t\geq 0}$ za neko $\alpha > 0$. Tada za* *sve $z \in \mathbb{C}$ i $\beta > \alpha + 1$, $A + zI$ generiše eksponencijalno ograničenu β-puta integrisanu kosinus funkciju.*

Dokaz. Neka za $\omega > 0$ važi

$$\lambda^\alpha R(\lambda^2 : A)x = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} C_\alpha(t)x dt, \ x \in E, \ Re\lambda > \omega.$$

Tada postoji $M > 0$ takvo da je

$$\|\lambda^{\alpha-1} R(\lambda^2 : A)\| \leq M \ , \ Re\lambda > \omega + 1.$$

To daje

$$\|\lambda^{\alpha-1} R(\lambda^2 : A + zI)\| = \|\lambda^{\alpha-1} R(\lambda^2 - z : A)\| \leq |\lambda|^{\alpha-1} \frac{M}{|\lambda^2 - z|^{\frac{\alpha-1}{2}}} \leq M_1,$$

za sve $\lambda \in \mathbb{C}$ takve da je $Re\lambda$ dovoljno veliko i odgovarajuće $M_1 > 0$. Primena Propozicije A kompletira dokaz. Ovde je $\lambda^\alpha = e^{\alpha(\ln|\lambda| + i \arg \lambda)}$ $(\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$.

Posledica 4.3.23. *Ako je A generator* (EDCF) *tada je za sve $z \in \mathbb{C}$ operator $A + zI$ takodje generator* (EDCF).

Propozicija 4.3.24. *Pretpostavimo da A i $-A$ generišu* (EDSG). *Tada je A^2 generator* (EDCF).

Dokaz. Već smo pokazali da date pretpostavke povlače da postoji $n \in \mathbb{N}$ takvo da A i $-A$ generišu eksponencijalno ograničene n-puta integrisane polugrupe. Sada treba primeniti Teoremu 5.1 u [4] i Teoremu 4.3.18 da bi se dokaz kompletirao.

Vratimo se na jedno elementarno svojstvo (DCF).

Propozicija 4.3.25. *Neka je G* (DCF). *Tada je*

$$G(\varphi)G(\psi) = G(\psi)G(\varphi), \ \varphi, \ \psi \in \mathcal{D}.$$

Dokaz. Tada je A generator od G. Tada postoji $n \in \mathbb{N}$ i $\tau \in (0, \infty)$ takva da je A generator n-puta integrisane kosinus funkcije $(C_n(t))_{t \in [0,\tau)}$ koja zadovoljava

$$G(\varphi)x = (-1)^n \int_0^\infty \varphi^{(n)}(t) C_n(t)x dt, \ x \in E, \ \varphi \in \mathcal{D}_{(-\infty, \ \tau)}.$$

Iz dokaza Teoreme 4.3.2 (koristimo istu notaciju), sa

$$G_1(\varphi)x = (-1)^{2^k(n+1)} \int_0^\infty \varphi^{(2^k(n+1)}(t) S^1_{2^k(n+1)}(t)x dt, \ x \in E, \ \varphi \in \mathcal{D}_{(-\infty, \ 2^k\tau)},$$

je data (DCF) generisana sa A i Posledica 4.3.12 implicira

$$G(\varphi)x = (-1)^{2^k(n+1)} \int_0^\infty \varphi^{(2^k(n+1))}(t) S^1_{2^k(n+1)}(t)x dt, \ x \in E, \ \varphi \in \mathcal{D}_{(-\infty, \ 2^k\tau)}.$$

Označimo $S_{2^k(n+1)}(t) = \begin{pmatrix} S^1_{2^k(n+1)} & S^2_{2^k(n+1)}(t) \\ S^3_{2^k(n+1)}(t) & S^4_{2^k(n+1)}(t) \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq t < 2^k\tau$.
Lema 4.1.3 daje

$$S^i_{2^0(n+1)}(t)S^j_{2^0(n+1)}(s) = S^j_{2^0(n+1)}(s)S^i_{2^0(n+1)}(t),\ 0 \leq t < \tau;\ i,j \in \{1,2,3,4\}.$$

Neka je $\tau_0 \in [0,\ 2^k\tau)$. Na osnovu Teoreme 4.1 date u [2]:

$$S_{2^{k+1}(n+1)}(t) = \int_0^t \frac{(t-u)^{2^k(n+1)-1}}{(2^k(n+1)-1)!} S_{2^k(n+1)}(u)du,\ 0 \leq t \leq \tau_0,$$

$$S_{2^{k+1}(n+1)}(t) = S_{2^k(n+1)}(\tau_0)S_{2^k(n+1)}(t-\tau_0)$$
$$+\sum_{m=0}^{k-1} \frac{1}{m!}[\tau_0^m \int_0^{t-\tau_0} \frac{(t-\tau_0-u)^{2^k(n+1)-1}}{(2^k(n+1)-1)!} S_{2^k(n+1)}(u)du$$
$$+(t-\tau_0)^m \int_0^{\tau_0} \frac{(\tau_0-u)^{2^k(n+1)-1}}{(2^k(n+1)-1)!} S_{2^k(n+1)}(u)du],\ \tau_0 \leq t \leq 2\tau_0.$$

Indukcijom zaključujemo

$$S^i_{2^k(n+1)}(t)S^j_{2^k(n+1)}(s) = S^j_{2^k(n+1)}(s)S^i_{2^k(n+1)}(t),\ k \in \mathbb{N}_0,$$

za sve $0 \leq t, s < 2^k\tau;\ i,j \in \{1,2,3,4\}$.
Pretpostavimo $\varphi,\ \psi \in \mathcal{D}_{(-\infty,\ 2^k\tau)}$ za neko $k \in \mathbb{N}$. Tada račun

$$\begin{aligned}
G(\varphi)G(\psi)x &= \int_0^\infty \varphi^{(2^k(n+1))}(t)S^1_{2^k(n+1)}(t)\int_0^\infty \psi^{(2^k(n+1))}(s)S^1_{2^k(n+1)}(s)xdsdt \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty \varphi^{(2^k(n+1))}(t)\psi^{(2^k(n+1))}(s)S^1_{2^k(n+1)}(t)S^1_{2^k(n+1)}(s)xdsdt \\
&= \int_0^\infty \psi^{2^k(n+1)}(s)S^1_{2^k(n+1)}(s)\int_0^\infty \varphi^{2^k(n+1))}(t)S^1_{2^k(n+1)}(t)xdtds \\
&= G(\psi)G(\varphi)x,\ x \in E,\ \text{završava dokaz.}
\end{aligned}$$

Pitanje. Da li tvrdjenje ostaje u važnosti ako je G samo pre-(DCF) ?

4.4. Guste distribucione kosinus funkcije

Pokazali smo da je generator proizvoljne (DCF) stacionarno gust i da, u opštem slučaju, ne mora biti gust. Sada ćemo analizirati guste (DCF). Potrebna nam je sledeća propozicija.

Propozicija 4.4.1. *Neka je G (DCF). Tada za sve $\binom{x}{y} \in \mathcal{R}(\mathcal{G})$ postoji funkcija $u \in C^1([0,\infty) : E)$ takva da je $u(0) = x$, $u'(0) = y$ i*

$$G(\psi)x + G^{-1}(\psi)y = \int_0^\infty \psi(t)u(t)dt, \ \psi \in \mathcal{D}.$$

Dokaz. Jasno, $\mathcal{G}$ je (DSG) u E^2. Zbog toga $\mathcal{G}$ zadovoljava (d_4) i to povlači da za sve $\binom{x}{y} \in \mathcal{R}(\mathcal{G})$ postoje dve funkcije u, $v \in C([0,\infty) : E)$ takve da je $u(0) = x$, $v(0) = y$ i

$$\begin{aligned} G(\psi)x + G^{-1}(\psi)y &= \int_0^\infty \psi(t)u(t)dt, \\ (G' - \delta)(\psi)x + G(\psi)y &= \int_0^\infty \psi(t)v(t)dt, \ \psi \in \mathcal{D}. \end{aligned}$$

Sa $y = 0$ i $x \in E$, parcijalna integracija daje

$$\int_0^\infty \varphi'(t)(u(t) - \int_0^t v(s)ds)dt = G(\varphi')x + G'(\varphi)x = 0, \ \varphi \in \mathcal{D}_0.$$

Sada je lako zaključiti da je $u(t) = x + \int_0^t v(s)ds$, $t \geq 0$ i funkcija u ima tražene osobine.

Propozicija 4.4.2. *Neka je G (DCF) generisana sa A. Tada za sve x, $y \in D_\infty(A)$ postoji funkcija $u \in C^1([0,\infty) : D(A))$ takva da je $u(0) = x$, $u'(0) = y$ i*

$$G(\varphi)x + G^{-1}(\varphi)y = \int_0^\infty \varphi(t)u(t)dt, \ \varphi \in \mathcal{D}_0.$$

Dokaz. Primenom Posledice 3.9 u [92] dobijamo da za sve $\binom{x}{y} \in D_\infty(\mathcal{A}) = D_\infty(A) \times D_\infty(A)$ postoje dve funkcije u i $v \in C([0,\infty) : E)$ takve da je $u(0) = x$, $v(0) = y$ i

$$\begin{aligned} G(\varphi)x + G^{-1}(\varphi)y &= \int_0^\infty \varphi(t)u(t)dt \\ (G' - \delta)(\varphi)x + G(\varphi)y &= \int_0^\infty \varphi(t)v(t)dt, \ \varphi \in \mathcal{D}_0. \end{aligned}$$

Dokaz završavaju isti argumenti kao u Propoziciji 4.4.1.

Sada možemo pokazati glavnu teoremu ove sekcije.

Teorema 4.4.3. *Neka je G (DCF) generisana sa A. Tada je $\overline{D(A)} = E$ ako i samo ako je G gusta.*

Dokaz. Pretpostavimo da je G gusta. Tada Propozicija 4.2.7 implicira $\overline{D(A)} = E$. Suprotno, ako je $\overline{D(A)} = E$ tada je $\overline{D_\infty(A)} = E$ kako A ima neprazni rezolventni skup. Dovoljno je pokazati $D_\infty(A) \subset \overline{\mathcal{R}(G)}$. Neka je $x \in D_\infty(A)$.

Na osnovu Propozicije 4.4.2, postoji funkcija $u \in C^1([0,\infty) : E)$ takva da je $u(0) = x$, $u'(0) = 0$ i da je

$$G(\varphi)x = \int_0^\infty \varphi(t)u(t)dt, \ \varphi \in \mathcal{D}_0.$$

Stoga imamo $x = \lim_{n\to\infty} G(\rho_n)x \in \overline{\mathcal{R}(G)}$, gde je (ρ_n) regularizacioni niz u $\mathcal{D}_0$.

4.5. Primeri

Napomenimo samo da ukoliko A generiše (EDCF), tada spektar $\sigma(A)$ operatora A mora biti sadržan u unutrašnjosti parabole $\{x + iy : x \leq \omega^2 - \frac{y^2}{4\omega^2}\}$ za neko $\omega > 0$.
Prvi primer je jednostavna modifikacija Primera 3.14.19 u [6].

Primer 4.5.1. Neka je $E := L^2(\mathbb{R})$, $m(x) := -|x| + ix$, $x \in \mathbb{R}$,

$$(Af)(x) := m(x)f(x)\ , \ D(A) := \{f \in E : mf \in E\}.$$

Tada A generiše ograničenu analitičku C_0-polugrupu ugla $\frac{\pi}{4}$ i A ne generiše kosinus funkciju ([6]). Pokažimo da A ne generiše (DCF). Neka su $\alpha > 0$ i $\beta > 0$ fiksni. Izaberimo $z \in E(\alpha, \ \beta)$ sa $\arg z = \frac{3\pi}{8}$. Kako je $\sigma(A) = \{0\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg\lambda = \pm\frac{3\pi}{4}\}$, imamo $z^2 \in E^2(\alpha, \ \beta) \cap \sigma(A)$ i primena Teoreme 4.3.6 daje navedeno tvrdjenje.

Primer 4.5.2. Neka je

$$E := \{f \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}_0} C^k[k,\infty) : f(0) = 0, \quad \|f\|_E := \sup_{k\in\mathbb{N}_0}\sup_{t\geq k}|f^{(k)}(t)| < \infty\}.$$

Ovaj prostor se pojavljuje u [52]. Razmotrimo sledeći operator

$$Af := f''\ , \ D(A) := \{f \in E : f', f'' \in E\}.$$

Pretpostavimo da A generiše (DCF). Tada postoje konstante $\omega > 0$, $M > 0$ i $k \in \mathbb{N}$ takve da je $\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda > \omega^2\} \subset \rho(A)$ i da je $\|R(\lambda^2 : A)\| \leq M\lambda^k$, $\lambda > \omega$.
Izaberimo

$$g(x) = \begin{cases} 2x & , \ 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -2x+2 & , \ \frac{1}{2} < x < 1 \\ 0 & , \ x \geq 1. \end{cases}$$

Tada je $\|g\|_E = 1$ i

$$M\lambda^{k+1} \geq \|\lambda R(\lambda^2 : A)g\|_E = \|\sinh(\lambda t) *_0 g\|_E \geq \tfrac{1}{2}\sup_{t\geq 0}|\int_0^t (e^{\lambda(t-s)} - e^{-\lambda(t-s)})g(s)ds|$$

$$\geq \sup_{t\in[0,\frac{1}{2}]}|\int_0^t (e^{\lambda(t-s)} - e^{-\lambda(t-s)})sds| \geq \sup_{t\in[0,\frac{1}{2}]}|\tfrac{-2t}{\lambda} + \tfrac{e^{\lambda t}-e^{-\lambda t}}{\lambda^2}|$$

$$\geq |\tfrac{-1}{\lambda} + \tfrac{e^{\frac{\lambda}{2}}-e^{\frac{-\lambda}{2}}}{\lambda^2}| \geq \tfrac{e^{\frac{\lambda}{2}}}{\lambda^2} - \tfrac{1}{\lambda} - \tfrac{e^{\frac{-\lambda}{2}}}{\lambda^2}\ , \ \lambda > \omega.$$

Dakle, A ne generiše (DCF). Primetimo da operator $-d/dx$ sa maksimalnim domenom u E generiše (DSG) u E, videti Primer 3.5 u [52].

Primer 4.5.3. (a) Neka je $E := L^p((0,\infty))$, $1 \leq p \leq \infty$, $m(x) := (x+ie^x)^2$, $x > 0$,

$$(Af)(x) := m(x)f(x)\ ,\ D(A) := \{f \in E : mf \in E\}.$$

Jasno, $\{x+ie^x : x > 0\} \cap \tilde{\Lambda}_{1,1} = \emptyset$. Označimo $d := \text{dist}(\{\pm(x+ie^x) : x > 0\}, \partial\tilde{\Lambda}_{1,1})$. Tada je $d \in (0,\infty)$, $\tilde{\Lambda}^2_{1,1} \subset \rho(A)$ i

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{d^2}\ ,\ \lambda \in \tilde{\Lambda}^2_{1,1}.$$

Zbog toga A generiše (DCF). Kako je $\sigma(A) = \{(x+ie^x)^2 : x > 0\}$, imamo

$$\sigma(A) \cap \Pi_\omega \neq \emptyset,\ \text{za sve}\ \omega > 0.$$

Dakle, A ne generiše (EDCF). Lako je proveriti da A generiše lokalnu jedan put integrisanu kosinus funkciju (sinus funkciju) $(C_1(t))_{t\in[0,1)}$ datu sa

$$(C_1(t)f)(x) = \tfrac{\sinh((x+ie^x)t)\cdot f(x)}{x+ie^x}\ ,\ 0 \leq t < 1,\ x > 0,\ f \in E.$$

Jasno je da $(C_1(t))_{t\in[0,1)}$ može biti proširena na $[0,1]$ i da je $\sup\limits_{t\in[0,1]} \|C_1(t)\| \leq 1$. Pored toga, A ne generiše lokalnu sinus funkciju na $[0,\ \tau)$, za proizvoljno $\tau > 1$.

(b) Neka je $E := L^p((1,\infty))$, $1 \leq p \leq \infty$, $m(x) := (x + i\frac{e^x}{x})^2$, $x > 1$,

$$(Af)(x) := m(x)f(x)\ ,\ D(A) := \{f \in E : mf \in E\}.$$

Tada je A generator lokalne sinus funkcije $(\overline{C_1}(t))_{t\in[0,1)}$ date sa

$$(\overline{C_1}(t)f)(x) = \tfrac{\sinh((x+i\frac{e^x}{x})t)\cdot f(x)}{x+i\frac{e^x}{x}}\ ,\ 0 \leq t < 1,\ x > 1,\ f \in E.$$

Imamo i $\sup\limits_{t\in[0,1)} \|\overline{C_1}(t)\| = \infty$.

Primer 4.5.4. Razmotrimo sada slučaj kada je E Hardyjev prostor funkcija holomorfnih u gornjoj poluravni. Stavimo $\mathbb{R}^2_+ = \{z \in \mathbb{C} : Imz > 0\}$. $H^p(\mathbb{R}^2_+)$, $1 \leq p < \infty$, je definisan na sledeći nacin

$$H^p(\mathbb{R}^2_+) := \{F : F \text{ je holomorfna na } \mathbb{R}^2_+ \text{ i}$$

$$\|F\|_{H^p(\mathbb{R}^2_+)} := (\sup_{y>0} \int_{\mathbb{R}} |F(x+iy)|^p dx)^{1/p} < \infty\}.$$

Neka je B funkcija holomorfna na $\mathbb{R}^2_+$ i $B(\mathbb{R}^2_+) \subset \{x+iy : x \leq \omega^2 - \frac{y^2}{4\omega^2}\}$, za neko $\omega > 0$ i

$$(AF)(z) := B(z)F(z),\ Imz > 0,\ D(A) := \{F \in H^p(\mathbb{R}^2_+) : AF \in H^p(\mathbb{R}^2_+)\}.$$

Jednostavno je proveriti $\Pi_{\omega+1} \subset \rho(A)$ i $\|\lambda R(\lambda^2 : A)\| \leq \frac{1}{2\omega+1}|\lambda|$, $Re\lambda > \omega + 1$. Primena Propozicije A daje da za sve $\alpha > 2$, A generiše eksponencijalno ograničenu α-puta integrisanu kosinus funkciju. Dakle, A generiše (EDCF) u $H^p(\mathbb{R}^2_+)$. Specijalno, možemo uzeti

$B(z) = (\frac{1}{\pi i}\ln\frac{z-1}{z+1} + a)^2$, $Imz > 0$ $(a \in \mathbb{C})$, ili jednostavno

$B(z) = -\ln^2 z$, $Imz > 0$,

gde je $\ln z = \ln|z| + i\arg(z)$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Primer 4.5.5. Neka je E proizvoljan Banachov prostor, $P \in L(E)$ i $P^2 = P$. Definišimo

$$G(\varphi)x := \int_0^\infty \varphi(t)dtPx, \ x \in E, \ \varphi \in \mathcal{D}.$$

Tada je $G^{-1}(\varphi)x = \int_0^\infty t\varphi(t)dtPx$, $x \in E$, $\varphi \in \mathcal{D}$. Kako je P neprekidni projektor i

$$\int_0^\infty t\varphi(t)dt\int_0^\infty \psi(s)ds + \int_0^\infty \varphi(t)dt\int_0^\infty s\psi(s)ds = \int_0^\infty\int_0^\infty (t+s)\varphi(t)\psi(s)dsdt$$
$$= \int_0^\infty\int_0^u u\varphi(u-v)\psi(v)dvdu = \int_0^\infty u\int_0^u \varphi(u-v)\psi(v)dvdu = \int_0^\infty u(\varphi *_0 \psi)(u)du,$$

za sve φ, $\psi \in \mathcal{D}$, G je pre-(DCF) u E. Takodje,

$$\{x,y\} \subset KernP \Leftrightarrow (\forall\varphi \in \mathcal{D}_0)\ G(\varphi)x + G^{-1}(\varphi)y = 0.$$

Primetimo takodje da je G pre-(DSG) u E koja zadovoljava $\mathcal{N}(G) = KernP$.

Primer 4.5.6. Neka je $E := S_2(L^2(\mathbb{R}))$ prostor Hilbert-Schmidtovih operatora. Definišimo

$$\langle Ax, f\rangle(t) := -|t|\langle x, f\rangle(t), \ t \in \mathbb{R}, \ f \in L^2(\mathbb{R}); \ D(A) := \{x \in E : Ax \in E\}.$$

Podsetimo se da je $x : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ Hilbert-Schmidtov operator ako i samo ako postoji kvadratno integrabilni kernel $a_x \in L^2(\mathbb{R}^2)$ takav da je

$$\langle x, f\rangle = \int_{\mathbb{R}} a_x(\cdot,t)f(t)dt, \text{ za sve } f \in L^2(\mathbb{R}).$$

U ovom slučaju, $\|x\|_E = (\int_{\mathbb{R}^2} |a_x(s,t)|^2dsdt)^{1/2}$. Neka je $x_2 \in E$ i $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Definišimo $x_1 \in E$ sa $a_{x_1}(s,t) := \frac{a_{x_2}(s,t)}{\lambda+|s|}$. Tada je x_1 jedinstveno rešenje jednacine $(\lambda - A)\cdot = x_2$ i

$$(\int_{\mathbb{R}^2} |a_{x_1}(s,t)|^2dsdt)^{1/2} \leq \|x_2\|_E \begin{cases} \frac{1}{|Im\lambda|} & , \ Re\lambda < 0 \\ \frac{1}{|\lambda|} & , \ Re\lambda > 0. \end{cases}$$

Ovo daje: $x_1 = R(\lambda : A)x_2$, $\sigma(A) \subset (-\infty, 0]$ i $\|\lambda R(\lambda^2 : A)\| \leq M$, $Re\lambda > 1$. Ponovna primena Propozicije A implicira da je za sve $\alpha > 1$, A generator eksponencijalno ograničene α-puta integrisane kosinus funkcije. Dakle, A generiše gustu (EDCF).

Primer 4.5.7. Označimo $\Delta_\theta = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| < \theta\}$, $\theta \in (0, \pi]$. Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren neprazan skup. Pretpostavimo da je $(T(z))_{z\in\Delta_{\pi/2}}$ ograničena analitička C_0-polugrupa ugla $\frac{\pi}{2}$ na $L^2(\Omega)$ koja ima (gornju) Gausovsku procenu reda m (videti na primer [96]). Tada za sve $p \in [1, \infty)$ postoji konzistentna C_0-polugrupa $(T_p(t))_{t \geq 0}$ na $L^p(\Omega)$ takva da je

$$T_p(t)f = T(t)f, \quad f \in L^p(\Omega) \cap L^2(\Omega), \ t \geq 0.$$

Označimo sa A_p njen generator. Zheng i Zhang su pokazali u [96]:

$$\sigma(A_p) \subset (-\infty, \ 0],$$

$$\|R(\lambda : A_p)\|_{L^p(\Omega)} \leq M|\lambda|^{n|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}|-\frac{1}{2}}(|\lambda| + Re\lambda)^{-n|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}|-\frac{1}{2}}, \ \lambda \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, \ 0].$$

Dakle, za sve $p \in [1, \infty)$, A_p je generator (EDCF) u $L^p(\Omega)$, zato što je $\|R(\cdot, A_p)\|_{L^p(\Omega)}$ polinomski ograničena na Π_1. Za slične rezultate videti Teoremu 5.4 u [31].

Primer 4.5.8. Neka je $E := L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, $n \in \mathbb{N}$. Hieber je pokazao da je Laplacian Δ sa maksimalnim distribucionim domenom u E generator eksponencijalno ograničene α-puta integrisane kosinus funkcije na E za bilo koje $\alpha > (n-1)|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}|$. (Hieber je ovo pokazao korišćenjem teorije Fourierovih multiplikatora, dok je dokaz Keyantua zasnovan na čistoj primeni Laplaceove transformacije [39].) Dakle, operator $\Delta + \varepsilon I$ je generator eksponencijalno ograničene 2α-puta integrisane kosinus funkcije $\alpha > \frac{1}{2}((n-1)|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}| + 1)$ (videti Propoziciju 4.3.22). Primenom Teoreme 4.3.21, operator $A = \Delta + \varepsilon I + B$ generiše eksponencijalno ograničenu r-puta integrisanu kosinus funkciju, gde je $r := 2\lceil\frac{(n-1)|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}|+2}{2}\rceil$ i

$$Bf := \psi * f \ , \ f \in E \quad (\psi \in W^{1,r}(\mathbb{R}^n)).$$

Pretpostavimo u nastavku $p = 3$ i $2 \leq n \leq 13$; tada A generiše 4-puta integrisanu kosinus funkciju. Primena Teoreme 4.2, str. 111, date u [91] povlači da problem

$$\frac{\partial^7 u}{dt^7}(t,x) = \Delta_x \frac{\partial^5 u}{\partial t^5}(t,x) + \varepsilon \frac{\partial^5 u}{\partial t^5}(t,x) + \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x-y)\frac{\partial^5 u}{\partial t^5}(t,y)dy + \sum_{i=0}^{4} B_i \frac{\partial^i u}{\partial t^i}(t,x),$$

$$\frac{\partial^j u}{\partial t^j}(0,x) = u_j(x), \ 0 \leq j \leq 6, \ \ (t \geq 0, \ x \in \mathbb{R}^n)$$

ima jedinstveno rešenje za sve $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\psi \in W^{1,4}(\mathbb{R}^n)$ i proizvoljne zatvorive operatore B_i u E, $0 \leq i \leq 4$, koji zadovoljavaju

1. $W^{3,2}(\mathbb{R}^n) \subset D(B_i)$, $0 \leq i \leq 4$,
2. $B_i(W^{3,2}(\mathbb{R}^n)) \subset W^{3,2}(\mathbb{R}^n)$, $i \in \{1, 2\}$,
3. $B_i(W^{3,2}(\mathbb{R}^n)) \subset W^{3,4}(\mathbb{R}^n)$, $i \in \{3, 4\}$,

i $u_j \in \bigcap\limits_{i=0}^{j} D(A^{\lfloor\frac{1}{2}(5-i)\rfloor}B_{j-i})$, $0 \leq j \leq 4$, $u_{5,6} \in W^{3,6}(\mathbb{R}^n)$.

Primetimo da ovakav izbor reda jednačine zapravo omogućava da je jedini uslov za zatvoriv operator B_0: $W^{3,2}(\mathbb{R}^n) \subset D(B_0)$.

Mnogi drugi primeri eksponencijalnih (DCF) se mogu dobiti primenom Teoreme 3.1 iz [39] i Teoreme 6.6 iz [4]. Glavni rezultat rada [98] može biti upotrebljen za konstrukciju eksponencijalnih (DCF).

5. Analitičke integrisane polugrupe

U ovoj glavi ćemo pokazati da je generator proizvoljne eksponencijalno ograničene, analitičke integrisane polugrupe ugla α koja ima odgovarajući rast u 0 takodje generator analitičke C_0-polugrupe istog ugla. Najpre, reformulišemo poznatu definiciju analitičke integrisane polugrupe. Nakon toga, upotrebom distribucionih polugrupa dolazimo do sledećeg rezultata:

Teorema B. *Neka je A gusto definisani operator i neka je $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}]$. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni.*

(*i*) *A je generator eksponencijalno ograničene, analitičke n-puta integrisane polugrupe $(S_n(t))_{t\geq 0}$ ugla α, takve da je $||S_n(z)|| = O(|z|^n)$, $z \to 0$, $z \in \Sigma_\beta$, za sve $\beta \in (0, \alpha)$ i neko $n \in \mathbb{N}_0$.*

(*ii*) *A je generator analitičke C_0-polugrupe ugla α.*

5.1. Preliminaries

Analitičke polugrupe reda $r > 0$ su proučavane u [83] i [76].
Distribucija $\delta_t \in \mathcal{D}'$, $t \in \mathbb{R}$, je definisana sa $\langle \delta_t, \varphi \rangle := \varphi(t)$, $\varphi \in \mathcal{D}$.
Parafrazirajući [6, Definicija 3.2.5], jako neprekidna operatorska familija $(T(t))_{t>0}$ je polugrupa, ako važe sledeći uslovi:

- $T(t+s) = T(t)T(s)$, $t, s > 0$,
- $T(t)x = 0$, za sve $t > 0$, povlači $x = 0$,
- $\sup_{t\in(0,1]}||T(t)|| < \infty$.

Obavezno, ako je $(T(t))_{t>0}$ polugrupa, tada postoje konstante $M > 0$ i $\omega > 0$ takve da je $||T(t)|| \leq Me^{\omega t}$, $t > 0$. Definišimo $S_1(t) := \int_0^t T(s)ds$, $t \geq 0$. Tada je $(S_1(t))_{t\geq 0}$ eksponencijalno ograničena, jedan put integrisana polugrupa. Zatvoren linearan operator A je generator polugrupe $(T(t))_{t>0}$ ako i samo ako je A generator za $(S_1(t))_{t\geq 0}$, ili ekvivalentno, ako postoji $\omega_1 \geq \omega$ takvo da je

$$R(\lambda : A) = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} S_1(t)dt, \ \lambda > \omega_1.$$

5.2. Analitičke integrisane polugrupe

Za materijal koji se odnosi na analitičke polugrupe videti monografije [6] i [63].
Neophodna nam je [6, Posledica 3.9.9]:
Neka je $\gamma \in (0, \frac{\pi}{2})$. Pretpostavimo da $e^{\pm i\gamma}A$ generiše C_0-polugrupu. Tada A generiše analitičku C_0-polugrupu ugla γ.

Neka je $\alpha \in (0, \pi]$. Koristićemo notaciju $\Sigma_\alpha := \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0, \ |\arg z| < \alpha\}$.
Neka je $K \in L^1_{loc}([0, \infty))$ eksponencijalno ograničena funkcija. Analitičke K-polugrupe će biti analizirane nešto kasnije. Navodimo definiciju sa $K(t) =$

$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$, $n \in \mathbb{N}$; zapravo, reformulisaćemo [23, Definicija 21.2] (videti i [25]) datu u radu deLaubenfelsa tako što ćemo jedan njegov nepotreban uslov iz definicije zanemariti.

Definicija 5.2.1. Neka je $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{N}$ i neka je $(S_n(t))_{t\geq 0}$ eksponencijalno ograničena n-puta integrisana polugrupa. Tada je $(S_n(t))_{t\geq 0}$ analitička n-puta integrisana polugrupa ugla α, ako postoji analitička funkcija $\mathbf{S}_n : \Sigma_\alpha \to L(E)$ takva da važi:

- $\mathbf{S}_n(t) = S_n(t)$, $t > 0$ i
- $\lim_{z\to 0,\ z\in\Sigma_\gamma} \mathbf{S}_n(z)x = 0$, za sve $\gamma \in (0,\ \alpha)$ i $x \in E$.

$(S_n(t))_{t\geq 0}$ je eksponencijalno ograničena, analitička n-puta integrisana polugrupa ugla α, ako za sve $\gamma \in (0,\ \alpha)$ postoje $M_\gamma > 0$ i $\omega_\gamma > 0$ takvi da je $||\mathbf{S}_n(z)|| \leq M_\gamma e^{\omega_\gamma Re z}$, $z \in \Sigma_\gamma$.

Jasno je da je analitička n-puta integrisana polugrupa $(S_n(t))_{t\geq 0}$ ugla α eksponencijalno ograničena ako za sve $\gamma \in (0,\ \alpha)$ postoje odgovarajuće konstante $M_\gamma > 0$ i $\omega_\gamma > 0$ takve da je $||\mathbf{S}_n(z)|| \leq M_\gamma e^{\omega_\gamma |z|}$, $z \in \Sigma_\gamma$.
Od sada ćemo označiti $\mathbf{S}_n$ sa S_n kako to neće izazvati nikakvu konfuziju. Stavimo $T(z) := \frac{d^n}{dz^n} S_n(z)$, $z \in \Sigma_\alpha$.
Za analitičku n-puta integrisanu polugrupu $(S_n(t))_{t\geq 0}$ ugla α u smislu [23, Definicija 21.2] je takodje pretpostavljeno da zadovoljava sledeće semigrupovno svojstvo: $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$, $z_1,\ z_2 \in \Sigma_\alpha$. Pokažimo da ovaj uslov automatski važi.

Propozicija 5.2.2. *Neka je $(S_n(t))_{t\geq 0}$ analitička n-puta integrisana polugrupa ugla α. Tada je $(T(z))_{z\in\Sigma_\alpha}$ analitička operatorska familija i važi:*

1. $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$, $z_1,\ z_2 \in \Sigma_\alpha$,
2. $T(t)x = 0$, *za sve* $t > 0$, *povlači* $x = 0$, *kao i*
3. $\lim_{z\to 0,\ z\in\Sigma_\gamma} T(z)x = x$, $x \in D(A^n)$.

Dokaz. Neka je A generator za $(S_n(t))_{t\geq 0}$ i neka su $t_1 > 0$ i $t_2 > 0$ fiksirani. Stavimo

$$G(\varphi)x = (-1)^n \int_0^\infty \varphi^{(n)}(t) S_n(t)x dt,\ \varphi \in \mathcal{D}.$$

Tada je G (DSG) generisana sa A ([44]). Parcijalna integracija implicira da je za svako $\varphi \in \mathcal{D}$ sa $\operatorname{supp}\varphi \subset (a,\infty)$, $0 < a < \min(t_1, t_2)$, ispunjeno

$$G(\varphi)x = \int_0^\infty \varphi(t)T(t)x dt.$$

Neka su (φ_k) i (ψ_k) nizovi u $\{\varphi \in \mathcal{D} : \operatorname{supp}\varphi \subset (a,\infty)\}$ koji konvergiraju u distribucionom smislu ka δ_{t_1} i δ_{t_2}, respektivno. Tada je $(\varphi_k * \delta_{t_2})$ niz u $\{\varphi \in \mathcal{D} : \operatorname{supp}\varphi \subset (a,\infty)\}$ koji konvergira u distribucionom smislu ka $\delta_{t_1+t_2}$ i

$$T(t_1)T(t_2)x = \lim_{k\to\infty} G(\varphi_k)T(t_2)x = \lim_{k\to\infty} G(\varphi_k) \lim_{j\to\infty} G(\psi_j)x$$
$$= \lim_{k\to\infty}\lim_{j\to\infty} G(\varphi_k)G(\psi_j)x = \lim_{k\to\infty}\lim_{j\to\infty} G(\varphi_k *_0 \psi_j)x$$

$$= \lim_{k\to\infty} G(\varphi_k * \delta_{t_2})x = T(t_1+t_2)x, \ x \in E.$$

To važi za sve z_1 i z_2 koji pripadaju Σ_α na osnovu poznatih tvrdjenja iz komleksne analize. To dokazuje 1. Pretpostavka $T(t)x = 0$, za sve $t > 0$, implicira da za svako $\varphi \in \mathcal{D}$ sa $\operatorname{supp}\varphi \subset (0,\infty)$ imamo $G(\varphi)x = 0$. Kako je translacija neprekidno linearno preslikavanje iz $\mathcal{D}$ u $\mathcal{D}$, prethodna jednakost važi za sve $\varphi \in \mathcal{D}_0$. To daje $x \in \mathcal{N}(G)$ i $x = 0$. Ovim smo pokazali 2.
Dokažimo 3. Fiksirajmo $x \in D(A^n)$. Dobro je poznato

$$\frac{d^n}{dt^n} S_n(t)x = S_n(t)A^n x + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^{n-1}x + \ldots + tAx + x, \ t \geq 0.$$

Dakle,

$$\frac{d^n}{dz^n} S_n(z)x = S_n(z)A^n x + \frac{z^{n-1}}{(n-1)!}A^{n-1}x + \ldots + zAx + x, \ z \in \Sigma_\gamma,$$

i 3. sledi na osnovu Definicije 5.2.1.

Dokaz Propozicije 5.2.2 daje:

Posledica 5.2.3. *Neka je $(S_n(t))_{t\geq 0}$ n-puta integrisana polugrupa generisana sa A. Ako je $S_n(\cdot) \in C^n((0,\infty) : L(E))$, tada $(T(t))_{t>0}$ zadovoljava 2. Takodje, 1. važi za sve pozitivne realne brojeve t_1 i t_2.*

Sledeća lema će biti neophodna u dokazu Propozicije 5.2.5.

Lema 5.2.4. *Neka je $n \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da A generiše n-puta integrisanu polugrupu $(S_n(t))_{t\geq 0}$ i $a_i \in \mathbb{C}$, $i = 0,1,\ldots,n-1$. Neka je $V_n(t) := S_n(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i I$, $t \geq 0$. Ako je $(V_n(t))_{t\geq 0}$ n-puta integrisana polugrupa generisana sa B, tada je $A = B$ i $a_i = 0$, $i = 0,1,\ldots,n-1$.*

Dokaz. Neka je $x \in E$, $\varphi \in \mathcal{D}$. Definišimo

$$G(\varphi)x = (-1)^n \int_0^\infty \varphi^{(n)}(t)S_n(t)x dt \text{ i } H(\varphi)x = (-1)^n \int_0^\infty \varphi^{(n)}(t)V_n(t)x dt.$$

Tada su G i H (DSG) generisane sa A i B, respektivno. Na osnovu pretpostavki dobijamo $G(\varphi) = H(\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{D}_0$; to daje

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y) \in E^2 : G(-\varphi')x = G(\varphi)y, \ \varphi \in \mathcal{D}_0\} \\ &= \{(x,y) \in E^2 : H(-\varphi')x = H(\varphi)y, \ \varphi \in \mathcal{D}_0\} = B. \end{aligned}$$

Kako je svaka (lokalno) integrisana polugrupa jedinstveno odredjena njenim generatorom, imamo $S_n(t) = V_n(t)$, $t \geq 0$. Ovo završava dokaz.

Propozicija 5.2.5. *Pretpostavimo da je A gusto definisani operator i da je A generator eksponencijalno ograničene, analitičke n-puta integrisane polugrupe $(S_n(t))_{t\geq 0}$ ugla α takve da je $||S_n(z)|| = O(|z|^n)$, $z \to 0$, $z \in \Sigma_\beta$, za sve $\beta \in (0, \alpha)$. Tada A generiše C_0-polugrupu.*

Dokaz. Fiksirajmo $\gamma \in (0, \alpha)$ i $t \in (0, \frac{1}{1+\sin\gamma})$. Pretpostavimo dalje $||S_n(z)|| \leq M|z|^n$, $|z| \leq 1$, $z \in \overline{\Sigma_\gamma}$, za neko $M > 0$. Cauchyjeva integralna formula daje

$$T(t) = \frac{n!}{2\pi i} \oint\limits_{|z-t|=t\sin\gamma} \frac{S_n(z)}{(z-t)^{n+1}} dz.$$

Kako je $t + t\sin\gamma e^{i\theta} \in \overline{\Sigma_\gamma} \cap \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| \leq 1\}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, imamo

$$||T(t)|| \leq \frac{n!}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{||S_n(t + t\sin\gamma e^{i\theta})||}{t^{n+1}\sin^{n+1}\gamma} t\sin\gamma d\theta \leq \frac{n!}{2\pi t^n \sin^n\gamma} 2\pi M(t + t\sin\gamma)^n;$$

dakle, $\sup_{t\in(0,1]} ||T(t)|| < \infty$. Posledica 5.2.3 implicira da je $(T(t))_{t>0}$ polugrupa. Neka je $S_1(t) = \int\limits_0^t T(s)ds$, $t \geq 0$. Tada je $(S_1(t))_{t\geq 0}$ eksponencijalno ograničena, jedan put integrisana polugrupa. Definišimo

$$V_n(t) := \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} T(s)xds, \ t \geq 0.$$

Tada je $(V_n(t))_{t\geq 0}$ eksponencijalno ograničena, n-puta integrisana polugrupa. Fiksirajmo $x \in E$. Imamo $V_n(\cdot)x \in C^{n-1}([0,\infty) : E) \cap C^n((0,\infty) : E)$ i $\frac{d^n}{dt^n}V_n(t)x = T(t)x$, $t > 0$. Štaviše, $\frac{d^n}{dt^n}S_n(t)x = T(t)x$, $t > 0$. Lema 5.2.4 implicira $S_n(t) = V_n(t)$, $t \geq 0$. Stoga je

$$\lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}S_1(t)xdt = \lambda^n \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\int\limits_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}T(s)xdsdt$$

$$= \lambda^n \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}S_n(t)xdt = R(\lambda : A)x, \ \lambda \text{ dovoljno veliko},$$

i A je generator polugrupe $(T(t))_{t>0}$. Definišimo $T(0) := I$. Na osnovu [6, Posledica 3.3.11], $(T(t))_{t\geq 0}$ je C_0-polugrupa generisana sa A.

Sledeća propozicija uopštava [25, Propozicija 3.7(a)].

Propozicija 5.2.6. *Neka je A generator eksponencijalno ograničene, analitičke n-puta integrisane polugrupe $(S_n(t))_{t\geq 0}$ ugla α, $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{N}$. Neka je $\theta \in (-\alpha, \alpha)$. Tada $e^{i\theta}A$ generiše eksponencijalno ograničenu, analitičku n-puta integrisanu polugrupu $(e^{-in\theta}S(te^{i\theta}))_{t\geq 0}$ ugla $\alpha - |\theta|$.*

Dokaz. U [25, Propozicija 3.7(a)] je pokazano da je $(e^{-in\theta}S(te^{i\theta}))_{t\geq 0}$ eksponencijalno ograničena n-puta integrisana polugrupa generisana sa $e^{i\theta}A$. Stavimo $S_\theta(z) := e^{-in\theta}S(ze^{i\theta})$, $z \in \Sigma_{\alpha-|\theta|}$. Na osnovu Definicije 5.2.1, $(S_\theta(t))_{t\geq 0}$ je eksponencijalno ograničena, analitička n-puta integrisana polugrupa ugla $\alpha - |\theta|$.

Propozicija 5.2.7. *Ako A generiše eksponencijalno ograničenu, analitičku n-puta integrisanu polugrupu $(S_n(t))_{t\geq 0}$ ugla α, tada za sve $\gamma \in (0, \alpha)$ važi: (nastavićemo numeraciju)*

4. $S_n(z)A \subset AS_n(z)$, $z \in \Sigma_\alpha$,
5. $T(z)A \subset AT(z)$, $z \in \Sigma_\alpha$; *ako je* $x \in D(A)$, *onda* $\frac{d}{dz}T(z)x = T(z)Ax$, $z \in \Sigma_\alpha$,
6. *ako je* $x \in E$ *i* $z \in \Sigma_\alpha$, *tada je* $\int\limits_0^z S_n(\lambda)xd\lambda \in D(A)$ *i*

$$A\int\limits_0^z S_n(\lambda)xd\lambda = S_n(z)x - \frac{z^n}{n!}x.$$

Dokaz. Neka su $x \in D(A)$ i $z \in \Sigma_\alpha$ fiksirani. Propozicija 5.2.6 implicira da je $e^{i\arg z}A$ generator n-puta integrisane polugrupe $(e^{-in\arg z}S_n(te^{i\arg z}))_{t\geq 0}$. Ovo povlači 4. Primetimo da je 5. dokazano u [25] primenom C-polugrupa. Ovde ćemo dati sasvim drugačiji dokaz. Propozicija 5.2.6 implicira da je $e^{i\arg z}A$ generator (DSG) G_z date sa

$$G_z(\varphi)x = (-1)^n \int_0^\infty \varphi^{(n)}(t)e^{-in\arg z}S_n(te^{i\arg z})xdt,\ x \in E,\ \varphi \in \mathcal{D}.$$

Parcijalna integracija i holomorfnost funkcije $S_n(\cdot)$ daju: za sve $\varphi \in \mathcal{D}$ sa $\operatorname{supp}\varphi \subset (\frac{|z|}{2}, \infty)$, važi

$$G_z(\varphi)x = \int_0^\infty \varphi(t)T(te^{i\arg z})xdt,\ x \in E.$$

Neka je (φ_n) niz u $\{\varphi \in \mathcal{D} : \operatorname{supp}\varphi \subset (\frac{|z|}{2}, \infty)\}$ koji konvergira u distribucionom smislu ka $\delta_{|z|}$. Zato je $T(z)x = \lim_{n\to\infty}G_z(\varphi_n)x,\ x \in E$. Pretpostavimo $x \in D(A)$. Kako je $G_z(\varphi_n)x \in D(A)$, $n \in \mathbb{N}$ i $\lim_{n\to\infty}AG_z(\varphi_n)x = \lim_{n\to\infty}G_z(\varphi_n)Ax$ $= T(z)Ax$, zatvorenost operatora A daje $T(z)x \in D(A)$, $z \in \Sigma_\alpha$ i $AT(z)x = T(z)Ax$, $z \in \Sigma_\alpha$. Kako je $x \in D(A)$, važi takodje $G_z(-\varphi')x = G_z(\varphi)e^{i\arg z}Ax$, $\varphi \in \mathcal{D}_0$ i to povlači da za sve $\varphi \in \mathcal{D}$ sa $\operatorname{supp}\varphi \subset (\frac{|z|}{2}, \infty)$, važi

$$\int_0^\infty \varphi(t)\frac{d}{dt}T(te^{i\arg z})xdt = \int_0^\infty \varphi(t)T(te^{i\arg z})Axdt.$$

Standardni argumenti sada daju: $\frac{d}{dz}T(z)x = T(z)Ax = \lim_{n\to\infty}G_z(\varphi_n)Ax$. Ovim je 5. dokazano. Dokažimo 6. Neka je $x \in E$ i $z \in \Sigma_\alpha$. Na osnovu Propozicije 5.2.6, imamo

$$\int_0^z S_n(\lambda)xd\lambda = e^{i\arg z}\int_0^{|z|} S_n(te^{i\arg z})dt \in D(e^{i\arg z}A);\ \text{zbog toga je,}$$

$$A\int_0^z S_n(\lambda)xd\lambda = e^{i\arg z}A\int_0^{|z|} S_n(te^{i\arg z})xdt$$

$$= e^{in\arg z}e^{i\arg z}A\int_0^{|z|} e^{-in\arg z}S_n(te^{i\arg z})xdt$$

$$= e^{in\arg z}(e^{-in\arg z}S_n(|z|e^{i\arg z})x - \frac{|z|^n}{n!}x) = S_n(z)x - e^{in\arg z}\frac{|z|^n}{n!}x = S_n(z)x - \frac{z^n}{n!}x.$$

Podsetimo se [83, Posledica 4], zatvoren linearni operator A je kompletni infinitezimalni generator analitičke polugrupe $(T(z))_{z\in\Sigma_\alpha}$ reda $r \in (0,1)$ ako i samo ako važe sledeći uslovi:

(a) A je gusto definisan i postoji $\omega \in \mathbb{R}$ takvo da je $\omega + \Sigma_{\frac{\pi}{2}+\alpha} \subset \rho(A)$.

(b) Za sve $\gamma \in (0,\ \alpha)$, postoji $M_\gamma > 0$ takvo da je

$$||R(\lambda : A)|| \leq \frac{M_\gamma}{|\lambda - \omega|^{1-r}},\ \lambda \in \omega + \Sigma_{\frac{\pi}{2}+\gamma}.$$

Ako je A kompletni infinitezimalni generator takve polugrupe, tada je lako proveriti da je ispunjen uslov [23, Teorema 21.17] sa $n = 1$ i A je infinitezimalni generator jedan put integrisane eksponencijalno ograničene, analitičke polugrupe ugla α. Moguće je lako konstruisati primer gusto definisanog operatora A koji generiše eksponencijalno ograničenu, analitičku jedan put integrisanu polugrupu ugla $\frac{\pi}{2}$, ali takvog da A nije c.i.g. analitičke polugrupe rada $r \in (0, 1)$, kao i generator holomorfne polugrupe u smislu Definicije 3.7.1 u [6].

Primer 5.2.8. Neka je $E = L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$. Definišimo sledeći multiplikativni operator

$$A(f_1, f_2)(x) := (-x^2 f_1(x) + x^4 f_2(x),\ -x^2 f_2(x)),\ x \in \mathbb{R},$$

sa maksimalnim domenom u E. Lako je pokazati da za svako $\omega \in (0, \frac{\pi}{2})$ postoji $\omega_\gamma > 0$ takvo da je $\omega_\gamma + \Sigma_{\frac{\pi}{2}+\gamma} \subset \rho(A)$ i da je rezolventa ograničena na datom sektoru. Na osnovu [23, Teorema 21.17], operator A generiše eksponencijalno ograničenu, jedan put integrisanu analitičku polugrupu ugla $\frac{\pi}{2}$. Moguće je pokazati da A ne generiše analitičku C_0-polugrupu kao i da A nije c.i.g. analitičke polugrupe reda $r \in (0, 1)$.

Dokaz Teoreme B. (ii) $\rightarrow$ (i) Dovoljno je pokazati da za svako $\gamma \in (0,\ \alpha)$, A generiše analitičku C_0-polugrupu ugla γ. Na osnovu Propozicije 5.2.6, za sve $\gamma \in (0,\ \alpha)$, $e^{\pm i\gamma}A$ generiše eksponencijalno ograničenu, n-puta integrisanu analitičku polugrupu ugla $\alpha - |\gamma|$ koja zadovoljava uslove Propozicije 5.2.5. Dakle, $e^{\pm i\gamma}A$ generiše (diferencijabilnu) C_0-polugrupu $(T(te^{\pm i\gamma}))_{t\geq 0}$ i A generiše analitičku C_0-polugrupu ugla γ. Pretpostavimo sada da važi (i). Fiksirajmo $n \in \mathbb{N}$; na osnovu [23, Teorema 21.17], jasno ja da A generiše eksponencijalno ograničenu, analitičku n-puta integrisanu polugrupu $(S_n(t))_{t\geq 0}$ ugla α. Neka je $\gamma \in (0,\ \alpha)$. Tada postoji konstanta $M \geq 1$ takva da je $||T(z)|| \leq M,\ z \in \Sigma_\gamma \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$. Takodje, za sve $\beta \in (-\gamma,\ \gamma)$, $e^{i\beta}A$ je generator C_0-polugrupe $(T_\beta(t))_{t\geq 0}$ date sa $T_\beta(t) = T(e^{i\beta}t),\ t \geq 0$. Na osnovu Propozicije 5.2.6, $S_n(z)x = e^{in\arg z} \int\limits_0^{|z|} \frac{(|z|-s)^{n-1}}{(n-1)!} T(se^{i\arg z})x\,ds,\ x \in E,\ z \in \Sigma_\gamma$. Dakle, $||S_n(z)|| = O(|z|^n),\ z \to 0,\ z \in \Sigma_\gamma$. Ovim je dokaz kompletiran.

Dokaz sledeće teoreme, koja uopštava [23, Teorema 21.13(a)] i [25, Lema 5.5(a)], će biti dat u poslednjem poglavlju rada.

Teorema 5.2.9. Neka je A zatvoren linearan operator i $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{N}$. Tada su sledeća tvrdjenja ekvivalentna.

- A je generator eksponencijalno ograničene, analitičke n-puta integrisane polugrupe $(S_n(t))_{t\geq 0}$ ugla α.
- Za sve $\gamma \in (0,\ \alpha)$, postoje $C_\gamma > 0$ i $\omega_\gamma > 0$ takvi da je $\omega_\gamma + \Sigma_{\frac{\pi}{2}+\gamma} \subset \rho(A)$ i da važi:

$$||R(\lambda : A)|| \leq C_\gamma(1 + |\lambda|)^{n-1},\ \lambda \in \omega_\gamma + \Sigma_{\frac{\pi}{2}+\gamma},\ \text{i} \tag{21}$$

(b) Za sve $\gamma \in (0,\ \alpha)$, postoji $M_\gamma > 0$ takvo da je

$$||R(\lambda : A)|| \leq \frac{M_\gamma}{|\lambda - \omega|^{1-r}},\ \lambda \in \omega + \Sigma_{\frac{\pi}{2}+\gamma}.$$

Ako je A kompletni infinitezimalni generator takve polugrupe, tada je lako proveriti da je ispunjen uslov [23, Teorema 21.17] sa $n = 1$ i A je infinitezimalni generator jedan put integrisane eksponencijalno ograničene, analitičke polugrupe ugla α. Moguće je lako konstruisati primer gusto definisanog operatora A koji generiše eksponencijalno ograničenu, analitičku jedan put integrisanu polugrupu ugla $\frac{\pi}{2}$, ali takvog da A nije c.i.g. analitičke polugrupe rada $r \in (0,1)$, kao i generator holomorfne polugrupe u smislu Definicije 3.7.1 u [6].

Primer 5.2.8. Neka je $E = L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$. Definišimo sledeći multiplikativni operator

$$A(f_1, f_2)(x) := (-x^2 f_1(x) + x^4 f_2(x),\ -x^2 f_2(x)),\ x \in \mathbb{R},$$

sa maksimalnim domenom u E. Lako je pokazati da za svako $\omega \in (0, \frac{\pi}{2})$ postoji $\omega_\gamma > 0$ takvo da je $\omega_\gamma + \Sigma_{\frac{\pi}{2}+\gamma} \subset \rho(A)$ i da je rezolventa ograničena na datom sektoru. Na osnovu [23, Teorema 21.17], operator A generiše eksponencijalno ograničenu, jedan put integrisanu analitičku polugrupu ugla $\frac{\pi}{2}$. Moguće je pokazati da A ne generiše analitičku C_0-polugrupu kao i da A nije c.i.g. analitičke polugrupe reda $r \in (0,1)$.

Dokaz Teoreme B. (ii) $\to$ (i) Dovoljno je pokazati da za svako $\gamma \in (0,\ \alpha)$, A generiše analitičku C_0-polugrupu ugla γ. Na osnovu Propozicije 5.2.6, za sve $\gamma \in (0,\ \alpha)$, $e^{\pm i\gamma}A$ generiše eksponencijalno ograničenu, n-puta integrisanu analitičku polugrupu ugla $\alpha - |\gamma|$ koja zadovoljava uslove Propozicije 5.2.5. Dakle, $e^{\pm i\gamma}A$ generiše (diferencijabilnu) C_0-polugrupu $(T(te^{\pm i\gamma}))_{t\geq 0}$ i A generiše analitičku C_0-polugrupu ugla γ. Pretpostavimo sada da važi (i). Fiksirajmo $n \in \mathbb{N}$; na osnovu [23, Teorema 21.17], jasno ja da A generiše eksponencijalno ograničenu, analitičku n-puta integrisanu polugrupu $(S_n(t))_{t\geq 0}$ ugla α. Neka je $\gamma \in (0,\ \alpha)$. Tada postoji konstanta $M \geq 1$ takva da je $||T(z)|| \leq M,\ z \in \Sigma_\gamma \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$. Takodje, za sve $\beta \in (-\gamma,\ \gamma)$, $e^{i\beta}A$ je generator C_0-polugrupe $(T_\beta(t))_{t\geq 0}$ date sa $T_\beta(t) = T(e^{i\beta}t),\ t \geq 0$. Na osnovu Propozicije 5.2.6, $S_n(z)x = e^{in\arg z}\int\limits_0^{|z|} \frac{(|z|-s)^{n-1}}{(n-1)!} T(se^{i\arg z})x\,ds,\ x \in E,\ z \in \Sigma_\gamma$. Dakle, $||S_n(z)|| = O(|z|^n),\ z \to 0,\ z \in \Sigma_\gamma$. Ovim je dokaz kompletiran.

Dokaz sledeće teoreme, koja uopštava [23, Teorema 21.13(a)] i [25, Lema 5.5(a)], će biti dat u poslednjem poglavlju rada.

Teorema 5.2.9. Neka je A zatvoren linearan operator i $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{N}$. Tada su sledeća tvrdjenja ekvivalentna.

- A je generator eksponencijalno ograničene, analitičke n-puta integrisane polugrupe $(S_n(t))_{t\geq 0}$ ugla α.

- Za sve $\gamma \in (0,\ \alpha)$, postoje $C_\gamma > 0$ i $\omega_\gamma > 0$ takvi da je $\omega_\gamma + \Sigma_{\frac{\pi}{2}+\gamma} \subset \rho(A)$ i da važi:

$$||R(\lambda : A)|| \leq C_\gamma(1 + |\lambda|)^{n-1},\ \lambda \in \omega_\gamma + \Sigma_{\frac{\pi}{2}+\gamma},\ \text{i} \qquad (21)$$

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{R(\lambda : A)x}{\lambda^{n-1}} = 0, \ x \in E. \tag{22}$$

Napomenimo, ako je $\overline{D(A)} = E$, uslov (22) je posledica uslova (21).
Navedimo na kraju ove sekcije da se važni primeri jedan put integrisanih analitičkih integrisanih polugrupa mogu dobiti iz analize eliptičnih diferencijalnih operatora višeg reda u prostorima Hölder neprekidnih funkcija ([87]). Generatori takvih polugrupa nisu gusti i mogu se iskoristiti u analizi jednačina drugog reda, o čemu govori rad Periaga i Strauba [76]. Autor tek želi detaljnije proučiti teoriju frakcionih stepena operatora, koja je nezaobilazna u teoriji analitičkih polugrupa operatora.

6. Konvolucione C-polugrupe i konvolucione C-kosinus funkcije

U ovom poglavlju ćemo dati osnovne strukturne osobine klasa konvolucionih C-polugrupa i konvolucionih C-kosinus funkcija. Mnoge klase jednoparametarskih operatorskih familija koje smo analizirali u prethodnim poglavljima postaju unificirane i potopljene u mnogo šire klase konvolucionih C-polugrupa, definisanih od strane Cioranescu i Lumera 1994. godine, i klase konvolucionih C-kosinus funkcija uvedenih u radu [50] i ovoj disertaciji. Specijalno, klase lokalnih C-polugrupa i lokalno integrisanih polugrupa, definisanih 1990. godine u radu Tanake i Okazawe, lokalno integrisanih C-polugrupa, definisanih 2001. godine u radu [58], lokalnih α-integrisanih polugrupa, falsifikovanih 2003. godine u [59] predstavljaju specijalne podklase klase lokalnih konvolucionih C-polugrupa; analogno, klase lokalnih C-kosinus funkcija i lokalno integrisanih C-polugrupa su proučavane od strane puno autora i predstavljaju specijalan slučaj konvolucionih C-kosinus funkcija.
Sve je usmereno ka analizi apstraktnih problema

$$(ACP_2): \begin{cases} u \in C([0,\tau): D(A)) \cap C^2([0,\tau): E), \\ u''(t) = Au(t), \\ u(0) = x, u'(0) = y, \end{cases}$$

i

$$(\Theta C): \begin{cases} u \in C([0,\tau): D(A)) \cap C^1([0,\tau): E), \\ u'(t) = Au(t) + \Theta(t)Cx, \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

Konvolucione C-kosinus semigrupe ćemo opisati korišćenjem pojma asimptotskih ΘC-rezolventi.
Kao i do sada, E označava netrivijalan kompleksan Banachov prostor i $C \in L(E)$ je injektivan operator. Pretpostavićemo u nastavku da zatvoreni linearan operator A zadovoljava $CA \subset AC$. U radu nam je neophodan pojam C rezolventnog skupa za A, označenog sa $\rho_C(A)$; to je skup svih kompleksnih brojeva λ takvih da je $\lambda - A$ injektivan i da je $R(C) \subset R(\lambda - A)$.
U nastavku ćemo zbog konzistentnosti, izvršiti neophodne korekcije date u radu [50] gde su klase lokalnih konvolucionih C-polugrupa i kosinus funkcija definisane nešto drugačije. U globalnom slučaju, definicije se poklapaju.

6.1. Definicija i osnovne osobine

Pretpostavićemo kao u prvom poglavlju da je K nenula lokalno integrabilna funkcija na $[0,\tau)$, $0<\tau\leq\infty$ i definisaćemo $\Theta(t):=\int_0^t K(s)ds,\ t\in[0,\tau)$. Tada je Θ apsolutno neprekidna funkcija na $[0,\tau)$ i $\Theta'(t)=K(t)$, za s.s. $t\in[0,\tau)$.

Definicija 6.1.1. Neka je A zatvoren linearan operator i neka je $C\in L(E)$ injektivan operator. Pretpostavimo $0<\tau\leq\infty$. Ako postoji jako neprekidna operatorska familija $(S(t))_{t\in[0,\tau)}$ takva da je $S(t)Ax=AS(t)x,\ x\in D(A)$, $CS(t)=S(t)C$, $\int_0^t S(s)xds\in D(A)$, $x\in E$, $t\in[0,\tau)$ i

$$A\int_0^t S(s)xds=S(t)x-\Theta(t)Cx,\ x\in E,\ t\in[0,\tau),\tag{23}$$

onda je A subgenerator (lokalne) K-konvolucione C-polugrupe $(S(t))_{t\in[0,\tau)}$.

Generalno, subgenerator nije jedinstven. Medjutim, jedinstvenost je uvek ispunjena ako je $C=I$; tada je svaki subgenerator zapravo jednak generatoru (lokalne) K-polugrupe $(S(t))_{t\in[0,\tau)}$. Iz Definicije 6.1.1 je očigledno da je $(S(t))_{t\in[0,\tau)}$ nedegenerisana operatorska familija. Integralni generator K-konvolucione C-polugrupe $(S(t))_{t\in[0,\tau)}$ je dat sa

$$A:=\left\{(x,y)\in E^2: S(t)x-\Theta(t)Cx=\int_0^t S(s)yds,\ t\in[0,\tau)\right\}.$$

To je zatvoren linearan operator koji je ekstenzija proizvoljnog subgeneratora.

Definicija 6.1.2. Neka je A zatvoren linearan operator i neka je $C\in L(E)$ injektivan operator. Pretpostavimo $0<\tau\leq\infty$. Ako postoji jako neprekidna operatorska familija $(C(t))_{t\in[0,\tau)}$ takva da je $C(t)Ax=AC(t)x,\ x\in D(A)$, $CC(t)=C(t)C$, $\int_0^t(t-s)C(s)xds\in D(A)$, $x\in E$, $t\in[0,\tau)$ i

$$A\int_0^t(t-s)C(s)xds=C(t)x-\Theta(t)Cx,\ x\in E,\ t\in[0,\tau),\tag{24}$$

onda je A subgenerator (lokalne) K-konvolucione C-kosinus funkcije $(C(t))_{t\in[0,\tau)}$.

Kao i u slučaju (lokalnih) konvolucionih C-polugrupa, subgenerator konvolucione C-polugrupe nije jedinstveno odredjen. Kada je $C=I$, svaki subgenerator K-konvolucione C-kosinus funkcije $(C(t))_{t\in[0,\tau)}$ se svodi na generator K-kosinus funkcije $(C(t))_{t\in[0,\tau)}$, videti sledeće poglavlje. Integralni generator K-konvolucione C-kosinus funkcije $(C(t))_{t\in[0,\tau)}$ je definisan sa

$$A:=\left\{(x,y)\in E^2: C(t)x-\Theta(t)Cx=\int_0^t(t-s)C(s)yds,\ t\in[0,\tau)\right\};$$

kao i malopre, to je zatvoren linearan operator koji je ekstenzija proizvoljnog subgeneratora.

(ΘC) problem je dobro postavljen ako ima jedinstveno rešenje za svako $x \in E$. Kao u [58] i [50] pokazujemo sledeća tvrdjenja.

Propozicija 6.1.3. *Neka je* $0 < \tau \leq \infty$. *Pretpostavimo da je* (ΘC) *dobro postavljen. Tada je* A *subgenerator* K*-konvolucione* C*-polugrupe* $(S(t))_{t\in[0,\tau)}$.

Propozicija 6.1.4. *Neka je* A *subgenerator (lokalne)* K*-konvolucione* C*-polugrupe* $(S(t))_{t\in[0,\tau)}$. *Tada važi:*
(a)

$$S(t)S(s) = \left[\int\limits_0^{t+s} - \int\limits_0^{t} - \int\limits_0^{s}\right] K(t+s-r)S(r)Cdr, \quad 0 \leq t,\ s,\ t+s < \tau.$$

Ako je K *kernel, tada važe* (b), (c) *i* (d), *gde je:*
(b) (ΘC) *je dobro postavljen.*
(c) *Integralni generator za* $(S(t))_{t\in[0,\tau)}$ *je* $C^{-1}AC$.
(d) *Za sve* $\lambda \in \rho_C(A)$: $(\lambda - A)^{-1}CS(t) = S(t)(\lambda - A)^{-1}C$, $t \in [0,\tau)$.

Zapažanje. Čak i u slučaju $K(t) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}$, $k \in \mathbb{N}$, postoje lokalno integrisane C-polugrupe čiji generatori imaju praznu C-rezolventu ([58]). Sledeća propozicija se dokazuje kao u slučaju integrisanih polugrupa i njen dokaz je stoga izostavljen.

Propozicija 6.1.5. *Neka je* $(S(t))_{t\in[0,\tau)}$ *(lokalna)* K*-konvoluciona* C*-polugrupa generisana sa* A. *Ako je* $x \in D(A^k)$ *i* $K \in C^{k-1}([0,\tau) : \mathbb{C})$ *za neko* $k \in \mathbb{N}$, *onda je*

$$\frac{d^k}{dt^k}S(t)x = S(t)A^k x + \sum_{i=0}^{k-1} K^{(i)}(t)CA^{k-1-i}x, \ t \in [0,\tau).$$

Osobine i primeri globalnih, u opštem slucaju neekponencijalno ograničenih, integrisanih C-polugrupa su proučavani u [94]. Jasno, ako je A subgenerator (lokalne) K-konvolucione polugrupe $(C(t))_{t\in[0,\tau)}$, tada je za sve $x \in D(A)$ funkcija $t \mapsto C(t)x$ neprekidno diferencijabilna na $[0,\tau)$ i

$$\frac{d}{dt}C(t)x = \int\limits_0^t C(s)Axds + K(t)Cx, \ t \in [0,\tau).$$

Funkcija $t \mapsto v(t)$ koja pripada prostoru $C([0,\tau) : E)$ je K-konvoluciono mild rešenje problema (ACP_2) za $(x,y) \in E^2$ ako za sve $t \in [0,\tau)$ važi $\int_0^t (t-s)v(s)ds \in D(A)$ i

$$A\int\limits_0^t (t-s)v(s)ds = v(t) - \Theta(t)x - \int\limits_0^t \Theta(s)yds, \ t \in [0,\tau).$$

Koristeći iste argumente kao u Teoremi 1.5 datoj u [94] dobijamo:

Propozicija 6.1.6. *Neka je* A *subgenerator* K*-konvolucione* C*-kosinus funkcije* $(C(t))_{t\in[0,\tau)}$ *i* $x,\ y \in E$. *Ako je* K *kernel, tada su sva* K*-konvoluciona mild* *rešenja problema* (ACP_2) *za* (x, y) *jedinstvena.*

Propozicija 6.1.7. *Pretpostavimo da za sve* $x \in R(C)$ *postoji jedinstveno* K*-konvoluciono mild rešenje problema* (ACP_2) *za* $(x, 0)$, $0 < \tau \leq \infty$. *Tada je* A *subgenerator* K*-konvolucione* C*-kosinus funkcije.*

Dokaz. Definišimo $C(t)x := v(t)$, gde je $v(t)$ K-konvoluciono mild rešenje problema (ACP_2) za $(Cx, 0)$. Jedinstvenost mild rešenja implicira da je $(C(t))_{t\in[0,\tau)}$ jako neprekidna familija operatora koja zadovoljava (24). Lako je videti da je $t \mapsto CC(t)x$ K-konvoluciono mild rešenje problema (ACP_2) za $(C^2x, 0)$. Kao posledicu, imamo $C(t)C = CC(t)$, $t \in [0, \tau)$. Na isti način kao u Teoremi 1.5 u [94] dobijamo $C(t)A \subset AC(t)$, $t \in [0, \tau)$. Ostaje nam da pokažemo da je $C(t)$, $t \in [0, \tau)$ neprekidan. Posmatrajmo preslikavanje $\Phi : E \to C([0, \tau) : D(A))$, dato sa

$$\Phi(x)(t) = \int_0^t (t-s)C(s)x\,ds, \ t \in [0, \tau), \ x \in E,$$

gde je $D(A)$ opremljen graf normom $\|x\|_A = \|x\| + \|Ax\|$. $C([0, \tau) : D(A))$ je Fréchetov prostor čija je topologija indukovana seminormama

$$p_n(v) := \sup_{t\in[0,\tau-\frac{1}{n}]} \|v(t)\|_{D(A)}, \ v \in C([0, \tau) : D(A)),$$

ako je $\tau < \infty$, odnosno seminormama

$$p_n(v) := \sup_{t\in[0,n]} \|v(t)\|_{D(A)}, \ v \in C([0, \tau) : D(A)),$$

ako je $\tau = \infty$. Jasno, Φ je linearno preslikavanje. Pokažimo da Φ ima zatvoren graf. Bez smanjenja opštosti, možemo prepostaviti $\tau < \infty$. Pretpostavimo $x_n \to x$, $n \to \infty$ i $\sup_{t\in[0,\tau-\frac{1}{n}]} \int_0^t (t-s)C(s)x_n\,ds \to f(t)$, $n \to \infty$. Ovo povlači

$$Af(t) = \lim_{n\to\infty} A\int_0^t (t-s)C(s)x_n\,ds = \lim_{n\to\infty} [C(t)x_n - \Theta(t)Cx_n], \ t \in [0, \tau), \text{ i}$$

$$\lim_{n\to\infty} C(t)x_n = Af(t) + \Theta(t)Cx, \ t \in [0, \tau).$$

Upotrebom teoreme o dominantnoj konvergenciji, dobijamo

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} \int_0^t (t-s)C(s)x_n\,ds = \int_0^t (t-s)[Af(s) + \Theta(s)Cx]\,ds, \ t \in [0, \tau).$$

Dakle, $f(0) = f'(0) = 0$, $f \in C^2([0, \tau) : E)$ i

$$Af(t) = f''(t) - \Theta(t)Cx, \ t \in [0, \tau).$$

Stoga, $A\int_0^t (t-s)v(s)\,ds = v(t) - \Theta(t)Cx$, $t \in [0, \tau)$, gde je $v = f''$. Imamo $v(t) = C(t)x$, $t \in [0, \tau)$ i $f = \Phi(x)$. Dakle, za sve dovoljno velike $n \in \mathbb{N}$ postoji

c_n takvo da je

$$\left\| A \int_0^t (t-s)C(s)xds \right\| \leq c_n\|x\|, \; x \in E, \; t \in [0, \tau - \frac{1}{n}).$$

Kako je $A\int_0^t (t-s)C(s)xds = C(t)x - \Theta(t)Cx$, $x \in E$, $t \in [0,\tau)$, lako je zaključiti: $C_K(t) \in L(E)$, $t \in [0,\tau)$.

Lema 6.1.8. *Pretpostavimo da je A subgenerator K-konvolucione C-kosinus funkcije $(C_K(t))_{t\in[0,\tau)}$. Tada za sve $(x,y) \in R(C) \times R(C)$ postoji jedinstveno K-konvoluciono mild rešenje problema (ACP_2).*

Dokaz. Neka je $x = Cx_1$ i $y = Cy_1$. Lako je proveriti da je $v(t) := C_K(t)x_1 + \int_0^t C_K(s)y_1 ds$ K-konvoluciono mild rešenje problema (ACP_2) za (x,y).

Na osnovu Propozicije 6.1.7 i Leme 6.1.8, dobijamo:

Propozicija 6.1.9. *Ako je K kernel tada su sledeća tvrdjenja ekvivalentna:*
(a) *A je subgenerator K-konvolucione C-kosinus funkcije.*
(b) *za sve $(x,y) \in R(C) \times R(C)$ postoji jedinstveno K-konvoluciono mild rešenje problema (ACP_2).*

6.2. Eksponencijalno ograničene konvolucione C-polugrupe i C-kosinus funkcije

U ovoj sekciji ćemo opisati veze globanih eksponencijalno ograničenih konvolucionih C-polugrupa i kosinus funkcija sa Laplaceovom transformacijom.

Teorema 6.2.1. (a) *Neka je $w \geq 0$ i neka je A zatvoren linearan operator. Neka je K eksponencijalno ograničena funkcija i*

$$\{\lambda^2 \in \mathbb{C} : \tilde{K}(\lambda) \neq 0, \; Re\lambda > w\} \subset \rho_C(A).$$

Ako postoji jako neprekidna operatorska familija $(C(t))_{t\geq 0}$ takva da je $\|C(t)\| = O(e^{wt})$, $t \geq 0$ i

$$\lambda(\lambda^2 - A)^{-1}Cx = \frac{1}{\tilde{K}(\lambda)} \int_0^\infty e^{-\lambda t}C(t)xdt, \; Re\lambda > \max(w,\beta), \; \tilde{K}(\lambda) \neq 0, \; x \in E, \tag{25}$$

tada je A subgenerator eksponencijalno ograničene K-konvolucione C-kosinus funkcije $(C(t))_{t\geq 0}$.

(b) *Neka je A subgenerator eksponencijalno ograničene K-konvolucione C-kosinus funkcije $(C(t))_{t\geq 0}$ koja zadovoljava $\|C(t)\| \leq Me^{\omega t}$, $t \geq 0$, za neko $M > 0$ i $\omega \geq \beta$. Tada je $\{\lambda^2 \in \mathbb{C} : Re\lambda > \omega, \; \tilde{K}(\lambda) \neq 0\} \subset \rho_C(A)$ i važi* (25).

Dokaz. (a) Neka je $x \in E$. Jasno, $(\lambda^2 - A)^{-1}C^2x = C(\lambda^2 - A)^{-1}Cx$, za sve $\lambda \in \mathbb{C}$ takve da je $\tilde{K}(\lambda) \neq 0$ i $Re\lambda > \omega$. Na osnovu pretpostavke dobijamo

$$\frac{1}{\tilde{K}(\lambda)} \int_0^\infty e^{-\lambda t}C(t)Cxdt = \frac{1}{\tilde{K}(\lambda)} \int_0^\infty e^{-\lambda t}CC(t)xdt, \; \tilde{K}(\lambda) \neq 0, Re\lambda > \omega.$$

Na osnovu teoreme o jedinstvenosti Laplaceove transformacije, imamo $CC(t) = C(t)C,\ t \geq 0$. Pretpostavimo sada $x \in D(A)$. Jasno,

$$\lambda(\lambda^2 - A)^{-1}CAx = \frac{1}{\tilde{K}(\lambda)} \int_0^\infty e^{-\lambda t} C(t)Axdt,\ tj.$$

$$\lambda A(\lambda^2 - A)^{-1}Cx = \frac{1}{\tilde{K}(\lambda)} \int_0^\infty e^{-\lambda t} C(t)Axdt,\ \tilde{K}(\lambda) \neq 0,\ Re\lambda > \omega.$$

Stoga je

$$A \int_0^\infty e^{-\lambda t} C_K(t)xdt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} C_K(t)Axdt,\ \tilde{K}(\lambda) \neq 0,\ Re\lambda > \omega.$$

Kako je $\overline{\{\lambda \in \mathbb{C} : \tilde{K}(\lambda) \neq 0,\ Re\lambda > \omega\}} = \{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda \geq \omega\}$, zatvorenost operatora A povlači da prethodna jednakost ostaje tačna za sve $\lambda \in \mathbb{C}$ takve da je $Re\lambda > \omega$. Teorema 1.10 data u [91] daje $C(t)A \subset AC(t),\ t \geq 0$. Primetimo da je za sve $\lambda \in \mathbb{C}$ sa $\tilde{K}(\lambda) \neq 0$ i $Re\lambda > \omega$ ispunjeno

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t (t-s)C(s)xds\right)(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2}\tilde{K}(\lambda)\lambda(\lambda^2 - A)^{-1}Cx = \frac{\tilde{K}(\lambda)}{\lambda}(\lambda^2 - A)^{-1}Cx.$$

To implicira

$$A\left(\mathcal{L}\left(\int_0^t (t-s)C(s)xds\right)(\lambda)\right) = \tilde{K}(\lambda)\lambda(\lambda^2 - A)^{-1}Cx - \frac{\tilde{K}(\lambda)}{\lambda}Cx$$
$$= \mathcal{L}(C(t)x - \Theta(t)Cx)(\lambda),$$

za sve $\lambda \in \mathbb{C}$ sa $\tilde{K}(\lambda) \neq 0$ i $Re\lambda > \omega$. Kao i malopre, zatvorenost operatora A povlači da prethodna formula važi za sve $\lambda \in \mathbb{C}$ takve da je $Re\lambda > \omega$. Kao posledicu Teoreme 1.10 u [91] imamo (25).

(b) Neka je $x \in E$ fiksiran. Koristeći $C(t)A \subset AC(t),\ t \geq 0$ i (24), dobijamo

$$\mathcal{L}(C(t)x)(\lambda) = \frac{\tilde{K}(\lambda)}{\lambda}Cx + \frac{1}{\lambda^2}A\mathcal{L}(C(t)x)(\lambda),\ Re\lambda > w,\ \tilde{K}(\lambda) \neq 0,\ \text{tj.}$$

$$(\lambda^2 - A)\mathcal{L}(C(t)x)(\lambda) = \lambda\tilde{K}(\lambda)Cx,\ Re\lambda > w,\ \tilde{K}(\lambda) \neq 0. \tag{26}$$

Dakle, $R(C) \subset R(\lambda^2 - A)$, za svako takvo $\lambda \in \mathbb{C}$. Pokažimo da je $\lambda^2 - A$ injektivan. Pretpostavimo $(\lambda^2 - A)x = 0$. Dalje imamo

$$C_K(t)x - \Theta(t)x = \int_0^t (t-s)C_K(s)Axds = \lambda^2 \int_0^t (t-s)C_K(s)xds,\ t \geq 0;$$

na osnovu toga sledi

$$\mathcal{L}(C_K(t)x)(\lambda) = \frac{\tilde{K}(\lambda)}{\lambda}Cx + \lambda^2\mathcal{L}(t)\mathcal{L}(C_K(t)x)(\lambda) = \frac{\tilde{K}(\lambda)}{\lambda}Cx + \mathcal{L}(C_K(t)x)(\lambda).$$

To daje $Cx = 0$ i $x = 0$. Koristeći (26), sledi $\{\lambda^2 : Re\lambda > \omega,\ \tilde{K}(\lambda) \neq 0\} \subset \rho_C(A)$ i (25).

Koristeći slične argumente, moguće je pokazati sledeću teoremu.

Teorema 6.2.2. (a) *Neka je $w \geq 0$ i neka je A zatvoren linearan operator. Neka je K eksponencijalno ograničena funkcija i*

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \tilde{K}(\lambda) \neq 0,\ Re\lambda > w\} \subset \rho_C(A).$$

Ako postoji jako neprekidna operatorska familija $(S(t))_{t\geq 0}$ takva da je $\|S(t)\| = O(e^{wt})$, $t \geq 0$ i

$$(\lambda - A)^{-1}Cx = \frac{1}{\tilde{K}(\lambda)} \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x dt,\ Re\lambda > \max(w, \beta),\ \tilde{K}(\lambda) \neq 0,\ x \in E, \tag{27}$$

tada je A subgenerator eksponencijalno ograničene K-konvolucione C-polugrupe $(S(t))_{t\geq 0}$.

(b) *Neka je A subgenerator eksponencijalno ograničene K-konvolucione C-polugrupe $(S(t))_{t\geq 0}$ koja zadovoljava $\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}$, $t \geq 0$, za neko $M > 0$ i $\omega \geq \beta$. Tada $\{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda > \omega,\ \tilde{K}(\lambda) \neq 0\} \subset \rho_C(A)$ i važi (27).*

U sledećoj teoremi ćemo zbog jednostavnosti pretpostaviti da funkcija K zadovoljava (P1). Teorema je neposredna posledica Arendt-Widderove teoreme i zbog toga je njen dokaz izostavljen. Za formulaciju odgovarajuće teoreme u slučaju konvolucionih C-polugrupa videti [50].

Teorema 6.2.3. (a) *Neka funkcija K zadovoljava* (P1). *Tada su sledeća tvrdjenja ekvivalentna:*

(ai) *A je subgenerator eksponencijalno ograničene Θ-konvolucione C-kosinus funkcije $(C_\Theta(t))_{t\geq 0}$ koja zadovoljava uslov*

$$\limsup_{\sigma \to 0}\sup_{h \leq \sigma} \frac{\|C_\Theta(t+h) - C_\Theta(t)\|}{h} \leq Me^{wt},\ t \geq 0,\ za\ neko\ M > 0.$$

(aii) *Postoji $a \geq w$ takvo da je $(a^2, \infty) \subset \rho_C(A)$ i*

$$\left\| \frac{d^k}{d\lambda^k}[\lambda\tilde{K}(\lambda)(\lambda^2 - A)^{-1}C] \right\| \leq \frac{Mk!}{(\lambda - w)^{k+1}},\ k \in \mathbb{N}_0,\ \lambda > a.$$

(b) *Pretpostavimo da je A gusto definisan. Tada su sledeća tvrdjenja ekvivalentna:*

(bi) *A je subgenerator eksponencijalno ograničene K-konvolucione C-kosinus funkcije $(C_K(t))_{t\geq 0}$ takve da je $\|C_K(t)\| \leq Me^{wt}$, $t \geq 0$, za neko $M > 0$.*

(bii) *Postoji $a \geq w$ takvo da je $(a^2, \infty) \subset \rho_C(A)$ i da je*

$$\left\| \frac{d^k}{d\lambda^k}[\lambda\tilde{K}(\lambda)(\lambda^2 - A)^{-1}C] \right\| \leq \frac{Mk!}{(\lambda - w)^{k+1}},\ k \in \mathbb{N}_0,\ \lambda > a.$$

6.3. (ΘC) problem, asimptotske ΘC-rezolvente

U ovoj sekciji ćemo dati još neka tvrdjenja koja su blisko povezana sa apstraktnim (ΘC) problemom. Potom ćemo koristeći rezultate datih u radu [58] definisati asimptotske ΘC-rezolvente i ispitati njihovu vezu sa generisanjem konvolucionih C-polugrupa.

Propozicija 6.3.1. *Pretpostavimo $K \in C^k([0,\tau) : \mathbb{C})$, $k \in \mathbb{N}$ i da je (ΘC) dobro postavljen za A. Tada za sve $x \in D(A^{k+1})$ postoji jedinstveno rešenje problema*

$$(\Theta C_k) : \begin{cases} u \in C^1([0,\tau) : E) \cap C([0,\tau) : D(A)), \\ u'(t) = Au(t) + \frac{d^k}{dt^k}K(t)Cx, \\ u(0) = \sum\limits_{i=0}^{k-1} K^{(i)}(0)A^{k-1-i}Cx. \end{cases}$$

Dokaz. Neka je $(S(t))_{t\in[0,\tau)}$ operatorska familija data u Propoziciji 6.1.3. Lako je proveriti da je

$$u(t) := \int_0^t S(s)A^{k+1}xds + \sum_{i=0}^{k} \Theta^{(i)}(t)A^{k-i}Cx;\ t \in [0,\tau),\ x \in D(A^{k+1}),$$

rešenje problema (ΘC_k). Jedinstvenost sledi iz dobre postavljenosti problema (ΘC) za $x = 0$.

Teorema 6.3.2. *Neka je $k \in \mathbb{N}$, $k \neq 1$ i neka za K važi $K \in C^{k+1}([0,\tau) : \mathbb{C})$ i $K^{(i)}(0) = 0$, $0 \leq i \leq k-2$. Ako je A zatvoren linearan operator takav da je $\lambda_0 \in \rho(A)$ i da za sve $x \in D(A^{k+1})$ postoji jedinstveno rešenje problema (ΘC_k), tada je (ΘC) dobro postavljen za A.*

Dokaz. Neka je $z = Cy$, $y \in D(A^{k+1})$. Definišimo $u_1(t) := (\lambda_0 - A)\int_0^t u_y(s)ds$, $t \in [0,\tau)$, gde je u_y rešenje problema (ΘC_k) za y. Jednostavno je proveriti da je u_1 rešenje problema

$$(\Theta C_{k-1}) : \begin{cases} u \in C^1([0,\tau) : E) \cap C([0,\tau) : D(A)), \\ u'(t) = Au(t) + \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}K(t)x, \\ u(0) = 0, \end{cases}$$

za $x = (\lambda_0 - A)z$. Štaviše, (ΘC_{k-1}) ima resenje za sve $x \in (\lambda_0 - A)CD(A^{k+1})$. Slično, problem

$$(\Theta C_{k-2}) : \begin{cases} u \in C^1([0,\tau) : E) \cap C([0,\tau) : D(A)), \\ u'(t) = Au(t) + \frac{d^{k-2}}{dt^{k-2}}K(t)x, \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

ima rešenje za sve $x \in (\lambda_0 - A)^2CD(A^{k+1})$ (možemo uzeti $u_2(t) := (\lambda_0 - A)\int_0^t u_1(s)ds$).

Indukcijom dobijamo rešenje u_{k+1} problema

$$(\Theta C_{-1}) : \begin{cases} u \in C^1([0,\tau) : E) \cap C([0,\tau) : D(A)), \\ u'(t) = Au(t) + \Theta(t)x, \\ u(0) = 0, \end{cases}$$

za sve $x \in (\lambda_0 - A)^{k+1}CD(A^{k+1})$. Kako je $R(C) \subset (\lambda_0 - A)^{k+1}CD(A^{k+1})$, dokaz je kompletiran, jer jedinstvenost sledi iz dobre postavljenosti problema (ΘC_k) za $x = 0$.

Zapažanje. Ovim smo pokazali obrat Zapažanja 2.6(d) datog u [58]. Takodje, uopštena je Propozicija 3.3 data u [4].

Na osnovu prethodnih rezultata možemo pokazati sledeću teoremu; videti [50].

Teorema 6.3.3. *Neka su τ, K i k kao u prethodnoj teoremi. Ako je A zatvoren operator i $\lambda_0 \in \rho(A)$, tada su sledeći iskazi ekvivalentni:*
(a) *(Θ, I) je dobro postavljen za A na $[0,\tau)$.*
(b) *$(\Theta^{(k)}, R(\lambda_0 : A)^k)$ je dobro postavljen za A na $[0,\tau)$.*
Ako je K kernel, tada su (a) *i* (b) *ekvivalentni sa:*
(a)' *A generiše K-konvolucionu polugrupu na $[0,\tau)$.*
(b)' *A generiše $K^{(k)}$-konvolucionu $R(\lambda_0 : A)^k$-polugrupu na $[0,\tau)$, respektivno.*

Neka je $0 < \tau \leq \infty$. Pretpostavimo da je (ΘC) dobro postavljen. Definišimo

$$L_\gamma(\lambda) := \int_0^\gamma e^{-\lambda s} S(s)ds; \ \gamma \in [0,\tau), \ \lambda \in [0,\infty),$$

gde je $S(\cdot)$ dato kao u Propoziciji 6.1.3. Kao u Propoziciji 5.1 u [58], imamo:

Propozicija 6.3.4. *Neka je $x \in E$. Tada:*
(a) *Funkcija $\lambda \to L_\gamma(\lambda)x$ pripada prostoru $C^\infty([0,\infty) : E)$ i postoji M_γ takvo da je*

$$\left\| \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} L_\gamma(\lambda) \right\| \leq M_\gamma, \ \lambda \geq 0, \ n \in \mathbb{N}.$$

(b) *$L_\gamma(\lambda)$ komutira sa C i A.*
(c) $(\lambda - A)L_\gamma(\lambda) = -e^{-\lambda\gamma}S(\gamma)x + \int_0^\gamma e^{-\lambda s}K(s)Cxds.$
(d) $L_\gamma(\lambda)L_\gamma(\eta) = L_\gamma(\eta)L_\gamma(\lambda).$

Operatorska familija $\{L_\gamma(\lambda) : \gamma \in [0,\tau), \ \lambda \geq 0\} \subset L(E)$ se naziva **asimptotska ΘC-rezolventa** za A ako postoji jako neprekidna operatorska familija $(V_t)_{t\in[0,\tau)}$ takva da (a), (b) i (d) važe i da važi (c) sa $S(\gamma)$ umesto $V(\gamma)$.
Primena istih argumenata kao u Teoremi 5.2 i Posledici 5.3 u [58] daje:

Teorema 6.3.5. *Neka je A zatvoren operator. Pretpostavimo da A ima asimptotsku ΘC-rezolventu $\{L_\gamma(\lambda) : \gamma \in [0,\tau), \ \lambda \geq 0\}$. Ako je K kernel tada je $\left(\int_0^t \Theta(s)ds, C\right)$ dobro postavljen.*

Teorema 6.3.6. *Pretpostavimo da je $D(A)$ gust u E i da je K kernel. Tada* *je* (ΘC) *dobro postavljen za* A *na* $[0,\tau)$ *ako i samo ako* A *ima asimptotsku* ΘC*-rezolventu* $\{L_\gamma(\lambda) : \gamma \in [0,\tau),\ \lambda \geq 0\}$.

6.4. Neki odnosi konvolucionih C-polugrupa i kosinus funkcija

U ovom delu ćemo pokazati neke medjusobne relacije konvolucionih C-polugrupa i kosinus funkcija. U sledećoj propoziciji ćemo zbog jednostavnosti pretpostaviti da su polugrupe koje se pojavljuju u formulaciji eksponencijalno ograničene.

Propozicija 6.4.1. *Pretpostavimo da* A *i* $-A$ *generišu eksponencijalno ograničene* K*-konvolucione* C*-polugrupe* $(S_1(t))_{t\geq 0}$ *i* $(S_2(t))_{t\geq 0}$*, za neku eksponencijalno ograničenu funkciju* K*. Tada je* A^2 *generator eksponencijalno ograničene* K*-konvolucione* C^2*-kosinus funkcije.*

Dokaz. Lako se proverava da je $\lambda^2 - A^2$ injetivan operator za sve $\lambda \in \mathbb{C}$ takve da je $Re\lambda$ dovoljno veliko i da je $\tilde{K}(\lambda) \neq 0$. Takodje, za takve λ, $R(C^2) \subset R(\lambda^2 - A^2)$ i

$$(\lambda^2 - A^2)^{-1}C^2x = [(\lambda - A)^{-1}C][(\lambda + A)^{-1}Cx] = \frac{1}{2\lambda}[(\lambda + A)^{-1}Cx + (\lambda - A)^{-1}Cx]$$

$$= \frac{1}{2\tilde{K}(\lambda)}\mathcal{L}(S_1(t)x + S_2(t)x)(\lambda),\ x \in E,\ \lambda \text{ dovoljno veliko, } \tilde{K}(\lambda) \neq 0.$$

Dakle,

$$\lambda(\lambda^2 - A^2)^{-1}C^2x = \frac{1}{\tilde{K}(\lambda)}\mathcal{L}\left(\frac{1}{2}\left(S_1(t)x + S_2(t)x\right)\right)(\lambda),$$

za sve $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{C}$ takve da je $Re\lambda$ dovoljno veliko i da je $\tilde{K}(\lambda) \neq 0$. Da bi se dokaz kompletirao, dovoljno je primeniti Teoremu 6.2.1.

Teorema 6.4.2. *Neka je* A *zatvoren operator,* $K \in L^1_{loc}([0,\tau))$*,* $0 < \tau \leq \infty$*. Tada su sledeća tvrdjenja ekvivalentna:*

(a) A *je subgenerator* K*-konvolucione* C*-kosinus funkcije* $(C_K(t))_{t\in[0,\tau)}$ *u* E.

(b) *Operator* $\mathcal{A} \equiv \begin{pmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{pmatrix}$ *je subgenerator* Θ*-konvolucione* C*-polugrupe* $(S_\Theta(t))_{t\in[0,\tau)}$ *u* E^2.

Tada je:

$$S_\Theta(t) = \begin{pmatrix} \int_0^t C_K(s)ds & \int_0^t (t-s)C_K(s)ds \\ C_K(t) - \Theta(t)C & \int_0^t C_K(s)ds \end{pmatrix},\ 0 \leq t < \tau.$$

Dokaz. (a) $\rightarrow$ (b) Lako je proveriti da je $(S_\Theta(t))_{t\in[0,\tau)}$ jako neprekidna operatorska familija u E^2 takva da je $S_\Theta(t)\mathcal{A} \subset \mathcal{A}S_\Theta(t)$ i $S_\Theta(t)C = CS_\Theta(t)$, za sve $0 \leq t < \tau$. Takodje,

$$\mathcal{A}\int_0^t S_\Theta(s)\binom{x}{y}ds = \mathcal{A}\int_0^t \begin{pmatrix} \int_0^s C_K(r)xdr + \int_0^s (s-r)C_K(r)ydr \\ C_K(s)x - \Theta(s)Cx + \int_0^s C_K(r)ydr \end{pmatrix}ds$$

$$= \mathcal{A}\begin{pmatrix} \int_0^t (t-s)C_K(s)xds + \int_0^t \frac{(t-s)^2}{2} C_K(s)yds \\ \int_0^t C_K(s)xds - \int_0^t \Theta(s)Cxds + \int_0^t (t-s)C_K(s)yds \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \int_0^t C_K(s)xds - \int_0^t \Theta(s)Cxds + \int_0^t (t-s)C_K(s)yds \\ C_K(t)x - \Theta(t)Cx + \int_0^t C_K(s)yds - \int_0^t \Theta(s)Cyds \end{pmatrix}$$

$$= S_\Theta(t)\binom{x}{y} - \int_0^t \Theta(s)\binom{Cx}{Cy}ds,\ 0 \le t < \tau,\ x,\ y \in E.$$

(b) $\to$ (a) Neka je $S_\Theta(t) = \begin{pmatrix} S^1_\Theta(t) & S^2_\Theta(t) \\ S^3_\Theta(t) & S^4_\Theta(t) \end{pmatrix}_{t\in[0,\tau)}$ i $S^i_\Theta(t) \in L(E)$, $i \in \{1,2,3,4\}$, $0 \le t < \tau$. Kako je $S_\Theta \mathcal{A} \subset \mathcal{A}S_\Theta$, dobijamo

$$S^1_\Theta(t)x + S^2_\Theta(t)y \in D(A),$$
$$S^1_\Theta(t)y + S^2_\Theta(t)Ax = S^3_\Theta(t)x + S^4_\Theta(t)y,$$
$$S^3_\Theta(t)y + S^4_\Theta(t)Ax = A(S^1_\Theta(t)x + S^2_\Theta(t)y),\ 0 \le t < \tau,\ x \in D(A),\ y \in E.$$

Dakle, $S^3_\Theta(t)x = S^2_\Theta(t)Ax$, $x \in D(A)$, i $S^3_\Theta(t)y = AS^2_\Theta(t)y$, $y \in E$, $0 \le t < \tau$. Ovo implicira da za svako $x \in D(A)$ dobijamo $S^3_\Theta(t)Ax = AS^2_\Theta(t)Ax = AS^3_\Theta(t)x$. Stoga, $S^3_\Theta(t)A \subset AS^3_\Theta(t)$, $t \in [0,\tau)$ i $(S^3_\Theta + \Theta(t)C)_{t\in[0,\tau)}$ je jako neprekidna operatorska familija u E. Jednostavan račun izveden iz

$$\mathcal{A}\int_0^t S_\Theta(s)\binom{x}{y}ds = S_\Theta(t)\binom{x}{y} - \int_0^t \Theta(s)\binom{Cx}{Cy}ds,$$

daje

$$\int_0^t S^3_\Theta(s)xds + \int_0^t S^4_\Theta(s)yds = S^1_\Theta(t)x + S^2_\Theta(t)y - \int_0^t \Theta(s)Cxds,$$

kao i

$$A\left[\int_0^t S^1_\Theta(s)xds + \int_0^t S^2_\Theta(s)yds\right] = S^3_\Theta(t)x + S^4_\Theta(t)y - \int_0^t \Theta(s)Cyds\ ,$$

za sve $0 \le t < \tau$, x, $y \in E$. Dakle, $\int_0^t S^3_\Theta(s)xds = S^1_\Theta(t)x - \int_0^t \Theta(s)Cx$ i $A\int_0^t S^1_\Theta(s)xds = S^3_\Theta(t)x$, $0 \le t < \tau$, $x \in E$. Dobijamo

$$A\left[\int_0^t (t-s)(S^3_\Theta(s)x + \Theta(s)Cx)ds\right] = A\left[\int_0^t (t-s)(\frac{d}{dv}S^1_\Theta(v)x)_{v=s}ds\right]$$

$$= A\int_0^t S_\Theta^1(s)xds = \left[S_\Theta^3(t)x + \Theta(t)Cx\right] - \Theta(t)Cx \ , \ 0 \leq t < \tau, \ x \in E.$$

Jasno, $S_\Theta^1(t) = S_\Theta^4(t)$ i $S_\Theta^2(t) = \int_0^t S_\Theta^1(s)ds$, $0 \leq t < \tau$. Pretpostavka $S_\Theta(t)C = CS_\Theta(t)$, $t \in [0,\tau)$, implicira $C\int_0^t C_K(s)xds = \int_0^t C_K(s)Cxds$, $t \in [0,\tau)$, što daje $CC_K(t) = C_K(t)C$, $t \in [0,\tau)$. Dakle, A je subgenerator K-konvolucione C-kosinus funkcije $(S_\Theta^3(t) + \Theta(t)C)_{t\in[0,\tau)}$.

Zapažanje. Ako je $\tau = \infty$ i ako je Θ eksponencijalno ograničena funkcija, tada je $(C_K(t))_{t\geq 0}$ eksponencijalno ograničena ako i samo ako je $(S_\Theta(t))_{t\geq 0}$ eksponencijalno ograničena; ako je $0 < \tau \leq \infty$ i ako je K kernel, tada je integralni generator za $(C_K(t))_{t\in[0,\tau)}$ jednak $C^{-1}AC$ i integralni generator za $(S_\Theta(t))_{t\in[0,\tau)}$ je jednak $C^{-1}AC$.

6.5. Semigrupovno svojstvo konvolucionih C-kosinus funkcija

U ovom delu ćemo semigrupovno svojstvo konvolucionih C-kosinus funkcija dati kroz rešenje odgovarajuće parcijalne jednačine. Problemi nastaju odmah ako se pogleda semigrupovno svojstvo n-puta integrisane C-kosinus funkcije $(C(t))_{t\in[0,\tau)}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$2C(t)C(s)x = \frac{1}{(n-1)!}[(-1)^n \int_0^{|t-s|} (|t-s|-r)^{n-1}C(r)Cxdr$$

$$+[\int_0^{t+s} - \int_0^t - \int_0^s](t+s-r)^{n-1}C(r)Cxdr$$

$$+\int_0^t (s-t+r)^{n-1}C(r)Cxdr + \int_0^s (t-s+r)^{n-1}C(r)Cxdr] \ , \ 0 \leq t, \ s, \ t+s < \tau, \ x \in E.$$

Jasno je da se ova jednakost ne može lako interpretirati u slučaju konvolucionih C-kosinus funkcija. Glavni problem leži u tome što se funkcija K ne može produžiti na $(-\tau, 0)$ na zadovoljavajući nacin; ovo je neophodno za razumevanje izraza

$$\int_0^t \frac{(s-t+r)^{n-1}}{(n-1)!}C(r)Cxdr \text{ i } \int_0^s \frac{(t-s+r)^{n-1}}{(n-1)!}C(r)Cxdr.$$

Pokažimo sada tvrdjenje koje prirodno odgovara Lemi 3.1 u [55].

Lema 6.5.1. *Neka je $K \in C([0,\tau))$, $0 < \tau \leq \infty$. Tada je*

$$\left[\int_0^{t+s} - \int_0^t - \int_0^s\right] K(t+s-r)K(r)dr = 0, \quad 0 \le t, \ s, \ t+s < \tau. \tag{28}$$

Dokaz. Kako je $(\Theta(t))_{t\in[0,\tau)}$ K-polugrupa u $\mathbb{C}$ sa generatorom 0, imamo

$$\Theta(t)\Theta(s) = \left[\int_0^{t+s} - \int_0^t - \int_0^s\right] K(t+s-r)\Theta(r)dr, \quad 0 \le t, \ s, \ t+s < \tau.$$

Parcijalnom integracijom dobijamo

$$\Theta(t)\Theta(s) = 2\Theta(t)\Theta(s) + \left[\int_0^{t+s} - \int_0^t - \int_0^s\right] \Theta(t+s-r)K(r)dr;$$

posledica je

$$\left[\int_0^{t+s} - \int_0^t - \int_0^s\right] \Theta(t+s-r)K(r)dr = -\Theta(t)\Theta(s), \ 0 \le t, \ s, \ t+s < \tau.$$

Diferencirajući obe strane ove jednakosti po t dobijamo (28).

U nastavku ovog dela ćemo za jako neprekidnu operatorsku familiju $(C_K(t))_{t\in[0,\tau)}$, fiksne $x \in E$ i $0 < \tau \le \infty$, označiti $D_\tau := \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le t, \ s, \ t+s < \tau\}$,

$$u(t,s) := \int_0^t C_K(r)(C_K(s)x - \Theta(s)Cx)dr, \ (t,s) \in D_\tau \text{ i}$$

$$F(t,s) := \left[\int_0^{t+s} - \int_0^t - \int_0^s\right] K(t+s-r)C_K(r)Cxdr - \Theta(s)C_K(t)Cx, \ (t,s) \in D_\tau.$$

$C^1(D_\tau : E)$ označava vektorski prostor svih funkcija iz D_τ u E koje su jedan put neprekidno diferencijabilne na intD_τ i čiji parcijalni izvodi reda ≤ 1 mogu biti neprekidno prošireni na D_τ. Za fiksno $x \in E$, uvedimo problem (P) na sledeći način

$$(P): \begin{cases} u \in C^1(D_\tau : E), \\ u_t(t,s) + u_s(t,s) = F(t,s), \ (t,s) \in D_\tau, \\ u(0,s) = u(t,0) = 0. \end{cases}$$

Propozicija 6.5.2. *Neka je K lokalno integrabilna funkcija na $[0,\tau)$, $0 < \tau \le \infty$ i neka je A subgenerator K-konvolucione C-kosinus funkcije $(C_K(t))_{t\in[0,\tau)}$. Fiksirajmo $x \in E$. Tada je $u(t,s)$ jedinstveno rešenje za* (P).

Dokaz. Pokazali smo da je operator $\mathcal{A}$ subgenerator Θ-konvolucione $\mathcal{C}$-polugrupe $(S_\Theta(t)_{t\in[0,\tau)}$ u E^2. Na isti način kao u [58] može se pokazati da S_Θ zadovoljava semigrupovno svojstvo za konvolucione C-polugrupe koje je dato u Propoziciji 6.1.4(a) i na osnovu toga imamo za $(t,s) \in D_\tau$:

$$S_\Theta(t)S_\Theta(s)\binom{0}{x}$$

$$= \begin{pmatrix} \int_0^t C_K(v)\int_0^s (s-r)C_K(r)xdrdv + \int_0^t (t-v)C_K(v)\int_0^s C_K(r)xdrdv \\ C_K(t)\int_0^s (s-r)C_K(r)xdr - \Theta(t)\int_0^s (s-r)C_K(r)Cxdr + \int_0^t\int_0^s C_K(v)C_K(r)xdrdv \end{pmatrix}$$

$$= \left[\int_0^{t+s} - \int_0^t - \int_0^s\right] \Theta(t+s-r)\begin{pmatrix} \int_0^r (r-v)C_K(v)Cxdv \\ \int_0^r C_K(v)Cxdv \end{pmatrix} dr, \ (t,s) \in D_\tau, \ x \in E.$$

Dakle,

$$A\left[\int_0^t C_K(v)\int_0^s (s-r)C_K(r)xdrdv + \int_0^t (t-v)C_K(v)\int_0^s C_K(r)xdrdv\right]$$

$$= A\left\{\left[\int_0^{t+s} - \int_0^t - \int_0^s\right] \Theta(t+s-r)\int_0^r (r-v)C_K(v)Cxdv\right\}.$$

Ova jednakost i Lema 6.5.1 daju

$$\int_0^t C_K(v)(C_K(s)x-\Theta(s)Cx)dv+C_K(t)\int_0^s C_K(r)xdr-\Theta(t)\int_0^s C_K(r)Cxdr \tag{29}$$

$$= \left[\int_0^{t+s} - \int_0^t - \int_0^s\right] \Theta(t+s-r)C_K(r)Cxdr, \ (t,s) \in D_\tau, \ x \in E.$$

Fiksirajmo $t \in [0,\tau)$. Standardni argumenti iz teorije mere impliciraju

$$\frac{d}{ds}\left[\int_0^{t+s} - \int_0^t - \int_0^s\right] \Theta(t+s-r)C_K(r)Cxdr$$

$$= \left[\int_0^{t+s} - \int_0^t - \int_0^s\right] K(t+s-r)C_K(r)Cxdr - \Theta(t)C_K(s)Cx, \ s \in [0,\tau-t).$$

Diferencirajući (29) po s, direktno dobijamo da je $u(t,s)$ rešenje problema (P). Jedinstvenost rešenja problema (P) je posledica teorije jednačina prvog reda i moguće ga je rešiti metodom karakteristika. Dokaz je kompletiran.

Zapažanje. Prethodna propozicija daje

$$C_K(t)C_K(s)x = u_t(t,s) + \Theta(s)C_K(t)Cx, \ (t,s) \in D_\tau, \ x \in E.$$

Na osnovu razmatranja datih u prethodnoj propoziciji, globalne konvolucione kosinus funkcije su definisane u radu [49] kroz semigrupovno svojstvo i pokazana je ekvivalencija sa definicijom koju smo do sada koristili. Nije jasno kako datu ekvivalenciju pokazati u lokalnom slučaju; videti [49] za više detalja.
Zapravo, svi primeri integrisanih (C-) polugrupa i kosinus funkcija predstavljaju primere konvolucionih (C-) polugrupa. Autor ne zna primer operatora koji generiše konvolucionu C-polugrupu, ali ne i integrisanu C-polugrupu, iako se nalazi blizu rešenja.
U sledećem poglavlju ćemo analizirati klase (lokalnih) konvolucionih kosinus funkcija, analitičkih konvolucionih polugrupa, njihove medjusobne veze, kao i veze sa ultradistribucionim i hiperfunkcionim sinusima. Predmet daljeg rada može biti proučavanje C-ultradistribucionih polugrupa, C-hiperfunkcionih polugrupa i odgovarajućih analogona u teoriji jednačina drugog reda kao i njihovih veza sa konvolucionim C-polugrupama i kosinus funkcijama.

7. Analitičke konvolucione polugrupe i njihove veze sa konvolucionim kosinus funkcijama, ultradistribucionim i hiperfunkcionim sinusima

Definisaćemo klasu analitičkih konvolucionih polugrupa. Jednostavne spektralne karakterizacije generatora takvih polugrupa su neposredne posledice principa analitičke reprezentacije i teorema Tauberovog tipa koje su jasno predstavljene u [6]. One uopštavaju rezultate deLaubenfelsa za analitičke integrisane polugrupe date u [25]. Na potpuno sličan način se može definisati i klasa analitičkih K-konvolucionih C-polugrupa i karakterizacije njenih generatora, što neće biti dalje diskutovano u ovom radu. Dajemo veze analitičkih konvolucionih polugrupa sa (lokalnim) kosinus funkcijama, ultradistribucionim i hiperfunkcionim sinusima kao i sa analitičkim hiperfunkcionim fundamentalnim rešenjima.
Kao što smo napomenuli, koristićemo klasičnu Laplaceovu transformaciju eksponencijalno ograničenih funkcija, za razliku od Lumera i Neubrandera [62] koji proučavaju asimptotsku Laplaceovu transformaciju, ali sa malo uspeha. U ovom kontekstu, moguće je definisati Laplaceovu transformaciju proizvoljne funkcije koja pripada prostoru $C([0,\infty))$ i analizirati operatore čiji rezolventni skup ne sadrži poluprave oblika (ω,∞), za neko $\omega\in\mathbb{R}$ i čija rezolventa predstavlja meromorfnu funkciju u desnoj poluravni. Pokazaćemo da se neki problemi koji prirodno odgovaraju primeni asimptotske Laplaceove transformacije mogu veoma lako posmatrati i u kontekstu klasične Laplaceove transformacije. Analiziramo biharmonijski operator Δ^2 u $L^2[0,\pi]$.
Napomenimo da u radu nisu posmatrane Laplaceove hiperfunkcije i Laplaceove hiperfunkcione polugrupe i sinusi. Zaintersovanog čitaoca upućujemo na [43].
U ovoj disertaciji nećemo dati rezultate koji se odnose na eksponencijalno dobru postavljenost problema

$$(ACP_2)_\Theta:\begin{cases} u\in C([0,\tau):D(A))\cap C^2([0,\tau):E),\\ u''(t)=Au(t)+\Theta(t)x+\int\limits_0^t\Theta(s)yds,\\ u(0)=0,\ u'(0)=0.\end{cases}$$

Za datu problematiku videti [49]. Možda jedini uspeh asimptotske Laplaceove transformacije je sadržan u radu Bäumera [11], gde su ispitivane veze problema (Θ) sa problemom (ACP_1). Ove relacije su znatno komplikovanije nego u integrisanom slucaju u kome već nastaju problemi izborom funkcija $K(t)=\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$, $\alpha>0$ umesto $K(t)=\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$, $n\in\mathbb{N}$.
Koristićemo istu notaciju kao i u prethodnim poglavljima. Podsetimo se samo osnovnih regiona kompleksne ravni koji će nam biti značajni.
1. Za $\omega\in\mathbb{R}$ stavimo $\Pi_\omega:=\{x+iy:x>\omega^2-\frac{y^2}{4\omega^2}\}$. Primetimo da je

$$\Pi_\omega=\{\lambda^2:\lambda\in\mathbb{C},\ Re\lambda>\omega\}.$$

2. Za dato $\varepsilon>0$ i odgovarajuće $C_\varepsilon>0$ definišemo

$$\Omega_\varepsilon:=\{\lambda\in\mathbb{C}:Re\lambda\geq\varepsilon|\lambda|+C_\varepsilon\},\ \text{i}\ \Omega_\varepsilon^2:=\{\lambda^2:\lambda\in\Omega_\varepsilon\}.$$

3. Kao u [43] i [53], definišemo Ω^* kao podskup skupa $\mathbb{C}$ koji sadrži domen forme

$\Omega_0^{(M_p)} := \{\lambda \in \mathbb{C};\ Re\lambda \geq M(k|\lambda|) + C\}$, za neko $k > 0$, $C > 0$, resp.,
$\Omega_0^{\{M_p\}} := \{\lambda \in \mathbb{C};\ Re\lambda \geq M(k|\lambda|) + C_k\}$, za svako $k > 0$ i odgovarajuće $C_k > 0$.
Korisno je uvesti i sledeći region ([65])

$$\Lambda_{\alpha,\beta,\gamma} := \{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda \geq \frac{M(\alpha\lambda)}{\gamma} + \beta\}.$$

Slično, definišemo $\Omega^{*2} := \{\lambda^2 : \lambda \in \Omega^*\}$ i na isti način $\Lambda^2_{\alpha,\beta,\gamma}$.

4. Za sve $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, definišemo $\Sigma_\alpha := \{re^{i\theta} :\ r > 0,\ \ -\alpha < \theta < \alpha\}$.

7.1. Analitičke K-polugrupe

Sledeća definicija uopštava pojam analitičke n-puta integrisane polugrupe, $n \in \mathbb{N}$.

Definicija 7.1.1. Neka je $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ i neka je $(S_K(t))_{t\geq 0}$ eksponencijalno ograničena K-polugrupa, za neku eksponencijalno ograničenu funkciju K. Tada je $(S_K(t))_{t\geq 0}$ analitička K-polugrupa ugla α, ako postoji analitička funkcija $\mathbf{S}_K : \Sigma_\alpha \to L(E)$ takva da je

1. $\mathbf{S}_K(t) = S_K(t)$, $t > 0$ i
2. $\lim\limits_{z\to 0,\ z\in\Sigma_\gamma} \mathbf{S}_K(z)x = 0$, $0 < \gamma < \alpha$, $x \in E$.

$(S_K(t))_{t\geq 0}$ je eksponencijalno ograničena K-polugrupa ugla α, ako za sve $0 < \gamma < \alpha$ postoje konstante M_γ, $\omega_\gamma > 0$ takve da je $||\mathbf{S}_K(z)|| \leq M_\gamma e^{\omega_\gamma Rez}$, $z \in \Sigma_\gamma$.

U nastavku ćemo označavati $\mathbf{S}_K$ sa S_K kako to neće izazvati nikakvu konfuziju. Jasno, analitička K-polugrupa $(S_K(t))_{t\geq 0}$ ugla α je eksponencijalno ograničena ako za sve $0 < \gamma < \alpha$ postoje konstante M_γ, $\omega_\gamma > 0$ takve da je $||\mathbf{S}_K(z)|| \leq M_\gamma e^{\omega_\gamma |z|}$, $z \in \Sigma_\gamma$.
Pokazaćemo 'glatki efekat' analitičkih K-polugrupa koji je opisan kasnije. Da bi ovo uradili neophodne su teoreme vezane za analitičku kontinuaciju Laplaceove transformacije u Banachovim prostorima. Navedimo stoga teoremu koja je u [6] pokazana elementarnim osobinama vektorsko-vrednosne Laplaceove transformacije.

Teorema 7.1.2. *Neka je* $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, $\omega \in \mathbb{R}$ *i neka je* $q : (\omega, \infty) \to E$. *Sledeće je ekvivalentno:*

(a) *Postoji holomorfna funkcija* $f : \Sigma_\alpha \to E$ *takva da je* $\sup_{z\in\Sigma_\beta} ||e^{-\omega z} f(z)|| < \infty$, *za sve* $\beta \in (0,\ \alpha)$ *i* $q(\lambda) = \mathcal{L}(f)(\lambda)$, *za* $\lambda > \omega$.

(b) *Funkcija* q *ima analitičku ekstenziju* $\tilde{q} : \omega + \Sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}} \to E$ *takvu da je* $\sup_{\omega+\Sigma_{\gamma+\frac{\pi}{2}}} ||(\lambda-\omega)\tilde{q}(\lambda)|| < \infty$, *za sve* $\gamma \in (0,\ \alpha)$.

Teorema 7.1.3. *Neka je* $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ *i neka* K *zadovoljava* (P1). *Pretpostavimo da* A *generiše analitičku* K*-polugrupu* $(S_K(t))_{t\geq 0}$ *ugla* α *i da postoji konstanta* $\omega \geq \beta$ *takva da je*

$$\sup_{z\in\Sigma_\gamma} ||e^{-\omega z} S_K(z)|| < \infty, \quad \textit{za sve } 0 < \gamma < \alpha, \tag{30}$$

gde je β kao u (P1). *Ako se $\tilde{K}(\cdot)$ moze analitički produžiti do funkcije g : $\omega + \Sigma_{\frac{\pi}{2}+\alpha} \to \mathbb{C}$ takve da je $g(\lambda) \neq 0$, $\lambda \in \omega + \Sigma_{\frac{\pi}{2}+\alpha}$, tada važi:*

$$\omega + \Sigma_{\frac{\pi}{2}+\alpha} \subset \rho(A), \tag{31}$$

$$\sup_{\lambda \in \omega + \Sigma_{\frac{\pi}{2}+\gamma_1}} ||(\lambda - \omega) g(\lambda) R(\lambda : A)|| < \infty, \ \textit{za sve } 0 < \gamma_1 < \alpha, \ i \tag{32}$$

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda \tilde{K}(\lambda) R(\lambda : A) x = 0, \ x \in E. \tag{33}$$

Dokaz. Imamo $\{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda > \omega\} \subset \rho(A)$ i

$$\tilde{K}(\lambda) R(\lambda : A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S_K(t) dt, \ Re\lambda > \omega.$$

Primena Teoreme 7.1.2 implicira da se funkcija

$$\lambda \to \tilde{K}(\lambda) R(\lambda : A), \ Re\lambda > \omega,$$

može analitički produžiti do funkcije $\tilde{q} : \omega + \Sigma_{\frac{\pi}{2}+\alpha} \to L(E)$. Kako je $g(\lambda) \neq 0$, $\lambda \in \omega + \Sigma_{\frac{\pi}{2}+\alpha}$, Propozicija B.5 u [6] daje (31) i (32). Neka je $x \in E$ fiksiran. Tada je $z \to S_K(z)x$, $z \in \Sigma_\alpha$, analitička funkcija koja zadovoljava (a) Teoreme 1.2. Kako je $\lim_{t \downarrow 0} S_K(t)x = 0$, Teorema 2.6.4 u [6], str. 91, daje: $\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda \tilde{K}(\lambda) R(\lambda : A) x = 0$. Ovo je (33) i dokaz je kompletiran.

Teorema 7.1.4. *Pretpostavimo da je $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ i da K zadovoljava* (P1). *Neka je $\omega \geq \beta$ i neka funkcija $\tilde{K}(\cdot)$ može biti analitički produžena do funkcije $g : \omega + \Sigma_{\frac{\pi}{2}+\alpha} \to \mathbb{C}$. Pretpostavimo da za zatvoren linearan operator A važe* (31), (32) *i* (33). *Tada A generiše eksponencijalno ograničenu, analitičku K-polugrupu ugla α.*

Dokaz. Kako smo pretpostavili (31), (32) i (33), primena Teoreme 7.1.2 daje postojanje analitičke funkcije $S_K : \Sigma_\alpha \to L(E)$ takve da je

$$\sup_{z \in \Sigma_\gamma} ||e^{-\omega z} S_K(z)|| < \infty, \text{ za sve } 0 < \gamma < \alpha, \text{ i}$$

$$\tilde{K}(\lambda) R(\lambda : A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S_K(t) dt, \ Re\lambda > \omega.$$

Stavimo $S_K(0) := 0$. Fiksirajmo $x \in E$; pokazaćemo $\lim_{z \to 0, \ z \in \Sigma_\gamma} S_K(z)x = 0$. Naime, funkcija $f(z) := e^{-\omega z} S_K(z)x$, $z \in \Sigma_\alpha$, je analitička i ona zadovoljava $\sup_{z \in \Sigma_\gamma} |f(z)| < \infty$, za sve $0 < \gamma < \alpha$. Na osnovu Propozicije 2.6.3 u [6], dovoljno je pokazati $\lim_{t \downarrow 0} S_K(t)x = 0$. Ovo je posledica pretpostavke (33) i jedne od teorema Tauberovog tipa, Teoreme 2.6.4 u [6], str. 91. Dokaz sledi iz Definicije 7.1.1 i Teoreme 7.1.2.

Pokazali smo 'the smooth effect' analitičkih konvolucionih polugrupa :

Propozicija 7.1.5. *Pretpostavimo da za K važi* (P1) *i bilo koji od sledeća dva uslova:*
(a) *K je kernel,*
(b) *za svako $\varepsilon > 0$ postoji $C_\varepsilon > 0$ i $K_\varepsilon > 0$ tako da je*

$$\frac{1}{|\tilde{K}(\lambda)|} \leq K_\varepsilon e^{\varepsilon|\lambda|}, \ \lambda \in \Omega_\varepsilon.$$

Ako A generiše analitičku K-polugrupu ugla α, $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, tada je (Θ) eksponencijalno dobro postavljen. Ako je u rešenje za (Θ), tada se $u_{|(0,\ \infty)}$ može analitički produžiti na Σ_α.

Sledeća propozicija takodje uopštava Propoziciju 3.7(a) u [25].

Propozicija 7.1.6. *Neka je K eksponencijalno ograničena funkcija i neka je A generator eksponencijalno ograničene analitičke K-polugrupe ugla α, $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. Neka je $\theta \in (-\alpha,\ \alpha)$. Pretpostavimo da postoji eksponencijalno ograničena funkcija K_1, $c(\theta) \in \mathbb{C}$ i dovoljno veliko $\omega \in \mathbb{R}$ tako da je*

$$T := \{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda > \omega,\ \tilde{K}(\lambda e^{-i\theta}) = 0\} = \{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda > \omega,\ \tilde{K_1}(\lambda) = 0\},$$

i da je $\frac{\tilde{K_1}(\lambda)}{\tilde{K}(\lambda e^{-i\theta})} = c(\theta)$, $Re\lambda > \omega$, $\lambda \notin T$. Tada je $e^{i\theta}A$ generator eksponencijalno ograničene K_1-polugrupe $(c(\theta)S(te^{i\theta}))_{t\geq 0}$.

Dokaz. Označimo $\Gamma_\theta = \{te^{-i\theta} : t \geq 0\}$. Jasno, $(c(\theta)S(te^{i\theta}))_{t\geq 0}$ je jako neprekidna, eksponencijalno ograničena operatorska familija. Fiksirajmo $\lambda \in \mathbb{C}$ sa $\tilde{K_1}(\lambda) \neq 0$. Tada je $\tilde{K}(\lambda e^{-i\theta}) \neq 0$ i

$$\tilde{K_1}(\lambda)R(\lambda : e^{i\theta}A)x = \tilde{K_1}(\lambda)e^{-i\theta}R(\lambda e^{-i\theta} : A)x$$

$$= e^{-i\theta}\frac{\tilde{K_1}(\lambda)}{\tilde{K}(\lambda e^{-i\theta})}\int_0^\infty e^{-\lambda e^{-i\theta}t}S(t)xdt = e^{-i\theta}c(\theta)\int_{\Gamma_\theta} e^{-\lambda t}e^{i\theta}S(te^{i\theta})xdt$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t}(c(\theta)S(te^{i\theta})x)dt, \tag{34}$$

gde (34) sledi primenom Cauchy-Goursatove teoreme. Dokaz je ovim kompletiran.

Zapažanje. Pretpostavke prethodne teoreme su zadovoljene za funkcije $K(t) = \frac{t^{z-1}}{\Gamma(z)}$, $t > 0$, $z \geq 1$. Tada je $K_1 = K$, $T = \emptyset$ i $c(\theta) = e^{-i\theta z}$. Za dalje informacije videti [49].

Sada ćemo pokazati konvolucionu verziju apstraktne Weierstrassove formule.

Teorema 7.1.7. *Neka je K eksponencijalno ograničena funkcija sa $|K(t)| \leq Mte^{\beta t}$, za s.s. $t > 0$ i neka je A generator eksponencijalno ograničene K-kosinus funkcije $(C_K(t))_{t\geq 0}$. Tada A generiše eksponencijalno ograničenu, analitičku K_1-polugrupu $(S(t))_{t\geq 0}$ ugla $\frac{\pi}{2}$, gde je*

$$K_1(t) := \int_0^\infty \frac{se^{-s^2/4t}}{2\sqrt{\pi}t^{3/2}} K(s)ds, \ t > 0, \ i$$

$$S(t)x := \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-s^2/4t} C_K(s)xds, \ t > 0.$$

Štaviše, za sve $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ *važi* $\sup_{z\in\Sigma_\beta,\ |z|\leq 1} ||S(z)|| < \infty$.

Dokaz. Pratićemo dokaz apstraktne Weierstrassove formule. Na osnovu Propozicije 1.6.8 u [6], imamo da je K_1 lokalno integrabilna funkcija i da za sve $\lambda \in \mathbb{C}$ sa $Re\lambda > \beta^2$ postoji $\widetilde{K_1}(\lambda)$ i da je $\widetilde{K_1}(\lambda) = \tilde{K}(\sqrt{\lambda})$, $Re\lambda > \beta^2$. Uslov $|K(t)| \leq Mte^{\beta t}$, za s.s. $t > 0$, daje eksponencijalnu ograničenost funkcije K_1:

$$|K_1(t)| \leq M \int_0^\infty \frac{se^{-s^2/4t}}{2\sqrt{\pi}t^{3/2}} se^{\beta s} ds \leq \frac{M}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty r^2 e^{\beta r\sqrt{t} - \frac{r^2}{4}} dr \leq \frac{M}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty r^2 e^{\beta^2 t - (\frac{r}{2} - \beta\sqrt{t})^2} dr$$

$$= 2M\beta^2 te^{\beta^2 t} + \frac{8M\beta}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t} e^{\beta^2 t} \int_0^\infty ve^{-v^2} dv + \frac{4M}{\sqrt{\pi}} e^{\beta^2 t} \int_0^\infty v^2 e^{-v^2} dv, \ t > 0.$$

Neka je $x \in E$ fiksiran. Stavljajući $r = \frac{s}{\sqrt{t}}$ i koristeći teoremu o dominantnoj konvergenciji posle toga, dobijamo

$$S(t)x = \int_0^\infty \frac{e^{-r^2/4}}{\sqrt{\pi}} C_K(r\sqrt{t})xdr \to 0, \ t \to 0+. \tag{35}$$

Definišimo $S(0) := 0$. Na osnovu (35), $(S(t))_{t\geq 0}$ je jako neprekidna, eksponencijalno ograničena operatorska familija. Dalje, primena Propozicije 1.6.8 u [6] implicira da za sve $\lambda \in \mathbb{C}$ sa $Re\lambda > \omega_0$ i $\tilde{K_1}(\lambda) \neq 0$, važi

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)xdt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-s^2/4t} C_K(s)xdsdt = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^\infty e^{-\sqrt{\lambda}s} C_K(s)xds$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} R(\lambda : A)\sqrt{\lambda}\tilde{K}(\sqrt{\lambda}) = \widetilde{K_1}(\lambda)R(\lambda : A).$$

Dakle, $(S(t))_{t\geq 0}$ je eksponencijalno ograničena K_1-polugrupa generisana sa A. Definišimo ekstenziju $S(z)$, $Rez > 0$, na prirodan način:

$$S(z)x = \frac{1}{\sqrt{\pi z}} \int_0^\infty e^{-s^2/4z} C_K(s)xds.$$

Tada je funkcija $S : \{z \in \mathbb{C} : Rez > 0\} \mapsto L(E)$ analitička. Koristeći iste argumente kao u dokazu Weierstrassove formule, videti [6], str. 220, za sve $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ postoje M, $\omega_1 > 0$ takvi da važi

$$||S(z)|| \leq Me^{\omega_1|z|}, \ z \in \Sigma_\beta.$$

Preostaje da pokažemo $\lim_{z\in\Sigma_\beta,\ z\to 0} S(z)x = 0$. Izaberimo $\omega_2 > \frac{\omega_1}{\cos\beta}$. Tada je funkcija $z \mapsto e^{-\omega_2 z}S(z)x$, $z \in \Sigma_\beta$, analitička i $\sup_{z\in\Sigma_\beta} ||e^{-\omega_2 z}S(z)|| < \infty$. Kako je $\lim_{t\downarrow 0} e^{-\omega_2 t}S(t)x = 0$, Propozicija 2.6.3 u [6] daje

$$\lim_{z\in\Sigma_\beta,\ z\to 0} e^{-\omega_2 z}S(z)x = 0.$$

7.2. Relacije sa ultradistribucionim i hiperfunkcionim sinusima

Pokažimo najpre sledeću teoremu koja opisuje lokalne K-kosinus funkcije u pogledu asimptotskog ponašanja funkcije $\tilde{K}$.

Teorema 7.2.1. *Pretpostavimo da za* Θ *važi* (P1) *i da je* A *generator* K*-kosinus funkcije* $(C_K(t))_{t\in[0,\tau)}$, $0 < \tau < \infty$. *Pretpostavimo da za sve* $\varepsilon > 0$ *postoje* $\varepsilon_0 \in (0, \tau\varepsilon)$ *i* $T_\varepsilon > 0$ *takvi da je*

$$\frac{1}{|\tilde{\Theta}(\lambda)|} \leq T_\varepsilon e^{\varepsilon_0|\lambda|}, \ \lambda \in \Omega_\varepsilon \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda > \beta\},$$

gde je β *kao u* (P1) *(za* Θ*). Tada za sve* $\varepsilon > 0$ *postoje* $\overline{C_\varepsilon} > 0$ *i* $\overline{K_\varepsilon} > 0$ *takvi da je*

$$\Omega^2_{1\varepsilon} = \{\lambda^2 : \lambda \in \mathbb{C}, \ Re\lambda \geq \varepsilon|\lambda| + \overline{C_\varepsilon}\} \subset \rho(A), \ i$$

$$||R(\lambda^2 : A)|| \leq \overline{K_\varepsilon} e^{\tau\varepsilon|\lambda|}, \ \lambda \in \Omega_{1\varepsilon}.$$

Dokaz. Jasno, $\mathcal{A}$ generiše Θ-polugrupu $(S_\Theta(t))_{t\in[0,\tau)}$ u E^2. Teorema 8.3 u [48] daje postojanje realnih brojeva $\overline{C_\varepsilon}$, $\overline{K_\varepsilon} > 0$ takvih da je $\Omega_{1\varepsilon} \subset \rho(\mathcal{A})$ i

$$||R(\lambda : \mathcal{A})|| \leq \overline{K_\varepsilon} e^{\tau\varepsilon|\lambda|}, \ \lambda \in \Omega_{1\varepsilon}.$$

Kako je $||R(\lambda : \mathcal{A})\binom{0}{y}|| = ||\binom{R(\lambda^2:A)y}{\lambda R(\lambda^2:A)y}||$, sledi
$(1 + |\lambda|)||R(\lambda^2 : A)|| \leq ||R(\lambda : \mathcal{A})||$, $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$. Zbog toga, $\Omega^2_{1\varepsilon} \subset \rho(A)$ i

$$||R(\lambda^2 : A)|| \leq \frac{\overline{K_\varepsilon}}{1 + |\lambda|} e^{\tau\varepsilon|\lambda|}, \ \lambda \in \Omega_{1\varepsilon}.$$

Notacija (analitičkih) hiperfunkcionih fundamentalnih rešenja za zatvoren operator A je data u [73].
Jednostavno ćemo reći da A generiše (eksponencijalni) ultradistribucioni sinus $*-$klase ako postoji (eksponencijalno) ultradistribuciono fundamentalno rešenje za operator $\mathcal{A}$ i da A generiše hiperfunkcioni sinus ako postoji hiperfunkciono fundamentalno rešenje za operator $\mathcal{A}$. Iz radova Komatsua [43], Ōuchia [73], Kunstmanna [53] i Pilipovića i Kostića [48], važi:

1. A generiše ultradistribucioni sinus $*-$klase ako i samo ako postoji domen forme Ω^* takav da je

$$\{\lambda^2 : \lambda \in \Omega^*\} \subset \rho(A) \text{ i}$$

$$||R(\lambda^2 : A)|| \leq Ce^{M(k|\lambda|)}, \ \lambda \in \Omega_0^{(M_p)},$$

za neke $k > 0$ i $C > 0$ u (M_p)-slučaju, resp.,

$$||R(\lambda^2 : A)|| \leq C_k e^{M(k|\lambda|)}, \ \lambda \in \Omega_0^{\{M_p\}},$$

za svako $k > 0$ i odgovarajuce $C_k > 0$ u $\{M_p\}$-slučaju.

2. Ako gusto definisani operator A generiše eksponencijalni ultradistribucioni sinus $*$-klase tada postoji $\omega \geq 0$ i ultradiferencijalni operator P $*$-klase takav da je $|P(\lambda)| > 0, \ Re\lambda > \omega$ i

$$\Pi_\omega \subset \rho(A), \ ||R(\lambda^2 : A)|| \leq |P(\lambda)|, \ Re\lambda > \omega. \tag{36}$$

Ako je A zatvoren linearan operator i ako postoje $\omega \geq 0$ i ultradiferencijalni operator P $*$-klase takav da je $|P(\lambda)| > 0, \ Re\lambda > \omega$ i da (36) važi, tada A generiše eksponencijalni ultradistribucioni sinus.

3. A generiše hiperfunkcioni sinus ako i samo ako za sve $\varepsilon > 0$ postoje $C_\varepsilon, \ K_\varepsilon > 0$ i domen forme Ω_ε^2 koji pripada $\rho(A)$ i zadovoljava

$$||R(\lambda^2 : A)|| \leq K_\varepsilon e^{\varepsilon|\lambda|}, \ \lambda \in \Omega_\varepsilon.$$

4. Postoji hiperfunkciono fundamentalno rešenje za A i ovo rešenje je analitički proširivo na Σ_α ako i samo ako za svako $\varepsilon > 0$ postoje $\omega_\varepsilon > 0$ i $C_\varepsilon > 0$ takvi da je $\omega_\varepsilon + \Sigma_{\frac{\pi}{2}+\alpha-\varepsilon} \subset \rho(A)$ i

$$||R(\lambda : A)|| \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon|\lambda|}, \ \lambda \in \omega_\varepsilon + \Sigma_{\frac{\pi}{2}+\alpha-\varepsilon}.$$

Funkcija $K_{1/2}(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{1}{4t}}$, $t \geq 0$, je ograničena i glatka na $(0, \infty)$. Poznato je: $\tilde{K}(\lambda) = e^{-\sqrt{\lambda}}$, $Re\lambda > 0$ $(\sqrt{1} = 1)$.

Teorema 7.2.2. *Pretpostavimo da A generiše hiperfunkcioni sinus. Tada je A generator eksponencijalno ograničene, analitičke $K_{1/2}-$polugrupe ugla $\frac{\pi}{2}$.*

Dokaz. Jasno, dovoljno je pokazati da za sve $0 < \varepsilon < \frac{1}{\sqrt{2}}$, A generiše eksponencijalno ograničenu, analitičku $K_{1/2}$-polugrupu ugla $\alpha := 2\arccos\varepsilon - \frac{\pi}{2}$. Neka je $\varepsilon \in (0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ fiksiran. Tada postoje $C_\varepsilon, \ K_\varepsilon > 0$ takvi da je $\Omega_\varepsilon^2 \subset \rho(A)$ i da važi

$$||R(\lambda : A)|| \leq K_\varepsilon e^{\varepsilon\sqrt{|\lambda|}}, \ \lambda \in \Omega_\varepsilon^2.$$

Evidentno,

$$|\arg\lambda| \to 2\arccos\varepsilon, \ |\lambda| \to \infty, \ \lambda \in \partial\Omega_\varepsilon^2.$$

Dakle, za sve dovoljno velike $\omega \in \mathbb{R}$ važi

$$\omega + \Sigma_{\frac{\pi}{2}+\alpha} \subset \rho(A).$$

Imamo i $\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda\tilde{K}_{1/2}(\lambda)R(\lambda : A) = 0$; funkcija $\tilde{K}_{1/2}(\cdot)$ se može analitički produžiti do funkcije $g : \omega + \Sigma_{\frac{\pi}{2}+\alpha} \to \mathbf{C}$, $g(\lambda) = e^{-\sqrt{\lambda}}$, $\lambda \in \omega + \Sigma_{\frac{\pi}{2}+\alpha}$. Fiksirajmo $0 < \gamma_1 < \alpha$. Tada je $\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\gamma_1}{2}) > \varepsilon$ i

$$||(\lambda - \omega)g(\lambda)R(\lambda : A)|| \leq K_\varepsilon(|\lambda| + \omega)e^{\varepsilon\sqrt{|\lambda|}}e^{-\sqrt{|\lambda|}\cos(\arg(\lambda)/2)}$$

$$\leq K_\varepsilon(|\lambda| + \omega)e^{\sqrt{|\lambda|}(\varepsilon - \cos(\frac{\pi}{4}+\frac{\gamma_1}{2}))}, \ \lambda \in \omega + \Sigma_{\gamma_1+\frac{\pi}{2}}.$$

Teorema 7.1.4 kompletira dokaz.

Slično se razmatraju veze (temperiranih) ultradistribucionih sinusa sa eksponencijalno ograničenim, analitičkim K-polugrupama. Tako se mogu konstruisati primeri eksponencijalno ograničenih, analitičkih K_δ-polugrupa, $0 < \delta < 1$. Preciznije, ako je $M_p = p!^s$, $s > 1$, tada važi ([49]):

Pretpostavimo da A generiše ultradistribucioni sinus Beurlingove, resp., Roumieuove klase. Tada A generiše eksponencijalno ograničenu, analitičku K_δ-polugrupu ugla $\frac{\pi}{2}$, za sve $\delta \in (\frac{1}{2s}, \frac{1}{2})$, resp., za sve $\delta \in [\frac{1}{2s}, \frac{1}{2})$.

Teorema 7.2.3. (a) *Pretpostavimo da Θ ima iste osobine kao u Teoremi* 7.2.1 *i da A generiše K-kosinus funkciju $(C_K(t))_{t\in[0,\tau)}$, $0 < \tau < \infty$, gde smo restrikciju funkcije K na $[0,\tau)$ označili istim simbolom i pretpostavili da je $K(t) \neq 0$, za s.s. $t \in [0,\tau)$. Tada postoji eksponencijalno ultradistribuciono fundamentalno rešenje za A.*

(b) *Pretpostavimo da Θ ima iste osobine kao u* (a) *i da A generiše K-kosinus funkciju $(C_K(t))_{t\in[0,\tau)}$, $0 < \tau \leq 1$, sa istim pretpostavkama za K kao u prvom delu teoreme. Tada A generiše hiperfunkcioni sinus.*

Dokaz. (a) Označimo $K(t) = \frac{a}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-\frac{a^2}{4t}}$, $t \geq 0$, $a > 0$. Izaberimo $\varepsilon \in (0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ tako da je $a > \tau\sqrt{2}\varepsilon$. Tada je $\Omega^2_{1\varepsilon}$, definisan na osnovu Teoreme 7.2.1, sadrži poluravan i $||R(\cdot : A)||$ se može majorirati sa $K_\varepsilon e^{\tau\varepsilon\sqrt{|\lambda|}}$, na nekoj desnoj poluravni. Imamo

$$||\tilde{K}(\lambda)R(\lambda : A)|| \leq K_\varepsilon e^{\sqrt{|\lambda|}(\tau\varepsilon - 2^{-1/2}a)}, \text{ za sve } \lambda \in \mathbb{C} \text{ sa } Re\lambda > \omega,$$

za neko $\omega \in \mathbb{R}$. Sada treba primeniti Posledicu 3.1 i Posledicu 3.2 date u [48] da se dobije da A generiše eksponencijalno ograničenu $\frac{a}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-\frac{a^2}{4t}}$-konvolucionu poolugrupu. Sada (a) sledi na osnovu Teoreme 7.6 u [48], dok je (b) neposredna posledica Teoreme 7.2.1.

Diskusija u ultradistribucionom slučaju sledi slično.

Teorema 7.2.4. *Neka je A generator lokalne K-kosinus funkcije na $[0,\tau)$, $0 < \tau < \infty$. Pretpostavimo da se Θ može proširiti do funkcije (označene istim simbolom) koja zadovoljava* (P1). *Ako je za neko $\alpha > 0$*

$$\frac{1}{|\tilde{\Theta}(\lambda)|} \underset{|\lambda|\to\infty}{=} O(e^{M(\alpha\lambda)}),$$

tada za svako $\tau_1 \in (0, \tau)$ postoje β, $C > 0$ takvi da je $\Lambda^2_{\alpha,\beta,\tau_1} \subset \rho(A)$ i da važi

$$||R(\lambda : A)|| \leq C \frac{e^{M(\alpha\sqrt{\lambda})}}{1+\sqrt{|\lambda|}}, \ \lambda \in \Lambda^2_{\alpha,\beta,\tau_1}.$$

Dokaz. Na osnovu pretpostavki dobijamo da $\mathcal{A}$ generiše lokalnu Θ-polugrupu na $[0,\ \tau)$. Moguće je ponoviti argumente date u Teoremi 1.3.1 u [65] da zaključimo da za svako $\tau_1 \in (0,\ \tau)$ postoje β, $C > 0$ tako da je $\Lambda_{\alpha,\beta,\tau_1} \subset \rho(\mathcal{A})$ i da važi

$$||R(\lambda : \mathcal{A})|| \leq Ce^{M(\alpha\lambda)}, \ \lambda \in \Lambda_{\alpha,\beta,\tau_1}.$$

Dokaz se rutinski privodi kraju.

Koristeći argumente date u poglavlju o konvolucionim polugrupama i iste argumente kao u [65], moguće je pokazati i odgovarajuća tvrdjenja koja prirodno odgovaraju Teoremi 7.2.3 i Teoremi 7.2.4. Ovo će biti pokazano na primerima koji slede. Neke od veza analitičkih konvolucionih polugrupa i analitičkih hiperfunkcionih sinusa su date u [49]. Za dalje analize relacija konvolucionih kosinus funkcija, analitičkih konvolucionih polugrupa, ultradistribucionih i hiperfunkcionih sinusa, videti [49].

7.3. Primeri

Primer 7.3.1. Neka je $A := -\Delta$ na $E = L^2[0,\pi]$ sa Dirichletovim ili Neumannovim graničnim uslovima. Stavimo

$$h(\lambda) := \frac{1}{\lambda^2}\prod_{n=0}^{\infty}\frac{n^2-\lambda}{n^2+\lambda}, \ Re\lambda > 0.$$

Tada Teorema 1.12 u [91] povlači postojanje eksponencijalno ograničene, neprekidne funkcije K takve da je $\tilde{K}(\lambda) = h(\lambda)$, $Re\lambda > 0$. Bäumer [11] je dodatno pokazao: $0 \in \operatorname{supp} K$ i

$$||\tilde{K}(\lambda)R(\lambda : A)|| \leq \frac{C + |\frac{1}{\lambda}|}{|\lambda|^2}, \text{ ako je } Re\lambda > 0,\ \lambda \neq n^2,\ n \in \mathbb{N}.$$

Ovo je upotrebljeno u [48] da se pokaže da A generiše K-polugrupu $(S_K(t))_{t\geq 0}$ sa $||S_K(t)|| = O(1+t^3)$. Jasno da to implicira da A generiše Θ-polugrupu $(S_\Theta(t))_{t\geq 0}$ sa $||S_\Theta(t)|| = O(t+t^4)$; $-A$ takodje generiše eksponencijalno ograničenu Θ-polugrupu $(V_\Theta(t))_{t\geq 0}$ u E, jer je $-A$ generator analitičke C_0-polugrupe ugla $\frac{\pi}{2}$. Definišimo $C_\Theta(t) := 1/2(S_\Theta(t) + V_\Theta(t))$, $t \geq 0$. Pokazali smo da biharmonijski operator A^2 generiše eksponencijalno ograničenu Θ-kosinus funkciju $(C_\Theta(t))_{t\geq 0}$. Stoga A^2 generiše eksponencijalno ograničenu, analitičku Θ_1-polugrupu ugla $\frac{\pi}{2}$, gde je Θ_1 kao u Teoremi 7.1.7. Jasno, Θ_1 je kernel zbog

$$\limsup_{\lambda\to\infty}\frac{\ln|\Theta_1(\lambda)|}{\lambda} = \limsup_{\lambda\to\infty}\frac{\ln|\Theta(\sqrt{\lambda})|}{\lambda} = 0.$$

Takodje, A^2 ne može biti generator (lokalne) α-puta integrisane polugrupe, $\alpha \geq 0$, kako rezolventni skup A^2 ne sadrži nijednu polupravu oblika $(\omega,\ \infty)$. Iz istih razloga, A^2 ne generiše hiperfunkcioni sinus.

Razmotrimo sada slučaj kada samoadjungovani operator A ima diskretni spektar $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gde karakteristične korene pišemo u obliku rastućeg niza; zbog jednostavnosti, ne ponavljamo korene. Pretpostavimo $Re\lambda_n > 0,\ n \geq n_0$. Ako je

$$\sum_{n\geq n_0}(1-\frac{|\sqrt{\lambda_n}-1|}{\sqrt{\lambda_n}+1})<\infty,$$

tada Teorema 1.11.1 u [6] daje postojanje eksponencijalno ograničene funkcije K takve da je $\tilde{K}(\sqrt{\lambda_n})=0,\ n\geq n_0$. Ako je m prirodan broj koji je veći od multipliciteta svakog korena $\lambda_n,\ n\geq n_0$, funkcija $\lambda\mapsto K^{*m}(\lambda)R(\lambda^2:A)$ se može analitički produžiti na desnu poluravan, gde je K^{*m} m-ti konvolucioni stepen funkcije K. Uslov

$$||K^{*m}(\lambda)R(\lambda^2:A)||\leq M|\lambda|^{-3},\ Re\lambda>\omega\ (\geq 0),\ \lambda\neq\sqrt{\lambda_n},\ n\geq n_0,$$

za odgovarajuće $M>0$, povlači da je A generator eksponencijalno ograničene K^{*m}-kosinus funkcije.

Jasno je da se data procedura ne može izvesti ako je $(\sqrt{\lambda_n})_{n\geq n_0}$ 'a uniqueness sequence', videti [6]. Tada je nemoguće koristiti konvolucione polugrupe. Konjektura Weyla i njene posledice pokazuju da je prirodan okvir za proučavanje velike klase samoadjungovanih diferencijalnih operatora na L^p prostorima teorija C-polugrupa i njeni sublimati. Izvesno je da primena C-polugrupa u ovom području nije analizirana dovoljno dobro.

Reformulišimo sada jedan primer, ranije dat u distribucionom slučaju.

Primer 7.3.2. Neka je B holomorfna funkcija na $\mathbb{C}_+$. Pretpostavimo da za svako $\varepsilon>0$ postoje $C_\varepsilon,\ K_\varepsilon>0$ takvi da je $B(\mathbb{C}_+)\subset(\Omega_\varepsilon^2)^c$. Primer jedne takve funkcije je esencijalno dao Beals u dokazu Teoreme 2' u [13]; tamo je konstruisana analitička funkcija $a_1:\mathbb{C}_+\to\{z\in\mathbb{C}:|z|\geq 1\}$ sa osobinom da za svako $\varepsilon>0$, postoji domen forme Ω_ε takav da je $a_1(\mathbb{C}_+)\cap\Omega_\varepsilon=\emptyset$, i možemo uzeti $B=a_1^2$. Definišimo

$$(AF)(z):=B(z)F(z),\ Imz>0,\ D(A):=\{F\in H^p(\mathbb{C}_+):AF\in H^p(\mathbb{C}_+)\}.$$

Neka je $0<\varepsilon<1$ fiksiran. Izaberimo $\varepsilon_1\in(0,\ \varepsilon)$. Za sve dovoljno velike $\overline{C_\varepsilon}$, udaljenost d :=dist$(\partial\Omega_{\varepsilon_1},\ \partial\Omega_{1\varepsilon})$ je pozitivan realan broj, gde je Ω_{ε_1} izabran tako da njegov komplement sadrži $B(\mathbb{C}_+)$ i $\Omega_{1\varepsilon}$ ima isto značenje kao u Teoremi 7.2.1. Imamo $\Omega_{1\varepsilon}^2\subset\rho(A)$ i

$$||R(\lambda:A)||\leq d^{-2},\ \lambda\in\Omega_{1\varepsilon}^2.$$

Stoga, A generiše hiperfunkcioni sinus. Takodje, $||R(\lambda:A)||\leq M|\lambda|^2,\ \lambda\in\Omega_{1\varepsilon}$, za neku pozitivnu konstantu M. Pretpostavimo da je K eksponencijalno ograničena funkcija takva da za sve $\varepsilon\in(0,1)$ postoje $a_\varepsilon,\ K_\varepsilon>0$ takvi da je

$$|\tilde{\Theta}(\lambda)|\leq K_\varepsilon e^{\varepsilon a_\varepsilon Re\lambda}|\lambda|^{-p},\ \lambda\in\Omega_{1\varepsilon},$$

za neko $p>3$. Definišimo

$$S_\Theta(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\Omega_{1\varepsilon}} e^{\lambda t}\tilde{\Theta}(\lambda)R(\lambda : \mathcal{A})d\lambda,\ t \in [0,\ \varepsilon a_\varepsilon).$$

Kao u [48] i [65], $(S_\Theta(t))_{t\in[0,\varepsilon a_\varepsilon)}$ je Θ-polugrupa na E^2 i $\mathcal{A}$ je njen generator. Ocenimo $||S_\Theta(\cdot)||$. Prelaskom na polarne koordinate dobijamo da za sve $t \in [0,\varepsilon a_\varepsilon)$ i $\varepsilon \in (0,1)$, postoje $M_\varepsilon,\ N_\varepsilon > 0$ takvi da je

$$||S_\Theta(t)|| \leq M_\varepsilon \int\limits_{-\arccos\varepsilon}^{\arccos\varepsilon} e^{\overline{C_\varepsilon}\cos(\theta)t/\cos(\theta)-\varepsilon}|\tilde{\Theta}((\overline{C_\varepsilon}/\cos(\theta)-\varepsilon)e^{i\theta})|$$

$$(\overline{C_\varepsilon}\cos(\theta)t/\cos(\theta)-\varepsilon)^2|\frac{d}{d\theta}[(\overline{C_\varepsilon}\cos(\theta)t/\cos(\theta)-\varepsilon)e^{i\theta}]|d\theta$$

$$\leq M_\varepsilon \int\limits_{-\arccos\varepsilon}^{\arccos\varepsilon} e^{\frac{\overline{C_\varepsilon}\cos(\theta)}{\cos(\theta)-\varepsilon}(t-\varepsilon a_\varepsilon)}(\cos(\theta)-\varepsilon)^p(\cos(\theta)-\varepsilon)^{-4}d\theta < N_\varepsilon.$$

Ako je $K(t) \neq 0$, za s.s. $t \in [0,\varepsilon a_\varepsilon)$ i ε je proizvoljan element intervala $(0,1)$, tada A generiše lokalnu K-kosinus funkciju $(C_K(t))_{t\in[0,\varepsilon a_\varepsilon)}$ sa $\limsup\limits_{\tau\to\varepsilon a_\varepsilon -}||C_K(t)|| < \infty$. Takodje, $C_K(t)$ se može definisati za $t = \varepsilon a_\varepsilon$. Ultradistribuciona verzija ovog primera će biti data u Primeru 7.3.4.

Na sledećem jednostavnom primeru diskutujemo maksimalan interval egzistencije lokalne K-kosinus funkcije.

Primer 7.3.3. Neka je $0 < \tau \leq \infty$ i $0 \neq K \in L^1_{loc}([0,\ \tau))$. Dakle, $(C_K(t))_{t\in[0,\tau)} := (\Theta(t))_{t\in[0,\tau)}$ je K-kosinus funkcija u $\mathbb{C}$ sa generatorom 0. Pretpostavimo $\tau < \infty$ i $\lim\limits_{t\to\tau-}|\Theta(t)| = \infty$. Tada je $\lim\limits_{t\to\tau-}||C_K(t)|| = \infty$ i C_K je nemoguće proširiti na $[0,\tau]$.

2. Pretpostavimo $\tau = 1$. Poznato je da postoji neprekidna strogo rastuća funkcija $K : [0,1] \to [0,1]$ sa $K(0) = 0$ i $K'(t) = 0$, za s.s. $t \in [0,1]$. Tada je $(C_K(t))_{t\in[0,\tau)} := (\Theta(t))_{t\in[0,\tau)}$ K-kosinus funkcija u $E := \mathbb{C}$ sa generatorom 0. Za sve $x \in E$ imamo

$$\frac{d}{dt}C_K(t)x = K(t),\ t \in [0,\tau),\ \frac{d^2}{dt^2}C_K(t)x = 0,\ \text{ za s.s. } t \in [0,\tau) \text{ i}$$

$$C_K(0) = \frac{d}{dt}C_K(t)x_{|t=0} = 0,$$

ali su $t \mapsto ||\frac{d}{dt}C_K(t)||$ i $t \mapsto ||C_K(t)||$, $0 \leq t < \tau$ strogo rastuće, neprekidne funkcije.

Primer 7.3.4. Neka je $E = L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$. Razmotrimo sledeći multiplikativni operator A sa maksimalnim domenom u E

$$Af(x) := (x + ix^2)^2 f(x),\ x \in \mathbb{R},\ f \in E.$$

Jasno je da je A gust i stacionarno gust za $1 \leq p < \infty$, ali nije generator (lokalno) integrisane kosinus funkcije, $1 \leq p \leq \infty$. Ako je $p = \infty$, tada je lako

verifikovati da A nije stacionarno gust jer za svako $n \in \mathbb{N}$, funkcija $x \mapsto \frac{1}{x^{2n}+1}$ pripada $D(A^n) \setminus \overline{D(A^{n+1})}$.
Kako je $\sigma(\mathcal{A}) = \{x + ix^2 : x \in \mathbb{R}\}$ i kako je rezolventa operatora $\mathcal{A}$ polinomski ograničena, za svako $\varepsilon > 0$ i $\frac{1}{2} < \beta < 1$, $\mathcal{A}$ generiše $e^{-\varepsilon(-\mathcal{A})^b}$-polugrupu, gde je grana višeznacnog preslikavanja $z \mapsto e^{-\varepsilon(-z)^b}$ uzeta kao u Teoremi 1' u [11]; videti takodje [23], Primer 22.31. Za definiciju odgovarajućeg funkcionalnog računa videti [23].
Tada za sve $\alpha > 0$ i $\gamma > 0$ postoji dovoljno veliko $\beta > 0$ takvo da je $\Lambda_{\alpha,\beta,\gamma} \subset \rho(\mathcal{A})$ i da je rezolventa operatora $\mathcal{A}$ polinomski ograničena na tom regionu. Ovde $M(\cdot)$ označava asociranu funkciju niza $M_p = p!^s$, $s < 2$. Stoga A generiše ultradistribucioni sinus $*$-klase. Fiksirajmo $\delta \in (\frac{1}{s}, 1)$. Naš izbor za s implicira da je sa (videti [65], Teorema 1.3.2, str. 58, i [48])

$$S_\Theta(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\Lambda_{\alpha,\beta,\gamma}} e^{\lambda t} \tilde{K_\delta}(\lambda) R(\lambda : \mathcal{A}) d\lambda, \ t \geq 0,$$

definisana **globalna** K_δ-polugrupa generisana sa $\mathcal{A}$, jer je $|\tilde{K_\delta}(\lambda)| = O(e^{-M(\xi\lambda)})$, $|\lambda| \to \infty$, za sve $\xi > 0$. Dakle, A generiše globalnu K_δ-kosinus funkciju u E. Ona nije eksponencijalno ograničena, jer rezolventni skup za $\mathcal{A}$ ne sadrži desnu poluravan.

References

[1] W. ARENDT, Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems, Israel J. Math. **59** (1987), 327–352.

[2] W. ARENDT, O. EL-MENNAOUI, V. KEYANTUO, Local integrated semigroups: evolution with jumps of regularity, J. Math. Anal. Appl. **186** (1994), 572–595.

[3] W. ARENDT, F. NEUBRANDER, U. SCHLOTTERBECK, Interpolation of semigroups and integrated semigroups, Semigroup Forum **45** (1992), 26- 37.

[4] W. ARENDT, H. KELLERMANN, Integrated solutions of Volterra integrodifferential equations and applications, Volterra integrodifferential equations in Banach spaces and applications, Proc. Conf., Trento/Italy 1987, Pitman Res. Notes Math. Ser. **190** (1989), 21–51.

[5] W. ARENDT, O. EL-MENNAOUI, M. HIEBER, Boundary values of holomorphic semigroups, Proc. AMS **125** (1997), 635-647.

[6] W. ARENDT, C.J.K. BATTY, M. HIEBER, F. NEUBRANDER, *Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems*, Birkhäuser Verlag, 2001.

[7] M. BALABANE, H. EMAMI-RAD, Smooth distributions group and Schrödinger equation in $L^p(\mathbb{R}^n)$, J. Math. Anal. Appl. **70** (1979), 61–71.

[8] M. BALABANE, H. EMAMI-RAD, Pseudo-differential parabolic systems in $L^p(\mathbb{R}^n)$, Contribution to Non-Linear P.D.E., Research notes in Mathematics **89**, Pitman, New York (1983), 16-30.

[9] M. BALABANE, H. EMAMI-RAD, L^p estimates for Schrödinger evolution equations, Trans. AMS **292** (1985), 357-373.

[10] V. BARBU, *Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces,* Noordhoff Int. Publ. Leyde the Netherlands, 1976.

[11] B. BÄUMER, Approximate solutions to the abstract Cauchy problem, in: Evolution Equations and Their Applications in Physical and Life Sciences (Bad Herrenalb, 1998), 33-41. Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 215, Dekker, New York, 2001.

[12] B. BÄUMER, G. LUMER, F. NEUBRANDER, Convolution kernels and generalized functions, in: Generalized Functions, Operator Theory and Dynamical Systems. C.R.C. Research Notes in Math., Chapman & Hall, 1998.

[13] R. BEALS, On the abstract Cauchy problem, J. Funct. Analysis **10** (1972), 281–299.

[14] R. BEALS, Semigroups and abstract Gevrey spaces, J. Funct. Anal. **10** (1972), 300-308.

[15] R. W. BRAUN, R. MEISSE, B. A. TAYLOR, Ultradifferentiable functions an Fourir analysis, Results in Math. **17** (1990), 206-237.

[16] J. CHAZARAIN, Problémes de Cauchy abstraites et applications á quelques problémes mixtes, J. Funct. Anal. **7** (1971), 386-446.

[17] I. CIORANESCU, Local convoluted semigroups, in: Evolution Equations (Baton Rauge, LA, 1992), 107–122, Dekker, New York, 1995.

[18] I. CIORANESCU, V. KEYANTUO, C-semigroups: generation and analyticity, Integral Transform. Spec. Funct. **6** (1998), 15-25.

[19] I. CIORANESCU, G. LUMER, Problèmes d'évolution régularisés par un noyan général $K(t)$. Formule de Duhamel, prolongements, théorèmes de génération, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **319** (1995), 1273–1278.

[20] I. CIORANESCU, G. LUMER, On $K(t)$-convoluted semigroups, in: Recent Developments in Evolution Equations (Glasgow, 1994), 86–93. Longman Sci. Tech., Harlow, 1995.

[21] I. CIORANESCU, L. ZSIDO, ω-ultradistributions and their applications to operator theory, in: Spectral Theory, Banach Center Publications **8**, Warsaw 1982, 77–220.

[22] G. DA PRATO, E. SINESTRARI, Differential operators with nondense domain, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **14** (1987), 285–344.

[23] R. de LAUBENFELS, *Existence Families, Functional Calculi and Evolution Equations,* Lecture Notes in Mathematics 1570, Springer 1994.

[24] R. DELAUBENFELS, M. JAZAR, Functional calculi, regularized semigroups and integrated semigroups, Studia Math. **132** (1999), 151-172.

[25] R. DELAUBENFELS, Holomorphic C-existence families, Tokyo Journal of Mathematics **15** (1992), 17–38.

[26] R. DELAUBENFELS, Polynomials of generators of integrated semigroups, Proceedings of AMS **107** (1989), 197–204.

[27] R. DELAUBENFELS, C-semigroups and the Cauchy problem, J. Funct. Anal. **111** (1993), 44-61.

[28] R. de LAUBENFELS, Z. HUANG, S. WANG, Y. WANG, Laplace transforms of polynomially bounded vector-valued functions and semigroups of operators, Israel J. Math. **98** (1997), 189–207.

[29] A. J. DURAN, The analytic functionals in the lower half plane as a Gel'fand-Shilov space, Math. Nachr. **153** (1991), 145-167.

[30] A. J. DURAN, The Stieltjes moment problem with complex exponents, Math. Nachr. **158** (1992), 175–194.

[31] O. EL-MENNAOUI AND V. KEYANTUO, Trace theorems for holomorphic semigroups and the second order Cauchy problem, Proc. Amer. Math. Soc. **124** (1996), 1445–1458.

[32] H. A. EMAMI-RAD, Les semi-groupes distributions de Beurling, C. R. Acad. Sc. Série A **276**, 117-119.

[33] O. VON GRUDZINSKI, Temperierte Beurling-distributionen (German), Math. Nachr. **91** (1979), 297–320.

[34] M. HIEBER, Integrated semigroups and differential operators on L^p spaces, Math. Z. **291** (1995), 1-16.

[35] M. HIEBER, L^p spectra of pseudodifferential operators generating integrated semigroups, Trans. AMS **347** (1995), 4023-4035.

[36] E. HILLE, R.S. PHILLIPS, *Functional Analysis and Semigroups*, AMS, Providence, 1957.

[37] A. KANEKO, Representation of hyperfunctions by measures and some of its applications, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **19** (1972), 321–352.

[38] A. KANEKO, *Introduction to Hyperfunctions*, Kluwer, Dordercht, Boston, London, 1982.

[39] V. KEYANTUO, The Laplace transform and the ascent method for abstract wave equations, Journal of Differential Equations **122** (1995), 27–47.

[40] J. KISYŃSKI, Distribution semigroups and one parameter semigroups, Bulletin of the Polish Academy of Sciences **50** (2002), 189–216.

[41] H. KOMATSU, Ultradistributions, I. Structure theorems and a characterization, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **20** (1973), 25–105.

[42] H. KOMATSU, Ultradistributions, III. Vector valued ultradistributions the theory of kernels, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **29** (1982), 653–718.

[43] H. KOMATSU, Operational calculus and semi-groups of operators, in: Functional Analysis and Related topics (Kioto), Springer, Berlin, 213-234, 1991.

[44] M. KOSTIĆ, C-distribution semigroups, preprint.

[45] M. KOSTIĆ, On a class of quasi-distribution semigroups, preprint.

[46] M. KOSTIĆ, Distribution cosine functions, preprint.

[47] M. KOSTIĆ, On analytic integrated semigroups, to appear in Novi Sad Journal of Mathematics.

[48] M. KOSTIĆ, S. PILIPOVIĆ, Generalized semigroups, preprint.

[49] M. KOSTIĆ, S. PILIPOVIĆ, Convoluted cosine functions, analytic convoluted semigroups and their relations with ultradistribution and hyperfunction sines, preprint.

[50] M. KOSTIĆ, Convoluted C-cosine functions and convoluted C-semigroups, Bull. Cl. Sci. Math. Nat. Sci. Math. **28** (2003), 75–92.

[51] P.C. KUNSTMANN, Stationary dense operators and generation of non-dense distribution semigroups, J. Operator Theory **37** (1997), 111–120.

[52] P.C. KUNSTMANN, Distribution semigroups and abstract Cauchy problems, Trans. AMS **351** (1999), 837–856.

[53] P.C. KUNSTMANN, Banach space valued ultradistributions and applications to abstract Cauchy problems, preprint.

[54] P.C. KUNSTMANN, M. MIJATOVIĆ, S. PILIPOVIĆ, Classes of distribution semigroups, preprint.

[55] C.-C. KUO, S.-Y. SHAW, On α-times integrated C-semigroups and the abstract Cauchy problem, Studia Math. **142** (2000), 201-217.

[56] B. YA. LEVIN, *Lectures on Entire Functions*, Translations of Mathematical Monographs, Volume 150, American Mathematical Society, 1996.

[57] J.C. LI, S.Y. SHAW, N-times integrated C -semigroups and the abstract Cauchy problem, Taiwanese J. Math. **1** (1997), 75–102.

[58] M. LI, F. HUANG, Q. ZHENG, Local integrated C-semigroups, Studia Math. **145** (2001), 265–280.

[59] M. LI, Q. ZHENG, α-times integrated semigroups: local and global, Studia Math. **154** (2003), 243–252.

[60] J. L. LIONS, Semi-groupes distributions, Portugal. Math. **19** (1960), 141-164.

[61] C. LIZAMA, On the convergence and approximations of integrated semigroups, J. Math. Anal. Appl. **181** (1994), 89–103.

[62] G. LUMER, F. NEUBRANDER, The asymptotic Laplace transform: new results and relation to Komatsu's Laplace transform of hyperfunctions, in: Partial Differential Equations on Multistructures (Luminy, 1999), 147–162. Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 219, Dekker, New York, 2001.

[63] A. LUNARDI, *Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems,* Birkhäuser, Basel, 1995.

[64] R. MEISE, D. VOGT, *Introduction to Functional Analysis*, Translated from the German by M.S. Ramanujan and revised by the authors. Oxford Graduate Texts in Mathematics, 2. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1997.

[65] I.V. MELNIKOVA, A.I. FILINKOV, *"Abstract Cauchy problems: Three Approaches"*, Chapman & Hall/CRC, 2001.

[66] M. MIJATOVIĆ, S. PILIPOVIĆ, F. VAJZOVIĆ, α-times integrated semigroups ($\alpha \in \mathbb{R}^+$), J. Math. Anal. Appl. **210** (1997), 790-803.

[67] M. MIJATOVIĆ, S. PILIPOVIĆ, P.C. KUNSTMANN, Classes of distribution semigroups, preprint.

[68] D.S. MITRINOVIĆ, J. KEČKIĆ, *Cauchyjev Račun Ostataka sa Primenama*, Naučna knjiga, Beograd, 1991.

[69] I. MIYADERA, *Nonlinear Semigroups,* Translations of Mathemathical Monographs, AMS, 1992.

[70] F. NEUBRANDER, Integrated semigroups and their applications to the abstract Cauchy problem, Pacific J. Math. **135** (1988), 111–155.

[71] S. NICAISE, The Hille-Yoshida and Trotter-Kato theorems for integrated semigroups, J. Math. Anal. Appl. **180** (1993), 303–316.

[72] N. OKAZAWA, A generation theorem for semigroups of growth order α, Tohoku Math. J. **26** (1974), 39-51.

[73] S. ŌUCHI, Hyperfunction solutions of the abstract Cauchy problems, Proc. Japan Acad. **47** (1971), 541–544.

[74] A. PAZY, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations,* Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[75] F. PERIAGO, Global Existence, uniqueness, and continuous dependence for a semilinear initial value problem, J. Math. Anal. Appl. **280** (2003), 413-423.

[76] F. PERIAGO, B.STRAUB, On the existence and uniqueness of solutions for an incomplete second-order abstract Cauchy problem, Studia Math. **155** (2003), 183–193.

[77] H.-J. PETZSCHE, On E. Borel's theorem, Math. Ann. **18** (1988), 299-313.

[78] S. PILIPOVIĆ, Characterizations of bounded sets in spaces of ultradistributions, Proc. AMS **20** (1994), 1191-1206.

[79] S. PILIPOVIĆ, B. STANKOVIĆ, *Prostori Distribucija,* SANU, Novi Sad, 2000.

[80] S.-Y. SHAW, Cosine operator functions and Cauchy problems, in: International Summer School on Operator Methods for Evolution Equations and Approximation Problems, Bari, 2002.

[81] M. SOVA, Cosine operator functions, Rozprawy Mat. **49**, 1966.

[82] B. STRAUB, Fractional powers of operators with polynomially bounded resolvents and the semigroups generated by them, Hiroshima Math. J. **24** (1994), 529-548.

[83] N. TANAKA, Holomorphic C-semigroups and holomorphic semigroups, Semigroup Forum **38** (1989), 253-261.

[84] N. TANAKA, I. MIYADERA, C-semigroups and the abstract Cauchy problem, J. Math. Anal. Appl. **170** (1992), 196–206.

[85] N. TANAKA, N. OKAZAWA, Local C-semigroups and local integrated semigroups, Proc. London Math. Soc. **61** (1990), 63–90.

[86] H.R. THIEME, Positive perturbations of dual and integrated semigroups, Ado. Math. Sci. Appl. **6** (1996), 445–507.

[87] W. VON WAHL, Gebrochene Potenzen eines elliptischen Operators und parabolische Differentialgleichungen in Räumen hölderstetiger Funktionen, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. **11** (1972), 231-258.

[88] T.-J. XIAO, J. LIANG, Approximations of Laplace transforms and integrated semigroups, J. Funct. Anal. **172** (2000), 202–220.

[89] T.-J. XIAO, J. LIANG, Laplace transforms and integrated, regularized semigroups in locally convex spaces, J. Funct. Anal. **148** (1997), 448–479.

[90] T. XIAO, J. LIANG, Differential operators and C-wellposedness of complete second order abstract Cauchy problems, Pacific Journal of Mathematics **186** (1998), 167–191.

[91] T.-J. XIAO, J. LIANG. *The Cauchy Problem for Higher-Order Abstract Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[92] S. WANG, Quasi-distribution semigroups and integrated semigroups, J. Funct. Anal. **146** (1997), 352–381.

[93] S. WANG, Mild integrated C-existence families, Studia Math. **112** (1995), 251–266.

[94] S. WANG, Z. HUANG, Strongly continuous integrated C-cosine functions, Studia Math. **126** (1997), 273-289.

[95] S. WANG, Hille-Yoshida type theorems for local regularized semigroups and local integrated semigroups, Studia Math. **151** (2002), 45-67.

[96] Q. ZHENG, J. ZHANG, Gaussian estimates and regularized groups, Proc. AMS **127** (1999), 1089-1096.

[97] Q. ZHENG, Abstract parabolic systems and regularized semigroups, Pacific Journal of Mathematics **182** (1998), 183-199.

[98] Q. ZHENG, Coercive differential operators and fractionally integrated cosine functions, Taiwanese Journal of Mathematics **6** (2002), 59-65.

[99] J. ZHANG, Q. ZHENG, On α-times integrated cosine functions, Mathematica Japonica **50** (1999), 401–408.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Doktorska disertacija
VR

Autor: Marko Kostić
AU

Mentor: dr Stevan Pilipović
MN

Naslov rada: Konvolucione i distribucione C-polugrupe
NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: srpski, odn. engleski
JI

Zemlja publikovanja: Srbija i Crna Gora
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2004.
GO

Izdavač : Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet
MA

Fizički opis rada: 7/131/0/0/0/0/0
FO

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Funkcionalna analiza, Teorija operatora
ND

Ključne reči: konvolucione polugrupe, C-polugrupe, dobra postavljenost, ap-

straktni Cauchyjev problem, C-distribucione polugrupe, ultradistribucione i hiperfunkcione polugrupe
PO
UDK:

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku, Univerzitet u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod:
IZ
Ova disertacija se bavi analizom slabo postavljenih apstraktnih Cauchyjevih problema. U prvoj glavi su proučavane konvolucione, ultradistribucione i hiperfunkcione polugrupe, njihove medjusobne veze kao i veze sa lokalno integrisanim C-polugrupama.
U drugoj glavi su date strukturne osobine C-distribucionih polugrupa, dok su u trećoj glavi dati rezultati vezani za klasu $[r]$-polugrupa i njihovih primena u teoriji funkcionalnih računa.
U sledećoj glavi je sistematski izložena teorija distribucionih kosinus funkcija, dok se peta glava bavi analizom analitičkih integrisanih polugrupa. Šesta glava je posvećena analizi konvolucionih C-polugrupa i konvolucionih C-kosinus funkcija, dok su u sedmoj glavi prezntovani rezultati vezani za analitičke konvolucione polugrupe, konvolucione kosinus funkcije i njihove veze sa ultradistribucionim i hiperfunkcionim sinusima.
Datum prihvatanja teme od strane NN Veća: 16.07.2003.
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
KO

Predsednik: dr Marko Nedeljkov, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Stevan Pilipović, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, član Srpske akademije nauka i umetnosti, mentor

Član: dr Bogoljub Stanković, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u penziji, Univerzitet u Novom Sadu, član Srpske akademije nauka i umetnosti, član

Član: dr Vladimir Rakočević, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Nišu, član

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number :
ANO

Identification number :
INO

Document type : Monographic type
DT

Type of record : Printed text
TR

Contents code : PH.D. Thesis
CC

Author : Marko Kostić
AU

Mentor : Stevan Pilipović, Ph.D.
MN

Title: Convoluted and distribution C-semigroups

Language of text : Serbian (latin)
LT

Language of abstract : Serbian/English
LA

Country of publication : Serbia and Montenegro
CP

Locality of publication : Vojvodina
LP

Publication year : 2004.
PY

Publisher : Author's reprint
PU

Publ.place: University of Novi Sad, Faculty of Science and Mathematics
PP

Physical description: 7/131/0/0/0/0/0
PD

Scientific field : Mathematics
SF

Scientific discipline : Functional Analysis, Operator Theory
SD

Subject / Key words : convoluted semigroups, C-semigroups, well-posedness, abstract Cauchy problem, C-distribution semigroups, ultradistribution and hy-

perfunction semigroups
SKW
UC :

Holding data : Library, Department of Mathematics and Informatics, University of Novi Sad
HD

Note :
N

Abstract:
AB
This dissertation is devoted to the study of ill-posed abstract Cauchy problems. In Chapter 1 we deal with convoluted semigroups, ultradistribution semigroups and hyperfunction semigroups.
We give in Chapter 2 the basic structural characterizations of the class of C-distribution semigroups. Chapter 3 contains a short review of the results related to $[r]$-semigroups as well as their relations with functional calculi. In the next chapter we systematically investigate distribution cosine functions. Chapter 5 is devoted to the study of analytic integrated semigroups. In Chapter 6 we introduce and analyze the classes of convoluted C-semigroups and convoluted C-cosine functions. In Chapter 7 we obtain the structural properties of analytic convoluted semigroups and convoluted cosine functions. Afterwards we investigate their relations with ultradistribution and hyperfunction sines.

Accepted by Scientific Board on :
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board :
DB

President: dr Marko Nedeljkov, Associate Professor,
Faculty of Natural Sciences and Mathematics, University of Novi Sad

Member: academician Stevan Pilipović, Full Professor,
Faculty of Natural Sciences and Mathematics, University of Novi Sad, mentor

Member: academician Bogoljub Stanković, full professor in pension, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, University of Novi Sad

Member: dr Vladimir Rakočević, full professor, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, University of Niš