



UNIVERZITET U NOVOM SADU
FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA



Marija Delić

Modeli neodređenosti u obradi digitalnih slika

DOKTORSKA DISERTACIJA

Novi Sad, 2020.

“Nikad nemoj odustati od stvari koje te čine srećnim. To nije sebičnost, nego radost života.”

Paulo Koeljo



УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ • ФАКУЛТЕТ ТЕХНИЧКИХ НАУКА
21000 НОВИ САД, Трг Доситеја Обрадовића 6

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, РБР :	
Идентификациони број, ИБР :	
Тип документације, ТД :	Монографска документација
Тип записа, ТЗ :	Текстуални штампани запис
Врста рада, ВР :	Докторска дисертација
Аутор, АУ :	Марија Делић
Ментор, МН :	Проф. др Небојша Ралевић
Наслов рада, НР :	Модел неопређености у обради дигиталних слика
Језик публикације, ЈП :	Српски
Језик извода, ЈИ :	Српски, Енглески
Земља публикавања, ЗП :	Република Србија
Уже географско подручје, УГП :	Аутономна Покрајина Војводина
Година, ГО :	2020.
Издавач, ИЗ :	Ауторски репринт
Место и адреса, МА :	Нови Сад, Факултет техничких наука, Трг Доситеја Обрадовића 6
Физички опис рада, ФО : (поглавља/страна/ цитата/табела/слика/ графика/прилога)	6/188/144/13/30/4/0
Научна област, НО :	Примењена математика
Научна дисциплина, НД :	Рачунарска обрада слика
Предметна одредница/Кључне речи, ПО :	Рачунарска обрада слика, сегментација, класификација, фази скупови, фази растојања, метрике, норме, конорме, дескриптори, текстура, локални бинарни кодови
УДК	
Чува се, ЧУ :	Библиотеци Факултета техничких наука, Трг Доситеја Обрадовића 6, Нови Сад
Важна напомена, ВН :	

Извод, ИЗ:	<p>Проблеми класификације и сегментације дигиталних слика су веома актуелни и заступљени у пракси. Потреба за моделима који разматрају ову проблематику у последњих неколико деценија убрзаним темпом поприма све већи значај и обим у свакодневном животу. Користе се у рачунарској графици, препознавању облика, медицинској анализи слика, саобраћају, анализи докумената, покрета и израза лица и сл.</p> <p>У оквиру ове дисертације, представљено истраживање мотивисано је применама развијених модела у класификацији и сегментацији дигиталних слика. Истраживање обухвата два сегмента. Ови сегменти повезани су термином неодређености, који је уз употребу адекватног математичког апарата (теорије фази скупова), уграђен у моделе развије за примену у обради слике.</p> <p>Један правац истраживања базиран је на теорији фази скупова, т-нормама, т-конормама, операторима агрегације и агрегираним функцијама растојања. У оквиру тога, истраживање је спроведено са структурираном математичком подлогом, изложене су основне дефиниције, теореме, као и особине коришћених оператора, проширени су теоријски концепти т-норми и т-конорми. Дефинисани су нови типови оператора агрегације и њиховом применом конструисане су нове функције растојања, чија је употреба дискутована кроз успешност у процесу сегментације дигиталних слика.</p> <p>Други правац истраживања, изложен у овој дисертацији, обухвата више инжењерски приступ решавању проблема класификације текстура дигиталних слика. У складу са тим, детаљно је анализирана и дискутована класа локалних бинарних дескриптора текстуре. Инспирирана успешношћу поменуће ЛБП класе дескриптора, уведена је једна нова подфамилија α-дескриптора текстуре. Уведени модел дескриптора формиран је на темељима идејних принципа локалних бинарних кодова и базичних појмова из теорије фази скупова. Практична употреба и значај представљеног модела демонстрирани су кроз веома успешне процесе класификације на неколико јавно доступних база слика.</p>	
Датум прихватања теме, ДП:	05.09.2019.	
Датум одбране, ДО:		
Чланови комисије, КО:	<p>Председник: др Ендре Пап, професор емеритус</p> <p>Члан: др Лидија Чомић, ванредни професор</p> <p>Члан: др Тибор Лукић, ванредни професор</p> <p>Члан: др Наташа Ђировић, ванредни професор</p> <p>Члан: др Љубо Недовић, доцент</p> <p>Члан, ментор: др Небојша Ралевић, редовни професор</p>	<p>Потпис ментора</p>



UNIVERSITY OF NOVI SAD • FACULTY OF TECHNICAL SCIENCES
21000 NOVI SAD, Trg Dositeja Obradovića 6

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, ANO :	
Identification number, INO :	
Document type, DT :	Monographic publication
Type of record, TR :	Textual printed material
Contents code, CC :	PhD thesis
Author, AU :	Marija Delić
Mentor, MN :	Prof. Nebojša Ralević, PhD
Title, TI :	Models of digital image processing under uncertainty
Language of text, LT :	Serbian
Language of abstract, LA :	Serbian, English
Country of publication, CP :	Republic of Serbia
Locality of publication, LP :	Autonomous Province of Vojvodina
Publication year, PY :	2020.
Publisher, PB :	Author's reprint
Publication place, PP :	Novi Sad, Faculty of Technical Sciences, Trg Dositeja Obradovića 6
Physical description, PD : <small>(chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendices)</small>	6/188/144/13/30/4/0
Scientific field, SF :	Applied mathematics
Scientific discipline, SD :	Digital image processing
Subject/Key words, S/KW :	Digital image processing, segmentation, classification, fuzzy sets, distance functions, metrics, norms, conorms, descriptors, texture, local binary patterns
UC	
Holding data, HD :	Library of the Faculty of Technical Sciences, Trg Dositeja Obradovića 6, Novi Sad
Note, N :	

<p>Abstract, AB:</p>	<p>Classification and segmentation problems of digital images is a very attractive topic and has been making impact in many different applied disciplines. In the past few decades, the demand for models that address these issues has been gaining momentum and applications in everyday life. These models are used in computer graphics, shape recognition, medical image analysis, traffic, document analysis, facial movements and expressions, etc.</p> <p>The research within this doctoral dissertation was motivated by the application of developed methods in classification and segmentation tasks. The conducted research covered two segments, which were linked by the term of indeterminacy, with the usage of the theory of fuzzy sets, which is incorporated into methods developed for application in image processing.</p> <p>One direction of the research was founded on the theory of fuzzy sets, t-norms, t-conorms, aggregation operators, and aggregated distance functions. Within this framework, the research was conducted with a structured mathematical background. Firstly, basic definitions, theorems and characteristics of the used operators were presented, followed by the theoretical concepts of t-norms and t-conorms that were extended. New types of aggregation operators and distance functions were defined, and finally, their contribution in the digital image segmentation process was explored and discussed.</p> <p>The second direction of the research presented in this dissertation involved more of an engineering-type of approach to solving the problem of the classification of digital image textures. To that end, a class of local binary texture descriptors (LBPs) was analyzed and discussed in detail. Inspired by the results of the above-mentioned LBP descriptors, one new sub-family of the α-descriptors was introduced by the author. The introduced descriptor model was based on the conceptual principles of LBPs and basic definitions from the fuzzy set theory. Its practical usage and importance were established and reflected in very successful classification results, achieved in the application on several publicly available image datasets.</p>	
<p>Accepted by the Scientific Board on, ASB:</p>	<p>05.09.2019.</p>	
<p>Defended on, DE:</p>		
<p>Defended Board, DB:</p>	<p>President: dr Endre Pap, professor emeritus</p> <hr/> <p>Member: dr Lidija Čomić, associate professor</p> <hr/> <p>Member: dr Tibor Lukić, associate professor</p> <hr/> <p>Member: dr Nataša Čirović, associate professor</p> <hr/> <p>Member: dr Ljubo Nedović, assistant professor</p> <hr/> <p>Member, Mentor: dr Nebojša Ralević, full professor</p>	<p>Mentor's sign</p>

Apstrakt

Problemi klasifikacije i segmentacije digitalnih slika su veoma aktuelni i zastupljeni u praksi. Potreba za modelima koji razmatraju ovu problematiku u poslednjih nekoliko decenija ubrzanim tempom poprima sve veći značaj i obim u svakodnevnom životu. Koriste se u računarskoj grafici, prepoznavanju oblika, medicinskoj analizi slika, saobraćaju, analizi dokumenata, pokreta i izraza lica i sl.

U okviru ove doktorske disertacije, predstavljeno je istraživanje motivisano primenama razvijenih modela u klasifikaciji i segmentaciji digitalnih slika. Istraživanje obuhvata dva segmenta. Ovi segmenti povezani su terminom neodređenosti, koji je uz upotrebu adekvatnog matematičkog aparata (teorije fazi skupova) ugrađen u modele razvijene za primenu u obradi slike.

Jedan pravac istraživanja baziran je na teoriji fazi skupova, t -normama, t -konormama, operatorima agregacije i agregiranim funkcijama rastojanja. U okviru toga, istraživanje je sprovedeno sa struktuiranom matematičkom podlogom, izložene su osnovne definicije, teoreme kao i osobine korištenih operatora, prošireni su teorijski koncepti t -normi i t -konormi. Definisani su novi tipovi operatora agregacije i njihovom primenom konstruisane su nove funkcije rastojanja, čija je upotreba diskutovana kroz uspešnost u procesu segmentacije digitalnih slika.

Drugi pravac istraživanja, izložen u ovoj disertaciji, obuhvata više inženjerski pristup rešavanju problema klasifikacije tekstura digitalnih slika. U skladu sa tim, detaljno je analizirana i diskutovana klasa lokalnih binarnih deskriptora teksture (eng. Local Binary Patterns, LBPs). Inspirisana uspešnošću pomenute LBP klase deskriptora, uvedena je jedna nova podfamilija α -deskriptora teksture. Uvedeni model deskriptora formiran je na temeljima idejnih principa lokalnih binarnih kodova i bazičnih pojmova iz teorije fazi skupova. Praktična upotreba i značaj predstavljenog modela demonstrirani su kroz veoma uspešne procese klasifikacije na nekoliko javno dostupnih baza slika.

Abstract in English

Classification and segmentation problems of digital images is a very attractive topic and has been making impact in many different applied disciplines. In the past few decades, the demand for models that address these issues has been gaining momentum and applications in everyday life. These models are used in computer graphics, shape recognition, medical image analysis, traffic, document analysis, facial movements and expressions, etc.

The research within this doctoral dissertation was motivated by the application of developed methods in classification and segmentation tasks. The conducted research covered two segments, which were linked by the term of indeterminacy, with the usage of the theory of fuzzy sets, which is incorporated into methods developed for application in image processing.

One direction of the research was founded on the theory of fuzzy sets, t -norms, t -conorms, aggregation operators, and aggregated distance functions. Within this framework, the research was conducted with a structured mathematical background. Firstly, basic definitions, theorems and characteristics of the used operators were presented, followed by the theoretical concepts of t -norms and t -conorms that were extended. New types of aggregation operators and distance functions were defined, and finally, their contribution in the digital image segmentation process was explored and discussed.

The second direction of the research presented in this dissertation involved more of an engineering-type of approach to solving the problem of the classification of digital image textures. To that end, a class of local binary texture descriptors (LBPs) was analyzed and discussed in detail. Inspired by the results of the above-mentioned LBP descriptors, one new sub-family of the α -descriptors was introduced by the author. The introduced descriptor model was based on the conceptual principles of LBPs and basic definitions

from the fuzzy set theory. Its practical usage and importance were established and reflected in very successful classification results, achieved in the application on several publicly available image datasets.

Zahvalnica

Ova teza rezultat je višegodišnjeg istraživačkog rada, ali i posledica dužeg životnog puta, okolnosti i ljudi koji su me inspirisali i ohrabivali. Imam sreću da sam okružena velikim bojem pozitivnih ljudi, koji mi svakodnevno na različite načine upućuju ljubav, razumevanje, prijateljstvo, osmehe i kroz razne diskusije utiču na moje životne stavove. Oni su moj pokretač i neiscrpna inspiracija svakog dana. Sigurna sam da ih ovde ne mogu sve navesti i zahvaliti im za pečat koji su ostavili na mojoj životnoj stazi, ali postoji nekoliko njih koje bih izdvojila.

★ Pre svega i najviše hvala mojim roditeljima za ljubav i energiju koju mi pružaju svakog dana, što su mi omogućili bezbrižno detinjstvo i obrazovanje, podarili mi najveće bogatstvo - veliku i srećnu porodicu, naučili me šta je безусловna ljubav, razumevanje i praštanje. Sve što sam danas dugujem njima!

★ Mojim sestrama i bratu, Bojani, Ani i Ratomiru. Neizmerna ljubav i ono što od detinjstva delimo zauvek će me voditi i ohrabrivati u svim životnim poduhvatima. Hvala za sve radosti, nestašluke, tajne i osmehe koje smo podelili, kao i za one koji nas tek čekaju.

★ Tei, Todoru i Tadeju, što jednim osmehom, pogledom i treptajem oka uspevaju da me prebace u dečiji svet mašte i stvaranja, da me oraspolože i nasmeju, dok istražuju svet pristupom empirijskih istraživača.

★ Mom mentoru, profesoru Nebojši Raleviću, za podršku, strpljenje, znanje i energiju koje je uložio i podelio sa mnom tokom rada na mojim doktorskim studijama.

★ Profesoru Ljubu Nedoviću, za saradnju i znanje koje je nesebično podelio sa mnom, za razumevanje i predusretljivost koju pokazuje svakog dana.

★ Profesorici Mili Stojaković, za sve razgovore, savete i energiju koje je podelila sa mnom i uputila me kako da se nosim sa raznim izazovima za dobrobit sebe i drugih.

★ Profesorici Jeleni Ivetić, jer je tokom saradnje postala moj prijatelj, za iskrenost, pozitivnost i predusretljivost, za sve zajedničke ispijene kafe i pregledane zadatke.

★ Mojoj kumi Jovani, zato što se volimo i podržavamo u svemu, delimo ljubav ka metematici i koračamo sličnom stazom već godinama.

★ Budi, za podršku i motivaciju u istraživačkom radu kad je bilo najteže, za mnoge razgovore, razumevanje, kao i za 'Matlab' i 'Latex' trikove koje je podelila sa mnom.

★ Mojoj Jovani, drugarici iz srednje škole, za sve provode, nezaboravne izlaske i tajne koje smo podelile i što još uvek to radimo.

★ Milici, Marini i Saški, što su uz mene od detinjstva.

★ Sonji i Ljilji, za svu ljubav koju su posvetile meni, što su me čuvale kad sam bila dete i što još uvek to na neki način rade.

★ Mojim kolegama sa FTN-a, Marini, Nataši, Ivani, Gorani, Dunji, Srđanu i Ivanu koji su svaki dan učinili lepšim i dragocenijim.

★ Srđani, mom treneru, na svakodnevnoj inspiraciji i motivaciji, za snagu i energiju koju je pokrenula u meni.

★ Zahvalila bih i svim članovima komisije za odbranu doktorske disertacije za detaljno čitanje rukopisa, korisne primedbe, sugestije i savete koji su doprineli poboljšanju kvaliteta disertacije.

Novi Sad, januar 2020.

Marija

Sadržaj

Apstrakt	ix
Zahvalnica	xiii
Slike	xvii
Tabele	xix
Skraćenice	xxi
1 Uvod	1
1.1 Struktura teze	1
1.2 Motivacija	3
1.3 Pregled originalnih radova	5
2 Analiza digitalne slike	7
2.1 Digitalna slika	7
2.2 Obrada slike	8
2.3 Segmentacija digitalne slike	10
2.3.1 Fazi segmentacija	12
2.3.2 Fuzzy c-Means Clustering Algorithm (FCM)	14
2.3.3 Defazifikacija	15
2.4 Klasifikacija digitalne slike	17
2.4.1 k-Nearest Neighbor (k-NN)	18
2.4.2 Support Vector Machine (SVM)	19
3 Fazi skupovi i fazi operacije	21

3.1	Fazi skupovi	21
3.2	t-norme i t-konorme	27
3.3	Operatori agregacije	33
3.3.1	Operatori agregacije koji potiču od operatora aritmetičke sredine	38
3.3.1.1	OWA operatori agregacije	39
3.3.1.2	WAM operatori agregacije	41
3.3.1.3	Nova klasa agregacionih operatora - WAMP operatori sa stepenima	42
3.3.2	Operatori proizvoda	47
3.3.2.1	Klasični operator proizvoda	48
3.3.2.2	Nova klasa agregacionih operatora - Oper- ator proizvoda sa stepenima	49
3.4	Novi teorijski rezultati o t-normama, t-konormama i operatorima agregacije	53
4	Nove funkcije rastojanja	63
4.1	Osnovni pojmovi funkcija rastojanja i metrika	64
4.2	Agregirane funkcije rastojanja	68
4.3	Deskriptori piksela	70
4.4	Primena agregiranih funkcija rastojanja u segmentaciji digitalnih slika	74
4.4.1	Segmentacija rendgenskog snimka	76
4.4.2	Segmentacija slike u boji	80
4.5	Fazi metrike	87
4.6	Primena fazi metrika u segmentaciji digitalnih slika	100
4.6.1	Eksperimenti	103
5	Analiza teksture digitalne slike	109
5.1	Pojam teksture digitalne slike	109
5.2	Deskriptori teksture	112
5.2.1	LBP deskriptori	114
5.2.1.1	Neke modifikacije LBP deskriptora	117
5.2.1.2	Uniformni i neuniformni deskriptori	124
5.2.1.3	Rotaciona invarijantnost deskriptora	125
5.2.2	α LBP deskriptori teksture	129
5.3	Primena α LBP deskriptora u klasifikaciji tekstura digitalnih slika	134
5.3.1	Skupovi podataka (Texture datasets)	134

5.3.2	Metod klasifikacije	136
5.3.3	Eksperimentalni rezultati	137
6	Zaključak	143
6.1	Zaključak sprovedenog istraživanja	143
6.2	Budući rad	145
	 Bibliografija	 147

Slike

2.1	Matrica vrednosti piksela.	8
2.2	Šematski prikaz glavnih pojmova u obradi digitalne slike.	9
2.3	Ilustracija fazi segmentacije.	12
2.4	Šematski prikaz k-NN procesa klasifikacije.	19
2.5	Ilustracija razdvajanja klasa binarnog SVM klasifikatora.	20
3.1	Funkcije pripadanja.	26
4.1	Rendgenski snimak vilice.	76
4.2	Slika dobijena upotrebom d_S funkcije rastojanja.	77
4.3	Slika dobijena upotrebom $d_{S,N;0.2}$ funkcije rastojanja.	78
4.4	Slika dobijena upotrebom $d_{S,N;0.8}$ funkcije rastojanja.	78
4.5	Segmentovane slike, dobijene upotrebom FCM algoritma uz različite funkcije rastojanja.	80
4.6	Originalna slika - igračke.	83
4.7	Originalna slika - žena.	85
4.8	Originalna slika - pustinja.	86
4.9	Ilustracija rezultata segmentacije.	86
4.10	Originalna slika - Cvetovi.	104
4.11	Segmentovane slike, dobijene upotrebom različitih metrika.	104
4.12	Zavisnost rezultata segmentacije od parametra α	106
4.13	Originalna slika - Pustinja.	107
5.1	Primeri slika koje se razlikuju samo u teksturi	110
5.2	Primer 3×3 okoline i formiranja binarnog koda.	114
5.3	Procedura formiranja LBP deskriptora.	115
5.4	N suseda na kružnici.	116
5.5	Dodeljivanje celobrojne vrednosti paternu.	116
5.6	Ilustracija LTP deskriptora.	118
5.7	Ilustracija LQP deskriptora.	119

5.8	Funkcija pripadanja.	120
5.9	Primeri rotaciono invarijantnih kodova.	126
5.10	Ilustracija rotacione invarijantnosti.	127
5.11	Procedura formiranja α LBP kodova.	131
5.12	Primeri test slika – KTH-TIPS2b baza.	134
5.13	Primeri test slika – UIUC baza.	135
5.14	Primeri test slika – Virus baza.	135
5.15	Osetljivost klasifikacije na promenu parametara.	142

Tabele

3.1	Osobine OWA_{ω} operatora agregacije.	41
3.2	Osobine operatora proizvoda.	49
3.3	Osobine agregacionog operatora \prod_{ω} tipa i njegovih specijalnih klasa.	52
4.1	Rezultati sprovedene segmentacije, OWA operator.	78
4.2	Rezultati sprovedene segmentacije.	80
4.3	Rezultati sprovedene segmentacije, WAMP operator.	84
4.4	Rezultati sprovedene segmentacije, WAMP operator.	85
4.5	Rezultati sprovedene segmentacije, WAMP operator.	87
4.6	Parametri i rezultati sprovedene segmentacije, dobijeni na Slici 4.10.	105
4.7	Parametri i rezultati sprovedene segmentacije, dobijeni na Slici 4.13.	107
5.1	Rezultati testiranja sprovedeni na Virus bazi.	139
5.2	Rezultati testiranja sprovedeni na UIUC bazi.	140
5.3	Rezultati testiranja sprovedeni na KTH-TIPS2b bazi.	141

Skraćenice

FCM	F uzzy c - M eans C lustering
SVM	S upport V ector M achine
k-NN	k - N earest N eighbor
SOM	S elf- O rganizing M aps
OWA	O rdered W eighted A verage
WAM	W eighted A rithmetic M ean
WAMP	W eighted A rithmetic M eans of P owers
RGB	R ed G reen B lue
GLCM	G ray-level C o-occurrence M atrices
LBP	L ocal B inary P attern
ILBP	I mproved L ocal B inary P attern
LTP	L ocal T ernary P attern
LQP	L ocal Q uinary P attern
FLBP	F uzzy L ocal B inary P attern
SLBP	S hift L ocal B inary P attern
ELBP	E xtended L ocal B inary P attern
MRELBP	M edian R obust E xtended L ocal B inary P attern
DFT	D iscrete F ourier T ransform
TEM	T ransmission E lectron M icroscopy

Ovu tezu posvećujem svojoj porodici koja je moja svakodnevna i neiscrpna inspiracija.

Poglavlje 1

Uvod

1.1 Struktura teze

Doktorska disertacija koja je pred Vama podeljena je u 6 poglavlja.

Prvo poglavlje sadrži motivaciju za istraživanje koje je sprovedeno u okviru doktorskih studija kandidata. Navedeni su neki od aktuelnih problema iz prakse kojima je posvećena pažnja tokom istraživanja. Na kraju poglavlja dat je pregled originalnih radova koji su publikovani ili podneti za publikovanje u toku doktorskih studija kandidata. Većina ostvarenih naučnih doprinosa i rezultata koji su predstavljeni u navedenim radovima je pregledno uključena u sadržaj ove disertacije.

U okviru drugog poglavlja predstavljeni su osnovni pojmovi vezani za digitalnu sliku i njenu analizu i obradu. Zatim su posebno razmatrani pojmovi segmentacije i klasifikacije digitalnih slika, koji predstavljaju osnovna područja primene matematičkih modela koji su razvijeni u okviru ovog istraživanja. Navedeni su neki od često korištenih metoda (alata) iz prakse koji su kasnije u tezi upotrebljeni pri sprovođenju eksperimentalnih rezultata.

Treće poglavlje obuhvata osnovne matematičke pojmove vezane za teoriju fazi skupova i fazi operacije, kao što su operatori agregacije, t-norme i t-konorme. Navedeni su neki od osnovnih primera za većinu formalno uvedenih matematičkih struktura, koji su pronašli upotrebu u različitim primenjenim disciplinama. Pored toga, u ovom poglavlju dati su neki od originalnih doprinosa disertacije, koji se ogledaju u definisanju novih klasa operatora agregacije, kao i nekoliko teorijskih rezultata vezanih za t-norme i t-konorme.

Četvrto poglavlje posvećeno je funkcijama rastojanja i metrikama, konstrukciji novih funkcija rastojanja i takođe predstavlja deo originalnog doprinosa disertacije. Naime, primenom nekih od operatora agregacije uvedenih u poglavlju 3 ove teze, došli smo do novih funkcija rastojanja koje su pronašle svoju upotrebu u segmentaciji digitalnih slika. Testiranje je sprovedeno korišćenjem FCM algoritma za segmentaciju i upotrebom Matlab programskog paketa. Ova sekcija obuhvata osnovne teorijske koncepte vezane za konstrukciju novih rastojanja, odnosno definisanja različitosti/sličnosti za posmatrane piksele. Zatim su predstavljeni novi deskriptori piksela, koji su takođe uključeni u formiranje pomenutih funkcija rastojanja, dok su na kraju prikazani eksperimentalni rezultati i uspešnost novih modela u segmentaciji digitalnih slika.

Peto poglavlje bavi se analizom teksture digitalnih slika. Istraživanje u okviru ovog poglavlja može se posmatrati izdvojeno od prethodna dva poglavlja koja se bave operatorima agregacije i funkcijama rastojanja. Posebnu pažnju ovde smo posvetili klasi LBP deskriptora teksture i njihovoj primeni u klasifikaciji digitalnih slika. Prikazan je pregled nekih od značajnih predstavnika pomenute klase i uvedena je nova familija α -deskriptora teksture. Formiranje nove klase deskriptora motivisano je teorijom fazi skupova i pojmom α preseka, odakle i potiče ime uvedene klase deskriptora. Binarni, ternarni i kvinarni predstavnici novodefinisane klase deskriptora testirani su na nekoliko javno dostupnih baza slika i dobijeni rezultati klasifikacije su analizirani kroz poređenje sa drugim aktuelnim predstavnicima iz oblasti.

Poglavlje 6 sadrži zaključke istraživanja koje je sprovedeno u toku izrade ove doktorske disertacije i nekoliko ciljeva i pravaca planiranog budućeg rada.

1.2 Motivacija

Stvarni svet koji nas okružuje je veoma složen. Ova složenost proizilazi iz različitih odnosa, pojava i situacija koje nisu eksplicitno definisane i određene. Ljudski um nesvesno je u stanju da percipira i obrađuje takve složene, dvosmislene i nejasne probleme i pojave zahvaljujući daru razmišljanja. Taj misaoni proces je moguć jer ljudima nije potreban potpun opis problema, obzirom da su sposobni da približno ocenjuju i rasuđuju. Sa pojavom i usavršavanjem računara, inženjeri i naučnici iz raznih disciplina sve više su zainteresovani za formulisanje i stvaranje metoda koje bi računarima omogućile rad sa takvim nepotpunim (fazi) informacijama. Teorija klasičnih skupova zasniva se na fundamentalnom principu skupa, gde posmatrani element može biti u skupu ili ne. Dakle, postoji jasna granica i razlika između članova skupa i onih koji to nisu, i pripadnost skupu je jasno određena i definisana. Ovo implicira da mnogi realni problemi ne mogu biti modelovani upotrebom klasične teorije skupova. Suprotno tome, teorija fazi skupova podrazumeva parcijalne (nepotpune) pripadnosti skupu, zato se smatra uopštenjem klasične teorije i često se koristi za interpretaciju i modelovanje raznih pojava i problema iz realnog sveta. Složenost sistema neretko je obrnuto proporcionalna razumevanju koje imamo o sistemu ili informacijama u njemu. Ovo je uglavnom posledica sadržine velikih količina neodređenih (fazi) informacija koje treba obraditi. Razumevanje takvih sistema temelji se na fazi percepciji, poimanju i formalnoj interpretaciji takvih informacija uz upotrebu teorije fazi skupova.

Istraživanje u ovoj doktorskoj disertaciji bazirano je na metodama koje se oslanjaju upravo na teoriju fazi skupova, a u svrhu modelovanja tehnika i alata za upotrebu u obradi digitalnih slika.

Sa brzim tehnološkim napretkom poslednjih decenija, količina vizuelnih informacija različitih vrsta eksponencijalno se povećava. Uređaji za snimanje slika i video zapisa su lako dostupni i široko rasprostranjeni. Svako od nas na dnevnom nivou samo upotrebom mobilnog telefona zabeleži nekolicinu fotografija. Naravno, ovaj fenomen možemo posmatrati ne samo u svakodnevnim ličnim situacijama, već i u specijalizovanim oblastima poput medicinskih, biomedicinskih i biometrijskih istraživanja, analize dokumenata, pokreta lica i sl. Dakle, stručnjaci iz raznih oblasti imaju pristup velikoj količini podataka (slika ili video zapisa), koji mogu biti različitih kvaliteta i dimenzija. Analiza ovih slika je veoma važna, precizni automatski ili poluautomatski alati su ne samo korisni, već i neophodni za funkcionisanje velikih sistema. Stoga je dizajn i razvoj algoritama za analizu i obradu slike uvek interesantna tema u istraživačkim krugovima. Rezultati iz ovog domena pomažu u automatskom rešavanju problema koje su prethodno stručnjaci iz oblasti rešavali ručno.

Jedan deo ove disertacije baziran je na teorijskoj podlozi iz teorije fazi skupova, uključujući različite fazi operacije, funkcije rastojanja i metrike. Ovaj deo istraživanja motivisan je modeliranjem novih funkcija rastojanja koje bi na odgovarajući način koristile i u procesu segmentacije očuvavale fazi informacije sadržane u slici. Primenom fazi segmentacije izbegava se formiranje strogih i oštih granica (eng. crisp decisions) na samom početku procesa analize slike, čime se očuvava veća količina podataka o sadržaju slike i te informacije ostaju dostupne u narednim procesima analize i obrade slike. Sam proces segmentacije nije primarna interesna sfera disertacije, već je korišten kao alat za poređenje i procenu uspešnosti novih funkcija rastojanja.

Drugi deo disertacije fokusiran je na opis (deskripciju) slike i njenu klasifikaciju. U ovom procesu suštinski zadatak je unapred nepoznatom ulaznom podatku (slici) dodeliti neku od poznatih klasa, isključivo na osnovu vizuelnih karakteristika slike. Opisani postupak se sastoji od dva osnovna koraka.

U prvom koraku izdvajaju se karakteristike iz slike, koristeći funkcije modelirane u tu svrhu - deskriptore. U narednom koraku, karakteristike ekstrahovane iz slika koriste se u procesu klasifikacije. Naš rad fokusiran je na deskriptore teksture digitalnih slika, odnosno ekstrahovanje što detaljnijih informacija iz slike u cilju preciznije klasifikacije podataka. Proces klasifikacije je u okviru ove disertacije isključivo korišten kao alat za procenu uspešnosti odgovarajuće klase predstavljenih deskriptora.

1.3 Pregled originalnih radova

1. Nebojša Ralević, Marija Delić, Ljubo Nedović, "Aggregation of fuzzy metrics and its application in image segmentation" - submitted
2. Marija Delić, "Local Binary Patterns Based on α -cutting Approach" - submitted
3. Marija Delić, Ljubo Nedović, Endre Pap, "Extended power-based aggregation of distance functions and application in image segmentation", Information Sciences, Vol. 494, pp.155-173
4. Ljubo Nedović, Endre Pap, Nebojša Ralević, Marija Delić, "X-ray image segmentation using product-type aggregation of distance functions", XLVI International Symposium on Operational Research, Kladovo, Serbia, Sept. 2019, pp.361-366
5. Endre Pap, Marija Delić, Ljubo Nedović, "Information fusion by extended power-based aggregation in image segmentation", SINTEZA 2019, International Scientific Conference on Information Technology and Data Related Research, Belgrade, Singidunum University, Serbia, April 2019, pp.162-167
6. Ljubo Nedović, Marija Delić, Nebojša Ralević, "OWA aggregated distance functions and their application in image segmentation", In

Proceedings of the 16th IEEE International Symposium on Intelligent Systems and Informatics (SISY), Subotica, Serbia, Sept. 2018, pp.311-316

7. Ljubo Nedović, Marija Delić, "Image segmentation by applying median-aggregated distance function", Zbornik radova META, Novi Sad, Srbija, Maj 2018, pp.1-6
8. Marija Delić, Joakim Lindblad, Nataša Sladoje, " α LBP - a Novel Member of the Local Binary Pattern Family Based on α -cutting", In Proceedings of the 9th IEEE International Symposium on Image and Signal Processing and Analysis (ISPA), IEEE, Zagreb, Croatia, Sept. 2015, pp.13-18

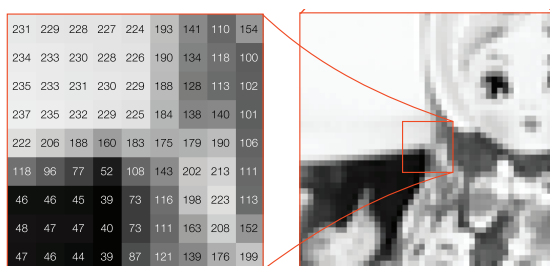
Poglavlje 2

Analiza digitalne slike

2.1 Digitalna slika

Slika je predmet vizuelne percepcije, dok njena upotreba u multimedijalnim sistemima podrazumeva digitalnu reprezentaciju ovog pojma. Pod pojmom digitalne slike uglavnom se misli na elektronski zabeleženu, dvodimenzionalnu sliku, diskretizovanu na grafičke jedinice koje nazivamo pikseli. Matematički slika se može predstaviti kao funkcija dve promenljive, $f(x, y)$. Promenljive, (x, y) , predstavljaju prostorne koordinate piksela, a vrednost funkcije, $f(x, y)$, može se neformalno povezati sa intenzitetom neke fizičke veličine, npr. svetlosti u datoj tački. Digitalizacija uključuje uzorkovanje (merenje osvetljenja na mestu svakog piksela) i kvantizaciju (dodeljivanje diskretnih vrednosti svakom pikselu), Slika 2.1.

U postupku kvantizacije svakom pikselu slike dodeljuje se vrednost iz predefinisane skupa intenziteta. Finoća kvantizacije vrednosti piksela obično se izražava brojem bita koji se koriste za reprezentaciju intenziteta jednog piksela. Kada se za reprezentaciju piksela koristi samo 1 bit, govorimo o binarnim ili 1-bitnim monohromatskim slikama. Svakom pikselu slike tada se može dodeliti vrednost 0 ili 1, tako da se na ovaj način mogu predstaviti



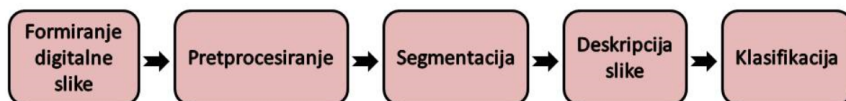
SLIKA 2.1: Digitalna slika može biti prikazana kao matrica, čiji su elementi vrednosti piksela na odgovarajućim pozicijama.

*Prikazana slika je preuzeta iz doktorske disertacije [1].

samo dva nivoa osvetljenja. U ovom slučaju 0 se koristi za prezentaciju crnih pojmova, dok 1 predstavlja svetle (bele) segmente na slici. Zbog očigledno malog broja kvantizacionih nivoa, ovakve reprezentacije koriste se uglavnom za prikaz teksta ili jednostavne grafike. U praksi se najčešće za kvantizaciju vrednosti piksela koristi 8 bita, što implicira $2^8 = 256$ različitih vrednosti za predstavljanje nivoa intenziteta piksela. Pri tome, 0 opet odgovara potpuno crnim tonovima, dok 255 odgovara potpuno belim tonovima. Vrednosti koje se nalaze između predstavljaju različite nivoe sive boje, zato se ovakve reprezentacije nazivaju "sive slike" (eng. gray-level, gray-scale images). Dok sive slike imaju jednu vrednost kvantizacije koja odgovara pikselu, slike u boji koje imaju uglavnom tri kanala (RGB - crveni, zeleni i plavi) odlikuju tri vrednosti kvantizacije po pikselu, za svaki kanal pojedinačno.

2.2 Obrada slike

Obrada i analiza digitalne slike je veoma obiman i široko rasprostranjen pojam, koji se sastoji iz više segmenata od kojih se neki delimično i preklapaju. U ovoj tezi pod pojmovima obrade i analize digitalne slike smatraćemo proces ekstrahovanja značajnih informacija iz digitalnih slika, kao i njihovu dalju upotrebu na problemima segmentacije i klasifikacije. Na Slici



SLIKA 2.2: Šematski prikaz glavnih pojmova u obradi digitalne slike.

2.2 predstavljen je šematski prikaz osnovnih pojmova vezanih za obradu digitalne slike od kojih će neki u nastavku teze biti detaljno razmatrani.

Formiranje digitalne slike. Ovaj korak je nekad zanemaren, ali je veoma bitan jer od njega zavise svi dalji procesi u analizi slike. Naime, ponekad smo ograničeni uslovima formiranja digitalne slike, zbog čega dobijamo lošiji kvalitet na samom početku procesa analize. Razni su segmenti koji utiču na formiranje i kvalitet slike, a neki od njih su: osvetljenje scene, udaljenost i tehnička opremljenost uređaja kojim se snima, vreme ekspozicije, balans bele boje, potencijalni gubitak podataka u kompresiji slike, itd. Najčešći problemi kod formiranja digitalnih slika su prisustvo šuma i zamagljenja, koji su gotovo neizbežni uprkos savremenim tehničkim opremama. Pojava ovih smetnji rezultira smanjenom preciznošću kako segmentacije, tako i ostalih postupaka koji se primenjuju u automatskoj obradi digitalne slike, ali je i svakodnevna motivacija istraživačima iz ove oblasti za razvijanje novih modela koji bi bili rezistentni na ovakve probleme.

Pretprocesiranje digitalne slike. U nekim slučajevima može se javiti potreba za pretprocesiranjem slike, koje se obavlja na samom početku obrade i analize slike. Takvi koraci uglavnom uključuju tehnike za smanjenje i uklanjanje šuma i zamagljenja, ispravljanje geometrijskih distorzija, ispravljanje neravnomernog osvetljenja pozadine ili registraciju slike.

Segmentacija digitalne slike. Segmentacija slike predstavlja proces kojim se digitalna slika deli na segmente, odnosno srodne skupove piksela. Preciznije, segmentacija slike je proces dodeljivanja oznake svakom pikselu na slici, tako da pikseli sa istom oznakom imaju iste vizuelne karakteristike.

Cilj segmentacije je da se pojednostavi ili promeni predstava slike, tako da bude pogodna za dalju analizu.

Deskripcija digitalne slike. Različite karakteristike i mere celokupne slike, segmentovanih objekata ili regiona mogu biti korištene za opis slike. Skup relevantnih funkcija, odnosno opisnih podataka koje bismo u tu svrhu koristili, u velikoj meri zavisi od primene. Geometrijske karakteristike objekta, kao što su veličina i oblik, se dosta često koriste u raznim aplikacijama. Takođe, statistička svojstva vrednosti sivih tonova koji se pojavljuju u objektu kao što su srednja vrednost, standardna devijacija, korelacija i kontrast se koriste kao opisne karakteristike. U okviru ove disertacije, posebna pažnja posvećena je deskriptorima (opisnim karakteristikama) teksture digitalnih slika i njihovoj primeni u klasifikaciji istih.

Klasifikacija digitalne slike. Pojam klasifikacije predstavlja proces organizovanja podataka u nekoliko unapred definisanih kategorija ili klasa. Klasifikacija znači sistemski i smišljeno rasporediti posmatrane pojmove u manje grupe po sličnosti. Problem klasifikacije tekstura digitalnih slika predstavlja odlučivanje kojoj od poznatih klasa tekstura pripada promatrani uzorak. Da bi se to postiglo potrebno je 'a priori' znanje o klasama koje treba prepoznati. Kada je to znanje dostupno i karakteristike teksture određene, koriste se metode klasične klasifikacije kako bi se obavila raspodela kompletnog uzorka u odgovarajuće kategorije ili klase.

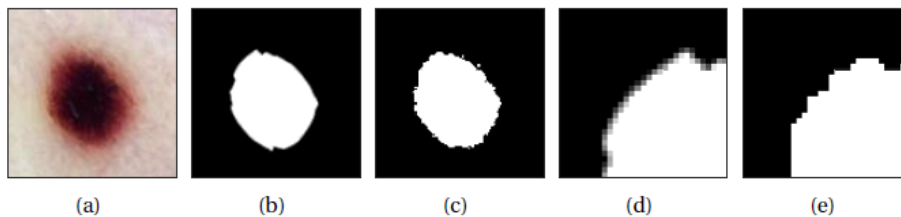
2.3 Segmentacija digitalne slike

Segmentacija se može definisati kao proces koji deli sliku na njene sastavne delove (regione) ili izvlači iz slike objekte od interesa, tako što selektuje tačke na slici (piksele) koji pripadaju objektu. Segmentacija je veoma težak i zahtevan zadatak, ali ujedno i jedan od najbitnijih procesa u analizi slike. Ovaj proces smatra se veoma značajnim delom automatske obrade slike, jer se često koristi da bi se slika dekomponovala na delove radi dalje analize,

što onda direktno utiče na procese reprezentacije, deskripcije i klasifikacije objekata. Oblasti segmentovane u istoj kategoriji treba da imaju slična, uniformna i homogena svojstva u odnosu na neke posmatrane karakteristike, kao što su na primer boja ili tekstura, dok susedni, razdvojeni regioni treba značajno da se razlikuju upravo u ovim svojstvima. Različiti regioni se ne bi smeli preklapati i granice svake oblasti treba da su što jednostavnije i glatke.

Razmotrimo dermoskopsku sliku sa prikazanim jednim objektom, Slika 2.3. Binarnu segmentaciju u ovom slučaju karakterisale bi dve vrednosti kvantizacije (0 i 1). U ovakvoj reprezentaciji, svaki piksel je ili u potpunosti pokriven objektom, ili uopšte nije pokriven objektom, pri čemu je objekat prikazan belom bojom, dok su regioni koji pripadaju pozadini crni. Međutim, ovakav tip segmentacije, dosta teško se nosi sa izazovima realnih slika koje odlikuje velika heterogenost klasa objekata. Kao posledica ovoga, nameće se razmatranje fazi segmentacije, koja podrazumeva da pikseli do neke mere pripadaju objektu. Time se izbegava formiranje oštih granica, odnosno odluka o pripadanju piksela nekoj klasi, na samom početku procesa automatske obrade slike, čuva se veća količina podataka i informacija o samoj slici i ostavlja se prostora za detaljniju analizu u narednim segmentima procesiranja slike. Rezultat fazi segmentacije je siva slika interesnog objekta, gde su pikseli objekta beli, pozadina je crna, a sivi nivoi odgovaraju delimičnoj pripadnosti objektu, Slika 2.3(d). U radovima [2–5] demonstrirano je da ovakvu reprezentaciju digitalne slike, koju karakteriše delimična pokrivenost piksela objektom, odlikuje veća količina informacija. Takođe, pokazano je da su deskriptori segmentovanih oblika razvijeni za ovakvu reprezentaciju precizniji u odnosu na deskriptore koji se koriste u klasičnoj binarnoj reprezentaciji slike.

Segmentacija, kao jedan od bitnih procesa u analizi i obradi digitalne slike, zauzima značajno mesto u literaturi. Postoje mnoge tehnike predložene u tu svrhu, a pregled najistaknutijih i najčešće korištenih modela dat je



SLIKA 2.3: Ilustracija binarne i fazi segmentacije: (a) originalna slika, (b) fazi segmentacija, (c) klasična binarna segmentacija, (d) i (e) su redom prikazani zumirani delovi slika (b) i (c).

*Prikazana slika je preuzeta iz doktorske disertacije [6].

u knjigama [7–9]. Velika većina modela zasnovana je na binarnoj segmentaciji koja nažalost dovodi do značajnog gubitka podataka sadržanih u slikama. Tehnike binarne segmentacije uglavnom ne čuvaju inherentne varijacije karakteristične za realne slike i takođe su veoma osetljive na šum i zamagljenje, koji su skoro neizbežni na realnim slikama.

Zbog navedenih razloga nama je posebno interesantna fazi segmentacija. Deo istraživanja u ovoj tezi posvećen je upotrebi Fuzzy c-Means Clustering algoritma za segmentaciju i demonstrirana je njegova primena na realnim slikama.

2.3.1 Fazi segmentacija

Još od prve pojave i predstavljanja u literaturi, fazi skupovi [10] su pronašli široku primenu za opisivanje i definisanje "nejasnih" (nepotpuno određenih) pojmova u okviru matematičkog modela. Fazi skupove karakteriše parcijalna (nepotpuna) pripadnost skupu, koja je definisana preko odgovarajuće funkcije pripadanja. U poređenju sa pojmom klasičnog skupa gde svaki element ili pripada skupu ili ne, kod fazi skupova moguća je delimična pripadnost elementa skupu, što znači da funkcija pripadanja može uzeti proizvoljnu vrednost iz intervala $[0, 1]$. Klasičan skup zapravo može se smatrati specijalnim slučajem fazi skupa, gde su vrednosti funkcije pripadanja u okviru skupa $\{0, 1\}$. Upotreba fazi skupova i fazi logike od izuzetne je

važnosti u mnogim primenjenim disciplinama, pa i u analizi digitalnih slika, [5, 11]. U ovoj tezi razmatrane su i razvijene nove metode motivisane i bazirane na teoriji fazi skupova i diskutovana je njihova primena u segmentaciji i klasifikaciji digitalnih slika.

Fazi segmentacija podrazumeva proces konvertovanja digitalne slike u fazi particiju skupa piksela, dodeljujući svakom pikselu funkciju pripadanja koja označava stepen pripadnosti objektu. Najjednostavniji način za sprovođenje fazi segmentacije je skaliranje sivih vrednosti piksela na interval $[0, 1]$. Na taj način dodeljena vrednost može biti posmatrana kao mera pripadnosti svetlim pikselima (objektu). Ako uobičajeno razmatramo da beli tonovi odgovaraju objektu, a crni pozadini, opisani način dodeljivanja vrednosti pikselu predstavlja funkciju pripadanja koja određuje stepen pripadnosti piksela objektu. U većini slučajeva potrebnije su zahtevnije tehnike za sprovođenje fazi segmentacije, jer očigledno da nivo osvetljenosti nije dovoljan kriterijum za formiranje funkcija pripadanja koje bi rezultirale dobrom segmentacijom. Za razliku od stroge podele koja je karakteristična za metode klasične binarne segmentacije, dodeljivanje parcijalne pripadnosti klasi definiše mekšu, glatkiju granicu između razmatranih klasa. Takva particija bolje odražava karakteristike objekata i slike i čuva strukturalne informacije koje mogu biti od izuzetne važnosti u kasnijim procesima analize slike. Predstavljanjem klasa objekata i pozadine kao fazi skupova i formiranjem funkcija pripadanja koje odražavaju stepen pripadnosti svakoj od ovih klasa, formiraju se regioni za koje nije zagarantovano da se međusobno isključuju. Odnosno, granica između ovih regiona nije potpuno jasna, jer piksel može u isto vreme izražavati određeni stepen pripadnosti i objektu i pozadini. Uočeno je da se fazi segmentacija mnogo uspešnije od klasične binarne segmentacije, nosi sa problemima negativnih efekata na slikama, kao što su šum i zamagljenje. Primena teorijskih koncepata fazi skupova na obrasce prepoznavanja i klasterovanja rezultirala je raznim metodama koje uključuju dvosmislenost i neki stepen neodređenosti u svoje osnove, [12–15].

2.3.2 Fuzzy c-Means Clustering Algorithm (FCM)

FCM algoritam koristi osnove fazi skupova i fazi logike, pri čemu je objek-tima, podacima ili u slučaju analize slike pikselima, dozvoljena pripadnost većem broju klastera (grupa). Slično ideji fazi skupa, pripadnost objekta nekoj grupi izražava se težinskom vrednošću funkcije pripadanja koja je broj iz intervala $[0, 1]$. Suma pripadnosti svim klasterima (grupama) za jedan objekat (piksel) jednaka je 1. Prvu verziju modela predstavio je Dunn 1973. godine u publikaciji [16], a kasnije ga je unapredio Bezdek [17, 18], čije se ime najčešće i vezuje za ovaj algoritam.

FCM je iterativni algoritam za formiranje pseudo-particije koja reprezentuje klasterne, $P = \{A_1, A_2, \dots, A_c\}$. Elementi ove pseudo-particije su fazi skupovi, čijom defazifikacijom se formira krajnji rezultat segmentacije. Neka je $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ skup objekata ili piksela slike dimenzije p , odnosno $x_i \in \mathbb{R}^p, i \in \{1, \dots, n\}$. Za pseudo-particiju P važe sledeći uslovi:

1. Za piksel $x_i, i \in \{1, \dots, n\}$, ukupna suma pripadnosti klasama je jednaka 1,

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \sum_{k=1}^c A_k(x_i) = 1,$$

gde $A_k(x_i)$ predstavlja meru pripadnosti piksela x_i klasi A_k .

2. Svaki klaster sadrži najmanje jedan piksel sa pozitivnom pripadnošću ($\neq 0$) i ne sadrži sve piksele sa maksimalnom pripadnošću ($= 1$), što implicira

$$\forall k \in \{1, \dots, c\}, \quad 0 < \sum_{i=1}^n A_k(x_i) < n.$$

Pseudo-particija može biti predstavljena matricom $P = [u_{ki}]_{c \times n}$, gde $u_{ki} = A_k(x_i)$ predstavlja meru pripadnosti piksela $x_i \in X$ fazi skupu, odnosno klasteru A_k .

Ovaj iterativni postupak baziran je na minimizaciji funkcije cilja:

$$J = \sum_{k=1}^c \sum_{i=1}^n (u_{ki})^m d^2(x_i, v_k), \quad x_i, v_k \in X,$$

gde je d definisana funkcija rastojanja, a v_k su centri odgovarajućih klastera. Navedena funkcija predstavlja jednu od osnovnih mera kvaliteta sprovedene FCM segmentacije i naziva se "performance index", gde manja vrednost ukazuje na bolje obavljenu segmentaciju, odnosno jaču grupisanost klasterovanih podataka.

Detaljan postupak sprovođenja ovog algoritma dat je u knjizi [19], a neke od primena u segmentaciji digitalne slike diskutovane su u doktorskoj disertaciji [20].

2.3.3 Defazifikacija

Vizuelna interpretacija fazi objekata nije jednostavna, stoga i pored mnogih prednosti fazi segmentovanih slika na kraju je ipak potrebno izvršiti klasičnu reprezentaciju objekata. Iako klasična reprezentacija sadrži manje informacija, ona je uglavnom dosta jednostavnija za interpretaciju, vizualizaciju i razumevanje. Takođe, mnogi od razvijenih alata primene nisu prilagođeni fazi reprezentacijama objekata. Navedene činjenice razlog su što je nakon obrade u fazi sistemu podatke potrebno predstaviti u klasičnom sistemu. Defazifikacija je proces konverzije fazi podataka u njima odgovarajuće klasične podatke. Proces defazifikacije nije jednoznačno određen, već dosta zavisi od tipa i reprezentacije podataka, interpretacije polaznih i dobijenih podataka, cilja obrade i intuitivne percepcije. Rezultati dobijeni defazifikacijom fazi segmentovanih slika koriste se kao alternativa klasičnim pristupima segmentacije. Kao osnovna prednost ovog modela ističe se mogućnost uvida, očuvanja i uključivanja u proces odlučivanja nekih osobina i karakteristika objekata koje nisu vidljive u klasičnim sistemima, ali dolaze do izražaja u fazi sistemima. Te informacije i karakteristike kojima

na određeni način pristupa fazi sistem, bivaju očuvane pri defazifikaciji objekata, što omogućava njihovu upotrebu u daljoj analizi i obradi slike. Proces defazifikacije, određivanje kriterijuma, uslova koji trebaju biti zadovoljeni, kao i kompatibilnost ovog procesa sa algebarskim strukturama uz date ilustrativne primere, detaljno je diskutovan u publikaciji [21]. U analizi i obradi slike defazifikacija predstavlja prevođenje fazi slike u sliku sa strogim granicama klasa. U tom smislu podrazumevamo da za svaki piksel mora biti određena pripadnost nekoj od klasa, odnosno nije više dozvoljena parcijalna pripadnost klasama. Jedan od načina za sprovođenje ovog procesa je upotreba odgovarajuće vrednosti praga (eng. threshold value), koji bi predstavljao granicu između piksela koji odgovaraju objektima i onih koji pripadaju pozadini. U tu svrhu koristi se pojam iz teorije fazi skupova, određeni α -presek (eng. α -cut), čija je upotreba razmatrana u publikacijama [22–25]. Defazifikacija može biti posmatrana kao proces inverzan procesu fazifikacije objekata od interesa, sa ciljem da se rekonstruiše fazifikovani original primenom inverzne funkcije na formirani fazi skup. Drugi način je da ova dva pojma potpuno razdvojimo, odnosno da posmatramo defazifikaciju kao preslikavanje iz fazi skupa u klasičan skup definisano nezavisno od početne klasične interpretacije objekta sa kojim je započeto procesiranje. Tip primenjene metode defazifikacije dosta zavisi od tipa podataka i oblasti primene, a neke od često upotrebljivanih su: metod maksimalne pripadnosti, metod centra oblasti, metod centra maksimuma, metod proseka maksimuma, metod centra suma, metod centra najveće oblasti, itd [20].

U ovoj doktorskoj disertaciji nije posebno razmatran proces defazifikacije, u smislu da nismo razvijali metode koje se bave ovom problematikom, ali se osvrćemo na pojam kao jedan od bitnih procesa u fazi segmentaciji.

2.4 Klasifikacija digitalne slike

Klasifikacija predstavlja proces dodeljivanja kategorije ili skupa kategorija posmatranom uzorku. Cilj klasifikacije je kategorisati neki nepoznati objekat u unapred definisane klase ili pronaći verovatnoću za svaku od poznatih kategorija. Programi koji sprovode klasifikaciju nazivaju se klasifikatori (eng. classifiers) i dele se u dve grupe: modeli sa nadzorom (eng. supervised) i modeli bez nadzora (eng. unsupervised), [7, 8]. U prvom slučaju, kod modela sa nadzorom, podrazumeva se da je klasifikatoru na odgovarajući način dodeljena definicija svake klase. Klase slika su ovde unapred poznate i određene. Sa druge strane, u slučaju kad se klasifikacija vrši automatski, pri čemu je klasifikatoru dodeljena samo informacija o broju različitih klasa, govorimo o modelima bez nadzora.

U klasifikaciji tekstura, koja predstavlja interesnu sferu ove teze, slike se klasifikuju tako što se nepoznatom uzorku dodeljuje kategorija, odnosno odgovarajuća labela, neke od unapred poznatih klasa. Uglavnom su slike opisane (predstavljene) deskriptorima, odnosno vektorom karakteristika koji nosi važne informacije o slici. Pomenute karakteristike mogu biti kvalitativne, kvantitativne ili kategoričke, pri čemu je bitno naglasiti da su upravo ove karakteristike od izuzetne važnosti za proces klasifikacije, jer predstavljaju ulazne podatke klasifikatora i na osnovu njih se dalje vrši raspodela slika u klase. Vektori karakteristika ekstrahovani su iz slika analizom, procesiranjem i primenom različitih deskriptora tekture (operatora), koji su detaljno razmatrani u Poglavlju 5 ove disertacije.

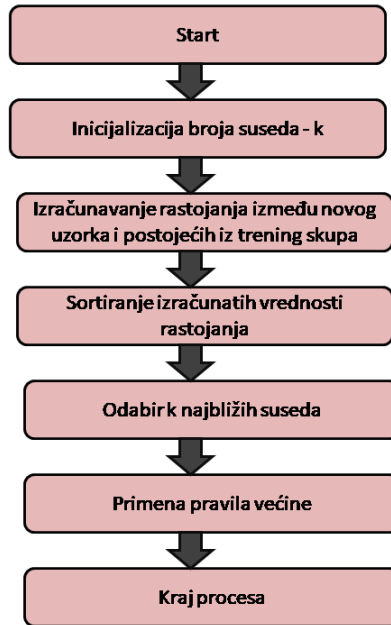
Proces klasifikacije tekstura sastoji se iz faze učenja i faze prepoznavanja. Ovaj proces obuhvata trening i test skupove slika, koji sadrže različite predstavnike tekstura. U fazi učenja koristimo slike iz trening skupa da naučimo klasifikator kako da razlikuje klase. Pod tim podrazumevamo formiranje modela, odnosno vektora karakteristika za svaku sliku iz trening skupa i dodeljivanje labela svakom od njih. Na osnovu ovoga, u fazi prepoznavanja klasifikator za svaki nepoznati primerak tekture, odnosno sliku koja nije

viđena u trening skupu, formira vektor karakteristika i poredi ga sa onima iz trening skupa za koje zna raspodelu po klasama. Novi primerak tekstone raspoređuje se u klasu sa kojom ima najbliži posmatrani vektor karakteristika.

U ovoj tezi klasifikacija je korištena kao alat za evaluaciju i testiranje deskriptora tekstone. Kako klasifikacija nije glavna tema teze, već samo pomoćno sredstvo za evaluaciju rezultata, kratko ćemo uvesti dva osnovna principa koja smo koristili u testovima, metod k -najbližih suseda (eng. k -Nearest Neighbor, k -NN) i Support Vector Machine (SVM). Pored navedenih, postoje i mnogi drugi tipovi klasifikacije, ali se njima ovde nećemo baviti. Knjige [7, 9, 26] obuhvataju pregled različitih modela klasifikatora, uključujući i ilustrativne primere.

2.4.1 k -Nearest Neighbor (k -NN)

Metod k -najbližih suseda je jedan od najjednostavnijih principa klasifikacije, [27]. Kao što sam naziv kaže određen je sa k suseda i funkcijom rastojanja između istih. Vektor karakteristika slike je rezultat procesa deskripcije i ekstrakcije koji prethode klasifikaciji i on predstavlja ulazni podatak za klasifikator. Dimenzija ulaznog vektora zavisi od korištenih deskriptora i predstavlja dimenziju prostora elemenata koji se klasifikuju. Svi vektori koji se međusobno porede moraju imati istu dimenziju. Ako su korišteni dobri deskriptori, odnosno formirane karakteristike nose dovoljno opisnih informacija, vektori koji predstavljaju slike iz iste klase treba da su grupisani zajedno. Kada se klasifikuje novi, nepoznati uzorak, za njega je prethodno formiran vektor karakteristika i dodeljuje mu se labela klase koju ima njegovih k -najbližih suseda, odnosno, labela koju ima većina od njegovih k suseda, ukoliko nisu svih k suseda iz iste klase. Najjednostavniji tip ovog klasifikatora je 1-NN, tačnije metod najbližeg suseda, gde se labela novom uzorku dodeljuje posmatrajući samo jednog njegovog suseda i to onog koji se nalazi na najmanjoj udaljenosti u odnosu na unapred



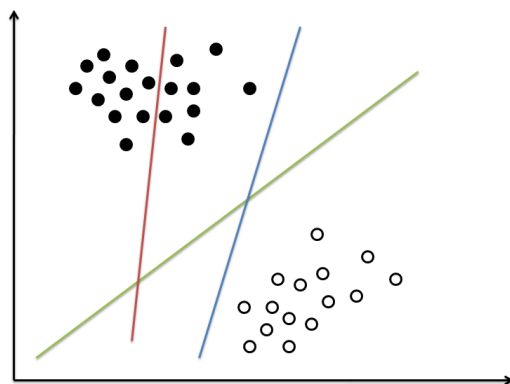
SLIKA 2.4: Šematski prikaz k-NN procesa klasifikacije.

definisano rastojanje. U publikaciji [28] prezentovano je poređenje k-NN klasifikatora sa drugim pristupima klasifikaciji i demonstrirano je da uprkos svojoj jednostavnosti ovaj klasifikator postiže dobre rezultate. Zbog jednostavnosti modela (Slika 2.4) i malog broja parametara ovo je jedan od najčešće korištenih pristupa u praksi.

2.4.2 Support Vector Machine (SVM)

Osnovni princip originalnog binarnog SVM klasifikatora je da pronade linearnu funkciju diskriminacije koja razdvaja sve vektore u dve klase, [29]. Reprezentacija SVM modela može biti predstavljena kao prikaz tačaka u prostoru, tako da su primeri iz različitih kategorija (klasa) razdvojeni jasnim jazom, koji je poželjno što širi (Slika 2.5). Novi primeri preslikavaju se u isti prostor, koji je formiran na osnovu trening skupa podataka, a klasa se im se dodeljuje u zavisnosti od toga na koju stranu u odnosu na linearnu funkciju razvajanja su pozicionirani. Prednosti ovog klasifikatora

su velika robustnost, čak i kada uzorci u trening skupu sadrže greške. SVM metod odlikuje velika tačnost predviđanja za nove uzorke i u praksi se dosta često upotrebljava. Pored toga, postoje i nedostaci ovog modela od kojih se izdvajaju: česta preklapanja klasa u trening skupu podataka [30, 31] i problem podele na više od dve klase koji se uglavnom svodi na uzastopno ponavljane binarne klasifikacije [32].



SLIKA 2.5: Ilustracija razdvajanja klasa binarnog SVM klasifikatora. Crvena linija ne razdvaja klase, plava ih razdvaja ali je margina dosta mala, dok zelena linija predstavlja najbolje rešenje i ilustruje cilj SVM klasifikatora koji teži da formira linearni separator između klasa sa što većim jazom.

Nelinearni SVM klasifikator: Pomenuti linearni SVM klasifikator, može biti proširen u nelinearni, dopuštajući složenije granice između klasa, upotrebom funkcije jezgra. Ideja je da se funkcija jezgra (nelinearno mapiranje) koristi za prebacivanje u prostor veće dimenzije gde se onda primenjuje linearni SVM klasifikator. Mapiranje se ne računa eksplicitno, već se skalarni proizvod u trening fazi i narednim koracima klasifikacije zamenjuje funkcijom jezgra. Najčešće je u upotrebi SVM klasifikator sa Gausovim jezgrom.

Poglavlje 3

Fazi skupovi i fazi operacije

3.1 Fazi skupovi

Fazi logika je dugo vremena bila predmet filozofskih razmatranja u oblasti modeliranja i upravljanja sistemima, a pojam fazi skupa zvanično je uveo Lotfi Zadeh, 1965. godine [10]. Teorija fazi skupova proširuje pojam pripadnosti teorije klasičnih skupova, definisanjem parcijalne (nepotpune) pripadnosti skupu. Može se reći da je fazi skup jedan vid generalizacije klasičnog skupa. U klasičnoj teoriji skupova, kada se razmatra pripadnost elemenata skupu, kaže se da neki element pripada ili ne pripada tom skupu. U pojmovima fazi logike, umesto određivanja da li neki element pripada skupu ili ne, definiše se stepen pripadnosti tom skupu. Fazi skupove karakteriše funkcija pripadanja, koja svakom elementu skupa dodeljuje jednu vrednost iz intervala $[0, 1]$, kojom se određuje stepen pripadanja tog elementa skupu.

Ako klasičan skup posmatramo kao jedan specijalan slučaj fazi skupa, možemo primetiti da funkcija pripadanja koja odgovara klasičnom skupu uzima vrednost nula ili jedan. Za dati univerzalni skup X , njegov proizvoljan podskup A tačno je određen pripadnošću elemenata $x \in X$ skupu A , što može biti predstavljeno karakterističnom funkcijom $\chi_A : X \rightarrow \{0, 1\}$

skupa A :

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A. \end{cases} \quad (3.1.1)$$

Sa klasičnim skupovima izvode se uobičajene operacije, unije, preseka i komplementa, koje se uz pomoć karakteristične funkcije mogu iskazati sledećim jednakostima:

$$\begin{aligned} \chi_{A \cup B}(x) &= \max(\chi_A(x), \chi_B(x)), \\ \chi_{A \cap B}(x) &= \min(\chi_A(x), \chi_B(x)), \\ \chi_{\overline{A}}(x) &= 1 - \chi_A(x). \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Osnovne osobine ovih operacija sa klasičnim skupovima su navedene u nastavku, [33].

Komutativnost:	$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A;$	
Asocijativnost:	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C);$	
Distributivnost:	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$	
Idempotentnost:	$A \cup A = A, A \cap A = A;$	
Apsorpcija:	$A \cap (A \cup B) = A, A \cup (A \cap B) = A;$	(3.1.3)
Apsorpcija sa X i \emptyset :	$A \cup X = X, A \cap \emptyset = \emptyset;$	
Neutralni elementi:	$A \cup \emptyset = A, A \cap X = A;$	
Involucija:	$\overline{\overline{A}} = A;$	
Zakon kontradikcije:	$A \cap \overline{A} = \emptyset;$	
Zakon isključenja trećeg:	$A \cup \overline{A} = X;$	
De Morganovi zakoni:	$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}.$	

Uvođenje formalne definicije fazi skupa imalo je za cilj uopštenje klasične teorije skupova i potencijalno povećanje primene teorije skupova u raznim

disciplinama, uključujući i analizu digitalnih slika.

U svakodnevnom životu i prenošenju informacija i znanja, javlja se potreba za formalnim predstavljanjem pojmova nepotpune određenosti i rasplintutosti (eng. fuzziness). Teorija fazi skupova u ovom domenu pokazala se kao izuzetan model, koji omogućava spajanje, definisanje i objašnjenje pojmova i pojava koje uključuju različite stepene određenosti, odnosno neodređenosti sistema. Reč fazi potiče od engleske reči 'fuzzy' i predstavlja neodređen ili neprecizan pojam. Zahvaljujući uvođenju fazi pojma, moguće je nekom iskazu dodeliti vrednost koja varira od potpuno netačno do potpuno tačno. Za fazi skupove i fazi logiku možemo reći da su slične inženjerskim naukama, jer omogućuju karakterizaciju pojmova, pojava i situacija iz realnog sveta na približan način. Upravo zbog ove svoje osobine, fazi skupovi su pronašli veliku upotrebu u različitim primenjenim disciplinama.

Percepcija sveta oko nas je protkana pojmovima koji nisu u potpunosti jasni ili nemaju jasno definisane granice. Na primer, neki takvi pojmovi su: mnogo, visok, mnogo veći od, nizak, težak, mlad, star, zdrav, kratak, itd. Navedeni pojmovi su tačni do nekog stepena, ali su takođe i netačni do nekog stepena, zavisno od objekta koji opisuju. Uobičajeno je za ovakve pojmove koristiti termin fazi ili neprecizni. Ljudski mozak je u stanju da veoma jasno percipira takve podatke i kvalitetno radi sa njima, dok računarski sistemi uglavnom nisu u mogućnosti da prihvate takve podatke. Dakle, možemo konstatovati da su prirodni jezici fazi, dok programski jezici to nisu. Odatle se javlja potreba za formiranjem formalnog, matematičkog i računarskog alata pomoću kojeg je moguće baratati fazi informacijama. Ove informacije su po svojoj prirodi jako kompleksne. Njihova složenost potiče od nesigurnosti, nepotpune određenosti podataka, preciznije, od višeznačnosti, koja ukoliko nije dobro modelirana može predstavljati veliki problem za celokupan sistem koji se razmatra. Teorija koja nam omogućava rad sa takvim podacima naziva se Fazi logika.

Definicija 3.1.1. (Zadeh 1965.[10]) Fazi podskup A univerzalnog skupa X , je skup uređenih parova $A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\}$, gde je $\mu_A : X \rightarrow [0, 1]$

odgovarajuća funkcija pripadanja.

Dalje nas interesuju operacije sa fazi skupovima koje predstavljaju prirodna uopštenja operacija sa klasičnim skupovima. Navodimo osnovne i najjednostavnije operacije, pored kojih postoje još mnoge opštije. Formule koje smo prikazali za operacije unije, preseka i komplementa sa klasičnim skupovima izražene preko karakteristične funkcije (vidi formulu 3.1.2) prenosimo na funkcije pripadanja fazi skupova na sledeći način:

$$\begin{aligned}\mu_{A \cup B}(x) &= \max(\mu_A(x), \mu_B(x)), \\ \mu_{A \cap B}(x) &= \min(\mu_A(x), \mu_B(x)), \\ \mu_{\overline{A}}(x) &= 1 - \mu_A(x).\end{aligned}\tag{3.1.4}$$

Skup svih fazi skupova definisanih nad X ima algebarsku strukturu mreže u odnosu na pomenute operacije unije, preseka i komplementa, čija je nula prazan skup, a jedinica skup X , odnosno fazi skupovi sa funkcijama pripadanja $\mu_\emptyset(x) = 0$ i $\mu_X(x) = 1, \forall x \in X$.

Za operacije sa fazi skupovima važe gotovo sve osobine navedene za klasične skupove u formuli 3.1.3, osim zakona kontradikcije i zakona isključenja trećeg. Takva mreža zove se De Morganova mreža, [33].

Fazi skupovi mogu se pogodno reprezentovati pomoću izuzetno bitnog pojma iz teorije fazi skupova, α -preseka.

Definicija 3.1.2. Neka je dat univerzalni skup X i jedan njegov fazi podskup A . Za proizvoljno $\alpha \in (0, 1]$, α -presek skupa A je

$$A^\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}.\tag{3.1.5}$$

Definicija fazi skupa može biti data u terminima α -preseka. Za fazi skup A nekog univerzalnog skupa X , sledeće dve reprezentacije su ekvivalentne [34]:

1. funkcija pripadanja $\mu_A : X \rightarrow [0, 1]$ svakom elementu $x \in X$ dodeljuje njegovu meru pripadnosti fazi skupu A , μ_A ;
2. skup α -preseka $\Lambda(A) = \{A^\alpha \mid \alpha \in (0, 1]\}$ fazi skupa A , pri čemu je $A^\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}$.

Funkcija pripadanja μ_A fazi skupa A može biti prikazana kao:

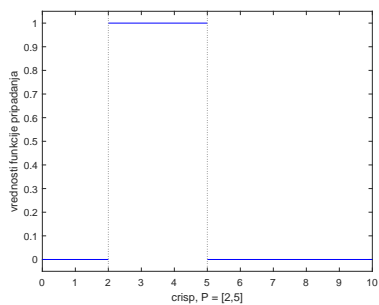
$$\mu_A(x) = \int_0^1 I_{A^\alpha}(x) d\alpha \quad (3.1.6)$$

gde je I_{A^α} indikatorska funkcija odgovarajućih α -rezova

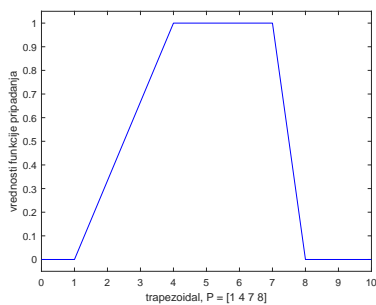
$$I_{A^\alpha}(x) = \begin{cases} 1, & x \in A^\alpha \\ 0, & x \notin A^\alpha. \end{cases} \quad (3.1.7)$$

Prikazana povezanost funkcije pripadanja i α -rezova predstavlja jedan od mogućih načina fazifikacije i baratanja fazi skupovima.

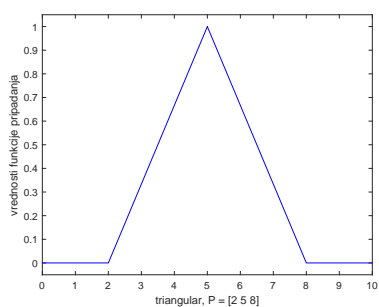
Neke od najčešće korištenih funkcija pripadanja prikazane su na Slici 3.1. Primetimo da prva od funkcija koje vidimo na slici, predstavlja karakterističnu funkciju klasičnog skupa, jer može uzeti samo vrednosti 0 ili 1. Ostale prikazane funkcije mogu se koristiti za fazifikaciju bilo koje jednodimenzionalne karakteristike, gde se kroz funkciju pripadanja reflektuju postepene promene vrednosti posmatrane karakteristike.



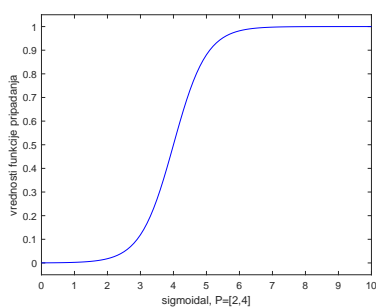
(a)



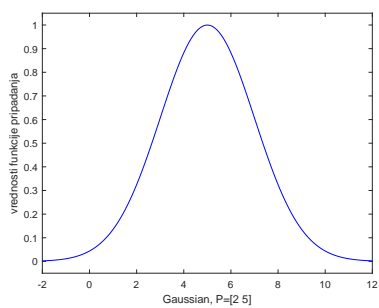
(b)



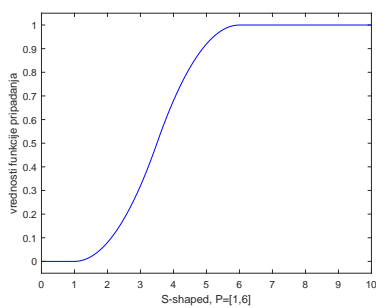
(c)



(d)



(e)



(f)

SLIKA 3.1: Primeri funkcija pripadanja. (a) Π -funkcija, (b) trapezoidna funkcija, (c) trougaona funkcija, (d) sigmoid funkcija, (e) Gausova funkcija, (f) S-funkcija.

3.2 t-norme i t-konorme

Operacije fazi-preseka i fazi-unije poznate su pod nazivima t -norme i t -konorme, respektivno. Pomenute operacije prirodna su interpretacija konjunkcije i disjunkcije u semantici fazi logike [35], i često se koriste za kombinovanje kriterijuma u multi-kriterijumskom odlučivanju.

Začetak razvoja trougaonih normi datira još od davne 1942. godine, [36]. Glavna ideja koja stoji iza razvoja trougaonih normi, bila je proučavanje metričkih prostora gde se distribucije verovatnoće umesto brojeva koriste za modeliranje udaljenosti između elemenata određenog prostora. Trougaone norme koje danas koristimo, pojavile su se upravo u kontekstu verovatnoće metričkih prostora, [37–39]. Kao dualne operacije trougaonim normama, u publikaciji [40] uvedene su trougaone konorme. Pomenute fazi operacije (t -norme i t -konorme) imaju značajnu ulogu u procesu donošenja odluka [41, 42], statistici [43], teorijama neaditivnih mera [44–47] i mnogim drugim primenama.

Definicija 3.2.1. Trougaona norma, kraće t -norma, je binarna operacija $T : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ koja zadovoljava sledeće aksiome. Za sve $a, b, c, b_1 \in [0, 1]$ važi:

1. $T(a, 1) = a$ (granični uslov),
2. $b \leq b_1 \Rightarrow T(a, b) \leq T(a, b_1)$ (monotonost),
3. $T(a, b) = T(b, a)$ (komutativnost),
4. $T(a, T(b, c)) = T(T(a, b), c)$ (asocijativnost).

Dodatno, t -norma je *Arhimedovska*, ako pored navedenih aksioma važi:

5. T je neprekidna funkcija,
6. $\forall a \in (0, 1), T(a, a) < a$ (subidempotentnost).

Napomena 3.2.2.

- (i) Iz aksioma navedenih u definiciji t -norme sledi monotonost po obe koordinate, odnosno za sve $a_1, a_2, b_1, b_2 \in [0, 1]$ važi:

$$(a_1 \leq a_2 \wedge b_1 \leq b_2) \Rightarrow T(a_1, b_1) \leq T(a_2, b_2).$$

- (ii) Ako umesto uslova monotonosti zahtevamo striktnu monotonost, odnosno za sve $a_1, a_2, b_1, b_2 \in [0, 1]$ važi:

$$(a_1 < a_2 \wedge b_1 < b_2) \Rightarrow T(a_1, b_1) < T(a_2, b_2),$$

onda kažemo da je t -norma striktna.

Binarna operacija t -norme može se prirodno proširiti na n -arnu operaciju, $T^n : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$, na sledeći način.

Definicija 3.2.3. Stepent t -norme određen je jednakostima:

$$T^1(a_1, a_2) = T(a_1, a_2),$$

$$T^n(a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}) = T(T^{n-1}(a_1, \dots, a_n), a_{n+1}).$$

Odnosno, važe u nastavku navedene osobine:

$$T^2(a_1, a_2, a_3) = T(T(a_1, a_2), a_3) = T(a_1, T(a_2, a_3)),$$

$$\begin{aligned} T^3(a_1, a_2, a_3, a_4) &= T(T^2(a_1, a_2, a_3), a_4) = T(T(T(a_1, a_2), a_3), a_4) \\ &= T(T(a_1, a_2), T(a_3, a_4)) = T(a_1, T(a_2, T(a_3, a_4))) \\ &= T(T(a_1, T(a_2, a_3)), a_4) = T(a_1, T(T(a_2, a_3), a_4)) \dots \end{aligned}$$

Lema 3.2.4. Za stepent t -norme i $n \in \mathbb{N}$ važe sledeće osobine, [48, 49]:

- (1) $T^n(a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}) = T^n(a_{\pi(1)}, a_{\pi(2)}, \dots, a_{\pi(n)}, a_{\pi(n+1)})$, gde je π proizvoljna permutacija skupa $\{1, 2, \dots, n, n+1\}$.
- (2) $T^n(a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}) = 1 \Leftrightarrow a_1 = \dots = a_{n+1} = 1$.

(3) Ako je T striktna trougaona norma, onda važi:

- (a) T^n je striktno rastuća funkcija;
- (b) $T^n(a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}) = 0 \Leftrightarrow (a_1 = 0 \vee \dots \vee a_{n+1} = 0)$.

Reprezentacija t -normi može biti izražena preko striktno monotone funkcije definisane na intervalu $[0, 1]$, koju nazivamo generator t -norme. U tu svrhu uvodimo definiciju generatora t -norme, kao i pseudo-inverzne funkcije generatora.

Definicija 3.2.5.

- (i) *Opadajući generator* g je neprekidna striktno opadajuća funkcija $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, takva da važi $g(1) = 0$.
- (ii) *Pseudo-inverzna funkcija* opadajućeg generatora g je funkcija $g^{(-1)} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ definisana jednakošću:

$$g^{(-1)}(a) = \begin{cases} 1 & , \quad a \in (-\infty, 0) \\ g^{-1}(a) & , \quad a \in [0, g(0)] \\ 0 & , \quad a \in (g(0), +\infty) \end{cases} ,$$

gde je $g^{-1} : [0, g(0)] \rightarrow [0, 1]$ obična inverzna funkcija za funkciju $g : [0, 1] \rightarrow [0, g(0)]$.

Opadajući generator g i njegova pseudo-inverzna funkcija, $g^{(-1)}$, na intervalu $[0, 1]$ ponašaju se kao uzajamno inverzne funkcije u sledećem smislu:

$$g^{(-1)}(g(a)) = a, \quad \forall a \in [0, 1],$$

$$g(g^{(-1)}(a)) = \begin{cases} 0 & , \quad a \in (-\infty, 0) \\ a & , \quad a \in [0, g(0)] \\ g(0) & , \quad a \in (g(0), +\infty) \end{cases} .$$

Napomena 3.2.6. Primitimo da za opadajući generator g važi da je

$$g(g^{(-1)}(a)) \leq a, \quad \text{za svako } a \geq 0.$$

Teorema koju u nastavku navodimo je poznati rezultat u vezi sa reprezentacijom Arhimedovske t -norme upotrebom opadajuće generatorske funkcije, [19].

Teorema 3.2.7. Preslikavanje $T : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ je Arhimedovska t -norma ako i samo ako postoji opadajući generator g tako da za sve $a, b \in [0, 1]$ važi $T(a, b) = g^{(-1)}(g(a) + g(b))$.

Trougaone konorme (t -konorme) razlikuju se od trougaonih normi samo u graničnim uslovima. U teoriji fazi skupova, poznate su kao operacije fazi unije.

Definicija 3.2.8. Trougaona konorma (t -konorma) je binarna operacija $S : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ koja zadovoljava sledeće aksiome za sve $a, b, c, b_1 \in [0, 1]$:

1. $S(a, 0) = a$ (granični uslov);
2. $b \leq b_1 \Rightarrow S(a, b) \leq S(a, b_1)$ (monotonost);
3. $S(a, b) = S(b, a)$ (komutativnost);
4. $S(a, S(b, c)) = S(S(a, b), c)$ (asocijativnost).

Dodatno, t -konorma je *Arhimedovska*, ako je pored navedenih aksioma zadovoljeno:

5. S je neprekidna funkcija;
6. $\forall a \in (0, 1), S(a, a) > a$ (superidempotentnost).

Napomena 3.2.9.

- (i) Iz aksioma navedenih u definiciji t -konorme, sledi monotonost po obe koordinate, odnosno za sve $a_1, a_2, b_1, b_2 \in [0, 1]$ važi:

$$(a_1 \leq a_2 \wedge b_1 \leq b_2) \Rightarrow S(a_1, b_1) \leq S(a_2, b_2).$$

(ii) Ako umesto uslova monotonosti zahtevamo striktnu monotonost, odnosno za sve $a_1, a_2, b_1, b_2 \in [0, 1]$ važi:

$$(a_1 < a_2 \wedge b_1 < b_2) \Rightarrow S(a_1, b_1) < S(a_2, b_2),$$

onda je t -konorma striktna.

Slično kao što smo naveli kod t -normi, binarna operacija t -konorme može se proširiti na n -arnu operaciju, $S^n : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$ na sledeći način.

Definicija 3.2.10. Stepen t -konorme određen je jednakostima:

$$S^1(a_1, a_2) = S(a_1, a_2),$$

$$S^n(a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}) = S(S^{n-1}(a_1, \dots, a_n), a_{n+1}).$$

Odnosno važe sledeće jednakosti:

$$S^2(a_1, a_2, a_3) = S(S(a_1, a_2), a_3) = S(a_1, S(a_2, a_3)),$$

$$\begin{aligned} S^3(a_1, a_2, a_3, a_4) &= S(S^2(a_1, a_2, a_3), a_4) = S(S(S(a_1, a_2), a_3), a_4) \\ &= S(S(a_1, a_2), S(a_3, a_4)) = S(a_1, S(a_2, S(a_3, a_4))) \\ &= S(S(a_1, S(a_2, a_3)), a_4) = S(a_1, S(S(a_2, a_3), a_4)) \dots \end{aligned}$$

Lema 3.2.11. Za stepen t -konorme i $n \in \mathbb{N}$ važe sledeće osobine, [48, 49]:

- (1) $S^n(a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}) = S^n(a_{\pi(1)}, a_{\pi(2)}, \dots, a_{\pi(n)}, a_{\pi(n+1)})$, gde je π proizvoljna permutacija skupa $\{1, 2, \dots, n, n+1\}$.
- (2) $S^n(a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}) = 0 \Leftrightarrow a_1 = \dots = a_{n+1} = 0$.
- (3) Ako je S striktna trougaona konorma, onda:
 - (a) S^n je striktno rastuća funkcija;
 - (b) $S^n(a_1, \dots, a_{n+1}) = 1 \Leftrightarrow (a_1 = 1 \vee \dots \vee a_{n+1} = 1)$.

Reprezentacija t -konormi može biti izražena preko striktno monotone funkcije na intervalu $[0, 1]$, koju nazivamo generator t -konorme. Stoga, uvodimo definiciju generatora t -konorme, kao i pseudo-inverzne funkcije generatora.

Definicija 3.2.12.

- (i) *Rastući generator* h je neprekidna i striktno rastuća funkcija $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, takva da važi $h(0) = 0$.
- (ii) *Pseudo-inverzna funkcija* rastućeg generatora h je funkcija $h^{(-1)} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, definisana jednakošću:

$$h^{(-1)}(a) = \begin{cases} 0 & , \quad a \in (-\infty, 0) \\ h^{-1}(a) & , \quad a \in [0, h(1)] \\ 1 & , \quad a \in (h(1), +\infty) \end{cases} ,$$

gde je $h^{-1} : [0, h(1)] \rightarrow [0, 1]$ obična inverzna funkcija za funkciju $h : [0, 1] \rightarrow [0, h(1)]$.

Rastući generator h i njegova pseudo-inverzna funkcija, $h^{(-1)}$, na intervalu $[0, 1]$ ponašaju se kao inverzne funkcije u sledećem smislu:

$$h^{(-1)}(h(a)) = a, \quad \forall a \in [0, 1],$$

$$h(h^{(-1)}(a)) = \begin{cases} 0 & , \quad a \in (-\infty, 0) \\ a & , \quad a \in [0, h(1)] \\ h(1) & , \quad a \in (h(1), +\infty) \end{cases} .$$

Napomena 3.2.13. Primitimo da za rastući generator h važi da je

$$h(h^{(-1)}(a)) \leq a, \quad \text{za svako } a \geq 0.$$

Teorema koju navodimo u nastavku poznati je rezultat u vezi sa reprezentacijom Arhimedovske t -konorme upotrebom rastuće generatorske funkcije.

Teorema 3.2.14. Preslikavanje $S : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ je Arhimedovska t -konorma ako i samo ako postoji rastući generator h tako da za sve $a, b \in [0, 1]$ važi $S(a, b) = h^{(-1)}(h(a) + h(b))$.

Definicija 3.2.15. Funkcija $c : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ je *fazi komplement*, ako važi:

$$c_1) \quad c(0) = 1 \text{ i } c(1) = 0 \quad (\text{granični uslovi}),$$

$$c_2) \quad \forall a, b \in [0, 1], \quad a \leq b \Rightarrow c(a) \geq c(b) \quad (\text{monotonost}).$$

Ako je $c(c(a)) = a$, za sve $a \in [0, 1]$, onda je funkcija c *involutivna*. Ako je c neprekidna funkcija, onda kažemo da je c *neprekidni fazi komplement*.

Definicija 3.2.16. t -norma T i t -konorma S su *dualne u odnosu na fazi komplement* c ako za sve $a, b \in [0, 1]$ važe uslovi

$$c(T(a, b)) = S(c(a), c(b)) \quad \text{i} \quad c(S(a, b)) = T(c(a), c(b)).$$

3.3 Operatori agregacije

Agregacioni problemi su veoma široki i heterogeni. Teorija operatora agregacije (združivanja) se brzo razvija, jer je podržana širokom upotrebom u modeliranju različitih inženjerskih, socijalnih, društvenih i ekonomskih problema. Uloga agregacije je objedinjavanje, odnosno fuzija više ulaznih vrednosti u jednu izlaznu vrednost. U daljem tekstu bavimo se formalnom definicijom i osobinama operatora agregacije. Pravićemo razliku između funkcija agregacije koje imaju ograničen broj argumenata i proširenih funkcija agregacije definisanih za proizvoljan broj ulaznih argumenata, [50]. Ako je broj ulaznih vrednosti fiksiran, recimo n , onda je agregacioni operator realna funkcija sa n promenljivih. Preslikavanja ćemo ograničiti na neprazan realni interval $I = [0, 1] \subseteq [-\infty, \infty]$.

Definicija 3.3.1. Za fiksirano $n \in \mathbb{N}$, n -arna agregaciona funkcija je funkcija $A_{[n]} : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ koja zadovoljava sledeće osobine.

$$(a01) \quad \text{Za svako } n \geq 2 \text{ i uređene } n\text{-torke } (0, 0, \dots, 0) \text{ i } (1, 1, \dots, 1) \text{ važe} \\ \text{granični uslovi } A_{[n]}(0, \dots, 0) = 0 \text{ i } A_{[n]}(1, \dots, 1) = 1.$$

(a02) Za svako $n \geq 2$, funkcija $A_{[n]}$ je monotono neopadajuća po svakoj komponenti, odnosno implikacija

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, a_i \leq b_i \quad \Rightarrow \quad A_{[n]}(a_1, \dots, a_n) \leq A_{[n]}(b_1, \dots, b_n)$$

je zadovoljena za proizvoljne uređene n -torke $(a_1, \dots, a_n) \in [0, 1]^n$, $(b_1, \dots, b_n) \in [0, 1]^n$.

Specijalno, u slučaju $n = 1$, $A_{[1]}(x) = x, \forall x \in [0, 1]$.

Definicija 3.3.2. Proširena agregaciona funkcija je preslikavanje

$A : \bigcup_{n=1}^{\infty} [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$, takvo da je svaka restrikcija $A_{[n]} : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, jedna n -arna agregaciona funkcija.

Napomena 3.3.3. Ako je broj argumenata očigledan, često se umesto oznake $A_{[n]}$, $n \in \mathbb{N}$ koristi samo A .

Pored osobina, (a01) i (a02), pomenutih u definiciji, agregacione funkcije mogu imati i dodatne karakteristike, koje su od značaja za različite vrste primena, stoga ih navodimo u nastavku, [50].

Definicija 3.3.4. Ako je $A : \bigcup_{n=1}^{\infty} [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ proširena agregaciona funkcija, onda može imati sledeće osobine.

(a03) Svaka restrikcija $A_{[n]}$ je neprekidna funkcija.

(a04) Funkcija A je simetrična po svakoj komponenti, odnosno, za svako $n \in \mathbb{N}$, svaku n -torku $(a_1, \dots, a_n) \in [0, 1]^n$ i svaku permutaciju π skupa $\{1, \dots, n\}$ važi

$$A_{[n]}(a_1, \dots, a_n) = A_{[n]}(a_{\pi(1)}, \dots, a_{\pi(n)}).$$

(a05) Funkcija A je idempotentna, odnosno, za svako $n \in \mathbb{N}$, i sve $(a, \dots, a) \in [0, 1]^n$ važi

$$A_{[n]}(a, \dots, a) = a.$$

- (a06) Funkcija A je aditivna, odnosno, za svako $n \in \mathbb{N}$ i sve n -torke $(a_1, \dots, a_n) \in [0, 1]^n$ i $(b_1, \dots, b_n) \in [0, 1]^n$ koje zadovoljavaju $(a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) \in [0, 1]^n$ važi

$$A_{[n]}(a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) = A_{[n]}(a_1, \dots, a_n) + A_{[n]}(b_1, \dots, b_n).$$

- (a07) Funkcija A je subaditivna, odnosno, za svako $n \in \mathbb{N}$ i sve n -torke $(a_1, \dots, a_n) \in [0, 1]^n$ i $(b_1, \dots, b_n) \in [0, 1]^n$ koje zadovoljavaju $(a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) \in [0, 1]^n$ važi

$$A_{[n]}(a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) \leq A_{[n]}(a_1, \dots, a_n) + A_{[n]}(b_1, \dots, b_n).$$

- (a08) Funkcija A je pozitivno homogena, odnosno, za svako $t \geq 0$, sve $n \in \mathbb{N}$ i sve n -torke $(a_1, \dots, a_n) \in [0, 1]^n$ koje zadovoljavaju $(ta_1, \dots, ta_n) \in [0, 1]^n$ važi

$$A_{[n]}(ta_1, \dots, ta_n) = tA_{[n]}(a_1, \dots, a_n).$$

- (a09) Funkcija A je pozitivno subhomogena, odnosno, za svako $t \geq 0$, svako $n \in \mathbb{N}$ i sve n -torke $(a_1, \dots, a_n) \in [0, 1]^n$ koje zadovoljavaju $(ta_1, \dots, ta_n) \in [0, 1]^n$ važi

$$A_{[n]}(ta_1, \dots, ta_n) \leq tA_{[n]}(a_1, \dots, a_n).$$

- (a10) Za svako $n \in \mathbb{N}$, važi

$$A_{[n]}(a_1, \dots, a_n) = 0 \Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}, a_i = 0.$$

- (a11) Za svako $n \in \mathbb{N}$, važi

$$A_{[n]}(a_1, \dots, a_n) = 0 \Rightarrow \exists i \in \{1, \dots, n\}, a_i = 0.$$

Napomena 3.3.5. U nastavku navodimo neke zaključke i komentare u vezi sa prethodnom definicijom.

1. Restrikcija $A_{[1]}(x)$, $x \in [0, 1]$ proširenog agregacionog operatora A , očigledno zadovoljava sve osobine navedene u Definiciji 3.3.4.
2. Osobina (a04) je objedinjenje i uopštenje osobina komutativnosti i asocijativnosti binarnih operacija.
3. U zavisnosti od primene, u literaturi se javljaju prošireni agregacioni operatori definisani nad skupom $[0, \infty[$. Kod takvih preslikavanja, $A : \bigcup_{n=1}^{\infty} [0, \infty[^n \rightarrow [0, \infty[$, granični uslov $A(1, \dots, 1) = 1$ (a01) iz Definicije 3.3.1 zamenjuje se uslovom

$$\lim_{\forall i \in \{1, \dots, n\}, a_i \rightarrow \infty} A_{[n]}(a_1, \dots, a_n) = \infty.$$

U tom slučaju, argumenti $a_i + b_i$ i ta_i operatora A , navedeni u osobinama aditivnosti (a06), subaditivnosti (a07), pozitivne homegenosti (a08) i pozitivne subhomegenosti (a09), uvek pripadaju njegovom domenu $\bigcup_{n=1}^{\infty} [0, \infty[^n$, [50].

4. Pri razmatranju osobina aditivnosti (a06), subaditivnosti (a07), pozitivne homegenosti (a08) i pozitivne subhomegenosti (a09), pojavljuju se jednakosti i nejednakosti u kojima figurišu argumenti oblika: $(a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$ i (ta_1, \dots, ta_n) , za n -torke $(a_1, \dots, a_n) \in [0, 1]^n$, $(b_1, \dots, b_n) \in [0, 1]^n$ i $t \geq 0$. Pri tome ovi argumenti ne zadovoljavaju nužno sledeća dva uslova: $(a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) \in [0, 1]^n$ i $(ta_1, \dots, ta_n) \in [0, 1]^n$. Umesto nametanja dodatnih uslova i ograničenja za argumente, pogodno je razmatrati ekstenziju agregacionog operatora, koja je definisana na sledeći način, $A^* : \bigcup_{n=1}^{\infty} [0, \infty[^n \rightarrow [0, 1]$,

$$A^*(a_1, \dots, a_n) = \begin{cases} A(a_1, \dots, a_n) & , (a_1, \dots, a_n) \in [0, 1]^n \\ 1 & , (a_1, \dots, a_n) \notin [0, 1]^n \end{cases}$$

Primer 3.3.6. Slede primeri nekih od bitnih predstavnika operatora agregacije, koji se često upotrebljavaju u literaturi i praksi. Svi navedeni operatori su neprekidni, simetrični i idempotentni.

- **Aritmetička sredina:**

$$AM(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i .$$

- **Kvazi-aritmetička sredina:**

$$M_h(x_1, x_2, \dots, x_n) = h^{-1}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(x_i)\right),$$

gde je $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna i striktno monotona funkcija.

- **Geometrijska sredina:**

$$GM(x_1, \dots, x_n) = (x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}} = \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}} .$$

- **Harmonijska sredina:**

$$HM(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}} & , \quad \forall i \in (1, \dots, n), x_i \neq 0 \\ 0 & , \quad \exists i \in (1, \dots, n), x_i = 0 \end{cases} .$$

- **Operacija minimuma:**

$$A_{min} = \min(x_1, \dots, x_n) .$$

- **Operacija maksimuma:**

$$A_{max} = \max(x_1, \dots, x_n) .$$

- **Medijana operator:** Neka je $(x'_1, \dots, x'_n) \in [0, 1]$ neopadajuća permutacija n -torke $(x_1, \dots, x_n) \in [0, 1]$, tada je

$$A_{med} = med(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \frac{x'_{\frac{n}{2}} + x'_{\frac{n}{2}+1}}{2} & , \quad n = 2k, \quad k \in \mathbb{N} \\ x'_{\frac{n+1}{2}} & , \quad n = 2k + 1, \quad k \in \mathbb{N} \end{cases} .$$

Napomena 3.3.7. Aritmetička, geometrijska i harmonijska sredina iz prethodnog primera su specijalan slučaj jedne klase operatora agregacije koju nazivamo **stepeno korenske sredine**, u oznaci $A_{m,\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Za svako $\alpha > 0$, pomenuti operator definisan je sledećom jednakošću

$$A_{m,\alpha}(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{x_1^\alpha + \dots + x_n^\alpha}{n} \right)^{\frac{1}{\alpha}} ,$$

dok za $\alpha < 0$ važi

$$A_{m,\alpha}(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \left(\frac{x_1^\alpha + \dots + x_n^\alpha}{n} \right)^{\frac{1}{\alpha}} & , \quad \forall i \in (1, \dots, n), \quad x_i \neq 0 \\ 0 & , \quad \exists i \in (1, \dots, n), \quad x_i = 0 \end{cases} .$$

Pri tome je zadovoljeno sledeće:

- za $\alpha = 1$ definisani operator se svodi na aritmetičku sredinu (AM) iz Primera 3.3.6;
- za $\alpha = -1$ dobija se harmonijska sredina (HM) iz Primera 3.3.6;
- za $\alpha \rightarrow 0$ operator konvergira ka geometrijskoj sredini (GM), navedenoj u Primeru 3.3.6.

3.3.1 Operatori agregacije koji potiču od operatora aritmetičke sredine

Aritmetička sredina je prototip strogo monotone, neprekidne, simetrične i idempotentne funkcije. Možemo sa velikom sigurnošću tvrditi, da je to agregacioni operator koji se najčešće primenjuje u praksi. Intuitivno je

lako pojmljiv i na običnom jeziku kažemo da ovaj operator modelira prosek (prosečni dohodak, prosečnu temperaturu, ocenu i slično). Ako iz nekog razloga neka svojstva operatora aritmetičke sredine ne odgovaraju stvarnoj situaciji koju želimo da modeliramo, pokušavamo da modifikujemo ovaj operator u odnosu na narušeno svojstvo, ali sa ciljem da i dalje sačuvamo što više njegovih drugih svojstava. Ovo poglavlje je posvećeno predstavljanju nekih od klasa operatora agregacije koji su dobijeni modifikacijom operatora aritmetičke sredine.

3.3.1.1 OWA operatori agregacije

Predstavljamo klasu OWA operatora agregacije, koju je definisao Ronald R. Yager, [51], a koja se intenzivno koristi u raznim oblastima računarskih nauka i veštačke inteligencije, [52–56].

Definicija 3.3.8. (Extended Ordered Weighted Average) Za familiju realnih brojeva

$$\omega = \left\{ \omega_{n,i} \geq 0 \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, i \in \{1, \dots, n\}, \sum_{i=1}^n \omega_{n,i} = 1 \right\},$$

OWA agregacioni operator, $\text{OWA}_\omega : \bigcup_{n=2}^{\infty} [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$, definisan je sledećom jednakošću:

$$\text{OWA}_\omega(a_1, \dots, a_n) = \omega_{n,1}a'_1 + \dots + \omega_{n,n}a'_n. \quad (3.3.1)$$

Pri čemu je (a'_1, \dots, a'_n) neopadajuća permutacija n -torke $(a_1, \dots, a_n) \in [0, 1]^n$, za proizvoljno $n \geq 2$.

Napomena 3.3.9. Za svako ω , koje zadovoljava osobine iz definicije, OWA operator je neprekidna, simetrična i idempotentna funkcija. Pored toga, primetimo da važi i sledeće :

1. $A_{min} \leq \text{OWA}_\omega \leq A_{max}$;

2. Specijalno, za odgovarajuće vrednosti težinskog koeficijenta, pomoću OWA operatora se dobija parametrizovana grupa operatora agregacije koja obuhvata poznate operatore kao što su minimum, maksimum, aritmetička sredina i medijana. Naime,

- za $\omega = (0, \dots, 0, 1)$ dobija se operator A_{max} , naveden u Primeru 3.3.6;
- za $\omega = (1, 0, \dots, 0)$ dobija se operator A_{min} , naveden u Primeru 3.3.6;
- za $\omega = (\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$ dobija se operator aritmetička sredina (AM), naveden u Primeru 3.3.6;

- za familiju koeficijenata definisanu sa

$$\omega = \begin{cases} \omega_{n, \frac{n+1}{2}} = 1 & , \text{ ako je } n \text{ neparan broj} \\ \omega_{n, \frac{n}{2}} = \frac{1}{2}, \omega_{n, \frac{n}{2}+1} = \frac{1}{2} & , \text{ ako je } n \text{ paran broj} \\ \omega_{n, i} = 0 & , \text{ inače} \end{cases}$$

dobija se agregacioni operator medijana tipa, naveden u Primeru 3.3.6.

Spomenuli smo da su osobine (a03), (a04) i (a05) zadovoljene za klasu OWA operatora. Dalje, možemo razmotriti koje još od osobina navedenih u Definiciji 3.3.4, operator OWA tipa ispunjava.

U nastavku pokazujemo da OWA operator u opštem slučaju ne zadovoljava osobine aditivnosti (a06) i subaditivnosti (a07). Neka je jedan OWA agregacioni operator oblika: $A(a_1, a_2, a_3) = 0.4a'_1 + 0.1a'_2 + 0.5a'_3$, gde je (a'_1, a'_2, a'_3) neopadajuća permutacija uređene trojke $(a_1, a_2, a_3) \in [0, 1]^3$. Za odgovarajući odabir uređenih trojki

$$(x_1, y_1, z_1) = (0.1, 0.4, 0.6) \text{ i } (x_2, y_2, z_2) = (0.4, 0.5, 0) \text{ važi:}$$

$$A(x_1, y_1, z_1) + A(x_2, y_2, z_2) = 0.38 + 0.29 = 0.67,$$

$$A(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = A(0.5, 0.9, 0.6) = 0.71$$

$$> A(x_1, y_1, z_1) + A(x_2, y_2, z_2) = 0.67.$$

Ovaj operator zadovoljava osobine homogenosti (a08) i subhomogenosti (a09), jer u opštem slučaju važi sledeća jednakost:

$$\begin{aligned} \text{OWA}_\omega(ta_1, \dots, ta_n) &= \omega_{n,1}(ta_1)' + \dots + \omega_{n,n}(ta_n)' \\ &= t(\omega_{n,1}a_1' + \dots + \omega_{n,n}a_n') \\ &= t \text{OWA}_\omega(a_1, \dots, a_n) \end{aligned}$$

za svako $n \geq 2$, $(a_1, \dots, a_n) \in [0, 1]^n$ i $t \geq 0$. Ukoliko je (a_1', \dots, a_n') neopadajuća permutacija n -torke (a_1, \dots, a_n) i $t \geq 0$, onda je očigledno $((ta_1)', \dots, (ta_n)')$ takođe neopadajuća permutacija od (ta_1, \dots, ta_n) .

Osobina (a11) važi uvek, jer zbog uslova $\sum_{i=1}^n \omega_{n,i} = 1$ mora postojati bar jedan $\omega_{n,i} \neq 0$, što implicira da postoji bar jedan $a_i = 0$. Dok, osobina (a10) važi samo ako je $\omega_{n,i} > 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Razmatrane osobine sumarno su prikazane u Tabeli 3.1

TABELA 3.1: Osobine OWA_ω operatora agregacije.

	(a03)	(a04)	(a05)	(a06)	(a07)	(a08)	(a09)	(a10)	(a11)
OWA_ω	DA	DA	DA	ne	ne	DA	DA	ne*	DA

* Osobina (a10) važi u specijalnom slučaju, ako je $\omega_{n,i} > 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \dots, n\}$.

3.3.1.2 WAM operatori agregacije

Definicija 3.3.10. (Extended Weighted Arithmetic Mean) Za familiju realnih brojeva

$$\omega = \left\{ \omega_{n,i} \geq 0 \mid n \in \mathbb{N}, i \in \{1, \dots, n\}, \sum_{i=1}^n \omega_{n,i} = 1 \right\}$$

i uređenu n -torku $(a_1, \dots, a_n) \in [0, 1]^n$, WAM agregacioni operator, $\text{WAM}_\omega : \bigcup_{n=1}^{\infty} [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ definisan je jednakošću

$$\text{WAM}_\omega(a_1, \dots, a_n) = \omega_{n,1}a_1 + \dots + \omega_{n,n}a_n. \tag{3.3.2}$$

WAM operator je neprekidan (a03) i idempotentan (a04), ali nije simetričan (a05). Takodje, ovaj operator zadovoljava osobine aditivnosti (a06) i pozitivne homogenosti (a08), što implicira da ispunjava i uslove (a07) i (a09). Što se tiče osobina (a10) i (a11) istim rezonovanjem kao i kod OWA operatora, zaključujemo da (a11) važi uvek, dok osobina (a10) važi samo u specijalnom slučaju, odnosno ako je $\omega_{n,i} > 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Detaljna analiza osobina i karakteristika ovog operatora izložena je u publikacijama [50, 57, 58].

3.3.1.3 Nova klasa agregacionih operatora - WAMP operatori sa stepenima

Inspirisani postojećim WAM operatorom agregacije, u radu [59] definisali smo novi WAMP agregacioni operator (eng. Extended Weighted Arithmetic Means of Powers). Uvedena funkcija može biti posmatrana kao generalizacija postojećeg WAM operatora. Karakteristike novog operatora biće diskutovane kroz ispitivanje osobina agregacionih operatora iz Definicije 3.3.4. Njegova primena ilustrovana je u narednom poglavlju ove teze, uključivanjem operatora u formiranje nove funkcije rastojanja i rešavanje problema segmentacije digitalnih slika. Verujemo da pored primene prikazane u ovoj disertaciji, uvedena struktura može pronaći primenu u različitim inženjerskim disciplinama.

Definicija 3.3.11. (WAMP) Za familiju koeficijenata

$$\omega = \{\omega_{n,i} > 0 \mid n \in \mathbb{N}, i \in \{1, \dots, n\}\},$$

$$\lambda = \left\{ \lambda_{n,i} \geq 0 \mid n \in \mathbb{N}, i \in \{1, \dots, n\}, \sum_{i=1}^n \lambda_{n,i} = 1 \right\},$$

funkcija $\text{WAMP}_{\lambda,\omega} : \bigcup_{n=1}^{\infty} [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ definisana sa

$$\text{WAMP}_{\lambda,\omega}(a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_{n,i} a_i^{\omega_{n,i}}, \quad (3.3.3)$$

za $n \in \mathbb{N}$ i $(a_1, \dots, a_n) \in [0, 1]^n$ naziva se proširena težinska aritmetička sredina sa stepenima (eng. extended weighted arithmetic mean of powers).

Definisana $\text{WAMP}_{\lambda, \omega}$ funkcija je jedna proširena agregaciona funkcija, u smislu Definicije 3.3.2. Naime, granični uslovi (a01) su očigledno zadovoljeni i funkcija je monotono neopadajuća (a02), jer je kompozicija monotono neopadajućih funkcija.

Primitimo da je WAM_{λ} specijalan slučaj $\text{WAMP}_{\lambda, \omega}$ operatora. Odnosno, za odgovarajući izbor koeficijenata, $\omega = \{\omega_{n,i} = 1 \mid n \in \mathbb{N}, i \in \{1, \dots, n\}\}$, operator $\text{WAMP}_{\lambda, \omega}$ redukuje se na WAM_{λ} .

Napomena 3.3.12. U nekim primenama, $\text{WAMP}_{\lambda, \omega}$ operator predstavlja dobar matematički model objedinjivanja (združivanja) operanada. Kod takvih modela, koeficijenti $\lambda_{n,i}$ kontrolišu učešće i -te komponente u modelu, a stepenima $\omega_{n,i}$ definišemo tempo rasta uticaja iste komponente. Naime, za stepene $\omega_{n,i} > 1$, operandi a_i koji su bliži 0 daju manji doprinos modelu, dok operandi a_i koji su bliži 1-ci pri porastu stepena $\omega_{n,i} > 1$ više doprinose modelu. Za stepene $\omega_{n,i} < 1$, situacija je obrnuta.

Dalje, razmotrimo koje osobine agregacionih operatora navedene u Definiciji 3.3.4 operator $\text{WAMP}_{\lambda, \omega}$ zadovoljava.

Za proizvoljnu familiju koeficijenata

$$\omega = \{\omega_{n,i} > 0 \mid n \in \mathbb{N}, i \in \{1, \dots, n\}\},$$

$$\lambda = \left\{ \lambda_{n,i} \geq 0 \mid n \in \mathbb{N}, i \in \{1, \dots, n\}, \sum_{i=1}^n \lambda_{n,i} = 1 \right\},$$

operator $\text{WAMP}_{\lambda, \omega}$ zadovoljava osobine (a03) i (a11), dok osobine od (a04) do (a10) nisu ispunjene.

- (a03) $\text{WAMP}_{\lambda, \omega}$ je neprekidna funkcija, jer je kompozicija neprekidnih funkcija.

- (a04) U opštem slučaju ovaj operator nije simetričan, što pokazujemo navodeći sledeći kontraprimer.

Za odabir koeficijenata $\lambda_{2,1} = \lambda_{2,2} = 0.5$, $\omega_{2,1} = 1$ i $\omega_{2,2} = 2$ važi:

$$\text{WAMP}_{\lambda,\omega}(0.2, 0.1) = 0.1050 \neq \text{WAMP}_{\lambda,\omega}(0.1, 0.2) = 0.0700,$$

što je dokaz da funkcija ne zadovoljava osobinu simetričnosti.

Specijalno, uslov simetričnosti ispunjen je u sledećem slučaju:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall i \in \{1, \dots, n\}, \lambda_{n,i} = \frac{1}{n},$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \omega_{n,i} = \omega_{n,j},$$

odnosno, za familiju koeficijenata

$$\omega = \{\omega_{n,i} = \omega_n > 0 \mid n \in \mathbb{N}, i \in \{1, \dots, n\}\}, \text{ što implicira}$$

$$\text{WAMP}_{\lambda,\omega}(a_1, \dots, a_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^{\omega_n}.$$

- (a05) U opštem slučaju, operator $\text{WAMP}_{\lambda,\omega}$ nije idempotentan, što ilustrujemo jednim kontraprimerom.

Za koeficijente $\lambda_{2,1} = \lambda_{2,2} = 0.5$ i $\omega_{2,1} = \omega_{2,2} = 2$ važi:

$$\text{WAMP}_{\lambda,\omega}(x, x) = 0.5 \cdot x^2 + 0.5 \cdot x^2 = x^2 \neq x, \text{ za sve } x \in]0, 1[.$$

Specijalno, uslov idempotentnosti ispunjen je za familiju koeficijenata $\omega = \{\omega_{n,i} \equiv 1 \mid n \in \mathbb{N}, i \in \{1, \dots, n\}\}$, odnosno u slučaju kada je $\text{WAMP}_{\lambda,\omega}$ redukovano na WAM_{λ} operator.

- (a06) U opštem slučaju, $\text{WAMP}_{\lambda,\omega}$ operator nije aditivan (a06) ni subaditivan (a07). Naime, za odabir koeficijenata

$\lambda_{2,1} = \lambda_{2,2} = 0.5$, $\omega_{2,1} = \omega_{2,2} = 2$ i sve $x_1, x_2, y_1, y_2 \in [0, 1]$ takve da je $(x_1, y_1) \neq (0, 0)$ ili $(x_2, y_2) \neq (0, 0)$ važi:

$$\text{WAMP}_{\lambda,\omega}(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = \frac{1}{2} \left((x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} (x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2) + x_1 y_1 + x_2 y_2$$

$$= \text{WAMP}_{\lambda,\omega}(x_1, x_2) + \text{WAMP}_{\lambda,\omega}(y_1, y_2) + x_1 y_1 + x_2 y_2$$

$$> \text{WAMP}_{\lambda,\omega}(x_1, x_2) + \text{WAMP}_{\lambda,\omega}(y_1, y_2),$$

što predstavlja kontraprimer za osobine (a06) i (a07).

Specijalno, operator je aditivan samo u slučaju

$$\omega = \{\omega_{n,i} \equiv 1 \mid n \in \mathbb{N}, i \in \{1, \dots, n\}\},$$

odnosno, kada je redukovan na WAM_λ operator.

- (a07) U prethodnom koraku pokazali smo da osobina (a07) ne važi u opštem slučaju. Međutim, za specijalan odabir parametara, odnosno familiju koeficijenata

$$\omega = \{\omega_{n,i} \leq 1 \mid n \in \mathbb{N}, i \in \{1, \dots, n\}\},$$

pomenuta osobina je ispunjena. Poznato je da ukoliko je funkcija $f : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ konkavna i $f(0) = 0$, tada je ona i subaditivna. Zbog konkavnosti funkcije f i uslova $f(0) = 0$, za $t \in [0, 1]$ i $x \in [0, \infty[$ važi: $f(tx) = f(tx + (1-t) \cdot 0) \geq tf(x) + (1-t) \cdot f(0) = tf(x)$.

Tada za sve $x, y \in [0, \infty[$ sledi

$$\begin{aligned} f(x+y) &= \frac{x}{x+y}f(x+y) + \frac{y}{x+y}f(x+y) \\ &\leq f\left(\frac{x}{x+y}(x+y)\right) + f\left(\frac{y}{x+y}(x+y)\right) = f(x) + f(y). \end{aligned}$$

Dalje, kako je funkcija $f : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$, $f(x) = x^{\omega_{n,i}}$ konkavna za $\omega_{n,i} \leq 1$, imamo da je

$$(x_i + y_i)^{\omega_{n,i}} \leq x_i^{\omega_{n,i}} + y_i^{\omega_{n,i}}$$

za sve $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ i $x_i, y_i \in [0, 1]$.

Dakle, za proizvoljno $\lambda_{n,i} \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, na osnovu prethodne nejednakosti zaključujemo da je

$$\lambda_{n,i}(x_i + y_i)^{\omega_{n,i}} \leq \lambda_{n,i} \cdot x_i^{\omega_{n,i}} + \lambda_{n,i} \cdot y_i^{\omega_{n,i}},$$

što dalje implicira da za sve $n \in \mathbb{N}$ važi

$$\sum_{i=1}^n \lambda_{n,i}(x_i + y_i)^{\omega_{n,i}} \leq \sum_{i=1}^n \lambda_{n,i} \cdot x_i^{\omega_{n,i}} + \sum_{i=1}^n \lambda_{n,i} \cdot y_i^{\omega_{n,i}}.$$

Time je dokazano da za sve $n \in \mathbb{N}$ i $x_i, y_i \in [0, 1]$, $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$WAMP_{\lambda, \omega}(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$\leq WAMP_{\lambda, \omega}(x_1, \dots, x_n) + WAMP_{\lambda, \omega}(y_1, \dots, y_n).$$

Za familije koeficijenata ω kod kojih nije ispunjen uslov $\omega_{n,i} \leq 1$, u pogledu subaditivnosti operatora $\text{WAMP}_{\lambda,\omega}$ ne možemo iznositi nikakve zaključke.

- (a08) Kao što ćemo diskutovati kroz sledeću osobinu, operator $\text{WAMP}_{\lambda,\omega}$ nije pozitivno subhomogen (a09), pa samim tim ni pozitivno homogen (a08). U specijalnom slučaju, kada je redukovano na WAM_{λ} , pomenute osobine su ispunjene.
- (a09) Kontraprimerom pokazujemo da pozitivna homogenost i pozitivna subhomogenost ne važi u opštem slučaju. Dakle, za odgovarajući odabir koeficijenata $\lambda_{2,1} = \lambda_{2,2} = 0.5$, $\omega_{2,1} = \omega_{2,2} = 2$, i argumente $t = 2$ i $(x_1, x_2) = (0.1, 0.2)$ važi:

$$\text{WAMP}_{\lambda,\omega}(tx_1, tx_2) = 0.1 > 0.05 = t \text{WAMP}_{\lambda,\omega}(x_1, x_2).$$

Za proizvoljne familije koeficijenata λ i ω , $n \in \mathbb{N}$, $t \geq 0$ i $(x_1, \dots, x_n) \in [0, 1]^n$ takve da $(tx_1, \dots, tx_n) \in [0, 1]^n$, nejednakost

$$\text{WAMP}_{\lambda,\omega}(tx_1, \dots, tx_n) \leq t \text{WAMP}_{\lambda,\omega}(x_1, \dots, x_n),$$

$$\text{odnosno, } \sum_{i=1}^n \lambda_{n,i} (tx_i)^{\omega_{n,i}} = \sum_{i=1}^n \lambda_{n,i} t^{\omega_{n,i}} x_i^{\omega_{n,i}} \leq t \sum_{i=1}^n \lambda_{n,i} x_i^{\omega_{n,i}}$$

je zadovoljena kada je $t^{\omega_{n,i}} \leq t$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, što zavisi od različitih kombinacija odabira $t \lesseqgtr 1$ i $\omega_{n,i} \lesseqgtr 1$. Stoga, ne možemo tvrditi neku dodatnu pravilnost u pogledu zavisnosti osobine pozitivne subhomogenosti od koeficijenata λ i ω .

- (a10) Za $\omega_{n,i} > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ i $x_i \in]0, 1]$ sledi da je $x_i^{\omega_{n,i}} > 0$. Stoga možemo zaključiti da će sledeća implikacija:

$$\begin{aligned} \text{WAMP}_{\lambda,\omega}(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{i=1}^n \lambda_{n,i} x_i^{\omega_{n,i}} = 0 \\ \Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}, x_i &= 0 \end{aligned}$$

sigurno biti zadovoljena samo ako je $\lambda_{n,i} > 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \dots, n\}$. U opštem slučaju ova osobina nije ispunjena.

- (a11) Za $\omega_{n,i} > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ i $x_i \in]0, 1]$ sledi da je $x_i^{\omega_{n,i}} > 0$, odakle zaključujemo da

$$\lambda_{n,i} x_i^{\omega_{n,i}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{n,i} = 0.$$

Zbog prethodno navedenog, uslova za familiju λ koeficijenata iz Definicije 3.3.11, $\sum_{i=1}^n \lambda_{n,i} = 1$ (odnosno $\exists i, \lambda_{n,i} > 0$), i sledeće implikacije

$$\begin{aligned} \text{WAMP}_{\lambda,\omega}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_{n,i} x_i^{\omega_{n,i}} = 0 \\ \Rightarrow \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \lambda_{n,i} x_i^{\omega_{n,i}} = 0, \end{aligned}$$

zaključujemo $\exists i \in \{1, \dots, n\}$, tako da je $x_i = 0$.

Napomena 3.3.13. Na osnovu prethodno navedenog, za agregacioni operator $\text{WAMP}_{\lambda,\omega}$ možemo zaključiti sledeće:

- osobina (a04) važi samo ako je

$$\lambda_{n,i} = \frac{1}{n} \text{ i } \omega_{n,i} = \omega_n > 0 \text{ za sve } n \in \mathbb{N}, i \in \{1, \dots, n\};$$

- osobine (a05), (a06) i (a08) važe za

$$\omega = \{\omega_{n,i} = 1 \mid n \geq 2, i \in \{1, \dots, n\}\};$$

- osobina (a07) važi za $\omega = \{\omega_{n,i} \leq 1 \mid n \geq 2, i \in \{1, \dots, n\}\};$

- osobina (a10) važi za $\lambda = \{\lambda_{n,i} > 0 \mid n \geq 2, i \in \{1, \dots, n\}\}.$

3.3.2 Operatori proizvoda

Kroz publikaciju [59] definisan je novi prošireni agregacioni operator, u smislu Definicije 3.3.2 i razmatrane su neke njegove osobine, koje diskutujemo u podsekciji 3.3.2.2. Uvedeni operator motivisan je poznatim i često upotrebljivanim proširenim operatorom proizvoda, [50]. Prvo ćemo dati formalnu definiciju klasičnog operatora proizvoda i diskutovati njegove osobine, a zatim u narednoj podsekciji razmatramo operaciju koja predstavlja njegovu generalizaciju.

3.3.2.1 Klasični operator proizvoda

Definicija 3.3.14. Funkcija $\prod : \bigcup_{n=1}^{\infty} [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ koja je definisana jednakošću

$$\prod(a_1, \dots, a_n) = \prod_{i=1}^n a_i, \quad (3.3.4)$$

za $n \in \mathbb{N}$ i uređenu n -torku $(a_1, \dots, a_n) \in [0, 1]^n$, naziva se prošireni agregacioni operator proizvoda (eng. extended product aggregation operator).

Navedeni operator je očigledno operator agregacije, jer je monotono neopadajuća funkcija i zadovoljava granične uslove iz Definicije 3.3.2. Dalje, možemo primetiti da je operator proizvoda neprekidan i simetričan (a03 i a04), ali ne ispunjava uslov idempotentnosti (a05), jer je

$$\prod(a, \dots, a) = \prod_{i=1}^n a = a^n \neq a.$$

Osobine aditivnosti (a06) i subaditivnosti (a07) nisu ispunjene, što dokazujemo navodeći kontraprimer.

Naime, za $(a_1, a_2) = (0.7, 0.2)$ i $(b_1, b_2) = (0.1, 0.6)$ dobijamo:

$$\begin{aligned} \prod(a_1 + b_1, a_2 + b_2) &= \prod(0.8, 0.8) = 0.64, \text{ i} \\ \prod(a_1, a_2) + \prod(b_1, b_2) &= 0.14 + 0.06 = 0.20, \text{ što znači da je} \\ \prod(a_1 + b_1, a_2 + b_2) &> \prod(a_1, a_2) + \prod(b_1, b_2). \end{aligned}$$

Takođe, funkcija proizvoda ne ispunjava osobine (a08) i (a09), pozitivne homogenosti i pozitivne subhomogenosti, što dokazujemo u nastavku. Za svako $n \geq 2$, $t > 1$ i n -torku $(a_1, \dots, a_n) \in [0, 1]^n$ takvu da je zadovoljeno $(ta_1, \dots, ta_n) \in [0, 1]^n$, sledi da je $t^n > t$, što za posledicu ima sledeću nejednakost:

$$\prod(ta_1, \dots, ta_n) = t^n \prod_{i=1}^n a_i > t \prod_{i=1}^n a_i = t \prod(a_1, \dots, a_n).$$

Jasno je da operator proizvoda zadovoljava osobinu (a11), ali ne i (a10).

Razmotrene osobine sumarno su prikazane u Tabeli 3.2.

TABELA 3.2: Osobine operatora proizvoda.

	(a03)	(a04)	(a05)	(a06)	(a07)	(a08)	(a09)	(a10)	(a11)
\prod	DA	DA	ne	ne	ne	ne	ne	ne	DA

3.3.2.2 Nova klasa agregacionih operatora - Operator proizvoda sa stepenima

Agregacioni operator koji navodimo u nastavku, definisan je u publikaciji [59], gde su detaljno ispitane njegove osobine. Daljom analizom kroz publikaciju [60] ilustrovana je i njegova praktična primena u segmentaciji digitalnih slika.

Definicija 3.3.15. Za proizvoljnu familiju nenegativnih koeficijenata

$$\omega = \{\omega_{n,i} > 0 \mid n \in \mathbb{N}, i \in \{1, \dots, n\}\},$$

funkcija $\prod_{\omega} : \bigcup_{n=1}^{\infty} [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ koja je definisana jednakošću

$$\prod_{\omega}(a_1, \dots, a_n) = \prod_{i=1}^n a_i^{\omega_{n,i}} \tag{3.3.5}$$

za $n \in \mathbb{N}$ i n -torku $(a_1, \dots, a_n) \in [0, 1]^n$ naziva se prošireni operator proizvoda sa stepenima (eng. extended powers product operator).

Za familiju koeficijenata ω sa osobinom $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^n \omega_{n,i} = 1$, operator

\prod_{ω} se naziva extended 1-powers product i označava sa $\prod_{|\omega|}$.

Napomena 3.3.16. Specijalno, za familiju ω koeficijenata

$$\omega_{n,i} = \frac{2i}{n(n+1)}, n \in \mathbb{N}, i \in \{1, \dots, n\},$$

definisani operator \prod_{ω} naziva se proširena težinska (ponderisana) geometrijska sredina (eng. extended weighted geometric mean) i označava sa G_{Δ} , [57]. Primitimo da je ovaj operator specijalan slučaj $\prod_{|\omega|}$ operatora, odnosno klase extended 1-powers product.

Definisana \prod_{ω} funkcija je jedna proširena agregaciona funkcija, u smislu Definicije 3.3.2. Granični uslovi (a01) su očigledno zadovoljeni i funkcija je monotonno neopadajuća (a02), jer je kompozicija monotonno neopadajućih funkcija. Za familiju koeficijenata ω koji zadovoljavaju uslov $\omega_{n,i} = 1$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, za sve $n \in \mathbb{N}$, \prod_{ω} operator se redukuje na operator proizvoda \prod iz Definicije 3.3.14.

Za proizvoljnu familiju koeficijenata $\omega = \{\omega_{n,i} > 0 \mid n \in \mathbb{N}, i \in \{1, \dots, n\}\}$, osobine u smislu Definicije 3.3.4, operatora \prod_{ω} navedene su u Tabeli 3.3, dok su u nastavku pojedinačno diskutovane.

- (a03) Operator \prod_{ω} je neprekidna funkcija, jer je kompozicija neprekidnih funkcija.
- (a04) U opštem slučaju, operator \prod_{ω} nije simetričan, jer za $\alpha \neq \beta$ važi $a_1^{\alpha} a_2^{\beta} \neq a_2^{\alpha} a_1^{\beta}$ za skoro sve $a_1 \neq a_2$. Specijalno, uslov simetričnosti je zadovoljen ukoliko za sve $n \geq 2$ postoji $c_n > 0$ takvo da je $\omega_{n,i} = c_n$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$.

- (a05) Za svako $x \in]0, 1[$ važi

$$\prod_{\omega}(x, \dots, x) = \prod_{i=1}^n x^{\omega_{n,i}} = x^{\sum_{i=1}^n \omega_{n,i}} = x \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \omega_{n,i} = 1.$$

Stoga, možemo zaključiti da uslov idempotentnosti važi ako i samo ako je operator tipa extended 1-powers product.

- (a06) U opštem slučaju operatori tipa \prod_{ω} nisu aditivni.
- (a07) U opštem slučaju operatori tipa \prod_{ω} nisu subaditivni, što potvrđuju sledeći primeri za različite familije težinskih koeficijenata, koje redom ispunjavaju uslove: $\sum_{i=1}^n \omega_{n,i} = 1$, $\sum_{i=1}^n \omega_{n,i} > 1$ i $\sum_{i=1}^n \omega_{n,i} < 1$.

1. Posmatrajmo operator $G_{\Delta}(a_1, a_2) = a_1^{\frac{1}{3}} a_2^{\frac{2}{3}}$, koji je specijalan slučaj operatora tipa extended 1-powers product. Za argumente, $(a_1, a_2) = (0.6, 0.2)$ i $(b_1, b_2) = (0.2, 0.7)$ važi:

$$\begin{aligned} G_{\Delta}(a_1 + b_1, a_2 + b_2) &\approx 0.8653 \\ &> 0.7495 \approx G_{\Delta}(a_1, a_2) + G_{\Delta}(b_1, b_2). \end{aligned}$$

2. Razmotrimo sada, operator \prod_{ω} sa familijom koeficijenata ω koji ispunjavaju uslov $\sum_{i=1}^n \omega_{n,i} > 1$. Neka je $n = 2$ i vrednosti koeficijenata su redom, $\omega_{2,1} = 2$ i $\omega_{2,2} = 3$. Za odabir argumenata, $(a_1, a_2) = (0.6, 0.3)$ i $(b_1, b_2) = (0.3, 0.5)$ važi:

$$\begin{aligned} \prod_{\omega}(0.6 + 0.3, 0.3 + 0.5) &\approx 0.4147 \\ &> 0.021 \approx \prod_{\omega}(0.6, 0.3) + \prod_{\omega}(0.3, 0.5). \end{aligned}$$

3. Neka familija koeficijenata ω ispunjava uslov $\sum_{i=1}^n \omega_{n,i} < 1$. Za $n = 2$, stepene $\omega_{2,1} = 0.4$ i $\omega_{2,2} = 0.5$ i odabir agrumenata, $(a_1, a_2) = (0.1, 0.7)$ i $(b_1, b_2) = (0.8, 0.1)$ važi:

$$\begin{aligned} \prod_{\omega}(0.1 + 0.8, 0.7 + 0.1) &\approx 0.86 \\ &> 0.62 \approx \prod_{\omega}(0.1, 0.7) + \prod_{\omega}(0.8, 0.1). \end{aligned}$$

- (a08) Razmotrimo osobinu pozitivne homogenosti,

$$\prod_{\omega}(ta_1, \dots, ta_n) = t \prod_{\omega}(a_1, \dots, a_n).$$

Za $t = 1$, jednakost je očigledno zadovoljena.

Za $t = 0$ ili $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $a_i = 0$ jednakost sledi iz graničnog uslova agregacionih operatora (Definicija 3.3.1), $A(0, \dots, 0) = 0$.

Za $t > 0$, $t \neq 1$ i $\exists i \in \{1, \dots, n\}$, $a_i = 0$, važi

$$\begin{aligned} \prod_{\omega}(ta_1, \dots, ta_n) &= \prod_{i=1}^n (ta_i)^{\omega_{n,i}} = 0 = t \cdot 0 = t \cdot \prod_{i=1}^n a_i^{\omega_{n,i}} \\ &= t \prod_{\omega}(a_1, \dots, a_n). \end{aligned}$$

Za $t > 0$, $t \neq 1$ i $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $a_i > 0$, dobijamo

$$\prod_{\omega}(ta_1, \dots, ta_n) = \prod_{i=1}^n (ta_i)^{\omega_{n,i}} = t^{\sum_{i=1}^n \omega_{n,i}} \prod_{\omega}(a_1, \dots, a_n).$$

Možemo zaključiti da jednakost

$$\prod_{\omega}(ta_1, \dots, ta_n) = t \prod_{\omega}(a_1, \dots, a_n)$$

važi ako i samo ako je $\sum_{i=1}^n \omega_{n,i} = 1$, za sve $n \in \mathbb{N}$. Odnosno, prošireni operator sa stepenima, \prod_{ω} , ispunjava osobinu (a08) ako i samo ako je tipa extended 1-powers product.

- (a09) Operatori tipa extended 1-powers product su pozitivno homogeni (a08) i pozitivno subhomogeni (a09). Za operator \prod_{ω} koji ne pripada klasi extended 1-powers product, iz prethodno diskutovanog razmatranja osobine (a08) možemo zaključiti da je sledeća nejednakost zadovoljena

$$\prod_{\omega}(ta_1, \dots, ta_n) = t^{\sum_{i=1}^n \omega_{n,i}} \prod_{\omega}(a_1, \dots, a_n) \leq t \prod_{\omega}(a_1, \dots, a_n)$$

ako i samo ako $t^{\sum_{i=1}^n \omega_{n,i}} \leq t$. Odnosno, ako i samo ako je

$$t \in [0, 1] \wedge \sum_{i=1}^n \omega_{n,i} \geq 1 \quad \text{ili} \quad t \in [1, \infty[\wedge \sum_{i=1}^n \omega_{n,i} \leq 1.$$

Ovo znači da ne postoji operator \prod_{ω} tipa, osim klase extended 1-powers product, koji ispunjava uslov pozitivne subhomogenosti.

- (a10) Ne postoji operator \prod_{ω} tipa koji zadovoljava ovu osobinu.
- (a11) Svaki operator \prod_{ω} tipa zadovoljava ovu osobinu.

TABELA 3.3: Osobine agregacionog operatora \prod_{ω} tipa i njegovih specijalnih klasa.

	(a03)	(a04)	(a05)	(a06)	(a07)	(a08)	(a09)	(a10)	(a11)
\prod_{ω}	DA	ne	ne	ne	ne	ne	ne	ne	DA
$\prod_{ \omega }$	DA	ne	DA	ne	ne	DA	DA	ne	DA
G_{Δ}	DA	ne	DA	ne	ne	DA	DA	ne	DA

3.4 Novi teorijski rezultati o t -normama, t -konormama i operatorima agregacije

U ovoj sekciji dokazana su neka svojstva t -normi, t -konormi i funkcija agregacije. Definisani su uslovi kompatibilnosti agregacionih funkcija sa t -normama i t -konormama i dalje su diskutovana svojstva pomenute kompatibilnosti, [49].

U nastavku navodimo dve teoreme koje predstavljaju jedan metod konstrukcije nove t -norme (odnosno t -konorme), upotrebom inicijalne t -norme (t -konorme) i jedne sirjektivne funkcije. Pomenute teoreme nisu originalni rezultati (detaljnije vidi u [61]), ali ih radi ilustracije navodimo sa dokazima.

Teorema 3.4.1. Neka je $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ rastuća sirjektivna funkcija. Ako je $T : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ t -norma, onda je

$$T_h(a, b) = h \circ T(h^{-1}(a), h^{-1}(b)), \quad a, b \in [0, 1],$$

takođe t -norma.

Dokaz. Neka je $T : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ jedna t -norma. Preslikavanje h je očigledno bijekcija, jer je sirjektivna i zbog monotonije $h(0) = 0$, $h(1) = 1$, što znači da postoji rastuće inverzno preslikavanje $h^{-1} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tako da su sledeće jednakosti zadovoljene: $h^{-1}(0) = 0$ i $h^{-1}(1) = 1$.

Onda, za svako $a, b \in [0, 1]$ važi $h^{-1}(a), h^{-1}(b) \in [0, 1]$ i dalje je

$$T(h^{-1}(a), h^{-1}(b)) \in [0, 1] \Rightarrow T_h(a, b) = h(T(h^{-1}(a), h^{-1}(b))) \in [0, 1].$$

Odnosno, T_h je preslikavanje $T_h : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$.

Dokaz aksiomatike t -normi sledi u nastavku.

$$\begin{aligned} (1) \quad T_h(a, 1) &= h \circ T(h^{-1}(a), h^{-1}(1)) = h \circ T(h^{-1}(a), 1) \\ &= h(h^{-1}(a)) = a. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) \quad & b \leq b_1 \Rightarrow h^{-1}(b) \leq h^{-1}(b_1) \\
& \Rightarrow T(h^{-1}(a), h^{-1}(b)) \leq T(h^{-1}(a), h^{-1}(b_1)) \\
& \Rightarrow h(T(h^{-1}(a), h^{-1}(b))) \leq h(T(h^{-1}(a), h^{-1}(b_1))) \\
& \Rightarrow T_h(a, b) \leq T_h(a, b_1).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3) \quad & T_h(a, b) = h \circ T(h^{-1}(a), h^{-1}(b)) \\
& = h \circ T(h^{-1}(b), h^{-1}(a)) \\
& = T_h(b, a).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(4) \quad & T_h(a, T_h(b, c)) = h \circ T(h^{-1}(a), h^{-1}(T_h(b, c))) \\
& = h \circ T(h^{-1}(a), T(h^{-1}(b), h^{-1}(c))) \\
& = h \circ T(T(h^{-1}(a), h^{-1}(b)), h^{-1}(c)) \\
& = h \circ T(h^{-1} \circ h \circ T(h^{-1}(a), h^{-1}(b)), h^{-1}(c)) \\
& = h \circ T(h^{-1} \circ T_h(a, b), h^{-1}(c)) \\
& = T_h(T_h(a, b), c).
\end{aligned}$$

□

Naredna teorema analogno je tvrđenje prethodnoj samo što se odnosi na t -konorme, [61].

Teorema 3.4.2. Neka je $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ rastuća surjektivna funkcija. Ako je $S : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ t -konorma, onda je

$$S_h(a, b) = h \circ S(h^{-1}(a), h^{-1}(b)), \quad a, b \in [0, 1],$$

takođe t -konorma.

Dokaz. Neka je $S : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ jedna t -konorma. Preslikavanje h je očigledno bijektivno, jer je surjektivna i zbog monotonije $h(0) = 0$, $h(1) = 1$, što implicira da postoji rastuće inverzno preslikavanje $h^{-1} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tako da su sledeće jednakosti zadovoljene: $h^{-1}(0) = 0$ i $h^{-1}(1) = 1$.

Za svako $a, b \in [0, 1]$ važi $h^{-1}(a), h^{-1}(b) \in [0, 1]$ i

$$S(h^{-1}(a), h^{-1}(b)) \in [0, 1] \Rightarrow S_h(a, b) = h(S(h^{-1}(a), h^{-1}(b))) \in [0, 1].$$

Odnosno, S_h je preslikavanje $S_h : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$.

Dokaz aksiomatike t -konormi sledi u nastavku.

$$\begin{aligned} (1) \quad S_h(a, 0) &= h \circ S(h^{-1}(a), h^{-1}(0)) = h \circ S(h^{-1}(a), 0) \\ &= h(h^{-1}(a)) = a. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad b \leq b_1 &\Rightarrow h^{-1}(b) \leq h^{-1}(b_1) \\ &\Rightarrow S(h^{-1}(a), h^{-1}(b)) \leq S(h^{-1}(a), h^{-1}(b_1)) \\ &\Rightarrow h(S(h^{-1}(a), h^{-1}(b))) \leq h(S(h^{-1}(a), h^{-1}(b_1))) \\ &\Rightarrow S_h(a, b) \leq S_h(a, b_1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad S_h(a, b) &= h \circ S(h^{-1}(a), h^{-1}(b)) \\ &= h \circ S(h^{-1}(b), h^{-1}(a)) = S_h(b, a). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad S_h(a, S_h(b, c)) &= h \circ S(h^{-1}(a), h^{-1}(S_h(b, c))) \\ &= h \circ S(h^{-1}(a), S(h^{-1}(b), h^{-1}(c))) \\ &= h \circ S(S(h^{-1}(a), h^{-1}(b)), h^{-1}(c)) \\ &= h \circ S(h^{-1} \circ h \circ S(h^{-1}(a), h^{-1}(b)), h^{-1}(c)) \\ &= h \circ S(h^{-1}(S_h(a, b)), h^{-1}(c)) \\ &= S_h(S_h(a, b), c). \end{aligned}$$

□

Primer 3.4.3. Neka su $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ i $h_i : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $i \in \{1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$ neprekidne funkcije koje zadovoljavaju jedan od sledećih uslova:

(i) h i h_i , $i \in \mathbb{N}$ su striktno rastuće funkcije i važi

$$\forall i = 1, \dots, n, \quad h(0) = h_i(0) = 0 \wedge h(1) = h_i(1) = 1;$$

(ii) h i h_i , $i \in \mathbb{N}$ su striktno opadajuće funkcije i važi

$$\forall i = 1, \dots, n, \quad h(0) = h_i(0) = 1 \wedge h(1) = h_i(1) = 0.$$

U nastavku ćemo pokazati da je funkcija

$$M(x_1, x_2, \dots, x_n) = h^{-1}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_i(x_i)\right) \quad (3.4.1)$$

n -arna agregaciona funkcija koju smo nazvali *generalizovana kvazi-aritmetička sredina*, [49].

- (i) Funkcije h i h_i , $i = 1, \dots, n$ su striktno rastuće bijektivne funkcije, stoga imaju inverzne funkcije, h^{-1} i h_i^{-1} koje su takođe striktno rastuće, neprekidne i važe jednakosti:

$$h^{-1}(0) = h_i^{-1}(0) = 0, \quad h^{-1}(1) = h_i^{-1}(1) = 1.$$

Granični uslovi za agregacionu funkciju M su zadovoljeni:

$$\begin{aligned} M(0, 0, \dots, 0) &= h^{-1}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_i(0)\right) \\ &= h^{-1}\left(\frac{1}{n}(0 + 0 + \dots + 0)\right) = h^{-1}(0) = 0, \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} M(1, 1, \dots, 1) &= h^{-1}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_i(1)\right) \\ &= h^{-1}\left(\frac{1}{n}(1 + 1 + \dots + 1)\right) = h^{-1}(1) = 1. \end{aligned}$$

Dokažimo još osobinu monotonosti za funkciju M .

Neka je $a_i \leq b_i, \forall i = 1, \dots, n$, onda možemo zaključiti:

$$\begin{aligned} \forall i = 1, \dots, n, \quad h_i(a_i) &\leq h_i(b_i) \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^n h_i(a_i) &\leq \sum_{i=1}^n h_i(b_i) \\ \Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_i(a_i) &\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_i(b_i) \\ \Rightarrow M(a_1, a_2, \dots, a_n) &= h^{-1}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_i(a_i)\right) \\ &\leq h^{-1}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_i(b_i)\right) = M(b_1, b_2, \dots, b_n). \end{aligned}$$

- (ii) Funkcije h i h_i , $i = 1, \dots, n$ su bijektivne i striktno opadajuće, stoga postoje inverzne funkcije, h^{-1} i h_i^{-1} koje su takođe striktno opadajuće, neprekidne i važe jednakosti:

$$h^{-1}(1) = h_i^{-1}(1) = 0, \quad h^{-1}(0) = h_i^{-1}(0) = 1.$$

Granični uslovi za agregacionu funkciju M su zadovoljeni:

$$\begin{aligned} M(0, 0, \dots, 0) &= h^{-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_i(0) \right) \\ &= h^{-1} \left(\frac{1}{n} (1 + 1 + \dots + 1) \right) = h^{-1}(1) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(1, 1, \dots, 1) &= h^{-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_i(1) \right) \\ &= h^{-1} \left(\frac{1}{n} (0 + 0 + \dots + 0) \right) = h^{-1}(0) = 1. \end{aligned}$$

Dokaz monotonosti funkcije M sledi u nastavku. Ako je $a_i \leq b_i$, $\forall i = 1, \dots, n$, zbog monotonosti funkcije h_i dobijamo:

$$\begin{aligned} \forall i = 1, \dots, n, \quad h_i(a_i) &\geq h_i(b_i) \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^n h_i(a_i) &\geq \sum_{i=1}^n h_i(b_i) \\ \Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_i(a_i) &\geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_i(b_i) \\ \Rightarrow M(a_1, a_2, \dots, a_n) &= h^{-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_i(a_i) \right) \\ &\leq h^{-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_i(b_i) \right) = M(b_1, b_2, \dots, b_n). \end{aligned}$$

Definicija 3.4.4.

- (i) Proizvoljna n -arna agregaciona funkcija A je (neprekidno) *kompatibilna* sa t -normama T_1, \dots, T_n , ako postoji (neprekidna) t -norma T takva da važi

$$A(T_1(a_1, b_1), \dots, T_n(a_n, b_n)) \geq T(A(a_1, \dots, a_n), A(b_1, \dots, b_n)). \quad (3.4.2)$$

- (ii) Proizvoljna n -arna agregaciona funkcija A je (neprekidno) *kompatibilna* sa t -konormama S_1, \dots, S_n ako postoji (neprekidna) t -konorma S takva da važi

$$A(S_1(a_1, b_1), \dots, S_n(a_n, b_n)) \leq S(A(a_1, \dots, a_n), A(b_1, \dots, b_n)). \quad (3.4.3)$$

U narednoj teoremi, dokazana je kompatibilnost agregacione funkcije M (generalizovane kvazi-aritmetičke sredine (3.4.1)), sa t -normama and t -konormama koje su generisane primenom neprekidnog, monotonog generatora h_i iz (3.4.1).

Teorema 3.4.5. Neka su $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ i $h_i : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ neprekidne, striktno monotone funkcije.

- (i) Ako funkcije h i h_i , $i = 1, \dots, n$ zadovoljavaju uslove $h(0) = h_i(0) = 0$, $i = 1, \dots, n$ i $h(1) = h_i(1) = 1$, $i = 1, \dots, n$, onda je generalizovana kvazi-aritmetička sredina M definisana u (3.4.1) agregaciona funkcija koja je neprekidno kompatibilna sa Arhimedovskim t -konormama S_1, \dots, S_n generisanim primenom rastućih generatora h_i , $i = 1, \dots, n$.
- (ii) Ako funkcije h i h_i , $i = 1, \dots, n$ zadovoljavaju uslove $h(0) = h_i(0) = 1$, $i = 1, \dots, n$ i $h(1) = h_i(1) = 0$, $i = 1, \dots, n$, onda je generalizovana kvazi-aritmetička sredina M definisana u (3.4.1) agregaciona funkcija koja je neprekidno kompatibilna sa Arhimedovskim t -normama T_1, \dots, T_n generisanim primenom opadajućih generatora h_i , $i = 1, \dots, n$.

Dokaz. (i) Primitimo da neprekidne, monotone funkcije h i h_i , $i = 1, \dots, n$ koje zadovoljavaju uslove $h(0) = h_i(0) = 0$, $i = 1, \dots, n$ i $h(1) = h_i(1) = 1$, $i = 1, \dots, n$, jesu striktno rastuće i postoje njima inverzne funkcije h^{-1} i h_i^{-1} , koje su takođe monotono rastuće, neprekidne i ispunjavaju uslove $h^{-1}(0) = h_i^{-1}(0) = 0$ i $h^{-1}(1) = h_i^{-1}(1) = 1$.

Neka je M agregaciona funkcija iz Primera 3.4.3 definisana jednačinom (3.4.1). Neka su dalje, S_1, \dots, S_n t -konorme, generisane rastućim funkcijama h_i , $i = 1, \dots, n$, odnosno $\forall i = 1, \dots, n$ važi

$$\forall a, b \in [0, 1], \quad S_i(a, b) = h_i^{(-1)}(h_i(a) + h_i(b)).$$

Označimo sa L levu stranu jednakosti

$$L = M(S_1(a_1, b_1), \dots, S_n(a_n, b_n)) = h^{-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_i(S_i(a_i, b_i)) \right)$$

i pokažimo da je agregaciona funkcija M neprekidno kompatibilna sa t -konormama. Zbog Napomene 3.2.13, iz jednakosti

$$S_i(a, b) = h_i^{(-1)}(h_i(a) + h_i(b))$$

$\forall a_i, b_i \in [0, 1]$ i svako $i = 1, \dots, n$ dobijamo

$$h_i(S_i(a_i, b_i)) = h_i(h_i^{(-1)}(h_i(a_i) + h_i(b_i))) \leq h_i(a_i) + h_i(b_i).$$

Stoga, možemo zaključiti

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_i(S_i(a_i, b_i)) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (h_i(a_i) + h_i(b_i)),$$

odnosno

$$h^{-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_i(S_i(a_i, b_i)) \right) \leq h^{-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (h_i(a_i) + h_i(b_i)) \right).$$

Iz prethodno navedenog zaključujemo:

$$\begin{aligned} L &\leq h^{-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (h_i(a_i) + h_i(b_i)) \right) \\ &= h^{-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_i(a_i) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_i(b_i) \right) \\ &= h^{-1} \left(h \left(h^{-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_i(a_i) \right) \right) + h \left(h^{-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_i(b_i) \right) \right) \right) \\ &= h^{-1}(h(M(a_1, \dots, a_n)) + h(M(b_1, \dots, b_n))) \\ &= S(M(a_1, \dots, a_n), M(b_1, \dots, b_n)). \end{aligned}$$

Dakle, prethodnim razmatranjima smo dokazali da važi

$$M(S_1(a_1, b_1), \dots, S_n(a_n, b_n)) \leq S(M(a_1, \dots, a_n), M(b_1, \dots, b_n)),$$

gde je S t -konorma generisana funkcijom h u smislu Teoreme 3.2.14.

- (ii) Primitimo da su h i h_i , $i = 1, \dots, n$ neprekidne, monotone funkcije koje zadovoljavaju uslove $h(0) = h_i(0) = 1$, $i = 1, \dots, n$ i $h(1) = h_i(1) = 0$,

$i = 1, \dots, n$, striktno opadajuće i postoje njima inverzne funkcije h^{-1} i h_i^{-1} koje su takođe monotono opadajuće, neprekidne i ispunjavaju uslove $h^{-1}(0) = h_i^{-1}(0) = 1$ i $h^{-1}(1) = h_i^{-1}(1) = 0$.

Neka je M agregaciona funkcija iz Primera 3.4.3 definisana jednačinom (3.4.1). Neka su dalje, T_1, \dots, T_n t -norme generisane opadajućim funkcijama h_i , $i = 1, \dots, n$, odnosno $\forall i = 1, \dots, n$ važi

$$\forall a, b \in [0, 1], \quad T_i(a, b) = h_i^{(-1)}(h_i(a) + h_i(b)).$$

Označimo sa L levu stranu jednakosti

$$L = M(T_1(a_1, b_1), \dots, T_n(a_n, b_n)) = h^{-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_i(T_i(a_i, b_i)) \right)$$

i pokažimo da je agregaciona funkcija M neprekidno kompatibilna sa t -normama. Zbog Napomene 3.2.6, iz jednakosti

$$T_i(a, b) = h_i^{(-1)}(h_i(a) + h_i(b))$$

$\forall a, b \in [0, 1]$ i svako $i = 1, \dots, n$ dobijamo

$$h_i(T_i(a_i, b_i)) = h_i(h_i^{(-1)}(h_i(a_i) + h_i(b_i))) \leq h_i(a_i) + h_i(b_i).$$

Stoga, možemo zaključiti

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_i(T_i(a_i, b_i)) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (h_i(a_i) + h_i(b_i)),$$

odnosno

$$h^{-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_i(T_i(a_i, b_i)) \right) \geq h^{-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (h_i(a_i) + h_i(b_i)) \right).$$

Iz prethodno navedenog zaključujemo:

$$\begin{aligned} L &\geq h^{-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (h_i(a_i) + h_i(b_i)) \right) \\ &= h^{-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_i(a_i) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_i(b_i) \right) \\ &= h^{-1} \left(h \left(h^{-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_i(a_i) \right) \right) + h \left(h^{-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_i(b_i) \right) \right) \right) \\ &= h^{-1}(h(M(a_1, \dots, a_n)) + h(M(b_1, \dots, b_n))) \\ &= T(M(a_1, \dots, a_n), M(b_1, \dots, b_n)). \end{aligned}$$

Dakle, jednakostima iznad dokazali smo da važi

$$M(T_1(a_1, b_1), \dots, T_n(a_n, b_n)) \geq T(M(a_1, \dots, a_n), M(b_1, \dots, b_n)),$$

gde je T t -norma generisana funkcijom h u smislu Teoreme 3.2.7. \square

Teorema 3.4.6. Neka je T (neprekidna) t -norma i S (neprekidna) t -konorma. Onda su T^{n-1} i S^{n-1} agregacione funkcije koje su (neprekidno) kompatibilne sa t -normama $T_1 = T_2 = \dots = T_n = T$ i t -konormama $S_1 = S_2 = \dots = S_n = S$, respektivno (sa odgovarajućim T i S iz Definicije 3.4.4).

Dokaz. Iz asocijativnosti i komutativnosti zaključujemo da za t -norme važi:

$$\begin{aligned} T^{n-1}(T(a_1, b_1), \dots, T(a_n, b_n)) \\ &= T^{2n-1}(a_1, b_1, \dots, a_n, b_n) \\ &= T(T^{n-1}(a_1, \dots, a_n), T^{n-1}(b_1, \dots, b_n)). \end{aligned}$$

Analogno važi i za t -konorme:

$$\begin{aligned} S^{n-1}(S(a_1, b_1), \dots, S(a_n, b_n)) \\ &= S^{2n-1}(a_1, b_1, \dots, a_n, b_n) \\ &= S(S^{n-1}(a_1, \dots, a_n), S^{n-1}(b_1, \dots, b_n)). \end{aligned} \quad \square$$

Lema 3.4.7. Ako je $A_{[n]}$ striktno monotona n -arna agregaciona funkcija, onda važi:

- (a) $A_{[n]}(a_1, \dots, a_n) = 0 \Leftrightarrow a_1 = \dots = a_n = 0,$
- (b) $A_{[n]}(a_1, \dots, a_n) = 1 \Leftrightarrow a_1 = \dots = a_n = 1.$

Dokaz. (a) Neka je $A_{[n]}$ striktno monotona n -arna agregaciona funkcija. Neka važi $A_{[n]}(a_1, \dots, a_n) = 0$. Pretpostavimo suprotno, odnosno da je za neko $j \in \{1, \dots, n\}$, $a_j > 0$. Pošto je $A_{[n]}$ agregaciona funkcija, znamo da je $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ $a_i \geq 0$, nakon čega uslov stroge

monotonosti funkcije $A_{[n]}$ implicira sledeću kontradikciju:

$$0 = A_{[n]}(a_1, \dots, a_n) > A_{[n]}(0, \dots, 0) = 0.$$

Drugi smer sledi direktno iz definicije agregacione funkcije.

(b) Analogno.

□

Poglavlje 4

Nove funkcije rastojanja

Ovo poglavlje posvećeno je konstrukciji novih funkcija rastojanja i njihovoj primeni u segmentaciji digitalnih slika, upotrebom FCM algoritma. Rezultati prikazani u nastavku predstavljaju deo istraživanja koja su sprovedena u publikacijama [49, 59, 60, 62–65]. Jedan deo teorijske osnove istraživanja detaljno je predstavljen u doktorskoj disertaciji [20]. Pomenuti način konstrukcije novih funkcija rastojanja zasniva se na primeni operatora agregacije na polazne funkcije rastojanja. Na ovaj način formiramo nova rastojanja, koja nasleđuju većinu teorijskih osobina polaznih funkcija, dok u primeni ispoljavaju značajno bolje rezultate od njih. Naime, karakteristike novoformirane funkcije rastojanja zavise od odabira agregacionog operatora koji se koristi pri njihovoj konstrukciji, kao i od inicijalnih funkcija rastojanja na koje je pomenuti agregacioni operator primenjen. U zavisnosti od željenih osobina i primene, pri konstrukciji novih funkcija, korišteni su neki od postojećih operatora agregacije ali su uvedene i nove klase koje su pokazale izuzetna upotrebna svojstva i rezultate u segmentaciji digitalnih slika, [49, 59, 60, 63, 65]. Pored inicijalnih funkcija rastojanja i operatora agregacije, kako bi metod imao konkretniju i ilustrativniju primenu, u formiranje novih funkcija rastojanja uključeni su novi deskriptori piksela. Kroz sprovedeno istraživanje i testiranje različitih vrsta slika, uočeno je da

upotreba deskriptora, koji nosi informacije o lokalnom okruženju piksela, značajno utiče na poboljšanje rezultata segmentacije.

4.1 Osnovni pojmovi funkcija rastojanja i metrika

Pojam rastojanja vezan je za osnovno ljudsko iskustvo. U svakodnevnom životu rastojanje obično percipiramo kao stepen fizičke blizine, odnosno udaljenosti dva objekta (pojma), kao što su na primer dužina, vremenski interval, razlika u rang, temperaturi, udaljenosti i sl. Metrike i funkcije rastojanja postale su veoma važno sredstvo u mnogim oblastima matematike i njene primene, uključujući geometriju, statistiku, teoriju kodiranja, klasterovanje, analizu podataka, prepoznavanje objekata, računarsku grafiku, astronomiju, inženjerstvo i mnoga druga područja nauke. Osmišljavanje i konstruisanje najprikladnije funkcije rastojanja za kvantifikaciju blizine, odnosno udaljenosti objekata postao je standardni zadatak mnogih istraživača. Modeliranje ovakvih funkcija u velikoj meri zavisi od oblasti njihove primene. Naročita potreba za ovakvim funkcijama izražena je u analizi slike, prepoznavanju govora i računarskoj biologiji. S obzirom na rastuću potrebu za ovakvim funkcijama i njihovu interdisciplinarnu upotrebu, jedan deo istraživanja u ovoj disertaciji bavi se upravo formiranjem novih funkcija rastojanja sa akcentom na primenu u računarskoj analizi i obradi slika, tačnije segmentaciji digitalnih slika.

Definicija 4.1.1. Neka je X proizvoljan neprazan skup, funkcija $d : X^2 \rightarrow [0, \infty[$ može imati sledeće navedene osobine.

(d01) Simetričnost:

$$\forall x, y \in X, \quad d(x, y) = d(y, x).$$

(d02) Refleksivnost:

$$\forall x \in X, \quad d(x, x) = 0.$$

(d03) $\forall x, y \in X, \quad d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y.$

(d04) Nejednakost trougla:

$$\forall x, y, z \in X, \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

(d05) Ultrametrička nejednakost:

$$\forall x, y, z \in X, \quad d(x, z) \leq \max \{d(x, y), d(y, z)\}.$$

(d06) C-nejednakost trougla:

$$\forall x, y, z \in X, \quad d(x, z) \leq C (d(x, y) + d(y, z)),$$

za neko $C \in [1, \infty[$.

(d07) $\forall x, y \in X, \quad d(x, y) = 0 \Rightarrow \forall z \in X, \quad d(x, z) = d(y, z)$.

(d08) Ograničenost:

$$d : X^2 \rightarrow [0, 1] \quad \vee \quad \exists a > 0, \quad d : X^2 \rightarrow [0, a].$$

(d09) $\forall x, y \in X, \quad d(x, y) \leq d(x, x)$.

(d10) $\forall x, y \in X, \quad d(x, x) \leq d(x, y)$.

(d11) $\forall x, y \in X, \quad d(x, y) = d(x, x) \Leftrightarrow x = y$.

Rastojanje između tačaka $x, y \in X$ možemo interpretirati kao meru razlike $d(x, y) \in [0, \infty[$ između istih, što dalje koristimo pri klasterovanju objekata. Dakle, ukoliko posmatramo konačan skup $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, gde elemente skupa treba razvrstati u klase (odnosno klasifikovati), funkcija njihove međusobne različitosti može se predstaviti matricom $M = [r_{i,j}]_{n \times n}$, pri čemu je $r_{i,j} = d(x_i, x_j)$ rastojanje (različitost) elemenata x_i i x_j , $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Razvrstavanje elemenata skupa X u grupe, predstavlja formiranje jedne particije skupa X na osnovu matrice različitosti.

Definicija 4.1.2. Neka je X proizvoljan neprazan skup. Funkcija rastojanja definisana na skupu X je funkcija $d : X^2 \rightarrow [0, \infty[$ koja ima osobine (d01) i (d02). Uređeni par (X, d) tada se naziva *prostor sa rastojanjem*.

Definicija 4.1.3. Neka je X proizvoljan neprazan skup. Funkcija rastojanja $d : X^2 \rightarrow [0, \infty[$ je metrika na skupu X ako zadovoljava osobine (d03) i (d04). Uređeni par (X, d) se tada naziva *metrički prostor*.

Definicija 4.1.4. Neka je X proizvoljan neprazan skup. Funkcija sličnosti na skupu X , $d : X^2 \rightarrow [0, \infty[$ je funkcija koja zadovoljava osobine (d01) i (d09), pri čemu jednakost u (d09) važi ako i samo ako je $x = y$.

Detaljan enciklopedijski prikaz funkcija rastojanja, metrika, funkcija sličnosti, kao i njihove upotrebe u raznim disciplinama može se naći u knjizi [66].

Primer 4.1.5. U nastavku navodimo neke često korištene i poznate funkcije rastojanja i metrike.

- **Rastojanje Minkovskog** (L_p metrika)

Za proizvoljno $p \in [1, \infty[$ i n -torke $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ i $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ vektorskog prostora \mathbb{R}^n , funkcija rastojanja definisana je sa:

$$d_{L_p}(a, b) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |a_i - b_i|^p}.$$

Navedena funkcija je metrika i indukuje L_p normu vektorskog prostora \mathbb{R}^n .

Specijalno, za $p = 1$ ima oblik $d_{L_1}(a, b) = \sum_{i=1}^n |a_i - b_i|$, često se koristi u primenama i poznata je pod nazivima taxicab i Manhattan rastojanje.

Za $p \rightarrow \infty$, poznata kao maksimum metrika definisana je sa:

$$d_{L_\infty}(a, b) = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |a_i - b_i|.$$

- **Euklidsko rastojanje** (Euclidean distance)

U vektorskom prostoru \mathbb{R}^n funkcija rastojanja između n -torki $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ i $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ definisana jednakošću

$$d_E(a, b) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2}$$

naziva se Euklidsko rastojanje. Naziv potiče od upotrebe u klasičnoj Euklidskoj geometriji, gde se rastojanje između dve tačke definiše upravo na ovakav način. Primitimo da je ovo specijalni slučaj L_p metrike, za $p = 2$.

- **Hemingovo rastojanje** (Hamming distance)

Neka je X proizvoljan neprazan skup (alfabet) i neka je X^n skup svih reči iste dužine, $n \in \mathbb{N}$, nad alfabetom X . Za proizvoljne reči $a = a_1a_2 \dots a_n, b = b_1b_2 \dots b_n \in X^n$, njihovo Hemingovo rastojanje predstavlja broj komponenti, odnosno slova u kojima se reči a i b razlikuju:

$$d_H(a, b) = \sum_{i=1}^n q_i \text{ gde je } q_i = \begin{cases} 1, & a_i \neq b_i \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Funkcija rastojanja $d_H(a, b)$ je metrika, koja se često upotrebljava u otkrivanju i korekciji grešaka pri prenosu binarnih informacija (kriptografija). U nastavku navodimo jedan primer radi ilustracije pomenutog rastojanja. Posmatrajmo binarni skup $X = \{0, 1\}$ i kodove dužine $n = 8$. U skupu X^n je ukupno $2^8 = 256$ mogućih kombinacija binarnih reči. Izaberimo dva koda, $a = 10110101$ i $b = 01101011$. Hemingovo rastojanje između posmatranih binarnih kodova je broj pozicija na kojima se njihovi bitovi razlikuju, što je u ovom slučaju $d_H(a, b) = 6$.

4.2 Agregirane funkcije rastojanja

Veliki deo istraživanja u okviru ove disertacije zasnovan je na operatorima agregacije, agregiranim funkcijama rastojanja i njihovoj primeni u segmentaciji digitalnih slika. Naime, agregacija za cilj ima objedinjivanje više različitih karakteristika u jednu, koristeći odgovarajući kriterijum koji je definisan funkcijom (operatorom) agregacije. Nas konkretno interesuje agregacija funkcija rastojanja, primenom operatora agregacije na niz polaznih funkcija rastojanja i na taj način formiranje nove funkcije rastojanja. U publikaciji [62] i disertaciji [20] detaljno su ispitane i dokazane osobine ovako formiranih funkcija. Ovde izdvajamo najbitnije karakteristike koje su korištene u daljem radu.

Razmotrimo najpre pojam ograničenosti polaznih funkcija rastojanja. Neka je $\tilde{d}_i : X^2 \rightarrow [0, a_i], i \in \mathbb{N}, a_i > 0$ niz ograničenih funkcija na nekom nepraznom prostoru $X \neq 0$, koje mogu biti funkcije rastojanja, metrike, funkcije sličnosti, itd. Funkcije definisane jednakošću, $d_i(x, y) = \frac{1}{a_i} \tilde{d}_i$, za $x, y \in X$ su tada funkcije sa vrednostima iz intervala $[0, 1]$. Pri tome, ovako definisane funkcije nasleđuju neke osobine od polaznih funkcija, kao što su $(d01), \dots, (d11)$, [20, 62]. Iz navedenog možemo zaključiti da ukoliko je polazna funkcija $\tilde{d}_i : X^2 \rightarrow [0, a_i]$ funkcija rastojanja, tada je i novoformirana funkcija, $d_i : X^2 \rightarrow [0, 1]$ takođe funkcija rastojanja. Analogno razmatranje važi za metrike.

Dalje, posmatrajmo konstrukciju nove funkcije $d : X^2 \rightarrow [0, 1]$, primenom agregacionog operatora na polazne funkcije, $d_i : X^2 \rightarrow [0, 1], i \in \mathbb{N}$. Neka su $d_i, i \in \mathbb{N}$, redom sve ograničene funkcije rastojanja na skupu X , odnosno zadovoljavaju osobine $(d01)$ i $(d02)$, i neka je A proizvoljan agregacioni operator.

Funkciju $d : X^2 \times \mathbb{N} \setminus \{1\} \rightarrow [0, 1]$ definišemo na sledeći način:

$$d(x, y; n) = A(d_1(x, y), \dots, d_n(x, y)), \quad x, y \in X, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Za svako $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ označimo sa $d_{[n]}$ funkcije $d_{[n]} : X^2 \rightarrow [0, 1]$:

$$d_{[n]}(x, y) = d(x, y; n) = A(d_1(x, y), \dots, d_n(x, y)), \quad x, y \in X.$$

Teorema 4.2.1. Neka je $d_i : X^2 \rightarrow [0, 1], i \in \mathbb{N}$ niz proizvoljnih funkcija rastojanja i neka je A proizvoljan agregacioni operator. Tada za svako $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ i funkcije $d_{[n]} : X^2 \rightarrow [0, 1]$,

$$d_{[n]}(x, y) = A(d_1(x, y), \dots, d_n(x, y)), \quad x, y \in X,$$

važe sledeća tvrđenja.

- Funkcija $d_{[n]}$ je funkcija rastojanja.
- Ako za svaku od funkcija $d_i, i \in \mathbb{N}$ važi osobina (d03) iz Definicije 4.1.1 i agregacioni operator A za svako $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ i svako $a_i \in [0, 1]$ ima osobinu (a11) iz Definicije 3.3.4, tada funkcija $d_{[n]}$ takođe ima osobinu (d03).
- Ako bar jedna od polaznih funkcija rastojanja $d_i, i \in \mathbb{N}$ ima osobinu (d03) iz Definicije 4.1.1 i agregacioni operator A za svako $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ i svako $a_i \in [0, 1]$ ima osobinu (a10), navedenu u Definiciji 3.3.4, tada funkcija $d_{[n]}$ takođe ima osobinu (d03).
- Neka su sve funkcije $d_i, i \in \mathbb{N}$ metrike i neka je $A : \bigcup_{n=2}^{\infty} [0, \infty)^n \rightarrow [0, \infty)$ subaditivna funkcija čija je restrikcija na skup $\bigcup_{n=2}^{\infty} [0, 1]^n$ operator agregacije, odnosno za sve $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ i $a_i, b_i \in [0, 1], i \in \mathbb{N}$ je ispunjen uslov subaditivnosti:

$$A(a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) \leq A(a_1, \dots, a_n) + A(b_1, \dots, b_n).$$
 Ako operator agregacije A ima svojstvo (a11), navedeno u Definiciji 3.3.4, tada je funkcija $d_{[n]}, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ metrika.
- Neka sve funkcije $d_i, i \in \mathbb{N}$ zadovoljavaju C-nejednakost trougla sa odgovarajućom konstantom C_i , osobina (d06) iz Definicije 4.1.1, i neka je $A : \bigcup_{n=2}^{\infty} [0, \infty)^n \rightarrow [0, \infty)$ funkcija čija je svaka restrikcija

na skup $\bigcup_{n=2}^{\infty} [0, 1]^n$ operator agregacije sa svojstvima subaditivnosti i pozitivne subhomogenosti

$$(a07) \quad A(a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) \leq A(a_1, \dots, a_n) + A(b_1, \dots, b_n)$$

$$(a09) \quad A(ta_1, \dots, ta_n) \leq tA(a_1, \dots, a_n)$$

za sve $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $a_i, b_i \in [0, 1]$, $i \in \mathbb{N}$ i $t \geq 0$. Tada za svaku funkciju $d_{[n]}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, važi C-nejednakost trougla sa odgovarajućom konstantom $C_{[n]} = \max\{C_1, \dots, C_n\}$.

4.3 Deskriptori piksela

Deskriptore piksela možemo percipirati kao karakteristike koje nose opisne informacije o posmatranom pikselu ili njegovoj razmatranoj okolini. U ovoj sekciji, uvodimo deskriptor koji ćemo koristiti u konstrukciji funkcije rastojanja, sa primenom u segmentaciji digitalne slike. Dobar izbor deskriptora, kao mera koja nosi karakteristiku piksela i okoline, može se upotrebljavati za modeliranje razlike između dva piksela i značajno uticati na uspešnost segmentacije.

U oblasti računarske grafike, lokalni binarni deskriptori (LBP, [67, 68]) se uglavnom koriste za probleme analize tekstura digitalnih slika, u prepoznavanju objekata i klasifikaciji. LBP-ovi i njegove različite modifikacije, koje uključuju dosta binarnih i nebinarnih modela pokazali su izuzetne karakteristike u raznim primenama. Njihovu diskriminativnu moć prate računski atraktivna svojstva, kao što su jednostavna implementacija i izvršavanje u realnom vremenu, jer se formiraju sa svega nekoliko operacija u lokalnoj okolini. Deo istraživanja u okviru ove disertacije posvećen je upravo klasi LBP deskriptora. Detaljna analiza klase, istorijski pregled, prikaz raznih modifikacija, kao i njihova primena u klasifikaciji tekstura predstavljena je u Poglavlju 5.

Novi deskriptor, koji predstavljamo u ovom poglavlju, uveden je u radu [59] i motivisan LBP klasom deskriptora. Posmatrali smo lokalnu okolinu

piksela i dodeljivali susednim pikselima vrednosti 1 ili 0, u odnosu na unapred definisani prag (eng. threshold value). Razlika u našem razmatranju u odnosu na većinu LBP metoda, koje na različite načine uglavnom formiraju celobrojne reprezentacije koje odgovaraju prethodno dobijenim binarnim kodovima (vidi u narednom poglavlju teze, odeljak 5.2.1), je što mi želimo samo da prebrojimo pojavljivanje 0 u dobijenom kodu. Formirani broj koji u tom slučaju dodeljujemo centralnom pikselu predstavlja broj susednih piksela koji su do određenog nivoa njemu slični. Mera sličnosti određena je izabranom vrednošću parametra α , unapred definisanog praga. Prilikom formiranja deskriptora posmatrali smo najjednostavniju 3×3 okolinu piksela sa 8 suseda. Moguće je razmotriti i generalizaciju ovog pristupa na proizvoljan broj suseda N koji su jednako raspoređeni na kružnici poluprečnika R , kao što je u [69] definisano za LBP klasu deskriptora.

Neka je $\alpha \in \{0, \dots, 255\}$ unapred definisana vrednost, koja reprezentuje meru sličnosti u nivou sive boje između dva posmatrana piksela. Definišemo indikatorsku funkciju α -sličnosti za centralni piksel $p = p_{i,j}$ i svakog od njegovih suseda n_k , $k \in \{1, \dots, 8\}$. Indikatorska vrednost 1 označava da je razlika u nivou sive boje između posmatranih piksela veća od $\alpha \in \{0, \dots, 255\}$, dok 0 ukazuje na suprotnu situaciju, odnosno označava da su pikseli slični do na α nivo.

Definicija 4.3.1. Za proizvoljan piksel $p_{i,j}$, unapred definisanu vrednost praga $\alpha \in \{0, \dots, 255\}$, i svaki od susednih piksela n_k , $k \in \{1, \dots, 8\}$, α -indikator sličnosti, $I_{i,j;\alpha}(k) \in \{0, 1\}$, je funkcija

$$I_{i,j;\alpha}(k) = \begin{cases} 0 & , \quad |p_{i,j} - n_k| \leq \alpha \\ 1 & , \quad |p_{i,j} - n_k| > \alpha \end{cases} , \quad k \in \{1, \dots, 8\}. \quad (4.3.1)$$

U prethodnoj jednačini, $p_{i,j}, n_k \in \{0, \dots, 255\}$ predstavljaju sive vrednosti piksela. Za razmatrani piksel $p_{i,j}$ koji se nalazi na rubu slike, pa zbog toga nema neke od 8 razmatranih suseda, n_k , definišemo $I_{i,j;\alpha}(k) = 1$.

Napomena 4.3.2. Za piksele $p_{i,j}$ koji pripadaju rubu slike i zbog toga nemaju susedni piksel n_k , smatramo prirodnim definisati $I_{i,j;\alpha}(k) = 1$, umesto

$I_{i,j;\alpha}(k) = 0$, jer bi indikatorska vrednost 0 ukazivala na sličnost piksela $p_{i,j}$ sa susednim pikselom n_k , koji u ovom slučaju ne postoji.

Razmotrimo sada sliku u boji, zapisanu u RGB formatu. Analogno razmatranje može se primeniti i na druge formate slika u boji. Poznato je da je u RGB tehnici, piksel koji se nalazi u i -tom redu i j -toj koloni predstavljen kao uređena trojka $p_{i,j} = (r_{i,j}, g_{i,j}, b_{i,j}) \in \{0, \dots, 255\}^3$, crvene, zelene i plave komponente, respektivno. Zbog jednostavnosti, uvodimo oznake $p_{i,j}^{(r)} = r_{i,j}$, $p_{i,j}^{(g)} = g_{i,j}$ i $p_{i,j}^{(b)} = b_{i,j}$. Analogno, za susedne piksele n_k , $k \in \{1, \dots, 8\}$, neka su sa $n_k^{(r)}$, $n_k^{(g)}$ i $n_k^{(b)}$ označene njihove RGB komponente. Prethodno definisanu indikatorsku funkciju za sive nivoe, sada možemo definisati za svaku komponentu boje, $c \in \{r, g, b\}$ na sledeći način:

$$I_{i,j;\alpha}^{(c)}(k) = \begin{cases} 0 & , \quad |p_{i,j}^{(c)} - n_k^{(c)}| \leq \alpha \\ 1 & , \quad |p_{i,j}^{(c)} - n_k^{(c)}| > \alpha \end{cases} . \quad (4.3.2)$$

U nastavku, definišemo deskriptor piksela, prvo za sive nivoe. Za predefinisano vrednost praga $\alpha \in \{0, \dots, 255\}$ i centralni piksel $p_{i,j}$, broj 0 vrednosti koji se pojavljuje u indikatorskoj funkciji $I_{i,j;\alpha}(k)$ za $k \in \{1, \dots, 8\}$, reprezentuje broj susednih piksela koji se razlikuju u sivom nivou od centralnog $p_{i,j}$, za najviše α vrednost. Ovo znači da mi želimo da prebrojimo susede koji su do na α -nivo slični centralnom pikselu. Tako formirani deskriptor nazivamo brojač α -indikatora (eng. α -indicator counter) i računamo prema sledećoj formuli:

$$IC_{\alpha}(p_{i,j}) = \sum_{k=1}^8 (1 - I_{i,j;\alpha}(k)) = 8 - \sum_{k=1}^8 I_{i,j;\alpha}(k). \quad (4.3.3)$$

Napomena 4.3.3. Očigledno je da je definisani deskriptor rotaciono invarijantan. Takođe, iz definicije možemo zaključiti da važi:

$$\begin{aligned} \alpha \leq \beta & \Rightarrow \forall k \in \{1, \dots, 8\}, I_{i,j;\alpha}(k) \geq I_{i,j;\beta}(k) \\ & \Rightarrow IC_{\alpha}(p_{i,j}) \leq IC_{\beta}(p_{i,j}) . \end{aligned}$$

Ako razmatramo RGB sliku, deskriptor IC_α je definisan za svaku komponentu boje. Odnosno, za piksel $p_{i,j}$, odgovarajući izbor α nivoa, $\alpha \in \{0, \dots, 255\}$ i svaku od komponenti boje $c \in \{r, g, b\}$ važi:

$$IC_\alpha^{(c)}(p_{i,j}) = \sum_{k=1}^8 \left(1 - I_{i,j;\alpha}^{(c)}(k)\right) = 8 - \sum_{k=1}^8 I_{i,j;\alpha}^{(c)}(k), \quad (4.3.4)$$

gde je $I_{i,j;\alpha}^{(c)}(k)$, $k \in \{1, \dots, 8\}$ definisano u jednačini 4.3.2.

Ako razmatramo sliku u boji, potrebno je jednom pikselu dodeliti jednu karakteristiku, IC_α , koja obuhvata (združuje) pojedinačno razmatrane komponente boja, $IC_\alpha^{(c)}$, $c \in \{r, g, b\}$. Smatramo da je za ovu ulogu pogodno iskoristiti odgovarajući operator agregacije f ,

$$IC_\alpha^f(p_{i,j}) = f\left(IC_\alpha^{(r)}(p_{i,j}), IC_\alpha^{(g)}(p_{i,j}), IC_\alpha^{(b)}(p_{i,j})\right). \quad (4.3.5)$$

Daljom analizom problema združivanja pojedinačno formiranih karakteristika, nameće se pitanje koji bi to operator agregacije bio odgovarajući za ovakve upotrebe. Zbog specifičnih vrednosti deskriptora $IC_\alpha^{(f)}(p_{i,j}) \in \{0, \dots, 8\}$, proširena agregaciona funkcija f mora biti razmatrana kao preslikavanje $f : \bigcup_{n=1}^{\infty} [0, 8]^n \rightarrow [0, 8]$. Odnosno, ako hoćemo da posmatramo preslikavanje f nad skupom $[0, 1]$, jednačina (4.3.5) mora biti modifikovana na sledeći način, $f : \bigcup_{n=1}^{\infty} [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$:

$$IC_\alpha^f(p_{i,j}) = f(a, b, c), \quad (4.3.6)$$

gde je

$$a = \frac{1}{8} IC_\alpha^{(r)}(p_{i,j}), \quad b = \frac{1}{8} IC_\alpha^{(g)}(p_{i,j}), \quad c = \frac{1}{8} IC_\alpha^{(b)}(p_{i,j}).$$

U daljoj analizi ćemo koristiti modifikovanu verziju funkcije f definisanu u 4.3.6. Nekoliko agregacionih operatora koji mogu biti pogodni za izbor funkcije f su navedeni u nastavku:

- $f(x_1, \dots, x_n) = \min(x_1, \dots, x_n)$,
- $f(x_1, \dots, x_n) = \max(x_1, \dots, x_n)$,
- $f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$,
- $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_{n,i} x_i$
 pri čemu je $\lambda_{n,i} \geq 0$ i $\sum_{i=1}^n \lambda_{n,i} = 1$, $i \in \{1, \dots, n\}$,
- $f(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{x_1^p + \dots + x_n^p}{n} \right)^{\frac{1}{p}}$, $p > 0$.

Saturacija piksela, slike ili oblasti na slici predstavlja meru zasićenosti razmatrane regije bojom. U skladu sa intuitivnim poimanjem ovog pojma, u pogledu sivih slika, kao prirodna mera saturacije nameće se sama vrednost sivog nivoa, $s_{i,j} \in \{0, \dots, 255\}$, dok se kod slika u boji, u ovu svrhu može razmotriti nekoliko modela:

- $S_{\min}(p_{i,j}) = \min\{r_{i,j}, g_{i,j}, b_{i,j}\} \in \{0, \dots, 255\}$,
- $S_{\text{MA}}(p_{i,j}) = \frac{1}{3} (r_{i,j} + g_{i,j} + b_{i,j}) \in [0, 255]$,
- $S_{\text{E}}(p_{i,j}) = \sqrt{r_{i,j}^2 + g_{i,j}^2 + b_{i,j}^2} \in [0, 255\sqrt{3}]$.

Primetimo da se svaki od navedenih deskriptora saturacije piksela može interpretirati kao vrednost dobijena primenom agregacionog operatora na RGB komponente boja.

4.4 Primena agregiranih funkcija rastojanja u segmentaciji digitalnih slika

U ovoj sekciji, prikazani su neki od rezultata sprovedenih istraživanja koja su publikovana u radovima [49, 59, 60, 63, 65]. Nekoliko slika u boji, kao

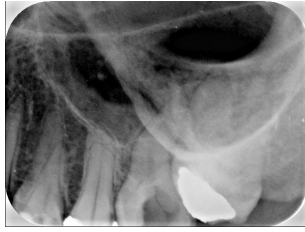
i jedan rendgenski snimak korišteni su za ilustraciju primene novoformiranih funkcija rastojanja u segmentaciji digitalnih slika. U svim navedenim primerima za sprovođenje segmentacije korišten je FCM algoritam, [18].

Pored digitalne slike, koja je glavni predmet analize, neki od veoma bitnih ulaznih parametara algoritma su navedeni u nastavku.

- Broj klastera koji će biti produkovan segmentacijom. U našim eksperimentima to je uglavnom $c = 4$.
- Težinski koeficijent, koji utiče na kvalitet i brzinu segmentacije. Na osnovu eksperimentalnih rezultata iz literature poznato da vrednosti oko 2.0 rezultuju uspešnim performansama, stoga smo u sprovedenim testovima koristili upravo tu vrednost, $m = 2.0$.
- Funkcija rastojanja kojom se definiše kriterijum segmentacije, $d : P^2 \rightarrow [0, \infty[$, pri čemu je P skup piksela. Za piksele p_1 i p_2 , vrednost $d(p_1, p_2) \in [0, \infty)$ predstavlja meru njihove razlike. U cilju poređenja korištenih funkcija rastojanja i dobijenih rezultata, sve funkcije su normalizovane tako da im vrednosti budu u okviru intervala $[0, 1]$.

Što se tiče izlaznih parametara algoritma, pored segmentovane slike razmatramo nekoliko vrednosti, koje ukazuju na kvalitet sprovedene segmentacije.

- PI - "Performace index" koji predstavlja osnovnu meru uspešnosti segmentacije. Naime, ova vrednost ukazuje na kompaktnost klasterovanih podataka. Manja vrednost indeksa označava kompaktnije klustere, odnosno snažno grupisane piksele i simboliše dobro sprovedenu segmentaciju.
- IT - Broj iterativnih koraka sprovedenog postupka.
- RT - Vreme rada algoritma, u sekundama.



SLIKA 4.1: Rendgenski snimak vilice.

4.4.1 Segmentacija rendgenskog snimka

U radovima [60, 63] razmatran je uticaj različitih funkcija rastojanja na rezultate segmentacije, pri čemu je korišten jedan rendgenski snimak dela vilice, Slika 4.1. Procesirana slika je veličine 466×628 piksela.

Test 1

U prvom sprovedenom testu, originalna slika segmentovana je FCM algoritmom, prvo upotrebom funkcije rastojanja d_S , a zatim novom funkcijom rastojanja koja je dobijena primenom OWA operatora na polazne funkcije, d_S i d_N . U ovom slučaju, funkcija d_S predstavlja razliku u sivim nivoima dva piksela koje poredimo, dok d_N modeluje razliku između srednjih vrednosti njihovih najbližih suseda. Naime, primetimo da je ovde uvedena nova karakteristika. Svakom centralnom pikselu pored odgovarajuće sive vrednosti dodeljuje se srednja vrednost njegovih 8 suseda koji se nalaze u najbližoj 3×3 okolini. Za piksele koji se nalaze na rubu slike, te zbog toga nemaju svih 8 suseda, razmatrano je po 3 ili 5 suseda u zavisnosti od položaja piksela na slici.

Svaki piksel razmatrane slike predstavljen je na sledeći način:

$$p = (s, n, i, j) \in P,$$

$$P = \{0, \dots, 255\}^2 \times \{0, \dots, 466\} \times \{0, \dots, 628\},$$

gde je s siva vrednost piksela, n je srednja vrednost nivoa boje njegovih najbližih suseda i (i, j) su prostorne koordinate razmatranog piksela.



SLIKA 4.2: Slika dobijena upotrebom d_S funkcije rastojanja.

Funkcije rastojanja $d_S : P^2 \rightarrow [0, 1]$ i $d_N : P^2 \rightarrow [0, 1]$ definisane su jednakostima:

$$d_S(p_1, p_2) = \frac{1}{255} \cdot |s_2 - s_1| \quad \text{i} \quad d_N(p_1, p_2) = \frac{1}{255} \cdot |n_2 - n_1|,$$

za sve piksele $p_1 = (s_1, n_1, i_1, j_1) \in P$, $p_2 = (s_2, n_2, i_2, j_2) \in P$. Ove funkcije rastojanja su normalizovane i mogu biti tretirane kao metrike na skupu sivih nivoa $\{0, \dots, 255\}$. Rezultati segmentacije dobijeni upotrebom funkcije d_S prikazani su na Slici 4.2.

Za proizvoljno $\omega \in (0, 1)$, razmotrimo OWA agregacioni operator:

$$\text{OWA}_\omega(x_1, x_2) = \omega x'_1 + (1 - \omega)x'_2, \quad x_1, x_2 \in [0, 1],$$

gde je (x'_1, x'_2) neopadajuća permutacija uređene dvojke (x_1, x_2) . Primenom OWA_ω operatora na normalizovane funkcije rastojanja d_S i d_N , formiramo novu funkciju rastojanja:

$$\begin{aligned} d_{S,N;\omega}(p_1, p_2) &= \text{OWA}_\omega(d_S(p_1, p_2), d_N(p_1, p_2)) \\ &= \omega d_1(p_1, p_2) + (1 - \omega)d_2(p_1, p_2) \end{aligned}$$

za piksele $p_1, p_2 \in P$, gde je $(d_1(p_1, p_2), d_2(p_1, p_2))$ neopadajuća permutacija uređenog para $(d_S(p_1, p_2), d_N(p_1, p_2))$.

Slika 4.3 i Slika 4.4 predstavljaju rezultate segmentacije dobijene upotrebom funkcije rastojanja $d_{S,N;\omega}$, za vrednosti parametra $\omega = 0.2$ i $\omega = 0.8$. U Tabeli 4.1 su prikazani izlazni parametri FCM algoritma, koji ukazuju na kvalitet sprovedene segmentacije, redom za funkcije rastojanja d_S , $d_{S,N;0.2}$ i

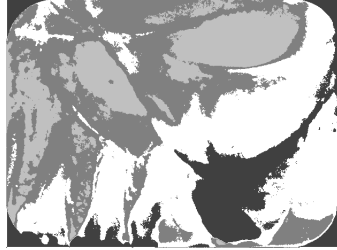
SLIKA 4.3: Slika dobijena upotrebom $d_{S,N;0.2}$ funkcije rastojanja.SLIKA 4.4: Slika dobijena upotrebom $d_{S,N;0.8}$ funkcije rastojanja.

TABELA 4.1: Rezultati sprovedene segmentacije, OWA operator.

	d_S	$d_{S,N;0.2}$	$d_{S,N;0.8}$
PI:	1007.5	1131.7	902.5
IT:	24	26	29
RT:	33	672	723

$d_{S,N;0.8}$. Analizom vrednosti prikazanih u Tabeli 4.1, možemo zaključiti da upotrebom funkcije rastojanja $d_{S,N;0.8}$ dobijamo bolju vrednost PI parametra u poređenju sa funkcijom d_S , dok je broj izvršenih iteracija tek malo veći.

Test 2

Drugi test je sproveden na istom rendgenskom snimku (Slika 4.1), upotrebom operatora proizvoda \prod_ω na polazne funkcije rastojanja. Svaki piksel razmatrane slike predstavljen je kao uređena trojka:

$$p_{i,j} = (c_{i,j}, n_{i,j}, s_{i,j}) \in P, P = \{0, \dots, 255\} \times [0, 1] \times [0, 1],$$

gde je $c_{i,j}$ siva vrednost piksela, a $n_{i,j} = \text{NA}(p_{i,j})$ i $s_{i,j} = \text{IC}_\alpha(p_{i,j})$ su deskriptori piksela. Naime, $n_{i,j} = \text{NA}(p_{i,j})$ predstavlja normalizovanu srednju vrednost sivih nivoa suseda iz 3×3 okoline, dok $s_{i,j} = \text{IC}_\alpha(p_{i,j})$ predstavlja normalizovanu vrednost deskriptora definisanog u jednačini (4.3.3):

$$\text{IC}_\alpha(p_{i,j}) = \frac{1}{8} \sum_{k=1}^8 (1 - I_{i,j;\alpha}(k)) = 1 - \frac{1}{8} \sum_{k=1}^8 I_{i,j;\alpha}(k).$$

U sprovedenim testovima upotrebljena je vrednost $\alpha = 20$.

Inicijalne funkcije rastojanja (metrike) su:

- $d_1 : P^2 \rightarrow [0, 1]$, $d_1(p_{i,j}, p_{k,l}) = \frac{1}{255} |c_{i,j} - c_{k,l}|$, kojom je modelirana mera razlike između sivih vrednosti piksela,
- $d_2 : P^2 \rightarrow [0, 1]$, $d_2(p_{i,j}, p_{k,l}) = |x_{i,j} - x_{k,l}|$, kojom je modelirana razlika između vrednosti deskriptora dodeljenih pikselu; $x_{i,j}$ predstavlja deskriptor - $n_{i,j}$ ili $s_{i,j}$.

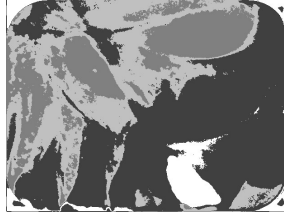
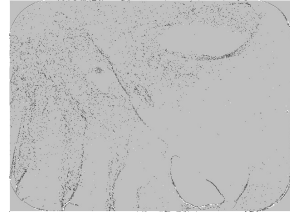
Inicijalne funkcije rastojanja agregirane su upotrebom operatora proizvoda, $\prod_\omega : [0, 1]^3 \rightarrow [0, 1]$ definisanim u jednačini (3.3.5) i odgovarajućim odabirom koeficijenata $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \{0.5, 1.0, 2.0\}^3$. Dakle, funkcija rastojanja primenjena u FCM algoritmu za segmentaciju je $d_\omega : P^2 \rightarrow [0, 1]$:

$$d_\omega(p_{i,j}, p_{k,l}) = d_1^{\omega_1}(p_{i,j}, p_{k,l}) \cdot d_2^{\omega_2}(p_{i,j}, p_{k,l}) \cdot d_2^{\omega_3}(p_{i,j}, p_{k,l}). \quad (4.4.1)$$

Koristeći Euklidsku metriku za poređenje, dobijena je vrednost "performance index", $\text{PI} = 1007.5$. Upotrebom d_ω funkcije rastojanja za 27 različitih kombinacija vrednosti parametara $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \{0.5, 1.0, 2.0\}^3$ dobijene su izuzetne vrednosti PI indeksa, koji je osnovni pokazatelj kompaktnosti grupisanih klastera. U nastavku navodimo dva primera. Naime, za izbor parametara: $\omega_A = (2.0, 2.0, 2.0)$ i $\omega_B = (0.5, 2.0, 2.0)$, zamenom u jednačini 4.4.1, dobijamo nove funkcije rastojanja, čije su performanse u segmentaciji rendgenskog snimka prikazane u Tabli 4.2 i na Slici 4.5, zajedno sa rezultatima produkovanim upotrebom Euklidske metrike.

TABELA 4.2: Rezultati sprovedene segmentacije.

	d_E	d_{ω_A}	d_{ω_B}
PI:	1007.5	0.000012702	0.0021
IT:	24	35	17
RT:	31	929	447

(a) d_E segmentacija(b) d_{ω_A} segmentacija(c) d_{ω_B} segmentacija

SLIKA 4.5: Segmentovane slike, dobijene upotrebom FCM algoritma uz različite funkcije rastojanja.

4.4.2 Segmentacija slike u boji

U publikaciji [59] razmatrali smo tri slike u boji i analizirali uticaj WAMP operatora, definisanog jednačinom (3.3.3), na rezultate segmentacije. Piskel lociran u i -toj vrsti i j -toj koloni označen je sa $p_{i,j} = (r_{i,j}, g_{i,j}, b_{i,j}) \in \{0, \dots, 255\}^3$, gde $r_{i,j}$, $g_{i,j}$ i $b_{i,j}$ predstavljaju redom crvenu, zelenu i plavu komponentu boje. U analizu i konstrukciju funkcije rastojanja su pored vrednosti piksela uključeni i deskriptori navedeni u nastavku.

(s) Saturacija piksela $p_{i,j}$, koju modeliramo jednakošću:

$$s_{i,j} = \frac{1}{255\sqrt{3}} \sqrt{r_{i,j}^2 + g_{i,j}^2 + b_{i,j}^2} \in [0, 1]. \quad (4.4.2)$$

(q) Deskriptor IC_{α}^f , koji predstavlja α -meru sličnosti centralnog piksela $p_{i,j}$ sa njegovim najbližim susedima. Za funkciju agregacije f , koja objedinjuje u jednu karakteristiku pojedinačne vrednosti izračunate

za svaku komponentu boje, odabrali smo aritmetičku sredinu. Vrednost praga $\alpha = 20$, je selektovana eksperimentalnim izborom u nekoliko inicijalnih pokušaja. Stoga, deskriptor IC_α^f za centralni piksel $p_{i,j}$ ima sledeći oblik:

$$q_{i,j} = \text{IC}_{20}^{\text{AM}}(p_{i,j}) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{8}a + \frac{1}{8}b + \frac{1}{8}c \right) = \frac{1}{24} (a + b + c) \in [0, 1], \quad (4.4.3)$$

gde je

$$a = \text{IC}_{20}^{(r)}(p_{i,j}), \quad b = \text{IC}_{20}^{(g)}(p_{i,j}), \quad c = \text{IC}_{20}^{(b)}(p_{i,j}).$$

Za svaku od komponenti boje $c \in \{r, g, b\}$ važi,

$$\text{IC}_{20}^{(c)}(p_{i,j}) = 8 - \sum_{k=1}^8 I_{i,j;20}^{(c)}(k),$$

$$I_{i,j;20}^{(c)}(k) = \begin{cases} 0 & , \quad |p_{i,j}^{(c)} - n_k^{(c)}| \leq 20 \\ 1 & , \quad |p_{i,j}^{(c)} - n_k^{(c)}| > 20 \end{cases},$$

gde $p_{i,j}^{(c)}, n_k^{(c)} \in \{0, \dots, 255\}$ predstavljaju intenzitet boje centralnog piksela $p_{i,j}$ i njegovih 8 razmatranih suseda n_k , $k \in \{1, \dots, 8\}$.

Razmatrajući definisane deskriptore i komponente boja, svaki piksel prikazujemo kao uređenu 5-torku:

$$p_{i,j} = (r_{i,j}, g_{i,j}, b_{i,j}, s_{i,j}, q_{i,j}) \in P, \quad P = \{0, \dots, 255\}^3 \times [0, 1]^2.$$

Za inicijalne funkcije rastojanja biramo L_1 metriku. Normalizovana funkcija $d_1: \{0, \dots, 255\}^2 \rightarrow [0, 1]$, razmatrana je za svaku komponentu boje:

$$d_1(c_1, c_2) = \frac{1}{255} |c_1 - c_2|,$$

dok su za uvedene deskriptore vrednosti već u $[0, 1]$ intervalu, pa normalizacija nije potrebna $d_2: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$:

$$d_2(t_1, t_2) = |t_1 - t_2|.$$

Dalje je za familiju koeficijenata,

$$\omega = \{\omega_i > 0 \mid i \in \{1, \dots, 5\}\},$$

$$\lambda = \left\{ \lambda_i \geq 0 \mid i \in \{1, \dots, 5\}, \sum_{i=1}^5 \lambda_i = 1 \right\},$$

definisana nova agregirana funkcija rastojanja $d_{\lambda, \omega} : P^2 \rightarrow [0, 1]$, koja je dobijena primenom WAMP operatora na inicijalne funkcije d_1 i d_2 :

$$\begin{aligned} d_{\lambda, \omega}(p_1, p_2) = & \lambda_1 d_1^{\omega_1}(r_1, r_2) + \lambda_2 d_1^{\omega_2}(g_1, g_2) + \lambda_3 d_1^{\omega_3}(b_1, b_2) \\ & + \lambda_4 d_2^{\omega_4}(s_1, s_2) + \lambda_5 d_2^{\omega_5}(q_1, q_2), \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

za piksele $p_i = (r_i, g_i, b_i, s_i, q_i) \in P$, $i \in \{1, 2\}$. Izborom vrednosti parametara λ i ω , dobijamo funkciju rastojanja $d_{\lambda, \omega}$ kojom modeliramo kriterijum segmentacije u FCM algoritmu. Evaluaciju rezultata sprovedene segmentacije, koji su dobijeni upotrebom WAMP agregacionog operatora pri formiranju funkcije rastojanja, vršili smo poređenjem sa onim koje smo dobili upotrebom Euklidske metrike. Naime, $d_E : \bar{P}^2 \rightarrow [0, 1]$ je korištena kao referentna funkcija rastojanja:

$$d_E(p_1, p_2) = \frac{1}{255\sqrt{3}} \sqrt{r^2 + g^2 + b^2}, \quad (4.4.5)$$

gde je $r = r_1 - r_2$, $g = g_1 - g_2$ i $b = b_1 - b_2$, za piksele $p_1 = (r_1, g_1, b_1) \in \bar{P}$, $p_2 = (r_2, g_2, b_2) \in \bar{P}$, $\bar{P} = \{0, \dots, 255\}^3$.

Sva tri sprovedena testa koja su navedena u nastavku obuhvataju poređenje rezultata segmentacije dobijenih upotrebom FCM algoritma sa različitim kriterijumima segmentacije koji su određeni izabranim funkcijama rastojanja. Kao referentna funkcija rastojanja upotrebljena je Euklidska metrika, d_E , dok su ostale funkcije rastojanja dobijene primenom WAMP agregacionog operatora sa deset različitih kombinacija vrednosti parametara λ i ω u jednačini (4.4.4).

Naime, za $i \in \{1, \dots, 10\}$ formiramo nove funkcije rastojanja $\tilde{d}_i(p_1, p_2) = d_{\lambda, \omega}(p_1, p_2)$, u zavisnosti od izbora parametara $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5\}$ i $\omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$:



SLIKA 4.6: Originalna slika koja je procesirana u FCM algoritmu za segmentaciju slike upotrebom različitih funkcija rastojanja.

1. $\tilde{d}_1 : \omega = \{0.5, 0.5, 0.5, 2.0, 2.0\}, \lambda = \{0.3, 0.3, 0.3, 0.05, 0.05\};$
2. $\tilde{d}_2 : \omega = \{0.5, 0.5, 0.5, 2.0, 2.0\}, \lambda = \{0.2, 0.2, 0.2, 0.25, 0.15\};$
3. $\tilde{d}_3 : \omega = \{0.5, 0.5, 0.5, 2.0, 2.0\}, \lambda = \{0.3333, 0.3333, 0.3333, 0.0, 0.0\};$
4. $\tilde{d}_4 : \omega = \{2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0\}, \Lambda = \{0.3333, 0.3333, 0.3333, 0.0, 0.0\};$
5. $\tilde{d}_5 : \omega = \{2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0\}, \lambda = \{0.25, 0.25, 0.25, 0.25, 0.0\};$
6. $\tilde{d}_6 : \omega = \{2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0\}, \lambda = \{0.25, 0.25, 0.25, 0.0, 0.25\};$
7. $\tilde{d}_7 : \omega = \{2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0\}, \lambda = \{0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2\};$
8. $\tilde{d}_8 : \omega = \{2.0, 2.0, 2.0, 0.5, 0.5\}, \lambda = \{0.25, 0.25, 0.25, 0.25, 0.0\};$
9. $\tilde{d}_9 : \omega = \{2.0, 2.0, 2.0, 0.5, 0.5\}, \lambda = \{0.25, 0.25, 0.25, 0.0, 0.25\};$
10. $\tilde{d}_{10} : \omega = \{2.0, 2.0, 2.0, 0.5, 0.5\}, \lambda = \{0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2\}.$

Test 1

U prvom testu procesirali smo sliku, veličine 225×300 piksela, koja je formirana upotrebom mobilnog telefona za potrebe istraživanja sprovedenog u [62], Slika 4.6.

Izlazni parametri FCM algoritma za sprovedene segmentacije, upotrebom Euklidske metrike d_E i upotrebom agregirane funkcije rastojanja dobijene

TABELA 4.3: Rezultati sprovedene segmentacije, WAMP operator.

	PI	IT	RT
d_E	279.8552	18	55
\tilde{d}_1	$1.4048 \cdot 10^7$	37	906
\tilde{d}_2	$3.4608 \cdot 10^8$	37	889
\tilde{d}_3	$1.7176 \cdot 10^3$	27	375
\tilde{d}_4	9.6296	19	178
\tilde{d}_5	$3.4540 \cdot 10^8$	37	765
\tilde{d}_6	12.2833	19	319
\tilde{d}_7	$2.2106 \cdot 10^8$	37	639
\tilde{d}_8	$2.5180 \cdot 10^4$	34	515
\tilde{d}_9	49.3797	2	17
\tilde{d}_{10}	$1.6725 \cdot 10^4$	39	635

primenom WAMP operatora za različite vrednosti λ i ω parametara, $d_{\lambda,\omega}$, prikazani su u Tabeli 4.3. Posebno nas interesuje parametar PI "performance index", čija manja vrednost ukazuje na kompaktnije klastere, odnosno bolje sprovedenu segmentaciju. Pored toga navedeni su broj iteracija i vreme rada algoritma, koji takođe mogu biti sagledavani kao bitni kriterijumi u smislu efikasnosti metode. Iz prikazane tabele možemo zaključiti da WAMP agregirana funkcija rastojanja sa prikladno izabranim parametrima daje mnogo bolje rezultate od Euklidske metrike.

Test 2

U drugom testu procesirana je slika veličine 481×321 piksela, koja je preuzeta iz javno dostupne baze slika - *Department of Electrical Engineering and Computer Sciences at University of California, Berkeley, segmentation dataset-training images*, [70], Slika 4.7. Originalna slika segmentirana je upotrebom Euklidske metrike, d_E i upotrebom WAMP agregirane funkcije rastojanja \tilde{d}_i , $i \in \{1, \dots, 10\}$ za različite vrednosti parametara λ i ω , kao što smo prikazali u prethodnom testu. Izlazne vrednosti parametara FCM



SLIKA 4.7: Originalna slika koja je procesirana u FCM algoritmu za segmentaciju slike upotrebom različitih funkcija rastojanja.

TABELA 4.4: Rezultati sprovedene segmentacije, WAMP operator.

	PI	IT	RT
d_E	787.6247	26	222
\tilde{d}_1	$5.2897 \cdot 10^7$	12	512
\tilde{d}_2	$1.3054 \cdot 10^9$	12	580
\tilde{d}_3	$4.8550 \cdot 10^3$	33	1850
\tilde{d}_4	20.0298	40	2185
\tilde{d}_5	$1.3024 \cdot 10^9$	12	291
\tilde{d}_6	40.3574	18	787
\tilde{d}_7	$8.3390 \cdot 10^8$	12	480
\tilde{d}_8	$7.1235 \cdot 10^4$	28	1374
\tilde{d}_9	$1.3277 \cdot 10^3$	2	42
\tilde{d}_{10}	$5.4901 \cdot 10^4$	34	1506

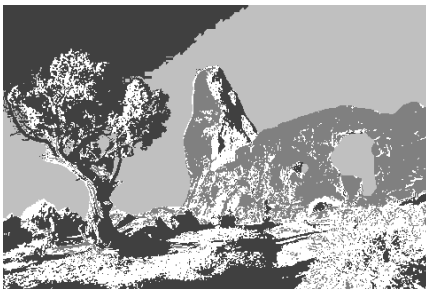
algoritma prikazane su u Tabeli 4.4, koja nam ukazuje da su rezultati dobijeni upotrebom nove funkcije rastojanja, sa odgovarajućim vrednostima parametara (funkcije \tilde{d}_4 i \tilde{d}_6), bolji nego oni dobijeni upotrebom Euklidske metrike.



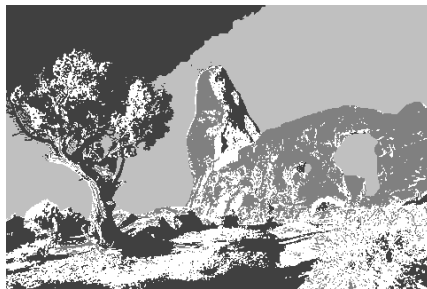
SLIKA 4.8: Originalna slika koja je procesirana u FCM algoritmu za segmentaciju slike upotrebom različitih funkcija rastojanja.

Test 3

Na trećem testu ponovljena je ista procedura kao u prethodna dva opisana slučaja. Naime, procesirana je Slika 4.8, veličine 321×481 piksela, koja je preuzeta iz javno dostupne baze slika namenjenih za segmentaciju - *Department of Electrical Engineering and Computer Sciences at University of California, Berkeley, segmentation dataset-training images*, [70]. Tabela 4.5 predstavlja izlazne parametre FCM algoritma za sprovedenu segmentaciju. Analizom rezultata prikazanih u tabeli možemo zaključiti da se adekvatnim izborom parametara i WAMP agregirane funkcije rastojanja (funkcije \tilde{d}_4 , \tilde{d}_6 i \tilde{d}_9), mogu proizvoditi značajno bolji rezultati od onih koji su dobijeni upotrebom Euklidske metrike d_E . Na Slici 4.11 ilustrativno su prikazani rezultati sprovedene segmentacije.



(a) Segmentacija sa metrikom d_E .



(b) Segmentacija sa funkcijom d_4 .

SLIKA 4.9: Ilustracija rezultata segmentacije dobijenih primenom Euklidske metrike i WAMP agregirane funkcije rastojanja.

TABELA 4.5: Rezultati sprovedene segmentacije, WAMP operator.

	PI	IT	RT
d_E	816.0351	22	269
\tilde{d}_1	$3.9367 \cdot 10^7$	23	1119
\tilde{d}_2	$9.6430 \cdot 10^8$	23	1289
\tilde{d}_3	$5.5064 \cdot 10^3$	2	41
\tilde{d}_4	18.6072	13	403
\tilde{d}_5	$9.6142 \cdot 10^8$	23	994
\tilde{d}_6	19.9910	16	679
\tilde{d}_7	$6.1545 \cdot 10^8$	23	851
\tilde{d}_8	$8.2491 \cdot 10^4$	26	1392
\tilde{d}_9	469.3552	2	148
\tilde{d}_{10}	$5.8831 \cdot 10^4$	31	1714

4.5 Fazi metrike

Kao što smo već spomenuli postoje različite funkcije kojima se može modelirati rastojanje između dva objekta. U zavisnosti od konstrukcije i razmatranih osobina, ovakve funkcije različito su tretirane u literaturi i korištene za najrazličitije primene, [19, 50, 66, 71]. U pregledu literature, srećemo se sa fazi metričkim prostorima, [72–75], kao i primerima fazi metrika, koji su pronašli upotrebu u analizi i obradi digitalnih slika [48, 76, 77]. U ovoj sekciji razmatramo osobine i primere fazi T-metrika i fazi S-metrika, [48, 49], koje ćemo zatim upotrebiti za konstrukciju nove funkcije rastojanja i demonstrirati primenu iste u segmentaciji digitalnih slika, [49].

Definicija 4.5.1. Neka je X proizvoljan neprazan skup, i neka su T i S t -norma i t -konorma, respektivno. Neka je $d : X^2 \rightarrow [0, \infty)$ funkcija koja može imati sledeće osobine.

$$(1) \quad \forall x \in X, d(x, x) = 0.$$

$$(2) \quad \forall x, y \in X, d(x, y) = d(y, x).$$

$$(3) \quad \forall x, y \in X, d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y.$$

$$(4) \quad \forall x, y, z \in X, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Dodatno, ako je preslikavanje d ograničeno, odnosno skup vrednosti mu je interval $[0, 1]$, $d : X^2 \rightarrow [0, 1]$, naredne dve osobine mogu biti razmatrane:

$$(4') \quad \forall x, y, z \in X, d(x, z) \geq T(d(x, y), d(y, z));$$

$$(4'') \quad \forall x, y, z \in X, d(x, z) \leq S(d(x, y), d(y, z)).$$

U zavisnosti od toga koje su od pomenutih osobina ispunjene, razlikujemo nekoliko tipova rastojanja. Neka od njih smo ranije već spominjali, ali ovde objedinjujemo pregled.

- Ako d ispunjava osobine (1) i (2), naziva se *funkcija rastojanja*.
- Ako je samo osobina (1) ispunjena, onda je d *kvazi-rastojanje*.
- Ako su ispunjene osobine (1)-(4), d je *metrika*.
- Ako su ispunjene osobine (1), (2) i (4), d je *pseudo-metrika*.
- Ako su ispunjene osobine (1), (3) i (4), d je *kvazi-metrika*.
- Ako su ispunjene osobine (1), (2) i (3), d je *semi-metrika*.
- Semi-metrika koja umesto nejednakosti trougla (4) zadovoljava neku od nejednakosti (4') ili (4'') naziva se *ultra-metrika*.

Definicija 4.5.2. *Fazi S -metrički prostor* je uređena trojka (X, s, S) , gde je X neprazan skup, S je neprekidna t -konorma, a s fazi skup na $X^2 \times (0, \infty)$ tako da su zadovoljeni sledeći uslovi:

$$\forall x, y, z \in X \text{ i } \alpha, \beta > 0$$

$$1. \quad s(x, y, \alpha) \in [0, 1),$$

$$2. \quad s(x, y, \alpha) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

3. $\mathbf{s}(x, y, \alpha) = \mathbf{s}(y, x, \alpha)$,
4. $S(\mathbf{s}(x, y, \alpha), \mathbf{s}(y, z, \beta)) \geq \mathbf{s}(x, z, \alpha + \beta)$,
5. $\mathbf{s}(x, y, -) : (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ je neprekidna funkcija.

Fazi skup \mathbf{s} naziva se *fazi S-metrika*. Ako umesto uslova 1. za fazi skup \mathbf{s} važi $\mathbf{s}(x, y, \alpha) \in [0, 1]$, kažemo da je *fazi S-metrika u širem smislu*, i uređena trojka (X, \mathbf{s}, S) je onda *fazi S-metrički prostor u širem smislu*, [48]. Ako umesto uslova 2. važi:

$$2'. \mathbf{s}(x, x, \alpha) = 0,$$

kažemo da je \mathbf{s} *fazi S-pseudo metrika*.

Definicija 4.5.3. *Fazi T-metrički prostor* je uređena trojka (X, \mathbf{t}, T) , gde je X neprazan skup, T je neprekidna t -norma, a \mathbf{t} fazi skup na $X^2 \times (0, \infty)$ tako da su zadovoljeni sledeći uslovi:

$$\forall x, y, z \in X \text{ i } \alpha, \beta > 0.$$

1. $\mathbf{t}(x, y, \alpha) \in (0, 1]$,
2. $\mathbf{t}(x, y, \alpha) = 1 \Leftrightarrow x = y$,
3. $\mathbf{t}(x, y, \alpha) = \mathbf{t}(y, x, \alpha)$,
4. $T(\mathbf{t}(x, y, \alpha), \mathbf{t}(y, z, \beta)) \leq \mathbf{t}(x, z, \alpha + \beta)$,
5. $\mathbf{t}(x, y, -) : (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ je neprekidna funkcija.

Fazi skup \mathbf{t} naziva se *fazi T-metrika*. Ako umesto uslova 1. za fazi skup \mathbf{t} važi $\mathbf{t}(x, y, \alpha) \in [0, 1]$, kažemo da je *fazi T-metrika u širem smislu*, onda je i uređena trojka (X, \mathbf{t}, T) *fazi T-metrički prostor u širem smislu*. Ako umesto uslova 2. važi sledeća jednakost:

$$2'. \mathbf{t}(x, x, \alpha) = 1,$$

kažemo da je \mathbf{t} *fazi T-pseudo metrika*.

Specijalni slučajevi fazi metrika su funkcije \mathbf{s} and \mathbf{t} koje ne zavise od $\alpha \in (0, \infty)$.

Definicija 4.5.4. Fazi S -metrika \mathbf{s} (odnosno fazi T -metrika \mathbf{t}) je *stacionarna* na skupu X ako \mathbf{s} (odnosno \mathbf{t}) ne zavisi od α , odnosno za sve fiksirane $x, y \in X$, funkcija $\mathbf{s}_{x,y}(\alpha) = \mathbf{s}(x, y, \alpha)$, $\alpha \in (0, \infty)$ je konstanta ($\mathbf{t}_{x,y}(\alpha) = \mathbf{t}(x, y, \alpha)$, $\alpha \in (0, \infty)$ je konstanta).

Napomena 4.5.5. Primetimo da u slučaju stacionarne fazi T -metrike \mathbf{t} i stacionarne S -metrike \mathbf{s} u širem smislu, funkcije \mathbf{t} i \mathbf{s} su funkcije rastojanja i semi-metrike.

Dokaz naredne teoreme, koja govori o dualnim t -normama i t -konormama, kao i njima odgovarajućim fazi metričkim prostorima, prikazan je u [48].

Teorema 4.5.6.

- (a) Ako je (X, \mathbf{s}, S) fazi S -metrički prostor i T je t -norma dualna t -konormi S u odnosu na neprekidni involutivni fazi komplement c , tada je $(X, c \circ \mathbf{s}, T)$ fazi T -metrički prostor.
- (b) Ako je (X, \mathbf{t}, T) fazi T -metrički prostor i S je t -konorma dualna t -normi T u odnosu na neprekidni involutivni fazi komplement c , tada je $(X, c \circ \mathbf{t}, S)$ fazi S -metrički prostor.

Definicija 4.5.7. Za fazi metričke prostore (X, \mathbf{s}, S) i (X, \mathbf{t}, T) i njima odgovarajuće fazi metrike \mathbf{s} i \mathbf{t} iz prethodne teoreme, kažemo da su dualni u odnosu na fazi komplement c , odnosno važi:

(X, \mathbf{s}, S) je dualno sa $(X, c \circ \mathbf{s}, T)$ i (X, \mathbf{t}, T) je dualno sa $(X, c \circ \mathbf{t}, S)$.

U nastavku navodimo nekoliko primera fazi metrika iz literature, [48, 72–75, 77], koje ćemo kasnije koristiti u eksperimentima.

Primer 4.5.8. Za fiksiran parametar $K > 0$, funkcija $\mathbf{t} : [0, \infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa

$$\mathbf{t}(x, y) = \frac{\min\{x, y\} + K}{\max\{x, y\} + K}$$

je fazi T -metrika u odnosu na t -normu množenja (eng. multiplication t -norm), $T(x, y) = xy$, $x, y \in [0, 1]$,

i preslikavanje $\mathbf{s} : [0, \infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definisano jednakošću

$$\mathbf{s}(x, y) = \frac{|x - y|}{\max(x, y) + K}$$

je fazi S -metrika u odnosu na t -konormu algebarske sume (eng. algebraic sum t -conorm),

$$S(x, y) = 1 - (1 - x)(1 - y) = x + y - xy, \quad x, y \in [0, 1].$$

Prethodno navedene fazi metrike su dualne u odnosu na standardni fazi komplement $c(x) = 1 - x$, $x \in [0, 1]$.

Primer 4.5.9. Za fiksirani parametar $K > 0$, funkcija $\mathbf{t} : [0, \infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa

$$\mathbf{t}(x, y) = \frac{\frac{x+y}{2} + K}{\max\{x, y\} + K}$$

je fazi T -metrika u odnosu na t -normu množenja, dok je preslikavanje $\mathbf{s} : [0, \infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definisano sa

$$\mathbf{s}(x, y) = \frac{|x - y|}{2(\max(x, y) + K)}$$

fazi S -metrika u odnosu na t -konormu algebarske sume.

Primer 4.5.10. Ako je (X, d) metrički prostor i parametar $t > 0$, preslikavanje $\mathbf{t} : X^2 \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definisano narednom jednakošću,

$$\mathbf{t}(x, y, t) = \frac{t}{t + d(x, y)}$$

je fazi T -metrika u odnosu na t -normu množenja.

U odnosu na standardni fazi komplement, pomenuta fazi T -metrika dualna je fazi S -metrici $\mathbf{s} : X^2 \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathbf{s}(x, y, t) = 1 - \mathbf{t}(x, y, t) = \frac{d(x, y)}{t + d(x, y)},$$

koja je fazi S -metrika u odnosu na t -konormu algebarske sume.

Sledeća teorema koju navodimo predstavlja novi metod za formiranje fazi S -pseudo metrike primenom agregacione funkcije na niz inicijalnih fazi S -pseudo metrika, [49].

Teorema 4.5.11. Neka je A neprekidna n -arna agregaciona funkcija, koja je neprekidno kompatibilna sa neprekidnim t -konormama S_1, \dots, S_n . Ako su $\mathbf{s}_i : X_i^2 \times (0, +\infty) \rightarrow [0, 1]$, $i \in I = \{1, \dots, n\}$ fazi S -pseudo metrike u odnosu na t -konorme S_i , $i \in \{1, \dots, n\}$ respektivno, onda za $X = X_1 \times \dots \times X_n$, funkcija $\mathbf{s} : X^2 \times (0, +\infty) \rightarrow [0, 1]$:

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \alpha) = A(\mathbf{s}_1(x_1, y_1, \alpha), \dots, \mathbf{s}_n(x_n, y_n, \alpha))$$

$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in X$, je fazi S -pseudo metrika u širem smislu u odnosu na neku neprekidnu t -konormu S .

Ako je A striktno monotona funkcija, onda je \mathbf{s} fazi S -pseudo metrika. Ako su dodatno \mathbf{s}_i fazi S -metrike, tada je \mathbf{s} fazi S -metrika.

Dokaz. Za funkciju \mathbf{s} , dokazaćemo osobine iz Definicije 4.5.2.

1. Iz $\mathbf{s}_i(x_i, y_i, \alpha) \in [0, 1]$, $i \in I$ očigledno sledi

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \alpha) = A(\mathbf{s}_1(x_1, y_1, \alpha), \dots, \mathbf{s}_n(x_n, y_n, \alpha)) \in [0, 1].$$

- 2'. Koristeći osobinu 2'. fazi S -pseudo metrika \mathbf{s}_i , iz $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ dobijamo

$$\forall i \in I, x_i = y_i \Rightarrow \forall i \in I, \mathbf{s}_i(x_i, y_i, \alpha) = 0,$$

i onda koristeći granični uslov agregacione funkcije A zaključujemo

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \alpha) = A(\mathbf{s}_1(x_1, y_1, \alpha), \dots, \mathbf{s}_n(x_n, y_n, \alpha)) = 0.$$

3. Koristeći osobinu 3. funkcija \mathbf{s}_i , $i \in I$ dobijamo

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \alpha) &= A(\mathbf{s}_1(x_1, y_1, \alpha), \dots, \mathbf{s}_n(x_n, y_n, \alpha)) \\ &= A(\mathbf{s}_1(y_1, x_1, \alpha), \dots, \mathbf{s}_n(y_n, x_n, \alpha)) \\ &= \mathbf{s}(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \alpha). \end{aligned}$$

4. Neka je $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in X$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in X$ i $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n) \in X$. Iz osobine 4. fazi S -pseudo metrika \mathbf{s}_i sledi

$$\forall i \in I, \mathbf{s}_i(x_i, z_i, \alpha + \beta) \leq S_i(\mathbf{s}_i(x_i, y_i, \alpha), \mathbf{s}_i(y_i, z_i, \beta)).$$

Dalje, koristeći monotonost agregacione funkcije A dobijamo

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \alpha + \beta) &= A(\mathbf{s}_1(x_1, z_1, \alpha + \beta), \dots, \mathbf{s}_n(x_n, z_n, \alpha + \beta)) \\ &\leq A(S_1(\mathbf{s}_1(x_1, y_1, \alpha), \mathbf{s}_1(y_1, z_1, \beta)), \\ &\quad \dots, S_n(\mathbf{s}_n(x_n, y_n, \alpha), \mathbf{s}_n(y_n, z_n, \beta))). \end{aligned}$$

Zato što je agregaciona funkcija A neprekidno kompatibilna sa neprekidnim t -konormama S_1, \dots, S_n , postoji t -konorma S tako da važi naredna nejednakost

$$\begin{aligned} &A(S_1(\mathbf{s}_1(x_1, y_1, \alpha), \mathbf{s}_1(y_1, z_1, \beta)) \dots, S_n(\mathbf{s}_n(x_n, y_n, \alpha), \mathbf{s}_n(y_n, z_n, \beta))) \\ &\leq S(A(\mathbf{s}_1(x_1, y_1, \alpha), \dots, \mathbf{s}_n(x_n, y_n, \alpha)), \\ &\quad \dots, A(\mathbf{s}_1(y_1, z_1, \beta), \dots, \mathbf{s}_n(y_n, z_n, \beta))). \end{aligned}$$

Dakle, možemo zaključiti da postoji neprekidna t -konorma S tako da

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \alpha + \beta) &\leq S(A(\mathbf{s}_1(x_1, y_1, \alpha), \dots, \mathbf{s}_n(x_n, y_n, \alpha)), \\ &\quad \dots, A(\mathbf{s}_1(y_1, z_1, \beta), \dots, \mathbf{s}_n(y_n, z_n, \beta))) \\ &= S(\mathbf{s}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \alpha), \mathbf{s}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \beta)). \end{aligned}$$

5. Kako su fazi S -metrike \mathbf{s}_i , $i \in I$ neprekidne po parametru α i A je neprekidna funkcija, njihova kompozicija \mathbf{s} je takođe neprekidna funkcija.

Dakle, ovim smo pokazali da je \mathbf{s} fazi S -pseudo metrika u širem smislu u odnosu na neku t -konormu S .

Ako je A striktno monotona agregaciona funkcija, iz Leme 3.4.7.(b) i važi $\mathbf{s}_i(x_i, y_i, \alpha) \in [0, 1)$, $i \in I$ sledi

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \alpha) = A(\mathbf{s}_1(x_1, y_1, \alpha), \dots, \mathbf{s}_n(x_n, y_n, \alpha)) \in [0, 1),$$

odnosno \mathbf{s} je fazi S -pseudo metrika.

Ako je A striktno monotona funkcija i \mathbf{s}_i su fazi S -metrike, onda iz Leme 3.4.7.(a) sledi osobina 2. za \mathbf{s} , odnosno \mathbf{s} je fazi S -metrika. \square

Napomena 4.5.12. Ako su u prethodnoj teoremi, \mathbf{s}_i dodatno još stacionarne metrike, one su neprekidne po parametru α , što implicira da i \mathbf{s} ima istu

osobinu. Zbog toga pretpostavka o neprekidnosti funkcije A u tom slučaju nije neophodna.

Iz Teoreme 3.4.6 i Teoreme 4.5.11, kao specijalan slučaj važi naredna teorema koja je dokazana u publikaciji [48].

Teorema 4.5.13. Ako su \mathbf{s}_i fazi S -metrike u odnosu na istu striktnu t -konormu S , onda je

$$\mathbf{s}(x, y) = S^{n-1}(\mathbf{s}_1(x_1, y_1), \dots, \mathbf{s}_n(x_n, y_n))$$

fazi S -metrika u odnosu na istu (striktnu) t -konormu S . Ako S nije striktna, onda je \mathbf{s} fazi S -metrika u širem smislu. Ako je S neprekidna t -konorma, onda je

$$\mathbf{s}(x, y, \alpha) = S^{n-1}(\mathbf{s}_1(x_1, y_1, \alpha), \dots, \mathbf{s}_n(x_n, y_n, \alpha)) \text{ fazi } S\text{-metrika.}$$

Napomena 4.5.14. Razmatrajući generalizovanu kvazi-aritmetičku sredinu M i odgovarajuću Arhimedovsku t -konormu \mathbf{s}_i iz Teoreme 3.4.5, zaključujemo da su ispunjeni uslovi Teoreme 4.5.11, što implicira da je

$$\mathbf{s}(x, y) = M(\mathbf{s}_1(x_1, y_1), \dots, \mathbf{s}_n(x_n, y_n)) \text{ fazi } S\text{-metrika.}$$

Naredna Teorema analogna je Teoremi 4.5.11, samo što sada razmatramo konstrukciju fazi T -pseudo metrike, dok smo prethodno prikazali postupak za fazi S -pseudo metriku. Obe teoreme dokazane su u radu [49] i predstavljaju originalni doprinos disertacije.

Teorema 4.5.15. Neka je A neprekidna n -arna agregaciona funkcija, koja je neprekidno kompatibilna sa neprekidnim t -normama T_1, \dots, T_n . Ako su $\mathbf{t}_i : X_i^2 \times (0, \infty) \rightarrow (0, 1]$, $i \in I = \{1, \dots, n\}$ fazi T -(pseudo) metrike u odnosu na t -norme T_i , respektivno, onda za $X = X_1 \times \dots \times X_n$, funkcija $\mathbf{t} : X^2 \times (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ definisana sa

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \alpha) = A(\mathbf{t}_1(x_1, y_1, \alpha), \dots, \mathbf{t}_n(x_n, y_n, \alpha))$$

$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in X$, je fazi T -pseudo metrika u širem smislu u odnosu na neku neprekidnu t -normu T .

Ako je A is striktno monotona funkcija, onda je \mathbf{t} fazi T -pseudo metrika. Ako su dodatno \mathbf{t}_i fazi T -metrike, onda je \mathbf{t} fazi T -metrika.

Dokaz. Za funkciju \mathbf{t} dokazaćemo osobine iz Definicije 4.5.3.

1. Očigledno važi,

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \alpha) = A(\mathbf{t}_1(x_1, y_1, \alpha), \dots, \mathbf{t}_n(x_n, y_n, \alpha)) \in [0, 1]$$

$$\text{jer } \mathbf{t}_i(x_i, y_i, \alpha) \in (0, 1], i \in I.$$

2'. Koristeći osobinu 2'. fazi T -pseudo metrike, iz $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ dobijamo

$$\forall i \in I, x_i = y_i \Rightarrow \forall i \in I, \mathbf{t}_i(x_i, y_i, \alpha) = 1,$$

i onda koristeći granični uslov agregacione funkcije A zaključujemo

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \alpha) = A(\mathbf{t}_1(x_1, y_1, \alpha), \dots, \mathbf{t}_n(x_n, y_n, \alpha)) = 1.$$

3. Koristeći osobinu 3. fazi T -pseudo metrika $\mathbf{t}_i, i \in I$ dobijamo

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \alpha) &= A(\mathbf{t}_1(x_1, y_1, \alpha), \dots, \mathbf{t}_n(x_n, y_n, \alpha)) \\ &= A(\mathbf{t}_1(y_1, x_1, \alpha), \dots, \mathbf{t}_n(y_n, x_n, \alpha)) \\ &= \mathbf{t}(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \alpha). \end{aligned}$$

4. Neka $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in X, \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in X$ i $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n) \in X$. Iz osobine 4. fazi T -pseudo metrika \mathbf{t}_i sledi

$$\forall i \in I, \mathbf{t}_i(x_i, z_i, \alpha + \beta) \geq T_i(\mathbf{t}_i(x_i, y_i, \alpha), \mathbf{t}_i(y_i, z_i, \beta)).$$

Dalje, koristeći monotonost agregacione funkcije A dobijamo

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \alpha + \beta) &= A(\mathbf{t}_1(x_1, z_1, \alpha + \beta), \dots, \mathbf{t}_n(x_n, z_n, \alpha + \beta)) \\ &\geq A(T_1(\mathbf{t}_1(x_1, y_1, \alpha), \mathbf{t}_1(y_1, z_1, \beta)), \\ &\quad \dots, T_n(\mathbf{t}_n(x_n, y_n, \alpha), \mathbf{t}_n(y_n, z_n, \beta))). \end{aligned}$$

Zato što je agregaciona funkcija A neprekidno kompatibilna sa neprekidnim t -normama T_1, \dots, T_n , postoji t -norma T tako da

$$\begin{aligned} &A(T_1(\mathbf{t}_1(x_1, y_1, \alpha), \mathbf{t}_1(y_1, z_1, \beta)), \\ &\quad \dots, T_n(\mathbf{t}_n(x_n, y_n, \alpha), \mathbf{t}_n(y_n, z_n, \beta))) \end{aligned}$$

$$\geq T(A(\mathbf{t}_1(x_1, y_1, \alpha), \dots, \mathbf{t}_n(x_n, y_n, \alpha)), \\ \dots, A(\mathbf{t}_1(y_1, z_1, \beta), \dots, \mathbf{t}_n(y_n, z_n, \beta))).$$

Dakle, možemo zaključiti da postoji neprekidna t -norma T tako da je ispunjeno

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \alpha + \beta) \geq T(A(\mathbf{t}_1(x_1, y_1, \alpha), \dots, \mathbf{t}_n(x_n, y_n, \alpha)), \\ \dots, A(\mathbf{t}_1(y_1, z_1, \beta), \dots, \mathbf{t}_n(y_n, z_n, \beta))) \\ = T(\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \alpha), \mathbf{t}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \beta)).$$

5. Kako su T -metrike \mathbf{t}_i , $i \in I$ neprekidne po parametru α i A neprekidna funkcija, njihova kompozicija \mathbf{t} je takođe neprekidna funkcija.

Dakle, ovim smo pokazali da je \mathbf{t} fazi T -pseudo metrika u širem smislu u odnosu na neku t -normu T .

Ako je A striktno monotona agregaciona funkcija, iz Leme 3.4.7.(a) i zato što važi $\mathbf{t}_i(x_i, y_i, \alpha) \in (0, 1]$, $i \in I$ sledi

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \alpha) = A(\mathbf{t}_1(x_1, y_1, \alpha), \dots, \mathbf{t}_n(x_n, y_n, \alpha)) \in (0, 1],$$

odnosno \mathbf{t} je fazi T - pseudo metrika.

Ako je A striktno monotona funkcija i \mathbf{t}_i su fazi T -metrike, onda iz Leme 3.4.7.(b) sledi osobina 2. za \mathbf{t} , odnosno \mathbf{t} je fazi T -metrika. \square

Napomena 4.5.16. Ako su u prethodnoj teoremi, \mathbf{t}_i dodatno stacionarne metrike, onda su one neprekidne funkcije po parametru α , što implicira da i \mathbf{t} ima istu osobinu. Zbog toga pretpostavka o neprekidnosti funkcije A u tom slučaju nije potrebna.

Iz Teoreme 3.4.6 i Teoreme 4.5.15 kao specijalan slučaj važi naredna teorema koja je dokazana u publikaciji [48].

Teorema 4.5.17. Ako su \mathbf{t}_i fazi T -metrike u odnosu na istu striktnu t -normu T , onda je

$$\mathbf{t}(x, y) = T^{n-1}(\mathbf{t}_1(x_1, y_1), \dots, \mathbf{t}_n(x_n, y_n))$$

fazi T -metrika u odnosu na istu (striktnu) t -normu T . Ako T nije striktna, onda je \mathbf{t} fazi T -metrika u širem smislu. Ako je T neprekidna t -norma, onda je

$$\mathbf{t}(x, y, \alpha) = T^{n-1}(\mathbf{t}_1(x_1, y_1, \alpha), \dots, \mathbf{t}_n(x_n, y_n, \alpha)) \text{ fazi } T\text{-metrika.}$$

Napomena 4.5.18. Specijalno, za vrednosti $\alpha \in (0, \infty)$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in X$ i $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in X$ preslikavanje

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \alpha) = \prod_{i=1}^n \mathbf{t}_i(x_i, y_i, \alpha),$$

je fazi T -metrika u odnosu na agregacioni operator proizvoda, što ćemo koristiti u eksperimentalnom delu pri formiranju funkcije rastojanja za primenu u segmentaciji digitalnih slika.

Napomena 4.5.19. Razmatrajući generalizovanu kvazi-aritmetičku sredinu M i odgovarajuću Arhimedovsku t -normu \mathbf{t}_i iz Teoreme 3.4.5, sledi da su zadovoljeni uslovi Teoreme 4.5.15, što implicira da je

$$\mathbf{t}(x, y) = M(\mathbf{t}_1(x_1, y_1), \dots, \mathbf{t}_n(x_n, y_n)) \text{ fazi } T\text{-metrika.}$$

Sledeće dve teoreme koje navodimo predstavljaju originalni doprinos disertacije i dokazane su u radu [49].

Teorema 4.5.20. Neka je $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ neprekidno striktno rastuće sirjektivno preslikavanje i neka je X proizvoljan neprazan skup. Ako je $\mathbf{s} : X^2 \times (0, +\infty) \rightarrow [0, 1)$ fazi S -(pseudo) metrika u odnosu na neprekidnu t -konormu S , onda je funkcija $\mathbf{s}_h : X^2 \times (0, +\infty) \rightarrow [0, 1)$,

$$\mathbf{s}_h(x, y, \alpha) = h(\mathbf{s}(x, y, \alpha))$$

takođe fazi S -(pseudo) metrika u odnosu na neprekidnu t -konormu S_h ,

$$S_h(a, b) = h \circ S(h^{-1}(a), h^{-1}(b)), \quad a, b \in [0, 1].$$

Ako je \mathbf{s} fazi S -(pseudo) metrika u širem smislu, onda je \mathbf{s}_h takođe fazi S -(pseudo) metrika u širem smislu.

Dokaz. Jasno je da je funkcija h bijektivna i $h(0) = 0$ i $h(1) = 1$. Funkcija S_h je t -konorma (vidi Teoremu 3.4.2) i S_h je neprekidna funkcija jer je kompozicija neprekidnih funkcija.

1. Iz aksioma 1. Definicije 4.5.2, za \mathbf{s} važi $\mathbf{s}(x, y, \alpha) \in [0, 1]$, i pošto je funkcija $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ striktno rastuća, možemo zaključiti $0 = h(0) \leq h(\mathbf{s}(x, y, \alpha)) < h(1) = 1 \Rightarrow \mathbf{s}_h(x, y, \alpha) \in [0, 1]$.

Ako je \mathbf{s} fazi S -(pseudo) metrika u širem smislu onda $\mathbf{s}(x, y, \alpha) \in [0, 1]$, pa sličnim razmatranjem kao što je prethodno navedeno zaključujemo $\mathbf{s}_h(x, y, \alpha) \in [0, 1]$.

2. Kako je h bijektivna funkcija i $h(0) = 0$, možemo zaključiti:

$$\mathbf{s}_h(x, y, \alpha) = h(\mathbf{s}(x, y, \alpha)) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{s}(x, y, \alpha) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

Ako je \mathbf{s} fazi S -pseudo metrika, onda implikacija sa desna na levo i dalje važi i \mathbf{s}_h je fazi S -pseudo metrika.

3. $\mathbf{s}_h(x, y, \alpha) = h(\mathbf{s}(x, y, \alpha)) = h(\mathbf{s}(y, x, \alpha)) = \mathbf{s}_h(y, x, \alpha)$.

4. Koristeći aksiomu 4. iz Definicije 4.5.2, monotonost funkcije h i definiciju funkcije S_h dobijamo

$$S(\mathbf{s}(x, y, \alpha), \mathbf{s}(y, z, \beta)) \geq \mathbf{s}(x, z, \alpha + \beta)$$

$$\Rightarrow h(S(\mathbf{s}(x, y, \alpha), \mathbf{s}(y, z, \beta))) \geq h(\mathbf{s}(x, z, \alpha + \beta))$$

$$\Rightarrow h \circ S(h^{-1} \circ h(\mathbf{s}(x, y, \alpha)), h^{-1} \circ h(\mathbf{s}(y, z, \beta))) \geq \mathbf{s}_h(x, z, \alpha + \beta)$$

$$\Rightarrow h \circ S(h^{-1}(\mathbf{s}_h(x, y, \alpha)), h^{-1}(\mathbf{s}_h(y, z, \beta))) \geq \mathbf{s}_h(x, z, \alpha + \beta)$$

$$\Rightarrow S_h(\mathbf{s}_h(x, y, \alpha), \mathbf{s}_h(y, z, \beta)) \geq \mathbf{s}_h(x, z, \alpha + \beta).$$

Prema Teoremi 3.4.2, S_h je t -konorma, pa možemo zaključiti da aksioma 4. iz Definicije 4.5.2 važi za \mathbf{s}_h u odnosu na t -konormu S_h . Iz neprekidnosti funkcija h i S , sledi da je i funkcija S_h neprekidna.

5. Iz neprekidnosti funkcija $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ i $\mathbf{s}(x, y, -) : (0, +\infty) \rightarrow [0, 1]$ sledi da je funkcija $\mathbf{s}_h(x, y, -) : (0, +\infty) \rightarrow [0, 1]$ takođe neprekidna.

□

Teorema 4.5.21. Neka je $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ neprekidno striktno rastuće preslikavanje i neka je X proizvoljan neprazan skup. Ako je $\mathbf{t} : X^2 \times (0, +\infty) \rightarrow (0, 1]$ fazi T -(pseudo) metrika u odnosu na neprekidnu t -normu T , onda je preslikavanje $\mathbf{t}_h : X^2 \times (0, +\infty) \rightarrow (0, 1]$,

$$\mathbf{t}_h(x, y, \alpha) = h(\mathbf{t}(x, y, \alpha))$$

takođe fazi T -(pseudo) metrika u odnosu na neprekidnu t -normu T_h ,

$$T_h(a, b) = h \circ T(h^{-1}(a), h^{-1}(b)), \quad a, b \in [0, 1].$$

Ako je \mathbf{t} fazi T -(pseudo) metrika u širem smislu, onda je \mathbf{t}_h takođe T -(pseudo) metrika u širem smislu.

Dokaz. Jasno je da je funkcija h bijektivna i važi $h(0) = 0$ and $h(1) = 1$. Funkcija T_h je t -norma (vidi Teoremu 3.4.1) i T_h je neprekidna funkcija jer je kompozicija neprekidnih funkcija.

1. Iz aksioma 1. Definicije 4.5.3, za \mathbf{t} važi $\mathbf{t}(x, y, \alpha) \in (0, 1]$ i pošto je funkcija $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ striktno rastuća, možemo zaključiti $0 = h(0) < h(\mathbf{t}(x, y, \alpha)) \leq h(1) = 1 \Rightarrow \mathbf{t}_h(x, y, \alpha) \in (0, 1]$.

Ako je \mathbf{t} fazi T -(pseudo) metrika u širem smislu, onda $\mathbf{t}(x, y, \alpha) \in [0, 1]$, pa sličnim razmatranjem kao što je prethodno navedeno zaključujemo $\mathbf{t}_h(x, y, \alpha) \in [0, 1]$.

2. Kako je h bijektivna funkcija i $h(1) = 1$, sledi da je:

$$\mathbf{t}_h(x, y, \alpha) = h(\mathbf{t}(x, y, \alpha)) = 1 \Leftrightarrow \mathbf{t}(x, y, \alpha) = 1 \Leftrightarrow x = y.$$

Ako je \mathbf{t} fazi T -pseudo metrika, onda implikacija sa desna na levo i dalje važi i \mathbf{t}_h je fazi T -pseudo metrika.

3. $\mathbf{t}_h(x, y, \alpha) = h(\mathbf{t}(x, y, \alpha)) = h(\mathbf{t}(y, x, \alpha)) = \mathbf{t}_h(y, x, \alpha)$.

4. Koristeći aksiomu 4. iz Definicije 4.5.3, monotonost funkcije h i definiciju funkcije T_h dobijamo

$$T(\mathbf{t}(x, y, \alpha), \mathbf{t}(y, z, \beta)) \leq \mathbf{t}(x, z, \alpha + \beta)$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow h(T(\mathbf{t}(x, y, \alpha), \mathbf{t}(y, z, \beta))) \leq h(\mathbf{t}(x, z, \alpha + \beta)) \\
&\Rightarrow h \circ T(h^{-1} \circ h(\mathbf{t}(x, y, \alpha)), h^{-1} \circ h(\mathbf{t}(y, z, \beta))) \leq \mathbf{t}_h(x, z, \alpha + \beta) \\
&\Rightarrow h \circ T(h^{-1}(\mathbf{t}_h(x, y, \alpha)), h^{-1}(\mathbf{t}_h(y, z, \beta))) \leq \mathbf{t}_h(x, z, \alpha + \beta) \\
&\Rightarrow T_h(\mathbf{t}_h(x, y, \alpha), \mathbf{t}_h(y, z, \beta)) \leq \mathbf{t}_h(x, z, \alpha + \beta).
\end{aligned}$$

Prema Teoremi 3.4.1, T_h je t -norma, pa možemo zaključiti da aksiom 4. iz Definicije 4.5.3 važi za \mathbf{t}_h u odnosu na t -normu T_h . Iz neprekidnosti funkcija h i T , sledi neprekidnost funkcije T_h .

5. Iz neprekidnosti funkcija $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ i $\mathbf{t}(x, y, -) : (0, +\infty) \rightarrow [0, 1]$ sledi da je funkcija $\mathbf{t}_h(x, y, -) : (0, +\infty) \rightarrow [0, 1]$ takođe neprekidna.

□

4.6 Primena fazi metrika u segmentaciji digitalnih slika

Uloga funkcija rastojanja i metrika je od izuzetne važnosti u oblasti segmentacije digitalnih slika. Definisanjem odgovarajuće funkcije rastojanja zapravo se definiše kriterijum kojim se pikseli razvrstavaju u grupe (klustere) po sličnosti. U nastavku predstavljamo jednu od mogućih upotreba nove fazi metrike, koja je dobijena primenom funkcije agregacije na dve polazne (inicijalne) fazi metrike.

Određivanje razlike, odnosno sličnosti između razmatranih piksela u prikazanom slučaju modelirali smo sa dva kriterijuma, njihovom razlikom u boji i razlikom između vrednosti deskriptora piksela, koji nosi informacije o prostornim odnosima okoline. Za definisanje ovih kriterijuma koristili smo fazi metrike koje su navedene u Poglavlju 4.5 ove teze. Kako smo razmatrali komponente boje i vrednosti deskriptora, svaki piksel reprezentovan je vektorom dimenzije četiri. Prve tri koordinate odgovaraju komponentama boje, redom crvenoj, zelenoj i plavoj, dok četvrta komponenta odgovara

vrednosti IC_α^f deskriptora piksela. Dakle, svaki piksel predstavljen je kao $p_i = (F_i, d_i)$, $i \in \{1, \dots, n\}$, gde su $F_i = (F_i^R, F_i^G, F_i^B)$ normalizovane komponente boje, dok je d_i normalizovana vrednost deskriptora IC_α^f (4.3.6) koja je dodeljena razmatranom pikselu, a n je broj piksela na slici I ,

$$p_i = (F_i, d_i) \in \left\{ 0, \frac{1}{255}, \dots, \frac{254}{255}, 1 \right\}^3 \times [0, 1]. \quad (4.6.1)$$

Fazi T -metrika koju smo u eksperimentima koristili za modeliranje sličnosti u komponentama boje između piksela označena je sa τ i definisana narednom jednakošću:

$$\tau(F_i, F_j) = \prod_{l \in \{R, G, B\}} \frac{\frac{F_i^l + F_j^l}{2} + K}{\max\{F_i^l, F_j^l\} + K}, \quad (4.6.2)$$

gde je $K > 0$ parametar koji određuje korisnik. Da je ovo zaista fazi T -metrika sledi iz Primera 4.5.9 i Napomene 4.5.18.

Druga fazi T -metrika koju koristimo u eksperimentima za definisanje sličnosti između vrednosti deskriptora IC_α^f , označena je sa t i definisana jednakošću (vidi Primer 4.5.10):

$$t(d_1, d_2) = \frac{k}{k + |d_1 - d_2|}, \quad (4.6.3)$$

gde je $k > 0$ parametar koji određuje korisnik.

Najbitniji deo segmentacijskog procesa je upravo određivanje funkcije koja modelira sličnost, odnosno različitost između piksela slike. Ona treba da predstavlja združenu karakteristiku faktora koje razmatramo, stoga smatramo da je upotreba odgovarajuće funkcije agregacije u ovakvim slučajevima najprikladniji izbor:

$$c((F_1, d_1), (F_2, d_2)) = A(\tau(F_1, F_2), t(d_1, d_2)). \quad (4.6.4)$$

Ovako definisana funkcija zavisi od dve inicijalne fazi metrike τ i \mathbf{t} , kao i od odabrane funkcije agregacije A . Novoformirana funkcija \mathbf{c} je takođe fazi T -metrika, ako je agregaciona funkcija A neprekidno kompatibilna u odnosu na norme koje odgovaraju metrikama τ i \mathbf{t} , što sledi iz Teoreme 4.5.15. Dobar odabir fazi metrika τ i \mathbf{t} i funkcije A koja je korištena za njihovu agregaciju, od izuzetne je važnosti za uspešnost segmentacijskog procesa, jer nova funkcija \mathbf{c} predstavlja glavnu meru koja se koristi u segmentacijskom algoritmu za klasterovanje piksela u grupe, odnosno njihovo međusobno razlikovanje. Dakle, ovakvim postupkom mi definišemo novu funkciju koja predstavlja ukupnu meru razlike u boji i vrednosti deskriptora za dva razmatrana piksela slike (F_i, d_i) , $i \in \{1, 2\}$, koju dalje upotrebljavamo u FCM algoritmu segmentacije. Slični pikseli grupisani su zajedno, pri čemu su dva piksela p_i i p_j slična ako je definisana razlika $\mathbf{c}(p_i, p_j)$ dovoljno mala.

Kako pored komponenti boje u formiranju funkcije učestvuje i deskriptor IC_α^f , potrebno je formulisati adekvatnu funkciju agregacije f za deskriptor piksela, kako bi se sumirale vrednosti dobijene za svaku komponentu boje pojedinačno. Smatramo da je dobar izbor za f agregacioni operator aritmetičke sredine, jer će jednako uključiti u izračunavanje vrednosti deskriptora dobijene na svakoj od tri komponente u boje. Dakle, deskriptor IC_α^f definisan je kao:

$$\begin{aligned} \text{IC}_\alpha^{\text{AM}}(p_{i,j}) &= \frac{1}{3}(a + b + c) \\ &= \frac{1}{24} \left(\text{IC}_\alpha^{(R)}(p_{i,j}) + \text{IC}_\alpha^{(G)}(p_{i,j}) + \text{IC}_\alpha^{(B)}(p_{i,j}) \right) \end{aligned} \quad (4.6.5)$$

gde su a , b i c definisani u jednačini 4.3.6. Primetimo da smo sa ovim normalizovali vrednosti deskriptora, odnosno $\text{IC}_\alpha^{\text{AM}}(p_{i,j}) \in [0, 1]$.

Prema rezultatima navedenim u Teoremi 4.5.21 i formiranjem funkcije $h(x) = x^\omega$, za $\omega > 0$, sledi da su $h(\tau)$ i $h(\mathbf{t})$ fazi T -metrike, kao što su to τ i \mathbf{t} . Koristeći agregacioni operator, bazirano na Teoremi 4.5.15 dalje zaključujemo da je

$$\mathbf{c}_\omega = \tau^\omega \cdot \mathbf{t}^\omega \quad (4.6.6)$$

fazi T -metrika u odnosu na t -normu proizvoda, $T(x, y) = x \cdot y$. Novoformirana metrika, c_ω , upotrebljena je u FCM algoritmu za segmentaciju, kao mera razlike, odnosno sličnosti između razmatranih piksela.

4.6.1 Eksperimenti

Implementacija eksperimentalnih rezultata zahteva određivanje parametara k i K , koji se javljaju u fazi metrikama, kao i stepena ω koji figuriše u agregacionoj funkciji i parametra α u deskriptoru piksela, koji određuje nivo sličnosti centralnog piksela sa okolinom. Kvalitet sprovedene segmentacije uslovljen je pogodnim izborom navedenih parametara. Prezentacija uspešnosti sprovedene segmentacije urađena je kroz poređenje rezultata dobijenih upotrebom novoformirane fazi metrike sa onim koji su dobijeni korišćenjem Euklidske metrike, kao što je urađeno u publikacijama [59, 62]. Normalizovana Euklidska metrika, $d_E : \bar{P}^2 \rightarrow [0, 1]$, određena je sledećom jednačinom:

$$d_E(p_1, p_2) = \frac{1}{255\sqrt{3}} \sqrt{(R_1 - R_2)^2 + (G_1 - G_2)^2 + (B_1 - B_2)^2}, \quad (4.6.7)$$

gde je svaki piksel predstavljen kao uređena trojka RGB komponenti boje, $p_i = (R_i, G_i, B_i) \in \bar{P}$, $i \in \{1, 2\}$, $\bar{P} = \{0, \dots, 255\}^3$.

Izlazni i ulazni parametri FCM algoritma već su objašnjeni u prethodnim eksperimentima koji su prikazani u ovom poglavlju teze. Kao najznačajniji parametar izdvajamo PI indeks (eng. performance index) koji predstavlja meru grupisanosti podataka u izdvojenim segmentima, manja vrednost parametra ukazuje na bolje rezultate segmentacije.

Test 1

Prvo smo razmatrali Sliku 4.10, veličine 481×321 piksela. Slika je preuzeta iz javno dostupne baze slika koje su namenjene za segmentaciju, *Department of Electrical Engineering and Computer Sciences at University of*

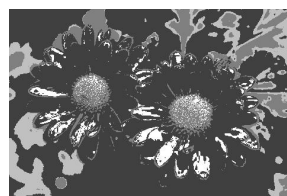


SLIKA 4.10: Originalna slika - Cvetovi.

California, Berkeley, segmentation dataset-training images, [70]

<https://www2.eecs.berkeley.edu/Research/Projects/CS/vision/bsds/>.

U prvom testu koristili smo vrednost parametra $\alpha = 20$, kao što je predloženo u [59]. Vrednosti parametara, k i K , koji figurišu u fazi metrikama intuitivno su podešeni u nekoliko inicijalnih pokušaja. Menjajući vrednost parametra ω , od 1 do 7, u agregacionoj funkciji, dobili smo različite metrike i rezultate, $c_\omega = \tau^\omega \cdot t^\omega$. Posmatrajući rezultate prikazane u Tabeli 4.6, možemo zaključiti da povećanje stepena ω povoljno utiče na kvalitet segmentacije. Takođe, primetimo da je većina rezultata dobijenih upotrebom novoformirane metrike mnogo bolja nego oni koji su formirani upotrebom Euklidske metrike. Neke od segmentovanih slika prikazane su na Slici 4.11.

(a) Euklidska metrika d_E .(b) Fazi metrika c_3 .(c) Fazi metrika c_7 .

SLIKA 4.11: Segmentovane slike, dobijene upotrebom različitih metrika.

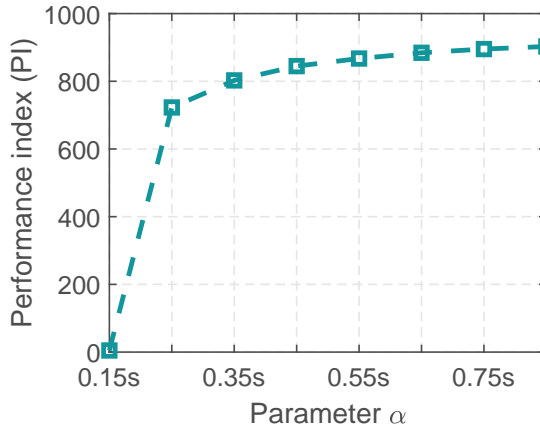
TABELA 4.6: Parametri i rezultati sprovedene segmentacije, dobijeni na Slici 4.10.

Metric	Parameters	Results (PI)
c_1	$K = 10, k = 1, \alpha = 20$	$8.5891 \cdot 10^3$
c_2	$K = 10, k = 1, \alpha = 20$	$2.3978 \cdot 10^3$
c_3	$K = 10, k = 1, \alpha = 20$	802.6006
c_4	$K = 10, k = 1, \alpha = 20$	7.0391
c_5	$K = 10, k = 1, \alpha = 20$	0.9440
c_6	$K = 10, k = 1, \alpha = 20$	0.1364
c_7	$K = 10, k = 1, \alpha = 20$	0.0206
d_E	/	$1.4245 \cdot 10^3$

Test 2

Drugi test proveden je na istoj slici kao i prvi, Slika 4.10. Kroz ovaj test posmatrali smo zavisnost uspeha segmentacije od parametra α koji se pojavljuje u deskriptoru IC_α^f . Kao što je ranije spomenuto, deskriptor opisuje prostorne relacije između susednih piksela, stoga smatramo prirodnim da bi njegova vrednost trebala da zavisi od razmatrane okoline ili slike koja se obrađuje. Rezultati iz rada [78] potvrđuju da parametar α treba da zavisi od standardne devijacije (s) slike. Podesili smo da parametar $\alpha = const * s$, bude konstantna vrednost $const \in [0, 1]$ puta standardna devijacija s slike koja je procesirana FCM algoritmom. Test je sproveden upotrebom fazi metrike $c_3 = \tau^3 \cdot t^3$, sa fiksiranim vrednostima parametara $K = 10$ i $k = 1$ u agregiranim metrikama τ i t respektivno, dok su promene rezultata segmentacije posmatrane samo u zavisnosti od parametra α . Relacija između pomenutog parametra i rezultata segmentacije, odnosno PI indeksa prikazana je na Slici 4.12.

Posmatrajući grafik 4.12 možemo primetiti da je najbolji rezultat segmentacije ($PI = 4.71$), dobijen za vrednost $\alpha = 0.15s$ i do sledećeg rezultata

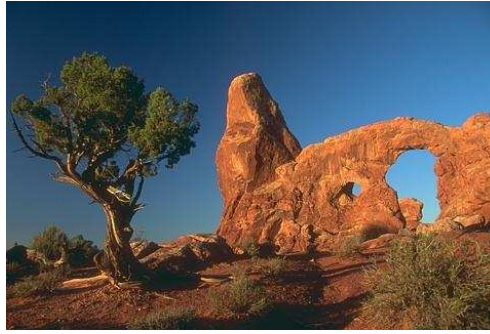


SLIKA 4.12: Zavisnost rezultata segmentacije od parametra α .

je uočen prilično veliki jaz. Za vrednost $\alpha = 0.35s = 0.35 \cdot 57.8344 \approx 20$ dobili smo $PI = 802.6006$ iz Tabele 4.6 za funkciju c_3 . Dobijeni rezultati koji su grafički predstavljani (Slika 4.12) a ukazuju na zavisnost PI indeksa od parametra α mogu biti diskutovani sa aspekta definicije deskriptora IC_α^f . Mi smo u testovima posmatrali najmanju 3×3 okolinu piksela i ako bismo dozvolili velike vrednosti za parametar α pomenuti deskriptor ne bi bio u mogućnosti da ispolji svoju prirodu. Naime, vrednosti koje se nalaze u najbližoj okolini piksela se ne razlikuju mnogo u svojoj vrednosti ili boji od razmatranog centralnog piksela, izuzimajući one na ivici objekata. Stoga bi velika vrednost parametra α implicirala dobijanje kodova sa većinom 0 vrednosti i mnogo istih vrednosti deskriptora za različite okoline piksela, što znači da bismo izgubili diskriminativnu moć deskriptora. Naš cilj je da dobrim odabirom parametra α uhvatimo većinu prostornih relacija susjednih piksela. Verujemo da je zavisnost parametra od standardne devijacije slike dobar izbor, jer standardna devijacija ukazuje na količinu varijacije koja postoji u slici u odnosu na prosečne vrednosti piksela.

Test 3

Treći test potvrdio je rezultate dobijene u prethodna dva testa. Posmatrali smo sliku u boji, veličine 481×321 piksela, Slika 4.13. Ova slika je takođe



SLIKA 4.13: Originalna slika - Pustinja.

TABELA 4.7: Parametri i rezultati sprovedene segmentacije, dobijeni na Slici 4.13.

Metric	Parameters	Results (PI)
c_1	$K = 10, k = 1, \alpha = 20$	$1.1365 \cdot 10^4$
c_3	$K = 10, k = 1, \alpha = 20$	34.6579
c_5	$K = 10, k = 1, \alpha = 20$	0.2843
c_7	$K = 10, k = 1, \alpha = 20$	0.0300
d_E	/	816.0351
c_3	$K = 10, k = 1, \alpha = 0.15 \cdot s$	26.6366
c_3	$K = 10, k = 1, \alpha = 0.35 \cdot s$	33.0776
c_3	$K = 10, k = 1, \alpha = 0.55 \cdot s$	$1.8417 \cdot 10^3$

preuzeta iz javno dostupne baze - *Department of Electrical Engineering and Computer Sciences at University of California, Berkeley, segmentation dataset-training images*, [70]. Rezultati iz Tabele 4.7 potvrđuju da porast stepena ω povoljno utiče na PI indeks, odnosno rezultate segmentacije. Takođe, opet je potvrđeno da zavisnost parametra α od standardne devijacije procesirane slike snažno utiče na uspeh segmentacije.

Poglavlje 5

Analiza teksture digitalne slike

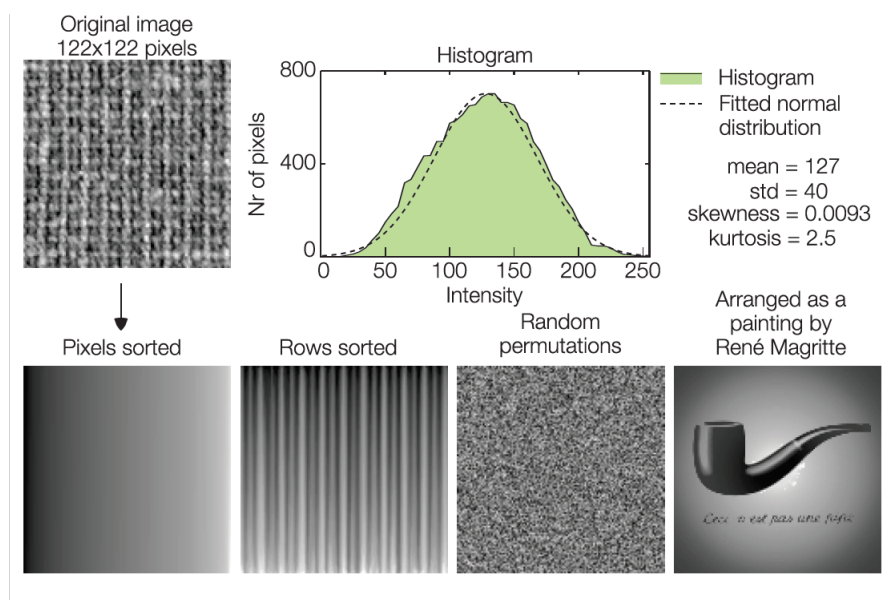
5.1 Pojam teksture digitalne slike

Teksturu prepoznamo kada je vidimo, ali je veoma teško formalno definisati, što je rezultiralo nedostatkom univerzalno prihvaćene definicije pojma teksture. Ova poteškoća ogleda se u velikom broju pokušaja definisanja od strane istraživača koji se bave pomenutom temom. Problem je detaljno diskutovan u publikaciji [79], gde je i navedeno nekoliko definicija iz literature. U knjizi o lokalnim binarnim paternima, [80], autori su predložili jednu relativno kratku definiciju:

”A textured area in an image can be characterized by a non-uniform or varying spatial distribution of intensity and color.”

”Tekstura u slici okarakterisana je neuniformnom prostornom raspodelom intenziteta i boje.”

Pojam teksture najlakše možemo prihvatiti i objasniti kroz primere. Naime, prikazane slike (vidi Sliku 5.1) imaju iste histograme, srednju vrednost,



SLIKA 5.1: Primeri slika koje se razlikuju samo u teksturi. Slika jedne teksture (gore levo) i njoj odgovarajući histogram (gore desno). U donjem redu nalaze se četiri slike koje su formirane prostornim promenama intenziteta sivih nivoa. Sve slike imaju identične skupove piksela i histograme, samo se razlikuju u prostoru rasporedu vrednosti piksela što je karakteristika teksture slike. *Prikazana slika je preuzeta iz doktorske disertacije [1].

standardnu devijaciju, itd. Jedina razlika između ovih slika je u prostornoj lokaciji intenziteta sivih novoa, odnosno u teksturi.

Tekstura predstavlja veoma važnu karakteristiku objekta i često se u praksi koristi za identifikaciju klase kojoj objekat pripada. Prisustvo onoga što nazivamo pojmom teksture registrovano je na najrazličitijim tipovima slika, od multispektralnih satelitskih do mikroskopskih podataka. Varijacije u prostornom rasporedu intenziteta i boje određene teksture, reflektuju promene na uslikanoj sceni. Specifična struktura teksture zavisi od topografije površine i albeda, osvetljenosti, položaja posmatrača, itd. Tekstura se razlikuje od boje po tome što se odnosi na prostornu organizaciju skupa njenih osnovnih činilaca (tekstona), fundamentalnu mikrostrukturu u prirodnim slikama i ljudsku vizuelnu percepciju [81]. Teksturirana regija ispoljava

neke statističke osobine, pokazujući periodično ponavljane tekstone sa određenim stepenom varijabilnosti u njihovom izgledu i relativnim pozicijama.

Prepoznavanje objekata i klasifikacija koja se zasniva na teksturi digitalnih slika ima veoma široku rasprostranjenu primenu u različitim disciplinama. Koriste se u analizi medicinskih slika za detekciju bolesti i promena ćelija [82–85], analizi slika dokumenta [86, 87], industrijskih materijala i površina [88–90], prepoznavanju objekata [91, 92], analizi slika lica [93–95], i biometrijskih podataka [96, 97]. Intenzivno proučavanje teksture počelo je još od 60-tih godina prošlog veka, ali je poseban značaj dobilo od kada su računarski sistemi zabeležili ekspanziju. Pojavljivanje tekstura na raznim prostornim rezolucijama, rotacijama, skaliranju i različitim uslovima osvetljenja, inspirisalo je mnoge studije koje su imale za cilj razvijanje deskriptora teksture koji su invarijantni na jednu ili više navedenih svojstava. Izazov je definisati snažan deskriptor teksture koji je visoko diskriminativan, u smislu mogućnosti razlikovanja klasa objekata, efikasan, zatim da se može ekstrahovati sa malim troškovima računanja i omogućiti da se zadatak klasifikacije realizuje u realnom vremenu. Veliki broj metoda i tehnika je predložen za pomenute svrhe, mada mnoge od njih nisu sposobne da se izbore sa realnim teksturama, u smislu da su vrlo računarski zahtevne i da je potrebno veoma mnogo vremena za njihovo izvršavanje pa nisu pogodne za upotrebu.

Reprezentacija tekstura, odnosno ekstrakcija deskriptora koji dobro opisuju i određuju posmatranu teksturu, jedan je od glavnih problema u analizi tekstura. Identifikovanje osobina teksture u slici je prvi korak ka izgradnji matematičkog modela. Kroz literaturu, sledeća svojstva se ističu kao bitna u opisivanju tekstura: uniformnost, gustina, grubost, hrapavost, linearnost, frekvencija, faza, itd [98]. Činjenica da vizuelna percepcija teksture ima mnogo dimenzija je razlog više da ne postoji jedinstveni metod predstavljanja teksture koji je adekvatan za svaku pojavu teksture. U publikaciji [79] data je jedna podela metoda za analizu tekstura: statističke metode (GLCM matrice, autokorelacijske funkcije [99]), geometrijske metode (Voronoi dijagrami [100], strukturalne metode [101]), metode zasnovane na

modelu (Lanci Markova [102], fraktali [103]) i metode obrade signala (filtri u prostornom domenu [104], filtri u Furijeovom domenu [105], Gabor i talasni modeli [106, 107]).

5.2 Deskriptori teksture

Analiza teksture je veoma značajna u mnogim aspektima i primenama računarske analize slike, a poseban značaj ispoljava kroz klasifikaciju i segmentaciju slika koje su bazirane na lokalnim prostornim varijacijama u intenzitetu sivih piksela ili boji komponenata RGB slika. Uspešni procesi klasifikacije i segmentacije zahtevaju efikasne deskriptore teksture. Proces klasifikacija tekstura, koji je naš predmet istraživanja, uključuje dve faze: fazu učenja i fazu prepoznavanja. U fazi učenja cilj je formirati karakteristiku prepoznavanja za svaku sliku iz trening skupa i svakoj klasi dodeliti po jednu labelu. Karakteristike prepoznavanja (eng. features) se formiraju tako što se osmisli model koji izvlači bitne osobine sadržaja slike. Te karakteristike mogu biti veoma različite, u zavisnosti od modela koji se koristi: skalarne vrednosti, histogrami, vektori, empirijske raspodele, karakteristike kao što su kontrast, očekivanje, standardna devijacija, orijentacija, prostorna struktura, itd. U fazi prepoznavanja novi, u trening fazi nepoznati primer teksture (slika iz test skupa), prvo se opisuje istom karakteristikom i onda se kroz algoritam klasifikacije poredi sa svim karakteristikama formiranim kroz trening fazu. Svakoj slici iz test skupa se dodeljuje labela klase sa kojom kroz proces poređenja pokaže najviše sličnosti.

U svojoj suštini, deskriptor teksture je metod koji uzima u obzir prostorne odnose između intenziteta piksela i na osnovu toga formira karakteristiku koja se može koristiti za razlikovanje i identifikovanje tekstura.

Kada govorimo o analizi teksture i deskriptorima teksture digitalne slike, jedna od osnovnih i često korištenih metoda su GLCM matrice (eng. Gray-level Co-occurrence Matrices), uvedene u publikaciji [99]. Ovaj metod zasniva se na pretpostavci da su informacije o teksturi određene skupom matrica prostorne zavisnosti, koje se formiraju za različite razdaljine i uglove. Dakle, potrebno je definisati distancu i pravac koji se posmatra, na osnovu čega se formira matrica. Nakon izračunavanja matrice raspodele prostorne zavisnosti sivih tonova, u [99] predložen je skup od 14 teksturalnih karakteristika koje se iz pomenutih matrica mogu izdvojiti. Najčešće su u upotrebi karakteristike kao što su kontrast, korelacija, homogenost, energija i sl. Uobičajeno je da se koriste simetrični relacijski operatori $\{\leftrightarrow, \updownarrow, \nearrow, \swarrow, \nwarrow, \searrow\}$, odnosno posmatraju se prostorni odnosi između piksela koji se nalaze u najbližoj okolini levo, desno, gore, dole i dijagonalno.

Lokalni binarni deskriptori (eng. **LBP** descriptors) predstavljaju teorijski veoma jednostavan metod za analizu teksture digitalnih slika, koji je u praksi pokazao izvanredne rezultate. Ovi operatori mogu se posmatrati kao objedinjujući metod svojih statističkih i strukturalnih prethodnika u analizi teksture. Osnovna ideja pomenutog modela je da se svakom pikselu na posmatranoj slici dodeljuje lokalni kod, koji nosi statističke osobine intenziteta i položaja piksela, a pored toga i informacije o prostornoj strukturi teksture, poziciji i međusobnom prostornom odnosu piksela iz razmatrane okoline. Zbog svojih dobrih osobina klasa LBP deskriptora je postala jako interesantna velikom broju istraživača i u poslednjih dvadesetak godina doživela ekspanziju broja novih modela. Publikacije [80], [108], [109] i [110] predstavljaju pregled razvoja LBP deskriptora i njihovih modifikacija, kao i veliku upotrebu i značaj u obradi slike i računarskoj grafici.

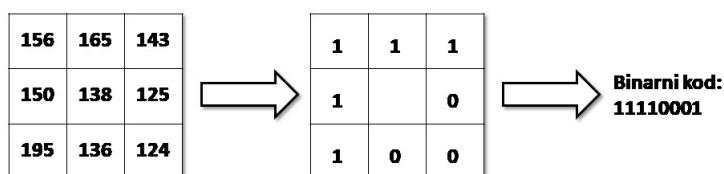
U poslednjih desetak godina metode bazirane na neuronskim mrežama su veoma popularne i u nauci i u inženjerskim disciplinama, sa velikom praktičnom upotrebom [85, 111–115]. Ove metode su veoma diskriminativne, u smislu da ih odlikuje izuzetna moć u razlikovanju tekstura, stoga su u praksi pokazale zavidne rezultate u klasifikaciji istih, ali su sa druge strane

veoma računarski zahtevne. Njihove najveće mane su takozvana 'black box' priroda (ne znamo tačno kako se sprovodi proces učenja), potrebna količina podataka (slika) i veoma velika računarska složenost koja zahteva najsavremeniju opremu i izrazito obimne hardverske resurse. Svi ovi zahtevi nisu uvek proporcionalni benefitima njihove upotrebe. Zato se u eri pristupa mašinskom učenju i dalje bavimo definisanjem deskriptora koji mogu biti kombinovani sa klasičnim metodama klasifikacije (k-NN, SVM). Pomenuti klasifikatori su jednostavni za tumačenje, razumevanje i mogu se koristiti uz razumnu tehničku opremljenost.

5.2.1 LBP deskriptori

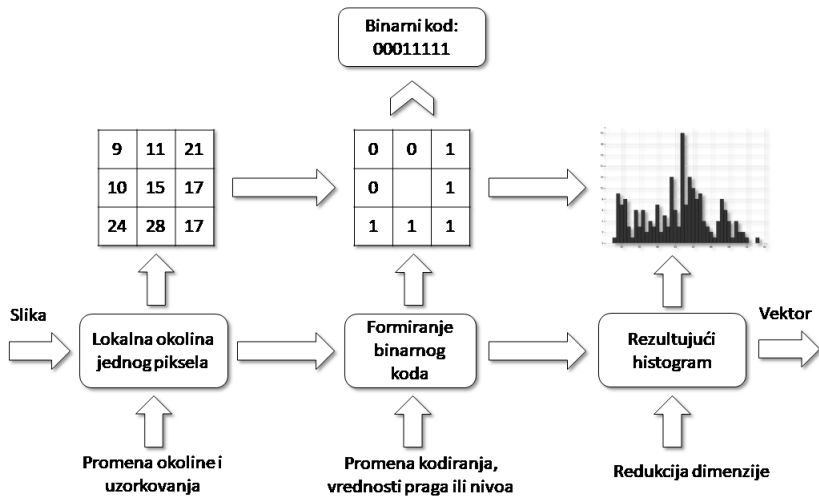
Osnovna ideja lokalnih binarnih deskriptora zasnovana je na dodeljivanju labela susednim pikselima i tumačenju dobijenog binarnog koda kroz njegovu celobrojnu reprezentaciju. Jedna od bitnih prednosti LPB modela je što ovakav pristup nije računarski zahtevan za implementaciju, jer se realizuje sa svega nekoliko operacija u lokalnoj okolini posmatranog piksela.

Originalni LBP model uveden je razmatrajući 3×3 okolinu piksela, [67, 68]. Svaki piksel iz posmatrane okoline poredi se sa centralnim pikselom i dodeljuje mu se 1 ili 0, u zavisnosti od toga da li je odgovarajući sivi nivo posmatranog piksela veći ili manji od sivog nivoa centralnog piksela (vidi Sliku 5.2). Čitajući dobijene cifre u smeru suprotnom od kazaljke na satu, formiramo binarni kod. Kako se u okolini nalazi 8 piksela, broj različitih binarnih kodova koji se mogu formirati je najviše $2^8 = 256$.



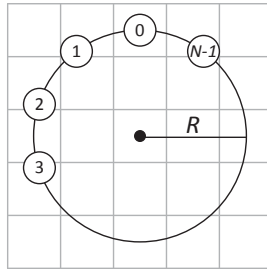
SLIKA 5.2: Primer 3×3 okoline i formiranja binarnog koda.

Histogram binarnih kodova koji se pojavljuju u okolini predstavlja karakteristiku tog regiona. Po jedan LBP kod kreira se za svaku poziciju piksela iz slike. Tako formirani kod odgovara jednom binu u histogramu svih mogućih kodova te slike. Vektor karakteristika (eng. feature vector) za razmatranu sliku formira se tako što se dobijeni binarni kodovi za svaki piksel (vidi Sliku 5.3) nagomilavaju u histogram i predstavljaju u vektorskom zapisu.



SLIKA 5.3: Procedura formiranja LBP deskriptora.

Prvobitna definicija uopštena je u publikaciji [69], razmatrajući proizvoljan broj suseda N koji su cirkularno jednako raspoređeni na kružnici poluprečnika R u odnosu na centralni piksel (vidi Sliku 5.4). Centralni piksel lociran je na poziciji (x_c, y_c) , a pozicije susednih p razmatranih tačaka, za $p \in \{0, 1, \dots, N - 1\}$ su $(x_p, y_p) = (x_c + R \sin(2\pi p/N), y_c - R \cos(2\pi p/N))$. Ukoliko se tačka p , sa pozicijom (x_p, y_p) , ne poklapa sa centrom piksela, njena siva vrednost, g_p , se računa koristeći bilinearnu interpolaciju.



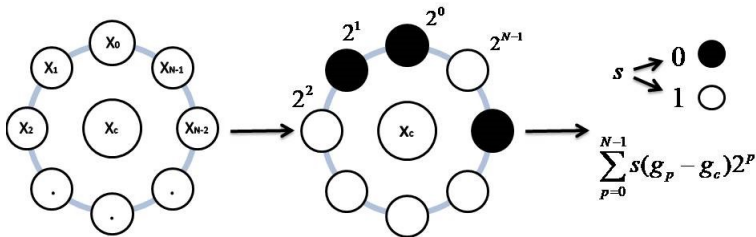
SLIKA 5.4: N suseda jednako raspoređenih na kružnici poluprečnika R .

LBP kod koji odgovara formiranom paternu, za poziciju centralnog piksela (x_c, y_c) i N njegovih suseda je:

$$LBP_{N,R}(x_c, y_c) = \sum_{p=0}^{N-1} s(g_p - g_c)2^p, \quad (5.2.1)$$

gde je

$$s(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & \text{inače.} \end{cases} \quad (5.2.2)$$



SLIKA 5.5: N suseda raspoređenih na kružnici, sa načinom dodeljivanja celobrojne vrednosti binarnom kodu.

5.2.1.1 Neke modifikacije LBP deskriptora

ILBP deskriptor

Veoma blizak LBP deskriptoru je **Improved local binary pattern - ILBP** deskriptor, uveden u publikaciji [116]. Osnovna razlika u odnosu na LBP deskriptor, je što se ovde umesto centralnog piksela, kao praga (eng. threshold) koji razdvaja klase nula i jedinica, koristi srednja vrednost sivih nivoa iz okoline (uključujući i centralni piksel). Ako sivu vrednost centralnog piksela označimo sa g_N , i srednju vrednost piksela iz razmatrane okoline sa g_{mean} , onda je :

$$ILBP_{N,R}(x_c, y_c) = \sum_{p=0}^N s(g_p - g_{mean})2^p, \quad (5.2.3)$$

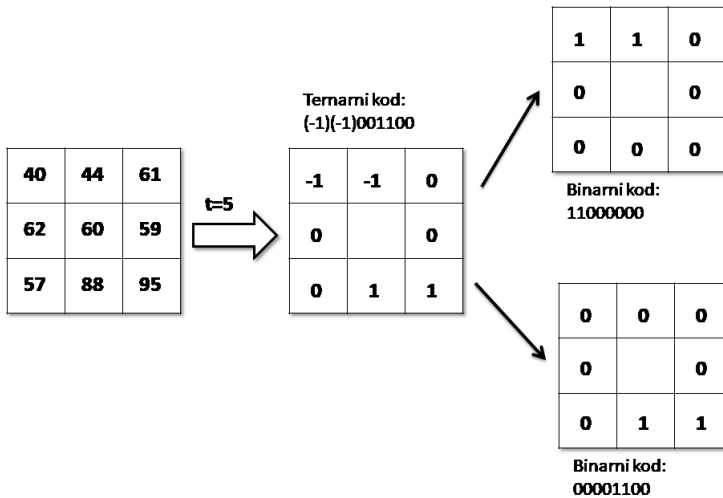
gde je $g_{mean} = \frac{1}{N+1} \sum_{p=0}^N g_p$ i funkcija s definisana u jednačini (5.2.2). Primetimo da je ovde centralni piksel uključen u izračunavanje srednje vrednosti razmatrane okoline, kao i u formiranje binarnog koda. Ovo implicira da se povećava dužina binarnog koda, sa N na $N + 1$, u odnosu na klasičan LBP. Istovremeno, povećava se i broj potencijalno različitih binarnih kodova koji se mogu formirati za razmatranu okolinu, sa 2^N na 2^{N+1} vrednosti.

LTP deskriptor

Jedna od generalizacija LBP deskriptora je ternarni deskriptor, **Local ternary pattern - LTP** [117, 118]. U odnosu na LBP on je diskriminativniji i manje osetljiv na prisutnost šuma u slici, dok kodira razlike u sivim nivoima piksela sa tri vrednosti $(-1, 0, 1)$. Indikatorska funkcija za LBP deskriptor iz jednačine (5.2.2) zamenjena je sledećom funkcijom:

$$s_3(g_p, g_c, t) = \begin{cases} 1, & g_p - g_c \geq t \\ 0, & -t \leq g_p - g_c < t \\ -1, & \text{inače.} \end{cases} \quad (5.2.4)$$

Umesto upotrebe koda sa tri vrednosti $(-1, 0, 1)$, svaki ternarni kod razlaže se na dva binarna, kodirajući posebno vrednosti $(-1, 1)$, Slika 5.6. Formirani binarni kodovi, koji reprezentuju pozitivnu i negativnu komponentu ternarnog koda, tretiraju se odvojeno i formiraju u dva zasebna LBP histograma koji se na kraju izračunavanja nadovezivanjem spajaju u jedan ternarni kod, LTP deskriptor.



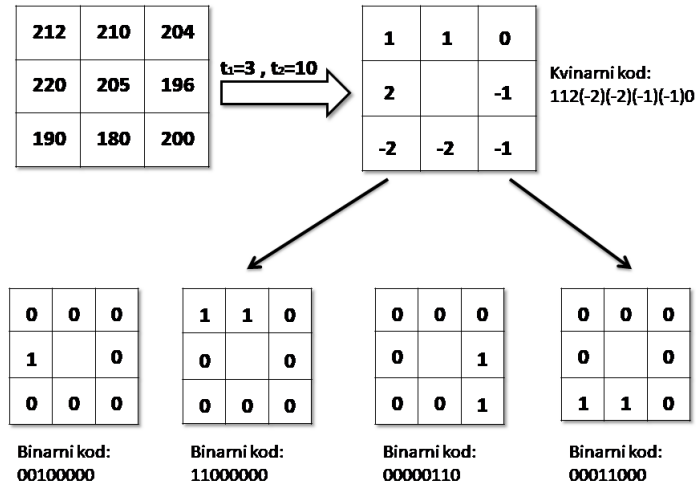
SLIKA 5.6: Ilustracija LTP deskriptora i primer razdvajanja ternarnog koda na dva binarna koda.

LQP deskriptor

Kvinarni deskriptor, **Local quinary pattern - LQP** iz publikacije [82], predlaže pet vrednosti za kodirajuću funkciju $(-2, -1, 0, 1, 2)$. Funkcija s iz jednačine (5.2.2) ovde je zamenjena funkcijom:

$$s_5(g_p, g_c, t_1, t_2) = \begin{cases} 2, & g_p - g_c \geq t_2 \\ 1, & t_1 \leq g_p - g_c < t_2 \\ 0, & -t_1 \leq g_p - g_c < t_1 \\ -1, & -t_2 \leq g_p - g_c < -t_1 \\ -2, & \text{inače.} \end{cases} \quad (5.2.5)$$

Istim razmatranjem kao u pomenutom slučaju ternarnog koda, kvinarni kod razlaže se na četiri binarna koda (Slika 5.7), koji se odvojeno tretiraju i kolektuju u LBP histograme. Na kraju izračunavanja četiri formirana LBP koda nadovezivanjem se spajaju u jedan kvinarni kod, LQP deskriptor.



SLIKA 5.7: Ilustracija LQP deskriptora i primer razdvajanja kvinarnog koda na četiri binarna koda.

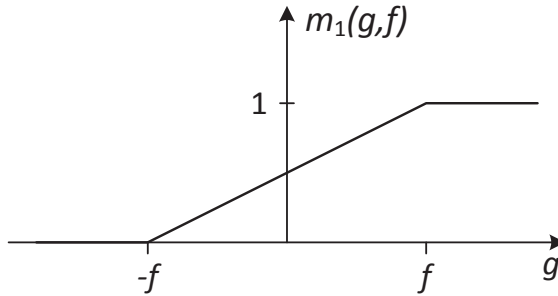
Fuzzy LBP / Soft LBP deskriptor

Fuzzy LBP, [119], i **soft LBP**, [120], su nezavisno uvedeni ali razmatraju okolinu na isti način. Oba deskriptora podrazumevaju da jedna okolina može doprinositi u nekoliko binova histograma, sa ograničenjem da suma doprinosa jedne okoline svim binovima bude 1. Definicija FLBP deskriptora počiva na sledećim funkcijama pripadanja:

$$m_1(g, f) = \begin{cases} 0, & g \leq -f \\ \frac{f+g}{2f}, & -f < g < f \\ 1, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5.2.6)$$

$$m_0(g, f) = 1 - m_1(g, f),$$

gde parametar f određuje regiju fazi prelaza $(-f, f)$. Funkcije pripadanja se koriste da izraze nivo pripadanja klasi '1'-ca i klasi '0'-la, respektivno. Specijalni slučaj su vrednosti $g = f = 0$, tada su funkcije pripadanja $m_1(0, 0) = 1$ i $m_0(0, 0) = 0$.



SLIKA 5.8: Funkcija pripadanja, korištena za izračunavanje FLBP deskriptora i α -deskriptora.

Ako se razmatrana lokalna okolina sastoji od N suseda, rezultujući histogram sačinjen je od 2^N binova, numerisanih $0, 1, \dots, 2^N - 1$. Doprinos jedne okoline, za poziciju centralnog piksela (x_c, y_c) , binu i u histogramu (H) svih mogućih binarnih kodova dat je sledećom jednačinom:

$$\begin{aligned} FLBP_{N,R}(x_c, y_c, i) \\ = \prod_{p=0}^{N-1} [b_p(i)m_1(g_p - g_c, f) + (1 - b_p(i))m_0(g_p - g_c, f)], \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

gde $b_p(i) \in \{0, 1\}$ označava p -ti bit binarnog koda i . Kako sve pozicije piksela (sa svojim okolinama) mogu doprineti binu i u histogramu, sledi:

$$H_{FLBP}(i) = \sum_{x_c, y_c} FLBP_{N,R}(x_c, y_c, i), \quad i = 0, \dots, 2^N - 1. \quad (5.2.8)$$

Motivacija za uvođenje ovog deskriptora je povećanje robustnosti na prisustvo šuma u slikama. Međutim, velika mana je značajno povećanje računarske složenosti.

Shift LBP deskriptor

U definiciji klasičnog LBP deskriptora, za svaku poziciju centralnog piksela (x_c, y_c) formira se jedan binarni kod. Formirani kod odgovara jednom binu u histogramu svih mogućih kodova generisanih pri procesiranju jedne slike. Kroz formiranje nekoliko pragova za razdvajanje binarnih klasa, **shift LBP** deskriptor iz publikacije [121], pokušava da obuhvati fazi okolinu piksela bez računanja pripadnosti svakom od 2^N binova. Za svaku poziciju centralnog piksela (x_c, y_c) i jednu okolinu, formira se unapred fiksirani broj binarnih kodova. Ovo se postiže uvođenjem više vrednosti pragova, tipa $g_c + k$, za sve $k \in [-l, l] \cup \mathbb{Z}$, pri čemu je g_c siva vrednost centralnog piksela. Dakle, za svaku vrednost k formira se po jedan binarni kod. Broj generisanih binarnih kodova za jednu okolinu je $2l + 1$ i svi oni doprinose finalnom histogramu. Odgovarajući SLBP kod za poziciju centralnog piksela (x_c, y_c) i jednu vrednost k je:

$$SLBP_{N,R}(x_c, y_c, k) = \sum_{p=0}^{N-1} s(g_p - g_c - k)2^p, \quad (5.2.9)$$

gde je $k \in [-l, l] \cap \mathbb{Z}$. Vrednosti u finalnom histogramu podeljene su sa faktorom $2l + 1$. Primetimo, u specijalnom slučaju ako je $l = 0$ samo jedan kod se formira i SLBP deskriptor svodi se na klasičan LBP.

ELBP deskriptor

Dok klasični LBP deskriptor kodira samo odnos između centralnog piksela i njegove okoline, **Extendel Local Binary Pattern (ELBP)** [122] je formiran tako da kodira karakteristične prostorne odnose u lokalnoj regiji i sadrži više informacija. Ovaj deskriptor predstavlja kompoziciju tri LBP motivisane strukture, ELBP-CI, ELBP-NI, ELBP-RD, koje su formirane na osnovu prostornog položaja i intenziteta centralnog piksela i njegovih suseda, kao i na osnovu međusobnog odnosa susednih piksela koji se nalaze na različitoj udaljenosti u odnosu na posmatrani centralni piksel. Princip formiranja ELBP deskriptora sličan je ideji klasičnog LBP-a. Intenzitet

centralnog piksela poredi se sa srednjom vrednošću piksela cele slike (n ukupan broj piksela na posmatranoj slici):

$$ELBP - CI(x_c) = s(x_c - \beta), \quad \text{gde je} \quad \beta = \frac{1}{n} \sum_{c=0}^n x_c. \quad (5.2.10)$$

Umesto upotrebe sive vrednosti centralnog piksela kao praga za formiranje binarnog paterna, što je slučaj kod klasičnog LBP-a, ELBP-NI u istu svrhu koristi prosečnu vrednost sivih nivoa piksela iz razmatrane okoline:

$$ELBP - NI_{R,N}(x_c) = \sum_{p=0}^{N-1} s(x_{p,R,N} - \beta_{R,N})2^p, \quad (5.2.11)$$

gde je

$$\beta_{R,N} = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} x_{p,R,N}. \quad (5.2.12)$$

Paralelno sa deskriptorima zasnovanim na intenzitetu centralnog piksela (ELBP-CI) i njegovom odnosu sa N piksela iz okoline koji su kružno raspoređeni na nekoj udaljenosti R (ELBP-NI), ELBP-RI izveden je iz razlika piksela koji se nalaze na različitoj udaljenosti od centralnog, ali u odgovarajućem pravcu:

$$ELBP - RD_{R,R-1,N}(x_c) = \sum_{p=0}^{N-1} s(x_{p,R,N} - x_{p,R-1,N})2^p. \quad (5.2.13)$$

Konačno, ELBP deskriptor dobija se nadovezivanjem njegovih pomenutih modifikacija, nakon što se prethodno za svaki od njih formira rotaciono invarijantni kod. U publikaciji [122] su demonstrirane izuzetno dobre performanse ovog metoda u klasifikaciji tekstura.

MRELBP deskriptor

Uprkos dobrim rezultatima klasifikacije, ELBP deskriptor je veoma osetljiv na šum i zamagljenje. Da bi se prevazišli ovi nedostaci, uveden je **Median Robust Extended Local Binary Pattern (MRELBP)** [123], koji je

zasnovan na ELBP deskriptoru i ideji da se individualne vrednosti piksela zamene nekom reprezentacijom posmatranog regiona ili okoline. U [123] razmotreni su efekti zamene pojedinačnih vrednosti piksela u uzorkovanim tačkama jednostavnim odgovorima filtra dobijenim iz lokalnih maski koje su centrirane u lokacijama uzorkovanja. ELBP deskriptor je modifikovan u MRELBP, tako što se pojedinačni intenziteti piksela zamenjuju odzivom filtra $\phi()$, odnosno konkretno medijana filtra. U istoj publikaciji razmatrano je nekoliko različitih modela filtra ali se medijana pokazao kao najbolji u smislu redukovanja osetljivosti deskriptora na šum.

Formalno, za centralni piksel x_c i medijana filter $\phi()$, MRELBP deskriptor je definisan kao kompozicija nadovezivanja sledećih struktura:

1. Reprezentacija centralnog piksela rezultat je primene filtra $\phi()$ na $X_{c,\omega}$, što predstavlja deo lokalne okoline veličine $\omega \times \omega$ centriran u x_c , dok μ_ω označava srednju vrednost odziva filtra cele slike $\phi(X_{c,\omega})$:

$$MRELBP - CI(x_c) = s(\phi(X_{c,\omega}) - \mu_\omega). \quad (5.2.14)$$

2. Reprezentacija susedstva vrši se histogramom:

$$MRELBP - NI_{R,N}(x_c) = \sum_{p=0}^{N-1} s(\phi(X_{p,\omega,R,N}) - \mu_{\omega,R,N})2^p, \quad (5.2.15)$$

gde je

$$\mu_{\omega,R,N} = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} \phi(X_{p,\omega,R,N}). \quad (5.2.16)$$

$X_{p,\omega,R,N}$ predstavlja deo lokalne okoline veličine $\omega \times \omega$ centriran u pikselu x_p iz kružne okoline poluprečnika R , u kojoj se razmatra N suseda.

3. Razlike između susednih piksela koji se nalaze na istom pravcu, ali različitim udaljenostima od posmatranog centralnog piksela x_c kodiraju

se sledećom reprezentacijom (posmatraju se dva susedna poluprečnika, na udaljenostima R i $R - 1$ od x_c):

$$\begin{aligned} & MRELBP - RD_{R,R-1,N,\omega_r,\omega_{r-1}}(x_c) \\ &= \sum_{p=0}^{N-1} s(\phi(X_{p,\omega_r,R,N}) - \phi(X_{p,\omega_{r-1},R-1,N}))2^p. \end{aligned} \quad (5.2.17)$$

U prethodnoj formuli $X_{p,\omega_r,R,N}$ i $X_{p,\omega_{r-1},R-1,N}$ označavaju lokalne maske koje mogu biti različitih veličina, a centrirane su u susednim pikselima $x_{p,R,N}$ i $x_{p,R-1,N}$ koji se nalaze na istom pravcu, ali na različitoj udaljenosti u odnosu na centralni piksel, x_c . Oznaka $\{x_{p,R,N}\}_{p=0}^{N-1}$ predstavlja jednako raspoređenih N suseda na kružnici poluprečnika R , takođe u odnosu na posmatrani centralni piksel.

5.2.1.2 Uniformni i neuniformni deskriptori

U širokoj literaturi o LBP deskriptorima i njihovim modifikacijama, neretko se srećemo sa pojmovima "uniformnih" i "neuniformnih" kodova. Termin se odnosi na izgled formiranog koda, koji proizilazi iz ograničenog broja crno-belih i belo-crnih tranzicija. Binarni kodovi sa samo dve tranzicije između klasa '0'-la i '1'-ca nazivaju se uniformni, npr. 00100000,10000000,00011110, dok su svi paterni koji imaju više ovakvih promena neuniformni, npr. 10100010,00011001,01100110. Istraživačka grupa sa Univerziteta Oulu (Finska) je otkrila da uniformni kodovi predstavljaju veliku većinu 3×3 lokalnih binarnih kodova u površinskim teksturama, [68]. U slučajevima gde uniformni kodovi prevladaju, uobičajeno je isključiti neuniformne kodove iz razmatranja, odnosno sve ih razmatrati kao jednu grupu i svrstati u jedan bin u histogramu, [124]. Razmatrajući samo uniformne kodove očigledno je da broj binarnih kodova koje uključujemo u histogram značajno opada, što direktno utiče na smanjenje dimenzije vektora karakteristika. Međutim, ovaj pristup ima neke značajne nedostatke. Smanjenjem broja razmatranih binarnih kodova, neke bitne karakteristike teksture bivaju zanemarene i

javlja se dodatna osetljivost na šum, [125]. Takođe, uočeno je da u onim teksturama čije ivice i oblici nisu glatki (regularni, uobičajeni), dominantni kodovi uglavnom nisu uniformni, [126, 127].

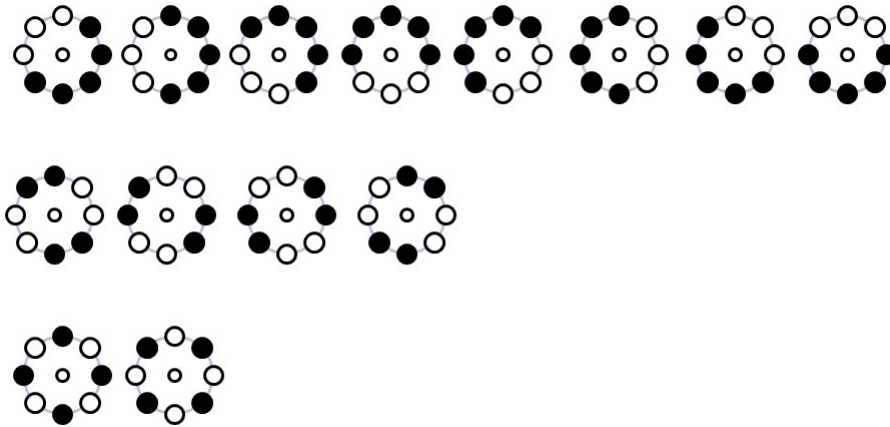
Uzimajući u obzir navedene činjenice, mi smo odlučili da u istraživanje uključimo sve kodove koji se pojavljuju, smatrajući da tako dobijamo potpuniju i tačniju informaciju o teksturi koja se analizira.

5.2.1.3 Rotaciona invarijantnost deskriptora

Rotaciona invarijantnost je veoma bitna karakteristika svih deskriptora teksture, jer je većina slika formirana u različitim orijentacijama i položajima. Rotacija slike može biti posledica rotacije aparata pri formiranju fotografije ili rotacije samog objekta koji se slika. Nazavisno od toga šta je uzrok nastanka rotirane slike koja se procesira, rotaciono invarijantni deskriptori takve slike treba da razmatraju kao identične uzorke i da formiraju za njih identične vektore karakteristika.

Rotaciona invarijantnost za većinu LBP metoda postiže se cikličkim pomerajem binarnog koda na njegovu najmanju vrednost, po uzoru na LBP^{ri} koji je uveden u publikaciji [69]. Osnovna ideja ovog metoda je da se svi kodovi koji su ciklički šiftovi jedan drugog predstavljaju jednim binom u histogramu. Naime, kreće se od klasičnog LBP histograma koji nije rotaciono invarijantan i onda se binarni kodovi grupišu na osnovu toga da li se mogu cikličkim pomerajem svesti na isti kod.

Na primer, ako je broj suseda koji razmatramo $N = 8$, nekoliko grupa rotaciono invarijantnih kodova navedeno je u nastavku i njihove ilustracije prikazane su na Slici 5.9. Prvi red ilustracija na slici odgovara grupi $\{11100000, 01110000, 00111000, 00011100, 00001110, 00000111, 10000011, 11000001\}$, drugi red odgovara kodovima $\{00110011, 10011001, 11001100, 01100110\}$, dok treća grupa ima samo dve reprezentacije $\{01010101, 10101010\}$.



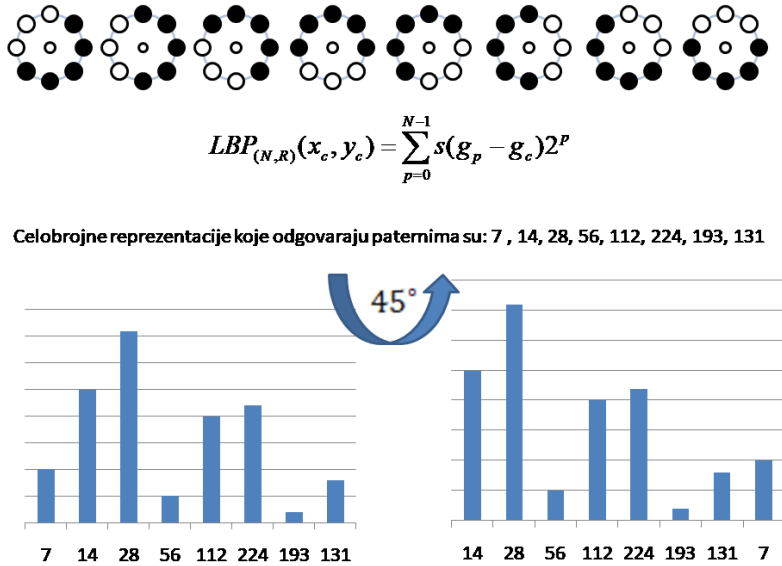
SLIKA 5.9: Primeri rotaciono invarijantnih kodova.

Primetimo da maksimalan broj kodova u grupi odgovara broju suseda koje razmatramo, ali on može biti i manji ukoliko se rotirane verzije koda poklapaju sa nerotiranim (što je slučaj u drugom i trećem prikazanom primeru). Rotaciono invarijantan deskriptor formiran ovom metodom je histogram koji prikazuje prisustvo i učestalost pomenutih rotacionih grupa, pri čemu su pojave kodova unutar rotacione grupe sumirane. Na ovaj način deskriptor postaje kompaktniji i jednostavniji, jer pomenuti metod direktno utiče na redukciju dimenzije vektora karakteristika.

Drugi način za formiranje rotaciono invarijantnog deskriptora je upotrebom Diskretne Furijeove transformacije (DFT). Ovaj pristup je za LBP deskriptore koji razmatraju uniformne kodove prezentovan u radovima [128], [129], dok je njegova ekstenzija koja uključuje i neuniformne kodove predstavljena u publikaciji [130]. Diskretna Furijeova transformacija je u praksi često korišten metod za postizanje rotacione invarijantnosti, sa ograničenjem da može biti primenjen na prostor gde rotacija teksture odgovara cirkularnom pomeraju unutar vektora karakteristika (eng. circular shift property). Procedura koja koristi DFT, rezultuje globalnom rotacionom invarijantnošću, što znači da su dobijene karakterisike invarijantne na rotaciju celokupnog ulaznog signala, dok pri tome zadržavaju informacije o rasporedu i odnosu

lokalnih binarnih kodova.

Razmotrimo kružni binarni kod formiran za $N = 8$, njegovu rotiranu verziju i verovatnoće pojavljivanja ovih kodova u histogramu. Možemo primetiti da ukoliko rotiramo teksturu za 45° , odgovarajući kodovi vrše kružni pomak za jednu poziciju, kao i njihovi binovi u histogramu (Slika 5.10).



SLIKA 5.10: Rotacija teksture izaziva kružni pomeraj u okviru grupe binova koji odgovaraju rotaciono ekvivalentnim kodovima.

Uopšteno, isto se dešava za proizvoljni veliku okolinu sa brojem suseda N i ugao rotacije α . Dakle, ako za neki položaj određen uglom θ , $t_\theta = (t_1, t_2, \dots, t_N)$ predstavlja skup vrednosti koje se pojavljuju u histogramu i odgovaraju kodovima koji se kružnim pomerajem svode na isti binarni kod, nakon rotacije teksture za ugao α dobijamo kod u kome su cifre pomerene za jedno mesto, $t_{\theta+\alpha} = (t_N, t_1, \dots, t_{N-1})$. Rotaciono invarijantnu verziju vektora t možemo dobiti primenom Furijeove transformacije, $DFT(t) = T = (T_0, T_1, \dots, T_{N-1})$. Moduli transformisanih koeficijenata $|T_i|$, $i \in \{0, 1, \dots, N - 1\}$ su nezavisni od proizvoljnog kružnog pomeraja ulaznog vektora t . Imajući u vidu da je Furijeov spektar simetričan, dobijamo potpunu informaciju posmatrajući samo jedan njegov deo, odnosno prvih

$[N/2 + 1]$ elemenata (gde je $[*]$ oznaka za "ceo deo od argumenta"). U nastavku su detaljno navedeni i opisani koraci za formiranje rotaciono invarijantnog deskriptora primenom Diskretne Furijeove transformacije, [130].

1. Formirati klasičan LBP histogram,

$$H = \{H_1, \dots, H_{2^N}\}.$$

2. Ukloniti prvi i poslednji bin iz histograma,

$$H = \{H_2, \dots, H_{2^N-1}\}.$$

3. Pregrupisati histogram u grupe binova koji odgovaraju rotaciono invarijantnim kodovima, $H' = \{x_1, \dots, x_m\}$. Dakle, u jednoj grupi nalaze se svi binovi koji predstavljaju kodove koji se kružnim pomerajem svode na isti kod. U specijalnom slučaju kada posmatramo 8 suseda ($N = 8$), postoje $k = 34$ takve grupe (odnosno, $k = 36$ ako računamo i prvi i poslednji bin koji predstavljaju grupu za sebe). Svaka grupa, $x_i = \{H_{i1}, \dots, H_{iN}\}$, za $i \in \{1, \dots, m\}$, formirana je od osnovnog koda i svih njegovih rotiranih verzija. Preciznije, od binova koji odgovaraju rotaciono ekvivalentnim kodovima. Da bi se zadovoljilo svojstvo kružnog pomaka binovi se u svakoj grupi sortiraju po pravilu: H_{i1} bin odgovara osnovnom kodu, H_{i2} bin odgovara kodu koji se odbija od osnovnog rotacijom za ugao $\frac{2\pi}{N}$, i tako redom. Uopšteno, svaka grupa sastoji se od N različitih rotaciono ekvivalentnih kodova. Ali taj broj može biti i manji od N , ukoliko se rotirane verzije poklapaju sa nerotiranim, što je ranije pomenuto i ilustrovano na Slici 5.9.

4. Izračunati DFT X_i za svaku grupu binova x_i . Zbog simetričnog spektra uzimamo samo moduo prvih $[N/2 + 1]$ elemenata od X_i .

5. Izvršiti normalizaciju X_i ,

$$\overline{X}_i = c_i X_i, \quad \text{gde je } c_i = \frac{\sum_{k=1}^N H_{ik}}{\sum_{k=1}^{(N/2)+1} X_{ik}}.$$

6. Formirati rotaciono invarijantni deskriptor nadovezivanjem,
 $X = \{\overline{X}_1, \dots, \overline{X}_m\}$.

7. Vratiti prvi i poslednji bin na mesto.

5.2.2 α LBP deskriptori teksture

Podfamilija poznate klase LBP deskriptora, koju smo mi uveli, kombinuje osnovnu ideju LBP modela sa bazičnim definicijama iz teorije fazi skupova. Predlažemo generalni pristup za razmatranje okoline piksela kao fazi skupa i formirajući odgovarajuće α -rezove dobijamo različite kodove koji opisuju tu okolinu. Ovaj metod se može kombinovati sa više nivoa kodiranja, binarnim [78], ternarnim, kvinarnim, itd [131].

Delimična pripadnost skupu, kao osnovna karakteristika fazi skupova, kroz literaturu je na različite načine uključivana u analizu okoline piksela i formiranje deskriptora (FLBP, soft LBP, shift LBP). Motivaciju za uvođenje nove klase pronašli smo upravo u pomenutim primerima iz literature, kao i u prednostima α -rezova pri definisanju i razmatranju osobina fazi skupova. Posebno su nam bili interesantni deskriptori koji razmatraju više pragova za razdvajanje klasa '0'-la i '1'-ca, formirajući tako veći broj kodova za jednu okolinu. Takvi deskriptori koriste uglavnom unapred definisan broj pragova, koji su jednako raspoređeni u nekom opsegu. Međutim, ovako unapred definisan broj pragova indukovana je parametrom koji se eksperimentalno određuje i nije direktno povezan sa pikselima i okolinom koja se razmatra. Smatramo da okolinu bolje opisuje deskriptor koji koristi nivoe koji zavise od te iste okoline, odnosno koji se pojavljuju u njoj. Ovakvo

razmatranje daje detaljniju informaciju o pikselima u posmatranoj okolini i bolje opisuje prostorne relacije i odnos intenziteta između istih.

Opisujemo okolinu piksela kao fazi skup tako što formiramo preslikavanje sivih vrednosti u interval $[0, 1]$. Ovo postizemo uvođenjem regije fazi prelaza $(-f, f)$, gde parametar f zavisi od sadržaja slike. Ovim parametrom definišemo oblast oko vrednosti praga (eng. threshold value), koja rezultira mekšom dihotomizacijom. Dakle, male varijacije oko vrednosti praga ne utiču na razdvajanje klasa ('0'-la i '1'-ca), odnosno granica između klasa će biti glatkija.

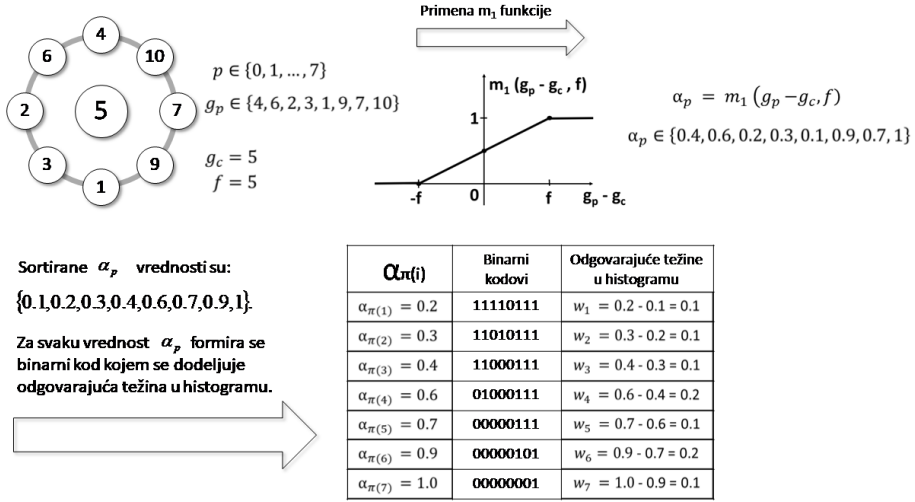
Neka je g_c siva vrednost centralnog piksela, i neka su g_p , $p \in \{0, 1, \dots, N - 1\}$, sive vrednosti N suseda koji su jednako raspoređeni na kružnici poluprečnika R . Za razmatranu okolinu, preslikavanje vrednosti piksela u interval $[0, 1]$ postiže se izračunavanjem nove vrednosti α_p , za svaki piksel iz okoline (vidi Sliku 5.11), na sledeći način:

$$\alpha_p = m_1(g_p - g_c, f), \quad p \in \{0, 1, \dots, N - 1\}, \quad (5.2.18)$$

gde f predstavlja regiju fazi prelaza, a funkcije m_1 i m_0 , predstavljaju funkcije pripadanja (definisane u 5.2.6), koje se koriste da izraze nivo pripadanja klasi '1'-ca i klasi '0'-la, respektivno.

Nakon što smo odredili parametar f i primenili m_1 funkciju, izvršeno je preslikavanje celokupne okoline posmatranog piksela (x_c) u interval $[0, 1]$, pa ona može biti tretirana kao fazi skup. Dalje je taj fazi skup razložen i razmatran kroz pojam α -rezova. Za svako $\alpha \in [0, 1]$, odgovarajući α -rez je običan skup reprezentovan indikatorskom funkcijom. Bitno je naglasiti da nije potrebno razmatrati sve $\alpha \in [0, 1]$, već samo one slučajeve kod kojih funkcije pripadanja odgovaraju vrednostima piksela iz posmatrane okoline, odnosno interesuju nas vrednosti $\alpha = \alpha_p$. Ovo je posledica neizmenjenog α -reza, odnosno formiranog binarnog koda za svako $\alpha \in (\alpha_{\pi(i-1)}, \alpha_{\pi(i)})$, gde je π permutacija sortiranja.

Procedura za formiranje α -histograma je sledeća:



SLIKA 5.11: Procedura formiranja α LBP kodova, ilustrovana na jednoj okolini. Kodovi su predstavljani sa odgovarajućim doprinosima histogramu.

1. Izračunate vrednosti α_p sortirane su u neopadajući niz. Sortiranje nije neophodno, ali se koristi za praćenje postepenih promena tokom formiranja kodova i za ubrzavanje izračunavanja. Po redu i -ta vrednost koja se razmatra u algoritmu je $\alpha_{\pi(i)}$, gde je π permutacija sortiranja.
2. Za poziciju centralnog piksela (x_c, y_c) , fiksirano $i \in \{1, 2, \dots, N - 1\}$ i svako α_p , $p \in \{0, 1, \dots, N - 1\}$ iz okoline, razlika $\alpha_p - \alpha_{\pi(i)}$, može biti kodirana sa $2k + 1$ nivoa $(-k, \dots, -1, 0, 1, \dots, k)$, uz upotrebu k vrednosti pragova (eng. threshold value) t_1, \dots, t_k . Za svako $j = 1, \dots, k$ i $t_{k+1} = \infty$, to možemo predstaviti sledećom formulom:

$$s_{2k+1}(\alpha_p, \alpha_{\pi(i)}, t_j) = \begin{cases} j, & t_j \leq \alpha_p - \alpha_{\pi(i)} < t_{j+1} \\ 0, & -t_1 \leq \alpha_p - \alpha_{\pi(i)} < t_1 \\ -j, & -t_{j+1} \leq \alpha_p - \alpha_{\pi(i)} < -t_j. \end{cases} \quad (5.2.19)$$

3. Čitajući dobijene vrednosti u smeru suprotnom od kretanja kazaljke na satu, formira se kod sa $2k + 1$ različitih vrednosti.

4. Dobijeni kod može se rastaviti na $2k$ binarnih kodova:

$$b_l(x) = \begin{cases} 1, & x = l \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \quad (5.2.20)$$

pri čemu $l \in \{-k, \dots, -1, 0, 1, \dots, k\}$.

5. Svaki od dobijenih binarnih kodova se posebno analizira i kolektuje u α LBP histogram (vidi Sliku 5.11).

(a) Celobrojna reprezentacija za svaki tretirani binarni kod, sa kojom se isti kolektuje u histogram binarnih kodova, računa se na osnovu sledeće jednakosti:

$$\alpha LBP_{N,R}(x_c, y_c, i, l) = \sum_{p=0}^{N-1} b_l(\alpha_p - \alpha_{\pi(i)})2^p. \quad (5.2.21)$$

(b) Kako se za $\alpha \in (\alpha_{\pi(i-1)}, \alpha_{\pi(i)}]$, α -rez i odgovarajući kod ne menjaju, sledi da se mera doprinosa histogramu svih kodova, za $\alpha = \alpha_{\pi(i)}$ i formirani kod može izraziti kao širina intervala u kojem kod ostaje nepromenjen:

$$w_i = \alpha_{\pi(i)} - \alpha_{\pi(i-1)}. \quad (5.2.22)$$

Svaka okolina učestvuje u histogramu sa nekoliko kodova, odnosno njima odgovarajućih binova sa različitim doprinosima. Broj formiranih kodova za jednu okolinu zavisi od broja posmatranih suseda. Za svako fiksirano $i \in \{1, 2, \dots, N-1\}$, jedan od suseda preuzima ulogu praga koji razdvaja klase '1'-ca i '0'-la i formira se jedan kod. Na kraju izračunavanja, nakon formiranja rotaciono invarijantnog histograma za svaki od razmatranih binarnih kanala, $2k$ formiranih karakteristika (histograma) nadovezivanjem spajaju se u jedan histogram.

Motivisani idejom ILBP deskriptora, definisali smo sličnu verziju našeg modela, koja uključuje centralni piksel u kodiranje. Za svaku vrednost iz

okoline preslikavanje u interval $[0, 1]$ izvršava se primenom sledeće formule:

$$\alpha'_p = m_1(g_p - g_{mean}, f), \quad p \in \{0, 1, \dots, N\}, \quad (5.2.23)$$

gde je g_N siva vrednost centralnog piksela i g_{mean} srednja vrednost svih piksela okoline, uključujući i centralni piksel. U ovom slučaju funkcija (5.2.21) zamenjena je sledećom:

$$I\alpha LBP_{N,R}(x_c, y_c, i, l) = \sum_{p=0}^N b_l(\alpha'_p - \alpha'_{\pi(i)})2^p. \quad (5.2.24)$$

Predloženi metod podrazumeva mogućnost adaptacije za različite vrste kodiranja. Mi smo razmatrali i testirali binarnu, ternarnu i kvinarnu modifikaciju predstavljenog modela. Binarni slučaj podrazumeva da je razlika, $\alpha_p - \alpha_{\pi(i)}$, kodirana sa 1 ili 0 u zavisnosti da li je odgovarajuća vrednost α_p veća ili manja od $\alpha_{\pi(i)}$, za fiksirano $i \in \{1, 2, \dots, N-1\}$ i sve susedne piksele $p \in \{0, 1, \dots, N-1\}$. Na ovakav način, za svako i formira se jedan binarni kod. Svaka vrednost iz okoline jedna po jedna uzima ulogu praga ($\alpha_{\pi(i)}$) i binarni kod se formira poredeći njenu vrednost sa ostalima iz okoline. Ovo implicira da jedna okolina učestvuje sa potencijalno $N-1$ različitih binarnih kodova u formiranju histograma, odnosno sa najviše njih N ako je i centralni piksel uključen u kodiranje. Ternarni i kvinarni kodovi dobijaju se tako što se pored vrednosti iz okoline, razmatraju jos jedan ili dva dodatna praga. U ternarnom slučaju, sive vrednosti u zoni $\pm t$ oko razlike $\alpha_p - \alpha_{\pi(i)}$, kodiraju se sa 0, one iznad njih sa +1 i ispod sa -1. Dakle, razlike iz posmatrane okoline kodirane su sa 3 vrednosti $(-1, 0, 1)$, dobijene za $k=1$ u formuli (5.2.19). Analognim razmatranjem, uz uključivanje još jednog praga ternarno kodiranje prelazi u kvinarno, sa 5 vrednosti $(-2, -1, 0, 1, 2)$, dobijeno za $k=2$ u formuli (5.2.19). Ternarni i kvinarni kodovi razlažu se na dva, odnosno četiri binarna koda koji se odvojeno tretiraju i kolektuju u α LBP histograme (kao što je objašnjeno u proceduri za formiranje α LBP-ova). Na kraju izračunavanja dobijeni histogrami nadovezivanjem formiraju odgovarajući α LTP, odnosno α LQP histogram.

5.3 Primena α LBP deskriptora u klasifikaciji tekstura digitalnih slika

5.3.1 Skupovi podataka (Texture datasets)

Za evaluaciju predstavljenih deskriptora koristili smo tri javno dostupne baze slika: KTH-TIPS2b, UIUC i Virus. Navedeni skupovi slika su izabrani tako da predstavljaju izazov za deskriptore, što znači da su veoma raznovrsni u broju klasa i uzoraka unutar klase, skaliranju, rotaciji, osvetljenju, rezoluciji, uključujući i različite tipove i nivoe degradacije slika. Ove baze smo izvojili, jer smo kroz pregled literature primetili da su više puta preporučivane za upotrebu [110, 132, 133], zbog velikih varijacija unutar klase.



SLIKA 5.12: Primeri test slika – KTH-TIPS2b baza.

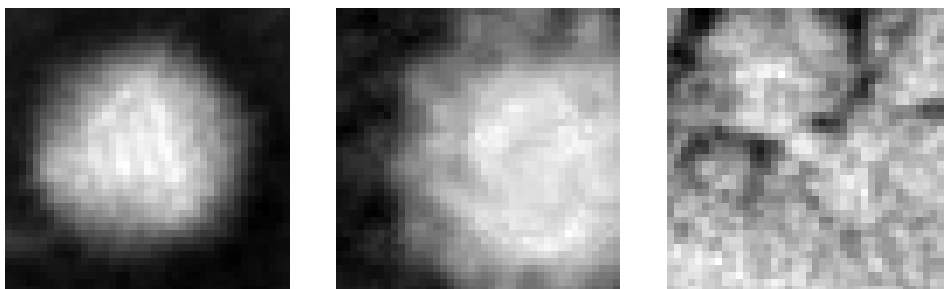
KTH-TIPS2b baza [134, 135] sadrži 11 materijala i u svakom od njih po 4 različita uzorka RGB slika, prikazanih na Slici 5.12. Svi materijali su uslikani u 3 različite poze, sa 4 tipa osvetljenja i 9 skaliranja, što rezultuje sa 108 slika po uzorku. Varijacije između uzoraka unutar klase nisu jednake. U nekima se nalaze fabrički, ručno pravljene ili pletene materijali, što čini ovakve klase veoma heterogenim i to ne samo u uslovima formiranja slika. Većina slika u ovom skupu podataka je veličine 200×200 piksela. Slike su u toku obrade konvertovane u sive, koristeći BT.601 ($Y=0.299R+0.587G+0.114R$).

UIUC baza [136] sadrži 25 klasa, od kojih se u svakoj nalazi po 40 slika različitih površina tekture. Ovaj skup podataka odlikuje izrazita heterogenost klasa, sa naglašenim razlikama u skaliranju, rotaciji, perspektivi i nekontrolisanim uslovima osvetljenja. Sve slike su sive i veličine 640×480 piksela, Slika 5.13.



SLIKA 5.13: Primeri test slika – UIUC baza.

Virus baza [137] sadrži 15 klasa, gde se u svakoj nalazi po 100 slika virusa, Slika 5.14. Jedna klasa reprezentuje jedan tip virusa. Slike su formirane upotrebom TEM mikroskopa (eng. Transmission Electron Microscope) i sve su veličine 41×41 piksela. Tipovi virusa se razlikuju po veličini i obliku, variraju od izoedarskih do visoko pleomorfnih, ali je prečnik virusa relativno konstantan unutar jedne klase.



SLIKA 5.14: Primeri test slika – Virus baza.

5.3.2 Metod klasifikacije

Efikasnost i diskriminativna moć predstavljene klase α -deskriptora tekstuure, prezentovana je njihovom primenom u klasifikaciji na različitim skupovima podataka. Kao metode klasifikacije koristili smo metod najbližeg suseda 1-NN sa χ^2 rastojanjem i SVM sa Gausovim jezgrom.

U raznovrsnom pregledu literature o analizi tekstuure i klasifikaciji zasnovanoj na teksturi, nekoliko različitih metrika je predloženo i korišteno u kombinaciji sa 1-NN klasifikatorom. Euklidska metrika je verovatno najjednostavnija i intuitivno najprihvatljivija za upotrebu [121]. Dok se u publikacijama koje je predstavila istraživačka grupa Univerziteta Oulu koristi Kullback-ova mera [67–69], koja proizilazi iz minimalnog principa entropije [138]. Ova mera smatra se veoma dobrom i može se koristiti u kombinaciji sa mnogim klasifikatorima, kao što su k-NN, SOM i SVM. Međutim, dosta je nestabilna sa malim vrednostima uzorka i to je osnovni razlog zašto je mi nismo koristili u testiranjima. Za naše podatke najprikladnijom se pokazala hi-kvadrat mera rastojanja (χ^2):

$$\chi^2(P_i, Q_i) = \frac{1}{2} \sum_i \frac{(P_i - Q_i)^2}{P_i + Q_i}, \quad (5.3.1)$$

gde su P i Q diskretne vrednosti i $\chi^2(0, 0) = 0$. Pomenuta mera je uspešno korištena za klasifikaciju tekstuura i objekata u radovima [123, 139–143].

Na UIUC i Virus bazama, sprovodili smo stratifikovanu desetostruku validaciju, po ugledu na referencu [121]. Ovo znači da je svaka slika nasumično raspoređena u jednu od deset grupa približno iste veličine. U svakom pojedinačnom validiranju jedna grupa se koristi za test a preostalih devet za trening. Na kraju se deset dobijenih rezultata kombinuju u jednu estimaciju. Da bismo dodatno smanjili varijacije u rezultatima, uzimali smo prosek od pet Monte-Karlo ponavljanja, sa različitim particijama. KTH-TIPS2b baza je kroz literaturu korištena na različite načine, što u slučaju ove baze značajno utiče na rezultate, [135]. Mi smo sprovodili trening

fazu na tri uzorka, a testirali na preostalom četvrtom uzorku, kao što je predloženo u [110]. Koristimo isti princip kao u [110], jer smo neke od rezultata koji su prezentovani u pomenutoj publikaciji preuzeli i koristili u poređenjima sa našim modelom α -deskriptora teksture.

5.3.3 Eksperimentalni rezultati

Diskriminativna moć α -deskriptora testirana je na tri baze i dobijeni rezultati upoređeni su sa nekoliko drugih metoda iz oblasti klasifikacije tekstura. Izvedena poređenja uključuju neke od postojećih LBP metoda na kojima je novoformirana klasa deskriptora bazirana (LBP, ILBP i LTP), skorašnju verziju LBP deskriptora koja je pokazala zavidne rezultate u klasifikaciji tekstura (MRELBP) i nekoliko metoda mašinskog učenja koje su bazirane na neuronskim mrežama (ScatNet, AlexNet i FV-VGGVD). Uspešnost klasifikacije zavisi od deskriptora, parametara i razmatranog skupa slika. Dobri rezultati pri klasifikaciji ukazuju da deskriptor ima jaka diskriminativna svojstva i da može prevazići mnoge izazove klasifikacije, koji uključuju promene u rotaciji, skaliranju, osvetljenju, broju klasa i uzoraka unutar klase, različite tipove i nivoe degradacije slika. Testiranje je sprovedeno sa dva rotaciona pristupa (shift i DFT) i dva metoda klasifikacije (1-NN i SVM). Neki od dobijenih rezultata prikazani su u tabelama 5.1, 5.2 i 5.3. Poređenje takođe uključuje najbolje rezultate iz obimne komparativne studije [110], koja obuhvata 40 metoda za analizu tekstura (od čega su 32 LBP metode).

Svaki od LBP metoda zavisi od nekoliko parametara. Broj posmatranih suseda iz lokalne okoline (N) i poluprečnik (R), su parametri zajednički za sve LBP deskriptore. Osim LBP i ILBP, svi ostali pomenuti LBP deskriptori imaju dodatno još jedan do tri parametra koje treba podesiti. Mi smo razmatrali ove parametre kao funkciju sadržaja slike, umesto fiksne vrednosti za ceo skup podataka, što je uglavnom sretano u pregledu literature. U publikaciji [78] sprovedeni su testovi radi utvrđivanja da li parametri

treba da zavise od lokalne okoline ili od sadržaja cele slike. Tada je zaključeno da je najprikladnije da parametri zavise od standardne devijacije (s) celokupne slike za koju se histogram formira. U zavisnosti od deskriptora i kvantizacije, razlikuje se dužina vektora karakteristika, odnosno histograma koji se formira. Najveći uticaj na veličinu histograma ima broj razmatranih suseda (N) i da li je centralni piksel uključen u kodiranje ili ne. Pored toga, povećanjem kvantizacije sa binarne na ternarnu i kvinarnu, dužina vektora raste dva, odnosno četiri puta, respektivno. Ovo se smatra prihvatljivim, ako uočimo da povećanje kvantizacije ima povoljan uticaj na rezultate klasifikacije.

Prvi testovi izvršeni su na Virus bazi, koja se pokazala kao veoma zahtevna za klasifikaciju. Tabela 5.1 pokazuje da svi α -deskriptori imaju bolje performanse u verzijama koje uključuju centralni piksel u kodiranje. Takođe, svi postižu bolje rezultate sa SVM klasifikatorom. Već binarna verzija našeg deskriptora, α LBP, daje značajan napredak, sa 67.05% ispravno klasifikovanih virusa. Iz tabele 5.1 može se zaključiti da povećanje nivoa kvantizacije povoljno deluje na rezultate. Za kvinarno kodiranje, sa $I\alpha$ LQP deskriptorom, dobijamo najbolji rezultat, koji odlikuje 75.65% uspešnosti klasifikacije.

Primetimo da je u tabeli 5.1 prikazan samo jedan metod rotacione invarijantnosti. Suprotno očekivanom i iskustvima iz literature, u sprovedenim testovima sa DFT rotacionim pristupom dobili smo značajno lošije rezultate. Ovo možemo objasniti specifičnošću slika u posmatranom Virus skupu podataka. Imajmo na umu da su teksture u ovom skupu ekstrahovane u obliku disk regiona istog prečnika kao i virusi, ali ne uvek pravilno centriranim (za više detalja pogledajte publikacije [121, 144]). U nekim slučajevima, ove slike sadrže dosta pozadine pored prikazanih virusa ili se ekstrahovane teksture samo delimično preklapaju sa pravim virusima.

Nisu svi skupovi slika jednako jednostavni/komplikovani za klasifikaciju. U poređenju sa Virusima, klasifikacija slika na UIUC bazi se pokazala mnogo jednostavnijom. Iz Tabele 5.2 može se videti da gotovo sve metode postižu

TABELA 5.1: Rezultati testiranja sprovedeni na Virus bazi.

Metod	Rotacioni pristup	Klasifikator	Parametri	Uspešnost (u %)
LBP	shift	1-NN	R=4, N=14	51.13
ILBP	shift	1-NN	R=4, N=11	53.97
LTP	shift	1-NN	R=4, N=10, t=0.5s	58.50
α LBP	shift	1-NN	R=4, N=14, f=1.7s	67.05
I α LBP	shift	1-NN	R=4, N=13, f=0.75s	68.68
I α LBP	shift	SVM	R=4, N=13, f=0.75s	74.88
α LTP	shift	1-NN	R=5, N=15, f=1.75s, t=0.85s	67.20
I α LTP	shift	1-NN	R=4, N=14, f=0.7s, t=0.9s	69.09
I α LTP	shift	SVM	R=4, N=14, f=0.7s, t=0.9s	75.11
α LQP	shift	1-NN	R=5, N=15, f=1s, $t_1 = 1s, t_2 = 1.25s$	66.77
I α LQP	shift	1-NN	R=5, N=15, f=0.5s, $t_1 = 0.5s, t_2 = 0.75s$	69.88
I α LQP	shift	SVM	R=5, N=15, f=0.5s, $t_1 = 0.5s, t_2 = 0.75s$	75.65

* Implementacija rotacione invarijantnosti: shift - rotiranjem koda na najmanju celobrojnu reprezentaciju.

više od 90% ispravno klasifikovanih tekstura. Takođe, možemo primetiti da α -deskriptori imaju veću moć diskriminacije od klasičnih metoda, na kojima su zasnovani. Izuzetno je bitno naglasiti da I α LQP sa 97.26% ispravno klasifikovanih tekstura, nadmašuje MRELBP, koji je prikazan kao najbolji LBP u komparativnoj studiji [110], koja obuhvata 32 različita LBP deskriptora. Takođe, uz mnogo manju računarsku složenost predložena klasa α -deskriptora nadmašuje neke od metoda zasnovanih na principima mašinskog učenja.

Skup podataka KTH-TIPS2b se kroz literaturu testira na različite načine. U zavisnosti od toga variraju i rezultati klasifikacije. Mi smo sledili pristup predstavljen u radu [110], jer smo neke od njihovih rezultata koristili u poređenjima. Tabela 5.3 pokazuje da je predložena metoda mnogo bolja

TABELA 5.2: Rezultati testiranja sprovedeni na UIUC bazi.

Metod	Rotacioni pristup	Klasifikator	Parametri	Uspešnost (u %)
LBP	shift	1-NN	R=5, N=13	89.09
ILBP	shift	1-NN	R=5, N=13	95.04
LTP	shift	1-NN	R=5, N=13, t=0.5s	94.21
α LBP	shift	1-NN	R=5, N=13, f=1.25s	93.02
α LBP	dft	1-NN	R=5, N=13, f=1.25s	95.88
I α LBP	shift	1-NN	R=5, N=13, f=0s	94.86
I α LBP	dft	1-NN	R=5, N=13, f=0s	96.78
α LTP	shift	1-NN	R=5, N=15, f=0s, t=0.55s	95.08
I α LTP	shift	1-NN	R=5, N=13, f=0.5s, t=0.4s	95.62
α LQP	dft	1-NN	R=5, N=13, f=0.75s, $t_1 = 0.85s, t_2 = 1.25s$	96.88
I α LQP	dft	1-NN	R=5, N=15, f=0.45s, $t_1 = 0.55s, t_2 = 0.7s$	97.26
MRELBP	/	1-NN	/	94.73
MRELBP	/	SVM	/	96.88
FV-VGGVD	/	SVM	/	99.80
FV-AlexNet	/	SVM	/	99.10
ScatNet	/	PCA	/	96.15

*Poslednjih pet rezultata preuzeto je iz komparativne studije prikazane u [110], gde parametri nisu naznačeni.

Implementacija rotacione invarijantnosti: shift - rotiranjem koda na njanju celobrojnu reprezentaciju, dft - primenom Diskretne Furijeove transformacije.

nego svi klasični pristupi, čak i u najjednostavnijem binarnom obliku. Dodatno, pristup rotacione invarijantnosti koji koristi DFT transformaciju ovde daje značajno bolje rezultate. Iz Tabele 5.3 možemo videti da 78.16% uspešne klasifikacije postignute sa I α LTP, i 79.23% koji potiču od I α LQP deskriptora, pobeđuju gotovo sve metode, osim FV-VGGVD. Napomenimo još da predstavljeni metod ima neuporedivo manju računarsku složenost

nego metode zasnovane na mašinskom učenju, a da im postignutim rezultatima klasifikacije može parirati.

TABELA 5.3: Rezultati testiranja sprovedeni na KTH-TIPS2b bazi.

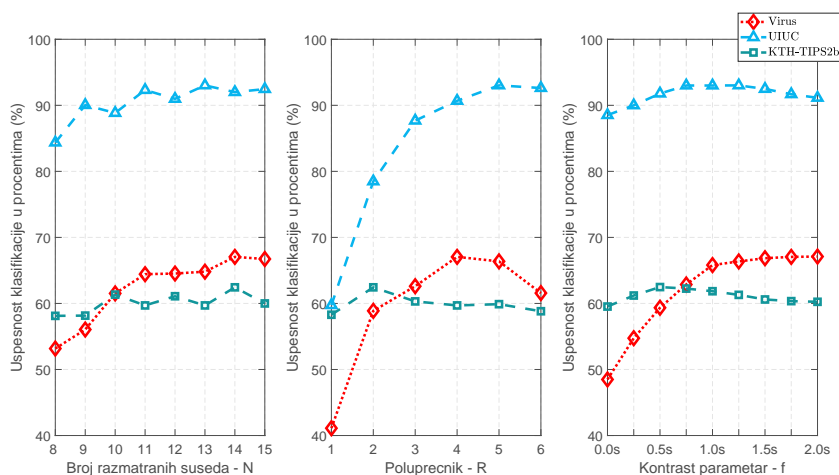
Metod	Rotacioni pristup	Klasifikator	Parametri	Uspešnost (u %)
LBP	shift	1-NN	R=2, N=14	59.53
ILBP	shift	1-NN	R=1, N=8	61.16
LTP	shift	1-NN	R=2, N=10, t=0.2s	63.49
α LBP	dft	1-NN	R=2, N=14, f=0.6s	65.45
α LBP	dft	SVM	R=4.5, N=14, f=1s	74.43
$I\alpha$ LBP	dft	1-NN	R=2, N=14, f=1s	67.38
α LTP	dft	SVM	R=1.5, N=9, f=1.6s, t=1.4s	75.46
$I\alpha$ LTP	dft	SVM	R=1.8, N=14, f=2s, t=1.85s	78.16
α LQP	dft	SVM	R=2, N=14, f=1s, $t_1 = 0.75s, t_2 = 1.25s$	75.88
$I\alpha$ LQP	dft	1-NN	R=2, N=14, f=0.4s, $t_1 = 0.4s, t_2 = 0.6s$	68.43
$I\alpha$ LQP	dft	SVM	R=1.8, N=14, f=3s, $t_1 = 2.75s, t_2 = 3.15s$	79.23
MRELBP	/	NNC	/	68.98
MRELBP	/	SVM	/	77.91
FV-VGGVD	/	SVM	/	88.20
FV-AlexNet	/	SVM	/	77.90
ScatNet	/	PCA	/	68.92

*Poslednjih pet rezultata preuzeto je iz komparativne studije prikazane u [110], gde parametri nisu naznačeni.

Implementacija rotacione invarijantnosti: shift - rotiranjem koda na najmanju celobrojnu reprezentaciju, dft - primenom Diskretne Furijeove transformacije.

Pored veoma dobrih rezultata klasifikacije, treba napomenuti da je slabost metoda osetljivost na promenu parametara. Rezultati ukazuju da je izbor parametra uslovljen skupom podataka koji se klasifikuje. Bazirano na

istraživanjima sprovedenim u publikaciji [78], gde je urađeno iscrpno pretraživanje optimalnih parametara, primetili smo da postoji više lokalnih maksimuma i da rezultati izrazito variraju oko optimalnih vrednosti. Ova zavisnost ilustrovana je na slici 5.15, gde je pojedinačno za svaki parametar (R , N , f) prikazano kako utiče na rezultate klasifikacije. Parametri su uslovljeni izborom skupa podataka, ali možemo primetiti da je veličina razmatranog susedstva povezana sa skaliranjem dominantnih karakteristika, dok manje eksplicitna veza između kontrasta i prisutnog šuma na slikama utiče na parametar f . Grafik implicira da kontrast parametar utiče najviše na performanse postignute na Virus skupu podataka, što je povezano sa kvalitetom slika. Naime, zbog specifičnosti dobijanja TEM mikroskopom, slike iz Virus skupa su degradirane prisustvom šuma i zamagljenja. Ovim ističemo bitnu karakteristiku predstavljenog metoda, koji pokazuje diskriminativnu moć na slikama nižeg kvaliteta, što je od izuzetne važnosti za razne primene. Zbog mnogo prikazanih novih deskriptora i različitih parametara, prostor za iscrpno pretraživanje parametara postaje prevelik i u ovom testiranju parametri su ručno podešeni nakon nekoliko inicijalnih pokušaja.



SLIKA 5.15: Osetljivost klasifikacije na promenu parametara, prikazano za svaki skup podataka i α LBP deskriptor.

Poglavlje 6

Zaključak

6.1 Zaključak sprovedenog istraživanja

Digitalna slika je veoma popularna i zastupljena oblast u raznim aspektima svakodnevnog života. Istraživanje sprovedeno u okviru ove doktorske disertacije imalo je za cilj razvijanje novih metoda i prezentovanje njihove praktične upotrebe kroz sprovedene eksperimente u različitim zadacima u okviru analize i obrade digitalnih slika. Ova teza sadrži dve veće celine, odnosno dva pravca istraživanja kojima se kandidat bavio u toku doktorskih studija.

Jedan segment istraživanja obuhvata teoriju fazi skupova, svojstva nekih tipova rastojanja, t -normi, t -konormi i operatora agregacije, kao i konstrukciju i primenu novih funkcija rastojanja u segmentaciji digitalnih slika. U okviru pomenute teme poglavlje 3 posvećeno je teorijskim osnovama navedenih pojmova, uvedene su dve nove klase operatora agregacije [59] i prošireni su teorijski koncepti t -normi i t -konormi [49], a zatim je prikazana i njihova praktična primena. U poglavlju 4 demonstrirana je konstrukcija novih funkcija rastojanja i metrika primenom operatora agregacije na

neke inicijalne funkcije rastojanja. Osobine novoformirane funkcije rastojanja zavise u velikoj meri i od karakteristika polaznih funkcija rastojanja i od svojstva primenjenog operatora agregacije. U skladu sa tim mogu se modelirati nova rastojanja i metrike sa različitim osobinama. Ovako konstruisane funkcije rastojanja pokazale su izuzetno dobre rezultate u zadacima segmentacije digitalnih slika, tako da pored teorijskih dobrinosa publikacije [49, 59, 60, 63, 65] demonstriraju i praktični doprinos sprovedenih istraživanja.

Drugi segment istraživanja posvećen je analizi teksture digitalnih slika. Tekstura predstavlja značajnu karakteristiku sadržaja slike i kao takva neizostavan je deo analize slike i računarske grafike. Informacije koje možemo dobiti analizom teksture digitalnih slika uspešno se koriste za procese klasifikacije u mnogim primenjenim disciplinama, obuhvatajući različite vrste podataka - od mikroskopskih do multispektralnih slika. Posebna pažnja u okviru ove teze razmatrajući pojam analize teksture, posvećena je deskriptorima teksture, tačnije klasi LBP deskriptora. U poglavlju 5 dat je pregled najbitnijih karakteristika LBP klase i njenih značajnih predstavnika, kao i kratak istorijski pregled razvoja deskriptora koji se zasnivaju na teksturi. Naglašeno je da "dobar" deskriptor karakterišu visoka efikasnost, snažna diskriminativna svojstva, u smislu mogućnosti razlikovanja klasa objekata, jednostavnost implementacije i izvršavanje u realnom vremenu. Svi navedeni uslovi vođeni su formiranjem što prihvatljivijih karakteristika deskriptora, radi efikasnije implementacije u realnim problemima i praksi. Motivisani primenom deskriptora u klasifikaciji, formirali smo novu familiju α -deskriptora teksture, koja je bazirana na osnovnim principima LBP metoda i dodatno prožeta pojmovima iz teorije fazi skupova. Odlike ovako formirane klase deskriptora, varijacije njenih binarnih, ternarnih i kvinarnih predstavnika, njihova uspešnost u klasifikaciji i prednosti i eventualne mane predloženog metoda detalno su izloženi u publikacijama [78, 131] i kroz poglavlje 5 ove teze. Uvedena klasa deskriptora pokazala je izuzetne rezultate u klasifikaciji na različitim bazama slika. Dobijeni rezultati poređeni su sa aktuelnim predstavnicima iz klase LBP

deskriptora i nekoliko drugih metoda koje u analizu uključuju modele zasnovane na mašinskom učenju. Značajno je pomenuti da se predložena klasa deskriptora uspešno bori sa procesima klasifikacije, dostižući uglavnom performanse metoda koje su podržane mašinskim učenjem, a pri tome je odlikuju mnogo jednostavnije računarske performanse.

6.2 Budući rad

Na osnovu istraživanja koje je sprovedeno u toku doktorskih studija kandidata i predstavljeno u ovoj tezi, nekoliko ideja za budući rad ističemo u nastavku.

Dobri eksperimentalni rezultati navedeni u poglavlju 4 ove teze, potvrđuju teorijske pretpostavke da se ciljanim odabirom operatora agregacije i polaznih funkcija rastojanja mogu matematički modelirati nove funkcije rastojanja koje pored primene u segmentaciji mogu imati i niz drugih primena u praksi. Naime, osim upotrebe FCM algoritma za segmentaciju digitalnih slika, moguće je ovako konstruisane funkcije rastojanja primeniti koristeći druge algoritme klasterovanja podataka. Takođe, smatramo da se pomenute funkcije i metod njihove konstrukcije, koji je prezentovan u tezi, mogu uspešno koristiti i u drugim zadacima iz oblasti obrade digitalnih slika, kao što su klasifikacija, uklanjanje šuma i zamagljenja na slici, registracija i razne oblasti koje obuhvataju primenu teorije prepoznavanja oblika.

Polja primene karakteristika teksture su veoma široka i raznovrsna. U okviru teze bavili smo se razvojem nove klase deskriptora i testirali smo njenu uspešnost u procesima klasifikacije. Smatramo da se predloženi metod može dodatno proširiti u 3D analizi slike, koja bi obuhvatala procese klasifikacije objekata ili analize pokreta i izraza lica. Takođe, u eri ekspanzije metoda zasnovanih na mašinskom učenju, verujemo da bi eventualne modifikacije našeg modela i njegovo uključivanje u odgovarajući pristup

mašinskog učenja mogao da rezultuje dobrim performansama, tako da ovo predstavlja jednu od vodećih interesnih sfera budućeg istraživanja. Dodatno, izuzimajući klasifikaciju kao primarnu upotrebu, deskriptori teksture mogu biti uspešno korišteni u drugim procesima analize digitalnih slika. Pre svega navodimo segmentaciju teksture kao značajnu i široko rasprostranjenu u različitim primenama. Smatramo da klasa α -deskriptora, sa svojim izraženim diskriminativnim svojstvima ima veliki potencijal u zadacima segmentacije, gde bi od izuzetnog značaja bila dijagnostika i primena u medicini koja podrazumeva analizu od mikroskopskih do MRI slika. Pored navedenog, kao potencijalne primene ističemo sintezu teksture, kao i dobijanje oblika iz tekstura.

Bibliografija

- [1] Gustaf Kylberg. *Automatic Virus Identification using TEM: Image Segmentation and Texture Analysis*. PhD thesis, Acta Universitatis Upsaliensis, 2014.
- [2] Nataša Sladoje and Joakim Lindblad. High-precision boundary length estimation by utilizing gray-level information. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 31(2):357–363, 2008.
- [3] Slobodan Dražić, Nataša Sladoje, and Joakim Lindblad. Estimation of ferets diameter from pixel coverage representation of a shape. *Pattern Recognition Letters*, 80:37–45, 2016.
- [4] Buda Bajić, Joakim Lindblad, and Nataša Sladoje. Sparsity promoting super-resolution coverage segmentation by linear unmixing in presence of blur and noise. *Journal of Electronic Imaging*, 28(1): 13–46, 2019.
- [5] Nataša Sladoje, Ingela Nyström, and Punam K Saha. Measurements of digitized objects with fuzzy borders in 2d and 3d. *Image and Vision Computing*, 23(2):123–132, 2005.
- [6] Buda Bajić Papuga. *Methods for image restoration and segmentation by sparsity promoting energy minimization*. PhD thesis, Faculty of Technical Sciences, University of Novi Sad, 2019.
- [7] Rafael C Gonzalez and Richard E Woods. *Digital Image Processing*. Prentice Hall Upper Saddle River, New Jersey, 2002.

-
- [8] Milan Sonka, Vaclav Hlavac, and Roger Boyle. *Image Processing, Analysis and Machine Vision*. Cengage Learning, 2014.
- [9] Richard O Duda, Peter E Hart, and David G Stork. *Pattern Classification*. John Wiley & Sons, 2012.
- [10] Lotfi A Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3):338–353, 1965.
- [11] Nataša Sladoje. *On analysis of discrete spatial fuzzy sets in 2 and 3 dimensions*. PhD thesis, Acta Universitatis Upsaliensis, 2005.
- [12] CV Jawahar, Prabir K Biswas, and AK Ray. Investigations on fuzzy thresholding based on fuzzy clustering. *Pattern Recognition*, 30(10):1605–1613, 1997.
- [13] CV Jawahar and AK Ray. Incorporation of gray-level imprecision in representation and processing of digital images. *Pattern Recognition Letters*, 17(5):541–546, 1996.
- [14] James C Bezdek. *Pattern recognition with fuzzy objective function algorithms*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [15] CV Jawahar, Prabir K Biswas, and AK Ray. Detection of clusters of distinct geometry: A step towards generalised fuzzy clustering. *Pattern Recognition Letters*, 16(11):1119–1123, 1995.
- [16] Joseph C Dunn. A fuzzy relative of the isodata process and its use in detecting compact well-separated clusters. *Cybernetics and Systems*, 3(3):32–57, 1973.
- [17] James C Bezdek. *Pattern Recognition with Fuzzy Objective Function Algorithms*. Plenum Press, New York, 1981.
- [18] James C Bezdek, Robert Ehrlich, and William Full. Fcm: The fuzzy c-means clustering algorithm. *Computers and Geosciences*, 10(2-3):191–203, 1984.

-
- [19] George J Klir and Bo Yuan. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications*. Prentice Hall, New Jersey, 1995.
- [20] Ljubo Nedović. *Neki tipovi rastojanja i fazi mera sa primenom u obradi slika*. PhD thesis, Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu, 2017.
- [21] Eugene Roventa and Tiberiu Spircu. Averaging procedures in defuzzification processes. *Fuzzy Sets and Systems*, 136(3):375–385, 2003.
- [22] CV Jawahar, Prabir K Biswas, and AK Ray. Analysis of fuzzy thresholding schemes. *Pattern Recognition*, 33(8):1339–1349, 2000.
- [23] Jayaram K Udupa and Supun Samarasekera. Fuzzy connectedness and object definition: theory, algorithms, and applications in image segmentation. *Graphical Models and Image Processing*, 58(3):246–261, 1996.
- [24] Sankar K Pal and Azriel Rosenfeld. Image enhancement and thresholding by optimization of fuzzy compactness. *Pattern Recognition Letters*, 7(2):77–86, 1988.
- [25] Sankar K Pal and Ashish Ghosh. Index of area coverage of fuzzy image subsets and object extraction. *Pattern Recognition Letters*, 11(12):831–841, 1990.
- [26] Trevor Hastie, Robert Tibshirani, and Jerome Friedman. *The elements of statistical learning: Data Mining, Inference and Prediction*. Springer, New York, 2001.
- [27] Naomi S Altman. An introduction to kernel and nearest-neighbor nonparametric regression. *The American Statistician*, 46(3):175–185, 1992.
- [28] Oren Boiman, Eli Shechtman, and Michal Irani. In defense of nearest-neighbor based image classification. In *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, pages 1–8. IEEE, 2008.

-
- [29] Corinna Cortes and Vladimir Vapnik. Support-vector networks. *Machine Learning*, 20(3):273–297, 1995.
- [30] Henry Han. Analyzing support vector machine overfitting on microarray data. In *International Conference on Intelligent Computing*, pages 148–156. Springer, 2014.
- [31] Henry Han and Xiaoqian Jiang. Overcome support vector machine diagnosis overfitting. *Cancer Informatics*, 13(1):145–158, 2014.
- [32] Ajay Mathur and Giles M Foody. Multiclass and binary svm classification: Implications for training and classification users. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, 5(2):241–245, 2008.
- [33] Endre Pap. *Fazi mere i njihova primena*. Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, 1999.
- [34] D Dubois and M-C Jaulent. A general approach to parameter evaluation in fuzzy digital pictures. *Pattern Recognition Letters*, 6(4):251–259, 1987.
- [35] Petr Hájek. *Metamathematics of fuzzy logic*, volume 4. Springer Science & Business Media, 2013.
- [36] Karl Menger. Statistical metrics. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 28(12):535, 1942.
- [37] Berthold Schweizer and Abe Sklar. Statistical metric spaces. *Pacific Journal of Mathematics*, 10(1):313–334, 1960.
- [38] Berthold Schweizer and Abe Sklar. *Probabilistic metric spaces*. North-Holland, New York, 1983.
- [39] AN Serstnev. Random normed spaces: Problems of completeness. *Kazan Gos. Univ. Ucen. Zap*, 122:3–20, 1962.

- [40] Berthold Schweizer. Associative functions and statistical triangle inequalities. *Puble. Math. Debrecen*, 8:169–186, 1961.
- [41] Janos C Fodor and MR Roubens. *Fuzzy preference modelling and multicriteria decision support*, volume 14. Springer Science and Business Media, 1994.
- [42] Michel Grabisch, Hung T Nguyen, and Elbert A Walker. *Fundamentals of uncertainty calculi with applications to fuzzy inference*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.
- [43] Roger B Nelsen. *Lecture Notes in Statistics: An introduction to copulas*, volume 139. Springer, New York, 1999.
- [44] Erich Peter Klement and Siegfried Weber. Generalized measures. *Fuzzy Sets and Systems*, 40(2):375–394, 1991.
- [45] Endre Pap. *Null-additive set functions*, volume 337. Kluwer Academic Publishers, 1995.
- [46] Michio Sugeno. *Theory of fuzzy integrals and its applications*. PhD thesis, Tokyo Institute of technology, 1974.
- [47] Siegfried Weber. \perp - decomposable measures and integrals for archimedean t-conorms \perp . *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 101(1):114–138, 1984.
- [48] Nebojša Ralević, Danijela Karaklić, and Neda Pištinjat. Fuzzy metric and its applications in removing the image noise. *Soft Computing*, 23(22):12049–12061, 2019.
- [49] Nebojša Ralević, Marija Delić, and Ljubo Nedović. Aggregation of fuzzy metrics and its applications in image segmentation. *Submitted for publication*.
- [50] Michel Grabisch, Jean-Luc Marichal, Radko Mesiar, and Endre Pap. *Aggregation Functions*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications (vol.127). Cambridge University Press, 2009.

- [51] Ronald R Yager. On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decisionmaking. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 18(1):183–190, 1988.
- [52] Ronald R Yager. Families of owa operators. *Fuzzy sets and systems*, 59(2):125–148, 1993.
- [53] Kacprzyk Janusz Yager, Ronald R. *The Ordered Weighted Averaging Operation: Theory, Methodology and Applications*. Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, USA, 1997.
- [54] Ronald R Yager. Fusion of ordinal information using weighted median aggregation. *International Journal of Approximate Reasoning*, 18(1-2):35–52, 1998.
- [55] Ronald R Yager. Generalized OWA aggregation operators. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 3(1):93–107, 2004.
- [56] Ronald R Yager. OWA aggregation over a continuous interval argument with applications to decision making. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, 34(5):1952–1963, 2004.
- [57] Tomasa Calvo, Anna Kolesárová, Magda Komorníková, and Radko Mesiar. Aggregation operators: properties, classes and construction methods. In *Aggregation operators. Studies in Fuzziness and Soft Computing, vol 97. Physica, Heidelberg*, pages 3–104. Springer, 2002.
- [58] Michel Grabisch, Jean-Luc Marichal, Radko Mesiar, and Endre Pap. Aggregation functions: means. *Information Sciences*, 181(1):1–22, 2011.
- [59] Marija Delić, Ljubo Nedović, and Endre Pap. Extended power-based aggregation of distance functions and application in image segmentation. *Information Sciences*, 494:155–173, 2019.

- [60] Ljubo Nedović, Endre Pap, Nebojša M Ralević, and Marija Delić. X-ray image segmentation using product-type aggregation of distance functions. In *XLVI International Symposium on Operational Research*, 2019.
- [61] Erich Peter Klement, Radko Mesiar, and Endre Pap. *Triangular norms. 2000*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.
- [62] Ljubo Nedović, Nebojša M Ralević, and Ivan Pavkov. Aggregated distance functions and their application in image processing. *Soft Computing*, 22(14):4723–4739, 2018.
- [63] Ljubo Nedović, Marija Delić, and Nebojša M Ralević. OWA aggregated distance functions and their application in image segmentation. In *IEEE 16th International Symposium on Intelligent Systems and Informatics (SISY)*, pages 311–316. IEEE, 2018.
- [64] Ljubo Nedović and Marija Delić. Image segmentation by applying median-aggregated distance functions. In *Proceedings of The Third Conference on Mathematics in Engineering: Theory and Applications*, pages 1–6, 2018.
- [65] Endre Pap, Marija Delić, and Ljubo Nedović. Information fusion by extended power-based aggregation in image segmentation. In *SINTEZA 2019, International Scientific Conference on Information Technology and Data Related Research*, pages 162–167, 2019.
- [66] Michel Marie Deza and Elena Deza. *Encyclopedia of distances*. Springer, 2009.
- [67] Timo Ojala, Matti Pietikainen, and David Harwood. Performance evaluation of texture measures with classification based on kullback discrimination of distributions. In *Proceedings of the 12th IAPR International Conference on Pattern Recognition*, volume 1, pages 582–585. IEEE, 1994.

- [68] Timo Ojala, Matti Pietikäinen, and David Harwood. A comparative study of texture measures with classification based on featured distributions. *Pattern Recognition*, 29(1):51–59, 1996.
- [69] Timo Ojala, Matti Pietikäinen, and Topi Maenpää. Multiresolution gray-scale and rotation invariant texture classification with local binary patterns. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 24(7):971–987, 2002.
- [70] David Martin, Charless Fowlkes, Doron Tal, and Jitendra Malik. A database of human segmented natural images and its application to evaluating segmentation algorithms and measuring ecological statistics. In *Proceedings of 8th IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV)*, 2001.
- [71] Isabelle Bloch. On fuzzy distances and their use in image processing under imprecision. *Pattern Recognition*, 32(11):1873–1895, 1999.
- [72] V. Gregori and S. Romaguera. Some properties of fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 115(3):485–489, 2000.
- [73] A. George and P. Veeramani. On some results in fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 64(3):395–399, 1994.
- [74] A. George and P. Veeramani. Some theorems in fuzzy metric spaces. *J. Fuzzy Math.*, (3):933–940, 1995.
- [75] A. George and P. Veeramani. On some results of analysis for fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 90(3):365–368, 1997.
- [76] S. Morillas, V. Gregori, G. Peris-Fajarnes, and P. Latorre. A new vector median filter based on fuzzy metrics. *International Conference Image Analysis and Recognition, Lecture Notes in Computer Science*, 3656:81–90, 2005.
- [77] V. Gregori, S. Morillas, and A. Sapena. Examples of fuzzy metrics and applications. *Fuzzy Sets and Systems*, 170(1):95–111, 2011.

- [78] Marija Delić, Joakim Lindblad, and Nataša Sladoje. α lbp-a novel member of the local binary pattern family based on α -cutting. In *9th International Symposium on Image and Signal Processing and Analysis (ISPA)*, pages 13–18. IEEE, 2015.
- [79] Mihran Tuceryan and Anil K Jain. Texture analysis. In *The Handbook of Pattern Recognition and Computer Vision (2nd edition)*, pages 207–248. World Scientific, 1998.
- [80] Pietikainen Matti, Hadid Abdenour, G Zhao, and T Ahonen. *Computer Vision Using Local Binary Patterns*. Springer, 2011.
- [81] Bela Julesz. Textons, the elements of texture perception, and their interactions. *Nature*, 290(5802):91–97, 1981.
- [82] Loris Nanni, Alessandra Lumini, and Sheryl Brahnham. Local binary patterns variants as texture descriptors for medical image analysis. *Artificial Intelligence in Medicine*, 49(2):117–125, 2010.
- [83] Mohammad Peikari, Mehrdad J Gangeh, Judit Zubovits, Gina Clarke, and Anne L Martel. Triaging diagnostically relevant regions from pathology whole slides of breast cancer: A texture based approach. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 35(1):307–315, 2016.
- [84] Adrien Depeursinge, Omar S Al-Kadi, and J Ross Mitchell. *Biomedical Texture Analysis: Fundamentals, Tools and Challenges*. Academic Press, 2017.
- [85] Elisabeth Wetzler, Joakim Lindblad, Ida-Maria Sintorn, Kjell Hulténby, and Natasa Sladoje. Towards automated multiscale imaging and analysis in tem: Glomeruli detection by fusion of cnn and lbp maps. In *European Conference on Computer Vision-ECCV 2018*. Springer, 2018.
- [86] Oleg Okun and Matti Pietikäinen. A survey of texture-based methods for document layout analysis. In *Texture Analysis in Machine Vision*, pages 165–177. World Scientific, 2000.

- [87] Maroua Mehri, Pierre Héroux, Petra Gomez-Krämer, and Rémy Mullet. Texture feature benchmarking and evaluation for historical document image analysis. *International Journal on Document Analysis and Recognition (IJ DAR)*, 20(1):1–35, 2017.
- [88] Richard W Connors, Charles W Mcmillin, Kingyao Lin, and Ramon E Vasquez-Espinosa. Identifying and locating surface defects in wood: Part of an automated lumber processing system. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, (6):573–583, 1983.
- [89] Xianghua Xie and Majid Mirmehdi. Texems: Texture exemplars for defect detection on random textured surfaces. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 29(8):1454–1464, 2007.
- [90] Faten Sandid and Ali Douik. Robust color texture descriptor for material recognition. *Pattern Recognition Letters*, 80:15–23, 2016.
- [91] Jamie Shotton, John Winn, Carsten Rother, and Antonio Criminisi. Textonboost for image understanding: Multi-class object recognition and segmentation by jointly modeling texture, layout, and context. *International Journal of Computer Vision*, 81(1):2–23, 2009.
- [92] Edouard Oyallon and Stéphane Mallat. Deep roto-translation scattering for object classification. In *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, pages 2865–2873, 2015.
- [93] Timo Ahonen, Abdenour Hadid, and Matti Pietikainen. Face description with local binary patterns: Application to face recognition. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 28(12):2037–2041, 2006.
- [94] Guoying Zhao and Matti Pietikainen. Dynamic texture recognition using local binary patterns with an application to facial expressions. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 29(6):915–928, 2007.

-
- [95] Changxing Ding, Jonghyun Choi, Dacheng Tao, and Larry S Davis. Multi-directional multi-level dual-cross patterns for robust face recognition. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 38(3):518–531, 2016.
- [96] Li Ma, Tieniu Tan, Yunhong Wang, and Dexin Zhang. Personal identification based on iris texture analysis. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 25(12):1519–1533, 2003.
- [97] Kunai Zhang, Da Huang, Bob Zhang, and David Zhang. Improving texture analysis performance in biometrics by adjusting image sharpness. *Pattern Recognition*, 66:16–25, 2017.
- [98] Kenneth Ivan Laws. *Textured Image Segmentation*. PhD thesis, University of Southern California, 1980.
- [99] Robert M Haralick, Karthikeyan Shanmugam, et al. Textural features for image classification. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, SMC-3(6):610–621, 1973.
- [100] Mihran Tuceryan and Anil K Jain. Texture segmentation using voronoi polygons. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12(2):211–216, 1990.
- [101] Steven W Zucker. Toward a model of texture. *Computer Graphics and Image Processing*, 5(2):190–202, 1976.
- [102] Rama Chellappa and Shankar Chatterjee. Classification of textures using gaussian markov random fields. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 33(4):959–963, 1985.
- [103] James M Keller, Susan Chen, and Richard M Crownover. Texture description and segmentation through fractal geometry. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 45(2):150–166, 1989.
- [104] Michael Unser and Murray Eden. Nonlinear operators for improving texture segmentation based on features extracted by spatial filtering.

- IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 20(4):804–815, 1990.
- [105] James M Coggins and Anil K Jain. A spatial filtering approach to texture analysis. *Pattern Recognition Letters*, 3(3):195–203, 1985.
- [106] Mark R Turner. Texture discrimination by gabor functions. *Biological Cybernetics*, 55(2-3):71–82, 1986.
- [107] Simona E Grigorescu, Nicolai Petkov, and Peter Kruizinga. Comparison of texture features based on gabor filters. *IEEE Transactions on Image Processing*, 11(10):1160–1167, 2002.
- [108] Sheryl Brahmam, Lakhmi C Jain, Loris Nanni, Alessandra Lumini, et al. *Local Binary Patterns: New Variants and Applications*. Springer, 2014.
- [109] Matti Pietikäinen and Guoying Zhao. Two decades of local binary patterns: A survey. *Advances in Independent Component Analysis and Learning Machines*, pages 175–210, 2015.
- [110] Li Liu, Paul Fieguth, Yulan Guo, Xiaogang Wang, and Matti Pietikäinen. Local binary features for texture classification: Taxonomy and experimental study. *Pattern Recognition*, 62:135–160, 2017.
- [111] Alex Krizhevsky, Ilya Sutskever, and Geoffrey E Hinton. Imagenet classification with deep convolutional neural networks. In *Advances in neural information processing systems*, volume 1, pages 1097–1105, 2012.
- [112] Yunchao Gong, Liwei Wang, Ruiqi Guo, and Svetlana Lazebnik. Multi-scale orderless pooling of deep convolutional activation features. In *European Conference on Computer Vision*, pages 392–407. Springer, 2014.
- [113] Mircea Cimpoi, Subhransu Maji, and Andrea Vedaldi. Deep filter banks for texture recognition and segmentation. In *Proceedings of*

- the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, pages 3828–3836, 2015.
- [114] Felix Juefei-Xu, Vishnu Naresh Boddeti, and Marios Savvides. Local binary convolutional neural networks. In *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, pages 4284–4293. IEEE, 2017.
- [115] Lei Li, Xiaoyi Feng, Zhaoqiang Xia, Xiaoyue Jiang, and Abdenour Hadid. Face spoofing detection with local binary pattern network. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 54:182–192, 2018.
- [116] Hongliang Jin, Qingshan Liu, Hanqing Lu, and Xiaofeng Tong. Face detection using improved lbp under bayesian framework. In *Third International Conference on Image and Graphics (ICIG'04)*, pages 306–309. IEEE, 2004.
- [117] Xiaoyang Tan and Bill Triggs. Enhanced local texture feature sets for face recognition under difficult lighting conditions. In *International Workshop on Analysis and Modeling of Faces and Gestures*, pages 168–182. Springer, 2007.
- [118] Xiaoyang Tan and William Triggs. Enhanced local texture feature sets for face recognition under difficult lighting conditions. *IEEE Transactions on Image Processing*, 19(6):1635–1650, 2010.
- [119] Dimitris K Iakovidis, Eystratios G Keramidas, and Dimitris Maroulis. Fuzzy local binary patterns for ultrasound texture characterization. In *International Conference on Image Analysis and Recognition (ICIAR 2008)*, pages 750–759. Springer, 2008.
- [120] Timo Ahonen and Matti Pietikäinen. Soft histograms for local binary patterns. In *Proceedings of the Finnish Signal Processing Symposium, FINSIG*, pages 1–4, 2007.

- [121] Gustaf Kylberg and Ida-Maria Sintorn. Evaluation of noise robustness for local binary pattern descriptors in texture classification. *EURASIP Journal on Image and Video Processing*, 2013(1):17, 2013.
- [122] Li Liu, Lingjun Zhao, Yunli Long, Gangyao Kuang, and Paul Fieguth. Extended local binary patterns for texture classification. *Image and Vision Computing*, 30(2):86–99, 2012.
- [123] Li Liu, Songyang Lao, Paul W Fieguth, Yulan Guo, Xiaogang Wang, and Matti Pietikäinen. Median robust extended local binary pattern for texture classification. *IEEE Transactions on Image Processing*, 25(3):1368–1381, 2016.
- [124] Mäenpää Topi, Ojala Timo, Pietikäinen Matti, and Soriano Maricor. Robust texture classification by subsets of local binary patterns. In *Proceedings of the 15th International Conference on Pattern Recognition*, volume 3, pages 935–938. IEEE, 2000.
- [125] Hui Zhou, Runsheng Wang, and Cheng Wang. A novel extended local-binary-pattern operator for texture analysis. *Information Sciences*, 178(22):4314–4325, 2008.
- [126] Shu Liao, WK Law, and Albert CS Chung. Combining microscopic and macroscopic information for rotation and histogram equalization invariant texture classification. In *Asian Conference on Computer Vision*, pages 100–109. Springer, 2006.
- [127] Shu Liao and Albert CS Chung. Texture classification by using advanced local binary patterns and spatial distribution of dominant patterns. In *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP'07)*, volume 1, pages 1221–1224. IEEE, 2007.
- [128] Timo Ahonen, Jiří Matas, Chu He, and Matti Pietikäinen. Rotation invariant image description with local binary pattern histogram

- fourier features. *Scandinavian Conference on Image Analysis*, 5575: 61–70, 2009.
- [129] Guoying Zhao, Timo Ahonen, Jiří Matas, and Matti Pietikainen. Rotation-invariant image and video description with local binary pattern features. *IEEE Transactions on Image Processing*, 21(4):1465–1477, 2012.
- [130] Antonio Fernández, Ovidiu Ghita, Elena González, Francesco Bianconi, and Paul F Whelan. Evaluation of robustness against rotation of lbp, ccr and ilbp features in granite texture classification. *Machine Vision and Applications*, 22(6):913–926, 2011.
- [131] Marija Delić. Local binary patterns based on α -cutting approach. *Submitted for publication*.
- [132] Shahera Hossain and Seiichi Serikawa. Texture databases—a comprehensive survey. *Pattern Recognition Letters*, 34(15):2007–2022, 2013.
- [133] Francesco Bianconi and Antonio Fernández. An appendix to texture databases—a comprehensive survey. *Pattern Recognition Letters*, 45: 33–38, 2014.
- [134] P Mallikarjuna, M Fritz, A Tavakoli Targhi, E Hayman, B Caputo, and JO Eklundh. The kth-tips and kth-tips2 databases, 2006. URL <http://www.nada.kth.se/cvap/databases/kth-tips>.
- [135] Barbara Caputo, Eric Hayman, and P Mallikarjuna. Class-specific material categorisation. In *10th IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV)*, volume 2, pages 1597–1604. IEEE, 2005.
- [136] Svetlana Lazebnik, Cordelia Schmid, and Jean Ponce. A sparse texture representation using local affine regions. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 27(8):1265–1278, 2005.
- [137] Gustaf Kylberg, Mats Uppström, and Ida-Maria Sintorn. Virus texture analysis using local binary patterns and radial density profiles. In

- Progress in Pattern Recognition, Image Analysis, Computer Vision, and Applications*, volume 7042 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 573–580. Springer Berlin / Heidelberg, 2011.
- [138] Solomon Kullback. *Information Theory and Statistics*. Dover Publications, New York, 1968.
- [139] Jianguo Zhang, Marcin Marszałek, Svetlana Lazebnik, and Cordelia Schmid. Local features and kernels for classification of texture and object categories: A comprehensive study. *International Journal of Computer Vision*, 73(2):213–238, 2007.
- [140] Manik Varma and Andrew Zisserman. A statistical approach to material classification using image patch exemplars. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 31(11):2032–2047, 2009.
- [141] Zhenhua Guo, Lei Zhang, and David Zhang. A completed modeling of local binary pattern operator for texture classification. *IEEE Transactions on Image Processing*, 19(6):1657–1663, 2010.
- [142] Li Liu and Paul Fieguth. Texture classification from random features. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 34(3):574–586, 2012.
- [143] Zhenhua Guo, Lei Zhang, and David Zhang. Rotation invariant texture classification using lbp variance (lbpv) with global matching. *Pattern Recognition*, 43(3):706–719, 2010.
- [144] Gustaf Kylberg, Mats Uppström, and Ida-Maria Sintorn. Virus texture analysis using local binary patterns and radial density profiles. In *Iberoamerican Congress on Pattern Recognition*, pages 573–580. Springer, 2011.

Marija Desimir Delić

29.09.1987.

Bulevar Patrijarha Pavla 22, Novi Sad

+381 62 300 795

marijadelic@uns.ac.rs

<http://imft.ftn.uns.ac.rs/~marija/Main>



OBRAZOVANJE

Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sad, Srbija	2006-2010
- Diplomirani matematičar primenjene matematike	
- Prosečna ocena 9.66	
Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sad, Srbija	2010-2011
- Master matematičar primenjene matematike	
- Prosečna ocena 9.80	
Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu, Srbija	2012-2020
- Doktor nauka primenjene matematike	
- Mentor: dr Nebojša Ralević	
- Oblast istraživanja – primenjena matematika, obrada digitalne slike, fazi skupovi i funkcije rastojanja, analiza teksture digitalnih slika	

RADNO ISKUSTVO

Prirodno matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu	2010-2011
- Asistent na predmetu Analiza II	
Credit Agricole Serbia a.d. Novi Sad	2012-2013
- Različiti poslovi u okviru sektora validacije i sektora platnih kartica	
Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu, Srbija	2013-danas
- Asistent – Departman za opšte discipline u tehničari – Katedra za matematiku	
- Asistent na raznim matematičkim kursovima (Matematika 1, 2 i 3, Matematička statistika, Matematika za inženjersku grafiku, Matematičke metode 3...)	

ISTRAŽIVANJE

Publikacije u časopisima	
- Marija Delić , Ljubo Nedović, Endre Pap, "Extended power-based aggregation of distance functions and application in image segmentation", Information Sciences, Vol. 494, pp. 155-173	Avgust 2019
- Marija Delić , "Local Binary Patterns Based on α -cutting Approach", submitted	
- Nebojša Ralević, Marija Delić , Ljubo Nedović, "Aggregation of fuzzy metrics and its application in image segmentation", submitted	
Učešće na internacionalnim konferencijama na kojima je rad štampan u celosti	
XLVI International Symposium on Operational Research, Kladovo	Septembar 2019
- X-ray image segmentation using product-type aggregation of distance functions. Ljubo Nedović, Nebojša Ralević, Endre Pap, Marija Delić . pp. 361-366	
SINTEZA 2019, International Scientific Conference on Information Technology and Data Related Research, Belgrade	April 2019
- Information fusion by extended power-based aggregation in image segmentation. Endre Pap, Marija Delić , Ljubo Nedović. pp. 162-167.	
16th IEEE International Symposium on Intelligent Systems and Informatics (SISY), Subotica	Septembar 2018
- OWA aggregated distance functions and their application in image segmentation. Ljubo Nedović, Marija Delić , Nebojša Ralević. pp. 311-316.	
9th IEEE International Symposium on Image and Signal Processing and Analysis (ISPA), Zagreb	Septembar 2015
- α BP - a Novel Member of the Local Binary Pattern Family Based on α -cutting. Marija Delić , Joakim Lindblad, Nataša Sladoje. pp. 13-18.	
Učešće na nacionalnim konferencijama	
The 4th Conference on Mathematics in Engineering: Theory and Applications, META, Novi Sad	Maj 2019
- Analiza prijemnog ispita iz matematike na FTN. Jelena Ivetić, Marija Delić, Ilija Kovačević.	
The 3rd Conference on Mathematics in Engineering: Theory and Applications, META, Novi Sad	Maj 2018
- Image segmentation by applying median-aggregated distance function. Ljubo Nedović, Marija Delić. pp. 1-6.	
Učešće u projektima	
- "Novi prilozii tehnikama kriptologije, procesiranja slika i algebarske topologije za informacionu bezbednost", projekat 174008 Ministarstvo prosvete, nauke i tehnološkog razvoja.	

Letnje škole

25th Summer School on Image Processing - član organizacionog odbora	Jul 2017
- Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu, Srbija	
European Summer School in Modelling, Analysis and Simulation Crime and Image Processing - učesnik	Jul 2016
- Matematički institut, Univerzitet Oxford, Engleska	
22nd Summer School on Image Processing - učesnik	Jul 2014
- Fakultet elektrotehnike i računarstva, Univerzitet u Zagrebu, Hrvatska	
DAAD intensive course and workshop Gabor Frames and Wavelets in Local Analysis - učesnik	Septembar 2011
- Prirodno matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Srbija	
DAAD Summer School Measure Theoretic Tools in PDE-s - učesnik	Oktobar 2009
- Prirodno matematički fakultet u Podgorici, Budva, Crna Gora	