UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
INSTITUT ZA MATEMATIKU

EGZISTENCIJA NEPOKRETNE TAČKE U FAZI STRUKTURAMA

- doktorska disertacija -

Mentor
Prof. dr Olga Hadžić

Kandidat
mr Tatjana Žikić

Novi Sad, 2002.

PREDGOVOR

Teorija nepokretne tačke u fazi strukturama spada u veoma savremene oblasti nelinearne analize sa brojnim primenama u mnogim prirodnim naukama. Teorija fazi struktura je veoma obimna oblast i sadrži verovatnosne metričke prostore kao specijalan slučaj. Kao relativno nova ova oblast matematike privlači pažnju sve većeg broja naučnika, tako da za sada postoje na stotine radova iz ove oblasti. Ova oblast nelinearne analize je razvijena u klasičnim prostorima, kao što su normirani prostori, lokalno konveksni i vektorsko topološki prostori i prostori sa konveksnom strukturom, a može se primeniti i u stohastičkoj analizi za rešavanje stohastičkih operatorskih jednačina.

Pojam i osnovne osobine statističkog metričkog prostora prvi je postavio K. Menger 1942. godine u radu [29], u kojem je dao postulate za funkciju raspodele $F_{p,q}$, koji su se odnosili i na uopštenu nejednakost trougla. Ubrzo posle objavljivanja Mengerovog rada, A. Waild je napisao rad [50] u kojem je kritikovao Mengerovu uopštenu nejednakost trougla i predložio novu. K. Menger je 1951. godine u [30] usvojio Waildovu verziju nejednakosti trougla. Velik značaj za razvoj teorije verovatnosnih metričkih prostora ima knjiga B. Schweizera i A. Sklara [38] koja sadrži i mnoge podatke o ovoj oblasti matematike, važne kako za teoriju tako i za primenu. Teorija verovatnosnih metričkih prostora predstavlja vezu između verovatnosne teorije i funkcionalne analize, koja ima veliki praktičan značaj a sadrži obične metričke prostore kao specijalan slučaj.

U ovom radu se razmatraju jednoznačna i višeznačna preslikavanja u verovatnosnim metričkim i fazi metričkim prostorima sa aspekta nelinearne analize, i to onaj deo ove oblasti koji se odnosi na teoriju nepokretne tačke.

Rad sadrži tri poglavlja:

Glava 1 Uvod

Glava 2 Teoreme o nepokretnoj tački za jednoznačna preslikavanja

Glava 3 Teoreme o nepokretnoj tački za višeznačna preslikavanja

U prvoj glavi su date osnovne definicije verovatnosnih metričkih i fazi metričkih prostora koje se koriste u daljem radu. Posebno se proučavaju klase t-normi T i nizova $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ koji teže 1 i za koje je $\lim_{n\to\infty} \mathbf{T}_{i=n}^{\infty} x_i = 1$. Više o ovoj temi može se naći u [11], [14], [18], [19], [23], [24], [25], [29], [30], [32], [36], [37], [38], [40], [50], [51].

U drugoj glavi su dokazane teoreme o nepokretnoj tački za jednoznačna preslikavanja koje predstavljaju verovatnosno uopštenje Banahovog principa kontrakcije, teorema koja se odnosi na teoriju kontraktora i teorema o nepokretnoj tački u sekvencijalno kompletnim Hausdorfovim kvazi-uniformnim prostorima. Literatura na kojoj se zasniva ovo poglavlje je [1], [2], [3], [4], [5], [6], [10], [11], [14], [16], [19], [22], [26], [27], [28], [34], [39], [41], [42], [43], [44], [46], [47], [49], [52].

U trećoj glavi dokazane su teoreme o nepokretnoj tački koje predstavljaju višeznačna uopštenja Banahovog principa kontrakcija, i to teorema o zajedničkoj nepokretnoj tački za Nadlerovu q-kontrakciju i teorema o zajedničkoj nepokretnoj tački za Hiksovu kontrakciju. Takođe je dokazana teorema koja obezbeđuje jedinstveno rešenje za nelinearne operatorske jednačine sa višeznačnim operatorom uz pomoć kontraktora. Relevantna literatura za ovu oblast je [1], [2], [6], [7], [8], [12], [13], [14], [15], [17], [18], [19], [21], [31], [33], [35], [45], [48], [53].

Prof. dr Olgi Hadžić dugujem duboku i iskrenu zahvalnost na pomoći koju mi je pružila i na podsticaju i podršci.

Na korisnim primedbama zahvaljujem se članovima komisije prof. dr Endre Papu i prof. dr Mili Stojaković.

Sadržaj

Glava 1

Uvod

Pojam trougaonih normi (t-normi) prvi je uveo K. Menger u [29], pošavši od ideje osnovne nejednakosti trougla. Prva oblast gde su t-norme imale značajnu ulogu je teorija verovatnosnih metričkih prostora. Takođe, t-norme su značajna operacija u raznim poljima kao što su fazi skupovi, fazi logika [24], i njihove primene, kao i u teoriji generalizovanih mera [24, 32] i teoriji nelinearnih diferencijalnih i diferencijalnih jednačina [32]. Međutim originalni skup aksioma je bio slab i sadržavao je i funkcije koje su danas poznate kao trougaone konorme. B. Schweizer i A. Sklar [36, 37] su izvršili promene i definisali aksiome za t-norme koje se i danas koriste. Većina rezultata vezanih za t-norme koji su dobijeni u tom pravcu razvoja su prikazani u monografiji [38].

U ovoj glavi se daju osnovne definicije vezane za verovatnosne metričke i fazi metričke prostore kao i t-norme i t-konorme. Posebna pažnja se posvećuje beskonačnoj ekstenziji t-normi i t-konormi, i daje primer na Dombievoj, Aczél-Alsininoj i Sugeno-Weber familiji t-normi. Data je definicija t-norme H-tipa koja je jako značajna za dalji rad. Uvodi se pojam Arhimedovih, striktnih i nilpotentnih t-normi, pojam multiplikativnih i aditivnih generatora za t-norme i t-konorme a jedan deo je posvećen dekompozabilnim merama.

1.1 Trougaone norme, verovatnosni metrički i fazi metrički prostori

Definicija 1.1 *Preslikavanje* $T : [0, 1]\times[0, 1] \to [0, 1]$ *je* **trougaona norma** *(t-norma) ako su zadovoljeni sledeći uslovi:*

(T1) $T(a, 1) = a$, *za svako* $a \in [0, 1]$.

(T2) $T(a, b) = T(b, a)$, *za svako* $a, b \in [0, 1]$.

(T3) $a \geq c$ *i* $b \geq d \Rightarrow T(a, b) \geq T(c, d)$ *za svako* $a, b, c, d \in [0, 1]$.

(T4) $T(a, T(b, c)) = T(T(a, b), c)$ *za svako* $a, b, c \in [0, 1]$.

Primer 1.1: Osnovne četiri t-norme su:

(i) Minimum t-norma, u oznaci (T_M), se definiše sa

$$T_M(x, y) = \min(x, y).$$

(ii) t-norma proizvoda, u oznaci (T_P), se definiše sa

$$T_P(x, y) = x \cdot y.$$

(iii) Lukasiewiczeva t-norma, u oznaci (T_L), se definiše sa

$$T_L(x, y) = \max(x + y - 1, 0).$$

(iv) Drastični proizvod, u oznaci (T_D), se definiše na sledeći način

$$T_D(x, y) = \begin{cases} \min(x, y), & \max(x, y) = 1 \\ 0, & \text{inače} . \end{cases}$$

Primer 1.2: (i) **Dombieva** familija t-normi $(T_\lambda^D)_{\lambda\in[0,\infty]}$

se definiše na sledeći način:

$$T_\lambda^D(x,y)=\begin{cases} T_D(x,y), & \lambda=0\\ T_M(x,y), & \lambda=\infty\\ \frac{1}{1+\left(\left(\frac{1-x}{x}\right)^\lambda+\left(\frac{1-y}{y}\right)^\lambda\right)^{1/\lambda}}, & \lambda\in(0,\infty).\end{cases}$$

(ii) Aczél-Alsinina familija t-normi $(T_\lambda^{AA})_{\lambda\in[0,\infty]}$ koja se definiše na sledeći način

$$T_\lambda^{AA}(x,y)=\begin{cases} T_D(x,y), & \lambda=0\\ T_M(x,y), & \lambda=\infty\\ e^{-((-\log x)^\lambda+(-\log y)^\lambda)^{1/\lambda}}, & \lambda\in(0,\infty).\end{cases}$$

(iii) Sugeno-Weber familija t-normi $(T_\lambda^{SW})_{\lambda\in[-1,\infty]}$ koja se definiše na sledeći način

$$T_\lambda^{SW}(x,y)=\begin{cases} T_D(x,y), & \lambda=-1\\ T_P(x,y), & \lambda=\infty\\ \max(0,\frac{x+y-1+\lambda xy}{1+\lambda}), & \lambda\in(-1,\infty).\end{cases}$$

Kako je t-norma preslikavanje jediničnog kvadrata u jediničan interval može da se izvrši poređenje t-normi na sledeći način:

Definicija 1.2 : *(i) Ako dve t-norme T_1 i T_2 zadovoljavaju uslov $T_1(x,y)\leq T_2(x,y)$ za svako $(x,y)\in[0,1]^2$, onda je t-norma T_1* **slabija** *od t-norme T_2, ili ekvivalentno t-norma T_2 je* **jača** *od t-norme T_1 i zapisuje se*

$$T_1\leq T_2.$$

(ii) $T_1<T_2$ ako je $T_1\leq T_2$ i $T_1\neq T_2$, tj. kada je $T_1\leq T_2$ i postoji $(x_0,y_0)\in[0,1]^2$ takvo da je $T_1(x_0,y_0)<T_2(x_0,y_0)$.

t-norma T_M je najjača a T_D najslabija t-norma, tj. za proizvoljnu t-normu T važi:

$$T_D \leq T \leq T_M.$$

Lako se pokazuje i da je $T_L < T_P$ za svako x, $y \in [0,\, 1]$ pa je poredak navedenih t-normi sledeći:

$$T_D < T_L < T_P < T_M.$$

Schweizer i Sklar su 1961. godine uveli pojam trougaone konorme kao dualne operacije trougaonoj normi.

Definicija 1.3 : **Trougaona konorma** *(t-konorma) je preslikavanje* $S : [0,\, 1]^2 \to [0,\, 1]$ *tako da je za svako* $(x,\, y,\, z) \in [0,\, 1]^3$ *zadovoljeno:*

$(S1)$ $S(x,\, y) = S(y,\, x)$

$(S2)$ $S(x,\, S(y,\, z)) = S(S(x,\, y),\, z)$

$(S3)$ $S(x,\, y) \leq S(x,\, z)$ *za* $y \leq z$

$(S4)$ $S(x,\, 0) = x$.

Veza između t-normi i t-konormi je data sledećom propozicijom (videti [24]).

Propozicija 1.1 *Funkcija* $S : [0,\, 1]^2 \to [0,\, 1]$ *je t-konorma ako i samo ako postoji t-norma* T *takva da je za svako* $(x,\, y) \in [0,\, 1]^2$ *zadovoljeno*

$$S(x,\, y) = 1 - T(1 - x,\, 1 - y).$$

Važi i obrnuto tvrđenje, tj. od t-konorme S se može dobiti t-norma T na sledeći način:

$$T(x,\, y) = 1 - S(1 - x,\, 1 - y).$$

Primer 1.3: Osnovne četiri t-konorme su S_M, S_P, S_L i S_D gde je

$$S_M(x, y) = \max(x, y)$$

$$S_P(x, y) = 1 - (1 - x)(1 - y) = x + y - xy$$

$$S_L(x, y) = \min(x + y, 1)$$

$$S_D(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in (0, 1]^2 \\ \max(x, y), & \text{inače}. \end{cases}$$

Na osnovu Propozicije 1.1 sledi da svaka t-norma ima dualnu t-konormu pa su (T_M, S_M), (T_P, S_P), (T_L, S_L) i (T_D, S_D) parovi t-normi i t-konormi koje su dualne jedna drugoj.

Ako za dve t-norme T_1 i T_2 važi $T_1 \leq T_2$ tada za dualne t-konorme S_1 i S_2 važi $S_1 \geq S_2$. Prema tome poredak je $S_M < S_P < S_L < S_D$.

Primer 1.4: a) Familija Dombievih t-konormi $(S_\lambda^D)_{\lambda \in [0, \infty]}$ je data sa:

$$S_\lambda^D(x, y) = \begin{cases} S_D(x, y), & \lambda = 0 \\ S_M(x, y), & \lambda = \infty \\ 1 - \frac{1}{1 + \left(\left(\frac{x}{1-x}\right)^\lambda + \left(\frac{y}{1-y}\right)^\lambda\right)^{1/\lambda}}, & \lambda \in (0, \infty). \end{cases}$$

b) Aczél-Alsinina familija t-konormi $(S_\lambda^{AA})_{\lambda \in [0, \infty]}$ je data sa

$$S_\lambda^{AA}(x, y) = \begin{cases} S_D(x, y), & \lambda = 0 \\ S_M(x, y), & \lambda = \infty \\ 1 - e^{-((-\log(1-x))^\lambda + (-\log(1-y))^\lambda)^{1/\lambda}}, & \lambda \in (0, \infty). \end{cases}$$

c) Sugeno-Weber familija t-konormi $(S_\lambda^{SW})_{\lambda \in [-1, \infty]}$ je data sa

$$S_\lambda^{SW}(x, y) = \begin{cases} S_D(x, y), & \lambda = -1 \\ S_M(x, y), & \lambda = \infty \\ \min(1, x + y + \lambda xy), & \lambda \in (-1, \infty). \end{cases}$$

Definicija 1.4 : *(i) t-norma T je* **striktna** *ako je neprekidna i striktno monotona.*

(ii) t-norma T je **nilpotentna** *ako je neprekidna i svako $a \in (0, 1)$ je nilpotentan elemenat za T tj. za svako $a \in (0, 1)$ postoji $b \in (0, 1)$ takav da je $T(a, b) = 0$.*

(iii) Neprekidna trougaona norma $T : [0, 1]^2 \longrightarrow [0, 1]$ je **Arhimedova** *trougaona norma ako je $T(x, x) < x$, za svako $x \in (0, 1)$.*

Klasa neprekidnih Arhimedovih t-normi se sastoji od dve disjunktne klase: klase striktnih t-normi i klase nilpotentnih t-normi.
t-norma proizvoda T_P, Lukasiewiczeva t-norma T_L (koje nisu strogo monotone, pa prema tome nisu striktne), i najslabija t-norma T_D su Arhimedove, t-norma minimum T_M međutim nije Arhimedova t-norma.

Generalni način za konstrukciju novih t-normi, pomoću datih t-normi je dat sledećom teoremom (videti [24], [38]).

Teorema 1.1 : *Neka je K prebrojiv skup. Neka je $(T_k)_{k\in K}$ familija t-normi i neka je $\{(\alpha_k, \beta_k)\}_{k\in K}$ familija međusobno disjunktnih otvorenih podintervala jediničnog intervala $[0, 1]$. Neka je linearna transformacija $\varphi_k : [\alpha_k, \beta_k] \longrightarrow [0, 1]$, $k \in K$ data sa*

$$\varphi_k(u) = \frac{u - \alpha_k}{\beta_k - \alpha_k}.$$

Tada je funkcija $T : [0, 1]^2 \longrightarrow [0, 1]$ definisana sa

$$T(x, y) = \begin{cases} \varphi_k^{-1}(T_k(\varphi_k(x), \varphi_k(y))), & (x, y) \in (\alpha_k, \beta_k)^2 \\ \min(x, y), & \textit{inače}. \end{cases}$$

trougaona norma. Trougaona norma T se zove **ordinalna suma** *za sumande T_k, $k \in K$. Pisaćemo $T = \{< (\alpha_k, \beta_k), T_k > k \in K\}$.*

Definicija 1.5 *: Neka su $[a, b]$ i $[c, d]$ dva podintervala realne prave $[-\infty, \infty]$ i neka je $f : [a, b] \to [c, d]$ monotona funkcija.* **Pseudoinverzno** *preslikavanje $f^{(-1)} : [c, d] \to [a, b]$ za f se definiše na sledeći način :*

$$f^{(-1)}(y) = \sup\{x \in [a, b]; (f(x) - y)(f(b) - f(a)) < 0\}.$$

Sledeća teorema je data u [24].

Teorema 1.2 *: Funkcija $T : [0, 1]^2 \to [0, 1]$ je neprekidna Arhimedova trougaona norma ako i samo ako postoji neprekidna, strogo rastuća funkcija $\theta : [0, 1] \to [0, 1]$ takva da je $\theta(1) = 1$ (takozvani* **multiplikativni generator***), i takva da je za svako $x, y \in [0, 1]$*

$$T(x, y) = \theta^{(-1)}(\theta(x)\theta(y)).$$

T je striktna t-norma ako i samo ako svaki multiplikativni generator θ za T zadovoljava $\theta(0) = 0$.

Ako t-norma T ima multiplikativan generator θ, tada je funkcija $\xi : [0, 1] \to [0, 1]$ data sa $\xi(x) = \theta(1 - x)$ multiplikativni generator za dualnu t-konormu S.

Primer 1.5: i) Za Dombievu familiju striktnih t-normi i konormi $(T_\lambda^D)_{\lambda\in[0,\infty]}$ i $(S_\lambda^D)_{\lambda\in[0,\infty]}$ multiplikativni generatori su

$$\theta_\lambda^D(x) = e^{-(\frac{1-x}{x})^\lambda} \ i \ \xi_\lambda^D = e^{-(\frac{x}{1-x})^\lambda}.$$

ii) Za Aczél-Alsininu familiju striktnih t-normi i t-konormi $(T_\lambda^{AA})_{\lambda\in[0,\infty]}$, $(S_\lambda^{AA})_{\lambda\in[0,\infty]}$ multiplikativni generatori su

$$\theta_\lambda^{AA}(x) = e^{-(-\log x)^\lambda} \ i \ \xi_\lambda^{AA} = e^{-(-\log(1-x))^\lambda}.$$

Teorema 1.3 *Funkcija* $T : [0, 1]^2 \longrightarrow [0, 1]$ *je neprekidna Arhimedova trougaona norma ako i samo ako postoji neprekidna, strogo opadajuća funkcija* $t : [0, 1] \longrightarrow [0, +\infty]$, $t(1) = 0$ *takva da za svako* $x, y \in [0, 1]$ *važi*

$$T(x, y) = t^{-1}(\min(t(x) + t(y), t(0))) = t^{(-1)}(t(x) + t(y)).$$

Funkcija t *se naziva aditivan generator za* T, *on je jedinstveno determinisan sa* T *do pozitivne multiplikativne konstante.*

Primer 1.6: Za familiju Sugeno-Weber t-konormi $(S_\lambda^{SW})_{\lambda \in (-1, \infty)}$ odgovarajući aditivan generator je dat sa

$$s_\lambda^{SW}(x) = \begin{cases} x, & \lambda = 0 \\ \frac{\log(1+\lambda x)}{\log(1+\lambda)}, & \lambda \in (-1, \infty) \backslash \{0\}. \end{cases}$$

Ako je $t : [0, 1] \longrightarrow [0, \infty]$ aditivan generator za neprekidnu t-normu T, tada je $\theta(x) = e^{-t(x)}$ multiplikativni generator za T.

Neka je Δ^+ skup svih funkcija raspodele $F : \mathbf{R} \longrightarrow [0, 1]$

takvih da je $F(0) = 0$ (F je neopadajuća, neprekidna sa leve strane i $\sup_{x \in \mathbf{R}} F(x) = 1$.)

Sledeća definicija je data u [36].

Definicija 1.6 *Uređen par* $(S, \mathcal{F})$ *je* **verovatnosni metrički prostor** *ako je* S *neprazan skup i* $\mathcal{F} : S \times S \longrightarrow \Delta^+$, *gde je* $\mathcal{F}(p, q) = F_{p,q}$, *za svako* $(p, q) \in S \times S$, *i zadovoljeni su sledeći uslovi:*

1. $F_{p,q}(0) = 0$, *za svako* $p, q \in S$.

2. $F_{p,q} = F_{q,p}$, *za svako* $p, q \in S$.

3. $F_{p,q}(u) = 1$, *za svako* $u > 0 \Leftrightarrow p = q$.

4. $F_{p,q}(x) = 1$ *i* $F_{q,r}(y) = 1 \Rightarrow F_{p,r}(x + y) = 1$, *za svako*

p, q, $r \in S$ i svako x, $y > 0$.

Definicija 1.7 *Mengerov prostor je uređena trojka $(S, \mathcal{F}, T)$, gde je $(S, \mathcal{F})$ verovatnosni metrički prostor, T je t-norma i zadovoljena je sledeća nejednakost:*

$$F_{p,r}(x+y) \geq T(F_{p,q}(x),\ F_{q,r}(y))$$

za svako p, q, $r \in S$ i svako x, $y > 0$.

Primer 1.7: (**Drossos**): Neka je (M, d) separabilan metrički prostor i (Ω, Σ, P) prostor verovatnoće. Neka je S skup svih klasa ekvivalencije merljivih preslikavanja $X : \Omega \to M$. Ako $X, Y \in S$ i $x \in \mathbf{R}$ tada $F_{X,Y}(x)$ definišemo na sledeći način:

$$F_{X,Y}(x) = P(\{w;\ w \in \Omega,\ d(X(w),\ Y(w)) < x\}).$$

Očigledno je $F_{X,Y}(0) = 0$ za svako X, $Y \in S$; $F_{X,Y} = F_{Y,X}$ za svako X, $Y \in S$; za svako X, $Y \in S$, $F_{X,Y}(x) = 1$ za svako $x > 0 \Rightarrow X = Y$.

Pokazaćemo da je za svako X, Y, $Z \in S$ i svako x, $y \in \mathbf{R}$ zadovoljena sledeća nejednakost:

$$F_{X,Z}(x+y) \geq T_L(F_{X,Y}(x),\ F_{Y,Z}(y)) \tag{1.1}$$

Da bismo dokazali (1.1), dokazaćemo da

$$P(\{w;\ w \in \Omega,\ d(X(w),\ Z(w)) < x+y\}) \geq P(\{w;\ w \in \Omega,\ d(X(w),\ Y(w)) < x\}) + P(\{w;\ w \in \Omega,\ d(Y(w),\ Z(w)) < y\}) - 1. \tag{1.2}$$

Neka je $A = \{w;\ w \in \Omega,\ d(X(w),\ Y(w)) < x\}$, $B = \{w;\ w \in \Omega,\ d(Y(w),\ Z(w)) < y\}$ i $C = \{w;\ w \in \Omega,\ d(X(w),\ Z(w)) < x+y\}$

Neka $w_0 \in A \cap B$. Tada je $d(X(w_0),\ Y(w_0)) < x$ i $d(Y(w_0),\ Z(w_0)) < y$. Na osnovu nejednakosti trougla

$$d(X(w),\ Z(w)) \leq d(X(w),\ Y(w)) + d(Y(w),\ Z(w)),\ \ w \in \Omega$$

sledi da $w_0 \in C$, odnosno $A \cap B \subseteq C$. Sada iz $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$ sledi da je $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$, odnosno $P(A \cap B) \geq \max(P(A) + P(B) - 1,\, 0)$, i prema tome (1.2) je zadovoljeno.

Ako je $(S,\, \mathcal{F},\, T)$ Mengerov verovatnosni metrički prostor sa neprekidnom t-normom T, tada je S Hausdorfov topološki prostor sa topologijom indukovanom familijom $(\varepsilon,\, \lambda)$-okolina

$$\mathcal{U} = \{U_p(\varepsilon,\, \lambda) : p \in S, \varepsilon > 0,\, \lambda \in (0,\, 1)\}, \text{ gde je}$$

$$U_p(\varepsilon,\, \lambda) = \{x \in S : F_{x,p}(\varepsilon) > 1 - \lambda\}.$$

Ako je $\sup\limits_{x<1} T(x,\, x) = 1$, tada familija $\{\mathcal{U}\}$ definiše na S metrizabilnu topologiju.

Neka je $(S,\, \mathcal{F})$ verovatnosni metrički prostor. Niz $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ iz S je **Košijev niz** ako i samo ako za svako $\varepsilon > 0$ i $\lambda \in (0,\, 1)$ postoji $n_0(\varepsilon,\, \lambda) \in \mathbf{N}$ takav da

$$F_{x_{n+p},x_n}(\varepsilon) > 1 - \lambda, \text{ za svako } n \geq n_0(\varepsilon,\, \lambda) \text{ i svako } p \in \mathbf{N}.$$

Ako je verovatnosni metrički prostor $(S,\, \mathcal{F})$ takav da svaki Košijev niz iz S konvergira u S tada je $(S,\, \mathcal{F})$ kompletan prostor.

Fazi metrički prostori koje su uveli Kramosil i Michalek [25], predstavljaju generalizaciju verovatnosnih metričkih prostora. Koristeći pojam fazi broja, Kaleva i Seikkala [23] su definisali pojam fazi metričkog prostora i ispitali vezu između verovatnosnih metričkih i fazi metričkih prostora.

Fazi broj u je preslikavanje $u : \mathbf{R} \longrightarrow [0,\, 1]$. Fazi broj u je normalan ako postoji $t_0 \in \mathbf{R}$ takav da je $u(t_0) = 1$ i konveksan ako za svako $t_1,\, t_2 \in \mathbf{R}$ i za svako $\mu \in [0,\, 1]$ važi

$$u(\mu t_1 + (1 - \mu)t_2) \geq \min(u(t_1),\, u(t_2)).$$

Svi od gore poluneprekidni, normalni, konveksni fazi brojevi se označavaju sa $\mathcal{E}$.
Neka je

$$\mathcal{E}^+ = \{u;\ u \in \mathcal{E},\ u(t) = 0, \quad \text{za svako } t < 0\}.$$

α **- nivo sečenja** $[u]_\alpha = \{t;\ t \in \mathbf{R},\ u(t) \geq \alpha\}$ $(\alpha \in (0,\ 1])$ za fazi broj u je neprazan zatvoren interval $[a^\alpha, b^\alpha]$, ako a^α, $b^\alpha \in \mathbf{R}$, a ako je $a^\alpha = -\infty$ ili $b^\alpha = +\infty$ tada je poluotvoren interval $(-\infty,\ b^\alpha]$, $[a^\alpha, \infty)$.

Neka su L, R : $[0,\ 1] \times [0,\ 1] \longrightarrow [0,\ 1]$ simetrične, neopadajuće po oba argumenta i važi da je $L(0,\ 0) = 0$, $R(1,\ 1) = 1$.

Neka je X neprazan skup, $d : X \times X \longrightarrow \mathcal{E}^+$ i za svako $\alpha \in (0,\ 1]$ i za $(x,\ y) \in X \times X$ je

$$[d(x,\ y)]_\alpha = [\lambda_\alpha(x,\ y),\ \rho_\alpha(x,\ y)],\ \alpha \in (0,\ 1].$$

Uređena četvorka (X, d, L, R) se naziva **fazi metrički prostor**, a d je **fazi metrika** ako važe uslovi (i)-(iii), gde je

(i) za svako x, $y \in X$

$$d(x,\ y) = I_{\{0\}} \Longleftrightarrow x = y$$

gde je

$$I_{\{0\}}(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0. \end{cases}$$

(ii) za svako x, $y \in X$, $d(x,\ y) = d(y,\ x)$.

(iii) za svako x, y, $z \in X$

a) $d(x,\ z)(s+t) \geq L(d(x,\ y)(s),\ d(y,\ z)(t))$, kad god je $s \leq \lambda_1(x,\ y)$, $t \leq \lambda_1(y,\ z)$ i $s + t \leq \lambda_1(x,\ z)$,

b) $d(x,\ z)(s+t) \leq R(d(x,\ y)(s),\ d(y,\ z)(t))$, kad god je $s \geq \lambda_1(x,\ y)$, $t \geq \lambda_1(y,\ z)$ i $s + t \geq \lambda_1(x,\ z)$.

Svaki Mengerov prostor $(X, \mathcal{F}, T)$ je i fazi metrički prostor (X, d, L, R) ako je

$$d(x, y)(u) = \begin{cases} 0 & , \quad u < \sup\{s;\, F_{x,y}(s) = 0\} = u_{x,y} \\ 1 - F_{x,y}(u), & u \geq u_{x,y} \end{cases}$$

Funkcije R i L se definišu na sledeći način:

$$L \equiv 0, \quad R(a, b) = 1 - T(1 - a, 1 - b)\,(a, b \in [0, 1]).$$

Obrnuti zaključak ne važi u svim slučajevima. Pod izvesnim dodatnim uslovima za fazi metriku d fazi metrički prostor (X, d, L, R) je Mengerov prostor. Ako je:

$$\lim_{u \to \infty} d(x, y)(u) = 0, \text{ za svako } x, y \in X,$$

tada je $(X, \mathcal{F}, T)$ Mengerov prostor, gde je $T(a, b) = 1 - R(1 - a, 1 - b)$, za svako $a, b \in [0, 1]$ a preslikavanje $\mathcal{F}$ se definiše sa $(x, y \in X, s \in \mathbf{R})$

$F_{x,y}(s) = 0$, za $s < \lambda_1(x, y)$, $F_{x,y}(s) = 1 - d(x, y)(s)$, za $s \geq \lambda_1(x, y)$.

Sledećom lemom, datoj u [15], uopštena je veza između fazi metričkih i verovatnosnih metričkih prostora.

Lema 1.1 *Neka je (X, d, L, R) fazi metrički prostor, $f : [0, 1] \to [0, 1]$ neprekidna, monotono opadajuća funkcija takva da je $f(1) = 0$ i $f(0) = 1$ i d i R zadovoljavaju sledeće uslove:*

$\lim_{s \to \infty} d(x, y)(s) = 0$, *za svako* $x, y \in X$

$R(a, 1) = 1$, $R(a, 0) = a$, *za svako* $a \in [0, 1]$

R je asocijativna.

Tada je $(X, \mathcal{F}, T)$ Mengerov prostor, gde su $\mathcal{F}$ i T definisani na sledeći način:

$$F(x, y)(s) = \begin{cases} 0, \text{ ako } s < \lambda_1(x, y) \\ f^{-1}[d(x, y)(s)], s \geq \lambda_1(x, y). \end{cases}$$

$T(a, b) = f^{-1}[R(f(a), f(b))]$, $(a, b \in [0, 1])$.

Važnu klasu Mengerovih prostora čine verovatnosni normirani prostori koje je uveo Sherstnev [40].

Neka je S vektorski prostor nad poljem realnih ili kompleksnih brojeva $\mathcal{K}$, $\mathcal{F} : S \to \Delta^+$ i t-norma $T \geq T_L$. Uređena trojka $(S, \mathcal{F}, T)$ je **verovatnosni normiran prostor** ako i samo ako su zadovoljeni sledeći uslovi, gde je $\mathcal{F}(p) = F_p$ za svako $p \in S$:

1. $F_p(0) = 0$, za svako $p \in S$ i $F_p = H \Rightarrow p = 0$

gde je

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

2. $F_{\lambda p}(x) = F_p\left(\frac{x}{|\lambda|}\right)$, za svako $p \in S$, $x > 0$, $\lambda \in \mathcal{K}\backslash\{0\}$.

3. $F_{p+q}(x + y) \geq T(F_p(x), F_q(y))$, za svako $p, q \in S$ i svako $x, y > 0$.

Ako je $(S, \mathcal{F}, T)$ verovatnosni normiran prostor i ako se za svako $(p, q) \in S \times S$, $\overline{\mathcal{F}} : S \times S \to \Delta^+$ definiše na sledeći način:

$$\overline{\mathcal{F}}(p, q) = F_{p-q},$$

tada je $(S, \overline{\mathcal{F}}, T)$ Mengerov prostor.

Sledeća definicija je data u [6].

Definicija 1.8 *$(S, \mathcal{F}, T)$ se naziva* **nearhimedovski Mengerov verovatnosni metrički prostor** *ako je $(S, \mathcal{F}, T)$ Mengerov verovatnosni metrički prostor i t-norma T zadovoljava sledeći uslov: za* *svako* $x,\ y,\ z \in S$ *i* $t_1,\ t_2 \geq 0$

$$F_{x,z}(\max(t_1,\ t_2)) \geq T(F_{x,y}(t_1),\ F_{y,z}(t_2)).$$

Ultrametrički prostori pripadaju klasi nearhimedovskih verovatnosnih metričkih prostora.

Definicija 1.9 $(M,\ d)$ *je ultrametrički prostor ako važi*

$$d(x,\ z) \leq \max\{d(x,\ y),\ d(y,\ z)\},$$

za svako $x,\ y,\ z \in M$.

U [9] je dat primer ultrametričkih prostora važan za teoriju distribucija.

Primer 1.8: Neka je $(E,\ p)$ seminormirana algebra nad $\mathcal{K} \in \{\mathbf{R},\ \mathbf{C}\}$, takva da je

$$p(ab) \leq p(a) \cdot p(b), \text{ za svako } a,\ b \in E.$$

Neka je $r \in \mathbf{R}_+^{\mathbf{N}}$, gde je $r = (r_n)_n$, i $r_n \geq 0$ $(n \in \mathbf{N})$, $r_n \searrow 0$. Tada se za svako $f \in E^{\mathbf{N}}$, gde je $f = (f_n)_n$ $(f_n \in E)$, definiše seminorma

$$\|f\|_{p,r} = \lim_{n\to\infty} \sup p(f_n)^{r_n}.$$

Podprostori $\mathcal{F}_{p,r}$ i $\mathcal{K}_{p,r}$ prostora $E^{\mathbf{N}}$ se definišu na sledeći način:

$$\mathcal{F}_{p,r} = \{f \in E^{\mathbf{N}} \mid \|f\|_{p,r} < \infty\},$$

$$\mathcal{K}_{p,r} = \{f \in E^{\mathbf{N}} \mid \|f\|_{p,r} = 0\}.$$

Važi sledeća propozicija:

Propozicija 1.2 *1. Funkcija*

$$d_{p,r} : \mathcal{F}_{p,r} \times \mathcal{F}_{p,r} \to \mathbf{R}_+,$$

$$(f,\ g) \mapsto \|f - g\|_{p,r}$$

je ultrapseudometrika na $\mathcal{F}_{p,r}$.

2. $\mathcal{F}_{p,r}$ *je podalgebra na* $E^{\mathbf{N}}$, *i* $\mathcal{K}_{p,r}$ *je ideal od* $\mathcal{F}_{p,r}$.

3. $\mathcal{G}_{p,r} = \mathcal{F}_{p,r}/\mathcal{K}_{p,r}$ *je (Hausdorfov) topološki prsten i količnička topologija je ista kao i topologija indukovana ultrametrikom*

$$\tilde{d}_{p,r} : \mathcal{G}_{p,r} \times \mathcal{G}_{p,r} \to \mathbf{R}_+$$

$$([f], [g]) \mapsto d_{p,r}(f, g),$$

gde $[f], [g] \in \mathcal{G}_{p,r}$.

Primer 1.9: Neka je (M, d) separabilan ultrametrički prostor i $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ prostor verovatnoće. Neka je S skup svih klasa ekvivalencije merljivih preslikavanja $\hat{X} : \Omega \to M$. Ako $\hat{X}, \hat{Y} \in M$ i $x \in \mathbf{R}$ tada definišemo $F_{\hat{X},\hat{Y}}(x)$ na sledeći način:

$$F_{\hat{X},\hat{Y}}(x) = P(\{\omega; \omega \in \Omega, d(\hat{X}(\omega), \hat{Y}(\omega)) < x\}).$$

Pokazaćemo da je za svako $\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}$ i svako $x, y \in \mathbf{R}$ zadovoljena sledeća nejednakost:

$$F_{\hat{X},\hat{Y}}(\max(x, y)) \geq T_L(F_{\hat{X},\hat{Y}}(x), F_{\hat{Y},\hat{Z}}(y)).$$

Da bismo dokazali datu nejednakost, dokazaćemo da važi

$$F_{\hat{X},\hat{Y}}(\max(x, y)) \geq F_{\hat{X},\hat{Y}}(x) + F_{\hat{Y},\hat{Z}}(y) - 1.$$

Neka je $d(\hat{X}, \hat{Y})(\omega) < x$ i $d(\hat{Y}, \hat{Z})(\omega) < y$. Tada je $d(\hat{X}, \hat{Z})(\omega) < \max(x, y)$. Neka je

$$\mathcal{A} = \{\omega : d(\hat{X}(\omega), \hat{Y}(\omega)) < x\}, \mathcal{B} = \{\omega : d(\hat{Y}(\omega), \hat{Z}(\omega)) < y\}.$$

Ako je $\mathcal{C} := \{\omega : d(\hat{X}(\omega), \hat{Z}(\omega)) < \max(x, y)\}$ tada je $\mathcal{C} \supset \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ te je

$$\begin{aligned} P(\mathcal{C}) \geq P(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) &= P(\mathcal{A}) + P(\mathcal{B}) - P(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \\ &\geq \max(P(\mathcal{A}) + P(\mathcal{B}) - 1, 0) \\ &= T_L(P(\mathcal{A}), P(\mathcal{B})). \end{aligned}$$

Odavde sledi da je

$$P(\mathcal{C}) = F_{\hat{X},\hat{Z}}(\max(x, y)) \geq T_L(F_{\hat{X},\hat{Y}}(x), F_{\hat{Y},\hat{Z}}(y)).$$

1.2 Prebrojivo proširenje t-normi

U radu [11] je data klasa t-normi koja je značajna za teoriju nepokretne tačke u verovatnosnim metričkim prostorima.

Neka je T t-norma i neka je $T_n : [0, 1] \to [0, 1]$ $(n \in \mathbf{N})$ definisano na sledeći način:

$$T_1(x) = T(x, x), \; T_{n+1}(x) = T(T_n(x), x) \; (n \in \mathbf{N}, x \in [0, 1]).$$

t-norma T je t-norma H-**tipa** ako je familija $\{T_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ je podjednako neprekidna u tački $x = 1$.

Kažemo da je familija $\{T_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ **podjednako neprekidna u tački** $x = 1$, ako za svako $\lambda \in (0, 1)$ postoji $\delta(\lambda) \in (0, 1)$ tako da važi implikacija:

$$x > 1 - \delta(\lambda) \Rightarrow T_n(x) > 1 - \lambda, \quad \text{za svako } n \in \mathbf{N}.$$

Osobina asocijativnosti za t-norme omogućava da se svaka t-norma T proširi na jedinstven način kao n-arni operator definisan za svaku n-torku $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in [0, 1]^n$ na sledeći način:

$$\mathbf{T}_{i=1}^{1} x_i = x_1, \quad \mathbf{T}_{i=1}^{n} x_i = T(\mathbf{T}_{i=1}^{n-1} x_i, x_n) = T(x_1, \ldots, x_n).$$

Ako je $x_1 = \ldots = x_n = x$, tada je $x_T^{(n)} = T(x, x, \ldots, x)$.
Takođe se pretpostavlja da je za svako $x \in [0, 1]$ $x_T^{(0)} = 1$ i $x_T^{(1)} = x$.

Svaka t-norma T može se proširiti na beskonačan operator tj., za svako $(x_i)_{i\in\mathbf{N}} \in [0, 1]^{\mathbf{N}}$ važi

$$\mathbf{T}_{i=1}^{\infty} x_i = \lim_{n\to\infty} \mathbf{T}_{i=1}^{n} x_i.$$

Granica sa desne strane uvek postoji pošto je niz

$$(\mathbf{T}_{i=1}^{n} x_i)_{n\in\mathbf{N}}$$

nerastući i ograničen sa donje strane.

Primer 1.10: n-arna proširenja za t-norme T_M, T_L, T_P i T_D su

$$T_M(x_1,\dots,x_n) = \min(x_1,\dots,x_n)$$

$$T_L(x_1,\dots,x_n) = \max(\sum_{i=1}^{n} x_i - (n-1),\, 0)$$

$$T_P(x_1,\dots,x_n) = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$$

$$T_D(x_1,\dots,x_n) = \begin{cases} x_i, & \text{ako } x_j = 1 \text{ za svako } j \neq i \\ 0, & \text{inače .} \end{cases}$$

Za teoriju nepokretne tačke su zanimljive klase t-normi T i nizova $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ iz $[0,\ 1]$ za koje je

(1.3) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{T}_{i=n}^{\infty} x_i = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{T}_{i=1}^{\infty} x_{n+i} = 1.$

U specijalnom slučaju za $T = T_P$ važi $(\mathbf{T}_P)_{i=1}^{n} = \prod\limits_{i=1}^{n} x_i$ i za svaki niz $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ iz $[0,\ 1]$ za koji je $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(1-x_i) < \infty$ sledi da je

$$\lim_{n\to\infty}(\mathbf{T}_P)_{i=n}^{\infty} = \lim_{n\to\infty}\prod_{i=n}^{\infty} x_i = 1.$$

Poznato je da važi ekvivalencija

$$\prod_{i=1}^{\infty} x_i > 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty}\prod_{i=n}^{\infty} x_i = 1 \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty}(1-x_i) < \infty.$$

Ekvivalencija $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(1-x_i) < \infty \Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{T}_{i=n}^{\infty} x_i = 1$ važi takođe za $T = T_L$

$$(\mathbf{T}_L)_{i=1}^{n} x_i = \max(\sum_{i=1}^{n} x_i - (n-1),\ 0) = \max(\sum_{i=1}^{n}(x_i - 1) + 1,\ 0)$$

i stoga $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-x_n) < \infty$ važi ako i samo ako

$$\lim_{n\to\infty}(\mathbf{T}_L)_{i=n}^{\infty} x_i = \max(\lim_{n\to\infty}\sum_{i=n}^{\infty}(x_i - 1) + 1,\ 0) = 1.$$

Za $T \geq T_L$ imamo $\mathbf{T}_{i=1}^{n} x_i \geq (\mathbf{T}_L)_{i=1}^{n} x_i$ i prema tome za takve t-norme T važi implikacija

$$\sum_{i=1}^{\infty}(1 - x_i) < \infty \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbf{T}_{i=n}^{\infty} x_i = 1.$$

Uslov (1.3) je zadovoljen u slučaju da je t-norma T H-tipa. Sledeća propozicija je dokazana u [19].

Propozicija 1.3 *Neka je $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ niz brojeva iz $[0, 1]$ takav da je $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$ i neka je t-norma T H-tipa. Tada je zadovoljen uslov (1.3).*

Dokaz: Pošto je t-norma T H-tipa, za svako $\lambda \in (0, 1)$ postoji $\delta(\lambda) \in (0, 1)$ takvo da je

$$x \geq \delta(\lambda) \Rightarrow \mathbf{T}_{i=1}^{p} x > 1 - \lambda$$

za svako $p \in \mathbf{N}$. Kako je $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$ postoji $n_0(\lambda) \in \mathbf{N}$ takvo da je $x_n \geq \delta(\lambda)$ za svako $n \geq n_0(\lambda)$. Prema tome

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{i=1}^{p} x_{n+i} &\geq \mathbf{T}_{i=1}^{p} \delta(\lambda) \\ &> 1 - \lambda, \end{aligned}$$

za svako $n \geq n_0(\lambda)$ i svako $p \in \mathbf{N}$. Prema tome, zadovoljen je uslov (1.3).

Za neke familije t-normi postoje nizovi $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ koji teže 1 i za koje je $\lim_{n\to\infty} \mathbf{T}_{i=n}^{\infty} x_i = 1$.

Sledeća tvrđenja su data u [19].

Tvrdjenje 1.1 *Neka je $(T_\lambda^D)_{\lambda\in(0,\infty)}$ Dombieva familija t-normi i $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ niz elemenata iz $(0, 1]$ takav da je $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$. Tada važi sledeća ekvivalencija:*

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1 - x_i}{x_i}\right)^{\lambda} < \infty \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} (T_\lambda^D)_{i=n}^{\infty} x_i = 1.$$

Tvrdjenje 1.2 *Neka je* $(T_\lambda^{AA})_{\lambda\in(0,\infty)}$ *Aczél-Alsinina familija t-normi i* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *niz elemenata iz* $(0, 1]$ *takav da je* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. *Tada važi sledeća ekvivalencija:*

$$\sum_{i=1}^{\infty}(1 - x_i)^\lambda < \infty \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty}(T_\lambda^{AA})_{i=n}^{\infty}x_i = 1.$$

Propozicija 1.4 *Neka je* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *niz elemenata iz* $(0, 1)$ *takav da red* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1 - x_n)$ *konvergira. Tada je za svako* $\lambda \in (-1, \infty]$

$$\lim_{n\to\infty}(T_\lambda^{SW})_{i=n}^{\infty}x_i = 1.$$

Za teoriju nepokretne tačke u verovatnosnim metričkim prostorima je važna primena uslova (1.3) na specijalne nizove $(1 - q^n)_{n\in\mathbf{N}}$ za $q \in (0, 1)$.

Sledeća definicija je data u [19].

Definicija 1.10 *Kažemo da je za neko* $q_0 \in (0, 1)$ *t-norma* T *geometrijski konvergentna ako je*

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{T}_{i=n}^{\infty}(1 - q_0^i) = 1. \tag{1.4}$$

U radu [20] je dokazano da iz (1.4) sledi da je $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{T}_{i=n}^{\infty}(1 - q^i) = 1$ za svako $q \in (0, 1)$.

Sledeća propozicija je data u [19].

Propozicija 1.5 *Neka je* T *t-norma i* $\psi : (0, 1] \to [0, \infty)$. *Ako je za neko* $\delta \in (0, 1)$ *i svako* $x \in [0, 1]$, $y \in [1 - \delta, 1]$ *zadovoljeno*

$$|T(x, y) - T(x, 1)| \le \psi(y)$$

tada za svaki niz $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *iz intervala* $[0, 1]$ *takav da je* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ *važi sledeća implikacija:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\psi(x_n) < \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(\mathbf{T}_{i=n}^{\infty}x_i - x_n) = 0.$$

Analogno kao i za t-norme T možemo izvršiti proširenje S-konorme na n-arnu operaciju tako da za svako $(x_1, \ldots, x_n) \in [0, 1]^n$, $n \in \mathbf{N}$ važi

$$\mathbf{S}_{i=1}^{n} x_i = S(\mathbf{S}_{i=1}^{n-1} x_i,\ x_n) = S(x_1, \ldots, x_n)$$

$$\mathbf{S}_{i=1}^{\infty} x_i = \lim_{n\to\infty} \mathbf{S}_{i=1}^{n} x_i$$

Ako je $x_1 = \ldots = x_n = x$, tada je $x_S^{(n)} = S(x, \ldots, x)$ i $x_S^{(0)} = 0$ i $x_S^{(1)} = x$ za svako $x \in [0, 1]$.

Primer 1.11: a) $S_M(x_1, \ldots, x_n) = \max(x_1, \ldots, x_n)$

b) $S_P(x_1, \ldots, x_n) = 1 - \prod\limits_{i=1}^{n} (1 - x_i)$

c) $S_L(x_1, \ldots, x_n) = \min(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i,\ 1)$

d) $S_D(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} x_i, & \text{ako } x_j = 0 \text{ za svako } j \neq i \\ 1, & \text{inače}\ . \end{cases}$

1.3 Dekompozabilne mere

Sledeće definicije su date u [51].

Neka je $\mathcal{A}$ σ-algebra podskupova datog skupa Ω. Klasična mera je skupovna funkcija $m : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ tako da je $m(\emptyset) = 0$ i

$$m(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$$

za svaki niz $(A_i)_{i \in \mathbf{N}}$ međusobno disjunktnih skupova iz $\mathcal{A}$. U specijalnom slučaju kada $m : \mathcal{A} \to [0, 1]$ i $m(\Omega) = 1$, m je verovatnosna mera i označava se sa P.

Definicija 1.11 *Neka je S t-konorma.* S*-dekompozabilna mera m je skupovna funkcija $m : \mathcal{A} \to [0, 1]$ takva da je $m(\emptyset) = 0$ i*

$$m(A \cup B) = \mathrm{S}(m(A), m(B)), \quad A, B \in \mathcal{A} i A \cap B = \emptyset.$$

Primer 1.12: Uzimajući t-konormu S_L, $\Omega = \mathbf{N}$, $\mathcal{A} = 2^{\mathbf{N}}$ i $m(E) = \min(\frac{|E|}{N}, 1)$, $E \in \mathcal{A}$, za fiksiran prirodan broj N, gde je $|E|$ kardinalni broj od E dobija se da je m S_L-dekompozabilna mera.

Definicija 1.12 *Neka je* S *levo neprekidna t-konorma. Skupovna funkcija $m : \mathcal{A} \to [0, 1]$ je σ-*S*-dekompozabilna mera ako je $m(\emptyset) = 0$ i*

$$m(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \mathrm{S}_{i=1}^{\infty} m(A_i)$$

za svaki niz $(A_i)_{i \in \mathbf{N}}$ iz $\mathcal{A}$ čiji elementi su međusobno disjunktni skupovi.

Skupovna funkcija iz prethodnog primera je σ-S_L-dekompozabilna mera.

Primer 1.13: Neka je $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$ mera verovatnoće. Tada je m_λ definisano sa

$$m_\lambda(E) = \frac{1}{\lambda}((1 + \lambda)^{P(E)} - 1)$$

σ-$\mathbf{S}_{\lambda}^{SW}$-dekompozabilna mera.

Neka je S neprekidna Arhimedova t-konorma sa aditivnim generatorom s. Tada može da se napravi sledeća klasifikacija σ-S-dekompozabilnih mera.

(A) $s \circ m$ je σ-aditivna mera nad $\mathcal{A}$.

(P) $s \circ m$ je pseudo-σ-aditivna mera nad $\mathcal{A}$, tj. postoji niz $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ disjunktnih skupova iz $\mathcal{A}$ da je

$$\begin{aligned}(s \circ m)(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n) &= s(1) \\ &< \sum_{n\in\mathbf{N}} (s \circ m)(A_n).\end{aligned}$$

Slučaj (A) važi za striktne t-konorme S ili za t-konorme S koje nisu striktne ali imaju konačnu σ-aditivnu meru $s \circ m$.

Kažemo da je $\mathbf{S}$-dekompozabilna mera m monotona ako za A, $B \in \mathcal{A}$, $A \subseteq B$ i $m(A) \leq m(B)$. Mera m je (NSA)-tipa ako i samo ako je $s \circ m$ konačna aditivna mera, gde je s aditivan generator za t-konormu S, koji je neprekidan, nije striktan, Arhimedov i u odnosu na koji je m dekompozabilan ($s(1) = 1$).

Ako je m S-dekompozabilna mera tada je m S-vrednosna, što znači

$$\mathbf{S}(m(A \cup B), m(A \cap B)) = \mathbf{S}(m(A), m(B)).$$

Neka je $(\Omega, \mathcal{A}, m)$ merljiv prostor i (M, d) separabilan metrički prostor, S skup svih klasa ekvivalencije merljivih preslikavanja $X : \Omega \to M$. Element iz S se označava sa $\dot{X}$ ako $\{X(\omega)\} \in \dot{X}$.

Sledeća propozicija je data u [19].

Propozicija 1.6 *Neka je $(\Omega, \mathcal{A}, m)$ merljiv prostor, gde je m neprekidna* $\mathbf{S}$*-dekompozabilna mera (NSA)-tipa sa monotono rastućim generatorom s.*
Tada je $(S, \mathcal{F}, T)$ Mengerov prostor, gde se $\mathcal{F}$ i t-norma T definišu

na sledeći način ($\mathcal{F}(\hat{X}, \hat{Y}) = F_{\hat{X},\hat{Y}}$)*:*

$$F_{\hat{X},\hat{Y}}(u) = m\{\omega : \omega \in \Omega, \, d(X(\omega), \, Y(\omega)) < u\} = m\{d(X, \, Y) < u\}$$

(za svako $\hat{X}, \hat{Y} \in S$, $u \in \mathbf{R}$*),*

$$T(x, \, y) = s^{-1}(\max(0, \, s(x) + s(y) - 1))$$

za svako $x, \, y \in [0, \, 1]$.

Glava 2

Teoreme o nepokretnoj tački za jednoznačna preslikavanja

Poznato je da svaka q-kontrakcija $f : M \to M$, gde je (M, d) kompletan metrički prostor, ima jedinstvenu nepokretnu tačku. Sehgal i Bharucha-Reid [39] su uveli pojam verovatnosne q-kontrakcije u verovatnosnom metričkom prostoru i prvi dokazali teoremu o nepokretnoj tački u Mengerovim prostorima $(S, \mathcal{F}, T_M)$.

U delu 2.1 dokazana je teorema koja predstavlja uopštenje teoreme o nepokretnoj tački za verovatnosnu q-kontrakciju $f : S \to S$, gde je $(S, \mathcal{F}, T)$ kompletan Mengerov prostor. Uveden je pojam jake (b_n)-kontrakcije i u delu 2.2 dokazana je teorema koja predstavlja uopštenje teoreme Sehgala i Bharuche-Reid kada je preslikavanje $f : S \to S$ jaka (b_n)-kontrakcija.

U delu 2.3, koji se odnosi na teoriju kontraktora, dokazana je teorema koja obezbeđuje postojanje i jedinstvenost rešenja za nelinearne operatorske jednačine sa jednoznačnim operatorom u Mengerovim verovatnosnim normiranim prostorima.

Deo 2.4 odnosi se na uopštenje Caristijeve teoreme u kompletnom Mengerovom prostoru $(S, \mathcal{F}, T)$ ako je t-norma T H-tipa.

U delu 2.5 dokazana je teorema o zajedničkoj nepokretnoj tački u sekvencijalno kompletnim Hausdorfovim kvazi-uniformnim prostorima a takođe je data primena na kompletan Mengerov prostor.

2.1 Teorema o nepokretnoj tački za verovatnosnu q-kontrakciju

Neka je (M, d) metrički prostor i $f : M \to M$. Ako postoji $q \in [0, 1)$ takav da je

$$d(fx, fy) \leq qd(x, y)$$

za svako $x, y \in M$, tada se f naziva q-kontrakcija.

Jedan od najvažnijih rezultata za teoriju nepokretne tačke predstavlja Banahov princip kontrakcije u metričkim prostorima koji glasi:

Svaka q-kontrakcija $f : M \to M$ u kompletnom metričkom prostoru (M, d) ima jednu i samo jednu nepokretnu tačku.

Sehgal i Bharucha-Reid su 1972. godine uopštili pojam q-kontrakcije u verovatnosnim metričkim prostorima [39].

Definicija 2.1 *Neka je $(S, \mathcal{F})$ verovatnosni metrički prostor. Preslikavanje $f : S \to S$ je verovatnosna q-kontrakcija ako postoji $q \in (0, 1)$ tako da je*

$$F_{fp_1,fp_2}(x) \geq F_{p_1,p_2}(\frac{x}{q})$$

za svako $p_1, p_2 \in S$ i $x \in \mathbf{R}$.

Primer 2.1: Neka je $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ prostor verovatnoće, (M, d) separabilan metrički prostor, i $\mathcal{B}_M$ familija Borelovih podskupova od M. Preslikavanje $f : \Omega \times M \to M$ je slučajan operator ako za svako $C \in \mathcal{B}_M$ i svako $x \in M$

$$\{\omega : \omega \in \Omega, f(\omega, x) \in C\} \in \mathcal{A},$$

tj. ako je preslikavanje $\omega \mapsto f(\omega, x)$ merljivo nad Ω. Slučajan operator $f : \Omega \times M \to M$ je *neprekidan* ako je za svako $\omega \in \Omega$ preslikavanje $x \mapsto f(\omega, x)$ neprekidan nad M.

Ako je $f : \Omega \times M \to M$ neprekidan slučajan operator tada je ([3]) za svako merljivo preslikavanje $X : \Omega \to M$ preslikavanje $\omega \to f(\omega, X(\omega))$ merljivo nad Ω.

Neka je S skup svih klasa ekvivalencije merljivog preslikavanja

$X : \Omega \to M$ i neka je f neprekidan slučajan operator. Preslikavanje $\hat{f} : S \to S$, definisano sa

$$(\hat{f}\hat{X})(\omega) = f(\omega, X(\omega)) \text{ za svako } \hat{X} \in S \ (\omega \in \Omega, \ X \in \hat{X}),$$

se zove operator *Nemytskog* za f. Ako je $f : \Omega \times M \to M$ slučajan operator, tada je merljivo preslikavanje $X : \Omega \to M$ *slučajna nepokretna tačka* preslikavanja f ako je

$$X(\omega) = f(\omega, X(\omega)), \text{ skoro svuda.} \tag{2.1}$$

Ako je f neprekidan slučajan operator tada važi (2.1) ako i samo ako je $\hat{X} = \hat{f}\hat{X}$, $X \in \hat{X}$. Prema tome, u ovom slučaju se problem postojanja slučajne nepokretne tačke neprekidnog slučajnog operatora f redukuje na problem postojanja nepokretne tačke operatora Nemytskog $\hat{f}$ za f.

Neka je za svako $\hat{X}, \hat{Y} \in S$ i svako $x > 0$

$$\begin{aligned} P(\{\omega : \omega \in \Omega, \ d(f(\omega, X(\omega)), f(\omega, Y(\omega)) < qx\}) \\ \geq P(\{\omega : \omega \in \Omega, \ d(X(\omega), Y(\omega)) < x\}), \end{aligned} \tag{2.2}$$

gde je $q \in (0, 1)$. $(S, \mathcal{F}, T_L)$ je Mengerov prostor gde je

$$F_{\hat{X},\hat{Y}}(x) = P(\{\omega : \omega \in \Omega, \ d(X(\omega), Y(\omega)) < x\})$$

za svako $\hat{X}, \hat{Y} \in S$ i $x \in \mathbf{R}$. Tada (2.2) implicira

$$F_{\hat{f}\hat{X},\hat{f}\hat{Y}}(qx) \geq F_{\hat{X},\hat{Y}}(x).$$

Prema tome, $\hat{f}$ je verovatnosna q-kontrakcija ako i samo ako važi (2.2).

Prvu teoremu o nepokretnoj tački u verovatnosnim metričkim prostorima su dokazali Sehgal i Bharucha-Reid [39].

Teorema 2.1 *Neka je $(S, \mathcal{F}, T_M)$ kompletan Mengerov prostor i $f : S \to S$ verovatnosna q-kontrakcija. Tada postoji jedinstvena nepokretna tačka x preslikavanja f i $x = \lim_{n\to\infty} f^n p$ za svako $p \in S$.*

Dalji razvoj teorije nepokretne tačke u mnogo generalnijem Mengerovom prostoru $(S, \mathcal{F}, T)$ je povezan sa ispitivanjem strukture t-norme T.

Taj problem je bio ubrzo rešen. Naime, ako je $(S,\ \mathcal{F},\ T)$ kompletan Mengerov prostor, gde je T neprekidna t-norma tada svaka verovatnosna q-kontrakcija $f:S\to S$ ima nepokretnu tačku ako i samo ako je t-norma T H-tipa.

Veoma zanimljiv novi prilaz teoriji nepokretne tačke u verovatnosnim metričkim prostorima je dat u radu Tardiffa [49], gde su pretpostavljeni neki dodatni uslovi za funkciju raspodele $\mathcal{F}:S\times S\to\Delta^+$ i $T\geq T_L$.

Teorema 2.2 (**Tardiff**) *Neka je $(S,\ \mathcal{F},\ T)$ kompletan Mengerov prostor i T neprekidna t-norma takva da je $T\geq T_L$. Ako je za svako $u,\ v\in S$ zadovoljen uslov*

$$\int_1^\infty \ln(u)dF_{u,v}(u)<\infty$$

tada svaka verovatnosna q-kontrakcija $f:S\to S$ ima jedinstvenu nepokretnu tačku.

Koristeći teoremu dokazanu u [19] sledeća teorema predstavlja uopštenje teoreme Sehgala i Bharuche-Reid.

Teorema 2.3 *Neka je $(S,\ \mathcal{F},\ T)$ kompletan Mengerov prostor i $f:S\to S$ verovatnosna q-kontrakcija takva da za neko $p\in S$ i $k>0$*

$$\sup_{x>0} x^k h(F_{p,fp}(x))<\infty \tag{2.3}$$

gde je $h:[0,\ 1]\to[0,\ b]$ $(b\in\mathbf{R})$ neprekidna, opadajuća funkcija takva da je $h(1)=0$. Ako t-norma T zadovoljava uslov $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{T}_{i=n}^{\infty}h^{-1}((\mu^k)^i)=1$, gde $\mu\in(0,\ 1)$ tada postoji jedinstvena nepokretna tačka z preslikavanja f i $z=\lim\limits_{n\to\infty}f^n(p)$.

Dokaz: Analogno kao u [20] može se dokazati da ako je $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{T}_{i=n}^{\infty}h^{-1}((\mu_0^k)^i)=1$ za neko $\mu_0\in(0,\ 1)$ tada je $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{T}_{i=n}^{\infty}h^{-1}((\mu^k)^i)=1$ za svako $\mu\in(0,\ 1)$, jer je h opadajuća funkcija.

Neka je $\delta=\frac{q}{\mu}<1$. Treba dokazati da je niz $(f^np)_{n\in\mathbf{N}}$ Košijev.

Kako je red $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\delta^i$ konvergentan, sledi da postoji $n_1=n_1(\varepsilon)\in\mathbf{N}$

takav da $\sum\limits_{i=n_1}^{\infty} \delta^i \leq \varepsilon$. Neka je $n \geq n_1$. Tada je za svako n, $m \in \mathbf{N}$

$$\begin{aligned}
F_{f^n p, f^{n+m} p}(\varepsilon) &\geq F_{f^n p, f^{n+m} p}(\sum_{i=n}^{\infty} \delta^i) \\
&\geq F_{f^n p, f^{n+m} p}(\sum_{i=n}^{n+m-1} \delta^i) \\
&\geq \underbrace{T(T(\ldots T}_{(m-1)-puta}(F_{f^n p, f^{n+1} p}(\delta^n), F_{f^{n+1} p, f^{n+2} p}(\delta^{n+1}), \\
&\ldots F_{f^{n+m-1} p, f^{n+m} p}(\delta^{n+m-1})) \\
&\geq \underbrace{T(T(\ldots T}_{(m-1)-puta}(F_{p,fp}(\frac{1}{\mu^n}), F_{p,fp}(\frac{1}{\mu^{n+1}}), \\
&\ldots F_{p,fp}(\frac{1}{\mu^{n+m-1}})).
\end{aligned}$$

Neka je $M > 0$ takav da je

$$x^k h(F_{p,fp}(x)) \leq M, \text{ za svako } x > 0.$$

Tada je $h(F_{p,fp}(x)) \leq M \frac{1}{x^k}$, za svako $x > 0$ odnosno

$$F_{p,fp}(x) \geq h^{-1}(M \tfrac{1}{x^k}), \text{ za svako } x > 0.$$

Neka je $x = \frac{1}{\mu^n}$. Tada sledi da je

$$(2.4) \qquad F_{p,fp}(\tfrac{1}{\mu^n}) \geq h^{-1}(M(\mu^k)^n), \; n \in \mathbf{N}.$$

Neka je $n_2 \in \mathbf{N}$ takav da $h^{-1}(M(\mu^k)^n) \in [0, 1)$ za svako $n \geq n_2$.

Iz (2.4) za $n \geq \max(n_1, n_2)$ sledi da je

$$\begin{aligned}
F_{f^n p, f^{n+m} p}(\varepsilon) &\geq \underbrace{T(T(\ldots (T}_{(m-1)-puta}(h^{-1}(M(\mu^k)^n), h^{-1}(M(\mu^k)^{n+1}), \\
&\ldots h^{-1}(M(\mu^k)^{n+m-1}))).
\end{aligned}$$

Neka je s_0 takav da je $M(\mu^k)^{s_0} < \mu^k$. Tada za svako $n \in \mathbf{N}$ i za $n \geq \max(n_1, n_2)$ i $m \in \mathbf{N}$ sledi

$$\begin{aligned} F_{f^{n+s_0}p, f^{n+s_0+m}p}(\varepsilon) &\geq \underbrace{T(T(\ldots(T}_{(m-1)-puta}(h^{-1}((\mu^k)^{n+s_0})), (h^{-1}((\mu^k)^{n+s_0+1})), \\ &\ldots (h^{-1}((\mu^k)^{n+s_0+m-1})) \\ &\geq \mathbf{T}_{i=n+1}^{\infty} h^{-1}((\mu^k)^i). \end{aligned}$$

Na osnovu uslova datog u teoremi da je $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{T}_{i=n}^{\infty} h^{-1}((\mu^k)^i) = 1$ sledi da je niz $(f^n p)_{n\in\mathbf{N}}$ Košijev.
Neka je $z = \lim\limits_{n\to\infty} f^n p$. Iz neprekidnosti preslikavanja f sledi da je

$$fz = f(\lim_{n\to\infty} f^n p) = \lim_{n\to\infty} f^{n+1} p = z.$$

Na osnovu prethodne teoreme i Propozicije 1.5 dobija se sledeća posledica.

Posledica 2.1 *Neka je $(S, \mathcal{F}, T)$ kompletan Mengerov prostor i $f : S \to S$ verovatnosna q-kontrakcija takva da za neko $p \in S$ i $k > 0$*

$$\sup_{x>0} x^k h(F_{p,fp}(x)) < \infty$$

gde je $h : [0, 1] \to [0, b]$ $(b \in \mathbf{R})$ neprekidna, opadajuća funkcija takva da je $h(1) = 0$. Ako je $\psi : (0, 1] \to [0, \infty)$ takvo da za neko $\delta \in (0, 1)$ i za svako $x \in [0, 1]$ i $y \in [1-\delta, 1]$ važi

$$|T(x, y) - T(x, 1)| \leq \psi(y)$$

i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \psi(h^{-1}((\mu^k)^i)) < \infty$, za neko $\mu \in (0, 1)$, tada postoji jedinstvena nepokretna tačka z preslikavanja f i $z = \lim\limits_{n\to\infty} f^n p$.

Dokaz: Na osnovu Propozicije 1.5 uslov $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \psi(h^{-1}((\mu^k)^i)) < \infty$ implicira $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{T}_{i=n}^{\infty} h^{-1}((\mu^k)^i) = 1$, te su zadovoljeni svi uslovi prethodne teoreme.

Posledica 2.2 *Neka je $(S, \mathcal{F}, (T_\lambda^D)_{\lambda\in(0,\infty)})$ kompletan Mengerov prostor i $f : S \to S$ verovatnosna q-kontrakcija takva da za neko $p \in S$*

i $k > 0$ *važi*

$$\sup_{x>0} x^k h(F_{p,fp}(x)) < \infty$$

gde je $h : [0, 1] \to [0, b]$ $(b \in \mathbf{R})$ *neprekidna, opadajuća funkcija takva da je* $h(1) = 0$. *Ako red* $\sum_{i=1}^{\infty}(1 - h^{-1}(\mu^k)^i)^\lambda$ *konvergira, gde* $\mu \in (0, 1)$ *tada postoji jedinstvena nepokretna tačka* z *preslikavanja* f *i* $z = \lim_{n\to\infty} f^n p$.

Dokaz: Na osnovu Tvrđenja 1.1 uslov $\sum_{i=1}^{\infty}(1 - h^{-1}(\mu^k)^i)^\lambda < \infty$ ekvivalentan je uslovu $\lim_{n\to\infty}(T_\lambda^D)_{i=1}^{\infty}(h^{-1}(\mu^k)^i) = 1$ te su zadovoljeni svi uslovi prethodne teoreme.

Posledica 2.3 *Neka je* $(S, \mathcal{F}, (T_\lambda^D)_{\lambda\in(0,\infty)})$ *kompletan Mengerov prostor i* $f : S \to S$ *verovatnosna q-kontrakcija takva da za neko* $p \in S$ *i* $k > 0$ *važi*

$$\sup_{x>0} x^k[1 - F_{p,fp}(x)] < \infty.$$

Tada postoji jedinstvena nepokretna tačka z *preslikavanja* f *i* $z = \lim_{n\to\infty} f^n p$.

Dokaz: Neka je $h(x) = 1-x$. Tada su zadovoljeni svi uslovi prethodne teoreme.

Posledica 2.4 *Neka je* $(S, \mathcal{F}, (T_\lambda^{AA})_{\lambda\in(0,\infty)})$ *kompletan Mengerov prostor i* $f : S \to S$ *verovatnosna q-kontrakcija takva da za neko* $p \in S$ *i* $k > 0$ *važi*

$$\sup_{x>0} x^k h(F_{p,fp}(x)) < \infty$$

gde je $h : [0, 1] \to [0, b]$ $(b \in \mathbf{R})$ *neprekidna, opadajuća funkcija takva da je* $h(1) = 0$. *Ako red* $\sum_{i=1}^{\infty}(1 - h^{-1}(\mu^k)^i)^\lambda$ *konvergira, gde* $\mu \in (0, 1)$ *tada postoji jedinstvena nepokretna tačka* z *preslikavanja* f *i* $z = \lim_{n\to\infty} f^n p$.

Dokaz: Na osnovu Tvrđenja 1.2 uslov $\sum_{i=1}^{\infty}(1 - h^{-1}(\mu^k)^i)^\lambda < \infty$ ekvivalentan je uslovu $\lim_{n\to\infty}(T_\lambda^{AA})_{i=1}^{\infty}(h^{-1}(\mu^k)^i) = 1$ te su zadovoljeni svi uslovi prethodne teoreme.

Posledica 2.5 *Neka je* $(S, \mathcal{F}, (T_\lambda^{AA})_{\lambda\in(0,\infty)})$ *kompletan Mengerov prostor i* $f : S \to S$ *verovatnosna* q*-kontrakcija takva da za neko* $p \in S$ *i* $k > 0$ *važi*

$$\sup_{x>0} x^k[1 - F_{p,fp}(x)] < \infty.$$

Tada postoji jedinstvena nepokretna tačka z *preslikavanja* f *i* $z = \lim_{n\to\infty} f^n p$.

Dokaz: Neka je $h(x) = 1-x$. Tada su zadovoljeni svi uslovi prethodne teoreme.

Posledica 2.6 *Neka je* (X, d, L, R) *kompletan fazi metrički prostor,* $\lim_{s\to\infty} d(x, y)(s) = 0$ *za svako* $x, y \in X$, $R(a, 1) = 1$ *za svako* $a \in [0, 1]$, $R(a, 0) = a$ *za svako* $a \in [0, 1]$, R *je neprekidno u* $(0, 0)$ *i* $f : X \to X$ *verovatnosna* q*-kontrakcija tako da za neko* $p \in S$ *i* $k > 0$

$$\sup_{x>0} x^k d(p, fp)(x) < \infty.$$

Ako je $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{R}_{i=n}^{\infty}((\mu^k)^i) = 0$ *za* $\mu \in (0, 1)$ *tada postoji jedinstvena nepokretna tačka* z *preslikavanja* f *i* $z = \lim_{n\to\infty} f^n p$.

Dokaz: Za $h(x) = 1 - x$ i na osnovu Leme 1.1 zadovoljeni su svi uslovi prethodne teoreme.

Posledica 2.7 *Neka je* $(\Omega, \mathcal{A}, m)$ *merljiv prostor, gde je* m*-neprekidna,* s*-dekompozabilna mera (NSA)-tipa sa monotono rastućim aditivnim generatorom* s, (M, d) *kompletan, separabilan metrički prostor i* $f : \Omega \times M \to M$ *neprekidan slučajni operator takav da je za neko* $q \in (0, 1)$

$$m(\{\omega \mid \omega \in \Omega,\ d(\hat{f}\hat{X}(\omega),\ \hat{f}\hat{Y}(\omega)) < u\}) \geq m(\{\omega \mid \omega \in \Omega,\\ d(X(\omega), Y(\omega)) < \tfrac{u}{q}\})$$

za sva merljiva preslikavanja $X, Y : \Omega \to M$ *i svako* $u > 0$. *Ako postoji merljivo preslikavanje* $U : \Omega \to M$ *takvo da je za neko* $k > 0$

$$\sup_{x>0} x^k h(m(d(\hat{U},\ f\hat{U}) < x)) < \infty$$

gde je $h : [0, 1] \to [0, b]$ $(b \in \mathbf{R})$ *neprekidna, opadajuća funkcija takva da je* $h(1) = 0$ *i t-norma* T *definisana sa*

$$T(x, y) = s^{-1}(\max(0, s(x) + s(y) - 1)), \quad x, y \in [0, 1]$$

zadovoljava uslov $\lim_{n\to\infty} \mathbf{T}_{i=n}^{\infty} h^{-1}((\mu^k)^i) = 1$, $\mu \in (0, 1)$ *tada postoji slučajna nepokretna tačka za operator* f.

Primedba: Neka su $(\Omega, \mathcal{A}, m)$, (M, d) i f isti kao u prethodnoj teoremi za neku t-konormu S_λ^{SW}, $\lambda \in (-1, \infty]$. Neka je preslikavanje $h(x) = 1 - x$. Kako je t-norma T_λ^{SW}, $\lambda \in (-1, \infty]$ geometrijski konvergentna sledi postojanje slučajne nepokretne tačke slučajnog operatora $f : \Omega \times M \to M$.

Teorema 2.4 *Neka je* $(S, \mathcal{F}, T)$ *kompletan Mengerov prostor i* $f : S \to S$ *verovatnosna q-kontrakcija takva da za neko* $p \in S$ *i* $k > 0$ *važi*

$$\sup_{x>1} (\ln x)^k h(F_{p,fp}(x)) < \infty$$

gde je $h : [0, 1] \to [0, b]$ $(b \in \mathbf{R})$ *neprekidna, opadajuća funkcija takva da je* $h(1) = 0$. *Ako t-norma* T *zadovoljava uslov* $\lim_{n\to\infty} \mathbf{T}_{i=n}^{\infty} h^{-1}(\frac{Q}{i^k}) = 1$, *za* $Q > 0$ *tada postoji jedinstvena nepokretna tačka* z *preslikavanja* f *i* $z = \lim_{n\to\infty} f^n p$.

Dokaz: Neka je $\delta = \frac{q}{\mu} < 1$, gde $\mu \in (q, 1)$. Tada je $\delta < 1$ i red $\sum_{i=1}^{\infty} \delta^i < \infty$, pa postoji $n_1 = n_1(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ takav da $\sum_{i=n_1}^{\infty} \delta^i \leq \varepsilon$.
Neka je $n \geq n_1$. Tada je analogno kao u dokazu Teoreme 2.3

$$\begin{aligned}
F_{f^n p, f^{n+m} p}(\varepsilon) &\geq F_{f^n p, f^{n+m} p}\Big(\sum_{i=n}^{\infty} \delta^i\Big) \\
&\geq F_{f^n p, f^{n+m} p}\Big(\sum_{i=n}^{n+m-1} \delta^i\Big) \\
&\geq \underbrace{T(T(\ldots T}_{(m-1)-puta}(F_{f^n p, f^{n+1} p}(\delta^n), F_{f^{n+1} p, f^{n+2} p}(\delta^{n+1}), \\
&\ldots \; F_{f^{n+m-1} p, f^{n+m} p}(\delta^{n+m-1}))
\end{aligned}$$

$$\geq \underbrace{T(T(\ldots T}_{(m-1)-puta}(F_{p,fp}(\frac{1}{\mu^n}), F_{p,fp}(\frac{1}{\mu^{n+1}}), \ldots F_{p,fp}(\frac{1}{\mu^{n+m-1}}))$$

Neka je $M > 0$ takav da je

$$(\ln x)^k h(F_{p,fp}(x)) \leq M, \text{ za svako } x > 1.$$

Tada je $F_{p,fp}(x) \geq h^{-1}(M\frac{1}{(\ln x)^k})$, za svako $x > 1$.

Neka je $x = \frac{1}{\mu^n}$. Tada je

$$F_{p,fp}(\frac{1}{\mu^n}) \geq h^{-1}(\frac{M}{(\ln 1 - n \ln \mu)^k}) = h^{-1}(\frac{M}{n^k |\ln \mu|^k}), \; n \in \mathbf{N}.$$

Neka je $Q = \frac{M}{|\ln \mu|^k} > 0$. Tada je

$$F_{p,fp}(\frac{1}{\mu^n}) \geq h^{-1}(\frac{Q}{n^k}). \tag{2.5}$$

Odavde sledi da je

$$\begin{aligned} F_{f^n p, f^{n+m} p}(\varepsilon) &\geq \underbrace{T(T(\ldots (T}_{(m-1)-puta}(h^{-1}(\frac{Q}{n^k}), h^{-1}(\frac{Q}{(n+1)^k}), \\ &\ldots \; h^{-1}(\frac{Q}{(n+m-1)^k}))) \\ &\geq \mathbf{T}_{i=n}^{\infty}(h^{-1}(\frac{Q}{i^k})) \\ &> 1 - \lambda, \end{aligned}$$

za $n \geq n_0(\varepsilon, \lambda)$, te je niz $(f^n p)_{n \in \mathbf{N}}$ Košijev. Neka je $z = \lim_{n \to \infty} f^n p$. Iz neprekidnosti preslikavanja f sledi da je $z = fz$.

Posledica 2.8 *Neka je $(S, \mathcal{F}, (T_\lambda^{SW})_{\lambda \in (-1,\infty]})$ kompletan Mengerov prostor i $f : S \to S$ verovatnosna q-kontrakcija takva da za neko $p \in S$ i $k > 0$ važi*

$$\sup_{x>1} (\ln x)^k h(F_{p,fp}(x)) < \infty$$

gde je $h : [0, 1] \to [0, b]$ $(b \in \mathbf{R})$ neprekidna, opadajuća funkcija takva da je $h(1) = 0$. Ako red $\sum_{i=1}^{\infty}(1 - h^{-1}(\frac{Q}{i^k}))$ konvergira za neko

$Q > 0$, tada postoji jedinstvena nepokretna tačka z preslikavanja f i $z = \lim_{n\to\infty} f^n p$.

Dokaz: Neka je $T = T_\lambda^{SW}$. Uslov $\sum_{i=1}^{\infty}(1 - h^{-1}(\frac{Q}{i^k}))$ je ekvivalentan uslovu (Propozicija 1.4) $\lim_{n\to\infty}(T_\lambda^{SW})_{i=n}^{\infty}(h^{-1}(\frac{Q}{i^k})) = 1$, te su zadovoljeni svi uslovi prethodne teoreme.

Posledica 2.9 *Neka je $(S, \mathcal{F}, (T_\lambda^{SW})_{\lambda\in(-1,\infty]})$ kompletan Mengerov prostor i $f : S \to S$ verovatnosna q-kontrakcija takva da za neko $p \in S$ i $k > 1$*

$$\sup_{x>1}(\ln x)^k(1 - F_{p,fp}(x)) < \infty.$$

Tada postoji jedinstvena nepokretna tačka z preslikavanja f i $z = \lim_{n\to\infty} f^n p$.

Dokaz: Neka je $h(x) = 1 - x$. Kako red $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^k}$ konvergira za $k > 1$, zadovoljeni su svi uslovi prethodne teoreme.

2.2 Teorema o nepokretnoj tački za jaku b_n-kontrakciju

Jedno od uopštenja teoreme Sehgala i Bharuche-Reid predstavlja i sledeća teorema. Za teoremu nam je potrebna sledeća definicija.

Definicija 2.2 *Neka je* $(S, \mathcal{F})$ *verovatnosni metrički prostor i* $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *niz iz* $(0, 1)$ *takav da je* $\lim_{n\to\infty} b_n = 1$. *Preslikavanje* $f : S \to S$ *je jaka* (b_n)*-kontrakcija ako je zadovoljen uslov*

$$(\exists q \in (0, 1))(\forall n \in \mathbf{N})(\forall \varepsilon > 0)(\forall x, y \in S)$$

$$F_{x,y}(\varepsilon) > b_n \Rightarrow F_{fx,fy}(q\varepsilon) > b_{n+1}.$$

Sledeća definicija je data u [19].

Definicija 2.3 *Neka je* $(S, \mathcal{F})$ *verovatnosni metrički prostor. Preslikavanja* $f : S \to S$ *je* (q, q_1)*-kontrakcija* (ε, λ)*-tipa, gde je* $q, q_1 \in (0, 1)$, *ako je zadovoljena sledeća implikacija za svako* $p_1, p_2 \in S$:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall \lambda \in (0, 1))(F_{p_1,p_2}(\varepsilon) > 1 - \lambda \Rightarrow F_{fp_1,fp_2}(q\varepsilon) > 1 - q_1\lambda).$$

Svaka (q, q_1)-kontrakcija (ε, λ)-tipa je stroga b_n-kontrakcija, gde je $q, q_1 \in (0, 1)$, ako se niz $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ definiše na sledeći način:

$$b_{m+1} = 1 - q_1^m\lambda, \quad m \in \mathbf{N}, \quad \text{za neko } \lambda \in (0, 1).$$

Teorema 2.5 *Neka je* $(S, \mathcal{F}, T)$ *kompletan Mengerov prostor i* $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *niz iz* $(0, 1)$ *takav da je* $\lim_{n\to\infty} b_n = 1$. *Ako t-norma* T *zadovoljava uslov*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{T}_{i=n}^{\infty} b_i = 1$$

i $f : S \to S$ *jaka* (b_n)*-kontrakcija tada postoji jedinstvena nepokretna tačka* $x \in S$ *preslikavanja* f *i* $x = \lim_{n\to\infty} f^n p$, *za svako* $p \in S$.

Dokaz: Pokazaćemo da je preslikavanje $f : S \to S$ uniformno neprekidno jer je f jaka (b_n)-kontrakcija. Neka su $\delta > 0$ i $\lambda \in (0, 1)$ dati. Kako je $\lim_{n\to\infty} b_n = 1$ postoji $m \in \mathbf{N}$ takav da je $b_{m+1} > 1 - \lambda$.

Neka je $\varepsilon = \frac{\delta}{q}$, $q \in (0, 1)$.

Važi implikacija $F_{x,y}(\varepsilon) > b_m \Rightarrow F_{fx,fy}(q\varepsilon) = F_{fx,fy}(\delta) > b_{m+1} > 1 - \lambda$.

Odatle sledi

$$(x, y) \in N(\frac{\delta}{q}, 1 - b_m) \Rightarrow (fx, fy) \in N(\delta, \lambda),$$

gde je

$$N(\varepsilon, \lambda) = \{(u, v) : u, v \in S, F_{u,v}(\varepsilon) > 1 - \lambda\}$$

što znači da je preslikavanje f uniformno neprekidno.
Treba pokazati da je niz $(f^n p)_{n \in \mathbf{N}}$ Košijev za svako $p \in S$, tj. treba pokazati da za svako $\varepsilon > 0$ i $\lambda \in (0, 1)$ postoji $n_0(\varepsilon, \lambda) \in \mathbf{N}$ takav da za svako $n > n_0(\varepsilon, \lambda)$ i $r \in \mathbf{N}$ važi

$$F_{f^n p, f^{n+r} p}(\varepsilon) > 1 - \lambda. \tag{3.1}$$

Kako t-norma T ispunjava uslov $\lim\limits_{n \to \infty} \mathbf{T}_{i=n}^{\infty} b_i = 1$ sledi da postoji $m_0 \in \mathbf{N}$ takav da je

$$\mathbf{T}_{i=m_0}^{\infty} b_i > 1 - \lambda. \tag{3.2}$$

Neka je $p \in S$. Kako $F_{p,fp} \in \Delta^+$ postoji η tako da je

$$F_{p,fp}(\eta) > b_{m_0}. \tag{3.3}$$

Preslikavanje f je jaka (b_n)-kontrakcija i (3.3) implicira

$$F_{fp,f^2p}(q\eta) > b_{m_0+1}.$$

Nastavljajući na taj način, dobijamo da za svako $k \in \mathbf{N}$

$$F_{f^k p, f^{k+1} p}(q^k \eta) > b_{m_0+k}. \tag{3.4}$$

Neka je $k_0 \in \mathbf{N}$ takav da $\sum\limits_{k=k_0}^{\infty} q^k < \frac{\varepsilon}{\eta}$ i $k_0 > m_0$. Tada za svako $l \in \mathbf{N}$ i svako $r \geq 2$ važi

$$F_{f^{k_0+l} p, f^{k_0+l+r} p}(\varepsilon) \geq F_{f^{k_0+l} p, f^{k_0+l+r} p}(\eta \sum_{k=k_0}^{\infty} q^k)$$

$$
\begin{aligned}
&\geq F_{f^{k_0+l}p, f^{k_0+l+r}p}(\eta \sum_{k=k_0+l}^{k_0+l+r-1} q^k) \\
&\geq \underbrace{T(T \ldots T}_{(r-1)-puta}(F_{f^{k_0+l}p, f^{k_0+l+1}p}(\eta q^{k_0+l}) \\
&, \quad F_{f^{k_0+l+1}p, f^{k_0+l+2}p}(\eta q^{k_0+l+1})) \\
&\ldots \quad F_{f^{k_0+l+r-1}p, f^{k_0+l+r}p}(\eta q^{k_0+l+r-1})) \\
&\geq \mathbf{T}_{i=m_0}^{\infty} b_i \\
&> 1 - \lambda
\end{aligned}
$$

Odavde sledi da je niz $(f^n p)_{n\in\mathbf{N}}$ Košijev, a kako je prostor kompletan sledi da postoji $x \in S$ takav da je $x = \lim_{n\to\infty} f^n p$. Iz neprekidnosti preslikavanja f sledi da je $x = fx$. Neka je $y = fy$, za $y \in S$. Pokazaćemo da je $x = y$. Tada za svako $k \in \mathbf{N}$ važi $x = f^k x$ i $y = f^k y$. Neka su $\varepsilon > 0$ i $\lambda \in (0, 1)$ dati i postoji $m \in \mathbf{N}$ takav da je $b_m > 1 - \lambda$ i $\delta > 0$ da je $F_{x,y}(\delta) > b_m$. Na osnovu definicije sledi da je $F_{x,y}(q^k \delta) > 1 - \lambda$. Kako je $q \in (0, 1)$ postoji k takvo da je $\varepsilon > q^k \delta$, tj. $F_{x,y}(\varepsilon) = 1$ pa je $x = y$.

Posledica 2.10 *Neka je $(S, \mathcal{F}, T)$ kompletan Mengerov prostor i $f : S \to S$ (q, q_1)-kontrakcija (ε, λ)-tipa. Ako t-norma T zadovoljava uslov*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{T}_{i=n}^{\infty}(1 - q_1^i) = 1$$

tada postoji jedinstvena nepokretna tačka $x \in S$ preslikavanja f i $x = \lim_{n\to\infty} f^n p$, za svako $p \in S$.

Dokaz: Neka je niz $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ definisan sa

$$b_{m+1} = 1 - q_1^m \lambda,$$

$m \in \mathbf{N}$, za neko $\lambda \in (0, 1)$. Kako $\lambda \in (0, 1)$ važi da je $q_1^i \lambda < q_1^i$ pa je

$$\mathbf{T}_{i=1}^{\infty}(1 - q_1^i \lambda) > \mathbf{T}_{i=1}^{\infty}(1 - q_1^i).$$

Odatle sledi da je $\lim_{n\to\infty} \mathbf{T}_{i=n}^{\infty}(1 - q_1^i \lambda) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{T}_{i=n}^{\infty} b_i = 1$, pa su zadovoljeni svi uslovi prethodne teoreme.

2.3 Verovatnosni kontraktor i nelinearne operatorske jednačine sa jednoznačnim operatorom u verovatnosnim normiranim prostorima

Teorija kontraktora koju je 1977. godine postavio M. Altman [1] ima veliki značaj u proučavanju postojanja i jedinstvenosti rešenja za nelinearne operatorske jednačine u Banahovim prostorima. Teorija kontraktora obezbeđuje jedinstven pristup za velik broj klasa iterativnih metoda. Inspirisani Altmanovim radom, 1979. godine A.C. Lee i W.J. Padgett [26, 27, 28] su postavili teoriju slučajnih kontraktora koja unapređuje Altmanov rad i obezbeđuje nove metode za proučavanje slučajne operatorske jednačine. 1990. godine S.S. Chang [5] i W.J. Zeng [52] su uveli pojam verovatnosnog kontraktora. Primenjujući ovaj koncept veliki broj naučnika, posebno Chang, bavio se rešavanjem nelinearnih operatorskih jednačina sa verovatnosnim kontraktorom u verovatnosnim metričkim prostorima.

Primenjujući koncept verovatnosnog kontraktora [6], u ovom poglavlju dokazana je teorema u kojoj se na osnovu teorije kontraktora u verovatnosnim normiranim prostorima obezbeđuje postojanje rešenja nelinearne operatorske jednačine sa jednoznačnim operatorom.

Sledeće definicije preuzete su iz [6].

Definicija 2.4 *Neka su* $(X, \mathcal{F}, T)$ *i* $(Y, \tilde{\mathcal{F}}, T)$ *dva verovatnosna normirana prostora i t-norma* T *zadovoljava uslov* $\sup\limits_{0<a<1} T(a, a) = 1$. *Neka su* τ_1 *i* τ_2 *dve topologije indukovane familijom* (ε, λ)*-okolina za* $(X, \mathcal{F}, T)$ *i* $(Y, \tilde{\mathcal{F}}, T)$ *respektivno. Preslikavanje* $P : D(P) \subset X \to Y$ *je zatvoreno ako za svaki niz* (x_n) *iz* $D(P)$ *takav da je* $x_n \xrightarrow{\tau_1} x$, $Px_n \xrightarrow{\tau_2} y$, *važi da* $x \in D(P)$ *i* $Px = y$.

Funkcija $\varphi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ zadovoljava uslov (Φ) ako je strogo rastuća, $\varphi(0) = 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi^n(t) = +\infty$, za svako $t > 0$.
Ako funkcija φ zadovoljava uslov (Φ) tada je $\varphi(t) > t$ za svako $t > 0$.

Definicija 2.5 *Neka su* $(X, \mathcal{F}, T)$ *i* $(Y, \tilde{\mathcal{F}}, T)$ *dva verovatnosna normirana prostora,* $\Gamma : X \to L(Y, X)$ *(skup svih linearnih opera-*

tora iz Y *u* X*) i* $P : D(P) \subset X \to Y$. Γ *je verovatnosni kontraktor od* P *ako postoji funkcija* $\varphi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *koja zadovoljava uslov* (Φ) *takva da je*

$$(4.1) \qquad \tilde{F}_{P(x+\Gamma(x)y)-P(x)-y}(t) \geq \tilde{F}_y(\varphi(t)),\ t \geq 0,\ x \in D(P),\ y \in Y.$$

Teorema 2.6 *Neka je* $(X, \mathcal{F}, T)$ τ_1*-kompletan nearhimedovski Mengerov verovatnosni normiran prostor,* $(Y, \tilde{\mathcal{F}}, T)$ τ_2*-kompletan verovatnosni normiran prostor. Neka je* $P : D(P) \subset X \to Y$ *zatvoren operator,* $\Gamma : X \to L(Y, X)$ *i važe sledeći uslovi:*

(i) Za svako $x \in D(P)$ *i* $y \in Y$

$$(4.2) \qquad x + \Gamma(x)y \in D(P),$$

(ii) Γ *je verovatnosni kontraktor od* P *i* φ *je funkcija definisana sa (4.1).*

(iii) Postoji konstanta $M > 0$ *takva da je za svako* $x \in D(P)$ *i* $y \in Y$

$$(4.3) \qquad F_{\Gamma(x)y}(t) \geq \tilde{F}_y(\tfrac{t}{M}), t \geq 0.$$

(iv) Postoji $x_0 \in D(P)$ *takvo da važi uslov*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{T}_{i=n}^{\infty} \tilde{F}_{Px_0}(\varphi^i(\frac{t}{M})) = 1, \quad t \geq 0.$$

Tada za svako $y_0 \in Y$*, nelinearna operatorska jednačina*

$$(4.4) \qquad P(x) = y_0$$

ima rešenje u $D(P)$*, i niz*

$$(4.5) \qquad x_{n+1} = x_n - \Gamma(x_n)(Px_n - y_0)$$

τ_1*-konvergira ka rešenju od (4.4).*

Ako postoji $\bar{x} \in X$ *takav da je* $\Gamma(\bar{x}) : Y \to X$ *surjektivno, tada za dato* $y_0 \in Y$*, (4.4) ima jedinstveno rešenje u* $D(P)$.

Dokaz: Bez gubitka opštosti možemo pretpostaviti da je $y_0 = \theta$. Ako je $y_0 \neq \theta$, neka je $G(x) = P(x) - y_0$, $x \in D(P)$. Tada je $D(P) = D(G)$ i G zadovoljava sve uslove teoreme.

Na osnovu uslova (i) i (4.5), za svako $n = 1, 2, \ldots$ sledi da $x_n \in D(P)$.
Na osnovu uslova (ii) i (4.2) važi

$$
\begin{aligned}
(4.6) \qquad \tilde{F}_{Px_{n+1}}(t) &= \tilde{F}_{P(x_n - \Gamma(x_n)(Px_n)) - (Px_n) - (-Px_n)}(t) \\
&\geq \tilde{F}_{Px_n}(\varphi(t)) \\
&\ldots \\
&\geq \tilde{F}_{Px_0}(\varphi^{n+1}(t)), \quad t \geq 0.
\end{aligned}
$$

Na osnovu uslova (iii) i (4.6) imamo da je

$$F_{x_n - x_{n+1}}(t) = F_{\Gamma(x_n)(Px_n)}(t) \geq \tilde{F}_{P(x_n)}(\frac{t}{M}) \geq \tilde{F}_{Px_0}(\varphi^n(\frac{t}{M})).$$

Za svako m, n, $m > n$ imamo

$$
\begin{aligned}
F_{x_n - x_m}(t) &\geq T(F_{x_n - x_{n+1}}(t), F_{x_{n+1} - x_m}(t)) \\
&\geq \underbrace{T(T(\ldots T}_{(m-n)-puta}(F_{x_n - x_{n+1}}(t), F_{x_{n+1} - x_{n+2}}(t)), \\
&\ldots \quad (F_{x_{m-2} - x_{m-1}}(t), F_{x_{m-1} - x_m}(t))) \\
&\geq \underbrace{T(T \ldots (T}_{(m-n)-puta}(\tilde{F}_{Px_0}(\varphi^n(\frac{t}{M})), \tilde{F}_{Px_0}(\varphi^{n+1}(\frac{t}{M}))), \\
&\ldots \quad (\tilde{F}_{Px_0}(\varphi^{m-2}(\frac{t}{M})), \tilde{F}_{Px_0}(\varphi^{m-1}(\frac{t}{M}))) \\
&= \mathbf{T}_{i=n}^{m-1} \tilde{F}_{P(x_0)}(\varphi^i(\frac{t}{M})).
\end{aligned}
$$

Kako je $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{T}_{i=n}^{\infty} \tilde{F}_{Px_0}(\varphi^i(\frac{t}{M})) = 1$ sledi da za svako $t > 0$ i $\lambda \in (0, 1)$ postoji $n(t, \lambda) \in \mathbf{N}$ tako da je $F_{x_n - x_m}(t) > 1 - \lambda$ za $n \geq n(t, \lambda)$.
Odatle sledi da je niz $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ Košijev u X.

Neka $x_n \xrightarrow{\tau_1} x_*$. Na osnovu (4.6) važi

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{F}_{Px_n}(t) = 1, \quad t > 0$$

tj. $Px_n \xrightarrow{\tau_2} \theta$. Na osnovu uslova zatvorenosti od P, $x_* \in D(P)$ i $Px_* = \theta$, tj. x_* je rešenje od (4.4) i iterativni niz (4.5) τ_1-konvergira ka x_*.

Ako je $\Gamma(\bar{x}) : Y \to X$ surjektivno, tada je x_* jedinstveno rešenje za (4.4) u $D(P)$. Pretpostavimo da je $x_{**} \in D(P)$ takođe rešenje od (4.4). Kako je Γ surjektivno, postoji $y \in Y$ takvo da $x_{**} - x_* = \Gamma(\bar{x})y$. Prema tome

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_y(t) &= \tilde{F}_{P(x_{**})-P(x_*)-y}(t) \\
&= \tilde{F}_{P(x_*+\Gamma(\bar{x})y)-P(x_*)-y}(t) \\
&\geq \tilde{F}_y(\varphi(t)) \\
&\dots \\
&\geq \tilde{F}_y(\varphi^m(t)), \quad m = 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

Neka $m \to \infty$. Tada je $\tilde{F}_y(t) = 1$, za svako $t > 0$, odnosno $y = \theta$. Prema tome $x_* = x_{**}$.

Posledica 2.11 *Neka je $(X, \mathcal{F}, T)$ τ_1-kompletan nearhimedovski Mengerov verovatnosni normiran prostor, $(Y, \tilde{\mathcal{F}}, T)$ τ_2-kompletan verovatnosni normiran prostor. Neka je $P : D(P) \subset X \to Y$ zatvoren operator, $\Gamma : X \to L(Y, X)$ i važe sledeći uslovi*

(i) Za svako $x \in D(P)$ i $y \in Y$

$$x + \Gamma(x)y \in D(P),$$

(ii) Postoji $q \in (0, 1)$ takvo da je za svako $x \in D(P)$ i $y \in Y$

$$\tilde{F}_{P(x+\Gamma(x)y)-Px-y}(t) \geq \tilde{F}_y(\frac{t}{q}), \quad t \geq 0,$$

(iii) Postoji konstanta $M > 0$ takva da je za svako $x \in D(P)$ i $y \in Y$

$$F_{\Gamma(x)y}(t) \geq \tilde{F}_y(\frac{t}{M}), \ t \geq 0,$$

(iv) Postoji $x_0 \in D(P)$ takvo da važi uslov

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{T}_{i=n}^{\infty} \tilde{F}_{Px_0}(\frac{t}{Mq^i}) = 1, \quad t \geq 0.$$

Tada važi tvrđenje iz Teoreme 2.6.

Dokaz: Neka je $\varphi(t) = \frac{t}{q}$. Tada su zadovoljeni svi uslovi prethodne teoreme.

Posledica 2.12 *Neka je $(X, \mathcal{F}, T)$ τ-kompletan nearhimedovski Mengerov verovatnosni normiran prostor, $L : X \to X$ i važe sledeći uslovi:*

(i) $F_{Lx-Ly}(t) \geq F_{x-y}(\varphi(t))$

za svako $t \geq 0$, $x, y \in X$ gde $\varphi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ zadovoljava uslov (Φ).
(ii) Postoji $x_0 \in X$ tako da je

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{T}_{i=n}^{\infty} F_{x_0-Lx_0}(\varphi^i(t)) = 1, \quad t \geq 0.$$

Tada postoji $x^* \in X$ takvo da je $x^* = Lx^*$ tj. x^* je jedinstvena nepokretna tačka za L i iterativni niz (x_n) iz X konvergira ka x^* u topologiji τ, gde je $x_n = Lx_{n-1}$, $n = 2, 3, \ldots$.

Dokaz: Neka je $P(x) = x - Lx$ i $\Gamma(x) = I_X$. Preslikavanja P i Γ zadovoljavaju sve uslove Teoreme 2.6, pa postoji $x^* \in X$ takvo da $\theta = P(x^*) = x^* - Lx^*$ tj. x^* je nepokretna tačka preslikavanja L.

2.4 Caristijeva teorema o nepokretnoj tački

Jedan od najvažnijih rezultata za teoriju nepokretne tačke i nelinearnu analizu predstavlja Caristijeva teorema o nepokretnoj tački [4]. Caristijeva teorema, koja predstavlja uopštenje Banahovog principa kontrakcije ima veliki značaj i u kontrolnoj teoriji, optimalnoj teoriji, ekonomskoj teoriji, globalnoj analizi, geometrijskoj teoriji Banahovog prostora, teoriji diferencijalnih jednačina i problemima minimizacije.

Teorema 2.7 (Caristi) *Neka je (M, d) kompletan metrički prostor i $\phi : M \longrightarrow \mathbf{R}$ od dole poluneprekidna funkcija sa konačnim donjim ograničenjem. Neka je $f : M \longrightarrow M$ bilo koja (ne obavezno neprekidna) funkcija takva da*

$$d(x, f(x)) \leq \phi(x) - \phi(f(x)) \text{ za svako } x \in M.$$

Tada f ima nepokretnu tačku.

U radu [19] dokazana je sledeća teorema.

Teorema 2.8 *Neka je T t-norma. Tada važe (i) i (ii) gde je:*

(i) Pretpostavimo da postoji strogo rastući niz $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ iz intervala $[0, 1)$ takav da je $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$ i $T(b_n, b_n) = b_n$. Tada je t-norma T H-tipa.

(ii) Ako je t-norma T neprekidna i H-tipa, tada postoji niz $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ koji zadovoljava uslov (i).

Teorema koja je dokazana predstavlja uopštenje teoreme date u [14].

Teorema 2.9 *Neka je $(S, \mathcal{F}, T)$ kompletan Mengerov prostor takav da je t-norma T neprekidna i H-tipa, $f : S \longrightarrow S$ neprekidno preslikavanje, $\Phi_n : S \longrightarrow \mathbf{R}^+$ $(n \in \mathbf{N})$, i μ preslikavanje $\mathbf{R}^+$ na $\mathbf{R}^+$ koje je neopadajuće i*

$$\mu(a + b) \leq \mu(a) + \mu(b)$$

za svako $a, b \in \mathbf{R}^+$. *Ako je za svako* $x \in S$, *svako* $s > 0$ *i svako* $n \in \mathbf{N}$

$$\mu(s) > \Phi_n(x) - \Phi_n(f(x)) \Rightarrow F_{x,f(x)}(s) > b_n$$

gde je $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *monotono rastući niz iz* $(0, 1)$ *takav da je* $\lim_{n\to\infty} b_n = 1$ *i* $T(b_n, b_n) = b_n$ *za svako* $n \in \mathbf{N}$. *Tada postoji nepokretna tačka* $x^* \in S$ *preslikavanja* f *i* $x^* = \lim_{n\to\infty} f^n(x_0)$ *za proizvoljno* $x_0 \in S$.

U sledećoj teoremi $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ je monotono rastući niz iz $(0, 1)$ takav da je $\lim_{n\to\infty} b_n = 1$ ali članovi niza $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ nisu u opštem slučaju idempotentni elementi preslikavanja T.

Teorema 2.10 *Neka je* $(S, \mathcal{F}, T)$ *kompletan Mengerov prostor, t-norma* T *H-tipa,* $f : S \to S$ *neprekidno preslikavanje,* $\Phi_n : S \to \mathbf{R}^+$ $(n \in \mathbf{N})$ *i* μ *neopadajuće preslikavanje* $\mathbf{R}^+$ *na* $\mathbf{R}^+$ *za koje važi* $\mu(a + b) \le \mu(a) + \mu(b)$, *za svako* $a, b \in \mathbf{R}^+$. *Ako za svako* $x \in S$, *svako* $s > 0$ *i svako* $n \in \mathbf{N}$

$$\mu(s) > \Phi_n(x) - \Phi_n(f(x)) \Rightarrow F_{x,f(x)}(s) > b_n, \tag{5.1}$$

tada postoji $x^* \in S$ *takav da je* $x^* = f(x^*)$ *i* $x^* = \lim_{n\to\infty} f^n(x_0)$, *za proizvoljno* $x_0 \in S$.

Dokaz: Pokazaćemo da (5.1) implicira

$$\mu[d_n(x, f(x))] \le \Phi_n(x) - \Phi_n(f(x)), \tag{5.2}$$

za svako $n \in \mathbf{N}$ i svako $x \in S$, gde je

$$d_n(x, y) = \sup\{u \mid u \in \mathbf{R}, F_{x,y}(u) \le b_n\}.$$

Da bismo pokazali (5.2), pokazaćemo da važi sledeća implikacija

$$s > \Phi_n(x) - \Phi_n(f(x)) \Rightarrow \mu[d_n(x, f(x))] \le s. \tag{5.3}$$

Neka je $s > \Phi_n(x) - \Phi_n(f(x))$. Kako $\mu : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$, postoji $s_1 > 0$ da je

$$\mu(s_1) = s > \Phi_n(x) - \Phi_n(f(x)).$$

Iz (5.1) sledi da je $F_{x,fx}(s_1) > b_n$, tj. $d_n(x, f(x)) < s_1$ pa je

$$\mu[d_n(x, f(x))] \le \mu(s_1) = s.$$

Prema tome važi (5.3).
Kako je T t-norma H-tipa sledi da za svako $\alpha \in (0, 1)$, postoji $\beta \in (0, 1)$ da je

$$\underbrace{T(T(\ldots T}_{n-puta}(1-\beta, 1-\beta), \ldots, 1-\beta) > 1-\alpha, \quad \text{za svako}$$

$n \in \mathbf{N}$. Neka je $1-\alpha = b_n$ za $n \in \mathbf{N}$. Tada postoji $s(n) \in \mathbf{N}$ da je $1-\beta \leq b_{s(n)}$, pa je

$$\underbrace{T(T(\ldots T}_{n-puta}(b_{s(n)}, b_{s(n)}), \ldots, b_{s(n)}) > b_n, \quad \text{za svako } n \in \mathbf{N}.$$

Pokazaćemo da za svaki konačan skup $\{v_1, v_2, \ldots v_m\} \subset S$, važi

$$d_n(v_1, v_m) \leq \sum_{i=1}^{m-1} d_{s(n)}(v_i, v_{i+1}). \tag{5.4}$$

Neka su $u_1, u_2, \ldots u_{m-1} \in \mathbf{R}$ takvi da važi

$$\begin{aligned} & d_{s(n)}(v_1, v_2) < u_1 \\ & d_{s(n)}(v_2, v_3) < u_2 \\ & \ldots \\ & d_{s(n)}(v_{m-1}, v_m) < u_{m-1}. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Tada je na osnovu definicije za d_n

$$\begin{aligned} & F_{v_1,v_2}(u_1) > b_{s(n)} \\ & F_{v_2,v_3}(u_2) > b_{s(n)} \\ & \ldots \\ & F_{v_{m-1},v_m}(u_{m-1}) > b_{s(n)}, \end{aligned}$$

odnosno $F_{v_1,v_m}(u_1 + u_2 + \ldots u_m) \geq \mathbf{T}_{i=1}^{m} b_{s(n)} > b_n$, tj. $d_n(v_1, v_m) \leq u_1 + u_2 + \ldots + u_m$ odakle sledi da važi (5.4).

Neka je $x_0 \in S$ i $x_m = f^m(x_0)$ $(m \in \mathbf{N})$. Tada je za svako $(m \in \mathbf{N})$

$$\begin{aligned}\mu[d_n(x_{m+1}, x_m)] &= \mu[d_n(f(x_m), x_m)] \\ &\leq \Phi_n(x_m) - \Phi_n(f(x_m)),\end{aligned}$$

te je za svako $k \in \mathbf{N}$

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k} \mu[d_n(x_{i+1}, x_i)] &\leq \Phi_n(x_0) - \Phi_n(x_{k+1}) \\ &\leq \Phi_n(x_0).\end{aligned}$$

Pošto je μ subaditivna sledi da je

$$\mu[\sum_{i=0}^{k} d_n(x_{i+1}, x_i)] \leq \Phi_n(x_0)$$

a to implicira da je

$$\sum_{i=0}^{k} d_n(x_{i+1}, x_i) \leq \sup\{u \mid u > 0,\, \mu(u) = \Phi_n(x_0)\} = M_n,$$

tj. red

(5.6) $\sum\limits_{i=0}^{\infty} d_n(x_{i+1}, x_i)$ je konvergentan.

Uslov (5.6) važi za svako $n \in \mathbf{N}$ pa važi i za $s(n)$ te je

$$\begin{aligned}d_n(x_m, x_{m+p}) &\leq \sum_{i=m}^{m+p-1} d_{s(n)}(x_i, x_{i+1}) \\ &\leq \sum_{i=m}^{\infty} d_{s(n)}(x_i, x_{i+1})\end{aligned}$$

pa na osnovu (5.4) sledi da je niz $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ Košijev. Neka je $x^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} f^n(x_0)$. Iz neprekidnosti preslikavanja f sledi da je $x^* = f(x^*)$.

2.5 Teorema o zajedničkoj nepokretnoj tački

Kako Mengerovi prostori pripadaju klasi kvazi-uniformnih prostora u ovom paragrafu će biti dokazana teorema o zajedničkoj nepokretnoj tački tri preslikavanja u jednoj specijalnoj klasi kvazi-uniformnih prostora.

Sledeću definiciju je uveo D.H. Tan.

Definicija 2.6 *Neka su S i I proizvoljni skupovi, $g : I \longrightarrow I$ i za svako $i \in I$ je $d_i : S \times S \longrightarrow \mathbf{R}^+$. Uređena trojka $(S, (d_i)_{i\in I}, g)$ je kvazi-uniforman prostor ako za svako $x, y, z \in S$ i $i \in I$ važi:*

a) $d_i(x, y) \geq 0$ *i* $d_i(x, x) = 0$
b) $d_i(x, y) = d_i(y, x)$
c) $d_i(x, y) \leq d_{g(i)}(x, z) + d_{g(i)}(z, y)$.

Kvazi-uniforman prostor je Hausdorfov ako relacija $d_i(x, y) = 0$, za svako $i \in I$ implicira $x = y$. Hausdorfov kvazi-uniforman prostor je Hausdorfov topološki prostor ako je fundamentalni sistem okolina od $x \in S$ familija $\mathcal{U}_x = (B(x, \varepsilon, i))_{i\in I}^{\varepsilon>0}$

$$B(x, \varepsilon, i) = \{y \,|\, y \in S, \, d_i(x, y) < \varepsilon\}, \quad i \in I, \, \varepsilon > 0.$$

Sledeća lema je data u [19].

Lema 2.1 *Mengerov prostor $(S, \mathcal{F}, T)$ takav da je $\sup\limits_{x<1} T(x, x) = 1$ je kvazi-uniforman prostor. $(S, (d_\lambda)_{\lambda\in J}, g)$, gde je $J = (0, 1)$, $g : J \longrightarrow J$ i*

(6.1) $$d_\lambda(x, y) = \sup\{s \,|F_{x,y}(s) \leq 1 - \lambda\}$$

$\lambda \in J$, $x, y \in S$.

Dokaz: Iz $\sup\limits_{x<1} T(x, x) = 1$ sledi da za svako $\lambda \in (0, 1)$ postoji $\delta_\lambda \in (0, 1)$ da je

$$T(1 - \delta_\lambda, 1 - \delta_\lambda) \geq 1 - \lambda.$$

Neka je $g(\lambda) = \delta_\lambda$, $\lambda \in (0, 1)$. Pokazaćemo da je $(S, (d_\lambda)_{\lambda\in J}, g)$ kvazi-uniforman prostor. Dokazaćemo da važi uslov c). Neka su r_1 i r_2 proizvoljni brojevi takvi da je $d_{g(\lambda)}(x, z) < r_1$ i $d_{g(\lambda)}(z, y) < r_2$. Tada je

$$F_{x,z}(r_1) > 1 - g(\lambda) = 1 - \delta_\lambda, \quad F_{z,y}(r_2) > 1 - g(\lambda) = 1 - \delta_\lambda.$$

To implicira da je

$$\begin{aligned} F_{x,y}(r_1 + r_2) &\geq T(F_{x,z}(r_1), F_{z,y}(r_2)) \\ &\geq T(1 - \delta_\lambda, 1 - \delta_\lambda) \\ &> 1 - \lambda \end{aligned}$$

te je $d_\lambda(x, y) < r_1 + r_2$, tj. važi c).

Lema 2.2 *Neka je $(S, \mathcal{F}, T)$ Mengerov prostor i t-norma T H-tipa. Tada je $(S, (d_\lambda)_{\lambda\in J}, g)$, $J = (0, 1)$ kvazi-uniforman prostor takav da za svako $\alpha \in (0, 1)$ postoji $\beta \in (0, 1)$ tako da je za svako $x_1, \dots x_n \in S$*

$$(6.2) \quad d_\alpha(x_1, x_n) \leq d_\beta(x_1, x_2) + d_\beta(x_2, x_3) + \ldots + d_\beta(x_{n-1}, x_n).$$

Dokaz: Neka je $\alpha \in (0, 1)$. Kako je T t-norma H-tipa za dato $\alpha \in (0, 1)$ postoji $\beta \in (0, 1)$ tako da važi $\mathbf{T}_{i=1}^{n-1} 1 - \beta > 1 - \alpha$, za svako $n \in \mathbf{N}$.
Za dokaz relacije (6.2) pretpostavićemo da su $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{n-1}$, $n \in \mathbf{N}$ takvi da važi

$$(6.3) \quad \begin{aligned} d_\beta(x_1, x_2) &< \alpha_1 \\ d_\beta(x_2, x_3) &< \alpha_2 \\ &\dots \\ d_\beta(x_{n-1}, x_n) &< \alpha_{n-1}. \end{aligned}$$

Treba pokazati da je $d_\alpha(x_1, x_n) < \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n-1}$.
Iz (6.3) sledi

$$(6.4) \quad \begin{aligned} F_{x_1, x_2}(\alpha_1) &> 1 - \beta \\ F_{x_2, x_3}(\alpha_2) &> 1 - \beta \\ &\dots \\ F_{x_{n-1}, x_n}(\alpha_{n-1}) &> 1 - \beta \end{aligned}$$

te je

$$\begin{aligned}
F_{x_1,x_n}(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1}) &\geq T(F_{x_1,x_2}(\alpha_1),\, F_{x_2,x_n}(\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1}))\\
&\geq \underbrace{T(T(\ldots T}_{(n-2)-puta}(F_{x_1,x_2}(\alpha_1),\ldots(F_{x_{n-1},x_n}(\alpha_{n-1})))\\
&\geq \underbrace{T(T(\ldots T}_{(n-2)-puta}(1-\beta,\,1-\beta)\ldots,1-\beta)\\
&= \mathbf{T}_{i=1}^{n-1}1-\beta\\
&> 1-\alpha
\end{aligned}$$

odnosno $d_\alpha(x_1,\, x_n) < \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1}$ što znači da važi (6.2).

Teorema 2.10 *Neka je $(S,\,(d_\lambda)_{\lambda\in I},\, g)$ sekvencijalno kompletan Hausdorfov kvazi-uniforman prostor, familija $(d_\lambda)_{\lambda\in I}$ zadovoljava relaciju (6.2), $f : I \to I$, $L_1,\, L_2 : S \to S$ neprekidna preslikavanja i $L : S \to L_1S\cap L_2S$ neprekidno preslikavanje koje komutira sa L_1 i L_2 i zadovoljeno je sledeće:*

(i) Za svako $i\in I$ postoji $q_i : \mathbf{R}^+ \to [0,\,1)$ koje je neopadajuća funkcija, tako da je $\overline{\lim_{n\to\infty}} q_{f^n(i)}(t) < 1$, za svako $t\in\mathbf{R}^+$ i za svako $x,\, y\in S$ je

$$d_i(Lx,\, Ly) \leq q_i(d_{f(i)}(L_1x,\, L_2y))\cdot d_{f(i)}(L_1x,\, L_2y).$$

(ii) Postoji $x_0\in S$ tako da je za svako $i\in I$

$$\sup_{j\in O(i,f)} d_j(Lx_0,\, Lx_1) \leq K_i \quad (K_i\in\mathbf{R}^+)$$

gde je $O(i,\, f)=\{f^n(i) : n\in\mathbf{N}\}$, i niz $(x_p)_{p\in\mathbf{N}}$ definisan sa

$$L_1x_{2n-1} = Lx_{2n-2} \text{ i } L_2x_{2n} = Lx_{2n-1} \ (n\in\mathbf{N}).$$

Tada postoji $z\in S$ takvo da $Lz = L_1z = L_2z$.

Ako je za svako $i\in I$

$$\sup_{j\in O(i,f)} d_j(L^3x_1,\, L^2x_0) \leq M_i,\ (M_i\in\mathbf{R}^+),$$

tada je Lz zajednička nepokretna tačka za L, L_1 i L_2,

a Lz je jedinstvena nepokretna tačka za L, L_1, L_2 nad skupom

$$\{u \,|u \in S, (\forall i \in I), (\exists V_i \in \mathbf{R}^+) (\sup_{j\in O(i,\, f)} d_j(Lz,\, u) \leq V_i)\}.$$

Dokaz: Neka je $(x_n)_{n\in \mathbf{N}}$ niz iz S takav da

$L_2x_{2k} = Lx_{2k-1}$ i $L_1x_{2k-1} = Lx_{2k-2}$, za svako $k \in \mathbf{N}$.

Treba pokazati da je niz $(Lx_n)_{n\in\mathbf{N}}$ Košijev tj. da za svako $i \in I$ i svako $\varepsilon > 0$ postoji $n(\varepsilon, i) \in \mathbf{N}$ takav da

(ii) $\quad d_i(Lx_n,\, Lx_{n+p}) < \varepsilon$, za svako $n \geq n(\varepsilon, i)$, i svako $p \in \mathbf{N}$.

Da bismo pokazali (ii), prvo ćemo majorirati

$d_i(Lx_{2k},\, Lx_{2k-1})$ i $d_i(Lx_{2k+1},\, Lx_{2k})$, za svako $i \in I$ i svako $k \in \mathbf{N}$.

Na osnovu (i) važi

$$\begin{aligned}
d_i(Lx_{2k},\, Lx_{2k-1}) &\leq q_i(d_{f(i)}(L_2x_{2k},\, L_1x_{2k-1}))\cdot d_{f(i)}(L_2x_{2k},\, L_1x_{2k-1})\\
&= q_i(d_{f(i)}(Lx_{2k-1},\, Lx_{2k-2}))\cdot d_{f(i)}(Lx_{2k-1},\, Lx_{2k-2})\\
&\leq q_i(d_{f(i)}(Lx_{2k-1},\, Lx_{2k-2}))\cdot q_{f(i)}(d_{f^2(i)}(L_1x_{2k-1},\, L_2x_{2k-2}))\\
&\cdot\ (d_{f^2(i)})(L_1x_{2k-1},\, L_2x_{2k-2})\\
&\dots\\
&\leq q_i(d_{f(i)}(Lx_{2k-1},\, Lx_{2k-2}))\cdot\\
&\prod_{s=0}^{2k-3} q_{f^{s+1}(i)}(d_{f^{s+2}(i)}(Lx_{2k-s-1},\, Lx_{2k-s-2}))\cdot d_{f^{2k-1}(i)}(Lx_1,\, Lx_0)
\end{aligned}$$

i slično

$$\begin{aligned}
d_i(Lx_{2k+1},\, Lx_{2k}) &\leq q_i(d_{f(i)}(Lx_{2k},\, Lx_{2k-1}))\\
&\cdot \prod_{s=0}^{2k-2} q_{f^{s+1}(i)}(d_{f^{s+2}(i)}(Lx_{2k-s-1},\, Lx_{2k-s-2}))\\
&\cdot\ d_{f^{2k}(i)}(Lx_1,\, Lx_0)
\end{aligned}$$

Kako je $q_i(t) < 1$, za svako $i \in I$ i $t \in \mathbf{R}^+$ sledi da je za svako $i \in I$ i za svako $n \in \mathbf{N}$

$$d_j(Lx_n, Lx_{n-1}) \leq K_i, \text{ za svako } j \in O(i, f) \text{ pa je}$$

$$d_i(Lx_{2k}, Lx_{2k-1}) \leq \prod_{s=0}^{2k-2} q_{f^s(i)}(K_i)K_i$$

$$d_i(Lx_{2k+1}, Lx_{2k}) \leq \prod_{s=0}^{2k-1} q_{f^s(i)}(K_i)K_i$$

gde je $f^0(i) = i$ za svako $i \in I$.

Kako je $\overline{\lim_{n\to\infty}} q_{f^n(i)}(K_i) \leq Q_i < 1$ za svako $i \in I$ postoji $n_i \in \mathbf{N}$ takav da za neko $S_i \in \mathbf{R}^+$ $(i \in I)$ važi

$$d_i(Lx_n, Lx_{n-1}) \leq S_i Q_i^n, \text{ za svako } i \in I.$$

Na osnovu Leme 2.2 za svako $i \in I$ postoji $j \in I$ takav da važi

$$\begin{aligned} d_i(Lx_n, Lx_{n+p}) &\leq d_j(Lx_n, Lx_{n+1}) + d_j(Lx_{n+1}, Lx_{n+2}) + \\ &\ldots +d_j(Lx_{n+p-1}, Lx_{n+p}) \\ &\leq S_j \sum_{i=n+1}^{\infty} Q_j^i. \end{aligned}$$

Odavde sledi, na osnovu uslova $Q_j < 1$, $(j \in I)$, da je niz $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ Košijev. Neka je

$$z = \lim_{n\to\infty} Lx_n = \lim_{n\to\infty} Lx_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} Lx_{2n}.$$

L i L_1 su neprekidne funkcije, te je

$$L_1 z = \lim_{n\to\infty} L_1 L x_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} L L_1 x_{2n+1} = Lz$$

i slično $L_2 z = Lz$.

Sada ćemo pokazati da je Lz zajednička nepokretna tačka za L, L_1 i L_2 ako je

$$\sup_{j\in O(i,f)} d_j(L^3 x_1, L^2 x_0) \leq M_i \text{ za svako } i \in I.$$

Prvo ćemo pokazati da je za svako $i \in I$

$$\sup_{j\in O(i,f)} d_j(L^2 z, Lz) \leq M_i.$$

Kako je $d_j(L^2z,\, Lz) = \lim\limits_{n\to\infty} d_j(L^2Lx_{2n+1},\, LLx_{2n})$

dovoljno je da se pokaže da je za svako $i \in I$

$$d_j(L^3x_{2n+1},\, L^2x_{2n}) \leq M_i \text{ za svako } n \in \mathbf{N} \text{ i } j \in O(i,\, f).$$

Parovi L, L_1 i L, L_2 komutiraju pa je

$$\begin{aligned}
d_j(L^3x_{2n+1},\, L^2x_{2n}) &\leq q_j(d_{f(j)}(L_2(Lx_{2n}),\, L_1(L^2x_{2n+1}))) \\
&\cdot\ d_{f(j)}(L_2(Lx_{2n}),\, L_1(L^2x_{2n+1})) \\
&= q_j(d_{f(j)}(L(L_2x_{2n}),\, L^2(L_1x_{2n+1}))) \\
&\cdot\ d_{f(j)}(L(L_2x_{2n}),\, L^2(L_1x_{2n+1})) \\
&= q_j(d_{f(j)}(LLx_{2n-1},\, L^2Lx_{2n})) \\
&\cdot\ d_{f(j)}(LLx_{2n-1},\, L^2Lx_{2n}) \\
&= q_j(d_{f(j)}(L^2x_{2n-1},\, L^3x_{2n})) \\
&\cdot\ d_{f(j)}(L^2x_{2n-1},\, L^3x_{2n}) \\
&\leq d_{f(j)}(L^2x_{2n-1},\, L^3x_{2n}) \\
&\ldots \\
&\leq d_{f(j)}(L^3x_1,\, L^2x_0) \\
&\leq M_i
\end{aligned}$$

za svako $n \in \mathbf{N}$ jer $f^{2n}(j) \in O(i,\, f)$.
Iz toga sledi da je

$$\begin{aligned}
d_i(L^2z,\, Lz) &\leq q_i(d_{f(i)}(L_1Lz,\, L_2z)) \cdot d_{f(i)}(L_1Lz,\, L_2z) \\
&= q_i(d_{f(i)}(L^2z,\, Lz)) \cdot d_{f(i)}(L^2z,\, Lz) \\
&\ldots \\
&\leq q_i(M_i)q_{f(i)}(M_i)\ldots q_{f^n(i)}(M_i)M_i
\end{aligned}$$

za svako $i \in I$.

Iz $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} q_{f^n(i)}(M_i) < 1$ sledi da je $d_i(L^2z,\, Lz) = 0$ za svako $i \in I$ odnosno $Lz = L^2z$.

Na osnovu $Lz = L_1z = L_2z$ sledi da je $L^2z = LL_1z = L_1Lz = L_2Lz = Lz$ tj. Lz je zajednička nepokretna taka za L, L_1 i L_2.

Neka je $y = Ly = L_1y = L_2y$ i za svako $i \in I$

$$\sup_{j \in O(i,f)} d_j(Lz, y) \leq V_i \qquad (V_i \in \mathbf{R}^+).$$

Treba pokazati da je $y = Lz$ za svako $i \in I$.

$$\begin{aligned}
d_i(Lz, y) &= d_i(L(Lz), Ly) \\
&\leq q_i(d_{f(i)}(L_1(Lz), L_2y)) \cdot d_{f(i)}(L_1(Lz), L_2y) \\
&= q_i(d_{f(i)}(Lz, y)) \cdot d_{f(i)}(Lz, y) \\
&\dots \\
&\leq q_i(d_{f(i)}(Lz, y)) \dots q_{f^n(i)}(d_{f^{n+1}(i)}(Lz, y)) \cdot d_{f^{n+1}(i)}(Lz, y) \\
&\leq q_i(V_i) q_{f(i)}(V_i) \dots q_{f^n(i)}(V_i) V_i
\end{aligned}$$

Kako je $\overline{\lim_{n\to\infty}} q_{f^n(i)}(V_i) < 1$ sledi da je $d_i(Lz, y) = 0$ za svako $i \in I$, odnosno $y = Lz$.

Posledica 2.13 *Neka je $(S, \mathcal{F}, T)$ kompletan Mengerov prostor, t-norma T je H-tipa, $f : (0, 1) \to (0, 1)$, $L_1, L_2 : S \to S$ neprekidna preslikavanja, $L : S \to L_1S \cap L_2S$ neprekidno preslikavanje koje komutira sa $L_!$ i L_2 i zadovoljen je sledeći uslovi:*

(1) Za svako $\lambda \in (0, 1)$ postoji neprekidna sa desne strane, neopadajuća funkcija

$q_\lambda : \mathbf{R}^+ \to [0, 1)$ za koju važi $\overline{\lim_{n\to\infty}} q_{f^n(\lambda)}(t) < 1$ za svako $t \in \mathbf{R}^+$ i za svako $\lambda \in (0, 1)$, svako $r > 0$ i svako $x, y \in S$

$$(6.5) \qquad F_{L_1x, L_2y}(r) > 1 - f(\lambda) \Rightarrow F_{Lx, Ly}(q_\lambda(r)r) > 1 - \lambda.$$

(2) Postoji $x_0 \in S$ tako da za svako $\lambda \in (0, 1)$ postoji $K_\lambda \in \mathbf{R}^+$ da je za svako $n \in \mathbf{N}$ ispunjeno

$$F_{Lx_0, Lx_1}(K_\lambda) > 1 - f^n(\lambda)$$

gde je niz $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ definisan sa

$$L_1x_{2n-1} = Lx_{2n-2} \quad i \quad L_2x_{2n} = Lx_{2n-1} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Tada postoji $z \in S$ *takvo da je*

$$Lz = L_1 z = L_2 z.$$

Ako za svako $\lambda \in (0, 1)$ *postoji* $M_\lambda \in \mathbf{R}^+$ *takvo da za svako* $n \in \mathbf{N}$ *važi*

$$F_{L^3 x_1, L^2 x_0}(M_\lambda) > 1 - f^n(\lambda),$$

tada je Lz *zajednička nepokretna tačka za preslikavanja* L, L_1 *i* L_2, *a ona je jedinstvena zajednička nepokretna tačka za skup*

$$\{u \,|\, u \in S, (\forall \lambda \in (0, 1)) (\exists P_\lambda \in \mathbf{R}^+) (\forall n \in \mathbf{N}) (F_{Lz,u}(P_\lambda) > 1 - f^n(\lambda))\}.$$

Dokaz: Treba da pokažemo da uslov (6.5) implicira da za svako $\lambda \in (0, 1)$ i svako $x, y \in S$

$$d_\lambda(Lx, Ly) \leq q_\lambda(d_\lambda(L_1 x, L_2 y)) \cdot d_{f(\lambda)}(L_1 x, L_2 y)$$

Pretpostavimo da je $d_{f(\lambda)}(L_1 x, L_2 y) < r$. Tada je $F_{L_1 x, L_2 y}(r) > 1 - f(\lambda)$ i na osnovu (6.5) sledi da je $F_{Lx,Ly}(q_\lambda(r)r) > 1 - \lambda$. Prema tome $d_\lambda(Lx, Ly) < q_\lambda(r)r$ i pošto je q_λ neprekidna sa desne strane sledi tražena nejednakost.
Na osnovu Leme 2.2 sledi da za svako $\alpha \in (0, 1)$ postoji $\beta \in (0, 1)$ tako da je za svako $x_1, \ldots, x_n \in S$

$$d_\alpha(x_1, x_n) \leq d_\beta(x_1, x_2) + d_\beta(x_2, x_3) + \ldots + d_\beta(x_{n-1}, x_n)$$

te su zadovoljeni svi uslovi prethodne teorema.

Glava 3

Teoreme o nepokretnoj tački za višeznačna preslikavanja

Postojanjem nepokretne tačke za višeznačna preslikavanja u verovatnosnim metričkim prostorima bavi se veliki broj naučnika.
Nejednakost $F_{fx,fy}(qs) \geq F_{x,y}(s)$ $(s \geq 0)$, gde $q \in (0, 1)$ je u slučaju višeznačnih preslikavanja uopštena na razne načine. U delu 3.1 je dokazana teorema koja predstavlja jedno od verovatnosnih uopštenja Nadlerove teoreme o nepokretnoj tački, a odnosi se na tri preslikavanja. Takođe je dokazana i posledica ove teoreme na verovatnosne metričke prostore sa konveksnom strukturom.
T.L Hicks je u [21] uveo novi pojam verovatnosnog kontraktivnog preslikavanja koje nije uporedivo sa verovatnosnom q-kontrakcijom. U delu 3.2 je dokazana teorema o zajedničkoj nepokretnoj tački za tri preslikavanja koja predstavlja višeznačno uopštenje Hicksove C-kontrakcije. Dokazana je i posledica ove teoreme na fazi metričke prostore.
U delu 3.3 je definisan pojam verovatnosnog kontraktora za operatorske jednačine sa višeznačnim operatorom u Mengerovim verovatnosno normiranim prostorima i dokazana je teorema koja obezbeđuje postojanje i jedinstvenost rešenja operatorske jednačine primenom kontraktora.

3.1 Verovatnosno uopštenje Nadlerove q-kontrakcije

S.B. Nadler je u [31] dokazao generalizaciju Banahovog principa kontrakcije za višeznačno preslikavanje $f : X \to CB(X)$, gde je (X, d) metrički prostor i

$$D(fx, fy) \leq qd(x, y),$$

gde je D Hausdorfova metrika i $q \in (0, 1)$.
Uopštenje Nadlerovog principa kontrakcije u verovatnosnim metričkim prostorima $(S, \mathcal{F})$ je definisano u [12].

Neka je $(S, \mathcal{F})$ verovatnosni metrički prostor, M neprazan podskup od S i $f : M \to 2^S$. Preslikavanje f je verovatnosna Nadlerova q-kontrakcija, gde $q \in (0, 1)$ ako je zadovoljen sledeći uslov:

Za svako $u, v \in M$, svako $x \in fu$ i svako $\delta > 0$ postoji $y \in fv$ takvo da za svako $\varepsilon > 0$

$$F_{x,y}(\varepsilon) \geq F_{u,v}(\frac{\varepsilon - \delta}{q}).$$

Ako je f jednoznačno preslikavanje pojam verovatnosne Nadlerove q-kontrakcije se poklapa sa pojmom verovatnosne q-kontrakcije koju su uveli Sehgal i Bharucha-Reid, jer je funcija $F_{u,v}(\cdot)$ neprekidna sa leve strane.

U ovoj glavi je dokazana teorema o zajedničkoj nepokretnoj tački za tri preslikavanja koja predstavlja uopštenje teoreme o nepokretnoj tački za verovatnosnu Nadlerovu q-kontrakcije, a takođe je data teoreme primenjena na prostore sa konveksnom strukturom.

Za datu teoremu potrebna nam je sledeća definicija:

Definicija 3.1 : *Neka je $(S, \mathcal{F}, T)$ Mengerov prostor, $\emptyset \neq M \subset S$, $f : M \to M$ i $A : M \to 2^M$ (familija svih nepraznih podskupova od M). Preslikavanje A je f-* **strogo demikompaktno** *ako za svaki niz $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ iz M, takav da je $\lim_{n\to\infty} F_{fx_n,y_n}(\varepsilon) = 1$, za neki niz $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $y_n \in Ax_n$, $n \in \mathbf{N}$ i za svako $\varepsilon > 0$, postoji konvergentan podniz $(fx_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$.*

Ako je f identičko preslikavanje, kažemo da je A strogo demikom-

paktno.

Preslikavanje $A : M \to 2^M$ **slabo komutira** sa $f : M \to M$ ako je za svako $x \in M$ zadovoljeno

$$f(Ax) \subset A(fx).$$

Sledeća teorema predstavlja jednu varijantu teoreme koja je dokazana u [45].

Teorema 3.1 *Neka je $(S, \mathcal{F}, T)$ kompletan Mengerov prostor sa neprekidnom t-normom T, $\sup\limits_{a<1} T(a, a) = 1$ i A neprazan, zatvoren podskup od S. Neka je $f : A \to A$ neprekidno preslikavanje i $L, L_1 : A \to 2_c^{f(A)}$ zatvorena, višeznačna preslikavanja i zadovoljen je sledeći uslov:*

Za svako $u, v \in A$, $x \in Lu$ i $\delta > 0$, postoji $y \in L_1 v$ tako da je

(7.1) $\qquad F_{x,y}(\varepsilon) \geq F_{fu,fv}(\frac{\varepsilon-\delta}{q})$, *za svako $\varepsilon > 0$, gde je $q \in (0, 1)$.*

Ako su L i L_1 slabo komutativni u odnosu na f i ako je zadovoljen bar jedan od sledeća dva uslova

(i) L ili L_1 su f-strogo demikompaktni

(ii) postoje $x_0, x_1 \in A$, $fx_1 \in Lx_0$ i $\mu \in (0, 1)$ tako da t-norma T zadovoljava uslov

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{T}_{i=n}^{\infty} F_{fx_0, fx_1}(\frac{1}{\mu^i}) = 1.$$

Tada postoji $x \in A$ tako da $fx \in Lx \cap L_1 x$.

Dokaz: Neka su $x_0, x_1 \in A$ takvi da $fx_1 \in Lx_0$. Na osnovu (7.1) birajući da je $x = fx_1$, $u = x_0$, $v = x_1$ i $\delta = q$ sledi da postoji $x_2 \in A$ tako da je $fx_2 \in L_1 x_1$ i

$$F_{fx_1, fx_2}(\varepsilon) \geq F_{fx_0, fx_1}(\frac{\varepsilon - q}{q}).$$

Nastavljajući ovaj postupak dobijamo niz $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ iz A takav da važe uslovi (a) i (b), gde je

(a) $fx_{2n+1} \in Lx_{2n}$ i $fx_{2n+2} \in L_1 x_{2n+1}$

(b) $F_{fx_n, fx_{n+1}}(\varepsilon) \geq F_{fx_{n-1}, fx_n}(\frac{\varepsilon - q^n}{q})$.

Na osnovu (b) sledi da je

$$F_{fx_n, fx_{n+1}}(\varepsilon) \geq F_{fx_1, fx_0}(\frac{\varepsilon - nq^n}{q^n}).$$

Kako je za svako $\varepsilon > 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} F_{fx_1, fx_0}(\frac{\varepsilon - nq^n}{q^n}) = 1$ jer je $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{\varepsilon - nq^n}{q^n}) = \infty$, sledi da je i

(7.2) $$\lim_{n\to\infty} F_{fx_n, fx_{n+1}}(\varepsilon) = 1.$$

Ako pretpostavimo da je L f-strogo demikompaktno, koristeći

$$\lim_{n\to\infty} F_{fx_{2n}, fx_{2n+1}}(\varepsilon) = 1 \text{ i } fx_{2n+1} \in Lx_{2n}$$

dobijamo da postoji konvergentan podniz $(fx_{2n_k})_{k\in \mathbf{N}}$ niza $(fx_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$.

Treba pokazati da je niz $(fx_n)_{n\in\mathbf{N}}$ konvergentan ako t-norma T zadovoljava uslov (ii).
Neka je $\sigma = \frac{q}{\mu}$. Kako je $\sigma \in (0,1)$ red $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \sigma^i$ je konvergentan, pa postoji $m_0 \in \mathrm{N}$ takav da je $\sum\limits_{i=m_0}^{\infty} \sigma^i < 1$. Prema tome, za svako $m > m_0$ i $s \in \mathrm{N}$ je

$$\varepsilon > \varepsilon \sum_{i=m_0}^{\infty} \sigma^i > \varepsilon \sum_{i=m}^{m+s} \sigma^i.$$

Tada je

$$\begin{aligned} F_{fx_{m+s+1}, fx_m}(\varepsilon) &\geq F_{fx_{m+s+1}, fx_m}(\varepsilon \sum_{i=m}^{m+s} \sigma^i) \\ &\geq \underbrace{T(T(\ldots T}_{s-puta}(F_{fx_{m+s+1}, fx_{m+s}}(\varepsilon\sigma^{m+s}) \\ &\quad , F_{fx_{m+s}, fx_{m+s-1}}(\varepsilon\sigma^{m+s-1})), \ldots, F_{fx_{m+1}, fx_m}(\varepsilon\sigma^m)) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \underbrace{T(T(\ldots T(}_{s-puta} F_{fx_1,fx_0}(\frac{\varepsilon\sigma^{m+s}-(m+s)q^{m+s}}{q^{m+s}})\\
&\quad, F_{fx_1,fx_0}(\frac{\varepsilon\sigma^{m+s-1}-(m+s-1)q^{m+s-1}}{q^{m+s-1}}),\\
&\ldots\ , F_{fx_1,fx_0}(\frac{\varepsilon\sigma^{m}-mq^{m}}{q^{m}}))\\
&= \underbrace{T(T(\ldots T(}_{s-puta} F_{fx_1,fx_0}(\frac{\varepsilon}{(\frac{q}{\sigma})^{m+s}}-(m+s))\\
&\quad, F_{fx_1,fx_0}(\frac{\varepsilon}{(\frac{q}{\sigma})^{m+s-1}}-(m+s-1)),\\
&\ldots\ F_{fx_1,fx_0}(\frac{\varepsilon}{(\frac{q}{\sigma})^{m+s}}-m))\\
&= \mathbf{T}_{i=m}^{m+s} F_{fx_1,fx_0}(\frac{\varepsilon}{\mu^i}-i).
\end{aligned}
$$

Kako je $\mu \in (0,\ 1)$, postoji $m_1(\varepsilon) > m_0$ tako da je $\frac{\varepsilon}{\mu^m} - m > \frac{\varepsilon}{2\mu^m}$, za svako $m > m_1(\varepsilon)$ i prema tome za svako $m > m_1(\varepsilon)$ i svako $s \in \mathbf{N}$

$$
\begin{aligned}
F_{fx_{m+s+1},fx_m}(\varepsilon) &\geq \mathbf{T}_{i=m}^{m+s} F_{fx_1,fx_0}(\frac{\varepsilon}{2\mu^i})\\
&\geq \mathbf{T}_{i=m}^{\infty} F_{fx_1,fx_0}(\frac{\varepsilon}{2\mu^i})
\end{aligned}
$$

Iz $\lim\limits_{m\to\infty} \mathbf{T}_{i=m}^{\infty} F_{fx_1,fx_0}(\frac{1}{\mu^i}) = 1$ sledi da je i $\lim\limits_{m\to\infty} \mathbf{T}_{i=m}^{\infty} F_{fx_1,fx_0}(\frac{\varepsilon}{2\mu^i}) = 1$, za svako $\varepsilon > 0$. To implicira da za svako $\varepsilon > 0$, $\lambda \in (0,\ 1)$, postoji $m_2(\varepsilon,\ \lambda) > m_1(\varepsilon)$ da je $F_{fx_{m+s+1},fx_m}(\varepsilon) > 1 - \lambda$, za svako $m > m_2(\varepsilon,\ \lambda)$ i svako $s \in \mathbf{N}$.

To znači da je niz $(fx_n)_{n\in\mathbf{N}}$ Košijev i kako je S kompletan sledi da postoji $\lim\limits_{n\to\infty} fx_n$.
Prema tome, u oba slučaja (i) i (ii) postoji podniz niza $(fx_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$ takav da

$$x = \lim_{k\to\infty} fx_{2n_k} \in A.$$

Iz (7.2) sledi da je $x = \lim\limits_{k\to\infty} f_{2n_{k+1}}$. Treba da pokažemo da $fx \in Lx \cap L_1x$. Kako su Lx i L_1x zatvoreni, ostaje da se pokaže da $fx \in \overline{Lx} \cap \overline{L_1x}$, tj. da za svako $\varepsilon > 0$ i $\lambda \in (0,\ 1)$ postoje takvi $q(\varepsilon,\ \lambda) \in Lx$ i $r(\varepsilon,\ \lambda) \in L_1x$ da je zadovoljeno

$$q(\varepsilon,\, \lambda) \in U_{fx}(\varepsilon,\, \lambda) \text{ i } r(\varepsilon,\, \lambda) \in U_{fx}(\varepsilon,\, \lambda)$$

Iz $\sup\limits_{x<1} T(x,\, x) = 1$ sledi da postoji $\delta(\lambda) \in (0,\, 1)$ tako da

$$T(1-\delta(\lambda),\, T(1-\delta(\lambda),\, 1-\delta(\lambda))) > 1-\lambda.$$

Iz neprekidnosti preslikavanja f i iz $x = \lim\limits_{n\to\infty} fx_{2n_k}$ sledi da postoji $k_1 \in \mathbf{N}$ da je

$$F_{fx,ffx_{2n_k}}(\tfrac{\varepsilon}{3}) > 1-\delta(\lambda), \text{ za svako } k \geq k_1. \tag{7.3}$$

Iz (7.2) sledi da postoji $k_2 \in \mathbf{N}$ da je

$$F_{ffx_{2n_k},ffx_{2n_k+1}}(\tfrac{\varepsilon}{3}) > 1-\delta(\lambda), \text{ za svako } k \geq k_2. \tag{7.4}$$

Neka je $\delta = \frac{1}{12}\varepsilon$. Kako je L slabo komutativno u odnosu na f sledi da

$$ffx_{2n_k+1} \in f(Lx_{2n_k}) \subset L(fx_{2n_k}),$$

te na osnovu (7.1) postoji $r(\varepsilon,\, \lambda) \in L_1x$ da je

$$\begin{aligned} F_{ffx_{2n_k+1},r(\varepsilon,\lambda)}(\frac{\varepsilon}{3}) &> F_{ffx_{2n_k},fx}(\frac{\varepsilon}{4q}) \\ &> 1-\delta(\lambda). \end{aligned}$$

Tada je

$$\begin{aligned} F_{fx,r(\varepsilon,\lambda)}(\varepsilon) &\geq T(F_{fx,ffx_{2n_k}}(\frac{\varepsilon}{3}), \\ &, T(F_{ffx_{2n_k},ffx_{2n_k+1}}(\frac{\varepsilon}{3}),\, F_{ffx_{2n_k+1},r(\varepsilon,\lambda)}(\frac{\varepsilon}{3}))) \\ &> 1-\lambda. \end{aligned}$$

Odavde sledi da $r(\varepsilon,\, \lambda) \in U_{fx}(\varepsilon,\, \lambda)$.
Na sličan način se dokazuje da postoji $q(\varepsilon,\, \lambda) \in Lx \cap U_{fx}(\varepsilon,\, \lambda)$.

W. Takahashi [48] je uveo pojam metričkog prostora sa konveksnom strukturom. Ta klasa metričkih prostora sadrži normirane linearne

prostore i metričke prostore hiperboličkog tipa.
Metrički prostor (S, d) ima konveksnu strukturu u smislu Takahashija ako postoji preslikavanje $W : S \times S \times [0, 1] \to S$ tako da je za svako $(u, x, y, \delta) \in S \times S \times S \times [0, 1]$ zadovoljeno

$$d(u, W(x, y, \delta)) \leq \delta d(u, x) + (1 - \delta) d(u, y).$$

U radu [14] prethodna definicija je uopštena u Mengerovim prostorima $(S, \mathcal{F}, T)$.

Preslikavanje $W : S \times S \times [0, 1] \to S$ je konveksna struktura na S ako je za svako $(x, y) \in S \times S$
$W(x, y, 0) = y$, $W(x, y, 1) = x$, i za svako $\delta \in (0, 1)$, $u \in S$, $\varepsilon > 0$

$$F_{u,W(x,y,\delta)}(2\varepsilon) \geq T(F_{u,x}(\frac{\varepsilon}{\delta}), F_{u,y}(\frac{\varepsilon}{1-\delta})).$$

Lako se uočava da se svaki metrički prostor (S, d) sa konveksnom strukturom W može smatrati Mengerovim prostorom $(S, \mathcal{F}, T_M)$ sa istom funkcijom W.

U ovom paragrafu pretpostavićemo da konveksna struktura W nad Mengerovim prostorom $(S, \mathcal{F}, T)$ zadovoljava uslov

$$F_{W(x,z,\delta),W(y,z,\delta)}(\varepsilon\delta) \geq F_{x,y}(\varepsilon) \tag{7.5}$$

za svako $(x, y, z) \in S \times S \times S$, za svako $\varepsilon > 0$ i $\delta \in (0, 1)$.

Za narednu teoremu potrebne su nam sledeće definicije.

Definicija 3.2 *Neka je $(S, \mathcal{F}, T)$ Mengerov prostor sa konveksnom strukturom W. Podskup M od S je W-zvezdast ako postoji $x_0 \in M$ takav da je skup $\{W(x, x_0, \lambda) : x \in M, \lambda \in (0, 1)\} \subset M$. Tačka x_0 se naziva zvezda od M.*

Definicija 3.3 *Neka je $(S, \mathcal{F}, T)$ Mengerov prostor sa konveksnom strukturom W i M neprazan podskup od S. Preslikavanje $f : M \to S$ je (W, x_0)-konveksno ako je za svako $(x, \lambda) \in M \times [0, 1]$*

$$W(fx, x_0, \lambda) = f(W(x, x_0, \lambda)). \tag{7.6}$$

Lema 3.1 *Neka je* $(S, \mathcal{F}, T)$ *Mengerov prostor,* M *neprazan podskup od* S *koji je* W*-zvezdast sa zvezdom u* x_0, $f : M \to S$ *je preslikavanje koje je* (W, x_0)*-konveksno. Tada je i* $f(M)$ (W, x_0)*-konveksno sa zvezdom u* x_0.

Dokaz: *Neka je* $u \in f(M)$. *Tada postoji* $x \in M$ *takav da je* $u = f(x)$. *Treba pokazati da je za svako* $\lambda \in [0, 1]$,

$$z = W(u, x_0, \lambda).$$

Kako je $u = f(x)$ *sledi da je*

$$z = W(f(x), x_0, \lambda).$$

Kako je preslikavanje f (W, x_0)*-konveksno sledi da je*

$$z = f(W(x, x_0, \lambda)).$$

Na osnovu uslova da je skup M W*-zvezdast sledi da je* $W(x, x_0, \lambda) \subset M$, *odnosno* $z \in f(M)$.

Lema 3.2 *Neka je* $(S, \mathcal{F}, T)$ *Mengerov prostor, t-norma* T *ispunjava uslov* $\sup\limits_{x<1} T(x, x) = 1$, M *neprazan podskup od* S, $f : M \to S$ *neprekidno preslikavanje,* $L : M \to C(S)$ *(gde je* $C(S)$ *familija svih zatvorenih i nepraznih podskupova od* S*) i zadovoljena je sledeća nejednakost:*

(7.7) Za svako $u, v \in M$, *svako* $x \in Lu$ *i svako* $\delta > 0$, *postoji* $y \in Lv$ *da je*

$$F_{x,y}(\varepsilon) \geq F_{fu,fv}(\frac{\varepsilon - \delta}{q})$$

za svako $\varepsilon > 0$. *Tada je* L *zatvoreno preslikavanje.*

Dokaz: Neka je $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ niz iz M takav da je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ i neka je $y_n \in Lx_n$, za svako $n \in \mathbf{N}$ takav da je $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Treba dokazati da $y \in Lx$.
Kako je po predpostavci $Lx = \overline{Lx}$ dovoljno je pokazati da $y \in \overline{Lx}$. Neka su $\varepsilon > 0$ i $\lambda \in (0, 1)$ dati. Treba da se pokaže da postoji $b \in Lx$ takav da $b \in U_y(\varepsilon, \lambda)$, odnosno da $F_{b,y}(\varepsilon) > 1 - \lambda$. Na osnovu uslova

(7.7), za $u = x_n$, $v = x$ i $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$ iz $y_n \in Lx_n$ sledi da postoji $b_n \in Lx$ takav da važi

$$F_{y_n,b_n}(\varepsilon) \geq F_{fx_n,fx}(\frac{\varepsilon}{4q}).$$

Dakle,

$$\begin{aligned} F_{y,b_n}(\varepsilon) &\geq T(F_{y,y_n}(\frac{\varepsilon}{2}), F_{y_n,b_n}(\frac{\varepsilon}{2})) \\ &\geq T(F_{y,y_n}(\frac{\varepsilon}{2}), F_{fx_n,fx}(\frac{\varepsilon}{4q})). \end{aligned}$$

Iz neprekidnosti preslikavanja f sledi da je $\lim\limits_{n\to\infty} fx_n = fx$, odnosno $\lim\limits_{n\to\infty} F_{fx_n,fx}(\varepsilon) = 1$. Takođe je i $\lim\limits_{n\to\infty} F_{y,y_n}(\varepsilon) = 1$, za svako $\varepsilon > 0$. Iz uslova $\sup\limits_{x<1} T(x, x) = 1$, sledi da za dato $\lambda \in (0, 1)$ postoji $\eta \in (0, 1)$ tako da je $T(\eta, \eta) > 1 - \lambda$, pa postoji $n_0(\eta)$ takvo da je za svako $n \geq n_0(\eta)$ zadovoljeno

$$F_{y,y_n}(\tfrac{\varepsilon}{2}) > \eta \text{ i } F_{fx_n,fx}(\tfrac{\varepsilon}{4q}) > \eta.$$

Odavde sledi da je

$$\begin{aligned} F_{y,b_n}(\varepsilon) &\geq T(\eta, \eta) \\ &> 1 - \lambda, \end{aligned}$$

odnosno $b_{n_0} \in U_y(\varepsilon, \lambda) \cap Lx$.

Sledeća teorema predstavlja uopštenje teoreme iz [6]

Teorema 3.2 *Neka je $(S, \mathcal{F}, T)$ kompletan Mengerov prostor sa konveksnom strukturom W i neprekidnom t-normom T i M neprazan, zatvoren i W-zvezdast podskup od S sa zvezdom x_0. Neka je $f : M \to M$ neprekidno, (W, x_0)-konveksno preslikavanje i $L : M \to 2_c^{f(M)}$ tako da je $\overline{L(M)}$ kompaktan skup i zadovoljen je sledeći uslov:*

(7.8) Za svako $u, v \in M$, $x \in Lu$ i $\delta > 0$ postoji $y \in Lv$ tako da je

$$F_{x,y}(\varepsilon) \geq F_{fu,fv}(\varepsilon - \delta), \text{ za svako } \varepsilon > 0.$$

Ako L slabo komutira sa f, tada postoji $x \in M$ takav da $fx \in Lx$.

Dokaz: Neka je $(k_n)_{n\in\mathbf{N}}$ niz iz $(0,\, 1)$ takav da je $\lim\limits_{n\to\infty} k_n = 1$ i neka je $L_n x = W(Lx,\, x_0,\, k_n)$ tj.

$$L_n x = \bigcup_{z\in Lx} W(z,\, x_0,\, k_n), \quad n\in\mathbf{N}, \quad x\in M.$$

Na osnovu Leme 3.1 sledi da je $f(M)$ $(W,\, x_0)$-konveksan. Pokazaćemo da je $L_n x \subset f(M)$, tj. da za svako $z\in L_n x$ sledi $z\in f(M)$. Kako je $z\in L_n x = W(Lx,\, x_0,\, k_n)$ postoji $u\in Lx$ takav da je $z = W(u,\, x_0,\, k_n)$. Kako je po pretpostavci $Lx\subset f(M)$ sledi da $u\in f(M)$, pa je $W(u,\, x_0,\, k_n)\subset f(M)$ tj. $z\in f(M)$. Znači $L_n x\subset f(M)$.
Na osnovu (7.5) sledi da je preslikavanje W neprekidno u odnosu na prvu promenljivu pa kako je Lx zatvoreno sledi da je Lx kompaktan (kao podskup od $L(M)$) pa je $W(Lx,\, x_0,\, k_n)$ zatvoren za svako $n\in\mathbf{N}$. Odavde sledi da je $L_n x$ zatvoren za svako $n\in\mathbf{N}$ i $x\in M$.
Sada ćemo pokazati da za svako $u,\, v\in M$ i svako $x\in L_n u$ i $\delta>0$ postoji $y\in L_n v$ takav da je

$$F_{x,y}(\varepsilon)\geq F_{fu,fv}(\frac{\varepsilon-\delta}{k_n}), \qquad \varepsilon>0.$$

Neka su $u,\, v\in M$, $\delta>0$ i $x\in L_n u = W(Lu,\, x_0,\, k_n)$. Tada postoji $z\in Lu$ takav da je $x = W(z,\, x_0,\, k_n)$ pa na osnovu (7.8) postoji $y'\in Lv$ da je

$$F_{z,y'}(\varepsilon)\geq F_{fu,fv}(\varepsilon-\frac{\delta}{k_n}).$$

Neka je $y = W(y',\, x_0,\, k_n)\in L_n v$. Tada je

$$\begin{aligned} F_{x,y}(\varepsilon) &= F_{W(z,x_0,k_n),\, W(y',x_0,k_n)}(\frac{\varepsilon}{k_n}k_n) \\ &\geq F_{z,y'}(\frac{\epsilon}{k_n}) \\ &\geq F_{fu,fv}(\frac{\varepsilon-\delta}{k_n}). \end{aligned}$$

Treba da pokažemo da je L_m f-strogo demikompaktno. Neka je $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ niz iz M takav da za svako $\varepsilon>0$ je

$$\lim_{n\to\infty} F_{fx_n,y_n}(\varepsilon) = 1$$

za neki niz $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ $y_n \in L_m x_n$.
Kako je $L_n(M) = W(L(M), x_0, k_n)$, $n \in \mathbf{N}$ relativno kompaktan, iz $y_n \in L_m x_n$ sledi da $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ima konvergentan podniz $(y_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$ i neka je $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = z$. Tada je

$$F_{fx_{n_k},z}(\varepsilon) \geq T(F_{fx_{n_k},y_{n_k}}(\frac{\varepsilon}{2}), F_{y_{n_k},z}(\frac{\varepsilon}{2}))$$

pa je $\lim\limits_{k\to\infty} fx_{n_k} = z$, a odatle sledi da je L_m f-strogo demikompaktno.
Treba da pokažemo da je preslikavanje L_n slabo komutativno u odnosu na f, tj. da je za svako $x \in M$

$$L_n(fx) \subset f(L_n x) = W(L(fx), x_0, k_n).$$

Neka je $u \in L_n x = W(Lx, x_0, k_n)$ Tada postoji $z \in Lx$ takav da je $u = W(z, x_0, k_n)$, pa je

$$f(u) = f(W(z, x_0, k_n)) = W(fz, x_0, k_n) \subset W(f(Lx), x_0, k_n).$$

Na osnovu uslova da je preslikavanje L slabo komutativno u odnosu na f sledi da je $W(f(Lx), x_0, k_n) = W(L(fx, x_0, k_n)$, odnosno $f(u) \in L_n(fx)$.
Sada su ispunjeni svi uslovi Teoreme 3.1, pa za svako $n \in \mathbf{N}$ postoji $x_n \in M$ da

$$fx_n \in L_n x_n.$$

Kako je $L_n x_n = \bigcup\limits_{z\in Lx_n} W(z, x_0, k_n)$ postoji $z_n \in Lx_n$ takav da je $fx_n = W(z_n, x_0, k_n)$. Tada je za svako $n \in \mathbf{N}$

$$\begin{aligned} F_{fx_n,z_n}(\varepsilon) &= F_{z_n,W(z_n,x_0,k_n)}(\varepsilon) \\ &\geq T(F_{z_n,z_n}(\frac{\varepsilon}{2k_n}), F_{z_n,x_0}(\frac{\varepsilon}{2(1-k_n)})) \\ &= T(1, F_{z_n,x_0}(\frac{\varepsilon}{2(1-k_n)})) \\ &= F_{z_n,x_0}(\frac{\varepsilon}{2(1-k_n)}). \end{aligned}$$

Kako je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\varepsilon}{2(1-k_n)} = \infty$, sledi da je $\lim\limits_{n\to\infty} F_{z_n,x_0}(\frac{\varepsilon}{2(1-k_n)}) = 1$ jer je $z_n \in L(M)$ koji je verovatnosno ograničen. Tada je i $\lim\limits_{n\to\infty} F_{fx_n,z_n}(\varepsilon) =$

1. Kako $z_n \in Lx_n$ i $\overline{L(M)}$ je kompaktan sledi da postoji konvergentan podniz $(z_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$ niza $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Iz $\lim\limits_{n\to\infty} fx_{n_k} = z$ sledi da je $\lim\limits_{n\to\infty} z_{n_k} = z$.
Ostaje da se pokaže da $fz \in Lz$. Iz $\lim\limits_{n\to\infty} z_{n_k} = z$ i neprekidnosti preslikavanja f sledi da je $\lim\limits_{n\to\infty} fz_{n_k} = fz$. Kako $z_{n_k} \in Lx_{n_k}$ sledi da je

$$fz_{n_k} \in f(Lx_{n_k}) \subset L(fx_{n_k}).$$

Na osnovu Leme 3.2 sledi da je preslikavanje L zatvoreno tj.

$$fz \in Lz.$$

3.2 Uopštenje C-kontrakcije za višeznačna preslikavanja

T.L. Hicks [21] je 1983. godine uveo novi pojam za kontraktivno preslikavanje koji se naziva C-kontrakcija i dokazao je teoremu o nepokretnoj tački za C-kontrakciju u verovatnosnom metričkom prostoru $(S, \mathcal{F}, T_M)$. Preslikavanje $f : S \to S$ je C-kontrakcija ako postoji $k \in (0, 1)$ tako da za svako p, $q \in (0, 1)$ i $x > 0$ zadovoljeno

$$F_{p,q}(x) > 1 - x \Rightarrow F_{fp,fq}(kx) > 1 - kx.$$

U radu [33] je uveden pojam (Φ, C)-višeznačne kontrakcije koja predstavlja uopštenje pojma C-kontrakcije. Preslikavanje $f : S \to 2^S$ je (Φ, C)-kontrakcija, gde $\Phi : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ ako je za svako p, $q \in S$ i svako $x > 0$ zadovoljena sledeća implikacija:

$$F_{p,q}(x) > 1 - x \Rightarrow (\forall u \in fp)(\exists v \in fq)\, F_{u,v}(\Phi(x)) > 1 - \Phi(x).$$

Ako je $\Phi(x) = kx$, $x > 0$, $k \in (0, 1)$ (Φ, C)-kontrakcija $f : S \to S$ je C-kontrakcija.
U ovom poglavlju dokazana je teorema o zajedničkoj nepokretnoj tački za tri preslikavanja, koja predstavlja uopštenje Hicksove teoreme i data je primena na fazi metričke prostore.

Neka je Φ familija svih neopadajućih funkcija $\psi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ takvih da za svako $t > 0$ $\sum\limits_{n \in \mathbf{N}} \psi^n(t)$ konvergira.

Neka je $\mathcal{M}$ familija svih funkcija $m : [0, \infty] \to [0, \infty]$ takvih da
(i) $m(t + s) \geq m(t) + m(s)$
(ii) $m(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$
(iii) m je neprekidna.

Teorema 3.3 *Neka je $(S, \mathcal{F}, T)$ kompletan Mengerov prostor, $\sup\limits_{x<1} T(x, x) = 1$, M neprazan i zatvoren podskup od S, $f : M \to M$ neprekidno preslikavanje, $A, B : M \to 2_c^{f(M)}$ i $\psi \in \Phi$, $m_1, m_2 \in \mathcal{M}$ i $h : [0,1] \to [0,b]$ $(b \in \mathbf{R})$ neprekidno preslikavanje koje je opadajuće i $h(1) = 0$ tako da je zadovoljena sledeća implikacija za svako u, $v \in M$ i svako $\varepsilon > 0$*

$$h\circ F_{fu,fv}(m_2(\varepsilon))<m_1(\varepsilon)\ \Rightarrow\ \begin{array}{l}\textit{za svako } p\in Au \textit{ postoji } q\in Bv\\ \textit{takvo da je } h\circ F_{p,q}(m_2(\psi(\varepsilon)))<m_1(\psi(\varepsilon))\\ \textit{i za svako } p'\in Bv \textit{ postoji } q'\in Au\\ \textit{takvo da je } h\circ F_{p',q'}(m_2(\psi(\varepsilon)))<m_1(\psi(\varepsilon)).\end{array}$$

Ako su A i B slobo komutativni u odnosu na f i (a) ili (b) zadovoljeni, tada postoji tačka $x\in M$ takva da $fx\in Ax\cap Bx$, gde je

(a) A ili B su f- strogo demikompaktni.

(b) t-norma T zadovoljava uslov

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{T}_{i=n}^{\infty}(h^{-1}(m_1(\psi^i(s))))=1 \textit{ za svako } s>0.$$

Dokaz: Neka su $x_0\in M$ i $x_1\in M$ takvi da $fx_1\in Ax_0$. Neka je $s>0$ takvo da je $h(0)<m_1(s)$. Kako je $F_{fx_0,fx_1}(m_2(s))>0$ i preslikavanje h opadajuće sledi da je $h\circ F_{fx_0,fx_1}(m_2(s))<h(0)<m_1(s)$ i prema tome postoji $x_2\in M$ takav da je $h\circ F_{fx_1,fx_2}(m_2(\psi(s)))<m_1(\psi(s))$ i $fx_2\in Bx_1$. Nastavljajući na ovaj način dobijamo niz $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ iz M takav da za svako $n\in\mathbf{N}$ važi:

(c) $fx_{2n+1}\in Ax_{2n},\ fx_{2n+2}\in Bx_{2n+1}$

(d) $h\circ F_{fx_n,fx_{n+1}}(m_2(\psi^n(s)))<m_1(\psi^n(s))$.

Kako je $\lim_{n\to\infty}\psi^n(s)=0$, m_1 neprekidno i $m_1(0)=0$ postoji $n_0(s)$ takav da je za svako $n\geq n_0(s)$

$$F_{fx_n,fx_{n+1}}(m_2(\psi^n(s)))>h^{-1}(m_1(\psi^n(s))). \tag{8.1}$$

Ako pretpostavimo da je A f- strogo demikompaktno, tada (8.1) implicira postojanje konvergentnog podniza niza $(fx_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$.

Ako je $n_1(\varepsilon,\lambda)$ takav da za

$$n\geq n_1(\varepsilon,\lambda)\Rightarrow m_2(\psi^n(s))<\varepsilon,\ m_1(\psi^n(s))<h(1-\lambda)$$

korišćenjem (8.1) dobijamo

$$\lim_{n\to\infty}F_{fx_{2n},fx_{2n+1}}(\varepsilon)=1 \textit{ i } fx_{2n+1}\in Ax_{2n}\ (n\in\mathbf{N}),$$

pa sledi da postoji konvergentan podniz $(fx_{2n_k})_{k\in\mathbf{N}}$ niza $(fx_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$.

Neka je $\varepsilon > 0$ i $\lambda \in (0, 1)$. Kako je red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \psi^n(s)$ konvergentan, sledi da postoji $n'(\varepsilon, s) \in \mathbf{N}$ takav da je $\sum\limits_{n\geq n'(\varepsilon,s)} \psi^n(s) < \varepsilon$. Iz konvergencije reda $\sum\limits_{n\in\mathbf{N}} \psi^n(s)$ sledi konvergencija reda $\sum\limits_{n\in\mathbf{N}} m_2(\psi^n(s))$. Zaista, za svako $k \in \mathbf{N}$, na osnovu uslova (i) važi

$$\sum_{n=0}^{k} m_2(\psi^n(s)) < m_2(\sum_{n=0}^{k} \psi^n(s))$$

i iz neprekidnosti m_2 sledi da je

$$\sum_{n=0}^{\infty} m_2(\psi^n(s)) < m_2(\sum_{n=0}^{\infty} \psi^n(s)).$$

Neka je $\varepsilon > 0$ i $n_2(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ takvo da $\sum\limits_{n\geq n_2(\varepsilon)} m_2(\psi^n(s)) < \varepsilon$.

Tada je za svako $n \geq n_2(\varepsilon)$ i za svako $p \in \mathbf{N}$ zadovoljeno:

$$F_{fx_{n+p+1},fx_n}(\varepsilon) \geq \mathbf{T}_{i=n}^{n+p} F_{fx_{i+1},fx_i}(m_2(\psi^i(s))).$$

Iz uslova (d) sledi da je

$$F_{fx_{n+p+1},fx_n}(\varepsilon) \geq \mathbf{T}_{i=n}^{n+p} h^{-1}(m_1(\psi^i(s))) \geq \mathbf{T}_{i=n}^{\infty} h^{-1}(m_1(\psi^i(s))) \tag{8.2}$$

za svako $n \geq \max(n_0(s), n_2(\varepsilon))$ i svako $p \in \mathbf{N}$ pošto je T neopadajuće.

Iz uslova (b) sledi da postoji $n"(s, \lambda) \in \mathbf{N}$ takav da je

$$\mathbf{T}_{i=n}^{\infty} h^{-1}(m_1(\psi^i(s))) > 1 - \lambda, \text{ za svako } n \geq n"(s, \lambda). \tag{8.3}$$

Uslovi (8.2) i (8.3) impliciraju da je

$$F_{fx_{n+p+1},fx_n}(\varepsilon) > 1 - \lambda$$

za $n \geq \max(n_0(s), n_2(\varepsilon), n"(s, \lambda))$ i za svako $p \in \mathbf{N}$.

Kako je S kompletan i M zatvoren sledi da u oba slučaja (a) i (b) postoji $x = \lim\limits_{k\to\infty} fx_{2n_k} \in M$. Iz (8.1) sledi da je $x = \lim\limits_{k\to\infty} fx_{2n_k+1}$.

Dokazaćemo da $fx \in Ax \cap Bx$. Pošto su Ax i Bx zatvoreni, ostaje da se dokaže da $fx \in \bar{A}x \cap \bar{B}x$ tj. da za svako $\varepsilon > 0$ i $\lambda \in (0, 1)$ postoje takvi $q(\varepsilon, \lambda) \in Ax$ i $r(\varepsilon, \lambda) \in Bx$ da je zadovoljeno

$$q(\varepsilon, \lambda) \in U_{fx}(\varepsilon, \lambda), \quad r(\varepsilon, \lambda) \in U_{fx}(\varepsilon, \lambda).$$

Iz $\sup\limits_{x<1} T(x, x) = 1$ lako sledi da postoji $\delta(\lambda) \in (0, 1)$ takvo da je

$$T(1 - \delta(\lambda), T(1 - \delta(\lambda), 1 - \delta(\lambda))) > 1 - \lambda.$$

Iz neprekidnosti preslikavanja f i iz $x = \lim\limits_{k\to\infty} fx_{2n_k}$ sledi da postoji $k_1 \in \mathbf{N}$ takvo da je

$$F_{fx, ffx_{2n_k}}(\tfrac{\varepsilon}{3}) > 1 - \delta(\lambda) \quad \text{za svako } k \geq k_1.$$

Na osnovu $\lim\limits_{n\to\infty} F_{fx_n, fx_{n+1}}(\varepsilon) = 1$ sledi da postoji $k_2 \in \mathbf{N}$ takvo da

$$F_{ffx_{2n_k}, ffx_{2n_k+1}}(\tfrac{\varepsilon}{3}) > 1 - \delta(\lambda), \quad \text{za svako } k \geq k_2.$$

Neka je $t_0 \in \mathbf{R}^+$ takav da je

$$m_2(\psi(t_0)) < \tfrac{\varepsilon}{3} \text{ i } m_1(\psi(t_0)) < h(1 - \delta(\lambda))$$

i $k_3 \in \mathbf{N}$ takav da je

$$h \circ F_{fx, ffx_{2n_k}}(m_2(t_0)) < m_1(t_0), \quad \text{za svako } k \geq k_3. \tag{8.4}$$

Kako je $h(1) = 0$ i h neprekidno, takav broj $k_3 \in \mathbf{N}$ postoji.

Iz $fx_{2n_k+1} \in Ax_{2n_k}$ $(k \in \mathbf{N})$ i pošto A slabo komutira sa f sledi da je

$$ffx_{2n_k+1} \in f(Ax_{2n_k}) \subset Afx_{2n_k} \quad (k \in \mathbf{N}). \tag{8.5}$$

Korišćenjem (8.4) i (8.5) i implikacije iz teoreme, gde je $v = x$, $u = fx_{2n_k}$ i $p = ffx_{2n_k+1}$ dobijamo da postoji $r(\varepsilon, \lambda) = q \in Bx$ takav da za $k \geq k_3$ je

$$h \circ F_{f\,fx_{2n_k+1}, r(\varepsilon,\lambda)}(m_2(\psi(t_0))) < m_1(\psi(t_0)).$$

To implicira da je

$$\begin{aligned} F_{ffx_{2n_k+1}, r(\varepsilon,\lambda)}(\frac{\varepsilon}{3}) &\geq F_{ffx_{2n_k+1}, r(\varepsilon,\lambda)}(m_2(\psi(t_0))) \\ &> h^{-1}(m_1(\psi(t_0))) \\ &> 1 - \delta(\lambda), \end{aligned}$$

za svako $k \geq k_3$.

Prema tome, za $k \geq \max(k_1, k_2, k_3)$ dobijamo da je

$$F_{fx,r(\varepsilon,\lambda)}(\varepsilon) \geq T(F_{fx,ffx_{2n_k}}(\tfrac{\varepsilon}{3}), T(F_{ffx_{2n_k},ffx_{2n_k+1}}(\tfrac{\varepsilon}{3}),$$

$$F_{ffx_{2n_k+1},r(\varepsilon,\lambda)}(\tfrac{\varepsilon}{3}))) > 1 - \lambda.$$

Odatle sledi da $r(\varepsilon, \lambda) \in \mathcal{U}_{fx}(\varepsilon, \lambda)$. Iz neprekidnosti preslikavanja f i

$$x = \lim_{k\to\infty} fx_{2n_k} = \lim_{k\to\infty} fx_{2n_k+1} = \lim_{k\to\infty} fx_{2n_k+2}$$

sledi da postoje $k_1', k_2', k_3' \in \mathbf{N}$ takvi da

$$F_{fx,ffx_{2n_k+1}}(\tfrac{\varepsilon}{3}) > 1 - \delta(\lambda), \quad \text{za svako } k \geq k_1'$$

$$F_{ffx_{2n_k+1},ffx_{2n_k+2}}(\tfrac{\varepsilon}{3}) > 1 - \delta(\lambda), \quad \text{za svako } k \geq k_2'$$

Neka je $t_0 \in \mathbf{R}^+$ takav da

$$m_2(\psi(t_0)) < \frac{\varepsilon}{3}, \ m_1(\psi(t_0)) < h(1 - \delta(\lambda))$$

i $k_3' \in \mathbf{N}$ takav da

$$h \circ F_{fx,ffx}(m_2(t_0)) < m_1(t_0), \quad \text{za svako } k \geq k_3'.$$

Iz $fx_{2n_k+2} \in Bx_{2n_k+1}$ ($k \in \mathbf{N}$) i B slabo komutira sa f sledi da je $ffx_{2n_k+2} \in f(Bx_{2n_k+1}) \subset B(fx_{2n_k+1})$. Prema tome, postoji $q(\varepsilon, \lambda) \in Ax$ takav da za svako $k \geq k_3'$

$$h \circ F_{ffx_{2n_k+2},q(\varepsilon,\lambda)}(m_2(\psi(t_0))) < m_1(\psi(t_0))$$

što implicira da je za $k \geq \max(k_1', k_2', k_3')$

$$F_{fx,q(\varepsilon,\lambda)}(\varepsilon) \geq T(F_{fx,ffx_{2n_k+1}}(\frac{\varepsilon}{3}),$$
$$T(F_{ffx_{2n_k+1},ffx_{2n_k+2}}(\frac{\varepsilon}{3}),$$
$$F_{ffx_{2n_k+2},q(\varepsilon,\lambda)}(\frac{\varepsilon}{3}))) > 1 - \lambda.$$

Posledica 3.1 *Neka je $(S, \mathcal{F}, T)$ kompletan Mengerov prostor, A, B, f, h m_1, m_2 i ψ zadovoljavaju sve uslove prethodne teoreme, a t-norma T je striktna sa multiplikativnim generatorom θ. Ako su A ili B f-strogo demikompaktni ili je*

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{i=n}^{\infty} \theta(h^{-1}(m_1(\psi^i(s))) = 1$$

tada postoji $x \in M$ takav da $fx \in Ax \cap Bx$.

Dokaz: Kako je θ^{-1} neprekidno sledi da je

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{T}_{i=n}^{\infty}(h^{-1}(m_1(\psi^i(s))) = \theta^{-1}(\lim_{n\to\infty} \prod_{i=n}^{\infty} \theta(h^{-1}(m_1(\psi^i(s)))) = 1.$$

Prethodna teorema može da se uopšti u fazi metričkim prostorima.

Teorema 3.4 *Neka je (X, d, L, R) kompletan fazi metrički prostor takav da je $\lim_{s\to\infty} d(x, y)(s) = 0$, za svako $x, y \in X$, $R(a, 1) = 1$ za svako $a \in [0, 1]$, $R(a, 0) = a$ za svako $a \in [0, 1]$, R je neprekidna u $(0, 0)$, $f : X \to X$ neprekidno preslikavanje, $A, B : X \to 2_c^{f(X)}$, $\psi \in \Phi$ i $h : [0, 1] \to [0, 1]$ neprekidno, opadajuće preslikavanje takvo da je $h(1) = 0$ i $h(0) = 1$, $m_1, m_2 \in \mathcal{M}$. Neka je zadovoljena sledeća implikacija za svako $u, v \in X$ i svako $s > 0$*

$$d(fu,\, fv)(m_2(s)) < m_1(s) \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} \text{za svako } p \in Au \text{ postoji } q \in Bv \\ \text{takvo da je} \\ h \circ F_{p,q}(m_2(\psi(s))) < m_1(\psi(s)) \\ \qquad\qquad i \\ \text{za svako } p' \in Bv \text{ postoji } q' \in Au \\ \text{takvo da je} \\ h \circ F_{p',q'}(m_2(\psi(s))) < m_1(\psi(s)). \end{array}$$

Ako su A i B slabo komutativni u odnosu na f i a) ili b) zadovoljeni, tada postoji $x \in X$ takvo da

$$fx \in Ax \cap Bx$$

gde je

a) A ili B su f-strogo demikompaktni

b) $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{R}_{i=n}^{\infty}(m_1(\psi^i(s))) = 0$, za svako $s > 0$.

Dokaz: Treba pokazati da iz implikacije iz ove teoreme sledi implikacija iz prethodne teoreme. Pretpostavimo da je za neko $u,\, v \in X$ i $s > 0$

$$h \circ F_{fu,\, fv}(m_2(s)) < m_1(s).$$

Ako je $m_2(s) \geq \lambda_1(fu,\, fv)$ koristeći Lemu 1.1 sledi da je $d(fu,\, fv)(m_2(s)) < m_1(s)$. Koristeći implikaciju iz teoreme, sledi da za svako $p \in Au$ postoji $q \in Bv$ takvo da $h \circ F_{p,q}(m_2(\psi(s))) < m_1(\psi(s))$ i za svako $p' \in Bv$ postoji $q' \in Au$ tako da $h \circ F_{p',q'}(m_2(\psi(s)))$ $< m_1(\psi(s))$. Ako je $m_2(s) < \lambda_1(fu,\, fv)$ tada je $F_{fu,\, fv}(m_2(s)) = 0$ odakle sledi $h \circ F_{fu,\, fv}(m_2(s)) = 1$ te je $d(fu,\, fv)(m_2(s)) < m_1(s)$, pa je zadovoljena implikacija iz prethodne teoreme.

Takođe je

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{T}_{i=n}^{\infty}(h^{-1}(m_1(\psi^i(s))) = h^{-1} \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{R}_{i=n}^{\infty}(m_1(\psi^i(s))) = h^{-1}(0) = 1,$$

pa koristeći prethodnu teoremu sledi da postoji $x \in X$ takav da $fx \in Ax \cap Bx$.

Posledica 3.2 *Neka je $(X,\, d,\, L,\, R)$ kompletan fazi metrički prostor, f, A, B, m_1, m_2, h i ψ isti kao u prethodnoj teoremi. Ako* *su A ili B f-strogo demikompaktni ili je $\boldsymbol{R}$ striktna t-konorma sa multiplikativnim generatorom ξ tako da je*

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{i=n}^{\infty}\xi(m_1(\psi^i(s))) = 1$$

tada postoji $x \in X$ takav da $fx \in Ax \cap Bx$.

Dokaz: Kako je ξ^{-1} neprekidna sledi da je

$$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{R}_{i=n}^{\infty}(m_1(\psi^i(s))) = \xi^{-1}(\lim_{n\to\infty}\prod_{i=n}^{\infty}\xi(m_1(\psi^i(s)))) = 0.$$

3.3 Verovatnosni kontraktor i nelinearne operatorske jednačine sa višeznačnim operatorom u verovatnosnim normiranim prostorima

B. Reddy i Subrahmanyan [35] su koncept teorije kontraktora proširili na višeznačna preslikavanja i dokazali teoremu za višeznačne operatorske jednačine $\theta \in Px$ u podskupu Banahovog prostora. Njihov rezultat sadrži teoremu o nepokretnoj tački koju je dokazao Czervik [8] za višeznačna preslikavanja. Czervikova teorema o nepokretnoj tački je generalizacija ranijih teorema o nepokretnoj tački koje su dokazali Nadler [31] i Covitz i Nadler [7]. Koristeći te rezultate i rezultate iz [6], u ovom poglavlju je dokazana teorema o postojanju rešenja nelinearnih operatorskih jednačina sa višeznačnim operatorom u verovatnosnim normiranim prostorima.

Neka je $(X, \mathcal{F}, T)$ verovatnosni normiran prostor, t-norma T ispunjava uslov $\sup\limits_{a<1} T(a, a) = 1$ i neka je Ω_X familija svih nepraznih, τ-zatvorenih, verovatnosno ograničenih podskupova od X.
Za date $A, B \in \Omega_X$ funkcije raspodele $F_{A,B}$ i F_A se definišu na sledeći način:

$$F_{A,B}(t) = \sup_{s<t} T(\inf_{a\in A} \sup_{b\in B} F_{a-b}(s), \inf_{b\in B} \sup_{a\in A} F_{a-b}(s))$$

i

$$F_A(t) = \sup_{s<t} \sup_{a\in A} F_a(s), \quad t \in \mathbf{R}.$$

Sledeća lema je dokazana u [6].

Lema 3.3 *Neka je $(X, \mathcal{F}, T)$ verovatnosni normiran prostor (respektivno nearhimedovski Mengerov verovatnosni normiran prostor), gde t-norma T ispunjava uslov $\sup\limits_{a<1} T(a, a) = 1$ i $A \in \Omega_X$. Tada važi sledeće:*

(1) $F_A(0) = 0$.

(2) $F_A(t) = 1$ *za svako* $t > 0$ *ako i samo ako* $\theta \in A$.

(3) $F_{\lambda A}(t) = F_A(\frac{t}{|\lambda|})$, *za svako* $\lambda \in \mathbf{R}$.

(4) Za svako $A,\, B \in \Omega_X$ *i* $\theta \in B$, $F_A(t) \geq F_{A,B}(t)$ *za svako* $t \in \mathbf{R}$.

(5) Ako je t-norma T *neprekidna tada je*

$$F_{A+x}(t_1 + t_2) \geq T(F_x(t_1),\, F_A(t_2))$$

(respektivno $F_{A+x}(\max(t_1,\, t_2)) \geq T(F_x(t_1),\, F_A(t_2))$

za svako $t_1,\, t_2 \in \mathbf{R}^+$ *i* $x \in X$.

Sledeća definicija je data u [6].

Definicija 3.4 *Neka su* $(X,\, \tilde{\mathcal{F}},\, T)$ *i* $(Y,\, \mathcal{F},\, T)$ *dva verovatnosna normirana prostora i t-norma* T *zadovoljava uslov* $\sup\limits_{a<1} T(a,\, a) = 1$. *Neka su* τ_1 *i* τ_2 *dve topologije indukovane familijom* $(\epsilon,\, \lambda)$*-okolina za* $(X,\, \tilde{\mathcal{F}},\, T)$ *i* $(Y,\, \mathcal{F},\, T)$ *respektivno.*
Višeznačno preslikavanje $P : D(P) \subset X \to \Omega_Y$ *je* τ*-zatvoreno ako za svaki niz* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in D(P)$ *i niz* $(y_n)_{n\in\mathbf{N}} \in P(x_n)$ *takav da je* $x_n \xrightarrow{\tau_1} x$ *i* $y_n \xrightarrow{\tau_2} y$ *važi* $x \in D(P)$ *i* $y \in P(x)$.

Neka je $P : D(P) \subset X \to \Omega_Y$ nelinearno višeznačno preslikavanje i $\Gamma : X \to L(Y,\, X)$, gde je $L(Y,\, X)$ skup svih neprekidnih linearnih preslikavanja Y u X. Neka je $\varphi : [0,\, +\infty) \to [0,\, +\infty)$ preslikavanje koje zadovoljava uslov (Φ) (tj. $\varphi(0) = 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi^n(t) = +\infty$, za svako $t > 0$) i $u \in Y$ data tačka. Tada se Γ naziva verovatnosni kontraktor za P u odnosu na u ako važi za svako $x \in D(P)$ i $y \in \{y \in Y : x + \Gamma(x)y \in D(P)\}$

(a) $$F_{P(x+\Gamma(x)y),\,P(x)+y}(t) \geq \min\{F_y(\varphi(t)),\, F_{P(x)-u}(\varphi(t)),\, F_{P(x+\Gamma(x)y)-u}(\varphi(t))\},\ t > 0$$

U dokazu sledeće teoreme koristi se lema dokazana u [6].

Lema 3.4 *Neka su* F_1 *i* F_2 *dve funkcije raspodele* $F_1(0) = F_2(0)$ *i neka je* $\varphi : [0,\, +\infty) \to [0,\, +\infty)$ *funkcija koja zadovoljava uslov* (Φ). *Ako je zadovoljeno*

(9.1) $F_1(t) \geq \min\{F_1(\varphi(t)), F_2(\varphi(t))\}$, *za svako* $t \geq 0$

tada je $F_2(\varphi(t)) \leq F_1(\varphi(t))$, *za svako* $t \geq 0$.

Dokaz: Pretpostavimo suprotno. Tada postoji $t_0 > 0$ takav da je

$$(9.2) \qquad F_2(\varphi(t_0)) > F_1(\varphi(t_0)).$$

Tada na osnovu (9.1) i iz $\varphi(t_0) > t_0$ sledi

$$F_1(t_0) \geq F_1(\varphi(t_0)) \geq F_1(t_0)$$

odnosno $F_1(t_0) = F_1(\varphi(t_0))$.
Neka je $t^* = \max\{t > t_0, F_1(t) = F_1(t_0)\}$. Kako je funkcija F_1 neprekidna sa leve strane strane takav broj t^* postoji i $t^* \geq \varphi(t_0)$. Iz $t^* < \varphi(t^*)$ sledi da je

$$F_1(\varphi(t^*)) > F_1(t^*).$$

Kako je funkcija F_2 neopadajuća iz uslova (9.2) sledi da je

$$F_2(\varphi(t^*)) \geq F_2(\varphi(t_0)) > F_1(\varphi(t_0)) = F_1(t^*).$$

Prema tome i $F_1(t^*) < \min(F_1(\varphi(t^*)), F_2(\varphi(t^*)))$ što je u suprotnosti sa uslovom (9.1).

Teorema 3.5 *Neka je* $(X, \tilde{\mathcal{F}}, T)$ τ_1*-kompletan nearhimedovski Mengerov verovatnosni normiran prostor,* $(Y, \mathcal{F}, T)$ τ_2*-kompletan verovatnosni normiran prostor. Neka je* $P : D(P) \subset X \to \Omega_Y$ τ*-zatvoreno višeznačno preslikavanje. Pretpostavimo da* $\Gamma : X \hookrightarrow L(Y, X)$ *zadovoljava sledeće uslove:*

(9.3) $x + \Gamma(x)y \in D(P)$ *za svako* $x \in D(P)$ *i* $y \in Y$,

(9.4) Γ *je verovatnosni kontraktor od* P *u odnosu na* u,

(9.5) postoji $M > 0$ *takav da za svako* $x \in D(P)$ *i svako* $y \in Y$

$$\tilde{F}_{\Gamma(x)y}(t) \geq F_y\left(\frac{t}{M}\right), \quad t \geq 0,$$

(9.6) za svako $x \in D(P)$ *i za svako* $y \in P(x)$ *postoji* $v \in P(x + \Gamma(x)y)$ *tako da je*

$$F_v(t) \geq F_{P(x+\Gamma(x)y),P(x)-y}(t) \text{ za svako } t \geq 0,$$

(9.7) postoji $x_0 \in X$ i $y_0 \in P(x_0)$ tako da t-norma T zadovoljava uslov

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{T}_{i=n}^{\infty} F_{y_0}(\varphi^i(\frac{t}{M})) = 1, \quad M > 0, \quad t \geq 0.$$

Tada nelinearna višeznačna operatorska jednačina $u \in P(x)$ ima rešenje x^* iz $D(P)$ i postoji niz $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ $(x_n \in X)$ definisan sa

$$x_{n+1} = x_n - \Gamma(x_n)y_n$$

gde $y_n \in P(x_n)$ $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ koji τ_1-konvergira ka rešenju x^* jednačine $u \in P(x^*)$ u topologiji τ_1.

Dokaz: (I) slučaj: $u = \theta$. Tada uslov (a) glasi

(a') $F_{P(x+\Gamma(x)y),\,P(x)+y}(t) \geq \min\{F_y(\varphi(t)), F_{P(x)}(\varphi(t)),$
$F_{P(x+\Gamma(x)y)}(\varphi(t))\},\ t \geq 0.$

Neka su x_0 i y_0 iz uslova (9.7) i

$$x_1 = x_0 - \Gamma(x_0)y_0.$$

Na osnovu uslova (9.3) $x_1 \in D(P)$. Ako u (a') zamenimo x i y sa x_0 i $-y_0$ respektivno i kako $\theta \in P(x_0) - y_0$ na osnovu uslova (4) Leme 3.3 imamo da je

$$\begin{aligned} F_{P(x_1)}(t) &\geq F_{P(x_1),P(x_0)-y_0}(t) \\ &= F_{P(x_0-\Gamma(x_0)y_0),P(x_0)-y_0}(t) \\ &\geq \min(F_{y_0}(\varphi(t)), F_{P(x_0)}(\varphi(t)), F_{P(x_1)}(\varphi(t))). \end{aligned}$$

Pokazaćemo da je $F_{P(x_0)}(\varphi(t)) \geq F_{y_0}(\varphi(t))$.

Kako je $y_0 \in P(x_0)$ i $F_{P(x_0)}(\varphi(t)) = \sup\limits_{s<\varphi(t)} \sup\limits_{a\in P(x_0)} F_a(s)$ sledi da je $\sup\limits_{a\in P(x_0)} F_a(s) \geq F_{y_0}(s)$.

Tada je $F_{P(x_0)}(\varphi(t)) \geq \sup\limits_{s<\varphi(t)} F_{y_0}(s) = F_{y_0}(\varphi(t))$ jer je F_{y_0} neprekidna sa leve strane.

Prema tome $F_{P(x_1)}(t) \geq \min(F_{y_0}(\varphi(t)), F_{P(x_1)}(\varphi(t))),\ t \geq 0.$

Na osnovu Leme 3.4 sledi

(9.8) $F_{y_0}(\varphi(t)) \leq F_{P(x_1)}(\varphi(t))$, $t \geq 0$.
Iz uslova (9.6) za $y_0 \in P(x_0)$ sledi da postoji $y_1 \in P(x_1)$ takav da je

$$F_{y_1}(t) \geq F_{P(x_1),P(x_0)-y_0}(t), \quad t \geq 0.$$

Na osnovu (a') i (9.8) sledi da je $F_{y_1}(t) \geq F_{y_0}(\varphi(t))$, $t \geq 0$.
Neka je $x_2 = x_1 - \Gamma(x_1)y_1$. Primenjujući isti postupak dobijamo da postoji $y_2 \in P(x_2)$ takav da

$$F_{y_2}(t) \geq F_{y_1}(\varphi(t)) \geq F_{y_0}(\varphi^2(t)), \quad t \geq 0.$$

Tako dobijamo dva niza (x_n) iz $D(P)$ i (y_n) iz Y da je

(9.9) $x_{n+1} = x_n - \Gamma(x_n)y_n$,

(9.10) $y_n \in P(x_n)$,

(9.11) $F_{y_n}(t) \geq F_{y_0}(\varphi^n(t))$, $t \geq 0$.

Iz uslova (9.5), (9.9) i (9.11) imamo

$$\tilde{F}_{x_n - x_{n-1}}(t) = \tilde{F}_{\Gamma(x_n)y_n}(t) \geq F_{y_n}(\frac{t}{M}) \geq \ldots \geq F_{y_0}(\varphi^n(\frac{t}{M}))$$

za svako $t \geq 0$.

Na osnovu toga, za svako $m, n \in \mathbf{N}$ $(m > n)$ je

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_{x_n - x_m}(t) &\geq T(\tilde{F}_{x_n - x_{n+1}}(t), \tilde{F}_{x_{n+1} - x_m}(t)) \\
&\geq \underbrace{T(T(T\ldots}_{(m-n)-puta}(\tilde{F}_{x_n - x_{n+1}}(t), \tilde{F}_{x_{n+1} - x_{n+2}}(t)), \\
&\ldots \quad (\tilde{F}_{x_{m-2} - x_{m-1}}(t), \tilde{F}_{x_{m-1} - x_m}(t))) \\
&\geq \underbrace{T(T(T\ldots}_{(m-n)puta}(F_{y_0}(\varphi^n(\frac{t}{M})), F_{y_0}(\varphi^{n+1}(\frac{t}{M}))), \\
&\ldots \quad (F_{y_0}(\varphi^{m-2}(\frac{t}{M})), F_{y_0}(\varphi^{m-1}(\frac{t}{M}))) \\
&= \mathbf{T}_{i=n}^{m-1} F_{y_0}(\varphi^i(\frac{t}{M}))
\end{aligned}$$

Na osnovu uslova $\lim_{n\to\infty} \mathbf{T}_{i=n}^{\infty} F_{y_0}(\varphi^i(\frac{t}{M})) = 1$ sledi da za svako $\lambda \in (0, 1)$, $t > 0$ postoji $n(t, \lambda) \in \mathbf{N}$ tako da za $n \geq n(t, \lambda)$, $m > n$ važi

$$\mathbf{T}_{i=n}^{\infty} F_{y_0}(\varphi^i(\frac{t}{M})) > 1 - \lambda$$

odnosno

$$\tilde{F}_{x_n - x_m}(t) \geq \mathbf{T}_{i=n}^{m-1} F_{y_0}(\varphi^i(\frac{t}{M})) \geq \mathbf{T}_{i=n}^{\infty} F_{y_0}(\varphi^i(\frac{t}{M})) > 1 - \lambda.$$

To znači da je niz (x_n) τ-Košijev niz iz X. Kako je $(X, \tilde{\mathcal{F}}, T)$ τ_1-kompletan nearhimedovski Mengerov verovatnosni normiran prostor, $x_n \xrightarrow{\tau_1} x^*$. Funkcija φ zadovoljava uslov (Φ) pa je iz (9.11) $\lim_{n\to\infty} F_{y_n}(t) = 1$, $t > 0$ odnosno $y_n \xrightarrow{\tau_2} \theta$. Preslikavanje P je τ-zatvoreno i iz (9.10) sledi da $x^* \in D(P)$ i $\theta \in P(x^*)$, odnosno x^* je rešenje jednačine $u \in P(x)$.

II slučaj: $u \neq \theta$. Neka je $M(x) = P(x) - u$, za $x \in D(P)$. Tada je $D(P) = D(M)$ i uslov da P zadovoljava uslov (a) je ekvivalentan uslovu da M zadovoljava uslov (a'). Koristeći slučaj $u = \theta$, može se pokazati postojanje rešenja za nelinearnu višeznačnu operatorsku jednačinu $\theta \in M(x)$.

Posledica 3.3 *Neka je $(X, \mathcal{F}, T)$ τ-kompletan nearhimedovski Mengerov verovatnosni normiran prostor i $L : X \to \Omega_X$ zadovoljava uslov*

(9.12) $F_{Lx,Ly}(t) \geq \min(F_{x-y}(\varphi(t)), F_{x-Lx}(\varphi(t)), F_{y-Ly}(\varphi(t)))$

za svako $t \geq 0$, $x, y \in X$ a $\varphi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ zadovoljava uslov (Φ). Postoji $x_0 \in X$ i $y_0 \in x_0 - Lx_0$ tako da t-norma T zadovoljava uslov

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{T}_{i=n}^{\infty} F_{y_0}(\varphi^i(t)) = 1, \quad t \geq 0,$$

i neka za svako $x \in X$ i svako $y \in x - L(x)$ postoji $v \in x+y-L(x+y)$ tako da je $F_v(t) \geq F_{x+y-L(x+y),x-L(x)-y}(t)$ za svako $t \geq 0$. Tada postoji tačka $x^* \in X$ takva da $x^* \in Lx^*$ tj. x^* je nepokretna tačka preslikavanja L.

Dokaz: Neka je $P(x) = x - Lx$ i $\Gamma(x) = I_X$. Preslikavanja P i Γ zadovoljavaju sve uslove Teoreme 3.5, pa postoji $x^* \in X$ takva da $\theta \in P(x^*) = x^* - Lx^*$ tj. x^* je nepokretna tačka preslikavanja L.

Literatura

[1] M. Altman, *Contractors and Contractor Directions. Theory and Applications*, M. Dekker 1977.

[2] M. Altman, *Contractors and fixed points*, American Mathematical Society, Contemporary Mathematics Volume 21 (1983) 1–14.

[3] A.T. Bharucha-Reid, *Fixed point theorems in probabilistic analysis*, Bull. Amer. Math. Soc. 82 (1976), 641–657.

[4] J. Caristi, *Fixed point theorem for mappings satisfying inwardness conditions*, Trans. Math. Soc. 215 (1976), 241–251.

[5] S.S. Chang, *Probabilistic contractor and the solutions for nonlinear eqations in probabilistic normed spaces*, Chines Science, Bull., 19 (1990), 1451–1454.

[6] Shih-sen Chang, Yeol Je Cho, Shin Min Kang, *Probabilistic metric spaces and nonlinear operator theory*, Sichuan University Press, 1994.

[7] H. Covitz, S.B. Nadler, *Multivalued contraction mappings in generalized metric spaces*, Israel J. Math. 8 (1970), 5–11.

[8] Czervik, *A fixed point theorem for a system of multivalued transformations*, Proc. Amer. Math. Soc. 55 (1976), 136–139.

[9] A. Delcroix, M.F. Hasler, S. Pilipović, V. Valmorin *Sequence spaces with exponent weights. Realisations of Colombeau type algebras*, (u štampi).

[10] Jin-Xuan Fang, Gui-An Song, *Φ-contractor and the solutions for nonlinear operator equations in fuzzy normed spaces*, Fuzzy Sets and Systems 121 (2001), 267–273.

[11] O. Hadžić, *A fixed point theorem in Menger spaces*, Publ. Inst. Math. Beograd T 20 (1979), 107–112.

[12] O. Hadžić, *Fixed point theorems for multivalued mappings in probabilistic metric spaces*, Mat. Vesnik 3 (16)(31) (1979), 125–133.

[13] O. Hadžić, *Fixed point theorem for multivalued mappings in probabilistic metric spaces with a convex structure*, Proc. IWAA, Kupari, 1990, University of Novi Sad (1991), 237–262.

[14] O. Hadžić, *Fixed point theory in probabilistic metric spaces*, Serbian Academy of Sciences and Arts, Branch in Novi Sad, University of Novi Sad, Institute of Mathematics, Novi Sad, 1995.

[15] O. Hadžić, *Fixed point theorems for multivalued mappings in probabilistic metric spaces*, Fuzzy Sets and Systems 88 (1997), 219–226.

[16] O. Hadžić, T. Žikić, *On Caristi's fixed point theorem in F-type topological spaces*, Novi Sad J. Math. Vol. 28, No. 1 (1998), 91–98.

[17] O. Hadžić, T. Žikić, *A theorem on coincidence point for multivalued mappings in a class of probabilistic metric spaces*, Novi Sad J. Math. Vol. 31, No. 1 (2001), 175–184.

[18] O. Hadžić, E. Pap, *A fixed point theorem for multivalued mappings in probabilistic metric spaces and an application in fuzzy metric spaces*, (u štampi).

[19] O. Hadžić, E.Pap, *Fixed Point Theory in Probabilistic Metric Spaces*, Theory in Probabilistic Metric Spaces, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.

[20] O. Hadžić, E. Pap, M. Budinčević, *Countable extension of triangular norms and their applications to the Fixed Point Theory in Probabilistic Metric Spaces*, Kybernetika-Volume 38 (2002), (u štampi).

[21] T.L. Hicks, *Fixed point theory in probabilistic metric spaces*, Univ. u Novom Sadu, Zb. Rad. Prirod.-Mat. Fak. Ser. Mat. 13 (1983), 63–72.

[22] J.S. Jung, S.S. Chang, B.S. Lee, Y.J. Cho, S.M. Kang, *On the Generalizations of Siegel's Fixed Point Theorem*, Mathware & Soft Computing 8 (2001), 5–20.

[23] O. Kaleva, S. Seikkala, *On fuzzy metric spaces*, Fuzzy Sets and Systems 12 (1984), 215–229.

[24] E.P. Klement, R. Mesiar, E. Pap, *Triangular Norms*, Kluwer Academic Publishers, Trends in Logic 8, Dordrecht (2000a).

[25] I. Kramosil, J. Michalek, *Fuzzy metric and statistical metric spaces*, Kybernetica, 11 (1975), 336–314.

[26] A.C. Lee, W.J. Padgett, *Random contractors and the solutions for nonlinear eqations*, Nonlinear Anal. TMA 1 (1977), 173–185.

[27] A.C. Lee, W.J. Padgett, *Random contractors with random nonlinear majorant functions*, Nonlinear Anal. TMA 3 (1979), 707–715.

[28] A.C. Lee, W.J. Padgett, *Solutions of random operator eqations by random step-contractors*, Nonlinear Anal. TMA 4 (1980), 145–151.

[29] K. Menger, *Statistical metric*, Proc. Nat. Acad. U.S.A., 28 (1942), 535–537.

[30] K. Menger, *Probabilistic geometry*, Proc. Nat. Acad. of Sci. U.S.A., 37 (1951), 226–229.

[31] S.B. Nadler, *Multivalued contraction mappings*, Pacific J. Math. 30 (1969), 475–478.

[32] E. Pap, *Null-Additive Set Functions*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht and Ister Science, Bratislava (1995).

[33] E. Pap, O. Hadžić, R. Mesiar, *A fixed point theorem in probabilistic metric spaces and an application*, J. Math. Anal. Appl. 202 (1996) 433–449.

[34] V. Radu, *Some fixed point theorems in probabilistic metric spaces*, Lect. Not. Math., 1233, Springer Verlag (1987), 125–133.

[35] K. Balakrishna Reddy, P.V. Subrahmanyam, *Altman's contractors and fixed points of multivalued mappings*, Pacif. J. Math.

[36] B. Schweizer, A. Sklar, *Espaces Métriques Aléatoires*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris 247 (1958), 2092–2094.

[37] B. Schweizer, A. Sklar, *Statistical metric spaces*, Pacific, J. Math. 10 (1960), 313–334.

[38] B. Schweizer, A. Sklar, *Probabilistic Metric Spaces*, Elsevier North-Holland, New York (1983).

[39] V.M. Sehgal, A.T. Baharucha-Reid, *Fixed points of contraction mappings on probabilistic metric spaces*, Math. Syst. Theory 6 (1972), 97–102.

[40] A. N. Sherstnev, *Sluchainie normirovanije prostranstva*, DAN, 149 (1963), 280–283.

[41] M. Stojaković, *A common fixed point theorem of a family of mappings in probabilistic lacally convex spaces*, Zbornik radova PMF-a u N. Sadu, knjiga 11 (1981), 77–87.

[42] M. Stojaković, *Fixed point theorems in probabilistic metric spaces*, Kobe J. Math., 2 (1985), 1–9.

[43] M. Stojaković, *A common fixed point theorem for the commuting mappings*, Indian J. pure appl. Math., 17 (4) (1986), 466–475.

[44] M. Stojaković, *Common fixed point theorems in complete metric and probabilistic metric spaces*, Bull. Austral. Math. Soc. Vol. 36 (1987), 73–88.

[45] M. Stojaković, *Coincidence point theorems for multivalued mappings in menger spaces*, J. Natur. Phys. Sci. Vol. 1 (1987), 53–62.

[46] M. Stojaković, *A common fixed point theorems in probabilistic metric spaces and its applications*, Glasnik Matematički, Vol. 23 (43) (1988), 203–211.

[47] M. Stojaković, *On some classes of contraction mappings*, Math. Japonica 33, No. 2 (1988), 311–318.

[48] W. Takahashi, *A convexity in metric spaces and nonexpansive mappings I*, Kodai Math. rep. 22 (1970), 142–149.

[49] R.M. Tardiff, *Contraction maps on probabilistic metric spaces*, J. Math. Anal. Appl. 165 (1992), 517–523.

[50] A. Waild, *On a statistical generalization of metric spaces*, Proc. Nat. Acad. of Sci. U.S.A., 29 (1943), 196–197.

[51] S. Weber, $\perp$*-decomposable measures and integrals for Archimedian t-conorm* $\perp$, J. Math. Anal. Appl. 101 (1984), 114–138.

[52] W.Z. Zeng, *Probabilistic contractor and nonlinear eqation in Menger PN-spaces*, J. Math. Research Expos., 11 (1991), 47–51.

[53] T. Žikić, *Višeznačna preslikavanja u verovatnosnim metričkim prostorima*, Magistarski rad (2000).

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD
Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ
Vrsta rada: Doktorska disertacija
VR
Autor: mr Tatjana Žikić
AU
Mentor: Prof. dr Olga Hadžić
MN
Naslov rada: Egzistencija nepokretne tačke u fazi strukturama
NR
Jezik publikacije: srpski, latinica
JP
Jezik izvoda: srpski
JI
Zemlja publikovanja: Savezna Republika Jugoslavija
ZP
Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP
Godina: 2002.
GO
Izdavač: Autorski reprint
IZ
Mesto i adresa: Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet
MA
Fizički opis rada: 3/91/53/0/0/0/0
FO
Naučna oblast: Matematika

NO
Naučna disciplina: Analiza
ND
Predmetna odrednica/Ključne reči: verovatnosni metrički prostori, fazi metrički prostori, fazi brojevi, nepokretna tačka, Mengerov prostor, trougaona norma, q-kontrakcija, jaka (b_n)-kontrakcija, verovatnosna Nadlerova q-kontrakcija, nearhimedovski Mengerov verovatnosni normiran prostor, kontraktor.
PO
UDK:
Čuva se: u biblioteci Instituta za matematiku
ČU
Važna napomena:
VN
Izvod: U ovoj tezi dokazane su teoreme o nepokretnoj tački koje predstavljaju jednoznačna i višeznačna uopštenja Banahovog principa kontrakcije u verovatnosnim metričkim i fazi metričkim prostorima. Dokazana je teorema koja predstavlja uopštenje teoreme o nepokretnoj tački za verovatnosnu q-kontrakciju $f : S \to S$, gde je $(S, \mathcal{F}, T)$ kompletan Mengerov prostor. Uveden je pojam jake (b_n)-kontrakcije i dokazana je teorema koja predstavlja uopštenje teoreme Sehgala i Bharuche-Reid kada je preslikavanje $f : S \to S$ jaka (b_n)-kontrakcija. Teorema Caristija, koja predstavlja jedan od najvažnijih rezultata za teoriju nepokretne tačke i nelinearnu analizu uopštena je u kompletnom Mengerovom prostoru $(S, \mathcal{F}, T)$, gde je t-norma T H-tipa. Kako Mengerovi prostori pripadaju klasi kvazi-uniformnih prostora dokazana je teorema o nepokretnoj tački tri preslikavanja u jednoj specijalnoj klasi kvazi-uniformnih prostora. Dokazana je teorema o nepokretnoj tački koja predstavlja verovatnosno uopštenje Nadlerove q-kontrakcije za tri preslikavanja kao i uopštenje Hiksovog principa kontrakcije za tri preslikavanja. Teorija kontraktora, koju je uveo M. Altman, odnosi se na rešavanje nelinearnih operatorskih jednačina u Banahovim prostorima. U tezi su dokazane teoreme koje obezbeđuju postojanje i jedinstvenost rešenja za nelinearne operatorske jednačine sa jednoznačnim i višeznačnim operatorom u nearhimedovskim Mengerovim verovatnosnim normiranim prostorima.
IZ
Datum prihvatanja teme od strane NN Veća: 21.03.2002.

DP
Datum odbrane:
DO
Članovi komisije:
KO
Predsednik: dr Endre Pap, red. prof. PMF
Član: dr Olga Hadžić, red. prof. PMF, mentor
Član: dr Mila Stojaković, red. prof. FTN

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF NATURAL SCIENCES AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: Monographic type
DT
Type of record: Text printed material
TR
Contents code: PhD thesis
CC
Author: mr Tatjana Žikić
AU
Mentor: Prof. dr Olga Hadžić
MN
Title: Generalized convolution
TI
Language of text: serbian
LT
Language of abstract: serbian
LA
Country of publication: Federal Republic of Yugoslavia
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2002.
PY
Publisher: Author's reprint
PU
Publ.place: University of Novi Sad, Faculty of Natural Sciences and Mathematics
PP
Physical description: 4/107+2/100/0/0/0/0
PD
Scientific field: Mathematics

SF
Scientifisc discipline:Analysis
SD
Subject / Key words: probabilistic metric spaces, fuzzy metric spaces, fuzzy number, fixed point, Menger space, t-norm, q-contraction, strong (b_n)-contraction, probabilistic Nadler q-contraction, nonarhimedian Menger probabilistic normed space,contractor.
SKW
UC:
Holding data: the library at the Institute of Mathematics, Novi Sad
HD
Note:
N
Abstract: In this thesis fixed point theorems which present singlevalued and multivalued generalization of Banach contraction principle in probabilistic metric and fuzzy metric spaces are proved. The theorem which presents generalization of fixed point theorem for probabilistic q-contraction $f : S \to S$ is proved, where $(S, \mathcal{F}, T)$ is complete Menger space. A notion of strong (b_n)-contraction is introduced and the theorem which presents a generalization of Sehgal and Bharucha-Raid theorem when the mapping $f : S \to S$ is strong (b_n)-contraction is proved. Caristi's theorem, which presents one of the most imortant results for the fixed point theorem and nonlinear analysis is generalized in complete Menger space $(S, \mathcal{F}, T)$, where t-norm T is of H-type. As Menger's spaces belong to the class of quasi-uniformizable spaces, the fixed point theorem for three mappings in one special class of quasi-uniformizable spaces is proved. The fixed point theorem which presents a probabilistic generalization of Nadler q-contraction for three mappings is proved as well as the generalization of Hicks's contraction principle for three mappings. The theory of contractor, which was introduced by M. Altman refers to solving nonlinear operator equations in Banach spaces. This thesis proves the theorems which provide the existence and uniqueness of the solutions for nonlinear operator equations with singlevalued and multivalued operators in nonarhimedian Menger's probabilistic normed spaces.
AB
Accepted by Scientific Board on: 21.03.2002.
ASB

Defended:
DE
Thesis defend board::
DB
President: dr Endre Pap, prof. PMF
Member: dr Olga Hadžić, prof. PMF, mentor
Member: dr Mila Stojaković, prof. FTN

BIOGRAFIJA

Tatjana Žikić je rođena 6. 06. 1973. godine u Novom Sadu. Osnovnu školu i prirodno-matematičku gimnaziju " Jovan Jovanović-Zmaj" završila je sa odličnim uspehom. Na Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, studijska grupa matematika, smer diplomirani matematičar, upisala se školske 1992/93 godine. Diplomirala je 21. 05. 1997. godine, sa prosečnom ocenom 9,04 (devet i 4/100).

Magistarske studije je upisala školske 1997/98 godine. Položila je sve ispite na magistarskim studijama sa prosečnom ocenom 10 (deset).

Marta 1998. godine zaposlila se na Tehnološkom fakultetu u Novom Sadu, u zvanju asistenta-pripravnika za naučnu oblast Matematika. Drži vežbe iz predmeta Matematika I i Matematika II.

Magistarski rad pod nazivom *Višeznačna preslikavanja u verovatnosnim metričkim prostorima* odbranila je 9.12.2000.

Do sada je bila koautor dva naučna rada (O. Hadžić, T. Žikić, *On Caristi's fixed point theorem in F-type topological spaces*, N. Sad J. Math. Vol. 28, No. 1, 1998, 91–98; O. Hadžić, T. Žikić, *A theorem on coincidence point for multivalued mappings in a class of probabilistic metric spaces*, N. Sad J. Math. Vol. 31, No. 1, 2001, 175–184.

Koristi se literaturom na engleskom i ruskom jeziku.